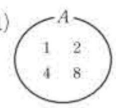
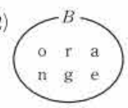
Solution

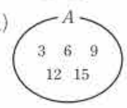
빠른 정답 찾기 **Lecture Book**

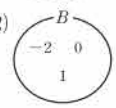
01 집합의 뜻과 표현

6쪽 **Lecture 01** **1-1** (1) ○ (2) × (3) × (4) ○
1-2 (1) 2, 4, 6 (3) 봄, 여름, 가을, 겨울
2-1 (1) $\in$ (2) $\notin$ (3) $\in$ (4) $\notin$ **2-2** (1) $\in$ (2) $\notin$ (3) $\in$ (4) $\notin$

7쪽 **Lecture 02** **1-1** (1) $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ (2) $\{x \mid x$는 5의 양의 배수$\}$
1-2 (1) $\{s, m, i, l, e\}$ (2) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (3) $\{x \mid x$는 12의 양의 약수$\}$
(4) $\{x \mid x$는 두 자리 자연수$\}$
2-1 (1) 

(2) 

2-2 (1) 

(2) 

8쪽 **Lecture 03** **1-1** (1) 유 (2) 무 (3) 무 (4) 유
1-2 (1) A, C, D (2) B (3) C **2-1** (1) 5 (2) 20
2-2 (1) 4 (2) 0

9쪽 **유형 Q+Q** **01** ⑤ **02** 3개 **03** ④
04 ㄱ, ㄷ, ㄹ **05** ④ **06** ④ **07** ③ **08** ④
09 8 **10** ④ **11** $X=\{0, 2, 4, 6\}$ **12** ①

11쪽 **Lecture 04** **1-1** (1) $\subset$ (2) $\not\subset$ (3) $\subset$ (4) $\subset$
1-2 (1) $X \subset Y$ (2) $Y \subset X$ (3) $X \subset Y$
2-1 (1) $\varnothing$ (2) $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ (3) $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ (4) $\{a, b, c\}$
2-2 (1) $\varnothing, \{-1\}, \{1\}, \{-1, 1\}$
(2) $\varnothing, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}, \{2, 4, 6\}$

12쪽 **Lecture 05** **1-1** (1) $A=B$ (2) $A \neq B$
1-2 $a=-2, b=3$
2-1 (1) $\varnothing, \{a\}, \{b\}$ (2) $\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}$
3-1 (1) 32 (2) 31 (3) 16 (4) 8

13쪽 **유형 Q+Q** **01** ⑤ **02** ③ **03** ⑤
04 ㄱ, ㄷ, ㄹ **05** 4 **06** ④
07 $\varnothing, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{3, 4, 5\}$
08 $\{11, 22\}, \{11, 33\}, \{11, 44\}, \{22, 33\}, \{22, 44\}, \{33, 44\}$
09 ⑤ **10** 1 **11** ④ **12** ③ **13** 16 **14** ③
15 ⑤ **16** 11 **17** ⑤ **18** 48

16쪽 **중단원 마무리** **01** ③ **02** ⑤ **03** ④ **04** ④
05 3 **06** 10 **07** 8 **08** ⑤ **09** ④ **10** 7
11 −5 **12** ② **13** 38 **14** ⑤ **15** ⑤ **16** 63
17 ② **18** 8 **19** ② **20** ①

02 집합의 연산

20쪽 **Lecture 06** **1-1** (1) $A \cup B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A \cap B=\{1, 5\}$
(2) $A \cup B=\{3, 6, 9, \cdots, 60\}$, $A \cap B=\{6, 12, 18, \cdots, 60\}$
2-1 (1) 서로소가 아니다. (2) 서로소이다.
3-1 (1) $\{a, b, c, d, e, f\}$ (2) $\{-1\}$

21쪽 **Lecture 07** **1-1** (1) $\{1, 4, 5, 7, 8, 10\}$ (2) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$
1-2 (1) $\{b, e, f\}$ (2) $\{a, b, d, f\}$ (3) $\{b, f\}$ (4) $\{a, b, d, e, f\}$
2-1 (1) $A-B=\{3, 5, 7\}$, $B-A=\{8\}$
(2) $A-B=\varnothing$, $B-A=\{2, 6, 18\}$
2-2 $\{1, 2\}$

22쪽 **유형 Q+Q** **01** ⑤ **02** ④ **03** ④ **04** 22
05 $\{1, 3, 5, 7, 8\}$ **06** ③ **07** ③ **08** 42
09 $\{1, 3, 4, 5, 7\}$ **10** ② **11** ⑤ **12** 8

24쪽 **Lecture 08** **1-1** (1) $\varnothing$ (2) U (3) A (4) A
1-2 ㄱ, ㄴ **2-1** (1) $\{3, 7, 9\}$ (2) $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$
2-2 (1) U (2) $\varnothing$

25쪽 **Lecture 09** **1-1** (1) 7 (2) 13 **1-2** 5
2-1 (1) 26 (2) 17 (3) 9 (4) 18 **2-2** 19

26쪽 유형 Q+Q 01 ③ 02 ④ 03 ⑤ 04 ㄷ, ㄹ
05 8 06 ⑤ 07 6 08 {2, 4, 6, 9} 09 ①
10 ㄴ, ㄷ, ㄹ 11 ③ 12 15 13 −1 14 6
15 ③ 16 ① 17 9 18 ② 19 ② 20 8

29쪽 중단원 마무리 01 ④ 02 ⑤ 03 ⑤ 04 ①
05 11 06 ② 07 ④ 08 ③ 09 ④ 10 ②
11 64 12 ③ 13 ⑤ 14 ⑤ 15 6 16 ⑤
17 7 18 26 19 ① 20 ⑤

03 명제

32쪽 Lecture 10 **1-1** (1) ○ (2) × (3) ○ (4) ×
1-2 (1) 참 (2) 거짓 (3) 거짓 (4) 참
2-1 (1) 명제 (2) 조건 (3) 명제 (4) 조건
2-2 (1) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ (2) $\{1, 2, 3, 4\}$

33쪽 Lecture 11 **1-1** (1) -1은 자연수가 아니다. (참)
(2) 14는 7의 배수가 아니다. (거짓)
(3) $\varnothing \not\subset \{1, 2\}$ (거짓)
(4) $2x-6 \neq 2(x+3)$ (참)
1-2 (1) $\{4, 5\}$ (2) $\{1, 3, 4, 6\}$
2-1 (1) x는 소수도 아니고 합성수도 아니다. (2) $x=0$ 또는 $y=0$
(3) $x<-1$ 또는 $x>4$ (4) $-3 \le x \le 6$
2-2 (1) $\{3, 5, 7\}$ (2) $\{1, 9\}$

34쪽 Lecture 12 **1-1** (1) p: $x=-1$, q: $|x|=1$
(2) $P=\{-1\}$, $Q=\{-1, 1\}$ (3) $P \subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.
1-2 (1) 참 (2) 거짓 **2-1** (1) 참 (2) 거짓 (3) 참 (4) 거짓
2-2 (1) 어떤 실수 x에 대하여 $x^2<0$이다. (거짓)
(2) 모든 실수 x에 대하여 $x^2 \neq -1$이다. (참)

35쪽 유형 Q+Q 01 ③ 02 ㄴ, ㄹ 03 ② 04 ④
05 ③ 06 {6, 12, 18} 07 ④ 08 ㄱ, ㄴ 09 ④
10 ⑤ 11 ③ 12 ② 13 ② 14 ① 15 ⑤
16 ㄴ, ㄷ 17 ③

38쪽 Lecture 13 **1-1** (1) 역: a^2이 짝수이면 a는 짝수이다.,
대우: a^2이 짝수가 아니면 a는 짝수가 아니다.
(2) 역: $x^2=y^2$이면 $x=y$이다., 대우: $x^2 \neq y^2$이면 $x \neq y$이다.
2-1 (1) $a \le 0$이고 $b \le 0$이면 $a+b \le 0$이다. (참)
(2) 두 삼각형이 합동이 아니면 두 삼각형의 넓이는 같지 않다. (거짓)
3-1 (1) q (2) $\sim r$

39쪽 Lecture 14 **1-1** (1) 필요조건 (2) 충분조건 (3) 필요충분조건
1-2 (1) 충분조건 (2) 필요조건 (3) 필요충분조건 (4) 필요조건
1-3 (1) Q (2) P (3) $\varnothing$ (4) U

40쪽 유형 Q+Q 01 ④ 02 ㄴ 03 6 04 7
05 ② 06 ㄴ, ㄷ 07 ④ 08 ㄷ, ㄹ 09 ⑤ 10 ③
11 ②, ③ 12 4 13 8

42쪽 Lecture 15 **1-1** $x=0$ 또는 $y=0$이면 $xy=0$이다., $=$, $=$, 대우
1-2 풀이 26쪽 **2-1** $\ge$, $\ge$, $\ge$ **2-2** 풀이 26쪽

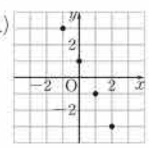
43쪽 Lecture 16 **1-1** $2\sqrt{ab}$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $\sqrt{b}$, b
1-2 풀이 27쪽 **2-1** (1) 2 (2) 8 **2-2** $-6 \le ax+by \le 6$

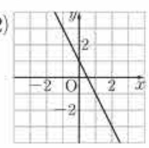
44쪽 유형 Q+Q 01 (가) n이 홀수이면 n^2도 홀수이다. (나) 1 (다) 홀수
02 풀이 27쪽 03 (가) 2 (나) 2 (다) 서로소
04 (가) 홀수 (나) $2k^2-2k+2l^2-2l+1$ (다) 짝수 05 (가) $ay-bx$ (나) $\frac{y}{b}$
06 ③ 07 ② 08 40 09 ③ 10 ④ 11 ③
12 ② 13 ① 14 ②

47쪽 중단원 마무리 01 ③ 02 ④ 03 현아 04 −1
05 3, 9, 15, 21, 27 06 ② 07 ⑤ 08 ② 09 ㄴ, ㄷ
10 ③ 11 ④ 12 4 13 ④ 14 ③ 15 ③
16 ㄷ, ㄹ 17 ① 18 8 19 ⑤ 20 ② 21 ①
22 200 m^2 23 36

04 함수

52쪽 **Lecture 17** **1-1** (1) 함수이다., 정의역: $\{a, b, c\}$, 공역: $\{d, e, f, g\}$, 치역: $\{d, e, g\}$
(2) 함수가 아니다.
(3) 함수이다., 정의역: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, 공역: $\{a, b, c\}$, 치역: $\{a, b, c\}$
1-2 (1) ○ (2) ×
1-3 (1) 정의역: 실수 전체의 집합, 치역: 실수 전체의 집합
(2) 정의역: $\{x|x\neq0$인 실수$\}$, 치역: $\{y|y\neq0$인 실수$\}$
(3) 정의역: 실수 전체의 집합, 치역: $\{y|y\geq-1$인 실수$\}$
(4) 정의역: 실수 전체의 집합, 치역: $\{y|y\geq0$인 실수$\}$

53쪽 **Lecture 18** **1-1** (1) 서로 같은 함수이다.
(2) 서로 같은 함수가 아니다.
1-2 (1) 서로 같은 함수이다. (2) 서로 같은 함수가 아니다.
2-1 (1) 

(2) 

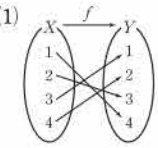
2-2 (1) × (2) ○ (3) ×

54쪽 **Lecture 19** **1-1** (1) ㄱ, ㄹ (2) ㄱ, ㄹ (3) ㄹ (4) ㄷ
1-2 (1) ㄱ, ㄴ (2) ㄱ, ㄴ (3) ㄱ (4) ㄷ

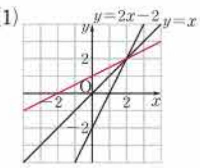
55쪽 **유형 Q+Q** **01** ④ **02** ㄱ, ㄴ, ㄹ **03** -3
04 ② **05** -2 **06** ③ **07** ⑤ **08** ㄱ **09** ㄱ, ㄹ
10 ④ **11** ④ **12** ㄴ **13** ③ **14** -3 **15** ㄱ, ㄷ
16 ① **17** ④ **18** 6

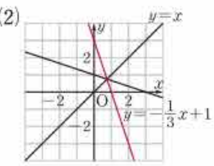
58쪽 **Lecture 20** **1-1** (1) 3 (2) 1 (3) a (4) c
1-2 (1) $(g\circ f)(x)=-3x-1$ (2) $(f\circ g)(x)=-3x+5$
(3) $(f\circ f)(x)=9x+8$ (4) $(g\circ g)(x)=x$
2-1 (1) $(g\circ f)(x)=4x^2-4x+5$, $(f\circ g)(x)=-2x^2-7$
(2) $(g\circ f)(x)\neq(f\circ g)(x)$
2-2 (1) $(h\circ(g\circ f))(x)=-4x^2-21$, $((h\circ g)\circ f)(x)=-4x^2-21$
(2) $(h\circ(g\circ f))(x)=((h\circ g)\circ f)(x)$

59쪽 **유형 Q+Q** **01** ② **02** 3 **03** ① **04** 3
05 -2 **06** ③ **07** ② **08** ④ **09** 5 **10** 3
11 ⑤ **12** 5

61쪽 **Lecture 21** **1-1** (1) 

(2) 7
1-2 (1) -2 (2) -1 **2-1** (1) $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ (2) $y=-\frac{1}{3}x+3$
2-2 (1) $y=3x+18$ (2) $y=-5x+10$

62쪽 **Lecture 22** **1-1** (1) d (2) 2 (3) a
1-2 (1) -5 (2) 9
2-1 (1) 

(2) 

2-2 $(-1, -1)$

63쪽 **유형 Q+Q** **01** ② **02** 5 **03** ⑤ **04** ㄴ
05 ③ **06** ② **07** -4 **08** -5 **09** 1 **10** ③
11 ③ **12** 8 **13** 12 **14** -5

65쪽 **중단원 마무리** **01** ④ **02** 11 **03** 4 **04** -2
05 ④ **06** ④ **07** 17 **08** ③ **09** 8 **10** ④
11 -5 **12** -24 **13** (1) $h(x)=-2x+6$ (2) $k(x)=-2x+3$
14 ④ **15** -12 **16** ② **17** ② **18** ④ **19** ③
20 -22 **21** ③

05 유리식과 유리함수

70쪽 **Lecture 23** **1-1** $\frac{2}{x^3}$, $\frac{4}{x(x-2)}$, $3x+\frac{1}{x^2}$
2-1 (1) $\frac{5}{x^3y^2}$, $\frac{3x}{x^3y^2}$ (2) $\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}$, $\frac{3(x+1)}{(x+1)(x-1)}$
(3) $\frac{(x+5)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, $\frac{(x-2)(x+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$
(4) $\frac{(x+1)(x-4)}{(x+3)(x-3)(x-4)}$, $\frac{(x+2)(x+3)}{(x+3)(x-3)(x-4)}$
2-2 (1) $\frac{5y^2}{z^2}$ (2) $\frac{x}{x-5}$ (3) $\frac{x-1}{x+3}$ (4) $\frac{x-3}{x^2-x+1}$

71쪽 Lecture 24 **1-1** (1) $\frac{4x-7}{(x+2)(x-3)}$ (2) $\frac{2x-3}{x(x-4)}$ (3) $\frac{3x+7}{x+4}$ (4) $\frac{-x+1}{(x+1)(x+3)}$

1-2 (1) $\frac{x+9}{(x+2)(x+4)}$ (2) $\frac{-3x+5}{(x-1)(x-2)}$

2-1 (1) $\frac{x(x+1)}{(x+3)(x-3)}$ (2) $\frac{x+1}{(x+2)^2}$ (3) $\frac{x-5}{x+3}$ (4) $\frac{1}{x(x-4)}$

2-2 (1) $\frac{x+1}{(x-1)^2}$ (2) $-\frac{(x+2)(x-2)}{(x+4)(x-1)}$

72쪽 Lecture 25 **1-1** (1) $\frac{5}{(x-3)(x+2)}$ (2) $\frac{-6x+2}{(x-1)(x+1)}$ (3) $\frac{9x-2}{(x+2)(x-2)}$ (4) $\frac{-2x+1}{x+1}$

2-1 (1) $\frac{1}{x+2}$ (2) $\frac{3}{x(x+3)}$ (3) $\frac{3}{(x+2)(x+5)}$

3-1 (1) $\frac{x+5}{x+4}$ (2) $\frac{1}{x+1}$ (3) $x+1$

73쪽 유형 Q+Q **01** $\frac{-x+3}{(x-1)(x^2+x+1)}$ **02** $\frac{1}{3x+2}$

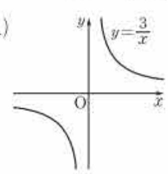
03 ② **04** -2 **05** ⑤ **06** ② **07** 6 **08** ④

09 $\frac{3x+2}{2x+1}$ **10** $-\frac{a}{b}$ **11** ③ **12** 49 **13** -1 **14** 6

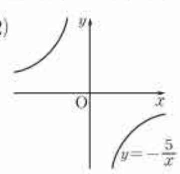
75쪽 Lecture 26 **1-1** (1) ㄱ, ㄷ (2) ㄴ, ㄹ

1-2 (1) $\{x|x\neq0$인 실수$\}$ (2) $\{x|x\neq-4$인 실수$\}$ (3) $\{x|x\neq-2,\ x\neq2$인 실수$\}$ (4) 실수 전체의 집합

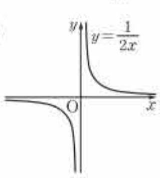
2-1 (1)



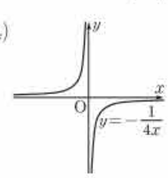
(2)



(3)



(4)

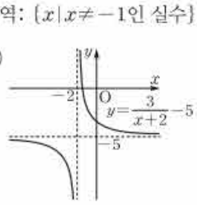


76쪽 Lecture 27 **1-1** (1) $y=\frac{1}{x+2}-4$ (2) $y=-\frac{3}{x-6}-5$

1-2 (1) 정의역: $\{x|x\neq3$인 실수$\}$, 치역: $\{y|y\neq7$인 실수$\}$

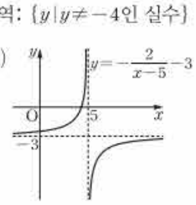
(2) 정의역: $\{x|x\neq-1$인 실수$\}$, 치역: $\{y|y\neq-4$인 실수$\}$

1-3 (1)



$x=-2,\ y=-5$

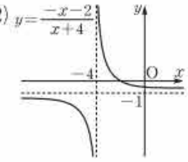
(2)



$x=5,\ y=-3$

2-1 (1) $y=\frac{2}{x+4}-1$

(2)



정의역: $\{x|x\neq-4$인 실수$\}$,
치역: $\{y|y\neq-1$인 실수$\}$

(3) $x=-4,\ y=-1$

77쪽 유형 Q+Q **01** ③ **02** ④ **03** 3 **04** ⑤

05 ③ **06** 1 **07** ③ **08** ① **09** 제4사분면

10 ① **11** 15 **12** -1 **13** ④ **14** ③ **15** -6

16 ④ **17** ⑤ **18** $1<m<9$ **19** 9 **20** ①

21 5 **22** ④ **23** ④ **24** -1

81쪽 중단원 마무리 **01** 1 **02** ③ **03** -7 **04** ②

05 ③ **06** $\frac{2}{5}$ **07** ④ **08** ① **09** 50 **10** ③

11 ④ **12** ㄴ, ㄷ **13** ② **14** ④ **15** 11 **16** 12

17 ① **18** 14 **19** $\frac{1}{2}$

06 무리식과 무리함수

84쪽 Lecture 28 **1-1** (1) ○ (2) × (3) × (4) ○

1-2 ㄱ, ㄷ **2-1** (1) $x\geq-5$ (2) $x>\frac{4}{7}$

2-2 (1) $-1\leq x\leq1$ (2) $x\geq-2$

85쪽 Lecture 29 **1-1** (1) $x+3$ (2) y (3) $-2x+4$ (4) 2

1-2 (1) $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ (2) $\sqrt{x}+1$ (3) $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+3}$ (4) $2x+1+2\sqrt{x(x+1)}$

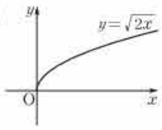
1-3 (1) $\frac{2\sqrt{x}}{x-y}$ (2) $-\frac{8\sqrt{x}}{x-4}$

86쪽 유형 Q+Q **01** $x\leq-\frac{1}{3}$ 또는 $x\geq\frac{1}{4}$ **02** ③ **03** ④

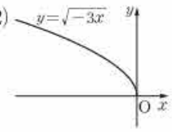
04 ④ **05** $2+2\sqrt{2}$ **06** $\frac{\sqrt{7}}{7}$ **07** $2\sqrt{6}$ **08** $4\sqrt{3}+4$

87쪽 **Lecture 30** **1-1** ㄱ, ㄷ, ㅁ, ㅂ

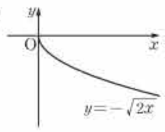
1-2 (1) $\{x|x\geq 4\}$ (2) $\{x|x\leq 2\}$ (3) $\{x|x\geq -5\}$ (4) $\left\{x\middle|x\leq\frac{7}{2}\right\}$

2-1 (1)


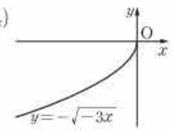
정의역: $\{x|x\geq 0\}$,
치역: $\{y|y\geq 0\}$

(2)


정의역: $\{x|x\leq 0\}$,
치역: $\{y|y\geq 0\}$

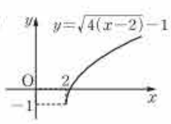
(3)


정의역: $\{x|x\geq 0\}$,
치역: $\{y|y\leq 0\}$

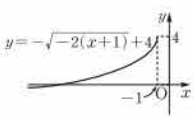
(4)


정의역: $\{x|x\leq 0\}$,
치역: $\{y|y\leq 0\}$

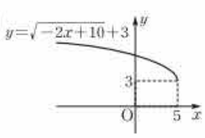
88쪽 **Lecture 31** **1-1** (1) $y=\sqrt{-2(x-3)}-4$
(2) $y=-\sqrt{5(x+2)}-3$

1-2 (1)


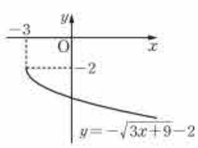
정의역: $\{x|x\geq 2\}$,
치역: $\{y|y\geq -1\}$

(2)


정의역: $\{x|x\leq -1\}$,
치역: $\{y|y\leq 4\}$

2-1 (1)


정의역: $\{x|x\leq 5\}$,
치역: $\{y|y\geq 3\}$

(2)


정의역: $\{x|x\geq -3\}$,
치역: $\{y|y\leq -2\}$

89쪽 **유형 Q+Q** **01** ③ **02** $\{y|y\leq 5\}$ **03** 10
04 2 **05** ② **06** ㄱ, ㄷ
07 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면 **08** ⑤ **09** ④
10 8 **11** ⑤ **12** ㄴ, ㄷ **13** ② **14** 9
15 $3\leq k<\frac{13}{4}$ **16** 7 **17** -24 **18** 4 **19** ①
20 14

92쪽 **중단원 마무리** **01** $-3<x\leq\frac{1}{4}$ **02** ④
03 $-2\sqrt{x-1}$ **04** 64 **05** ④ **06** ③ **07** 6
08 ㄴ, ㄷ **09** ① **10** ㄴ, ㄷ **11** -11 **12** ① **13** ①
14 ③ **15** 48 **16** ③ **17** ① **18** ③ **19** 66
20 $\sqrt{5}$

07 순열과 조합

96쪽 **Lecture 32** **1-1** 13 **1-2** 6 **2-1** 12 **2-2** 20

97쪽 **유형 Q+Q** **01** 10 **02** 23 **03** 7 **04** ②
05 ③ **06** 16 **07** ⑤ **08** 15 **09** ④ **10** ②
11 ⑤ **12** 18 **13** ② **14** 180

99쪽 **Lecture 33** **1-1** (1) 30 (2) 1 (3) 120 (4) 1
1-2 (1) $n=7$ (2) $n=4$ (3) $r=3$ (4) $r=1$ **2-1** 30 **2-2** 210

100쪽 **유형 Q+Q** **01** 5 **02** 3 **03** ② **04** 11
05 ① **06** 240 **07** ③ **08** ⑤ **09** 144 **10** ③
11 ② **12** 144 **13** ⑤ **14** 60 **15** ④ **16** 300
17 55 **18** ③ **19** 54

103쪽 **Lecture 34** **1-1** (1) 45 (2) 56 (3) 1 (4) 1
1-2 (1) $n=6$ (2) $r=2$ 또는 $r=6$ (3) $r=2$ (4) $r=4$
2-1 (1) 35 (2) 20 **2-2** 100

104쪽 **유형 Q+Q** **01** ④ **02** ③ **03** (가) $n-r$ (나) $r!$
04 (가) $n-r$ (나) r (다) $n!$ **05** 525 **06** ② **07** ①
08 84 **09** ② **10** ② **11** ⑤ **12** 2400 **13** 15
14 120 **15** ① **16** 18 **17** ③ **18** ①

107쪽 **중단원 마무리** **01** ③ **02** ④ **03** ⑤ **04** 96
05 18 **06** 31 **07** 130 **08** ④ **09** ⑤ **10** ⑤
11 72 **12** ③ **13** 576 **14** 23 **15** ⑤ **16** 45
17 ② **18** 70 **19** ② **20** 250 **21** ③ **22** ④

01 집합의 뜻과 표현

W 2쪽 01 집합과 원소

01 (1) × (2) ○ (3) ○ (4) × **02** (1) $\in$ (2) $\notin$ (3) $\in$ (4) $\notin$
03 (1) $\{y, e, l, o, w\}$ (2) $\{2, 3, 5, 7\}$
(3) $\{x | x$는 4의 양의 배수$\}$ (4) $\{x | x$는 $-5 \le x \le 0$인 정수$\}$
04 (1) 무 (2) 유 (3) 유 (4) 무 **05** (1) 6 (2) 2 **06** ⑤
07 ㄷ, ㄹ **08** ⑤ **09** ④ **10** ④ **11** ㄴ, ㄷ **12** ④
13 6 **14** ③ **15** 10 **16** ④ **17** 10 **18** 4
19 ③ **20** 8 **21** 46

W 5쪽 02 부분집합

01 (1) $A \subset B$ (2) $B \subset A$ (3) $A \subset B$
02 (1) $\varnothing$, $\{x\}$, $\{y\}$, $\{x, y\}$
(2) $\varnothing$, $\{1\}$, $\{5\}$, $\{25\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 25\}$, $\{5, 25\}$, $\{1, 5, 25\}$
03 (1) $A=B$ (2) $A=B$ (3) $A \ne B$ **04** (1) 16 (2) 15 (3) 4 (4) 8
05 ④ **06** ① **07** ② **08** ④ **09** ④ **10** ③
11 ④ **12** 2 **13** -3 **14** ③ **15** 3
16 $\varnothing$, $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{-1, 0\}$, $\{-1, 1\}$, $\{0, 1\}$, $\{-1, 0, 1\}$
17 ② **18** 6 **19** ⑤ **20** ① **21** $1+i$ **22** 14
23 ④ **24** ⑤ **25** 34 **26** ③ **27** 32 **28** ⑤
29 16 **30** ② **31** 8 **32** 64 **33** ③ **34** 48
35 ④ **36** 23

02 집합의 연산

W 10쪽 03 집합의 연산

01 (1) $A \cup B=\{1, 2, 3, 6, 8\}$, $A \cap B=\{2, 3\}$
(2) $A \cup B=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A \cap B=\{3, 4, 5\}$
02 (1) 서로소이다. (2) 서로소가 아니다. **03** $\{1, 5, 7\}$ **04** $\{d\}$
05 (1) $\{1, 2, 4, 6, 7\}$ (2) $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$
06 (1) $A-B=\{a, b, d\}$, $B-A=\varnothing$
(2) $A-B=\{2, 14\}$, $B-A=\{3, 21\}$
07 ⑤ **08** 24 **09** ⑤ **10** ② **11** ④ **12** ㄱ, ㄴ
13 ③ **14** 5 **15** $\{12, 14, 18\}$ **16** ⑤ **17** ③
18 11 **19** ④ **20** ③ **21** ⑤ **22** $\{3, 5, 8\}$
23 $\{b, c\}$ **24** 17 **25** 7 **26** ⑤ **27** 1 **28** ②

W 14쪽 04 집합의 연산의 성질

01 (1) A (2) $\varnothing$ (3) A (4) $\varnothing$ **02** (1) $\{4, 7\}$ (2) $\{1, 2, 4, 6, 7, 9\}$
03 (1) 4 (2) 21 (3) 13 (4) 5 **04** ④ **05** ② **06** ④
07 ⑤ **08** ③ **09** ③ **10** 8 **11** ③ **12** 4
13 6 **14** ⑤ **15** $\{2, 5, 7, 8\}$ **16** 22 **17** ③
18 ⑤ **19** ② **20** ④ **21** ㄱ, ㄷ **22** 21
23 $\{x | -2 \le x < 1\}$ **24** ⑤ **25** 4 **26** ② **27** ②
28 25 **29** 40 **30** ④ **31** 19 **32** 32 **33** ②
34 22 **35** ④

03 명제

W 19쪽 05 명제와 조건

01 (2) 거짓인 명제 (3) 참인 명제
02 (1) $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ (2) $\{-7, 7\}$ (3) $\{4\}$
03 (1) 4와 6은 서로소가 아니다. (참) (2) $\sqrt{5}$는 무리수이다. (참)
(3) 정사각형은 마름모가 아니다. (거짓) (4) $2(x+5)-1 \ne 2x+9$ (거짓)
04 (1) $\{3, 5, 6, 7\}$ (2) $\{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ (3) $\{1, 2, 8\}$
05 (1) 참 (2) 거짓 (3) 참 **06** (1) 거짓 (2) 참
07 (1) 어떤 실수 x에 대하여 $\sqrt{x}<0$이다. (거짓)
(2) 모든 실수 x에 대하여 $x^2+3 \ne 0$이다. (참)
08 ② **09** ⑤ **10** ③ **11** ⑤ **12** ④ **13** ②
14 $\{2, 3, 4\}$ **15** 2 **16** ② **17** ⑤ **18** ④
19 ㄱ **20** ②, ④ **21** 3 **22** ① **23** ① **24** ②
25 ③ **26** ⑤ **27** ④ **28** -1 **29** ④ **30** ④
31 $-4 \le k \le 4$

W 24쪽 06 명제 사이의 관계

01 (1) 역: $x^2=25$이면 $x=5$이다. (거짓)
대우: $x^2 \ne 25$이면 $x \ne 5$이다. (참)
(2) 역: $x>1$이면 $x>0$이다. (참)
대우: $x \le 1$이면 $x \le 0$이다. (거짓)
(3) 역: $x=0$ 또는 $y=0$이면 $x+y=0$이다. (거짓)
대우: $x \ne 0$이고 $y \ne 0$이면 $x+y \ne 0$이다. (거짓)
02 (1) × (2) ○ (3) ○ **03** (1) 필요조건 (2) 충분조건 (3) 필요충분조건
04 (1) Q (2) P (3) U (4) $\varnothing$ **05** ② **06** ② **07** 15
08 ② **09** $k \le -2$ **10** ⑤ **11** ㄴ, ㄷ, ㄹ **12** ③
13 ④ **14** 필요조건 **15** ③ **16** ④ **17** 충분조건 **18** ④
19 ① **20** (1) $-1 \le a < 4$, $b < -1$ (2) $a \ge 4$, $-1 \le b < 4$ **21** 2

W 27쪽 **07 여러 가지 증명법**

01 $a\neq0$ 또는 $b\neq0$이면 $a^2+b^2\neq0$이다., $\neq$, $\neq$, 대우

02 유리수, 유리수, 유리수, 무리수 **03** $c-a$, $c-a$, $c-a$, b, c

04 (1) 4 (2) 2 **05** $-\sqrt{15}\leq ax+by\leq\sqrt{15}$ **06** ②

07 풀이 90쪽 **08** ③ **09** 풀이 90쪽 **10** ②

11 (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $2\sqrt{b}$ **12** ㄴ, ㄷ **13** ③ **14** 2 **15** ③

16 (1) $x^2+y^2=100$ (2) 25 **17** 18 **18** ② **19** $\sqrt{3}$

20 $\frac{1}{3}$ **21** -10 **22** ③ **23** $12\sqrt{2}$

04 함수

W 31쪽 **08 함수**

01 (1) 함수가 아니다.

(2) 함수이다., 정의역: $\{1, 2, 3\}$, 공역: $\{a, b, c, d\}$, 치역: $\{a, b, c\}$

02 (1) $\{1, 3, 5, 7\}$ (2) $\{2, 3, 4, 5\}$

03 (1) 서로 같은 함수이다. (2) 서로 같은 함수가 아니다.

04 (1) × (2) ○ **05** (1) ㄱ, ㄷ, ㄹ (2) ㄱ, ㄷ (3) ㄱ (4) ㄴ

06 (1) ㄱ, ㄹ (2) ㄱ (3) ㄱ (4) ㄴ **07** ㄴ, ㄹ **08** ④ **09** ②

10 15 **11** ⑤ **12** 20 **13** ⑤ **14** 8 **15** ①

16 ③ **17** $\{-4, 20\}$ **18** $\{2\}$, $\{4\}$, $\{2, 4\}$ **19** ②

20 ② **21** 3 **22** ③ **23** 14 **24** ② **25** 2

26 ④ **27** ③ **28** 18 **29** ④ **30** ② **31** 284

32 ③ **33** 12 **34** 4

W 36쪽 **09 합성함수**

01 (1) 4 (2) 6 (3) 1 (4) -2

02 (1) $(g\circ f)(x)=x^3+6x^2+12x+8$ (2) $(f\circ g)(x)=x^3+2$

(3) $(f\circ f)(x)=x+4$ (4) $(g\circ g)(x)=x^9$

03 (1) $((f\circ g)\circ h)(x)=2x^2-20x+51$

(2) $(f\circ(g\circ h))(x)=2x^2-20x+51$

(3) $((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ(g\circ h))(x)$

04 54 **05** ④ **06** 24 **07** ② **08** 5 **09** ①

10 6 **11** ④ **12** $\frac{4}{3}$ **13** ④ **14** $f(x)=6x-3$

15 ③ **16** $h(x)=\frac{1}{4}x+5$ **17** ④ **18** ③ **19** 1

20 ⑤ **21** -90 **22** 7 **23** 1

W 39쪽 **10 역함수**

01 (1) $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$ (2) $y=4x+\frac{1}{2}$

02 (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 2 **03** (1) $(-3, -3)$ (2) $(2, 2)$

04 ① **05** 90 **06** ② **07** 20 **08** 2 **09** 5

10 $h^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$ **11** ③ **12** $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ **13** 2

14 ③ **15** ③ **16** 1 **17** ② **18** ① **19** ④

20 c **21** 5 **22** ③ **23** $3\sqrt{2}$

05 유리식과 유리함수

W 42쪽 **11 유리식**

01 (1) $\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}$, $\frac{(x+3)^2}{(x+3)(x-3)}$

(2) $\frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)(x-4)(x+3)}$, $\frac{x(x-4)}{(x-1)(x-4)(x+3)}$

(3) $\frac{(x-4)(x-2)}{(x+1)(x+2)(x-2)}$, $\frac{(x+5)(x+1)}{(x+1)(x+2)(x-2)}$

02 (1) $\frac{x}{x+6}$ (2) $\frac{x-3}{x+4}$ (3) $\frac{x+5}{(x-1)^2}$

03 (1) $\frac{3x+8}{(x+5)(x-2)}$ (2) $\frac{2x-1}{x(x+1)}$ (3) $\frac{1}{(x+3)(x-2)}$ (4) $\frac{x+1}{x(x+3)}$

04 (1) 7 (2) 3, $x-2$ (3) $x+5$ **05** $\frac{2}{(x-1)(x-3)}$ **06** ③

07 $x=5$ **08** 12 **09** ① **10** 16 **11** 65 **12** -6

13 $\frac{7x-1}{x(x+2)(x-1)}$ **14** $\frac{9}{x(x+9)}$ **15** 3 **16** $\frac{49}{50}$

17 ② **18** 8 **19** 3 **20** $\frac{65}{8}$ **21** ③ **22** ①

23 2

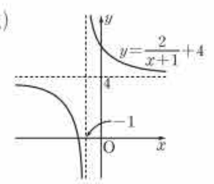
W 45쪽 **12 유리함수**

01 (1) $\{x\mid x\neq-6$인 실수$\}$ (2) $\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{1}{2}\text{인 실수}\right\}$

(3) $\{x\mid x\neq-1,\ x\neq1$인 실수$\}$ (4) 실수 전체의 집합

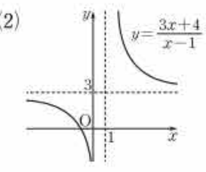
02 (1) ㄱ, ㄷ (2) ㄴ **03** (1) $y=\frac{2}{x-4}-7$ (2) $y=-\frac{5}{x+1}+6$

04 (1)



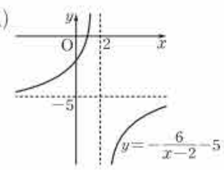
정의역: $\{x\mid x\neq-1$인 실수$\}$,
치역: $\{y\mid y\neq4$인 실수$\}$

(2)



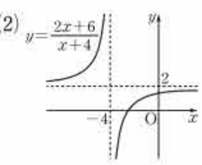
정의역: $\{x\mid x\neq1$인 실수$\}$,
치역: $\{y\mid y\neq3$인 실수$\}$

05 (1)



$x=2$, $y=-5$

(2)



$x=-4$, $y=2$

06 4 **07** ④ **08** 5 **09** ② **10** -6 **11** ③
12 ① **13** -20 **14** -1 **15** ② **16** ③ **17** 6
18 ② **19** -2 **20** ① **21** ③ **22** ② **23** ⑤
24 10 **25** ⑤ **26** ⑤ **27** ㄱ, ㄴ, ㄹ
28 $d<c<a<b$ **29** ③ **30** 0 **31** ④ **32** ⑤
33 $\frac{9}{5}$ **34** ③ **35** ① **36** -1 **37** ① **38** $\frac{1}{101}$
39 ③ **40** $-\frac{8}{3}$ **41** ② **42** ① **43** 6 **44** ②

06 무리식과 무리함수

W 52쪽 **13** 무리식

01 (1) $x\geq 3$ (2) $x>-4$ (3) $-1\leq x\leq 5$ (4) $-2<x\leq 6$

02 (1) $\sqrt{x}+3$ (2) $x(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})$ (3) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$
(4) $2x^2-1-2x\sqrt{x^2-1}$

03 (1) $\frac{2\sqrt{x}}{x-2}$ (2) $\frac{x+y}{x-y}$ (3) $\frac{2(x+\sqrt{x+1})}{x}$

04 $x<-3$ 또는 $-3<x\leq 5$ **05** ④ **06** ① **07** 7

08 ③ **09** $-\frac{\sqrt{x}}{x}$ **10** ④ **11** $2\sqrt{2}-\sqrt{7}$ **12** 12

13 ① **14** $9\sqrt{6}$ **15** ③

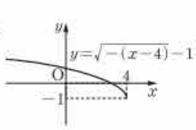
W 54쪽 **14** 무리함수

01 (1) $\{x\mid x\geq -6\}$ (2) $\{x\mid x\leq 10\}$ (3) $\left\{x \,\middle|\, x\geq \frac{2}{3}\right\}$
(4) $\{x\mid -1\leq x\leq 1\}$

02 (1) $y=-\sqrt{5x}$ (2) $y=\sqrt{-5x}$ (3) $y=-\sqrt{-5x}$

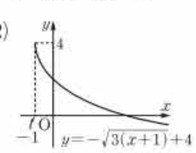
03 (1) $y=\sqrt{3(x+1)}+6$ (2) $y=-\sqrt{-2(x-3)}-7$

04 (1)



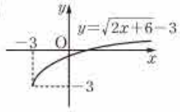
정의역: $\{x\mid x\leq 4\}$,
치역: $\{y\mid y\geq -1\}$

(2)



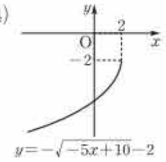
정의역: $\{x\mid x\geq -1\}$,
치역: $\{y\mid y\leq 4\}$

(3)



정의역: $\{x\mid x\geq -3\}$,
치역: $\{y\mid y\geq -3\}$

(4)



정의역: $\{x\mid x\leq 2\}$,
치역: $\{y\mid y\leq -2\}$

05 ⑤ **06** 5 **07** 정의역: $\{x\mid x\leq 3\}$, 치역: $\{y\mid y\geq 2\}$

08 ② **09** ③ **10** $a>8$ **11** $y=\sqrt{2x+6}+7$ **12** ④
13 -16 **14** ① **15** 제1사분면 **16** $a\geq 2$ **17** ⑤
18 ④ **19** $a>0$, $b>0$, $c<0$ **20** ⑤ **21** ㄱ, ㄴ, ㄷ
22 -1 **23** ② **24** -25 **25** ③ **26** $\frac{5}{4}$ **27** ④
28 ④ **29** 8 **30** $y=\frac{1}{2}(x-4)^2-\frac{1}{2}$ $(x\leq 4)$ **31** ④
32 ④ **33** $2\sqrt{2}$ **34** ⑤ **35** -4 **36** $\frac{3}{8}$ **37** ①

07 순열과 조합

W 60쪽 **15** 경우의 수

01 (1) 8 (2) 5 **02** (1) 24 (2) 30 **03** ③ **04** 33
05 15 **06** ⑤ **07** ① **08** 8 **09** 7 **10** ③
11 12 **12** ⑤ **13** 36 **14** ③ **15** 4 **16** ⑤
17 22 **18** ② **19** 32 **20** 36 **21** ⑤ **22** 84

W 63쪽 **16** 순열

01 (1) 210 (2) 1 (3) 24 (4) 36

02 (1) $n=8$ (2) $n=6$ (3) $r=3$ (4) $r=6$ **03** (1) 120 (2) 504

04 ③ **05** 5 **06** ④ **07** 720 **08** 15 **09** ⑤
10 144 **11** 288 **12** 72 **13** ⑤ **14** 360 **15** ⑤
16 1152 **17** ② **18** ④ **19** 36 **20** 960 **21** 696
22 84 **23** ③ **24** 480 **25** 18 **26** 90 **27** ⑤
28 ③ **29** ③ **30** 32 **31** ⑤ **32** 80

W 67쪽 **17** 조합

01 (1) 20 (2) 210 (3) 1 (4) 1

02 (1) $n=9$ (2) $r=2$ 또는 $r=5$ (3) $n=12$ (4) $r=5$

03 (1) 84 (2) 60 **04** 6 **05** ① **06** ① **07** ③
08 (가) $(n-r)!$ (나) $n!$ (다) $r!$ **09** ④ **10** 21 **11** ②
12 ② **13** (1) 15 (2) 5 **14** 20 **15** ④ **16** ③
17 121 **18** 175 **19** ⑤ **20** 504 **21** 960 **22** 875
23 ③ **24** 21 **25** 11 **26** ③ **27** 56 **28** ④
29 90 **30** ④

Lecture Book

01 집합의 뜻과 표현

01 집합과 원소

Lecture 01 집합과 원소 Ⓛ 6쪽

1-1 답 (1) ○ (2) × (3) × (4) ○

> 소수
> ➡ 1보다 큰 자연수 중에서 1과 자기 자신만을 약수로 갖는 수

1-2 답 (1) 2, 4, 6 (3) 봄, 여름, 가을, 겨울

2-1 답 (1) $\in$ (2) $\notin$ (3) $\in$ (4) $\notin$

2-2 (3) $\sqrt{16}=4$는 유리수이므로 집합 Q의 원소이다.
(4) π는 무리수이므로 집합 Q의 원소가 아니다.
답 (1) $\in$ (2) $\notin$ (3) $\in$ (4) $\notin$

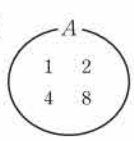
> 근호를 사용하여 나타낸 수 중 근호를 없앨 수 있는 수는 유리수이다.

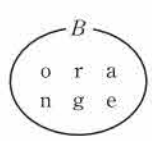
> $\pi=3.141592\cdots$이므로 순환소수가 아닌 무한소수, 즉 무리수이다.

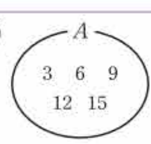
Lecture 02 집합의 표현 Ⓛ 7쪽

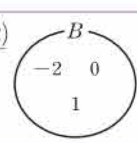
1-1 답 (1) $\{4, 5, 6, 7, 8\}$
(2) $\{x|x$는 5의 양의 배수$\}$

1-2 답 (1) {s, m, i, l, e}
(2) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
(3) $\{x|x$는 12의 양의 약수$\}$
(4) $\{x|x$는 두 자리 자연수$\}$

2-1 답 (1)


(2)


2-2 답 (1)


(2)


> $A=\{3, 6, 9, 12, 15\}$

> $B=\{-2, 0, 1\}$

Lecture 03 집합의 원소의 개수 Ⓛ 8쪽

1-1 (4) 세 자리 자연수는
100, 101, 102, $\cdots$, 999
따라서 주어진 집합은 유한집합이다.
답 (1) 유 (2) 무 (3) 무 (4) 유

1-2 $A=\{1, 2, 5, 10\}$, $C=\varnothing$,
$D=\{4, 8, 12, \cdots, 48\}$
이므로 A, C, D는 유한집합, C는 공집합이다.

> $|x|\le 0$인 자연수는 존재하지 않으므로 집합 C는 공집합이다.

또 1보다 크고 2보다 작은 유리수는 무수히 많으므로 B는 무한집합이다.
답 (1) A, C, D (2) B (3) C

2-1 답 (1) 5 (2) 20

2-2 (1) -5보다 큰 음의 정수 x는 -4, -3, -2, -1의 4개이므로 $n(A)=4$
(2) $x^2+2=0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로
$n(A)=0$
답 (1) 4 (2) 0

기본+표준 유형 Q+Q Ⓛ 9쪽

01 ①, ②, ③, ④ '작은', '더운', '아름다운', '잘 치는'이라는 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
답 ⑤

02 ㄱ, ㄹ. '높은', '유명한'이라는 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
이상에서 집합인 것은 ㄴ, ㄷ, ㅁ의 3개이다. 답 3개

03 집합 A의 원소는 1, 2, 3, 4, 6, 12
집합 B의 원소는 3, 6, 9, 12, $\cdots$
④ $12\in B$
답 ④

04 $x^2+3x-10>0$에서 $(x+5)(x-2)>0$
$\therefore x<-5$ 또는 $x>2$
따라서 $-6\in A$, $-2\notin A$, $0\notin A$, $4\in A$이므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

05 ① $A=\{1, 2, 4, 8\}$
② $A=\{1, 2, 4, 8, 16\}$
③ $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$
④ $A=\{2, 4, 6, 8\}$
⑤ $A=\{4, 8\}$
답 ④

06 ④ $\{5, 10, 15, 20\}$
➡ $\{x|x$는 20 이하의 5의 양의 배수$\}$
답 ④

07 ① 무한집합
② $\{10, 11, 12, \cdots\}$ ➡ 무한집합
③ $\{1, 3, 5, \cdots, 99\}$ ➡ 유한집합
④ $\{10, 20, 30, \cdots\}$ ➡ 무한집합
⑤ $\{9, 18, 27, \cdots\}$ ➡ 무한집합
답 ③

> 2와 5의 양의 공배수는 10의 양의 배수와 같다.

08 ④ $\{2\}$이므로 공집합이 아니다.

답 ④

09 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로 $\quad n(A)=5$

$B=\{1, 5, 7\}$이므로 $\quad n(B)=3$

$\therefore n(A)+n(B)=8$ 답 8

> 서로소
> ➡ 최대공약수가 1인 두 자연수

10 ② $n(\{1\})=1$, $n(\{2\})=1$이므로

$n(\{1\})=n(\{2\})$

③ $\{x \mid x$는 9의 양의 약수$\}=\{1, 3, 9\}$이므로

$n(\{x \mid x$는 9의 양의 약수$\})=3$

④ $n(\{2, 4, 6\})=3$, $n(\{4, 6\})=2$이므로

$n(\{2, 4, 6\})-n(\{4, 6\})=1$

⑤ $n(\{0\})=1$, $n(\{\varnothing\})=1$이므로

$n(\{0\})+n(\{\varnothing\})=2$

답 ④

> 집합 $\{0\}$의 원소는 0의 1개이다.

> 집합 $\{\varnothing\}$의 원소는 $\varnothing$의 1개이다.

11 집합 A의 원소 a, 집합 B의 원소 b에 대하여 $a+b$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

$a \backslash b$	1	3	5
-1	0	2	4
1	2	4	6

$X=\{0, 2, 4, 6\}$ 답 $X=\{0, 2, 4, 6\}$

> 두 집합의 원소를 이용하여 새로운 집합을 구할 때에는 표를 이용하여 모든 원소를 빠짐없이 구한다.

12 집합 A의 두 원소 a, b에 대하여 ab의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

$a \backslash b$	-2	0	2
-2	4	0	-4
0	0	0	0
2	-4	0	4

$X=\{-4, 0, 4\}$

$\therefore n(X)=3$ 답 ①

02 부분집합

Lecture 04 부분집합 L 11쪽

1-1 답 (1) $\subset$ (2) $\not\subset$ (3) $\subset$ (4) $\subset$

> 모든 집합은 자기 자신의 부분집합이다.

> 공집합은 모든 집합의 부분집합이다.

1-2 (1) $Y=\{1, 2, 4, 8\}$이므로

$X \subset Y$

(2) $X=\{5, 10, 15, \cdots\}$, $Y=\{10, 20, 30, \cdots\}$이므로

$Y \subset X$

(3) 모든 자연수는 정수이므로

$X \subset Y$

답 (1) $X \subset Y$ (2) $Y \subset X$ (3) $X \subset Y$

2-1 답 (1) $\varnothing$ (2) $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$

(3) $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ (4) $\{a, b, c\}$

> x가 집합 A의 원소이면
> ➡ $x \in A$, $\{x\} \subset A$

2-2 (1) $\varnothing$, $\{-1\}$, $\{1\}$, $\{-1, 1\}$

(2) 주어진 집합을 원소나열법으로 나타내면

$\{2, 4, 6\}$

이므로 구하는 부분집합은

$\varnothing$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$, $\{2, 4\}$,

$\{2, 6\}$, $\{4, 6\}$, $\{2, 4, 6\}$

답 풀이 참조

Lecture 05 서로 같은 집합, 부분집합의 개수 L 12쪽

1-1 (2) $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$이므로

$A \neq B$

답 (1) $A=B$ (2) $A \neq B$

1-2 $-a=2$, $b+3=6$이므로

$a=-2$, $b=3$ 답 $a=-2$, $b=3$

2-1 (1) $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$

(2) 주어진 집합은 $\{0, 1, 2\}$이므로 구하는 진부분집합은

$\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$

답 풀이 참조

3-1 (1) $2^5=32$ (2) $2^5-1=31$

(3) $2^{5-1}=2^4=16$ (4) $2^{5-2}=2^3=8$

답 (1) 32 (2) 31 (3) 16 (4) 8

> 집합 A는 제외한다.

기본+표준 유형 Q+Q L 13쪽

01 ① $2 \in A$, $2 \notin B$이므로 $\quad A \not\subset B$

② $b \in A$, $b \notin B$이므로 $\quad A \not\subset B$

③ $A=\{2, 4, 6, \cdots\}$

$10 \in A$, $10 \notin B$이므로 $\quad A \not\subset B$

④ $A=\{3, 6, 9, \cdots\}$, $B=\{6, 12, 18, \cdots\}$

$3 \in A$, $3 \notin B$이므로 $\quad A \not\subset B$

⑤ $A=\{-1, 1\}$, $B=\{-1, 0, 1\}$이므로

$A \subset B$

답 ⑤

02 $x^2-2x=0$에서 $\quad x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

$\therefore B=\{0, 2\}$

따라서 $A=\{-2, 0, 2\}$, $B=\{0, 2\}$,

$C=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$이므로

$B \subset A \subset C$

답 ③

03 $A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

⑤ $12 \notin A$이므로 $\quad \{6, 12, 18\} \not\subset A$ 답 ⑤

Q BOX

04 ㄴ. $c \notin A$

ㅁ. $\{b, c\} \in A$ 또는 $\{\{b, c\}\} \subset A$

ㅂ. $\{b\} \notin A$이므로 $\{a, \{b\}\} \not\subset A$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

쌤 한마디

> 집합 $A=\{a, b, \{b, c\}\}$는 집합을 원소로 갖는 집합이다. 즉 집합 A의 원소는 a, b, $\{b, c\}$이므로
> $a \in A$, $b \in A$, $\{b, c\} \in A$
> 이다.

05 $A \subset B$가 성립하려면 $3 \in B$이어야 하므로

집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속한다.

$a-1=3$ 또는 $2a-3=3$

$\therefore a=4$ 또는 $a=3$

(i) $a=4$일 때,

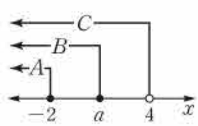
$A=\{3, 5\}$, $B=\{1, 3, 5, 7\}$이므로 $A \subset B$

(ii) $a=3$일 때,

$A=\{3, 4\}$, $B=\{1, 2, 3, 7\}$이므로 $A \not\subset B$

(i), (ii)에서 $a=4$ 답 4

06 $A \subset B \subset C$가 성립하도록 세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$-2 \le a < 4$

$a=4$이면 $B \not\subset C$이므로 $a<4$이다.

따라서 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2, 3의 6개이다.

답 ④

07 $x^2-8x+12<0$에서 $(x-2)(x-6)<0$

$\therefore 2<x<6$

따라서 $A=\{3, 4, 5\}$이므로 A의 부분집합은

$\varnothing$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$ 답 풀이 참조

08 $A=\{11, 22, 33, 44\}$

집합 B는 A의 부분집합 중에서 원소가 2개인 집합이므로

$\{11, 22\}$, $\{11, 33\}$, $\{11, 44\}$,
$\{22, 33\}$, $\{22, 44\}$, $\{33, 44\}$ 답 풀이 참조

09 $A \subset B$, $B \subset A$이므로 $A=B$

집합 A와 집합 B의 모든 원소가 같다.

따라서 $9 \in B$이므로 $k^2=9$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=3$

(i) $k=-3$일 때,

$A=\{-2, 7, 9\}$, $B=\{1, 4, 9\}$이므로

$A \neq B$

(ii) $k=3$일 때,

$A=\{1, 4, 9\}$, $B=\{1, 4, 9\}$이므로

$A=B$

(i), (ii)에서 $k=3$ 답 ⑤

10 $A=\{3, 6, 9\}$이고 $A=B$이므로

$a+3=3$, $b-2=9$ 또는 $a+3=9$, $b-2=3$

$\therefore a=0$, $b=11$ 또는 $a=6$, $b=5$

그런데 $a \neq 0$이므로 $a=6$, $b=5$

$\therefore a-b=1$ 답 1

11 $A=\{2, 3, 5, 7\}$에서 A의 원소의 개수가 4이므로 부분집합의 개수는

$2^4=16$ $\therefore a=16$

또 진부분집합의 개수는

$2^4-1=15$ $\therefore b=15$

$\therefore a+b=31$ 답 ④

12 ① 원소의 개수가 4이므로 부분집합의 개수는

$2^4=16$

② $\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 원소의 개수가 5이므로 부분집합의 개수는

$2^5=32$

③ $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$에서 원소의 개수가 6이므로 부분집합의 개수는

$2^6=64$

④ $\{2, 4, 6, 8, 10\}$에서 원소의 개수가 5이므로 부분집합의 개수는

$2^5=32$

⑤ $\{2, 4, 6, 8\}$에서 원소의 개수가 4이므로 부분집합의 개수는

$2^4=16$ 답 ③

13 $A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

A의 부분집합 중에서 1, 5를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$ $\therefore a=16$

A의 부분집합 중에서 9를 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$2^{6-1}=2^5=32$ $\therefore b=32$

$\therefore b-a=16$ 답 16

14 $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

집합 A의 부분집합 중에서 2, 6을 반드시 원소로 갖고, 4를 원소로 갖지 않는 부분집합 X의 개수는

$2 \in X$, $6 \in X$

$4 \notin X$

$2^{8-2-1}=2^5=32$ 답 ③

15 $x^2-7x+10=0$에서 $(x-2)(x-5)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=5$

$\therefore A=\{2, 5\}$

$B=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$이므로 집합 X는 집합 B의 부분집합 중에서 2, 5를 반드시 원소로 갖는 집합과 같다.

집합 A의 모든 원소

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{8-2}=2^6=64$ 답 ⑤

쌤 한마디

두 집합 A, B에 대하여 $A \subset X \subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수는 B의 부분집합 중에서 A의 모든 원소를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같다.
즉 $A \subset B$를 만족시키는 두 집합 A, B에 대하여 $n(A)=a$, $n(B)=b$일 때, $A \subset X \subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수는
2^{b-a} (단, $a<b$)

16 집합 X의 개수는 집합 B의 부분집합 중에서 1, 2, 3, 4를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같다.
이때 집합 X의 개수가 128이므로
$2^{n-4}=128=2^7$, $n-4=7$
$\therefore n=11$ 답 11

17 $6 \le 3x < 22$에서 $2 \le x < \frac{22}{3}$
$\therefore A=\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
집합 A의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 홀수를 원소로 갖는 집합은 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 부분집합 중에서 집합 $\{2, 4, 6\}$의 부분집합을 제외한 것과 같다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$2^6-2^3=56$ 답 ⑤

(전체 부분집합의 개수) $-$(홀수를 제외한 집합의 부분집합의 개수)

홀수를 원소로 갖지 않는 부분집합

18 $A=\{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$
집합 A의 부분집합 중에서 8 또는 16을 원소로 갖는 집합은 $\{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$의 부분집합 중에서 집합 $\{4, 12, 20, 24\}$의 부분집합을 제외한 것과 같다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$2^6-2^4=48$ 답 48

(전체 부분집합의 개수) $-$(8, 16을 제외한 집합의 부분집합의 개수)

8과 16을 원소로 갖지 않는 부분집합

다른 풀이 8 또는 16을 원소로 갖는 집합은 집합 $\{4, 12, 20, 24\}$의 부분집합에 8만 추가하거나 16만 추가하거나 8, 16을 모두 추가하면 된다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$2^4 \cdot 3=48$

중단원 마무리

16쪽

01 **전략** 먼저 주어진 방정식의 해를 구한다.

풀이 $x(x+3)(x-7)=0$에서
$x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=7$
따라서 $-3 \in A$, $0 \in A$, $3 \notin A$, $7 \in A$이므로 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

02 **전략** 조건제시법으로 나타낸 집합을 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 ⑤ $k=0$일 때, $x=k^2+1=1$
$k=1$일 때, $x=k^2+1=2$
$\therefore \{1, 2\}$

답 ⑤

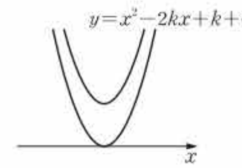
03 **전략** 주어진 수를 소인수분해하여 집합 A의 원소인지 아닌지를 구별한다.

풀이 ① $10=2\times5$이므로 $10 \in A$
② $20=2^2\times5$이므로 $20 \in A$
③ $40=2^3\times5$이므로 $40 \in A$
④ $60=2^2\times3\times5$이므로 $60 \notin A$
⑤ $100=2^2\times5^2$이므로 $100 \in A$

답 ④

04 **전략** 이차함수 $y=x^2-2kx+k+6$의 그래프와 x축의 위치 관계를 생각한다.

풀이 집합 X가 유한집합이 되려면 이차함수 $y=x^2-2kx+k+6$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 x축과 한 점에서 만나거나 만나지 않아야 한다.

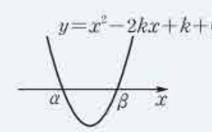


$n(X)=1$ 또는 $n(X)=0$

즉 이차방정식 $x^2-2kx+k+6=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k+6) \le 0$
$k^2-k-6 \le 0$, $(k+2)(k-3) \le 0$
$\therefore -2 \le k \le 3$
따라서 실수 k의 최솟값은 -2이다. 답 ④

쌤 한마디

이차함수 $y=x^2-2kx+k+6$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 x축과 서로 다른 두 점 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ $(\alpha<\beta)$에서 만나면 이차부등식 $x^2-2kx+k+6 \le 0$의 해는
$\alpha \le x \le \beta$
이때 $\alpha \le x \le \beta$를 만족시키는 실수 x는 무수히 많으므로 집합 X는 무한집합이 된다.



05 **전략** 먼저 집합 A의 원소를 구한 후 이를 이용하여 집합 B의 원소를 구한다.

풀이 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$ ··· ❶
$\sqrt{x}$가 자연수이려면 x는 집합 A의 원소 중 (자연수)^2 꼴이어야 하므로
$x=1$ 또는 $x=4$ 또는 $x=9$
이때 $\sqrt{1}=1$, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$이므로
$B=\{1, 2, 3\}$ ··· ❷
$\therefore n(B)=3$ ··· ❸

답 3

단계	채점 기준	비율
❶	집합 A를 구할 수 있다.	20 %
❷	집합 B를 구할 수 있다.	60 %
❸	$n(B)$를 구할 수 있다.	20 %

06 전략 $q=1, 2, 3, 4, 5$일 때 각각의 약수를 생각한다.

풀이 집합 X의 원소 (p, q)는

(i) $q=1$일 때, $(1, 1)$

(ii) $q=2$일 때, $(1, 2), (2, 2)$

(iii) $q=3$일 때, $(1, 3), (3, 3)$

(iv) $q=4$일 때, $(1, 4), (2, 4), (4, 4)$

(v) $q=5$일 때, $(1, 5), (5, 5)$

이상에서 집합 X의 원소의 개수는 10이다. 답 10

Q BOX

1의 약수는 1

2의 약수는 1, 2

3의 약수는 1, 3

4의 약수는 1, 2, 4

5의 약수는 1, 5

07 전략 먼저 집합 X의 원소를 모두 구한다.

풀이 집합 A의 원소 x, 집합 B의 원소 y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

$x \backslash y$	1	3	5
1	2	4	6
2	3	5	7
3	4	6	8
4	5	7	9
a	$a+1$	$a+3$	$a+5$

$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a+1, a+3, a+5$

이때 $n(X)=10$이 되려면

$a+1, a+3, a+5$ 중 하나만 $2, 3, 4, \cdots, 9$ 중 하나와 같아야 한다.

한편 a는 자연수이므로

$2\le a+1<a+3<a+5$

즉 $a+1$만 $2, 3, 4, \cdots, 9$ 중 하나와 같아야 하므로

$2\le a+1\le 9, a+3>9$

$\therefore 6<a\le 8$

따라서 자연수 a의 최댓값은 8이다. 답 8

08 전략 두 집합 A, B를 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

② $2\notin B$이므로 $\{2, 5\}\not\subset B$

④, ⑤ $n(A)=9$, $n(B)=5$이므로

$n(A)>n(B)$, $n(A)-n(B)=4$

답 ⑤

09 전략 주어진 벤다이어그램을 보고 두 집합 A, B를 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 $A=\{a, c, d\}$, $B=\{a, b, c, d, e\}$

① $a\in A$ 또는 $\{a\}\subset A$

② $d\in B$

③ $e\in B$ 또는 $\{e\}\subset B$

⑤ $\{a, c, d\}\subset A$

답 ④

10 전략 집합 A의 원소는 모두 집합 B의 원소임을 이용한다.

풀이 $B=\{1, 2, 4, 8\}$

이때 $A\subset B$이려면 $2a\in B$이어야 하므로

$2a=2$ 또는 $2a=4$ 또는 $2a=8$

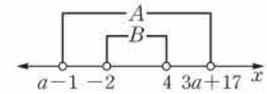
$\therefore a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=4$

따라서 구하는 모든 자연수 a의 값의 합은

$1+2+4=7$ 답 7

11 전략 주어진 조건을 만족시키도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타낸다.

풀이 $B\subset A$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a-1\le -2$, $3a+17\ge 4$ ❶

$a\le -1$, $a\ge -\frac{13}{3}$

$\therefore -\frac{13}{3}\le a\le -1$ ❷

따라서 정수 a의 최댓값은 -1, 최솟값은 -4이므로 구하는 합은

$-1+(-4)=-5$ ❸

답 -5

단계	채점 기준	비율
❶	조건을 만족시키는 a에 대한 부등식을 세울 수 있다.	50 %
❷	a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸	정수 a의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	20 %

12 전략 ab가 어떤 자연수의 제곱이 되는 각 경우에 대하여 집합 A를 구한다.

풀이 ab가 될 수 있는 값은

$2^2=4, 3^2=9, 4^2=16, 5^2=25,$

$6^2=36, 7^2=49, 8^2=64, 9^2=81$

이때 $1\le a\le 10$, $1\le b\le 10$이고 $a\ne b$이어야 하므로

(i) $ab=4$일 때, $A=\{1, 4\}$

(ii) $ab=9$일 때, $A=\{1, 9\}$

(iii) $ab=16$일 때, $A=\{2, 8\}$

(iv) $ab=36$일 때, $A=\{4, 9\}$

이상에서 구하는 집합 A의 개수는 4이다. 답 ②

$2\le ab\le 90$

집합 A는 두 개의 원소를 가지므로 $a\ne b$이어야 한다.

13 전략 집합 U의 진부분집합은 U의 부분집합이면서 U가 아닌 집합임을 이용한다.

풀이 $U=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

1을 제외한 U의 모든 원소가 A의 원소일 때 $S(A)$의 값이 최대이므로 구하는 최댓값은

$2+3+6+9+18=38$ 답 38

$A\ne U$이므로 U의 원소 중 가장 작은 1을 제외했을 때 $S(A)$의 값이 최대이다.

14 전략 두 집합 A, B의 모든 원소가 같음을 이용한다.

풀이 $A=B$이므로

$a+2=2$ 또는 $a^2-2=2$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=0$ 또는 $a=2$

$a^2=4$에서 $a=-2$ 또는 $a=2$

(i) $a=-2$일 때,

$A=\{0, 2\}$, $B=\{2, 8\}$이므로 $A\ne B$

(ii) $a=0$일 때,

$A=\{-2, 2\}$, $B=\{2, 6\}$이므로 $A\ne B$

(iii) $a=2$일 때,

$A=\{2, 4\}$, $B=\{2, 4\}$이므로 $A=B$

이상에서 $a=2$ 답 ⑤

15 전략 $n(A)$는 집합 A의 원소의 개수를 뜻한다.

풀이 ㄱ. $A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2\}$이면 $A\subset B$이지만 $n(A)=n(B)$이다.

ㄴ. $A=\{1, 2\}$, $B=\{3\}$이면 $n(A)>n(B)$이지만 $B\not\subset A$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

Q BOX: $A\subset B$이면 $n(A)\le n(B)$이다.

16 전략 먼저 15 이하의 자연수 중에서 소수를 찾는다.

풀이 집합 A의 원소 중에서 소수는

$2, 3, 5, 7, 11, 13$ ··· ❶

따라서 구하는 부분집합은 $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$의 부분집합 중에서 공집합을 제외한 것이므로

$2^6-1=63$ ··· ❷

답 63

단계	채점 기준	비율
❶	집합 A의 원소 중에서 소수를 구할 수 있다.	40 %
❷	주어진 조건을 만족시키는 집합의 개수를 구할 수 있다.	60 %

17 전략 집합 X는 집합 A의 진부분집합임을 이용한다.

풀이 $X\subset A$이고 $X\neq A$이므로 집합 X는 집합 A의 진부분집합이다.

이때 집합 X는 1, 8을 반드시 원소로 가지므로 집합 X의 개수는

$2^{5-2}-1=2^3-1=7$ 답 ②

$X=A$인 경우는 제외한다.

18 전략 집합 X는 A의 부분집합 중에서 B의 모든 원소를 반드시 원소로 갖는 집합임을 이용한다.

풀이 집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합과 같다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$ 답 8

19 전략 $M(X)\ge 16$이므로 집합 X는 반드시 16 이상인 원소를 가져야 함을 이용한다.

풀이 $B=\{4, 8, 12, 16, 20\}$

$M(X)\ge 16$을 만족시키려면 집합 X는 16, 20 중 적어도 하나를 원소로 가져야 한다.

따라서 집합 B의 부분집합 중에서 $\{4, 8, 12\}$의 부분집합을 제외하면 되므로 구하는 집합 X의 개수는

$2^5-2^3=24$ 답 ②

다른 풀이 (i) $M(X)=16$일 때,

집합 X는 집합 B의 부분집합 중에서 16을 반드시 원소로 갖고, 20을 원소로 갖지 않아야 하므로 그 개수는

$2^{5-1-1}=2^3=8$

(ii) $M(X)=20$일 때,

집합 X는 집합 B의 부분집합 중에서 20을 반드시 원소로 가져야 하므로 그 개수는

$2^{5-1}=2^4=16$

집합 B의 부분집합 X에 대하여 $X\subset B$, $M(X)\ge 16$인 경우는 $M(X)=16$, $M(X)=20$일 때이다.

(i), (ii)에서 구하는 집합 X의 개수는

$8+16=24$

20 전략 가장 작은 원소가 1, 2, 3, 4인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 집합 S의 부분집합 중에서 원소가 2개 이상인 집합의 개수는 다음과 같다.

(i) 1이 가장 작은 원소인 경우

1을 반드시 원소로 갖는 집합에서 $\{1\}$을 제외하면 되므로

$2^{5-1}-1=2^4-1=15$

(ii) 2가 가장 작은 원소인 경우

2를 반드시 원소로 갖고 1을 원소로 갖지 않는 집합에서 $\{2\}$를 제외하면 되므로

$2^{5-1-1}-1=2^3-1=7$

(iii) 3이 가장 작은 원소인 경우

3을 반드시 원소로 갖고 1, 2를 원소로 갖지 않는 집합에서 $\{3\}$을 제외하면 되므로

$2^{5-1-2}-1=2^2-1=3$

(iv) 4가 가장 작은 원소인 경우

$\{4, 5\}$의 1개이다.

이상에서 구하는 값은

$15\cdot 1+7\cdot 2+3\cdot 3+1\cdot 4=42$ 답 ①

02 집합의 연산

03 집합의 연산

Lecture 06 합집합과 교집합 20쪽

1-1 (1) $A\cup B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $A\cap B=\{1,\ 5\}$

(2) $A=\{3,\ 6,\ 9,\ \cdots,\ 60\}$, $B=\{6,\ 12,\ 18,\ \cdots,\ 60\}$

이므로

$A\cup B=\{3,\ 6,\ 9,\ \cdots,\ 60\}$,

$A\cap B=\{6,\ 12,\ 18,\ \cdots,\ 60\}$

답 풀이 참조

> 조건제시법으로 주어진 집합은 원소나열법으로 나타낸 후 합집합과 교집합을 구한다.

