정답과 해설

최상위 수학 중 3-1

Ⅰ. 실수와 그 계산

Ⅱ. 이차방정식

Ⅲ. 이차함수

I 실수와 그 계산

01 무리수의 성질

1 STEP 주제별 실력다지기 본문 7~12쪽

1 9 **2** ㄱ, ㄷ, ㅁ **3** ㄱ, ㄷ
4 $8-5\sqrt{2}$ **5** (1) $2c-2a$ (2) $3a-3b$
6 $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 1)$, $(0,\ 4)$, $(4,\ 0)$
7 19 **8** 54 **9** 7 **10** 12개 **11** ④, ⑤
12 $A>B>C$ **13** $A>B$ **14** $c>a>b$
15 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{\sqrt{a}}$, $\sqrt{a}$, a, a^2 **16** π, $\sqrt{14.4}$, $2-\sqrt{6}$
17 ②, ⑤ **18** ① **19** 10개 **20** $2\sqrt{2}$
21 $4\sqrt{2}-2$ **22** 풀이 참조
23 (1) 3, $2\sqrt{3}-3$ (2) 3, $3\sqrt{2}-4$ (3) 2, $3\sqrt{2}-4$
24 2 **25** $3-\sqrt{2}$ **26** $\frac{4}{7}$ **27** $-a-5$

1 $(-12)^2=144$ 이므로 이것의 제곱근은 ±12 이다.
$\therefore x=12$
$\sqrt{81}=9$ 이므로 이것의 제곱근은 ±3 이다.
$\therefore y=-3$
$\therefore x+y=12+(-3)=9$

2 ㄱ, ㄷ, ㅁ. $(-\sqrt{a})^2=(\sqrt{a})^2=\sqrt{(-a)^2}=a$
ㄴ. $-\sqrt{a^2}=-a$
ㄹ. $-\sqrt{(-a)^2}=-\sqrt{a^2}=-a$

3 ㄱ. $x<-1$ 일 때,
$x-1<0$, $x+1<0$이므로
$A=-(x-1)-(x+1)=-2x$
ㄴ. $-1\le x<1$ 일 때,
$x-1<0$, $x+1\ge0$이므로
$A=-(x-1)+(x+1)=2$
ㄷ. $x\ge1$ 일 때, $x-1\ge0$, $x+1>0$이므로
$A=(x-1)+(x+1)=2x$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

4 $3-2\sqrt{2}=\sqrt{9}-\sqrt{8}>0$ 이므로
$\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}=3-2\sqrt{2}$
$3\sqrt{2}-5=\sqrt{18}-\sqrt{25}<0$ 이므로
$\sqrt{(3\sqrt{2}-5)^2}=5-3\sqrt{2}$
$\therefore \sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}+\sqrt{(3\sqrt{2}-5)^2}$
$=3-2\sqrt{2}+5-3\sqrt{2}$
$=8-5\sqrt{2}$

5 (1) $a<b$ 이므로 $a-b<0$
$\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|=-(a-b)=b-a$
$b<c$ 이므로 $b-c<0$
$\sqrt{(b-c)^2}=|b-c|=-(b-c)=c-b$
$a<c$ 이므로 $c-a>0$
$\sqrt{(c-a)^2}=|c-a|=c-a$
$\therefore \sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(b-c)^2}+\sqrt{(c-a)^2}$
$=(b-a)+(c-b)+(c-a)$
$=2c-2a$
(2) $ab<0$, $a>b$ 이면 $a>0$, $b<0$ 이므로 $b-a<0$
$|a|=a$, $\sqrt{(b-a)^2}=-(b-a)=a-b$,
$\sqrt{(-2b)^2}=-2b$, $\sqrt{(-a)^2}=-(-a)=a$
$\therefore$ (주어진 식)$=a+(a-b)+(-2b)+a$
$=3a-3b$

6 a, b가 모두 음이 아닌 정수이므로
(i) $\sqrt{a}+\sqrt{b}=0$ 인 경우 $a=b=0$
(ii) $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$ 인 경우
$a=1$, $b=0$ 또는 $a=0$, $b=1$
(iii) $\sqrt{a}+\sqrt{b}=2$ 인 경우
$a=1$, $b=1$ 또는 $a=0$, $b=4$ 또는 $a=4$, $b=0$
따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 1)$, $(0,\ 4)$, $(4,\ 0)$

7 $\sqrt{891-81a}=\sqrt{81(11-a)}=9\sqrt{11-a}$가 자연수이므로 $0<11-a<11$ 이고, $\sqrt{11-a}$는 자연수이므로 $11-a$는 11보다 작은 제곱수이어야 한다.
11보다 작은 제곱수는 1, 4, 9 이므로
$11-a=1,\ 4,\ 9$ $\quad\therefore a=2,\ 7,\ 10$
따라서 자연수 a 의 값의 합은
$2+7+10=19$

8 $\sqrt{384-12x}=\sqrt{12(32-x)}=2\sqrt{3(32-x)}$가 자연수이므로 $0<32-x<32$ 이고 $\sqrt{3(32-x)}$는 자연수이므로 $32-x=3\times($자연수$)^2$ 의 꼴이어야 한다.

즉, $32-x=3\times1^2$, 3×2^2, 3×3^2

$32-x=3$, 12, 27

$\therefore x=5$, 20, 29

따라서 자연수 x 의 값의 합은 $5+20+29=54$

9 $252=2^2\times3^2\times7=(2\times3)^2\times7$이고, 252는 x에 의해 약분되어 완전제곱수가 되어야 하므로 x의 값은 $7\times a^2$의 꼴이고 a의 값은 2×3의 약수이다.

$\therefore x=7$, 7×2^2, 7×3^2, $7\times2^2\times3^2$

따라서 가장 작은 자연수 x 의 값은 7 이다.

10 $21600=2^4\times3^2\times5^2\times6=(2^2\times3\times5)^2\times6$ 이고, 21600 은 x 에 의해 약분되어 완전제곱수가 되어야 하므로 x 의 값은 $6\times a^2$ 의 꼴이고, a 의 값은 $2^2\times3\times5$ 의 약수이다.

$2^2\times3\times5$ 의 약수의 개수는 $3\times2\times2=12$ (개)

따라서 정수 x 의 개수는 12 개이다.

11 ① $3-(\sqrt{3}+2)=1-\sqrt{3}<0$

$\therefore 3<\sqrt{3}+2$

② $\sqrt{2}-(\sqrt{4}-\sqrt{2})=2\sqrt{2}-2=\sqrt{8}-\sqrt{4}>0$

$\therefore \sqrt{2}>\sqrt{4}-\sqrt{2}$

③ $-\sqrt{0.8}-(-\sqrt{0.7})=-\sqrt{\dfrac{8}{10}}+\sqrt{\dfrac{7}{10}}$

$=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{8}}{\sqrt{10}}<0$

$\therefore -\sqrt{0.8}<-\sqrt{0.7}$

④ $(2\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2}-1)^2=12-(18-6\sqrt{2}+1)$

$=6\sqrt{2}-7$

$=\sqrt{72}-\sqrt{49}>0$

$\therefore 2\sqrt{3}>3\sqrt{2}-1$

⑤ $(5\sqrt{3})^2-(3\sqrt{5}+2)^2=75-(45+12\sqrt{5}+4)$

$=26-12\sqrt{5}$

$=\sqrt{676}-\sqrt{720}<0$

$\therefore 5\sqrt{3}<3\sqrt{5}+2$

따라서 대소 관계가 옳은 것은 ④, ⑤이다.

12 $A-B=(5\sqrt{2}-2)-5$

$=5\sqrt{2}-7$

$=\sqrt{50}-\sqrt{49}>0$

$\therefore A>B$

$B-C=5-(4\sqrt{3}-2)$

$=7-4\sqrt{3}$

$=\sqrt{49}-\sqrt{48}>0$

$\therefore B>C$

$\therefore A>B>C$

13 $A=3\sqrt{5}-2\sqrt{2}=\sqrt{45}-\sqrt{8}>0$

$B=2\sqrt{10}-3=\sqrt{40}-\sqrt{9}>0$

이므로

$A^2-B^2=(3\sqrt{5}-2\sqrt{2})^2-(2\sqrt{10}-3)^2$

$=(53-12\sqrt{10})-(49-12\sqrt{10})=4>0$

$\therefore A>B$

14 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로

$a^2=30+2\sqrt{209}$

$b^2=30+2\sqrt{200}$

$c^2=30+2\sqrt{216}$

따라서 $c^2>a^2>b^2$ 이므로

$c>a>b$

15 $0<a<1$ 이므로 $\sqrt{a}>a$, $a>a^2$

또한, $0<\sqrt{a}<1$ 이므로 $\sqrt{a}<\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}-a}{a\sqrt{a}}>0$ 이므로 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

$\therefore \dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{\sqrt{a}}>\sqrt{a}>a>a^2$

따라서 큰 순서대로 나열하면 $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$, $\sqrt{a}$, a, a^2이다.

다른 풀이

구체적인 예를 들어 $a=\dfrac{1}{100}$ 이라 하면

$\sqrt{a}=\dfrac{1}{10}$, $a^2=\dfrac{1}{10000}$, $\dfrac{1}{a}=100$, $\dfrac{1}{\sqrt{a}}=10$

$\therefore \dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{\sqrt{a}}>\sqrt{a}>a>a^2$

16 $\pi=3.14159\cdots$ (순환하지 않는 무한소수) : 무리수

$\sqrt{0.16}=0.4$: 유리수

$\sqrt{\dfrac{144}{9}}=\dfrac{12}{3}=4$: 유리수

$\sqrt{14.4}=\sqrt{144\times\dfrac{1}{10}}=12\sqrt{\dfrac{1}{10}}=12\dfrac{\sqrt{10}}{10}=\dfrac{6}{5}\sqrt{10}$

: 무리수

$2-\sqrt{6}$ =(유리수)−(무리수) : 무리수

따라서 무리수인 것은 π, $\sqrt{14.4}$, $2-\sqrt{6}$이다.

17 ② $\sqrt{4}=2$이므로 다에 속하지 않는다.

⑤ $\dfrac{2}{3}$는 다에 속하지 않고, 나에 속한다.

18 ㄱ. 무한소수는 순환소수(유리수)와 순환하지 않는 무한소수(무리수)로 나뉜다. (거짓)

ㄴ. 예 $4=3.\dot{9}$, $2.15=2.14\dot{9}$, $-8.37=-8.36\dot{9}$ (참)

ㄷ. 유리수 중 순환소수는 무한소수이다. (거짓)

ㄹ. $\sqrt{10000}=100$ 의 제곱근은 ±10 이다. (거짓)

ㅁ. 0 의 제곱근은 0 뿐이므로 1 개이다. (거짓)
ㅂ. $\sqrt{16}=4$ (거짓)
따라서 옳은 것의 개수는 ㄴ의 1 개이다.

19 $2<\sqrt{x}<4$ 에서 각 변을 제곱하면 $4<x<16$
$\sqrt{x}$가 무리수이므로 조건을 만족하는 자연수 x는 완전제곱수 9를 제외한 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15 이다.
따라서 자연수 x는 모두 10개이다.

20 □ABCD 의 한 변의 길이가 1 이므로 $\overline{AC}=\sqrt{2}$ 이다.
따라서 $\overline{AC}=\overline{AP}=\overline{AQ}=\sqrt{2}$ 이므로
$x=2-\sqrt{2},\ y=2+\sqrt{2}$
$\therefore y-x=2+\sqrt{2}-(2-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

21 □ABCD 의 한 변의 길이가 2 이므로
$\overline{BD}=\overline{BQ}=\overline{CA}=\overline{CP}=2\sqrt{2}$
$\therefore \overline{PQ}=\overline{PC}+\overline{CQ}$
$=\overline{PC}+(\overline{BQ}-\overline{BC})$
$=2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-2)$
$=4\sqrt{2}-2$

22 $\triangle APS\equiv\triangle BQP\equiv\triangle CRQ\equiv\triangle DSR$ (SAS 합동)
이므로 $\overline{SP}=\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RS}$ …… ㉠
또, $\triangle APS$와 $\triangle BQP$에서 $\angle ASP=\angle BPQ$ 이므로
$\angle BPQ+\angle APS=\angle ASP+\angle APS=90°$
$\therefore \angle SPQ=90°$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 □PQRS는 정사각형이므로
$\overline{PQ}=x$ 라 하면
□ABCD=□PQRS$+4\times\triangle APS$
$=x^2+4\times\left(\frac{1}{2}\times1\times2\right)=9$
$x^2=5 \quad \therefore x=\sqrt{5}\ (\because x>0)$

23 (1) $2\sqrt{3}=\sqrt{12}$ 에서 $3<\sqrt{12}<4$ 이므로
(정수 부분)=3
(소수 부분)$=2\sqrt{3}-3$
(2) $3\sqrt{2}=\sqrt{18},\ 4<\sqrt{18}<5$에서 $3<\sqrt{18}-1<4$이므로
(정수 부분)=3
(소수 부분)$=(3\sqrt{2}-1)-3=3\sqrt{2}-4$
(3) $3\sqrt{2}=\sqrt{18},\ 4<\sqrt{18}<5$에서 $2<\sqrt{18}-2<3$이므로
(정수 부분)=2
(소수 부분)$=(3\sqrt{2}-2)-2=3\sqrt{2}-4$

24 $1<\sqrt{3}<2$ 에서 $-2<-\sqrt{3}<-1,\ 2<4-\sqrt{3}<3$ 이므로
정수 부분은 2이고, 소수 부분 $a=(4-\sqrt{3})-2=2-\sqrt{3}$
$\therefore$ (주어진 식)$=(a-2)^2-1$
$=(-\sqrt{3})^2-1=2$

25 $\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$ 에서
$1<\sqrt{2}<2,\ 2<\sqrt{2}+1<3$이므로
$\alpha=2,\ \beta=(\sqrt{2}+1)-2=\sqrt{2}-1$
$\therefore \alpha-\beta=2-(\sqrt{2}-1)=3-\sqrt{2}$

26 $1<\sqrt{2}<2$ 에서 $-2<-\sqrt{2}<-1,\ 3<5-\sqrt{2}<4$ 이므로 $a=3,\ b=(5-\sqrt{2})-3=2-\sqrt{2}$
$\therefore \frac{1}{b+2}+\frac{1}{2a-b}=\frac{1}{4-\sqrt{2}}+\frac{1}{4+\sqrt{2}}$
$=\frac{4+\sqrt{2}+4-\sqrt{2}}{(4-\sqrt{2})(4+\sqrt{2})}=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$

27 $4\sqrt{2}=\sqrt{32}$ 에서 $5<\sqrt{32}<6$ 이므로 정수 부분은 5이고,
소수 부분 $a=4\sqrt{2}-5 \quad \therefore \sqrt{2}=\frac{a+5}{4}$
$\therefore \sqrt{18}-\sqrt{98}=3\sqrt{2}-7\sqrt{2}=-4\sqrt{2}$
$=-4\times\frac{a+5}{4}$
$=-a-5$

2 STEP 실력 높이기

본문 13~15쪽

1 ① **2** ④ **3** ② **4** 915개 **5** ⑤
6 a^2-ab **7** $-3a-1$ **8** ① **9** $\frac{2}{a}$
10 -197 **11** 3개
12 $x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5},\ y=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{5}$ **13** $6\sqrt{3}-7$
14 $4a-2$ **15** $\frac{-5-6\sqrt{5}}{5}$ **16** 5
17 $-20\sqrt{2}$

1 ㄱ. 4의 제곱근은 ±2이다. (거짓)
ㄴ. 0의 제곱근은 0이다. (거짓)
ㄷ. 0의 제곱근은 0 하나 뿐이고, $a<0$일 때, a의 제곱근은 실수의 범위에서 존재하지 않는다. (거짓)
ㅂ, ㅅ. -4의 제곱근은 실수의 범위에서 존재하지 않는다. (거짓)

ㅇ. $a>0$이면 a의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}$로 2개이다.(거짓)

ㅈ. $\sqrt{4}=2$이므로 제곱근은 $\pm\sqrt{2}$이다.(거짓)

ㅊ. $\sqrt{16}=4$(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄹ, ㅁ의 2개이다.

2 ①, ④ $a+b$, $a-b$는 항상 무리수이다.

②, ⑤ ab, $a\div b$는 $a=0$이면 유리수, $a\neq0$이면 무리수이다.

③ b^2은 $b=\pi$이면 무리수이다.

3 $100\le\sqrt{n}<1000$이므로 $10000\le n<1000000$

$\therefore$ 5자리 또는 6자리

4 (i) $\sqrt{n}$이 무리수이어야 하므로 $n\neq k^2$ (k는 자연수)

$\therefore k\neq1, 2, 3, \cdots, 31$

(ii) $\sqrt{2n}$이 무리수이어야 하므로 $n\neq2\times k^2$ (k는 자연수)

$\therefore k\neq1, 2, 3, \cdots, 22$

(iii) $\sqrt{3n}$이 무리수이어야 하므로 $n\neq3\times k^2$ (k는 자연수)

$\therefore k\neq1, 2, 3, \cdots, 18$

(iv) $\sqrt{5n}$이 무리수이어야 하므로 $n\neq5\times k^2$ (k는 자연수)

$\therefore k\neq1, 2, 3, \cdots, 14$

(i), (ii), (iii), (iv)에서 서로 공통인 경우가 없으므로

$$1000-(31+22+18+14)=1000-85=915(\text{개})$$

5 ② $\sqrt{3}-(4-\sqrt{3})=2\sqrt{3}-4=\sqrt{12}-\sqrt{16}<0$

$\therefore \sqrt{3}<4-\sqrt{3}$ (참)

⑤ $2\sqrt{2}-\sqrt{3}-(3\sqrt{3}-3\sqrt{2})=5\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

$=\sqrt{50}-\sqrt{48}>0$

$\therefore 2\sqrt{2}-\sqrt{3}>3\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

6 $|a|>|b|$이면 $a^2>b^2$이므로 $a^2-b^2>0$

$\therefore \sqrt{(a^2-b^2)^2}=a^2-b^2$

$a<0<b$이면 $a-b<0$

$\therefore \sqrt{(a-b)^2}=b-a$

$\therefore$ (주어진 식)$=(a^2-b^2)+b(b-a)$

$=a^2-ab$

7 $3(2-a)>5a+7$에서 $6-3a>5a+7$

$-8a>1$ $\quad\therefore a<-\dfrac{1}{8}$

$-2a>0$, $1-a>0$이고

$||a|-a|=|-a-a|=|-2a|=-2a$이므로

(주어진 식)$=-2a-(1-a)+(-2a)$

$=-3a-1$

8 ① $3-x>0$이므로 $\sqrt{(3-x)^2}=3-x$

② $x-3<0$이므로 $-\sqrt{(x-3)^2}=x-3$

③ $3+y>0$이므로 $\sqrt{(3+y)^2}=3+y$

④ $-y>0$이므로 $-\sqrt{(-y)^2}=-(-y)=y$

⑤ $y-3<0$이므로 $-\sqrt{(y-3)^2}=y-3$

이때 ①, ③은 양수, ②, ④, ⑤는 음수이고 $3-x>3+y$이므로 가장 큰 것은 ①이다.

9 $0<a<1$이므로 $\dfrac{1}{a}>1$ $\quad\therefore \dfrac{1}{a}>a$

$$\sqrt{x^2-4}=\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4}=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4-4}=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}-a$$

$\therefore$ (주어진 식)$=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)+\left(\dfrac{1}{a}-a\right)=\dfrac{2}{a}$

10 $\sqrt{1.0\dot{2}\times\dfrac{a}{b}}=\sqrt{\dfrac{92}{90}\times\dfrac{a}{b}}=\sqrt{\dfrac{46a}{45b}}$이므로

$\sqrt{\dfrac{46a}{45b}}=\dfrac{2}{9}$, $\dfrac{46a}{45b}=\dfrac{4}{81}$ $\quad\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{10}{207}$

그런데 10, 207은 서로소이므로 $a=10$, $b=207$

$\therefore a-b=-197$

11 $\sqrt{3x}$가 양의 정수이므로 $x=3\times k^2$ (k는 자연수)

그런데 $100\le x\le200$이므로 $k=6, 7, 8$

따라서 x는 $3\times6^2=108$, $3\times7^2=147$, $3\times8^2=192$로 3개이다.

12 (i) $\sqrt{2}x+\sqrt{3}y=1$의 양변에 $\sqrt{3}$을 곱하면

$\sqrt{6}x+3y=\sqrt{3}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\sqrt{3}x-\sqrt{2}y=1$의 양변에 $\sqrt{2}$를 곱하면

$\sqrt{6}x-2y=\sqrt{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠$-$㉡에서

$5y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ $\quad\therefore y=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{5}$

(ii) $\sqrt{2}x+\sqrt{3}y=1$의 양변에 $\sqrt{2}$를 곱하면

$2x+\sqrt{6}y=\sqrt{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

$\sqrt{3}x-\sqrt{2}y=1$의 양변에 $\sqrt{3}$을 곱하면

$3x-\sqrt{6}y=\sqrt{3}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

㉢$+$㉣에서

$5x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ $\quad\therefore x=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5}$

13 $1<\sqrt{3}<2$에서 $2<4-\sqrt{3}<3$

$\therefore a=2$, $b=(4-\sqrt{3})-2=2-\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{3}a-b^2&=2\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})^2\\&=2\sqrt{3}-7+4\sqrt{3}\\&=6\sqrt{3}-7\end{aligned}$$

14 $1<\sqrt{3}<2$ 이므로 $a=\sqrt{3}-1$

$\therefore \sqrt{3}=a+1$

$6<\sqrt{48}<7$ 에서 $\sqrt{48}$ 의 소수 부분은 $\sqrt{48}-6$ 이므로

$\sqrt{48}-6=4\sqrt{3}-6=4(a+1)-6=4a-2$

15 $2<\sqrt{5}<3$ 에서 $1<\sqrt{5}-1<2$ 이므로 $[a]=1$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{주어진 식})&=\frac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{5}-1}+\frac{1}{1-(\sqrt{5}-1)}\\&=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{2-\sqrt{5}}\\&=\frac{5-\sqrt{5}}{5}-(2+\sqrt{5})\\&=\frac{-5-6\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

16 $5<\sqrt{n}<7$ 에서 각 변을 제곱하면

$25<n<49$ 이고 n은 자연수 중 가장 큰 수이므로

$\sqrt{n}=\sqrt{48}$ 이다.

$6<\sqrt{48}<7$이므로 $p=6$, $q=\sqrt{48}-6=4\sqrt{3}-6$

따라서 $\frac{p}{q}=\frac{6}{4\sqrt{3}-6}=\frac{3}{2\sqrt{3}-3}=2\sqrt{3}+3$ 이므로

$a=2$, $b=3$

$\therefore a+b=5$

17 □ABED, □BCFE는 한 변의 길이가 1인 정사각형이므로 $\overline{BD}=\overline{BF}=\sqrt{2}$ 이다.

$\therefore a=5-\sqrt{2}$, $b=5+\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\therefore a^2-b^2&=(a+b)(a-b)\\&=10\times(-2\sqrt{2})\\&=-20\sqrt{2}\end{aligned}$$

3 STEP 최고 실력 완성하기

본문 16~18쪽

1 ⑤	**2** $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$	**3** bc	**4** 0
5 2	**6** $10-\sqrt{34}$	**7** 6	**8** 6자리
9 3	**10** $m=39$, $n=38$ 또는 $m=9$, $n=2$		
11 $\sqrt{2}$	**12** 풀이 참조		

1 $a=11, b=-11$ 이므로 $\sqrt{a-2b+3}=\sqrt{36}=6$

따라서 구하는 제곱근은 $\pm\sqrt{6}$ 이다.

2 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$, $\sqrt{a+b}>0$ 이므로 양변을 제곱하여 빼면

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2&=(a+b+2\sqrt{ab})-(a+b)\\&=2\sqrt{ab}>0\ (\because a>0,\ b>0)\end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$

3 (i) $a>0$ 일 때, $b<0$, $c<0$ 이므로 $bc>0$

$\therefore \sqrt{b^2c^2}=\sqrt{(bc)^2}=bc$

(ii) $a<0$ 일 때, $b>0$, $c>0$ 이므로 $bc>0$

$\therefore \sqrt{b^2c^2}=\sqrt{(bc)^2}=bc$

따라서 (i), (ii)에 의해 $\sqrt{b^2c^2}=bc$

4 $x<y$, $xy<0$ 이므로 $x<0$, $y>0$ 이다.

따라서 $(\sqrt{-x})^2=-x$, $\sqrt{(x-1)^2}=1-x$,

$\sqrt{(y-x)^2}=y-x$, $\sqrt{(1-x+y)^2}=1-x+y$ 이므로

(주어진 식)

$=-x-(1-x)-(y-x)+(1-x+y)$

$=-x-1+x-y+x+1-x+y=0$

5 $7<\sqrt{20x^2}<10$ 이므로 각 변을 제곱하여 정리하면

$49<20x^2<100$, $\frac{49}{20}(=2.45)<x^2<5$

x는 자연수이므로 $x^2=4$

$\therefore x=2$

6 $\sqrt{3\cdot 3}+\sqrt{4}=3+2=5$ 에서

$a=3$, $b=4$ 이므로 $\sqrt{2a^2+b^2}=\sqrt{34}$

그런데 $5<\sqrt{34}<6$ 이므로

$x=5$, $y=\sqrt{34}-5$

$\therefore x-y=5-(\sqrt{34}-5)=10-\sqrt{34}$

7 $54=2\times 3^3$ 이므로 $\sqrt{\frac{54}{n^3}}=\frac{3}{n}\sqrt{\frac{6}{n}}$ 이고 $\sqrt{\frac{6}{n}}$이 유리수가 되어야 하므로 $\frac{6}{n}$은 완전제곱수의 꼴이 되어야 한다.

따라서 $n=6\times k^2$(k는 자연수)의 꼴이므로 n의 최솟값은 6이다.

8
$$\begin{aligned}1\times2\times3\times\cdots\times10&=2^8\times3^4\times5^2\times7\\&=(2^4\times3^2\times5)^2\times7\\&=720^2\times7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore 125\sqrt{1\times2\times3\times\cdots\times10}&=125\times720\times\sqrt{7}\\&=90000\times\sqrt{7}\end{aligned}$$

그런데 $2<\sqrt{7}<3$ 이므로

$180000<90000\sqrt{7}<270000$

따라서 구하는 정수 부분의 자릿수는 6자리이다.

9 (가)에서 $nx=1, 2, 3, \cdots$

$\therefore x=\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots$

(나)에서 $3\le\sqrt{nx}<4$이므로 각 변을 제곱하면

$9\le nx<16$ $\quad\therefore \dfrac{9}{n}\le x<\dfrac{16}{n}$

따라서 (가), (나)를 동시에 만족하는 x의 값은

$\dfrac{9}{n}, \dfrac{10}{n}, \dfrac{11}{n}, \cdots, \dfrac{15}{n}$

이때 x의 값의 합이 28 이므로

$\dfrac{1}{n}(9+10+11+\cdots+15)=28$

$\dfrac{84}{n}=28$ $\quad\therefore n=3$

10 양변을 제곱하면 $n^2+77=m^2$ 이므로

$m^2-n^2=(m+n)(m-n)=77$

이때 $m,\ n$은 자연수이므로 $m+n>m-n$

따라서 $(m+n,\ m-n)=(77,\ 1), (11,\ 7)$이므로

$m=39,\ n=38$ 또는 $m=9,\ n=2$

12 자연수 : 정의된 수학적 개념이 없다.(대학 수학에서 페아노의 공리에 의해 설명할 수 있다.)

정수 : 자연수와 이들의 음수 및 0으로 이루어진 수

유리수 : m, n이 정수이고 $m\neq0$일 때, 분수 $\dfrac{n}{m}$의 꼴로 나타낼 수 있는 수

자연수, 정수, 유리수는 m, n이 정수일 때, 분수 $\dfrac{n}{m}$의 꼴로 나타낼 수 있지만 무리수는 나타낼 수 없다.

