정답과 해설

01 무리수의 성질

Best 최상위 유형 본문 9~22쪽

1 ② **2** ③ **3** ②, ④ **4** -7
5 ②, ⑤ **6** ⑤ **7** ② **8** $-a$ **9** ①
10 ④ **11** $-2a-b$ **12** $-a^2-b^2$ **13** ③ **14** ③
15 ③ **16** ⑤ **17** 6 **18** 30 **19** 24
20 24 **21** ④ **22** 9 **23** ②
24 $(5,\ 6),\ (20,\ 3),\ (45,\ 2),\ (180,\ 1)$ **25** ③
26 ①, ⑤ **27** ③ **28** ①, ⑤ **29** ④
30 $a<c<b$ **31** $A<C<B$ **32** $7-\sqrt{10}$
33 $\sqrt{3}-2,\ \sqrt{3}-\sqrt{5},\ 1-\sqrt{5}$ **34** ④ **35** ⑤
36 6 **37** $3,\ \frac{8}{3},\ \sqrt{6},\ 0,\ -\sqrt{\frac{11}{4}},\ -\sqrt{5}$ **38** ④
39 $\frac{1}{\sqrt{k}},\ \sqrt{k},\ k,\ k^2$ **40** ④
41 $0.7+\sqrt{6},\ \sqrt{49}-\sqrt{2},\ \pi,\ -\sqrt{2.5}$
42 ②, ④ **43** $\sqrt{5}-\sqrt{4},\ \pi-0.\dot{2}$ **44** ②, ⑤ **45** 3개
46 $\frac{12}{3},\ -\sqrt{3.6},\ 2-\sqrt{10}$ **47** ④, ⑤
48 ㄹ, ㅁ **49** ②, ⑤ **50** ㄱ, ㄴ, ㅁ **51** ④
52 21 **53** ② **54** 10개 **55** ④ **56** ③
57 6 **58** ⑤ **59** -10 **60** ③
61 $\mathrm{P}(-1-\sqrt{3}),\ \mathrm{Q}(3+\sqrt{5})$
62 $\mathrm{P}(5-\sqrt{2}),\ \mathrm{Q}(5+\sqrt{2})$ **63** -4 **64** -6

---

1 ㄱ. 제곱근 64는 $\sqrt{64}=\sqrt{8^2}=8$이다. (참)
ㄴ. $\sqrt{7}$은 7의 제곱근이다. (참)
ㄷ. 음수의 제곱근은 없으므로 -25의 음의 제곱근은 없다. (거짓)
ㄹ. $\sqrt{(-4)^2}=4$이므로 4의 제곱근은 $\pm\sqrt{4}=\pm2$이다. (참)
ㅁ. 0의 제곱근은 0의 1개이다. (거짓)
ㅂ. 양수의 제곱근은 2개, 0의 제곱근은 1개이고, 음수의 제곱근은 없다. (거짓)
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ의 3개이다.
참고 ㄴ에서 '$\sqrt{7}$은 7의 제곱근이다.'는 참이지만 '7의 제곱근은 $\sqrt{7}$이다.'는 거짓이다.
⇨ 7의 제곱근은 $\pm\sqrt{7}$이다.

2 ① $a>0$일 때, a의 제곱근은 $\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$의 2개이다.
② $a>0$이므로 $\sqrt{a^2}=a$
따라서 제곱근 $\sqrt{a^2}$은 제곱근 a이므로 $\sqrt{a}$이다.
③ $a>0$일 때, $\sqrt{(-a)^2}=\sqrt{a^2}=a$이므로 $\sqrt{(-a)^2}$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}$이다.
④ $a>0$에서 $-a<0$이다. 이때 음수의 제곱근은 없으므로 $-a$의 제곱근은 없다.
⑤ 제곱근 a는 $\sqrt{a}$이고, a의 양의 제곱근은 $\sqrt{a}$이므로 제곱근 a와 a의 양의 제곱근은 같다.
따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

3 ① $\sqrt{0.09}=\sqrt{(0.3)^2}=0.3$
③ $\sqrt{0.0001}=\sqrt{(0.01)^2}=0.01$
⑤ $\sqrt{\frac{25}{169}}=\sqrt{\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$

4 $\sqrt{81}=\sqrt{9^2}=9$의 음의 제곱근은
$-\sqrt{9}=-3\qquad\therefore a=-3$
$\sqrt{(-4)^2}=4$의 양의 제곱근은
$\sqrt{4}=2\qquad\therefore b=2$
$\therefore a-2b=(-3)-2\times2=-7$

5 ① $-\sqrt{a^2}=-(-a)=a$
③ $(\sqrt{-a})^2=-a$
④ $(-\sqrt{-a})^2=(\sqrt{-a})^2=-a$

6 ㄱ. $x<-2$이면 $x+2<0$, $2-x>0$이므로
$$A=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(2-x)^2}=-(x+2)+(2-x)=-x-2+2-x=-2x$$
ㄴ. $-2<x<0$이면 $x+2>0$, $2-x>0$이므로
$$A=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(2-x)^2}=(x+2)+(2-x)=4$$
ㄷ. $0<x<2$이면 $x+2>0$, $2-x>0$이므로
$$A=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(2-x)^2}=(x+2)+(2-x)=4$$
ㄹ. $x>2$이면 $x+2>0$, $2-x<0$이므로
$$A=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(2-x)^2}=(x+2)-(2-x)=x+2-2+x=2x$$
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

7 $-1<a<1$에서 $a-1<0$, $3-a>0$이므로
$\sqrt{(a-1)^2}=-(a-1)$, $\sqrt{(3-a)^2}=3-a$
$$\therefore \sqrt{(a-1)^2}-\sqrt{(3-a)^2}=-(a-1)-(3-a)=-a+1-3+a=-2$$

8 $-1<a<0$에서 $1-a>0$, $\frac{1}{2}a-1<0$이므로

$\sqrt{(1-a)^2}=1-a$

$\sqrt{\left(\frac{1}{2}a-1\right)^2}=-\left(\frac{1}{2}a-1\right)$

$\sqrt{\frac{1}{4}a^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2}$이고, $\frac{1}{2}a<0$이므로

$\sqrt{\frac{1}{4}a^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=-\frac{1}{2}a$

$\therefore \sqrt{(1-a)^2}-\sqrt{\left(\frac{1}{2}a-1\right)^2}+\sqrt{\frac{1}{4}a^2}$

$=1-a+\left(\frac{1}{2}a-1\right)-\frac{1}{2}a=-a$

9 $0<a<1$에서 $\frac{1}{a}>1$이므로

$a-\frac{1}{a}<0$, $a+\frac{1}{a}>0$, $-2a<0$

$\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=-\left(a-\frac{1}{a}\right)=-a+\frac{1}{a}$

$\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}=a+\frac{1}{a}$

$\sqrt{(-2a)^2}=-(-2a)=2a$

$\therefore \sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}-\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}-\sqrt{(-2a)^2}$

$=-a+\frac{1}{a}-\left(a+\frac{1}{a}\right)-2a=-4a$

10 $a>0$, $b<0$에서 $a-b>0$, $b-2a<0$이므로

$\sqrt{(a-b)^2}=a-b$, $\sqrt{(b-2a)^2}=-(b-2a)$

$\therefore \sqrt{(a-b)^2}-\sqrt{(b-2a)^2}=a-b+(b-2a)=-a$

11 $ab<0$, $a-b>0$에서 $a>b$이므로 $a>0$, $b<0$이다.

따라서 $\sqrt{(-a)^2}=\sqrt{a^2}=a$, $|b|=-b$,

$\sqrt{9b^2}=\sqrt{(3b)^2}=-3b$, $(-\sqrt{a})^2=(\sqrt{a})^2=a$이므로

$-\sqrt{(-a)^2}-2|b|+\sqrt{9b^2}-(-\sqrt{a})^2$

$=-a+2b-3b-a=-2a-b$

12 $ab<0$에서 a, b의 부호는 서로 반대이다.

또, $a+b<0$, $|a|<|b|$에서 두 수 a, b 중 음수인 수의 절댓값이 양수인 수의 절댓값보다 크므로

$a>0$, $b<0$이다.

따라서 $|b|=-b$, $\sqrt{b^2}=-b$이고,

$a-b>0$이므로

$\sqrt{b^2(a-b)^2}=\sqrt{\{b(a-b)\}^2}=-b(a-b)$,

$b-a<0$이므로

$\sqrt{a^2(b-a)^2}=\sqrt{\{a(b-a)\}^2}=-a(b-a)$

$\therefore a|b|-\sqrt{b^2(a-b)^2}+a\sqrt{b^2}-\sqrt{a^2(b-a)^2}$

$=-ab+b(a-b)-ab+a(b-a)$

$=-ab+ab-b^2-ab+ab-a^2$

$=-a^2-b^2$

13 $2=\sqrt{4}$이고 $\sqrt{5}>\sqrt{4}$이므로 $\sqrt{5}>2$에서

$\sqrt{5}-2>0$, $2-\sqrt{5}<0$

$\therefore \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}-\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$

$=\sqrt{5}-2-\{-(2-\sqrt{5})\}$

$=\sqrt{5}-2+2-\sqrt{5}$

$=0$

14 $5=\sqrt{25}$이고 $\sqrt{25}>\sqrt{17}$이므로

$5>\sqrt{17}$ $\quad\therefore 5-\sqrt{17}>0$

$4=\sqrt{16}$이고 $\sqrt{16}<\sqrt{17}$이므로

$4<\sqrt{17}$ $\quad\therefore 4-\sqrt{17}<0$

즉, $\sqrt{(5-\sqrt{17})^2}=5-\sqrt{17}$,

$\sqrt{(4-\sqrt{17})^2}=-(4-\sqrt{17})$

$\therefore \sqrt{(5-\sqrt{17})^2}+\sqrt{(4-\sqrt{17})^2}$

$=5-\sqrt{17}-(4-\sqrt{17})$

$=5-\sqrt{17}-4+\sqrt{17}$

$=1$

15 a가 자연수이므로 $\sqrt{37+a}$가 자연수가 되려면 $37+a$는 37보다 크고 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

즉, $37+a=7^2$, 8^2, 9^2, $\cdots$이므로

$37+a=49$, 64, 81, $\cdots$

$\therefore a=12$, 27, 44, $\cdots$

$a=12$일 때, $b=7$

$a=27$일 때, $b=8$

$a=44$일 때, $b=9$

$\vdots$

따라서 $a+b$의 값 중 가장 작은 값은

$12+7=19$

16 n이 자연수이므로 $\sqrt{20-n}$이 자연수가 되려면 $20-n$은 20보다 작고 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

즉, $20-n=1^2$, 2^2, 3^2, 4^2이므로

$20-n=1$, 4, 9, 16

$\therefore n=19$, 16, 11, 4

따라서 n의 값 중 가장 작은 자연수는 4, 가장 큰 자연수는 19이므로 $a=4$, $b=19$이다.

$\therefore b-a=19-4=15$

17 $\sqrt{120+4x}=\sqrt{4(30+x)}=\sqrt{2^2\times(30+x)}$이고 x는 자연수이므로 $\sqrt{120+4x}$가 자연수가 되려면 $30+x$는 30보다 크고 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

즉, $30+x=6^2$, 7^2, 8^2, $\cdots$이므로

$30+x=36$, 49, 64, $\cdots$

$\therefore x=6$, 19, 34, $\cdots$

따라서 가장 작은 자연수 x의 값은 6이다.

18 $\sqrt{45-3a}=\sqrt{3(15-a)}$이므로 $15-a$는 0이거나 15보다 작고 $3\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.
즉, $15-a=0,\ 3\times1^2,\ 3\times2^2$이므로
$15-a=0,\ 3,\ 12$ $\quad\therefore a=15,\ 12,\ 3$
따라서 구하는 모든 자연수 a의 값의 합은
$3+12+15=30$

19 $\sqrt{100+2a}-\sqrt{150-3b}$의 값이 가장 작은 정수가 되려면 $\sqrt{100+2a}$는 최소의 정수, $\sqrt{150-3b}$는 최대의 정수가 되어야 한다.
a가 자연수이므로 $\sqrt{100+2a}=\sqrt{2(50+a)}$가 정수가 되려면 $50+a$는 50보다 크고 $2\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.
즉, $50+a=2\times6^2,\ 2\times7^2,\ 2\times8^2,\ \cdots$
이때 $50+a$도 최소의 정수가 되어야 하므로
$50+a=2\times6^2=72$에서 $a=22$일 때
$\sqrt{100+2a}$는 최소의 정수가 된다.
또, b가 자연수이므로 $\sqrt{150-3b}=\sqrt{3(50-b)}$가 정수가 되려면 $50-b$는 0이거나 50보다 작고 $3\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.
즉, $50-b=0,\ 3\times1^2,\ 3\times2^2,\ 3\times3^2,\ 3\times4^2$
이때 $50-b$도 최대의 정수가 되어야 하므로
$50-b=3\times4^2=48$에서 $b=2$일 때 $\sqrt{150-3b}$는 최대의 정수가 된다.
따라서 구하는 $a+b$의 값은 $22+2=24$

20 $\sqrt{216a}=\sqrt{2^3\times3^3\times a}$가 자연수가 되려면 자연수 a는
$a=2\times3\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.
즉, $a=6\times1^2,\ 6\times2^2,\ 6\times3^2,\ \cdots$
$\therefore a=6,\ 24,\ 54,\ \cdots$
따라서 a의 값 중 가장 작은 두 자리의 자연수는 24이다.

21 $\sqrt{6xy}$가 자연수가 되려면 xy는 $6\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.
즉, $xy=6\times1^2,\ 6\times2^2,\ 6\times3^2,\ \cdots$
$\therefore xy=6,\ 24,\ 54,\ \cdots$
그런데 x, y는 6 이하의 자연수이므로
$xy\le36$에서 $xy=6,\ 24$
(i) $xy=6$일 때, $(x,\ y)$는 $(1,\ 6)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$, $(6,\ 1)$의 4가지
(ii) $xy=24$일 때, $(x,\ y)$는 $(4,\ 6)$, $(6,\ 4)$의 2가지
따라서 (i), (ii)에 의해 $\sqrt{6xy}$가 자연수가 되는 경우는 모두 6가지이다.

22 $\sqrt{\dfrac{27}{x}}=\sqrt{\dfrac{3^2\times3}{x}}$이 자연수가 되려면 자연수 x는
$x=3\times(3\text{의 약수})^2$의 꼴이어야 한다.
즉, $x=3\times1^2,\ 3\times3^2$
$\therefore x=3,\ 27$
또, $\sqrt{\dfrac{2}{3}y}$가 자연수가 되려면 자연수 y는
$y=2\times3\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.
즉, $y=6\times1^2,\ 6\times2^2,\ 6\times3^2,\ \cdots$
$\therefore y=6,\ 24,\ 54,\ \cdots$
따라서 가장 작은 자연수 x, y는 각각 3, 6이므로 그 합은
$3+6=9$

23 $\sqrt{\dfrac{450}{n}}=\sqrt{\dfrac{5^2\times3^2\times2}{n}}$가 자연수가 되려면 자연수 n은
$n=2\times(15\text{의 약수})^2$의 꼴이어야 한다.
즉, $n=2\times1^2,\ 2\times3^2,\ 2\times5^2,\ 2\times15^2$
$\therefore n=2,\ 18,\ 50,\ 450$
따라서 자연수 n의 개수는 4개이다.

24 $\sqrt{\dfrac{180}{a}}=\sqrt{\dfrac{6^2\times5}{a}}$가 자연수가 되려면
$a=5\times(6\text{의 약수})^2$의 꼴이어야 한다.
즉, $a=5\times1^2,\ 5\times2^2,\ 5\times3^2,\ 5\times6^2$
$\therefore a=5,\ 20,\ 45,\ 180$
$a=5$일 때, $b=\sqrt{\dfrac{180}{5}}=\sqrt{6^2}=6$
$a=20$일 때, $b=\sqrt{\dfrac{180}{20}}=\sqrt{3^2}=3$
$a=45$일 때, $b=\sqrt{\dfrac{180}{45}}=\sqrt{2^2}=2$
$a=180$일 때, $b=\sqrt{\dfrac{180}{180}}=1$
따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(5,\ 6)$, $(20,\ 3)$, $(45,\ 2)$, $(180,\ 1)$

25 ㄱ. $3=\sqrt{9}$이므로 $3>\sqrt{5}$
ㄴ. $\dfrac{\sqrt{7}}{2}<\dfrac{\sqrt{8}}{2}$이므로 $-\dfrac{\sqrt{7}}{2}>-\dfrac{\sqrt{8}}{2}$
ㄷ. $0.6=\sqrt{0.36}$이므로 $\sqrt{0.6}>0.6$
ㄹ. $\dfrac{1}{3}=\sqrt{\dfrac{1}{9}}$이므로 $\dfrac{1}{3}>\sqrt{\dfrac{1}{10}}$
따라서 대소 관계가 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

26 ① $(\sqrt{2}-3)-(\sqrt{2}-4)=1>0$이므로
$\sqrt{2}-3>\sqrt{2}-4$
② $(\sqrt{14}+1)-5=\sqrt{14}-4=\sqrt{14}-\sqrt{16}<0$이므로
$\sqrt{14}+1<5$
③ $3-(2+\sqrt{2})=1-\sqrt{2}<0$이므로
$3<2+\sqrt{2}$
④ $(1+\sqrt{3})-(1+\sqrt{2})=\sqrt{3}-\sqrt{2}>0$이므로
$1+\sqrt{3}>1+\sqrt{2}$

⑤ $(-\sqrt{6}+\sqrt{7})-(-2+\sqrt{7})=-\sqrt{6}+2$
$=-\sqrt{6}+\sqrt{4}<0$
이므로 $-\sqrt{6}+\sqrt{7}<-2+\sqrt{7}$
따라서 옳은 것은 ①, ⑤이다.

27 ① $(\sqrt{40}+7)-13=\sqrt{40}-6=\sqrt{40}-\sqrt{36}>0$이므로
$\sqrt{40}+7\ \boxed{>}\ 13$
② $(\sqrt{14}-2)-1=\sqrt{14}-3=\sqrt{14}-\sqrt{9}>0$이므로
$\sqrt{14}-2\ \boxed{>}\ 1$
③ $(5-\sqrt{10})-2=3-\sqrt{10}=\sqrt{9}-\sqrt{10}<0$이므로
$5-\sqrt{10}\ \boxed{<}\ 2$
④ $(\sqrt{2}-\sqrt{3})-(\sqrt{2}-\sqrt{5})=-\sqrt{3}+\sqrt{5}>0$이므로
$\sqrt{2}-\sqrt{3}\ \boxed{>}\ \sqrt{2}-\sqrt{5}$
⑤ $(\sqrt{18}-\sqrt{12})-(4-\sqrt{12})=\sqrt{18}-4$
$=\sqrt{18}-\sqrt{16}>0$
이므로 $\sqrt{18}-\sqrt{12}\ \boxed{>}\ 4-\sqrt{12}$
따라서 부등호의 방향이 나머지 넷과 다른 것은 ③이다.

28 ① $5-(\sqrt{2}+3)=2-\sqrt{2}=\sqrt{4}-\sqrt{2}>0$이므로
$5>\sqrt{2}+3$
② $(\sqrt{15}+\sqrt{11})-(\sqrt{11}+4)=\sqrt{15}-4$
$=\sqrt{15}-\sqrt{16}<0$
이므로 $\sqrt{15}+\sqrt{11}<\sqrt{11}+4$
③ $(\sqrt{19}-1)-\frac{7}{2}=\sqrt{19}-\frac{9}{2}=\sqrt{\frac{76}{4}}-\sqrt{\frac{81}{4}}<0$이므로
$\sqrt{19}-1<\frac{7}{2}$
④ $\left(\sqrt{\frac{1}{6}}-2\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{5}}-2\right)=\sqrt{\frac{1}{6}}-\sqrt{\frac{1}{5}}$
$=\sqrt{\frac{5}{30}}-\sqrt{\frac{6}{30}}<0$
이므로 $\sqrt{\frac{1}{6}}-2<\sqrt{\frac{1}{5}}-2$
⑤ $(-4-\sqrt{3})-(-\sqrt{10}-\sqrt{3})=-4+\sqrt{10}$
$=-\sqrt{16}+\sqrt{10}<0$
이므로 $-4-\sqrt{3}<-\sqrt{10}-\sqrt{3}$
따라서 옳지 않은 것은 ①, ⑤이다.

29 $a-c=\sqrt{17}-4=\sqrt{17}-\sqrt{16}>0$이므로
$a>c$ …… ㉠
$b-c=(1+\sqrt{6})-4=\sqrt{6}-3=\sqrt{6}-\sqrt{9}<0$이므로
$b<c$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$b<c<a$

30 $a-c=(2\sqrt{3}+3)-7$
$=2\sqrt{3}-4$
$=\sqrt{12}-\sqrt{16}<0$
이므로 $a<c$ …… ㉠
$b-c=(3\sqrt{3}+2)-7$
$=3\sqrt{3}-5$
$=\sqrt{27}-\sqrt{25}>0$
이므로 $b>c$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$a<c<b$

31 $A-C=(\sqrt{12}-3)-(\sqrt{7}+\sqrt{12})=-3-\sqrt{7}<0$이므로
$A<C$ …… ㉠
$B-C=(\sqrt{7}+4)-(\sqrt{7}+\sqrt{12})=4-\sqrt{12}$
$=\sqrt{16}-\sqrt{12}>0$
이므로 $B>C$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$A<C<B$

32 점 B에 대응하는 수는 3과 4 사이에 있는 수이다.
$3<\sqrt{10}<4$에서 $4<1+\sqrt{10}<5$이므로 $1+\sqrt{10}$은 점 C에 대응한다.
$2<\sqrt{5}<3$이므로 $\sqrt{5}$는 점 A에 대응한다.
$3<\sqrt{10}<4$에서 $-4<-\sqrt{10}<-3$이고,
$3<7-\sqrt{10}<4$이므로 $7-\sqrt{10}$은 점 B에 대응한다.
따라서 점 B에 대응하는 수는 $7-\sqrt{10}$이다.

33 $(\sqrt{3}-\sqrt{5})-(\sqrt{3}-2)=-\sqrt{5}+2=-\sqrt{5}+\sqrt{4}<0$
이므로 $\sqrt{3}-\sqrt{5}<\sqrt{3}-2$ …… ㉠
$(\sqrt{3}-\sqrt{5})-(1-\sqrt{5})=\sqrt{3}-1>0$이므로
$\sqrt{3}-\sqrt{5}>1-\sqrt{5}$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$1-\sqrt{5}<\sqrt{3}-\sqrt{5}<\sqrt{3}-2$
따라서 수직선 위에 나타내었을 때, 오른쪽에 있는 수부터 차례로 나열하면
$\sqrt{3}-2$, $\sqrt{3}-\sqrt{5}$, $1-\sqrt{5}$

34 $\sqrt{2}=1.414$, $\sqrt{3}=1.732$에서 $\sqrt{3}-\sqrt{2}=0.318$이므로 $\sqrt{2}$에 0.318보다 작은 수를 더한 수와 $\sqrt{3}$에서 0.318보다 작은 수를 뺀 수는 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$ 사이에 있다.
① 0.01은 0.318보다 작으므로 $\sqrt{2}+0.01$은 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$ 사이에 있다.
② 0.1은 0.318보다 작으므로 $\sqrt{3}-0.1$은 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$ 사이에 있다.
③ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$은 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$의 중점에 대응하는 수이므로 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$ 사이에 있다.
④ 0.4는 0.318보다 크므로 $\sqrt{2}+0.4$는 $\sqrt{3}$보다 큰 수로 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$ 사이에 있지 않다.

⑤ 0.2는 0.318보다 작으므로 $\sqrt{3}-0.2$는 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$ 사이에 있다.

따라서 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$ 사이에 있는 수가 아닌 것은 ④이다.

다른풀이 ① $\sqrt{2}+0.01=1.414+0.01=1.424$

② $\sqrt{3}-0.1=1.732-0.1=1.632$

③ $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$은 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$의 중점에 대응하는 수이므로 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$ 사이에 있다.

④ $\sqrt{2}+0.4=1.414+0.4=1.814$

⑤ $\sqrt{3}-0.2=1.732-0.2=1.532$

35 $7=\sqrt{49}$이므로 $\sqrt{5}$와 $\sqrt{49}$ 사이에 있는 수가 아닌 것을 찾는다.

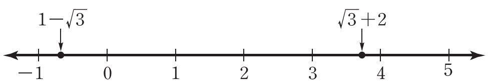
$\sqrt{5}<\sqrt{6.4}<\sqrt{\dfrac{15}{2}}\,(=\sqrt{7.5})<\sqrt{11}<\sqrt{38}<\sqrt{49}<\sqrt{50}$

따라서 $\sqrt{5}$와 7 사이에 있는 수가 아닌 것은 ⑤이다.

36 $1<\sqrt{3}<2$에서 $-2<-\sqrt{3}<-1$이므로

$-1<1-\sqrt{3}<0$, $3<\sqrt{3}+2<4$

두 수 $1-\sqrt{3}$과 $\sqrt{3}+2$를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 두 수 사이에 있는 정수는 0, 1, 2, 3이므로 그 합은

$0+1+2+3=6$

다른풀이 $1<\sqrt{3}<2$에서 $\sqrt{3}=1.\times\times\times$이므로

$1-\sqrt{3}=1-1.\times\times\times=-0.\times\times\times$

$\sqrt{3}+2=1.\times\times\times+2=3.\times\times\times$

따라서 구하는 정수를 x라 하면

$\underbrace{1-\sqrt{3}}_{-0.\times\times\times}<x<\underbrace{\sqrt{3}+2}_{3.\times\times\times}$

에서 $x=0,\ 1,\ 2,\ 3$이므로 그 합은

$0+1+2+3=6$

37 주어진 수들을 근호를 사용하여 차례로 나타내면

$\sqrt{9},\ -\sqrt{\dfrac{11}{4}},\ \sqrt{\dfrac{64}{9}},\ -\sqrt{5},\ 0,\ \sqrt{6}$

이때 $\sqrt{\dfrac{11}{4}}<\sqrt{5}$이므로 $-\sqrt{\dfrac{11}{4}}>-\sqrt{5}$이고,

$\sqrt{9}=\sqrt{\dfrac{81}{9}}$, $\sqrt{6}=\sqrt{\dfrac{54}{9}}$이므로 $\sqrt{9}>\sqrt{\dfrac{64}{9}}>\sqrt{6}$

즉, $\sqrt{9}>\sqrt{\dfrac{64}{9}}>\sqrt{6}>0>-\sqrt{\dfrac{11}{4}}>-\sqrt{5}$

따라서 위의 수들을 큰 것부터 차례로 나열하면

$3,\ \dfrac{8}{3},\ \sqrt{6},\ 0,\ -\sqrt{\dfrac{11}{4}},\ -\sqrt{5}$

38 수직선 위에서 가장 오른쪽에 위치하는 수는 가장 큰 수이다.

① $\sqrt{3}$과 ② $\sqrt{2}+\sqrt{3}$과 ③ $\sqrt{3}-0.1$의 대소를 비교하면

$\sqrt{3}-0.1<\sqrt{3}<\sqrt{2}+\sqrt{3}$

이므로 이 중 가장 큰 수는 ②이다.

② $\sqrt{2}+\sqrt{3}$과 ④ $\sqrt{6}+\sqrt{3}$의 대소를 비교하면

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})-(\sqrt{6}+\sqrt{3})=\sqrt{2}-\sqrt{6}<0$이므로

$\sqrt{2}+\sqrt{3}<\sqrt{6}+\sqrt{3}$

즉, 두 수 중 큰 수는 ④이다.

마지막으로 ④ $\sqrt{6}+\sqrt{3}$과 ⑤ $2+\sqrt{3}$의 대소를 비교하면

$(\sqrt{6}+\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})=\sqrt{6}-2=\sqrt{6}-\sqrt{4}>0$이므로

$\sqrt{6}+\sqrt{3}>2+\sqrt{3}$

즉, 두 수 중 큰 수는 ④이다.

따라서 수직선 위에 나타내었을 때 가장 오른쪽에 위치하는 수, 즉 가장 큰 수는 ④이다.

39 $0<k<1$을 만족하는 적당한 k의 값을 대입하여 생각한다.

$k=\dfrac{1}{4}$이라 하면

$\sqrt{k}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$, $k^2=\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}$,

$\dfrac{1}{\sqrt{k}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{4}}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}}=2$

따라서 큰 것부터 차례로 나열하면

$\dfrac{1}{\sqrt{k}},\ \sqrt{k},\ k,\ k^2$

참고 $0<k<1$일 때, 다음이 성립한다.

(1) $k<\dfrac{1}{k}$, $\sqrt{k}<\dfrac{1}{\sqrt{k}}$

(2) $k<\sqrt{k}$

(3) $k>k^2>k^3>\cdots$

40 ① 0.1의 제곱근은 $\sqrt{0.1}$, $-\sqrt{0.1}$이므로 무리수이다.

② $x=\sqrt{5}$ 또는 $x=-\sqrt{5}$이므로 무리수이다.

③ 제곱근 3은 $\sqrt{3}$이므로 무리수이다.

④ $0.\dot{4}=\dfrac{4}{9}$의 음의 제곱근은 $-\sqrt{\dfrac{4}{9}}=-\dfrac{2}{3}$이므로 유리수이다.

⑤ 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{12}$이므로 무리수이다.

따라서 무리수가 아닌 것은 ④이다.

41 순환하지 않는 무한소수로 나타내어지는 것은 무리수이므로 주어진 수 중 무리수를 찾는다.

$0.12\dot{5}$는 순환소수이므로 유리수이다.

(유리수)+(무리수)=(무리수)이므로 $0.7+\sqrt{6}$은 무리수이다.

$\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$이므로 유리수이다.
$\sqrt{49}-\sqrt{2}=7-\sqrt{2}$이고, (유리수)$-$(무리수)$=$(무리수)
이므로 $\sqrt{49}-\sqrt{2}$는 무리수이다.
$\sqrt{169}=13$이므로 유리수이다.
$0.301301301\cdots=0.\dot{3}0\dot{1}$은 순환소수이므로 유리수이다.
π는 순환하지 않는 무한소수로 무리수이다.
$-\sqrt{2.5}$는 무리수이다.
따라서 주어진 수 중 순환하지 않는 무한소수, 즉 무리수는
$0.7+\sqrt{6}$, $\sqrt{49}-\sqrt{2}$, π, $-\sqrt{2.5}$이다.

42 ② 순환소수는 유리수이다.
④ 무한소수 중에서 순환소수는 유리수이다.

43 주어진 그림의 어두운 부분에 해당하는 수는 무리수이다.
$\sqrt{\frac{121}{196}}=\sqrt{\left(\frac{11}{14}\right)^2}=\frac{11}{14}$이므로 유리수이다.
$\sqrt{5}-\sqrt{4}=\sqrt{5}-2$이므로 무리수이다.
$-\sqrt{6.25}=-\sqrt{(2.5)^2}=-2.5$이므로 유리수이다.
$\pi-0.\dot{2}=\pi-\frac{2}{9}$이므로 무리수이다.
$\sqrt{\frac{1}{9}}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$이므로 유리수이다.
따라서 어두운 부분에 해당하는 수는 $\sqrt{5}-\sqrt{4}$,
$\pi-0.\dot{2}$이다.

44 주어진 그림에서 어두운 부분에 해당하는 수는 무리수이다.
① $\sqrt{64}=\sqrt{8^2}=8$이므로 유리수이다.
② $-\sqrt{0.4}$는 무리수이다.
③ $-\sqrt{\frac{1}{100}}=-\sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2}=-\frac{1}{10}$이므로 유리수이다.
④ $0.7\dot{2}$는 순환소수이므로 유리수이다.
⑤ (무리수)$-$(유리수)$=$(무리수)이므로 $\sqrt{3}-3$은 무리수이다.
따라서 어두운 부분에 해당하는 수인 것은 ②, ⑤이다.

45 주어진 그림의 어두운 부분에 해당하는 수는 정수가 아닌 유리수이다.
3.14는 정수가 아닌 유리수이다.
$\sqrt{4.9}$는 무리수이다.
$1.\dot{2}$는 순환소수로 정수가 아닌 유리수이다.
$-\sqrt{1.96}=-\sqrt{(1.4)^2}=-1.4$이므로 정수가 아닌 유리수이다.
$-\sqrt{(-34)^2}=-\sqrt{34^2}=-34$이므로 정수이다.
따라서 어두운 부분에 해당하는 수는 3.14, $1.\dot{2}$,
$-\sqrt{1.96}$의 3개이다.

46 주어진 그림의 어두운 부분에 해당하는 수는 무리수와 정수이다.
$0.272727\cdots=0.\dot{2}\dot{7}$은 순환소수이므로 정수가 아닌 유리수이다.
$\frac{12}{3}=4$이므로 정수이다.
$-\sqrt{3.6}$은 무리수이다.
$2-\sqrt{10}$은 무리수이다.
$\left(-\sqrt{\frac{7}{25}}\right)^2=\frac{7}{25}$이므로 정수가 아닌 유리수이다.
따라서 어두운 부분에 해당하는 수는 $\frac{12}{3}$, $-\sqrt{3.6}$,
$2-\sqrt{10}$이다.

47 ④ 무리수에 대응하는 점들만으로는 수직선을 완전히 메울 수 없다.
⑤ 모든 무리수는 수직선 위에 나타낼 수 있다.

48 ㄱ. 두 유리수 사이에는 무수히 많은 무리수가 있다.
ㄴ. [반례] $a=4$이면 $\sqrt{a}=\sqrt{4}=2$이므로 유리수이다.
ㄷ. [반례] $a=\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$이면 $ab=\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=-2$이므로 유리수이다.
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄹ, ㅁ이다.

49 ① [반례] $a=9$이면 $\sqrt{a}=\sqrt{9}=3$으로 유리수이다.
③ 수직선은 무리수에 대응하는 점만으로는 완전히 메울 수 없다.
④ 두 실수 사이에 있는 정수는 유한개이다.
따라서 옳은 것은 ②, ⑤이다.

50 (유리수)$\pm$(무리수)는 항상 무리수이다.
ㄱ. a가 유리수이면 a^2도 유리수이므로 a^2+b는 항상 무리수이다.
ㄴ. $a-b$는 무리수이고, 2는 유리수이므로 $\frac{a-b}{2}$는 항상 무리수이다.
ㄷ. [반례] $a=4$, $b=\sqrt{2}$이면
$\sqrt{a}\times b^2=\sqrt{4}\times(\sqrt{2})^2=2\times2=4$
이므로 유리수이다.
ㄹ. [반례] $a=0$, $b=\sqrt{2}$이면 $\frac{a}{b}=\frac{0}{\sqrt{2}}=0$이므로 유리수이다.
ㅁ. a가 0이 아닌 유리수, b가 무리수이면 $\frac{b}{a}$는 항상 무리수이다.
따라서 보기 중 항상 무리수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㅁ이다.

51 ① [반례] $a=3$, $b=\sqrt{2}$일 때,
$\sqrt{a}-b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$이므로 유리수가 아니다.
② [반례] $a=2$, $b=-\sqrt{2}$일 때,
$\sqrt{a}+b=\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$이므로 무리수가 아니다.
③ [반례] $a=2$, $b=\sqrt{2}$일 때,
$\sqrt{a}b=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$이므로 무리수가 아니다.
④ 유리수와 무리수의 합은 항상 무리수이다.
⑤ [반례] $a=4$, $b=\sqrt{2}$일 때,
$\frac{b}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 유리수가 아니다.
따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

52 주어진 부등식의 각 변을 제곱하면
$25\leq 3a-2<36$, $27\leq 3a<38$
$\therefore 9\leq a<\frac{38}{3}$
따라서 부등식을 만족하는 자연수 a는 9, 10, 11, 12이므로 $M=12$, $m=9$이다.
$\therefore M+m=12+9=21$

53 주어진 부등식의 각 변을 2로 나누면
$1.6<\sqrt{x}<2.5$
각 변을 제곱하면
$2.56<x<6.25$
따라서 부등식을 만족하는 자연수 x는 3, 4, 5, 6이므로 그 합은
$3+4+5+6=18$

54 부등식 $-\sqrt{21}<-\sqrt{x}<-3$의 각 변에 -1을 곱하면
$3<\sqrt{x}<\sqrt{21}$
각 변을 제곱하면
$9<x<21$
이므로 이 부등식을 만족하는 자연수 x는 10, 11, 12, $\cdots$, 20이다.
또, 부등식 $\sqrt{15}<\sqrt{5x}<\sqrt{98}$의 각 변을 제곱하면
$15<5x<98$, $3<x<\frac{98}{5}$
이므로 이 부등식을 만족하는 자연수 x는 4, 5, 6, $\cdots$, 19이다.
따라서 두 부등식을 동시에 만족하는 자연수 x는 10, 11, 12, $\cdots$, 19의 10개이다.

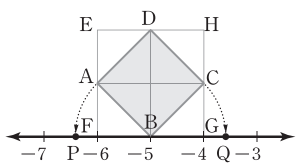
55 $\sqrt{1}(=1)$보다 작은 자연수는 없으므로
$f(1)=0$
$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}(=2)$보다 작은 자연수는 1의 1개이므로
$f(2)=f(3)=f(4)=1$
$\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9}(=3)$보다 작은 자연수는 1, 2의 2개이므로
$f(5)=f(6)=f(7)=f(8)=f(9)=2$
$\sqrt{10}$보다 작은 자연수는 1, 2, 3의 3개이므로
$f(10)=3$
$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$
$=0+(1\times 3)+(2\times 5)+3$
$=16$

56 $5^2<32<6^2$에서 $5<\sqrt{32}<6$이므로 $\sqrt{32}$보다 크거나 같은 최소의 정수는 6이다.
$\therefore f(32)=6$
또, $11^2<128<12^2$에서 $11<\sqrt{128}<12$이므로 $\sqrt{128}$보다 작거나 같은 최대의 정수는 11이다.
$\therefore g(128)=11$
$\therefore f(32)-g(128)=6-11=-5$

57 $(6.5)^2=42.25$이므로 $6^2<37<(6.5)^2$
즉, $6<\sqrt{37}<6.5$
따라서 $\sqrt{37}$에 가장 가까운 정수는 6이다.
$\therefore f(\sqrt{37})=6$

58 ① 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$이므로 $\overline{AC}=\overline{BD}=\sqrt{2}$
② $\overline{AC}=\overline{AQ}$, $\overline{BD}=\overline{BP}$이고, $\overline{AC}=\overline{BD}$이므로 $\overline{AQ}=\overline{BP}$
③ $\overline{AC}=\sqrt{2}$이므로 $\overline{AC}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 $(\sqrt{2})^2=2$이다.
④ $\overline{BP}=\overline{BD}=\sqrt{2}$이고, 점 P는 기준점 B의 왼쪽에 있으므로 점 P의 좌표는 $-3-\sqrt{2}$이다.
⑤ $\overline{AQ}=\overline{AC}=\sqrt{2}$이고, 점 Q는 기준점 A의 오른쪽에 있으므로 점 Q의 좌표는 $-4+\sqrt{2}$이다.

59 오른쪽 그림에서

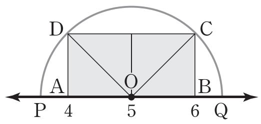


□EFGH$=2\times 2=4$
이고
□ABCD
$=\frac{1}{2}\times$□EFGH
$=\frac{1}{2}\times 4=2$
이므로 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}$이다.
이때 $\overline{BP}=\overline{BA}=\sqrt{2}$, $\overline{BQ}=\overline{BC}=\sqrt{2}$이므로 점 P에 대응하는 수는 $-5-\sqrt{2}$, 점 Q에 대응하는 수는 $-5+\sqrt{2}$이다.
따라서 두 수의 합은
$(-5-\sqrt{2})+(-5+\sqrt{2})=-10$

60 ③ 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$이므로 점 C는 기준점의 좌표 -2에서 오른쪽으로 $\sqrt{2}$만큼 떨어져 있으므로 C$(-2+\sqrt{2})$이다.

61 두 정사각형 ABCD, EFGH의 넓이가 각각 3, 5이므로 한 변의 길이는 각각 $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$이다.
$\therefore \overline{AD}=\sqrt{3}$, $\overline{EF}=\sqrt{5}$
따라서 $\overline{AP}=\overline{AD}=\sqrt{3}$이고, 점 P는 기준점 A에서 왼쪽으로 $\sqrt{3}$만큼 떨어져 있으므로 점 P의 좌표는
$-1-\sqrt{3}$이다.
또, $\overline{EQ}=\overline{EF}=\sqrt{5}$이고, 점 Q는 기준점 E에서 오른쪽으로 $\sqrt{5}$만큼 떨어져 있으므로 점 Q의 좌표는 $3+\sqrt{5}$이다.
$\therefore$ P$(-1-\sqrt{3})$, Q$(3+\sqrt{5})$

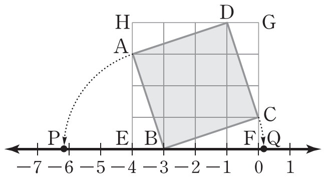
62 오른쪽 그림에서



$\overline{OP}=\overline{OD}=\sqrt{2}$이므로
점 P의 좌표는
$5-\sqrt{2}$
$\overline{OQ}=\overline{OC}=\sqrt{2}$이므로 점 Q의 좌표는 $5+\sqrt{2}$

63 정사각형 ABCD의 넓이는 한 변의 길이가 3인 정사각형의 넓이에서 밑변의 길이와 높이가 각각 2, 1인 삼각형 4개의 넓이를 뺀 것과 같으므로
$\square ABCD=3\times3-\left(\frac{1}{2}\times2\times1\right)\times4=5$
따라서 $\square$ABCD의 한 변의 길이는 $\sqrt{5}$이므로
$\overline{AB}=\overline{AD}=\sqrt{5}$
이때 $\overline{AP}=\overline{AD}=\sqrt{5}$, $\overline{AQ}=\overline{AB}=\sqrt{5}$이므로 점 P에 대응하는 수는 $-1-\sqrt{5}$, 점 Q에 대응하는 수는 $-1+\sqrt{5}$이다.
따라서 두 점 P, Q에 대응하는 두 수의 곱은
$(-1-\sqrt{5})\times(-1+\sqrt{5})=-4$

64



위의 그림에서
$\square EFGH=4\times4=16$
$\triangle AEB=\triangle BFC=\triangle CGD=\triangle DHA$
$=\frac{1}{2}\times3\times1=\frac{3}{2}$
이므로
$\square ABCD=\square EFGH-4\times\triangle AEB$
$=16-4\times\frac{3}{2}=10$
따라서 $\square$ABCD의 한 변의 길이는 $\sqrt{10}$이므로
$\overline{BP}=\overline{BA}=\sqrt{10}$
$\overline{BQ}=\overline{BC}=\sqrt{10}$
점 P는 기준점 B에서 왼쪽으로 $\sqrt{10}$만큼 떨어져 있으므로 점 P에 대응하는 수 a는
$a=-3-\sqrt{10}$
또, 점 Q는 기준점 B에서 오른쪽으로 $\sqrt{10}$만큼 떨어져 있으므로 점 Q에 대응하는 수 b는
$b=-3+\sqrt{10}$
$\therefore a+b=(-3-\sqrt{10})+(-3+\sqrt{10})$
$=-6$

02 근호를 포함한 식의 계산

Best 최상위 유형 본문 25~43쪽

1 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **2** ⑤ **3** $\frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{6}}{4}$ **4** $\frac{7}{3}$
5 ③ **6** $-2+2\sqrt{2}$ **7** 2 **8** 9
9 $-4\sqrt{6}$ **10** ③ **11** ② **12** 4 **13** ③
14 ④ **15** ① **16** ② **17** 12 **18** ④
19 ② **20** ②, ⑤ **21** ⑤ **22** 22
23 $3\sqrt{5}$ cm **24** ③ **25** ④ **26** ②
27 ① **28** ④ **29** $2-\sqrt{2}$ **30** $\sqrt{3}-1$
31 $-4+\frac{\sqrt{3}}{18}$ **32** ①, ⑤ **33** ③, ⑤ **34** ④
35 ② **36** (1) $33-20\sqrt{2}$ (2) 1 (3) $6+10\sqrt{3}$ **37** ①
38 ② **39** ④ **40** ② **41** ⑤ **42** ②
43 120 **44** ③ **45** 2 **46** ① **47** ③
48 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **49** ⑤ **50** ① **51** $1-5\sqrt{2}$ **52** 75
53 ① **54** ④ **55** ① **56** ⑤ **57** $-\frac{2}{3}$
58 (1) 100, 10, 10, 14.14 (2) 100, 10, 10, 44.72
(3) 100, 10, 10, 0.1414
(4) 10000, 100, 100, 0.04472
59 ② **60** ⑤ **61** 0.2394 **62** ⑤ **63** ①
64 ⑤ **65** ⑤ **66** ③, ④ **67** 0.7746
68 $\sqrt{13}$ cm **69** ③ **70** ② **71** ⑤ **72** ⑤
73 $\mathrm{B}(2+2\sqrt{3}\pi)$ **74** $5\sqrt{5}$ **75** ① **76** ⑤
77 ③ **78** $10-2\sqrt{7}$ **79** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **80** ③ **81** ③
82 ④

---

1 $\frac{5}{\sqrt{24}}=\frac{5}{2\sqrt{6}}=\frac{5\times\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}}{12}$ $\quad\therefore a=\frac{5}{12}$

$\frac{3}{2\sqrt{5}}=\frac{3\times\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$ $\quad\therefore b=\frac{3}{10}$

$\therefore \sqrt{ab}=\sqrt{\frac{5}{12}\times\frac{3}{10}}=\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{1}{\sqrt{8}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

2 $\frac{2-\sqrt{21}}{\sqrt{7}}=\frac{(2-\sqrt{21})\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}$

$=\frac{2\sqrt{7}-\sqrt{7^2\times3}}{7}$

$=\frac{2\sqrt{7}-7\sqrt{3}}{7}$

따라서 $a=2$, $b=7$, $c=7$이므로
$a+b+c=2+7+7=16$

3 $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{1}{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}\times\frac{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}$

$=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$

$=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$=\frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{6}}{4}$

4 $2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\sqrt{3}}}=2-\cfrac{1}{2-\cfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}}$

$=2-\cfrac{1}{2-\cfrac{2+\sqrt{3}}{4-3}}$

$=2-\frac{1}{2-(2+\sqrt{3})}$

$=2-\frac{1}{-\sqrt{3}}$

$=2+\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 $a=2$, $b=\frac{1}{3}$이므로

$a+b=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$

5 $\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}-\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$

$=\frac{(3+2\sqrt{2})^2}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}-\frac{(3-2\sqrt{2})^2}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}$

$=\frac{9+12\sqrt{2}+8}{3^2-(2\sqrt{2})^2}-\frac{9-12\sqrt{2}+8}{3^2-(2\sqrt{2})^2}$

$=\frac{17+12\sqrt{2}}{9-8}-\frac{17-12\sqrt{2}}{9-8}$

$=17+12\sqrt{2}-17+12\sqrt{2}=24\sqrt{2}$

6 주어진 식에서 각각의 분모를 유리화하면
(주어진 식)

$=\frac{2-\sqrt{5}}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{(\sqrt{5}+\sqrt{6})(\sqrt{5}-\sqrt{6})}$

$+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{7}}{(\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{6}-\sqrt{7})}+\frac{\sqrt{7}-2\sqrt{2}}{(\sqrt{7}+2\sqrt{2})(\sqrt{7}-2\sqrt{2})}$

$=\frac{2-\sqrt{5}}{4-5}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{5-6}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{7}}{6-7}+\frac{\sqrt{7}-2\sqrt{2}}{7-8}$

$=-(2-\sqrt{5})-(\sqrt{5}-\sqrt{6})-(\sqrt{6}-\sqrt{7})-(\sqrt{7}-2\sqrt{2})$

$=-2+\sqrt{5}-\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{6}+\sqrt{7}-\sqrt{7}+2\sqrt{2}$

$=-2+2\sqrt{2}$

7 주어진 식에서 각각의 분모를 유리화하면

(주어진 식)

$$=\frac{2(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}+\frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})}+\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{7})}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{7})}+\frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{9})}{(\sqrt{7}+\sqrt{9})(\sqrt{7}-\sqrt{9})}$$

$$=\frac{2(1-\sqrt{3})}{1-3}+\frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{3-5}+\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{7})}{5-7}+\frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{9})}{7-9}$$

$$=-(1-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-\sqrt{5})-(\sqrt{5}-\sqrt{7})-(\sqrt{7}-\sqrt{9})$$

$$=-1+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{7}+\sqrt{9}$$

$$=-1+\sqrt{9}=-1+3=2$$

8 주어진 식에서 각각의 분모를 유리화하면

(주어진 식)

$$=\frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{(\sqrt{3}+\sqrt{4})(\sqrt{3}-\sqrt{4})}+\cdots+\frac{\sqrt{98}-\sqrt{99}}{(\sqrt{98}+\sqrt{99})(\sqrt{98}-\sqrt{99})}+\frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{(\sqrt{99}+\sqrt{100})(\sqrt{99}-\sqrt{100})}$$

$$=\frac{1-\sqrt{2}}{1-2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{3-4}+\cdots+\frac{\sqrt{98}-\sqrt{99}}{98-99}+\frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{99-100}$$

$$=-(1-\sqrt{2})-(\sqrt{2}-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-\sqrt{4})-\cdots-(\sqrt{98}-\sqrt{99})-(\sqrt{99}-\sqrt{100})$$

$$=-1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{4}-\cdots-\sqrt{98}+\sqrt{99}-\sqrt{99}+\sqrt{100}$$

$$=-1+\sqrt{100}=-1+10=9$$

9 $x=\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$을 주어진 식에 대입하면

$$x-\frac{1}{x}=\frac{1}{5+2\sqrt{6}}-(5+2\sqrt{6})$$

$$=\frac{5-2\sqrt{6}}{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}-(5+2\sqrt{6})$$

$$=\frac{5-2\sqrt{6}}{5^2-(2\sqrt{6})^2}-5-2\sqrt{6}$$

$$=\frac{5-2\sqrt{6}}{25-24}-5-2\sqrt{6}$$

$$=5-2\sqrt{6}-5-2\sqrt{6}=-4\sqrt{6}$$

10 주어진 식의 분모를 유리화하면

$$\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$$

$$=\frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})^2}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})}$$

$$=\frac{(\sqrt{x-1})^2-2\sqrt{(x-1)(x+1)}+(\sqrt{x+1})^2}{(\sqrt{x-1})^2-(\sqrt{x+1})^2}$$

$$=\frac{x-1-2\sqrt{x^2-1}+x+1}{(x-1)-(x+1)}$$

$$=\frac{2x-2\sqrt{x^2-1}}{-2}=-x+\sqrt{x^2-1}$$

이 식에 $x=\sqrt{2}$를 대입하면

$$-x+\sqrt{x^2-1}=-\sqrt{2}+\sqrt{(\sqrt{2})^2-1}$$

$$=-\sqrt{2}+1$$

11 $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$에서

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$

$$=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x+1-x}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$$

즉, $\frac{1}{f(x)}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$이므로

$$\frac{1}{f(1)}-\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}-\frac{1}{f(4)}$$

$$=(\sqrt{2}+\sqrt{1})-(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{4}+\sqrt{3})-(\sqrt{5}+\sqrt{4})$$

$$=\sqrt{2}+\sqrt{1}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{4}$$

$$=\sqrt{1}-\sqrt{5}=1-\sqrt{5}$$

12 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}$

$$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{x-(x+1)}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{-1}$$

$$=-\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$$

즉, $f(x)=-\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$이므로

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(24)$$

$$=(-\sqrt{1}+\sqrt{2})+(-\sqrt{2}+\sqrt{3})+(-\sqrt{3}+\sqrt{4})+\cdots+(-\sqrt{24}+\sqrt{25})$$

$$=-\sqrt{1}+\sqrt{25}=-1+5=4$$

13 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$에서

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{x-(x+1)}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{-1}$$

$$=-\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$$

즉, $\frac{1}{f(x)}=-\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$이므로

$\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(80)}$
$=(-\sqrt{1}+\sqrt{2})+(-\sqrt{2}+\sqrt{3})+(-\sqrt{3}+\sqrt{4})+\cdots+(-\sqrt{80}+\sqrt{81})$
$=-\sqrt{1}+\sqrt{81}=-1+9=8$

14 ① $-\sqrt{15}\times\sqrt{2}\div\sqrt{5}=-\frac{\sqrt{15}\times\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$
$=-\sqrt{\frac{15\times2}{5}}=-\sqrt{6}$

② $\frac{4}{3}\times\frac{3}{\sqrt{8}}\div\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{4}{3}\times\frac{3}{2\sqrt{2}}\times5\sqrt{2}=10$

③ $\sqrt{\frac{7}{2}}\div\sqrt{\frac{14}{5}}\div\sqrt{\frac{5}{19}}=\sqrt{\frac{7}{2}}\times\sqrt{\frac{5}{14}}\times\sqrt{\frac{19}{5}}$
$=\sqrt{\frac{7}{2}\times\frac{5}{14}\times\frac{19}{5}}$
$=\sqrt{\frac{19}{4}}=\frac{\sqrt{19}}{2}$

④ $2\sqrt{7}\times\sqrt{9}\div\frac{1}{\sqrt{7}}=2\sqrt{7}\times3\times\sqrt{7}=42$

⑤ $5\sqrt{21}\div10\sqrt{3}\times\sqrt{\frac{9}{7}}=5\sqrt{21}\times\frac{1}{10\sqrt{3}}\times\frac{3}{\sqrt{7}}$
$=5\sqrt{21}\times\frac{3}{10\sqrt{21}}=\frac{3}{2}$

15 $\sqrt{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{2a}\times\sqrt{8}\times\sqrt{3a}$
$=\sqrt{2\times6\times2a\times8\times3a}$
$=\sqrt{(24a)^2}=24a$ ($\because a>0$)
따라서 $24a=120$이므로 $a=5$이다.