2-1 (1) $A\cap B=\{3\}$

따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.

> 두 집합의 교집합을 구하여 공집합인지 아닌지 확인한다.

(2) $A=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $B=\{2,\ 3\}$이므로

$A\cap B=\varnothing$

따라서 두 집합 A, B는 서로소이다.

답 (1) 서로소가 아니다. (2) 서로소이다.

3-1 (1) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

> 결합법칙 이용

$=\{a,\ c,\ f\}\cup\{b,\ c,\ d,\ e\}$

$=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$

(2) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

> 분배법칙 이용

$=\{-1,\ 0,\ 2\}\cap\{-2,\ -1,\ 1\}$

$=\{-1\}$

답 (1) $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$ (2) $\{-1\}$

Lecture 07 여집합과 차집합 21쪽

1-1 (1) $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$, $A=\{2,\ 3,\ 6,\ 9\}$이므로

$A^C=\{1,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10\}$

(2) $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$이므로

$B^C=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

답 (1) $\{1,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10\}$ (2) $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

1-2 답 (1) $\{b,\ e,\ f\}$ (2) $\{a,\ b,\ d,\ f\}$

(3) $\{b,\ f\}$ (4) $\{a,\ b,\ d,\ e,\ f\}$

2-1 (2) $A=\{1,\ 3,\ 9\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$이므로

$A-B=\varnothing$, $B-A=\{2,\ 6,\ 18\}$

답 (1) $A-B=\{3,\ 5,\ 7\}$, $B-A=\{8\}$

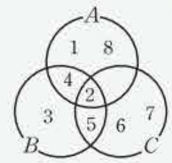
(2) $A-B=\varnothing$, $B-A=\{2,\ 6,\ 18\}$

> 차집합에 대해서는 교환법칙이 성립하지 않는다. 즉 $A-B\neq B-A$

2-2 $B-C=\{3\}$이므로

$A-(B-C)=\{1,\ 2\}$ 답 $\{1,\ 2\}$

Q BOX



기본+표준 유형 Q+Q 22쪽

01 $B\cap C=\{2,\ 5\}$이므로

$A\cup(B\cap C)=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}\cup\{2,\ 5\}$

$=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8\}$ 답 ⑤

02 $C=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$

④ $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이므로

$(A\cup B)\cap C=\{1,\ 2,\ 4\}$

답 ④

03 ① $A\cap B=\{6\}$

따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.

② $x+1=0$에서 $x=-1$

$x^2+x=0$에서 $x(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$

즉 $A=\{-1\}$, $B=\{-1,\ 0\}$이므로

$A\cap B=\{-1\}$

따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.

③ $A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots\}$이므로

$A\cap B=\{2\}$

따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.

④ $A\cap B=\varnothing$

> 유리수이면서 무리수인 수는 없다.

따라서 두 집합 A, B는 서로소이다.

⑤ $A=\{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ \cdots\}$, $B=\{7,\ 14,\ 21,\ 28,\ \cdots\}$

이므로

$A\cap B=\{28,\ 56,\ \cdots\}$

따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.

답 ④

04 집합 B가 집합 A와 서로소이므로

$A\cap B=\varnothing$

$\therefore B=\{2,\ 8,\ 12\}$

> $A\cap B=\varnothing$이므로 집합 B의 원소는 집합 $A\cup B$의 원소 중 집합 A의 원소를 제외한 것이다.

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$2+8+12=22$ 답 22

05 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8\}$, $A^C=\{1,\ 3,\ 5,\ 8\}$이므로

$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 7\}$

따라서 $A\cap B=\{2,\ 4,\ 6\}$이므로

$(A\cap B)^C=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8\}$ 답 $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8\}$

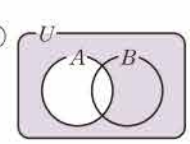
06 $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$이므로

$A-B=\{2,\ 6\}$, $B-A=\{3,\ 5,\ 9\}$

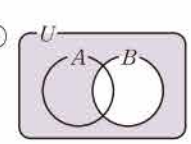
$\therefore (A-B)\cup(B-A)=\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 9\}$

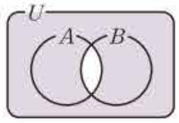
따라서 집합 $(A-B)\cup(B-A)$의 원소의 개수는 5이다. 답 ③

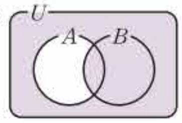
07 ①



②

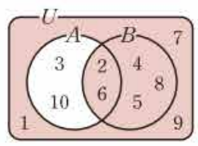


④ 

⑤ 

답 ③

08 집합 $A^C \cup B$는 오른쪽 벤다이어그램에서 색칠한 부분과 같으므로



$A^C \cup B$

$=\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

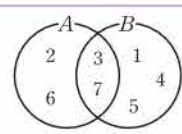
따라서 구하는 원소의 합은

$1+2+4+5+6+7+8+9=42$ 답 42

다른 풀이 $A^C=\{1, 4, 5, 7, 8, 9\}$, $B=\{2, 4, 5, 6, 8\}$이므로

$A^C \cup B=\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

09 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

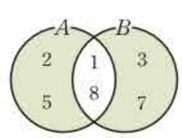


$B=\{1, 3, 4, 5, 7\}$

답 $\{1, 3, 4, 5, 7\}$

주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내어 구하려는 집합을 찾는다.

10 집합 $(A \cup B)-(A \cap B)$는 오른쪽 벤다이어그램에서 색칠한 부분과 같고 $A=\{1, 2, 5, 8\}$이므로



$A \cap B=\{1, 8\}$

$\therefore A-B=\{2, 5\}$, $B-A=\{3, 7\}$

따라서 $B=\{1, 3, 7, 8\}$이므로 구하는 모든 원소의 합은

$1+3+7+8=19$ 답 ②

11 $A \cap B=\{1, 4\}$에서 $4 \in A$이므로

$a^2=4$ $\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

(i) $a=-2$일 때,

$A=\{1, 3, 4\}$, $B=\{-5, 0, 1\}$이므로

$A \cap B=\{1\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=2$일 때,

$A=\{1, 3, 4\}$, $B=\{1, 4, 7\}$이므로

$A \cap B=\{1, 4\}$

(i), (ii)에서 $a=2$ 답 ⑤

12 $A-B=\{3\}$이므로 -2, 0, $2a-b$는 집합 B의 원소이다.

집합 A의 원소 중 3을 제외한 원소는 모두 집합 B의 원소이다.

이때 $B=\{0, 6, -a+b\}$이므로

$2a-b=6$, $-a+b=-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=4$, $b=2$

$\therefore ab=8$ 답 8

04 집합의 연산의 성질

Lecture 08 집합의 연산의 성질 24쪽

1-1 (1) $(A \cup A) \cap \varnothing=A \cap \varnothing=\varnothing$

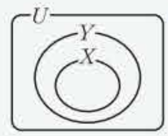
(2) $(U^C)^C=\varnothing^C=U$

(3) $(A \cap A^C) \cup A=\varnothing \cup A=A$

(4) $U-A^C=U \cap (A^C)^C=U \cap A=A$

답 (1) $\varnothing$ (2) U (3) A (4) A

1-2 ㄴ. $X \cap Y^C=X-Y=\varnothing$



ㄷ. $Y^C \subset X^C$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

2-1 (1) $A^C \cap B^C=(A \cup B)^C$이고

$A \cup B=\{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10\}$이므로

$A^C \cap B^C=\{3, 7, 9\}$

(2) $A^C \cup B^C=(A \cap B)^C$이고 $A \cap B=\{2, 8\}$이므로

$A^C \cup B^C=\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$

답 (1) $\{3, 7, 9\}$ (2) $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$

2-2 (1) $(A \cap B) \cup (A^C \cup B^C)=(A \cap B) \cup (A \cap B)^C$

$=U$

$A \cap B=X$라 하면
$(A \cap B) \cup (A \cap B)^C$
$=X \cup X^C$
$=U$

(2) $A \cap (A \cup B)^C=A \cap (A^C \cap B^C)$

$=(A \cap A^C) \cap B^C$

$=\varnothing \cap B^C$

$=\varnothing$

답 (1) U (2) $\varnothing$

Lecture 09 유한집합의 원소의 개수 25쪽

1-1 (1) $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$

$=3+6-2=7$

(2) $n(A \cup B)=n(A)+n(B)$

$=8+5=13$

$A \cap B=\varnothing$이면
$n(A \cup B)$
$=n(A)+n(B)$

답 (1) 7 (2) 13

1-2 $n(A \cap B)=n(A)+n(B)-n(A \cup B)$

$=6+9-10=5$ 답 5

2-1 (1) $n(A^C)=n(U)-n(A)=40-14=26$

(2) $n(B^C)=n(U)-n(B)=40-23=17$

(3) $n(A-B)=n(A)-n(A \cap B)=14-5=9$

(4) $n(B-A)=n(B)-n(A \cap B)=23-5=18$

답 (1) 26 (2) 17 (3) 9 (4) 18

2-2 $n((A \cap B)^C)=n(U)-n(A \cap B)$

이때

$n(A \cap B)=n(A)+n(B)-n(A \cup B)$

$=15+9-18=6$

이므로

$n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$
$=25-6=19$ 답 19

기본+표준 유형 Q+Q (L 26쪽)

01 ① $A\cap A^C=\varnothing$
② $A\cap\varnothing=\varnothing$
③ $A-U^C=A\cap(U^C)^C=A\cap U=A$
④ $A^C\cap B=B\cap A^C=B-A$
⑤ $A\cap(U\cup B)=A\cap U=A$

답 ③

교환법칙 이용

02 $B^C-A^C=B^C\cap(A^C)^C=B^C\cap A$
$=A\cap B^C=A-B$ 답 ④

03 $A\cap B=B$이므로 $B\subset A$
③, ④ $B\subset A$이므로 $A^C\subset B^C$
$\therefore A^C-B^C=\varnothing$
⑤ $B\subset A$이고 $A\neq B$이므로
$A\cap B^C=A-B\neq\varnothing$

답 ⑤

04 $A-B=A$이므로 $A\cap B=\varnothing$
ㄱ. $A\cup B\neq B$
ㄴ. $A\not\subset B$
이상에서 항상 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ㄷ, ㄹ

05 $A\cap X=A$이므로 $A\subset X$
$B\cup X=B$이므로 $X\subset B$
$\therefore A\subset X\subset B$
따라서 집합 X의 개수는 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 부분집합 중에서 1, 3, 5를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로
$2^{6-3}=2^3=8$ 답 8

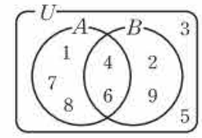
원소가 n개인 집합의 부분집합 중에서
① 특정한 원소 k개를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수 ➡ 2^{n-k}
② 특정한 원소 l개를 원소로 갖지 않는 집합의 개수 ➡ 2^{n-l}
(단, $k<n$, $l<n$)

06 $A-(A\cap B)=A$에서 $A\cap B=\varnothing$
따라서 집합 B의 개수는 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$의 부분집합 중에서 1, 2, 3, 6을 원소로 갖지 않는 집합의 개수와 같으므로
$2^{10-4}=2^6=64$ 답 ⑤

07 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$이고
$A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$
이때 $A=\{2,\ 3,\ 6,\ 8,\ 12\}$, $A-B=\{2,\ 6,\ 12\}$이므로
$A\cap B=A-(A-B)=\{3,\ 8\}$
$\therefore A^C\cup B^C=(A\cap B)^C=\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 12,\ 24\}$
따라서 집합 $A^C\cup B^C$의 원소의 개수는 6이다. 답 6

Q BOX

08 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9\}$이고
$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$
$=\{3,\ 5\}$



이므로 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 위의 그림과 같다.
$\therefore B=\{2,\ 4,\ 6,\ 9\}$ 답 $\{2,\ 4,\ 6,\ 9\}$

09 $(A\cup B^C)\cap(A^C-B)^C=(A\cup B^C)\cap(A^C\cap B^C)^C$
$=(A\cup B^C)\cap(A\cup B)$
$=A\cup(B^C\cap B)$
$=A\cup\varnothing$
$=A$ 답 ①

10 $\{A\cap(B-A)^C\}\cup B$
$=\{A\cap(B\cap A^C)^C\}\cup B$
$=\{A\cap(B^C\cup A)\}\cup B$
$=\{(A\cap B^C)\cup(A\cap A)\}\cup B$
$=\{(A-B)\cup A\}\cup B$
$=A\cup B$

$(A-B)\subset A$이므로
$(A-B)\cup A=A$

따라서 $A\cup B=B$이므로 $A\subset B$
ㄱ. $A\cap B=A$
ㄷ. $A^C\cup B=A^C\cup(A\cup B)=(A^C\cup A)\cup B$
$=U\cup B=U$
ㄹ. $A\subset B$에서 $B^C\subset A^C$이므로 $B^C-A^C=\varnothing$
이상에서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.
답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

다른 풀이 $\{A\cap(B-A)^C\}\cup B=\{A-(B-A)\}\cup B$
$=A\cup B$

$A\cap(B-A)=\varnothing$이므로
$A-(B-A)=A$

11 $(A_3\cup A_4)\cap A_6=(A_3\cap A_6)\cup(A_4\cap A_6)$
$=A_6\cup A_{12}$
$=A_6$ 답 ③

$A_{12}\subset A_6$

Q쌤 한마디

배수의 집합과 약수의 집합
① 자연수 k의 양의 배수의 집합을 A_k라 할 때, 자연수 m이 자연수 n의 배수이면 $A_m\subset A_n$
$\therefore A_m\cap A_n=A_m,\ A_m\cup A_n=A_n$
② 자연수 k의 양의 약수의 집합을 B_k라 할 때, 자연수 m이 자연수 n의 배수이면 $B_n\subset B_m$
$\therefore B_m\cap B_n=B_n,\ B_m\cup B_n=B_m$

12 $P_{16}\cap(P_8\cup P_{20})=(P_{16}\cap P_8)\cup(P_{16}\cap P_{20})$
$=P_8\cup P_4$
$=P_8$
$=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$
따라서 구하는 모든 원소의 합은
$1+2+4+8=15$ 답 15

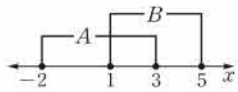
$P_4\subset P_8$

13 $x^2-x-6\le 0$에서 $(x+2)(x-3)\le 0$
$\therefore -2\le x\le 3$
$\therefore A=\{x\mid -2\le x\le 3\}$

$A\cap B=\{x|1\le x\le 3\}$,

$A\cup B=\{x|-2\le x\le 5\}$가

성립하도록 두 집합 A, B



를 수직선 위에 나타내면 위의 그림과 같아야 하므로

$B=\{x|1\le x\le 5\}$

$=\{x|(x-1)(x-5)\le 0\}$

$=\{x|x^2-6x+5\le 0\}$

따라서 $p=-6$, $q=5$이므로

$p+q=-1$ 답 -1

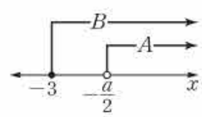
14 $x-a<3x$에서 $2x>-a$ $\therefore x>-\frac{a}{2}$

$\therefore A=\left\{x\middle|x>-\frac{a}{2}\right\}$

$4x+5\ge x-4$에서 $3x\ge -9$ $\therefore x\ge -3$

$\therefore B=\{x|x\ge -3\}$

이때 $A\cap B=A$에서 $A\subset B$이므로 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $-\frac{a}{2}\ge -3$이므로 $a\le 6$

따라서 실수 a의 최댓값은 6이다. 답 6

15 $n(A^c\cap B^c)=n((A\cup B)^c)=n(U)-n(A\cup B)$

이때

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=20+18-11=27$

이므로

$n(A^c\cap B^c)=n(U)-n(A\cup B)$

$=35-27=8$ 답 ③

16 $n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)=24-19=5$

$n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)=24-12=12$

$\therefore n(A-B)+n(B-A)=5+12=17$ 답 ①

다른 풀이 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=12+19-24=7$

이므로

$n(A-B)+n(B-A)=n(A\cup B)-n(A\cap B)$

$=24-7=17$

17 $B\subset A$일 때, $n(A\cap B)$가 최대이므로

$M=n(A\cap B)=n(B)=7$

$A\cup B=U$일 때, $n(A\cap B)$가 최소이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$에서

$m=10+7-15=2$

$\therefore M+m=9$ 답 9

다른 풀이 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=10+7-n(A\cup B)$

$=17-n(A\cup B)$ ...... ㉠

$A\subset(A\cup B)$이므로 $n(A)\le n(A\cup B)$

$(A\cup B)\subset U$이므로 $n(A\cup B)\le n(U)$

즉 $10\le n(A\cup B)\le 15$이므로

$-15\le -n(A\cup B)\le -10$

$\therefore 2\le 17-n(A\cup B)\le 7$

따라서 ㉠에서 $2\le n(A\cap B)\le 7$이므로

$M=7$, $m=2$ $\therefore M+m=9$

Q BOX

$B\subset A$일 때, $A\cap B=B$이므로 $n(A\cap B)=n(B)$

$n(A\cap B)$가 최소가 되려면 $n(A\cup B)$가 최대가 되어야 하므로 $A\cup B=U$이어야 한다.

18 $A\cap B=\varnothing$일 때 $n(A\cup B)$가 최대이므로 최댓값은 $n(A)+n(B)=22+25=47$

$A\subset B$일 때 $n(A\cup B)$가 최소이므로 최솟값은

$n(B)=25$

따라서 $n(A\cup B)$의 최댓값과 최솟값의 차는

$47-25=22$ 답 ②

19 축구를 좋아하는 학생의 집합을 A, 농구를 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(A)=19$, $n(B)=12$, $n(A\cup B)=26$

축구 또는 농구를 좋아하는 학생의 집합

축구와 농구를 모두 좋아하는 학생의 집합은 $A\cap B$이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=19+12-26=5$

따라서 구하는 학생 수는 5이다. 답 ②

20 산악 동호회 회원 전체의 집합을 U, 설악산을 등반해 본 회원의 집합을 A, 지리산을 등반해 본 회원의 집합을 B라 하면

$n(U)=30$, $n(A)=13$, $n(B)=15$,

$n(A\cap B)=6$

설악산과 지리산을 모두 등반해 본 회원의 집합

설악산과 지리산 중 어느 곳도 등반해 보지 않은 회원의 집합은 $A^c\cap B^c=(A\cup B)^c$이므로

$n((A\cup B)^c)=n(U)-n(A\cup B)$

$=30-n(A\cup B)$ ...... ㉠

이때

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=13+15-6=22$

이므로 ㉠에서 구하는 회원 수는

$30-22=8$ 답 8

중단원 마무리

29쪽

01 **전략** 두 집합 A, B가 서로소이면 $A\cap B=\varnothing$임을 이용한다.

풀이 $A=\{2, 3, 5, 7\}$

④ $\{x|x$는 4의 양의 배수$\}=\{4, 8, 12, \cdots\}$이므로

$A\cap\{4, 8, 12, \cdots\}=\varnothing$

따라서 집합 A와 서로소이다.

⑤ $\{x\,|\,x$는 9의 양의 약수$\}=\{1,\ 3,\ 9\}$이므로

$A\cap\{1,\ 3,\ 9\}=\{3\}$

따라서 집합 A와 서로소가 아니다.

답 ④

02 전략 합집합, 교집합, 여집합, 차집합의 정의를 이용한다.

풀이 ⑤ $A^C=\{3,\ 5,\ 6,\ 7\}$이므로

$A^C\cup B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$

답 ⑤

03 전략 먼저 두 집합 U, A를 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$, $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

ㄱ. $A\cap B=\{2,\ 3\}$이므로 $\quad 5\not\in A\cap B$

ㄴ. $B-A=\{5,\ 7\}$이므로 $\quad n(B-A)=2$

ㄷ. $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$이므로 집합 $A\cup B$와 서로소인 집합은 전체집합 U의 부분집합 중에서 1, 2, 3, 5, 6, 7을 원소로 갖지 않는 집합이다.

즉 $A\cup B$와 서로소인 집합의 개수는 $\{4,\ 8,\ 9,\ 10\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

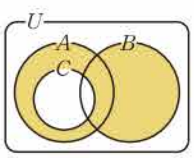
$2^4=16$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

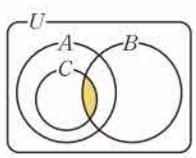
참고 ㄴ. $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=4-2=2$

04 전략 각 집합을 벤다이어그램으로 나타낸다.

풀이 ②

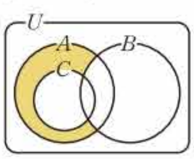


③



④ $(B-A)\cap C=\varnothing$

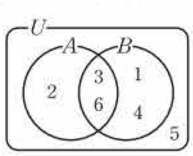
⑤



답 ①

05 전략 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타낸다.

풀이 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$A=\{2,\ 3,\ 6\}$ ··· ❶

따라서 구하는 원소의 합은

$2+3+6=11$ ··· ❷

답 11

단계	채점 기준	비율
❶	집합 A를 구할 수 있다.	80 %
❷	집합 A의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	20 %

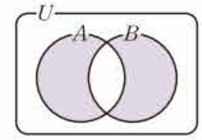
06 전략 집합의 연산을 이용하여 주어진 조건을 간단히 나타내고 벤다이어그램을 이용하여 조건을 만족시키는 경우를 찾는다.

Q BOX

풀이 $(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$

$=\{1,\ 3,\ 8\}$

이때 집합 $(A-B)\cup(B-A)$는 오른쪽 벤다이어그램에서 색칠한 부분과 같고



$1\in(A-B)$, $3\in(A-B)$

$a-1\in(A-B)$ 또는 $a-1\in(A\cap B)$

$a-1\in(A-B)$이면 $a-1=8$이므로

$a=9$

이때 $B=\{11,\ 38\}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore\ a-1\in(A\cap B)$

즉 $a-1=a^2-4a-7$ 또는 $a-1=a+2$이어야 한다.

(i) $a-1=a^2-4a-7$일 때,

$a^2-5a-6=0$에서 $\quad (a+1)(a-6)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=6$

이때 $a+2=8$이어야 하므로

$8\in(B-A)$

$a=6$

(ii) $a-1=a+2$일 때,

$-1\neq2$이므로 a의 값이 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $\quad a=6$ 답 ②

07 전략 집합의 연산의 성질을 이용하여 주어진 식을 변형한다.

풀이 ② $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$

③ $B-A^C=B\cap(A^C)^C=B\cap A=A\cap B$

④ $(A\cap A^C)\cap B=\varnothing\cap B=\varnothing$

⑤ $A\cap(U-B^C)=A\cap\{U\cap(B^C)^C\}$

$=A\cap(U\cap B)=A\cap B$

답 ④

08 전략 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 이용하여 항상 옳은 것을 찾는다.

풀이 ① $A\cup B=A$

② $B\subset A$이고 $A\neq B$이므로 $\quad A-B\neq\varnothing$

③ $A^C\cap B=B-A=\varnothing$

④, ⑤ $B\subset A$에서 $A^C\subset B^C$이고 $A^C\neq B^C$이므로

$B^C-A^C\neq\varnothing$

답 ③

09 전략 주어진 조건을 이용하여 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 구한다.

풀이 $A\cap B=A$이므로 $\quad A\subset B$

$A\cap X=A$이면 $A\subset X$
$B\cup X=B$이면 $X\subset B$

즉 $2\in B$이어야 하므로

$a^2-2=2,\quad a^2=4$

$\therefore\ a=-2$ 또는 $a=2$

(i) $a=-2$일 때,

$A=\{-1,\ 2\}$, $B=\{2,\ 5,\ 7\}$이므로

$A\not\subset B$

(ii) $a=2$일 때,

$A=\{2,\ 7\}$, $B=\{2,\ 5,\ 7\}$이므로

$A\subset B$

(i), (ii)에서 $\quad a=2$ 답 ④

10 전략 주어진 조건을 이용하여 집합 사이의 포함 관계를 구한다.

풀이 $A=\{6, 12, 18, \cdots, 48\}$, $B=\{4, 8, 12, \cdots, 48\}$

$A\cup X=A$이므로 $\quad X\subset A$

$B\cap X=\varnothing$이므로 $\quad X\subset B^C$

즉 $X\subset(A\cap B^C)$이므로 $\quad X\subset(A-B)$

이때 $A-B=\{6, 18, 30, 42\}$이므로 집합 X의 개수는 집합 $\{6, 18, 30, 42\}$의 부분집합의 개수와 같다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^4=16$

답 ②

11 전략 집합 C가 반드시 가져야 하는 원소를 구한다.

풀이 전체집합 U의 부분집합 C가

$\{1, 2, 3, 4\}\cup C=\{2, 4, 6, 8\}\cup C$

를 만족시키려면 집합 C는 두 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{2, 4, 6, 8\}$의 공통인 원소 2, 4를 제외한 나머지 원소 1, 3, 6, 8을 반드시 원소로 가져야 한다.

두 원소 2, 4는 모두 집합 A의 원소이면서 집합 B의 원소이다. 따라서 집합 C는 두 원소 2, 4를 원소로 가져도 되고 갖지 않아도 된다.

따라서 집합 C의 개수는

$2^{10-4}=2^6=64$

답 64

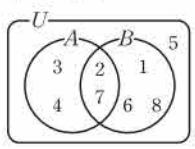
12 전략 드모르간의 법칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 한 후 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타낸다.

풀이 $(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$

$=(A\cup B)-(A\cap B)$

$=\{1, 3, 4, 6, 8\}$

이고, $A=\{2, 3, 4, 7\}$이므로 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $A\cap B=\{2, 7\}$이므로 구하는 원소의 합은

$2+7=9$

답 ③

13 전략 집합의 연산 법칙과 연산의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 $A^C\cup\{(A-B)\cup(A^C\cap B^C)\}$

$=A^C\cup\{(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B^C)\}$

$=A^C\cup\{(A\cup A^C)\cap B^C\}$

$=A^C\cup(U\cap B^C)$

$=A^C\cup B^C$

$=(A\cap B)^C$

따라서 주어진 집합을 벤다이어그램으로 바르게 나타낸 것은 ⑤이다.

답 ⑤

14 전략 집합의 연산 법칙과 연산의 성질을 이용하여 먼저 $A\diamond\varnothing$을 간단히 한다.

풀이 $A\diamond\varnothing=(A\cup\varnothing^C)\cap(A^C\cup\varnothing)$

$=(A\cup U)\cap A^C$

$=U\cap A^C$

$=A^C$

$\therefore (A\diamond\varnothing)\diamond B=A^C\diamond B$

$=(A^C\cup B^C)\cap\{(A^C)^C\cup B\}$

$=(A\cap B)^C\cap(A\cup B)$

$=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$

$=(A\cup B)-(A\cap B)$

답 ⑤

15 전략 $A_m\cap A_n$은 m과 n의 공배수의 집합임을 이용한다.

풀이 $(A_3\cup A_9)\cap(A_5\cup A_{10})=A_3\cap A_5=A_{15}$

전체집합 U의 원소 중 15의 배수는 6개이므로 구하는 원소의 개수는 6이다.

15, 30, 45, ⋯, 90

답 6

16 전략 각 부등식의 해의 집합을 구한 후 주어진 조건을 만족시키도록 수직선 위에 나타낸다.

풀이 $(x-1)(x-26)>0$에서 $\quad x<1$ 또는 $x>26$

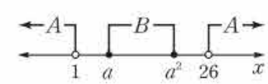
$\therefore A=\{x\,|\,x<1$ 또는 $x>26\}$

a가 정수이면 $a\le a^2$이므로 $(x-a)(x-a^2)\le 0$에서

$a\le x\le a^2$

$\therefore B=\{x\,|\,a\le x\le a^2\}$

$A\cap B=\varnothing$이 되도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $a\ge 1$, $a^2\le 26$이고, $a^2\le 26$에서 $-\sqrt{26}\le a\le\sqrt{26}$이므로

$1\le a\le\sqrt{26}$

따라서 구하는 정수 a는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

답 ⑤

17 전략 주어진 벤다이어그램에서 색칠한 부분이 나타내는 집합은 $A\cap B$임을 이용한다.

풀이 주어진 벤다이어그램에서 색칠한 부분이 나타내는 집합은 $A\cap B$이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=18+25-36=7$

답 7

18 전략 먼저 세 집합 A, B, $A\cap B$를 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 $A=\{2, 4, 6, \cdots, 60\}$, $B=\{7, 14, 21, \cdots, 70\}$이므로

$A\cap B=\{14, 28, 42, 56\}$ ⋯ ❶

$A\cap B$는 60 이하의 자연수 중 2와 7의 최소공배수인 14의 배수의 집합이다.

따라서 $n(A)=30$, $n(A\cap B)=4$이므로

$n(A\cap B^C)=n(A-B)$

$=n(A)-n(A\cap B)$

$=30-4=26$ ⋯ ❷

답 26

단계	채점 기준	비율
❶	세 집합 A, B, $A\cap B$를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷	$n(A\cap B^C)$를 구할 수 있다.	70 %

19 전략 주어진 조건을 집합으로 나타낸 후 각 집합의 원소의 개수를 이용한다.

풀이 학생 전체의 집합을 U, A 영화를 관람한 학생의 집합을 A, B 영화를 관람한 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=32$, $n(A)=18$, $n(B)=14$,

$n(A^c \cap B^c)=6$

A 영화만 관람한 학생의 집합은 $A-B$이므로

$n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)$ ······ ㉠

이때

$n(A^c\cap B^c)=n((A\cup B)^c)=n(U)-n(A\cup B)$

에서

$6=32-n(A\cup B)$ $\quad \therefore n(A\cup B)=26$

따라서 ㉠에서 A 영화만 관람한 학생 수는

$26-14=12$ 답 ①

20 전략 $n(A\cap B)$는 $B\subset A$일 때 최대이고, $A\cup B=U$일 때 최소임을 이용한다.

풀이 전체 학생의 집합을 U, 수학을 신청한 학생의 집합을 A, 영어를 신청한 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=30$, $n(A)=24$, $n(B)=15$

수학과 영어를 모두 신청한 학생의 집합은 $A\cap B$이고, $B\subset A$일 때 $n(A\cap B)$가 최대이므로 수학과 영어를 모두 신청한 학생 수의 최댓값은

$n(B)=15$

한편 $A\cup B=U$일 때 $n(A\cap B)$가 최소이므로 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$에서 수학과 영어를 모두 신청한 학생 수의 최솟값은

$24+15-30=9$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$15+9=24$ 답 ⑤

Q BOX

A, B 두 영화를 모두 관람하지 않은 학생의 집합

x의 값이 정해져 있지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

'~이다.'의 부정은 '~가 아니다.'

공집합은 모든 집합의 부분집합이다.

전체집합 U에 대하여 조건 p의 진리집합을 P라 할 때, $\sim p$의 진리집합은 P^C이다.

'$a\ge b$'의 부정은 '$a<b$'

'$a\le b$'의 부정은 '$a>b$'

03 명제

05 명제와 조건

Lecture 10 명제와 조건

32쪽

1-1 답 (1) ○ (2) × (3) ○ (4) ×

1-2 답 (1) 참 (2) 거짓 (3) 거짓 (4) 참

2-1 (1) 참인 식이므로 명제이다.

(2) x의 값에 따라 참, 거짓이 정해지므로 조건이다.

(3) 거짓인 식이므로 명제이다.

(4) x의 값에 따라 참, 거짓이 정해지므로 조건이다.

답 (1) 명제 (2) 조건 (3) 명제 (4) 조건

2-2 (2) $2x-1<9$에서 $\quad 2x<10$

$\therefore x<5$

따라서 주어진 조건의 진리집합은

$\{1, 2, 3, 4\}$

답 (1) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ (2) $\{1, 2, 3, 4\}$

Lecture 11 명제와 조건의 부정

33쪽

1-1 답 (1) -1은 자연수가 아니다. (참)

(2) 14는 7의 배수가 아니다. (거짓)

(3) $\varnothing \not\subset \{1, 2\}$ (거짓)

(4) $2x-6\neq 2(x+3)$ (참)

1-2 (1) 주어진 조건의 진리집합을 P라 하면

$P=\{1, 2, 3, 6\}$

따라서 주어진 조건의 부정의 진리집합은

$P^C=\{4, 5\}$

(2) $x^2-7x+10=0$에서 $\quad (x-2)(x-5)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=5$

즉 주어진 조건의 진리집합을 P라 하면

$P=\{2, 5\}$

따라서 주어진 조건의 부정의 진리집합은

$P^C=\{1, 3, 4, 6\}$

답 (1) $\{4, 5\}$ (2) $\{1, 3, 4, 6\}$

2-1 답 (1) x는 소수도 아니고 합성수도 아니다.

(2) $x=0$ 또는 $y=0$

(3) $x<-1$ 또는 $x>4$

(4) $-3\le x\le 6$

2-2 (1) 주어진 조건의 진리집합을 P라 하면

$P=\{1, 9\}$

따라서 주어진 조건의 부정의 진리집합은

$P^C=\{3, 5, 7\}$

(2) 주어진 조건의 진리집합을 P라 하면

$P=\{3, 5, 7\}$

따라서 주어진 조건의 부정의 진리집합은

$P^C=\{1, 9\}$

답 (1) $\{3, 5, 7\}$ (2) $\{1, 9\}$

Lecture 12 명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓

34쪽

1-1 답 (1) p: $x=-1$, q: $|x|=1$

(2) $P=\{-1\}$, $Q=\{-1, 1\}$

(3) $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

$|x|=1$에서 $x=\pm1$
$\therefore Q=\{-1, 1\}$

1-2 (1) 두 조건 '$x<3$', '$x<5$'의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|x<3\}$, $Q=\{x|x<5\}$

따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

(2) [반례] $x=1$, $y=0$이면 $xy=0$이지만 $x\neq0$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

답 (1) 참 (2) 거짓

2-1 (1) $2x$의 값은 $2, 4, 6, 8, 10$

따라서 주어진 명제는 참이다.

(2) [반례] $1^2=1$, $3^2=9$, $5^2=25$이고 $1, 9, 25$는 홀수이므로 주어진 명제는 거짓이다.

(3) $x=4$이면 $x-1=3$이므로 주어진 명제는 참이다.

(4) 6의 배수인 x는 존재하지 않으므로 주어진 명제는 거짓이다.

답 (1) 참 (2) 거짓 (3) 참 (4) 거짓

2-2 답 (1) 어떤 실수 x에 대하여 $x^2<0$이다. (거짓)

(2) 모든 실수 x에 대하여 $x^2\neq-1$이다. (참)

$x^2<0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다.

기본+표준 유형 Q+Q

35쪽

01 ① $\sqrt{3}$은 무리수이므로 거짓인 명제이다.

② 모든 x에 대하여 성립하므로 참인 명제이다.

③ x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

④ 순환소수는 유리수이므로 거짓인 명제이다.

⑤ 참인 명제이다.

답 ③

항등식은 모든 x에 대하여 성립하므로 참인 명제이다.

02 ㄱ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

ㄴ. $50\div4=12.5<13$이므로 참인 명제이다.

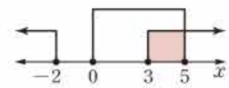
ㄷ. $\sqrt{5}-\sqrt{2}\neq\sqrt{3}$이므로 거짓인 명제이다.

ㄹ. 모든 x에 대하여 성립하므로 참인 명제이다.

이상에서 참인 명제는 ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄹ

03 'p 또는 $\sim q$'의 부정은 '$\sim p$ 그리고 q'

'$\sim p$: $x\le-2$ 또는 $x\ge3$'이므로 '$\sim p$ 그리고 q'는 오른쪽 그림에서



$3\le x\le5$

답 ②

두 조건 $\sim p$, q를 수직선 위에 나타낸 후 공통부분을 찾는다.

04 각 명제의 부정과 그 참, 거짓은 다음과 같다.

① 4와 6은 서로소가 아니다. (참)

② $5+7\neq11$ (참)

③ $(-2)^2\ge2^2$ (참)

④ $x+3x<4x-3$ (거짓)

⑤ 6은 16의 약수가 아니다. (참)

답 ④

다른 풀이 명제가 참이면 그 부정은 거짓이다.

주어진 명제 ①, ②, ③, ⑤는 거짓, ④는 참이므로 명제의 부정이 거짓인 것은 ④이다.

명제 p가 참이면 $\sim p$는 거짓이고, 명제 p가 거짓이면 $\sim p$는 참이다.

05 $x^2-3x-18>0$에서 $(x+3)(x-6)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>6$

조건 p의 진리집합을 P라 하면

$P=\{7, 8, 9, 10\}$

따라서 조건 $\sim p$의 진리집합은

$P^C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

이므로 구하는 원소의 개수는 6이다. 답 ③

06 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$,

$Q=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

이때 조건 '$\sim p$이고 q'의 진리집합은 $P^C\cap Q$이고,

$P^C=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

이므로

$P^C\cap Q=\{6, 12, 18\}$ 답 $\{6, 12, 18\}$

x는 홀수가 아니다.

07 ① [반례] $x=2$이면 x는 소수이지만 $x+1$은 짝수가 아니다.

② [반례] $x=4$이면 x는 4의 양의 배수이지만 8의 양의 배수는 아니다.

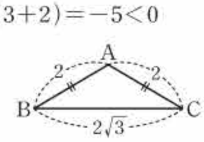
③ $x=-1$이면

$x^2+5x-6=(-1)^2+5\cdot(-1)-6$
$=-10<0$

④ $x=3$이면

$(x-4)(x+2)=(3-4)(3+2)=-5<0$

⑤ [반례] 오른쪽 그림에서 △ABC는 이등변삼각형이지만 ∠A≠∠B이다.



답 ④

08 ㄷ. [반례] $x=-2$, $y=2$이면 $x<y$이지만 $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$이다.

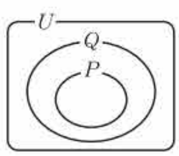
$-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$

이상에서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

09 명제 $q \longrightarrow p$가 거짓임을 보이려면 집합 Q의 원소 중에서 집합 P의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.
따라서 구하는 원소는 집합 $Q-P$의 원소인 d이다.
답 ④

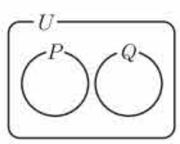
10 두 조건 p, q를
'p: n은 18의 약수이다.', 'q: n은 12의 약수이다.'
라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $Q=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 집합 P에 속하고 집합 Q에는 속하지 않아야 하므로 집합 $P-Q$의 원소이다.
이때 $P-Q=\{9, 18\}$이므로 반례로 알맞은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

11 명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로
$P \subset Q$
이것을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



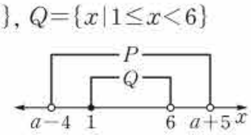
③ $Q-P \neq \varnothing$ 답 ③

12 $P \cap Q=\varnothing$에서 두 집합 P, Q는 서로소이므로 이것을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



② $P \subset Q^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$는 항상 참이다.
답 ②

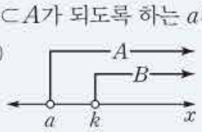
13 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x \mid a-4<x<a+5\}$, $Q=\{x \mid 1 \le x<6\}$
명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q \subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



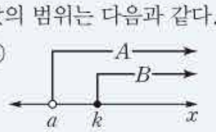
$a-4<1$, $a+5 \ge 6$ $\quad \therefore 1 \le a<5$
따라서 자연수 a는 1, 2, 3, 4의 4개이다. 답 ②

쌤 한마디

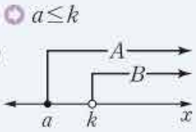
$B \subset A$가 되도록 하는 a의 값의 범위는 다음과 같다.

①


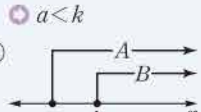
$a \le k$

②


$a<k$

③


$a \le k$

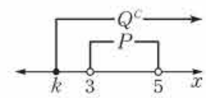
④


$a \le k$

Q BOX

$a>0$일 때
① $|x|<a$
➡ $-a<x<a$
② $|x|>a$
➡ $x<-a$ 또는 $x>a$

14 $|x-4|<1$에서 $\quad -1<x-4<1$
$\therefore 3<x<5$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x \mid 3<x<5\}$, $Q=\{x \mid x<k\}$
명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면
$P \subset Q^C$
이때 $Q^C=\{x \mid x \ge k\}$이므로 오른쪽 그림에서



$k \le 3$ 답 ①

15 ① 2는 소수이고, 짝수이다.
② 방정식 $x^2-x+1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-1)^2-4 \cdot 1 \cdot 1=-3<0$
이므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2-x+1>0$이다.
③ $x=-5$이면
$x^2+5x=(-5)^2+5 \cdot (-5)=0$
④ $x=\frac{1}{2}$이면 $\frac{1}{x}=2$이므로 $\quad x<\frac{1}{x}$
⑤ [반례] $x=1$이면 $x^2=1$이므로 $\quad x^2=x$
답 ⑤

'모든'이 있는 명제는 만족시키지 않는 것이 하나만 존재해도 거짓이다.

16 ㄱ. [반례] $x=3$이면 $\quad 3-x=3-3=0$
ㄴ. $x=0$이면 $\quad x(x-1)=0 \cdot (-1)=0$
ㄷ. $|x|$의 값은 $\quad$ 0, 1, 2, 3
따라서 모든 x에 대하여 $|x|=x$이다.
이상에서 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

17 주어진 명제의 부정은
'어떤 학생은 독서와 글쓰기를 모두 좋아하지 않는다.'
이고 이와 같은 것은 ③이다. 답 ③

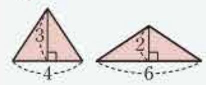
06 명제 사이의 관계

Lecture 13 명제의 역과 대우 L 38쪽

1-1 답 (1) 역: a^2이 짝수이면 a는 짝수이다.,
대우: a^2이 짝수가 아니면 a는 짝수가 아니다.
(2) 역: $x^2=y^2$이면 $x=y$이다.,
대우: $x^2 \neq y^2$이면 $x \neq y$이다.

2-1 답 (1) $a \le 0$이고 $b \le 0$이면 $a+b \le 0$이다. (참)
(2) 두 삼각형이 합동이 아니면 두 삼각형의 넓이는 같지 않다. (거짓)

아래 두 삼각형은 합동이 아니지만 넓이는 같다.



3-1 (1) 두 명제 $p \longrightarrow r$, $r \longrightarrow q$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow q$도 참이다.

(2) 명제 $r \longrightarrow p$가 참이므로 그 대우 $\sim p \longrightarrow \sim r$도 참이다.
따라서 두 명제 $q \longrightarrow \sim p$, $\sim p \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 명제 $q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

답 (1) q (2) $\sim r$

Lecture 14 충분조건과 필요조건

Ⓛ 39쪽

1-1 (1) $p \longrightarrow q$: $x \geq 5$이면 $x \geq 7$이다. (거짓)
[반례] $x=6$이면 $x \geq 5$이지만 $x < 7$이다.
$q \longrightarrow p$: $x \geq 7$이면 $x \geq 5$이다. (참)
따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
(2) $p \longrightarrow q$: x가 6의 양의 배수이면 x는 3의 양의 배수이다. (참)
$q \longrightarrow p$: x가 3의 양의 배수이면 x는 6의 양의 배수이다. (거짓)
[반례] $x=3$이면 x는 3의 양의 배수이지만 6의 양의 배수는 아니다.
따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
(3) $p \longrightarrow q$: x가 10보다 작은 자연수이면 x는 한 자리 자연수이다. (참)
$q \longrightarrow p$: x가 한 자리 자연수이면 x는 10보다 작은 자연수이다. (참)
따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

답 (1) 필요조건 (2) 충분조건 (3) 필요충분조건

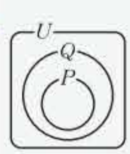
1-2 $x^2=1 \Longleftrightarrow x=\pm 1$
(1) $x=1 \Longrightarrow x^2=1$
따라서 $x=1$은 $x^2=1$이기 위한 충분조건이다.
(2) $x^2=1 \Longrightarrow x^2 \geq 0$
따라서 $x^2 \geq 0$은 $x^2=1$이기 위한 필요조건이다.
(3) $|x|=1 \Longleftrightarrow x^2=1$
따라서 $|x|=1$은 $x^2=1$이기 위한 필요충분조건이다.

$x=\pm 1$

(4) $x^2=1 \Longrightarrow -1 \leq x \leq 1$
따라서 $-1 \leq x \leq 1$은 $x^2=1$이기 위한 필요조건이다.

답 (1) 충분조건 (2) 필요조건 (3) 필요충분조건 (4) 필요조건

1-3 p가 q이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$



(1) $P \cup Q = Q$ (2) $P \cap Q = P$
(3) $P - Q = \varnothing$ (4) $P^C \cup Q = U$

답 (1) Q (2) P (3) $\varnothing$ (4) U

기본+표준 유형 Q+Q

Ⓛ 40쪽

01 ① 역: x가 5의 양의 약수이면 x는 10의 양의 약수이다. (참)
② 역: $2x+3=1$이면 $x=-1$이다. (참)

$2x+3=1$에서
$2x=-2$
$\therefore x=-1$

③ 역: $x<0$이면 $|x|>x$이다. (참)

$x<0$이면 $|x|>0$이므로 $|x|>x$

④ 역: $x<y$이면 $x^2<y^2$이다. (거짓)
[반례] $x=-3$, $y=-2$이면 $x<y$이지만 $x^2>y^2$이다.
⑤ 역: $x=0$이고 $y=0$이면 $|x|+|y|=0$이다. (참)

답 ④

02 ㄱ. 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
역: $x^2=y^2$이면 $x=y$이다. (거짓)
[반례] $x=-1$, $y=1$이면 $x^2=y^2$이지만 $x \neq y$이다.
ㄴ. [반례] $x=1$, $y=2$이면 xy는 짝수이지만 x는 짝수가 아니다.
즉 주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.
역: x와 y가 짝수이면 xy는 짝수이다. (참)
ㄷ. 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
역: $x+y>2$이면 $x>1$이고 $y>1$이다. (거짓)
[반례] $x=-1$, $y=4$이면 $x+y>2$이지만 $x<1$이다.
이상에서 역은 참이고, 대우는 거짓인 명제는 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

03 주어진 명제가 참이므로 그 대우
'$x-3=0$이면 $x^2-kx+9=0$이다.'
도 참이다.

두 조건 p, q의 진리집합보다 $\sim p$, $\sim q$의 진리집합을 구하기 쉬운 경우 명제 $p \longrightarrow q$의 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$를 이용한다.

따라서 $x=3$을 $x^2-kx+9=0$에 대입하면
$3^2-3k+9=0$, $-3k=-18$
$\therefore k=6$

답 6

04 주어진 명제가 참이므로 그 대우
'$a \leq k$이고 $b \leq 4$이면 $a+b \leq 11$이다.'
도 참이다.
$a \leq k$, $b \leq 4$에서 $a+b \leq k+4$이므로
$k+4 \leq 11$ $\therefore k \leq 7$
따라서 실수 k의 최댓값은 7이다.

답 7

05 ①, ④ 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $r \longrightarrow q$가 모두 참이므로 각각의 대우 $q \longrightarrow \sim p$, $\sim q \longrightarrow \sim r$도 모두 참이다.
③, ⑤ 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$도 참이고, 그 대우 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.
따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 $\sim p \longrightarrow r$이다.

명제 $r \longrightarrow \sim p$는 참이지만 그 역 $\sim p \longrightarrow r$가 반드시 참인 것은 아니다.

답 ②

06 ㄱ. 명제 $r \longrightarrow \sim p$가 참이므로 그 대우 $p \longrightarrow \sim r$도 참이다. 따라서 명제 $p \longrightarrow r$는 거짓이다.
ㄴ. 명제 $\sim r \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow r$도 참이다.

ㄷ. 두 명제 $p \longrightarrow \sim r$, $\sim r \longrightarrow q$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow q$도 참이고, 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이다.
이상에서 항상 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

07 ① $x^2-x=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$
따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
② $xz=yz$에서 $x=y$ 또는 $z=0$
따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
③ $x<y$의 양변에 z를 더하면 $x+z<y+z$
$x+z<y+z$의 양변에서 z를 빼면 $x<y$
따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
④ $x^2=y^2$에서 $x=y$ 또는 $x=-y$
따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
⑤ $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
따라서 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ④이다. 답 ④

08 ㄱ. $a-b=0$이면 $a=b$
$a=0$이고 $b=0 \Longrightarrow a=b$
따라서 $a-b=0$은 $a=0$이고 $b=0$이기 위한 필요조건이다.
ㄴ. $ab=0$이면 $a=0$ 또는 $b=0$
$a=0$이고 $b=0 \Longrightarrow a=0$ 또는 $b=0$
따라서 $ab=0$은 $a=0$이고 $b=0$이기 위한 필요조건이다.
ㄷ. $|a|+|b|=0 \Longleftrightarrow a=0$이고 $b=0$
따라서 $|a|+|b|=0$은 $a=0$이고 $b=0$이기 위한 필요충분조건이다.
ㄹ. $a+bi=0 \Longleftrightarrow a=0$이고 $b=0$
따라서 $a+bi=0$은 $a=0$이고 $b=0$이기 위한 필요충분조건이다.
이상에서 '$a=0$이고 $b=0$'이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ㄷ, ㄹ

09 q는 p이기 위한 필요조건이므로 $p \Longrightarrow q$
r는 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 $r \Longrightarrow \sim q$
①, ② 두 명제 $p \longrightarrow q$, $r \longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 각각의 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$, $q \longrightarrow \sim r$도 모두 참이다.
③, ④ 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$도 참이고, 그 대우 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.
답 ⑤

10 p가 $\sim q$이기 위한 필요조건이므로 $Q^C \subset P$

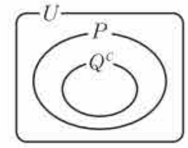
Q BOX

$x^2-x=0$에서
$x(x-1)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

$x=1$, $y=2$, $z=0$이면 $xz=yz$이지만 $x \neq y$이다.

α를 중근으로 갖고 x^2의 계수가 a인 이차방정식
$\Rightarrow a(x-\alpha)^2=0$

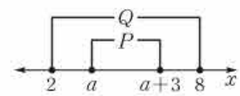
이것을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



③ $P \cup Q=U$
④ $P \cap Q^C=Q^C$
⑤ $P \cup Q^C=P$
답 ③

11 ② $P \subset R^C$이므로 p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.
③ $R \subset Q$이므로 q는 r이기 위한 필요조건이다.
④ $Q \subset P^C$이므로 q는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.
⑤ $Q^C \subset R^C$이므로 $\sim r$는 $\sim q$이기 위한 필요조건이다.
답 ②, ③

12 $x^2-10x+16 \le 0$에서
$(x-2)(x-8) \le 0$ $\therefore 2 \le x \le 8$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|a \le x \le a+3\}$, $Q=\{x|2 \le x \le 8\}$
p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 $P \subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a \ge 2$, $a+3 \le 8$ $\therefore 2 \le a \le 5$
따라서 자연수 a는 2, 3, 4, 5의 4개이다. 답 4

13 $x+4=0$, 즉 $x=-4$는 $x^2+ax+b=0$이기 위한 필요충분조건이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 해는 -4뿐이어야 한다.
중근 -4를 갖고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x+4)^2=0$, 즉 $x^2+8x+16=0$
따라서 $a=8$, $b=16$이므로
$b-a=8$ 답 8

07 여러 가지 증명법

Lecture 15 명제의 증명 42쪽

1-1 답 $x=0$ 또는 $y=0$이면 $xy=0$이다., $=$, $=$, 대우

1-2 주어진 명제의 대우는
'$x=2$이고 $y=5$이면 $xy=10$이다.'
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. 답 풀이 참조

2-1 답 $\ge$, $\ge$, $\ge$

2-2 $a \le 0$이고 $b \le 0$이라 가정하면 $ab \ge 0$
즉 $ab<0$이라는 가정에 모순이다.
따라서 주어진 명제는 참이다. 답 풀이 참조

Lecture 16 절대부등식

43쪽

1-1 답 $2\sqrt{ab}$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $\sqrt{b}$, b

$a+b-2\sqrt{ab}$
$=(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2$
$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

1-2 $a^2+2b^2-2ab=(a^2-2ab+b^2)+b^2$
$=(a-b)^2+b^2$

a, b가 실수이므로 $(a-b)^2\ge0$, $b^2\ge0$에서

$(a-b)^2+b^2\ge0$ $\therefore a^2+2b^2\ge2ab$

이때 등호는 $a-b=0$, $b=0$, 즉 $a=b=0$일 때 성립한다.

답 풀이 참조

2-1 (1) $a>0$, $\frac{1}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+\frac{1}{a}\ge2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$$

(단, 등호는 $a=1$일 때 성립)

$a=\frac{1}{a}$에서 $a^2=1$
$a>0$이므로 $a=1$

따라서 $a+\frac{1}{a}$의 최솟값은 2이다.

(2) $8a>0$, $\frac{2}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$8a+\frac{2}{a}\ge2\sqrt{8a\cdot\frac{2}{a}}=2\cdot4=8$$

$\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{1}{2}\text{일 때 성립}\right)$

$8a=\frac{2}{a}$에서 $a^2=\frac{1}{4}$
$a>0$이므로 $a=\frac{1}{2}$

따라서 $8a+\frac{2}{a}$의 최솟값은 8이다.

답 (1) 2 (2) 8

2-2 a, b, x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$

이때 $a^2+b^2=9$, $x^2+y^2=4$이므로

$9\cdot4\ge(ax+by)^2$, $36\ge(ax+by)^2$

$\therefore -6\le ax+by\le6$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{a}=\frac{y}{b}\text{일 때 성립}\right)$

답 $-6\le ax+by\le6$

기본+표준 유형 Q+Q

44쪽

01 주어진 명제의 대우는

'$\boxed{n\text{이 홀수이면 } n^2\text{도 홀수이다.}}$'

이다.

n이 홀수이면 $n=2k-1$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있으므로

자연수 k에 대하여
홀수는 $2k-1$,
짝수는 $2k$
로 나타낼 수 있다.

$n^2=(2k-1)^2=4k^2-4k+1$
$=2(2k^2-2k)+\boxed{1}$

이때 $2k^2-2k$는 0 또는 자연수이므로 n^2은 $\boxed{\text{홀수}}$이다.

$k=1$일 때,
$2k^2-2k=0$
$k\ge2$일 때,
$2k^2-2k$는 자연수

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

$\therefore$ (가) n이 홀수이면 n^2도 홀수이다. (나) 1
(다) 홀수

답 풀이 참조

02 (1) n이 짝수이면 n^2도 짝수이다.

(2) n이 짝수이면 $n=2k$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있으므로

$n^2=(2k)^2=4k^2=2\cdot2k^2$

이때 $2k^2$은 자연수이므로 n^2은 짝수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

03 $\sqrt{2}$가 무리수가 아니라고 가정하면 $\sqrt{2}$는 유리수이므로

$\sqrt{2}=\frac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)

으로 나타낼 수 있다.

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$2m^2=n^2$ ······ ㉠

이때 n^2이 $\boxed{2}$의 배수이므로 n도 2의 배수이다.

$n=2k$ (k는 자연수)로 놓으면 ㉠에서

$2m^2=4k^2$ $\therefore m^2=2k^2$

따라서 m^2이 $\boxed{2}$의 배수이므로 m도 2의 배수이다.

이것은 m, n이 $\boxed{\text{서로소}}$라는 가정에 모순이므로 $\sqrt{2}$는 무리수이다.

$\therefore$ (가) 2 (나) 2 (다) 서로소

답 풀이 참조

04 m^2+n^2이 홀수일 때, mn이 $\boxed{\text{홀수}}$라 가정하면 m, n이 모두 홀수이므로

$m=2k-1$, $n=2l-1$ (k, l은 자연수)

로 나타낼 수 있다.

$\therefore m^2+n^2$
$=(2k-1)^2+(2l-1)^2$
$=4k^2-4k+1+4l^2-4l+1$
$=2(\boxed{2k^2-2k+2l^2-2l+1})$

이때 $\boxed{2k^2-2k+2l^2-2l+1}$은 자연수이므로

m^2+n^2은 $\boxed{\text{짝수}}$이다.

그런데 이것은 m^2+n^2이 홀수라는 가정에 모순이므로 mn은 짝수이다.

$\therefore$ (가) 홀수 (나) $2k^2-2k+2l^2-2l+1$ (다) 짝수

답 풀이 참조

05 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$
$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$
$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2$
$=(\boxed{ay-bx})^2$

$ay-bx$ 대신 $bx-ay$를 써넣어도 된다.

a, b, x, y가 실수이므로 $(\boxed{ay-bx})^2\ge0$

$\therefore (a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$

이때 등호는 $ay-bx=0$, 즉 $\frac{x}{a}=\boxed{\frac{y}{b}}$일 때 성립한다.

$\therefore$ (가) $ay-bx$ (나) $\frac{y}{b}$ 답 풀이 참조

06 $(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$

$=(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)-(a+b)^2$

$=(a^2+2|ab|+b^2)-(a^2+2ab+b^2)$

$=2(\boxed{|ab|-ab})\geq 0$ ($\because$ $|ab|\geq ab$)

$\therefore (|a|+|b|)^2\geq|a+b|^2$

그런데 $|a|+|b|\geq 0$, $|a+b|\geq 0$이므로

$|a|+|b|\geq|a+b|$

이때 등호는 $|ab|-ab=0$, 즉 $|ab|=ab$일 때 성립하므로 $\boxed{ab\geq 0}$일 때 성립한다.

$\therefore$ (가) $|ab|-ab$ (나) $ab\geq 0$ 답 ③

모든 실수 A에 대하여 $|A|\geq A$

07 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4a+3b\geq 2\sqrt{4a\cdot 3b}=2\sqrt{12ab}$

이때 $4a+3b=12$이므로

$12\geq 2\sqrt{12ab}$, $\quad 6\geq\sqrt{12ab}$

양변을 제곱하면 $\quad 36\geq 12ab$

$\therefore ab\leq 3$ (단, 등호는 $4a=3b$일 때 성립)

따라서 ab의 최댓값은 3이다. 답 ②

등호는 $4a=3b$일 때 성립하고 $4a+3b=12$이므로

$4a=6$, $3b=6$

$\therefore a=\frac{3}{2}$, $b=2$

따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=2$일 때 ab는 최댓값을 갖는다.

08 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$5a+2b\geq 2\sqrt{5a\cdot 2b}=2\sqrt{10ab}$

그런데 $ab=40$이므로

$5a+2b\geq 2\sqrt{10\cdot 40}$

$=40$ (단, 등호는 $5a=2b$일 때 성립)

따라서 $5a+2b$의 최솟값은 40이다. 답 40

다른 풀이 $ab=40$에서 $a>0$이므로

$b=\frac{40}{a}$

$\therefore 5a+2b=5a+2\cdot\frac{40}{a}=5a+\frac{80}{a}$

$\geq 2\sqrt{5a\cdot\frac{80}{a}}$

$=2\cdot 20$

$=40$ (단, 등호는 $a=4$일 때 성립)

$5a=\frac{80}{a}$에서

$a^2=16$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

09 $x+y=6$이므로

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{6}{xy}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y\geq 2\sqrt{xy}$, $\quad 2\sqrt{xy}\leq 6$

$\sqrt{xy}\leq 3$

양변을 제곱하면

$xy\leq 9$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

따라서 ㉠에서

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{6}{xy}\geq\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

이므로 구하는 최솟값은 $\frac{2}{3}$이다. 답 ③

10 $a>0$에서 $a^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{9}{a}\right)=a^2+9+1+\frac{9}{a^2}$

$=10+a^2+\frac{9}{a^2}$

$\geq 10+2\sqrt{a^2\cdot\frac{9}{a^2}}$

$=10+2\cdot 3=16$

(단, 등호는 $a=\sqrt{3}$일 때 성립)

따라서 주어진 식의 최솟값은 16이다. 답 ④

$a^2=\frac{9}{a^2}$에서 $\quad a^4=9$

$a^2=3$ ($\because a^2>0$)

$\therefore a=\sqrt{3}$ ($\because a>0$)

11 $x>6$에서 $x-6>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+\frac{1}{x-6}=x-6+\frac{1}{x-6}+6$

$\geq 2\sqrt{(x-6)\cdot\frac{1}{x-6}}+6$

$=2\cdot 1+6$

$=8$ (단, 등호는 $x=7$일 때 성립)

따라서 주어진 식의 최솟값은 8이다. 답 ③

$x-6=\frac{1}{x-6}$에서

$(x-6)^2=1$

$x-6>0$이므로

$x-6=1 \quad \therefore x=7$

12 $x>0$, $y>0$, $z>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}$

$=\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}$

$=\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)$

$\geq 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}+2\sqrt{\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{z}}+2\sqrt{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{z}}$

$=2+2+2=6$ (단, 등호는 $x=y=z$일 때 성립)

따라서 주어진 식의 최솟값은 6이다. 답 ②

$\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$, $\frac{z}{y}=\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}=\frac{x}{z}$에서

$x^2=y^2=z^2$

$\therefore x=y=z$

($\because x>0, y>0, z>0$)

13 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(5^2+12^2)(x^2+y^2)\geq(5x+12y)^2$

이때 $5x+12y=13$이므로

$169(x^2+y^2)\geq 169$

$\therefore x^2+y^2\geq 1$ $\left(\text{단, 등호는 }\frac{x}{5}=\frac{y}{12}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 1이다. 답 ①

14 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(6^2+8^2)(x^2+y^2)\geq(6x+8y)^2$

이때 $x^2+y^2=9$이므로

$100\cdot 9\geq(6x+8y)^2$, $\quad 900\geq(6x+8y)^2$

$\therefore -30 \le 6x+8y \le 30$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{6}=\frac{y}{8}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $6x+8y$의 최댓값은 30, 최솟값은 -30이므로 구하는 곱은

$30\cdot(-30)=-900$ 답 ②

중단원 마무리

47쪽

01 전략 x의 값에 관계없이 참, 거짓을 판별할 수 있는 문장이나 식을 찾는다.

풀이 ①, ②, ④, ⑤ x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

③ $x-1=x+4$에서 $-1=4$이므로 거짓인 명제이다.

답 ③

02 전략 '또는'의 부정은 '그리고', '그리고'의 부정은 '또는'임을 이용한다.

풀이 ① $xy=0$에서 $x=0$ 또는 $y=0$이므로

$\sim p$: $x\neq 0$이고 $y\neq 0$

② $x^2+y^2=0$에서 $x=0$이고 $y=0$이므로

$\sim p$: $x\neq 0$ 또는 $y\neq 0$

③ $\sim p$: $x\le 0$ 또는 $x\ge 2$

⑤ $x=y=z$에서 $x=y$이고 $y=z$이고 $z=x$이므로

$\sim p$: $x\neq y$ 또는 $y\neq z$ 또는 $z\neq x$

답 ④

03 전략 명제 p가 참이면 $\sim p$는 거짓이고, p가 거짓이면 $\sim p$는 참임을 이용한다.

풀이 (i) 지우의 말만 참인 경우는 다음 문장이 모두 참이다.

윤호와 현아의 말은 거짓이다.

- 지우는 사탕을 먹었다.
- 윤호는 사탕을 먹었다.
- 현아는 초콜릿을 먹었다.

이때 지우와 윤호가 모두 사탕을 먹었으므로 지우의 말은 참일 수 없다.

(ii) 윤호의 말만 참인 경우는 다음 문장이 모두 참이다.

지우와 현아의 말은 거짓이다.

- 지우는 사탕을 먹지 않았다.
- 윤호는 사탕을 먹지 않았다.
- 현아는 초콜릿을 먹었다.

이때 사탕을 먹은 사람은 아무도 없으므로 윤호의 말은 참일 수 없다.

(iii) 현아의 말만 참인 경우는 다음 문장이 모두 참이다.

지우와 윤호의 말은 거짓이다.

- 지우는 사탕을 먹지 않았다.
- 윤호는 사탕을 먹었다.
- 현아는 초콜릿을 먹지 않았다.

이상에서 참을 말한 사람은 현아이므로 젤리를 먹은 사람은 현아이다.

지우는 초콜릿을 먹었고, 윤호는 사탕을 먹었다.

답 현아

04 전략 먼저 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 구한다.

풀이 $x^2-x=0$에서 $x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

$x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{0, 1\}$, $Q=\{-1, 2\}$ ··· ❶

이때 조건 'p 또는 $\sim q$'의 진리집합은 $P\cup Q^C$이고, $Q^C=\{-2, 0, 1\}$이므로

$P\cup Q^C=\{-2, 0, 1\}$ ··· ❷

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$-2+0+1=-1$ ··· ❸

답 -1

단계	채점 기준	비율
❶	두 조건 p, q의 진리집합을 구할 수 있다.	40 %
❷	조건 'p 또는 $\sim q$'의 진리집합을 구할 수 있다.	40 %
❸	조건 'p 또는 $\sim q$'의 진리집합의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	20 %

05 전략 3의 배수이면서 6의 배수가 아닌 것을 찾는다.

풀이 두 조건 p, q를

'p: n은 3의 배수이다.', 'q: n은 6의 배수이다.'

라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27\}$,

$Q=\{6, 12, 18, 24\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 집합 P에 속하고 집합 Q에는 속하지 않아야 하므로 집합 $P-Q$의 원소이다.

따라서 구하는 반례는 3, 9, 15, 21, 27이다.

답 3, 9, 15, 21, 27

06 전략 세 조건 p, q, r의 진리집합 사이의 포함 관계를 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별한다.

풀이 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자.

$|x|>4$에서 $x<-4$ 또는 $x>4$

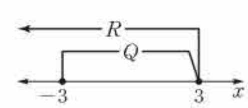
$\therefore P=\{x|x<-4 \text{ 또는 } x>4\}$

$x^2-9\le 0$에서 $(x+3)(x-3)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 3$ $\therefore Q=\{x|-3\le x\le 3\}$

$x\le 3$에서 $R=\{x|x\le 3\}$

ㄱ. 두 집합 Q, R를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

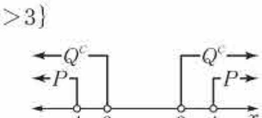


$Q\subset R$

따라서 명제 $q \longrightarrow r$는 참이다.

ㄴ. $Q^C=\{x|x<-3 \text{ 또는 } x>3\}$

두 집합 P, Q^C를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

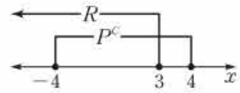


$P\subset Q^C$

따라서 명제 $p \longrightarrow \sim q$는 참이다.

ㄷ. $P^C=\{x\,|\,-4\le x\le 4\}$

두 집합 R, P^C를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$R\not\subset P^C$

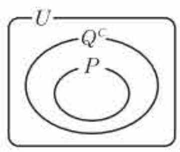
따라서 명제 $r \longrightarrow \sim p$는 거짓이다.

이상에서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

07 전략 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참임을 이용하여 두 집합 P, Q^C 사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타낸다.

풀이 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 $P\subset Q^C$

이것을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $P\not\subset Q$

② $Q\subset P^C$

③ $P\cap Q^C=P$

④ $Q-P=Q\cap P^C=Q$

⑤ $P^C\cup Q^C=U$

답 ⑤

08 전략 세 조건 p, q, r의 진리집합을 구한 후 진리집합 사이의 포함 관계를 이용한다.

풀이 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자.

$\therefore P=\{x\,|\,x>4\}$, $Q=\{x\,|\,x>5-a\}$

이때 명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 $P\subset Q$

즉 $5-a\le 4$이어야 하므로

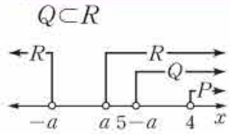
$a\ge 1$ …… ㉠

$\therefore R=\{x\,|\,x<-a$ 또는 $x>a\}$

$(x-a)(x+a)>0$에서
$x<-a$ 또는 $x>a$
$(\because a\ge 1)$

한편 명제 $q \longrightarrow r$가 참이므로 $Q\subset R$

따라서 세 집합 P, Q, R를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a\le 5-a$, $2a\le 5$

$\therefore a\le \dfrac{5}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $1\le a\le \dfrac{5}{2}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $\dfrac{5}{2}$, 최솟값은 1이므로 구하는 합은

$\dfrac{5}{2}+1=\dfrac{7}{2}$ 답 ②

09 전략 '어떤'을 포함한 명제는 성립하는 예가 하나만 있어도 참인 명제임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $P=U$이면 '어떤 x에 대하여 p이다.'는 참이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

10 전략 명제가 거짓이면 그 명제의 부정은 참임을 이용한다.

풀이 주어진 명제가 거짓이 되려면 그 부정이 참이어야 한다.

이때 주어진 명제의 부정은

'어떤 실수 x에 대하여 $2x^2+6x+a<0$이다.'

이차방정식 $2x^2+6x+a=0$의 판별식을 D라 할 때, 위의 명제가 참이 되려면

$\dfrac{D}{4}=3^2-2\cdot a>0 \qquad \therefore a<\dfrac{9}{2}$

따라서 정수 a의 최댓값은 4이다. 답 ③

쌤 한마디

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

① 명제 '어떤 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c<0$이다.'가 참이려면
- 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$이 해를 갖는다.
- $a<0$ 또는 $a>0$, $D>0$

② 명제 '모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c<0$이다.'가 참이려면
- 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$이 항상 성립한다.
- $a<0$, $D<0$

11 전략 명제가 참이면 그 대우도 참임을 이용하여 대우의 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ① [반례] $x=2$이면 x는 소수이지만 홀수는 아니다.

즉 주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

역: x가 홀수이면 x는 소수이다. (거짓)

[반례] $x=9$이면 x는 홀수이지만 소수는 아니다.

② 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

역: $x=0$ 또는 $x=1$이면 $x^2=x$이다. (참)

$x^2=x$에서 $x^2-x=0$
$x(x-1)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

③ [반례] $x=-\dfrac{4}{3}$이면 $x<-1$이지만 $3x+5=1$이다.

즉 주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

역: $3x+5<1$이면 $x<-1$이다. (참)

④ 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

역: xy가 유리수이면 x와 y가 유리수이다. (거짓)

[반례] $x=\sqrt{2}$, $y=0$이면 xy는 유리수이지만 x는 유리수가 아니다.

⑤ [반례] $x=0$, $y=0$이면 $|xy|=xy$이지만 x, y가 양수가 아니다.

즉 주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

역: x, y가 모두 양수이면 $|xy|=xy$이다. (참)

$x>0$, $y>0$이면
$xy>0$
$\therefore |xy|=xy$

답 ④

12 전략 명제가 참이면 그 대우도 참임을 이용한다.

