만렙 AM

정답과 해설

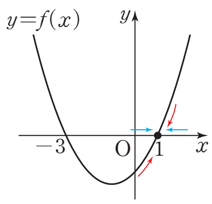
수학Ⅱ

01 함수의 극한

8~20쪽

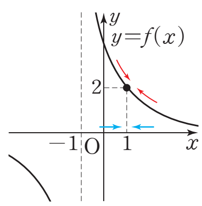
001 답 0

$f(x)=x^2+2x-3$이라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로
$\lim_{x\to1}(x^2+2x-3)=0$



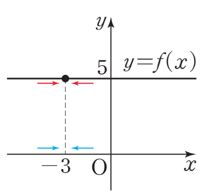
002 답 2

$f(x)=\frac{4}{x+1}$라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로
$\lim_{x\to1}\frac{4}{x+1}=2$



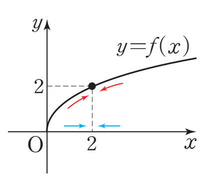
003 답 5

$f(x)=5$라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x의 값이 -3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 항상 5이므로
$\lim_{x\to-3}5=5$



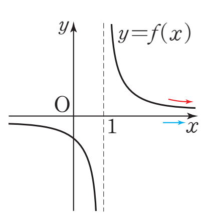
004 답 2

$f(x)=\sqrt{2x}$라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로
$\lim_{x\to2}\sqrt{2x}=2$



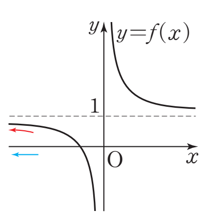
005 답 0

$f(x)=\frac{2}{x-1}$라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로
$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x-1}=0$



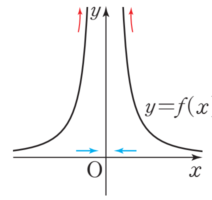
006 답 1

$f(x)=\frac{1}{x}+1$이라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)=1$



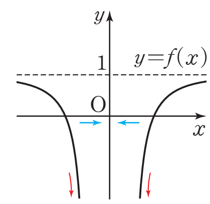
007 답 ∞

$f(x)=\frac{2}{x^2}$라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로
$\lim_{x\to0}\frac{2}{x^2}=\infty$



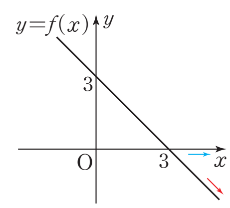
008 답 $-\infty$

$f(x)=1-\frac{1}{x^2}$이라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로
$\lim_{x\to0}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$



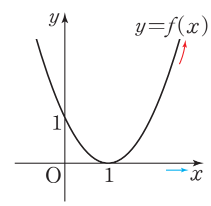
009 답 $-\infty$

$f(x)=-x+3$이라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로
$\lim_{x\to\infty}(-x+3)=-\infty$



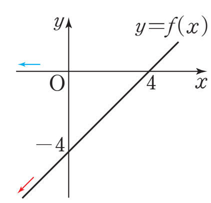
010 답 ∞

$f(x)=x^2-2x+1$이라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로
$\lim_{x\to\infty}(x^2-2x+1)=\infty$



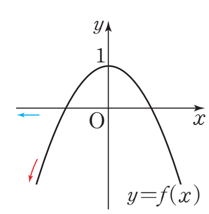
011 답 $-\infty$

$f(x)=x-4$라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로
$\lim_{x\to-\infty}(x-4)=-\infty$



012 답 $-\infty$

$f(x)=1-2x^2$이라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로
$\lim_{x\to-\infty}(1-2x^2)=-\infty$



013 답 **1**

x의 값이 0보다 크면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=1$

014 답 **0**

x의 값이 0보다 작으면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to0-}f(x)=0$

015 답 **2**

x의 값이 1보다 크면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=2$

016 답 **3**

x의 값이 2보다 작으면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to2-}f(x)=3$

017 답 **1**

018 답 **−1**

$x<1$일 때, $|x-1|=-(x-1)$이므로

$\lim_{x\to1-}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$

019 답 **−2**

$x>-1$일 때, $|x+1|=x+1$이므로

$$\lim_{x\to-1+}\frac{x^2-1}{|x+1|}=\lim_{x\to-1+}\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+}(x-1)=-2$$

020 답 **2**

$x<-1$일 때, $|x+1|=-(x+1)$이므로

$$\lim_{x\to-1-}\frac{x^2-1}{|x+1|}=\lim_{x\to-1-}\frac{(x+1)(x-1)}{-(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to-1-}(-x+1)=2$$

021 답 **1, −1, 존재하지 않는다.**

022 답 **존재하지 않는다.**

$x=-1$에서 우극한과 좌극한을 구하면

$\lim_{x\to-1+}\frac{|x+1|}{x+1}=\lim_{x\to-1+}\frac{x+1}{x+1}=1$

$\lim_{x\to-1-}\frac{|x+1|}{x+1}=\lim_{x\to-1-}\frac{-(x+1)}{x+1}=-1$

따라서 $\lim_{x\to-1+}\frac{|x+1|}{x+1}\neq\lim_{x\to-1-}\frac{|x+1|}{x+1}$이므로 $\lim_{x\to-1}\frac{|x+1|}{x+1}$은 존재하지 않는다.

023 답 **존재하지 않는다.**

$x=2$에서 우극한과 좌극한을 구하면

$\lim_{x\to2+}\frac{x^2-2x}{|x-2|}=\lim_{x\to2+}\frac{x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}x=2$

$\lim_{x\to2-}\frac{x^2-2x}{|x-2|}=\lim_{x\to2-}\frac{x(x-2)}{-(x-2)}=\lim_{x\to2-}(-x)=-2$

따라서 $\lim_{x\to2+}\frac{x^2-2x}{|x-2|}\neq\lim_{x\to2-}\frac{x^2-2x}{|x-2|}$이므로 $\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x}{|x-2|}$는 존재하지 않는다.

024 답 **1, 0, 존재하지 않는다.**

025 답 **존재하지 않는다.**

$3\le x<4$일 때 $[x]=3$이므로 $5-[x]=2$

$2\le x<3$일 때 $[x]=2$이므로 $5-[x]=3$

$x=3$에서 우극한과 좌극한을 구하면

$\lim_{x\to3+}(5-[x])=2$, $\lim_{x\to3-}(5-[x])=3$

따라서 $\lim_{x\to3+}(5-[x])\neq\lim_{x\to3-}(5-[x])$이므로 $\lim_{x\to3}(5-[x])$는 존재하지 않는다.

026 답 **존재하지 않는다.**

$6\le x<8$일 때 $3\le\frac{x}{2}<4$이므로 $\left[\frac{x}{2}\right]=3$

$4\le x<6$일 때 $2\le\frac{x}{2}<3$이므로 $\left[\frac{x}{2}\right]=2$

$x=6$에서 우극한과 좌극한을 구하면

$\lim_{x\to6+}\left[\frac{x}{2}\right]=3$, $\lim_{x\to6-}\left[\frac{x}{2}\right]=2$

따라서 $\lim_{x\to6+}\left[\frac{x}{2}\right]\neq\lim_{x\to6-}\left[\frac{x}{2}\right]$이므로 $\lim_{x\to6}\left[\frac{x}{2}\right]$는 존재하지 않는다.

027 답 **4**

$\lim_{x\to1}2f(x)=2\lim_{x\to1}f(x)=2\times2=4$

028 답 **−1**

$$\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1}f(x)+\lim_{x\to1}g(x)$$
$$=2+(-3)=-1$$

029 답 **9**

$$\lim_{x\to1}\{3f(x)-g(x)\}=3\lim_{x\to1}f(x)-\lim_{x\to1}g(x)$$
$$=3\times2-(-3)=9$$

030 답 **−6**

$$\lim_{x\to1}f(x)g(x)=\lim_{x\to1}f(x)\times\lim_{x\to1}g(x)$$
$$=2\times(-3)=-6$$

031 답 **4**

$$\lim_{x\to1}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to1}f(x)\times\lim_{x\to1}f(x)$$
$$=2\times2=4$$

032 답 -6

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+4}{2g(x)+5}=\frac{\lim_{x\to1}\{f(x)+4\}}{\lim_{x\to1}\{2g(x)+5\}}=\frac{\lim_{x\to1}f(x)+\lim_{x\to1}4}{2\lim_{x\to1}g(x)+\lim_{x\to1}5}=\frac{2+4}{2\times(-3)+5}=-6$$

033 답 6

$$\lim_{x\to3}(x^2-2x+3)=\lim_{x\to3}x^2-2\lim_{x\to3}x+\lim_{x\to3}3=3^2-2\times3+3=6$$

034 답 6

$$\lim_{x\to1}(x+1)(x^2+2)=\lim_{x\to1}(x+1)\times\lim_{x\to1}(x^2+2)=2\times3=6$$

035 답 -7

$$\lim_{x\to-2}\frac{3x^2-5}{x+1}=\frac{\lim_{x\to-2}(3x^2-5)}{\lim_{x\to-2}(x+1)}=\frac{7}{-1}=-7$$

036 답 2

$$\lim_{x\to4}\frac{x+6}{x^2-11}=\frac{\lim_{x\to4}(x+6)}{\lim_{x\to4}(x^2-11)}=\frac{10}{5}=2$$

037 답 $x-3$, $x-3$, -1

038 답 -2

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x-1)=-2$$

039 답 27

$$\lim_{x\to3}\frac{x^3-27}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}=\lim_{x\to3}(x^2+3x+9)=27$$

040 답 0

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x+1}=0$$

041 답 $\sqrt{x+3}+2$, $\sqrt{x+3}+2$, $\sqrt{x+3}+2$, $\frac{1}{4}$

042 답 $\frac{1}{6}$

$$\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{6}$$

043 답 12

$$\lim_{x\to3}\frac{3x-9}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to3}\frac{3(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to3}\frac{3(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}=\lim_{x\to3}\{3(\sqrt{x+1}+2)\}=12$$

044 답 $-\frac{4}{3}$

$$\lim_{x\to-4}\frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x+4}=\lim_{x\to-4}\frac{(\sqrt{x^2-7}-3)(\sqrt{x^2-7}+3)}{(x+4)(\sqrt{x^2-7}+3)}=\lim_{x\to-4}\frac{x^2-16}{(x+4)(\sqrt{x^2-7}+3)}=\lim_{x\to-4}\frac{(x+4)(x-4)}{(x+4)(\sqrt{x^2-7}+3)}=\lim_{x\to-4}\frac{x-4}{\sqrt{x^2-7}+3}=-\frac{4}{3}$$

045 답 $\frac{2}{x}$, 3

046 답 $\frac{1}{3}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{3x^2-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{3-\frac{7}{x^2}}=\frac{1}{3}$$

047 답 5

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2}{(x+1)(x-4)}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2}{x^2-3x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}=5$$

048 답 0

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=0$$

049 답 1

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-8}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-\frac{8}{x}}=1$$

050 답 ∞, t, -1

051 답 1

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}+1}{x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x}}=1$$

052 답 $\frac{5}{2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2-3}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}+1}$$
$$=\frac{5}{1+1}=\frac{5}{2}$$

053 답 $\frac{1}{3}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+3}}{\sqrt{4x^2-x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{\sqrt{4-\frac{1}{x}}+1}$$
$$=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$$

054 답 2

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-2x}{\sqrt{x^2-2}+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{1+2t}{\sqrt{t^2-2}+1}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t}+2}{\sqrt{1-\frac{2}{t^2}}+\frac{1}{t}}=2$$

055 답 $\sqrt{x^2+1}+x$, $\sqrt{x^2+1}+x$, 0

056 답 $\frac{3}{2}$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}$$
$$=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$$

057 답 1

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2})(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2})}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}$$
$$=\frac{2}{1+1}=1$$

058 답 2

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-4x}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+4t}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+4t}-t)(\sqrt{t^2+4t}+t)}{\sqrt{t^2+4t}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4t}{\sqrt{t^2+4t}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{t}}+1}$$
$$=\frac{4}{1+1}=2$$

059 답 x, $x+1$, 1

060 답 $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\times\frac{x}{2-\sqrt{2x}}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2-\sqrt{2x}}=\frac{1}{2}$$

061 답 2

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left\{\left(\frac{1}{x-1}\right)^2-1\right\}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\times\frac{x(2-x)}{(x-1)^2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2-x}{(x-1)^2}=2$$

062 답 $-\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x\times\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{x\times\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}\right\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+x}+x+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1+\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

063 답 0, 0, 2, 2, 2, -3

064 답 $a=5$, $b=14$

$\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로 $\lim_{x\to2}(x^2+ax-b)=0$

즉, $4+2a-b=0$이므로 $b=2a+4$ ...... ㉠

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-b}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x+a+2)=a+4$$

따라서 $a+4=9$이므로 $a=5$

이를 ㉠에 대입하면 $b=14$

065 답 $a=3,\ b=2$

$\lim_{x\to-1}(x+1)=0$이므로 $\lim_{x\to-1}(x^2+ax+b)=0$

즉, $1-a+b=0$이므로 $b=a-1$ ······ ㉠

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2+ax+b}=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2+ax+a-1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{(x+1)(x+a-1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+a-1}=\frac{1}{a-2}$$

따라서 $\frac{1}{a-2}=1$이므로 $a=3$

이를 ㉠에 대입하면 $b=2$

066 답 $a=5,\ b=6$

$\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로 $\lim_{x\to2}(x^2-ax+b)=0$

즉, $4-2a+b=0$이므로 $b=2a-4$ ······ ㉠

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-ax+b}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-ax+2a-4}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(x-a+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-a+2}=\frac{1}{4-a}$$

따라서 $\frac{1}{4-a}=-1$이므로 $a=5$

이를 ㉠에 대입하면 $b=6$

067 답 $a=3,\ b=1$

$\lim_{x\to1}\{x^2+(a-1)x-a\}=0$이므로 $\lim_{x\to1}(x^2-b)=0$

즉, $1-b=0$이므로 $b=1$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+(a-1)x-a}{x^2-b}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+(a-1)x-a}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+a)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x+a}{x+1}=\frac{a+1}{2}$$

따라서 $\frac{a+1}{2}=2$이므로 $a=3$

068 답 $a=-1,\ b=2$

$\lim_{x\to2}(x^3-8)=0$이므로 $\lim_{x\to2}(x^2+ax-b)=0$

즉, $4+2a-b=0$이므로 $b=2a+4$ ······ ㉠

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-b}{x^3-8}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x^3-8}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x+a+2}{x^2+2x+4}=\frac{a+4}{12}$$

따라서 $\frac{a+4}{12}=\frac{1}{4}$이므로 $a=-1$

이를 ㉠에 대입하면 $b=2$

069 답 $0,\ 0,\ 3a,\ 6,\ 6,\ 6,\ -18$

070 답 $a=4,\ b=-4$

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}(a\sqrt{x}+b)=0$

즉, $a+b=0$이므로 $b=-a$ ······ ㉠

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}-a}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{a}{\sqrt{x}+1}=\frac{a}{2}$$

따라서 $\frac{a}{2}=2$이므로 $a=4$

이를 ㉠에 대입하면 $b=-4$

071 답 $a=2,\ b=2$

$\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로 $\lim_{x\to2}(\sqrt{x+a}-b)=0$

즉, $\sqrt{a+2}-b=0$이므로 $b=\sqrt{a+2}$ ······ ㉠

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a+2}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a+2})(\sqrt{x+a}+\sqrt{a+2})}{(x-2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a+2})}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a+2}}=\frac{1}{2\sqrt{a+2}}$$

따라서 $\frac{1}{2\sqrt{a+2}}=\frac{1}{4}$이므로 $a=2$

이를 ㉠에 대입하면 $b=2$

072 답 $a=2,\ b=-1$

$\lim_{x\to-1}(x+1)=0$이므로 $\lim_{x\to-1}(\sqrt{x+a}+b)=0$

즉, $\sqrt{a-1}+b=0$이므로 $b=-\sqrt{a-1}$ ······ ㉠

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{x+a}+b}=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a-1}}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-1})}{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a-1})(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-1})}$$
$$=\lim_{x\to-1}(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-1})=2\sqrt{a-1}$$

따라서 $2\sqrt{a-1}=2$이므로 $a=2$

이를 ㉠에 대입하면 $b=-1$

073 답 $a=-3,\ b=-\frac{2}{3}$

$\lim_{x\to-2}(x+2)=0$이므로 $\lim_{x\to-2}(\sqrt{x^2+5}+a)=0$

즉, $a+3=0$이므로 $a=-3$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{x^2+5}+a}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}+3}=-\frac{2}{3}$$

$\therefore\ b=-\frac{2}{3}$

074 답 $a=1,\ b=-2$

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}(\sqrt{x^2-x+1}-ax)=0$

즉, $1-a=0$이므로 $a=1$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-x+1}-ax}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-x+1}-x}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+x)}{(\sqrt{x^2-x+1}-x)(\sqrt{x^2-x+1}+x)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+x)}{-(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}(-\sqrt{x^2-x+1}-x)=-2$$

$\therefore b=-2$

075 답 $2,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 2x^2-5x+2$

076 답 $f(x)=x^2-3x+2$

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-4x+1}=1$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

또 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=-\frac{1}{2}$에서 $\lim_{x\to1}(x^2-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-a)$ (a는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-a)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-a}{x+1}=\frac{1-a}{2}$$

$\frac{1-a}{2}=-\frac{1}{2}$이므로 $a=2$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$

077 답 $f(x)=x^2+4x+3$

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x-7}{f(x)}=3$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

또 $\lim_{x\to-1}\frac{x^2-4x-5}{f(x)}=-3$에서 $\lim_{x\to-1}(x^2-4x-5)=0$이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)=0$

따라서 $f(x)=(x+1)(x-a)$ (a는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-4x-5}{f(x)}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-5)}{(x+1)(x-a)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{x-5}{x-a}=\frac{6}{a+1}$$

$\frac{6}{a+1}=-3$이므로 $a=-3$

$\therefore f(x)=(x+1)(x+3)=x^2+4x+3$

078 답 $f(x)=2x^2+7x+6$

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{4x^2+2x-3}=\frac{1}{2}$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

또 $\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x^2+5x+6}=-1$에서 $\lim_{x\to-2}(x^2+5x+6)=0$이므로

$\lim_{x\to-2}f(x)=f(-2)=0$

따라서 $f(x)=2(x+2)(x-a)$ (a는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x^2+5x+6}=\lim_{x\to-2}\frac{2(x+2)(x-a)}{(x+2)(x+3)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{2x-2a}{x+3}=-2a-4$$

$-2a-4=-1$이므로 $a=-\frac{3}{2}$

$\therefore f(x)=2(x+2)\left(x+\frac{3}{2}\right)=2x^2+7x+6$

079 답 $-2,\ -2,\ -2$

080 답 7

$\lim_{x\to1}(x^2+2x+4)=7$, $\lim_{x\to1}(2x^2+5)=7$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to1}f(x)=7$

081 답 -4

$\lim_{x\to1}(-x^2+2x-5)=-4$, $\lim_{x\to1}(x^2-2x-3)=-4$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to1}f(x)=-4$

082 답 1, 1, 1

083 답 0

$3x-1<f(x)<3x+2$의 각 변을 x^2+1로 나누면

$$\frac{3x-1}{x^2+1}<\frac{f(x)}{x^2+1}<\frac{3x+2}{x^2+1}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x^2+1}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x^2+1}=0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=0$

084 답 2

$2x^2+x-4<f(x)<2x^2+x+3$의 각 변을 x^2+1로 나누면

$$\frac{2x^2+x-4}{x^2+1}<\frac{f(x)}{x^2+1}<\frac{2x^2+x+3}{x^2+1}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-4}{x^2+1}=2$, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+3}{x^2+1}=2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=2$

085 답 $a^2+1,\ a^2+1,\ \frac{1}{2}$

086 답 8

$\overline{AP}=\sqrt{(t+4)^2+(\sqrt{2t})^2}=\sqrt{t^2+10t+16}$,

$\overline{BP}=\sqrt{(t-4)^2+(\sqrt{2t})^2}=\sqrt{t^2-6t+16}$이므로

$$\lim_{t\to\infty}(\overline{AP}-\overline{BP})=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+10t+16}-\sqrt{t^2-6t+16})$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{16t}{\sqrt{t^2+10t+16}+\sqrt{t^2-6t+16}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{16}{\sqrt{1+\frac{10}{t}+\frac{16}{t^2}}+\sqrt{1-\frac{6}{t}+\frac{16}{t^2}}}$$
$$=\frac{16}{1+1}=8$$

087 답 $\frac{1}{2}$

두 점 A(3, 0), B(0, 3)을 지나는 직선의 방정식은

$y=-x+3$

따라서 $\overline{OQ}=x$, $\overline{PQ}=3-x$이므로

$f(x)=x(3-x)$

$$\therefore \lim_{x\to 3-}\frac{f(x)}{9-x^2}=\lim_{x\to 3-}\frac{x(3-x)}{(3+x)(3-x)}=\lim_{x\to 3-}\frac{x}{3+x}=\frac{1}{2}$$

088 답 $\sqrt{2}$

직선 $y=x+1$에 수직인 직선의 기울기는 -1이므로 점 $P(t, t+1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-(t+1)=-(x-t)$

$\therefore y=-x+2t+1$

따라서 $Q(0, 2t+1)$이므로

$\overline{AP}=\sqrt{(t+1)^2+(t+1)^2}=\sqrt{2t^2+4t+2}$

$\overline{AQ}=\sqrt{1^2+(2t+1)^2}=\sqrt{4t^2+4t+2}$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{4t^2+4t+2}}{\sqrt{2t^2+4t+2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}}}{\sqrt{2+\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

연산 유형 최종 점검하기

21~23쪽

1 ⑤	**2** ⑤	**3** ②	**4** 1	**5** ④	**6** ①
7 ④	**8** -1	**9** ③	**10** ①	**11** ①	**12** -1
13 ②	**14** ⑤	**15** -2	**16** 24	**17** 1	**18** ③
19 2					

1 $x>2$일 때, $|x-2|=x-2$이므로

$$\lim_{x\to 2+}\frac{x^2-4}{|x-2|}=\lim_{x\to 2+}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}(x+2)=4$$

2 ① $\lim_{x\to -2+}f(x)=-1$

② $\lim_{x\to 1+}f(x)=0$

③ $\lim_{x\to 2-}f(x)=-1$

④ $\lim_{x\to -1+}f(x)=\lim_{x\to -1-}f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to -1}f(x)=1$

⑤ $\lim_{x\to 0+}f(x)=-1$, $\lim_{x\to 0-}f(x)=2$

따라서 $\lim_{x\to 0+}f(x)\neq\lim_{x\to 0-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)$는 존재하지 않는다.

3 ㄱ. $\lim_{x\to 0+}(x^2+1)=1$, $\lim_{x\to 0-}(x^2+1)=1$이므로

$\lim_{x\to 0}(x^2+1)=1$

ㄴ. $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=\infty$, $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty$

따라서 $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\neq\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}$이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$은 존재하지 않는다.

ㄷ. $-1\le x<0$일 때 $[x]=-1$, $-2\le x<-1$일 때 $[x]=-2$이므로

$\lim_{x\to -1+}\frac{[x]}{x}=\frac{-1}{-1}=1$, $\lim_{x\to -1-}\frac{[x]}{x}=\frac{-2}{-1}=2$

따라서 $\lim_{x\to -1+}\frac{[x]}{x}\neq\lim_{x\to -1-}\frac{[x]}{x}$이므로 $\lim_{x\to -1}\frac{[x]}{x}$는 존재하지 않는다.

