이책의

정답과 해설

수학 (상)

I 다항식

1 다항식의 연산 002
2 항등식과 나머지정리 013
3 인수분해 025

II 방정식과 부등식

4 복소수 037
5 이차방정식 046
6 이차방정식과 이차함수 065
7 여러 가지 방정식 078
8 연립일차부등식 099
9 이차부등식과 연립이차부등식 116

III 도형의 방정식

10 평면좌표 133
11 직선의 방정식 144
12 원의 방정식 159
13 도형의 이동 179

본책 8~21쪽

1 | 다항식의 연산

STEP 1 개념 마스터

0001

(1) x에 대하여 차수가 높은 항부터 나열하면

$-x^2+(2y+1)x+3y^2+5$

(2) x에 대하여 차수가 낮은 항부터 나열하면

$3y^2+5+(2y+1)x-x^2$

답 (1) $-x^2+(2y+1)x+3y^2+5$ (2) $3y^2+5+(2y+1)x-x^2$

0002 답 $4x^2+xy+7y^2$

0003

$(x^2-3xy+y^2)-(-3x^2-5xy+4y^2)$

$=x^2-3xy+y^2+3x^2+5xy-4y^2$

$=4x^2+2xy-3y^2$ 답 $4x^2+2xy-3y^2$

0004

$(7x^2+xy-y^2)+(xy-5y^2)-(x^2+4xy)$

$=7x^2+xy-y^2+xy-5y^2-x^2-4xy$

$=6x^2-2xy-6y^2$ 답 $6x^2-2xy-6y^2$

0005

$-3A+2B=-3(2x^3+5x^2-3x+2)+2(-x^3-4x^2+3)$

$=-6x^3-15x^2+9x-6-2x^3-8x^2+6$

$=-8x^3-23x^2+9x$ 답 $-8x^3-23x^2+9x$

0006

$5B-(2A+B)$

$=5B-2A-B=-2A+4B$

$=-2(2x^3+5x^2-3x+2)+4(-x^3-4x^2+3)$

$=-4x^3-10x^2+6x-4-4x^3-16x^2+12$

$=-8x^3-26x^2+6x+8$ 답 $-8x^3-26x^2+6x+8$

0007

$2x(x^2+x-4)=2x^3+2x^2-8x$ 답 $2x^3+2x^2-8x$

0008

$(2a+b)(a^2+ab-b^2)$

$=2a^3+2a^2b-2ab^2+a^2b+ab^2-b^3$

$=2a^3+3a^2b-ab^2-b^3$ 답 $2a^3+3a^2b-ab^2-b^3$

0009

$(2x+3)^2=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3+3^2$

$=4x^2+12x+9$ 답 $4x^2+12x+9$

0010

$(3x-1)^2=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 1+1^2$

$=9x^2-6x+1$ 답 $9x^2-6x+1$

0011

$(5x+2y)(5x-2y)=(5x)^2-(2y)^2$

$=25x^2-4y^2$ 답 $25x^2-4y^2$

0012

$(x+3)(x-5)=x^2+(3-5)x+3\cdot(-5)$

$=x^2-2x-15$ 답 $x^2-2x-15$

0013

$(2x+3)(4x-7)=2\cdot 4x^2+(-14+12)x+3\cdot(-7)$

$=8x^2-2x-21$ 답 $8x^2-2x-21$

0014

$(x+2y+3z)^2$

$=x^2+(2y)^2+(3z)^2+2\cdot x\cdot 2y+2\cdot 2y\cdot 3z+2\cdot 3z\cdot x$

$=x^2+4y^2+9z^2+4xy+12yz+6zx$

답 $x^2+4y^2+9z^2+4xy+12yz+6zx$

0015

$(x+2)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3$

$=x^3+6x^2+12x+8$ 답 $x^3+6x^2+12x+8$

0016

$(3x-4y)^3=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot 4y+3\cdot 3x\cdot(4y)^2-(4y)^3$

$=27x^3-108x^2y+144xy^2-64y^3$

답 $27x^3-108x^2y+144xy^2-64y^3$

0017

$(x+2)(x^2-2x+4)=x^3+2^3=x^3+8$ 답 x^3+8

0018

$(5x-2)(25x^2+10x+4)=(5x)^3-2^3$

$=125x^3-8$ 답 $125x^3-8$

0019

$(x+2)(x+4)(x+5)$

$=x^3+(2+4+5)x^2+(2\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 2)x+2\cdot 4\cdot 5$

$=x^3+11x^2+38x+40$ 답 $x^3+11x^2+38x+40$

0020

$(x-y+1)(x^2+y^2+xy-x+y+1)$

$=\{x+(-y)+1\}\{x^2+(-y)^2+1^2-x\cdot(-y)-(-y)\cdot 1-1\cdot x\}$

$=x^3+(-y)^3+1^3-3\cdot x\cdot(-y)\cdot 1$

$=x^3-y^3+3xy+1$ 답 $x^3-y^3+3xy+1$

0021

$(9x^2+6xy+4y^2)(9x^2-6xy+4y^2)$

$=\{(3x)^2+3x\cdot 2y+(2y)^2\}\{(3x)^2-3x\cdot 2y+(2y)^2\}$

$=(3x)^4+(3x)^2(2y)^2+(2y)^4$

$=81x^4+36x^2y^2+16y^4$ 답 $81x^4+36x^2y^2+16y^4$

0022

(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=3^2-2\cdot 1=7$

(2) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=3^3-3\cdot 1\cdot 3=18$

답 (1) 7 (2) 18

0023

(1) $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=4^2+2\cdot(-2)=12$

(2) $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=4^3+3\cdot(-2)\cdot 4=40$

답 (1) 12 (2) 40

0024

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=4^2-2=14$

(2) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4=4^2-4=12$

$\therefore\ x-\dfrac{1}{x}=\pm 2\sqrt{3}$

답 (1) 14 (2) $\pm 2\sqrt{3}$

0025

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=9^2-2\cdot 8=65$ 답 65

0026 답 (가) 4 (나) 4 (다) 2

0027

$$\begin{array}{r} x^2-x-2 \\ x+2\,\overline{)\,x^3+x^2-4x+3} \\ \underline{x^3+2x^2} \\ -x^2-4x \\ \underline{-x^2-2x} \\ -2x+3 \\ \underline{-2x-4} \\ 7 \end{array}$$

$\therefore$ 몫 : x^2-x-2, 나머지 : 7 답 몫 : x^2-x-2, 나머지 : 7

0028

$$\begin{array}{r} 2x-2 \\ x^2+x+2\,\overline{)\,2x^3-4x+1} \\ \underline{2x^3+2x^2+4x} \\ -2x^2-8x+1 \\ \underline{-2x^2-2x-4} \\ -6x+5 \end{array}$$

$\therefore$ 몫 : $2x-2$, 나머지 : $-6x+5$

답 몫 : $2x-2$, 나머지 : $-6x+5$

0029 답 (가) 3 (나) 3 (다) -9 (라) -2 (마) -10 (바) x^2-2x-3 (사) -10

0030

$$\begin{array}{r|rrr|r} -1 & 1 & -2 & 1 & 6 \\ & & -1 & 3 & -4 \\ \hline & 1 & -3 & 4 & 2 \end{array}$$

$\therefore$ 몫 : x^2-3x+4, 나머지 : 2 답 몫 : x^2-3x+4, 나머지 : 2

0031

$$\begin{array}{r|rrr|r} -2 & 3 & 4 & 0 & -5 \\ & & -6 & 4 & -8 \\ \hline & 3 & -2 & 4 & -13 \end{array}$$

$\therefore$ 몫 : $3x^2-2x+4$, 나머지 : -13

답 몫 : $3x^2-2x+4$, 나머지 : -13

0032

$$\begin{array}{r|rrr|r} \frac{1}{2} & 2 & 1 & -3 & -6 \\ & & 1 & 1 & -1 \\ \hline & 2 & 2 & -2 & -7 \end{array}$$

$\therefore$ 몫 : $2x^2+2x-2$, 나머지 : -7

답 몫 : $2x^2+2x-2$, 나머지 : -7

STEP 2 유형 마스터

0033

|전략| 먼저 주어진 식을 간단히 정리한 다음 A, B, C에 각 다항식을 대입하여 계산한다.

$3A-2(2A-B)+C$

$=3A-4A+2B+C=-A+2B+C$

$=-(3x^2-2xy+4y^2)+2(5x^2-3xy+y^2)+(-2x^2-5y^2)$

$=-3x^2+2xy-4y^2+10x^2-6xy+2y^2-2x^2-5y^2$

$=5x^2-4xy-7y^2$ 답 ①

0034

$A-2(X-B)=2A$에서

$A-2X+2B=2A$, $2X=-A+2B$

$X=-\frac{1}{2}A+B$

$=-\frac{1}{2}(2x^3+4x^2-6)+(x^3-x^2+2x+3)$

$=-x^3-2x^2+3+x^3-x^2+2x+3$

$=-3x^2+2x+6$ 답 ①

0035

$A+B=x^2+xy+y^2$ …… ㉠

$B+C=4x^2-3xy+y^2$ …… ㉡

$C+A=-3x^2+4y^2$ …… ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$2(A+B+C)=2x^2-2xy+6y^2$

$\therefore A+B+C=x^2-xy+3y^2$ 답 ④

0036

$A\vee(B\wedge C)$

$=A\vee(B-2C)=2A+B-2C$

$=2(x^2-2x+y^2)+(3x-y+2y^2)-2(3x^2+2y^2)$

$=2x^2-4x+2y^2+3x-y+2y^2-6x^2-4y^2$

$=-4x^2-x-y$ 답 $-4x^2-x-y$

0037

$2A+B=x^2+8x-3$ …… ㉠

$A-B=2x^2+x-12$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$3A=3x^2+9x-15$ $\therefore A=x^2+3x-5$ … ❶

이것을 ㉡에 대입하면

$(x^2+3x-5)-B=2x^2+x-12$

$\therefore B=x^2+3x-5-(2x^2+x-12)$

$=-x^2+2x+7$ … ❷

$\therefore A+B=x^2+3x-5+(-x^2+2x+7)$

$=5x+2$ … ❸

답 $5x+2$

채점 기준	비율
❶ 다항식 A를 구할 수 있다.	40 %
❷ 다항식 B를 구할 수 있다.	40 %
❸ $A+B$를 계산할 수 있다.	20 %

0038

| 전략 | x^3항은 (x^3항)×(상수항), (x^2항)×(x항), (x항)×(x^2항)에서 나올 수 있으므로 이 항들만 선택하여 곱한다.

$(x^3+2x^2-x+4)(2x^2+3x-5)$의 전개식에서 x^3항은

$x^3\cdot(-5)+2x^2\cdot3x+(-x)\cdot2x^2=-5x^3+6x^3-2x^3=-x^3$

따라서 x^3의 계수는 -1이다. 답 -1

0039

$(3x^2+3x+4)(2x^2+kx-7)$의 전개식에서 x^2항은

$3x^2\cdot(-7)+3x\cdot kx+4\cdot2x^2=(3k-13)x^2$

이때, x^2의 계수가 5이므로

$3k-13=5$ $\therefore k=6$ 답 6

0040

$(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2018})^2$

$=(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2018})(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2018})$

이 식의 전개식에서 x^5항은

$1\cdot x^5+x\cdot x^4+x^2\cdot x^3+x^3\cdot x^2+x^4\cdot x+x^5\cdot1$

$=x^5+x^5+x^5+x^5+x^5+x^5=6x^5$

따라서 x^5의 계수는 6이다. 답 ①

참고 주어진 식의 전개식에서 x^5의 계수와 $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$의 전개식에서 x^5의 계수는 서로 같다.

0041

$(1+2x+3x^2+4x^3)^2=(1+2x+3x^2+4x^3)(1+2x+3x^2+4x^3)$

이 식의 전개식에서 x^2항은

$1\cdot3x^2+2x\cdot2x+3x^2\cdot1=3x^2+4x^2+3x^2=10x^2$

$(1+2x+3x^2)^2=(1+2x+3x^2)(1+2x+3x^2)$

이 식의 전개식에서 x^2항은

$1\cdot3x^2+2x\cdot2x+3x^2\cdot1=3x^2+4x^2+3x^2=10x^2$

따라서 두 다항식 $(1+2x+3x^2+4x^3)^2$, $(1+2x+3x^2)^2$의 전개식에서 x^2의 계수는 모두 10이므로 주어진 식의 x^2의 계수는 0이다.

답 ①

다른 풀이 $(1+2x+3x^2+4x^3)^2$의 전개식에서 x^2의 계수는 $4x^3$과 관계없이 결정되므로 $(1+2x+3x^2+4x^3)^2$과 $(1+2x+3x^2)^2$의 전개식에서 x^2의 계수는 서로 같다.

따라서 주어진 식의 x^2의 계수는 0이다.

0042

$(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+10)$의 전개식에서 x^9항은

$x^9\cdot10+x^9\cdot9+x^9\cdot8+\cdots+x^9\cdot2+x^9\cdot1$

$=(1+2+\cdots+8+9+10)x^9=55x^9$

따라서 x^9의 계수는 55이다. 답 ③

0043

| 전략 | 곱셈 공식을 이용하여 좌변의 식을 전개한다.

① $(x-1)(x+2)(x-4)$

$=x^3+(-1+2-4)x^2+\{(-1)\cdot2+2\cdot(-4)+(-4)\cdot(-1)\}x$

$+(-1)\cdot2\cdot(-4)$

$=x^3-3x^2-6x+8$

② $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

$=(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

$=(a^4-b^4)(a^4+b^4)$

$=a^8-b^8$

④ $(x-2y)^3=x^3-3\cdot x^2\cdot 2y+3\cdot x\cdot(2y)^2-(2y)^3$
$=x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$
⑤ $(x-2)(x^2+2x+4)=x^3-2^3=x^3-8$ 답 ③

0044

$(2x-y+3)^2$
$=(2x)^2+(-y)^2+3^2+2\cdot 2x\cdot(-y)+2\cdot(-y)\cdot 3+2\cdot 3\cdot 2x$
$=4x^2+y^2-4xy+12x-6y+9$
따라서 $a=1$, $b=-4$, $c=12$이므로
$a+b+c=9$ 답 9

0045

$(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$
$=\{(x-y)(x^2+xy+y^2)\}\{(x+y)(x^2-xy+y^2)\}$
$=(x^3-y^3)(x^3+y^3)$
$=(x^3)^2-(y^3)^2=x^6-y^6$ 답 ①

0046

$(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
$=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
$=\{(x-1)(x^2+x+1)\}\{(x+1)(x^2-x+1)\}$
$=(x^3-1)(x^3+1)$
$=x^6-1=2-1$ ($\because$ $x^6=2$)
$=1$ 답 ①

0047

| 전략 | 두 일차식의 상수항의 합이 같도록 짝지어 전개한 후 공통부분을 치환한다.