02 근호를 포함한 식의 계산

1 STEP 주제별 실력다지기 본문 20~25쪽

1 5 **2** $4\sqrt{6}$ **3** $\dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$

4 $\sqrt{21}+\sqrt{15}-\sqrt{14}-\sqrt{10}$ **5** 8 **6** -6

7 $\sqrt{6}$ **8** 7 **9** (1) 6 (2) $15\sqrt{2}$ (3) $\dfrac{23\sqrt{2}}{6}-2$

10 $13-9\sqrt{3}$ **11** $2\sqrt{3}+3$ **12** $\dfrac{a^2+2}{2a}$

13 (1) $34+24\sqrt{2}$ (2) $11-4\sqrt{6}$ (3) -1 (4) 2
(5) $9+4\sqrt{2}-2\sqrt{6}-4\sqrt{3}$ (6) $10+6\sqrt{3}$

14 $3+2\sqrt{2}$ **15** 24 **16** $-\sqrt{3}$ **17** 8

18 $\dfrac{2}{3}$ **19** $\dfrac{1}{3}$ **20** 5 **21** $a=1,\ b=-\dfrac{2}{3}$

22 $x=\dfrac{1}{9},\ y=-\dfrac{1}{9}$ **23** $x=-\dfrac{2}{3},\ y=\dfrac{1}{3}$ **24** ③

25 (1) 83.67 (2) 0.8367 (3) 52.92

26 ①, ③ **27** $\dfrac{1}{3}$ **28** 209 **29** 47.42

1 $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}\times\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{(3+2\sqrt{2})^2}{9-8}$

$=9+12\sqrt{2}+8$

$=17+12\sqrt{2}$

이므로 $a=17,\ b=12$

$\therefore a-b=17-12=5$

2 (주어진 식)$=5+2\sqrt{6}-\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}\times\dfrac{5-2\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}$

$=5+2\sqrt{6}-\dfrac{5-2\sqrt{6}}{25-24}$

$=5+2\sqrt{6}-5+2\sqrt{6}$

$=4\sqrt{6}$

3 (주어진 식)$=\dfrac{1}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-3}=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$

4 (주어진 식)

$=\dfrac{2}{(\sqrt{21}-\sqrt{10})-(\sqrt{15}-\sqrt{14})}\times\dfrac{(\sqrt{21}-\sqrt{10})+(\sqrt{15}-\sqrt{14})}{(\sqrt{21}-\sqrt{10})+(\sqrt{15}-\sqrt{14})}$

$=\dfrac{2(\sqrt{21}-\sqrt{10}+\sqrt{15}-\sqrt{14})}{(31-2\sqrt{210})-(29-2\sqrt{210})}$

$=\sqrt{21}+\sqrt{15}-\sqrt{14}-\sqrt{10}$

5 $\dfrac{y}{x-1}+\dfrac{x}{y-1}$

$=\dfrac{3-\sqrt{2}}{(3+\sqrt{2})-1}+\dfrac{3+\sqrt{2}}{(3-\sqrt{2})-1}$

$=\dfrac{3-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}+\dfrac{3+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

$=\dfrac{(3-\sqrt{2})(2-\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$

$=\dfrac{(8-5\sqrt{2})+(8+5\sqrt{2})}{2}$

$=8$

6 $x=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$,

$y=\dfrac{11}{2\sqrt{3}-1}=\dfrac{11(2\sqrt{3}+1)}{(2\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+1)}=2\sqrt{3}+1$ 이므로

$x^2-y^2=(2+\sqrt{3})^2-(2\sqrt{3}+1)^2$

$=7+4\sqrt{3}-(13+4\sqrt{3})$

$=-6$

7 $(\text{주어진 식})=\dfrac{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}}+\dfrac{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}}$

$$=\frac{1+x+1-x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\frac{2}{3}}}=\sqrt{6}$$

8 $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\cdot\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

$=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$\therefore$ (주어진 식)

$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{64}-\sqrt{63})$

$=\sqrt{64}-\sqrt{1}=7$

9 (1) (주어진 식)

$=2\sqrt{3}(5\sqrt{3}-6\sqrt{3}+4\sqrt{3})-2\sqrt{2}(4\sqrt{2}-6\sqrt{2}+5\sqrt{2})$

$=2\sqrt{3}\times3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}$

$=18-12=6$

(2) (주어진 식)

$=10\sqrt{3}-6\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{3}-2\sqrt{2}\right)+3\sqrt{2}$

$=10\sqrt{3}-10\sqrt{3}+12\sqrt{2}+3\sqrt{2}$

$=15\sqrt{2}$

(3) (주어진 식)

$=\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{3})+(1+\sqrt{2})-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

$=3\sqrt{2}-3+1+\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

$=\dfrac{23\sqrt{2}}{6}-2$

10 $B=\sqrt{3}(\sqrt{12}-1)=\sqrt{3}(2\sqrt{3}-1)=6-\sqrt{3}$

$C=\sqrt{18}+\sqrt{24}=3\sqrt{2}+2\sqrt{6}$ 이므로

$A+3B-\sqrt{2}C$

$=1-2\sqrt{3}+3(6-\sqrt{3})-\sqrt{2}(3\sqrt{2}+2\sqrt{6})$

$=1-2\sqrt{3}+18-3\sqrt{3}-6-4\sqrt{3}$

$=13-9\sqrt{3}$

11 $x\circ y=\sqrt{3}(2-\sqrt{3})-\sqrt{3}+2-\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}-3-\sqrt{3}+2-\sqrt{3}$

$=-1$

$\therefore (x\circ y)*y=(-1)*(2-\sqrt{3})$

$=\dfrac{2\times(-1)+2-\sqrt{3}}{-1\times(2-\sqrt{3})}$

$=\dfrac{-\sqrt{3}}{-2+\sqrt{3}}\times\dfrac{-2-\sqrt{3}}{-2-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}+3}{4-3}$

$=2\sqrt{3}+3$

12 $\sqrt{5}=a-\sqrt{7}$의 양변을 제곱하여 정리하면

$5=a^2-2\sqrt{7}a+7 \qquad \therefore a^2-2\sqrt{7}a+2=0$

따라서 $a^2+2=2\sqrt{7}a$ 이므로

$\sqrt{7}=\dfrac{a^2+2}{2a}$

13 (1) (주어진 식)$=16+24\sqrt{2}+18=34+24\sqrt{2}$

(2) (주어진 식)$=3-4\sqrt{6}+8=11-4\sqrt{6}$

(3) (주어진 식)$=24-25=-1$

(4) (주어진 식)$=3-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1=2$

(5) (주어진 식)$=4+2+3+2(2\sqrt{2}-\sqrt{6}-2\sqrt{3})$

$=9+4\sqrt{2}-2\sqrt{6}-4\sqrt{3}$

(6) (주어진 식)$=1+3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}=10+6\sqrt{3}$

14 $(1-\sqrt{2})^8(1+\sqrt{2})^{10}$

$=\{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})\}^8\times(1+\sqrt{2})^2$

$=(1-2)^8\times(1+\sqrt{2})^2$

$=1\times(1+2\sqrt{2}+2)$

$=3+2\sqrt{2}$

15 $(1-\sqrt{3}+\sqrt{2})^2(1+\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

$=\{(1-\sqrt{3}+\sqrt{2})(1+\sqrt{3}-\sqrt{2})\}^2$

$=[\{1-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\}\{1+(\sqrt{3}-\sqrt{2})\}]^2$

$=\{1^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2\}^2$

$=(-4+2\sqrt{6})^2$

$=16-16\sqrt{6}+24$

$=40-16\sqrt{6}$

이므로 $a=40$, $b=-16$

$\therefore a+b=40-16=24$

16 $x^2-3x-1=(\sqrt{3}+1)^2-3(\sqrt{3}+1)-1$

$=4+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}-3-1$

$=-\sqrt{3}$

다른 풀이

$x-1=\sqrt{3}$의 양변을 제곱하면

$(x-1)^2=(\sqrt{3})^2$, $x^2-2x+1=3$

$x^2-2x-2=0$

$\therefore x^2-3x-1=(x^2-2x-2)-x+1$

$=-x+1$

$=-(\sqrt{3}+1)+1=-\sqrt{3}$

17 $2<\sqrt{5}<3$에서 $\sqrt{5}$의 정수 부분은 2이므로 $x=\sqrt{5}-2$

x^2+4x에 대입하면

$x^2+4x=(\sqrt{5}-2)^2+4(\sqrt{5}-2)$

$=9-4\sqrt{5}+4\sqrt{5}-8=1$

$\therefore (x^2+4x-3)(x^2+4x-5)=(1-3)\times(1-5)=8$

다른 풀이

$x=\sqrt{5}-2$ 이므로 $x+2=\sqrt{5}$의 양변을 제곱하면

$(x+2)^2=(\sqrt{5})^2$, $x^2+4x+4=5$, $x^2+4x=1$

$\therefore (x^2+4x-3)(x^2+4x-5)=(1-3)\times(1-5)=8$

18 $(2+x\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=6-2x+(3x-2)\sqrt{2}$

가 유리수이므로 $3x-2=0$ $\quad\therefore x=\frac{2}{3}$

19 $\frac{a+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+1}=\frac{a+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+1}\cdot\frac{3\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}-1}$

$=\frac{6-a+(3a-1)\sqrt{2}}{17}$

가 유리수이므로 $3a-1=0$ $\quad\therefore a=\frac{1}{3}$

20 $\frac{2\sqrt{2}+a-5}{a\sqrt{2}-3}=\frac{2\sqrt{2}+a-5}{a\sqrt{2}-3}\cdot\frac{a\sqrt{2}+3}{a\sqrt{2}+3}$

$=\frac{7a-15+(a^2-5a+6)\sqrt{2}}{2a^2-9}$

가 유리수이므로 $a^2-5a+6=0$ 에서

$(a-2)(a-3)=0$ $\quad\therefore a=2$ 또는 $a=3$

따라서 a 의 값의 합은 $2+3=5$

21 $(3-\sqrt{3})(2a-b\sqrt{3})=4$ 를 전개하여 정리하면

$(6a+3b)-(2a+3b)\sqrt{3}=4$

$\therefore 6a+3b=4,\ 2a+3b=0$

두 식을 연립해서 풀면

$a=1,\ b=-\frac{2}{3}$

22 $1<\sqrt{3}<2$이므로

$a=\sqrt{3}-1,\ b=\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

a, b의 값을 주어진 식에 대입하면

$(\sqrt{3}-2)x+(\sqrt{3}+7)y+1=0$

$(-2x+7y+1)+(x+y)\sqrt{3}=0$

$\therefore -2x+7y+1=0,\ x+y=0$

두 식을 연립해서 풀면

$x=\frac{1}{9},\ y=-\frac{1}{9}$

23 $x \circledcirc 2y=\sqrt{2}x-2y$ 이므로

$(\sqrt{2}x-2y)\circledcirc y+1=\sqrt{2}x-2y$

$\sqrt{2}(\sqrt{2}x-2y)-y+1=\sqrt{2}x-2y$

$2x-2\sqrt{2}y-y+1=\sqrt{2}x-2y$

$(2x+y+1)-(x+2y)\sqrt{2}=0$

$\therefore 2x+y+1=0,\ x+2y=0$

두 식을 연립해서 풀면

$x=-\frac{2}{3},\ y=\frac{1}{3}$

24 ① $\sqrt{0.5}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1.414}{2}$

② $\sqrt{0.02}=\sqrt{\frac{2}{100}}=\frac{\sqrt{2}}{10}=\frac{1.414}{10}$

③ $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

④ $\sqrt{32}=4\sqrt{2}=4\times1.414$

⑤ $\sqrt{200}=10\sqrt{2}=10\times1.414$

따라서 그 값을 구할 수 없는 것은 ③이다.

25 (1) $\sqrt{7000}=10\sqrt{70}=10\times8.367=83.67$

(2) $\sqrt{0.7}=\sqrt{\frac{7}{10}}=\sqrt{\frac{70}{100}}=\frac{\sqrt{70}}{10}=\frac{8.367}{10}=0.8367$

(3) $\sqrt{2800}=20\sqrt{7}=20\times2.646=52.92$

26 ① $\sqrt{196}=\sqrt{1.96\times100}=\sqrt{1.4^2\times10^2}=1.4\times10=14$

② $\sqrt{19.6}=\sqrt{1.96\times10}=\sqrt{1.4^2\times10}=1.4\sqrt{10}$

③ $\sqrt{0.0196}=\sqrt{\frac{1.96}{100}}=\sqrt{\frac{1.4^2}{10^2}}=\frac{1.4}{10}=0.14$

④ $\sqrt{14}=\sqrt{1.4\times10}$

⑤ $\sqrt{140}=\sqrt{1.4\times10^2}=10\sqrt{1.4}$

따라서 그 값을 구할 수 있는 것은 ①, ③이다.

27 (주어진 식) $=\frac{\sqrt{3^{26}+3^{16}}}{\sqrt{3^{18}+3^{28}}}$

$=\frac{\sqrt{3^{16}(3^{10}+1)}}{\sqrt{3^{18}(1+3^{10})}}$

$=\sqrt{\frac{1}{3^2}}=\frac{1}{3}$

28 $13=x$ 라 하면

(주어진 식) $=\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}$

$=\sqrt{(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1}$

$x^2+3x=t$ 라 하면

(주어진 식) $=\sqrt{t(t+2)+1}$

$=\sqrt{(t+1)^2}$

$=t+1\ (\because t>0)$

$=x^2+3x+1$

$=13^2+3\cdot13+1$

$=209$

29 $\sqrt{2248}=2\sqrt{562}$

$=2\sqrt{5.62\times100}$

$=20\sqrt{5.62}=20\times2.371=47.42$

2 STEP 실력 높이기

본문 26~28쪽

1 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$	**2** 1	**3** 2	
4 $7-4\sqrt{3}\le x\le7+4\sqrt{3}$		**5** 11개	**6** 2
7 6	**8** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$	**9** 155	**10** 8
11 $0,\ -1,\ \pm\sqrt{2}$	**12** $4+3\sqrt{2}$		**13** -32
14 $0<x\le\sqrt{2}$ 또는 $x=-\sqrt{2}$		**15** 6	
16 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$	**17** ③		

1 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

$$=\frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})+(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2}\times\frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})-(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2}$$

$=1\times(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$=\sqrt{2}+\sqrt{3}$

2 (주어진 식)$=\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-(\sqrt{2}+1)}}$

$=\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$

$=\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)=1$

3 $\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$

$=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$\therefore$ (주어진 식)$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{50}-\sqrt{49})$

$=\sqrt{50}-1$

$7<\sqrt{50}<8$에서 $6<\sqrt{50}-1<7$이므로

$a=(\sqrt{50}-1)-6=5\sqrt{2}-7$

$a+7=5\sqrt{2}$의 양변을 제곱하면

$a^2+14a+49=50$이므로

$a^2+14a=1$

$\therefore a^2+14a+1=1+1=2$

4 주어진 식을 정리하면

$\begin{cases}(2-\sqrt{3})x\le2+\sqrt{3} & \cdots\cdots ㉠\\ (2+\sqrt{3})x\ge2-\sqrt{3} & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

따라서 ㉠의 양변에 $2+\sqrt{3}$, ㉡의 양변에 $2-\sqrt{3}$을 각각 곱하여 정리하면

$\begin{cases}x\le7+4\sqrt{3}\\ x\ge7-4\sqrt{3}\end{cases}$

$\therefore 7-4\sqrt{3}\le x\le7+4\sqrt{3}$

5 $3\le\dfrac{\sqrt{n}+3}{\sqrt{n}-3}<4$이므로 각 변에 $\sqrt{n}-3$을 곱하여 정리하면

$3\sqrt{n}-9\le\sqrt{n}+3<4\sqrt{n}-12$ ($\because \sqrt{n}-3>0$)

위의 연립부등식을 풀면

$5<\sqrt{n}\le6$

$\therefore 25<n\le36$

따라서 n은 자연수이므로 $n=26,\ 27,\ \cdots,\ 36$의 11개이다.

6 전체 식을 t로 놓으면

$\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\cdots}}}}=t$ ($t>0$)

$\sqrt{6-t}=t$

양변을 제곱하여 정리하면

$t^2+t-6=0,\ (t+3)(t-2)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t>0$)

7 $4<\sqrt{x^2+y^2}<5$에서 $16<x^2+y^2<25$이므로

$(x,\ y)$는 $(1,\ 4),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 1),\ (4,\ 2)$이다.

따라서 $x+y$의 값은 5 또는 6이므로 최댓값은 6이다.

8 $x_1=2\sqrt{2}$에서 $y_1=2\sqrt{2}-2$

$x_2=\dfrac{1}{y_1}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}-2}=\dfrac{2\sqrt{2}+2}{4}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$에서

$y_2=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}-1=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

$x_3=\dfrac{1}{y_2}=\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}=2(\sqrt{2}+1)$에서

$y_3=2(\sqrt{2}+1)-4=2\sqrt{2}-2,\ \cdots$

따라서 $y_1=y_3=y_5=\cdots=2\sqrt{2}-2$,

$y_2=y_4=y_6=\cdots=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$이므로

$y_{2002}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

9 $f(n)=(\sqrt{n}$ 이하의 자연수의 개수)이므로

(i) $1\le n<4$일 때, $f(n)=1$

$f(1)=f(2)=f(3)=1$

(ii) $4\le n<9$일 때, $f(n)=2$

$f(4)=f(5)=\cdots=f(8)=2$

(iii) $9\le n<16$일 때, $f(n)=3$

$f(9)=f(10)=\cdots=f(15)=3$

(iv) $16\le n<25$일 때, $f(n)=4$

$f(16)=f(17)=\cdots=f(24)=4$

(v) $25\le n<36$ 일 때, $f(n)=5$

$f(25)=f(26)=\cdots=f(35)=5$

(vi) $36\le n\le 40$ 일 때, $f(n)=6$

$f(36)=f(37)=\cdots=f(40)=6$

$\therefore f(1)+f(2)+\cdots+f(40)$

$=1\times3+2\times5+3\times7+4\times9+5\times11+6\times5$

$=155$

10 $x=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{8+2\sqrt{15}}{2}=4+\sqrt{15}$

이므로 $x-4=\sqrt{15}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-8x+1=0 \qquad \therefore x^2-8x=-1$

$\therefore$ (주어진 식)$=(-1+4)\times(4+1)-7=8$

11 $\sqrt{a}$가 실수가 될 조건은 $a\ge0$이므로 주어진 식의 값이 실수가 되려면 $-x^2(x+1)^2|2-x^2|\ge0$에서

$x^2(x+1)^2|2-x^2|\le0$

완전제곱식과 절댓값은 음수가 될 수 없으므로

$x^2(x+1)^2|2-x^2|=0$

즉, $x^2=0$ 또는 $(x+1)^2=0$ 또는 $|2-x^2|=0$이므로

$x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$

따라서 실수 x의 값을 모두 구하면 0, -1, $\pm\sqrt{2}$이다.

12 $1<\sqrt{2}<2$에서 $2<\sqrt{2}+1<3$이므로 $[x]=2$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{2}{(\sqrt{2}+1)-2}+\dfrac{2(\sqrt{2}+1)+2}{2}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}+2$

$=2(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}+2$

$=4+3\sqrt{2}$

13 $(\sqrt{5}-\sqrt{7})^3=m$, $(\sqrt{5}+\sqrt{7})^3=n$이라 하면

(주어진 식)$=(m+n)^2-(m-n)^2$

$=(m^2+2mn+n^2)-(m^2-2mn+n^2)$

$=4mn$

$=4(\sqrt{5}-\sqrt{7})^3(\sqrt{5}+\sqrt{7})^3$

$=4\{(\sqrt{5}-\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{7})\}^3$

$=4\cdot(-2)^3=-32$

14 $2-x^2\ge0$이므로 $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$ (단, $x\ne0$)

(i) $0<x\le\sqrt{2}$ 일 때,

$\sqrt{2-x^2}=\sqrt{x^2\left(\dfrac{2}{x^2}-1\right)}=\sqrt{2-x^2}$

이므로 항상 성립한다.

$\therefore 0<x\le\sqrt{2}$

(ii) $-\sqrt{2}\le x<0$ 일 때,

$\sqrt{2-x^2}=-\sqrt{x^2\left(\dfrac{2}{x^2}-1\right)}=-\sqrt{2-x^2}$이므로

$2\sqrt{2-x^2}=0$, $x^2=2$

$\therefore x=-\sqrt{2}$ ($\because -\sqrt{2}\le x<0$)

(i), (ii)에서 $0<x\le\sqrt{2}$ 또는 $x=-\sqrt{2}$

15 $(2+3\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})=(2x-12)+(3x-4)\sqrt{2}$

가 유리수이므로

$3x-4=0 \qquad \therefore x=\dfrac{4}{3}$

$\therefore a=1,\ b=\dfrac{1}{3}$

따라서 $m+n\sqrt{\dfrac{1}{3}}=m+\dfrac{n\sqrt{3}}{3}=3+\sqrt{3}$이므로

$m=3,\ n=3 \qquad \therefore m+n=3+3=6$

16 $x+y=\sqrt{6}$, $x-y=\sqrt{2}$, $xy=1$이므로

$\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$=\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$

$=\dfrac{\sqrt{6}+2\cdot1}{\sqrt{2}}$

$=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

17 ① $\sqrt{3610}=\sqrt{361\times10}=\sqrt{19^2\times10}=19\sqrt{10}$

: 알 수 없다.

② $\sqrt{36.1}=\sqrt{\dfrac{361}{10}}=\sqrt{\dfrac{19^2}{10}}=\dfrac{19}{\sqrt{10}}$

: 알 수 없다.

③ $\sqrt{3.61}=\sqrt{\dfrac{361}{100}}=\sqrt{\dfrac{19^2}{10^2}}=\dfrac{19}{10}=1.9$

④ $\sqrt{19}$: 알 수 없다.

⑤ $\sqrt{190}=\sqrt{19\times10}$: 알 수 없다.

3 STEP 최고 실력 완성하기

본문 29~30쪽

1 3	**2** 2	**3** $x=1$	**4** ㄹ, ㅁ	**5** -10
6 4	**7** $9\sqrt{6}-18$		**8** $5\sqrt{3}$	**9** 60

10 $x=\dfrac{3+\sqrt{11}}{2}$, $y=\dfrac{-3+\sqrt{11}}{2}$

1 $x=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots}}}$에서 양변을 제곱하면

$x^2=3+\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots}}$이므로

$x^2=3+x \qquad \therefore x^2-x=3$

2 $x^2+y^2=1$ 이므로

$1+xy=x^2+xy+y^2$

$=\left(x^2+xy+\frac{1}{4}y^2\right)+\frac{3}{4}y^2$

$=\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2\geq 0$

$\therefore \sqrt{(1+xy)^2}=1+xy$

$1-xy=x^2-xy+y^2$

$=\left(x^2-xy+\frac{1}{4}y^2\right)+\frac{3}{4}y^2$

$=\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2\geq 0$

$\therefore \sqrt{(1-xy)^2}=1-xy$

$\therefore$ (주어진 식)$=(1+xy)+(1-xy)=2$

3 주어진 식을 정리하면

$\begin{cases}(2-\sqrt{3})x\geq 2-\sqrt{3} & \therefore x\geq 1\ (\because 2-\sqrt{3}>0)\\(2-\sqrt{3})x\leq 2-\sqrt{3} & \therefore x\leq 1\ (\because 2-\sqrt{3}>0)\end{cases}$

$\therefore x=1$

4 무리수가 되지 않는 예를 찾는다.

ㄱ. $a=2,\ b=-\sqrt{2}$ 일 때, $\sqrt{a}+b=0$이므로 유리수이다.

ㄴ. $a=2,\ b=\sqrt{2}$ 일 때, $b-\sqrt{a}=0$이므로 유리수이다.

ㄷ. $a=-2,\ b=\sqrt{2}$ 일 때, $a+b^2=0$이므로 유리수이다.

ㄹ, ㅁ. 항상 무리수이다.

ㅂ. $a=0$ 일 때, $\frac{a}{b}=0$이므로 유리수이다.

ㅅ. $a=0$ 일 때, $a\sqrt{b}=0$이므로 유리수이다.

ㅇ. $a=0$ 일 때, $b\sqrt{a}=0$이므로 유리수이다.

따라서 항상 무리수인 것은 ㄹ, ㅁ이다.

5 $a<0,\ b<0$ 이므로

$a\sqrt{\frac{b}{a}}=-\sqrt{a^2\cdot\frac{b}{a}}=-\sqrt{ab}$

$b\sqrt{\frac{a}{b}}=-\sqrt{b^2\cdot\frac{a}{b}}=-\sqrt{ab}$

$\therefore$ (주어진 식)$=-2\sqrt{ab}=-10$

6 $\sqrt{2}$ 의 값은 1.414이므로

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$

$=2-\sqrt{2}=2-1.414=0.586$

$\therefore \left\langle\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\right\rangle=1$

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$

$=2+\sqrt{2}=2+1.414=3.414$

$\therefore \left\langle\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right\rangle=3$

$\therefore$ (주어진 식)$=1+3=4$

7 $2<\sqrt{6}<3$ 이므로 $x_1=\sqrt{6}-2$

$\therefore x_2=\frac{1}{\sqrt{6}-2}-\left[\frac{1}{\sqrt{6}-2}\right]$

$=\frac{\sqrt{6}+2}{2}-\left[\frac{\sqrt{6}+2}{2}\right]$

$=\frac{\sqrt{6}+2}{2}-2=\frac{\sqrt{6}-2}{2}$

같은 방법으로

$x_3=\frac{2}{\sqrt{6}-2}-\left[\frac{2}{\sqrt{6}-2}\right]$

$=\sqrt{6}+2-[\sqrt{6}+2]$

$=\sqrt{6}+2-4=\sqrt{6}-2$

즉, $x_1=x_3=x_5=\cdots=x_{11}=\sqrt{6}-2$,

$x_2=x_4=x_6=\cdots=x_{12}=\frac{\sqrt{6}-2}{2}$

$\therefore$ (주어진 식)

$=(x_1+x_3+\cdots+x_{11})+(x_2+x_4+\cdots+x_{12})$

$=6(\sqrt{6}-2)+6\cdot\frac{\sqrt{6}-2}{2}$

$=9\sqrt{6}-18$

8 $x=\sqrt{3}-1$ 에서 $x+1=\sqrt{3}$ 이므로 양변을 제곱하면

$(x+1)^2=3,\ x^2+2x-2=0$

$\therefore x^2+2x=2$

$\therefore$ (주어진 식)$=x(x^2+2x)+3x+5$

$=5x+5$

$=5(\sqrt{3}-1)+5=5\sqrt{3}$

9 $1.5^2=2.25$, 즉 $\sqrt{2.25}=1.5$ 이므로

$n<2.25$ 인 자연수 n 에 대하여 $f(n)=1$ 이다.

$\therefore f(1)=f(2)=1$

$2.5^2=6.25$, 즉 $\sqrt{6.25}=2.5$ 이므로

$2.25\leq n<6.25$ 인 자연수 n 에 대하여 $f(n)=2$ 이다.

$\therefore f(3)=f(4)=f(5)=f(6)=2$

$3.5^2=12.25$ 에서 $6.25\leq n<12.25$ 인 자연수 n 에 대하여 $f(n)=3$ 이고, $4.5^2=20.25$ 에서

$12.25\leq n<20.25$ 인 자연수 n 에 대하여 $f(n)=4$이다.

$\therefore f(7)=f(8)=\cdots=f(12)=3$

$f(13)=f(14)=\cdots=f(20)=4$

$\therefore f(1)+f(2)+\cdots+f(20)$

$=1\times 2+2\times 4+3\times 6+4\times 8=60$

10 $x=n+y$ (n 은 음이 아닌 정수, $0\leq y<1$)로 놓으면

$0\leq y^2<1$ 이므로 $x^2+y^2=10$ 에서

$0\leq 10-x^2<1,\ 9<x^2\leq 10$

$9<(n+y)^2\leq 10$

$\therefore 3<n+y\leq\sqrt{10}$

따라서 $n=3$ 일 때만 성립하므로

$x=3+y$ ⋯⋯ ㉠

$x^2+y^2=10$ 에 ㉠을 대입하면

$(3+y)^2+y^2=10,\ 2y^2+6y-1=0$

$\therefore y=\dfrac{-3+\sqrt{11}}{2}$ ($\because 0\leq y<1$)

$\therefore x=3+\dfrac{-3+\sqrt{11}}{2}=\dfrac{3+\sqrt{11}}{2}$

Ⅰ 단원 종합 문제

본문 31~34쪽

1 ①, ⑤	**2** 4자리	**3** 1	**4** ⑤	
5 $4-\sqrt{2}$	**6** $\dfrac{2}{a}$	**7** $7-2a$	**8** 14	**9** ⑤
10 $a>c>b$		**11** ④	**12** 6	**13** 22개
14 -3	**15** $\dfrac{5\sqrt{5}+6}{2}$		**16** 30	**17** ⑤
18 17.89	**19** $a=3,\ b=-1$		**20** ④	**21** 3
22 14개	**23** $2x$	**24** 2	**25** $5\sqrt{5}+\sqrt{3}$	

1 ① $\sqrt{4}=2$ 이므로 제곱근은 $\pm\sqrt{2}$ 이다. (거짓)

② $\sqrt{4}=2$ 이므로 $\sqrt{2}$ 는 $\sqrt{4}$ 의 제곱근이다. (참)

③ $2-\sqrt{3}>0$ 이므로 제곱근은 2개이다. (참)

④ $\sqrt{\sqrt{81}}=\sqrt{9}=3$ 이므로 제곱근은 $\pm\sqrt{3}$ 이다. (참)

⑤ 0의 제곱근은 1개, 음의 정수의 제곱근은 실수의 범위에서는 없다. (거짓)

따라서 옳지 않은 것은 ①, ⑤이다.

2 $10^7\leq x<10^8$ 이므로 $1000\sqrt{10}\leq\sqrt{x}<10000$

따라서 $\sqrt{x}$ 의 정수 부분의 자릿수는 4자리이다.

3 $4<\sqrt{19}<5$ 에서 $a=\sqrt{19}-4$ 이므로 $1-a=5-\sqrt{19}>0$

$\therefore a+\sqrt{(1-a)^2}=(\sqrt{19}-4)+(5-\sqrt{19})=1$

4

$a>1$	$0<a<1$	$-1<a<0$	$a<-1$
$a>\sqrt{a}$	$a<\sqrt{a}$		
$a>\dfrac{1}{a}$	$a<\dfrac{1}{a}$	$a>\dfrac{1}{a}$	$a<\dfrac{1}{a}$
$a<a^2<a^3<\cdots$	$a>a^2>a^3>\cdots$	$a<a^3<a^5<\cdots$	$a>a^3>a^5>\cdots$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

5 $10-\sqrt{2}>0,\ \sqrt{8}-3<0$ 이므로

(주어진 식)

$=(10-\sqrt{2})-(3-\sqrt{8})+\dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}$

$=10-\sqrt{2}-3+2\sqrt{2}-3-2\sqrt{2}=4-\sqrt{2}$

6 $0<a<1$ 이면 $a<\dfrac{1}{a}$ 이므로 $\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2}=\dfrac{1}{a}-a$

$\therefore$ (주어진 식)$=\left(\dfrac{1}{a}-a\right)+\left(a+\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{2}{a}$

7 $\sqrt{x}=2-a$ 의 양변을 제곱하면 $x=a^2-4a+4$

$\sqrt{x}=2-a\geq0$ 에서 $a\leq2$

$\therefore$ (주어진 식)$=\sqrt{a^2-6a+9}+\sqrt{a^2-8a+16}$

$=\sqrt{(a-3)^2}+\sqrt{(a-4)^2}$

$=(3-a)+(4-a)=7-2a$

8 $\sqrt{144-18n}=\sqrt{18(8-n)}=\sqrt{2\cdot3^2(8-n)}=3\sqrt{2(8-n)}$

이 정수가 되려면 $0\leq8-n<8$이고 $2(8-n)$이 0 또는 완전제곱의 형태가 되어야 하므로

$8-n=0,\ 2$ $\quad\therefore n=8,\ 6$

따라서 자연수 n 의 값의 합은 $8+6=14$

9 ① $a=-2, b=0$ 일 때, $a+b\sqrt{3}=-2$

② $a=b=0$ 일 때, $a+b\sqrt{3}=0$

③ $a=4,\ b=2$ 일 때, $a+b\sqrt{3}=4+2\sqrt{3}=4+\sqrt{12}$

④ $a=0,\ b=\dfrac{1}{3}$ 일 때,

$a+b\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

⑤ $2-\sqrt{\dfrac{3}{2}}=2-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{3}$

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 는 유리수가 아니므로 $2-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ 은 x의 값이 될 수 없다.