풀이 주어진 명제의 대우는

'$x=5$이면 $x^2-kx-3\ge 0$이다.' ⋯➊

이때 주어진 명제가 참이려면 그 대우도 참이어야 한다.

$x=5$를 $x^2-kx-3\ge 0$에 대입하면

$25-5k-3\ge 0, \qquad -5k\ge -22$

$\therefore k \le \frac{22}{5}$ ⋯ ❷

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다. ⋯ ❸

답 4

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 명제의 대우를 구할 수 있다.	30 %
❷	k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸	자연수 k의 개수를 구할 수 있다.	20 %

13 전략 명제가 참이면 그 대우도 참인 것과 삼단논법을 이용하여 필요한 참인 명제를 찾는다.

풀이 명제 $q \longrightarrow \sim p$가 참이므로 그 대우 $p \longrightarrow \sim q$도 참이다.

또 명제 $\sim s \longrightarrow r$가 참이므로 그 대우 $\sim r \longrightarrow s$도 참이다.

두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim r \longrightarrow s$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow s$가 참이려면 명제 $\sim q \longrightarrow \sim r$가 참이어야 한다.

또 명제 $\sim q \longrightarrow \sim r$가 참이면 그 대우 $r \longrightarrow q$도 참이다.

따라서 명제 $p \longrightarrow s$가 참임을 보이기 위해 필요한 참인 명제는 $r \longrightarrow q$이다. 답 ④

14 전략 명제가 참이면 그 대우도 참인 것과 삼단논법을 이용하여 항상 참인 명제를 찾는다.

풀이 네 조건 p, q, r, s를

'p: 10대, 20대에게 선호도가 높다.',

'q: 판매량이 많다.',

'r: 가격이 싸다.',

's: 기능이 많다.'

로 놓으면 (가), (나), (다)에서 각각 명제

$p \longrightarrow q$, $r \longrightarrow q$, $s \longrightarrow p$

가 모두 참이다.

③ 명제 $s \longrightarrow p$, $p \longrightarrow q$가 모두 참이므로 명제 $s \longrightarrow q$도 참이고, 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim s$도 참이다. 즉 명제 '판매량이 많지 않은 제품은 기능이 많지 않다.'는 참이다.

답 ③

참고 각 보기를 네 조건 p, q, r, s로 나타내면 다음과 같다.

① $s \longrightarrow \sim r$ ② $\sim r \longrightarrow \sim q$ ③ $\sim q \longrightarrow \sim s$

④ $p \longrightarrow s$ ⑤ $p \longrightarrow \sim r$

15 전략 두 조건 p, q의 진리집합 사이의 포함 관계를 이용한다.

풀이 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 조건 p가 조건 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아니므로 $P \not\subset Q$, $Q \subset P$이어야 한다.

ㄱ. p: $|x+3|=2$에서 $x+3=\pm 2$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-5$

$\therefore P=\{-5, -1\}$

q: $x=-1$에서 $Q=\{-1\}$

$\therefore P \not\subset Q$, $Q \subset P$

ㄴ. p: $|x|<1$에서 $-1<x<1$

$\therefore P=\{x \mid -1<x<1\}$

q: $x<1$에서 $Q=\{x \mid x<1\}$

$\therefore P \subset Q$, $Q \not\subset P$

ㄷ. p: $x^2>y^2$에서 $|x|>|y|$

$\therefore P=\{(x, y) \mid |x|>|y|\}$

q: $x>y>0$에서 $Q=\{(x, y) \mid x>y>0\}$

$\therefore P \not\subset Q$, $Q \subset P$

[반례] $x=-2$, $y=1$이면 $|x|>|y|$이지만 $x<y$이다.

이상에서 조건 p가 조건 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

16 전략 명제가 참이면 그 대우도 참인 것과 삼단논법을 이용한다.

풀이 p가 $\sim r$이기 위한 충분조건이므로 $p \Longrightarrow \sim r$

r가 q이기 위한 필요조건이므로 $q \Longrightarrow r$

ㄷ. 명제 $p \longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.

ㄹ. 명제 $q \longrightarrow r$, $r \longrightarrow \sim p$가 모두 참이므로 명제 $q \longrightarrow \sim p$도 참이다.

이상에서 항상 참인 명제는 ㄷ, ㄹ이다.

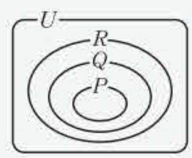
답 ㄷ, ㄹ

17 전략 먼저 세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 구한다.

풀이 p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$

q는 r이기 위한 충분조건이므로 $Q \subset R$

$\therefore P \subset Q \subset R$



① $P \cup Q = Q$이므로 $(P \cup Q) \subset R$

② $P \cap R = P$이므로 $(P \cap R) \subset Q$

③ $Q \cap R = Q$이므로 $P \subset (Q \cap R)$

④ $Q - R = \varnothing$이므로 $(Q-R) \subset P$

공집합은 모든 집합의 부분집합이다.

⑤ $P^C \cup R = U$이므로 $Q \subset (P^C \cup R)$

답 ①

18 전략 p가 $\sim q$이기 위한 필요조건임을 이용하여 두 조건 p, q의 진리집합 사이의 포함 관계를 생각해 본다.

풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$2x-a \le 0$에서 $x \le \frac{a}{2}$

$\therefore P=\left\{x \,\middle|\, x \le \frac{a}{2}\right\}$

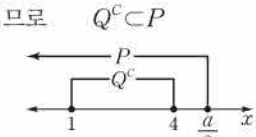
$x^2-5x+4>0$에서 $(x-1)(x-4)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>4$

$\therefore Q=\{x \mid x<1$ 또는 $x>4\}$

p가 $\sim q$이기 위한 필요조건이므로 $Q^C \subset P$

이때 $Q^C=\{x \mid 1 \le x \le 4\}$이므로 오른쪽 그림에서



$\frac{a}{2} \ge 4$ $\therefore a \ge 8$

따라서 실수 a의 최솟값은 8이다. 답 8

19 전략 결론을 부정하여 모순이 생김을 보인다.

풀이 (i) $a=2n$ (n은 정수)일 때

$$\begin{aligned}f(a)&=f(2n)\\&=a(2n)^2+b\cdot2n+c\\&=4an^2+2bn+c\\&=2(2an^2+bn)+\boxed{f(0)}\end{aligned}$$

$f(0)$이 홀수이므로 위 등식에서 우변은 $\boxed{\text{홀수}}$가 되어 모순이다.

(ii) $a=2n+1$ (n은 정수)일 때

$$\begin{aligned}f(a)&=f(2n+1)\\&=a(2n+1)^2+b(2n+1)+c\\&=4an^2+4an+2bn+a+b+c\\&=2(2an^2+2an+bn)+\boxed{f(1)}\end{aligned}$$

$f(1)$이 홀수이므로 위 등식에서 우변은 $\boxed{\text{홀수}}$가 되어 모순이다.

$\therefore$ (가) $f(0)$ (나) 홀수 (다) $f(1)$ 답 ⑤

20 전략 $A-B$의 부호를 조사하여 대소 관계를 구한다.

풀이
$$\begin{aligned}A-B&=a^2+2b^2-b(2a+b)\\&=a^2-2ab+b^2\\&=(a-b)^2\end{aligned}$$

a, b가 실수이므로 $(a-b)^2\geq0$

$\therefore$ $A\geq B$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립) 답 ②

21 전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 $x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}4x+\frac{a}{x}&\geq2\sqrt{4x\cdot\frac{a}{x}}\\&=2\sqrt{4a}\\&=4\sqrt{a}\ \left(\text{단, 등호는 } 4x=\frac{a}{x}\text{일 때 성립}\right)\end{aligned}$$

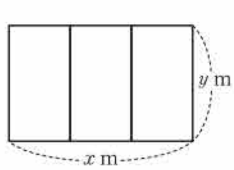
따라서 $4x+\frac{a}{x}$의 최솟값은 $4\sqrt{a}$이므로

$4\sqrt{a}=2$, $\sqrt{a}=\frac{1}{2}$

$\therefore$ $a=\frac{1}{4}$ 답 ①

22 전략 큰 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y로 놓고 x, y 사이의 관계식을 구한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 큰 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m라 하면 철망 전체의 길이가 80 m이므로



$2x+4y=80$ $\therefore$ $x+2y=40$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+2y\geq2\sqrt{x\cdot2y}=2\sqrt{2xy}$

이때 $x+2y=40$이므로

$40\geq2\sqrt{2xy}$, $\sqrt{2xy}\leq20$

$2xy\leq400$

$\therefore$ $xy\leq200$ (단, 등호는 $x=2y$일 때 성립)

Q BOX

등호는 $x=2y$일 때 성립하고 $x+2y=40$이므로

$x=20$, $2y=20$

$\therefore$ $x=20$, $y=10$

따라서 $x=20$, $y=10$일 때 xy는 최댓값을 갖는다.

따라서 가축우리 전체의 넓이의 최댓값은 200 m^{2}이다.

답 200 m^2

23 전략 코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.

풀이 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}(x^2+y^2)\geq\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^2 \quad \cdots\cdots ❶$$

이때 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=\sqrt{13}$이므로

$\frac{13}{36}(x^2+y^2)\geq13$

$\therefore$ $x^2+y^2\geq36$ (단, 등호는 $2x=3y$일 때 성립)

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 36이다. ⋯⋯ ❷

답 36

단계	채점 기준	비율
❶	코시-슈바르츠 부등식을 이용하여 식을 세울 수 있다.	40 %
❷	x^2+y^2의 최솟값을 구할 수 있다.	60 %

04 함수

08 함수

Lecture 17 함수

52쪽

1-1 (1) X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.
이때 정의역은 $\{a, b, c\}$, 공역은 $\{d, e, f, g\}$, 치역은 $\{d, e, g\}$이다.

함수 $f: X \longrightarrow Y$에 대하여
① 정의역: 집합 X
② 공역: 집합 Y
③ 치역: $\{f(x) \mid x \in X\}$

(2) X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 4, 6의 2개이므로 함수가 아니다.
(3) X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.
이때 정의역은 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, 공역은 $\{a, b, c\}$, 치역은 $\{a, b, c\}$이다.

답 풀이 참조

1-2 (1) $x=-1$일 때, $\quad y=-1-1=-2$
$x=0$일 때, $\quad y=0-1=-1$
$x=1$일 때, $\quad y=1-1=0$
따라서 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.
(2) $x=-1$일 때, $\quad y=(-1)^2+2\cdot(-1)=-1$
$x=0$일 때, $\quad y=0^2+2\cdot0=0$
$x=1$일 때, $\quad y=1^2+2\cdot1=3$

Y의 원소가 아니다.

따라서 X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

답 (1) ○ (2) ×

1-3 답 (1) 정의역: 실수 전체의 집합,
치역: 실수 전체의 집합
(2) 정의역: $\{x \mid x \neq 0$인 실수$\}$,
치역: $\{y \mid y \neq 0$인 실수$\}$
(3) 정의역: 실수 전체의 집합,
치역: $\{y \mid y \geq -1$인 실수$\}$
(4) 정의역: 실수 전체의 집합,
치역: $\{y \mid y \geq 0$인 실수$\}$

Lecture 18 서로 같은 함수, 함수의 그래프

53쪽

1-1 (1) $f(-1)=g(-1)=-1$, $f(1)=g(1)=1$
따라서 두 함수 f, g는 서로 같은 함수이다.
(2) $f(1)=1$, $g(1)=-1$이므로 $\quad f(1) \neq g(1)$
따라서 두 함수 f, g는 서로 같은 함수가 아니다.

답 (1) 서로 같은 함수이다.
(2) 서로 같은 함수가 아니다.

1-2 (1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 정의역과 공역은 실수 전체의 집합이고 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=g(x)=\begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$$

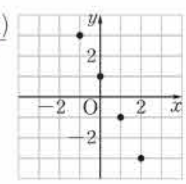
따라서 두 함수 f, g는 서로 같은 함수이다.
(2) 함수 f의 정의역은 실수 전체의 집합이고 함수 g의 정의역은 $\{x \mid x \neq 3$인 실수$\}$이다.

(분모)$\neq 0$에서
$x-3 \neq 0$, 즉 $x \neq 3$

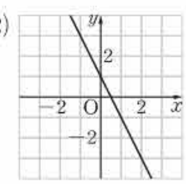
따라서 f와 g의 정의역이 같지 않으므로 두 함수 f, g는 서로 같은 함수가 아니다.

답 (1) 서로 같은 함수이다.
(2) 서로 같은 함수가 아니다.

2-1 답 (1)



(2)



$x=-1$일 때, $\quad y=3$
$x=0$일 때, $\quad y=1$
$x=1$일 때, $\quad y=-1$
$x=2$일 때, $\quad y=-3$

2-2 답 (1) × (2) ○ (3) ×

그래프가 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 두 점에서 만날 때가 있으므로 함수의 그래프가 아니다.

Lecture 19 여러 가지 함수

54쪽

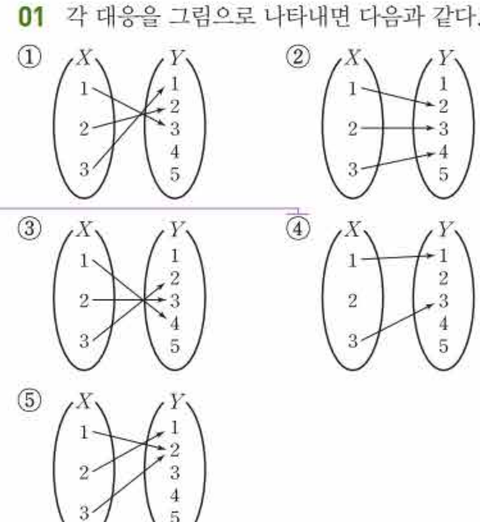
1-1 답 (1) ㄱ, ㄹ (2) ㄱ, ㄹ (3) ㄹ (4) ㄷ

1-2 답 (1) ㄱ, ㄴ (2) ㄱ, ㄴ (3) ㄱ (4) ㄷ

기본+표준 유형 Q+Q

55쪽

01 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



$x=2$일 때,
$y=\frac{1}{4}\cdot(2^2+3)=\frac{7}{4}$

따라서 X에서 Y로의 함수가 아닌 것은 ④이다.

답 ④

02 ㄱ, ㄴ, ㄹ. 실수 a에 대하여 직선 $x=a$가 그래프와 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.

ㄷ. 실수 a에 대하여 직선 $x=a$가 그래프와 2개 이상의 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.
이상에서 함수의 그래프인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

03 $4>2$이므로 $\quad f(4)=4$
$-3<2$이므로 $\quad f(-3)=-(-3)+4=7$
$\therefore f(4)-f(-3)=4-7=-3$

답 -3

04 $\dfrac{x+1}{3}=2$에서
$x+1=6 \quad \therefore x=5$
$x=5$를 $f\left(\dfrac{x+1}{3}\right)=4x-5$에 대입하면
$f(2)=4\cdot5-5=15$

답 ②

다른 풀이 $\dfrac{x+1}{3}=t$로 놓으면 $\quad x=3t-1$
$\therefore f(t)=4(3t-1)-5=12t-9$
따라서 $f(x)=12x-9$이므로
$f(2)=12\cdot2-9=15$

05 $-8\le x\le 12$에서 $\quad -5\le x+3\le 15$
$-1\le \dfrac{x+3}{5}\le 3, \quad -3\le -\dfrac{x+3}{5}\le 1$
$\therefore -3\le y\le 1$
따라서 함수 $y=-\dfrac{x+3}{5}$의 치역이 $\{y\mid -3\le y\le 1\}$이므로 $\quad a=-3,\ b=1$
$\therefore a+b=-2$

답 -2

쌤 한마디

부등식의 성질
실수 a, b, c에 대하여
① $a>b$이면 $\quad a+c>b+c,\ a-c>b-c$
② $a>b,\ c>0$이면 $\quad ac>bc,\ \dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$
③ $a>b,\ c<0$이면 $\quad ac<bc,\ \dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$

06 정의역이 $\{-1, 0, 1\}$이므로
$f(-1)=a+2,\ f(0)=0,\ f(1)=a-2$
따라서 치역은 $\{a+2,\ 0,\ a-2\}$이고, 치역의 모든 원소의 합이 14이므로
$(a+2)+0+(a-2)=14$
$2a=14 \quad \therefore a=7$

답 ③

쌤 한마디

$a+2\ne a-2$이므로 치역의 원소 $a+2,\ 0,\ a-2$ 중에서 같은 원소가 있으면 $a+2=0$ 또는 $a-2=0$, 즉 $a=-2$ 또는 $a=2$이다.
이때 $a=-2$이면 치역은 $\{-4, 0\}$이므로 모든 원소의 합이 -4이고, $a=2$이면 치역은 $\{0, 4\}$이므로 모든 원소의 합이 4이다.
따라서 주어진 조건에 모순이므로 $a+2,\ 0,\ a-2$는 모두 다른 원소이다.

Q BOX

07 $f(0)=g(0)$에서 $\quad b=5$
$f(1)=g(1)$에서 $\quad 2a+5=1-3+b$
$\therefore 2a-b=-7$
$b=5$를 위의 식에 대입하면
$2a-5=-7 \quad \therefore a=-1$
$\therefore b-a=6$

답 ⑤

08 ㄱ. $f(0)=g(0)=0,\ f(1)=g(1)=1,$
$f(2)=g(2)=2$이므로 $\quad f=g$
ㄴ. $f(2)=2,\ g(2)=4$이므로 $\quad f(2)\ne g(2)$
$\therefore f\ne g$
ㄷ. $f(1)=3,\ g(1)=1$이므로 $\quad f(1)\ne g(1)$
$\therefore f\ne g$
이상에서 $f=g$인 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

$f(2)=4,\ g(2)=0$이므로
$f(2)\ne g(2)$
임을 이용하여 확인할 수도 있다.

09 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만나는 그래프는 ㄱ, ㄹ이다.
이상에서 일대일함수의 그래프인 것은ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

일대일함수의 그래프는 치역의 임의의 원소 k에 대하여 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만난다.

쌤 한마디

일대일함수는 정의역의 서로 다른 두 원소에 대응하는 치역의 원소가 서로 달라야 하므로 일대일함수의 그래프는 치역의 각 원소 k에 대하여 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만난다.
한편 일대일대응은 일대일함수이고 치역과 공역이 같아야 하므로 일대일대응의 그래프는 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만나고, 치역과 공역이 같다.
따라서 직선 $y=k$를 그었을 때의 교점의 개수와 치역, 공역으로 일대일함수 또는 일대일대응의 그래프인지를 판별한다.

10 함수 f가 일대일함수이고 $f(2)=4$이므로 $f(1)$, $f(3)$의 값은 서로 다르고 2, 6, 8 중 하나이어야 한다.
따라서 $f(1)+f(3)$은 $f(1)=6,\ f(3)=8$ 또는 $f(1)=8,\ f(3)=6$일 때 최댓값 14를 갖는다.

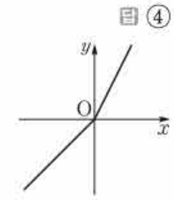
답 ④

집합 Y의 원소 중에서 4를 제외한 나머지

11 ④ [반례] $f(x)=-x^2+4$라 하면 $x_1=-1,\ x_2=1$일 때 $x_1\ne x_2$이지만 $\quad f(x_1)=f(x_2)=3$
따라서 함수 $y=-x^2+4$는 일대일대응이 아니다.

답 ④

참고 ⑤ 함수 $y=2x+|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 이 함수는 일대일대응이다.



(i) $x\ge0$일 때
$y=2x+x$
$\therefore y=3x$
(ii) $x<0$일 때
$y=2x-x$
$\therefore y=x$

일대일대응이면 일대일함수이지만 일대일함수라고 해서 반드시 일대일대응인 것은 아니다.

12 ㄱ. 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 2개 이상의 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.
ㄴ. 양수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수이다.

그런데 치역과 공역이 같지 않으므로 일대일대응이 아니다.

$\{y|y>0\}$

ㄷ. 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일대응이다.

이상에서 일대일함수이지만 일대일대응은 아닌 함수의 그래프인 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

13 $a>0$이고 함수 f가 일대일대응이므로

$f(x)$는 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가한다.

$f(-2)=-8$, $f(3)=7$

$-2a+b=-8$, $3a+b=7$

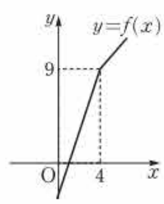
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-2$

$\therefore ab=-6$ 답 ③

쌤 한마디

함수 $f(x)=ax+b\,(a\neq0)$의 그래프는 직선이므로 x의 값이 증가할 때 y의 값은 항상 증가하거나 항상 감소하는 일대일함수이다. 따라서 치역과 공역이 서로 같기만 하면 일대일대응이 된다. 즉 정의역의 양 끝 값에서의 함숫값이 공역의 양 끝 값이어야 한다.

14 함수 f가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 직선 $y=3x+a$가 점 $(4, 9)$를 지나야 하므로

$9=12+a$ $\therefore a=-3$ 답 -3

15 ㄱ. $f(3)=\sqrt{3^2}=3$, $f(7)=\sqrt{7^2}=7$, $f(11)=\sqrt{11^2}=11$

따라서 함수 $f(x)$는 항등함수이다.

ㄴ. $g(3)=1$, $g(7)=5$, $g(11)=9$

따라서 함수 $g(x)$는 항등함수가 아니다.

ㄷ. 3, 7, 11을 각각 12로 나누었을 때의 나머지는 3, 7, 11이므로

$h(3)=3$, $h(7)=7$, $h(11)=11$

따라서 함수 $h(x)$는 항등함수이다.

ㄹ. 3, 7, 11은 모두 소수이므로 양의 약수의 개수는 각각 2이다.

$\therefore i(3)=2$, $i(7)=2$, $i(11)=2$

따라서 함수 $i(x)$는 항등함수가 아니다.

이상에서 항등함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

16 함수 f가 항등함수이므로

$f(-2)=-2$, $f(6)=6$

$f(-2)=g(-2)$에서 $g(-2)=-2$

이때 함수 g가 상수함수이므로 $g(3)=-2$

$\therefore f(6)+g(3)=6-2=4$ 답 ①

17 X에서 X로의 일대일대응의 개수는

$3\cdot2\cdot1=6$

X에서 X로의 상수함수의 개수는 3

따라서 $p=6$, $q=3$이므로

$p+q=9$ 답 ④

쌤 한마디

집합 X의 원소의 개수가 n, 집합 Y의 원소의 개수가 m일 때

① X에서 Y로의 함수의 개수 ⭘ m^n

② X에서 Y로의 일대일함수의 개수

⭘ $m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$(단, $m\geq n$)

③ X에서 X로의 일대일대응의 개수

⭘ $n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot2\cdot1$

④ X에서 Y로의 상수함수의 개수 ⭘ m

18 $f(2)=c$, $f(5)=a$이고 함수 f는 일대일대응이므로 구하는 함수 f의 개수는 정의역이 $\{1, 3, 4\}$이고 공역이 $\{b, d, e\}$인 일대일대응의 개수와 같다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$3\cdot2\cdot1=6$ 답 6

09 합성함수

Lecture 20 합성함수

58쪽

1-1 (1) $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(a)=3$

f의 치역은 $\{a, c, d\}$이고 g의 정의역인 Y의 부분집합이므로 합성함수 $g\circ f$를 정의할 수 있다.

(2) $(g\circ f)(4)=g(f(4))=g(d)=1$

(3) $(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(3)=a$

(4) $(f\circ g)(d)=f(g(d))=f(1)=c$

g의 치역은 $\{1, 2, 3, 4\}$이고 f의 정의역인 X의 부분집합이므로 합성함수 $f\circ g$를 정의할 수 있다.

답 (1) 3 (2) 1 (3) a (4) c

1-2 (1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x+2)$

$=-(3x+2)+1=-3x-1$

(2) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-x+1)$

$=3(-x+1)+2=-3x+5$

(3) $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(3x+2)$

$=3(3x+2)+2=9x+8$

(4) $(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(-x+1)$

$=-(-x+1)+1=x$

답 (1) $(g\circ f)(x)=-3x-1$

(2) $(f\circ g)(x)=-3x+5$

(3) $(f\circ f)(x)=9x+8$

(4) $(g\circ g)(x)=x$

2-1 (1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-2x+1)$

$=(-2x+1)^2+4=4x^2-4x+5$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+4)$

$=-2(x^2+4)+1=-2x^2-7$

(2) $(g\circ f)(x)\neq(f\circ g)(x)$

함수의 합성에서 교환법칙이 성립하지 않는다.

답 풀이 참조

2-2 (1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=x^2+6$이므로

$$(h\circ(g\circ f))(x)=h((g\circ f)(x))=h(x^2+6)=-4(x^2+6)+3=-4x^2-21$$

$(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(x+6)$
$=-4(x+6)+3=-4x-21$

이므로

$$((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))=(h\circ g)(x^2)=-4x^2-21$$

(2) $(h\circ(g\circ f))(x)=((h\circ g)\circ f)(x)$

함수의 합성에서 결합법칙이 성립한다.

답 풀이 참조

기본+표준 유형 Q+Q

59쪽

01 $f(12)=\frac{1}{4}\cdot12-1=2$이므로

$(g\circ f)(12)=g(f(12))=g(2)$
$=-2^2-6=-10$

$g(-3)=3\cdot(-3)+5=-4$이므로

$(f\circ g)(-3)=f(g(-3))=f(-4)$
$=\frac{1}{4}\cdot(-4)-1=-2$

$\therefore (g\circ f)(12)+(f\circ g)(-3)=-10-2=-12$

답 ②

02 $(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(4)=1$

$(f\circ f\circ f)(4)=f(f(f(4)))=f(f(1))=f(3)=2$

$\therefore (f\circ f)(2)+(f\circ f\circ f)(4)=1+2=3$ 답 3

03 $((h\circ g)\circ f)(8)=(h\circ g\circ f)(8)$
$=h(g(f(8)))$
$=h(g(3))$
$=h(7)$
$=-4$ 답 ①

함수의 합성에서 결합법칙이 성립하므로 괄호를 생략하여 나타낼 수 있다.

$f(8)=8-5=3$

$g(3)=3^2-2=7$

$h(7)=-2\cdot7+10$
$=-4$

04 $((f\circ g)\circ h)(a)=(f\circ(g\circ h))(a)$
$=f((g\circ h)(a))$
$=f(5a-12)$
$=-(5a-12)+6$
$=-5a+18$

따라서 $-5a+18=3$이므로

$-5a=-15\qquad\therefore a=3$ 답 3

다른 풀이 $((f\circ g)\circ h)(a)=(f\circ(g\circ h))(a)$
$=f((g\circ h)(a))=3$

에서 $(g\circ h)(a)=k$라 하면 $f(k)=3$이므로

$-k+6=3\qquad\therefore k=3$

$(g\circ h)(a)=3$이므로

$5a-12=3,\qquad 5a=15\qquad\therefore a=3$

05 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+c)$
$=a(x+c)+b$
$=ax+ac+b$

따라서 $ax+ac+b=-5x+9$이므로

$a=-5,\ ac+b=9$

$ax+b=a'x+b'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a',\ b=b'$

$\therefore a=-5,\ b-5c=9$

또 $f(2)=-6$이므로 $\quad 2a+b=-6$

$a=-5$를 위의 식에 대입하면

$-10+b=-6\qquad\therefore b=4$

$b=4$를 $b-5c=9$에 대입하면

$4-5c=9,\qquad -5c=5\qquad\therefore c=-1$

$\therefore a+b+c=-2$ 답 -2

06 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-3x-4)$
$=a(-3x-4)+2=-3ax-4a+2$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+2)$
$=-3(ax+2)-4=-3ax-10$

$f\circ g=g\circ f$이므로

일반적으로 $f\circ g\neq g\circ f$이지만 특정한 경우에 한하여 $f\circ g=g\circ f$가 성립하기도 한다.

$-3ax-4a+2=-3ax-10$

$-4a+2=-10,\qquad -4a=-12$

$\therefore a=3$ 답 ③

07 $(g\circ h)(x)=g(h(x))=2h(x)+3$

따라서 $2h(x)+3=-4x^2+7$이므로

$2h(x)=-4x^2+4$

$\therefore h(x)=-2x^2+2$ 답 ②

08 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{3x+2}{5}\right)$이고

$(f\circ g)(x)=h(x)$이므로

$f\left(\frac{3x+2}{5}\right)=-6x+9$

$\frac{3x+2}{5}=t$로 놓으면

$3x+2=5t\qquad\therefore x=\frac{5t-2}{3}$

따라서 $f(t)=-6\cdot\frac{5t-2}{3}+9=-10t+13$이므로

$f(x)=-10x+13$

$\therefore f(2)=-10\cdot2+13=-7$ 답 ④

다른 풀이 $g(a)=2$라 하면

$\frac{3a+2}{5}=2,\qquad 3a+2=10$

$3a=8\qquad\therefore a=\frac{8}{3}$

$(f\circ g)(x)=h(x)$의 양변에 $x=\frac{8}{3}$을 대입하면

$f\left(g\left(\frac{8}{3}\right)\right)=h\left(\frac{8}{3}\right)$이므로

$f(2)=h\left(\frac{8}{3}\right)=-6\cdot\frac{8}{3}+9=-7$

09 $f(k)=m$이라 하면 $(f\circ f)(k)=3$에서

$f(f(k))=f(m)=3$

이때 주어진 그래프에서 $f(4)=3$이므로

$m=4 \quad \therefore f(k)=4$

따라서 주어진 그래프에서 $f(5)=4$이므로

$k=5$　　답 5

10 주어진 그래프에서

$$f(x)=\begin{cases}-2x+2 & (0\le x<1)\\ 2x-2 & (1\le x\le 2)\end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases}0 & (0\le x<1)\\ -2x+4 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

따라서 $(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(2)=2$,

$(g\circ f)\left(\frac{1}{4}\right)=g\left(f\left(\frac{1}{4}\right)\right)=g\left(\frac{3}{2}\right)=1$이므로

$(f\circ g)(1)+(g\circ f)\left(\frac{1}{4}\right)=2+1=3$　　답 3

11 $f^1(x)=f(x)=x+1$에서

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$
$=x+1+1=x+2$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$
$=x+2+1=x+3$

⋮

$\therefore f^{20}(x)=x+20$

$\therefore f^{20}(5)=25$　　답 ⑤

다른 풀이 $f^1(5)=f(5)=6$에서

$f^2(5)=f(f(5))=f(6)=7$

$f^3(5)=f(f^2(5))=f(7)=8$

⋮

$\therefore f^{20}(5)=5+20=25$

$5+1$
$5+2$
$5+3$

12 $f^1(x)=f(x)=3x$에서

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=3\cdot 3x=3^2x$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=3\cdot 3^2x=3^3x$

⋮

$\therefore f^k(x)=3^kx$

$f^k(3)=3^k\cdot 3=3^{k+1}$이므로

$3^{k+1}=729=3^6$

$k+1=6 \quad \therefore k=5$　　답 5

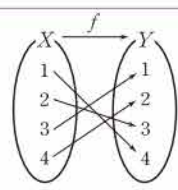
10 역함수

Lecture 21 역함수　　61쪽

1-1 (1) 함수 f가 일대일대응이어야 하므로

$f(3)=1$

따라서 대응 관계를 완성하면 오른쪽 그림과 같다.



함수 $f: X \longrightarrow Y$의 역함수가 존재하기 위한 필요충분조건은 f가 일대일대응인 것이다.

(2) $f(1)=4$, $f^{-1}(1)=3$이므로

$f(1)+f^{-1}(1)=7$

답 풀이 참조

함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여
$f(a)=b$
$\Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$

1-2 (1) $f^{-1}(a)=3$에서 $f(3)=a$이므로

$a=-2\cdot 3+4=-2$

(2) $f^{-1}(6)=a$에서 $f(a)=6$이므로

$-2a+4=6, \quad -2a=2$

$\therefore a=-1$

답 (1) -2 (2) -1

2-1 (1) 주어진 함수는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=2x+5$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$2x=y-5 \quad \therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{5}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

(2) 주어진 함수는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=-3x+9$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$3x=-y+9 \quad \therefore x=-\frac{1}{3}y+3$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-\frac{1}{3}x+3$

답 (1) $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ (2) $y=-\frac{1}{3}x+3$

2-2 (1) 주어진 함수는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=\frac{1}{3}x-6$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$\frac{1}{3}x=y+6 \quad \therefore x=3y+18$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=3x+18$

(2) 주어진 함수는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=-\frac{1}{5}x+2$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$\frac{1}{5}x=-y+2 \quad \therefore x=-5y+10$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-5x+10$

답 (1) $y=3x+18$ (2) $y=-5x+10$

$f^{-1}\circ f=I_X$
(I_X는 X에서의 항등함수)

$f\circ f^{-1}=I_Y$
(I_Y는 Y에서의 항등함수)

Lecture 22 역함수의 성질　　62쪽

1-1 (1) $(f^{-1})^{-1}(4)=f(4)=d$

(2) $(f^{-1}\circ f)(2)=2$

(3) $(f\circ f^{-1})(a)=a$

답 (1) d (2) 2 (3) a

1-2 (1) $(f^{-1}\circ g)^{-1}(3)=(g^{-1}\circ f)(3)=g^{-1}(f(3))$
$=g^{-1}(11)$

$g^{-1}(11)=k$라 하면 $g(k)=11$이므로

$-k+6=11 \qquad \therefore k=-5$

$\therefore (f^{-1}\circ g)^{-1}(3)=-5$

(2) $(f\circ g^{-1})^{-1}(-1)=(g\circ f^{-1})(-1)=g(f^{-1}(-1))$

$f^{-1}(-1)=k$라 하면 $f(k)=-1$이므로

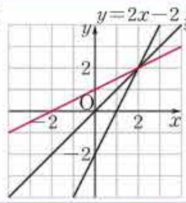
$2k+5=-1, \qquad 2k=-6$

$\therefore k=-3$

$\therefore (f\circ g^{-1})^{-1}(-1)=g(-3)=9$

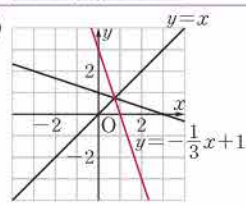
답 (1) -5 (2) 9

2-1 답 (1)



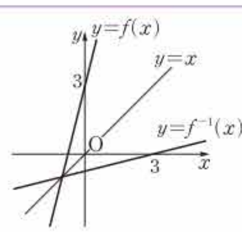
함수 $y=2x-2$의 역함수는
$y=\frac{1}{2}x+1$

(2)



함수 $y=-\frac{1}{3}x+1$의 역함수는
$y=-3x+3$

2-2 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점과 같다.

$4x+3=x, \qquad 3x=-3$

$\therefore x=-1$

따라서 구하는 교점의 좌표는

$(-1, -1)$ 답 $(-1, -1)$

기본+표준 유형 Q+Q

63쪽

01 $f^{-1}(-4)=-3$에서 $f(-3)=-4$이므로

$-3a+b=-4$ …… ㉠

$f^{-1}(11)=2$에서 $f(2)=11$이므로

$2a+b=11$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=3,\ b=5$

$\therefore a+b=8$ 답 ②

02 $f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2$이므로

$k^2-6k+7=2, \qquad k^2-6k+5=0$

$(k-1)(k-5)=0 \qquad \therefore k=5\ (\because k\ge3)$

$\therefore f^{-1}(2)=5$ 답 5

정의역이 $\{x|x\ge3\}$이므로 $k\ge3$

03 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이다. 이때 $f(x)=3x+2$에서 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가하므로

$y=f(x)$의 그래프의 기울기가 양수

$a=f(-2)=-6+2=-4,$

$b=f(3)=9+2=11$

$\therefore b-a=15$ 답 ⑤

04 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하므로 역함수가 존재하는 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

05 $y=4x+a$로 놓으면

$4x=y-a \qquad \therefore x=\frac{1}{4}y-\frac{a}{4}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\qquad y=\frac{1}{4}x-\frac{a}{4}$

따라서 $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x-\frac{a}{4}$이므로 $\frac{1}{4}x-\frac{a}{4}=bx-3$

에서 $\quad \frac{1}{4}=b,\ -\frac{a}{4}=-3 \qquad \therefore a=12,\ b=\frac{1}{4}$

$\therefore ab=3$ 답 ③

06 $y=ax+1$로 놓으면

$ax=y-1 \qquad \therefore x=\frac{1}{a}y-\frac{1}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\qquad y=\frac{1}{a}x-\frac{1}{a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{1}{a}$

$f=f^{-1}$에서 $ax+1=\frac{1}{a}x-\frac{1}{a}$이므로

$a=\frac{1}{a},\ 1=-\frac{1}{a} \qquad \therefore a=-1$ 답 ②

다른 풀이 $f=f^{-1}$이므로 $\qquad (f\circ f)(x)=x$

$f(x)=ax+1$에서

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=a(ax+1)+1$
$=a^2x+a+1$

따라서 $a^2x+a+1=x$이므로

$a^2=1,\ a+1=0 \qquad \therefore a=-1$

07 $(f^{-1}\circ g)(4)=f^{-1}(g(4))$

이때 $g(4)=-4-8=-12$이므로

$(f^{-1}\circ g)(4)=f^{-1}(g(4))=f^{-1}(-12)$

한편

$x\ge0$일 때, $\quad f(x)=x+4\ge4$

$x<0$일 때, $\quad f(x)=-x^2+4<4$

이고, $f^{-1}(-12)=k$라 하면 $f(k)=-12$이므로

$-k^2+4=-12, \qquad k^2=16$

$-12<4$이므로 $f(x)=-x^2+4$에 대입한다.

$\therefore k=-4$ 또는 $k=4$

그런데 $k<0$이므로 $\qquad k=-4$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(4)=-4$ 답 -4

08 $(g^{-1}\circ f)(k)=3$에서 $\qquad g^{-1}(f(k))=3$

$\therefore g^{-1}(-2k+3)=3$

따라서 $g(3)=-2k+3$이므로

$13=-2k+3,\quad 2k=-10$

$\therefore k=-5$ 답 -5

09 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(-2)$

$=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(-2)$

$=(g^{-1}\circ f)(-2)$

$=g^{-1}(f(-2))$

$=g^{-1}(4)$

$g^{-1}(4)=k$라 하면 $g(k)=4$이므로

$-3k+7=4,\quad -3k=-3\quad \therefore k=1$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(-2)=g^{-1}(4)=1$ 답 1

10 $(f^{-1}\circ g)^{-1}(a)=(g^{-1}\circ f)(a)=g^{-1}(f(a))$

$g^{-1}(f(a))=-3$에서 $f(a)=k$라 하면

$g^{-1}(k)=-3$

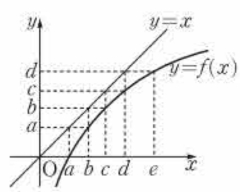
$g(-3)=k$이므로 $\quad k=4\cdot(-3)+5=-7$

$\therefore f(a)=-7$

즉 $2a-1=-7$이므로

$2a=-6\quad \therefore a=-3$ 답 ③

11 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$f^{-1}(a)=k$라 하면

$f(k)=a$이므로 $\quad k=b$

$f^{-1}(b)=l$이라 하면 $f(l)=b$이므로 $\quad l=c$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(a)=f^{-1}(f^{-1}(a))=f^{-1}(b)=c$

답 ③

12 $f^{-1}(2)=a,\ f^{-1}(5)=b$라 하면

$f(a)=2,\ f(b)=5$

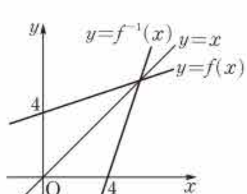
이때 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이므로

주어진 그래프에서 $f(1)=3,\ f(2)=1,\ f(4)=4$ 이므로 X의 원소 3, 5에 대응하는 X의 원소는 1, 3, 4를 제외한 나머지 원소이다.

$a=3,\ b=5$ 또는 $a=5,\ b=3$

$\therefore f^{-1}(2)+f^{-1}(5)=a+b=8$ 답 8

13 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 두 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같으므로 $\frac{1}{3}x+4=x$에서

$\frac{2}{3}x=4\quad \therefore x=6$

즉 교점의 좌표는 $(6,\ 6)$이므로 $\quad a=6,\ b=6$

$\therefore a+b=12$ 답 12

Q BOX

함수 f와 그 역함수 f^{-1}에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(a,\ b)$를 지나면 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(b,\ a)$를 지난다.

14 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-3,\ 5)$를 지나므로

$-3a+b=5$ …… ㉠

또 $y=f(x)$의 역함수의 그래프가 점 $(-3,\ 5)$를 지나므로 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(5,\ -3)$을 지난다.

$\therefore 5a+b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-1,\ b=2$

따라서 $f(x)=-x+2$이므로

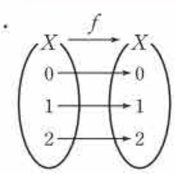
$f(7)=-5$ 답 -5

중단원 마무리 Ⓛ 65쪽

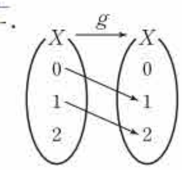
01 전략 각 대응을 그림으로 나타낸다.

풀이 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

ㄱ.

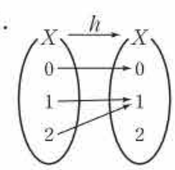


ㄴ.

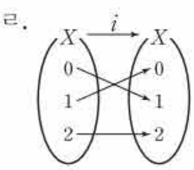


X의 원소 2에 대응하는 X의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

ㄷ.



ㄹ.



이상에서 함수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ④

02 전략 x의 값의 범위에 따른 함숫값을 구한다.

풀이 $f(2)=2+4=6$

$f(28)=f(28-3)=f(25-3)$

$=\cdots=f(4-3)=f(1)=1+4=5$

$\therefore f(2)+f(28)=6+5=11$ 답 11

03 전략 $x,\ y$에 적당한 수를 대입하여 $f(0),\ f(-3)$의 값을 구한다.

풀이 $f(x+y)=f(x)+f(y)$에 $x=0,\ y=0$을 대입하면 $\quad f(0)=f(0)+f(0)\quad \therefore f(0)=0$ … ❶

또 $x=-3,\ y=3$을 대입하면

$f(0)=f(-3)+f(3)$

이때 $f(3)=-4$이므로 $\quad 0=f(-3)-4$

$\therefore f(-3)=4$ … ❷

답 4

단계	채점 기준	비율
❶	$f(0)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷	$f(-3)$의 값을 구할 수 있다.	60 %

04 전략 a의 값의 범위를 나누어 생각한다.

풀이 (i) $a>0$일 때,

$f(x)$는 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가한다.

$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 같으므로

$f(-4)=-1,\ f(2)=5$

$-4a+b=-1$, $2a+b=5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=1$, $b=3$

그런데 $ab>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때,

$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 같으므로

$f(-4)=5$, $f(2)=-1$

$-4a+b=5$, $2a+b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-1$, $b=1$

이때 $ab<0$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $\quad a=-1$, $b=1$

$\therefore a-b=-2$ 답 -2

Q BOX

$f(x)$는 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소한다.

05 전략 $f(0)=g(0)$, $f(1)=g(1)$, $f(2)=g(2)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=2x^2-4x+3$에서

$f(0)=3$, $f(1)=1$, $f(2)=3$

$g(x)=a|x-1|+b$에서

$g(0)=a+b$, $g(1)=b$, $g(2)=a+b$

두 함수 f와 g가 서로 같으려면

$f(0)=g(0)$, $f(1)=g(1)$, $f(2)=g(2)$

이어야 한다.

따라서 $a+b=3$, $b=1$이므로 $\quad a=2$, $b=1$

$\therefore 2a-b=2\cdot2-1=3$ 답 ④

두 함수 f, g가 서로 같다.
➡ 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$

06 전략 y축과 수직인 직선을 그어 교점이 1개인지 확인하고, 치역과 공역이 같은지 확인한다.

풀이 ①, ②, ③ 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 2개 이상의 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

④ 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일대응이다.

⑤ 음수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수이다.

그런데 치역과 공역이 같지 않으므로 일대일대응이 아니다. 답 ④

일대일함수가 아니면 일대일대응이 아니다.

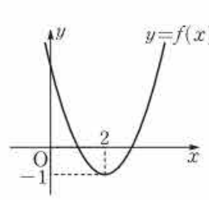
$\{y|y<0\}$

07 전략 f가 일대일대응이려면 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값이 증가하거나 감소해야 하고, 치역과 공역이 같아야 한다.

풀이 $f(x)=x^2-4x+3$

$=(x-2)^2-1$

이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면 오른쪽 그림과 같은 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $a\ge2$이어야 한다.



$a\ge2$일 때 치역은 $\{y|y\ge f(a)\}$이므로

$b=f(a)$

$\therefore a-b=a-f(a)=a-(a^2-4a+3)$

$=-a^2+5a-3=-\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$

따라서 $a\ge2$에서 $a-b$의 최댓값은 $a=\frac{5}{2}$일 때 $\frac{13}{4}$이므로 $\quad p=4$, $q=13$

$\therefore p+q=17$ 답 17

08 전략 $f(-2)=-2$, $f(-1)=-1$, $f(3)=3$을 만족시키는 a, b의 값을 구한다.

풀이 함수 f가 항등함수가 되려면

$f(-2)=-2$, $f(-1)=-1$, $f(3)=3$

이어야 한다.

$x\ge0$일 때 $f(3)=3$을 만족시키고 $x<0$일 때 $f(x)=ax^2+bx-2$이므로 $f(-2)=-2$, $f(-1)=-1$에서

$4a-2b-2=-2$, $a-b-2=-1$

$\therefore 2a-b=0$, $a-b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-1$, $b=-2$

$\therefore a+b=-3$ 답 ③

09 전략 일대일대응과 항등함수, 상수함수의 정의를 이용한다.

풀이 함수 g는 항등함수이므로

$g(2)=2$, $g(3)=3$

$f(1)=g(2)=h(3)$에서 $\quad f(1)=h(3)=2$

$f(1)+f(3)=f(2)$에서 $\quad 2+f(3)=f(2)$

함수 f는 일대일대응이므로

$f(2)=1$, $f(3)=3$ 또는 $f(2)=3$, $f(3)=1$

그런데 $f(2)=1$, $f(3)=3$이면 $2+f(3)\ne f(2)$이므로 $\quad f(2)=3$, $f(3)=1$

또 함수 h는 상수함수이므로

$h(1)=h(3)=2$

$\therefore f(2)+g(3)+h(1)=3+3+2=8$ 답 8

10 전략 $\sqrt{7}$과 $f(\sqrt{7})$의 값이 유리수인지 무리수인지 구분하여 함숫값을 구한다.

풀이 $\sqrt{7}$은 무리수이므로

$f(\sqrt{7})=-(\sqrt{7})^2=-7$

-7은 유리수이므로

$f(-7)=-7+3=-4$

$\therefore (f\circ f)(\sqrt{7})=f(f(\sqrt{7}))=f(-7)=-4$

답 ④

11 전략 함수의 합성에서 결합법칙이 성립함을 이용하여 $(h\circ(g\circ f))(a)$를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $(h\circ(g\circ f))(a)=((h\circ g)\circ f)(a)$

$=(h\circ g)(f(a))$

$=(h\circ g)(a+4)$

$=-3(a+4)+5$

$=-3a-7$ ···· ❶

따라서 $-3a-7=8$이므로

$-3a=15 \quad \therefore a=-5$ ···· ❷

답 -5

단계	채점 기준	비율
❶	$(h\circ(g\circ f))(a)$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷	a의 값을 구할 수 있다.	40 %

12 전략 $(f\circ f)(x)$를 a, b를 포함한 식으로 나타내어 동류항의 계수를 비교한다.

풀이 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=a(ax+b)+b$

$\qquad\qquad\qquad=a^2x+ab+b$

따라서 $a^2x+ab+b=9x-16$이므로

$\quad a^2=9,\ ab+b=-16$

$a^2=9$에서 $\quad a=-3\ (\because a<0)$

$a=-3$을 $ab+b=-16$에 대입하면

$\quad -2b=-16 \qquad \therefore b=8$

$\quad \therefore ab=-24$ 답 -24

$ax+b=a'x+b'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$

13 전략 $f\circ g=h$의 조건이 주어지면 $f(g(x))=h(x)$임을 이용한다. 이때 $f(x)$를 구하는 경우에는 $g(x)=t$로 치환한다.

풀이 (1) $(f\circ h)(x)=g(x)$이므로

$\quad f(h(x))=g(x)$

$\quad -2h(x)+5=4x-7$

$\quad 2h(x)=-4x+12$

$\quad \therefore h(x)=-2x+6$ ⋯ ❶

(2) $(k\circ f)(x)=g(x)$이므로

$\quad k(f(x))=g(x)$

$\quad k(-2x+5)=4x-7$

$-2x+5=t$로 놓으면 $x=-\frac{1}{2}t+\frac{5}{2}$이므로

$\quad k(t)=4\left(-\frac{1}{2}t+\frac{5}{2}\right)-7=-2t+3$

$\quad \therefore k(x)=-2x+3$ ⋯ ❷

답 (1) $h(x)=-2x+6$ (2) $k(x)=-2x+3$

단계	채점 기준	비율
❶	$h(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷	$k(x)$를 구할 수 있다.	60 %

14 전략 $f(2)$, $f^2(2)$, $f^3(2)$, ⋯의 값과 $f(3)$, $f^2(3)$, $f^3(3)$, ⋯의 값을 각각 차례대로 구하여 규칙을 찾는다.

풀이 $f^1(2)=f(2)=3$이므로

$\quad f^2(2)=f(f(2))=f(3)=4$

$\quad f^3(2)=f(f^2(2))=f(4)=1$

$\quad f^4(2)=f(f^3(2))=f(1)=2$

$\quad f^5(2)=f(f^4(2))=f(2)=3$

$\quad\quad \vdots$

즉 $f^n(2)$는 3, 4, 1, 2가 이 순서대로 반복된다.

이때 $2012=4\cdot503$이므로

$\quad f^{2012}(2)=f^4(2)=2$

또 $f^1(3)=f(3)=4$이므로

$\quad f^2(3)=f(f(3))=f(4)=1$

$\quad f^3(3)=f(f^2(3))=f(1)=2$

$\quad f^4(3)=f(f^3(3))=f(2)=3$

$\quad f^5(3)=f(f^4(3))=f(3)=4$

$\quad\quad \vdots$

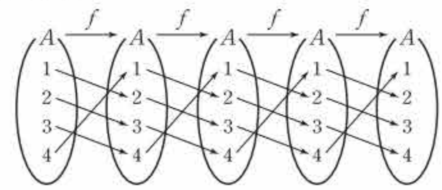
즉 $f^n(3)$은 4, 1, 2, 3이 이 순서대로 반복된다.

이때 $2013=4\cdot503+1$이므로

$\quad f^{2013}(3)=f^1(3)=4$

$\quad \therefore f^{2012}(2)+f^{2013}(3)=2+4=6$ 답 ④

다른 풀이 $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=4$, $f(4)=1$이므로 f^1, f^2, f^3, f^4의 대응 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



즉 $f^4(x)=x$이므로

$\quad f^{2012}(2)=f^{4\cdot503}(2)=f^4(2)=2$

$\quad f^{2013}(3)=f^{4\cdot503+1}(3)=f^1(3)=4$

$\quad \therefore f^{2012}(2)+f^{2013}(3)=2+4=6$

15 전략 $f^{-1}(m)=n \Longleftrightarrow f(n)=m$임을 이용한다.

풀이 $f^{-1}(-7)=3$에서 $f(3)=-7$이므로

$\quad -15+a=-7 \qquad \therefore a=8$

따라서 $f(x)=-5x+8$이므로

$\quad f(4)=(-5)\cdot4+8=-12$ 답 -12

16 전략 먼저 x의 값의 범위에 따른 $f(x)$의 값의 범위를 구한다.

풀이 $x<3$일 때, $\quad f(x)=x+2<5$

$x\geq3$일 때, $\quad f(x)=3x-4\geq5$

$f^{-1}(4)=m$이라 하면 $f(m)=4$이므로

$\quad m+2=4 \qquad \therefore m=2$

$f^{-1}(14)=n$이라 하면 $f(n)=14$이므로

$\quad 3n-4=14, \qquad 3n=18$

$\quad \therefore n=6$

$\quad \therefore f^{-1}(4)+f^{-1}(14)=2+6=8$ 답 ②

$4<5$이므로 $f(x)=x+2$에 대입한다.

$14>5$이므로 $f(x)=3x-4$에 대입한다.

17 전략 함수 f의 역함수가 존재하려면 f가 일대일대응이어야 함을 이용한다.

풀이 함수 f의 역함수가 존재하려면 f는 일대일대응이어야 한다.

$f(1)+2f(3)=12$이고 f는 일대일대응이므로

$\quad f(1)=2,\ f(3)=5$ ⋯⋯ ㉠

$f^{-1}(1)-f^{-1}(3)=2$에서 $f^{-1}(1)\in X$, $f^{-1}(3)\in X$이므로

$\quad f^{-1}(1)=3,\ f^{-1}(3)=1$

$\quad$또는 $f^{-1}(1)=4,\ f^{-1}(3)=2$

$\quad$또는 $f^{-1}(1)=5,\ f^{-1}(3)=3$

㉠에서 $f^{-1}(2)=1$, $f^{-1}(5)=3$이고 함수 f^{-1}도 일대일대응이므로

$f(1)\neq f(3)$이고 $f(1)$, $f(3)$의 값은 각각 1, 2, 3, 4, 5 중 하나임을 이용하여 $f(1)+2f(3)=12$를 만족시키는 $f(1)$, $f(3)$의 값을 찾는다.

$f^{-1}(1)=4,\ f^{-1}(3)=2$

즉 $f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=5,\ f(4)=1$이고 f는 일대일대응이므로

$f(5)=4$

따라서 $f^{-1}(4)=5$이므로

$f(4)+f^{-1}(4)=1+5=6$ 답 ②

18 전략 $2x+3=h(x)$로 놓고 $f\circ h$의 역함수를 구한다.

풀이 $h(x)=2x+3$이라 하면 $f(2x+3)$의 역함수는

$(f\circ h)^{-1}(x)=(h^{-1}\circ f^{-1})(x)=h^{-1}(g(x))$

Q BOX: $f(2x+3)=f(h(x))$
$=(f\circ h)(x)$

$y=2x+3$으로 놓으면

$2x=y-3 \quad \therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

즉 $h^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$이므로

$h^{-1}(g(x))=\frac{1}{2}g(x)-\frac{3}{2}$

따라서 $y=f(2x+3)$의 역함수는 $y=\frac{1}{2}g(x)-\frac{3}{2}$이므로

$a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{3}{2}$

$\therefore a+b=-1$ 답 ④

19 전략 $(g\circ f)^{-1}(a)=k$이면 $(g\circ f)(k)=a$임을 이용한다.

풀이 $(g\circ f)^{-1}(7)=3,\ (g\circ f)^{-1}(8)=1,$
$(g\circ f)^{-1}(9)=2$에서

$(g\circ f)(1)=8,\ (g\circ f)(2)=9,\ (g\circ f)(3)=7$

이때 $g(6)=9$이고 함수 g가 일대일대응이므로

$f(2)=6$

Q BOX: $(g\circ f)(2)=g(f(2))$
$=9$
이고 $g(6)=9$이므로
$f(2)=6$

또 $f(1)=4,\ f(2)=6$이고 함수 f가 일대일대응이므로

$f(3)=5$

$(g\circ f)(3)=7$에서 $f(3)=5$이므로

$g(5)=7$

$\therefore f(2)+g(5)=6+7=13$ 답 ③

20 전략 $g^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ g)^{-1}$임을 이용한다.

풀이 $g^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ g)^{-1}$이고

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$
$=2(-4x+5)=-8x+10$

$y=-8x+10$으로 놓으면

$8x=-y+10 \quad \therefore x=-\frac{1}{8}y+\frac{5}{4}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=-\frac{1}{8}x+\frac{5}{4}$

$\therefore (f\circ g)^{-1}(x)=-\frac{1}{8}x+\frac{5}{4}$

$\therefore (g^{-1}\circ f^{-1}\circ h)(x)=(f\circ g)^{-1}(h(x))$
$=-\frac{1}{8}h(x)+\frac{5}{4}$

즉 $-\frac{1}{8}h(x)+\frac{5}{4}=f(x)$이므로

$-\frac{1}{8}h(2)+\frac{5}{4}=f(2), \qquad -\frac{1}{8}h(2)+\frac{5}{4}=4$

Q BOX: $f(x)=2x$에서
$f(2)=4$

$-\frac{1}{8}h(2)=\frac{11}{4} \qquad \therefore h(2)=-22$

답 -22

다른 풀이 $(g^{-1}\circ f^{-1}\circ h)(x)=f(x)$에서

$((f\circ g)\circ(f\circ g)^{-1}\circ h)(x)=(f\circ g\circ f)(x)$

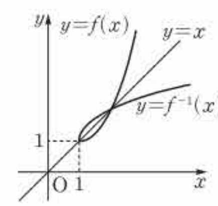
$\therefore h(x)=(f\circ g\circ f)(x)$

$\therefore h(2)=f(g(f(2)))=f(g(4))$
$=f(-11)=-22$

21 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1\ (x\geq 1)$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근은 방정식 $f(x)=x$의 근과 같으므로

$x^2-2x+2=x$에서

$x^2-3x+2=0, \qquad (x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

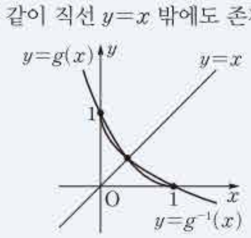
즉 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근은 $x=1$ 또는 $x=2$이므로 구하는 합은

$1+2=3$ 답 ③

쌤 한마디

함수 $f(x)=x^2-2x+2\ (x\geq 1)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 모두 직선 $y=x$ 위에 존재한다.

하지만 $g(x)=(x-1)^2\ (x\leq 1)$에 대하여 $y=g(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 다음 그림과 같이 직선 $y=x$ 밖에도 존재한다.



이처럼 어떤 함수의 그래프와 그 함수의 역함수의 그래프의 교점이 반드시 직선 $y=x$ 위에만 존재하는 것은 아니므로 교점의 좌표를 구할 때에는 그래프를 그려서 교점의 위치를 확인해야 한다.

05 유리식과 유리함수

11 유리식

Lecture 23 유리식

70쪽

1-1 답 $\dfrac{2}{x^3}$, $\dfrac{4}{x(x-2)}$, $3x+\dfrac{1}{x^2}$

2-1 (1) $\dfrac{5}{x^3y^2}$, $\dfrac{3}{x^2y^2}$에서 공통분모가 x^3y^2이 되도록 통분하면

$$\frac{5}{x^3y^2},\ \frac{3x}{x^3y^2}$$

(2) $\dfrac{1}{x+1}$, $\dfrac{3}{x-1}$에서 공통분모가 $(x+1)(x-1)$이 되도록 통분하면

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-1)},\ \frac{3(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

(3) $\dfrac{x+5}{(x+1)(x+3)}$, $\dfrac{x-2}{(x+2)(x+3)}$에서 공통분모가 $(x+1)(x+2)(x+3)$이 되도록 통분하면

$$\frac{(x+5)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)},$$
$$\frac{(x-2)(x+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

(4) $\dfrac{x+1}{x^2-9}=\dfrac{x+1}{(x+3)(x-3)}$,

$\dfrac{x+2}{x^2-7x+12}=\dfrac{x+2}{(x-3)(x-4)}$에서 공통분모가 $(x+3)(x-3)(x-4)$가 되도록 통분하면

$$\frac{(x+1)(x-4)}{(x+3)(x-3)(x-4)},$$
$$\frac{(x+2)(x+3)}{(x+3)(x-3)(x-4)}$$

답 풀이 참조

2-2 (1) $\dfrac{30x^2y^4z^3}{6x^2y^2z^5}=\dfrac{5y^2}{z^2}$

(2) $\dfrac{x^2+5x}{x^2-25}=\dfrac{x(x+5)}{(x+5)(x-5)}=\dfrac{x}{x-5}$

(3) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}=\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+3)}=\dfrac{x-1}{x+3}$

(4) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^3+1}=\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{x-3}{x^2-x+1}$

답 (1) $\dfrac{5y^2}{z^2}$ (2) $\dfrac{x}{x-5}$ (3) $\dfrac{x-1}{x+3}$ (4) $\dfrac{x-3}{x^2-x+1}$

Lecture 24 유리식의 사칙연산

71쪽

1-1 (1) $\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{3(x-3)+x+2}{(x+2)(x-3)}$

$$=\frac{4x-7}{(x+2)(x-3)}$$

(2) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x(x-4)}=\dfrac{2(x-4)+5}{x(x-4)}=\dfrac{2x-3}{x(x-4)}$

(3) $3-\dfrac{5}{x+4}=\dfrac{3(x+4)-5}{x+4}=\dfrac{3x+7}{x+4}$

(4) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{x+3-2(x+1)}{(x+1)(x+3)}$

$$=\frac{-x+1}{(x+1)(x+3)}$$

답 (1) $\dfrac{4x-7}{(x+2)(x-3)}$ (2) $\dfrac{2x-3}{x(x-4)}$ (3) $\dfrac{3x+7}{x+4}$ (4) $\dfrac{-x+1}{(x+1)(x+3)}$

1-2 (1) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{5}{x^2+6x+8}$

$$=\frac{1}{x+2}+\frac{5}{(x+2)(x+4)}$$
$$=\frac{x+4+5}{(x+2)(x+4)}$$
$$=\frac{x+9}{(x+2)(x+4)}$$

(2) $\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}-\dfrac{4}{x-2}=\dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)}-\dfrac{4}{x-2}$

$$=\frac{x+1-4(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$
$$=\frac{-3x+5}{(x-1)(x-2)}$$

답 (1) $\dfrac{x+9}{(x+2)(x+4)}$ (2) $\dfrac{-3x+5}{(x-1)(x-2)}$

2-1 (1) $\dfrac{x+1}{x+3}\times\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{x(x+1)}{(x+3)(x-3)}$

(2) $\dfrac{x+1}{x^2-4}\times\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{x+1}{(x+2)(x-2)}\times\dfrac{x-2}{x+2}$

$$=\frac{x+1}{(x+2)^2}$$

(3) $\dfrac{x}{x+3}\div\dfrac{x}{x-5}=\dfrac{x}{x+3}\times\dfrac{x-5}{x}$

$$=\frac{x-5}{x+3}$$

(4) $\dfrac{x+4}{x^2-3x}\div\dfrac{x^2-16}{x-3}$

$$=\frac{x+4}{x(x-3)}\div\frac{(x+4)(x-4)}{x-3}$$
$$=\frac{x+4}{x(x-3)}\times\frac{x-3}{(x+4)(x-4)}$$
$$=\frac{1}{x(x-4)}$$

답 (1) $\dfrac{x(x+1)}{(x+3)(x-3)}$ (2) $\dfrac{x+1}{(x+2)^2}$ (3) $\dfrac{x-5}{x+3}$ (4) $\dfrac{1}{x(x-4)}$

2-2 (1) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+2x-3}\times\dfrac{x+3}{x^2+x-2}$

$$=\frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x-1)}\times\frac{x+3}{(x+2)(x-1)}$$
$$=\frac{x+1}{(x-1)^2}$$

Q BOX

다항식 A, B, C $(B\neq0,\ C\neq0)$에 대하여

$$\frac{A}{B}=\frac{A\times C}{B\times C}$$

분자와 분모에 각각 x를 곱한다.

분자, 분모 중 인수분해되는 식은 인수분해한 다음 통분한다.

다항식 A, B, C $(B\neq0,\ C\neq0)$에 대하여

$$\frac{A}{B}=\frac{A\div C}{B\div C}$$

a^3+b^3
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

05 유리식과 유리함수

(2) $\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+9x+4} \div \dfrac{-x^2+4x-3}{2x^2-3x-2}$

$=\dfrac{(x+2)(x-3)}{(2x+1)(x+4)} \div \dfrac{-(x-1)(x-3)}{(2x+1)(x-2)}$

$=-\dfrac{(x+2)(x-3)}{(2x+1)(x+4)} \times \dfrac{(2x+1)(x-2)}{(x-1)(x-3)}$

$=-\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+4)(x-1)}$

답 (1) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$ (2) $-\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+4)(x-1)}$

Lecture 25 특수한 형태의 유리식의 계산

L 72쪽

1-1 (1) $\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x-4}{x-3}$

$=\dfrac{(x+2)-1}{x+2}-\dfrac{(x-3)-1}{x-3}$

$=\left(1-\dfrac{1}{x+2}\right)-\left(1-\dfrac{1}{x-3}\right)$

$=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{x+2-(x-3)}{(x-3)(x+2)}$

$=\dfrac{5}{(x-3)(x+2)}$

분자의 차수가 분모의 차수보다 크거나 같을 때, 분자의 차수가 분모의 차수보다 작아지도록 변형하면 계산이 편리하다.

(2) $\dfrac{2x-4}{x-1}-\dfrac{2x+6}{x+1}$

$=\dfrac{2(x-1)-2}{x-1}-\dfrac{2(x+1)+4}{x+1}$

$=\left(2-\dfrac{2}{x-1}\right)-\left(2+\dfrac{4}{x+1}\right)$

$=-\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{4}{x+1}=\dfrac{-2(x+1)-4(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{-6x+2}{(x-1)(x+1)}$

(3) $\dfrac{x^2+2x+5}{x+2}-\dfrac{x^2-2x-4}{x-2}$

$=\dfrac{x(x+2)+5}{x+2}-\dfrac{x(x-2)-4}{x-2}$

$=\left(x+\dfrac{5}{x+2}\right)-\left(x-\dfrac{4}{x-2}\right)$

$=\dfrac{5}{x+2}+\dfrac{4}{x-2}=\dfrac{5(x-2)+4(x+2)}{(x+2)(x-2)}$

$=\dfrac{9x-2}{(x+2)(x-2)}$

(4) $\dfrac{x^2+x+3}{x+1}-\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$

$=\dfrac{x(x+1)+3}{x+1}-\dfrac{(x+2)(x-3)}{x-3}$

$=x+\dfrac{3}{x+1}-(x+2)$

$=\dfrac{3}{x+1}-2=\dfrac{3-2(x+1)}{x+1}$

$=\dfrac{-2x+1}{x+1}$

답 (1) $\dfrac{5}{(x-3)(x+2)}$ (2) $\dfrac{-6x+2}{(x-1)(x+1)}$ (3) $\dfrac{9x-2}{(x+2)(x-2)}$ (4) $\dfrac{-2x+1}{x+1}$

2-1 (1) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2-(x+1)}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$

$=\dfrac{1}{x+2}$

(2) $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$

$=\dfrac{1}{x+1-x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

$+\dfrac{1}{x+2-(x+1)}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$+\dfrac{1}{x+3-(x+2)}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{x+3-x}{x(x+3)}$

$=\dfrac{3}{x(x+3)}$

(3) $\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{2}{(x+3)(x+5)}$

$=\dfrac{1}{x+3-(x+2)}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

$+\dfrac{2}{x+5-(x+3)}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+5}\right)$

$=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+5}$

$=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+5}$

$=\dfrac{x+5-(x+2)}{(x+2)(x+5)}$

$=\dfrac{3}{(x+2)(x+5)}$

답 (1) $\dfrac{1}{x+2}$ (2) $\dfrac{3}{x(x+3)}$ (3) $\dfrac{3}{(x+2)(x+5)}$

다른 풀이 (1) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{x+2-1}{(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{x+1}{(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{1}{x+2}$

3-1 (2) $\dfrac{\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x+1}{x}}=\dfrac{x}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x+1}$

(3) $\dfrac{\dfrac{x^2-1}{x}}{\dfrac{x-1}{x}}=\dfrac{\dfrac{(x+1)(x-1)}{x}}{\dfrac{x-1}{x}}$

$=\dfrac{x(x+1)(x-1)}{x(x-1)}$

$=x+1$

답 (1) $\dfrac{x+5}{x+4}$ (2) $\dfrac{1}{x+1}$ (3) $x+1$

기본+표준 유형 Q+Q

73쪽

01 $\frac{1}{x-1}-\frac{2x}{x^2+x+1}+\frac{x^2-4x+2}{x^3-1}$

$=\frac{1}{x-1}-\frac{2x}{x^2+x+1}+\frac{x^2-4x+2}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\frac{x^2+x+1-2x(x-1)+(x^2-4x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\frac{x^2+x+1-2x^2+2x+x^2-4x+2}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\frac{-x+3}{(x-1)(x^2+x+1)}$

답 $\frac{-x+3}{(x-1)(x^2+x+1)}$

> a^3-b^3
> $=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

> 공통분모가 $(x-1)(x^2+x+1)$이 되도록 통분한다.

02 $\frac{x+4}{x^2+3x-10}\times\frac{2x^2-3x-2}{3x^2-x-2}\div\frac{2x^2+9x+4}{x^2+4x-5}$

$=\frac{x+4}{(x+5)(x-2)}\times\frac{(2x+1)(x-2)}{(3x+2)(x-1)}$

$\div\frac{(2x+1)(x+4)}{(x+5)(x-1)}$

$=\frac{x+4}{(x+5)(x-2)}\times\frac{(2x+1)(x-2)}{(3x+2)(x-1)}$

$\times\frac{(x+5)(x-1)}{(2x+1)(x+4)}$

$=\frac{1}{3x+2}$ 답 $\frac{1}{3x+2}$

03 $x^2-3x-4=(x+1)(x-4)$이므로 주어진 식의 양변에 x^2-3x-4를 곱하여 정리하면

$a(x-4)+b(x+1)=5x-10$

$\therefore (a+b)x-4a+b=5x-10$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=5,\ -4a+b=-10$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=2$

$\therefore ab=6$ 답 ②

쌤 한마디

항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이다.
　⇨ $a=b=c=0$

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이다.
　⇨ $a=a',\ b=b',\ c=c'$

③ $ax+by+c=0$이 x, y에 대한 항등식이다.
　⇨ $a=b=c=0$

④ $ax+by+c=a'x+b'y+c'$이 x, y에 대한 항등식이다.
　⇨ $a=a',\ b=b',\ c=c'$

04 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$이므로 주어진 식의 양변에 x^3+1을 곱하여 정리하면

$2x-9=a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)$

$\therefore 2x-9=(a+b)x^2+(-a+b+c)x+a+c$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$-a+b+c=2$ $\therefore a-b-c=-2$ 답 -2

05 $\frac{x+2}{x+1}-\frac{x+3}{x+2}-\frac{x+4}{x+3}+\frac{x+5}{x+4}$

$=\frac{(x+1)+1}{x+1}-\frac{(x+2)+1}{x+2}-\frac{(x+3)+1}{x+3}$

$+\frac{(x+4)+1}{x+4}$

$=\left(1+\frac{1}{x+1}\right)-\left(1+\frac{1}{x+2}\right)-\left(1+\frac{1}{x+3}\right)$

$+\left(1+\frac{1}{x+4}\right)$

$=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+3}\right)$

$=\frac{x+2-(x+1)}{(x+1)(x+2)}+\frac{x+3-(x+4)}{(x+3)(x+4)}$

$=\frac{1}{(x+1)(x+2)}-\frac{1}{(x+3)(x+4)}$

$=\frac{(x+3)(x+4)-(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

$=\frac{x^2+7x+12-(x^2+3x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

$=\frac{\boxed{4x+10}}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$ 답 ⑤

06 $x^2+5x+6=x(x+1)+4(x+1)+2$
$=(x+1)(x+4)+2$

$x^2+3x-3=x(x-1)+4(x-1)+1$
$=(x-1)(x+4)+1$

$\therefore \frac{x^2+5x+6}{x+1}-\frac{x^2+3x-3}{x-1}$

$=\frac{(x+1)(x+4)+2}{x+1}-\frac{(x-1)(x+4)+1}{x-1}$

$=\left(x+4+\frac{2}{x+1}\right)-\left(x+4+\frac{1}{x-1}\right)$

$=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{2(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{x-3}{(x+1)(x-1)}$ 답 ②

> $$\begin{array}{r} x+4 \\ x+1\overline{)\,x^2+5x+6} \\ \underline{x^2+x} \\ 4x+6 \\ \underline{4x+4} \\ 2 \end{array}$$
> 따라서 x^2+5x+6을 $x+1$로 나누었을 때의 몫은 $x+4$, 나머지는 2이므로
> $\frac{x^2+5x+6}{x+1}$
> $=x+4+\frac{2}{x+1}$
> 와 같이 구할 수도 있다.