16 $\sqrt{48}=\sqrt{4^2\times3}=4\sqrt{3}$이므로 $a=4$
$\sqrt{72}=\sqrt{6^2\times2}=6\sqrt{2}$이므로 $b=6$
$\therefore \sqrt{8ab}=\sqrt{8\times4\times6}=\sqrt{8^2\times3}=8\sqrt{3}$

17 $\sqrt{147}=\sqrt{7^2\times3}=7\sqrt{3}$ $\quad\therefore a=7$
$\frac{\sqrt{54}}{3\sqrt{2}}\div\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}}\times\sqrt{\frac{6}{5}}=\frac{3\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}\times\sqrt{\frac{6}{5}}$
$=\sqrt{\frac{6}{2}\times\frac{15}{3}\times\frac{6}{5}}$
$=\sqrt{18}=\sqrt{3^2\times2}$
$=3\sqrt{2}$
$\therefore b=3,\ c=2$
$\therefore a+b+c=7+3+2=12$

18 ① $\sqrt{(-3)^2}-\sqrt{8^2}=3-8=-5$
② $(-\sqrt{2})^2+\sqrt{(-11)^2}=2+11=13$
③ $\sqrt{(-7)^2}-\sqrt{\frac{1}{9}}\times\sqrt{(-27)^2}=7-\frac{1}{3}\times27$
$=7-9=-2$
④ $\sqrt{25}\div(-\sqrt{5})^2\times\sqrt{(-2)^2}=5\div5\times2=2$
⑤ $\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2}\times\sqrt{4}-\sqrt{81}\div\{-\sqrt{(-3)^2}\}$
$=\frac{3}{2}\times2-9\div(-3)=3+3=6$

19 $\sqrt{(-6)^2}=6,\ (-\sqrt{8})^2=8,\ \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4}{3},$
$\sqrt{2^4}=\sqrt{4^2}=4,\ \sqrt{100}=\sqrt{10^2}=10$이므로
$\sqrt{(-6)^2}-(-\sqrt{8})^2\div\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2}+\sqrt{2^4}\times\sqrt{100}$
$=6-8\div\frac{4}{3}+4\times10$
$=6-8\times\frac{3}{4}+40$
$=40$

20 ② $\sqrt{2a}+\sqrt{a}\neq\sqrt{3a}$
⑤ $\sqrt{a^2+b^2}\neq a+b=\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}$

21 ① $-6\sqrt{2}-3\sqrt{2}=-9\sqrt{2}$
② $\sqrt{75}+\sqrt{12}=5\sqrt{3}+2\sqrt{3}=7\sqrt{3}$
③ $\sqrt{32}-\frac{1}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$
④ $\sqrt{5}-\sqrt{125}-\sqrt{50}=\sqrt{5}-5\sqrt{5}-5\sqrt{2}$
$=-4\sqrt{5}-5\sqrt{2}$
⑤ $5\sqrt{2}-3\sqrt{48}-\sqrt{8}+3\sqrt{3}$
$=5\sqrt{2}-12\sqrt{3}-2\sqrt{2}+3\sqrt{3}$
$=(5\sqrt{2}-2\sqrt{2})+(-12\sqrt{3}+3\sqrt{3})$
$=3\sqrt{2}-9\sqrt{3}$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

22 (주어진 식)$=2\sqrt{2}\left(4\sqrt{2}-\frac{6}{\sqrt{2}}\right)+3\sqrt{2}(\sqrt{2}+2\sqrt{2})$
$=16-12+6+12=22$

23 넓이가 5 cm^2, 20 cm^2인 두 정사각형의 한 변의 길이를 각각 x cm, y cm라 하면
$x^2=5,\ y^2=20$
$\therefore x=\sqrt{5},\ y=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ ($\because x>0,\ y>0$)
$\therefore \overline{AB}+\overline{BC}=x+y$
$=\sqrt{5}+2\sqrt{5}$
$=3\sqrt{5}$ (cm)

24 $\sqrt{0.02}=\sqrt{\frac{2}{100}}=\frac{\sqrt{2}}{10}=\frac{x}{10}$에서 $a=\frac{1}{10}$
$\sqrt{80}=\sqrt{2^2\times20}=2\sqrt{20}=2y$에서 $b=2$
$\therefore 5ab=5\times\frac{1}{10}\times2=1$

25 $\sqrt{75}+\frac{18}{\sqrt{3}}-\sqrt{48}=5\sqrt{3}+\frac{18\sqrt{3}}{3}-4\sqrt{3}$
$=5\sqrt{3}+6\sqrt{3}-4\sqrt{3}=7\sqrt{3}$
$\therefore a=7$
$\sqrt{0.3}\div\sqrt{\frac{9}{5}}\times\sqrt{432}=\sqrt{\frac{3}{10}}\times\sqrt{\frac{5}{9}}\times\sqrt{432}$
$=\sqrt{\frac{3}{10}\times\frac{5}{9}\times 432}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$
$\therefore b=6$
$\therefore a+b=7+6=13$

26 $a\triangle b=a+b-ab$의 a, b에 각각 $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}-2$를 대입하면
$\sqrt{2}\triangle(\sqrt{8}-2)=\sqrt{2}+(\sqrt{8}-2)-\sqrt{2}(\sqrt{8}-2)$
$=\sqrt{2}+2\sqrt{2}-2-4+2\sqrt{2}$
$=5\sqrt{2}-6$

27 $a◉b=a-\sqrt{2}b+\sqrt{3}$의 a, b에 각각 $\sqrt{3}$, -1을 대입하면
$\sqrt{3}◉(-1)=\sqrt{3}-\sqrt{2}\times(-1)+\sqrt{3}$
$=2\sqrt{3}+\sqrt{2}$
$\therefore \{\sqrt{3}◉(-1)\}◈(-\sqrt{6})=(2\sqrt{3}+\sqrt{2})◈(-\sqrt{6})$
따라서 $a◈b=\sqrt{3}a-b$의 a, b에 각각 $2\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $-\sqrt{6}$을 대입하면
$(2\sqrt{3}+\sqrt{2})◈(-\sqrt{6})=\sqrt{3}(2\sqrt{3}+\sqrt{2})-(-\sqrt{6})$
$=6+\sqrt{6}+\sqrt{6}$
$=6+2\sqrt{6}$

28 $x\bigstar y=\sqrt{2}x-\sqrt{3}y$의 x, y에 각각 $\sqrt{2}$, $1-\sqrt{3}$을 대입하면
$\sqrt{2}\bigstar(1-\sqrt{3})=\sqrt{2}\times\sqrt{2}-\sqrt{3}(1-\sqrt{3})$
$=2-\sqrt{3}+3$
$=5-\sqrt{3}$

29 $x◎y=x-2\sqrt{y}$의 x, y에 각각 $4+3\sqrt{2}$, 8을 대입하면
$(4+3\sqrt{2})◎8=4+3\sqrt{2}-2\sqrt{8}$
$=4+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}$
$=4-\sqrt{2}$
이때 $1<\sqrt{2}<2$에서 $-2<-\sqrt{2}<-1$이므로
$2<4-\sqrt{2}<3$
따라서 $4-\sqrt{2}$의 정수 부분이 2이므로 소수 부분은
$(4-\sqrt{2})-2=2-\sqrt{2}$

30 $\sqrt{3}-1$과 $\sqrt{2}$의 대소를 비교하면
$1<\sqrt{3}<2$이므로 $0<\sqrt{3}-1<1$이고, $1<\sqrt{2}<2$이므로
$\sqrt{3}-1<\sqrt{2}$
$\therefore (\sqrt{3}-1)\triangle\sqrt{2}=\sqrt{3}-1$
$2-\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$의 대소를 비교하면
$(2-\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2-\sqrt{3}=\sqrt{4}-\sqrt{3}>0$이므로
$2-\sqrt{2}>\sqrt{3}-\sqrt{2}$
$\therefore (2-\sqrt{2})\triangle(\sqrt{3}-\sqrt{2})=\sqrt{3}-\sqrt{2}$
따라서 $\sqrt{3}-1$과 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$의 대소를 비교하면
$(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}-\sqrt{2})=-1+\sqrt{2}>0$이므로
$\sqrt{3}-1>\sqrt{3}-\sqrt{2}$
$\therefore$ (주어진 식)$=(\sqrt{3}-1)\triangledown(\sqrt{3}-\sqrt{2})=\sqrt{3}-1$

31 $\mathrm{P}\odot\mathrm{Q}=\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\times\frac{2}{3}$
$=-2+\frac{2}{3\sqrt{3}}=-2+\frac{2\sqrt{3}}{9}$
$\mathrm{R}\odot\mathrm{S}=\frac{1}{6}\times\sqrt{3}-2\sqrt{2}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}+2$
$\therefore (\mathrm{P}\odot\mathrm{Q})-(\mathrm{R}\odot\mathrm{S})$
$=\left(-2+\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}+2\right)$
$=-2+\frac{2\sqrt{3}}{9}-\frac{\sqrt{3}}{6}-2$
$=-4+\frac{4\sqrt{3}}{18}-\frac{3\sqrt{3}}{18}$
$=-4+\frac{\sqrt{3}}{18}$

32 ① $\sqrt{135}=\sqrt{3^2\times3\times5}=3\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}=3ab$
⑤ $\sqrt{135}=\sqrt{3^3\times5}=(\sqrt{3})^3\times\sqrt{5}=a^3b$

33 ③ $\sqrt{0.72}=\sqrt{\frac{72}{100}}=\frac{\sqrt{2^3\times3^2}}{10}$
$=\frac{(\sqrt{2})^3\times(\sqrt{3})^2}{10}=\frac{a^3b^2}{10}$
⑤ $\sqrt{0.72}=\sqrt{\frac{72}{100}}=\frac{\sqrt{2^2\times2\times3^2}}{10}$
$=\frac{2\times\sqrt{2}\times(\sqrt{3})^2}{10}=\frac{\sqrt{2}\times(\sqrt{3})^2}{5}=\frac{ab^2}{5}$

34 $2\sqrt{2}=\sqrt{8}=\sqrt{3+5}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{a^2+b^2}$

35 ㄱ. $\sqrt{0.5}=\sqrt{\frac{5}{10}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}=\frac{a}{\sqrt{10}}=\frac{a\sqrt{10}}{10}\neq 0.1a$
(거짓)
ㄴ. $\sqrt{180}=\sqrt{6^2\times5}=6\sqrt{5}=6a$ (참)
ㄷ. $\sqrt{0.0125}=\sqrt{\frac{125}{10000}}=\frac{(\sqrt{5})^3}{100}=\frac{a^3}{100}$ (참)
ㄹ. $\frac{1}{10}=\sqrt{\frac{1}{100}}=\sqrt{5\times\frac{1}{500}}=\sqrt{5\times\frac{2}{1000}}$
$=\sqrt{5}\times\sqrt{0.002}=a\sqrt{0.002}\neq a\sqrt{0.02}$ (거짓)
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

36 (1) $(2\sqrt{2}-5)^2=(2\sqrt{2})^2-2\times2\sqrt{2}\times5+5^2$
$=8-20\sqrt{2}+25=33-20\sqrt{2}$

(2) $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=2^2-(\sqrt{3})^2=4-3=1$

(3) $(3\sqrt{2}+\sqrt{6})(2\sqrt{6}-\sqrt{2})$
$=3\sqrt{2}\times2\sqrt{6}-3\sqrt{2}\times\sqrt{2}+\sqrt{6}\times2\sqrt{6}-\sqrt{6}\times\sqrt{2}$
$=12\sqrt{3}-6+12-2\sqrt{3}$
$=6+10\sqrt{3}$

37 $(3\sqrt{3}-4)^2-(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})$
$=(3\sqrt{3})^2-2\times3\sqrt{3}\times4+4^2-\{3^2-(2\sqrt{2})^2\}$
$=27-24\sqrt{3}+16-(9-8)$
$=42-24\sqrt{3}$
따라서 $a=42$, $b=-24$이므로
$a+b=42+(-24)=18$

38 $\square\mathrm{ABCD}=(\sqrt{18}+\sqrt{3})(\sqrt{12}-\sqrt{2})$
$=(3\sqrt{2}+\sqrt{3})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$
$=6\sqrt{6}-6+6-\sqrt{6}$
$=5\sqrt{6}\,(\mathrm{cm}^2)$

39 $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$
$=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}+\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$
$=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}+\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}$
$=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$

다른풀이 주어진 식을 변형하면
$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}$
이때 $x+y=(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)=2\sqrt{3}$,
$xy=(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=(\sqrt{3})^2-1^2=2$이므로
$\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\dfrac{(2\sqrt{3})^2-2\times2}{2}=\dfrac{12-4}{2}=4$

40 $a\sqrt{\dfrac{3b}{a}}+b\sqrt{\dfrac{12a}{b}}=\sqrt{a^2\times\dfrac{3b}{a}}+\sqrt{b^2\times\dfrac{12a}{b}}$
$=\sqrt{3ab}+\sqrt{12ab}$
$=\sqrt{3ab}+2\sqrt{3ab}$
$=3\sqrt{3ab}$
$=3\sqrt{3\times27}=3\times9=27$

41 $x>0$, $y>0$이므로
$x\sqrt{\dfrac{45y}{x}}=\sqrt{x^2\times\dfrac{45y}{x}}=\sqrt{45xy}=3\sqrt{5xy}$
$y\sqrt{\dfrac{20x}{y}}=\sqrt{y^2\times\dfrac{20x}{y}}=\sqrt{20xy}=2\sqrt{5xy}$
$\therefore x\sqrt{\dfrac{45y}{x}}+y\sqrt{\dfrac{20x}{y}}=3\sqrt{5xy}+2\sqrt{5xy}=5\sqrt{5xy}$
$=5\sqrt{5\times16}=20\sqrt{5}$

42 $a>0$, $b>0$이므로
$a\sqrt{\dfrac{16b}{a}}=\sqrt{a^2\times\dfrac{16b}{a}}=\sqrt{16ab}=4\sqrt{ab}$
$b\sqrt{\dfrac{25a}{b}}=\sqrt{b^2\times\dfrac{25a}{b}}=\sqrt{25ab}=5\sqrt{ab}$
$\therefore a\sqrt{\dfrac{16b}{a}}-b\sqrt{\dfrac{25a}{b}}=4\sqrt{ab}-5\sqrt{ab}=-\sqrt{ab}$
$=-\sqrt{49}=-7$

43 $a>0$, $b>0$이므로
$\dfrac{7a\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\dfrac{3b\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{7a\sqrt{ab}}{a}+\dfrac{3b\sqrt{ab}}{b}$
$=7\sqrt{ab}+3\sqrt{ab}$
$=10\sqrt{ab}$
$=10\times12=120$

44 $a:b=1:3$에서 $b=3a$를 주어진 식에 대입하면
$\dfrac{\sqrt{6a+b}}{\sqrt{6a-b}}=\dfrac{\sqrt{6a+3a}}{\sqrt{6a-3a}}=\dfrac{\sqrt{9a}}{\sqrt{3a}}$
$=\sqrt{\dfrac{9a}{3a}}=\sqrt{3}$
이때 $1<\sqrt{3}<2$이므로 구하는 정수는 1이다.

45 $3^{2x}\times3^{2y}=(12-3\sqrt{7})(12+3\sqrt{7})$
$=12^2-(3\sqrt{7})^2=144-63$
$=81=3^4$
이고,
$3^{2x}\times3^{2y}=3^{2x+2y}=3^{2(x+y)}$
이므로 $3^{2(x+y)}=3^4$에서 $2(x+y)=4$
$\therefore x+y=2$

46 $3x+\dfrac{1}{x}-\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)=3x+\dfrac{1}{x}-x^2-\dfrac{2}{x}$
$=-x^2+3x-\dfrac{1}{x}$
$=-(\sqrt{2})^2+3\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$=-2+3\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}-2$

47 $a=3\sqrt{2}-1$, $b=3\sqrt{2}+1$이므로
$a+b=(3\sqrt{2}-1)+(3\sqrt{2}+1)=6\sqrt{2}$
$a-b=(3\sqrt{2}-1)-(3\sqrt{2}+1)=-2$
$\therefore \dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}=\dfrac{1}{6\sqrt{2}}+\dfrac{1}{-2}$
$=\dfrac{\sqrt{2}}{12}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}-6}{12}$

48 $a=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{(2-\sqrt{3})\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$,

$b=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3}$이므로

$2a+3b=(2\sqrt{2}-\sqrt{6})+(\sqrt{2}+\sqrt{6})=3\sqrt{2}$

$a-3b=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}-(\sqrt{2}+\sqrt{6})=-\frac{3\sqrt{6}}{2}$

$\therefore \frac{2a+3b}{a-3b}=\frac{3\sqrt{2}}{-\frac{3\sqrt{6}}{2}}=3\sqrt{2}\div\left(-\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)$

$=3\sqrt{2}\times\left(-\frac{2}{3\sqrt{6}}\right)=-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

$=-\frac{2\sqrt{12}}{6}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

49 $\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{b}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}a}{2}+\frac{\sqrt{3}b}{3}$

$=\frac{\sqrt{2}(2\sqrt{3}+4)}{2}+\frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}-3\sqrt{6})}{3}$

$=\frac{2\sqrt{6}+4\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{18}}{3}$

$=\sqrt{6}+2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{3}-3\sqrt{2}$

$=\frac{4\sqrt{6}}{3}-\sqrt{2}$

50 $x>0$일 때,

$f(x)=\sqrt{x}(1-\sqrt{x})=\sqrt{x}-\sqrt{x^2}=\sqrt{x}-x$이므로

$f(1)=\sqrt{1}-1=0$, $f(2)=\sqrt{2}-2$,

$f(4)=\sqrt{4}-4=2-4=-2$, $f(8)=\sqrt{8}-8=2\sqrt{2}-8$,

$f(16)=\sqrt{16}-16=4-16=-12$

$\therefore f(1)+f(2)+f(4)+f(8)+f(16)$

$=0+(\sqrt{2}-2)+(-2)+(2\sqrt{2}-8)+(-12)$

$=3\sqrt{2}-24$

51 $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=-\sqrt{x}$이므로 $f(x)+g(x)=0$

$\therefore \{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(49)\}$

$+\{g(2)+g(3)+g(4)+\cdots+g(50)\}$

$=f(1)+\{f(2)+g(2)\}+\{f(3)+g(3)\}+$

$\cdots+\{f(49)+g(49)\}+g(50)$

$=f(1)+0+0+\cdots+0+g(50)$

$=f(1)+g(50)$

$=\sqrt{1}+(-\sqrt{50})$

$=1-5\sqrt{2}$

52 $1\le\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{3}<2$이므로

$x=1, 2, 3$일 때, $[\sqrt{x}]=1$

$\therefore f(1)=f(2)=f(3)=1$

$2\le\sqrt{4}<\sqrt{5}<\cdots<\sqrt{8}<3$이므로

$x=4, 5, 6, 7, 8$일 때, $[\sqrt{x}]=2$

$\therefore f(4)=f(5)=f(6)=f(7)=f(8)=2$

$3\le\sqrt{9}<\sqrt{10}<\cdots<\sqrt{15}<4$이므로

$x=9, 10, \cdots, 15$일 때, $[\sqrt{x}]=3$

$\therefore f(9)=f(10)=\cdots=f(15)=3$

$4\le\sqrt{16}<\sqrt{17}<\cdots<\sqrt{24}<5$이므로

$x=16, 17, \cdots, 24$일 때, $[\sqrt{x}]=4$

$\therefore f(16)=f(17)=\cdots=f(24)=4$

$x=25$일 때, $\sqrt{25}=5$이므로 $[\sqrt{x}]=5$

$\therefore f(25)=5$

따라서 구하는 값은

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(25)$

$=(1\times3)+(2\times5)+(3\times7)+(4\times9)+5$

$=3+10+21+36+5=75$

53 $\sqrt{2}(\sqrt{2}-x)-\sqrt{8}(3-\sqrt{2})=2-\sqrt{2}x-6\sqrt{2}+4$

$=6-(x+6)\sqrt{2}$

이 식의 값이 유리수가 되려면 $x+6=0$이어야 하므로

$x=-6$

54 $\sqrt{5}(3\sqrt{5}-2)-a(6-2\sqrt{5})$

$=15-2\sqrt{5}-6a+2a\sqrt{5}$

$=(15-6a)+(2a-2)\sqrt{5}$

이 식의 값이 유리수가 되려면 $2a-2=0$이어야 한다.

$\therefore a=1$

55 $\frac{\sqrt{8}-\sqrt{48}}{\sqrt{2}}+\frac{k}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$=\sqrt{4}-\sqrt{24}+k-\frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$=2-2\sqrt{6}+k-\frac{k\sqrt{6}}{3}$

$=(2+k)-\left(\frac{k}{3}+2\right)\sqrt{6}$

이 식의 값이 유리수가 되려면 $\frac{k}{3}+2=0$이어야 한다.

$\therefore k=-6$

56 $a(\sqrt{3}-1)-b+\sqrt{12}=0$

$a\sqrt{3}-a-b+2\sqrt{3}=0$

이 식의 좌변을 유리수 부분과 무리수 부분으로 나누어 정리하면

$(-a-b)+(a+2)\sqrt{3}=0$

이 등식이 성립하려면 $-a-b=0$, $a+2=0$이어야 한다.

따라서 $a=-2$, $b=2$이므로

$ab=-2\times2=-4$

57 $1<\sqrt{2}<2$에서 $\sqrt{2}$의 정수 부분이 1이므로 소수 부분은

$a=\sqrt{2}-1$

$4<\sqrt{18}<5$에서 $\sqrt{18}$의 정수 부분이 4이므로 소수 부분은

$b=\sqrt{18}-4=3\sqrt{2}-4$

$a=\sqrt{2}-1$, $b=3\sqrt{2}-4$를 $(a-1)x+(b+4)y-2=0$에 대입하면

$(\sqrt{2}-2)x+3\sqrt{2}y-2=0$

x, y가 유리수이므로 이 식의 좌변을 유리수 부분과 무리수 부분으로 나누어 정리하면

$(-2x-2)+(x+3y)\sqrt{2}=0$

이 등식이 성립하려면 $-2x-2=0$, $x+3y=0$이어야 한다.

따라서 $x=-1$, $y=\frac{1}{3}$이므로

$x+y=-1+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$

58 (1) $\sqrt{200}=\sqrt{2\times\boxed{100}}=\boxed{10}\sqrt{2}$
$=\boxed{10}\times1.414=\boxed{14.14}$

(2) $\sqrt{2000}=\sqrt{20\times\boxed{100}}=\boxed{10}\sqrt{20}$
$=\boxed{10}\times4.472=\boxed{44.72}$

(3) $\sqrt{0.02}=\sqrt{\frac{2}{\boxed{100}}}=\frac{\sqrt{2}}{\boxed{10}}=\frac{1.414}{\boxed{10}}=\boxed{0.1414}$

(4) $\sqrt{0.002}=\sqrt{\frac{20}{\boxed{10000}}}=\frac{\sqrt{20}}{\boxed{100}}$
$=\frac{4.472}{\boxed{100}}=\boxed{0.04472}$

59 ① $\sqrt{0.0491}=\sqrt{\frac{4.91}{10^2}}=\frac{\sqrt{4.91}}{10}=0.2216$

② $\sqrt{0.491}=\sqrt{\frac{49.1}{10^2}}=\frac{\sqrt{49.1}}{10}$

③ $\sqrt{491}=\sqrt{4.91\times10^2}=10\sqrt{4.91}=22.16$

④ $\sqrt{49100}=\sqrt{4.91\times100^2}=100\sqrt{4.91}=221.6$

⑤ $\sqrt{4910000}=\sqrt{4.91\times1000^2}=1000\sqrt{4.91}=2216$

따라서 $\sqrt{4.91}$의 값을 이용하여 그 값을 구할 수 없는 것은 ②이다.

60 ① $\sqrt{325}=\sqrt{3.25\times10^2}=10\sqrt{3.25}=18.03$

② $\sqrt{3250}=\sqrt{32.5\times10^2}=10\sqrt{32.5}=57.01$

③ $\sqrt{32500}=\sqrt{3.25\times100^2}=100\sqrt{3.25}=180.3$

④ $\sqrt{0.325}=\sqrt{\frac{32.5}{10^2}}=\frac{\sqrt{32.5}}{10}=0.5701$

⑤ $\sqrt{0.0325}=\sqrt{\frac{3.25}{10^2}}=\frac{\sqrt{3.25}}{10}=0.1803$

61 $\sqrt{0.0573}=\sqrt{\frac{5.73}{10^2}}=\frac{\sqrt{5.73}}{10}$

제곱근표에서 $\sqrt{5.73}$의 값이 2.394이므로

$\frac{\sqrt{5.73}}{10}=\frac{2.394}{10}=0.2394$

62 ① $\sqrt{2960}=\sqrt{29.6\times10^2}=10\sqrt{29.6}=54.41$

② $\sqrt{0.0296}=\sqrt{\frac{2.96}{10^2}}=\frac{\sqrt{2.96}}{10}=0.1720$

③ $\sqrt{0.00285}=\sqrt{\frac{28.5}{100^2}}=\frac{\sqrt{28.5}}{100}=\frac{c}{100}$

④ $\sqrt{0.0285}=\sqrt{\frac{2.85}{10^2}}=\frac{\sqrt{2.85}}{10}=\frac{a}{10}$

⑤ $\sqrt{28600}=\sqrt{2.86\times100^2}=100\sqrt{2.86}=100b$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

63 $\sqrt{0.00073}=\sqrt{\frac{7.3}{100^2}}=\frac{\sqrt{7.3}}{100}=\frac{a}{100}$

64 ① $\sqrt{32}=4\sqrt{2}=4\times1.414=5.656$

② $\sqrt{0.5}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1.414}{2}=0.707$

③ $\frac{4}{\sqrt{8}}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}=1.414$

④ $\sqrt{50}=5\sqrt{2}=5\times1.414=7.07$

⑤ $\sqrt{800}=\sqrt{20^2\times2}=20\sqrt{2}=20\times1.414=28.28$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

65 ① $\sqrt{0.05}=\sqrt{\frac{5}{10^2}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$

② $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

③ $\frac{3}{\sqrt{20}}=\frac{3}{2\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$

④ $\sqrt{0.2}=\sqrt{\frac{2}{10}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 위의 네 값은 모두 $\sqrt{5}$의 값이 2.236임을 이용하여 그 값을 구할 수 있다.

⑤ $\sqrt{5000}=50\sqrt{2}$이므로 $\sqrt{2}$의 값을 알아야 한다.

66 $\sqrt{17^2}=\sqrt{289}$이므로 $\sqrt{289}=17$

③ $\sqrt{2.89}=\sqrt{\frac{289}{10^2}}=\frac{\sqrt{289}}{10}=\frac{17}{10}=1.7$

④ $\sqrt{1156}=\sqrt{2^2\times289}=2\sqrt{289}=2\times17=34$

67 $\sqrt{0.60}=\sqrt{\frac{60}{10^2}}=\frac{\sqrt{60}}{10}=\frac{2\sqrt{15}}{10}$
$=\frac{2\times3.873}{10}=0.7746$

68 정사각형 P의 넓이는

$3\times3=9\,(\mathrm{cm}^2)$

정사각형 Q의 넓이는

$2\times2=4\,(\mathrm{cm}^2)$

이므로 두 정사각형 P, Q의 넓이의 합은

$9+4=13\,(\mathrm{cm}^2)$

이다. 이때 정사각형 R의 한 변의 길이를 x cm라 하면 넓이는 x^2 cm^{2}이므로

$x^2=13$

그런데 $x>0$이므로 x는 13의 양의 제곱근이다.

$\therefore x=\sqrt{13}$

따라서 정사각형 R의 한 변의 길이는 $\sqrt{13}$ cm이다.

69 주어진 부채꼴의 넓이는

$\pi x^2\times\dfrac{60}{360}=\dfrac{\pi x^2}{6}$ (cm^2)

주어진 원의 넓이는

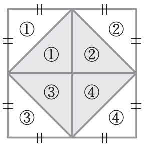
$\pi\times 2^2=4\pi$ (cm^2)

두 도형의 넓이가 같으므로

$\dfrac{\pi x^2}{6}=4\pi$에서 $x^2=24$

그런데 $x>0$이므로 $x=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

70 오른쪽 그림에서 작은 정사각형의 넓이는 큰 정사각형의 넓이의 $\dfrac{1}{2}$이므로 작은 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면



$x^2=34\times\dfrac{1}{2}=17$

그런데 $x>0$이므로 $x=\sqrt{17}$

따라서 작은 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{17}$ cm이다.

71 세 정사각형의 넓이가 각각 3 cm^2, 12 cm^2, 27 cm^{2}이므로 각각의 한 변의 길이는

$\sqrt{3}$ cm, $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ (cm), $\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ (cm)

이다.

① $\overline{AB}+\overline{BC}=\sqrt{3}+2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$ (cm)

② $\overline{DF}=\overline{DE}+\overline{EF}=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{3}$ (cm)

③ $\overline{AD}+\overline{DE}=(\overline{AB}+\overline{BD})+\overline{DE}$
$=(\sqrt{3}+2\sqrt{3})+2\sqrt{3}$
$=5\sqrt{3}$ (cm)

④ $\overline{CG}+\overline{GH}=(\overline{CE}+\overline{EG})+\overline{GH}$
$=(2\sqrt{3}+3\sqrt{3})+3\sqrt{3}$
$=8\sqrt{3}$ (cm)

⑤ $\overline{BD}+\overline{DF}+\overline{FH}=\overline{BD}+(\overline{DE}+\overline{EF})+\overline{FH}$
$=2\sqrt{3}+(2\sqrt{3}+3\sqrt{3})+3\sqrt{3}$
$=10\sqrt{3}$ (cm)

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

72 직육면체 모양의 그릇에 담긴 물의 부피는

$3x\times 2x\times 4=24x^2$ (cm^3)

삼각기둥 모양의 그릇에 담긴 물의 부피는

$\left(\dfrac{1}{2}\times 4\times 3\right)\times 8=48$ (cm^3)

따라서 $24x^2=48$이므로 $x^2=2$

그런데 $x>0$이므로 $x=\sqrt{2}$

73 주어진 원의 반지름의 길이를 r라 하면 넓이가 3π이므로

$\pi r^2=3\pi$

$\therefore r=\sqrt{3}$ ($\because r>0$)

이때 수직선 위의 두 점 A, B 사이의 거리는 원의 둘레의 길이와 같으므로

$\overline{AB}=2\pi\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}\pi$

따라서 점 B는 점 A로부터 오른쪽으로 $2\sqrt{3}\pi$만큼 떨어져 있으므로 점 B의 좌표는 B$(2+2\sqrt{3}\pi)$이다.

74 한 변의 길이가 5인 정사각형의 넓이는

$5\times 5=25$

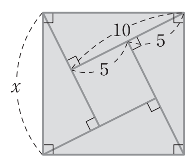
밑변의 길이가 10, 높이가 5인 직각삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 10\times 5=25$

따라서 정사각형 모양의 색종이 1장과 직각삼각형 모양의 색종이 4장의 넓이의 합은

$25+4\times 25=125$

오른쪽 그림과 같이 정사각형 모양의 색종이 1장과 직각삼각형 모양의 색종이 4장을 사용하여 만들 수 있는 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하면 이 정사각형의 넓이가 125이므로



$x^2=125$

그런데 $x>0$이므로

$x=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$

75 $3\sqrt{2}=\sqrt{3^2\times 2}=\sqrt{18}$이고 $4<\sqrt{18}<5$이므로

$3\sqrt{2}$의 정수 부분 $a=4$이고

소수 부분 $b=3\sqrt{2}-4$이다.

$\therefore b-a=3\sqrt{2}-4-4$
$=3\sqrt{2}-8$

76 $2<\sqrt{5}<3$이므로 $3<\sqrt{5}+1<4$

따라서 $\sqrt{5}+1$의 정수 부분 $a=3$,

소수 부분 $b=(\sqrt{5}+1)-3=\sqrt{5}-2$

$\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{\sqrt{5}-2}=\dfrac{3(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}$

$=\dfrac{3(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5})^2-2^2}=\dfrac{3\sqrt{5}+6}{5-4}$

$=3\sqrt{5}+6$

77 $1<\sqrt{2}<2$이므로 $\sqrt{2}$의 소수 부분은 $a=\sqrt{2}-1$
$-2<-\sqrt{2}<-1$에서 $2<4-\sqrt{2}<3$이므로
$4-\sqrt{2}$의 소수 부분은
$b=(4-\sqrt{2})-2=2-\sqrt{2}$
$\therefore 2a+b=2(\sqrt{2}-1)+(2-\sqrt{2})$
$=2\sqrt{2}-2+2-\sqrt{2}=\sqrt{2}$

78 $2\sqrt{3}=\sqrt{12}$에서 $3<\sqrt{12}<4$이므로
$2\sqrt{3}$의 정수 부분은 $a=3$
$2<\sqrt{7}<3$에서 $1<\sqrt{7}-1<2$
$\sqrt{7}-1$의 정수 부분이 1이므로 소수 부분은
$b=(\sqrt{7}-1)-1=\sqrt{7}-2$
$\therefore a+\sqrt{7}b=3+\sqrt{7}(\sqrt{7}-2)$
$=3+7-2\sqrt{7}$
$=10-2\sqrt{7}$

79 $1<\sqrt{3}<2$에서 $-2<-\sqrt{3}<-1$이므로 $2<4-\sqrt{3}<3$
$4-\sqrt{3}$의 정수 부분이 2이므로 소수 부분은
$a=(4-\sqrt{3})-2=2-\sqrt{3}$
$2\sqrt{3}=\sqrt{12}$이고, $3<\sqrt{12}<4$이므로
$4<1+\sqrt{12}<5$, 즉 $4<1+2\sqrt{3}<5$
$1+2\sqrt{3}$의 정수 부분이 4이므로 소수 부분은
$b=(1+2\sqrt{3})-4=2\sqrt{3}-3$

$$\therefore \frac{a}{b}=\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3}$$
$$=\frac{(2-\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3)}{(2\sqrt{3}-3)(2\sqrt{3}+3)}$$
$$=\frac{4\sqrt{3}+6-6-3\sqrt{3}}{(2\sqrt{3})^2-3^2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{12-9}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

80 $1<\sqrt{3}<2$에서 $\sqrt{3}$의 정수 부분이 1이므로 소수 부분은
$a=\sqrt{3}-1$
$8<\sqrt{75}<9$에서 $\sqrt{75}$의 정수 부분이 8이므로
소수 부분은
$\sqrt{75}-8=5\sqrt{3}-8=5(\sqrt{3}-1)-3=5a-3$
다른풀이 $a=\sqrt{3}-1$에서 $\sqrt{3}=a+1$을 대입하여 구할 수도 있다.
즉, $\sqrt{75}-8=5\sqrt{3}-8=5(a+1)-8=5a-3$

81 $3<\sqrt{15}<4$에서 $\sqrt{15}$의 정수 부분이 3이므로
$f(15)=3$
$4<\sqrt{20}<5$에서 $\sqrt{20}$의 정수 부분이 4이므로 소수 부분은
$\sqrt{20}-4=2\sqrt{5}-4$
즉, $g(20)=2\sqrt{5}-4$
$\therefore f(15)-g(20)=3-(2\sqrt{5}-4)$
$=3-2\sqrt{5}+4$
$=7-2\sqrt{5}$

82 $f(x)=5$에서 $\sqrt{x}$의 정수 부분이 5이므로
$5\le\sqrt{x}<6$
이 부등식의 각 변을 제곱하면
$25\le x<36$
따라서 주어진 식을 만족하는 자연수 x는 25, 26, $\cdots$, 35의 11개이다.

단원 종합 문제

본문 44~48쪽

01 3개	**02** ④	**03** ⑤	**04** ①, ⑤	**05** ③
06 ②	**07** ①, ②	**08** ⑤	**09** ③	**10** ④
11 ⑤	**12** ②	**13** -3	**14** ③	**15** ③
16 ②	**17** -5	**18** ⑤	**19** ②	**20** ⑤
21 ④	**22** ④, ⑤	**23** ⑤	**24** ④	
25 $\sqrt{2}$ cm	**26** ②	**27** ④		

28 $\mathrm{A}(-3-\sqrt{2})$, $\mathrm{B}(-3+\sqrt{2})$

29 (1) 5, $\sqrt{5}$ (2) $\mathrm{P}:5-\sqrt{5}$, $\mathrm{Q}:5+\sqrt{5}$ **30** $\dfrac{4\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3}$

01 ㄱ. 음수가 아닌 수는 0과 양수이다. 이때 0의 제곱근은 0으로 1개뿐이고 양수의 제곱근은 2개이다. (거짓)

ㄴ. $-\sqrt{(-6)^2}=-6$으로 음수이므로 이 수의 제곱근은 없다. (참)

ㄷ. $0.\dot{4}=\dfrac{4}{9}$의 제곱근은 $\pm\sqrt{\dfrac{4}{9}}=\pm\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\pm\dfrac{2}{3}$이고, $\pm0.\dot{2}=\pm\dfrac{2}{9}$이다. (거짓)

ㄹ. $\sqrt{64}=\sqrt{8^2}=8$이므로 제곱근 $\sqrt{64}$는 $\sqrt{8}$이다. (참)

ㅁ. $\sqrt{(-5)^2}=5$의 양의 제곱근과 음의 제곱근은 각각 $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$이므로 두 수의 합은 $\sqrt{5}+(-\sqrt{5})=0$이다. (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ의 3개이다.

02 ① -0.2는 정수가 아닌 유리수이다.

② $\sqrt{3.14}$는 무리수이다.

③ $\sqrt{25}-\sqrt{3}=5-\sqrt{3}$은 무리수이다.

⑤ $\sqrt{0.16}=0.4$는 정수가 아닌 유리수, $-\sqrt{81}=-9$는 정수, $3\sqrt{2}$는 무리수이다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

03 주어진 그림의 어두운 부분에 해당하는 수는 무리수이다.

① 1.4, 2는 유리수이다.

② -3, $\sqrt{\dfrac{9}{25}}=\dfrac{3}{5}$은 유리수이다.

③ $\sqrt{(-1)^2}=1$, $\sqrt{4}-1=2-1=1$은 유리수이다.

④ $\sqrt{(-0.07)^2}=0.07$, $-\sqrt{\dfrac{32}{8}}=-\sqrt{4}=-2$는 유리수이다.

따라서 무리수들로만 이루어진 것은 ⑤이다.

04 ① 두 실수 사이에는 무수히 많은 실수가 있다.

② $2<\sqrt{7}<3$이므로 2와 $\sqrt{7}$ 사이에는 정수가 없다.

③ 두 실수 사이에는 무수히 많은 무리수가 있다.

④ 두 실수 사이에는 무수히 많은 유리수가 있다.

⑤ 2와 $\sqrt{7}$에 대응하는 두 점의 중점에 대응하는 수는 $\dfrac{2+\sqrt{7}}{2}=1+\dfrac{\sqrt{7}}{2}$이고, (유리수)+(무리수)=(무리수)이므로 $1+\dfrac{\sqrt{7}}{2}$은 무리수이다.

따라서 옳은 것은 ①, ⑤이다.

05 ㄱ. 유리수와 무리수는 모두 수직선 위의 한 점에 각각 대응한다.

ㄷ. 유리수이면서 동시에 무리수인 수는 없으므로 수직선 위에는 유리수와 무리수에 동시에 대응하는 점이 있을 수 없다.

ㄹ. 수직선은 실수에 대응하는 점들로 완전히 메워진다.

ㅁ. [반례] 두 무리수가 $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$이면 $\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=4$이므로 그 곱은 유리수이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

06 ① [반례] 두 유리수 $\dfrac{1}{2}$과 $\dfrac{1}{3}$ 사이에는 자연수가 없다.

③ [반례] $b=4$이면 $a^2=4$에서 $a=-2$ 또는 $a=2$이므로 a는 유리수이다.

④ [반례] $a=2$, $b=4$이면 $a\times\sqrt{b}=2\times\sqrt{4}=2\times2=4$이므로 유리수이다.

⑤ [반례] $a=2$, $b=-\sqrt{2}$이면 $\sqrt{a}+b=\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$이므로 유리수이다.

따라서 옳은 것은 ②이다.

07 ③, ④ ab, $a\div b$는 $a=0$이면 유리수이고, $a\neq0$이면 무리수이다.

예를 들어, $a=0$, $b=\sqrt{2}$이면 a는 유리수, b는 무리수이지만 $ab=0$, $a\div b=\dfrac{a}{b}=0$으로 유리수이다.

⑤ a가 0 또는 (유리수)^{2}의 꼴이면 $\sqrt{a}$는 유리수이다.

08 $$5(2-\sqrt{3})-2(4-a\sqrt{3})=10-5\sqrt{3}-8+2a\sqrt{3}$$
$$=2+(2a-5)\sqrt{3}$$

이 식의 값이 유리수가 되려면 $2a-5=0$이어야 한다.

$\therefore a=\dfrac{5}{2}$

09 $(-5)^2=25$이므로 $(-5)^2$의 음의 제곱근은

$a=-\sqrt{25}=-5$

$\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$이므로 $\sqrt{25}$의 양의 제곱근은

$b=\sqrt{5}$

$\therefore a+b^2=-5+(\sqrt{5})^2=-5+5=0$

10 $a<0$일 때, $-a>0$이므로 $\sqrt{(-a)^2}=-a$

$2a<0$이므로 $\sqrt{(2a)^2}=-2a$

$5a<0$이므로 $\sqrt{25a^2}=\sqrt{(5a)^2}=-5a$

$\therefore \sqrt{(-a)^2}+\sqrt{(2a)^2}-\sqrt{25a^2}$

$=(-a)+(-2a)-(-5a)$

$=-a-2a+5a$

$=2a$

11 ① $(\sqrt{7}-1)-2=\sqrt{7}-3=\sqrt{7}-\sqrt{9}<0$이므로

$\sqrt{7}-1<2$

② $(2-\sqrt{5})-(-\sqrt{5}+8)=-6<0$이므로

$2-\sqrt{5}<-\sqrt{5}+8$

③ $(\sqrt{5}+\sqrt{6})-(\sqrt{7}+\sqrt{5})=\sqrt{6}-\sqrt{7}<0$이므로

$\sqrt{5}+\sqrt{6}<\sqrt{7}+\sqrt{5}$

④ $\sqrt{5}-(\sqrt{7}-1)=\sqrt{5}-\sqrt{7}+1$과 같이 부호를 판별하기 어려운 경우에는 제곱근의 값과 부등식의 성질을 이용한다. 즉,

$2<\sqrt{7}<3$이므로 $1<\sqrt{7}-1<2$이고,

$2<\sqrt{5}<3$이므로 $\sqrt{5}>\sqrt{7}-1$

⑤ $(-\sqrt{7}-3)-(-\sqrt{6}-3)=\sqrt{6}-\sqrt{7}<0$이므로

$-\sqrt{7}-3<-\sqrt{6}-3$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

참고 ④에서 제곱근의 값을 이용할 수도 있다.