10 $a-b=(3\sqrt{2}+1)-(2\sqrt{3}+1)=\sqrt{18}-\sqrt{12}>0$

$\therefore a>b$

$b-c=(2\sqrt{3}+1)-5=2\sqrt{3}-4=\sqrt{12}-\sqrt{16}<0$

$\therefore b<c$

$a-c=(3\sqrt{2}+1)-5=3\sqrt{2}-4=\sqrt{18}-\sqrt{16}>0$

$\therefore a>c$

따라서 $a>c>b$ 이다.

11 ① $a=1,\ b=\sqrt{2}$ 일 때, $a^2+b=1+\sqrt{2}$ 이므로 유리수가 아니다.

② $a=1,\ b=3+\sqrt{2}$ 일 때, $a^2b^2=11+6\sqrt{2}$ 이므로 유리수가 아니다.

③ $b=\sqrt{2}-1$ 일 때, $b^2=3-2\sqrt{2}$ 이므로 유리수가 아니다.

⑤ $a=0,\ b=\sqrt{2}$ 일 때, $a\div b=\dfrac{a}{b}=\dfrac{0}{\sqrt{2}}=0$ 이므로 무리수가 아니다.

12 $\dfrac{y}{x-2}+\dfrac{x}{y-2}$

$=\dfrac{5-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\dfrac{5+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{(5-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+(5+\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}$

$=\dfrac{18-8\sqrt{3}+18+8\sqrt{3}}{6}=\dfrac{36}{6}=6$

13 $2<\sqrt{2x+3}<7$의 각 변을 제곱하면

$4<2x+3<49 \qquad \therefore \dfrac{1}{2}<x<23$

그런데 x는 자연수이므로

$x=1,\ 2,\ \cdots,\ 22$의 22 개이다.

14 (주어진 식)$=4\sqrt{3}-5-3\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})=-3$

15 $4<\sqrt{20}<5$이므로 $a=4,\ b=\sqrt{20}-4=2\sqrt{5}-4$

$\therefore \dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{2\sqrt{5}-4}{4}+\dfrac{4}{2\sqrt{5}-4}$

$=\dfrac{\sqrt{5}-2}{2}+\dfrac{4(2\sqrt{5}+4)}{(2\sqrt{5}-4)(2\sqrt{5}+4)}$

$=\dfrac{\sqrt{5}-2}{2}+2\sqrt{5}+4=\dfrac{5\sqrt{5}+6}{2}$

16 $\sqrt{40\times a}=2\sqrt{10\times a}=b$이므로

$a=10,\ 10\times 2^2,\ 10\times 3^2,\ 10\times 4^2,\ \cdots$

즉, $(a,\ b)=(10,\ 20),\ (40,\ 40),\ (90,\ 60),\ \cdots$

따라서 $a+b$의 최솟값은 $10+20=30$

다른 풀이

$a=10k^2$(k는 자연수)의 꼴이고 $b=20k$이다.

이때 $a,\ b$는 자연수이므로 $k=1$일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 $a=10,\ b=20$이므로 $a+b$의 최솟값은

$10+20=30$

17 주어진 식의 각 변을 제곱하면 $4<|x-5|<9$이므로

$4<x-5<9$ 또는 $-9<x-5<-4$

$\therefore 9<x<14$ 또는 $-4<x<1$

그런데 x는 정수이므로

$x=10,\ 11,\ 12,\ 13,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0$

따라서 구하는 x의 값의 합은

$10+11+12+13-3-2-1=40$

18 $\sqrt{320}=\sqrt{3.2\times 10^2}=10\sqrt{3.2}$

$=10\times 1.789=17.89$

19 $(a+\sqrt{2})+(3+b\sqrt{2})=(a+3)+(b+1)\sqrt{2}$

가 유리수가 되려면

$b+1=0 \qquad \therefore b=-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$(a+\sqrt{2})(3+b\sqrt{2})=(3a+2b)+(ab+3)\sqrt{2}$

가 유리수가 되려면

$ab+3=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-a+3=0 \qquad \therefore a=3$

20 $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이고, 점 A에 대응하는 수가 2 이므로 점 P에 대응하는 수는 $2-\sqrt{5}$이다.

21 $\sqrt{2a}=a$의 양변을 제곱하면

$2a=a^2 \qquad \therefore a=2\ (\because a\neq 0)$

$c=a+\dfrac{b}{a+b}=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

$=2+\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$

$=-1+2\sqrt{3}$

$\therefore a+2b-c=2+2\sqrt{3}-(-1+2\sqrt{3})=3$

22 $3\le\sqrt{a}<4$에서 $9\le a<16$이므로

$9\le 33-|x|<16$

$\therefore 17<|x|\le 24$

따라서 $17<x\le 24$ 또는 $-24\le x<-17$이므로

$x=\pm18,\ \pm19,\ \pm20,\ \pm21,\ \pm22,\ \pm23,\ \pm24$

의 14 개이다.

23 (ⅰ) $x\ge 0$일 때, $\sqrt{x^2}=x$이므로

(주어진 식)$=\sqrt{(x+x)^2}-\sqrt{(x-x)^2}$

$=\sqrt{(2x)^2}=2x$

(ⅱ) $x<0$일 때, $\sqrt{x^2}=-x$이므로

(주어진 식)$=\sqrt{(x-x)^2}-\sqrt{(x+x)^2}$

$=-\sqrt{(2x)^2}=-(-2x)=2x$

(ⅰ), (ⅱ)에서 (주어진 식)$=2x$

24 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{1}{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}\cdot\dfrac{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}$

$=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+2+\sqrt{6}}{4}$

$\dfrac{1}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{(1-\sqrt{2})+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{(1-\sqrt{2})-\sqrt{3}}{(1-\sqrt{2})-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-2\sqrt{2}}=\dfrac{-\sqrt{2}+2+\sqrt{6}}{4}$

$\therefore$ (주어진 식)$=\left[\dfrac{\sqrt{2}+2+\sqrt{6}}{4}+\dfrac{-\sqrt{2}+2+\sqrt{6}}{4}\right]$

$=\left[\dfrac{4+2\sqrt{6}}{4}\right]$

$=\left[1+\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right]$

$=2\ (\because 2<\sqrt{6}<3)$

25 $(x+y)^2=7\sqrt{5}-\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$(x-y)^2=7\sqrt{3}-\sqrt{5} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

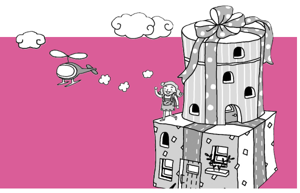
㉠+㉡에서 $x^2+y^2=3(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

㉠−㉡에서 $xy=2(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

$\therefore$ (주어진 식)$=(x^2+y^2)+xy$

$=3(\sqrt{5}+\sqrt{3})+2(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

$=5\sqrt{5}+\sqrt{3}$



II 이차방정식

곱셈 공식 되짚어 보기

곱셈 공식 문제로 다지기

본문 37 ~ 38쪽

1 (1) $2a^2-6\sqrt{2}ab+9b^2$ (2) $-9a^2+b^2$
(3) $a^2+4b^2+c^2-4ab-4bc+2ca$ (4) $12a^2b+16b^3$
(5) a^4-16
2 (1) $x^2-x-2+\sqrt{2}$ (2) $3x^2+\sqrt{2}xy-4y^2$
3 (1) $x^2-2y^2+2\sqrt{6}y-3$ (2) $x^4-2x^3-7x^2+8x+12$
4 8 **5** (1) 5 (2) 7 (3) $-\sqrt{3}$ (4) -5
6 (1) -1 (2) ±2 **7** $-\frac{13\sqrt{3}}{6}$
8 $5-\sqrt{6}$ **9** $\frac{5}{2}$ **10** (1) 7 (2) 9 (3) $8\sqrt{5}$
11 11 **12** (1) 5 (2) 23 (3) $\pm\sqrt{21}$ **13** $2\sqrt{2}$

1 (1) $(\sqrt{2}a-3b)^2=2a^2-6\sqrt{2}ab+9b^2$
(2) $(3a+b)(-3a+b)=-9a^2+b^2$
(3) $(a-2b+c)^2=a^2+4b^2+c^2-4ab-4bc+2ca$
(4) $(a+2b)^3-(a-2b)^3$
$=a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3-(a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3)$
$=12a^2b+16b^3$
(5) $(\sqrt{a}-\sqrt{2})(\sqrt{a}+\sqrt{2})(a+2)(a^2+4)$
$=(a-2)(a+2)(a^2+4)$
$=(a^2-4)(a^2+4)$
$=a^4-16$

2 (1) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}-1)$
$=x^2+(-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$
$=x^2-x-2+\sqrt{2}$
(2) $(x+\sqrt{2}y)(3x-2\sqrt{2}y)$
$=3x^2+(-2\sqrt{2}+3\sqrt{2})xy-4y^2$
$=3x^2+\sqrt{2}xy-4y^2$

3 (1) $(x-\sqrt{2}y+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}y-\sqrt{3})$
$=\{x-(\sqrt{2}y-\sqrt{3})\}\{x+(\sqrt{2}y-\sqrt{3})\}$
$\sqrt{2}y-\sqrt{3}=t$ 로 치환하면
$(x-t)(x+t)=x^2-t^2$
$=x^2-(\sqrt{2}y-\sqrt{3})^2$
$=x^2-(2y^2-2\sqrt{6}y+3)$
$=x^2-2y^2+2\sqrt{6}y-3$
(2) $(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)$
$=\{(x-3)(x+2)\}\{(x-2)(x+1)\}$
$=(x^2-x-6)(x^2-x-2)$
$x^2-x=t$ 로 치환하면
$(t-6)(t-2)=t^2-8t+12$
$=(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12$
$=x^4-2x^3+x^2-8x^2+8x+12$
$=x^4-2x^3-7x^2+8x+12$

4 $x(x-1)(x-3)(x-4)+10$
$=\{x(x-4)\}\{(x-1)(x-3)\}+10$
$=(x^2-4x)(x^2-4x+3)+10$
$x^2-4x+2=0$ 에서 $x^2-4x=-2$ 이므로 위의 식에 대입하면
$(-2)\times(-2+3)+10=-2+10=8$

5 (1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(\sqrt{3})^2-2\times(-1)=5$
(2) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=(\sqrt{3})^2-4\times(-1)=7$
(3) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$
(4) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{5}{-1}=-5$

6 (1) $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy$ 에서
$(2\sqrt{2})^2=6-2xy,\ 2xy=-2$ $\quad\therefore xy=-1$
(2) $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$
$=(2\sqrt{2})^2+4\times(-1)=4$
$\therefore x+y=\pm2$

7 $x=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$
$=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$
$y=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$
$=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$
이때 $x-y=-2\sqrt{3},\ xy=1$ 이므로
(주어진 식)$=\frac{(x-y)^2+xy}{x-y}$
$=\frac{(-2\sqrt{3})^2+1}{-2\sqrt{3}}=-\frac{13}{2\sqrt{3}}=-\frac{13\sqrt{3}}{6}$

8 $x+y=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$

$$xy=\frac{\sqrt{5}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2}\times\frac{\sqrt{5}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2}$$
$$=\frac{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{4}$$
$$=\frac{5-(5-2\sqrt{6})}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$
$$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$
$$=(\sqrt{5})^2-2\times\frac{\sqrt{6}}{2}$$
$$=5-\sqrt{6}$$

9 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로

$(\sqrt{7})^2=2+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=\frac{5}{2}$

10 (1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=(\sqrt{5})^2+2=7$

(2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4=(\sqrt{5})^2+4=9$

(3) $x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=(\sqrt{5})^3+3\sqrt{5}=8\sqrt{5}$

11 $2x^2-x+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}=2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}-\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=2\times(3^2-2)-3$

$=14-3=11$

12 (1) $x^2-5x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-5+\frac{1}{x}=0\qquad\therefore x+\frac{1}{x}=5$

(2) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

$=5^2-2=23$

(3) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$

$=5^2-4=21$

$\therefore x-\frac{1}{x}=\pm\sqrt{21}$

13 $x^2-6x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-6+\frac{1}{x}=0\qquad\therefore x+\frac{1}{x}=6$

$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x+\frac{1}{x}+2$

$=6+2=8$

$\therefore \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=2\sqrt{2}\ \left(\because \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}>0\right)$

01 인수분해

1 STEP 주제별 실력다지기

본문 40~44쪽

1 (1) $b(a^2-bc-d^2)$ (2) $(a-1)(b-1)$
(3) $(x-1)(x-2)(x+2)$

2 (1) $(a+2b-1)(a-2b+1)$
(2) $(x+y-z)(x-y-z)$

3 (1) $(x+y+3)(x-y-1)$
(2) $(ab+a+b-1)(ab-a-b-1)$

4 ⑤

5 (1) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$
(2) $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$
(3) $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$
(4) $(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

6 $(2x+3y+z)(4x^2+9y^2+z^2-6xy-3yz-2zx)$

7 (1) $(3x-8y)(9x-y)$ (2) $(2x-y)(7x+13y)$
(3) $\frac{1}{36}(2x-9)(2x+5)$

8 $\left(\frac{1}{x}-3\right)\left(\frac{1}{x}-4\right)$

9 (1) $(x-1)(x+1)(x^2+4)$
(2) $(x-2)(x+1)(x^2+2x+4)(x^2-x+1)$
(3) $(x^2+x-3)(x^2-x-3)$
(4) $(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$

10 (1) $(2a+b+4c)(2a+b+6c)$
(2) $x(x+3)(x^2+3x+11)$
(3) $(x-y-2)(x-y+1)$

11 (1) $x(x+5)(x^2+5x+10)$
(2) $(xy+x+1)(xy+y+1)$
(3) $-3(a-x)(b-x)(a+b-2x)$

12 (가) : $(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$
(나) : $(b-c)a^2-(b-c)(b+c)a+bc(b-c)$
(다) : $(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
(라) : $(b-c)(a-b)(a-c)$

13 (1) $(x+2y+3)(x-y+2)$
(2) $(a+b)(b+c)(c+a)$
(3) $(x-y)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$
(4) $(a-c)(b-c)(ab+bc+ca)$
(5) $(a+b+x+y)(a+b-x-y)(a+b+x-y)$
$\times(a+b-x+y)$

14 -7

15 (1) 몫 : $2x^2-x-5$, 나머지 : 0
(2) 몫 : x^2-6x+6, 나머지 : -9
(3) 몫 : $x^3+7x^2+11x+8$, 나머지 : 11

16 (1) $(x-1)^2(x+1)(x+2)$
(2) $(x-1)(x-2)(3x^2-1)$
(3) $(x+1)(2x-1)(3x+1)$

17 $a=2$, $b=13$, $c=24$, $d=17$

1 (1) 공통인수 b를 묶어내면

$a^2b-b^2c-bd^2=b(a^2-bc-d^2)$

(2) $ab-a-b+1=(ab-a)+(-b+1)$

$=a(b-1)-(b-1)$

$=(a-1)(b-1)$

(3) $x^3-x^2-4x+4=(x^3-x^2)-4(x-1)$

$=x^2(x-1)-4(x-1)$

$=(x-1)(x^2-4)$

$=(x-1)(x-2)(x+2)$

2 (1) $a^2-4b^2+4b-1=a^2-(4b^2-4b+1)$

$=a^2-(2b-1)^2$

$=(a+2b-1)(a-2b+1)$

(2) $x^2-y^2+z^2-2xz=(x^2-2xz+z^2)-y^2$

$=(x-z)^2-y^2$

$=(x+y-z)(x-y-z)$

3 (1) $x^2-y^2+2x-4y-3$

$=(x^2+2x+1)-(y^2+4y+4)$

$=(x+1)^2-(y+2)^2$

$=(x+1+y+2)(x+1-y-2)$

$=(x+y+3)(x-y-1)$

(2) $(1-a^2)(1-b^2)-4ab$

$=1-a^2-b^2+a^2b^2-4ab$

$=\{(ab)^2-2ab+1\}-(a^2+2ab+b^2)$

$=(ab-1)^2-(a+b)^2$

$=(ab+a+b-1)(ab-a-b-1)$

4 (주어진 식)$=x^2(y^2+4y+4)-(y^2+4y+4)$

$=(x^2-1)(y^2+4y+4)$

$=(x-1)(x+1)(y+2)^2$

따라서 인수가 아닌 것은 ⑤ $y+4$이다.

5 (1) $a^8-b^8=(a^4)^2-(b^4)^2$

$=(a^4-b^4)(a^4+b^4)$

$=(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

$=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

(2) $8a^3+27b^3=(2a)^3+(3b)^3$

$=(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$

(3) $a^3-8b^3=a^3-(2b)^3=(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$

(4) x^6-y^6

$=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$=(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

6 (주어진 식)

$=(2x)^3+(3y)^3+z^3-3\cdot(2x)\cdot(3y)\cdot z$

$=(2x+3y+z)(4x^2+9y^2+z^2-6xy-3yz-2zx)$

7 (1) $27x^2-75xy+8y^2$

$$\begin{array}{lll} 3x & -8y & \longrightarrow -72xy \\ 9x & -y & \longrightarrow \underline{-3xy}\ (+ \\ & & \qquad -75xy \end{array}$$

$\therefore 27x^2-75xy+8y^2=(3x-8y)(9x-y)$

(2) $14x^2+19xy-13y^2$

$$\begin{array}{lll} 2x & -y & \longrightarrow -7xy \\ 7x & 13y & \longrightarrow \underline{26xy}\ (+ \\ & & \qquad 19xy \end{array}$$

$\therefore 14x^2+19xy-13y^2=(2x-y)(7x+13y)$

(3) $\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{9}x-\frac{5}{4}=\frac{1}{36}(4x^2-8x-45)$

$$\begin{array}{lll} 2x & -9 & \longrightarrow -18x \\ 2x & 5 & \longrightarrow \underline{10x}\ (+ \\ & & \qquad -8x \end{array}$$

$\therefore \frac{1}{9}x^2-\frac{2}{9}x-\frac{5}{4}=\frac{1}{36}(2x-9)(2x+5)$

8 $\frac{1}{x^2}-\frac{7}{x}+12=\left(\frac{1}{x}\right)^2-7\left(\frac{1}{x}\right)+12$

$=\left(\frac{1}{x}-3\right)\left(\frac{1}{x}-4\right)$

다른 풀이

$\frac{1}{x}=t$로 치환하면 주어진 식은

$t^2-7t+12=(t-3)(t-4)=\left(\frac{1}{x}-3\right)\left(\frac{1}{x}-4\right)$

9 (1) $x^2=t$로 치환하면

$x^4+3x^2-4=t^2+3t-4$

$=(t+4)(t-1)$

$=(x^2+4)(x^2-1)$

$=(x-1)(x+1)(x^2+4)$

(2) $x^3=t$로 치환하면

$x^6-7x^3-8=t^2-7t-8$

$=(t-8)(t+1)$

$=(x^3-8)(x^3+1)$

$=(x-2)(x^2+2x+4)$

$\times(x+1)(x^2-x+1)$

$=(x-2)(x+1)(x^2+2x+4)$

$\times(x^2-x+1)$

(3) $x^4-7x^2+9=(x^4-6x^2+9)-x^2$

$=(x^2-3)^2-x^2$

$=(x^2-3+x)(x^2-3-x)$

$=(x^2+x-3)(x^2-x-3)$

(4) $x^4+4=(x^4+4x^2+4)-4x^2$

$=(x^2+2)^2-(2x)^2$
$=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$

10 (1) $2a+b=t$로 치환하면
(주어진 식)$=t^2+10tc+24c^2$
$=(t+4c)(t+6c)$
$=(2a+b+4c)(2a+b+6c)$
(2) $x^2+3x=t$로 치환하면
(주어진 식)$=(t+4)(t+7)-28$
$=t^2+11t$
$=t(t+11)$
$=(x^2+3x)(x^2+3x+11)$
$=x(x+3)(x^2+3x+11)$
(3) (주어진 식)$=(x-y)^2-(x-y)-2$
이므로 $x-y=t$로 치환하면
(주어진 식)$=t^2-t-2$
$=(t-2)(t+1)$
$=(x-y-2)(x-y+1)$

11 (1) (주어진 식)
$=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}-24$
$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24$
$x^2+5x=t$로 치환하면
(주어진 식)$=(t+4)(t+6)-24$
$=t^2+10t$
$=t(t+10)$
$=(x^2+5x)(x^2+5x+10)$
$=x(x+5)(x^2+5x+10)$
(2) (주어진 식)$=(xy+1)(xy+x+y+1)+xy$
$=(xy+1)\{(xy+1)+x+y\}+xy$
$xy+1=t$로 치환하면
(주어진 식)$=t(t+x+y)+xy$
$=t^2+(x+y)t+xy$
$=(t+x)(t+y)$
$=(xy+x+1)(xy+y+1)$
(3) $a-x=m$, $b-x=n$으로 치환하면
$a+b-2x=m+n$
$\therefore$ (주어진 식)$=m^3+n^3-(m+n)^3$
$=-3mn(m+n)$
$=-3(a-x)(b-x)(a+b-2x)$

12 (주어진 식)
$=a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2$
$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$: (가)
$=(b-c)a^2-(b-c)(b+c)a+bc(b-c)$: (나)
$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$: (다)
$=(b-c)(a-b)(a-c)$: (라)
$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

13 (1) 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
(주어진 식)$=x^2+(y+5)x-2y^2+y+6$
$=x^2+(y+5)x-(2y^2-y-6)$
$=x^2+(y+5)x-(2y+3)(y-2)$
$=(x+2y+3)(x-y+2)$
(2) (주어진 식)
$=a^2b+ca^2+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+2abc$
a에 대하여 내림차순으로 정리하면
(주어진 식)$=(b+c)a^2+(b^2+c^2+2bc)a+b^2c+bc^2$
$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$
$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$
$=(b+c)(a+b)(a+c)$
$=(a+b)(b+c)(c+a)$
(3) 주어진 식을 z에 대하여 내림차순으로 정리하면
(주어진 식)$=(x-y)z^2+(x^2-y^2)z+x^3-y^3$
$=(x-y)z^2+(x-y)(x+y)z$
$+(x-y)(x^2+xy+y^2)$
$=(x-y)\{z^2+(x+y)z+x^2+xy+y^2\}$
$=(x-y)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$
(4) (주어진 식)$=ac^3+bc^3-a^2c^2-abc^2-b^2c^2+a^2b^2$
a에 대하여 내림차순으로 정리하면
(주어진 식)$=(b^2-c^2)a^2+(c^3-bc^2)a+bc^3-b^2c^2$
$=(b-c)(b+c)a^2-c^2(b-c)a-bc^2(b-c)$
$=(b-c)\{(b+c)a^2-c^2a-bc^2\}$
$=(b-c)(a^2b+a^2c-c^2a-bc^2)$
$=(b-c)\{(a^2-c^2)b+ac(a-c)\}$
$=(b-c)(a-c)\{(a+c)b+ac\}$
$=(a-c)(b-c)(ab+bc+ca)$
(5) $(a+b)^2=A$로 치환하면
(주어진 식)$=A^2-2(x^2+y^2)A+(x^2-y^2)^2$
$=A^2-2(x^2+y^2)A+(x+y)^2(x-y)^2$
$=\{A-(x+y)^2\}\{A-(x-y)^2\}$
$=\{(a+b)^2-(x+y)^2\}$
$\times\{(a+b)^2-(x-y)^2\}$
$=(a+b+x+y)(a+b-x-y)$
$\times(a+b+x-y)(a+b-x+y)$

14 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
(주어진 식)$=x^2-2(2y+3)x+3y^2+2y-16$
$=x^2-2(2y+3)x+(3y+8)(y-2)$
$=(x-3y-8)(x-y+2)$
따라서 $A=-8$, $B=-1$, $C=2$이므로
$A+B+C=-7$

15 (1)
$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -3 & -4 & 5 \\ & & 2 & -1 & -5 \\ \hline & 2 & -1 & -5 & \boxed{0} \end{array}$$

∴ 몫 : $2x^2-x-5$, 나머지 : 0

(2)
$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -5 & 0 & -3 \\ & & -1 & 6 & -6 \\ \hline & 1 & -6 & 6 & \boxed{-9} \end{array}$$

∴ 몫 : x^2-6x+6, 나머지 : -9

(3)
$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 5 & -3 & -14 & -5 \\ & & 2 & 14 & 22 & 16 \\ \hline & 1 & 7 & 11 & 8 & \boxed{11} \end{array}$$

∴ 몫 : $x^3+7x^2+11x+8$, 나머지 : 11

16 (1) $x=1$일 때, 식의 값은 0이다.
$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ & & 1 & 2 & -1 & -2 \\ \hline 1 & 1 & 2 & -1 & -2 & \boxed{0} \\ & & 1 & 3 & 2 & \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore x^4+x^3-3x^2-x+2=(x-1)^2(x^2+3x+2)$
$=(x-1)^2(x+1)(x+2)$

(2) $x=1$일 때, 식의 값은 0이다.
$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 3 & -9 & 5 & 3 & -2 \\ & & 3 & -6 & -1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & -6 & -1 & 2 & \boxed{0} \\ & & 6 & 0 & -2 & \\ \hline & 3 & 0 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore 3x^4-9x^3+5x^2+3x-2$
$=(x-1)(x-2)(3x^2-1)$

(3) $x=-1$일 때, 식의 값은 0이다.
$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 6 & 5 & -2 & -1 \\ & & -6 & 1 & 1 \\ \hline & 6 & -1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore 6x^3+5x^2-2x-1=(x+1)(6x^2-x-1)$
$=(x+1)(2x-1)(3x+1)$

17
$$\begin{array}{r|rrrl} 2 & 2 & 1 & -4 & 5 \\ & & 4 & 10 & 12 \\ \hline 2 & 2 & 5 & 6 & \boxed{17} \to d \\ & & 4 & 18 & \\ \hline 2 & 2 & 9 & \boxed{24} \to c & \\ & & 4 & & \\ \hline & 2 & \boxed{13} \to b & & \\ & \downarrow a & & & \end{array}$$

$\therefore a=2,\ b=13,\ c=24,\ d=17$

2 STEP 실력 높이기

본문 45~47쪽

1 ① **2** ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ **3** -7
4 $xy^2+2xy-1$ **5** $(x-3y+1)^2$ **6** 4
7 $(x+y+z)(xy+yz+zx)$
8 (1) -715 (2) 4950 **9** (1) 2003 (2) $\frac{255}{16}$
10 $(ac-d)(ab+c+d)$
11 $(x+2y+1)(x^2+4y^2-2xy-x-2y+1)$
12 3 **13** (1) $(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x+3)(x-3)$
(2) $(x^2+3x+1)(x^2-3x+1)$
14 $(x^2+2x-4)(x^2+x-4)$
15 $(x+y)(x-y)(y-z)$
16 $(x-1)^2(x+3)$
17 $(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

1 각각을 인수분해하면
① $(x-2)(x-3)$ ② $(x+2)(x+1)$
③ $(2x+3)(x+2)$ ④ $(2x-1)(x+2)$
⑤ $(3x+1)(x+2)$
따라서 ②, ③, ④, ⑤는 $x+2$를 공통인수로 갖는다.

2 ㄱ. $(x-2)(x+3)$ ㄴ. $(x+2)(x-2)$
ㄷ. $(x-2)(x^2+2x+4)$ ㄹ. $(2x-1)(x-2)$
ㅁ. $2(x-2)$ ㅂ. $(x+2)(x-3)$
따라서 ㅂ만 $x-2$를 인수로 갖지 않는다.

