쎈

정답 및 풀이

기하와 벡터

정답을 확인하려 할 때에는 〈빠른 정답 찾기〉를 이용하면 편리합니다.

01 이차곡선

0001 $y^2=4\cdot 2x=8x$ 답 $y^2=8x$

0002 $y^2=4\cdot(-4)x=-16x$ 답 $y^2=-16x$

0003 $x^2=4\cdot 5y=20y$ 답 $x^2=20y$

0004 $x^2=4\cdot(-1)y=-4y$ 답 $x^2=-4y$

0005 $4p=12$에서 $p=3$이므로
초점의 좌표: $(3,\ 0)$, 준선의 방정식: $x=-3$ 답 풀이 참조

0006 $4p=-\frac{1}{3}$에서 $p=-\frac{1}{12}$이므로
초점의 좌표: $\left(-\frac{1}{12},\ 0\right)$, 준선의 방정식: $x=\frac{1}{12}$
답 풀이 참조

0007 $4p=2$에서 $p=\frac{1}{2}$이므로
초점의 좌표: $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, 준선의 방정식: $y=-\frac{1}{2}$
답 풀이 참조

0008 $4p=-6$에서 $p=-\frac{3}{2}$이므로
초점의 좌표: $\left(0,\ -\frac{3}{2}\right)$, 준선의 방정식: $y=\frac{3}{2}$
답 풀이 참조

0009 답 $(y+1)^2=x-4$

0010 주어진 포물선은 포물선 $y^2=-x$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.
이때 포물선 $y^2=-x$의 초점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{4},\ 0\right)$, 준선의 방정식은 $x=\frac{1}{4}$이므로
초점의 좌표: $\left(\frac{11}{4},\ -4\right)$, 준선의 방정식: $x=\frac{13}{4}$
답 풀이 참조

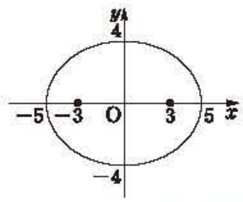
0011 주어진 포물선은 포물선 $x^2=8y$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.
이때 포물선 $x^2=8y$의 초점의 좌표는 $(0,\ 2)$, 준선의 방정식은 $y=-2$이므로
초점의 좌표: $(4,\ -3)$, 준선의 방정식: $y=-7$
답 풀이 참조

0012 $y^2-4x+2y+5=0$에서
$(y+1)^2=4(x-1)$ …… ㉠
이므로 포물선 ㉠은 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
(1) $y^2=4x$의 꼭짓점이 원점이므로 포물선 ㉠의 꼭짓점의 좌표는
$(1,\ -1)$
(2) $y^2=4x$의 초점의 좌표가 $(1,\ 0)$이므로 포물선 ㉠의 초점의 좌표는
$(2,\ -1)$
(3) $y^2=4x$의 준선의 방정식이 $x=-1$이므로 포물선 ㉠의 준선의 방정식은
$x=0$
답 (1) $(1,\ -1)$ (2) $(2,\ -1)$ (3) $x=0$

0013 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$이라 하면
초점이 x축 위에 있으므로 $a>b>0$
$2a=10$에서 $a=5$
$a^2-b^2=4^2$에서 $b^2=5^2-4^2=9$
$\therefore \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 답 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

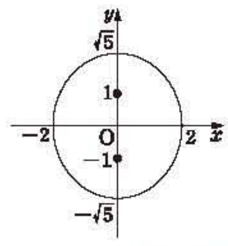
0014 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$이라 하면
초점이 y축 위에 있으므로 $b>a>0$
$2b=6$에서 $b=3$
$b^2-a^2=(\sqrt{5})^2$에서 $a^2=3^2-(\sqrt{5})^2=4$
$\therefore \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 답 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

0015 타원 $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$에서
$\sqrt{25-16}=3$이므로 초점의 좌표는
$(3,\ 0),\ (-3,\ 0)$
장축의 길이는 $2\cdot 5=10$
단축의 길이는 $2\cdot 4=8$
또 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0016 $5x^2+4y^2=20$에서
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$
$\sqrt{5-4}=1$이므로 초점의 좌표는
$(0,\ 1),\ (0,\ -1)$
장축의 길이는 $2\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}$
단축의 길이는 $2\cdot 2=4$
또 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0017 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$이라 하면
$2a=4\sqrt{3}$에서 $a=2\sqrt{3}$
$a^2-b^2=2^2$에서 $b^2=(2\sqrt{3})^2-2^2=8$
$\therefore \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$ 답 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$

0018 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$이라 하면

$2a=6$에서 $\quad a=3$

$b^2-a^2=(\sqrt{7})^2$에서 $\quad b^2=(\sqrt{7})^2+3^2=16$

$\therefore \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

답 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

0019 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$의 초점의 좌표는 $(\sqrt{3},\ 0)$, $(-\sqrt{3},\ 0)$이므로 주어진 타원의 초점의 좌표는

$(\sqrt{3}-1,\ 2)$, $(-\sqrt{3}-1,\ 2)$

평행이동하여도 장축, 단축의 길이는 변하지 않으므로 주어진 타원의 장축, 단축의 길이는

장축의 길이: $2\cdot2=4$

단축의 길이: $2\cdot1=2$

답 풀이 참조

0020 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{64}=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{64}=1$의 초점의 좌표는 $(0,\ 4\sqrt{3})$, $(0,\ -4\sqrt{3})$이므로 주어진 타원의 초점의 좌표는

$(1,\ 4\sqrt{3}-3)$, $(1,\ -4\sqrt{3}-3)$

평행이동하여도 장축, 단축의 길이는 변하지 않으므로 주어진 타원의 장축, 단축의 길이는

장축의 길이: $2\cdot8=16$

단축의 길이: $2\cdot4=8$

답 풀이 참조

0021 $x^2+2y^2+4x-4y=0$에서

$(x+2)^2+2(y-1)^2=6$

$\therefore \frac{(x+2)^2}{6}+\frac{(y-1)^2}{3}=1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

따라서 타원 ㉠은 타원 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

(1) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$의 중심이 원점이므로 타원 ㉠의 중심의 좌표는

$(-2,\ 1)$

(2) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$의 초점의 좌표는 $(\sqrt{3},\ 0)$, $(-\sqrt{3},\ 0)$이므로 타원 ㉠의 초점의 좌표는

$(\sqrt{3}-2,\ 1)$, $(-\sqrt{3}-2,\ 1)$

(3) 평행이동하여도 장축의 길이는 변하지 않으므로 타원 ㉠의 장축의 길이는

$2\cdot\sqrt{6}=2\sqrt{6}$

(4) 평행이동하여도 단축의 길이는 변하지 않으므로 타원 ㉠의 단축의 길이는

$2\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

답 풀이 참조

0022 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\ b>0)$이라 하면 $2a=6$에서 $\quad a=3$

$a^2+b^2=6^2$에서 $\quad b^2=6^2-3^2=27$

$\therefore \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$

답 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$

0023 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\,(a>0,\ b>0)$이라 하면 $2b=4$에서 $\quad b=2$

$a^2+b^2=(2\sqrt{3})^2$에서 $\quad a^2=(2\sqrt{3})^2-2^2=8$

$\therefore \frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=-1$

답 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=-1$

0024 쌍곡선 $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$에서

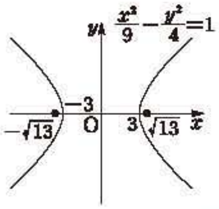
$\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$이므로 초점의 좌표는

$(\sqrt{13},\ 0)$, $(-\sqrt{13},\ 0)$

꼭짓점의 좌표는 $\quad (3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$

주축의 길이는 $\quad 2\cdot3=6$

또 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0025 $4x^2-3y^2=-12$에서

$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=-1$

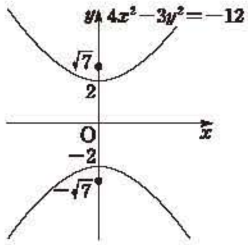
$\sqrt{3+4}=\sqrt{7}$이므로 초점의 좌표는

$(0,\ \sqrt{7})$, $(0,\ -\sqrt{7})$

꼭짓점의 좌표는 $\quad (0,\ 2)$, $(0,\ -2)$

주축의 길이는 $\quad 2\cdot2=4$

또 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0026 구하는 쌍곡선의 방정식을 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하면

$1^2+b^2=2^2$에서 $\quad b^2=2^2-1^2=3$

$\therefore x^2-\frac{y^2}{3}=1$

답 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$

0027 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3^2}=-1$이라 하면

$a^2+3^2=5^2$에서 $\quad a^2=5^2-3^2=16$

$\therefore \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$

답 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$

0028 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\ b>0)$이라 하면 $2a=6$에서 $\quad a=3$

$a^2+b^2=4^2$에서 $\quad b^2=4^2-3^2=7$

$\therefore \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$

답 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$

0029 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\ (a>0,\ b>0)$이라 하면 $2b=10$에서 $\quad b=5$

$a^2+b^2=7^2$에서 $\quad a^2=7^2-5^2=24$

$\therefore \frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{25}=-1$ 답 $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{25}=-1$

0030 쌍곡선 $\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{3}{5}x$ 답 $y=\pm\frac{3}{5}x$

0031 $4x^2-9y^2=-144$에서 $\quad \frac{x^2}{6^2}-\frac{y^2}{4^2}=-1$

따라서 구하는 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{4}{6}x$, 즉 $y=\pm\frac{2}{3}x$ 답 $y=\pm\frac{2}{3}x$

0032 답 $\frac{(x-2)^2}{5}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$

0033 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$의 초점의 좌표는 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$이고, 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$이므로 주어진 쌍곡선의 초점과 꼭짓점의 좌표는

초점의 좌표: $(5,\ -3)$, $(-3,\ -3)$

꼭짓점의 좌표: $(4,\ -3)$, $(-2,\ -3)$ 답 풀이 참조

0034 $4x^2-(y+1)^2=-16$에서

$\frac{x^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{16}=-1$

따라서 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=-1$을 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=-1$의 초점의 좌표는 $(0,\ 2\sqrt{5})$, $(0,\ -2\sqrt{5})$이고, 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 4)$, $(0,\ -4)$이므로 주어진 쌍곡선의 초점과 꼭짓점의 좌표는

초점의 좌표: $(0,\ 2\sqrt{5}-1)$, $(0,\ -2\sqrt{5}-1)$

꼭짓점의 좌표: $(0,\ 3)$, $(0,\ -5)$ 답 풀이 참조

0035 $x^2-4y^2+4x-4y-1=0$에서

$(x+2)^2-4\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=4$

$\therefore \frac{(x+2)^2}{4}-\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1$ ······ ㉠

따라서 쌍곡선 ㉠은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

(1) $\frac{x^2}{4}-y^2=1$의 중심이 원점이므로 쌍곡선 ㉠의 중심의 좌표는

$\left(-2,\ -\frac{1}{2}\right)$

(2) $\frac{x^2}{4}-y^2=1$의 초점의 좌표는 $(\sqrt{5},\ 0)$, $(-\sqrt{5},\ 0)$이므로 쌍곡선 ㉠의 초점의 좌표는

$\left(\sqrt{5}-2,\ -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\sqrt{5}-2,\ -\frac{1}{2}\right)$

(3) $\frac{x^2}{4}-y^2=1$의 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{1}{2}x$이므로 쌍곡선 ㉠의 점근선의 방정식은

$y+\frac{1}{2}=\pm\frac{1}{2}(x+2)$

$\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

답 풀이 참조

0036 $x^2+y^2+2x-4=0$에서

$(x+1)^2+y^2=5$

따라서 주어진 방정식은 원을 나타낸다. 답 원

0037 $3x^2+y^2-6=0$에서

$3x^2+y^2=6 \quad \therefore \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1$

따라서 주어진 방정식은 타원을 나타낸다. 답 타원

0038 $x^2-2y^2+8x=0$에서

$(x+4)^2-2y^2=16 \quad \therefore \frac{(x+4)^2}{16}-\frac{y^2}{8}=1$

따라서 주어진 방정식은 쌍곡선을 나타낸다. 답 쌍곡선

0039 $2y^2-x+6y-2=0$에서

$2\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=x+\frac{13}{2} \quad \therefore \left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\left(x+\frac{13}{2}\right)$

따라서 주어진 방정식은 포물선을 나타낸다. 답 포물선

유형 01 포물선의 방정식 본책 12쪽

① 초점이 $F(p,\ 0)$이고, 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식

➡ $y^2=4px$ (단, $p\neq0$)

② 초점이 $F(0,\ p)$이고, 준선이 $y=-p$인 포물선의 방정식

➡ $x^2=4py$ (단, $p\neq0$)

0040 점 $(-2,\ 0)$을 초점으로 하고 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선의 방정식은

$y^2=4\cdot(-2)x$, 즉 $y^2=-8x$

이 포물선이 점 $(a,\ 4)$를 지나므로

$4^2=-8a \quad \therefore a=-2$ 답 ②

0041 주어진 포물선은 초점의 좌표가 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$이고 준선이 $x=-\frac{1}{2}$인 포물선 $y^2=4\cdot\frac{1}{2}x=2x$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 포물선의 방정식은

$(y-2)^2=2(x-1)$

$y=0$을 대입하면 $\quad 4=2(x-1) \quad \therefore x=3$

따라서 포물선이 x축과 만나는 점의 좌표는

$(3,\ 0)$ 답 $(3,\ 0)$

다른 풀이 포물선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$, 점 P에서 직선 $x=\frac{1}{2}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$이므로

$$\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2}=\left|x-\frac{1}{2}\right|$$

양변을 제곱하면

$x^2-3x+\frac{9}{4}+y^2-4y+4=x^2-x+\frac{1}{4}$

$\therefore y^2-2x-4y+6=0$

$y=0$을 대입하면 $\quad -2x+6=0 \quad \therefore x=3$

따라서 포물선이 x축과 만나는 점의 좌표는 $\quad (3,\ 0)$

0042 주어진 포물선의 방정식은

$y^2=4\cdot(-3)x$, 즉 $y^2=-12x$

$\therefore \mathrm{A}(0,\ 0)$

포물선의 초점을 지나고 y축과 평행한 직선의 방정식은 $x=-3$이므로 이 직선과 포물선의 교점의 y좌표는

$y^2=-12\cdot(-3)$, $\quad y^2=36 \quad \therefore y=\pm 6$

따라서 두 점 B, C의 좌표가 $(-3,\ -6)$, $(-3,\ 6)$이므로

$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 3=18$ 답 ③

0043 축이 x축에 평행하므로 포물선의 방정식을 $y^2+ax+by+c=0\ (a\neq 0)$으로 놓고 주어진 세 점의 좌표를 각각 대입하면

$(-2)^2-2b+c=0$ ⋯⋯ ㉠

$6^2+4a+6b+c=0$ ⋯⋯ ㉡

$(-6)^2+6a-6b+c=0$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $\quad a=-6,\ b=-1,\ c=-6$

따라서 구하는 포물선의 방정식은

$y^2-6x-y-6=0$ 답 $y^2-6x-y-6=0$

SSEN 특강

축이 좌표축에 평행한 포물선의 방정식

① 축이 x축에 평행한 포물선의 방정식

➡ $y^2+Ax+By+C=0$ (단, $A\neq 0$)

② 축이 y축에 평행한 포물선의 방정식

➡ $x^2+Ax+By+C=0$ (단, $B\neq 0$)

0044 포물선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$, 준선의 방정식을 $x=t$라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=|x-t|$

양변을 제곱하면

$x^2-8x+16+y^2-4y+4=x^2-2tx+t^2$

$\therefore y^2+2(t-4)x-4y-t^2+20=0$ ⋯⋯ ㉠ ➡ ❶

포물선 ㉠이 점 $(7,\ 6)$을 지나므로

$t^2-14t+24=0, \quad (t-2)(t-12)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=12$ ➡ ❷

(i) $t=2$일 때, ㉠에서

$y^2-4x-4y+16=0$

(ii) $t=12$일 때, ㉠에서

$y^2+16x-4y-124=0$ ➡ ❸

(i), (ii)에서 $a=16$, $b=-124$이므로

$a+b=-108$ ➡ ❹

답 -108

채점 기준표

❶ 포물선의 정의를 이용하여 포물선의 방정식을 세울 수 있다.	30%
❷ t의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 포물선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

유형 02 포물선의 초점과 준선 본책 12쪽

① 포물선 $(y-n)^2=4p(x-m)$

➡ 초점의 좌표: $(p+m,\ n)$, 준선의 방정식: $x=-p+m$

② 포물선 $(x-m)^2=4p(y-n)$

➡ 초점의 좌표: $(m,\ p+n)$, 준선의 방정식: $y=-p+n$

0045 $4y^2-4x+8y+11=0$에서

$4(y^2+2y+1)=4x-7 \quad \therefore (y+1)^2=x-\frac{7}{4}$

따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는

$\left(\frac{1}{4}+\frac{7}{4},\ 0-1\right)$, 즉 $(2,\ -1)$

준선의 방정식은 $\quad x=-\frac{1}{4}+\frac{7}{4}=\frac{3}{2}$

즉 $a=2$, $b=-1$, $c=\frac{3}{2}$이므로

$a+b+c=\frac{5}{2}$ 답 ④

0046 포물선 $y^2=x=4\cdot\frac{1}{4}x$의 초점의 좌표는 $\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$이고, 준선의 방정식은 $x=-\frac{1}{4}$이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\quad \pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}$ 답 $\frac{\pi}{4}$

0047 $y^2-4x+6y+13=0$에서

$(y+3)^2=4(x-1)$ ⋯⋯ ㉠

포물선 ㉠의 초점의 좌표는

$(1+1,\ -3)$, 즉 $(2,\ -3)$

$x^2+4x-4y+a=0$에서

$(x+2)^2=4\left(y+\frac{4-a}{4}\right)$ ······ ㉡

포물선 ㉡의 초점의 좌표는

$\left(-2,\ 1-\frac{4-a}{4}\right)$, 즉 $\left(-2,\ \frac{a}{4}\right)$

따라서 점 $\left(-2,\ \frac{a}{4}\right)$와 점 $(2,\ -3)$이 원점에 대하여 대칭이므로

$\frac{a}{4}=3 \quad \therefore a=12$

답 ④

0048 포물선 $x^2=4(y-4)$의 초점 F의 좌표는 $(0,\ 5)$ ···➊

두 점 F, P를 지나는 직선이 x축에 평행하므로 $\triangle PFH$는 $\angle FPH=90°$인 직각삼각형이다.

이때 $\overline{PF}=2$, $\overline{PH}=5$이므로 $\overline{FH}=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$ ···➋

직각삼각형의 외접원의 중심은 빗변의 중점과 일치하므로 외접원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{FH}=\frac{\sqrt{29}}{2}$ ···➌

따라서 외접원의 넓이는

$\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2=\frac{29}{4}\pi$ ···➍

답 $\frac{29}{4}\pi$

채점 기준표

➊ 초점 F의 좌표를 구할 수 있다.	20%
➋ $\overline{FH}$의 길이를 구할 수 있다.	30%
➌ 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	30%
➍ 외접원의 넓이를 구할 수 있다.	20%

0049 포물선 $y^2=4x$의 초점의 좌표는 $(1,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-1$이다.

로그함수 $y=\log_2(x-a)+b$의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=\log_2(1-a)+b$ ······ ㉠

로그함수 $y=\log_2(x-a)+b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=a$이고, 이 점근선이 포물선의 준선 $x=-1$과 일치하므로

$a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$0=\log_2 2+b,\quad 1+b=0\quad \therefore b=-1$

$\therefore a+b=-2$

답 ①

0050 포물선 $x^2=4y$의 초점 F의 좌표는 $(0,\ 1)$이고, 준선의 방정식은 $y=-1$이다.

점 P의 좌표를 $\left(a,\ \frac{a^2}{4}\right)(a>0)$이라 하면 $H(a,\ -1)$이고 $\triangle FHP$가 정삼각형이므로 $\overline{FH}=\overline{PH}$

$\sqrt{a^2+(-1-1)^2}=\frac{a^2}{4}+1$

양변을 제곱하면

$a^2+4=\frac{a^4}{16}+\frac{a^2}{2}+1,\quad a^4-8a^2-48=0$

$(a^2+4)(a^2-12)=0,\quad a^2=12$

$\therefore a=2\sqrt{3}\ (\because a>0)$

따라서 점 P의 x좌표는 $2\sqrt{3}$이다.

답 $2\sqrt{3}$

0051 포물선 $y^2=4x-12$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$x^2=4y-12$, 즉 $x^2=4(y-3)$

이므로 포물선 $f(x,\ y)=0$의 초점의 좌표는 $(0,\ 4)$

점 $P(2,\ 2)$를 지나고 y축에 평행한 직선의 방정식은 $x=2$이므로

$2^2=4(y-3)\quad \therefore y=4$

따라서 $Q(2,\ 4)$이므로 초점 $(0,\ 4)$와 점 Q를 잇는 선분의 길이는

$2-0=2$

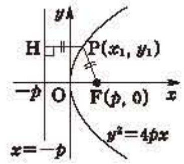
답 ②

유형 03 포물선의 정의의 활용 ; 포물선 위의 점이 주어질 때 본책 13쪽

포물선 $y^2=4px\ (p>0)$ 위의 임의의 점 $P(x_1,\ y_1)$에서 초점 $F(p,\ 0)$까지의 거리와 준선 $x=-p$까지의 거리는 서로 같다.

➡ $\overline{PF}=\overline{PH}$

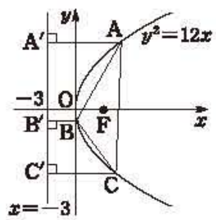
$=x_1+p$



0052 포물선 $y^2=12x=4\cdot 3x$의 초점 F의 좌표는 $(3,\ 0)$이고, 세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 $x_1,\ x_2,\ x_3$이라 하면

$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=3\quad \therefore x_1+x_2+x_3=9$

한편 준선의 방정식은 $x=-3$이므로 오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, C에서 준선 $x=-3$에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′, C′이라 하면 포물선의 정의에 의하여



$\overline{AF}+\overline{BF}+\overline{CF}$

$=\overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'}$

$=(x_1+3)+(x_2+3)+(x_3+3)$

$=x_1+x_2+x_3+9$

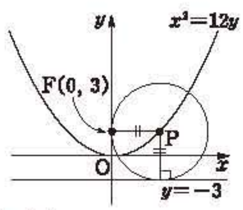
$=9+9=18$

답 18

0053 포물선 $x^2=12y=4\cdot 3y$의 초점을 F라 하면 $F(0,\ 3)$

준선의 방정식은 $y=-3$이므로 점 P에서 초점 $F(0,\ 3)$까지의 거리와 점 P에서 준선 $y=-3$까지의 거리는 같다.

따라서 점 P를 중심으로 하고 준선에 접하는 원은 항상 포물선의 초점 $(0,\ 3)$을 지나므로



$a=0,\ b=3\quad \therefore a^2+b^2=9$

답 9

0054 포물선 $y^2=4(x+2)$의 초점 F의 좌표는 $(-1,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-1-2$, 즉 $x=-3$

점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$\overline{PH'}=\overline{PF}=4$

이므로 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$a+3=4 \quad \therefore a=1$

따라서 점 $\mathrm{P}(1,\ b)$가 포물선 $y^2=4(x+2)$ 위에 있으므로

$b^2=4\cdot 3=12 \quad \therefore b=\pm 2\sqrt{3}$

즉 $\mathrm{H}(1,\ 0)$, $\mathrm{P}(1,\ \pm 2\sqrt{3})$이므로

$\triangle \mathrm{PFH}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{FH}}\cdot\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ 답 ③

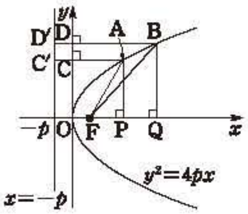
0055 주어진 포물선의 꼭짓점이 원점이고 초점 F의 좌표가 (2, 0)이므로 준선의 방정식은 $x=-2$

점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H'이라 하면 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH'}}$

$\therefore \overline{\mathrm{PH}}+\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}+\overline{\mathrm{PH'}}=\overline{\mathrm{HH'}}=4$ 답 ③

0056 $\mathrm{F}(p,\ 0)$이므로 $\mathrm{P}(3p,\ 0)$

오른쪽 그림과 같이 두 선분 AC, BD의 연장선이 포물선의 준선 $x=-p$와 만나는 점을 각각 C', D'이라 하면



$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AC'}}=3p+p=4p$

$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BD'}}=5p+p=6p$

점 A의 x좌표가 $3p$이므로 y좌표는

$y^2=4p\cdot 3p=12p^2$

$\therefore y=2p\sqrt{3}\ (\because y>0)$

즉 $\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{AP}}=2p\sqrt{3}$이므로 □ACOF의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CO}}+\overline{\mathrm{OF}}+\overline{\mathrm{FA}}=3p+2p\sqrt{3}+p+4p$

$=8p+2p\sqrt{3}$

따라서 $8p+2p\sqrt{3}=16+4\sqrt{3}$이므로 $p=2$

또 점 B의 x좌표가 $5p$이므로 y좌표는

$y^2=4p\cdot 5p=20p^2 \quad \therefore y=2p\sqrt{5}\ (\because y>0)$

즉 $\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{BQ}}=2p\sqrt{5}$이므로 □BDOF의 둘레의 길이는

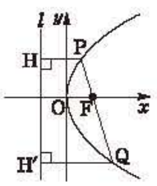
$\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{DO}}+\overline{\mathrm{OF}}+\overline{\mathrm{FB}}=5p+2p\sqrt{5}+p+6p$

$=12p+2p\sqrt{5}=24+4\sqrt{5}$ 답 $24+4\sqrt{5}$

유형 04 포물선의 정의의 활용
; 초점을 지나는 직선이 주어질 때 본책 14쪽

포물선의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하고 두 점 P, Q에서 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하면

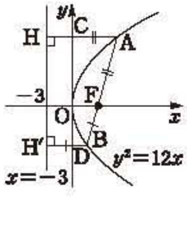
$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{PH}}+\overline{\mathrm{QH'}}$



0057 포물선 $y^2=12x=4\cdot 3x$의 준선의 방정식은

$x=-3$

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 준선 $x=-3$에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하면



$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AH}},\ \overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BH'}}$

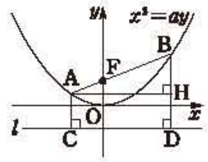
이때 $\overline{\mathrm{AC}}=5,\ \overline{\mathrm{BD}}=\frac{9}{5}$이므로

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AC}}+3=5+3=8$

$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BH'}}=\overline{\mathrm{BD}}+3=\frac{9}{5}+3=\frac{24}{5}$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}=8+\frac{24}{5}=\frac{64}{5}$ 답 $\frac{64}{5}$

0058 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{\mathrm{BD}}$에 내린 수선의 발을 H라 하고,



$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AC}}=k,\ \overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BD}}=2k\ (k>0)$라 하면

$\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{BD}}-\overline{\mathrm{DH}}=k$

이므로 직각삼각형 AHB에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{(3k)^2-k^2}=2\sqrt{2}k$

이때 사다리꼴 ACDB의 넓이가 $12\sqrt{2}$이므로

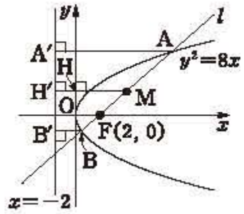
$\frac{1}{2}\cdot(k+2k)\cdot 2\sqrt{2}k=12\sqrt{2}$

$k^2=4 \quad \therefore k=2\ (\because k>0)$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=2+4=6$ 답 6

0059 포물선 $y^2=8x=4\cdot 2x$의 초점 F의 좌표는 (2, 0)이고, 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 준선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 A', B'이라 하면



$\overline{\mathrm{FA}}=\overline{\mathrm{AA'}},\ \overline{\mathrm{FB}}=\overline{\mathrm{BB'}}$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=14$이므로

$\overline{\mathrm{AA'}}+\overline{\mathrm{BB'}}=\overline{\mathrm{FA}}+\overline{\mathrm{FB}}$

$=\overline{\mathrm{AB}}=14$

$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점 M에서 y축과 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하면

$\overline{\mathrm{MH'}}=\frac{\overline{\mathrm{AA'}}+\overline{\mathrm{BB'}}}{2}=\frac{14}{2}=7$

$\therefore \overline{\mathrm{MH}}=\overline{\mathrm{MH'}}-\overline{\mathrm{H'H}}=7-2=5$

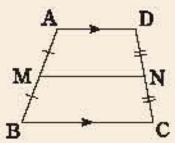
따라서 점 M의 x좌표는 5이다. 답 ④

SSEN 특강

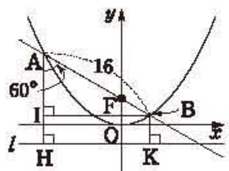
사다리꼴에서 삼각형의 중점 연결 정리의 응용

$\overline{\mathrm{AD}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{BC}}$인 사다리꼴 ABCD에서 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$의 중점을 각각 M, N이라 하면

$\overline{\mathrm{MN}}=\frac{1}{2}(\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{BC}})$



0060 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{\mathrm{AH}}$에 내린 수선의 발을 I라 하면 직각삼각형 AIB에서



$\overline{\mathrm{AI}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos 60°=16\cdot\frac{1}{2}=8$

이때 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AF}},\ \overline{\mathrm{BK}}=\overline{\mathrm{BF}}$이고, $\overline{\mathrm{AB}}=16$이므로

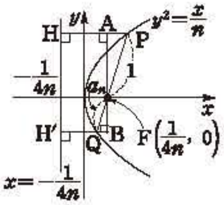
$\overline{\mathrm{AH}}+\overline{\mathrm{BK}}=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{AB}}=16$

$(\overline{\mathrm{AI}}+\overline{\mathrm{IH}})+\overline{\mathrm{BK}}=16, \quad 8+\overline{\mathrm{BK}}+\overline{\mathrm{BK}}=16$

$2\overline{\mathrm{BK}}=8 \quad \therefore \overline{\mathrm{BK}}=4$ 답 4

0061 포물선 $y^2=\frac{x}{n}=4\cdot\frac{1}{4n}x$의 초점 F의 좌표는 $\left(\frac{1}{4n},\ 0\right)$이고, 준선의 방정식은 $x=-\frac{1}{4n}$이다. ➡ ❶

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q에서 준선 $x=-\frac{1}{4n}$에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면



$\overline{PH}=\overline{PF}=1$, $\overline{QH'}=\overline{QF}=a_n$

점 F에서 두 직선 PH, QH′에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하면

$\overline{AH}=\overline{BH'}=\frac{1}{2n}$

$\triangle FAP\backsim\triangle FBQ$이므로 $\quad\overline{PF}:\overline{QF}=\overline{PA}:\overline{QB}$

이때 $\overline{PA}=1-\frac{1}{2n}$, $\overline{QB}=\frac{1}{2n}-a_n$이므로

$$1:a_n=\left(1-\frac{1}{2n}\right):\left(\frac{1}{2n}-a_n\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{2n}\right)a_n=\frac{1}{2n}-a_n,\qquad \frac{4n-1}{2n}a_n=\frac{1}{2n}$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{4n-1}$$ ➡ ❷

$$\therefore \sum_{n=1}^{9}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{9}(4n-1)=4\cdot\frac{9\cdot10}{2}-9=171$$ ➡ ❸

답 171

채점 기준표

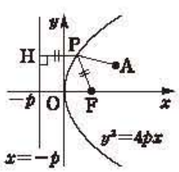
❶ 포물선 $y^2=\frac{x}{n}$의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구할 수 있다.	20%
❷ a_n을 구할 수 있다.	50%
❸ $\sum_{n=1}^{9}\frac{1}{a_n}$의 값을 구할 수 있다.	30%

유형 05 길이의 합의 최솟값 본책 15쪽

포물선 $y^2=4px\ (p>0)$와 점 A에 대하여

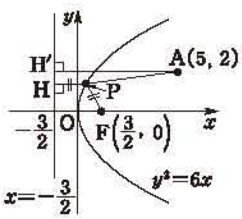
$\overline{AP}+\overline{PF}=\overline{AP}+\overline{PH}$

➡ 세 점 A, P, H가 한 직선 위에 있을 때, $\overline{AP}+\overline{PF}$의 값이 최소이다.



0062 포물선 $y^2=6x=4\cdot\frac{3}{2}x$의 초점 F의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$이고, 준선의 방정식은 $x=-\frac{3}{2}$이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, A에서 준선 $x=-\frac{3}{2}$에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면 $\overline{PF}=\overline{PH}$이므로



$\overline{AP}+\overline{PF}=\overline{AP}+\overline{PH}\geq\overline{AH'}$

$=5-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{13}{2}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PF}$의 최솟값은 $\frac{13}{2}$이다.

답 ④

0063 포물선 $y=\frac{1}{8}x^2$, 즉 $x^2=8y=4\cdot2y$의 초점을 F라 하면

F(0, 2) ➡ ❶

$\overline{PH}=\overline{PF}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PH}=\overline{AP}+\overline{PF}$

$\geq\overline{AF}=\sqrt{a^2+2^2}$ ➡ ❷

즉 $\sqrt{a^2+2^2}=2\sqrt{3}$이므로 $\quad a^2+4=12$

$a^2=8\quad\therefore a=2\sqrt{2}\ (\because a>0)$ ➡ ❸

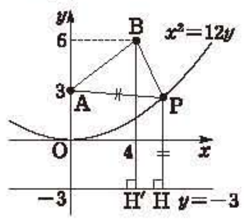
답 $2\sqrt{2}$

채점 기준표

❶ 포물선의 초점의 좌표를 구할 수 있다.	20%
❷ $\overline{AP}+\overline{PH}$의 최솟값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30%

0064 포물선 $y=\frac{1}{12}x^2$, 즉 $x^2=12y=4\cdot3y$에서 점 A(0, 3)은 포물선의 초점이고, 준선의 방정식은 $y=-3$이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, B에서 준선 $y=-3$에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면



$\overline{BP}+\overline{AP}=\overline{BP}+\overline{PH}$

$\geq\overline{BH'}$

$=6+3=9$

즉 △ABP의 둘레의 길이는

$\overline{AB}+\overline{AP}+\overline{BP}\geq\overline{AB}+\overline{BH'}$

$=\sqrt{4^2+(6-3)^2}+9$

$=5+9=14$

따라서 △ABP의 둘레의 길이의 최솟값은 14이다.

답 ①

유형 06 자취의 방정식; 포물선 본책 15쪽

① 한 점과 직선에 이르는 거리가 같은 점의 자취는 포물선이다.

② 포물선 위의 한 점과 임의의 한 점을 잇는 선분의 중점의 자취는 포물선이다.

0065 점 P(x, y)에서 점 A(0, 4)까지의 거리와 x축까지의 거리가 서로 같으므로 $\quad\sqrt{x^2+(y-4)^2}=|y|$

양변을 제곱하면

$x^2+y^2-8y+16=y^2$

$\therefore x^2=8y-16$

따라서 $a=8$, $b=-16$이므로

$a-b=24$

답 ③

0066 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 점 P에서 점 A(2, 1)까지의 거리와 직선 $x=-1$까지의 거리가 서로 같으므로

$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=|x+1|$

양변을 제곱하면

$x^2-4x+4+y^2-2y+1=x^2+2x+1$

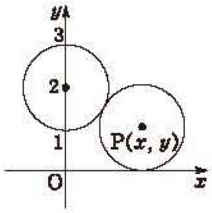
$\therefore y^2-6x-2y+4=0$

답 ⑤

0067 $x^2+y^2-4y+3=0$에서

$x^2+(y-2)^2=1$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 원의 반지름의 길이가 y이므로



$\sqrt{x^2+(y-2)^2}=y+1$

양변을 제곱하면

$x^2+y^2-4y+4=y^2+2y+1$

$\therefore x^2=6\left(y-\frac{1}{2}\right)=4\cdot\frac{3}{2}\left(y-\frac{1}{2}\right)$

이 포물선의 초점의 좌표는

$\left(0,\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)$, 즉 $(0,\ 2)$

따라서 $a=0$, $b=2$이므로 $a-b=-2$ 답 ①

0068 포물선 $x^2=12y$ 위의 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$a^2=12b$ ...... ㉠

포물선의 꼭짓점이 $O(0,\ 0)$이므로 선분 OP의 중점 Q의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x=\frac{a}{2},\ y=\frac{b}{2}$ $\quad\therefore a=2x,\ b=2y$ ...... ㉡

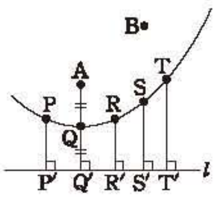
㉡을 ㉠에 대입하면 $(2x)^2=12\cdot 2y$

$\therefore x^2=6y$ 답 ③

유형 07 포물선의 실생활에의 활용 본책 16쪽

주어진 문제에서 포물선의 초점과 준선을 찾은 후 포물선의 정의를 이용한다.

0069 포물선의 준선을 l이라 할 때, 오른쪽 그림과 같이 점 P, Q, R, S, T에서 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′, R′, S′, T′이라 하면



$\overline{AP}=\overline{PP'}$, $\overline{AQ}=\overline{QQ'}$, $\overline{AR}=\overline{RR'}$,

$\overline{AS}=\overline{SS'}$, $\overline{AT}=\overline{TT'}$

각 지점에서 두 지점 A, B까지의 거리의 합은

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{PP'}+\overline{BP}$

$\overline{AQ}+\overline{BQ}=\overline{QQ'}+\overline{BQ}$

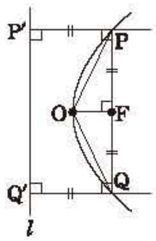
$\overline{AR}+\overline{BR}=\overline{RR'}+\overline{BR}$

$\overline{AS}+\overline{BS}=\overline{SS'}+\overline{BS}$

$\overline{AT}+\overline{BT}=\overline{TT'}+\overline{BT}$

따라서 두 지점 A, B까지의 거리의 합이 최소인 지점은 S이므로 매점의 위치로 가장 알맞은 지점은 S이다. 답 S

0070 포물선의 준선을 l이라 할 때, 오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q에서 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′이라 하면



$\overline{PP'}=\overline{PF}$, $\overline{QQ'}=\overline{QF}$

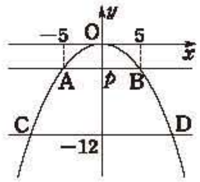
$\overline{PF}=\overline{QF}=\frac{1}{2}\overline{PQ}=50$이므로

$\overline{PP'}=50$

$\therefore \overline{OF}=\frac{1}{2}\overline{PP'}=25$

$\therefore \triangle OPQ=\frac{1}{2}\cdot 100\cdot 25=1250$ 답 1250

0071 오른쪽 그림과 같이 포물선의 꼭짓점이 좌표평면의 원점에 오도록 놓고 포물선의 방정식을



$x^2=4py\ (p<0)$

라 하면 $\overline{AB}=10$에서 $A(-5,\ p)$이므로

$(-5)^2=4p^2,\quad p^2=\frac{25}{4}$

$\therefore p=-\frac{5}{2}\ (\because p<0)$

즉 $x^2=-10y$이므로 $y=-12$를 대입하면

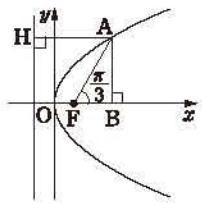
$x^2=120 \quad \therefore x=\pm 2\sqrt{30}$

따라서 $C(-2\sqrt{30},\ -12)$, $D(2\sqrt{30},\ -12)$이므로

$\overline{CD}=4\sqrt{30}$

즉 두 지점 C, D 사이의 거리는 $4\sqrt{30}$ m이다. 답 ⑤

0072 오른쪽 그림과 같이 배의 궤도를 좌표평면 위에 놓으면 배가 포물선의 꼭짓점(원점)에 있을 때 등대에 가장 가까워진다. ❶



배의 위치를 A, 등대의 위치를 F라 하고, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 B, 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{FB}=\overline{AF}\cos\frac{\pi}{3}=50\cdot\frac{1}{2}=25$ ❷

$\therefore \overline{OF}=\frac{1}{2}(\overline{AH}-\overline{FB})=\frac{1}{2}(\overline{AF}-\overline{FB})$

$=\frac{1}{2}(50-25)=\frac{25}{2}$

따라서 배와 등대 사이의 거리는 $\frac{25}{2}$ m이다. ❸ 답 $\frac{25}{2}$

채점 기준표

❶ 배가 등대에 가장 가까워졌을 때의 위치를 알 수 있다.	20%
❷ $\overline{FB}$의 길이를 구할 수 있다.	40%
❸ 배와 등대 사이의 거리를 구할 수 있다.	40%

유형 08 타원의 정의 본책 16쪽

① 두 초점 F, F′에 대하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}$의 값이 일정한 점 P의 집합을 타원이라 한다.
② $\overline{PF}+\overline{PF'}=$(장축의 길이)

0073 $\overline{PF}=\overline{PF'}=5$이므로 $\overline{PF}+\overline{PF'}=10$

점 P는 타원 위에 있으므로 장축의 길이는 10이다.

따라서 구하는 최댓값은 10이다. 답 10

참고 두 점이 각각 장축 위의 꼭짓점일 때 두 점 사이의 거리가 최대이다.

0074 타원의 장축 위의 나머지 한 꼭짓점을 C라 하면

$\overline{CF}=\overline{BF'}=2$이므로 장축의 길이는

$\overline{BC}=\overline{BF'}+\overline{F'F}+\overline{CF}=2+8+2=12$

점 A는 타원 위에 있으므로

$\overline{AF}+\overline{AF'}=12$ ··· ❶

즉 $\overline{AF}=12-\overline{AF'}$이므로 직각삼각형 $AF'F$에서

$\overline{AF}^2=\overline{AF'}^2+8^2,\quad (12-\overline{AF'})^2=\overline{AF'}^2+8^2$

$24\overline{AF'}=80 \qquad \therefore \overline{AF'}=\dfrac{10}{3}$ ··· ❷

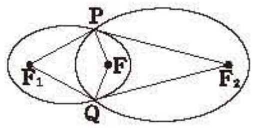
$\therefore \triangle AF'F=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{F'F}\cdot\overline{AF'}=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot\dfrac{10}{3}=\dfrac{40}{3}$ ··· ❸

답 $\dfrac{40}{3}$

채점 기준표

❶ $\overline{AF}+\overline{AF'}$의 길이를 구할 수 있다.	40%
❷ $\overline{AF'}$의 길이를 구할 수 있다.	40%
❸ $\triangle AF'F$의 넓이를 구할 수 있다.	20%

0075 타원 위의 한 점에서 두 초점까지의 거리의 합은 타원의 장축의 길이와 같으므로



$\overline{PF_1}+\overline{PF}=16$ ······ ㉠

$\overline{PF_2}+\overline{PF}=24$ ······ ㉡

㉠−㉡을 하면 $\quad \overline{PF_1}-\overline{PF_2}=-8$

$\therefore |\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=8$

같은 방법으로 하면 $\quad |\overline{QF_1}-\overline{QF_2}|=8$

$\therefore |\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|+|\overline{QF_1}-\overline{QF_2}|=16$

답 ①

유형 09 타원의 방정식 본책 17쪽

① 두 점 $(c, 0)$, $(-c, 0)$에서의 거리의 합이 $2a$인 타원의 방정식

➡ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>c>0$, $b^2=a^2-c^2$)

② 두 점 $(0, c)$, $(0, -c)$에서의 거리의 합이 $2b$인 타원의 방정식

➡ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (단, $b>c>0$, $a^2=b^2-c^2$)

0076 $16x^2+9y^2=144$에서 $\quad \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$

$\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$이므로 초점의 좌표는

$(0, \sqrt{7}),\ (0, -\sqrt{7})$

구하는 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$이라 하면

$2b=6$에서 $\quad b=3$

$b^2-a^2=(\sqrt{7})^2$에서 $\quad a^2=3^2-(\sqrt{7})^2=2$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{9}=1$

답 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{9}=1$

0077 주어진 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$이라 하면

초점의 좌표가 $(2, 0)$, $(-2, 0)$이므로

$a^2-b^2=4 \qquad \therefore (a+b)(a-b)=4$ ······ ㉠

장축과 단축의 길이의 차가 2이므로

$2a-2b=2 \qquad \therefore a-b=1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=\dfrac{5}{2},\ b=\dfrac{3}{2}$

$\therefore \underbrace{\overline{PF}+\overline{PF'}}_{\text{장축의 길이}}=2a=2\cdot\dfrac{5}{2}=5$

답 5

유형 10 타원의 초점, 장축, 단축 본책 17쪽

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 초점의 좌표와 장축, 단축의 길이는 다음과 같다.

	$a>b>0$일 때	$b>a>0$일 때
초점의 좌표	$(\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0)$	$(0, \pm\sqrt{b^2-a^2})$
장축의 길이	$2a$	$2b$
단축의 길이	$2b$	$2a$

0078 포물선 $y^2=-8x=4\cdot(-2)x$의 초점의 좌표는

$(-2, 0)$

즉 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{4}=1$의 초점의 좌표가 $(-2, 0)$, $(2, 0)$이므로

$a^2-4=2^2,\quad a^2=8 \qquad \therefore |a|=2\sqrt{2}$

따라서 구하는 장축의 길이는

$2|a|=2\cdot 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

답 ⑤

0079 주어진 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$이므로 $\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$에서 초점의 좌표는 $\quad (0, \sqrt{5}),\ (0, -\sqrt{5})$

$\therefore \overline{FF'}=\sqrt{5}-(-\sqrt{5})=2\sqrt{5}$

답 ③

0080 좌표평면 위에 $\overline{BC}$의 중점을 원점으로 하고, $\overline{BC}$가 x축 위에 오도록 $\triangle ABC$를 놓으면

$B\left(-\dfrac{5}{2}, 0\right), C\left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$

타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$이라 하면

$2a=\overline{AB}+\overline{AC}=6+4=10 \qquad \therefore a=5$

$a^2-b^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2$에서 $\quad b^2=5^2-\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{75}{4}$

$\therefore b=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

따라서 구하는 단축의 길이는

$2b=2\cdot\dfrac{5\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$

답 $5\sqrt{3}$

0081 $x^2+4y^2=16$에서 $\quad \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$

$\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$이므로 $\quad F(2\sqrt{3}, 0),\ F'(-2\sqrt{3}, 0)$

단축의 길이는 $2\cdot 2=4$이므로

$A(0,\ 2)$ 또는 $A(0,\ -2)$
$\triangle AFO$에서 $\overline{FO}=2\sqrt{3}$, $\overline{OA}=2$이므로
$\angle FAO=60°$
같은 방법으로 하면 $\angle F'AO=60°$이므로
$\angle FAF'=\angle FAO+\angle F'AO=120°$ 답 $120°$

0082 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$이라 하면 장축의 길이가 $2a$이므로
$2a\cos 45°=\underbrace{10}_{\text{밑면의 지름의 길이}}$ $\therefore a=5\sqrt{2}$
단축의 길이가 $2b$이므로 $2b=10$ $\therefore b=5$
$\sqrt{(5\sqrt{2})^2-5^2}=5$이므로 구하는 두 초점 사이의 거리는
$2\cdot 5=10$ 답 ④

0083 직선 $y=2x+1$이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$, $(0,\ 1)$이다.
(i) 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 한 초점이 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$, 한 꼭짓점이 $(0,\ 1)$일 때, 양수 a, b는
$b=1$, $a=\sqrt{1^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
(ii) 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 한 초점이 $(0,\ 1)$, 한 꼭짓점이 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$일 때, 양수 a, b는
$a=\dfrac{1}{2}$, $b=\sqrt{1^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$는
$\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ 1\right)$, $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$ 답 $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ 1\right)$, $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$

유형 11 타원의 평행이동 본책 18쪽

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 타원의 방정식은
$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$
이 타원의 초점의 좌표와 장축, 단축의 길이는 다음과 같다.

	$a>b>0$일 때	$b>a>0$일 때
초점의 좌표	$(\pm\sqrt{a^2-b^2}+m,\ n)$	$(m,\ \pm\sqrt{b^2-a^2}+n)$
장축의 길이	$2a$	$2b$
단축의 길이	$2b$	$2a$

0084 주어진 타원은 타원 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{12}=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.
타원 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{12}=1$에서 $\sqrt{12-8}=2$이므로 초점의 좌표는
$(0,\ 2)$, $(0,\ -2)$
따라서 주어진 타원의 초점의 좌표는
$(1,\ -1)$, $(1,\ -5)$ $\therefore \overline{FF'}=-1-(-5)=4$
$\therefore \triangle OFF'=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 1=2$ 답 ②

0085 $2x^2-8x+3y^2+12y+14=0$에서
$2(x-2)^2+3(y+2)^2=6$
타원 $2(x-2)^2+3(y+2)^2=6$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 타원 $2x^2+3y^2=6$과 일치하므로
$m=-2$, $n=2$, $k=6$
$\therefore m+n+k=6$ 답 ③

0086 두 점 A, C의 x좌표가 같으므로 $\overline{AC}$는 타원의 장축 또는 단축이다.
$\overline{AC}$의 중점을 M이라 하면 $M(1,\ -5)$
$\therefore \overline{AM}=3$, $\overline{BM}=2$
이때 점 M은 타원의 중심이므로 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 타원은 타원 $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것과 같다.
따라서 타원의 방정식은 $\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y+5)^2}{9}=1$이므로
$a=-1$, $b=4$, $c=5$, $d=9$
$\therefore a+b+c+d=17$ 답 ④

0087 $8(x-1)^2+9(y-2)^2=72$에서
$\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{8}=1$
이므로 주어진 타원은 타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$에서 $\sqrt{9-8}=1$이므로 초점의 좌표는
$(1,\ 0)$, $(-1,\ 0)$
따라서 주어진 타원의 초점의 좌표는
$(2,\ 2)$, $(0,\ 2)$ $\therefore F(2,\ 2)$ ··· ❶
한편 $8(x-1)^2+9(y-2)^2=72$에 $x=0$을 대입하면
$9(y-2)^2=64$, $(y-2)^2=\dfrac{64}{9}$
$y-2=\pm\dfrac{8}{3}$ $\therefore y=\dfrac{14}{3}$ 또는 $y=-\dfrac{2}{3}$
따라서 $P\left(0,\ \dfrac{14}{3}\right)$, $Q\left(0,\ -\dfrac{2}{3}\right)$이므로 ··· ❷
$\overline{PQ}=\dfrac{14}{3}-\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{16}{3}$
$\therefore \triangle FPQ=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\dfrac{16}{3}=\dfrac{16}{3}$ ··· ❸
답 $\dfrac{16}{3}$

채점 기준표

❶ 점 F의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❷ 두 점 P, Q의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❸ $\triangle FPQ$의 넓이를 구할 수 있다.	20%

유형 12 타원의 정의의 활용 본책 11쪽

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 P와 두 초점 F, F′에 대하여

① $a>b>0$일 때, $\overline{FP}+\overline{F'P}=2a$

② $b>a>0$일 때, $\overline{FP}+\overline{F'P}=2b$

0088 $a>0$이라 하면 타원의 정의에 의하여

$\overline{AF}+\overline{AF'}=\overline{BF}+\overline{BF'}=2a$

$\triangle ABF'$의 둘레의 길이는

$\overline{AB}+\overline{BF'}+\overline{AF'}=\overline{AF}+\overline{BF}+\overline{BF'}+\overline{AF'}$

$=(\overline{AF}+\overline{AF'})+(\overline{BF}+\overline{BF'})$

$=2a+2a=4a$

즉 $4a=12$이므로 $a=3$

$b^2=3^2-1^2=8$이므로

$a^2+b^2=9+8=17$

답 ②

0089 타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}=2\cdot4=8$

이때 $\overline{PF}:\overline{PF'}=3:1$이므로

$\overline{PF}=8\cdot\frac{3}{4}=6$

또 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$에서 $\sqrt{16-7}=3$이므로 초점의 좌표는

$(3,\ 0),\ (-3,\ 0)$ $\therefore \overline{FF'}=6$

$\therefore \frac{\overline{PF}}{\overline{FF'}}=\frac{6}{6}=1$

답 1

0090 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$에서 $\sqrt{16-12}=2$이므로 초점의 좌표는

$(2,\ 0),\ (-2,\ 0)$

즉 점 $B(2,\ 0)$은 타원의 한 초점이다.

한편 포물선 $y^2=-8x=4\cdot(-2)x$의 초점의 좌표는 $(-2,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=2$이다.

따라서 $F'(-2,\ 0)$이라 하면 타원과 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AB}+\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{AF'}=2\cdot4=8$

답 ④

0091 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$의 장축의 길이는

$2\cdot5=10$ ➊

주어진 타원이 x축에 대하여 대칭이므로

$\overline{FP_6}=\overline{F'P_1},\ \overline{FP_5}=\overline{F'P_2},\ \overline{FP_4}=\overline{F'P_3}$ ➋

$\therefore \overline{FP_1}+\overline{FP_2}+\overline{FP_3}+\overline{FP_4}+\overline{FP_5}+\overline{FP_6}$

$=\overline{FP_1}+\overline{FP_2}+\overline{FP_3}+\overline{F'P_3}+\overline{F'P_2}+\overline{F'P_1}$

$=(\overline{FP_1}+\overline{F'P_1})+(\overline{FP_2}+\overline{F'P_2})+(\overline{FP_3}+\overline{F'P_3})$

$=10+10+10=30$ ➌

답 30

채점 기준표

➊ 주어진 타원의 장축의 길이를 구할 수 있다.	20%
➋ 길이가 같은 선분을 찾을 수 있다.	40%
➌ $\overline{FP_1}+\overline{FP_2}+\overline{FP_3}+\overline{FP_4}+\overline{FP_5}+\overline{FP_6}$의 값을 구할 수 있다.	40%

0092 $\overline{FF'}=2c$, $\overline{PF}=c$이고 $\angle FPF'=90°$이므로 $\triangle FPF'$에서

$\overline{PF'}=\sqrt{(2c)^2-c^2}=\sqrt{3}c$ 원의 반지름의 길이는 c이다.

타원의 정의에 의하여

$\overline{PF'}+\overline{PF}=\sqrt{3}c+c=(\sqrt{3}+1)c=8$

$\therefore c=\frac{8}{\sqrt{3}+1}=\frac{8(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$=4(\sqrt{3}-1)$

답 ②

0093 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$에서 $\sqrt{9-2}=\sqrt{7}$이므로 초점의 좌표는

$(\sqrt{7},\ 0),\ (-\sqrt{7},\ 0)$ $\therefore \overline{FF'}=2\sqrt{7}$

지름에 대한 원주각의 크기는 90°이므로 $\angle FPF'=90°$이고

$\overline{PF}=a,\ \overline{PF'}=b$라 하면 $\triangle FPF'$에서

$a^2+b^2=(2\sqrt{7})^2$ ······㉠

타원의 정의에 의하여 $a+b=2\cdot3=6$ ······㉡

㉠, ㉡을 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$에 대입하면

$6^2=(2\sqrt{7})^2+2ab$ $\therefore ab=4$

$\therefore \triangle FPF'=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot4=2$

답 2

유형 13 타원의 정의의 활용; 최대 · 최소 본책 12쪽

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 위의 점 $P(x_1,\ y_1)$과 두 초점 F, F′에 대하여

$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\ \overline{PF}+\overline{PF'}=2a$

임과 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

0094 $\overline{AP}=a,\ \overline{BP}=b$라 하면 타원의 정의에 의하여

$a+b=2\cdot7=14$

이때 $a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\geq2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$14\geq2\sqrt{ab},$ $\sqrt{ab}\leq7$

$\therefore ab\leq49$

따라서 $\overline{AP}\cdot\overline{BP}$의 최댓값은 49이다.

답 ⑤

SSEN 특강

산술평균과 기하평균의 관계

$a>0,\ b>0$일 때,

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

0095 점 $P(a,\ b)$가 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 위에 있으므로

$\frac{a^2}{25}+\frac{b^2}{16}=1$

(i) $a=0$ 또는 $b=0$일 때,

$ab=0$

(ii) $a\neq0$, $b\neq0$일 때,

$a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a^2}{25}+\frac{b^2}{16}\geq2\sqrt{\frac{a^2}{25}\cdot\frac{b^2}{16}}$$

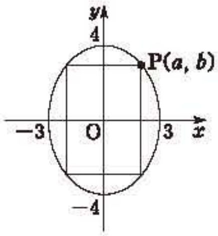
$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{a^2}{25}=\frac{b^2}{16}\text{일 때 성립}\right)$$

$1\geq\frac{1}{10}|ab|$, $\quad |ab|\leq10$

$\therefore -10\leq ab<0,\ 0<ab\leq10$

(i), (ii)에서 ab의 최댓값은 10이다. 답 ②

0096 오른쪽 그림과 같이 직사각형의 꼭짓점 중에서 제1사분면 위의 점을 $\mathrm{P}(a, b)$라 하면



$\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{16}=1$ ⋯ ①

$a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{16}\geq2\sqrt{\frac{a^2}{9}\cdot\frac{b^2}{16}}\ \left(\text{단, 등호는 } \frac{a^2}{9}=\frac{b^2}{16}\text{일 때 성립}\right)$$

$1\geq\frac{1}{6}ab\ (\because a>0,\ b>0)$

$\therefore ab\leq6$ ⋯ ②

따라서 직사각형의 넓이는

$2a\cdot2b=4ab\leq4\cdot6=24$

이므로 구하는 넓이의 최댓값은 24이다. ⋯ ③

답 24

채점 기준표

① 직사각형의 꼭짓점이 타원 위에 있음을 이용할 수 있다.	30%
② ab의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
③ 직사각형의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	30%

0097 $3x^2+2y^2=6$에서 $\quad \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$

$\overline{\mathrm{FP}}=a$, $\overline{\mathrm{F'P}}=b$라 하면 타원의 정의에 의하여

$a+b=2\sqrt{3}$

$\therefore \overline{\mathrm{FP}}^2+\overline{\mathrm{F'P}}^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=12-2ab$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\sqrt{3}\geq\sqrt{ab}$ $\quad\therefore ab\leq3$

$\therefore \overline{\mathrm{FP}}^2+\overline{\mathrm{F'P}}^2=12-2ab\geq12-2\cdot3=6$

따라서 $\overline{\mathrm{FP}}^2+\overline{\mathrm{F'P}}^2$의 최솟값은 6이다. 답 6

유형 14 자취의 방정식; 타원 본책 20쪽

① 두 점에서의 거리의 합이 일정한 점의 자취는 타원이다.
② 한 점과 직선에 이르는 거리의 비가 $m:n\ (m<n)$인 점의 자취는 타원이다.

0098 $\mathrm{A}(a, 0)$, $\mathrm{B}(0, b)$라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=4$에서

$\sqrt{a^2+b^2}=4$ $\quad\therefore a^2+b^2=16$ ⋯⋯ ㉠

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 점 P가 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $3:1$로 내분하므로

$x=\frac{a}{4}$, $y=\frac{3b}{4}$ $\quad\therefore a=4x$, $b=\frac{4}{3}y$

이것을 ㉠에 대입하면

$(4x)^2+\left(\frac{4}{3}y\right)^2=16$, $\quad x^2+\frac{y^2}{9}=1$

$\therefore 9x^2+y^2=9$

따라서 $p=9$, $q=1$이므로 $\quad p+q=10$ 답 10

0099 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면

$a^2+b^2=16$ ⋯⋯ ㉠

$\mathrm{H}(a, 0)$이고, 점 Q의 좌표를 (x, y)라 하면 점 Q가 $\overline{\mathrm{PH}}$의 중점이므로

$x=a$, $y=\frac{b}{2}$ $\quad\therefore a=x$, $b=2y$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad x^2+(2y)^2=16$

$\therefore x^2+4y^2=16$ 답 ②

0100 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\sqrt{(x-3)^2+y^2}:|x-6|=1:2$

$|x-6|=2\sqrt{(x-3)^2+y^2}$

양변을 제곱하면

$x^2-12x+36=4(x^2-6x+9+y^2)$

$3x^2-12x+4y^2=0$, $\quad 3(x-2)^2+4y^2=12$

$\therefore \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

이 타원은 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 구하는 초점의 좌표는

$\sqrt{4-3}=1$에서 초점의 좌표는 $(1, 0)$, $(-1, 0)$

$(3, 0)$, $(1, 0)$ 답 $(3, 0)$, $(1, 0)$

0101 두 원 C_1: $(x+1)^2+y^2=9$, C_2: $(x-1)^2+y^2=49$의 중심을 각각 A, B라 하면

$\mathrm{A}(-1, 0)$, $\mathrm{B}(1, 0)$

점 P의 좌표를 (x, y)라 하고, 중심이 P인 원의 반지름의 길이를 r라 하면 $\quad \overline{\mathrm{AP}}=r+3$, $\overline{\mathrm{BP}}=7-r$

$\therefore \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=10$

따라서 점 P의 자취는 두 점 A와 B를 초점으로 하고 장축의 길이가 10인 타원이므로 구하는 자취의 방정식은

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{24}=1$ 답 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{24}=1$

유형 15 타원의 실생활에의 활용 본책 21쪽

주어진 문제에서 타원의 초점, 장축의 길이, 단축의 길이 등을 찾아 타원의 정의를 이용하거나 타원의 방정식을 구한다.

0102 혜성이 태양으로부터 가장 멀리 있을 때의 지점과 가장 가까이 있을 때의 지점은 타원 궤도의 장축 위의 꼭짓점과 같으므로 타원 궤도의 장축의 길이는

$4\times10^7+8\times10^7=12\times10^7\,(\mathrm{km})$

타원 궤도의 중심에서 초점인 태양까지의 거리는

$\dfrac{12\times10^7}{2}-4\times10^7=2\times10^7\,(\mathrm{km})$

따라서 단축의 길이는

$2\sqrt{\left(\dfrac{12\times10^7}{2}\right)^2-(2\times10^7)^2}=8\sqrt{2}\times10^7\,(\mathrm{km})$

$\therefore a=8\sqrt{2}$

답 $8\sqrt{2}$

0103 주어진 타원의 장축의 길이가 $2\cdot16=32\,(\mathrm{m})$, 단축의 길이가 20 m이므로 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{10^2}+\dfrac{y^2}{16^2}=1$이라 할 수 있다.

구하는 폭은 직선 $y=12$와 타원 $\dfrac{x^2}{10^2}+\dfrac{y^2}{16^2}=1$의 교점 사이의 거리와 같으므로 $\dfrac{x^2}{10^2}+\dfrac{12^2}{16^2}=1$에서

$x^2=\dfrac{7}{16}\cdot10^2 \qquad \therefore x=\pm\dfrac{5\sqrt{7}}{2}$

따라서 구하는 폭은

$2\cdot\dfrac{5\sqrt{7}}{2}=5\sqrt{7}\,(\mathrm{m})$

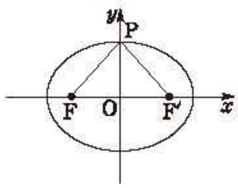
답 ④

0104 주어진 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$이라 하면

$2a=120 \qquad \therefore a=60$

$b^2=60^2-40^2=2000$이므로 $\qquad b=20\sqrt{5}$

이때 $\overline{\mathrm{FF'}}$의 길이가 일정하므로 오른쪽 그림과 같이 점 P가 y축 위의 꼭짓점일 때 $\triangle\mathrm{PFF'}$의 넓이가 최대이다.



따라서 구하는 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\cdot80\cdot20\sqrt{5}=800\sqrt{5}\,(\mathrm{m}^2)$

답 $800\sqrt{5}$

유형 16 쌍곡선의 방정식; 초점이 주어진 경우

본책 21쪽

① 초점의 좌표가 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$인 쌍곡선의 방정식

➡ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a^2+b^2=c^2)$

② 초점의 좌표가 $(0,\ c)$, $(0,\ -c)$인 쌍곡선의 방정식

➡ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1\ (a^2+b^2=c^2)$

0105 타원 $4x^2+9y^2=36$, 즉 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$에서 $\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$이므로 초점의 좌표는

$(\sqrt{5},\ 0)$, $(-\sqrt{5},\ 0)$

구하는 쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\ b>0)$이라 하면

$2a=4$에서 $\qquad a=2$

$a^2+b^2=(\sqrt{5})^2$에서 $\qquad b^2=(\sqrt{5})^2-2^2=1$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$, 즉 $x^2-4y^2=4$

답 ②

0106 쌍곡선의 정의에 의하여 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(0,\ -2)$가 쌍곡선의 초점이므로 쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1\,(a>0,\ b>0)$이라 하자.

$|\overline{\mathrm{PA}}-\overline{\mathrm{PB}}|=2$이므로

$2b=2 \qquad \therefore b=1$

$a^2+b^2=2^2$에서 $\qquad a^2=2^2-1^2=3$

따라서 점 P의 자취의 방정식은 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=-1$, 즉 $x^2-3y^2=-3$이므로

$p=3,\ q=-3$

$\therefore p+q=0$

답 ①

0107 쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$이라 하면

$a^2+b^2=4^2$에서 $\qquad b^2=16-a^2$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠ ➡ ❶

이때 $a^2>0$, $b^2>0$이므로 $16-a^2>0$에서

$0<a^2<16$

쌍곡선이 점 $(6,\ -2\sqrt{2})$를 지나므로

$\dfrac{36}{a^2}-\dfrac{8}{b^2}=1 \qquad \therefore 36b^2-8a^2=a^2b^2$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $\qquad a^4-60a^2+576=0$

$(a^2-12)(a^2-48)=0 \qquad \therefore a^2=12\ (\because 0<a^2<16)$ ➡ ❷

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는

$2|a|=2\cdot2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ ➡ ❸

답 $4\sqrt{3}$

채점 기준표

❶ 쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$이라 하고 초점의 좌표를 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	20%
❷ a^2의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ 쌍곡선의 주축의 길이를 구할 수 있다.	30%

유형 17 쌍곡선의 방정식; 점근선이 주어진 경우

본책 22쪽

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm1$의 점근선의 방정식이 $y=\pm kx$이면

$\left|\dfrac{b}{a}\right|=|k|$

0108 주어진 쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\ b>0)$이라 하면

$\dfrac{b}{a}=\sqrt{2} \qquad \therefore b=\sqrt{2}a$

즉 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{2a^2}=1$이 점 (1, 1)을 지나므로

$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{2a^2}=1,\quad \frac{1}{2a^2}=1$

$\therefore a^2=\frac{1}{2}$

따라서 $b^2=2a^2=1$이므로 쌍곡선의 방정식은

$\frac{x^2}{\frac{1}{2}}-y^2=1$, 즉 $2x^2-y^2=1$

이 쌍곡선이 점 $(k, 3)$을 지나므로

$2k^2-3^2=1,\quad k^2=5$

$\therefore k=\sqrt{5}\ (\because k>0)$ 답 $\sqrt{5}$

참고 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\ (a>0,\ b>0)$이라 하면 $a^2=-\frac{1}{2}$이 되므로 이것을 만족시키는 a의 값이 존재하지 않는다.

0109 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 점근선의 방정식이 $y=\pm 2x$이므로

$\frac{b}{a}=2\quad \therefore b=2a$ ······ ㉠ ➊

쌍곡선의 주축의 길이가 8이므로

$2b=8\quad \therefore b=4$ ➋

$b=4$를 ㉠에 대입하면 $a=2$ ➌

$\therefore a^2+b^2=4+16=20$ ➍

답 20

채점 기준표

➊ a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40%
➋ b의 값을 구할 수 있다.	30%
➌ a의 값을 구할 수 있다.	20%
➍ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	10%

0110 주어진 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$이라 하면 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{b}{a}x$

두 점근선이 서로 수직으로 만나므로

$\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)=-1\quad \therefore a^2=b^2$

또 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$이 점 (4, 2)를 지나므로

$\frac{16}{a^2}-\frac{4}{a^2}=1\quad \therefore a^2=12$

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{12}=1$에서 $\sqrt{12+12}=2\sqrt{6}$이므로 초점의 좌표는 $(2\sqrt{6},\ 0)$, $(-2\sqrt{6},\ 0)$

$\therefore \overline{FF'}=4\sqrt{6}$ 답 ④

참고 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\ (a>0,\ b>0)$이라 하면 $a^2=-12$가 되므로 이것을 만족시키는 a의 값이 존재하지 않는다.

0111 주어진 두 쌍곡선의 점근선의 방정식이 $y=\pm 3x$이므로

$\frac{b}{a}=3\quad \therefore b=3a$ ······ ㉠

두 쌍곡선의 꼭짓점 $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$를 연결하여 만든 사각형은 마름모이고 그 넓이가 24이므로

$\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2b=24\quad \therefore ab=12$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $a\cdot 3a=12$

$a^2=4\quad \therefore a=2\ (\because a>0)$

따라서 $b=3a=6$이므로 $a+b=8$ 답 ③

유형 18 쌍곡선의 초점 본책 22쪽

쌍곡선 $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=\pm1\ (a>0,\ b>0)$의 초점, 꼭짓점의 좌표와 주축의 길이는 다음과 같다.

	$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=-1$
초점의 좌표	$(\pm\sqrt{a^2+b^2}+m,\ n)$	$(m,\ \pm\sqrt{a^2+b^2}+n)$
꼭짓점의 좌표	$(\pm a+m,\ n)$	$(m,\ \pm b+n)$
주축의 길이	$2a$	$2b$

0112 $5x^2-20y^2+120y-80=0$에서

$5x^2-20(y-3)^2=-100$

$\therefore \frac{x^2}{20}-\frac{(y-3)^2}{5}=-1$

즉 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=-1$을 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=-1$에서 $\sqrt{20+5}=5$이므로 초점의 좌표는

$(0, 5)$, $(0, -5)$

따라서 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$(0, 8)$, $(0, -2)$

$\therefore a+b=6$ 답 ④

0113 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$에서 $\sqrt{6+3}=3$이므로 초점의 좌표는

$(3, 0)$, $(-3, 0)$

따라서 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$(6, -2)$, $(0, -2)\quad \therefore \overline{FF'}=6$

$\therefore \triangle OFF'=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2=6$ 답 6

0114 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$에서 $\sqrt{9+7}=4$이므로 초점의 좌표는

$(4, 0)$, $(-4, 0)\quad \therefore \overline{FF'}=8$

점 P의 좌표를 $(a, b)\ (a>0,\ b>0)$라 하면

$\triangle PF'F=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot b=4b$

즉 $4b=8\sqrt{14}$이므로 $\quad b=2\sqrt{14}$

점 P는 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$ 위에 있으므로

$$\frac{a^2}{9}-\frac{56}{7}=1, \quad \frac{a^2}{9}=9$$

$$a^2=81 \quad \therefore a=9\ (\because a>0)$$

$$\therefore \triangle PQF'=\frac{1}{2}\cdot\overline{QP}\cdot b=\frac{1}{2}\cdot 18\cdot 2\sqrt{14}=18\sqrt{14}$$

답 ③

0115 쌍곡선 $x^2-y^2=8$, 즉 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$에서 $\sqrt{8+8}=4$이므로 초점의 좌표는 $\quad (4,\ 0),\ (-4,\ 0)$

즉 점 $F(4,\ 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선의 방정식은 $x=4$이므로 $x=4$를 $x^2-y^2=8$에 대입하면

$$y^2=8 \quad \therefore y=\pm 2\sqrt{2}$$

따라서 두 점 A, B의 좌표가 $(4,\ 2\sqrt{2})$, $(4,\ -2\sqrt{2})$이므로

$$\overline{AB}=2\sqrt{2}-(-2\sqrt{2})=4\sqrt{2}$$

답 $4\sqrt{2}$

유형 19 쌍곡선의 점근선 본책 23쪽

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$의 점근선의 방정식 ➡ $y=\pm\frac{b}{a}x$

0116 쌍곡선 $4x^2-7y^2=-28$, 즉 $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{4}=-1$에서 $\sqrt{7+4}=\sqrt{11}$이므로 초점의 좌표는

$$(0,\ \sqrt{11}),\ (0,\ -\sqrt{11})$$

쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y=\pm\frac{2}{\sqrt{7}}x, \text{ 즉 } 2x\pm\sqrt{7}y=0$$

쌍곡선의 초점에서 두 점근선까지의 거리는 모두 같으므로 점 $(0,\ \sqrt{11})$에서 직선 $2x+\sqrt{7}y=0$까지의 거리는

$$\frac{|\sqrt{7}\cdot\sqrt{11}|}{\sqrt{2^2+(\sqrt{7})^2}}=\frac{\sqrt{77}}{\sqrt{11}}=\sqrt{7}$$

답 ③

0117 쌍곡선의 점근선의 방정식은 $\quad y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$

두 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$, $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2 $(0\le\theta_1<\pi,\ 0\le\theta_2<\pi)$라 하면

$$\tan\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \tan\theta_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \theta_1=\frac{\pi}{6},\ \theta_2=\frac{5}{6}\pi$$

따라서 구하는 둔각의 크기는 $\quad \theta_2-\theta_1=\frac{2}{3}\pi$

답 $\frac{2}{3}\pi$

0118 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{8}=1$에서 $\sqrt{9+8}=\sqrt{17}$이므로 초점의 좌표는 $\quad (\sqrt{17},\ 0),\ (-\sqrt{17},\ 0)$

쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}x, \text{ 즉 } 2\sqrt{2}x\pm 3y=0$$

쌍곡선의 초점에서 두 점근선까지의 거리는 모두 같으므로 중심이 점 $(\sqrt{17},\ 0)$이고 직선 $2\sqrt{2}x+3y=0$에 접하는 원의 반지름의 길이는

$$\frac{|2\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}|}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2+3^2}}=\frac{2\sqrt{34}}{\sqrt{17}}=2\sqrt{2}$$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\quad \pi\cdot(2\sqrt{2})^2=8\pi$

답 ②

0119 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$에서 $\sqrt{3+1}=2$이므로 초점의 좌표는

$(2,\ 0),\ (-2,\ 0) \quad \therefore F(2,\ 0)$ ··· ❶

쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$이므로 직선 OP의 방정식은

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ ··· ❷

이때 $\angle POF=\theta$라 하면 $\quad \tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \therefore \theta=30°$ ··· ❸

$$\therefore \triangle OPF=\frac{1}{2}\cdot\overline{OP}\cdot\overline{OF}\cdot\sin 30°$$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=1$ ··· ❹

답 1

채점 기준표

❶ 점 F의 좌표를 구할 수 있다.	20%
❷ 직선 OP의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ $\angle POF$의 크기를 구할 수 있다.	30%
❹ $\triangle OPF$의 넓이를 구할 수 있다.	20%

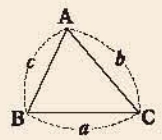
SSEN 특강

삼각형의 넓이

오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$$

$$=\frac{1}{2}ab\sin C$$



유형 20 쌍곡선의 정의의 활용 본책 23쪽

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 P와 두 초점 F, F'에 대하여

$|\overline{PF}-\overline{PF'}|=2a\ (a>0)$

0120 쌍곡선 $x^2-3y^2=12$, 즉 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$에서 $\sqrt{12+4}=4$이므로 두 점 A, D는 쌍곡선의 초점이다.

이때 주축의 길이가 $2\cdot 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{BD}-\overline{BA}=4\sqrt{3}$ ······ ㉠

$\overline{CD}-\overline{CA}=4\sqrt{3}$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면

$\overline{BD}-\overline{BA}+\overline{CD}-\overline{CA}=\overline{BD}+\overline{CD}-(\overline{BA}+\overline{CA})$

$=\overline{BD}+\overline{CD}-\overline{BC}=8\sqrt{3}$ ······ ㉢

또 $\triangle BCD$의 둘레의 길이가 $16\sqrt{3}$이므로

$\overline{BD}+\overline{CD}+\overline{BC}=16\sqrt{3}$ ······ ㉣

㉣$-$㉢을 하면 $2\overline{BC}=8\sqrt{3}$

$\therefore \overline{BC}=4\sqrt{3}$

답 ②

0121 쌍곡선 $x^2-8y^2=8$, 즉 $\frac{x^2}{8}-y^2=1$에서 $\sqrt{8+1}=3$이므로

초점의 좌표는

$(3,\ 0),\ (-3,\ 0)$ $\therefore \overline{FF'}=6$

쌍곡선의 정의에 의하여

$|\overline{PF}-\overline{PF'}|=2\cdot2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ ······ ㉠

$\overline{PF}:\overline{PF'}=1:2$에서 $\overline{PF'}=2\overline{PF}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{PF}=4\sqrt{2},\ \overline{PF'}=8\sqrt{2}$

따라서 $\triangle PFF'$의 둘레의 길이는

$\overline{PF}+\overline{FF'}+\overline{PF'}=4\sqrt{2}+6+8\sqrt{2}$

$=12\sqrt{2}+6$

답 $12\sqrt{2}+6$

0122 쌍곡선 $4x^2-y^2=4$, 즉 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$에서 $\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$이므로

초점의 좌표는

$(\sqrt{5},\ 0),\ (-\sqrt{5},\ 0)$ $\therefore \overline{FF'}=2\sqrt{5}$

$\overline{PF}=a$라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$a-\overline{PF'}=2$ $\therefore \overline{PF'}=a-2$

한편 지름에 대한 원주각의 크기는 $90°$이므로

$\angle FPF'=90°$

즉 $\triangle PF'F$에서

$a^2+(a-2)^2=(2\sqrt{5})^2$

$a^2-2a-8=0,\quad (a+2)(a-4)=0$

$\therefore a=4\ (\because a>0)$ $\therefore \overline{PF}=4$

$\therefore \sin\theta=\frac{\overline{PF}}{\overline{FF'}}=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

답 ⑤

0123 쌍곡선 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$에서 $\sqrt{25+11}=6$이므로 초점의 좌표는 $(6,\ 0),\ (-6,\ 0)$ $\therefore \overline{FF'}=12$ ➊

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}=2\cdot5=10$

$\therefore \overline{PF}=\overline{PF'}-10$ ➋

$\overline{PF},\ \overline{FF'},\ \overline{PF'}$의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\overline{PF}+\overline{PF'}=2\overline{FF'}$

$(\overline{PF'}-10)+\overline{PF'}=2\cdot12$

$\therefore \overline{PF'}=17$

따라서 $\overline{PF}=17-10=7$이므로 ➌

$\overline{PF}^2+\overline{PF'}^2=49+289=338$ ➍

답 338

채점 기준표

➊ $\overline{FF'}$의 길이를 구할 수 있다.	20%
➋ $\overline{PF}$를 $\overline{PF'}$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
➌ $\overline{PF'},\ \overline{PF}$의 길이를 구할 수 있다.	40%
➍ $\overline{PF}^2+\overline{PF'}^2$의 값을 구할 수 있다.	10%

0124 $\overline{PF}=2,\ \overline{PF'}=\sqrt{(3+3)^2+2^2}=2\sqrt{10}$이므로

$\overline{PF}+\overline{PF'}=2\sqrt{10}+2$

$\overline{PF'}-\overline{PF}=2\sqrt{10}-2$

타원의 정의에 의하여

$\overline{OA}=\frac{1}{2}(\overline{PF}+\overline{PF'})=\sqrt{10}+1$

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{OB}=\frac{1}{2}(\overline{PF'}-\overline{PF})=\sqrt{10}-1$

$\therefore \overline{AB}=\overline{OA}-\overline{OB}=(\sqrt{10}+1)-(\sqrt{10}-1)=2$

$\therefore \triangle PBA=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{PF}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=2$

답 2

유형 21 자취의 방정식; 쌍곡선 본책 24쪽

① 두 점에서의 거리의 차가 일정한 점의 자취는 쌍곡선이다.
② 한 점과 직선에 이르는 거리의 비가 $m:n\ (m>n)$인 점의 자취는 쌍곡선이다.

0125 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\sqrt{(x-6)^2+y^2}:|x-1|=2:1$

$2|x-1|=\sqrt{(x-6)^2+y^2}$

양변을 제곱하면

$4x^2-8x+4=x^2-12x+36+y^2$

$\therefore 3x^2-y^2+4x-32=0$

따라서 $a=3,\ b=-1,\ c=-32$이므로

$a+b+c=-30$

답 -30

0126 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$\frac{a^2}{2}-b^2=1$ ······ ㉠

점 Q의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x=\frac{a}{2},\ y=\frac{b+1}{2}$

$\therefore a=2x,\ b=2y-1$

이것을 ㉠에 대입하면 $\frac{(2x)^2}{2}-(2y-1)^2=1$

$\therefore x^2-2y^2+2y-1=0$

답 $x^2-2y^2+2y-1=0$

유형 22 이차곡선 본책 24쪽

주어진 방정식이 포물선, 타원, 쌍곡선의 방정식이 되도록 하는 조건을 생각한다.

① 원 ➡ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
② 포물선 ➡ $(y-n)^2=4p(x-m)$ 또는 $(x-m)^2=4p(y-n)$
③ 타원 ➡ $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$
④ 쌍곡선 ➡ $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=\pm1$

0127 $x^2+3y^2+4x-2y+1+k(x^2-2y^2)=0$에서

$(1+k)x^2+(3-2k)y^2+4x-2y+1=0$

이 이차곡선이 포물선이 되려면

$1+k=0$ 또는 $3-2k=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=\frac{3}{2}$

따라서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{1}{2}$이다. 답 ④

0128 $kx^2+2y^2+2k-1=0$에서 $\quad kx^2+2y^2=1-2k$

이 이차곡선이 타원이 되려면

$k>0,\ k\neq2,\ 1-2k>0 \quad \therefore 0<k<\frac{1}{2}$ 답 ③

참고 주어진 방정식은 $k<0$이면 쌍곡선을 나타내고 $k=\frac{1}{2}$이면 점 $(0,\ 0)$을 나타낸다.

또 $k>\frac{1}{2}$이면 주어진 식을 만족시키는 실수 x, y가 존재하지 않는다.

0129 전략 주어진 포물선은 포물선 $y^2=12x$를 x축의 방향으로 n만큼, y축으로 방향으로 $-m$만큼 평행이동한 것임을 이용한다.

풀이 포물선 $y^2=4\cdot3x$의 초점의 좌표는 $(3,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-3$이므로 포물선 $(y+m)^2=12(x-n)$의 초점의 좌표는 $(3+n,\ -m)$, 준선의 방정식은 $x=-3+n$이다.

포물선의 초점이 정사각형의 내부에 있으려면

$-3<3+n<6,\ -5<-m<4$

$\therefore -6<n<3,\ -4<m<5$ ······ ㉠

포물선의 준선이 정사각형과 만나지 않으려면

$-3+n<-3$ 또는 $-3+n>6$

$\therefore n<0$ 또는 $n>9$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad -4<m<5,\ -6<n<0$

따라서 정수 m은 8개, 정수 n은 5개이므로 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

$8\cdot5=40$ 답 40

0130 전략 포물선의 정의를 이용한다.

풀이 중심이 포물선 C_1 위에 있고 점 F_1을 지나는 원을 O_1이라 하면 원 O_1의 중심 O_1에서 포물선 C_1의 준선 $y=-1$까지의 거리는 원 O_1의 반지름의 길이와 같으므로 원 O_1은 준선 $y=-1$에 접한다.

따라서 원 O_1은 $y\geq-1$인 영역에 존재하므로

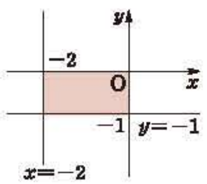
(점 P의 y좌표)≥-1

또 중심이 포물선 C_2 위에 있고 점 F_2를 지나는 원을 O_2라 하면 원 O_2의 중심 O_2에서 포물선 C_2의 준선 $x=-2$까지의 거리는 원 O_2의 반지름의 길이와 같으므로 원 O_2는 준선 $x=-2$에 접한다.

따라서 원 O_2는 $x\geq-2$인 영역에 존재하므로

(점 P의 x좌표)≥-2

이때 점 P는 제3사분면 위의 점이므로 점 P가 존재하는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



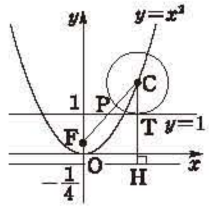
따라서 점 P의 좌표가 $(-2,\ -1)$일 때 $\overline{OP}^2$의 값이 최대이므로 구하는 최댓값은

$(-2)^2+(-1)^2=5$ 답 5

0131 전략 포물선 위의 임의의 점에서 초점까지의 거리와 준선까지의 거리가 같음을 이용한다.

풀이 포물선 $y=x^2$, 즉 $x^2=y=4\cdot\frac{1}{4}y$의 초점 F의 좌표는 $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$이고, 준선의 방정식은 $y=-\frac{1}{4}$이다.

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{CH}$와 직선 $y=1$의 교점을 T라 하면



$\overline{CF}=\overline{CH}$

$\therefore f(k)=\overline{PF}=\overline{CF}-\overline{CP}$

$=\overline{CH}-\overline{CT}$

$=\overline{TH}=\frac{5}{4}$

따라서 $y=f(k)$의 그래프의 개형은 ⑤와 같다. 답 ⑤

0132 전략 원의 반지름의 길이를 r로 놓고 타원의 네 꼭짓점의 좌표를 각각 구한다.

풀이 네 원의 반지름의 길이를 r라 하면 타원의 네 꼭짓점의 좌표는 각각

$(3+r,\ 0),\ (-3-r,\ 0),\ (0,\ 1+r),\ (0,\ -1-r)$

이므로 타원의 방정식은

$\frac{x^2}{(3+r)^2}+\frac{y^2}{(1+r)^2}=1$

이때 타원의 두 초점 사이의 거리가 6이므로

$(3+r)^2-(1+r)^2=3^2$

$4r-1=0 \quad \therefore r=\frac{1}{4}$

따라서 타원의 장축의 길이는 $\quad a=2(3+r)=2\left(3+\frac{1}{4}\right)=\frac{13}{2}$

단축의 길이는 $\quad b=2(1+r)=2\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{2}$

$\therefore a+b=9$ 답 ①

0133 전략 타원의 정의를 이용하여 두 점 P, Q가 y축에 대하여 대칭임을 알아낸다.

풀이 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$에서 $\sqrt{25-9}=4$이므로

$F(4,\ 0),\ F'(-4,\ 0)$

타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF'}=2\cdot5=10$ ······ ㉠

이때 $\overline{PF'}+\overline{QF'}=10$이므로 $\quad \overline{PF}=\overline{QF'}$

따라서 두 점 P, Q는 y축에 대하여 대칭이다.

㉠에서 $\overline{PF'}=10-\overline{PF}$이고, $\overline{AQ}=\overline{AP}$이므로

$\overline{PF'}-\overline{AQ}=(10-\overline{PF})-\overline{AP}$

$=10-(\overline{PF}+\overline{AP})$

$\leq10-\overline{AF}$

즉 $10-\overline{AF}=3$이므로 $\quad \overline{AF}=7$

$\sqrt{4^2+(-k)^2}=7, \quad 16+k^2=49$

$k^2=33 \quad \therefore k=\sqrt{33}\ (\because k>0)$ 답 ⑤

0134 전략 원의 반지름과 타원의 정의를 이용한다.