$\sqrt{5}=2.\times\times\times$ 이고,

$\sqrt{7}=2.\times\times\times$ 에서 $\sqrt{7}-1=1.\times\times\times$ 이므로

$\sqrt{5}>\sqrt{7}-1$

12 $b-c=(\sqrt{17}+1)-(\sqrt{12}+1)=\sqrt{17}-\sqrt{12}>0$

$\therefore b>c$

$c-a=(\sqrt{12}+1)-4=\sqrt{12}-3=\sqrt{12}-\sqrt{9}>0$

$\therefore c>a$

따라서 $b>c$, $c>a$이므로 $a<c<b$이다.

다른풀이 $b=\sqrt{17}+1$에서 $4<\sqrt{17}<5$이므로

$5<\sqrt{17}+1<6$이다.

$c=\sqrt{12}+1$에서 $3<\sqrt{12}<4$이므로

$4<\sqrt{12}+1<5$이다.

$\therefore a<c<b$

13 $2<\sqrt{5}<3$에서 $1<\sqrt{5}-1<2$이므로 $\sqrt{5}-1$은 점 C에 대응한다.

$1<\sqrt{2}<2$에서 $-2<-\sqrt{2}<-1$이므로 $-\sqrt{2}$는 점 A에 대응한다.

$1<\sqrt{3}<2$에서 $-2<-\sqrt{3}<-1$이고,

$-1<-\sqrt{3}+1<0$이므로 $-\sqrt{3}+1$은 점 B에 대응한다.

따라서 $a=-\sqrt{2}$, $c=\sqrt{5}-1$이므로

$a^2-(c+1)^2=(-\sqrt{2})^2-(\sqrt{5}-1+1)^2$

$=-3$

14 ① $-\sqrt{2}\sqrt{22}=-\sqrt{44}=-\sqrt{2^2\times11}=-2\sqrt{11}$

② $\sqrt{\frac{16}{3}}\div\sqrt{\frac{2}{9}}=\sqrt{\frac{16}{3}}\times\sqrt{\frac{9}{2}}=\sqrt{\frac{16}{3}\times\frac{9}{2}}$

$=\sqrt{24}=\sqrt{2^2\times6}$

$=2\sqrt{6}$

③ $\left(-\sqrt{\frac{14}{9}}\right)\times5\sqrt{\frac{2}{7}}=-5\sqrt{\frac{14}{9}\times\frac{2}{7}}$

$=-5\sqrt{\frac{4}{9}}$

$=-5\times\frac{2}{3}$

$=-\frac{10}{3}$

④ $\sqrt{20}\div\sqrt{2}\div\sqrt{5}=\sqrt{20}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}$

$=\sqrt{20\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}}$

$=\sqrt{2}$

⑤ $(-3\sqrt{2})\times(-4\sqrt{6})=(-3)\times(-4)\times\sqrt{2\times6}$

$=12\sqrt{12}=12\sqrt{2^2\times3}$

$=24\sqrt{3}$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

15 $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

$=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2-(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$

$=\frac{(5-2\sqrt{15}+3)-(5+2\sqrt{15}+3)}{5-3}$

$=\frac{-4\sqrt{15}}{2}$

$=-2\sqrt{15}$

16 $\frac{\sqrt{98}-\sqrt{27}}{\sqrt{2}}-\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{18}}{\sqrt{3}}$

$=\frac{7\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$=\frac{(7\sqrt{2}-3\sqrt{3})\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}-\frac{(5\sqrt{3}-3\sqrt{2})\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$=\frac{14-3\sqrt{6}}{2}-\frac{15-3\sqrt{6}}{3}$

$=7-\frac{3\sqrt{6}}{2}-5+\sqrt{6}$

$=2-\frac{\sqrt{6}}{2}$

따라서 $a=2$, $b=-\frac{1}{2}$이므로

$ab=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

17 주어진 두 식을 각각 계산하면

$a=\sqrt{(-1)^2}+(-\sqrt{3})^2-(-\sqrt{5})^2$

$=1+3-5=-1$

$b=(-\sqrt{4})^2\times\sqrt{\frac{25}{16}}-\sqrt{0.81}\times\sqrt{(-10)^2}$

$=4\times\frac{5}{4}-0.9\times10$

$=5-9$

$=-4$

$\therefore a+b=(-1)+(-4)=-5$

18 $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 이하의 자연수는 1의 1개이므로

$N(1)=N(2)=N(3)=1$

같은 방법으로 하면

$N(4)=N(5)=N(6)=N(7)=N(8)=2$

$N(9)=N(10)=N(11)=\cdots=N(15)=3$

$N(16)=N(17)=N(18)=\cdots=N(24)=4$

$\therefore N(1)+N(2)+N(3)+\cdots+N(24)$

$=1\times3+2\times5+3\times7+4\times9$

$=3+10+21+36=70$

따라서 a의 값은 24이다.

19 $f(1)=\sqrt{1}-\sqrt{2}$, $f(2)=\sqrt{2}-\sqrt{3}$, $f(3)=\sqrt{3}-\sqrt{4}$, $\cdots$, $f(8)=\sqrt{8}-\sqrt{9}$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(8)$

$=(\sqrt{1}-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{8}-\sqrt{9})$

$=\sqrt{1}-\sqrt{9}$

$=1-3$

$=-2$

20 $\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{b}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}a}{2}+\frac{\sqrt{3}b}{3}$

$=\frac{\sqrt{2}(2\sqrt{3}+4)}{2}+\frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}-3\sqrt{6})}{3}$

$=\frac{2\sqrt{6}+4\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{18}}{3}$

$=\sqrt{6}+2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{3}-3\sqrt{2}$

$=\frac{4\sqrt{6}}{3}-\sqrt{2}$

21 $\sqrt{43-x}$가 자연수가 되려면 $43-x$는 43보다 작은 (자연수)^{2}의 꼴이어야 하므로

$43-x=1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \cdots,\ 6^2$

$\therefore x=42,\ 39,\ 34,\ \cdots,\ 7$

따라서 자연수 x의 값 중 가장 작은 자연수 $a=7$이고, 가장 큰 자연수 $b=42$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{42}{7}=6$

22 ④ $\sqrt{216}=\sqrt{2^3\times3^3}=(\sqrt{2})^3\times(\sqrt{3})^3=a^3b^3$

⑤ $\sqrt{216}=\sqrt{2^3\times3^3}=2\sqrt{2}\times3\sqrt{3}=6\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}=6ab$

다른풀이 각각에 수를 대입하여 풀 수도 있다.

① $a^2b=2\sqrt{3}=\sqrt{12}$

② $ab^3=\sqrt{2}\times3\sqrt{3}=3\sqrt{6}=\sqrt{54}$

③ $2a^2b=2\times2\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}=\sqrt{48}$

④ $a^3b^3=2\sqrt{2}\times3\sqrt{3}=6\sqrt{6}=\sqrt{216}$

⑤ $6ab=6\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}=6\sqrt{6}=\sqrt{216}$

23 부등식 $2<\sqrt{2a-1}<4$의 각 변을 제곱하면

$4<2a-1<16$, $5<2a<17$

$\therefore \frac{5}{2}<a<\frac{17}{2}$

따라서 자연수 a는 3, 4, 5, 6, 7, 8의 6개이다.

24 부등식 $2<\sqrt{3n}<4$의 각 변을 제곱하면

$4<3n<16$

$\therefore \frac{4}{3}<n<\frac{16}{3}$

이때 n은 자연수이므로

$n=2,\ 3,\ 4,\ 5$

따라서 모든 n의 값의 합은

$2+3+4+5=14$

25 4개의 정사각형 (가), (나), (다), (라)의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S_4라 하면

$S_1=5S_2$, $S_2=4S_3$, $S_3=3S_4$

이때 $S_1=120\text{ cm}^2$이므로

$S_2=\frac{1}{5}S_1=\frac{1}{5}\times120=24\ (\text{cm}^2)$

$S_3=\frac{1}{4}S_2=\frac{1}{4}\times24=6\ (\text{cm}^2)$

$S_4=\frac{1}{3}S_3=\frac{1}{3}\times6=2\ (\text{cm}^2)$

따라서 정사각형 (라)의 한 변의 길이는

$\sqrt{S_4}=\sqrt{2}\text{ cm}$

다른풀이 정사각형 (라)의 넓이를 S라 하면

정사각형 (다)의 넓이는 $3S$

정사각형 (나)의 넓이는 $4\times3S=12S$

정사각형 (가)의 넓이는 $5\times12S=60S$

이때 정사각형 (가)의 넓이가 120 cm^2이므로

$60S=120$

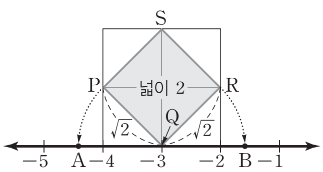
$\therefore S=2$

따라서 정사각형 (라)의 넓이가 2 cm^2이므로 그 한 변의 길이는 $\sqrt{2}\text{ cm}$이다.

26 $4<\sqrt{24}<5$에서 $\sqrt{24}$의 정수 부분이 4이므로
$f(24)=\sqrt{24}-4=2\sqrt{6}-4$
$2<\sqrt{6}<3$에서 $\sqrt{6}$의 정수 부분이 2이므로
$f(6)=\sqrt{6}-2$
$\therefore f(24)-f(6)=2\sqrt{6}-4-(\sqrt{6}-2)$
$=2\sqrt{6}-4-\sqrt{6}+2$
$=\sqrt{6}-2$

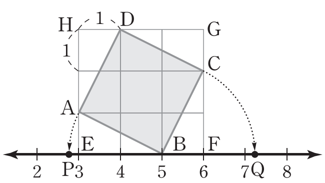
27 ① $\sqrt{2370}=\sqrt{23.7\times10^2}=10\sqrt{23.7}$
$=10\times4.868=48.68$
② $\sqrt{23700}=\sqrt{2.37\times100^2}=100\sqrt{2.37}$
$=100\times1.539=153.9$
③ $\sqrt{0.237}=\sqrt{\frac{23.7}{10^2}}=\frac{\sqrt{23.7}}{10}$
$=\frac{4.868}{10}=0.4868$
④ $\sqrt{0.0237}=\sqrt{\frac{2.37}{10^2}}=\frac{\sqrt{2.37}}{10}$
$=\frac{1.539}{10}=0.1539$
⑤ $\sqrt{0.00237}=\sqrt{\frac{23.7}{100^2}}=\frac{\sqrt{23.7}}{100}$
$=\frac{4.868}{100}=0.04868$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

28 한 변의 길이가 2인 정사각형의 넓이는 $2\times2=4$이므로
□PQRS의 넓이는
$4\times\frac{1}{2}=2$
□PQRS의 한 변의
길이를 x라 하면
$x^2=2$
$\therefore x=\sqrt{2}$ ($\because x>0$)



따라서 $\overline{QA}=\overline{QP}=\sqrt{2}$, $\overline{QB}=\overline{QR}=\sqrt{2}$이므로
점 A$(-3-\sqrt{2})$, 점 B$(-3+\sqrt{2})$이다.

29 (1)



위의 그림에서
□EFGH$=3\times3=9$
△AEB$=$△BFC$=$△CGD$=$△DHA
$=\frac{1}{2}\times2\times1=1$
이므로
□ABCD$=$□EFGH$-4\times$△AEB
$=9-4=5$
따라서 □ABCD의 넓이는 5이고, 그 한 변의 길이는 $\sqrt{5}$이다.
(2) $\overline{BP}=\overline{BA}=\sqrt{5}$, $\overline{BQ}=\overline{BC}=\sqrt{5}$이고 점 P는 기준점 B의 왼쪽, 점 Q는 기준점 B의 오른쪽에 있으므로 점 P에 대응하는 수는 $5-\sqrt{5}$, 점 Q에 대응하는 수는 $5+\sqrt{5}$이다.

30 $S_2=\frac{1}{3}S_1$, $S_3=\frac{1}{3}S_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}S_1=\frac{1}{9}S_1$이므로
$S_1:S_2:S_3=S_1:\frac{1}{3}S_1:\frac{1}{9}S_1$
$=1:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}$
따라서 세 정사각형 (가), (나), (다)의 한 변의 길이의 비는
$\sqrt{1}:\sqrt{\frac{1}{3}}:\sqrt{\frac{1}{9}}$, 즉 $1:\frac{\sqrt{3}}{3}:\frac{1}{3}$
이때 $S_1=2$이므로 정사각형 (가)의 한 변의 길이는
$\sqrt{2}$이고, 정사각형 (나), (다)의 한 변의 길이는 각각
$\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\frac{\sqrt{2}}{3}$이다.
$\therefore \overline{AB}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}$
$=\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3}$

다른풀이 $S_1=2$에서 정사각형 (가)의 넓이가 2이므로
$S_2=\frac{1}{3}S_1=\frac{1}{3}\times2=\frac{2}{3}$
$S_3=\frac{1}{3}S_2=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$
따라서 세 정사각형 (가), (나), (다)의 한 변의 길이는
각각 $\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{2}{9}}$, 즉 $\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\frac{\sqrt{2}}{3}$이므로
$\overline{AB}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}$
$=\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3}$

Ⅱ 이차방정식

01 인수분해

Best 최상위 유형

본문 52~74쪽

1 ③　2 ①　3 ②　4 ②　5 ②
6 6　7 ③　8 ①, ④　9 ㄷ, ㅂ　10 ③
11 ②, ③　12 ㄱ, ㄷ, ㄹ　13 ④　14 ②
15 ⑤　16 ②　17 13　18 16　19 ⑤
20 ①, ⑤　21 ④　22 -12　23 ①, ⑤　24 ③
25 ⑤　26 ①　27 ④　28 ①　29 ④
30 (1) $(x+2)(x+3)$　(2) $(x-3)(x+4)$
(3) $(x+2)(3x+1)$　(4) $(x+5)(2x-1)$
31 ③　32 ⑤　33 ③　34 ③　35 ①
36 ②　37 $(x+6)(2x-5)$　38 ⑤　39 ①
40 ③　41 ①　42 ④　43 ③　44 ④
45 ④　46 6　47 20　48 ⑤　49 ④
50 ㄴ, ㄹ　51 ⑤　52 $6x-2y-2$
53 $(x+y-4)(x+y+6)$　54 13　55 ②
56 $2x^2+10x+10$　57 ②　58 ①
59 $(x^2-2x-16)(x^2-4x-16)$
60 $a+1$, $a-2$, $a+b-2$　61 ④　62 ③
63 ①, ④　64 ④　65 ⑤
66 $(x-y-2)(x-y-3)$　67 ㄱ, ㄹ　68 ①
69 $(x-y)(y-z)(x-z)$
70 (1) -60　(2) 11　(3) $x^2+11x-60$　(4) $(x-4)(x+15)$
71 $(x+2)(x-20)$　72 ③　73 -3
74 $(x-4)(x+7)$　75 ②　76 ②　77 1
78 ③　79 ②　80 21　81 ②　82 ③
83 131　84 ①　85 ③　86 ③　87 ③
88 ④　89 ④　90 ②　91 $\frac{25}{4}$　92 ①
93 -5　94 ①　95 ③　96 ②　97 $\frac{1007}{2013}$
98 -1　99 ⑤　100 $(x-1)(x-4)$　101 ⑤
102 ②　103 ①　104 $(3x-5)(x-9)$
105 (1) $a\pi(2r+a)$　(2) $\pi(2r+a)$　(3) al
106 $\pi(3r+1)(r+1)\ \mathrm{cm}^2$　107 ⑤　108 ④
109 $\frac{2}{3}(x+y)(x-y)$

---

1 $ab-2a-2b+4=a(b-2)-2(b-2)$
$=(a-2)(b-2)$

2 $xy^2-xz^2-y+z=x(y^2-z^2)-(y-z)$
$=x(y+z)(y-z)-(y-z)$
$=(y-z)\{x(y+z)-1\}$
$=(y-z)(xy+xz-1)$
$\therefore A=y-z$

3 $4x^2-2x-9y^2+3y=(4x^2-9y^2)-(2x-3y)$
$=\{(2x)^2-(3y)^2\}-(2x-3y)$
$=(2x+3y)(2x-3y)-(2x-3y)$
$=(2x-3y)(2x+3y-1)$
따라서 $a=-3$, $b=2$, $c=3$, $d=-1$이므로
$ab-cd=-3\times2-3\times(-1)$
$=-6+3=-3$

4 $9-x^2-y^2+2xy=9-(x^2+y^2-2xy)$
$=3^2-(x-y)^2$
$=\{3+(x-y)\}\{3-(x-y)\}$
$=(3+x-y)(3-x+y)$

5 $1-4x^2-4xy-y^2=1-(4x^2+4xy+y^2)$
$=1^2-(2x+y)^2$
$=\{1+(2x+y)\}\{1-(2x+y)\}$
$=(1+2x+y)(1-2x-y)$
따라서 $a=1$, $b=2$, $c=1$, $d=-1$이므로
$a+b+c+d=1+2+1+(-1)=3$

6 $4xy+25z^2-x^2-4y^2=25z^2-(x^2-4xy+4y^2)$
$=(5z)^2-(x-2y)^2$
$=\{5z+(x-2y)\}\{5z-(x-2y)\}$
$=(5z+x-2y)(5z-x+2y)$
따라서 $a=5$, $b=-1$, $c=2$이므로
$a+b+c=5+(-1)+2=6$

7 $a(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$의 인수는 1, a, $x+y$, $x-y$, x^2+y^2의 곱으로 이루어진 식들이다.
따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ③이다.

8 $a^2+ab-2a-2b=a(a+b)-2(a+b)$
$=(a+b)(a-2)$
따라서 주어진 식의 인수는 ①, ④이다.

9 $a^4-a^3-a^2+1=(a^4-a^3)-(a^2-1)$
$=a^3(a-1)-(a+1)(a-1)$
$=(a-1)\{a^3-(a+1)\}$
$=(a-1)(a^3-a-1)$
따라서 보기 중 주어진 식의 인수는 ㄷ, ㅂ이다.

10 $4x^2-y^2-2y-1$
$=4x^2-(y^2+2y+1)$

$=(2x)^2-(y+1)^2$
$=A^2-B^2 \leftarrow A=2x,\ B=y+1$
$=(A+B)(A-B)$
$=(2x+y+1)\{2x-(y+1)\}$
$=(2x+y+1)(2x-y-1)$
따라서 보기 중 주어진 식의 인수인 것을 모두 고르면 ㄴ, ㄷ이다.

11 $4z^2-x^2-9y^2+6xy=4z^2-(x^2+9y^2-6xy)$
$=(2z)^2-(x-3y)^2$
$=\{2z+(x-3y)\}\{2z-(x-3y)\}$
$=(2z+x-3y)(2z-x+3y)$
따라서 주어진 식의 인수를 모두 고르면 ②, ③이다.

12 $a^4-a^2=a^2(a^2-1)=a^2(a+1)(a-1)$
따라서 보기 중 주어진 식의 인수를 모두 고르면 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

13 $x(a+b)-y(a+b)=(a+b)(x-y)$
$a(x-y)+b(y-x)=a(x-y)-b(x-y)$
$=(x-y)(a-b)$
따라서 두 다항식의 공통인수는 $x-y$이다.

14 주어진 두 다항식을 인수분해하면
$x-3x^2=x(1-3x)$
$-9x^2y+3xy=3xy(1-3x)$
따라서 두 다항식의 공통인수는 $x(1-3x)$이다.

15 주어진 두 다항식을 인수분해하면
$ab-ac-b+c=a(b-c)-(b-c)$
$=(b-c)(a-1)$
$ab-ac-bc+c^2=a(b-c)-c(b-c)$
$=(b-c)(a-c)$
따라서 두 다항식의 공통인수는 $b-c$이다.

16 ① $x^2-x+\square=x^2-2\times x\times\frac{1}{2}+\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$
$\therefore \square=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$
② $\square x^2+8x+1=\square x^2+2\times4x\times1+1^2=(4x+1)^2$
$\square x^2=(4x)^2 \quad \therefore \square=4^2=16$
③ $\square x^2+6x+9=\square x^2+2\times x\times3+3^2=(x+3)^2$
$\square x^2=x^2 \quad \therefore \square=1$
④ $9x^2-12xy+\square y^2$
$=(3x)^2-2\times3x\times2y+(2y)^2$
$=(3x-2y)^2$
$\square y^2=(2y)^2 \quad \therefore \square=2^2=4$
⑤ $x^2+\square xy+\frac{1}{9}y^2=x^2+\square xy+\left(\frac{1}{3}y\right)^2=\left(x+\frac{1}{3}y\right)^2$
$\therefore \square=2\times1\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ ($\because$ $\square$ 안의 수는 양수)
따라서 $\square$ 안에 들어갈 수 중 가장 큰 것은 ②이다.

17 $ax^2+24x+16=ax^2+2\times3x\times4+4^2$
$=(3x+4)^2$
이므로
$ax^2=(3x)^2=9x^2 \qquad \therefore a=9$
$4x^2+bxy+y^2=(2x)^2\pm2\times2x\times y+y^2$
$=(2x\pm y)^2$
$=4x^2\pm4xy+y^2$
$\therefore b=-4$ ($\because b<0$)
$\therefore a-b=9-(-4)=13$

다른풀이 이차식 ax^2+bx+c가 완전제곱식이 되려면
$b^2=4ac$이어야 하므로
$ax^2+24x+16$에서
$24^2=4\times a\times16 \qquad \therefore a=9$
$4x^2+bxy+y^2$에서
$b^2=4\times4\times1 \qquad \therefore b=-4$ ($\because b<0$)
$\therefore a-b=9-(-4)=13$

18 $(2x+3)(2x-5)+k=4x^2+(-10+6)x-15+k$
$=4x^2-4x-15+k$
$=(2x)^2-2\times2x\times1-15+k$
따라서 완전제곱식이 되려면 $-15+k=1^2$이므로 $k=16$

다른풀이 이차식이 완전제곱식이 되려면
$(2x+3)(2x-5)+k=4x^2-4x-15+k$에서
(일차항의 계수)$^2=4\times$(이차항의 계수)$\times$(상수항)
이어야 하므로
$(-4)^2=4\times4\times(-15+k),\ -15+k=1$
$\therefore k=16$

19 $16x^2-(k-3)x+9=(4x)^2-(k-3)x+3^2$에서
$-(k-3)=\pm2\times4\times3=\pm24$
$-k+3=24$ 또는 $-k+3=-24$
$\therefore k=-21$ 또는 $k=27$
따라서 모든 상수 k의 값의 합은
$-21+27=6$

다른풀이 이차식이 완전제곱식이 되려면
(일차항의 계수)$^2=4\times$(이차항의 계수)$\times$(상수항)
이어야 하므로
$16x^2-(k-3)x+9$에서
$\{-(k-3)\}^2=4\times16\times9=24^2$
$\therefore k-3=\pm24$
따라서 $k=-21$ 또는 $k=27$이므로 모든 상수 k의 값의 합은 $-21+27=6$

20 $4x^2+kx+\dfrac{1}{25}=(2x)^2+kx+\left(\dfrac{1}{5}\right)^2$

$\therefore k=\pm2\times2\times\dfrac{1}{5}=\pm\dfrac{4}{5}$

다른풀이 이차식이 완전제곱식이 되려면

(일차항의 계수)^2$=4\times$(이차항의 계수)$\times$(상수항)

이어야 하므로

$k^2=4\times4\times\dfrac{1}{25}=\dfrac{16}{25}\qquad\therefore k=\pm\dfrac{4}{5}$

21 ① $a^2-6a+9=(a-3)^2$

② $9a^2-30ab+25b^2=(3a-5b)^2$

③ $4x^2-12x+9=(2x-3)^2$

⑤ $\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{9}=\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}\right)^2$

따라서 완전제곱식으로 인수분해할 수 없는 것은 ④이다.

22 $ax^2-12x+b=(2x+c)^2$에서

$ax^2=(2x)^2=4x^2\qquad\therefore a=4$

$-12=2\times2\times c\qquad\therefore c=-3$

$b=c^2=(-3)^2=9$

$\therefore \dfrac{ab}{c}=\dfrac{4\times9}{-3}=-12$

23 $-5x^2-axy-45y^2=-5\left(x^2+\dfrac{a}{5}xy+9y^2\right)$

$=-5(x+by)^2$

이므로

$\dfrac{a}{5}=2\times1\times b\qquad\therefore a=10b$

$9y^2=(by)^2,\ 9y^2=b^2y^2\qquad\therefore b=\pm3$

$b=3$일 때, $a=10\times3=30$

$b=-3$일 때, $a=10\times(-3)=-30$

따라서 $a+b$의 값은

$30+3=33$ 또는 $-30+(-3)=-33$

24 $\sqrt{y^2-10y+25}-\sqrt{y^2+4y+4}=\sqrt{(y-5)^2}-\sqrt{(y+2)^2}$

이때 $-2<y<5$에서 $y-5<0,\ y+2>0$이므로

$\sqrt{(y-5)^2}=-(y-5),\ \sqrt{(y+2)^2}=y+2$

$\therefore$ (주어진 식)$=-(y-5)-(y+2)$

$=-y+5-y-2$

$=-2y+3$

25 $\sqrt{a^2-a+\dfrac{1}{4}}-\sqrt{a^2+a+\dfrac{1}{4}}=\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2}$

이때 $0<2a<1$에서 $0<a<\dfrac{1}{2}$이므로

$a-\dfrac{1}{2}<0,\ a+\dfrac{1}{2}>0$

$\therefore$ (주어진 식)$=\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2}$

$=-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)-\left(a+\dfrac{1}{2}\right)$

$=-a+\dfrac{1}{2}-a-\dfrac{1}{2}$

$=-2a$

26 $x^4-81=(x^2)^2-9^2$

$=(x^2+9)(x^2-9)$

$=(x^2+9)(x^2-3^2)$

$=(x^2+9)(x+3)(x-3)$

따라서 인수가 아닌 것은 ①이다.

27 $\dfrac{1}{9}a^2-\dfrac{25}{36}b^2=\left(\dfrac{1}{3}a\right)^2-\left(\dfrac{5}{6}b\right)^2=\left(\dfrac{1}{3}a+\dfrac{5}{6}b\right)\left(\dfrac{1}{3}a-\dfrac{5}{6}b\right)$

따라서 두 일차식은 $\dfrac{1}{3}a+\dfrac{5}{6}b,\ \dfrac{1}{3}a-\dfrac{5}{6}b$이고, 그 합은

$\left(\dfrac{1}{3}a+\dfrac{5}{6}b\right)+\left(\dfrac{1}{3}a-\dfrac{5}{6}b\right)=\dfrac{2}{3}a$

28 $16x^3y-36xy^3=4xy(4x^2-9y^2)$

$=4xy\{(2x)^2-(3y)^2\}$

$=4xy(2x+3y)(2x-3y)$

$=A(2x+by)(cx-3y)$

따라서 $A=4xy,\ b=3,\ c=2$이므로

$\dfrac{Ab}{c}=\dfrac{4xy\times3}{2}=6xy$

29 $[2x-y,\ -x+y]$

$=(2x-y)^2-(-x+y)^2\ \leftarrow A=2x-y,\ B=-x+y$

$=A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

$=(2x-y-x+y)\{2x-y-(-x+y)\}$

$=x(3x-2y)$

30 (1) $x^2+5x+6=x^2+(2+3)x+2\times3$

$=(x+2)(x+3)$

(2) $x^2+x-12=x^2+(4-3)x+4\times(-3)$

$=(x-3)(x+4)$

(3) $3x^2+7x+2=(x+2)(3x+1)$

$$\begin{array}{ccccl}1 & & 2 & \rightarrow & 6\\ & \times & & & \\ 3 & & 1 & \rightarrow & \underline{1}\ (+\\ & & & & 7\end{array}$$

(4) $2x^2+9x-5=(x+5)(2x-1)$

$$\begin{array}{ccccl}1 & & 5 & \rightarrow & 10\\ & \times & & & \\ 2 & & -1 & \rightarrow & \underline{-1}\ (+\\ & & & & 9\end{array}$$

31 ① $x^2+7x+10=x^2+(2+5)x+2\times5$

$=(x+2)(x+5)$

② $x^2+x-20=x^2+(5-4)x+5\times(-4)$

$=(x+5)(x-4)$

③ $6x^2+7x-5=(2x-1)(3x+5)$

$$\begin{array}{ccccl}2 & & -1 & \rightarrow & -3\\ & \times & & & \\ 3 & & 5 & \rightarrow & \underline{10}\ (+\\ & & & & 7\end{array}$$

④ $x^2+5xy-24y^2=x^2+(8-3)xy+8y\times(-3y)$
$=(x+8y)(x-3y)$

⑤ $12x^2-13xy+3y^2=(3x-y)(4x-3y)$

$$\begin{array}{cccccc} 3 & \diagdown\!\!\!\diagup & -1 & \to & -4 & \\ 4 & & -3 & \to & \underline{-9} & (+ \\ & & & & -13 & \end{array}$$

따라서 인수분해한 것으로 옳지 않은 것은 ③이다.

32 $5x^2-8xy-4y^2=(x-2y)(5x+2y)=(ax+by)(cx-dy)$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\diagup & -2 & \to & -10 & \\ 5 & & 2 & \to & \underline{2} & (+ \\ & & & & -8 & \end{array}$$

이때 $d>0$이므로 $a=5$, $b=2$, $c=1$, $d=2$

$\therefore a+b+c+d=5+2+1+2=10$

33 ① $x^2+x-6=x^2+(3-2)x+3\times(-2)$
$=(x+3)(x-2)$

② $x^2-9x+14=x^2+(-2-7)x+(-2)\times(-7)$
$=(x-2)(x-7)$

③ $x^2-7x-18=x^2+(2-9)x+2\times(-9)$
$=(x+2)(x-9)$

④ $2x^2-x-6=(x-2)(2x+3)$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\diagup & -2 & \to & -4 & \\ 2 & & 3 & \to & \underline{3} & (+ \\ & & & & -1 & \end{array}$$

⑤ $3x^2-7x+2=(x-2)(3x-1)$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\diagup & -2 & \to & -6 & \\ 3 & & -1 & \to & \underline{-1} & (+ \\ & & & & -7 & \end{array}$$

따라서 ①, ②, ④, ⑤는 $x-2$를 공통인수로 갖는다.

34 $x^2-3xy-28y^2=(x+4y)(x-7y)$

① $x^2-xy-20y^2=(x+4y)(x-5y)$

② $x^2-6xy-7y^2=(x+y)(x-7y)$

③ $x^2-10xy+24y^2=(x-4y)(x-6y)$

④ $2x^2-15xy+7y^2=(2x-y)(x-7y)$

⑤ $3x^2+11xy-4y^2=(3x-y)(x+4y)$

따라서 공통인수를 갖지 않는 것은 ③이다.

35 $x^2-7x+12=x^2+(-4-3)x+(-4)\times(-3)$
$=(x-4)(x-3)$

$2x^2-7x-4=(x-4)(2x+1)$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\diagup & -4 & \to & -8 & \\ 2 & & 1 & \to & \underline{1} & (+ \\ & & & & -7 & \end{array}$$

이므로 두 다항식의 공통인수는 $x-4$ $\quad\therefore p=-4$

$3x^2+10x-8=(x+4)(3x-2)$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\diagup & 4 & \to & 12 & \\ 3 & & -2 & \to & \underline{-2} & (+ \\ & & & & 10 & \end{array}$$

$5x^2+19x-4=(x+4)(5x-1)$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\diagup & 4 & \to & 20 & \\ 5 & & -1 & \to & \underline{-1} & (+ \\ & & & & 19 & \end{array}$$

이므로 두 다항식의 공통인수는 $x+4$ $\quad\therefore q=4$

$\therefore p-q=-4-4=-8$

36 $x^2-9y^2=x^2-(3y)^2=(x+3y)(x-3y)$

$x^2-12xy+27y^2=x^2+(-3-9)xy+(-3y)\times(-9y)$
$=(x-3y)(x-9y)$

$2x^2-5xy-3y^2=(x-3y)(2x+y)$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\diagup & -3 & \to & -6 & \\ 2 & & 1 & \to & \underline{1} & (+ \\ & & & & -5 & \end{array}$$

따라서 세 다항식의 공통인수는 $x-3y$이다.

37 주어진 식이 $x+6$을 인수로 가지므로

$ax^2+7x-30=(x+6)(ax-5)$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\diagup & 6 & \to & 6a & \\ a & & -5 & \to & \underline{-5} & (+ \\ & & & & 6a-5 & \end{array}$$

즉, $6a-5=7$이므로 $a=2$

따라서 $2x^2+7x-30=(x+6)(2x-5)$

38 $x^2-2(a-1)x+3a=(x-5)(x+p)$로 놓으면

$x^2-2(a-1)x+3a=x^2+(p-5)x-5p$에서

$-2(a-1)=p-5$, $3a=-5p$

$3a=-5p$에서 $p=-\frac{3}{5}a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $-2(a-1)=p-5$에 대입하면

$-2(a-1)=-\frac{3}{5}a-5$, $-2a+2=-\frac{3}{5}a-5$

$\frac{7}{5}a=7$ $\quad\therefore a=5$

다른풀이 $x^2-2(a-1)x+3a$가 $x-5$를 인수로 가지므로 이 식에 $x-5=0$이 되는 x의 값, 즉 $x=5$를 대입하면 식의 값이 0이 된다.

$5^2-2(a-1)\times5+3a=0$, $25-10a+10+3a=0$

$7a=35$ $\quad\therefore a=5$

39 $-6x^2+kx-2=(2x-1)(-3x+2)$로 놓으면

$-6x^2+kx-2=-6x^2+7x-2$이므로

$k=7$

따라서 다른 인수는 $-3x+2$이고, k의 값은 7이다.

다른풀이 $-6x^2+kx-2$가 $2x-1$을 인수로 가지므로 이 식에 $2x-1=0$이 되는 x의 값, 즉 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면 식의 값이 0이 된다.

$-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+k\times\frac{1}{2}-2=0$

$-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}k-2=0 \qquad \therefore k=7$

$\therefore -6x^2+7x-2=(2x-1)(-3x+2)$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & & -1 & \rightarrow & 3 \\ -3 & & 2 & \rightarrow & 4 \;(+ \\ \hline & & & & 7 \end{array}$$

40 $2x^2+Axy-10y^2=(x-2y)(2x+5y)$로 놓으면

$2x^2+Axy-10y^2=2x^2+xy-10y^2$이므로

$A=1$

41 $3x^2+ax+8$이 $x-2$와 $3x-b$로 각각 나누어떨어지므로

$3x^2+ax+8=(x-2)(3x-b)$로 놓으면

$3x^2+ax+8=3x^2+(-b-6)x+2b$에서

$a=-b-6$, $8=2b$

따라서 $b=4$, $a=-b-6=-4-6=-10$이므로

$a-b=-10-4=-14$

다른풀이 $3x^2+ax+8$이 $x-2$를 인수로 가지므로 이 식에 $x-2=0$이 되는 x의 값, 즉 $x=2$를 대입하면 식의 값이 0이 된다.

$3\times2^2+a\times2+8=0$, $12+2a+8=0$

$2a=-20 \qquad \therefore a=-10$

주어진 식에 $a=-10$을 대입하여 인수분해하면

$3x^2-10x+8=(x-2)(3x-4)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & -2 & \rightarrow & -6 \\ 3 & & -4 & \rightarrow & -4 \;(+ \\ \hline & & & & -10 \end{array}$$

따라서 $b=4$이므로

$a-b=-10-4=-14$

42 먼저 x^2-25, $2x^2+7x-15$를 각각 인수분해하면

$x^2-25=(x+5)(x-5)$

$2x^2+7x-15=(x+5)(2x-3)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 5 & \rightarrow & 10 \\ 2 & & -3 & \rightarrow & -3 \;(+ \\ \hline & & & & 7 \end{array}$$

따라서 두 다항식의 공통인수는 $x+5$이므로

$x^2+ax-10$도 $x+5$를 인수로 갖는다.

$x^2+ax-10=(x+5)(x-2)$로 놓으면

$x^2+ax-10=x^2+3x-10$이므로

$a=3$

다른풀이 $x^2+ax-10$이 $x+5$를 인수로 가지므로 이 식에 $x+5=0$이 되는 x의 값, 즉 $x=-5$를 대입하면 식의 값이 0이 된다.

$(-5)^2+a\times(-5)-10=0$

$25-5a-10=0 \qquad \therefore a=3$

43 $2x^2-5x+k=(x-2)(2x+p)$로 놓으면

$2x^2-5x+k=2x^2+(p-4)x-2p$에서

$-5=p-4$, $k=-2p$

따라서 $p=-1$이므로

$k=-2p=-2\times(-1)=2$

다른풀이 $2x^2-5x+k$가 $x-2$를 인수로 가지므로 이 식에 $x-2=0$이 되는 x의 값, 즉 $x=2$를 대입하면 식의 값이 0이 된다.

$2\times2^2-5\times2+k=0$, $8-10+k=0$

$\therefore k=2$

44 $2x^2-x-15=(2x+5)(x-3)$이므로 두 다항식 $2x^2-x-15$, $x^2+ax-21$의 공통인수는 $x-3$이다.

$\therefore b=3$

$x^2+ax-21=(x-3)(x+7)$로 놓으면

$x^2+ax-21=x^2+4x-21$에서 $a=4$

$\therefore a-b=4-3=1$

다른풀이 $x^2+ax-21$이 $x-3$을 인수로 가지므로 이 식에 $x-3=0$이 되는 x의 값, 즉 $x=3$을 대입하면 식의 값이 0이 된다.

$3^2+3a-21=0$, $3a=12$

$\therefore a=4$

45 두 이차식이 $x-1$을 공통인수로 가지므로

$ax^2-5x+3=(x-1)(ax-3)$으로 놓으면

$ax^2-5x+3=ax^2-(3+a)x+3$에서

$3+a=5 \qquad \therefore a=2$

$5x^2-12x+b=(x-1)(5x-b)$로 놓으면

$5x^2-12x+b=5x^2-(b+5)x+b$에서

$b+5=12 \qquad \therefore b=7$

$\therefore a+b=2+7=9$

다른풀이 두 이차식이 $x-1$을 공통인수로 가지므로 $x-1=0$이 되는 x의 값, 즉 $x=1$을 두 이차식에 각각 대입하면 식의 값이 0이 된다.

ax^2-5x+3에 $x=1$을 대입하면

$a-5+3=0$

$\therefore a=2$

$5x^2-12x+b$에 $x=1$을 대입하면

$5-12+b=0$

$\therefore b=7$

$\therefore a+b=2+7=9$

46 $x^2+ax+12=(x+p)(x+q)$(p, q는 자연수)로 놓으면

$x^2+ax+12=x^2+(p+q)x+pq$에서

$pq=12$, $p+q=a$

곱해서 12가 되는 두 자연수 p, q는

1, 12 또는 2, 6 또는 3, 4
따라서 $p+q$의 값은
$1+12=13$ 또는 $2+6=8$ 또는 $3+4=7$이므로 자연수 a의 최댓값 $M=13$, 최솟값 $m=7$이다.
$\therefore M-m=13-7=6$

47 $x^2-x-n=(x+a)(x+b)$(a, b는 정수)로 놓으면
$x^2-x-n=x^2+(a+b)x+ab$에서
$a+b=-1$, $ab=-n$
이때 $1<n<20$이므로
$-20<-n<-1$, 즉 $-20<ab<-1$
따라서 더해서 -1, 곱해서 -20보다 크고 -1보다 작은 정수가 되는 두 정수 a, b는 1, -2 또는 2, -3 또는 3, -4이므로
$n=-\{1\times(-2)\}=2$ 또는 $n=-\{2\times(-3)\}=6$
또는 $n=-\{3\times(-4)\}=12$
따라서 모든 자연수 n의 값의 합은
$2+6+12=20$

48 $a^2=X$로 치환하면

$$\begin{aligned} a^4+a^2-2&=X^2+X-2\\ &=(X-1)(X+2)\\ &=(a^2-1)(a^2+2)\\ &=(a+1)(a-1)(a^2+2) \end{aligned}$$

49 $x-3y=A$로 치환하면

$$\begin{aligned} &(x-3y)^2-5(x-3y)-6\\ &=A^2-5A-6\\ &=(A+1)(A-6)\\ &=(x-3y+1)(x-3y-6) \end{aligned}$$

50 $x-2y=A$, $x+y=B$로 치환하면
(주어진 식)

$$\begin{aligned} &=2A^2+5AB-3B^2\\ &=(2A-B)(A+3B)\\ &=\{2(x-2y)-(x+y)\}\{x-2y+3(x+y)\}\\ &=(2x-4y-x-y)(x-2y+3x+3y)\\ &=(x-5y)(4x+y) \end{aligned}$$

따라서 보기에서 두 일차식을 고르면 ㄴ, ㄹ이다.

51 $2(x+3)^2+11(x+3)-6$에서 $x+3=X$로 치환하면

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식})&=2X^2+11X-6\\ &=(X+6)(2X-1)\\ &=(x+3+6)\{2(x+3)-1\}\\ &=(x+9)(2x+5) \end{aligned}$$

$3(x+1)^2+2(x+1)(x-2)-(x-2)^2$에서
$x+1=A$, $x-2=B$로 치환하면

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식})&=3A^2+2AB-B^2\\ &=(A+B)(3A-B)\\ &=(x+1+x-2)\{3(x+1)-(x-2)\}\\ &=(2x-1)(2x+5) \end{aligned}$$

따라서 주어진 두 다항식의 공통인수는 $2x+5$이다.

52 $3x-y=A$로 치환하면

$$\begin{aligned} &(3x-y+2)(3x-y-4)+5\\ &=(A+2)(A-4)+5\\ &=A^2-2A-8+5\\ &=A^2-2A-3\\ &=(A-3)(A+1)\\ &=(3x-y-3)(3x-y+1) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식은 두 일차식 $3x-y-3$, $3x-y+1$의 곱으로 인수분해되므로 그 합은
$(3x-y-3)+(3x-y+1)=6x-2y-2$

53 $x+y=A$로 치환하면

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식})&=(A+3)(A-1)-21\\ &=A^2+2A-3-21\\ &=A^2+2A-24\\ &=(A-4)(A+6)\\ &=(x+y-4)(x+y+6) \end{aligned}$$

54 $(2x+5y)^2-(x-3y)^2$에서
$2x+5y=A$, $x-3y=B$로 치환하면
(주어진 식)

$$\begin{aligned} &=A^2-B^2\\ &=(A+B)(A-B)\\ &=(2x+5y+x-3y)\{2x+5y-(x-3y)\}\\ &=(3x+2y)(x+8y)\\ &=(ax+by)(x+cy) \end{aligned}$$

이므로 $a=3$, $b=2$, $c=8$
$\therefore a+b+c=3+2+8=13$

55 $2x+y=A$, $x-2y=B$로 치환하면

$$\begin{aligned} &(2x+y)^2-(x-2y)^2\\ &=A^2-B^2\\ &=(A+B)(A-B)\\ &=(2x+y+x-2y)\{2x+y-(x-2y)\}\\ &=(3x-y)(x+3y)\\ &=(ax-y)(x+by) \end{aligned}$$

따라서 $a=3$, $b=3$이므로 $a-b=0$

56

$$\begin{aligned} &(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-8\\ &=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}-8\\ &=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-8 \end{aligned}$$

$x^2+5x=A$로 치환하면

(주어진 식)$=(A+4)(A+6)-8$

$=A^2+10A+24-8$

$=A^2+10A+16$

$=(A+2)(A+8)$

$=(x^2+5x+2)(x^2+5x+8)$

따라서 주어진 식을 인수분해하였을 때, 이차식인 두 인수는 x^2+5x+2, x^2+5x+8이므로

$(x^2+5x+2)+(x^2+5x+8)=2x^2+10x+10$

57 $x(x-1)(x+1)(x+2)+k$

$=\{x(x+1)\}\{(x-1)(x+2)\}+k$

$=(x^2+x)(x^2+x-2)+k$

$x^2+x=A$로 치환하면

(주어진 식)$=A(A-2)+k=A^2-2A+k$

이것이 완전제곱식이 되려면

(상수항)$=\left\{\frac{1}{2}\times(\text{일차항의 계수})\right\}^2$이므로

$k=\left(\frac{-2}{2}\right)^2=1$

58 $(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)-40$

$=\{(x-1)(x+1)\}\{(x-2)(x+2)\}-40$

$=(x^2-1)(x^2-4)-40$

$=(x^2)^2-5x^2+4-40$

$=(x^2)^2-5x^2-36$

$x^2=t$로 치환하면

(주어진 식)$=t^2-5t-36$

$=(t-9)(t+4)$

$=(x^2-9)(x^2+4)$

$=(x+3)(x-3)(x^2+4)$

59 (주어진 식)$=\{(x-8)(x+2)\}\{(x-4)(x+4)\}+8x^2$

$=(x^2-6x-16)(x^2-16)+8x^2$

$x^2-16=A$로 치환하면

$A(A-6x)+8x^2=A^2-6xA+8x^2$

$=(A-2x)(A-4x)$

$=(x^2-2x-16)(x^2-4x-16)$

60 b에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2+ab-a+b-2$

$=ab+b+(a^2-a-2)$

$=b(\boxed{a+1})+(\boxed{a-2})(a+1)$

$=(a+1)(\boxed{a+b-2})$

61 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+xy-7x-2y+10=xy-2y+x^2-7x+10$

$=(x-2)y+(x-2)(x-5)$

$=(x-2)(x+y-5)$

62 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2-b^2+2a+8b-15$

$=a^2+2a-b^2+8b-15$

$=a^2+2a-(b^2-8b+15)$

$=a^2+2a-(b-3)(b-5)$

$=(a+b-3)\{a-(b-5)\}$

$=(a+b-3)(a-b+5)$

따라서 두 일차식의 합은

$(a+b-3)+(a-b+5)=2a+2$

다른풀이 완전제곱식이 되는 항끼리 적당히 묶으면

$a^2-b^2+2a+8b-15$

$=(a^2+2a+1)-(b^2-8b+16)$

$=(a+1)^2-(b-4)^2$

$=(a+1+b-4)\{a+1-(b-4)\}$

$=(a+b-3)(a-b+5)$

따라서 두 일차식의 합은

$(a+b-3)+(a-b+5)=2a+2$

63 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-y^2-4x+2y+3=x^2-4x-(y^2-2y-3)$

$=x^2-4x-(y-3)(y+1)$

$=(x+y-3)\{x-(y+1)\}$

$=(x+y-3)(x-y-1)$

이므로 이 식의 인수를 모두 고르면 ①, ④이다.

다른풀이 완전제곱식이 되는 항끼리 적당히 묶으면

$x^2-y^2-4x+2y+3$

$=(x^2-4x+4)-(y^2-2y+1)$

$=(x-2)^2-(y-1)^2$

$=(x-2+y-1)\{x-2-(y-1)\}$

$=(x+y-3)(x-y-1)$

64 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-y^2-8x-6y+7=x^2-8x-(y^2+6y-7)$

$=x^2-8x-(y-1)(y+7)$

$=(x+y-1)\{x-(y+7)\}$

$=(x+y-1)(x-y-7)$

$=(x+y-1)(px+qy+r)$

따라서 $p=1$, $q=-1$, $r=-7$이므로

$p+q-r=1+(-1)-(-7)=7$

다른풀이 완전제곱식이 되는 항끼리 적당히 묶으면

$x^2-y^2-8x-6y+7$

$=(x^2-8x+16)-(y^2+6y+9)$

$=(x-4)^2-(y+3)^2$
$=(x-4+y+3)\{x-4-(y+3)\}$
$=(x+y-1)(x-y-7)$
$=(x+y-1)(px+qy+r)$
따라서 $p=1$, $q=-1$, $r=-7$이므로
$p+q-r=1+(-1)-(-7)=7$

65 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2+y^2-2xy-3x+3y+2$
$=x^2+(-2y-3)x+y^2+3y+2$
$=x^2+(-2y-3)x+(y+1)(y+2)$
$=\{x-(y+1)\}\{x-(y+2)\}$
$=(x-y-1)(x-y-2)=A(x-y-2)$
$\therefore A=x-y-1$
다른풀이 공통 부분이 나오도록 항을 적당히 묶으면
$x^2+y^2-2xy-3x+3y+2$
$=(x^2+y^2-2xy)-3(x-y)+2$
$=(x-y)^2-3(x-y)+2$
$x-y=t$로 치환하면
(주어진 식)$=t^2-3t+2=(t-1)(t-2)$
$=(x-y-1)(x-y-2)=A(x-y-2)$
$\therefore A=x-y-1$

66 $x^2+y^2-5x+5y-2xy+6$
$=x^2-(2y+5)x+y^2+5y+6$
$=x^2-(2y+5)x+(y+2)(y+3)$
$=\{x-(y+2)\}\{x-(y+3)\}$
$=(x-y-2)(x-y-3)$

67 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2-2y^2+xy-x+y=x^2+(y-1)x-2y^2+y$
$=x^2+(y-1)x-y(2y-1)$
$=(x-y)(x+2y-1)$
따라서 보기 중 주어진 식의 인수는 ㄱ, ㄹ이다.