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$
$=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}$
$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$
$x^2+5x=t$로 놓으면
(주어진 식)$=(t+4)(t+6)=t^2+10t+24$
$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24$
$=x^4+10x^3+25x^2+10x^2+50x+24$
$=x^4+10x^3+35x^2+50x+24$
답 $x^4+10x^3+35x^2+50x+24$

0048

$(a-b+c)(a+b-c)=\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}$
$b-c=t$로 놓으면
(주어진 식)$=(a-t)(a+t)=a^2-t^2$
$=a^2-(b-c)^2$
$=a^2-(b^2-2bc+c^2)$
$=a^2-b^2+2bc-c^2$
전개한 식을 b에 대한 내림차순으로 정리하면
$-b^2+2bc+a^2-c^2$ 답 ③

0049

$x^2-2x=t$로 놓으면
$(x^2-2x+3)(x^2-2x-1)$
$=(t+3)(t-1)=t^2+2t-3$
$=(x^2-2x)^2+2(x^2-2x)-3$
$=x^4-4x^3+4x^2+2x^2-4x-3$
$=x^4-4x^3+6x^2-4x-3$
따라서 $a=6$, $b=-4$이므로 $2a+b=8$ 답 8

0050

$(5+3a)^3=A$, $(5-3a)^3=B$로 놓으면
$\{(5+3a)^3-(5-3a)^3\}^2-\{(5+3a)^3+(5-3a)^3\}^2$
$=(A-B)^2-(A+B)^2=-4AB$
$=-4(5+3a)^3(5-3a)^3$
$=-4\{(5+3a)(5-3a)\}^3$
$=-4(25-9a^2)^3$
$=-4(25-9\cdot 3)^3$ ($\because$ $a=\sqrt{3}$)
$=-4\cdot(-8)=32$ 답 32

0051

| 전략 | 먼저 곱셈 공식의 변형을 이용하여 xy의 값을 구한다.

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서
$4=(2\sqrt{2})^2-2xy$ $\quad\therefore xy=2$
$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=(2\sqrt{2})^3-3\cdot 2\cdot 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ 답 ④

0052

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$에서
$4=1^3+3xy\cdot 1$ $\quad\therefore xy=1$
$\therefore \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{y^2+x^2}{xy}=\dfrac{(x-y)^2+2xy}{xy}$
$=\dfrac{1^2+2\cdot 1}{1}=3$ 답 ⑤

0053

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서
$7=1^3-3xy\cdot 1$ $\quad\therefore xy=-2$
$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=1^2-2\cdot(-2)=5$
$\therefore x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$
$=5^2-2\cdot(-2)^2=17$ 답 17

0054

$a=2+\sqrt{3}$, $b=2-\sqrt{3}$에서
$a+b=4$, $ab=1$
$\therefore \dfrac{b}{a^2}+\dfrac{a}{b^2}=\dfrac{b^3+a^3}{a^2b^2}=\dfrac{(a+b)^3-3ab(a+b)}{(ab)^2}$
$=\dfrac{4^3-3\cdot 1\cdot 4}{1^2}=52$ 답 52

0055

|전략| 양변을 x로 나누어 $x+\frac{1}{x}$의 값을 구한 후 곱셈 공식의 변형을 이용하여 식의 값을 구한다.

$x\neq0$이므로 $x^2-3x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-3+\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x+\frac{1}{x}=3$

$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=3^3-3\cdot3=18$ 답 ⑤

참고 $x=0$을 $x^2-3x+1=0$에 대입하면 $1\neq0$이므로 $x\neq0$이다.

0056

$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+\frac{1}{a^2}+2=3+2=5$

그런데 $a>0$이므로 $a+\frac{1}{a}=\sqrt{5}$

$\therefore a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right)$

$=(\sqrt{5})^3-3\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}$ 답 ②

0057

$x\neq0$이므로 $x^2-x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-1-\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x-\frac{1}{x}=1$

$\therefore x^2+2x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2+2\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=1^2+2+2\cdot1=5$ 답 ⑤

0058

|전략| 먼저 곱셈 공식의 변형을 이용하여 $ab+bc+ca$의 값을 구한다.

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$(-1)^2=5+2(ab+bc+ca) \qquad \therefore ab+bc+ca=-2$

$\therefore a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=-1\cdot\{5-(-2)\}+3\cdot2=-1$ 답 ②

0059

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$1^2=2+2(ab+bc+ca) \qquad \therefore ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$에서

$3=1\cdot\left\{2-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}+3abc,\ 3abc=\frac{1}{2}$

$\therefore abc=\frac{1}{6}$ 답 $\frac{1}{6}$

0060

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$1^2=7+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=-3$ ······ ㉠ ··· ❶

㉠의 양변을 제곱하여 정리하면

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(ab^2c+abc^2+a^2bc)=9$

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=9$

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2\cdot1\cdot1=9$

$\therefore a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=7$ ··· ❷

답 7

채점 기준	비율
❶ $ab+bc+ca$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$의 값을 구할 수 있다.	60 %

0061

$a-b=2,\ b-c=3$을 변끼리 더하면 $a-c=5$

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{2^2+3^2+(-5)^2\}=19$ 답 19

0062

|전략| 주어진 식에 $(2-1)$을 곱하여 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용한다.

$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$=\underbrace{(2-1)}_{2-1=1}(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$=(2^8-1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$=(2^{16}-1)(2^{16}+1)$

$=2^{32}-1$ 답 ④

0063

$100=a$로 놓으면

$101\times(10000-100+1)-99\times10101$

$=(a+1)(a^2-a+1)-(a-1)(a^2+a+1)$

$=a^3+1-(a^3-1)=2$ 답 2

0064

$9\times11\times101\times10001$

$=(10-1)(10+1)(100+1)(10000+1)$

$=(10^2-1)(10^2+1)(10^4+1)$

$=(10^4-1)(10^4+1)$

$=10^8-1$ 답 ②

0065

$1.002^3=(1+0.002)^3$

$=1^3+3\times1^2\times0.002+3\times1\times0.002^2+0.002^3$

$=1+0.006+0.000012+\cdots$

$=1.006012\cdots$

따라서 소수점 아래 첫째, 셋째, 다섯째 자리의 숫자는 각각 0, 6, 1이므로 구하는 합은 7이다. 답 7

0066

|전략| 직육면체의 세 모서리의 길이를 a, b, c라 하고 주어진 조건을 a, b, c에 대한 식으로 나타낸다.

직육면체의 세 모서리의 길이를 각각 a, b, c라 하면

모든 모서리의 길이의 합이 28이므로

$4(a+b+c)=28 \qquad \therefore a+b+c=7$

또, 직육면체의 겉넓이가 40이므로

$2(ab+bc+ca)=40$

이때, $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$7^2=a^2+b^2+c^2+40 \qquad \therefore a^2+b^2+c^2=9$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{9}=3$ 답 3

Lecture

세 모서리의 길이가 각각 a, b, c인 직육면체에서

(1) 모서리의 길이의 총합 ⇨ $4(a+b+c)$

(2) 대각선의 길이 ⇨ $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

(3) 겉넓이 ⇨ $2(ab+bc+ca)$

(4) 부피 ⇨ abc

0067

직사각형의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면

직사각형의 대각선의 길이가 19이므로

$a^2+b^2=19^2=361$

또, 직사각형의 둘레의 길이가 42이므로

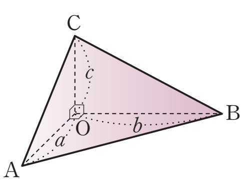
$2(a+b)=42 \qquad \therefore a+b=21$

이때, $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$361=21^2-2ab \qquad \therefore ab=40$

따라서 직사각형의 넓이는 40이다. 답 40

0068



세 모서리 OA, OB, OC의 길이를

각각 a, b, c라 하면

$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=9$에서

$a+b+c=9$ ··· ❶

$\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA=13$에서

$\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}ca=13$

$\therefore ab+bc+ca=26$ ··· ❷

$\therefore \overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2=a^2+b^2+c^2$

$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=9^2-2\cdot26=29$ ··· ❸

답 29

채점 기준	비율
❶ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $ab+bc+ca$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0069

|전략| 직접 나눗셈을 하여 몫과 나머지를 구한다.

$$\begin{array}{r}
x-1 \\
x^2-2x+2\,\overline{)\,x^3-3x^2+5x-4} \\
\underline{x^3-2x^2+2x} \\
-x^2+3x-4 \\
\underline{-x^2+2x-2} \\
x-2
\end{array}$$

따라서 $Q(x)=x-1$, $R(x)=x-2$이므로

$Q(2)+R(3)=1+1=2$ 답 2

0070

$$\begin{array}{r}
x^2+2x-2 \\
2x+2\,\overline{)\,2x^3+6x^2-7} \\
\underline{2x^3+2x^2} \\
4x^2 \\
\underline{4x^2+4x} \\
-4x-7 \\
\underline{-4x-4} \\
-3
\end{array}$$

$\therefore a=2, b=4, c=4, d=7, e=-3$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0071

$$\begin{array}{r}
2x-3 \\
x^2-x-5\,\overline{)\,2x^3-5x^2+x-1} \\
\underline{2x^3-2x^2-10x\phantom{-1}} \\
-3x^2+11x-1 \\
\underline{-3x^2+3x+15} \\
8x-16
\end{array}$$

따라서 몫은 $2x-3$, 나머지는 $8x-16$이므로

$a=2, b=-3, c=8, d=-16$

$\therefore a+b+c+d=-9$ 답 ①

0072

|전략| 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 $A=BQ+R$이다. (단, (R의 차수)<(B의 차수))

$x^3-x^2-2x+1=A(x+2)+3x-1$이므로

$A(x+2)=x^3-x^2-2x+1-(3x-1)$

$=x^3-x^2-5x+2$

$\therefore\ A=(x^3-x^2-5x+2)\div(x+2)$

$$
\begin{array}{rr}
 & x^2-3x+1 \\ \cline{2-2}
x+2\,\big) & x^3-\ x^2-5x+2 \\
 & x^3+2x^2\qquad\quad \\ \cline{2-2}
 & -3x^2-5x\quad\ \\
 & -3x^2-6x\quad\ \\ \cline{2-2}
 & x+2 \\
 & x+2 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore\ A=x^2-3x+1$ 답 ⑤

0073

$f(x)=(x-1)(3x-4)+5=3x^2-7x+9$

$$
\begin{array}{rr}
 & 3x-10 \\ \cline{2-2}
x+1\,\big) & 3x^2-\ 7x+\ 9 \\
 & 3x^2+\ 3x\quad\ \ \\ \cline{2-2}
 & -10x+\ 9 \\
 & -10x-10 \\ \cline{2-2}
 & 19
\end{array}
$$

따라서 $f(x)=3x^2-7x+9$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫은 $3x-10$, 나머지는 19이다. 답 몫 : $3x-10$, 나머지 : 19

0074

직육면체의 높이를 A라 하면

$(x+1)(x+2)A=2x^3+5x^2+x-2$

$\therefore\ A=(2x^3+5x^2+x-2)\div(x^2+3x+2)$

$$
\begin{array}{rr}
 & 2x-1 \\ \cline{2-2}
x^2+3x+2\,\big) & 2x^3+5x^2+\ x-2 \\
 & 2x^3+6x^2+4x\quad\ \ \\ \cline{2-2}
 & -\ x^2-3x-2 \\
 & -\ x^2-3x-2 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

따라서 직육면체의 높이는 $2x-1$이다. 답 $2x-1$

다른 풀이 $2x^3+5x^2+x-2$에서 x^3의 계수가 2이므로 구하는 높이를 $2x+k$ (k는 상수)라 하면

$(x+1)(x+2)(2x+k)=2x^3+5x^2+x-2$

양변의 상수항을 비교하면

$2k=-2 \qquad \therefore\ k=-1$

따라서 직육면체의 높이는 $2x-1$이다.

0075

$$
\begin{array}{rr}
 & 2x^2+x+3\qquad\qquad \\ \cline{2-2}
x^2+x-1\,\big) & 2x^4+3x^3+2x^2+2x-1 \\
 & 2x^4+2x^3-2x^2\qquad\qquad \\ \cline{2-2}
 & x^3+4x^2+2x\quad\ \ \\
 & x^3+\ x^2-\ x\quad\ \ \\ \cline{2-2}
 & 3x^2+3x-1 \\
 & 3x^2+3x-3 \\ \cline{2-2}
 & 2
\end{array}
$$

$\therefore\ 2x^4+3x^3+2x^2+2x-1=(x^2+x-1)(2x^2+x+3)+2$

이때, $x^2+x-1=0$이므로 구하는 식의 값은 2이다. 답 ②

0076

|전략| 다항식 $f(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 할 때, $f(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{a}Q(x)$, 나머지는 R이다.

$$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R=\frac{1}{2}(2x-1)Q(x)+R$$
$$=(2x-1)\cdot\frac{1}{2}Q(x)+R$$

따라서 $f(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{2}Q(x)$, 나머지는 R이다. 답 ①

0077

$f(x)=(5x-2)Q(x)+R$ … ❶

$=5\left(x-\frac{2}{5}\right)Q(x)+R$

$=\left(x-\frac{2}{5}\right)\cdot 5Q(x)+R$ … ❷

따라서 $f(x)$를 $x-\frac{2}{5}$로 나누었을 때의 몫은 $5Q(x)$, 나머지는 R이다. … ❸

답 몫 : $5Q(x)$, 나머지 : R

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 $5x-2$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $f(x)$를 $x-\frac{2}{5}$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ $f(x)$를 $x-\frac{2}{5}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구할 수 있다.	20 %

0078

$f(x)=(3x-1)Q(x)+R$

이 식의 양변에 x를 곱하면

$xf(x)=x(3x-1)Q(x)+Rx$

$$=3x\left(x-\frac{1}{3}\right)Q(x)+R\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}R$$
$$=\left(x-\frac{1}{3}\right)\{3xQ(x)+R\}+\frac{1}{3}R$$

따라서 $xf(x)$를 $x-\frac{1}{3}$로 나누었을 때의 몫은 $3xQ(x)+R$, 나머지는 $\frac{1}{3}R$이다. 답 ④

0079

|전략| 주어진 조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구해 본다.