풀이 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$에서 $\sqrt{16-12}=2$이므로

$\mathrm{F}(2,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-2,\ 0)$

타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2\cdot4=8$

이때 $\overline{\mathrm{QF'}}$, $\overline{\mathrm{RF}}$는 각각 원 $(x+2)^2+y^2=4$, $(x-2)^2+y^2=4$의 반지름이므로

$\overline{\mathrm{QF'}}=\overline{\mathrm{RF}}=2$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}} &\le (\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{QF'}})+(\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{RF}})\\ &=(\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}})+\overline{\mathrm{QF'}}+\overline{\mathrm{RF}}\\ &=8+2+2=12\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}$의 최댓값은 12이다. 답 12

0135 전략 직선 PF의 기울기를 a에 대한 식으로 나타내고 $a\to\infty$일 때의 극한값을 구한다.

풀이 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-y^2=1$ 위에 있으므로

$\frac{a^2}{5}-b^2=1,\quad b^2=\frac{a^2}{5}-1$

$\therefore b=\sqrt{\frac{a^2}{5}-1}\ (\because b>0)$

이때 $\sqrt{5+1}=\sqrt{6}$에서 $\mathrm{F}(\sqrt{6},\ 0)$이므로 직선 PF의 기울기는

$$\frac{b-0}{a-\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{\frac{a^2}{5}-1}}{a-\sqrt{6}}$$

$$\therefore k=\lim_{a\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{a^2}{5}-1}}{a-\sqrt{6}}=\lim_{a\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{5}-\frac{1}{a^2}}}{1-\frac{\sqrt{6}}{a}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

답 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

다른 풀이 a의 값이 한없이 커질 때, 직선 PF의 기울기는 쌍곡선의 점근선의 기울기에 한없이 가까워진다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-y^2=1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}x$이므로

$k=\frac{\sqrt{5}}{5}$

0136 전략 쌍곡선의 정의를 이용하여 점 P의 좌표를 구한다.

풀이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 $\mathrm{F}(5,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-5,\ 0)$이므로 $a^2+b^2=25$ ······㉠

$\overline{\mathrm{RF}}=\overline{\mathrm{QF'}}$에서 ─ 두 점 Q, R는 y축에 대하여 대칭이므로 $\overline{\mathrm{RF}}=\overline{\mathrm{QF'}}$

$|\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{RF}}|=|\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{QF'}}|=8$

이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$2a=8\quad\therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$b^2=9\quad\therefore b=3\ (\because b>0)$

쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{3}{4}x$이고 점 P의 x좌표가 4이므로 $\mathrm{P}(4,\ 3)$

이때 점 P가 타원 $\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{d^2}=1$ 위의 점이고

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=\sqrt{(4-5)^2+3^2}+\sqrt{(4+5)^2+3^2}=4\sqrt{10}$

이므로 타원의 정의에 의하여

$2c=4\sqrt{10}\quad\therefore c=2\sqrt{10}$

또 $c^2-d^2=5^2$에서 $d^2=(2\sqrt{10})^2-5^2=15$

$\therefore d=\sqrt{15}\ (\because d>0)$

$\therefore \frac{bc}{ad}=\frac{3\cdot2\sqrt{10}}{4\cdot\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

0137 전략 쌍곡선이 원점에 대하여 대칭임을 이용하여 길이가 같은 선분을 찾는다.

풀이 주어진 쌍곡선이 원점에 대하여 대칭이므로

$\overline{\mathrm{PG}}=\overline{\mathrm{QG'}}$, $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{QF'}}$

$\overline{\mathrm{PG}}=k$라 하면 $\overline{\mathrm{PG}}\times\overline{\mathrm{QG}}=\overline{\mathrm{QG'}}\times\overline{\mathrm{QG}}$이므로 ─ 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{QG}}-\overline{\mathrm{QG'}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{QG}}=\overline{\mathrm{QG'}}+2=k+2$

$k(k+2)=8,\quad k^2+2k-8=0$

$(k+4)(k-2)=0\quad\therefore k=2\ (\because k>0)$

$\overline{\mathrm{PF}}=l$이라 하면 $\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{QF'}}\times\overline{\mathrm{QF}}$이므로

$l(l+2)=4,\quad l^2+2l-4=0$

$\therefore l=-1+\sqrt{5}\ (\because l>0)$

따라서 □PGQF의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PG}}+\overline{\mathrm{QG}}+\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{PF}}&=k+(k+2)+(l+2)+l\\&=2k+2l+4\\&=2\cdot2+2\cdot(-1+\sqrt{5})+4\\&=6+2\sqrt{5}\end{aligned}$$

답 ④

0138 전략 쌍곡선의 정의를 이용한다.

풀이 $a>0$이라 하면 $|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=8$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여 $2a=8\quad\therefore a=4$

$y^2=4\cdot12(x+c)$에서 $\overline{\mathrm{AF}}=12$

이때 $\overline{\mathrm{AF'}}:\overline{\mathrm{FF'}}=1:5$이므로

$\overline{\mathrm{AF'}}=\frac{1}{1+5}\overline{\mathrm{AF}}=\frac{1}{6}\cdot12=2$

$\overline{\mathrm{FF'}}=12-2=10$

$\therefore \mathrm{F}(5,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-5,\ 0)$, $\mathrm{A}(-7,\ 0)$

따라서 $a^2+b^2=5^2$이므로 $b^2=5^2-4^2=9$

포물선 $y^2=48(x+c)$는 꼭짓점이 $\mathrm{A}(-7,\ 0)$이므로 포물선 $y^2=48x$를 x축의 방향으로 -7만큼 평행이동한 것이다.

즉 $-c=-7$이므로 $c=7$

$\therefore a^2-b^2-c^2=16-9-49=-42$ 답 -42

0139 전략 직선 AB의 기울기와 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표를 구하여 직선 l의 방정식을 구한다.

풀이 직선 AB의 기울기는 $\frac{a^2-1}{a-1}=a+1$

$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+1}{2},\ \frac{a^2+1}{2}\right)$ ➊

직선 l의 방정식은

$$y-\frac{a^2+1}{2}=-\frac{1}{a+1}\left(x-\frac{a+1}{2}\right)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{a+1}x+\frac{a^2}{2}+1$$ ➋

따라서 직선 l의 y절편이 $\frac{a^2}{2}+1$이므로

$$C\left(0,\ \frac{a^2}{2}+1\right)$$

포물선 $x^2=y=4\cdot\frac{1}{4}y$의 초점 F의 좌표는 $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$이므로

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\overline{CF}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\left(\frac{a^2}{2}+1-\frac{1}{4}\right)=\frac{a^2}{4}+\frac{3}{8}$$ ➌

$$\therefore \lim_{a\to1+}S(a)=\lim_{a\to1+}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{3}{8}\right)=\frac{5}{8}$$ ➍

답 $\frac{5}{8}$

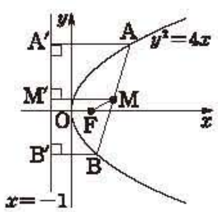
채점 기준표

❶ 직선 AB의 기울기와 $\overline{AB}$의 중점의 좌표를 구할 수 있다.	20%
❷ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ $S(a)$를 구할 수 있다.	30%
❹ $\lim_{a\to1+}S(a)$의 값을 구할 수 있다.	20%

0140 **전략** 포물선 위의 임의의 점에서 초점까지의 거리와 준선까지의 거리는 서로 같음을 이용한다.

풀이 포물선 $y^2=4x$의 초점 F의 좌표는 $(1,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-1$이다.

오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, M에서 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′, M′이라 하면 포물선의 정의에 의하여



$$\overline{AF}=\overline{AA'},\ \overline{BF}=\overline{BB'}$$

이때 $\overline{AM}=\overline{BM}$, $\overline{AB}=6$이므로

$$\overline{MM'}=\frac{\overline{AA'}+\overline{BB'}}{2}=\frac{\overline{AF}+\overline{BF}}{2}$$

$$\geq\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{6}{2}=3$$

즉 $\overline{MM'}$의 길이의 최솟값은 3이고, 점 M의 x좌표의 최솟값은 2이며 이때 점 F는 $\overline{AB}$ 위에 있다. ➊

이때 점 $F(1,\ 0)$을 지나는 직선 AB의 방정식을 $y=m(x-1)$이라 하면 두 점 A, B는 포물선 $y^2=4x$와 직선 $y=m(x-1)$의 교점이다.

$A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$라 하면 $\overline{MM'}=\frac{x_1+x_2}{2}+1=3$이므로

$$\frac{x_1+x_2}{2}=2 \qquad \therefore x_1+x_2=4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 x_1, x_2는 이차방정식 $\{m(x-1)\}^2=4x$, 즉

$m^2x^2-2(m^2+2)x+m^2=0$의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$x_1+x_2=\frac{2(m^2+2)}{m^2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\frac{2(m^2+2)}{m^2}=4$

$$m^2+2=2m^2, \qquad m^2=2$$

$$\therefore m=\pm\sqrt{2}$$ ➋

따라서 직선 AB의 방정식은 $y=\pm\sqrt{2}(x-1)$이므로 이 식에 $x=2$를 대입하면 $\quad y=\pm\sqrt{2}$

$$\therefore M(2,\ \sqrt{2})\ 또는\ M(2,\ -\sqrt{2})$$

$$\therefore \overline{MF}=\sqrt{(2-1)^2+(\pm\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$$ ➌

답 $\sqrt{3}$

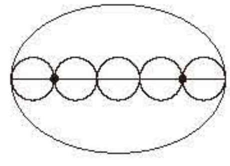
채점 기준표

❶ 점 M의 x좌표의 최솟값을 구하고 이때 점 F가 $\overline{AB}$ 위에 있음을 알 수 있다.	40%
❷ 직선 AB의 기울기를 구할 수 있다.	40%
❸ $\overline{MF}$의 길이를 구할 수 있다.	20%

0141 **전략** 장축의 길이가 일정할 때, 단축의 길이가 최소이려면 두 초점 사이의 거리가 최대이어야 한다.

풀이 장축의 길이가 일정할 때 두 초점 사이의 거리가 길수록 단축의 길이는 짧아진다.

따라서 두 초점의 위치가 오른쪽 그림과 같을 때 단축의 길이가 최소이다. ➊



원의 반지름의 길이를 r라 하면 두 초점 사이의 거리는 $6r$, 장축의 길이는 $10r$이므로 단축의 길이를 $2b$라 하면

$$b=\sqrt{(5r)^2-(3r)^2}=4r \qquad \therefore 2b=8r$$ ➋

즉 단축의 길이는 $8r$이므로 장축과 단축의 길이의 비는

$10r : 8r$, 즉 $5 : 4$

따라서 $a=4$이므로 $\quad a^2=16$ ➌

답 16

채점 기준표

❶ 단축의 길이가 최소일 때의 두 초점의 위치를 알 수 있다.	30%
❷ 원의 반지름의 길이를 r로 놓고 두 초점 사이의 거리와 장축의 길이, 단축의 길이를 r에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ a^2의 값을 구할 수 있다.	30%

0142 **전략** 타원의 초점의 좌표와 장축의 길이를 이용하여 쌍곡선의 초점의 좌표와 주축의 길이를 구한다.

풀이 타원 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{10}=1$에서 $\sqrt{18-10}=2\sqrt{2}$이므로 초점의 좌표는

$$(2\sqrt{2},\ 0),\ (-2\sqrt{2},\ 0)$$

또 타원의 장축의 길이는 $\quad 2\cdot3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$ ➊

주어진 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$이라 하면 타원과 두 초점을 공유하므로

$$a^2+b^2=(2\sqrt{2})^2=8 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 쌍곡선의 두 꼭짓점이 타원의 장축을 3등분하므로 쌍곡선의 주축의 길이는

$$2a=\frac{1}{3}\cdot6\sqrt{2}=2\sqrt{2} \qquad \therefore a=\sqrt{2}$$

$a=\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$b^2=6 \qquad \therefore b=\sqrt{6}\ (\because b>0)$$ ➋

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}x$, 즉 $y=\pm\sqrt{3}x$ ⋯ ❸

$\alpha>\beta$에서 $\tan\alpha=-\sqrt{3}$, $\tan\beta=\sqrt{3}$이므로

$\alpha=\frac{2}{3}\pi$, $\beta=\frac{\pi}{3}$

$\therefore \tan(\alpha-\beta)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ ⋯ ❹

답 $\sqrt{3}$

채점 기준표

❶ 타원의 초점의 좌표와 장축의 길이를 구할 수 있다.	20%
❷ 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하고 a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 쌍곡선의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	20%
❹ $\tan(\alpha-\beta)$의 값을 구할 수 있다.	20%

0143 전략 쌍곡선의 정의를 이용한다.

풀이 쌍곡선 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{10}=1$에서 $\sqrt{6+10}=4$이므로 초점의 좌표는

$(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$ $\quad\therefore \overline{FF'}=8$ ⋯ ❶

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$ $(a>0,\ b>0)$라 하면

$\frac{a^2}{6}-\frac{b^2}{10}=1$ ⋯⋯ ㉠

이때 □PF′QF는 평행사변형이므로

$\triangle PF'F=\frac{1}{2}\square PF'QF=\frac{1}{2}\cdot 40=20$

$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot b=20 \quad \therefore b=5$ ⋯ ❷

$b=5$를 ㉠에 대입하면 $\quad\frac{a^2}{6}-\frac{25}{10}=1$

$\frac{a^2}{6}=\frac{7}{2}$, $\quad a^2=21$

$\therefore a=\sqrt{21}$ $(\because a>0)$ ⋯ ❸

따라서 점 P의 좌표는 $(\sqrt{21},\ 5)$이다. ⋯ ❹

답 $(\sqrt{21},\ 5)$

채점 기준표

❶ $\overline{FF'}$의 길이를 구할 수 있다.	20%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	10%

참고 □PF′QF는 두 대각선이 서로를 이등분하므로 평행사변형이다.

Ⅰ 평면 곡선

02 평면 곡선의 접선

0144 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2(x-1)+2(y+2)\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x-1}{y+2}$ $(y\neq-2)$ $\quad$ 답 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x-1}{y+2}$ $(y\neq-2)$

0145 $xy=5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$y+x\frac{dy}{dx}=0 \quad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$ $\quad$ 답 $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$

0146 $x^3-y^2+2xy-3=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2-2y\frac{dy}{dx}+2y+2x\frac{dy}{dx}=0$

$(2x-2y)\frac{dy}{dx}=-3x^2-2y$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2+2y}{2x-2y}$ $(x\neq y)$ $\quad$ 답 $\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2+2y}{2x-2y}$ $(x\neq y)$

0147 $\sin x+\sin y=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\cos x+\cos y\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\cos x}{\cos y}$ $(\cos y\neq0)$ $\quad$ 답 $\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos x}{\cos y}$ $(\cos y\neq0)$

SSEN 특강

삼각함수의 도함수

① $y=\sin x$ → $y'=\cos x$

② $y=\cos x$ → $y'=-\sin x$

③ $y=\tan x$ → $y'=\sec^2 x$

0148 $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}-\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x^2}\right)=0$

$\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{y^2}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}+\frac{y}{x^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2+y^2}{x^2y}}{\frac{x^2+y^2}{xy^2}}=\frac{y}{x}$ $\quad$ 답 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$

0149 $\ln|y|=x^3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=3x^2 \quad \therefore \frac{dy}{dx}=3x^2y$ $\quad$ 답 $\frac{dy}{dx}=3x^2y$

0150 (1) $x^2-3xy+y^2=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x-3y-3x\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$(3x-2y)\frac{dy}{dx}=2x-3y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x-3y}{3x-2y}$$

(2) $x=1,\ y=0$을 대입하면 $\frac{dy}{dx}=\frac{2\cdot1-3\cdot0}{3\cdot1-2\cdot0}=\frac{2}{3}$

(3) $y=\frac{2}{3}(x-1)$ $\quad\therefore y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$

답 풀이 참조

0151 $y^2=-x=4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)x$이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y=2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\{x+(-1)\}$$

$$\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

답 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

0152 $4x=2\cdot1\cdot(y+4)$

$\therefore y=2x-4$

답 $y=2x-4$

0153 $\frac{1\cdot x}{4}+\frac{(-3)\cdot y}{12}=1$

$\therefore x-y-4=0$

답 $x-y-4=0$

0154 $-1\cdot x+4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot y=4$

$\therefore x-2\sqrt{3}y+4=0$

답 $x-2\sqrt{3}y+4=0$

0155 $\frac{-5\cdot x}{20}-\frac{2\cdot y}{16}=1$

$\therefore 2x+y+8=0$

답 $2x+y+8=0$

0156 $\frac{6\cdot x}{12}-\frac{(-4)\cdot y}{4}=-1$

$\therefore x+2y+2=0$

답 $x+2y+2=0$

0157 $t=x+1$이므로

$y=(x+1)^2$

답 $y=(x+1)^2$

0158 $\cos\theta=x-1,\ \sin\theta=y+1$이고 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$이므로

$(x-1)^2+(y+1)^2=1$

답 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$

0159 $\tan\theta=\frac{x}{3},\ \sec\theta=\frac{y}{2}$이고 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이므로

$$1+\left(\frac{x}{3}\right)^2=\left(\frac{y}{2}\right)^2$$

$$\therefore \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=-1$$

답 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=-1$

0160 $\frac{dx}{dt}=1,\ \frac{dy}{dt}=2t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{1}=2t$$

답 $\frac{dy}{dx}=2t$

0161 $\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{t^2},\ \frac{dy}{dt}=3t^2$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2}{-\frac{1}{t^2}}=-3t^4$$

답 $\frac{dy}{dx}=-3t^4$

0162 (1) $\frac{dx}{dt}=1+\frac{1}{t^2},\ \frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{t^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^2}}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

(2) $x=\frac{3}{2},\ y=\frac{5}{2}$

(3) $t=2$이면 $\frac{dy}{dx}=\frac{2^2-1}{2^2+1}=\frac{3}{5}$이므로

$$y-\frac{5}{2}=\frac{3}{5}\left(x-\frac{3}{2}\right)\quad\therefore y=\frac{3}{5}x+\frac{8}{5}$$

답 풀이 참조

유형 01 음함수의 미분법 본책 30쪽

음함수 표현 $f(x,\ y)=0$에서 y를 x에 대한 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

➡ $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1},\ \frac{d}{dx}(y^n)=ny^{n-1}\frac{dy}{dx}$ (단, n은 실수)

0163 $x^3-y^3+axy+b=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$3x^2-3y^2\frac{dy}{dx}+ay+ax\frac{dy}{dx}=0$$

$$(3y^2-ax)\frac{dy}{dx}=3x^2+ay$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+ay}{3y^2-ax}\ (3y^2-ax\neq0)$$

$x=0,\ y=-1$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값이 2이므로

$$-\frac{a}{3}=2\quad\therefore a=-6$$

또 주어진 곡선이 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$1+b=0\quad\therefore b=-1$

$\therefore ab=6$

답 ⑤

0164 $T^2=\frac{2}{5}\pi^2L$의 양변을 L에 대하여 미분하면

$$2T\frac{dT}{dL}=\frac{2}{5}\pi^2$$

$\therefore \dfrac{dT}{dL}=\dfrac{\pi^2}{5T}$

$L=40$일 때, $\quad T^2=\dfrac{2}{5}\pi^2\cdot 40=16\pi^2$

$\therefore T=4\pi$ ($\because T>0$)

따라서 구하는 순간변화율은

$\dfrac{dT}{dL}=\dfrac{\pi^2}{5\cdot 4\pi}=\dfrac{\pi}{20}$ 답 $\dfrac{\pi}{20}$

0165 $e^{x+y}-e^{x-y}=1$에서

$e^x\cdot e^y-e^x\cdot e^{-y}=1$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\left(e^x\cdot e^y+e^x\cdot e^y\dfrac{dy}{dx}\right)-\left(e^x\cdot e^{-y}-e^x\cdot e^{-y}\dfrac{dy}{dx}\right)=0$

$e^x(e^y+e^{-y})\dfrac{dy}{dx}=e^x(e^{-y}-e^y)$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}$ 답 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}$

SSEN 특강

지수함수의 도함수

① $y=e^x \Rightarrow y'=e^x$

② $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq1$) $\Rightarrow y'=a^x\ln a$

0166 $\dfrac{\pi}{6}x=y-\cos xy$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{dy}{dx}+\sin xy\cdot\left(y+x\dfrac{dy}{dx}\right)$

$x=3$, $y=\dfrac{\pi}{2}$를 위의 식에 대입하면

$\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{dy}{dx}+\sin\dfrac{3}{2}\pi\cdot\left(\dfrac{\pi}{2}+3\dfrac{dy}{dx}\right)$

$\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{\pi}{2}-3\dfrac{dy}{dx}, \quad 2\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2}{3}\pi$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\pi}{3}$ 답 ②

0167 (1) $x^2+y^2=400$ ➊

(2) $x^2+y^2=400$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+2y\dfrac{dy}{dx}=0 \quad \therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ ($y\neq0$) ➋

(3) $x=16$일 때 $y=12$이므로 구하는 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$-\dfrac{16}{12}=-\dfrac{4}{3}$ ➌

답 (1) $x^2+y^2=400$ (2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ ($y\neq0$) (3) $-\dfrac{4}{3}$

채점 기준표

➊ x, y 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30%
➋ $\dfrac{dy}{dx}$를 구할 수 있다.	30%
➌ $x=16$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값을 구할 수 있다.	40%

유형 02~04 음함수로 나타낸 평면 곡선의 접선의 방정식 본책 30, 31쪽

평면 곡선 $f(x, y)=0$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 음함수의 미분법을 이용하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다.

(ii) $\dfrac{dy}{dx}$에 $x=a$, $y=b$를 대입하여 접선의 기울기 m을 구한다.

(iii) 접선의 방정식 $y-b=m(x-a)$를 구한다.

0168 점 $(1, a)$가 곡선 $x^2+2xy+y^2-y=1$ 위에 있으므로

$1+2a+a^2-a=1, \quad a(a+1)=0$

$\therefore a=0$ ($\because a\geq0$)

$x^2+2xy+y^2-y=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+2y+2x\dfrac{dy}{dx}+2y\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dy}{dx}=0$

$(2x+2y-1)\dfrac{dy}{dx}=-2x-2y$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2x-2y}{2x+2y-1}$ ($2x+2y\neq1$)

따라서 점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2}{2-1}=-2$ 답 -2

0169 $\sin(x+y)+\sin(x-y)=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\cos(x+y)\cdot\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)+\cos(x-y)\cdot\left(1-\dfrac{dy}{dx}\right)=0$

$\{\cos(x-y)-\cos(x+y)\}\dfrac{dy}{dx}=\cos(x-y)+\cos(x+y)$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{\cos(x-y)-\cos(x+y)}$

$(\cos(x-y)\neq\cos(x+y))$

따라서 점 $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos0+\cos\dfrac{\pi}{2}}{\cos0-\cos\dfrac{\pi}{2}}=1$ 답 1

0170 점 $(1, 1)$이 곡선 $ax+b\sqrt{y}-6x+3=0$ 위에 있으므로

$a+b-3=0 \quad \therefore a+b=3$ …… ㉠

$ax+b\sqrt{y}-6x+3=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$a+\dfrac{b}{2\sqrt{y}}\cdot\dfrac{dy}{dx}-6=0 \quad \therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(12-2a)\sqrt{y}}{b}$

점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기가 8이므로

$\dfrac{12-2a}{b}=8 \quad \therefore a+4b=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=2$, $b=1$

$\therefore a-b=1$ 답 1

0171 $x^3+y^3-9xy=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+3y^2\dfrac{dy}{dx}-9y-9x\dfrac{dy}{dx}=0, \quad (3x-y^2)\dfrac{dy}{dx}=x^2-3y$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2-3y}{3x-y^2}\ (3x\neq y^2)$

점 (2, 4)에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2^2-3\cdot4}{3\cdot2-4^2}=\frac{4}{5}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-4=\frac{4}{5}(x-2)\qquad \therefore y=\frac{4}{5}x+\frac{12}{5}$$

이 직선이 점 $(0,\ a)$를 지나므로 $\quad a=\dfrac{12}{5}$

답 $\dfrac{12}{5}$

0172 $x+\dfrac{x}{y}=2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$1+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0\qquad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y^2+y}{x}$$

점 (4, −2)에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(-2)^2-2}{4}=\frac{1}{2}$$

이므로 접선 l의 방정식은

$$y+2=\frac{1}{2}(x-4)\qquad \therefore y=\frac{1}{2}x-4$$

따라서 직선 l 위의 점은 ③ (2, −3)이다.

답 ③

0173 $y^2=\ln(5-x^2)+xy+8$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2y\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{5-x^2}+y+x\frac{dy}{dx}$$

$$(x-2y)\frac{dy}{dx}=\frac{2x-5y+x^2y}{5-x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x-5y+x^2y}{(x-2y)(5-x^2)}\ (x\neq 2y)$$

점 (2, −2)에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\cdot2-5\cdot(-2)+2^2\cdot(-2)}{\{2-2\cdot(-2)\}(5-2^2)}=1$$

이므로 접선의 방정식은

$$y+2=x-2\qquad \therefore y=x-4$$

따라서 $a=1,\ b=-4$이므로 $\quad ab=-4$

답 ①

0174 점 (1, −1)이 곡선 $\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{y}=x^2+8$ 위에 있으므로

$a+b=9$ ······ ㉠ ⋯→ ❶

$\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{y}=x^2+8$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$-\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}=2x$$

점 (1, −1)에서의 접선의 기울기가 $\dfrac{5}{6}$이므로

$$-a+\frac{5}{6}b=2$$

$\therefore 6a-5b=-12$ ······ ㉡ ⋯→ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=3,\ b=6$ ⋯→ ❸

$\therefore ab=18$ ⋯→ ❹

답 18

채점 기준표

❶ 곡선이 지나는 점을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	20%
❷ 접선의 기울기를 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	10%

0175 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}=0\qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\ (x\neq0)$$

점 $\left(\dfrac{4}{9},\ \dfrac{1}{9}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=-\frac{1}{2}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{9}=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{4}{9}\right)\qquad \therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$$

따라서 $A\left(\dfrac{2}{3},\ 0\right)$, $B\left(0,\ \dfrac{1}{3}\right)$이므로

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

답 $\dfrac{1}{9}$

0176 $x^2y-2=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2xy+x^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2xy}{x^2}=-\frac{2y}{x}$$

점 (1, 2)에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2\cdot2}{1}=-4$$

이므로 접선 l의 방정식은

$$y-2=-4(x-1)\qquad \therefore 4x+y-6=0$$

따라서 직선 l과 원점 사이의 거리는

$$\frac{|-6|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{6\sqrt{17}}{17}$$

답 ⑤

0177 $e^x-e^y=e-1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$e^x-e^y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{e^y}=e^{x-y}$$

점 P(1, 0)에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=e$$

이므로 접선 l_1의 방정식은

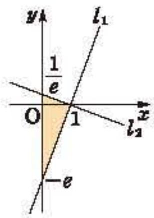
$$y=e(x-1)$$

직선 l_2는 기울기가 $-\dfrac{1}{e}$이고 점 P(1, 0)을 지나므로

$$y=-\frac{1}{e}(x-1)$$

따라서 구하는 넓이는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(e+\frac{1}{e}\right)=\frac{e^2+1}{2e}$$



답 $\frac{e^2+1}{2e}$

0178 점 $A_n(x_n, y_n)$이 곡선 $xy=5$ 위에 있으므로

$x_ny_n=5 \quad \therefore y_n=\frac{5}{x_n}$

$xy=5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$y+x\frac{dy}{dx}=0 \quad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$

점 $A_n\left(x_n, \frac{5}{x_n}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{5}{x_n}}{x_n}=-\frac{5}{{x_n}^2}$$

이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{5}{x_n}=-\frac{5}{{x_n}^2}(x-x_n) \quad \therefore y=-\frac{5}{{x_n}^2}x+\frac{10}{x_n}$

이 직선의 x절편은 $2x_n$이므로

$B_{n+1}(2x_n, 0)$

$\therefore x_{n+1}=2x_n$

$\therefore y_{n+1}=\frac{5}{x_{n+1}}=\frac{5}{2x_n}=\frac{1}{2}y_n$

따라서 수열 $\{y_n\}$은 첫째항이 5이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}y_n=\frac{5}{1-\frac{1}{2}}=10$$

답 10

SSEN 특강

등비급수의 합

첫째항이 a이고 공비가 r $(-1<r<1)$인 등비급수의 합은

$$\frac{a}{1-r}$$

유형 05, 06 포물선의 접선의 방정식 ; 접점의 좌표가 주어진 경우 본책 32쪽

① 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식
➡ $y_1y=2p(x+x_1)$

② 포물선 $x^2=4py$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식
➡ $x_1x=2p(y+y_1)$

0179 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $P(3, -2\sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은

$-2\sqrt{3}y=2(x+3) \quad \therefore y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}$

이 직선이 포물선 $y^2=ax$의 초점 $\left(\frac{a}{4}, 0\right)$을 지나므로

$-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a}{4}-\sqrt{3}=0$

$\therefore a=-12$

답 ①

0180 점 $(-2, a)$가 포물선 $y^2=-8x$ 위의 점이므로

$a^2=16 \quad \therefore a=4\ (\because a>0)$

따라서 점 $(-2, 4)$에서의 접선의 방정식은

$4y=2\cdot(-2)(x-2) \quad \therefore y=-x+2$

답 $y=-x+2$

0181 포물선 $x^2=-4y=4\cdot(-1)y$의 초점의 좌표는

$(0, -1)$ ····· ❶

점 $(4, -4)$에서의 접선의 방정식은

$4x=2\cdot(-1)(y-4) \quad \therefore y=-2x+4$ ····· ❷

이 직선과 평행하고 점 $(0, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+1=-2x \quad \therefore y=-2x-1$ ····· ❸

따라서 이 직선의 x절편은 $-\frac{1}{2}$이다. ····· ❹

답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준표

❶ 포물선의 초점의 좌표를 구할 수 있다.	20%
❷ 점 $(4, -4)$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ 접선과 평행하고 초점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❹ 직선의 x절편을 구할 수 있다.	10%

0182 포물선 $y^2=2x=4\cdot\frac{1}{2}x$ 위의 점 $(2, 2)$에서의 접선의 방정식은

$2y=2\cdot\frac{1}{2}(x+2) \quad \therefore y=\frac{1}{2}x+1$ ······ ㉠

또 점 $(8, -4)$에서의 접선의 방정식은

$-4y=2\cdot\frac{1}{2}(x+8) \quad \therefore y=-\frac{1}{4}x-2$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-4,\ y=-1$

따라서 두 접선의 교점의 좌표가 $(-4, -1)$이므로

$a=-4,\ b=-1 \quad \therefore a+b=-5$

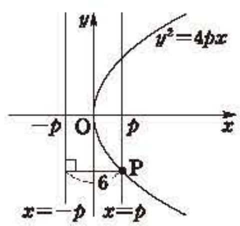
답 ①

0183 포물선 $y^2=4px$의 준선의 방정식은 $x=-p$이므로 오른쪽 그림에서

$2p=6 \quad \therefore p=3$

즉 포물선의 방정식이 $y^2=12x$이므로 $x=3$을 대입하면

$y^2=36 \quad \therefore y=\pm 6$



즉 $P(3, -6)$이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$-6y=2\cdot 3(x+3) \quad \therefore y=-x-3$

따라서 $m=-1,\ n=-3$이므로 $m+n=-4$

답 -4

0184 점 $P(a, b)$가 포물선 $y^2=x$ 위의 점이므로

$b^2=a$ ······ ㉠

포물선 $y^2=x=4\cdot\frac{1}{4}x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$$by=2\cdot\frac{1}{4}(x+a)\qquad\therefore\ y=\frac{1}{2b}(x+a)$$

이 접선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각

$$(-a,\ 0),\ \left(0,\ \frac{a}{2b}\right)$$

이므로 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a}{2b}=\frac{1}{4}\qquad\therefore\ \frac{a^2}{b}=1\qquad\cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$b^3=1\qquad\therefore\ b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면

$a=1$

$\therefore\ a+b=2$

답 ②

0185 포물선 $y^2=-8x=4\cdot(-2)x$에서 $\mathrm{F}(-2,\ 0)$

포물선 $y^2=-8x$ 위의 점 $\mathrm{P}(-2,\ -4)$에서의 접선의 방정식은

$-4y=2\cdot(-2)(x-2)\qquad\therefore\ y=x-2$

따라서 $\mathrm{Q}(2,\ 0)$이므로

$$\triangle\mathrm{PQF}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{FQ}}\cdot\overline{\mathrm{FP}}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot4=8$$

답 ③

0186 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로

$b^2=4a\qquad\cdots\cdots$ ㉠

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$by=2(x+a)$

이므로 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(-a,\ 0)$

$\overline{\mathrm{PQ}}=4\sqrt{3}$이므로 $\sqrt{4a^2+b^2}=4\sqrt{3}$

양변을 제곱하면 $4a^2+b^2=48\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $4a^2+4a=48$

$a^2+a-12=0,\qquad(a+4)(a-3)=0$

$\therefore\ a=-4$ 또는 $a=3$

이때 $b^2=4a$에서 $a\geq0$이므로 $a=3$

$\therefore\ a^2+b^2=3^2+4\cdot3=21$

답 ①

0187 포물선 $y^2=8x=4\cdot2x$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2\cdot2(x+x_1)\qquad\therefore\ y=\frac{4}{y_1}x+\frac{4x_1}{y_1}$$

따라서 두 점 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$에서의 접선의 기울기는 각각

$$\frac{4}{b},\ \frac{4}{d}$$

이때 두 접선이 서로 수직이므로

$$\frac{4}{b}\cdot\frac{4}{d}=-1\qquad\therefore\ bd=-16$$

답 -16

0188 점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면

$\mathrm{H}(x_1,\ 0)$

포물선 $y^2=4px$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2p(x+x_1)\qquad\therefore\ y=\frac{2p}{y_1}x+\frac{2px_1}{y_1}$$

따라서 접선의 x절편이 $-x_1$이므로 $\mathrm{Q}(-x_1,\ 0)$

$$\therefore\ \frac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{OQ}}}=\frac{|x_1|}{|x_1|}=1$$

답 1

유형 07 포물선의 접선의 방정식 ; 기울기가 주어진 경우

본책 39쪽

포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$y_1y=2p(x+x_1)$

➡ 접선의 기울기가 $\frac{2p}{y_1}$이고, $y_1^2=4px_1$임을 이용하여 x_1, y_1의 값을 구한다.

0189 포물선 $y^2=-12x=4\cdot(-3)x$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2\cdot(-3)(x+x_1)\qquad\therefore\ y=-\frac{6}{y_1}x-\frac{6x_1}{y_1}$$

이 직선의 기울기가 $\tan30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$$-\frac{6}{y_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}\qquad\therefore\ y_1=-6\sqrt{3}$$

이때 $y_1^2=-12x_1$이므로 $x_1=-\frac{y_1^2}{12}=-9$

따라서 접선의 방정식은 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-3\sqrt{3}$

이 직선이 점 $(3,\ a)$를 지나므로

$$a=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot3-3\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$$

답 $-2\sqrt{3}$

0190 포물선 $y^2=-4x=4\cdot(-1)x$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2\cdot(-1)(x+x_1)\qquad\therefore\ y=-\frac{2}{y_1}x-\frac{2x_1}{y_1}$$

직선 $x-y-3=0$, 즉 $y=x-3$과 평행한 직선의 기울기는 1이므로

$$-\frac{2}{y_1}=1\qquad\therefore\ y_1=-2$$

이때 $y_1^2=-4x_1$이므로 $x_1=-\frac{y_1^2}{4}=-1$

따라서 접선의 방정식은 $y=x-1$이므로

$\mathrm{P}(1,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ -1)$

$$\therefore\ \triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0191 포물선 $y^2=12x=4\cdot3x$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2\cdot3(x+x_1)\qquad\therefore\ y=\frac{6}{y_1}x+\frac{6x_1}{y_1}\qquad\cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠이 $y=mx+2m-1$과 일치해야 하므로

$$\frac{6}{y_1}=m,\ \frac{6x_1}{y_1}=2m-1$$

$m=\frac{6}{y_1}$을 $\frac{6x_1}{y_1}=2m-1$에 대입하면

$$\frac{6x_1}{y_1}=\frac{12}{y_1}-1 \qquad \therefore x_1=-\frac{1}{6}y_1+2$$

이때 $y_1^2=12x_1$이므로

$$y_1^2=-2y_1+24, \qquad y_1^2+2y_1-24=0$$
$$(y_1+6)(y_1-4)=0$$
$$\therefore y_1=-6 \text{ 또는 } y_1=4$$

따라서 $m=\frac{6}{-6}=-1$ 또는 $m=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$이므로

$$\alpha=\frac{3}{2},\ \beta=-1 \qquad \therefore \alpha-\beta=\frac{5}{2}$$

답 ⑤

0192 □ADCB가 정사각형이므로 $\angle BAD=90°$

직선 AB가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45°이므로 직선 AB의 기울기는 $\tan 45°=1$

점 B의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 포물선 $y^2=8x=4\cdot 2x$ 위의 점 $B(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2\cdot 2(x+x_1) \qquad \therefore y=\frac{4}{y_1}x+\frac{4x_1}{y_1}$$

이 직선의 기울기가 1이므로

$$\frac{4}{y_1}=1 \qquad \therefore y_1=4$$

이때 $y_1^2=8x_1$이므로 $x_1=\frac{y_1^2}{8}=2$

따라서 B(2, 4)이고, 직선 BC의 기울기는 -1이므로 직선 BC의 방정식은

$$y-4=-(x-2) \qquad \therefore y=-x+6$$
$$\therefore C(6,\ 0)$$

답 ④

0193 점 A의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 포물선 $x=-2y^2$, 즉 $y^2=-\frac{1}{2}x=4\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)x$ 위의 점 $A(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)(x+x_1) \qquad \therefore y=-\frac{1}{4y_1}x-\frac{x_1}{4y_1}$$

이 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$$-\frac{1}{4y_1}=\frac{1}{2} \qquad \therefore y_1=-\frac{1}{2}$$

이때 $x_1=-2y_1^2$이므로 $x_1=-\frac{1}{2}$

$$\therefore A\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$$ ⋯❶

따라서 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$

$$\therefore k=-\frac{1}{4}$$ ⋯❷

$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$을 $x^2=4y$에 대입하면

$$x^2=2x-1, \qquad (x-1)^2=0 \qquad \therefore x=1$$
$$\therefore B\left(1,\ \frac{1}{4}\right)$$ ⋯❸

$$\therefore \overline{AB}=\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{4}$$ ⋯❹

답 $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

채점 기준표

❶ 점 A의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ 점 B의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❹ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	10%

유형 08 포물선과 직선 사이의 거리의 최솟값

본책 34쪽

기울기가 m인 직선 l과 포물선 사이의 거리의 최솟값

➡ 기울기가 m인 포물선의 접선과 직선 l 사이의 거리

0194 포물선 $y^2=2x=4\cdot\frac{1}{2}x$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2\cdot\frac{1}{2}(x+x_1) \qquad \therefore y=\frac{1}{y_1}x+\frac{x_1}{y_1}$$

직선 $x-2y+4=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+2$와 평행한 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{y_1}=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore y_1=2$

이때 $y_1^2=2x_1$이므로 $x_1=\frac{y_1^2}{2}=2$

따라서 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x+1$

이 접선 위의 점 (0, 1)과 직선 $x-2y+4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-2+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

이므로 구하는 거리의 최솟값은 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$이다.

답 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

SSEN 특강

점과 직선 사이의 거리

① 좌표평면에서 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

② 평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 임의의 점과 직선 l' 사이의 거리와 같다.

0195 점 P의 좌표를 (a^2, a)라 하면 포물선 $y^2=x=4\cdot\frac{1}{4}x$ 위의 점 $P(a^2, a)$에서의 접선 l의 방정식은

$$ay=2\cdot\frac{1}{4}(x+a^2) \qquad \therefore y=\frac{1}{2a}x+\frac{a}{2}$$

한편 직선 AP가 직선 l과 서로 수직으로 만날 때 $\overline{AP}$의 길이가 최소이므로

$$\frac{1}{2a}\cdot\frac{a-6}{a^2-3}=-1, \qquad 2a^3-5a-6=0$$
$$(a-2)(2a^2+4a+3)=0$$
$$\therefore a=2\ (\because 2a^2+4a+3>0)$$

$a=2$일 때 P(4, 2)이므로 구하는 최솟값은

$$\sqrt{(4-3)^2+(2-6)^2}=\sqrt{17}$$

답 ①

0196 점 P와 직선 $y=-x+5$ 사이의 거리가 최소이려면 점 P에서의 접선이 직선 $y=-x+5$와 평행해야 한다.
포물선 $y^2=-\frac{1}{2}x=4\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)x$ 위의 점 $P(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$$by=2\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)(x+a) \qquad \therefore y=-\frac{1}{4b}x-\frac{a}{4b}$$

접선의 기울기가 -1이므로

$$-\frac{1}{4b}=-1 \qquad \therefore b=\frac{1}{4}$$

이때 $b^2=-\frac{1}{2}a$이므로 $\quad a=-2b^2=-\frac{1}{8}$

$$\therefore a+b=\frac{1}{8}$$

답 ③

유형 09 포물선 밖의 점에서 그은 접선의 방정식 본책 94쪽

포물선 $y^2=4px$ 밖의 한 점 $(a,\ b)$에서 그은 접선의 방정식
➡ 포물선 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선 $y_1y=2p(x+x_1)$이 점 $(a,\ b)$를 지남을 이용한다.

0197 포물선 $x^2=6y=4\cdot\frac{3}{2}y$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x=2\cdot\frac{3}{2}(y+y_1) \qquad \therefore y=\frac{x_1}{3}x-y_1$$

이 직선이 점 $(3,\ -12)$를 지나므로

$$-12=x_1-y_1 \qquad \therefore y_1=x_1+12$$

이때 $x_1^2=6y_1$이므로 $\quad x_1^2=6x_1+72$

$$x_1^2-6x_1-72=0, \qquad (x_1+6)(x_1-12)=0$$

$$\therefore x_1=-6 \text{ 또는 } x_1=12$$

따라서 접점의 좌표는 $(-6,\ 6)$, $(12,\ 24)$이므로 두 접선의 방정식은

$$y=-2x-6,\ y=4x-24$$

즉 직선 $y=-2x-6$이 점 $(2,\ k)$를 지나므로

$$k=-2\cdot2-6=-10$$

답 -10

0198 포물선 $y^2=-16x=4\cdot(-4)x$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2\cdot(-4)(x+x_1) \qquad \therefore y=-\frac{8}{y_1}x-\frac{8x_1}{y_1}$$

이 직선이 점 $(2,\ 2)$를 지나므로

$$2=-\frac{16}{y_1}-\frac{8x_1}{y_1} \qquad \therefore y_1=-4x_1-8$$

이때 $y_1^2=-16x_1$이므로 $\quad (-4x_1-8)^2=-16x_1$

$$x_1^2+5x_1+4=0, \qquad (x_1+4)(x_1+1)=0$$

$$\therefore x_1=-4 \text{ 또는 } x_1=-1$$

따라서 접점의 좌표는 $(-4,\ 8)$, $(-1,\ -4)$이므로 두 접선의 방정식은

$$y=-x+4,\ y=2x-2$$

즉 두 접선의 기울기의 곱은 $\quad -1\cdot2=-2$

답 ①

0199 포물선 $y^2=x=4\cdot\frac{1}{4}x$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2\cdot\frac{1}{4}(x+x_1) \qquad \therefore y=\frac{1}{2y_1}x+\frac{x_1}{2y_1}$$ ➡ ❶

이 직선이 점 $(-4,\ 0)$을 지나므로

$$0=-\frac{2}{y_1}+\frac{x_1}{2y_1} \qquad \therefore x_1=4$$

이때 $y_1^2=x_1$이므로 $\quad y_1^2=4 \quad \therefore y_1=\pm2$

따라서 접점 P, Q의 좌표는

$(4,\ 2)$, $(4,\ -2)$ ➡ ❷

이므로 $\overline{PQ}$의 중점의 좌표는 $\quad (4,\ 0)$ ➡ ❸ 답 $(4,\ 0)$

채점 기준표

❶ 포물선 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ 점 P, Q의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❸ $\overline{PQ}$의 중점의 좌표를 구할 수 있다.	20%

0200 두 점 P, Q의 좌표를 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 하고 두 점 P, Q에서의 접선을 각각 l_1, l_2라 하면

$$l_1:\ y_1y=2(x+x_1),\ l_2:\ y_2y=2(x+x_2)$$

두 직선 l_1, l_2가 모두 점 $A(-1,\ 3)$을 지나므로

$$3y_1=2(x_1-1),\ 3y_2=2(x_2-1)$$

즉 두 점 $P(x_1,\ y_1)$, $Q(x_2,\ y_2)$는 모두 직선 $3y=2(x-1)$ 위에 있고 서로 다른 두 점을 지나는 직선은 오직 하나뿐이므로 직선 PQ의 방정식은

$$3y=2(x-1) \qquad \therefore y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$$

따라서 이 직선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(1,\ 0)$, $\left(0,\ -\frac{2}{3}\right)$이므로 구하는 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

답 ②

0201 포물선 $x^2=y=4\cdot\frac{1}{4}y$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x=2\cdot\frac{1}{4}(y+y_1) \qquad \therefore y=2x_1x-y_1$$

이 직선이 점 $P(0,\ -1)$을 지나므로

$$-1=-y_1 \qquad \therefore y_1=1$$

이때 $x_1^2=y_1$이므로 $\quad x_1^2=1 \quad \therefore x_1=\pm1$

$\therefore A(1,\ 1),\ B(-1,\ 1)$ ➡ ❶

따라서 직선 PA의 방정식은 $y=2x-1$이므로 직선 AC의 방정식은

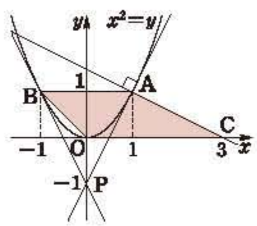
$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

$\therefore C(3,\ 0)$ ➡ ❷

$$\therefore \square OCAB=\frac{1}{2}\cdot(2+3)\cdot1$$

$$=\frac{5}{2}$$ ➡ ❸



답 $\frac{5}{2}$

채점 기준표

❶ 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	50%
❷ 점 C의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❸ □OCAB의 넓이를 구할 수 있다.	20%

유형 10 두 접선이 서로 수직일 때 본책 35쪽

① 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 기울기 ➡ $\frac{2p}{y_1}$
② 두 접선이 서로 수직이면 두 접선의 기울기의 곱은 -1이다.

0202 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2(x+x_1) \qquad \therefore y=\frac{2}{y_1}x+\frac{2x_1}{y_1}$$

이 직선이 점 $(k, 1)$을 지나므로 $\quad 1=\frac{2}{y_1}k+\frac{2x_1}{y_1}$

$$\therefore 2k+2x_1-y_1=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $y_1^2=4x_1$이므로 $\quad x_1=\frac{y_1^2}{4}$

$x_1=\frac{y_1^2}{4}$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$y_1^2-2y_1+4k=0$$

이 이차방정식의 두 실근을 α, β라 하면 접선의 기울기는 $\frac{2}{\alpha}$, $\frac{2}{\beta}$이므로

$$\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{2}{\beta}=-1 \qquad \therefore \alpha\beta=-4$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$4k=-4 \qquad \therefore k=-1$$

답 ⑤

0203 $A(a, \sqrt{2a})$, $B(a, -\sqrt{2a})$라 하면 포물선 $y^2=2x=4\cdot\frac{1}{2}x$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$$\sqrt{2a}y=2\cdot\frac{1}{2}(x+a) \qquad \therefore y=\frac{1}{\sqrt{2a}}x+\frac{a}{\sqrt{2a}}$$

점 B에서의 접선의 방정식은

$$-\sqrt{2a}y=2\cdot\frac{1}{2}(x+a) \qquad \therefore y=-\frac{1}{\sqrt{2a}}x-\frac{a}{\sqrt{2a}}$$

따라서 두 직선 l_1, l_2의 기울기는 각각 $-\sqrt{2a}$, $\sqrt{2a}$이고 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이므로

$$-\sqrt{2a}\cdot\sqrt{2a}=-1, \qquad 2a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0204 포물선 $x^2=y=4\cdot\frac{1}{4}y$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$x_1x=2\cdot\frac{1}{4}(y+y_1) \qquad \therefore y=2x_1x-y_1$$

이 직선이 점 $P(a, b)$를 지나므로

$$b=2ax_1-y_1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $x_1^2=y_1$이므로 이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x_1^2-2ax_1+b=0$$

이 이차방정식의 두 실근을 α, β라 하면 접선의 기울기는 2α, 2β이므로

$$2\alpha\cdot2\beta=-1 \qquad \therefore \alpha\beta=-\frac{1}{4}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\quad b=-\frac{1}{4}$

따라서 점 $P(a, b)$의 자취는 ①과 같다.

답 ①

유형 11, 12 타원의 접선의 방정식 ; 접점의 좌표가 주어진 경우 본책 35, 36쪽

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식
➡ $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$

0205 타원 $x^2+4y^2=4$ 위의 점 $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$\sqrt{3}x+4\cdot\frac{1}{2}y=4 \qquad \therefore y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+2$$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$이다.

또 $\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$에서 타원의 초점의 좌표는 $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$이므로 기울기가 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$이고 점 $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$을 지나는 직선의 방정식은 각각

$$y=\frac{2\sqrt{3}}{3}(x-\sqrt{3}),\ y=\frac{2\sqrt{3}}{3}(x+\sqrt{3})$$

$$\therefore y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x-2,\ y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x+2$$

따라서 구하는 y절편의 곱은 $\quad -2\cdot2=-4$

답 -4

0206 타원 $x^2+3y^2=16$ 위의 점 $(2, 2)$에서의 접선의 방정식은

$$2x+3\cdot2y=16 \qquad \therefore x+3y=8$$

이 직선이 점 $(a, -1)$을 지나므로

$$a-3=8 \qquad \therefore a=11$$

답 ⑤

0207 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{ax}{9}+\frac{by}{3}=1$$

이 직선이 점 $(0, 2)$를 지나므로

$$\frac{2}{3}b=1 \qquad \therefore b=\frac{3}{2}$$

이때 $\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{3}=1$이므로 $\quad \frac{a^2}{9}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{3}=1$

$$\frac{a^2}{9}=\frac{1}{4}, \qquad a^2=\frac{9}{4} \qquad \therefore a=\frac{3}{2}\ (\because a>0)$$

$$\therefore ab=\frac{9}{4}$$

답 ⑤

02 평면 곡선의 접선

0208 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$$\frac{1}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 타원 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x}{a^2}+\frac{3y}{b^2}=1 \qquad \therefore y=-\frac{b^2}{3a^2}x+\frac{b^2}{3}$$

이 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로

$$-\frac{b^2}{3a^2}=-\frac{1}{2} \qquad \therefore b^2=\frac{3}{2}a^2$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{a^2}+\frac{6}{a^2}=1, \quad a^2=7 \quad \therefore a=\sqrt{7}\ (\because a>0)$$

$b^2=\frac{3}{2}\cdot 7=\frac{21}{2}$에서 $\quad b=\frac{\sqrt{42}}{2}\ (\because b>0)$

$$\therefore ab=\frac{7\sqrt{6}}{2}$$

답 $\frac{7\sqrt{6}}{2}$

0209 타원 $4x^2+y^2=8$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$4x_1x+y_1y=8 \qquad \therefore y=-\frac{4x_1}{y_1}x+\frac{8}{y_1}$$

이 직선의 x절편은 $\frac{2}{x_1}$, y절편은 $\frac{8}{y_1}$이므로 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{|x_1|}\cdot\frac{8}{|y_1|}=\frac{8}{|x_1y_1|}$$

이때 타원 $4x^2+y^2=8$이 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$을 지나므로

$$4x_1^2+y_1^2=8$$

$x_1^2>0,\ y_1^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4x_1^2+y_1^2\ge 2\sqrt{4x_1^2\cdot y_1^2}\ (\text{단, 등호는 } 4x_1^2=y_1^2\text{일 때 성립})$$

$$8\ge 4|x_1y_1| \qquad \therefore |x_1y_1|\le 2$$

따라서 $\frac{8}{|x_1y_1|}\ge\frac{8}{2}=4$이므로 구하는 최솟값은 4이다. 답 4

0210 점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면

$\mathrm{H}(x_1,\ 0)$

타원 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{18}+\frac{y_1y}{9}=1$$

따라서 접선의 x절편이 $\frac{18}{x_1}$이므로 $\quad \mathrm{Q}\left(\frac{18}{x_1},\ 0\right)$

$$\therefore \overline{\mathrm{OH}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}=|x_1|\cdot\frac{18}{|x_1|}=18$$

답 ③

0211 타원 $2x^2+y^2=6$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$$2x+2y=6 \qquad \therefore y=-x+3$$

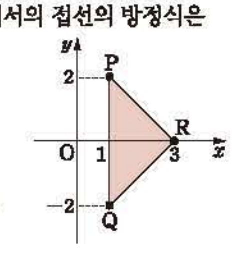
또 점 $\mathrm{Q}(1,\ -2)$에서의 접선의 방정식은

$$2x-2y=6 \qquad \therefore y=x-3$$

두 접선의 교점 R의 좌표가 $(3,\ 0)$이므로

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot2=4$$

답 ③



0212 타원 $x^2+3y^2=12$ 위의 점 $(3,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$$3x+3y=12 \qquad \therefore x+y-4=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠과 점 P 사이의 거리의 최댓값은 점 $(3,\ 1)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점 $(-3,\ -1)$과 직선 ㉠ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-3-1-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4\sqrt{2}$$

답 $4\sqrt{2}$

0213 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$에서 $\sqrt{9-5}=2$이므로

$\mathrm{F}(2,\ 0),\ \mathrm{F'}(-2,\ 0) \qquad \therefore \overline{\mathrm{FF'}}=4$ ➊

이때 두 삼각형 PF′F, PF′A의 높이가 같으므로

$\overline{\mathrm{F'F}}:\overline{\mathrm{F'A}}=\triangle\mathrm{PF'F}:\triangle\mathrm{PF'A}=1:2$

$\therefore \overline{\mathrm{F'A}}=2\overline{\mathrm{FF'}}=8 \qquad \therefore \mathrm{A}(6,\ 0)$ ➋

타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{ax}{9}+\frac{by}{5}=1$$

이 직선이 점 $\mathrm{A}(6,\ 0)$을 지나므로

$$\frac{6}{9}a=1 \qquad \therefore a=\frac{3}{2}$$

점 $\mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ b\right)$가 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 위에 있으므로

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{9}+\frac{b^2}{5}=1, \qquad \frac{b^2}{5}=\frac{3}{4}$$

$b^2=\frac{15}{4} \qquad \therefore b=\frac{\sqrt{15}}{2}\ (\because b>0)$ ➌

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{\sqrt{15}}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{15}}{3}$ ➍

답 $\frac{\sqrt{15}}{3}$

채점 기준표

➊ $\overline{\mathrm{FF'}}$의 길이를 구할 수 있다.	20%
➋ 점 A의 좌표를 구할 수 있다.	20%
➌ a, b의 값을 구할 수 있다.	50%
➍ $\frac{b}{a}$의 값을 구할 수 있다.	10%

0214 포물선과 타원의 교점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하자.

포물선 $y^2=8x=4\cdot2x$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2\cdot2(x+x_1) \qquad \therefore y=\frac{4}{y_1}x+\frac{4x_1}{y_1} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{4}=1 \qquad \therefore y=-\frac{4x_1}{a^2y_1}x+\frac{4}{y_1} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

두 직선 ㉠, ㉡이 서로 수직이므로

$$\frac{4}{y_1}\cdot\left(-\frac{4x_1}{a^2y_1}\right)=-1 \qquad \therefore y_1^2=\frac{16x_1}{a^2}$$

이때 $y_1^2=8x_1$이므로 $\quad \frac{16x_1}{a^2}=8x_1$

$x_1\ne0$이므로 $\quad a^2=\frac{16x_1}{8x_1}=2$

답 ②

유형 13, 14 타원의 접선의 방정식 ; 기울기가 주어진 경우 본책 36, 37쪽

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

➡ 접선의 기울기가 $-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$이고, $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$임을 이용하여 x_1, y_1의 값을 구한다.

0215 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{9}+\frac{y_1y}{3}=1 \qquad \therefore y=-\frac{x_1}{3y_1}x+\frac{3}{y_1}$$

직선 $3x+y-1=0$, 즉 $y=-3x+1$에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이므로

$$-\frac{x_1}{3y_1}=\frac{1}{3} \qquad \therefore x_1=-y_1$$

이때 $\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{3}=1$이므로 $\frac{y_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{3}=1$

$$y_1^2=\frac{9}{4} \qquad \therefore y_1=\pm\frac{3}{2}$$

따라서 직선의 방정식은 $y=\frac{1}{3}x\pm2$이므로

$$m=\frac{1}{3},\ n=\pm2$$

$$\therefore 9m^2+n^2=9\cdot\frac{1}{9}+4=5$$

답 ①

0216 타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{24}=1$ 위의 점 (1, 4)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x}{3}+\frac{4y}{24}=1 \qquad \therefore y=-2x+6 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{ax}{4}+by=1 \qquad \therefore y=-\frac{a}{4b}x+\frac{1}{b} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

두 직선 ㉠, ㉡이 서로 평행하므로

$$-\frac{a}{4b}=-2 \qquad \therefore a=8b$$

이때 $\frac{a^2}{4}+b^2=1$이므로 $16b^2+b^2=1 \qquad \therefore b^2=\frac{1}{17}$

$a^2=64b^2=\frac{64}{17}$이므로 $a^2-b^2=\frac{63}{17}$

답 $\frac{63}{17}$

0217 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 점 (3, 2)를 지나므로

$$\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 타원 위의 점 (3, 2)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{3x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}=1 \qquad \therefore y=-\frac{3b^2}{2a^2}x+\frac{b^2}{2}$$

이 직선의 기울기가 -2이므로

$$-\frac{3b^2}{2a^2}=-2 \qquad \therefore b^2=\frac{4}{3}a^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$\frac{9}{a^2}+\frac{3}{a^2}=1 \qquad \therefore a^2=12$$

$a^2=12$를 ㉡에 대입하면 $b^2=16$

즉 타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$에서 $\sqrt{16-12}=2$이므로 초점의 좌표는

(0, 2), (0, −2)

따라서 두 초점 사이의 거리는

$$2-(-2)=4$$

답 4

0218 직선 $y=2x+1$을 x축의 방향으로 k만큼 평행이동하면

$$y=2(x-k)+1 \qquad \therefore y=2x-2k+1$$

한편 타원 $9x^2+4y^2=36$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$9x_1x+4y_1y=36 \qquad \therefore y=-\frac{9x_1}{4y_1}x+\frac{9}{y_1}$$

이 직선이 직선 $y=2x-2k+1$과 일치하므로

$$-\frac{9x_1}{4y_1}=2,\ \frac{9}{y_1}=-2k+1$$

이때 $x_1=-\frac{8}{9}y_1$이고 $9x_1^2+4y_1^2=36$이므로

$$\frac{64}{9}y_1^2+4y_1^2=36,\quad y_1^2=\frac{81}{25} \qquad \therefore y_1=\pm\frac{9}{5}$$

$\frac{9}{y_1}=-2k+1$에서 $k=-\frac{9}{2y_1}+\frac{1}{2}$이므로

$y_1=\frac{9}{5}$일 때 $k=-2$, $y_1=-\frac{9}{5}$일 때 $k=3$

그런데 $k>0$이므로 $k=3$

답 ③

0219 타원 $4x^2+5y^2=20$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$4x_1x+5y_1y=20 \qquad \therefore y=-\frac{4x_1}{5y_1}x+\frac{4}{y_1}$$

이 직선의 기울기가 3이므로 $-\frac{4x_1}{5y_1}=3$

$$\therefore x_1=-\frac{15}{4}y_1$$

이때 $4x_1^2+5y_1^2=20$이므로 $\frac{225}{4}y_1^2+5y_1^2=20$

$$y_1^2=\frac{16}{49} \qquad \therefore y_1=\pm\frac{4}{7}$$

따라서 두 접선의 방정식은

$$y=3x\pm7$$

두 접선 사이의 거리는 직선 $y=3x+7$ 위의 점 (0, 7)과 직선 $y=3x-7$, 즉 $3x-y-7=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-7-7|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{7\sqrt{10}}{5}$$

답 ②

0220 타원 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$와 직선 $2x-y-7=0$, 즉 $y=2x-7$ 사이의 거리가 최소이려면 점 P에서의 접선의 기울기가 2이어야 한다.

타원 $x^2+4y^2=4$ 위의 점 $P(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$$ax+4by=4 \qquad \therefore y=-\frac{a}{4b}x+\frac{1}{b}$$

따라서 $-\frac{a}{4b}=2$이므로 $\quad a=-8b$

이때 $a^2+4b^2=4$이므로 $\quad 64b^2+4b^2=4 \qquad \therefore b^2=\frac{1}{17}$

$$\therefore 17(a^2+b^2)=17(64b^2+b^2)=17\cdot 65b^2$$
$$=17\cdot 65\cdot \frac{1}{17}=65$$

답 ⑤

0221 타원 위의 점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $y=-x+6$ 사이의 거리가 최대이려면 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 기울기가 -1이어야 한다. ··· ❶

타원 $x^2+3y^2=6$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+3y_1y=6 \qquad \therefore y=-\frac{x_1}{3y_1}x+\frac{2}{y_1}$$

따라서 $-\frac{x_1}{3y_1}=-1$이므로 $\quad x_1=3y_1$

이때 $x_1^2+3y_1^2=6$이므로 $\quad 9y_1^2+3y_1^2=6$

$$y_1^2=\frac{1}{2} \qquad \therefore y_1=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

따라서 기울기가 -1이고 타원 $x^2+3y^2=6$에 접하는 직선의 방정식은

$$y=-x\pm 2\sqrt{2}$$ ··· ❷

구하는 최댓값은 직선 $y=-x-2\sqrt{2}$ 위의 점 $(0,\ -2\sqrt{2})$와 직선 $y=-x+6$, 즉 $x+y-6=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-2\sqrt{2}-6|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}+2$$ ··· ❸

답 $3\sqrt{2}+2$

채점 기준표

❶ 타원 위의 점과 직선 사이의 거리가 최대인 경우를 알 수 있다.	20%
❷ 타원의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	50%
❸ 타원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값을 구할 수 있다.	30%

참고 타원 위의 점과 직선 $y=-x+6$ 사이의 거리의 최솟값은 직선 $y=-x+2\sqrt{2}$ 위의 점 $(0,\ 2\sqrt{2})$와 직선 $y=-x+6$, 즉 $x+y-6=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2\sqrt{2}-6|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}-2$$

0222 타원 $16x^2+9y^2=144$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$16x_1x+9y_1y=144 \qquad \therefore y=-\frac{16x_1}{9y_1}x+\frac{16}{y_1}$$

직선 AB의 기울기가 1이므로 ∠ABC=45°이므로 기울기는 tan 45°=1

$$-\frac{16x_1}{9y_1}=1 \qquad \therefore x_1=-\frac{9}{16}y_1$$

이때 $16x_1^2+9y_1^2=144$이므로 $\quad \frac{81}{16}y_1^2+9y_1^2=144$

$$y_1^2=\frac{256}{25} \qquad \therefore y_1=\pm\frac{16}{5}$$

따라서 직선 AB의 방정식은

$$y=x+5$$

한편 직선 BC의 방정식은 $y=-4$이므로

$$B(-9,\ -4)$$

또 $C(3,\ -4)$이므로 $\quad \overline{BC}=12$

$\triangle ABC$는 직각이등변삼각형이므로 $\quad \overline{AC}=12$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 12=72$$

답 72

유형 15 타원 밖의 점에서 그은 접선의 방정식 본책 38쪽

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 밖의 한 점 $(p,\ q)$에서 그은 접선의 방정식

➡ 타원 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$이 점 $(p,\ q)$를 지남을 이용한다.

0223 타원 $x^2+2y^2=2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+2y_1y=2$$

이 직선이 점 $(-2,\ 0)$을 지나므로

$$-2x_1=2 \qquad \therefore x_1=-1$$

이때 $x_1^2+2y_1^2=2$이므로

$$1+2y_1^2=2,\quad y_1^2=\frac{1}{2} \qquad \therefore y_1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 접선의 방정식은

$$-x\pm 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}y=2,\text{ 즉 } x\mp\sqrt{2}y+2=0$$

이므로 $\quad a=\pm\sqrt{2},\ b=2$

$$\therefore a^2+b^2=2+4=6$$

답 ②

0224 점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 타원 $3x^2+4y^2=12$ 위의 점 $P(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$3x_1x+4y_1y=12$$

이 직선이 점 $A(a,\ 0)$을 지나므로

$$3ax_1=12 \qquad \therefore x_1=\frac{4}{a} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편 $\overline{AP}=\overline{OP}$에서

$$\sqrt{(x_1-a)^2+y_1^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

양변을 제곱하면

$$x_1^2-2ax_1+a^2+y_1^2=x_1^2+y_1^2$$
$$2ax_1=a^2 \qquad \therefore x_1=\frac{a}{2}\ (\because a\neq 0) \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\quad \frac{4}{a}=\frac{a}{2},\quad a^2=8$

$$\therefore a=2\sqrt{2}\ (\because a>0)$$

답 $2\sqrt{2}$

0225 타원 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{2}+\frac{y_1y}{4}=1$$

이 직선이 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$$\frac{2x_1}{2}=1 \qquad \therefore x_1=1$$

이때 $\frac{x_1^2}{2}+\frac{y_1^2}{4}=1$이므로 $\frac{1}{2}+\frac{y_1^2}{4}=1$

$y_1^2=2 \quad \therefore y_1=\pm\sqrt{2}$

즉 $P(1, \sqrt{2})$, $Q(1, -\sqrt{2})$이므로

$\overline{PQ}=2\sqrt{2}$

타원의 다른 한 초점을 F′이라 하면 $\overline{FQ}=\overline{PF'}$이고, 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{FQ}=\overline{PF}+\overline{PF'}=2\cdot 2=4$

따라서 △PFQ의 둘레의 길이는

$\overline{PF}+\overline{FQ}+\overline{PQ}=4+2\sqrt{2}$

이므로 $a=4$, $b=2$

$\therefore a+b=6$

답 ⑤

유형 16, 17 쌍곡선의 접선의 방정식 ; 접점의 좌표가 주어진 경우 본책 38, 39쪽

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식

→ $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=\pm 1$ (복호동순)

0226 쌍곡선 $x^2-3y^2=12$가 점 $(6, a)$를 지나므로

$36-3a^2=12, \quad a^2=8$

$\therefore a=2\sqrt{2}\ (\because a>0)$

쌍곡선 $x^2-3y^2=12$ 위의 점 $(6, 2\sqrt{2})$에서의 접선의 방정식은

$6x-3\cdot 2\sqrt{2}y=12 \quad \therefore y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}$

이 직선이 점 $(0, b)$를 지나므로 $b=-\sqrt{2}$

답 $-\sqrt{2}$

0227 쌍곡선 $x^2-y^2=-5$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선의 방정식은

$2x-3y=-5 \quad \therefore y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$ ⋯ ❶

따라서 기울기가 $\frac{2}{3}$이고 점 $(3, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{2}{3}(x-3) \quad \therefore y=\frac{2}{3}x$ ⋯ ❷

답 $y=\frac{2}{3}x$

채점 기준표

❶ 쌍곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	50%
❷ 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50%

0228 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{5}=1$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은

$ax-\frac{by}{5}=1 \quad \therefore y=\frac{5a}{b}x-\frac{5}{b}$

이 직선의 기울기가 $\frac{5}{2}$이므로

$\frac{5a}{b}=\frac{5}{2} \quad \therefore b=2a$

이때 $a^2-\frac{b^2}{5}=1$이므로 $a^2-\frac{4a^2}{5}=1$

$a^2=5 \quad \therefore a=\pm\sqrt{5}$

따라서 $b=2a=\pm 2\sqrt{5}$이므로

$ab=\pm\sqrt{5}\cdot(\pm 2\sqrt{5})=10$

답 ⑤

0229 쌍곡선 $x^2-2y^2=a$ 위의 점 $(b, \sqrt{5})$에서의 접선의 방정식은

$bx-2\sqrt{5}y=a \quad \therefore y=\frac{b}{2\sqrt{5}}x-\frac{a}{2\sqrt{5}}$ ⋯ ❶

쌍곡선 $x^2-2y^2=a$, 즉 $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{\frac{a}{2}}=1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{\sqrt{\frac{a}{2}}}{\sqrt{a}}x$, 즉 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$ ⋯ ❷

$b>0$이므로 접선은 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x$와 수직이다.

즉 $\frac{b}{2\sqrt{5}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1$이므로 $b=2\sqrt{10}$

따라서 쌍곡선 $x^2-2y^2=a$가 점 $(2\sqrt{10}, \sqrt{5})$를 지나므로

$(2\sqrt{10})^2-2\cdot(\sqrt{5})^2=a \quad \therefore a=30$ ⋯ ❸

$\therefore ab=60\sqrt{10}$ ⋯ ❹

답 $60\sqrt{10}$

채점 기준표

❶ 점 $(b, \sqrt{5})$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❷ 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	10%

0230 쌍곡선 $x^2-y^2=1$에서 $\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$이므로

$F(\sqrt{2}, 0)$

쌍곡선 $x^2-y^2=1$ 위의 점 $A(\sqrt{2}, 1)$에서의 접선의 방정식은

$\sqrt{2}x-y=1$

따라서 접선의 x절편이 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

$\therefore \triangle ABF=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 1=\frac{\sqrt{2}}{4}$

답 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

0231 점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면

$H(x_1, 0)$

곡선 $x^2-y^2=16$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$x_1x-y_1y=16$

따라서 접선의 x절편이 $\frac{16}{x_1}$이므로 $Q\left(\frac{16}{x_1}, 0\right)$

$\therefore \overline{OH}\cdot\overline{OQ}=x_1\cdot\frac{16}{x_1}=16$

답 ④

0232 쌍곡선 $x^2-y^2=3$ 위의 점 $A(-2, 1)$에서의 접선의 방정식은

$-2x-y=3 \qquad \therefore y=-2x-3$

$\therefore \mathrm{P}(0,\ -3)$

또 점 A$(-2, 1)$을 지나고 직선 $y=-2x-3$에 수직인 직선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{2}(x+2) \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x+2$

$\therefore \mathrm{Q}(0,\ 2)$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=2+3=5$ 답 ③

0233 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점 P$(-\sqrt{3},\ 2)$에서의 접선 l의 방정식은

$-\sqrt{3}x-\frac{2y}{2}=1 \qquad \therefore y=-\sqrt{3}x-1$

$\overline{\mathrm{OH}}$의 길이는 원점과 직선 $y=-\sqrt{3}x-1$, 즉 $\sqrt{3}x+y+1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\frac{1}{2}$

한편 직선 OH는 직선 l에 수직이면서 원점을 지나므로

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

점 Q는 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$과 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$의 교점이므로

$x^2-\frac{1}{6}x^2=1, \qquad x^2=\frac{6}{5}$

$\therefore x=\frac{\sqrt{30}}{5}\ (\because x>0)$

따라서 Q$\left(\frac{\sqrt{30}}{5},\ \frac{\sqrt{10}}{5}\right)$이므로

$x=\frac{\sqrt{30}}{5}$을 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$에 대입하면
$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{30}}{5}=\frac{\sqrt{10}}{5}$

$\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{30}}{5}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

$\therefore \overline{\mathrm{OH}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{10}}{5}=\frac{\sqrt{10}}{5}$ 답 $\frac{\sqrt{10}}{5}$

유형 18, 19 쌍곡선의 접선의 방정식 ; 기울기가 주어진 경우 본책 39, 40쪽

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$

➡ 접선의 기울기가 $\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$이고, $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$임을 이용하여 x_1, y_1의 값을 구한다.

0234 쌍곡선 $4x^2-7y^2=28$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$4x_1x-7y_1y=28 \qquad \therefore y=\frac{4x_1}{7y_1}x-\frac{4}{y_1}$

이 직선의 기울기가 $\tan 135°=-1$이므로

$\frac{4x_1}{7y_1}=-1 \qquad \therefore x_1=-\frac{7}{4}y_1$

이때 $4x_1^2-7y_1^2=28$이므로 $\frac{49}{4}y_1^2-7y_1^2=28$

$y_1^2=\frac{16}{3} \qquad \therefore y_1=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}$

따라서 접선의 방정식은 $y=-x\pm\sqrt{3}$이므로

$m=-1,\ n=\pm\sqrt{3}$

$\therefore m^2+n^2=1+3=4$ 답 ④

0235 쌍곡선 $\frac{x^2}{k}-\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{x_1x}{k}-\frac{y_1y}{9}=1 \qquad \therefore y=\frac{9x_1}{ky_1}x-\frac{9}{y_1}$

이 직선이 직선 $y=3x+3$과 일치하므로

$\frac{9x_1}{ky_1}=3,\ -\frac{9}{y_1}=3$

$-\frac{9}{y_1}=3$에서 $y_1=-3$이므로 $\frac{9x_1}{-3k}=3 \qquad \therefore x_1=-k$

이때 $\frac{x_1^2}{k}-\frac{y_1^2}{9}=1$이므로 $k-1=1 \qquad \therefore k=2$

즉 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{9}=1$에서 $\sqrt{2+9}=\sqrt{11}$이므로 초점의 좌표는

$(\sqrt{11},\ 0),\ (-\sqrt{11},\ 0)$

따라서 두 초점 사이의 거리는 $2\sqrt{11}$이다. 답 ④

0236 쌍곡선의 점근선이 원점을 지나므로 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$이라 하자.

이 쌍곡선이 점 $(-4,\ 0)$을 지나므로

$\frac{16}{a^2}=1, \qquad a^2=16 \qquad \therefore a=4\ (\because a>0)$

또 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{1}{4}x$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{1}{4} \qquad \therefore b=1$

즉 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{16}-y^2=1$ ➊

쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-y^2=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{x_1x}{16}-y_1y=1 \qquad \therefore y=\frac{x_1}{16y_1}x-\frac{1}{y_1}$

이 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 $\frac{x_1}{16y_1}=\frac{1}{2}$

$\therefore x_1=8y_1$

이때 $\frac{x_1^2}{16}-y_1^2=1$이므로 $4y_1^2-y_1^2=1$

$y_1^2=\frac{1}{3} \qquad \therefore y_1=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ➋

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{3}$ ➌

답 $y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{3}$

채점 기준표

❶ 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ 접점의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❸ 쌍곡선에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	20%

0237 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{9}-\frac{y_1y}{7}=1 \qquad \therefore y=\frac{7x_1}{9y_1}x-\frac{7}{y_1}$$

이 직선의 기울기가 1이므로

$$\frac{7x_1}{9y_1}=1 \qquad \therefore x_1=\frac{9}{7}y_1$$

이때 $\frac{x_1^2}{9}-\frac{y_1^2}{7}=1$이므로 $\quad \frac{9}{49}y_1^2-\frac{y_1^2}{7}=1$

$$y_1^2=\frac{49}{2} \qquad \therefore y_1=\pm\frac{7}{\sqrt{2}}$$

따라서 접선의 방정식은 $\quad y=x\pm\sqrt{2}$

즉 x절편은 $\pm\sqrt{2}$, y절편은 $\mp\sqrt{2}$(복호동순)이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=1$$

답 ①

0238 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{4}-y_1y=1 \qquad \therefore y=\frac{x_1}{4y_1}x-\frac{1}{y_1}$$

이 직선의 기울기가 -1이므로

$$\frac{x_1}{4y_1}=-1 \qquad \therefore x_1=-4y_1$$

이때 $\frac{x_1^2}{4}-y_1^2=1$이므로 $\quad 4y_1^2-y_1^2=1$

$$y_1^2=\frac{1}{3} \qquad \therefore y_1=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

따라서 접선의 방정식은 $\quad y=-x\pm\sqrt{3}$

구하는 두 직선 사이의 거리는 직선 $y=-x-\sqrt{3}$ 위의 점 $(0,\ -\sqrt{3})$과 직선 $y=-x+\sqrt{3}$, 즉 $x+y-\sqrt{3}=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-\sqrt{3}-\sqrt{3}|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{6}$$

답 ③

0239 쌍곡선 위의 점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $y=2x$ 사이의 거리가 최소이려면 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 기울기가 2이어야 한다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{7}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{3}-\frac{y_1y}{7}=1 \qquad \therefore y=\frac{7x_1}{3y_1}x-\frac{7}{y_1}$$

이 직선의 기울기가 2이므로

$$\frac{7x_1}{3y_1}=2 \qquad \therefore x_1=\frac{6}{7}y_1$$

이때 $\frac{x_1^2}{3}-\frac{y_1^2}{7}=1$이므로 $\quad \frac{12}{49}y_1^2-\frac{y_1^2}{7}=1$

$$y_1^2=\frac{49}{5} \qquad \therefore y_1=\pm\frac{7}{\sqrt{5}}$$

따라서 접선의 방정식은 $\quad y=2x\pm\sqrt{5}$

구하는 최솟값은 직선 $y=2x$ 위의 점 $(0,\ 0)$과 직선 $y=2x\pm\sqrt{5}$, 즉 $2x-y\pm\sqrt{5}=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|\pm\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=1$$

답 1

유형 20 쌍곡선 밖의 점에서 그은 접선의 방정식 본책 40쪽

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1$ 밖의 한 점 $(p,\ q)$에서 그은 접선의 방정식

➡ 쌍곡선 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=\pm1$이 점 $(p,\ q)$를 지남을 이용한다.

0240 쌍곡선 $2x^2-2y^2=3$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$2ax-2by=3$

이 직선이 점 $(3,\ 3)$을 지나므로

$$6a-6b=3 \qquad \therefore a-b=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $2a^2-2b^2=3$이므로 $\quad a^2-b^2=\frac{3}{2}$

$$\therefore (a+b)(a-b)=\frac{3}{2}$$

㉠을 위의 식에 대입하면 $\quad \frac{1}{2}(a+b)=\frac{3}{2}$

$$\therefore a+b=3$$

답 3

0241 쌍곡선 $x^2-4y^2=4$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$x_1x-4y_1y=4$

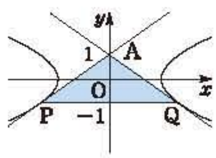
이 직선이 점 $A(0,\ 1)$을 지나므로

$$-4y_1=4 \qquad \therefore y_1=-1$$

이때 $x_1^2-4y_1^2=4$이므로

$$x_1^2=8 \qquad \therefore x_1=\pm2\sqrt{2}$$

따라서 $P(-2\sqrt{2},\ -1)$, $Q(2\sqrt{2},\ -1)$이라 하면



$$\triangle APQ=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot2=4\sqrt{2}$$

답 ③

0242 쌍곡선 $4x^2-9y^2=36$ 위의 점 $(x_n,\ y_n)$에서의 접선의 방정식은

$4x_nx-9y_ny=36$

이 직선이 점 $A_n(0,\ n)$을 지나므로

$$-9ny_n=36 \qquad \therefore y_n=-\frac{4}{n}$$

이때 $4x_n^2-9y_n^2=36$이므로 $\quad 4x_n^2-\frac{144}{n^2}=36$

$$x_n^2=9+\frac{36}{n^2} \qquad \therefore x_n=\pm3\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}$$

따라서 $P_n\left(3\sqrt{1+\frac{4}{n^2}},\ -\frac{4}{n}\right)$, $Q_n\left(-3\sqrt{1+\frac{4}{n^2}},\ -\frac{4}{n}\right)$라 하면

$$\overline{P_nQ_n}=6\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\overline{P_nQ_n}=\lim_{n\to\infty}6\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}=6$$

답 ②

유형 21 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

본책 40쪽

매개변수로 나타낸 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 t에 대하여 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$이면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

0243 $\frac{dx}{dt}=3t^2-t$, $\frac{dy}{dt}=3t^2+4t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+4t}{3t^2-t}=\frac{3t+4}{3t-1}\ \left(t\neq 0,\ t\neq\frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore \lim_{t\to 0}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to 0}\frac{3t+4}{3t-1}=-4$$

답 -4

0244 $\frac{dx}{dt}=8$, $\frac{dy}{dt}=-10t+8$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-10t+8}{8}=-\frac{5}{4}t+1$$

$t=1$일 때 $\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{5}{4}+1=-\frac{1}{4}$

답 ③

0245 $\frac{dx}{d\theta}=a\cdot 3\cos^2\theta\cdot(-\sin\theta)=-3a\cos^2\theta\sin\theta$,

$\frac{dy}{d\theta}=a\cdot 3\sin^2\theta\cos\theta=3a\sin^2\theta\cos\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta}$$

$$=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta\ (\sin\theta\cos\theta\neq 0)$$

$\theta=\frac{\pi}{4}$일 때 $\quad \frac{dy}{dx}=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

답 ①

0246 $\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi)}{2h}\cdot 2$

$=2f'(\pi)$ ···· ❶

이때 $\frac{dx}{dt}=1-\cos t$, $\frac{dy}{dt}=1-\sin t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\sin t}{1-\cos t}\ (\cos t\neq 1)$$ ···· ❷

$x=t-\sin t=\pi$에서 $\quad t=\pi$

따라서 $t=\pi$일 때 $\frac{dy}{dx}=\frac{1-\sin\pi}{1-\cos\pi}=\frac{1}{2}$이므로

(주어진 식)$=2f'(\pi)=2\cdot\frac{1}{2}=1$ ···· ❸ 답 1

채점 기준표

❶ 구하려는 식을 간단히 정리할 수 있다.	30%
❷ $\frac{dy}{dx}$를 구할 수 있다.	40%
❸ 답을 구할 수 있다.	30%

유형 22–24 매개변수로 나타낸 평면 곡선의 접선의 방정식

본책 41, 42쪽

매개변수로 나타낸 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $\frac{g'(t)}{f'(t)}$를 구한다.

(ii) $f(t_1)=a$, $g(t_1)=b$를 만족시키는 t_1의 값을 구한다.

(iii) (ii)에서 구한 t_1의 값을 $y-b=\frac{g'(t_1)}{f'(t_1)}(x-a)$에 대입한다.

0247 $\frac{dx}{d\theta}=2\sec^2\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=3\sec\theta\tan\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{3\sec\theta\tan\theta}{2\sec^2\theta}=\frac{3\tan\theta}{2\sec\theta}=\frac{3}{2}\sin\theta$$

$\frac{3}{2}\sin\theta=\frac{3}{4}$에서 $\quad \sin\theta=\frac{1}{2}$

$0\le\theta<2\pi$이므로 $\quad \theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\frac{5}{6}\pi$

$\theta=\frac{5}{6}\pi$일 때 $x<0$이므로 $\quad \theta=\frac{\pi}{6}$

$$\therefore a=2\tan\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3},\ b=3\sec\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$$

$$\therefore ab=4$$

답 ①

0248 $\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=2t$이므로

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{2}=t$$

$x=3$일 때 $t=2$이므로 $\quad f'(3)=2$

답 ②

0249 $\frac{dx}{d\theta}=6\sin^2\theta\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=-3\cos^2\theta\sin\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-3\cos^2\theta\sin\theta}{6\sin^2\theta\cos\theta}=-\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}$$

$$=-\frac{1}{2}\cot\theta\ (\sin\theta\cos\theta\neq 0)$$

$-\frac{1}{2}\cot\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 $\quad \cot\theta=\sqrt{3}$

$0\le\theta<\pi$이므로 $\quad \theta=\frac{\pi}{6}$

$\theta=\frac{\pi}{6}$일 때 $\quad a=2\sin^3\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4},\ b=\cos^3\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot 4=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 답 ④

0250 $\frac{dx}{dt}=2t+1,\ \frac{dy}{dt}=\frac{3}{2}t^2+a$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{3}{2}t^2+a}{2t+1}\left(t\neq-\frac{1}{2}\right)$$

$t=1$일 때 $\frac{dy}{dx}=3$이므로

$$\frac{\frac{3}{2}+a}{3}=3,\quad a+\frac{3}{2}=9\quad \therefore a=\frac{15}{2}$$

답 ②

0251 $\frac{dx}{d\theta}=\sin\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=1-\cos\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\ (\sin\theta\neq0)$$

$\theta=\frac{3}{2}\pi$일 때

$$x=1,\ y=\frac{3}{2}\pi+1,\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{-1}=-1$$

이므로 접선의 방정식은 $\quad y-\left(\frac{3}{2}\pi+1\right)=-(x-1)$

$$\therefore y=-x+\frac{3}{2}\pi+2$$

따라서 접선의 y절편은 $\frac{3}{2}\pi+2$이므로

$$a=\frac{3}{2},\ b=2\quad \therefore ab=3$$

답 3

0252 $\frac{dx}{dt}=e^t-e^{-t},\ \frac{dy}{dt}=e^t+e^{-t}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}\ (t\neq0)$$

$t=\ln2$일 때

$$x=e^{\ln2}+e^{-\ln2}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2},$$

$$y=e^{\ln2}-e^{-\ln2}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{\ln2}+e^{-\ln2}}{e^{\ln2}-e^{-\ln2}}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{5}{3}$$

이므로 접선의 방정식은 $\quad y-\frac{3}{2}=\frac{5}{3}\left(x-\frac{5}{2}\right)$

$$\therefore y=\frac{5}{3}x-\frac{8}{3}$$

이 직선이 점 $(a,\ 9)$를 지나므로

$$9=\frac{5}{3}a-\frac{8}{3}\quad \therefore a=7$$

답 7

0253 $\frac{dx}{dt}=3t^2+2kt,\ \frac{dy}{dt}=2t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{3t^2+2kt}=\frac{2}{3t+2k}\left(t\neq0,\ t\neq-\frac{2}{3}k\right)\ \cdots ❶$$

$t=1$일 때 $\frac{dy}{dx}=-2$이므로

$$\frac{2}{3+2k}=-2,\quad 3+2k=-1$$

$$\therefore k=-2\ \cdots ❷$$

$t=1$일 때 $x=-1,\ y=2$이므로 직선 l의 방정식은

$$y-2=-2(x+1)\quad \therefore y=-2x\ \cdots ❸$$

답 $y=-2x$

채점 기준표	
❶ $\frac{dy}{dx}$를 구할 수 있다.	40%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	30%

0254 $\frac{dx}{d\theta}=a\sec\theta\tan\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=b\sec^2\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{b\sec^2\theta}{a\sec\theta\tan\theta}=\frac{b\sec\theta}{a\tan\theta}=\frac{b}{a}\csc\theta\,(\sin\theta\neq0)$$

$\theta=\frac{\pi}{3}$일 때

$$x=a\sec\frac{\pi}{3}=2a,\ y=b\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}b,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}\csc\frac{\pi}{3}=\frac{2\sqrt{3}b}{3a}$$

이므로 접선의 방정식은 $\quad y-\sqrt{3}b=\frac{2\sqrt{3}b}{3a}(x-2a)$

$$\therefore y=\frac{2\sqrt{3}b}{3a}x-\frac{\sqrt{3}}{3}b$$

이 직선이 직선 $y=x-\sqrt{3}$과 일치하므로

$$\frac{2\sqrt{3}b}{3a}=1,\ -\frac{\sqrt{3}}{3}b=-\sqrt{3}\quad \therefore a=2\sqrt{3},\ b=3$$

$$\therefore ab=6\sqrt{3}$$

답 $6\sqrt{3}$

0255 $\frac{dx}{d\theta}=1+\cos\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\ (\cos\theta\neq-1)$$

$\theta=\frac{\pi}{2}$일 때

$$x=\frac{\pi}{2}+1,\ y=1,\ \frac{dy}{dx}=1$$

이므로 접선의 방정식은 $\quad y-1=x-\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$

$$\therefore y=x-\frac{\pi}{2}$$

따라서 접선의 x절편과 y절편이 각각 $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{8}$$

답 ①

0256 $\frac{dx}{dt}=\frac{2t\cdot t-(1+t^2)}{t^2}=\frac{t^2-1}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{t^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t^2-1}{t^2}}=\frac{1}{1-t^2}\ (t\neq1)$$

$t=3$일 때

$$x=\frac{1+3^2}{3}=\frac{10}{3},\ y=\frac{1}{3},\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-3^2}=-\frac{1}{8}$$

이므로 접선의 방정식은 $\quad y-\frac{1}{3}=-\frac{1}{8}\left(x-\frac{10}{3}\right)$

$$\therefore y=-\frac{1}{8}x+\frac{3}{4}$$

따라서 $\mathrm{P}\left(\frac{10}{3},\ \frac{1}{3}\right)$, $\mathrm{Q}(6,\ 0)$이므로 $\triangle\mathrm{OPQ}$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot6\cdot\frac{1}{3}=1$$

답 ④

0257 $\frac{dx}{d\theta}=-\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=-2\sin\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-2\sin\theta}{-\cos\theta}=2\tan\theta\ (\cos\theta\neq0)$$

따라서 점 $\mathrm{P}(-\sin\theta,\ 2\cos\theta)$에서의 접선의 방정식은

$$y-2\cos\theta=2\tan\theta(x+\sin\theta)$$

$$\begin{aligned}\therefore y&=2x\tan\theta+2\tan\theta\sin\theta+2\cos\theta\\&=2x\tan\theta+2\cdot\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta}\\&=2x\tan\theta+2\sec\theta\end{aligned}$$

따라서 $\mathrm{A}(-\csc\theta,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 2\sec\theta)$이므로

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OAB}&=\frac{1}{2}\cdot|\csc\theta|\cdot|2\sec\theta|\\&=\frac{1}{|\sin\theta\cos\theta|}=\frac{2}{|\sin2\theta|}\geq2\end{aligned}$$

즉 $\triangle\mathrm{OAB}$의 넓이의 최솟값은 2이다.