68 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2-xy-2y^2+3y-1$
$=x^2-yx-(2y^2-3y+1)$
$=x^2-yx-(2y-1)(y-1)$
$=(x+y-1)\{x-(2y-1)\}$
$=(x+y-1)(x-2y+1)$
따라서 두 일차식 $x+y-1$, $x-2y+1$의 합은
$(x+y-1)+(x-2y+1)=2x-y$

69 주어진 식을 전개한 후 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)$
$=x^2y-xy^2+y^2z-yz^2+xz^2-x^2z$
$=(y-z)x^2-(y^2-z^2)x+y^2z-yz^2$
$=(y-z)x^2-(y+z)(y-z)x+yz(y-z)$
$=(y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$
$=(y-z)(x-y)(x-z)$
$=(x-y)(y-z)(x-z)$

70 (1) 현정이는 상수항은 바르게 보았으므로 바르게 본 상수항은
$(x+5)(x-12)=x^2-7x-60$
에서 -60이다.
(2) 은정이는 x의 계수는 바르게 보았으므로 바르게 본 x의 계수는
$(x+5)(x+6)=x^2+11x+30$
에서 11이다.
(3) $a=11$, $b=-60$이므로 처음에 주어진 이차식은
$x^2+11x-60$
(4) $x^2+11x-60=(x-4)(x+15)$

71 선영이는 상수항은 바르게 보았으므로 바르게 본 상수항은 $(x+5)(x-8)=x^2-3x-40$에서 -40이다.
$\therefore b=-40$
지영이는 x의 계수는 바르게 보았으므로 바르게 본 x의 계수는 $(x-9)^2=x^2-18x+81$에서 -18이다.
$\therefore a=-18$
따라서 이차식 x^2+ax+b를 바르게 인수분해하면
$x^2-18x-40=(x+2)(x-20)$

72 처음 주어진 이차식을 ax^2+bx+c라 하면
유빈이는 x의 계수와 상수항은 바르게 보았으므로
$(4x+3)(x-1)=4x^2-x-3$
에서 $b=-1$, $c=-3$
승아는 x^2의 계수와 x의 계수는 바르게 보았으므로
$(x-2)(2x+3)=2x^2-x-6$
에서 $a=2$, $b=-1$
따라서 처음에 주어진 이차식은 $2x^2-x-3$이므로 바르게 인수분해하면
$2x^2-x-3=(x+1)(2x-3)$
$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 1 & \rightarrow & 2 \\ 2 & & -3 & \rightarrow & \underline{-3\ (+} \\ & & & & -1 \end{array}$$

73 현정이가 $(x+2)(3x-1)$을 전개하는데 -1을 p로 잘못 보았다고 하면 잘못 보고 전개한 식은
$(x+2)(3x+p)=3x^2+(p+6)x+2p$
$=3x^2+2x+a$
에서 $p+6=2$, $2p=a$이므로

$p=-4$
$a=2p=2\times(-4)=-8$
은정이가 $(x-3)(x+7)$을 전개하는데 -3을 q로 잘못 보았다고 하면 잘못 보고 전개한 식은
$(x+q)(x+7)=x^2+(7+q)x+7q$
$\qquad\qquad\quad =x^2+bx-14$
에서 $7+q=b$, $7q=-14$이므로
$q=-2$
$b=7+q=7+(-2)=5$
$\therefore a+b=-8+5=-3$

74 낙천이는 일차항의 계수의 부호는 반대로 보고 x^2의 계수와 상수항은 바르게 보았으므로
$(x-a)(x+4)=x^2-(a-4)x-4a$
에서 처음 주어진 이차식은
$x^2+(a-4)x-4a$ ……㉠
기백이는 상수항을 원래 상수항보다 10만큼 크게 보고 x^2의 계수와 x의 계수는 바르게 보았으므로
$(x-3)(x+b)=x^2+(b-3)x-3b$
에서 처음 주어진 이차식은
$x^2+(b-3)x-3b-10$ ……㉡
㉠과 ㉡이 서로 같은 식이므로
$a-4=b-3$, $-4a=-3b-10$
즉, $a-b=1$, $4a-3b=10$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=7$, $b=6$
따라서 $a=7$, $b=6$을 ㉠ 또는 ㉡에 대입하면 처음에 주어진 이차식은 $x^2+3x-28$이므로 이 식을 인수분해하면
$x^2+3x-28=(x-4)(x+7)$

75 $89=a$, $11=b$로 치환하면
$$\begin{aligned}89^2-2\times89\times11-3\times11^2&=a^2-2ab-3b^2\\&=(a-3b)(a+b)\\&=(89-3\times11)(89+11)\\&=(89-33)\times100\\&=56\times100\\&=5600\end{aligned}$$

76 $109=t$로 치환하면
$$\begin{aligned}\frac{109^2+2\times109-3}{108}&=\frac{t^2+2t-3}{t-1}\\&=\frac{(t+3)(t-1)}{t-1}\\&=t+3\\&=109+3\\&=112\end{aligned}$$

77 $2012=t$로 치환하면
$$\begin{aligned}\left(\frac{-2013+2012\times2013}{2012^2-1}\right)^5&=\left\{\frac{-(t+1)+t(t+1)}{t^2-1}\right\}^5\\&=\left\{\frac{(t+1)(t-1)}{(t+1)(t-1)}\right\}^5\\&=1^5=1\end{aligned}$$

78 $-1^2+2^2-3^2+4^2-\cdots-9^2+10^2$
$=(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+\cdots+(10^2-9^2)$
$=(2+1)(2-1)+(4+3)(4-3)+\cdots$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +(10+9)(10-9)$
$=(2+1)+(4+3)+\cdots+(10+9)$
$=1+2+3+4+\cdots+9+10$
$=55$

79 $-2^2-4^2-6^2+8^2+10^2+12^2$
$=(12^2-2^2)+(10^2-4^2)+(8^2-6^2)$
$=(12+2)(12-2)+(10+4)(10-4)+(8+6)(8-6)$
$=14\times10+14\times6+14\times2$
$=14\times(10+6+2)$
$=14\times18$
따라서 두 자연수 m, n은 14, 18이므로
$m+n=14+18=32$

80 $40\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{19^2}\right)\left(1-\frac{1}{20^2}\right)$
$=40\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{20}\right)\left(1+\frac{1}{20}\right)$
$=40\times\frac{1}{2}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\times\cdots\times\frac{\cancel{19}}{\cancel{20}}\times\frac{21}{20}$
$=40\times\frac{1}{2}\times\frac{21}{20}$
$=21$

81 $3^{12}-1=(3^6)^2-1^2$
$\qquad\quad =(3^6+1)(3^6-1)$
$\qquad\quad =(3^6+1)\{(3^3)^2-1^2\}$
$\qquad\quad =(3^6+1)(3^3+1)(3^3-1)$
따라서 $3^{12}-1$은 20과 30 사이의 두 자연수인 $3^3+1=28$, $3^3-1=26$으로 나누어떨어진다.
$\therefore a+b=26+28=54$

82 $23=t$로 치환하면
$$\begin{aligned}\sqrt{21+\frac{4}{25}}&=\sqrt{\frac{21\times25+4}{25}}=\sqrt{\frac{(t-2)(t+2)+4}{25}}\\&=\sqrt{\frac{t^2-4+4}{25}}=\sqrt{\frac{t^2}{5^2}}=\frac{t}{5}=\frac{23}{5}\end{aligned}$$

따라서 $a=5$, $b=23$이므로 $b-a=23-5=18$

83 $10\times11\times12\times13+1$에서 $10=t$로 치환하면

$$\begin{aligned}10\times11\times12\times13+1&=t(t+1)(t+2)(t+3)+1\\&=\{t(t+3)\}\{(t+1)(t+2)\}+1\\&=(t^2+3t)(t^2+3t+2)+1\end{aligned}$$

여기서 다시 $t^2+3t=A$로 치환하면

$$\begin{aligned}(t^2+3t)(t^2+3t+2)+1&=A(A+2)+1\\&=A^2+2A+1\\&=(A+1)^2\\&=(t^2+3t+1)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{(주어진 식)}&=\sqrt{(t^2+3t+1)^2}\\&=t^2+3t+1\\&=10^2+3\times10+1\\&=100+30+1\\&=131\end{aligned}$$

84 x, y의 분모를 각각 유리화하면

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &x^3y-xy^3\\&=xy(x^2-y^2)\\&=xy(x+y)(x-y)\\&=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1)\{\sqrt{2}-1-(\sqrt{2}+1)\}\\&=(2-1)\times2\sqrt{2}\times(-2)\\&=-4\sqrt{2}\end{aligned}$$

85
$$\begin{aligned}x^2+y^2-2xy+5x-5y&=(x^2+y^2-2xy)+5(x-y)\\&=(x-y)^2+5(x-y)\\&=(x-y)(x-y+5)\end{aligned}$$

이때 $x-y=1-\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})=-2\sqrt{3}$이므로

$$\begin{aligned}\text{(주어진 식)}&=-2\sqrt{3}\times(-2\sqrt{3}+5)\\&=12-10\sqrt{3}\end{aligned}$$

86 $x+2=A$로 치환하면

$$\begin{aligned}(x+2)^2-6(x+2)+9&=A^2-6A+9\\&=(A-3)^2\\&=(x+2-3)^2\\&=(x-1)^2\\&=(1-\sqrt{3}-1)^2\\&=(-\sqrt{3})^2\\&=3\end{aligned}$$

87 $1<\sqrt{3}<2$에서 $\sqrt{3}$의 정수 부분이 1이므로 소수 부분은 $x=\sqrt{3}-1$

주어진 식에서 $x+2=t$로 치환하면

$$\begin{aligned}(x+2)^2-2(x+2)+1&=t^2-2t+1\\&=(t-1)^2\\&=(x+2-1)^2\\&=(x+1)^2\\&=(\sqrt{3}-1+1)^2\\&=(\sqrt{3})^2=3\end{aligned}$$

88
$$\begin{aligned}a^2+16b^2-8ab+5&=(a^2-8ab+16b^2)+5\\&=(a-4b)^2+5\\&=(15.4-4\times2.85)^2+5\\&=(15.4-11.4)^2+5\\&=4^2+5=21\end{aligned}$$

89
$$\begin{aligned}x^2-y^2-3x-3y&=(x+y)(x-y)-3(x+y)\\&=(x+y)(x-y-3)\\&=2\sqrt{2}\times(2-3)\\&=-2\sqrt{2}\end{aligned}$$

90
$$\begin{aligned}a^3b+ab^3&=ab(a^2+b^2)\\&=ab\{(a+b)^2-2ab\}\\&=2\times\{(2\sqrt{3})^2-2\times2\}\\&=2\times(12-4)=2\times8=16\end{aligned}$$

91
$$\begin{aligned}&a^2+b^2+2(a-1)(b-1)-1\\&=a^2+b^2+2ab-2a-2b+2-1\\&=(a^2+2ab+b^2)-2(a+b)+1\\&=(a+b)^2-2(a+b)+1\end{aligned}$$

이때 $a+b=t$로 치환하면

$$\begin{aligned}\text{(주어진 식)}&=t^2-2t+1=(t-1)^2\\&=(a+b-1)^2=\left(-\frac{3}{2}-1\right)^2\\&=\left(-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}\end{aligned}$$

92
$$\begin{aligned}&x^2+y^2-2xy-4x+4y+4\\&=(x^2+y^2-2xy)-4(x-y)+4\\&=(x-y)^2-4(x-y)+4\\&=A^2-4A+4 \Leftarrow x-y=A\text{로 치환}\\&=(A-2)^2\\&=(x-y-2)^2\end{aligned}$$

$=(2+\sqrt{3}-2)^2$

$=(\sqrt{3})^2$

$=3$

93 $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)+10$

$=\{(x-1)(x+5)\}\{(x-3)(x+7)\}+10$

$=(x^2+4x-5)(x^2+4x-21)+10$ ······ ㉠

이때 $x^2+4x-6=0$에서 $x^2+4x=6$이므로 ㉠에 대입하면

(주어진 식)$=(6-5)(6-21)+10$

$=1\times(-15)+10=-5$

94 $x\neq0$이므로 $x^2-5x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-5+\frac{1}{x}=0$에서 $x+\frac{1}{x}=5$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$

$=5^2-4=21$

이므로

$x-\frac{1}{x}=\pm\sqrt{21}$

그런데 $0<x<1$에서 $x<\frac{1}{x}$, 즉 $x-\frac{1}{x}<0$이므로

$x-\frac{1}{x}=-\sqrt{21}$

$\therefore x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=5\times(-\sqrt{21})$

$=-5\sqrt{21}$

95 $x^2y-xy^2-x+y=xy(x-y)-(x-y)$

$=(x-y)(xy-1)$

$=(-4)\times(xy-1)=12$

이므로 $xy-1=-3$ $\quad\therefore xy=-2$

따라서 $x-y=-4$, $xy=-2$이므로

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$=(-4)^2+2\times(-2)=16-4=12$

96 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$이므로

$(a+b)(a-b)=11$

이때 a, b는 자연수이므로

$a-b<a+b$

또, $a+b>0$이므로 $a-b>0$

$\therefore a-b=1,\ a+b=11$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=6,\ b=5$

$\therefore 2a-b=2\times6-5=7$

97 $f(x)=1-\frac{1}{x^2}=\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)$이므로

$f(2)=1-\frac{1}{2^2}=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}$

$f(3)=1-\frac{1}{3^2}=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}$

$\vdots$

$f(2013)=1-\frac{1}{2013^2}$

$=\left(1-\frac{1}{2013}\right)\left(1+\frac{1}{2013}\right)$

$=\frac{2012}{2013}\times\frac{2014}{2013}$

$\therefore f(2)\times f(3)\times\cdots\times f(2013)$

$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\right)\times\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\right)\times\cdots\times\left(\frac{\cancel{2012}}{\cancel{2013}}\times\frac{2014}{2013}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2014}{2013}$

$=\frac{1007}{2013}$

98 $\frac{b^2-(c-a)^2}{a^2-(b+c)^2}=\frac{(b+c-a)\{b-(c-a)\}}{(a+b+c)\{a-(b+c)\}}$

$=\frac{(b+c-a)(b-c+a)}{(a+b+c)(a-b-c)}$

$=\frac{-(a-b-c)(b-c+a)}{(a+b+c)(a-b-c)}$

$=\frac{-(b-c+a)}{a+b+c}$

$=\frac{-a-b+c}{a+b+c}$

$\frac{c^2-(a-b)^2}{b^2-(c+a)^2}=\frac{(c+a-b)\{c-(a-b)\}}{(b+c+a)\{b-(c+a)\}}$

$=\frac{(c+a-b)(c-a+b)}{(b+c+a)(b-c-a)}$

$=\frac{-(b-c-a)(c-a+b)}{(a+b+c)(b-c-a)}$

$=\frac{-(c-a+b)}{a+b+c}$

$=\frac{a-b-c}{a+b+c}$

$\frac{a^2-(b-c)^2}{c^2-(a+b)^2}=\frac{(a+b-c)\{a-(b-c)\}}{(c+a+b)\{c-(a+b)\}}$

$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(c+a+b)(c-a-b)}$

$=\frac{-(c-a-b)(a-b+c)}{(a+b+c)(c-a-b)}$

$=\frac{-(a-b+c)}{a+b+c}$

$=\frac{-a+b-c}{a+b+c}$

$\therefore$ (주어진 식)

$$=\frac{-a-b+c}{a+b+c}+\frac{a-b-c}{a+b+c}+\frac{-a+b-c}{a+b+c}$$
$$=\frac{-a-b+c+a-b-c-a+b-c}{a+b+c}$$
$$=\frac{-a-b-c}{a+b+c}$$
$$=\frac{-(a+b+c)}{a+b+c}$$
$$=-1$$

99 주어진 모든 직사각형의 넓이의 합은

$2\times(x\times x)+5\times(x\times 1)+3\times(1\times 1)=2x^2+5x+3$

이 식을 인수분해하면

$2x^2+5x+3=(x+1)(2x+3)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \searrow\!\!\nearrow & 1 & \rightarrow & 2 \\ 2 & & 3 & \rightarrow & 3\ (+ \\ \hline & & & & 5 \end{array}$$

이므로 새로운 직사각형의 가로와 세로의 길이는 $x+1$, $2x+3$이다.

따라서 구하는 둘레의 길이는

$2\times\{(x+1)+(2x+3)\}=2(3x+4)=6x+8$

100 (남은 도형의 넓이)$=2x^2-7x+5-(x-1)^2$

$=2x^2-7x+5-(x^2-2x+1)$

$=x^2-5x+4$

$=(x-1)(x-4)$

101 도형 (가)의 넓이는

$(2x-3)^2-4^2=(2x-3+4)(2x-3-4)$

$=(2x+1)(2x-7)$

이때 두 도형의 넓이가 같고 도형 (나)의 가로의 길이가 $2x-7$이므로 세로의 길이는 $2x+1$이다.

102 토끼장의 넓이 $3x^2-5x+2$를 인수분해하면

$3x^2-5x+2=(x-1)(3x-2)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \searrow\!\!\nearrow & -1 & \rightarrow & -3 \\ 3 & & -2 & \rightarrow & -2\ (+ \\ \hline & & & & -5 \end{array}$$

이므로 직사각형 모양의 토끼장의 가로와 세로의 길이는 $x-1$, $3x-2$이다.

이때 토끼장의 세로의 길이가 $x-a$이므로

$a=1$ ($\because$ a는 정수)

따라서 토끼장의 가로의 길이는 $3x-2$, 세로의 길이는 $x-1$이므로 필요한 철조망의 길이는

$l=$(가로의 길이)$+2\times$(세로의 길이)

$=(3x-2)+2\times(x-1)$

$=3x-2+2x-2$

$=5x-4$

103 목장의 넓이는

$4x^2-y^2-2y-1=4x^2-(y^2+2y+1)$

$=(2x)^2-(y+1)^2$

$=(2x+y+1)\{2x-(y+1)\}$

$=(2x+y+1)(2x-y-1)$

이고, 목장의 세로의 길이가 $2x-y-1$이므로 가로의 길이는 $2x+y+1$이다.

따라서 목장의 둘레의 길이는

$2\times\{(2x+y+1)+(2x-y-1)\}=2\times 4x$

$=8x$

104 길의 넓이는 한 변의 길이가 $2x-7$인 정사각형의 넓이에서 한 변의 길이가 $x+2$인 정사각형의 넓이를 뺀 것이므로

(길의 넓이)$=(2x-7)^2-(x+2)^2$

$=(2x-7+x+2)\{2x-7-(x+2)\}$

$=(3x-5)(x-9)$

105 (1) $S=$(반지름의 길이가 $r+a$인 원의 넓이)

$-$(반지름의 길이가 r인 원의 넓이)

$=\pi(r+a)^2-\pi r^2$

$=\pi(r^2+2ar+a^2-r^2)$

$=\pi(2ar+a^2)$

$=a\pi(2r+a)$

(2) 길의 한가운데를 지나는 원 모양의 선의 길이는 반지름의 길이가 $r+\frac{1}{2}a$인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$l=2\pi\left(r+\frac{1}{2}a\right)=\pi(2r+a)$

(3) (1), (2)에서 $S=a\pi(2r+a)$, $l=\pi(2r+a)$이므로

$S=a\{\pi(2r+a)\}=al$

106 작은 원의 반지름의 길이가 r cm이므로 큰 원의 반지름의 길이는 $(2r+1)$ cm이다.

따라서 어두운 부분의 넓이는 $\pi(2r+1)^2-\pi r^2$이므로

$\pi(2r+1)^2-\pi r^2=\pi(2r+1+r)(2r+1-r)$

$=\pi(3r+1)(r+1)$ (cm^2)

107 직육면체의 부피는

$x^3-x^2-x+1=x^2(x-1)-(x-1)$

$=(x-1)(x^2-1)$

$=(x-1)(x+1)(x-1)$

$=(x-1)^2(x+1)$

이고, 직육면체의 높이가 $x+1$이므로 밑면은 한 변의 길이가 $x-1$인 정사각형이다.

$\therefore$ (직육면체의 겉넓이)

$=$(밑넓이)$\times 2+$(옆넓이)

$=(x-1)^2\times 2+4(x-1)(x+1)$

$=2(x^2-2x+1)+4(x^2-1)$

$=2x^2-4x+2+4x^2-4$

$=6x^2-4x-2$

108 전체 쇠구슬의 부피는

$2x^3-3x^2-2x=x(2x^2-3x-2)$

$=x(x-2)(2x+1)$

따라서 만들 수 있는 작은 쇠구슬의 개수는

$\dfrac{(\text{전체 쇠구슬의 부피})}{(\text{작은 쇠구슬 1개의 부피})}=\dfrac{x(x-2)(2x+1)}{x-2}$

$=x(2x+1)$

$=2x^2+x$ (개)

109 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}$를 회전축으로 하여 1회전시키면 밑면의 반지름의 길이가 $x-y$, 높이가 $x+y$인 원뿔이 되므로 그 부피는

$V_1=\frac{1}{3}\pi(x-y)^2(x+y)$

$\overline{BC}$를 회전축으로 하여 1회전시키면 밑면의 반지름의 길이가 $x+y$, 높이가 $x-y$인 원뿔이 되므로 그 부피는

$V_2=\frac{1}{3}\pi(x+y)^2(x-y)$

$\therefore V_2-V_1=\frac{1}{3}\pi(x+y)^2(x-y)-\frac{1}{3}\pi(x-y)^2(x+y)$

$=\frac{1}{3}\pi(x+y)(x-y)\{(x+y)-(x-y)\}$

$=\frac{1}{3}\pi(x+y)(x-y)\times 2y$

$=\frac{2}{3}\pi(x+y)(x-y)y$

$\therefore \dfrac{V_2-V_1}{\pi y}=\dfrac{1}{\pi y}\times\dfrac{2}{3}\pi(x+y)(x-y)y$

$=\frac{2}{3}(x+y)(x-y)$

02 이차방정식

Best 최상위 유형 본문 78~95쪽

1 ③, ④ **2** ② **3** ④ **4** ① **5** -13

6 ⑤ **7** ② **8** $x=-5$ 또는 $x=1$ **9** ①

10 ② **11** ⑤ **12** 풀이 참조 **13** ⑤

14 14 **15** ⑤ **16** -4 **17** ④ **18** -40

19 -1 **20** (가) 4, (나) b'^2-ac, (다) $\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

21 3 **22** ② **23** 10 **24** $8\sqrt{7}$ **25** 4

26 (1) $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{2}{5}$ (2) $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$

(3) $x=5$(중근)

27 ② **28** ④ **29** $\frac{2\sqrt{13}}{9}$ **30** ④ **31** 24

32 ④ **33** ③, ⑤ **34** ⑤ **35** 8 **36** ⑤

37 ② **38** ⑤ **39** ② **40** $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

41 $x=\frac{5\pm\sqrt{7}}{2}$ **42** ① **43** ⑤

44 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=4$ **45** $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=5$

46 -16 **47** ④ **48** ① **49** ② **50** ⑤

51 ③ **52** $k=-3$ 또는 $k=4$ **53** 11 **54** ②

55 5 **56** ⑤ **57** $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{4}$

58 $x=1\pm\sqrt{7}$ **59** ④ **60** -7

61 $x=-8$, $x=-\frac{1}{2}$ **62** $\frac{11}{2}$ **63** ④

64 ㄱ, ㄷ, ㅁ **65** ③ **66** ② **67** ⑤

68 24 **69** ②

70 $a=-9$일 때 $x=-\frac{2}{3}$(중근), $a=4$일 때 $x=\frac{3}{2}$(중근)

71 7 **72** $b=c$인 이등변삼각형

73 (1) $k<1$ (2) $k=1$ (3) $k>1$ **74** ② **75** ④

76 ① **77** ④ **78** ④ **79** -7 **80** 2개

81 ① **82** ③

1 ① $2x^2+x-1=2x^2+5$에서 $x-6=0$이므로 일차방정식이다.

② $4x-1=0$이므로 일차방정식이다.

⑤ $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-1=\frac{1}{2}x^2-2x$에서 $\frac{5}{2}x-1=0$이므로 일차방정식이다.

2 $ax^2+3x-8=7x^2-bx+c$를 정리하면

$(a-7)x^2+(3+b)x-8-c=0$

이것이 이차방정식이 되려면 이차항의 계수가 0이 아니

어야 하므로

$a-7\neq0 \qquad \therefore a\neq7$

3 $-2(2x-5)(x+9)=0$에서

$2x-5=0$ 또는 $x+9=0$

4 $2x^2+3x+a=0$에 $x=1$을 대입하면 등식이 성립하므로

$2\times1^2+3\times1+a=0,\ 2+3+a=0$

$\therefore a=-5$

5 $x^2+ax+b=0$에 $x=-5,\ x=3$을 각각 대입하면

$(-5)^2+a\times(-5)+b=0$에서

$-5a+b=-25 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$3^2+a\times3+b=0$에서

$3a+b=-9 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-15$

$\therefore a+b=2+(-15)=-13$

6 $(2x+1)(3x+1)=(x-1)^2$에서

$6x^2+5x+1=x^2-2x+1$

$5x^2+7x=0,\ x(5x+7)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-\frac{7}{5}$

따라서 $a=0,\ b=-\frac{7}{5}$이므로

$a-b=0-\left(-\frac{7}{5}\right)=\frac{7}{5}$

7 $(x+1)^2=(x+3)(2x-1)$에서

$x^2+2x+1=2x^2+5x-3$

$x^2+3x-4=0,\ (x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

이때, $p>q$이므로 $p=1,\ q=-4$

$\therefore 5p-2q=5\times1-2\times(-4)=13$

8 $2x^2-3x-20=0$에서 $(2x+5)(x-4)=0$

$\therefore x=-\frac{5}{2}$ 또는 $x=4$

이때 p는 정수이므로 $p=4$

$3x^2+14x-5=0$에서

$(x+5)(3x-1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

이때 q는 정수이므로 $q=-5$

따라서 $x^2+4x-5=0$에서

$(x+5)(x-1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=1$

9 $3x^2-11x+6=0$에서 $(3x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=3$

$2x^2-3x-9=0$에서 $(2x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=3$

따라서 두 이차방정식의 공통인 근은 $x=3$이다.

10 $4x^2-3=0$에서 $4x^2=3$

$x^2=\frac{3}{4} \qquad \therefore x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

두 근 중 큰 근은 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$3x^2-36=0$에서 $3x^2=36$

$x^2=12 \qquad \therefore x=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3}$

두 근 중 작은 근은 $x=-2\sqrt{3}$이므로 $b=-2\sqrt{3}$

$\therefore 2a+b=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+(-2\sqrt{3})$

$=\sqrt{3}-2\sqrt{3}=-\sqrt{3}$

11 $(x-p)^2=a-1$에서 $a-1>0$이면 서로 다른 두 근을 갖고, $a-1=0$이면 중근을 갖는다.

따라서 주어진 이차방정식이 해를 가질 조건은

$a-1\geq0$에서 $a\geq1$

12 (1) $x^2-6x+2=0$에서 $x^2-6x=-2$

$x^2-6x+\boxed{9}=-2+\boxed{9}$

$(x-\boxed{3})^2=\boxed{7},\ x-\boxed{3}=\boxed{\pm\sqrt{7}}$

$\therefore x=\boxed{3\pm\sqrt{7}}$

(2) $2x^2+8x-3=0$에서 $2x^2+8x=3$

$x^2+4x=\boxed{\frac{3}{2}}$

$x^2+4x+\boxed{4}=\frac{3}{2}+\boxed{4}$

$(x+\boxed{2})^2=\boxed{\frac{11}{2}},\ x+\boxed{2}=\boxed{\pm\frac{\sqrt{22}}{2}}$

$\therefore x=\boxed{\frac{-2\pm\sqrt{22}}{2}}$

13 $x^2-6x+3=0$에서 $x^2-6x=-3$

$x^2-6x+9=-3+9$

$(x-3)^2=6$

따라서 $a=3,\ b=6$이므로

$a+b=3+6=9$

14 $2x^2+3x-1=0$에서 $2x^2+3x=1$

$x^2+\frac{3}{2}x=\frac{1}{2}$

$x^2+\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^2$

$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{17}{16}$

$x+\frac{3}{4}=\pm\frac{\sqrt{17}}{4}$ $\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$

따라서 $a=-3$, $b=17$이므로

$a+b=-3+17=14$

15 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$의 양변을 a로 나누면

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

상수항을 우변으로 이항하면

$x^2+\frac{b}{a}x=\boxed{-\frac{c}{a}}$

좌변을 완전제곱식으로 만들기 위해 양변에 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$을 더하면

$x^2+\frac{b}{a}x+\boxed{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}=\boxed{-\frac{c}{a}}+\boxed{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}$

$\left(x+\boxed{\frac{b}{2a}}\right)^2=\frac{\boxed{b^2-4ac}}{4a^2}$

$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{\boxed{b^2-4ac}}}{2a}$

$\therefore x=\boxed{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

$\therefore$ ① $-\frac{c}{a}$, ② $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, ③ $\frac{b}{2a}$, ④ b^2-4ac,

⑤ $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

따라서 ①~⑤에 들어갈 식으로 옳지 않은 것은 ⑤이다.

16 $2x^2-3x+p=0$에서 근의 공식을 이용하면

$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times p}}{2\times2}$

$=\frac{3\pm\sqrt{9-8p}}{4}=\frac{q\pm\sqrt{65}}{4}$

이므로 $q=3$, $9-8p=65$에서 $p=-7$

$\therefore p+q=-7+3=-4$

17 $x^2+mx-3=0$에서 근의 공식을 이용하면

$x=\frac{-m\pm\sqrt{m^2-4\times1\times(-3)}}{2\times1}$

$=\frac{-m\pm\sqrt{m^2+12}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{n}}{2}$

이므로 $m=1$, $n=m^2+12=1+12=13$

$\therefore n-m=13-1=12$

18 $2x^2+ax-5=0$에서 근의 공식을 이용하면

$x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4\times2\times(-5)}}{2\times2}$

$=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+40}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{b}}{4}$

이므로 $a=1$, $b=a^2+40=1+40=41$

$\therefore a-b=1-41=-40$

19 $x^2+3x-2=0$에서 근의 공식을 이용하면

$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$

이 중 작은 근은 $p=\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$

$x^2-x-4=0$에서 근의 공식을 이용하면

$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-4)}}{2\times1}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$

이 중 큰 근은 $q=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$

$\therefore p+q=\frac{-3-\sqrt{17}}{2}+\frac{1+\sqrt{17}}{2}=-1$

20 $ax^2+2b'x+c=0\ (a\neq0)$에서 근의 공식을 이용하면

$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-2b'\pm\sqrt{\boxed{4}\times(b'^2-ac)}}{2a}$

$=\frac{-2b'\pm2\sqrt{\boxed{b'^2-ac}}}{2a}$

따라서 분자, 분모를 각각 2로 나누면

$x=\boxed{\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}}$

$\therefore$ (가) 4, (나) b'^2-ac, (다) $\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

21 $2x^2-4x+a=0$에서 짝수 공식을 이용하면

$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-2\times a}}{2}$

$=\frac{2\pm\sqrt{4-2a}}{2}=\frac{b\pm\sqrt{2}}{2}$

이므로 $b=2$, $4-2a=2$에서 $a=1$

$\therefore a+b=1+2=3$

22 ㄱ. $x=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$ ㄴ. $x=-2$ (중근)

ㄷ. $x=-1\pm\sqrt{6}$ ㄹ. $x=-3$ 또는 $x=2$

따라서 ㄱ, ㄷ은 유리수의 범위에서 해를 갖지 않는다.

23 $x^2-6x+4=0$에서 짝수 공식을 이용하면

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\times4}}{1}=3\pm\sqrt{5}=3\pm\sqrt{a}$$

이므로 $a=5$

$x^2-7x+k=0$의 한 근이 5이므로 $x=5$를 대입하면

$25-35+k=0 \qquad \therefore k=10$

24 $x^2-4x-3=0$에서 짝수 공식을 이용하면

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\times(-3)}}{1}=2\pm\sqrt{7}$$

이때, 두 근이 m, n이고, $m>n$이므로

$m=2+\sqrt{7}$, $n=2-\sqrt{7}$

$$\begin{aligned}\therefore m^2-n^2&=(m+n)(m-n)\\&=(2+\sqrt{7}+2-\sqrt{7})\{2+\sqrt{7}-(2-\sqrt{7})\}\\&=4\times2\sqrt{7}=8\sqrt{7}\end{aligned}$$

25 주어진 정의에 의해

$$\begin{aligned}(2x-5)\bigstar(x+1)&=(2x-5)^2-(2x-5)(x+1)\\&=2x^2-17x+30\end{aligned}$$

이므로 $2x^2-17x+30=6-x$에서

$x^2-8x+12=0$, $(x-2)(x-6)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=6$

따라서 두 근의 차는

$6-2=4$

26 (1) $x^2-0.9x+0.2=0$의 양변에 10을 곱하면

$10x^2-9x+2=0$

$(2x-1)(5x-2)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{2}{5}$

(2) $\frac{2}{15}x^2-\frac{1}{3}x=\frac{1}{5}$의 양변에 15를 곱하여 정리하면

$2x^2-5x-3=0$

$(2x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$

(3) $x-3=t$로 치환하면 주어진 식은

$t^2=4t-4$

$t^2-4t+4=0$

$(t-2)^2=0 \qquad \therefore t=2$ (중근)

따라서 $x-3=2$이므로

$x=5$ (중근)

27 $-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}=0$의 양변에 12를 곱하면

$-6x^2-4x+3=0$, $6x^2+4x-3=0$

$$\therefore x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-6\times(-3)}}{6}=\frac{-2\pm\sqrt{22}}{6}$$

따라서 두 근 중 작은 근은 $\alpha=\frac{-2-\sqrt{22}}{6}$이므로

$$\begin{aligned}6\alpha+2&=6\times\frac{-2-\sqrt{22}}{6}+2\\&=-2-\sqrt{22}+2=-\sqrt{22}\end{aligned}$$

28 $\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}=0$의 양변에 6을 곱하면

$2x^2-3x-1=0$

$$\therefore x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times(-1)}}{2\times2}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$$

따라서 두 근 중 큰 근은 $\alpha=\frac{3+\sqrt{17}}{4}$이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}&=\frac{4}{3+\sqrt{17}}=\frac{4(3-\sqrt{17})}{(3+\sqrt{17})(3-\sqrt{17})}\\&=\frac{4(3-\sqrt{17})}{-8}=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\end{aligned}$$

29 $1.5x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}=0$의 양변에 6을 곱하면

$9x^2-4x-1=0$

$$\therefore x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-9\times(-1)}}{9}=\frac{2\pm\sqrt{13}}{9}$$

이때, $\alpha>\beta$이므로

$\alpha=\frac{2+\sqrt{13}}{9}$, $\beta=\frac{2-\sqrt{13}}{9}$

$$\therefore \alpha-\beta=\frac{2+\sqrt{13}}{9}-\frac{2-\sqrt{13}}{9}=\frac{2\sqrt{13}}{9}$$

30 $-x^2=\frac{(x+2)(x-1)}{3}$의 양변에 3을 곱하면

$-3x^2=x^2+x-2$, $4x^2+x-2=0$

$$\begin{aligned}\therefore x&=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times4\times(-2)}}{2\times4}\\&=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{8}=\frac{a\pm\sqrt{b}}{8}\end{aligned}$$

따라서 $a=-1$, $b=33$이므로

$a+b=-1+33=32$

31 $-x(x-7)=9-x$에서 $x^2-8x+9=0$이므로

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-1\times9}}{1}=4\pm\sqrt{7}=a\pm\sqrt{b}$$

$\therefore a=4$, $b=7$

$\frac{x^2+5}{3}-x=\frac{4}{3}(x-1)$의 양변에 3을 곱하면

$x^2+5-3x=4(x-1)$, $x^2-7x+9=0$이므로

$$\begin{aligned}x&=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times1\times9}}{2\times1}\\&=\frac{7\pm\sqrt{13}}{2}=\frac{b\pm\sqrt{c}}{2}\end{aligned}$$

$\therefore b=7, c=13$
$\therefore a+b+c=4+7+13=24$

32 $0.3(x^2-1)=\frac{2}{5}(x+3)$의 양변에 10을 곱하면
$3(x^2-1)=4(x+3)$, $3x^2-4x-15=0$
$(3x+5)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=-\frac{5}{3}$ 또는 $x=3$
이때, $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=3$, $\beta=-\frac{5}{3}$
$\therefore \alpha-3\beta=3-3\times\left(-\frac{5}{3}\right)=8$

33 $2(x-1)^2-9(x-1)=-10$에서 $x-1=t$로 치환하면
$2t^2-9t=-10$, $2t^2-9t+10=0$
$(2t-5)(t-2)=0$ $\quad\therefore t=\frac{5}{2}$ 또는 $t=2$
따라서 $x-1=\frac{5}{2}$ 또는 $x-1=2$이므로
$x=\frac{7}{2}$ 또는 $x=3$

34 $(2x+1)^2-7(2x+1)+10=0$에서 $2x+1=X$로 치환하면
$X^2-7X+10=0$, $(X-2)(X-5)=0$
$\therefore X=2$ 또는 $X=5$
따라서 $2x+1=2$ 또는 $2x+1=5$이므로
$x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$
$3(x+3)^2-14(x+3)-5=0$에서 $x+3=Y$로 치환하면
$3Y^2-14Y-5=0$, $(3Y+1)(Y-5)=0$
$\therefore Y=-\frac{1}{3}$ 또는 $Y=5$
따라서 $x+3=-\frac{1}{3}$ 또는 $x+3=5$이므로
$x=-\frac{10}{3}$ 또는 $x=2$
따라서 두 이차방정식의 공통인 근은 $x=2$이다.

35 $\frac{6}{x^2}-\frac{5}{x}+1=0$에서 $\frac{1}{x}=t$로 치환하면
$6t^2-5t+1=0$, $(2t-1)(3t-1)=0$
$\therefore t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=\frac{1}{3}$
따라서 $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$ 또는 $\frac{1}{x}=\frac{1}{3}$이므로
$x=2$ 또는 $x=3$
따라서 $\alpha=3$, $\beta=2$이므로 $2\alpha+\beta=8$

36 주어진 식에서 $x-2y=t$로 치환하면
$t(t-2)-24=0$, $t^2-2t-24=0$
$(t+4)(t-6)=0$
$\therefore t=-4$ 또는 $t=6$
이때, $x>2y$이므로 $x-2y>0$에서 $t>0$
$\therefore t=6$
따라서 $x-2y=6$이므로
$2x-4y=2(x-2y)=2\times6=12$

37 주어진 식에서 $2x-3y=t$로 치환하면
$t(t-2)-15=0$, $t^2-2t-15=0$
$(t+3)(t-5)=0$
$\therefore t=-3$ $\left(\because x<\frac{3}{2}y\text{이므로 } 2x-3y<0\text{에서 } t<0\right)$
$\therefore 2x-3y=-3$

38 $(a^2-2ab+b^2)-4(a-b)-45=0$,
$(a-b)^2-4(a-b)-45=0$
$a-b=t$로 치환하면
$t^2-4t-45=0$, $(t+5)(t-9)=0$
$\therefore t=9$ ($\because a>b$이므로 $a-b>0$에서 $t>0$)
$\therefore a-b=9$

39 주어진 정의에 의해
$$\begin{aligned}(x-5)\triangle(x+3)&=(x-5)(x+3)-(x-5)\\&=x^2-2x-15-x+5\\&=x^2-3x-10\end{aligned}$$
즉, $x^2-3x-10=8$이므로
$x^2-3x-18=0$, $(x+3)(x-6)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=6$

40 주어진 정의에 의해
$(2x-1)\circ(x-2)$
$=\{(2x-1)-2\}\{(x-2)+1\}-2(2x-1)(x-2)$
$=(2x-3)(x-1)-2(2x^2-5x+2)$
$=2x^2-5x+3-4x^2+10x-4$
$=-2x^2+5x-1$
즉, $-2x^2+5x-1=1$이므로
$2x^2-5x+2=0$
$(2x-1)(x-2)=0$
$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

41 주어진 정의에 의해
$(2x-3)\circledcirc(x+2)=(2x-3)-(x+2)=x-5$
$\therefore \{(2x-3)\circledcirc(x+2)\}\triangle(2x-1)$
$=(x-5)\triangle(2x-1)$
$=(x-5)(2x-1)-(x-5)+2x-1$
$=2x^2-11x+5-x+5+2x-1$

$=2x^2-10x+9$

따라서 $2x^2-10x+9=0$이므로

$x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-2\times9}}{2}=\dfrac{5\pm\sqrt{7}}{2}$

42 주어진 정의에 의해

$N(x+3)=(x+3)(x+3-1)$

$=(x+3)(x+2)$

$=x^2+5x+6$

즉, $x^2+5x+6=5$이므로 $x^2+5x+1=0$

$\therefore x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times1}}{2\times1}=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

따라서 모든 x의 값의 합은

$\dfrac{-5+\sqrt{21}}{2}+\dfrac{-5-\sqrt{21}}{2}=-5$

43 주어진 정의에 의해

$f(a-1)=(a-1)^2-3(a-1)+5$

$=a^2-5a+9$

즉, $a^2-5a+9=4$이므로 $a^2-5a+5=0$

$\therefore a=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times5}}{2\times1}=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$

이때, $a>3$이므로 $a=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$

다른풀이 $f(a-1)=(a-1)^2-3(a-1)+5$이므로

$(a-1)^2-3(a-1)+5=4$에서

$(a-1)^2-3(a-1)+1=0$

$a-1=t$로 치환하면

$t^2-3t+1=0 \qquad \therefore t=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

이때, $a>3$이므로 $a-1>2$에서 $t>2$

$\therefore t=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

따라서 $a-1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$이므로

$a=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}+1=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$

44 $F(x-1,\ x)=f(x-1)-2f(x)$

$=3(x-1)^2-(x-1)+5-2(3x^2-x+5)$

$=3x^2-6x+3-x+1+5-6x^2+2x-10$

$=-3x^2-5x-1$

즉, $-3x^2-5x-1=3-18x$이므로

$3x^2-13x+4=0,\ (3x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=4$

45 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$로 놓으면 $f(0)=-5$이므로

$c=-5$

$\therefore f(x)=ax^2+bx-5$

$f(x+1)-f(x)$

$=a(x+1)^2+b(x+1)-5-(ax^2+bx-5)$

$=ax^2+2ax+a+bx+b-5-ax^2-bx+5$

$=2ax+a+b$

즉, $2ax+a+b=4x-7$에서 $2a=4,\ a+b=-7$이므로

$a=2,\ b=-9$

따라서 $f(x)=2x^2-9x-5$이므로 $f(x)=0$을 만족하는 x의 값은 $2x^2-9x-5=0$에서

$(2x+1)(x-5)=0 \qquad \therefore x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=5$

46 주어진 이차방정식의 두 근이 $m,\ n$이므로

$x^2-3x+7=0$에 $x=m,\ x=n$을 각각 대입하면

$m^2-3m+7=0$에서 $m^2-3m=-7$

$n^2-3n+7=0$에서 $n^2-3n=-7$

$\therefore (m^2-3m+9)(n^2-3n-1)=(-7+9)(-7-1)$

$=2\times(-8)=-16$

47 주어진 이차방정식의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$x^2-5x+1=0$에 $x=\alpha,\ x=\beta$를 각각 대입하면

$\alpha^2-5\alpha+1=0$에서 $\alpha^2-5\alpha=-1$

$\beta^2-5\beta+1=0$에서 $\beta^2-5\beta=-1$

$\therefore (\alpha^2-5\alpha+2)(\beta^2-5\beta-3)=(-1+2)(-1-3)$

$=-4$

48 $x^2+4x-3=0$에 $x=\alpha$를 대입하면

$\alpha^2+4\alpha-3=0$에서 $\alpha^2+4\alpha=3$

$\therefore 3\alpha^2+12\alpha-5=3(\alpha^2+4\alpha)-5$

$=3\times3-5=4$

49 $2x^2-5x-13=0$에 $x=\alpha$를 대입하면

$2\alpha^2-5\alpha-13=0,\ 2\alpha^2-5\alpha=13$

$\therefore 4\alpha^2-10\alpha=2(2\alpha^2-5\alpha)=2\times13=26$

50 $3x^2-2x-1=0$에 $x=a$를 대입하면

$3a^2-2a-1=0$에서 $3a^2-2a=1$

$x^2+2x-15=0$에 $x=b$를 대입하면

$b^2+2b-15=0$에서 $b^2+2b=15$

$\therefore 3a^2+2b^2-2a+4b=(3a^2-2a)+2(b^2+2b)$

$=1+2\times15=31$

51 $x^2+6x+1=0$에 $x=\alpha$를 대입하면

$\alpha^2+6\alpha+1=0$

$\alpha\neq0$이므로 양변을 α로 나누면

$a+6+\frac{1}{a}=0$에서 $a+\frac{1}{a}=-6$

$\therefore a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=(-6)^2-2=34$

52 $x^2-kx+1=0$에 $x=a$를 대입하면 $a^2-ka+1=0$
$a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면
$a-k+\frac{1}{a}=0$에서 $a+\frac{1}{a}=k$
따라서 $a+\frac{1}{a}=k^2-12$에서
$k=k^2-12,\ k^2-k-12=0$
$(k+3)(k-4)=0$
$\therefore k=-3$ 또는 $k=4$

53 $x^2-ax+a+5=0$에 $x=3$을 대입하면
$3^2-a\times3+a+5=0,\ -2a+14=0$
$\therefore a=7$
즉, 주어진 이차방정식은
$x^2-7x+12=0,\ (x-3)(x-4)=0$
$\therefore x=3$ 또는 $x=4$
따라서 다른 한 근은 $x=4$이고 구하는 합은
$7+4=11$

54 $(a+1)x^2+(a^2-2)x+3=0$에 $x=3$을 대입하면
$(a+1)\times3^2+(a^2-2)\times3+3=0$
$9a+9+3a^2-6+3=0$
$a^2+3a+2=0,\ (a+1)(a+2)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=-2$
그런데 주어진 식이 이차방정식이므로
$a+1\neq0 \qquad \therefore a\neq-1$
따라서 $a=-2$이므로 $a=-2$를 주어진 이차방정식에 대입하면
$-x^2+2x+3=0,\ x^2-2x-3=0$
$(x+1)(x-3)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=3$
따라서 다른 한 근은 -1이다.