ㄹ. $\lim_{x\to 1+}|x-1|=\lim_{x\to 1+}(x-1)=0$

$\lim_{x\to 1-}|x-1|=\lim_{x\to 1-}(-x+1)=0$

$\therefore \lim_{x\to 1}|x-1|=0$

따라서 보기 중 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

4
$$\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)-g(x)}{7-f(x)g(x)}=\frac{2\lim_{x\to 0}f(x)-\lim_{x\to 0}g(x)}{\lim_{x\to 0}7-\lim_{x\to 0}f(x)\times\lim_{x\to 0}g(x)}=\frac{2\times 2-3}{7-2\times 3}=1$$

5
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$$

6
$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$$

7
$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{2}{3}$$

따라서 $a=3$, $b=2$이므로

$ab=6$

8 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-5}+2}{x+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-5}+2}{-t+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{5}{t^2}}+\frac{2}{t}}{-1+\frac{1}{t}}=-1$$

9 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$

$=\frac{2}{1+1}=1$

10 $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{3x-1}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\times\frac{3x}{3x-1}\right)$

$=\lim_{x\to0}\frac{3}{3x-1}=-3$

11 $\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{x}{x+1}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x\times\frac{-1}{x+1}\right)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{1+\frac{1}{x}}=-1$

12 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}(2x+a)=0$

즉, $2+a=0$이므로 $a=-2$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{2x+a}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{2x-2}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{2(x-1)}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ ab=-1$

13 $\lim_{x\to-1}(x+1)=0$이므로 $\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}(x^2+ax+b)=0$

즉, $1-a+b=0$이므로 $b=a-1$

$\therefore\ \lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+ax+a-1}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+a-1)}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}(x+a-1)=a-2$

$a-2=3$이므로 $a=5$

따라서 $f(x)=x^2+5x+4$이므로

$f(-2)=4-10+4=-2$

14 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로 $\lim_{x\to2}(a\sqrt{x-1}+b)=0$

즉, $a+b=0$이므로 $b=-a$ ······ ㉠

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x-1}+b}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x-1}-a}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{a}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{a}{2}$

따라서 $\frac{a}{2}=1$이므로 $a=2$

이를 ㉠에 대입하면 $b=-2$

$\therefore\ a-b=4$

15 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

또 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=4$에서 $\lim_{x\to0}x=0$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$

따라서 $f(x)=2x(x-a)$ (a는 상수)로 놓으면

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2x(x-a)}{x}$

$=\lim_{x\to0}(2x-2a)=-2a$

$-2a=4$이므로 $a=-2$

$\therefore\ f(x)=2x(x+2)=2x^2+4x$

$\therefore\ f(-1)=2-4=-2$

16 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2+2x-3}=2$에서

$a=2$

$\lim_{x\to1}f(x)=\frac{3}{2}$에서 $\lim_{x\to1}\frac{2x^2+bx+c}{x^2+2x-3}=\frac{3}{2}$ ······ ㉠

이때 $\lim_{x\to1}(x^2+2x-3)=0$이므로 $\lim_{x\to1}(2x^2+bx+c)=0$

즉, $2+b+c=0$이므로 $c=-b-2$ ······ ㉡

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to1}\frac{2x^2+bx+c}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+bx-b-2}{x^2+2x-3}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x+b+2)}{(x-1)(x+3)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{2x+b+2}{x+3}=\frac{b+4}{4}$

따라서 $\frac{b+4}{4}=\frac{3}{2}$이므로 $b=2$

이를 ㉡에 대입하면 $c=-4$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=4+4+16=24$

17 $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=1$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x+2}=1$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}f(x)=1$

18 $x^2-3<(2x^2+1)f(x)<x^2+6$의 각 변을 $2x^2+1$로 나누면

$\frac{x^2-3}{2x^2+1}<f(x)<\frac{x^2+6}{2x^2+1}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3}{2x^2+1}=\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6}{2x^2+1}=\frac{1}{2}$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{2}$

19 $\overline{OQ}=a$, $\overline{PQ}=a^2$이므로

$S(a)=a\times a^2=a^3$

$L(a)=2(a+a^2)=2a^2+2a$

$\therefore\ \lim_{a\to\infty}\frac{aL(a)}{S(a)}=\lim_{a\to\infty}\frac{2a^3+2a^2}{a^3}=2$

02 함수의 연속

26～33쪽

001 답 ×

$f(1)=1$

002 답 ○

$\lim_{x\to1+}f(x)=1$, $\lim_{x\to1-}f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)$는 존재하지 않는다.

003 답 ○

004 답 ○

$f(2)=-1$

005 답 ×

$\lim_{x\to2+}f(x)=0$, $\lim_{x\to2-}f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)=0$

006 답 ×

$\lim_{x\to2}f(x)\neq f(2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

007 답 ○

$f(3)=1$, $\lim_{x\to3}f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

008 답 **1, 연속**

009 답 **연속**

$f(1)=0$, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

010 답 **연속**

$f(1)=2$, $\lim_{x\to1}f(x)=2$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

011 답 **연속**

$f(1)=0$, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

012 답 **불연속**

$x=1$일 때, $f(1)$이 정의되지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

013 답 **불연속**

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}[x]=1$, $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}[x]=0$이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to1}f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

014 답 **불연속**

$f(1)=0$, $\lim_{x\to1}f(x)=2$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)\neq f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

015 답 **연속**

$f(1)=3$, $\lim_{x\to1}f(x)=3$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

016 답 $(-\infty, \infty)$

함수 $f(x)=x^2+4$는 모든 실수 x에서 연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다.

017 답 $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$

함수 $f(x)=\frac{1}{x+1}$은 $x=-1$에서 불연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$이다.

018 답 $[1, \infty)$

함수 $f(x)=\sqrt{x-1}$은 $x-1\geq0$, 즉 $x\geq1$에서 연속이므로 연속인 구간은 $[1, \infty)$이다.

019 답 $(-\infty, 2]$

함수 $f(x)=\sqrt{2-x}$는 $2-x\geq0$, 즉 $x\leq2$에서 연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty, 2]$이다.

020 답 **1, 1, 6, 1, 7**

021 답 **2**

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=2$에서도 연속이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(x+a)=a+2$, $f(2)=4$이므로

$a+2=4 \qquad \therefore a=2$

022 답 x^2+ax-2, -1, $x+1$, 3, 3

023 답 $a=2$, $b=-1$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서도 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+a}{x-1}=b \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}(x^2-3x+a)=0$

즉, $1-3+a=0$이므로 $a=2$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+a}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x-2)=-1$$

$\therefore b=-1$

024 답 $a=3$, $b=9$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서도 연속이므로

$\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$ $\quad\therefore \lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x^2+8}-b}{x-1}=1$ …… ㉠

이때 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}(a\sqrt{x^2+8}-b)=0$

즉, $3a-b=0$이므로 $b=3a$ …… ㉡

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x^2+8}-b}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x^2+8}-3a}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x^2+8}-3)(\sqrt{x^2+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x^2+8}+3)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{a(x^2-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+8}+3)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{a(x+1)}{\sqrt{x^2+8}+3}=\frac{a}{3}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{3}=1$이므로 $a=3$

이를 ㉡에 대입하면 $b=9$

025 답 $f(1)$, 0, 0, -2, $x+2$, 3, 3

026 답 5

$x\neq2$일 때, $f(x)=\frac{x^2+x+a}{x-2}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=2$에서도 연속이므로

$\lim_{x\to2} f(x)=f(2)$ $\quad\therefore \lim_{x\to2}\frac{x^2+x+a}{x-2}=f(2)$ …… ㉠

이때 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로 $\lim_{x\to2}(x^2+x+a)=0$

즉, $4+2+a=0$이므로 $a=-6$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{x^2+x+a}{x-2}&=\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}(x+3)=5\end{aligned}$$

$\therefore f(2)=5$

027 답 1

$x\neq-2$일 때, $f(x)=\frac{x^2+ax+6}{x+2}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-2$에서도 연속이므로

$\lim_{x\to-2} f(x)=f(-2)$ $\quad\therefore \lim_{x\to-2}\frac{x^2+ax+6}{x+2}=f(-2)$ …… ㉠

이때 $\lim_{x\to-2}(x+2)=0$이므로 $\lim_{x\to-2}(x^2+ax+6)=0$

즉, $4-2a+6=0$이므로 $a=5$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}\frac{x^2+ax+6}{x+2}&=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+5x+6}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x+3)}{x+2}\\&=\lim_{x\to-2}(x+3)=1\end{aligned}$$

$\therefore f(-2)=1$

028 답 $(-\infty, \infty)$

함수 $f(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 함수 $3f(x)$는 연속함수의 성질에 의하여 모든 실수 x에서 연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다.

029 답 $(-\infty, \infty)$

함수 $g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)-2g(x)$는 연속함수의 성질에 의하여 모든 실수 x에서 연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다.

030 답 $(-\infty, \infty)$

함수 $f(x)g(x)$는 연속함수의 성질에 의하여 모든 실수 x에서 연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다.

031 답 $(-\infty, \infty)$

모든 실수 x에 대하여 $g(x)\neq0$이므로 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 연속함수의 성질에 의하여 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$가 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다.

032 답 $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$

함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $f(x)=0$일 때, 불연속이다.

따라서 $x^2-2x+1=0$, 즉 $x=1$에서 불연속이므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 연속인 구간은 $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$이다.

033 답 연속

$g(x)=|x|$, $h(x)=|x+1|$이라고 하면 두 함수 $g(x)$, $h(x)$는 구간 $[-1, 1]$에서 각각 연속이므로 함수 $f(x)=g(x)+h(x)$도 이 구간에서 연속이다.

034 답 연속

$g(x)=3x-1$, $h(x)=x^2+4x-5$라고 하면 두 함수 $g(x)$, $h(x)$는 구간 $[-1, 1]$에서 각각 연속이므로 함수 $f(x)=g(x)h(x)$도 이 구간에서 연속이다.

035 답 불연속

$g(x)=-(x+3)$, $h(x)=2x-1$이라고 하면 두 함수 $g(x)$, $h(x)$는 구간 $[-1, 1]$에서 연속이지만 함수 $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$는 $h(x)=0$, 즉 $x=\frac{1}{2}$에서 불연속이므로 구간 $[-1, 1]$에서 불연속이다.

036 답 연속

$g(x)=x$, $h(x)=x^2-16$이라고 하면 두 함수 $g(x)$, $h(x)$는 구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 함수 $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$는 $h(x)=0$, 즉 $x=\pm4$에서 불연속이므로 구간 $[-1, 1]$에서 연속이다.

037 답 2, 6, -1, 3

038 답 최댓값: 24, 최솟값: -1

$f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$은 구간 $[0, 6]$에서 연속이고, $x=6$일 때 최댓값 24, $x=1$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

039 답 최댓값: 1, 최솟값: -20

$f(x)=-x^2-2x+4=-(x+1)^2+5$는 구간 $[1, 4]$에서 연속이고, $x=1$일 때 최댓값 1, $x=4$일 때 최솟값 -20을 갖는다.

040 답 **최댓값: 1, 최솟값: $\frac{1}{5}$**

$f(x)=\frac{1}{x-3}$은 구간 $[4, 8]$에서 연속이고, $x=4$일 때 최댓값 1, $x=8$일 때 최솟값 $\frac{1}{5}$을 갖는다.

041 답 **최댓값: 4, 최솟값: 1**

$f(x)=\sqrt{x+1}$은 구간 $[0, 15]$에서 연속이고, $x=15$일 때 최댓값 4, $x=0$일 때 최솟값 1을 갖는다.

042 답 **최댓값: 5, 최솟값: 3**

$f(x)=\sqrt{11-2x}$는 구간 $[-7, 1]$에서 연속이고, $x=-7$일 때 최댓값 5, $x=1$일 때 최솟값 3을 갖는다.

043 답 **$>$, 0, (0, 2), (0, 2)**

044 답 **풀이 참고**

$f(x)=x^2-3x-5$라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 4]$에서 연속이고

$f(-2)=5>0$, $f(4)=-1<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$을 만족하는 c가 열린구간 $(-2, 4)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^2-3x-5=0$은 열린구간 $(-2, 4)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

045 답 **풀이 참고**

$f(x)=x^3-x^2-2x$라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이고

$f(1)=-2<0$, $f(3)=12>0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$을 만족하는 c가 열린구간 $(1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^3-x^2-2x=0$은 열린구간 $(1, 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

046 답 **풀이 참고**

$f(x)=x^4+4x+2$라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고

$f(-1)=-1<0$, $f(1)=7>0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$을 만족하는 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^4+4x+2=0$은 열린구간 $(-1, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

047 답 **ㄴ**

$f(x)=x^3+7x+5$라고 하면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$f(-2)=-17<0$, $f(-1)=-3<0$, $f(0)=5>0$, $f(1)=13>0$, $f(2)=27>0$

$\therefore f(-1)f(0)<0$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-1, 0)$에서 실근을 갖는다.

048 답 **ㄹ**

$f(x)=-x^3+x+3$이라고 하면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$f(-2)=9>0$, $f(-1)=3>0$, $f(0)=3>0$, $f(1)=3>0$, $f(2)=-3<0$

$\therefore f(1)f(2)<0$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1, 2)$에서 실근을 갖는다.

049 답 **$<$, $<$, (1, 2), 2**

050 답 **3개**

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속이고

$f(-2)f(-1)<0$, $f(-1)f(0)<0$, $f(0)f(1)<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, 2)$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

051 답 **$<$, $a-1$, 1, 3**

052 답 **11**

$f(x)=x^2-3x+a$라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 연속이므로 방정식 $f(x)=0$이 열린구간 $(-2, 1)$에서 하나의 실근을 가지려면

$f(-2)f(1)<0$, $(a+10)(a-2)<0$ $\quad\therefore -10<a<2$

따라서 정수 a는 $-9, -8, -7, \cdots, 1$의 11개이다.

053 답 **4**

$f(x)=-2x^2+x+a$라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이므로 방정식 $f(x)=0$이 열린구간 $(1, 2)$에서 하나의 실근을 가지려면

$f(1)f(2)<0$, $(a-1)(a-6)<0$ $\quad\therefore 1<a<6$

따라서 정수 a는 2, 3, 4, 5의 4개이다.

연산 유형 최종 점검하기

34~35쪽

1 ⑤	**2** ㄴ, ㄷ	**3** 2	**4** ③	**5** ⑤	**6** $a=3$, $b=5$
7 $a=-7$, $b=-6$		**8** $0<a<1$		**9** ③	**10** ③
11 ②	**12** ④				

1 ① $x=1$일 때, $f(1)$이 정의되지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

② $\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1+}([x]+3)=4$, $\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1-}([x]+3)=3$

이므로 $\lim_{x\to1+} f(x)\neq\lim_{x\to1-} f(x)$

따라서 $\lim_{x\to1} f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

③ $x=1$일 때, $f(1)$이 정의되지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

④ $f(1)=1$, $\lim_{x\to1}f(x)=3$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)\neq f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

⑤ $f(1)=-2$, $\lim_{x\to1}f(x)=-2$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

2 ㄱ. $\lim_{x\to2+}f(x)=2$, $\lim_{x\to2-}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)\neq\lim_{x\to2-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to2}f(x)$는 존재하지 않는다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $0<x<2$에서 연속이므로 $0<a<2$인 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=2$, $x=3$에서 불연속이므로 불연속인 x의 값은 2개이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

3 $f(x)=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{\dfrac{x-1}{x}}=\dfrac{x}{x-1}$

따라서 $x=0$, $x-1=0$일 때, 함수 $f(x)$가 정의되지 않으므로 불연속인 x의 값은 0, 1의 2개이다.

4 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-1$에서도 연속이므로 $\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

$$\therefore k=\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^3+2x^2+2x+1}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2+x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x^2+x+1)=1$$

5 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=3$에서도 연속이므로

$\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)=f(3)$

$\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3-}(x^2-2x+b)=b+3$, $f(3)=3a+6$이므로

$3a+6=b+3$ $\quad\therefore 3a-b=-3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편 $f(1)=5$에서 $1-2+b=5$ $\quad\therefore b=6$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $a=1$

$\therefore ab=6$

6 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서도 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to1}\dfrac{x^2+ax-4}{x-1}=b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}(x^2+ax-4)=0$

즉, $1+a-4=0$이므로 $a=3$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+4)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+4)=5$$

$\therefore b=5$

7 $x\neq-2$, $x\neq3$일 때, $f(x)=\dfrac{x^3+ax+b}{x^2-x-6}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-2$, $x=3$에서도 연속이므로

$\lim_{x\to-2}f(x)=f(-2)$, $\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$

(i) $\lim_{x\to-2}f(x)=f(-2)$에서 $\lim_{x\to-2}\dfrac{x^3+ax+b}{x^2-x-6}=f(-2)$

이때 $\lim_{x\to-2}(x^2-x-6)=0$이므로 $\lim_{x\to-2}(x^3+ax+b)=0$

즉, $-8-2a+b=0$이므로 $2a-b=-8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

(ii) $\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$에서 $\lim_{x\to3}\dfrac{x^3+ax+b}{x^2-x-6}=f(3)$

이때 $\lim_{x\to3}(x^2-x-6)=0$이므로 $\lim_{x\to3}(x^3+ax+b)=0$

즉, $27+3a+b=0$이므로 $3a+b=-27$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-7$, $b=-6$

8 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 모든 실수 x에서 연속이려면 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\neq0$이어야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2+2ax+a=0$의 판별식을 D라고 하면 $D<0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=a^2-a<0$, $a(a-1)<0$ $\quad\therefore 0<a<1$

9 ㄷ. $g(a)=0$이면 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x=a$에서 불연속이다.

ㄹ. $f(a)=g(a)$이면 함수 $\dfrac{1}{f(x)-g(x)}$은 $x=a$에서 불연속이다.

따라서 보기 중 $x=a$에서 항상 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

10 함수 $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$는 $x=1$에서 불연속이다.

①, ②, ⑤ 함수 $f(x)$는 주어진 구간에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값과 최솟값을 갖는다.

③ 구간 $[0, 1)$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값은 -2이고, 최솟값은 없다.

④ 구간 $(1, 2]$에서 함수 $f(x)$는 최댓값은 없고, $x=2$일 때 최솟값은 2이다.

11 $f(x)=x^3+5x+2$라고 하면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$f(-2)=-16<0$, $f(-1)=-4<0$, $f(0)=2>0$, $f(1)=8>0$, $f(2)=20>0$, $f(3)=44>0$

$\therefore f(-1)f(0)<0$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-1, 0)$에서 실근을 갖는다.

12 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 4]$에서 연속이고

$f(0)f(1)<0$, $f(1)f(2)<0$, $f(3)f(4)<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(3, 4)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 4)$에서 적어도 3개의 실근을 가지므로

$n=3$

03 미분계수와 도함수

38~47쪽

001 답 **4, 4, 8, 1**

002 답 **9**

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=\frac{15-6}{1}=9$

003 답 **6**

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(0)-f(-3)}{0-(-3)}=\frac{1-(-17)}{3}=6$

004 답 **$2a+\Delta x$**

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}\\&=\frac{\{(a+\Delta x)^2+1\}-(a^2+1)}{\Delta x}\\&=\frac{2a\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2a+\Delta x\end{aligned}$$

005 답 **2**

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{(a^2-1)-0}{a-1}\\&=\frac{(a-1)(a+1)}{a-1}=a+1\end{aligned}$$

따라서 $a+1=3$이므로 $a=2$

006 답 **4**

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{(a^2+5a+1)-7}{a-1}\\&=\frac{a^2+5a-6}{a-1}=\frac{(a-1)(a+6)}{a-1}\\&=a+6\end{aligned}$$

따라서 $a+6=10$이므로 $a=4$

007 답 **-2**

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{(2a^2+a-3)-0}{a-1}\\&=\frac{(a-1)(2a+3)}{a-1}=2a+3\end{aligned}$$

따라서 $2a+3=-1$이므로 $a=-2$

008 답 **-8**

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{(-a^2-2a+9)-6}{a-1}\\&=\frac{-a^2-2a+3}{a-1}=\frac{-(a-1)(a+3)}{a-1}\\&=-a-3\end{aligned}$$

따라서 $-a-3=5$이므로 $a=-8$

009 답 **1, 3, 3, 1, 3, 3**

010 답 **-2**

$$\begin{aligned}f'(1)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{-2(1+\Delta x)+5\}-3}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\Delta x}{\Delta x}=-2\end{aligned}$$

011 답 **8**

$$\begin{aligned}f'(1)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4(1+\Delta x)^2-4}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{8\Delta x+4(\Delta x)^2}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}(8+4\Delta x)=8\end{aligned}$$

012 답 **-4**

$$\begin{aligned}f'(1)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{-2(1+\Delta x)^2+3\}-1}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-4\Delta x-2(\Delta x)^2}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}(-4-2\Delta x)=-4\end{aligned}$$

013 답 **4**

$$\begin{aligned}f'(1)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(1+\Delta x)^2+2(1+\Delta x)\}-3}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4\end{aligned}$$

014 답 **2**

$$\begin{aligned}f'(1)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{-(1+\Delta x)^2+4(1+\Delta x)+1\}-4}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}(2-\Delta x)=2\end{aligned}$$

015 답 **3, 3, 3**

016 답 **-2**

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\times(-2)\\&=f'(a)\times(-2)\\&=1\times(-2)=-2\end{aligned}$$

017 답 2

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-f(a-h)+f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$$
$$=f'(a)+f'(a)$$
$$=1+1=2$$

018 답 8

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a-5h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)-f(a-5h)+f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\times 3+\lim_{h\to 0}\frac{f(a-5h)-f(a)}{-5h}\times 5$$
$$=3f'(a)+5f'(a)$$
$$=3+5=8$$

019 답 $x-1$, $x-1$, $\frac{1}{2}$, 3

020 답 $\frac{3}{2}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x+3)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+3}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+3}$$
$$=f'(1)\times\frac{1}{4}$$
$$=6\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$$

021 답 12

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{(x-1)(x+1)}\times(x+1)\right\}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times\lim_{x\to 1}(x+1)$$
$$=f'(1)\times 2$$
$$=6\times 2=12$$

022 답 2

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-xf(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)-xf(1)+f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)f(1)}{x-1}$$
$$=f'(1)-f(1)$$
$$=6-4=2$$

023 답 1, 1, 2, 2

024 답 −8

구하는 접선의 기울기는 $f'(2)$와 같으므로

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2(2+\Delta x)^2-(-8)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-8\Delta x-2(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(-8-2\Delta x)=-8$$

025 답 −2

구하는 접선의 기울기는 $f'(-1)$과 같으므로

$$f'(-1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(-1+\Delta x)^2+3\}-4}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(-2+\Delta x)=-2$$

026 답 −2

구하는 접선의 기울기는 $f'(-2)$와 같으므로

$$f'(-2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-2+\Delta x)-f(-2)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(-2+\Delta x)^2+2(-2+\Delta x)\}-0}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(-2+\Delta x)=-2$$

027 답 7

구하는 접선의 기울기는 $f'(2)$와 같으므로

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{2(2+\Delta x)^2-(2+\Delta x)+1\}-7}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{7\Delta x+2(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(7+2\Delta x)=7$$

028 답 −5

구하는 접선의 기울기는 $f'(1)$과 같으므로

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{-3(1+\Delta x)^2+(1+\Delta x)-1\}-(-3)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-5\Delta x-3(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(-5-3\Delta x)=-5$$

029 답 ○

$f'(a)=0$이므로 $x=a$에서 미분가능하다.

030 답 ×

$x=a$에서 불연속이므로 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

031 답 ×

$f'(a)$가 존재하지 않으므로 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

032 답 연속, 1, -1, 미분가능하지 않다, 미분가능하지 않다

033 답 연속이지만 미분가능하지 않다.

$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

한편

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{x-|x|}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x-x}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{x-|x|}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{x-(-x)}{x}=2$$

에서 $f'(0)$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

034 답 연속이고 미분가능하다.