답 2

0258 전략 양변에 자연로그를 취한 후 x에 대하여 미분한다.

풀이 $y=x^x$의 양변에 자연로그를 취하면 $\quad \ln y=x\ln x$

양변을 x에 대하여 미분하면

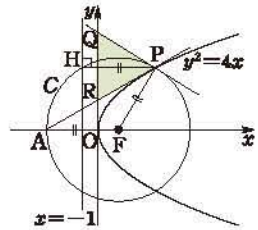
$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$$

$x=e$일 때 $\quad \frac{dy}{dx}=e^e(\ln e+1)=2e^e$

답 $2e^e$

0259 전략 포물선의 정의를 이용하여 점 P의 좌표를 a로 나타낸다.



풀이 포물선 $y^2=4x$의 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(1,\ 0)$이고, 점 P에서 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF}}$$

$\overline{\mathrm{AF}}$, $\overline{\mathrm{PF}}$는 원 C의 반지름이므로

$$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{PF}}$$

따라서 $\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{AF}}=a+1$이므로

$$\mathrm{P}(a,\ 2\sqrt{a})$$

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ 2\sqrt{a})$에서의 접선의 방정식은

$$2\sqrt{a}y=2(x+a)\qquad\therefore x-\sqrt{a}y+a=0$$

점 $\mathrm{F}(1,\ 0)$과 직선 $x-\sqrt{a}y+a=0$ 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|1+a|}{\sqrt{1+(-\sqrt{a})^2}}=2,\qquad |1+a|=2\sqrt{1+a}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2-2a-3=0,\qquad (a+1)(a-3)=0\qquad\therefore a=3\ (\because a>0)$$

즉 $\mathrm{P}(3,\ 2\sqrt{3})$이고 직선 PR의 방정식이 $x-\sqrt{3}y+3=0$이므로

$$\mathrm{R}(0,\ \sqrt{3})$$

한편 직선 PF와 직선 PQ는 서로 수직이고 직선 PF의 기울기는 $\frac{2\sqrt{3}}{3-1}=\sqrt{3}$이므로 직선 PQ의 방정식은

$$y-2\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)\qquad\therefore x+\sqrt{3}y-9=0$$

따라서 $\mathrm{Q}(0,\ 3\sqrt{3})$이므로 $\triangle\mathrm{PQR}$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot(3\sqrt{3}-\sqrt{3})\cdot3=3\sqrt{3}$$

답 ③

0260 전략 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $y_1y=2p(x+x_1)$임을 이용한다.

풀이 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=3$이므로 원 C의 방정식은

$$x^2+y^2=9$$

포물선 $y^2=8x=4\cdot2x$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ 2\sqrt{2})$에서의 접선 l의 방정식은

$$2\sqrt{2}y=2\cdot2(x+1),\ \text{즉}\ y=\sqrt{2}x+\sqrt{2}$$

이므로 원 C에 접하고 기울기가 $\sqrt{2}$인 직선의 방정식은

$$y=\sqrt{2}x\pm3\sqrt{(\sqrt{2})^2+1},\ \text{즉}\ y=\sqrt{2}x\pm3\sqrt{3}$$

직선 m은 제2사분면을 지나므로 그 방정식은

$$y=\sqrt{2}x+3\sqrt{3}\qquad\cdots\cdots㉠$$

한편 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2p(x+x_1)\qquad\therefore y=\frac{2p}{y_1}x+\frac{2px_1}{y_1}$$

이 직선과 직선 ㉠이 일치하므로

$$\frac{2p}{y_1}=\sqrt{2},\ \frac{2px_1}{y_1}=3\sqrt{3} \qquad \therefore x_1=\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

점 $(x_1,\ y_1)$은 직선 $y=\sqrt{2}x+3\sqrt{3}$ 위의 점이므로

$$y_1=\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{6}}{2}+3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$$

$y_1=6\sqrt{3}$을 $\frac{2p}{y_1}=\sqrt{2}$에 대입하면 $\quad \frac{2p}{6\sqrt{3}}=\sqrt{2} \quad \therefore p=3\sqrt{6}$

$\therefore p^2=54$

답 54

0261 전략 포물선 위의 점에서의 접선이 점 A$(-1,\ k)$를 지남을 이용한다.

풀이 포물선 $x^2=4y$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x=2(y+y_1) \qquad \therefore y=\frac{x_1}{2}x-y_1$$

이 직선이 점 A$(-1,\ k)$를 지나므로

$$k=-\frac{1}{2}x_1-y_1$$

이때 $x_1{}^2=4y_1$에서 $y_1=\frac{x_1{}^2}{4}$이므로 이것을 위의 식에 대입하여 정리하면

$$x_1{}^2+2x_1+4k=0 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이 이차방정식의 실근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$$m_1=\frac{\alpha}{2},\ m_2=\frac{\beta}{2}$$

로 놓을 수 있다.

ㄱ. 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1-4k>0 \qquad \therefore k<\frac{1}{4}$$

ㄴ. 이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$m_1+m_2=\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

ㄷ. $m_1m_2=\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\beta}{2}=\frac{4k}{4}=k$이므로

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}=\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}=-\frac{1}{k}$$

따라서 구간 $(-\infty,\ 0)$, $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$에서는 k의 값이 커질 때 $\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}$의 값도 커진다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0262 전략 두 점 Q, R의 좌표를 구하고 등차수열의 성질을 이용한다.

풀이 타원 $3x^2+4y^2=12$, 즉 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$의 두 초점은

$$\mathrm{F}(1,\ 0),\ \mathrm{F'}(-1,\ 0)$$

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$ $(a>0,\ b>0)$라 하면 타원 위의 점 P$(a,\ b)$에서의 접선 l의 방정식은

$$\frac{ax}{4}+\frac{by}{3}=1 \qquad \therefore y=-\frac{3a}{4b}x+\frac{3}{b}$$

이 직선의 x절편이 $\frac{4}{a}$이므로 $\quad \mathrm{Q}\left(\frac{4}{a},\ 0\right)$

점 P를 지나고 직선 l과 수직인 직선의 방정식은

$$y-b=\frac{4b}{3a}(x-a) \qquad \therefore y=\frac{4b}{3a}x-\frac{b}{3}$$

이 직선의 x절편이 $\frac{a}{4}$이므로 $\quad \mathrm{R}\left(\frac{a}{4},\ 0\right)$

이때 세 삼각형 PRF, PF'R, PFQ의 높이가 같으므로 $\overline{\mathrm{RF}}$, $\overline{\mathrm{F'R}}$, $\overline{\mathrm{FQ}}$의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

$$\therefore 2\overline{\mathrm{F'R}}=\overline{\mathrm{RF}}+\overline{\mathrm{FQ}}$$

$\overline{\mathrm{RF}}=1-\frac{a}{4}$, $\overline{\mathrm{F'R}}=\frac{a}{4}+1$, $\overline{\mathrm{FQ}}=\frac{4}{a}-1$이므로

$$2\left(\frac{a}{4}+1\right)=\left(1-\frac{a}{4}\right)+\left(\frac{4}{a}-1\right)$$

$$3a^2+8a-16=0, \qquad (a+4)(3a-4)=0$$

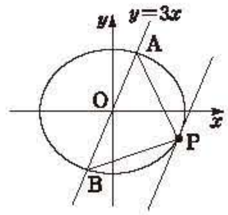
$$\therefore a=\frac{4}{3}\ (\because a>0)$$

따라서 점 P의 x좌표는 $\frac{4}{3}$이다.

답 ④

0263 전략 $\triangle$PAB의 넓이가 최대이려면 점 P에서의 접선이 직선 $y=3x$에 평행해야 한다.

풀이 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이는 일정하므로 타원 위의 점 P와 직선 $y=3x$ 사이의 거리가 최대일 때, 즉 오른쪽 그림과 같이 점 P에서의 접선이 직선 $y=3x$와 평행할 때 $\triangle$PAB의 넓이가 최대가 된다.



타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점 P$(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{ax}{12}+\frac{by}{9}=1 \qquad \therefore y=-\frac{3a}{4b}x+\frac{9}{b}$$

이 직선의 기울기가 3이어야 하므로

$$-\frac{3a}{4b}=3 \qquad \therefore b=-\frac{1}{4}a \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때 $\frac{a^2}{12}+\frac{b^2}{9}=1$이므로 $\quad \frac{a^2}{12}+\frac{a^2}{144}=1$

$$a^2=\frac{144}{13} \qquad \therefore a=\frac{12\sqrt{13}}{13}\ (\because a>0)$$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad b=-\frac{3\sqrt{13}}{13}$

$$\therefore a+b=\frac{9\sqrt{13}}{13}$$

답 ③

0264 전략 마름모의 각 변이 타원에 접함을 이용한다.

풀이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 초점의 좌표가 $(0,\ a)$, $(0,\ -a)$이므로 $\quad b^2=a^2+a^2=2a^2$

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2a^2}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{2a^2}=1 \qquad \therefore y=-\frac{2x_1}{y_1}x+\frac{2a^2}{y_1}$$

두 점 $(-1,\ 0)$, $(0,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y=2x+2$$

이므로 $-\dfrac{2x_1}{y_1}=2$, $\dfrac{2a^2}{y_1}=2$

$\therefore x_1=-a^2$, $y_1=a^2$

이때 $\dfrac{{x_1}^2}{a^2}+\dfrac{{y_1}^2}{2a^2}=1$이므로 $\dfrac{a^4}{a^2}+\dfrac{a^4}{2a^2}=1$

$\dfrac{3}{2}a^2=1$ $\quad\therefore a^2=\dfrac{2}{3}$

$\therefore a^2+b^2=a^2+2a^2=3a^2=3\cdot\dfrac{2}{3}=2$ 답 2

참고 마름모의 다른 변을 이용하여 풀어도 a^2+b^2의 값은 같다.

0265 전략 점 P에서의 접선이 $\overline{F'F}$를 $2:1$로 내분하는 점을 지남을 이용한다.

풀이 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 $F(3,\ 0)$, $F'(-3,\ 0)$이므로

$a^2+b^2=9$ ...... ㉠

쌍곡선 위의 점 $P(4,\ k)$에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{4x}{a^2}-\dfrac{ky}{b^2}=1$

$\overline{FF'}=6$이므로 $\overline{F'F}$를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는 $(1,\ 0)$이다. 이때 접선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$\dfrac{4}{a^2}=1$ $\quad\therefore a^2=4$

$a^2=4$를 ㉠에 대입하면 $b^2=5$

따라서 주어진 쌍곡선의 방정식은 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$이고 점 $P(4,\ k)$가 쌍곡선 위의 점이므로

$\dfrac{16}{4}-\dfrac{k^2}{5}=1$, $\quad\dfrac{k^2}{5}=3$ $\quad\therefore k^2=15$ 답 15

0266 전략 쌍곡선의 정의를 이용한다.

풀이 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{F'P}-\overline{FP}=2a$이고 $\overline{FP}=3$이므로

$\overline{F'P}=2a+3$

$\overline{F'P}-\overline{F'Q}=\dfrac{14}{5}$에서 $\overline{F'Q}=(2a+3)-\dfrac{14}{5}=2a+\dfrac{1}{5}$이므로

$\overline{OQ}=\overline{F'Q}-\overline{F'O}=\left(2a+\dfrac{1}{5}\right)-3=2a-\dfrac{14}{5}$

$\therefore Q\left(2a-\dfrac{14}{5},\ 0\right)$ ...... ㉠

한편 점 P의 좌표를 $\left(\dfrac{10}{3},\ y_1\right)$이라 하면 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $P\left(\dfrac{10}{3},\ y_1\right)$에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{10x}{3a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

이 직선의 x절편이 $\dfrac{3}{10}a^2$이므로 $Q\left(\dfrac{3}{10}a^2,\ 0\right)$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $2a-\dfrac{14}{5}=\dfrac{3}{10}a^2$

$3a^2-20a+28=0$, $\quad(a-2)(3a-14)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a<3$)

이때 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 $F(3,\ 0)$, $F'(-3,\ 0)$이므로 $a^2+b^2=9$, $\quad 4+b^2=9$ $\quad\therefore b^2=5$

따라서 쌍곡선의 방정식은 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$이고 점 $P\left(\dfrac{10}{3},\ y_1\right)$이 쌍곡선 위의 점이므로

$\dfrac{25}{9}-\dfrac{{y_1}^2}{5}=1$, $\quad{y_1}^2=\dfrac{80}{9}$ $\quad\therefore y_1=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$ ($\because y_1>0$)

즉 $P\left(\dfrac{10}{3},\ \dfrac{4\sqrt{5}}{3}\right)$, $Q\left(\dfrac{6}{5},\ 0\right)$이므로 직선 PQ의 기울기는

$\dfrac{\frac{4\sqrt{5}}{3}}{\frac{10}{3}-\frac{6}{5}}=\dfrac{5\sqrt{5}}{8}$ 답 ④

0267 전략 점 P에서의 두 접선의 기울기의 곱이 -1임을 이용한다.

풀이 $x=\sqrt{3}\tan\beta$, $y=2\sqrt{3}\sec\beta$에서

$\dfrac{dx}{d\beta}=\sqrt{3}\sec^2\beta$, $\dfrac{dy}{d\beta}=2\sqrt{3}\sec\beta\tan\beta$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\beta}}{\frac{dx}{d\beta}}=\dfrac{2\sqrt{3}\sec\beta\tan\beta}{\sqrt{3}\sec^2\beta}=2\sin\beta$

$\sqrt{3}\tan\beta=1$, $2\sqrt{3}\sec\beta=4$에서

$\sin\beta=\dfrac{\tan\beta}{\sec\beta}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=2\sin\beta=1$

즉 곡선 $x=a\cos\alpha$, $y=b\sin\alpha$ 위의 점 $P(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 -1이다.

$\dfrac{dx}{d\alpha}=-a\sin\alpha$, $\dfrac{dy}{d\alpha}=b\cos\alpha$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\alpha}}{\frac{dx}{d\alpha}}=-\dfrac{b\cos\alpha}{a\sin\alpha}=-\dfrac{b}{a}\cot\alpha$ ($\sin\alpha\neq0$)

$-\dfrac{b}{a}\cot\alpha=-1$이므로

$\dfrac{b}{a}=\tan\alpha$ ...... ㉠

이때 $a\cos\alpha=1$, $b\sin\alpha=4$이므로

$a=\dfrac{1}{\cos\alpha}$, $b=\dfrac{4}{\sin\alpha}$

이것을 ㉠에 대입하면 $\dfrac{4\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$4\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0$, $\quad 4(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha=0$

$4=5\sin^2\alpha$ $\quad\therefore \sin^2\alpha=\dfrac{4}{5}$

따라서 $\cos^2\alpha=1-\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{5}$이므로

$a^2=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=5$, $b^2=\dfrac{16}{\sin^2\alpha}=20$

$\therefore a^2+b^2=25$ 답 ⑤

0268 전략 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용한다.

풀이 $\frac{dx}{dt}=1-\cos t$, $\frac{dy}{dt}=\sin t$이므로

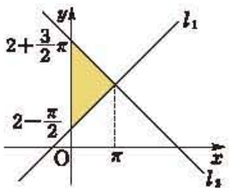
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sin t}{1-\cos t}\ (\cos t\neq 1)$$

$t=\frac{\pi}{2}$일 때 $x=\frac{\pi}{2}-1$, $y=1$, $\frac{dy}{dx}=1$이므로 직선 l_1의 방정식은

$$y-1=x-\left(\frac{\pi}{2}-1\right) \qquad \therefore y=x-\frac{\pi}{2}+2$$

$t=\frac{3}{2}\pi$일 때 $x=\frac{3}{2}\pi+1$, $y=1$, $\frac{dy}{dx}=-1$이므로 직선 l_2의 방정식은

$$y-1=-\left\{x-\left(\frac{3}{2}\pi+1\right)\right\} \qquad \therefore y=-x+\frac{3}{2}\pi+2$$



두 직선 l_1, l_2의 교점의 x좌표는

$x-\frac{\pi}{2}+2=-x+\frac{3}{2}\pi+2$에서

$x=\pi$

이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2\pi=\pi^2$$

답 π^2

0269 전략 □PABQ의 넓이와 △OPQ의 넓이의 관계를 이용한다.

풀이 □PABQ=△OAB−△OPQ$=\frac{1}{2}-$△OPQ이므로

△OPQ의 넓이가 최대일 때 □PABQ의 넓이가 최소이다. ⋯ ❶

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\ (x\neq 0)$$

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$에서 $x=t$일 때 $y=(1-\sqrt{t})^2$이므로 곡선 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 위의 점 $(t, (1-\sqrt{t})^2)$에서의 접선의 방정식은

$$y-(1-\sqrt{t})^2=\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}}(x-t)$$

$$\therefore y=\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}}x+1-\sqrt{t}$$ ⋯ ❷

따라서 $\mathrm{P}(\sqrt{t}, 0)$, $\mathrm{Q}(0, 1-\sqrt{t})$이므로 △OPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2}\sqrt{t}(1-\sqrt{t})=-\frac{1}{2}(t-\sqrt{t})$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{t}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}$$

△OPQ의 넓이는 $\sqrt{t}=\frac{1}{2}$, 즉 $t=\frac{1}{4}$일 때 최댓값 $\frac{1}{8}$을 가지므로

□PABQ의 넓이의 최솟값은

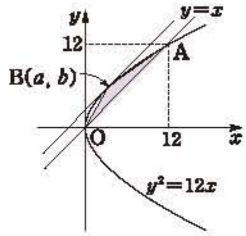
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$ ⋯ ❸ 답 $\frac{3}{8}$

채점 기준표

❶ □PABQ의 넓이가 최소일 때를 알 수 있다.	20%
❷ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ □PABQ의 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	40%

0270 전략 △OAB에서 $\overline{\mathrm{OA}}$의 길이가 일정하므로 점 B와 직선 OA 사이의 거리가 최대일 때 △OAB의 넓이가 최대이다.

풀이 (1) 오른쪽 그림과 같이 포물선 $y^2=12x$ 위의 점 B에서의 접선이 직선 OA와 평행할 때 점 B와 직선 OA 사이의 거리가 최대이고, 이때 △OAB의 넓이가 최대가 된다. ⋯ ❶



포물선 $y^2=12x=4\cdot 3x$ 위의 점 B(a, b)에서의 접선의 방정식은

$$by=2\cdot 3(x+a) \qquad \therefore y=\frac{6}{b}x+\frac{6a}{b}$$

직선 OA의 기울기가 1이므로

$$\frac{6}{b}=1 \qquad \therefore b=6$$

이때 $b^2=12a$이므로 $a=\frac{b^2}{12}=3$ ⋯ ❷

(2) $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{12^2+12^2}=12\sqrt{2}$

점 B(3, 6)과 직선 OA, 즉 직선 $x-y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3-6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

따라서 △OAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\cdot 12\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}=18$$ ⋯ ❸

답 (1) $a=3$, $b=6$ (2) 18

채점 기준표

❶ △OAB의 넓이가 최대일 때를 알 수 있다.	20%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ △OAB의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	40%

0271 전략 두 점 A, B를 지나고 기울기가 1인 두 직선과 타원의 교점의 좌표를 먼저 구한다.

풀이 점 A(1, 0)을 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y=x-1$

타원 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$과 직선 $y=x-1$의 교점의 x좌표는

$\frac{x^2}{10}+\frac{(x-1)^2}{6}=1$에서

$$3x^2+5(x-1)^2=30, \qquad 8x^2-10x-25=0$$

$$(4x+5)(2x-5)=0 \qquad \therefore x=-\frac{5}{4} \text{ 또는 } x=\frac{5}{2}$$

점 P는 제1사분면 위의 점이므로 $\mathrm{P}\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ⋯ ❶

같은 방법으로 점 Q의 좌표를 구하면 $\mathrm{Q}\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right)$ ⋯ ❷

타원 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{1}{10}\cdot\frac{5}{2}x+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}y=1 \qquad \therefore x+y=4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

타원 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $\mathrm{Q}\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{1}{10}\cdot\frac{5}{4}x+\frac{1}{6}\cdot\frac{9}{4}y=1$　　∴ $x+3y=8$　　······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면　$x=2$, $y=2$

∴ R(2, 2) ··· ❸

따라서 $\overline{PQ}=\sqrt{\left(\frac{5}{4}-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{4}-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{4}$,

$\overline{OR}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$이므로

$\overline{PQ}\cdot\overline{OR}=\frac{\sqrt{34}}{4}\cdot 2\sqrt{2}=\sqrt{17}$ ··· ❹

답 $\sqrt{17}$

채점 기준표

❶ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ 점 Q의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❸ 점 R의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❹ $\overline{PQ}\cdot\overline{OR}$의 값을 구할 수 있다.	10%

0272 **전략** 타원의 접선이 점 (0, 2)를 지남을 이용하여 접선의 기울기를 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 타원 $\frac{x^2}{n}+y^2=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$\frac{x_1x}{n}+y_1y=1$　　∴ $y=-\frac{x_1}{ny_1}x+\frac{1}{y_1}$

이 직선이 점 (0, 2)를 지나므로

$\frac{1}{y_1}=2$　　∴ $y_1=\frac{1}{2}$

이때 $\frac{x_1^2}{n}+y_1^2=1$이므로　$\frac{x_1^2}{n}+\frac{1}{4}=1$

$x_1^2=\frac{3n}{4}$　　∴ $x_1=\frac{\sqrt{3n}}{2}$ ($\because x_1>0$) ··· ❶

따라서 접선의 기울기는

$a_n=-\frac{x_1}{ny_1}=-\frac{2\sqrt{3n}}{2n}=-\frac{\sqrt{3n}}{n}$

이므로　$b_n=na_n=-\sqrt{3n}$ ··· ❷

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=2}^{71}\frac{1}{b_n+b_{n+1}}&=\sum_{n=2}^{71}\frac{1}{-\sqrt{3n}-\sqrt{3(n+1)}}\\&=\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{71}\{\sqrt{3n}-\sqrt{3(n+1)}\}\\&=\frac{1}{3}\{(\sqrt{6}-\sqrt{9})+(\sqrt{9}-\sqrt{12})+(\sqrt{12}-\sqrt{15})\\&\quad+\cdots+(\sqrt{213}-\sqrt{216})\}\\&=\frac{1}{3}(\sqrt{6}-6\sqrt{6})\\&=-\frac{5\sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$ ··· ❸

답 $-\frac{5\sqrt{6}}{3}$

채점 기준표

❶ 접점의 x좌표, y좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ a_n, b_n을 구할 수 있다.	30%
❸ 답을 구할 수 있다.	40%

0273 **전략** 직선 AP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 30°임을 이용한다.

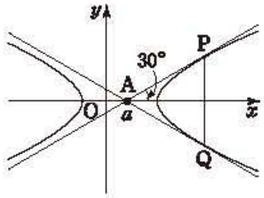
풀이 쌍곡선 $x^2-5y^2=15$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$x_1x-5y_1y=15$　　∴ $y=\frac{x_1}{5y_1}x-\frac{3}{y_1}$

이 직선이 점 A(a, 0)을 지나므로

$0=\frac{ax_1}{5y_1}-\frac{3}{y_1}$　　∴ $x_1=\frac{15}{a}$ ··· ❶

오른쪽 그림에서 △APQ가 정삼각형이므로



$\frac{x_1}{5y_1}=\pm\tan\left(\frac{1}{2}\angle PAQ\right)$

$=\pm\tan 30°=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ $y_1=\pm\frac{\sqrt{3}}{5}x_1=\pm\frac{3\sqrt{3}}{a}$ ··· ❷

이때 $x_1^2-5y_1^2=15$이므로　$\frac{225}{a^2}-5\cdot\frac{27}{a^2}=15$

$\frac{90}{a^2}=15$,　$a^2=6$　∴ $a=\sqrt{6}$ ($\because a>0$) ··· ❸　답 $\sqrt{6}$

채점 기준표

❶ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ 접점의 y좌표를 구할 수 있다.	40%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30%

0274 **전략** 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

풀이 $\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta+\sin\theta+\theta\cos\theta=\theta\cos\theta$,

$\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta-\cos\theta-\theta\cdot(-\sin\theta)=\theta\sin\theta$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\theta\sin\theta}{\theta\cos\theta}=\tan\theta$ $(\cos\theta\neq0)$ ··· ❶

$\frac{dy}{dx}=1$에서　$\tan\theta=1$

이때 $0<\theta<\pi$이므로　$\theta=\frac{\pi}{4}$ ··· ❷

∴ $a=\cos\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}\pi$

$b=\sin\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi$ ··· ❸

∴ $a+b=\sqrt{2}$ ··· ❹

답 $\sqrt{2}$

채점 기준표

❶ $\frac{dy}{dx}$를 구할 수 있다.	40%
❷ $f'(a)=1$일 때의 θ의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

Ⅱ 평면벡터

03 벡터의 연산

0275 답 시점: O, 종점: C

0276 답 시점: B, 종점: A

0277 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AD}}=6$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=6$

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2}=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=2\sqrt{13}$

답 $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=6$, $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=2\sqrt{13}$

0278 답 $\vec{a}$와 $\vec{g}$, $\vec{c}$와 $\vec{e}$, $\vec{d}$와 $\vec{f}$

0279 답 $\vec{b}$와 $\vec{h}$, $\vec{d}$와 $\vec{f}$

0280 답 $\vec{d}$와 $\vec{f}$

0281 답 $\vec{a}$와 $\vec{g}$, $\vec{c}$와 $\vec{e}$

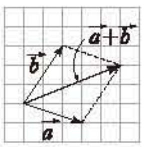
0282 $\overline{\mathrm{CO}}=\overline{\mathrm{OF}}=3$이므로 $\overline{\mathrm{CF}}=6$

$\therefore |\overrightarrow{\mathrm{CF}}|=6$ 답 6

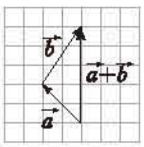
0283 답 $\overrightarrow{\mathrm{DO}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$

0284 답 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EO}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{FA}}$

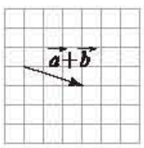
0285 (1)



(2)

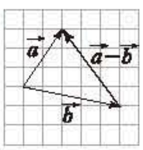


(3)

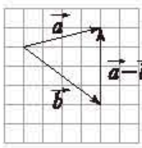


답 풀이 참조

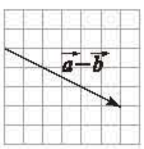
0286 (1)



(2)



(3)



답 풀이 참조

0287 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})+\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ 답 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

0288 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}})+(\overrightarrow{\mathrm{DE}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}})$

$=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})+(\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}})$

$=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ 답 $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

0289 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}})-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{0}$ 답 $\vec{0}$

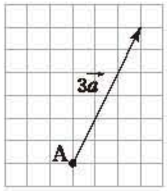
0290 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=-\vec{a}+\vec{b}$ 답 $-\vec{a}+\vec{b}$

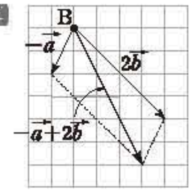
0291 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{BO}}$

$=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\vec{a}-\vec{b}$ 답 $-\vec{a}-\vec{b}$

0292 답



0293 답



0294 답 $3\vec{a}+\vec{b}$

0295 답 $-2\vec{a}-4\vec{b}$

0296 $3(\vec{a}-\vec{b})+2(2\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}-3\vec{b}+4\vec{a}+2\vec{b}$

$=(3+4)\vec{a}+(-3+2)\vec{b}$

$=7\vec{a}-\vec{b}$ 답 $7\vec{a}-\vec{b}$

0297 $4(3\vec{a}+\vec{b})-(2\vec{a}-3\vec{b})=12\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{a}+3\vec{b}$

$=(12-2)\vec{a}+(4+3)\vec{b}$

$=10\vec{a}+7\vec{b}$ 답 $10\vec{a}+7\vec{b}$

0298 $2(2\vec{a}+\vec{b}-4\vec{c})-5(\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c})$

$=4\vec{a}+2\vec{b}-8\vec{c}-5\vec{a}+10\vec{b}+5\vec{c}$

$=(4-5)\vec{a}+(2+10)\vec{b}+(-8+5)\vec{c}$

$=-\vec{a}+12\vec{b}-3\vec{c}$ 답 $-\vec{a}+12\vec{b}-3\vec{c}$

0299 $\vec{a}-\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}$에서 $-\vec{x}=\vec{a}-3\vec{b}$

$\therefore \vec{x}=-\vec{a}+3\vec{b}$ 답 $-\vec{a}+3\vec{b}$

0300 $3(\vec{x}-2\vec{a})=4\vec{b}+\vec{x}$에서 $3\vec{x}-6\vec{a}=4\vec{b}+\vec{x}$

$2\vec{x}=6\vec{a}+4\vec{b}$ $\therefore \vec{x}=3\vec{a}+2\vec{b}$ 답 $3\vec{a}+2\vec{b}$

0301 $3(2\vec{b}-\vec{x})+2(\vec{x}-3\vec{a})=5\vec{b}$에서

$6\vec{b}-3\vec{x}+2\vec{x}-6\vec{a}=5\vec{b}$, $-\vec{x}=6\vec{a}-\vec{b}$

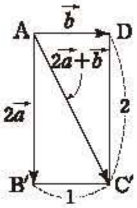
$\therefore \vec{x}=-6\vec{a}+\vec{b}$ 답 $-6\vec{a}+\vec{b}$

0302 오른쪽 그림에서

$|2\vec{a}+\vec{b}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC'}}|$

$=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

답 $\sqrt{5}$



0303 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$이므로

$2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}+(\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}$

$\therefore |2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|=3|\vec{a}|=3$ 답 3

0304 $\vec{c}=-2\vec{m}$이므로 $\vec{m}\,/\!/\,\vec{c}$ 답 $\vec{c}$

0305 $(m+1)\vec{a}+(3-2n)\vec{b}=\vec{0}$에서

$m+1=0$, $3-2n=0$

$\therefore m=-1$, $n=\dfrac{3}{2}$ 답 $m=-1$, $n=\dfrac{3}{2}$

0306 $(1-4m)\vec{a}+(n+3)\vec{b}=2\vec{a}-\vec{b}$에서

$1-4m=2,\ n+3=-1$

$\therefore m=-\frac{1}{4},\ n=-4$ 　　　답 $m=-\frac{1}{4},\ n=-4$

0307 $k\vec{a}+2\vec{b}$와 $3\vec{a}+6\vec{b}$가 평행하므로 0이 아닌 실수 t에 대하여

$k\vec{a}+2\vec{b}=t(3\vec{a}+6\vec{b})$

따라서 $k=3t,\ 2=6t$이므로 　$t=\frac{1}{3},\ k=1$ 　　　답 1

0308 (1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$

(2) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-2\vec{a}+3\vec{b})-\vec{a}=-3\vec{a}+3\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{AC}=3(\vec{b}-\vec{a})=3\overrightarrow{AB}$

따라서 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

답 풀이 참조

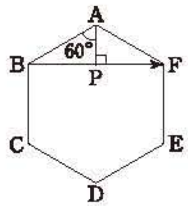
유형 01 벡터의 크기 　　　본책 ○쪽

벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기는 선분 AB의 길이와 같다.

➡ $|\overrightarrow{AB}|=\overline{AB}$

0309 정육각형의 한 내각의 크기는

$\frac{180°\times(6-2)}{6}=120°$



오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BF}$에 내린 수선의 발을 P라 하면 　$\angle BAP=60°$

따라서 $\overline{BP}=\overline{AB}\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\overline{BF}=2\overline{BP}=\sqrt{3}$

$\therefore |\overrightarrow{BF}|=\sqrt{3}$ 　　　답 $\sqrt{3}$

0310 ㄱ. $\overline{AD}=\overline{CF}=1$이므로 　$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{CF}|=1$

ㄴ. $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{AC}=1$이므로 　$|\overrightarrow{DE}|=1$

ㄷ. $\overline{AE}$는 정삼각형 ABC의 높이와 같으므로

$\overline{AE}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\sqrt{3}$

$\therefore |\overrightarrow{AE}|=\sqrt{3}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 　　　답 ⑤

0311 $\overrightarrow{OP}$가 동풍이므로 북서풍의 방향은 $\overrightarrow{OD}$와 같다.

또 $\overline{OD}=2\sqrt{2}$이므로 초속 $2\sqrt{2}$m의 북서풍을 나타내는 벡터는 $\overrightarrow{OD}$이다. 　　　답 ④

유형 02 서로 같은 벡터 　　　본책 ○쪽

벡터 $\overrightarrow{AB}$와 같은 벡터는 $\overline{AB}$와 평행하고 길이가 같은 선분을 찾은 후 $\overrightarrow{AB}$와 방향이 같도록 시점과 종점을 정한다.

0312 $\overrightarrow{FO},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{ED}$의 3개 　　　답 3

0313 답 (1) $\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{HI},\ \overrightarrow{ID},\ \overrightarrow{GF},\ \overrightarrow{FE}$ (2) $\overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{EH}$

유형 03 벡터의 덧셈과 뺄셈 　　　본책 ○쪽

벡터의 덧셈에 대하여 교환법칙과 결합법칙이 성립함을 이용하여 계산한다.

① $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$

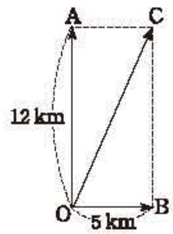
② $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a},\ (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

0314 $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{ED}$

$=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BD}+\underbrace{(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{ED})}_{\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DE}=\vec{0}}$

$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}$ 　　　답 ③

0315 오른쪽 그림과 같이 배가 출발한 지점을 O, 잔잔한 물에서 배가 1시간 동안 움직일 때 도착한 지점을 A, 강물이 지점 O에서 1시간 동안 흐른 후 도착한 지점을 B, 배가 실제로 1시간 후 도착한 지점을 C라 하면



$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$

$\overline{OA}\perp\overline{OB}$이므로 　$\overline{OC}=\sqrt{5^2+12^2}=13$(km)

즉 $|\overrightarrow{OC}|=13$km이므로 배가 실제로 움직이는 속력은 시속 13km이다. 　　　답 ⑤

0316 ㄱ. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

ㄴ. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}$

ㄷ. $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD})+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})$

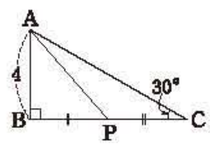
$=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{AD}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 　　　답 ⑤

0317 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서 　$\overrightarrow{PB}=-\overrightarrow{PC}$

즉 두 벡터 $\overrightarrow{PB},\ \overrightarrow{PC}$는 크기가 같고 방향이 서로 반대이므로 점 P는 $\overline{BC}$의 중점이다.



△ABC에서

$\overline{BC}=\frac{\overline{AB}}{\tan 30°}=4\sqrt{3}$

따라서 $\overline{BP}=\frac{1}{2}\overline{BC}=2\sqrt{3}$이므로 △ABP에서

$|\overrightarrow{PA}|^2=\overline{PA}^2=4^2+(2\sqrt{3})^2=28$ 　　　답 ④

0318 $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$에서

$\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PC}$ 　$\therefore \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$

즉 $\overline{BA}=\overline{CD},\ \overline{BA}/\!/\overline{CD}$이므로 □ABCD는 평행사변형이다. ➡ ❶

따라서 □ABCD$=\overline{AB}\cdot\overline{BC}\sin B=12\sin B$이고 $\sin B$의 최댓값은 $\angle B=\frac{\pi}{2}$일 때 1이므로 구하는 넓이의 최댓값은 12이다. ➡ ❷

답 12

채점 기준표

❶ □ABCD가 평행사변형임을 알 수 있다.	50%
❷ □ABCD의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	50%

유형 04 벡터의 실수배에 대한 연산 본책 53쪽

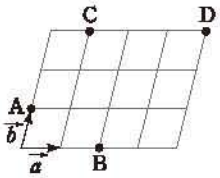
실수 k, l과 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여
① $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$
② $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$
③ $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

0319 $\vec{x}+3\vec{y}=\vec{a}$ ······㉠
$2\vec{x}+5\vec{y}=\vec{b}$ ······㉡
㉠×2−㉡을 하면 $\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$
이것을 ㉠에 대입하면 $\vec{x}+3(2\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}$
$\therefore \vec{x}=\vec{a}-3(2\vec{a}-\vec{b})=-5\vec{a}+3\vec{b}$
$\therefore \vec{x}-2\vec{y}=(-5\vec{a}+3\vec{b})-2(2\vec{a}-\vec{b})$
$=-5\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{a}+2\vec{b}$
$=-9\vec{a}+5\vec{b}$
답 ②

0320 $2(\vec{x}-2\vec{a}+\vec{b})=5\left(\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}\right)-2\vec{x}$에서
$2\vec{x}-4\vec{a}+2\vec{b}=5\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{x}$, $4\vec{x}=9\vec{a}+\vec{b}$
$\therefore \vec{x}=\frac{9}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$
따라서 $m=\frac{9}{4}$, $n=\frac{1}{4}$이므로 $m+n=\frac{5}{2}$
답 $\frac{5}{2}$

0321 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{x}$ ······㉠
$\vec{b}+\vec{c}=\vec{y}$ ······㉡
$\vec{c}+\vec{a}=\vec{z}$ ······㉢
㉠+㉡+㉢을 하면
$2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}$
$\therefore \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})$ ······㉣
㉣−㉡을 하면
$\vec{a}=\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})-\vec{y}=\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{y}+\vec{z})$
답 ②

0322 오른쪽 그림과 같이 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 정하면



$\overrightarrow{AB}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+2\vec{b}$,
$\overrightarrow{AD}=4\vec{a}+2\vec{b}$
$\overrightarrow{AD}=p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC}$에서
$4\vec{a}+2\vec{b}=p(2\vec{a}-\vec{b})+q(\vec{a}+2\vec{b})$
$=(2p+q)\vec{a}+(-p+2q)\vec{b}$
따라서 $2p+q=4$, $-p+2q=2$이므로
$p=\frac{6}{5}$, $q=\frac{8}{5}$ $\therefore p-q=-\frac{2}{5}$
답 ②

유형 05 도형에서 벡터의 연산 본책 54쪽

주어진 벡터의 시점과 종점을 도형의 꼭짓점을 이용하여 나타낸다. 이때 $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$이고 $\overline{AB}=\overline{CD}$이면 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ 또는 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$임을 이용한다.

0323 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$
$=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA})$
$=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE})-4\overrightarrow{OA}$
$=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE})-5\overrightarrow{OA}$
$=-5\overrightarrow{OA}$ ($\because \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$)
$\therefore k=-5$
답 −5

0324 ① $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{CO}=-\overrightarrow{OA}=-\vec{a}$
② $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}=\vec{b}$
③ $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OA}=\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{b}$
④ $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=-\vec{a}-\vec{b}$
⑤ $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$
답 ④

0325 (1) $\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$
$=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$ ···❶

(2) $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE})$
$=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{EC})=\frac{2}{3}\left\{\vec{b}-\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\right\}$
$=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$ ···❷

답 (1) $-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$ (2) $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

채점 기준표

❶ $\overrightarrow{EC}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낼 수 있다.	50%
❷ $\overrightarrow{AG}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낼 수 있다.	50%

0326 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{IK}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DI}=2\overrightarrow{EJ}=2\vec{b}$, $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{BA}=-\vec{a}$이므로
$\overrightarrow{CL}=\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KL}=(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IK})+\overrightarrow{KL}$
$=(\vec{b}+2\vec{b}+\vec{b})-\vec{a}$
$=-\vec{a}+4\vec{b}$
답 ④

0327 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$라 하면
$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$
$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$
$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$
$\overrightarrow{BD}=x\overrightarrow{AM}+y\overrightarrow{AN}$에서
$\vec{b}-\vec{a}=x\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)+y\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}\right)$
$=\left(x+\frac{y}{2}\right)\vec{a}+\left(\frac{x}{2}+y\right)\vec{b}$
따라서 $x+\frac{y}{2}=-1$, $\frac{x}{2}+y=1$이므로
$x=-2$, $y=2$
$\therefore xy=-4$
답 ②

다른 풀이 △BCD에서 삼각형의 중점 연결 정리에 의하여
$\overline{BD}/\!/\overline{MN}$, $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BD}$

$\therefore \overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MN}=2(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM})$
$\quad =-2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{AN}$

따라서 $x=-2$, $y=2$이므로 $\quad xy=-4$

유형 06 도형에서 벡터의 연산과 크기 본책 55쪽

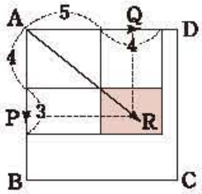
벡터의 덧셈 · 뺄셈을 하여 주어진 식을 하나의 벡터로 나타낸 후 벡터의 크기를 구한다.

0328 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})-\overrightarrow{BC}$
$\quad =\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CB}$
$\therefore |\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}|=2|\overrightarrow{CB}|=2$ 답 2

0329 $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}$
$\quad =(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{BD}$
$\quad =\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BD}$
이때 $|-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=4$이므로
$2|\overrightarrow{BD}|=4 \quad \therefore |\overrightarrow{BD}|=2$
따라서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 k라 하면 대각선의 길이가 2이므로
$\sqrt{2}k=2 \quad \therefore k=\sqrt{2}$ 답 ②

0330 ㄱ. $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
△ABC에서 ∠B=120°이고 $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로
$\angle BAC=\frac{1}{2}(180°-120°)=30°$
$\therefore \overline{AC}=2\overline{AB}\cos 30°=2\sqrt{3}$
즉 $|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{3}$이므로
$|\vec{a}+\vec{b}|=|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{3}$
ㄴ. 두 대각선 AD, CF의 교점을 O라 하면
$-\vec{b}+\vec{c}=-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$
$\quad =\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CO}$
$\therefore |-\vec{b}+\vec{c}|=|\overrightarrow{CO}|=2$
ㄷ. $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}$
$\quad =\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{FC}$
$\therefore |\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|=|\overrightarrow{FC}|=4$
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

0331 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AR}$를 만족시키는 점 R는 □APRQ가 직사각형이 되도록 하는 점이다.
따라서 점 R가 존재하는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같으므로 구하는 넓이는 $\quad 4\cdot 3=12$ 답 12



0332 정팔각형의 외접원의 중심을 O라 하면
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA})$
$\quad =(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OF})-2\overrightarrow{OA}=-2\overrightarrow{OA}$
즉 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}|=|-2\overrightarrow{OA}|=2|\overrightarrow{OA}|=8$이므로
$|\overrightarrow{OA}|=4$
따라서 구하는 정팔각형의 넓이는 두 변의 길이가 4이고 그 끼인 각의 크기가 $\frac{360°}{8}=45°$인 삼각형의 넓이의 8배와 같으므로
$8\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot\sin 45°=8\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=32\sqrt{2}$ 답 ④

0333 $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{F'O}$이므로
$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{F'O}=\overrightarrow{F'O}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{F'P}$
$\therefore |\overrightarrow{F'P}|=|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}|=3$ ··· ❶
타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}=2\cdot 5=10$이므로
$|\overrightarrow{PF}|+|\overrightarrow{PF'}|=10$
$\therefore |\overrightarrow{PF}|=10-|\overrightarrow{PF'}|=10-|\overrightarrow{F'P}|$
$\quad =10-3=7$
따라서 $\overline{PF}$의 길이는 7이다. ··· ❷
답 7

채점 기준표

❶ $\lvert\overrightarrow{F'P}\rvert$를 구할 수 있다.	40%
❷ $\overline{PF}$의 길이를 구할 수 있다.	60%

SSEN 특강

타원의 정의의 활용
타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 P와 두 초점 F, F′에 대하여
① $a>b>0$일 때, $\quad \overline{PF}+\overline{PF'}=2a$
② $b>a>0$일 때, $\quad \overline{PF}+\overline{PF'}=2b$

유형 07 벡터가 서로 같을 조건 본책 56쪽

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않을 때, 실수 m, n, s, t에 대하여
① $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0} \iff m=n=0$
② $m\vec{a}+n\vec{b}=s\vec{a}+t\vec{b} \iff m=s,\ n=t$

0334 $(2m-n)\vec{a}+(m+3n)\vec{b}=(m+2)\vec{a}+(n-1)\vec{b}$에서
$2m-n=m+2,\ m+3n=n-1$
$\therefore m-n=2,\ m+2n=-1$
위의 식을 연립하여 풀면 $\quad m=1,\ n=-1$
$\therefore m^2+n^2=2$ 답 ②

0335 $2x+y^2=x^2+2x$에서 $\quad x^2=y^2$
$\therefore x=y$ 또는 $x=-y$ ······ ㉠ ··· ❶
$2x-4y=x-5y+1$에서 $\quad x+y=1$ ······ ㉡ ··· ❷
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}$ ··· ❸
$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2+2=4$ ··· ❹
답 4

채점 기준표

❶ ㉠을 구할 수 있다.	30%
❷ ㉡을 구할 수 있다.	30%
❸ x, y의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$의 값을 구할 수 있다.	10%

0336 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=k\vec{a}-2\vec{b}-\vec{a}=(k-1)\vec{a}-2\vec{b}$

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$

$3\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{BA}$에서

$3(k-1)\vec{a}-6\vec{b}=m\vec{a}-m\vec{b}$

따라서 $3(k-1)=m$, $-6=-m$이므로

$m=6$, $k=3$ 답 3

0337 □ABCD가 평행사변형이므로 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$이므로

$2m\vec{a}+(n+1)\vec{b}-6\vec{a}-m\vec{b}$

$=-2n\vec{a}+3\vec{b}+(m+2)\vec{a}-2n\vec{b}$

$(2m-6)\vec{a}+(n-m+1)\vec{b}=(m-2n+2)\vec{a}+(3-2n)\vec{b}$

즉 $2m-6=m-2n+2$, $n-m+1=3-2n$이므로

$m+2n=8$, $m-3n=-2$

위의 식을 연립하여 풀면 $m=4$, $n=2$

$\therefore m+n=6$ 답 6

유형 08 벡터의 평행 본책 56쪽

> 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않을 때, $\vec{p}=m\vec{a}+n\vec{b}$, $\vec{q}=m'\vec{a}+n'\vec{b}$에 대하여
>
> $\vec{p}\,/\!/\,\vec{q} \iff \vec{p}=k\vec{q}$
>
> $\iff m=km'$, $n=kn'$ (단, $k\neq0$, m, n, m', n'은 실수)

0338 $\vec{p}+\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}+\vec{a}+2\vec{b}=4\vec{a}+\vec{b}$

$\vec{q}-\vec{r}=\vec{a}+2\vec{b}-(2\vec{a}+k\vec{b})=-\vec{a}+(2-k)\vec{b}$

$\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{q}-\vec{r}$가 서로 평행하므로

$\vec{q}-\vec{r}=m(\vec{p}+\vec{q})$ $(m\neq0)$

라 하면 $-\vec{a}+(2-k)\vec{b}=4m\vec{a}+m\vec{b}$

따라서 $4m=-1$, $m=2-k$이므로

$m=-\frac{1}{4}$, $k=\frac{9}{4}$ 답 ⑤

0339 (1) $\vec{a}-k(2\vec{c}-\vec{a})-2\vec{b}+6\vec{c}=\vec{0}$에서

$\vec{a}-2k\vec{c}+k\vec{a}-2\vec{b}+6\vec{c}=\vec{0}$

$\therefore (k+1)\vec{a}-2\vec{b}+(6-2k)\vec{c}=\vec{0}$ ➡ ❶

$\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하므로 $\vec{b}=m\vec{a}$ $(m\neq0)$라 하면

$(k+1-2m)\vec{a}+(6-2k)\vec{c}=\vec{0}$ ➡ ❷

따라서 $k+1-2m=0$, $6-2k=0$이므로

$k=3$, $m=2$ ➡ ❸

(2) (1)에서 $\vec{b}=2\vec{a}$이므로

$|\vec{b}|=2|\vec{a}|=2\cdot2=4$ ➡ ❹

답 (1) 3 (2) 4

채점 기준표

❶ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	20%
❷ $\vec{b}=m\vec{a}$ $(m\neq0)$라 하고 ❶의 식에 대입하여 간단히 할 수 있다.	30%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $\vec{b}$의 크기를 구할 수 있다.	20%

0340 ㄱ. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+(\vec{a}-2\vec{c})=2\vec{a}-2\vec{c}=2(\vec{a}-\vec{c})$

따라서 두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$와 $\vec{a}-\vec{c}$는 서로 평행하다.

ㄴ. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}-(\vec{a}-2\vec{c})=2\vec{c}$

따라서 두 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$와 $\vec{a}-\vec{c}$는 서로 평행하지 않다.

ㄷ. $\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}-2\vec{c})+\vec{c}=\vec{a}-\vec{c}$

따라서 두 벡터 $\vec{b}+\vec{c}$와 $\vec{a}-\vec{c}$는 서로 평행하다.

ㄹ. $\vec{b}-\vec{c}=(\vec{a}-2\vec{c})-\vec{c}=\vec{a}-3\vec{c}$

따라서 두 벡터 $\vec{b}-\vec{c}$와 $\vec{a}-\vec{c}$는 서로 평행하지 않다.

이상에서 $\vec{a}-\vec{c}$와 평행한 벡터는 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

0341 $2\vec{a}+3\vec{x}=t\vec{a}+3\vec{b}$에서

$\vec{x}=\frac{t-2}{3}\vec{a}+\vec{b}$ ······㉠

$\vec{x}+5\vec{y}=-3\vec{a}-\vec{b}$에서

$5\vec{y}=-\vec{x}-3\vec{a}-\vec{b}=\frac{-t-7}{3}\vec{a}-2\vec{b}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \vec{y}=\frac{-t-7}{15}\vec{a}-\frac{2}{5}\vec{b}$

$\vec{x}$, $\vec{y}$가 서로 평행하므로 $\vec{y}=m\vec{x}$ $(m\neq0)$라 하면

$\frac{-t-7}{15}\vec{a}-\frac{2}{5}\vec{b}=\frac{m(t-2)}{3}\vec{a}+m\vec{b}$

따라서 $\frac{-t-7}{15}=\frac{m(t-2)}{3}$, $-\frac{2}{5}=m$이므로

$t=11$ 답 11

유형 09, 10 세 점이 한 직선 위에 있을 조건 본책 57쪽

> 세 점 A, B, C에 대하여 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라 할 때,
>
> 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있다.
>
> $\iff \overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{AC}$
>
> $\iff \overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$
>
> $\iff \vec{c}-\vec{a}=k(\vec{b}-\vec{a})$ (단, $k\neq0$)

0342 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ $(k\neq0)$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$이므로

$m\vec{a}-2\vec{b}-2\vec{a}=k(-\vec{b}-2\vec{a})$

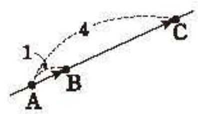
$\therefore (m-2)\vec{a}-2\vec{b}=-2k\vec{a}-k\vec{b}$

따라서 $m-2=-2k$, $-2=-k$이므로

$k=2$, $m=-2$ 답 ②

0343 한 평면 위의 세 점 A, B, C에 대하여 $\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AB}$이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다. 이때 $|\overrightarrow{AB}|=1$이므로

$|\overrightarrow{AC}|=4$ $\therefore |\overrightarrow{BC}|=3$ 답 3



0344 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}\ (k\neq 0)$ ⋯ ❶

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$이므로

$m\vec{a}+n\vec{b}-\vec{a}=k(\vec{b}-\vec{a})$

$\therefore (m-1)\vec{a}+n\vec{b}=-k\vec{a}+k\vec{b}$

따라서 $m-1=-k,\ n=k$이므로

$m=1-k,\ n=k$ ⋯ ❷

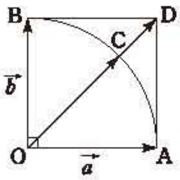
$\therefore mn=(1-k)k=-k^2+k=-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

따라서 mn은 $k=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{1}{4}$을 갖는다. ⋯ ❸ 답 $\frac{1}{4}$

채점 기준표

❶ 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있을 조건을 알 수 있다.	20%
❷ m, n을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ mn의 최댓값을 구할 수 있다.	40%

0345 오른쪽 그림과 같이 정사각형 OADB를 그리면



$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$

또 세 점 O, C, D는 한 직선 위에 있고

$|\overrightarrow{OC}|=1,\ |\overrightarrow{OD}|=\sqrt{2}$이므로

$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{OD}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ 답 ④

0346 $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{OC}$

$=\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CX}$

따라서 $\overrightarrow{CP}=t\overrightarrow{CX}$이므로 세 점 C, P, X는 한 직선 위에 있다.
즉 점 P는 직선 CX 위에 있으므로 점 P가 나타내는 도형은 직선 CX이다. 답 ⑤

0347 세 점 P, Q, C가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{QC}=k\overrightarrow{QP}\ (k\neq 0)$

이때 $\overrightarrow{BP}=\vec{a},\ \overrightarrow{BQ}=\vec{b}$라 하면

$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BQ}=\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{QD}+\overrightarrow{DC}=m\overrightarrow{BQ}-2\overrightarrow{BP}=m\vec{b}-2\vec{a}$

이므로 $m\vec{b}-2\vec{a}=k(\vec{a}-\vec{b})$

$\therefore -2\vec{a}+m\vec{b}=k\vec{a}-k\vec{b}$

따라서 $-2=k,\ m=-k$이므로 $m=2$ 답 2

0348 전략 북서풍은 점 O에서 남동쪽으로 부는 바람이다.

풀이 $\overrightarrow{OB}$가 초속 2 m의 남풍을 나타내므로 $-\overrightarrow{OB}$는 초속 2 m의 북풍을 나타낸다. 즉 초속 1 m의 북풍을 나타내는 벡터는 $-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$이므로 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$라 하면 $\overrightarrow{OC}$는 초속 $\sqrt{2}$ m의 북서풍을 나타내는 벡터이다.

따라서 초속 8 m의 북서풍을 나타내는 벡터는

$4\sqrt{2}\,\overrightarrow{OC}=4\sqrt{2}\left(\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)=4\sqrt{2}\,\overrightarrow{OA}-2\sqrt{2}\,\overrightarrow{OB}$

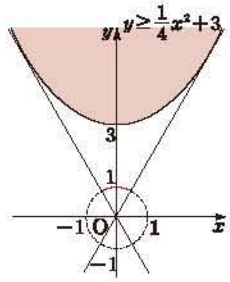
이므로 $p=4\sqrt{2},\ q=-2\sqrt{2}$

$\therefore p-q=6\sqrt{2}$ 답 ⑤

0349 전략 $\overrightarrow{OX}=\frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$이면 $\overrightarrow{OX}$는 $\overrightarrow{OP}$와 방향이 같은 단위벡터임을 이용한다.

풀이 $\overrightarrow{OB}=\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$에서 $\overrightarrow{OB}$는 $\overrightarrow{OA}$와 방향이 같은 단위벡터이다.

점 A가 존재하는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같으므로 점 B가 나타내는 도형은 원점을 지나고 포물선 $y=\frac{1}{4}x^2+3$에 접하는 두 직선의 x축의 위쪽 부분과 단위원으로 둘러싸인 부채꼴의 호이다.



원점을 지나고 포물선 $y=\frac{1}{4}x^2+3$에 접하는 직선의 방정식을 $y=mx$ (m은 실수)라 하면 $\frac{1}{4}x^2+3=mx$에서

$\frac{1}{4}x^2-mx+3=0 \quad \therefore x^2-4mx+12=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2m)^2-12=0, \quad 4m^2=12 \quad \therefore m=\pm\sqrt{3}$

두 직선 $y=\sqrt{3}x,\ y=-\sqrt{3}x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 각각 $\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$이므로 두 직선이 이루는 각의 크기는

$\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3},\ \tan\frac{2}{3}\pi=-\sqrt{3}$

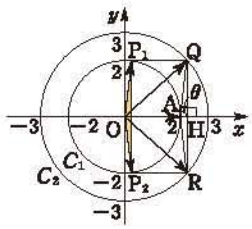
$\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$

따라서 점 B가 나타내는 도형의 길이는

$1\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$ 답 ①

0350 전략 평행사변형에서의 벡터의 덧셈을 이용하여 마름모인 사각형을 찾는다.

풀이 오른쪽 그림과 같이



$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OQ},\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{OR}$라 하면 두 사각형 $OAQP_1$, OP_2RA는 모두 한 변의 길이가 2인 마름모이다.

점 Q에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\angle QAH=\theta$라 하면

$\overline{AH}=2\cos\theta,\ \overline{QH}=2\sin\theta$

이고 $\overline{OQ}=3$이므로 직각삼각형 OHQ에서

$(2+2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2=3^2$

$8+8\cos\theta=9 \quad \therefore \cos\theta=\frac{1}{8}$

$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

$\therefore \triangle OP_1P_2=\triangle AQR=2\triangle AQH$

$=2\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cos\theta\cdot 2\sin\theta\right)$

$=4\cos\theta\sin\theta$

$=4\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{3\sqrt{7}}{16}$ 답 $\frac{3\sqrt{7}}{16}$

0351 전략 $\overline{AC}$를 그어 $\overline{OB}$와의 교점을 P라 하고 $\overrightarrow{OP}$를 $\vec{b}$와 $\vec{a}$, $\vec{c}$로 각각 나타낸다.

풀이 $\overline{AC}$와 $\overline{OB}$의 교점을 P라 하면 직각삼각형 AOP에서

$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OA}|\cos\theta=\cos\theta$

$|\overrightarrow{OB}|=1$이므로 $\overrightarrow{OP}=\cos\theta\,\vec{b}$ ...... ㉠

한편 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{c})$이므로

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\vec{a}+\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{c})$

$=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})$ ...... ㉡

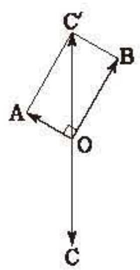
㉠, ㉡에서 $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})=\cos\theta\,\vec{b}$이므로

$\frac{1}{2}\vec{c}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\cos\theta\,\vec{b}$

$\therefore \vec{c}=-\vec{a}+\boxed{2\cos\theta}\,\vec{b}$ 답 ⑤

0352 전략 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$는 $\overrightarrow{OC}$와 방향은 반대이고 크기가 같음을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림에서 지점 O를 중심으로 세 지점 A, B, C의 방향으로 작용하는 힘의 합이 0이므로



$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC'}$으로 놓으면

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC'}$

$\angle AOC=120°$, $\angle BOC=150°$이므로

$\angle AOB=360°-(120°+150°)=90°$

즉 □AOBC′은 직사각형이고

$\angle BOC'=180°-150°=30°$이므로 △OBC′에서

$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC'}|\cos 30°=80\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=40\sqrt{3}$

따라서 철사 OB에 가해지는 무게는 $40\sqrt{3}$ kg중이다. 답 ⑤

0353 전략 벡터의 덧셈을 이용하여 $\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{QF'}-\overrightarrow{RF}-\overrightarrow{SF'}$을 하나의 벡터로 나타낸다.

풀이 $\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{QF'}-\overrightarrow{RF}-\overrightarrow{SF'}=\overrightarrow{PF}-\overrightarrow{RF}+\overrightarrow{QF'}-\overrightarrow{SF'}$

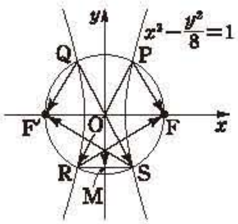
$=\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{FR}+\overrightarrow{QF'}+\overrightarrow{F'S}$

$=\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{QS}$

두 점 P와 R, Q와 S는 각각 원점 O에 대하여 대칭이므로

$\overrightarrow{PR}=2\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{QS}=2\overrightarrow{OS}$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{RS}$의 중점을 M이라 하면



$\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{QF'}-\overrightarrow{RF}-\overrightarrow{SF'}$

$=\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{QS}$

$=2(\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS})$

$=4\overrightarrow{OM}$

쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{8}=1$에서 $\sqrt{1+8}=3$이므로 쌍곡선의 초점의 좌표는

F(3, 0), F′(−3, 0)

따라서 $\overline{FF'}$을 지름으로 하는 원의 방정식은 $x^2+y^2=9$이므로 이 원과 쌍곡선의 교점의 y좌표는 $\left(1+\frac{y^2}{8}\right)+y^2=9$에서

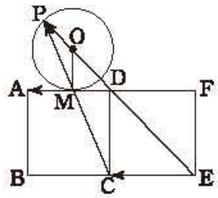
$\frac{9}{8}y^2=8$, $y^2=\frac{64}{9}$ $\therefore y=\pm\frac{8}{3}$

즉 $M\left(0,\ -\frac{8}{3}\right)$이므로 $|\overrightarrow{OM}|=\frac{8}{3}$

$\therefore |\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{QF'}-\overrightarrow{RF}-\overrightarrow{SF'}|=4|\overrightarrow{OM}|=4\cdot\frac{8}{3}=\frac{32}{3}$ 답 $\frac{32}{3}$

0354 전략 $\overrightarrow{DA}$와 같은 벡터를 이용하여 $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}$를 하나의 벡터로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 정사각형 ABCD에서 $\overline{BC}$의 연장선 위에 $\overline{BC}=\overline{CE}$가 되도록 점 E를 잡아 정사각형 DCEF를 그리면 $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{EC}$이므로



$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{EP}$

$\overrightarrow{EP}$가 원의 중심 O를 지날 때 $|\overrightarrow{EP}|$가 최대이고, 이때의 $\overrightarrow{EP}$는 점 D를 지난다.

$\therefore |\overrightarrow{EP}|=\overline{EP}=\overline{ED}+\overline{DO}+\overline{OP}$

$=\sqrt{2^2+2^2}+\sqrt{1^2+1^2}+1$

$=3\sqrt{2}+1$

따라서 구하는 최댓값은 $3\sqrt{2}+1$이다. 답 $3\sqrt{2}+1$

0355 전략 조건 (가), (나)의 식을 변형한 후 $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ $(k\neq 0)$이면 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있음을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서

$9\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$

$=-9\overrightarrow{AP}+(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP})$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AC}-12\overrightarrow{AP}$

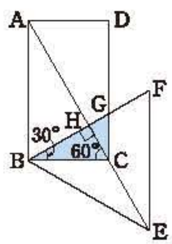
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}-12\overrightarrow{AP}$

$=2\overrightarrow{AC}-12\overrightarrow{AP}$

이므로 $2\overrightarrow{AC}-12\overrightarrow{AP}=-k\overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{k+2}{12}\overrightarrow{AC}$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$, $\overline{BG}$의 교점을 H라 하면 $\overline{AB}:\overline{BC}=\sqrt{3}:1$에서 $\angle ACB=60°$이고, $\angle FBC=30°$이므로 $\angle BHC=90°$



직각삼각형 BCH에서 $\overline{BC}=2\overline{CH}$이고, 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=2\overline{BC}$이므로

$\overline{CH}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{4}\overline{AC}$

$\therefore \overline{AH}=\frac{3}{4}\overline{AC}$

따라서 점 P는 직선 AC 위의 점이고 △BCG의 내부에 있어야 하므로

$\frac{3}{4}<\frac{k+2}{12}<1$ $\therefore 7<k<10$ ...... ㉠

한편 조건 (나)에서

$\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QF}+6\overrightarrow{QE}=(\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EQ})+(\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{EQ})-6\overrightarrow{EQ}$

$=(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EF})-8\overrightarrow{EQ}$

$=3\overrightarrow{EC}-8\overrightarrow{EQ}$

이므로 $3\overrightarrow{EC}-8\overrightarrow{EQ}=-k\overrightarrow{EC}$

$\therefore \overrightarrow{EQ}=\frac{k+3}{8}\overrightarrow{EC}$

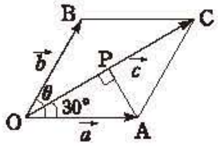
따라서 점 Q는 직선 EC 위의 점이고 $\triangle$BCG의 내부에 있어야 하므로

$$1<\frac{k+3}{8}<\frac{3}{2} \qquad \therefore 5<k<9 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $7<k<9$이므로 자연수 k의 값은 8이다. 답 8

0356 전략 주어진 조건을 그림으로 그려서 벡터로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 강의 한 지점 O에서 1시간 동안 강물이 흘러 도착한 지점을 A, 영훈이가 1시간 동안 수영하여 도착하려 했던 지점을 B, 실제로 도착한 지점을 C라 하자.



$\overline{OA}=\vec{a}$, $\overline{OB}=\vec{b}$, $\overline{OC}=\vec{c}$라 하면

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b},\ |\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=p,\ |\vec{c}|=3\sqrt{3} \qquad \cdots ❶$$

점 A에서 $\overline{OC}$에 내린 수선의 발을 P라 하면

$$\overline{OP}=3\cos 30°=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

즉 점 P가 $\overline{OC}$의 중점이므로 $\triangle$OAC는 이등변삼각형이다.

$$\therefore p=|\overline{OA}|=3 \qquad \cdots ❷$$

또 □OACB는 마름모이므로

$$\theta=2\angle COA=60° \qquad \cdots ❸$$

답 $\theta=60°$, $p=3$

채점 기준표

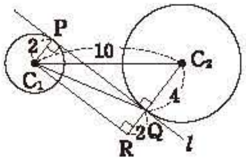
❶ 주어진 조건을 그림과 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ p의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ θ의 값을 구할 수 있다.	30%

0357 전략 벡터의 덧셈과 뺄셈을 이용하여 $\overrightarrow{C_1P}+\overrightarrow{C_1Q}+\overrightarrow{C_2Q}-\overrightarrow{C_2P}$를 하나의 벡터로 나타낸다.

풀이

$$\begin{aligned}\overrightarrow{C_1P}+\overrightarrow{C_1Q}+\overrightarrow{C_2Q}-\overrightarrow{C_2P}&=\overrightarrow{C_1P}+\overrightarrow{C_1Q}+\overrightarrow{PQ}\\&=(\overrightarrow{C_1P}+\overrightarrow{PQ})+\overrightarrow{C_1Q}\\&=\overrightarrow{C_1Q}+\overrightarrow{C_1Q}=2\overrightarrow{C_1Q}\end{aligned} \qquad \cdots ❶$$

오른쪽 그림과 같이 점 C_1에서 $\overline{C_2Q}$의 연장선에 내린 수선의 발을 R라 하면 직각삼각형 C_1RC_2에서



$$\overline{C_1R}=\sqrt{10^2-6^2}=8$$

이므로 직각삼각형 C_1RQ에서

$$\overline{C_1Q}=\sqrt{8^2+2^2}=2\sqrt{17} \qquad \therefore |\overrightarrow{C_1Q}|=2\sqrt{17} \qquad \cdots ❷$$

$$\therefore |\overrightarrow{C_1P}+\overrightarrow{C_1Q}+\overrightarrow{C_2Q}-\overrightarrow{C_2P}|=2|\overrightarrow{C_1Q}|=4\sqrt{17} \qquad \cdots ❸$$

답 $4\sqrt{17}$

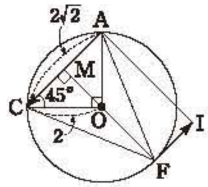
채점 기준표

❶ $\overrightarrow{C_1P}+\overrightarrow{C_1Q}+\overrightarrow{C_2Q}-\overrightarrow{C_2P}$를 하나의 벡터로 나타낼 수 있다.	50%
❷ $|\overrightarrow{C_1Q}|$를 구할 수 있다.	40%
❸ $|\overrightarrow{C_1P}+\overrightarrow{C_1Q}+\overrightarrow{C_2Q}-\overrightarrow{C_2P}|$를 구할 수 있다.	10%

0358 전략 주어진 등식을 만족시키는 $\overrightarrow{FI}$의 방향과 크기를 생각한다.

풀이 $\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{FI}=\vec{0}$에서 $\quad \overrightarrow{FI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

이때 $\overrightarrow{FI}$는 $\overrightarrow{AC}$와 방향이 반대이고 크기가 $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$이므로 점 I의 위치는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 □ACFI는 $\overline{AC}/\!/\overline{FI}$인 사다리꼴이다. $\cdots ❶$



원의 중심을 O라 하면 $\triangle$ACO는 $\angle AOC=90°$, $\overline{AO}=\overline{CO}$인 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{AC}=2\sqrt{2} \qquad \therefore \overline{FI}=\sqrt{2} \qquad \cdots ❷$$

점 F에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\overline{FM}$은 점 O를 지나고 $\overline{OM}=2\sin 45°=\sqrt{2}$이므로

$$\overline{FM}=\overline{FO}+\overline{OM}=2+\sqrt{2} \qquad \cdots ❸$$

따라서 □ACFI의 넓이는

$$\frac{1}{2}(2\sqrt{2}+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})=3\sqrt{2}+3 \qquad \cdots ❹$$

답 $3\sqrt{2}+3$

채점 기준표

❶ □ACFI가 사다리꼴임을 알 수 있다.	40%
❷ $\overline{AC}$, $\overline{FI}$의 길이를 구할 수 있다.	20%
❸ $\overline{FM}$의 길이를 구할 수 있다.	20%
❹ □ACFI의 넓이를 구할 수 있다.	20%

0359 전략 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$로 놓고 나머지 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낸다.

풀이 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 하면 $\quad \overrightarrow{AP}=\frac{5}{6}\vec{a}$

$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{QC}$에서 $|\overrightarrow{AQ}|:|\overrightarrow{QC}|=k:1$이므로

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{k}{1+k}\vec{b} \qquad \cdots ❶$$

한편 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$이므로

$$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\therefore \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

점 G는 $\triangle$ABC의 무게중심이므로

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b} \qquad \cdots ❷$$

이때 세 점 P, G, Q가 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{PQ}=t\overrightarrow{PG}\ (t\neq 0)$$

$$\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=t(\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AP})$$

$$\frac{k}{1+k}\vec{b}-\frac{5}{6}\vec{a}=t\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{5}{6}\vec{a}\right)$$

$$\therefore \frac{k}{1+k}\vec{b}-\frac{5}{6}\vec{a}=-\frac{t}{2}\vec{a}+\frac{t}{3}\vec{b}$$

따라서 $-\frac{5}{6}=-\frac{t}{2}$, $\frac{k}{1+k}=\frac{t}{3}$이므로

$$t=\frac{5}{3},\ k=\frac{5}{4} \qquad \cdots ❸$$

답 $\frac{5}{4}$

채점 기준표

❶ $\overrightarrow{AP}$를 $\vec{a}$로, $\overrightarrow{AQ}$를 $\vec{b}$로 나타낼 수 있다.	30%
❷ $\overrightarrow{AG}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낼 수 있다.	30%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	40%

Ⅱ 평면벡터

04 평면벡터와 평면 운동

0360 $\overrightarrow{AC}=(\vec{a}-2\vec{b})-\vec{a}=-2\vec{b}$ 답 $-2\vec{b}$

0361 $\overrightarrow{CB}=\vec{b}-(\vec{a}-2\vec{b})=-\vec{a}+3\vec{b}$ 답 $-\vec{a}+3\vec{b}$

0362 $\vec{p}=\dfrac{\vec{b}+2\vec{a}}{1+2}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$ 답 $\vec{p}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$

0363 $\vec{q}=\dfrac{3\vec{b}-2\vec{a}}{3-2}=-2\vec{a}+3\vec{b}$ 답 $\vec{q}=-2\vec{a}+3\vec{b}$

0364 답 $\vec{m}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

0365 답 $\vec{a}=(-1,\ 4)$

0366 답 $\vec{b}=(0,\ -3)$

0367 $3=n-1,\ 2m=0$이므로
$m=0,\ n=4$ 답 $m=0,\ n=4$

0368 $-1=m+n,\ 2m-n=7$이므로
$m=2,\ n=-3$ 답 $m=2,\ n=-3$

0369 $|\vec{a}|=\sqrt{(-6)^2+0^2}=6$ 답 6

0370 $|\vec{b}|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$ 답 5

0371 $3\vec{a}-\vec{b}=3(-1,\ -3)-(3,\ 2)=(-6,\ -11)$
답 $(-6,\ -11)$

0372 $-2\vec{a}+\vec{b}=-2(-1,\ -3)+(3,\ 2)=(5,\ 8)$ 답 $(5,\ 8)$

0373 $\overrightarrow{AB}=(1-2,\ -1-(-3))=(-1,\ 2)$이므로
$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$
답 $\overrightarrow{AB}=(-1,\ 2),\ |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5}$

0374 $\overrightarrow{AB}=(8-(-4),\ -6-(-1))=(12,\ -5)$이므로
$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{12^2+(-5)^2}=13$
답 $\overrightarrow{AB}=(12,\ -5),\ |\overrightarrow{AB}|=13$

0375 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{6}=3\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$ 답 $3\sqrt{3}$

0376 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos120^\circ=3\times2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-3$ 답 -3

0377 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-4)+3\times3=5$ 답 5

0378 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1\times4+5\times(-2)=-14$ 답 -14

0379 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$
$=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}$
$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$
$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ 답 풀이 참조

0380 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}$
$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{b}$
$=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$ 답 풀이 참조

0381 $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(3\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}-6\vec{b}\cdot\vec{a}-2\vec{b}\cdot\vec{b}$
$=3|\vec{a}|^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2$
$=3\times5-5\times(-1)-2\times10$
$=0$ 답 0

0382 $\cos\theta=\dfrac{1\times6+2\times3}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{6^2+3^2}}=\dfrac{12}{\sqrt{5}\times3\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$ 답 $\dfrac{4}{5}$

0383 $\cos\theta=\dfrac{-3\times4+1\times4}{\sqrt{(-3)^2+1^2}\sqrt{4^2+4^2}}$
$=\dfrac{-8}{\sqrt{10}\times4\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 답 $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

0384 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 $\theta(0\le\theta\le\pi)$라 하면
$\cos\theta=\dfrac{1\times2+3\times1}{\sqrt{1^2+3^2}\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$ 답 $\dfrac{\pi}{4}$

0385 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 $\theta(0\le\theta\le\pi)$라 하면
$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{3}\times0+(-2)\times1}{\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2}\sqrt{0^2+1^2}}=\dfrac{-2}{4\times1}=-\dfrac{1}{2}$
$\therefore\ \theta=\dfrac{2}{3}\pi$ 답 $\dfrac{2}{3}\pi$

0386 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$에서
$5x+(-2)\times5=0,\quad 5x=10$
$\therefore\ x=2$ 답 2

0387 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$에서
$2x\times(-1)+(-1)\times3=0$
$2x=-3\quad\therefore\ x=-\dfrac{3}{2}$ 답 $-\dfrac{3}{2}$

0388 $\vec{b}=k\vec{a}\ (k\neq0)$라 하면 $(3,\ 4x-1)=k(-1,\ 3)$
$3=-k,\ 4x-1=3k$
$\therefore\ k=-3,\ x=-2$ 답 -2

0389 $\vec{b}=k\vec{a}$ $(k\neq 0)$라 하면 $(x,\ x+5)=k(1,\ -2)$

$x=k,\ x+5=-2k$

위의 식을 연립하여 풀면

$k=-\frac{5}{3},\ x=-\frac{5}{3}$ 답 $-\frac{5}{3}$

0390 답 $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{5}$

0391 방향벡터가 $(1,\ -4)$이므로

$x+4=\frac{y-7}{-4}$ $\quad\therefore x+4=\frac{7-y}{4}$ 답 $x+4=\frac{7-y}{4}$

0392 답 $y=-5$

0393 답 $x=3$

0394 $\frac{x-5}{-1-5}=\frac{y-2}{3-2}$이므로 $\frac{5-x}{6}=y-2$

답 $\frac{5-x}{6}=y-2$

0395 $-3(x-1)+4(y+2)=0$에서 $3x-4y-11=0$

답 $3x-4y-11=0$

0396 법선벡터가 $(2,\ -3)$이므로

$2(x+3)-3(y-1)=0$ $\quad\therefore 2x-3y+9=0$

답 $2x-3y+9=0$

0397 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u},\ \vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(5,\ 1),\ \vec{v}=(2,\ 3)$

$$\therefore \cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{|5\times2+1\times3|}{\sqrt{5^2+1^2}\sqrt{2^2+3^2}}$$

$$=\frac{13}{\sqrt{26}\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0398 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u},\ \vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(-4,\ 2),\ \vec{v}=(3,\ -1)$

$$\therefore \cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{|-4\times3+2\times(-1)|}{\sqrt{(-4)^2+2^2}\sqrt{3^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{14}{\sqrt{20}\sqrt{10}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

답 $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

0399 주어진 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u},\ \vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(2,\ 4a+6),\ \vec{v}=(1,\ -3)$

두 직선이 평행하면 두 직선의 방향벡터도 평행하므로

$\vec{u}=k\vec{v}$ $(k\neq0)$

라 하면 $(2,\ 4a+6)=k(1,\ -3)$

즉 $k=2,\ 4a+6=-3k$이므로 $4a=-12$

$\therefore a=-3$ 답 -3

0400 주어진 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u},\ \vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(2,\ 4a+6),\ \vec{v}=(1,\ -3)$

두 직선이 수직이면 두 직선의 방향벡터도 수직이므로

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

$2\times1+(4a+6)\times(-3)=0,\quad -12a-16=0$

$\therefore a=-\frac{4}{3}$ 답 $-\frac{4}{3}$

0401 점 P가 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원이므로

$x^2+y^2=1$ 답 $x^2+y^2=1$

0402 점 P가 나타내는 도형은 중심이 $\mathrm{A}(-1,\ 3)$이고 반지름의 길이가 3인 원이므로

$(x+1)^2+(y-3)^2=9$ 답 $(x+1)^2+(y-3)^2=9$

0403 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 $v(t),\ a(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=2e^{-2t},\ a(t)=f''(t)=-4e^{-2t}$

이므로 $t=0$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v(0)=2\times1=2,\ a(0)=-4\times1=-4$

답 속도: 2, 가속도: -4

0404 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 $v(t),\ a(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=2t-2\sin t,\ a(t)=f''(t)=2-2\cos t$

이므로 $t=\frac{\pi}{2}$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\times\frac{\pi}{2}-2\sin\frac{\pi}{2}=\pi-2,$

$a\left(\frac{\pi}{2}\right)=2-2\cos\frac{\pi}{2}=2$ 답 속도: $\pi-2$, 가속도: 2

0405 $\frac{dx}{dt}=2,\ \frac{dy}{dt}=2t$이므로 $\vec{v}=(2,\ 2t)$

따라서 $t=2$에서의 속도는 $\vec{v}=(2,\ 4)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=0,\ \frac{d^2y}{dt^2}=2$이므로 $\vec{a}=(0,\ 2)$

따라서 $t=2$에서의 가속도는 $\vec{a}=(0,\ 2)$

답 $\vec{v}=(2,\ 4),\ \vec{a}=(0,\ 2)$

0406 $\frac{dx}{dt}=9t^2-4t,\ \frac{dy}{dt}=4t^3+1$이므로

$\vec{v}=(9t^2-4t,\ 4t^3+1)$

따라서 $t=2$에서의 속도는 $\vec{v}=(28,\ 33)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=18t-4,\ \frac{d^2y}{dt^2}=12t^2$이므로 $\vec{a}=(18t-4,\ 12t^2)$

따라서 $t=2$에서의 가속도는 $\vec{a}=(32,\ 48)$

답 $\vec{v}=(28,\ 33),\ \vec{a}=(32,\ 48)$

0407 $\frac{dx}{dt}=1-e^t,\ \frac{dy}{dt}=1+e^t$이므로

$\vec{v}=(1-e^t,\ 1+e^t)$

따라서 $t=2$에서의 속도는 $\vec{v}=(1-e^2,\ 1+e^2)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-e^t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=e^t$이므로

$\vec{a}=(-e^t,\ e^t)$

따라서 $t=2$에서의 가속도는 $\vec{a}=(-e^2,\ e^2)$

답 $\vec{v}=(1-e^2,\ 1+e^2)$, $\vec{a}=(-e^2,\ e^2)$

0408 $\frac{dx}{dt}=-\sin t$, $\frac{dy}{dt}=\cos t$이므로

$\vec{v}=(-\sin t,\ \cos t)$

따라서 $t=\frac{\pi}{3}$에서의 속도는 $\vec{v}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\cos t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\sin t$이므로

$\vec{a}=(-\cos t,\ -\sin t)$

따라서 $t=\frac{\pi}{3}$에서의 가속도는 $\vec{a}=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

답 $\vec{v}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $\vec{a}=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

0409 $t=0$에서의 위치가 0이므로

(1) $\int_0^t \sqrt{t}\,dt=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^t=\frac{2}{3}t\sqrt{t}$

(2) $\int_0^4 \sqrt{t}\,dt=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{2}{3}\times 4^{\frac{3}{2}}=\frac{16}{3}$

답 (1) $\frac{2}{3}t\sqrt{t}$ (2) $\frac{16}{3}$

0410 $\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=4t$이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(2t)^2+(4t)^2=20t^2$$

따라서 구하는 거리는

$$\int_0^1 \sqrt{20t^2}\,dt=\int_0^1 2\sqrt{5}t\,dt=\left[\sqrt{5}t^2\right]_0^1=\sqrt{5}$$

답 $\sqrt{5}$

0411 $\frac{dx}{dt}=2\sqrt{2}t$, $\frac{dy}{dt}=t^2-2$이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(2\sqrt{2}t)^2+(t^2-2)^2$$
$$=t^4+4t^2+4=(t^2+2)^2$$

따라서 구하는 거리는

$$\int_0^1 \sqrt{(t^2+2)^2}\,dt=\int_0^1 (t^2+2)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3+2t\right]_0^1=\frac{7}{3}$$

답 $\frac{7}{3}$

0412 $\frac{dx}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t)$,

$\frac{dy}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t)$이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=e^{2t}(1+2\sin t\cos t)+e^{2t}(1-2\sin t\cos t)$$
$$=2e^{2t}$$

따라서 구하는 거리는

$$\int_0^1 \sqrt{2e^{2t}}\,dt=\int_0^1 \sqrt{2}e^t\,dt=\left[\sqrt{2}e^t\right]_0^1=\sqrt{2}(e-1)$$

답 $\sqrt{2}(e-1)$

0413 $\frac{dx}{dt}=1+\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-\sin t$이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(1+\cos t)^2+(-\sin t)^2$$
$$=2(1+\cos t)=4\cos^2\frac{t}{2}$$

따라서 구하는 거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\cos^2\frac{t}{2}}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\frac{t}{2}\,dt$$
$$=\left[4\sin\frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\sqrt{2}$$

답 $2\sqrt{2}$

0414 $y'=\frac{3}{2}\sqrt{x-\frac{4}{9}}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_1^4 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x-\frac{4}{9}}\right)^2}\,dx=\int_1^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}\left(x-\frac{4}{9}\right)}\,dx$$
$$=\int_1^4 \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx$$
$$=\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=7$$

답 7

0415 $y'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx=\int_0^1 \sqrt{\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}}\,dx$$
$$=\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^1 \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

답 $\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$

유형 01 위치벡터 본책 68쪽

두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라 하면
➡ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$

0416 $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$

$=-2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}$

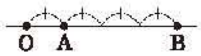
$=-2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$

답 ④

0417 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$

답 $\vec{b}-\vec{a}$

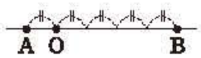
0418 (i) 오른쪽 그림에서



$\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OA}=4\vec{a}$

$\therefore \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=4\vec{a}-\vec{a}=3\vec{a}$

(ii) 오른쪽 그림에서



$\overrightarrow{OB}=-4\overrightarrow{OA}=-4\vec{a}$

$\therefore \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=-4\vec{a}-\vec{a}=-5\vec{a}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $k=3$ 또는 $k=-5$이므로 모든 k의 값의 합은

$3+(-5)=-2$ 답 -2

유형 02, 03 선분의 내분점과 외분점의 위치벡터 본책 66쪽

① 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 P라 하면

$$\overrightarrow{OP}=\frac{m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OA}}{m+n}$$

② 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점을 Q라 하면

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{m\overrightarrow{OB}-n\overrightarrow{OA}}{m-n}$$

0419 $\vec{p}=\dfrac{2\vec{b}+3\vec{a}}{2+3}=\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}$, $\vec{q}=\dfrac{3\vec{b}-2\vec{a}}{3-2}=-2\vec{a}+3\vec{b}$

$\therefore \vec{p}+\vec{q}=\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}-2\vec{a}+3\vec{b}=-\dfrac{7}{5}\vec{a}+\dfrac{17}{5}\vec{b}$

따라서 $m=-\dfrac{7}{5}$, $n=\dfrac{17}{5}$이므로

$m-n=-\dfrac{24}{5}$ 답 $-\dfrac{24}{5}$

0420 점 C는 $\overline{AB}$를 $1:3$으로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{OC}=\dfrac{\vec{b}+3\vec{a}}{4}$

점 E는 $\overline{AB}$를 $3:1$로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{OE}=\dfrac{3\vec{b}+\vec{a}}{4}$

$\therefore \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\dfrac{\vec{b}+3\vec{a}}{4}+\dfrac{3\vec{b}+\vec{a}}{4}=\vec{a}+\vec{b}$ 답 $\vec{a}+\vec{b}$

0421 $|\vec{a}-\vec{b}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{BA}|=14$이므로

$\overline{AB}=14$

이때 $\vec{c}=\dfrac{4\vec{b}+3\vec{a}}{4+3}$에서 점 C는 $\overline{AB}$를 $4:3$으로 내분하는 점이므로

$\overline{AC}=\dfrac{4}{7}\overline{AB}=\dfrac{4}{7}\times 14=8$ 답 ②

0422 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$이므로

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}$

$=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

따라서 $m=\dfrac{1}{6}$, $n=\dfrac{1}{2}$이므로

$m+n=\dfrac{2}{3}$ 답 ③

0423 $\overline{AD}$가 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=3:2$ ➊

즉 점 D는 $\overline{BC}$를 $3:2$로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{3\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}}{3+2}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ ➋

따라서 $m=\dfrac{2}{5}$, $n=\dfrac{3}{5}$이므로

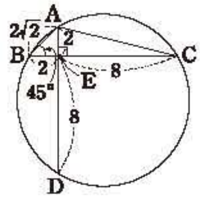
$mn=\dfrac{6}{25}$ ➌

답 $\dfrac{6}{25}$

채점 기준표

➊ $\overline{BD}:\overline{CD}$를 구할 수 있다.	30%
➋ $\overrightarrow{AD}$를 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$로 나타낼 수 있다.	50%
➌ mn의 값을 구할 수 있다.	20%

0424 $\overline{AD}$와 $\overline{BC}$의 교점을 E라 하면



△ABE는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{AE}=\overline{BE}=2$

$\overline{CE}=\overline{DE}=10-2=8$ (△AEC∽△BED이므로 $\overline{CE}=\overline{DE}$)

따라서 점 E는 $\overline{BC}$를 $1:4$로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{AE}=\dfrac{\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{AB}}{1+4}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{AD}=5\overrightarrow{AE}=5\left(\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}\right)$

$=4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

즉 $m=4$, $n=1$이므로

$m^2+n^2=16+1=17$ 답 17

유형 04 삼각형의 무게중심의 위치벡터 본책 67쪽

세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라 할 때, △ABC의 무게중심의 위치벡터 ➡ $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

0425 $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$, $\overrightarrow{OP}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$이므로

$\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OG}$

$=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

$=\dfrac{1}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{c}$

따라서 $p=\dfrac{1}{3}$, $q=0$, $r=-\dfrac{1}{3}$이므로

$p-q-r=\dfrac{2}{3}$ 답 $\dfrac{2}{3}$

0426 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$에서

$\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=-\vec{a}-\vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{CA}=\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GC}=\vec{a}-(-\vec{a}-\vec{b})$

$=2\vec{a}+\vec{b}$

따라서 $m=2$, $n=1$이므로 $m+n=3$ 답 ③

참고 $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$이므로

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$
$=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OG})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OG})$
$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OG}$
$=\vec{0}$

0427 점 P는 정삼각형 ABC의 외심이면서 무게중심이므로

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ ❶

$\therefore |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=3|\overrightarrow{OP}|=3\sqrt{4^2+3^2}=15$ ❷

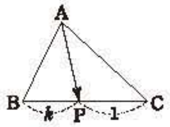
답 15

채점 기준표

❶ $\overrightarrow{OP}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타낼 수 있다.	60%
❷ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$의 크기를 구할 수 있다.	40%

유형 05 삼각형에서 위치벡터의 활용 본책 67쪽

$\overrightarrow{PB}=-k\overrightarrow{PC}$ $(k>0)$이면 점 P는 $\overline{BC}$를 $k:1$로 내분하는 점이다.
➡ $\triangle ABP:\triangle ACP=k:1$



0428 $2\overrightarrow{PA}+4\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}$에서

$2\overrightarrow{PA}+4\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}$

$\therefore 2\overrightarrow{PA}=-5\overrightarrow{PB}$

따라서 점 P는 $\overline{AB}$를 $5:2$로 내분하는 점이므로

$m=5,\ n=2$

$\therefore m-n=3$

답 3

0429 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$에서

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$

$\therefore \overrightarrow{PC}=-2\overrightarrow{PA}$

따라서 점 P는 $\overline{AC}$를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$\triangle PAB:\triangle PBC=\overline{AP}:\overline{PC}=1:2$

답 ①

0430 $7\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{CA}$에서

$7\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=2(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})$

$5\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+5\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

$\therefore \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

따라서 점 P는 $\triangle ABC$의 무게중심이므로

$\triangle PAB=\dfrac{1}{3}\triangle ABC=\dfrac{1}{3}\times 60=20$

답 ②

다른 풀이 $7\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{CA}$에서

$-7\overrightarrow{AP}+5(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$15\overrightarrow{AP}=5\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$

$\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=\overrightarrow{AM}$이라 하면 점 M은 $\overline{BC}$의 중점이고 점 P는 $\overline{AM}$을 $2:1$로 내분하는 점이므로 $\triangle ABC$의 무게중심이다.