07 $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{2}{(x+1)(x+3)}+\frac{3}{(x+3)(x+6)}$

$=\frac{1}{x+1-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$

$+\frac{2}{x+3-(x+1)}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)$

$+\frac{3}{x+6-(x+3)}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+6}\right)$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+6}$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+6}=\frac{x+6-x}{x(x+6)}$

$=\frac{6}{x(x+6)}$

$\therefore k=6$ 답 6

다른 풀이 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{2}{2\cdot4}+\frac{3}{4\cdot7}=\frac{k}{1\cdot7}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{28}=\frac{k}{7}$ $\therefore k=6$

> $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{28}$
> $=\frac{14+7+3}{28}$
> $=\frac{6}{7}$

08 $\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{3}{x^2+5x+4}+\dfrac{6}{x^2+14x+40}$

$=\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{3}{(x+1)(x+4)}+\dfrac{6}{(x+4)(x+10)}$

$=\dfrac{1}{x+1-x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

$+\dfrac{3}{x+4-(x+1)}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+4}\right)$

$+\dfrac{6}{x+10-(x+4)}\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x+10}\right)$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+4}+\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x+10}$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+10}=\dfrac{x+10-x}{x(x+10)}$

$=\dfrac{10}{x(x+10)}$ 답 ④

09 $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x}}}$

$=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{x+1}}$

$=1+\dfrac{1}{\dfrac{x+1+x}{x+1}}$

$=1+\dfrac{1}{\dfrac{2x+1}{x+1}}$

$=1+\dfrac{x+1}{2x+1}$

$=\dfrac{2x+1+x+1}{2x+1}$

$=\dfrac{3x+2}{2x+1}$ 답 $\dfrac{3x+2}{2x+1}$

10 $A+B=\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}=\dfrac{a-b+a+b}{(a+b)(a-b)}$

$=\dfrac{2a}{(a+b)(a-b)}$

$A-B=\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{a-b}=\dfrac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}$

$=\dfrac{-2b}{(a+b)(a-b)}$

$\therefore\ \dfrac{A+B}{A-B}=\dfrac{\dfrac{2a}{(a+b)(a-b)}}{\dfrac{-2b}{(a+b)(a-b)}}$

$=\dfrac{2a(a+b)(a-b)}{-2b(a+b)(a-b)}$

$=-\dfrac{a}{b}$ 답 $-\dfrac{a}{b}$

다른 풀이 $\dfrac{A+B}{A-B}=\dfrac{\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}}{\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{a-b}}$

$=\dfrac{a-b+a+b}{a-b-(a+b)}$

$=\dfrac{2a}{-2b}=-\dfrac{a}{b}$

Q BOX

$x^2-4x-1=0$의 좌변에 $x=0$을 대입하면
$0^2-4\cdot0-1$
$=-1\neq0$
이므로 $x\neq0$

먼저 분모가 0이 되는 x의 값을 구한다.

분자와 분모에 각각 $(a+b)(a-b)$를 곱한다.

11 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=5^2-2=23$ 답 ③

쌤 한마디

$x^k\pm\dfrac{1}{x^k}$ 꼴의 유리식의 값을 구할 때에는 다음과 같은 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

① $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$

② $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

③ $x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

12 $x^2-4x-1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면 $\quad x-4-\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore\ x-\dfrac{1}{x}=4$

$\therefore\ 2x^2+3x+1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}$

$=2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+1$

$=2\left\{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2\right\}+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+1$

$=2\cdot(4^2+2)+3\cdot4+1=49$ 답 49

13 $x:y:z=1:2:3$이므로

$x=k,\ y=2k,\ z=3k\ (k\neq0)$

로 놓으면

$\dfrac{5x+y-3z}{x-y+z}=\dfrac{5k+2k-9k}{k-2k+3k}$

$=-\dfrac{2k}{2k}=-1$ 답 -1

14 $\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{y+z}{4}=\dfrac{z+x}{5}=k\ (k\neq0)$로 놓으면

$x+y=3k,\ y+z=4k,\ z+x=5k$ ...... ㉠

세 식을 변끼리 더하면

$2(x+y+z)=12k$

$\therefore\ x+y+z=6k$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad x=2k,\ y=k,\ z=3k$

$\therefore\ \dfrac{x^3+y^3+z^3}{xyz}=\dfrac{8k^3+k^3+27k^3}{6k^3}$

$=\dfrac{36k^3}{6k^3}=6$ 답 6

12 유리함수

Lecture 26 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프

L 75쪽

1-1 답 (1) ㄱ, ㄷ (2) ㄴ, ㄹ

1-2 (1) $3x=0$에서 $\quad x=0$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\neq0$인 실수$\}$

(2) $x+4=0$에서 $\quad x=-4$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x \mid x\neq -4$인 실수$\}$

(3) $x^2-4=0$에서 $\quad x^2=4$

$\therefore x=\pm 2$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x \mid x\neq -2,\ x\neq 2$인 실수$\}$

QBOX

$y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$와 $y=\dfrac{1}{x+2}$은 정의역이 다르므로 서로 같은 함수로 생각하지 않는다.

(4) 모든 실수 x에 대하여 $x^2+1>0$이므로 분모가 0이 되도록 하는 실수 x의 값이 존재하지 않는다.

따라서 주어진 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

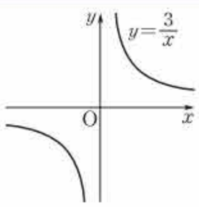
답 (1) $\{x \mid x\neq 0$인 실수$\}$

(2) $\{x \mid x\neq -4$인 실수$\}$

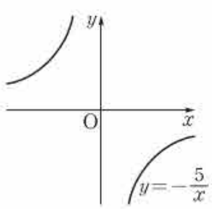
(3) $\{x \mid x\neq -2,\ x\neq 2$인 실수$\}$

(4) 실수 전체의 집합

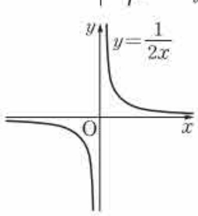
2-1 답 (1)



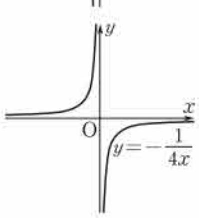
(2)



(3)



(4)



유리함수 $y=\dfrac{k}{x}\,(k\neq 0)$의 그래프는 k의 절댓값이 커질수록 원점으로부터 멀어진다.

Lecture 27 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프 76쪽

1-1 답 (1) $y=\dfrac{1}{x+2}-4$ $\quad$ (2) $y=-\dfrac{3}{x-6}-5$

함수 $y=\dfrac{k}{x}\,(k\neq 0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\dfrac{k}{x-p}+q$

1-2 답 (1) 정의역: $\{x \mid x\neq 3$인 실수$\}$,

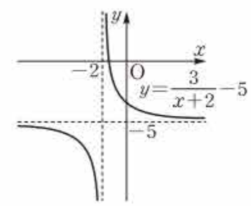
치역: $\{y \mid y\neq 7$인 실수$\}$

(2) 정의역: $\{x \mid x\neq -1$인 실수$\}$,

치역: $\{y \mid y\neq -4$인 실수$\}$

1-3 (1) $y=\dfrac{3}{x+2}-5$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

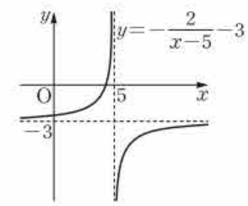
따라서 그래프는 다음 그림과 같다.



또 점근선의 방정식은 $\quad x=-2,\ y=-5$

(2) $y=-\dfrac{2}{x-5}-3$의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같다.



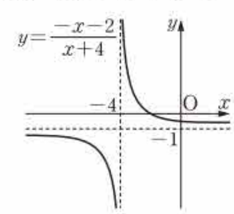
또 점근선의 방정식은 $\quad x=5,\ y=-3$

답 풀이 참조

2-1 (1) $y=\dfrac{-x-2}{x+4}=\dfrac{-(x+4)+2}{x+4}=\dfrac{2}{x+4}-1$

(2) $y=\dfrac{-x-2}{x+4}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같다.



또 정의역은 $\{x \mid x\neq -4$인 실수$\}$,

치역은 $\{y \mid y\neq -1$인 실수$\}$이다.

(3) $x=-4,\ y=-1$

답 풀이 참조

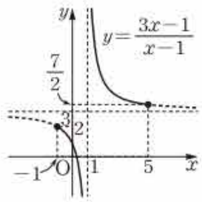
기본+표준 유형 Q+Q 77쪽

01 $y=\dfrac{3x-1}{x-1}=\dfrac{3(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+3$

이므로 $y=\dfrac{3x-1}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x<1$ 또는 $1<x\le5$에서 $y=\dfrac{3x-1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 치역은

$\left\{y\,\middle|\,y\le2 \text{ 또는 } y\ge\dfrac{7}{2}\right\}$



답 ③

02 $y=\dfrac{bx+4}{x+a}=\dfrac{b(x+a)-ab+4}{x+a}$

$=\dfrac{-ab+4}{x+a}+b$

이므로

정의역은 $\{x\,|\,x\ne-a$인 실수$\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\ne b$인 실수$\}$

따라서 $-a=-3$, $b=5$이므로

$a=3$, $b=5$

$\therefore ab=15$

답 ④

03 $y=\dfrac{2x+10}{x+3}=\dfrac{2(x+3)+4}{x+3}=\dfrac{4}{x+3}+2$

따라서 $y=\dfrac{2x+10}{x+3}$의 그래프는 $y=\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$a=-3$, $b=2$, $k=4$

$\therefore a+b+k=3$

답 3

유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\ne0,\ ad-bc\ne0)$를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형하여 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축, y축의 방향으로 각각 얼마만큼 평행이동했는지 알아본다.

04 $y=\dfrac{4}{x+2}-8$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\dfrac{4}{x+2}-8+a$

이 함수의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\dfrac{4}{0+2}-8+a$

$\therefore a=6$

답 ⑤

05 $y=\dfrac{5x+12}{x+2}=\dfrac{5(x+2)+2}{x+2}=\dfrac{2}{x+2}+5$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=5$이므로

$a=-2$, $b=5$

$\therefore a+b=3$

답 ③

쌤 한마디

$c\ne0$, $ad-bc\ne0$일 때,

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{\frac{a}{c}(cx+d)-\frac{ad}{c}+b}{cx+d}$$

$$=\frac{-\frac{ad}{c}+b}{cx+d}+\frac{a}{c}$$

이므로 함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-\dfrac{d}{c}$, $y=\dfrac{a}{c}$이다.

$cx+d=0$에서 $x=-\dfrac{d}{c}$

Q BOX

유리함수의 그래프의 점근선이 직선 $x=p$, $y=q$이면 함수의 식을 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\ne0)$로 놓는다.

06 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=-4$이므로 주어진 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x-3}-4\ (k\ne0)$ ...... ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(1,\ -2)$를 지나므로

$-2=\dfrac{k}{1-3}-4,\qquad \dfrac{k}{2}=-2$

$\therefore k=-4$

$k=-4$를 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{-4}{x-3}-4=\dfrac{-4-4(x-3)}{x-3}=\dfrac{-4x+8}{x-3}$

따라서 $a=-4$, $b=8$, $c=-3$이므로

$a+b+c=1$

답 1

다른 풀이 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}=\dfrac{a(x+c)-ac+b}{x+c}$

$=\dfrac{-ac+b}{x+c}+a$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-c$, $y=a$이므로

$a=-4$, $c=-3$ ...... ㉠

또 그래프가 점 $(1,\ -2)$를 지나므로

$-2=\dfrac{a+b}{1+c}$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$-2=\dfrac{-4+b}{-2},\qquad -4+b=4$

$\therefore b=8$

$\therefore a+b+c=1$

유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\ne0)$의 그래프는 점근선의 교점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이다.

07 $y=\dfrac{5x+b}{x+a}$의 그래프가 점 $(-2,\ -6)$을 지나므로

$-6=\dfrac{5\cdot(-2)+b}{-2+a},\qquad -6=\dfrac{-10+b}{-2+a}$

$12-6a=-10+b$

$\therefore b=-6a+22$ ...... ㉠

한편

$y=\dfrac{5x+b}{x+a}=\dfrac{5(x+a)-5a+b}{x+a}=\dfrac{-5a+b}{x+a}+5$

에서 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=5$이므로 그래프는 점 $(-a,\ 5)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $-a=-4$, $c=5$이므로

$a=4$, $c=5$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=-2$

$\therefore a+b+c=7$

답 ③

다른 풀이 주어진 함수의 그래프가 점 $(-4,\ c)$에 대하여 대칭이므로 점근선의 방정식은

$x=-4$, $y=c$

따라서 주어진 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x+4}+c\ (k\ne0)$ ...... ㉠

로 놓으면 ㉠의 그래프가 점 $(-2,\ -6)$을 지나므로

$-6=\dfrac{k}{2}+c\qquad \therefore k=-2c-12$

$k=-2c-12$를 ㉠에 대입하면

$$y=\frac{-2c-12}{x+4}+c=\frac{-2c-12+c(x+4)}{x+4}$$
$$=\frac{cx+2c-12}{x+4}$$

따라서 $c=5$, $b=2c-12$, $a=4$이므로

$a=4$, $b=-2$, $c=5$

$\therefore a+b+c=7$

08 $y=\frac{6x+2}{x-3}=\frac{6(x-3)+20}{x-3}=\frac{20}{x-3}+6$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=3$, $y=6$

이때 주어진 함수의 그래프가 직선 $y=x+k$에 대하여 대칭이므로 직선 $y=x+k$는 점근선의 교점 $(3,\ 6)$을 지난다.

즉 $6=3+k$에서 $k=3$ 답 ①

쌤 한마디

유리함수의 그래프의 대칭성

유리함수 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq0)$의 그래프는 두 직선 $y=x$, $y=-x$에 대하여 각각 대칭이다.

따라서 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 평행이동한 유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$ $(k\neq0)$의 그래프는 점 $(p,\ q)$를 지나고 기울기가 ±1인 두 직선

두 점근선의 교점

$y-q=x-p$, $y-q=-(x-p)$

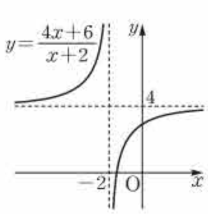
에 대하여 각각 대칭이다.

09 $y=\frac{4x+6}{x+2}=\frac{4(x+2)-2}{x+2}=-\frac{2}{x+2}+4$

이므로 $y=\frac{4x+6}{x+2}$의 그래프는 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

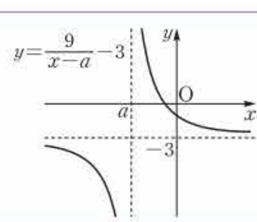
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.

답 제4사분면

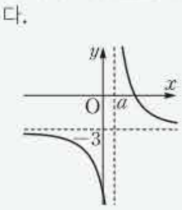


10 $y=\frac{9}{x-a}-3$의 그래프는 $y=\frac{9}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=\frac{9}{x-a}-3$의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $a<0$이고 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 작거나 같아야 하므로



$a\geq0$이면 다음 그림과 같이 제1사분면을 지난다.



$x=0$에서의 함숫값이 0보다 크면 제1사분면을 지난다.

$-\frac{9}{a}-3\leq0$, $\frac{9}{a}\geq-3$

$-3a\geq9$ $\therefore a\leq-3$ 답 ①

$a<0$이므로 양변에 a를 곱하면 부등호의 방향이 바뀐다.

11 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-3$, $y=1$이므로 함수의 식을

$y=\frac{k}{x+3}+1$ $(k\neq0)$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(-5,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{-5+3}+1$, $\frac{k}{2}=1$

$\therefore k=2$

$k=2$를 ㉠에 대입하면

$$y=\frac{2}{x+3}+1=\frac{2+(x+3)}{x+3}=\frac{x+5}{x+3}$$

따라서 $a=1$, $b=5$, $c=3$이므로

$abc=15$ 답 15

12 $y=\frac{-x+1}{x-3}=\frac{-(x-3)-2}{x-3}$

$=-\frac{2}{x-3}-1$

이 함수의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{2}{x-3}-1+a$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=-1+a$

이때 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=-2$이므로

$-1+a=-2$ $\therefore a=-1$ 답 -1

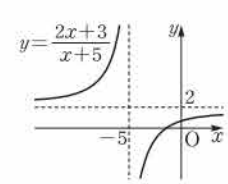
13 ① $y=\frac{2x+3}{x+5}$에 $x=0$을 대입하면 $y=\frac{3}{5}$

따라서 그래프의 y절편은 $\frac{3}{5}$이다.

②, ③ $y=\frac{2x+3}{x+5}=\frac{2(x+5)-7}{x+5}=-\frac{7}{x+5}+2$

이므로 $y=\frac{2x+3}{x+5}$의 그래프는 $y=-\frac{7}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.



④ $y=\frac{2x+3}{x+5}=-\frac{7}{x+5}+2$

의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-5$, $y=2$이므로 그래프는 점 $(-5,\ 2)$에 대하여 대칭이다.

⑤ $x+5=0$에서 $x=-5$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq-5$인 실수$\}$이다.

답 ④

14 ㄱ. 치역은 $\{y|y\neq1$인 실수$\}$이다.

ㄴ. $y=\frac{6}{x-4}+1$에 $x=-2$, $y=0$을 대입하면

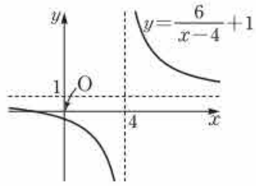
$$0=\frac{6}{-2-4}+1$$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $(-2,\ 0)$을 지난다.

ㄷ. 점근선의 방정식은 $x=4$, $y=1$이므로 그래프는 점 $(4,\ 1)$을 지나고 기울기가 1인 직선, 즉 $y=x-3$에 대하여 대칭이다.

그래프는 점 $(4,\ 1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선, 즉 $y=-x+5$에 대하여도 대칭이다.

ㄹ. 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 모든 사분면을 지난다.

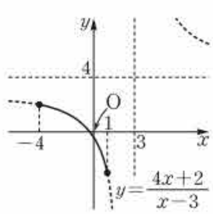


이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ③

15 $y=\frac{4x+2}{x-3}=\frac{4(x-3)+14}{x-3}=\frac{14}{x-3}+4$

이므로 $y=\frac{4x+2}{x-3}$의 그래프는 $y=\frac{14}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-4\le x\le1$에서 $y=\frac{4x+2}{x-3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-4$일 때 최댓값 2,

$x=1$일 때 최솟값 -3

을 갖는다.

$\frac{-16+2}{-4-3}=2$

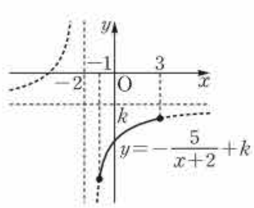
$\frac{4+2}{1-3}=-3$

즉 $a=2$, $b=-3$이므로

$ab=-6$ 답 -6

16 $y=-\frac{5}{x+2}+k$의 그래프는 $y=-\frac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x\le3$에서 $y=-\frac{5}{x+2}+k$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=3$일 때 최댓값 $-1+k$를 갖는다.



즉 $-1+k=-3$이므로

$k=-2$ 답 ④

17 함수 $y=\frac{x-3}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=kx+1$이 한 점에서 만나므로 $\frac{x-3}{x+1}=kx+1$에서

$x-3=(kx+1)(x+1)$

$\therefore kx^2+kx+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-16k=0$

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때
① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 실근
② $D=0$ ➡ 중근
③ $D<0$ ➡ 서로 다른 두 허근

$k(k-16)=0$

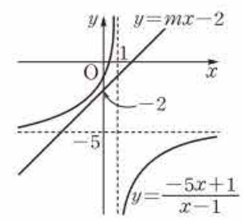
$\therefore k=16\ (\because k>0)$ 답 ⑤

18 $y=\frac{-5x+1}{x-1}=\frac{-5(x-1)-4}{x-1}$

$=-\frac{4}{x-1}-5$

이므로 $y=\frac{-5x+1}{x-1}$의 그래프는 $y=-\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\frac{-5x+1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=mx-2$는 m의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ -2)$를 지난다.



(i) $m=0$일 때,

함수 $y=\frac{-5x+1}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=-2$는 한 점에서 만난다.

(ii) $m\neq0$일 때,

$\frac{-5x+1}{x-1}=mx-2$에서

$-5x+1=(mx-2)(x-1)$

$\therefore mx^2+(3-m)x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(3-m)^2-4m<0$

$m^2-10m+9<0$, $(m-1)(m-9)<0$

$\therefore 1<m<9$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$1<m<9$ 답 $1<m<9$

19 $f(x)=\frac{x}{x-1}$에서

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$$=f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}$$

$$=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-(x-1)}{x-1}}=x$$

따라서 함수 $f^{2n}(x)$(n은 자연수)는 항등함수이므로

$f^{50}(x)=f^{2\cdot25}(x)=f^2(x)=x$

$\therefore f^{50}(9)=9$ 답 9

다른 풀이 $f(x)=\frac{x}{x-1}$에서

$f^1(9)=f(9)=\frac{9}{9-1}=\frac{9}{8}$

$f^2(9)=f(f(9))=f\left(\frac{9}{8}\right)=\frac{\frac{9}{8}}{\frac{9}{8}-1}=9$

$f^3(9)=f(f^2(9))=f(9)=\dfrac{9}{9-1}=\dfrac{9}{8}$

$\vdots$

이므로 $f^n(9)$의 값은 $\dfrac{9}{8}$, 9가 이 순서대로 반복된다.

이때 $50=2\cdot25$이므로

$f^{50}(9)=f^2(9)=9$

20 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)$

$$=\frac{2\cdot\frac{2x+1}{x-1}+1}{\frac{2x+1}{x-1}-1}=\frac{\frac{4x+2+(x-1)}{x-1}}{\frac{2x+1-(x-1)}{x-1}}=\frac{\frac{5x+1}{x-1}}{\frac{x+2}{x-1}}=\frac{5x+1}{x+2}$$

이때 $(f\circ f)(k)=8$이므로

$\dfrac{5k+1}{k+2}=8$, $\quad 5k+1=8k+16$

$-3k=15 \quad \therefore k=-5$

답 ①

다른 풀이 $(f\circ f)(k)=f(f(k))=\dfrac{2f(k)+1}{f(k)-1}=8$에서

$2f(k)+1=8f(k)-8$

$-6f(k)=-9 \quad \therefore f(k)=\dfrac{3}{2}$

즉 $\dfrac{2k+1}{k-1}=\dfrac{3}{2}$이므로 $\quad 4k+2=3k-3$

$\therefore k=-5$

21 $f(x)=\dfrac{-3x+6}{x+a}$에서 $y=\dfrac{-3x+6}{x+a}$으로 놓으면

$y(x+a)=-3x+6$, $\quad (y+3)x=-ay+6$

$\therefore x=\dfrac{-ay+6}{y+3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{-ax+6}{x+3}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-ax+6}{x+3}$

따라서 $\dfrac{-ax+6}{x+3}=\dfrac{4x+b}{x+c}$이므로

$a=-4,\ b=6,\ c=3$

$\therefore a+b+c=5$

답 5

22 $f(x)=\dfrac{ax-1}{2x+3}$에서 $y=\dfrac{ax-1}{2x+3}$로 놓으면

$y(2x+3)=ax-1$, $\quad (2y-a)x=-3y-1$

$\therefore x=\dfrac{-3y-1}{2y-a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{-3x-1}{2x-a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-3x-1}{2x-a}$

따라서 $f=f^{-1}$에서 $\dfrac{ax-1}{2x+3}=\dfrac{-3x-1}{2x-a}$이므로

$a=-3$

답 ④

다른 풀이 $f=f^{-1}$이므로 $\quad (f\circ f)(x)=x$

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{ax-1}{2x+3}\right)=\frac{a\cdot\frac{ax-1}{2x+3}-1}{2\cdot\frac{ax-1}{2x+3}+3}=\frac{a(ax-1)-(2x+3)}{2(ax-1)+3(2x+3)}=\frac{(a^2-2)x-a-3}{2(a+3)x+7}$$

따라서 $\dfrac{(a^2-2)x-a-3}{2(a+3)x+7}=x$이므로

$(a^2-2)x-a-3=2(a+3)x^2+7x$

$a+3=0,\ a^2-2=7$

$\therefore a=-3$

23 $f^{-1}\circ f=I$ (I는 항등함수)이므로

$(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(-2)=f^{-1}(-2)$

$f^{-1}(-2)=k$라 하면 $\quad f(k)=-2$

$\dfrac{2k-2}{k-5}=-2$, $\quad 2k-2=-2k+10$

$4k=12 \quad \therefore k=3$

답 ④

24 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(a)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(a)$

$=(g^{-1}\circ f)(a)$

$=g^{-1}(f(a))$

즉 $g^{-1}(f(a))=2$이므로 $\quad g(2)=f(a)$

$\dfrac{-6+4}{4-3}=\dfrac{a-1}{a+2}$, $\quad \dfrac{a-1}{a+2}=-2$

$a-1=-2a-4$, $\quad 3a=-3$

$\therefore a=-1$

답 -1

QBOX

분자와 분모에 각각 $2x+3$을 곱한다.

동류항의 계수를 비교한다.

함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여
$f(a)=b$
$\Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$

함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) $y=f(x)$에서 x를 y에 대한 식, 즉 $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 나타낸다.
(ii) x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$ 꼴로 나타낸다.

$\dfrac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{b}-1}=\dfrac{\frac{1}{b}}{\frac{1-b}{b}}=\dfrac{1}{1-b}$

중단원 마무리

81쪽

01 전략 주어진 식을 통분하여 계산한다.

풀이 $\dfrac{a}{a-1}+\dfrac{b}{b-1}=\dfrac{a(b-1)+b(a-1)}{(a-1)(b-1)}$

$=\dfrac{2ab-a-b}{ab-a-b+1}$

$=\dfrac{2-a-b}{2-a-b}=1$

답 1

다른 풀이 $ab=1$에서 $\quad a=\dfrac{1}{b}$

$$\therefore \frac{a}{a-1}+\frac{b}{b-1}=\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{b}-1}+\frac{b}{b-1}=\frac{1}{1-b}+\frac{b}{b-1}=\frac{b-1}{b-1}=1$$

02 전략 $\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$임을 이용한다.

풀이 $\frac{a^2-3a}{a^2+3a-10} \times \frac{a^2+2a-8}{a+2} \div \frac{a^2+a-12}{a+5}$

$= \frac{a(a-3)}{(a+5)(a-2)} \times \frac{(a+4)(a-2)}{a+2} \div \frac{(a+4)(a-3)}{a+5}$

$= \frac{a(a-3)}{(a+5)(a-2)} \times \frac{(a+4)(a-2)}{a+2} \times \frac{a+5}{(a+4)(a-3)}$

$= \frac{a}{a+2}$ 답 ③

03 전략 주어진 식의 양변에 x^3-1을 곱한 후 항등식의 성질을 이용한다.

풀이 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$이므로 주어진 식의 양변에 x^3-1을 곱하여 정리하면

$a(x^2+x+1)+(x+b)(x-1)=5x-8$

$\therefore (a+1)x^2+(a+b-1)x+a-b=5x-8$ ··· ❶

이 식이 x에 대한 항등식이므로

양변의 동류항의 계수를 비교한다.

$a+1=0,\ a+b-1=5,\ a-b=-8$

따라서 $a=-1$, $b=7$이므로

$ab=-7$ ··· ❷

답 -7

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 식의 양변에 x^3-1을 곱하여 정리할 수 있다.	40 %
❷	ab의 값을 구할 수 있다.	60 %

04 전략 $\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)(A \neq B)$임을 이용한다.

풀이 $\frac{3}{(x+1)(x+4)} + \frac{5}{(x+4)(x+9)} + \frac{7}{(x+9)(x+16)}$

$= \frac{3}{x+4-(x+1)}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4}\right) + \frac{5}{x+9-(x+4)}\left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+9}\right) + \frac{7}{x+16-(x+9)}\left(\frac{1}{x+9} - \frac{1}{x+16}\right)$

$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+9} + \frac{1}{x+9} - \frac{1}{x+16}$

$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+16}$

$= \frac{x+16-(x+1)}{(x+1)(x+16)}$

$= \frac{15}{(x+1)(x+16)}$

따라서 $a=15$, $b=16$이므로

$a+b=31$ 답 ②

05 전략 주어진 함수를 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=\frac{2x-5}{x+2}=\frac{2(x+2)-9}{x+2}$

$=-\frac{9}{x+2}+2$

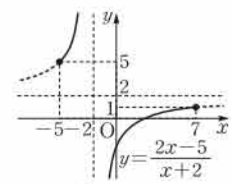
이므로 $y=\frac{2x-5}{x+2}$의 그래프는 $y=-\frac{9}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y \leq 1$ 또는 $y \geq 5$에서

$1=\frac{2x-5}{x+2}$에서
$x+2=2x-5$
$\therefore x=7$

$5=\frac{2x-5}{x+2}$에서
$5x+10=2x-5$
$3x=-15$
$\therefore x=-5$

$y=\frac{2x-5}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 정의역은

$\{x \mid -5 \leq x < -2 \text{ 또는 } -2 < x \leq 7\}$

이므로 정의역에 속하는 정수는

$-5, -4, -3, -1, 0, 1, 2, \cdots, 7$

의 12개이다. 답 ③

06 전략 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\frac{k}{x-p}+q$임을 이용한다.

풀이 $y=-\frac{8}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{8}{x+4}+2$

이 함수의 그래프가 점 $(1, k)$를 지나므로

$k=-\frac{8}{1+4}+2=\frac{2}{5}$ 답 $\frac{2}{5}$

07 전략 유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k \neq 0)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=p$, $y=q$임을 이용한다.

풀이 $y=\frac{k}{x-1}+5$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=1$, $y=5$

이때 두 점근선의 교점의 좌표가 $(1, 2a+1)$이므로

$2a+1=5$, $2a=4$

$\therefore a=2$

따라서 함수 $y=\frac{k}{x-1}+5$의 그래프가 점 $(5, 3a)$, 즉 $(5, 6)$을 지나므로

$6=\frac{k}{5-1}+5$

$\therefore k=4$ 답 ④

08 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식을 구한 후 좌표평면 위에 직선으로 둘러싸인 부분을 나타낸다.

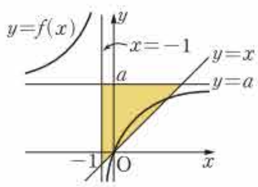
풀이 $f(x)=\frac{ax}{x+1}=\frac{a(x+1)-a}{x+1}$

$=-\frac{a}{x+1}+a$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-1$, $y=a$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 오른쪽 그림과 같고, 색칠한 부분의 넓이가 18이므로



$\frac{1}{2}(a+1)^2=18$

$(a+1)^2=36,\qquad a+1=\pm 6$

$\therefore a=5\ (\because a>0)$ 답 ①

09 전략 주어진 두 직선의 교점을 이용하여 점근선의 방정식을 구한다.

풀이 두 식 $y=-x+4$, $y=x-6$을 연립하여 풀면

$x=5$, $y=-1$

따라서 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 교점의 좌표는 $(5, -1)$이다. ··· ❶

즉 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=5$, $y=-1$이므로

$f(x)=\frac{k}{x-5}-1\ (k\neq 0)$ ······ ㉠

로 놓을 수 있다.

이때 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=-\frac{k}{5}-1,\qquad \frac{k}{5}=-3$

$\therefore k=-15$

$k=-15$를 ㉠에 대입하면

$f(x)=-\frac{15}{x-5}-1=\frac{-15-(x-5)}{x-5}$

$=\frac{-x-10}{x-5}$ ··· ❷

따라서 $a=-5$, $b=-10$이므로 ··· ❸

$ab=50$ 답 50

단계	채점 기준	비율
❶	함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷	$f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸	ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

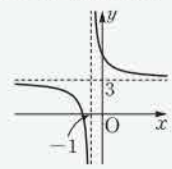
10 전략 $y=\frac{3x+k-10}{x+1}$을 $y=\frac{a}{x-p}+q$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=\frac{3x+k-10}{x+1}=\frac{3(x+1)+k-13}{x+1}$

$=\frac{k-13}{x+1}+3$

Q BOX

$k-13>0$이면 다음 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.



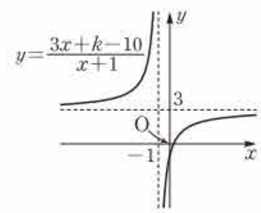
또 $k=13$이면 $y=\frac{13-13}{x+1}+3$, 즉 $y=3$이므로 그래프는 제4사분면을 지나지 않는다.

유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$의 그래프는 점근선의 교점 (p, q)를 지나고 기울기가 ± 1인 직선에 대하여 대칭이다.

y절편은 2이다.

이므로 $y=\frac{3x+k-10}{x+1}$의 그래프는 $y=\frac{k-13}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=\frac{3x+k-10}{x+1}$의 그래프가 제4사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $k-13<0$이어야 하므로



$k<13$ ······ ㉠

또 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 작아야 하므로

$k-10<0\qquad \therefore k<10$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $k<10$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, ···, 9의 9개이다. 답 ③

11 전략 점근선의 방정식이 $x=p$, $y=q$이면 함수의 식을 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$로 놓는다.

풀이 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=4$, $y=3$이므로 함수의 식을

$y=\frac{k}{x-4}+3\ (k\neq 0)$ ······ ㉠

으로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(2, 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{2-4}+3,\qquad \frac{k}{2}=3$

$\therefore k=6$

$k=6$을 ㉠에 대입하면

$y=\frac{6}{x-4}+3=\frac{6+3(x-4)}{x-4}=\frac{3x-6}{x-4}$

따라서 $a=3$, $b=-6$, $c=-4$이므로

$a+b+c=-7$ 답 ④

12 전략 유리함수 $y=\frac{k}{x}\ (k\neq 0)$의 그래프의 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. $k>0$이면 $y=\frac{k}{x}$의 그래프는 제1사분면, 제3사분면을 지난다.

ㄴ. 점근선은 x축, y축이므로 점근선의 방정식은 $x=0$, $y=0$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

13 전략 주어진 조건을 이용하여 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식을 구한다.

풀이 조건 (가)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=0$, $y=2$이므로

$f(x)=\frac{k}{x}+2\ (k\neq 0)$

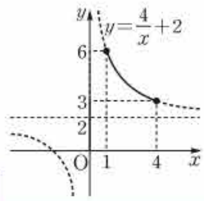
로 놓을 수 있다.

조건 (나)에 의하여 $f(1)=6$이므로

$6=k+2\qquad \therefore k=4$

$\therefore f(x)=\frac{4}{x}+2$

따라서 $1\le x\le 4$에서 $y=\frac{4}{x}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는



$x=1$일 때 최댓값 6,

$x=4$일 때 최솟값 3

을 갖는다.

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$6+3=9$

답 ②

$\frac{4}{1}+2=6$

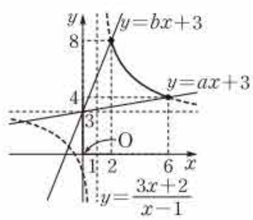
$\frac{4}{4}+2=3$

14 전략 좌표평면 위에 $y=\frac{3x+2}{x-1}$, $y=ax+3$, $y=bx+3$의 그래프를 나타낸 후 조건을 만족시키도록 그래프를 움직여 본다.

풀이 $y=\frac{3x+2}{x-1}=\frac{3(x-1)+5}{x-1}=\frac{5}{x-1}+3$

이므로 $y=\frac{3x+2}{x-1}$의 그래프는 $y=\frac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2\le x\le 6$에서 $y=\frac{3x+2}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 두 직선 $y=ax+3$, $y=bx+3$은 a, b의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 3)$을 지난다.

(i) 직선 $y=ax+3$이 점 $(6,\ 4)$를 지날 때,

$4=6a+3$에서 $\quad a=\frac{1}{6}$

따라서 $ax+3\le\frac{3x+2}{x-1}$이려면 $\quad a\le\frac{1}{6}$

$\frac{18+2}{6-1}=4$

(ii) 직선 $y=bx+3$이 점 $(2,\ 8)$을 지날 때,

$8=2b+3$에서 $\quad b=\frac{5}{2}$

따라서 $\frac{3x+2}{x-1}\le bx+3$이려면 $\quad b\ge\frac{5}{2}$

$\frac{6+2}{2-1}=8$

(i), (ii)에서 $a-b$의 최댓값은

$\frac{1}{6}-\frac{5}{2}=-\frac{7}{3}$

답 ④

(a의 최댓값)
$-$(b의 최솟값)

15 전략 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 길이를 각각 점 A의 x좌표에 대한 식으로 나타낸 후 △ABC의 넓이가 50임을 이용한다.

풀이 점 A의 좌표를 $\left(a,\ \frac{1}{a}\right)(a>0)$이라 하면 점 B의 y좌표는 $\frac{1}{a}$이므로 $\frac{1}{a}=\frac{k}{x}$에서

$x=ak \qquad \therefore \mathrm{B}\left(ak,\ \frac{1}{a}\right)$

또 점 C의 x좌표가 a이므로 점 C의 좌표는

$\left(a,\ \frac{k}{a}\right)$

$\therefore \overline{AB}=ak-a=a(k-1)$,

$\overline{AC}=\frac{k}{a}-\frac{1}{a}=\frac{1}{a}(k-1)$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 50이므로

$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}=50$

$\frac{1}{2}\cdot a(k-1)\cdot\frac{1}{a}(k-1)=50$

$(k-1)^2=100, \qquad k-1=\pm10$

$\therefore k=11\ (\because k>0)$

답 11

16 전략 □OQPR의 둘레의 길이를 점 P의 x좌표에 대한 식으로 나타낸 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 점 P의 좌표를 $\left(k,\ \frac{9}{k}\right)(k>0)$라 하면

$\mathrm{Q}(k,\ 0)$, $\mathrm{R}\left(0,\ \frac{9}{k}\right)$

사각형 OQPR의 둘레의 길이는

$2\overline{PR}+2\overline{PQ}=2k+\frac{18}{k}$

이때 $k>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2k+\frac{18}{k}\ge2\sqrt{2k\cdot\frac{18}{k}}$

$=2\cdot6$

$=12$ (단, 등호는 $k=3$일 때 성립)

$2k=\frac{18}{k}$에서 $\quad k^2=9$

$\therefore k=3\ (\because k>0)$

따라서 사각형 OQPR의 둘레의 길이의 최솟값은 12이다.

답 12

쌤 한마디

유리함수의 그래프의 활용 문제는 먼저 주어진 유리함수의 그래프 위의 한 점의 좌표를 문자를 이용하여 나타낸 후 도형의 길이 또는 넓이를 그 문자에 대한 식으로 나타낸다. 이때 도형의 길이 또는 넓이의 최솟값을 구하는 경우에 양수 조건이 있으면 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$a>0$, $b>0$일 때,

$a+b\ge2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

17 전략 $f(3)=-2$임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한 후 $f=f^{-1}$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\frac{5x+b}{x+a}$의 그래프가 점 $(3,\ -2)$를 지나므로

$-2=\frac{15+b}{3+a}$

$\therefore 2a+b=-21$ …… ㉠

$f(x)=\frac{5x+b}{x+a}$에서 $y=\frac{5x+b}{x+a}$로 놓으면

$y(x+a)=5x+b, \qquad (y-5)x=-ay+b$

$\therefore x=\frac{-ay+b}{y-5}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\qquad y=\frac{-ax+b}{x-5}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{-ax+b}{x-5}$

따라서 $f=f^{-1}$에서 $\frac{5x+b}{x+a}=\frac{-ax+b}{x-5}$이므로

$a=-5$

$a=-5$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=-11$

$\therefore a+b=-16$ 답 ①

18 전략 $f(m)=n$이면 $f^{-1}(n)=m$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\frac{4x+9}{x-1}=\frac{4(x-1)+13}{x-1}=\frac{13}{x-1}+4$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=4$이므로

$a=1$, $b=4$

따라서 $a+b=5$이므로 $f^{-1}(a+b)=f^{-1}(5)=k$라 하면

$f(k)=5, \quad \frac{4k+9}{k-1}=5$

$4k+9=5k-5 \quad \therefore k=14$

$\therefore f^{-1}(a+b)=f^{-1}(5)=14$ 답 14

19 전략 $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$임을 이용한다.

풀이 $(g\circ f^{-1})^{-1}(1)=(f\circ g^{-1})(1)$

$=f(g^{-1}(1))$ ··· ❶

$g^{-1}(1)=k$라 하면 $g(k)=1$이므로

$\frac{k+4}{2k+1}=1, \quad k+4=2k+1$

$\therefore k=3$ ··· ❷

$\therefore (g\circ f^{-1})^{-1}(1)=f(g^{-1}(1))=f(3)$

$=\frac{3-1}{3+1}=\frac{1}{2}$ ··· ❸

답 $\frac{1}{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	합성함수와 역함수의 성질을 이용할 수 있다.	30 %
❷	$g^{-1}(1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	$(g\circ f^{-1})^{-1}(1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

06 무리식과 무리함수

13 무리식

Lecture 28 무리식 84쪽

1-1 답 (1) ○ (2) × (3) × (4) ○

Q BOX: x의 계수가 무리수인 다항식이므로 유리식이다.

1-2 ㄹ. $\sqrt{x^2+2x+1}=\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$

이상에서 무리식인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

Q BOX: 근호 안의 식이 완전제곱식이면 유리식으로 나타낼 수 있으므로 무리식이 아니다.

2-1 (1) $2x+10\geq 0$이므로 $\quad x\geq -5$

(2) $7x-4>0$이므로 $\quad x>\frac{4}{7}$

답 (1) $x\geq -5$ (2) $x>\frac{4}{7}$

2-2 (1) $1+x\geq 0$, $1-x\geq 0$이므로

$x\geq -1$, $x\leq 1 \quad \therefore -1\leq x\leq 1$

(2) $x+2\geq 0$, $3x+15>0$이므로

$x\geq -2$, $x>-5 \quad \therefore x\geq -2$

답 (1) $-1\leq x\leq 1$ (2) $x\geq -2$

Q BOX: 각 부등식의 해를 구하여 공통부분을 구한다.

Lecture 29 무리식의 계산 85쪽

1-1 (1) $(\sqrt{x+4}+1)(\sqrt{x+4}-1)=(\sqrt{x+4})^2-1^2$

$=x+4-1$

$=x+3$

(2) $(\sqrt{x+y}+\sqrt{x})(\sqrt{x+y}-\sqrt{x})$

$=(\sqrt{x+y})^2-(\sqrt{x})^2$

$=x+y-x$

$=y$

(3) $(3-\sqrt{2x+5})(3+\sqrt{2x+5})=3^2-(\sqrt{2x+5})^2$

$=9-(2x+5)$

$=-2x+4$

(4) $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$

$=(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x-1})^2$

$=x+1-(x-1)$

$=2$

답 (1) $x+3$ (2) y (3) $-2x+4$ (4) 2

1-2 (1) $\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

Q BOX: $\sqrt{x}-1$을 분자, 분모에 각각 곱한다.

(2) $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$

$=\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$

$=\sqrt{x}+1$

Q BOX: $\sqrt{x}+1$을 분자, 분모에 각각 곱한다.

(3) $\dfrac{3}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x+3}}$

$=\dfrac{3(\sqrt{x+6}-\sqrt{x+3})}{(\sqrt{x+6}+\sqrt{x+3})(\sqrt{x+6}-\sqrt{x+3})}$

$=\dfrac{3(\sqrt{x+6}-\sqrt{x+3})}{x+6-(x+3)}$

$=\sqrt{x+6}-\sqrt{x+3}$

(4) $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

$=\dfrac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$

$=\dfrac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2}{x+1-x}$

$=x+1+2\sqrt{x(x+1)}+x$

$=2x+1+2\sqrt{x(x+1)}$

답 (1) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ (2) $\sqrt{x}+1$
(3) $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+3}$
(4) $2x+1+2\sqrt{x(x+1)}$

1-3 (1) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{x}+\sqrt{y}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$

$=\dfrac{2\sqrt{x}}{x-y}$

(2) $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$

$=\dfrac{(\sqrt{x}-2)^2-(\sqrt{x}+2)^2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$

$=\dfrac{x-4\sqrt{x}+4-(x+4\sqrt{x}+4)}{x-4}$

$=-\dfrac{8\sqrt{x}}{x-4}$

답 (1) $\dfrac{2\sqrt{x}}{x-y}$ (2) $-\dfrac{8\sqrt{x}}{x-4}$

기본+표준 유형 Q+Q

86쪽

01 $12x^2+x-1\geq0$이므로 $(3x+1)(4x-1)\geq0$

$\therefore x\leq-\dfrac{1}{3}$ 또는 $x\geq\dfrac{1}{4}$

답 $x\leq-\dfrac{1}{3}$ 또는 $x\geq\dfrac{1}{4}$

02 $x+3\geq0$이므로 $x\geq-3$ …… ㉠
$4-x\geq0$이므로 $x\leq4$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $-3\leq x\leq4$
$-3\leq x\leq4$일 때, $x-5<0$이므로

$\sqrt{x^2-10x+25}=\sqrt{(x-5)^2}$
$=-(x-5)$
$=-x+5$

답 ③

Q BOX

$\sqrt{x+6}-\sqrt{x+3}$을 분자, 분모에 각각 곱한다.

$\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$를 분자, 분모에 각각 곱한다.

주어진 무리식을 간단히 한 후 문자에 수를 대입하여 식의 값을 구한다.

$x=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $y=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 꼴로 주어지면 $x+y$, $x-y$, xy의 값을 구한 후 이를 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x & (x\geq0) \\ -x & (x<0)\end{cases}$

03 $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})}+\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2})(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2})}+\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}}{(\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3})(\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3})}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{x-(x-1)}+\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}{x-1-(x-2)}+\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}}{x-2-(x-3)}$

$=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}+\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}$

$=\sqrt{x}-\sqrt{x-3}$

답 ④

04 $\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}+\dfrac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$

$=\dfrac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})^2+(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})^2}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})}$

$=\dfrac{4-2\sqrt{(2+x)(2-x)}+4+2\sqrt{(2+x)(2-x)}}{2+x-(2-x)}$

$=\dfrac{4}{x}$

$\therefore k=4$

답 ④

05 $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{(\sqrt{x}+1)^2+(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$

$=\dfrac{x+2\sqrt{x}+1+x-2\sqrt{x}+1}{x-1}$

$=\dfrac{2(x+1)}{x-1}$

$=\dfrac{2(\sqrt{2}+1+1)}{(\sqrt{2}+1)-1}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}}$

$=2+2\sqrt{2}$

답 $2+2\sqrt{2}$

06 $\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}}$

$=\dfrac{(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x})^2}{(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x})}$

$=\dfrac{4+x-2\sqrt{(4+x)(4-x)}+4-x}{4+x-(4-x)}$

$=\dfrac{8-2\sqrt{16-x^2}}{2x}$

$=\dfrac{4-\sqrt{16-x^2}}{x}$

$=\dfrac{4-3}{\sqrt{7}}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

답 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

07 $x+y=2\sqrt{6}$, $xy=1$이므로

$\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{1}}=2\sqrt{6}$

답 $2\sqrt{6}$

08 $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\sqrt{3}+1$,

$y=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\sqrt{3}-1$

이므로

$x+y=2\sqrt{3}$, $x-y=2$, $xy=2$

$\therefore x^2+x^2y-xy^2-y^2$

$=(x^2-y^2)+(x^2y-xy^2)$

$=(x+y)(x-y)+xy(x-y)$

$=(x-y)(x+y+xy)$

$=2(2\sqrt{3}+2)$

$=4\sqrt{3}+4$

답 $4\sqrt{3}+4$

14 무리함수

Lecture 30 무리함수 $y=\pm\sqrt{ax}$의 그래프

L 87쪽

1-1 답 ㄱ, ㄷ, ㅁ, ㅂ

1-2 (1) $x-4\geq 0$에서 $x\geq 4$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x|x\geq 4\}$

(2) $6-3x\geq 0$에서 $x\leq 2$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x|x\leq 2\}$

(3) $4x+20\geq 0$에서 $x\geq -5$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x|x\geq -5\}$

(4) $7-2x\geq 0$에서 $x\leq \dfrac{7}{2}$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\left\{x\middle|x\leq \dfrac{7}{2}\right\}$

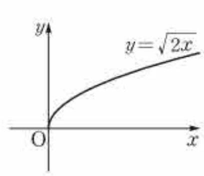
답 (1) $\{x|x\geq 4\}$ (2) $\{x|x\leq 2\}$ (3) $\{x|x\geq -5\}$ (4) $\left\{x\middle|x\leq \dfrac{7}{2}\right\}$

> 무리함수의 정의역
> ➡ 근호 안의 식의 값이 0 이상이 되도록 하는 실수 전체의 집합

2-1 (1) $y=\sqrt{2x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x\geq 0\}$,

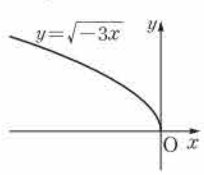
치역은 $\{y|y\geq 0\}$이다.



(2) $y=\sqrt{-3x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x\leq 0\}$,

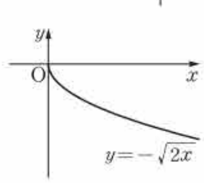
치역은 $\{y|y\geq 0\}$이다.



(3) $y=-\sqrt{2x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x\geq 0\}$,

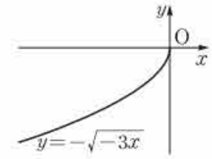
치역은 $\{y|y\leq 0\}$이다.



(4) $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x\leq 0\}$,

치역은 $\{y|y\leq 0\}$이다.



답 풀이 참조

Lecture 31 무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프

L 88쪽

> 함수 $y=\sqrt{ax}\,(a\neq 0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은
> $y=\sqrt{a(x-p)}+q$

1-1 답 (1) $y=\sqrt{-2(x-3)}-4$

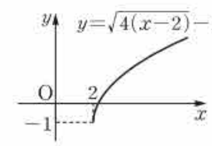
(2) $y=-\sqrt{5(x+2)}-3$

1-2 (1) $y=\sqrt{4(x-2)}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x\geq 2\}$,

치역은 $\{y|y\geq -1\}$이다.

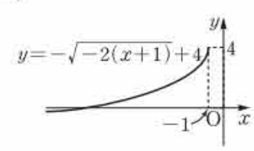


(2) $y=-\sqrt{-2(x+1)}+4$의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x\leq -1\}$,

치역은 $\{y|y\leq 4\}$이다.



답 풀이 참조

> 주어진 함수를
> $y=\sqrt{a(x-p)}+q$
> 꼴로 변형하여 그래프를 그린다.

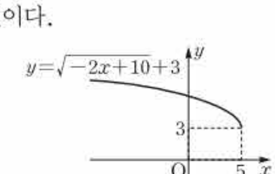
2-1 (1) $y=\sqrt{-2x+10}+3=\sqrt{-2(x-5)}+3$

이므로 $y=\sqrt{-2x+10}+3$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x\leq 5\}$,

치역은 $\{y|y\geq 3\}$이다.



(2) $y=-\sqrt{3x+9}-2=-\sqrt{3(x+3)}-2$

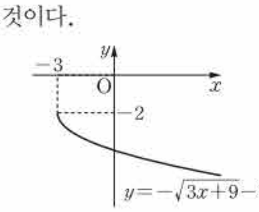
이므로 $y=-\sqrt{3x+9}-2$의 그래프는 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x\geq -3\}$,

치역은 $\{y|y\leq -2\}$

이다.



답 풀이 참조

기본+표준 유형 Q+Q 89쪽

01 $x+6\ge0$에서 $\quad x\ge-6$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\{x|x\ge-6\}$이므로

$b=-6$

또 함수 $y=\sqrt{x+6}+a$에서 $\sqrt{x+6}\ge0$이므로 치역은

$\{y|y\ge a\} \quad \therefore a=2$

$\therefore a+b=-4$ 답 ③

02 $3x+a\ge0$에서 $\quad x\ge-\frac{a}{3}$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\left\{x\,\middle|\,x\ge-\frac{a}{3}\right\}$이므로

$-\frac{a}{3}=\frac{2}{3} \quad \therefore a=-2$

함수 $y=-\sqrt{3x-2}+b$의 그래프가 점 $(6,\ 1)$을 지나므로

$1=-\sqrt{3\cdot6-2}+b, \quad 1=-4+b$

$\therefore b=5$

따라서 함수 $y=-\sqrt{3x-2}+5$에서 $\sqrt{3x-2}\ge0$이므로 치역은

$\{y|y\le5\}$ 답 $\{y|y\le5\}$

03 $y=\sqrt{-4x-5}-8=\sqrt{-4\left(x+\frac{5}{4}\right)}-8$

이므로 $y=\sqrt{-4x-5}-8$의 그래프는 $y=\sqrt{-4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{5}{4}$만큼, y축의 방향으로 -8만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=-\frac{5}{4}$, $b=-8$이므로

$ab=10$ 답 10

04 $y=-\sqrt{a(x+1)}+2$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\sqrt{a(x-b+1)}+2+c$

이 함수의 그래프가

$y=-\sqrt{-5x+10}+6=-\sqrt{-5(x-2)}+6$

의 그래프와 일치하므로

$a=-5,\ -b+1=-2,\ 2+c=6$

따라서 $a=-5,\ b=3,\ c=4$이므로

$a+b+c=2$ 답 2

05 $y=\sqrt{3x+4}-7$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입한다.

$-y=\sqrt{3\cdot(-x)+4}-7$

$\therefore y=-\sqrt{-3x+4}+7$

이 함수의 그래프가 점 $(-4,\ k)$를 지나므로

$k=-\sqrt{-3\cdot(-4)+4}+7$

$=-4+7=3$ 답 ②

Q BOX

Q쌤 한마디

도형의 대칭이동

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축, y축, 원점, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 다음과 같다.

① x축에 대하여 대칭이동 ⟹ y 대신 $-y$를 대입 ⟹ $f(x,\ -y)=0$

② y축에 대하여 대칭이동 ⟹ x 대신 $-x$를 대입 ⟹ $f(-x,\ y)=0$

③ 원점에 대하여 대칭이동 ⟹ x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입 ⟹ $f(-x,\ -y)=0$

④ 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동 ⟹ x 대신 y, y 대신 x를 대입 ⟹ $f(y,\ x)=0$

06 ㄱ. $y=\sqrt{2x+12}=\sqrt{2(x+6)}$

따라서 $y=\sqrt{2x+12}$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\sqrt{-2x+16}=\sqrt{-2(x-8)}$

따라서 $y=\sqrt{-2x+16}$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 8만큼 평행이동한 것이다.

x 대신 $-x$를 대입한다.

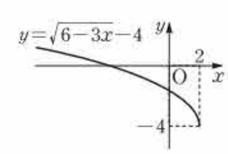
이상에서 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 $y=\sqrt{2x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

07 $y=\sqrt{6-3x}-4=\sqrt{-3(x-2)}-4$

이므로 $y=\sqrt{6-3x}-4$의 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면을 지난다.



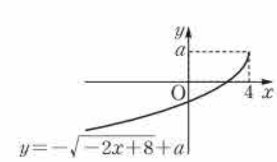
$x=0$일 때 $y=\sqrt{6}-4<0$ 이므로 제1사분면을 지나지 않는다.

답 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면

08 $y=-\sqrt{-2x+8}+a=-\sqrt{-2(x-4)}+a$

이므로 $y=-\sqrt{-2x+8}+a$의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=-\sqrt{-2x+8}+a$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 작거나 같아야 하므로



$-2\sqrt{2}+a\le0 \quad \therefore a\le2\sqrt{2}$

따라서 구하는 실수 a의 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다. 답 ⑤

09 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=\sqrt{a(x+3)}-2$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{3a}-2,\quad \sqrt{3a}=3$

$3a=9\quad \therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{3(x+3)}-2=\sqrt{3x+9}-2$

따라서 $b=9$, $c=-2$이므로

$a+b+c=10$ 답 ④

쌤 한마디

무리함수의 그래프가 주어졌을 때, 정의역과 치역을 이용하면 함수의 식은 다음과 같이 놓을 수 있다.

① 정의역: $\{x|x\ge p\}$, 치역: $\{y|y\ge q\}$
  ⇨ $y=\sqrt{a(x-p)}+q\ (a>0)$

② 정의역: $\{x|x\ge p\}$, 치역: $\{y|y\le q\}$
  ⇨ $y=-\sqrt{a(x-p)}+q\ (a>0)$

③ 정의역: $\{x|x\le p\}$, 치역: $\{y|y\ge q\}$
  ⇨ $y=\sqrt{a(x-p)}+q\ (a<0)$

④ 정의역: $\{x|x\le p\}$, 치역: $\{y|y\le q\}$
  ⇨ $y=-\sqrt{a(x-p)}+q\ (a<0)$

10 $y=-\sqrt{2x+4}+3=-\sqrt{2(x+2)}+3$

이므로 이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\sqrt{2(x-a+2)}+3+b$ …… ㉠

이때 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 그래프의 식은

$y=-\sqrt{2(x+4)}-1$

이 식이 ㉠과 일치하므로

$-a+2=4,\ 3+b=-1$

따라서 $a=-2$, $b=-4$이므로

$ab=8$ 답 8

11 ① $x=4$, $y=2$를 주어진 함수의 식에 대입하면

$2=\sqrt{-4+5}+1$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $(4,\ 2)$를 지난다.

② $-x+5\ge 0$에서 $x\le 5$이므로 정의역은

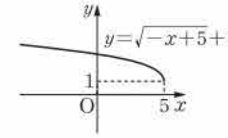
$\{x|x\le 5\}$

③ $\sqrt{-x+5}\ge 0$이므로 치역은 $\{y|y\ge 1\}$

④ $y=\sqrt{-x+5}+1=\sqrt{-(x-5)}+1$

따라서 $y=\sqrt{-x+5}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=\sqrt{-x+5}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면을 지난다.



답 ⑤

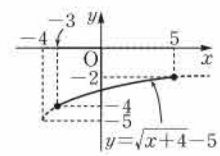
12 ㄱ. $a>0$이면 정의역은 $\{x|x\ge 0\}$, 치역은 $\{y|y\ge 0\}$이므로 그래프는 제3사분면을 지나지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

무리함수의 최댓값과 최솟값은 주어진 정의역에서 그래프를 그려서 구한다.

13 $y=\sqrt{x+4}-5$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-3\le x\le 5$에서 $y=\sqrt{x+4}-5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\sqrt{5+4}-5=-2$

$x=5$일 때 최댓값 -2,

$\sqrt{-3+4}-5=-4$

$x=-3$일 때 최솟값 -4

를 갖는다.

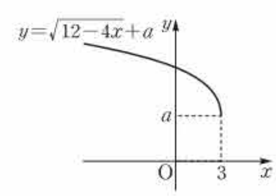
즉 $a=-2$, $b=-4$이므로

$a+b=-6$ 답 ②

14 $y=\sqrt{12-4x}+a=\sqrt{-4(x-3)}+a$

이므로 $y=\sqrt{12-4x}+a$의 그래프는 $y=\sqrt{-4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

즉 $y=\sqrt{12-4x}+a$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=3$일 때 최솟값 a를 갖는다.



$\sqrt{12-4\cdot 3}+a=a$

$\therefore a=3$

따라서 $y=\sqrt{12-4x}+a=\sqrt{12-4x}+3$의 그래프가 점 $(b,\ 9)$를 지나므로

$9=\sqrt{12-4b}+3,\quad \sqrt{12-4b}=6$

$12-4b=36,\quad -4b=24$

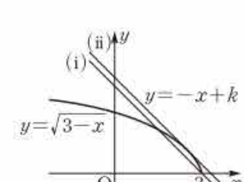
$\therefore b=-6$

$\therefore a-b=9$ 답 9

직선 $y=-x+k$는 직선 $y=-x$를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=\sqrt{3-x}$의 그래프를 그린 후 직선 $y=-x$를 y축의 방향으로 평행이동하면서 그래프와 직선의 위치 관계를 살펴본다.

15 $y=\sqrt{3-x}=\sqrt{-(x-3)}$이므로 $y=\sqrt{3-x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(3,\ 0)$을 지날 때,

$0=-3+k\quad \therefore k=3$

(ii) 직선 $y=-x+k$가 $y=\sqrt{3-x}$의 그래프에 접할 때,
$\sqrt{3-x}=-x+k$의 양변을 제곱하면

$$3-x=x^2-2kx+k^2$$

$$\therefore x^2+(1-2k)x+k^2-3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(1-2k)^2-4(k^2-3)=0$$

$$-4k+13=0 \qquad \therefore k=\frac{13}{4}$$

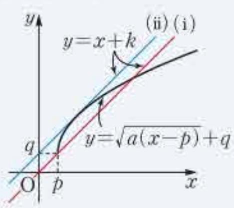
(i), (ii)에서 $y=\sqrt{3-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$3\le k<\frac{13}{4}$ 답 $3\le k<\frac{13}{4}$

쌤 한마디

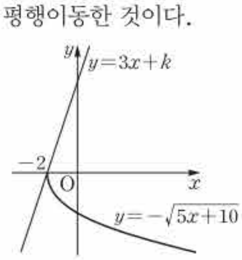
무리함수의 그래프와 직선의 위치 관계

무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ $(a\ne0)$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 위치 관계는 오른쪽 그림에서



① 직선이 (i)이거나 (i)과 (ii) 사이에 있을 때
○ 서로 다른 두 점에서 만난다.
② 직선이 (ii)이거나 (i)의 아래쪽에 있을 때
○ 한 점에서 만난다.
③ 직선이 (ii)의 위쪽에 있을 때 ○ 만나지 않는다.

16 $y=-\sqrt{5x+10}=-\sqrt{5(x+2)}$
이므로 $y=-\sqrt{5x+10}$의 그래프는 $y=-\sqrt{5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=3x+k$는 기울기가 3이고 y절편이 k이다.



직선 $y=3x+k$가 점 $(-2, 0)$을 지날 때,

$0=-6+k \qquad \therefore k=6$

따라서 함수 $y=-\sqrt{5x+10}$의 그래프와 직선 $y=3x+k$가 만나지 않으려면

$k>6$

이어야 하므로 자연수 k의 최솟값은 7이다. 답 7

17 함수 $y=-\sqrt{1-x}+2$의 치역이 $\{y|y\le2\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\le2\}$이다.

> 함수 f의 치역이 역함수 f^{-1}의 정의역이 되고, f의 정의역이 f^{-1}의 치역이 된다.

$\therefore c=2$

$y=-\sqrt{1-x}+2$에서

$y-2=-\sqrt{1-x}$

양변을 제곱하면 $(y-2)^2=1-x$

$\therefore x=-(y-2)^2+1$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=-(x-2)^2+1=-x^2+4x-3\ (x\le2)$

따라서 $a=4$, $b=-3$이므로

$abc=-24$ 답 -24

18 $f^{-1}(-1)=k$라 하면 $f(k)=-1$이므로

> 함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여
> $f(a)=b$
> $\Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$

$\sqrt{3k-3}-4=-1, \qquad \sqrt{3k-3}=3$

$3k-3=9, \qquad 3k=12$

$\therefore k=4$ 답 4

다른 풀이 함수 $f(x)=\sqrt{3x-3}-4$의 치역이 $\{y|y\ge-4\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\ge-4\}$이다.

$y=\sqrt{3x-3}-4$로 놓으면 $\sqrt{3x-3}=y+4$

양변을 제곱하면 $3x-3=(y+4)^2$

$\therefore x=\frac{1}{3}(y+4)^2+1$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{3}(x+4)^2+1$

즉 $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}(x+4)^2+1\ (x\ge-4)$이므로

$f^{-1}(-1)=\frac{1}{3}\cdot(-1+4)^2+1=4$

19 $(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f)(7)=f^{-1}(7)$

> 함수 f의 역함수가 f^{-1}일 때
> ➡ $f^{-1}\circ f$, $f\circ f^{-1}$는 항등함수이다.

$f^{-1}(7)=k$라 하면 $f(k)=7$이므로

$\sqrt{4k-7}=7, \qquad 4k-7=49$

$4k=56 \qquad \therefore k=14$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1}\circ f)(7)=f^{-1}(7)=14$ 답 ①

20 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(4)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(4)$
$=(g^{-1}\circ f)(4)$
$=g^{-1}(f(4))$

$f(4)=\frac{4+6}{4-2}=5$이므로

$g^{-1}(f(4))=g^{-1}(5)$

$g^{-1}(5)=k$라 하면 $g(k)=5$이므로

$\sqrt{2k-3}=5, \qquad 2k-3=25$

$2k=28 \qquad \therefore k=14$

따라서 $g^{-1}(5)=14$이므로

$(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(4)=g^{-1}(f(4))$
$=g^{-1}(5)=14$ 답 14

중단원 마무리

Ⓛ 92쪽

01 **전략** 무리식의 값이 실수가 되려면 근호 안의 식의 값이 0 이상이어야 한다.

풀이 $1-4x\ge0$이므로 $x\le\frac{1}{4}$ …… ㉠

$9-x^2>0$이므로 $x^2-9<0$

$(x+3)(x-3)<0$

$\therefore -3<x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-3<x\le\frac{1}{4}$ 답 $-3<x\le\frac{1}{4}$

02 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\geq 0$이 성립하려면 $a>0$, $D\leq 0$이어야 한다.

풀이 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{kx^2-kx+3}$의 값이 실수가 되려면 $kx^2-kx+3\geq 0$이어야 한다.

(i) $k=0$일 때,
$0\cdot x^2-0\cdot x+3=3\geq 0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $k\neq 0$일 때,
$k>0$ ······ ㉠
이어야 하고 이차방정식 $kx^2-kx+3=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-k)^2-4\cdot k\cdot 3\leq 0$
$k^2-12k\leq 0$, $k(k-12)\leq 0$
$\therefore 0\leq k\leq 12$ ······ ㉡
㉠, ㉡에서 $0<k\leq 12$

(i), (ii)에서 $0\leq k\leq 12$
따라서 정수 k는 0, 1, 2, ⋯, 12의 13개이다. 답 ④

03 전략 주어진 식을 통분하여 계산한다.

풀이
$$\frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})+(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}$$
$$=\frac{2\sqrt{x-1}}{x-1-x}$$
$$=-2\sqrt{x-1}$$
답 $-2\sqrt{x-1}$

04 전략 분모의 유리화를 이용하여 $f(n)$을 간단히 한다.

풀이
$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$$
$$=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$ ··· ❶

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$
$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(2-\sqrt{3})$
$\quad+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$
$=\sqrt{n+1}-1$ ··· ❷

이때 $\sqrt{n+1}-1>7$이므로 $\sqrt{n+1}>8$
$n+1>64$ $\therefore n>63$
따라서 자연수 n의 최솟값은 64이다. ··· ❸

답 64

단계	채점 기준	비율
❶	$f(n)$을 간단히 할 수 있다.	40 %
❷	$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$을 간단히 할 수 있다.	30 %
❸	자연수 n의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

05 전략 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a<0)$의 정의역은 $\left\{x \,\middle|\, x\leq -\frac{b}{a}\right\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\geq c\}$이다.

풀이 $ax+b\geq 0$에서 $ax\geq -b$
이때 주어진 함수의 정의역이 $\{x\,|\,x\leq 4\}$이므로
$a<0$
즉 $ax\geq -b$에서 $x\leq -\frac{b}{a}$이므로
$-\frac{b}{a}=4$ $\therefore b=-4a$
또 주어진 함수의 치역이 $\{y\,|\,y\geq -5\}$이므로
$c=-5$
$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{ax-4a}-5$의 그래프가 점 $(2, -3)$을 지나므로
$-3=\sqrt{2a-4a}-5$, $\sqrt{-2a}=2$
$-2a=4$ $\therefore a=-2$
따라서 $a=-2$, $b=8$, $c=-5$이므로
$a+b+c=1$ 답 ④

06 전략 평행이동한 그래프의 식을 구한 후 이 그래프가 점 $(-3, 1)$을 지남을 이용한다.

풀이 $y=-\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-\sqrt{a(x-2)}+6$
이 함수의 그래프가 점 $(-3, 1)$을 지나므로
$1=-\sqrt{-5a}+6$, $\sqrt{-5a}=5$
$-5a=25$ $\therefore a=-5$ 답 ③

07 전략 평행이동과 대칭이동한 그래프의 식을 구한 후 일치하는 그래프의 식과 비교한다.

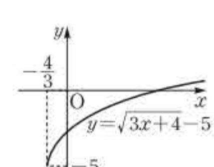
풀이 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\sqrt{a(x+4)+b}+c+3$
$y=\sqrt{a(x+4)+b}+c+3$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

x 대신 $-x$를 대입한다.

$y=\sqrt{a(-x+4)+b}+c+3$
$=\sqrt{-ax+4a+b}+c+3$
위의 함수의 그래프가 $y=\sqrt{-2x+9}+6$의 그래프와 일치하므로
$-a=-2$, $4a+b=9$, $c+3=6$
따라서 $a=2$, $b=1$, $c=3$이므로
$a+b+c=6$ 답 6

08 전략 보기의 무리함수의 그래프를 그려 본다.