$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

한편

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{|x^2|}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0+}x=0$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{|x^2|}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0-}x=0$$

에서 $f'(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

035 답 $f'(x)=0$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-8-(-8)}{h}=0$$

036 답 $f'(x)=2$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\{2(x+h)+5\}-(2x+5)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=2$$

037 답 $f'(x)=2x-1$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^2-(x+h)\}-(x^2-x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{(2x-1)h+h^2}{h}\\&=\lim_{h\to 0}(2x-1+h)\\&=2x-1\end{aligned}$$

038 답 $f'(x)=3x^2-2$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^3-2(x+h)+5\}-(x^3-2x+5)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{(3x^2-2)h+3xh^2+h^3}{h}\\&=\lim_{h\to 0}(3x^2-2+3xh+h^2)\\&=3x^2-2\end{aligned}$$

039 답 $2x-3$, $2x-3$, $2x-3$, -1

040 답 $f'(x)=3$, $f'(1)=3$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\{3(x+h)+7\}-(3x+7)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}=3\end{aligned}$$

$\therefore f'(1)=3$

041 답 $f'(x)=4x+1$, $f'(1)=5$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\{2(x+h)^2+(x+h)-3\}-(2x^2+x-3)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{(4x+1)h+2h^2}{h}\\&=\lim_{h\to 0}(4x+1+2h)\\&=4x+1\end{aligned}$$

$\therefore f'(1)=4+1=5$

042 답 $y'=8x^7$

$y'=8x^{8-1}=8x^7$

043 답 $y'=14x^{13}$

$y'=14x^{14-1}=14x^{13}$

044 답 $y'=0$

045 답 $y'=2$

$$\begin{aligned}y'&=2(x)'+(7)'\\&=2\times 1+0=2\end{aligned}$$

046 답 $y'=6x-4$

$$\begin{aligned}y'&=3(x^2)'-4(x)'+(6)'\\&=3\times 2x-4\times 1+0\\&=6x-4\end{aligned}$$

047 답 $y'=-3x^2+10x$

$$\begin{aligned}y'&=-(x^3)'+5(x^2)'-(1)'\\&=-3x^2+5\times 2x-0\\&=-3x^2+10x\end{aligned}$$

048 답 $y'=x^4-x^3+x^2-x+1$

$y'=\frac{1}{5}(x^5)'-\frac{1}{4}(x^4)'+\frac{1}{3}(x^3)'-\frac{1}{2}(x^2)'+(x)'$

$=\frac{1}{5}\times5x^4-\frac{1}{4}\times4x^3+\frac{1}{3}\times3x^2-\frac{1}{2}\times2x+1$

$=x^4-x^3+x^2-x+1$

049 답 x^2+1, x^2+1, 2, $2x$, $6x^2-6x+2$

050 답 $y'=8x^3+18x^2+2x-3$

$y'=(x^2+3x+1)'(2x^2-1)+(x^2+3x+1)(2x^2-1)'$

$=(2x+3)(2x^2-1)+(x^2+3x+1)\times4x$

$=(4x^3+6x^2-2x-3)+(4x^3+12x^2+4x)$

$=8x^3+18x^2+2x-3$

051 답 $y'=5x^4+9x^2-6x+2$

$y'=(x^2+2)'(x^3+x-3)+(x^2+2)(x^3+x-3)'$

$=2x(x^3+x-3)+(x^2+2)(3x^2+1)$

$=(2x^4+2x^2-6x)+(3x^4+7x^2+2)$

$=5x^4+9x^2-6x+2$

052 답 $y'=6x^2-6x-11$

$y'=(x+2)'(x-3)(2x-1)+(x+2)(x-3)'(2x-1)$
$+(x+2)(x-3)(2x-1)'$

$=(x-3)(2x-1)+(x+2)(2x-1)+(x+2)(x-3)\times2$

$=(2x^2-7x+3)+(2x^2+3x-2)+(2x^2-2x-12)$

$=6x^2-6x-11$

053 답 18

$f'(x)=-10x+8$이므로

$f'(-1)=10+8=18$

054 답 7

$f'(x)=3x^2-4x$이므로

$f'(-1)=3+4=7$

055 답 -7

$f'(x)=12x^3-4x+1$이므로

$f'(-1)=-12+4+1=-7$

056 답 4

$f'(x)=(x^2+x)'(3x-1)+(x^2+x)(3x-1)'$

$=(2x+1)(3x-1)+(x^2+x)\times3$

$=9x^2+4x-1$

$\therefore f'(-1)=9-4-1=4$

057 답 -33

$f'(x)=(2x^2-5)'(x^3+7)+(2x^2-5)(x^3+7)'$

$=4x(x^3+7)+(2x^2-5)\times3x^2$

$=10x^4-15x^2+28x$

$\therefore f'(-1)=10-15-28=-33$

058 답 1, 6, $-2a+b$, 2, 2

059 답 $a=1$, $b=-1$, $c=5$

$f(0)=5$에서 $c=5$

$f(x)=ax^2+bx+c$이므로 $f'(x)=2ax+b$

$f'(1)=1$에서 $2a+b=1$ …… ㉠

$f'(-1)=-3$에서 $-2a+b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-1$

060 답 $a=-1$, $b=3$, $c=4$

$f(0)=4$에서 $c=4$

$f(x)=ax^2+bx+c$이므로 $f'(x)=2ax+b$

$f'(1)=1$에서 $2a+b=1$ …… ㉠

$f'(2)=-1$에서 $4a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=3$

061 답 $a=2$, $b=-2$, $c=7$

$f(0)=7$에서 $c=7$

$f(x)=ax^2+bx+c$이므로 $f'(x)=2ax+b$

$f'(1)=2$에서 $2a+b=2$ …… ㉠

$f'(2)=6$에서 $4a+b=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-2$

062 답 4, 1, $2a+b$, $\frac{1}{2}$, 1, 0, $\frac{1}{2}x^2+x$, $\frac{3}{2}$

063 답 2

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라고 하면

$f(0)=5$에서 $c=5$

$f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(-1)=3$에서 $-2a+b=3$ …… ㉠

$f'(0)=-1$에서 $b=-1$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $a=-2$

따라서 $f(x)=-2x^2-x+5$이므로

$f(1)=2$

064 답 13

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라고 하면

$f(-1)=5$에서 $a-b+c=5$ …… ㉠

$f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(-2)=-4$에서 $-4a+b=-4$ …… ㉡

$f'(0)=4$에서 $b=4$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=4$, $c=7$

따라서 $f(x)=2x^2+4x+7$이므로

$f(1)=13$

065 답 -7

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라고 하면

$f(2)=6$에서 $4a+2b+c=6$ …… ㉠

$f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(0)=-5$에서 $b=-5$ …… ㉡

$f'(1)=7$에서 $2a+b=7$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=6$, $b=-5$, $c=-8$

따라서 $f(x)=6x^2-5x-8$이므로

$f(1)=-7$

066 답 1, a, a, $x+1$, 2, 2, -1

067 답 $a=3$, $b=-2$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면

(i) $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+} x^3=\lim_{x\to1-}(ax+b)=f(1)$

$\therefore a+b=1$ …… ㉠

(ii) 미분계수 $f'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}(x^2+x+1)=3$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(ax+b)-(a+b)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{a(x-1)}{x-1}=a$$

$\therefore a=3$

이를 ㉠에 대입하여 풀면

$b=-2$

068 답 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면

(i) $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+} ax^2=\lim_{x\to1-}(x+b)=f(1)$

$\therefore a=1+b$ …… ㉠

(ii) 미분계수 $f'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{ax^2-a}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{a(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}(ax+a)=2a$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(x+b)-(1+b)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{x-1}{x-1}=1$$

따라서 $2a=1$이므로 $a=\frac{1}{2}$

이를 ㉠에 대입하여 풀면

$b=-\frac{1}{2}$

069 답 $a=2$, $b=2$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면

(i) $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}(ax+1)=\lim_{x\to1-}(x^2+b)=f(1)$

따라서 $a+1=1+b$이므로 $a=b$ …… ㉠

(ii) 미분계수 $f'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(ax+1)-(a+1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{a(x-1)}{x-1}=a$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(x^2+b)-(1+b)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}(x+1)=2$$

$\therefore a=2$

이를 ㉠에 대입하여 풀면

$b=2$

연산 유형 최종 점검하기

48~49쪽

1 1	**2** ④	**3** ⑤	**4** ②	**5** 6	**6** ②
7 ③	**8** 4	**9** ③	**10** 3	**11** ②	**12** ①
13 3					

1 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=\frac{(5a+26)-(a+2)}{4}=a+6$

따라서 $a+6=7$이므로 $a=1$

2 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(b^2-a^2)-(b-a)}{b-a}=\frac{(b-a)(b+a)-(b-a)}{b-a}=a+b-1$ …… ㉠

$x=2$에서의 미분계수는

$f'(2)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{(2+\Delta x)^2-(2+\Delta x)\}-2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}(3+\Delta x)=3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a+b-1=3$

$\therefore a+b=4$

3 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)-f(a-h)+f(a)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times2+\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$

$=2f'(a)+f'(a)$

$=3f'(a)$

4 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x^2+x+1}\right\}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2+x+1}$

$=f'(1)\times\frac{1}{3}$

$=-3\times\frac{1}{3}=-1$

5 $f(1)=5$이므로 $a+2=5$ $\quad\therefore a=3$

$\therefore f(x)=3x^2+2$

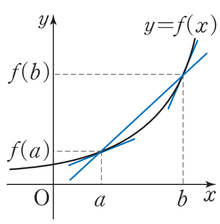
따라서 $f'(x)=6x$이므로 점 $(1, 5)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=6$

6 A는 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기, B는 점 $(b, f(b))$에서의 접선의 기울기, C는 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기를 의미한다.

따라서 오른쪽 그림에서

$A<C<B$



7 ㄱ. $f(x)$는 다항함수이므로 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

ㄴ. $\lim_{x\to0}g(x)=g(0)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

한편

$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x|x|}{x}$

$=\lim_{x\to0+}x=0$

$\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{x|x|}{x}$

$=\lim_{x\to0-}(-x)=0$

에서 $g'(0)=0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

ㄷ. $\lim_{x\to0}h(x)=h(0)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

한편

$\lim_{x\to0+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{|x|+x}{x}$

$=\lim_{x\to0+}\frac{x+x}{x}=2$

$\lim_{x\to0-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{|x|+x}{x}$

$=\lim_{x\to0-}\frac{-x+x}{x}=0$

에서 $h'(0)$이 존재하지 않으므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

따라서 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

따라서 보기 중 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ㄷ이다.

8 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이므로

$m=1$

또 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=2$, $x=3$에서 미분가능하지 않으므로

$n=3$

$\therefore m+n=4$

9 $f'(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{49}$이므로

$f'(1)=50$

10 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{4h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}f'(1)$

이때 $f'(x)=4x^3+3x^2-2x+1$이므로

$f'(1)=6$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{4h}=\frac{1}{2}f'(1)$

$=\frac{1}{2}\times6=3$

11 $f'(x)=(2x+k)'(x^2-x+1)+(2x+k)(x^2-x+1)'$

$=2(x^2-x+1)+(2x+k)(2x-1)$

이때 $f'(1)=7$이므로

$2+2+k=7$ $\quad\therefore k=3$

12 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라고 하면

$f(1)=-2$에서 $a+b+c=-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(0)=-3$에서 $b=-3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

$f'(1)=-1$에서 $2a+b=-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-3$, $c=0$

따라서 $f(x)=x^2-3x$이므로

$f(2)=-2$

13 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면

(i) $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}(ax-1)=\lim_{x\to1-}(x^3+b)=f(1)$

$\therefore a-1=1+b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

(ii) 미분계수 $f'(1)$이 존재하므로

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(ax-1)-(a-1)}{x-1}=a$

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(x^3+b)-(1+b)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}(x^2+x+1)=3$

$\therefore a=3$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $b=1$

$\therefore ab=3$

04 도함수의 활용 (1)

52~66쪽

001 답 $2x+1,\ 3,\ 3,\ 3x-1$

002 답 $y=-5x+1$

$f(x)=x^2-3x+2$라고 하면
$f'(x)=2x-3$
점 $(-1,\ 6)$에서의 접선의 기울기는
$f'(-1)=-2-3=-5$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-6=-5(x+1)\qquad \therefore\ y=-5x+1$

003 답 $y=-4x+13$

$f(x)=-x^2+9$라고 하면
$f'(x)=-2x$
점 $(2,\ 5)$에서의 접선의 기울기는
$f'(2)=-4$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-5=-4(x-2)\qquad \therefore\ y=-4x+13$

004 답 $y=x+4$

$f(x)=x^3+x^2+3$이라고 하면
$f'(x)=3x^2+2x$
점 $(-1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는
$f'(-1)=3-2=1$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-3=x+1\qquad \therefore\ y=x+4$

005 답 $y=-2x+2$

$f(x)=x^3-2x^2-x+2$라고 하면
$f'(x)=3x^2-4x-1$
점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=3-4-1=-2$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y=-2(x-1)\qquad \therefore\ y=-2x+2$

006 답 $y=x-2$

$f(x)=-x^4-x^3+3x^2+x-2$라고 하면
$f'(x)=-4x^3-3x^2+6x+1$
점 $(0,\ -2)$에서의 접선의 기울기는
$f'(0)=1$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y+2=x\qquad \therefore\ y=x-2$

007 답 $2x+3,\ 2a+3,\ 1,\ 1,\ 1,\ 5x-1$

008 답 $y=2x+7$

$f(x)=-x^2+4x+6$이라고 하면
$f'(x)=-2x+4$
접점의 좌표를 $(a,\ -a^2+4a+6)$이라고 하면 접선의 기울기가 2이므로 $f'(a)=2$에서
$-2a+4=2\qquad \therefore\ a=1$
따라서 접점의 좌표는 $(1,\ 9)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-9=2(x-1)\qquad \therefore\ y=2x+7$

009 답 $y=11x+2$ 또는 $y=11x-2$

$f(x)=x^3+8x$라고 하면 $f'(x)=3x^2+8$
접점의 좌표를 $(a,\ a^3+8a)$라고 하면 접선의 기울기가 11이므로 $f'(a)=11$에서
$3a^2+8=11,\ a^2=1\qquad \therefore\ a=\pm1$
따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ -9)$ 또는 $(1,\ 9)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y+9=11(x+1)$ 또는 $y-9=11(x-1)$
$\therefore\ y=11x+2$ 또는 $y=11x-2$

010 답 $y=-10x-15$ 또는 $y=-10x+17$

$f(x)=-x^3+2x+1$이라고 하면 $f'(x)=-3x^2+2$
접점의 좌표를 $(a,\ -a^3+2a+1)$이라고 하면 접선의 기울기가 -10이므로 $f'(a)=-10$에서
$-3a^2+2=-10,\ a^2=4\qquad \therefore\ a=\pm2$
따라서 접점의 좌표는 $(-2,\ 5)$ 또는 $(2,\ -3)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-5=-10(x+2)$ 또는 $y+3=-10(x-2)$
$\therefore\ y=-10x-15$ 또는 $y=-10x+17$

011 답 $2,\ 2,\ 2,\ -1,\ -1,\ 2,\ 1,\ 2x$

012 답 $y=2x+1$

$f(x)=x^2-2x+5$라고 하면 $f'(x)=2x-2$
접점의 좌표를 $(a,\ a^2-2a+5)$라고 하면 직선 $2x-y+3=0$에 평행한 접선의 기울기는 2이므로 $f'(a)=2$에서
$2a-2=2\qquad \therefore\ a=2$
따라서 접점의 좌표는 $(2,\ 5)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-5=2(x-2)\qquad \therefore\ y=2x+1$

013 답 $y=9x+17$ 또는 $y=9x-15$

$f(x)=x^3-3x+1$이라고 하면 $f'(x)=3x^2-3$
접점의 좌표를 $(a,\ a^3-3a+1)$이라고 하면 직선 $x+9y-5=0$에 수직인 접선의 기울기는 9이므로 $f'(a)=9$에서
$3a^2-3=9,\ a^2=4\qquad \therefore\ a=\pm2$
따라서 접점의 좌표는 $(-2,\ -1)$ 또는 $(2,\ 3)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y+1=9(x+2)$ 또는 $y-3=9(x-2)$
$\therefore\ y=9x+17$ 또는 $y=9x-15$

014 답 $2a+3,\ 2a+3,\ 2a+3,\ 1,\ 1,\ 5x+1$

015 답 $y=-6x-7$ **또는** $y=2x+1$

$f(x)=x^2+2$라고 하면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(a,\ a^2+2)$라고 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=2a$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2+2)=2a(x-a)$

$\therefore\ y=2ax-a^2+2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 접선이 점 $(-1,\ -1)$을 지나므로

$-1=-2a-a^2+2,\ a^2+2a-3=0$

$(a+3)(a-1)=0\qquad \therefore\ a=-3$ 또는 $a=1$

이를 ㉠에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$y=-6x-7$ 또는 $y=2x+1$

016 답 $y=x-1$ **또는** $y=5x-5$

$f(x)=x^2+x-1$이라고 하면 $f'(x)=2x+1$

접점의 좌표를 $(a,\ a^2+a-1)$이라고 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=2a+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2+a-1)=(2a+1)(x-a)$

$\therefore\ y=(2a+1)x-a^2-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 접선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=2a+1-a^2-1,\ a^2-2a=0$

$a(a-2)=0\qquad \therefore\ a=0$ 또는 $a=2$

이를 ㉠에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$y=x-1$ 또는 $y=5x-5$

017 답 $y=-x+3$ **또는** $y=7x-13$

$f(x)=x^2-x+3$이라고 하면 $f'(x)=2x-1$

접점의 좌표를 $(a,\ a^2-a+3)$이라고 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=2a-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2-a+3)=(2a-1)(x-a)$

$\therefore\ y=(2a-1)x-a^2+3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 접선이 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$1=(2a-1)\times 2-a^2+3,\ a^2-4a=0$

$a(a-4)=0\qquad \therefore\ a=0$ 또는 $a=4$

이를 ㉠에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$y=-x+3$ 또는 $y=7x-13$

018 답 $y=-2x$ **또는** $y=-10x$

$f(x)=-x^2-6x-4$라고 하면 $f'(x)=-2x-6$

접점의 좌표를 $(a,\ -a^2-6a-4)$라고 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=-2a-6$이므로 접선의 방정식은

$y-(-a^2-6a-4)=(-2a-6)(x-a)$

$\therefore\ y=-2(a+3)x+a^2-4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 접선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=a^2-4,\ a^2=4$

$\therefore\ a=\pm 2$

이를 ㉠에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$y=-2x$ 또는 $y=-10x$

019 답 $y=12x-11$

$f(x)=x^3+5$라고 하면 $f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3+5)$라고 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^3+5)=3a^2(x-a)$

$\therefore\ y=3a^2x-2a^3+5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 접선이 점 $(0,\ -11)$을 지나므로

$-11=-2a^3+5,\ a^3=8$

$\therefore\ a=2$ ($\because$ a는 실수)

이를 ㉠에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$y=12x-11$

020 답 **0, 0, 0, −2**

021 답 **1**

함수 $f(x)=-3x^2+6x+4$는 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 3)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(3)=-5$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-6x+6$이므로 $f'(c)=0$에서

$-6c+6=0\qquad \therefore\ c=1$

022 답 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

함수 $f(x)=x^3-4x$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(2)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-4$이므로 $f'(c)=0$에서

$3c^2-4=0,\ c^2=\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ c=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ($\because$ $0<c<2$)

023 답 **1**

함수 $f(x)=(x+3)(x-5)$는 닫힌구간 $[-3,\ 5]$에서 연속이고 열린구간 $(-3,\ 5)$에서 미분가능하며 $f(-3)=f(5)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-3,\ 5)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=(x-5)+(x+3)=2x-2$이므로 $f'(c)=0$에서

$2c-2=0\qquad \therefore\ c=1$

024 답 $\dfrac{3}{4}$

함수 $f(x)=(2x+1)(x-2)$는 닫힌구간 $\left[-\dfrac{1}{2},\ 2\right]$에서 연속이고 열린구간 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 2\right)$에서 미분가능하며 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=f(2)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 2\right)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2(x-2)+(2x+1)=4x-3$이므로 $f'(c)=0$에서

$4c-3=0\qquad \therefore\ c=\dfrac{3}{4}$

025 답 $\frac{a+b}{2}$

함수 $f(x)=(x-a)(x-b)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하며 $f(a)=f(b)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=(x-b)+(x-a)=2x-a-b$이므로 $f'(c)=0$에서

$2c-a-b=0 \qquad \therefore c=\frac{a+b}{2}$

026 답 $f'(c)$, -4, 1

027 답 $\frac{3}{2}$

함수 $f(x)=x^2-1$은 닫힌구간 $[-1, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-1, 4)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $\frac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)}=\frac{15-0}{5}=3$이고, $f'(x)=2x$에서 $f'(c)=2c$이므로

$3=2c \qquad \therefore c=\frac{3}{2}$

028 답 2

함수 $f(x)=x^2-2x+3$은 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{6-2}{2}=2$이고, $f'(x)=2x-2$에서

$f'(c)=2c-2$이므로

$2=2c-2 \qquad \therefore c=2$

029 답 $\frac{5}{2}$

함수 $f(x)=-x^2+3x+4$는 닫힌구간 $[1, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(1, 4)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{0-6}{3}=-2$이고, $f'(x)=-2x+3$에서

$f'(c)=-2c+3$이므로

$-2=-2c+3 \qquad \therefore c=\frac{5}{2}$

030 답 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

함수 $f(x)=2x^3+5$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{21-5}{2}=8$이고, $f'(x)=6x^2$에서 $f'(c)=6c^2$이므로

$8=6c^2$, $c^2=\frac{4}{3} \qquad \therefore c=\frac{2\sqrt{3}}{3}\ (\because 0<c<2)$

031 답 $\sqrt{3}$

함수 $f(x)=-x^3+4x$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(0, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{-15-0}{3}=-5$이고, $f'(x)=-3x^2+4$에서

$f'(c)=-3c^2+4$이므로

$-5=-3c^2+4$, $c^2=3 \qquad \therefore c=\sqrt{3}\ (\because 0<c<3)$

032 답 $<$, $<$, 증가

033 답 증가

구간 $(-\infty, 0]$에 속하는 임의의 a, b에 대하여 $a<b$일 때

$f(a)-f(b)=(-2a^2+1)-(-2b^2+1)=2(b^2-a^2)<0$

$\therefore f(a)<f(b)$

따라서 함수 $f(x)=-2x^2+1$은 구간 $(-\infty, 0]$에서 증가한다.

034 답 감소

구간 $(-\infty, \infty)$에 속하는 임의의 a, b에 대하여 $a<b$일 때

$f(a)-f(b)=-a^3+b^3>0$

$\therefore f(a)>f(b)$

따라서 함수 $f(x)=-x^3$은 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소한다.

035 답 감소

구간 $(0, \infty)$에 속하는 임의의 a, b에 대하여 $a<b$일 때

$f(a)-f(b)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0$

$\therefore f(a)>f(b)$

따라서 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$은 구간 $(0, \infty)$에서 감소한다.

036 답 $-2x$, 0, 증가, 감소

037 답 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소, 구간 $[-1, \infty)$에서 증가

$f(x)=x^2+2x-3$에서

$f'(x)=2x+2=2(x+1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소하고 구간 $[-1, \infty)$에서 증가한다.

038 답 **구간 $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$에서 증가, 구간 $[-1, 1]$에서 감소**

$f(x)=x^3-3x+1$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$에서 증가하고 구간 $[-1, 1]$에서 감소한다.

039 답 $\geq$, $\geq$, $\leq$, $-\frac{1}{3}$

040 답 $k\leq-\frac{4}{3}$

$f(x)=-x^3+2x^2+kx-1$에서 $f'(x)=-3x^2+4x+k$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq0$이어야 하므로

$-3x^2+4x+k\leq0$

이차방정식 $-3x^2+4x+k=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=2^2-(-3)\times k\leq0 \qquad \therefore k\leq-\frac{4}{3}$

041 답 $-3\leq k\leq3$

$f(x)=x^3+kx^2+3x-1$에서 $f'(x)=3x^2+2kx+3$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이어야 하므로

$3x^2+2kx+3\geq0$

이차방정식 $3x^2+2kx+3=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=k^2-3\times3\leq0$

$(k+3)(k-3)\leq0 \qquad \therefore -3\leq k\leq3$

042 답 $-3\leq k\leq9$

$f(x)=-x^3+kx^2-(2k+9)x$에서

$f'(x)=-3x^2+2kx-(2k+9)$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq0$이어야 하므로

$-3x^2+2kx-(2k+9)\leq0$

이차방정식 $-3x^2+2kx-(2k+9)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=k^2-3\times(2k+9)\leq0$, $k^2-6k-27\leq0$

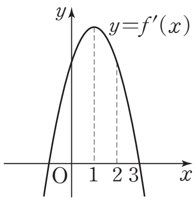
$(k+3)(k-9)\leq0 \qquad \therefore -3\leq k\leq9$

043 답 $\leq$, $\leq$, 8

044 답 $a\geq9$

$f(x)=-x^3+3x^2+ax-1$에서

$f'(x)=-3x^2+6x+a=-3(x-1)^2+a+3$



함수 $f(x)$가 구간 $[2, 3]$에서 증가하려면 $2\leq x\leq3$에서 $f'(x)\geq0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$f'(3)=a-9\geq0$

$\therefore a\geq9$

045 답 $-1\leq a\leq1$

$f(x)=x^3+ax^2-5x+7$에서 $f'(x)=3x^2+2ax-5$

함수 $f(x)$가 구간 $[-1, 1]$에서 감소해야 하므로 $-1\leq x\leq1$에서 $f'(x)\leq0$이어야 한다.