$\therefore \triangle PAB=\dfrac{1}{3}\triangle ABC=20$

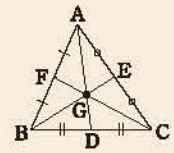
SSEN 특강

삼각형의 무게중심과 넓이

오른쪽 그림에서 점 G가 $\triangle ABC$의 무게중심일 때

① $\triangle AFG=\triangle BFG=\triangle BDG$
$=\triangle CDG=\triangle CEG$
$=\triangle AEG=\dfrac{1}{6}\triangle ABC$

② $\triangle ABG=\triangle BCG=\triangle ACG=\dfrac{1}{3}\triangle ABC$



0431 $\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PC}$에서

$\overrightarrow{BP}=3(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BP})+2(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BP})$

$6\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{BP}=\dfrac{3\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}}{6}=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{3\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}}{5}$ ❶

따라서 직선 BP와 변 AC의 교점 D는 $\overline{AC}$를 $2:3$으로 내분하는 점이므로

$a=2,\ b=3$ ❷

$\therefore ab=6$ ❸

답 6

채점 기준표

❶ $\overrightarrow{BP}$를 $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$로 나타낼 수 있다.	60%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10%

유형 06 점의 자취 본책 68쪽

$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$를 만족시키는 점 P의 자취

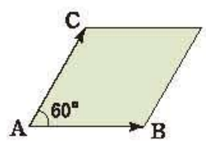
① $m+n=1$ ➡ 직선 AB

② $m\ge 0,\ n\ge 0,\ m+n=1$ ➡ 선분 AB

③ $m\ge 0,\ n\ge 0,\ m+n\le 1$ ➡ 삼각형 OAB의 내부와 그 둘레

④ $0\le m\le 1,\ 0\le n\le 1$ ➡ 두 선분 OA, OB를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형의 내부와 그 둘레

0432 $0\le m\le 1$, $0\le n\le 1$일 때, $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형의 내부와 그 둘레이다.



따라서 구하는 넓이는

$\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin 60^\circ=3\times 3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

답 $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

SSEN 특강

평행사변형의 넓이

평행사변형 ABCD에서 이웃하는 두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인 각의 크기가 θ일 때, 평행사변형 ABCD의 넓이 S는

$S=ab\sin\theta$

0433 $0\le m+n\le 2$에서 $\quad 0\le \dfrac{m}{2}+\dfrac{n}{2}\le 1$

$\dfrac{m}{2}=s$, $\dfrac{n}{2}=t$라 하면 $m\ge 0$, $n\ge 0$이므로

$0\le s+t\le 1$, $s\ge 0$, $t\ge 0$

이때 $\overrightarrow{OP}=s(2\overrightarrow{OA})+t(2\overrightarrow{OB})$이므로 점 P가 나타내는 도형은 $2\overrightarrow{OA}$와 $2\overrightarrow{OB}$를 두 변으로 하는 삼각형의 내부와 그 둘레이다.

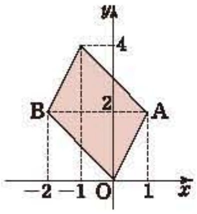
$2|\overrightarrow{OA}|=2|\overrightarrow{OB}|=10$이고 $\angle AOB=60°$이므로 점 P가 나타내는 삼각형은 한 변의 길이가 10인 정삼각형이다.

따라서 구하는 둘레의 길이는 $\quad 10\times 3=30$

답 ④

0434 $0\le m\le 1$, $0\le n\le 1$일 때,

$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 $\overline{OA}$와 $\overline{OB}$를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형의 내부와 그 둘레이다.



따라서 구하는 넓이는

$2\times\left(\dfrac{1}{2}\times 3\times 2\right)=6$

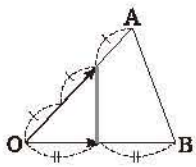
답 6

0435 $3s+4t=2$에서

$t=0$일 때, $s=\dfrac{2}{3}$이므로 $\quad \overrightarrow{OP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}$

$s=0$일 때, $t=\dfrac{1}{2}$이므로 $\quad \overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

따라서 오른쪽 그림과 같이 점 P의 자취는 $\overline{OA}$를 $2:1$로 내분하는 점과 $\overline{OB}$의 중점을 잇는 선분이다.



답 ④

유형 07 성분으로 주어진 평면벡터의 연산과 크기

본책 69쪽

두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$에 대하여

① $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2)$

② $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2)$

③ $k\vec{a}=(ka_1, ka_2)$ (단, k는 실수)

④ $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

0436 $2\vec{a}+3\vec{x}=-\vec{b}$에서

$3\vec{x}=-2\vec{a}-\vec{b}=-2(2, 5)-(-1, 2)=(-3, -12)$

$\therefore \vec{x}=(-1, -4)$

$\therefore |\vec{x}|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2}=\sqrt{17}$

답 $\sqrt{17}$

0437 $2(-\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})+3(2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c})$

$=-2\vec{a}+4\vec{b}-6\vec{c}+6\vec{a}-9\vec{b}+3\vec{c}$

$=4\vec{a}-5\vec{b}-3\vec{c}$

$=4(-2, 1)-5(3, -2)-3(0, 4)$

$=(-23, 2)$

따라서 $m=-23$, $n=2$이므로 $\quad mn=-46$

답 -46

0438 $\vec{p}=\vec{a}+k\vec{b}=(3, 1)+k(-1, 1)=(3-k, 1+k)$

$\therefore |\vec{p}|=\sqrt{(3-k)^2+(1+k)^2}=\sqrt{2k^2-4k+10}$

$=\sqrt{2(k-1)^2+8}$

따라서 $|\vec{p}|$는 $k=1$일 때 최솟값 $\sqrt{8}$, 즉 $2\sqrt{2}$를 갖는다.

답 ③

0439 $\vec{a}$가 단위벡터이므로 $|\vec{a}|=1$에서

$\sqrt{(2x-1)^2+\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=1$

$4x^2-4x+\dfrac{16}{25}=0, \quad 25x^2-25x+4=0$

$(5x-1)(5x-4)=0 \quad \therefore x=\dfrac{1}{5}$ 또는 $x=\dfrac{4}{5}$

따라서 $\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\beta=\dfrac{1}{5}$이므로

$\alpha-\beta=\dfrac{3}{5}$

답 ③

0440 $\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}=(-2, 1)-2(0, -3)+3(1, -2)$

$=(1, 1)$

$\therefore |\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ ··· ❶

따라서 벡터 $\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$와 방향이 같고 크기가 4인 벡터는

$4\times\dfrac{\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}}{|\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}|}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}(1, 1)=(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ ··· ❷

즉 $x=2\sqrt{2}$, $y=2\sqrt{2}$이므로

$x+y=4\sqrt{2}$ ··· ❸

답 $4\sqrt{2}$

채점 기준표

❶ $\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$를 성분으로 나타내고 그 크기를 구할 수 있다.	40%
❷ $\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$와 방향이 같고 크기가 4인 벡터를 구할 수 있다.	40%
❸ $x+y$의 값을 구할 수 있다.	20%

0441 점 (x, y)는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 원 위에 있으므로

$x^2+y^2=4\ (-2\le x\le 2)$ ······ ㉠

$\vec{a}-\vec{b}=(x, y)-(4, 0)=(x-4, y)$이므로

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(x-4)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2-8x+16}$

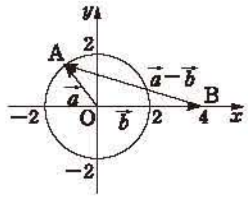
㉠을 위의 식에 대입하면

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{-8x+20}$

이때 $-2\le x\le 2$이므로 $|\vec{a}-\vec{b}|$는 $x=-2$일 때 최댓값 $\sqrt{36}$, 즉 6을 갖는다.

답 6

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라 하면 $|\vec{a}-\vec{b}|$는 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이이다.
점 A의 좌표가 $(-2,\ 0)$일 때 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 최대이므로 $|\vec{a}-\vec{b}|$의 최댓값은 $4+2=6$



유형 08 평면벡터가 서로 같을 조건 본책 69쪽

세 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$, $\vec{c}=(c_1,\ c_2)$에 대하여
$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b} \Longleftrightarrow c_1=ma_1+nb_1,\ c_2=ma_2+nb_2$
(단, m, n은 실수)

0442 $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$에서

$(-2,\ 1)=m(1,\ -3)+n(-1,\ 2)$
$=(m-n,\ -3m+2n)$
$\therefore m-n=-2,\ -3m+2n=1$

위의 식을 연립하여 풀면 $m=3,\ n=5$
$\therefore mn=15$

답 ④

0443 $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$에서

$(1,\ -2)=2(p-3,\ 2)+(q+2,\ 2q)$
$=(2p+q-4,\ 2q+4)$
$\therefore 2p+q-4=1,\ 2q+4=-2$

위의 식을 연립하여 풀면 $p=4,\ q=-3$
$\therefore p+q=1$

답 1

0444 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$의 시점을 좌표평면의 원점으로 놓고 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$를 성분으로 나타내면

$\vec{a}=(1,\ -1)$, $\vec{b}=(3,\ 1)$, $\vec{c}=(-3,\ 5)$

$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$에서

$(-3,\ 5)=p(1,\ -1)+q(3,\ 1)$
$=(p+3q,\ -p+q)$
$\therefore p+3q=-3,\ -p+q=5$

위의 식을 연립하여 풀면 $p=-\dfrac{9}{2},\ q=\dfrac{1}{2}$

$\therefore p^2+q^2=\dfrac{81}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{41}{2}$

답 ⑤

유형 09 평면벡터의 성분과 크기 본책 69쪽

두 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$에 대하여
① $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$
② $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

0445 점 D의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2+1,\ -1-1)=(3,\ -2)$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(x,\ y+2)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$에서 $x=3,\ y+2=-2$
$\therefore x=3,\ y=-4$

따라서 점 D의 좌표는 $(3,\ -4)$이다.

답 ④

0446 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(3-a,\ 3-b)$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(-1-a,\ -1-b)$, $\overrightarrow{\mathrm{PC}}=(-a,\ 3-b)$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}$
$=(3-a,\ 3-b)+(-1-a,\ -1-b)+(-a,\ 3-b)$
$=(2-3a,\ 5-3b)$

$2\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2(-1-3,\ -1-3)=(-8,\ -8)$이므로

$2-3a=-8,\ 5-3b=-8 \quad \therefore a=\dfrac{10}{3},\ b=\dfrac{13}{3}$

$\therefore a-b=-1$

답 ②

0447 대각선 BD의 중점 M의 좌표는

$\mathrm{M}\left(\dfrac{-1+7}{2},\ \dfrac{-2+0}{2}\right)$, 즉 $\mathrm{M}(3,\ -1)$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AM}}=(3-x,\ -1-1)=(3-x,\ -2)$
$\overrightarrow{\mathrm{MC}}=(2-3,\ y+1)=(-1,\ y+1)$

이때 $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{MC}}$이므로

$3-x=-1,\ -2=y+1 \quad \therefore x=4,\ y=-3$
$\therefore x^2+y^2=16+9=25$

답 ④

다른 풀이 $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{MC}}$가 성립하려면 점 M은 대각선 AC의 중점이어야 한다.
따라서 대각선 AC의 중점 $\left(\dfrac{x+2}{2},\ \dfrac{y+1}{2}\right)$과 대각선 BD의 중점 $\mathrm{M}(3,\ -1)$이 일치하므로

$\dfrac{x+2}{2}=3,\ \dfrac{y+1}{2}=-1 \quad \therefore x=4,\ y=-3$

0448 직선 $y=x-2$ 위의 점 P의 좌표를 $(x,\ x-2)$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x-1,\ x-2)+(x-2,\ x-3)$
$=(2x-3,\ 2x-5)$

$\therefore |\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=\sqrt{(2x-3)^2+(2x-5)^2}$
$=\sqrt{8x^2-32x+34}$
$=\sqrt{8(x-2)^2+2}$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$는 $x=2$일 때 최솟값 $\sqrt{2}$를 갖는다.

답 ②

유형 10 평면벡터의 평행 본책 70쪽

두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$에 대하여
$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{b}=k\vec{a}$
$\Longleftrightarrow b_1=ka_1,\ b_2=ka_2$ (단, $k\neq0$)

0449 $\vec{a}+k\vec{b}=(2,\ 2)+k(-1,\ 3)=(2-k,\ 3k+2)$

$\vec{b}-\vec{c}=(-1,\ 3)-(5,\ 1)=(-6,\ 2)$

이때 두 벡터 $\vec{a}+k\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$가 서로 평행하므로

$\vec{a}+k\vec{b}=t(\vec{b}-\vec{c})\ (t\neq0)$

라 하면 $(2-k,\ 3k+2)=t(-6,\ 2)$
$\therefore 2-k=-6t,\ 3k+2=2t$

위의 식을 연립하여 풀면

$k=-1,\ t=-\dfrac{1}{2}$

답 -1

0450 $\vec{a}=t\vec{b}\ (t\neq0)$라 하면

$(2x-1,\ -6)=t(2,\ 3-x)$

$\therefore 2x-1=2t,\ -6=t(3-x)$ ➊

$2x-1=2t$에서 $t=x-\frac{1}{2}$이므로 이것을 $t(3-x)=-6$에 대입하면

$\left(x-\frac{1}{2}\right)(3-x)=-6,\quad 2x^2-7x-9=0$

$(x+1)(2x-9)=0\quad \therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{9}{2}$ ➋

따라서 모든 x의 값의 합은

$-1+\frac{9}{2}=\frac{7}{2}$ ➌

답 $\frac{7}{2}$

채점 기준표

➊ x, t에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	40%
➋ x의 값을 구할 수 있다.	50%
➌ 모든 x의 값의 합을 구할 수 있다.	10%

0451 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}\ (t\neq0)$

$\overrightarrow{AB}=(6-2,\ -1+3)=(4,\ 2)$,

$\overrightarrow{AC}=(-2-2,\ x+3)=(-4,\ x+3)$이므로

$(-4,\ x+3)=t(4,\ 2)$

$\therefore -4=4t,\ x+3=2t$

$\therefore t=-1,\ x=-5$

답 -5

유형 11 자취의 방정식 (1) 본책 70쪽

좌표평면 위에 있는 점의 자취의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 구하는 점의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓는다.

(ii) 벡터를 성분으로 나타낸다.

(iii) 주어진 등식에 대입하여 x, y 사이의 관계식을 구한다.

0452 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$

$=(-x,\ -y)+(3-x,\ -y)+(-x,\ 3-y)$

$=(3-3x,\ 3-3y)$

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=2$에서 $\sqrt{(3-3x)^2+(3-3y)^2}=2$

$(3-3x)^2+(3-3y)^2=4$

$\therefore (x-1)^2+(y-1)^2=\frac{4}{9}$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(1,\ 1)$이고 반지름의 길이가 $\frac{2}{3}$인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$2\pi\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\pi$

답 ②

0453 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{AP}=(x-4,\ y+1)$, $\overrightarrow{BP}=(x+2,\ y-5)$

$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BP}|$에서

$\sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-5)^2}$

$(x-4)^2+(y+1)^2=(x+2)^2+(y-5)^2$

$-12x+12y-12=0$

$\therefore x-y+1=0$

답 $x-y+1=0$

0454 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{AP}=(x-3,\ y+1)$

$|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{AP}|=k$에서 $\sqrt{3^2+(-1)^2}\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}=k$

$\therefore (x-3)^2+(y+1)^2=\frac{k^2}{10}$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(3,\ -1)$이고 반지름의 길이가 $\frac{k}{\sqrt{10}}$인 원이다. ➊

이때 원의 넓이가 5π이므로 $\pi\times\left(\frac{k}{\sqrt{10}}\right)^2=5\pi$

$k^2=50\quad \therefore k=5\sqrt{2}\ (\because k>0)$ ➋

답 $5\sqrt{2}$

채점 기준표

➊ 점 P가 나타내는 도형을 구할 수 있다.	60%
➋ k의 값을 구할 수 있다.	40%

유형 12 평면벡터의 내적 본책 71쪽

평면도형에서의 벡터의 내적은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 도형의 성질을 이용하여 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기 $\theta\ (0\le\theta\le\pi)$를 구한다.

(ii) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$임을 이용한다.

0455 반원에 대한 원주각의 크기는 $90°$이므로

$\angle BAC=90°$

즉 $\triangle ABC$는 직각삼각형이므로

$\overline{BC}=\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$

따라서 $\overline{OB}=\overline{OA}=\overline{OC}=\overline{AC}=\sqrt{2}$에서 $\triangle OCA$는 정삼각형이므로

$\angle OAB=90°-60°=30°$

$\therefore \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AB}|\cos30°$

$=\sqrt{2}\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$

답 3

0456 $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BC}$이므로

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos120°$

$=1\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

답 ③

0457 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos\theta$

$=4\times9\times\cos\theta=36\cos\theta$

$-1\le\cos\theta\le1$이므로 $-36\le\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\le36$

따라서 $M=36$, $m=-36$이므로

$M-m=72$

답 72

0458 $\triangle$ABP, $\triangle$BCP는 정삼각형이므로

$$\overline{AC}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=2\sqrt{3}$$

또 $\overline{CG_1}=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$이고, 세 점 A, G_1, C가 한 직선 위에 있으므로

$$|\overrightarrow{AG_1}|=\overline{AC}-\overline{CG_1}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

같은 방법으로 하면 $|\overrightarrow{AG_2}|=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

또 두 벡터 $\overrightarrow{AG_1}$, $\overrightarrow{AG_2}$가 이루는 각의 크기는 60°이므로

$$\overrightarrow{AG_1}\cdot\overrightarrow{AG_2}=|\overrightarrow{AG_1}||\overrightarrow{AG_2}|\cos 60°$$
$$=\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

유형 13 성분으로 주어진 평면벡터의 내적 (본책 71쪽)

두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$에 대하여
$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

0459 $\overrightarrow{AD}=(7-0,\ 1-5)=(7,\ -4)$,
$\overrightarrow{BC}=(6-3,\ 3-0)=(3,\ 3)$이므로

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(7,\ -4)\cdot(3,\ 3)$$
$$=21-12=9$$

답 ⑤

0460 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-8$에서

$(4,\ x-1)\cdot(1,\ 2-x)=-8$
$4+(x-1)(2-x)=-8$
$x^2-3x-10=0,\quad (x+2)(x-5)=0$
$\therefore x=5\ (\because x>0)$

답 5

0461 $|\vec{a}|=2\sqrt{13}$에서 $\sqrt{(3-k)^2+4^2}=2\sqrt{13}$

$(3-k)^2+16=52,\quad k^2-6k-27=0$
$(k+3)(k-9)=0\quad \therefore k=-3\ (\because k<0)$ ➊

따라서 $\vec{a}=(6,\ 4)$, $\vec{b}=(-5,\ 3)$이므로 ➋

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(6,\ 4)\cdot(-5,\ 3)$
$=-30+12=-18$ ➌

답 -18

채점 기준표

➊ k의 값을 구할 수 있다.	40%
➋ $\vec{a}$, $\vec{b}$를 구할 수 있다.	20%
➌ $\vec{a}\cdot\vec{b}$를 구할 수 있다.	40%

0462 두 점 P, Q가 포물선 $y^2=8x$ 위의 점이므로 $P\left(\frac{a^2}{8},\ a\right)$, $Q\left(\frac{b^2}{8},\ b\right)$라 하면

$$\overrightarrow{OP}=\left(\frac{a^2}{8},\ a\right),\ \overrightarrow{OQ}=\left(\frac{b^2}{8},\ b\right)$$

$$\therefore \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\frac{(ab)^2}{64}+ab=\frac{1}{64}\{(ab)^2+64ab\}$$
$$=\frac{1}{64}(ab+32)^2-16$$

따라서 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$는 $ab=-32$일 때 최솟값 -16을 갖는다.

답 ②

0463 $t\vec{a}+\vec{b}=t(1,\ -1)+(-1,\ 3)=(t-1,\ 3-t)$,
$\vec{a}-t\vec{b}=(1,\ -1)-t(-1,\ 3)=(t+1,\ -1-3t)$이므로

$f(t)=(t\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-t\vec{b})$
$=(t-1,\ 3-t)\cdot(t+1,\ -1-3t)$
$=(t-1)(t+1)+(3-t)(-1-3t)$
$=4t^2-8t-4$
$=4(t-1)^2-8$

따라서 $f(t)$는 $t=1$일 때 최솟값 -8을 갖는다.

답 -8

다른 풀이 $\vec{a}=(1,\ -1)$, $\vec{b}=(-1,\ 3)$에서

$|\vec{a}|^2=1^2+(-1)^2=2,\ |\vec{b}|^2=(-1)^2+3^2=10,$
$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1-3=-4$
$\therefore f(t)=(t\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-t\vec{b})$
$=t|\vec{a}|^2+(1-t^2)\vec{a}\cdot\vec{b}-t|\vec{b}|^2$
$=2t-4(1-t^2)-10t$
$=4t^2-8t-4$

유형 14 자취의 방정식 (2) (본책 72쪽)

좌표평면 위에 있는 점의 자취의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 구하는 점의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓는다.
(ii) 벡터를 성분으로 나타낸다.
(iii) 주어진 등식에 대입하여 x, y 사이의 관계식을 구한다.

0464 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면
$\overrightarrow{AB}=(6-3,\ 10-5)=(3,\ 5)$, $\overrightarrow{OP}=(x,\ y)$이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}=(3,\ 5)\cdot(x,\ y)=3x+5y$

즉 $3x+5y=34$이므로 점 P의 자취는 직선 $3x+5y-34=0$이다.
따라서 $\overline{OP}$의 길이의 최솟값은 원점 O와 직선 $3x+5y-34=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-34|}{\sqrt{3^2+5^2}}=\sqrt{34}$$

답 $\sqrt{34}$

0465 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overrightarrow{OA}=(-2,\ 1)$,
$\overrightarrow{OP}=(x,\ y)$이므로

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=(-2,\ 1)\cdot(x,\ y)=-2x+y$

$-1\le\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\le 1$에서 $-1\le -2x+y\le 1$
$\therefore y\ge 2x-1,\ y\le 2x+1$

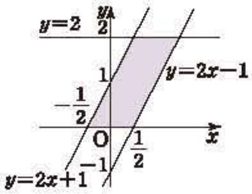
또 $\overrightarrow{OB}=\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$이므로

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=\left(0,\ \frac{1}{2}\right)\cdot(x,\ y)=\frac{1}{2}y$

$0\le\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}\le 1$에서 $0\le\frac{1}{2}y\le 1$, 즉 $0\le y\le 2$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같으므로 구하는 넓이는

$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\times 2=2$



답 ④

유형 15 평면벡터의 내적의 연산법칙 (1)

본책 72쪽

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여
① $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$
② $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$
③ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

0466 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=4\times|\vec{b}|\times\frac{1}{2}=2|\vec{b}|$

$(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=36$에서

$3|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=36$

$3\times 4^2+2\times 2|\vec{b}|-|\vec{b}|^2=36,\quad |\vec{b}|^2-4|\vec{b}|-12=0$

$(|\vec{b}|+2)(|\vec{b}|-6)=0\quad \therefore |\vec{b}|=6$

답 ⑤

0467 $|\vec{x}|=1$, $|\vec{y}|=1$이고 $\angle A=60°$이므로

$\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}||\vec{y}|\cos 60°=1\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ··· ❶

$\therefore |3\vec{x}+2\vec{y}|^2=9|\vec{x}|^2+12\vec{x}\cdot\vec{y}+4|\vec{y}|^2$

$=9\times 1^2+12\times\frac{1}{2}+4\times 1^2=19$ ··· ❷

$\therefore |3\vec{x}+2\vec{y}|=\sqrt{19}$ ··· ❸

답 $\sqrt{19}$

채점 기준표

❶ $\vec{x}\cdot\vec{y}$를 구할 수 있다.	40%
❷ $|3\vec{x}+2\vec{y}|^2$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $|3\vec{x}+2\vec{y}|$를 구할 수 있다.	20%

0468 $(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{BC}=0$에서

$(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=0$

$(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AB})\cdot(-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AB})=0$

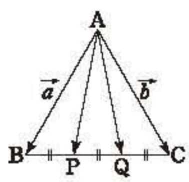
$|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{CA}|^2=0$

$\therefore |\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2$, 즉 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$

따라서 $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이다.

답 ④

0469 오른쪽 그림과 같이 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 하면 점 P는 $\overline{BC}$를 1 : 2로 내분하는 점이므로



$\overrightarrow{AP}=\frac{\vec{b}+2\vec{a}}{1+2}=\frac{1}{3}(2\vec{a}+\vec{b})$

점 Q는 $\overline{BC}$를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{AQ}=\frac{2\vec{b}+\vec{a}}{2+1}=\frac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b})$

또 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=3$이고 $\angle BAC=60°$이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60°=3\times 3\times\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

$\therefore \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\frac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b})$

$=\frac{1}{9}(2|\vec{a}|^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}+2|\vec{b}|^2)$

$=\frac{1}{9}\left(2\times 3^2+5\times\frac{9}{2}+2\times 3^2\right)$

$=\frac{13}{2}$

답 $\frac{13}{2}$

유형 16 평면벡터의 내적의 연산법칙 (2)

본책 72쪽

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여
$|\vec{a}+\vec{b}|=k\ (k>0)$ ➡ $|\vec{a}+\vec{b}|^2=k^2$
➡ $|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=k^2$

0470 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$의 양변을 제곱하면

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=3,\quad 1^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2^2=3$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=1$

$\therefore (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2$

$=1^2+1-2\times 2^2$

$=-6$

답 ②

0471 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{4}=2\times|\vec{b}|\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}|\vec{b}|$

$|\vec{a}-2\vec{b}|=2$의 양변을 제곱하면

$|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=4$

$2^2-4\sqrt{2}|\vec{b}|+4|\vec{b}|^2=4$

$|\vec{b}|^2-\sqrt{2}|\vec{b}|=0,\quad |\vec{b}|(|\vec{b}|-\sqrt{2})=0$

$\therefore |\vec{b}|=\sqrt{2}\ (\because \vec{b}\neq\vec{0})$

답 ②

0472 $|\vec{a}+\vec{b}|=2$의 양변을 제곱하면

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4$ ······ ㉠

$|\vec{a}-\vec{b}|=3$의 양변을 제곱하면

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=9$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면 $2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2=13$

$\therefore |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=\frac{13}{2}$ ··· ❶

$\therefore |\vec{a}+2\vec{b}|^2+|2\vec{a}-\vec{b}|^2$

$=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2+4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=5(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$

$=5\times\frac{13}{2}=\frac{65}{2}$ ··· ❷

답 $\frac{65}{2}$

채점 기준표

❶ $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$의 값을 구할 수 있다.	60%
❷ $|\vec{a}+2\vec{b}|^2+|2\vec{a}-\vec{b}|^2$의 값을 구할 수 있다.	40%

유형 17 두 평면벡터가 이루는 각의 크기 ; 성분이 주어진 경우 (본책 73쪽)

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0\le\theta\le\pi)$라 하면

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

0473 $\vec{a}+\vec{b}=(1,\ 3)$, $\vec{a}-\vec{b}=(2,\ 1)$이므로 두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{1\times2+3\times1}{\sqrt{1^2+3^2}\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}\ (\because\ 0\le\theta\le\pi)$ 답 ②

0474 $\overrightarrow{CA}=(1,\ -2)$, $\overrightarrow{CB}=(2,\ 2)$이므로

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=\frac{1\times2+(-2)\times2}{\sqrt{1^2+(-2)^2}\sqrt{2^2+2^2}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}\ (\because\ 0<\theta<\pi)$$

답 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

0475 $\vec{a}+\vec{b}=(x,\ 2)$이므로 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$에서

$\sqrt{x^2+2^2}=\sqrt{13}$, $\quad x^2+4=13$

$x^2=9\quad\therefore\ x=3\ (\because\ x>0)$

따라서 $\vec{a}=(1,\ 3)$, $\vec{b}=(2,\ -1)$이므로

$$\cos\theta=\frac{1\times2+3\times(-1)}{\sqrt{1^2+3^2}\sqrt{2^2+(-1)^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$$

답 $-\frac{\sqrt{2}}{10}$

유형 18 두 평면벡터가 이루는 각의 크기 ; 내적의 연산법칙을 이용하는 경우 (본책 73쪽)

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0\le\theta\le\pi)$라 하면

$$|\vec{a}\pm\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2\pm2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$
$$=|\vec{a}|^2\pm2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta+|\vec{b}|^2\ (\text{복호동순})$$

0476 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{10}$의 양변을 제곱하면

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=10$

$(\sqrt{2})^2+2\times\sqrt{2}\times2\times\cos\theta+2^2=10$

$4\sqrt{2}\cos\theta=4\quad\therefore\ \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 ③

0477 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$의 양변을 제곱하면

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

따라서 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$이다. 답 ④

0478 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$에서 $\quad\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$

즉 $|\vec{a}+\vec{b}|=|-\vec{c}|$이므로 양변을 제곱하면

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2$

$\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$3^2+2\times3\times5\times\cos\theta+5^2=7^2$, $\quad 30\cos\theta=15$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{1}{2}\quad\therefore\ \theta=\frac{\pi}{3}\ (\because\ 0\le\theta\le\pi)$ 답 $\frac{\pi}{3}$

0479 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{10\sqrt{3}}{5\times6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\ (\because\ 0<\theta<\pi)$$

따라서 평행사변형 AOBC의 넓이는

$5\times6\times\sin\theta=30\times\frac{\sqrt{6}}{3}=10\sqrt{6}$ 답 $10\sqrt{6}$

유형 19 평면벡터의 수직 (본책 74쪽)

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$에 대하여

$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0\iff a_1b_1+a_2b_2=0$

0480 $\vec{p}$와 $\vec{q}$가 서로 수직이므로 $\quad\vec{p}\cdot\vec{q}=0$

$(3,\ a-2)\cdot(b,\ 2)=0$, $\quad 3b+2(a-2)=0$

$\therefore\ 2a+3b=4$ …… ㉠

또 $\vec{q}$와 $\vec{r}$가 서로 평행하므로

$\vec{q}=t\vec{r}\ (t\ne0)$

라 하면 $\quad(b,\ 2)=t(4,\ 6)$

$b=4t$, $2=6t\quad\therefore\ t=\frac{1}{3}$, $b=\frac{4}{3}$

$b=\frac{4}{3}$를 ㉠에 대입하면 $\quad a=0$

$\therefore\ a+b=\frac{4}{3}$ 답 $\frac{4}{3}$

0481 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 서로 수직이므로 $\quad\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$(2t-1,\ t)\cdot\left(1,\ -\frac{1}{t}\right)=0$, $\quad 2t-1-1=0$

$\therefore\ t=1$

따라서 $\vec{a}=(1,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ -1)$이므로

$\vec{a}-2\vec{b}=(1,\ 1)-2(1,\ -1)=(-1,\ 3)$

$\therefore\ |\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$ 답 ③

0482 $\triangle ABC$는 $\angle B=90°$인 직각삼각형이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ ➊

이때

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(m,\ m^2+1)-(2,\ 5)$

$=(m-2,\ m^2-4)$ ➋

이므로 $\quad(2,\ 5)\cdot(m-2,\ m^2-4)=0$

$2(m-2)+5(m^2-4)=0$

$5m^2+2m-24=0$, $\quad(5m+12)(m-2)=0$

$\therefore m=-\frac{12}{5}$ 또는 $m=2$ ➌

그런데 $m=2$이면 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$이므로

$m=-\frac{12}{5}$ ➍

답 $-\frac{12}{5}$

채점 기준표

➊ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$임을 알 수 있다.	20%
➋ $\overrightarrow{BC}$를 성분으로 나타낼 수 있다.	30%
➌ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$을 만족시키는 m의 값을 구할 수 있다.	30%
➍ 조건을 만족시키는 m의 값을 구할 수 있다.	20%

0483 $|\vec{a}+\vec{b}|=7$의 양변을 제곱하면

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=49$, $\quad 4^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+5^2=49$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=4$

이때 $\vec{a}+k\vec{b}$와 $\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직이므로

$(\vec{a}+k\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$

$|\vec{a}|^2+(k-1)\vec{a}\cdot\vec{b}-k|\vec{b}|^2=0$

$4^2+4(k-1)-5^2k=0$

$-21k+12=0 \qquad \therefore k=\frac{4}{7}$

답 $\frac{4}{7}$

0484 $\vec{a}\cdot\vec{b}=(t^2,\ 1-2t)\cdot(2t+k,\ t^2-kt+1)$

$=t^2(2t+k)+(1-2t)(t^2-kt+1)$

$=(3k+1)t^2-(k+2)t+1$

이때 모든 실수 t에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}\neq0$이려면 t에 대한 이차방정식 $(3k+1)t^2-(k+2)t+1=0$이 실근을 갖지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(k+2)^2-4(3k+1)<0$

$k^2-8k<0$, $\quad k(k-8)<0$

$\therefore 0<k<8$

따라서 구하는 정수 k는 1, 2, 3, ⋯, 7의 7개이다.

답 ④

유형 20 평면벡터를 이용한 직선의 방정식 본책 74쪽

점 $A(x_1,\ y_1)$을 지나고

① 방향벡터가 $\vec{u}=(u_1,\ u_2)$인 직선의 방정식은

$\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{u_2}$ (단, $u_1u_2\neq0$)

② 법선벡터가 $\vec{n}=(a,\ b)$인 직선의 방정식은

$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$

0485 점 $(-2,\ 3)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(1,\ -5)$인 직선의 방정식은

$x+2=\frac{y-3}{-5}$

이 직선이 점 $(a,\ -2)$를 지나므로

$a+2=\frac{-2-3}{-5} \qquad \therefore a=-1$

답 ②

0486 $\overrightarrow{AB}=(1-3,\ -6-1)=(-2,\ -7)$이므로 두 점 A, B를 지나는 직선과 수직인 직선의 법선벡터는 $(-2,\ -7)$이다.

점 $(-1,\ -2)$를 지나고 법선벡터가 $(-2,\ -7)$인 직선의 방정식은

$-2(x+1)-7(y+2)=0 \qquad \therefore 2x+7y+16=0$

$y=0$을 위의 식에 대입하면

$2x+16=0 \qquad \therefore x=-8$

따라서 구하는 직선의 x절편은 -8이다.

답 -8

0487 점 $(1,\ 5)$를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(-1,\ 1)$인 직선의 방정식은

$\frac{x-1}{-1}=y-5 \qquad \therefore x+y-6=0$ ⋯⋯ ㉠ ➊

점 $(5,\ 8)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(4,\ -3)$인 직선의 방정식은

$4(x-5)-3(y-8)=0$

$\therefore 4x-3y+4=0$ ⋯⋯ ㉡ ➋

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad x=2,\ y=4$

따라서 $m=2$, $n=4$이므로

$mn=8$ ➌

답 8

채점 기준표

➊ 점 (1, 5)를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}$인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	35%
➋ 점 (5, 8)을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}$인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	35%
➌ mn의 값을 구할 수 있다.	30%

유형 21 두 직선이 이루는 각의 크기 본책 75쪽

방향벡터가 각각 $\vec{u}=(u_1,\ u_2)$, $\vec{v}=(v_1,\ v_2)$인 두 직선 l, m이 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{|u_1v_1+u_2v_2|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$

0488 주어진 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(m,\ -1)$, $\vec{v}=(3,\ 1)$

두 직선이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\cos\frac{\pi}{4}$

$\frac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$|3m-1|=\sqrt{5m^2+5}$, $\quad 9m^2-6m+1=5m^2+5$

$2m^2-3m-2=0$, $\quad (2m+1)(m-2)=0$

$\therefore m=2\ (\because m>0)$

답 ②

0489 주어진 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(1,\ 2)$, $\vec{v}=(3,\ -4)$

$\therefore \cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{|1\times3+2\times(-4)|}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{5}}$

$=\frac{2\sqrt{5}}{5}\ \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 답 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

0490 주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$, x축의 방향벡터를 $\vec{e_1}$, y축의 방향벡터를 $\vec{e_2}$라 하면

$\vec{u}=(2,\ 3)$, $\vec{e_1}=(1,\ 0)$, $\vec{e_2}=(0,\ 1)$ ⋯ ❶

$\therefore \cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{e_1}|}{|\vec{u}||\vec{e_1}|}=\frac{|2|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$

$\cos\beta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{e_2}|}{|\vec{u}||\vec{e_2}|}=\frac{|3|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$ ⋯ ❷

$\therefore \cos\alpha\cos\beta=\frac{6}{13}$ ⋯ ❸

답 $\frac{6}{13}$

채점 기준표

❶ 주어진 직선과 x축, y축의 방향벡터를 구할 수 있다.	30%
❷ $\cos\alpha$, $\cos\beta$의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $\cos\alpha\cos\beta$의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 22 두 직선의 평행과 수직 본책 75쪽

두 직선 l, m의 방향벡터가 각각 $\vec{u}=(u_1,\ u_2)$, $\vec{v}=(v_1,\ v_2)$일 때

① $l /\!/ m \iff \vec{u}=k\vec{v} \iff u_1=kv_1,\ u_2=kv_2$ (단, $k\neq0$)

② $l\perp m \iff \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \iff u_1v_1+u_2v_2=0$

0491 세 직선 l, m, n의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$라 하면

$\vec{u}=(6,\ 3)$, $\vec{v}=(-1,\ a)$, $\vec{w}=(-2,\ b)$

두 직선 l, m이 서로 수직이므로 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

$-6+3a=0$ $\therefore a=2$

두 직선 l, n이 서로 평행하므로

$\vec{u}=t\vec{w}\ (t\neq0)$

라 하면 $(6,\ 3)=t(-2,\ b)$

$6=-2t,\ 3=tb$

$\therefore t=-3,\ b=-1$

$\therefore a+b=1$ 답 1

0492 두 점 A, B를 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(5-a,\ a-6)$

직선 $\frac{x+1}{2}=\frac{y-5}{3}$의 방향벡터를 $\vec{v}$라 하면

$\vec{v}=(2,\ 3)$

이때 두 직선이 서로 수직이므로 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

$2(5-a)+3(a-6)=0$

$\therefore a=8$ 답 ④

다른 풀이 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{a-6}{5-a}$

직선 $\frac{x+1}{2}=\frac{y-5}{3}$, 즉 $y=\frac{3}{2}x+\frac{13}{2}$과 직선 AB가 수직이므로

$\frac{a-6}{5-a}\times\frac{3}{2}=-1,\quad 3a-18=2a-10$

$\therefore a=8$

0493 주어진 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(-3,\ k+1)$, $\vec{v}=(k,\ -2)$

두 직선이 서로 평행하므로

$\vec{u}=t\vec{v}\ (t\neq0)$

라 하면 $(-3,\ k+1)=t(k,\ -2)$

$\therefore -3=tk,\ k+1=-2t$

$t=\frac{-3}{k}=\frac{k+1}{-2}$이므로 $k(k+1)=6$

$k^2+k-6=0,\quad (k+3)(k-2)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=2$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은 -6이다. 답 -6

유형 23 평면벡터를 이용한 원의 방정식 본책 75쪽

두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라 할 때,

$|\vec{p}-\vec{a}|=r$ 또는 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=r^2$ (단, $r>0$)

➡ 중심이 점 A이고 반지름의 길이가 r인 원

0494 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$에서 $\angle APB=90°$이므로 점 P의 자취는 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

$\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2-1}{2},\ \frac{4+0}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$

$\overline{AB}=\sqrt{(-1-2)^2+(-4)^2}=5$이므로

$a=\frac{1}{2},\ b=2,\ r=\frac{5}{2}$

$\therefore a+b+r=5$ 답 ③

다른 풀이 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{AP}=(x-2,\ y-4)$, $\overrightarrow{BP}=(x+1,\ y)$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$에서

$(x-2)(x+1)+y(y-4)=0$

$x^2-x-2+y^2-4y=0$

$\therefore \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{25}{4}$

따라서 점 P의 자취는 중심의 좌표가 $\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{5}{2}$인 원이므로 $a=\frac{1}{2},\ b=2,\ r=\frac{5}{2}$

0495 점 P의 자취는 중심이 점 A$(3,\ -1)$이고 반지름의 길이가 $|\overrightarrow{AP}|=5$인 원이므로 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$(x-3)^2+(y+1)^2=25$ ⋯ ❶

$y=0$을 위의 식에 대입하면

$(x-3)^2=24$ $\therefore x=3\pm2\sqrt{6}$ ⋯ ❷

따라서 점 P가 나타내는 도형이 x축과 만나는 두 점의 좌표가 $(3+2\sqrt{6},\ 0)$, $(3-2\sqrt{6},\ 0)$이므로 두 점 사이의 거리는

$(3+2\sqrt{6})-(3-2\sqrt{6})=4\sqrt{6}$ ⋯ ❸

답 $4\sqrt{6}$

채점 기준표

❶ 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ $y=0$일 때 x의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ ❶의 도형이 x축과 만나는 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.	30%

0496 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$이므로 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$에서

$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})=0$

$\therefore \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$

따라서 $\angle APB=90°$이므로 점 P가 나타내는 도형은 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

$\overline{AB}=\sqrt{(5-1)^2+(-2-4)^2}=2\sqrt{13}$이므로 구하는 둘레의 길이는 $2\sqrt{13}\pi$이다. 답 ②

다른 풀이 $\vec{p}=(x, y)$라 하면 $\vec{a}=(1, 4)$, $\vec{b}=(5, -2)$이므로 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$에서

$(x-1, y-4)\cdot(x-5, y+2)=0$

$(x-1)(x-5)+(y-4)(y+2)=0$

$x^2-6x+5+y^2-2y-8=0$

$\therefore (x-3)^2+(y-1)^2=13$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(3, 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$인 원이므로 구하는 둘레의 길이는 $2\sqrt{13}\pi$이다.

유형 24 직선 운동에서의 속도와 가속도 본책 76쪽

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$는

① $v(t)=f'(t)$ ② $a(t)=v'(t)=f''(t)$

0497 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$$v(t)=f'(t)=-\pi a\sin\left(\pi t-\frac{\pi}{6}\right)$$

$v(2)=2\sqrt{3}$이므로 $-\pi a\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}$

$\frac{\pi}{2}a=2\sqrt{3}$ $\quad\therefore a=\frac{4\sqrt{3}}{\pi}$

따라서 $f(t)=\frac{4\sqrt{3}}{\pi}\cos\left(\pi t-\frac{\pi}{6}\right)$이므로 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$$f(2)=\frac{4\sqrt{3}}{\pi}\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{\pi}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{6}{\pi}$$ 답 $\frac{6}{\pi}$

0498 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$$v(t)=f'(t)=\frac{1}{3}\cos\frac{t}{3}+\frac{1}{6}$$

$t=a$일 때 점 P의 속력을 0이라 하면

$\left|\frac{1}{3}\cos\frac{a}{3}+\frac{1}{6}\right|=0$, $\quad\cos\frac{a}{3}=-\frac{1}{2}$

$a\ge0$이므로

$\frac{a}{3}=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{8}{3}\pi,\ \frac{10}{3}\pi,\ \cdots$

$\therefore a=2\pi,\ 4\pi,\ 8\pi,\ 10\pi,\ \cdots$

따라서 점 P의 속력이 처음으로 0이 되는 시각은 2π이다. 답 2π

0499 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라 하면

$$v(t)=f'(t)=2pt+\frac{q}{t}$$

$$a(t)=f''(t)=2p-\frac{q}{t^2}$$

$v(2)=\frac{3}{2}$이므로

$4p+\frac{q}{2}=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore 8p+q=3$ ……㉠

$a(2)=\frac{5}{4}$이므로

$2p-\frac{q}{4}=\frac{5}{4}$ $\quad\therefore 8p-q=5$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=\frac{1}{2}$, $q=-1$

$\therefore pq=-\frac{1}{2}$ 답 ②

0500 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=4\cos t-2\cos 2t-2$ ➡ ❶

$=4\cos t-2(2\cos^2 t-1)-2$

$=-4\cos^2 t+4\cos t$

$=-4\left(\cos t-\frac{1}{2}\right)^2+1$ ➡ ❷

따라서 $0\le t\le\pi$에서 $v(t)$는 $\cos t=\frac{1}{2}$, 즉 $t=\frac{\pi}{3}$일 때 최댓값 1을 가지므로

$\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=1$ $\quad\therefore \alpha\beta=\frac{\pi}{3}$ ➡ ❸

답 $\frac{\pi}{3}$

채점 기준표

❶ 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$를 구할 수 있다.	30%
❷ $v(t)$를 완전제곱식의 꼴로 변형할 수 있다.	40%
❸ $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30%

SSEN 특강

삼각함수의 배각의 공식

① $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

② $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$

③ $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

유형 25 평면 운동에서의 속도 본책 76쪽

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도와 속력은

① 속도 ➡ $(f'(t), g'(t))$ ② 속력 ➡ $\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$

0501 $\frac{dx}{dt}=6$, $\frac{dy}{dt}=6-6t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$라 하면

$\vec{v}=(6,\ 6-6t)$

따라서 시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{6^2+(6-6t)^2}=6\sqrt{(t-1)^2+1}$

따라서 점 P의 속력은 $t=1$일 때 최솟값 6을 갖는다. 답 6

0502 $\frac{dx}{dt}=10\cos\theta$, $\frac{dy}{dt}=10\sin\theta-10t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$라 하면

$\vec{v}=(10\cos\theta,\ 10\sin\theta-10t)$

공이 최고 높이에 오를 때 $\frac{dy}{dt}=0$이므로 이때의 속도는 $(10\cos\theta,\ 0)$이다.

따라서 구하는 속력은

$\sqrt{(10\cos\theta)^2}=10\cos\theta$ 답 ①

0503 $\frac{dx}{dt}=-\sin t$, $\frac{dy}{dt}=\cos t+\sin t$이므로

$\vec{v}=(-\sin t,\ \cos t+\sin t)$

따라서 $t=\frac{3}{2}\pi$에서의 속도는 $\vec{v}=(1,\ -1)$

이때 x축의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(1,\ 0)$이므로

$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{1}{\sqrt{1^2}\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{4}$ 또는 $\theta=\frac{7}{4}\pi$ $(\because 0\le\theta<2\pi)$

그런데 $\vec{v}=(1,\ -1)$을 좌표평면에 나타내면 제4사분면에 위치하므로 구하는 각의 크기는 $\frac{7}{4}\pi$이다. 답 $\frac{7}{4}\pi$

유형 26 평면 운동에서의 가속도 본책 77쪽

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 가속도와 가속도의 크기는

① 가속도 ➡ $(f''(t),\ g''(t))$

② 가속도의 크기 ➡ $\sqrt{\{f''(t)\}^2+\{g''(t)\}^2}$

0504 $\frac{dx}{dt}=\sqrt{15}$, $\frac{dy}{dt}=3t^2-5$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$라 하면

$\vec{v}=(\sqrt{15},\ 3t^2-5)$

속력이 8이므로 $\sqrt{15+(3t^2-5)^2}=8$, $(3t^2-5)^2=49$

$3t^2-5=\pm7$, $t^2=4$ $\therefore t=2$ $(\because t>0)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=0$, $\frac{d^2y}{dt^2}=6t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도를 $\vec{a}$라 하면

$\vec{a}=(0,\ 6t)$

따라서 $t=2$에서의 가속도는 $(0,\ 12)$이므로 구하는 가속도의 크기는

$\sqrt{0+12^2}=12$ 답 ③

0505 $\frac{dx}{dt}=6\cos3t$, $\frac{dy}{dt}=-6\sin3t$에서

$\frac{d^2x}{dt^2}=-18\sin3t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-18\cos3t$

이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도를 $\vec{a}$라 하면

$\vec{a}=(-18\sin3t,\ -18\cos3t)$

따라서 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{(-18\sin3t)^2+(-18\cos3t)^2}$

$=\sqrt{18^2(\sin^2 3t+\cos^2 3t)}$

$=18$ 답 18

0506 $\frac{dx}{dt}=2at-a\cos t$, $\frac{dy}{dt}=1+a\sin t$에서

$\frac{d^2x}{dt^2}=2a+a\sin t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=a\cos t$

이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도를 $\vec{a}$라 하면

$\vec{a}=(2a+a\sin t,\ a\cos t)$ ❶

따라서 $t=\pi$에서의 가속도는 $(2a,\ -a)$이므로 가속도의 크기는

$\sqrt{4a^2+a^2}=\sqrt{5}a$ $(\because a>0)$ ❷

가속도의 크기가 5이므로 $\sqrt{5}a=5$

$\therefore a=\sqrt{5}$ ❸

답 $\sqrt{5}$

채점 기준표

❶ 점 P의 시각 t에서의 가속도를 구할 수 있다.	50%
❷ 가속도의 크기를 구할 수 있다.	30%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20%

0507 $\frac{dx}{dt}=-\omega\sin\omega t$, $\frac{dy}{dt}=\omega\cos\omega t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$라 하면

$\vec{v}=(-\omega\sin\omega t,\ \omega\cos\omega t)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2\cos\omega t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\omega^2\sin\omega t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도를 $\vec{a}$라 하면

$\vec{a}=(-\omega^2\cos\omega t,\ -\omega^2\sin\omega t)$

$\therefore \vec{v}\cdot\vec{a}=(-\omega\sin\omega t,\ \omega\cos\omega t)\cdot(-\omega^2\cos\omega t,\ -\omega^2\sin\omega t)$

$=\omega^3\sin\omega t\cos\omega t-\omega^3\cos\omega t\sin\omega t$

$=0$

따라서 점 P의 속도 $\vec{v}$와 가속도 $\vec{a}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

답 ④

유형 27 직선 운동에서의 이동거리 본책 77쪽

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$, $t=a$에서의 위치가 x_0일 때, 시각 t에서의 점 P의 위치 x와 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

① $x=x_0+\int_a^t v(t)dt$ ② $s=\int_a^b |v(t)|dt$

0508 $t=0$에서의 위치가 0이므로 $t=a$ $(0<a\le 2\pi)$일 때 점 P의 위치는

$$0+\int_0^a \cos\pi t\,dt=\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_0^a=\frac{1}{\pi}\sin\pi a$$

점 P가 원점을 지나면

$$\frac{1}{\pi}\sin\pi a=0,\qquad \sin\pi a=0$$

$$\therefore a=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\ (\because 0<a\le 2\pi)$$

따라서 점 P는 원점을 6번 지난다. 답 6

0509 구슬의 중심이 4초 동안 움직인 거리가 x cm이므로

$$x=\int_0^4\left|10\pi\sin\frac{\pi}{4}t\right|dt$$
$$=\int_0^4 10\pi\sin\frac{\pi}{4}t\,dt$$
$$=\left[-40\cos\frac{\pi}{4}t\right]_0^4$$
$$=40-(-40)=80$$

답 ②

0510 $t=0$에서의 위치가 0이므로 점 P의 시각 t에서의 위치를 x라 하면

$$x=\int_0^t(\sin 2t-2\sin t)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2t+2\cos t\right]_0^t$$
$$=-\frac{1}{2}\cos 2t+2\cos t-\frac{3}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}(2\cos^2 t-1)+2\cos t-\frac{3}{2}$$
$$=-\cos^2 t+2\cos t-1$$
$$=-(\cos t-1)^2 \quad \cdots ❶$$

$0\le t\le\pi$에서 $-1\le\cos t\le 1$이므로

$$-2\le\cos t-1\le 0,\qquad 0\le(\cos t-1)^2\le 4$$

$$\therefore -4\le-(\cos t-1)^2\le 0 \quad \cdots ❷$$

즉 $-4\le x\le 0$에서 $|x|\le 4$이므로 원점과 점 P 사이의 거리의 최댓값은 4이다. ⋯ ❸

답 4

채점 기준표

❶ 점 P의 시각 t에서의 위치를 구할 수 있다.	60%
❷ 점 P의 시각 t에서의 위치의 범위를 구할 수 있다.	30%
❸ 원점과 점 P 사이의 거리의 최댓값을 구할 수 있다.	10%

다른 풀이 $t=a$ $(0\le a\le\pi)$에서 원점과 점 P 사이의 거리가 최대라 하면 점 P는 시각 $t=a$에서 운동 방향이 바뀌므로 $v(a)=0$에서

$$\sin 2a-2\sin a=0,\qquad 2\sin a\cos a-2\sin a=0$$
$$\sin a(\cos a-1)=0,\qquad \sin a=0 \text{ 또는 } \cos a=1$$
$$\therefore a=0 \text{ 또는 } a=\pi\ (\because 0\le a\le\pi)$$

(i) $t=0$일 때, 점 P의 위치는 0이다.

(ii) $t=\pi$일 때, 점 P의 위치는

$$\int_0^\pi(\sin 2t-2\sin t)dt=\left[-\frac{1}{2}\cos 2t+2\cos t\right]_0^\pi=-4$$

(i), (ii)에서 원점과 점 P 사이의 거리의 최댓값은 $|-4|=4$이다.

유형 28 평면 운동에서의 이동거리

본책 76쪽

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_a^b\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

0511 $\dfrac{dx}{dt}=\cos t-\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=-\sin t-\cos t$이므로 $t=0$에서 $t=\pi$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^\pi\sqrt{(\cos t-\sin t)^2+(-\sin t-\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^\pi\sqrt{2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt$$
$$=\int_0^\pi\sqrt{2}\,dt=\left[\sqrt{2}t\right]_0^\pi$$
$$=\sqrt{2}\pi$$

답 ②

0512 $\dfrac{dx}{dt}=t-2$, $\dfrac{dy}{dt}=2\sqrt{2t}$

이때 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리가 6이므로

$$\int_0^a\sqrt{(t-2)^2+(2\sqrt{2t})^2}\,dt=6$$
$$\int_0^a\sqrt{t^2+4t+4}\,dt=6$$
$$\int_0^a\sqrt{(t+2)^2}\,dt=6$$
$$\int_0^a(t+2)dt=6$$
$$\left[\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^a=6,\qquad \frac{1}{2}a^2+2a=6$$
$$a^2+4a-12=0,\qquad (a+6)(a-2)=0$$
$$\therefore a=2\ (\because a>0)$$

답 ①

0513 $\dfrac{dx}{dt}=-2\cos t\sin t=-\sin 2t$, $\dfrac{dy}{dt}=2\sin t\cos t=\sin 2t$

이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$라 하면

$$\vec{v}=(-\sin 2t,\ \sin 2t)$$

점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{(-\sin 2t)^2+(\sin 2t)^2}=\sqrt{2\sin^2 2t}$$
$$=\sqrt{2}\,|\sin 2t|$$

이때 점 P가 출발 후 처음으로 속력이 0이 되는 때는

$\sqrt{2}\,|\sin 2t|=0$, 즉 $|\sin 2t|=0$에서

$$t=\frac{\pi}{2}$$

따라서 $t=0$에서 $t=\dfrac{\pi}{2}$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\,|\sin 2t|\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\sin 2t\,dt$$
$$=\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

0514 (1) $\dfrac{dx}{dt}=4,\ \dfrac{dy}{dt}=t-\dfrac{4}{t}$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$라 하면

$$\vec{v}=\left(4,\ t-\frac{4}{t}\right)$$

따라서 점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{4^2+\left(t-\frac{4}{t}\right)^2}=\sqrt{t^2+8+\frac{16}{t^2}}$$
$$=\sqrt{\left(t+\frac{4}{t}\right)^2}=t+\frac{4}{t} \quad \cdots❶$$

$t>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t+\frac{4}{t}\ge 2\sqrt{t\times\frac{4}{t}}=4$$

이때 등호는 $t=\dfrac{4}{t}$일 때 성립하므로 $t^2=4$, 즉 $t=2$일 때 점 P의 속력이 최소가 된다.

$\therefore a=2$ $\cdots❷$

(2) $t=1$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^2\left(t+\frac{4}{t}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+4\ln t\right]_1^2$$
$$=4\ln 2+\frac{3}{2} \quad \cdots❸$$

답 (1) 2 (2) $4\ln 2+\dfrac{3}{2}$

채점 기준표

❶ 점 P의 시각 t에서의 속력을 구할 수 있다.	30%
❷ 시각 a를 구할 수 있다.	30%
❸ 시각 $t=1$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리를 구할 수 있다.	40%

유형 29 곡선의 길이

본책 78쪽

닫힌 구간 $[a, b]$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) $f'(x)$를 구한다.
(ii) $\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$의 값을 구한다.

0515 $y=\dfrac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$이므로

$$y'=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x=x\sqrt{x^2+2}$$

따라서 주어진 곡선의 길이는

$$\int_0^a\sqrt{1+(x\sqrt{x^2+2})^2}\,dx=\int_0^a\sqrt{x^4+2x^2+1}\,dx$$
$$=\int_0^a\sqrt{(x^2+1)^2}\,dx$$
$$=\int_0^a(x^2+1)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^a$$
$$=\frac{1}{3}a^3+a$$

즉 $\dfrac{1}{3}a^3+a=\dfrac{14}{3}$에서 $a^3+3a-14=0$

$(a-2)(a^2+2a+7)=0$

$\therefore a=2\ (\because a^2+2a+7>0)$

답 ②

0516 $y'=-x+\dfrac{1}{4x}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_2^4\sqrt{1+\left(-x+\frac{1}{4x}\right)^2}\,dx=\int_2^4\sqrt{x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^2}}\,dx$$
$$=\int_2^4\sqrt{\left(x+\frac{1}{4x}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_2^4\left(x+\frac{1}{4x}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\ln x\right]_2^4$$
$$=\frac{1}{4}\ln 2+6$$

답 $\dfrac{1}{4}\ln 2+6$

0517 $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$의 값은 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이이다.

이때 $f(0)=0$, $f(1)=2$에서 $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$의 최솟값은 원점 O와 점 $(1,\ 2)$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 최솟값은

$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

답 $\sqrt{5}$

0518 전략 점 G가 $\triangle$ABC의 무게중심일 때, $\overrightarrow{PG}=\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{3}$임을 이용한다.

풀이 점 G가 $\triangle$ABC의 무게중심이므로

$$\overrightarrow{PG}=\frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{3} \qquad \therefore |\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=3|\overrightarrow{PG}|$$

따라서 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|$가 최대가 되려면 점 P가 점 G로부터 가장 먼 거리에 있어야 하므로 점 P가 $\triangle$ABC의 꼭짓점일 때 최대이다.

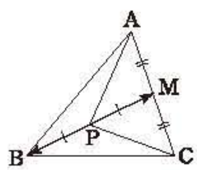
답 ①

0519 전략 주어진 식을 $\overrightarrow{PB}$로 나타낸 다음 점 P의 위치를 알아본다.

풀이 $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서

$2\overrightarrow{PB}=-(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC})$

$\therefore \overrightarrow{PB}=-\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}}{2}$



$\overline{AC}$의 중점을 M이라 하면

$\overrightarrow{PM}=\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}}{2}$

$\therefore \overrightarrow{PB}=-\overrightarrow{PM}$

따라서 점 P는 $\triangle$ABC의 중선 BM의 중점이다.

ㄱ. 점 P는 $\triangle$ABC의 내부에 있다.

ㄴ. $\triangle PAB=\dfrac{1}{2}\triangle ABM=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\triangle ABC=\dfrac{1}{4}\triangle ABC$

$\triangle PBC=\dfrac{1}{2}\triangle BCM=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\triangle ABC=\dfrac{1}{4}\triangle ABC$

$$\triangle PCA=\frac{1}{2}\triangle ABC$$

$\therefore \triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA = 1 : 1 : 2$

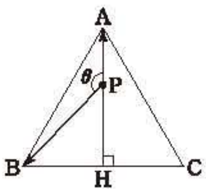
ㄷ. $|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PC}|$이면 $\triangle ABC$는 이등변삼각형이므로

$\overline{AC}\perp\overline{BM}$ $\quad\therefore \overline{AC}\perp\overline{BP}$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

0520 전략 $a>0$, $b>0$일 때, $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (등호는 $a=b$일 때 성립)임을 이용한다.

풀이 두 벡터 $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면



$$\cos\theta=\cos(\pi-\angle BPH)$$
$$=-\cos(\angle BPH)$$
$$=-\frac{|\overrightarrow{PH}|}{|\overrightarrow{BP}|}$$

$$\therefore |\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|=\big||\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|\cos\theta\big|$$
$$=|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|\times\frac{|\overrightarrow{PH}|}{|\overrightarrow{BP}|}$$
$$=|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PH}|$$

이때 $|\overrightarrow{PA}|+|\overrightarrow{PH}|=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2=\sqrt{3}$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\sqrt{3}\ge2\sqrt{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PH}|}$, $\quad 3\ge4|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PH}|$

$\therefore |\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PH}|\le\frac{3}{4}$ (단, 등호는 $|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PH}|$일 때 성립)

따라서 $|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|$의 최댓값이 $\frac{3}{4}$이므로

$p=4$, $q=3$ $\quad\therefore p+q=7$ 답 7

다른 풀이 $\overrightarrow{AH}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$이고 점 P가 선분 AH 위에 있으므로

$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AH}$ $(0\le k\le1)$라 하면

$$\overrightarrow{AP}=\frac{k}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$

$$\therefore \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{k}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$=\frac{k}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB})$$
$$=\frac{k}{2}(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos60^\circ)$$
$$=\frac{k}{2}\left(2^2+2\times2\times\frac{1}{2}\right)$$
$$=3k$$

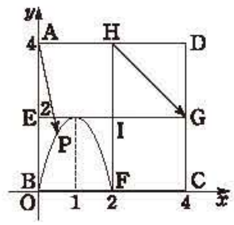
또 $|\overrightarrow{AP}|^2=|k\overrightarrow{AH}|^2=k^2|\overrightarrow{AH}|^2=k^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\right)^2=3k^2$이므로

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})$$
$$=-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}$$
$$=-3k+3k^2=3\left(k-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$$

따라서 $|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|$는 $k=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{3}{4}$을 갖는다.

0521 전략 주어진 도형을 좌표평면 위에 놓고 벡터를 성분으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 주어진 도형을 점 B를 원점으로 하는 좌표평면 위에 놓으면



A(0, 4), H(2, 4), G(4, 2)

포물선의 꼭짓점의 좌표가 (1, 2)이므로 포물선의 방정식을

$y=a(x-1)^2+2$ (a는 상수)라 하면 이 그래프가 원점을 지나므로

$a+2=0$ $\quad\therefore a=-2$

따라서 포물선의 방정식은 $y=-2(x-1)^2+2$, 즉 $y=-2x^2+4x$이므로 점 P의 좌표를 $(t, -2t^2+4t)$ $(0\le t\le2)$라 하면

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{HG}=(t, -2t^2+4t-4)\cdot(2, -2)$$
$$=4t^2-6t+8$$
$$=4\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{4}$$

따라서 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{HG}$는 $t=\frac{3}{4}$일 때 최솟값 $\frac{23}{4}$을 갖는다. 답 ②

0522 전략 벡터의 연산을 이용하여 벡터 $\vec{p}$의 종점 P의 자취의 방정식을 구한다.

풀이 $\vec{p}+\vec{a}=(x+4, y-1)$, $\vec{p}\cdot\vec{b}=(x, y)\cdot(0, 1)=y$이므로

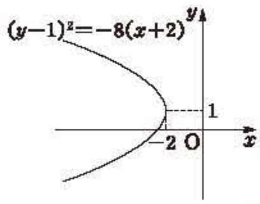
$\vec{p}-(\vec{p}\cdot\vec{b})\vec{b}=(x, y)-y(0, 1)=(x, 0)$

$|\vec{p}+\vec{a}|=|\vec{p}-(\vec{p}\cdot\vec{b})\vec{b}|$에서 $|\vec{p}+\vec{a}|^2=|\vec{p}-(\vec{p}\cdot\vec{b})\vec{b}|^2$이므로

$(x+4)^2+(y-1)^2=x^2$

$\therefore (y-1)^2=-8(x+2)$

따라서 벡터 $\vec{p}$의 종점 P는 오른쪽 그림과 같이 포물선 $(y-1)^2=-8(x+2)$ 위를 움직이므로 점 P가 지나는 사분면은 제2, 3사분면이다.



답 ②

0523 전략 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 하고 $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낸다.

풀이 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 하면

$$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\vec{a},\ \overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\vec{b},\ \overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\vec{b}$$

이므로

$$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{a},$$

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}$$

$$\therefore \overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}=\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}$$
$$=\vec{b}-\frac{5}{3}\vec{a}$$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=3$이고 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이므로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=3\times3\times\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$

$$\therefore |\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}|^2=\left|\vec{b}-\frac{5}{3}\vec{a}\right|^2$$

$$=|\vec{b}|^2-\frac{10}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{25}{9}|\vec{a}|^2$$

$$=3^2-\frac{10}{3}\times\frac{9}{2}+\frac{25}{9}\times3^2=19$$

답 ③

0524 전략 벡터의 내적의 연산법칙을 이용한다.

풀이 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$이므로

$$|\overrightarrow{OP}|^2=|2\vec{a}-3\vec{b}|^2$$

$$=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$$

$$=4\times1^2-12\times\frac{1}{2}+9\times1^2=7$$

$$\therefore |\overrightarrow{OP}|=\sqrt{7}$$

$$|\overrightarrow{OQ}|^2=|3\vec{a}-\vec{b}|^2$$

$$=9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

$$=9\times1^2-6\times\frac{1}{2}+1^2=7$$

$$\therefore |\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{7}$$

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})$$

$$=6|\vec{a}|^2-11\vec{a}\cdot\vec{b}+3|\vec{b}|^2$$

$$=6\times1^2-11\times\frac{1}{2}+3\times1^2=\frac{7}{2}$$

두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|}=\frac{\frac{7}{2}}{\sqrt{7}\sqrt{7}}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}\ (\because 0\le\theta\le\pi)$$

답 $\frac{\pi}{3}$

0525 전략 $\overline{AB}$를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 P라 하면 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OA}}{m+n}$임을 이용한다.

풀이 점 D는 $\overline{BC}$를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}}{3}$$

점 E는 $\overline{AD}$를 $3:2$로 외분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AD}=3\times\frac{\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}}{3}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}$$

$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AC}\ (k\neq0)$라 하면

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}$$

$$=k\overrightarrow{AC}-(\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB})$$

$$=(k-1)\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}$$

이때 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EF}$는 서로 수직이므로 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EF}=0$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\{(k-1)\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}\}=0$$

$$(k-1)|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$

$$(k-1)\times6^2-2\times(-4)=0$$

$$36k=28\qquad \therefore k=\frac{7}{9}$$

$$\therefore 9\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=9\overrightarrow{AB}\cdot\frac{7}{9}\overrightarrow{AC}=7\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$=7\times(-4)=-28$$

답 -28

0526 전략 $\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ (t는 실수)로 놓고 t의 값을 구한다.

풀이 점 P가 직선 AB 위에 있으므로

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\ (t\text{는 실수})$$

로 놓을 수 있다. 이때 $\overrightarrow{OC}=2\vec{a}+\vec{b}$이므로

$$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}-(2\vec{a}+\vec{b})$$

$$=(-t-1)\vec{a}+(t-1)\vec{b}$$

두 벡터 $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{OA}$가 서로 수직이므로 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{OA}=0$

$$\{(-t-1)\vec{a}+(t-1)\vec{b}\}\cdot\vec{a}=0$$

$$(-t-1)\vec{a}\cdot\vec{a}+(t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$(-t-1)|\vec{a}|^2+(t-1)|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=0$$

$$(-t-1)\times1^2+(t-1)\times1\times1\times\frac{1}{2}=0$$

$$-\frac{1}{2}t-\frac{3}{2}=0\qquad \therefore t=-3$$

즉 $\overrightarrow{OP}=4\vec{a}-3\vec{b}$이므로

$$|\overrightarrow{OP}|^2=|4\vec{a}-3\vec{b}|^2$$

$$=16|\vec{a}|^2-24\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$$

$$=16\times1^2-24\times\frac{1}{2}+9\times1^2=13$$

$$\therefore |\overrightarrow{OP}|=\sqrt{13}$$

답 ③

0527 전략 주어진 조건을 x, y에 대한 부등식으로 변형한다.

풀이 조건 (가)에서 $|\overrightarrow{AP}|^2\le4\qquad\therefore |\overrightarrow{AP}|\le2$

즉 점 P는 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원의 내부 또는 그 둘레에 존재한다.

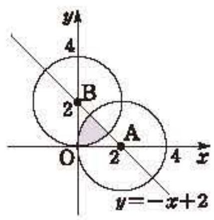
조건 (나)에서 $|\overrightarrow{BP}|^2\le4\qquad\therefore |\overrightarrow{BP}|\le2$

즉 점 P는 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원의 내부 또는 그 둘레에 존재한다.

조건 (다)에서 $\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=(x,\ y)\cdot(2,\ 2)=2x+2y$이므로

$$2x+2y\le4\qquad\therefore y\le-x+2$$

따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 점 P가 나타내는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같으므로 구하는 넓이는



$$2\times\left(\frac{1}{4}\times\pi\times2^2-\frac{1}{2}\times2\times2\right)\times\frac{1}{2}$$

$$=\pi-2$$

답 ④

0528 전략 두 점 $(a_1,\ a_2)$, $(b_1,\ b_2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식은 $(x-a_1,\ y-a_2)\cdot(x-b_1,\ y-b_2)=0$임을 이용한다.

풀이 점 $(2,\ -2)$를 지나고 방향벡터가 $(-1,\ 3)$인 직선의 방정식은

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y+2}{3} \qquad \therefore y=-3x+4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

두 점 $(2,\ 2)$, $(4,\ -2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식은

$$(x-2,\ y-2)\cdot(x-4,\ y+2)=0$$
$$(x-2)(x-4)+(y-2)(y+2)=0$$
$$x^2-6x+8+y^2-4=0$$
$$\therefore (x-3)^2+y^2=5 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$(x-3)^2+(-3x+4)^2=5, \qquad x^2-3x+2=0$$
$$(x-1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

$x=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=1$

$x=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad y=-2$

따라서 제1사분면 위의 점의 좌표는 $(1,\ 1)$이다. 답 $(1,\ 1)$

0529 전략 속도가 양수이면 위치가 증가하므로 $0\le t\le 1$에서 점 P의 위치가 양수임을 이용한다.

풀이 $0\le t\le 1$에서 $v(t)\ge 0$이고 $t=0$에서의 점 P의 위치가 1이므로 $0<t\le 1$에서 점 P의 위치는 양수이다.

따라서 점 P의 위치가 0일 때의 시각을 $t=a\ (1<a\le 10)$라 하면

$$1+\int_0^1 \sqrt{t}\,dt+\int_1^a\left(-\frac{3}{t^2}\right)dt=0$$
$$\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_0^1+\left[\frac{3}{t}\right]_1^a=-1$$
$$\frac{2}{3}+\frac{3}{a}-3=-1, \qquad \frac{3}{a}=\frac{4}{3}$$
$$\therefore a=\frac{9}{4}$$

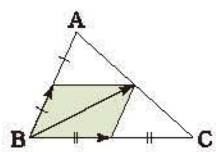
답 ⑤

0530 전략 벡터의 뺄셈을 이용하여 주어진 식을 벡터의 시점이 B가 되도록 변형한다.

풀이 $3\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=k\overrightarrow{BC}$에서

$$3(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BP})-2\overrightarrow{BP}+(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BP})=k\overrightarrow{BC}$$
$$6\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{BA}+(1-k)\overrightarrow{BC}$$
$$\therefore \overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1-k}{6}\overrightarrow{BC} \quad \cdots ❶$$

점 P가 $\triangle ABC$의 내부 또는 그 둘레에 있으려면 오른쪽 그림에서



$$0\le\frac{1-k}{6}\le\frac{1}{2}, \qquad 0\le 1-k\le 3$$
$$\therefore -2\le k\le 1 \quad \cdots ❷$$

따라서 구하는 정수 k는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1$의 4개이다. $\cdots$ ❸

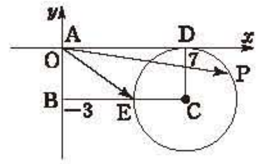
답 4

채점 기준표

❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	40%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	20%

0531 전략 주어진 도형을 좌표평면 위에 놓고 벡터를 성분으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 주어진 도형을 점 A를 원점으로 하는 좌표평면 위에 놓으면



$$B(0,\ -3),\ C(7,\ -3),$$
$$D(7,\ 0),\ E(4,\ -3) \quad \cdots ❶$$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AP}=(4,\ -3)\cdot(x,\ y)$$
$$=4x-3y$$

이때 점 P가 원 $(x-7)^2+(y+3)^2=9$ 위에 있으므로 $4x-3y=k$ (k는 상수)라 하면 직선 $4x-3y-k=0$과 원 $(x-7)^2+(y+3)^2=9$가 만나야 한다.

즉 원의 중심 $(7,\ -3)$과 직선 $4x-3y-k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 3 이하이어야 하므로

$$\frac{|4\times 7-3\times(-3)-k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\le 3$$
$$|37-k|\le 15, \qquad -15\le 37-k\le 15$$
$$\therefore 22\le k\le 52 \quad \cdots ❷$$

따라서 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AP}$의 최댓값은 52, 최솟값은 22이므로 구하는 합은

$$52+22=74 \quad \cdots ❸$$

답 74

채점 기준표

❶ 주어진 도형을 좌표평면 위에 놓고 각 점의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AP}$의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AP}$의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	20%

SSEN 특강

원과 직선의 위치 관계

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원과 직선의 위치 관계는

① $d<r \iff$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $d=r \iff$ 한 점에서 만난다.(접한다.)

③ $d>r \iff$ 만나지 않는다.

0532 전략 주어진 조건을 x, y에 대한 부등식으로 변형한다.

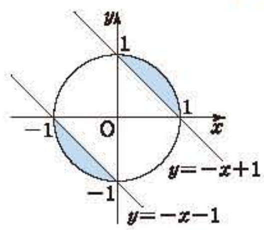
풀이 조건 (가)에서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=(1,\ 1)\cdot(x,\ y)=x+y$이므로

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|x+y|\ge 1$$
$$x+y\le -1 \text{ 또는 } x+y\ge 1$$
$$\therefore y\le -x-1 \text{ 또는 } y\ge -x+1 \qquad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ❶$$

조건 (나)에서 $\vec{b}\cdot\vec{b}=(x,\ y)\cdot(x,\ y)=x^2+y^2$이므로

$$x^2+y^2\le 1 \qquad \cdots\cdots ㉡ \quad \cdots ❷$$

㉠, ㉡에서 점 $(x,\ y)$가 존재하는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같으므로 구하는 넓이는



$$2\times\left(\frac{1}{4}\times\pi\times 1^2-\frac{1}{2}\times 1\times 1\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}-1 \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{\pi}{2}-1$

채점 기준표	
❶ 조건 (가)를 x, y에 대한 부등식으로 변형할 수 있다.	30%
❷ 조건 (나)를 x, y에 대한 부등식으로 변형할 수 있다.	30%
❸ 점 (x, y)가 존재하는 영역의 넓이를 구할 수 있다.	40%

0533 전략 점 P가 나타내는 도형은 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원임을 이용한다.

풀이 $(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})=0$에서

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$

즉 $\angle APB=90°$이므로 점 P가 나타내는 도형은 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

원의 중심을 C라 하면

$$C\left(\frac{-1+7}{2}, \frac{7+1}{2}\right), \text{ 즉 } C(3, 4)$$ ❶

한편 직선 $\frac{x-3}{n}=\frac{y-4}{n+2}$는 점 $(3, 4)$를 지나고 방향벡터가 $(n, n+2)$인 직선이므로 이 직선과 원의 두 교점 S_n, T_n은 원의 지름의 양 끝 점이다.

$$\therefore \overrightarrow{OS_n}+\overrightarrow{OT_n}=2\overrightarrow{OC}$$ ❷

이때 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{S_kT_k}$가 서로 수직이므로 $\overrightarrow{AB}$와 직선 $\frac{x-3}{k}=\frac{y-4}{k+2}$도 서로 수직이다. 즉

$(8, -6)\cdot(k, k+2)=0$

$8k-6(k+2)=0, \quad 2k=12 \quad \therefore k=6$ ❸

$$\therefore \sum_{n=1}^{k}|\overrightarrow{OS_n}+\overrightarrow{OT_n}|=\sum_{n=1}^{6}|2\overrightarrow{OC}|=2\sum_{n=1}^{6}|\overrightarrow{OC}|$$

$$=2\sum_{n=1}^{6}\sqrt{3^2+4^2}=2\sum_{n=1}^{6}5$$

$$=2\times6\times5=60$$ ❹

답 60

채점 기준표	
❶ 점 P가 나타내는 도형이 원임을 알고 원의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ $\overrightarrow{OS_n}+\overrightarrow{OT_n}=2\overrightarrow{OC}$임을 알 수 있다.	20%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $\sum_{n=1}^{k}\lvert\overrightarrow{OS_n}+\overrightarrow{OT_n}\rvert$의 값을 구할 수 있다.	20%

0534 전략 삼각함수의 합성과 배각의 공식을 이용하여 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\frac{dx}{dt}=\cos t-\sqrt{3}\sin t$, $\frac{dy}{dt}=2\cos^2 t-2\sin^2 t=2\cos 2t$

이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$라 하면

$$\vec{v}=(\cos t-\sqrt{3}\sin t, 2\cos 2t)$$ ❶

한편 $x=\sin t+\sqrt{3}\cos t=2\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$이고, $0\le t<\pi$에서

$\frac{\pi}{3}\le t+\frac{\pi}{3}<\frac{4}{3}\pi$이므로 x는 $t+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$일 때, 즉 $t=\frac{\pi}{6}$일 때 최대이다.

$$\therefore \alpha=\sqrt{\left(\cos\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}\right)^2+\left(2\cos\frac{\pi}{3}\right)^2}=1$$ ❷

또 $y=2\sin t\cos t+1=\sin 2t+1$이고, $0\le t<\pi$에서

$0\le 2t<2\pi$이므로 y는 $2t=\frac{3}{2}\pi$일 때, 즉 $t=\frac{3}{4}\pi$일 때 최소이다.

$$\therefore \beta=\sqrt{\left(\cos\frac{3}{4}\pi-\sqrt{3}\sin\frac{3}{4}\pi\right)^2+\left(2\cos\frac{3}{2}\pi\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$ ❸

$$\therefore \alpha\beta=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$ ❹

답 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

채점 기준표	
❶ 점 P의 시각 t에서의 속도를 구할 수 있다.	30%
❷ α의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ β의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	10%

SSEN 특강

삼각함수의 합성

① $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

$\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

② $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta)$

$\left(\text{단, } \cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

0535 전략 점 P의 좌표를 시각 t에 대하여 나타낸다.

풀이 점 P는 매초 1라디안의 속력으로 이동하므로 시각 t에서 y축의 양의 방향과 직선 OP가 이루는 각의 크기가 t라디안이다.