3 $2x^2+cx+3=2bx^2+(ab-2)x-a$
양변의 계수를 비교하면
$2b=2,\ ab-2=c,\ -a=3$
$\therefore a=-3,\ b=1,\ c=-5$
$\therefore a+b+c=-3+1-5=-7$

4 (주어진 식)$=(xy^2-x)+(1-y^2)$
$=x(y^2-1)-(y^2-1)$
$=(x-1)(y^2-1)$
$=(x-1)(y-1)(y+1)$
따라서 인수는 $x-1,\ y-1,\ y+1$
$(x-1)(y-1)=xy-y-x+1$
$(x-1)(y+1)=xy-y+x-1$

$(y-1)(y+1)=y^2-1$

$(x-1)(y-1)(y+1)=xy^2+1-x-y^2$

$\therefore (x-1)+(y-1)+(y+1)+(xy-y-x+1)$

$\quad +(xy-y+x-1)+(y^2-1)+(xy^2+1-x-y^2)$

$\quad =xy^2+2xy-1$

5 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

(주어진 식)

$=x^2+2(1-3y)x+9y^2-6y+1$

$=x^2-2(3y-1)x+(3y-1)^2$

$=(x-3y+1)^2$

다른 풀이

(주어진 식)

$=(x^2+2x+1)-6(x+1)y+9y^2$

$=(x+1)^2-6(x+1)y+9y^2$

$x+1=A$로 치환하면

(주어진 식)$=A^2-6Ay+9y^2$

$\qquad\qquad =(A-3y)^2$

$\qquad\qquad =(x-3y+1)^2$

6 $x^2-xy-2y^2+5x-y+6$

$=x^2+(5-y)x-2y^2-y+6$

$=x^2+(5-y)x-(2y^2+y-6)$

$=x^2+(5-y)x-(2y-3)(y+2)$

$=(x-2y+3)(x+y+2)$

$\therefore a+b+c+d=-2+3+1+2=4$

7 (주어진 식)

$=x^2y+xz^2+x^2z+y^2z+xy^2+yz^2+3xyz$

$=(y+z)x^2+(y^2+3yz+z^2)x+yz(y+z)$

$$\begin{array}{ccccc} y+z & \searrow\!\!\!\nearrow & yz & \to & yz \\ 1 & \nearrow\!\!\!\searrow & y+z & \to & \underline{(y+z)^2}\ (+ \\ & & & & y^2+3yz+z^2 \end{array}$$

$=\{(y+z)x+yz\}(x+y+z)$

$=(x+y+z)(xy+yz+zx)$

8 (1) $356=t$로 치환하면

(주어진 식)

$=t^2+(t+2)t-(t+2)^2-(t+1)(t-1)$

$=t^2+t^2+2t-t^2-4t-4-t^2+1$

$=-2t-3=-2\times356-3$

$=-715$

(2) (주어진 식)

$=1^2+(3^2-2^2)+(5^2-4^2)+\cdots+(99^2-98^2)$

$=1^2+(3+2)(3-2)+(5+4)(5-4)+\cdots$

$\qquad +(99+98)(99-98)$

$=1+(3+2)+(5+4)+\cdots+(99+98)$

$=1+2+3+4+5+\cdots+99$

$=\dfrac{99\cdot100}{2}$

$=4950$

9 (1) $2002=t$로 치환하면

(주어진 식)$=\dfrac{t^3+1}{(t-1)t+1}$

$=\dfrac{(t+1)(t^2-t+1)}{t^2-t+1}$

$=t+1$

$=2003$

(2) (주어진 식)$=\sqrt{\dfrac{254\cdot256+1}{256}}$

$=\sqrt{\dfrac{(255-1)(255+1)+1}{256}}$

$=\sqrt{\dfrac{255^2-1+1}{256}}$

$=\sqrt{\dfrac{255^2}{256}}$

$=\dfrac{255}{16}$

10 b에 대하여 내림차순으로 정리하면

(주어진 식)

$=(a^2c-ad)b+(ac^2+acd-cd-d^2)$

$=a(ac-d)b+\{ac(c+d)-d(c+d)\}$

$=a(ac-d)b+(c+d)(ac-d)$

$=(ac-d)(ab+c+d)$

11 (주어진 식)

$=x^3+(2y)^3+1^3-3\cdot x\cdot2y\cdot1$

$=(x+2y+1)(x^2+4y^2+1-2xy-x-2y)$

$=(x+2y+1)(x^2+4y^2-2xy-x-2y+1)$

12 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$에서

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

그런데 $a+b+c\neq0$이므로

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$에서

$\dfrac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$

$\dfrac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}=0$

$\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

따라서 $a-b=b-c=c-a=0$이므로 $a=b=c$인 정삼각형이고 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$에서 $a=1$ ($\because a>0$)

$\therefore a=b=c=1$

$\therefore a+b+c=3$

13 (1) (주어진 식) $=(x^2-5)(x^2-9)$

$=(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x+3)(x-3)$

(2) (주어진 식) $=(x^4+2x^2+1)-9x^2$

$=(x^2+1)^2-(3x)^2$

$=(x^2+3x+1)(x^2-3x+1)$

14 (주어진 식)

$=\{(x-1)(x+4)\}\{(x-2)(x+2)\}+2x^2$

$=(x^2+3x-4)(x^2-4)+2x^2$

$x^2-4=t$ 로 치환하면

(주어진 식) $=(t+3x)t+2x^2$

$=t^2+3xt+2x^2$

$=(t+2x)(t+x)$

$=(x^2+2x-4)(x^2+x-4)$

15 z 에 대하여 내림차순으로 정리하면

(주어진 식) $=(y^2-x^2)z+x^2y-y^3$

$=(y+x)(y-x)z+y(x^2-y^2)$

$=(y+x)(y-x)z+y(x+y)(x-y)$

$=-(x+y)(x-y)z+y(x+y)(x-y)$

$=(x+y)(x-y)(y-z)$

16 $x=1$ 일 때, 식의 값은 0 이다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & -5 & 3 \\ & & 1 & 2 & -3 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore x^3+x^2-5x+3=(x-1)(x^2+2x-3)$

$=(x-1)(x-1)(x+3)$

$=(x-1)^2(x+3)$

17 (주어진 식) $=x^4(x-1)+x^2(x-1)+(x-1)$

$=(x-1)(x^4+x^2+1)$

$=(x-1)\{(x^4+2x^2+1)-x^2\}$

$=(x-1)\{(x^2+1)^2-x^2\}$

$=(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

3 STEP 최고 실력 완성하기

본문 48~50쪽

1 $(x^2+x+a+1)(x^2-x-a+1)$

2 $b=c$ 인 이등변삼각형 또는 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

3 $(x+1)(2x-1)(3x+1)$

4 $a=b$인 이등변삼각형 또는 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

5 64 **6** 571

7 $3abc(a-b)(b-c)(c-a)$

8 $n=1,\ p=3$ **9** $p<0$ **10** 풀이 참조

11 10 m **12** (1) 1 m (2) 1 m

1 주어진 식을 a 에 대하여 내림차순으로 정리하면

(주어진 식) $=-a^2-2xa+(x^4+x^2+1)$

$=-a^2-2xa+(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$=(a+x^2+x+1)(-a+x^2-x+1)$

$=(x^2+x+a+1)(x^2-x-a+1)$

2 주어진 식을 정리하면

$a^2c^2+b^2c^2-c^4=b^2c^2+a^2b^2-b^4$

$b^4-c^4+a^2c^2-a^2b^2=0$

$(b^2+c^2)(b^2-c^2)-a^2(b^2-c^2)=0$

$(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)=0$

$(b-c)(b+c)(b^2+c^2-a^2)=0$

$\therefore b=c$ 또는 $a^2=b^2+c^2$

따라서 $b=c$ 인 이등변삼각형 또는 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

3 $x=-1$ 일 때, 식의 값은 0 이다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 6 & 5 & -2 & -1 \\ & & -6 & 1 & 1 \\ \hline & 6 & -1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore 6x^3+5x^2-2x-1=(x+1)(6x^2-x-1)$

$=(x+1)(2x-1)(3x+1)$

4 주어진 식을 정리하면

$(a-b)c^4-2(a-b)(a^2+ab+b^2)c^2$

$+(a-b)(a+b)^2(a^2+b^2)=0$

$(a-b)\{c^4-2(a^2+ab+b^2)c^2+(a^2+b^2)(a+b)^2\}=0$

$(a-b)(c^2-a^2-b^2)\{c^2-(a+b)^2\}=0$

$(a-b)(c^2-a^2-b^2)(c+a+b)(c-a-b)=0$

$a+b+c\neq0,\ c-a-b\neq0$ ($\because c<a+b$)이므로

$a=b$ 또는 $c^2=a^2+b^2$

따라서 $a=b$ 인 이등변삼각형 또는 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

5 $2^{40}-1=(2^{20}+1)(2^{20}-1)$

$=(2^{20}+1)(2^{10}+1)(2^{10}-1)$

$=(2^{20}+1)(2^{10}+1)(2^5+1)(2^5-1)$

따라서 $2^5+1=33$ 과 $2^5-1=31$ 에 의해 나누어 떨어진다.

$\therefore 33+31=64$

6 $24=t$ 로 치환하면

(주어진 식) $=\sqrt{(t-3)(t-1)(t+1)(t+3)+16}$

$=\sqrt{\{(t-1)(t+1)\}\{(t-3)(t+3)\}+16}$

$=\sqrt{(t^2-1)(t^2-9)+16}$

$=\sqrt{t^4-10t^2+25}$
$=\sqrt{(t^2-5)^2}=\sqrt{(24^2-5)^2}$
$=\sqrt{571^2}$
$=571$

7 $(\text{주어진 식})=\{a(b-c)\}^3+\{b(c-a)\}^3+\{c(a-b)\}^3$
$a(b-c)=m$, $b(c-a)=n$, $c(a-b)=l$ 로 치환하면
$m+n+l=0$
$(\text{주어진 식})=m^3+n^3+l^3$
$=(m+n+l)(m^2+n^2+l^2-mn-nl-lm)+3mnl$
$=3mnl$
$=3abc(a-b)(b-c)(c-a)$

8 $n^4+n^2+1=(n^4+2n^2+1)-n^2$
$=(n^2+1)^2-n^2$
$=(n^2+n+1)(n^2-n+1)$
따라서 n^4+n^2+1 이 소수가 되려면
$n^2+n+1=1$ 또는 $n^2-n+1=1$
(i) $n^2+n+1=1$ 일 때
$n(n+1)=0$ $\quad\therefore n=0$ 또는 $n=-1$
(ii) $n^2-n+1=1$ 일 때
$n(n-1)=0$ $\quad\therefore n=0$ 또는 $n=1$
(i), (ii)에 의해 $n=1$($\because n$은 자연수)
$\therefore p=1+1+1=3$

9 $p=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^4-2b^2c^2+c^4)$
$=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2$
$=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b+c)^2(b-c)^2$
$=\{a^2-(b+c)^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$
$=(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)$
한편, $a>0$, $b>0$, $c>0$ 이므로 $a+b+c>0$
또, 삼각형의 어느 두 변의 길이의 합도 다른 한 변의 길이보다 크므로 $a<b+c$, $b<a+c$, $c<a+b$
$\therefore a-b-c<0$, $a+c-b>0$, $a+b-c>0$
$\therefore p<0$

10 어떤 동물원에 갔더니 맹수우리는 총 8개였고, 각각 암수 한 쌍이 있었다.
따라서 이 동물원에는 총 $2\times8=16$(마리)의 맹수가 있다는 것을 알 수 있었다.

11 세로의 길이를 x m라고 하면 가로의 길이는 $(x+10)$ m이고 넓이가 200 m^2이므로
$x(x+10)=200$에서 $x^2+10x-200=0$
이 식의 좌변을 인수분해하면 $(x-10)(x+20)=0$
$\therefore x=-20$ 또는 $x=10$
이때 x는 양수이므로 $x=10$이고 구하는 세로의 길이는 10 m이다.

12 (1) 가로의 길이를 x m라고 하면 세로의 길이는 $(5-x)$ m이고 넓이가 6 m^2이므로
$x(5-x)=6$에서 $x^2-5x+6=0$
이 식의 좌변을 인수분해하면 $(x-2)(x-3)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=3$
따라서 가로와 세로의 길이의 차는 $3-2=1$(m)이다.
(2) 가로와 세로의 길이를 각각 x m, y m라 하면 주어진 조건에서 $x+y=5$, $xy=6$이므로
$|x-y|=\sqrt{(x+y)^2-4xy}=\sqrt{5^2-4\times6}=1$
따라서 가로와 세로의 길이의 차는 1 m이다.

02 이차방정식

1 STEP 주제별 실력다지기 본문 52~56쪽

1 ② **2** $x=2$ **3** $a=3$, $b=1$ **4** 1
5 (1) $x=\pm\sqrt{2}$ (2) 근이 없다. (3) $x=0$ 또는 $x=2\sqrt{2}$
(4) $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=3$ (5) $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$
(6) $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}+1$
6 $a=1$ 또는 $b=1$ **7** $a=-2$, 다른 한 근 : 3
8 ±5, ±1 **9** $A+B=\frac{4}{3}$, $x=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{3}$
10 $x=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{7}}{2}$ **11** ④ **12** ② **13** 13
14 $a=5$, 다른 한 근 : $1-\sqrt{6}$ **15** $-\frac{3}{4}$
16 $x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$ **17** (1) 2개 (2) 0개 (3) 1개
18 10 **19** 9 **20** -8
21 (1) $m<1$ (2) $m>1$

1 ㄱ. $2x^2-2x^2+2x=0$, $2x=0$: 일차방정식
ㄴ. $x^2-2x-1=0$
ㄷ. $x^3-x^2-1=0$: 삼차방정식
ㄹ. $x^2-4x-1=0$
ㅁ. $3x^3-6x^2+x=0$: 삼차방정식
따라서 이차방정식은 ㄴ, ㄹ의 2개이다.

2 $x^2-2x-3=-3x+3$에서 $x^2+x-6=0$
$x^2+x-6=0$의 x에 -1, 0, 1, 2를 차례로 대입하면 2만 주어진 방정식을 만족하므로 해는 $x=2$이다.

3 $x=-1$을 방정식에 대입하면
$2-a+b=0$, $a-b=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x=-\frac{1}{2}$을 방정식에 대입하면

$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a+b=0,\ a-2b=1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=1$

4 $x=2$는 두 방정식을 동시에 만족하는 근이므로 $x=2$를 두 방정식에 각각 대입하면

$8+2m-6=0$에서 $m=-1$

$4-6-n=0$에서 $n=-2$

$\therefore m-n=-1-(-2)=1$

5 (1) 주어진 식을 정리하면

$2x^2=4,\ x^2=2$

$\therefore x=\pm\sqrt{2}$

(2) $x^2=-4$ $\quad\therefore$ 근이 없다.

(3) $2x(x-2\sqrt{2})=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=2\sqrt{2}$

(4) $3x^2-7x-6=0,\ (3x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=3$

(5) 양변에 6을 곱하면

$3x^2-2x-1=0,\ (3x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

(6) 양변에 $\sqrt{2}+1$을 곱하면

$x^2-x-\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$

$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}-1)=0$

$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}+1$

6 $ab-a-b+1=0$에서

$a(b-1)-(b-1)=0$

$(a-1)(b-1)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $b=1$

7 $x^2+ax-3=0$에 $x=-1$을 대입하면

$1-a-3=0$ $\quad\therefore a=-2$

따라서 주어진 이차방정식은 $x^2-2x-3=0$이므로

$(x-3)(x+1)=0$ $\quad\therefore x=3$ 또는 $x=-1$

따라서 다른 한 근은 3이다.

8 $x^2+ax-6=0$을 X자형 분리법으로 인수분해하면 가능한 경우는

$(x-1)(x+6)=0,\ (x+1)(x-6)=0,$

$(x-2)(x+3)=0,\ (x+2)(x-3)=0$

의 4가지이다.

$\therefore a=\pm5$ 또는 $a=\pm1$

9 $3x^2+6x+2=0$의 양변을 3으로 나누면

$x^2+2x+\frac{2}{3}=0$

상수항을 우변으로 이항하면

$x^2+2x=-\frac{2}{3}$

양변에 1을 더하면

$x^2+2x+1=\frac{1}{3}$ $\quad\therefore (x+1)^2=\frac{1}{3}$

따라서 $A=1,\ B=\frac{1}{3}$이므로 $A+B=\frac{4}{3}$이고,

$x+1=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ 이므로

$x=-1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{3}$

10 근의 공식에 의해

$x=\frac{-(-\sqrt{3})\pm\sqrt{(-\sqrt{3})^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}$

$\therefore x=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{7}}{2}$

11 $x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-2\cdot(-1)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

이므로 $A=1,\ B=3$

$\therefore A+B=4$

12 $x-y=X$라 하면

$X(X-5)-3=0$이므로

$X^2-5X-3=0$에서 $X=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$

그런데 $x>y$에서 $x-y>0$이므로 $X>0$

$\therefore x-y=\frac{5+\sqrt{37}}{2}$

13 $x=\frac{1\pm\sqrt{1+3a}}{a}=\frac{1\pm\sqrt{b}}{3}$ 이므로

$a=3,\ 1+3a=b$ $\quad\therefore a=3,\ b=10$

$\therefore a+b=13$

14 주어진 방정식에 $x=1+\sqrt{6}$을 대입하면

$(1+\sqrt{6})^2-2(1+\sqrt{6})-a=0$

$7+2\sqrt{6}-2-2\sqrt{6}-a=0$

$5-a=0$ $\quad\therefore a=5$

$x^2-2x-5=0$에서 근의 공식을 이용하면 $x=1\pm\sqrt{6}$

따라서 다른 한 근은 $1-\sqrt{6}$

15 $p,\ q$를 각각 주어진 방정식에 대입하면

$2p^2-2p-1=0$ $\quad\therefore p^2-p=\frac{1}{2}$

$2q^2-2q-1=0$ $\quad\therefore q^2-q=\frac{1}{2}$

$\therefore$ (주어진 식)$=\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{3}{4}$

16 주어진 정의에 따라 식을 변형하면

$\{(x+1)-(2x-1)\}\triangle\{(3x+1)-(x-1)\}=0$

$(-x+2)\triangle(2x+2)=0$

$(-x+2)(2x+2)-(-x+2)-(2x+2)+2=0$

$-2x^2+2x+4+x-2-2x-2+2=0$

$2x^2-x-2=0$

$\therefore x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}$

17 (1) $D=(-3)^2-4\cdot\sqrt{2}\cdot(-4)=9+16\sqrt{2}>0$

$\therefore$ 서로 다른 두 개의 실근, 즉 2개

(2) $D=(-3)^2-4\cdot1\cdot4=-7<0$

$\therefore$ 근이 없다. 즉, 0개

(3) 양변을 9로 나누면 $x^2-4x+4=0$

$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot4=0$

$\therefore$ 중근, 즉 1개

18 주어진 이차방정식을 정리하면

$x^2+2x+k-9=0$

중근을 가지려면

$D=2^2-4\cdot1\cdot(k-9)=0,\ 4-4k+36=0$

$4k=40 \qquad \therefore k=10$

다른 풀이

$\dfrac{D}{4}=1^2-(k-9)=0$

$1-k+9=0 \qquad \therefore k=10$

19 주어진 방정식의 근이 중근 $x=3$이므로

$3(x-3)^2=0$, 즉 $3x^2-18x+27=0$

따라서 $3x^2+ax+b=0$과 계수를 비교하면

$a=-18,\ b=27$

$\therefore a+b=-18+27=9$

20 $x^2-(k+2)x+4=0$이 중근을 가지므로

$D=\{-(k+2)\}^2-4\cdot1\cdot4=0$

$k^2+4k-12=0,\ (k+6)(k-2)=0$

$\therefore k=-6$ 또는 $k=2$

따라서 -6, 2가 $x^2+ax+b=0$의 두 근이므로 x에 -6, 2를 각각 대입하면

$36-6a+b=0 \qquad \therefore -6a+b=-36 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$4+2a+b=0 \qquad \therefore 2a+b=-4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=-12$

$\therefore a+b=4-12=-8$

21 (1) $D=(-2)^2-4\cdot1\cdot m>0$이므로

$4-4m>0 \qquad \therefore m<1$

(2) $D=(-2)^2-4\cdot1\cdot m<0$이므로

$4-4m<0 \qquad \therefore m>1$

다른 풀이

(1) $\dfrac{D}{4}=(-1)^2-m>0 \qquad \therefore m<1$

(2) $\dfrac{D}{4}=(-1)^2-m<0 \qquad \therefore m>1$

2 STEP 실력 높이기

본문 57~59쪽

1 $11+8\sqrt{2}$ **2** ⑤ **3** $\dfrac{2+3\sqrt{2}}{2}$

4 $x=\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}-1$ **5** 10

6 $x=2\pm\sqrt{7}$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

7 $x=-2$ 또는 $x=6$ **8** $2k^2+4$ **9** 2개 **10** $\dfrac{33}{2}$

11 $a=-4,\ b=5$ **12** 합 : 1, 곱 : 0 **13** -1

1 주어진 방정식에 $x=1+\sqrt{2}$를 대입하면

$3(1+\sqrt{2})^2+2(1+\sqrt{2})-a=0$

$3(3+2\sqrt{2})+2+2\sqrt{2}-a=0$

$9+6\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}-a=0$

$11+8\sqrt{2}-a=0 \qquad \therefore a=11+8\sqrt{2}$

2 ① $(x-2)^2=0 \qquad \therefore x=2$ (중근)

② $(x-2)(x+6)=0 \qquad \therefore x=2$ 또는 $x=-6$

③ $(x+6)(x-5)=0 \qquad \therefore x=-6$ 또는 $x=5$

④ $(2x+1)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=1$

⑤ 근의 공식을 이용하면 $x=2\pm\sqrt{3}$

따라서 ⑤는 유리수인 해를 갖지 않는다.

3 $x^2-2\sqrt{2}x+2=0$에서

$(x-\sqrt{2})^2=0 \qquad \therefore x=\sqrt{2}$ (중근)

즉, $\alpha=\sqrt{2}$이고, $1<\sqrt{2}<2$이므로

$n=1,\ m=\sqrt{2}-1$

$$\therefore a+\frac{1}{n-m}=\sqrt{2}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\frac{2+\sqrt{2}}{2}=\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$$

4 주어진 식의 양변에 $\sqrt{2}-1$을 곱하면

$x^2+(1-2\sqrt{2})x+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=0$

$(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{2}+1)=0$

$\therefore x=\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}-1$

5 $\alpha\neq0$이므로 $\alpha^2-3\alpha+1=0$의 양변을 α로 나누면

$\alpha-3+\frac{1}{\alpha}=0 \quad \therefore \alpha+\frac{1}{\alpha}=3$

$\therefore$ (주어진 식)$=\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)+\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$

$=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2+\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$

$=3^2-2+3=10$

6 $|x^2-4x|=3 \iff x^2-4x=3$ 또는 $x^2-4x=-3$

(i) $x^2-4x=3$, 즉 $x^2-4x-3=0$일 때,

$x=2\pm\sqrt{7}$

(ii) $x^2-4x=-3$, 즉 $x^2-4x+3=0$일 때,

$(x-1)(x-3)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=3$

(i), (ii)에서 $x=2\pm\sqrt{7}$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

7 $f(x)$가 이차식이므로 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$로 놓으면 조건 Ⅰ에서 $f(0)=1$이므로 $c=1$

조건 Ⅱ에서

$f(x+2)-f(x)$

$=a(x+2)^2+b(x+2)+c-(ax^2+bx+c)$

$=ax^2+4ax+4a+bx+2b+c-ax^2-bx-c$

$=4ax+4a+2b$

$4ax+4a+2b=4x-2$이므로

$4a=4 \quad \therefore a=1$

$4a+2b=-2,\ 4+2b=-2 \quad \therefore b=-3$

따라서 $f(x)=x^2-3x+1$이므로

$x^2-3x+1=x+13$

$x^2-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=6$

8 주어진 이차방정식의 x에 α, β를 각각 대입하면

$\alpha^2-k\alpha-1=0,\ \beta^2-k\beta-1=0$

$\alpha\neq0$, $\beta\neq0$이므로 양변을 각각 α, β로 나누면

$\alpha-\frac{1}{\alpha}=k,\ \beta-\frac{1}{\beta}=k$

또한, $\alpha<0$, $\beta>0$이므로

$\alpha+\frac{1}{\alpha}=-\sqrt{\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2+4}=-\sqrt{k^2+4}$

$\beta+\frac{1}{\beta}=\sqrt{\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)^2+4}=\sqrt{k^2+4}$

$\alpha^2+\alpha+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)+\alpha+\frac{1}{\alpha}$

$=\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2+2+\alpha+\frac{1}{\alpha}$

$=k^2+2-\sqrt{k^2+4}$

$\beta^2+\beta+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}=\left(\beta^2+\frac{1}{\beta^2}\right)+\beta+\frac{1}{\beta}$

$=\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)^2+2+\beta+\frac{1}{\beta}$

$=k^2+2+\sqrt{k^2+4}$

$\therefore$ (주어진 식)$=k^2+2-\sqrt{k^2+4}+k^2+2+\sqrt{k^2+4}$

$=2k^2+4$

다른 풀이

주어진 이차방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=k, \alpha\beta=-1$이다.

따라서 곱셈 공식의 변형에 의해 주어진 식을 변형하면

(주어진 식)$=(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha+\beta)+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$

$+\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$+\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$

$=k^2+2+k+\frac{k}{-1}+\frac{k^2+2}{1}$

$=2k^2+4$

9 $x^2-2ax+b^2+1=0$이 실근을 가지므로

$\frac{D}{4}=(-a)^2-1\cdot(b^2+1)=a^2-b^2-1\geq0$

$\therefore a^2\geq b^2+1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또한, $x^2+4ax+2b=0$에서

$\frac{D'}{4}=(2a)^2-1\cdot2b=4a^2-2b$

㉠에 의해

$4a^2-2b\geq4(b^2+1)-2b=4\left(b-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{4}>0$

이므로 서로 다른 2개의 실근을 갖는다.

10 $x=-\frac{3}{2}$을 주어진 이차방정식에 대입하면

$4\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)^2=\beta^2,\ \beta^2=81$

$\therefore \beta=9\ (\because \beta>0)$

따라서 $4(x-3)^2=81$이므로

$(x-3)^2=\frac{81}{4},\ x-3=\pm\frac{9}{2}$

$\therefore x=\frac{15}{2}$ 또는 $x=-\frac{3}{2}$

$\therefore \alpha=\frac{15}{2}$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{15}{2}+9=\frac{33}{2}$

11 $x^2+ax+b-1=0$이 중근 $x=2$를 가지므로

$(x-2)^2=0$, 즉 $x^2-4x+4=0$

따라서 $a=-4$, $b-1=4$ 이므로

$a=-4$, $b=5$

12 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$ 이고

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=3$

또한, 이차방정식 $f(2x+1)=0$ 에서 $2x+1=\alpha$ 또는 $2x+1=\beta$ 를 만족하는 x 가 $f(2x+1)=0$ 의 근이다.

$2x+1=\alpha$ 에서 $x=\dfrac{\alpha-1}{2}$

$2x+1=\beta$ 에서 $x=\dfrac{\beta-1}{2}$

따라서 이차방정식 $f(2x+1)=0$ 의 두 근은

$\dfrac{\alpha-1}{2}$, $\dfrac{\beta-1}{2}$ 이므로

(i) 두 근의 합은

$$\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}$$
$$=\frac{4-2}{2}=1$$

(ii) 두 근의 곱은

$$\frac{\alpha-1}{2}\times\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}{4}$$
$$=\frac{3-4+1}{4}=0$$

13 $D=(2k-1)^2-4k^2\geq0$ 에서

$-4k+1\geq0 \qquad \therefore k\leq\dfrac{1}{4}$

이때 이차방정식이므로 $k\neq0$

$\therefore k<0$ 또는 $0<k\leq\dfrac{1}{4}$

따라서 정수 k 의 최댓값은 -1 이다.

3 STEP 최고 실력 완성하기 본문 60~62쪽

1 $-1\leq x<0$ 또는 $2\leq x<3$

2 $x=-2$ 또는 $x=\sqrt{2}$ **3** 161

4 $x=1$, $y=3$ **5** 정삼각형

6 $(2,\ 1)$, $(4,\ 4)$, $(6,\ 9)$

7 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{7}}{2}$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-6$

8 $\dfrac{4}{3}$ 또는 $\dfrac{14}{3}$ **9** $x=1$, $y=-2$

10 $a=0$, $b\neq0$ 또는 $a\neq0$, b^2-4ac 가 0 또는 제곱수

11 $(2x-3)(3x-4)$ **12** -2

1 주어진 방정식은 $([x]+1)([x]-2)=0$

$\therefore [x]=-1$ 또는 $[x]=2$

(i) $[x]=-1$일 때, $-1\leq x<0$

(ii) $[x]=2$일 때, $2\leq x<3$

(i), (ii)에 의하여

$-1\leq x<0$ 또는 $2\leq x<3$

2 $\sqrt{x^2}=|x|$ 이므로 주어진 방정식은

$x^2+|x|=|x-1|+3$

(i) $x<0$일 때,

$x^2-x=-x+1+3$

$x^2=4 \qquad \therefore x=-2\ (\because x<0)$

(ii) $0\leq x<1$일 때,

$x^2+x=-x+1+3$

$x^2+2x-4=0$, $x=-1\pm\sqrt{5}$

$\therefore$ 근이 없다. $(\because 0\leq x<1)$

(iii) $x\geq1$일 때,

$x^2+x=x-1+3$

$x^2=2 \qquad \therefore x=\sqrt{2}\ (\because x\geq1)$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $x=-2$ 또는 $x=\sqrt{2}$

3 $\alpha\neq0$ 이므로 $\alpha^2-5\alpha+1=0$ 의 양변을 α 로 나누면

$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=5$

$\therefore$ (주어진 식)

$$=\left(\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}\right)+2\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)+\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$$
$$=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^3-3\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+2\left\{\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2\right\}+\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$$
$$=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^3+2\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)-4$$
$$=125+50-10-4=161$$

4 $x+y=m$, $x-y=n$ 이라 하면

$m^2-2m-8=0$, $(m+2)(m-4)=0$

$\therefore m=4\ (\because m>0)$

$n^2+4n+4=0$, $(n+2)^2=0$

$\therefore n=-2$

따라서 $x+y=4$, $x-y=-2$ 이므로

두 식을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=3$

5 $x^2-(a+b)x+ab+x^2-(b+c)x+bc$
$+x^2-(c+a)x+ca=0$

$3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$

이 이차방정식이 중근을 가지므로

$\dfrac{D}{4}=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=0$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

양변에 2를 곱하면

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$a-b=b-c=c-a=0$

$\therefore a=b=c$

따라서 세 변의 길이가 같은 정삼각형이다.