$f'(-1)\leq0$에서 $-2a-2\leq0 \qquad \therefore a\geq-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(1)\leq0$에서 $2a-2\leq0 \qquad \therefore a\leq1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는 $-1\leq a\leq1$

046 답 **2, 2, 3, 0, 2, 3**

047 답 **극댓값: 21, 극솟값: -11**

$f(x)=x^3-12x+5$에서

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	21	↘	-11	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고 극댓값은 21, $x=2$에서 극소이고 극솟값은 -11이다.

048 답 **극댓값: 5, 극솟값: -3**

$f(x)=2x^3-6x+1$에서

$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	-3	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고 극댓값은 5, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 -3이다.

049 답 **극댓값: 25, 극솟값: -7**

$f(x)=-x^3+3x^2+9x-2$에서

$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-7	↗	25	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극대이고 극댓값은 25, $x=-1$에서 극소이고 극솟값은 -7이다.

050 답 **극값을 갖지 않는다.**

$f(x)=x^3+3x^2+3x-1$에서

$f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	-2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

051 답 **극댓값: 7, 극솟값: 6**

$f(x)=x^4-2x^2+7$에서

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	6	↗	7	↘	6	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 7, $x=-1$, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 6이다.

052 답 **극댓값: 3, 극솟값: 2**

$f(x)=-x^4+4x^3-4x^2+3$에서

$f'(x)=-4x^3+12x^2-8x=-4x(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	3	↘	2	↗	3	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 극대이고 극댓값은 3, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 2이다.

053 답 **극솟값: 0**

$f(x)=3x^4-4x^3+1$에서

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↘	0	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이고 극솟값은 0이다.

054 답 **극댓값: 53**

$f(x)=-2x^4+8x^3-1$에서

$f'(x)=-8x^3+24x^2=-8x^2(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-1	↗	53	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극대이고 극댓값은 53이다.

055 답 **0, 10, 0, 0, 10, 10, −3, −12**

056 답 $\boldsymbol{a=9,\ b=-24}$

$f(x)=-x^3+ax^2+bx+15$에서 $f'(x)=-3x^2+2ax+b$

$x=2$에서 극솟값이 -5이므로

$f'(2)=0$, $f(2)=-5$

$f'(2)=0$에서 $-12+4a+b=0$ …… ㉠

$f(2)=-5$에서 $-8+4a+2b+15=-5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=9$, $b=-24$

057 답 $\boldsymbol{a=0,\ b=-3,\ c=1}$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$x=-1$, $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(-1)=0$, $f'(1)=0$

$f'(-1)=0$에서 $3-2a+b=0$ …… ㉠

$f'(1)=0$에서 $3+2a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0$, $b=-3$

또 $x=-1$에서 극댓값이 3이므로 $f(-1)=3$에서

$-1+a-b+c=3$ $\quad\therefore c=1$

058 답 $\boldsymbol{a=-3,\ b=0,\ c=10}$

$f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=-3x^2+2ax+b$

$x=-2$, $x=0$에서 극값을 가지므로

$f'(-2)=0$, $f'(0)=0$

$f'(-2)=0$에서 $-12-4a+b=0$ …… ㉠

$f'(0)=0$에서 $b=0$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $a=-3$

또 $x=-2$에서 극솟값이 6이므로 $f(-2)=6$에서

$8+4a-2b+c=6$ $\quad\therefore c=10$

059 답 **0, 4, 0, 4, 극대, 극소, 0, 4**

060 답 **극댓값을 갖는 x의 값: −3, 3, 극솟값을 갖는 x의 값: 1**

함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 -3, 1, 3이므로 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$, $x=3$에서 극댓값, $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

061 답 극댓값을 갖는 x의 값: 0, 4, 극솟값을 갖는 x의 값: 2, 6

함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 0, 2, 4, 6이므로 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=4$에서 극댓값, $x=2$, $x=6$에서 극솟값을 갖는다.

062 답 4

함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 a, 0, b, c, d이므로 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	0	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘		↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$, $x=0$, $x=c$, $x=d$에서 극값을 가지므로 $f(x)$가 극값을 갖는 점은 4개이다.

063 답 4

함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 a, b, c, d, e이므로 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$, $x=c$, $x=d$, $x=e$에서 극값을 가지므로 $f(x)$가 극값을 갖는 점은 4개이다.

064 답 2, 2, 극대, -3

065 답 풀이 참고

$f(x)=2x^3-3x^2-1$에서

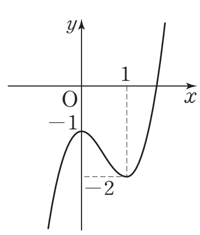
$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-1 극대	↘	-2 극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



066 답 풀이 참고

$f(x)=-x^3+3x-2$에서

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

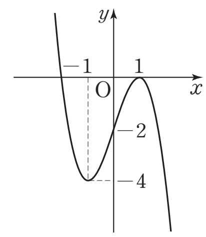
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-4 극소	↗	0 극대	↘

또 $f(0)=-2$이므로 y축과의 교점의 좌표는 $(0, -2)$이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



067 답 풀이 참고

$f(x)=-x^3-6x^2-9x+1$에서

$f'(x)=-3x^2-12x-9=-3(x+3)(x+1)$

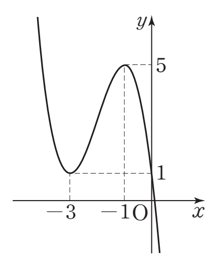
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-3$ 또는 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	1 극소	↗	5 극대	↘

또 $f(0)=1$이므로 y축과의 교점의 좌표는 $(0, 1)$이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



068 답 풀이 참고

$f(x)=x^3-3x^2+3x-1$에서

$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$

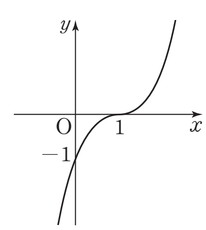
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↗

또 $f(0)=-1$이므로 y축과의 교점의 좌표는 $(0, -1)$이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



069 답 풀이 참고

$f(x)=-x^3+6x^2-12x+4$에서

$f'(x)=-3x^2+12x-12=-3(x-2)^2$

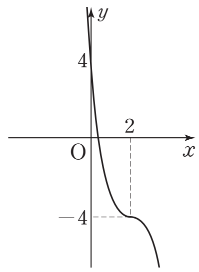
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	↘	-4	↘

또 $f(0)=4$이므로 y축과의 교점의 좌표는 $(0,\ 4)$이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



070 답 풀이 참고

$f(x)=x^4-2x^2$에서

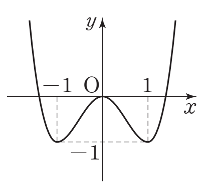
$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1 극소	↗	0 극대	↘	-1 극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



071 답 풀이 참고

$f(x)=-x^4+4x^2+1$에서

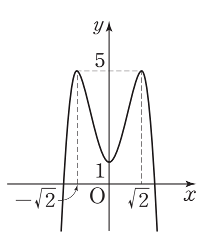
$f'(x)=-4x^3+8x=-4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	5 극대	↘	1 극소	↗	5 극대	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



072 답 풀이 참고

$f(x)=3x^4+4x^3+1$에서

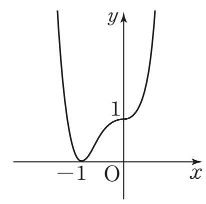
$f'(x)=12x^3+12x^2=12x^2(x+1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	0 극소	↗	1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



073 답 풀이 참고

$f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3-4$에서

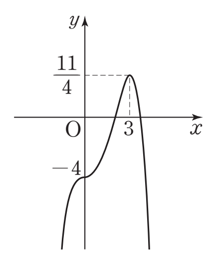
$f'(x)=-x^3+3x^2=-x^2(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-4	↗	$\frac{11}{4}$ 극대	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



074 답 **0, −2, 0, −3, 1, 1, −2, −19**

075 답 **최댓값: 12, 최솟값: −8**

$f(x)=x^3+3x^2-8$에서

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0\ (\because\ -1\le x\le 2)$

구간 $[-1,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	-6	↘	-8 극소	↗	12

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최대이고 최댓값은 12, $x=0$에서 최소이고 최솟값은 -8이다.

076 답 **최댓값: 19, 최솟값: -1**

$f(x)=-2x^3+3x^2+12x-1$에서

$f'(x)=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=2$ $(\because 0\le x\le 3)$

구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	-1	↗	19 극대	↘	8

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최대이고 최댓값은 19, $x=0$에서 최소이고 최솟값은 -1이다.

077 답 **최댓값: 15, 최솟값: -17**

$f(x)=x^4-4x^3+10$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=3$

구간 $[-1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	15	↘	10	↘	-17 극소	↗	10

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최대이고 최댓값은 15, $x=3$에서 최소이고 최솟값은 -17이다.

078 답 **최댓값: 18, 최솟값: 1**

$f(x)=3x^4-4x^3+2$에서

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$

구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	9	↘	2	↘	1 극소	↗	18

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최대이고 최댓값은 18, $x=1$에서 최소이고 최솟값은 1이다.

079 답 **$16a+b$, $16a+b$, $16a+b$, -7, 1, -7**

080 답 **$a=2$, $b=10$**

$f(x)=ax^3-3ax^2+b$에서

$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ $(\because -1\le x\le 1)$

$a>0$이므로 구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$-4a+b$	↗	b 극대	↘	$-2a+b$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 b, 최솟값은 $-4a+b$이므로

$b=10$, $-4a+b=2$ $\quad\therefore a=2, b=10$

081 답 **7**

$f(x)=2x^3-6x^2+a$에서

$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	a	↘	$a-8$ 극소	↗	a

함수 $f(x)$의 최댓값은 a이므로 $a=15$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은

$a-8=15-8=7$

082 답 **$a+1$, -1, -1, 11, -1, 11**

083 답 **$\sqrt{5}$**

점 P의 좌표를 (a, a^2+1)이라고 하면 점 P와 점 $(3, 1)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(a-3)^2+a^4}=\sqrt{a^4+a^2-6a+9}$

$f(a)=a^4+a^2-6a+9$라고 하면

$f'(a)=4a^3+2a-6=2(a-1)(2a^2+2a+3)$

$f'(a)=0$인 a의 값은 $a=1$ $(\because 2a^2+2a+3>0)$

함수 $f(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(a)$	$-$	0	$+$
$f(a)$	↘	5 극소	↗

따라서 함수 $f(a)$는 $a=1$에서 최소이고 최솟값은 5이므로 구하는 거리의 최솟값은 $\sqrt{5}$이다.

084 답 **2**

점 P의 좌표를 $(a, -a^2+3a)$ $(0<a<3)$라고 하면

$\overline{PH}=a$, $\overline{OH}=-a^2+3a$

삼각형 OPH의 넓이를 $S(a)$라고 하면

$S(a)=\frac{1}{2}a(-a^2+3a)=-\frac{1}{2}a^3+\frac{3}{2}a^2$

$\therefore S'(a)=-\frac{3}{2}a^2+3a=-\frac{3}{2}a(a-2)$

$S'(a)=0$인 a의 값은 $a=2$ ($\because 0<a<3$)

$0<a<3$에서 함수 $S(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$		↗	2 극대	↘	

따라서 함수 $S(a)$는 $a=2$에서 최대이므로 구하는 넓이의 최댓값은 2이다.

085 답 $12\sqrt{3}$

점 A의 좌표를 $(a, -a^2+9)$ $(0<a<3)$라고 하면

$\overline{AB}=2a$, $\overline{AD}=-a^2+9$

직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$라고 하면

$S(a)=2a(-a^2+9)=-2a^3+18a$

$\therefore S'(a)=-6a^2+18=-6(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})$

$S'(a)=0$인 a의 값은 $a=\sqrt{3}$ ($\because 0<a<3$)

$0<a<3$에서 함수 $S(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$		↗	$12\sqrt{3}$ 극대	↘	

따라서 함수 $S(a)$는 $a=\sqrt{3}$에서 최대이므로 구하는 넓이의 최댓값은 $12\sqrt{3}$이다.

086 답 1 cm

잘라 낸 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라고 하면 상자의 밑면의 가로의 길이와 세로의 길이는 모두 $(6-2x)$ cm이다.

이때 $x>0$, $6-2x>0$이어야 하므로 $0<x<3$

상자의 부피를 $V(x)$ cm^{3}라고 하면

$V(x)=x(6-2x)^2=4x^3-24x^2+36x$

$\therefore V'(x)=12x^2-48x+36=12(x-1)(x-3)$

$V'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because 0<x<3$)

$0<x<3$에서 함수 $V(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	16 극대	↘	

따라서 함수 $V(x)$는 $x=1$에서 최대이므로 구하는 정사각형의 한 변의 길이는 1 cm이다.

087 답 128 cm^3

잘라 낸 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라고 하면 상자의 밑면의 가로의 길이와 세로의 길이는 모두 $(12-2x)$ cm이다.

이때 $x>0$, $12-2x>0$이어야 하므로 $0<x<6$

상자의 부피를 $V(x)$ cm^{3}라고 하면

$V(x)=x(12-2x)^2=4x^3-48x^2+144x$

$\therefore V'(x)=12x^2-96x+144=12(x-2)(x-6)$

$V'(x)=0$인 x의 값은 $x=2$ ($\because 0<x<6$)

$0<x<6$에서 함수 $V(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	128 극대	↘	

따라서 함수 $V(x)$는 $x=2$에서 최대이고 최댓값은 128이므로 구하는 부피의 최댓값은 128 cm^{3}이다.

연산 유형 최종 점검하기 67~69쪽

1 ③ **2** −6 **3** ② **4** ① **5** ③ **6** ①
7 ④ **8** ③ **9** ⑤ **10** $0\le k\le\frac{3}{4}$ **11** ④
12 ④ **13** ③ **14** 2 **15** ㄱ, ㄷ **16** ⑤ **17** ③
18 $2\sqrt{2}$

1 $f(x)=x^2+x+4$라고 하면

$f'(x)=2x+1$

점 $(1, 6)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3$이므로 접선의 방정식은

$y-6=3(x-1)$ $\qquad\therefore y=3x+3$

$y=0$을 대입하면

$0=3x+3$ $\qquad\therefore x=-1$

따라서 직선 $y=3x+3$의 x절편은 -1이다.

2 $x^2-6x+8=0$에서

$(x-2)(x-4)=0$ $\qquad\therefore x=2$ 또는 $x=4$

따라서 곡선 $y=x^2-6x+8$이 x축과 만나는 두 점의 좌표는

$(2, 0)$, $(4, 0)$

$f(x)=x^2-6x+8$이라고 하면

$f'(x)=2x-6$

점 $(2, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=-2$이므로 접선의 방정식은

$y=-2(x-2)$ $\qquad\therefore y=-2x+4$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

점 $(4, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(4)=2$이므로 접선의 방정식은

$y=2(x-4)$ $\qquad\therefore y=2x-8$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-2x+4=2x-8$

$4x=12$ $\qquad\therefore x=3$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $y=-2$

따라서 $a=3$, $b=-2$이므로 $ab=-6$

3 두 점 $(0,\ 3)$, $(1,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{2-3}{1-0}=-1$

$f(x)=-x^2+3x+1$이라고 하면

$f'(x)=-2x+3$

접점의 좌표를 $(a,\ -a^2+3a+1)$이라고 하면 접선의 기울기가 -1이므로 $f'(a)=-1$에서

$-2a+3=-1 \qquad \therefore a=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2,\ 3)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-3=-(x-2) \qquad \therefore y=-x+5$

4 $f(x)=x^2+ax+b$라고 하면

$f'(x)=2x+a$

$f(2)=1$이므로

$4+2a+b=1 \qquad \therefore 2a+b=-3 \qquad \cdots\cdots ㉠$

점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 1이므로 $f'(2)=1$에서

$4+a=1 \qquad \therefore a=-3$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $b=3$

$\therefore ab=-9$

5 $f(x)=x^3+x$라고 하면

$f'(x)=3x^2+1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+t)$라고 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+t)=(3t^2+1)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+1)x-2t^3 \qquad \cdots\cdots ㉠$

이 직선이 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=-2t^3$, $t^3=-1$

$\therefore t=-1$ ($\because$ t는 실수)

이를 ㉠에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$y=4x+2$

따라서 $a=4$, $b=2$이므로

$a+b=6$

6 $f(x)=3x^2-x+1$이라고 하면

$f'(x)=6x-1$

접점의 좌표를 $(a,\ 3a^2-a+1)$이라고 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=6a-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(3a^2-a+1)=(6a-1)(x-a)$

$\therefore y=(6a-1)x-3a^2+1$

이 직선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=-3a^2+1$, $a^2=\frac{1}{3}$

$\therefore a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore f'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-2\sqrt{3}-1$, $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=2\sqrt{3}-1$

따라서 $m_1=-2\sqrt{3}-1$, $m_2=2\sqrt{3}-1$ 또는 $m_1=2\sqrt{3}-1$, $m_2=-2\sqrt{3}-1$이므로

$m_1+m_2=-2$

7 함수 $f(x)=x^4-4x^2+1$은 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 미분가능하며 $f(-2)=f(2)=1$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=4x^3-8x$이므로 $f'(c)=0$에서

$4c^3-8c=0$, $4c(c+\sqrt{2})(c-\sqrt{2})=0$

$\therefore c=-\sqrt{2}$ 또는 $c=0$ 또는 $c=\sqrt{2}$

따라서 상수 c는 3개이다.

8 함수 $f(x)=x^3-3x+2$는 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(0,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{20-2}{3}=6$이고, $f'(x)=3x^2-3$에서

$f'(c)=3c^2-3$이므로

$6=3c^2-3$, $c^2=3 \qquad \therefore c=\sqrt{3}$ ($\because$ $0<c<3$)

9 $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

따라서 함수 $f(x)$가 감소하는 x의 값의 범위는 $1\le x\le 3$이므로

$a=1$, $b=3 \qquad \therefore b-a=2$

10 $f(x)=x^3-2kx^2+kx+6$에서

$f'(x)=3x^2-4kx+k$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로

$3x^2-4kx+k\ge 0$

이차방정식 $3x^2-4kx+k=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-3\times k\le 0$

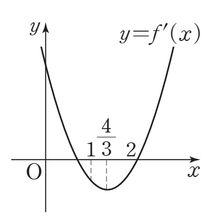
$4k^2-3k\le 0$, $k(4k-3)\le 0 \qquad \therefore 0\le k\le \frac{3}{4}$

11 $f(x)=x^3-4x^2+ax+1$에서

$f'(x)=3x^2-8x+a$

$\qquad =3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+a-\frac{16}{3}$

함수 $f(x)$가 구간 $[1,\ 2]$에서 감소하려면 $1\le x\le 2$에서 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$f'(2)=a-4\le 0 \qquad \therefore a\le 4$

따라서 자연수 a의 값의 합은

$1+2+3+4=10$

12 $f(x)=x^3-3x^2+7$에서
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7	↘	3	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 7, $x=2$에서 극소이고 극솟값은 3이므로
$M=7$, $m=3$
$\therefore$ $M+m=10$

13 $f(x)=x^3-6x^2+ax+b$에서
$f'(x)=3x^2-12x+a$
$x=1$에서 극댓값이 -1이므로
$f'(1)=0$, $f(1)=-1$
$f'(1)=0$에서 $3-12+a=0$ $\quad\therefore$ $a=9$
$f(1)=-1$에서 $1-6+a+b=-1$ $\quad\therefore$ $b=-5$
따라서 $f(x)=x^3-6x^2+9x-5$이므로
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-1	↘	-5	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이고 극솟값은 -5이다.

14 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 -3, -1, 1, 3이므로 구간 $[-3, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=3$에서 극댓값을 가지므로 극댓값을 갖는 x의 값의 합은
$-1+3=2$

15 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 -1, 1, 3, 5이므로 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. 구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=3$에서 극값을 가지므로 극값은 2개이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=3$에서 극대이다.
ㄷ. 구간 $(1, 3)$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

16 $f(x)=x^4-2x^2+2$에서
$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
구간 $[-2, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	10	↘	1 극소	↗	2 극대	↘	1

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최대이고 최댓값은 10, $x=-1$, $x=1$에서 최소이고 최솟값은 1이므로
$M=10$, $m=1$
$\therefore$ $Mm=10$

17 $f(x)=ax^3-3ax^2-b$에서
$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=2$ ($\because$ $1\le x\le 4$)
$a>0$이므로 구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-2a-b$	↘	$-4a-b$ 극소	↗	$16a-b$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $16a-b$, 최솟값은 $-4a-b$이므로
$16a-b=14$, $-4a-b=-6$
두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$
$\therefore$ $ab=2$

18 점 A의 좌표를 $(a, -a^2+6)$ $(0<a<\sqrt{6})$이라고 하면
$\overline{AB}=2a$, $\overline{AD}=-a^2+6$
직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$라고 하면
$S(a)=2a(-a^2+6)=-2a^3+12a$
$\therefore$ $S'(a)=-6a^2+12=-6(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})$
$S'(a)=0$인 a의 값은 $a=\sqrt{2}$ ($\because$ $0<a<\sqrt{6}$)
$0<a<\sqrt{6}$에서 함수 $S(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{6}$
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	$8\sqrt{2}$ 극대	↘	

따라서 함수 $S(a)$는 $a=\sqrt{2}$에서 최대이므로
$\overline{AB}=2a=2\sqrt{2}$

05 도함수의 활용(2)

72~81쪽

001 답 0, 5, 1, 1

002 답 3

$f(x)=x^3-6x^2+9x-2$라고 하면

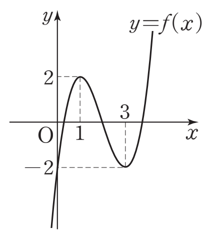
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



003 답 1

$x^3-x^2+3x=2x^2-2$에서 $x^3-3x^2+3x+2=0$

$f(x)=x^3-3x^2+3x+2$라고 하면

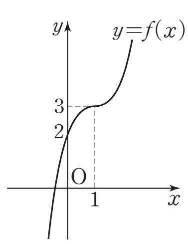
$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



004 답 2

$x^4-2x^2=-6x^2+3$에서 $x^4+4x^2-3=0$

$f(x)=x^4+4x^2-3$이라고 하면

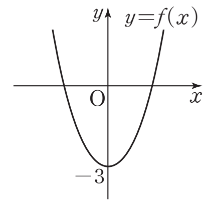
$f'(x)=4x^3+8x=4x(x^2+2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ ($\because x^2+2>0$)

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



005 답 a, 3, -9, -9

006 답 $-5<a<27$

$x^3+3x^2-9x-a=0$에서 $x^3+3x^2-9x=a$

이 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=x^3+3x^2-9x$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x^3+3x^2-9x$라고 하면

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

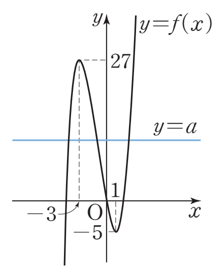
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	27	↘	-5	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=a$와 서로 다른 세 점에서 만나려면

$-5<a<27$



007 답 $-2<a<6$

$6x^2-2=2x^3+a$에서 $-2x^3+6x^2-2=a$

이 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=-2x^3+6x^2-2$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=-2x^3+6x^2-2$라고 하면

$f'(x)=-6x^2+12x=-6x(x-2)$

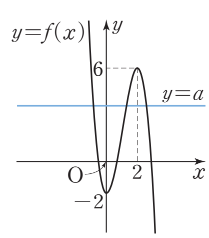
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-2	↗	6	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=a$와 서로 다른 세 점에서 만나려면

$-2<a<6$



008 답 0, -4, a, 양수, -4, 0

009 답 $a<0$

$x^3+9x=6x^2+a$에서 $x^3-6x^2+9x=a$

이 방정식의 실근은 함수 $y=x^3-6x^2+9x$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다.