다항식 $3x^3+ax^2+bx-6$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & a & b & -6 \\ & & -3 & -a+3 & a-b-3 \\ \hline & 3 & a-3 & b-a+3 & a-b-9 \end{array}$$

이때, $k=-1$, $c=-3$, $a-3=-1$, $b-a+3=-5$, $a-b-3=d$이므로

$k=-1$, $c=-3$, $a=2$, $b=-6$, $d=5$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

0080

주어진 조립제법에서 미정계수를 구하면 오른쪽과 같으므로

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ & & 2 & 10 & 16 \\ \hline & 1 & 5 & 8 & 18 \end{array}$$

$a=1$, $b=3$, $c=-2$, $d=2$

$\therefore a+b+c+d=4$ 답 4

0081

주어진 조립제법에 의하여

$f(x)=\left(x+\frac{2}{3}\right)(px+q)+r=3\left(x+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}(px+q)+r$

$\quad=(3x+2)\left(\frac{1}{3}px+\frac{1}{3}q\right)+r$

따라서 $f(x)$를 $3x+2$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{3}px+\frac{1}{3}q$, 나머지는 r이다. 답 몫 : $\frac{1}{3}px+\frac{1}{3}q$, 나머지 : r

STEP 3 내신 마스터

0082

유형 01 다항식의 덧셈과 뺄셈

|전략| 먼저 주어진 식을 간단히 정리한 다음 A, B, C에 각 다항식을 대입하여 계산한다.

$2(A+B)-\{B-(A-C)\}$

$=2A+2B-(B-A+C)$

$=2A+2B-B+A-C$

$=3A+B-C$

$=3(2x^2+5xy+y^2)+(x^2-3xy+2y^2)-(-x^2+xy-3y^2)$

$=6x^2+15xy+3y^2+x^2-3xy+2y^2+x^2-xy+3y^2$

$=8x^2+11xy+8y^2$ 답 ⑤

0083

유형 02 다항식의 전개식에서 특정항의 계수 구하기
\+ 03 곱셈 공식을 이용한 식의 전개

|전략| 곱셈 공식을 이용하여 식을 전개하고, x^4항과 x항이 나오는 부분만 찾아 계수를 구한다.

$(2x-1)^3(x+3)^2=(8x^3-12x^2+6x-1)(x^2+6x+9)$

이 식의 전개식에서

x^4항은 $8x^3\cdot 6x+(-12x^2)\cdot x^2=48x^4-12x^4=36x^4$

x항은 $6x\cdot 9+(-1)\cdot 6x=54x-6x=48x$

따라서 x^4의 계수는 36, x의 계수는 48이므로

$a=36$, $b=48$ $\quad\therefore a+b=84$ 답 ③

0084

유형 04 공통부분이 있는 식의 전개

|전략| 공통부분이 x^2+x가 되도록 두 일차식끼리 적당히 묶어 전개한다.

$(x+2)(x+3)(x-1)(x-2)$

$=\{(x+2)(x-1)\}\{(x+3)(x-2)\}$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-6)$

$x^2+x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t-2)(t-6)=t^2-8t+12$

$\quad=(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$

따라서 $a=8$, $b=12$이므로 $a+b=20$ 답 ⑤

0085

유형 05 곱셈 공식의 변형을 이용한 식의 값 구하기 – 두 문자인 경우

|전략| 먼저 곱셈 공식의 변형을 이용하여 ab의 값을 구한다.

$a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab$에서

$13=4^2-ab$ $\quad\therefore ab=3$

$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$\quad=4^3-3\cdot 3\cdot 4=28$ 답 ③

0086

유형 05 곱셈 공식의 변형을 이용한 식의 값 구하기 – 두 문자인 경우

|전략| $x+y$, xy의 값을 구하고 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

$x=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1$

$y=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$

따라서 $x+y=2\sqrt{2}$, $xy=1$이므로

$x^4+x^3y+xy^3+y^4=x^3(x+y)+y^3(x+y)$

$\quad=(x^3+y^3)(x+y)$

$\quad=\{(x+y)^3-3xy(x+y)\}(x+y)$

$\quad=\{(2\sqrt{2})^3-3\cdot 1\cdot 2\sqrt{2}\}\cdot 2\sqrt{2}$

$\quad=10\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=40$ 답 ④

0087

유형 06 곱셈 공식의 변형을 이용한 식의 값 구하기 – $x\pm\frac{1}{x}$ 꼴을 포함한 경우

|전략| $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$, $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$임을 이용한다.

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=5^2-2=23$

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=5^3-3\cdot5=110$

따라서 $a=23$, $b=110$이므로 $a+b=133$ 답 ④

0088

유형 07 곱셈 공식의 변형을 이용한 식의 값 구하기 – 세 문자인 경우

|전략| $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}$이므로 주어진 조건식에서 $ab+bc+ca$, abc의 값을 구한다.

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$5^2=9+2(ab+bc+ca)\qquad \therefore ab+bc+ca=8$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}$에서

$2=\frac{8}{abc}\qquad \therefore abc=4$

$\therefore a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=5\cdot(9-8)+3\cdot4=17$ 답 ②

0089

유형 07 곱셈 공식의 변형을 이용한 식의 값 구하기 – 세 문자인 경우

|전략| $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$임을 이용한다.

$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2+2ab+b^2)+(b^2+2bc+c^2)+(c^2+2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{(2-\sqrt{3})^2+(2+\sqrt{3})^2+3^2\}$

$=\frac{1}{2}(7-4\sqrt{3}+7+4\sqrt{3}+9)=\frac{23}{2}$ 답 ②

0090

유형 08 곱셈 공식을 이용한 수의 계산

|전략| 주어진 식에 $\frac{1}{3}(4-1)$을 곱하여 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용한다.

$(4+1)(4^2+1)(4^4+1)(4^8+1)$

$=\underbrace{\frac{1}{3}(4-1)}_{\frac{1}{3}(4-1)=1}(4+1)(4^2+1)(4^4+1)(4^8+1)$

$=\frac{1}{3}(4^2-1)(4^2+1)(4^4+1)(4^8+1)$

$=\frac{1}{3}(4^4-1)(4^4+1)(4^8+1)$

$=\frac{1}{3}(4^8-1)(4^8+1)$

$=\frac{1}{3}(4^{16}-1)=\frac{2^{32}-1}{3}$

따라서 $a=3$, $b=32$이므로 $a+b=35$ 답 ③

0091

유형 08 곱셈 공식을 이용한 수의 계산

|전략| $201^2=(200+1)^2$, $98\times102=(100-2)(100+2)$이므로 곱셈 공식 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용한다.

$201^2+98\times102=(200+1)^2+(100-2)(100+2)$

$=40000+400+1+10000-4$

$=50397$

이므로 다섯 자리 자연수이다.

$\therefore n=5$ 답 ②

0092

유형 09 곱셈 공식의 도형에의 응용

|전략| 공통부분이 생기도록 적당히 항을 묶은 후 곱셈 공식을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$(a-b+c)(a-b-c)=(a+b+c)(c-b-a)$에서

$\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}=\{c+(a+b)\}\{c-(a+b)\}$

$(a-b)^2-c^2=c^2-(a+b)^2$

$a^2-2ab+b^2-c^2=c^2-(a^2+2ab+b^2)$

$2a^2+2b^2=2c^2$

$\therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다. 답 ④

0093

유형 11 다항식의 나눗셈 – $A=BQ+R$

|전략| 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 $A=BQ+R$이다. (단, (R의 차수)<(B의 차수))

$x^4+x^3+2x^2+x+2=A(x^2-1)+2x+5$이므로

$A(x^2-1)=x^4+x^3+2x^2+x+2-(2x+5)$

$=x^4+x^3+2x^2-x-3$

$\therefore A=(x^4+x^3+2x^2-x-3)\div(x^2-1)$

$$
\begin{array}{r l}
 & x^2+x+3 \\
x^2-1 \,) & x^4+x^3+2x^2-x-3 \\
 & \underline{x^4 - x^2 } \\
 & x^3+3x^2-x \\
 & \underline{x^3 -x } \\
 & 3x^2 -3 \\
 & \underline{3x^2 -3} \\
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore A=x^2+x+3$ 답 ①

0094

유형 12 몫과 나머지의 변형

|전략| 다항식 $f(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 할 때, $f(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{a}Q(x)$, 나머지는 R이다.

$$f(x)=(ax+b)Q(x)+R=a\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R$$
$$=\left(x+\frac{b}{a}\right)\cdot aQ(x)+R$$

따라서 $f(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫은 $aQ(x)$, 나머지는 R이다.

답 ④

0095

유형 13 조립제법을 이용한 다항식의 나눗셈

| 전략 | 주어진 다항식을 $x-\frac{1}{3}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하고, 이를 변형하여 $3x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구한다.

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{3} & 3 & 5 & -11 & 2 \\ & & 1 & 2 & -3 \\ \hline & 3 & 6 & -9 & \boxed{-1} \end{array}$$

$\therefore 3x^3+5x^2-11x+2=\left(x-\frac{1}{3}\right)(3x^2+6x-9)-1$

$=\left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot 3(x^2+2x-3)-1$

$=(3x-1)(x^2+2x-3)-1$

따라서 $Q_1(x)=3x^2+6x-9$, $R_1=-1$,

$Q_2(x)=x^2+2x-3$, $R_2=-1$이므로

$Q_1(x)R_2+Q_2(x)R_1$

$=(3x^2+6x-9)\cdot(-1)+(x^2+2x-3)\cdot(-1)$

$=-3x^2-6x+9-x^2-2x+3$

$=-4x^2-8x+12$

답 ②

0096

유형 02 다항식의 전개식에서 특정항의 계수 구하기

| 전략 | x^3항과 x항이 나오는 부분만 찾아 구한 계수가 각각 5, 4임을 이용하여 상수 m, n의 값을 구한다.

$(x^2+mx+2n)(2x^2-3x+n)$의 전개식에서

x^3항은 $x^2\cdot(-3x)+mx\cdot 2x^2=(-3+2m)x^3$

이때, x^3의 계수가 5이므로

$-3+2m=5 \qquad \therefore m=4$ … ❶

또, x항은 $mx\cdot n+2n\cdot(-3x)=(mn-6n)x$

이때, x의 계수가 4이므로

$mn-6n=4$, $4n-6n=4 \qquad \therefore n=-2$ … ❷

$\therefore m-2n=4-2\cdot(-2)=8$ … ❸

답 8

채점 기준	배점
❶ x^3항에서 m의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ x항에서 n의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ $m-2n$의 값을 구할 수 있다.	1점

0097

유형 05 곱셈 공식의 변형을 이용한 식의 값 구하기 – 두 문자인 경우

| 전략 | 먼저 곱셈 공식의 변형을 이용하여 a^2+b^2, x^2+y^2의 값을 구한다.

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=(-1)^2-2\cdot(-1)=3$ … ❶

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$=3^2+2\cdot 3=15$ … ❷

$\therefore (ax+by)(bx+ay)=abx^2+a^2xy+b^2xy+aby^2$

$=ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$

$=(-1)\cdot 15+3\cdot 3=-6$ … ❸

답 -6

채점 기준	배점
❶ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ x^2+y^2의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $(ax+by)(bx+ay)$의 값을 구할 수 있다.	3점

0098

유형 09 곱셈 공식의 도형에의 응용

| 전략 | 직육면체의 세 모서리의 길이를 a, b, c라 하고 주어진 조건을 a, b, c에 대한 식으로 나타낸다.

$\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{BF}=c$라 하면

직육면체의 겉넓이가 42이므로

$2(ab+bc+ca)=42 \qquad \therefore ab+bc+ca=21$ … ❶

$\triangle BGD$의 세 변의 길이의 제곱의 합은 $\overline{DB}^2+\overline{BG}^2+\overline{GD}^2=44$이므로

$(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)=44$

$\therefore a^2+b^2+c^2=22$ … ❷

이때, $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$(a+b+c)^2=22+2\cdot 21=64$

$\therefore a+b+c=8$ ($\because a+b+c>0$) … ❸

따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은 $4(a+b+c)$이므로

$4(a+b+c)=4\cdot 8=32$ … ❹

답 32

채점 기준	배점
❶ $ab+bc+ca$의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ $a^2+b^2+c^2$의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	2점
❹ 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합을 구할 수 있다.	1점

0099

유형 06 곱셈 공식의 변형을 이용한 식의 값 구하기 – $x\pm\frac{1}{x}$ 꼴을 포함한 경우

| 전략 | 양변을 x로 나누어 $x+\frac{1}{x}$의 값을 구한 후 곱셈 공식의 변형을 이용하여 식의 값을 구한다.

(1) $x\neq 0$이므로 $x^2-4x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-4+\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x+\frac{1}{x}=4$

(2) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=4^2-2=14$

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=4^3-3\cdot4=52$

(3) $x+2x^2+3x^3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}$

$=\left(x+\frac{1}{x}\right)+2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)$

$=4+2\cdot14+3\cdot52=188$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) $x+\frac{1}{x}$의 값을 구할 수 있다.	3점
(2) $x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$의 값을 구할 수 있다.	4점
(3) $x+2x^2+3x^3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}$의 값을 구할 수 있다.	3점

0100

유형 10 다항식의 나눗셈 – 몫과 나머지
+ 11 다항식의 나눗셈 – $A=BQ+R$

|전략| 다항식의 나눗셈은 각 다항식을 내림차순으로 정리한 후 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 한다.