6 $x=a-\sqrt{b}$를 주어진 이차방정식에 대입하면

$(a-\sqrt{b})^2-a(a-\sqrt{b})+b=0$

$a^2-2a\sqrt{b}+b-a^2+a\sqrt{b}+b=0$, $a\sqrt{b}=2b$

$\therefore a=2\sqrt{b}$

그런데 a가 자연수이면 b는 제곱수이므로

$b=1$일 때, $a=2$

$b=4$일 때, $a=4$

$b=9$일 때, $a=6$

$\therefore (a, b)=(2, 1), (4, 4), (6, 9)$

7 $x^2+5x=t$로 치환하면 주어진 방정식은

$2(x^2+5x)^2-3(x^2+5x)-54=0$이므로

$2t^2-3t-54=0$, $(2t+9)(t-6)=0$

$\therefore t=-\frac{9}{2}$ 또는 $t=6$

(i) $t=-\frac{9}{2}$일 때, $x^2+5x=-\frac{9}{2}$

$2x^2+10x+9=0 \qquad \therefore x=\frac{-5\pm\sqrt{7}}{2}$

(ii) $t=6$일 때, $x^2+5x=6$

$x^2+5x-6=0$, $(x-1)(x+6)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-6$

(i), (ii)에 의하여

$x=\frac{-5\pm\sqrt{7}}{2}$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-6$

8 $a^2-6ab+8b^2=0$에서

$(a-2b)(a-4b)=0 \qquad \therefore a=2b$ 또는 $a=4b$

(i) $a=2b$일 때,

$$(\text{주어진 식})=\frac{4\cdot 4b^2-8b^2}{3\cdot 2b\cdot b}=\frac{8b^2}{6b^2}=\frac{4}{3}$$

(ii) $a=4b$일 때,

$$(\text{주어진 식})=\frac{4\cdot 16b^2-8b^2}{3\cdot 4b\cdot b}=\frac{56b^2}{12b^2}=\frac{14}{3}$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 값은 $\frac{4}{3}$ 또는 $\frac{14}{3}$

9 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$5x^2+2(2y-1)x+2y^2+4y+5=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠에서 x가 실수이므로

$\frac{D}{4}=(2y-1)^2-5(2y^2+4y+5)\ge 0$

$-6y^2-24y-24\ge 0$

$y^2+4y+4\le 0$, $(y+2)^2\le 0$

y는 실수이므로 $(y+2)^2<0$일 수 없다.

즉, $y+2=0 \qquad \therefore y=-2$

이것을 ㉠에 대입하면

$5x^2-10x+5=0$, $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0 \qquad \therefore x=1$

10 (i) $a=0$일 때, 주어진 방정식은 $bx+c=0$

$b\ne 0$이면 $x=-\frac{c}{b}$ (유리수)

$b=0$일 때, $\begin{cases} c\ne 0 \text{이면 근이 없다.} \\ c=0 \text{이면 근이 무수히 많다.(항등식)} \end{cases}$

(ii) $a\ne 0$일 때 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$가 유리수가 되려면

b^2-4ac가 0 또는 제곱수이어야 한다.

(i), (ii)에 의하여

$a=0$, $b\ne 0$ 또는 $a\ne 0$, b^2-4ac가 0 또는 제곱수

11 근의 공식을 이용하여 이차방정식 $6x^2-17x+12=0$의 두 근을 구하면

$x=\frac{-(-17)\pm\sqrt{(-17)^2-4\times 6\times 12}}{2\times 6}=\frac{17\pm\sqrt{1}}{12}$

에서 $x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

즉, $6x^2-17x+12=a\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)$이고 x^2의 계수가 6이므로 $a=6$

따라서 $6x^2-17x+12$는

$6\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)=(2x-3)(3x-4)$로 인수분해된다.

12 이차함수 $y=x^2-2x-1$의 두 변수 x, y는 항상 실수이다.

따라서 x에 대한 이차방정식 $x^2-2x-1-y=0$은 실근을 갖게 되어 판별식 $D\ge 0$이므로

$D=(-2)^2-4\times 1\times(-1-y)\ge 0$, $4+4+4y\ge 0$

$\therefore y\ge -2$

따라서 주어진 이차함수의 최솟값은 y의 최솟값을 의미하므로 -2이다.

03 이차방정식의 활용

1 STEP 주제별 실력다지기

본문 64~68쪽

1 -45 **2** (1) $-\frac{4}{3}$ (2) 22 (3) $\frac{100}{9}$ (4) -103

3 68 **4** -12 **5** $\sqrt{57}$

6 (1) $x^2-6x+1=0$ (2) $x^2-x-2=0$

(3) $x^2+6x+1=0$ **7** $-\frac{5}{2}$ **8** -3

9 $a=\pm\sqrt{3}$, $b=1$ **10** $x^2-23x+126=0$

11 $-1\le a<0$ **12** $-\frac{1}{8}\le a<0$ **13** $a>0$

14 -2 **15** $a=1$ 또는 $a=3$

16 (1) $x=\pm3$ (2) $x=1\pm\sqrt{6}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

17 7 **18** 6

19 $x=4$, $y=16$ 또는 $x=16$, $y=4$

20 $(10,\ 1)$, $(18,\ 15)$, $(50,\ 49)$

21 $(3+\sqrt{5})$ cm **22** 28 cm^2 **23** 20분

24 $(8-4\sqrt{2})$ cm

1 $x^2-3x-6=0$의 두 근을 α, β라고 하면

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-6$

이므로 $3x^2+ax+b=0$의 두 근은 $x=3$ 또는 $x=-6$이다. 근과 계수의 관계에서

$3+(-6)=-\frac{a}{3}$, $3\times(-6)=\frac{b}{3}$

$\therefore a=9$, $b=-54$

$\therefore a+b=-45$

2 $x^2-4x-3=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-3$

(1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{4}{3}$

(2) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=16+6=22$

(3) $\frac{\beta}{\alpha^2}+\frac{\alpha}{\beta^2}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2\beta^2}$

$=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^2}$

$=\frac{100}{9}$

(4) $(\alpha-3\beta+1)(\beta-3\alpha+1)$

$=\alpha\beta-3\alpha^2+\alpha-3\beta^2+9\alpha\beta-3\beta+\beta-3\alpha+1$

$=-3(\alpha^2+\beta^2)-2(\alpha+\beta)+10\alpha\beta+1$

$=-3\cdot22-2\cdot4+10\cdot(-3)+1$

$=-103$

3 $\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=-8$이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=36+32=68$

4 두 근을 α, β라고 하면 $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=\frac{k}{2}$이므로

$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=5$에서

$\sqrt{1-2k}=5$, $1-2k=25$

$\therefore k=-12$

다른 풀이

두 근의 차가 5이므로 두 근을 α, $\alpha+5$라고 하면

(두 근의 합)$=\alpha+(\alpha+5)=1$에서 $2\alpha=-4$ $\therefore \alpha=-2$

(두 근의 곱)$=\alpha(\alpha+5)=\frac{k}{2}$에서 $\frac{k}{2}=-6$

$\therefore k=-12$

5 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-m$, $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=n$

$\therefore m=-\frac{5}{6}$, $n=\frac{1}{6}$

따라서 $\frac{m}{5}x^2+3nx+2=0$은

$-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x+2=0$에서

$x^2-3x-12=0$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 두 근을 α, β라고 하면

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-12$이므로 두 근의 차는

$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$=\sqrt{9+48}=\sqrt{57}$

6 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$이므로

(1) $x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0$에서

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=2^2-2\times(-1)=6$

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=1$

$\therefore x^2-6x+1=0$

(2) $x^2-(\alpha+\beta+\alpha\beta)x+(\alpha+\beta)\alpha\beta=0$에서

$\alpha+\beta+\alpha\beta=2-1=1$

$(\alpha+\beta)\alpha\beta=2\times(-1)=-2$

$\therefore x^2-x-2=0$

(3) $x^2-\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\right)x+\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}=0$에서

$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{6}{-1}=-6$

$\therefore x^2+6x+1=0$

7 $2x^2+3x-3=0$의 두 근을 α, β라고 하면

$\alpha+\beta=-\frac{3}{2}$, $\alpha\beta=-\frac{3}{2}$

따라서 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$이므로

$\alpha+\beta+2=-a$에서 $-\frac{3}{2}+2=-a$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2}$

$(\alpha+1)(\beta+1)=b$에서

$b=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+1=-2$

$\therefore a+b=-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{2}$

8 계수가 유리수인 이차방정식의 한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이므로

근과 계수의 관계에 의해

$-a=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$

$b=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$

따라서 $a=-2$, $b=-1$이므로 $a+b=-3$

9 $\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$ 이고 $\alpha^2+\beta^2=1$, $\alpha^2\beta^2=1$ 이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$\quad=a^2-2b=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$(\alpha\beta)^2=b^2=1$ $\quad\therefore b=\pm1$

(i) $b=1$일 때, ㉠에서 $a^2=3$ $\quad\therefore a=\pm\sqrt{3}$

(ii) $b=-1$일 때, ㉠에서 $a^2=-1$ (부적합)

따라서 (i), (ii)에 의하여 $a=\pm\sqrt{3}$, $b=1$

10 $p+q=9$ 에서 p, q 가 모두 소수이므로

$p=2$, $q=7$ 또는 $p=7$, $q=2$

$\therefore pq=14$

따라서 9, 14 를 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2-(9+14)x+9\times14=0$

$\therefore x^2-23x+126=0$

11 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라고 하면

(i) $D=4+4a\geq0$ $\quad\therefore a\geq-1$

(ii) $\alpha+\beta=2>0$

(iii) $\alpha\beta=-a>0$ $\quad\therefore a<0$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $-1\leq a<0$

12 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라고 하면

(i) $D=1+8a\geq0$ $\quad\therefore a\geq-\frac{1}{8}$

(ii) $\alpha+\beta=-\frac{1}{2}<0$

(iii) $\alpha\beta=-\frac{a}{2}>0$ $\quad\therefore a<0$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $-\frac{1}{8}\leq a<0$

13 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라고 하면

$\alpha\beta=-\frac{a}{2}<0$ $\quad\therefore a>0$

14 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라고 하면

$\alpha+\beta=3$에서 $\alpha=1$, $\beta=2$ 또는 $\alpha=2$, $\beta=1$이므로

$\alpha\beta=a+4=2$ $\quad\therefore a=-2$

15 두 근의 곱은 $-3<0$ 이므로 두 근은 절대값은 같고 부호가 서로 다르다.

따라서 (두 근의 합)$=0$ 이므로

(두 근의 합)$=(a-1)(a-3)=0$ 에서

$a=1$ 또는 $a=3$

16 (1) $2|x|^2-|x|-15=0$ 이므로

$(2|x|+5)(|x|-3)=0$

$|x|=3$ ($\because |x|\geq0$)

$\therefore x=\pm3$

(2) $x^2-2x-3=2$ 또는 $x^2-2x-3=-2$

(i) $x^2-2x-3=2$ 에서

$x^2-2x-5=0$

$\therefore x=1\pm\sqrt{6}$

(ii) $x^2-2x-3=-2$ 에서

$x^2-2x-1=0$

$\therefore x=1\pm\sqrt{2}$

(i), (ii)에 의하여

$x=1\pm\sqrt{6}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

17 두 근을 α, $\alpha+5$ 로 놓으면

근과 계수의 관계에서

$\alpha+(\alpha+5)=7$ $\quad\therefore \alpha=1$

$\alpha(\alpha+5)=k-1$, $k-1=6$

$\therefore k=7$

18 두 근을 2α, 3α 로 놓으면

근과 계수의 관계에서

$2\alpha+3\alpha=5$ $\quad\therefore \alpha=1$

$2\alpha\times3\alpha=2\times3=m$ $\quad\therefore m=6$

19 $xy-3x-3y=4$에서

$x(y-3)-3(y-3)-9=4$

$(x-3)(y-3)=13$ 이므로

$x-3=1$, $y-3=13$ 또는 $x-3=13$, $y-3=1$

$\therefore x=4$, $y=16$ 또는 $x=16$, $y=4$

20 $\sqrt{m^2-99}=n$ 의 양변을 제곱하면

$m^2-99=n^2$, $m^2-n^2=99$

$\therefore (m+n)(m-n)=99$

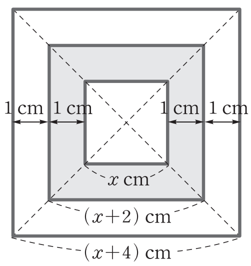
그런데 $m+n>0$ 이고, $m+n>m-n$이므로

$(m+n,\ m-n)=(99,\ 1),\ (33,\ 3),\ (11,\ 9)$

(i) $m+n=99$, $m-n=1$ 일 때, 두 식을 연립하여 풀면
$(m,\ n)=(50,\ 49)$
(ii) $m+n=33$, $m-n=3$ 일 때, 두 식을 연립하여 풀면
$(m,\ n)=(18,\ 15)$
(iii) $m+n=11$, $m-n=9$ 일 때, 두 식을 연립하여 풀면
$(m,\ n)=(10,\ 1)$
따라서 순서쌍 $(m,\ n)$은
$(10,\ 1)$, $(18,\ 15)$, $(50,\ 49)$

21 처음 정사각형의 한 변의 길이를 x cm로 놓으면 각 변의 길이를 2 cm씩 늘린 정사각형의 넓이는 $(x+2)^2\ \text{cm}^2$이고, 각 변의 길이를 2 cm씩 줄인 정사각형의 넓이는 $(x-2)^2\ \text{cm}^2$이다.
$(x+2)^2=5(x-2)^2$이므로
$x^2+4x+4=5x^2-20x+20$
$4x^2-24x+16=0$
$x^2-6x+4=0$
$\therefore x=3+\sqrt{5}\ (\because x>2)$
따라서 처음 정사각형의 한 변의 길이는 $(3+\sqrt{5})$ cm이다.

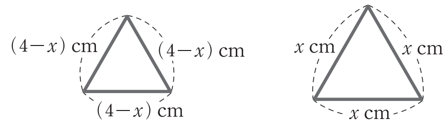
22 가장 작은 정사각형의 한 변의 길이를 x cm로 놓으면 중간 크기의 정사각형의 넓이는 $(x+2)^2\ \text{cm}^2$이고, 가장 큰 정사각형의 넓이는 $(x+4)^2\ \text{cm}^2$이다.



$(x+4)^2=(x+2)^2+x^2$이므로
$x^2-4x-12=0$
$(x-6)(x+2)=0$
$\therefore x=6(\because x>0)$
따라서 구하는 넓이는
$(x+2)^2-x^2=64-36=28\ (\text{cm}^2)$

23 원의 둘레의 길이를 l m라 하면 한 바퀴를 돌 때는 $t=14$일 때이므로
$l=14^2+14=210\ (\text{m})$
따라서 두 바퀴째까지 도는 데 걸리는 시간을 x분으로 놓으면 $x^2+x=420$이므로
$x^2+x-420=0$
$(x-20)(x+21)=0$
$\therefore x=20(\because x>0)$
따라서 걸리는 시간은 20분이다.

24 큰 정삼각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 작은 정삼각형의 한 변의 길이는 $\dfrac{12-3x}{3}=4-x(\text{cm})$이다.



두 정삼각형은 항상 닮음이므로 길이의 비의 제곱은 넓이의 비이다.
따라서 $(4-x)^2 : x^2=1 : 2$에서
$2x^2-16x+32=x^2$
$x^2-16x+32=0$
$\therefore x=8\pm4\sqrt{2}$
이때 $4-x>0$, $4-x<x$이므로 $2<x<4$
따라서 큰 정삼각형의 한 변의 길이는 $(8-4\sqrt{2})$ cm이다.

2 STEP 실력 높이기

본문 69~72쪽

1 14　**2** $p=-25$, $q=156$　**3** ②　**4** 24
5 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$　**6** 6　**7** $a=c$
8 $x^2-4\sqrt{3}x+8=0$　**9** $x=\dfrac{-7\pm\sqrt{73}}{2}$　**10** 2
11 $0<a<\dfrac{3}{2}$　**12** $x^2+43x+42=0$
13 $x^2+\dfrac{22}{5}x+\dfrac{1}{5}=0$　**14** $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$
15 $\dfrac{9}{4}$　**16** 4　**17** $-2+2\sqrt{5}$

1 주어진 이차방정식에 α, β를 대입하면
$\alpha^2-4\alpha+1=0$　$\therefore \alpha^2-3\alpha+1=\alpha$
$\beta^2-4\beta+1=0$　$\therefore \beta^2-3\beta+1=\beta$
또, 근과 계수의 관계에서 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=1$
$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$
$=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{4^2-2\times1}{1}=14$

2 두 근을 α, $\alpha+1\ (\alpha>0)$이라 하면
$(\alpha+1)^2-\alpha^2=25$에서
$2\alpha+1=25$　$\therefore \alpha=12$
즉, 두 근은 12, 13이므로 근과 계수의 관계에서
$12+13=-p$, $12\times13=q$
$\therefore p=-25$, $q=156$

3 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면
$\alpha>0$, $\beta>0$에서 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}>0$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}>0$

$\therefore ab<0,\ ac>0$

즉, a, b는 서로 다른 부호이고 a, c는 서로 같은 부호이므로 b, c는 서로 다른 부호이다.

따라서 $bx^2+cx+a=0$의 두 근을 γ, δ라 하면

$\gamma+\delta=-\frac{c}{b}>0,\ \gamma\delta=\frac{a}{b}<0$

이므로 $\gamma\delta<0$에서 두 근의 부호는 서로 다르고,

$\gamma+\delta>0$에서 양의 근이 음의 근보다 절댓값이 크다.

4 연속된 두 홀수를 $2\alpha-1$, $2\alpha+1$로 놓으면

$(2\alpha-1)(2\alpha+1)=143$이므로

$4\alpha^2-1=143,\ \alpha^2=36$

$\therefore \alpha=6\ (\because \alpha>0)$

따라서 두 홀수는 11, 13이므로 합은

$11+13=24$

5 은정이가 구한 두 근이 $2+\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$이므로 은정이가 푼 이차방정식은

$x^2-\{(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})\}x+(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=0$

$\therefore x^2-4x+2=0$

현정이가 구한 두 근이 6, -1이므로 현정이가 푼 이차방정식은

$x^2-(6-1)x+6\cdot(-1)=0$

$\therefore x^2-5x-6=0$

이때 은정이는 상수항 2를, 현정이는 일차항의 계수 -5를 옳게 보았으므로

$a=-5,\ b=2$

따라서 원래의 이차방정식은 $x^2-5x+2=0$이므로

$x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$

6 두 근이 α, β이고 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$이므로 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-2x-1=0$

근이 α이므로 대입하면

$\alpha^2-2\alpha-1=0$

$\alpha\neq0$이므로 양변을 α로 나누면

$\alpha-\frac{1}{\alpha}=2$

$\therefore \alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2+2=6$

7 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$ …… ㉠

또, $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$이므로

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{b}{a},\ \frac{1}{\alpha\beta}=\frac{c}{a}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{b}{c}=-\frac{b}{a}$

$\therefore a=c\ (\because b\neq0)$ …… ㉢

또, ㉠, ㉡에서

$\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{a}{c}=\frac{c}{a}$이므로

$a^2=c^2,\ (a-c)(a+c)=0$

$\therefore a=c$ 또는 $a=-c$ …… ㉣

따라서 ㉢, ㉣에서 $a=c$

8 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-8$이므로

$(|\alpha|+|\beta|)^2=\alpha^2+\beta^2+2|\alpha\beta|$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|$

$=16+16+16=48$

$\therefore |\alpha|+|\beta|=4\sqrt{3}\ (\because |\alpha|+|\beta|>0)$

$|\alpha|\cdot|\beta|=|\alpha\beta|=8$

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2-4\sqrt{3}x+8=0$

9 계수가 유리수인 이차방정식의 한 근이 $3+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $3-\sqrt{2}$이므로

근과 계수의 관계에 의해

$-a=(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})=6$

$b=(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=7$

따라서 $a=-6$, $b=7$이므로 이차방정식

$x^2+7x-6=0$의 근은 $x=\frac{-7\pm\sqrt{73}}{2}$

10 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라고 하면

한 근만 0이므로 $\alpha+\beta\neq0$, $\alpha\beta=0$

(i) $\alpha+\beta=2k\neq0$ $\quad\therefore k\neq0$

(ii) $\alpha\beta=k^2-2k=k(k-2)=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=2$

따라서 (i), (ii)에 의하여 $k=2$

11 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라고 하면

$\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta<0$이다.

$\alpha+\beta=-a<0$에서 $a>0$

$\alpha\beta=2a-3<0$에서 $a<\frac{3}{2}$

$\therefore 0<a<\frac{3}{2}$

12 근과 계수의 관계에서

$\frac{3}{2}+2=-\frac{p}{2},\ \frac{3}{2}\times2=\frac{q}{2}$

$\therefore p=-7,\ q=6$

따라서 $p+q=-1$, $pq=-42$를 두 근으로 하고 x^2의

계수가 1 인 이차방정식은
$x^2-(-1-42)x+(-1)\times(-42)=0$
$\therefore\ x^2+43x+42=0$

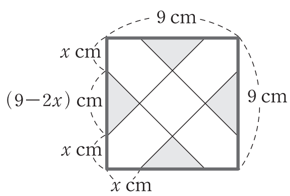
13 $\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=-5$ 이므로

$$\frac{\beta+1}{\alpha}+\frac{\alpha+1}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{9+10+3}{-5}=-\frac{22}{5}$$
$$\frac{\beta+1}{\alpha}\times\frac{\alpha+1}{\beta}=\frac{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{-5+3+1}{-5}=\frac{1}{5}$$

따라서 구하는 이차방정식은
$x^2-\left(-\frac{22}{5}\right)x+\frac{1}{5}=0$
$\therefore\ x^2+\frac{22}{5}x+\frac{1}{5}=0$

14 (i) $x\geq2$일 때, 주어진 이차방정식은
$x^2-(x-2)=1,\ x^2-x+1=0$
이때 $D=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$이므로 근이 없다.
(ii) $x<2$일 때, 주어진 이차방정식은
$x^2+(x-2)=1,\ x^2+x-3=0$
$\therefore\ x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$
따라서 (i), (ii)에 의하여 $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

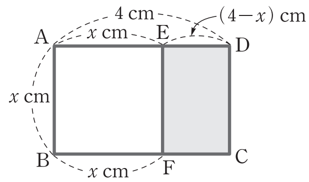
15 잘라낸 직각이등변삼각형의 빗변의 길이가 $(9-2x)$ cm 이므로 직각을 낀 두 변의 길이는 $\left(\frac{9-2x}{\sqrt{2}}\right)$ cm 이다.



따라서 잘라낸 부분의 넓이 S는
$S=\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{9-2x}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}\times4=(9-2x)^2$
잘라낸 부분의 넓이는 처음 정사각형의 넓이의
$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ 이므로
$(9-2x)^2=81\times\frac{1}{4}$
$4x^2-36x+81=\frac{81}{4}$
$16x^2-144x+243=0$
$(4x-9)(4x-27)=0$
$\therefore\ x=\frac{9}{4}\left(\because\ 0<x<\frac{9}{2}\right)$

16 (길의 넓이)$=15x+x(15-x)$
$=-x^2+30x$
이므로
(꽃밭의 넓이)$=15^2-(-x^2+30x)$
$=x^2-30x+225$
따라서 $x^2-30x+225=121$ 에서
$x^2-30x+104=0,\ (x-4)(x-26)=0$
$\therefore\ x=4\ (\because\ 0<x<15)$

17 오른쪽 그림에서



$\overline{DE}=(4-x)$ cm,
$\overline{CD}=x$ cm이므로
$\overline{DC}:\overline{ED}=\overline{AD}:\overline{AB}$
$x:(4-x)=4:x$
$x^2=4(4-x)$
$x^2+4x-16=0$
$\therefore\ x=-2+2\sqrt{5}\ (\because\ 0<x<4)$

3 STEP 최고 실력 완성하기

본문 73~74쪽

1 3	**2** 3	**3** 9개	**4** $p=3,\ q=2$
5 $\frac{11}{12}$	**6** -1	**7** 324	**8** $\frac{3+\sqrt{11}}{2}$
9 80분 후		**10** $-2<a<-1$	

1 주어진 식을 변형하면
$(x^2-2ax+a^2)+2(x-a)-3b+3=0$
$(x-a)^2+2(x-a)-3(b-1)=0$ …… ㉠
$x+1=a+b$ 이므로 $x-a=b-1$을 ㉠에 대입하면
$(b-1)^2+2(b-1)-3(b-1)=0$
$(b-1)^2-(b-1)=0$
$(b-1)(b-2)=0$
$\therefore\ b=1$ 또는 $b=2$
따라서 b 의 값들의 합은 $1+2=3$

2 $x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$을 곱하면
$(x-1)(x^2+x+1)=0$
$x^3-1=0$ $\quad\therefore\ x^3=1$
$\therefore\ \alpha^3=\beta^3=1$
즉, $\alpha^{10}=(\alpha^3)^3\alpha=\alpha,\ \beta^{10}=(\beta^3)^3\beta=\beta,$
$\alpha^5=\alpha^3\cdot\alpha^2=\alpha^2,\ \beta^5=\beta^3\cdot\beta^2=\beta^2$ 이고
$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=1$ 이므로

(주어진 식)$=\alpha+\beta+\alpha^2+\beta^2+5$

$=(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+5$

$=-1+(-1)^2-2+5$

$=3$

3 두 근을 m, n 이라 하면

$m+n=-1$ 이므로 $m=-1-n$

$mn=-a$ 에서 $a=n(n+1)$

그런데 $1\le a\le 100$ 인 자연수이므로

$a=1\cdot2,\ 2\cdot3,\ \cdots,\ 9\cdot10$ 의 9개이다.

4 두 근을 α, $\alpha+1$ 이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+1)=-p,\ \alpha(\alpha+1)=q$

q 가 소수이므로 $\alpha=\pm1$ 또는 $\alpha+1=\pm1$

이 중에서 $\alpha(\alpha+1)$이 소수가 되는 것은

$\alpha=1$ 또는 $\alpha=-2$ 인 경우이다.

(i) $\alpha=1$ 일 때 $p=-3,\ q=2$

(ii) $\alpha=-2$ 일 때 $p=3,\ q=2$

(i), (ii)에서 $p=3,\ q=2$

5 $(x+y)(x-y)=5\times7\times11$ 에서 $x+y>0$,

$x+y>x-y$이므로

(i) $x+y=385,\ x-y=1$ 일 때,

$x=193,\ y=192$

(ii) $x+y=77,\ x-y=5$ 일 때,

$x=41,\ y=36$

(iii) $x+y=55,\ x-y=7$ 일 때,

$x=31,\ y=24$

(iv) $x+y=35,\ x-y=11$ 일 때,

$x=23,\ y=12$

$\therefore a=193+41+31+23=288$,

$b=192+36+24+12=264$

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{264}{288}=\dfrac{11}{12}$

6 $x+y=1,\ xy=1$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

x, y 가 이차방정식 $t^2-t+1=0$ 의 두 근이라고 하면

$x^2-x+1=0$ 이므로 $(x+1)(x^2-x+1)=0$

$x^3+1=0\qquad \therefore x^3=-1$

마찬가지로 $y^3=-1$

$\therefore x^{104}+y^{98}=(x^3)^{34}x^2+(y^3)^{32}y^2$

$=x^2+y^2$

$=(x+y)^2-2xy$

$=1^2-2\cdot1$

$=-1$

7 세 자리의 양의 정수를 $100a+10b+c$ 라 하면

$\begin{cases} a\times(10b+c)=(10b+c)+48 & \cdots\cdots ㉠ \\ 10b+c=8a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면

$8a^2=8a+48,\ a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=3$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=3$ 이고 ㉡에서 $10b+c=24$ 이므로 $b=2,\ c=4$

따라서 구하는 정수는 324 이다.

8 $x^2+y^2=10$ 에서 $x^2=10-y^2$

$0\le y<1$ 이므로 $0\le y^2<1,\ -1<-y^2\le0$

$9<10-y^2\le10,\ 9<x^2\le10\qquad \therefore 3<x\le\sqrt{10}$

즉, x 의 정수 부분은 3 이므로 소수 부분은 $y=x-3$

$x^2+y^2=10$ 에 $y=x-3$ 을 대입하면

$x^2+(x-3)^2=10$

$2x^2-6x-1=0$

$\therefore x=\dfrac{3+\sqrt{11}}{2}\ (\because x>0)$

9 버스와 열차가 동시에 달린 시간을 t 라 하면

버스가 달린 거리는 at,

열차가 달린 거리는 bt^2 이다.

버스와 열차는 20분 후와 30분 후에 각각 만나므로

$\begin{cases} 20a=400b+6 \\ 30a=900b+6 \end{cases}$

$\therefore a=\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{1}{100}$

즉, x 분 동안 버스가 달린 거리는 $\dfrac{1}{2}x$ km,

열차가 달린 거리는 $\dfrac{1}{100}x^2$ km이고, 열차가 6 km 앞에서 출발하므로

$\dfrac{1}{100}x^2+6=\dfrac{1}{2}x+30$

$x^2-50x-2400=0$

$(x-80)(x+30)=0$

$\therefore x=80\ (\because x>0)$

따라서 출발한 지 80 분 후에 열차가 버스보다 30 km 앞서 달리게 된다.