풀이 ㄱ. $y=\sqrt{3x+4}-5=\sqrt{3\left(x+\frac{4}{3}\right)}-5$
이므로 $y=\sqrt{3x+4}-5$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{4}{3}$만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지나지 않는다.

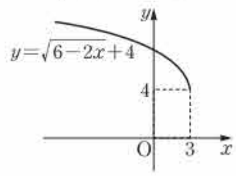


$x=0$일 때
$y=\sqrt{4}-5=-3<0$
이므로 제2사분면을 지나지 않는다.

ㄴ. $y=\sqrt{6-2x}+4=\sqrt{-2(x-3)}+4$

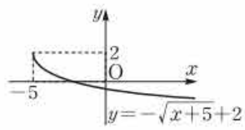
이므로 $y=\sqrt{6-2x}+4$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지난다.



ㄷ. $y=-\sqrt{x+5}+2$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

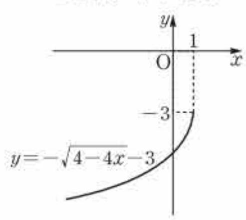
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지난다.



ㄹ. $y=-\sqrt{4-4x}-3=-\sqrt{-4(x-1)}-3$

이므로 $y=-\sqrt{4-4x}-3$의 그래프는 $y=-\sqrt{-4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 2 사분면을 지나지 않는다.



이상에서 그래프가 제2사분면을 지나는 것은 ㄴ, ㄷ이다. 　답 ㄴ, ㄷ

09 전략 주어진 유리함수의 그래프를 이용하여 a, b, c의 부호를 구한 후 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프의 개형을 파악한다.

풀이 주어진 그래프의 모양에서 　$b>0$

$y=\dfrac{b}{x+a}+c$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=c$이므로

$$-a>0,\ c<0 \qquad \therefore a<0,\ c<0$$

$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}+c$이므로

$y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a<0$, $-\dfrac{b}{a}>0$, $c<0$이므로 함수

$y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프의 개형은 ①과 같다. 　답 ①

Q BOX

유리함수 $y=\dfrac{k}{x}\ (k\neq 0)$의 그래프에서
① $k>0$
➡ 제1사분면, 제3사분면을 지난다.
② $k<0$
➡ 제2사분면, 제4사분면을 지난다.

10 전략 함수 $y=-\sqrt{3x+2}-1$의 그래프를 그려 본다.

풀이 ㄱ. $3x+2\geq 0$이므로 　$x\geq -\dfrac{2}{3}$

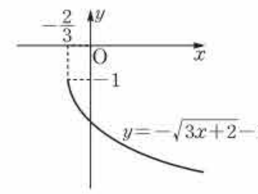
즉 주어진 함수의 정의역은 　$\left\{x \,\middle|\, x\geq -\dfrac{2}{3}\right\}$

또 $-\sqrt{3x+2}\leq 0$이므로 치역은 　$\{y\,|\,y\leq -1\}$

ㄴ. $y=-\sqrt{3x+2}-1=-\sqrt{3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)}-1$

이므로 $y=-\sqrt{3x+2}-1$의 그래프는 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{2}{3}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지난다.



ㄷ. $y=-\sqrt{3x+2}-1$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입한다.

$$-y=-\sqrt{3\cdot(-x)+2}-1$$
$$\therefore y=\sqrt{-3x+2}+1$$

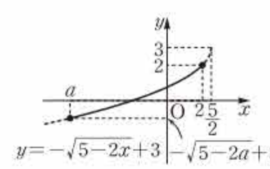
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 　답 ㄴ, ㄷ

11 전략 함수 $y=-\sqrt{5-2x}+3$을 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=-\sqrt{5-2x}+3=-\sqrt{-2\left(x-\dfrac{5}{2}\right)}+3$

이므로 $y=-\sqrt{5-2x}+3$의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{5}{2}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a\leq x\leq 2$에서 $y=-\sqrt{5-2x}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=2$일 때 최댓값 2,

$-\sqrt{5-2\cdot 2}+3=2$

$x=a$일 때 최솟값 $-\sqrt{5-2a}+3$

을 갖는다. 　··· ❶

즉 $M=2$이고 $-\sqrt{5-2a}+3=-1$이므로

$$\sqrt{5-2a}=4, \qquad 5-2a=16$$

$$-2a=11 \qquad \therefore a=-\frac{11}{2} \quad \cdots ❷$$

$$\therefore aM=-11 \quad \cdots ❸$$

답 -11

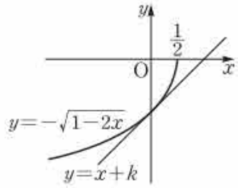
단계	채점 기준	비율
❶	$a\leq x\leq 2$에서 함수 $y=-\sqrt{5-2x}+3$의 최댓값을 구하고, 최솟값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷	a, M의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸	aM의 값을 구할 수 있다.	10 %

12 전략 주어진 무리함수의 그래프를 그린 후 직선 $y=x+k$를 움직여 본다.

풀이 $y=-\sqrt{1-2x}=-\sqrt{-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}$

이므로 $y=-\sqrt{1-2x}$의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k이다.



직선 $y=x+k$가 $y=-\sqrt{1-2x}$의 그래프에 접할 때, $-\sqrt{1-2x}=x+k$의 양변을 제곱하면

$$1-2x=x^2+2kx+k^2$$

$$\therefore x^2+2(k+1)x+k^2-1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(k+1)^2-(k^2-1)=0$$

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=b'^2-ac$

$$2k+2=0, \qquad 2k=-2$$

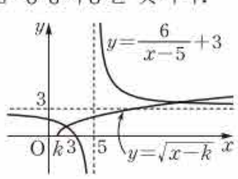
$$\therefore k=-1$$

따라서 $y=-\sqrt{1-2x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위가 $k\geq-1$이므로 k의 값이 아닌 것은 ①이다. 답 ①

13 전략 주어진 유리함수의 그래프와 무리함수의 그래프를 그린 후 무리함수의 그래프를 움직여 본다.

풀이 함수 $y=\frac{6}{x-5}+3$의 그래프는 $y=\frac{6}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, 함수 $y=\sqrt{x-k}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

따라서 두 함수 $y=\frac{6}{x-5}+3$, $y=\sqrt{x-k}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나려면



$$k\leq3$$

즉 구하는 실수 k의 최댓값은 3이다. 답 ①

쌤 한마디

두 곡선 $y=\frac{6}{x-5}+3$, $y=\sqrt{x-k}$는 $x>5$에서 한 개의 교점을 가지므로 서로 다른 두 점에서 만나려면 $x<5$에서도 한 개의 교점을 가져야 한다.

이때 곡선 $y=\frac{6}{x-5}+3$의 x절편이 3이고, $x<3$에서 $y>0$이므로 곡선 $y=\sqrt{x-k}$에서 k는 3보다 작거나 같아야 한다.

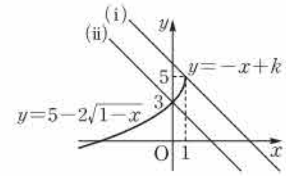
14 전략 주어진 무리함수의 그래프를 그린 후 직선 $y=-x+k$를 움직여 본다.

풀이 $y=5-2\sqrt{1-x}=-2\sqrt{-(x-1)}+5$

이므로 $y=5-2\sqrt{1-x}$의 그래프는 $y=-2\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이고 y절편은 3이다.

$y=5-2\sqrt{1-x}$에 $x=0$을 대입하면 $y=5-2=3$

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(1, 5)$를 지날 때,

$$5=-1+k \qquad \therefore k=6$$

(ii) 직선 $y=-x+k$가 점 $(0, 3)$을 지날 때,

$$3=0+k \qquad \therefore k=3$$

(i), (ii)에서 직선 $y=-x+k$가 $y=5-2\sqrt{1-x}$의 그래프와 제1사분면에서 만나려면

$$3<k\leq6$$

y축에서 만나는 경우는 제외한다.

따라서 정수 k는 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$$4+5+6=15$$

답 ③

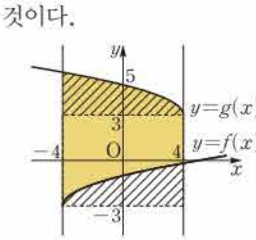
15 전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 평행이동과 대칭이동에 의하여 서로 겹쳐짐을 이용하여 도형의 넓이를 구한다.

풀이 $y=\sqrt{x+4}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

또 $y=\sqrt{-x+4}+3=\sqrt{-(x-4)}+3$이므로

$y=\sqrt{-x+4}+3$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 구하는 넓이는 색칠한 부분의 넓이와 같다.



이때 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 도형의 넓이는

$$8\cdot6=48$$

가로의 길이가 $4-(-4)=8$, 세로의 길이가 $3-(-3)=6$인 직사각형의 넓이

답 48

16 전략 함수 $f(x)$의 정의역이 $\{x|x\geq p\}$, 치역이 $\{y|y\leq q\}$이면 그 역함수의 정의역은 $\{x|x\leq q\}$, 치역은 $\{y|y\geq p\}$이다.

풀이 $x+a\geq0$에서 $\qquad x\geq-a$

즉 $f(x)$의 정의역이 $\{x|x\geq-a\}$이므로

$$-a=-6 \qquad \therefore a=6$$

또 $f(x)=-\sqrt{x+a}-b$에서 $-\sqrt{x+a}\leq0$이므로 치역은

$$\{y|y\leq-b\}$$

한편 $g(x)$의 정의역이 $\{x|x\leq-4\}$이므로 $f(x)$의 치역은 $\{y|y\leq-4\}$이다.

즉 $-b=-4$이므로 $\qquad b=4$

$$\therefore ab=24$$

답 ③

06 무리식과 무리함수

17 전략 함수 f와 그 역함수 f^{-1}에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(a,\ b)$를 지나면 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(b,\ a)$를 지남을 이용한다.

풀이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(1,\ 3)$에서 만나므로

$f(1)=3,\ g(1)=3$

$f(1)=3$에서 $\quad 3=\sqrt{a+b}+1$

$\therefore\ a+b=4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$f(3)=1, \quad 1=\sqrt{3a+b}+1$

$\therefore\ 3a+b=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

Q BOX: 함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여 $f(a)=b$ $\Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=6$

$\therefore\ f(x)=\sqrt{-2x+6}+1$

$g(5)=k$라 하면 $f(k)=5$이므로

$5=\sqrt{-2k+6}+1, \quad \sqrt{-2k+6}=4$

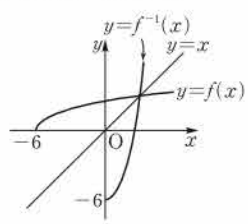
$-2k+6=16, \quad -2k=10$

$\therefore\ k=-5$

$\therefore\ g(5)=-5$ 답 ①

18 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=\sqrt{x+6}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{x+6}=x$의 양변을 제곱하면

$x+6=x^2$

$x^2-x-6=0, \quad (x+2)(x-3)=0$

$\therefore\ x=3\ (\because\ x\geq 0)$

따라서 교점의 좌표가 $(3,\ 3)$이므로

$a=3,\ b=3$

$\therefore\ a+b=6$ 답 ③

쌤 한마디

함수 $f(x)=\sqrt{x+6}$의 치역이 $\{y\mid y\geq 0\}$이므로 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 정의역은 $\{x\mid x\geq 0\}$이다.
따라서 두 그래프의 교점은 $x\geq 0$인 범위에 존재한다.

19 전략 $f(x)$와 $g(x)$의 관계를 생각한다.

풀이 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다. ⋯ ❶

$g(6)=k$라 하면 $\quad f(k)=6$

$\sqrt{2k+12}=6, \quad 2k+12=36$

$2k=24 \quad \therefore\ k=12$ ⋯ ❷

$g(12)=m$이라 하면 $\quad f(m)=12$

$\sqrt{2m+12}=12, \quad 2m+12=144$

$2m=132 \quad \therefore\ m=66$

$\therefore\ (g\circ g)(6)=g(g(6))=g(12)=66$ ⋯ ❸

답 66

단계	채점 기준	비율
❶	$g(x)$는 $f(x)$의 역함수임을 알 수 있다.	20 %
❷	$g(6)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	$(g\circ g)(6)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

20 전략 $f^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ f)^{-1}$임을 이용한다.

풀이 $(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=25$에서

$(f\circ f)^{-1}(a)=25$

$\therefore\ (f\circ f)(25)=a$

이때 $f(25)=1-\sqrt{25}=1-5=-4$이고,

$f(-4)=\sqrt{1-(-4)}=\sqrt{5}$이므로

$a=(f\circ f)(25)=f(f(25))$

$=f(-4)=\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{5}$

94~97쪽

07 순열과 조합

15 경우의 수

Lecture 32 경우의 수

96쪽

1-1 소수가 적힌 카드가 나오는 경우는
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19의 8가지
4의 배수가 적힌 카드가 나오는 경우는
4, 8, 12, 16, 20의 5가지
두 사건은 동시에 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는
$8+5=13$ 답 13

1-2 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 눈의 수의 합이 10이 되는 경우는
(4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지
(ii) 눈의 수의 합이 11이 되는 경우는
(5, 6), (6, 5)의 2가지
(iii) 눈의 수의 합이 12가 되는 경우는
(6, 6)의 1가지
이상에서 구하는 경우의 수는
$3+2+1=6$ 답 6

2-1 선물용 상자를 택하는 경우의 수는 3
리본을 택하는 경우의 수는 4
따라서 구하는 경우의 수는
$3\cdot4=12$ 답 12

2-2 갈 때 버스를 이용하는 경우의 수는 5
올 때 지하철을 이용하는 경우의 수는 4
따라서 구하는 경우의 수는
$5\cdot4=20$ 답 20

기본+표준 유형 Q+Q

97쪽

01 정사면체를 두 번 던질 때, 바닥에 오는 면에 적힌 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 두 수의 차가 0이 되는 경우는
(0, 0), (2, 2), (4, 4), (6, 6)의 4가지
(ii) 두 수의 차가 2가 되는 경우는
(0, 2), (2, 0), (2, 4), (4, 2),
(4, 6), (6, 4)의 6가지
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$4+6=10$ 답 10

Q BOX

소수
➡ 1보다 큰 자연수 중에서 1과 자기 자신만을 약수로 갖는 수

x, y, z 중 계수의 절댓값이 가장 큰 y의 값을 기준으로 경우를 나누어 생각한다. 이때 x, y, z는 자연수이므로 y의 값이 될 수 있는 것은 1, 2이다.

서로 다른 주사위나 동전을 여러 개 던질 때 일어나는 사건의 경우의 수를 구할 때에는 순서쌍을 이용하면 편리하다.

02 3의 배수가 적힌 공을 꺼내는 경우는
3, 6, 9, …, 48의 16가지
5의 배수가 적힌 공을 꺼내는 경우는
5, 10, 15, …, 50의 10가지
3과 5의 공배수가 적힌 공을 꺼내는 경우는
15, 30, 45의 3가지
따라서 구하는 경우의 수는
$16+10-3=23$ 답 23

03 (i) $y=1$일 때,
$x+z=6$이므로 순서쌍 (x, y, z)는
(1, 1, 5), (2, 1, 4), (3, 1, 3), (4, 1, 2),
(5, 1, 1)의 5개
(ii) $y=2$일 때,
$x+z=3$이므로 순서쌍 (x, y, z)는
(1, 2, 2), (2, 2, 1)의 2개
(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는
$5+2=7$ 답 7

04 (i) $x=1$일 때,
$2+y\le8$, 즉 $y\le6$이므로 순서쌍 (x, y)는
(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4),
(1, 5), (1, 6)의 6개
(ii) $x=2$일 때,
$4+y\le8$, 즉 $y\le4$이므로 순서쌍 (x, y)는
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)의 4개
(iii) $x=3$일 때,
$6+y\le8$, 즉 $y\le2$이므로 순서쌍 (x, y)는
(3, 1), (3, 2)의 2개
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
$6+4+2=12$ 답 ②

다른 풀이 x, y가 자연수이므로 $2x+y\le8$을 만족시키는 경우는
$2x+y=3$, $2x+y=4$, $2x+y=5$,
$2x+y=6$, $2x+y=7$, $2x+y=8$
(i) $2x+y=3$일 때, 순서쌍 (x, y)는
(1, 1)의 1개
(ii) $2x+y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는
(1, 2)의 1개
(iii) $2x+y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는
(1, 3), (2, 1)의 2개
(iv) $2x+y=6$일 때, 순서쌍 (x, y)는
(1, 4), (2, 2)의 2개
(v) $2x+y=7$일 때, 순서쌍 (x, y)는
(1, 5), (2, 3), (3, 1)의 3개
(vi) $2x+y=8$일 때, 순서쌍 (x, y)는
(1, 6), (2, 4), (3, 2)의 3개
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
$1+1+2+2+3+3=12$

05 첫 번째에 4의 약수의 눈이 나오는 경우는

1, 2, 4의 3가지

두 번째에 홀수의 눈이 나오는 경우는

1, 3, 5의 3가지

따라서 구하는 경우의 수는

$3\cdot3=9$ 답 ③

06 정의역 X의 원소 1, 2에 각각 대응시킬 수 있는 공역 Y의 원소는 3, 4, 5, 6의 4개이다.

따라서 X에서 Y로의 함수의 개수는

$4\cdot4=16$ 답 16

07 $(a+b+c+d)(x+y+z)$에서 a, b, c, d에 곱해지는 항이 각각 x, y, z의 3개이므로 항의 개수는

$4\cdot3=12$ 답 ⑤

쌤 한마디

전개식의 항의 개수

두 다항식 A, B의 각 항의 문자가 모두 다를 때, AB의 전개식의 항의 개수

⇨ (A의 항의 개수)×(B의 항의 개수)

08 $(a+b)(x+y+2)$에서 a, b에 곱해지는 항이 각각 x, y, 2의 3개이므로

$m=2\cdot3=6$

$(x+y)^2(a+b+c)=(x^2+2xy+y^2)(a+b+c)$에서 x^2, $2xy$, y^2에 곱해지는 항이 각각 a, b, c의 3개이므로

$n=3\cdot3=9$

$\therefore m+n=15$ 답 15

09 $40=2^3\cdot5$이므로 40의 양의 약수의 개수는

$(3+1)(1+1)=8$

$\therefore a=8$

$180=2^2\cdot3^2\cdot5$이므로 180의 양의 약수의 개수는

$(2+1)(2+1)(1+1)=18$

$\therefore b=18$

$\therefore a+b=26$ 답 ④

10 $2^3\times3^a\times5^4$의 양의 약수의 개수는

$(3+1)(a+1)(4+1)=20(a+1)$

따라서 $20(a+1)=60$이므로

$a+1=3$ $\therefore a=2$ 답 ②

11 (i) A → B → C → A로 가는 경우의 수는

$4\cdot3\cdot3=36$

(ii) A → C → B → A로 가는 경우의 수는

$3\cdot3\cdot4=36$

Q BOX

X에서 Y로의 함수
⇨ 두 집합 X, Y에 대하여 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응

각 영역에 칠할 수 있는 색의 개수를 구한 후 곱의 법칙을 이용한다.

인접한 영역이 가장 많은 영역인 C에 칠할 수 있는 색의 개수를 먼저 구한다.

$N=x^py^qz^r$ (x, y, z는 서로 다른 소수, p, q, r는 자연수) 꼴로 소인수분해되는 자연수 N의 양의 약수의 개수
⇨ $(p+1)(q+1)(r+1)$

$n(n-1)$은 연속하는 두 자연수의 곱이므로 42를 연속하는 두 자연수의 곱으로 나타낸다.

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$36+36=72$ 답 ⑤

12 (i) 입구 → 쉼터 A → 출구로 가는 경우의 수는

$4\cdot3=12$

(ii) 입구 → 쉼터 B → 출구로 가는 경우의 수는

$3\cdot2=6$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$12+6=18$ 답 18

13 B에 칠할 수 있는 색은 4가지, A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$4\cdot3\cdot3=36$ 답 ②

14 C에 칠할 수 있는 색은 5가지, A에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot3=180$ 답 180

16 순열

Lecture 33 순열

99쪽

1-1 (1) ${}_6P_2=6\cdot5=30$

(3) $5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

답 (1) 30 (2) 1 (3) 120 (4) 1

1-2 (1) ${}_nP_2=n(n-1)$이므로

$n(n-1)=42=7\cdot6$ $\therefore n=7$

(2) ${}_nP_n=n!$이므로

$n!=24=4\cdot3\cdot2\cdot1$ $\therefore n=4$

(3) $60=5\cdot4\cdot3$이므로

${}_5P_3=60$ $\therefore r=3$

(4) ${}_8P_0=1$이므로

$r-1=0$ $\therefore r=1$

답 (1) $n=7$ (2) $n=4$ (3) $r=3$ (4) $r=1$

2-1 구하는 경우의 수는 6명의 학생 중에서 2명을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_6P_2=6\cdot5=30$ 답 30

2-2 7개의 문자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_7P_3=7\cdot6\cdot5=210$ 답 210

기본+표준 유형 Q+Q 100쪽

01 ${}_{n+2}P_4=28\cdot{}_{n+1}P_2$에서

$(n+2)(n+1)n(n-1)=28(n+1)n$

$n\geq2$이므로 양변을 $n(n+1)$로 나누면

$(n+2)(n-1)=28$

$n^2+n-30=0,\quad (n+6)(n-5)=0$

$\therefore n=5\ (\because n\geq2)$ 답 5

02 $3\cdot{}_{n+1}P_2+{}_nP_2=42$에서

$3(n+1)n+n(n-1)=42$

$2n^2+n-21=0,\quad (2n+7)(n-3)=0$

$\therefore n=3\ (\because n\geq2)$ 답 3

03 구하는 경우의 수는 6명의 학생 중에서 4명을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_6P_4=6\cdot5\cdot4\cdot3=360$ 답 ②

04 ${}_nP_2=110$이므로

$n(n-1)=110=11\cdot10$

$\therefore n=11$ 답 11

05 여학생 3명을 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=24$

여학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot6=144$ 답 ①

쌤 한마디

이웃하는 순열의 수

이웃하는 것이 있는 순열의 수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각하여 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한다.

(ii) 이웃하는 것끼리 자리를 바꾸는 경우의 수를 구한다.

(iii) (i)과 (ii)의 결과를 곱한다.

06 h와 k를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

h와 k가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\cdot2=240$ 답 240

07 소설책 5권을 일렬로 꽂는 경우의 수는

$5!=120$

소설책 사이사이 및 양 끝의 6개의 자리에 시집을 꽂는 경우의 수는

${}_6P_2=30$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\cdot30=3600$ 답 ③

쌤 한마디

이웃하지 않는 순열의 수

이웃하지 않는 것이 있는 순열의 수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 이웃해도 상관없는 것을 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한다.

(ii) (i)에서 나열한 것 사이사이와 양 끝에 이웃하지 않는 것을 나열하는 경우의 수를 구한다.

(iii) (i)과 (ii)의 결과를 곱한다.

08 a, b를 한 문자로 생각하고, e, f를 제외한 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

a와 b가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

위에서 세운 a, b의 묶음과 c, d, g의 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 e, f를 나열하는 경우의 수는

${}_5P_2=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot2\cdot20=960$ 답 ⑤

09 선생님은 3명, 학생은 4명이므로 학생 4명을 일렬로 세운 후 그 사이사이에 선생님을 세우면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$4!\cdot3!=144$ 답 144

10 짝수는 2, 4, 6의 3개, 홀수는 1, 3, 5의 3개이므로

(i) 짝수, 홀수의 순서로 번갈아 나타나도록 만드는 경우의 수는

$3!\cdot3!=36$

(ii) 홀수, 짝수의 순서로 번갈아 나타나도록 만드는 경우의 수는

$3!\cdot3!=36$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$36+36=72$ 답 ③

11 빨간색 꽃은 4송이이므로 양 끝에 빨간색 꽃 2송이를 심는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

양 끝의 빨간색 꽃 2송이를 제외한 나머지 4송이를 일렬로 심는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\cdot24=288$ 답 ②

Q BOX

${}_{n+2}P_4$에서 $n+2\geq4$

$\therefore n\geq2$

$(n+2)(n-1)=28$
$=7\cdot4$

에서 $n=5$와 같이 구할 수도 있다.

${}_nP_2$에서 $n\geq2$

소설책을 ○라 하면

V○V○V○V○V○V

a, b, c, d, g

짝수를 ●, 홀수를 ▲라 하면

(i) ●▲●▲●▲

(ii) ▲●▲●▲●

07 순열과 조합

12 c와 o 사이에 2개의 문자가 오도록 묶음을 만드는 경우의 수는

$2!\cdot{}_4P_2=24$

이 묶음과 나머지 2개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot6=144$ 답 144

c와 o가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수

c와 o를 제외한 나머지 4개의 문자 중에서 2개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수

13 5명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는

$5!=120$

중학생끼리 이웃하지 않도록 세우는 경우의 수는 고등학생 2명을 일렬로 세우고 고등학생 사이사이 및 양 끝의 3개의 자리에 중학생 3명을 세우는 경우의 수와 같으므로

$2!\cdot3!=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-12=108$ 답 ⑤

(사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수)
=(모든 경우의 수)
−(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)

14 9명의 학생 중에서 대표 1명, 부대표 1명을 뽑는 경우의 수는

${}_9P_2=72$

대표, 부대표 모두 여학생을 뽑는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$72-12=60$ 답 60

15 십의 자리와 일의 자리에는 1, 3, 5의 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_3P_2=6$

천의 자리와 백의 자리에는 십의 자리와 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_3P_2=6$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$6\cdot6=36$ 답 ④

16 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.
백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에는 천의 자리에 오는 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_5P_3=60$

따라서 구하는 네 자리 자연수의 개수는

$5\cdot60=300$ 답 300

17 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우
일의 자리의 숫자가 0인 세 자리 자연수의 개수는 0을 제외한 6개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_6P_2=30$

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우
백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 5를 제외한 1, 2, 3, 4, 6의 5개이다.
십의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리와 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 5개이므로 일의 자리의 숫자가 5인 세 자리 자연수의 개수는

$5\cdot5=25$

(i), (ii)에서 구하는 5의 배수의 개수는

$30+25=55$ 답 55

쌤 한마디

배수의 판정
① 2의 배수: 일의 자리의 숫자가 0 또는 2의 배수인 수
② 3의 배수: 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수인 수
③ 4의 배수: 끝의 두 자리 수가 00이거나 4의 배수인 수
④ 5의 배수: 일의 자리의 숫자가 0 또는 5인 수

18 a로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$
b로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$
ca로 시작하는 것은 순서대로
$cabd$, $cadb$의 2개
따라서 $abcd$부터 $cadb$까지의 개수는

$6+6+2=14$

이므로 $cadb$는 14번째에 온다. 답 ③

b, c, d를 일렬로 나열하는 경우의 수

a, c, d를 일렬로 나열하는 경우의 수

19 3500보다 큰 자연수는

35□□, 4□□□, 5□□□

꼴이다.
35□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_3P_2=6$
4□□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_3=24$
5□□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_3=24$
따라서 구하는 자연수의 개수는

$6+24+24=54$ 답 54

17 조합

Lecture 34 조합 103쪽

1-1 (1) ${}_{10}C_2=\dfrac{{}_{10}P_2}{2!}=\dfrac{10\cdot9}{2\cdot1}=45$

(2) ${}_8C_5=\dfrac{{}_8P_5}{5!}=\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=56$

답 (1) 45 (2) 56 (3) 1 (4) 1

1-2 (1) ${}_nC_2=15$에서 $\frac{n(n-1)}{2\cdot1}=15$

$n(n-1)=30=6\cdot5$ $\therefore n=6$

(2) ${}_8C_r=28$에서 $\frac{8!}{r!(8-r)!}=28$

$8!=28\cdot r!(8-r)!$

$2\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=r!(8-r)!$

$2!\cdot6!=r!(8-r)!$

$\therefore r=2$ 또는 $r=6$

(3) ${}_9C_7={}_9C_{9-7}={}_9C_2$이므로 $r=2$

(4) ${}_{10}C_r={}_{10}C_{r+2}$에서

$r=r+2$ 또는 $10-r=r+2$

(i) $r=r+2$에서 $0\neq2$이므로 r의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $10-r=r+2$에서 $2r=8$

$\therefore r=4$

(i), (ii)에서 $r=4$

답 (1) $n=6$ (2) $r=2$ 또는 $r=6$ (3) $r=2$ (4) $r=4$

2-1 (1) 7명의 학생 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_7C_4=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=35$

(2) 남학생 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_3=\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}=10$

여학생 2명 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot2=20$

답 (1) 35 (2) 20

2-2 1부터 10까지의 자연수 중 홀수와 짝수는 각각 5개이므로 홀수 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$

짝수 3개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_3=\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot10=100$ 답 100

기본+표준 유형 Q+Q

104쪽

01 ${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}$이므로

$56=\frac{336}{r!}$, $r!=6=3\cdot2\cdot1$

$\therefore r=3$

또 ${}_nP_3=336=8\cdot7\cdot6$에서 $n=8$

$\therefore n-r=5$ 답 ④

Q BOX

양변에 6을 곱한다.

$8\cdot6\cdot5\cdot3\cdot2\cdot1$
$=2\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$

${}_{n-1}C_2$에서 $n-1\geq2$
$\therefore n\geq3$

$(n-r)(n-r-1)!=(n-r)!$,
$r(r-1)!=r!$

${}_7C_4={}_7C_3$이므로
${}_7C_3=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$
로 구할 수도 있다.

$336=2^4\cdot3\cdot7$
$=2^3\cdot2\cdot3\cdot7$
$=8\cdot7\cdot6$

02 ${}_{n+1}C_2-{}_{n-1}C_2=\frac{{}_{n+2}C_2}{3}$에서

$\frac{(n+1)n}{2\cdot1}-\frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot1}=\frac{(n+2)(n+1)}{3\cdot2\cdot1}$

$3n(n+1)-3(n-1)(n-2)=(n+2)(n+1)$

$12n-6=n^2+3n+2$

$n^2-9n+8=0$, $(n-1)(n-8)=0$

$\therefore n=8$ ($\because n\geq3$) 답 ③

03 ${}_nC_{n-r}=\frac{n!}{(n-r)!\{n-(\boxed{n-r})\}!}$

$=\frac{n!}{(n-r)!\boxed{r!}}={}_nC_r$

$\therefore$ (가) $n-r$ (나) $r!$ 답 (가) $n-r$ (나) $r!$

04 ${}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$

$=\frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!\{n-1-(r-1)\}!}$

$=\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$

$=\frac{(\boxed{n-r})(n-1)!}{r!(n-r)!}+\frac{\boxed{r}(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\frac{\{(n-r)+r\}(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\frac{\boxed{n!}}{r!(n-r)!}$

$={}_nC_r$

$\therefore$ (가) $n-r$ (나) r (다) $n!$ 답 풀이 참조

쌤 한마디

${}_nC_r$는 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 경우의 수이므로 r개 중에 특정한 1개가 포함되지 않는 경우와 특정한 1개가 포함되는 경우로 나누어 다음과 같이 증명할 수도 있다.

(i) r개 중에 특정한 1개가 포함되지 않는 경우
특정한 1개를 제외한 $(n-1)$개 중에서 r개를 택하면 되므로 그 경우의 수는 ${}_{n-1}C_r$

(ii) r개 중에 특정한 1개가 포함되는 경우
특정한 1개를 제외한 $(n-1)$개 중에서 $(r-1)$개를 택하면 되므로 그 경우의 수는 ${}_{n-1}C_{r-1}$

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 합의 법칙에 의하여

${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$

이 성립한다.

05 오래달리기에 지원한 학생 7명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_7C_3=35$

이어달리기에 지원한 학생 6명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_2=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$35\cdot15=525$ 답 525

06 빨간색 볼펜 6자루 중에서 3자루를 꺼내는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

검은색 볼펜 4자루 중에서 3자루를 꺼내는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

따라서 구하는 경우의 수는

$20+4=24$ 답 ②

07 구하는 경우의 수는 현영이와 혁수를 제외한 9명의 학생 중에서 2명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_9C_2=36$ 답 ①

08 구하는 경우의 수는 1, 3, 9, 5, 10, 15가 적힌 카드를 제외한 9장의 카드 중에서 3장을 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_9C_3=84$ 답 84

09 10명의 지원자 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_4=210$

여자 지원자만 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$210-15=195$ 답 ②

10 9명의 운동 선수 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_9C_3=84$

농구 선수만 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

야구 선수만 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$84-(4+10)=70$ 답 ②

11 토마토 5개 중에서 2개를 고르는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

당근 4개 중에서 2개를 고르는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

감자 3개 중에서 2개를 고르는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

6명의 학생에게 각각 하나씩 나누어 주는 경우의 수는

$6!$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot6\cdot3\cdot6!=180\cdot6!$ 답 ⑤

Q BOX

3자루의 볼펜이 모두 빨간색이거나 모두 검은색이어야 한다.

15 이하의 소수는
2, 3, 5, 7, 11, 13
의 6개이다.

9의 약수

5의 배수

일대일함수
➡ 함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$인 함수

(남자 지원자가 적어도 1명 포함되도록 뽑는 경우의 수)
=(모든 경우의 수)
−(여자 지원자만 4명을 뽑는 경우의 수)

모든 경우의 수에서 3명의 대표가 모두 농구 선수이거나 모두 야구 선수인 경우의 수를 뺀다.

주어진 두 직선이다.

원 위의 6개의 점은 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않다.

12 0, 5, 6, 9를 제외한 6개의 숫자 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

5개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 비밀번호의 개수는

$20\cdot120=2400$ 답 2400

13 주어진 조건을 만족시키려면 집합 Y의 6개의 원소 중에서 서로 다른 4개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 0, 1, 2, 3에 대응시키면 된다.

따라서 함수 f의 개수는 6개의 원소 중에서 4개를 뽑는 조합의 수와 같으므로

${}_6C_4={}_6C_2=15$ 답 15

14 일대일함수 f의 개수는 집합 Y의 6개의 원소 중에서 5개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$a={}_6P_5=720$

$f(5)<f(4)<f(3)<f(2)<f(1)$을 만족시키려면 집합 Y의 6개의 원소 중에서 서로 다른 5개를 택하여 큰 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2, 3, 4, 5에 대응시키면 된다.

따라서 $f(5)<f(4)<f(3)<f(2)<f(1)$인 함수 f의 개수는

$b={}_6C_5={}_6C_1=6$

$\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{720}{6}=120$ 답 120

15 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는 10개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_{10}C_2=45$ 답 ①

16 8개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_8C_2=28$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

이때 한 직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 직선은 1개뿐이고, 이러한 직선이 2개 있으므로 구하는 직선의 개수는

$28-2\cdot6+2=18$ 답 18

다른 풀이 두 직선 위에 있는 점을 각각 하나씩 택하여 만들 수 있는 직선의 개수는

${}_4C_1\cdot{}_4C_1=16$

또 한 직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 직선은 각각 1개씩이므로 구하는 직선의 개수는

$16+2=18$

17 구하는 삼각형의 개수는 6개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_6C_3=20$ 답 ③

18 가로 방향의 6개의 평행한 직선 중에서 2개, 세로 방향의 3개의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 만들어지므로 구하는 평행사변형의 개수는

$${}_6C_2 \cdot {}_3C_2 = {}_6C_2 \cdot {}_3C_1 = 15 \cdot 3 = 45$$ 답 ①

Q BOX

m개의 평행한 직선과 n개의 평행한 직선이 서로 만날 때, 이 직선으로 만들어지는 평행사변형의 개수
➡ ${}_mC_2 \cdot {}_nC_2$

중단원 마무리

107쪽

01 전략 바닥에 오는 면에 적힌 수의 곱이 2가 되는 경우의 수와 4가 되는 경우의 수를 각각 구한 후 합의 법칙을 이용한다.

풀이 정사면체 모양의 주사위를 세 번 던질 때, 바닥에 오는 면에 적힌 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 세 수의 곱이 2가 되는 경우는
(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)의 3가지

(ii) 세 수의 곱이 4가 되는 경우는
(1, 1, 4), (1, 4, 1), (4, 1, 1),
(1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)의 6가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$3+6=9$ 답 ③

02 전략 x에 1, 2를 대입한 부등식을 만족시키는 y의 값을 구한다.

x의 계수의 절댓값이 y의 계수의 절댓값보다 크므로 x의 값을 기준으로 경우를 나누어 생각한다.

풀이 (i) $x=1$일 때,
$4<3+y<8$, 즉 $1<y<5$이므로 순서쌍 (x, y)는
(1, 2), (1, 3), (1, 4)의 3개

(ii) $x=2$일 때,
$4<6+y<8$, 즉 $-2<y<2$이므로 순서쌍 (x, y)는 (2, 1)의 1개

$-2<y<2$의 범위에서 자연수인 y의 값은 1뿐이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는
$3+1=4$ 답 ④

다른 풀이 x, y가 자연수이므로 $4<3x+y<8$을 만족시키는 경우는
$3x+y=5$, $3x+y=6$, $3x+y=7$

(i) $3x+y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는
(1, 2)의 1개

(ii) $3x+y=6$일 때, 순서쌍 (x, y)는
(1, 3)의 1개

(iii) $3x+y=7$일 때, 순서쌍 (x, y)는
(1, 4), (2, 1)의 2개

이상에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는
$1+1+2=4$

03 전략 각 자리에 올 수 있는 숫자의 개수를 각각 구한 후 곱의 법칙을 이용한다.

풀이 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 5, 7의 4가지이고, 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 6, 7, 8, 9의 4가지이다.
또 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 0부터 9까지의 10가지이므로 구하는 자연수의 개수는
$4 \cdot 4 \cdot 10=160$ 답 ⑤

04 전략 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값이 될 수 있는 것의 개수를 각각 구한 후 곱의 법칙을 이용한다.

풀이 $x+f(x) \geq 4$에서

(i) $x=1$일 때,
$1+f(1) \geq 4$이므로 $f(1) \geq 3$
따라서 $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 3, 4의 2개이다.

(ii) $x=2$일 때,
$2+f(2) \geq 4$이므로 $f(2) \geq 2$
따라서 $f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 3, 4의 3개이다.

(iii) $x=3$일 때,
$3+f(3) \geq 4$이므로 $f(3) \geq 1$
따라서 $f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4개이다.

(iv) $x=4$일 때,
$4+f(4) \geq 4$이므로 $f(4) \geq 0$
따라서 $f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4개이다.

이상에서 구하는 함수 f의 개수는
$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4=96$ 답 96

05 전략 두 수의 공약수의 개수는 최대공약수의 약수의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 $252=2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $504=2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$이므로 두 수의 최대공약수는
$2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ ··· ❶

252와 504의 양의 공약수의 개수는 $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$의 양의 약수의 개수와 같으므로
$(2+1)(2+1)(1+1)=18$ ··· ❷

답 18

단계	채점 기준	비율
❶	252와 504의 최대공약수를 구할 수 있다.	40 %
❷	252와 504의 양의 공약수의 개수를 구할 수 있다.	60 %

06 전략 A 지역에서 출발하여 D 지역으로 갈 때 거쳐야 하는 지점을 기준으로 경우를 나누어 생각한다.

풀이 (i) A → D로 가는 경우의 수는 1이다.

(ii) A → B → D로 가는 경우의 수는
$2 \cdot 3=6$

(iii) A → C → D로 가는 경우의 수는
$2 \cdot 2=4$

(iv) A → B → C → D로 가는 경우의 수는
$2 \cdot 2 \cdot 2=8$

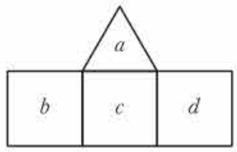
(v) A → C → B → D로 가는 경우의 수는
$2 \cdot 2 \cdot 3=12$

이상에서 구하는 경우의 수는

$1+6+4+8+12=31$ 답 31

07 전략 정삼각형에 적힌 수를 기준으로 경우를 나누어 생각한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 정삼각형에 적힌 수를 a, 정사각형에 적힌 수를 왼쪽부터 차례대로 b, c, d라 하자.



조건 (가), (나)에서 a보다 작은 수가 적어도 2개 존재해야 하므로 $a \geq 3$

(i) $a=3$일 때,

c는 1, 2 중 하나이고, 이 각각에 대하여 b, d는 1, 2 중 c가 아닌 수이면 된다.

> b, d는 c가 아닌 수이어야 하므로 b, d는 같은 수이다.

따라서 $a=3$인 경우의 수는

$2 \cdot 1 \cdot 1=2$

(ii) $a=4$일 때,

c는 1, 2, 3 중 하나이고, 이 각각에 대하여 b, d는 1, 2, 3 중 c가 아닌 수이면 된다.

따라서 $a=4$인 경우의 수는

$3 \cdot 2 \cdot 2=12$

(iii) $a=5$일 때,

c는 1, 2, 3, 4 중 하나이고, 이 각각에 대하여 b, d는 1, 2, 3, 4 중 c가 아닌 수이면 된다.

따라서 $a=5$인 경우의 수는

$4 \cdot 3 \cdot 3=36$

(iv) $a=6$일 때,

c는 1, 2, 3, 4, 5 중 하나이고, 이 각각에 대하여 b, d는 1, 2, 3, 4, 5 중 c가 아닌 수이면 된다.

따라서 $a=6$인 경우의 수는

$5 \cdot 4 \cdot 4=80$

이상에서 구하는 경우의 수는

$2+12+36+80=130$ 답 130

다른 풀이 조건 (가)에서 $a>b$, $a>c$, $a>d$이고, 조건 (나)에서 $b \neq c$, $c \neq d$이다.

> 조합을 이용하여 풀 수도 있다.

(i) $b \neq d$일 때,

a, b, c, d는 모두 다르므로 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 서로 다른 4개의 수를 택하는 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$

이 각각에 대하여 4개의 수 중에서 가장 큰 수를 a, 나머지 3개의 수를 b, c, d로 정하면 되므로 그 경우의 수는

$1 \cdot 3!=6$

따라서 $b \neq d$인 경우의 수는

$15 \cdot 6=90$

(ii) $b=d$일 때,

a, b, c, d 중 서로 다른 수는 3개이므로 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 서로 다른 3개의 수를 택하는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

이 각각에 대하여 3개의 수 중에서 가장 큰 수를 a, 나머지 2개의 수를 $b(=d)$, c로 정하면 되므로 그 경우의 수는

$1 \cdot 2!=2$

따라서 $b=d$인 경우의 수는

$20 \cdot 2=40$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$90+40=130$

08 전략 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각하여 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한 후 이웃하는 것끼리 자리를 바꾸는 경우의 수와 곱한다.

풀이 자음 t, l, n을 한 묶음으로 생각하여 5개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

자음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$120 \cdot 6=720$ 답 ④

09 전략 이웃해도 상관없는 홀수가 적혀 있는 카드를 일렬로 나열한 후 그 사이사이와 양 끝에 짝수가 적혀 있는 카드를 나열하는 경우의 수를 구한다.

풀이 홀수 1, 3, 5가 적혀 있는 3장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

홀수가 적혀 있는 카드 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 짝수 2, 4가 적혀 있는 2장의 카드를 나열하는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$6 \cdot 12=72$ 답 ⑤

10 전략 먼저 A, B가 좌석에 앉는 경우의 수를 구한다.

풀이 A, B가 앉을 좌석의 줄을 택하는 경우의 수는

2

한 줄에 놓인 3개의 좌석 중에서 2개의 좌석을 택하여 A, B가 앉는 경우의 수는

${}_3P_2=6$

나머지 세 명이 맞은편 줄의 3개의 좌석에 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2 \cdot 6 \cdot 6=72$ 답 ⑤

11 전략 N과 G 사이에 2개의 모음을 넣어 한 묶음으로 만드는 경우의 수를 구한 후 이 묶음과 나머지를 나열하는 경우의 수를 곱한다.

> 모음은 O, A, E이고 자음은 R, N, G이다.

풀이 N과 G 사이에 2개의 모음이 오도록 묶음을 만드는 경우의 수는

$2! \cdot {}_3P_2=12$

> N과 G가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수

> 모음 3개 중 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수

이 묶음과 나머지 2개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\cdot6=72$ 답 72

12 전략 첫째 날과 둘째 날에 공연을 하는 팀의 수를 기준으로 경우를 나누어 생각한다.

풀이 매일 두 팀 이상이 공연해야 하므로 첫째 날에는 두 팀 또는 세 팀이 공연을 해야 한다.

(i) 첫째 날에 두 팀, 둘째 날에 세 팀이 공연을 하는 경우

첫째 날에 공연하는 두 팀을 택하여 공연 순서를 정하는 경우의 수는

${}_5P_2=20$

둘째 날에 공연하는 세 팀이 공연 순서를 정하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 이 경우의 수는

$20\cdot6=120$

(ii) 첫째 날에 세 팀, 둘째 날에 두 팀이 공연을 하는 경우

첫째 날에 공연하는 세 팀을 택하여 공연 순서를 정하는 경우의 수는

${}_5P_3=60$

둘째 날에 공연하는 두 팀이 공연 순서를 정하는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 이 경우의 수는

$60\cdot2=120$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$120+120=240$ 답 ③

다른 풀이 구하는 경우의 수는 첫째 날과 둘째 날에 각각 공연하는 팀의 수를 정한 후 다섯 팀의 공연 순서를 정하는 경우의 수와 같다.

이때 첫째 날에 두 팀, 둘째 날에 세 팀이 공연하거나 첫째 날에 세 팀, 둘째 날에 두 팀이 공연할 수 있고, 다섯 팀의 공연 순서를 정하는 경우의 수는 $5!=120$이므로 구하는 경우의 수는

$2\cdot120=240$

13 전략 모든 경우의 수에서 A, B, C 중 한 사람도 한쪽 끝에 오지 않도록 세우는 경우의 수를 뺀다.

풀이 6명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$6!=720$ ··· ❶

A, B, C 중 한 사람도 한쪽 끝에 오지 않도록 세우는 경우의 수는 A, B, C를 제외한 세 명 중에서 두 명을 양쪽 끝에 세우고 나머지를 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로

${}_3P_2\cdot4!=144$ ··· ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$720-144=576$ ··· ❸

답 576

단계	채점 기준	비율
❶	6명을 일렬로 세우는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷	A, B, C 중 한 사람도 한쪽 끝에 오지 않도록 세우는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %
❸	A, B, C 중 적어도 한 사람이 한쪽 끝에 오도록 세우는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

14 전략 240보다 크고 430보다 작은 자연수의 꼴을 나누어 각각의 자연수의 개수를 구한다.

풀이 240보다 크고 430보다 작은 자연수는

241, 243, 3□□ 꼴, 40□ 꼴, 41□ 꼴, 42□ 꼴

이다.

3□□ 꼴인 자연수의 개수는

${}_4P_2=12$

40□ 꼴, 41□ 꼴, 42□ 꼴인 자연수의 개수는 각각 3개씩이다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

$2+12+3\cdot3=23$ 답 23

15 전략 ${}_nC_r=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$임을 이용한다.

풀이 ${}_{10-n}C_2=15$에서

$\dfrac{(10-n)(9-n)}{2\cdot1}=15,\qquad (10-n)(9-n)=30$

$n^2-19n+60=0,\qquad (n-4)(n-15)=0$

$\therefore n=4$ ($\because$ $2\le n\le8$)

${}_{10-n}C_2$에서 $10-n\ge2$ $\therefore n\le8$
${}_nC_2$에서 $n\ge2$ $\therefore 2\le n\le8$

$\therefore {}_nC_2+n\cdot{}_nP_2={}_4C_2+4\cdot{}_4P_2$

$=6+4\cdot12=54$ 답 ⑤

16 전략 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수를 구한 후 이 중에서 두 개의 집합을 택하는 경우의 수를 구한다.

풀이 주어진 집합의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수는

${}_5C_2=10$

10개의 부분집합 중에서 서로 다른 두 개를 택하는 경우의 수는

${}_{10}C_2=45$ 답 45

17 전략 4 이하의 자연수가 적힌 공 중에서 꺼내는 경우의 수와 4 초과의 자연수가 적힌 공 중에서 꺼내는 경우의 수를 구하여 곱한다.

풀이 4 이하의 자연수가 적힌 공이 한 개만 포함되도록 꺼내는 경우의 수는 1, 2, 3, 4가 적힌 공 중에서 1개를 뽑고, 나머지 숫자가 적힌 공 중에서 3개를 뽑는 경우의 수와 같다.

5, 6, 7, 8, 9의 5개

따라서 구하는 경우의 수는

${}_4C_1\cdot{}_5C_3={}_4C_1\cdot{}_5C_2=4\cdot10=40$ 답 ②

18 전략 모든 경우의 수에서 A 회사의 제품이 하나도 포함되지 않거나 1개 포함되는 경우의 수를 뺀다.

풀이 10가지 종류의 제품 중에서 4개를 택하는 경우의 수는 $_{10}C_4=210$

(i) A 회사의 제품이 하나도 포함되지 않는 경우

B 회사와 C 회사의 제품 중에서 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$$_7C_4={_7C_3}=35$$

(ii) A 회사의 제품이 1개 포함되는 경우

A 회사의 제품 중에서 1개를 택하고 B 회사와 C 회사의 제품 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$$_3C_1\cdot{_7C_3}=3\cdot35=105$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$210-(35+105)=70$$

답 70

19 전략 부모를 포함하여 4명을 뽑는 경우의 수와 일렬로 세우는 경우의 수를 각각 구하여 곱한다.

풀이 부모를 제외한 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 $_5C_2=10$

뽑은 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$4!=24$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$10\cdot24=240$$

답 ②

20 전략 $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$의 값을 정하는 경우의 수와 $f(a)$, $f(e)$의 값을 정하는 경우의 수를 각각 구하여 곱한다.

풀이 $f(b)<f(c)<f(d)$를 만족시키려면 집합 Y의 원소 중에서 서로 다른 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 b, c, d에 대응시키면 된다.

즉 $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$의 값을 정하는 경우의 수는

$$_5C_3={_5C_2}=10 \quad \cdots ❶$$

한편 정의역의 원소 a, e에 대응하는 집합 Y의 원소를 택하는 경우의 수는 각각

$$_5C_1=5 \quad \cdots ❷$$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$$10\cdot5\cdot5=250 \quad \cdots ❸$$

답 250

단계	채점 기준	비율
❶	$f(b)$, $f(c)$, $f(d)$의 값을 정하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷	$f(a)$, $f(e)$의 값을 정하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸	조건을 만족시키는 함수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

21 전략 한 직선 위에 있지 않은 n개의 점으로 만들 수 있는 직선의 개수는 $_nC_2$임을 이용한다.

풀이 10개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$$_{10}C_2=45$$

한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$$_3C_2={_3C_1}=3$$

또 한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$$_4C_2=6$$

이때 한 직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 직선은 1개뿐이고, 이러한 직선이 3개 있으므로 구하는 직선의 개수는

$$45-3\cdot2-6+3=36$$

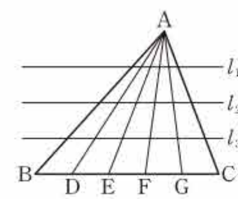
답 ③

Q BOX

주어진 직각삼각형의 각 변을 연장한 직선이다.

22 전략 삼각형을 만들기 위해 필요한 직선을 택하는 경우의 수를 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 6개의 직선 AB, AD, AE, AF, AG, AC 중 서로 다른 2개의 직선을 택하고, 4개의 직선 l_1, l_2, l_3, BC 중 1개의 직선을 택하면 삼각형이 1개 만들어진다.



따라서 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$$_6C_2\cdot{_4C_1}=15\cdot4=60$$

답 ④

Work Book

I. 집합과 명제

01 집합의 뜻과 표현

01 집합과 원소

Ⓦ 2쪽

01 답 (1) × (2) ○ (3) ○ (4) ×

02 답 (1) $\in$ (2) $\notin$ (3) $\in$ (4) $\notin$

03 답 (1) $\{y, e, l, o, w\}$
(2) $\{2, 3, 5, 7\}$
(3) $\{x \mid x$는 4의 양의 배수$\}$
(4) $\{x \mid x$는 $-5 \le x \le 0$인 정수$\}$

같은 원소는 중복하여 나열하지 않으므로 l은 한 번만 나열한다.

04 (3) 1 미만의 자연수는 존재하지 않는다.
따라서 주어진 집합은 공집합이므로 유한집합이다.
답 (1) 무 (2) 유 (3) 유 (4) 무

05 (1) 20의 양의 약수는 1, 2, 4, 5, 10, 20의 6개이므로
$n(A)=6$
(2) $x^2-3x+2=0$에서 $(x-1)(x-2)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=2$
따라서 집합 A의 원소는 1, 2의 2개이므로
$n(A)=2$
답 (1) 6 (2) 2

06 ⑤ '큰'이라는 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
답 ⑤

쌤 한마디

④에서 '높은'과 달리 '가장 높은'은 조건이 명확하여 대상을 분명히 정할 수 있으므로 집합이다.

07 ㄱ, ㄴ. '빠른', '재미있는'이라는 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
이상에서 집합인 것은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ㄷ, ㄹ

08 집합 A의 원소는 1, 3, 5, 7이다.
⑤ $7 \in A$ 답 ⑤

09 ㄱ. 0은 정수이므로 $0 \in Z$
ㄴ. $\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$은 유리수이므로 $\frac{1}{\sqrt{4}} \in Q$
ㄷ. $0.\dot{5}=\frac{5}{9}$는 유리수이므로 $0.\dot{5} \in Q$
ㄹ. $\sqrt{3}$은 실수이므로 $\sqrt{3} \in R$
ㅁ. $1-i$는 허수이므로 $1-i \notin R$
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ이다. 답 ④

근호를 사용하여 나타낸 수 중 근호를 없앨 수 있는 수는 유리수이다.

a가 한 자리 자연수일 때, $0.\dot{a}=\frac{a}{9}$

Ⓦ 2~4쪽

10 $x^3+x^2-2x=0$에서
$x(x^2+x-2)=0$, $x(x+2)(x-1)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
따라서 집합 A의 원소는 -2, 0, 1이다.
④ $1 \in A$ 답 ④

11 ㄱ. $A=\{1, 2, 3, 6\}$
ㄹ. $A=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$
이상에서 집합 A를 조건제시법으로 나타낸 것으로 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

12 ①, ②, ③, ⑤ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
④ $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$, $\cdots$에서
3^n의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1이 이 순서대로 반복되므로
$\{1, 3, 7, 9\}$ 답 ④

13 □보다 작은 6의 양의 배수가 6, 12, 18, 24, 30이므로 □ 안에 들어갈 수 있는 자연수는 31, 32, 33, 34, 35, 36의 6개이다. 답 6

□=36일 때, 36보다 작은 6의 양의 배수를 원소나열법으로 나타내면 $\{6, 12, 18, 24, 30\}$

14 ㄱ. $\{1, 5\}$ ➡ 유한집합
ㄴ. $\{6, 12, 18, \cdots\}$ ➡ 무한집합
ㄷ. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ➡ 유한집합
ㄹ. 무한집합
ㅁ. $\{x \mid x$는 모든 실수$\}$ ➡ 무한집합
이상에서 무한집합인 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ의 3개이다.
답 ③

10과 15의 양의 공약수는 5의 양의 약수와 같다.

모든 실수 x에 대하여 $x^2 \ge 0$이므로 $x^2+1>0$

15 공집합은 원소가 하나도 없는 집합이므로
$A=\{x \mid x$는 $x<k$인 4의 양의 배수$\}$의 원소가 하나도 없도록 하는 k의 값은 4 이하의 자연수, 즉 1, 2, 3, 4이다.
따라서 구하는 합은
$1+2+3+4=10$ 답 10

$k=5$일 때, $A=\{4\} \neq \varnothing$

16 ① $A=\{2\}$이므로 $n(A)=1$
② $B=\{1, 7, 49\}$이므로 $n(B)=3$
③ $C=\{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56\}$이므로
$n(C)=7$
④ $D=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$이므로
$n(D)=9$
⑤ $E=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$이므로
$n(E)=6$ 답 ④

17 $90=2\cdot3^2\cdot5$, $150=2\cdot3\cdot5^2$이므로 90과 150의 최대공약수는 $2\cdot3\cdot5=30$이다.
90과 150의 양의 공약수는 30의 양의 약수와 같으므로
$A=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
$\therefore n(A)=8$

$B=\{3, 4, 5, \cdots, k\}$이므로

$n(B)=k-2$

이때 $n(A)=n(B)$이므로

$k-2=8 \qquad \therefore k=10$ 답 10

18 이차방정식 $x^2+4x-6=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=2^2-(-6)=10>0$

이므로 이차방정식 $x^2+4x-6=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$\therefore n(A)=2$

이때 $n(A)+n(B)=2$이려면 $n(B)=0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2-2kx+5k=0$은 실근을 갖지 않아야 한다.

이차방정식 $x^2-2kx+5k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-k)^2-5k<0$

$k(k-5)<0 \qquad \therefore 0<k<5$

따라서 정수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다. 답 4

쌤 한마디

이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $D=b^2-4ac$라 할 때

① $D>0$이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

② $D=0$이면 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.

③ $D<0$이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

19 집합 A의 원소 x, 집합 B의 원소 y에 대하여 (x, y)를 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	g	o
c	(c, g)	(c, o)
o	(o, g)	(o, o)
m	(m, g)	(m, o)
e	(e, g)	(e, o)

$X=\{$(c, g), (c, o), (o, g), (o, o), (m, g), (m, o), (e, g), (e, o)$\}$

$\therefore n(X)=8$ 답 ③

20 집합 A의 두 원소 x, y에 대하여 2^x+3^y의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	1	2	3
1	5	11	29
2	7	13	31
3	11	17	35

$X=\{5, 7, 11, 13, 17, 29, 31, 35\}$

따라서 집합 X의 원소의 개수는 8이다. 답 8

21 집합 A의 원소 a, 집합 B의 원소 b에 대하여 a가 b의 약수일 때, $a+b$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

a \ b	6	8
1	7	9
2	8	10
3	9	
4		12

$X=\{7, 8, 9, 10, 12\}$

Q BOX

$a<b$인 정수 a, b에 대하여

① $a<x<b$인 정수 x의 개수 ➡ $b-a-1$

② $a\le x<b$ 또는 $a<x\le b$인 정수 x의 개수 ➡ $b-a$

③ $a\le x\le b$인 정수 x의 개수 ➡ $b-a+1$

2와 3의 양의 공배수는 6의 양의 배수와 같다.

공집합은 모든 집합의 부분집합이다.

11을 중복하여 쓰지 않도록 주의한다.

따라서 집합 X의 모든 원소의 합은

$7+8+9+10+12=46$ 답 46

02 부분집합 W 5쪽

01 (1) $A=\{1, 7\}$, $B=\{1, 2, 7, 14\}$이므로

$A\subset B$

(2) $A=\{3, 6, 9, 12, \cdots\}$, $B=\{6, 12, 18, \cdots\}$이므로

$B\subset A$

(3) $x^2-9=0$에서 $\qquad (x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=3$

따라서

$A=\{-3, 3\}$,

$B=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

이므로 $\quad A\subset B$

답 (1) $A\subset B$ (2) $B\subset A$ (3) $A\subset B$

02 (1) $\varnothing$, $\{x\}$, $\{y\}$, $\{x, y\}$

(2) 주어진 집합을 원소나열법으로 나타내면

$\{1, 5, 25\}$

이므로 구하는 부분집합은

$\varnothing$, $\{1\}$, $\{5\}$, $\{25\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 25\}$, $\{5, 25\}$, $\{1, 5, 25\}$

답 풀이 참조

03 (2) $x^2-2x+1=0$에서 $\qquad (x-1)^2=0$

$\therefore x=1$

따라서 $B=\{1\}$이므로 $\quad A=B$

(3) $B=\{5, 10, 15, \cdots\}$이므로 $\quad A\ne B$

답 (1) $A=B$ (2) $A=B$ (3) $A\ne B$

04 (1) $2^4=16$ (2) $2^4-1=15$

(3) $2^{4-2}=2^2=4$ (4) $2^{4-1}=2^3=8$

답 (1) 16 (2) 15 (3) 4 (4) 8

05 주어진 벤다이어그램에서 $\quad B\subset A$

①, ⑤ $A\subset B$

② $A=\{1, 3, 5, 15\}$, $B=\{1, 3, 5, \cdots, 19\}$이므로

$A\subset B$

③ 모든 자연수는 유리수이므로 $\quad A\subset B$

④ $x^2-16=0$에서 $\qquad (x+4)(x-4)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=4$

따라서 $B=\{-4, 4\}$이므로 $\quad B\subset A$

답 ④

06 모든 정사각형은 직사각형이고, 모든 직사각형은 평행사변형이므로

$X\subset Y\subset Z$ 답 ①

07 $x^3-3x^2+2x=0$에서 $x(x^2-3x+2)=0$

$x(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

$\therefore A=\{0, 1, 2\}$

$-1\le 3x+2\le 8$에서 $-3\le 3x\le 6$

$\therefore -1\le x\le 2$

$\therefore B=\{x\,|\,-1\le x\le 2\}$

$x^2-2x\le 0$에서 $x(x-2)\le 0$

$\therefore 0\le x\le 2$

$\therefore C=\{x\,|\,0\le x\le 2\}$

따라서 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계는

$A\subset C\subset B$ 답 ②

08 집합 A의 두 원소 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \\ y	-1	0	1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2

$B=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

또 집합 A의 두 원소 x, y에 대하여 $|xy|$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \\ y	-1	0	1
-1	1	0	1
0	0	0	0
1	1	0	1

$C=\{0, 1\}$

$\therefore C\subset A\subset B$ 답 ④

09 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

④ $\{1, 2, 3\}\subset A$

모든 집합은 자기 자신의 부분집합이다.

답 ④

10 ㄷ. $2\in A$ 또는 $\{2\}\subset A$

ㅁ. $\{2, 4\}\subset A$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ③

쌤 한마디

$\varnothing$은 집합 $A=\{\varnothing, 2, 4\}$에서 집합 A의 원소를 나타내기도 하고, 집합 A의 부분집합인 공집합을 나타내기도 한다.

즉 $\varnothing\in A$이면서 $\varnothing\subset A$이다.

11 ④ $\{2\}\in\{1, 3, \{2\}\}$

답 ④

12 $A=\{-2, 2\}$

$x^2=4$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

이때 $A\subset B\subset C$이면 $A\subset B$이고 $B\subset C$이다.

$A\subset B$가 성립하려면 $-2\in B$ $\therefore a=-2$

따라서 $B=\{-2, 2, 4\}$이므로 $B\subset C$가 성립하려면

$4\in C$ $\therefore b=4$

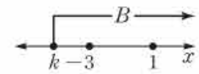
$\therefore a+b=2$ 답 2

13 $x^2+2x-3=0$에서 $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

$\therefore A=\{-3, 1\}$

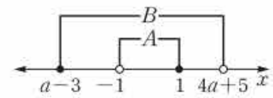
$A\subset B$이려면 오른쪽 수직선에서



$k\le -3$

따라서 정수 k의 최댓값은 -3이다. 답 -3

14 $A\subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a-3\le -1$, $1<4a+5$

$a-3\le -1$에서 $a\le 2$

$1<4a+5$에서 $4a>-4$ $\therefore a>-1$

따라서 $-1<a\le 2$이므로 정수 a는 0, 1, 2의 3개이다.

답 ③

15 $A\subset B$가 성립하려면 $1\in B$이어야 하므로

집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속한다.

$2a-1=1$ 또는 $a^2-8=1$

$2a-1=1$에서 $2a=2$ $\therefore a=1$

$a^2-8=1$에서 $a^2-9=0$

$(a+3)(a-3)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=3$

(i) $a=1$일 때,

$A=\{1, 3\}$, $B=\{-7, 0, 1\}$이므로

$A\not\subset B$

(ii) $a=-3$일 때,

$A=\{-1, 1\}$, $B=\{-7, 0, 1\}$이므로

$A\not\subset B$

(iii) $a=3$일 때,

$A=\{1, 5\}$, $B=\{0, 1, 5\}$이므로

$A\subset B$

이상에서 $a=3$ 답 3

16 $A=\{-1, 0, 1\}$이므로 A의 부분집합은

$\varnothing$, $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{-1, 0\}$,

$\{-1, 1\}$, $\{0, 1\}$, $\{-1, 0, 1\}$ 답 풀이 참조

17 n은 2, 3, 5, 7이므로 $A=\{3, 5, 9, 13\}$

집합 X는 A의 부분집합 중에서 원소가 3개인 집합이므로

$\{3, 5, 9\}$, $\{3, 5, 13\}$, $\{3, 9, 13\}$, $\{5, 9, 13\}$

의 4개이다. 답 ②

18 집합 A의 부분집합 중에서 원소의 합이 12 이상이 되려면 원소가 2개 이상이어야 한다.

(i) 원소가 2개인 경우

$\{4, 8\}$, $\{5, 8\}$의 2개

$4+8=12$, $5+8=13$

(ii) 원소가 3개인 경우

$\{2, 4, 8\}$, $\{2, 5, 8\}$, $\{4, 5, 8\}$의 3개

$2+4+8=14$, $2+5+8=15$, $4+5+8=17$

(iii) 원소가 4개인 경우

$\{2, 4, 5, 8\}$의 1개

$2+4+5+8=19$

이상에서 구하는 집합의 개수는

$2+3+1=6$ 답 6

19 ② $A=\varnothing$, $B=\{2\}$이므로 $A\neq B$

③ $A=\{0\}$, $B=\varnothing$이므로 $A\neq B$

④ $A=\{2, 4\}$, $B=\{1, 2, 4\}$이므로 $A\neq B$

⑤ $A=\{5, 10, 15, \cdots, 50\}$, $B=\{5, 10, 15, \cdots, 50\}$ 이므로

$A=B$

답 ⑤

짝수인 소수는 2뿐이다.

집합 A와 집합 B의 모든 원소가 같다.

20 $A=B$이므로

$x-2=x-2y$, $y+6=3x+y$

또는 $x-2=3x+y$, $y+6=x-2y$

(i) $x-2=x-2y$, $y+6=3x+y$일 때,

$x-2=x-2y$에서 $-2=-2y$

$\therefore y=1$

$y=1$을 $y+6=3x+y$에 대입하면

$7=3x+1$, $3x=6$

$\therefore x=2$

(ii) $x-2=3x+y$, $y+6=x-2y$일 때,

$x-2=3x+y$에서 $2x+y=-2$ …… ㉠

$y+6=x-2y$에서 $x-3y=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=0$, $y=-2$

(i), (ii)에서 $x=2$, $y=1$ ($\because x>0$, $y>0$)

$\therefore xy=2$ 답 ①

21 $A\subset B$이고 $B\subset A$이므로 $A=B$

즉 $1-i\in A$, $c\in A$이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $1-i$, c이다.

계수가 실수인 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1-i$이면 다른 한 근은 $1+i$이므로

$c=1+i$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-i)+(1+i)=-a$ $\therefore a=-2$

$(1-i)(1+i)=b$ $\therefore b=2$

$\therefore a+b+c=1+i$ 답 $1+i$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$,

$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

쌤 한마디

이차방정식의 켤레근

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 a, b, c가 실수일 때, $p+qi$가 근이면 $p-qi$도 근이다. (단, p, q는 실수, $q\neq 0$, $i=\sqrt{-1}$)

22 $n(A)=a$, $n(B)=b$라 하면

$2^a=32$, $2^b-1=511$

$2^a=32=2^5$에서 $a=5$

$2^b=512=2^9$에서 $b=9$

$\therefore n(A)+n(B)=14$ 답 14

23 $x^3-3x^2-x+3=0$에서

$x^2(x-3)-(x-3)=0$, $(x^2-1)(x-3)=0$

$(x+1)(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

$\therefore A=\{-1, 1, 3\}$

따라서 $n(A)=3$이므로 집합 A의 진부분집합의 개수는 $2^3-1=7$ 답 ④

24 $P(A)$는 집합 A의 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합이므로 $P(A)$의 원소의 개수는

$2^3=8$

따라서 $P(A)$의 부분집합의 개수는

$2^8=256$ 답 ⑤

25 집합 A의 원소의 개수를 a라 하면 A의 진부분집합의 개수가 15이므로

$2^a-1=15$, $2^a=16=2^4$

$\therefore a=4$

즉 $A=\{2, 3, 5, 7\}$이어야 하므로

$7\leq k\leq 10$

따라서 자연수 k는 7, 8, 9, 10이므로 구하는 합은

$7+8+9+10=34$ 답 34

26 집합 A의 원소 중에서 모음은 a, e이므로 이를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$ 답 ③

27 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

집합 A의 부분집합 중에서 1, 2를 반드시 원소로 갖고, 3, 4를 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$2^{9-2-2}=2^5=32$ 답 32

28 $A=\{1, 2, 3, \cdots, k\}$에서 $n(A)=k$

집합 A의 부분집합 중에서 1, 2, 3을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수가 64이므로

$2^{k-3}=64=2^6$, $k-3=6$

$\therefore k=9$ 답 ⑤

29 $|x-2|<4$에서 $-4<x-2<4$

$\therefore -2<x<6$

$\therefore A=\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

이때 가장 작은 원소가 1인 집합은 1을 반드시 원소로 갖고, -1, 0을 원소로 갖지 않아야 한다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$2^{7-1-2}=2^4=16$ 답 16

30 집합 X는 집합 $\{0, 2, 4, 6\}$의 부분집합 중에서 0, 2를 반드시 원소로 갖는 집합과 같다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{4-2}=2^2=4$ 답 ②

31 $A=\{a, c, e\}$, $B=\{a, b, c, d, e, f\}$
이때 집합 X는 B의 부분집합 중에서 a, c, e를 반드시 원소로 갖는 집합과 같다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^{6-3}=2^3=8$ 답 8

32 $x^2-8x+12=0$에서 $(x-2)(x-6)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=6$
$\therefore A=\{2, 6\}$
$B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54\}$이므로 집합 X는 B의 부분집합 중에서 2, 6을 반드시 원소로 갖는 집합과 같다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^{8-2}=2^6=64$ 답 64

33 $A=\{3, 6, 9\}$, $B=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$
집합 X는 B의 부분집합 중에서 3, 6, 9를 반드시 원소로 갖는 집합에서 A, B를 제외한 것과 같다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^{9-3}-2=2^6-2=62$ 답 ③

34 $A=\{\mathrm{d, r, a, g, o, n}\}$의 부분집합 중에서 a 또는 o를 원소로 갖는 집합은 $\{\mathrm{d, r, a, g, o, n}\}$의 부분집합 중에서 집합 $\{\mathrm{d, r, g, n}\}$의 부분집합을 제외한 것과 같다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$2^6-2^4=48$ 답 48

다른 풀이 a 또는 o를 원소로 갖는 집합은 집합 $\{\mathrm{d, r, g, n}\}$의 부분집합에 a만 추가하거나 o만 추가하거나 a, o를 모두 추가하면 된다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$2^4\cdot 3=48$

35 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 소수를 원소로 갖는 집합은 $\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$의 부분집합 중에서 집합 $\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$의 부분집합을 제외한 것과 같다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$2^{10}-2^6=960$ 답 ④

36 $A=\{3, 6, 9, 12, 15\}$
집합 A의 진부분집합 중에서 짝수를 1개 이상 포함하는 집합은 $\{3, 6, 9, 12, 15\}$의 진부분집합 중에서 집합 $\{3, 9, 15\}$의 부분집합을 제외한 것과 같다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$(2^5-1)-2^3=23$ 답 23

Q BOX

공집합은 모든 집합과 서로소이다.