(1) $A=(x+1)(x+2)+3=x^2+3x+5$

(2) $B=(x+1)(3x-1)+5=3x^2+2x+4$

(3) $xA+B=x(x^2+3x+5)+(3x^2+2x+4)$

$=x^3+3x^2+5x+3x^2+2x+4$

$=x^3+6x^2+7x+4$

이므로

$$\begin{array}{r|l} & x+7 \\ x^2-x+1 & x^3+6x^2+7x+4 \\ & x^3-x^2+x \\ \hline & 7x^2+6x+4 \\ & 7x^2-7x+7 \\ \hline & 13x-3 \end{array}$$

따라서 $xA+B$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫은 $x+7$, 나머지는 $13x-3$이다.

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 다항식 A를 구할 수 있다.	4점
(2) 다항식 B를 구할 수 있다.	4점
(3) $xA+B$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구할 수 있다.	4점

창의·융합 교과서 속 심화문제

0101

|전략| 정육면체의 부피에서 정육면체를 관통하는 구멍, 즉 3개의 정사각기둥의 부피를 빼서 주어진 입체도형의 부피를 구한다.

정육면체의 부피는 $(x+4)^3$

정육면체를 관통하는 구멍 한 개의 부피는 $x^2(x+4)$

∴ (입체도형의 부피)

$=(x+4)^3-\{3x^2(x+4)-2x^3\}$

$=x^3+12x^2+48x+64-(3x^3+12x^2-2x^3)$

$=48x+64$

따라서 $a=48$, $b=64$이므로 $a+b=112$ 답 ②

참고 구멍 부분의 부피는 한 변의 길이가 x인 정사각형을 밑면으로 하고, 높이가 $x+4$인 정사각기둥 3개의 부피에서 중복된 부분인 한 모서리의 길이가 x인 정육면체의 부피를 두 번 빼주어 구할 수 있다.

0102

|전략| 처음 정육면체의 부피와 부피가 75인 직육면체의 부피를 각각 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

처음 정육면체의 부피는

$(a+2b)^3=a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$ …… ㉠

이때, a, b는 서로소인 자연수이므로 ㉠에서 a^3, a^2b, ab^2, b^3은 모두 다른 값이다. 즉, ㉠에서 27개의 작은 직육면체 중 부피가 a^3인 것은 1개, a^2b인 것은 6개, ab^2인 것은 12개, b^3인 것은 8개이다.

따라서 부피가 75인 작은 직육면체는 12개이므로

$ab^2=75$

$ab^2=75=3\cdot5^2$이고, a, b는 서로소인 자연수이므로

$a=3$, $b=5$ ∴ $b-a=2$ 답 ②

주의 $75=75\cdot1^2$에서 $a<b$이므로 $a=75$, $b=1$이 될 수 없다.

0103

|전략| $ad-bc=4$의 양변을 제곱하여 $a^2d^2+b^2c^2$의 값을 구한다.

두 직사각형 P, Q의 대각선의 길이가 모두 $\sqrt{5}$이므로

$a^2+b^2=5$, $c^2+d^2=5$

즉, $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=25$이므로

$a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=25$ …… ㉠

또, $ad-bc=4$의 양변을 제곱하면 $(ad-bc)^2=16$

$a^2d^2-2abcd+b^2c^2=16$

∴ $a^2d^2+b^2c^2=16+2abcd$

이 식을 ㉠에 대입하면

$a^2c^2+b^2d^2+16+2abcd=25$

$(ac+bd)^2+16=25$ ∴ $(ac+bd)^2=9$

그런데 $ac+bd>0$이므로 $ac+bd=3$ 답 3

0104

|전략| 주어진 세 식을 변끼리 더하여 $a+b+c$, $ab+bc+ca$의 값을 구한 후 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

$a+3b=4ab$, $b+3c=4bc$, $c+3a=4ca$를 변끼리 더하면

$4(a+b+c)=4(ab+bc+ca)$

∴ $a+b+c=ab+bc+ca=3$

∴ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\}-(ab+bc+ca)$

$=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)$

$=3^2-3\cdot3=0$ 답 0

0105

|전략| 곱셈 공식의 변형을 이용하여 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$에서

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=6-3\cdot2=0$

그런데 $a+b+c\neq0$이므로

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

즉, $\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$이므로

$a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$ $\quad\therefore a=b=c$

이때, $abc=2$이므로 $a^3=2$

$\therefore (a+b)(b+c)(c+a)=2a\cdot2a\cdot2a=8a^3$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad=8\cdot2=16$

답 ④

0106

|전략| 세 정사각형의 한 변의 길이를 a, b, c로 놓고, 주어진 조건을 이용하여 $a+b+c$, $ab+bc+ca$의 값을 구한다.

세 정사각형 OABC, ODEF, OGHI의 한 변의 길이를 각각 a, b, c라 하면

$\triangle\mathrm{OCD}=\frac{1}{2}ab\sin30^\circ=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}ab$

$\triangle\mathrm{OFG}=\frac{1}{2}bc\sin30^\circ=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}bc$

$\triangle\mathrm{OIA}=\frac{1}{2}ca\sin30^\circ=\frac{1}{2}ca\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}ca$

$\therefore \triangle\mathrm{OCD}+\triangle\mathrm{OFG}+\triangle\mathrm{OIA}=\frac{1}{4}ab+\frac{1}{4}bc+\frac{1}{4}ca$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad=\frac{1}{4}(ab+bc+ca)$

이때, 세 삼각형의 넓이의 합이 20이므로

$\frac{1}{4}(ab+bc+ca)=20$ $\quad\therefore ab+bc+ca=80$

또, 세 정사각형의 둘레의 길이의 합이 80이므로

$4a+4b+4c=80$ $\quad\therefore a+b+c=20$

따라서 세 정사각형의 넓이의 합은

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$\qquad\qquad=20^2-2\cdot80=240$

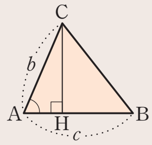
답 240

Lecture

삼각형의 넓이

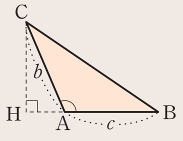
삼각형 ABC에서 두 변의 길이가 각각 b, c이고 그 끼인각이 $\angle$A일 때, 삼각형 ABC의 넓이 S는 다음과 같다.

(1) $\angle$A가 예각일 때



$S=\frac{1}{2}bc\sin A$

(2) $\angle$A가 둔각일 때



$S=\frac{1}{2}bc\sin(180^\circ-A)$

2 | 항등식과 나머지정리

STEP 1 개념 마스터

0107

ㄴ. 주어진 식의 좌변을 전개하여 정리하면

$3(x-1)+2=3x-1$

이므로 x의 값에 관계없이 등식이 항상 성립한다.

ㅁ. 주어진 식의 좌변을 전개하여 정리하면

$(x+1)^2+(x-1)=x^2+2x+1+x-1$

$\qquad\qquad\qquad\quad=x^2+3x$

이므로 x의 값에 관계없이 등식이 항상 성립한다.

따라서 항등식은 ㄴ, ㅁ이다.

답 ㄴ, ㅁ

0108

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로

$3=a+b$, $1=b$

$\therefore a=2$, $b=1$

답 $a=2$, $b=1$

0109

$ax+b(x-1)=(a+b)x-b$이므로

$(a+b)x-b=3x+1$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=3$, $-b=1$

$\therefore a=4$, $b=-1$

답 $a=4$, $b=-1$

0110

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a-1=1$, $a+b=0$, $c-2=1$

$\therefore a=2$, $b=-2$, $c=3$

답 $a=2$, $b=-2$, $c=3$

0111

주어진 식의 우변을 전개하면

$x^2+c(x+2)+1=x^2+cx+2c+1$이므로

$ax^2-3x+b-1=x^2+cx+2c+1$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a=1$, $-3=c$, $b-1=2c+1$

$\therefore a=1$, $b=-4$, $c=-3$

답 $a=1$, $b=-4$, $c=-3$

0112

주어진 등식의 양변에 $x=0$, $x=1$, $x=2$를 각각 대입하면

$1=-c$, $1=b$, $3=2a+2b+c$

$\therefore a=1$, $b=1$, $c=-1$

답 $a=1$, $b=1$, $c=-1$

0113

주어진 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a+4=3$, $b-3=-1$, $c+1=5$

$\therefore a=-1$, $b=2$, $c=4$ 답 $a=-1$, $b=2$, $c=4$

0114

$a(x+y)-b(x-y)+1=(a-b)x+(a+b)y+1$이므로

$(a-b)x+(a+b)y+1=3x-5y+c$

이 식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a-b=3$, $a+b=-5$, $1=c$

$\therefore a=-1$, $b=-4$, $c=1$ 답 $a=-1$, $b=-4$, $c=1$

0115 답 (가) $-\dfrac{b}{a}$ (나) $\dfrac{b}{a}$

0116

(1) $f(1)=1-2-3+5=1$

(2) $f(-2)=-8-8+6+5=-5$

답 (1) 1 (2) -5

0117

(1) $f(2)=16+4-1=19$

(2) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+2\cdot\dfrac{1}{2}-1=1+1-1=1$

답 (1) 19 (2) 1

0118

$f(x)=x^3-kx^2+3x-1$로 놓으면 $f(2)=5$이므로

$8-4k+6-1=5$ $\therefore k=2$ 답 2

0119

$f(x)=2x^3-3x^2+k$로 놓으면 $f(-2)=0$이므로

$-16-12+k=0$ $\therefore k=28$ 답 28

STEP 2 유형 마스터

0120

|전략| 주어진 식의 좌변을 전개하여 정리한 후 양변의 동류항의 계수를 비교한다.

주어진 식의 좌변을 전개하여 정리하면

$(x+a)(bx^2-27x+9)=bx^3+(ab-27)x^2+(9-27a)x+9a$

이므로 $bx^3+(ab-27)x^2+(9-27a)x+9a=7x^3+cx^2-99x+36$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$b=7$, $ab-27=c$, $9-27a=-99$, $9a=36$

$\therefore a=4$, $b=7$, $c=1$

$\therefore a+b+c=12$ 답 12

0121

|전략| 주어진 식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 차수가 같아야 한다. 즉, $f(x)$가 x에 대한 일차식이어야 하므로 $f(x)=x+c$로 놓는다.

$x^3-ax+b=(x^2-x+1)f(x)+x+2$가 x에 대한 항등식이므로

$f(x)$는 x에 대한 일차식이어야 한다.

이때, 좌변의 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)=x+c$로 놓으면

$x^3-ax+b=(x^2-x+1)(x+c)+x+2$

$=x^3+(c-1)x^2+(2-c)x+c+2$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$0=c-1$, $-a=2-c$, $b=c+2$

$\therefore a=-1$, $b=3$, $c=1$

$\therefore ab=-3$ 답 -3

0122

$\dfrac{ax+by+6}{x+2y+2}=k$ (k는 상수)로 놓으면

$ax+by+6=k(x+2y+2)$

$\therefore (a-k)x+(b-2k)y+6-2k=0$

이 식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a-k=0$, $b-2k=0$, $6-2k=0$

$\therefore k=3$, $a=3$, $b=6$

$\therefore b-a=3$ 답 3

0123

$(x\triangle p)+(3\triangle x)=(y\triangle q)+(2\triangle 1)$에서

$(xp-x-p)+(3x-3-x)=(yq-y-q)+(2-2-1)$

$xp+x-p-yq+y+q-2=0$

$\therefore (p+1)x-(q-1)y-(p-q+2)=0$ … ❶

이 식이 x, y에 대한 항등식이므로

$p+1=0$, $q-1=0$, $p-q+2=0$

따라서 $p=-1$, $q=1$이므로 … ❷

$p+q=0$ … ❸

답 0

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식을 x, y에 대하여 정리할 수 있다.	50 %
❷ p, q의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0124

|전략| 주어진 등식의 양변에 적당한 값을 대입한다.

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-1=-c$ $\therefore c=1$

양변에 $x=1$을 대입하면

$2=2b$ $\therefore b=1$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-2=2a$ $\therefore a=-1$

$\therefore abc=-1$ 답 ②

0125

주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$c=-4$ …… ㉠

양변에 $x=0$을 대입하면

$2b+c=-2$ …… ㉡

양변에 $x=1$을 대입하면

$3a+3b+c=2$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=1,\ c=-4$

$\therefore a+b+c=-2$ 답 -2

다른 풀이 $ax(x+2)+b(x+2)+c=ax^2+(2a+b)x+2b+c$이므로

$ax^2+(2a+b)x+2b+c=x^2+3x-2$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a=1,\ 2a+b=3,\ 2b+c=-2$

$\therefore a=1,\ b=1,\ c=-4$

$\therefore a+b+c=-2$

0126

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=1+a+b \qquad \therefore a+b=-1$ …… ㉠

양변에 $x=\sqrt{2}$, 즉 $x^2=2$를 대입하면

$0=4+2a+b \qquad \therefore 2a+b=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=2$

$\therefore ab=-6$ 답 ②

0127

| 전략 | 주어진 식이 x에 대한 항등식이고, 좌변의 최고차항의 계수가 1이므로 이를 이용하여 a의 값을 먼저 구한다.

$x^3+2x-1=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$가 x에 대한 항등식이고 좌변의 최고차항의 계수가 1이므로 $a=1$

즉, $x^3+2x-1=(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+2-1=d \qquad \therefore d=2$

양변에 $x=0$을 대입하면

$-1=-1+b-c+2$

즉, $b-c=-2$ …… ㉠

양변에 $x=2$를 대입하면

$8+4-1=1+b+c+2$

즉, $b+c=8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=3,\ c=5$

$\therefore ad+bc=1\cdot2+3\cdot5=17$ 답 ④

다른 풀이 $f(x)=x^3+2x-1$이라 하면

$f(x)=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$

$\quad=(x-1)\{a(x-1)^2+b(x-1)+c\}+d$ …… ㉠

$\quad=(x-1)[(x-1)\{a(x-1)+b\}+c]+d$ …… ㉡

㉠에서 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫은 $a(x-1)^2+b(x-1)+c$이고 나머지는 d이다.

또, ㉡에서 $a(x-1)^2+b(x-1)+c$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫은 $a(x-1)+b$, 나머지는 c이고, $a(x-1)+b$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫은 a, 나머지는 b이다.