10 주어진 방정식을 $x^2=t$ 로 치환하면

$t^2+2at+a+2=0\qquad \cdots\cdots ㉠$

㉠의 근을 α, β 라 하면 $t=\alpha$ 또는 $t=\beta$, 즉 $x^2=\alpha$ 또는 $x^2=\beta$ 이므로 서로 다른 네 실근을 가지려면

$\alpha\ne\beta,\ \alpha>0,\ \beta>0$이어야 한다. 즉,

(i) $\alpha+\beta=-2a>0\qquad \therefore a<0$

(ⅱ) $\alpha\beta=a+2>0 \qquad \therefore a>-2$

(ⅲ) $\alpha\neq\beta$, 즉 $\dfrac{D}{4}=a^2-(a+2)>0$ 이므로

$a^2-a-2>0$

$(a-2)(a+1)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>2$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$-2<a<-1$

Ⅱ 단원 종합 문제

본문 75~78쪽

1 ⑤ **2** ㄱ, ㄷ **3** $2x+2y-1$ **4** -10

5 5 **6** $(x+y+z)^2$ **7** $9-4\sqrt{5}$

8 $\left(a^2+\dfrac{2}{a^2}-1\right)^2$

9 $(x+1)(m-x-1)(m-x+1)$

10 $(x-2)(3x+4)$ **11** ②

12 $A+B=\dfrac{13}{16}$, $x=\dfrac{5\pm\sqrt{33}}{4}$ **13** 5

14 $a=3$, $b=0$ **15** $x=-1$, 0, 3, 4

16 $-\dfrac{1}{4}$ **17** $x=\dfrac{13\pm\sqrt{193}}{2}$ **18** 8

19 $6x^2+3x-1=0$ **20** $m=-4$, $n=2$

21 -6 **22** ① **23** $m=-1$ 또는 $m=7$

24 3 **25** 50 cm^2

1 $a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$

$=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

이므로 a^4-b^4의 인수가 아닌 것은 $(a+b)^2$이다.

2 ㄱ. $\dfrac{4}{9}x^2-\dfrac{2}{3}xy+\dfrac{1}{4}y^2=\left(\dfrac{2}{3}x\right)^2-2\times\dfrac{2}{3}x\times\dfrac{1}{2}y+\left(\dfrac{1}{2}y\right)^2$

$=\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{2}y\right)^2$

ㄴ. $x^2+9y^2-1-6xy=(x^2-6xy+9y^2)-1$

$=(x-3y)^2-1^2$

$=(x-3y-1)(x-3y+1)$

ㄷ. $(a+2b)^2-(3a-b)^2$

$=\{(a+2b)-(3a-b)\}\{(a+2b)+(3a-b)\}$

$=(-2a+3b)(4a+b)$

$=-(2a-3b)(4a+b)$

ㄹ. $x-3=t$로 치환하면

(주어진 식)$=2t^2+5t-3$

$=(t+3)(2t-1)$

$=\{(x-3)+3\}\{2(x-3)-1\}$

$=x(2x-7)$

따라서 인수분해가 바르게 된 것은 ㄱ, ㄷ이다.

3 $x^2+2xy+y^2-x-y-2=(x+y)^2-(x+y)-2$

$x+y=t$로 치환하면 주어진 식은

$t^2-t-2=(t-2)(t+1)$

$=(x+y-2)(x+y+1)$

따라서 두 일차식의 합은

$(x+y-2)+(x+y+1)=2x+2y-1$

4 두 이차식 x^2-mx+n, $2x^2+3x-m$은 $x-2$를 공통인 인수로 갖으므로

$x=2$를 $2x^2+3x-m$에 대입하면

$8+6-m=0 \qquad \therefore m=14$

$m=14$, $x=2$를 x^2-mx+n에 대입하면

$4-28+n=0 \qquad \therefore n=24$

$\therefore m-n=14-24=-10$

5 $x^2+6x+k=x^2+(a+b)x+ab$

이므로 $a+b=6$인 자연수 (a, b)는

$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$

이때 $k=ab$이므로 $k=5$, 8, 9

따라서 k의 최솟값은 5이다.

6 정의에 따라 식을 변형하면

(주어진 식)$=(x^2+2yz)+(y^2+2zx)+(z^2+2xy)$

$=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

$=(x+y+z)^2$

7 $\dfrac{2-a-a^2}{-a^2+10a-9}\div\dfrac{a^2+12a+27}{81-a^2}\times\dfrac{6-a-a^2}{(a+2)^2}$

$=\dfrac{-(a^2+a-2)}{-(a^2-10a+9)}\times\dfrac{-(a^2-81)}{a^2+12a+27}\times\dfrac{-(a^2+a-6)}{(a+2)^2}$

$=\dfrac{(a+2)(a-1)}{(a-1)(a-9)}\times\dfrac{(a-9)(a+9)}{(a+3)(a+9)}\times\dfrac{(a-2)(a+3)}{(a+2)^2}$

$=\dfrac{a-2}{a+2}=\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$

$=\dfrac{(\sqrt{5}-2)^2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=9-4\sqrt{5}$

8 $a^4-2a^2+5-\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{4}{a^4}$

$=\left(a^4+\dfrac{4}{a^4}\right)-2\left(a^2+\dfrac{2}{a^2}\right)+5$

$=\left\{\left(a^2+\dfrac{2}{a^2}\right)^2-4\right\}-2\left(a^2+\dfrac{2}{a^2}\right)+5$

$=\left(a^2+\frac{2}{a^2}\right)^2-2\left(a^2+\frac{2}{a^2}\right)+1$

이므로 $a^2+\frac{2}{a^2}=A$로 치환하면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=A^2-2A+1\\&=(A-1)^2\\&=\left(a^2+\frac{2}{a^2}-1\right)^2\end{aligned}$$

9 $x^3-(2m-1)x^2-(1+2m-m^2)x-1+m^2$

$=x^3-2mx^2+x^2-x-2mx+m^2x-1+m^2$

$=(x+1)m^2-2(x^2+x)m+(x^3+x^2-x-1)$

$=(x+1)m^2-2x(x+1)m+\{x^2(x+1)-(x+1)\}$

$=(x+1)m^2-2x(x+1)m+(x+1)^2(x-1)$

$=(x+1)\{m^2-2xm+(x+1)(x-1)\}$

$=(x+1)(m-x-1)(m-x+1)$

10 처음 이차식을 $3x^2+ax+b$라 하면

A는 x의 계수를 잘못 보았으므로 x^2의 계수와 상수항은 바르게 보았다.

즉, $(x+2)(3x-4)=3x^2+2x-8$에서 $b=-8$

B는 상수항을 잘못 보았으므로 x^2의 계수와 x의 계수는 바르게 보았다.

즉, $(x-1)(3x+1)=3x^2-2x-1$에서 $a=-2$

따라서 처음 이차식은 $3x^2-2x-8$이므로 인수분해하면

$3x^2-2x-8=(x-2)(3x+4)$

11 ① $x=2\pm\sqrt{2}$

② $(2x-1)(x+1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=-1$

③ $x=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}$

④ $\frac{D}{4}=2^2-1\cdot5=-1<0$이므로 실수의 범위에서 근이 없다.

⑤ $x=\frac{1\pm\sqrt{11}}{5}$

따라서 유리수의 범위에서 해를 갖는 것은 ②이다.

12 $2x^2-5x-1=0$ 의 양변을 2로 나누면

$x^2-\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}=0$, $x^2-\frac{5}{2}x=\frac{1}{2}$

$x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}=\frac{1}{2}+\frac{25}{16}$

$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{33}{16}$

$\therefore A=-\frac{5}{4}$, $B=\frac{33}{16}$

$\therefore A+B=\frac{13}{16}$

또한, 주어진 방정식의 근은

$x=\frac{5\pm\sqrt{33}}{4}$

13 근의 공식을 이용하면

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-3a}}{a}=\frac{1\pm\sqrt{b}}{2}$

이므로 $a=-2$, $b=1-3a$에서 $b=7$

$\therefore a+b=5$

14 주어진 방정식은 $|x|^2-|x|-6=0$ 이므로

$(|x|-3)(|x|+2)=0$

$\therefore |x|=3$ $(\because |x|>0)$

$\therefore x=\pm3$

따라서 $ax^2+bx-27=0$ 은

$a(x+3)(x-3)=0$, $a(x^2-9)=0$, $ax^2-9a=0$

이므로 $-9a=-27$, $b=0$

$\therefore a=3$, $b=0$

15 $(x^2-3x)^2-4(x^2-3x)=0$ 이므로

$x^2-3x=t$ 로 치환하면

$t^2-4t=0$, $t(t-4)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=4$

(i) $t=0$ 일 때, $x^2-3x=0$ 이므로

$x(x-3)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=3$

(ii) $t=4$일 때, $x^2-3x-4=0$

$(x-4)(x+1)=0$ $\quad\therefore x=4$ 또는 $x=-1$

따라서 (i), (ii)에서 $x=-1$, 0, 3, 4

16 $x^2-4mx+m=0$이 중근을 가지려면

$\frac{D}{4}=(-2m)^2-m=0$

$4m^2-m=0$, $m(4m-1)=0$

$\therefore m=0$ 또는 $m=\frac{1}{4}$

따라서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 두 근이 0, $\frac{1}{4}$ 이므로

$x\left(x-\frac{1}{4}\right)=0$, $x^2-\frac{1}{4}x=0$ 에서

$a=-\frac{1}{4}$, $b=0$

$\therefore a+b=-\frac{1}{4}$

17 $(x+1)(x-2)=-2x+4$ 에서

$x^2+x-6=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-6$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$$=(-1)^2-2\times(-6)$$
$$=13$$
따라서 이차방정식 $x^2-13x-6=0$ 을 풀면

$x=\dfrac{13\pm\sqrt{193}}{2}$

다른 풀이

$\alpha=2$, $\beta=-3$이라고 하고 주어진 이차방정식에 대입하면

$x^2-13x-6=0 \qquad \therefore x=\dfrac{13\pm\sqrt{193}}{2}$

18 α가 이차방정식 $x^2-2x-2=0$ 의 근이므로

$\alpha^2-2\alpha-2=0$

$\alpha\neq0$ 이므로 양변을 α 로 나누면

$\alpha-2-\dfrac{2}{\alpha}=0 \qquad \therefore \alpha-\dfrac{2}{\alpha}=2$

$\therefore \alpha^2+\dfrac{4}{\alpha^2}=\left(\alpha-\dfrac{2}{\alpha}\right)^2+2\cdot\alpha\cdot\dfrac{2}{\alpha}$

$=2^2+4=8$

19 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=-6$이므로

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{3}{-6}=-\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha\beta}=-\dfrac{1}{6}$

따라서 구하는 이차방정식의 두 근의 합이 $-\dfrac{1}{2}$,

곱이 $-\dfrac{1}{6}$이므로

$x^2+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{6}=0$

$\therefore 6x^2+3x-1=0$

20 계수가 유리수인 이차방정식의 한 근이 $2+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $2-\sqrt{2}$이므로

근과 계수의 관계에 의해

$-m=(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})=4$

$n=(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=2$

$\therefore m=-4,\ n=2$

21 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-\dfrac{a-1}{2},\ \alpha\beta=-\dfrac{a}{2}$

두 근의 차 $|\alpha-\beta|=\sqrt{2}$이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=\left(-\dfrac{a-1}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\dfrac{a}{2}\right)$

$=\dfrac{(a-1)^2}{4}+2a$

$=\dfrac{a^2+6a+1}{4}=2$

따라서 $a^2+6a+1=8$에서 $a^2+6a-7=0$이므로

근과 계수의 관계에 의해 a의 값들의 합은 -6이다.

22 주어진 식을 인수분해하면

$([x]+2)([x]-3)=0$

따라서 $[x]=-2$ 또는 $[x]=3$이므로

$-2\leq x<-1$ 또는 $3\leq x<4$

23 두 근을 α, β (α, β는 정수)라고 하면

$\alpha+\beta=1-m,\ \alpha\beta=m+1$

두 식을 더하여 m을 소거하면

$\alpha\beta+\alpha+\beta=2$에서

$\alpha(\beta+1)+(\beta+1)=3$

$(\alpha+1)(\beta+1)=3$

이고 $m=\alpha\beta-1$

(i) $\alpha+1=1,\ \beta+1=3$일 때

$\alpha=0,\ \beta=2$이므로 $m=-1$

(ii) $\alpha+1=3,\ \beta+1=1$일 때

$\alpha=2,\ \beta=0$이므로 $m=-1$

(iii) $\alpha+1=-1,\ \beta+1=-3$일 때

$\alpha=-2,\ \beta=-4$이므로 $m=8-1=7$

(iv) $\alpha+1=-3,\ \beta+1=-1$일 때

$\alpha=-4,\ \beta=-2$이므로 $m=8-1=7$

(i)~(iv)에서 $m=-1$ 또는 $m=7$

24 도로를 제외한 땅의 넓이는

$(30-x)(24-x)=567$

$x^2-54x+720=567$

$x^2-54x+153=0$

$(x-51)(x-3)=0$

$\therefore x=3\ (\because 0<x<24)$

25 $\overline{AE}=x$ cm라 하면 $\overline{EB}=(15-x)$ cm

$\triangle ADE$는 직각이등변삼각형이므로

$\triangle ADE=\dfrac{1}{2}\times x\times x=\dfrac{1}{2}x^2$

$\square DFBE=(15-x)\times x=15x-x^2$

$\triangle ADE : \square DFBE=1:4$이므로

$\dfrac{1}{2}x^2:(15x-x^2)=1:4$

$15x-x^2=2x^2$

$3x^2-15x=0,\ 3x(x-5)=0$

$\therefore x=5(\because x\neq0)$

$\therefore \square DFBE=10\times5=50(\text{cm}^2)$

III 이차함수

01 이차함수의 그래프

1 STEP 주제별 실력다지기 본문 81~87쪽

1 ㄹ	**2** ③	**3** ⑤	**4** ㄱ, ㄹ	**5** $\frac{9}{4}$
6 $y=-(x-4)^2$	**7** 3	**8** ㄴ, ㄹ	**9** ⑤	
10 2	**11** $a=-12$, $b=13$	**12** 15	**13** ④	
14 ③	**15** ②	**16** 제3사분면	**17** ⑤	
18 ③	**19** ①	**20** (1) $y=-\frac{1}{2}(x+4)^2+2$		

(2) $y=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$

21 (1) $y=-4(x+3)^2+11$ (2) $y=-2x^2+5x-6$

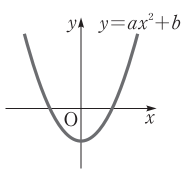
(3) $y=-x^2-x+6$ **22** $(1,\ -4)$ **23** -4

24 $-\frac{1}{2}$ **25** 21 **26** $y=x^2+8x+14$ **27** -7

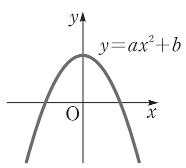
1 $a<0$이므로 위로 볼록한 포물선이고 $|a|<1$이므로 $y=-x^2$의 그래프보다 폭이 더 넓다.
따라서 구하는 $y=ax^2$의 그래프는 ㄹ이다.

2 주어진 $y=ax+b$의 그래프에서 (기울기)<0, (y절편)<0이므로 $a<0$, $b<0$이다.
따라서 $y=ax^2+b$의 그래프는 위로 볼록하고 꼭짓점의 좌표가 $(0,\ b)$ $(b<0)$인 포물선이므로 ③이다.

3 이차함수 $y=ax^2+b$의 그래프가 모든 사분면을 지나는 경우는 다음 그림과 같다.



또는



⇨ $a>0$, $b<0$ ⇨ $a<0$, $b>0$
$\therefore ab<0$

4 꼭짓점이 x축 위에 있으려면 $y=a(x-p)^2$의 꼴로 변형할 수 있어야 한다.
ㄱ. $y=x^2-4x+4=(x-2)^2$
ㄴ. $y=-x^2-6x+9=-(x+3)^2+18$
ㄷ. $y=4x^2+2x+1=4\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}$
ㄹ. $y=-4x^2+4x-1=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$
따라서 ㄱ, ㄹ의 꼭짓점이 x축 위에 있다.

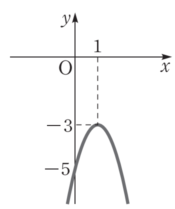
5 $y=x^2+3x+m=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+m-\frac{9}{4}$의 그래프가 x축과 접하기 위해서는
$m-\frac{9}{4}=0$ $\quad\therefore m=\frac{9}{4}$

6 축의 방정식은 $x=4$이고 x축에 접하므로 이 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식은 $y=a(x-4)^2$이다.
점 $(2,\ -4)$를 지나므로 $x=2$, $y=-4$를 대입하면
$-4=a(2-4)^2$ $\quad\therefore a=-1$
$\therefore y=-(x-4)^2$

7 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 $y=-x^2+4$의 그래프와 폭이 같으므로 $a=-1$ 또는 $a=1$이다.
또한 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 3)$이므로 $y=ax^2+bx+c$는 다음과 같이 두 가지로 나타낼 수 있다.
$y=-(x-1)^2+3=-x^2+2x+2$
$y=(x-1)^2+3=x^2-2x+4$
$\therefore a+b+c=3$

8 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$이고 꼭짓점 $(p,\ q)$가 제1사분면 위에 존재하므로 $p>0$, $q>0$이다.
ㄱ. $p+q>0$ ㄴ. $a-p-q<0$
ㄷ. $a-pq<0$ ㄹ. $apq<0$
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

9 $y=-2x^2+4x-5$
$=-2(x-1)^2-3$
이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



⑤ $x<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

10 x^2의 계수가 a이고 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(3,\ -1)$인 이차함수의 식은
$y=a(x-3)^2-1=ax^2-6ax+9a-1$
이므로 주어진 이차함수의 식과 비교하면
$a^2+5a+3=9a-1$, $a^2-4a+4=0$, $(a-2)^2=0$
$\therefore a=2$

다른 풀이
$y=ax^2-6ax+a^2+5a+3$
$=a(x^2-6x)+a^2+5a+3$
$=a(x-3)^2+a^2-4a+3$

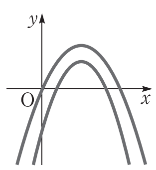
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ a^2-4a+3)$이다.
따라서 $a^2-4a+3=-1$에서
$a^2-4a+4=0,\ (a-2)^2=0$
$\therefore a=2$

11 $y=-2x^2+8x-7=-2(x-2)^2+1$에서 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 1)$이다.
따라서 $y=3x^2+ax+b$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 1)$이므로 $y=3(x-2)^2+1=3x^2-12x+13$
$\therefore a=-12,\ b=13$

12 $y=x^2+6x+a=(x+3)^2+a-9$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-3,\ a-9)$이다.
이 꼭짓점이 직선 $y=-2x$ 위에 있으므로
$a-9=-2\times(-3)\qquad \therefore a=15$

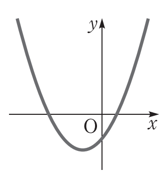
13 주어진 그림에서 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 위로 볼록하므로 $a<0$, y절편이 양수이므로 $c>0$, 축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $ab>0$, 즉 $b<0$이다.
① $ac<0$ ② $bc<0$ ③ $abc>0$
④ $x=-1$일 때, $y=a-b+c>0$이다.
⑤ $x=1$일 때, $y=a+b+c=0$이다.
따라서 옳은 것은 ④이다.

14 제2사분면을 제외한 모든 사분면을 지나는 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 위로 볼록하고 꼭짓점은 제1사분면 위에 존재하고 y절편은 0 또는 음수이면 된다.

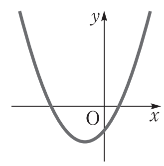


③ $y=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$
에서 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 1)$이고, y절편은 -3이다.
④ $y=-x^2-4x-3=-(x+2)^2+1$에서 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ 1)$이다.

15 주어진 그림에서 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 위로 볼록하고 y절편이 양수이므로 $a<0,\ c>0$이고, 축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $ab<0$, 즉 $b>0$이다.
따라서 $y=cx^2+bx+a$의 그래프는 아래로 볼록하고, y절편은 음수이다.
또한 $cb>0$이므로 축이 y축의 왼쪽에 있다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



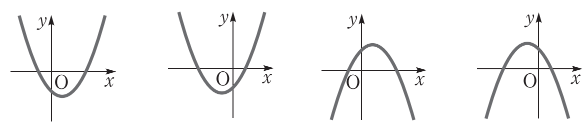
16 $y=ax^2+bx+c$에서 $a>0$이므로 아래로 볼록하고, $b>0$에서 $ab>0$이므로 축이 y축의 왼쪽에 있다.
또, $c<0$이므로 y절편은 음수이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 꼭짓점은 제3사분면 위에 있다.



17 주어진 그림에서 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 위로 볼록하므로 $a<0$이고, 축이 y축의 오른쪽에 있으므로
$ab<0\qquad \therefore b>0$
또, y절편이 양수이므로 $c>0$이다.
④ $x=1$일 때 $y=a+b+c>0$이다.
⑤ $b^2>0$이고 $ac<0$이므로 $b^2-4ac>0$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

다른 풀이
$y=ax^2+bx+c$에 $y=0$을 대입하면
$0=ax^2+bx+c$
이때 이 이차방정식의 두 근이 이차함수의 그래프의 x절편이고, 주어진 그래프에서 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식의 근의 개수는 2개이다.
따라서 판별식 $D=b^2-4ac>0$

18 모든 사분면을 지나는 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, b의 부호에 관계없이 $a>0,\ c<0$ 또는 $a<0,\ c>0$인 경우에 그래프가 모든 사분면을 지난다.
$\therefore ac<0$

19 주어진 그림에서 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 위로 볼록하므로 $a<0$이고, 축이 y축의 오른쪽에 있으므로
$ab<0\qquad \therefore b>0$
또, y절편이 양수이므로 $c>0$이다.
① $x=1$일 때, $y=a+b+c>0$
② $x=-1$일 때, $y=a-b+c<0$
③ 축의 방정식 $x=-\dfrac{b}{2a}<1$이고, $2a<0$이므로
$b<-2a\qquad \therefore 2a+b<0$
④ $a<0,\ b>0,\ c>0$이므로 $abc<0$
⑤ $x=-2$일 때, $y=4a-2b+c<0$
따라서 식의 부호가 나머지 넷과 다른 것은 ①이다.

20 (1) 꼭짓점의 좌표가 $(-4,\ 2)$이므로
$y=a(x+4)^2+2\qquad \cdots\cdots$ ㉠
㉠에 점 $(0,\ -6)$을 대입하면
$-6=16a+2\qquad \therefore a=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore y=-\frac{1}{2}(x+4)^2+2$

(2) x절편이 -1, 3이므로

$y=a(x+1)(x-3)$ …… ㉠

㉠에 점 $(0, -1)$을 대입하면

$-1=-3a \quad \therefore a=\frac{1}{3}$

$\therefore y=\frac{1}{3}(x+1)(x-3)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$

21 (1) 축의 방정식이 $x=-3$이므로

$y=a(x+3)^2+q$로 놓고 …… ㉠

㉠에 점 $(-2, 7)$, $(-5, -5)$의 좌표를 대입하면

$a+q=7$ …… ㉡

$4a+q=-5$ …… ㉢

㉢$-$㉡을 하면 $3a=-12 \quad \therefore a=-4$

$a=-4$를 ㉡에 대입하면 $-4+q=7 \quad \therefore q=11$

$\therefore y=-4(x+3)^2+11$

(2) 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$로 놓고

점 $(1, -3)$, $(2, -4)$, $(0, -6)$의 좌표를 대입하면

$a+b+c=-3$ …… ㉠

$4a+2b+c=-4$ …… ㉡

$c=-6$ …… ㉢

㉢을 ㉠, ㉡에 대입하면

$a+b-6=-3$에서 $a+b=3$ …… ㉣

$4a+2b-6=-4$에서 $4a+2b=2$,

$2a+b=1$ …… ㉤

㉤$-$㉣을 하면 $a=-2$

$a=-2$를 ㉣에 대입하면 $-2+b=3 \quad \therefore b=5$

$\therefore y=-2x^2+5x-6$

(3) x절편이 -3, 2이므로 $y=a(x+3)(x-2)$이고 점 $(0, 6)$의 좌표를 대입하면

$6=-6a \quad \therefore a=-1$

$\therefore y=-(x+3)(x-2)=-x^2-x+6$

22 점 $(-1, 0)$을 지나므로 $y=x^2+ax-3$에 대입하면

$0=1-a-3 \quad \therefore a=-2$

$\therefore y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$

따라서 꼭짓점의 좌표는 $(1, -4)$이다.

23 주어진 이차함수의 그래프는 축 $x=1$에 대하여 대칭이므로 점$(3, 0)$의 직선 $x=1$에 대한 대칭점 $(-1, 0)$을 지난다.

따라서 x절편이 -1, 3이므로 $y=a(x+1)(x-3)$이고 점 $(0, -3)$을 지나므로 대입하면

$-3=-3a \quad \therefore a=1$

$\therefore y=(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$

$\therefore a+b+c=1-2-3=-4$

다른 풀이

축의 방정식이 $x=1$이므로 구하는 이차함수의 식을 $y=a(x-1)^2+q$로 놓는다.

이때 두 점$(3, 0)$, $(0, -3)$을 지나므로 각각 대입하면

$4a+q=0$ …… ㉠

$a+q=-3$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $3a=3 \quad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉡에 대입하면 $q=-4$

따라서 이차함수의 식은 $y=(x-1)^2-4=x^2-2x-3$

이므로 $a+b+c=1-2-3=-4$

24 $y=px^2$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=p(x-2)^2$이다.

즉, $y=px^2-4px+4p$와 $y=-\frac{1}{2}x^2+2x-2$가 일치하므로 $p=-\frac{1}{2}$

참고

이차함수의 그래프를 평행이동하여도 그래프의 폭과 모양은 변하지 않으므로 이차항의 계수는 변하지 않는다.

25 $y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(1, 2)$이다.

또, $y=x^2+4x-1=(x+2)^2-5$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-2, -5)$이다.

즉, 꼭짓점 $(1, 2)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점 $(1+a, 2+b)$가 점 $(-2, -5)$와 일치하면 되므로

$1+a=-2$, $2+b=-5$

$\therefore a=-3$, $b=-7$

$\therefore ab=21$

26 $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$y+1=(x-2-2)^2-1$

$\therefore y=x^2-8x+14$

또, $y=x^2-8x+14$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면

$y=(-x)^2-8\cdot(-x)+14$

$\therefore y=x^2+8x+14$

27 $y=a(x-1)^2$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=a(x-1)^2$, $y=-a(x-1)^2$

또, 이 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 $-q$만큼 평행이동하면

$y+q=-a(x-1-1)^2$

$y=-a(x-2)^2-q$

$\therefore y=-ax^2+4ax-4a-q$

이 그래프가 $y=2x^2+px+5$의 그래프와 일치하므로

$-a=2$, $4a=p$, $-4a-q=5$에서

$a=-2$, $p=-8$, $q=3$

$\therefore a+p+q=-7$

2 STEP 실력 높이기

본문 88~90쪽

1 ④	**2** 1 : 6	**3** 2	**4** 2
5 P(4, 8)		**6** $\frac{1}{9}$	**7** $\frac{4}{25}\le a\le\frac{4}{9}$
8 16	**9** $2\sqrt{3}$	**10** (4, 10)	**11** 5
12 제 1 사분면		**13** $a>0$, $b<0$	**14** ㄱ, ㄷ
15 ⑤	**16** (2, −2)		

1 $y=2x^2-4x-6=2(x-1)^2-8$이므로 $E(1, -8)$

두 점 A와 B는 x절편이므로 $y=0$을 대입하면

$2x^2-4x-6=0$에서 $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

$\therefore A(-1, 0)$, $B(3, 0)$

y절편이 -6이므로 $C(0, -6)$

축이 $x=1$이고 점 C와 D는 $x=1$에 대하여 대칭이므로 점 D의 x좌표는 2이다.

$y=2x^2-4x-6$에 $x=2$를 대입하면 $y=-6$

$\therefore D(2, -6)$

2 $y=ax^2-bx+3=a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+3$

에서 축의 방정식이 $x=\frac{b}{2a}$이므로

$\frac{b}{2a}=3$, $b=6a$

$\therefore a:b=1:6$

3 주어진 그래프에서 일차함수의 식은 $y=x-2$이고, y축에 대하여 대칭인 그래프의 식은 $y=-x-2$이므로

$a=-1$, $b=-2$

따라서 $y=ax^2+bx=-x^2-2x=-(x+1)^2+1$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(m, n)=(-1, 1)$이다.

$\therefore m^2+n^2=(-1)^2+1^2=2$

4 $y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$이므로 $C(-1, 4)$

$y=0$을 대입하면 $-x^2-2x+3=0$에서

$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

$\therefore A(-3, 0)$, $B(1, 0)$

또한, y절편이 3이므로 $D(0, 3)$

삼각형의 넓이를 구하면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times4\times4=8$

$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times4\times3=6$

따라서 두 삼각형의 넓이의 차는

$8-6=2$

5 점 P의 좌표를 $P\left(a, \frac{a^2}{2}\right)$이라 하면

$\triangle POA=\frac{1}{2}\times8\times\frac{a^2}{2}=32$

$a^2=16$ $\quad\therefore a=4$ ($\because a>0$)

$\therefore P(4, 8)$

6 점 A의 x좌표가 2이므로 $A(2, 4)$

$\overline{AB}=2\overline{AC}$이므로 점 B의 x좌표는 6이고

$y=kx^2$에 $x=6$을 대입하면 $B(6, 36k)$

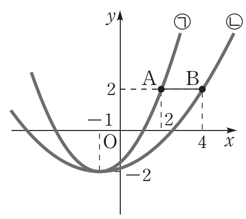
이때 점 A와 B의 y좌표는 같으므로

$4=36k$ $\quad\therefore k=\frac{1}{9}$

7 $y=ax^2+2ax+a-2$

$=a(x^2+2x+1)-2$

$=a(x+1)^2-2$



이므로 오른쪽 그림과 같이 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(-1, -2)$로 일정하다.