즉 직선 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{2}-t$이므로

$$P\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right), \text{ 즉 } P(\sin t, \cos t)$$ ❶

또 점 P의 이동거리가 t이므로 점 Q의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x=\sin t+t, \ y=\cos t$$ ❷

따라서 $\frac{dx}{dt}=\cos t+1$, $\frac{dy}{dt}=-\sin t$이므로 $t=0$에서 $t=\frac{\pi}{3}$까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{(\cos t+1)^2+(-\sin t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{2+2\cos t}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{4\cos^2\frac{t}{2}}\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}2\cos\frac{t}{2}\,dt=\left[4\sin\frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=4\sin\frac{\pi}{6}=4\times\frac{1}{2}=2$$ ❸

답 2

채점 기준표	
❶ 점 P의 좌표를 t로 나타낼 수 있다.	30%
❷ 점 Q의 x좌표, y좌표를 t로 나타낼 수 있다.	20%
❸ 점 Q가 움직인 거리를 구할 수 있다.	50%

05 공간도형

0536 (i) 세 꼭짓점 B, C, D로 만들어지는 평면은
평면 BCD
(ii) 세 꼭짓점 B, C, D와 모서리 AE로 만들 수 있는 평면은
평면 BAE, 평면 CAE, 평면 DAE
(i), (ii)에서 구하는 서로 다른 평면의 개수는
$1+3=4$
답 4

0537 답 모서리 AD, 모서리 AE, 모서리 BC, 모서리 BF

0538 답 모서리 DC, 모서리 EF, 모서리 HG

0539 답 모서리 CG, 모서리 DH, 모서리 EH, 모서리 FG

0540 답 면 ABCD, 면 AEFB

0541 답 면 AEHD, 면 BFGC

0542 답 면 DHGC, 면 EFGH

0543 답 면 AEFB, 면 AEHD, 면 BFGC, 면 DHGC

0544 답 면 EFGH

0545 답 모서리 BC, 모서리 EF

0546 답 면 ABC

0547 $\overline{AB}\,/\!/\,\overline{DC}$이고 $\overline{DC}\perp\overline{CG}$이므로 $\overline{AB}\perp\overline{CG}$이다.
따라서 직선 AB와 직선 CG가 이루는 각의 크기는 $90°$이다.
답 $90°$

0548 $\overline{BF}\,/\!/\,\overline{AE}$이고 □AEGC는 직사각형이므로 $\overline{AC}\perp\overline{AE}$이다.
따라서 직선 AC와 직선 BF가 이루는 각의 크기는 $90°$이다.
답 $90°$

0549 $\overline{HG}\,/\!/\,\overline{AB}$이고 □AEFB는 정사각형이므로
$\angle BAF=45°$
즉 직선 AF와 직선 AB가 이루는 각의 크기는 $45°$이므로 직선 AF와 직선 HG가 이루는 각의 크기도 $45°$이다.
답 $45°$

0550 직선 AB는 평면 BFGC 위의 평행하지 않은 두 직선 BF, BC와 각각 수직이므로
$\overline{AB}\perp$(평면 BFGC)
따라서 모서리 AB와 면 BFGC가 이루는 각의 크기는 $90°$이다.
답 $90°$

0551 답 (가) $\overline{DM}$ (나) AMD

0552 답 (가) $\overline{PO}$ (나) $\overline{OH}$ (다) $\overline{PH}$

0553 답 (가) l (나) n

0554 답 점 B

0555 답 선분 FH

0556 답 삼각형 EFH

0557 답 선분 DG

0558 $3\sqrt{2}=\overline{AB}\cos 45°$에서 $3\sqrt{2}=\overline{AB}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$\therefore \overline{AB}=6$
답 6

0559 $4\sqrt{3}=8\cos\theta$에서 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\therefore \theta=30°$ ($\because 0°\le\theta\le 90°$)
답 $30°$

0560 $16=S\cos 60°$에서 $16=S\cdot\dfrac{1}{2}$
$\therefore S=32$
답 32

0561 $5\sqrt{2}=10\cos\theta$에서 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$\therefore \theta=45°$ ($\because 0°\le\theta\le 90°$)
답 $45°$

유형 01 평면의 결정 조건 본책 88쪽

① 한 직선 위에 있지 않은 세 점
② 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점
③ 한 점에서 만나는 두 직선
④ 평행한 두 직선

0562 (i) 두 선분 FG와 CE는 꼬인 위치에 있으므로 한 평면을 만들 수 없다.
(ii) 세 꼭짓점 A, B, H로 만들어지는 평면은
평면 ABH

(iii) 세 꼭짓점 A, B, H와 선분 FG로 만들 수 있는 평면은
평면 AFG, 평면 BFG, 평면 HFG
(iv) 세 꼭짓점 A, B, H와 선분 CE로 만들 수 있는 평면은
평면 ACE, 평면 BCE, 평면 HCE
그런데 네 꼭짓점 B, C, H, E는 한 평면 위의 점이므로 평면 BCE와 평면 HCE는 같은 평면이다.
이상에서 구하는 서로 다른 평면의 개수는
$1+3+(3-1)=6$ 답 6

0563 ④ 직선 BC와 직선 HG는 꼬인 위치에 있으므로 두 직선 BC와 HG를 포함하는 평면은 존재하지 않는다. 답 ④

0564 점 A와 밑면의 두 점으로 만들 수 있는 평면의 개수는
${}_5C_2=10$
밑면의 점으로 만들 수 있는 평면은 1개이므로 구하는 평면의 개수는
$10+1=11$ 답 ⑤

SSEN 특강
조합의 수
서로 다른 n개에서 $r\ (0\le r\le n)$개를 택하는 조합의 수는
$${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

0565 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 하나의 평면을 결정하므로 구하는 평면의 개수는
${}_5C_3={}_5C_2=10$ 답 10

0566 (i) 직선 l과 직선 l 위에 있지 않은 한 점을 택하는 경우
${}_3C_1=3$ ➊
(ii) 직선 l 위의 한 점과 직선 l 위에 있지 않은 두 점을 택하는 경우
${}_4C_1\cdot{}_3C_2=12$ ➋
(iii) 직선 l 위에 있지 않은 세 점을 택하는 경우
${}_3C_3=1$ ➌
이상에서 구하는 서로 다른 평면의 최대 개수는
$3+12+1=16$ ➍
답 16

채점 기준표

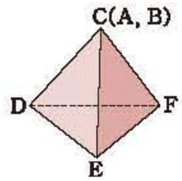
➊ 직선 l과 직선 l 위에 있지 않은 한 점을 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
➋ 직선 l 위의 한 점과 직선 l 위에 있지 않은 두 점을 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
➌ 직선 l 위에 있지 않은 세 점을 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
➍ 서로 다른 평면의 최대 개수를 구할 수 있다.	10%

유형 02 공간에서의 위치 관계 본책 88쪽

(1) 공간에서 두 직선의 위치 관계
① 한 점에서 만난다. ② 평행하다. ③ 꼬인 위치에 있다.
(2) 공간에서 직선과 평면의 위치 관계
① 포함된다. ② 한 점에서 만난다. ③ 평행하다.

0567 ④ 직선 CH, 직선 DI, 직선 EJ, 직선 GH, 직선 HI, 직선 IJ, 직선 JF의 7개
⑤ 직선 AB, 직선 BC, 직선 CD, 직선 DE, 직선 EA의 5개
답 ④

0568 주어진 전개도로 만든 정사면체는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 CF와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 DE이다.
답 직선 DE

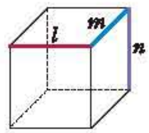


0569 직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선은
직선 CD, 직선 DE, 직선 CF, 직선 EF의 4개
평면 CFD와 평행한 직선은
직선 AB, 직선 AE, 직선 BE의 3개
따라서 $a=4$, $b=3$이므로 $a+b=7$ 답 7

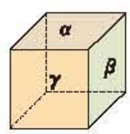
유형 03 직선과 평면의 위치 관계 본책 89쪽

직육면체의 모서리를 직선, 면을 평면으로 생각하여 위치 관계를 확인한다.

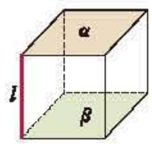
0570 ㄱ. 오른쪽 그림과 같이 $l\perp m$, $m\perp n$이지만 두 직선 l, n이 꼬인 위치에 있을 수도 있다.



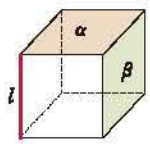
ㄴ. 오른쪽 그림과 같이 $\alpha\perp\beta$, $\beta\perp\gamma$이지만 두 평면 α, γ가 만날 수도 있다.



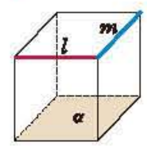
ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 $l\perp\alpha$이고 $l\perp\beta$이면 $\alpha /\!/ \beta$이다.



ㄹ. 오른쪽 그림과 같이 $l\perp\alpha$이고 $l /\!/ \beta$이면 $\alpha\perp\beta$이다.

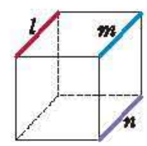


ㅁ. 오른쪽 그림과 같이 $l /\!/ \alpha$, $m /\!/ \alpha$이지만 두 직선 l과 m이 한 점에서 만날 수도 있다.

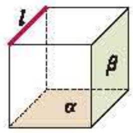


이상에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ의 2개이다. 답 ②

0571 ③ 오른쪽 그림과 같이 $l /\!/ m$이고 $l /\!/ n$이면 $m /\!/ n$이다.

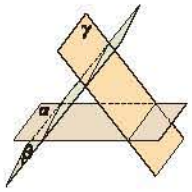


⑤ 오른쪽 그림과 같이 $l /\!/ \alpha$이고 $\alpha \perp \beta$이지만 직선 l이 평면 β와 평행할 수도 있다.



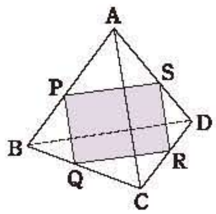
답 ⑤

0572 주어진 조건을 만족시키는 세 평면의 위치 관계는 오른쪽 그림과 같으므로 세 평면 α, β, γ에 의하여 공간은 7개로 분할된다.



답 7

0573 오른쪽 그림과 같이 모서리 AB, BC, CD, DA와 이 사면체를 자른 평면과의 교점을 각각 P, Q, R, S라 하자.



$\overline{PQ} /\!/ \overline{AC}$, $\overline{AC} /\!/ \overline{SR}$에서

$\overline{PQ} /\!/ \overline{SR}$

$\overline{PS} /\!/ \overline{BD}$, $\overline{BD} /\!/ \overline{QR}$에서

$\overline{PS} /\!/ \overline{QR}$

따라서 □PQRS는 평행사변형이다. ➊

$\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$으로 놓으면 $\overline{PQ} /\!/ \overline{AC}$이므로

$\overline{PQ} : \overline{AC} = n : (m+n)$

$\therefore \overline{PQ} = \dfrac{n}{m+n} \cdot \overline{AC} = \dfrac{5n}{m+n}$ ➋

또 $\overline{PS} /\!/ \overline{BD}$이므로

$\overline{PS} : \overline{BD} = m : (m+n)$

$\therefore \overline{PS} = \dfrac{m}{m+n} \cdot \overline{BD} = \dfrac{5m}{m+n}$ ➌

따라서 사각형의 둘레의 길이는

$$2(\overline{PQ} + \overline{PS}) = 2\left(\frac{5n}{m+n} + \frac{5m}{m+n}\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{5(m+n)}{m+n} = 10$$ ➍

답 10

채점 기준표

➊ □PQRS가 평행사변형임을 알 수 있다.	20%
➋ $\overline{PQ}$의 길이를 m, n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
➌ $\overline{PS}$의 길이를 m, n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
➍ 사각형의 둘레의 길이를 구할 수 있다.	20%

유형 04 꼬인 위치에 있는 두 직선이 이루는 각

본책 90쪽

꼬인 위치에 있는 두 직선 l, m이 이루는 각의 크기를 구할 때에는 직선 m과 평행하면서 직선 l과 만나는 직선 n을 찾아 두 직선 l, n이 이루는 각의 크기를 구한다.

0574 $\overline{HF} /\!/ \overline{DB}$이므로 두 직선 AC와 HF가 이루는 각의 크기는 두 직선 AC와 DB가 이루는 각의 크기와 같다.

이때 정사각형의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로

$\overline{AC} \perp \overline{DB}$ $\quad\therefore \theta_1 = 90°$

또 $\overline{DG} /\!/ \overline{AF}$이므로 두 직선 AC와 DG가 이루는 각의 크기는 두 직선 AC와 AF가 이루는 각의 크기와 같다.

이때 △AFC는 정삼각형이므로

$\angle CAF = 60°$ $\quad\therefore \theta_2 = 60°$

$\therefore \theta_1 + \theta_2 = 150°$

답 ④

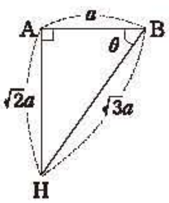
0575 □AEFC가 평행사변형이므로 $\overline{AC} /\!/ \overline{EF}$

따라서 두 직선 AB와 EF가 이루는 각의 크기는 두 직선 AB와 AC가 이루는 각의 크기와 같다.

△ABC에서 ∠BAC=60°이므로 구하는 각의 크기는 60°이다.

답 60°

0576 $\overline{CD} /\!/ \overline{AB}$에서 두 직선 CD와 BH가 이루는 각의 크기는 두 직선 AB와 BH가 이루는 각의 크기와 같으므로 $\angle ABH = \theta$



정육면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면

$\overline{AH} = \sqrt{2}a$, $\overline{BH} = \sqrt{3}a$

따라서 직각삼각형 AHB에서

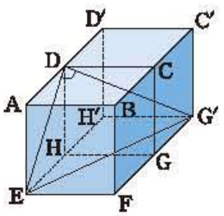
$\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{3}a} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

답 ③

참고 평면 AEHD 위에 있는 두 직선 AD, AE와 직선 AB가 각각 수직이므로 평면 AEHD 위에 있는 모든 직선은 직선 AB와 수직이다.

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AH}$

0577 오른쪽 그림과 같이 합동인 두 정육면체를 붙여 직육면체를 만들면



$\overline{AG} /\!/ \overline{DG'}$

이므로 두 직선 AG와 DE가 이루는 각의 크기는 두 직선 DG′과 DE가 이루는 각의 크기와 같다.

정육면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면

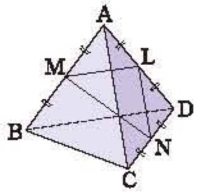
$\overline{DE} = \sqrt{2}a$, $\overline{DG'} = \sqrt{3}a$, $\overline{EG'} = \sqrt{5}a$

이므로 $\overline{DE}^2 + \overline{DG'}^2 = \overline{EG'}^2$이 성립한다.

따라서 △DEG′은 ∠EDG′=90°인 직각삼각형이므로 구하는 각의 크기는 90°이다.

답 90°

0578 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}$의 중점을 L이라 하면 삼각형의 중점 연결 정리에 의하여



$\overline{LN} /\!/ \overline{AC}$, $\overline{LN} = \dfrac{1}{2}\overline{AC}$,

$\overline{ML} /\!/ \overline{BD}$, $\overline{ML} = \dfrac{1}{2}\overline{BD}$

그런데 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, $\overline{AC} = \overline{BD}$이므로 $\overline{ML} \perp \overline{LN}$, $\overline{ML} = \overline{LN}$, 즉 △LMN은 직각이등변삼각형이다.

따라서 두 직선 MN과 AC가 이루는 각의 크기는 두 직선 MN과 LN이 이루는 각의 크기 45°와 같다.

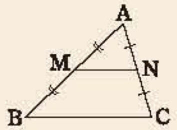
답 ③

SSEN 특강

삼각형의 중점 연결 정리

$\triangle ABC$에서 두 변 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하면

$\overline{BC} /\!/ \overline{MN}$, $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$

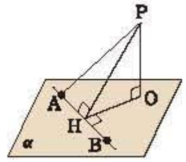


유형 05, 06 삼수선의 정리 본책 90, 91쪽

오른쪽 그림과 같이 $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{OH}\perp\overline{AB}$이면

$\overline{PH}\perp\overline{AB}$

➡ $\overline{PA}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{PH}^2}$



0579 $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{OH}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{PH}\perp\overline{AB}$

즉 $\triangle PAH$는 직각삼각형이므로

$\overline{PH}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

따라서 직각삼각형 PHO에서

$\overline{OH}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-2^2}=2$ 답 ③

0580 직각삼각형 PHO에서

$\overline{PH}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

$\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{OH}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{PH}\perp\overline{AB}$

따라서 $\triangle PAH$는 직각삼각형이므로

$\overline{PA}=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$ 답 ②

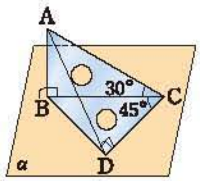
0581 책상 바닥을 평면 α라 하면

$\overline{AB}\perp\alpha$, $\overline{BD}\perp\overline{DC}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AD}\perp\overline{DC}$ ··· ❶

이때 $\overline{BC}=a$라 하면 $\triangle ABC$, $\triangle BCD$에서



$\overline{AC}=\frac{a}{\cos 30^\circ}=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$

$\overline{DC}=a\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ ··· ❷

따라서 직각삼각형 ADC에서

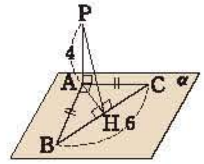
$$\cos\theta=\frac{\overline{DC}}{\overline{AC}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{2\sqrt{3}}{3}a}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$ ··· ❸

답 $\frac{\sqrt{6}}{4}$

채점 기준표

❶ $\overline{AD}\perp\overline{DC}$임을 알 수 있다.	40%
❷ $\overline{BC}=a$라 하고 $\overline{AC}$, $\overline{DC}$의 길이를 a로 나타낼 수 있다.	30%
❸ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	30%

0582 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{PA}\perp\alpha$, $\overline{PH}\perp\overline{BC}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AH}\perp\overline{BC}$ ··· ❶

이때 $\triangle ABC$는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{BC}=3$ ··· ❷

$\overline{PA}=4$이므로 직각삼각형 PAH에서

$\overline{PH}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

따라서 점 P에서 직선 BC까지의 거리는 5이다. ··· ❸

답 5

채점 기준표

❶ $\overline{AH}\perp\overline{BC}$임을 알 수 있다.	40%
❷ $\overline{AH}$의 길이를 구할 수 있다.	30%
❸ 점 P에서 직선 BC까지의 거리를 구할 수 있다.	30%

0583 $\overline{DH}\perp$(평면 EFGH), $\overline{DI}\perp\overline{EG}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HI}\perp\overline{EG}$

직각삼각형 EGH에서 $\overline{EH}\cdot\overline{HG}=\overline{EG}\cdot\overline{HI}$이므로

$1\cdot 2=\sqrt{1^2+2^2}\cdot\overline{HI}$ $\therefore \overline{HI}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 직각삼각형 DHI에서

$\overline{DI}=\sqrt{1^2+\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 답 ②

0584 $\overline{DH}\perp$(평면 EFGH), $\overline{DI}\perp\overline{GM}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HI}\perp\overline{GM}$

$\triangle HMG=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$이므로

$\frac{1}{2}\cdot\overline{GM}\cdot\overline{HI}=2$, $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1^2+2^2}\cdot\overline{HI}=2$

$\therefore \overline{HI}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 답 ①

0585 $\overline{CH}\perp$(지면), $\overline{BH}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{CB}\perp\overline{AB}$

즉 $\triangle ABC$는 직각삼각형이므로

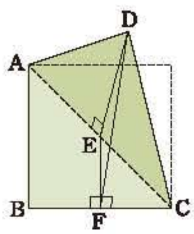
$\overline{CB}=\overline{AB}\tan 60^\circ=30\sqrt{3}$ (m)

따라서 직각삼각형 CBH에서

$\overline{CH}=\sqrt{(30\sqrt{3})^2-20^2}=10\sqrt{23}$ (m)

이므로 구하는 건물의 높이는 $10\sqrt{23}$ m이다. 답 $10\sqrt{23}$

0586 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 E, 점 E에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 F라 하면



$\overline{DE}\perp$(평면 ABC), $\overline{EF}\perp\overline{BC}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{DF}\perp\overline{BC}$

이때 점 E는 $\overline{AC}$의 중점이므로 점 F는 $\overline{BC}$의 중점이다.

$$\therefore \overline{FC}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}$$

따라서 직각삼각형 DFC에서

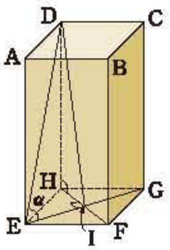
$$\overline{DF}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이므로 점 D에서 $\overline{BC}$까지의 거리는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

유형 07 두 직선이 이루는 각 본책 77쪽

두 직선 l, m이 이루는 각의 크기를 구할 때에는 삼수선의 정리를 이용하여 l, m을 변으로 하는 직각삼각형을 찾는다.

0587 오른쪽 그림과 같이 밑면의 두 대각선 EG, HF의 교점을 I라 하면



$\overline{DH}\perp$(평면 EFGH), $\overline{HI}\perp\overline{EG}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{DI}\perp\overline{EG}$

직각삼각형 DEH에서

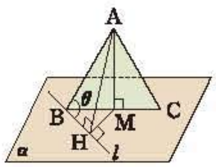
$$\overline{DE}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

이고, $\overline{EI}=\frac{1}{2}\overline{EG}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 직각삼각형 DEI에서

$$\cos\alpha=\frac{\overline{EI}}{\overline{DE}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

답 ①

0588 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발을 M, 점 M에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AM}\perp\alpha$, $\overline{MH}\perp l$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AH}\perp l$ ··· ❶

정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 a라 하면 $\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}a$이고 $\angle MBH=45^\circ$이므로 직각삼각형 MBH에서

$$\overline{BH}=\overline{BM}\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{4}a$$

따라서 직각삼각형 ABH에서

$$\overline{AH}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{4}a$$ ··· ❷

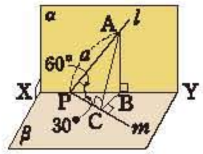
$$\therefore \sin\theta=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{\frac{\sqrt{14}}{4}a}{a}=\frac{\sqrt{14}}{4}$$ ··· ❸

답 $\frac{\sqrt{14}}{4}$

채점 기준표

❶ $\overline{AH}\perp l$임을 알 수 있다.	40%
❷ $\overline{AH}$의 길이를 구할 수 있다.	30%
❸ $\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.	30%

0589 오른쪽 그림과 같이 직선 l 위의 한 점 A에서 교선 XY에 내린 수선의 발을 B라 하고, 점 B에서 직선 m에 내린 수선의 발을 C라 하면



$\overline{AB}\perp\beta$, $\overline{BC}\perp m$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AC}\perp m$

이때 $\overline{AP}=a$라 하면 $\triangle APB$, $\triangle BPC$에서

$$\overline{PB}=a\cos 60^\circ=\frac{a}{2}$$

$$\overline{PC}=\overline{PB}\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}a$$

따라서 직각삼각형 APC에서

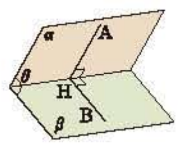
$$\cos\theta=\frac{\overline{PC}}{\overline{AP}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

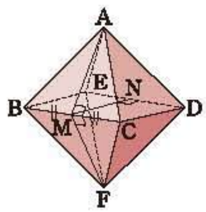
유형 08 이면각 본책 77쪽

두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 θ는 두 평면 α, β의 교선 위의 한 점 H에서 교선과 수직으로 각 평면에 그은 두 직선이 이루는 각의 크기와 같으므로

$\angle AHB=\theta$



0590 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면



$\overline{AM}\perp\overline{BC}$, $\overline{FM}\perp\overline{BC}$

이므로 $\angle AMF=\theta$

정팔면체의 한 모서리의 길이를 $2a$라 하면

$$\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2a=\sqrt{3}a$$

$\overline{ED}$의 중점을 N이라 하면 $\angle AMN=\frac{\theta}{2}$이고 점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 $\overline{MN}$의 중점이므로

$$\overline{MH}=\frac{1}{2}\overline{MN}=a$$

따라서 $\triangle AMH$에서

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{MH}}{\overline{AM}}=\frac{a}{\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-1=-\frac{1}{3}$$

답 ①

0591 $\overline{AN}\perp\alpha$, $\overline{AM}\perp l$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{MN}\perp l$

따라서 점 A와 직선 l에 의하여 결정되는 평면이 평면 α와 이루는 각의 크기는 $\angle AMN$의 크기와 같다.

$\angle AMN=\theta$라 하면

$$\sin\theta=\frac{\overline{AN}}{\overline{AM}}=\frac{4\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \theta=60^\circ$$

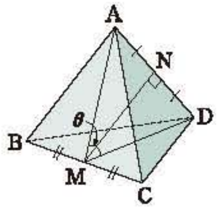
답 ③

0592 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면

$\overline{AM}\perp\overline{BC}$, $\overline{DM}\perp\overline{BC}$

이므로 $\angle AMD=\theta$

$\overline{AD}$의 중점을 N이라 하고 정사면체의 한 모서리의 길이를 $2a$라 하면



$$\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2a=\sqrt{3}a,\ \overline{AN}=a$$

이므로 $\triangle AMN$에서

$$\overline{MN}=\sqrt{(\sqrt{3}a)^2-a^2}=\sqrt{2}a$$

$\angle AMN=\frac{\theta}{2}$이므로 $\triangle AMN$에서

$\triangle AMD$는 $\overline{AM}=\overline{DM}$인 이등변삼각형이므로 $\angle AMN=\angle DMN=\frac{\theta}{2}$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{MN}}{\overline{AM}}=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

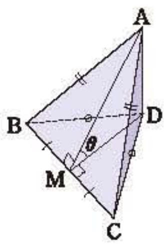
답 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

0593 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면

$\overline{AM}\perp\overline{BC}$, $\overline{DM}\perp\overline{BC}$

이므로 $\angle AMD=\theta$

$\overline{AM}=\sqrt{7^2-3^2}=2\sqrt{10}$, $\overline{DM}=\sqrt{5^2-3^2}=4$이므로 $\triangle AMD$는 $\overline{AD}=\overline{MD}$인 이등변삼각형이다.



점 D에서 $\overline{AM}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{MH}=\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AM}=\sqrt{10}$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\overline{MH}}{\overline{DM}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

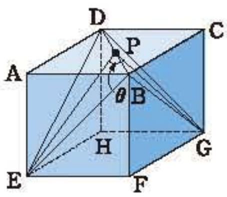
답 $\frac{\sqrt{10}}{4}$

0594 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$의 중점을 P라 하면

$\overline{EP}\perp\overline{BD}$, $\overline{GP}\perp\overline{BD}$

이므로 $\angle EPG=\theta$

정육면체의 한 모서리의 길이를 $2a$라 하면



$$\overline{AP}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}a=\sqrt{2}a,$$

$$\overline{EP}=\overline{GP}=\sqrt{(2a)^2+(\sqrt{2}a)^2}=\sqrt{6}a$$

$\triangle APE$에서 $\angle APE=\frac{1}{2}(180^\circ-\theta)=90^\circ-\frac{\theta}{2}$이므로

$$\cos\left(90^\circ-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\overline{AP}}{\overline{EP}}=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{6}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

즉 $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\therefore \sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

답 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

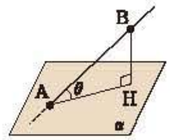
유형 09 직선과 평면이 이루는 각

본책 93쪽

직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ, 점 B에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면

① $\angle BAH=\theta$

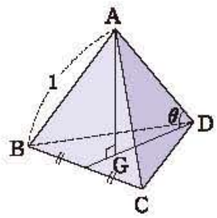
② $\sin\theta=\frac{\overline{BH}}{\overline{AB}}$, $\cos\theta=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}$



0595 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 면 BCD에 내린 수선의 발을 G라 하면

$\angle ADG=\theta$

점 G는 $\triangle BCD$의 무게중심이므로



$$\overline{DG}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 $\triangle AGD$에서

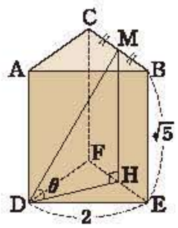
$$\cos\theta=\frac{\overline{DG}}{\overline{AD}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

0596 오른쪽 그림과 같이 점 M에서 면 DEF에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle MDH=\theta$

점 H는 $\overline{EF}$의 중점이므로



$$\overline{DH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\sqrt{3}$$

따라서 $\triangle DHM$에서

$$\overline{DM}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{2}$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\overline{DH}}{\overline{DM}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

답 ③

0597 점 B에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발이 F이므로

$\angle BHF=\alpha$

$\overline{BH}=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$, $\overline{FH}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이므로

$$\cos\alpha=\frac{\overline{FH}}{\overline{BH}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \quad \cdots ❶$$

점 H에서 평면 ABFE에 내린 수선의 발이 E이므로

$\angle HBE=\beta$

$\overline{BE}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로

$$\cos\beta=\frac{\overline{BE}}{\overline{BH}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \quad \cdots ❷$$

점 H에서 평면 BFGC에 내린 수선의 발이 G이므로

$\angle HBG=\gamma$

$\overline{BG}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이므로

$$\cos\gamma=\frac{\overline{BG}}{\overline{BH}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \quad \cdots ❸$$

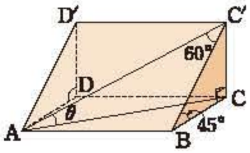
$$\therefore \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{5}{6}+\frac{2}{6}+\frac{5}{6}=2 \quad \cdots ❹$$

답 2

채점 기준표	
❶ $\cos\alpha$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $\cos\beta$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $\cos\gamma$의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$의 값을 구할 수 있다.	10%

0598 점 C′에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발이 C이므로

$\angle C'AC=\theta$



이때 $\overline{BC'}=a$라 하면 $\triangle C'BC$, $\triangle ABC'$에서

$$\overline{CC'}=a\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\overline{AC'}=\frac{a}{\cos 60°}=2a$$

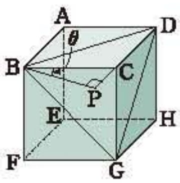
따라서 $\triangle ACC'$에서

$$\sin\theta=\frac{\overline{CC'}}{\overline{AC'}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{2a}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

0599 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 C에서 평면 BGD에 내린 수선의 발을 P라 하면

$\angle CBP=\theta$



정육면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면 점 P는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}a$인 정삼각형 BGD의 무게중심이므로

$$\overline{BP}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}a=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

따라서 $\triangle BPC$에서

$$\overline{CP}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$\therefore \sin\theta=\frac{\overline{CP}}{\overline{BC}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

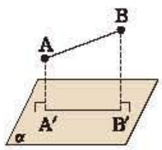
답 ③

유형 10 정사영의 길이

본책 94쪽

직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기가 θ이고, 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하면

$\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$



0600 $\overline{AB}$와 평면 β가 이루는 각의 크기는 45°이므로

$$\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos 45°=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

$\overline{BC}$와 평면 β가 이루는 각의 크기는 0°이므로 ($\overline{BC}\,/\!/\,\beta$)

$$\overline{B'C'}=\overline{BC}\cos 0°=2\cdot 1=2$$

따라서 □A′B′C′D′의 둘레의 길이는

$2(\sqrt{2}+2)=2\sqrt{2}+4$

답 $2\sqrt{2}+4$

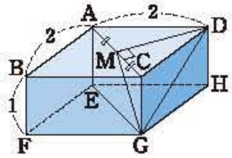
0601 $6\cos\theta=3$이므로 $\cos\theta=\frac{1}{2}$

$$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 ⑤

0602 $\overline{AC}$의 중점을 M이라 하면

$\overline{DM}\perp\overline{AC}$



이므로 $\overline{DG}$의 평면 AEGC 위로의 정사영은 $\overline{MG}$이다.

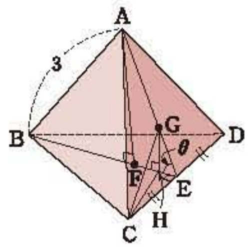
따라서 $\triangle GMC$에서

$$\overline{CG}=1,\ \overline{MC}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

이므로 $\overline{MG}=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$

답 ③

0603 (1) 점 F는 꼭짓점 A에서 면 BCD에 내린 수선의 발과 같으므로 $\angle AEF=\theta$



$\triangle AFE$에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{EF}}{\overline{AE}}=\frac{\frac{1}{3}\overline{BE}}{\overline{BE}}=\frac{1}{3}$$ ❶

(2) 점 G에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{CG}$의 평면 BCD 위로의 정사영은 $\overline{CH}$이다.

이때 $\overline{CE}=\frac{3}{2}$이고, $\triangle GHE$에서

$$\overline{EH}=\overline{GE}\cos\theta=\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3\right)\cdot\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

이므로 $\triangle CEH$에서

$$\overline{CH}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{3}$$ ❷

답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{21}}{3}$

채점 기준표	
❶ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $\overline{CG}$의 평면 BCD 위로의 정사영의 길이를 구할 수 있다.	60%

0604 타원의 단축의 길이를 $2b$라 하면 단축의 길이는 원기둥의 밑면의 지름의 길이와 같으므로

$2b=10 \quad \therefore b=5$

타원의 장축의 길이를 $2a$라 하면 두 초점 사이의 거리가 $\frac{10\sqrt{3}}{3}$이므로

$$a^2=5^2+\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2,\quad a^2=\frac{100}{3}$$

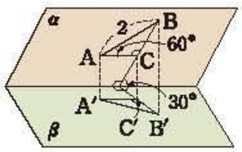
$$\therefore a=\frac{10\sqrt{3}}{3}\ (\because a>0)$$

이때 타원의 장축의 밑면 위로의 정사영은 밑면의 지름이므로

$$\frac{20\sqrt{3}}{3}\cos\theta=10 \quad \therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

0605 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 점 A를 지나고 α, β의 교선과 평행한 직선에 내린 수선의 발을 C, 점 C의 평면 β 위로의 정사영을 C′이라 하면 직각삼각형 ABC의 평면 β 위로의 정사영은 직각삼각형 A′B′C′이다.



$\overline{AC}$와 평면 β가 이루는 각의 크기는 0°이므로

$$\overline{A'C'}=\overline{AC}\cos 0°=\overline{AB}\cos 60°=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

$\overline{BC}$와 평면 β가 이루는 각의 크기는 30°이므로

$$\overline{B'C'}=\overline{BC}\cos 30°=\overline{AB}\sin 60°\cdot\cos 30°$$
$$=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$$

따라서 $\triangle A'B'C'$에서

$$\overline{A'B'}=\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{13}}{2}$

참고 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 30°인 것이 아니므로 $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos 30°$와 같이 생각하지 않는다.

유형 11~13 정사영의 넓이 본책 95, 96쪽

> 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 θ이고, 평면 α 위의 도형 D의 평면 β 위로의 정사영을 D'이라 하면
> (D'의 넓이)=(D의 넓이)$\cdot\cos\theta$

0606 단면의 넓이를 S라 하면 원기둥의 밑넓이는 $\pi\cdot(\sqrt{3})^2=3\pi$이므로

$$3\pi=S\cdot\cos 60°,\quad 3\pi=S\cdot\frac{1}{2}\quad \therefore S=6\pi$$

답 ②

0607 $\triangle$ABC의 세 변의 길이가 3, 4, 5이므로 $\triangle$ABC는 직각삼각형이다.

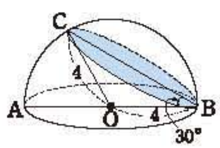
$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$6\cos 45°=6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

답 ③

0608 오른쪽 그림에서 밑면과 30°의 각을 이루는 평면으로 자른 단면은 원이다. ··· ❶



단면인 원의 지름을 $\overline{BC}$라 하면 $\triangle$OBC에서 $\overline{OB}=\overline{OC}=4$,
$\angle OBC=\angle OCB=30°$이므로

$$\overline{BC}=2\overline{OB}\cos 30°=2\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$$ ··· ❷

따라서 단면의 넓이가 $\pi\cdot(2\sqrt{3})^2=12\pi$이므로 구하는 정사영의 넓이는

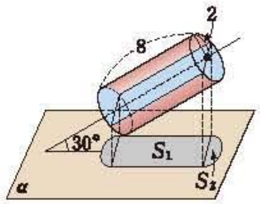
$$12\pi\cos 30°=12\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}\pi$$ ··· ❸

답 $6\sqrt{3}\pi$

채점 기준표

❶ 단면의 모양을 알 수 있다.	40%
❷ 단면인 원의 지름의 길이를 구할 수 있다.	30%
❸ 정사영의 넓이를 구할 수 있다.	30%

0609 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 평면 α 위로의 정사영 중 직사각형 부분의 넓이를 S_1, 원기둥의 한 밑면의 반인 반원의 정사영의 넓이를 S_2라 하면 원기둥의 정사영의 넓이는 S_1+2S_2이다.



이때 원기둥의 밑면은 평면 α와 60°의 각을 이루므로

$$S_1=(4\cdot 8)\cdot\cos 30°=32\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=16\sqrt{3}$$

$$S_2=\left(\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2\right)\cdot\cos 60°=2\pi\cdot\frac{1}{2}=\pi$$

따라서 원기둥의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는

$$16\sqrt{3}+2\pi$$

답 ③

0610 $\triangle$AFC의 평면 EFGH 위로의 정사영은 $\triangle$EFG이므로

$$\triangle EFG=\triangle AFC\cos\theta$$

정육면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면

$$\underbrace{\triangle AFC=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{2}a)^2}_{\triangle AFC\text{는 한 변의 길이가 }\sqrt{2}a\text{인 정삼각형이다.}}=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2,\quad \triangle EFG=\frac{1}{2}a^2$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

0611 (1) $\triangle$OAB의 꼭짓점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{OH}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$

$$\therefore \triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$$ ··· ❶

(2) □ABCD의 두 대각선의 교점을 P라 하면 $\triangle$OAB의 평면 ABCD 위로의 정사영은 $\triangle$PAB이다.

$$\therefore \triangle PAB=\frac{1}{4}\square ABCD=\frac{1}{4}\cdot 4^2=4$$ ··· ❷

(3) $8\sqrt{2}\cos\theta=4$이므로 $\quad\cos\theta=\frac{4}{8\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{4}$$ ··· ❸

답 (1) $8\sqrt{2}$ (2) 4 (3) $\frac{\sqrt{14}}{4}$

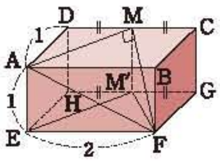
채점 기준표

❶ $\triangle$OAB의 넓이를 구할 수 있다.	30%
❷ $\triangle$OAB의 평면 ABCD 위로의 정사영의 넓이를 구할 수 있다.	30%
❸ $\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.	40%

0612 $\overline{HG}$의 중점을 M′이라 하면 $\triangle$AFM의 평면 EFGH 위로의 정사영은 $\triangle$EFM′이므로

$$\triangle EFM'=\triangle AFM\cos\theta$$

이때 $\overline{AM}=\sqrt{2}$, $\overline{MF}=\sqrt{3}$, $\overline{AF}=\sqrt{5}$이므로 $\triangle AFM$에서 $\overline{AF}^2=\overline{AM}^2+\overline{MF}^2$이 성립한다.



즉 $\triangle AFM$은 $\angle AMF=90°$인 직각삼각형이므로

$$\triangle AFM=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$\triangle EFM'=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=1$이므로

$$\cos\theta=\frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$ 답 ⑤

0613 두 점 P, Q에서 밑면 EFGH에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′이라 하면 □PQER의 평면 EFGH 위로의 정사영은 □P′REQ′이므로

$$\square PQER\cos\theta=\square P'REQ'$$

이때 □PQER는 마름모이고

$$\overline{QR}=\overline{BG}=3\sqrt{2},$$

$$\overline{PE}=\sqrt{\overline{DE}^2+\overline{DP}^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{22}$$

이므로

$$\square PQER=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{22}=3\sqrt{11}$$

□P′REQ′은 평행사변형이므로

$$\square P'REQ'=1\cdot 3=3$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{3}{3\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{11}}{11}$$ 답 $\frac{\sqrt{11}}{11}$

0614 두 평면 ACD와 BCD가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\triangle ACD$의 평면 BCD 위로의 정사영이 $\triangle HCD$이므로

$$\triangle ACD\cos\theta=\triangle HCD$$

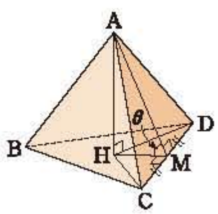
$\triangle ACD=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2=\sqrt{3}$, $\triangle HCD=\frac{1}{3}\triangle BCD=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$$\sqrt{3}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\qquad \therefore \cos\theta=\frac{1}{3}$$

따라서 $\triangle HCD$의 평면 ACD 위로의 정사영의 넓이는

$$\triangle HCD\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$ 답 ②

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{CD}$의 중점을 M이라 하면 $\overline{AM}\perp\overline{CD}$, $\overline{HM}\perp\overline{CD}$이므로 두 면 ACD와 HCD가 이루는 각의 크기를 θ라 하면



$$\angle AMH=\theta$$

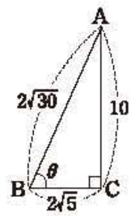
이때 점 H는 $\triangle BCD$의 무게중심이므로

$$\overline{MH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

또 $\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\sqrt{3}$이므로 $\triangle AMH$에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{MH}}{\overline{AM}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$$

0615 오른쪽 그림과 같이 잘린 입체도형의 단면이 직각삼각형이므로



$$\overline{AB}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+10^2}=2\sqrt{30}$$

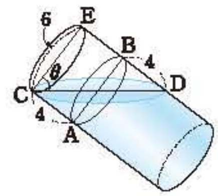
단면과 밑면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

따라서 잘린 단면의 넓이를 S라 하면

$$S\cos\theta=\pi\cdot(\sqrt{5})^2\qquad \therefore S=\frac{5\pi}{\cos\theta}=\frac{5\pi}{\frac{\sqrt{6}}{6}}=5\sqrt{6}\pi$$ 답 $5\sqrt{6}\pi$

0616 컵을 기울이면 한쪽 수면이 올라온 만큼 반대쪽 수면이 내려간다.



오른쪽 그림과 같이 컵을 기울이기 전의 수면의 지름을 $\overline{AB}$, 컵을 최대로 기울였을 때 수면의 장축을 $\overline{CD}$라 하면

$$\overline{AC}=\overline{BD}=4,\ \overline{DE}=8$$

직각삼각형 CDE에서 $\quad\overline{CD}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

$\angle DCE=\theta$라 하면 $\quad\cos\theta=\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}}=\frac{3}{5}$

이때 컵의 밑면의 넓이는 9π이므로 구하는 수면의 넓이를 S라 하면

$$S\cos\theta=9\pi\qquad \therefore S=\frac{9\pi}{\cos\theta}=\frac{9\pi}{\frac{3}{5}}=15\pi$$ 답 15π

0617 두 평면 OAB와 ABCD가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\triangle OAB$의 평면 ABCD 위로의 정사영이 $\triangle EAB$이므로

$$\triangle OAB\cos\theta=\triangle EAB$$

$\triangle OAB=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4^2=4\sqrt{3}$, $\triangle EAB=\frac{1}{4}\cdot 4^2=4$이므로

$$4\sqrt{3}\cos\theta=4\qquad \therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 $\triangle EAB$의 평면 OAB 위로의 정사영의 넓이는

$$\triangle EAB\cos\theta=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$ 답 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

0618 (평면 AEHD)$/\!/$(평면 FNM)이므로 $\triangle FNM$과 평면 APQD가 이루는 각의 크기는 평면 AEHD와 평면 APQD가 이루는 각의 크기와 같다.

두 평면 AEHD와 APQD가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\angle EAP=\theta$$

$\overline{EP}=4$이므로 $\triangle AEP$에서 $\quad\overline{AP}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\overline{AE}}{\overline{AP}}=\frac{8}{4\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

이때

$$\begin{aligned}\triangle FNM&=\square BFGC-(\triangle BFM+\triangle FGN+\triangle CMN)\\&=8\cdot 8-\left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 8+\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\right)\\&=64-40=24\end{aligned}$$

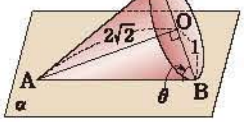
이므로 $\triangle FNM$의 평면 APQD 위로의 정사영의 넓이는

$$\triangle FNM\cos\theta=24\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{48\sqrt{5}}{5}$$ 답 ⑤

유형 14 정사영; 그림자의 길이와 넓이 본책 97쪽

평면 α에 수직으로 비추는 빛에 의하여 생기는 어떤 도형의 그림자는 그 도형의 평면 α 위로의 정사영임을 이용한다.

0619 오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있는 원뿔의 모선의 양 끝 점을 각각 A, B, 밑면의 중심을 O라 하면 원뿔의 밑면과 평면 α가 이루는 각의 크기는 $\angle$OBA의 크기와 같다.



$\angle OBA=\theta$라 하면 $\triangle$OAB에서

$$\overline{AB}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=3$$

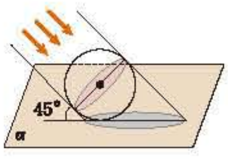
이므로 $\cos\theta=\dfrac{\overline{BO}}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{3}$

따라서 그림자의 넓이는 원뿔의 밑면의 평면 α 위로의 정사영의 넓이와 같으므로

$$\pi\cdot1^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{\pi}{3}$$

답 ⑤

0620 오른쪽 그림과 같이 빛과 수직이고 구의 중심을 지나는 구의 단면이 평면 α와 이루는 각의 크기가 45°이다.



이때 구의 중심을 지나는 단면의 넓이는

$$\pi\cdot4^2=16\pi$$

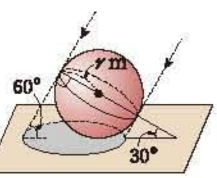
따라서 구하는 그림자의 넓이를 S라 하면

$$S\cos45°=16\pi,\quad S\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=16\pi$$

$$\therefore S=16\sqrt{2}\pi$$

답 ④

0621 애드벌룬의 반지름의 길이를 r m라 하고 오른쪽 그림과 같이 애드벌룬을 지면과 접하도록 이동시키면 태양 빛과 수직이고 구의 중심을 지나는 구의 단면이 지면과 이루는 각의 크기가 30°이다. ··· ❶



이때 $8\sqrt{3}\pi\cos30°=\pi r^2$이므로 $8\sqrt{3}\pi\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\pi r^2$

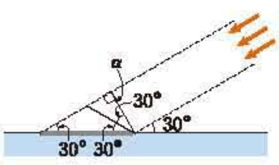
$r^2=12 \quad \therefore r=2\sqrt{3}\ (\because r>0)$ ··· ❷

답 $2\sqrt{3}$

채점 기준표

❶ 태양 빛과 수직이고 구의 중심을 지나는 평면이 지면과 이루는 각의 크기를 구할 수 있다.	40%
❷ 애드벌룬의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	60%

0622 오른쪽 그림과 같이 태양 빛과 수직인 평면을 α라 하면 평면 α가 지붕과 이루는 각의 크기는 60°이다.



또 집전판의 평면 α 위로의 정사영은 집전판의 그림자의 평면 α 위로의 정사영과 같다.

이때 집전판의 넓이를 S, 정사영의 넓이를 S'이라 하면

$S'=S\cos30°$ ······ ㉠

한편 집전판의 그림자의 넓이가 21이므로

$S'=21\cos60°$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $S\cos30°=21\cos60°$

$$\therefore S=21\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=7\sqrt{3}$$

답 ⑤

0623 전략 n이 홀수일 때와 짝수일 때로 나누어 $f(n)$을 구한다.

풀이 2 이상의 자연수 k에 대하여

(i) $n=2k-1$일 때,

밑면에 수직인 모서리는 n개이고, 이 중에서 밑면의 한 모서리와 만나는 모서리는 2개이다.

또 한 밑면의 모서리는 n개이고, 밑면의 한 모서리와 평행한 다른 밑면의 모서리는 1개이므로

$$f(n)=(n-2)+(n-1)=2n-3$$

$$\therefore f(2k-1)=2(2k-1)-3=4k-5$$

(ii) $n=2k$일 때,

같은 방법으로 하면

$$f(n)=(n-2)+(n-2)=2n-4$$

$$\therefore f(2k)=2\cdot2k-4=4k-4$$

(i), (ii)에서

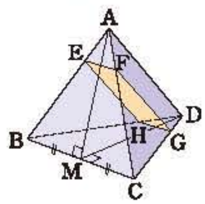
$$\sum_{n=3}^{30}f(n)=\sum_{k=2}^{15}\{f(2k-1)+f(2k)\}$$

$$=\sum_{k=2}^{15}(8k-9)=8\cdot\left(\frac{15\cdot16}{2}-1\right)-9\cdot14$$

$$=826$$

답 826

0624 전략 먼저 □EFGH가 어떤 사각형인지 생각한다.



풀이 $\overline{EF}/\!/\overline{BC}$, $\overline{HG}/\!/\overline{BC}$에서

$\overline{EF}/\!/\overline{HG}$

$\overline{EH}/\!/\overline{AD}$, $\overline{FG}/\!/\overline{AD}$에서

$\overline{EH}/\!/\overline{FG}$

$\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면 $\overline{BC}\perp\overline{AM}$, $\overline{BC}\perp\overline{DM}$에서 $\overline{BC}\perp$(평면 AMD)이므로

$\overline{AD}\perp\overline{BC} \quad \therefore \overline{EF}\perp\overline{FG}$

따라서 □EFGH는 직사각형이다.

이때 $\triangle$ABC에서

$\overline{EF}:\overline{BC}=\overline{AE}:\overline{AB}=(6-4):6=1:3$

이므로 $\overline{EF}:6=1:3 \quad \therefore \overline{EF}=2$

또 $\triangle$ACD에서

$\overline{FG}:\overline{AD}=\overline{CG}:\overline{CD}=4:6=2:3$

이므로 $\overline{FG}:6=2:3 \quad \therefore \overline{FG}=4$

$\therefore$ □EFGH$=\overline{EF}\cdot\overline{FG}=2\cdot4=8$

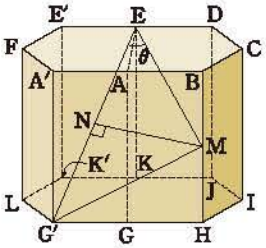
답 8

0625 전략 $\overline{AB}$와 $\overline{ED}$의 길이를 각각 2배로 늘인 새로운 육각기둥을 생각한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 주어진 육각기둥에서 $\overline{AB}$와 $\overline{DE}$의 길이를 각각 2배 한 육각기둥을 생각하면

$\overline{DG}\,/\!/\,\overline{EG'}$

이므로 $\angle G'EM=\theta$



$\triangle EBM$에서

$\overline{EM}=\sqrt{\overline{EB}^2+\overline{BM}^2}$
$=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

$\triangle EKG'$에서

$\overline{EG'}=\sqrt{\overline{EK}^2+\overline{KG'}^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$\triangle MG'H$에서

$\overline{G'M}=\sqrt{\overline{G'H}^2+\overline{HM}^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

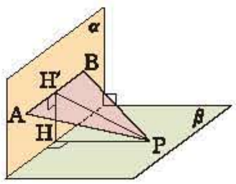
따라서 $\triangle MEG'$은 $\overline{EM}=\overline{G'M}$인 이등변삼각형이므로 점 M에서 $\overline{EG'}$에 내린 수선의 발을 N이라 하면

$\overline{EN}=\overline{G'N}=\frac{1}{2}\overline{EG'}=\sqrt{2}$

$\therefore \cos\theta=\frac{\overline{EN}}{\overline{EM}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$ 답 $\frac{\sqrt{10}}{5}$

0626 전략 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H′이라 하고 삼수선의 정리를 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H′이라 하면



$\overline{PH}\perp\alpha$, $\overline{HH'}\perp\overline{AB}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{PH'}\perp\overline{AB}$

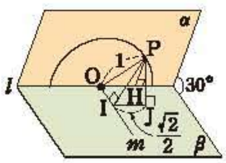
이때 $\overline{PH}=4$, $\overline{HH'}=2$이므로 $\triangle PHH'$에서

$\overline{PH'}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

$\therefore \triangle PAB=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{PH'}$
$=\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{5}\cdot2\sqrt{5}=15$ 답 15

0627 전략 삼수선의 정리를 이용한다.

풀이 $\overline{PJ}\perp\beta$, $\overline{PH}\perp l$이므로 삼수선의 정리에 의하여



$\overline{HJ}\perp l$

$\therefore \angle PHJ=30°$

$\overline{PH}=\overline{OI}=a$라 하면 직각삼각형 PHJ에서

$\overline{PJ}=a\sin30°=\frac{1}{2}a$

$\overline{OP}=1$이므로 직각삼각형 OPI에서

$a^2+\overline{IP}^2=1^2$ $\quad\therefore \overline{IP}^2=1-a^2$

따라서 직각삼각형 PIJ에서 $\overline{IP}^2=\overline{IJ}^2+\overline{PJ}^2$이므로

$1-a^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2$

$1-a^2=\frac{1}{2}+\frac{a^2}{4}$, $\quad \frac{5}{4}a^2=\frac{1}{2}$

$a^2=\frac{2}{5}$ $\quad\therefore a=\frac{\sqrt{10}}{5}$ ($\because a>0$)

$\therefore \overline{PH}=\frac{\sqrt{10}}{5}$ 답 ⑤

0628 전략 삼수선의 정리를 이용한다.

풀이 적도 상에 있는 동경 120°인 지점을 C라 하고, 점 B에서 $\overline{OC}$에 내린 수선의 발을 D, 점 D에서 $\overline{OA}$에 내린 수선의 발을 E라 하자.

이때 세 점 O, A, C를 포함하는 평면을 α라 하면

$\overline{BD}\perp\alpha$, $\overline{DE}\perp\overline{OA}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{BE}\perp\overline{OA}$

$\overline{OB}=a$라 하면 $\angle BOD=60°$, $\angle DOE=30°$이므로

$\overline{OD}=\overline{OB}\cos60°=\frac{1}{2}a$

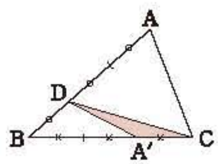
$\overline{OE}=\overline{OD}\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{4}a$

따라서 직각삼각형 OBE에서

$\cos\theta=\frac{\overline{OE}}{\overline{OB}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

0629 전략 $\triangle ADC$의 평면 BCD 위로의 정사영을 생각한다.

풀이 $\overline{BC}$를 삼등분하는 점 중 점 C와 가까운 점을 A′이라 하면 $\overline{CD}$를 접는 선으로 하여 $\triangle ABC$를 접을 때, 꼭짓점 A의 평면 BCD 위로의 정사영이 점 A′이므로 오른쪽 그림에서 $\triangle ADC$의 평면 BCD 위로의 정사영은 $\triangle A'DC$이다.



$\therefore \triangle A'DC=\triangle ADC\cos\theta$

$\triangle A'DC$의 넓이를 S라 하면

$\triangle ADC=2\triangle BCD=2\cdot3\triangle A'DC$
$=6\triangle A'DC=6S$

$\therefore \cos\theta=\frac{\triangle A'DC}{\triangle ADC}=\frac{S}{6S}=\frac{1}{6}$ 답 $\frac{1}{6}$

0630 전략 한 직선에 수직인 두 평면은 서로 평행함을 이용한다.

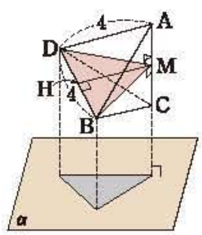
풀이 $\overline{AC}$의 중점을 M이라 하면

$\overline{DM}\perp\overline{AC}$, $\overline{BM}\perp\overline{AC}$

이므로 (평면 DBM)$\perp\overline{AC}$

$\overline{AC}\perp\alpha$이므로 (평면 DBM)$\,/\!/\,\alpha$

따라서 정사면체 ABCD의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 $\triangle DBM$의 넓이와 같다.



이때 $\overline{DM}=\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot4=2\sqrt{3}$이므로 점 M에서 $\overline{BD}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{MH}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-2^2}=2\sqrt{2}$

$\therefore \triangle DBM=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

따라서 구하는 정사영의 넓이는 $4\sqrt{2}$이다. 답 ③

0631 전략 타원의 단축의 길이가 볼링공의 지름의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 볼링공의 중심을 지나고 햇빛에 수직인 평면을 α라 하고 그림자의 넓이를 S, 평면 α로 볼링공을 잘랐을 때 생기는 단면의 넓이를 S'이라 하자.

그림자의 단축의 길이는 볼링공의 지름의 길이와 같으므로

$$S'=\pi\cdot\left(\frac{18}{2}\right)^2=81\pi\,(\text{cm}^2)$$

또 그림자의 장축의 평면 α 위로의 정사영이 볼링공의 지름이므로 지면과 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$$

따라서 $S\cos\theta=S'$이므로

$$S=\frac{S'}{\cos\theta}=\frac{81\pi}{\frac{3}{5}}=135\pi\,(\text{cm}^2)$$

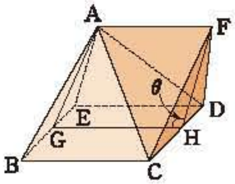
답 ②

0632 전략 두 직선이 이루는 각의 크기를 이용하여 이면각의 크기를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BE}$와 $\overline{CD}$의 중점을 각각 G, H라 하면

$\overline{AG}=\overline{FH}$, $\overline{AF}=\overline{GH}$

이므로 □AGHF는 평행사변형이다. ➊



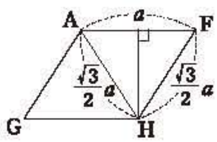
이때 두 면 BCDE와 CDF가 이루는 각의 크기는 $\overline{GH}$와 $\overline{FH}$가 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\cos\theta=\cos(\angle GHF)=\cos(180^\circ-\angle AFH)$$
$$=-\cos(\angle AFH) \quad ➋$$

사각뿔과 정사면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면

$$\overline{AH}=\overline{FH}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

이므로 오른쪽 그림에서



$$\cos(\angle AFH)=\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad ➌$$

답 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

채점 기준표

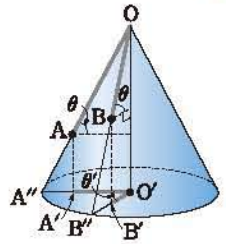
➊ □AGHF가 평행사변형임을 알 수 있다.	20%
➋ $\cos\theta=-\cos(\angle AFH)$임을 알 수 있다.	40%
➌ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40%

0633 전략 모선의 밑면 위로의 정사영은 밑면의 반지름임을 이용한다.

풀이 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r라 하면

$4\cdot\pi=2\pi r \quad \therefore r=2$ ➊

오른쪽 그림과 같이 점 O의 밑면 위로의 정사영을 O′, $\overline{OA}$와 밑면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면



$4\cos\theta=2 \quad \therefore \cos\theta=\frac{1}{2}$

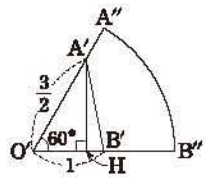
$\therefore \overline{O'A'}=\overline{OA}\cos\theta=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$\overline{O'B'}=\overline{OB}\cos\theta=2\cdot\frac{1}{2}=1$ ➋

한편 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$를 연장하여 밑면과 만나는 점을 각각 A″, B″이라 하고 $\angle A''O'B''=\theta'$이라 하면

$2\pi\cdot 4\cdot\frac{30^\circ}{360^\circ}=2\pi\cdot 2\cdot\frac{\theta'}{360^\circ}=\widehat{A''B''} \quad \therefore \theta'=60^\circ$ ➌

오른쪽 그림과 같이 점 A′에서 $\overline{O'B''}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{O'H}=\frac{3}{2}\cos 60^\circ=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

$\overline{A'H}=\frac{3}{2}\sin 60^\circ=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

따라서 $\triangle A'HB'$에서

$$\overline{A'B'}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(1-\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2} \quad ➍$$

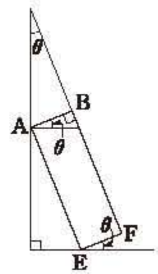
답 $\frac{\sqrt{7}}{2}$

채점 기준표

➊ 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	20%
➋ $\overline{O'A'}$, $\overline{O'B'}$의 길이를 구할 수 있다.	30%
➌ $\angle A''O'B''$의 크기를 구할 수 있다.	20%
➍ $\overline{A'B'}$의 길이를 구할 수 있다.	30%

0634 전략 □BFGC와 벽면이 이루는 각과 크기가 같은 각을 찾는다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 □BFGC와 벽면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면 □ABCD와 마룻바닥이 이루는 각의 크기도 θ이다. ➊



□ABCD의 넓이는

$2\cdot 3=6$

이므로 $6\cos\theta=2 \quad \therefore \cos\theta=\frac{1}{3}$ ➋

□BFGC의 넓이는

$3\cdot 6=18$

이므로 구하는 정사영의 넓이는

$$\square BFGC\cos\theta=18\cdot\frac{1}{3}=6 \quad ➌$$

답 6

채점 기준표

➊ □BFGC와 벽면이 이루는 각과 크기가 같은 각을 찾을 수 있다.	40%
➋ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	30%
➌ 정사영의 넓이를 구할 수 있다.	30%

06 공간좌표

0635 답 A(1, 0, 2)

0636 답 B(1, 3, 2)

0637 답 G(0, 3, 0)

0638 답 (1, 0, 0)

0639 답 (0, 7, 0)

0640 답 (0, 0, −5)

0641 답 (−4, 6, 0)

0642 답 (0, 6, 1)

0643 답 (−4, 0, 1)

0644 답 (3, −4, 2)

0645 답 (−3, 4, 2)

0646 답 (−3, −4, −2)

0647 답 (−1, −3, −2)

0648 답 (1, −3, 2)

0649 답 (−1, 3, 2)

0650 답 (1, 3, −2)

0651 $\overline{OA}=\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}=7$ 답 7

0652 $\overline{AB}=\sqrt{(2-1)^2+\{0-(-2)\}^2+(3-1)^2}=3$ 답 3

0653 $\overline{AB}=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+(1-3)^2+(-2-2)^2}=6$ 답 6

0654 (1) Q(0, −2, −4)

(2) $\overline{PQ}=\sqrt{0^2+\{-2-(-2)\}^2+(-4-4)^2}=8$

답 (1) Q(0, −2, −4) (2) 8

0655 (1) Q(−2, −3, −4)

(2) $\overline{PQ}=\sqrt{\{-2-(-2)\}^2+(-3-3)^2+(-4-4)^2}=10$

답 (1) Q(−2, −3, −4) (2) 10

0656 $P\left(\frac{2\cdot2+1\cdot(-1)}{2+1}, \frac{2\cdot(-4)+1\cdot5}{2+1}, \frac{2\cdot(-3)+1\cdot6}{2+1}\right)$

$\therefore P(1, -1, 0)$ 답 P(1, −1, 0)

0657 $Q\left(\frac{3\cdot2-2\cdot(-1)}{3-2}, \frac{3\cdot(-4)-2\cdot5}{3-2}, \frac{3\cdot(-3)-2\cdot6}{3-2}\right)$

$\therefore Q(8, -22, -21)$ 답 Q(8, −22, −21)

0658 $M\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{5+(-4)}{2}, \frac{6+(-3)}{2}\right)$

$\therefore M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 답 $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

0659 $G\left(\frac{2+1+(-3)}{3}, \frac{2+(-1)+5}{3}, \frac{4+3+2}{3}\right)$

$\therefore G(0, 2, 3)$ 답 G(0, 2, 3)

0660 $G\left(\frac{3+0+(-6)}{3}, \frac{-4+1+(-6)}{3}, \frac{5+4+3}{3}\right)$

$\therefore G(-1, -3, 4)$ 답 G(−1, −3, 4)

0661 답 중심의 좌표: (2, −1, 0), 반지름의 길이: 3

0662 답 중심의 좌표: (−1, −4, 3), 반지름의 길이: 5

0663 답 $x^2+y^2+z^2=9$

0664 답 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$

0665 원점을 O라 하면 구의 반지름의 길이는

$\overline{OC}=\sqrt{5^2+(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{50}$

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x-5)^2+(y+4)^2+(z+3)^2=50$

답 $(x-5)^2+(y+4)^2+(z+3)^2=50$

0666 구의 반지름의 길이는

$\overline{CA}=\sqrt{3^2+4^2+(2-2)^2}=5$

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x+3)^2+y^2+(z-2)^2=25$ 답 $(x+3)^2+y^2+(z-2)^2=25$

0667 답 $(x-6)^2+(y+2)^2+(z+9)^2=81$

0668 답 $(x-6)^2+(y+2)^2+(z+9)^2=36$

0669 답 $(x-6)^2+(y+2)^2+(z+9)^2=4$

0670 $x^2+y^2+z^2-4y+2z=4$에서

$x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3^2$

따라서 중심의 좌표는 (0, 2, −1), 반지름의 길이는 3이다.

답 풀이 참조

0671 $x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z=0$에서

$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=14$

따라서 중심의 좌표는 (3, −1, 2), 반지름의 길이는 $\sqrt{14}$이다.

답 풀이 참조

0672 (1) $C\left(\frac{0+4}{2}, \frac{-2+(-6)}{2}, \frac{5+11}{2}\right)$

$\therefore C(2, -4, 8)$

(2) $\overline{AC}=\sqrt{2^2+\{-4-(-2)\}^2+(8-5)^2}=\sqrt{17}$

(3) 중심이 점 C이고 반지름의 길이가 $\overline{AC}$인 구의 방정식은

$(x-2)^2+(y+4)^2+(z-8)^2=17$

답 풀이 참조

0673 구하는 구의 방정식을

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

이라 하면 네 점 O, A, B, C는 이 구 위의 점이므로

$d=0,\ 1+1+a+b+d=0,\ 4-2b+d=0,\ 9+3c+d=0$

앞의 식을 연립하여 풀면

$a=-4,\ b=2,\ c=-3,\ d=0$

따라서 구하는 구의 방정식은

$x^2+y^2+z^2-4x+2y-3z=0$ 답 $x^2+y^2+z^2-4x+2y-3z=0$

0674 구하는 구의 방정식을

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

이라 하면 네 점 O, A, B, C는 이 구 위의 점이므로

$d=0,\ 1+a+d=0,\ 4+4+2a+2b+d=0,$

$9+16+3b-4c+d=0$

위의 식을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=-3,\ c=4,\ d=0$

따라서 구하는 구의 방정식은

$x^2+y^2+z^2-x-3y+4z=0$ 답 $x^2+y^2+z^2-x-3y+4z=0$

유형 01 공간에서의 점의 좌표 본책 104쪽

좌표공간의 점 $(a,\ b,\ c)$에 대하여

	수선의 발	대칭인 점
x축	$(a,\ 0,\ 0)$	$(a,\ -b,\ -c)$
y축	$(0,\ b,\ 0)$	$(-a,\ b,\ -c)$
z축	$(0,\ 0,\ c)$	$(-a,\ -b,\ c)$
xy평면	$(a,\ b,\ 0)$	$(a,\ b,\ -c)$
yz평면	$(0,\ b,\ c)$	$(-a,\ b,\ c)$
zx평면	$(a,\ 0,\ c)$	$(a,\ -b,\ c)$

0675 Q(2, 0, 4)이므로 R(−2, 0, 4)

따라서 $a=-2,\ b=0,\ c=4$이므로 $a+b+c=2$ 답 2

0676 점 P(−3, 0, 7)에 대하여 Q(3, 0, −7) ➊

점 Q(3, 0, −7)에 대하여 R(−3, 0, −7) ➋

답 R(−3, 0, −7)

채점 기준표

➊ 점 Q의 좌표를 구할 수 있다.	50%
➋ 점 R의 좌표를 구할 수 있다.	50%

0677 점 P$(a,\ b,\ c)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a,\ b,\ -c)$ ······㉠

점 Q$(-a+c,\ c+1,\ 6-a)$를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a+c,\ c+1,\ a-6)$ ······㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$-a=-a+c,\ b=c+1,\ -c=a-6$

위의 식을 연립하여 풀면

$a=6,\ b=1,\ c=0$

$\therefore a+b+c=7$ 답 ③

0678 점 C는 점 B에서 yz평면에 내린 수선의 발이므로

C$(0,\ a,\ 5)$

점 C와 x축에 대하여 대칭인 점의 좌표는

$(0,\ -a,\ -5)$

즉 $-a=-9,\ -5=b$이므로 $a=9,\ b=-5$

$\therefore a-b=14$ 답 14

유형 02, 03 두 점 사이의 거리 본책 104, 105쪽

좌표공간에서 두 점 A$(x_1,\ y_1,\ z_1)$, B$(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 사이의 거리는

➡ $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

0679 P(3, −1, 2), Q(−3, 1, −2)이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{(-3-3)^2+(1+1)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{14}$ 답 ⑤

0680 점 P의 x좌표는 $4\cos 45°=2\sqrt{2}$

점 P의 y좌표는 $4\sin 45°=2\sqrt{2}$

$\therefore$ P$(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ 0)$ ➊

점 Q의 y좌표는 $2\cos 30°=\sqrt{3}$

점 Q의 z좌표는 $2\sin 30°=1$

$\therefore$ Q$(0,\ \sqrt{3},\ 1)$ ➋

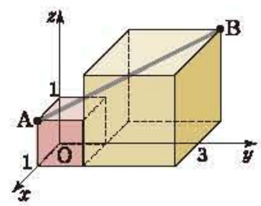
$\therefore \overline{PQ}^2=(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2+(-1)^2=20-4\sqrt{6}$ ➌

답 $20-4\sqrt{6}$

채점 기준표

➊ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	30%
➋ 점 Q의 좌표를 구할 수 있다.	30%
➌ $\overline{PQ}^2$의 값을 구할 수 있다.	40%

0681 주어진 도형을 오른쪽 그림과 같이 좌표공간에 놓으면



A(1, 0, 1), B(−1, 3, 2)

$\therefore \overline{AB}$

$=\sqrt{(-1-1)^2+3^2+(2-1)^2}$

$=\sqrt{14}$

답 ②

0682 좌표공간에서 원점을 O라 하고 직선 $y=x$ 위의 점 H의 좌표를 $(a,\ a,\ 0)\ (a\neq 0)$이라 하면 △OHP는 ∠OHP=90°인 직각삼각형이므로

$\overline{OP}^2=\overline{OH}^2+\overline{PH}^2$

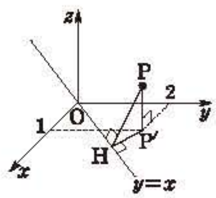
$1^2+2^2+1^2=a^2+a^2+(a-1)^2+(a-2)^2+(-1)^2$

$4a^2-6a=0,\quad 2a(2a-3)=0$

$\therefore a=\dfrac{3}{2}\ (\because a\neq 0)$

$\therefore \overline{PH}=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}-1\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}-2\right)^2+(-1)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 답 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 P′이라 하면



P′(1, 2, 0) $\therefore \overline{PP'}=1$

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{P'H}$와 직선 $y=x$가 수직이므로 xy평면에서 점 P′과 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$\overline{P'H}=\dfrac{|1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \overline{PH}=\sqrt{1^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

0683 $\overline{PA}=2\overline{PB}$이므로 $\overline{PA}^2=4\overline{PB}^2$

$(-1)^2+(1-3)^2+a^2=4\{1^2+(2-3)^2+(-1)^2\}$

$a^2+5=12,\quad a^2=7\quad \therefore a=\sqrt{7}\ (\because a>0)$ 답 ①

0684 $\overline{PQ}=5$이므로 $\sqrt{(a-2)^2+(3+1)^2+(-1-a)^2}=5$

$2a^2-2a+21=25\quad \therefore a^2-a-2=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 a의 값의 합은 1이다. 답 ④

0685 $\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(a-1)^2+(2-2)^2+(-3)^2=a^2+(2-6)^2+4^2$

$2a=-22\quad \therefore a=-11$ 답 -11

0686 구하는 점의 좌표를 $(0,\ a,\ 0)$이라 하면

$\sqrt{(-1)^2+(-4-a)^2+5^2}=3\sqrt{3}$

$a^2+8a+42=27,\quad a^2+8a+15=0$

$(a+5)(a+3)=0\quad \therefore a=-5$ 또는 $a=-3$

따라서 구하는 점의 좌표는

$(0,\ -5,\ 0),\ (0,\ -3,\ 0)$ 답 $(0,\ -5,\ 0),\ (0,\ -3,\ 0)$

0687 $\overline{AB}=\sqrt{(1-2)^2+(b-a-1)^2+(a+b+1)^2}$

$=\sqrt{2a^2+2b^2+4a+3}$

$=\sqrt{2(a+1)^2+2b^2+1}$

따라서 $\overline{AB}$의 길이는 $a=-1,\ b=0$일 때 최솟값 1을 갖는다. 답 1

유형 04 두 점 사이의 거리의 활용 본책 105쪽

선분의 길이를 구하고 삼수선의 정리, 피타고라스 정리 등을 이용한다.

0688 점 C의 좌표를 $(x,\ 0,\ 0)$이라 하면

$\overline{AB}^2=(-1-2)^2+(-1+3)^2+(2-1)^2=14,$

$\overline{BC}^2=(x+1)^2+1^2+(-2)^2=x^2+2x+6,$

$\overline{AC}^2=(x-2)^2+3^2+(-1)^2=x^2-4x+14$

$\triangle ABC$가 $\overline{AC}$를 빗변으로 하는 직각삼각형이므로

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$

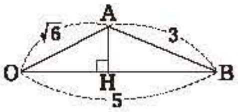
즉 $x^2+2x+20=x^2-4x+14$이므로

$6x=-6\quad \therefore x=-1$ 답 ①

0689 $\overline{OA}=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6},\ \overline{OB}=\sqrt{3^2+4^2}=5,$

$\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2+(-1)^2}=3$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{OB}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{OH}=x$라 하면



$(\sqrt{6})^2-x^2=3^2-(5-x)^2$

$6-x^2=-x^2+10x-16$

$10x=22\quad \therefore x=\dfrac{11}{5}$

따라서 $\overline{AH}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-\left(\dfrac{11}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{29}}{5}$이므로

$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot \dfrac{\sqrt{29}}{5}=\dfrac{\sqrt{29}}{2}$ 답 ②

0690 $\overline{AB}=\sqrt{(b-a)^2+(-b)^2+a^2},$

$\overline{BC}=\sqrt{(-b)^2+a^2+(b-a)^2},\ \overline{CA}=\sqrt{a^2+(b-a)^2+(-b)^2}$이므로

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

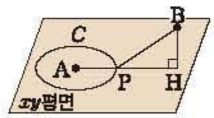
즉 $\triangle ABC$는 한 변의 길이가 $\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2}$인 정삼각형이므로

$\triangle ABC=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\{(a-b)^2+a^2+b^2\}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\{(a-b)^2+4\}\ (\because a^2+b^2=4)$

따라서 $\triangle ABC$의 넓이는 $a=b$일 때 최솟값 $\sqrt{3}$을 갖는다. 답 $\sqrt{3}$

0691 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H, $\overline{AH}$와 원 C의 교점을 P라 하면 구하는 거리의 최솟값은 $\overline{BP}$의 길이와 같다.



H(4, 6, 0), A(1, 2, 0)이므로

$\overline{AH}=\sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2}=5$

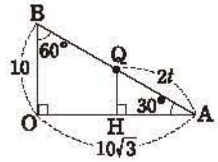
$\therefore \overline{PH}=5-2=3$

이때 $\overline{BH}=2$이므로 직각삼각형 BPH에서

$\overline{BP}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$ 답 ①

0692 점 P는 원점 O에서 출발하여 x축의 양의 방향으로 매초 1씩 움직이므로 t초 후의 점 P의 좌표는 $P(t,\ 0,\ 0)$

점 Q는 점 A에서 출발하여 점 B의 방향으로 매초 2씩 움직이고 $\angle OAB=30°$이므로 오른쪽 그림과 같이 점 Q에서 $\overline{OA}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 t초 후의 $\overline{AQ}$의 길이는 $2t$이므로



$\overline{AH}=\sqrt{3}t,\ \overline{QH}=t$

즉 t초 후의 점 Q의 좌표는 $Q(0,\ 10\sqrt{3}-\sqrt{3}t,\ t)$

$\therefore \overline{PQ}^2=(-t)^2+(10\sqrt{3}-\sqrt{3}t)^2+t^2$

$=5t^2-60t+300$

$=5(t-6)^2+120$

따라서 $\overline{PQ}$의 길이가 최소가 되는 때는 출발한 지 6초 후이다.

답 6초 후

유형 05 같은 거리에 있는 점 본책 105쪽

구하는 점의 좌표를 미지수로 놓고, 주어진 조건에 대한 식을 세운다.

① x축 위의 점은 y좌표, z좌표가 0이다. ➡ $(a,\ 0,\ 0)$

② xy평면 위의 점은 z좌표가 0이다. ➡ $(a,\ b,\ 0)$

0693 구하는 점을 P$(a,\ 0,\ 0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(a-1)^2+(-1)^2=a^2-2a+2$

$\overline{\mathrm{BP}}^2=(a+2)^2+3^2+1^2=a^2+4a+14$

$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$a^2-2a+2=a^2+4a+14$

$6a=-12 \quad \therefore a=-2$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-2,\ 0,\ 0)$이다. 답 $(-2,\ 0,\ 0)$

0694 점 P의 좌표를 $(a,\ 0,\ c)$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(a-1)^2+(c+1)^2=a^2+c^2-2a+2c+2$

$\overline{\mathrm{BP}}^2=(a-2)^2+1^2+c^2=a^2+c^2-4a+5$

$\overline{\mathrm{CP}}^2=(a-3)^2+(-1)^2+(c-2)^2=a^2+c^2-6a-4c+14$

$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로 $2a+2c-3=0$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{\mathrm{BP}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2$이므로 $2a+4c-9=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\dfrac{3}{2},\ c=3$

$\therefore \mathrm{P}\left(-\dfrac{3}{2},\ 0,\ 3\right)$ 답 ①

0695 점 C의 좌표를 $(a,\ b,\ 0)$이라 하면 ⋯ ❶

$\overline{\mathrm{AB}}^2=1^2+1^2=2$

$\overline{\mathrm{AC}}^2=(a-1)^2+b^2=a^2+b^2-2a+1$

$\overline{\mathrm{BC}}^2=(a-1)^2+(b-1)^2+(-1)^2$

$=a^2+b^2-2a-2b+3$ ⋯ ❷

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2$이므로 $a^2+b^2-2a-1=0$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$이므로 $a^2+b^2-2a-2b+1=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면 $2b-2=0 \quad \therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면 $a^2-2a=0$

$a(a-2)=0 \quad \therefore a=0$ 또는 $a=2$ ⋯ ❸

$\therefore \mathrm{C}(0,\ 1,\ 0),\ \mathrm{C}(2,\ 1,\ 0)$ ⋯ ❹

답 $\mathrm{C}(0,\ 1,\ 0),\ \mathrm{C}(2,\ 1,\ 0)$

채점 기준표

❶ 점 C의 좌표를 $(a, b, 0)$이라 할 수 있다.	10%
❷ $\overline{\mathrm{AC}}^2$, $\overline{\mathrm{BC}}^2$을 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❹ 점 C의 좌표를 모두 구할 수 있다.	20%

유형 06 선분의 길이의 합의 최솟값 본책 106쪽

좌표평면 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값 구하기

① 두 점 A, B가 좌표평면을 기준으로 서로 반대쪽에 있는 경우

➡ $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이이다.

② 두 점 A, B가 좌표평면을 기준으로 같은 쪽에 있는 경우

➡ 점 A를 좌표평면에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{A'B}}$의 길이이다.

0696 두 점 A, B의 z좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 좌표공간에서 xy평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A와 xy평면에 대하여 대칭인 점을 A′이라 하면

$\mathrm{A'}(-1,\ 1,\ 1)$

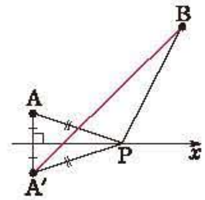
이때 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PB}}\ge\overline{\mathrm{A'B}}$

$=\sqrt{(2+1)^2+(3-1)^2+(-4-1)^2}$

$=\sqrt{38}$ 답 ④

0697 두 점 A, B는 zx평면 위의 점이고, x축을 기준으로 같은 쪽에 있다.



점 A와 x축에 대하여 대칭인 점을 A′이라 하면 $\mathrm{A'}(-2,\ 0,\ -1)$

이때 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PB}}\ge\overline{\mathrm{A'B}}$

$=\sqrt{(3+2)^2+(4+1)^2}$

$=5\sqrt{2}$ 답 ④

0698 두 점 A, B의 y좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 좌표공간에서 zx평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A와 zx평면에 대하여 대칭인 점을 A′이라 하면

$\mathrm{A'}(2,\ -4,\ 3)$ ⋯ ❶

이때 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PB}}\ge\overline{\mathrm{A'B}}$

$=\sqrt{(-3-2)^2+(a+4)^2}$

$=\sqrt{a^2+8a+41}$

즉 $\sqrt{a^2+8a+41}=5\sqrt{2}$이므로 $a^2+8a-9=0$

$(a+9)(a-1)=0 \quad \therefore a=1\ (\because a>0)$ ⋯ ❷

답 1

채점 기준표

❶ 점 A와 zx평면에 대하여 대칭인 점의 좌표를 구할 수 있다.	50%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50%

0699 두 점 A, B의 x좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 좌표공간에서 yz평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 B와 yz평면에 대하여 대칭인 점을 B′이라 하면

$\mathrm{B'}(-2,\ 2,\ 3)$

이때 $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이므로 △ABP의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{B'P}}+\overline{\mathrm{PA}}\ge\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AB'}}$

$=\sqrt{(2-1)^2+(2-4)^2}$

$+\sqrt{(-2-1)^2+(2-4)^2}$

$=\sqrt{5}+\sqrt{13}$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{5}+\sqrt{13}$이다. 답 $\sqrt{5}+\sqrt{13}$

유형 07 좌표평면 위로의 정사영 본책 107쪽

점 A, B, C에서 좌표평면에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′, C′이라 하면

① $\overline{\mathrm{AB}}$의 좌표평면 위로의 정사영은 $\overline{\mathrm{A'B'}}$이다.

② △ABC의 좌표평면 위로의 정사영은 △A′B′C′이다.

0700 두 점 A, B의 xy평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 하면

$A'(1,\ 2,\ 0)$, $B'(3,\ 1,\ 0)$

$\therefore \overline{A'B'}=\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$

답 ②

0701 $\overline{AB}=\sqrt{(2+1)^2+(3-5)^2+(2-3)^2}=\sqrt{14}$

두 점 A, B의 zx평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 하면

$A'(-1,\ 0,\ 3)$, $B'(2,\ 0,\ 2)$

$\therefore \overline{A'B'}=\sqrt{(2+1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{10}$

이때 $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$이므로

$$\cos\theta=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{35}}{7}$$

$$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{35}}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{7}$$

답 ③

0702 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{2})^2+(-1)^2}=2$,

$\overline{CA}=\sqrt{(-\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$이므로 △ABC는 ∠A=90°인 직각삼각형이다.

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

세 점 A, B, C의 xy평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′, C′이라 하면

$A'(0,\ 0,\ 0)$, $B'(1,\ 0,\ 0)$, $C'(0,\ \sqrt{2},\ 0)$

$\therefore \overline{A'B'}=1$, $\overline{B'C'}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$, $\overline{C'A'}=\sqrt{2}$

$\overline{B'C'}^2=\overline{A'B'}^2+\overline{C'A'}^2$이므로 △A′B′C′도 ∠A′=90°인 직각삼각형이다.

$$\therefore \triangle A'B'C'=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 △A′B′C′=△ABC cos θ이므로

$$\cos\theta=\frac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

답 ⑤

0703 두 점 A, B의 yz평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 하면

$A'(0,\ 2,\ -3)$, $B'(0,\ -1,\ 3)$

$\therefore \overline{A'B'}=\sqrt{(-1-2)^2+(3+3)^2}=3\sqrt{5}$

이때 $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos 30°$이므로

$$3\sqrt{5}=\sqrt{(b-a)^2+(-1-2)^2+(3+3)^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $(b-a)^2=15$

두 점 A, B의 zx평면 위로의 정사영을 각각 A″, B″이라 하면

$A''(a,\ 0,\ -3)$, $B''(b,\ 0,\ 3)$

$\therefore \overline{A''B''}=\sqrt{(b-a)^2+(3+3)^2}=\sqrt{15+36}=\sqrt{51}$

답 ③

0704 △ABC의 xy평면 위로의 정사영은 △OAB이다. ➊

△ABC는 한 변의 길이가 $3\sqrt{2}$인 정삼각형이므로

$$\triangle ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(3\sqrt{2})^2=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3=\frac{9}{2}$이므로 두 평면 OAB, ABC가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 △OAB=△ABC cos θ에서

$$\cos\theta=\frac{\triangle OAB}{\triangle ABC}=\frac{\frac{9}{2}}{\frac{9\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$ ➋

따라서 △OAB의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는

$$\triangle OAB\cos\theta=\frac{9}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$ ➌

답 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

채점 기준표	
➊ △ABC의 xy평면 위로의 정사영이 △OAB임을 알 수 있다.	20%
➋ 두 평면 OAB, ABC가 이루는 각의 크기를 θ라 하고 cos θ의 값을 구할 수 있다.	50%
➌ △OAB의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이를 구할 수 있다.	30%

유형 08 선분의 내분점과 외분점

본책 108쪽

두 점 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$에 대하여 $\overline{AB}$를

① $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점의 좌표

➡ $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n},\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$

② $m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점의 좌표

➡ $\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n},\ \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$

0705 $\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{1\cdot4+2\cdot1}{1+2},\ \frac{1\cdot3+2\cdot(-3)}{1+2},\ \frac{1\cdot(-3)+2\cdot3}{1+2}\right)$$

$\therefore P(2,\ -1,\ 1)$

$\overline{AB}$를 2 : 1로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$Q\left(\frac{2\cdot4-1\cdot1}{2-1},\ \frac{2\cdot3-1\cdot(-3)}{2-1},\ \frac{2\cdot(-3)-1\cdot3}{2-1}\right)$$

$\therefore Q(7,\ 9,\ -9)$

따라서 $\overline{PQ}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{9}{2},\ 4,\ -4\right)$

답 ④

0706 점 A의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 하면 $\overline{OA}$를 2 : 3으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{2a}{5},\ \frac{2b}{5},\ \frac{2c}{5}\right)$$

따라서 $\frac{2a}{5}=3$, $\frac{2b}{5}=4$, $\frac{2c}{5}=6$이므로

$a=\frac{15}{2}$, $b=10$, $c=15$

$\therefore A\left(\frac{15}{2},\ 10,\ 15\right)$

답 $A\left(\frac{15}{2},\ 10,\ 15\right)$

다른 풀이 점 A는 $\overline{OP}$를 5 : 3으로 외분하는 점이므로

$A\left(\frac{5\cdot3}{2},\ \frac{5\cdot4}{2},\ \frac{5\cdot6}{2}\right)$, 즉 $A\left(\frac{15}{2},\ 10,\ 15\right)$

0707 점 A는 $\overline{PP'}$의 중점이므로 점 P′의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면

$$A\left(\frac{4+x}{2},\ \frac{1+y}{2},\ \frac{z}{2}\right)$$

따라서 $\frac{4+x}{2}=-2$, $\frac{1+y}{2}=-5$, $\frac{z}{2}=3$이므로

$x=-8$, $y=-11$, $z=6$

$\therefore P'(-8, -11, 6)$

답 ①

0708 $\overline{AB}$를 $3:1$로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$Q\left(\frac{3\cdot a-1\cdot 5}{3-1}, \frac{3\cdot b-1\cdot 4}{3-1}, \frac{3\cdot c-1\cdot(-2)}{3-1}\right)$$

따라서 $\frac{3a-5}{2}=-1$, $\frac{3b-4}{2}=-2$, $\frac{3c+2}{2}=-8$이므로

$a=1$, $b=0$, $c=-6$

즉 $B(1, 0, -6)$이므로 $\overline{AB}$를 $3:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

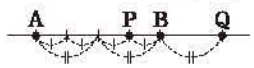
$$P\left(\frac{3\cdot 1+1\cdot 5}{3+1}, \frac{3\cdot 0+1\cdot 4}{3+1}, \frac{3\cdot(-6)+1\cdot(-2)}{3+1}\right)$$

$\therefore P(2, 1, -5)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(-1-2)^2+(-2-1)^2+(-8+5)^2}=3\sqrt{3}$

답 $3\sqrt{3}$

다른 풀이 오른쪽 그림에서



$\overline{BQ}=\frac{1}{3}\overline{AQ}$

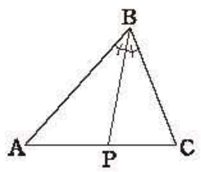
$\overline{PB}=\frac{1}{4}\overline{AB}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\overline{AQ}=\frac{1}{6}\overline{AQ}$

$\therefore \overline{PQ}=\overline{PB}+\overline{BQ}=\frac{1}{6}\overline{AQ}+\frac{1}{3}\overline{AQ}=\frac{1}{2}\overline{AQ}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(-1-5)^2+(-2-4)^2+(-8+2)^2}$

$=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

0709 점 P가 $\angle B$의 이등분선과 $\overline{AC}$의 교점이므로



$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{AP}:\overline{CP}$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$, $\overline{BC}=4$이므로

$\overline{AP}:\overline{CP}=5:4$

따라서 점 P는 $\overline{AC}$를 $5:4$로 내분하는 점이므로

$a=\frac{5\cdot 0+4\cdot 4}{5+4}=\frac{16}{9}$, $b=\frac{5\cdot 3+4\cdot 0}{5+4}=\frac{5}{3}$,

$c=\frac{5\cdot 4+4\cdot 0}{5+4}=\frac{20}{9}$

$\therefore a+b+c=\frac{17}{3}$

답 $\frac{17}{3}$

유형 09 선분의 내분점 · 외분점이 좌표평면 또는 좌표축 위에 있을 때 본책 108쪽

두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$에 대하여 $\overline{AB}$를

① $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점이 xy평면 위에 있다.