$f(x)=x^3-6x^2+9x$라고 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

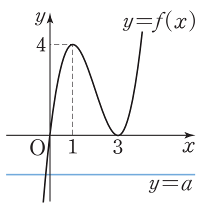
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=a$와의 교점의 x좌표가 한 개는 음수인 a의 값의 범위는

$a<0$



010 답 -1

$4x^3-a=6x^2-1$에서 $4x^3-6x^2+1=a$

이 방정식의 실근은 함수 $y=4x^3-6x^2+1$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다.

$f(x)=4x^3-6x^2+1$이라고 하면

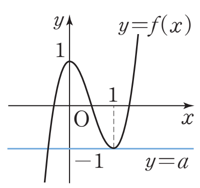
$f'(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	−1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=a$와의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 한 개는 양수인 a의 값은 $a=-1$



011 답 $x+1$, -1, -1, 0, -1, 0

012 답 풀이 참고

$f(x)=-x^4+2x^2-1$이라고 하면

$f'(x)=-4x^3+4x=-4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	−1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	↗	0	↘	−1	↗	0	↘

함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 최대이고 최댓값은 0이므로

$f(x)\le 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $-x^4+2x^2-1\le 0$이 성립한다.

013 답 풀이 참고

$f(x)=x^3-3x+2$라고 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because x\ge 0$)

$x\ge 0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−	−	0	+
$f(x)$	2	↘	0	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최소이고 최솟값은 0이므로 $f(x)\ge 0$

따라서 $x\ge 0$일 때, 부등식 $x^3-3x+2\ge 0$이 성립한다.

014 답 풀이 참고

$f(x)=x^3-x^2-x+3$이라고 하면

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because x>0$)

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	2	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최소이고 최솟값은 2이므로 $f(x)>0$

따라서 $x>0$일 때, 부등식 $x^3-x^2-x+3>0$이 성립한다.

015 답 풀이 참고

$x^3+4x^2\le x^2+5$에서 $x^3+3x^2-5\le 0$

$f(x)=x^3+3x^2-5$라고 하면

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ ($\because x\le -1$)

$x\le -1$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	−2	$\cdots$	−1
$f'(x)$	+	0	−	−
$f(x)$	↗	−1	↘	−3

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최대이고 최댓값은 -1이므로 $f(x)\le 0$

따라서 $x\le -1$일 때, 부등식 $x^3+4x^2\le x^2+5$가 성립한다.

016 답 풀이 참고

$x^3+1\ge 6x^2-9x$에서 $x^3-6x^2+9x+1\ge 0$

$f(x)=x^3-6x^2+9x+1$이라고 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because 0\le x\le 2$)

$0\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	+	+	0	−	−
$f(x)$	1	↗	5	↘	3

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최소이고 최솟값은 1이므로 $f(x)\ge 0$

따라서 $0\le x\le 2$일 때, 부등식 $x^3+1\ge 6x^2-9x$가 성립한다.

017 답 a, $a-8$, 2, $a-8$, 0, 8

018 답 $a \geq 0$

$f(x)=x^4+x^3+x^2+a$라고 하면

$f'(x)=4x^3+3x^2+2x=x(4x^2+3x+2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ ($\because 4x^2+3x+2>0$)

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	a	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최소이고 최솟값은 a이므로

$f(x) \geq 0$이 성립하려면

$a \geq 0$

019 답 $a \leq -1$

$f(x)=3x^4-4x^3-a$라고 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-a$	↘	$-a-1$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최소이고 최솟값은 $-a-1$이므로

$f(x) \geq 0$이 성립하려면

$-a-1 \geq 0 \qquad \therefore a \leq -1$

020 답 $a>1$

$5x^3-2x^2+a>3x^3+x^2$에서 $2x^3-3x^2+a>0$

$f(x)=2x^3-3x^2+a$라고 하면

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because x>0$)

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$a-1$	↗

따라서 $x>0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최소이고 최솟값은

$a-1$이므로 $f(x)>0$이 성립하려면

$a-1>0 \qquad \therefore a>1$

021 답 $a \leq 0$

$x^3-x^2+3x \geq 2x^2+a$에서 $x^3-3x^2+3x-a \geq 0$

$f(x)=x^3-3x^2+3x-a$라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$

$0 \leq x \leq 2$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-a$	↗	$-a+1$	↗	$-a+2$

따라서 $0 \leq x \leq 2$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최소이고 최솟값은

$-a$이므로 $f(x) \geq 0$이 성립하려면

$-a \geq 0 \qquad \therefore a \leq 0$

022 답 $a \leq -4$

$2x^3+4x \geq 7x^2+a$에서 $2x^3-7x^2+4x-a \geq 0$

$f(x)=2x^3-7x^2+4x-a$라고 하면

$f'(x)=6x^2-14x+4=2(3x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=2$ ($\because 1 \leq x \leq 3$)

$1 \leq x \leq 3$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-a-1$	↘	$-a-4$	↗	$-a+3$

따라서 $1 \leq x \leq 3$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최소이고 최솟값은

$-a-4$이므로 $f(x) \geq 0$이 성립하려면

$-a-4 \geq 0 \qquad \therefore a \leq -4$

023 답 $6t-6$, 9, 12

024 답 16, 14

시각 t에서 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-4t+1$

$a=\dfrac{dv}{dt}=6t-4$

따라서 $t=3$일 때, 점 P의 속도와 가속도는

$v=3\times3^2-4\times3+1=16$

$a=6\times3-4=14$

025 답 -24, -18

시각 t에서 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-3t^2+3$

$a=\dfrac{dv}{dt}=-6t$

따라서 $t=3$일 때, 점 P의 속도와 가속도는

$v=-3\times3^2+3=-24$

$a=-6\times3=-18$

026 답 19, -4

시각 t에서 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-3t^2+14t+4$

$a=\dfrac{dv}{dt}=-6t+14$

따라서 $t=3$일 때, 점 P의 속도와 가속도는

$v=-3\times3^2+14\times3+4=19$

$a=-6\times3+14=-4$

027 답 **51, 44**

시각 t에서 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=9t^2-10t$

$a=\dfrac{dv}{dt}=18t-10$

따라서 $t=3$일 때, 점 P의 속도와 가속도는

$v=9\times3^2-10\times3=51$

$a=18\times3-10=44$

028 답 **57, 38**

시각 t에서 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=6t^2+2t-3$

$a=\dfrac{dv}{dt}=12t+2$

따라서 $t=3$일 때, 점 P의 속도와 가속도는

$v=6\times3^2+2\times3-3=57$

$a=12\times3+2=38$

029 답 $\boldsymbol{-3t^2+12}$**, 0, 0, 2, 2**

030 답 **2 또는 4**

시각 t에서 점 P의 속도를 v라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-18t+24$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$3t^2-18t+24=0$

$3(t-2)(t-4)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=4$

031 답 **3**

시각 t에서 점 P의 속도를 v라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=6t^2-18t$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$6t^2-18t=0$

$6t(t-3)=0$

$\therefore t=3\ (\because t>0)$

032 답 **5**

시각 t에서 점 P의 속도를 v라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-3t^2+12t+15$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$-3t^2+12t+15=0$

$-3(t+1)(t-5)=0$

$\therefore t=5\ (\because t>0)$

033 답 $\boldsymbol{12t-10}$**, 2, 2, 2, 14**

034 답 **0**

시각 t에서 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-6t+8$

$a=\dfrac{dv}{dt}=6t-6$

$v=5$에서 $3t^2-6t+8=5$

$3t^2-6t+3=0$, $3(t-1)^2=0$

$\therefore t=1$

따라서 $t=1$일 때, 점 P의 가속도는

$a=6\times1-6=0$

035 답 **10**

시각 t에서 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=9t^2-8t+4$

$a=\dfrac{dv}{dt}=18t-8$

$v=5$에서 $9t^2-8t+4=5$

$9t^2-8t-1=0$, $(9t+1)(t-1)=0$

$\therefore t=1\ (\because t>0)$

따라서 $t=1$일 때, 점 P의 가속도는

$a=18\times1-8=10$

036 답 **−13**

시각 t에서 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-3t^2-t+19$

$a=\dfrac{dv}{dt}=-6t-1$

$v=5$에서 $-3t^2-t+19=5$

$3t^2+t-14=0$, $(3t+7)(t-2)=0$

$\therefore t=2\ (\because t>0)$

따라서 $t=2$일 때, 점 P의 가속도는

$a=-6\times2-1=-13$

037 답 ○

시각 t에서 속도는 $f'(t)$이고 $0<t<a$에서 $f'(t)<0$, $a<t<b$에서 $f'(t)>0$이므로 $t=a$일 때, 점 P는 운동 방향을 바꾼다.

038 답 ×

$f'(b)>0$이므로 $t=b$일 때, 점 P의 속도는 양수이다.

039 답 ○

$t=c$일 때, $|f(t)|$의 값이 가장 크므로 점 P가 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.

040 답 ○

$t=1$, $t=3$, $t=7$, $t=9$일 때, $f(t)=0$이므로 점 P는 원점을 네 번 지난다.

041 답 ×

$t=2$, $t=4$, $t=5$, $t=6$, $t=8$일 때, 점 P는 운동 방향을 바꾸므로 운동 방향을 다섯 번 바꾼다.

042 답 ○

$f'(4)=0$이므로 $t=4$일 때, 점 P의 속도는 0이다.

043 답 ×

시각 t에서 가속도는 $v'(t)$이고 $v'(b)<0$이므로 $t=b$일 때, 점 P의 가속도는 음수이다.

044 답 ×

$v(a)>0$, $v(c)<0$이므로 $t=a$일 때와 $t=c$일 때의 점 P의 운동 방향은 서로 다르다.

045 답 ○

$0<t<d$일 때, 점 P는 $t=b$에서 운동 방향을 한 번 바꾼다.

046 답 ○

시각 t에서 가속도는 $v'(t)$이고 $1<t<2$일 때, $v'(t)=0$이므로 점 P의 가속도는 0이다.

047 답 ×

점 P의 속도는 $3<t\le 4$일 때 감소하고 $4\le t<5$일 때 증가한다.

048 답 ○

$2<t<3$에서 $v(t)>0$, $3<t<4$에서 $v(t)<0$이므로 $t=3$일 때, 점 P는 운동 방향을 바꾼다.

049 답 **$10-10t$, 0, 1, 1, 5**

050 답 **0, 2, 2, 2, -10**

051 답 **20 m**

쏘아 올린 지 t초 후의 물체의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=20-10t$

물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로

$20-10t=0$ $\quad\therefore t=2$

따라서 $t=2$일 때, 물체의 높이는

$x=20\times 2-5\times 2^2=20\,(\mathrm{m})$

052 답 **-20 m/s**

물체가 지면에 떨어지는 순간의 높이는 0이므로

$20t-5t^2=0$, $-5t(t-4)=0$

$\therefore t=4$ ($\because t>0$)

따라서 $t=4$일 때, 물체의 속도는

$v=20-10\times 4=-20\,(\mathrm{m/s})$

053 답 **속도: 10 m/s, 가속도: -10 m/s^2**

쏘아 올린 지 t초 후의 물체의 속도를 v m/s, 가속도를 a m/s^{2}이라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=20-10t$

$a=\dfrac{dv}{dt}=-10$

따라서 $t=1$일 때, 물체의 속도와 가속도는

$v=20-10\times 1=10\,(\mathrm{m/s})$

$a=-10\,(\mathrm{m/s^2})$

054 답 **45 m**

물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로

$20-10t=0$ $\quad\therefore t=2$

따라서 $t=2$일 때, 물체의 높이는

$x=25+20\times 2-5\times 2^2=45\,(\mathrm{m})$

055 답 **-30 m/s**

물체가 지면에 떨어지는 순간의 높이는 0이므로

$25+20t-5t^2=0$

$-5(t+1)(t-5)=0$

$\therefore t=5$ ($\because t>0$)

따라서 $t=5$일 때, 물체의 속도는

$v=20-10\times 5=-30\,(\mathrm{m/s})$

056 답 **90 m**

쏘아 올린 지 t초 후의 물체의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=30-10t$

물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로

$30-10t=0$ $\quad\therefore t=3$

$t=3$일 때, 물체의 높이는

$x=30\times 3-5\times 3^2=45\,(\mathrm{m})$

따라서 물체가 지면에 떨어질 때까지 움직인 거리는

$45\times 2=90\,(\mathrm{m})$

057 답 **$24-6t$, 0, 4, 4, 48**

058 답 **8초, 128 m**

제동을 건 지 t초 후의 열차의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=32-4t$

열차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$32-4t=0$ $\quad\therefore t=8$

따라서 열차가 정지할 때까지 걸린 시간은 8초이고 그때까지 움직인 거리는

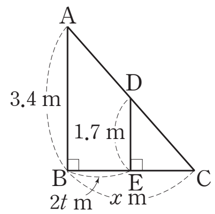
$x=32\times 8-2\times 8^2=128\,(\mathrm{m})$

059 답 **$2t$, $x-2t$, $3t$, 3**

060 답 2 m/s

학생이 t초 동안 움직이는 거리는 $2t$ m

그림자 끝이 t초 동안 움직이는 거리를 x m라고 하면 오른쪽 그림에서



$\triangle ABC \backsim \triangle DEC$이므로

$3.4 : x = 1.7 : (x-2t)$

$1.7x = 3.4x - 6.8t$

$\therefore\ x = 4t$

그림자의 길이를 l m라고 하면

$l = \overline{CE} = \overline{BC} - \overline{BE}$

$= x - 2t = 4t - 2t$

$= 2t$

따라서 그림자의 길이의 변화율은

$\dfrac{dl}{dt} = 2\,(\text{m/s})$

061 답 114 cm²/s

t초 후의 정사각형의 한 변의 길이는 $(10+3t)$ cm

t초 후의 정사각형의 넓이를 S cm²라고 하면

$S = (10+3t)^2 = 9t^2 + 60t + 100$

시각 t에 대한 넓이 S의 변화율은

$\dfrac{dS}{dt} = 18t + 60$

따라서 $t=3$일 때, 정사각형의 넓이의 변화율은

$18 \times 3 + 60 = 114\,(\text{cm}^2/\text{s})$

062 답 108 cm³/s

t초 후의 정육면체의 한 모서리의 길이는 $(2+t)$ cm

t초 후의 정육면체의 부피를 V cm³라고 하면

$V = (2+t)^3 = t^3 + 6t^2 + 12t + 8$

시각 t에 대한 부피 V의 변화율은

$\dfrac{dV}{dt} = 3t^2 + 12t + 12$

따라서 $t=4$일 때, 정육면체의 부피의 변화율은

$3 \times 4^2 + 12 \times 4 + 12 = 108\,(\text{cm}^3/\text{s})$

063 답 18π cm³/s

t초 후의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $(1+t)$ cm, 높이는 $(10-2t)$ cm이다. (단, $0 \le t < 5$)

t초 후의 원기둥의 부피를 V cm³라고 하면

$V = \pi(1+t)^2(10-2t)$

$= -2\pi(t^3 - 3t^2 - 9t - 5)$

시각 t에 대한 부피 V의 변화율은

$\dfrac{dV}{dt} = -2\pi(3t^2 - 6t - 9)$

이때 원기둥의 높이가 6 cm이면

$10 - 2t = 6 \qquad \therefore\ t = 2$

따라서 $t=2$일 때, 원기둥의 부피의 변화율은

$-2\pi(3 \times 2^2 - 6 \times 2 - 9) = 18\pi\,(\text{cm}^3/\text{s})$

연산 유형 최종 점검하기

82~83쪽

1 ③	2 ⑤	3 ④	4 ②	5 ③	6 ②
7 ⑤	8 2	9 12	10 ④	11 −15 m/s	
12 36π cm²/s					

1 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 1$이라고 하면

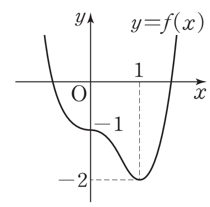
$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↘	-2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



2 $f(x) = x^3 - 12x$라고 하면

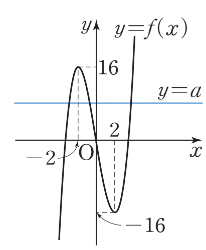
$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	16	↘	-16	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=a$와 서로 다른 세 점에서 만나려면



$-16 < a < 16$

따라서 정수 a는 $-15, -14, -13, \cdots, 14, 15$의 31개이다.

3 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$라고 하면

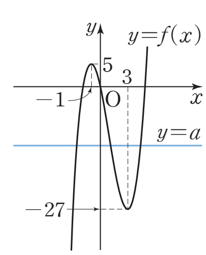
$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	-27	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=a$와의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 두 개는 양수인 a의 값의 범위는



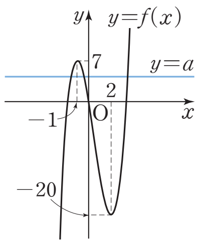
$-27 < a < 0$

따라서 정수 a의 최댓값은 -1이다.

4 $2x^3-12x=3x^2+a$에서 $2x^3-3x^2-12x=a$
$f(x)=2x^3-3x^2-12x$라고 하면
$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7	↘	-20	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=a$와의 교점의 x좌표가 두 개는 음수이고, 한 개는 양수인 a의 값의 범위는



$0<a<7$
따라서 $\alpha=0$, $\beta=7$이므로
$\beta-\alpha=7$

5 $f(x)=x^4-4x^3+16x+a$라고 하면
$f'(x)=4x^3-12x^2+16=4(x+1)(x-2)^2$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	$a-11$	↗	$a+16$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최소이고 최솟값은 $a-11$이므로 $f(x)\geq 0$이 성립하려면
$a-11\geq 0$ $\quad\therefore a\geq 11$

6 $h(x)=f(x)-g(x)=x^4+x^2-a$라고 하면
$h'(x)=4x^3+2x=2x(2x^2+1)$
$h'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ ($\because 2x^2+1>0$)
$-1<x<2$에서 함수 $h(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	$-a$	↗	

$-1<x<2$일 때, 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 최소이고 최솟값은 $-a$이므로 $h(x)\geq 0$, 즉 $f(x)\geq g(x)$가 성립하려면
$-a\geq 0$ $\quad\therefore a\leq 0$
따라서 상수 a의 최댓값은 0이다.

7 시각 t에서 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면
$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2+2t-5$
$a=\dfrac{dv}{dt}=6t+2$
따라서 $t=2$일 때, 점 P의 가속도는
$a=6\times 2+2=14$

8 시각 t에서 점 P의 속도를 v라고 하면
$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-6t$
점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로
$3t^2-6t=0$
$3t(t-2)=0$
$\therefore t=2$ ($\because t>0$)

9 시각 t에서 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면
$v=\dfrac{dx}{dt}=9t^2-6t+7$
$a=\dfrac{dv}{dt}=18t-6$
$v=10$에서 $9t^2-6t+7=10$
$9t^2-6t-3=0$
$3(3t+1)(t-1)=0$
$\therefore t=1$ ($\because t>0$)
따라서 $t=1$일 때, 점 P의 가속도는
$a=18\times 1-6=12$

10 ① $0<t<a$일 때, $v'(t)>0$이므로 가속도는 양수이다.
② $a<t<b$일 때, 속도는 감소한다.
③ $c<t<d$일 때, $v'(t)=0$이므로 가속도는 0이다.
④ $v(d)\neq 0$이므로 $t=d$일 때, 점 P는 움직이고 있다.
⑤ $0<t<e$일 때, $t=b$에서 운동 방향을 바꾸므로 점 P는 운동 방향을 한 번 바꾼다.

11 던져 올린 지 t초 후의 물체의 속도를 v m/s라고 하면
$v=\dfrac{dx}{dt}=5-10t$
물체가 지면에 떨어지는 순간의 높이는 0이므로
$10+5t-5t^2=0$
$-5(t+1)(t-2)=0$
$\therefore t=2$ ($\because t>0$)
따라서 $t=2$일 때, 물체의 속도는
$v=5-10\times 2=-15$ (m/s)

12 t초 후의 원의 반지름의 길이는 $(1+2t)$ cm
t초 후의 원의 넓이를 S cm^{2}라고 하면
$S=\pi(1+2t)^2=\pi(4t^2+4t+1)$
원의 넓이가 81π cm^{2}이면
$\pi(4t^2+4t+1)=81\pi$
$t^2+t-20=0$
$(t+5)(t-4)=0$
$\therefore t=4$ ($\because t>0$)
시각 t에 대한 넓이 S의 변화율은
$\dfrac{dS}{dt}=\pi(8t+4)$
따라서 $t=4$일 때, 원의 넓이의 변화율은
$\pi(8\times 4+4)=36\pi$ (cm^2/s)

06 부정적분

86~93쪽

001 답 $\mathbf{3}$

002 답 $f(x)=4x+1$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=(2x^2+x+C)'=4x+1$

003 답 $f(x)=12x^2-5$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=(4x^3-5x+C)'=12x^2-5$

004 답 $f(x)=4x^3+9x^2-2x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=(x^4+3x^3-x^2+C)'=4x^3+9x^2-2x$

005 답 $5x+C$

$(5x)'=5$이므로

$\int 5\,dx=5x+C$

006 답 x^2+C

$(x^2)'=2x$이므로

$\int 2x\,dx=x^2+C$

007 답 x^3+C

$(x^3)'=3x^2$이므로

$\int 3x^2\,dx=x^3+C$

008 답 x^4+C

$(x^4)'=4x^3$이므로

$\int 4x^3\,dx=x^4+C$

009 답 $3x^2+x+C$

$$\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C=3x^2+x+C$$

010 답 $3x^2+x$

$$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\}=f(x)=3x^2+x$$

011 답 x^4+2x^3+C

$$\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C=x^4+2x^3+C$$

012 답 x^4+2x^3

$$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\}=f(x)=x^4+2x^3$$

013 답 x^3+x^2-x, 0, x^3+x^2-x, 10

014 답 -1

$$F(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-5x)\right\}dx$$
$$=x^2-5x+C$$

$F(1)=1$이므로

$1-5+C=1 \qquad \therefore C=5$

따라서 $F(x)=x^2-5x+5$이므로

$F(2)=4-10+5=-1$

015 답 2

$$F(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(2x^3-4x^2-x)\right\}dx$$
$$=2x^3-4x^2-x+C$$

$F(1)=1$이므로

$2-4-1+C=1 \qquad \therefore C=4$

따라서 $F(x)=2x^3-4x^2-x+4$이므로

$F(2)=16-16-2+4=2$

016 답 $x+C$

017 답 $7x+C$

018 답 $\frac{1}{2}x^2+C$

019 답 $\frac{1}{4}x^4+C$

020 답 $\frac{1}{5}x^5+C$

021 답 $\frac{1}{6}x^6+C$

022 답 $\frac{1}{10}x^{10}+C$

023 답 $\frac{1}{100}x^{100}+C$

024 답 $\frac{1}{6}x^6$, $2x^6+C$

025 답 $3x^9+C$

$$\int 27x^8\,dx=27\int x^8\,dx$$
$$=27\times\frac{1}{9}x^9+C$$
$$=3x^9+C$$

026 답 $2x^2+3x+C$

$$\int(4x+3)\,dx=4\int x\,dx+\int 3\,dx$$
$$=4\times\frac{1}{2}x^2+3x+C$$
$$=2x^2+3x+C$$

027 답 $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$

$$\int(x^3+x)\,dx=\int x^3\,dx+\int x\,dx$$
$$=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$$

028 답 $\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+C$

$$\int(x^4-x^2)\,dx=\int x^4\,dx-\int x^2\,dx$$
$$=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+C$$

029 답 $\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^3+7x+C$

$$\int(2x^3-x^2+7)\,dx=2\int x^3\,dx-\int x^2\,dx+\int 7\,dx$$
$$=2\times\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+7x+C$$
$$=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^3+7x+C$$