㉠과 같이 점 (2, 2)를 지날 때

$2=9a-2$ $\quad\therefore a=\frac{4}{9}$

㉡과 같이 점 (4, 2)를 지날 때

$2=25a-2$ $\quad\therefore a=\frac{4}{25}$

따라서 $\frac{4}{25}\le a\le\frac{4}{9}$

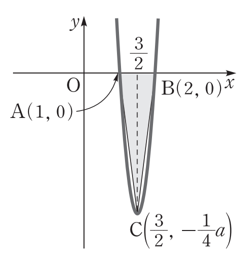
8 $y=a(x^2-3x+2)=a(x-1)(x-2)$

이므로 x절편은 1, 2이다.

또, $y=a(x^2-3x+2)=a\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}a$

이므로 꼭짓점은 $C\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}a\right)$이다.

오른쪽 그림에서



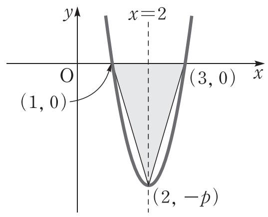
$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{4}a$

$=\frac{1}{8}a$

이므로 $\frac{1}{8}a=2$

$\therefore a=16$

9 x축을 자르는 선분의 길이가 2이고 축이 $x=2$이므로 오른쪽 그림과 같이 그래프를 그리면 삼각형의 넓이는



$\frac{1}{2}\times2\times p=2\sqrt{3}$

$\therefore p=2\sqrt{3}$

따라서 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -2\sqrt{3})$이므로

$y=ax^2+bx+c=a(x-2)^2-2\sqrt{3}$ ⋯⋯ ㉠

㉠에 점 $(1,\ 0)$의 좌표를 대입하면

$0=a-2\sqrt{3}$

$\therefore a=2\sqrt{3}$

10 두 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 각각 구하면

$y=x^2-4x+8=(x-2)^2+4$에서 $(2,\ 4)$

$y=-x^2+12x-20=-(x-6)^2+16$에서 $(6,\ 16)$

두 이차함수의 그래프가 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여 대칭이면 두 꼭짓점도 점 P에 대하여 대칭이므로

점 P는 두 꼭짓점의 중점이다. 즉

$\frac{2+6}{2}=a,\ \frac{4+16}{2}=b$

$\therefore a=4,\ b=10$

$\therefore \mathrm{P}(4,\ 10)$

11 $y=-x^2-2x+8=-(x+1)^2+9$이므로 $\mathrm{A}(-1,\ 9)$

$y=0$을 대입하면

$-x^2-2x+8=0$에서 $x^2+2x-8=0$

$(x+4)(x-2)=0 \quad \therefore x=-4$ 또는 $x=2$

$\therefore \mathrm{B}(-4,\ 0),\ \mathrm{C}(2,\ 0)$

직선 l이 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이를 이등분하려면 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점

$\left(\frac{-1+2}{2},\ \frac{9+0}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{9}{2}\right)$를 지나면 된다.

따라서 점 $\mathrm{B}(-4,\ 0)$과 점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{9}{2}\right)$를 지나는 직선 l의 방정식은

$y=\dfrac{\frac{9}{2}-0}{\frac{1}{2}+4}(x+4)=x+4$

$\therefore a=1,\ b=4 \quad \therefore a+b=5$

12 부등식 $a(x-2)-b<0$, 즉 $ax<2a+b$의 해가

$x>-1$이므로 $a<0$이고, $x>\frac{2a+b}{a}$에서

$\frac{2a+b}{a}=-1,\ 2a+b=-a$

$\therefore b=-3a$

$y=ax^2-bx+a$

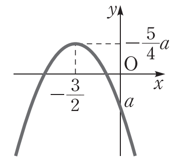
$=ax^2+3ax+a$

$=a\left(x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)+a$

$=a\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}a$

에서 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{5}{4}a\right)$

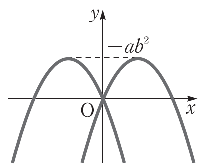
이고, $a<0$이므로 그래프의 모양은 오른쪽 그림과 같이 그릴 수 있다.



따라서 제1사분면은 지나지 않는다.

13 $y=ax^2+2abx=a(x+b)^2-ab^2$

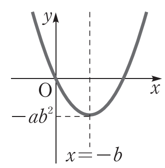
(i) $a<0$이면 위로 볼록하고 꼭짓점의 y좌표인 $-ab^2\geq0$이므로 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점이 제4사분면 위에 있을 수 없다.



(ii) $a>0$이면 $-ab^2\leq0$

오른쪽 그림에서 꼭짓점이 제4사분면 위에 있을 때, 축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $x=-b>0$

$\therefore b<0$



(i), (ii)에서 $a>0,\ b<0$

다른 풀이

$y=ax^2+2abx=a(x+b)^2-ab^2$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-b,\ -ab^2)$

이때 꼭짓점이 제4사분면 위에 있으므로

$-b>0,\ -ab^2<0$

즉, $b<0$이고, $b^2>0$이므로 $-ab^2<0$에서 $-a<0$

$\therefore a>0$

14 x절편이 $-2,\ 1$이므로

$y=ax^2+bx+c$

$=a(x+2)(x-1)$

$=ax^2+ax-2a$

$\therefore b=a,\ c=-2a$

ㄱ. 아래로 볼록하므로 $a>0$

축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $ab>0 \quad \therefore b>0$

ㄴ. $x=-1$일 때, $y=a-b+c<0$

ㄷ. $a+2b+3c=a+2a-6a=-3a<0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

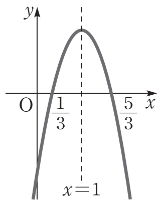
15 Ⅰ. $\frac{b}{2a}=-1$이므로 축의 방정식은

$x=-\frac{b}{2a}=1$

Ⅱ. y의 값의 범위가 $y\leq q$이므로 이차함수의 그래프는 위로 볼록한 포물선이다. $\quad \therefore a<0$

Ⅲ. 점 $\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$을 지나므로 x절편이 $\frac{5}{3}$이고 축을 중심으로 대칭이므로 다른 x절편의 좌표는 $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$이다.

조건 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ을 이용하여 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



② $c<0$

③ 다른 한 x절편은 $\frac{1}{3}$이다.

④ 꼭짓점은 제1사분면 위에 있다.

⑤ 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

16 선분 AB의 길이가 4이므로 축의 방정식은 $x=2$이다.

$\therefore y=x^2+ax+b=(x-2)^2+q$

또, 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=4+q \qquad \therefore q=-2$

따라서 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ -2)$이다.

3 STEP 최고 실력 완성하기

본문 91~93쪽

1 $\frac{9}{2}$ **2** $\frac{14}{3}$ **3** $-\frac{2}{3}$ **4** 12 **5** 24

6 $2\sqrt{2}$ **7** $-\frac{3}{4}$ **8** -4 **9** $\frac{2}{3}$

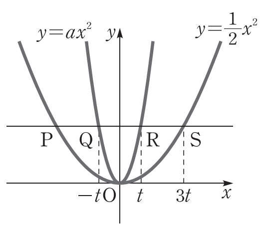
10 $12-8\sqrt{2}$

11 (가) – (2), (나) – (1), (다) – (4), (라) – (3)

12 서치라이트(탐조등), 자동차의 헤드라이트, 랜턴 등

1 오른쪽 그림과 같이 점 R의 x좌표를 t라 하면 점 Q의 x좌표는 $-t$이므로 $\overline{QR}=2t$가 된다.

또, $\overline{QR}=\overline{RS}$이므로 점 S의 x좌표는 $3t$가 된다.



$\therefore \mathrm{R}(t,\ at^2),\ \mathrm{S}\left(3t,\ \frac{9}{2}t^2\right)$

이때 점 R와 점 S의 y좌표는 같으므로

$at^2=\frac{9}{2}t^2 \qquad \therefore a=\frac{9}{2}$

2 $y=-\frac{1}{2}x^2+ax+4$에 $x=0$을 대입하면 $y=4$

$\therefore \mathrm{B}(0,\ 4)$

$y=-\frac{1}{2}x^2+ax+4$의 그래프가 점 $(6,\ 0)$을 지나므로

$0=-18+6a+4$

$6a=14 \qquad \therefore a=\frac{7}{3}$

$$
\begin{aligned}
y&=-\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{3}x+4\\
&=-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{14}{3}x+\frac{49}{9}-\frac{49}{9}\right)+4\\
&=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{7}{3}\right)^2+\frac{49}{18}+4\\
&=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{7}{3}\right)^2+\frac{121}{18}
\end{aligned}
$$

$\therefore \mathrm{A}\left(\frac{7}{3},\ \frac{121}{18}\right)$

$\therefore \triangle\mathrm{ABO}=\frac{1}{2}\times4\times\frac{7}{3}=\frac{14}{3}$

3 □ABCD가 평행사변형이므로 $\overline{BC}=\overline{AD}=6$이고 $\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$이므로 $\overline{BC}\perp(y\text{축})$이다.

또한, 주어진 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 점 C의 x좌표는 3이다.

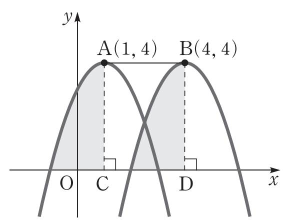
따라서 $\mathrm{C}(3,\ -6)$이므로 $y=ax^2$에 대입하면

$-6=9a \qquad \therefore a=-\frac{2}{3}$

4 $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$에서 $\mathrm{A}(1,\ 4)$

$y=-x^2+8x-12=-(x-4)^2+4$에서 $\mathrm{B}(4,\ 4)$

오른쪽 그림에서 그래프의 폭이 같으므로 어두운 부분의 넓이는 서로 같다. 따라서 구하는 넓이는



□ACDB$=(4-1)\times4$

$=3\times4=12$

5 $y=-2x+k$의 x절편이 $\frac{k}{2}$이고, $\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$이므로 점 P의 x좌표는 $\frac{k}{2}\times\frac{1}{2+1}=\frac{k}{6}$

점 $\mathrm{P}\left(\frac{k}{6},\ \frac{k^2}{36}\right)$은 직선 $y=-2x+k$ 위의 점이므로

$\frac{k^2}{36}=-\frac{2k}{6}+k$

$k^2=-12k+36k,\ k(k-24)=0$

$\therefore k=24\ (\because k\neq0)$

6 $y=x^2-ax+1$의 그래프의 x절편을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $x^2-ax+1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=1$

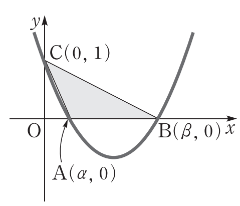
$\overline{AB}=|\beta-\alpha|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$=\sqrt{a^2-4}$

오른쪽 그림에서

$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{a^2-4}\times1=1$

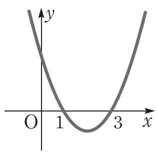
이므로



$\sqrt{a^2-4}=2,\ a^2-4=4,\ a^2=8$

$\therefore a=2\sqrt{2}\ (\because a>0)$

7 이차함수 $y=ax^2+bx+ab+1$의 그래프를 그려 보면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $a>0$이고 x축과 두 점 $(1,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서 만나므로

$y=a(x-1)(x-3)$

$\ \ =a(x^2-4x+3)$

$\ \ =ax^2-4ax+3a$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠과 $y=ax^2+bx+ab+1$이 같은 식이므로

$b=-4a$, $ab+1=3a$에서

$a\cdot(-4a)+1=3a$, $4a^2+3a-1=0$

$(4a-1)(a+1)=0$ $\quad\therefore a=\frac{1}{4}$ $(\because a>0)$

따라서 $a=\frac{1}{4}$, $b=-1$이므로

$a+b=-\frac{3}{4}$

8 교점이 원점에 대하여 대칭이면 교점의 x좌표의 합이 0이므로

$2x^2+ax-6=-x^2-4x+3$

즉, $3x^2+(a+4)x-9=0$에서 두 근의 합이 0이므로

$-\frac{(a+4)}{3}=0$ $\quad\therefore a=-4$

9 $y=(x-2)^2$에서 $x=0$이면 $y=4$이므로 $\mathrm{A}(0,\ 4)$이고, 축의 방정식이 $x=2$이므로 $\mathrm{B}(4,\ 4)$이다.

직선 $y=x+a$가 선분 AB와 만나므로

(i) 직선 $y=x+a$가 점 $\mathrm{A}(0,\ 4)$를 지날 때,

$\quad 4=0+a$ $\quad\therefore a=4$

(ii) 직선 $y=x+a$가 점 $\mathrm{B}(4,\ 4)$를 지날 때,

$\quad 4=4+a$ $\quad\therefore a=0$

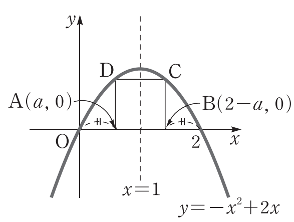
(i), (ii)에서 a의 값의 범위는 $0\le a\le 4$

따라서 $a=1,\ 2,\ 3,\ 4$일 때, 직선 $y=x+a$가 선분 AB와 만나므로 구하는 확률은

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

10 $y=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$

이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



$\mathrm{A}(a,\ 0)$ (단, $0<a<1$)으로 놓으면 $\mathrm{B}(2-a,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=(2-a)-a=2-2a$이고

$\mathrm{D}(a,\ -a^2+2a)$

그런데 □ABCD가 정사각형이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}$에서

$2-2a=-a^2+2a$, $a^2-4a+2=0$

$\therefore a=2-\sqrt{2}$ $(\because 0<a<1)$

따라서 정사각형의 한 변의 길이는

$2-2a=2-2(2-\sqrt{2})=2\sqrt{2}-2$

$\therefore$ □ABCD$=(2\sqrt{2}-2)^2=12-8\sqrt{2}$

02 이차함수의 활용

1 STEP 주제별 실력다지기

본문 95~99쪽

1 $(0,\ 7)$ **2** ㄴ, ㄷ **3** -240 **4** $a\ge 2$ **5** $\frac{1}{4}$

6 최댓값 8, 최솟값 -16 **7** -2 또는 4

8 5 **9** 8 **10** 2

11 (1) ㄷ, ㅂ (2) ㄱ, ㄹ (3) ㄴ, ㅁ

12 (1) $m>-5$ (2) -5 (3) $m<-5$

13 $k<-7$ **14** $y=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$ **15** -2

16 9 **17** -3 **18** ④

19 $a<0$, $b>0$, $a^2-4b>0$ **20** $\frac{3}{4}$ **21** 4초

22 96 m **23** 100원 **24** 18750원

1 $x=1$에서 최솟값 3을 가지므로 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 3)$이다.

이때 이차항의 계수가 a이므로

$y=a(x-1)^2+3$

$\ \ =ax^2-2ax+a+3$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠과 $y=ax^2-8x+c$는 같은 식이므로

$-2a=-8$, $a+3=c$

$\therefore a=4$, $c=7$

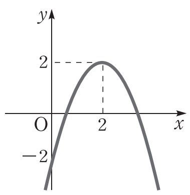
따라서 y축과의 교점의 좌표는 $(0,\ 7)$이다.

2 이차항의 계수가 -1이고, 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 2)$이므로

$y=-(x-2)^2+2$

$\ =-x^2+4x-2$

이 이차함수의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 그래프는 제2 사분면을 지나지 않는다.

ㄷ. $a=4$, $b=-2$이므로

$a+b=2$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

3 x축과의 교점의 좌표가 $(-5,\ 0)$, $(-1,\ 0)$이고, 이차항의 계수가 a이므로

$y=a(x+5)(x+1)=ax^2+6ax+5a$

에서 $b=6a$, $c=5a$

$y=ax^2+6ax+5a$

$\ =a(x+3)^2-4a$

꼭짓점의 좌표는 $(-3,\ -4a)$이고, 최댓값이 8이므로

$-4a=8 \qquad \therefore a=-2$

따라서 $a=-2$, $b=-12$, $c=-10$이므로

$abc=-240$

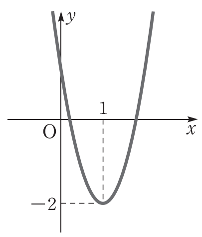
4 이차항의 계수가 a이고 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ -2)$이므로

$y=a(x-1)^2-2$

이때 최솟값을 가지므로

$a>0$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

또한 함수의 그래프는 제3 사분면을 지나지 않으므로 오른쪽 그림과 같다. 즉,



$x=0$일 때 $y=a-2\geq 0$에서

$a\geq 2$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a\geq 2$

5 $y=x^2-2ax+a$

$\ =(x-a)^2-a^2+a$

$x=a$일 때 최솟값은 $f(a)=-a^2+a$이므로

$f(a)=-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

따라서 $f(a)$의 최댓값은 $a=\dfrac{1}{2}$일 때 $\dfrac{1}{4}$이다.

6 $y=-x^2-4x+5=-(x+2)^2+9$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ 9)$이다.

이때 꼭짓점의 x좌표가 $-1\leq x\leq 3$의 범위 안에 있지 않으므로

$f(-1)=-1+4+5=8$

$f(3)=-9-12+5=-16$

따라서 $x=-1$일 때 최댓값 8, $x=3$일 때 최솟값 -16을 갖는다.

7 $y=x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(a,\ 0)$

이때 최솟값이 4라는 조건에 의해 꼭짓점의 x좌표가 $0\leq x\leq 2$의 범위 안에 있지 않으므로 $a<0$ 또는 $a>2$

(i) $a<0$일 때, $f(0)$이 최솟값이므로

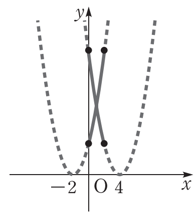
$f(0)=a^2=4$에서

$a=-2$ ($\because a<0$)

(ii) $a>2$일 때, $f(2)$가 최솟값이므로

$f(2)=a^2-4a+4=4$에서

$a=4$ ($\because a>2$)



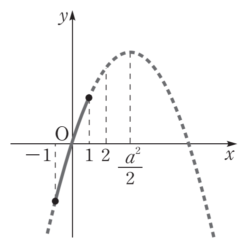
따라서 (i), (ii)에서 $a=-2$ 또는 $a=4$

8 $y=-x^2+a^2x=-\left(x-\dfrac{a^2}{2}\right)^2+\dfrac{a^4}{4}$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $\left(\dfrac{a^2}{2},\ \dfrac{a^4}{4}\right)$

$a>2$에서 $\dfrac{a^2}{2}>2$이므로 꼭짓점의 x좌표는 $-1\leq x\leq 1$의 범위 안에 있지 않다.

따라서 $x=1$일 때 $f(1)$이 최댓값이므로



$f(1)=-1+a^2=24$에서

$a^2=25 \qquad \therefore a=5$ ($\because a>2$)

9 $x-y=4$이므로 $y=x-4$를 x^2+y^2에 대입하면

$x^2+y^2=x^2+(x-4)^2$

$\qquad =2x^2-8x+16$

$\qquad =2(x-2)^2+8$

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 $x=2$일 때 8이다.

10 $x+y=2$에서 $y=2-x$이고

$y\geq 0$에서 $2-x\geq 0 \qquad \therefore x\leq 2$

$x-y^2=x-(2-x)^2$

$\qquad =-x^2+5x-4$

$\qquad =-\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}\ (x\leq 2)$

따라서 꼭짓점의 x좌표 $\dfrac{5}{2}$는 $x\leq 2$의 범위 안에 있지 않으므로 구하는 최댓값은 $x=2$일 때 2이다.

11 ㄱ. x축과 접하므로 한 점에서 만난다.

ㄴ. x축과 만나지 않는다.

ㄷ. $\dfrac{D}{4}=2^2-(-1)\cdot 0>0$이므로

x축과 두 점에서 만난다.

ㄹ. $\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot 4=0$ 이므로

x축과 한 점에서 만난다.

ㅁ. $D=0^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)<0$ 이므로

x축과 만나지 않는다.

ㅂ. $\frac{D}{4}=1^2-1\cdot(-1)>0$ 이므로

x축과 두 점에서 만난다.

12 $x^2-2x-1=2x+m$ 에서

$x^2-4x-m-1=0$이므로

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(-m-1)=m+5$

(1) $\frac{D}{4}>0$ 에서 $m+5>0$ $\quad\therefore m>-5$

(2) $\frac{D}{4}=0$ 에서 $m+5=0$ $\quad\therefore m=-5$

(3) $\frac{D}{4}<0$ 에서 $m+5<0$ $\quad\therefore m<-5$

13 x축과의 교점이 없으므로 $2x^2-8x+1-k=0$ 의 판별식

$\frac{D}{4}<0$ 이다.

$\frac{D}{4}=(-4)^2-2(1-k)<0$ $\quad\therefore k<-7$

다른 풀이

$y=2x^2-8x+1-k=2(x-2)^2-7-k$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ -k-7)$

따라서 그래프가 x축보다 위쪽에만 그려지므로

$-k-7>0$ $\quad\therefore k<-7$

14 $2x^2=3x+5$ 에서 $x^2=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$

따라서 $y=x^2$ 외에 필요한 다른 일차함수의 식은

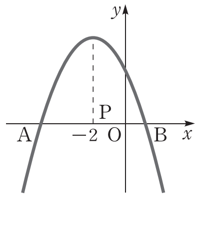
$y=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$

15 주어진 이차함수의 그래프는 축 $x=-1$ 에 대하여 대칭이므로 x축과의 두 교점은 $(-3,\ 0)$, $(1,\ 0)$이다.

따라서 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근이 -3, 1 이므로 두 근의 합은 $-3+1=-2$

16 $y=-x^2-4x+c$

$=-(x+2)^2+4+c$



이므로 꼭짓점의 x좌표가 -2이고, $\overline{AB}=6$ 이므로 축의 대칭성에 의해 $\overline{PA}=\overline{PB}=3$

$\therefore A(-5,\ 0)$, $B(1,\ 0)$

$y=-x^2-4x+c$ 에 점 $B(1,\ 0)$을 대입하면

$-1-4+c=0$ $\quad\therefore c=5$

따라서 $y=-x^2-4x+5=-(x+2)^2+9$이므로

$x=-2$ 일 때 최댓값 9 를 갖는다.

다른 풀이

이차항의 계수가 -1이고, x축과의 교점의 x좌표가 -5, 1 이므로

$y=-(x+5)(x-1)$

$=-x^2-4x+5$

$=-(x+2)^2+9$

따라서 $x=-2$ 일 때 최댓값 9를 갖는다.

17 $y=x^2$, $y=ax+b$ 의 두 그래프의 교점의 x좌표인 -3, 1 은 $x^2=ax+b$ 의 두 근이다.

따라서 $x^2-ax-b=0$ 의 두 근은 -3, 1 이므로

두 근의 곱은 -3 이다.

18 이차항의 계수가 a 이고, 두 근이 -1, 2 이므로

$a(x+1)(x-2)=0$, $ax^2-ax-2a=0$

$\therefore b=-a$, $c=-2a$

즉, $y=cx^2+bx+a$

$=-2ax^2-ax+a$

$=-a(2x^2+x-1)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

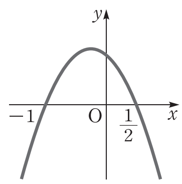
따라서 ㉠과 x축과의 교점의 x좌표는 이차방정식

$2x^2+x-1=-a(x+1)(2x-1)=0$ 의 두 근인

$x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 이다.

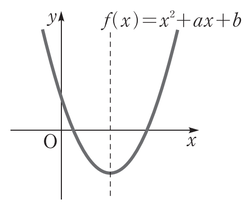
또, 주어진 조건에서 $a>0$이므로 $c=-2a<0$

따라서 구하는 이차함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



19 $f(x)=x^2+ax+b$

$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$



의 그래프와 x축이 x축의 양의 부분에서 만나므로 오른쪽 그림과 같이 축은 y축의 오른쪽에 있고,

$(y$ 절편$)>0$, (꼭짓점의 y좌표$)<0$이어야 한다.

$-\frac{a}{2}>0$, $b>0$, $-\frac{a^2}{4}+b<0$

$\therefore a<0$, $b>0$, $a^2-4b>0$

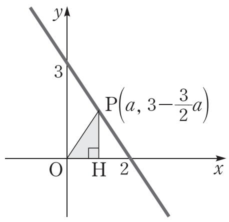
다른 풀이

이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 두 실근을 각각 α, β라 하면 서로 다른 두 양의 근을 가질 조건은

$D=a^2-4b>0$, $\alpha+\beta=-a>0$, $\alpha\beta=b>0$

$\therefore a<0$, $b>0$, $a^2-4b>0$

20 $y=3-\frac{3}{2}x$이므로 점 P의 x좌표를 $a(0\le a\le 2)$라고 하면

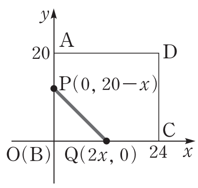


$\mathrm{P}\left(a,\ 3-\frac{3}{2}a\right)$, $\mathrm{H}(a,\ 0)$이므로

$$\triangle\mathrm{OPH}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(3-\frac{3}{2}a\right)$$
$$=-\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{2}a$$
$$=-\frac{3}{4}(a-1)^2+\frac{3}{4}$$

따라서 △OPH의 넓이는 $a=1$일 때 최댓값 $\frac{3}{4}$을 갖는다.

21 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}$를 y축, $\overline{\mathrm{BC}}$를 x축, 점 B를 원점에 대응시키면 $\mathrm{A}(0,\ 20)$, $\mathrm{B}(0,\ 0)$, $\mathrm{C}(24,\ 0)$이고, x초 후의 점 P, Q의 좌표는 $\mathrm{P}(0,\ 20-x)$, $\mathrm{Q}(2x,\ 0)$이다.

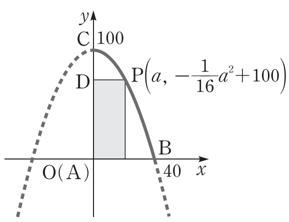


$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(2x)^2+(20-x)^2}$$
$$=\sqrt{5x^2-40x+400}$$
$$=\sqrt{5(x-4)^2+320}$$

이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는 $x=4$일 때 최소가 된다.

따라서 최소가 될 때까지 걸린 시간은 4초이다.

22 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점이 $\mathrm{C}(0,\ 100)$이고, 점 $\mathrm{B}(40,\ 0)$을 지나는 포물선이 된다.



이때 포물선의 식은

$$y=-\frac{1}{16}x^2+100\,(0<x<40)$$

이고, 점 P의 x좌표를 a라 하면 $\mathrm{P}\left(a,\ -\frac{1}{16}a^2+100\right)$

이므로 상가 밑면의 둘레의 길이 l은

$$l=2\left(a-\frac{1}{16}a^2+100\right)$$
$$=-\frac{1}{8}a^2+2a+200$$
$$=-\frac{1}{8}(a^2-16a)+200$$
$$=-\frac{1}{8}(a-8)^2+208$$

따라서 $a=8$일 때 l이 최대이므로

$$\overline{\mathrm{AD}}=-\frac{1}{16}\cdot 8^2+100=96\ (\mathrm{m})$$

23 가격을 x원 올렸다고 하면 $2x$개가 덜 팔리므로 총 판매 금액 P는

$$P=(50+x)(300-2x)$$
$$=-2x^2+200x+15000$$
$$=-2(x-50)^2+20000$$

따라서 P는 $x=50$일 때, 최대이므로 구하는 물건의 가격은 $50+50=100$(원)이다.

24 가격을 $500x$원 내리면 $20x$개가 더 팔리므로 이익 S는

$$S=(20000-500x)(100+20x)-15000(100+20x)$$
$$=-10000x^2+50000x+500000$$
$$=-10000(x^2-5x)+500000$$
$$=-10000\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+562500$$

즉, 이익은 $x=\frac{5}{2}$일 때 최대가 된다.

따라서 정가를 $500\times\frac{5}{2}=1250$(원) 내릴 때 이익이 최대가 되므로 구하는 물건의 정가는

$20000-1250=18750$(원)

2 STEP 실력 높이기

본문 100~102쪽

1 3　**2** $a>\frac{37}{12}$　**3** $a=5,\ b=-5$　**4** 1

5 2　**6** $a=-2,\ b=-4,\ c=6$　**7** $-\frac{5}{4}$

8 최댓값 : 5, 최솟값 : -4　**9** -4

10 $k<\frac{25}{8}$　**11** $2<\beta<3$

12 2, 8, 18　**13** $a=2,\ b=-4,\ c=-7$

14 $\frac{b+c}{2}$　**15** 2　**16** $b=3,\ c=2$

17 5일 후

1 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 3)$이고, 이차항의 계수가 1이므로

$$y=x^2+2ax+b$$
$$=(x-1)^2+3$$
$$=x^2-2x+4$$

따라서 $2a=-2$, $b=4$이므로

$a=-1$, $b=4$

$\therefore a+b=3$

2 이차함수 $y=3x^2-5x+a-1$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 x절편이 존재하지 않는다.

따라서 $3x^2-5x+a-1=0$에서

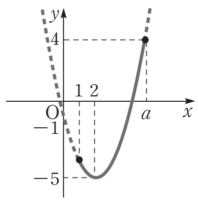
$D=(-5)^2-4\cdot 3(a-1)<0$이므로 $37-12a<0$

$\therefore a > \frac{37}{12}$

3 $y=x^2-4x-1=(x-2)^2-5$

이므로 $x=2$에서 최솟값 -5를 갖는다.

오른쪽 그림과 같이 주어진 조건에 의해 $f(a)=4$ 이므로



$a^2-4a-1=4$

$a^2-4a-5=0$

$\therefore a=5\ (\because a>2)$

따라서 x의 값의 범위는 $1 \le x \le 5$이고, y의 값의 범위는 $-5 \le y \le 4$이다.