따라서 조립제법을 반복해서 시행하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\
 & & 1 & 1 & 3 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 3 & \boxed{2}=d \\
 & & 1 & 2 & \\
\hline
1 & 1 & 2 & \boxed{5}=c & \\
 & & 1 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{3}=b & & \\
 & \| & & & \\
 & a & & &
\end{array}
$$

$\therefore a=1,\ b=3,\ c=5,\ d=2 \qquad \therefore ad+bc=17$

0128

| 전략 | 주어진 식을 k에 대하여 정리한 후 항등식의 성질을 이용한다.

주어진 등식을 k에 대하여 정리하면

$(2x-y-3)k+(3x-y-2)=0$

이 식이 k에 대한 항등식이므로

$2x-y-3=0,\ 3x-y-2=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-1,\ y=-5$

$\therefore xy=5$ 답 5

0129

주어진 등식의 좌변을 k에 대한 내림차순으로 정리하면

$xk^2+3(-x+y)k-2x+z=2k^2-3$

이 식이 k에 대한 항등식이므로

$x=2,\ -x+y=0,\ -2x+z=-3$

따라서 $x=2,\ y=2,\ z=1$이므로

$x+y+z=5$ 답 ⑤

0130

| 전략 | $2x+y=1$을 y에 대하여 정리한 후 주어진 식에 대입하여 항등식의 성질을 이용한다.

$2x+y=1$에서 $y=1-2x$

이것을 주어진 식에 대입하면

$(2a+b)x-b(1-2x)+2=0$

$(2a+3b)x-(b-2)=0$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$2a+3b=0,\ b-2=0$

따라서 $a=-3,\ b=2$이므로 $a^2-b^2=5$ 답 ⑤

0131

$x-y=1$에서 $x=1+y$

이것을 주어진 식에 대입하면

$a(1+y)^2+b(1+y)+y^2-2y(1+y)+cy+2=0$

$(a-1)y^2+(2a+b-2+c)y+a+b+2=0$

이 식이 y에 대한 항등식이므로

$a-1=0,\ 2a+b-2+c=0,\ a+b+2=0$

$\therefore\ a=1,\ b=-3,\ c=3$

$\therefore\ a+b+c=1$ 답 ①

0132

|전략| 주어진 등식의 양변에 $x=1,\ x=-1$을 각각 대입하고, 두 식을 더하여 $a_8+a_6+a_4+a_2+a_0$의 값을 구한다.

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$(1-3+2)^3=a_9+a_8+a_7+\cdots+a_1+a_0$ ⋯⋯ ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1+3+2)^3=-a_9+a_8-a_7+\cdots-a_1+a_0$ ⋯⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면

$4^3=2(a_8+a_6+a_4+a_2+a_0)$

$\therefore\ a_8+a_6+a_4+a_2+a_0=32$ 답 32

0133

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$(2-1-1)^5=a_{10}+a_9+a_8+\cdots+a_1+a_0$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

양변에 $x=-1$을 대입하면

$(2+1-1)^5=a_{10}-a_9+a_8-\cdots-a_1+a_0$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

㉠−㉡을 하면

$-2^5=2(a_9+a_7+\cdots+a_1)$

$\therefore\ a_1+a_3+\cdots+a_9=-16$ ⋯ ❸

답 -16

채점 기준	비율
❶ $a_{10}+a_9+a_8+\cdots+a_0$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $a_{10}-a_9+a_8-\cdots+a_0$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a_1+a_3+\cdots+a_9$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0134

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^{2018}+1=a_{2018}+a_{2017}+\cdots+a_1+a_0$

양변에 $x=1$을 대입하면 $2=a_0$

$\therefore\ a_{2018}+a_{2017}+\cdots+a_1=2^{2018}+1-2=2^{2018}-1$ 답 ①

0135

|전략| x^3의 계수가 1인 삼차식을 x^2의 계수가 1인 이차식으로 나누었을 때의 몫은 x의 계수가 1인 일차식이다.

x^3+ax+b를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면

$x^3+ax+b=(x^2+x+1)(x+c)$

$\qquad\qquad\ =x^3+(c+1)x^2+(c+1)x+c$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$0=c+1,\ a=c+1,\ b=c$

따라서 $c=-1,\ a=0,\ b=-1$이므로

$ab=0$ 답 0

다른 풀이

$$\begin{array}{r|l}
 & x-1 \\ \hline
x^2+x+1 & x^3 \quad + \qquad ax+b \\
 & x^3+x^2+ \qquad x \\ \hline
 & -x^2+(a-1)x+b \\
 & -x^2- \qquad x-1 \\ \hline
 & ax+b+1
\end{array}$$

이때, 나머지가 0이므로 $ax+b+1=0$

$\therefore\ a=0,\ b=-1\qquad \therefore\ ab=0$

Lecture

다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $R(x)$이면

$f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$ (단, ($g(x)$의 차수)>($R(x)$의 차수))

이때, $f(x)$가 n차식, $g(x)$가 m차식이면 $Q(x)$는 $(n-m)$차식이고, $R(x)$는 최대 $(m-1)$차식이다.

0136

x^3+ax^2+b를 x^2-x-2로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면

$x^3+ax^2+b=(x^2-x-2)(x+c)+x+2$

$\qquad\qquad\quad =(x+1)(x-2)(x+c)+x+2$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

(i) 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1+a+b=1\qquad \therefore\ a+b=2$ ⋯⋯ ㉠

(ii) 양변에 $x=2$를 대입하면

$8+4a+b=4\qquad \therefore\ 4a+b=-4$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=4$

$\therefore\ ab=-8$ 답 ①

0137

$x^4+ax^3+bx^2-x+2$를 x^2+2x+3으로 나누었을 때의 몫을 x^2+cx+d ($c,\ d$는 상수)라 하면

$x^4+ax^3+bx^2-x+2$

$=(x^2+2x+3)(x^2+cx+d)+3x+8$

$=x^4+(2+c)x^3+(d+2c+3)x^2+(2d+3c+3)x+3d+8$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a=2+c,\ b=d+2c+3,\ -1=2d+3c+3,\ 2=3d+8$

따라서 $a=2,\ b=1,\ c=0,\ d=-2$이므로

$b-a=-1$ 답 -1

0138

|전략| 다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $f(a)$임을 이용한다.

나머지정리에 의하여 $f(3)=2,\ g(3)=-1$

따라서 $5f(x)+4g(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$5f(3)+4g(3)=5\cdot2+4\cdot(-1)=6$ 답 6

0139

나머지정리에 의하여 $f(2)=8$

따라서 $(x+1)f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$3f(2)=3\cdot8=24$ 답 ④

0140

나머지정리에 의하여

$R_1=f(a)=a^3+a^2+2a+1$

$R_2=f(-a)=-a^3+a^2-2a+1$

이때, $R_1+R_2=6$이므로

$R_1+R_2=(a^3+a^2+2a+1)+(-a^3+a^2-2a+1)$

$=2a^2+2=6$

$\therefore a^2=2$

따라서 $f(x)$를 $x-a^2$, 즉 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2)=8+4+4+1=17$ 답 17

0141

나머지정리에 의하여

$f(2)+g(2)=-1,\ \{f(2)\}^2+\{g(2)\}^2=13$

$f(2)=a$, $g(2)=b$라 하면

$a+b=-1$, $a^2+b^2=13$

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$13=(-1)^2-2ab \qquad \therefore ab=-6$

따라서 $\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$\{f(2)\}^3+\{g(2)\}^3=a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=(-1)^3-3\cdot(-6)\cdot(-1)=-19$ 답 -19

0142

|전략| 다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $f(a)$임을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

$f(x)=ax^3+2x^2+bx-4$라 하면 나머지정리에 의하여

$f(1)=7$, $f(-2)=4$이므로

$f(1)=a+2+b-4=7 \qquad \therefore a+b=9$ …… ㉠

$f(-2)=-8a+8-2b-4=4 \qquad \therefore 4a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=12$

$\therefore ab=-36$ 답 -36

0143

$f(x)=x^3+ax^2-4x+5$라 하면 나머지정리에 의하여

$f(2)=f(-1)$이어야 하므로

$f(2)=8+4a-8+5=4a+5,\ f(-1)=-1+a+4+5=a+8$

즉, $4a+5=a+8$에서 $3a=3 \qquad \therefore a=1$ 답 ④

0144

나머지정리에 의하여 $3f(2)=6$, $-3f(-1)=12$

$\therefore f(2)=2$, $f(-1)=-4$

$f(x)=x^2+ax+b$에서

$f(2)=4+2a+b=2 \qquad \therefore 2a+b=-2$ …… ㉠

$f(-1)=1-a+b=-4 \qquad \therefore -a+b=-5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-4$

$\therefore a+b=-3$ 답 ③

0145

|전략| 다항식 $f(x)$를 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 $ax+b$ (a, b는 상수)로 놓는다.

나머지정리에 의하여 $f(2)=5$, $f(4)=7$

$f(x)$를 x^2-6x+8로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-6x+8)Q(x)+R(x)$

$=(x-2)(x-4)Q(x)+ax+b$

$f(2)=2a+b=5$ …… ㉠, $f(4)=4a+b=7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$

따라서 $R(x)=x+3$이므로 $R(2)=5$ 답 5

0146

나머지정리에 의하여 $2f(1)=6$, $5f(-1)=5$

$\therefore f(1)=3$, $f(-1)=1$

$f(x)$를 $(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$

$f(1)=a+b=3$ …… ㉠, $f(-1)=-a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

따라서 구하는 나머지는 $x+2$이다. 답 ③

0147

나머지정리에 의하여 $f(-2)=2$, $f(2)=-2$ … ❶

다항식 $(x^2-x+1)f(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$(x^2-x+1)f(x)=(x^2-4)Q(x)+ax+b$

$=(x+2)(x-2)Q(x)+ax+b$ … ❷

양변에 $x=-2$를 대입하면 $7f(-2)=-2a+b$

$\therefore -2a+b=14$ …… ㉠

양변에 $x=2$를 대입하면 $3f(2)=2a+b$

$\therefore 2a+b=-6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=4$ … ❸

따라서 구하는 나머지는 $-5x+4$이다. … ❹

답 $-5x+4$

채점 기준	비율
❶ $f(-2)$, $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ x에 대한 항등식을 세울 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $(x^2-x+1)f(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	10 %

0148

$f(x)$를 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$f(x)=(x^2+2x-3)Q_1(x)+2x+5$

$\quad=(x+3)(x-1)Q_1(x)+2x+5$

$\therefore f(-3)=-1$

$f(x)$를 x^2-x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$f(x)=(x^2-x-2)Q_2(x)+3x-2$

$\quad=(x+1)(x-2)Q_2(x)+3x-2$

$\therefore f(2)=4$

$f(x)$를 x^2+x-6으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2+x-6)Q(x)+R(x)$

$\quad=(x+3)(x-2)Q(x)+ax+b$

$f(-3)=-3a+b=-1$ …… ㉠

$f(2)=2a+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

따라서 $R(x)=x+2$이므로 $R(-1)=1$ 답 1

0149

|전략| 다항식 $f(x)$를 삼차식으로 나누었을 때의 나머지는 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)로 놓는다.

$f(x)$를 $(x^2-1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-1)(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$

이때, $f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 나머지가 $3x-1$이므로 ax^2+bx+c를 x^2-1로 나누었을 때의 나머지도 $3x-1$이다.

즉, $ax^2+bx+c=a(x^2-1)+3x-1$

$\therefore f(x)=(x^2-1)(x+2)Q(x)+a(x^2-1)+3x-1$ …… ㉠

또, $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 2이므로 나머지정리에 의하여 $f(-2)=2$

㉠에서 $f(-2)=3a-7=2$이므로 $a=3$

따라서 구하는 나머지는

$R(x)=3(x^2-1)+3x-1=3x^2+3x-4$ 답 $3x^2+3x-4$

Lecture

ax^2+bx+c를 x^2-1로 나누었을 때의 나머지가 $3x-1$이 되는지 확인해 보자.

이차식이므로 x^2-1로 나누어진다.

$f(x)=(x^2-1)(x+2)Q(x)+\underline{ax^2+bx+c}$

$\quad=(x^2-1)(x+2)Q(x)+\underline{a(x^2-1)+R(x)}$

$\quad=(x^2-1)\underbrace{\{(x+2)Q(x)+a\}}_{f(x)\text{를 } x^2-1\text{로 나누었을 때의 몫}}+3x-1$

$\quad=(x^2-1)(x+2)Q(x)+\underline{a(x^2-1)+3x-1}$

$\therefore ax^2+bx+c=a(x^2-1)+3x-1$

0150

$x^7+x^5+x^3+x$를 x^3-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$x^7+x^5+x^3+x=(x^3-x)Q(x)+ax^2+bx+c$

$\quad=x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $0=c$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1-1-1-1=a-b+c$

$c=0$이므로 $a-b=-4$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+1+1+1=a+b+c$

$c=0$이므로 $a+b=4$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=4$

따라서 $R(x)=4x$이므로 $R(2)=8$ 답 8

0151

$f(x)+2x^2+x$를 $(x^2+x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)+2x^2+x=(x^2+x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$

$\therefore f(x)=(x^2+x+1)(x-1)Q(x)+(a-2)x^2+(b-1)x+c$

이때, $f(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지가 $2x-4$이므로 $(a-2)x^2+(b-1)x+c$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지도 $2x-4$이다.

즉, $(a-2)x^2+(b-1)x+c=(a-2)(x^2+x+1)+2x-4$ …… ㉠

$\therefore f(x)=(x^2+x+1)(x-1)Q(x)+(a-2)(x^2+x+1)+2x-4$ …… ㉡

또, $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 1이므로 나머지정리에 의하여 $f(1)=1$

㉡에서 $f(1)=3(a-2)-2=1$이므로 $a=3$

이것을 ㉠에 대입하면

$x^2+(b-1)x+c=x^2+x+1+2x-4$

$\quad=x^2+3x-3$

이므로

$b-1=3$, $c=-3$ $\quad\therefore b=4$, $c=-3$

$\therefore a+2b+3c=3+2\cdot4+3\cdot(-3)=2$ 답 2

0152

|전략| 다항식 $f(ax+b)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(a\alpha+b)$임을 이용한다.