결합법칙 이용

$X\neq A$, $X\neq B$

분배법칙 이용

10 이하의 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7이다.

집합 A는 6의 양의 배수의 집합이고 집합 B는 8의 양의 배수의 집합이므로 $A\cap B$는 6과 8의 최소공배수인 24의 양의 배수의 집합이다.

02 집합의 연산

03 집합의 연산 Ⓦ 10쪽

01 (1) $B=\{1, 2, 3, 6\}$이므로
$A\cup B=\{1, 2, 3, 6, 8\}$, $A\cap B=\{2, 3\}$
(2) $A=\{2, 3, 4, 5\}$, $B=\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이므로
$A\cup B=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,
$A\cap B=\{3, 4, 5\}$
답 풀이 참조

02 (1) $A\cap B=\varnothing$이므로 두 집합 A, B는 서로소이다.
(2) $B=\{2, 3, 5, 7\}$이므로
$A\cap B=\{2\}$
따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.
답 (1) 서로소이다. (2) 서로소가 아니다.

03 $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
$=\{0, 1, 5, 7\}\cap\{1, 3, 5, 7, 9\}$
$=\{1, 5, 7\}$ 답 $\{1, 5, 7\}$

04 $(A\cap B)\cup(A\cap C)=A\cap(B\cup C)$
$=\{a, d, e\}\cap\{b, c, d\}$
$=\{d\}$ 답 $\{d\}$

05 (1) $U=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$, $A=\{3, 5, 8\}$이므로
$A^C=\{1, 2, 4, 6, 7\}$
(2) $U=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$, $B=\{4, 8\}$이므로
$B^C=\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$
답 (1) $\{1, 2, 4, 6, 7\}$ (2) $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$

06 (1) $A-B=\{a, b, d\}$, $B-A=\varnothing$
(2) $A=\{1, 2, 7, 14\}$, $B=\{1, 3, 7, 21\}$이므로
$A-B=\{2, 14\}$, $B-A=\{3, 21\}$
답 풀이 참조

07 $A=\{-2, 2\}$, $B=\{-1, 0, 1, 2\}$
주어진 벤다이어그램에서 색칠한 부분이 나타내는 집합은 $A\cup B$이므로
$A\cup B=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 답 ⑤

08 $A\cap B=\{24, 48, 72, \cdots\}$
$=\{x\,|\,x$는 24의 양의 배수$\}$
$\therefore n=24$ 답 24

09 $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C=\{1, 3, 9\}$
⑤ $B\cap C=\{1, 3, 9\}$이므로
$A\cup(B\cap C)=\{1, 2, 3, 5, 8, 9\}$
답 ⑤

10 집합 A는 3, 5를 반드시 원소로 갖고, 4, 7, 9를 원소로 갖지 않아야 한다.
따라서 집합 A가 될 수 있는 것은 ②이다. 답 ②

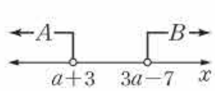
11 ③ $\{x|x(x-3)=0\}=\{0, 3\}$이므로
$\{2, 6, 7\}\cap\{0, 3\}=\varnothing$
따라서 집합 $\{2, 6, 7\}$과 서로소이다.
④ $\{x|x$는 7의 양의 배수$\}=\{7, 14, 21, \cdots\}$이므로
$\{2, 6, 7\}\cap\{7, 14, 21, \cdots\}=\{7\}$
따라서 집합 $\{2, 6, 7\}$과 서로소가 아니다.
⑤ $\{x|x$는 15의 양의 약수$\}=\{1, 3, 5, 15\}$이므로
$\{2, 6, 7\}\cap\{1, 3, 5, 15\}=\varnothing$
따라서 집합 $\{2, 6, 7\}$과 서로소이다.
답 ④

12 ㄱ. $x^2-2x-8=0$에서 $(x+2)(x-4)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$
따라서 $B=\{-2, 4\}$이므로
$A\cap B=\varnothing$
ㄴ. $A=\{2, 3, 5, 7, \cdots\}$, $B=\{4, 8, 12, 16, \cdots\}$이므로
$A\cap B=\varnothing$
ㄷ. $A=\{1, 2, 3, \cdots\}$,
$B=\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$이므로
$A\cap B=\{1, 2, 3, \cdots\}$
ㄹ. $A=\{1, 2, 5, 10\}$, $B=\{5, 10, 15, 20, \cdots\}$이므로
$A\cap B=\{5, 10\}$
이상에서 두 집합 A, B가 서로소인 것은 ㄱ, ㄴ이다.
답 ㄱ, ㄴ

자연수 전체의 집합

13 집합 A의 부분집합 중에서 집합 B와 서로소인 집합은 $\{a, b, c, d, e, f\}$의 부분집합 중에서 c, e를 원소로 갖지 않는 집합과 같다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$2^{6-2}=2^4=16$ 답 ③

14 두 집합 A, B가 서로소, 즉 $A\cap B=\varnothing$이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$a+3\le 3a-7$, $2a\ge 10$
$\therefore a\ge 5$
따라서 실수 a의 최솟값은 5이다. 답 5

15 $U=\{2, 4, 6, \cdots, 18\}$,
$A\cup B=\{2, 4, 6, 8, 10, 16\}$이므로
$(A\cup B)^C=\{12, 14, 18\}$ 답 $\{12, 14, 18\}$

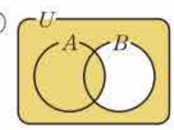
전체집합 U에서 집합 $A\cup B$의 원소를 제외한 집합

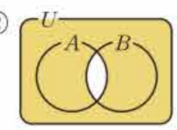
16 $A-B=\{a, c\}$이므로
$C-(A-B)=\{e, f\}$ 답 ⑤

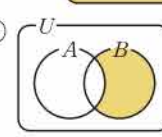
17 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$, $A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{1, 2, 4, 8\}$이므로
$B-A=\{1, 4, 8\}$
$\therefore (B-A)^C=\{2, 3, 5, 6, 7\}$
따라서 집합 $(B-A)^C$의 원소가 아닌 것은 ③이다.
답 ③

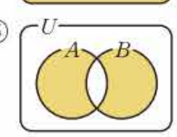
18 $A=\{3, 5, 7, 9\}$, $B=\{1, 5, 9\}$이므로
$A\cup B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A\cap B=\{5, 9\}$
$\therefore (A\cup B)-(A\cap B)=\{1, 3, 7\}$
따라서 구하는 원소의 합은
$1+3+7=11$ 답 11

각 집합을 벤다이어그램으로 나타낸 후 주어진 벤다이어그램과 비교한다.

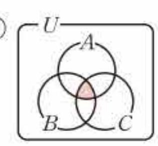
19 ①


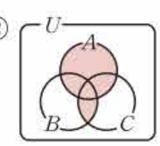
②


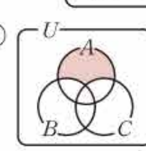
③


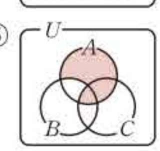
⑤


답 ④

20 ①


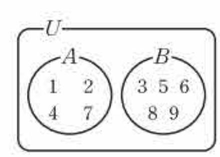
②


④


⑤


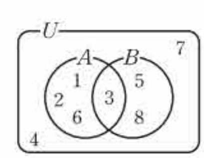
답 ③

21 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



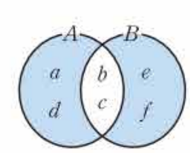
$A=\{1, 2, 4, 7\}$
답 ⑤

22 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$B=\{3, 5, 8\}$
답 $\{3, 5, 8\}$

23 집합 $(A-B)\cup(B-A)$는 오른쪽 벤다이어그램에서 색칠한 부분과 같고 $A=\{a, b, c, d\}$이므로

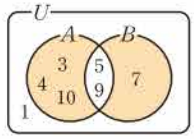


$A-B=\{a, d\}$, $B-A=\{e, f\}$

$\therefore A\cap B=\{b, c\}$ 답 $\{b, c\}$

24 $(A\cup B)-(A\cap B)=\{3, 4, 7, 10\}$

오른쪽 벤다이어그램에서 집합 $(A\cup B)-(A\cap B)$는 색칠한 부분과 같고 $B^C=\{1, 3, 4, 10\}$이므로



$A-B=\{3, 4, 10\}$, $B-A=\{7\}$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$3+4+10=17$ 답 17

25 $A\cap B=\{4, 6\}$에서 $6\in A$이므로

$a+1=6$ $\quad\therefore a=5$

또 $4\in B$이므로

$3b-2=4$, $\quad 3b=6$

$\therefore b=2$

$\therefore a+b=7$ 답 7

26 $B-A=\{7\}$에서 $3\in A$이므로

집합 B의 원소 중 7을 제외한 원소는 모두 집합 A에 속한다.

$a-1=3$ $\quad\therefore a=4$

⑤ $A=\{3, 5, 9\}$, $B=\{3, 7, 9\}$이므로

$A-B=\{5\}$

답 ⑤

27 $A\cap B=\{2\}$에서 $2\in A$이므로

$k^2+2k-1=2$, $\quad k^2+2k-3=0$

$(k+3)(k-1)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=1$

k의 값을 대입하여 두 집합 A, B의 원소를 구한 후 $A\cap B=\{2\}$인 경우를 찾는다.

(i) $k=-3$일 때,

$A=\{-3, 2\}$, $B=\{-10, -3\}$이므로

$A\cap B=\{-3\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k=1$일 때,

$A=\{-3, 2\}$, $B=\{1, 2\}$이므로

$A\cap B=\{2\}$

(i), (ii)에서 $\quad k=1$ 답 1

28 $A\cup B=\{-1, 1, 2, 5\}$이고 $B=\{1, 2, a+2\}$이므로

$a+2=-1$ 또는 $a+2=5$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=3$

(i) $a=-3$일 때,

$A=\{1, 2, 5\}$, $B=\{-1, 1, 2\}$이므로

$A\cup B=\{-1, 1, 2, 5\}$

(ii) $a=3$일 때,

$A=\{1, 2, 11\}$, $B=\{1, 2, 5\}$이므로

$A\cup B=\{1, 2, 5, 11\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\quad a=-3$

따라서 $A=\{1, 2, 5\}$이므로 구하는 모든 원소의 합은

$1+2+5=8$ 답 ②

04 집합의 연산의 성질 W 14쪽

01 (1) $(A\cap U)\cup A=A\cup A=A$

(2) $(\varnothing^C)^C=U^C=\varnothing$

(3) $(A\cup A^C)\cap A=U\cap A=A$

(4) $A\cap U^C=A\cap\varnothing=\varnothing$

답 (1) A (2) $\varnothing$ (3) A (4) $\varnothing$

02 (1) $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이고

$A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$이므로

$A^C\cap B^C=\{4, 7\}$

(2) $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이고 $A\cap B=\{3, 5, 8\}$이므로

$A^C\cup B^C=\{1, 2, 4, 6, 7, 9\}$

답 (1) $\{4, 7\}$ (2) $\{1, 2, 4, 6, 7, 9\}$

03 (1) $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=17+9-22=4$

(2) $n(B^C)=n(U)-n(B)$

$=30-9=21$

(3) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$=17-4=13$

(4) $n(B\cap A^C)=n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$

$=9-4=5$

답 (1) 4 (2) 21 (3) 13 (4) 5

04 ② $A\cup\varnothing^C=A\cup U=U$

③ $A\cap(A\cup U)=A\cap U=A$

④ $U^C=\varnothing$이므로 $\quad A\not\subset U^C$

⑤ $(U\cap A^C)\cup A=A^C\cup A=U$

답 ④

05 $(A\cap U)-B^C=A-B^C=A\cap(B^C)^C$

$=A\cap B$ 답 ②

06 ㄱ. $A\circledcirc B=(A-B)\cup(B-A)$

$=(B-A)\cup(A-B)$

$=B\circledcirc A$

ㄴ. $A\circledcirc A=(A-A)\cup(A-A)$

$=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$

ㄷ. $A\circledcirc\varnothing=(A-\varnothing)\cup(\varnothing-A)$

$\varnothing-A=\varnothing\cap A^C=\varnothing$

$=A\cup\varnothing=A$

ㄹ. $A\circledcirc U=(A-U)\cup(U-A)$

$A-U=A\cap U^C$
$=A\cap\varnothing$
$=\varnothing$

$=\varnothing\cup A^C=A^C$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

07 $B-A=\varnothing$이므로 $\quad B\subset A$

②, ③ $B\subset A$에서 $A^C\subset B^C$이므로

$\quad A^C-B^C=\varnothing$

⑤ $A\cup B=A$이고 $A\neq B$이므로

$\quad (A\cup B)\not\subset B$

답 ⑤

08 $B^C\subset A^C$이므로 $\quad A\subset B$

① $A\cup B=B$

② $(A\cap\varnothing)\cup B=\varnothing\cup B=B$

③ $A\cap(A\cup B)=A\cap B=A$

④ $B\cup(A\cap B)=B\cup A=B$

⑤ $(A\cap B)\cup(A\cup B)=A\cup B=B$

답 ③

09 두 집합 A, B가 서로소이므로 $\quad A\cap B=\varnothing$

ㄱ. $A-B=A$

ㄴ. $A-(A\cap B)=A-\varnothing=A$

ㄷ. $A^C\not\subset B^C$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ③

10 $A\cap B=\{3, 5, 8\}$, $A\cup B=\{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$

따라서 집합 X의 개수는 집합 $\{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$의 부분집합 중에서 3, 5, 8을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$\quad 2^{6-3}=2^3=8$ 답 8

11 $B=\{4, 5, 6, 7, 8\}$이므로

$\quad A-B=\{0, 1, 2, 3\}$

이때 $(A-B)\cap X=X$이므로

$\quad X\subset(A-B)$

따라서 집합 X의 개수는 집합 $\{0, 1, 2, 3\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$\quad 2^4=16$ 답 ③

> 두 집합 A, X에 대하여
> ① $A\cap X=X$이면 $X\subset A$
> ② $A\cup X=X$이면 $A\subset X$

12 $A\cup X=X$이므로 $\quad A\subset X$

$B^C\cap X=X$이므로 $\quad X\subset B^C$

$\quad\therefore A\subset X\subset B^C$

이때 $A=\{1, 7\}$, $B^C=\{1, 3, 6, 7\}$이므로 집합 X의 개수는 집합 $\{1, 3, 6, 7\}$의 부분집합 중에서 1, 7을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$\quad 2^{4-2}=2^2=4$ 답 4

13 $x^2-8x+15=0$에서 $\quad (x-3)(x-5)=0$

$\quad\therefore x=3$ 또는 $x=5$

$\quad\therefore A=\{3, 5\}$

$X-(A\cup B)=\varnothing$이므로 $\quad X\subset(A\cup B)$

$A\cup B=\{3, 4, 5, 9\}$이고 $n(X)=2$이므로 집합 X의 개수는 3, 4, 5, 9 중 2개를 원소로 갖는 집합의 개수와 같다.

따라서 집합 X는

$\quad \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 9\}, \{4, 5\}, \{4, 9\}, \{5, 9\}$

의 6개이다. 답 6

14 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 30\}$, $A=\{6, 12, 18, 24, 30\}$, $B=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

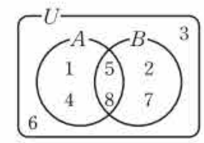
$$\begin{aligned}\therefore (A\cup B^C)^C&=A^C\cap(B^C)^C\\&=A^C\cap B\\&=B-A\\&=\{1, 2, 3, 5, 10, 15\}\end{aligned}$$

따라서 집합 $(A\cup B^C)^C$의 원소의 개수는 6이다. 답 ⑤

15 $A^C\cap B=B-A=\{2, 7\}$,

$A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$

$\quad=\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$



이므로 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 위의 그림과 같다.

$\quad\therefore B=\{2, 5, 7, 8\}$ 답 $\{2, 5, 7, 8\}$

16 $U=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$,

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{1, 5, 15\}$이므로

$\quad A\cup B=\{3, 7, 9, 11, 13\}$

이때 $B=\{3, 7, 11\}$이므로 집합 A는 9, 13을 반드시 원소로 가져야 한다.

따라서 $A=\{9, 13\}$일 때 집합 A의 모든 원소의 합이 최소이므로 구하는 최솟값은

$\quad 9+13=22$ 답 22

17
$$\begin{aligned}(A\cup B)-(A-B)&=(A\cup B)-(A\cap B^C)\\&=(A\cup B)\cap(A\cap B^C)^C\\&=(A\cup B)\cap(A^C\cup B)\\&=(A\cap A^C)\cup B\\&=\varnothing\cup B=B\end{aligned}$$

③ $B\subset(A\cup B)$이므로

$\quad (A\cup B)\cap B=B$

④
$$\begin{aligned}B-(A\cap B)&=B\cap(A\cap B)^C\\&=B\cap(A^C\cup B^C)\\&=(B\cap A^C)\cup(B\cap B^C)\\&=(B-A)\cup\varnothing\\&=B-A\end{aligned}$$

⑤
$$\begin{aligned}A\cap(B-A)^C&=A\cap(B\cap A^C)^C\\&=A\cap(B^C\cup A)\\&=(A\cap B^C)\cup(A\cap A)\\&=(A-B)\cup A=A\end{aligned}$$

답 ③

> 드모르간의 법칙에 의하여
> $(A\cap B^C)^C$
> $=A^C\cup(B^C)^C$
> $=A^C\cup B$

> $(A-B)\subset A$이므로
> $(A-B)\cup A=A$

18
$$\begin{aligned}A\cap(A^C\cup B)&=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)\\&=\varnothing\cup(A\cap B)\\&=A\cap B\end{aligned}$$

이때 $A=\{2, 4, 6, \cdots, 40\}$, $B=\{5, 10, 15, \cdots, 40\}$이므로

$$A\cap B=\{10, 20, 30, 40\}$$

$A\cap B$는 40 이하의 자연수 중 2와 5의 최소공배수인 10의 배수의 집합이다.

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$$10+20+30+40=100$$

답 ⑤

19 ㄱ. $(A-B)^C-B^C=(A\cap B^C)^C\cap(B^C)^C$
$=(A^C\cup B)\cap B$
$=(A^C\cap B)\cup(B\cap B)$
$=(B-A)\cup B$
$=B$

ㄴ. $A-(B\cup C)=A\cap(B\cup C)^C$
$=A\cap(B^C\cap C^C)$
$=(A\cap B^C)\cap C^C$
$=(A-B)-C$

ㄷ. $(A-B)\cup(A-C)=(A\cap B^C)\cup(A\cap C^C)$
$=A\cap(B^C\cup C^C)$
$=A\cap(B\cap C)^C$
$=A-(B\cap C)$

이상에서 항상 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

20 $A_{16}\cap A_{24}\cap A_{40}=(A_{16}\cap A_{24})\cap A_{40}$
$=A_8\cap A_{40}$
$=A_8$
$=\{1, 2, 4, 8\}$

$A_8\subset A_{40}$

따라서 집합 $A_{16}\cap A_{24}\cap A_{40}$에 속하는 원소가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

21 ㄴ. $(A_6\cap A_8)\cup A_{12}=A_{24}\cup A_{12}=A_{12}$

$A_{24}\subset A_{12}$

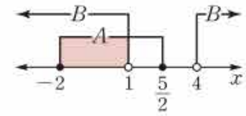
ㄷ. $(A_3\cup A_9)\cap(A_6\cup A_{12})=A_3\cap A_6=A_6$

$A_6\subset A_3$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

22 $A_3\cap A_5=A_{15}$이므로 $A_p\subset(A_3\cap A_5)$에서
$A_p\subset A_{15}$
즉 p는 15의 양의 배수이어야 하므로 p의 최솟값은 15이다.
또 $(A_{12}\cup A_{18})\subset A_q$에서
$A_{12}\subset A_q$, $A_{18}\subset A_q$
즉 q는 12와 18의 양의 공약수이어야 하므로 q의 최댓값은 6이다.
따라서 구하는 합은
$15+6=21$ 답 21

23 $2x^2-x-10\le0$에서 $(x+2)(2x-5)\le0$
$\therefore -2\le x\le\frac{5}{2}$
$\therefore A=\left\{x\,\middle|\,-2\le x\le\frac{5}{2}\right\}$
$x^2-5x+4>0$에서 $(x-1)(x-4)>0$
$\therefore x<1$ 또는 $x>4$
$\therefore B=\{x\,|\,x<1$ 또는 $x>4\}$
따라서 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

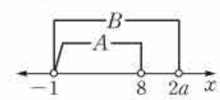


$A\cap B=\{x\,|\,-2\le x<1\}$

답 $\{x\,|\,-2\le x<1\}$

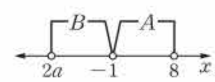
24 $x^2+4x-21\le0$에서 $(x+7)(x-3)\le0$
$\therefore -7\le x\le3$
이때 $A=\{x\,|\,x<-7\}$, $B=\{x\,|\,x>3\}$이므로
$A^C=\{x\,|\,x\ge-7\}$, $B^C=\{x\,|\,x\le3\}$
따라서 부등식 $x^2+4x-21\le0$의 해의 집합은
$\{x\,|\,-7\le x\le3\}=\{x\,|\,x\ge-7\}\cap\{x\,|\,x\le3\}$
$=A^C\cap B^C$
$=(A\cup B)^C$ 답 ⑤

25 $x^2-7x-8<0$에서 $(x+1)(x-8)<0$
$\therefore -1<x<8$
$\therefore A=\{x\,|\,-1<x<8\}$
$x^2+(1-2a)x-2a<0$에서 $(x+1)(x-2a)<0$
$\therefore B=\{x\,|\,(x+1)(x-2a)<0\}$
이때 $A-B=\varnothing$에서 $A\subset B$이므로 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $2a\ge8$이므로 $a\ge4$
따라서 구하는 실수 a의 최솟값은 4이다. 답 4

참고 $2a<-1$인 경우는 오른쪽 그림과 같으므로 $A\subset B$일 수 없다.



26 $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로
$3=20-n(A\cup B)$ $\therefore n(A\cup B)=17$
$\therefore n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=9+13-17=5$ 답 ②

27 $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$이므로
$8=14-n(A\cap B)$ $\therefore n(A\cap B)=6$
$\therefore n(A\cap B^C)=n(A-B)$
$=n(A)-n(A\cap B)$
$=16-6=10$ 답 ②

28 $A\subset B^C$이므로 $A\cap B=\varnothing$
$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)$
$=15+10=25$ 답 25

$A\cap B=\varnothing$이면
$n(A\cup B)$
$=n(A)+n(B)$

29 $n(X\cup Y\cup Z)$
$=n(X)+n(Y)+n(Z)-n(X\cap Y)-n(Y\cap Z)$
$-n(Z\cap X)+n(X\cap Y\cap Z)$
$=16+20+17-4-7-5+3$
$=40$ 답 40

30 $A \subset B$일 때, $n(A \cap B)$가 최대이므로

$M = n(A \cap B) = n(A) = 13$

$A \cup B = U$일 때, $n(A \cap B)$가 최소이므로

$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$에서

$m = 13 + 19 - 28 = 4$

$\therefore M - m = 9$ 답 ④

다른 풀이 $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

$= 13 + 19 - n(A \cup B)$

$= 32 - n(A \cup B)$ ······ ㉠

$B \subset (A \cup B)$이므로 $n(B) \le n(A \cup B)$

$(A \cup B) \subset U$이므로 $n(A \cup B) \le n(U)$

즉 $19 \le n(A \cup B) \le 28$이므로

$-28 \le -n(A \cup B) \le -19$

$\therefore 4 \le 32 - n(A \cup B) \le 13$

따라서 $4 \le n(A \cap B) \le 13$이므로

$M = 13,\ m = 4$ $\therefore M - m = 9$

Q BOX

$A \subset B$일 때, $A \cap B = A$이므로 $n(A \cap B) = n(A)$

$n(A \cap B)$가 최소가 되려면 $n(A \cup B)$가 최대가 되어야 하므로 $A \cup B = U$이어야 한다.

31 $(A \cap B) \subset A$, $(A \cap B) \subset B$에서

$n(A \cap B) \le n(A)$, $n(A \cap B) \le n(B)$이므로

$n(A \cap B) \le 5$

또 $n(A \cap B) \ge 2$이므로

$2 \le n(A \cap B) \le 5$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$에서

(i) $n(A \cap B) = 2$일 때,

$n(A \cup B) = 8 + 5 - 2 = 11$

(ii) $n(A \cap B) = 5$일 때,

$n(A \cup B) = 8 + 5 - 5 = 8$

(i), (ii)에서 $8 \le n(A \cup B) \le 11$

따라서 $n(A \cup B)$의 최댓값은 11, 최솟값은 8이므로 구하는 합은

$11 + 8 = 19$ 답 19

$n(A) = 8$, $n(B) = 5$이므로 $n(A \cap B) \le 5$

32 피자를 좋아하는 학생의 집합을 A, 치킨을 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(A) = 19$, $n(B) = 26$, $n(A \cap B) = 13$

피자 또는 치킨을 좋아하는 학생의 집합은 $A \cup B$이므로

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 19 + 26 - 13 = 32$

따라서 구하는 학생 수는 32이다. 답 32

피자와 치킨을 모두 좋아하는 학생의 집합

33 경주에 가 본 학생의 집합을 A, 부여에 가 본 학생의 집합을 B라 하면

$n(A) = 20$, $n(B) = 15$, $n(A \cap B) = 9$

경주에만 가 본 학생의 집합은 $A - B$, 부여에만 가 본 학생의 집합은 $B - A$이므로

$n(A - B) + n(B - A)$

$= \{n(A) - n(A \cap B)\} + \{n(B) - n(A \cap B)\}$

$= (20 - 9) + (15 - 9) = 17$

따라서 구하는 학생 수는 17이다. 답 ②

34 직원 전체의 집합을 U, A 은행을 이용하는 직원의 집합을 A, B 은행을 이용하는 직원의 집합을 B라 하면

$n(U) = 50$, $n(A) = 34$, $n(A - B) = 18$,

$n(A^C \cap B^C) = 10$

$n(A^C \cap B^C) = n((A \cup B)^C) = n(U) - n(A \cup B)$에서

$10 = 50 - n(A \cup B)$

$\therefore n(A \cup B) = 40$

이때 $n(A - B) = n(A \cup B) - n(B)$이므로

$18 = 40 - n(B)$

$\therefore n(B) = 22$

따라서 B 은행을 이용하는 직원 수는 22이다. 답 22

35 은유네 반 학생 전체의 집합을 U, 수학 경시대회에 참가하는 학생의 집합을 A, 과학 경시대회에 참가하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U) = 35$, $n(A) = 24$, $n(B) = 17$

두 경시대회에 모두 참가하는 학생의 집합은 $A \cap B$이고, $B \subset A$일 때 $n(A \cap B)$가 최대이므로 두 경시대회에 모두 참가하는 학생 수의 최댓값은

$n(B) = 17$

한편 $A \cup B = U$일 때 $n(A \cap B)$가 최소이므로

$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

에서 두 경시대회에 모두 참가하는 학생 수의 최솟값은

$24 + 17 - 35 = 6$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 차는

$17 - 6 = 11$ 답 ④

03 명제

05 명제와 조건

W 19쪽

01 답 (2) 거짓인 명제 (3) 참인 명제

6과 8의 최소공배수는 24이다.

$70 \div 9 = 7.7\cdots < 8$

02 (2) $x^2-49=0$에서 $(x+7)(x-7)=0$

$\therefore x=-7$ 또는 $x=7$

따라서 주어진 조건의 진리집합은 $\{-7, 7\}$

(3) $2x^2-9x+4=0$에서 $(2x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=4$

따라서 주어진 조건의 진리집합은 $\{4\}$

답 (1) $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ (2) $\{-7, 7\}$ (3) $\{4\}$

03 답 (1) 4와 6은 서로소가 아니다. (참)

(2) $\sqrt{5}$는 무리수이다. (참)

(3) 정사각형은 마름모가 아니다. (거짓)

(4) $2(x+5)-1\neq 2x+9$ (거짓)

'~이다.'의 부정은 '~가 아니다.'

'='의 부정은 '≠'

04 (1) 주어진 조건의 진리집합을 P라 하면

$P=\{1, 2, 4, 8\}$

따라서 주어진 조건의 부정의 진리집합은

$P^C=\{3, 5, 6, 7\}$

(2) $x^2-6x+5=0$에서 $(x-1)(x-5)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=5$

즉 주어진 조건의 진리집합을 P라 하면

$P=\{1, 5\}$

따라서 주어진 조건의 부정의 진리집합은

$P^C=\{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$

(3) $x^2-10x+21\le 0$에서 $(x-3)(x-7)\le 0$

$\therefore 3\le x\le 7$

즉 주어진 조건의 진리집합을 P라 하면

$P=\{3, 4, 5, 6, 7\}$

따라서 주어진 조건의 부정의 진리집합은

$P^C=\{1, 2, 8\}$

답 (1) $\{3, 5, 6, 7\}$ (2) $\{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ (3) $\{1, 2, 8\}$

05 (1) 두 조건 'x는 자연수', 'x는 정수'의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, 2, 3, \cdots\}$,

$Q=\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$

따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

(2) [반례] $x=3$이면 x는 3의 양의 배수이지만 6의 양의 배수는 아니므로 주어진 명제는 거짓이다.

(3) (홀수)+(홀수)=(짝수)이므로 주어진 명제는 참이다.

답 (1) 참 (2) 거짓 (3) 참

W 18~20쪽

06 (1) [반례] $x=0$이면 $|x|=0$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

(2) $x^2+4x+4\le 0$에서 $(x+2)^2\le 0$

따라서 $x=-2$이면 $x^2+4x+4\le 0$이므로 주어진 명제는 참이다.

답 (1) 거짓 (2) 참

07 답 (1) 어떤 실수 x에 대하여 $\sqrt{x}<0$이다. (거짓)

(2) 모든 실수 x에 대하여 $x^2+3\neq 0$이다. (참)

08 ㄱ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

ㄴ. 모든 x의 값에 대하여 항상 성립하므로 참인 명제이다.

ㄷ. $\sqrt{7}+\sqrt{3}\neq\sqrt{10}$이므로 거짓인 명제이다.

ㄹ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

이상에서 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ②

09 ① 참인 명제이다.

② x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

③, ④ 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

⑤ 정팔각형의 한 외각의 크기는 $\frac{360°}{8}=45°$이므로 거짓인 명제이다.

답 ⑤

10 답 ③

'p 또는 q'의 부정은 '$\sim p$ 그리고 $\sim q$'
'p 그리고 q'의 부정은 '$\sim p$ 또는 $\sim q$'

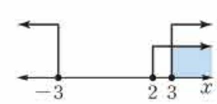
11 '$\sim p$ 또는 q'의 부정은 'p 그리고 $\sim q$'

p: $x^2-9\ge 0$에서 $(x+3)(x-3)\ge 0$

$\therefore x\le -3$ 또는 $x\ge 3$

q: $x<2$에서 $\sim q$: $x\ge 2$

따라서 'p 그리고 $\sim q$'는 오른쪽 그림에서



$x\ge 3$

답 ⑤

12 각 명제의 부정과 그 참, 거짓은 다음과 같다.

① 49는 합성수가 아니다. (거짓)

② $5+8\neq 13$ (거짓)

③ 9는 63의 약수가 아니다. (거짓)

④ $-2^3\le(-2)^3$ (참)

⑤ $3\notin\{x\,|\,x^2+2x-15=0\}$ (거짓)

$x^2+2x-15=0$에서 $(x+5)(x-3)=0$ $\therefore x=-5$ 또는 $x=3$

답 ④

다른 풀이 명제가 거짓이면 그 부정은 참이다.

주어진 명제 ①, ②, ③, ⑤는 참, ④는 거짓이므로 명제의 부정이 참인 것은 ④이다.

명제 p가 참이면 $\sim p$는 거짓이고, 명제 p가 거짓이면 $\sim p$는 참이다.

13 '$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$'의 부정은

'$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\neq 0$'

이므로

$(x-y)^2 \neq 0$ 또는 $(y-z)^2 \neq 0$ 또는 $(z-x)^2 \neq 0$

$\therefore x \neq y$ 또는 $y \neq z$ 또는 $z \neq x$ 답 ②

14 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$

$|x-3|<2$에서 $-2<x-3<2$

$\therefore 1<x<5$

따라서 조건 p의 진리집합은

$\{2, 3, 4\}$ 답 $\{2, 3, 4\}$

$a>0$일 때
① $|x|<a$
➡ $-a<x<a$
② $|x|>a$
➡ $x<-a$ 또는 $x>a$

15 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$, $Q=\{1, 2, 7, 14\}$

따라서 조건 'p 그리고 q'의 진리집합은

$P\cap Q=\{2, 7\}$

이므로 구하는 원소의 개수는 2이다. 답 2

16 조건 p의 진리집합을 P라 하면

$P=\{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$

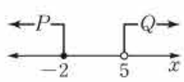
이때 조건 $\sim p$의 진리집합은

$P^C=\{2, 4, 8\}$

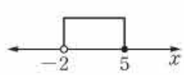
이므로 구하는 모든 원소의 합은

$2+4+8=14$ 답 ②

17 두 진리집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



또 조건 '$-2<x\leq 5$'의 진리집합을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 집합은



$P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C$ 답 ⑤

드모르간의 법칙
$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$
$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

18 ④ [반례] $x=4$이면 x는 12의 양의 약수이지만 6의 양의 약수는 아니다.

답 ④

19 ㄴ. [반례] $x=1$, $y=-2$이면 $x>y$이지만 $x^2<y^2$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

ㄷ. [반례] $x=0$, $y=1$이면 $xy=0$이지만 $|x|+|y|\neq 0$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

이상에서 명제 $p \longrightarrow q$가 참인 것은 ㄱ뿐이다. 답 ㄱ

20 ① [반례] $x=-4$이면 $x^2=16$이지만 $x\neq 4$이다.

③ [반례] $x=-1$, $y=-2$이면 $xy>0$이지만 $x<0$, $y<0$이다.

⑤ [반례] $x=2$, $y=2$, $z=1$이면 $(x-y)(y-z)=0$이지만 $x\neq z$, $y\neq z$이다.

답 ②, ④

21 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $Q=\{4, 8\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보여주는 반례는 집합 P에는 속하고 집합 Q에는 속하지 않아야 하므로 집합 $P-Q$의 원소이다.

이때 $P-Q=\{2, 6, 10\}$이므로 구하는 반례의 개수는 3이다. 답 3

22 명제 'p이면 $\sim q$이다.'가 거짓임을 보이는 원소는 집합 P에는 속하고 집합 Q^C에는 속하지 않아야 한다.

따라서 구하는 집합은

$P-Q^C=P\cap(Q^C)^C=P\cap Q$ 답 ①

23 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이면

$Q^C\subset P^C$ $\therefore P\subset Q$

따라서 두 집합 P, Q 사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 바르게 나타낸 것은 ①이다. 답 ①

24 ① $P\subset R^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$는 참이다.

② $Q\not\subset P^C$이므로 명제 $q \longrightarrow \sim p$는 거짓이다.

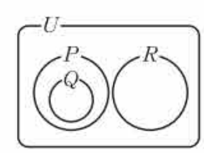
③ $R\subset Q$이므로 명제 $r \longrightarrow q$는 참이다.

④ $R\subset P^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim p$는 참이다.

⑤ $Q^C\subset R^C$이므로 명제 $\sim q \longrightarrow \sim r$는 참이다.

답 ②

25 주어진 조건을 만족시키도록 세 집합 P, Q, R를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $Q\subset P$이므로 명제 $q \longrightarrow p$는 참이다.

② $P\subset R^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$는 참이다.

③ $R\not\subset Q$이므로 명제 $r \longrightarrow q$는 거짓이다.

④ $Q\subset R^C$이므로 명제 $q \longrightarrow \sim r$는 참이다.

⑤ $R\subset P^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim p$는 참이다.

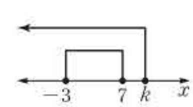
답 ③

26 주어진 명제가 참이 되려면

$\{x|-3\leq x\leq 7\}\subset\{x|x\leq k\}$

이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$k\geq 7$ 답 ⑤



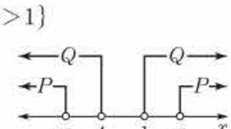
27 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$|x|>a$에서 $x<-a$ 또는 $x>a$

$\therefore P=\{x|x<-a$ 또는 $x>a\}$,

$Q=\{x|x<-4$ 또는 $x>1\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



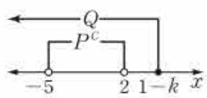
$-a\leq -4$, $a\geq 1$

$-a\leq -4$에서 $a\geq 4$

$\therefore a\geq 4$

따라서 양수 a의 최솟값은 4이다. 답 ④

28 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
$x^2+3x-10\ge 0$에서 $\quad (x+5)(x-2)\ge 0$
$\quad \therefore x\le -5$ 또는 $x\ge 2$
$\quad \therefore P=\{x\,|\,x\le -5$ 또는 $x\ge 2\}$
$3x+k\le 2x+1$에서 $\quad x\le 1-k$
$\quad \therefore Q=\{x\,|\,x\le 1-k\}$
명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이 되려면
$\quad P^C\subset Q$
이때 $P^C=\{x\,|\,-5<x<2\}$이므로 오른쪽 그림에서



$\quad 1-k\ge 2 \quad \therefore k\le -1$
따라서 실수 k의 최댓값은 -1이다. 답 -1

29 ① $x-2$의 값은 $\quad -1,\ 0,\ 1,\ 2$
따라서 모든 x에 대하여 $x-2<3$이다.
② $x=1$이면 $\quad x^2=1$
③ $4x+1$의 값은 $\quad 5,\ 9,\ 13,\ 17$
따라서 모든 x에 대하여 $4x+1\ge 5$이다.
④ $x(x+3)$의 값은 $\quad 4,\ 10,\ 18,\ 28$
따라서 $x(x+3)=0$을 만족시키는 x가 존재하지 않는다.
⑤ $\sqrt{x^2}$의 값은 $\quad 1,\ 2,\ 3,\ 4$
따라서 모든 x에 대하여 $\sqrt{x^2}=x$이다.
답 ④

'어떤'이 있는 명제는 만족시키는 것이 하나도 존재하지 않으면 거짓이다.

$$\sqrt{x^2}=|x| =\begin{cases} x & (x\ge 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$$

30 주어진 명제의 부정은
'어떤 실수 x에 대하여 $x^2-x+1<0$이다.'
이고, 이와 같은 것은 ④이다. 답 ④

31 주어진 명제의 부정은
'모든 실수 x에 대하여 $x^2+kx+4\ge 0$이다.'
이다.
이차방정식 $x^2+kx+4=0$의 판별식을 D라 할 때, 위의 명제가 참이려면
$\quad D=k^2-4\cdot 4\le 0, \quad k^2-16\le 0$
$\quad (k+4)(k-4)\le 0 \quad \therefore -4\le k\le 4$
답 $-4\le k\le 4$

06 명제 사이의 관계

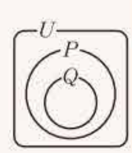
W 24쪽

01 (1) 역: $x^2=25$이면 $x=5$이다. (거짓)
[반례] $x=-5$이면 $x^2=25$이지만 $x\neq 5$이다.
대우: $x^2\neq 25$이면 $x\neq 5$이다. (참)
(2) 역: $x>1$이면 $x>0$이다. (참)
대우: $x\le 1$이면 $x\le 0$이다. (거짓)
[반례] $x=\frac{1}{2}$이면 $x\le 1$이지만 $x>0$이다.
(3) 역: $x=0$ 또는 $y=0$이면 $x+y=0$이다. (거짓)
[반례] $x=0$, $y=1$이면 $x+y\neq 0$이다.
대우: $x\neq 0$이고 $y\neq 0$이면 $x+y\neq 0$이다. (거짓)
[반례] $x=1$, $y=-1$이면 $x\neq 0$이고 $y\neq 0$이지만 $x+y=0$이다.
답 풀이 참조

어떤 명제가 참일 때, 그 명제의 역이 반드시 참인 것은 아니다.

02 (1) 명제 $p\longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q\longrightarrow \sim p$는 참이지만 $\sim p\longrightarrow \sim q$가 참인지는 알 수 없다.
(2) 명제 $r\longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q\longrightarrow \sim r$도 참이다.
(3) 두 명제 $p\longrightarrow q$, $q\longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 명제 $p\longrightarrow \sim r$도 참이고, 그 대우 $r\longrightarrow \sim p$도 참이다.
답 (1) × (2) ○ (3) ○

03 (1) $p\longrightarrow q$: x가 실수이면 x는 유리수이다. (거짓)
[반례] $x=\sqrt{2}$이면 x는 실수이지만 유리수는 아니다.
$q\longrightarrow p$: x가 유리수이면 x는 실수이다. (참)
따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
(2) $p\longrightarrow q$: x가 4의 양의 배수이면 x는 짝수인 자연수이다. (참)
$q\longrightarrow p$: x가 짝수인 자연수이면 x는 4의 양의 배수이다. (거짓)
[반례] $x=2$이면 x는 짝수인 자연수이지만 4의 양의 배수는 아니다.
따라서 $p\Longrightarrow q$, $q\not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
(3) $|x|=3$에서 $\quad x=\pm 3$
$x^2=9$에서 $\quad x=\pm 3$
따라서 $p\Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
답 (1) 필요조건 (2) 충분조건 (3) 필요충분조건



04 p가 q이기 위한 필요조건이므로 $\quad Q\subset P$
(1) $P\cap Q=Q$ $\quad$ (2) $P\cup Q=P$
(3) $P\cup Q^C=U$ $\quad$ (4) $Q\cap P^C=Q-P=\varnothing$
답 (1) Q (2) P (3) U (4) $\varnothing$

05 명제 $\sim p\longrightarrow q$의 역은 $\quad q\longrightarrow \sim p$
따라서 명제 $q\longrightarrow \sim p$가 참이므로 그 대우 $p\longrightarrow \sim q$도 항상 참이다. 답 ②

명제와 그 대우의 참, 거짓은 일치하므로 대우의 참, 거짓은 명제의 참, 거짓으로 판별해도 된다.

06 ㄱ. 역: $x+3=y+3$이면 $x=y$이다. (참)
대우: $x+3\neq y+3$이면 $x\neq y$이다. (참)
ㄴ. 역: $2x+1>6$이면 $x>3$이다. (거짓)

[반례] $x=\frac{11}{4}$이면 $2x+1>6$이지만 $x\le3$이다.

대우: $2x+1\le6$이면 $x\le3$이다. (참)

ㄷ. 역: $xy=0$이면 $x=0$ 또는 $y=0$이다. (참)

대우: $xy\ne0$이면 $x\ne0$이고 $y\ne0$이다. (참)

ㄹ. 역: $x>0$이고 $y>0$이면 $xy>0$이다. (참)

대우: $x\le0$ 또는 $y\le0$이면 $xy\le0$이다. (거짓)

[반례] $x=-1$, $y=-1$이면 $x\le0$, $y\le0$이지만 $xy>0$이다.

이상에서 역과 대우가 모두 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

07 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$|x-a|\le4$에서 $\quad -4\le x-a\le4$

$\therefore a-4\le x\le a+4$

$\therefore P=\{x|a-4\le x\le a+4\}$

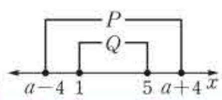
$x^2-6x+5\le0$에서 $\quad (x-1)(x-5)\le0$

$\therefore 1\le x\le5$

$\therefore Q=\{x|1\le x\le5\}$

명제 $p \longrightarrow q$의 역은 $q \longrightarrow p$이므로 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q\subset P$이어야 한다.

오른쪽 그림에서



$a-4\le1$, $a+4\ge5$

$\therefore 1\le a\le5$

$a-4\le1$에서
$a\le5 \quad \cdots$ ㉠
$a+4\ge5$에서
$a\ge1 \quad \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $\quad 1\le a\le5$

따라서 모든 자연수 a의 값의 합은

$1+2+3+4+5=15$

답 15

08 주어진 명제가 참이 되려면 그 대우

'$x=a$이면 $x^2\le3$이다.'

가 참이어야 한다.

$x=a$를 $x^2\le3$에 대입하면

$a^2\le3 \quad \therefore -\sqrt{3}\le a\le\sqrt{3}$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1의 3개이다.

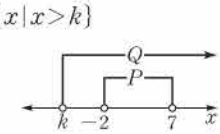
답 ②

09 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이 되려면 그 대우 $p \longrightarrow q$가 참이어야 한다.

이때 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|-2<x<7\}$, $Q=\{x|x>k\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$k\le-2$

답 $k\le-2$

10 ①, ③ 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim p \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 각각의 대우 $q \longrightarrow \sim p$, $r \longrightarrow p$도 모두 참이다.

②, ④ 두 명제 $q \longrightarrow \sim p$, $\sim p \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 명제 $q \longrightarrow \sim r$도 참이고, 그 대우 $r \longrightarrow \sim q$도 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 $\sim r \longrightarrow \sim q$이다.

답 ⑤

11 ㄴ. 명제 $r \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

ㄷ. 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$도 참이다.

ㄹ. 두 명제 $q \longrightarrow \sim r$, $\sim r \longrightarrow s$가 모두 참이므로 명제 $q \longrightarrow s$도 참이고, 그 대우 $\sim s \longrightarrow \sim q$도 참이다.

이상에서 항상 참인 명제는 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

12 세 조건 p, q, r를

'p: 국어를 좋아한다.', 'q: 영어를 좋아한다.',

'r: 사회를 좋아한다.'

로 놓으면 (가), (나)에서 명제 $p \longrightarrow q$와 $\sim p \longrightarrow \sim r$가 참이므로 각각의 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$와 $r \longrightarrow p$도 참이다.

또 두 명제 $r \longrightarrow p$, $p \longrightarrow q$가 모두 참이므로 명제 $r \longrightarrow q$도 참이고, 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ③이다.

답 ③

참고 각 보기를 세 조건 p, q, r로 나타내면 다음과 같다.

① $p \longrightarrow r$ ② $q \longrightarrow r$ ③ $r \longrightarrow q$

④ $\sim p \longrightarrow \sim q$ ⑤ $r \longrightarrow \sim p$

13 ① $p \longrightarrow q$: x, y가 자연수이면 $x+y$는 자연수이다. (참)

$q \longrightarrow p$: $x+y$가 자연수이면 x, y는 자연수이다. (거짓)

[반례] $x=2$, $y=-1$이면 $x+y$는 자연수이지만 y는 자연수가 아니다.

따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

② $x^2-2x=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

$x^2-2x=0$에서
$x(x-2)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

③ $xy<0$이면 $\quad x>0$, $y<0$ 또는 $x<0$, $y>0$

따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

④ $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

⑤ $p \longrightarrow q$: $x=0$ 또는 $y=0$이면 $(x+y)^2\ge0$이다. (참)

$q \longrightarrow p$: $(x+y)^2\ge0$이면 $x=0$ 또는 $y=0$이다. (거짓)

[반례] $x=1$, $y=1$이면 $(x+y)^2\ge0$이지만 $x\ne0$이고 $y\ne0$이다.

따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

답 ④

14 $A=\{2\}$, $B=\{1, 3\}$이면 $n(A)=1$, $n(B)=2$이므로 $n(A)\le n(B)$이지만 $A\cap B\ne A$이다.

$\therefore p \not\Longrightarrow q$

$A\cap B=A$이면 $A\subset B$이므로 $\quad n(A)\le n(B)$

$\therefore q \Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다. 답 필요조건

15 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow r$도 참이다.
따라서 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow r$도 참이다.
ㄱ. $p \Longrightarrow r$이므로 p는 r이기 위한 충분조건이다.
ㄴ. $p \Longrightarrow q$이므로 q는 p이기 위한 필요조건이다.
ㄷ. $q \Longrightarrow r$이므로 r는 q이기 위한 필요조건이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

16 p는 r이기 위한 필요조건이므로 $\quad R\subset P$
q는 r이기 위한 충분조건이므로 $\quad Q\subset R$

$\therefore Q\subset R\subset P$ 답 ④

17 $(P-Q)^C\cap P=(P\cap Q^C)^C\cap P$
$=(P^C\cup Q)\cap P$
$=(P^C\cap P)\cup(Q\cap P)$
$=\varnothing\cup(Q\cap P)$
$=Q\cap P$

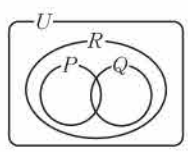
드모르간의 법칙에 의하여
$(P\cap Q^C)^C$
$=P^C\cup(Q^C)^C$
$=P^C\cup Q$

이므로 $(P-Q)^C\cap P=Q$에서

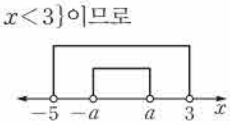
$Q\cap P=Q \quad \therefore Q\subset P$

따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 q는 p이기 위한 충분조건이다.
답 충분조건

18 'p 또는 q'가 r이기 위한 충분조건이므로
$(P\cup Q)\subset R$
④ 오른쪽 벤다이어그램에서
$P-Q\neq\varnothing$ 답 ④

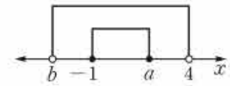


19 $x^2+2x-15<0$이 $|x|<a$이기 위한 필요조건이므로 명제
'$|x|<a$이면 $x^2+2x-15<0$이다.'
가 참이다.
$|x|<a$에서 $\quad -a<x<a$
$x^2+2x-15<0$에서 $\quad (x+5)(x-3)<0$
$\therefore -5<x<3$
즉 $\{x|-a<x<a\}\subset\{x|-5<x<3\}$이므로
오른쪽 그림에서
$-a\ge -5$, $0<a\le 3$
$\therefore 0<a\le 3$

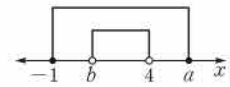


따라서 양수 a의 최댓값은 3이다. 답 ①

20 (1) p는 q이기 위한 충분조건이므로
$p \Longrightarrow q$, 즉 $\{x|-1\le x\le a\}\subset\{x|b<x<4\}$
따라서 오른쪽 그림에서
$-1\le a<4$, $b<-1$



(2) p가 q이기 위한 필요조건이므로
$q \Longrightarrow p$, 즉 $\{x|b<x<4\}\subset\{x|-1\le x\le a\}$
따라서 오른쪽 그림에서
$a\ge 4$, $-1\le b<4$



답 (1) $-1\le a<4$, $b<-1$
(2) $a\ge 4$, $-1\le b<4$

21 p는 q이기 위한 충분조건이므로
$P\subset Q$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
q는 r이기 위한 필요충분조건이므로
$Q=R$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠에서 $1\in Q$이므로 $\quad a^2=1$ 또는 $a-2=1$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$ 또는 $a=3$
(i) $a=-1$일 때,
$Q=\{-3, 1\}$이므로 ㉡을 만족시키지 않는다.
(ii) $a=1$일 때,
$Q=\{-1, 1\}$이므로 ㉡을 만족시키지 않는다.
(iii) $a=3$일 때,
$Q=\{1, 9\}$이므로 ㉡에서 $\quad b=1$
이상에서 $\quad a=3$, $b=1$
$\therefore a-b=2$ 답 2

07 여러 가지 증명법 W 27쪽

01 답 $a\neq 0$ 또는 $b\neq 0$이면 $a^2+b^2\neq 0$이다., $\neq$, $\neq$, 대우

02 답 유리수, 유리수, 유리수, 무리수

03 답 $c-a$, $c-a$, $c-a$, b, c

$c-a$ 대신 $a-c$를 써넣어도 된다.

04 (1) $a>0$, $\dfrac{4}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$a+\frac{4}{a}\ge 2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}}=2\cdot 2=4$$
(단, 등호는 $a=2$일 때 성립)

$a=\dfrac{4}{a}$에서 $\quad a^2=4$
$a>0$이므로 $\quad a=2$

따라서 $a+\dfrac{4}{a}$의 최솟값은 4이다.

(2) $\dfrac{a}{b}>0$, $\dfrac{b}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2$$
(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}$에서 $\quad a^2=b^2$
$a>0$, $b>0$이므로
$a=b$

따라서 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$의 최솟값은 2이다.

답 (1) 4 (2) 2

05 a, b, x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$$

이때 $a^2+b^2=3$, $x^2+y^2=5$이므로

$$3\cdot5\ge(ax+by)^2,\qquad 15\ge(ax+by)^2$$

$$\therefore\ -\sqrt{15}\le ax+by\le\sqrt{15}$$

$$\left(\text{단, 등호는 }\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\text{일 때 성립}\right)$$

답 $-\sqrt{15}\le ax+by\le\sqrt{15}$

06 n이 3의 배수가 아니므로

$n=3k-1$ 또는 $n=\boxed{3k-2}$ (k는 자연수)

라 하면

(i) $n=3k-1$일 때,

$$n^2=(3k-1)^2=9k^2-6k+1$$
$$=3(\boxed{3k^2-2k})+1$$

(ii) $n=\boxed{3k-2}$일 때,

$$n^2=(3k-2)^2=9k^2-12k+4$$
$$=3(\boxed{3k^2-4k+1})+1$$

즉 n^2은 3으로 나누면 나머지가 $\boxed{1}$인 자연수가 되므로 n이 3의 배수가 아니면 n^2도 $\boxed{\text{3의 배수}}$가 아니다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

$\therefore$ (가) $3k-2$ (나) $3k^2-2k$ (다) $3k^2-4k+1$ (라) 1 (마) 3의 배수

답 ②

07 (1) a, b가 모두 홀수가 아니면 a, b는 서로소가 아니다.

(2) a, b가 모두 홀수가 아니면 a, b는 모두 짝수이므로

$a=2m$, $b=2n$ (m, n은 자연수)

으로 나타낼 수 있다.

이때 2는 a, b의 공약수이므로 a, b는 서로소가 아니다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

08 mn이 짝수일 때, m, n이 모두 $\boxed{\text{홀수}}$라 가정하면

$m=2k-1$, $n=2l-1$ (k, l은 자연수)

로 나타낼 수 있으므로

$$mn=(2k-1)(2l-1)$$
$$=4kl-2k-2l+1$$
$$=2(2kl-k-l)+\boxed{1}$$

이때 $2kl-k-l$은 0 또는 자연수이므로 mn은 $\boxed{\text{홀수}}$이다.

그런데 이것은 mn이 짝수라는 가정에 모순이므로 m 또는 n이 짝수이다.

$\therefore$ (가) 홀수 (나) 1 (다) 홀수

답 ③

Q BOX

09 $\sqrt{5}$가 유리수라고 가정하면

$$\sqrt{5}=\frac{n}{m}\ (m,\ n\text{은 서로소인 자연수})$$

으로 나타낼 수 있다.

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$5m^2=n^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 n^2이 5의 배수이므로 n도 5의 배수이다.

$n=5k$ (k는 자연수)로 놓으면 ㉠에서

$$5m^2=25k^2 \qquad \therefore\ m^2=5k^2$$

따라서 m^2이 5의 배수이므로 m도 5의 배수이다.

이것은 m, n이 서로소라는 가정에 모순이므로 $\sqrt{5}$는 유리수가 아니다.

답 풀이 참조

$A>B$ 꼴의 부등식의 증명
➡ $A-B>0$임을 보인다.

10 $$\frac{a}{1+a}-\frac{b}{1+b}=\frac{a(1+b)-\boxed{b(1+a)}}{(1+a)(1+b)}$$
$$=\frac{a+ab-b-ab}{(1+a)(1+b)}$$
$$=\frac{\boxed{a-b}}{(1+a)(1+b)}>0$$

$a>b>0$에서
$a-b>0$, $1+a>0$, $1+b>0$
이므로
$\dfrac{a-b}{(1+a)(1+b)}>0$

$$\therefore\ \frac{a}{1+a}>\frac{b}{1+b}$$

$\therefore$ (가) $b(1+a)$ (나) $a-b$

답 ②

근호 또는 절댓값이 있는 부등식의 증명
➡ $a>0$, $b>0$일 때, $a>b\Longleftrightarrow a^2>b^2$임을 이용한다.

11 $$(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$$
$$=(a-b)-(a+b-\boxed{2\sqrt{ab}})$$
$$=2\sqrt{ab}-2b$$
$$=\boxed{2\sqrt{b}}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$$

이때 $\boxed{2\sqrt{b}}>0$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$이므로

$$\boxed{2\sqrt{b}}(\sqrt{a}-\sqrt{b})>0$$
$$\therefore\ (\sqrt{a-b})^2>(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$$

그런데 $\sqrt{a-b}>0$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$이므로

$$\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

$\therefore$ (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $2\sqrt{b}$

답 풀이 참조

$x^2+x<1$인 경우가 존재하므로 절대부등식이 아니다.

12 ㄱ. [반례] $x=\dfrac{1}{2}$이면 $\quad x^2+x=\dfrac{3}{4}<1$

ㄴ. $x^2-xy+y^2=\left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2$

이때 $\left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2\ge0$, $\dfrac{3}{4}y^2\ge0$이므로

$$x^2-xy+y^2\ge0$$

(단, 등호는 $x=y=0$일 때 성립)

ㄷ. $x^2+y^2+1-(x+y+xy)$

$$=\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2-2x-2y-2xy)$$
$$=\frac{1}{2}\{(x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2\}$$

이때 $(x-1)^2\ge0$, $(y-1)^2\ge0$, $(x-y)^2\ge0$이므로

$$x^2+y^2+1-(x+y+xy)\ge0$$
$$\therefore\ x^2+y^2+1\ge x+y+xy$$

(단, 등호는 $x=y=1$일 때 성립)

이상에서 절대부등식인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

13 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+b\ge 2\sqrt{ab}$$

이때 $ab=16$이므로

$$a+b\ge 2\sqrt{16}$$
$$=2\cdot 4=8 \text{ (단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립)}$$

따라서 $a+b$의 최솟값은 8이다. 답 ③

다른 풀이 $ab=16$에서 $a>0$이므로 $b=\dfrac{16}{a}$

$$\therefore a+b=a+\frac{16}{a}$$
$$\ge 2\sqrt{a\cdot\frac{16}{a}}$$
$$=2\cdot 4=8 \text{ (단, 등호는 } a=4\text{일 때 성립)}$$

14 $9x+y=18$이므로

$$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=\frac{9x+y}{xy}=\frac{18}{xy} \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편 $9x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$9x+y\ge 2\sqrt{9x\cdot y}=6\sqrt{xy}$$
$$6\sqrt{xy}\le 18, \quad \sqrt{xy}\le 3$$

양변을 제곱하면

$$xy\le 9 \text{ (단, 등호는 } 9x=y\text{일 때 성립)}$$

따라서 ㉠에서

$$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=\frac{18}{xy}\ge\frac{18}{9}=2$$

이므로 구하는 최솟값은 2이다. 답 2

15 $x^2>0$, $4y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+4y^2\ge 2\sqrt{x^2\cdot 4y^2}=4|xy|$$

이때 $x^2+4y^2=12$이므로

$$4|xy|\le 12, \quad |xy|\le 3$$
$$\therefore -3\le xy<0 \text{ 또는 } 0<xy\le 3$$
$$\text{(단, 등호는 } |x|=2|y|\text{일 때 성립)}$$

따라서 $M=3$, $m=-3$이므로

$$M-m=6$$ 답 ③

16 (1) $x^2+y^2=10^2=100$

(2) 직각삼각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}xy$

한편 $x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+y^2\ge 2\sqrt{x^2y^2}=2xy\ (\because x>0,\ y>0)$$

이때 $x^2+y^2=100$이므로

$$100\ge 2xy$$
$$\therefore xy\le 50 \text{ (단, 등호는 } x=y\text{일 때 성립)}$$

따라서 직각삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}xy\le 25$$

이므로 구하는 최댓값은 25이다.

답 (1) $x^2+y^2=100$ (2) 25

Q BOX

$5x=\dfrac{5}{x}$에서 $x^2=1$
$\therefore x=1\ (\because x>0)$
$2y=\dfrac{8}{y}$에서 $y^2=4$
$\therefore y=2\ (\because y>0)$

$a=\dfrac{16}{a}$에서 $a^2=16$
$\therefore a=4\ (\because a>0)$

$4(x+2)=\dfrac{1}{x+2}$에서
$(x+2)^2=\dfrac{1}{4}$
$x+2>0$이므로
$x+2=\dfrac{1}{2}$
$\therefore x=-\dfrac{3}{2}$

등호는 $9x=y$일 때 성립하고 $9x+y=18$이므로
$9x=9$, $y=9$
$\therefore x=1$, $y=9$
따라서 $x=1$, $y=9$일 때 xy는 최댓값을 갖는다.

$x\ne 0$, $y\ne 0$이므로
$xy\ne 0$

$x^2=4y^2$에서
$x^2=(2y)^2$
$\therefore |x|=2|y|$

17 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$5x+2y+\frac{5}{x}+\frac{8}{y}=5x+\frac{5}{x}+2y+\frac{8}{y}$$
$$\ge 2\sqrt{5x\cdot\frac{5}{x}}+2\sqrt{2y\cdot\frac{8}{y}}$$
$$=2\cdot 5+2\cdot 4$$
$$=18$$
$$\text{(단, 등호는 } x=1,\ y=2\text{일 때 성립)}$$

따라서 구하는 최솟값은 18이다. 답 18

18 $x>-2$에서 $x+2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4x+\frac{1}{x+2}=4(x+2)+\frac{1}{x+2}-8$$
$$\ge 2\sqrt{4(x+2)\cdot\frac{1}{x+2}}-8$$
$$=2\cdot 2-8$$
$$=-4$$
$$\left(\text{단, 등호는 } x=-\frac{3}{2}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 구하는 최솟값은 -4이다. 답 ②

19 $\left(a-\dfrac{1}{a}\right)\left(a-\dfrac{9}{a}\right)=a^2-9-1+\dfrac{9}{a^2}$

$$=a^2+\frac{9}{a^2}-10 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a>0$에서 $a^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2+\frac{9}{a^2}\ge 2\sqrt{a^2\cdot\frac{9}{a^2}}$$
$$=2\cdot 3=6$$

따라서 ㉠에서

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a-\frac{9}{a}\right)=a^2+\frac{9}{a^2}-10\ge 6-10=-4$$

등호는 $a^2=\dfrac{9}{a^2}$일 때 성립하므로 $a^4=9$

$$a^2=3\ (\because a^2>0)$$
$$\therefore a=\sqrt{3}\ (\because a>0)$$ 답 $\sqrt{3}$

20 $\left(x+\dfrac{1}{4y}\right)\left(9y+\dfrac{1}{4x}\right)=9xy+\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4}+\dfrac{1}{16xy}$

$$=9xy+\frac{1}{16xy}+\frac{5}{2} \quad \cdots ㉠$$

이때 $xy>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$9xy+\frac{1}{16xy}\ge 2\sqrt{9xy\cdot\frac{1}{16xy}}$$
$$=2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$$

따라서 ㉠에서

$$\left(x+\frac{1}{4y}\right)\left(9y+\frac{1}{4x}\right)=9xy+\frac{1}{16xy}+\frac{5}{2}$$
$$\ge\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4$$

즉 $\left(x+\frac{1}{4y}\right)\left(9y+\frac{1}{4x}\right)$의 최솟값은 4이고, 등호는

$9xy=\frac{1}{16xy}$일 때 성립하므로

$$(xy)^2=\frac{1}{144} \qquad \therefore xy=\frac{1}{12}\ (\because xy>0)$$

따라서 $k=\frac{1}{12}$, $m=4$이므로

$$km=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

21 $x^2+y^2=10$이므로

$$x^2+6x+y^2+2y=6x+2y+10$$

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(6^2+2^2)(x^2+y^2)\ge(6x+2y)^2$$

이때 $x^2+y^2=10$이므로

$$(6x+2y)^2\le 400$$

$$\therefore -20\le 6x+2y\le 20$$

$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{6}=\frac{y}{2}\text{일 때 성립}\right)$$

$$\therefore -10\le 6x+2y+10\le 30$$

따라서 x^2+6x+y^2+2y의 최솟값은 -10이다.

답 -10

22 a, b, c, d가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2$$

이때 $a^2+b^2=8$, $c^2+d^2=12$이므로

$$(ac+bd)^2\le 8\cdot 12=96$$

$$\therefore -4\sqrt{6}\le ac+bd\le 4\sqrt{6}$$

$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{c}{a}=\frac{d}{b}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $ac+bd$의 값이 될 수 있는 정수는

$$-9,\ -8,\ \cdots,\ 8,\ 9$$

의 19개이다.

답 ③

23 직사각형의 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y라 하면 직사각형의 대각선의 길이는 원의 지름의 길이와 같으므로

$$x^2+y^2=6^2=36$$

이때 직사각형의 둘레의 길이는 $2x+2y$이고 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(2^2+2^2)(x^2+y^2)\ge(2x+2y)^2$$

$$8\cdot 36\ge(2x+2y)^2$$

$$\therefore (2x+2y)^2\le 288$$

이때 $x>0$, $y>0$이므로

$$0<2x+2y\le 12\sqrt{2}\ (\text{단, 등호는 } x=y\text{일 때 성립})$$

따라서 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은 $12\sqrt{2}$이다.

답 $12\sqrt{2}$

Q BOX

$\frac{x}{2}=\frac{y}{2}$에서 $x=y$

04 함수

08 함수

W 31쪽

01 (1) X의 원소 3에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

(2) X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

이때 정의역은 $\{1, 2, 3\}$, 공역은 $\{a, b, c, d\}$, 치역은 $\{a, b, c\}$이다.

답 풀이 참조

$f: X \longrightarrow Y$라 하면 $f(1)=b$, $f(2)=c$, $f(3)=a$

02 (1) $x=-1$일 때, $y=-2\cdot(-1)+5=7$

$x=0$일 때, $y=-2\cdot 0+5=5$

$x=1$일 때, $y=-2\cdot 1+5=3$

$x=2$일 때, $y=-2\cdot 2+5=1$

따라서 치역은 $\{1, 3, 5, 7\}$이다.

(2) $x=-1$일 때, $y=|-1-4|=5$

$x=0$일 때, $y=|0-4|=4$

$x=1$일 때, $y=|1-4|=3$

$x=2$일 때, $y=|2-4|=2$

따라서 치역은 $\{2, 3, 4, 5\}$이다.

답 (1) $\{1, 3, 5, 7\}$ (2) $\{2, 3, 4, 5\}$

03 (1) $f(-1)=g(-1)=0$, $f(1)=g(1)=2$

따라서 두 함수 f, g는 서로 같은 함수이다.

(2) $f(0)=1$, $g(0)=0$이므로 $f(0)\ne g(0)$

따라서 두 함수 f, g는 서로 같은 함수가 아니다.

답 (1) 서로 같은 함수이다.
(2) 서로 같은 함수가 아니다.

$f(2)=3$, $g(2)=6$이므로
$f(2)\ne g(2)$
임을 이용하여 확인할 수도 있다.

04 답 (1) × (2) ○

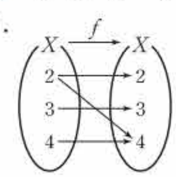
그래프가 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 두 점에서 만날 때가 있으므로 함수의 그래프가 아니다.

05 답 (1) ㄱ, ㄷ, ㄹ (2) ㄱ, ㄷ (3) ㄱ (4) ㄴ

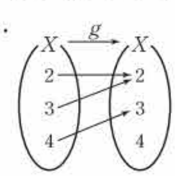
06 답 (1) ㄱ, ㄹ (2) ㄱ (3) ㄱ (4) ㄴ

07 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

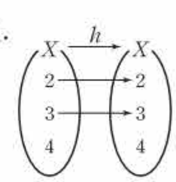
ㄱ.



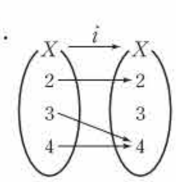
ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.



4를 4로 나누었을 때의 나머지는 0이다.

이상에서 X에서 X로의 함수인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄹ

08 ④ 실수 a에 대하여 직선 $x=a$가 그래프와 2개 이상의 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

답 ④

09 ① $-2\le x\le 2$에서 $0\le x+2\le 4$

$\therefore 0\le y\le 4$

② $-2\le x\le 2$에서 $-4\le -2x\le 4$

$\therefore -4\le y\le 4$

③ $-2\le x\le 2$에서 $0\le |x|\le 2$

$1\le |x|+1\le 3$ $\therefore 1\le y\le 3$

④ $-2\le x\le 2$에서 $0\le x^2\le 4$

$-4\le -x^2\le 0$ $\therefore 0\le -x^2+4\le 4$

$\therefore 0\le y\le 4$

⑤ $-2\le x\le 2$에서 $-4\le x-2\le 0$

$0\le (x-2)^2\le 16$ $\therefore 0\le \frac{1}{4}(x-2)^2\le 4$

$\therefore 0\le y\le 4$

따라서 X에서 Y로의 함수가 아닌 것은 ②이다.