➡ 내분점의 z좌표가 0이므로 $\frac{mz_2+nz_1}{m+n}=0$

② $m:n$ $(m>0, n>0, m\neq n)$으로 외분하는 점이 x축 위에 있다.

➡ 외분점의 y좌표, z좌표가 0이므로

$\frac{my_2-ny_1}{m-n}=0$, $\frac{mz_2-nz_1}{m-n}=0$

0710 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점이 x축 위에 있으므로 내분점의 y좌표, z좌표가 0이다.

즉 $\frac{2\cdot(-2)+1\cdot a}{2+1}=0$, $\frac{2\cdot b+1\cdot 4}{2+1}=0$이므로

$-4+a=0$, $2b+4=0$ $\quad\therefore a=4$, $b=-2$

$\therefore a+b=2$

답 ②

0711 $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$에서 점 P는 $\overline{AB}$를 $m:n$으로 외분하는 점이고, zx평면 위에 있으므로 점 P의 y좌표는 0이다.

즉 $\frac{m\cdot(-6)-n\cdot(-4)}{m-n}=0$이므로

$-6m+4n=0$ $\quad\therefore m=\frac{2}{3}n$

따라서 $\overline{AP}:\overline{BP}=\frac{2}{3}:1=2:3$이므로 $\quad m=2$, $n=3$

$\therefore m+n=5$

답 ①

0712 $\overline{AB}$를 $2:3$으로 내분하는 점이 xy평면 위에 있으므로 내분점의 z좌표는 0이다.

즉 $\frac{2\cdot c+3\cdot 8}{2+3}=0$이므로 $\quad 2c+24=0$

$\therefore c=-12$

또 $\overline{AB}$를 $3:2$로 외분하는 점이 z축 위에 있으므로 외분점의 x좌표, y좌표는 0이다.

즉 $\frac{3\cdot a-2\cdot 3}{3-2}=0$, $\frac{3\cdot b-2\cdot 6}{3-2}=0$이므로

$3a-6=0$, $3b-12=0$ $\quad\therefore a=2$, $b=4$

$\therefore a+b-c=18$

답 18

유형 10 선분의 내분점 · 외분점의 사각형에의 활용 본책 109쪽

네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 □ABCD가

① 평행사변형 ➡ $\overline{AC}$의 중점과 $\overline{BD}$의 중점이 일치한다.

② 마름모 ➡ $\overline{AC}$의 중점과 $\overline{BD}$의 중점이 일치하고 $\overline{AB}=\overline{BC}$이다.

0713 $\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1-2}{2}, \frac{-3+1}{2}, \frac{-5+4}{2}\right), \text{ 즉 } \left(-\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right)$$

점 D의 좌표를 (x, y, z)라 하면 $\overline{BD}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+4}{2}, \frac{z+5}{2}\right)$$

평행사변형의 두 대각선의 중점은 일치하므로

$\frac{x+2}{2}=-\frac{3}{2}$, $\frac{y+4}{2}=-1$, $\frac{z+5}{2}=-\frac{1}{2}$

$\therefore x=-5$, $y=-6$, $z=-6$

따라서 $D(-5, -6, -6)$이므로

$\overline{BD}=\sqrt{(-5-2)^2+(-6-4)^2+(-6-5)^2}$

$=3\sqrt{30}$

답 ③

다른 풀이 $\overline{AC}$의 중점을 M이라 하면 $\overline{BD}=2\overline{BM}$이므로

$$\overline{BD}=2\sqrt{\left(2+\frac{3}{2}\right)^2+(4+1)^2+\left(5+\frac{1}{2}\right)^2}=2\sqrt{\frac{270}{4}}=3\sqrt{30}$$

0714 점 B의 좌표를 (x, y, z)라 하면 $\overline{BD}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{x+3}{2}, \frac{y-2}{2}, \frac{z+4}{2}\right) \quad \cdots❶$$

$\overline{BD}$의 중점은 두 대각선의 교점이므로

$$\frac{x+3}{2}=0, \frac{y-2}{2}=-4, \frac{z+4}{2}=3$$

$\therefore x=-3, y=-6, z=2$

따라서 $B(-3, -6, 2)$이므로 ⋯❷

$$\overline{AB}=\sqrt{(-3+1)^2+(-6-3)^2+(2+4)^2}=11 \quad \cdots❸$$

답 11

채점 기준표	
❶ $\overline{BD}$의 중점의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ 점 B의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❸ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	30%

0715 평행사변형 ABCD의 각 변의 중점을 연결하여 만든 사각형 PQRS도 평행사변형이고, 평행사변형 PQRS의 두 대각선의 교점은 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점과 일치한다.
따라서 구하는 좌표는 대각선 AC의 중점의 좌표와 같으므로

$$\left(\frac{-3+2}{2}, \frac{2+6}{2}, \frac{1-1}{2}\right), \text{ 즉 } \left(-\frac{1}{2}, 4, 0\right)$$

답 ①

SSEN 특강

사각형의 각 변의 중점을 연결하여 만든 사각형
사각형의 각 변의 중점을 연결하여 만든 사각형은 다음과 같다.
① 사각형, 평행사변형 ➡ 평행사변형
② 직사각형, 등변사다리꼴 ➡ 마름모
③ 마름모 ➡ 직사각형
④ 정사각형 ➡ 정사각형

0716 $\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{7-1}{2}, \frac{a-3}{2}, \frac{-1+4}{2}\right), \text{ 즉 } \left(3, \frac{a-3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$\overline{BD}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+3}{2}, \frac{b+3}{2}, \frac{-2+5}{2}\right), \text{ 즉 } \left(3, \frac{b+3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

마름모의 두 대각선의 중점은 일치하므로

$$\frac{a-3}{2}=\frac{b+3}{2}, \quad a-3=b+3$$

$\therefore b=a-6$ ⋯⋯ ㉠ ⋯❶

마름모의 네 변의 길이는 모두 같으므로 $\overline{AD}=\overline{CD}$에서

$$\sqrt{(3-7)^2+(3-a)^2+(5+1)^2}$$
$$=\sqrt{(3+1)^2+(3+3)^2+(5-4)^2}$$

양변을 제곱하면 $4^2+(3-a)^2+6^2=4^2+6^2+1^2$

$a^2-6a+8=0, \quad (a-2)(a-4)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=4$

㉠에서 $a=2, b=-4$ 또는 $a=4, b=-2$ ⋯❷

$\therefore ab=-8$ ⋯❸

답 −8

채점 기준표	
❶ a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10%

유형 11 삼각형의 무게중심 본책 109쪽

세 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$의 무게중심의 좌표

$$\Rightarrow \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

0717 $\triangle ABC$의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{a+2+0}{3}, \frac{1+b+2}{3}, \frac{-5+3-1}{3}\right),$$

즉 $\left(\frac{a+2}{3}, \frac{b+3}{3}, -1\right)$

이 점이 점 $(2, 3, -1)$과 일치하므로

$$\frac{a+2}{3}=2, \frac{b+3}{3}=3 \quad \therefore a=4, b=6$$

$\therefore a+b=10$

답 10

0718 $P(3, -6, -4)$, $Q(3, 6, -4)$, $R(-3, 6, -4)$이므로 $\triangle PQR$의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{3+3-3}{3}, \frac{-6+6+6}{3}, \frac{-4-4-4}{3}\right), \text{ 즉 } (1, 2, -4)$$

따라서 $a=1, b=2, c=-4$이므로

$a+b+c=-1$

답 ②

0719 점 C의 좌표를 (a, b, c)라 하면 $\overline{CM}$을 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot3+1\cdot a}{2+1}, \frac{2\cdot(-1)+1\cdot b}{2+1}, \frac{2\cdot(-9)+1\cdot c}{2+1}\right),$$

즉 $\left(\frac{6+a}{3}, \frac{-2+b}{3}, \frac{-18+c}{3}\right)$

이 점이 점 $G(4, 1, -6)$과 일치하므로

$$\frac{6+a}{3}=4, \frac{-2+b}{3}=1, \frac{-18+c}{3}=-6$$

따라서 $a=6, b=5, c=0$이므로

$C(6, 5, 0)$

답 $C(6, 5, 0)$

다른 풀이 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x, y, z)$라 하면 $\overline{AB}$의 중점이 M이므로

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

$\therefore x_1+x_2=6, y_1+y_2=-2, z_1+z_2=-18$

$\triangle ABC$의 무게중심이 G이므로

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x}{3}, \frac{y_1+y_2+y}{3}, \frac{z_1+z_2+z}{3}\right)$$

따라서 $\frac{6+x}{3}=4, \frac{-2+y}{3}=1, \frac{-18+z}{3}=-6$이므로

$x=6, y=5, z=0 \quad \therefore C(6, 5, 0)$

0720 $\triangle ABC$의 무게중심 G의 좌표는

$G\left(\frac{3+2+1}{3}, \frac{4+1+4}{3}, \frac{5+3+1}{3}\right)$, 즉 $G(2, 3, 3)$

$\overline{PG}$의 길이의 최솟값은 점 G와 yz평면 사이의 거리와 같다.
따라서 점 G에서 yz평면에 내린 수선의 발은 점 $(0, 3, 3)$이므로 $\overline{PG}$의 길이의 최솟값은 2이다. 답 ②

0721 $\triangle ABC$의 무게중심을 G라 하면 $G\left(\frac{n}{3}, \frac{n}{3}, \frac{n}{3}\right)$이므로

$$d_n=\overline{PG}=\sqrt{\left(\frac{2n}{3}\right)^2+\left(\frac{2n}{3}\right)^2+\left(\frac{2n}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{9} d_n=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sum_{n=1}^{9} n=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{9\cdot 10}{2}=30\sqrt{3}$$ 답 ①

0722 $\overline{AB}$를 $1:3$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$P\left(\frac{1\cdot5+3\cdot(-2)}{1+3}, \frac{1\cdot1+3\cdot3}{1+3}, \frac{1\cdot2+3\cdot5}{1+3}\right)$

$\therefore P\left(-\frac{1}{4}, \frac{5}{2}, \frac{17}{4}\right)$ ··· ❶

$\overline{BC}$를 $1:3$으로 내분하는 점 Q의 좌표는

$Q\left(\frac{1\cdot0+3\cdot5}{1+3}, \frac{1\cdot(-4)+3\cdot1}{1+3}, \frac{1\cdot(-1)+3\cdot2}{1+3}\right)$

$\therefore Q\left(\frac{15}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$ ··· ❷

$\overline{CA}$를 $1:3$으로 내분하는 점 R의 좌표는

$R\left(\frac{1\cdot(-2)+3\cdot0}{1+3}, \frac{1\cdot3+3\cdot(-4)}{1+3}, \frac{1\cdot5+3\cdot(-1)}{1+3}\right)$

$\therefore R\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right)$ ··· ❸

따라서 $\triangle PQR$의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-\frac{1}{4}+\frac{15}{4}-\frac{1}{2}}{3}, \frac{\frac{5}{2}-\frac{1}{4}-\frac{9}{4}}{3}, \frac{\frac{17}{4}+\frac{5}{4}+\frac{1}{2}}{3}\right),$$

즉 $(1, 0, 2)$ ··· ❹ 답 $(1, 0, 2)$

채점 기준표

❶ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	25%
❷ 점 Q의 좌표를 구할 수 있다.	25%
❸ 점 R의 좌표를 구할 수 있다.	25%
❹ $\triangle PQR$의 무게중심의 좌표를 구할 수 있다.	25%

다른 풀이 $\triangle PQR$의 무게중심은 $\triangle ABC$의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-2+5+0}{3}, \frac{3+1-4}{3}, \frac{5+2-1}{3}\right)$, 즉 $(1, 0, 2)$

유형 12 구의 방정식
본책 110쪽

① 지름의 양 끝 점 A, B의 좌표를 알 때

➡ 중심이 $\overline{AB}$의 중점이고, 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{AB}$임을 이용한다.

② 구가 지나는 네 점의 좌표를 알 때

➡ 구의 방정식을 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$으로 놓고 네 점의 좌표를 대입하여 상수 A, B, C, D의 값을 구한다.

0723 $\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot(-1)+2\cdot2}{1+2}, \frac{1\cdot4+2\cdot1}{1+2}, \frac{1\cdot(-4)+2\cdot5}{1+2}\right)$,

즉 $(1, 2, 2)$

$\overline{AB}$를 $1:2$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot(-1)-2\cdot2}{1-2}, \frac{1\cdot4-2\cdot1}{1-2}, \frac{1\cdot(-4)-2\cdot5}{1-2}\right)$,

즉 $(5, -2, 14)$

따라서 구의 중심의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{2-2}{2}, \frac{2+14}{2}\right)$, 즉 $(3, 0, 8)$

이고, 구의 반지름의 길이는

$\sqrt{(3-1)^2+(-2)^2+(8-2)^2}=\sqrt{44}$

이므로 구의 방정식은

$(x-3)^2+y^2+(z-8)^2=44$ 답 ③

0724 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$에서

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$

따라서 $a=1, b=-2, c=3, r=4$이므로

$a+b+c+r=6$ 답 6

0725 구의 방정식을 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$이라 하고 네 점의 좌표를 각각 대입하면

$D=0,\ 16+16+4B-4C+D=0,$

$4+2A+D=0,\ 1+9-A+3B+D=0$

위의 식을 연립하여 풀면

$A=-2,\ B=-4,\ C=4,\ D=0$

즉 구의 방정식은 $x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z=0$이므로

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=9$

따라서 구의 반지름의 길이는 3이다. 답 ⑤

0726 $x^2+y^2+z^2-2x+6y+kz=k$에서

$(x-1)^2+(y+3)^2+\left(z+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{4}+k+10$

이때 구의 부피가 최소이려면 구의 반지름의 길이 $\sqrt{\frac{k^2}{4}+k+10}$이 최소이어야 한다.

$\frac{k^2}{4}+k+10=\frac{1}{4}(k+2)^2+9$이므로 $k=-2$일 때 반지름의 길이가 최소이고 이때의 구의 방정식은

$(x-1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$

따라서 $a=1,\ b=-3,\ c=1,\ r^2=9$이므로

$a+b+c+r^2=8$ 답 ③

0727 $x^2+y^2+z^2-4x-2y-8z+20=0$에서

$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=1$

즉 주어진 구의 중심의 좌표가 $(2, 1, 4)$이고 반지름의 길이가 1이므로 구의 xy평면 위로의 정사영의 방정식은

$(x-2)^2+(y-1)^2=1$ ··· ❶

xy평면에서 이 원과 직선 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$이 접하므로 원의 중심 $(2, 1, 0)$과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같다.

즉 $\frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$이므로 $|2m-1|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 $4m^2-4m+1=m^2+1$

$3m^2-4m=0$, $m(3m-4)=0$

$\therefore m=\frac{4}{3}$ ($\because m\neq0$) ⋯ ❷

답 $\frac{4}{3}$

채점 기준표

❶ 구의 xy평면 위로의 정사영의 방정식을 구할 수 있다.	50%
❷ m의 값을 구할 수 있다.	50%

참고 직선 $y=mx$와 정사영 T가 xy평면 위에 있으므로 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계로 생각한다.

유형 13 자취의 방정식 본책 111쪽

(i) 자취를 구하려는 점의 좌표를 (x, y, z)로 놓는다.
(ii) 주어진 조건을 이용하여 x, y, z 사이의 관계식을 세운다.

0728 점 P의 좌표를 (x, y, z)라 하면 $\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$에서 $2\overline{AP}=\overline{BP}$, 즉 $4\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$4\{(x-2)^2+y^2+z^2\}=x^2+(y+2)^2+z^2$

$3x^2+3y^2+3z^2-16x-4y+12=0$

$\therefore x^2+y^2+z^2-\frac{16}{3}x-\frac{4}{3}y+4=0$

따라서 $a=-\frac{16}{3}$, $b=-\frac{4}{3}$, $c=0$, $d=4$이므로

$a-b+c-d=-8$

답 ①

0729 점 B의 좌표를 (x_1, y_1, z_1)이라 하면 점 B는 구 $x^2+y^2+z^2=9$ 위에 있으므로

$x_1^2+y_1^2+z_1^2=9$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{AB}$의 중점을 $P(x, y, z)$라 하면

$x=\frac{-2+x_1}{2}$, $y=\frac{4+y_1}{2}$, $z=\frac{7+z_1}{2}$

$\therefore x_1=2x+2$, $y_1=2y-4$, $z_1=2z-7$

이것을 ㉠에 대입하면

$(2x+2)^2+(2y-4)^2+(2z-7)^2=9$

$\therefore (x+1)^2+(y-2)^2+\left(z-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

따라서 $a=-1$, $b=2$, $c=\frac{7}{2}$, $r=\frac{3}{2}$이므로

$a+b+c+r=6$

답 ③

0730 원에서 지름에 대한 원주각의 크기는 90°이므로 $\angle ACB=90°$를 만족시키는 점 C가 나타내는 도형은 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 구이다. ⋯ ❶

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(1-3)^2+(-2-2)^2+(-1+5)^2}=6$이므로 구의 반지름의 길이는 3이다. ⋯ ❷

따라서 점 C가 나타내는 도형의 부피는

$\frac{4}{3}\pi\cdot3^3=36\pi$ ⋯ ❸

답 36π

채점 기준표

❶ 점 C가 나타내는 도형이 구임을 알 수 있다.	40%
❷ 구의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40%
❸ 구의 부피를 구할 수 있다.	20%

유형 14 좌표평면 또는 좌표축에 접하는 구의 방정식 본책 111쪽

구의 중심의 좌표가 (a, b, c)이고
① xy평면에 접할 때 ➡ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=c^2$
② yz평면에 접할 때 ➡ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2$
③ zx평면에 접할 때 ➡ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=b^2$
④ x축에 접할 때 ➡ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=b^2+c^2$
⑤ y축에 접할 때 ➡ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+c^2$
⑥ z축에 접할 때 ➡ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+b^2$

0731 구가 x축, y축, z축에 동시에 접하려면 구의 중심 (a, b, c)에서 x축, y축, z축에 이르는 거리가 모두 같아야 하므로

$a=b=c$

따라서 구의 중심의 좌표를 (a, a, a)라 하면 구의 중심에서 x축에 내린 수선의 발의 좌표는 $(a, 0, 0)$이고 구의 반지름의 길이가 10이므로

$\sqrt{a^2+a^2}=10$, $2a^2=100$ $\therefore a^2=50$

$\therefore a^2+b^2+c^2=3a^2=3\cdot50=150$

답 ⑤

0732 중심의 좌표가 $(-2, 3, 5)$이므로 구의 중심에서 z축에 내린 수선의 발의 좌표는 $(0, 0, 5)$

따라서 반지름의 길이는 $\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$

답 ③

0733 구의 반지름의 길이를 r라 하면 구가 점 $(-1, 2, 1)$을 지나므로 구의 방정식은

$(x+r)^2+(y-r)^2+(z-r)^2=r^2$

점 $(-1, 2, 1)$이 이 구 위에 있으므로

$(-1+r)^2+(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$

$r^2-4r+3=0$, $(r-1)(r-3)=0$

$\therefore r=1$ 또는 $r=3$

따라서 두 구의 반지름의 길이의 합은 4이다.

답 4

참고 구가 xy평면, yz평면, zx평면에 동시에 접하면 구의 중심에서 xy평면, yz평면, zx평면에 이르는 거리가 모두 구의 반지름의 길이와 같다.

0734 구 S는 xy평면에 접하므로 구 S의 방정식을

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=c^2$

이라 하면 구 S가 두 점 $A(0, 0, 2)$, $B(0, 1, 1)$을 지나므로

$a^2+b^2+(2-c)^2=c^2$ $\therefore a^2+b^2-4c+4=0$ ⋯⋯ ㉠

$a^2+(1-b)^2+(1-c)^2=c^2$

$\therefore a^2+b^2-2b-2c+2=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $\quad 2b-2c+2=0 \quad \therefore b=c-1$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad a^2+(c-1)^2-4c+4=0$

$\therefore a^2=-c^2+6c-5$

$a^2\ge 0$이므로 $\quad -c^2+6c-5\ge 0, \quad c^2-6c+5\le 0$

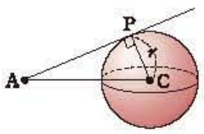
$(c-1)(c-5)\le 0 \quad \therefore 1\le c\le 5$

따라서 $M=5$, $m=1$이므로 $\quad M-m=4$

답 4

유형 15 구에 그은 접선의 길이 (본책 112쪽)

구 밖의 한 점 A에서 중심이 C이고 반지름의 길이가 r인 구에 그은 접선의 접점을 P라 할 때,



$\overline{\text{AP}}=\sqrt{\overline{\text{AC}}^2-\overline{\text{CP}}^2}=\sqrt{\overline{\text{AC}}^2-r^2}$

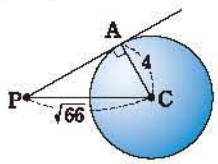
0735 $x^2+y^2+z^2-4x+4y+8z+8=0$에서

$(x-2)^2+(y+2)^2+(z+4)^2=16$

주어진 구의 중심을 C라 하면 C$(2,\ -2,\ -4)$이므로

$\overline{\text{PC}}=\sqrt{(2-1)^2+(-2-2)^2+(-4-3)^2}=\sqrt{66}$

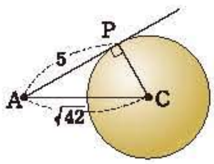
점 P에서 구에 그은 접선의 접점을 A라 하면 △PAC는 직각삼각형이므로 구하는 접선의 길이는



$\overline{\text{PA}}=\sqrt{(\sqrt{66})^2-4^2}=5\sqrt{2}$

답 ④

0736 점 A$(3,\ 5,\ 1)$에서 구에 그은 접선의 접점을 P라 하면



$\overline{\text{PA}}=5$

$\overline{\text{CA}}=\sqrt{(3+1)^2+(5-6)^2+(1-6)^2}$

$=\sqrt{42}$

△PAC는 직각삼각형이므로 구하는 구의 반지름의 길이는

$\overline{\text{CP}}=\sqrt{(\sqrt{42})^2-5^2}=\sqrt{17}$

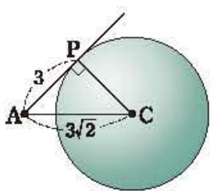
답 ②

0737 $x^2+y^2+z^2-2x+2y+k=0$에서

$(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=2-k$

주어진 구의 중심을 C라 하면

C$(1,\ -1,\ 0)$이므로



$\overline{\text{CA}}=\sqrt{(2-1)^2+(3+1)^2+1^2}$

$=3\sqrt{2}$ ⋯ ❶

점 A에서 구에 그은 접선의 접점을 P라 하면

$\overline{\text{AP}}=3$

△PAC는 직각삼각형이므로 구의 반지름의 길이는

$\overline{\text{PC}}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-3^2}=3$ ⋯ ❷

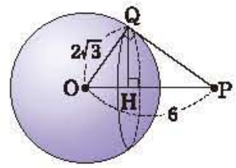
따라서 $2-k=3^2$이므로 $\quad k=-7$ ⋯ ❸

답 -7

채점 기준표

❶ 점 A에서 구의 중심까지의 거리를 구할 수 있다.	40%
❷ 구의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20%

0738 주어진 구의 중심을 O라 하면



$\overline{\text{OP}}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+5^2+3^2}=6$

또 점 P에서 구에 그은 접선의 접점을 Q라 하면 △PQO는 직각삼각형이므로

$\overline{\text{PQ}}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}$

△PQO의 꼭짓점 Q에서 $\overline{\text{OP}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\text{OQ}}\cdot\overline{\text{PQ}}=\overline{\text{OP}}\cdot\overline{\text{QH}}, \quad 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{6}=6\cdot\overline{\text{QH}}$

$\therefore \overline{\text{QH}}=2\sqrt{2}$

따라서 접점의 자취는 중심이 H이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원이므로 구하는 자취의 넓이는

$\pi\cdot(2\sqrt{2})^2=8\pi$

답 8π

유형 16 구와 좌표축의 교점 (본책 112쪽)

구 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$과

① x축의 교점 ➡ $y=0$, $z=0$을 대입

② y축의 교점 ➡ $x=0$, $z=0$을 대입

③ z축의 교점 ➡ $x=0$, $y=0$을 대입

0739 z축 위의 점은 x좌표와 y좌표가 모두 0이므로 주어진 구의 방정식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$z^2+4z+3=0, \quad (z+3)(z+1)=0$

$\therefore z=-3$ 또는 $z=-1$

따라서 주어진 구와 z축의 두 교점의 좌표는 $(0,\ 0,\ -3)$, $(0,\ 0,\ -1)$이므로

$\overline{\text{AB}}=|-1-(-3)|=2$

답 ①

다른 풀이 $x^2+y^2+z^2+2x-4y+4z+3=0$에서

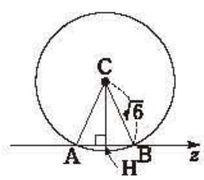
$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=6$

주어진 구의 중심을 C라 하고 점 C$(-1,\ 2,\ -2)$에서 z축에 내린 수선의 발을 H라 하면

H$(0,\ 0,\ -2)$

$\therefore \overline{\text{CH}}=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$

오른쪽 그림에서 $\overline{\text{BC}}=\sqrt{6}$이므로



$\overline{\text{BH}}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{5})^2}=1$

$\therefore \overline{\text{AB}}=2\overline{\text{BH}}=2\cdot 1=2$

0740 y축 위의 점은 x좌표와 z좌표가 모두 0이므로 주어진 구의 방정식에 $x=0$, $z=0$을 대입하여 정리하면

$y^2+2y+3-r^2=0$ ⋯⋯ ㉠

주어진 구와 y축이 만나는 두 점 사이의 거리가 4이므로 y에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근의 차가 4이다.

따라서 ㉠의 두 근을 a, $a+4$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$a+(a+4)=-2, \ a(a+4)=3-r^2$

$\therefore a=-3, \ r=\sqrt{6}\ (\because r>0)$

답 ④

0741 x축 위의 점은 y좌표와 z좌표가 모두 0이므로 주어진 구의 방정식에 $y=0$, $z=0$을 대입하여 정리하면

$x^2-10x+9=0, \quad (x-1)(x-9)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=9$

따라서 주어진 구와 x축의 두 교점의 좌표는 $(1,\ 0,\ 0)$, $(9,\ 0,\ 0)$이므로 $\overline{AB}=|9-1|=8$

이때 두 점 A, B는 구 위의 점이므로 $\overline{CA}=\overline{BC}=6$

따라서 $\triangle ABC$의 둘레의 길이는

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=8+6+6=20$ 답 20

유형 17 구와 좌표평면의 교선 본책 112쪽

구 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$과

① xy평면의 교선 $\xrightarrow{z=0\text{을 대입}}$ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2-c^2$

② yz평면의 교선 $\xrightarrow{x=0\text{을 대입}}$ $(y-b)^2+(z-c)^2=r^2-a^2$

③ zx평면의 교선 $\xrightarrow{y=0\text{을 대입}}$ $(x-a)^2+(z-c)^2=r^2-b^2$

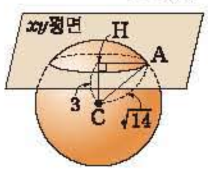
0742 xy평면 위의 점은 z좌표가 0이므로 주어진 구의 방정식에 $z=0$을 대입하면

$(x-2)^2+(y-1)^2=5$

따라서 주어진 구와 xy평면의 교선은 중심의 좌표가 $(2,\ 1,\ 0)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$2\pi\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}\pi$ 답 $2\sqrt{5}\pi$

다른 풀이 주어진 구의 중심을 C라 하고, 점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 오른쪽 그림에서 $\overline{AC}=\sqrt{14}$, $\overline{CH}=3$이고 $\triangle ACH$는 직각삼각형이므로



$\overline{AH}=\sqrt{(\sqrt{14})^2-3^2}=\sqrt{5}$

따라서 주어진 구와 xy평면의 교선은 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원이므로 구하는 둘레의 길이는 $2\sqrt{5}\pi$이다.

0743 구의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=100$

yz평면 위의 점은 x좌표가 0이므로 $x=0$을 위의 방정식에 대입하면

$(y-b)^2+(z-c)^2=100-a^2$

따라서 주어진 구와 yz평면의 교선은 중심의 좌표가 $(0,\ b,\ c)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{100-a^2}$인 원이므로

$b=1,\ c=-3,\ \sqrt{100-a^2}=8$

$\sqrt{100-a^2}=8$의 양변을 제곱하면 $100-a^2=64$

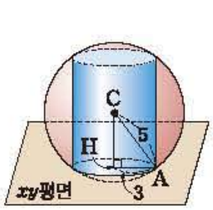
$a^2=36 \quad \therefore a=6\ (\because a>0)$ 답 ③

0744 구에 내접한 원기둥의 밑면이 xy평면 위에 있으므로 그 밑면의 둘레는 구와 xy평면의 교선과 같다.

xy평면 위의 점은 z좌표가 0이므로 $z=0$을 주어진 구의 방정식에 대입하면

$(x-5)^2+(y-3)^2=9$

주어진 구의 중심을 C라 하고 점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 오른쪽 그림에서 $\overline{AC}=5$, $\overline{AH}=3$이므로



$\overline{CH}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

따라서 원기둥의 높이가 8이므로 구하는 원기둥의 부피는

$\pi\cdot3^2\cdot8=72\pi$ 답 ⑤

0745 구의 중심의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 하면 구의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=25$

yz평면 위의 점은 x좌표가 0이므로 $x=0$을 위의 방정식에 대입하면

$(y-b)^2+(z-c)^2=25-a^2$

이 식이 $(y+1)^2+(z+4)^2=16$과 같으므로

$b=-1,\ c=-4,\ 25-a^2=16$

$25-a^2=16$에서 $a^2=9 \quad \therefore a=\pm3$

따라서 구의 중심의 좌표는 $(-3,\ -1,\ -4)$ 또는 $(3,\ -1,\ -4)$이므로 구의 중심과 원점 사이의 거리는

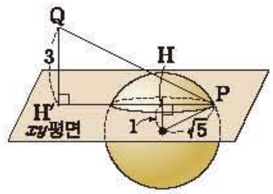
$\sqrt{3^2+1^2+4^2}=\sqrt{26}$ 답 $\sqrt{26}$

0746 xy평면 위의 점은 z좌표가 0이므로 $z=0$을 주어진 구의 방정식에 대입하면

$(x-2)^2+(y-3)^2=4$

즉 주어진 구와 xy평면의 교선은 중심의 좌표가 $(2,\ 3,\ 0)$이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

오른쪽 그림과 같이 교선의 중심을 H라 하고 점 Q에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 H′$(2,\ -1,\ 0)$이므로



$\overline{QP}=\sqrt{\overline{QH'}^2+\overline{H'P}^2}$

$=\sqrt{3^2+\overline{H'P}^2}$

이때 $\overline{H'P}\le\overline{H'H}+2=4+2=6$이므로

$\overline{QP}\le\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$

따라서 구하는 최댓값은 $3\sqrt{5}$이다. 답 ⑤

유형 18 점과 구 사이의 거리의 최댓값과 최솟값 본책 113쪽

① 중심이 C이고 반지름의 길이가 r인 구 위의 점 P와 구 밖의 점 A에 대하여

$\overline{AC}-r\le\overline{AP}\le\overline{AC}+r$

② 중심이 각각 C, C′이고 반지름의 길이가 각각 r, r'인 두 구 위의 점 P, P′에 대하여

$\overline{CC'}-(r+r')\le\overline{PP'}\le\overline{CC'}+(r+r')$

0747 구 $x^2+y^2+z^2=1$은 중심의 좌표가 $(0,\ 0,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1이다.

$x^2+y^2+z^2+6x+8y-10z+25=0$에서

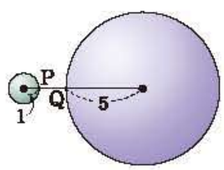
$(x+3)^2+(y+4)^2+(z-5)^2=25$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(-3,\ -4,\ 5)$이고 반지름의 길이는 5이다.

또 두 구의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(-3)^2+(-4)^2+5^2}=5\sqrt{2}$

오른쪽 그림과 같을 때 두 점 P, Q 사이의 거리가 최소이므로 구하는 최솟값은



$5\sqrt{2}-(1+5)=5\sqrt{2}-6$ 답 ④

0748 주어진 구의 반지름의 길이는 3이고, 구의 중심을 C라 하면 C$(1,\ -4,\ 0)$이므로

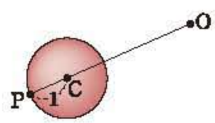
$\overline{CQ}=\sqrt{(3-1)^2+(-1+4)^2+6^2}=7$
따라서 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 $7-3=4$ 답 ②

0749 $x^2+y^2+z^2-2x+8y+4z+5=0$에서
$(x-1)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=16$
이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(1, -4, -2)$이고 반지름의 길이는 4이다.
$x^2+y^2+z^2+4x+2y-14z+29=0$에서
$(x+2)^2+(y+1)^2+(z-7)^2=25$
이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(-2, -1, 7)$이고 반지름의 길이는 5이다. ⇢ ❶
따라서 두 구의 중심 사이의 거리는
$\sqrt{(-2-1)^2+(-1+4)^2+(7+2)^2}=3\sqrt{11}$ ⇢ ❷
이므로 $\overline{PQ}$의 길이의 최댓값과 최솟값은
$M=3\sqrt{11}+(4+5)=3\sqrt{11}+9$
$m=3\sqrt{11}-(4+5)=3\sqrt{11}-9$ ⇢ ❸
$\therefore Mm=(3\sqrt{11}+9)(3\sqrt{11}-9)=18$ ⇢ ❹
답 18

채점 기준표

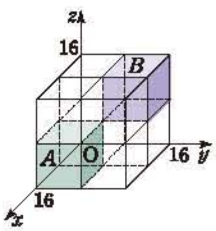
❶ 두 구의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구할 수 있다.	20%
❷ 두 구의 중심 사이의 거리를 구할 수 있다.	30%
❸ M, m의 값을 구할 수 있다.	40%
❹ Mm의 값을 구할 수 있다.	10%

0750 $x^2+y^2+z^2+12x-12y+6z+80=0$에서
$(x+6)^2+(y-6)^2+(z+3)^2=1$
이므로 구의 중심을 C라 하면 $C(-6, 6, -3)$이고 반지름의 길이는 1이다.
이때 $x^2+y^2+z^2$은 원점 O와 구 위의 점 $P(x, y, z)$에 대하여 $\overline{OP}^2$과 같고 점 P가 오른쪽 그림과 같을 때 $x^2+y^2+z^2$의 값이 최대가 된다.

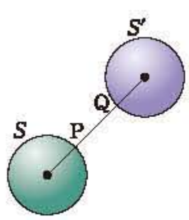


$\overline{OC}=\sqrt{(-6)^2+6^2+(-3)^2}=9$이므로
$\overline{OP}=9+1=10$
따라서 $x^2+y^2+z^2$의 최댓값은 $10^2=100$ 답 100

0751 오른쪽 그림과 같이 주어진 정육면체의 모서리가 x축, y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 정육면체를 좌표공간에 놓으면 두 구 S, S'의 중심의 좌표는 각각
$(12, 4, 4)$, $(4, 12, 12)$



이므로 두 구의 중심 사이의 거리는
$\sqrt{(4-12)^2+(12-4)^2+(12-4)^2}$
$=8\sqrt{3}$
두 점 P, Q의 위치가 오른쪽 그림과 같을 때 $\overline{PQ}$의 길이가 최소이고, 두 구의 반지름의 길이는 각각 4이므로 구하는 최솟값은
$8\sqrt{3}-(4+4)=8\sqrt{3}-8$



답 $8\sqrt{3}-8$

유형 19 두 구의 위치 관계 본책 114쪽

두 구의 반지름의 길이를 각각 r, r', 두 구의 중심 사이의 거리를 d라 할 때
① $d>r+r'$ ⟺ 한 구가 다른 구의 외부에 있다.
② $d=r+r'$ ⟺ 두 구가 외접한다.
③ $d=|r-r'|$ ⟺ 두 구가 내접한다.
④ $0\le d<|r-r'|$ ⟺ 한 구가 다른 구의 내부에 있다.
⑤ $|r-r'|\le d\le r+r'$ ⟺ 두 구가 만난다.

0752 $x^2+y^2+z^2-10x-4y+8z+k=0$에서
$(x-5)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=-k+45$
따라서 두 구의 중심의 좌표가 각각 $(0, 0, 0)$, $(5, 2, -4)$이므로 두 구의 중심 사이의 거리는
$\sqrt{5^2+2^2+(-4)^2}=3\sqrt{5}$
두 구가 외접하려면 두 구의 반지름의 길이의 합이 두 구의 중심 사이의 거리와 같아야 하므로
$\sqrt{5}+\sqrt{-k+45}=3\sqrt{5}$, $\sqrt{-k+45}=2\sqrt{5}$
$-k+45=20$ $\therefore k=25$ 답 ③

0753 $x^2+y^2+z^2-2x-8y+2z+17=0$에서
$(x-1)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=1$
$x^2+y^2+z^2+4x-2y-4=0$에서
$(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=9$
따라서 두 구 S, S'의 중심의 좌표가 각각 $(1, 4, -1)$, $(-2, 1, 0)$이므로 두 구의 중심 사이의 거리는
$\sqrt{(-2-1)^2+(1-4)^2+1^2}=\sqrt{19}$
이때 $1+3<\sqrt{19}$이므로 구 S는 구 S'의 외부에 있다. 답 ⑤

0754 두 구의 중심의 좌표가 각각 $(0, 0, 2)$, $(-2, -4, -2)$이므로 두 구의 중심 사이의 거리는
$\sqrt{2^2+4^2+(2+2)^2}=6$
따라서 중심의 좌표가 $(-2, -4, -2)$인 구의 반지름의 길이를 r라 하면 두 구가 외접하므로 $2+r=6$ $\therefore r=4$ 답 ⑤

0755 두 구의 중심의 좌표가 각각 $(1, 2, 3)$, $(1, -2, 0)$이므로 두 구의 중심 사이의 거리를 d라 하면
$d=\sqrt{(-2-2)^2+(-3)^2}=5$
두 구의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하면
$r_1=\sqrt{a+16}$, $r_2=4$
ㄱ. $a=65$이면 $r_1=\sqrt{65+16}=9$이므로
$9-4=5$, 즉 $r_1-r_2=d$
따라서 두 구가 내접한다.
ㄴ. $a=1$이면 $r_1=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$이므로
$\sqrt{17}-4<5<\sqrt{17}+4$, 즉 $r_1-r_2<d<r_1+r_2$
따라서 두 구가 만나서 원이 생긴다.
ㄷ. $-16<a<-15$이면 $0<r_1<1$이므로 $r_1+r_2<d$
또 $a>65$이면 $r_1>9$이므로 $r_1-r_2>d$
따라서 $-16<a<-15$ 또는 $a>65$이면 두 구는 만나지 않는다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

참고 ㄴ. 두 구가 외접하려면 $d=r_1+r_2$이어야 하므로

$\sqrt{a+16}+4=5$, $\quad\sqrt{a+16}=1$ $\quad\therefore a=-15$

0756 $x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z-6=0$에서

$(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=9$

$x^2+y^2+z^2-4x-10y-2z+a=0$에서

$(x-2)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=30-a$

두 구의 중심의 좌표가 각각 $(-1,\ -1,\ -1)$, $(2,\ 5,\ 1)$이므로 두 구의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(2+1)^2+(5+1)^2+(1+1)^2}=7$

두 구의 반지름의 길이가 각각 3, $\sqrt{30-a}$이므로 두 구가 만나지 않으려면

$3+\sqrt{30-a}<7$ 또는 $|3-\sqrt{30-a}|>7$

그런데 a가 자연수이므로

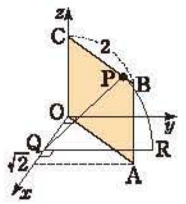
$\sqrt{30-a}<4$, $\quad 0<30-a<16$

$\therefore 14<a<30$

따라서 자연수 a는 15, 16, 17, ⋯, 29의 15개이다. 답 ②

0757 전략 $\overline{BC}$ 위의 점을 P로 놓고, 점 P와 x축 사이의 거리가 일정함을 이용한다.

풀이 $\overline{BC}$ 위의 한 점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 하고, 점 P를 오른쪽 그림과 같이 x축을 회전축으로 하여 회전시킬 때 xy평면과 만나는 점을 R라 하자.



이때 점 R의 좌표를 $(x,\ y,\ 0)$ $(0\le x\le\sqrt{2})$이라 하면

$Q(x,\ 0,\ 0)$, $P(x,\ x,\ 2)$

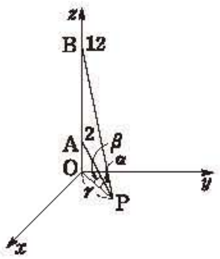
$\overline{PQ}=\overline{QR}$이므로 $\quad\sqrt{x^2+2^2}=\sqrt{y^2}$, $\quad x^2+4=y^2$

$\therefore x^2-y^2=-4$ (단, $0\le x\le\sqrt{2}$)

따라서 구하는 교선의 모양은 쌍곡선의 일부이다. 답 ⑤

0758 전략 삼각함수의 덧셈정리를 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OP}=r$, $\angle OPB=\alpha$, $\angle OPA=\beta$라 하면



$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$

$=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{\frac{12}{r}-\frac{2}{r}}{1+\frac{12}{r}\cdot\frac{2}{r}}$

$=\dfrac{10r}{r^2+24}$

$\theta\ge45°$에서 $\tan\theta\ge1$이므로

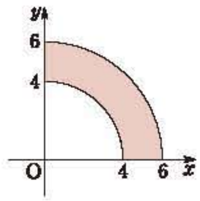
$\dfrac{10r}{r^2+24}\ge1$, $\quad r^2-10r+24\le0$

$(r-4)(r-6)\le0$ $\quad\therefore 4\le r\le6$

이때 $r=\sqrt{x^2+y^2}$이므로 $\quad 4\le\sqrt{x^2+y^2}\le6$

$\therefore 16\le x^2+y^2\le36$ $(x\ge0,\ y\ge0)$

따라서 점 P가 존재하는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같으므로 구하는 넓이는

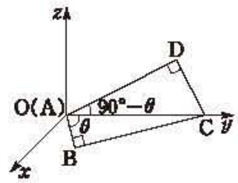


$\dfrac{1}{4}(\pi\cdot6^2-\pi\cdot4^2)=5\pi$

답 5π

0759 전략 점 A를 원점, $\overline{AC}$를 y축 위에 오도록 하는 좌표공간을 생각한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 A를 원점, $\overline{AC}$를 y축, $\triangle ABC$를 xy평면 위에 오도록 좌표공간에 놓으면 $\triangle ACD$는 yz평면 위에 있다.



이때 $\overline{AC}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$이므로

$\angle CAB=\theta$라 하면 $\triangle ABC$에서

$\sin\theta=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{4}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos\theta=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{2}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 점 B의 좌표는

$(\overline{AB}\sin\theta,\ \overline{AB}\cos\theta,\ 0)$, 즉 $\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5},\ 0\right)$

점 D의 좌표는

$(0,\ \overline{AD}\,\overbrace{\cos(90°-\theta)}^{\sin\theta},\ \overline{AD}\,\overbrace{\sin(90°-\theta)}^{\cos\theta})$,

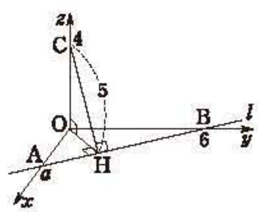
즉 $\left(0,\ \dfrac{8\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

$\therefore \overline{BD}=\sqrt{\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(-\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{85}}{5}$

답 ①

0760 전략 삼수선의 정리를 이용한다.

풀이 $A(a,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 6,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ 4)$라 하고 점 C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{CH}=5$

$\overline{OC}\perp(xy$평면$)$, $\overline{CH}\perp l$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{OH}\perp l$

$\triangle COH$에서 $\quad\overline{OH}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

$\overline{OA}=|a|$, $\overline{OB}=6$, $\overline{AB}=\sqrt{a^2+36}$이고 $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\overline{AB}\cdot\overline{OH}$이므로 $\quad|a|\cdot6=\sqrt{a^2+36}\cdot3$

$2|a|=\sqrt{a^2+36}$

양변을 제곱하면 $\quad 4a^2=a^2+36$

$3a^2=36$ $\quad\therefore a^2=12$ 답 ⑤

0761 전략 두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인 각의 크기가 θ인 삼각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$임을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(5-3)^2+(5-2)^2}=4$이고 조건 (나)에서

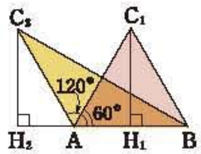
$\overline{AB}=\overline{AC}=4$이므로 $\angle BAC=\theta$라 하면 조건 ㈎에 의하여

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot \sin\theta=4\sqrt{3}$$

$$\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \theta=60^\circ \text{ 또는 } \theta=120^\circ$$

θ의 값이 60°, 120°일 때의 점 C를 각각 C_1, C_2라 하고 두 점 C_1, C_2에서 $\overline{AB}$와 $\overline{AB}$의 연장선에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면



$$\overline{C_1H_1}=\overline{C_2H_2}=4\sin 60^\circ$$
$$=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

이므로 점 C가 나타내는 도형은 중심이 각각 H_1, H_2이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 원이다.

따라서 점 C가 나타내는 도형의 둘레의 길이의 합은

$$2\cdot 2\pi\cdot 2\sqrt{3}=8\sqrt{3}\pi$$

답 $8\sqrt{3}\pi$

0762 전략 점 P가 좌표공간의 원점에 오도록 평행이동한 후 정사영을 생각한다.

풀이 $\overline{PQ}$를 평행이동하여 점 P가 좌표공간의 원점 O와 일치하도록 할 때, 점 Q를 평행이동한 점을 $A(a, b, c)$라 하자.

점 A의 xy평면, yz평면, zx평면 위로의 정사영을 각각 A_1, A_2, A_3이라 하면

$$A_1(a,\ b,\ 0),\ A_2(0,\ b,\ c),\ A_3(a,\ 0,\ c)$$

$\overline{OA}$의 xy평면 위로의 정사영은 $\overline{OA_1}$이므로

$$\sqrt{a^2+b^2}=5 \qquad \therefore a^2+b^2=25 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{OA}$의 yz평면 위로의 정사영은 $\overline{OA_2}$이므로

$$\sqrt{b^2+c^2}=6 \qquad \therefore b^2+c^2=36 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$\overline{OA}$의 zx평면 위로의 정사영은 $\overline{OA_3}$이므로

$$\sqrt{c^2+a^2}=3\sqrt{3} \qquad \therefore c^2+a^2=27 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉠+㉡+㉢을 하면 $2(a^2+b^2+c^2)=88$

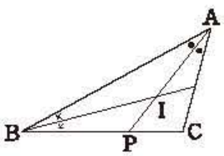
$$\therefore a^2+b^2+c^2=44$$

$$\therefore \overline{PQ}=\overline{OA}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$$

답 ②

0763 전략 삼각형의 내심은 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\angle A$의 이등분선과 $\overline{BC}$의 교점을 P라 하면



$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BP}:\overline{PC}$$

이때

$$\overline{AB}=\sqrt{(-2)^2+(-\sqrt{3})^2+(-5)^2}=4\sqrt{2},$$

$\overline{AC}=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$이므로

$$\overline{BP}:\overline{PC}=4\sqrt{2}:2\sqrt{2}=2:1$$

즉 점 P는 $\overline{BC}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$$P\left(\frac{2\cdot 3+1\cdot 0}{2+1},\ \frac{2\cdot 0+1\cdot 0}{2+1},\ \frac{2\cdot 2+1\cdot(-1)}{2+1}\right)$$

$$\therefore P(2,\ 0,\ 1)$$

$\angle B$의 이등분선과 $\overline{AP}$의 교점이 I이므로

$$\overline{AB}:\overline{BP}=\overline{AI}:\overline{IP}$$

이때 $\overline{BA}=4\sqrt{2}$, $\overline{BP}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$이므로

$$\overline{AI}:\overline{IP}=4\sqrt{2}:2\sqrt{2}=2:1$$

즉 점 I는 $\overline{AP}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$$I\left(\frac{2\cdot 2+1\cdot 2}{2+1},\ \frac{2\cdot 0+1\cdot\sqrt{3}}{2+1},\ \frac{2\cdot 1+1\cdot 4}{2+1}\right)$$

$$\therefore I\left(2,\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ 2\right)$$

따라서 $a=2$, $b=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $c=2$이므로

$$3abc=3\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 2=4\sqrt{3}$$

답 $4\sqrt{3}$

0764 전략 zx평면 위의 점은 y좌표가 0임을 이용한다.

풀이 두 점 A, B의 y좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 좌표공간에서 zx평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A와 zx평면에 대하여 대칭인 점을 A'이라 하면

$$A'(4,\ -2,\ 5)$$

이때 $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}\geq\overline{A'B}$$

즉 점 P가 $\overline{A'B}$와 zx평면의 교점일 때 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소이다.

이때 $\overline{A'P}:\overline{BP}=m:n$ $(m>0,\ n>0)$이라 하면 점 P는 $\overline{A'B}$를 $m:n$으로 내분하는 점이고, zx평면 위에 있으므로 점 P의 y좌표는 0이다.

따라서 $\frac{6m-2n}{m+n}=0$이므로 $6m-2n=0$ $\therefore \frac{n}{m}=3$

$$\therefore \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{BP}}{\overline{A'P}}=\frac{n}{m}=3$$

답 ③

0765 전략 점 C에서 $\triangle OAB$에 내린 수선의 발은 $\triangle OAB$의 무게중심과 일치함을 이용한다.

풀이 꼭짓점 C에서 $\triangle OAB$에 내린 수선의 발은 $\triangle OAB$의 무게중심이다.

$\triangle OAB$는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로

$$B(2,\ 2\sqrt{3},\ 0)$$

따라서 $\triangle OAB$의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{0+4+2}{3},\ \frac{0+0+2\sqrt{3}}{3},\ \frac{0+0+0}{3}\right),\ \text{즉 } \left(2,\ \frac{2\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$$

이때 점 C의 xy평면 위로의 정사영이 $\triangle OAB$의 무게중심이므로

$$C\left(2,\ \frac{2\sqrt{3}}{3},\ c\right)$$

그런데 $\overline{OC}=4$이므로 $\sqrt{2^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+c^2}=4$

양변을 제곱하여 정리하면

$$c^2=\frac{32}{3} \qquad \therefore c=\frac{4\sqrt{6}}{3}\ (\because c>0)$$

따라서 $a=2$, $b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $c=\frac{4\sqrt{6}}{3}$이므로

$$abc=\frac{16\sqrt{2}}{3}$$

답 ④

SSEN 특강

정사면체의 성질

오른쪽 그림과 같은 정사면체의 꼭짓점 A에서 면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle ABH$, $\triangle ACH$, $\triangle ADH$에서

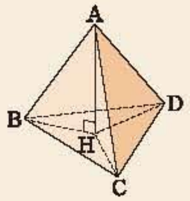
$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}$, $\overline{AH}$는 공통,

$\angle AHB=\angle AHC=\angle AHD=90°$

$\therefore \triangle ABH \equiv \triangle ACH \equiv \triangle ADH$ (RHS 합동)

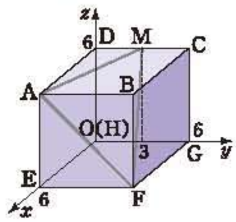
$\therefore \overline{BH}=\overline{CH}=\overline{DH}$

즉 점 H는 $\triangle BCD$의 외심이고 정삼각형은 외심, 내심, 무게중심이 모두 일치하므로 점 H는 $\triangle BCD$의 무게중심이다.



0766 전략 정육면체를 좌표공간에 놓고 각 꼭짓점의 좌표를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 H를 원점으로 하고 세 모서리 EH, GH, DH가 각각 x축, y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 정육면체를 좌표공간에 놓으면



$A(6,\ 0,\ 6)$, $F(6,\ 6,\ 0)$,

$M(0,\ 3,\ 6)$, $B(6,\ 6,\ 6)$

$\triangle AFM$의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{6+6+0}{3},\ \dfrac{0+6+3}{3},\ \dfrac{6+0+6}{3}\right)$, 즉 $(4,\ 3,\ 4)$

따라서 $\triangle AFM$의 무게중심과 점 B 사이의 거리는

$\sqrt{(6-4)^2+(6-3)^2+(6-4)^2}=\sqrt{17}$ 　답 $\sqrt{17}$

0767 전략 구의 반지름의 길이를 r, 구의 중심과 평면 α 사이의 거리를 d라 할 때, $d \ge r$이면 구 위의 점과 평면 사이의 거리의 최댓값은 $d+r$, 최솟값은 $d-r$이다.

풀이 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$에서

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2+C^2-4D}{4}$$

이 구의 중심의 좌표는 $\left(-\dfrac{A}{2},\ -\dfrac{B}{2},\ -\dfrac{C}{2}\right)$이고, 구가 xy평면에 접하므로 반지름의 길이는 $-\dfrac{C}{2}$이다.

이때 구와 xy평면의 접점과 구 위의 점 사이의 거리의 최댓값은 구의 지름의 길이와 같으므로

$-C=6$ 　$\therefore C=-6$

구의 중심과 yz평면 사이의 거리는 $-\dfrac{A}{2}$이므로

$-\dfrac{A}{2}-\left(-\dfrac{C}{2}\right)=3$, 　$A-C=-6$

$\therefore A=-12$

구의 중심과 zx평면 사이의 거리는 $-\dfrac{B}{2}$이므로

$-\dfrac{B}{2}-\left(-\dfrac{C}{2}\right)=4$, 　$B-C=-8$

$\therefore B=-14$

또 $\dfrac{A^2+B^2+C^2-4D}{4}=3^2$이므로

$376-4D=36$ 　$\therefore D=85$

$\therefore A+B+C+D=53$ 　답 53

0768 전략 좌표공간에서 x축과 y축에 각각 접하는 구의 방정식은 $(x-a)^2+(y-a)^2+(z-c)^2=a^2+c^2$ 꼴이다.

풀이 구 S의 중심의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$, 반지름의 길이를 r라 하면 구 S가 x축과 y축에 각각 접하므로

$r^2=b^2+c^2=a^2+c^2$ 　$\therefore a=b$ ($\because a>0,\ b>0$)

따라서 구 S의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-c)^2=a^2+c^2$ 　…… ㉠

구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

이 원의 넓이가 64π이므로

$a^2\pi=64\pi$ 　$\therefore a=8$ ($\because a>0$)

$a=8$을 ㉠에 대입하면 구 S의 방정식은

$(x-8)^2+(y-8)^2+(z-c)^2=64+c^2$

구 S가 z축과 만나는 점의 z좌표는

$64+64+(z-c)^2=64+c^2$

$(z-c)^2=c^2-64$ 　$\therefore z=c\pm\sqrt{c^2-64}$

이때 구 S가 z축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8이므로

$(c+\sqrt{c^2-64})-(c-\sqrt{c^2-64})=8$

$\sqrt{c^2-64}=4$, 　$c^2-64=16$ 　$\therefore c^2=80$

따라서 구 S의 반지름의 길이는

$r=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{64+80}=12$ 　답 ②

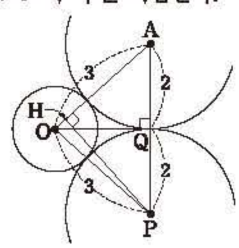
0769 전략 두 구의 중심 사이의 거리가 두 구의 반지름의 길이의 합과 같으면 두 구는 외접한다.

풀이 두 구 $x^2+y^2+z^2=1$, $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$의 중심을 각각 $O(0,\ 0,\ 0)$, $A(2,\ -1,\ 2)$라 하면

$\overline{OA}=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3$

이때 두 구의 반지름의 길이가 각각 1, 2이므로 두 구는 외접한다.

오른쪽 그림과 같이 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 구와 구 $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$의 접점을 Q라 하면 $\triangle OPA$는 이등변삼각형이고, $\overline{AQ}=\overline{PQ}$이므로 　$\overline{OQ}\perp\overline{AP}$



직각삼각형 OQA에서

$\overline{OQ}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

점 P에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{PH}=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AP}\cdot\overline{OQ}$

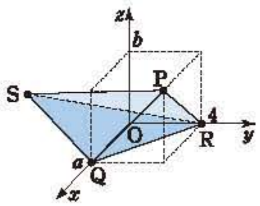
$3\overline{PH}=4\sqrt{5}$ 　$\therefore \overline{PH}=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 H이고 반지름의 길이가 $\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$2\pi\cdot\dfrac{4\sqrt{5}}{3}=\dfrac{8\sqrt{5}}{3}\pi$ 　답 ⑤

0770 **전략** 세 점 Q, R, S의 좌표를 각각 구한 후 사면체 PQRS의 밑면을 정한다.

풀이 점 $P(a,\ 4,\ b)$에서 x축, y축에 내린 수선의 발은 각각 $Q(a,\ 0,\ 0)$, $R(0,\ 4,\ 0)$이고, 점 P와 zx평면에 대하여 대칭인 점은 $S(a,\ -4,\ b)$이다. ··· ①



$a>0$, $b>0$인 경우 사면체 PQRS는 오른쪽 그림과 같고 세 점 P, Q, S의 x좌표가 같으므로 △PSQ는 yz평면과 평행한 평면 위에 있다.
따라서 사면체 PQRS의 밑면을 △PSQ라 하면 사면체의 높이는 $|a|$이다.

$\triangle PSQ=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot |b|=4|b|$이고, 사면체 PQRS의 부피가 32이므로

$\frac{1}{3}\cdot 4|b|\cdot|a|=32 \qquad \therefore |ab|=24$ ··· ②

원점과 점 P 사이의 거리를 l이라 하면 $a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$l^2=a^2+16+b^2$
$\geq 16+2\sqrt{a^2b^2}$ (단, 등호는 $a^2=b^2$일 때 성립)
$=16+2|ab|$
$=16+2\cdot 24=64$

따라서 $l\geq 8$이므로 원점과 점 P 사이의 거리의 최솟값은 8이다. ··· ③

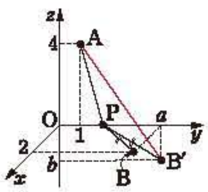
답 8

채점 기준표

① 세 점 Q, R, S의 좌표를 구할 수 있다.	30%
② 사면체의 부피를 이용하여 $\lvert ab\rvert$의 값을 구할 수 있다.	40%
③ 원점과 점 P 사이의 거리의 최솟값을 구할 수 있다.	30%

0771 **전략** $\overline{PB}=\overline{PB'}$인 점 B′을 yz평면 위에 잡으면 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $\overline{AB'}$의 길이이다.

풀이 점 P의 좌표를 $(0,\ t,\ 0)$이라 하고 t의 값에 관계없이 항상 $\overline{PB}=\overline{PB'}$이면서 yz평면 위에 있는 점을 $B'(0,\ a,\ b)\ (b<0)$라 하면



$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{AP}+\overline{PB'}\geq\overline{AB'}$

이므로 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $\overline{AB'}$의 길이와 같다. ··· ①

$\overline{PB}=\overline{PB'}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PB'}^2$이므로

$(-2)^2+(t-5)^2=(t-a)^2+(-b)^2$
$(2a-10)t-a^2-b^2+29=0$

위의 식이 t의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$2a-10=0,\ a^2+b^2=29$
$\therefore a=5,\ b=-2\ (\because b<0)$
$\therefore B'(0,\ 5,\ -2)$ ··· ②

따라서 구하는 최솟값은

$\overline{AB'}=\sqrt{(5-1)^2+(-2-4)^2}=2\sqrt{13}$ ··· ③

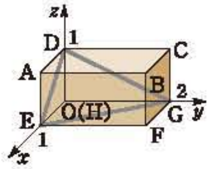
답 $2\sqrt{13}$

채점 기준표

① $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값과 길이가 같은 선분을 찾을 수 있다.	40%
② 점 B′의 좌표를 구할 수 있다.	30%
③ $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값을 구할 수 있다.	30%

0772 **전략** 직육면체를 좌표공간에 놓고 각 꼭짓점의 좌표를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 H를 원점으로 하고 세 모서리 EH, GH, DH가 각각 x축, y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 직육면체를 좌표공간에 놓으면



$D(0,\ 0,\ 1)$, $E(1,\ 0,\ 0)$, $G(0,\ 2,\ 0)$

이때 △DEG의 무게중심을 P라 하면

$P\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ ··· ①

또 $B(1,\ 2,\ 1)$, $H(0,\ 0,\ 0)$이므로 $\overline{BH}$를 $m:1$로 내분하는 점을 Q라 하면

$Q\left(\frac{1}{m+1},\ \frac{2}{m+1},\ \frac{1}{m+1}\right)$ ··· ②

두 점 P, Q가 일치하므로

$\frac{1}{m+1}=\frac{1}{3},\ \frac{2}{m+1}=\frac{2}{3},\ \frac{1}{m+1}=\frac{1}{3}$

즉 $m+1=3$이므로 $\quad m=2$ ··· ③

답 2

채점 기준표

① △DEG의 무게중심의 좌표를 구할 수 있다.	40%
② $\overline{BH}$를 $m:1$로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	30%
③ m의 값을 구할 수 있다.	30%

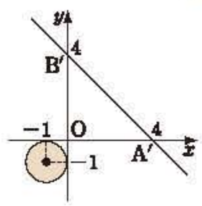
0773 **전략** 점 P′과 직선 A′B′ 사이의 거리가 최소일 때 △A′B′P′의 넓이가 최소임을 이용한다.

풀이 두 점 $A(4,\ 0,\ 5)$, $B(0,\ 4,\ 3)$의 xy평면 위로의 정사영은 각각 $A'(4,\ 0,\ 0)$, $B'(0,\ 4,\ 0)$이므로 두 점 A′, B′을 지나는 xy평면 위의 직선의 방정식은

$\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1 \qquad \therefore x+y-4=0$ ······ ㉠ ··· ①

또 구 $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=1$의 xy평면 위로의 정사영은

$(x+1)^2+(y+1)^2=1$ ··· ②



따라서 원 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$의 내부 또는 둘레 위의 점 P′과 직선 ㉠ 사이의 거리가 최소일 때 △A′B′P′의 넓이가 최소이다.
원의 중심 $(-1,\ -1,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는

$\frac{|-1-1-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$

이므로 점 P′과 직선 ㉠ 사이의 거리의 최솟값은

$3\sqrt{2}-1$ ··· ③

$\overline{A'B'}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$이므로 △A′B′P′의 넓이의 최솟값은

$\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot(3\sqrt{2}-1)=12-2\sqrt{2}$ ··· ④

답 $12-2\sqrt{2}$

채점 기준표

① 두 점 A′, B′을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	20%
② 구의 xy평면 위로의 정사영을 나타내는 원의 방정식을 구할 수 있다.	20%
③ 점 P′과 직선 A′B′ 사이의 거리의 최솟값을 구할 수 있다.	40%
④ $\triangle$A′B′P′의 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

0774 전략 좌표평면에 접하는 구의 반지름의 길이는 구가 접하는 좌표평면과 구의 중심 사이의 거리와 같음을 이용한다.

풀이 구 S_1의 중심의 좌표는

$\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$

구 S_2의 중심의 좌표는

$(3, 3, a\pm3)$

구 S_3의 중심의 좌표는

$(a\pm1, 1, 1)$ ··· ①

따라서 세 구 S_1, S_2, S_3의 중심을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 y좌표가 4이므로

$\dfrac{\frac{a}{2}+3+1}{3}=4$ ··· ②

$a+8=24$ $\quad\therefore a=16$ ··· ③

답 16

채점 기준표

① 세 구 S_1, S_2, S_3의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	60%
② 세 구 S_1, S_2, S_3의 중심을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 y좌표를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
③ a의 값을 구할 수 있다.	20%

0775 전략 삼각형의 닮음을 이용하여 그림자의 반지름의 길이를 구한다.

풀이 $x^2+y^2+z^2-2z=0$에서

$x^2+y^2+(z-1)^2=1$

구의 중심을 C라 하면 $\quad$C$(0, 0, 1)$ ··· ①

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 구의 접선 PA에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle$PHC에서

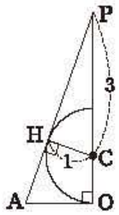
$\overline{\text{PH}}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

이때 $\triangle$PAO$\backsim\triangle$PCH (AA 닮음)이므로

$\overline{\text{PO}}:\overline{\text{PH}}=\overline{\text{OA}}:\overline{\text{HC}}$

$4:2\sqrt{2}=\overline{\text{OA}}:1$

$\therefore \overline{\text{OA}}=\sqrt{2}$ ··· ②



따라서 그림자는 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원이므로 구하는 그림자의 넓이는

$\pi\cdot(\sqrt{2})^2=2\pi$ ··· ③

답 2π

채점 기준표

① 구의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	20%
② 그림자의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	60%
③ 그림자의 넓이를 구할 수 있다.	20%

07 공간벡터

0776 $\overline{\text{BG}}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이므로

$|\overrightarrow{\text{BG}}|=\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{5}$

0777 $\overline{\text{DF}}=\sqrt{3^2+1^2+2^2}=\sqrt{14}$이므로

$|\overrightarrow{\text{DF}}|=\sqrt{14}$ 답 $\sqrt{14}$

0778 $\overrightarrow{\text{GC}}=-\overrightarrow{\text{AE}}=-\vec{c}$ 답 $-\vec{c}$

0779 $\overrightarrow{\text{BE}}=\overrightarrow{\text{AE}}-\overrightarrow{\text{AB}}=\vec{c}-\vec{a}$ 답 $\vec{c}-\vec{a}$

0780 $\overrightarrow{\text{FC}}=\overrightarrow{\text{ED}}=\overrightarrow{\text{AD}}-\overrightarrow{\text{AE}}=\vec{b}-\vec{c}$ 답 $\vec{b}-\vec{c}$

0781 $\overrightarrow{\text{HB}}=\overrightarrow{\text{AB}}-\overrightarrow{\text{AH}}=\overrightarrow{\text{AB}}-(\overrightarrow{\text{AD}}+\overrightarrow{\text{AE}})$

$=\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ 답 $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

0782 답 $(2, -1, 1)$

0783 답 $(-3, 0, 1)$

0784 $l+4=7$, $-3=m+1$, $2=5-3n$이므로

$l=3$, $m=-4$, $n=1$ 답 $l=3$, $m=-4$, $n=1$

0785 $2l-1=m+2$, $5-m=n-1$, $6=3-n$이므로

$2l-m=3$, $m+n=6$, $n=-3$

$\therefore l=6$, $m=9$, $n=-3$ 답 $l=6$, $m=9$, $n=-3$

0786 $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$ 답 $\sqrt{2}$

0787 $|\vec{b}|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-5)^2+3^2}=6$ 답 6

0788 $3\vec{a}+2\vec{b}=3(2, -1, 2)+2(3, -5, -1)$

$=(6, -3, 6)+(6, -10, -2)$

$=(12, -13, 4)$ 답 $(12, -13, 4)$

0789 $-\vec{a}+4\vec{b}=-(2, -1, 2)+4(3, -5, -1)$

$=(-2, 1, -2)+(12, -20, -4)$

$=(10, -19, -6)$ 답 $(10, -19, -6)$

0790 $\overrightarrow{\text{AB}}=(3, 2, -6)$이므로

$|\overrightarrow{\text{AB}}|=\sqrt{3^2+2^2+(-6)^2}=7$

답 $\overrightarrow{\text{AB}}=(3, 2, -6)$, $|\overrightarrow{\text{AB}}|=7$

0791 $\overrightarrow{\text{AB}}\perp\overrightarrow{\text{AD}}$이므로

$\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AD}}=|\overrightarrow{\text{AB}}||\overrightarrow{\text{AD}}|\cos 90°=1\times1\times0=0$ 답 0

0792 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EH}$이므로

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{EH}=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{EH}|\cos 0°=1\times1\times1=1$ 답 1

0793 $\overrightarrow{AC}/\!/\overrightarrow{GE}$이고 두 벡터의 방향이 서로 반대이므로

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{GE}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{GE}|\cos 180°$

$=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times(-1)=-2$ 답 -2

0794 □ABCD는 정사각형이므로 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$

정사각형의 두 대각선은 서로를 수직이등분한다.

$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|\cos 90°$

$=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times0=0$ 답 0

0795 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times0+(-1)\times3+4\times3=9$ 답 9

0796 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\times4+1\times(-3)+3\times1=-8$ 답 -8

0797 $\cos\theta=\dfrac{0\times(-2)+1\times4+(-1)\times2}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{(-2)^2+4^2+2^2}}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{2}\sqrt{24}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 답 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

0798 $\cos\theta=\dfrac{1\times(-4)+(-2)\times1+3\times(-5)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}\sqrt{(-4)^2+1^2+(-5)^2}}$

$=\dfrac{-21}{\sqrt{14}\sqrt{42}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

0799 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 $\theta(0\le\theta\le\pi)$라 하면

$\cos\theta=\dfrac{3\times(-1)+4\times7+(-5)\times(-10)}{\sqrt{3^2+4^2+(-5)^2}\sqrt{(-1)^2+7^2+(-10)^2}}$

$=\dfrac{75}{\sqrt{50}\sqrt{150}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{6}$ ($\because 0\le\theta\le\pi$) 답 $\dfrac{\pi}{6}$

0800 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 $\theta(0\le\theta\le\pi)$라 하면

$\cos\theta=\dfrac{-2\times1+1\times1+(-1)\times2}{\sqrt{(-2)^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+1^2+2^2}}$

$=\dfrac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore \theta=\dfrac{2}{3}\pi$ ($\because 0\le\theta\le\pi$) 답 $\dfrac{2}{3}\pi$

유형 01 공간벡터의 크기 본책 122쪽

벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기는 선분 AB의 길이와 같다.

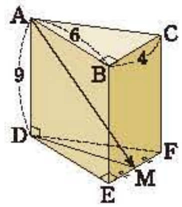
➡ $|\overrightarrow{AB}|=\overline{AB}$

0801 $|\overrightarrow{AG}|=\overline{AG}=\sqrt{5^2+(2\sqrt{6})^2+(4\sqrt{2})^2}=9$

$|\overrightarrow{DB}|=\overline{DB}=\sqrt{5^2+(2\sqrt{6})^2}=7$

$\therefore |\overrightarrow{AG}|+|\overrightarrow{DB}|=16$ 답 ③

0802 $\overline{EM}=\dfrac{1}{2}\times4=2$이므로 직각삼각형



DEM에서

$\overline{DM}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$ ➊

직각삼각형 ADM에서

$\overline{AM}=\sqrt{9^2+(2\sqrt{10})^2}=11$ ➋

$\therefore |\overrightarrow{AM}|=\overline{AM}=11$ ➌

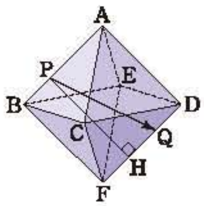
답 11

채점 기준표

➊ $\overline{DM}$의 길이를 구할 수 있다.	40%
➋ $\overline{AM}$의 길이를 구할 수 있다.	40%
➌ $\lvert\overrightarrow{AM}\rvert$을 구할 수 있다.	20%

0803 $\overline{BP}=\dfrac{1}{3}\times6=2$, $\overline{FQ}=\dfrac{2}{3}\times6=4$

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 $\overline{DF}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 □ABFD는 정사각형이므로



$\overline{PH}=\overline{BF}=6$, $\overline{FH}=\overline{BP}=2$

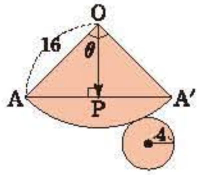
$\therefore \overline{HQ}=\overline{FQ}-\overline{FH}=4-2=2$

직각삼각형 PHQ에서

$\overline{PQ}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$

$\therefore |\overrightarrow{PQ}|=\overline{PQ}=2\sqrt{10}$ 답 ②

0804 주어진 원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같으므로 점 P는 $\overline{AA'}$ 위의 점이다. ➊



부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면

$2\pi\times4=16\theta$ $\quad\therefore \theta=\dfrac{\pi}{2}$ ➋

점 P가 꼭짓점 O에서 $\overline{AA'}$에 내린 수선의 발과 일치할 때 $|\overrightarrow{OP}|$가 최소이고 $\angle AOP=\angle A'OP=\dfrac{\pi}{4}$이므로 구하는 최솟값은

$|\overrightarrow{OP}|=16\cos\dfrac{\pi}{4}=16\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=8\sqrt{2}$ ➌

답 $8\sqrt{2}$

채점 기준표

➊ 원뿔의 전개도에서 점 P가 $\overline{AA'}$ 위의 점임을 알 수 있다.	30%
➋ 부채꼴의 중심각의 크기를 구할 수 있다.	20%
➌ $\lvert\overrightarrow{OP}\rvert$의 최솟값을 구할 수 있다.	50%

유형 02 서로 같은 공간벡터 본책 122쪽

크기가 같은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

① 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 방향이 같다. ➡ $\vec{a}=\vec{b}$

② 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 방향이 반대이다. ➡ $\vec{a}=-\vec{b}$

0805 답 ④

0806 ㄱ. $-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{FE}$

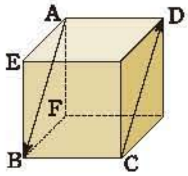
ㄴ. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CF}$이므로 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{FC}|$

ㄷ. $\overrightarrow{FB}$와 $\overrightarrow{EC}$는 크기는 같지만 방향이 다르므로 같은 벡터가 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

0807 주어진 전개도를 접어서 정육면체를 만들면 오른쪽 그림과 같으므로 $\overrightarrow{AB}$와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터는 $\overrightarrow{CD}$이다.



답 ①

유형 03 입체도형에서 공간벡터의 연산 본책 123쪽

주어진 벡터를 시점 또는 종점이 같은 두 벡터의 합 또는 차로 나타낸다.

0808 ① $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

② $\overrightarrow{HA}=-\overrightarrow{AH}=-(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})=-\vec{b}-\vec{c}$

③ $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\vec{c}$

④ $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

⑤ $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE})-\overrightarrow{AD}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

답 ⑤

0809 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}-(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$

$=\vec{b}-(\vec{c}-\vec{a})$

$=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

답 $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

0810 $\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{FG}$이므로

$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{EH}-\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FG}-\overrightarrow{CG}$

$=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{CG}$

$=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}$

$=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{EG}$

답 ④

0811 $3(\vec{a}-\vec{b}-3\vec{c})-2(\vec{a}-\vec{b}-5\vec{c})$

$=3\vec{a}-3\vec{b}-9\vec{c}-2\vec{a}+2\vec{b}+10\vec{c}$

$=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ ··· ❶

$=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AE}$

$=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{DF}$ ··· ❷

따라서 구하는 벡터의 크기는

$|\overrightarrow{DF}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$ ··· ❸

답 $\sqrt{3}$

채점 기준표

❶ 주어진 벡터를 간단히 할 수 있다.	30%
❷ ❶에서 간단히 한 식을 하나의 벡터로 나타낼 수 있다.	40%
❸ 벡터의 크기를 구할 수 있다.	30%

0812 $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DF}$

$=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EG})+(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FH})+(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GE})+(\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HF})$

$=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DH})+(\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{HF})$

$=4\overrightarrow{CG}$

$\therefore m=4$

답 ④

다른 풀이 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$라 하면

$\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{BH}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$,

$\overrightarrow{CE}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{DF}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{CG}=\vec{c}$

이것을 $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DF}=m\overrightarrow{CG}$에 대입하여 정리하면

$4\vec{c}=m\vec{c}$

$\therefore m=4$

0813 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AD}+(1-k)\overrightarrow{AG}$에서

$\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AG}=k(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AG})$

$\therefore \overrightarrow{GP}=k\overrightarrow{GD}$

$0\le k\le 1$에서 점 P의 자취는 $\overline{GD}$이므로 구하는 자취의 길이는

$\overline{GD}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$

답 $\sqrt{34}$

SSEN 특강

점의 자취

$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$를 만족시키는 점 P의 자취는

① $m+n=1$ ➡ 직선 AB

② $m\ge 0$, $n\ge 0$, $m+n=1$ ➡ 선분 AB

③ $m\ge 0$, $n\ge 0$, $m+n\le 1$ ➡ $\triangle$OAB의 내부와 그 둘레

④ $0\le m\le 1$, $0\le n\le 1$ ➡ 두 선분 OA, OB를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형의 내부와 그 둘레

유형 04 입체도형에서 내분점의 위치벡터 본책 124쪽

① $\overline{AB}$를 $m:n$ ($m>0$, $n>0$)으로 내분하는 점의 위치벡터는

$$\frac{m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OA}}{m+n}$$

② 세 점 A, B, C의 위치벡터가 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$일 때, $\triangle$ABC의 무게중심의 위치벡터는

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

0814 $\overline{AB}$의 중점이 M, $\overline{OC}$의 중점이 N이므로

$\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{2}\vec{c}$

$\therefore \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$

$=\dfrac{1}{2}\vec{c}-\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)$

$=-\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$

답 ⑤

0815 점 G는 $\triangle$ABC의 무게중심이므로

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

$\therefore \overrightarrow{GC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OG}=\vec{c}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

$=-\dfrac{1}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

답 $-\dfrac{1}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

0816 $\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EA}=-\vec{a}-\vec{c}$

$\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GC}=\vec{b}-\vec{c}$ ··· ❶

점 P가 $\overline{AC}$를 2 : 1로 내분하므로

$$\overrightarrow{FP}=\frac{2\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{FA}}{2+1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{FC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{FA}$$

$$=\frac{2}{3}(\vec{b}-\vec{c})+\frac{1}{3}(-\vec{a}-\vec{c})$$

$$=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}$$ ··· ❷

따라서 $x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$, $z=-1$이므로

$x-y+z=-2$ ··· ❸

답 -2

채점 기준표

❶ $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{FC}$를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타낼 수 있다.	30%
❷ $\overrightarrow{FP}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타낼 수 있다.	50%
❸ $x-y+z$의 값을 구할 수 있다.	20%

다른 풀이 $\overrightarrow{FP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AF}$

$$=\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}+\vec{c})$$

$$=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}$$

0817 $\overrightarrow{AG_1}=\frac{2}{3}\times\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{AG_2}=\frac{2}{3}\times\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$이므로

$$\overrightarrow{G_1G_2}=\overrightarrow{AG_2}-\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$$

$\therefore k=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

유형 05 성분으로 주어진 공간벡터의 연산과 크기 본책 124쪽

두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$과 실수 m, n에 대하여

① $m\vec{a}+n\vec{b}=(ma_1+nb_1,\ ma_2+nb_2,\ ma_3+nb_3)$

② $|m\vec{a}+n\vec{b}|=\sqrt{(ma_1+nb_1)^2+(ma_2+nb_2)^2+(ma_3+nb_3)^2}$

0818 $2(\vec{x}-\vec{a})=3(\vec{b}-\vec{x})+\vec{a}$에서

$2\vec{x}-2\vec{a}=3\vec{b}-3\vec{x}+\vec{a}$, $\quad 5\vec{x}=3\vec{a}+3\vec{b}$

$\therefore \vec{x}=\frac{3}{5}(\vec{a}+\vec{b})$

이때

$\vec{a}+\vec{b}=(-2, 3, -4)+(-3, 7, -1)=(-5, 10, -5)$

이므로

$\vec{x}=\frac{3}{5}(-5, 10, -5)=(-3, 6, -3)$

답 $(-3, 6, -3)$

0819 $3(\vec{a}-2\vec{b})-2(2\vec{a}-\vec{c})$

$=3\vec{a}-6\vec{b}-4\vec{a}+2\vec{c}=-\vec{a}-6\vec{b}+2\vec{c}$

$=-(-2, 0, 1)-6(1, 3, 2)+2(3, 6, 2)$

$=(2, -6, -9)$

따라서 구하는 벡터의 크기는

$\sqrt{2^2+(-6)^2+(-9)^2}=11$

답 ④

0820 $\vec{a}+\vec{b}=(1, 4, 5)$ ······ ㉠

$\vec{a}-\vec{b}=(-3, 2, -1)$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면 $\quad 2\vec{a}=(-2, 6, 4)$

$\therefore \vec{a}=(-1, 3, 2)$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$\vec{b}=(1, 4, 5)-(-1, 3, 2)=(2, 1, 3)$ ··· ❶

$\therefore \vec{a}+2\vec{b}=(-1, 3, 2)+2(2, 1, 3)$

$=(3, 5, 8)$ ··· ❷

$\therefore |\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{3^2+5^2+8^2}=7\sqrt{2}$ ··· ❸

답 $7\sqrt{2}$

채점 기준표

❶ $\vec{a}$, $\vec{b}$를 구할 수 있다.	40%
❷ $\vec{a}+2\vec{b}$를 구할 수 있다.	30%
❸ $|\vec{a}+2\vec{b}|$를 구할 수 있다.	30%

0821 $k\vec{a}+\vec{b}=k(-1, 1, 0)+(2, 1, -2)$

$=(-k+2,\ k+1,\ -2)$

$\therefore |k\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(-k+2)^2+(k+1)^2+(-2)^2}$

$=\sqrt{2k^2-2k+9}$

$=\sqrt{2\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{17}{2}}$

따라서 $|k\vec{a}+\vec{b}|$는 $k=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $\frac{\sqrt{34}}{2}$를 갖는다.

답 ③

유형 06 공간벡터가 서로 같을 조건 본책 125쪽

세 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}=(c_1, c_2, c_3)$에 대하여

$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b} \Longleftrightarrow c_1=ma_1+nb_1,\ c_2=ma_2+nb_2,\ c_3=ma_3+nb_3$

(단, m, n은 실수)

0822 $\vec{d}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$이므로

$(-4, 2, 4)=l(1, 1, 0)+m(1, 0, 1)+n(0, 1, 1)$

$=(l+m,\ l+n,\ m+n)$

$\therefore l+m=-4,\ l+n=2,\ m+n=4$

위의 식을 연립하여 풀면

$l=-3,\ m=-1,\ n=5$

$\therefore lmn=15$

답 15

0823 $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$이므로

$(-8, 11, 7)=m(2, 1, 5)+n(4, -3, 1)$

$=(2m+4n,\ m-3n,\ 5m+n)$

$\therefore 2m+4n=-8,\ m-3n=11,\ 5m+n=7$

위의 식을 연립하여 풀면 $\quad m=2,\ n=-3$

$\therefore m+n=-1$ 답 ③

0824 $\vec{c}=2\vec{a}+4\vec{b}$이므로

$(-2,\ 2,\ 1-z)=2(x+4,\ -3,\ -2)+4(1,\ y,\ 2)$

$=(2x+12,\ 4y-6,\ 4)$

따라서 $2x+12=-2,\ 4y-6=2,\ 1-z=4$이므로

$x=-7,\ y=2,\ z=-3$ ➊

즉 $\vec{a}=(-3,\ -3,\ -2),\ \vec{b}=(1,\ 2,\ 2),\ \vec{c}=(-2,\ 2,\ 4)$이므로

$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=(-3,\ -3,\ -2)-(1,\ 2,\ 2)+(-2,\ 2,\ 4)$

$=(-6,\ -3,\ 0)$ ➋

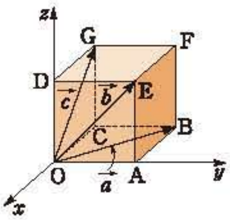
$\therefore |\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{(-6)^2+(-3)^2+0^2}=3\sqrt{5}$ ➌

답 $3\sqrt{5}$

채점 기준표

➊ $x,\ y,\ z$의 값을 구할 수 있다.	50%
➋ $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$를 구할 수 있다.	30%
➌ $\lvert\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\rvert$를 구할 수 있다.	20%

0825 정육면체의 한 모서리의 길이를 t라 하고 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 O가 원점, 모서리 OA, OD가 각각 y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 정육면체를 좌표공간에 놓으면



$\vec{a}=(-t,\ t,\ 0),\ \vec{b}=(0,\ t,\ t),$

$\vec{c}=(-t,\ 0,\ t)$

이때 $\overrightarrow{OF}=(-t,\ t,\ t)$이고 $\overrightarrow{OF}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$이므로

$(-t,\ t,\ t)=l(-t,\ t,\ 0)+m(0,\ t,\ t)+n(-t,\ 0,\ t)$

$=(-t(l+n),\ t(l+m),\ t(m+n))$

$\therefore l+n=1,\ l+m=1,\ m+n=1$

위의 식을 연립하여 풀면

$l=\frac{1}{2},\ m=\frac{1}{2},\ n=\frac{1}{2}$

$\therefore l^2+m^2+n^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

유형 07 공간벡터의 성분과 크기 본책 125쪽

두 점 $A(a_1,\ a_2,\ a_3),\ B(b_1,\ b_2,\ b_3)$에 대하여

① $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$

② $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

0826 $\overrightarrow{AB}=(-2,\ 3,\ -2),\ \overrightarrow{CD}=(a-2,\ b,\ c+2)$

$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}$이므로

$(-2,\ 3,\ -2)=2(a-2,\ b,\ c+2)$

$=(2a-4,\ 2b,\ 2c+4)$

따라서 $2a-4=-2,\ 2b=3,\ 2c+4=-2$이므로

$a=1,\ b=\frac{3}{2},\ c=-3$

$\therefore a+2b+3c=1+2\times\frac{3}{2}+3\times(-3)=-5$ 답 ③

0827 점 D의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면

$\overrightarrow{AD}=(x-4,\ y+2,\ z-1),\ \overrightarrow{BC}=(-2,\ -3,\ 3)$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$이므로

$x-4=-2,\ y+2=-3,\ z-1=3$

$\therefore x=2,\ y=-5,\ z=4$

즉 $D(2,\ -5,\ 4)$이므로

$|\overrightarrow{OD}|=\sqrt{2^2+(-5)^2+4^2}=3\sqrt{5}$ 답 ③

다른 풀이 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$이면

$\overline{AD}=\overline{BC},\ \overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$

이므로 □ABCD가 평행사변형이다.