$f(x+1)$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(1+1)=f(2)$

$f(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x^2-4)Q(x)-4x+3$

$\quad=(x+2)(x-2)Q(x)-4x+3$

따라서 구하는 나머지는

$f(2)=-4\cdot2+3=-5$ 답 ①

0153

$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 25, $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 18이므로

$f(1)=25,\ f(2)=18$

따라서 $f(2x-5)+f(x-1)$을 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(2\cdot3-5)+f(3-1)=f(1)+f(2)$

$=25+18=43$

답 43

0154

$f(x+2009)$를 $x+2011$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-2011+2009)=f(-2) \qquad \therefore f(-2)=-6$

$f(x+2011)$을 $x+2009$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-2009+2011)=f(2) \qquad \therefore f(2)=6$

이때, $f(x)=x^2+ax+b$에서

$f(-2)=4-2a+b=-6$

$f(2)=4+2a+b=6$

$\therefore -2a+b=-10,\ 2a+b=2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=-4$

$\therefore ab=-12$

답 -12

0155

$f(x)+g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 7이므로

$f(-2)+g(-2)=7$ …… ㉠

$f(x)-g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 3이므로

$f(-2)-g(-2)=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $f(-2)=5,\ g(-2)=2$

따라서 $xf\left(\frac{1}{2}x\right)$를 $x+4$로 나누었을 때의 나머지는

$-4f\left(\frac{1}{2}\cdot(-4)\right)=-4f(-2)=-4\cdot5=-20$

답 -20

0156

|전략| 다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이면 $f(x)=(x-a)Q(x)+R$임을 이용한다.

$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 2이므로

$f(x)=(x-1)Q(x)+2$ …… ㉠

또, $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 3이므로

$Q(x)=(x-2)Q'(x)+3$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x-1)\{(x-2)Q'(x)+3\}+2$

$=(x-1)(x-2)Q'(x)+3x-1$

이때, $f(2)=5$이므로 $xf(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$2f(2)=2\cdot5=10$

답 10

0157

$f(x)=x^{2018}+x^{2017}-x$라 하면 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지는 $f(1)=1$이므로

$f(x)=(x-1)Q(x)+1$ …… ㉠

$Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(-1)$이므로 ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=-2Q(-1)+1$

$1-1-(-1)=-2Q(-1)+1,\ \ 2Q(-1)=0$

$\therefore Q(-1)=0$

답 0

0158

$f(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $2x-5$이므로

$f(x)=(x^2+x+1)Q(x)+2x-5$ …… ㉠

또, $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 4이므로

$Q(x)=(x-1)Q'(x)+4$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x^2+x+1)\{(x-1)Q'(x)+4\}+2x-5$

$=(x^3-1)Q'(x)+4x^2+6x-1$

따라서 $R(x)=4x^2+6x-1$이므로

$R(-1)=4-6-1=-3$

답 ②

0159

x^3-2x^2+mx-4를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$x^3-2x^2+mx-4=(x-1)Q(x)+R$

또, $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 -5이므로

$Q(x)=(x+1)Q'(x)-5$

$\therefore x^3-2x^2+mx-4=(x-1)\{(x+1)Q'(x)-5\}+R$

$=(x-1)(x+1)Q'(x)-5(x-1)+R$

양변에 $x=1$을 대입하면 $m-5=R$ …… ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면 $-m-7=10+R$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=-6,\ R=-11$

답 -6

0160

|전략| $x=1000$이라 하면 $x-2=998$이므로 x^{11}을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 이용한다.

$f(x)=x^{11}$이라 할 때, $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 $f(2)=2^{11}$이므로 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^{11}=(x-2)Q(x)+2^{11}$

위의 식의 양변에 $x=1000$을 대입하면

$1000^{11}=998Q(1000)+2^{11}$

2 항등식과 나머지정리

이때, 1000^{11}을 998로 나누었을 때의 나머지를 r라 하면 $0 \le r < 998$이므로

$1000^{11} = 998Q(1000) + 2^{11}$
$\quad = 998\{Q(1000)+2\} + 52$

따라서 1000^{11}을 998로 나누었을 때의 나머지는 52이다. 답 ②

Lecture

자연수의 나눗셈
자연수 a를 자연수 b로 나누었을 때의 몫을 q, 나머지를 r라 하면
$a = bq + r\ (0 \le r < b)$
가 성립한다.

0161

$f(x) = x^7$이라 할 때, $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 $f(2) = 2^7 = 128$이므로 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^7 = (x-2)Q(x) + 128$

위의 식의 양변에 $x=100$을 대입하면

$100^7 = 98Q(100) + 128$

이때, 100^7을 98로 나누었을 때의 나머지를 r라 하면 $0 \le r < 98$이므로

$100^7 = 98Q(100) + 128$
$\quad = 98\{Q(100)+1\} + 30$

따라서 100^7을 98로 나누었을 때의 나머지는 30이다. 답 30

0162

$f(x) = x^{55}$이라 할 때, $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $f(-1) = -1$이므로 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^{55} = (x+1)Q(x) - 1$

위의 식의 양변에 $x=37$을 대입하면

$37^{55} = 38Q(37) - 1$

이때, 37^{55}을 38로 나누었을 때의 나머지를 r라 하면 $0 \le r < 38$이므로

$37^{55} = 38Q(37) - 1 = 38\{Q(37)-1\} + 38 - 1$
$\quad = 38\{Q(37)-1\} + 37$

따라서 37^{55}을 38로 나누었을 때의 나머지는 37이다. 답 ⑤

0163

|전략| 다항식 $f(x)$가 $x-a$로 나누어떨어지면 $f(a)=0$임을 이용한다.

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + ax - 5$라 하면 $f(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로 $f(-1) = 0$

$-2 + 3 - a - 5 = 0 \qquad \therefore a = -4$

따라서 $f(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 2 - 5 = -6$ 답 ②

0164

$f(x-1)f(x+1)$이 $x-1$로 나누어떨어지므로

$f(1-1)f(1+1) = 0$, 즉 $f(0)f(2) = 0$

$\therefore f(0) = 0$ 또는 $f(2) = 0$

이때, $f(x) = x^3 + x^2 - ax + 2$에 대하여 $f(0) = 2$이므로 $f(2) = 0$

따라서 $f(2) = 8 + 4 - 2a + 2 = 0$에서 $a = 7$ 답 7

0165

$f(x) = 3x^3 + 5x^2 - ax + b$라 하면 $f(x)$가 $3x-1$, $x+3$으로 각각 나누어떨어지므로 $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$, $f(-3) = 0$ ··· ❶

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{5}{9} - \frac{a}{3} + b = 0 \qquad \therefore -a + 3b = -2$ ······ ㉠

$f(-3) = -81 + 45 + 3a + b = 0 \qquad \therefore 3a + b = 36$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 11$, $b = 3$ ··· ❷

$\therefore a + b = 14$ ··· ❸

답 14

채점 기준	비율
❶ 인수정리를 이용할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0166

$f(x)$를 $x-1$, $x-2$, $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 각각 1, 2, 3이므로 나머지정리에 의하여 $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$

즉, $f(1) - 1 = f(2) - 2 = f(3) - 3 = 0$이므로

$f(x) - x$는 $x-1$, $x-2$, $x-3$으로 나누어떨어진다.

이때, $f(x)$는 삼차항의 계수가 1인 삼차다항식이므로

$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + x$

따라서 $f(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는

$f(4) = 3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 = 10$ 답 10

0167

|전략| 다항식 $f(x)$가 $(x-\alpha)(x-\beta)$로 나누어떨어지면 $f(x)$는 $x-\alpha$, $x-\beta$로 각각 나누어떨어진다. 즉, $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$임을 이용한다.

$f(x) = 2x^3 + ax^2 - x + b$라 하면

$f(x)$가 $x^2 - x - 2$, 즉 $(x+1)(x-2)$로 나누어떨어지므로

$f(-1) = 0$, $f(2) = 0$

$f(-1) = -2 + a + 1 + b = 0 \qquad \therefore a + b = 1$ ······ ㉠

$f(2) = 16 + 4a - 2 + b = 0 \qquad \therefore 4a + b = -14$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -5$, $b = 6$

$\therefore ab = -30$ 답 ①

0168

$f(x) - 2$가 $x^2 - 5x + 6$, 즉 $(x-2)(x-3)$으로 나누어떨어지므로

$f(2) - 2 = 0$, $f(3) - 2 = 0$

$\therefore f(2) = 2$, $f(3) = 2$

$f(x+2)$를 x^2-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x+2)=(x^2-x)Q(x)+ax+b$
$\quad=x(x-1)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=0$을 대입하면 $f(2)=b$ $\quad\therefore b=2$

양변에 $x=1$을 대입하면 $f(3)=a+b$

$a+b=2$, $a+2=2$ $\quad\therefore a=0$

따라서 구하는 나머지는 2이다. 답 ②

0169

$f(x)$가 x^2-2x-3, 즉 $(x+1)(x-3)$으로 나누어떨어지므로

$f(-1)=0$, $f(3)=0$

$f(x)-2$가 $x-1$로 나누어떨어지므로

$f(1)-2=0$ $\quad\therefore f(1)=2$

$f(x)+1$을 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)+1=(x^2-1)Q(x)+ax+b$
$\quad=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=-1$을 대입하면 $f(-1)+1=-a+b$

$\therefore -a+b=1$ ...... ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)+1=a+b$

$\therefore a+b=3$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

따라서 구하는 나머지는 $x+2$이다. 답 $x+2$

STEP 3 내신 마스터

0170

유형 02 항등식에서 미정계수 구하기 – 계수비교법

|전략| 모든 실수 x, y에 대하여 주어진 식이 성립하므로 주어진 식은 x, y에 대한 항등식이다.

주어진 등식을 x, y에 대하여 정리하면

$(a-b+2)x-(2a-3b+3)y=0$

이 식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a-b+2=0$, $2a-3b+3=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-1$

$\therefore a+b=-4$ 답 ④

0171

유형 02 항등식에서 미정계수 구하기 – 수치대입법

|전략| 주어진 등식의 양변에 적당한 값을 대입한다.

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2-3-2=3b$ $\quad\therefore b=-1$

양변에 $x=-2$를 대입하면

$8+6-2=6c$ $\quad\therefore c=2$

양변에 $x=0$을 대입하면

$-2=-2a$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore a+b+c=1+(-1)+2=2$ 답 ②

다른 풀이 $2x^2-3x-2=a(x+2)(x-1)+bx(x+2)+cx(x-1)$
$\quad=(a+b+c)x^2+(a+2b-c)x-2a$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$2=a+b+c$, $-3=a+2b-c$, $-2=-2a$

$\therefore a=1$, $b=-1$, $c=2$

$\therefore a+b+c=1+(-1)+2=2$

0172

유형 03 ~의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식

|전략| 주어진 이차방정식에 $x=-1$을 대입한 식이 k에 대한 항등식임을 이용한다.

이차방정식 $x^2-(k+1)x-a(k-1)+b=0$의 근이 -1이므로

$1+(k+1)-a(k-1)+b=0$

이 식을 k에 대하여 정리하면

$(1-a)k+2+a+b=0$

이 식이 k에 대한 항등식이므로

$1-a=0$, $2+a+b=0$

따라서 $a=1$, $b=-3$이므로 $ab=-3$ 답 ③

0173

유형 05 항등식에서 계수의 합 구하기

|전략| 구하려는 계수의 합을 얻기 위해 주어진 등식의 양변에 대입할 x의 값을 찾는다.

ㄱ. 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$(-1)^{10}=a_0$, 즉 $a_0=1$

ㄴ. 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$(1+2-1)^{10}=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{20}$
$\therefore a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{20}=2^{10}$
그런데 ㄱ에서 $a_0=1$이므로
$a_1+a_2+\cdots+a_{20}=2^{10}-1$

ㄷ. 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$(1+2-1)^{10}=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{19}+a_{20}$ ...... ㉠
양변에 $x=-1$을 대입하면
$(1-2-1)^{10}=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{19}+a_{20}$ ...... ㉡
㉠+㉡을 하면
$2\cdot2^{10}=2(a_0+a_2+\cdots+a_{20})$
$\therefore a_0+a_2+\cdots+a_{20}=2^{10}$

따라서 옳은 것은 ㄱ이다. 답 ①

0174

유형 07 나머지정리 – 일차식으로 나누는 경우

|전략| 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(\alpha)$임을 이용한다.

나머지정리에 의하여 $f(-2)=-3$, $g(-2)=2$

따라서 $(x^2-1)f(x)-(x-3)g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$\{(-2)^2-1\}f(-2)-(-2-3)g(-2)$
$=3\cdot(-3)-(-5)\cdot2=1$ 답 ①

0175

유형 **08** 나머지정리를 이용하여 미정계수 구하기

|전략| 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(\alpha)$임을 이용한다.

$f(x)=ax^7+bx^5+cx^3+dx+3$이라 하면 나머지정리에 의하여

$f(1)=2$이므로

$a+b+c+d+3=2 \qquad \therefore a+b+c+d=-1$

따라서 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-1)=-a-b-c-d+3$

$=-(a+b+c+d)+3$

$=-(-1)+3=4$

답 ④

0176

유형 **09** 나머지정리 – 이차식으로 나누는 경우

|전략| 다항식 $f(x)$를 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 $ax+b$ (a, b는 상수)로 놓는다.

나머지정리에 의하여 $f(2)=3$, $f(3)=4$

$f(x)$를 $(x-2)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$

$f(2)=2a+b=3 \quad \cdots\cdots$ ㉠, $f(3)=3a+b=4 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

$\therefore f(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+x+1$

따라서 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(1)=(-1)\cdot(-2)Q(1)+1+1$

$=2Q(1)+2$

답 ④

0177

유형 **11** 나머지정리 – $f(ax+b)$를 $x-\alpha$로 나누는 경우

|전략| 다항식 $f(ax+b)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(a\alpha+b)$임을 이용한다.

$f(2x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2\cdot1)=f(2)$

$f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+5x-4$

따라서 구하는 나머지는

$f(2)=5\cdot2-4=6$

답 ③

0178

유형 **12** 나머지정리 – 몫 $Q(x)$를 $x-\alpha$로 나누는 경우

|전략| 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이면 $f(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$임을 이용한다.