55 $(x-1)(x+2)=2(x+5)$에서
$x^2+x-2=2x+10$
$x^2-x-12=0,\ (x+3)(x-4)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=4$
즉, $x=-3$이 이차방정식 $x^2+ax+6=0$의 한 근이므로 $x=-3$을 대입하면
$(-3)^2+a\times(-3)+6=0$
$9-3a+6=0 \qquad \therefore a=5$

56 $x^2-2kx+3k-1=0$에 $x=2$를 대입하면
$2^2-2k\times2+3k-1=0$
$4-4k+3k-1=0 \qquad \therefore k=3$
주어진 이차방정식에 $k=3$을 대입하면
$x^2-6x+8=0,\ (x-2)(x-4)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=4$
따라서 다른 한 근은 4이므로 $m=4$
$\therefore k+m=3+4=7$

57 $2x^2+3x-k=0$에 $x=-2$를 대입하면
$2\times(-2)^2+3\times(-2)-k=0,\ 8-6-k=0$
$2-k=0 \qquad \therefore k=2$
$4x^2+6x-1+k=0$에 $k=2$를 대입하면
$4x^2+6x+1=0$
$\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{4}$

58 $2x^2+4x-a=0$에 $x=-3$을 대입하면
$2\times(-3)^2+4\times(-3)-a=0$
$18-12-a=0 \qquad \therefore a=6$
$x^2-(a-4)x-a=0$에 $a=6$을 대입하면
$x^2-2x-6=0$
$\therefore x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\times(-6)}}{1}=1\pm\sqrt{7}$

59 $5x^2+ax-27=0$에 $x=-3$을 대입하면
$5\times(-3)^2+a\times(-3)-27=0$
$-3a+18=0 \qquad \therefore a=6$
$bx^2+2x-21=0$에 $x=-3$을 대입하면
$b\times(-3)^2+2\times(-3)-21=0$
$9b-27=0 \qquad \therefore b=3$
$\therefore a-b=6-3=3$

60 $x^2-10x+24=0$에서 $(x-4)(x-6)=0$
$\therefore x=4$ 또는 $x=6$
$2x^2-x-28=0$에서 $(2x+7)(x-4)=0$
$\therefore x=-\frac{7}{2}$ 또는 $x=4$
즉, 두 이차방정식의 공통인 근은 $x=4$이다.
따라서 $x=4$가 이차방정식 $x^2+kx+12=0$의 한 근이므로
$4^2+k\times4+12=0,\ 4k+28=0$
$\therefore k=-7$

61 $x=5$가 두 이차방정식 $x^2+3x-a=0,\ 2x^2-bx-5=0$의 공통인 근이므로
$x^2+3x-a=0$에 $x=5$를 대입하면
$5^2+3\times5-a=0,\ 25+15-a=0$
$\therefore a=40$

$x^2+3x-a=0$에 $a=40$을 대입하면

$x^2+3x-40=0$, $(x+8)(x-5)=0$

$\therefore x=-8$ 또는 $x=5$

$2x^2-bx-5=0$에 $x=5$를 대입하면

$2\times5^2-b\times5-5=0$, $50-5b-5=0$

$\therefore b=9$

$2x^2-bx-5=0$에 $b=9$를 대입하면

$2x^2-9x-5=0$, $(2x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=5$

따라서 두 이차방정식의 나머지 근은

각각 $x=-8$, $x=-\frac{1}{2}$이다.

62 $x=-\frac{1}{2}$이 두 이차방정식 $4x^2-ax-3=0$, $2x^2-7x+b=0$의 공통인 근이므로

$4x^2-ax-3=0$에 $x=-\frac{1}{2}$을 대입하면

$4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2-a\times\left(-\frac{1}{2}\right)-3=0$

$1+\frac{1}{2}a-3=0 \qquad \therefore a=4$

$4x^2-ax-3=0$에 $a=4$를 대입하면

$4x^2-4x-3=0$, $(2x+1)(2x-3)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

$2x^2-7x+b=0$에 $x=-\frac{1}{2}$을 대입하면

$2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2-7\times\left(-\frac{1}{2}\right)+b=0$

$\frac{1}{2}+\frac{7}{2}+b=0 \qquad \therefore b=-4$

$2x^2-7x+b=0$에 $b=-4$를 대입하면

$2x^2-7x-4=0$, $(2x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=4$

$\therefore c+d=\frac{3}{2}+4=\frac{11}{2}$

63 $4x^2-12x+9=0$에서 $(2x-3)^2=0$이므로

$x=\frac{3}{2}$ (중근) $\qquad \therefore b=\frac{3}{2}$

따라서 두 이차방정식 $4x^2-12x+9=0$, $2x^2+ax-3=0$의 공통인 근이 $x=\frac{3}{2}$이므로

$2x^2+ax-3=0$에 $x=\frac{3}{2}$을 대입하면

$2\times\left(\frac{3}{2}\right)^2+a\times\frac{3}{2}-3=0$

$\frac{9}{2}+\frac{3}{2}a-3=0$

$\frac{3}{2}a=-\frac{3}{2} \qquad \therefore a=-1$

$\therefore a+2b=-1+2\times\frac{3}{2}=2$

64 이차방정식이 (완전제곱식)$=0$의 꼴로 변형되는 것을 찾는다.

ㄱ. $x^2-x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=0$, $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ (중근)

ㄴ. $x+2=\pm3 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=-5$

ㄷ. $x^2=0 \qquad \therefore x=0$ (중근)

ㄹ. $x^2+x-4+2x=0$에서 $x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

ㅁ. $(2x)^2+2\times2x\times\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2=0$에서

$\left(2x+\frac{1}{4}\right)^2=0$

$\therefore x=-\frac{1}{8}$ (중근)

ㅂ. $(-3x-8)^2=-1$에서 $-1<0$이므로 근이 없다.

따라서 보기 중 근이 한 개인 이차방정식은 ㄱ, ㄷ, ㅁ이다.

65 이차방정식 $3x^2-12x+5-k=0$이 중근을 가지므로

$(-6)^2-3(5-k)=0$에서 $21+3k=0$

$\therefore k=-7$

66 근이 1개이므로 이차방정식 $-2x^2+4kx+k^2-9=0$이 중근을 갖는다. 즉,

$(2k)^2-(-2)\times(k^2-9)=0$

$4k^2+2k^2-18=0$, $6k^2=18$

$k^2=3 \qquad \therefore k=\pm\sqrt{3}$

67 $2x^2-12(x-1)+a=0$이 $(x+b)^2=0$으로 나타내어지므로 중근을 갖는다.

즉, $2x^2-12x+12+a=0$에서 $x^2-6x+6+\frac{a}{2}=0$이 중근을 가지므로

$(-3)^2-1\times\left(6+\frac{a}{2}\right)=0$, $9-6-\frac{a}{2}=0$

$\frac{a}{2}=3 \qquad \therefore a=6$

따라서 주어진 이차방정식은 $x^2-6x+9=0$이므로

$(x-3)^2=0 \qquad \therefore b=-3$

$\therefore a+b=6+(-3)=3$

68 $3x^2+ax+b=0$이 $x=4$를 중근으로 가지므로 이 이차방정식을 $3(x-4)^2=0$으로 놓으면

$3x^2+ax+b=3(x-4)^2$
$=3(x^2-8x+16)$
$=3x^2-24x+48$
따라서 $a=-24$, $b=48$이므로
$a+b=-24+48=24$

69 이차방정식 $4x^2+mx+1=0$이 중근을 가지므로
$m^2-4\times4\times1=0$, $m^2-16=0$, $m^2=16$
$\therefore m=\pm4$
그런데 $m>0$이므로 $m=4$
$m=4$를 $(m-3)x^2+5x+1=0$에 대입하면
$x^2+5x+1=0$
근의 공식을 이용하면
$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times1}}{2\times1}=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$
따라서 구하는 두 근의 차는
$\dfrac{-5+\sqrt{21}}{2}-\dfrac{-5-\sqrt{21}}{2}=\dfrac{2\sqrt{21}}{2}=\sqrt{21}$

70 이차방정식 $ax^2-12x+a+5=0$이 중근을 가지므로
$(-6)^2-a\times(a+5)=0$
$36-a^2-5a=0$
$a^2+5a-36=0$
$(a+9)(a-4)=0$
$\therefore a=-9$ 또는 $a=4$
$a=-9$일 때, 주어진 이차방정식은
$-9x^2-12x-4=0$, 즉 $9x^2+12x+4=0$이므로
$(3x+2)^2=0 \quad \therefore x=-\dfrac{2}{3}$ (중근)
$a=4$일 때, 주어진 이차방정식은
$4x^2-12x+9=0$이므로
$(2x-3)^2=0 \quad \therefore x=\dfrac{3}{2}$ (중근)
따라서 주어진 이차방정식이 중근을 갖기 위한 a의 값과 그 때의 중근은
$a=-9$일 때 $x=-\dfrac{2}{3}$ (중근), $a=4$일 때 $x=\dfrac{3}{2}$ (중근)
이다.

71 근이 1개이므로 $x^2+6x+k=0$이 중근을 갖는다. 즉,
$3^2-1\times k=0$, $9-k=0 \quad \therefore k=9$
$x^2-6x-16=0$에서 $(x+2)(x-8)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=8$
$2x^2-x-k-1=0$에 $k=9$를 대입하면
$2x^2-x-10=0$, $(2x-5)(x+2)=0$
$\therefore x=\dfrac{5}{2}$ 또는 $x=-2$
따라서 공통인 근이 -2이므로 $a=-2$
$\therefore k+a=9+(-2)=7$

72 이차방정식 $(a-b)x^2+2(a-c)x+(a-b)=0$이 중근을 가지므로
$(a-c)^2-(a-b)\times(a-b)=0$
$(a-c)^2-(a-b)^2=0$
$(a-c+a-b)\{a-c-(a-b)\}=0$
$(2a-b-c)(b-c)=0$
$\therefore b+c=2a$ 또는 $b=c$
그런데 $b+c\neq2a$이므로 $b=c$
따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 $b=c$인 이등변삼각형이다.

73 이차방정식 $x^2-2x+k=0$에 대하여
(1) 서로 다른 두 근을 가지므로
$(-1)^2-1\times k>0$
$1-k>0 \quad \therefore k<1$
(2) 중근을 가지므로
$(-1)^2-1\times k=0$
$1-k=0 \quad \therefore k=1$
(3) 근을 갖지 않으므로
$(-1)^2-1\times k<0$
$1-k<0 \quad \therefore k>1$

74 $x^2-5x-2=0$에서 $(-5)^2-4\times1\times(-2)=33>0$이므로 서로 다른 두 근을 갖는다.
$\therefore p=2$
$4x^2-12x+9=0$에서 $(-6)^2-4\times9=0$이므로 중근을 갖는다.
$\therefore q=1$
$\therefore p-q=2-1=1$

75 이차방정식 $x^2+2x+3k-1=0$이 근을 갖는 경우는 서로 다른 두 근 또는 중근을 가질 때이므로
$1^2-1\times(3k-1)\geq0$, $1-3k+1\geq0$
$-3k\geq-2 \quad \therefore k\leq\dfrac{2}{3}$

76 $4x^2+4mx+m^2+3m-6=0$이 근을 갖지 않으므로
$(2m)^2-4\times(m^2+3m-6)<0$
$-12m+24<0 \quad \therefore m>2$

77 $kx^2-(2k-1)x+k+1=0$이 근을 갖지 않는다. 즉,
$(2k-1)^2-4\times k(k+1)<0$
$4k^2-4k+1-4k^2-4k<0$
$-8k+1<0,\ -8k<-1\qquad \therefore k>\frac{1}{8}$

78 $x^2-6x+2k=0$이 서로 다른 두 근을 가지므로
$(-3)^2-1\times 2k>0,\ 9-2k>0$
$-2k>-9\qquad \therefore k<\frac{9}{2}$

79 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=1-4m$이 서로 다른 두 근을 가지므로
$1-4m>0,\ -4m>-1$
$\therefore m<\frac{1}{4}\qquad \cdots\cdots$ ㉠
$(m^2+1)x^2+2(m-3)x+2=0$이 중근을 가지므로
$(m-3)^2-(m^2+1)\times 2=0$
$m^2-6m+9-2m^2-2=0$
$m^2+6m-7=0,\ (m+7)(m-1)=0$
$\therefore m=-7$ 또는 $m=1$
이때, ㉠에서 $m<\frac{1}{4}$이므로 구하는 m의 값은
$m=-7$

80 $x^2-ax+b=0$이 근을 가지므로
$(-a)^2-4\times 1\times b\ge 0$
$\therefore a^2-4b\ge 0\qquad \cdots\cdots$ ㉠
$x^2+(a-2)x+b-a=0$에서
$(a-2)^2-4\times 1\times(b-a)=a^2-4a+4-4b+4a$
$=a^2-4b+4\ge 4\ (\because$ ㉠$)$
따라서 $x^2+(a-2)x+b-a=0$은 서로 다른 2개의 근을 가진다.

81 $x^2-6x+9=0$에서 $(x-3)^2=0$이므로
$x=3$
이때 두 이차방정식의 공통인 근은 없고, 근을 모두 나열하면 $-1,\ 3,\ 5$이므로 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 -1 또는 5이다. 즉, $x=-1,\ x=5$를 각각 대입하여 정리하면
$(-1)^2+a\times(-1)+b=0,\ 1-a+b=0$
$\therefore a-b=1\qquad \cdots\cdots$ ㉠
$5^2+a\times 5+b=0,\ 25+5a+b=0$
$\therefore 5a+b=-25\qquad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-4,\ b=-5$
$\therefore a+b=-4+(-5)=-9$

82 두 이차방정식 $x^2-ax-6=0,\ 2x^2+bx+c=0$의 공통인 근이 $x=-2$이므로
$x^2-ax-6=0$에 $x=-2$를 대입하면
$(-2)^2-a\times(-2)-6=0$
$4+2a-6=0\qquad \therefore a=1$
$x^2-ax-6=0$에 $a=1$을 대입하면
$x^2-x-6=0,\ (x+2)(x-3)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$
즉, $2x^2+bx+x=0$의 두 근이 $-2,\ \frac{1}{2}$이므로
$2x^2+bx+c=0$에 $x=-2$를 대입하면
$2\times(-2)^2+b\times(-2)+c=0,\ 8-2b+c=0$
$\therefore 2b-c=8\qquad \cdots\cdots$ ㉠
$2x^2+bx+c=0$에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면
$2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+b\times\frac{1}{2}+c=0,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}b+c=0$
$\therefore b+2c=-1\qquad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$b=3,\ c=-2$
$\therefore a+b+c=1+3+(-2)=2$

03 이차방정식의 활용

Best 최상위 유형 본문 97~109쪽

1 (1) 7 (2) -5 (3) $-\frac{7}{5}$	(4) 59	**2** ④	**3** ⑤	
4 16	**5** ⑤	**6** ⑤	**7** ②	**8** ②
9 ④	**10** ③	**11** ⑤	**12** ②	**13** 14
14 $x=-1\pm\sqrt{2}$		**15** $2\sqrt{15}$	**16** $x^2+6x+5=0$	
17 ②	**18** $3x^2-18x+3=0$		**19** $x^2+13x+30=0$	
20 $-\frac{1}{2}$	**21** ④	**22** ④	**23** ①	
24 $2+\sqrt{2}$, -3		**25** ④	**26** ④	**27** ①
28 ④	**29** $k=-\frac{4}{3}$, 두 근 : -1, 6			
30 ③	**31** ③	**32** ④	**33** (1) $x^2-x-12=0$	
(2) $x=-3$ 또는 $x=4$		**34** ②	**35** $x=\frac{5}{2}$ 또는 $x=1$	
36 ①, ④	**37** ①	**38** ③	**39** ④	**40** ②
41 ②	**42** 17	**43** ③	**44** 195	
45 $x=\pm2$	**46** ①	**47** $-3\le x<-2$		**48** ⑤
49 ③	**50** 10%	**51** 10%	**52** ①	**53** ②
54 (1) 3초 후 또는 5초 후 (2) 8초 후			**55** 5초 후	**56** 3 m
57 3 m	**58** 2	**59** 21 cm^2	**60** ②	**61** ③
62 ⑤	**63** ③	**64** 3 cm	**65** $x^2-6x+6=0$	

1 이차방정식 $x^2-7x-5=0$에서 근과 계수의 관계에 의해

(1) $\alpha+\beta=-\frac{-7}{1}=7$

(2) $\alpha\beta=\frac{-5}{1}=-5$

(3) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{7}{-5}=-\frac{7}{5}$

(4) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=7^2-2\times(-5)=59$

2 이차방정식 $x^2+x-3=0$에서 근과 계수의 관계에 의해

① $\alpha+\beta=-\frac{1}{1}=-1$

② $\alpha\beta=\frac{-3}{1}=-3$

③ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\times(-3)=7$

④ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$

⑤ $(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=-3-1+1=-3$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

3 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-5$

$\therefore \alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta=1^2-3\times(-5)=16$

4 이차방정식 $x^2-5x+2=0$에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=2$

$$\therefore \alpha^2+\beta^2-\frac{2}{\alpha}-\frac{2}{\beta}=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$$
$$=5^2-2\times2-\frac{2\times5}{2}=16$$

5 이차방정식 $4x^2-8x+1=0$에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=\frac{1}{4}$

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{2^2-2\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}=\frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{4}}=14$$

6 이차방정식 $x^2-4x-3=0$에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-3$

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha+1}+\frac{\alpha}{\beta+1}=\frac{\beta(\beta+1)+\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}$$
$$=\frac{\alpha^2+\beta^2+(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}$$
$$=\frac{4^2-2\times(-3)+4}{-3+4+1}$$
$$=\frac{26}{2}=13$$

7 이차방정식 $2x^2+mx+n=0$의 두 근이 1, $\frac{3}{2}$이므로 근과 계수의 관계에 의해

(두 근의 합)$=-\frac{m}{2}=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$ $\quad\therefore m=-5$

(두 근의 곱)$=\frac{n}{2}=1\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore n=3$

따라서 $-5x^2+8x+3=0$의 두 근의 곱은

$\frac{3}{-5}=-\frac{3}{5}$

8 $x^2+5=3(x+1)^2$에서 $x^2+5=3(x^2+2x+1)$

$x^2+5=3x^2+6x+3$

$2x^2+6x-2=0$

$x^2+3x-1=0$

따라서 이 이차방정식의 두 근의 합은 $p=-3$, 두 근의 곱은 $q=-1$이므로

$p-q=-3-(-1)=-2$

9 $(2x+1)(x-8)=x-15$에서 $2x^2-15x-8=x-15$
$2x^2-16x+7=0$
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
(두 근의 합)$=a=-\dfrac{-16}{2}=8$
(두 근의 곱)$=b=\dfrac{7}{2}$
$\therefore a-2b=8-2\times\dfrac{7}{2}=1$

10 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 근과 계수의 관계에 의해
(두 근의 합)$=-a=2$ $\quad\therefore a=-2$
(두 근의 곱)$=b=-3$
따라서 이차방정식 $-3x^2-2x+1=0$의 두 근의 합은
$-\dfrac{-2}{-3}=-\dfrac{2}{3}$

11 이차방정식 $2x^2+ax-b=0$의 두 근이 -4, $\dfrac{3}{2}$이므로
근과 계수의 관계에 의해
(두 근의 합)$=-\dfrac{a}{2}=-4+\dfrac{3}{2}=-\dfrac{5}{2}$ $\quad\therefore a=5$
(두 근의 곱)$=-\dfrac{b}{2}=-4\times\dfrac{3}{2}=-6$ $\quad\therefore b=12$
$\therefore b-a=12-5=7$

12 이차방정식 $2x^2+mx+n=0$의 두 근이 1, $\dfrac{3}{2}$이므로
근과 계수의 관계에 의해
(두 근의 합)$=-\dfrac{m}{2}=1+\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}$ $\quad\therefore m=-5$
(두 근의 곱)$=\dfrac{n}{2}=1\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$ $\quad\therefore n=3$
따라서 $-5x^2+8x+3=0$의 두 근의 곱은
$\dfrac{3}{-5}=-\dfrac{3}{5}$

13 이차방정식 $5x^2-x-10=0$에서 근과 계수의 관계에 의해
(두 근의 합)$=-\dfrac{-1}{5}=\dfrac{1}{5}$
(두 근의 곱)$=\dfrac{-10}{5}=-2$
따라서 이차방정식 $10x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\dfrac{1}{5}$, -2이므로 근과 계수의 관계에 의해
(두 근의 합)$=-\dfrac{a}{10}=\dfrac{1}{5}+(-2)=-\dfrac{9}{5}$ $\quad\therefore a=18$
(두 근의 곱)$=\dfrac{b}{10}=\dfrac{1}{5}\times(-2)=-\dfrac{2}{5}$ $\quad\therefore b=-4$
$\therefore a+b=18+(-4)=14$

14 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근의 합이 2, 곱이 -1이므로 근과 계수의 관계에 의해
$-\dfrac{b}{a}=2$에서 $b=-2a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$\dfrac{c}{a}=-1$에서 $c=-a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 이차방정식 $cx^2+bx+a=0$에 대입하면
$-ax^2-2ax+a=0$
$a\neq0$이므로 양변을 $-a$로 나누면
$x^2+2x-1=0$
$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-1\times(-1)}}{1}=-1\pm\sqrt{2}$

15 이차방정식 $x^2-7x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta=7$, $\alpha\beta=1$
이때, $\sqrt{\alpha^2+\alpha}+\sqrt{\beta^2+\beta}$를 제곱하면
$(\sqrt{\alpha^2+\alpha}+\sqrt{\beta^2+\beta})^2$
$=\alpha^2+\alpha+2\sqrt{(\alpha^2+\alpha)(\beta^2+\beta)}+\beta^2+\beta$
$=\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha^2\beta^2+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha\beta}$
$=\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha^2\beta^2+\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$
$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\alpha+\beta)$
$\qquad+2\sqrt{(\alpha\beta)^2+\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$
$=7^2-2\times1+7+2\sqrt{1^2+1\times7+1}$
$=49-2+7+6$
$=60$
이때 $\sqrt{\alpha^2+\alpha}+\sqrt{\beta^2+\beta}>0$이므로
$\sqrt{\alpha^2+\alpha}+\sqrt{\beta^2+\beta}=\sqrt{60}=2\sqrt{15}$

16 이차방정식 $x^2+5x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=-1$
따라서 두 근이 -1, -5이고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2-(-1-5)x+(-1)\times(-5)=0$
$\therefore x^2+6x+5=0$

17 이차방정식 $6x^2-5x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta=\dfrac{5}{6}$, $\alpha\beta=\dfrac{1}{6}$
이때, $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식에서
(두 근의 합)$=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}}=5$
(두 근의 곱)$=\dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha\beta}=\dfrac{1}{\frac{1}{6}}=6$

이므로 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-5x+6=0$

18 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$

이때, α^2, β^2을 두 근으로 하는 이차방정식에서

(두 근의 합)$=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=2^2-2\times(-1)$

$=4+2=6$

(두 근의 곱)$=\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(-1)^2=1$

이므로 α^2, β^2을 두 근으로 하고, x^2의 계수가 3인 이차방정식은

$3(x^2-6x+1)=0$

$\therefore 3x^2-18x+3=0$

19 이차방정식 $3x^2+px+q=0$의 두 근이 $\frac{2}{3}$, 1이므로 근과 계수의 관계에 의해

(두 근의 합)$=-\frac{p}{3}=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$ $\quad\therefore p=-5$

(두 근의 곱)$=\frac{q}{3}=\frac{2}{3}\times1=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore q=2$

$\therefore p+q=-3$, $pq=-10$

따라서 x^2의 계수가 1이고, 두 근이 -3, -10인 이차방정식은

$x^2-(-3-10)x+(-3)\times(-10)=0$

$\therefore x^2+13x+30=0$

20 이차방정식 $2x^2-5x+1=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=\frac{5}{2}$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$

이때 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$이므로 근과 계수의 관계에 의해

(두 근의 합)$=-a=(\alpha+1)+(\beta+1)$

$=\alpha+\beta+2=\frac{5}{2}+2=\frac{9}{2}$

$\therefore a=-\frac{9}{2}$

(두 근의 곱)$=b=(\alpha+1)(\beta+1)$

$=\alpha\beta+\alpha+\beta+1$

$=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}+1=4$

$\therefore a+b=-\frac{9}{2}+4=-\frac{1}{2}$

21 계수와 상수항이 모두 유리수인 이차방정식의 한 근이 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$이면 다른 한 근은 $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$이므로 이차방정식 $x^2-ax+b=0$에서 근과 계수의 관계에 의해

(두 근의 합)$=a=\frac{3-\sqrt{5}}{2}+\frac{3+\sqrt{5}}{2}=3$

(두 근의 곱)$=b=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\times\frac{3+\sqrt{5}}{2}=1$

$\therefore a-b=3-1=2$

22 계수와 상수항이 모두 유리수인 이차방정식의 한 근이 $-2+\sqrt{7}$이면 다른 한 근은 $-2-\sqrt{7}$이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 근과 계수의 관계에 의해

(두 근의 합)$=-a=(-2+\sqrt{7})+(-2-\sqrt{7})=-4$

$\therefore a=4$

(두 근의 곱)$=b=(-2+\sqrt{7})(-2-\sqrt{7})=4-7=-3$

$\therefore a+b=4+(-3)=1$

다른풀이 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $\sqrt{7}-2$이므로 $x=\sqrt{7}-2$를 대입하면

$(\sqrt{7}-2)^2+a(\sqrt{7}-2)+b=0$

$7-4\sqrt{7}+4+a\sqrt{7}-2a+b=0$

$11-2a+b+(a-4)\sqrt{7}=0$

이때 a, b가 유리수이므로

$11-2a+b=0$, $a-4=0$

따라서 $a=4$, $b=-3$이므로 $a+b=1$

23 $2<\sqrt{5}<3$에서 $-3<-\sqrt{5}<-2$이므로

$1<4-\sqrt{5}<2$

$4-\sqrt{5}$의 정수 부분은 1이므로 소수 부분은

$(4-\sqrt{5})-1=3-\sqrt{5}$

따라서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $3-\sqrt{5}$이면 다른 한 근은 $3+\sqrt{5}$이므로

(두 근의 합)$=-a=(3-\sqrt{5})+(3+\sqrt{5})=6$

$\therefore a=-6$

(두 근의 곱)$=b=(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})=9-5=4$

$\therefore a-b=-6-4=-10$

24 계수와 상수항이 모두 유리수인 이차방정식의 한 근이 $2-\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $2+\sqrt{2}$이므로

(두 근의 합)$=(2-\sqrt{2})+(2+\sqrt{2})=4$

(두 근의 곱)$=(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})=4-2=2$

따라서 두 근이 $2-\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$이고, x^2의 계수가 3인 이차방정식은

$3(x^2-4x+2)=0$

$\therefore 3x^2-12x+6=0$

따라서 구하는 다른 한 근은 $2+\sqrt{2}$이고, 모든 계수와 상수항의 합은

$3-12+6=-3$

25 계수와 상수항이 모두 유리수인 이차방정식의 한 근이 $3+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $3-\sqrt{2}$이므로

(두 근의 합)$=(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})=6$
(두 근의 곱)$=(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=9-2=7$
이므로 구하는 이차방정식은
$x^2-6x+7=0$

26 두 근의 비가 $2:3$이므로 두 근을 2α, $3\alpha\,(\alpha>0)$로 놓으면 $x^2-(k-1)x+24=0$에서 근과 계수의 관계에 의해
(두 근의 합)$=2\alpha+3\alpha=k-1$ ...... ㉠
(두 근의 곱)$=2\alpha\times3\alpha=24$, $\alpha^2=4$
$\therefore \alpha=2$ ($\because \alpha>0$)
$\alpha=2$를 ㉠에 대입하면
$4+6=k-1$ $\therefore k=11$

27 두 근의 비가 $1:2$이므로 두 근을 α, $2\alpha\,(\alpha\neq0)$로 놓으면 $x^2-6x-2a=0$에서 근과 계수의 관계에 의해
(두 근의 합)$=\alpha+2\alpha=6$ $\therefore \alpha=2$
(두 근의 곱)$=\alpha\times2\alpha=-2a$ ...... ㉠
$\alpha=2$를 ㉠에 대입하면
$8=-2a$ $\therefore a=-4$

28 한 근이 다른 한 근보다 2만큼 크므로 두 근을 α, $\alpha+2\,(\alpha<-2)$로 놓으면 $x^2+mx+15=0$에서 근과 계수의 관계에 의해
(두 근의 합)$=\alpha+(\alpha+2)=-m$ ...... ㉠
(두 근의 곱)$=\alpha(\alpha+2)=15$
$\alpha^2+2\alpha-15=0$, $(\alpha+5)(\alpha-3)=0$
$\therefore \alpha=-5$ ($\because \alpha<-2$)
$\alpha=-5$를 ㉠에 대입하면
$-5+(-3)=-m$ $\therefore m=8$

29 두 근의 차가 7이므로 두 근을 α, $\alpha+7$로 놓으면
$x^2-5x+3k-2=0$에서 근과 계수의 관계에 의해
(두 근의 합)$=\alpha+(\alpha+7)=5$ $\therefore \alpha=-1$
(두 근의 곱)$=\alpha(\alpha+7)=3k-2$ ...... ㉠
$\alpha=-1$을 ㉠에 대입하면
$-1\times6=3k-2$, $3k=-4$ $\therefore k=-\frac{4}{3}$
따라서 $k=-\frac{4}{3}$이고, 두 근은 -1, 6이다.

30 두 근의 비가 $3:1$이므로 두 근을 3α, $\alpha\,(\alpha>0)$로 놓으면 두 근의 차가 4이므로
$3\alpha-\alpha=4$ $\therefore \alpha=2$
따라서 이차방정식 $x^2-2(m+2)x-n+1=0$의 두 근은 6, 2이므로 근과 계수의 관계에 의해
(두 근의 합)$=6+2=2(m+2)$ $\therefore m=2$
(두 근의 곱)$=6\times2=-n+1$ $\therefore n=-11$
$\therefore m+n=2+(-11)=-9$

31 한 근이 다른 한 근의 2배이므로 두 근을 α, $2\alpha\,(\alpha>0)$로 놓으면 $x^2-kx+32=0$에서 근과 계수의 관계에 의해
(두 근의 합)$=\alpha+2\alpha=k$ ...... ㉠
(두 근의 곱)$=\alpha\times2\alpha=32$
$\alpha^2=16$ $\therefore \alpha=4$ ($\because \alpha>0$)
$\alpha=4$를 ㉠에 대입하면
$4+8=k$ $\therefore k=12$

32 $x^2-5x+m=2x+3$에서 $x^2-7x+m-3=0$
이 이차방정식의 두 근을 α, $2\alpha+1$이라 하면 근과 계수의 관계에 의해
(두 근의 합)$=\alpha+(2\alpha+1)=7$ $\therefore \alpha=2$
(두 근의 곱)$=\alpha(2\alpha+1)=m-3$ ...... ㉠
$\alpha=2$를 ㉠에 대입하면
$2(2\times2+1)=m-3$ $\therefore m=13$

33 (1) 처음 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$이라 하면
희영이는 이차항의 계수와 상수항은 바르게 보고 풀었으므로
(두 근의 곱)$=2\times(-6)=b$ $\therefore b=-12$
나연이는 이차항의 계수와 일차항의 계수는 바르게 보고 풀었으므로
(두 근의 합)$=-4+5=-a$ $\therefore a=-1$
따라서 처음 이차방정식은
$x^2-x-12=0$
(2) $x^2-x-12=0$에서
$(x+3)(x-4)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=4$

34 처음 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$이라 하면
수경이는 이차항의 계수와 상수항은 바르게 보고 풀었으므로
(두 근의 곱)$=-2\times16=b$ $\therefore b=-32$
민선이는 이차항의 계수와 일차항의 계수는 바르게 보고 풀었으므로
(두 근의 합)$=2+2=-a$ $\therefore a=-4$
따라서 처음 이차방정식은
$x^2-4x-32=0$
$(x+4)(x-8)=0$
$\therefore x=-4$ 또는 $x=8$

35 처음 이차방정식을 $2x^2+ax+b=0$이라 하면
선영이는 이차항의 계수와 상수항은 바르게 보고 풀었으므로
(두 근의 곱)$=\frac{1}{2}\times5=\frac{b}{2}$ $\therefore b=5$

지영이는 이차항의 계수와 일차항의 계수는 바르게 보고 풀었으므로

(두 근의 합)$=\frac{3}{2}+2=-\frac{a}{2}$ $\quad\therefore a=-7$

따라서 처음 이차방정식은

$2x^2-7x+5=0$

$(2x-5)(x-1)=0$

$\therefore x=\frac{5}{2}$ 또는 $x=1$

36 은정이가 잘못 보고 푼 이차방정식은

$x^2-(-5+6)x+(-5)\times6=0$에서

$x^2-x-30=0$

이것은 일차항의 계수의 부호를 잘못 보고 푼 것이므로 처음 이차방정식은

$x^2+x-30=0$

$(x+6)(x-5)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=5$

37 현정이가 잘못 보고 푼 이차방정식은

$x^2-(-1+4)x+(-1)\times4=0$에서

$x^2-3x-4=0$

이것은 일차항의 계수와 상수항을 모두 1씩 크게 본 것이므로 처음 이차방정식은

$x^2-4x-5=0$

$(x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

38 연속하는 세 자연수를 $x-1$, x, $x+1$ $(x>1)$이라 하면

$(x+1)^2=(x-1)^2+x^2-45$에서

$x^2-4x-45=0$

$(x+5)(x-9)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=9$

이때, $x>1$이므로 $x=9$

따라서 구하는 세 자연수는 8, 9, 10이므로 가장 작은 자연수는 8이다.

39 연속하는 두 홀수를 a, $a+2$ (a는 홀수)라 하면

$(a+2)^2-a^2=16$에서

$4a=12$ $\quad\therefore a=3$

따라서 두 홀수는 3, 5이고, 이것이 이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 두 근이므로

(두 근의 합)$=3+5=-m$ $\quad\therefore m=-8$

(두 근의 곱)$=3\times5=n$ $\quad\therefore n=15$

$\therefore m+n=-8+15=7$

40 연속하는 두 짝수를 x, $x+2$ (x는 짝수)라 하면

$2x^2=(x+2)^2+8$에서

$x^2-4x-12=0$, $(x+2)(x-6)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=6$

그런데 x는 짝수이므로 $x=6$

따라서 두 짝수는 6, 8이므로 구하는 합은

$6+8=14$

다른풀이 연속하는 두 짝수를 $2x$, $2x+2$ (x는 자연수)라 하면

$2\times(2x)^2=(2x+2)^2+8$

$8x^2=4x^2+8x+12$, $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

그런데 x는 자연수이므로 $x=3$

따라서 두 짝수는 6, 8이므로 구하는 합은 14이다.

41 연속하는 세 홀수를 $x-2$, x, $x+2$ (x는 3 이상의 홀수)라 하면

$(x-2)^2+x^2+(x+2)^2=83$에서

$x^2-4x+4+x^2+x^2+4x+4=83$

$3x^2=75$, $x^2=25$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=5$

그런데 x는 3 이상의 홀수이므로 $x=5$

따라서 세 홀수는 3, 5, 7이므로 그 합은

$3+5+7=15$

42 $\frac{n(n+1)}{2}=153$에서

$n^2+n-306=0$, $(n+18)(n-17)=0$

$\therefore n=-18$ 또는 $n=17$

그런데 n은 자연수이므로 $n=17$

따라서 구하는 수는 17이다.

43 $\frac{n(n-3)}{2}=104$에서

$n^2-3n-208=0$, $(n+13)(n-16)=0$

$\therefore n=-13$ 또는 $n=16$

이때 $n>3$이므로 $n=16$

따라서 구하는 다각형은 16각형이다.

44 어떤 자연수를 x라 하면 x보다 3만큼 작은 수는 $x-3$이므로

$x(x-3)=180$에서

$x^2-3x-180=0$, $(x+12)(x-15)=0$

$\therefore x=-12$ 또는 $x=15$

그런데 x는 자연수이므로 $x=15$

따라서 어떤 자연수는 15이고, 15보다 2만큼 작은 수는 $15-2=13$이므로 원래 두 수의 곱은

$15\times13=195$

45 $|x|^2=x^2$이므로 주어진 이차방정식은
$|x|^2-|x|-2=0$과 같다.
$|x|=t\ (t>0)$로 치환하면
$t^2-t-2=0,\ (t+1)(t-2)=0$
$\therefore t=-1$ 또는 $t=2$
이때 $t>0$이므로 $t=2$
따라서 $|x|=2$이므로 $x=\pm 2$

다른풀이 $x\ge 0$일 때와 $x<0$일 때로 나누어 풀면 다음과 같다.
(i) $x\ge 0$일 때, $|x|=x$이므로 주어진 이차방정식은
$x^2-x=2,\ x^2-x-2=0$
$(x+1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=2$
이때 $x\ge 0$이므로 $x=2$
(ii) $x<0$일 때, $|x|=-x$이므로 주어진 이차방정식은
$x^2-(-x)=2,\ x^2+x-2=0$
$(x+2)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=1$
이때 $x<0$이므로 $x=-2$
따라서 (i), (ii)에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

46 $\langle x\rangle=t$로 치환하면 주어진 이차방정식은
$t^2+3t-28=0,\ (t+7)(t-4)=0$
$\therefore t=-7$ 또는 $t=4$
그런데 $\langle x\rangle$의 값은 자연수이므로
$t=4$, 즉 $\langle x\rangle=4$
소수를 작은 것부터 나열하면 2, 3, 5, 7, 11, $\cdots$이므로 자연수 x 이하의 소수가 4개이려면 x는 7 이상 11 미만이어야 한다.
따라서 자연수 x가 될 수 있는 것은 7, 8, 9, 10이다.

47 $2[x]^2+[x]-15=0$에서 $[x]=t$로 치환하면
$2t^2+t-15=0,\ (2t-5)(t+3)=0$
$\therefore t=\frac{5}{2}$ 또는 $t=-3$
그런데 t는 정수이므로 $t=-3$
따라서 $[x]=-3$이므로 구하는 x의 값의 범위는
$-3\le x<-2$

48 학생 수를 x명이라 하면 한 학생이 받는 볼펜의 개수는 $(x-4)$개이므로
$x(x-4)=165$에서 $x^2-4x-165=0$
$(x+11)(x-15)=0$
$\therefore x=-11$ 또는 $x=15$
이때 $x-4>0$, 즉 $x>4$이므로 $x=15$
따라서 구하는 학생 수는 15명이다.

49 동생의 나이를 x살이라 하면 오빠의 나이는 $(x+2)$살이므로
$(x+2)^2=16x+32$에서
$x^2-12x-28=0,\ (x+2)(x-14)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=14$
그런데 x는 자연수이므로 $x=14$
따라서 동생은 14살, 오빠는 16살이므로 그 합은
$14+16=30$(살)

50 1000원에서 x % 인상한 아이스크림의 가격은
$1000\left(1+\frac{x}{100}\right)=1000+10x$ (원)
이때의 판매량은 500개에서 $2x$ % 감소하므로
$500\left(1-\frac{2x}{100}\right)=500-10x$ (개)
(총 판매액)=(가격)×(판매량)이므로
$440000=(1000+10x)(500-10x)$에서
$x^2+50x-600=0$
$(x+60)(x-10)=0$
$\therefore x=-60$ 또는 $x=10$
그런데 $x>0$이므로 $x=10$
따라서 10 % 인상해야 한다.

51 가격을 인상하기 전의 영화표의 가격을 a원, 영화를 보러 오는 관객의 수를 b명이라 하면 가격을 인상하기 전 영화표의 총 판매액은 ab원이다.
영화표의 가격을 x %만큼 인상했을 때의 가격은
$a\left(1+\frac{x}{100}\right)$원
이고, 이때의 영화를 보러 오는 관객의 수는
$b\left(1-\frac{0.5x}{100}\right)$명
이므로 가격을 x %만큼 인상했을 때 영화표의 총 판매액은
$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{0.5x}{100}\right)$
$=ab\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{0.5x}{100}\right)$(원)
이것이 인상하기 전의 총 판매액에서 4.5 %만큼 증가한 것이려면
$ab\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{0.5x}{100}\right)=ab\left(1+\frac{4.5}{100}\right)$에서
$\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{0.5x}{100}\right)=1+\frac{4.5}{100}$
$(100+x)(1000-5x)=100000+4500$
$-5x^2+500x=4500$
$x^2-100x+900=0,\ (x-10)(x-90)=0$
$\therefore x=10$ 또는 $x=90$
그런데 영화표의 가격 인상률은 50 % 미만이므로
$x=10$
따라서 영화표의 가격을 10 % 인상해야 한다.

52 $h=245$일 때이므로

$245=-5t^2+30t+200$에서

$t^2-6t+9=0$

$(t-3)^2=0$

$\therefore t=3$

따라서 지면으로부터 폭죽의 높이가 245 m가 되는 때는 폭죽을 쏘아 올린 지 3초 후이다.

53 $-2t^2+25t+50=100$에서 $2t^2-25t+50=0$

$(t-10)(2t-5)=0$

$\therefore t=2.5$ 또는 $t=10$

따라서 처음으로 높이가 100 m가 될 때는 공을 쏘아 올린 지 2.5초 후이다.

54 (1) $h=75$일 때이므로 $75=-5t^2+40t$에서

$t^2-8t+15=0$

$(t-3)(t-5)=0$

$\therefore t=3$ 또는 $t=5$

따라서 공의 높이가 75 m가 되는 것은 공을 쏘아 올린 지 3초 후 또는 5초 후이다.

(2) 공이 지면에 떨어지는 것은 $h=0$일 때이므로

$0=-5t^2+40t$에서

$t^2-8t=0,\ t(t-8)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=8$

이때 $t>0$이므로 $t=8$

따라서 공이 다시 지면에 떨어지는 것은 공을 쏘아 올린 지 8초 후이다.

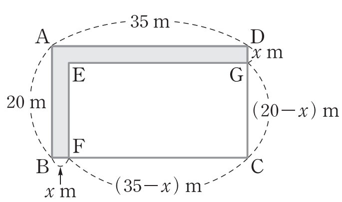
55 지면에 떨어지면 높이가 0이므로

$25t-5t^2=0,\ 5t(t-5)=0$

$\therefore t=5\ (\because t>0)$

따라서 물이 다시 지면에 떨어지는 것은 물을 쏘아 올린 지 5초 후이다.

56 폭이 x m인 길을 다음 그림과 같이 보기 쉽게 옮겨 그릴 수 있다.



이때 길의 넓이는 □ABCD의 넓이에서 □EFCG의 넓이를 뺀 것과 같으므로

(길의 넓이)$=35\times20-(35-x)(20-x)$

$=-x^2+55x$

이것이 156 m^{2}이므로

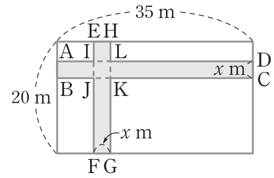
$-x^2+55x=156$에서 $x^2-55x+156=0$

$(x-3)(x-52)=0 \quad \therefore x=3$ 또는 $x=52$

그런데 $20-x>0$에서 $x<20$이므로 $x=3$

따라서 구하는 길의 폭은 3 m이다.

다른풀이 오른쪽 그림에서



(길의 넓이)

$=\square ABCD+\square EFGH-\square IJKL$

$=x\times35+x\times20-x\times x$

$=-x^2+55x$

이것이 156 m^{2}이므로 $-x^2+55x=156$

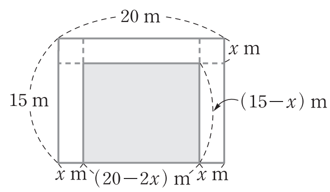
$x^2-55x+156=0,\ (x-3)(x-52)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=52$

그런데 $x<20$이므로 $x=3$

따라서 구하는 길의 폭은 3 m이다.

57 폭이 일정한 길을 오른쪽 그림과 같이 보기 쉽게 옮겨 그릴 수 있다. 길의 폭을 x m라 하면 남은 땅의 넓이는 어두운 부분의 넓이와 같으므로



$168=(20-2x)(15-x)$에서

$x^2-25x+66=0$

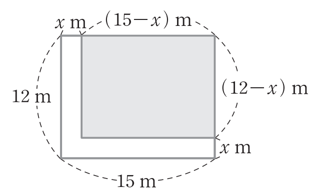
$(x-3)(x-22)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=22$

그런데 $20-2x>0$에서 $x<10$이므로 $x=3$

따라서 길의 폭은 3 m이다.

58 폭이 일정한 길을 오른쪽 그림과 같이 보기 쉽게 옮겨 그릴 수 있다. 이때 A, B 두 부분의 넓이의 합은 어두운 부분의 넓이와 같으므로



$50+80=(12-x)(15-x)$에서

$x^2-27x+50=0,\ (x-2)(x-25)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=25$

그런데 $12-x>0$에서 $x<12$이므로 $x=2$

59 처음 직사각형의 세로의 길이를 x cm라 하면 가로의 길이는 $(x+4)$ cm이므로 이 직사각형의 넓이는

$x(x+4)=x^2+4x\ (\text{cm}^2)$

처음 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 3 cm만큼 줄여서 만든 직사각형의 가로와 세로의 길이는 각각 $(x+1)$ cm, $(x-3)$ cm이므로 이 직사각형의 넓이는

$(x+1)(x-3)=x^2-2x-3\ (\text{cm}^2)$

나중에 만든 직사각형의 넓이는 처음 직사각형의 넓이의 $\frac{1}{2}$보다 9 cm^{2}만큼 작으므로

$x^2-2x-3=\frac{1}{2}(x^2+4x)-9$에서

$2x^2-4x-6=x^2+4x-18$

$x^2-8x+12=0$, $(x-2)(x-6)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=6$

그런데 $x-3>0$이므로 $x>3$

$\therefore x=6$

따라서 나중에 만든 직사각형의 가로의 길이는

$x+1=7\,(\text{cm})$, 세로의 길이는 $x-3=3\,(\text{cm})$이므로

구하는 넓이는

$7\times3=21\,(\text{cm}^2)$

60 길이가 30 cm인 끈으로 만든 직사각형의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하면 이 직사각형의 둘레의 길이가 30 cm이므로

$2\times(x+y)=30$, $x+y=15$

$\therefore y=15-x$

이때 직사각형의 넓이는 54 cm²이므로

$xy=x(15-x)=-x^2+15x=54$에서

$x^2-15x+54=0$

$(x-6)(x-9)=0$ $\quad\therefore x=6$ 또는 $x=9$

$x=6$일 때, $y=15-6=9$

$x=9$일 때 $y=15-9=6$

이므로 직사각형의 가로와 세로의 길이는 9 cm, 6 cm 이다.

따라서 두 변의 길이의 차는

$9-6=3\,(\text{cm})$

61 주어진 그림에서 큰 정사각형 (가)의 한 변의 길이는 x cm이므로 작은 정사각형 (나)의 한 변의 길이는 $(10-x)$ cm이다. 이때, (가)의 넓이는 x^2 cm², (나)의 넓이는 $(10-x)^2$ cm²이고, 두 정사각형의 넓이의 합이 58 cm²이므로

$x^2+(10-x)^2=58$에서

$x^2-10x+21=0$

$(x-3)(x-7)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=7$

그런데 정사각형 (가)의 한 변의 길이는 정사각형 (나)의 한 변의 길이보다 크므로 $5<x<10$

$\therefore x=7$

따라서 정사각형 (가)의 한 변의 길이는 7 cm이다.

62 처음 원의 반지름의 길이를 x cm라 하면 그 넓이는 $x^2\pi$ cm²이고, 반지름의 길이를 3 cm만큼 늘인 원의 넓이는 $(x+3)^2\pi$ cm² 이다. 이때 늘어난 부분의 넓이는

$\{(x+3)^2\pi-x^2\pi\}$ cm²

이고 이것이 처음 원의 넓이의 3배이므로

$(x+3)^2\pi-x^2\pi=x^2\pi\times3$에서

$3x^2-6x-9=0$, $x^2-2x-3=0$

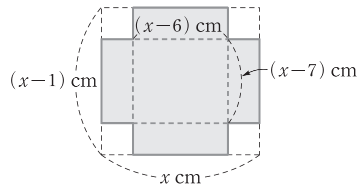
$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

그런데 $x>0$이므로 $x=3$

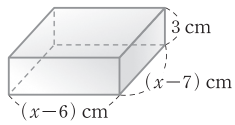
따라서 처음 원의 반지름의 길이는 3 cm이다.

63 주어진 직사각형의 가로의 길이를 x cm라 하면 세로의 길이는 $(x-1)$ cm이므로 만들어진 직육면체에서 밑면인 직사각형의 가로의 길이는 $(x-6)$ cm,



세로의 길이는

$(x-1)-6=x-7\,(\text{cm})$



이다. 이때 직육면체의 높이는 3 cm이므로

(직육면체의 부피)$=3(x-6)(x-7)=216$에서

$x^2-13x-30=0$

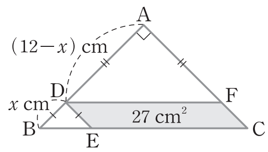
$(x+2)(x-15)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=15$

그런데 $x>0$이므로 $x=15$

따라서 처음 직사각형의 가로의 길이는 15 cm이다.