$\therefore a=5,\ b=-5$

4 $x^2-2ax+a=0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면 x축과 만나는 두 점은 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$이고

$\alpha+\beta=2a,\ \alpha\beta=a$

$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$=\sqrt{4a^2-4a}=\sqrt{5}$

$\therefore 4a^2-4a-5=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의해 a 의 값들의 합은

$-\frac{-4}{4}=1$

5 $\triangle$CAD : $\triangle$CDB$=1:2$에서

$\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{CB}}=1:2$이므로

$y=x^2$과 $y=ax+8$의 교점의 x좌표를 $-k$, $2k(k>0)$라 하면

$x^2=ax+8$, 즉 $x^2-ax-8=0$의 두 근이 $-k$, $2k$이므로

(ⅰ) 두 근의 합 : $-k+2k=a$에서 $k=a$

(ⅱ) 두 근의 곱 : $-k\cdot 2k=-8$에서 $k^2=4$

$\therefore k=2\ (\because k>0)$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=2$

6 x축과 두 점 $(-3,\ 0)$, $(1,\ 0)$에서 만나므로

$y=a(x+3)(x-1)$

이고, 축의 대칭성에 의해 축의 방정식은 $x=-1$이다.

또한 최댓값이 8이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 8)$이다.

즉, $8=a\cdot 2\cdot(-2)$ $\qquad \therefore a=-2$

따라서 $y=-2(x+3)(x-1)=-2x^2-4x+6$

$\therefore a=-2,\ b=-4,\ c=6$

7 점 P$(a,\ b)$는 $y=x^2-4x+1$의 그래프 위의 점이므로

$b=a^2-4a+1$

$\therefore a+b=a^2-3a+1$

$=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$

따라서 $a+b$는 $a=\frac{3}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{5}{4}$를 갖는다.

8 $y^2=4-x^2$이고 $4-x^2 \ge 0$이므로

$x^2-4 \le 0 \qquad \therefore -2 \le x \le 2$

$2x+y^2=2x+4-x^2$

$=-x^2+2x+4$

$=-(x-1)^2+5\ (-2 \le x \le 2)$

따라서 $x=1$일 때 최댓값이 5이고, $x=-2$일 때 최솟값이 -4이다.

9 $y=ax^2$, $y=-bx-c$의 그래프의 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근이므로 두 근은 2, -1이다.

따라서 $a(x-2)(x+1)=0$에서 $ax^2-ax-2a=0$

$b=-a,\ c=-2a$

이때 $y=ax^2$, $y=ax+2a$의 교점의 좌표가 $(-1,\ 2)$이므로 $y=ax^2$에 $x=-1$, $y=2$를 대입하면 $a=2$

$\therefore b=-2,\ c=-4$

$\therefore a+b+c=-4$

10 교점이 2개이므로 $2x^2-6x+3=x-k$

즉, $2x^2-7x+3+k=0$의 근이 2개이다.

따라서 $D=(-7)^2-4\cdot 2(3+k)>0$이므로

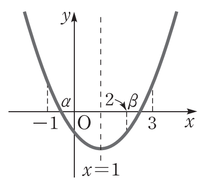
$49-24-8k>0$

$\therefore k<\frac{25}{8}$

11 $y=ax^2-2ax+b$

$=a(x^2-2x)+b$

$=a(x-1)^2-a+b$



이므로 축의 방정식은 $x=1$이다.

따라서 $-1<\alpha<0$이므로 축의 대칭성에 의해 $2<\beta<3$이다.

12 x축과의 교점의 x좌표를 구하면 $\frac{1}{2}x^2-k=0$에서

$x^2=2k \qquad \therefore x=\pm\sqrt{2k}$

따라서 x축과의 교점의 좌표는 $(\sqrt{2k},\ 0)$, $(-\sqrt{2k},\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2k}-(-\sqrt{2k})=2\sqrt{2k}$

이고 k는 자연수이므로 $\sqrt{2k}$가 정수가 되면 된다.

따라서 $2k$는 제곱수가 되어야 하고 k는 20보다 작은 자연수이므로 $k=2,\ 8,\ 18$

13 $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$에서

축의 방정식이 $x=-\frac{b}{2a}=1$이므로

$b=-2a$

포물선 $y=ax^2-2ax+c$ 와 직선 $y=2x+1$ 의 교점의 x 좌표가 4, -1 이므로 $ax^2-2ax+c=2x+1$, 즉 $ax^2-2(a+1)x+c-1=0$ 의 두 근이 -1, 4 이다.

(i) 두 근의 합 : $\frac{2(a+1)}{a}=3$ 이므로

$3a=2a+2 \quad \therefore a=2,\ b=-4$

(ii) 두 근의 곱 : $\frac{c-1}{a}=-4$ 이므로

$c-1=-4a,\ c-1=-8 \quad \therefore c=-7$

$\therefore a=2,\ b=-4,\ c=-7$

14 이차항의 계수가 1 이므로

$f(x)=(x-a)(x-b)$

$g(x)=(x-a)(x-c)$

로 놓으면

$f(x)+g(x)=(x-a)(2x-b-c)$

이므로 방정식 $f(x)+g(x)=0$ 의 두 근은

$x=a$ 또는 $x=\frac{b+c}{2}$

따라서 a 이외의 근은 $\frac{b+c}{2}$ 이다.

15 두 식을 연립하면

$x^2+ax=-x^2+b$

$\therefore 2x^2+ax-b=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이 방정식의 한 근이 $-1+\sqrt{3}$ 이고, a, b 가 유리수이므로 대입하여 무리수가 서로 같을 조건을 이용한다.

$2(-1+\sqrt{3})^2+a(-1+\sqrt{3})-b=0$

$(8-a-b)+(a-4)\sqrt{3}=0$

에서 $8-a-b=0$, $a-4=0$ 이므로

$a=4,\ b=4$

따라서 ㉠에서

$2x^2+4x-4=0,\ x^2+2x-2=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{3}$

$y=-x^2+b=-x^2+4$ 이므로

$\mathrm{P}(-1+\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}),\ \mathrm{Q}(-1-\sqrt{3},\ -2\sqrt{3})$

$$\therefore (\overleftrightarrow{\mathrm{PQ}}\text{의 기울기})=\frac{2\sqrt{3}-(-2\sqrt{3})}{(-1+\sqrt{3})-(-1-\sqrt{3})}=\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=2$$

다른 풀이

㉠에서 이차방정식의 한 근이 $-1+\sqrt{3}$ 이고 a, b 가 유리수이므로 다른 한 근은 켤레근인 $-1-\sqrt{3}$ 이다.

근과 계수의 관계에서

$(\text{두 근의 합})=(-1+\sqrt{3})+(-1-\sqrt{3})=-\frac{a}{2}$

이므로 $-2=-\frac{a}{2} \quad \therefore a=4$

$(\text{두 근의 곱})=(-1+\sqrt{3})\times(-1-\sqrt{3})=-\frac{b}{2}$

이므로 $-2=-\frac{b}{2} \quad \therefore b=4$

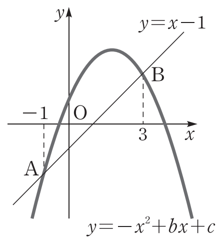
16 $y=x-1$ 과 $y=-x^2+bx+c$ 의 그래프의 교점의 x 좌표가 -1, 3 이므로 $x-1=-x^2+bx+c$, 즉 $x^2+(1-b)x-1-c=0$ 의 두 근이 -1, 3 이다.

따라서 근과 계수의 관계에서

$(\text{두 근의 합})=-1+3=-(1-b) \quad \therefore b=3$

$(\text{두 근의 곱})=-1\times3=-1-c \quad \therefore c=2$

다른 풀이



그래프를 그려 보면 오른쪽 그림과 같고 $y=x-1$ 에서 $\mathrm{A}(-1,\ -2)$, $\mathrm{B}(3,\ 2)$ 이다.

$y=-x^2+bx+c$ 에 점 A, B 의 좌표를 각각 대입하면

$-b+c=-1,\ 3b+c=11$

$\therefore b=3,\ c=2$

17 현재의 사과의 양과 가격을 각각 m, p 라고 할 때, x 일 후의 사과의 양과 가격은 각각 $m\left(1+\frac{1}{10}x\right)$, $p\left(1-\frac{1}{20}x\right)$ 이다.

이때 x 일 후의 수입을 y 원이라고 하면

$$\begin{aligned} y&=mp\left(1+\frac{1}{10}x\right)\left(1-\frac{1}{20}x\right)\\ &=mp\left(1+\frac{1}{20}x-\frac{1}{200}x^2\right)\\ &=-\frac{mp}{200}(x^2-10x-200)\\ &=-\frac{mp}{200}(x-5)^2+\frac{9}{8}mp \end{aligned}$$

따라서 $x=5$ 일 때, y 는 최댓값을 가지므로 5 일 후에 팔면 최대의 수입을 얻을 수 있다.

3 STEP 최고 실력 완성하기

본문 103~104쪽

1 0	**2** 7	**3** 4	**4** 11	**5** 3
6 13	**7** 158	**8** $y=x+1$		
9 P(2, 6)		**10** $\frac{10}{3}$	**11** $2\sqrt{5}$	

1 $y=x^2-2ax+a-2$
$=(x-a)^2-a^2+a-2$
이므로 꼭짓점의 x 좌표가 a 이고,
$0\le a\le 1$ 이므로
최솟값은 $x=a$ 일 때 $m=-a^2+a-2$
최댓값은 $x=-1$ 일 때 $M=3a-1$
$\therefore M+m=-a^2+4a-3$
$=-(a-2)^2+1$
이때 $0\le a\le 1$이므로 $a=1$ 일 때 최댓값은 0 이다.

2 이차방정식 $x^2-2ax+a-2=0$의 두 근이 α, β이므로
$\alpha+\beta=2a$, $\alpha\beta=a-2$
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=(2a)^2-4(a-2)$
$=4a^2-4a+8$
$=4\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+7$
따라서 $a=\frac{1}{2}$ 일 때 최솟값은 7이다.

3 이차함수의 그래프와 x 축과의 교점의 x 좌표는
$x^2+(a-4)x-1=0$ 의 두 근이다.
$x^2+(a-4)x-1=0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면
$\alpha+\beta=-a+4$, $\alpha\beta=-1$
두 교점 사이의 거리는
$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$
$=\sqrt{(-a+4)^2+4}=\sqrt{(a-4)^2+4}$
따라서 $a=4$ 일 때 최솟값은 $\sqrt{4}=2$ 이다.

4 $x^2=t$ 로 놓으면 $-1\le x\le 2$ 에서 $0\le x^2\le 4$ 이므로
$0\le t\le 4$
$y=t^2-2t+2$
$=(t-1)^2+1$
따라서 $t=1$ 일 때 최솟값이 1 이고, $t=4$ 일 때 최댓값이 10 이므로 최댓값과 최솟값의 합은
$10+1=11$

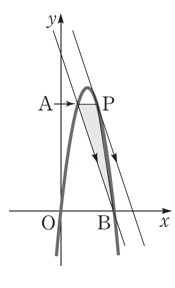
5 a에 관한 이차방정식이 중근을 가지므로
$\frac{D}{4}=4(x-1)^2-4(2x-y)=0$
$(x-1)^2-(2x-y)=0$
$x^2-2x+1-2x+y=0$
$\therefore y=-x^2+4x-1$
$=-(x-2)^2+3$
따라서 $x=2$ 일 때 y의 최댓값은 3 이다.

6 점 P 의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ 0)$이라 하면
$\overline{\mathrm{AP}}^2=(a-0)^2+(0-1)^2=a^2+1$
$\overline{\mathrm{BP}}^2=(a-4)^2+(0-2)^2=(a-4)^2+4$
$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=a^2+1+(a-4)^2+4$
$=2a^2-8a+21$
$=2(a-2)^2+13$
따라서 $a=2$ 일 때 최솟값은 13 이다.

7 이차방정식 $x^2-81x+a=0$의 두 근을
α, β(α, β는 소수)라 하면
$\alpha+\beta=81$, $\alpha\beta=a$
한편, 81 을 두 자연수의 합으로 나타내면 항상 두 수 중 한 수는 짝수이므로 소수인 두 수는 79, 2 가 될 수 밖에 없다.
$\therefore a=\alpha\beta=79\times 2=158$
$y=x^2-2ax+159a$
$=(x-a)^2-a^2+159a$
이므로 $x=a$ 일 때, 최솟값은
$-a^2+159a=a(159-a)$
$=158(159-158)$
$=158$

8 직선 PQ 의 기울기를 m 이라 하면 점 (1, 2)를 지나므로
$y-2=m(x-1)$ $\quad\therefore y=mx-m+2$
포물선 $y=x^2$, 직선 $y=mx-m+2$ 의 교점의 x 좌표를 α, β 라 할 때, α, β 는 방정식
$x^2=mx-m+2$, 즉 $x^2-mx+m-2=0$ …… ㉠
의 두 근이다.
점 $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$이고 직선 PO 와 QO 의 기울기는 각각 $\frac{\alpha^2}{\alpha}=\alpha$, $\frac{\beta^2}{\beta}=\beta$ 이고, $\overline{\mathrm{PO}}\perp\overline{\mathrm{QO}}$ 이므로
$\alpha\beta=-1$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $\alpha\beta=m-2=-1$ $\quad\therefore m=1$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y=x+1$

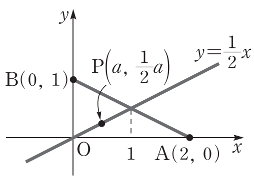
9 $\triangle$ABP 는 밑변을 $\overline{\mathrm{AB}}$로 갖는 삼각형이므로 높이가 최대가 되는 경우를 찾는다.
즉, 오른쪽 그림과 같이 직선 AB 에 평행하고 포물선에 접하는 직선이 있을 때, 그 접점 P 와 직선 AB 사이의 거리가 최대가 되므로 이 경우에 $\triangle$ABP 의 넓이가 최대가 된다.



따라서 두 함수 $y=-3x+m$, $y=-3x^2+9x$의 그래프가 접하므로 연립하면 중근을 갖는다.

$-3x+m=-3x^2+9x$ 에서 $3x^2-12x+m=0$
이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=36-3m=0 \qquad \therefore m=12$
그러므로 점 P 의 x 좌표는 $3x^2-12x+12=0$ 에서
$x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0 \qquad \therefore x=2$
$x=2$ 를 $y=-3x^2+9x$ 에 대입하면 $y=6$ 이므로
P$(2,\ 6)$

10 점 P가 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 위에 있으므로 점 P 의 x좌표를 a라고 하면 $\mathrm{P}\left(a,\ \frac{1}{2}a\right)$이고 $0<a<1$ 이다.



$\overline{\mathrm{PO}}^2=(a-0)^2+\left(\frac{1}{2}a-0\right)^2=a^2+\frac{1}{4}a^2=\frac{5}{4}a^2$

$\overline{\mathrm{PA}}^2=(a-2)^2+\left(\frac{1}{2}a-0\right)^2=(a-2)^2+\frac{1}{4}a^2$

$\overline{\mathrm{PB}}^2=(a-0)^2+\left(\frac{1}{2}a-1\right)^2=a^2+\left(\frac{1}{2}a-1\right)^2$

$\therefore \overline{\mathrm{PO}}^2+\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$

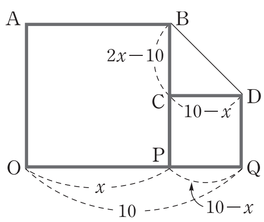
$=\frac{5}{4}a^2+\left\{(a-2)^2+\frac{1}{4}a^2\right\}+\left\{a^2+\left(\frac{1}{2}a-1\right)^2\right\}$

$=\frac{15}{4}a^2-5a+5$

$=\frac{15}{4}\left(a-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{10}{3}$

따라서 $a=\frac{2}{3}$ 일 때 최솟값이 $\frac{10}{3}$ 이다.

11 오른쪽 그림과 같이
$\overline{\mathrm{OP}}=x$ 라고 하면
$\overline{\mathrm{PQ}}=10-x$,
$\overline{\mathrm{BC}}=x-(10-x)$
$\quad=2x-10$
△BCD에서 피타고라스 정리에 의해



$\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{(2x-10)^2+(10-x)^2}$
$\quad=\sqrt{5x^2-60x+200}$
$\quad=\sqrt{5(x-6)^2+20}\ \ (0<x<10)$
따라서 $x=6$ 일 때 최솟값이 $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ 이다.

Ⅲ 단원 종합 문제

본문 105~108쪽

1 ④ **2** 5 **3** $x>-3$ **4** ③
5 제 4 사분면 **6** 제3 사분면
7 풀이 참조 **8** $y=1$ **9** $(-1,\ 0)$
10 3 **11** $k<0$, $0<k<\frac{1}{3}$ **12** $\mathrm{Q}(3-3\sqrt{2},\ 0)$
13 B$(4,\ 16)$ **14** ±2 **15** $\frac{2}{3}<a<\frac{3}{2}$
16 $y=-\frac{3}{2}x+2$ **17** -3
18 $k=-1$일 때 $\frac{3}{4}$, $k=2$일 때 0
19 $y=-x^2+4x+5$ **20** -3
21 최댓값 : 9, 최솟값 : 5 **22** P$(2,\ -2)$
23 15 **24** 2750 **25** 1시간 24분

1 이차항의 계수의 절댓값이 클수록 포물선의 폭은 좁아진다. 따라서 이차항의 계수의 절댓값이 가장 작은 것은 ④ 이다.

2 $y=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 1)$
$y=-x^2-4x+5=-(x+2)^2+9$이므로
꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ 9)$
따라서 점 $(1,\ 1)$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-2,\ 9)$이므로
$m=-3$, $n=8$
$\therefore m+n=5$

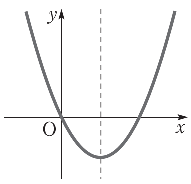
다른 풀이
$y=-(x-1)^2+1$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면
$y=-(x-m-1)^2+1+n$
$\quad=-x^2+2(m+1)x-(m+1)^2+1+n$
이 식이 $y=-x^2-4x+5$와 같으므로
$2(m+1)=-4$, $-(m+1)^2+1+n=5$
$\therefore m=-3$, $n=8$
$\therefore m+n=5$

3 $y=-\frac{2}{3}x^2-4x-7$
$\quad=-\frac{2}{3}(x^2+6x)-7$
$\quad=-\frac{2}{3}(x+3)^2-1$
따라서 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ -1)$이고, 위로 볼록한 포물선이므로 x 의 값이 증가할 때 y 의 값이 감소하는

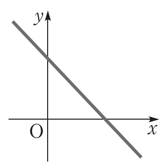
x의 값의 범위는 $x>-3$이다.

4 주어진 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$
축이 y축의 오른쪽에 있으므로
$ab<0$ $\quad\therefore b<0$
또, y절편이 음수이므로 $c<0$
① $ab<0$ ② $bc>0$ ③ $ac<0$
④ $f(1)=a+b+c<0$
⑤ $f(2)=4a+2b+c>0$

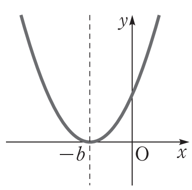
5 $a>0$이므로 아래로 볼록하고, a, b의 부호가 다르므로 축은 y축의 오른쪽에 있으며 y절편은 0이다.
따라서 이차함수 $y=ax^2+bx$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 꼭짓점은 제4사분면 위에 위치한다.



6 주어진 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$
축이 y축의 오른쪽에 있으므로
$ab<0$ $\quad\therefore b<0$
또, y절편이 음수이므로 $c<0$
$\therefore \dfrac{b}{a}<0,\ \dfrac{c}{b}>0$
따라서 직선 $y=\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{b}$는 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



7 주어진 일차함수의 그래프에서 $a>0$, $b>0$이다.
따라서 $y=ax^2+2abx+ab^2=a(x+b)^2$에서 이차항의 계수 $a>0$이므로 아래로 볼록하고 꼭짓점의 좌표는 $(-b,\ 0)$이다.
이때 $-b<0$이므로 주어진 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



8 $y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 1)$이다.
따라서 두 점 $(2,\ 1)$, $(3,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=1$이다.

9 $y=-x^2+2x+a$에 점 $(3,\ 0)$을 대입하면
$0=-9+6+a$ $\quad\therefore a=3$
즉, $y=-x^2+2x+3$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표는 $-x^2+2x+3=0$에서
$x^2-2x-3=0$, $(x-3)(x+1)=0$
$\therefore x=3$ 또는 $x=-1$
따라서 다른 한 점의 좌표는 $(-1,\ 0)$이다.

10 $y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$
이므로 꼭짓점 $\mathrm{C}(-1,\ -4)$
x축과의 교점의 x좌표는 $x^2+2x-3=0$에서
$(x+3)(x-1)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=-3$
즉, $\mathrm{A}(-3,\ 0)$
y절편이 -3이므로 $\mathrm{B}(0,\ -3)$
$$\triangle\mathrm{ABC}=3\times4-\left(\frac{1}{2}\times3\times3+\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times4\times2\right)$$
$$=12-9=3$$

다른 풀이

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-3 & 0 & -1 & -3\\ 0 & -3 & -4 & 0\end{vmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}|9-15|=3$$

참고

세 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$로 이루어진 삼각형의 넓이 S는
$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_1\\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1\end{vmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}|\underbrace{(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)}_{\text{점선 부분의 곱의 합}}-\underbrace{(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)}_{\text{실선 부분의 곱의 합}}|$$

11 $kx^2-2(k-1)x+k+1=0$
이 서로 다른 두 근을 가지려면
$\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-k(k+1)>0$
$-3k+1>0$ $\quad\therefore k<\dfrac{1}{3}$
그런데 $y=kx^2-2(k-1)x+k+1$은 이차함수이므로 $k\neq0$
$\therefore k<0,\ 0<k<\dfrac{1}{3}$

12 $y=\dfrac{1}{3}x^2-2x+3=\dfrac{1}{3}(x-3)^2$
이므로 꼭짓점 $\mathrm{P}(3,\ 0)$
y절편이 3이므로 $\mathrm{A}(0,\ 3)$
따라서 $\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$이므로
$\mathrm{Q}(3-3\sqrt{2},\ 0)$

13 두 식을 연립하면 $x^2=ax+8$이고, 이 방정식의 한 근이 -2이므로 대입하면
$4=-2a+8$ $\quad\therefore a=2$
$x^2=2x+8$에서 $x^2-2x-8=0$, $(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 점 B의 x 좌표는 4 이고 $y=x^2$에 $x=4$를 대입하면 $y=16$이므로 $B(4,\ 16)$이다.

14 두 함수 $y=x^2$과 $y=ax$의 그래프의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2=ax$ 에서 $x^2-ax=0$, $x(x-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a$

따라서 두 교점의 좌표는 $(0,\ 0)$, $(a,\ a^2)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{a^2+a^4}=2\sqrt{5}$ 에서

$a^4+a^2-20=0$, $(a^2-4)(a^2+5)=0$

$a^2=4\ (\because a^2>0)\qquad \therefore a=\pm 2$

15 $y=x^2+4x+3$ 과 $y=-x-3$ 의 그래프의 두 교점의 x 좌표는 $x^2+4x+3=-x-3$ 에서

$x^2+5x+6=0$, $(x+2)(x+3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-3$

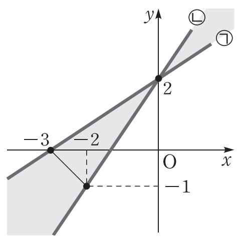
즉, 두 교점의 좌표는

$(-2,\ -1)$, $(-3,\ 0)$이고,

직선 $y=ax+2$ 는 y 절편이

2 이므로 오른쪽 그림과 같이 두

직선 ㉠과 ㉡ 사이에 있다.



(ⅰ) $(-3,\ 0)$, $(0,\ 2)$를 지날 때

(직선 ㉠의 기울기)$=\dfrac{0-2}{-3-0}=\dfrac{2}{3}$

(ⅱ) $(-2,\ -1)$, $(0,\ 2)$를 지날 때

(직선 ㉡의 기울기)$=\dfrac{-1-2}{-2-0}=\dfrac{3}{2}$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 직선 $y=ax+2$의 기울기인 a 의 값의 범위는 $\dfrac{2}{3}<a<\dfrac{3}{2}$

16 $-2x^2=3x-4$ 에서 양변을 -2 로 나누면

$x^2=-\dfrac{3}{2}x+2$ 이므로

$y=x^2$, $y=-\dfrac{3}{2}x+2$

의 그래프가 필요하다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-\dfrac{3}{2}x+2$

17 두 교점은 세 그래프를 모두 지나므로 $y=-x^2+9$ 와 $y=-2x+6$ 의 교점을 구하면

$-x^2+9=-2x+6$ 에서

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

즉, 두 교점은 $(-1,\ 8)$, $(3,\ 0)$이므로

$y=ax^2+bx+3$ 에 각각 대입하면

$a-b+3=8$, $9a+3b+3=0$

즉, $a-b=5$, $3a+b=-1$ 이므로

두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-4$

$\therefore a+b=-3$

18 점 $(k+1,\ k^2)$을 $y=x^2-kx+1$ 에 대입하면

$k^2=(k+1)^2-k(k+1)+1$ 이므로

$k^2-k-2=0$, $(k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=2$

(ⅰ) $k=-1$ 일 때,

$y=x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

이므로 $x=-\dfrac{1}{2}$ 일 때 최솟값이 $\dfrac{3}{4}$ 이다.

(ⅱ) $k=2$ 일 때,

$y=x^2-2x+1=(x-1)^2$

이므로 $x=1$일 때 최솟값이 0 이다.

19 x축과 두 점 $(-1,\ 0)$, $(5,\ 0)$에서 만나므로 $y=a(x+1)(x-5)$로 놓으면 대칭축은 $x=2$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 9)$이다.

$y=a(x^2-4x-5)=a(x-2)^2-9a$

따라서 $-9a=9$에서 $a=-1$ 이므로 구하는 포물선의 방정식은 $y=-x^2+4x+5$

20 $y=x^2-2mx-8m-19$

$=(x-m)^2-m^2-8m-19$

이므로

$n=-m^2-8m-19$

$=-(m+4)^2-3$

따라서 n 의 최댓값은 -3 이다.

21 $y=4-2x$ 이고 $y\geq 0$ 이므로

$4-2x\geq 0\qquad \therefore x\leq 2$

즉, $0\leq x\leq 2$ 이다.

$4x^2+6xy+y^2-6x-3y+1$

$=4x^2+6x(4-2x)+(4-2x)^2-6x-3(4-2x)+1$

$=4x^2+24x-12x^2+16-16x+4x^2-6x-12+6x+1$

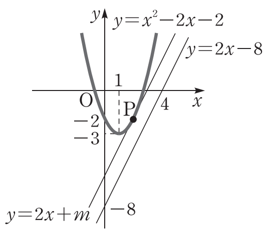
$=-4x^2+8x+5$

따라서 $f(x)=-4x^2+8x+5\ (0\leq x\leq 2)$의 최댓값과 최솟값을 구하면 된다.

$f(x)=-4(x-1)^2+9$ 이고 $0\leq x\leq 2$이므로

$x=1$ 일 때 최댓값이 9 이고, $x=0$ 또는 2일 때 최솟값이 5이다.

22 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=2x-8$에 평행하고 포물선 $y=x^2-2x-2=(x-1)^2-3$에 접하는 직선의 방정식을 $y=2x+m$이라고 하면



$x^2-2x-2=2x+m$

즉, $x^2-4x-m-2=0$에서 판별식 $D=0$이므로

$\frac{D}{4}=4-(-m-2)=0 \qquad \therefore m=-6$

따라서 $y=x^2-2x-2$와 $y=2x-6$의 그래프의 교점의 좌표를 구하면

$x^2-2x-2=2x-6$에서 $x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0 \qquad \therefore x=2$

$x=2$를 $y=2x-6$에 대입하면 $y=-2$

$\therefore \mathrm{P}(2,\ -2)$

23 물건의 처음 가격을 a원, 판매량을 b개라고 하면 x일 후의 가격은 $a\left(1+\frac{5}{100}x\right)$원, 판매량은 $b\left(1-\frac{2}{100}x\right)$개이므로

(판매 수입)=(가격)×(판매량)

$$=ab\left(1+\frac{5}{100}x\right)\left(1-\frac{2}{100}x\right)$$
$$=\frac{ab}{1000}(20+x)(50-x)$$
$$=\frac{ab}{1000}(-x^2+30x+1000)$$
$$=-\frac{ab}{1000}(x-15)^2+\frac{49}{40}ab\text{(원)}$$

따라서 $x=15$일 때, 판매 수입은 최대이다.

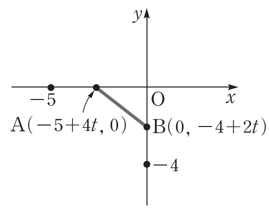
24 가격이 $(3000+10x)$원이면 판매량은 $(100-2x)$kg이므로 판매 금액은 $(3000+10x)(100-2x)$원이고, 원가는 $2000(100-2x)$원이다.

따라서 하루의 이익 P는

$$P=(3000+10x)(100-2x)-2000(100-2x)$$
$$=(1000+10x)(100-2x)$$
$$=-20(x+100)(x-50)$$
$$=-20(x^2+50x-5000)$$
$$=-20(x+25)^2+112500$$

따라서 $x=-25$, 즉 $a=3000+10\times(-25)=2750$(원)씩 판매할 때 최대 이익을 낸다.

25 교차점의 좌표를 $\mathrm{O}(0,\ 0)$으로 하면



$\mathrm{A}(-5,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -4)$

이므로 t시간 후의 점 A, B의 좌표는

$\mathrm{A}(-5+4t,\ 0)$,

$\mathrm{B}(0,\ -4+2t)$이다.

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(4t-5)^2+(2t-4)^2}$$
$$=\sqrt{20t^2-56t+41}$$
$$=\sqrt{20\left(t-\frac{7}{5}\right)^2+\frac{9}{5}}$$

따라서 $t=\frac{7}{5}=1.4$(시간)$=$(1시간 24분)일 때, A와 B의 거리가 가장 짧아진다.

Memo

Memo

Memo