030 답 $x^8-x^6+x^2+C$

$$\int(8x^7-6x^5+2x)\,dx=8\int x^7\,dx-6\int x^5\,dx+2\int x\,dx$$
$$=8\times\frac{1}{8}x^8-6\times\frac{1}{6}x^6+2\times\frac{1}{2}x^2+C$$
$$=x^8-x^6+x^2+C$$

031 답 $\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+C$

$$\int(x+1)(2x-1)\,dx=\int(2x^2+x-1)\,dx$$
$$=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+C$$

032 답 $2x^4-4x^3+3x^2-x+C$

$$\int(2x-1)^3\,dx=\int(8x^3-12x^2+6x-1)\,dx$$
$$=2x^4-4x^3+3x^2-x+C$$

033 답 $\frac{1}{4}x^4+x+C$

$$\int(x+1)(x^2-x+1)\,dx=\int(x^3+1)\,dx$$
$$=\frac{1}{4}x^4+x+C$$

034 답 x^3+x^2+x+C

$$\int(x^2+3x-1)\,dx+\int(2x^2-x+2)\,dx$$
$$=\int(3x^2+2x+1)\,dx$$
$$=x^3+x^2+x+C$$

035 답 x^3-2x^2+3x+C

$$\int(4x^2+x+3)\,dx-\int(x^2+5x)\,dx$$
$$=\int(3x^2-4x+3)\,dx$$
$$=x^3-2x^2+3x+C$$

036 답 x^4-3x+C

$$\int(x^3-2x^2-7)\,dx+\int(3x^3+2x^2+4)\,dx$$
$$=\int(4x^3-3)\,dx$$
$$=x^4-3x+C$$

037 답 $6x^3+2x+C$

$$\int(3x+1)^2\,dx+\int(3x-1)^2\,dx$$
$$=\int(9x^2+6x+1)\,dx+\int(9x^2-6x+1)\,dx$$
$$=\int(18x^2+2)\,dx$$
$$=6x^3+2x+C$$

038 답 $4x^2+C$

$$\int(x+2)^2\,dx-\int(x-2)^2\,dx$$
$$=\int(x^2+4x+4)\,dx-\int(x^2-4x+4)\,dx$$
$$=\int 8x\,dx$$
$$=4x^2+C$$

039 답 $2x^3+2x+C$

$$\int(x+1)^3\,dx-\int(x-1)^3\,dx$$
$$=\int(x^3+3x^2+3x+1)\,dx-\int(x^3-3x^2+3x-1)\,dx$$
$$=\int(6x^2+2)\,dx$$
$$=2x^3+2x+C$$

040 답 $\frac{1}{2}x^2+3x+C$

$$\int\frac{x^2}{x-3}\,dx-\int\frac{9}{x-3}\,dx=\int\frac{x^2-9}{x-3}\,dx=\int(x+3)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2+3x+C$$

041 답 $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$

$$\int\frac{x^3}{x+1}\,dx+\int\frac{1}{x+1}\,dx=\int\frac{x^3+1}{x+1}\,dx=\int(x^2-x+1)\,dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$$

042 답 x^4+3x^2+C, 1, x^4+3x^2+1

043 답 $f(x)=x^3+2x^2-x+2$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int (3x^2+4x-1)\,dx$$
$$=x^3+2x^2-x+C$$

$f(0)=2$이므로 $C=2$

$\therefore f(x)=x^3+2x^2-x+2$

044 답 $f(x)=2x^3-4x^2-5x+9$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int (6x^2-8x-5)\,dx$$
$$=2x^3-4x^2-5x+C$$

$f(2)=-1$이므로

$16-16-10+C=-1 \qquad \therefore C=9$

$\therefore f(x)=2x^3-4x^2-5x+9$

045 답 $f(x)=x^3-x^2-x+1$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int (3x+1)(x-1)\,dx$$
$$=\int (3x^2-2x-1)\,dx$$
$$=x^3-x^2-x+C$$

$f(1)=0$이므로

$1-1-1+C=0 \qquad \therefore C=1$

$\therefore f(x)=x^3-x^2-x+1$

046 답 $f(x)=2x^4-x+3$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int (2x-1)(4x^2+2x+1)\,dx$$
$$=\int (8x^3-1)\,dx$$
$$=2x^4-x+C$$

$f(-1)=6$이므로

$2+1+C=6 \qquad \therefore C=3$

$\therefore f(x)=2x^4-x+3$

047 답 $2x+3$, x^2+3x+C, 1, -3, x^2+3x-3

048 답 $f(x)=2x^2-x-2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $4x-1$이므로

$f'(x)=4x-1$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int (4x-1)\,dx$$
$$=2x^2-x+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, -1)$을 지나므로 $f(1)=-1$에서

$2-1+C=-1 \qquad \therefore C=-2$

$\therefore f(x)=2x^2-x-2$

049 답 $f(x)=x^3+x^2+4$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $3x^2+2x$이므로

$f'(x)=3x^2+2x$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int (3x^2+2x)\,dx$$
$$=x^3+x^2+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 6)$을 지나므로 $f(1)=6$에서

$1+1+C=6 \qquad \therefore C=4$

$\therefore f(x)=x^3+x^2+4$

050 답 -4, $-4x+C$, 5, $-4x+5$

051 답 $f(x)=3x^2-2x-5$

$F(x)=xf(x)-2x^3+x^2+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2+2x$

$xf'(x)=6x^2-2x \qquad \therefore f'(x)=6x-2$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int (6x-2)\,dx$$
$$=3x^2-2x+C$$

$f(2)=3$이므로

$12-4+C=3 \qquad \therefore C=-5$

$\therefore f(x)=3x^2-2x-5$

052 답 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+1$

$F(x)=xf(x)-x^3+3x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-3x^2+6x$

$xf'(x)=3x^2-6x \qquad \therefore f'(x)=3x-6$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int (3x-6)\,dx$$
$$=\frac{3}{2}x^2-6x+C$$

$f(4)=1$이므로

$24-24+C=1 \qquad \therefore C=1$

$\therefore f(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+1$

053 답 $x^2f'(x)$, 2, -2, 2

054 답 0

$\int g(x)\,dx=x^3f(x)+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

$\therefore g(-1)=3f(-1)-f'(-1)=3\times1-3=0$

055 답 4

$\int g(x)\,dx=(x^2+x)f(x)+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g(x)=(2x+1)f(x)+(x^2+x)f'(x)$

$\therefore\ g(2)=5f(2)+6f'(2)$

$=5\times2+6\times(-1)=4$

056 답 x^3-3x^2+C, 6, x^3-3x^2+6, 6

057 답 $\frac{1}{3}$

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int(x^2+2x-3)\,dx$

$=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+C$

$f'(x)=x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대이므로

$f(-3)=-9+9+9+C=11$

$\therefore\ C=2$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+2$

또 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 극솟값은

$f(1)=\frac{1}{3}+1-3+2=\frac{1}{3}$

058 답 $f(x)=x^3-6x^2+20$

$f'(x)=ax(x-4)\ (a>0)$라고 하면

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int ax(x-4)\,dx$

$=\int(ax^2-4ax)\,dx$

$=\frac{1}{3}ax^3-2ax^2+C$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 $x=4$에서 극소이므로

$f(0)=20$, $f(4)=-12$

$\therefore\ C=20$, $\frac{64}{3}a-32a+C=-12$

두 식을 연립하여 풀면 $C=20$, $a=3$

$\therefore\ f(x)=x^3-6x^2+20$

059 답 $f(x)=-x^3+3x^2+1$

$f'(x)=ax(x-2)\ (a<0)$라고 하면

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int ax(x-2)\,dx$

$=\int(ax^2-2ax)\,dx$

$=\frac{1}{3}ax^3-ax^2+C$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고 $x=2$에서 극대이므로

$f(0)=1$, $f(2)=5$

$\therefore\ C=1$, $\frac{8}{3}a-4a+C=5$

두 식을 연립하여 풀면 $C=1$, $a=-3$

$\therefore\ f(x)=-x^3+3x^2+1$

연산 유형 최종 점검하기

94~95쪽

1 ②	**2** 9	**3** ②	**4** ⑤	**5** 2	**6** ④
7 ③	**8** $f(x)=x^3-2x^2+x-1$			**9** ①	**10** ⑤
11 ①	**12** 3				

1 $\int f(x)\,dx=x^3-x^2-x+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-2x-1$

$\therefore\ f(1)=3-2-1=0$

2 $F(x)=x^4+ax^3+bx-1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=4x^3+3ax^2+b$

$f(0)=1$, $f(1)=2$이므로

$b=1$, $4+3a+b=2$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=1$

따라서 $F(x)=x^4-x^3+x-1$이므로

$F(2)=16-8+2-1=9$

3 $\frac{d}{dx}\left\{\int(ax^3+bx^2+5)\,dx\right\}=ax^3+bx^2+5$이므로

$ax^3+bx^2+5=2x^3-9x^2+c$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=2$, $b=-9$, $c=5$

$\therefore\ a+b+c=-2$

4 $F(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^3-2x^2+3x)\right\}dx$

$=x^3-2x^2+3x+C$

$F(-1)=-5$이므로

$-1-2-3+C=-5 \qquad \therefore C=1$

따라서 $F(x)=x^3-2x^2+3x+1$이므로

$F(3)=27-18+9+1=19$

5 $f(x)=\int\frac{x^3}{x-1}\,dx+\int\frac{1}{1-x}\,dx$

$=\int\frac{x^3}{x-1}\,dx-\int\frac{1}{x-1}\,dx$

$=\int\frac{x^3-1}{x-1}\,dx$

$=\int(x^2+x+1)\,dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$

$f(0)=\frac{1}{6}$이므로 $C=\frac{1}{6}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{6}$이므로

$f(1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{6}=2$

6 $f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int(4x^3+6x)\,dx$

$=x^4+3x^2+C$

$f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=x^4+3x^2+1$이므로

$f(-1)=1+3+1=5$

7 $f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int(3ax^2+2)\,dx$

$=ax^3+2x+C$

$f(0)=2,\ f(1)=5$이므로

$C=2,\ a+2+C=5$

두 식을 연립하여 풀면 $C=2,\ a=1$

따라서 $f(x)=x^3+2x+2$이므로

$f(3)=27+6+2=35$

8 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $3x^2-4x+1$이므로

$f'(x)=3x^2-4x+1$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int(3x^2-4x+1)\,dx$

$=x^3-2x^2+x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, -1)$을 지나므로 $f(1)=-1$에서

$1-2+1+C=-1 \qquad \therefore C=-1$

$\therefore f(x)=x^3-2x^2+x-1$

9 $F(x)=xf(x)-3x^4-2x^2+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^3-4x$

$xf'(x)=12x^3+4x \qquad \therefore f'(x)=12x^2+4$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int(12x^2+4)\,dx$

$=4x^3+4x+C$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=4x^3+4x$이므로

$f(-1)=-4-4=-8$

10 $\int g(x)\,dx=(x^4+1)f(x)+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g(x)=4x^3f(x)+(x^4+1)f'(x)$

$\therefore g(1)=4f(1)+2f'(1)=4\times2+2\times(-1)=6$

11 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(x^2-x-2)\,dx$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+C$

$f'(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$이므로

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이므로

$f(-1)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2+C=\frac{5}{2} \qquad \therefore C=\frac{4}{3}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{4}{3}$

또 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 극솟값은

$f(2)=\frac{8}{3}-2-4+\frac{4}{3}=-2$

12 $f'(x)=ax(x-3)\ (a>0)$이라고 하면

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int ax(x-3)\,dx$

$=\int(ax^2-3ax)\,dx=\frac{1}{3}ax^3-\frac{3}{2}ax^2+C$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 $x=3$에서 극소이므로

$f(0)=10,\ f(3)=-17$

$\therefore C=10,\ 9a-\frac{27}{2}a+C=-17$

두 식을 연립하여 풀면 $C=10,\ a=6$

따라서 $f(x)=2x^3-9x^2+10$이므로

$f(1)=2-9+10=3$

07 정적분

98~107쪽

001 답 **10**

$\int_{0}^{2} 5\,dx=\Big[5x\Big]_{0}^{2}=10-0=10$

002 답 **6**

$\int_{2}^{5} 2\,dx=\Big[2x\Big]_{2}^{5}=10-4=6$

003 답 **0**

$\int_{-1}^{1} 4x\,dx=\Big[2x^2\Big]_{-1}^{1}=2-2=0$

004 답 **52**

$\int_{1}^{3} 6x^2\,dx=\Big[2x^3\Big]_{1}^{3}=54-2=52$

005 답 **6**

$\int_{0}^{2} (x+2)\,dx=\Big[\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_{0}^{2}=(2+4)-0=6$

006 답 **6**

$\int_{1}^{3} (2x-1)\,dx=\Big[x^2-x\Big]_{1}^{3}=(9-3)-(1-1)=6$

007 답 **22**

$\int_{2}^{4} (3x+2)\,dx=\Big[\frac{3}{2}x^2+2x\Big]_{2}^{4}$
$=(24+8)-(6+4)=22$

008 답 $\mathbf{\frac{19}{3}}$

$\int_{1}^{2} (x^2+4)\,dx=\Big[\frac{1}{3}x^3+4x\Big]_{1}^{2}$
$=\left(\frac{8}{3}+8\right)-\left(\frac{1}{3}+4\right)=\frac{19}{3}$

009 답 **9**

$\int_{0}^{3} (x^2-2x+3)\,dx=\Big[\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\Big]_{0}^{3}$
$=(9-9+9)-0=9$

010 답 **12**

$\int_{-2}^{2} (3x^2+4x-1)\,dx=\Big[x^3+2x^2-x\Big]_{-2}^{2}$
$=(8+8-2)-(-8+8+2)=12$

011 답 **12**

$\int_{-1}^{2} (4x^3-2x)\,dx=\Big[x^4-x^2\Big]_{-1}^{2}$
$=(16-4)-(1-1)=12$

012 답 $\mathbf{-\frac{19}{4}}$

$\int_{0}^{1} (x^3+6x^2-7)\,dx=\Big[\frac{1}{4}x^4+2x^3-7x\Big]_{0}^{1}$
$=\left(\frac{1}{4}+2-7\right)-0=-\frac{19}{4}$

013 답 **162**

$\int_{1}^{3} (8x^3+3x^2-6x)\,dx=\Big[2x^4+x^3-3x^2\Big]_{1}^{3}$
$=(162+27-27)-(2+1-3)=162$

014 답 **0**

015 답 **0**

016 답 **−10**

$\int_{3}^{1} (4x-3)\,dx=-\int_{1}^{3} (4x-3)\,dx$
$=-\Big[2x^2-3x\Big]_{1}^{3}$
$=-\{(18-9)-(2-3)\}=-10$

017 답 **−21**

$\int_{1}^{-2} (6x^2-2x)\,dx=-\int_{-2}^{1} (6x^2-2x)\,dx$
$=-\Big[2x^3-x^2\Big]_{-2}^{1}$
$=-\{(2-1)-(-16-4)\}=-21$

018 답 **−4**

$\int_{1}^{0} (5x^4-3x^2+8x)\,dx=-\int_{0}^{1} (5x^4-3x^2+8x)\,dx$
$=-\Big[x^5-x^3+4x^2\Big]_{0}^{1}$
$=-(1-1+4)=-4$

019 답 **42**

$\int_{0}^{3} (x+7)\,dx-\int_{0}^{3} (x-7)\,dx=\int_{0}^{3} 14\,dx$
$=\Big[14x\Big]_{0}^{3}=42$

020 답 **22**

$\int_{1}^{3} (2x^2-5x+1)\,dx+\int_{1}^{3} (x^2+5x-3)\,dx$
$=\int_{1}^{3} (3x^2-2)\,dx=\Big[x^3-2x\Big]_{1}^{3}$
$=(27-6)-(1-2)=22$

021 답 **15**

$\int_{-1}^{2} (6x^2-x+1)\,dx-\int_{-1}^{2} (x+1)\,dx$
$=\int_{-1}^{2} (6x^2-2x)\,dx=\Big[2x^3-x^2\Big]_{-1}^{2}$
$=(16-4)-(-2-1)=15$

022 답 **−, $4x$, 8**

07

023 답 **7**

$\int_{1}^{2}(3x^2+x-7)\,dx-\int_{2}^{1}(7-x)\,dx$
$=\int_{1}^{2}(3x^2+x-7)\,dx+\int_{1}^{2}(7-x)\,dx$
$=\int_{1}^{2}3x^2\,dx=\Big[x^3\Big]_{1}^{2}$
$=8-1=7$

024 답 $\mathbf{\frac{40}{3}}$

$\int_{-1}^{3}(2x^2-3x+4)\,dx+\int_{3}^{-1}(x^2-3x+3)\,dx$
$=\int_{-1}^{3}(2x^2-3x+4)\,dx-\int_{-1}^{3}(x^2-3x+3)\,dx$
$=\int_{-1}^{3}(x^2+1)\,dx=\Big[\frac{1}{3}x^3+x\Big]_{-1}^{3}$
$=(9+3)-\left(-\frac{1}{3}-1\right)=\frac{40}{3}$

025 답 **3, 3, 12**

026 답 **21**

$\int_{0}^{-1}(x^2+4)\,dx+\int_{-1}^{3}(x^2+4)\,dx=\int_{0}^{3}(x^2+4)\,dx$
$=\Big[\frac{1}{3}x^3+4x\Big]_{0}^{3}$
$=9+12=21$

027 답 **-16**

$\int_{-2}^{1}(x^3-3x^2)\,dx+\int_{1}^{2}(x^3-3x^2)\,dx=\int_{-2}^{2}(x^3-3x^2)\,dx$
$=\Big[\frac{1}{4}x^4-x^3\Big]_{-2}^{2}$
$=(4-8)-(4+8)$
$=-16$

028 답 **30**

$\int_{-2}^{-1}(3x^2-1)\,dx-\int_{3}^{-1}(3x^2-1)\,dx$
$=\int_{-2}^{-1}(3x^2-1)\,dx+\int_{-1}^{3}(3x^2-1)\,dx$
$=\int_{-2}^{3}(3x^2-1)\,dx=\Big[x^3-x\Big]_{-2}^{3}$
$=(27-3)-(-8+2)=30$

029 답 **-12**

$\int_{2}^{0}(4x^3-4x+1)\,dx-\int_{-1}^{0}(4x^3-4x+1)\,dx$
$=\int_{2}^{0}(4x^3-4x+1)\,dx+\int_{0}^{-1}(4x^3-4x+1)\,dx$
$=\int_{2}^{-1}(4x^3-4x+1)\,dx=\Big[x^4-2x^2+x\Big]_{2}^{-1}$
$=(1-2-1)-(16-8+2)=-12$

030 답 **-18**

$\int_{-1}^{2}(2x-7)\,dx+\int_{2}^{4}(2x-7)\,dx-\int_{5}^{4}(2x-7)\,dx$
$=\int_{-1}^{2}(2x-7)\,dx+\int_{2}^{4}(2x-7)\,dx+\int_{4}^{5}(2x-7)\,dx$
$=\int_{-1}^{5}(2x-7)\,dx=\Big[x^2-7x\Big]_{-1}^{5}$
$=(25-35)-(1+7)=-18$

031 답 $\mathbf{x^2+1,\ \frac{1}{3}x^3+x,\ \frac{13}{3}}$

032 답 $\mathbf{\frac{37}{3}}$

$\int_{0}^{3}f(x)\,dx=\int_{0}^{2}(x+2)\,dx+\int_{2}^{3}x^2\,dx$
$=\Big[\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_{0}^{2}+\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_{2}^{3}$
$=6+\frac{19}{3}=\frac{37}{3}$

033 답 $\mathbf{\frac{5}{2}}$

$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(x+1)\,dx+\int_{0}^{1}(3x^2+1)\,dx$
$=\Big[\frac{1}{2}x^2+x\Big]_{-1}^{0}+\Big[x^3+x\Big]_{0}^{1}$
$=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

034 답 **27**

$\int_{-1}^{2}f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(-2x+7)\,dx+\int_{1}^{2}(6x^2-1)\,dx$
$=\Big[-x^2+7x\Big]_{-1}^{1}+\Big[2x^3-x\Big]_{1}^{2}$
$=14+13=27$

035 답 **33**

$\int_{-3}^{3}f(x)\,dx=\int_{-3}^{0}(x-1)^2\,dx+\int_{0}^{3}(x^2+1)\,dx$
$=\int_{-3}^{0}(x^2-2x+1)\,dx+\int_{0}^{3}(x^2+1)\,dx$
$=\Big[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\Big]_{-3}^{0}+\Big[\frac{1}{3}x^3+x\Big]_{0}^{3}$
$=21+12=33$

036 답 $\mathbf{1,\ x-1,\ 1,\ \frac{1}{2}x^2-x,\ 1}$

037 답 $\mathbf{\frac{5}{2}}$

$|x+2|=\begin{cases}x+2 & (x\ge-2)\\ -x-2 & (x\le-2)\end{cases}$이므로

$\int_{-3}^{0}|x+2|\,dx=\int_{-3}^{-2}(-x-2)\,dx+\int_{-2}^{0}(x+2)\,dx$
$=\Big[-\frac{1}{2}x^2-2x\Big]_{-3}^{-2}+\Big[\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_{-2}^{0}$
$=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

038 답 $\frac{5}{2}$

$|x+1|=\begin{cases} x+1 & (x\ge -1) \\ -x-1 & (x\le -1) \end{cases}$이므로

$$\int_{-2}^{1}|x+1|\,dx=\int_{-2}^{-1}(-x-1)\,dx+\int_{-1}^{1}(x+1)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2-x\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{1}$$
$$=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

039 답 2

$|2x-4|=\begin{cases} 2x-4 & (x\ge 2) \\ -2x+4 & (x\le 2) \end{cases}$이므로

$$\int_{1}^{3}|2x-4|\,dx=\int_{1}^{2}(-2x+4)\,dx+\int_{2}^{3}(2x-4)\,dx$$
$$=\left[-x^2+4x\right]_{1}^{2}+\left[x^2-4x\right]_{2}^{3}$$
$$=1+1=2$$

040 답 3

$|3x+6|=\begin{cases} 3x+6 & (x\ge -2) \\ -3x-6 & (x\le -2) \end{cases}$이므로

$$\int_{-3}^{-1}|3x+6|\,dx=\int_{-3}^{-2}(-3x-6)\,dx+\int_{-2}^{-1}(3x+6)\,dx$$
$$=\left[-\frac{3}{2}x^2-6x\right]_{-3}^{-2}+\left[\frac{3}{2}x^2+6x\right]_{-2}^{-1}$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$$

041 답 2

$|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 1) \\ -x^2+1 & (-1\le x\le 1) \end{cases}$이므로

$$\int_{0}^{2}|x^2-1|\,dx=\int_{0}^{1}(-x^2+1)\,dx+\int_{1}^{2}(x^2-1)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}+\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{1}^{2}$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$$

042 답 6

$|3x^2-6x|=\begin{cases} 3x^2-6x & (x\le 0 \text{ 또는 } x\ge 2) \\ -3x^2+6x & (0\le x\le 2) \end{cases}$이므로

$$\int_{1}^{3}|3x^2-6x|\,dx=\int_{1}^{2}(-3x^2+6x)\,dx+\int_{2}^{3}(3x^2-6x)\,dx$$
$$=\left[-x^3+3x^2\right]_{1}^{2}+\left[x^3-3x^2\right]_{2}^{3}$$
$$=2+4=6$$

043 답 5

$|x-1|+|x-2|=\begin{cases} 2x-3 & (x\ge 2) \\ 1 & (1\le x\le 2) \\ -2x+3 & (x\le 1) \end{cases}$이므로

$$\int_{0}^{3}(|x-1|+|x-2|)\,dx$$
$$=\int_{0}^{1}(-2x+3)\,dx+\int_{1}^{2}dx+\int_{2}^{3}(2x-3)\,dx$$
$$=\left[-x^2+3x\right]_{0}^{1}+\left[x\right]_{1}^{2}+\left[x^2-3x\right]_{2}^{3}$$
$$=2+1+2=5$$