64 오른쪽 그림의 $\triangle$ABC와 $\triangle$DBE에서



$\angle$ACB$=\angle$DEB (동위각)

$\angle$B는 공통

$\therefore \triangle\text{ABC}\backsim\triangle\text{DBE}$ (AA닮음)

따라서 $\angle\text{BDE}=\angle\text{A}=90°$이고, $\triangle$DBE는

$\overline{\text{BD}}=\overline{\text{DE}}$인 이등변삼각형이다.

$\overline{\text{BD}}=\overline{\text{DE}}=x$ cm라 하면 □DECF가 평행사변형이므로

$\overline{\text{CF}}=\overline{\text{DE}}=x$ cm

$\therefore \overline{\text{AD}}=\overline{\text{AF}}=(12-x)$ cm

$\triangle$ABC$=\triangle$ADF$+\triangle$DBE$+$□DECF이므로

$\frac{1}{2}\times12\times12$

$=\left\{\frac{1}{2}\times(12-x)\times(12-x)\right\}+\left(\frac{1}{2}\times x\times x\right)+27$

에서 $x^2-12x+27=0$

$(x-3)(x-9)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=9$

그런데 $\overline{\text{AD}}>\overline{\text{DB}}$에서 $12-x>x$이므로 $x<6$

$\therefore x=3$

$\therefore \overline{\text{BD}}=3$ cm

65 두 정육면체 A, B의 한 모서리의 길이를 각각 a, b라 하면 정육면체 A의 모든 모서리의 길이의 합은 $12a$, 겉넓이는 $6a^2$이고, 정육면체 B의 모든 모서리의 길이의 합은 $12b$, 겉넓이는 $6b^2$이다.
이때 두 정육면체 A, B의 모든 모서리의 길이의 합이 72이므로
$12a+12b=72$, 즉 $a+b=6$ …… ㉠
두 정육면체 A, B의 겉넓이의 합이 144이므로
$6a^2+6b^2=144$, 즉 $a^2+b^2=24$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
$24=6^2-2ab$
$\therefore ab=6$
따라서 두 정육면체 A, B 각각의 한 모서리의 길이 a, b를 두 근으로 하고, 이차항의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2-(a+b)x+ab=0$에서 $x^2-6x+6=0$

단원 종합 문제

본문 110~114쪽

01 ②, ⑤	**02** ③, ⑤	**03** ④	**04** ③	
05 $x-2y$	**06** ③	**07** ⑤	**08** ③	**09** ①
10 ②	**11** ③	**12** ②	**13** ④	**14** ⑤
15 ②	**16** ⑤	**17** ①	**18** 25	**19** $\frac{9}{2}$
20 ②, ④	**21** ④	**22** 30	**23** ③	**24** ②
25 ③, ⑤	**26** 2	**27** ③	**28** ①	**29** ②
30 ③	**31** ⑤	**32** $x^2+5x-6=0$		
33 ②, ⑤	**34** ②	**35** 0	**36** 7, 12, 15, 16	

01 $x-4y=A$로 치환하면
$(x-4y)(x-4y+3)-4$
$=A(A+3)-4$
$=A^2+3A-4$
$=(A+4)(A-1)$
$=(x-4y+4)(x-4y-1)$
따라서 주어진 식의 인수를 모두 고르면 ②, ⑤이다.

02 ① $4a^2-36a+81=(2a)^2-2\times2a\times9+9^2=(2a-9)^2$
② $9b^2-66b+121=(3b)^2-2\times3b\times11+11^2$
$=(3b-11)^2$
③ $25x^2-49=(5x)^2-7^2=(5x+7)(5x-7)$
④ $x^2-xy+\frac{1}{4}y^2=x^2-2\times x\times\frac{1}{2}y+\left(\frac{1}{2}y\right)^2=\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2$
⑤ $\frac{1}{9}x^2+x+9$는 더 이상 인수분해되지 않는다.
따라서 완전제곱식으로 인수분해할 수 없는 것은 ③, ⑤이다.

03 $3x+2=X$, $2x-1=Y$로 치환하면
$(3x+2)^2-(2x-1)^2$
$=X^2-Y^2$
$=(X+Y)(X-Y)$
$=(3x+2+2x-1)\{3x+2-(2x-1)\}$
$=(5x+1)(x+3)=(ax+1)(bx+3)$
이므로 $a=5$, $b=1$
$\therefore a+b=5+1=6$

04 $x^2-3x-28=x^2+(4-7)x+4\times(-7)$
$=(x+4)(x-7)$
$x^2+2x-8=x^2+(4-2)x+4\times(-2)$
$=(x+4)(x-2)$
이므로 두 다항식의 공통인수는 $x+4$ $\therefore A=x+4$
$\therefore Ax+2x^2=(x+4)x+2x^2=x^2+4x+2x^2$
$=3x^2+4x=x(3x+4)$

05 $(x-5y)(3x+y)+21y^2$
$=3x^2-14xy-5y^2+21y^2$
$=3x^2-14xy+16y^2=(x-2y)(3x-8y)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \searrow\nearrow & -2 & \rightarrow & -6 \\ 3 & \nearrow\searrow & -8 & \rightarrow & -8\ (+ \\ \hline & & & & -14 \end{array}$$

$x^2-xy-2y^2=x^2+(1-2)xy+y\times(-2y)$
$=(x+y)(x-2y)$
따라서 두 다항식의 공통인수는 $x-2y$이다.

06 $x-2=A$로 치환하면
$3(x-2)^2-2(x-2)-8=3A^2-2A-8$
$=(A-2)(3A+4)$
$=(x-2-2)\{3(x-2)+4\}$
$=(x-4)(3x-2)$
$=(x-4)(ax+b)$
이므로 $a=3$, $b=-2$
$\therefore a+b=3+(-2)=1$

07 $(a-b)(2a-3b)-2a+2b$
$=(a-b)(2a-3b)-2(a-b)$
$=(a-b)(2a-3b-2)$

08 $-2x^2-5x(y-2x)+3(2x-y)^2$
$=-2x^2+5x(2x-y)+3(2x-y)^2$
$2x-y=A$로 치환하면
(주어진 식)$=-2x^2+5Ax+3A^2$
$=-(2x^2-5Ax-3A^2)$
$=-(2x+A)(x-3A)$
$=-(2x+2x-y)\{x-3(2x-y)\}$
$=-(4x-y)(-5x+3y)$
$=(4x-y)(5x-3y)$
$=(ax-by)(cx-dy)$
이때, $a>c$이므로 $a=5$, $b=3$, $c=4$, $d=1$
$\therefore a+b+c+d=5+3+4+1=13$

09 $x(x+2)(x-3)(x-5)+24$
$=\{x(x-3)\}\{(x+2)(x-5)\}+24$
$=(x^2-3x)(x^2-3x-10)+24$
$x^2-3x=X$로 치환하면
(주어진 식)$=X(X-10)+24$
$=X^2-10X+24$
$=(X-4)(X-6)$
$=(x^2-3x-4)(x^2-3x-6)$
$=(x+1)(x-4)(x^2-3x-6)$
$=A(x-4)(B-6)$
이므로 $A=x+1$, $B=x^2-3x$
$\therefore A+B=(x+1)+(x^2-3x)$
$=x^2-2x+1$

10 $<3,\ 1>=(x-3)(x-1)=x^2-4x+3$
$<2,\ -3>=(x-2)(x+3)=x^2+x-6$
$\therefore <3,\ 1>-2<2,\ -3>+1$
$=x^2-4x+3-2(x^2+x-6)+1$
$=x^2-4x+3-2x^2-2x+12+1$
$=-x^2-6x+16$
$=-(x^2+6x-16)$
$=-\{x^2+(8-2)x+8\times(-2)\}$
$=-(x-2)(x+8)$

11 $2x^2+kx-3=(2x+a)(x+b)$에서
$2x^2+kx-3=2x^2+(a+2b)x+ab$이므로
$ab=-3$, $k=a+2b$
이때, a, b는 정수이므로
$a=1$, $b=-3$일 때, $k=1+2\times(-3)=-5$
$a=3$, $b=-1$일 때, $k=3+2\times(-1)=1$
$a=-1$, $b=3$일 때, $k=-1+2\times3=5$
$a=-3$, $b=1$일 때, $k=-3+2\times1=-1$
따라서 k의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

12 $ac-bc-bd+ad=c(a-b)+d(a-b)$
$=(a-b)(c+d)$
$=(a-b)\times(-3)=-12$
$\therefore a-b=4$

13 $6x^2-x-15$를 인수분해하면
$6x^2-x-15=(2x+3)(3x-5)$
이므로 직사각형의 가로와 세로의 길이는 $2x+3$, $3x-5$이다.
따라서 구하는 둘레의 길이는
$2(2x+3+3x-5)=2(5x-2)=10x-4$

14 처음 주어진 이차식을 x^2+ax+b라 하자.
민서는 상수항은 바르게 보았으므로
$(x-4)(x-12)=x^2-16x+48$
에서 $b=48$
민제는 x의 계수는 바르게 보았으므로
$(x-5)(x-9)=x^2-14x+45$
에서 $a=-14$
따라서 처음 주어진 이차식은 $x^2-14x+48$이므로
$x^2-14x+48=(x-6)(x-8)$

15 나연이가 잘못 본 이차식은
$x^2+bx-12=(x-2)(x+6)=x^2+4x-12$
이므로 $b=4$
희영이가 잘못 본 이차식은
$x^2+ax+c=(x+4)(x-5)=x^2-x-20$
이므로 $a=-1$, $c=-20$
$\therefore a+b+c=-1+4+(-20)$
$=-17$

16 $6x(ax-3)=5-2x^2$에서
$6ax^2-18x=5-2x^2$
$(6a+2)x^2-18x-5=0$
이것이 이차방정식이 되려면 $6a+2\neq0$이어야 하므로
$6a\neq-2$ $\quad\therefore a\neq-\frac{1}{3}$

17 $x^2-3x+m=0$에서
$x=\frac{3\pm\sqrt{9-4m}}{2}=\frac{n\pm\sqrt{21}}{2}$
따라서 $n=3$, $9-4m=21$에서 $m=-3$이므로
$mn=(-3)\times3=-9$

18 $\frac{x^2+1}{4}-\frac{x(x-3)}{5}+1=0$의 양변에 분모의 최소공배수 20을 곱하면

$5(x^2+1)-4x(x-3)+20=0$

$5x^2+5-4x^2+12x+20=0$

$x^2+12x+25=0$

따라서 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha\beta=25$

19 $(2x-1)^2-3(2x-1)=18$에서 $2x-1=t$로 치환하면

$t^2-3t=18$에서 $t^2-3t-18=0$

$(t+3)(t-6)=0$ $\quad\therefore t=-3$ 또는 $t=6$

즉, $2x-1=-3$ 또는 $2x-1=6$이므로

$x=-1$ 또는 $x=\frac{7}{2}$

이때, $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=\frac{7}{2}$, $\beta=-1$

$\therefore \alpha-\beta=\frac{7}{2}-(-1)=\frac{9}{2}$

20 주어진 정의에 의해

$$\left(\frac{1}{2}x-2\right)*(x+3)=2\left(\frac{1}{2}x-2\right)-\left(\frac{1}{2}x-2\right)(x+3)$$
$$=x-4-\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-6\right)$$
$$=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$$

따라서 $-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2=3$에서

$-x^2+3x+4=6$, $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=2$

21 $x^2-2x-1=0$에서

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\times(-1)}}{1}$$
$$=1\pm\sqrt{2}$$

주어진 두 이차방정식의 공통인 근이 양수이므로

$x=1+\sqrt{2}$가 공통인 근이다.

따라서 $x=1+\sqrt{2}$를 $x^2-x-k=0$에 대입하면

$(1+\sqrt{2})^2-(1+\sqrt{2})-k=0$

$1+2\sqrt{2}+2-1-\sqrt{2}-k=0$

$2+\sqrt{2}-k=0$

$\therefore k=2+\sqrt{2}$

22 $x^2-9=0$에서 $x^2=9$

$\therefore x=\pm3$

$2x^2-3x-27=0$에서 $(x+3)(2x-9)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{9}{2}$

주어진 세 이차방정식의 공통인 근은 $x=-3$이므로

$x^2-7x-k=0$에 대입하면

$(-3)^2-7\times(-3)-k=0$

$9+21-k=0$

$\therefore k=30$

23 b^2-4ac의 부호를 판별한다.

ㄱ. $b^2<4ac$이면 $b^2-4ac<0$이므로 근이 존재하지 않는다. (참)

ㄴ. $b^2\geq4ac$이면 $b^2-4ac\geq0$

이때 $b^2-4ac>0$이면 서로 다른 두 근,

$b^2-4ac=0$이면 중근을 가지므로

$b^2\geq4ac$이면 서로 다른 두 근 또는 중근을 갖는다. (거짓)

ㄷ. $ac<0$이면 $-4ac>0$이고, $b^2-4ac>0$이므로

$ac<0$이면 서로 다른 두 근을 갖는다. (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

24 $2x^2-8x+m=0$이 중근을 가지므로

$(-4)^2-2\times m=0$

$\therefore m=8$

따라서 $(m-5)x^2-4x-1=0$에 $m=8$을 대입하면

$3x^2-4x-1=0$이므로

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-3\times(-1)}}{3}$$
$$=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}$$

25 $4x^2-2mx+m=0$이 중근을 가지려면

$(-m)^2-4\times m=0$에서

$m^2-4m=0$, $m(m-4)=0$

$\therefore m=0$ 또는 $m=4$

26 $(x+2)^2=1-a$가 중근을 가지려면 $1-a=0$이어야 하므로 $a=1$

$(x-b)(x-4+b)=0$에서

$x=b$ 또는 $x=4-b$

이므로 중근을 가지려면 $b=4-b$

$\therefore b=2$

$\therefore ab=1\times2=2$

27 $5x^2-8x+2a-3=0$은 서로 다른 두 근을 가지므로

$(-4)^2-5\times(2a-3)>0$, $10a<31$

$\therefore a<\frac{31}{10}$

따라서 자연수 a의 값 중 가장 큰 수는 3이다.

28 $x^2-4x+2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$

따라서 두 근이 4, 2이고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(4+2)x+4\times2=0$

$\therefore x^2-6x+8=0$

29 계수와 상수항이 모두 유리수인 이차방정식의 한 근이 $5+2\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $5-2\sqrt{3}$이다.

$2x^2-(k+1)x+26=0$에서

(두 근의 합)$=\frac{k+1}{2}=(5+2\sqrt{3})+(5-2\sqrt{3})=10$

이므로 $k+1=20$

$\therefore k=19$

30 계수와 상수항이 모두 유리수인 이차방정식의 한 근이 $-2+\sqrt{6}$이면 다른 한 근은 $-2-\sqrt{6}$이므로

(두 근의 합)$=(-2+\sqrt{6})+(-2-\sqrt{6})=-4$

(두 근의 곱)$=(-2+\sqrt{6})(-2-\sqrt{6})$

$=4-6=-2$

따라서 구하는 이차방정식은 x^2의 계수가 2이므로

$2(x^2+4x-2)=0$

$\therefore 2x^2+8x-4=0$

31 두 근의 비가 4 : 3이므로 두 근을 4α, $3\alpha\,(\alpha\neq0)$로 놓으면 $2x^2-7x+m=0$에서 근과 계수의 관계에 의해

(두 근의 합)$=4\alpha+3\alpha=\frac{7}{2}$

$\therefore \alpha=\frac{1}{2}$

(두 근의 곱)$=4\alpha\times3\alpha=\frac{m}{2}$ …… ㉠

$\alpha=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$2\times\frac{3}{2}=\frac{m}{2}$

$\therefore m=6$

32 처음에 주어진 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$이라 하면 나연이는 상수항은 바르게 보고 풀었으므로

(두 근의 곱)$=b=-2\times3=-6$

현정이는 일차항의 계수는 바르게 보고 풀었으므로

(두 근의 합)$=-a=-2+(-3)=-5$

$\therefore a=5$

따라서 처음 이차방정식은

$x^2+5x-6=0$

33 두 근을 α, $\alpha+1$(α는 정수)라 하면

$x^2+7x+k^2-4k=0$에서 근과 계수의 관계에 의해

(두 근의 합)$=\alpha+(\alpha+1)=-7$

$\therefore \alpha=-4$

(두 근의 곱)$=\alpha(\alpha+1)=k^2-4k$ …… ㉠

$\alpha=-4$를 ㉠에 대입하면

$-4\times(-3)=k^2-4k$

$k^2-4k-12=0$

$(k+2)(k-6)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=6$

34 $h=240$인 경우이므로

$240=70t-5t^2$에서

$t^2-14t+48=0$

$(t-6)(t-8)=0$

$\therefore t=6$ 또는 $t=8$

따라서 지면으로부터 물체의 높이가 240 m가 되는 것은 물체를 쏘아 올린 지 6초 후 또는 8초 후이다.

35 $x^2-x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 $x=\alpha$, $x=\beta$를 각각 대입하면

$\alpha^2-\alpha-1=0$, $\beta^2-\beta-1=0$

$\therefore A_n+A_{n+1}-A_{n+2}$

$=(\alpha^n-\beta^n)+(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})-(\alpha^{n+2}-\beta^{n+2})$

$=(\alpha^n+\alpha^{n+1}-\alpha^{n+2})-(\beta^n+\beta^{n+1}-\beta^{n+2})$

$=-\alpha^n(\alpha^2-\alpha-1)+\beta^n(\beta^2-\beta-1)$

$=-\alpha^n\times0+\beta^n\times0$

$=0$

36 $x^2-8x+n=0$에서

$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-1\times n}}{1}$

$=4\pm\sqrt{16-n}$

그런데 해가 정수이므로 중근을 가지거나 근호 안의 수 $16-n$이 완전제곱수이어야 한다.

따라서 $16-n=0$ 또는 $16-n=1$ 또는 $16-n=4$ 또는 $16-n=9$이므로

$n=16$ 또는 $n=15$ 또는 $n=12$ 또는 $n=7$

Ⅲ 이차함수

01 이차함수의 그래프

Best 최상위 유형 본문 120~143쪽

1 ② **2** ③ **3** ㄴ, ㄹ **4** ③ **5** ④

6 ③ **7** ① **8** $\frac{3}{2}$ **9** ④ **10** 2

11 ②, ⑤ **12** ①, ③ **13** ④

14 (1) $\frac{1}{5}<a<2$ (2) $-\frac{8}{3}<a<0$

15 ㄴ, ㄷ, ㅁ, ㄱ, ㅂ, ㄹ **16** ㄱ, ㄷ **17** ② **18** $\frac{1}{2}$

19 ④ **20** ③ **21** 5 **22** ②, ⑤ **23** -11

24 -12 **25** ②, ⑤ **26** 5 **27** ③ **28** ④

29 ㄱ, ㄷ, ㄹ **30** ③, ④ **31** ⑤ **32** ④

33 ③ **34** $y=-\frac{1}{3}(x-5)^2-6$, 꼭짓점 $(5,\ -6)$, 축 $x=5$

35 제1, 2사분면 **36** -9 **37** ③ **38** ②

39 1 **40** -1 **41** ③ **42** ③ **43** ④

44 ㄷ, ㅁ **45** ② **46** ⑤ **47** ①

48 제1, 2사분면 **49** ①, ③ **50** ③ **51** 9

52 ③ **53** ④ **54** ① **55** ① **56** ④

57 ③ **58** $k=-3$, 꼭짓점 $\left(1,\ -\frac{5}{2}\right)$

59 $\mathrm{P}(2,\ 3)$, $\mathrm{Q}(2,\ -2)$ **60** ② **61** ⑤ **62** ⑤

63 ㄴ, ㄹ **64** ③ **65** 제1사분면

66 모든 사분면 **67** ② **68** 3 **69** 7

70 4 **71** 12

72 $y=\frac{3}{2}(x-3)^2-4$ $\left(\text{또는 } y=\frac{3}{2}x^2-9x+\frac{19}{2}\right)$ **73** ⑤

74 -4

75 $y=-\frac{7}{9}(x+3)^2+8$ $\left(\text{또는 } y=-\frac{7}{9}x^2-\frac{14}{3}x+1\right)$

76 $y=(x-3)^2-9$ (또는 $y=x^2-6x$) **77** ④ **78** -1

79 27 **80** -4 **81** ③ **82** ⑤ **83** ⑤

84 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{9}{4}\right)$ **85** $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-5$ **86** 8

87 ⑤ **88** ⑤ **89** ① **90** -3 **91** -15

92 ④ **93** -10 **94** -8 **95** ② **96** $\frac{5}{3}$

97 $\frac{5}{2}$ **98** ③ **99** -3 **100** ④

101 $y=-5(x+2)^2-7$, $(-2,\ -7)$

102 $y=-\frac{1}{2}x^2-4x+5$ **103** ④ **104** 8 **105** 60

106 ② **107** $y=-5x+10$ **108** 2 **109** 8

110 48

---

1 ① $y=-x^2-4+x^2=-4$이므로 상수함수이다.

② $y=\frac{x^2}{2}-(3-x^2)=\frac{3}{2}x^2-3$이므로 이차함수이다.

③ $y=\frac{2}{x}+3$은 분수함수이다.

④ $y=-x(x+1)+x^2=-x^2-x+x^2=-x$이므로 일차함수이다.

⑤ $2x^2+x=0$은 이차방정식이다.

따라서 이차함수인 것은 ②이다.

참고 ③ $y=\frac{2}{x}+3$과 같이 y가 변수 x에 대한 분수식으로 나타나는 함수를 분수함수라 한다.

2 ① $y=x^3$이므로 삼차함수이다.

② $y=nx$이므로 일차함수이다.

③ 가로의 길이가 x cm이고, 둘레의 길이가 a cm이면 세로의 길이는

$\frac{1}{2}(a-2x)=\frac{1}{2}a-x$ (cm)

따라서 직사각형의 넓이 y cm^2 는

$y=x\left(\frac{1}{2}a-x\right)=-x^2+\frac{1}{2}ax$

이므로 이차함수이다.

④ $y=\frac{1}{2}\times(x+2x)\times3=\frac{9}{2}x$이므로 일차함수이다.

⑤ $y=2\pi x$이므로 일차함수이다.

따라서 y가 x에 대한 이차함수인 것은 ③이다.

3 ㄱ. $y=4(x+3)=4x+12$ (일차함수)

ㄴ. 반지름의 길이가 $3x$ cm인 원이므로 넓이는

$y=\pi(3x)^2=9\pi x^2$ (이차함수)

ㄷ. (거리)=(속력)×(시간)이므로

$y=110x$ (일차함수)

ㄹ. $y=\frac{1}{2}\times4x\times(3x-2)=6x^2-4x$ (이차함수)

따라서 보기 중 이차함수인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

4 $y=x^2-5x+6$의 그래프가 점 $(1,\ a)$를 지나므로

이 식에 $x=1$, $y=a$를 대입하면

$a=1^2-5\times1+6=2$

또, 점 $(2a,\ b)$, 즉 $(4,\ b)$를 지나므로 $x=4$, $y=b$를 대입하면

$b=4^2-5\times4+6=2$

$\therefore ab=2\times2=4$

5 $y=-3x^2$의 그래프가 점 $(a,\ -6a)$를 지나므로 이 식에 $x=a$, $y=-6a$를 대입하면

$-6a=-3a^2$, $3a^2-6a=0$

$3a(a-2)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=2$

그런데 $a\neq0$이므로 $a=2$

6 $y=-x^2+3x$의 그래프가 점 $(-1,\ a)$를 지나므로 이 식에 $x=-1$, $y=a$를 대입하면
$a=-(-1)^2+3\times(-1)$
$\quad=-1-3=-4$
또, 점 $(b,\ -4)$를 지나므로 $x=b$, $y=-4$를 대입하면
$-4=-b^2+3b$, $b^2-3b-4=0$
$(b+1)(b-4)=0$
$\therefore b=-1$ 또는 $b=4$
그런데 $b<0$이므로 $b=-1$
$\therefore a+b=-4+(-1)=-5$

7 $f(-1)=5\times(-1)^2+k\times(-1)-1=6$에서
$5-k-1=6$
$\therefore k=-2$
따라서 $f(x)=5x^2-2x-1$이므로
$f(2)=5\times2^2-2\times2-1$
$\quad=20-4-1=15$

8 $f(a)=5a^2-\frac{3}{2}a+1=10$에서
$5a^2-\frac{3}{2}a-9=0$, $10a^2-3a-18=0$
$(5a+6)(2a-3)=0$
$\therefore a=-\frac{6}{5}$ 또는 $a=\frac{3}{2}$
그런데 a는 양수이므로 $a=\frac{3}{2}$

9 $f(-1)=2(-1-1)^2+k=5$에서
$8+k=5 \qquad \therefore k=-3$
따라서 $f(x)=2(x-1)^2-3$이므로
$f(-2)=2(-2-1)^2-3$
$\quad=18-3=15$
$\therefore a=15$
$\therefore a+k=15+(-3)=12$

10 $g(x)=f(x+1)=(x+1)^2-3(x+1)+5$
$\quad=x^2+2x+1-3x-3+5$
$\quad=x^2-x+3$
따라서 $g(k)=5$에서
$k^2-k+3=5$, $k^2-k-2=0$
$(k+1)(k-2)=0 \qquad \therefore k=-1$ 또는 $k=2$
그런데 $k>0$이므로 $k=2$

11 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는
① $a<0$이면 위로 볼록한 포물선이다.
② $a>0$이면 아래로 볼록한 포물선이고, 꼭짓점이 $(0,\ 0)$이므로 y의 값의 범위는 $y\geq0$이다.
③ $a<0$이면 $x<0$에서 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가한다.
④ a의 절댓값이 작을수록 그래프의 폭이 넓어진다.
⑤ $a=-\frac{1}{4}$이면 $y=-\frac{1}{4}x^2$이고 $x=4$일 때,
$y=-\frac{1}{4}\times4^2=-4$이므로 그래프는 점 $(4,\ -4)$를 지난다.
따라서 옳은 것은 ②, ⑤이다.

12 ① 그래프가 아래로 볼록한 이차함수는 x^2의 계수가 양수인 ㄴ, ㅁ, ㅂ이다.
② 주어진 모든 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(0,\ 0)$이므로 대칭축이 y축이다. 따라서 각 그래프는 모두 y축에 대하여 대칭이다.
③ x^2의 계수의 절댓값이 다르므로 ㄱ과 ㄴ의 그래프의 폭은 다르다.
④ x축에 대하여 서로 대칭인 이차함수는 ㄷ과 ㅂ, ㄹ과 ㅁ의 2쌍이다.
⑤ x^2의 계수의 절댓값이 작을수록 폭이 넓으므로 ㄴ의 폭이 가장 넓다.
따라서 옳지 않은 것은 ①, ③이다.

13 주어진 그래프에서 a, b, c는 아래로 볼록하므로 이차항의 계수가 양수이다. 따라서 주어진 이차함수의 식에서 a, b, c에 해당하는 것은 ㄴ, ㄷ, ㅁ이고, 이차항의 계수의 절댓값이 작을수록 그래프의 폭이 넓어지므로 a－ㅁ, b－ㄴ, c－ㄷ이다.
또, d, e, f는 위로 볼록하므로 이차항의 계수가 음수이다. 따라서 주어진 이차함수의 식에서 d, e, f에 해당하는 것은 ㄱ, ㄹ, ㅂ이고, 이차항의 계수의 절댓값이 작을수록 폭이 넓어지므로 d－ㄹ, e－ㅂ, f－ㄱ이다.
그러므로 그래프와 그 식이 바르게 짝지어진 것은 ④이다.

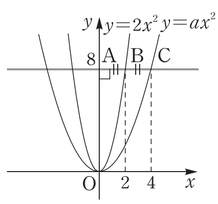
14 (1) $y=ax^2$의 그래프가 아래로 볼록하므로
$a>0$
$y=ax^2$의 그래프는 $y=\frac{1}{5}x^2$의 그래프보다 폭이 좁고, $y=2x^2$의 그래프보다 폭이 넓으므로
$\frac{1}{5}<a<2$
(2) $y=ax^2$의 그래프가 위로 볼록하므로
$a<0$
$y=ax^2$의 그래프는 $y=-\frac{8}{3}x^2$의 그래프보다 폭이 넓으므로 a의 절댓값은 $-\frac{8}{3}$의 절댓값보다 작다.
$\therefore -\frac{8}{3}<a<0$

15 $y=ax^2$의 그래프에서 a의 절댓값이 클수록 폭이 좁아진다. 따라서 절댓값이 큰 것부터 순서대로 나열하면 ㄴ, ㄷ, ㅁ, ㄱ, ㅂ, ㄹ이다.

16 $y=ax^2$의 그래프와 $y=dx^2$의 그래프가 x축에 대하여 서로 대칭이므로 $a=-d$이다.
또, $y=bx^2$의 그래프와 $y=cx^2$의 그래프도 x축에 대하여 서로 대칭이므로 $b=-c$이다.
ㄱ. $a+b+c+d=(-d)+(-c)+c+d=0$
ㄴ. $y=bx^2$의 그래프와 $y=cx^2$의 그래프는 폭이 같으므로 $|b|=|c|$이고, $y=cx^2$의 그래프는 $y=dx^2$의 그래프보다 폭이 넓으므로 $|c|<|d|$이다.
$\therefore |b|<|d|$
ㄷ. $y=ax^2$과 $y=bx^2$의 그래프는 아래로 볼록하므로
$a>0$, $b>0$
또, $y=cx^2$과 $y=dx^2$의 그래프는 위로 볼록하므로
$c<0$, $d<0$
$\therefore abcd>0$
ㄹ. 그래프가 아래로 볼록하면서 폭이 가장 좁은 이차함수의 식은 $y=ax^2$이므로 a, b, c, d 중 가장 큰 값은 a이다.
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

17 꼭짓점의 좌표가 $(0,\ 0)$이므로 이차함수의 식을 $y=ax^2\ (a\neq0)$으로 놓을 수 있다.
이 그래프가 점 $(1,\ -3)$을 지나므로 이 식에 $x=1$, $y=-3$을 대입하면
$-3=a\times1^2$
$\therefore a=-3$
따라서 이차함수의 식은 $y=-3x^2$이다.
이 그래프가 점 $(-5,\ k)$를 지나므로 이 식에 $x=-5$, $y=k$를 대입하면
$k=-3\times(-5)^2=-75$

18 점 $\mathrm{A}(0,\ 8)$을 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은 $y=8$이므로 $y=2x^2$에 $y=8$을 대입하면
$8=2x^2$, $x^2=4$ $\quad\therefore x=\pm2$
따라서 $\mathrm{B}(2,\ 8)$이고
$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로 $\mathrm{C}(4,\ 8)$이다. 이때 점 C는 $y=ax^2$의 그래프 위의 점이므로 $y=ax^2$에 $x=4$, $y=8$을 대입하면



$8=a\times4^2$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

19 ① $y=2x^2-5$의 그래프는 $y=2x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.
② 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ -5)$이다.
③ 아래로 볼록한 포물선이고, 꼭짓점의 좌표가 $(0,\ -5)$이므로 y의 값의 범위는 $y\geq-5$이다.
④ 2의 절댓값이 -3의 절댓값보다 작으므로 $y=2x^2-5$의 그래프는 $y=-3x^2$의 그래프보다 폭이 넓다.
⑤ $x>0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

20 $y=5x^2+2$의 그래프를 y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=5x^2+2+m$
이 그래프가 $y=nx^2-1$의 그래프와 일치하므로
$5=n$, $2+m=-1$
따라서 $m=-3$, $n=5$이므로
$m+n=-3+5=2$

21 $y=-3x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-3x^2+q$
이 그래프가 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로 이 식에 $x=-1$, $y=2$를 대입하면
$2=-3\times(-1)^2+q$, $2=-3+q$
$\therefore q=5$

22 이차함수 $y=\frac{1}{3}(x+10)^2$의 그래프에서
① 꼭짓점의 좌표는 $(-10,\ 0)$이다.
③ 이차항의 계수가 양수이므로 아래로 볼록한 포물선이다.
④ x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가하는 x의 값의 범위는 $x>-10$이다.
따라서 옳은 것은 ②, ⑤이다.

23 평행이동에 의해 그래프의 폭은 변하지 않으므로
$a=-6$
평행이동한 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-5,\ 0)$이므로
$p=-5$
$\therefore a+p=-6+(-5)=-11$

24 $y=-\frac{3}{4}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-\frac{3}{4}(x-5)^2$
이 그래프가 점 $(1,\ k)$를 지나므로 이 식에 $x=1$, $y=k$를 대입하면
$k=-\frac{3}{4}(1-5)^2=-12$

25 경계선을 포함한 어두운 부분에만 그래프가 그려지려면 이차함수의 식이 $y=a(x+1)^2$의 꼴이고, 다음 조건을 만족해야 한다.

(i) $a>0$일 때,

$y=(x+1)^2$의 그래프보다 폭이 넓거나 같아야 하므로

$a\le1$ $\quad\therefore 0<a\le1$

(ii) $a<0$일 때,

$y=-\frac{1}{3}(x+1)^2$의 그래프보다 폭이 넓거나 같아야 하므로

$a\ge-\frac{1}{3}$ $\quad\therefore -\frac{1}{3}\le a<0$

① x^2의 계수가 1보다 크므로 조건을 만족하지 않는다.

② $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$에서 $0<\frac{1}{2}\le1$이고, 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 0)$이므로 어두운 부분에만 그래프가 그려진다.

③ x^2의 계수 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}\le1$이므로 조건을 만족하지만 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 0)$이므로 어둡지 않은 부분에도 그래프가 그려진다.

④ x^2의 계수가 $-\frac{1}{3}$보다 작으므로 조건을 만족하지 않는다.

⑤ $y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}(x^2+2x+1)$

$=-\frac{1}{4}(x+1)^2$

에서 $-\frac{1}{3}\le-\frac{1}{4}<0$이고, 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 0)$이므로 어두운 부분에만 그래프가 그려진다.

따라서 어두운 부분에만 그래프가 그려지는 이차함수의 식은 ②, ⑤이다.

26 $y=2(x-4)^2=2(x+1-5)^2$이므로 $y=2(x-4)^2$의 그래프는 $y=2(x+1)^2$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

즉, $y=2(x+1)^2$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼 평행이동하면 점 A는 점 B로 이동하므로 $\overline{AB}$의 길이는 5이다.

27 $y=-3x^2$의 그래프를 평행이동하여 완전히 포개어지려면 x^2의 계수가 같아야 하므로 x^2의 계수가 -3이 아닌 것을 찾는다.

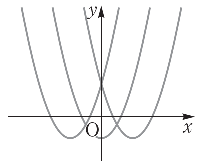
③ $y=3(2-x)^2+5=3(x-2)^2+5$는 x^2의 계수가 3이므로 $y=-3x^2$의 그래프를 평행이동하여 완전히 포개어지지 않는다.

28 ④ $p=q=0$인 경우에만 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프와 $y=-ax^2$의 그래프가 x축에 대하여 대칭이다.

29 ㄱ. x^2의 계수의 절댓값이 같으면 그래프의 폭이 같으므로 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프와 이차함수 $y=-ax^2$의 그래프는 폭이 같다.

ㄴ. $a>0$이면 y의 값의 범위는 $y\ge q$이고, $a<0$이면 y의 값의 범위는 $y\le q$이다.

ㄷ. $a>0$, $q<0$이면 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 x축과 항상 두 점에서 만난다.

ㄹ. $q=0$이면 꼭짓점이 $(p,\ 0)$으로 x축 위에 있으므로 x축과 오직 한 점에서 만난다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

30 ① 축의 방정식은 $x=-2$이다.

② y의 값의 범위는 $y\le8$이다.

③ 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ 8)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x+2)^2+8$로 놓을 수 있다. 이때 점 $(0,\ 4)$를 지나므로 이 식에 $x=0$, $y=4$를 대입하면

$4=4a+8$ $\quad\therefore a=-1$

따라서 그래프의 식은 $y=-(x+2)^2+8$이다.

④ 주어진 그래프의 식은 $y=-(x+2)^2+8$이고, $y=x^2$과 이차항의 계수의 절댓값이 같으므로 $y=x^2$의 그래프와 폭이 같다.

⑤ $y=-x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 8만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳은 것은 ③, ④이다.

31 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$에서 축의 방정식은 $x=p$이므로 주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식을 각각 구하면

① $y=-(x+1)^2$에서 $x=-1$

② $y=(2x+2)^2=4(x+1)^2$에서 $x=-1$

③ $y=3(x+1)^2-1$에서 $x=-1$

④ $y=\frac{1}{5}(-x-1)^2+6=\frac{1}{5}(x+1)^2+6$에서 $x=-1$

⑤ $y=-2(x-1)^2-4$에서 $x=1$

따라서 축의 방정식이 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

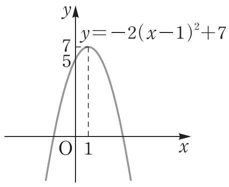
32 이차함수 $y=3(x+2)^2-5$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-2$이고, 아래로 볼록한 포물선이므로 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가하는 x의 값의 범위는 $x>-2$이다.

33 $y=-2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 7만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-2(x-1)^2+7$

따라서 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 7)$이고, 위로 볼록한 포물

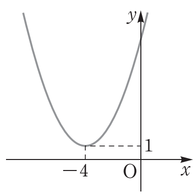
선이다.
또, $x=0$일 때
$y=-2\times1+7=5$, 즉 점
$(0,\ 5)$를 지나므로 그래프는
오른쪽 그림과 같다.



따라서 그래프는 모든 사분면을 지난다.

34 $y=-\frac{1}{3}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-\frac{1}{3}(x-5)^2-6$이다. 따라서 꼭짓점의 좌표는 $(5,\ -6)$, 축의 방정식은 $x=5$이다.

35 $y=\frac{2}{3}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\frac{2}{3}(x+4)^2+1$
따라서 평행이동한 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(-4,\ 1)$이고, 아래로 볼록한 포물선이므로 오른쪽 그림과 같다. 그러므로 그래프가 지나는 사분면은 제 1, 2 사분면이다.



36 $y=-4x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-4(x-3)^2-5$
이 그래프가 점 $(2,\ k)$를 지나므로 이 식에 $x=2$, $y=k$를 대입하면 $k=-4(2-3)^2-5=-9$

37 $y=a(x-4)^2+3$의 그래프가 점 $(2,\ -1)$을 지나므로 이 식에 $x=2$, $y=-1$을 대입하면
$-1=a(2-4)^2+3$, $4a+3=-1$
$\therefore a=-1$
따라서 주어진 이차함수의 식은 $y=-(x-4)^2+3$이고 이 그래프가 점 $(0,\ b)$를 지나므로 이 식에 $x=0$, $y=b$를 대입하면
$b=-(0-4)^2+3=-16+3=-13$
$\therefore a-b=-1-(-13)=12$

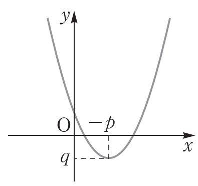
38 $y=a(x+1)^2-q$의 그래프가 점 $(1,\ -2)$를 지나므로 이 식에 $x=1$, $y=-2$를 대입하면
$-2=a(1+1)^2-q$
$\therefore 4a-q=-2$ ……㉠
또, 점 $(0,\ 4)$를 지나므로 $x=0$, $y=4$를 대입하면
$4=a(0+1)^2-q$
$\therefore a-q=4$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-2$, $q=-6$
따라서 주어진 이차함수는 $y=-2(x+1)^2+6$이므로 이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 6)$이다.

39 $y=a(x+p)^2+3$의 그래프에서 축의 방정식은 $x=-p$이므로
$-p=-2$ $\therefore p=2$
따라서 주어진 이차함수의 식은 $y=a(x+2)^2+3$이고, 이 그래프가 점 $(-1,\ 5)$를 지나므로 이 식에 $x=-1$, $y=5$를 대입하면
$5=a(-1+2)^2+3$, $a+3=5$
$\therefore a=2$
$\therefore \frac{a}{p}=\frac{2}{2}=1$

40 $y=-\frac{1}{2}(x-p)^2+5$의 그래프가 점 $(0,\ -3)$을 지나므로 이 식에 $x=0$, $y=-3$을 대입하면
$-3=-\frac{1}{2}(0-p)^2+5$
$-\frac{1}{2}p^2=-8$
$p^2=16$ $\therefore p=-4$ $(\because p<0)$
따라서 이차함수의 식은 $y=-\frac{1}{2}(x+4)^2+5$이고 이 그래프가 점 $(-2,\ k)$를 지나므로 이 식에 $x=-2$, $y=k$를 대입하면
$k=-\frac{1}{2}(-2+4)^2+5=-2+5=3$
$\therefore p+k=-4+3=-1$

41 그래프의 모양이 아래로 볼록하므로 $a>0$이고, 꼭짓점이 제 3 사분면에 있으므로 $p<0$, $q<0$이다.

42 제 1, 2, 4 사분면은 지나고 제 3 사분면은 지나지 않으므로 이차함수 $y=a(x+p)^2+q$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

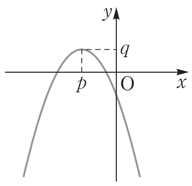


따라서 그래프는 아래로 볼록하므로 $a>0$
또, 꼭짓점은 $(-p,\ q)$이고, 이것이 제 4 사분면에 있으므로 $-p>0$, $q<0$
$\therefore a>0$, $p<0$, $q<0$

43 주어진 그래프는 위로 볼록하므로 $a<0$
꼭짓점이 제 4 사분면에 있으므로 $p>0$, $q<0$
② $a<0$, $p>0$이므로 $a+p$는 양수일 수도 있고 음수일 수도 있다.
③ $p>0$, $q<0$이므로 $pq<0$

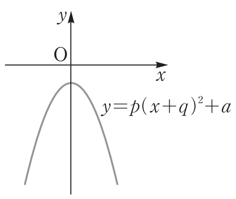
④ $p>0$, $q<0$이므로 $p-q>0$
⑤ $a<0$, $p>0$, $q<0$이므로 $apq>0$
따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

44 제 2, 3, 4 사분면은 지나고 제 1 사분면은 지나지 않으므로 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

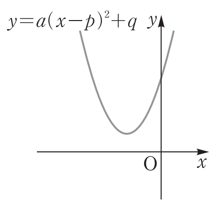


ㄱ. 그래프는 위로 볼록하므로 $a<0$
ㄴ, ㄷ. 꼭짓점이 제 2 사분면에 있으므로 $p<0$, $q>0$
ㄹ. $a<0$, $q>0$이므로 $a-q<0$
ㅁ. $a<0$, $p<0$이므로 $ap>0$
또, $q>0$이므로 $ap+q>0$
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄷ, ㅁ이다.

45 주어진 그래프는 위로 볼록하므로 $a<0$
꼭짓점의 x좌표가 음수이고 꼭짓점이 x축 위에 있으므로 $p<0$, $q=0$
따라서 $y=p(x+q)^2+a$의 그래프는 $p<0$이므로 위로 볼록한 포물선이다.
또, 꼭짓점은 $(-q,\ a)$이고 $-q=0$, $a<0$이므로 y축 위에 있고 이때의 y좌표는 음수이다. 따라서 그 그래프는 위의 그림과 같으므로 제 3, 4 사분면을 지난다.

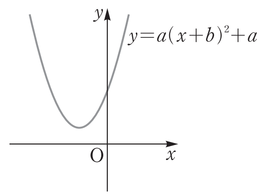


46 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$에서 $a>0$이므로 그래프는 아래로 볼록하고, $p<0$, $q>0$이므로 꼭짓점은 제 2 사분면에 있다.
따라서 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는 위의 그림과 같으므로 그래프가 지나지 않는 사분면은 제 3, 4 사분면이다.



47 $a<0$이므로 이차함수의 그래프는 위로 볼록하고 $p<0$, $q>0$이므로 꼭짓점 $(p,\ q)$는 제2사분면에 있다.
따라서 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프로 알맞은 것은 ①이다.

48 주어진 일차함수 $y=ax+b$의 그래프의 기울기가 양수이므로 $a>0$
또, y절편이 양수이므로 $b>0$
따라서 이차함수 $y=a(x+b)^2+a$의 그래프는 $a>0$이므로 아래로 볼록하고, $-b<0$, $a>0$이므로 꼭짓점 $(-b,\ a)$는 제 2 사분면에 있다.
따라서 $y=a(x+b)^2+a$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 제 1, 2 사분면을 지난다.



49 $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

① 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$이므로 a의 값이 변하면 꼭짓점의 좌표도 변한다.
② 이차함수 $y=-ax^2-bx-c$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.
③ $y=ax^2+bx+c$에 $x=0$을 대입하면 $y=c$ $\quad\therefore (0,\ c)$
④ 축의 방정식은 $x=-\dfrac{b}{2a}$이다.
⑤ $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{b}{2a}$만큼, y축의 방향으로 $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$만큼 평행이동한 것이다.

50 $y=2x^2+12x+11$
$=2(x^2+\boxed{6x})+11$
$=2(x^2+\boxed{6x}+9-\boxed{9})+11$
$=2(x+3)^2+11+(\boxed{-18})$
$=2(x+3)^2+(\boxed{-7})$
따라서 꼭짓점의 좌표는 $\boxed{(-3,\ -7)}$이다.

51 $y=ax^2+6x+8$을 표준형으로 바꾸어도 a의 값은 변하지 않으므로 $a=-3$
$\therefore y=-3x^2+6x+8$
$=-3(x^2-2x+1-1)+8$
$=-3(x-1)^2+8+3$
$=-3(x-1)^2+11$
따라서 $p=1$, $q=11$이므로
$a+p+q=-3+1+11=9$

52 $y=\dfrac{1}{4}x^2+x+2$
$=\dfrac{1}{4}(x^2+4x+4-4)+2$
$=\dfrac{1}{4}(x+2)^2+2-1$
$=\dfrac{1}{4}(x+2)^2+1$
따라서 $a=\dfrac{1}{4}$, $p=-2$, $q=1$이므로
$4a+p+q=4\times\dfrac{1}{4}+(-2)+1=0$

53 $y=2x^2+ax+5=2\left(x+\frac{a}{4}\right)^2+5-\frac{a^2}{8}$이므로

$-\frac{a}{4}=-1,\ 5-\frac{a^2}{8}=b \quad \therefore a=4,\ b=3$

$\therefore a-b=4-3=1$

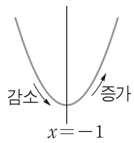
54 $y=5x^2+10x-3$

$=5(x^2+2x+1-1)-3$

$=5(x+1)^2-3-5$

$=5(x+1)^2-8$

에서 축의 방정식은 $x=-1$이고 이차항의 계수가 양수이므로 그래프는 아래로 볼록한 포물선이다.



따라서 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소하는 x의 값의 범위는 $x<-1$이다.

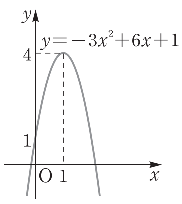
55 $y=-3x^2+6x+1$

$=-3(x^2-2x+1-1)+1$

$=-3(x-1)^2+1+3$

$=-3(x-1)^2+4$

따라서 $y=-3x^2+6x+1$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 4)$이고, x^2의 계수가 음수이므로 위로 볼록한 포물선이다. 또, y절편은 1이므로 이 이차함수의 그래프를 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



56 이차함수의 그래프가 x축과 한 점에서 만나려면 표준형으로 나타내었을 때, $y=a(x-p)^2\ (a\neq 0)$의 꼴이어야 한다.

① $y=-x^2+2x$

$=-(x^2-2x+1-1)$

$=-(x-1)^2+1$

② $y=4x^2-4x-1$

$=4\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)-1$

$=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-1-1$

$=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-2$

③ $y=-2x^2-4x-1$

$=-2(x^2+2x+1-1)-1$

$=-2(x+1)^2-1+2$

$=-2(x+1)^2+1$

④ $y=2x^2-4x+2$

$=2(x^2-2x+1)$

$=2(x-1)^2$

⑤ $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}(x^2-2x+1-1)-\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}(x-1)^2-1$

따라서 x축과 한 점에서 만나는 이차함수는 ④이다.