답 ②

10 $f(-1)=6$이므로 $-3+a=6$

$\therefore a=9$

따라서 $f(x)=3x+9$이므로

$f(2)=3\cdot 2+9=15$ 답 15

11 $\frac{x+1}{2}=3$에서

$x+1=6$ $\therefore x=5$

$x=5$를 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=x^2-10$에 대입하면

$f(3)=5^2-10=15$ 답 ⑤

다른 풀이 $\frac{x+1}{2}=t$로 놓으면 $x=2t-1$

$\therefore f(t)=(2t-1)^2-10=4t^2-4t-9$

따라서 $f(x)=4x^2-4x-9$이므로

$f(3)=4\cdot 3^2-4\cdot 3-9=15$

12 $f(0)=-1$, $g(0)=5$이므로

$h(0)=g(0)=5$

$f(4)=15$, $g(4)=9$이므로

$h(4)=f(4)=15$

$\therefore h(0)+h(4)=5+15=20$ 답 20

쌤 한마디

$f(x)\ge g(x)$를 만족시키는 x의 값의 범위는

$x^2-1\ge x+5$에서 $x^2-x-6\ge 0$

$(x+2)(x-3)\ge 0$ $\therefore x\le -2$ 또는 $x\ge 3$

마찬가지 방법으로 $f(x)<g(x)$를 만족시키는 x의 값의 범위를 구하면

$-2<x<3$

$\therefore h(x)=\begin{cases} x^2-1 & (x\le -2 \text{ 또는 } x\ge 3) \\ x+5 & (-2<x<3) \end{cases}$

13 정의역이 $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$이므로

$f(-5)=|-5+4|=1$, $f(-4)=|-4+4|=0$,

$f(-3)=|-3+4|=1$, $f(-2)=|-2+4|=2$,

$f(-1)=|-1+4|=3$, $f(0)=|0+4|=4$

따라서 치역은 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$이므로 치역의 원소가 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

14 일차함수 $y=ax+b$에서 $a>0$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. 즉

$x=-3$일 때 $y=-10$, $x=1$일 때 $y=6$

이어야 하므로

$-3a+b=-10$, $a+b=6$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=2$

$\therefore ab=8$ 답 8

15 (i) $a>0$일 때,

$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 같으므로

$f(-1)=-1$, $f(2)=2$

$-a+b=-1$, $2a+b=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=0$

그런데 $ab=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때,

$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 같으므로

$f(-1)=2$, $f(2)=-1$

$-a+b=2$, $2a+b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$

이때 $ab=-1$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=-1$, $b=1$

$\therefore a^2+b^2=2$ 답 ①

Q BOX

함수 $f(x)$는 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값도 증가한다.

함수 $f(x)$는 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 감소한다.

16 ① $f(-1)=-1$, $g(-1)=1$이므로

$f(-1)\ne g(-1)$ $\therefore f\ne g$

② $f(-1)=-1$, $g(-1)=1$이므로

$f(-1)\ne g(-1)$ $\therefore f\ne g$

③ $f(-1)=g(-1)=1$, $f(0)=g(0)=0$,

$f(1)=g(1)=1$이므로 $f=g$

④ $f(-1)=-1$, $g(-1)=1$이므로

$f(-1)\ne g(-1)$ $\therefore f\ne g$

⑤ $f(1)=-1$, $g(1)=1$이므로

$f(1)\ne g(1)$ $\therefore f\ne g$

답 ③

17 $f(-2)=g(-2)$에서

$4-2a+b=-4a-b$, $2a+2b=-4$

$\therefore a+b=-2$ …… ㉠

$f(4)=g(4)$에서

$16+4a+b=8a-b$, $4a-2b=16$

$\therefore 2a-b=8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-4$

즉 $f(x)=x^2+2x-4$이므로

$f(-2)=-4,\ f(4)=20$

따라서 함수 f의 치역은 $\{-4,\ 20\}$이다. 답 $\{-4,\ 20\}$

18 $x^2-3x+6=3x-2$에서 $\quad x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0 \qquad \therefore x=2$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 집합 X는 집합 $\{2,\ 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로

$\{2\},\ \{4\},\ \{2,\ 4\}$ 답 $\{2\},\ \{4\},\ \{2,\ 4\}$

19 $f(-1)=g(-1)$에서

$-1+4=1-5+b \qquad \therefore b=7$

즉 $g(x)=x^2+5x+7$이므로 $f(a)=g(a)$에서

$a^3+4=a^2+5a+7, \qquad a^3-a^2-5a-3=0$

$(a+1)^2(a-3)=0 \qquad \therefore a=3\ (\because a\neq -1)$

$\therefore a+b=10$ 답 ②

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -1 & -5 & -3 \\ & & -1 & 2 & 3 \\ \hline -1 & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \\ & & -1 & 3 & \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

20 ① [반례] $f(x)=1$이라 하면 $x_1=1,\ x_2=2$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=1,\ f(x_2)=1 \qquad \therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=1$은 일대일함수가 아니다.

③ [반례] $f(x)=|x-2|$라 하면 $x_1=1,\ x_2=3$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=|1-2|=1,\ f(x_2)=|3-2|=1$

$\therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=|x-2|$는 일대일함수가 아니다.

④ [반례] $f(x)=x^2-4x$라 하면 $x_1=0,\ x_2=4$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=0,\ f(x_2)=4^2-4\cdot4=0$

$\therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=x^2-4x$는 일대일함수가 아니다.

⑤ [반례] $f(x)=x+|x|$라 하면 $x_1=-1,\ x_2=-2$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=-1+|-1|=0,$

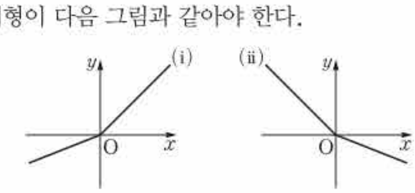
$f(x_2)=-2+|-2|=0$

$\therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=x+|x|$는 일대일함수가 아니다.

답 ②

21 함수 f가 일대일함수가 되려면 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $-a>0,\ a-4>0$일 때, 이를 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $-a<0,\ a-4<0$일 때,

$a>0,\ a<4 \qquad \therefore 0<a<4$

(i), (ii)에서 구하는 정수 a는 1, 2, 3의 3개이다. 답 3

22 ③ 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일대응이다.

답 ③

쌤 한마디

①, ②, ④, ⑤는 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 2개 이상의 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다. 이때 일대일함수가 아니면 일대일대응도 아니다.

23 $f(1)+f(2)=11$이고 f는 일대일대응이므로

$f(1)=5,\ f(2)=6$ 또는 $f(1)=6,\ f(2)=5$

(i) $f(1)=5,\ f(2)=6$일 때,

$f(2)+f(3)=10$에서 $\qquad 6+f(3)=10$

$\therefore f(3)=4$

(ii) $f(1)=6,\ f(2)=5$일 때,

$f(2)+f(3)=10$에서 $\qquad 5+f(3)=10$

$\therefore f(3)=5$

$f(2)=5,\ f(3)=5$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

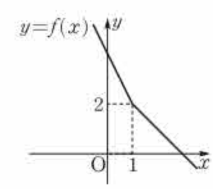
함수 f가 일대일대응이 아니다.

(i), (ii)에서 $\qquad f(1)=5,\ f(2)=6,\ f(3)=4$

$\therefore 3f(2)-f(3)=3\cdot6-4=14$ 답 14

24 함수 f가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다. 즉 직선 $y=ax+b$의 기울기가 음수이고 점 $(1,\ 2)$를 지나야 하므로

$a<0,\ a+b=2$ 답 ②



$x\geq1$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값이 감소하므로 $x<1$에서도 x의 값이 증가할 때 y의 값이 감소해야 한다.

25 함수 f가 일대일대응이고 $f(1)=2$이므로 $f(2),\ f(3),\ f(4)$의 값은 각각 서로 다르고 1, 3, 4 중 하나이어야 한다.

집합 X의 원소 중에서 2를 제외한 나머지

이때 $f(2)<f(4)<f(3)$이므로

$f(2)=1,\ f(3)=4,\ f(4)=3$

$\therefore f(2)+f(3)-f(4)=1+4-3=2$ 답 2

26 $f(x)=x^2-4x+a=(x-2)^2+a-4$

이므로 $x\geq4$일 때 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.

따라서 함수 f가 일대일대응이 되려면 $f(4)=5$이어야 하므로

(치역)=(공역)

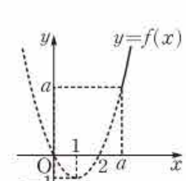
$16-16+a=5 \qquad \therefore a=5$

즉 $f(x)=x^2-4x+5$이므로

$f(7)=7^2-4\cdot7+5=26$ 답 ④

27 $f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$

이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$a<1$이면 $x\geq a$에서 일대일대응이 아니므로 $a\geq1$이어야 한다. 또 치역과 공역이 같아야 하므로

$f(a)=a$

즉 $a\geq 1$, $f(a)=a$이므로

$a^2-2a=a$, $a^2-3a=0$

$a(a-3)=0$ $\therefore a=3$ ($\because a\geq 1$) 답 ③

28 함수 f가 상수함수이므로

$f(1)=f(2)=f(3)=\cdots=f(9)=f(10)=2$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(9)=2\cdot 9=18$

답 18

29 ㄱ. $f(-1)=1$, $f(0)=0$, $f(1)=-1$

따라서 함수 $f(x)$는 항등함수가 아니다.

ㄴ. $g(-1)=-1$, $g(0)=0$, $g(1)=1$

따라서 함수 $g(x)$는 항등함수이다.

ㄷ. $h(-1)=\dfrac{-1-|-1|}{2}=-1$, $h(0)=0$,

$h(1)=\dfrac{1-|1|}{2}=0$

따라서 함수 $h(x)$는 항등함수가 아니다.

ㄹ. $i(-1)=-\sqrt{-(-1)}=-1$, $i(0)=0$,

$i(1)=\sqrt{1}=1$

따라서 함수 $i(x)$는 항등함수이다.

이상에서 항등함수인 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

30 $f(x)$가 항등함수가 되려면 $f(x)=x$이어야 하므로

$x^2-12=x$, $x^2-x-12=0$

$(x+3)(x-4)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=4$

따라서 집합 X는 집합 $\{-3, 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 구하는 집합 X의 개수는

$2^2-1=3$ 답 ②

31 X에서 X로의 함수의 개수는

$4^4=256$

X에서 X로의 일대일대응의 개수는

$4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$

X에서 X로의 상수함수의 개수는 4

따라서 $a=256$, $b=24$, $c=4$이므로

$a+b+c=284$ 답 284

32 X에서 Y로의 함수의 개수는

$2^3=8$

정의역의 모든 원소가 공역의 원소 1에 대응하는 함수, 즉 치역이 $\{1\}$인 함수의 개수는 1

정의역의 모든 원소가 공역의 원소 2에 대응하는 함수, 즉 치역이 $\{2\}$인 함수의 개수는 1

따라서 구하는 함수의 개수는

$8-(1+1)=6$ 답 ③

33 $f(0)\{f(1)-1\}\neq 0$에서

$f(0)\neq 0$, $f(1)\neq 1$

$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2의 2개

Q BOX

$f(10)=2$이므로
$f(x)=2$

집합 Y의 원소 중에서 a를 제외한 나머지

함수의 합성에서 결합법칙이 성립한다.

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 0, 2의 2개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 0, 1, 2의 3개

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$2\cdot 2\cdot 3=12$ 답 12

34 함수 f가 일대일함수이고 $f(1)=a$이므로 $f(2)$, $f(3)$의 값은 각각 서로 다르고 b, c, d 중 하나이어야 한다.

이때 $f(2)\neq c$이므로 $f(2)$의 값이 될 수 있는 것은

b, d의 2개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 b, c, d 중 $f(2)$의 값을 제외한 2개

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$2\cdot 2=4$ 답 4

09 합성함수

36쪽

01 (1) $(g\circ f)(5)=g(f(5))=g(1)=4$

(2) $(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(10)=6$

(3) $(f\circ f)(9)=f(f(9))=f(5)=1$

(4) $(g\circ g)(-1)=g(g(-1))=g(-2)=-2$

답 (1) 4 (2) 6 (3) 1 (4) -2

02 (1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+2)$

$=(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8$

(2) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^3)=x^3+2$

(3) $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x+2)$

$=(x+2)+2=x+4$

(4) $(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(x^3)=(x^3)^3=x^9$

답 (1) $(g\circ f)(x)=x^3+6x^2+12x+8$

(2) $(f\circ g)(x)=x^3+2$

(3) $(f\circ f)(x)=x+4$

(4) $(g\circ g)(x)=x^9$

03 (1) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=2x^2+1$이므로

$((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ g)(h(x))$

$=(f\circ g)(-x+5)$

$=2(-x+5)^2+1$

$=2x^2-20x+51$

(2) $(g\circ h)(x)=g(h(x))=g(-x+5)$

$=(-x+5)^2=x^2-10x+25$

이므로

$(f\circ(g\circ h))(x)=f((g\circ h)(x))$

$=f(x^2-10x+25)$

$=2(x^2-10x+25)+1$

$=2x^2-20x+51$

(3) $((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ(g\circ h))(x)$

답 풀이 참조

04 $g(-2)=(-2)^3-(-2)=-6$이므로

$(f\circ g)(-2)=f(g(-2))=f(-6)$

$\qquad=(-6)^2-6=30$

$f(3)=3^2-6=3$이므로

$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(3)$

$\qquad=3^3-3=24$

$\therefore (f\circ g)(-2)+(g\circ f)(3)=30+24=54$

답 54

05 $g(7)=-7+9=2$이므로

$(f\circ g)(7)=f(g(7))=f(2)$

$\qquad=2^2-8=-4$

$\therefore a=-4$

$(g\circ f)(b)=g(f(b))=g(b^2-8)$

$\qquad=-(b^2-8)+9=-b^2+17$

즉 $-b^2+17=10$이므로 $\quad b^2=7$

$\therefore a^2+b^2=(-4)^2+7=23$

답 ④

06 $f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2=2$이므로

$(f\circ f)(\sqrt{2})=f(f(\sqrt{2}))=f(2)$

$\qquad=3\cdot2=6$

$(f\circ f\circ f)(\sqrt{2})=f((f\circ f)(\sqrt{2}))=f(6)$

$\qquad=3\cdot6=18$

$\therefore (f\circ f)(\sqrt{2})+(f\circ f\circ f)(\sqrt{2})=6+18=24$

답 24

07 $(f\circ(g\circ h))(6)=(f\circ g\circ h)(6)$

$\qquad=f(g(h(6)))$

$\qquad=f(g(4))$

$\qquad=f(14)$

$\qquad=7$

답 ②

08 $f(1)=4\cdot1^2+3=7$이므로

$(h\circ(g\circ f))(1)=((h\circ g)\circ f)(1)$

$\qquad=(h\circ g)(f(1))$

$\qquad=(h\circ g)(7)$

$\qquad=-7+12=5$

답 5

09 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+b)$

$\qquad=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$

따라서 $a^2x+ab+b=9x-8$이므로

$a^2=9,\ ab+b=-8$

$a^2=9$에서 $\quad a=3\ (\because a>0)$

$a=3$을 $ab+b=-8$에 대입하면

$3b+b=-8, \quad 4b=-8 \quad \therefore b=-2$

즉 $f(x)=3x-2$이므로

$f(2)=3\cdot2-2=4$

답 ①

10 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+a)=(x+a)^2-10$

$(g\circ f)(x)$가 $x+3$으로 나누어떨어지므로

$(g\circ f)(-3)=(-3+a)^2-10=0$

$\therefore a^2-6a-1=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 6이다.

답 6

쌤 한마디

인수정리

다항식 $P(x)$에 대하여

① $P(\alpha)=0$이면 $P(x)$는 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

② $P(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $P(\alpha)=0$이다.

$x-\alpha$는 $P(x)$의 인수이다.

11 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)$

$\qquad=(2x+1)^2-6(2x+1)+a$

$\qquad=4x^2-8x-5+a$

$(g\circ f)(x)\ge0$이 되려면 이차방정식

$4x^2-8x-5+a=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\dfrac{D}{4}=(-4)^2-4(-5+a)\le0$

$-4a+36\le0, \quad -4a\le-36$

$\therefore a\ge9$

따라서 구하는 a의 최솟값은 9이다.

답 ④

다른 풀이 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$\qquad=\{f(x)\}^2-6f(x)+a$

$\qquad=\{f(x)-3\}^2-9+a$

에서 $f(x)=3$, 즉 $x=1$일 때 함수 $(g\circ f)(x)$가 최솟값 $-9+a$를 가지므로 $(g\circ f)(x)\ge0$이 되려면

$-9+a\ge0$

이어야 한다.

$\therefore a\ge9$

따라서 구하는 a의 최솟값은 9이다.

12 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(bx+1)$

$\qquad=a(bx+1)-3=abx+a-3$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax-3)$

$\qquad=b(ax-3)+1=abx-3b+1$

$f\circ g=g\circ f$이므로

$abx+a-3=abx-3b+1$

$a-3=-3b+1 \qquad \therefore a+3b=4$

이때 a, b는 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+3b\ge2\sqrt{3ab}, \quad 4\ge2\sqrt{3ab}$

$\sqrt{3ab}\le2, \quad 3ab\le4$

$\therefore ab\le\dfrac{4}{3}$ (단, 등호는 $a=3b$일 때 성립)

따라서 ab의 최댓값은 $\dfrac{4}{3}$이다.

답 $\dfrac{4}{3}$

13 $(f\circ h)(x)=f(h(x))=3h(x)-11$

$(f\circ h)(x)=g(x)$이므로

$3h(x)-11=6x^2+1, \quad 3h(x)=6x^2+12$

Q BOX

(판별식)>0이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$\sqrt{2}$는 무리수

2는 유리수

$2x+1=3$에서

$2x=2 \quad \therefore x=1$

$h(6)=\dfrac{1}{2}\cdot6+1=4$

$g(4)=4^2-2=14$

$f(14)=14-7=7$

$a>0,\ b>0$일 때,

$\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

등호는 $a=3b$일 때 성립하고 $a+3b=4$이므로

$a=2,\ 3b=2$

$\therefore a=2,\ b=\dfrac{2}{3}$

따라서 $a=2,\ b=\dfrac{2}{3}$일 때 ab는 최댓값을 갖는다.

$\therefore h(x)=2x^2+4$

$\therefore h(-3)=2\cdot(-3)^2+4=22$ 답 ④

14 $f\left(\frac{3}{2}x+1\right)=9x+3$에서 $\frac{3}{2}x+1=t$로 놓으면

$3x+2=2t \quad \therefore x=\frac{2t-2}{3}$

따라서 $f(t)=9\cdot\frac{2t-2}{3}+3=6t-3$이므로

$f(x)=6x-3$ 답 $f(x)=6x-3$

15 $(h\circ g\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))$

$=(h\circ g)(ax+1)$

$=2(ax+1)-1$

$=2ax+1$

즉 $2ax+1=-2x+b$이므로

$2a=-2,\ 1=b \quad \therefore a=-1,\ b=1$

$\therefore a+b=0$ 답 ③

다른 풀이 $(h\circ g\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))=2f(x)-1$

이므로

$2f(x)-1=-2x+b$

$\therefore f(x)=-x+\frac{b+1}{2}$

즉 $ax+1=-x+\frac{b+1}{2}$이므로

$a=-1,\ 1=\frac{b+1}{2} \quad \therefore a=-1,\ b=1$

$\therefore a+b=0$

16 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+6)$

$=4(x+6)-20=4x+4$

$(h\circ g\circ f)(x)=f(x)$에서 $(h\circ(g\circ f))(x)=f(x)$이므로

$h(4x+4)=x+6$

$4x+4=t$로 놓으면 $\quad x=\frac{1}{4}t-1$

따라서 $h(t)=\frac{1}{4}t-1+6=\frac{1}{4}t+5$이므로

$h(x)=\frac{1}{4}x+5$ 답 $h(x)=\frac{1}{4}x+5$

17 $f(a)=b$라 하면 $(f\circ f)(a)=1$에서

$f(f(a))=f(b)=1$

이때 주어진 그래프에서 $f(2)=1$이므로

$b=2 \quad \therefore f(a)=2$

따라서 주어진 그래프에서 $f(3)=2$이므로

$a=3$ 답 ④

18 주어진 그래프에서

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x & (0\le x<2)\\ -3x+9 & (2\le x\le 3)\end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases}-3x+3 & (0\le x<1)\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{2} & (1\le x\le 3)\end{cases}$$

따라서 $(f\circ g)(2)=f(g(2))=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$,

$(g\circ f)\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=g\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$이므로

$(f\circ g)(2)-(g\circ f)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}=0$ 답 ③

19 주어진 그래프에서 $f(1)=2,\ f(3)=2$이므로

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=2$에서

$f(x)=1$ 또는 $f(x)=3$

주어진 그래프에서 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1,\ f(2)=3$이므로

Q BOX

$$f(x)=\begin{cases}2x & (0\le x<1)\\ x+1 & (1\le x<2)\\ -x+5 & (2\le x\le 3)\end{cases}$$

이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$

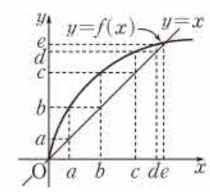
$f(x)=1$에서 $\quad x=\frac{1}{2}$

$f(x)=3$에서 $\quad x=2$

따라서 방정식 $(f\circ f)(x)=2$의 모든 실근의 곱은

$\frac{1}{2}\cdot 2=1$ 답 1

20 직선 $y=x$를 이용하여 x축과 점선이 만나는 점의 x좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같으므로



$(f\circ f\circ f\circ f)(a)$

$=f(f(f(f(a))))$

$=f(f(f(b)))$

$=f(f(c))$

$=f(d)$

$=e$ 답 ⑤

쌤 한마디

직선 $y=x$ 위의 점은 x좌표와 y좌표가 같다. 따라서 함수의 그래프와 직선 $y=x$가 주어질 때, 직선 $y=x$를 이용하여 주어진 그래프 위의 점의 x좌표 또는 y좌표를 구할 수 있다.

21 $f^1(x)=f(x)=x-1$에서

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$=x-1-1=x-2$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$

$=x-2-1=x-3$

$\vdots$

$\therefore f^{100}(x)=x-100$

$\therefore f^{100}(10)=-90$ 답 -90

다른 풀이 $f^1(10)=f(10)=9$에서 (10−1)

$f^2(10)=f(f(10))=f(9)=8$ (10−2)

$f^3(10)=f(f^2(10))=f(8)=7$ (10−3)

$\vdots$

$\therefore f^{100}(10)=10-100=-90$

22 $f^1(1)=f(1)=3$에서

$f^2(1)=f(f(1))=f(3)=7$

$f^3(1)=f(f^2(1))=f(7)=5$

$f^4(1)=f(f^3(1))=f(5)=1$
$f^5(1)=f(f^4(1))=f(1)=3$
$\vdots$

따라서 $f^n(1)$의 값은 3, 7, 5, 1이 이 순서대로 반복되므로

$f^{50}(1)=f^{4\cdot12+2}(1)=f^2(1)=7$　답 7

23 $f^1(2)=f(2)=1$에서
$f^2(2)=f(f(2))=f(1)=3$
$f^3(2)=f(f^2(2))=f(3)=2$
$f^4(2)=f(f^3(2))=f(2)=1$
$\vdots$

따라서 $f^n(2)$의 값은 1, 3, 2가 이 순서대로 반복되므로

$f^{400}(2)=f^{3\cdot133+1}(2)=f^1(2)=1$　답 1

10 역함수

W 39쪽

01 (1) 주어진 함수는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=-5x+2$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$5x=-y+2$　$\therefore x=-\frac{1}{5}y+\frac{2}{5}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$

(2) 주어진 함수는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$\frac{1}{4}x=y+\frac{1}{8}$　$\therefore x=4y+\frac{1}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=4x+\frac{1}{2}$

답 (1) $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$　(2) $y=4x+\frac{1}{2}$

함수 $y=f(x)$의 역함수
➡ $y=f(x)$에서 x를 y에 대한 식으로 나타낸 후 x와 y를 서로 바꾼다.

02 (1) $(f^{-1})^{-1}(2)=f(2)=1$

(2) $(g^{-1})^{-1}(3)=g(3)=2$

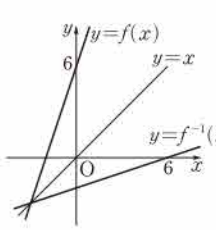
(3) $(f^{-1}\circ g)^{-1}(1)=(g^{-1}\circ f)(1)=g^{-1}(f(1))$
$=g^{-1}(2)=3$

(4) $(f\circ g^{-1})^{-1}(4)=(g\circ f^{-1})(4)=g(f^{-1}(4))$
$=g(3)=2$

답 (1) 1　(2) 2　(3) 3　(4) 2

두 함수 f, g의 역함수가 존재할 때,
$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

03 (1) 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로



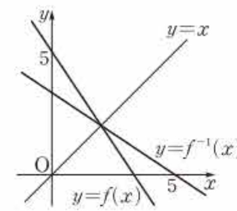
$3x+6=x$,　$2x=-6$

$\therefore x=-3$

따라서 구하는 교점의 좌표는

$(-3, -3)$

(2) 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로



$-\frac{3}{2}x+5=x$,　$\frac{5}{2}x=5$

$\therefore x=2$

따라서 구하는 교점의 좌표는

$(2, 2)$

답 (1) $(-3, -3)$　(2) $(2, 2)$

함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여
$f(a)=b$
$\Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$

04 $f^{-1}(9)=2$에서 $f(2)=9$이므로

$6\cdot2+a=9$　$\therefore a=-3$

따라서 $f(x)=6x-3$이므로

$f(-1)=6\cdot(-1)-3=-9$　답 ①

05 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 하면 $f(0)=0$이므로　$c=0$

$f^{-1}(-6)=-1$에서 $f(-1)=-6$이므로

$a-b=-6$　…… ㉠

$f^{-1}(24)=2$에서 $f(2)=24$이므로

$4a+2b=24$　$\therefore 2a+b=12$　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면　$a=2$, $b=8$

따라서 $f(x)=2x^2+8x$이므로

$f(5)=2\cdot5^2+8\cdot5=90$　답 90

06 $\frac{-x+5}{2}=t$로 놓으면

$-x+5=2t$　$\therefore x=-2t+5$

$\therefore f(t)=(-2t+5)-4=-2t+1$

$f^{-1}(7)=k$라 하면 $f(k)=7$이므로

$-2k+1=7$,　$-2k=6$

$\therefore k=-3$

$\therefore f^{-1}(7)=-3$　답 ②

다른 풀이 $f^{-1}(7)=k$라 하면　$f(k)=7$

$x-4=7$에서　$x=11$

$x=11$을 $f\left(\frac{-x+5}{2}\right)=x-4$에 대입하면

$f(-3)=7$　$\therefore f^{-1}(7)=-3$

07 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이다.

이때 $f(x)=-4x+3$에서 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소하므로

$y=f(x)$의 그래프의 기울기가 음수

$a=f(4)=-16+3=-13$,

$b=f(-1)=4+3=7$

$\therefore b-a=20$　답 20

08 함수 f의 역함수가 존재하려면 f는 일대일대응이어야 한다.
즉 $x\ge 2$에서 $y=f(x)$의 그래프의 기울기가 양수이므로 $x<2$에서 $y=f(x)$의 그래프의 기울기도 양수이어야 한다.

$\therefore a>0$

또 $x=2$에서 두 직선 $y=3x+a$, $y=ax+a^2$이 만나야 하므로

$6+a=2a+a^2$, $\quad a^2+a-6=0$

$(a+3)(a-2)=0 \quad \therefore a=2\ (\because a>0)$ 답 2

09 $f(x)=x^2-2x-10=(x-1)^2-11$
함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이므로

$a\ge 1$, $f(a)=a$

$f(a)=a$에서 $a^2-2a-10=a$이므로

$a^2-3a-10=0$, $\quad (a+2)(a-5)=0$

$\therefore a=5\ (\because a\ge 1)$ 답 5

10 $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=-2(x+4)+1=-2x-7$

$y=-2x-7$로 놓으면

$2x=-y-7 \quad \therefore x=-\frac{1}{2}y-\frac{7}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=-\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$

$\therefore h^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$

답 $h^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$

11 $f(6)=2$이므로 $\quad f^{-1}(2)=6$
즉 $f^{-1}(2)=2c-2=6$에서

$2c=8 \quad \therefore c=4$

$f^{-1}(x)=4x-2$에서 $y=4x-2$로 놓으면

$4x=y+2 \quad \therefore x=\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$이므로

$a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{2}$

$\therefore 2a+b+c=2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+4=5$ 답 ③

다른 풀이 $f^{-1}(x)=4x-2$에서 $f^{-1}(1)=2$이므로

$f(2)=1$

따라서 $f(2)=2a+b=1$이므로

$2a+b+c=1+4=5$

12 $f(x)=3x-3$에서 $y=3x-3$으로 놓으면

$3x=y+3 \quad \therefore x=\frac{1}{3}y+1$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{1}{3}x+1$

QBOX

함수 f의 역함수의 역함수는 f이다. 즉 $(f^{-1})^{-1}=f$

$f\circ f^{-1}=I$
(I는 항등함수)

따라서 $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+1$이므로

$(g\circ f^{-1})(x)=\frac{1}{6}x-1$에서

$g\left(\frac{1}{3}x+1\right)=\frac{1}{6}x-1$

$\frac{1}{3}x+1=t$로 놓으면

$\frac{1}{3}x=t-1 \quad \therefore x=3t-3$

따라서 $g(t)=\frac{1}{6}(3t-3)-1=\frac{1}{2}t-\frac{3}{2}$이므로

$g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ 답 $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

13 $g(3)=2$이므로 $\quad g^{-1}(2)=3$

$\therefore (f^{-1}\circ g^{-1})(2)=f^{-1}(g^{-1}(2))=f^{-1}(3)$

이때 $f(2)=3$이므로 $\quad f^{-1}(3)=2$

$\therefore (f^{-1}\circ g^{-1})(2)=f^{-1}(3)=2$ 답 2

14 $(f^{-1}\circ g)(-1)=f^{-1}(g(-1))=f^{-1}(-6)$
$f^{-1}(-6)=k$라 하면 $f(k)=-6$이므로

$8k+2=-6$, $\quad 8k=-8$

$\therefore k=-1$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(-1)=f^{-1}(-6)=-1$ 답 ③

15 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=4\left(\frac{1}{2}x-2\right)+a$

$=2x-8+a$

따라서 $2x-8+a=2x-5$이므로

$-8+a=-5 \quad \therefore a=3$

$\therefore f(x)=4x+3$

$g^{-1}(3)=k$라 하면 $g(k)=3$이므로

$\frac{1}{2}k-2=3$, $\quad \frac{1}{2}k=5$

$\therefore k=10$

$\therefore (f\circ g^{-1})(3)=f(g^{-1}(3))=f(10)$

$=4\cdot 10+3=43$ 답 ③

16 $(f\circ(g\circ f)^{-1})(4)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1})(4)=g^{-1}(4)$
$g^{-1}(4)=k$라 하면 $g(k)=4$이므로

$10k-6=4$, $\quad 10k=10$

$\therefore k=1$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1})(4)=g^{-1}(4)=1$ 답 1

17 $(f^{-1}\circ g^{-1})(1)+(g\circ f)^{-1}(1)$

$=(f^{-1}\circ g^{-1})(1)+(f^{-1}\circ g^{-1})(1)$

$=2(f^{-1}\circ g^{-1})(1)=2f^{-1}(g^{-1}(1))$

$g^{-1}(1)=a$라 하면 $g(a)=1$이므로

$a+5=1 \quad \therefore a=-4$

$f^{-1}(-4)=b$라 하면 $f(b)=-4$이므로

$3b+8=-4$, $\quad 3b=-12$

$\therefore b=-4$

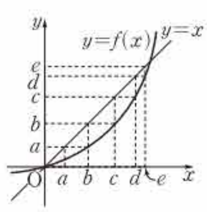
$\therefore (f^{-1}\circ g^{-1})(1)+(g\circ f)^{-1}(1)$
$=2f^{-1}(g^{-1}(1))=2f^{-1}(-4)$
$=2\cdot(-4)=-8$ 답 ②

18 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=x$이므로
$f(g(x))=g(f(x))=x$
$\therefore g(x)=f^{-1}(x)$
따라서 $g(5)=k$라 하면 $f^{-1}(5)=k$이므로
$f(k)=5, \quad \frac{1}{2}k+7=5$
$\frac{1}{2}k=-2 \quad \therefore k=-4$
$\therefore g(5)=-4$ 답 ①

다른 풀이 $y=\frac{1}{2}x+7$로 놓으면
$\frac{1}{2}x=y-7 \quad \therefore x=2y-14$
x와 y를 서로 바꾸면
$y=2x-14$
즉 $g(x)=2x-14$이므로
$g(5)=-4$

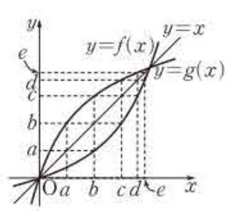
$g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 $f(x)$의 역함수를 직접 구한다.

19 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$(f\circ f)^{-1}(b)=(f^{-1}\circ f^{-1})(b)$
$=f^{-1}(f^{-1}(b))$
이고 $f^{-1}(b)=k$라 하면 $f(k)=b$이므로
$k=c$
$f^{-1}(c)=l$이라 하면 $f(l)=c$이므로
$l=d$
$\therefore (f\circ f)^{-1}(b)=f^{-1}(f^{-1}(b))=f^{-1}(c)=d$
답 ④

20 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$(f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(d)$
$=f^{-1}(g^{-1}(f(d)))$
이고 $f(d)=c$이므로
$f^{-1}(g^{-1}(f(d)))=f^{-1}(g^{-1}(c))$
$g^{-1}(c)=k$라 하면 $g(k)=c$이므로
$k=b$
$f^{-1}(b)=l$이라 하면 $f(l)=b$이므로
$l=c$
$\therefore (f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(d)=f^{-1}(g^{-1}(f(d)))$
$=f^{-1}(g^{-1}(c))$
$=f^{-1}(b)$
$=c$ 답 c

Q BOX

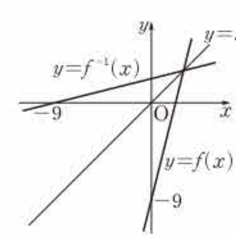
함수 f와 그 역함수 f^{-1}에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 점 (a, b)를 지나면 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 (b, a)를 지난다.

21 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-1, -3)$을 지나므로
$-a+b=-3$ …… ㉠
또 $y=f(x)$의 역함수의 그래프가 점 $(9, 2)$를 지나므로 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(2, 9)$를 지난다.
$\therefore 2a+b=9$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=4, b=1$
$\therefore a+b=5$ 답 5

22 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2, 4)$를 지나므로 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(4, 2)$를 지난다.
이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치하므로 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(2, 4)$, $(4, 2)$를 지난다.
$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$2a+b=4, 4a+b=2$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=-1, b=6$
따라서 $f(x)=-x+6$이므로
$f(-2)=8$ 답 ③

다른 풀이 $f=f^{-1}$이므로 $\quad (f\circ f)(x)=x$
일차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2, 4)$를 지나므로
$f(x)=a(x-2)+4=ax-2a+4 \ (a\neq 0)$
라 하면
$(f\circ f)(x)=f(f(x))$
$=a(ax-2a+4)-2a+4$
$=a^2x-2a^2+2a+4$
따라서 $a^2x-2a^2+2a+4=x$이므로
$a^2=1, \ -2a^2+2a+4=0$
$a^2=1$에서 $\quad a=\pm 1$ …… ㉠
$-2a^2+2a+4=0$에서 $\quad a^2-a-2=0$
$(a+1)(a-2)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $a=-1$이므로 $\quad f(x)=-x+6$
$\therefore f(-2)=8$

23 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 점 P는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점이므로 $4x-9=x$에서
$3x=9 \quad \therefore x=3$
즉 $P(3, 3)$이므로
$\overline{OP}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$ 답 $3\sqrt{2}$

원점 O와 점 $A(x_1, y_1)$ 사이의 거리
➡ $\overline{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

05 유리식과 유리함수

11 유리식

42쪽

01 (1) $\frac{1}{x+3}$, $\frac{x+3}{x-3}$에서 공통분모가 $(x+3)(x-3)$이 되도록 통분하면

$\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}$, $\frac{(x+3)^2}{(x+3)(x-3)}$

(2) $\frac{x+1}{(x-1)(x-4)}$, $\frac{x}{(x-1)(x+3)}$에서 공통분모가 $(x-1)(x-4)(x+3)$이 되도록 통분하면

$\frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)(x-4)(x+3)}$,

$\frac{x(x-4)}{(x-1)(x-4)(x+3)}$

(3) $\frac{x-4}{x^2+3x+2}=\frac{x-4}{(x+1)(x+2)}$,

$\frac{x+5}{x^2-4}=\frac{x+5}{(x+2)(x-2)}$에서 공통분모가 $(x+1)(x+2)(x-2)$가 되도록 통분하면

$\frac{(x-4)(x-2)}{(x+1)(x+2)(x-2)}$,

$\frac{(x+5)(x+1)}{(x+1)(x+2)(x-2)}$

답 (1) $\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}$, $\frac{(x+3)^2}{(x+3)(x-3)}$

(2) $\frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)(x-4)(x+3)}$, $\frac{x(x-4)}{(x-1)(x-4)(x+3)}$

(3) $\frac{(x-4)(x-2)}{(x+1)(x+2)(x-2)}$, $\frac{(x+5)(x+1)}{(x+1)(x+2)(x-2)}$

02 (1) $\frac{x^2-6x}{x^2-36}=\frac{x(x-6)}{(x+6)(x-6)}=\frac{x}{x+6}$

(2) $\frac{x^2-x-6}{x^2+6x+8}=\frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x+4)}=\frac{x-3}{x+4}$

(3) $\frac{x^2+4x-5}{x^3-3x^2+3x-1}=\frac{(x+5)(x-1)}{(x-1)^3}=\frac{x+5}{(x-1)^2}$

답 (1) $\frac{x}{x+6}$ (2) $\frac{x-3}{x+4}$ (3) $\frac{x+5}{(x-1)^2}$

03 (1) $\frac{1}{x+5}+\frac{2}{x-2}=\frac{x-2+2(x+5)}{(x+5)(x-2)}$

$=\frac{3x+8}{(x+5)(x-2)}$

(2) $\frac{5x-1}{x^2+x}-\frac{3}{x+1}=\frac{5x-1}{x(x+1)}-\frac{3}{x+1}$

$=\frac{5x-1-3x}{x(x+1)}$

$=\frac{2x-1}{x(x+1)}$

Q BOX

다항식 A, B, C $(B\neq0,\ C\neq0)$에 대하여

$\frac{A}{B}=\frac{A\times C}{B\times C}$

분자와 분모에 각각 $x-3$을 곱한다.

분자와 분모에 각각 $x+3$을 곱한다.

분자, 분모 중 인수분해되는 식은 인수분해한 다음 통분한다.

다항식 A, B, C $(B\neq0,\ C\neq0)$에 대하여

$\frac{A}{B}=\frac{A\div C}{B\div C}$

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$=(a-b)^3$

(3) $\frac{3x+1}{x^2+2x-3}\times\frac{x-1}{3x^2-5x-2}$

$=\frac{3x+1}{(x+3)(x-1)}\times\frac{x-1}{(3x+1)(x-2)}$

$=\frac{1}{(x+3)(x-2)}$

(4) $\frac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6}\div\frac{x^2-4x}{x+2}$

$=\frac{(x+1)(x-4)}{(x+2)(x+3)}\div\frac{x(x-4)}{x+2}$

$=\frac{(x+1)(x-4)}{(x+2)(x+3)}\times\frac{x+2}{x(x-4)}$

$=\frac{x+1}{x(x+3)}$

답 (1) $\frac{3x+8}{(x+5)(x-2)}$ (2) $\frac{2x-1}{x(x+1)}$

(3) $\frac{1}{(x+3)(x-2)}$ (4) $\frac{x+1}{x(x+3)}$

04 (1) $\frac{4x-3}{x+1}=\frac{4(x+1)-7}{x+1}=4-\frac{\boxed{7}}{x+1}$

(2) $\frac{1}{(x-2)(x+1)}$

$=\frac{1}{x+1-(x-2)}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)$

$=\frac{1}{\boxed{3}}\left(\frac{1}{\boxed{x-2}}-\frac{1}{x+1}\right)$

(3) $\frac{\frac{2}{x-3}}{\frac{2}{x+5}}=\frac{2(x+5)}{2(x-3)}=\frac{\boxed{x+5}}{x-3}$

답 (1) 7 (2) 3, $x-2$ (3) $x+5$

05 $\frac{x+2}{x^2-5x+4}-\frac{x-2}{x^2-7x+12}$

$=\frac{x+2}{(x-1)(x-4)}-\frac{x-2}{(x-3)(x-4)}$

$=\frac{(x+2)(x-3)-(x-2)(x-1)}{(x-1)(x-3)(x-4)}$

$=\frac{x^2-x-6-(x^2-3x+2)}{(x-1)(x-3)(x-4)}$

$=\frac{2x-8}{(x-1)(x-3)(x-4)}$

$=\frac{2(x-4)}{(x-1)(x-3)(x-4)}$

$=\frac{2}{(x-1)(x-3)}$

답 $\frac{2}{(x-1)(x-3)}$

06 $\frac{b}{(a+b)(b+c)}-\frac{a}{(a+b)(a-c)}$

$+\frac{c}{(a-c)(b+c)}$

$=\frac{b(a-c)-a(b+c)+c(a+b)}{(a+b)(b+c)(a-c)}$

$=\frac{ab-bc-ab-ac+ac+bc}{(a+b)(b+c)(a-c)}$

$=0$

답 ③

07 $\dfrac{x+6}{x^2+4x+3}\times\dfrac{x^2-x-12}{x^2-25}\div\dfrac{x^2+2x-24}{x+5}$

$=\dfrac{x+6}{(x+1)(x+3)}\times\dfrac{(x+3)(x-4)}{(x+5)(x-5)}$

$\div\dfrac{(x+6)(x-4)}{x+5}$

$=\dfrac{x+6}{(x+1)(x+3)}\times\dfrac{(x+3)(x-4)}{(x+5)(x-5)}$

$\times\dfrac{x+5}{(x+6)(x-4)}$

$=\dfrac{1}{(x+1)(x-5)}$

따라서 $f(x)=x-5$이므로 방정식 $f(x)=0$의 해는

$x=5$ 답 $x=5$

08 $\dfrac{x^3+y^3}{x-y}\div\dfrac{x^2-y^2}{3x^2-6xy+3y^2}$

$=\dfrac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x-y}\div\dfrac{(x+y)(x-y)}{3(x-y)^2}$

$=\dfrac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x-y}\times\dfrac{3(x-y)^2}{(x+y)(x-y)}$

$=3(x^2+y^2-xy)$

$=3\cdot(7-3)=12$ 답 12

> a^3+b^3
> $=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

> $3x^2-6xy+3y^2$
> $=3(x^2-2xy+y^2)$
> $=3(x-y)^2$

09 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$이므로 주어진 식의 양변에 x^3-1을 곱하여 정리하면

$x^2+x+1+(4x-5)(x-1)=ax^2+bx+c$

$\therefore\ 5x^2-8x+6=ax^2+bx+c$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a=5,\ b=-8,\ c=6$

$\therefore\ a+b-c=-9$ 답 ①

> ax^2+bx+c
> $=a'x^2+b'x+c'$
> 이 x에 대한 항등식이면
> $a=a',\ b=b',$
> $c=c'$

10 주어진 식의 양변에 $(x+1)(x-2)^2$을 곱하면

$a(x+1)(x-2)+b(x+1)-(x-2)^2=x^2+10x$

$\therefore\ (a-1)x^2+(-a+b+4)x-2a+b-4$

$=x^2+10x$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a-1=1,\ -a+b+4=10,\ -2a+b-4=0$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=8$

$\therefore\ ab=16$ 답 16

11 주어진 식의 양변에 $(x-1)^7$을 곱하여 정리하면

$x^6+1=a_1(x-1)^6+a_2(x-1)^5$

$+\cdots+a_6(x-1)+a_7$

이 식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^6+1=a_1+a_2+\cdots+a_7$

$\therefore\ a_1+a_2+\cdots+a_7=65$ 답 65

Q BOX

> 분자의 차수가 분모의 차수보다 크거나 같을 때에는 분자를 분모로 나누어 분자의 차수를 분모의 차수보다 작게 한 다음 계산한다.

12 $\dfrac{x-3}{x-4}-\dfrac{x-2}{x-3}+\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x-1}{x-2}$

$=\dfrac{(x-4)+1}{x-4}-\dfrac{(x-3)+1}{x-3}+\dfrac{(x-1)+1}{x-1}$

$-\dfrac{(x-2)+1}{x-2}$

$=\left(1+\dfrac{1}{x-4}\right)-\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)+\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)$

$-\left(1+\dfrac{1}{x-2}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x-3}\right)+\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x-2}\right)$

$=\dfrac{x-3-(x-4)}{(x-3)(x-4)}+\dfrac{x-2-(x-1)}{(x-1)(x-2)}$

$=\dfrac{1}{(x-3)(x-4)}-\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

$=\dfrac{(x-1)(x-2)-(x-3)(x-4)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$

$=\dfrac{x^2-3x+2-(x^2-7x+12)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$

$=\dfrac{4x-10}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$

따라서 $a=4,\ b=-10$이므로

$a+b=-6$ 답 -6

13 $\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{3x-1}{x-1}-\dfrac{4x^2+9x-1}{x^2+2x}$

$=\dfrac{(x+2)-1}{x+2}+\dfrac{3(x-1)+2}{x-1}$

$-\dfrac{4(x^2+2x)+x-1}{x^2+2x}$

$=\left(1-\dfrac{1}{x+2}\right)+\left(3+\dfrac{2}{x-1}\right)-\left(4+\dfrac{x-1}{x^2+2x}\right)$

$=-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{x-1}{x^2+2x}$

$=-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{x-1}{x(x+2)}$

$=\dfrac{-x(x-1)+2x(x+2)-(x-1)^2}{x(x+2)(x-1)}$

$=\dfrac{-x^2+x+2x^2+4x-(x^2-2x+1)}{x(x+2)(x-1)}$

$=\dfrac{7x-1}{x(x+2)(x-1)}$ 답 $\dfrac{7x-1}{x(x+2)(x-1)}$

14 $\dfrac{2}{x(x+2)}+\dfrac{3}{(x+2)(x+5)}+\dfrac{4}{(x+5)(x+9)}$

$=\dfrac{2}{x+2-x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$+\dfrac{3}{x+5-(x+2)}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+5}\right)$

$+\dfrac{4}{x+9-(x+5)}\left(\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{x+9}\right)$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{x+9}$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+9}=\dfrac{x+9-x}{x(x+9)}$

$=\dfrac{9}{x(x+9)}$ 답 $\dfrac{9}{x(x+9)}$

15 $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{2}{x^2+6x+5}+\dfrac{1}{x^2+12x+35}$

$=\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}+\dfrac{2}{(x+1)(x+5)}$

$\quad+\dfrac{1}{(x+5)(x+7)}$

$=\dfrac{1}{x+1-(x-1)}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

$\quad+\dfrac{2}{x+5-(x+1)}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+5}\right)$

$\quad+\dfrac{1}{x+7-(x+5)}\left(\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{x+7}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+5}\right.$

$\quad\left.+\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{x+7}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+7}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x+7-(x-1)}{(x-1)(x+7)}$

$=\dfrac{4}{(x-1)(x+7)}$

따라서 $a=4$, $b=7$이므로 $\quad b-a=3$ 답 3

16 $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x+1-x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

$\quad=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$

$\therefore \dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(2)}+\dfrac{1}{f(3)}+\cdots+\dfrac{1}{f(49)}$

$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)$

$\quad+\cdots+\left(\dfrac{1}{49}-\dfrac{1}{50}\right)$

$=1-\dfrac{1}{50}=\dfrac{49}{50}$ 답 $\dfrac{49}{50}$

17 $\dfrac{2+\dfrac{3}{x-1}}{2-\dfrac{1}{x+1}}=\dfrac{\dfrac{2(x-1)+3}{x-1}}{\dfrac{2(x+1)-1}{x+1}}=\dfrac{\dfrac{2x+1}{x-1}}{\dfrac{2x+1}{x+1}}=\dfrac{x+1}{x-1}$

답 ②

18 $f(x)=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}}$

$=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\frac{x-1}{x}}}}$

$=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\frac{x}{x-1}}}$

$=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\frac{x-1-x}{x-1}}}$

$=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\frac{-1}{x-1}}}=1-\dfrac{1}{1+x-1}$

$=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

이때 $f(k)=\dfrac{7}{8}$이므로

$\dfrac{k-1}{k}=\dfrac{7}{8}$

$\therefore k=8$ 답 8

19 $\dfrac{\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+5}}{\dfrac{1}{n+5}-\dfrac{1}{n+9}}=\dfrac{\dfrac{n+5-(n+1)}{(n+1)(n+5)}}{\dfrac{n+9-(n+5)}{(n+5)(n+9)}}$

$=\dfrac{\dfrac{4}{(n+1)(n+5)}}{\dfrac{4}{(n+5)(n+9)}}$

$=\dfrac{(n+5)(n+9)}{(n+1)(n+5)}$

$=\dfrac{n+9}{n+1}=\dfrac{(n+1)+8}{n+1}$

$=1+\dfrac{8}{n+1}$

이것이 자연수가 되려면 $n+1$이 8의 양의 약수이어야 하므로

$n+1=1,\ 2,\ 4,\ 8$

$\therefore n=0,\ 1,\ 3,\ 7$

따라서 자연수 n은 1, 3, 7의 3개이다. 답 3

다른 풀이 (주어진 식)$=\dfrac{n+9}{n+1}=k$ (k는 자연수)로 놓으면

$n+9=k(n+1)$, $\quad (k-1)n=-k+9$

$k=1$이면 $0\cdot n=8$
따라서 모순이므로
$k\neq1$

$\therefore n=\dfrac{-k+9}{k-1}=\dfrac{-(k-1)+8}{k-1}=-1+\dfrac{8}{k-1}$

n이 정수이려면 $k-1$이 8의 양의 약수이어야 하므로

$k-1=1,\ 2,\ 4,\ 8$

$\therefore k=2,\ 3,\ 5,\ 9$

따라서 자연수 n은 1, 3, 7의 3개이다.

$k=2$일 때,
$n=-1+\dfrac{8}{2-1}=7$
$k=3$일 때,
$n=-1+\dfrac{8}{3-1}=3$
$k=5$일 때,
$n=-1+\dfrac{8}{5-1}=1$
$k=9$일 때,
$n=-1+\dfrac{8}{9-1}=0$
이때 n은 자연수이므로
$k\neq9$이다.

20 $a^2-\dfrac{1}{a^2}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(a-\dfrac{1}{a}\right)$이므로

$\dfrac{3}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{15}{4} \qquad \therefore a+\dfrac{1}{a}=\dfrac{5}{2}$

$\therefore a^3+\dfrac{1}{a^3}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$

$=\left(\dfrac{5}{2}\right)^3-3\cdot\dfrac{5}{2}=\dfrac{65}{8}$ 답 $\dfrac{65}{8}$

21 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=4$에서 $\quad \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=4$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=6 \qquad \therefore x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{6}\ (\because x>0)$

$\therefore x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=(\sqrt{6})^3-3\cdot\sqrt{6}$

$=6\sqrt{6}-3\sqrt{6}=3\sqrt{6}$ 답 ③

22 $a:b=2:5$이므로 $a=2k$, $b=5k$ $(k\neq0)$로 놓으면

$\dfrac{b^2-a^2}{a^2-3ab+b^2}=\dfrac{25k^2-4k^2}{4k^2-30k^2+25k^2}$

$=\dfrac{21k^2}{-k^2}=-21$ 답 ①

23 $3y=4z$이므로 $\quad z=\frac{3}{4}y$

$\therefore x:y:z=2y:y:\frac{3}{4}y=8:4:3$

$x=8k,\ y=4k,\ z=3k\ (k\neq0)$로 놓으면

$$\frac{2x-7y+10z}{x+y-z}=\frac{16k-28k+30k}{8k+4k-3k}=\frac{18k}{9k}=2$$

답 2

다른 풀이 $x=2y,\ z=\frac{3}{4}y$이므로

$$\frac{2x-7y+10z}{x+y-z}=\frac{4y-7y+\frac{15}{2}y}{2y+y-\frac{3}{4}y}=\frac{\frac{9}{2}y}{\frac{9}{4}y}=2$$

12 유리함수

W 45쪽

01 (1) $x+6=0$에서 $\quad x=-6$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\neq-6$인 실수$\}$

(2) $2x-1=0$에서 $\quad x=\frac{1}{2}$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{1}{2}\text{인 실수}\right\}$

(3) $x^2-1=0$에서 $\quad x^2=1$

$\therefore x=\pm1$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\neq-1,\ x\neq1$인 실수$\}$

(4) 모든 실수 x에 대하여 $x^2+3>0$이므로 분모가 0이 되도록 하는 실수 x의 값이 존재하지 않는다.

따라서 주어진 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

답 (1) $\{x\,|\,x\neq-6$인 실수$\}$

(2) $\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{1}{2}\text{인 실수}\right\}$

(3) $\{x\,|\,x\neq-1,\ x\neq1$인 실수$\}$

(4) 실수 전체의 집합

먼저 분모가 0이 되도록 하는 x의 값을 구한다.

02 (1) $y=\frac{k}{x}\ (k\neq0)$의 그래프가 제3사분면을 지나려면 $k>0$이어야 한다.

따라서 그래프가 제3사분면을 지나는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

(2) $y=\frac{k}{x}\ (k\neq0)$의 그래프는 k의 절댓값이 커질수록 원점으로부터 멀어진다.

이때 $\left|-\frac{1}{5}\right|<\left|\frac{1}{3}\right|<|2|<|-4|$이므로 그래프가 원점으로부터 가장 멀리 떨어진 것은 ㄴ이다.

답 (1) ㄱ, ㄷ (2) ㄴ

유리함수 $y=\frac{k}{x}\ (k\neq0)$의 그래프에서

① $k>0$
➡ 제1사분면, 제3사분면을 지난다.

② $k<0$
➡ 제2사분면, 제4사분면을 지난다.

03 답 (1) $y=\frac{2}{x-4}-7$ (2) $y=-\frac{5}{x+1}+6$

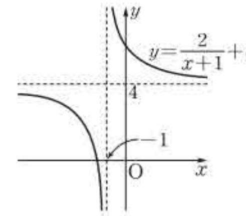
QBOX

함수 $y=\frac{k}{x}\ (k\neq0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{k}{x-p}+q$

04 (1) $y=\frac{2}{x+1}+4$의 그래프는 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고



정의역은

$\{x\,|\,x\neq-1$인 실수$\}$,

치역은

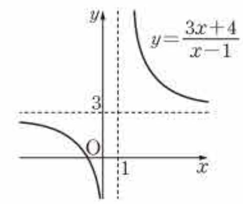
$\{y\,|\,y\neq4$인 실수$\}$

이다.

(2) $y=\frac{3x+4}{x-1}=\frac{3(x-1)+7}{x-1}=\frac{7}{x-1}+3$

이므로 $y=\frac{3x+4}{x-1}$의 그래프는 $y=\frac{7}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고,



정의역은

$\{x\,|\,x\neq1$인 실수$\}$,

치역은

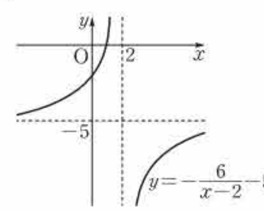
$\{y\,|\,y\neq3$인 실수$\}$

이다.

답 풀이 참조

05 (1) $y=-\frac{6}{x-2}-5$의 그래프는 $y=-\frac{6}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고,



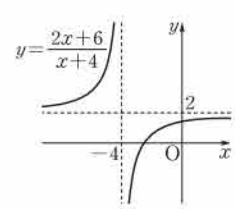
점근선의 방정식은

$x=2,\ y=-5$

(2) $y=\frac{2x+6}{x+4}=\frac{2(x+4)-2}{x+4}=-\frac{2}{x+4}+2$

이므로 $y=\frac{2x+6}{x+4}$의 그래프는 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은



$x=-4,\ y=2$

답 풀이 참조

06 함수 $y=-\frac{2}{x+a}-9$의

정의역은 $\{x\,|\,x\neq-a$인 실수$\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\neq-9$인 실수$\}$

이므로 $\quad -a=5,\ b=-9$

따라서 $a=-5,\ b=-9$이므로

$a-b=4$

답 4

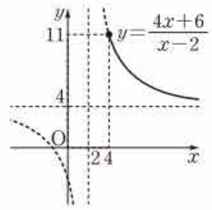
07 $y=\dfrac{4x+6}{x-2}=\dfrac{4(x-2)+14}{x-2}=\dfrac{14}{x-2}+4$

이므로 함수 $y=\dfrac{4x+6}{x-2}$의 그래프는 $y=\dfrac{14}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $4<y\leq 11$에서

$y=\dfrac{4x+6}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역은

$\{x\,|\,x\geq 4\}$



답 ④

08 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 9만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\dfrac{k}{x+2}+9$

이 함수의 그래프가 점 $(-3,\ 4)$를 지나므로

$4=\dfrac{k}{-3+2}+9\qquad \therefore k=5$

답 5

09 함수 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\dfrac{1}{x-5}-3=\dfrac{-1-3(x-5)}{x-5}=\dfrac{-3x+14}{x-5}$

이 함수의 그래프가 $y=\dfrac{bx+c}{x+a}$의 그래프와 일치하므로

$a=-5,\ b=-3,\ c=14$

$\therefore a-b+c=12$

답 ②

10 $y=\dfrac{2x+5}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+3}{x+1}=\dfrac{3}{x+1}+2$

이므로 이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\dfrac{3}{x-p+1}+2+q$

이 함수의 그래프가

$y=\dfrac{x+9}{x+6}=\dfrac{(x+6)+3}{x+6}=\dfrac{3}{x+6}+1$

의 그래프와 일치하므로

$-p+1=6,\ 2+q=1$

따라서 $p=-5,\ q=-1$이므로

$p+q=-6$

답 -6

11 ㄱ. $y=\dfrac{x-2}{x-4}=\dfrac{(x-4)+2}{x-4}=\dfrac{2}{x-4}+1$

따라서 $y=\dfrac{x-2}{x-4}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\dfrac{5x-2}{x}=-\dfrac{2}{x}+5$

따라서 $y=\dfrac{5x-2}{x}$의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\dfrac{-4x+2}{x-1}=\dfrac{-4(x-1)-2}{x-1}=-\dfrac{2}{x-1}-4$

따라서 $y=\dfrac{-4x+2}{x-1}$의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=\dfrac{-3x-1}{x+1}=\dfrac{-3(x+1)+2}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}-3$

따라서 $y=\dfrac{-3x-1}{x+1}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 평행이동에 의하여 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ③

Q BOX

$11=\dfrac{4x+6}{x-2}$에서

$11x-22=4x+6$

$7x=28\quad \therefore x=4$

유리함수의 그래프의 점근선이 두 직선 $x=p,\ y=q$

➡ 두 점근선의 교점의 좌표는 $(p,\ q)$이다.

주어진 함수를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형했을 때 $k=2$인 것을 찾는다.

12 $y=\dfrac{1}{2x-6}+k+1=\dfrac{1}{2(x-3)}+k+1$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=3,\ y=k+1$이므로

$a=3,\ k+1=-7\qquad \therefore a=3,\ k=-8$

$\therefore a+k=-5$

답 ①

13 $y=\dfrac{5x+11}{x+4}=\dfrac{5(x+4)-9}{x+4}=-\dfrac{9}{x+4}+5$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-4,\ y=5$

따라서 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-4,\ 5)$이므로

$a=-4,\ b=5$

$\therefore ab=-20$

답 -20

14 $y=\dfrac{1-6x}{2x+4}=\dfrac{-3(2x+4)+13}{2x+4}=\dfrac{13}{2(x+2)}-3$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-2,\ y=-3$

$y=\dfrac{bx+2}{x+a}=\dfrac{b(x+a)-ab+2}{x+a}=\dfrac{-ab+2}{x+a}+b$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a,\ y=b$

따라서 $-2=-a,\ -3=b$이므로

$a=2,\ b=-3$

$\therefore a+b=-1$

답 -1

15 $y=\dfrac{3x-7}{x+2}=\dfrac{3(x+2)-13}{x+2}=-\dfrac{13}{x+2}+3$

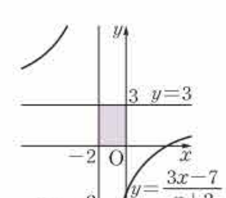
이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-2,\ y=3$

따라서 오른쪽 그림에서 두 점근선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$2\cdot 3=6$

답 ②



16 $y=\dfrac{-4x+1}{x+a}=\dfrac{-4(x+a)+4a+1}{x+a}$

$=\dfrac{4a+1}{x+a}-4$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a$, $y=-4$

이므로 그래프는 점 $(-a,\ -4)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $-a=-3$, $-4=b$이므로

$a=3$, $b=-4$

$\therefore\ a-b=7$ 　　답 ③

Q BOX

유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\,(k\neq0)$의 그래프는 점근선의 교점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이다.

17 $y=\dfrac{4}{x-6}+k$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=6$, $y=k$

이때 $y=\dfrac{4}{x-6}+k$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 $(6,\ k)$는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

$\therefore\ k=6$ 　　답 6

18 $y=\dfrac{3x-4}{x+1}=\dfrac{3(x+1)-7}{x+1}=-\dfrac{7}{x+1}+3$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-1$, $y=3$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $(-1,\ 3)$에 대하여 대칭이므로

$a=-1$, $b=3$

또 주어진 함수의 그래프가 직선 $y=-x+c$에 대하여 대칭이므로 직선 $y=-x+c$는 점근선의 교점 $(-1,\ 3)$을 지난다.

즉 $3=1+c$에서 　$c=2$

$\therefore\ ab+c=-1$ 　　답 ②

19 $y=\dfrac{ax+5}{x+b}=\dfrac{a(x+b)-ab+5}{x+b}$

$=\dfrac{-ab+5}{x+b}+a$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-b$, $y=a$

이때 주어진 함수의 그래프가 두 직선 $y=x+1$, $y=-x-3$에 대하여 대칭이므로 점 $(-b,\ a)$는 두 직선 $y=x+1$, $y=-x-3$의 교점이다. 즉

$a=-b+1$, $a=b-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=2$

$\therefore\ ab=-2$ 　　답 -2

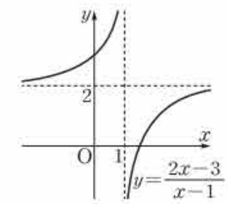
20 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프가 제2사분면, 제4사분면을 지나려면 $k<0$이어야 한다.

따라서 그래프가 제2사분면, 제4사분면을 지나는 것은 ㄱ, ㄴ이다. 　　답 ①

21 $y=\dfrac{2x-3}{x-1}=\dfrac{2(x-1)-1}{x-1}=-\dfrac{1}{x-1}+2$

이므로 $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다. 　　답 ③



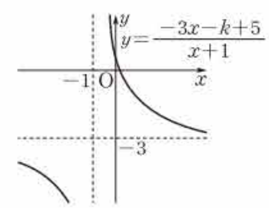
22 $y=\dfrac{-3x-k+5}{x+1}=\dfrac{-3(x+1)-k+8}{x+1}$

$=\dfrac{-k+8}{x+1}-3$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

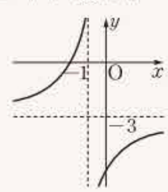
$x=-1$, $y=-3$

$y=\dfrac{-3x-k+5}{x+1}$의 그래프가 제1사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $-k+8>0$이어야 한다.



$\therefore\ k<8$ 　⋯ ㉠

$-k+8<0$이면 다음 그림과 같이 제1사분면을 지나지 않는다.



또 $k=8$이면 $y=\dfrac{-8+8}{x+1}-3$, 즉 $y=-3$이므로 그래프는 제1사분면을 지나지 않는다.

또 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 커야 하므로

$-k+5>0$ 　$\therefore\ k<5$ 　⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 　$k<5$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$1+2+3+4=10$ 　　답 ②

23 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=-2$이므로

$a=-3$, $b=-2$

$y=\dfrac{k}{x-3}-2$의 그래프가 점 $(0,\ -3)$을 지나므로

$-3=\dfrac{k}{-3}-2$, 　$\dfrac{k}{3}=1$

$\therefore\ k=3$

$\therefore\ abk=18$ 　　답 ⑤

24 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=4$이므로 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x+2}+4\ (k\neq0)$ 　⋯⋯ ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$0=k+4$ 　$\therefore\ k=-4$

$k=-4$를 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{-4}{x+2}+4=\dfrac{-4+4(x+2)}{x+2}=\dfrac{4x+4}{x+2}$

따라서 $a=4$, $b=4$, $c=2$이므로

$a+b+c=10$ 　　답 10

25 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=5$, $y=-1$이므로 함수의 식을

$$y=\frac{k}{x-5}-1\ (k\neq 0) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$$-2=\frac{k}{-5}-1, \qquad \frac{k}{5}=1$$

$$\therefore k=5$$

따라서 $y=\frac{5}{x-5}-1$이므로 평행이동에 의하여 함수의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

26 ① $x-4=0$에서 $\quad x=4$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\neq 4$인 실수$\}$이다.

③ $y=-\frac{3}{x-4}-1$에 $y=0$을 대입하면

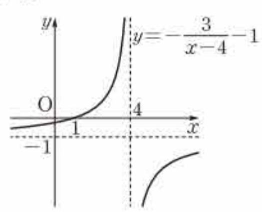
$$0=-\frac{3}{x-4}-1, \qquad \frac{3}{x-4}=-1$$

$$x-4=-3 \qquad \therefore x=1$$

따라서 x축과의 교점의 좌표는 $(1,\ 0)$이다.

④, ⑤ $y=-\frac{3}{x-4}-1$의 그래프는 함수 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 2 사분면을 지나지 않는다.



답 ⑤

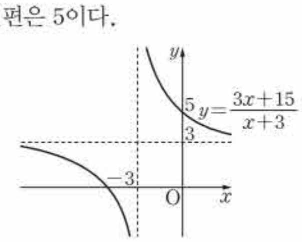
27 $y=\frac{3x+15}{x+3}=\frac{3(x+3)+6}{x+3}=\frac{6}{x+3}+3$

ㄴ. 점근선의 방정식은 $x=-3$, $y=3$이므로 그래프는 점 $(-3,\ 3)$에 대하여 대칭이다.

ㄷ. $y=\frac{3x+15}{x+3}$에 $x=0$을 대입하면 $\quad y=\frac{15}{3}=5$

따라서 그래프의 y절편은 5이다.

ㄹ. 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

$y=\frac{k}{x}\ (k\neq 0)$의 그래프는 k의 절댓값이 커질수록 원점으로부터 멀어진다.

28 $y=\frac{a}{x}$, $y=\frac{b}{x}$의 그래프는 제3사분면을 지나므로

$$a>0,\ b>0$$

이때 $y=\frac{b}{x}$의 그래프가 $y=\frac{a}{x}$의 그래프보다 원점으로부터 멀리 떨어져 있으므로

$$|b|>|a| \qquad \therefore 0<a<b$$

$y=\frac{c}{x}$, $y=\frac{d}{x}$의 그래프는 제4사분면을 지나므로

$$c<0,\ d<0$$

이때 $y=\frac{d}{x}$의 그래프는 $y=\frac{c}{x}$의 그래프보다 원점으로부터 멀리 떨어져 있으므로

$$|d|>|c| \qquad \therefore d<c<0$$

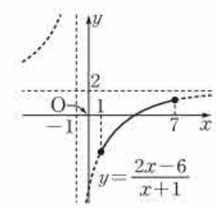
$$\therefore d<c<a<b$$

답 $d<c<a<b$

29 $y=\frac{2x-6}{x+1}=\frac{2(x+1)-8}{x+1}=-\frac{8}{x+1}+2$

이므로 $y=\frac{2x-6}{x+1}$의 그래프는 $y=-\frac{8}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $1\le x\le 7$에서 $y=\frac{2x-6}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=7$일 때 최댓값 1,

$\frac{14-6}{7+1}=1$

$x=1$일 때 최솟값 -2

$\frac{2-6}{1+1}=-2$

를 갖는다.

즉 $M=1$, $m=-2$이므로

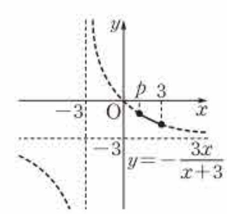
$$M-m=3$$

답 ③

30 $y=-\frac{3x}{x+3}=\frac{-3(x+3)+9}{x+3}=\frac{9}{x+3}-3$

이므로 $y=-\frac{3x}{x+3}$의 그래프는 $y=\frac{9}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $p\le x\le 3$에서 $y=-\frac{3x}{x+3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=p$일 때 최댓값 $-\frac{3p}{p+3}$,

$x=3$일 때 최솟값 $-\frac{3}{2}$

$-\frac{9}{3+3}=-\frac{3}{2}$

을 갖는다.

즉 $-\frac{3p}{p+3}=-1$, $q=-\frac{3}{2}$이므로 $-\frac{3p}{p+3}=-1$에서

$$3p=p+3, \qquad 2p=3 \qquad \therefore p=\frac{3}{2}$$

$$\therefore p+q=0$$

답 0

31 함수 $y=\frac{3-x}{1-x}$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$가 한 점에서 만나므로 $\frac{3-x}{1-x}=\frac{1}{2}x+k$에서

$$3-x=\left(\frac{1}{2}x+k\right)(1-x)$$

$$\therefore x^2+(2k-3)x-2k+6=0$$

주어진 함수의 그래프와 직선이 한 점에서 만나려면 이차방정식의 서로 다른 실근의 개수가 1이어야 하므로 $D=0$이다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(2k-3)^2-4(-2k+6)=0$$

$4k^2-4k-15=0$, $\quad (2k+3)(2k-5)=0$

$\therefore k=-\frac{3}{2}$ 또는 $k=\frac{5}{2}$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=1$ 답 ④

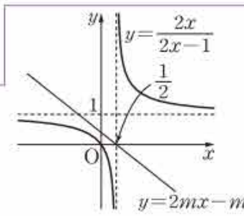
32 $y=\frac{2x}{2x-1}=\frac{(2x-1)+1}{2x-1}=\frac{1}{2x-1}+1$

$=\frac{1}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}+1$

이므로 $y=\frac{2x}{2x-1}$의 그래프는 $y=\frac{1}{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=2mx-m$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$을 지난다.

$y=2mx-m$
$=m(2x-1)$



(i) $m=0$일 때,

함수 $y=\frac{2x}{2x-1}$의 그래프와 직선 $y=0$, 즉 x축은 한 점에서 만난다.

(ii) $m\neq0$일 때,

$\frac{2x}{2x-1}=2mx-m$에서

$2x=(2mx-m)(2x-1)$

$\therefore 4mx^2-2(2m+1)x+m=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(2m+1)\}^2-4m^2<0$

주어진 함수의 그래프와 직선이 만나지 않으려면 이차방정식의 실근의 개수가 0이어야 하므로 $D<0$이다.