044 답 $3x^2$, a, a^3, 1, -1

045 답 $f(x)=2x+2$, $a=-1$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x+2$

또 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\int_{a}^{a}f(t)\,dt=a^2+2a+1$

$0=a^2+2a+1$, $(a+1)^2=0$

$\therefore\ a=-1$

046 답 $f(x)=2x+1$, $a=2$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x+1$

또 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\int_{a}^{a}f(t)\,dt=a^2+a-6$

$0=a^2+a-6$, $(a+3)(a-2)=0$

$\therefore\ a=2$ ($\because\ a>0$)

047 답 $2x-a$, -1, a, -1, $2x+1$

048 답 $f(x)=10x-5$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=10x+a$

또 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_{1}^{1}f(t)\,dt=5+a$

$0=5+a$

$\therefore\ a=-5$

$\therefore\ f(x)=10x-5$

049 답 $f(x)=3x^2-6x+2$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-6x+a$

또 주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$\int_{2}^{2}f(t)\,dt=8-12+2a$

$0=2a-4$

$\therefore\ a=2$

$\therefore\ f(x)=3x^2-6x+2$

050 답 k, $2k$, -4, $3x^2-2x-4$

051 답 $f(x)=3x-6$

$\int_0^2 f(t)\,dt=k$ (k는 상수) …… ㉠로 놓으면

$f(x)=3x+k$

이를 ㉠에 대입하면

$\int_0^2 (3t+k)\,dt=k$

$\left[\frac{3}{2}t^2+kt\right]_0^2=k$, $6+2k=k$ $\quad\therefore k=-6$

$\therefore f(x)=3x-6$

052 답 $f(x)=x^2-6x+9$

$\int_0^3 f(t)\,dt=k$ (k는 상수) …… ㉠로 놓으면

$f(x)=x^2-6x+k$

이를 ㉠에 대입하면

$\int_0^3 (t^2-6t+k)\,dt=k$

$\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+kt\right]_0^3=k$

$9-27+3k=k$ $\quad\therefore k=9$

$\therefore f(x)=x^2-6x+9$

053 답 $f(x)=5x^3+2$

$\int_0^1 tf(t)\,dt=k$ (k는 상수) …… ㉠로 놓으면

$f(x)=5x^3+k$

이를 ㉠에 대입하면

$\int_0^1 t(5t^3+k)\,dt=k$

$\int_0^1 (5t^4+kt)\,dt=k$, $\left[t^5+\frac{1}{2}kt^2\right]_0^1=k$

$1+\frac{1}{2}k=k$ $\quad\therefore k=2$

$\therefore f(x)=5x^3+2$

054 답 -2, 1, 극소, $\frac{9}{2}$, 0

055 답 극댓값: $\frac{2}{3}$, 극솟값: $-\frac{2}{3}$

$f(x)=\int_0^x (t^2-1)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-1=(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이므로 극댓값은

$f(-1)=\int_0^{-1} (t^2-1)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_0^{-1}=\frac{2}{3}$

또 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 극솟값은

$f(1)=\int_0^1 (t^2-1)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_0^1=-\frac{2}{3}$

056 답 극댓값: $\frac{14}{3}$, 극솟값: $\frac{9}{2}$

$f(x)=\int_0^x (t^2-5t+6)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=2$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이므로 극댓값은

$f(2)=\int_0^2 (t^2-5t+6)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+6t\right]_0^2=\frac{14}{3}$

또 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이므로 극솟값은

$f(3)=\int_0^3 (t^2-5t+6)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+6t\right]_0^3=\frac{9}{2}$

057 답 극댓값: $\frac{7}{3}$, 극솟값: $-\frac{25}{3}$

$f(x)=\int_{-2}^x (t^2-2t-3)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이므로 극댓값은

$f(-1)=\int_{-2}^{-1} (t^2-2t-3)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2-3t\right]_{-2}^{-1}=\frac{7}{3}$

또 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이므로 극솟값은

$f(3)=\int_{-2}^3 (t^2-2t-3)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2-3t\right]_{-2}^3=-\frac{25}{3}$

058 답 극댓값: $\frac{2}{3}$, 극솟값: $-\frac{2}{3}$

$f(x)=\int_1^x (-t^2+2t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=-x^2+2x=-x(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이므로 극댓값은

$f(2)=\int_1^2 (-t^2+2t)\,dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_1^2=\frac{2}{3}$

또 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이므로 극솟값은

$f(0)=\int_1^0 (-t^2+2t)\,dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_1^0=-\frac{2}{3}$

059 답 1, 1, 6

060 답 3

$f(t)=t^2+2t+3$이라 하고, 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라고 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x(t^2+2t+3)\,dt=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$
$$=F'(0)=f(0)=3$$

061 답 16

$f(t)=t^2+5t+2$라 하고, 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라고 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x(t^2+5t+2)\,dt=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$$
$$=F'(2)=f(2)=4+10+2=16$$

062 답 8

$f(t)=(t+1)^3$이라 하고, 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라고 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x(t+1)^3\,dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=F'(1)=f(1)=2^3=8$$

063 답 −2

$f(t)=2t-4$라 하고, 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라고 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_1^{x+1}(2t-4)\,dt=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_1^{x+1} f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(x+1)-F(1)}{x}$$
$$=F'(1)=f(1)=2-4=-2$$

064 답 −1

$f(t)=3t^2-t-4$라 하고, 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라고 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x(3t^2-t-4)\,dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+1)(x-1)}\int_1^x f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x+1}\times\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)$$
$$=\frac{1}{2}\times(-2)=-1$$

연산 유형 **최종 점검하기** 108~109쪽

1 ④	2 ⑤	3 ④	4 5	5 ②	6 4
7 $\frac{23}{3}$	8 ③	9 ①	10 ⑤	11 −3	12 4
13 3					

1 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1(3x^2-2ax)\,dx$
$$=\Big[x^3-ax^2\Big]_0^1=1-a$$
따라서 $1-a=-1$이므로

$a=2$

2 $\displaystyle\int_0^k(x+1)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^k=\frac{1}{2}k^2+k$

따라서 $\frac{1}{2}k^2+k=\frac{15}{2}$이므로

$k^2+2k-15=0,\ (k+5)(k-3)=0$

$\therefore\ k=3\ (\because\ k>0)$

3 $\displaystyle\int_1^2(3x^2+x+2)\,dx-3\int_1^2(x^2-x)\,dx=\int_1^2(4x+2)\,dx$
$$=\Big[2x^2+2x\Big]_1^2$$
$$=(8+4)-(2+2)$$
$$=8$$

4 $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,dx=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^5 f(x)\,dx$
$$=7-2=5$$

5 $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^1(-2x)\,dx+\int_1^3(x^2-3)\,dx$
$$=\Big[-x^2\Big]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-3x\right]_1^3$$
$$=-1+\frac{8}{3}=\frac{5}{3}$$

6 $f(x)=\begin{cases}-x+4 & (x\ge2)\\ x & (x\le2)\end{cases}$이므로
$$\int_0^4 f(x)\,dx=\int_0^2 x\,dx+\int_2^4(-x+4)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2+\left[-\frac{1}{2}x^2+4x\right]_2^4$$
$$=2+2=4$$

7 $|x^2-4|=\begin{cases}x^2-4 & (x\le-2\ 또는\ x\ge2)\\ -x^2+4 & (-2\le x\le2)\end{cases}$이므로
$$\int_0^3|x^2-4|\,dx=\int_0^2(-x^2+4)\,dx+\int_2^3(x^2-4)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_2^3$$
$$=\frac{16}{3}+\frac{7}{3}=\frac{23}{3}$$

8 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+4x-3$

또 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt=a^3+2a^2-3a$

$0=a^3+2a^2-3a,\ a(a+3)(a-1)=0$

$\therefore\ a=1\ (\because\ a>0)$

$\therefore\ f(a)=f(1)=3+4-3=4$

9 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x+a$

또 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_{1}^{1} f(t)\,dt=1+a+3$

$0=a+4 \qquad \therefore a=-4$

따라서 $f(x)=2x-4$이므로

$f(2)=4-4=0$

10 $\int_{0}^{2} f(t)\,dt=k$ (k는 상수) …… ㉠로 놓으면

$f(x)=3x^2-4x+k$

이를 ㉠에 대입하면

$\int_{0}^{2} (3t^2-4t+k)\,dt=k$

$\left[t^3-2t^2+kt\right]_{0}^{2}=k,\ 8-8+2k=k \qquad \therefore k=0$

따라서 $f(x)=3x^2-4x$이므로

$f(-1)=3+4=7$

11 $f(x)=\int_{0}^{x} (t^2+at+2)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+ax+2$

이때 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(1)=0,\ 1+a+2=0 \qquad \therefore a=-3$

12 $f(x)=\int_{0}^{x} (t^2+2t-3)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대이므로 극댓값은

$a=f(-3)=\int_{0}^{-3} (t^2+2t-3)\,dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3+t^2-3t\right]_{0}^{-3}=9$

또 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 극솟값은

$b=f(1)=\int_{0}^{1} (t^2+2t-3)\,dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3+t^2-3t\right]_{0}^{1}=-\frac{5}{3}$

$\therefore a+3b=9-5=4$

13 $f(t)=t^2+3t+2$라 하고, 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라고 하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\int_{2}^{x} (t^3+3t+2)\,dt=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)(x-2)}\int_{2}^{x} f(t)\,dt$$

$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{1}{x+2}\times\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}F'(2)=\frac{1}{4}f(2)$$

$$=\frac{1}{4}\times 12=3$$

08 정적분의 활용

112~123쪽

001 답 $\mathbf{2,\ 2,\ \frac{4}{3}}$

002 답 $\mathbf{\frac{32}{3}}$

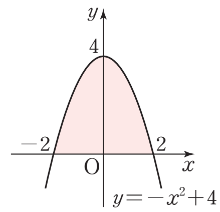
곡선 $y=-x^2+4$와 x축의 교점의 x좌표는

$-x^2+4=0$에서

$(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

구간 $[-2,\ 2]$에서 $y\geq 0$이므로 구하는 넓이 S는



$S=\int_{-2}^{2} (-x^2+4)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{-2}^{2}=\frac{32}{3}$

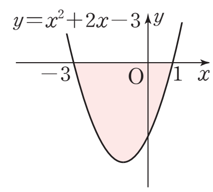
003 답 $\mathbf{\frac{32}{3}}$

곡선 $y=x^2+2x-3$과 x축의 교점의 x좌표는 $x^2+2x-3=0$에서

$(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

구간 $[-3,\ 1]$에서 $y\leq 0$이므로 구하는 넓이 S는



$S=\int_{-3}^{1} (-x^2-2x+3)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-3}^{1}=\frac{32}{3}$

004 답 $\mathbf{\geq,\ \leq,\ -x^3+x,\ -\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2,\ \frac{1}{2}}$

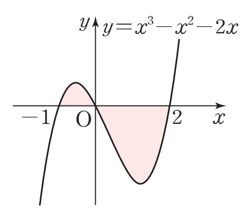
005 답 $\mathbf{\frac{37}{12}}$

곡선 $y=x^3-x^2-2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-x^2-2x=0$에서

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[-1,\ 0]$에서 $y\geq 0$이고 구간 $[0,\ 2]$에서 $y\leq 0$이므로 구하는 넓이 S는



$S=\int_{-1}^{0} (x^3-x^2-2x)\,dx+\int_{0}^{2} (-x^3+x^2+2x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{2}$

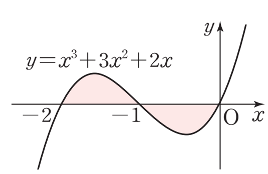
$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$

006 답 $\mathbf{\frac{1}{2}}$

곡선 $y=x^3+3x^2+2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3+3x^2+2x=0$에서

$x(x+2)(x+1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=0$

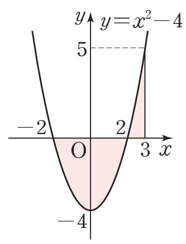


구간 $[-2,\ -1]$에서 $y\ge 0$이고 구간 $[-1,\ 0]$에서 $y\le 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-2}^{-1}(x^3+3x^2+2x)\,dx+\int_{-1}^{0}(-x^3-3x^2-2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3+x^2\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3-x^2\right]_{-1}^{0}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

007 답 $\le,\ \ge,\ -x^2+x,\ -\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2,\ 1$

008 답 13



곡선 $y=x^2-4$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-4=0$에서

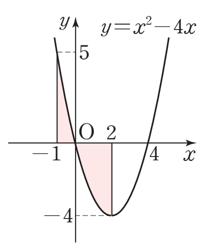
$(x+2)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=2$

구간 $[-2,\ 2]$에서 $y\le 0$이고 구간 $[2,\ 3]$에서 $y\ge 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-2}^{2}(-x^2+4)\,dx+\int_{2}^{3}(x^2-4)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{-2}^{2}+\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_{2}^{3}$$
$$=\frac{32}{3}+\frac{7}{3}=13$$

009 답 $\frac{23}{3}$



곡선 $y=x^2-4x$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-4x=0$에서

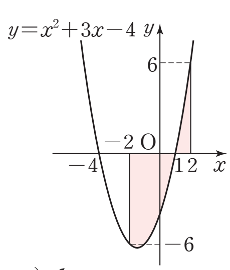
$x(x-4)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=4$

구간 $[-1,\ 0]$에서 $y\ge 0$이고 구간 $[0,\ 2]$에서 $y\le 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{0}(x^2-4x)\,dx+\int_{0}^{2}(-x^2+4x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{7}{3}+\frac{16}{3}=\frac{23}{3}$$

010 답 $\frac{49}{3}$



곡선 $y=x^2+3x-4$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2+3x-4=0$에서

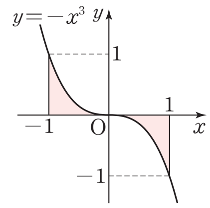
$(x+4)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-4$ 또는 $x=1$

구간 $[-2,\ 1]$에서 $y\le 0$이고 구간 $[1,\ 2]$에서 $y\ge 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-2}^{1}(-x^2-3x+4)\,dx+\int_{1}^{2}(x^2+3x-4)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+4x\right]_{-2}^{1}+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x\right]_{1}^{2}$$
$$=\frac{27}{2}+\frac{17}{6}=\frac{49}{3}$$

011 답 $\frac{1}{2}$



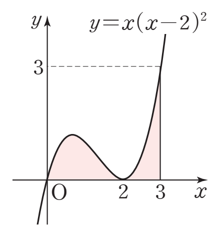
곡선 $y=-x^3$과 x축의 교점의 x좌표는

$-x^3=0$에서 $x=0$

구간 $[-1,\ 0]$에서 $y\ge 0$이고 구간 $[0,\ 1]$에서 $y\le 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{0}(-x^3)\,dx+\int_{0}^{1}x^3\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

012 답 $\frac{9}{4}$



곡선 $y=x(x-2)^2$과 x축의 교점의 x좌표는 $x(x-2)^2=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[0,\ 3]$에서 $y\ge 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{0}^{3}x(x-2)^2\,dx$$
$$=\int_{0}^{3}(x^3-4x^2+4x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{3}=\frac{9}{4}$$

013 답 $2,\ 2,\ \frac{2}{5}$

014 답 0

$$\int_{-2}^{2}(x^3-6x)\,dx=0$$

015 답 0

$$\int_{-1}^{1}(3x^5+2x^3-x)\,dx=0$$

016 답 36

$$\int_{-3}^{3}x(x+1)^2\,dx=\int_{-3}^{3}(x^3+2x^2+x)\,dx$$
$$=\int_{-3}^{3}(x^3+x)\,dx+\int_{-3}^{3}2x^2\,dx$$
$$=0+2\int_{0}^{3}2x^2\,dx$$
$$=2\left[\frac{2}{3}x^3\right]_{0}^{3}$$
$$=2\times 18=36$$

017 답 2

$$\int_{-1}^{1}(5x^4+x^3-3x^2+1)\,dx=\int_{-1}^{1}(5x^4-3x^2+1)\,dx+\int_{-1}^{1}x^3\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(5x^4-3x^2+1)\,dx+0$$
$$=2\left[x^5-x^3+x\right]_{0}^{1}$$
$$=2\times 1=2$$

018 답 12

$$\int_{-2}^{0}(x^5+3x^2-1)\,dx+\int_{0}^{2}(x^5+3x^2-1)\,dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(x^5+3x^2-1)\,dx$$
$$=\int_{-2}^{2}x^5\,dx+\int_{-2}^{2}(3x^2-1)\,dx$$
$$=0+2\int_{0}^{2}(3x^2-1)\,dx$$
$$=2\Big[x^3-x\Big]_0^2$$
$$=2\times6=12$$

019 답 0, 0, $\geq$, $-x^2-2x+3$, $x+3$, $\frac{9}{2}$

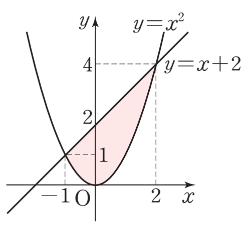
020 답 $\frac{9}{2}$

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=x+2$의 교점의 x좌표는 $x^2=x+2$에서

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

구간 $[-1,\ 2]$에서 $x^2\leq x+2$이므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_{-1}^{2}\{(x+2)-x^2\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$

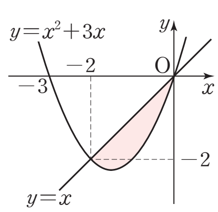
021 답 $\frac{4}{3}$

곡선 $y=x^2+3x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^2+3x=x$에서

$x^2+2x=0$, $x(x+2)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=0$

구간 $[-2,\ 0]$에서 $x^2+3x\leq x$이므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_{-2}^{0}\{x-(x^2+3x)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(-x^2-2x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}=\frac{4}{3}$$

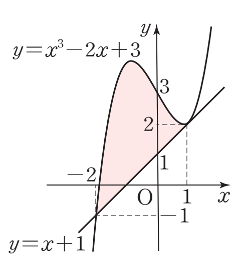
022 답 $\frac{27}{4}$

곡선 $y=x^3-2x+3$과 직선 $y=x+1$의 교점의 x좌표는 $x^3-2x+3=x+1$에서

$x^3-3x+2=0$, $(x+2)(x-1)^2=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$

구간 $[-2,\ 1]$에서 $x^3-2x+3\geq x+1$이므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_{-2}^{1}\{(x^3-2x+3)-(x+1)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{27}{4}$$

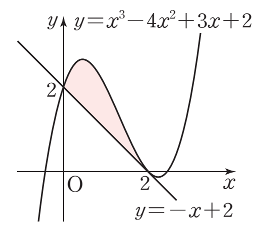
023 답 $\frac{4}{3}$

곡선 $y=x^3-4x^2+3x+2$와 직선 $y=-x+2$의 교점의 x좌표는

$x^3-4x^2+3x+2=-x+2$에서

$x^3-4x^2+4x=0$, $x(x-2)^2=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$



구간 $[0,\ 2]$에서

$x^3-4x^2+3x+2\geq -x+2$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{0}^{2}\{(x^3-4x^2+3x+2)-(-x+2)\}\,dx$$
$$=\int_{0}^{2}(x^3-4x^2+4x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{2}=\frac{4}{3}$$

024 답 $\leq$, $-x^2+6x-4$, x^2-2x+2, $\frac{8}{3}$

025 답 9

두 곡선의 교점의 x좌표는

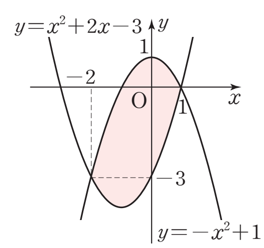
$x^2+2x-3=-x^2+1$에서

$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$

구간 $[-2,\ 1]$에서

$x^2+2x-3\leq -x^2+1$이므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_{-2}^{1}\{(-x^2+1)-(x^2+2x-3)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(-2x^2-2x+4)\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-2}^{1}=9$$

026 답 4

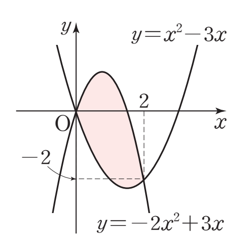
두 곡선의 교점의 x좌표는

$x^2-3x=-2x^2+3x$에서

$x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[0,\ 2]$에서 $x^2-3x\leq -2x^2+3x$이므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_{0}^{2}\{(-2x^2+3x)-(x^2-3x)\}\,dx$$
$$=\int_{0}^{2}(-3x^2+6x)\,dx$$
$$=\Big[-x^3+3x^2\Big]_{0}^{2}=4$$

027 답 $\frac{1}{3}$

두 곡선의 교점의 x좌표는

$x^2-4x+4=-x^2+2x$에서

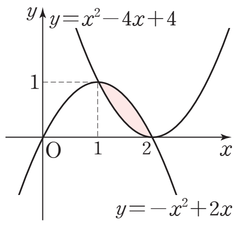
$x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=1$ 또는 $x=2$

구간 $[1, 2]$에서

$x^2-4x+4 \le -x^2+2x$이므로 구하는

넓이 S는



$$S=\int_1^2 \{(-x^2+2x)-(x^2-4x+4)\}\,dx$$
$$=\int_1^2 (-2x^2+6x-4)\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right]_1^2=\frac{1}{3}$$

028 답 $\frac{37}{12}$

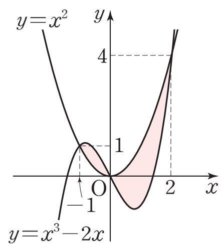
두 곡선의 교점의 x좌표는

$x^3-2x=x^2$에서

$x^3-x^2-2x=0$, $x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[-1, 0]$에서 $x^3-2x \ge x^2$이고 구간 $[0, 2]$에서 $x^3-2x \le x^2$이므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_{-1}^0 \{(x^3-2x)-x^2\}\,dx+\int_0^2 \{x^2-(x^3-2x)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^0 (x^3-x^2-2x)\,dx+\int_0^2 (-x^3+x^2+2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$$
$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$

029 답 $\frac{1}{2}$

두 곡선의 교점의 x좌표는

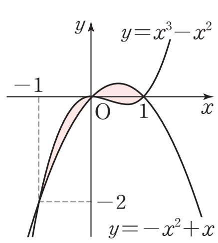
$x^3-x^2=-x^2+x$에서

$x^3-x=0$, $x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

구간 $[-1, 0]$에서 $x^3-x^2 \ge -x^2+x$이고

구간 $[0, 1]$에서 $x^3-x^2 \le -x^2+x$이므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_{-1}^0 \{(x^3-x^2)-(-x^2+x)\}\,dx$$
$$+\int_0^1 \{(-x^2+x)-(x^3-x^2)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^0 (x^3-x)\,dx+\int_0^1 (-x^3+x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

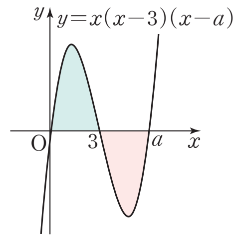
030 답 **0, 0, 0, 1**

031 답 **6**

곡선 $y=x(x-3)(x-a)$와 x축의 교점의 x좌표는 $x(x-3)(x-a)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=3$ 또는 $x=a$

곡선과 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로



$$\int_0^a x(x-3)(x-a)\,dx=0$$
$$\int_0^a \{x^3-(a+3)x^2+3ax\}\,dx=0$$
$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+3)x^3+\frac{3}{2}ax^2\right]_0^a=0$$
$$\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}(a+3)a^3+\frac{3}{2}a^3=0$$

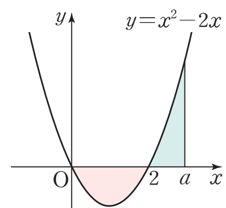
$a^3(a-6)=0$ $\quad\therefore$ $a=6$ ($\because$ $a>3$)

032 답 **3**

곡선 $y=x^2-2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-2x=0$에서

$x(x-2)=0$ $\quad\therefore$ $x=0$ 또는 $x=2$

곡선과 두 직선 $x=0$, $x=a$ 및 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로



$\int_0^a (x^2-2x)\,dx=0$, $\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^a=0$