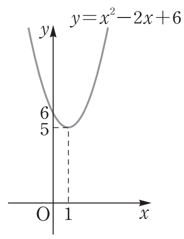
57 각 이차함수의 그래프를 그리면 다음과 같다.

① $y=x^2-2x+6$

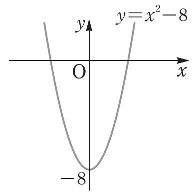
$=(x^2-2x+1-1)+6$

$=(x-1)^2+5$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 5)$이고 아래로 볼록하며 y절편은 6이다. 따라서 그 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제1, 2 사분면을 지난다.



② $y=x^2-8$에서 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ -8)$이고 아래로 볼록하며 y절편은 -8이다. 따라서 그 그래프는 오른쪽 그림과 같이 모든 사분면을 지난다.

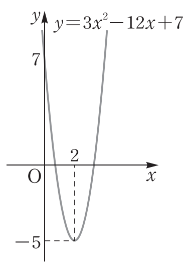


③ $y=3x^2-12x+7$

$=3(x^2-4x+4-4)+7$

$=3(x-2)^2-5$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ -5)$이고 아래로 볼록하며 y절편은 7이다. 따라서 그 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제1, 2, 4 사분면을 지난다.

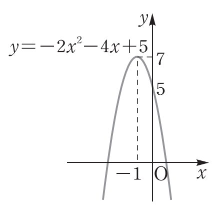


④ $y=-2x^2-4x+5$

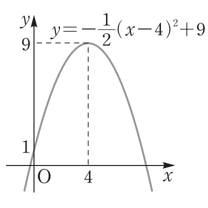
$=-2(x^2+2x+1-1)+5$

$=-2(x+1)^2+7$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 7)$이고 위로 볼록하며 y절편은 5이다. 따라서 그 그래프는 오른쪽 그림과 같이 모든 사분면을 지난다.



⑤ $y=-\frac{1}{2}(x-4)^2+9$에서 꼭짓점의 좌표는 $(4,\ 9)$이고 위로 볼록하며 y절편은 1이다. 따라서 그 그래프는 오른쪽 그림과 같이 모든 사분면을 지난다.



그러므로 그래프가 제3 사분면을 제외한 모든 사분면을 지나는 이차함수는 ③이다.

58 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+k$의 그래프가 점 $(-2,\ -7)$을 지나므로 이 식에 $x=-2,\ y=-7$을 대입하면

$-7=-\frac{1}{2}\times(-2)^2+(-2)+k$

$-7=-2-2+k$

$\therefore k=-3$

따라서 주어진 이차함수의 식은

$y=-\frac{1}{2}x^2+x-3$

$\ =-\frac{1}{2}(x^2-2x+1-1)-3$

$\ =-\frac{1}{2}(x-1)^2-3+\frac{1}{2}$

$\ =-\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{5}{2}$

그러므로 꼭짓점의 좌표는 $\left(1,\ -\frac{5}{2}\right)$이다.

59 두 점 P, Q의 x좌표를 k라 하면

$\mathrm{P}(k,\ k^2-6k+11),\ \mathrm{Q}(k,\ -k^2+2k-2)$

주어진 조건에서 $\overline{\mathrm{PQ}}=5$이므로

$k^2-6k+11-(-k^2+2k-2)=5$

$2k^2-8k+8=0,\ k^2-4k+4=0$

$(k-2)^2=0 \qquad \therefore k=2$

따라서 점 P의 y좌표는

$k^2-6k+11=2^2-6\times2+11=3$

$\therefore \mathrm{P}(2,\ 3)$

또, 점 Q의 y좌표는

$-k^2+2k-2=-2^2+2\times2-2=-2$

$\therefore \mathrm{Q}(2,\ -2)$

60 주어진 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $a,\ b$의 부호는 같다.

$\therefore b>0$

y축과의 교점이 x축의 아래쪽에 있으므로 $c<0$

$\therefore a>0,\ b>0,\ c<0$

참고 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서 축의 방정식은 $x=-\frac{b}{2a}$이므로 축이 y축의 왼쪽에 있으면 $-\frac{b}{2a}<0$, 즉 $\frac{b}{2a}>0$이므로 $a,\ b$의 부호는 같고, 축이 y축의 오른쪽에 있으면 $-\frac{b}{2a}>0$, 즉 $\frac{b}{2a}<0$이므로 $a,\ b$의 부호는 다르다.

61 주어진 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서

① 위로 볼록하므로 $a<0$

② 축이 y축의 오른쪽에 위치하므로 $a,\ b$의 부호는 다르다.

$\therefore b>0$

③ y축과의 교점이 x축의 위쪽에 위치하므로 $c>0$

④ $x=1$일 때, $y>0$이므로 $y=ax^2+bx+c$에 $x=1$을 대입하면 $y=a+b+c>0$

⑤ $x=-1$일 때, $y=0$이므로 $y=ax^2+bx+c$에 $x=-1$을 대입하면 $y=a-b+c=0$

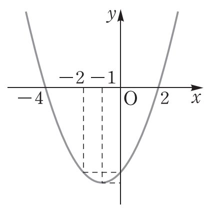
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

62 ① 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$이다.

② 대칭축이 y축의 왼쪽에 위치하므로 $a,\ b$의 부호는 같다.

$\therefore b>0$

③ y축과의 교점이 x축의 아래쪽에 위치하므로 $c<0$이다.



④ $x=-1$일 때, $y<0$이므로 $y=ax^2+bx+c$에 $x=-1$을 대입하면 $y=a-b+c<0$

⑤ $x=-2$일 때, $y<0$이므로 $y=ax^2+bx+c$에 $x=-2$를 대입하면 $y=4a-2b+c<0$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

63 ㄱ. 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$이고, 축이 y축의 왼쪽에 위치하므로 $a,\ b$의 부호는 같다.

$\therefore b>0$

또, 그래프와 y축과의 교점이 x축의 아래쪽에 위치하므로

$c<0$

ㄴ. $x=1$일 때, $y>0$이므로 $y=ax^2+bx+c$에 $x=1$을 대입하면

$y=a+b+c>0$

ㄷ. $x=-1$일 때, $y<0$이므로 $y=ax^2+bx+c$에 $x=-1$을 대입하면

$y=a-b+c<0$

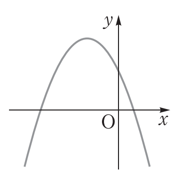
ㄹ. $x=-2$일 때, $y<0$이므로 $y=ax^2+bx+c$에 $x=-2$를 대입하면

$y=4a-2b+c<0$

따라서 옳지 않은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

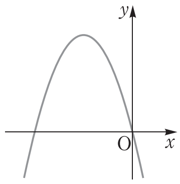
64 $y=ax^2+bx+c$에서 $a<0$이므로 그래프는 위로 볼록한 포물선이고, $b<0$에서 $a,\ b$의 부호가 같으므로 축이 y축의 왼쪽에 위치한다.

또, $c>0$이므로 y축과의 교점이 x축의 위쪽에 위치한다.

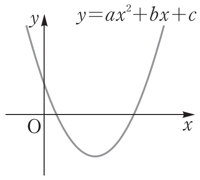


따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 위의 그림과 같다.

65 $y=ax^2+bx+c$에서 $a<0$이므로 그래프는 위로 볼록한 포물선이고, $c=0$이므로 y축과 원점에서 만난다. 또, 꼭짓점이 제 2 사분면에 있으므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 이 그래프가 지나지 않는 사분면은 제 1 사분면이다.



66 $c\neq0$일 때, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 제 1, 2, 4 사분면은 지나고 제 3 사분면은 지나지 않는 경우는 오른쪽 그림과 같다. 이때 그래프는 아래로 볼록하므로 $a>0$

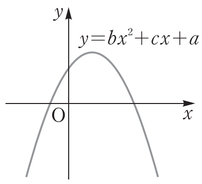


축이 y축의 오른쪽에 위치하므로 a, b의 부호는 다르다.

$\therefore b<0$

또, y축과의 교점이 x축의 위쪽에 위치하므로 $c>0$

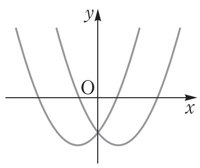
따라서 이차함수 $y=bx^2+cx+a$의 그래프는 $b<0$이므로 위로 볼록한 포물선이고, b, c의 부호가 다르므로 축은 y축의 오른쪽에 위치, $a>0$이므로 y축과의 교점은 x축의 위쪽에 위치한다. 그러므로 $y=bx^2+cx+a$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 모든 사분면을 지난다.



67 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 모든 사분면을 지나므로

(ⅰ) $a>0$일 때,

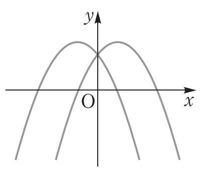
오른쪽 그림과 같이 그래프와 y축과의 교점이 x축의 아래쪽에 위치해야 한다.



$\therefore c<0$

(ⅱ) $a<0$일 때,

오른쪽 그림과 같이 그래프와 y축과의 교점이 x축의 위쪽에 위치해야 한다.



$\therefore c>0$

(ⅰ), (ⅱ)로부터 항상 옳은 것은 ② $ac<0$이다.

68 꼭짓점의 좌표가 $(3,\ -1)$이므로

$p=3$, $q=-1$

따라서 주어진 이차함수는

$y=a(x-3)^2-1$

이 이차함수의 그래프가 점 $(0,\ 8)$을 지나므로 이 식에 $x=0$, $y=8$을 대입하면

$8=9a-1 \quad \therefore a=1$

$\therefore a+p+q=1+3+(-1)=3$

69 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 7)$이므로 $p=-2$, $q=7$

따라서 주어진 이차함수는

$y=a(x-2)^2+7$

이 이차함수의 그래프가 점 $(0,\ 5)$를 지나므로 이 식에 $x=0$, $y=5$를 대입하면

$5=4a+7$, $4a=-2$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$

$\therefore apq=-\frac{1}{2}\times(-2)\times7=7$

70 평행이동에 의해 그래프의 폭은 변하지 않으므로

$a=2$

평행이동한 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 1)$이므로

$p=1$, $q=1$

$\therefore a+p+q=2+1+1=4$

71 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ -1)$이므로 구하는 이차함수의 식을 $y=a(x+2)^2-1$로 놓을 수 있다.

이 이차함수의 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로 이 식에 $x=0$, $y=3$을 대입하면

$3=a(0+2)^2-1$, $4a-1=3$

$\therefore a=1$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=(x+2)^2-1$, 즉 $y=x^2+4x+3$이므로

$a=1$, $b=4$, $c=3$

$\therefore abc=1\times4\times3=12$

72
$$\begin{aligned}y&=\frac{1}{3}x^2-2x-1\\&=\frac{1}{3}(x^2-6x+9-9)-1\\&=\frac{1}{3}(x-3)^2-1-3\\&=\frac{1}{3}(x-3)^2-4\end{aligned}$$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ -4)$이다. 따라서 구하는 이차함수의 식을 $y=a(x-3)^2-4$로 놓을 수 있다.

이 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로 이 식에 $x=1$, $y=2$를 대입하면

$2=a(1-3)^2-4$, $4a-4=2$

$\therefore a=\frac{3}{2}$

따라서 구하는 이차함수의 식은

$y=\frac{3}{2}(x-3)^2-4 \left(\text{또는 } y=\frac{3}{2}x^2-9x+\frac{19}{2}\right)$

73 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 5)$이므로 구하는 이차함수의 식을 $y=a(x-2)^2+5$로 놓는다.
이 이차함수의 그래프가 점 $(-1,\ -4)$를 지나므로 이 식에 $x=-1$, $y=-4$를 대입하면
$-4=a(-1-2)^2+5$, $9a+5=-4$ $\quad\therefore a=-1$
따라서 이차함수의 식은 $y=-(x-2)^2+5$이고 이 그래프가 점 $(4,\ k)$를 지나므로 이 식에 $x=4$, $y=k$를 대입하면
$k=-(4-2)^2+5=-4+5=1$

74 꼭짓점의 x좌표가 2이고 x축에 접하므로 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 0)$이다. 따라서 주어진 이차함수의 식을 $y=a(x-2)^2$으로 놓을 수 있다. 이 그래프가 점 $(1,\ -4)$를 지나므로 이 식에 $x=1$, $y=-4$를 대입하면
$-4=a(1-2)^2$ $\quad\therefore a=-4$
따라서 주어진 이차함수의 식은
$y=-4(x-2)^2$, 즉 $y=-4x^2+16x-16$
이므로 $a=-4$, $b=16$, $c=-16$
$\therefore a+b+c=-4+16+(-16)=-4$

75 주어진 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(0,\ 8)$이므로 이차함수의 식을 $y=ax^2+8$로 놓을 수 있다. 이 그래프가 점 $(3,\ 1)$을 지나므로 이 식에 $x=3$, $y=1$을 대입하면
$1=9a+8$ $\quad\therefore a=-\frac{7}{9}$
따라서 주어진 그래프를 나타내는 이차함수의 식은
$y=-\frac{7}{9}x^2+8$이고, 이 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-\frac{7}{9}(x+3)^2+8$ $\left(\text{또는 } y=-\frac{7}{9}x^2-\frac{14}{3}x+1\right)$

76 축의 방정식이 $x=3$이므로 구하는 이차함수의 식을 $y=a(x-3)^2+q$로 놓을 수 있다. 이 그래프가 두 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ -5)$를 지나므로 각 점의 좌표를 대입하면
$0=a(0-3)^2+q$에서
$9a+q=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$-5=a(1-3)^2+q$에서
$4a+q=-5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=1$, $q=-9$
따라서 구하는 이차함수의 식은
$y=(x-3)^2-9$ (또는 $y=x^2-6x$)

77 축의 방정식이 $x=5$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x-5)^2+q$로 놓는다.
이 그래프가 두 점 $(3,\ 2)$, $(8,\ -3)$을 지나므로 이 식에 두 점의 좌표를 각각 대입하면
$2=a(3-5)^2+q$에서 $4a+q=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$-3=a(8-5)^2+q$에서 $9a+q=-3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-1$, $q=6$
따라서 조건을 만족하는 이차함수의 식은
$y=-(x-5)^2+6$이므로 구하는 꼭짓점의 좌표는 $(5,\ 6)$이다.

78 축의 방정식이 $x=-3$이므로 주어진 이차함수의 식을 $y=a(x+3)^2+q$로 놓을 수 있다.
이 그래프가 두 점 $(-4,\ 2)$, $(0,\ -6)$을 지나므로 각 점의 좌표를 대입하면
$2=a(-4+3)^2+q$에서
$a+q=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$-6=a(0+3)^2+q$에서
$9a+q=-6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-1$, $q=3$
따라서 주어진 이차함수의 식은
$y=-(x+3)^2+3$, 즉 $y=-x^2-6x-6$
이므로 $a=-1$, $b=-6$, $c=-6$
$\therefore a-b+c=-1-(-6)+(-6)=-1$

79 축의 방정식이 $x=-4$이므로 구하는 이차함수의 식을 $y=a(x+4)^2+q$로 놓을 수 있다.
이 그래프가 두 점 $(-2,\ -3)$, $(-10,\ 13)$을 지나므로 각 점의 좌표를 대입하면
$-3=a(-2+4)^2+q$에서
$4a+q=-3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$13=a(-10+4)^2+q$에서
$36a+q=13$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=\frac{1}{2}$, $q=-5$
따라서 구하는 이차함수의 식은
$y=\frac{1}{2}(x+4)^2-5$ $\left(\text{또는 } y=\frac{1}{2}x^2+4x+3\right)$
이 이차함수의 그래프가 점 $(4,\ k)$를 지나므로 이 식에 $x=4$, $y=k$를 대입하면
$k=\frac{1}{2}(4+4)^2-5=32-5=27$

80 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 세 점 $(3,\ 0)$, $(2,\ -7)$, $(0,\ 9)$를 지나므로 각 점의 좌표를 대입하면
$9a+3b+c=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$4a+2b+c=-7$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
$c=9$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$9a+3b+9=0$에서 $3a+b=-3$ …… ㉣

$4a+2b+9=-7$에서 $2a+b=-8$ …… ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면

$a=5,\ b=-18$

$\therefore a+b+c=5+(-18)+9=-4$

81 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 세 점 $(0,\ -15)$, $(-2,\ 21)$, $(1,\ -24)$를 지나므로 각 점의 좌표를 대입하면

$c=-15$ …… ㉠

$4a-2b+c=21$ …… ㉡

$a+b+c=-24$ …… ㉢

㉠을 각각 ㉡, ㉢에 대입하면

$4a-2b-15=21$

$\therefore 2a-b=18$ …… ㉣

$a+b-15=-24$

$\therefore a+b=-9$ …… ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-12$

$\therefore a-b+c=3-(-12)+(-15)=0$

82 구하는 이차함수를 $y=ax^2+bx+c$로 놓으면 그 그래프가 세 점 $\mathrm{A}(2,\ -1)$, $\mathrm{B}(-1,\ -4)$, $\mathrm{C}(0,\ 1)$을 지나므로 각 점의 좌표를 대입하면

$4a+2b+c=-1$ …… ㉠

$a-b+c=-4$ …… ㉡

$c=1$ …… ㉢

㉢을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$4a+2b+1=-1$에서 $2a+b=-1$ …… ㉣

$a-b+1=-4$에서 $a-b=-5$ …… ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=3$

따라서 구하는 이차함수의 식은

$y=-2x^2+3x+1$

83 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 세 점 $(-2,\ 0)$, $(0,\ 10)$, $(2,\ -4)$를 지나므로 각 점의 좌표를 대입하면

$4a-2b+c=0$ …… ㉠

$c=10$ …… ㉡

$4a+2b+c=-4$ …… ㉢

㉡을 ㉠, ㉢에 각각 대입하면

$4a-2b+10=0$에서 $2a-b=-5$ …… ㉣

$4a+2b+10=-4$에서 $2a+b=-7$ …… ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=-1$

따라서 주어진 이차함수의 식은 $y=-3x^2-x+10$이고, 이 그래프가 점 $(k,\ 0)$을 지나므로 $x=k,\ y=0$을 대입하면

$0=-3k^2-k+10,\ 3k^2+k-10=0$

$(k+2)(3k-5)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=\frac{5}{3}$

그런데 $k>0$이므로 $k=\frac{5}{3}$

84 x축과 두 점 $(1,\ 0)$, $(-2,\ 0)$에서 만나므로 주어진 그래프를 나타내는 이차함수의 식을

$y=a(x-1)(x+2)$로 놓을 수 있다. 이 그래프가 점 $(2,\ -4)$를 지나므로 $x=2,\ y=-4$를 대입하면

$-4=a(2-1)(2+2),\ 4a=-4 \qquad \therefore a=-1$

따라서 주어진 이차함수의 식은

$y=-(x-1)(x+2)$, 즉 $y=-x^2-x+2$

이므로 구하는 꼭짓점의 좌표는

$$\begin{aligned} y&=-x^2-x+2 \\ &=-\left(x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+2 \\ &=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2+\frac{1}{4} \\ &=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4} \end{aligned}$$

에서 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{9}{4}\right)$이다.

85 주어진 그래프가 x축과 두 점 $(-2,\ 0)$, $(5,\ 0)$에서 만나므로 구하는 이차함수의 식을 $y=a(x+2)(x-5)$로 놓을 수 있다. 이 그래프가 점 $(0,\ -5)$를 지나므로 $x=0,\ y=-5$를 대입하면

$-5=a(0+2)(0-5),\ -10a=-5$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 이차함수의 식은

$y=\frac{1}{2}(x+2)(x-5)$, 즉 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-5$

다른풀이 구하는 이차함수의 식을 $y=a(x+2)(x-5)$로 놓으면 $y=ax^2-3ax-10a$이고, y절편이 -5이므로

$-10a=-5 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-5$

86 x축과 두 점 $(5,\ 0)$, $(-1,\ 0)$에서 만나므로 구하는 이차함수의 식을 $y=a(x-5)(x+1)$로 놓으면

$$\begin{aligned} y&=a(x-5)(x+1) \\ &=a(x^2-4x-5) \\ &=a(x^2-4x+4-4)-5a \end{aligned}$$

$=a(x-2)^2-5a-4a$
$=a(x-2)^2-9a$
꼭짓점의 y좌표가 9이므로
$-9a=9 \qquad \therefore a=-1$
따라서 구하는 이차함수의 식은
$y=-(x-5)(x+1)$, 즉 $y=-x^2+4x+5$
$\therefore a=-1,\ b=4,\ c=5$
$\therefore a+b+c=-1+4+5=8$

87 $y=-x^2-3x+18$에서 $y=0$일 때 x의 값은
$-x^2-3x+18=0,\ x^2+3x-18=0$
$(x+6)(x-3)=0 \qquad \therefore x=-6$ 또는 $x=3$
따라서 구하는 이차함수의 그래프는 x축과 두 점 $(-6,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서 만나므로 그 식을 $y=a(x+6)(x-3)$으로 놓을 수 있다. 이 그래프가 점 $(0,\ -36)$을 지나므로 $x=0$, $y=-36$을 대입하면
$-36=a(0+6)(0-3)$, $-18a=-36 \qquad \therefore a=2$
그러므로 구하는 이차함수의 식은
$y=2(x+6)(x-3)$, 즉 $y=2x^2+6x-36$
다른풀이 x축과 두 점 $(-6,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서 만나므로 구하는 이차함수의 식을 $y=a(x+6)(x-3)$으로 놓으면
$y=ax^2+3ax-18a$이고 y절편이 -36이므로
$-18a=-36 \qquad \therefore a=2$
$\therefore y=2x^2+6x-36$

88 $y=3x^2+12x$
$=3(x^2+4x+4-4)$
$=3(x+2)^2-12$
이므로 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -7만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=3(x+2-2)^2-12-7$, 즉 $y=3x^2-19$
따라서 $a=3,\ b=0,\ c=-19$이므로
$a+b+c=3+0+(-19)=-16$
다른풀이 $y=3x^2+12x$의 그래프를 x축, y축의 방향으로 각각 2, -7만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=3(x-2)^2+12(x-2)-7=3x^2-19$
따라서 $a=3,\ b=0,\ c=-19$이므로
$a+b+c=3+0+(-19)=-16$

89 $y=2(x-5)^2+1$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=2(x-5-m)^2+1+2$
즉, $y=2\{x-(5+m)\}^2+3$
이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(3,\ n)$이므로
$5+m=3,\ 3=n$
따라서 $m=-2,\ n=3$이므로
$m-n=-2-3=-5$

90 $y=x^2-6x+5$
$=(x^2-6x+9-9)+5$
$=(x-3)^2-4$
의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=(x-3-m)^2-4+n$
이 식이
$y=x^2+2x+6$
$=(x^2+2x+1-1)+6$
$=(x+1)^2+5$
와 일치하므로
$-3-m=1,\ -4+n=5$
따라서 $m=-4,\ n=9$이므로
$3m+n=3\times(-4)+9=-3$
다른풀이 $y=x^2-6x+5$의 x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입하면
$y-n=(x-m)^2-6(x-m)+5$
전개하여 정리하면
$y=x^2+(-2m-6)x+m^2+6m+n+5$
이것이 $y=x^2+2x+6$과 같으므로
$-2m-6=2,\ m^2+6m+n+5=6$
따라서 $m=-4,\ n=9$이므로
$3m+n=-3$

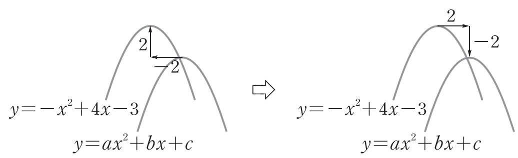
91 $y=a(x-2)^2+5$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=a(x-2-p)^2+5+q$
이것이 $y=-4(x+3)^2-1$과 같아야 하므로
$a=-4,\ -2-p=3,\ 5+q=-1$
따라서 $a=-4,\ p=-5,\ q=-6$이므로
$a+p+q=-4+(-5)+(-6)=-15$

92 $y=7(x-3)^2+6$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=7(x-3-p)^2+6+q$
이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(3+p,\ 6+q)$이고, 이것이 원점이므로
$3+p=0,\ 6+q=0$
따라서 $p=-3,\ q=-6$이므로
$p-q=-3-(-6)=3$

93 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 꼭짓점의 좌표를 $(p,\ q)$라 하면 이 점을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 $(p-2,\ q+2)$이고, 이것이 $y=-x^2+4x-3$의 그래프의 꼭짓점의 좌표와 일치해야 한다.

$y=-x^2+4x-3$
$=-(x^2-4x+4-4)-3$
$=-(x-2)^2-3+4$
$=-(x-2)^2+1$
에서 평행이동한 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 1)$이다.
따라서 $p-2=2,\ q+2=1$이므로
$p=4,\ q=-1$
또, 평행이동한 그래프의 모양과 폭은 변하지 않으므로
$a=-1$
따라서 구하는 이차함수의 식은
$y=-(x-4)^2-1$, 즉 $y=-x^2+8x-17$이므로
$a=-1,\ b=8,\ c=-17$
$\therefore a+b+c=-1+8+(-17)=-10$

다른풀이 1 주어진 평행이동을 반대로 생각하여
$y=-x^2+4x-3$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 일치하게 된다.



따라서 $y=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-(x-2-2)^2+1-2$, 즉 $y=-x^2+8x-17$이다.
이것이 $y=ax^2+bx+c$와 일치하므로
$a=-1,\ b=8,\ c=-17$
$\therefore a+b+c=-10$

다른풀이 2 $y=-x^2+4x-3$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면
$y=ax^2+bx+c$의 그래프와 일치하므로
$y=-x^2+4x-3$의 x 대신 $x-2$, y 대신 $y+2$를 대입하면
$y+2=-(x-2)^2+4(x-2)-3$
전개하여 정리하면
$y=-x^2+8x-17$
이것이 $y=ax^2+bx+c$와 일치하므로
$a=-1,\ b=8,\ c=-17$
$\therefore a+b+c=-10$

94 $y=-3(x+1)^2+5$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-3(x+1-2)^2+5-1=-3(x-1)^2+4$
이 그래프가 점 $(3,\ k)$를 지나므로 이 식에 $x=3$, $y=k$를 대입하면
$k=-3(3-1)^2+4$
$=-3\times4+4=-8$

95 $y=-2x^2+6x+k=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+k+\frac{9}{2}$이므로 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 8만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+k+\frac{25}{2}$이다.
이 그래프가 점 $(-1,\ 13)$을 지나므로 이 식에 $x=-1$, $y=13$을 대입하면
$13=-2\left(-1+\frac{3}{2}\right)^2+k+\frac{25}{2}\qquad \therefore k=1$

96 $y=-3x^2+2x+k$
$=-3\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\right)+k$
$=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+k+\frac{1}{3}$
의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-3\left(x-\frac{1}{3}-1\right)^2+k+\frac{1}{3}-2$
$=-3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+k-\frac{5}{3}$
이 이차함수의 그래프가 x축과 접하기 위해서는 꼭짓점의 y좌표가 0이어야 하므로
$k-\frac{5}{3}=0\qquad \therefore k=\frac{5}{3}$

다른풀이 $y=-3x^2+2x+k$의 x 대신 $x-1$, y 대신 $y+2$를 대입하면
$y+2=-3(x-1)^2+2(x-1)+k$
전개하여 정리하면
$y=-3x^2+8x-7+k$
$=-3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+k-\frac{5}{3}$
이때 $k-\frac{5}{3}=0$이므로 $k=\frac{5}{3}$

97 $y=\frac{1}{2}(x-p)^2+2$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\frac{1}{2}(x-p-1)^2+2$
이 그래프가 점 $(0,\ 4)$를 지나므로 이 식에 $x=0$, $y=4$를 대입하면
$4=\frac{1}{2}(0-p-1)^2+2,\ \frac{1}{2}(-p-1)^2=2$
$(p+1)^2=4,\ p+1=\pm2$
$\therefore p=1$ 또는 $p=-3$
그런데 $p>0$이므로 $p=1$

따라서 주어진 이차함수는 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+2$이고, 이 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{1}{2}(x-1)^2+2-1$, 즉 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+1$

이 그래프가 점 $(2,\ k)$를 지나므로 이 식에 $x=2$, $y=k$를 대입하면

$k=\frac{1}{2}(2-1)^2+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

$\therefore p+k=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

98 $y=-(x+9)^2-7$의 그래프와 x축에 대하여 대칭인 그래프의 식은 y 대신 $-y$를 대입하면

$-y=-(x+9)^2-7$

$\therefore y=(x+9)^2+7$

99 $y=2(x+3)^2-5$의 그래프와 y축에 대하여 대칭인 그래프의 식은 x 대신 $-x$를 대입하면

$y=2(-x+3)^2-5$

즉, $y=2(x-3)^2-5$

이 그래프가 점 $(4,\ k)$를 지나므로 이 식에 $x=4$, $y=k$를 대입하면

$k=2(4-3)^2-5=2-5=-3$

100 $y=x^2-2x+5$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 x 대신 $-x$를 대입하면

$y=(-x)^2-2\times(-x)+5$

$=x^2+2x+5$

이 그래프가 점 $(-5,\ k)$를 지나므로 이 식에 $x=-5$, $y=k$를 대입하면

$k=(-5)^2+2\times(-5)+5=25-10+5=20$

101 $y=5(x-2)^2+7$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 x 대신 $-x$를 대입하면

$y=5(-x-2)^2+7$, 즉 $y=5(x+2)^2+7$

따라서 이 이차함수의 그래프를 다시 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 y 대신 $-y$를 대입하면

$-y=5(x+2)^2+7$, 즉 $y=-5(x+2)^2-7$

이고, 꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ -7)$이다.

102 $y=\frac{1}{2}x^2+3x-5$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 $-\frac{7}{2}$만큼 평행이동한 그래프의 식은

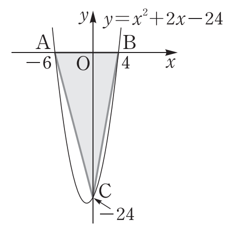
$y+\frac{7}{2}=\frac{1}{2}(x+1)^2+3(x+1)-5$,

즉, $y=\frac{1}{2}x^2+4x-5$

이 그래프를 다시 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=\frac{1}{2}x^2+4x-5$의 y 대신 $-y$를 대입하면

$-y=\frac{1}{2}x^2+4x-5 \qquad \therefore y=-\frac{1}{2}x^2-4x+5$

103 $y=x^2+2x-24$에 $y=0$을 대입하면



$x^2+2x-24=0$

$(x+6)(x-4)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=4$

따라서 $A(-6,\ 0)$, $B(4,\ 0)$이므로

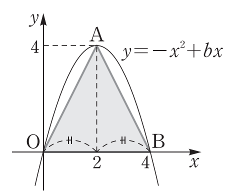
$\overline{AB}=4-(-6)=10$

또, 점 C는 y축 위의 점이므로 $y=x^2+2x-24$에 $x=0$을 대입하면 $y=-24$

$\therefore \overline{OC}=24$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times10\times24=120$

104 오른쪽 그림에서 그래프가 원점을 지나고 축의 방정식이 $x=2$이므로 점 B의 좌표는 $(4,\ 0)$이다. 이 그래프가 점 $(4,\ 0)$을 지나므로



$y=-x^2+bx$에 $x=4$, $y=0$을 대입하면

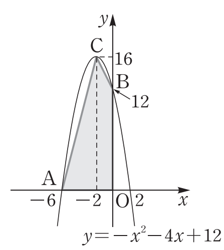
$0=-16+4b \qquad \therefore b=4$

따라서 주어진 이차함수는 $y=-x^2+4x$이고, 이 식에 $x=2$를 대입하면 꼭짓점 A의 y좌표는

$y=-2^2+4\times2=4$이다.

$\therefore \triangle AOB=\frac{1}{2}\times4\times4=8$

105 $y=-x^2-4x+12$



$=-(x^2+4x+4-4)+12$

$=-(x+2)^2+12+4$

$=-(x+2)^2+16$

이므로 꼭짓점 C의 좌표는 $(-2,\ 16)$이다.

또, 점 A는 이차함수의 그래프가 x축과 만나는 점이므로

$y=-x^2-4x+12$에 $y=0$을 대입하면

$-x^2-4x+12=0$, $x^2+4x-12=0$

$(x+6)(x-2)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=2$

그런데 점 A의 x좌표는 음수이므로

A$(-6,\ 0)$ $\quad\therefore\ \overline{AO}=6$

점 B는 이차함수의 그래프가 y축과 만나는 점이므로

$y=-x^2-4x+12$에 $x=0$을 대입하면 $y=12$에서

B$(0,\ 12)$ $\quad\therefore\ \overline{OB}=12$

$\therefore\ \square AOBC=\triangle AOC+\triangle COB$

$=\frac{1}{2}\times6\times16+\frac{1}{2}\times12\times2$

$=48+12=60$

106 $y=\frac{1}{2}x^2-3x+4$

$=\frac{1}{2}(x^2-6x+9-9)+4$

$=\frac{1}{2}(x-3)^2+4-\frac{9}{2}$

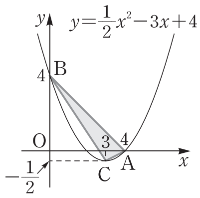
$=\frac{1}{2}(x-3)^2-\frac{1}{2}$

이므로 꼭짓점 C의 좌표는

$\left(3,\ -\frac{1}{2}\right)$이다. 또, 점 A는 이차

함수의 그래프가 x축과 만나는

점이므로 $y=\frac{1}{2}x^2-3x+4$에



$y=0$을 대입하면

$\frac{1}{2}x^2-3x+4=0,\ x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0$ $\quad\therefore\ x=2$ 또는 $x=4$

그런데 점 A는 x축과 만나는 점 중 x좌표의 값이 큰 것이므로

A$(4,\ 0)$ $\quad\therefore\ \overline{OA}=4$

점 B는 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2-3x+4$의 그래프가 y축과 만나는 점이므로 $x=0$을 대입하면 $y=4$에서

B$(0,\ 4)$ $\quad\therefore\ \overline{BO}=4$

$\therefore\ \triangle ABC=\square ABOC-\triangle BOC$

$=(\triangle BOA+\triangle AOC)-\triangle BOC$

$=\left(\frac{1}{2}\times4\times4+\frac{1}{2}\times4\times\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\times4\times3$

$=8+1-6=3$

107 두 점 A, B는 이차함수 $y=-2x^2+8x+10$의 그래프가 x축과 만나는 점이므로 이 식에 $y=0$을 대입하면

$-2x^2+8x+10=0,\ x^2-4x-5=0$

$(x+1)(x-5)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=5$

따라서 A$(-1,\ 0)$, B$(5,\ 0)$이다.

또, 점 C는 이차함수의 그래프가 y축과 만나는 점이므로

$y=-2x^2+8x+10$에 $x=0$을 대입하면 $y=10$

$\therefore$ C$(0,\ 10)$

이때 점 C$(0,\ 10)$을 지나고

$\triangle ABC$의 넓이를 이등분하는

직선은 $\overline{AB}$의 중점, 즉 점

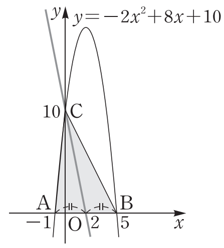
$(2,\ 0)$을 지나야 한다.

그러므로 구하는 직선은 기울

기가 $\frac{10-0}{0-2}=-5$이고, y절

편이 10이므로

$y=-5x+10$



108 $y=ax^2,\ y=x^2$에 각각 $x=1$을 대입하면

$y=a\times1^2=a$이므로 A$(1,\ a)$

$y=1^2=1$이므로 B$(1,\ 1)$

$\therefore\ \overline{AB}=a-1$

또, $y=ax^2,\ y=x^2$에 각각 $x=2$를 대입하면

$y=a\times2^2=4a$이므로 P$(2,\ 4a)$

$y=2^2=4$이므로 Q$(2,\ 4)$

$\therefore\ \overline{PQ}=4a-4$

이때, $\square ABQP$는 높이가 $2-1=1$인 사다리꼴이므로 구하는 넓이는

$\square ABQP=\frac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{PQ})\times1$

$=\frac{1}{2}\times\{(a-1)+(4a-4)\}\times1$

$=\frac{1}{2}(5a-5)$

$\square ABQP$의 넓이가 $\frac{5}{2}$이므로

$\frac{1}{2}(5a-5)=\frac{5}{2},\ 5a-5=5$ $\quad\therefore\ a=2$

109 $y=x^2+2x-3$

$=(x^2+2x+1-1)-3$

$=(x+1)^2-4$

이므로 꼭짓점 A의 좌표는 $(-1,\ -4)$이다.

이 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는

$y=x^2+2x-3$에 $y=0$을 대입하면

$x^2+2x-3=0,\ (x+3)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=1$

그런데 점 C의 x좌표는 음수이므로

C$(-3,\ 0)$

$y=x^2-2x-3$

$=(x^2-2x+1-1)-3$

$=(x-1)^2-4$

이므로 꼭짓점 B의 좌표는 $(1,\ -4)$이다.

이 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는

$y=x^2-2x-3$에 $y=0$을 대입하면

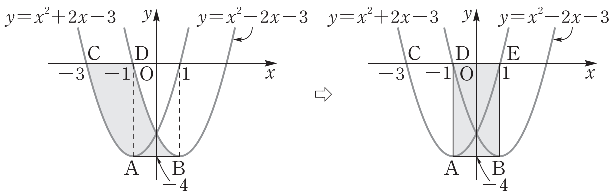
$x^2-2x-3=0,\ (x+1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$

그런데 점 D의 x좌표는 음수이므로

D$(-1,\ 0)$

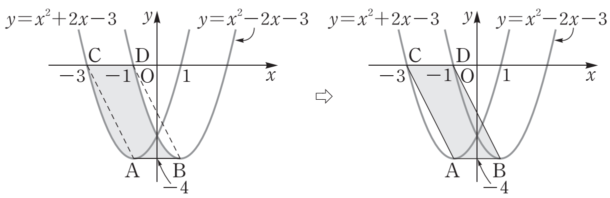
한편, 두 이차함수의 그래프의 폭이 같으므로 주어진 그림에서 어두운 부분을 다음 그림과 같이 이동하면 구하는 넓이는 직사각형 ABED의 넓이와 같다.



따라서 어두운 부분의 넓이는

$\square$ABED$=2\times4=8$

참고 다음 그림과 같이 어두운 부분의 넓이가 평행사변형 ABDC의 넓이와 같음을 이용할 수도 있다.



110 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2-4x+9$에서 y절편이 9이므로

A$(0,\ 9)$이고, 점 C의 x좌표가 8이므로 $x=8$을 대입하면 y좌표는

$y=\frac{1}{2}\times64-4\times8+9=9$

$\therefore$ C$(8,\ 9)$

또, 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2-4x+3$에서 y절편이 3이므로

B$(0,\ 3)$이고, 점 D의 x좌표가 8이므로 $x=8$을 대입하면 y좌표는

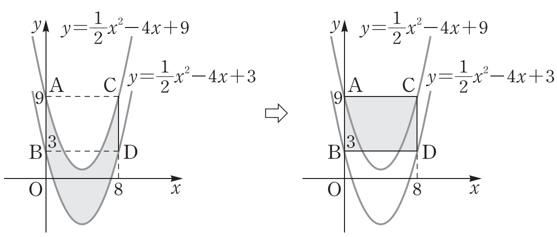
$y=\frac{1}{2}\times64-4\times8+3=3$

$\therefore$ D$(8,\ 3)$

이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2-4x+9$의 그래프는 $y=\frac{1}{2}x^2-4x+3$의 그래프를 y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이므로 두 이차함수의 그래프 사이의 거리는 6으로 일정하다.

따라서 어두운 부분의 넓이는 다음 그림에서 직사각형 ABDC의 넓이와 같고, $\overline{AB}=6$, $\overline{BD}=8$이므로

$\square$ABDC$=6\times8=48$



따라서 어두운 부분의 넓이는 48이다.

02 이차함수의 활용

Best 최상위 유형

본문 145~157쪽

1 ③	**2** ①	**3** 8	**4** ④	**5** ⑤
6 $a\ge-\frac{3}{2}$	**7** ④	**8** ⑤	**9** ⑤	
10 $a\ge\frac{5}{9}$	**11** ③	**12** ②	**13** 최솟값 1, $m=\frac{1}{5}$	
14 ①	**15** 5	**16** $-6\le y\le3$		**17** -10
18 ⑤	**19** 0	**20** 최댓값 4, 최솟값 $\frac{7}{4}$		
21 (1) $y=x^2+12x$ (2) 최솟값 -36, 두 수 -6, 6				
22 최댓값 196, 두 수 14, 14			**23** ③	**24** ④
25 ④	**26** $-\frac{9}{2}$	**27** ④	**28** 4	**29** ⑤
30 $0<k<\frac{2}{5}$		**31** ②	**32** $\frac{17}{36}$	**33** ④
34 ③, ⑤	**35** 2	**36** 4	**37** 1020 m	**38** ②
39 3초, 45 m		**40** (1) 4초, 180 m (2) 10초 후		
41 ④	**42** ④	**43** 300원	**44** ③	**45** ⑤
46 ①	**47** 50 cm^2	**48** ③	**49** ②	**50** 6 cm
51 $\frac{7}{8}$ m	**52** 2	**53** 48 cm^2, $x=2$		
54 5초 후, 200 cm^2		**55** 3초 후, $\frac{27}{4}$ cm^2		
56 A$\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$		**57** ③	**58** 34	**59** 17

1 $y=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$

$=-\frac{1}{2}(x^2-2x+1-1)-\frac{3}{2}$

$=-\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{2}(x-1)^2-1$

이므로 $x=1$일 때, 최댓값 -1을 갖는다.

$\therefore M=-1$

$y=3x^2+6x-7$

$=3(x^2+2x+1-1)-7$

$=3(x+1)^2-7-3$

$=3(x+1)^2-10$

이므로 $x=-1$일 때, 최솟값 -10을 갖는다.

$\therefore m=-10$

$\therefore M+m=-1+(-10)=-11$

2 $y=2x^2-1$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2(x+2)^2-1-5$, 즉 $y=2(x+2)^2-6$

따라서 $x=-2$일 때, 최솟값 -6을 갖는다.

3 $y=2x^2+4x+k$

$=2(x^2+2x+1-1)+k$

$=2(x+1)^2+k-2$

이므로 $x=-1$일 때, 최솟값 $k-2$를 갖는다.

따라서 $k-2=6$이므로 $k=8$

4 $y=-2x^2+3px+4q$가 $x=-3$일 때, 최댓값 -6을 가지므로 이 이차함수의 식은

$y=-2(x+3)^2-6$, 즉 $y=-2x^2-12x-24$

따라서 $3p=-12$, $4q=-24$이므로

$p=-4$, $q=-6$

$\therefore pq=-4\times(-6)=24$

다른풀이 $y=-2x^2+3px+4q$

$=-2\left(x^2-\frac{3}{2}px+\frac{9}{16}p^2-\frac{9}{16}p^2\right)+4q$

$=-2\left(x-\frac{3}{4}p\right)^2+4q+\frac{9}{8}p^2$

이 이차함수가 $x=-3$일 때, 최댓값 -6을 가지므로

$\frac{3}{4}p=-3$, $4q+\frac{9}{8}p^2=-6$

따라서 $p=-4$, $q=-6$이므로

$pq=-4\times(-6)=24$

5 $y=-3x^2-6kx-2$

$=-3(x^2+2kx+k^2-k^2)-2$

$=-3(x+k)^2+3k^2-2$

에서 $x=-k$일 때, 최댓값 $3k^2-2$를 가지므로

$3k^2-2=13$, $3k^2=15$, $k^2=5$

$\therefore k=\pm\sqrt{5}$

6 주어진 이차함수의 y의 값의 범위가 $y\le 9$이므로

$y=ax^2+4ax+3$

$=a(x^2+4x+4-4)+3$

$=a(x+2)^2+3-4a$

에서 $3-4a\le 9$

$4a\ge -6$

$\therefore a\ge -\frac{3}{2}$

7 $y=2x^2-4kx+3k$

$=2(x^2-2kx+k^2-k^2)+3k$

$=2(x-k)^2+3k-2k^2$

에서 y의 값의 범위가 $y\ge 3k-2k^2$이므로

$3k-2k^2=-5$, $2k^2-3k-5=0$

$(k+1)(2k-5)=0$

$\therefore k=-1$ ($\because k<0$)

8 $y=x^2+2kx+23$

$=(x^2+2kx+k^2-k^2)+23$

$=(x+k)^2+23-k^2$

에서 $x=-k$일 때, 최솟값 $23-k^2$을 가지므로

$23-k^2=k+3$, $k^2+k-20=0$

$(k+5)(k-4)=0$ $\quad\therefore k=-5$ 또는 $k=4$

그런데 $k<0$이므로 $k=-5$

따라서 구하는 꼭짓점의 좌표는 $(-k,\ 23-k^2)$에 $k=-5$를 대입하면

$(-(-5),\ 23-(-5)^2)$, 즉 $(5,\ -2)$

9 두 점 $(3,\ 0)$, $(-5,\ 0)$을 지나는 이차함수의 식을 $y=a(x-3)(x+5)$ $(a<0)$로 놓으면

$y=a(x-3)(x+5)$

$=a(x^2+2x-15)$

$=a(x^2+2x+1-16)$

$=a(x+1)^2-16a$

에서 $x=-1$일 때, 최댓값이 $-16a$이므로

$-16a=4$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{4}$

따라서 구하는 이차함수는

$y=-\frac{1}{4}(x^2+2x-15)=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{15}{4}$

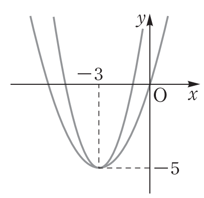
이므로 $a=-\frac{1}{4}$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=\frac{15}{4}$

$\therefore a+b+c=-\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{15}{4}=3$

10 이차함수 $y=ax^2+bx+c$는 $x=-3$일 때, 최솟값 -5를 가지므로 구하는 이차함수의 식은

$y=a(x+3)^2-5=ax^2+6ax+9a-5$

로 놓을 수 있다. 이 이차함수의 그래프가 제 4 사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 y절편이 0 이상이어야 한다. 즉,



(y절편)$=9a-5\ge 0$

$\therefore a\ge\frac{5}{9}$

11 $y=x^2+6ax+36a$

$=(x^2+6ax+9a^2-9a^2)+36a$

$=(x+3a)^2+36a-9a^2$

에서 $x=-3a$일 때, 최솟값 $36a-9a^2$을 가지므로

$f(a)=-9a^2+36a$

$=-9(a^2-4a+4-4)$

$=-9(a-2)^2+36$

따라서 $f(a)$는 $a=2$일 때, 최댓값 36을 갖는다.

12 $y=-x^2-4kx+4k-7$

$=-(x^2+4kx+4k^2-4k^2)+4k-7$

$=-(x+2k)^2+4k^2+4k-7$

에서 $x=-2k$일 때, 최댓값 $4k^2+4k-7$을 가지므로

$f(k)=4k^2+4k-7$

$=4\left(k^2+k+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)-7$

$=4\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-7-1$

$=4\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-8$

따라서 $f(k)$는 $k=-\frac{1}{2}$일 때, 최솟값 -8을 갖는다.

13 $y=-3x^2-30mx-25m^2-20m+3$

$=-3(x^2+10mx+25m^2-25m^2)-25m^2-20m+3$

$=-3(x+5m)^2-25m^2-20m+3+75m^2$

$=-3(x+5m)^2+50m^2-20m+3$

에서 $x=-5m$일 때, 최댓값 $50m^2-20m+3$을 가지므로

$M=50m^2-20m+3$

$=50\left(m^2-\frac{2}{5}m+\frac{1}{25}-\frac{1}{25}\right)+3$

$=50\left(m-\frac{1}{5}\right)^2+3-2$

$=50\left(m-\frac{1}{5}\right)^2+1$

따라서 M은 $m=\frac{1}{5}$일 때 최솟값 1을 갖는다.

14 $y=-x^2+2kx-k$

$=-(x^2-2kx+k^2-k^2)-k$

$=-(x-k)^2-k+k^2$

에서 꼭짓점의 y좌표는 $-k+k^2$이고

$k^2-k=k^2-k+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$

$=\left(k-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

이므로 $k=\frac{1}{2}$일 때, 최솟값 $-\frac{1}{4}$을 갖는다.