따라서 점 D의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면 대각선 AC의 중점 $\left(\frac{5}{2},\ -1,\ 0\right)$과 대각선 BD의 중점 $\left(\frac{x+3}{2},\ \frac{y+3}{2},\ \frac{z-4}{2}\right)$가 일치하므로

$\frac{x+3}{2}=\frac{5}{2},\ \frac{y+3}{2}=-1,\ \frac{z-4}{2}=0$

$\therefore x=2,\ y=-5,\ z=4$

0828 $\overrightarrow{AB}=(t+2,\ -3t,\ 2t-1)$이므로 ➊

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(t+2)^2+(-3t)^2+(2t-1)^2}$

$=\sqrt{14t^2+5}$ ➋

따라서 $|\overrightarrow{AB}|$는 $t=0$일 때 최솟값 $\sqrt{5}$를 갖는다. ➌

답 $\sqrt{5}$

채점 기준표

➊ $\overrightarrow{AB}$를 구할 수 있다.	30%
➋ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
➌ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

0829 $\overrightarrow{AB}=(1,\ -2,\ -2)$

$\therefore |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}=3$

따라서 $\overrightarrow{AB}$와 방향이 반대이고 크기가 6인 벡터는

$-6\times\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=-6\times\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$=-2\overrightarrow{AB}$

$=-2(1,\ -2,\ -2)$

$=(-2,\ 4,\ 4)$ 답 ③

0830 점 P가 평면 ABC 위에 있으므로

$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$ ($m,\ n$은 실수)

로 놓으면

$(-3,\ 1,\ a)=m(-2,\ 2,\ -2)+n(-4,\ 3,\ -1)$

$=(-2m-4n,\ 2m+3n,\ -2m-n)$

$\therefore -2m-4n=-3,\ 2m+3n=1,\ -2m-n=a$

위의 식을 연립하여 풀면

$m=-\frac{5}{2},\ n=2,\ a=3$ 답 3

참고 점 P가 평면 ABC 위에 있으면 네 점 A, B, C, P가 한 평면 위에 있으므로 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$ ($m,\ n$은 실수)로 나타낼 수 있다.

유형 08 공간벡터의 평행 본책 125쪽

두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$에 대하여

$\vec{a} /\!/ \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{b}=k\vec{a}$

$\Longleftrightarrow b_1=ka_1,\ b_2=ka_2,\ b_3=ka_3$ (단, $k\neq0$)

0831 $\vec{a}+\vec{c}=(x+3,\ 6,\ y+4)$, $\vec{b}-\vec{c}=(-x,\ 3,\ 5-y)$

벡터 $\vec{a}+\vec{c}$와 $\vec{b}-\vec{c}$가 서로 평행하므로

$\vec{a}+\vec{c}=k(\vec{b}-\vec{c})$ $(k\neq0)$

$(x+3,\ 6,\ y+4)=k(-x,\ 3,\ 5-y)$

$\therefore x+3=-kx,\ 6=3k,\ y+4=5k-ky$

위의 식을 연립하여 풀면

$k=2,\ x=-1,\ y=2$

$\therefore x+y=1$ 답 ①

다른 풀이 두 벡터 $\vec{a}+\vec{c}=(x+3,\ 6,\ y+4)$, $\vec{b}-\vec{c}=(-x,\ 3,\ 5-y)$가 서로 평행하므로 두 벡터의 각 성분의 비가 일정하다.

즉 $\dfrac{x+3}{-x}=\dfrac{6}{3}=\dfrac{y+4}{5-y}$이므로

$3x+9=-6x,\ 30-6y=3y+12$

$\therefore x=-1,\ y=2$

0832 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하므로

$\vec{a}=k\vec{b}$ $(k\neq0)$

$(3,\ -1,\ 5)=k(-1,\ x+3,\ 2y-1)$

$\therefore 3=-k,\ -1=k(x+3),\ 5=k(2y-1)$

위의 식을 연립하여 풀면

$k=-3,\ x=-\dfrac{8}{3},\ y=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore x+y=-3$ 답 -3

0833 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ $(k\neq0)$ ··· ❶

$\overrightarrow{AC}=(x+1,\ y-2,\ 3)$, $\overrightarrow{AB}=(4,\ -3,\ 1)$이므로

$(x+1,\ y-2,\ 3)=k(4,\ -3,\ 1)$

$\therefore x+1=4k,\ y-2=-3k,\ 3=k$ ··· ❷

위의 식을 연립하여 풀면

$k=3,\ x=11,\ y=-7$ ··· ❸

$\therefore x^2+y^2=11^2+(-7)^2=170$ ··· ❹

답 170

채점 기준표

❶ 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있을 조건을 알 수 있다.	30%
❷ x, y, k에 대한 방정식을 세울 수 있다.	30%
❸ x, y, k의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ x^2+y^2의 값을 구할 수 있다.	10%

0834 $\overrightarrow{AB}=(2,\ -2,\ -1)$, $\overrightarrow{PQ}=(x-1,\ y,\ z+1)$

두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PQ}$가 서로 평행하므로

$\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{AB}$ $(k\neq0)$

$(x-1,\ y,\ z+1)=k(2,\ -2,\ -1)$

$\therefore x-1=2k,\ y=-2k,\ z+1=-k$

$\therefore x=2k+1,\ y=-2k,\ z=-k-1$ ······ ㉠

이때 $\overrightarrow{PQ}$는 단위벡터이므로 $|\overrightarrow{PQ}|=1$

$\sqrt{(2k)^2+(-2k)^2+(-k)^2}=1$

$|3k|=1$ $\therefore k=\pm\dfrac{1}{3}$

$k=\pm\dfrac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$x=\dfrac{5}{3},\ y=-\dfrac{2}{3},\ z=-\dfrac{4}{3}$ 또는 $x=\dfrac{1}{3},\ y=\dfrac{2}{3},\ z=-\dfrac{2}{3}$

이때 $xyz>0$이므로 $x=\dfrac{5}{3},\ y=-\dfrac{2}{3},\ z=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore xyz=\dfrac{40}{27}$ 답 $\dfrac{40}{27}$

다른 풀이 $\overrightarrow{AB}=(2,\ -2,\ -1)$이므로

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}=3$

$\overrightarrow{PQ}=\pm\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$이므로

$(x-1,\ y,\ z+1)=\left(\pm\dfrac{2}{3},\ \mp\dfrac{2}{3},\ \mp\dfrac{1}{3}\right)$ (복호동순)

$\therefore x=\dfrac{5}{3},\ y=-\dfrac{2}{3},\ z=-\dfrac{4}{3}$ 또는 $x=\dfrac{1}{3},\ y=\dfrac{2}{3},\ z=-\dfrac{2}{3}$

유형 09 자취의 방정식 본책 127쪽

(i) 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$로 놓는다.

(ii) 주어진 등식에 대입하여 x, y, z 사이의 관계식을 구한다.

0835 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면

$\overrightarrow{AP}=(x-1,\ y,\ z+2)$, $\overrightarrow{BP}=(x-1,\ y+4,\ z-2)$

$3|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BP}|$에서

$3\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z+2)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+4)^2+(z-2)^2}$

$9\{(x-1)^2+y^2+(z+2)^2\}=(x-1)^2+(y+4)^2+(z-2)^2$

$8x^2+8y^2+8z^2-16x-8y+40z+24=0$

$x^2+y^2+z^2-2x-y+5z+3=0$

$\therefore (x-1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(z+\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{9}{2}$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $\left(1,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{5}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$인 구이므로 구하는 겉넓이는

$4\pi\times\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=18\pi$ 답 ④

0836 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면

$\overrightarrow{AP}=(x-1,\ y,\ z-\sqrt{3})$

$|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{AP}|=k$에서

$\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z-\sqrt{3})^2}=k$

$\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z-\sqrt{3})^2}=\frac{k}{2}$

$\therefore (x-1)^2+y^2+(z-\sqrt{3})^2=\left(\frac{k}{2}\right)^2$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(1,\ 0,\ \sqrt{3})$이고 반지름의 길이가 $\frac{k}{2}$인 구이다.

이때 구의 부피가 36π이므로

$\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{k}{2}\right)^3=36\pi,\quad k^3=216$

$\therefore k=6$ 답 ②

0837 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$

$=(3-x,\ 5-y,\ -4-z)+(-1-x,\ -2-y,\ 1-z)$

$+(1-x,\ -y,\ -3-z)$

$=(3-3x,\ 3-3y,\ -6-3z)$

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=6$에서

$\sqrt{(3-3x)^2+(3-3y)^2+(-6-3z)^2}=6$

$(3-3x)^2+(3-3y)^2+(-6-3z)^2=36$

$\therefore (x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4$ 답 ③

유형 10 공간벡터의 내적 본책 127쪽

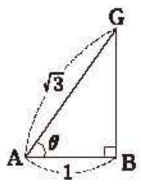
(i) 도형의 성질 또는 두 평면이 이루는 각의 크기를 이용하여 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기 $\theta\,(0\le\theta\le\pi)$를 구한다.

(ii) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$임을 이용한다.

0838 $\overline{AB}\perp$(면 BFGC)이므로

$\overline{AB}\perp\overline{BG}$

즉 △ABG는 오른쪽 그림과 같이 ∠ABG=90°인 직각삼각형이므로 ∠GAB=θ라 하면



$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AG}|\cos\theta$

$=1\times\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=1$ 답 ②

다른 풀이 ∠ABG=90°이므로 ∠GAB=θ라 하면

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AG}|\cos\theta$

$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AG}|\times\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AG}|}$

$=|\overrightarrow{AB}|^2=1$

0839 $\overline{EA}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4=2\sqrt{3},\ \overline{EG}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times4=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ··· ❶

∠AGE=90°이므로 ∠AEG=θ라 하면

$\cos\theta=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$ ··· ❷

$\therefore \overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EG}=|\overrightarrow{EA}||\overrightarrow{EG}|\cos\theta$

$=2\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ ··· ❸

답 $\frac{4}{3}$

채점 기준표

❶ $\overline{EA}$, $\overline{EG}$의 길이를 구할 수 있다.	30%
❷ ∠AEG=θ라 하고 $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EG}$를 구할 수 있다.	30%

0840 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB})$

$=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AH}|\cos60°-|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos45°$

$=2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}-2\sqrt{2}\times2\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=4-4=0$ 답 ①

참고 △ACH는 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$인 정삼각형이므로 ∠CAH=60°이다.

0841 $\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{BD}$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{BD}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BD}$

$=|\overrightarrow{BH}||\overrightarrow{BD}|\cos\theta$

$=|\overrightarrow{BH}||\overrightarrow{BD}|\times\frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{BH}|}$

$=|\overrightarrow{BD}|^2$

$=2^2+3^2=13$ 답 13

0842 ㄱ. □ABFD는 정사각형이므로

∠BAD=90°

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos90°=0$

ㄴ. △BFC는 정삼각형이므로

∠CBF=60°

$\therefore \overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BF}||\overrightarrow{BC}|\cos60°$

$=2\times2\times\frac{1}{2}=2$

ㄷ. □AEFC는 정사각형이므로

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{CA}|\cos180°$

$=2\times2\times(-1)=-4$

ㄹ. □ABFD는 정사각형이므로

$\overrightarrow{AF}\perp\overrightarrow{BD}$

$\therefore \overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BD}=|\overrightarrow{AF}||\overrightarrow{BD}|\cos90°=0$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

유형 11 공간벡터의 내적의 활용 본책 128쪽

내적을 이용하여 주어진 입체도형의 모서리의 길이를 구한 다음 입체도형의 겉넓이 또는 부피를 구한다.

0843 $\angle ABG=90°$이므로 $\angle GAB=\theta$라 하면

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AG}|\cos\theta$

$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AG}|\times\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AG}|}$

$=|\overrightarrow{AB}|^2$

즉 $|\overrightarrow{AB}|^2=16$이므로 $\quad |\overrightarrow{AB}|=4$

따라서 주어진 정육면체의 한 모서리의 길이가 4이므로 구하는 부피는 $\quad 4^3=64$

답 64

0844 $\triangle OAB$는 정삼각형이므로 $\quad \angle OAB=60°$

정사면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AB}|\cos 60°=a\times a\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}a^2$

즉 $\dfrac{1}{2}a^2=12$이므로 $\quad a^2=24 \quad \therefore a=2\sqrt{6}$ ($\because a>0$)

답 ④

0845 $\triangle ABC$는 정삼각형이므로 $\quad \angle BAC=60°$ ··· ❶

정팔면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60°$

$=a\times a\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}a^2$

즉 $\dfrac{1}{2}a^2=10$이므로 $\quad a^2=20$ ··· ❷

따라서 정팔면체의 겉넓이는

$8\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=8\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 20=40\sqrt{3}$ ··· ❸

답 $40\sqrt{3}$

채점 기준표

❶ $\angle BAC$의 크기를 구할 수 있다.	20%
❷ 정팔면체의 한 모서리의 길이를 a라 하고 a^2의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ 정팔면체의 겉넓이를 구할 수 있다.	30%

유형 12 성분으로 주어진 공간벡터의 내적

본책 128쪽

두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$에 대하여

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

0846 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-10$에서

$(4,\ x-1,\ 2)\cdot(1,\ 2-x,\ 3)=-10$

$4\times1+(x-1)(2-x)+2\times3=-10$

$x^2-3x-18=0, \quad (x+3)(x-6)=0$

$\therefore x=6$ ($\because x>0$)

답 ⑤

0847 $\vec{a}-\vec{b}=(5,\ 6,\ -3)$,

$2\vec{a}+3\vec{b}=2(2,\ 3,\ -1)+3(-3,\ -3,\ 2)$

$=(-5,\ -3,\ 4)$

$\therefore (\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})=(5,\ 6,\ -3)\cdot(-5,\ -3,\ 4)$

$=-25-18-12=-55$

답 -55

다른 풀이 $|\vec{a}|^2=2^2+3^2+(-1)^2=14$

$|\vec{b}|^2=(-3)^2+(-3)^2+2^2=22$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-3)+3\times(-3)+(-1)\times2=-17$

$\therefore (\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})=2|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-3|\vec{b}|^2$

$=2\times14-17-3\times22=-55$

0848 점 P의 좌표를 $(x,\ 0,\ 0)$이라 하면

$\overrightarrow{PA}=(-5-x,\ 2,\ 1)$, $\overrightarrow{PB}=(3-x,\ 4,\ -6)$

이므로

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(-5-x,\ 2,\ 1)\cdot(3-x,\ 4,\ -6)$

$=(-5-x)(3-x)+8-6$

$=x^2+2x-13=(x+1)^2-14$

따라서 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$는 $x=-1$일 때 최솟값 -14를 갖는다.

답 ②

0849 $\vec{a}+\vec{b}=(x,\ 2,\ 0)$, $\vec{c}-\vec{a}=(1,\ 1,\ \sqrt{6})$이므로

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{x^2+2^2}=\sqrt{x^2+4}$

$|\vec{c}-\vec{a}|=\sqrt{1^2+1^2+(\sqrt{6})^2}=2\sqrt{2}$

이때 두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c}-\vec{a}$가 이루는 각의 크기가 60°이므로

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=|\vec{a}+\vec{b}||\vec{c}-\vec{a}|\cos 60°$

$x\times1+2\times1+0\times\sqrt{6}=\sqrt{x^2+4}\times2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}$

$x+2=\sqrt{2x^2+8}$

양변을 제곱하면

$x^2+4x+4=2x^2+8, \quad x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0 \quad \therefore x=2$

답 ①

0850 $t\vec{a}+\vec{b}=t(0,\ 1,\ -1)+(1,\ -1,\ 2)$

$=(1,\ t-1,\ -t+2)$

$\vec{a}-t\vec{b}=(0,\ 1,\ -1)-t(1,\ -1,\ 2)$

$=(-t,\ t+1,\ -2t-1)$ ··· ❶

$\therefore f(t)=(t\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-t\vec{b})$

$=(1,\ t-1,\ -t+2)\cdot(-t,\ t+1,\ -2t-1)$

$=-t+(t-1)(t+1)+(-t+2)(-2t-1)$

$=3t^2-4t-3$

$=3\left(t-\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{13}{3}$ ··· ❷

따라서 $f(t)$는 $t=\dfrac{2}{3}$일 때 최솟값 $-\dfrac{13}{3}$을 갖는다. ··· ❸

답 $-\dfrac{13}{3}$

채점 기준표

❶ $t\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-t\vec{b}$를 성분으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ $f(t)$를 t에 대한 이차식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ $f(t)$의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

0851 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면

$\overrightarrow{AP}=(x-3,\ y-4,\ z)$, $\overrightarrow{BP}=(x-1,\ y-2,\ z+4)$

이므로

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(x-3,\ y-4,\ z)\cdot(x-1,\ y-2,\ z+4)$

$=(x-3)(x-1)+(y-4)(y-2)+z(z+4)$

$=x^2-4x+3+y^2-6y+8+z^2+4z$

$=(x-2)^2+(y-3)^2+(z+2)^2-6$

즉 $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+2)^2-6=0$이므로

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=6$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(2,\ 3,\ -2)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$인 구이므로 구하는 부피는

$$\frac{4}{3}\pi\times(\sqrt{6})^3=8\sqrt{6}\pi$$

답 $8\sqrt{6}\pi$

유형 13 두 공간벡터가 이루는 각의 크기 (본책 129쪽)

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$이 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0\le\theta\le\pi)$라 하면

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

0852 $\vec{a}-2\vec{b}=(1,\ 0,\ 1)-2(0,\ -1,\ -1)=(1,\ 2,\ 3)$,
$2\vec{a}+3\vec{b}=2(1,\ 0,\ 1)+3(0,\ -1,\ -1)=(2,\ -3,\ -1)$
두 벡터 $\vec{a}-2\vec{b}$, $2\vec{a}+3\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{1\times2+2\times(-3)+3\times(-1)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\sqrt{2^2+(-3)^2+(-1)^2}}$$
$$=\frac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=-\frac{1}{2}$$

$\therefore\ \theta=120^\circ\ (\because\ 0^\circ\le\theta\le180^\circ)$

답 ④

0853 $\overrightarrow{CA}=(1,\ -2,\ 1)$, $\overrightarrow{CB}=(2,\ 2,\ -1)$이므로

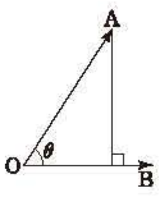
$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=\frac{1\times2+(-2)\times2+1\times(-1)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}$$
$$=\frac{-3}{3\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$$ ···➊

$$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{6}}$$
$$=\frac{\sqrt{30}}{6}\ (\because\ 0\le\theta\le\pi)$$ ···➋

답 $\frac{\sqrt{30}}{6}$

채점 기준표	
➊ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	60%
➋ $\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.	40%

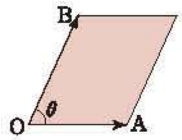
0854 오른쪽 그림과 같이 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 벡터 $\overrightarrow{OA}$의 벡터 $\overrightarrow{OB}$ 위로의 정사영의 길이는



$$|\overrightarrow{OA}|\cos\theta$$
$$=|\overrightarrow{OA}|\times\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}$$
$$=\frac{1\times3+2\times(-2)+5\times1}{\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}}$$
$$=\frac{4}{\sqrt{14}}=\frac{2\sqrt{14}}{7}$$

답 ④

0855 점 P의 자취는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형의 내부와 그 둘레이다.



두 벡터 $\overrightarrow{OA}=(2,\ -4,\ 4)$, $\overrightarrow{OB}=(7,\ 1,\ 2)$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$$
$$=\frac{2\times7+(-4)\times1+4\times2}{\sqrt{2^2+(-4)^2+4^2}\sqrt{7^2+1^2+2^2}}$$
$$=\frac{18}{6\times3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

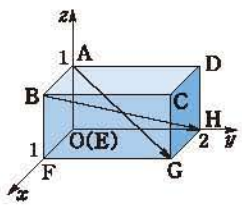
$$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt{30}}{6}\ (\because\ 0\le\theta\le\pi)$$

따라서 구하는 넓이는

$$\overline{OA}\times\overline{OB}\times\sin\theta=6\times3\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{30}}{6}=18\sqrt{5}$$

답 $18\sqrt{5}$

0856 오른쪽 그림과 같이 점 E가 원점, 모서리 EF, EH, EA가 각각 x축, y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 직육면체를 좌표공간에 놓으면



A$(0,\ 0,\ 1)$, B$(1,\ 0,\ 1)$,
G$(1,\ 2,\ 0)$, H$(0,\ 2,\ 0)$

이므로

$\overrightarrow{AG}=(1,\ 2,\ -1)$, $\overrightarrow{BH}=(-1,\ 2,\ -1)$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH}}{|\overrightarrow{AG}||\overrightarrow{BH}|}$$
$$=\frac{1\times(-1)+2\times2+(-1)\times(-1)}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}}$$
$$=\frac{4}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{2}{3}$$

답 ⑤

유형 14 공간벡터의 수직 (본책 130쪽)

두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$에 대하여

$$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0\iff a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$$

0857 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 서로 수직이므로 $\quad\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$(1,\ k,\ -1)\cdot(k-3,\ 1,\ k-1)=0$

$k-3+k-k+1=0\qquad\therefore\ k=2$

따라서 $\vec{a}=(1,\ 2,\ -1)$, $\vec{b}=(-1,\ 1,\ 1)$이므로

$\vec{a}+3\vec{b}=(1,\ 2,\ -1)+3(-1,\ 1,\ 1)$
$=(-2,\ 5,\ 2)$

$\therefore\ |\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+5^2+2^2}=\sqrt{33}$

답 ②

0858 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 서로 수직이므로 $\quad\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$(2x,\ -1,\ 3)\cdot(-1,\ x,\ 1)=0,\qquad -2x-x+3=0$

$3x=3\qquad\therefore\ x=1$

답 ③

0859 $\vec{p}$와 $\vec{q}$가 서로 수직이므로 $\quad \vec{p}\cdot\vec{q}=0$

$(-3,\ a-2,\ 1)\cdot(1,\ 2,\ b)=0$

$-3+2a-4+b=0$

$\therefore 2a+b=7 \qquad \cdots\cdots ㉠ \qquad$ ➊

$\vec{q}$와 $\vec{r}$가 서로 평행하므로 $\quad \vec{q}=k\vec{r}\ (k\neq0)$

$(1,\ 2,\ b)=k(2,\ 4,\ -8)$

$1=2k,\ 2=4k,\ b=-8k$

$\therefore k=\dfrac{1}{2},\ b=-4 \qquad$ ➋

$b=-4$를 ㉠에 대입하면 $\quad a=\dfrac{11}{2} \qquad$ ➌

$\therefore ab=\dfrac{11}{2}\times(-4)=-22 \qquad$ ➍

답 -22

채점 기준표

➊ a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40%
➋ b의 값을 구할 수 있다.	40%
➌ a의 값을 구할 수 있다.	10%
➍ ab의 값을 구할 수 있다.	10%

0860 $\overrightarrow{OA}\,/\!/\,\overrightarrow{OC}$이므로

$\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}\ (k\neq0)$

$\therefore \overrightarrow{OC}=(-2k,\ k,\ 5k)$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(-2k+1,\ k-3,\ 5k-11)$이고 $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{OC}$이므로

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OC}=0$

$(-2k+1,\ k-3,\ 5k-11)\cdot(-2k,\ k,\ 5k)=0$

$-2k(-2k+1)+k(k-3)+5k(5k-11)=0$

$30k^2-60k=0,\quad k(k-2)=0$

$\therefore k=2\ (\because k\neq0)$

따라서 $\overrightarrow{OC}=(-4,\ 2,\ 10)$이므로

$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{(-4)^2+2^2+10^2}=2\sqrt{30}$

답 $2\sqrt{30}$

0861 $\vec{a}\cdot\vec{p}=0$이므로 $\quad 2x-y-z=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\vec{b}\cdot\vec{p}=0$이므로 $\quad x-3y+2z=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠$\times2+$㉡을 하면 $\quad 5x-5y=0$

$\therefore y=x \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면 $\quad 2x-x-z=0$

$\therefore z=x$

따라서 $\vec{p}=(x,\ x,\ x)$이고 $|\vec{p}|=6$이므로

$\sqrt{x^2+x^2+x^2}=6,\quad 3x^2=36$

$x^2=12 \quad \therefore x=\pm2\sqrt{3}$

이때 $xyz=x^3>0$이므로 $\quad x>0$

따라서 $x=y=z=2\sqrt{3}$이므로

$xyz=(2\sqrt{3})^3=24\sqrt{3}$

답 ⑤

0862 $|\vec{a}|=2$이므로 $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{x})=4$에서

$|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{x}=4,\quad 4+\vec{a}\cdot\vec{x}=4$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{x}=0$

따라서 $\vec{x}$는 $\vec{a}$와 서로 수직이다.

주어진 정사면체에서 $\overline{AD}$와 수직인 모서리는 $\overline{BC}$이므로 벡터 $\vec{x}$는 $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$의 2개이다.

답 2

0863 전략 벡터의 뺄셈을 이용하여 조건 (가)의 식을 변형한다.

풀이 $4\overrightarrow{QA}+5\overrightarrow{QB}+6\overrightarrow{QC}+7\overrightarrow{QD}=\vec{0}$에서

$4(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DQ})+5(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DQ})+6(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DQ})-7\overrightarrow{DQ}=\vec{0}$

$22\overrightarrow{DQ}=4\overrightarrow{DA}+5\overrightarrow{DB}+6\overrightarrow{DC}$

$\therefore \overrightarrow{DQ}=\dfrac{4\overrightarrow{DA}+5\overrightarrow{DB}+6\overrightarrow{DC}}{22}$

이때 $\overrightarrow{DE}=\dfrac{4\overrightarrow{DA}+5\overrightarrow{DB}+6\overrightarrow{DC}}{15}$라 하면 점 E는 평면 ABC 위의 점이고 $\overrightarrow{DQ}=\dfrac{15}{22}\overrightarrow{DE}$이므로 사면체 ABCD의 부피를 V라 하면

$V_1=\left(1-\dfrac{15}{22}\right)V=\dfrac{7}{22}V$

또 $4\overrightarrow{QA}+5\overrightarrow{QB}+6\overrightarrow{QC}+7\overrightarrow{QD}=\vec{0}$에서

$-4\overrightarrow{AQ}+5(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AQ})+6(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AQ})+7(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AQ})=\vec{0}$

$22\overrightarrow{AQ}=5\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}+7\overrightarrow{AD}$

$\therefore \overrightarrow{AQ}=\dfrac{5\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}+7\overrightarrow{AD}}{22}$

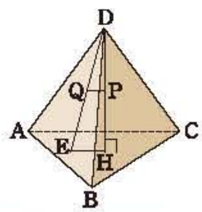
이때 $\overrightarrow{AF}=\dfrac{5\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}+7\overrightarrow{AD}}{18}$라 하면 점 F는 평면 BCD 위의 점이고 $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{9}{11}\overrightarrow{AF}$이므로

$V_2=\left(1-\dfrac{9}{11}\right)V=\dfrac{2}{11}V$

$\therefore \dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\frac{7}{22}V}{\frac{2}{11}V}=\dfrac{7}{4}$

답 ②

참고 사면체 ABCD의 꼭짓점 D에서 밑면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 Q를 지나면서 $\overline{EH}$에 평행한 직선이 $\overline{DH}$와 만나는 점을 P라 하면 $\triangle DEH\backsim\triangle DQP$이므로



$\overline{DH}:\overline{PH}=\overline{DE}:\overline{QE}$

따라서 $\triangle ABC$를 밑면으로 하는 두 사면체 ABCD, QABC의 부피의 비는 높이의 비 $\overline{DH}:\overline{PH}$, 즉 $\overline{DE}:\overline{QE}$와 같다.

SSEN 특강

점 P가 평면 ABC 위에 있으면

$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$

로 나타낼 수 있다.

이때 점 O에 대하여

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+n(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$\therefore \overrightarrow{OP}=(1-m-n)\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$

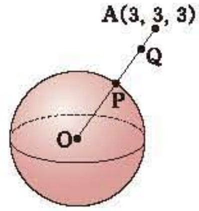
그런데 $(1-m-n)+m+n=1$이므로 $1-m-n=l$이라 하면 점 P가 평면 ABC 위에 있을 조건은

$\overrightarrow{OP}=l\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$

(단, $l+m+n=1$, l, m, n은 실수)

0864 전략 $\overline{AB}$를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점의 위치 벡터는 $\dfrac{m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OA}}{m+n}$임을 이용한다.

풀이 $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OP}$라 하면 점 Q는 $\overline{AP}$를 $1:2$로 내분하는 점이다.



$|\overrightarrow{OP}|=3$, $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{3^2+3^2+3^2}=3\sqrt{3}$으로 일정하므로 오른쪽 그림과 같이 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OA}$의 방향이 같을 때 $|\overrightarrow{OQ}|$가 최대가 된다.

$$\therefore |\overrightarrow{OQ}|\le|\overrightarrow{OP}|+|\overrightarrow{PQ}|$$

$\overline{AQ}:\overline{QP}=1:2$이므로 $\overrightarrow{PQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PA}$

$$=|\overrightarrow{OP}|+\frac{2}{3}|\overrightarrow{PA}|$$
$$=3+\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-3)=1+2\sqrt{3}$$

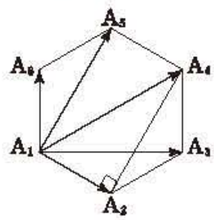
따라서 $|\overrightarrow{OQ}|$의 최댓값은 $1+2\sqrt{3}$이므로

$a=1,\ b=2$

$\therefore 10(a+b)=10(1+2)=30$ 답 30

0865 전략 $\overline{AB}$의 중점이 M이면 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PM}$임을 이용한다.

풀이 점 P를 지나고 밑면에 평행한 평면이 모서리 A_iB_i와 만나는 점을 M_i라 하면 점 M_i는 모서리 A_iB_i의 중점이므로



$$\frac{\overrightarrow{PA_i}+\overrightarrow{PB_i}}{2}=\overrightarrow{PM_i}$$
$$\therefore \overrightarrow{PA_i}+\overrightarrow{PB_i}=2\overrightarrow{PM_i}$$

이때 $\overrightarrow{PM_i}=\overrightarrow{A_1A_i}$이므로

$$\sum_{i=1}^{6}(\overrightarrow{PA_i}+\overrightarrow{PB_i})$$
$$=\sum_{i=1}^{6}2\overrightarrow{A_1A_i}=2\sum_{i=1}^{6}\overrightarrow{A_1A_i}$$
$$=2(\overrightarrow{A_1A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_1A_4}+\overrightarrow{A_1A_5}+\overrightarrow{A_1A_6})$$
$$=2\{(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_1A_5})+(\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_1A_6})+\overrightarrow{A_1A_4}\}$$
$$=2\times3\overrightarrow{A_1A_4}=6\overrightarrow{A_1A_4}$$

$\overline{A_1A_4}=6$이므로 구하는 벡터의 크기는

$6|\overrightarrow{A_1A_4}|=6\times6=36$ 답 36

0866 전략 $\triangle ABC$에서 $\angle A$의 이등분선과 $\overline{BC}$가 만나는 점을 P라 하면 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BP}:\overline{CP}$임을 이용한다.

풀이 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$라 하면 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{3}\vec{b}$

이때 $\overline{BF}:\overline{EF}=\overline{AB}:\overline{AE}=3:2$이므로 점 F는 $\overline{BE}$를 $3:2$로 내분하는 점이다.

$$\therefore \overrightarrow{AF}=\frac{3\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{AB}}{3+2}=\frac{3\times\frac{2}{3}\vec{b}+2\vec{a}}{3+2}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$$

또 $\overline{DG}:\overline{EG}=\overline{AD}:\overline{AE}=3:2$이므로 점 G는 $\overline{DE}$를 $3:2$로 내분하는 점이다.

$$\therefore \overrightarrow{AG}=\frac{3\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{AD}}{3+2}=\frac{3\times\frac{2}{3}\vec{b}+2\vec{c}}{3+2}=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$$

$$\therefore \overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AF}=\left(\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}\right)-\left(\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)$$
$$=-\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{c}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$$

따라서 $x=-\dfrac{2}{5}$, $y=0$, $z=\dfrac{2}{5}$이므로

$x+y+z=0$ 답 ③

0867 전략 두 구가 원점에서 접하므로 두 구의 중심과 원점은 한 직선 위에 있음을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2+z^2+6x+2ay+2bz=0$에서

$(x+3)^2+(y+a)^2+(z+b)^2=9+a^2+b^2$

이 구의 중심을 $A(-3,\ -a,\ -b)$라 하고 구

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$의 중심을 $B(1,\ 2,\ 1)$이라 하면 두 구가 원점 O에서 접하므로 세 점 O, A, B는 한 직선 위에 있다.

즉 $\overrightarrow{OA}=t\overrightarrow{OB}\ (t\neq0)$이므로

$(-3,\ -a,\ -b)=t(1,\ 2,\ 1)$

따라서 $t=-3$, $2t=-a$, $t=-b$이므로

$a=6,\ b=3$

$\therefore a+b=9$ 답 ④

0868 전략 $0\le t\le1$일 때와 $-1\le t<0$일 때로 나누어 생각한다.

풀이 (i) $0\le t\le1$일 때, $|t|=t$이므로

$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}$

이것을 만족시키는 점 P의 자취는 선분 AB이므로 그 길이는

$\sqrt{(3-5)^2+2^2+1^2}=3$

(ii) $-1\le t<0$일 때, $|t|=-t$이므로

$$\overrightarrow{OP}=-t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}$$
$$=\overrightarrow{OB}-t(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$
$$=(3,\ 2,\ 1)-t(8,\ 2,\ 1) \quad\cdots\cdots ㉠$$

$t=-1$일 때,

$\overrightarrow{OP}=(3,\ 2,\ 1)+(8,\ 2,\ 1)=(11,\ 4,\ 2)$

따라서 ㉠을 만족시키는 점 P의 자취는 두 점 $(3,\ 2,\ 1)$, $(11,\ 4,\ 2)$를 잇는 선분이므로 그 길이는

$\sqrt{(11-3)^2+(4-2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{69}$

(i), (ii)에서 점 P의 자취의 길이는 $3+\sqrt{69}$이다. 답 $3+\sqrt{69}$

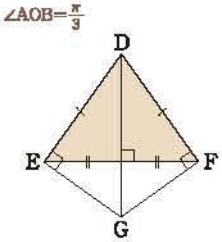
0869 전략 점 G가 $\overline{EF}$의 수직이등분선 위에 있음을 이용한다.

풀이 $\overline{OD}=\dfrac{1}{2}\overline{OA}=\dfrac{1}{2}$, $\overline{OE}=\dfrac{1}{1+3}\overline{OB}=\dfrac{1}{2}$이고

$\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$이므로 $\triangle ODE$는 정삼각형이다.

$\triangle OAB$에서 $\cos(\angle AOB)=\frac{1}{2}$이므로 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$

$\therefore \overline{DE}=\dfrac{1}{2}$



한편 $\triangle DEF$는 $\overline{DE}=\overline{DF}$인 이등변삼각형이고 $\overline{EG}\perp\overline{DE}$, $\overline{FG}\perp\overline{DF}$이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 DG는 $\overline{EF}$의 수직이등분선이다.

따라서 $\overrightarrow{DG}=k(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF})\ (k\neq0)$라 하면

$\overrightarrow{DG}=k(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF})$

$=k(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OD})$

$=k(-2\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})$ — $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OF}=\frac{1}{9}\overrightarrow{OC}$

$=k\left(-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{9}\overrightarrow{OC}\right)$

$\angle GDE=\theta$라 하면

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DG}=|\overrightarrow{DE}||\overrightarrow{DG}|\cos\theta$

$=|\overrightarrow{DE}||\overrightarrow{DG}|\times\frac{|\overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{DG}|}$

$=|\overrightarrow{DE}|^2=\frac{1}{4}$ ······ ㉠

이때 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$이므로 ㉠에서

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DG}=\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)\cdot k\left(-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{9}\overrightarrow{OC}\right)$

$=k\left(\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{1}{16}|\overrightarrow{OB}|^2-\frac{3}{8}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right.$ — $|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\times\frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OB}|}=|\overrightarrow{OA}|^2=1$

$\left.-\frac{1}{18}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\frac{1}{36}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\right)$ — $|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\times\frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OC}|}=|\overrightarrow{OA}|^2=1$

$=k\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{3}{8}-\frac{1}{18}+\frac{1}{36}\right)$

$=\frac{25}{72}k=\frac{1}{4}$

$\therefore k=\frac{18}{25}$

$\therefore \overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DG}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{18}{25}\left(-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{9}\overrightarrow{OC}\right)$

$=-\frac{11}{50}\overrightarrow{OA}+\frac{9}{50}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{25}\overrightarrow{OC}$

따라서 $p=-\frac{11}{50}$, $q=\frac{9}{50}$, $r=\frac{2}{25}$이므로

$p+q+r=\frac{1}{25}$

답 $\frac{1}{25}$

0870 **전략** 주어진 도형을 좌표공간에 놓고 각 점의 좌표를 구한다.

풀이 점 A가 원점, 모서리 AC, AD가 각각 y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 주어진 도형을 좌표공간에 놓으면

$B(2\sqrt{3},\ 2,\ 0)$, $E(2\sqrt{3},\ 2,\ 12)$

이므로 점 P의 좌표는

$P\left(2\sqrt{3},\ 2,\ \frac{1}{3}\times12\right)$, 즉 $P(2\sqrt{3},\ 2,\ 4)$

또 $C(0,\ 4,\ 0)$, $F(0,\ 4,\ 12)$이므로 점 Q의 좌표는

$Q\left(0,\ 4,\ \frac{2}{3}\times12\right)$, 즉 $Q(0,\ 4,\ 8)$

따라서 $\overrightarrow{AP}=(2\sqrt{3},\ 2,\ 4)$, $\overrightarrow{PQ}=(-2\sqrt{3},\ 2,\ 4)$이므로

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PQ}=2\sqrt{3}\times(-2\sqrt{3})+2\times2+4\times4$

$=-12+4+16=8$

답 ③

0871 **전략** $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$임을 이용한다.

풀이 조건 (나)에서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$이므로

$(a_1,\ a_2,\ a_3)\cdot(-2,\ 1,\ -1)=-1$

$\therefore -2a_1+a_2-a_3=-1$

조건 (가)에서 $a_2=2a_1$을 위의 식에 대입하면

$a_3=1$

$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{6}$이므로 두 조건 (나), (다)에서

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\times\sqrt{6}\times\left(-\frac{1}{6}\right)=-1$

$\therefore a_1^2+a_2^2+a_3^2=6$

$a_2=2a_1$, $a_3=1$을 위의 식에 대입하면

$5a_1^2+1=6 \qquad \therefore a_1^2=1$

따라서 $a_2^2=(2a_1)^2=4a_1^2=4$이므로

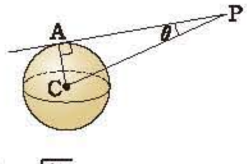
$a_1^2-a_2^2-a_3^2=1-4-1=-4$

답 -4

0872 **전략** 점 P에서 구 S에 그은 접선이 xy평면과 만나는 점의 좌표를 $(x,\ y,\ 0)$으로 놓고 x, y 사이의 관계식을 구한다.

풀이 구 S는 중심이 $C(0,\ 0,\ 1)$이고, xy평면과 접하므로 반지름의 길이가 1이다.

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 구 S에 그은 접선의 접점을 A라 하면



$\overline{PC}=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+(1-3)^2}=4$

이므로 $\overline{PA}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$

이때 $\angle CPA=\theta$라 하면 $\cos\theta=\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

직선 PA가 xy평면과 만나는 점을 $Q(x,\ y,\ 0)$이라 하면

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PC}=|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PC}|\cos\theta$

$=\sqrt{(x-2\sqrt{3})^2+y^2+(-3)^2}\times4\times\frac{\sqrt{15}}{4}$

$=\sqrt{15}\sqrt{x^2+y^2-4\sqrt{3}x+21}$ ······ ㉠

또 $\overrightarrow{PQ}=(x-2\sqrt{3},\ y,\ -3)$, $\overrightarrow{PC}=(-2\sqrt{3},\ 0,\ -2)$이므로

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PC}=(x-2\sqrt{3},\ y,\ -3)\cdot(-2\sqrt{3},\ 0,\ -2)$

$=-2\sqrt{3}(x-2\sqrt{3})+6$

$=18-2\sqrt{3}x$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\sqrt{15}\sqrt{x^2+y^2-4\sqrt{3}x+21}=18-2\sqrt{3}x$

양변을 제곱하면

$15(x^2+y^2-4\sqrt{3}x+21)=12x^2-72\sqrt{3}x+324$

$x^2+5y^2+4\sqrt{3}x-3=0, \qquad (x+2\sqrt{3})^2+5y^2=15$

$\therefore \frac{(x+2\sqrt{3})^2}{15}+\frac{y^2}{3}=1$

따라서 xy평면에 생기는 그림자는 타원 $\frac{(x+2\sqrt{3})^2}{15}+\frac{y^2}{3}=1$의 내부와 그 둘레이므로 구하는 부등식은

$\frac{(x+2\sqrt{3})^2}{15}+\frac{y^2}{3}\le1$, $z=0$

답 ①

0873 **전략** 크기가 일정한 두 벡터의 내적은 두 벡터가 이루는 각의 크기가 작을수록 크다.

풀이 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OQ})$

$=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OQ}$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OQ}$에서 $|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{OQ}|=1$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{OQ}$가 이루는 각의 크기가 0일 때, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 값이 최대가 된다.

$\therefore \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OQ}\le 1$ ...... ㉠

한편 $\overrightarrow{AB}=(-1,\ -2\sqrt{2},\ \sqrt{3})$, $\overrightarrow{AO}=(-2,\ -\sqrt{2},\ -\sqrt{3})$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AO}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AO}|}$$
$$=\frac{-1\times(-2)+(-2\sqrt{2})\times(-\sqrt{2})+\sqrt{3}\times(-\sqrt{3})}{\sqrt{(-1)^2+(-2\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2}\sqrt{(-2)^2+(-\sqrt{2})^2+(-\sqrt{3})^2}}$$
$$=\frac{3}{2\sqrt{3}\times 3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

이때 조건 (나)에 의하여 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AO}$가 이루는 각의 크기의 최솟값은 $\theta-\frac{\pi}{6}$이므로

$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\theta\cos\frac{\pi}{6}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{6}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{33}}{6}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3+\sqrt{33}}{12}$$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{12}}=\frac{\sqrt{33}}{6}$

$$\therefore \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AO}\le|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AO}|\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=1\times 3\times\frac{3+\sqrt{33}}{12}=\frac{3+\sqrt{33}}{4} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\quad \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}\le\frac{3+\sqrt{33}}{4}+1=\frac{7+\sqrt{33}}{4}$

따라서 $a=\frac{7}{4}$, $b=\frac{1}{4}$이므로

$$16(a^2+b^2)=16\left\{\left(\frac{7}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}=50$$

답 50

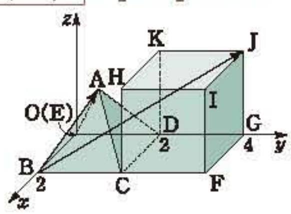
0874 전략 주어진 입체도형을 좌표공간에 놓고 $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BJ}$를 성분으로 나타낸다.

풀이 꼭짓점 A에서 밑면 BCDE에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BM}^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$

$\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 E가 원점, 모서리 BE, ED가 각각 x축, y축의 양의 방향과 일치하도록 주어진 입체도형을 좌표공간에 놓으면



$A(1,\ 1,\ \sqrt{2})$,
$B(2,\ 0,\ 0)$, $J(0,\ 4,\ 2)$

이므로 $\quad \overrightarrow{BA}=(-1,\ 1,\ \sqrt{2})$, $\overrightarrow{BJ}=(-2,\ 4,\ 2)$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BJ}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BJ}|}$$
$$=\frac{-1\times(-2)+1\times 4+\sqrt{2}\times 2}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(\sqrt{2})^2}\sqrt{(-2)^2+4^2+2^2}}$$
$$=\frac{6+2\sqrt{2}}{4\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{12}$$

따라서 $a=3$, $b=2$이므로 $\quad ab=6$

답 6

0875 전략 주어진 직육면체를 좌표공간에 놓고 각 점의 좌표를 구한다.

풀이 점 H가 원점, 모서리 HE, HG, HD가 각각 x축, y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 주어진 직육면체를 좌표공간에 놓으면

$A(2,\ 0,\ 3)$, $G(0,\ 1,\ 0)$

점 P는 선분 AG 위의 점이므로

$$\overrightarrow{HP}=(1-t)\overrightarrow{HA}+t\overrightarrow{HG}\ (0\le t\le 1)$$
$$=(1-t)(2,\ 0,\ 3)+t(0,\ 1,\ 0)$$
$$=(2-2t,\ t,\ 3-3t)$$

또 $C(0,\ 1,\ 3)$, $E(2,\ 0,\ 0)$이므로

$\overrightarrow{CE}=(2,\ -1,\ -3)$ → ❶

$\therefore \overrightarrow{HP}+\overrightarrow{CE}=(4-2t,\ t-1,\ -3t)$

$$\therefore |\overrightarrow{HP}+\overrightarrow{CE}|=\sqrt{(4-2t)^2+(t-1)^2+(-3t)^2}$$
$$=\sqrt{14t^2-18t+17}$$
$$=\sqrt{14\left(t-\frac{9}{14}\right)^2+\frac{157}{14}}$$ → ❷

따라서 $|\overrightarrow{HP}+\overrightarrow{CE}|$는 $t=\frac{9}{14}$일 때 최소이므로

$$\overrightarrow{HP}=\frac{5}{14}\overrightarrow{HA}+\frac{9}{14}\overrightarrow{HG}$$

즉 점 P는 $\overline{AG}$를 9 : 5로 내분하므로

$$\frac{\overline{GP}}{\overline{AP}}=\frac{5}{9}$$ → ❸

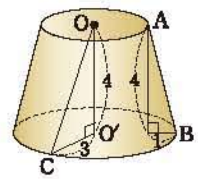
답 $\frac{5}{9}$

채점 기준표

❶ 직육면체를 좌표공간에 놓고 $\overrightarrow{HP}$, $\overrightarrow{CE}$를 성분으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ $\lvert\overrightarrow{HP}+\overrightarrow{CE}\rvert$를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ $\frac{\overline{GP}}{\overline{AP}}$의 값을 구할 수 있다.	30%

0876 전략 $0<\theta<\pi$일 때 θ의 크기가 클수록 $\cos\theta$의 값이 작아짐을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림에서

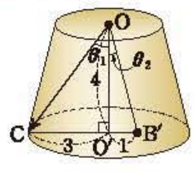


$\overline{AB}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$,
$\overline{OC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

이므로 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OC}|^2$$
$$=|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OC}|^2$$
$$=17+2\times\sqrt{17}\times 5\times\cos\theta+25$$
$$=42+10\sqrt{17}\cos\theta \quad \cdots\cdots ㉠$$ → ❶

따라서 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OC}|$는 $\cos\theta$의 값이 최소일 때 최소이고 $0<\theta<\pi$이므로 θ의 크기가 가장 클 때 $\cos\theta$의 값이 가장 작다.



오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 점 A가 점 O에 오도록 평행이동시킨 선분을 $\overline{OB'}$이라 하면 점 B′은 중심이 O′이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이므로 θ의 크기는 세 점 C, O′, B′이 한 직선 위에 있을 때 가장 크다.

$\angle COO'=\theta_1$, $\angle B'OO'=\theta_2$라 하면

$$\cos\theta=\cos(\theta_1+\theta_2)$$
$$=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2$$
$$=\frac{4}{5}\times\frac{4}{\sqrt{17}}-\frac{3}{5}\times\frac{1}{\sqrt{17}}$$
$$=\frac{13}{5\sqrt{17}}$$ ❷

이것을 ㉠에 대입하면

$$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OC}|^2\geq 42+10\sqrt{17}\times\frac{13}{5\sqrt{17}}=68$$

이므로 구하는 최솟값은 $\sqrt{68}=2\sqrt{17}$ ❸

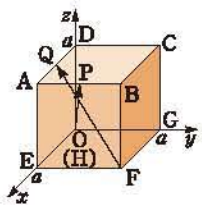
답 $2\sqrt{17}$

채점 기준표

❶ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하고 $\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OC}\|^2$을 θ에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ θ의 크기가 최대일 때의 $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OC}\|$의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

0877 전략 주어진 정육면체를 좌표공간에 놓고 $\overrightarrow{HP}$, $\overrightarrow{FQ}$를 성분으로 나타낸다.

풀이 주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라 하고 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 H가 원점, 모서리 HE, HG, HD가 각각 x축, y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 정육면체를 좌표공간에 놓으면



$$H(0,\ 0,\ 0),\ F(a,\ a,\ 0),$$
$$P\left(a,\ \frac{a}{2},\ a\right),\ Q\left(\frac{a}{2},\ 0,\ a\right)$$

이므로

$$\overrightarrow{HP}=\left(a,\ \frac{a}{2},\ a\right),\ \overrightarrow{FQ}=\left(-\frac{a}{2},\ -a,\ a\right)$$ ❶

$$\therefore \overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{FQ}=a\times\left(-\frac{a}{2}\right)+\frac{a}{2}\times(-a)+a\times a=0$$ ❷

따라서 두 벡터 $\overrightarrow{HP}$, $\overrightarrow{FQ}$가 이루는 각의 크기는 90°이다. ❸

답 90°

채점 기준표

❶ 정육면체를 좌표공간에 놓고 $\overrightarrow{HP}$, $\overrightarrow{FQ}$를 성분으로 나타낼 수 있다.	50%
❷ $\overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{FQ}$를 구할 수 있다.	30%
❸ $\overrightarrow{HP}$, $\overrightarrow{FQ}$가 이루는 각의 크기를 구할 수 있다.	20%

0878 전략 탄소 원자의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하고 탄소 원자와 수소 원자 사이의 거리가 모두 같음을 이용한다.

풀이 (1) 탄소 원자의 좌표를 $C(x,\ y,\ z)$라 하고 수소 원자의 좌표를 각각 $H_1(0,\ 0,\ 0)$, $H_2(1,\ 1,\ 0)$, $H_3(1,\ 0,\ 1)$, $H_4(0,\ 1,\ 1)$이라 하면 탄소 원자와 수소 원자 사이의 거리가 모두 같으므로

$$\overline{CH_1}=\overline{CH_2}=\overline{CH_3}=\overline{CH_4}$$

$\overline{CH_1}=\overline{CH_2}$에서 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}$

$\therefore x+y=1$ ······ ㉠

$\overline{CH_1}=\overline{CH_3}$에서 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z-1)^2}$

$\therefore x+z=1$ ······ ㉡

$\overline{CH_1}=\overline{CH_4}$에서 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2+(z-1)^2}$

$\therefore y+z=1$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2},\ z=\frac{1}{2}$$

따라서 탄소 원자의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이다. ❶

(2) $\overrightarrow{CH_1}=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{CH_2}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$이므로

$$|\overrightarrow{CH_1}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$|\overrightarrow{CH_2}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\overrightarrow{CH_1}\cdot\overrightarrow{CH_2}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{4}$$
$$\therefore \cos\theta=\frac{\overrightarrow{CH_1}\cdot\overrightarrow{CH_2}}{|\overrightarrow{CH_1}||\overrightarrow{CH_2}|}$$
$$=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{3}$$ ❷

답 (1) $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ (2) $-\frac{1}{3}$

채점 기준표

❶ 탄소 원자의 좌표를 구할 수 있다.	60%
❷ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40%

0879 전략 중심이 C인 구와 직선 l이 점 P에서 접하면 $\overline{CP}\perp l$임을 이용한다.

풀이 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면 점 P는 구 위에 있으므로

$$x^2+y^2+(z+3)^2=4$$

$\therefore x^2+y^2+z^2+6z+5=0$ ······ ㉠ ❶

구의 중심을 C라 하면 $C(0,\ 0,\ -3)$이고 $\overline{AP}\perp\overline{CP}$이므로

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}=0$$

$\overrightarrow{AP}=(x,\ y,\ z-1)$, $\overrightarrow{CP}=(x,\ y,\ z+3)$이므로

$$(x,\ y,\ z-1)\cdot(x,\ y,\ z+3)=0$$
$$x^2+y^2+(z-1)(z+3)=0$$

$\therefore x^2+y^2+z^2+2z-3=0$ ······ ㉡ ❷

㉠−㉡을 하면 $4z+8=0$ $\therefore z=-2$

$z=-2$를 ㉠에 대입하면 $x^2+y^2=3$ ❸

즉 점 P가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는

$$2\pi\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}\pi$$ ❹

답 $2\sqrt{3}\pi$

채점 기준표

❶ ㉠을 구할 수 있다.	20%
❷ ㉡을 구할 수 있다.	30%
❸ x, y 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30%
❹ 점 P가 나타내는 도형의 둘레의 길이를 구할 수 있다.	20%

08 도형의 방정식

0880 답 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{6}=z-3$

0881 답 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{3}$, $z=-1$

참고 xy평면에 평행한 직선이다.

0882 주어진 직선의 방향벡터는 $(2,\ -3,\ -5)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x+4}{2}=\frac{2-y}{3}=-\frac{z}{5}$$

답 $\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{2-y}{3}=-\dfrac{z}{5}$

0883 주어진 직선의 방정식을 t에 대하여 풀면

$$t=\frac{x+1}{3}=\frac{y-4}{2}=5-z$$

즉 방향벡터는 $(3,\ 2,\ -1)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{2}=7-z$$

답 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+3}{2}=7-z$

0884 $\dfrac{x-1}{2-1}=\dfrac{y+3}{4+3}=\dfrac{z-2}{5-2}$

$\therefore x-1=\dfrac{y+3}{7}=\dfrac{z-2}{3}$

답 $x-1=\dfrac{y+3}{7}=\dfrac{z-2}{3}$

0885 $\dfrac{x-2}{5-2}=\dfrac{y-1}{3-1}$, $z-4=0$

$\therefore \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{2}$, $z=4$

답 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{2}$, $z=4$

0886 주어진 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(1,\ -3,\ 1)$, $\vec{v}=(3,\ 1,\ -1)$

$$\therefore \cos\theta=\frac{|1\times3+(-3)\times1+1\times(-1)|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+1^2}\sqrt{3^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{11}\sqrt{11}}=\frac{1}{11}$$

답 $\dfrac{1}{11}$

0887 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(-1,\ 4,\ -1)$, $\vec{v}=(3,\ 1,\ 1)$

$$\therefore \cos\theta=\frac{|-1\times3+4\times1+(-1)\times1|}{\sqrt{(-1)^2+4^2+(-1)^2}\sqrt{3^2+1^2+1^2}}=0$$

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{2}$

답 $\dfrac{\pi}{2}$

0888 l: $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-2}{2}=z+1$,

m: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$

이므로 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(3,\ 2,\ 1)$, $\vec{v}=(2,\ -1,\ 3)$

$$\therefore \cos\theta=\frac{|3\times2+2\times(-1)+1\times3|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=\frac{1}{2}$$

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{3}$

답 $\dfrac{\pi}{3}$

0889 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(a,\ -2,\ -6)$, $\vec{v}=(-2,\ 1,\ b)$

두 직선이 서로 평행하므로 $\vec{u}=k\vec{v}$ $(k\neq0)$라 하면

$a=-2k$, $-2=k$, $-6=bk$

$\therefore a=4$, $b=3$

답 $a=4$, $b=3$

0890 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(1,\ k,\ -2)$, $\vec{v}=(k+3,\ -2,\ 1)$

두 직선이 서로 수직이므로 $\vec{u}\perp\vec{v}$ $\quad\therefore \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

$(k+3)-2k+(-2)\times1=0$

$-k+1=0 \quad \therefore k=1$

답 1

0891 $3(x-4)+2(y+2)+(z-1)=0$

$\therefore 3x+2y+z-9=0$

답 $3x+2y+z-9=0$

0892 $3(x-2)+2(y-1)-4(z-1)=0$

$\therefore 3x+2y-4z-4=0$

답 $3x+2y-4z-4=0$

0893 주어진 직선의 방향벡터는 $(4,\ -2,\ 1)$이므로 구하는 평면의 방정식은

$4(x-5)-2(y+2)+(z-3)=0$

$\therefore 4x-2y+z-27=0$

답 $4x-2y+z-27=0$

0894 주어진 평면의 법선벡터는 $(1,\ 3,\ -1)$이므로 구하는 평면의 방정식은

$(x-3)+3(y+4)-(z+4)=0$

$\therefore x+3y-z+5=0$

답 $x+3y-z+5=0$

0895 구하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라 하면 세 점 A, B, C는 이 평면 위의 점이므로

$a+d=0$, $-2b+d=0$, $3c+d=0$

$\therefore a=-d$, $b=\dfrac{d}{2}$, $c=-\dfrac{d}{3}$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$-dx+\dfrac{d}{2}y-\dfrac{d}{3}z+d=0$

$d\neq0$이므로 $\quad x-\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}-1=0$

└ $d=0$이면 $a=b=c=0$

$\therefore 6x-3y+2z-6=0$

답 $6x-3y+2z-6=0$

0896 두 평면 α, β의 법선벡터를 각각 $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$라 하면

$\vec{n_1}=(6,\ -5,\ 2)$, $\vec{n_2}=(4,\ 1,\ -3)$

$$\therefore \cos\theta=\frac{|6\times4+(-5)\times1+2\times(-3)|}{\sqrt{6^2+(-5)^2+2^2}\sqrt{4^2+1^2+(-3)^2}}=\frac{13}{\sqrt{65}\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

답 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

0897 두 평면 α, β의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면
$\overrightarrow{n_1}=(2,\ -4,\ 5)$, $\overrightarrow{n_2}=(5,\ -1,\ 8)$

$$\therefore \cos\theta=\frac{|2\times5+(-4)\times(-1)+5\times8|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+5^2}\sqrt{5^2+(-1)^2+8^2}}$$
$$=\frac{54}{\sqrt{45}\sqrt{90}}=\frac{3\sqrt{2}}{5}$$

답 $\frac{3\sqrt{2}}{5}$

0898 두 평면 α, β의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면
$\overrightarrow{n_1}=(2,\ 1,\ -2)$, $\overrightarrow{n_2}=(-2,\ 6,\ -3)$

$$\therefore \cos\theta=\frac{|2\times(-2)+1\times6+(-2)\times(-3)|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}\sqrt{(-2)^2+6^2+(-3)^2}}$$
$$=\frac{8}{3\times7}=\frac{8}{21}$$

답 $\frac{8}{21}$

0899 두 평면 α, β의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면
$\overrightarrow{n_1}=(4,\ -1,\ -1)$, $\overrightarrow{n_2}=(3,\ 5,\ 4)$

$$\therefore \cos\theta=\frac{|4\times3+(-1)\times5+(-1)\times4|}{\sqrt{4^2+(-1)^2+(-1)^2}\sqrt{3^2+5^2+4^2}}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{18}\sqrt{50}}=\frac{1}{10}$$

답 $\frac{1}{10}$

0900 두 평면 α, β의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면
$\overrightarrow{n_1}=(1,\ 3,\ 4)$, $\overrightarrow{n_2}=(4,\ -1,\ 3)$

$$\therefore \cos\theta=\frac{|1\times4+3\times(-1)+4\times3|}{\sqrt{1^2+3^2+4^2}\sqrt{4^2+(-1)^2+3^2}}$$
$$=\frac{13}{\sqrt{26}\sqrt{26}}=\frac{1}{2}$$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$

답 $\frac{\pi}{3}$

0901 두 평면 α, β의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면
$\overrightarrow{n_1}=(5,\ -2,\ 1)$, $\overrightarrow{n_2}=(1,\ 2,\ -1)$

$$\therefore \cos\theta=\frac{|5\times1+(-2)\times2+1\times(-1)|}{\sqrt{5^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=0$$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{2}$

답 $\frac{\pi}{2}$

0902 두 평면 α, β의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면
$\overrightarrow{n_1}=(1,\ -2,\ m)$, $\overrightarrow{n_2}=(n,\ 4,\ 2)$
두 평면이 서로 평행하므로 $\overrightarrow{n_1}=k\overrightarrow{n_2}\ (k\neq0)$라 하면
$1=nk,\ -2=4k,\ m=2k$
$\therefore k=-\frac{1}{2},\ m=-1,\ n=-2$

답 $m=-1,\ n=-2$

0903 두 평면 α, β의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면
$\overrightarrow{n_1}=(3k,\ 3,\ -2)$, $\overrightarrow{n_2}=(2,\ -k,\ 3)$
두 평면이 서로 수직이므로 $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$ $\quad\therefore \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$
$3k\times2+3\times(-k)+(-2)\times3=0$
$3k-6=0 \quad \therefore k=2$

답 2

0904 $\frac{|1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

0905 $\frac{|2\times1+1+2\times(-2)-2|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{3}{3}=1$

답 1

0906 $\frac{|2\times2+0-6\times3-7|}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}=\frac{21}{7}=3$

답 3

0907 두 평면 사이의 거리는 평면 $x-2y+z=4$ 위의 점 $(1,\ -1,\ 1)$과 평면 $x-2y+z-5=0$ 사이의 거리와 같으므로
$$\frac{|1+2+1-5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

답 $\frac{\sqrt{6}}{6}$

0908 구 위의 한 점을 $P(x,\ y,\ z)$라 하고 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라 하면 $|\overrightarrow{AP}|=\overline{AP}=5$이므로
$|\vec{p}-\vec{a}|=5$
즉 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=5^2$이므로
$(x+1,\ y-2,\ z-4)\cdot(x+1,\ y-2,\ z-4)=5^2$
$\therefore (x+1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=25$

답 $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=25$

0909 두 점 $(2,\ 1,\ -3)$, $(3,\ 4,\ -1)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(3-2)^2+(4-1)^2+(-1+3)^2}=\sqrt{14}$
이므로 구의 반지름의 길이는 $\sqrt{14}$이다.
따라서 구 위의 한 점을 $P(x,\ y,\ z)$라 하고 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라 하면 $|\overrightarrow{AP}|=\overline{AP}=\sqrt{14}$이므로
$|\vec{p}-\vec{a}|=\sqrt{14}$
즉 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=(\sqrt{14})^2$이므로
$(x-2,\ y-1,\ z+3)\cdot(x-2,\ y-1,\ z+3)=(\sqrt{14})^2$
$\therefore (x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=14$

답 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=14$

0910 구 위의 한 점을 $P(x,\ y,\ z)$라 하고 세 점 A, B, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$라 하면 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$이므로 $\quad\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$
즉 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$이므로
$(x+2,\ y-1,\ z+3)\cdot(x-4,\ y-5,\ z-7)=0$
$(x+2)(x-4)+(y-1)(y-5)+(z+3)(z-7)=0$
$x^2-2x-8+y^2-6y+5+z^2-4z-21=0$
$\therefore (x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=38$

답 $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=38$

0911 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하고 점 P의 위치벡터를 $\vec{p}$라 하면 $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$이므로 $\quad|\vec{p}|=6$
즉 $\vec{p}\cdot\vec{p}=6^2$이므로 $\quad(x,\ y,\ z)\cdot(x,\ y,\ z)=6^2$
$\therefore x^2+y^2+z^2=36$

답 $x^2+y^2+z^2=36$

0912 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하고 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라 하면 $\overrightarrow{AP}=\vec{p}-\vec{a}$이므로
$|\vec{p}-\vec{a}|=3$

즉 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=3^2$이므로

$(x+3,\ y-6,\ z+1)\cdot(x+3,\ y-6,\ z+1)=3^2$

$\therefore (x+3)^2+(y-6)^2+(z+1)^2=9$

답 $(x+3)^2+(y-6)^2+(z+1)^2=9$

유형 01 방향벡터가 주어진 직선의 방정식 본책 138쪽

① 점 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(u_1,\ u_2,\ u_3)$인 직선의 방정식

➡ $\dfrac{x-x_1}{u_1}=\dfrac{y-y_1}{u_2}=\dfrac{z-z_1}{u_3}$ (단, $u_1u_2u_3\neq0$)

② 직선 $\dfrac{x-x'}{u_1}=\dfrac{y-y'}{u_2}=\dfrac{z-z'}{u_3}$과 평행한 직선의 방향벡터

➡ $\vec{u}=(u_1,\ u_2,\ u_3)$

0913 직선 $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=-z$의 방향벡터는 $(2,\ 3,\ -1)$이므로 점 $(-1,\ 2,\ -3)$을 지나고 방향벡터가 $(2,\ 3,\ -1)$인 직선의 방정식은

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{-1}$$

이 직선이 점 $(a,\ 5,\ b)$를 지나므로

$$\frac{a+1}{2}=\frac{5-2}{3}=\frac{b+3}{-1}\qquad \therefore a=1,\ b=-4$$

$\therefore a+b=-3$

답 ①

0914 $3x-9=-4y+8=z+5$에서

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+5}{12}$$

이 직선의 방향벡터는 $(4,\ -3,\ 12)$이므로 점 $(5,\ -1,\ 0)$을 지나고 방향벡터가 $(4,\ -3,\ 12)$인 직선의 방정식은

$$\frac{x-5}{4}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{12}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

이때 ④ $\dfrac{1-5}{4}=\dfrac{2+1}{-3}=\dfrac{-12}{12}$이므로 점 $(1,\ 2,\ -12)$는 직선 ㉠ 위의 점이다.

답 ④

0915 점 $(2,\ 3,\ 4)$를 지나고 방향벡터가 $(1,\ 2,\ 4)$인 직선의 방정식은 $x-2=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-4}{4}$ ➊

$z=0$을 위의 식에 대입하면

$x-2=\dfrac{y-3}{2}=-1\qquad \therefore x=1,\ y=1$ ➋

따라서 주어진 직선이 xy평면과 만나는 점의 좌표는 $(1,\ 1,\ 0)$이므로 $a=1,\ b=1,\ c=0$

$\therefore a^2+b^2+c^2=1+1+0=2$ ➌

답 2

채점 기준표

➊ 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
➋ $z=0$일 때, x, y의 값을 구할 수 있다.	30%
➌ $a^2+b^2+c^2$의 값을 구할 수 있다.	30%

0916 점 $(-4,\ 3,\ 7)$을 지나고 z축에 평행한 직선의 방정식은

$x=-4,\ y=3$

이 직선과 원점 사이의 거리는 점 $(-4,\ 3,\ 0)$과 원점 사이의 거리와 같으므로

$\sqrt{(-4)^2+3^2+0^2}=5$

답 5

0917 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{3\times3+1\times(-1)}{3+1},\ \frac{3\times2+1\times(-6)}{3+1},\ \frac{3\times(-5)+1\times(-1)}{3+1}\right)$$

$\therefore P(2,\ 0,\ -4)$

직선 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{5-y}{4}=z+9$의 방향벡터는 $(2,\ -4,\ 1)$이므로 점 $P(2,\ 0,\ -4)$를 지나고 방향벡터가 $(2,\ -4,\ 1)$인 직선의 방정식은

$\dfrac{x-2}{2}=-\dfrac{y}{4}=z+4$

답 $\dfrac{x-2}{2}=-\dfrac{y}{4}=z+4$

유형 02 두 점을 지나는 직선의 방정식 본책 138쪽

두 점 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$를 지나는 직선의 방정식

➡ $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ (단, $x_1\neq x_2,\ y_1\neq y_2,\ z_1\neq z_2$)

0918 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-4}{-1-4}=\frac{z+10}{0+10}$$

$$\therefore \frac{x-1}{2}=\frac{4-y}{5}=\frac{z+10}{10}$$

$y=0$을 위의 식에 대입하면

$$\frac{x-1}{2}=\frac{4}{5}=\frac{z+10}{10}$$

$\therefore x=\dfrac{13}{5},\ z=-2$

따라서 주어진 직선이 zx평면과 만나는 점의 좌표는 $\left(\dfrac{13}{5},\ 0,\ -2\right)$이므로

$p=\dfrac{13}{5},\ q=0,\ r=-2$

$\therefore p+q+r=\dfrac{3}{5}$

답 ③

0919 구의 중심의 좌표는 $(1,\ 3,\ -2)$이므로 두 점 $(-1,\ 1,\ a)$, $(1,\ 3,\ -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{-1-1}=\frac{y-3}{1-3}=\frac{z+2}{a+2}$$

$$\therefore \frac{1-x}{2}=\frac{3-y}{2}=\frac{z+2}{a+2}$$

이 직선이 y축 위의 점 $(0,\ b,\ 0)$을 지나므로

$$\frac{1}{2}=\frac{3-b}{2}=\frac{2}{a+2}$$

$\therefore a=2,\ b=2$

$\therefore a+b=4$

답 ⑤

0920 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-4}{6-4}=\frac{z+3}{3+3}$$

$\therefore x-1=\frac{y-4}{2}=\frac{z+3}{6}$ ··· ❶

점 C$(a,\ -2,\ b)$가 이 직선 위에 있으므로

$$a-1=\frac{-2-4}{2}=\frac{b+3}{6}$$

$\therefore a=-2,\ b=-21$ ··· ❷

$\therefore ab=42$ ··· ❸

답 42

채점 기준표

❶ 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10%

0921 정육면체의 한 모서리의 길이가 4이므로

A$(4,\ 0,\ 4)$, P$(0,\ 4,\ 2)$

따라서 두 점 A, P를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-0}{4-0}=\frac{y-4}{0-4}=\frac{z-2}{4-2},\quad \frac{x}{4}=\frac{4-y}{4}=\frac{z-2}{2}$$

$\therefore x=4-y=2z-4$

답 ③

유형 03 두 직선의 교점 본책 139쪽

두 직선 $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$, $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$의 교점의 좌표는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}=t$ (t는 실수)로 놓고 x, y, z를 t로 나타낸다.

(ii) $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}=s$ (s는 실수)로 놓고 x, y, z를 s로 나타낸다.

(iii) (i), (ii)의 식을 연립하여 풀어 t, s의 값을 구한다.

(iv) (iii)에서 구한 값을 (i) 또는 (ii)의 식에 대입하여 교점의 좌표를 구한다.

0922 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y+3}{-2+3}=\frac{z-1}{-1-1},\text{ 즉 }\frac{x-1}{2}=y+3=\frac{1-z}{2}$$

이므로 $\frac{x-1}{2}=y+3=\frac{1-z}{2}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=2t+1,\ y=t-3,\ z=-2t+1$ ······ ㉠

$\frac{x+3}{2}=\frac{y+1}{-3}=z-2=s$ (s는 실수)로 놓으면

$x=2s-3,\ y=-3s-1,\ z=s+2$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $t=-1,\ s=1$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는 $(-1,\ -4,\ 3)$이므로

$p=-1,\ q=-4,\ r=3$

$\therefore p+q+r=-2$

답 ①

0923 $x=\frac{y+4}{2}=\frac{z}{4}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=t,\ y=2t-4,\ z=4t$ ······ ㉠ ··· ❶

$\frac{x+4}{2}=y+3=\frac{z+1}{3}=s$ (s는 실수)로 놓으면

$x=2s-4,\ y=s-3,\ z=3s-1$ ······ ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $t=2,\ s=3$

즉 두 직선 l, m의 교점의 좌표는 $(2,\ 0,\ 8)$ ··· ❸

따라서 두 점 $(2,\ 0,\ 8)$, $(1,\ -5,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y+5}{0+5}=\frac{z-6}{8-6}$$

$\therefore x-1=\frac{y+5}{5}=\frac{z-6}{2}$ ··· ❹

답 $x-1=\frac{y+5}{5}=\frac{z-6}{2}$

채점 기준표

❶ 직선 l의 방정식을 매개변수 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
❷ 직선 m의 방정식을 매개변수 s에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
❸ 두 직선 l, m의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❹ 두 직선 l, m의 교점과 점 $(1,\ -5,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30%

0924 직선 AB의 방정식은

$$\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-1}{2-1}=\frac{z+2}{2+2},\text{ 즉 }\frac{x+1}{3}=y-1=\frac{z+2}{4}$$

이므로 $\frac{x+1}{3}=y-1=\frac{z+2}{4}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=3t-1,\ y=t+1,\ z=4t-2$ ······ ㉠

직선 CD의 방정식은

$$\frac{x-4}{5-4}=\frac{y-1}{3-1}=\frac{z-1}{m-1},\text{ 즉 }x-4=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{m-1}$$

이므로 $x-4=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{m-1}=s$ (s는 실수)로 놓으면

$x=s+4,\ y=2s+1,\ z=(m-1)s+1$ ······ ㉡

두 직선 AB, CD가 한 점에서 만나려면 ㉠, ㉡에서

$3t-1=s+4,\ t+1=2s+1,\ 4t-2=(m-1)s+1$

을 만족시키는 $(t,\ s)$가 하나 존재해야 한다.

$3t-1=s+4$, $t+1=2s+1$을 연립하여 풀면

$t=2,\ s=1$

이것을 $4t-2=(m-1)s+1$에 대입하면

$m=6$

답 6

유형 04 직선과 구의 교점 본책 139쪽

직선 $\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{u_2}=\frac{z-z_1}{u_3}$과 구의 교점의 좌표는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{u_2}=\frac{z-z_1}{u_3}=t$ (t는 실수)로 놓고 x, y, z를 t로 나타낸다.

(ii) (i)의 식을 구의 방정식에 대입하여 t의 값을 구한다.

(iii) (ii)에서 구한 값을 (i)의 식에 대입하여 교점의 좌표를 구한다.

0925 $\dfrac{1-x}{2}=\dfrac{y-2}{2}=z+1=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=-2t+1,\ y=2t+2,\ z=t-1$ ······ ㉠

㉠을 주어진 구의 방정식에 대입하면

$(-2t+1)^2+(2t+2)^2+(t-1)^2=6$

$9t^2+2t=0,\quad t(9t+2)=0$

$\therefore t=-\dfrac{2}{9}$ 또는 $t=0$

$t=-\dfrac{2}{9}$를 ㉠에 대입하면 $\quad x=\dfrac{13}{9},\ y=\dfrac{14}{9},\ z=-\dfrac{11}{9}$

$t=0$을 ㉠에 대입하면 $\quad x=1,\ y=2,\ z=-1$

즉 교점의 좌표가 $\left(\dfrac{13}{9},\ \dfrac{14}{9},\ -\dfrac{11}{9}\right)$, $(1,\ 2,\ -1)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{\left(\dfrac{13}{9}-1\right)^2+\left(\dfrac{14}{9}-2\right)^2+\left(-\dfrac{11}{9}+1\right)^2}=\dfrac{2}{3}$ 답 $\dfrac{2}{3}$

0926 $\dfrac{x-1}{2}=y-a=z=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=2t+1,\ y=t+a,\ z=t$

이 식을 주어진 구의 방정식에 대입하면

$(2t+2)^2+(t+a)^2+(t-1)^2=8$

$\therefore 6t^2+2(a+3)t+a^2-3=0$ ······ ㉠

직선과 구가 서로 다른 두 점에서 만나려면 t에 대한 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(a+3)^2-6(a^2-3)>0$

$5a^2-6a-27<0,\quad (5a+9)(a-3)<0$

$\therefore -\dfrac{9}{5}<a<3$

따라서 $\alpha=-\dfrac{9}{5}$, $\beta=3$이므로 $\quad \alpha+\beta=\dfrac{6}{5}$ 답 $\dfrac{6}{5}$

0927 $x-2=\dfrac{y}{2}=z+1=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=t+2,\ y=2t,\ z=t-1$

이 식을 주어진 구의 방정식에 대입하면

$(t+2)^2+(2t)^2+(t-1)^2-4+k=0$

$\therefore 6t^2+2t+1+k=0$ ······ ㉠

직선과 구가 접하려면 이차방정식 ㉠이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1-6(1+k)=0 \quad \therefore k=-\dfrac{5}{6}$ 답 ①

0928 중심이 $C(0,\ 1,\ -1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{14}$인 구의 방정식은

$x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=14$

$x=\dfrac{y}{2}=-z=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=t,\ y=2t,\ z=-t$ ······ ㉠

㉠을 구의 방정식에 대입하면

$t^2+(2t-1)^2+(-t+1)^2=14$

$t^2-t-2=0,\quad (t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=2$

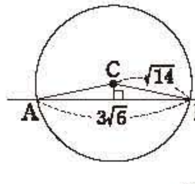
$t=-1$을 ㉠에 대입하면 $\quad x=-1,\ y=-2,\ z=1$

$t=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad x=2,\ y=4,\ z=-2$

즉 교점의 좌표가 $(-1,\ -2,\ 1)$, $(2,\ 4,\ -2)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(2+1)^2+(4+2)^2+(-2-1)^2}=3\sqrt{6}$

오른쪽 그림에서 $\triangle CAB$의 높이는



$\sqrt{(\sqrt{14})^2-\left(\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \triangle CAB=\dfrac{1}{2}\times 3\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ 답 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

유형 05 두 직선이 이루는 각의 크기 본책 140쪽

방향벡터가 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$인 두 직선 l, m이 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\quad \cos\theta=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

0929 두 점 A, B를 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-1+3,\ 1+1,\ 1)=(2,\ 2,\ 1)$

두 점 C, D를 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{v}$라 하면

$\vec{v}=\overrightarrow{CD}=(4-5,\ -1-3,\ 2-1)=(-1,\ -4,\ 1)$

두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{|2\times(-1)+2\times(-4)+1\times1|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2}}$

$=\dfrac{9}{3\times3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{4}$ 답 $\dfrac{\pi}{4}$

0930 $l:\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{3}=z-2,\ m:\ \dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$에서 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(2,\ 3,\ 1),\ \vec{v}=(-3,\ -1,\ 2)$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{|2\times(-3)+3\times(-1)+1\times2|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+2^2}}$

$=\dfrac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 답 ⑤

0931 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(t-2,\ t-3,\ t),\ \vec{v}=(2,\ 1,\ 1)$

두 직선이 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$이므로

$\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\cos\dfrac{\pi}{3}$

$\dfrac{|(t-2)\times2+(t-3)\times1+t\times1|}{\sqrt{(t-2)^2+(t-3)^2+t^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\dfrac{1}{2}$

$$\frac{|4t-7|}{\sqrt{3t^2-10t+13}\sqrt{6}}=\frac{1}{2}$$

$\sqrt{6(3t^2-10t+13)}=2|4t-7|$

양변을 제곱하여 정리하면 $23t^2-82t+59=0$

$(t-1)(23t-59)=0$ $\quad\therefore t=1$ ($\because$ t는 정수) 답 1

0932 직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$, x축, y축, z축의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$이라 하면

$\vec{u}=(1,\ 2,\ 3)$, $\vec{u_1}=(1,\ 0,\ 0)$, $\vec{u_2}=(0,\ 1,\ 0)$, $\vec{u_3}=(0,\ 0,\ 1)$ ⇢ ❶

$$\therefore \cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{u_1}|}{|\vec{u}||\vec{u_1}|}=\frac{|1\times1|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\cos\beta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u}||\vec{u_2}|}=\frac{|2\times1|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\cos\gamma=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{u_3}|}{|\vec{u}||\vec{u_3}|}=\frac{|3\times1|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{3}{\sqrt{14}}$$ ⇢ ❷

즉 $\cos^2\alpha=\frac{1}{14}$, $\cos^2\beta=\frac{2}{7}$, $\cos^2\gamma=\frac{9}{14}$이므로

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=3-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)$$
$$=3-1=2$$ ⇢ ❸

답 2

채점 기준표

❶ 직선 l과 x축, y축, z축의 방향벡터를 구할 수 있다.	20%
❷ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$의 값을 구할 수 있다.	30%

유형 06 두 직선의 위치 관계 본책 140쪽

두 직선 l, m의 방향벡터가 각각 $\vec{u}=(u_1,\ u_2,\ u_3)$, $\vec{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3)$일 때

① $l \,/\!/\, m \iff \vec{u}=k\vec{v} \iff u_1=kv_1,\ u_2=kv_2,\ u_3=kv_3$ (단, $k\neq0$)

② $l\perp m \iff \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \iff u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=0$

0933 두 점 A, B를 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(a+6,\ b-3,\ -4)$

직선 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z+9}{2}$의 방향벡터를 $\vec{v}$라 하면

$\vec{v}=(2,\ 3,\ 2)$

이때 두 직선이 서로 평행하므로 $\vec{u}=k\vec{v}$ $(k\neq0)$라 하면

$a+6=2k$, $b-3=3k$, $-4=2k$

$\therefore k=-2$, $a=-10$, $b=-3$

$\therefore a+b=-13$ 답 ③

0934 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(2,\ 3,\ 1)$, $\vec{v}=(p,\ q,\ 2)$

이때 두 직선이 일치하므로 $\vec{v}=t\vec{u}$ $(t\neq0)$라 하면

$p=2t$, $q=3t$, $2=t$

$\therefore p=4$, $q=6$

또 직선 m 위의 점 $(-3,\ 0,\ -2)$가 직선 l 위에 있어야 하므로

$\frac{-3-3}{2}=\frac{k}{3}=-2-1$ $\quad\therefore k=-9$

$\therefore p+q+k=1$ 답 ①

다른 풀이 직선 l의 방정식의 각 변에 3을 더하면

$\frac{x+3}{2}=\frac{y+k+9}{3}=z+2$

각 변을 2로 나누면

$\frac{x+3}{4}=\frac{y+k+9}{6}=\frac{z+2}{2}$

이 직선이 직선 m과 일치하므로

$p=4$, $q=6$, $k=-9$

0935 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$라 하면

$\vec{u_1}=(3,\ 4,\ 5)$, $\vec{u_2}=(1,\ 2,\ 3)$

구하는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}=(a,\ b,\ c)$라 하면 $\vec{u_1}\perp\vec{u}$, $\vec{u_2}\perp\vec{u}$이므로

$\vec{u_1}\cdot\vec{u}=3a+4b+5c=0$ ⋯⋯ ㉠

$\vec{u_2}\cdot\vec{u}=a+2b+3c=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=c$, $b=-2c$

$\therefore \vec{u}=(c,\ -2c,\ c)$

따라서 원점을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(c,\ -2c,\ c)$인 직선의 방정식은 $\frac{x}{c}=\frac{y}{-2c}=\frac{z}{c}$

$\therefore x=-\frac{y}{2}=z$ 답 $x=-\frac{y}{2}=z$

0936 세 직선 l, m, n의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$이라 하면

$\vec{u_1}=(2,\ -3,\ 1)$, $\vec{u_2}=(p,\ q,\ -4)$, $\vec{u_3}=(-2,\ 0,\ r)$

$l \,/\!/\, m$이므로 $\vec{u_2}=k\vec{u_1}$ $(k\neq0)$이라 하면

$p=2k$, $q=-3k$, $-4=k$ $\quad\therefore p=-8$, $q=12$

$\therefore \vec{u_2}=(-8,\ 12,\ -4)$

또 $m\perp n$이므로 $\vec{u_2}\cdot\vec{u_3}=0$

$16-4r=0$ $\quad\therefore r=4$

$\therefore p+q+r=8$ 답 ⑤

0937 직선 $\frac{x-1}{a}=\frac{y-1}{b}=z$와 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$라 하면

$\vec{u}=(a,\ b,\ 1)$, $\vec{u_1}=(k+1,\ 2k+1,\ 1)$,

$\vec{u_2}=(k-5,\ -6k,\ k-3)$

직선 $\frac{x-1}{a}=\frac{y-1}{b}=z$와 두 직선 l, m이 모두 평행하므로

$\vec{u} \,/\!/\, \vec{u_1}$, $\vec{u} \,/\!/\, \vec{u_2}$, $\vec{u_1} \,/\!/\, \vec{u_2}$

따라서 $\vec{u_2}=t\vec{u_1}$ $(t\neq0)$이라 하면

$k-5=t(k+1)$, $-6k=t(2k+1)$, $k-3=t$

(i) $t=k-3$을 $k-5=t(k+1)$에 대입하면

$k-5=(k-3)(k+1)$, $\quad k^2-3k+2=0$

$(k-1)(k-2)=0$ $\quad\therefore k=1$ 또는 $k=2$

(ii) $t=k-3$을 $-6k=t(2k+1)$에 대입하면

$-6k=(k-3)(2k+1)$, $\quad 2k^2+k-3=0$

$(2k+3)(k-1)=0 \quad \therefore k=-\frac{3}{2}$ 또는 $k=1$

(i), (ii)에서 $k=1$이므로 $\quad \vec{u_1}=(2,\ 3,\ 1)$

이때 $\vec{u}=s\vec{u_1}\ (s\neq0)$이라 하면

$a=2s,\ b=3s,\ 1=s \quad \therefore a=2,\ b=3$

$\therefore a+b=5$

답 ⑤

0938 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=\left(1,\ 3,\ \frac{1}{2}\right),\ \vec{v}=\left(-1,\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{2}\right)$ ⋯➊

(i) $\vec{u}=k\vec{v}$를 만족시키는 실수 k의 값이 존재하지 않으므로 두 직선은 평행하지 않다. ⋯➋

(ii) $x-1=\frac{y}{3}=2(z-1)=t\ (t$는 실수$)$로 놓으면

$x=t+1,\ y=3t,\ z=\frac{1}{2}t+1$ ⋯⋯ ㉠

$3-x=3y=2(5-z)=s\ (s$는 실수$)$로 놓으면

$x=3-s,\ y=\frac{1}{3}s,\ z=5-\frac{1}{2}s$ ⋯⋯ ㉡

이때 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 t, s의 값이 존재하지 않으므로 두 직선은 만나지 않는다. ⋯➌

(i), (ii)에서 두 직선 l, m은 꼬인 위치에 있다. ⋯➍

답 꼬인 위치에 있다.

채점 기준표

➊ 두 직선 l, m의 방향벡터를 구할 수 있다.	20%
➋ 두 직선 l, m이 평행하지 않음을 알 수 있다.	20%
➌ 두 직선 l, m이 만나지 않음을 알 수 있다.	50%
➍ 두 직선 l, m의 위치 관계를 말할 수 있다.	10%

유형 07 두 직선의 위치 관계의 활용

본책 141쪽

방향벡터가 $\vec{u}$인 직선 l에 대하여

① 점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$

② 점 A와 직선 l에 대하여 대칭인 점을 A′이라 하면

$\overrightarrow{AA'}\cdot\vec{u}=0$

0939 $\frac{x-4}{3}=y-2=\frac{z-3}{2}=t\ (t$는 실수$)$로 놓으면

$x=3t+4,\ y=t+2,\ z=2t+3$

점 H는 주어진 직선 위에 있으므로 $H(3t+4,\ t+2,\ 2t+3)$으로 놓으면

$\overrightarrow{PH}=(3t+2,\ t-2,\ 2t+5)$

이때 주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(3,\ 1,\ 2)$이고 $\overrightarrow{PH}\perp\vec{u}$이므로 $\quad \overrightarrow{PH}\cdot\vec{u}=0$

$3(3t+2)+(t-2)+2(2t+5)=0$

$14t+14=0 \quad \therefore t=-1$

따라서 점 H의 좌표가 $(1,\ 1,\ 1)$이므로

$p=1,\ q=1,\ r=1$

$\therefore pqr=1$

답 ③

0940 점 Q의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 하면

$\overrightarrow{PQ}=(a-2,\ b-1,\ c-3)$

주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(1,\ 1,\ 1)$이고 $\overrightarrow{PQ}\perp\vec{u}$이므로 $\quad \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u}=0$

$a-2+b-1+c-3=0$

$\therefore a+b+c=6$ ⋯⋯ ㉠

또 $\overline{PQ}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{a+2}{2},\ \frac{b+1}{2},\ \frac{c+3}{2}\right)$

이고 이 점이 주어진 직선 위에 있으므로

$\frac{a+2}{2}=\frac{b+1}{2}-1=\frac{c+3}{2}+\frac{5}{2}$

$\therefore a+2=b-1=c+8$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=3,\ b=6,\ c=-3$

$\therefore Q(3,\ 6,\ -3)$

답 $Q(3,\ 6,\ -3)$

0941 $x-4=\frac{y+1}{2}=\frac{1-z}{2}=t\ (t$는 실수$)$로 놓으면

$x=t+4,\ y=2t-1,\ z=-2t+1$

점 H는 주어진 직선 위에 있으므로 $H(t+4,\ 2t-1,\ -2t+1)$로 놓으면

$\overrightarrow{PH}=(t+5,\ 2t-6,\ -2t+1)$ ⋯➊

이때 주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(1,\ 2,\ -2)$이고 $\overrightarrow{PH}\perp\vec{u}$이므로 $\quad \overrightarrow{PH}\cdot\vec{u}=0$

$t+5+2(2t-6)-2(-2t+1)=0$

$9t-9=0 \quad \therefore t=1$ ⋯➋

따라서 $\overrightarrow{PH}=(6,\ -4,\ -1)$이므로 두 점 P, H를 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x+1}{6}=\frac{5-y}{4}=-z$ ⋯➌

답 $\frac{x+1}{6}=\frac{5-y}{4}=-z$

채점 기준표

➊ $\overrightarrow{PH}$의 성분을 t로 나타낼 수 있다.	30%
➋ t의 값을 구할 수 있다.	40%
➌ 두 점 P, H를 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30%

유형 08 점과 직선 사이의 거리

본책 141쪽

점 A에서 직선 l: $\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{u_2}=\frac{z-z_1}{u_3}$에 내린 수선의 발을 H, 직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}=(u_1,\ u_2,\ u_3)$이라 할 때, 점 A와 직선 l 사이의 거리는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 점 H의 좌표를 t로 나타낸다.