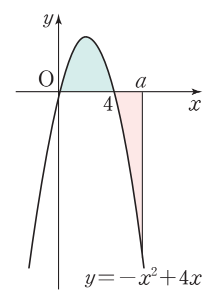
$\frac{1}{3}a^3-a^2=0$, $a^2(a-3)=0$ $\quad\therefore$ $a=3$ ($\because$ $a>2$)

033 답 **6**

곡선 $y=-x^2+4x$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+4x=0$에서

$x(x-4)=0$ $\quad\therefore$ $x=0$ 또는 $x=4$

곡선과 두 직선 $x=0$, $x=a$ 및 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로



$$\int_0^a (-x^2+4x)\,dx=0$$
$$\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^a=0$$

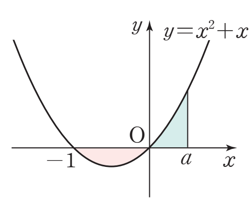
$-\frac{1}{3}a^3+2a^2=0$, $a^2(a-6)=0$ $\quad\therefore$ $a=6$ ($\because$ $a>4$)

034 답 $\frac{1}{2}$

곡선 $y=x^2+x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2+x=0$에서

$x(x+1)=0$ $\quad\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=0$

곡선과 두 직선 $x=-1$, $x=a$ 및 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로



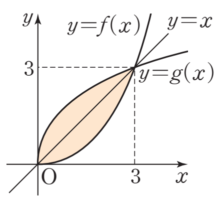
$\int_{-1}^a (x^2+x)\,dx=0$, $\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^a=0$

$\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{6}=0$, $(a+1)^2(2a-1)=0$

$\therefore$ $a=\frac{1}{2}$ ($\because$ $a>0$)

035 답 $2,\ 1,\ 2,\ \frac{1}{3}$

036 답 3



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

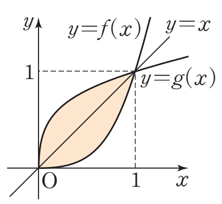
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $\frac{1}{3}x^2=x$에서

$x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$ $\qquad \therefore x=0$ 또는 $x=3$

구간 $[0,\ 3]$에서 $x\ge\frac{1}{3}x^2$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=2\int_0^3\left(x-\frac{1}{3}x^2\right)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{9}x^3\right]_0^3$$
$$=2\times\frac{3}{2}=3$$

037 답 $\frac{1}{2}$



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^3=x$에서

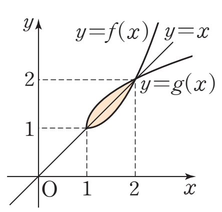
$x^3-x=0$, $x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ ($\because x\ge0$)

구간 $[0,\ 1]$에서 $x\ge x^3$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=2\int_0^1(x-x^3)\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$
$$=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

038 답 $\frac{1}{3}$



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^2-2x+2=x$에서

$x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$ $\qquad \therefore x=1$ 또는 $x=2$

구간 $[1,\ 2]$에서 $x\ge x^2-2x+2$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=2\int_1^2\{x-(x^2-2x+2)\}\,dx$$
$$=2\int_1^2(-x^2+3x-2)\,dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_1^2$$
$$=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

039 답 3

시각 $t=0$에서 점 P의 위치가 원점이므로 시각 $t=3$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^3(4-2t)\,dt=\Big[4t-t^2\Big]_0^3=3$$

040 답 0

시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^3(4-2t)\,dt=\Big[4t-t^2\Big]_1^3=0$$

041 답 2

$1\le t\le2$에서 $v(t)\ge0$이고 $2\le t\le3$에서 $v(t)\le0$이므로 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^2(4-2t)\,dt+\int_2^3(-4+2t)\,dt=\Big[4t-t^2\Big]_1^2+\Big[-4t+t^2\Big]_2^3$$
$$=1+1=2$$

042 답 2

시각 $t=0$에서 점 P의 위치가 2이므로 시각 $t=3$에서 점 P의 위치는

$$2+\int_0^3(2t-t^2)\,dt=2+\left[t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^3$$
$$=2+0=2$$

043 답 $-\frac{2}{3}$

시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^3(2t-t^2)\,dt=\left[t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_1^3=-\frac{2}{3}$$

044 답 2

$1\le t\le2$에서 $v(t)\ge0$이고 $2\le t\le3$에서 $v(t)\le0$이므로 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^2(2t-t^2)\,dt+\int_2^3(-2t+t^2)\,dt=\left[t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_1^2+\left[-t^2+\frac{1}{3}t^3\right]_2^3$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$$

045 답 $0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -\frac{2}{3}$

046 답 $\frac{20}{3}$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$v(t)=t^2-6t+8=0$, $(t-2)(t-4)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=4$

따라서 $t=2$일 때, 처음으로 운동 방향을 바꾸므로 점 P의 위치는

$$0+\int_0^2(t^2-6t+8)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t\right]_0^2=\frac{20}{3}$$

047 답 $\frac{4}{3}$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$v(t)=-t^2+2t=0$, $t(t-2)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t>0$)

따라서 $t=2$일 때, 점 P의 위치는

$$0+\int_0^2(-t^2+2t)\,dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

048 답 $-\frac{4}{3}$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$v(t)=-t^2+4t-3=0$, $(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

따라서 $t=1$일 때, 처음으로 운동 방향을 바꾸므로 점 P의 위치는

$$0+\int_0^1(-t^2+4t-3)\,dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_0^1=-\frac{4}{3}$$

049 답 0, 10, 10, 10, 10, 100

050 답 150

열차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$v(t)=30-3t=0 \qquad \therefore t=10$

따라서 제동을 건 지 10초 후에 열차가 정지하므로 열차가 정지할 때까지 움직인 거리는

$$\int_0^{10}(30-3t)\,dt=\left[30t-\frac{3}{2}t^2\right]_0^{10}=150$$

051 답 400

열차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$v(t)=40-2t=0 \qquad \therefore t=20$

따라서 제동을 건 지 20초 후에 열차가 정지하므로 열차가 정지할 때까지 움직인 거리는

$$\int_0^{20}(40-2t)\,dt=\left[40t-t^2\right]_0^{20}=400$$

052 답 300

열차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$v(t)=30-\frac{3}{2}t=0 \qquad \therefore t=20$

따라서 제동을 건 지 20초 후에 열차가 정지하므로 열차가 정지할 때까지 움직인 거리는

$$\int_0^{20}\left(30-\frac{3}{2}t\right)dt=\left[30t-\frac{3}{4}t^2\right]_0^{20}=300$$

053 답 60 m

물체를 쏘아 올린 지 1초 후의 지면으로부터의 높이는

$$35+\int_0^1(30-10t)\,dt=35+\left[30t-5t^2\right]_0^1$$
$$=35+25=60\,(\text{m})$$

054 답 80 m

물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로

$v(t)=30-10t=0 \qquad \therefore t=3$

따라서 $t=3$일 때, 물체의 높이는

$$35+\int_0^3(30-10t)\,dt=35+\left[30t-5t^2\right]_0^3$$
$$=35+45=80\,(\text{m})$$

055 답 -40 m/s

물체를 쏘아 올린 지 t초 후의 지면으로부터의 높이는

$$35+\int_0^t(30-10t)\,dt=35+\left[30t-5t^2\right]_0^t$$
$$=35+30t-5t^2$$

물체가 지면에 떨어지는 순간의 높이는 0이므로

$35+30t-5t^2=0$

$(t+1)(t-7)=0 \qquad \therefore t=7\ (\because t>0)$

따라서 $t=7$일 때, 물체의 속도는

$v(7)=30-10\times7=-40\,(\text{m/s})$

056 답 65 m

$0\le t\le3$에서 $v(t)\ge0$이고 $3\le t\le5$에서 $v(t)\le0$이므로 쏘아 올린 후 5초 동안 물체가 움직인 거리는

$$\int_0^3(30-10t)\,dt+\int_3^5(-30+10t)\,dt$$
$$=\left[30t-5t^2\right]_0^3+\left[-30t+5t^2\right]_3^5$$
$$=45+20=65\,(\text{m})$$

057 답 40 m

물체를 쏘아 올린 지 1초 후의 지면으로부터의 높이는

$$25+\int_0^1(20-10t)\,dt=25+\left[20t-5t^2\right]_0^1$$
$$=25+15=40\,(\text{m})$$

058 답 45 m

물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로

$v(t)=20-10t=0 \qquad \therefore t=2$

따라서 $t=2$일 때, 물체의 높이는

$$25+\int_0^2(20-10t)\,dt=25+\left[20t-5t^2\right]_0^2$$
$$=25+20=45\,(\text{m})$$

059 답 -30 m/s

물체를 쏘아 올린 지 t초 후의 지면으로부터의 높이는

$$25+\int_0^t(20-10t)\,dt=25+\left[20t-5t^2\right]_0^t$$
$$=25+20t-5t^2$$

물체가 지면에 떨어지는 순간의 높이는 0이므로

$25+20t-5t^2=0$, $(t+1)(t-5)=0$

$\therefore t=5\ (\because t>0)$

따라서 $t=5$일 때, 물체의 속도는

$v(5)=20-10\times5=-30\,(\text{m/s})$

060 답 40 m

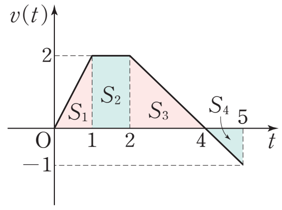
$0\le t\le2$에서 $v(t)\ge0$이고 $2\le t\le4$에서 $v(t)\le0$이므로 쏘아 올린 후 4초 동안 물체가 움직인 거리는

$$\int_0^2(20-10t)\,dt+\int_2^4(-20+10t)\,dt$$
$$=\left[20t-5t^2\right]_0^2+\left[-20t+5t^2\right]_2^4$$
$$=20+20=40\,(\text{m})$$

061 답 ×

$t=1$일 때, 점 P의 위치는

$\int_0^1 v(t)\,dt=S_1=\frac{1}{2}\times1\times2=1$



062 답 ○

점 P는 $t=4$에서 운동 방향을 바꾸므로 이때의 위치는

$\int_0^4 v(t)\,dt=S_1+S_2+S_3=\frac{1}{2}\times(4+1)\times2=5$

063 답 ×

$t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^5 |v(t)|\,dt=(S_1+S_2+S_3)+S_4$

$=\frac{1}{2}\times(4+1)\times2+\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{11}{2}$

064 답 ○

점 P는 $t=4$까지 양의 방향으로 움직이다가 $t=4$에서 방향을 바꾸어 원점으로 돌아온다.

따라서 $t=4$일 때, 점 P는 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있다.

065 답 ×

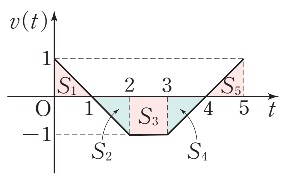
$t=4$일 때, 점 P의 위치는

$\int_0^4 v(t)\,dt$

$=S_1-(S_2+S_3+S_4)$

$=\frac{1}{2}\times1\times1-\frac{1}{2}\times(3+1)\times1$

$=-\frac{3}{2}$



066 답 ○

$\int_0^2 v(t)\,dt=S_1-S_2=\frac{1}{2}\times1\times1-\frac{1}{2}\times1\times1=0$

따라서 $t=2$일 때, 점 P는 출발 후 다시 원점을 통과한다.

067 답 ○

$t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^5 |v(t)|\,dt=S_1+(S_2+S_3+S_4)+S_5$

$=\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times(3+1)\times1+\frac{1}{2}\times1\times1=3$

068 답 ×

점 P는 $t=2$일 때 원점을 통과하여 $t=4$까지 음의 방향으로 움직이다가 $t=4$에서 방향을 바꾸어 다시 원점으로 돌아온다.

따라서 $t=4$일 때, 점 P는 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있다.

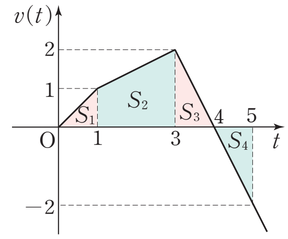
069 답 $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$

$t=5$일 때, 점 P의 위치는

$\int_0^5 v(t)\,dt=S_1+S_2+S_3-S_4$

$=\frac{1}{2}+3+1-1$

$=\frac{7}{2}$



$t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^5 |v(t)|\,dt=S_1+S_2+S_3+S_4$

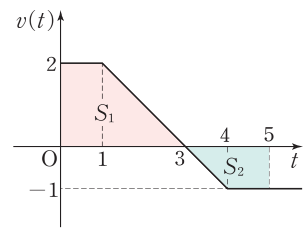
$=\frac{1}{2}+3+1+1=\frac{11}{2}$

070 답 $\frac{5}{2}$, $\frac{11}{2}$

$t=5$일 때, 점 P의 위치는

$\int_0^5 v(t)\,dt=S_1-S_2$

$=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$



$t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^5 |v(t)|\,dt=S_1+S_2$

$=4+\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$

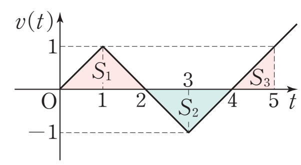
071 답 $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$

$t=5$일 때, 점 P의 위치는

$\int_0^5 v(t)\,dt=S_1-S_2+S_3$

$=1-1+\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}$



$t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^5 |v(t)|\,dt=S_1+S_2+S_3$

$=1+1+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

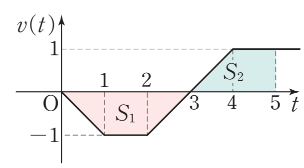
072 답 $-\frac{1}{2}$, $\frac{7}{2}$

$t=5$일 때, 점 P의 위치는

$\int_0^5 v(t)\,dt=-S_1+S_2$

$=-2+\frac{3}{2}$

$=-\frac{1}{2}$



$t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^5 |v(t)|\,dt=S_1+S_2$

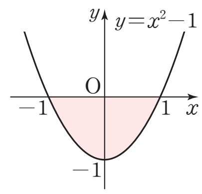
$=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$

연산 유형 최종 점검하기

124～126쪽

1 ④	2 ②	3 ④	4 ③	5 ④	6 ②
7 ①	8 ①	9 ⑤	10 ③	11 ②	12 $\frac{1}{8}$
13 ③	14 ④	15 500 m	16 20 m	17 5	18 ㄷ

1 곡선 $y=x^2-1$과 x축의 교점의 x좌표는



$x^2-1=0$에서

$(x+1)(x-1)=0$

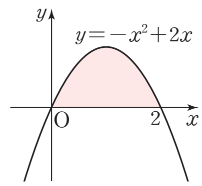
$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=1$

구간 $[-1, 1]$에서 $y\le 0$이므로

$S_1=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}$

곡선 $y=-x^2+2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+2x=0$에서



$x(x-2)=0$ $\quad\therefore$ $x=0$ 또는 $x=2$

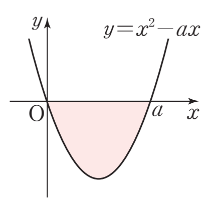
구간 $[0, 2]$에서 $y\ge 0$이므로

$S_2=\int_{0}^{2}(-x^2+2x)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{2}=\frac{4}{3}$

$\therefore$ $S_1+S_2=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

2 곡선 $y=x^2-ax$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-ax=0$에서



$x(x-a)=0$ $\quad\therefore$ $x=0$ 또는 $x=a$

구간 $[0, a]$에서 $y\le 0$이므로 곡선 $y=x^2-ax$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$S=\int_{0}^{a}(-x^2+ax)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_{0}^{a}=\frac{1}{6}a^3$

따라서 $\frac{1}{6}a^3=\frac{9}{2}$이므로

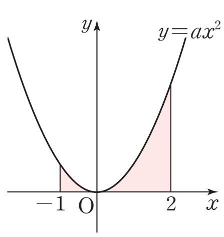
$a^3=27$ $\quad\therefore$ $a=3$

3 $S_2=\int_{0}^{1}x^3\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1}=\frac{1}{4}$이므로

$S_1=1-S_2=\frac{3}{4}$

$\therefore$ $S_1 : S_2=3 : 1$

4 곡선 $y=ax^2$과 x축의 교점의 x좌표는 $ax^2=0$에서 $x=0$



구간 $[-1, 2]$에서 $y\ge 0$이므로 곡선과 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$S=\int_{-1}^{2}ax^2\,dx=\left[\frac{1}{3}ax^3\right]_{-1}^{2}=3a$

따라서 $3a=9$이므로

$a=3$

5 $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(10x^9+9x^8+8x^7+\cdots+1)\,dx$

$=2\int_{0}^{1}(9x^8+7x^6+5x^4+3x^2+1)\,dx$

$=2\left[x^9+x^7+x^5+x^3+x\right]_{0}^{1}$

$=2\times5=10$

6 $\int_{-a}^{a}(3x^2-x-7)\,dx=2\int_{0}^{a}(3x^2-7)\,dx$

$=2\left[x^3-7x\right]_{0}^{a}$

$=2a^3-14a$

$2a^3-14a=12$이므로

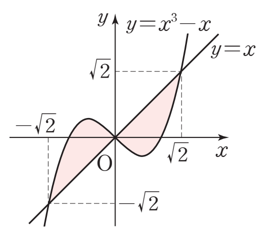
$a^3-7a-6=0$, $(a+2)(a+1)(a-3)=0$

$\therefore$ $a=-2$ 또는 $a=-1$ 또는 $a=3$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-2+(-1)+3=0$

7 곡선 $y=x^3-x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^3-x=x$에서



$x^3-2x=0$

$x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$

$\therefore$ $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

구간 $[-\sqrt{2}, 0]$에서 $x^3-x\ge x$이고

구간 $[0, \sqrt{2}]$에서 $x^3-x\le x$이므로 구하는 넓이 S는

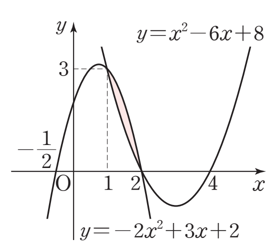
$S=\int_{-\sqrt{2}}^{0}\{(x^3-x)-x\}\,dx+\int_{0}^{\sqrt{2}}\{x-(x^3-x)\}\,dx$

$=\int_{-\sqrt{2}}^{0}(x^3-2x)\,dx+\int_{0}^{\sqrt{2}}(-x^3+2x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^2\right]_{-\sqrt{2}}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_{0}^{\sqrt{2}}$

$=1+1=2$

8 두 곡선의 교점의 x좌표는



$x^2-6x+8=-2x^2+3x+2$에서

$x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=1$ 또는 $x=2$

구간 $[1, 2]$에서

$x^2-6x+8\le-2x^2+3x+2$이므로

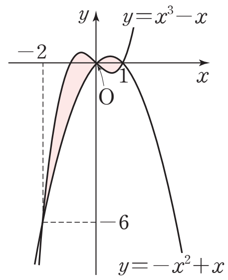
구하는 넓이 S는

$S=\int_{1}^{2}\{(-2x^2+3x+2)-(x^2-6x+8)\}\,dx$

$=\int_{1}^{2}(-3x^2+9x-6)\,dx$

$=\left[-x^3+\frac{9}{2}x^2-6x\right]_{1}^{2}=\frac{1}{2}$

9 두 곡선의 교점의 x좌표는



$x^3-x=-x^2+x$에서

$x^3+x^2-2x=0$, $x(x+2)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

구간 $[-2, 0]$에서 $x^3-x\ge -x^2+x$이고 구간 $[0, 1]$에서 $x^3-x\le -x^2+x$이므로 구하는 넓이 S는

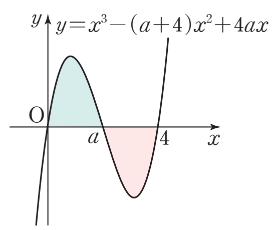
$$S=\int_{-2}^{0}\{(x^3-x)-(-x^2+x)\}\,dx+\int_{0}^{1}\{(-x^2+x)-(x^3-x)\}\,dx$$

$$=\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)\,dx+\int_{0}^{1}(-x^3-x^2+2x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}$$

10 곡선 $y=x^3-(a+4)x^2+4ax$와 x축의 교점의 x좌표는



$x^3-(a+4)x^2+4ax=0$에서

$x(x-a)(x-4)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=a$ 또는 $x=4$

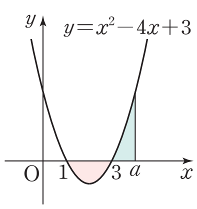
곡선과 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_{0}^{4}\{x^3-(a+4)x^2+4ax\}\,dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+4)x^3+2ax^2\right]_{0}^{4}=0$$

$64-\frac{64}{3}(a+4)+32a=0$ $\qquad\therefore$ $a=2$

11 곡선 $y=x^2-4x+3$과 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-4x+3=0$에서



$(x-1)(x-3)=0$ $\qquad\therefore$ $x=1$ 또는 $x=3$

곡선과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=a$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

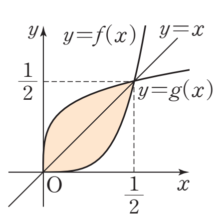
$$\int_{1}^{a}(x^2-4x+3)\,dx=0$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_{1}^{a}=0$$

$\frac{1}{3}a^3-2a^2+3a-\frac{1}{3}+2-3=0$, $a^3-6a^2+9a-4=0$

$(a-1)^2(a-4)=0$ $\qquad\therefore$ $a=4$ ($\because$ $a>3$)

12 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $4x^3=x$에서

$4x^3-x=0$, $x(2x+1)(2x-1)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ ($\because$ $x\ge 0$)

구간 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$에서 $x\ge 4x^3$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=2\int_{0}^{\frac{1}{2}}(x-4x^3)\,dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-x^4\right]_{0}^{\frac{1}{2}}=2\times\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$$

13 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$v(t)=3t^2-6t=0$, $3t(t-2)=0$

$\therefore$ $t=2$ ($\because$ $t>0$)

따라서 $t=2$일 때, 운동 방향을 바꾸므로 점 P의 위치는

$$1+\int_{0}^{2}(3t^2-6t)\,dt=1+\left[t^3-3t^2\right]_{0}^{2}=-3$$

14 $t=a$일 때, 점 P가 다시 원점으로 돌아온다고 하면

$$\int_{0}^{a}(9-3t)\,dt=0,\ \left[9t-\frac{3}{2}t^2\right]_{0}^{a}=0$$

$9a-\frac{3}{2}a^2=0$, $a^2-6a=0$

$a(a-6)=0$ $\qquad\therefore$ $a=6$ ($\because$ $a>0$)

15 열차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$v(t)=50-\frac{5}{2}t=0$ $\qquad\therefore$ $t=20$

따라서 제동을 건 지 20초 후에 열차가 정지하므로 열차가 정지할 때까지 움직인 거리는

$$\int_{0}^{20}\left(50-\frac{5}{2}t\right)dt=\left[50t-\frac{5}{4}t^2\right]_{0}^{20}=500\,(\mathrm{m})$$

16 물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로

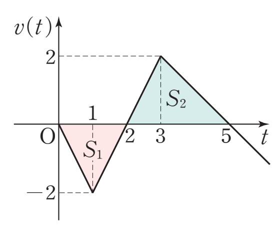
$v(t)=10-10t=0$ $\qquad\therefore$ $t=1$

따라서 $t=1$일 때, 물체의 높이는

$$15+\int_{0}^{1}(10-10t)\,dt=15+\left[10t-5t^2\right]_{0}^{1}$$

$$=15+5=20\,(\mathrm{m})$$

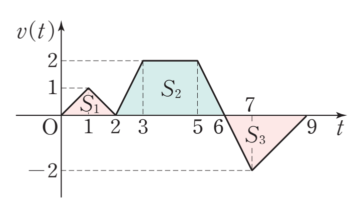
17 점 P가 $t=0$에서 $t=5$까지 움직인 거리는



$$\int_{0}^{5}|v(t)|\,dt=S_1+S_2$$

$$=2+3=5$$

18 ㄱ. $t=3$에서 $t=5$까지 점 P는 2의 속도로 움직인다.



ㄴ. $t=9$일 때, 점 P의 위치는

$$\int_{0}^{9}v(t)\,dt=S_1+S_2-S_3$$

$$=1+6-3=4$$

ㄷ. 점 P는 $t=2$일 때 처음 정지하므로 2초 동안 움직인 거리는

$$\int_{0}^{2}|v(t)|\,dt=S_1=1$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄷ이다.