15 $f(x)=-x^2+4px-q+1$

$=-(x^2-4px+4p^2-4p^2)-q+1$

$=-(x-2p)^2-q+1+4p^2$

에서 꼭짓점의 좌표는 $(2p,\ 4p^2-q+1)$이고, 이 점이 직선 $y=2x-5$ 위에 있으므로 이 식에 $x=2p$, $y=4p^2-q+1$을 대입하면

$4p^2-q+1=4p-5$

$\therefore q=4p^2-4p+6$

$=4\left(p^2-p+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+6$

$=4\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+6-1$

$=4\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+5$

따라서 q는 $p=\frac{1}{2}$일 때, 최솟값 5를 갖는다.

16 $y=-x^2+2x+2$

$=-(x^2-2x+1-1)+2$

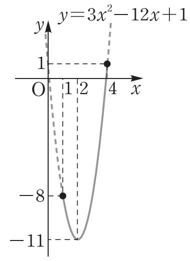
$=-(x-1)^2+2+1$

$=-(x-1)^2+3$

꼭짓점의 x좌표 1이 $-2\leq x\leq 2$에 속하고 $x=-2$일 때 $y=-6$, $x=1$일 때 $y=3$, $x=2$일 때 $y=2$이므로 $x=1$일 때 최댓값 3, $x=-2$일 때 최솟값 -6을 갖는다.

따라서 구하는 y의 값의 범위는 $-6\leq y\leq 3$

17 $y=3x^2-12x+1$



$=3(x^2-4x+4-4)+1$

$=3(x-2)^2+1-12$

$=3(x-2)^2-11$

에서 꼭짓점의 x좌표 2가 $1\leq x\leq 4$에 속하므로 $x=1,\ 2,\ 4$에서의 y의 값을 구하면

$x=1$일 때, $y=3(1-2)^2-11=-8$

$x=2$일 때, $y=-11$

$x=4$일 때, $y=3(4-2)^2-11=1$

따라서 최댓값은 $x=4$일 때 $M=1$, 최솟값은 $x=2$일 때 $m=-11$이므로

$M+m=1+(-11)=-10$

18 $y=2x^2-4x-3$

$=2(x^2-2x+1-1)-3$

$=2(x-1)^2-5$

꼭짓점의 x좌표 1이 $0\leq x\leq 3$에 속하고 $x=0$일 때 $y=-3$, $x=3$일 때 $y=3$, $x=1$일 때 $y=-5$이므로 $x=1$일 때 최솟값 $m=-5$, $x=3$일 때 최댓값 $M=3$을 갖는다.

$\therefore M-m=3-(-5)=8$

19 $y=-x^2-2x+4=-(x^2+2x+1-1)+4$

$=-(x+1)^2+5$

꼭짓점의 x좌표 -1이 $0\leq x\leq 2$에 속하지 않고 $x=0$일 때 $y=4$, $x=2$일 때 $y=-4$이므로 $x=0$일 때 최댓값 $M=4$, $x=2$일 때 최솟값 $m=-4$를 갖는다.

$\therefore M+m=4+(-4)=0$

20 $y=x^2-4kx+5k^2+k+2$

$=(x^2-4kx+4k^2-4k^2)+5k^2+k+2$

$=(x-2k)^2+k^2+k+2$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(2k,\ k^2+k+2)$

따라서

$b=k^2+k+2$

$=\left(k^2+k+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+2=\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

$-1\le k\le 1$이므로 $k=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $\frac{7}{4}$, $k=1$일 때 최댓값 4를 갖는다.

21 (1) 두 수 중 작은 수가 x이면 차가 12이므로 큰 수는 $x+12$이다. 따라서 x와 y 사이의 관계식은
$y=x(x+12)$, 즉 $y=x^2+12x$

(2) $y=x^2+12x$
$=x^2+12x+36-36$
$=(x+6)^2-36$
따라서 y는 $x=-6$일 때, 최솟값 -36을 갖고 그때의 두 수는 -6, 6이다.

22 합이 28인 두 수를 x, $28-x$, 두 수의 곱을 y로 놓으면
$y=x(28-x)$
$=-x^2+28x$
$=-(x^2-28x+196-196)$
$=-(x-14)^2+196$
이므로 두 수의 곱의 최댓값은 196이고 이때의 두 수는 14, $28-14=14$이다.

23 $x-y+4=0$에서 $y=x+4$이므로
$2xy=2x(x+4)$
$=2x^2+8x$
$=2(x^2+4x+4-4)$
$=2(x+2)^2-8$
따라서 $2xy$는 $x=-2$, $y=-2+4=2$일 때, 최솟값 -8을 갖는다.

24 $x+y=8$에서 $y=8-x$를 x^2+y^2에 대입하면
$x^2+y^2=x^2+(8-x)^2$
$=x^2+x^2-16x+64$
$=2x^2-16x+64$
$=2(x^2-8x+16-16)+64$
$=2(x-4)^2+32$
이므로 $x=4$일 때, x^2+y^2의 최솟값은 32이다.

25 $y=\frac{1}{3}x^2-2kx+k+5$
$=\frac{1}{3}(x^2-6kx+9k^2-9k^2)+k+5$
$=\frac{1}{3}(x-3k)^2+k+5-3k^2$
에서 꼭짓점의 좌표가 $(3k,\ -3k^2+k+5)$이므로
$a=3k$, $b=-3k^2+k+5$
$\therefore a+b=3k-3k^2+k+5$
$=-3k^2+4k+5$
$=-3\left(k^2-\frac{4}{3}k+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\right)+5$
$=-3\left(k-\frac{2}{3}\right)^2+5+\frac{4}{3}$
$=-3\left(k-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{19}{3}$
따라서 $a+b$는 $k=\frac{2}{3}$일 때, 최댓값 $\frac{19}{3}$를 갖는다.

26 $y=2x^2-4x+k$
$=2(x^2-2x+1-1)+k$
$=2(x-1)^2+k-2$
에서 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ k-2)$이다.
꼭짓점이 직선 $y=\frac{1}{2}x-7$ 위에 있으므로 이 식에 $x=1$, $y=k-2$를 대입하면
$k-2=\frac{1}{2}\times 1-7$
$\therefore k=-\frac{9}{2}$

27 $y=2x^2-2x+a$
$=2\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+a$
$=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+a-\frac{1}{2}$
이므로 이차함수 $y=2x^2-2x+a$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ a-\frac{1}{2}\right)$이다.
이 점이 직선 $y=-3x$ 위에 있으므로 $x=\frac{1}{2}$, $y=a-\frac{1}{2}$을 대입하면
$a-\frac{1}{2}=-3\times\frac{1}{2}$ $\quad\therefore a=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=-1$

28 $y=-x^2+6x-11$
$=-(x^2-6x+9-9)-11$
$=-(x-3)^2-2$
이차함수 $y=-x^2+6x-11$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(3,\ -2)$이므로 이차함수 $y=x^2+2px-q$의 그래프의 꼭짓점의 좌표도 $(3,\ -2)$이다.
$y=x^2+2px-q$
$=x^2+2px+p^2-p^2-q$
$=(x+p)^2-p^2-q$
에서 $-p=3$, $-p^2-q=-2$
따라서 $p=-3$, $q=-7$이므로
$p-q=-3-(-7)=4$

29 $y=-2x^2+2kx+3k-2$
$=-2\left(x^2-kx+\frac{k^2}{4}-\frac{k^2}{4}\right)+3k-2$
$=-2\left(x-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{k^2}{2}+3k-2$
이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $\left(\frac{1}{2},\ p\right)$이므로

$\frac{k}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{k^2}{2}+3k-2=p$

따라서 $k=1$, $p=\frac{1}{2}+3-2=\frac{3}{2}$이므로

$k+2p=1+2\times\frac{3}{2}=4$

다른풀이 이차함수 $y=-2x^2+2kx+3k-2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $\left(\frac{1}{2},\ p\right)$이므로 $y=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+p$로 놓을 수 있다.

따라서 $y=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+p=-2x^2+2x-\frac{1}{2}+p$에서

$2k=2$, $3k-2=-\frac{1}{2}+p$

$\therefore k=1$, $p=\frac{3}{2}$

$\therefore k+2p=1+2\times\frac{3}{2}=4$

30 $y=x^2-6kx+9k^2+5k-2$

$=(x^2-6kx+9k^2)+5k-2$

$=(x-3k)^2+5k-2$

이므로 $y=x^2-6kx+9k^2+5k-2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(3k,\ 5k-2)$이다.

그런데 꼭짓점이 제 4 사분면에 있으려면 꼭짓점의 x좌표는 양수, y좌표는 음수이어야 하므로

$3k>0$에서 $k>0$ ······ ㉠

$5k-2<0$에서 $k<\frac{2}{5}$ ······ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $0<k<\frac{2}{5}$

31 $y=-\frac{1}{2}x^2-2x+k+1$

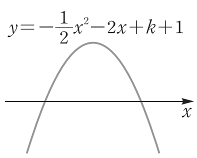
$=-\frac{1}{2}(x^2+4x+4-4)+k+1$

$=-\frac{1}{2}(x+2)^2+k+1+2$

$=-\frac{1}{2}(x+2)^2+k+3$

이므로 $y=-\frac{1}{2}x^2-2x+k+1$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ k+3)$이고, x^2의 계수가 음수이므로 위로 볼록한 포물선이다.

따라서 이 이차함수의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 꼭짓점의 y좌표가 양수이어야 하므로



$k+3>0$ $\therefore k>-3$

32 $y=x^2+ax+b$

$=\left(x^2+ax+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}\right)+b$

$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}$

의 그래프는 아래로 볼록하므로 x축과 만나지 않으려면 꼭짓점의 y좌표가 양수이어야 한다.

즉, $b-\frac{a^2}{4}>0$에서 $a^2<4b$이고, 이 부등식을 만족하는 경우는 다음과 같다.

$a=1$일 때, $b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

$a=2$일 때, $b=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

$a=3$일 때, $b=3,\ 4,\ 5,\ 6$

$a=4$일 때, $b=5,\ 6$

따라서 이 그래프가 x축과 만나지 않는 경우는 17가지이므로 확률은 $\frac{17}{36}$이다.

33 두 점 A, B의 y좌표는 9이므로 $y=x^2-3x+5$에 $y=9$를 대입하면

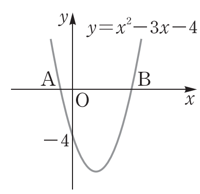
$x^2-3x+5=9$, $x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

따라서 $\mathrm{A}(-1,\ 9)$, $\mathrm{B}(4,\ 9)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=4-(-1)=5$

다른풀이 직선 $y=9$와 이차함수 $y=x^2-3x+5$의 그래프를 모두 y축의 방향으로 -9만큼 평행이동시키면 직선 $y=9$는 $y=9-9=0$에서 x축과 일치하고 이차함수 $y=x^2-3x+5$의 그래프는 $y=x^2-3x+5-9$, 즉 $y=x^2-3x-4$의 그래프가 된다.



따라서 두 점 A, B 사이의 거리는 이차함수 $y=x^2-3x-4$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리와 같다.

$y=x^2-3x-4$에 $y=0$을 대입하면

$x^2-3x-4=0$, $(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

따라서 x축과 만나는 두 점 사이의 거리는

$4-(-1)=5$

34 $y=2x^2+x-3$에 $y=0$을 대입하면

$2x^2+x-3=0$, $(x-1)(2x+3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-\frac{3}{2}$

따라서 이차함수 $y=2x^2+x-3$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 좌표는 $(1,\ 0)$, $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$이다.

$y=2x^2+x-3$의 그래프와 직선 $y=x+k$가

(i) 점 $(1,\ 0)$에서 만날 때,

$y=x+k$에 $x=1$, $y=0$을 대입하면

$0=1+k$ $\therefore k=-1$

(ii) 점 $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$에서 만날 때,

$y=x+k$에 $x=-\frac{3}{2}$, $y=0$을 대입하면

$0=-\frac{3}{2}+k \qquad \therefore k=\frac{3}{2}$

(i), (ii)로부터 $k=-1$ 또는 $k=\frac{3}{2}$

35 이차함수 $y=x^2-5x+4$의 그래프와 직선 $y=-x+1$의 교점의 x좌표는 $x^2-5x+4=-x+1$에서
$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$
$x=1$일 때, $y=-1+1=0$
$x=3$일 때, $y=-3+1=-2$
따라서 이차함수 $y=x^2-5x+4$의 그래프와 직선 $y=-x+1$의 두 교점의 좌표는 $(1,\ 0)$, $(3,\ -2)$이다.
이 두 점은 이차함수 $y=ax^2-9x+7$의 그래프도 지나므로 이 식에 $x=1$, $y=0$을 대입하면
$0=a\times1^2-9\times1+7$, $a-2=0 \qquad \therefore a=2$

36 점 P의 x좌표를 t라 하면
$\mathrm{P}(t,\ t^2-t+3)$, $\mathrm{Q}(t,\ t-2)$
$\overline{\mathrm{PQ}}=t^2-t+3-(t-2)$
$=t^2-2t+5$
$=(t^2-2t+1-1)+5$
$=(t-1)^2+4$
이므로 $t=1$일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값은 4이다.

37 $h=-5t^2+120t+300$
$=-5(t^2-24t+144-144)+300$
$=-5(t-12)^2+300+720$
$=-5(t-12)^2+1020$
이므로 물체는 쏘아 올린 지 12초 후에 지면으로부터 최고 1020 m의 높이까지 올라간다.

38 $h=40t-5t^2$
$=-5(t^2-8t+16-16)$
$=-5(t-4)^2+80$
이므로 물체는 쏘아 올린 지 4초 후에 지면으로부터 최고 높이인 80 m에 도달한다.

39 $h=-5x^2+30x$
$=-5(x^2-6x+9-9)$
$=-5(x-3)^2+45$
이므로 물로켓은 3초 후 최고 45 m의 높이에 도달하게 된다.

40 (1) $y=-5x^2+40x+100$
$=-5(x^2-8x+16-16)+100$
$=-5(x-4)^2+100+80$
$=-5(x-4)^2+180$
따라서 물체는 쏘아 올린 지 4초 후에 최고 높이 180 m까지 올라간다.
(2) 물체가 지면에 떨어질 때의 높이는 0 m이므로
$-5x^2+40x+100=0$, $x^2-8x-20=0$
$(x+2)(x-10)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=10$
그런데 $x\ge0$이므로 $x=10$
따라서 물체는 쏘아 올린 지 10초 후에 지면에 떨어진다.

41 ① $x=0$을 대입하면 $y=\frac{6}{5}$이므로 공을 던지기 전의 공의 높이는 $\frac{6}{5}$ m이다.

② $x=2$를 대입하면 $y=-\frac{4}{5}+2+\frac{6}{5}=\frac{12}{5}$이므로 공을 던진 지 2초 후에 공의 높이는 $\frac{12}{5}$ m이다.

③, ④ $y=-\frac{1}{5}x^2+x+\frac{6}{5}$
$=-\frac{1}{5}\left(x^2-5x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}\right)+\frac{6}{5}$
$=-\frac{1}{5}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{5}{4}+\frac{6}{5}$
$=-\frac{1}{5}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{49}{20}$
따라서 공은 $\frac{5}{2}(=2.5)$초 후에 최대 $\frac{49}{20}$ m까지 올라간다.
⑤ $y=0$을 대입하면
$0=-\frac{1}{5}x^2+x+\frac{6}{5}$, $x^2-5x-6=0$
$(x+1)(x-6)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=6$
따라서 공이 땅에 떨어질 때까지 걸린 시간은 6초이다.

42 하루에 자동차 x대를 생산하였을 때의 이익금을 y만 원이라 하면
$y=-\frac{1}{50}x^2+24x-3000$
$=-\frac{1}{50}(x^2-1200x+360000-360000)-3000$
$=-\frac{1}{50}(x-600)^2-3000+7200$
$=-\frac{1}{50}(x-600)^2+4200$
따라서 $x=600$, 즉 하루에 자동차를 600대 생산할 때, 최대 4200만 원의 이익을 얻을 수 있다.

43 1개당 가격이 $10x$(x는 정수)원 변할 때, 붕어빵 한 개의 가격은 $(250+10x)$원이고, 이때 붕어빵은 $(200-10x)$개가 팔린다. 또, 붕어빵 $(200-10x)$개의 원가는 $150(200-10x)$원이다.

$\therefore$ (이익)$=$(총 판매 금액)$-$(원가)

$=(250+10x)(200-10x)-150(200-10x)$

$=50000-500x-100x^2-30000+1500x$

$=-100x^2+1000x+20000$

$=-100(x^2-10x+25-25)+20000$

$=-100(x-5)^2+20000+2500$

$=-100(x-5)^2+22500$

따라서 $x=5$, 즉 붕어빵 한 개의 가격을 $250+10\times5=300$(원)으로 할 때 하루 이익은 최대가 된다.

44 직사각형의 가로의 길이를 x cm라 하면 세로의 길이는 $(8-x)$ cm이고, 넓이를 y cm^{2}라 하면

$y=x(8-x)$

$=-x^2+8x$

$=-(x^2-8x+16-16)$

$=-(x-4)^2+16$

따라서 $x=4$일 때, 최댓값 16을 가지므로 가로의 길이가 4 cm일 때, 직사각형의 넓이는 최대 16 cm^{2}가 된다.

45 울타리의 가로의 길이가 $(28-2x)$ m이므로 울타리 안의 넓이를 y m^{2}라 하면

$y=(28-2x)x$

$=-2x^2+28x$

$=-2(x^2-14x+49-49)$

$=-2(x-7)^2+98$

따라서 $x=7$일 때, 울타리 안의 넓이는 최대 98 m^{2}가 된다.

46 정사각형 Q의 한 변의 길이를 x cm라 하면 정사각형 P의 한 변의 길이는 $(6-x)$ cm이다.

이때 두 정사각형의 넓이의 합을 y cm^{2}라 하면

$y=x^2+(6-x)^2$

$=2x^2-12x+36$

$=2(x^2-6x+9-9)+36$

$=2(x-3)^2+36-18$

$=2(x-3)^2+18$

따라서 $x=3$일 때, 두 정사각형의 넓이의 합의 최솟값은 18 cm^{2}가 된다.

47 정사각형 A의 한 변의 길이를 x cm라 하면 정사각형 B의 둘레의 길이는 $(40-4x)$ cm이므로 그 한 변의 길이는 $\dfrac{40-4x}{4}=10-x$ (cm)이다. 두 정사각형의 넓이의 합을 y cm^{2}라 하면

$y=x^2+(10-x)^2$

$=x^2+100-20x+x^2$

$=2x^2-20x+100$

$=2(x^2-10x+25-25)+100$

$=2(x-5)^2+100-50$

$=2(x-5)^2+50$

따라서 $x=5$, 즉 정사각형 A의 한 변의 길이가 5 cm일 때, 두 정사각형의 넓이의 합의 최솟값은 50 cm^{2}이다.

48 부채꼴의 반지름의 길이를 r cm, 호의 길이를 l cm라 하면 둘레의 길이가 28 cm이므로

$2r+l=28$ $\quad\therefore l=28-2r$ (cm)

부채꼴의 넓이를 y cm^{2}라 하면

$y=\dfrac{1}{2}\times r\times l$

$=\dfrac{1}{2}\times r\times(28-2r)$

$=-r^2+14r$

$=-(r^2-14r+49-49)$

$=-(r-7)^2+49$

따라서 $r=7$, 즉 반지름의 길이가 7 cm일 때, 부채꼴의 넓이의 최댓값은 49 cm^{2}이다.

49 원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하면 원 O′의 반지름의 길이는 $\dfrac{8-2r}{2}=4-r$ (cm)이다.

두 원 O, O′의 넓이의 합을 y cm^{2}라 하면

$y=\pi r^2+\pi(4-r)^2$

$=\pi r^2+\pi(r^2-8r+16)$

$=\pi(2r^2-8r+16)$

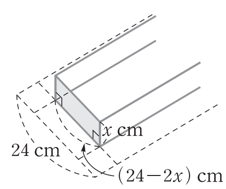
$=2\pi(r^2-4r+4-4)+16\pi$

$=2\pi(r-2)^2+16\pi-8\pi$

$=2\pi(r-2)^2+8\pi$

따라서 $r=2$, 즉 원 O의 반지름의 길이가 2 cm일 때, 두 원의 넓이의 합의 최솟값은 8π cm^{2}이다.

50 오른쪽 그림과 같이 너비가 24 cm인 종이의 양쪽을 각각 x cm씩 직각으로 접어올리면 직사각형 모양의 단면의 세로의 길이는 x cm이고 가로의 길이는 $(24-2x)$ cm이다.



이때 단면의 넓이를 y cm^{2}라 하면

$y=x(24-2x)$

$=-2x^2+24x$

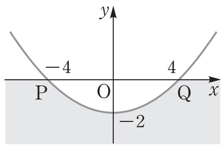
$=-2(x^2-12x+36-36)$

$=-2(x-6)^2+72$

이므로 $x=6$일 때 최댓값 72를 갖는다.

따라서 단면의 넓이가 최대가 되도록 하려면 높이를 6 cm로 해야 한다.

51 두 점 P, Q의 중점을 원점으로 하는 포물선을 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이 이차함수의 그래프의 식을 $y=ax^2-2$라 하면 이 그래프는 점 Q$(4,\ 0)$, P$(-4,\ 0)$을 지나므로 $x=4$, $y=0$을 대입하면

$0=16a-2 \qquad \therefore a=\frac{1}{8}$

따라서 이차함수의 식은 $y=\frac{1}{8}x^2-2$이다.

이때 연못의 양 끝 P, Q 지점에서 1 m 떨어진 지점은 $x=3$ 또는 $x=-3$인 지점이므로 $x=3$을 대입하면

$y=\frac{1}{8}\times 3^2-2=-\frac{7}{8}$

따라서 이 지점의 수심은 $\frac{7}{8}$ m이다.

52 새로 만들어진 직사각형의 두 변의 길이는 각각 $(9-a)$ cm, $(5+a)$ cm이므로 이 직사각형의 넓이를 y cm^{2}라 하면

$y=(9-a)(5+a)$
$\quad=-a^2+4a+45$
$\quad=-(a^2-4a+4-4)+45$
$\quad=-(a-2)^2+49$

따라서 $a=2$일 때, 새로 만들어진 직사각형의 넓이는 49 cm^{2}로 최대가 된다.

53 새로운 직사각형의 가로의 길이는 $(6+3x)$ cm, 세로의 길이는 $(6-x)$ cm이므로 넓이를 y cm^{2}라 하면

$y=(6+3x)(6-x)$
$\quad=-3x^2+12x+36$
$\quad=-3(x^2-4x+4-4)+36$
$\quad=-3(x-2)^2+36+12$
$\quad=-3(x-2)^2+48$

따라서 $x=2$일 때, 직사각형의 넓이의 최댓값은 48 cm^{2}이다.

54 가로의 길이는 매초 2 cm씩 늘어나므로 x초 후 직사각형의 가로의 길이는 $(10+2x)$ cm이고, 세로의 길이는 매초 1 cm씩 줄어들므로 x초 후 직사각형의 세로의 길이는 $(15-x)$ cm이다.

x초 후 직사각형 ABCD의 넓이를 y cm^{2}라 하면

$y=(10+2x)(15-x)$
$\quad=-2x^2+20x+150$
$\quad=-2(x^2-10x+25-25)+150$
$\quad=-2(x-5)^2+200$

따라서 5초 후에 직사각형의 넓이는 최대가 되고 그 때의 넓이는 200 cm^{2}이다.

55 점 P가 x초 동안 움직인 거리는 $\frac{3}{2}x$ cm이므로 x초 후의 $\overline{\text{PB}}$의 길이는 $\overline{\text{PB}}=9-\frac{3}{2}x$ (cm)

또, 점 Q가 x초 동안 움직인 거리는 x cm이므로 x초 후의 $\overline{\text{BQ}}$의 길이는 $\overline{\text{BQ}}=x$ cm

따라서 x초 후의 $\triangle$PBQ의 넓이는

$\triangle\text{PBQ}=\frac{1}{2}\times\overline{\text{PB}}\times\overline{\text{BQ}}$
$\quad=\frac{1}{2}\times\left(9-\frac{3}{2}x\right)\times x$
$\quad=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x$
$\quad=-\frac{3}{4}(x^2-6x+9-9)$
$\quad=-\frac{3}{4}(x-3)^2+\frac{27}{4}$

이므로 출발한 지 3초 후에 $\triangle$PBQ의 넓이는 최대 $\frac{27}{4}$ cm^{2}가 된다.

56 점 A의 x좌표를 t $(t>0)$라 하면 점 A의 좌표는 A$(t,\ -t+3)$이므로 $\overline{\text{OB}}=t$, $\overline{\text{AB}}=-t+3$이다.

$\square\text{ACOB}=\overline{\text{OB}}\times\overline{\text{AB}}$
$\quad=t(-t+3)$
$\quad=-t^2+3t$
$\quad=-\left(t^2-3t+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)$
$\quad=-\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

이므로 $t=\frac{3}{2}$일 때, 최댓값 $\frac{9}{4}$를 갖는다.

따라서 넓이가 최대가 될 때의 점 A의 좌표는 A$\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$이다.

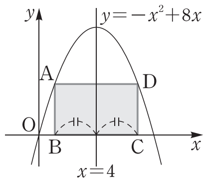
57 점 P의 x좌표를 t $(t<0)$라 하면 y좌표는 $2t+3$이므로 P$(t,\ 2t+3)$, A$(t,\ 0)$, B$(0,\ 2t+3)$

즉, $\overline{\text{PA}}=2t+3$, $\overline{\text{PB}}=-t$이므로

$\triangle\text{PAB}=\frac{1}{2}\times\overline{\text{PA}}\times\overline{\text{PB}}$
$\quad=\frac{1}{2}\times(2t+3)\times(-t)$
$\quad=-t^2-\frac{3}{2}t$
$\quad=-\left(t^2+\frac{3}{2}t+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}\right)$
$\quad=-\left(t+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{16}$

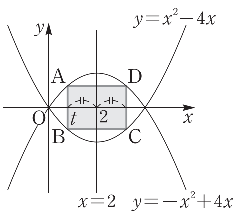
따라서 $t=-\frac{3}{4}$일 때, $\triangle$PAB의 넓이의 최댓값은 $\frac{9}{16}$이다.

58 $y=-x^2+8x$
$=-(x^2-8x)$
$=-(x^2-8x+16-16)$
$=-(x-4)^2+16$



점 A의 x좌표를 t $(0<t<4)$라 하면 y좌표는 $-t^2+8t$이므로
$A(t,\ -t^2+8t)$, $B(t,\ 0)$이다.
이때 이차함수 $y=-x^2+8x$의 그래프의 축의 방정식이 $x=4$이므로 점 C의 x좌표는
$4+(4-t)=8-t$
$\therefore C(8-t,\ 0)$
$\therefore \overline{AB}=\overline{DC}=-t^2+8t,$
$\overline{BC}=\overline{AD}=(8-t)-t=8-2t$
따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 l이라 하면
$l=2\times(\overline{AB}+\overline{BC})$
$=2\{(-t^2+8t)+(8-2t)\}$
$=2(-t^2+6t+8)$
$=-2(t^2-6t+9-9)+16$
$=-2(t-3)^2+16+18$
$=-2(t-3)^2+34$
따라서 $t=3$일 때, □ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 34이다.

59 점 A의 x좌표를 t $(0<t<2)$라 하면
$A(t,\ -t^2+4t)$,
$B(t,\ t^2-4t)$



한편, $y=x^2-4x$와 $y=-x^2+4x$의 그래프의 축의 방정식이 $x=2$이고, 두 점 A, B의 x좌표가 t이므로 두 점 C, D의 x좌표는
$2+(2-t)=4-t$
$\therefore \overline{AB}=\overline{DC}=-t^2+4t-(t^2-4t)=-2t^2+8t,$
$\overline{AD}=\overline{BC}=4-t-t=4-2t$
따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이 l은
$l=2\times(\overline{AB}+\overline{AD})$
$=2\{(-2t^2+8t)+(4-2t)\}$
$=2(-2t^2+6t+4)$
$=-4t^2+12t+8$
$=-4\left(t^2-3t+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)+8$
$=-4\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+8+9$
$=-4\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+17$
이므로 $t=\frac{3}{2}$일 때, l의 최댓값은 17이다.

단원 종합 문제

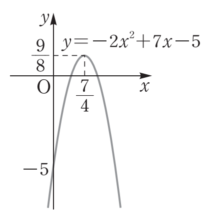
본문 158~162쪽

01 ①–ㄴ, ②–ㄹ, ③–ㅁ, ④–ㄷ, ⑤–ㄱ				**02** ①
03 ③, ④	**04** ③	**05** ①	**06** ③	**07** ②
08 ④	**09** 63	**10** ③	**11** (2, 7)	**12** ①
13 ①	**14** ⑤	**15** ④	**16** ⑤	**17** ⑤
18 5	**19** ③	**20** ①	**21** ④	**22** 17
23 ④	**24** $-\frac{3}{2}$	**25** 16	**26** 25 cm²	
27 $\frac{25}{4}$, $t=-\frac{5}{2}$		**28** ⑤	**29** 64	**30** 16

01 주어진 그래프에서 ①, ②, ③은 아래로 볼록하므로 x^2의 계수가 양수이다.
따라서 ㄴ, ㄹ, ㅁ의 그래프이고, x^2의 계수의 절댓값이 클수록 폭이 좁아지므로 ①–ㄴ, ②–ㄹ, ③–ㅁ이다.
또, ④, ⑤는 위로 볼록하므로 x^2의 계수가 음수이다.
따라서 ㄱ, ㄷ의 그래프이고, x^2의 계수의 절댓값이 클수록 폭이 좁아지므로 ④–ㄷ, ⑤–ㄱ이다.

02 $y=2ax^2$의 그래프가 위로 볼록하므로
$2a<0$, 즉 $a<0$
$y=2ax^2$의 그래프는 $y=-\frac{1}{3}x^2$의 그래프보다 폭이 좁고, $y=-4x^2$의 그래프보다 폭이 넓으므로 $2a$의 절댓값은 $-\frac{1}{3}$의 절댓값보다 크고 -4의 절댓값보다 작다.
즉, $-4<2a<-\frac{1}{3}$
$\therefore -2<a<-\frac{1}{6}$
따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ①이다.

03 $y=-2x^2+7x-5$
$=-2\left(x^2-\frac{7}{2}x+\frac{49}{16}-\frac{49}{16}\right)-5$
$=-2\left(x-\frac{7}{4}\right)^2-5+\frac{49}{8}$
$=-2\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$
에서 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{7}{4},\ \frac{9}{8}\right)$이고, y절편은 -5이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① 축의 방정식은 $x=\frac{7}{4}$이다.
② x축과 두 점에서 만난다.
⑤ $x=\frac{7}{4}$에서 최댓값 $\frac{9}{8}$를 갖는다.
따라서 옳은 것은 ③, ④이다.

04 $y=ax^2-8ax+a^2+6a+19$
$=a(x^2-8x+16-16)+a^2+6a+19$
$=a(x-4)^2+a^2-10a+19$
이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(4,\ -6)$이므로
$a^2-10a+19=-6$, $a^2-10a+25=0$
$(a-5)^2=0$ $\quad\therefore a=5$

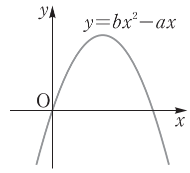
다른풀이 이차함수 $y=ax^2-8ax+a^2+6a+19$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(4,\ -6)$이므로 이 식을
$y=a(x-4)^2-6$으로 놓을 수 있다.
따라서 $y=a(x-4)^2-6=ax^2-8ax+16a-6$에서
$a^2+6a+19=16a-6$, $a^2-10a+25=0$
$(a-5)^2=0$ $\quad\therefore a=5$

05 $y=x^2-2ax+b$
$=(x^2-2ax+a^2-a^2)+b$
$=(x-a)^2-a^2+b$
이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ -8)$이므로
$a=-3$, $-a^2+b=-8$
$\therefore a=-3$, $b=a^2-8=(-3)^2-8=1$
따라서 주어진 이차함수는 $y=x^2+6x+1$이고, 점 $(-2,\ c)$를 지나므로 이 식에 $x=-2$, $y=c$를 대입하면
$c=(-2)^2+6\times(-2)+1=-7$

다른풀이 $a-b-c=-3-1-(-7)=3$
$y=x^2-2ax+b$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ -8)$이므로 이 식을 $y=(x+3)^2-8$로 놓으면
$y=(x+3)^2-8=x^2+6x+1$에서
$-2a=6$, $b=1$
$\therefore a=-3$, $b=1$
또, 이 이차함수 $y=x^2+6x+1$의 그래프가 점 $(-2,\ c)$를 지나므로 이 식에 $x=-2$, $y=c$를 대입하면
$c=(-2)^2+6\times(-2)+1=-7$
$\therefore a-b-c=-3-1-(-7)=3$

06 주어진 이차함수의 그래프는 위로 볼록하므로 $a<0$
꼭짓점의 좌표가 $(-p,\ q)$이고, 이것이 제 1 사분면에 있으므로
$-p>0$, $q>0$
$\therefore a<0$, $p<0$, $q>0$

07 $y=ax-b$의 그래프의 기울기가 음수이므로 $a<0$
y절편이 0보다 크므로 $-b>0$, 즉 $b<0$
따라서 이차함수 $y=bx^2-ax$의 그래프는 이차항의 계수가 음수이므로 위로 볼록한 포물선이다.
또, $-a>0$에서 이차항의 계수와 일차항의 계수의 부호가 다르므로 대칭축은 y축의 오른쪽에 위치하며, y절편이 0이므로 원점을 지난다.
따라서 $y=bx^2-ax$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 제 2 사분면을 지나지 않는다.



08 꼭짓점의 좌표가 $(-6,\ 9)$이므로 구하는 이차함수의 식을 $y=a(x+6)^2+9$로 놓을 수 있다. 이 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 이 식에 $x=0$, $y=1$을 대입하면
$1=a(0+6)^2+9$, $36a=-8$
$\therefore a=-\frac{2}{9}$
따라서 $y=-\frac{2}{9}(x+6)^2+9$이고, 이 이차함수의 그래프가 점 $(3,\ k)$를 지나므로 이 식에 $x=3$, $y=k$를 대입하면 $k=-\frac{2}{9}(3+6)^2+9=-18+9=-9$

09 축의 방정식이 $x=-2$이므로 주어진 이차함수의 식을 $y=a(x+2)^2+q$로 놓을 수 있다. 이 그래프가 두 점 $\left(-3,\ \frac{5}{2}\right)$, $(0,\ 7)$을 지나므로 각 점의 좌표를 대입하면
$\frac{5}{2}=a(-3+2)^2+q$에서
$a+q=\frac{5}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$7=a(0+2)^2+q$에서
$4a+q=7$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=\frac{3}{2}$, $q=1$
따라서 구하는 이차함수의 식은
$y=\frac{3}{2}(x+2)^2+1$, 즉 $y=\frac{3}{2}x^2+6x+7$
이므로 $a=\frac{3}{2}$, $b=6$, $c=7$
$\therefore abc=\frac{3}{2}\times6\times7=63$

10 $y=-x^2+px+q$의 그래프가 x축과 두 점 $(1,\ 0)$, $(9,\ 0)$에서 만나므로 이 이차함수의 식은
$y=-(x-1)(x-9)$, 즉 $y=-x^2+10x-9$
이 그래프가 점 $(2,\ k)$를 지나므로 이 식에 $x=2$, $y=k$를 대입하면
$k=-2^2+10\times2-9=7$

11 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 세 점 $(-3,\ 5)$, $(0,\ 8)$, $(4,\ -16)$을 지나므로 각 점의 좌표를 대입하면

$9a-3b+c=5$ …… ㉠

$c=8$ …… ㉡

$16a+4b+c=-16$ …… ㉢

㉡을 ㉠, ㉢에 각각 대입하면

$9a-3b+8=5$에서

$3a-b=-1$ …… ㉣

$16a+4b+8=-16$에서

$4a+b=-6$ …… ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=-2$

$\therefore y=bx^2+cx+a$

$=-2x^2+8x-1$

$=-2(x^2-4x+4-4)-1$

$=-2(x-2)^2-1+8$

$=-2(x-2)^2+7$

따라서 이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 7)$이다.

12 $y=-x^2+4x+1$

$=-(x^2-4x+4-4)+1$

$=-(x-2)^2+1+4$

$=-(x-2)^2+5$

의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-(x-2-m)^2+5+n$

이 그래프가

$y=-x^2+6x-3$

$=-(x^2-6x+9-9)-3$

$=-(x-3)^2-3+9$

$=-(x-3)^2+6$

의 그래프와 일치하므로

$-2-m=-3,\ 5+n=6$

따라서 $m=1,\ n=1$이므로

$5m-3n=5-3=2$

13 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2+a$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 10만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{1}{2}(x+4)^2+a+10$

$=\frac{1}{2}x^2+4x+a+18$

이것이 $y=bx^2+4x+19$와 같으므로

$b=\frac{1}{2},\ a+18=19$

따라서 $a=1,\ b=\frac{1}{2}$이므로

$2ab=2\times1\times\frac{1}{2}=1$

14 $y=-(x+3)^2-5$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 x 대신 $-x$를 대입하면

$y=-(-x+3)^2-5$

즉, $y=-(x-3)^2-5$

15 $y=\frac{1}{4}x^2-x+3$

$=\frac{1}{4}(x^2-4x+4-4)+3$

$=\frac{1}{4}(x-2)^2+3-1$

$=\frac{1}{4}(x-2)^2+2$

이므로 $x=2$일 때, 최솟값 2를 갖는다.

① $y=5(x+1)^2+3$은 $x=-1$일 때, 최솟값 3을 갖는다.

② $y=-2x^2+12x-16$

$=-2(x^2-6x+9-9)-16$

$=-2(x-3)^2-16+18$

$=-2(x-3)^2+2$

에서 $x=3$일 때, 최댓값 2를 갖는다.

③ $y=\frac{1}{2}x^2+3$은 $x=0$일 때, 최솟값 3을 갖는다.

④ $y=3x^2-6x+5$

$=3(x^2-2x+1-1)+5$

$=3(x-1)^2+5-3$

$=3(x-1)^2+2$

에서 $x=1$일 때, 최솟값 2를 갖는다.

⑤ $y=\frac{1}{4}x^2-x+2$

$=\frac{1}{4}(x^2-4x+4-4)+2$

$=\frac{1}{4}(x-2)^2+2-1$

$=\frac{1}{4}(x-2)^2+1$

에서 $x=2$일 때, 최솟값 1을 갖는다.

따라서 주어진 이차함수와 최솟값이 같은 이차함수는 ④이다.

16 주어진 이차함수의 y의 값의 범위를 각각 구하면

① $y=-\frac{3}{2}x^2+6$에서 최댓값이 6이므로

y의 값의 범위는 $y\le6$이다.

② $y=-4x^2+6x$
$=-4\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}\right)$
$=-4\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{4}$
에서 최댓값이 $\frac{9}{4}$이므로 y의 값의 범위는 $y\le\frac{9}{4}$이다.

③ $y=3x^2-12x+9$
$=3(x^2-4x+4-4)+9$
$=3(x-2)^2+9-12$
$=3(x-2)^2-3$
에서 최솟값이 -3이므로 y의 값의 범위는 $y\ge-3$이다.

④ $y=2(x-3)^2+4$에서 최솟값이 4이므로
y의 값의 범위는 $y\ge4$이다.

⑤ $y=-x^2+6x+7$
$=-(x^2-6x+9-9)+7$
$=-(x-3)^2+7+9$
$=-(x-3)^2+16$
에서 최댓값이 16이므로 y의 값의 범위는 $y\le16$이다.

따라서 이차함수와 그 y의 값의 범위가 바르게 짝지어진 것은 ⑤이다.

17 $y=\frac{1}{2}x^2-x+k$
$=\frac{1}{2}(x^2-2x+1-1)+k$
$=\frac{1}{2}(x-1)^2+k-\frac{1}{2}$
에서 $x=1$일 때, 최솟값 $k-\frac{1}{2}$을 가지므로
$k-\frac{1}{2}=2$ $\quad\therefore k=\frac{5}{2}$
따라서 주어진 이차함수는 $y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2}$이므로 이 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표는 $\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$이다.

18 이차함수 $y=-4x^2+px+q$가 $x=2$일 때, 최댓값 5를 가지므로 이차함수의 식은
$y=-4(x-2)^2+5=-4x^2+16x-11$
따라서 $p=16$, $q=-11$이므로
$p+q=16+(-11)=5$

19 $y=5x^2-10ax-20a+7$
$=5(x^2-2ax+a^2-a^2)-20a+7$
$=5(x-a)^2-20a+7-5a^2$
에서 $x=a$일 때, 최솟값 $-5a^2-20a+7$을 가지므로
$m=-5a^2-20a+7$
$=-5(a^2+4a+4-4)+7$
$=-5(a+2)^2+7+20$
$=-5(a+2)^2+27$
따라서 m은 $a=-2$일 때, 최댓값 27을 갖는다.

20 $y=-2x^2+4kx-k$
$=-2(x^2-2kx+k^2-k^2)-k$
$=-2(x-k)^2-k+2k^2$
에서 $x=k$일 때, 최댓값 $-k+2k^2$을 가지므로
$M=2k^2-k$
$=2\left(k^2-\frac{1}{2}k+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)$
$=2\left(k-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$
따라서 M은 $k=\frac{1}{4}$일 때, 최솟값 $-\frac{1}{8}$을 갖는다.

21 합이 10인 두 수를 x, $10-x$라 하고 두 수의 제곱의 합을 y라 하면
$y=x^2+(10-x)^2$
$=x^2+x^2-20x+100$
$=2x^2-20x+100$
$=2(x^2-10x+25-25)+100$
$=2(x-5)^2+100-50$
$=2(x-5)^2+50$
따라서 두 수가 5, 5일 때, 두 수의 제곱의 합의 최솟값은 50이다.

22 구하는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$라 하면
(가) $y=3x^2$의 그래프와 폭이 같고, 최댓값을 가지므로
$a<0$ $\quad\therefore a=-3$
(나) y절편이 5이므로 $c=5$
(다) (가), (나)에서 $y=-3x^2+bx+5$이고, 점 $(1,\ 14)$를 지나므로
$14=-3\times1^2+b\times1+5$ $\quad\therefore b=12$
따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=-3x^2+12x+5$이고 $y=-3(x-2)^2+17$에서 최댓값은 17이다.

23 $y=3x^2-14x-5$에 $y=0$을 대입하면
$3x^2-14x-5=0$, $(x-5)(3x+1)=0$
$\therefore x=5$ 또는 $x=-\frac{1}{3}$
$\therefore p=5$, $q=-\frac{1}{3}$

또, $y=3x^2-14x-5$에 $x=0$을 대입하면

$y=-5$　　$\therefore r=-5$

$\therefore \dfrac{3pq}{r}=\dfrac{3\times5\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)}{-5}=1$

24 이차함수 $y=-2x^2+kx-2-k$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -3이므로 이 그래프는 점 $(-3, 0)$을 지난다. 따라서 $x=-3$, $y=0$을 대입하면

$0=-2\times(-3)^2+k\times(-3)-2-k$

$4k=-20$　　$\therefore k=-5$

즉, 주어진 이차함수는 $y=-2x^2-5x+3$이므로 이 식에 $y=0$을 대입하면

$-2x^2-5x+3=0$, $2x^2+5x-3=0$

$(2x-1)(x+3)=0$

$\therefore x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=-3$

따라서 x축과 만나는 다른 한 점의 x좌표 $a=\dfrac{1}{2}$

또, $y=-2x^2-5x+3$의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는 $x=0$을 대입하면 $y=3$

$\therefore b=3$

$\therefore a+b+k=\dfrac{1}{2}+3+(-5)=-\dfrac{3}{2}$

25 $y=-x^2+mx+n$의 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표가 $(0, 24)$이므로 $x=0$, $y=24$를 대입하면

$n=24$

또, x축과 만나는 점의 좌표가 $(4, 0)$이므로 $x=4$, $y=0$, $n=24$를 대입하면

$0=-4^2+4m+24$, $4m=-8$

$\therefore m=-2$

따라서 주어진 이차함수의 식은

$y=-x^2-2x+24$

이 이차함수의 식에 $y=0$을 대입하면

$-x^2-2x+24=0$, $x^2+2x-24=0$

$(x+6)(x-4)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=4$

따라서 x축과 만나는 다른 한 점의 좌표는 $(-6, 0)$이므로 $k=-6$

$\therefore k+m+n=-6+(-2)+24=16$

26 $\overline{DF}=\overline{EC}=x$ cm라 하면 $\overline{BE}=(10-x)$ cm이고

△DBE는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{BE}=\overline{DE}=(10-x)$ cm이다.

□DECF의 넓이를 y cm^{2}라 하면

$y=x(10-x)$

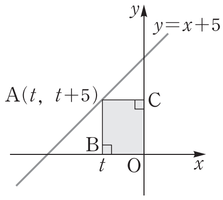
$=-x^2+10x$

$=-(x^2-10x+25-25)$

$=-(x-5)^2+25$

따라서 $x=5$일 때, □DECF의 넓이의 최댓값은 25 cm^{2}이다.

27 점 A의 x좌표가 t이면 y좌표는 $t+5$이므로 $\overline{AB}=t+5$



이때 $t<0$이므로 $\overline{BO}=-t$

□ABOC

$=\overline{BO}\times\overline{AB}$

$=-t(t+5)$

$=-t^2-5t$

$=-\left(t^2+5t+\dfrac{25}{4}-\dfrac{25}{4}\right)$

$=-\left(t+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{25}{4}$

따라서 $t=-\dfrac{5}{2}$일 때, □ABOC의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{25}{4}$이다.

28 점 P의 x좌표를 t $(t>0)$라 하면

$P(t, -t+6)$, $Q(t, 0)$이므로

$\overline{OQ}=t$, $\overline{PQ}=-t+6$

$\triangle POQ=\dfrac{1}{2}\times\overline{OQ}\times\overline{PQ}$

$=\dfrac{1}{2}\times t\times(-t+6)$

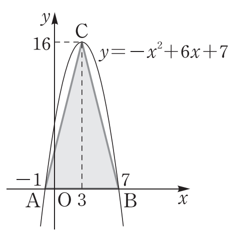
$=-\dfrac{1}{2}t^2+3t$

$=-\dfrac{1}{2}(t^2-6t+9-9)$

$=-\dfrac{1}{2}(t-3)^2+\dfrac{9}{2}$

따라서 $t=3$일 때, △POQ의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{9}{2}$이다.

29 $y=-x^2+6x+7$



$=-(x^2-6x+9-9)+7$

$=-(x-3)^2+7+9$

$=-(x-3)^2+16$

에서 꼭짓점의 좌표는 $C(3, 16)$이다.

또, $y=-x^2+6x+7$에 $y=0$을 대입하면

$-x^2+6x+7=0$, $x^2-6x-7=0$

$(x+1)(x-7)=0$　　$\therefore x=-1$ 또는 $x=7$

따라서 $A(-1, 0)$, $B(7, 0)$이므로

$\overline{AB}=7-(-1)=8$

$\therefore \triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times8\times16=64$

30 $y=2x^2-4x+k$

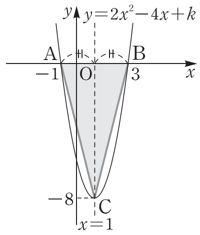
$=2(x^2-2x+1-1)+k$

$=2(x-1)^2+k-2$

이므로 이차함수 $y=2x^2-4x+k$의 그래프의 축의 방정식은 $x=1$이다.

그런데 주어진 조건에서 $\overline{AB}=4$ 이므로 두 점 A, B의 좌표는

A$(-1,\ 0)$, B$(3,\ 0)$



따라서 $y=2x^2-4x+k$에 점 A$(-1,\ 0)$의 좌표를 대입하면

$0=2\times(-1)^2-4\times(-1)+k$

$2+4+k=0 \qquad \therefore k=-6$

따라서 주어진 이차함수의 식은

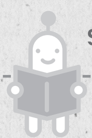
$y=2(x-1)^2+k-2=2(x-1)^2-8$

이므로 꼭짓점 C의 y좌표는 -8이다.

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times4\times8=16$

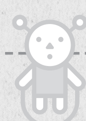

Ha! Ha! Ha!


Smile～



Some day...

Have a nice day



Ha! Ha! Ha!

Smile~