$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q_1(x)$, 나머지가 10이므로

$f(x)=(x-1)Q_1(x)+10 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q_2(x)$, 나머지가 6이므로

$f(x)=(x-3)Q_2(x)+6 \quad \cdots\cdots$ ㉡

이때, $Q_1(x)+Q_2(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$Q_1(2)+Q_2(2)$이므로 ㉠, ㉡에 $x=2$를 각각 대입하면

$f(2)=Q_1(2)+10=-Q_2(2)+6$

$\therefore Q_1(2)+Q_2(2)=-4$

답 ②

0179

유형 **13** 수의 나눗셈에서 나머지정리의 활용

|전략| 나누는 수 8에 가장 가까운 3^n 꼴의 수는 9이므로 $3^{199}+3^{200}+3^{201}$을 $k\cdot9^n$ (k는 상수) 꼴로 변형시킨다.

$3^{199}+3^{200}+3^{201}=3\cdot3^{198}+3^2\cdot3^{198}+3^3\cdot3^{198}$

$=(3+3^2+3^3)\cdot3^{198}$

$=39\cdot(3^2)^{99}=39\cdot9^{99}$

$f(x)=39x^{99}$이라 할 때, $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(1)=39$이므로 몫을 $Q(x)$라 하면

$39x^{99}=(x-1)Q(x)+39$

위의 식의 양변에 $x=9$를 대입하면

$39\cdot9^{99}=8Q(9)+39$

$=8\{Q(9)+4\}+7$

따라서 $3^{199}+3^{200}+3^{201}$을 8로 나누었을 때의 나머지는 7이다. 답 ⑤

0180

유형 **14** 인수정리 – 일차식으로 나누는 경우

|전략| $f(1)=f(2)=f(3)=k$라 하면 $f(x)-k$는 $x-1$, $x-2$, $x-3$을 인수로 갖는다.

$f(1)=f(2)=f(3)=k$라 하면 $f(x)$를 $x-1$, $x-2$, $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 각각 k이다.

즉, $f(x)-k$는 $x-1$, $x-2$, $x-3$으로 나누어떨어진다.

이때, $f(x)$는 삼차항의 계수가 1인 삼차다항식이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+k$

$f(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로 $f(-1)=0$

$(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)+k=0 \qquad \therefore k=24$

$\therefore f(0)=(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)+24=18$

답 ②

0181

유형 **10** 나머지정리 – 삼차식으로 나누는 경우

|전략| 다항식 $f(x)$를 삼차식으로 나누었을 때의 나머지는 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)로 놓는다.

$f(x)$를 $(x-2)^2(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=(x-2)^2(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$

이때, $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x-6$이므로

ax^2+bx+c를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지도 $x-6$이다.

즉, $ax^2+bx+c=a(x-2)^2+x-6$

$\therefore f(x)=(x-2)^2(x+1)Q(x)+a(x-2)^2+x-6 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\cdots$ ❶

또, $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 2이므로 나머지정리에 의하여 $f(-1)=2$

㉠에서 $f(-1)=9a-7=2$이므로 $a=1$ … ❷

따라서 구하는 나머지는

$R(x)=(x-2)^2+x-6=x^2-3x-2$ … ❸

답 x^2-3x-2

채점 기준	배점
❶ 주어진 조건을 만족하는 다항식 $f(x)$의 식을 나타낼 수 있다.	4점
❷ a의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $f(x)$를 $(x-2)^2(x+1)$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	1점

0182

유형 **15** 인수정리 – 이차식으로 나누는 경우

| 전략 | 다항식 $f(x)$가 $(x-\alpha)(x-\beta)$로 나누어떨어지면 $f(x)$는 $x-\alpha$, $x-\beta$로 각각 나누어떨어진다. 즉, $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$임을 이용한다.

$f(x)=x^3+ax^2-5x+b$라 하면 $f(x)$가 $(x+1)(x-2)$로 나누어떨어지므로 $f(-1)=0$, $f(2)=0$ … ❶

$f(-1)=-1+a+5+b=0 \quad \therefore a+b=-4$ …… ㉠

$f(2)=8+4a-10+b=0 \quad \therefore 4a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-6$ … ❷

$\therefore f(x)=x^3+2x^2-5x-6$

따라서 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(3)=27+18-15-6=24$ … ❸

답 24

채점 기준	배점
❶ 인수정리를 이용할 수 있다.	3점
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ 주어진 다항식을 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	2점

0183

유형 **06** 다항식의 나눗셈과 항등식
+ **15** 인수정리 – 이차식으로 나누는 경우

| 전략 | 다항식 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어지면 인수정리를 두 번 이용한다.

(1) 다항식 $f(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(1)=1+a+b=0$

$\therefore b=-a-1$ …… ㉠

(2)
$$\begin{array}{r|cccc} 1 & 1 & 0 & a & b \\ & & 1 & 1 & a+1 \\ \hline & 1 & 1 & a+1 & a+b+1=0 \end{array}$$

조립제법에 의하여

$f(x)=(x-1)\{x^2+x+(a+1)\}$

(3) $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$Q(x)=x^2+x+(a+1)$

$Q(x)$도 $x-1$로 나누어떨어지므로

$Q(1)=1+1+a+1=0 \quad \therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $b=2$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 인수정리를 이용하여 b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	3점
(2) 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $f(x)=(x-1)Q(x)$ 꼴로 나타낼 수 있다.	5점
(3) a, b의 값을 구할 수 있다.	4점

다른 풀이 $f(x)=x^3+ax+b$를 $(x-1)^2$, 즉 x^2-2x+1로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면

$x^3+ax+b=(x^2-2x+1)(x+c)$

$\qquad =x^3+(c-2)x^2+(-2c+1)x+c$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$0=c-2$, $a=-2c+1$, $b=c$

$\therefore c=2$, $a=-3$, $b=2$

창의·융합 교과서 속 심화문제

0184

| 전략 | $x+y+z=0$, $x-2y-z=1$에서 x, z를 y에 대한 식으로 나타내고, 주어진 식에 대입하여 y에 대한 항등식임을 이용한다.

$x+y+z=0$ …… ㉠, $x-2y-z=1$ …… ㉡에서

㉠+㉡을 하면 $2x-y=1 \quad \therefore x=\dfrac{y+1}{2}$ …… ㉢

㉠−㉡을 하면 $3y+2z=-1 \quad \therefore z=\dfrac{-3y-1}{2}$ …… ㉣

㉢, ㉣을 $ax^2+by^2+cz^2=2$에 대입하면

$a\left(\dfrac{y+1}{2}\right)^2+by^2+c\left(\dfrac{-3y-1}{2}\right)^2=2$

$(a+4b+9c)y^2+(2a+6c)y+a+c=8$

이 식이 y에 대한 항등식이므로

$a+4b+9c=0$, $2a+6c=0$, $a+c=8$

$\therefore a=12$, $b=6$, $c=-4$

$\therefore a+b+2c=10$

답 ⑤

0185

| 전략 | $f(x)$를 n차식이라 할 때, 주어진 등식의 좌변과 우변의 차수가 같음을 이용하여 n의 값을 구한다.

$f(x)$를 n차식이라 하면 $f(x^2+x)$는 $2n$차식이고 $x^2f(x)$는 $(n+2)$차식이다.

주어진 등식의 좌변과 우변의 차수가 같으므로

$2n=n+2$에서 $n=2$

따라서 $f(x)$는 이차식이다.

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x^2+x)=x^2f(x)+2x+3$에서

$a(x^2+x)^2+b(x^2+x)+c=x^2(ax^2+bx+c)+2x+3$

$ax^4+2ax^3+(a+b)x^2+bx+c=ax^4+bx^3+cx^2+2x+3$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$2a=b,\ a+b=c,\ b=2,\ c=3$

$\therefore\ a=1,\ b=2,\ c=3$

$\therefore\ f(x)=x^2+2x+3$

따라서 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-2)=4-4+3=3$ 답 ③

0186

|전략| 다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $f(a)$임을 이용하여 $f(a)-f(b)$를 구한다.

나머지정리에 의하여 $f(a)=a^2,\ f(b)=b^2$

$f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $px+q$ ($p,\ q$는 상수)라 하면

$f(x)=(x-a)(x-b)Q(x)+px+q$

$f(a)=a^2$에서 $ap+q=a^2$ …… ㉠

$f(b)=b^2$에서 $bp+q=b^2$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $ap-bp=a^2-b^2$

$(a-b)p=(a-b)(a+b)$

이때, $a\neq b$이므로 양변을 $a-b$로 나누면 $p=a+b$

즉, $ap+q=a^2$에서 $a(a+b)+q=a^2$

$\therefore\ q=a^2-a(a+b)=-ab$

따라서 구하는 나머지는 $(a+b)x-ab$ 답 $(a+b)x-ab$

0187

|전략| 다항식 $f(x)$를 $g(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하면 $f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$임을 이용한다.

$x^n(x^2-ax+b)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^n(x^2-ax+b)=(x-2)^2Q(x)+2^n(x-2)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $2^n(4-2a+b)=0$

$\therefore\ b=2a-4\ (\because\ 2^n\neq 0)$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^n(x^2-ax+2a-4)=(x-2)^2Q(x)+2^n(x-2)$

$x^n(x-2)(x-a+2)=(x-2)\{(x-2)Q(x)+2^n\}$

$x\neq 2$일 때에도 위의 식이 성립해야 하므로

$x^n(x-a+2)=(x-2)Q(x)+2^n$ …… ㉢

㉢의 양변에 $x=2$를 대입하면 $2^n(2-a+2)=2^n$

$4-a=1\qquad \therefore\ a=3$

$a=3$을 ㉡에 대입하면 $b=2$

$\therefore\ a+b=5$ 답 5

참고 $x^n(x-2)(x-a+2)=(x-2)\{(x-2)Q(x)+2^n\}$은 x에 대한 항등식이므로 모든 실수 x에 대하여 참이 되는 등식이다.
따라서 $x=2$일 때와 $x\neq 2$일 때 모두 등식이 성립해야 한다.

0188

|전략| $\{f(x)\}^{100}$을 $\frac{1}{2}f(x^2)=\frac{1}{4}(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ ($a,\ b$는 상수)로 놓은 다음 $\{f(-1)\}^{100},\ \{f(1)\}^{100}$을 구한다.

$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$에 대하여

$\frac{1}{2}f(x^2)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{4}(x^2-1)=\frac{1}{4}(x+1)(x-1)$

$\{f(x)\}^{100}$을 $\frac{1}{2}f(x^2)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ ($a,\ b$는 상수)라 하면

$\{f(x)\}^{100}=\frac{1}{2}f(x^2)Q(x)+R(x)$

$=\frac{1}{4}(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$

위의 식의 양변에 $x=-1,\ x=1$을 각각 대입하면

$\{f(-1)\}^{100}=-a+b,\ \{f(1)\}^{100}=a+b$ …… ㉠

이때, $f(-1)=-1,\ f(1)=0$이므로 이를 ㉠에 대입하면

$-a+b=1,\ a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}$

따라서 $R(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$이므로 $R(5)=-2$ 답 ②

0189

|전략| 인수정리를 이용하여 $P(2),\ P(-2)$의 값을 구하고, 삼차다항식 $P(x)$에 대한 식을 세운다.

$P(x)+2$가 $(x+2)^2$으로 나누어떨어지므로

$P(-2)+2=0\qquad \therefore\ P(-2)=-2$

$2-P(x)$가 $(x-2)^2$으로 나누어떨어지므로

$2-P(2)=0\qquad \therefore\ P(2)=2$

삼차다항식 $P(x)=(ax+b)(x+2)(x-2)+x$라 하면

$P(x)+2=(ax+b)(x+2)(x-2)+x+2$

$=(x+2)\{(ax+b)(x-2)+1\}$

이때, $P(x)+2$가 $(x+2)^2$으로 나누어떨어지므로 $x+2$가 $(ax+b)(x-2)+1$의 인수이어야 한다.

즉, $(ax+b)(x-2)+1$에 $x=-2$를 대입하면

$-4(-2a+b)+1=0\qquad \therefore\ 8a-4b=-1$ …… ㉠

또한,

$2-P(x)=2-\{(ax+b)(x+2)(x-2)+x\}$

$=-(ax+b)(x+2)(x-2)-x+2$

$=-(x-2)\{(ax+b)(x+2)+1\}$

이때, $2-P(x)$가 $(x-2)^2$으로 나누어떨어지므로 $x-2$가 $-\{(ax+b)(x+2)+1\}$의 인수이어야 한다.