$4m+1<0$, $\quad 4m<-1$

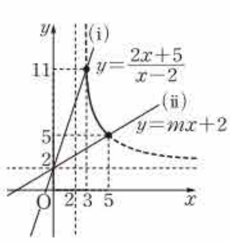
$\therefore m<-\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 $m<-\frac{1}{4}$이므로 정수 m의 최댓값은 -1이다. 답 ⑤

33 $y=\frac{2x+5}{x-2}=\frac{2(x-2)+9}{x-2}=\frac{9}{x-2}+2$

이므로 $y=\frac{2x+5}{x-2}$의 그래프는 $y=\frac{9}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $3\leq x\leq5$에서 $y=\frac{2x+5}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=mx+2$는 m의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 2)$를 지난다.



(i) 직선 $y=mx+2$가 점 $(3, 11)$을 지날 때,

$\frac{6+5}{3-2}=11$

$11=3m+2$, $\quad 3m=9$ $\quad \therefore m=3$

(ii) 직선 $y=mx+2$가 점 $(5, 5)$를 지날 때,

$\frac{10+5}{5-2}=5$

$5=5m+2$, $\quad 5m=3$ $\quad \therefore m=\frac{3}{5}$

(i), (ii)에서 함수 $y=\frac{2x+5}{x-2}$ $(3\leq x\leq5)$의 그래프와 직선 $y=mx+2$가 만나려면

$\frac{3}{5}\leq m\leq3$

따라서 $p=\frac{3}{5}$, $q=3$이므로 $\quad pq=\frac{9}{5}$ 답 $\frac{9}{5}$

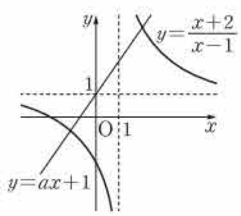
34 $A\cap B\neq\varnothing$이므로 함수 $y=\frac{x+2}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=ax+1$이 만난다.

이때

$y=\frac{x+2}{x-1}=\frac{(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}+1$

이므로 $y=\frac{x+2}{x-1}$의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=ax+1$은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 1)$을 지난다.



(i) $a=0$일 때,

직선 $y=1$은 점근선이므로 함수 $y=\frac{x+2}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=ax+1$은 만나지 않는다.

(ii) $a\neq0$일 때,

$\frac{x+2}{x-1}=ax+1$에서

$x+2=(ax+1)(x-1)$

$\therefore ax^2-ax-3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-a)^2+12a\geq0$

주어진 함수의 그래프와 직선이 만나려면 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 $D\geq0$이다.

$a(a+12)\geq0$

$\therefore a\leq-12$ 또는 $a>0$ ($\because a\neq0$)

(i), (ii)에서 $\quad a\leq-12$ 또는 $a>0$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ③이다. 답 ③

35 $g(-5)=\frac{-5+1}{-5+4}=4$이므로

$(f\circ g)(-5)=f(g(-5))=f(4)$

$=\frac{4+4}{8+1}=\frac{8}{9}$ 답 ①

36 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{x-1}{x}\right)$

$=\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}=\frac{\frac{x-1-x}{x}}{\frac{x-1}{x}}$

$=-\frac{1}{x-1}$

$(f\circ f)(x)=-x$에서 $\quad -\dfrac{1}{x-1}=-x$

$x^2-x=1 \quad \therefore x^2-x-1=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 x의 값의 곱은 -1이다. 답 -1

이차방정식 $x^2-x-1=0$의 판별식을 D라 하면 $D=(-1)^2+4>0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

37 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$에서

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$=\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1}=\frac{\frac{x-1-(x+1)}{x+1}}{\frac{x-1+(x+1)}{x+1}}=-\frac{1}{x}$$

$$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{-\frac{1}{x}-1}{-\frac{1}{x}+1}=\frac{\frac{-1-x}{x}}{\frac{-1+x}{x}}=\frac{x+1}{1-x}$$

$$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))=f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$

$$=\frac{\frac{x+1}{1-x}-1}{\frac{x+1}{1-x}+1}=\frac{\frac{x+1-(1-x)}{1-x}}{\frac{x+1+(1-x)}{1-x}}=x$$

따라서 함수 $f^{4n}(x)$ (n은 자연수)는 항등함수이므로

$$f^{2023}(x)=f^{4\cdot 505+3}(x)=f^3(x)=\frac{x+1}{1-x}$$

$\therefore f^{2023}(2)=-3$ 답 ①

다른 풀이 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$에서

$f^1(2)=f(2)=\dfrac{1}{3}$

$f^2(2)=f(f(2))=f\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$

$f^3(2)=f(f^2(2))=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-3$

$f^4(2)=f(f^3(2))=f(-3)=2$

$f^5(2)=f(f^4(2))=f(2)=\dfrac{1}{3}$

⋮

이므로 $f^n(2)$의 값은 $\dfrac{1}{3}$, $-\dfrac{1}{2}$, -3, 2가 이 순서대로 반복된다.

이때 $2023=4\cdot 505+3$이므로

$f^{2023}(2)=f^3(2)=-3$

38 주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=1$이므로

$f(x)=\dfrac{k}{x+1}+1$ $(k\neq 0)$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

이때 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$0=k+1 \quad \therefore k=-1$

$k=-1$을 ㉠에 대입하면

$f(x)=\dfrac{-1}{x+1}+1=\dfrac{x}{x+1}$

$f(x)=\dfrac{x}{x+1}$에서

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x+(x+1)}{x+1}}=\frac{x}{2x+1}$$

$$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f\left(\frac{x}{2x+1}\right)$$

$$=\frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1}=\frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x+(2x+1)}{2x+1}}=\frac{x}{3x+1}$$

⋮

따라서 $f^{100}(x)=\dfrac{x}{100x+1}$이므로

$f^{100}(1)=\dfrac{1}{100+1}=\dfrac{1}{101}$ 답 $\dfrac{1}{101}$

$f^n(x)=\dfrac{x}{nx+1}$ (n은 자연수)

39 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$에서 $y=\dfrac{x+1}{x-4}$로 놓으면

$y(x-4)=x+1, \quad (y-1)x=4y+1$

$\therefore x=\dfrac{4y+1}{y-1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{4x+1}{x-1}$

따라서

$f^{-1}(x)=\dfrac{4x+1}{x-1}=\dfrac{4(x-1)+5}{x-1}=\dfrac{5}{x-1}+4$

이므로 $\quad m=-1,\ n=4,\ k=5$

$\therefore m+n+k=8$ 답 ③

함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) $y=f(x)$에서 x를 y에 대한 식, 즉 $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 나타낸다.
(ii) x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$ 꼴로 나타낸다.

40 $f(x)=\dfrac{ax}{x+b}$의 그래프가 점 $(-1, 4)$를 지나므로

$4=\dfrac{-a}{-1+b} \quad \therefore a+4b=4$ …… ㉠

또 역함수의 그래프가 점 $(-1, 4)$를 지나므로 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(4, -1)$을 지난다.

즉 $-1=\dfrac{4a}{4+b}$이므로 $\quad 4a+b=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\dfrac{4}{3},\ b=\dfrac{4}{3}$

$\therefore a-b=-\dfrac{8}{3}$ 답 $-\dfrac{8}{3}$

함수 f와 그 역함수 f^{-1}에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 점 (a, b)를 지나면 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 (b, a)를 지난다.

41 $y=\dfrac{x-3}{2x+1}$의 그래프와 $y=\dfrac{ax+b}{2x+c}$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수는 서로 역함수 관계이다.

$y=\dfrac{x-3}{2x+1}$에서 $\quad (2x+1)y=x-3$

$(2y-1)x=-y-3 \quad \therefore x=\dfrac{-y-3}{2y-1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{-x-3}{2x-1}$

따라서 $a=-1$, $b=-3$, $c=-1$이므로

$abc=-3$ 답 ②

42 $(f^{-1}\circ g)(a)=-1$에서 $\quad f^{-1}(g(a))=-1$

$\therefore g(a)=f(-1)=3+1=4$

즉 $\dfrac{3a-1}{a+5}=4$이므로

$3a-1=4a+20$

$\therefore a=-21$ 답 ①

43 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=x$에서 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

$f(x)=\dfrac{x+4}{2x-7}$에서 $y=\dfrac{x+4}{2x-7}$로 놓으면

$(2x-7)y=x+4, \quad (2y-1)x=7y+4$

$\therefore x=\dfrac{7y+4}{2y-1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{7x+4}{2x-1}$

따라서 $g(x)=\dfrac{7x+4}{2x-1}$이므로

$(g\circ g)(-2)=g(g(-2))$

$=g(2)=6$ 답 6

44 $(f\circ(g^{-1}\circ f)^{-1}\circ f^{-1})(1)=(f\circ f^{-1}\circ g\circ f^{-1})(1)$

$=(g\circ f^{-1})(1)$

$=g(f^{-1}(1))$

$f^{-1}(1)=k$라 하면 $f(k)=1$이므로

$\dfrac{2k}{k+5}=1, \quad 2k=k+5$

$\therefore k=5$

따라서 $f^{-1}(1)=5$이므로

$(f\circ(g^{-1}\circ f)^{-1}\circ f^{-1})(1)=g(f^{-1}(1))$

$=g(5)$

$=\dfrac{2}{3}$ 답 ②

Q BOX

무리식의 값이 실수
➡ 근호 안의 식의 값이 양수 또는 0이어야 한다.

각 부등식의 해를 구하여 공통부분을 구한다.

$g(-2)=\dfrac{-14+4}{-4-1}$
$=2$

$g(2)=\dfrac{14+4}{4-1}=6$

$g(5)=\dfrac{10+4}{25-4}=\dfrac{2}{3}$

06 무리식과 무리함수

13 무리식

W 52쪽

01 (1) $x-3\ge0$이므로 $\quad x\ge3$

(2) $16+4x>0$이므로 $\quad x>-4$

(3) $x+1\ge0,\ 5-x\ge0$이므로

$x\ge-1,\ x\le5 \quad \therefore -1\le x\le5$

(4) $6-x\ge0,\ x+2>0$이므로

$x\le6,\ x>-2 \quad \therefore -2<x\le6$

답 (1) $x\ge3$ (2) $x>-4$
(3) $-1\le x\le5$ (4) $-2<x\le6$

02 (1) $\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}=\dfrac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$

$=\dfrac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9}$

$=\sqrt{x}+3$

(2) $\dfrac{4x}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}=\dfrac{4x(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+4}+\sqrt{x})(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})}$

$=\dfrac{4x(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})}{x+4-x}$

$=x(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})$

(3) $\dfrac{2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

$=\dfrac{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}$

$=\dfrac{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{x+1-(x-1)}$

$=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$

(4) $\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})^2}{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}$

$=\dfrac{x^2-2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1}{x^2-(x^2-1)}$

$=2x^2-1-2x\sqrt{x^2-1}$

답 (1) $\sqrt{x}+3$ (2) $x(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})$
(3) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$
(4) $2x^2-1-2x\sqrt{x^2-1}$

03 (1) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2}+\sqrt{x}-\sqrt{2}}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{2\sqrt{x}}{x-2}$

(2) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})+\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$

$=\dfrac{x-\sqrt{xy}+\sqrt{xy}+y}{x-y}$

$=\dfrac{x+y}{x-y}$

(3) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}-1}-\dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}+1}$

$=\dfrac{(x+1)(\sqrt{x+1}+1)-(x-1)(\sqrt{x+1}-1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$

$=\dfrac{2x+2\sqrt{x+1}}{x+1-1}$

$=\dfrac{2(x+\sqrt{x+1})}{x}$

답 (1) $\dfrac{2\sqrt{x}}{x-2}$ (2) $\dfrac{x+y}{x-y}$ (3) $\dfrac{2(x+\sqrt{x+1})}{x}$

04 $10-2x\geq0$이므로 $x\leq5$

이때 $x+3\neq0$이어야 하므로

$x\neq-3$

$\therefore x<-3$ 또는 $-3<x\leq5$

답 $x<-3$ 또는 $-3<x\leq5$

05 $16-x^2\geq0$이므로 $x^2-16\leq0$

$(x+4)(x-4)\leq0$

$\therefore -4\leq x\leq4$ …… ㉠

$x+2>0$이므로 $x>-2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-2<x\leq4$

따라서 정수 x는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4$이므로 구하는 합은

$(-1)+0+1+2+3+4=9$

답 ④

06 $2-a\geq0$이므로 $a\leq2$

이때 $a\geq0$이므로 $0\leq a\leq2$

$0\leq a\leq2$일 때, $2a-5<0$, $a-3<0$이므로

$|2a-5|+\sqrt{a^2-6a+9}=|2a-5|+\sqrt{(a-3)^2}$

$=-(2a-5)-(a-3)$

$=-3a+8$

답 ①

$\sqrt{a^2}=|a|$

$=\begin{cases} a & (a\geq0) \\ -a & (a<0)\end{cases}$

07 $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{x+5}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{x+5}}$

$=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{x+5}-(\sqrt{5}+\sqrt{x+5})}{(\sqrt{5}+\sqrt{x+5})(\sqrt{5}-\sqrt{x+5})}$

$=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{x+5}-\sqrt{5}-\sqrt{x+5}}{5-(x+5)}$

$=\dfrac{2\sqrt{x+5}}{x}$

따라서 $a=2$, $b=5$이므로

$a+b=7$

답 7

08 $\dfrac{1}{x+\sqrt{xy}}+\dfrac{1}{y+\sqrt{xy}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}+\dfrac{1}{\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$

$=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{xy}}=\dfrac{\sqrt{xy}}{xy}$

답 ③

다른 풀이 $\dfrac{1}{x+\sqrt{xy}}+\dfrac{1}{y+\sqrt{xy}}$

$=\dfrac{x-\sqrt{xy}}{(x+\sqrt{xy})(x-\sqrt{xy})}$

$+\dfrac{y-\sqrt{xy}}{(y+\sqrt{xy})(y-\sqrt{xy})}$

$=\dfrac{x-\sqrt{xy}}{x^2-xy}+\dfrac{y-\sqrt{xy}}{y^2-xy}$

$=\dfrac{x-\sqrt{xy}}{x(x-y)}-\dfrac{y-\sqrt{xy}}{y(x-y)}$

$=\dfrac{y(x-\sqrt{xy})-x(y-\sqrt{xy})}{xy(x-y)}$

$=\dfrac{xy-y\sqrt{xy}-xy+x\sqrt{xy}}{xy(x-y)}$

$=\dfrac{\sqrt{xy}(x-y)}{xy(x-y)}=\dfrac{\sqrt{xy}}{xy}$

09 $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$

$=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$

이므로

(주어진 식)$=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$

$=-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=-\dfrac{\sqrt{x}}{x}$

답 $-\dfrac{\sqrt{x}}{x}$

10 $\dfrac{1}{\sqrt{3x}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{3x}+1}=\dfrac{\sqrt{3x}+1-(\sqrt{3x}-1)}{(\sqrt{3x}-1)(\sqrt{3x}+1)}$

$=\dfrac{2}{3x-1}$

$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$을 대입한다.

$=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$

$=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$=\sqrt{3}+1$

답 ④

11 $\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}$

$=\dfrac{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})^2}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})}$

$=\dfrac{(2x+1)-2\sqrt{(2x+1)(2x-1)}+(2x-1)}{(2x+1)-(2x-1)}$

$=\dfrac{4x-2\sqrt{4x^2-1}}{2}$

$=2x-\sqrt{4x^2-1}$

$x=\sqrt{2}$를 대입한다.

$=2\cdot\sqrt{2}-\sqrt{4\cdot(\sqrt{2})^2-1}$

$=2\sqrt{2}-\sqrt{7}$

답 $2\sqrt{2}-\sqrt{7}$

12 $x+y=2\sqrt{7}$, $xy=2$이므로

$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$

$=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}$

$=\dfrac{(2\sqrt{7})^2-2\cdot2}{2}=12$

답 12

13 $x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=5-2\sqrt{6}$,

$y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=5+2\sqrt{6}$

이므로

$x+y=10,\ x-y=-4\sqrt{6}$

$\therefore \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

$=\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$

$=\dfrac{x-2\sqrt{xy}+y+x+2\sqrt{xy}+y}{x-y}$

$=\dfrac{2(x+y)}{x-y}$

$=\dfrac{2\cdot 10}{-4\sqrt{6}}=-\dfrac{5\sqrt{6}}{6}$ 답 ①

14 $x=\dfrac{2}{\sqrt{6}-2}=\dfrac{2(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}=\sqrt{6}+2$,

$y=\dfrac{2}{\sqrt{6}+2}=\dfrac{2(\sqrt{6}-2)}{(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)}=\sqrt{6}-2$

이므로 $x+y=2\sqrt{6},\ xy=2$

$\therefore \dfrac{y}{x^2}+\dfrac{x}{y^2}=\dfrac{x^3+y^3}{x^2y^2}$

$=\dfrac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{(xy)^2}$

$=\dfrac{(2\sqrt{6})^3-3\cdot 2\cdot 2\sqrt{6}}{2^2}$

$=9\sqrt{6}$ 답 $9\sqrt{6}$

15 $x+y=8,\ xy=1$이므로 $\sqrt{2x}-\sqrt{2y}$를 제곱하면

$(\sqrt{2x}-\sqrt{2y})^2=2x-2\cdot\sqrt{2x}\sqrt{2y}+2y$

$=2(x+y)-4\sqrt{xy}$

$=2\cdot 8-4\cdot 1$

$=12$

이때 $x>y$에서 $\sqrt{2x}>\sqrt{2y}$이므로

$\sqrt{2x}-\sqrt{2y}>0$

$\therefore \sqrt{2x}-\sqrt{2y}=2\sqrt{3}$ 답 ③

14 무리함수

W 54쪽

01 (1) $x+6\ge 0$에서 $x\ge -6$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x|x\ge -6\}$

(2) $10-x\ge 0$에서 $x\le 10$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x|x\le 10\}$

(3) $3x-2\ge 0$에서 $x\ge \dfrac{2}{3}$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\left\{x\middle|x\ge \dfrac{2}{3}\right\}$

(4) $1-x^2\ge 0$에서 $x^2-1\le 0$

$(x+1)(x-1)\le 0$ $\therefore -1\le x\le 1$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x|-1\le x\le 1\}$

답 (1) $\{x|x\ge -6\}$ (2) $\{x|x\le 10\}$

(3) $\left\{x\middle|x\ge \dfrac{2}{3}\right\}$ (4) $\{x|-1\le x\le 1\}$

02 (1) y 대신 $-y$를 대입하면

$-y=\sqrt{5x}$ $\therefore y=-\sqrt{5x}$

(2) x 대신 $-x$를 대입하면

$y=\sqrt{5\cdot(-x)}$ $\therefore y=\sqrt{-5x}$

(3) x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면

$-y=\sqrt{5\cdot(-x)}$ $\therefore y=-\sqrt{-5x}$

답 (1) $y=-\sqrt{5x}$ (2) $y=\sqrt{-5x}$

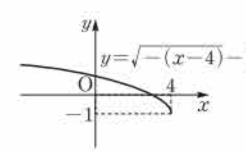
(3) $y=-\sqrt{-5x}$

03 답 (1) $y=\sqrt{3(x+1)}+6$

(2) $y=-\sqrt{-2(x-3)}-7$

04 (1) $y=\sqrt{-(x-4)}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고

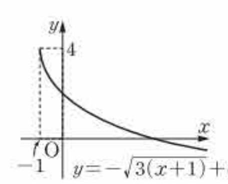


정의역은 $\{x|x\le 4\}$,

치역은 $\{y|y\ge -1\}$이다.

(2) $y=-\sqrt{3(x+1)}+4$의 그래프는 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고



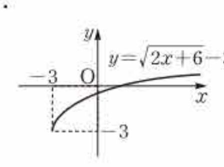
정의역은 $\{x|x\ge -1\}$,

치역은 $\{y|y\le 4\}$이다.

(3) $y=\sqrt{2x+6}-3=\sqrt{2(x+3)}-3$

이므로 $y=\sqrt{2x+6}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고



정의역은 $\{x|x\ge -3\}$,

치역은 $\{y|y\ge -3\}$이다.

(4) $y=-\sqrt{-5x+10}-2=-\sqrt{-5(x-2)}-2$

이므로 $y=-\sqrt{-5x+10}-2$의 그래프는

$y=-\sqrt{-5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

Q BOX

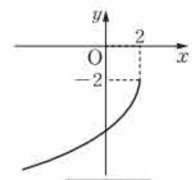
함수 $y=\sqrt{ax}\ (a\neq 0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x-p)}+q$

무리함수의 정의역

➡ 근호 안의 식의 값이 0 이상이 되도록 하는 실수 전체의 집합

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x\le 2\}$,
치역은 $\{y|y\le -2\}$이다.



$y=-\sqrt{-5x+10}-2$

답 풀이 참조

05 $a-4x\ge 0$에서 $\quad x\le \frac{a}{4}$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\left\{x \middle| x\le \frac{a}{4}\right\}$이므로

$\frac{a}{4}=\frac{5}{2} \qquad \therefore a=10$

답 ⑤

06 $2x+a\ge 0$에서 $\quad x\ge -\frac{a}{2}$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\left\{x \middle| x\ge -\frac{a}{2}\right\}$이므로

$-\frac{a}{2}=-2 \qquad \therefore a=4$

함수 $y=\sqrt{2x+4}+b$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

y절편이 1이다.

$1=\sqrt{2\cdot 0+4}+b \qquad \therefore b=-1$

$\therefore a-b=5$

답 5

07 $y=\frac{3x-5}{x+1}=\frac{3(x+1)-8}{x+1}=-\frac{8}{x+1}+3$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=3$이므로

$a=-1,\ b=3$

$y=\sqrt{-x+3}+c$의 그래프가 점 $(2,\ 3)$을 지나므로

$3=\sqrt{-2+3}+c \qquad \therefore c=2$

따라서 $y=\sqrt{-x+3}+2$의 정의역은 $\{x|x\le 3\}$, 치역은 $\{y|y\ge 2\}$이다.

답 정의역: $\{x|x\le 3\}$, 치역: $\{y|y\ge 2\}$

08 함수 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{-3(x+5)}+1$

이 그래프가 점 $(-8,\ k)$를 지나므로

$k=\sqrt{-3\cdot(-8+5)}+1=4$

답 ②

09 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x-p)}+q$

이 함수의 그래프가

$y=\sqrt{4x+8}-3=\sqrt{4(x+2)}-3$

의 그래프와 일치하므로

$a=4,\ p=-2,\ q=-3$

$\therefore a+p+q=-1$

답 ③

10 $y=-\sqrt{1-x}+7=-\sqrt{-(x-1)}+7$

이므로 이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\sqrt{-(x-a-1)}+7-4$

$=-\sqrt{-x+a+1}+3$

이 식에 $x=0$을 대입하면

$y=-\sqrt{a+1}+3$

이때 그래프의 y절편이 음수이므로

$-\sqrt{a+1}+3<0$

$\sqrt{a+1}>3, \qquad a+1>9$

$\therefore a>8$

답 $a>8$

11 함수 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

y 대신 −y를 대입한다.

$-y=-\sqrt{2x}$

$\therefore y=\sqrt{2x}$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 7만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{2(x+3)}+7=\sqrt{2x+6}+7$

답 $y=\sqrt{2x+6}+7$

12 ① $y=\sqrt{-5x}$의 그래프는 $y=\sqrt{5x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

x 대신 −x를 대입한다.

② $y=\sqrt{5x+2}=\sqrt{5\left(x+\frac{2}{5}\right)}$

따라서 $y=\sqrt{5x+2}$의 그래프는 $y=\sqrt{5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{2}{5}$만큼 평행이동한 것이다.

③ $y=-\sqrt{5x-2}+1=-\sqrt{5\left(x-\frac{2}{5}\right)}+1$

따라서 $y=-\sqrt{5x-2}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{5x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\frac{2}{5}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=-\sqrt{10-5x}-3=-\sqrt{-5(x-2)}-3$

따라서 $y=-\sqrt{10-5x}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{5x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

x 대신 −x, y 대신 −y를 대입한다.

답 ④

13 $y=\sqrt{-x+3}=\sqrt{-(x-3)}$이므로 이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -8만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{-(x+1-3)}-8=\sqrt{-x+2}-8$

이 함수의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{x+2}-8$

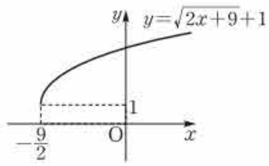
따라서 $a=1$, $b=2$, $c=-8$이므로

$abc=-16$ 　　답 -16

14 $y=\sqrt{2x+9}+1=\sqrt{2\left(x+\frac{9}{2}\right)}+1$

이므로 $y=\sqrt{2x+9}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{9}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면, 제2사분면을 지난다.



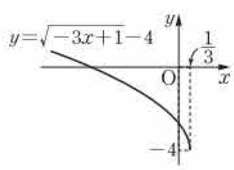
따라서 함수의 그래프가 지나는 사분면만을 있는 대로 고른 것은 ①이다.

답 ①

15 $y=\sqrt{-3x+1}-4=\sqrt{-3\left(x-\frac{1}{3}\right)}-4$

이므로 $y=\sqrt{-3x+1}-4$의 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{3}$만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

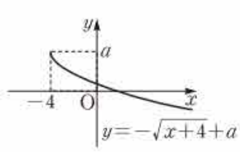
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면을 지나지 않는다.



답 제1사분면

16 $y=-\sqrt{x+4}+a$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=-\sqrt{x+4}+a$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 크거나 같아야 하므로



$-2+a\geq 0$ 　$\therefore a\geq 2$ 　　답 $a\geq 2$

원점은 어느 사분면에도 속하지 않으므로 주어진 그래프가 원점을 지나는 경우에도 제3사분면을 지나지 않음에 주의한다.

17 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=-\sqrt{a(x-4)}+3$ 　　…… ㉠

으로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=-\sqrt{-4a}+3$, 　$\sqrt{-4a}=4$

$-4a=16$ 　$\therefore a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{-4(x-4)}+3=-\sqrt{-4x+16}+3$

따라서 $b=16$, $c=3$이므로

$a+b+c=15$ 　　답 ⑤

18 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=\sqrt{a(x-1)}-2$ 　　…… ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(-3,\ 0)$을 지나므로

$0=\sqrt{-4a}-2$

$\sqrt{-4a}=2$, 　$-4a=4$

$\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{-(x-1)}-2=\sqrt{-x+1}-2$

$\therefore b=1$, $c=-2$

따라서 $a=-1$, $b=1$, $c=-2$를 $y=\dfrac{cx+5}{ax+b}$에 대입하면

$$y=\frac{-2x+5}{-x+1}=\frac{2x-5}{x-1}$$

$$=\frac{2(x-1)-3}{x-1}=-\frac{3}{x-1}+2$$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=2$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(1,\ 2)$이다.

유리함수의 그래프의 점근선이 두 직선 $x=p$, $y=q$
➡ 두 점근선의 교점의 좌표는 $(p,\ q)$이다.

답 ④

19 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=\sqrt{a(x-p)}+q\ (p<0,\ q>0)$ 　　…… ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 $y=\sqrt{ax+b}-c$의 그래프와 같으므로

$-ap=b$, $q=-c$

이때 $a>0$, $p<0$이므로

$-ap>0$ 　$\therefore b>0$

또 $q>0$이므로

$-c>0$ 　$\therefore c<0$

답 $a>0$, $b>0$, $c<0$

20 ⑤ $y=\sqrt{-ax}$의 그래프와 원점에 대하여 대칭이다.

답 ⑤

21 ㄱ. $2x-7\geq 0$에서 $x\geq\frac{7}{2}$이므로 정의역은

$\left\{x\,\middle|\,x\geq\frac{7}{2}\right\}$

$\sqrt{2x-7}\geq 0$이므로 치역은

$\{y\,|\,y\geq -5\}$

ㄴ. $x=4$, $y=-4$를 주어진 함수의 식에 대입하면

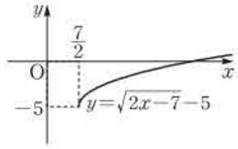
$-4=\sqrt{8-7}-5$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $(4,\ -4)$를 지난다.

ㄷ. $y=\sqrt{2x-7}-5=\sqrt{2\left(x-\frac{7}{2}\right)}-5$

이므로 $y=\sqrt{2x-7}-5$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{7}{2}$만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동하면 $y=\sqrt{2x}$의 그래프와 겹쳐진다.

ㄹ. $y=\sqrt{2x-7}-5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면을 지난다.

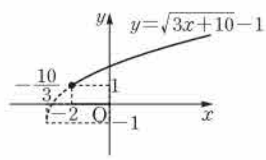


이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

22 $y=\sqrt{3x+10}-1=\sqrt{3\left(x+\frac{10}{3}\right)}-1$

이므로 $y=\sqrt{3x+10}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{10}{3}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $x\geq-2$에서 $y=\sqrt{3x+10}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-2$일 때 최솟값 1을 갖는다.

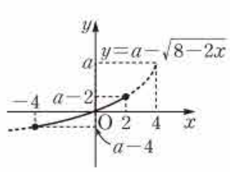
즉 $a=-2$, $m=1$이므로

$a+m=-1$ 답 -1

23 $y=a-\sqrt{8-2x}=-\sqrt{-2(x-4)}+a$

이므로 $y=a-\sqrt{8-2x}$의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-4\leq x\leq2$에서 $y=a-\sqrt{8-2x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=2$일 때 최댓값 $a-2$,

$x=-4$일 때 최솟값 $a-4$를 갖는다.

즉 $a-2=1$이므로 $a=3$

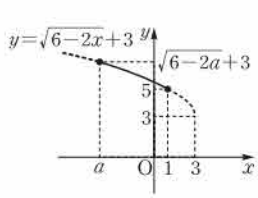
따라서 구하는 최솟값은

$a-4=3-4=-1$ 답 ②

24 $y=\sqrt{6-2x}+3=\sqrt{-2(x-3)}+3$

이므로 $y=\sqrt{6-2x}+3$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a\leq x\leq1$에서 $y=\sqrt{6-2x}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=a$일 때 최댓값 $\sqrt{6-2a}+3$,

$x=1$일 때 최솟값 5를 갖는다.

무리함수의 최댓값과 최솟값은 주어진 정의역에서 그래프를 그려서 구한다.

$\sqrt{3\cdot(-2)+10}-1=1$

$\sqrt{6-2\cdot1}+3=5$

$y=mx+m$
$=m(x+1)$

즉 $\sqrt{6-2a}+3=7$, $m=5$이므로

$\sqrt{6-2a}+3=7$에서 $\sqrt{6-2a}=4$

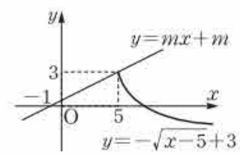
$6-2a=16$, $-2a=10$

$\therefore a=-5$

$\therefore am=-25$ 답 -25

25 $y=-\sqrt{x-5}+3$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=mx+m$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 0)$을 지난다.



직선 $y=mx+m$이 점 $(5, 3)$을 지날 때

$3=5m+m$, $6m=3$

$\therefore m=\frac{1}{2}$

따라서 m의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이다. 답 ③

26 함수 $y=\sqrt{4x+1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접하므로 $\sqrt{4x+1}=x+k$의 양변을 제곱하면

$4x+1=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+2(k-2)x+k^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

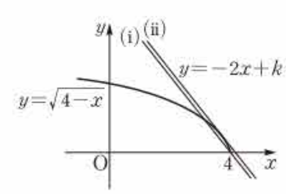
$\frac{D}{4}=(k-2)^2-(k^2-1)=0$

$-4k+5=0$

$\therefore k=\frac{5}{4}$ 답 $\frac{5}{4}$

27 $y=\sqrt{4-x}=\sqrt{-(x-4)}$이므로 $y=\sqrt{4-x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=-2x+k$는 기울기가 -2이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=-2x+k$가 점 $(4, 0)$을 지날 때,

$0=-8+k$ $\therefore k=8$

(ii) 직선 $y=-2x+k$가 $y=\sqrt{4-x}$의 그래프에 접할 때,

$\sqrt{4-x}=-2x+k$의 양변을 제곱하면

$4-x=4x^2-4kx+k^2$

$\therefore 4x^2+(1-4k)x+k^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(1-4k)^2-16(k^2-4)=0$

$-8k+65=0$

$\therefore k=\frac{65}{8}$

06 무리식과 무리함수

(i), (ii)에서 $y=\sqrt{4-x}$의 그래프와 직선 $y=-2x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$8 \le k < \frac{65}{8}$$

따라서 $\alpha=8$, $\beta=\frac{65}{8}$이므로

$$\alpha\beta=65$$

답 ④

28 $A \cap B \neq \varnothing$이므로 함수 $y=\sqrt{2x+5}$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$가 만난다.

$\sqrt{2x+5}=\frac{1}{2}x+k$의 양변을 제곱하면

$$2x+5=\frac{1}{4}x^2+kx+k^2$$

$$\therefore x^2+4(k-2)x+4k^2-20=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{2(k-2)\}^2-(4k^2-20)\ge 0$$

$$-16k+36\ge 0, \qquad 16k \le 36$$

$$\therefore k \le \frac{9}{4}$$

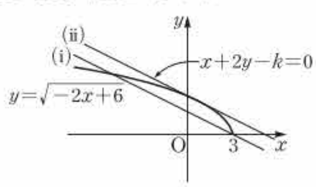
따라서 실수 k의 최댓값은 $\frac{9}{4}$이다.

답 ④

29 $y=\sqrt{-2x+6}=\sqrt{-2(x-3)}$

이므로 $y=\sqrt{-2x+6}$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $x+2y-k=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}$는 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 y절편이 $\frac{k}{2}$인 직선이다.



(i) 직선 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}$가 점 $(3, 0)$을 지날 때,

$$0=-\frac{3}{2}+\frac{k}{2}, \qquad \frac{k}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore k=3$$

(ii) 직선 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}$가 $y=\sqrt{-2x+6}$의 그래프에 접할 때,

$\sqrt{-2x+6}=-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}$의 양변을 제곱하면

$$-2x+6=\frac{1}{4}x^2-\frac{k}{2}x+\frac{k^2}{4}$$

$$\therefore x^2-2(k-4)x+k^2-24=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(k-4)\}^2-(k^2-24)=0$$

$$-8k+40=0, \qquad -8k=-40$$

$$\therefore k=5$$

(i), (ii)에서 $y=\sqrt{-2x+6}$의 그래프와 직선 $x+2y-k=0$이 한 점에서 만나려면

$$k<3 \text{ 또는 } k=5$$

따라서 자연수 k는 1, 2, 5이므로 구하는 합은

$$1+2+5=8$$

답 8

Q BOX

무리함수의 역함수
➡ x를 y에 대한 식으로 나타낸 후 x와 y를 서로 바꾼다. 이때 역함수의 정의역에 주의한다.

30 함수 $y=-\sqrt{2x+1}+4$의 치역이 $\{y \mid y \le 4\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x \mid x \le 4\}$이다.

$y=-\sqrt{2x+1}+4$에서 $\qquad \sqrt{2x+1}=4-y$

양변을 제곱하면 $\qquad 2x+1=(4-y)^2$

$$2x=(4-y)^2-1 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}(y-4)^2-\frac{1}{2}$$

x와 y를 서로 바꾸면

$$y=\frac{1}{2}(x-4)^2-\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 역함수는

$$y=\frac{1}{2}(x-4)^2-\frac{1}{2} \ (x \le 4)$$

답 $y=\frac{1}{2}(x-4)^2-\frac{1}{2} \ (x \le 4)$

31 함수 $f(x)=\sqrt{x+9}-2$의 치역이 $\{y \mid y \ge -2\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x \mid x \ge -2\}$이다.

$y=\sqrt{x+9}-2$로 놓으면

$$\sqrt{x+9}=y+2$$

양변을 제곱하면 $\qquad x+9=(y+2)^2$

$$\therefore x=(y+2)^2-9$$

x와 y를 서로 바꾸면

$$y=(x+2)^2-9$$

이때 $y=(x+2)^2-9\,(x \ge -2)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 9만큼 평행이동하면 $y=x^2$의 그래프의 일부와 겹쳐진다.

따라서 $a=1$, $m=2$, $n=9$이므로

$$amn=18$$

답 ④

함수 f와 그 역함수 f^{-1}에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 점 (a, b)를 지나면 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 (b, a)를 지난다.

32 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 점 $(-2, 4)$를 지나므로

$$4=\sqrt{-2a+b}$$

$$\therefore -2a+b=16 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

또 역함수의 그래프가 점 $(1, 3)$을 지나므로 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프는 점 $(3, 1)$을 지난다.

즉 $1=\sqrt{3a+b}$이므로

$$3a+b=1 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

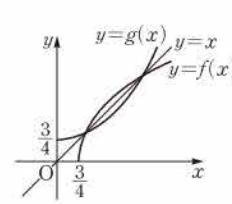
㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-3, \ b=10$$

$$\therefore a+b=7$$

답 ④

33 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 $y=\sqrt{4x-3}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{4x-3}=x$의 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-4x+3=0$, $\quad (x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 교점의 좌표가 $(1,\ 1)$, $(3,\ 3)$이므로 두 교점 사이의 거리는

$\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

34 $(f^{-1}\circ g^{-1})(-1)=f^{-1}(g^{-1}(-1))$

$f^{-1}(g^{-1}(-1))=k$라 하면

$g^{-1}(-1)=f(k)$

$g^{-1}(-1)=m$이라 하면 $g(m)=-1$이므로

$-\sqrt{m-2}=-1$, $\quad m-2=1$

$\therefore m=3$

즉 $f(k)=3$이므로 $\quad \sqrt{2k-1}=3$

$2k-1=9$, $\quad 2k=10$

$\therefore k=5$

$\therefore (f^{-1}\circ g^{-1})(-1)=5$ 답 ⑤

Q BOX

함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여
$f(a)=b$
$\Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$

35 $(f\circ g^{-1})^{-1}(a)=(g\circ f^{-1})(a)$

$=g(f^{-1}(a))$

즉 $g(f^{-1}(a))=5$이므로

$f^{-1}(a)=g^{-1}(5)$

$g^{-1}(5)=k$라 하면 $g(k)=5$이므로

$\sqrt{1-4k}=5$, $\quad 1-4k=25$

$-4k=24$ $\quad \therefore k=-6$

따라서 $f^{-1}(a)=-6$이므로

$a=f(-6)=-\sqrt{4-2\cdot(-6)}=-4$ 답 -4

36 $g(3)=\sqrt{6-2}+1=3$이므로

$(f^{-1}\circ g)(3)=f^{-1}(g(3))=f^{-1}(3)$

$f^{-1}(3)=k$라 하면 $f(k)=3$이므로

$\dfrac{k}{k-1}=3$, $\quad k=3k-3$

$-2k=-3$ $\quad \therefore k=\dfrac{3}{2}$

또 $f(3)=\dfrac{3}{2}$이므로

$(g^{-1}\circ f)(3)=g^{-1}(f(3))=g^{-1}\left(\dfrac{3}{2}\right)$

$g^{-1}\left(\dfrac{3}{2}\right)=m$이라 하면 $g(m)=\dfrac{3}{2}$이므로

$\sqrt{2m-2}+1=\dfrac{3}{2}$, $\quad \sqrt{2m-2}=\dfrac{1}{2}$

$2m-2=\dfrac{1}{4}$, $\quad 2m=\dfrac{9}{4}$

$\therefore m=\dfrac{9}{8}$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(3)-(g^{-1}\circ f)(3)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{9}{8}$

$=\dfrac{3}{8}$ 답 $\dfrac{3}{8}$

37 $(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=-82$에서

$(f\circ f)^{-1}(a)=-82$

$\therefore (f\circ f)(-82)=a$

이때

$f(-82)=\sqrt{82-1}-1=9-1=8$,

$f(8)=-\sqrt{8+1}-1=-4$

이므로

$a=(f\circ f)(-82)=f(f(-82))$

$=f(8)=-4$ 답 ①

W 06 무리식과 무리함수

07 순열과 조합

15 경우의 수

W 60쪽

01 (1) 빨간 공이 나오는 경우의 수는 3
노란 공이 나오는 경우의 수는 5
두 사건은 동시에 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는
$3+5=8$
(2) 9의 약수가 적힌 카드를 택하는 경우는
1, 3, 9의 3가지
5의 배수가 적힌 카드를 택하는 경우는
5, 10의 2가지
두 사건은 동시에 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는
$3+2=5$
답 (1) 8 (2) 5

'또는', '~이거나' ➡ 합의 법칙 이용

02 (1) 잡지를 택하는 경우의 수는 4
신문을 택하는 경우의 수는 6
따라서 구하는 경우의 수는
$4\cdot 6=24$
(2) 셔츠를 택하는 경우의 수는 5
바지를 택하는 경우의 수는 3
코트를 택하는 경우의 수는 2
따라서 구하는 경우의 수는
$5\cdot 3\cdot 2=30$
답 (1) 24 (2) 30

'~이고', '동시에' ➡ 곱의 법칙 이용

03 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 눈의 수의 합이 6이 되는 경우는
$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$
의 5가지
(ii) 눈의 수의 합이 9가 되는 경우는
$(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$의 4가지
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$5+4=9$
답 ③

04 1부터 100까지의 자연수 중에서
5의 배수는 5, 10, 15, …, 100의 20개
6의 배수는 6, 12, 18, …, 96의 16개
5와 6의 공배수는 30, 60, 90의 3개
따라서 구하는 경우의 수는
$20+16-3=33$
답 33

5와 6의 최소공배수인 30의 배수

05 정팔면체를 두 번 던질 때, 바닥에 오는 면에 적힌 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 두 수의 합이 12인 경우는
$(4, 8)$, $(5, 7)$, $(6, 6)$, $(7, 5)$, $(8, 4)$
의 5가지
(ii) 두 수의 합이 13인 경우는
$(5, 8)$, $(6, 7)$, $(7, 6)$, $(8, 5)$의 4가지
(iii) 두 수의 합이 14인 경우는
$(6, 8)$, $(7, 7)$, $(8, 6)$의 3가지
(iv) 두 수의 합이 15인 경우는
$(7, 8)$, $(8, 7)$의 2가지
(v) 두 수의 합이 16인 경우는
$(8, 8)$의 1가지
이상에서 구하는 경우의 수는
$5+4+3+2+1=15$
답 15

06 1부터 50까지의 자연수 중에서
3으로 나누어떨어지는 수, 즉 3의 배수는
3, 6, 9, …, 48의 16개
7로 나누어떨어지는 수, 즉 7의 배수는
7, 14, 21, …, 49의 7개
3과 7로 나누어떨어지는 수, 즉 21의 배수는
21, 42의 2개
따라서 3 또는 7로 나누어떨어지는 자연수의 개수는
$16+7-2=21$
이므로 3과 7로 모두 나누어떨어지지 않는 자연수의 개수는
$50-21=29$
답 ⑤

07 $3x+y=12$에서
$x=1$일 때, $3+y=12$ $\therefore y=9$
$x=2$일 때, $6+y=12$ $\therefore y=6$
$x=3$일 때, $9+y=12$ $\therefore y=3$
따라서 주어진 방정식을 만족시키는 순서쌍 (x, y)는
$(1, 9)$, $(2, 6)$, $(3, 3)$의 3개
답 ①

08 (i) $y=1$일 때,
$x+4\leq 10$, 즉 $x\leq 6$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$, $(5, 1)$, $(6, 1)$의 6개
(ii) $y=2$일 때,
$x+8\leq 10$, 즉 $x\leq 2$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(1, 2)$, $(2, 2)$의 2개
(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는
$6+2=8$
답 8

다른 풀이 x, y가 자연수이므로 $x+4y\leq 10$을 만족시키는 경우는
$x+4y=5$, $x+4y=6$, $x+4y=7$,
$x+4y=8$, $x+4y=9$, $x+4y=10$
(i) $x+4y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(1, 1)$의 1개

(ii) $x+4y=6$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(2, 1)$의 1개
(iii) $x+4y=7$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(3, 1)$의 1개
(iv) $x+4y=8$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(4, 1)$의 1개
(v) $x+4y=9$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(5, 1)$, $(1, 2)$의 2개
(vi) $x+4y=10$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(6, 1)$, $(2, 2)$의 2개
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
$1+1+1+1+2+2=8$

09 500원, 1000원, 1500원짜리 볼펜을 각각 x개, y개, z개 산다고 하면
$500x+1000y+1500z=6000$
$\therefore x+2y+3z=12$ (단, x, y, z는 자연수)
(i) $z=1$일 때,
$x+2y=9$이므로 순서쌍 (x, y, z)는
$(7, 1, 1)$, $(5, 2, 1)$, $(3, 3, 1)$, $(1, 4, 1)$의 4개
(ii) $z=2$일 때,
$x+2y=6$이므로 순서쌍 (x, y, z)는
$(4, 1, 2)$, $(2, 2, 2)$의 2개
(iii) $z=3$일 때,
$x+2y=3$이므로 순서쌍 (x, y, z)는
$(1, 1, 3)$의 1개
이상에서 구하는 경우의 수는
$4+2+1=7$ 답 7

10 첫 번째에 소수가 나오는 경우는
2, 3, 5, 7, 11의 5가지
두 번째에 6의 배수가 나오는 경우는
6, 12의 2가지
따라서 구하는 경우의 수는
$5\cdot2=10$ 답 ③

11 a가 될 수 있는 것은
1, 2, 3의 3개
b가 될 수 있는 것은
4, 5, 6, 7의 4개
따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 $3\cdot4=12$이므로
$n(C)=12$ 답 12

12 십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
1, 3, 5, 7, 9의 5개
일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
0, 2, 4, 6, 8의 5개
따라서 구하는 수의 개수는
$5\cdot5=25$ 답 ⑤

QBOX

3종류의 볼펜을 적어도 한 개씩 산다고 했으므로 x, y, z는 자연수이다.

$n(A)$
➡ 유한집합 A의 원소의 개수

$4=2^2$이므로 4와 서로소인 자연수는 2의 배수가 아니다.

짝수인 자연수는 일의 자리의 숫자가 0 또는 2의 배수이다.

13 A 지역과 B 지역의 관광지를 택하는 경우의 수는
$3\cdot6=18$
A 지역과 C 지역의 관광지를 택하는 경우의 수는
$3\cdot2=6$
B 지역과 C 지역의 관광지를 택하는 경우의 수는
$6\cdot2=12$
따라서 구하는 경우의 수는
$18+6+12=36$ 답 36

14 $(x+y)(a+b+c+d)$에서 x, y에 곱해지는 항이 각각 a, b, c, d의 4개이므로 항의 개수는
$2\cdot4=8$ 답 ③

15 $(a-b)(x-y)$에서 a, $-b$에 곱해지는 항이 각각 x, $-y$의 2개이므로
$p=2\cdot2=4$
$(a+b)^3(x+y)=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(x+y)$에서 a^3, $3a^2b$, $3ab^2$, b^3에 곱해지는 항이 각각 x, y의 2개이므로
$q=4\cdot2=8$
$\therefore q-p=4$ 답 4

16 ① $5^3\times6=2\times3\times5^3$이므로 양의 약수의 개수는
$(1+1)(1+1)(3+1)=16$
② $5^3\times8=2^3\times5^3$이므로 양의 약수의 개수는
$(3+1)(3+1)=16$
③ $5^3\times14=2\times5^3\times7$이므로 양의 약수의 개수는
$(1+1)(3+1)(1+1)=16$
④ $5^3\times27=3^3\times5^3$이므로 양의 약수의 개수는
$(3+1)(3+1)=16$
⑤ $5^3\times35=5^4\times7$이므로 양의 약수의 개수는
$(4+1)(1+1)=10$
따라서 k의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

17 $80=2^4\cdot5$이므로 80의 양의 약수의 개수는
$(4+1)(1+1)=10$
$\therefore a=10$
$126=2\cdot3^2\cdot7$이므로 126의 양의 약수의 개수는
$(1+1)(2+1)(1+1)=12$
$\therefore b=12$
$\therefore a+b=22$ 답 22

18 (i) A → B → C로 가는 경우의 수는
$3\cdot2=6$
(ii) A → C로 가는 경우의 수는 1
(iii) A → D → C로 가는 경우의 수는
$1\cdot3=3$

Ⓦ 07 순열과 조합

이상에서 구하는 경우의 수는

$6+1+3=10$ 답 ②

19 (i) A → B → C → A로 가는 경우의 수는

$2\cdot4\cdot2=16$

(ii) A → C → B → A로 가는 경우의 수는

$2\cdot4\cdot2=16$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$16+16=32$ 답 32

20 B에 칠할 수 있는 색은 4가지, A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$4\cdot3\cdot3=36$ 답 36

인접한 영역이 가장 많은 영역인 B에 칠할 수 있는 색의 개수를 먼저 구한다.

21 A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 3가지, E에 칠할 수 있는 색은 A, D에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot3\cdot3=540$ 답 ⑤

22 (i) A와 C에 같은 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 경우의 수는

$4\cdot3\cdot1\cdot3=36$

(ii) A와 C에 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 경우의 수는

$4\cdot3\cdot2\cdot2=48$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$36+48=84$ 답 84

쌤 한마디

A → B → C → D의 순서대로 색을 칠하면 A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

그런데 D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색이 같은지 다른지에 따라 달라지므로 A와 C에 같은 색을 칠할 때와 다른 색을 칠할 때로 경우를 나누어 구해야 한다.

Q BOX

16 순열

W 63쪽

01 (1) ${}_7P_3=7\cdot6\cdot5=210$

(3) ${}_4P_4=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

${}_4P_4=4!$

(4) ${}_6P_1\cdot3!=6\cdot(3\cdot2\cdot1)=36$

답 (1) 210 (2) 1 (3) 24 (4) 36

02 (1) ${}_nP_2=n(n-1)$이므로

$n(n-1)=56=8\cdot7$

$\therefore n=8$

(2) ${}_nP_n=n!$이므로

$n!=720=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$

$\therefore n=6$

(3) $120=6\cdot5\cdot4$이므로 ${}_6P_3=120$

$\therefore r=3$

(4) ${}_{10}P_r=\dfrac{10!}{(10-r)!}$이므로

$10-r=4 \qquad \therefore r=6$

답 (1) $n=8$ (2) $n=6$ (3) $r=3$ (4) $r=6$

03 (1) 구하는 경우의 수는 5명 중에서 5명을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$3+2=5$(명)

${}_5P_5=5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

(2) 구하는 자연수의 개수는 서로 다른 9개에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_9P_3=9\cdot8\cdot7=504$

답 (1) 120 (2) 504

04 ${}_nP_4=40\cdot{}_{n-1}P_2$에서

$n(n-1)(n-2)(n-3)=40(n-1)(n-2)$

$n\geq4$이므로 양변을 $(n-1)(n-2)$로 나누면

${}_nP_4$에서 $n\geq4$이므로 $n-1\neq0$, $n-2\neq0$ 따라서 양변을 $(n-1)(n-2)$로 나눌 수 있다.

$n(n-3)=40, \qquad n^2-3n-40=0$

$n(n-3)=40=8\cdot5$에서 $n=8$과 같이 구할 수도 있다.

$(n+5)(n-8)=0$

$\therefore n=8$ ($\because n\geq4$) 답 ③

05 ${}_{n+1}P_2=2\cdot{}_nP_1+20$에서

$(n+1)n=2n+20, \qquad n^2-n-20=0$

$(n+4)(n-5)=0$

$\therefore n=5$ ($\because n\geq1$) 답 5

${}_{n+1}P_2$, ${}_nP_1$에서 $n\geq1$

06 구하는 경우의 수는 8개의 의자 중에서 3개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_8P_3=8\cdot7\cdot6=336$ 답 ④

07 앞줄에 머그잔을 진열하는 경우의 수는

$5!=120$

뒷줄에 텀블러를 진열하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\cdot6=720$ 답 720

08 n개의 전시 중에서 2개를 택하여 차례대로 관람하는 경우의 수는 서로 다른 n개에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$_{n}P_{2}=210$

$n(n-1)=210=15\cdot 14$

$\therefore n=15$ 답 15

09 흰색 모자 2개를 한 개로 생각하여 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

흰색 모자 2개의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot 2=48$ 답 ⑤

10 3개의 홀수 1, 3, 5를 한 개의 숫자로 생각하여 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

홀수끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot 6=144$ 답 144

11 선생님 4명과 학생 3명을 각각 한 사람으로 생각하여 2명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$2!=2$

선생님끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$4!=24$

학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot 24\cdot 6=288$ 답 288

12 사과나무 3그루를 일렬로 심는 경우의 수는

$3!=6$

사과나무 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 배나무 2그루를 심는 경우의 수는

$_{4}P_{2}=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot 12=72$ 답 72

13 4개의 자음 m, c, h, n을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

자음 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 3개의 모음 a, i, e를 나열하는 경우의 수는

$_{5}P_{3}=60$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot 60=1440$ 답 ⑤

Q BOX

의자가 모두 똑같으므로 빈 의자 5개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 1이다.

자음을 ●, 모음을 ▲라 하면

(i) ●▲●▲●▲●▲

(ii) ▲●▲●▲●▲●

사과나무를 ○라 하면

∨○∨○∨○∨

부모끼리 자리를 바꾸는 경우의 수

자녀 5명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수

14 4개의 의자에만 학생들이 앉으므로 빈 의자는 5개이다.

따라서 빈 의자들 사이사이 및 양 끝의 6개의 자리에 학생이 앉는 의자 4개를 놓으면 되므로 구하는 경우의 수는

$_{6}P_{4}=360$ 답 360

15 남학생은 5명, 여학생은 4명이므로 남학생 5명을 일렬로 세운 후 그 사이사이에 여학생 4명을 세우면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$5!\cdot 4!=2880$ 답 ⑤

16 자음은 b, h, v, r의 4개, 모음은 e, a, i, o의 4개이므로

(i) 자음, 모음의 순서로 번갈아 나열하는 경우의 수는

$4!\cdot 4!=576$

(ii) 모음, 자음의 순서로 번갈아 나열하는 경우의 수는

$4!\cdot 4!=576$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$576+576=1152$ 답 1152

17 구하는 경우의 수는 수빈이와 성준이를 제외한 나머지 5명을 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로

$5!=120$ 답 ②

18 2개의 모음 i, e를 양 끝에 나열하는 경우의 수는

$2!=2$

i, e를 제외한 나머지 문자 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot 24=48$ 답 ④

19 트로피 2개를 세 군데의 홀수 번째 자리 중 두 군데에 진열하는 경우의 수는

$_{3}P_{2}=6$

나머지 세 자리에 상장 3개를 진열하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot 6=36$ 답 36

20 부모 사이에 자녀 2명이 오도록 묶음을 만드는 경우의 수는

$2!\cdot {}_{5}P_{2}=40$

이 묶음과 나머지 자녀 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$40\cdot 24=960$ 답 960

W 07 순열과 조합

21 10편의 영화 중에서 3편을 택하여 차례대로 관람하는 경우의 수는

$_{10}P_3=720$

액션 영화 중에서 3편을 택하여 차례대로 관람하는 경우의 수는

$_4P_3=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$720-24=696$ 답 696

22 5권을 일렬로 꽂는 경우의 수는

$5!=120$

양 끝에 수학책이 오도록 5권을 꽂는 경우의 수는

$_3P_2\cdot 3!=36$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-36=84$ 답 84

23 6명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$6!=720$

축구 선수끼리 이웃하지 않도록 세우는 경우의 수는 배구 선수 3명을 일렬로 세우고 배구 선수 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 축구 선수 3명을 세우는 경우의 수와 같으므로

$3!\cdot {_4P_3}=144$

따라서 구하는 경우의 수는

$720-144=576$ 답 ③

24 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=720$

C와 D 사이에 문자가 없도록 나열하는 경우의 수는 C와 D를 이웃하게 나열하는 경우의 수와 같다.

C와 D를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

C와 D의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

즉 C와 D를 이웃하게 나열하는 경우의 수는

$120\cdot 2=240$

따라서 구하는 경우의 수는

$720-240=480$ 답 480

25 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 1, 2, 3의 3개이다.

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에는 천의 자리에 오는 숫자를 제외한 3개를 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 네 자리 자연수의 개수는

$3\cdot 6=18$ 답 18

26 짝수이려면 일의 자리의 숫자가 2 또는 4 또는 6이어야 한다.

Q BOX

(적어도 1편의 코미디 영화를 관람하는 경우의 수)
=(모든 경우의 수)
−(액션 영화만 3편을 차례대로 관람하는 경우의 수)

b, c, d, e를 일렬로 나열하는 경우의 수

a, c, d, e를 일렬로 나열하는 경우의 수

b, d, e를 일렬로 나열하는 경우의 수

백의 자리와 십의 자리에는 일의 자리에 오는 숫자가 적힌 카드를 제외한 6장의 카드 중에서 2장을 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$_6P_2=30$

따라서 구하는 짝수의 개수는

$3\cdot 30=90$ 답 90

27 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다. 이때 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수가 되는 경우는 다음과 같다.

1, 2, 3 또는 2, 3, 4

(i) 1, 2, 3으로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$3!=6$

(ii) 2, 3, 4로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$3!=6$

(i), (ii)에서 구하는 3의 배수의 개수는

$6+6=12$ 답 ⑤

28 홀수이려면 일의 자리의 숫자가 3 또는 5이어야 한다.

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 3개이다.

또 백의 자리와 십의 자리에는 천의 자리와 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$_3P_2=6$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$2\cdot 3\cdot 6=36$ 답 ③

29 a로 시작하는 것의 개수는

$4!=24$

b로 시작하는 것의 개수는

$4!=24$

ca로 시작하는 것의 개수는

$3!=6$

따라서 a로 시작하는 것부터 ca로 시작하는 것까지의 개수는

$24+24+6=54$

이므로 55번째에 오는 문자열은 cb로 시작하는 것 중 제일 처음의 것인 $cbade$이다. 답 ③

30 240보다 작은 자연수는

1□□, 20□, 21□, 23□

꼴이다.

1□□ 꼴인 자연수의 개수는 $_5P_2=20$

20□ 꼴인 자연수의 개수는 4

21□ 꼴인 자연수의 개수는 4

23□ 꼴인 자연수의 개수는 4

따라서 구하는 자연수의 개수는

$20+4+4+4=32$ 답 32

31 7□□□ 꼴인 자연수의 개수는

$3!=6$

5□□□ 꼴인 자연수의 개수는

$3!=6$

37□□ 꼴인 자연수의 개수는

$2!=2$

35□□ 꼴인 자연수의 개수는

$2!=2$

따라서 7531부터 3517까지의 자연수의 개수는

$6+6+2+2=16$

이므로 3175는 17번째로 큰 수이다. 답 ⑤

> 7□□□ 꼴인 자연수 중 가장 큰 수
>
> 35□□ 꼴인 자연수 중 가장 작은 수

32 b, r, e, a, d를 사전식으로 배열하면 a, b, d, e, r이다.

a로 시작하는 것의 개수는

$4!=24$

b로 시작하는 것의 개수는

$4!=24$

d로 시작하는 것의 개수는

$4!=24$

ea로 시작하는 것의 개수는

$3!=6$

eba로 시작하는 것은 순서대로

ebadr, ebard의 2개

따라서 abder부터 ebard까지의 개수는

$24+24+24+6+2=80$

이므로 ebard는 80번째에 온다.

$\therefore n=80$ 답 80

17 조합

67쪽

01 (1) ${}_6C_3=\dfrac{{}_6P_3}{3!}=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$

(2) ${}_{10}C_4=\dfrac{{}_{10}P_4}{4!}=\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210$

답 (1) 20 (2) 210 (3) 1 (4) 1

02 (1) ${}_nC_2=36$에서 $\dfrac{n(n-1)}{2\cdot1}=36$

$n(n-1)=72=9\cdot8 \quad \therefore n=9$

(2) ${}_7C_r=21$에서 $\dfrac{7!}{r!(7-r)!}=21$

$7!=21\cdot r!(7-r)!$

$2\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=r!(7-r)!$

$2!\cdot5!=r!(7-r)!$

$\therefore r=2$ 또는 $r=5$

> $6\cdot5\cdot4\cdot2\cdot1$
> $=2\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$

(3) ${}_nC_4={}_nC_{n-4}$이므로 ${}_nC_4={}_nC_8$에서

${}_nC_{n-4}={}_nC_8$

따라서 $n-4=8$이므로 $n=12$

(4) ${}_8C_r={}_8C_{r-2}$에서

$r=r-2$ 또는 $8-r=r-2$

(i) $r=r-2$에서 $0\neq-2$이므로 r의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $8-r=r-2$에서 $2r=10$

$\therefore r=5$

(i), (ii)에서 $r=5$

답 (1) $n=9$ (2) $r=2$ 또는 $r=5$ (3) $n=12$ (4) $r=5$

03 (1) 9송이의 꽃 중에서 3송이를 고르는 경우의 수는

${}_9C_3=\dfrac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$

(2) 빨간색 꽃 4송이 중에서 2송이를 고르는 경우의 수는

${}_4C_2=\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$

보라색 꽃 5송이 중에서 2송이를 고르는 경우의 수는

${}_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot10=60$

답 (1) 84 (2) 60

04 ${}_{n-1}C_2+{}_nP_2=2\cdot{}_nC_3$에서

$\dfrac{(n-1)(n-2)}{2\cdot1}+n(n-1)$

$=2\cdot\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}$

$n\geq3$이므로 양변을 $n-1$로 나누면

> ${}_{n-1}C_2$에서 $n-1\geq2$
> $\therefore n\geq3$

$\dfrac{n-2}{2}+n=\dfrac{n(n-2)}{3}$

> 양변에 6을 곱한다.

$3(n-2)+6n=2n(n-2)$

$2n^2-13n+6=0, \quad (2n-1)(n-6)=0$

$\therefore n=6\ (\because n\geq3)$ 답 6

05 ${}_{11}C_{r^2}={}_{11}C_{2r+3}$에서

$r^2=2r+3$ 또는 $11-r^2=2r+3$

(i) $r^2=2r+3$일 때,

$r^2-2r-3=0, \quad (r+1)(r-3)=0$

$\therefore r=3\ (\because r>0)$

(ii) $11-r^2=2r+3$일 때,

$r^2+2r-8=0, \quad (r+4)(r-2)=0$

$\therefore r=2\ (\because r>0)$

(i), (ii)에서 구하는 자연수 r의 값의 합은

$3+2=5$ 답 ①

06 ${}_{8-n}C_2=10$에서

$\dfrac{(8-n)(7-n)}{2\cdot1}=10, \quad (8-n)(7-n)=20$

$n^2-15n+36=0$, $\quad (n-3)(n-12)=0$

$\therefore n=3\ (\because 3\le n\le 6)$

${}_{8-n}C_2$에서 $8-n\ge 2$
$\therefore n\le 6$
${}_nC_3$에서 $n\ge 3$
$\therefore 3\le n\le 6$

$$\begin{aligned}\therefore {}_{n+1}P_2-5\cdot{}_nC_3&={}_4P_2-5\cdot{}_3C_3\\&=12-5\\&=7\end{aligned}$$

답 ①

07 $$\begin{aligned}n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}&=n\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}\\&=n\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!\boxed{(n-r)!}}\\&=\frac{\boxed{n!}}{(r-1)!(n-r)!}\\&=\frac{r\cdot n!}{\boxed{r!}(n-r)!}\\&=r\cdot{}_nC_r\end{aligned}$$

$\therefore$ (가) $(n-r)!$ (나) $n!$ (다) $r!$

답 ③

08 ${}_nC_k\cdot{}_{n-k}C_{r-k}$

$$\begin{aligned}&=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(r-k)!\{n-k-(r-k)\}!}\\&=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(r-k)!\boxed{(n-r)!}}\\&=\frac{\boxed{n!}}{k!(r-k)!(n-r)!}\\&=\frac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\frac{\boxed{r!}}{k!(r-k)!}\\&={}_nC_r\cdot{}_rC_k\end{aligned}$$

$\therefore$ (가) $(n-r)!$ (나) $n!$ (다) $r!$

답 풀이 참조

09 9명의 학생 중에서 수학 경시대회에 참가할 학생 1명을 뽑는 경우의 수는

${}_9C_1=9$

나머지 학생 8명 중에서 과학 경시대회에 참가할 학생 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_8C_3=56$

따라서 구하는 경우의 수는

$9\cdot 56=504$

답 ④

10 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수는 6개의 원소 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_6C_2=15$

원소의 개수가 5인 부분집합의 개수는 6개의 원소 중에서 5개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_6C_5={}_6C_1=6$

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$15+6=21$

답 21

11 경찰관 n명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

3명의 직업이 모두 같으려면 3명이 모두 경찰관이거나 모두 소방관이어야 한다.

${}_nC_3$

소방관 8명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_8C_3=56$

따라서 ${}_nC_3+56=91$이므로 $\quad {}_nC_3=35$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=35$$

$n(n-1)(n-2)=7\cdot6\cdot5$

$\therefore n=7$

답 ②

서로 다른 n개에서 특정한 k개를 포함하여 r개를 택하는 경우의 수
➡ ${}_{n-k}C_{r-k}$

12 구하는 경우의 수는 1학년 학생 3명을 제외한 7명의 학생 중에서 2명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_7C_2=21$

답 ②

13 (1) 구하는 부분집합의 개수는 8을 제외한 6개의 원소 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_6C_2=15$

서로 다른 n개에서 특정한 k개를 제외하고 r개를 택하는 경우의 수
➡ ${}_{n-k}C_r$

(2) 구하는 부분집합의 개수는 소수 2, 7을 제외한 5개의 원소 중에서 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_4={}_5C_1=5$

답 (1) 15 (2) 5

14 구하는 경우의 수는 귤, 사과, 참외를 제외한 6개의 과일 중에서 3개를 고르는 경우의 수와 같으므로

${}_6C_3=20$

답 20

15 야채를 고르는 경우의 수는 특정한 야채 2가지를 제외한 5가지의 야채 중에서 2가지를 고르는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_2=10$

소스를 고르는 경우의 수는 특정한 소스 1가지를 제외한 3가지의 소스 중에서 1가지를 고르는 경우의 수와 같으므로

${}_3C_1=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot3=30$

답 ④

16 10장의 카드 중에서 3장을 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_3=120$

10의 약수인 1, 2, 5, 10이 적힌 카드를 제외한 6장의 카드 중에서 3장을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-20=100$

(10의 약수가 적힌 카드가 적어도 1장 포함되도록 뽑는 경우의 수)
=(모든 경우의 수)
−(10의 약수가 아닌 수가 적힌 카드를 3장 뽑는 경우의 수)

답 ③

17 9개의 공 중에서 4개를 뽑는 경우의 수는

${}_9C_4=126$

빨간 공과 노란 공 5개 중에서 4개를 뽑는 경우의 수는

${}_5C_4={}_5C_1=5$

따라서 구하는 경우의 수는

$126-5=121$

답 121

18 12명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$_{12}C_3=220$

남자만 3명을 뽑는 경우의 수는

$_7C_3=35$

여자만 3명을 뽑는 경우의 수는

$_5C_3={_5C_2}=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$220-(35+10)=175$ 답 175

모든 경우의 수에서 3명의 대표가 모두 남자이거나 모두 여자인 경우의 수를 뺀다.

19 어른 6명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$_6C_2=15$

어린이 4명 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는

$_4C_1=4$

3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\cdot4\cdot6=360$ 답 ⑤

20 6과 8을 제외한 7개의 숫자 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_7C_2=21$

4개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$21\cdot24=504$ 답 504

21 서연이와 윤호를 제외한 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$_6C_3=20$

서연이와 윤호를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$이고, 서연이와 윤호가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로 서연이와 윤호가 이웃하도록 세우는 경우의 수는

$24\cdot2=48$

따라서 구하는 경우의 수는

$20\cdot48=960$ 답 960

22 일대일함수 f의 개수는 집합 Y의 7개의 원소 중에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$a={_7P_4}=840$

$f(0)<f(1)<f(2)<f(3)$을 만족시키려면 집합 Y의 7개의 원소 중에서 서로 다른 4개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 0, 1, 2, 3에 대응시키면 된다.

따라서 $f(0)<f(1)<f(2)<f(3)$인 함수 f의 개수는

$b={_7C_4}={_7C_3}=35$

$\therefore a+b=875$ 답 875

23 조건 (가)에서 $f(4)=7$이고 조건 (나)에서

$f(1)<f(2)<f(3)<f(4)<f(5)$

이므로 $f(5)$의 값이 될 수 있는 집합 Y의 원소는 8, 9의 2가지이다.

또 집합 Y의 원소 3, 4, 5, 6 중에서 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$2\cdot{_4C_3}=2\cdot{_4C_1}=2\cdot4=8$ 답 ③

원 위의 7개의 점은 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않다.

24 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는 7개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$_7C_2=21$ 답 21

25 $_nC_2=55$이므로 $\dfrac{n(n-1)}{2}=55$

$n(n-1)=110=11\cdot10$

$\therefore n=11$ 답 11

26 십각형의 대각선의 개수는 10개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 10을 뺀 것과 같으므로

$_{10}C_2-10=45-10=35$ 답 ③

쌤 한마디

n각형의 대각선의 개수는 n개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 선분의 개수에서 변의 개수인 n을 뺀 것과 같으므로

$_nC_2-n$

이다. 이때

$_nC_2-n=\dfrac{n(n-1)}{2\cdot1}-n=\dfrac{n(n-3)}{2}$

이므로 n각형의 대각선의 개수를 구하는 공식 $\dfrac{n(n-3)}{2}$과 같음을 알 수 있다.

주어진 8개의 점은 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않다.

27 구하는 삼각형의 개수는 8개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$_8C_3=56$ 답 56

28 9개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$_9C_3=84$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$_5C_3={_5C_2}=10$

이때 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$84-10=74$ 답 ④

두 직선 l, m 위의 점을 각각 2개씩 택하여 연결하면 한 개의 사각형이 만들어진다.

29 직선 l 위의 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_4C_2=6$

직선 m 위의 6개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

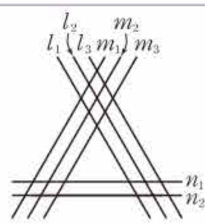
$${}_6C_2=15$$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$$6\cdot15=90$$

답 90

30 오른쪽 그림과 같이 평행한 직선을 각각 l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2라 하자.



(i) l_1, l_2, l_3 중에서 2개를 택하고 m_1, m_2, m_3 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2\cdot{}_3C_2={}_3C_1\cdot{}_3C_1=3\cdot3=9$$

(ii) l_1, l_2, l_3 중에서 2개를 택하고 n_1, n_2 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2\cdot{}_2C_2={}_3C_1\cdot{}_2C_2=3\cdot1=3$$

(iii) m_1, m_2, m_3 중에서 2개를 택하고 n_1, n_2 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2\cdot{}_2C_2={}_3C_1\cdot{}_2C_2=3\cdot1=3$$

이상에서 구하는 평행사변형의 개수는

$$9+3+3=15$$

답 ④

Q BOX

평행사변형을 만들려면 평행한 직선을 2개씩 택해야 한다.

MEMO

MEMO