➡ $H(x_1+u_1t,\ y_1+u_2t,\ z_1+u_3t)$

(ii) $\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}$에서 $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$임을 이용하여 t의 값을 구한다.

(iii) $|\overrightarrow{AH}|$를 구한다.

0942 $\frac{5-x}{2}=y-3=\frac{1-z}{3}=t\ (t$는 실수$)$로 놓으면

$x=-2t+5,\ y=t+3,\ z=-3t+1$

점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 직선 l 위에 있으므로 $\mathrm{H}(-2t+5,\ t+3,\ -3t+1)$로 놓을 수 있다.

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AH}}=(-2t,\ t+2,\ -3t-4)$

직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(-2,\ 1,\ -3)$이고 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\vec{u}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{u}=0$

$-2(-2t)+(t+2)-3(-3t-4)=0$

$14t+14=0 \qquad \therefore t=-1$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(2,\ 1,\ -1)$이므로 구하는 거리는

$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$ 답 ⑤

0943 $\dfrac{x-1}{2}=y-2=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=2t+1,\ y=t+2,\ z=3$

점 H는 직선 l 위에 있으므로 $\mathrm{H}(2t+1,\ t+2,\ 3)$으로 놓으면

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(2t-1,\ t+1,\ 3)$

직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(2,\ 1,\ 0)$이고 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\vec{u}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{u}=0,\qquad 2(2t-1)+(t+1)=0$

$5t-1=0 \qquad \therefore t=\dfrac{1}{5}$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AH}}=\left(-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{6}{5},\ 3\right)$

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2$

$=\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(\dfrac{6}{5}\right)^2+3^2=\dfrac{54}{5}$ 답 $\dfrac{54}{5}$

0944 $\dfrac{x-1}{3}=2-y=\dfrac{z-3}{2}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=3t+1,\ y=-t+2,\ z=2t+3$

점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AH}}$의 길이와 같다.

점 H는 직선 l 위에 있으므로 $\mathrm{H}(3t+1,\ -t+2,\ 2t+3)$으로 놓으면

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(3t-2,\ -t+4,\ 2t-2)$

직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(3,\ -1,\ 2)$이고 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\vec{u}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{u}=0$

$3(3t-2)-(-t+4)+2(2t-2)=0$

$14t-14=0 \qquad \therefore t=1$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(1,\ 3,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이의 최솟값은

$\overline{\mathrm{AH}}=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$ 답 ③

다른 풀이 $\dfrac{x-1}{3}=2-y=\dfrac{z-3}{2}=s$ (s는 실수)로 놓으면 점 B는 직선 l 위에 있으므로 $\mathrm{B}(3s+1,\ -s+2,\ 2s+3)$으로 놓을 수 있다.

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3s-2)^2+(-s+4)^2+(2s-2)^2}$

$=\sqrt{14s^2-28s+24}$

$=\sqrt{14(s-1)^2+10}$

$\geq\sqrt{10}$

0945 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{-4}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=2t+3,\ y=3t,\ z=-4t-2$

점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 직선 l 위에 있으므로 $\mathrm{H}(2t+3,\ 3t,\ -4t-2)$로 놓을 수 있다.

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AH}}=(2t+5,\ 3t+1,\ -4t-4)$

직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(2,\ 3,\ -4)$이고 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\vec{u}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{u}=0$

$2(2t+5)+3(3t+1)-4(-4t-4)=0$

$29t+29=0 \qquad \therefore t=-1$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(3,\ -2,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$

이때 $\overline{\mathrm{AH}}$의 길이는 정삼각형 ABC의 높이이므로 정삼각형의 한 변의 길이를 a라 하면

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\sqrt{13} \qquad \therefore a=\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$

따라서 $\triangle$ABC의 둘레의 길이는 $2\sqrt{39}$이다. 답 $2\sqrt{39}$

유형 09 꼬인 위치에 있는 두 직선 사이의 거리 본책 142쪽

방향벡터가 $\vec{u}$, $\vec{v}$이고 꼬인 위치에 있는 두 직선 l, m 사이의 최단 거리는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 직선 l 위의 점 P의 좌표와 직선 m 위의 점 Q의 좌표를 매개변수로 나타낸다.

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\vec{u}$, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\vec{v}$를 만족시키는 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$를 구한다.

(iii) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$를 구한다.

0946 $\dfrac{x-1}{2}=y-1=\dfrac{1-z}{2}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=2t+1,\ y=t+1,\ z=-2t+1$

$x=4-y=\dfrac{z}{2}=s$ (s는 실수)로 놓으면

$x=s,\ y=-s+4,\ z=2s$

$\mathrm{P}(2t+1,\ t+1,\ -2t+1)$, $\mathrm{Q}(s,\ -s+4,\ 2s)$로 놓으면

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(s-2t-1,\ -s-t+3,\ 2s+2t-1)$

두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(2,\ 1,\ -2)$, $\vec{v}=(1,\ -1,\ 2)$

이때 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\vec{u}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{u}=0$이므로

$2(s-2t-1)+(-s-t+3)-2(2s+2t-1)=0$

$\therefore -3s-9t+3=0$ ...... ㉠

또 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\vec{v}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{v}=0$이므로

$(s-2t-1)-(-s-t+3)+2(2s+2t-1)=0$

$\therefore 6s+3t-6=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $t=0,\ s=1$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(0,\ 2,\ 1)$이므로 두 직선 사이의 최단 거리는

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\sqrt{0^2+2^2+1^2}=\sqrt{5}$ 답 ②

0947 $\dfrac{y-2}{2}=z-1=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=1,\ y=2t+2,\ z=t+1$

$2-x=y-5=\dfrac{z+1}{-2}=s$ (s는 실수)로 놓으면

$x=-s+2,\ y=s+5,\ z=-2s-1$

$\mathrm{P}(1,\ 2t+2,\ t+1)$, $\mathrm{Q}(-s+2,\ s+5,\ -2s-1)$로 놓으면

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(-s+1,\ s-2t+3,\ -2s-t-2)$ ⋯➊

두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(0,\ 2,\ 1)$, $\vec{v}=(-1,\ 1,\ -2)$

이때 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\vec{u}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{u}=0$이므로

$2(s-2t+3)+(-2s-t-2)=0$

$-5t+4=0 \qquad \therefore t=\dfrac{4}{5}$

또 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\vec{v}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{v}=0$이므로

$-(-s+1)+(s-2t+3)-2(-2s-t-2)=0$

$6s+6=0 \qquad \therefore s=-1$ ⋯➋

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(2,\ \dfrac{2}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right)$이므로

$h^2=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=2^2+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{24}{5}$

$\therefore 5h^2=24$ ⋯➌

답 24

채점 기준표

➊ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$의 성분을 t, s로 나타낼 수 있다.	30%
➋ t, s의 값을 구할 수 있다.	50%
➌ $5h^2$의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 10 법선벡터가 주어진 평면의 방정식

본책 142쪽

① 점 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고 법선벡터가 $(a,\ b,\ c)$인 평면의 방정식

➡ $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$

② 방향벡터가 $(u_1,\ u_2,\ u_3)$인 직선 l과 평면 α가 수직

➡ 평면 α의 법선벡터는 $(u_1,\ u_2,\ u_3)$

0948 점 $\mathrm{A}(2,\ 3,\ 4)$를 지나고 법선벡터가 $(3,\ -2,\ -1)$인 평면의 방정식은
직선의 방향벡터

$3(x-2)-2(y-3)-(z-4)=0$

$\therefore 3x-2y-z+4=0$

따라서 $a=3$, $b=-2$, $c=4$이므로

$abc=-24$

답 -24

0949 직선 $x=4$, $y=5$는 z축과 평행하므로 평면의 법선벡터는 $(0,\ 0,\ 1)$이다.

따라서 점 $\mathrm{A}(2,\ 1,\ 3)$을 지나고 법선벡터가 $(0,\ 0,\ 1)$인 평면의 방정식은

$z=3$

답 ③

0950 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$는 주어진 평면에 수직이고, 점 H는 주어진 평면 위의 점이므로 점 $\mathrm{H}(2,\ -1,\ -6)$을 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(-3,\ -4,\ -4)$인 평면의 방정식은

$-3(x-2)-4(y+1)-4(z+6)=0$

$\therefore 3x+4y+4z+22=0$

따라서 $a=3$, $b=4$, $c=4$이므로

$a+b-c=3$

답 3

0951 점 C의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times3+2\times0}{1+2},\ \dfrac{1\times4+2\times(-2)}{1+2},\ \dfrac{1\times(-1)+2\times2}{1+2}\right)$

$\therefore \mathrm{C}(1,\ 0,\ 1)$ ⋯➊

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$가 주어진 평면에 수직이므로 점 C를 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,\ 6,\ -3)$인 평면의 방정식은

$3(x-1)+6y-3(z-1)=0$

$\therefore x+2y-z=0$ ⋯➋

따라서 $a=1$, $b=-1$, $c=0$이므로

$a+b-c=0$ ⋯➌

답 0

채점 기준표

➊ 점 C의 좌표를 구할 수 있다.	30%
➋ 점 C를 지나고 직선 AB에 수직인 평면의 방정식을 구할 수 있다.	50%
➌ $a+b-c$의 값을 구할 수 있다.	20%

0952 구의 중심을 C라 하면 $\mathrm{C}(1,\ -1,\ -2)$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(1,\ 1,\ -2)$

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$는 주어진 평면에 수직이므로 점 $\mathrm{P}(2,\ 0,\ -4)$를 지나고 법선벡터가 $(1,\ 1,\ -2)$인 평면의 방정식은

$x-2+y-2(z+4)=0$

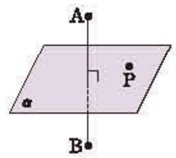
$\therefore x+y-2z-10=0$

$x=0$, $y=0$을 위의 식에 대입하면

$-2z-10=0 \qquad \therefore z=-5$

답 ④

0953 점 A에서 발사된 빛이 점 A로 돌아왔으므로 오른쪽 그림과 같이 직선 AB와 평면 α는 수직이다.



따라서 평면 α의 법선벡터는

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 2,\ -6)$

즉 평면 α는 점 $\mathrm{P}(2,\ -3,\ 1)$을 지나고 법선벡터가 $(2,\ 2,\ -6)$이므로

$2(x-2)+2(y+3)-6(z-1)=0$

$\therefore x+y-3z+4=0$

답 $x+y-3z+4=0$

유형 11 세 점을 지나는 평면의 방정식

본책 143쪽

세 점을 지나는 평면의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 구하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$으로 놓는다.

(ii) (i)의 식에 주어진 세 점의 좌표를 각각 대입하여 연립방정식을 세운다.

(iii) (ii)의 연립방정식을 풀어 a, b, c, d를 한 문자로 나타낸다.

(iv) (iii)을 (i)의 식에 대입하여 방정식을 구한다.

0954 주어진 세 점을 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$으로 놓으면

$a-b+c+d=0$ ⋯⋯ ㉠

$-2a-4b+4c+d=0$ ...... ㉡
$a-3b+d=0$ ...... ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $a=-3b,\ c=-2b,\ d=6b$
따라서 평면의 방정식은
$-3bx+by-2bz+6b=0$
$\therefore 3x-y+2z-6=0$
이때 ② $3\times2-2+2\times1-6=0$이므로 점 $(2,\ 2,\ 1)$은 평면 $3x-y+2z-6=0$ 위의 점이다.
답 ②

0955 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$으로 놓으면
$4a+2b-c+d=0$ ...... ㉠
$a+3b+2c+d=0$ ...... ㉡
$3a+4b+c+d=0$ ...... ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $a=\frac{4}{5}c,\ b=-\frac{3}{5}c,\ d=-c$
따라서 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식은
$\frac{4}{5}cx-\frac{3}{5}cy+cz-c=0$
$\therefore 4x-3y+5z-5=0$
이때 점 $\mathrm{D}(-1,\ 2,\ k)$가 이 평면 위에 있으므로
$-4-6+5k-5=0,\quad 5k-15=0$
$\therefore k=3$
답 3

0956 C_2: $x^2+y^2+z^2-2x-8y-4z-14=0$에서
$(x-1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=35$
평면이 구의 부피를 이등분하려면 구의 중심을 지나야 하므로 세 구의 부피를 모두 이등분하는 평면은 세 구의 중심 $(1,\ 1,\ 0)$, $(1,\ 4,\ 2)$, $(2,\ 3,\ 1)$을 모두 지나야 한다. 즉
$a+b+1=0$ ...... ㉠
$a+4b+2c+1=0$ ...... ㉡
$2a+3b+c+1=0$ ...... ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-2,\ c=3$
$\therefore abc=-6$
답 -6

유형 12 직선을 포함하는 평면의 방정식 본책 143쪽

직선 l의 방향벡터가 $\vec{u}$, 평면 α의 법선벡터가 $\vec{n}$일 때 평면 α가 직선 l을 포함하면 $\vec{u}\perp\vec{n}$

0957 구하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$으로 놓으면 평면의 법선벡터 $(a,\ b,\ c)$와 직선 l의 방향벡터 $(2,\ -3,\ -2)$가 서로 수직이므로 $(a,\ b,\ c)\cdot(2,\ -3,\ -2)=0$
$\therefore 2a-3b-2c=0$ ...... ㉠
한편 점 $\mathrm{A}(3,\ -1,\ 1)$과 직선 l 위의 점 $(-1,\ 2,\ 6)$은 모두 평면 $ax+by+cz+d=0$ 위에 있으므로
$3a-b+c+d=0$ ...... ㉡
$-a+2b+6c+d=0$ ...... ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $a=\frac{9}{2}b,\ c=3b,\ d=-\frac{31}{2}b$
따라서 구하는 평면의 방정식은
$\frac{9}{2}bx+by+3bz-\frac{31}{2}b=0$
$\therefore 9x+2y+6z=31$
답 ①

0958 구하는 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하고, 두 직선 $l,\ m$의 방향벡터를 각각 $\vec{u},\ \vec{v}$라 하면
$\vec{n}=(a,\ b,\ c),\ \vec{u}=(2,\ 1,\ -2),\ \vec{v}=(-2,\ 1,\ 3)$
평면이 두 직선 $l,\ m$을 포함하므로 $\vec{n}\perp\vec{u},\ \vec{n}\perp\vec{v}$
$\vec{n}\perp\vec{u}$에서 $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$이므로
$2a+b-2c=0$ ...... ㉠
$\vec{n}\perp\vec{v}$에서 $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$이므로
$-2a+b+3c=0$ ...... ㉡
이때 평면은 직선 l 위의 점 $(0,\ 1,\ -1)$을 지나므로
$b-c+6=0$ ...... ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=5,\ b=-2,\ c=4$
$\therefore abc=-40$
답 -40

0959 세 직선 $\frac{x}{2}=-y=z,\ \frac{x}{2}=y=\frac{z}{3a},\ -x=\frac{y}{2}=\frac{z}{a}$의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1},\ \vec{u_2},\ \vec{u_3}$이라 하면
$\vec{u_1}=(2,\ -1,\ 1),\ \vec{u_2}=(2,\ 1,\ 3a),\ \vec{u_3}=(-1,\ 2,\ a)$
세 직선을 모두 포함하는 평면의 법선벡터를 $\vec{n}=(p,\ q,\ r)$라 하면
$\vec{n}\perp\vec{u_1},\ \vec{n}\perp\vec{u_2},\ \vec{n}\perp\vec{u_3}$
$\vec{n}\perp\vec{u_1}$에서 $\vec{n}\cdot\vec{u_1}=0$이므로
$2p-q+r=0$ ...... ㉠
$\vec{n}\perp\vec{u_2}$에서 $\vec{n}\cdot\vec{u_2}=0$이므로
$2p+q+3ar=0$ ...... ㉡
$\vec{n}\perp\vec{u_3}$에서 $\vec{n}\cdot\vec{u_3}=0$이므로
$-p+2q+ar=0$ ...... ㉢
㉠+㉡을 하면 $4p+r+3ar=0$
$\therefore p=-\frac{r+3ar}{4}$ ...... ㉣
㉠$\times2+$㉢을 하면 $3p+2r+ar=0$
$\therefore p=-\frac{2r+ar}{3}$ ...... ㉤
㉣, ㉤에서 $-\frac{r+3ar}{4}=-\frac{2r+ar}{3}$
$3r+9ar=8r+4ar\quad \therefore 5r(a-1)=0$
이 식이 r의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로
$a-1=0\quad \therefore a=1$
답 1

유형 13 두 평면의 교선을 포함하는 평면의 방정식 본책 144쪽

두 평면 $ax+by+cz+d=0,\ a'x+b'y+c'z+d'=0$의 교선을 포함하는 평면의 방정식
➡ $ax+by+cz+d+k(a'x+b'y+c'z+d')=0$ (단, k는 실수)

0960 주어진 두 평면의 교선을 포함하는 평면의 방정식은
$x+y-z+2+k(2x-y-z-1)=0$ (k는 실수) ...... ㉠
이 평면이 점 $(1,\ -1,\ -1)$을 지나므로
$3+3k=0\quad \therefore k=-1$

$k=-1$을 ㉠에 대입하여 정리하면 구하는 평면의 방정식은

$x-2y-3=0$ 답 ③

0961 주어진 두 평면의 교선을 포함하는 평면의 방정식은

$x+2y-z-1+k(y+z-3)=0$ (k는 실수) ⋯⋯ ㉠

이 평면이 원점을 지나므로

$-1-3k=0 \quad \therefore k=-\dfrac{1}{3}$ ➊

$k=-\dfrac{1}{3}$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$3x+5y-4z=0$ ➋

따라서 $a=3$, $b=-4$이므로 $\quad a-b=7$ ➌

답 7

채점 기준표

➊ 평면의 방정식을 $x+2y-z-1+k(y+z-3)=0$이라 하고 k의 값을 구할 수 있다.	50%
➋ 평면의 방정식을 구할 수 있다.	30%
➌ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20%

0962 주어진 두 평면의 교선을 포함하는 평면의 방정식은

$x+2y-z-4+k(x-3y+2z+1)=0$ (k는 실수) ⋯ ㉠

이 평면이 직선 위의 점 $(1,\ -1,\ 0)$을 지나므로

$-5+5k=0 \quad \therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$2x-y+z-3=0$

이 평면이 점 $(1,\ 2,\ a)$를 지나므로

$2-2+a-3=0 \quad \therefore a=3$ 답 3

유형 14 두 평면의 교선의 방정식

본책 144쪽

두 평면의 방정식을 연립하여 x, y, z 중 한 문자를 다른 두 문자에 대한 식으로 각각 나타낸다.

0963 $x+y-z=1$ ⋯⋯ ㉠

$x+2y-3z=6$ ⋯⋯ ㉡

㉠×2−㉡을 하면

$x+z=-4 \quad \therefore x=-z-4$ ⋯⋯ ㉢

㉠×3−㉡을 하면

$2x+y=-3 \quad \therefore x=\dfrac{y+3}{-2}$ ⋯⋯ ㉣

㉢, ㉣에서 구하는 교선의 방정식은

$x=\dfrac{y+3}{-2}=-z-4$ 답 ⑤

0964 $2x-3y+z=1$ ⋯⋯ ㉠

$x+2y-z=2$ ⋯⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면

$3x-y=3 \quad \therefore y=3x-3$ ⋯⋯ ㉢

㉠−㉡×2를 하면

$-7y+3z=-3 \quad \therefore y=\dfrac{3z+3}{7}$ ⋯⋯ ㉣

㉢, ㉣에서 교선의 방정식은

$3x-3=y=\dfrac{3z+3}{7} \qquad \therefore x-1=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{7}$

④ 교선의 방정식에 $x=2$, $y=4$, $z=8$을 대입하면 등식이 성립하지 않으므로 점 $(2,\ 4,\ 8)$은 교선이 지나지 않는다. 답 ④

0965 $x-2y-4z+2=0$ ⋯⋯ ㉠

$x-y+2=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면 $\quad -y-4z=0 \quad \therefore y=-4z$ ⋯⋯ ㉢

㉡에서 $\quad y=x+2$ ⋯⋯ ㉣

㉢, ㉣에서 교선의 방정식은

$x+2=y=-4z$ ➊

이므로 방향벡터는 $\quad \left(1,\ 1,\ -\dfrac{1}{4}\right)$ ➋

따라서 $a=1$, $b=-\dfrac{1}{4}$이므로 $\quad a+b=\dfrac{3}{4}$ ➌

답 $\dfrac{3}{4}$

채점 기준표

➊ 교선의 방정식을 구할 수 있다.	60%
➋ 교선의 방향벡터를 구할 수 있다.	20%
➌ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

다른 풀이 주어진 두 평면의 법선벡터를 각각 $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$라 하면

$\vec{n_1}=(1,\ -2,\ -4)$, $\vec{n_2}=(1,\ -1,\ 0)$

두 평면의 교선의 방향벡터를 $\vec{u}=(1,\ a,\ b)$라 하면 $\vec{n_1}\perp\vec{u}$, $\vec{n_2}\perp\vec{u}$이므로 $\quad \vec{n_1}\cdot\vec{u}=0$, $\vec{n_2}\cdot\vec{u}=0$

$(1,\ -2,\ -4)\cdot(1,\ a,\ b)=0$, $(1,\ -1,\ 0)\cdot(1,\ a,\ b)=0$

$1-2a-4b=0$, $1-a=0$

$\therefore a=1,\ b=-\dfrac{1}{4}$

0966 두 평면 $x+z=0$, $y=2$의 교선의 방정식은

$x=-z$, $y=2$

$x=-z=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=t$, $y=2$, $z=-t$

점 A에서 교선에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AH}}$의 길이와 같다.

점 H는 교선 위에 있으므로 $\mathrm{H}(t,\ 2,\ -t)$로 놓으면

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(t-1,\ -3,\ -t-3)$

교선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(1,\ 0,\ -1)$이고 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\vec{u}$이므로 $\quad \overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{u}=0$

$t-1-(-t-3)=0, \quad 2t+2=0 \quad \therefore t=-1$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(-2,\ -3,\ -2)$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이의 최솟값은

$\overline{\mathrm{AH}}=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{17}$ 답 $\sqrt{17}$

유형 15 직선과 평면의 교점

본책 145쪽

직선과 평면의 교점은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 직선 위의 점의 좌표를 매개변수로 나타낸다.

(ii) (i)의 좌표를 평면의 방정식에 대입하여 교점의 좌표를 구한다.

0967 $\frac{x-1}{2}=y-3=\frac{z-1}{4}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=2t+1,\ y=t+3,\ z=4t+1$

점 (a, b, c)는 주어진 직선 위에 있으므로

$a=2t+1,\ b=t+3,\ c=4t+1$ ······ ㉠

로 놓을 수 있다.

이때 점 $(2t+1, t+3, 4t+1)$은 평면 $3x-2y+z=0$ 위에 있으므로

$3(2t+1)-2(t+3)+4t+1=0$

$8t-2=0 \qquad \therefore t=\frac{1}{4}$

$t=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면 $\quad a=\frac{3}{2},\ b=\frac{13}{4},\ c=2$

$\therefore a-2b+c=\frac{3}{2}-2\times\frac{13}{4}+2=-3$ 답 -3

0968 $\overrightarrow{AH}$와 평면 $2x+3y-z=2$는 서로 수직이므로 이 평면의 법선벡터가 두 점 A, H를 지나는 직선의 방향벡터가 된다.

따라서 점 A$(4, 1, -5)$를 지나고 방향벡터가 $(2, 3, -1)$인 직선의 방정식은

$\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{3}=-z-5$

$\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{3}=-z-5=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=2t+4,\ y=3t+1,\ z=-t-5$

이므로 H$(2t+4, 3t+1, -t-5)$로 놓을 수 있다.

이때 점 H는 평면 $2x+3y-z=2$ 위에 있으므로

$2(2t+4)+3(3t+1)-(-t-5)=2$

$14t+14=0 \qquad \therefore t=-1$

따라서 점 H의 좌표는 $(2, -2, -4)$이므로

$a=2,\ b=-2,\ c=-4$

$\therefore a+b+c=-4$ 답 -4

다른 풀이 $\overrightarrow{AH}$는 평면 $2x+3y-z=2$에 수직이므로 평면의 법선벡터 $\vec{n}=(2, 3, -1)$과 평행하다.

즉 $\overrightarrow{AH}=k\vec{n}$ $(k\neq0)$이라 하면

$(a-4, b-1, c+5)=k(2, 3, -1)$

$a-4=2k,\ b-1=3k,\ c+5=-k$

$\therefore a=2k+4,\ b=3k+1,\ c=-k-5$ ······ ㉠

점 H는 주어진 평면 위에 있으므로

$2a+3b-c=2$

㉠을 위의 식에 대입하여 풀면 $\quad k=-1$

$\therefore a=2,\ b=-2,\ c=-4$

0969 $x+1=-\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{5}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=t-1,\ y=-4t-1,\ z=5t+2$ ······ ㉠

㉠을 $2x-y+z-12=0$에 대입하면

$2(t-1)-(-4t-1)+(5t+2)-12=0$

$11t-11=0 \qquad \therefore t=1$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 평면 α와 직선의 교점의 좌표는

$(0, -5, 7)$

또 ㉠을 $x-2y-z+5=0$에 대입하면

$(t-1)-2(-4t-1)-(5t+2)+5=0$

$4t+4=0 \qquad \therefore t=-1$

$t=-1$을 ㉠에 대입하면 평면 β와 직선의 교점의 좌표는

$(-2, 3, -3)$

따라서 두 평면에 의하여 잘린 선분의 길이는 두 점 $(0, -5, 7)$, $(-2, 3, -3)$ 사이의 거리와 같으므로

$\sqrt{(-2)^2+(3+5)^2+(-3-7)^2}=2\sqrt{42}$ 답 $2\sqrt{42}$

16 두 평면이 이루는 각의 크기 본책 145쪽

법선벡터가 각각 $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$인 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\quad \cos\theta=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$

0970 두 평면 $3x-4y+5z=6$, $x+y-z=3$의 법선벡터를 각각 $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$라 하면

$\vec{n_1}=(3, -4, 5),\ \vec{n_2}=(1, 1, -1)$

$\therefore \cos\theta=\frac{|3\times1+(-4)\times1+5\times(-1)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2+5^2}\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}$

$=\frac{6}{5\sqrt{2}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{5}$

$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{19}}{5}$ 답 ⑤

0971 두 평면 $x+(k+1)y+(k-2)z=9$, $-x+4y+z=1$의 법선벡터를 각각 $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$라 하면

$\vec{n_1}=(1, k+1, k-2),\ \vec{n_2}=(-1, 4, 1)$

두 평면이 이루는 각의 크기가 60°이므로

$\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\cos60°$

$\frac{|1\times(-1)+(k+1)\times4+(k-2)\times1|}{\sqrt{1^2+(k+1)^2+(k-2)^2}\sqrt{(-1)^2+4^2+1^2}}=\frac{1}{2}$

$\frac{|5k+1|}{3\sqrt{2}\sqrt{2(k^2-k+3)}}=\frac{1}{2}, \qquad 3\sqrt{k^2-k+3}=|5k+1|$

양변을 제곱하여 정리하면

$16k^2+19k-26=0, \qquad (k+2)(16k-13)=0$

$\therefore k=-2\ (\because k<0)$ 답 -2

0972 두 평면 $2x+y-z=1$, $x-2y-z=2$의 법선벡터를 각각 $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$라 하면

$\vec{n_1}=(2, 1, -1),\ \vec{n_2}=(1, -2, -1)$

두 평면이 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\cos\theta=\frac{|2\times1+1\times(-2)+(-1)\times(-1)|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{6}$

△ABC의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot4^2=4\sqrt{3}$이므로 구하는 정사영의 넓이는

$4\sqrt{3}\times\frac{1}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 답 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

SSEN 특강

정사영의 넓이

평면 α 위에 있는 도형의 넓이를 S, 이 도형의 평면 β 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 할 때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$S'=S\cos\theta$

유형 17 두 평면의 평행과 수직 (본책 145쪽)

두 평면 α, β의 법선벡터가 각각 $\vec{n_1}=(a_1,\ b_1,\ c_1)$, $\vec{n_2}=(a_2,\ b_2,\ c_2)$일 때

① $\alpha /\!/ \beta \iff \vec{n_1}=k\vec{n_2} \iff a_1=ka_2,\ b_1=kb_2,\ c_1=kc_2$ (단, $k\neq0$)

② $\alpha\perp\beta \iff \vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0 \iff a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

0973 구하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$으로 놓으면 이 평면의 법선벡터는 $(a,\ b,\ c)$이다.

두 평면 $ax+by+cz+d=0$, $x-y+3z=1$이 서로 수직이므로

$(a,\ b,\ c)\cdot(1,\ -1,\ 3)=0$

$\therefore a-b+3c=0$ …… ㉠

두 평면 $ax+by+cz+d=0$, $x+y-z=0$이 서로 수직이므로

$(a,\ b,\ c)\cdot(1,\ 1,\ -1)=0$

$\therefore a+b-c=0$ …… ㉡

또 점 $A(-1,\ 0,\ 2)$가 평면 $ax+by+cz+d=0$ 위에 있으므로

$-a+2c+d=0$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $b=-2a,\ c=-a,\ d=3a$

따라서 구하는 평면의 방정식은 $ax-2ay-az+3a=0$

$\therefore x-2y-z+3=0$ 답 ③

0974 두 평면 $x+(3-k)y+4kz+1=0$, $x-y+(k-2)z=0$의 법선벡터를 각각 $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$라 하면

$\vec{n_1}=(1,\ 3-k,\ 4k)$, $\vec{n_2}=(1,\ -1,\ k-2)$

두 평면이 서로 수직이므로 $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$

$1-(3-k)+4k(k-2)=0$

$4k^2-7k-2=0,\quad (4k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=-\frac{1}{4}$ 또는 $k=2$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{7}{4}$이다. 답 $\frac{7}{4}$

0975 두 점 A, B를 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라 하자.

두 평면 $ax+by+cz+d=0$, $x-2y-z=1$의 법선벡터를 각각 $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$라 하면

$\vec{n_1}=(a,\ b,\ c)$, $\vec{n_2}=(1,\ -2,\ -1)$

이때 두 평면이 서로 평행하므로 $\vec{n_1}=t\vec{n_2}$ $(t\neq0)$라 하면

$a=t,\ b=-2t,\ c=-t$

평면 $tx-2ty-tz+d=0$이 점 $A(2,\ -1,\ -4)$를 지나므로

$2t+2t+4t+d=0 \quad \therefore d=-8t$

따라서 평면 $tx-2ty-tz-8t=0$, 즉 $x-2y-z-8=0$이 점 $B(1,\ k,\ 1)$을 지나므로

$1-2k-1-8=0 \quad \therefore k=-4$ 답 -4

0976 두 평면 $x-y-3z+3=0$, $x+2y+z-1=0$의 교선을 포함하는 평면의 방정식은

$x-y-3z+3+k(x+2y+z-1)=0$ (k는 실수)

$\therefore (1+k)x+(-1+2k)y+(-3+k)z+3-k=0$

…… ㉠

평면 ㉠과 평면 $3x-2y+2z+1=0$의 법선벡터를 각각 $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$라 하면

$\vec{n_1}=(1+k,\ -1+2k,\ -3+k)$, $\vec{n_2}=(3,\ -2,\ 2)$

두 평면이 서로 수직이므로 $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$

$3(1+k)-2(-1+2k)+2(-3+k)=0$

$\therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면 $2x+y-2z+2=0$

이 평면이 점 $(5,\ 2,\ a)$를 지나므로

$10+2-2a+2=0 \quad \therefore a=7$ 답 ④

0977 주어진 네 평면의 법선벡터를 차례대로 $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$, $\vec{n_3}$, $\vec{n_4}$라 하면

$\vec{n_1}=(a,\ -2,\ 4)$, $\vec{n_2}=(4,\ a-2,\ -2)$,

$\vec{n_3}=(a,\ -k,\ 1)$, $\vec{n_4}=(k-3,\ a-4,\ 2k)$ ⋯➊

$\vec{n_1}\perp\vec{n_2}$이므로 $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$

$4a-2(a-2)-8=0$

$2a-4=0 \quad \therefore a=2$ ⋯➋

또 $\vec{n_3} /\!/ \vec{n_4}$이므로 $\vec{n_4}=t\vec{n_3}$ $(t\neq0)$이라 하면

$k-3=at,\ a-4=-kt,\ 2k=t$

$\therefore k=-1,\ t=-2$ ⋯➌

$\therefore a+k=1$ ⋯➍

답 1

채점 기준표	
➊ 네 평면의 법선벡터를 구할 수 있다.	20%
➋ a의 값을 구할 수 있다.	30%
➌ k의 값을 구할 수 있다.	40%
➍ $a+k$의 값을 구할 수 있다.	10%

유형 18 직선과 평면이 이루는 각의 크기 (본책 146쪽)

방향벡터가 $\vec{u}$인 직선과 법선벡터가 $\vec{n}$인 평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

➡ $\vec{u}$와 $\vec{n}$이 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta$

➡ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$

0978 주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$, 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면

$\vec{u}=(3,\ -4,\ 5)$, $\vec{n}=(4,\ 3,\ -5)$

직선과 평면이 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\vec{u}$와 $\vec{n}$이

이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{|3\times4+(-4)\times3+5\times(-5)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2+5^2}\sqrt{4^2+3^2+(-5)^2}}$$
$$=\frac{25}{\sqrt{50}\sqrt{50}}=\frac{1}{2}$$

즉 $\sin\theta=\frac{1}{2}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 답 $\frac{\pi}{6}$

SSEN 특강

$\frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수

① $\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\cos\theta$

② $\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\mp\sin\theta$ (복호동순)

③ $\tan\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\mp\cot\theta$ (복호동순)

0979 주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$, 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면 $\vec{u}=(1,\ 3,\ -1)$, $\vec{n}=(3,\ 1,\ 1)$

직선과 평면이 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\vec{u}$와 $\vec{n}$이 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{|1\times3+3\times1+(-1)\times1|}{\sqrt{1^2+3^2+(-1)^2}\sqrt{3^2+1^2+1^2}}=\frac{5}{11}$$

즉 $\sin\theta=\frac{5}{11}$이므로 $\cos\theta=\sqrt{1-\left(\frac{5}{11}\right)^2}=\frac{4\sqrt{6}}{11}$

따라서 구하는 정사영의 길이는

$2\sqrt{6}\times\frac{4\sqrt{6}}{11}=\frac{48}{11}$ 답 $\frac{48}{11}$

유형 19 직선과 평면의 위치 관계 본책 146쪽

직선 l의 방향벡터가 $\vec{u}=(u_1,\ u_2,\ u_3)$이고 평면 α의 법선벡터가 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$일 때

① $l\,/\!/\,\alpha \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{n} \Rightarrow au_1+bu_2+cu_3=0$

② $l\perp\alpha \Rightarrow \vec{u}\,/\!/\,\vec{n} \Rightarrow a=ku_1,\ b=ku_2,\ c=ku_3$ (단, $k\neq0$)

0980 주어진 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$, 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{n}=(2,\ -a,\ 3)$, $\vec{u}=(1,\ -2,\ b)$

평면과 직선이 서로 수직이므로 $\underbrace{\vec{n}=k\vec{u}}_{\vec{n}/\!/\vec{u}}$ $(k\neq0)$라 하면

$2=k,\ -a=-2k,\ 3=kb$

$\therefore a=4,\ b=\frac{3}{2}$

$\therefore a+b=\frac{11}{2}$ 답 ④

0981 구하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$으로 놓으면 이 평면이 두 점 A, B를 지나므로

$a+3b+2c+d=0$ ······㉠

$-a+b+d=0$ ······㉡

평면 $ax+by+cz+d=0$의 법선벡터를 $\vec{n}$, 주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$, $\vec{u}=(-5,\ 1,\ -3)$

직선과 평면이 서로 평행하므로

$\vec{n}\cdot\vec{u}=0$

$-5a+b-3c=0$ ······㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $b=\frac{a}{2},\ c=-\frac{3}{2}a,\ d=\frac{a}{2}$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$ax+\frac{a}{2}y-\frac{3}{2}az+\frac{a}{2}=0$

$\therefore 2x+y-3z+1=0$ 답 $2x+y-3z+1=0$

0982 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$으로 놓으면

$a+4b+4c+d=0$ ······㉠

$2a+5b-c+d=0$ ······㉡

$2a+2b+5c+d=0$ ······㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $a=3c,\ b=2c,\ d=-15c$

따라서 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식은

$3cx+2cy+cz-15c=0$

$\therefore 3x+2y+z-15=0$ ···➊

이 평면에 수직인 직선의 방향벡터는 $(3,\ 2,\ 1)$이고 이 직선이 원점을 지나므로 구하는 직선의 방정식은

$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=z$ ···➋

답 $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=z$

채점 기준표

➊ 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식을 구할 수 있다.	60%
➋ ➊의 평면에 수직이고 원점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40%

0983 주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$, 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면

$\vec{u}=(k+1,\ k-1,\ -4)$, $\vec{n}=(k+3,\ -3,\ 3)$

직선과 평면이 서로 만나지 않으려면 평행해야 하므로

$\vec{u}\cdot\vec{n}=0$

$(k+1)(k+3)-3(k-1)-12=0$

$k^2+k-6=0,\quad (k+3)(k-2)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=2$ ······㉠

이때 직선이 평면에 포함되지 않아야 하므로 직선 위의 점 $(1,\ 2,\ 4)$는 주어진 평면 위의 점이 아니어야 한다.

즉 $(k+3)-6+12-6\neq0$이어야 하므로

$k\neq-3$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $k=2$ 답 ④

유형 20 평면에 대하여 대칭인 점 본책 147쪽

점 A와 법선벡터가 $\vec{n}$인 평면 α에 대하여 대칭인 점을 B라 하면

① $\overline{AB}$의 중점은 평면 α 위에 있다.

② $\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\vec{n}$

0984 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+3}{2},\ \frac{b}{2},\ \frac{c+2}{2}\right)$$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점은 평면 $x+2y-z=5$ 위에 있으므로

$$\frac{a+3}{2}+2\times\frac{b}{2}-\frac{c+2}{2}=5$$

$\therefore a+2b-c=9$ ...... ㉠

평면 $x+2y-z=5$와 직선 AB가 서로 수직이므로 평면의 법선벡터 $(1,\ 2,\ -1)$과 직선 AB의 방향벡터 $(a-3,\ b,\ c-2)$는 서로 평행하다.

즉 $(a-3,\ b,\ c-2)=k(1,\ 2,\ -1)\ (k\neq0)$이라 하면

$a-3=k,\ b=2k,\ c-2=-k$

$\therefore a=k+3,\ b=2k,\ c=-k+2$

이것을 ㉠에 대입하면

$k+3+2\times2k-(-k+2)=9$

$6k=8 \quad \therefore k=\frac{4}{3}$

따라서 $a=\frac{13}{3},\ b=\frac{8}{3},\ c=\frac{2}{3}$이므로

$a+b+c=\frac{23}{3}$ 답 ③

0985 $\mathrm{A}(-5,\ 1,\ 3),\ \mathrm{B}(1,\ 3,\ 1)$에서

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(6,\ 2,\ -2)$

평면 α와 직선 AB가 서로 수직이므로 평면 α의 법선벡터는

$(6,\ 2,\ -2)$ ➊

또 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-5+1}{2},\ \frac{1+3}{2},\ \frac{3+1}{2}\right)$, 즉 $(-2,\ 2,\ 2)$ ➋

평면 α는 점 $(-2,\ 2,\ 2)$를 지나므로 평면 α의 방정식은

$6(x+2)+2(y-2)-2(z-2)=0$

$\therefore 3x+y-z+6=0$ ➌

답 $3x+y-z+6=0$

채점 기준표

➊ 평면 α의 법선벡터를 구할 수 있다.	40%
➋ AB의 중점의 좌표를 구할 수 있다.	30%
➌ 평면 α의 방정식을 구할 수 있다.	30%

0986 점 A와 평면 α에 대하여 대칭인 점을 $\mathrm{A}'(a,\ b,\ c)$라 하면 $\overline{\mathrm{AA}'}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+2}{2},\ \frac{b-3}{2},\ \frac{c+7}{2}\right)$$

이때 $\overline{\mathrm{AA}'}$의 중점은 평면 $x-2y-3z=1$ 위에 있으므로

$$\frac{a+2}{2}-\frac{2(b-3)}{2}-\frac{3(c+7)}{2}=1$$

$\therefore a-2b-3c-15=0$ ...... ㉠

평면 α와 직선 AA′이 서로 수직이므로 평면 α의 법선벡터 $(1,\ -2,\ -3)$과 직선 AA′의 방향벡터 $(a-2,\ b+3,\ c-7)$은 서로 평행하다.

즉 $(a-2,\ b+3,\ c-7)=k(1,\ -2,\ -3)\ (k\neq0)$이라 하면

$a-2=k,\ b+3=-2k,\ c-7=-3k$

$\therefore a=k+2,\ b=-2k-3,\ c=-3k+7$

이것을 ㉠에 대입하면

$k+2-2(-2k-3)-3(-3k+7)-15=0$

$14k-28=0 \quad \therefore k=2$

$\therefore a=4,\ b=-7,\ c=1$

따라서 $\mathrm{A}'(4,\ -7,\ 1)$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{A'B}}$

$=\sqrt{(-1-4)^2+(5+7)^2+(5-1)^2}$

$=\sqrt{185}$ 답 $\sqrt{185}$

유형 21 점과 평면 사이의 거리 (본책 107쪽)

점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$과 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리

➡ $\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

0987 법선벡터가 $(1,\ -2,\ 2)$인 평면의 방정식을 $x-2y+2z+c=0$이라 하면 원점과 이 평면 사이의 거리가 2이므로

$\frac{|c|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=2 \qquad \therefore c=\pm6$

평면의 방정식은

$x-2y+2z+6=0$ 또는 $x-2y+2z-6=0$

따라서 $a=-2,\ b=2$이므로

$a^2+b^2+c^2=4+4+36=44$ 답 44

0988 점 $\mathrm{A}(1,\ -2,\ 1)$과 평면 $x-y+2z+2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1+2+2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{7\sqrt{6}}{6}$

$\therefore \overline{\mathrm{AA}'}=2\times\frac{7\sqrt{6}}{6}=\frac{7\sqrt{6}}{3}$ 답 ②

0989 구의 중심 $(1,\ 0,\ -1)$과 평면 $2x-y+z-13=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2-1-13|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=2\sqrt{6}$ ➊

구의 반지름의 길이가 3이므로 구 위의 점과 평면 사이의 거리의 최솟값은 $2\sqrt{6}-3$ ➋

따라서 $a=-3,\ b=2$이므로

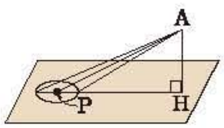
$a^2+b^2=9+4=13$ ➌

답 13

채점 기준표

➊ 구의 중심과 평면 사이의 거리를 구할 수 있다.	50%
➋ 구 위의 점과 평면 사이의 거리의 최솟값을 구할 수 있다.	30%
➌ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	20%

0990 오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(4,\ 2,\ 5)$에서 평면 $x-2y+2z=1$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{|4-4+10-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=3$

또 $\overline{AP}=\sqrt{(-1-4)^2+(-2)^2+(1-5)^2}=3\sqrt{5}$이므로 $\triangle APH$에서

$\overline{PH}=\sqrt{(3\sqrt{5})^2-3^2}=6$

$\therefore M=\sqrt{(6+1)^2+3^2}=\sqrt{58},\quad m=\sqrt{(6-1)^2+3^2}=\sqrt{34}$

$\therefore M^2-m^2=58-34=24$

답 ②

0991 두 평면이 이루는 각을 이등분하는 평면 위의 임의의 점을 P(x, y, z)라 하면 점 P와 두 평면 사이의 거리는 같으므로

$$\frac{|x+3y-3z+1|}{\sqrt{1^2+3^2+(-3)^2}}=\frac{|3x-3y+z-2|}{\sqrt{3^2+(-3)^2+1^2}}$$

$|x+3y-3z+1|=|3x-3y+z-2|$

$\therefore x+3y-3z+1=\pm(3x-3y+z-2)$

(i) $x+3y-3z+1=3x-3y+z-2$에서

$2x-6y+4z-3=0$

(ii) $x+3y-3z+1=-3x+3y-z+2$에서

$4x-2z-1=0$

(i), (ii)에서 $a=2,\ b=-6,\ c=4$ ($\because abc\neq0$)

$\therefore a+b+c=0$

답 0

유형 22 공간벡터를 이용한 구의 방정식 본책 148쪽

두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{p}$라 할 때,

$|\vec{p}-\vec{a}|=r$ 또는 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=r^2$ (단, $r>0$)

➡ 중심이 점 A이고 반지름의 길이가 r인 구

0992 점 P의 좌표를 (x, y, z)라 하면

$\vec{p}=(x, y, z),\ \vec{p}+\vec{a}=(x+2, y-6, z+4)$

$\vec{p}\cdot(\vec{p}+\vec{a})=4$에서

$x(x+2)+y(y-6)+z(z+4)=4$

$x^2+2x+y^2-6y+z^2+4z=4$

$\therefore (x+1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=18$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(-1, 3, -2)$이고 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$인 구이므로 구하는 부피는

$\frac{4}{3}\pi\times(3\sqrt{2})^3=72\sqrt{2}\pi$

답 ⑤

0993 점 P가 나타내는 도형은 점 A$(-2, 1, 5)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 10인 구이므로 점 P의 자취의 방정식은

$(x+2)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=100$

이 도형이 점 $(4, a, -3)$을 지나므로

$6^2+(a-1)^2+(-8)^2=100$

$(a-1)^2=0$

$\therefore a=1$

답 1

0994 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$에서 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$

따라서 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$이므로 점 P가 나타내는 도형은 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 구이다.

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(-3-1)^2+(1-3)^2+(4+2)^2}=2\sqrt{14}$에서 구의 반지름의 길이가 $\sqrt{14}$이므로 구하는 겉넓이는

$4\pi\times(\sqrt{14})^2=56\pi$

답 ②

다른 풀이 점 P의 좌표를 (x, y, z)라 하면

$\overrightarrow{AP}=(x-1, y-3, z+2)$,

$\overrightarrow{BP}=(x+3, y-1, z-4)$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$에서

$(x-1)(x+3)+(y-3)(y-1)+(z+2)(z-4)=0$

$x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z-8=0$

$\therefore (x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=14$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(-1, 2, 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{14}$인 구이므로 구하는 겉넓이는

$4\pi\times(\sqrt{14})^2=56\pi$

0995 $|\vec{x}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{x}+|\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2$에서

$|\vec{x}-\vec{b}|^2=|2\vec{a}|^2$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $2|\vec{a}|$인 구이다.

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$이므로 구하는 부피는

$\frac{4}{3}\pi\times(2\sqrt{6})^3=64\sqrt{6}\pi$

답 $64\sqrt{6}\pi$

유형 23 구와 평면의 위치 관계; 접하는 경우 본책 148쪽

평면 $ax+by+cz+d=0$이 구 $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=r^2$에 접한다.

➡ 구의 중심 (x_1, y_1, z_1)과 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리가 구의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=|r|$$

0996 $x^2+y^2+z^2-2y+4z+1=0$에서

$x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4$

구의 중심 $(0, 1, -2)$와 평면 $x-2y-2z-a=0$ 사이의 거리가 구의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|-2+4-a|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=2,\qquad |2-a|=6$$

$\therefore a=8$ ($\because a>0$)

답 ④

0997 구가 평행한 두 평면에 동시에 접하면 두 평면 사이의 거리는 구의 지름의 길이와 같다.

평면 $2x-y+2z-6=0$ 위의 한 점 $(3, 0, 0)$과 평면 $2x-y+2z+6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6+6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{12}{3}=4$$

따라서 구의 반지름의 길이가 2이므로 구하는 부피는

$\frac{4}{3}\pi\times2^3=\frac{32}{3}\pi$

답 $\frac{32}{3}\pi$

0998 직선 $x-1=y=\frac{z+1}{2}$에 수직인 평면의 법선벡터는

(1, 1, 2)이므로 구하는 평면의 방정식을

$x+y+2z+k=0$ (k는 상수)

으로 놓을 수 있다. ⋯ ①

이 평면이 주어진 구와 접하므로 구의 중심 (2, −3, 0)과 평면 $x+y+2z+k=0$ 사이의 거리는 구의 반지름의 길이와 같다. 즉

$$\frac{|2-3+k|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\sqrt{6}, \quad |k-1|=6$$

$\therefore k=-5$ 또는 $k=7$ ⋯ ②

따라서 구하는 평면의 방정식은

$x+y+2z-5=0$, $x+y+2z+7=0$ ⋯ ③

답 $x+y+2z-5=0$, $x+y+2z+7=0$

채점 기준표

① 평면의 방정식을 $x+y+2z+k=0$으로 놓을 수 있다.	40%
② k의 값을 구할 수 있다.	40%
③ 평면의 방정식을 구할 수 있다.	20%

0999 벡터 (1, −1, 1)에 수직인 평면의 방정식을

$x-y+z+k=0$ (k는 상수)

으로 놓을 수 있다.

이 평면이 구 $x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3$과 접하므로 구의 중심 (0, 1, 2)와 평면 사이의 거리가 구의 반지름의 길이와 같다. 즉

$$\frac{|-1+2+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\sqrt{3}, \quad |k+1|=3$$

$\therefore k=-4$ 또는 $k=2$ ⋯⋯ ㉠

또 이 평면이 구 $(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=3$과 접하므로 구의 중심 (−1, 4, 0)과 평면 사이의 거리가 구의 반지름의 길이와 같다. 즉

$$\frac{|-1-4+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\sqrt{3}, \quad |k-5|=3$$

$\therefore k=2$ 또는 $k=8$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $k=2$일 때 두 구에 동시에 접하므로 평면의 방정식은

$x-y+z+2=0$

이 평면이 점 (1, 1, c)를 지나므로

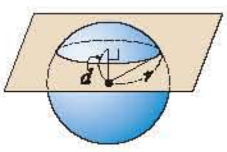
$1-1+c+2=0 \quad \therefore c=-2$

답 ①

유형 24 구와 평면의 위치 관계; 교선이 원인 경우 본책 149쪽

구의 반지름의 길이를 r, 구의 중심과 평면 사이의 거리를 d라 할 때, 교선인 원의 반지름의 길이

➡ $\sqrt{r^2-d^2}$ (단, $r>d$)



1000 구의 중심 (1, 2, −1)과 평면 $2x+y+2z-11=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2+2-2-11|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{9}{3}=3$$

구의 반지름의 길이는 5이므로 평면과 구가 만날 때 생기는 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{5^2-3^2}=4$

따라서 구하는 원의 넓이는 16π이다.

답 ④

1001 점 (1, −1, 1)을 지나고 법선벡터가 (2, −3, −1)인 평면 α의 방정식은

$2(x-1)-3(y+1)-(z-1)=0$

$\therefore 2x-3y-z-4=0$ ⋯ ①

따라서 구의 중심 (−2, −3, 3)과 평면 α 사이의 거리는

$$\frac{|-4+9-3-4|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{14}}$$ ⋯ ②

이때 평면과 구가 만나서 생기는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 $\pi r^2=2\pi$에서 $r=\sqrt{2}$이므로

$$k=(\sqrt{2})^2+\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^2=\frac{16}{7}$$ ⋯ ③

답 $\frac{16}{7}$

채점 기준표

① 평면 α의 방정식을 구할 수 있다.	40%
② 구의 중심과 평면 α 사이의 거리를 구할 수 있다.	30%
③ k의 값을 구할 수 있다.	30%

1002 $\frac{x}{2}=y=z+3=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=2t$, $y=t$, $z=t-3$

이므로 A($2t$, t, $t-3$)으로 놓을 수 있다.

이때 점 A는 평면 $x+3y+z=9$ 위에 있으므로

$2t+3t+t-3=9 \quad \therefore t=2$

$\therefore$ A(4, 2, −1)

구의 반지름의 길이는 점 A(4, 2, −1)과 점 (1, −1, 0) 사이의 거리와 같으므로

$\sqrt{(1-4)^2+(-1-2)^2+1^2}=\sqrt{19}$

또 구의 중심 (1, −1, 0)과 평면 α 사이의 거리는

$$\frac{|1-3-9|}{\sqrt{1^2+3^2+1^2}}=\frac{11}{\sqrt{11}}=\sqrt{11}$$

이므로 평면 α와 구가 만날 때 생기는 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{(\sqrt{19})^2-(\sqrt{11})^2}=2\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 둘레의 길이는

$2\pi\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}\pi$

답 $4\sqrt{2}\pi$

1003 구의 중심을 C라 하면 C(4, 2, 3)이므로

$\overrightarrow{CA}=(a-4, b-2, c-3)$

주어진 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면

$\vec{n}=(1, 2, 2)$

$\overrightarrow{CA}/\!/\vec{n}$이므로 $\overrightarrow{CA}=k\vec{n}$ ($k\neq0$)이라 하면

$a-4=k$, $b-2=2k$, $c-3=2k$

$\therefore a=k+4$, $b=2k+2$, $c=2k+3$ ⋯⋯ ㉠

이때 점 A가 주어진 평면 위에 있으므로

$a+2b+2c-5=0$

㉠을 위의 식에 대입하면

$k+4+2(2k+2)+2(2k+3)-5=0$

$9k+9=0 \quad \therefore k=-1$

따라서 $a=3$, $b=0$, $c=1$이므로

$a+b+c=4$

답 ④

유형 25 두 구가 만날 때 생기는 원을 포함하는 평면 본책 149쪽

두 구 $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$,
$x^2+y^2+z^2+a'x+b'y+c'z+d'=0$의 교선을 포함하는 평면의 방정식
➡ $(a-a')x+(b-b')y+(c-c')z+d-d'=0$

1004 두 구 $x^2+y^2+z^2=3$, $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$의 교선을 포함하는 평면의 방정식은

$2x+2y+2z-2=0 \quad \therefore x+y+z-1=0$

구 $x^2+y^2+z^2=3$의 중심 $(0,\ 0,\ 0)$과 평면 $x+y+z-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

이므로 평면과 구가 만날 때 생기는 원, 즉 두 구가 만날 때 생기는 원의 반지름의 길이는

$$\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

답 ⑤

1005 두 구 $x^2+y^2+z^2-2y+4z+1=0$,
$x^2+y^2+z^2-2x+2z-6=0$의 교선을 포함하는 평면의 방정식은

$2x-2y+2z+7=0$ ➡ ❶

따라서 점 A$(2,\ -1,\ 4)$와 평면 $2x-2y+2z+7=0$ 사이의 거리 d는 $d=\dfrac{|4+2+8+7|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$ ➡ ❷

$\therefore 4d^2=4\times\left(\dfrac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2=147$ ➡ ❸

답 147

채점 기준표

❶ 두 구의 교선을 포함하는 평면의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ d의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $4d^2$의 값을 구할 수 있다.	20%

1006 두 구 $x^2+y^2+(z-1)^2=4$, $x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1$의 교선을 포함하는 평면 α의 방정식은

$2y+2z-7=0$

평면 α의 법선벡터는 $(0,\ 2,\ 2)$이고 xy평면의 법선벡터는 $(0,\ 0,\ 1)$이므로 평면 α와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{|2\times1|}{\sqrt{2^2+2^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \therefore \theta=\frac{\pi}{4}$$

답 $\dfrac{\pi}{4}$

1007 **전략** 점 P가 두 구의 중심을 지나는 직선 위에 있음을 이용한다.

풀이 점 P$(a,\ b,\ c)$는 주어진 두 구 위에 있으므로

$a^2+b^2+c^2=9$ …… ㉠

$a^2+b^2+c^2-4a+6b-12c+33=0$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $4a-6b+12c-42=0$

$\therefore 2a-3b+6c-21=0$ …… ㉢

$x^2+y^2+z^2-4x+6y-12z+33=0$에서

$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-6)^2=16$

이므로 구의 중심의 좌표는 $(2,\ -3,\ 6)$

따라서 주어진 두 구의 중심 $(0,\ 0,\ 0)$, $(2,\ -3,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{6}$$

점 P$(a,\ b,\ c)$가 이 직선 위에 있으므로

$$\frac{a}{2}=\frac{b}{-3}=\frac{c}{6}=t\ (t\text{는 실수})$$

로 놓으면 $a=2t,\ b=-3t,\ c=6t$

이것을 ㉢에 대입하면

$4t+9t+36t-21=0 \qquad \therefore t=\dfrac{3}{7}$

따라서 $a=\dfrac{6}{7}$, $b=-\dfrac{9}{7}$, $c=\dfrac{18}{7}$이므로

$a+b-c=-3$

답 ②

1008 **전략** 세 점 P, Q, R의 좌표를 매개변수를 이용하여 나타낸다.

풀이 $\dfrac{x-1}{2}=y=-z-2=t\ (t$는 실수$)$로 놓으면

$x=2t+1,\ y=t,\ z=-t-2$

이므로 P$(2t+1,\ t,\ -t-2)$로 놓을 수 있다.

또 $x-1=2-y=z+3=s\ (s$는 실수$)$로 놓으면

$x=s+1,\ y=-s+2,\ z=s-3$

이므로 Q$(s+1,\ -s+2,\ s-3)$으로 놓을 수 있다.

이때 직선 $x-1=2-y=z+3$의 방향벡터를 $\vec{u_1}$이라 하면 $\vec{u_1}\perp\overrightarrow{PQ}$이므로

$(1,\ -1,\ 1)\cdot(s-2t,\ -s-t+2,\ s+t-1)=0$

$s-2t+s+t-2+s+t-1=0 \qquad \therefore s=1$

한편 $x-1=\dfrac{y+1}{2}=z=r\ (r$는 실수$)$로 놓으면

$x=r+1,\ y=2r-1,\ z=r$

이므로 R$(r+1,\ 2r-1,\ r)$로 놓을 수 있다.

이때 직선 $x-1=\dfrac{y+1}{2}=z$의 방향벡터를 $\vec{u_2}$라 하면 $\vec{u_2}\perp\overrightarrow{PR}$이므로

$(1,\ 2,\ 1)\cdot(r-2t,\ 2r-t-1,\ r+t+2)=0$

$r-2t+4r-2t-2+r+t+2=0 \qquad \therefore r=\dfrac{1}{2}t$

따라서 $\overrightarrow{PQ}=(1-2t,\ -t+1,\ t)$, $\overrightarrow{PR}=\left(-\dfrac{3}{2}t,\ -1,\ \dfrac{3}{2}t+2\right)$이므로

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2+\overline{PR}^2&=|\overrightarrow{PQ}|^2+|\overrightarrow{PR}|^2\\&=\{(1-2t)^2+(-t+1)^2+t^2\}\\&\quad+\left\{\left(-\frac{3}{2}t\right)^2+(-1)^2+\left(\frac{3}{2}t+2\right)^2\right\}\\&=\frac{21}{2}t^2+7\end{aligned}$$

즉 $\overline{PQ}^2+\overline{PR}^2$은 $t=0$일 때 최솟값 7을 갖는다.

답 7

1009 **전략** 점 $(a,\ b,\ c)$는 직선 AC와 직선 BG에 모두 수직인 직선과 $\overline{AC}$의 교점임을 이용한다.

풀이 A(4, 0, 4), C(0, 4, 4)이므로 직선 AC의 방정식은

$-x+4=y,\ z=4$

B(4, 4, 4), G(0, 4, 0)이므로 직선 BG의 방정식은

$x=z,\ y=4$

두 선분 AC, BG 위의 점을 각각 P, Q라 하고

$-x+4=y=t\ (0\le t\le 4),\ x=z=s\ (0\le s\le 4)$

로 놓으면 $P(-t+4,\ t,\ 4)$, $Q(s,\ 4,\ s)$로 놓을 수 있으므로

$\overrightarrow{PQ}=(s+t-4,\ 4-t,\ s-4)$

두 직선 AC, BG의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(-1,\ 1,\ 0),\ \vec{v}=(1,\ 0,\ 1)$

$\overline{PQ}\perp\overline{AC}$, $\overline{PQ}\perp\overline{BG}$일 때, $\overline{AC}$와 $\overline{BG}$ 사이의 거리가 최소이므로

$\overrightarrow{PQ}\perp\vec{u},\ \overrightarrow{PQ}\perp\vec{v}$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u}=0$에서 $\quad -s-2t+8=0 \quad\cdots\cdots ㉠$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}=0$에서 $\quad 2s+t-8=0 \quad\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad t=\frac{8}{3},\ s=\frac{8}{3}$

따라서 $P\left(\frac{4}{3},\ \frac{8}{3},\ 4\right)$이므로 $\quad a=\frac{4}{3},\ b=\frac{8}{3},\ c=4$

$\therefore 6a+3b+c=6\times\frac{4}{3}+3\times\frac{8}{3}+4=20$

답 ⑤

1010 **전략** 꼭짓점을 지나는 평면을 이용하여 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 구한다.

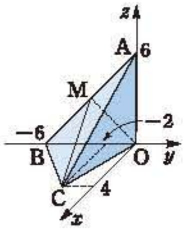
풀이 점 A는 세 평면 $x=0,\ x+2y=0,\ x-y+z=6$의 교점이므로 $\quad A(0,\ 0,\ 6)$

점 B는 세 평면 $x=0,\ z=0,\ x-y+z=6$의 교점이므로

$B(0,\ -6,\ 0)$

점 C는 세 평면 $z=0,\ x+2y=0,\ x-y+z=6$의 교점이므로

$C(4,\ -2,\ 0)$



오른쪽 그림에서 두 점 O, C를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 평면은 선분 AB의 중점을 지나야 한다.

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$M(0,\ -3,\ 3)$

세 점 O, C, M을 지나는 평면의 방정식이 $ax+by+2z=0$이므로 두 점 C, M의 좌표를 각각 대입하면 $\quad 4a-2b=0,\ -3b+6=0$

따라서 $a=1,\ b=2$이므로 $\quad a+b=3$

답 3

1011 **전략** 두 평면의 방정식을 연립하여 직선 l의 방정식을 구한다.

풀이 $x-z=2$에서 $\quad z=x-2 \quad\cdots\cdots ㉠$

$x=z+2$를 $2x+5y-z=0$에 대입하면

$2(z+2)+5y-z=0 \quad \therefore z=-5y-4 \quad\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 직선 l의 방정식은

$x-2=-5y-4=z \quad \therefore \frac{x-2}{-5}=y+\frac{4}{5}=\frac{z}{-5}$

구하는 평면은 직선 l과 서로 수직이므로 직선 l의 방향벡터 $(-5,\ 1,\ -5)$는 구하는 평면의 법선벡터와 같다.

따라서 구하는 평면의 방정식은 $\quad -5(x-1)+y-5(z+2)=0$

$\therefore 5x-y+5z=-5$

답 ②

1012 **전략** 먼저 두 벡터 $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$임을 이용하여 k의 값을 구한다.

풀이 $\overrightarrow{BA}=(2,\ -k,\ 0)$, $\overrightarrow{BC}=(0,\ -k,\ \sqrt{6})$이고

$\angle ABC=\frac{\pi}{4}$이므로

$\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\cos\frac{\pi}{4}$

$\frac{-k\times(-k)}{\sqrt{2^2+(-k)^2}\sqrt{(-k)^2+(\sqrt{6})^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$k^4-10k^2-24=0, \quad (k^2+2)(k^2-12)=0$

$k^2=12 \quad \therefore k=2\sqrt{3}\ (\because k>0)$

세 점 $A(2,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 2\sqrt{3},\ 0)$, $C(0,\ 0,\ \sqrt{6})$을 지나는 평면의 방정식을 $px+qy+rz+s=0$으로 놓으면

$2p+s=0,\ 2\sqrt{3}q+s=0,\ \sqrt{6}r+s=0$

$\therefore p=-\frac{1}{2}s,\ q=-\frac{1}{2\sqrt{3}}s,\ r=-\frac{1}{\sqrt{6}}s$

즉 평면 ABC의 방정식은

$-\frac{1}{2}sx-\frac{1}{2\sqrt{3}}sy-\frac{1}{\sqrt{6}}sz+s=0$

$\therefore \sqrt{3}x+y+\sqrt{2}z-2\sqrt{3}=0$

점 O에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overrightarrow{OH}$는 평면 ABC의 법선벡터 $(\sqrt{3},\ 1,\ \sqrt{2})$와 평행하므로 H의 좌표를 $(\sqrt{3}t,\ t,\ \sqrt{2}t)\ (t\ne0)$로 놓을 수 있다.

점 H가 평면 ABC 위의 점이므로

$3t+t+2t-2\sqrt{3}=0, \quad 6t=2\sqrt{3} \quad \therefore t=\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 $H\left(1,\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$이므로

$a=1,\ b=\frac{\sqrt{3}}{3},\ c=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore abc=\frac{\sqrt{2}}{3}$

답 ②

1013 **전략** 평면 α와 직선 l이 수직이면 평면 α 위의 모든 직선은 직선 l과 수직임을 이용한다.

풀이 직선 l: $x-1=\frac{y}{2}=1-z$의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=(1,\ 2,\ -1)$

평면 α와 직선 l이 수직이므로 평면 α 위의 두 점 A, B에 대하여

$\overline{AB}\perp l$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=0$

이때 $\overrightarrow{AB}=(-2,\ a,\ a-1)$이므로

$-2+2a-a+1=0 \quad \therefore a=1$

즉 $\overrightarrow{AB}=(-2,\ 1,\ 0)$이므로

$\overline{AB}=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$

$\overrightarrow{AC}\,/\!/\,\vec{u}$이므로 $\overrightarrow{AC}=t\vec{u}=(t,\ 2t,\ -t)\ (t\ne0)$라 하면

$\overline{AC}=\overline{AB}=\sqrt{5}$에서

$\sqrt{t^2+(2t)^2+(-t)^2}=\sqrt{5}$

양변을 제곱하여 정리하면

$6t^2=5 \quad \therefore t^2=\frac{5}{6}$

원점 O에 대하여 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$이므로

$\overrightarrow{OC}=(t+1,\ 2t,\ -t+1)$

따라서 점 C에서 원점까지의 거리 d는

$d=|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{(t+1)^2+(2t)^2+(-t+1)^2}$

$=\sqrt{6t^2+2}=\sqrt{6\times\frac{5}{6}+2}=\sqrt{7}$

$\therefore d^2=7$ 답 7

다른 풀이 평면 α는 점 A(1, 0, 1)을 지나고 법선벡터가 (1, 2, −1)이므로 평면 α의 방정식은

$(x-1)+2y-(z-1)=0$

$\therefore x+2y-z=0$

점 B$(-1,\ a,\ a)$가 평면 α 위의 점이므로

$-1+2a-a=0 \quad \therefore a=1$

따라서 B(−1, 1, 1)이므로

$\overline{AC}=\overline{AB}$

$=\sqrt{(-1-1)^2+1^2+(1-1)^2}=\sqrt{5}$

한편 원점 O는 평면 α 위에 있으므로 $\overline{OA}\perp\overline{AC}$

따라서 직각삼각형 OAC에서

$\overline{OC}^2=\overline{OA}^2+\overline{AC}^2$

$\therefore d^2=(1^2+1^2)+(\sqrt{5})^2=7$

1014 **전략** 평면 α의 방정식을 구한 후 $\overline{AP}\perp\overline{PQ}$이면 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{AP}|^2$임을 이용한다.

풀이 점 P(2, 5, 7)을 지나고 법선벡터가 $\underbrace{(2,\ -1,\ 1)}_{\text{직선 } l\text{의 방향벡터}}$인 평면 α의 방정식은

$2(x-2)-(y-5)+(z-7)=0$

$\therefore 2x-y+z-6=0$

두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\overline{AP}\perp\overline{PQ}$에서

$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AQ}|}$이므로

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|\cos\theta$

$=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|\times\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AQ}|}$

$=|\overrightarrow{AP}|^2=6$

$\therefore |\overrightarrow{AP}|=\sqrt{6}$

한편 $\frac{x}{2}=6-y=z-6=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=2t,\ y=-t+6,\ z=t+6$

이므로 A$(2t,\ -t+6,\ t+6)$으로 놓을 수 있다.

이때 점 A와 평면 α 사이의 거리는 $\overline{AP}$의 길이와 같으므로

$\frac{|4t+t-6+t+6-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\sqrt{6}$

$|6t-6|=6 \quad \therefore t=2\ (\because t>0)$

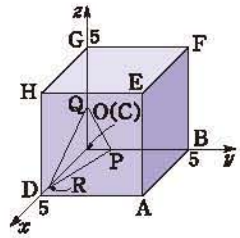
따라서 A(4, 4, 8)이므로

$a=4,\ b=4,\ c=8$

$\therefore a+b+c=16$ 답 ②

1015 **전략** 주어진 정육면체를 좌표공간에 놓고 세 점 P, Q, R의 좌표를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 C를 원점으로 하고 세 모서리 CD, CB, CG가 각각 x축, y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 정육면체를 좌표공간에 놓으면



P(0, 1, 0), Q(0, 0, 2),

R(4, 0, 0)

평면 α의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$으로 놓으면

$b+d=0,\ 2c+d=0,\ 4a+d=0$

$\therefore b=-d,\ c=-\frac{1}{2}d,\ a=-\frac{1}{4}d$

즉 평면 α의 방정식은

$-\frac{1}{4}dx-dy-\frac{1}{2}dz+d=0$

$\therefore x+4y+2z-4=0$

따라서 점 E(5, 5, 5)와 평면 α 사이의 거리는

$\frac{|5+20+10-4|}{\sqrt{1^2+4^2+2^2}}=\frac{31}{\sqrt{21}}=\frac{31\sqrt{21}}{21}$ 답 $\frac{31\sqrt{21}}{21}$

1016 **전략** 위치벡터에 대한 식을 변형하여 점 P가 나타내는 도형을 구한다.

풀이 ㄱ. $\vec{x}-\vec{a}=t(\vec{b}-\vec{a})$이므로

$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$

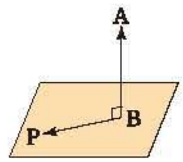
따라서 세 점 A, B, P는 한 직선 위에 있으므로 점 P의 자취는 직선 AB이다.

ㄴ. $|\vec{x}-\vec{a}|=1$에서 $|\overrightarrow{AP}|=1$이므로 점 P의 자취는 중심이 점 A이고 반지름의 길이가 1인 구이다.

ㄷ. $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{x}-\vec{b})=0$에서

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BP}=0$

이므로 점 P는 오른쪽 그림과 같이 점 B를 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{BA}$인 평면 위에 있다. 따라서 점 P의 자취는 점 B를 지나고 직선 AB에 수직인 평면이다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

1017 **전략** 평면 α의 법선벡터가 (1, 1, 1)임을 이용하여 원 C_2의 중심의 좌표를 구한다.

풀이 원 C_2의 중심을 C_2라 하면 $\overline{AC_2}\perp\alpha$이므로 직선 AC_2의 방향벡터는 (1, 1, 1)이다.

즉 직선 AC_2의 방정식은

$x-8=y+7=z+7$

$x-8=y+7=z+7=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=t+8,\ y=t-7,\ z=t-7$

$C_2(t+8,\ t-7,\ t-7)$이라 하면 점 C_2는 평면 α 위에 있으므로

$(t+8)+(t-7)+(t-7)=6 \quad \therefore t=4$

$\therefore C_2(12,\ -3,\ -3)$

$\overline{C_1C_2}=\sqrt{(12-2)^2+(-3-2)^2+(-3-2)^2}=5\sqrt{6}$이고 두 원 C_1, C_2가 외접하므로 원 C_2의 반지름의 길이를 r라 하면

$\sqrt{6}+r=5\sqrt{6}\qquad \therefore r=4\sqrt{6}$

따라서 원 C_2의 반지름의 길이는 $4\sqrt{6}$이다. 답 ④

다른 풀이 $\overline{AC_1}^2=(2-8)^2+(2+7)^2+(2+7)^2=198$

원 C_2의 중심을 C_2라 하면 $\overline{AC_2}$는 점 A$(8,\ -7,\ -7)$과 평면 $x+y+z-6=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{AC_2}=\frac{|8-7-7-6|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=4\sqrt{3}$$

$\overline{AC_2}\perp\overline{C_1C_2}$에서 $\triangle AC_1C_2$는 $\angle AC_2C_1=90°$인 직각삼각형이므로

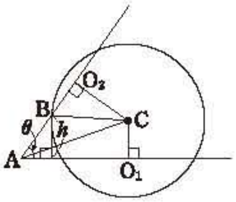
$$\overline{C_1C_2}=\sqrt{\overline{AC_1}^2-\overline{AC_2}^2}$$
$$=\sqrt{198-(4\sqrt{3})^2}=5\sqrt{6}$$

따라서 원 C_2의 반지름의 길이는

$5\sqrt{6}-\sqrt{6}=4\sqrt{6}$

1018 **전략** 밑면의 넓이가 일정한 원뿔의 부피는 높이가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 구의 중심과 두 원 S_1, S_2의 중심을 각각 C, O_1, O_2, 두 평면 $z=0$, $x+y+z=4$가 이루는 각의 크기를 θ, 점 O_1에서 두 평면의 교선에 내린 수선의 발을 A, $\overline{AO_2}$와 구의 교점을 B라 하자.



원 S_1의 방정식은 $x^2+y^2=3$, $z=0$이므로

$O_1(0,\ 0,\ 0)$

구의 중심 C$(0,\ 0,\ 1)$과 평면 $x+y+z-4=0$ 사이의 거리는

$$\overline{CO_2}=\frac{|1-4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\sqrt{3}$$

이므로 $\triangle BCO_2$에서 원 S_2의 반지름의 길이는

$$\overline{BO_2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$$

두 평면 $z=0$, $x+y+z=4$의 교선의 방정식은 $x+y=4$, $z=0$이므로 점 O_1과 교선 사이의 거리는 (xy평면에서 원점과 직선 $x+y=4$ 사이의 거리와 같다.)

$$\overline{O_1A}=\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$$

이때 $\overline{CO_1}=1$이므로 $\triangle AO_1C$에서

$$\overline{AC}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=3$$

따라서 $\triangle ACO_2$에서

$$\overline{O_2A}=\sqrt{3^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$$

한편 두 평면 $z=0$, $x+y+z=4$의 법선벡터는 각각 $(0,\ 0,\ 1)$, $(1,\ 1,\ 1)$이므로

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

원뿔의 부피는 높이가 최소일 때 최소이므로 그때의 높이를 h라 하면

$$h=\overline{AB}\sin\theta=(\sqrt{6}-1)\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{6-\sqrt{6}}{3}$$

따라서 구하는 원뿔의 부피의 최솟값은

$$\frac{1}{3}\times\pi\times(\sqrt{3})^2\times\frac{6-\sqrt{6}}{3}=\frac{6-\sqrt{6}}{3}\pi$$

답 ②

1019 **전략** 직선 l을 평행이동한 직선을 l'이라 하면 직선 l과 l'의 방향벡터가 같음을 이용한다.

풀이 직선 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=1-z$ 위의 한 점 $(1,\ 1,\ 1)$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼, z축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(1+2,\ 1-1,\ 1+3)$, 즉 $(3,\ 0,\ 4)$ ⋯ ❶

이때 두 직선의 방향벡터는 같으므로 평행이동한 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-4}{-1}\quad ⋯ ❷$$

$z=0$을 위의 식에 대입하면

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{3}=4\qquad \therefore x=11,\ y=12$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(11,\ 12,\ 0)$ ⋯ ❸

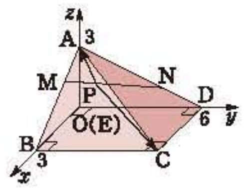
답 $(11,\ 12,\ 0)$

채점 기준표

❶ 주어진 직선 위의 한 점을 평행이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ 평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ 평행이동한 직선이 xy평면과 만나는 점의 좌표를 구할 수 있다.	30%

1020 **전략** 주어진 오면체를 좌표공간에 놓고 각 꼭짓점의 좌표를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 E가 원점, 세 모서리 EB, ED, EA가 각각 x축, y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 오면체를 좌표공간에 놓으면



A$(0,\ 0,\ 3)$, B$(3,\ 0,\ 0)$,

C$(3,\ 6,\ 0)$, D$(0,\ 6,\ 0)$ ⋯ ❶

$\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점 M의 좌표는

$$\mathrm{M}\left(\frac{1\times3+2\times0}{1+2},\ 0,\ \frac{1\times0+2\times3}{1+2}\right),$$

즉 M$(1,\ 0,\ 2)$

$\overline{AD}$를 $2:1$로 내분하는 점 N의 좌표는

$$\mathrm{N}\left(0,\ \frac{2\times6+1\times0}{2+1},\ \frac{2\times0+1\times3}{2+1}\right),$$

즉 N$(0,\ 4,\ 1)$ ⋯ ❷

따라서 두 점 M, N을 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{0-1}=\frac{y-0}{4-0}=\frac{z-2}{1-2},\ \text{즉 } 1-x=\frac{y}{4}=2-z\quad ⋯ ❸$$

$1-x=\dfrac{y}{4}=2-z=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=1-t,\ y=4t,\ z=2-t$

이때 점 P는 $\overline{MN}$ 위에 있으므로 P$(1-t,\ 4t,\ 2-t)$ $(0\le t\le1)$로 놓으면

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=(t-1,\ -4t,\ t+1)\cdot(t+2,\ 6-4t,\ t-2)$$
$$=(t-1)(t+2)-4t(6-4t)+(t+1)(t-2)$$
$$=18t^2-24t-4=18\left(t-\frac{2}{3}\right)^2-12$$

따라서 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$는 $t=\dfrac{2}{3}$일 때 최솟값 -12를 갖는다. ⋯ ❹

답 -12

채점 기준표

❶ 주어진 도형을 좌표공간에 놓고 각 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.	20%
❷ 두 점 M, N의 좌표를 구할 수 있다.	20%
❸ 두 점 M, N을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	20%
❹ $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$의 최솟값을 구할 수 있다.	40%

참고 $\overline{MN}$ 위의 점 (x, y, z)에서 $0\le x\le 1$, $0\le y\le 4$, $1\le z\le 2$이므로

$x=1-t$에서 $0\le t\le 1$

$y=4t$에서 $0\le t\le 1$

$z=2-t$에서 $0\le t\le 1$

$\therefore 0\le t\le 1$

1021 **전략** 두 벡터 $\overrightarrow{PA}$와 $\overrightarrow{PB}$가 평면 α와 이루는 각의 크기가 서로 같음을 이용한다.

풀이 $\overrightarrow{PA}=(1, -1, 2)$, $\overrightarrow{PB}=(2, 1, -1)$이므로

$|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|$ ⋯ ❶

이때 입사각과 반사각의 크기는 서로 같으므로

$\alpha\perp(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})$

따라서 평면 α의 법선벡터가

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=(3, 0, 1)$ ⋯ ❷

이므로 평면 α의 방정식은 $3(x+1)+(z-2)=0$

$\therefore 3x+z+1=0$ ⋯ ❸

답 $3x+z+1=0$

채점 기준표

❶ $|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|$임을 알 수 있다.	30%
❷ 평면 α의 법선벡터를 구할 수 있다.	40%
❸ 평면 α의 방정식을 구할 수 있다.	30%

1022 **전략** 두 모서리 PR, QR와 평면의 교점의 좌표를 구한다.

풀이 평면 $x+y-z=0$은 원점 O, yz평면 위의 점 $(0, 1, 1)$, zx평면 위의 점 $(1, 0, 1)$을 지나므로 사면체 OPQR의 모서리 PR, QR와 각각 만난다.

따라서 평면 $x+y-z=0$과 $\overline{PR}$, $\overline{QR}$의 교점을 각각 E, F라 하면 사면체 OPQR를 평면 $x+y-z=0$으로 자를 때 생기는 단면은 $\triangle$OEF이다. ⋯ ❶

두 점 P$(1, 0, 0)$, R$(0, 0, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$x=1-z$, $y=0$

$x=1-z=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=t$, $z=1-t$

E$(t, 0, 1-t)$라 하면 점 E가 평면 $x+y-z=0$ 위의 점이므로

$t+0-(1-t)=0 \quad \therefore t=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{E}\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ ⋯ ❷

두 점 Q$(0, 1, 0)$, R$(0, 0, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=1-z$, $x=0$

$y=1-z=s$ (s는 실수)로 놓으면

$y=s$, $z=1-s$

F$(0, s, 1-s)$라 하면 점 F가 평면 $x+y-z=0$ 위의 점이므로

$0+s-(1-s)=0 \quad \therefore s=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{F}\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ⋯ ❸

따라서 $\overline{OE}=\overline{OF}=\overline{EF}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$\triangle\mathrm{OEF}$는 한 변의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 정삼각형이다.

$\triangle\mathrm{OEF}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{8}$ ⋯ ❹

답 $\frac{\sqrt{3}}{8}$

채점 기준표

❶ 사면체를 평면으로 자를 때 생기는 단면이 $\triangle$OEF임을 알 수 있다.	20%
❷ 점 E의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❸ 점 F의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❹ 단면의 넓이를 구할 수 있다.	20%

1023 **전략** 주어진 조건을 만족시키려면 두 평면이 구의 중심을 지나면서 서로 수직이어야 한다.

풀이 두 평면에 의하여 구가 동일한 크기의 네 개의 도형으로 나누어지려면 두 평면이 구의 중심을 지나면서 서로 수직이어야 한다. ⋯ ❶

$x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z=0$에서

$(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=3$

이므로 구의 중심의 좌표는 $(1, -1, -1)$

이 점의 좌표를 $ax+2ay+bz+2=0$, $2ax+y+cz+4=0$에 각각 대입하면

$a-2a-b+2=0 \quad \therefore b=2-a$ ⋯⋯ ㉠

$2a-1-c+4=0 \quad \therefore c=2a+3$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

또 두 평면이 서로 수직이므로

$(a, 2a, b)\cdot(2a, 1, c)=0$

$\therefore 2a^2+2a+bc=0$ ⋯ ❸

㉠, ㉡을 위의 식에 대입하면

$2a^2+2a+(2-a)(2a+3)=0$

$3a+6=0 \quad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠, ㉡에 각각 대입하면 $b=4$, $c=-1$

$\therefore abc=8$ ⋯ ❹

답 8

채점 기준표

❶ 두 평면에 의하여 구가 동일한 크기의 네 개의 도형으로 나누어질 조건을 알 수 있다.	20%
❷ 구의 중심의 좌표를 두 평면의 방정식에 대입하여 ㉠, ㉡을 구할 수 있다.	30%
❸ 두 평면이 서로 수직임을 이용할 수 있다.	30%
❹ abc의 값을 구할 수 있다.	20%

1024 **전략** 평면이 구와 접하면 구의 중심과 평면 사이의 거리는 구의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 평면 α의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라 하면 평면 α가 두 점 $\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$, $(0, 0, 2)$를 지나므로

$\frac{2\sqrt{3}}{3}b+d=0$, $2c+d=0$

$\therefore b=-\frac{\sqrt{3}}{2}d,\ c=-\frac{1}{2}d$ …… ㉠ ··· ①

구 $x^2+y^2+z^2=1$과 평면 α가 접하므로 구의 중심 (0, 0, 0)과 평면 α 사이의 거리는 구의 반지름의 길이와 같다. 즉

$$\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=1 \qquad \therefore d^2=a^2+b^2+c^2$$ ··· ②

㉠을 위의 식에 대입하면

$$d^2=a^2+\frac{3}{4}d^2+\frac{1}{4}d^2, \qquad a^2=0 \qquad \therefore a=0$$

따라서 평면 α의 방정식은

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}dy-\frac{1}{2}dz+d=0 \qquad \therefore \sqrt{3}y+z-2=0$$ ··· ③

점 $(\sqrt{3},\ 0,\ 4)$와 평면 α 사이의 거리는

$$\frac{|4-2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=1$$ ··· ④

답 1

채점 기준표

① b, c를 d에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
② 구와 평면 α 사이의 거리가 구의 반지름의 길이와 같음을 이용할 수 있다.	20%
③ 평면 α의 방정식을 구할 수 있다.	30%
④ 점 $(\sqrt{3},\ 0,\ 4)$와 평면 α 사이의 거리를 구할 수 있다.	20%

징검다리

[37쪽] 이 마을에는 할아버지, 아버지, 아들로 구성된 3대가 살고 있다. 처음에 할아버지가 아버지에게 10만 원을, 아버지는 받은 10만 원을 아들에게 주고, 며칠 후 할아버지가 아버지에게 5만 원을, 아버지는 받은 5만 원을 아들에게 준 것이다.

[125쪽] 5년 전에 재산이 분배되었다면 차남이 10억 원을 받으므로 나머지 20억 원은 장남과 막내의 몫이다.
즉 장남과 막내의 나이의 합이 차남의 나이의 두 배임을 알 수 있으므로 장남, 차남, 막내의 나이는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
이때 매년 한 살씩 나이를 더 먹으므로 세 사람의 나이는 5년 후에도 이 순서대로 등차수열을 이루고, 장남과 막내의 나이의 합은 차남의 나이의 두 배이다.
따라서 차남이 받게 될 유산은 5년 전과 같은 10억 원, 막내가 받게 될 유산은 20억에서 10억 4천 만원을 뺀 9억 6천만 원이다.