즉, $-\{(ax+b)(x+2)+1\}$에 $x=2$를 대입하면

$-\{4(2a+b)+1\}=0\qquad \therefore\ 8a+4b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{8},\ b=0$

따라서 $P(x)=-\frac{1}{8}x(x+2)(x-2)+x$이므로

$P(3)=-\frac{1}{8}\cdot 3\cdot 5\cdot 1+3=\frac{9}{8}$ 답 $\frac{9}{8}$

본책 38~49쪽

3 | 인수분해

STEP 1 개념 마스터

0190

$4x^2+4x+1=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 1+1^2$
$=(2x+1)^2$ 답 $(2x+1)^2$

0191

$4x^2-12xy+9y^2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2$
$=(2x-3y)^2$ 답 $(2x-3y)^2$

0192

$9x^2-y^2=(3x)^2-y^2=(3x+y)(3x-y)$ 답 $(3x+y)(3x-y)$

0193

$(x-2)^2-(2y+1)^2=(x-2+2y+1)(x-2-2y-1)$
$=(x+2y-1)(x-2y-3)$
답 $(x+2y-1)(x-2y-3)$

0194

$2x^2-5x-3=(x-3)(2x+1)$ 답 $(x-3)(2x+1)$

0195

$x^2-4xy-5y^2=(x+y)(x-5y)$ 답 $(x+y)(x-5y)$

0196

$x^2+y^2+2xy+2x+2y+1$
$=x^2+y^2+1^2+2\cdot x\cdot y+2\cdot y\cdot 1+2\cdot 1\cdot x$
$=(x+y+1)^2$ 답 $(x+y+1)^2$

0197

$x^2+y^2+4z^2+2xy-4yz-4zx$
$=x^2+y^2+(-2z)^2+2\cdot x\cdot y+2\cdot y\cdot(-2z)+2\cdot(-2z)\cdot x$
$=(x+y-2z)^2$ 답 $(x+y-2z)^2$

0198

$x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$
$=x^3+3\cdot x^2\cdot 2y+3\cdot x\cdot(2y)^2+(2y)^3$
$=(x+2y)^3$ 답 $(x+2y)^3$

0199

$27x^3-27x^2y+9xy^2-y^3$
$=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot y+3\cdot 3x\cdot y^2-y^3$
$=(3x-y)^3$ 답 $(3x-y)^3$

0200

$x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x+1)$ 답 $(x+1)(x^2-x+1)$

0201

$x^3-27y^3=x^3-(3y)^3=(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$
답 $(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$

0202

$x^3+y^3-3xy+1=x^3+y^3+1^3-3\cdot x\cdot y\cdot 1$
$=(x+y+1)(x^2+y^2-xy-x-y+1)$
답 $(x+y+1)(x^2+y^2-xy-x-y+1)$

0203

$16x^4+4x^2y^2+y^4=(2x)^4+(2x)^2\cdot y^2+y^4$
$=(4x^2+2xy+y^2)(4x^2-2xy+y^2)$
답 $(4x^2+2xy+y^2)(4x^2-2xy+y^2)$

0204

$x-2=t$로 놓으면
$(x-2)^2-(x-2)-6=t^2-t-6$
$=(t+2)(t-3)$
$=(x-2+2)(x-2-3)$
$=x(x-5)$ 답 $x(x-5)$

0205

$x^2-3x=t$로 놓으면
$(x^2-3x-3)(x^2-3x+1)-5$
$=(t-3)(t+1)-5$
$=t^2-2t-8=(t+2)(t-4)$
$=(x^2-3x+2)(x^2-3x-4)$
$=(x-1)(x-2)(x+1)(x-4)$
답 $(x-1)(x-2)(x+1)(x-4)$

0206

$x-2=A$, $y+1=B$로 놓으면
$(x-2)^2-(x-2)(y+1)-2(y+1)^2$
$=A^2-AB-2B^2$
$=(A+B)(A-2B)$
$=(x-2+y+1)(x-2-2y-2)$
$=(x+y-1)(x-2y-4)$ 답 $(x+y-1)(x-2y-4)$

0207

$x^2=X$로 놓으면

$$x^4-13x^2+36=X^2-13X+36=(X-4)(X-9)$$
$$=(x^2-4)(x^2-9)$$
$$=(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$$

답 $(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$

0208

$$x^4+4x^2+16=(x^4+8x^2+16)-4x^2$$
$$=(x^2+4)^2-(2x)^2$$
$$=(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$$

답 $(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

0209

$$a^3-ab^2-b^2c+a^2c=a(a^2-b^2)+c(a^2-b^2)$$
$$=(a^2-b^2)(a+c)$$
$$=(a+b)(a-b)(a+c)$$

답 $(a+b)(a-b)(a+c)$

0210

$x^2-xy-2y^2+x+4y-2$

$=x^2-(y-1)x-2(y^2-2y+1)$

$=x^2-(y-1)x-2(y-1)^2$

$=\{x-2(y-1)\}\{x+(y-1)\}$

$=(x-2y+2)(x+y-1)$ 답 $(x-2y+2)(x+y-1)$

0211

$2x^2+3xy+y^2+5x+3y+2$

$=2x^2+(3y+5)x+(y^2+3y+2)$

$=2x^2+(3y+5)x+(y+1)(y+2)$

$=(x+y+2)(2x+y+1)$ 답 $(x+y+2)(2x+y+1)$

0212

$f(x)=x^3+3x^2-6x-8$이라 하면 $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & -6 & -8 \\ & & -1 & -2 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & -8 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2+2x-8)$

$=(x+1)(x-2)(x+4)$ 답 $(x+1)(x-2)(x+4)$

0213

$f(x)=x^3-7x-6$이라 하면 $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -7 & -6 \\ & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2-x-6)$

$=(x+1)(x+2)(x-3)$ 답 $(x+1)(x+2)(x-3)$

0214

$f(x)=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$라 하면 $f(1)=0$, $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 2 & -7 & -8 & 12 \\ & & 1 & 3 & -4 & -12 \\ \hline 2 & 1 & 3 & -4 & -12 & \boxed{0} \\ & & 2 & 10 & 12 & \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x-2)(x^2+5x+6)$

$=(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)$

답 $(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)$

STEP 2 유형 마스터

0215

|전략| 공통인수를 묶어낸 후 인수분해 공식을 적용한다.

ㄱ. $(a-b)c+b(b-a)=(a-b)c-b(a-b)$
$=(a-b)(c-b)$

ㄴ. $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca=(a-b+c)^2$

ㄷ. $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3=(x-2y)^3$

ㄹ. $x^5+x^3y^2+xy^4=x(x^4+x^2y^2+y^4)$
$=x(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

따라서 인수분해가 바르게 된 것은 ㄷ, ㄹ의 2개이다. 답 ③

0216

$x^2-(2a+3)x+(a+1)(a+2)$

$=(x-a-1)(x-a-2)$

즉, $(x-a-1)+(x-a-2)=2x+1$이므로

$2x-2a-3=2x+1$, $-2a=4$

$\therefore a=-2$ 답 -2

0217

$$x^6-2^6=(x^3)^2-(2^3)^2$$
$$=(x^3+2^3)(x^3-2^3)$$
$$=(x+2)(x-2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$$

따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ③이다. 답 ③

0218

$$a^2b+b^2c-b^3-a^2c=(a^2b-a^2c)+(b^2c-b^3)$$
$$=a^2(b-c)-b^2(b-c)$$
$$=(a^2-b^2)(b-c)$$
$$=(a+b)(a-b)(b-c)$$

답 $(a+b)(a-b)(b-c)$

Lecture

항이 네 개이고 주어진 식에 바로 인수분해 공식을 적용할 수 없는 경우

(1) 두 개씩 짝을 지어 공통인수를 찾는다.

(2) 완전제곱식을 찾아서 A^2-B^2 꼴로 변형한 후 인수분해한다.

0219

|전략| 공통부분이 생기도록 적당히 두 일차식을 묶은 후 공통부분을 치환하여 인수분해한다.

$(x-1)(x-3)(x+2)(x+4)+21$
$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+21$
$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+21$
$x^2+x=t$로 놓으면
(주어진 식)$=(t-2)(t-12)+21$
$=t^2-14t+45$
$=(t-5)(t-9)$
$=(x^2+x-5)(x^2+x-9)$
$\therefore a+b+c+d=1+(-5)+1+(-9)=-12$ 답 -12

Lecture

일차식 4개가 곱해져 있는 식의 인수분해

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$ 꼴의 다항식을 공통부분이 생기도록 변형할 때, a, b, c, d 중 두 개씩 짝을 지은 두 수의 합이 같아지도록 묶은 뒤, 짝지은 두 식끼리 먼저 전개한다.

예 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$에서 $1+4=2+3$이므로 $\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}$으로 묶어서 전개하면 공통부분이 나온다.

0220

$a+b+2=t$로 놓으면
$(a+b+2)^2-2(a+b+2)-8$
$=t^2-2t-8$
$=(t+2)(t-4)$
$=(a+b+2+2)(a+b+2-4)$
$=(a+b+4)(a+b-2)$ 답 ③

0221

$x^2-x=t$로 놓으면
$(x^2-x-9)(x^2-x+1)+21$
$=(t-9)(t+1)+21$
$=t^2-8t+12$
$=(t-2)(t-6)$
$=(x^2-x-2)(x^2-x-6)$
$=(x-2)(x+1)(x-3)(x+2)$
따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0222

|전략| 이차식 x^2+ax+b가 완전제곱식으로 인수분해되려면 $b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$이어야 한다.

$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+k$
$=\{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\}+k$
$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+k$ ··· ❶
$x^2+8x=t$로 놓으면
(주어진 식)$=(t+7)(t+15)+k$
$=t^2+22t+105+k$ ······ ㉠ ··· ❷
주어진 식이 x에 대한 이차식의 완전제곱식으로 인수분해되려면 ㉠이 t에 대한 완전제곱식이 되어야 하므로
$105+k=\left(\frac{22}{2}\right)^2=121$ $\therefore k=16$ ··· ❸
답 16

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 공통부분이 생기도록 짝을 지어 전개할 수 있다.	40 %
❷ 공통부분을 치환하여 전개할 수 있다.	20 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	40 %

0223

|전략| $x^2=X$로 치환하여 인수분해 공식을 이용한다.

$x^2=X$로 놓으면
$x^4+4x^2-5=X^2+4X-5=(X-1)(X+5)$
$=(x^2-1)(x^2+5)$
$=(x+1)(x-1)(x^2+5)$
따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

0224

|전략| x^2항을 적당히 분리하여 A^2-B^2 꼴로 변형한 후 인수분해한다.

$x^4-9x^2+16=x^4-8x^2+16-x^2$
$=(x^2-4)^2-x^2$
$=(x^2+x-4)(x^2-x-4)$
$\therefore a+b+c+d=1-4-1-4=-8$ 답 -8

0225

$x^4-7x^2y^2+9y^4=x^4-6x^2y^2+9y^4-x^2y^2$
$=(x^2-3y^2)^2-(xy)^2$
$=(x^2+xy-3y^2)(x^2-xy-3y^2)$
따라서 $a=1, b=-3$ 또는 $a=-1, b=-3$이므로
$a^2+b^2=1+9=10$ 답 ②

0226

$[x^2, x^2]+[x+3, x-1]-7$
$=x^4-x^2-x^2+(x+3)(x-1)-(x+3)-(x-1)-7$
$=x^4-2x^2+x^2+2x-3-x-3-x+1-7$
$=x^4-x^2-12$ $x^2=X$로 치환
$=X^2-X-12$
$=(X-4)(X+3)$
$=(x^2-4)(x^2+3)$
$=(x+2)(x-2)(x^2+3)$ 답 $(x+2)(x-2)(x^2+3)$

3 인수분해

0227

| 전략 | 주어진 식을 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$$\begin{aligned}&x^2-3xy+2y^2+4x-5y+3\\&=x^2-(3y-4)x+(2y^2-5y+3)\\&=x^2-(3y-4)x+(y-1)(2y-3)\\&=\{x-(y-1)\}\{x-(2y-3)\}\\&=(x-y+1)(x-2y+3)\end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=1$, $c=2$, $d=-3$이므로

$a+b+c+d=1+1+2+(-3)=1$ 답 1

0228

주어진 식을 y에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$$\begin{aligned}&x^3-(y-1)x^2-(y+2)x+2y\\&=y(-x^2-x+2)+x^3+x^2-2x\\&=-y(x^2+x-2)+x(x^2+x-2)\\&=(x-y)(x^2+x-2)\\&=(x-y)(x+2)(x-1)\end{aligned}$$

따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ①이다. 답 ①

0229

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$$\begin{aligned}&x^2+xy-2y^2-2x+8y-8\\&=x^2+(y-2)x-2(y^2-4y+4)\\&=x^2+(y-2)x-2(y-2)^2\\&=\{x-(y-2)\}\{x+2(y-2)\}\\&=(x-y+2)(x+2y-4)\end{aligned}$$

따라서 두 인수의 합은

$(x-y+2)+(x+2y-4)=2x+y-2$ 답 ②

0230

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&2x^2-3xy+y^2+ax+3y-10\\&=2x^2-(3y-a)x+y^2+3y-10\\&=2x^2-(3y-a)x+(y-2)(y+5)\end{aligned}$$

주어진 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면

(i) $-2(y-2)-(y+5)=-(3y-a)$

$\therefore a=-1$

(ii) $-2(y+5)-(y-2)=-(3y-a)$

$\therefore a=-8$

(i), (ii)에서 모든 정수 a의 값의 합은

$-1+(-8)=-9$ 답 -9

0231

| 전략 | 식의 값을 0으로 만드는 x의 값을 찾아 인수정리와 조립제법을 이용하여 주어진 식을 인수분해한다.

$f(x)=2x^3+x^2-8x-4$라 하면

$f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여

인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}2 & 2 & 1 & -8 & -4\\ & & 4 & 10 & 4\\\hline & 2 & 5 & 2 & \boxed{0}\end{array}$$

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-2)(2x^2+5x+2)\\&=(x-2)(x+2)(2x+1)\end{aligned}$$

$\therefore a+b+c=(-2)+2+1=1$ 답 1

0232

$f(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로

$f(-1)=-3+10-9+a=0$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore f(x)=3x^3+10x^2+9x+2$

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}-1 & 3 & 10 & 9 & 2\\ & & -3 & -7 & -2\\\hline & 3 & 7 & 2 & \boxed{0}\end{array}$$

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+1)(3x^2+7x+2)\\&=(x+1)(x+2)(3x+1)\end{aligned}$$

따라서 $f(x)$의 인수인 것은 ④이다. 답 ④

0233

$f(x)=x^4+5x^3+3x^2-5x-4$라 하면 $f(1)=0$, $f(-1)=0$이므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}1 & 1 & 5 & 3 & -5 & -4\\ & & 1 & 6 & 9 & 4\\\hline -1 & 1 & 6 & 9 & 4 & \boxed{0}\\ & & -1 & -5 & -4 & \\\hline & 1 & 5 & 4 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-1)(x+1)(x^2+5x+4)\\&=(x-1)(x+1)(x+1)(x+4)\\&=(x-1)(x+1)^2(x+4)\end{aligned}$$

따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ①이다. 답 ①

0234

| 전략 | 주어진 식을 x^2으로 묶어낸 후 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$임을 이용한다.

$$\begin{aligned}x^4-3x^3-2x^2-3x+1&=x^2\left(x^2-3x-2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\\&=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\right\}\\&=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4\right\}\\&=x^2\left(x+\frac{1}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}-4\right)\\&=(x^2+x+1)(x^2-4x+1)\end{aligned}$$

이때, $a>0$이므로 $a=1, b=1, c=-4, d=1$

$\therefore ad-bc=1\cdot1-1\cdot(-4)=5$ 답 5

0235

$$x^4-4x^3+5x^2-4x+1=x^2\left(x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5\right\}$$
$$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\right\}$$
$$=x^2\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)$$
$$=(x^2-x+1)(x^2-3x+1)$$
답 ④

0236

$$x^4-2x^3-5x^2+2x+1=x^2\left(x^2-2x-5+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}-2\left(x-\frac{1}{x}\right)-5\right\}$$
$$=x^2\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{x}\right)-3\right\}$$
$$=x^2\left(x-\frac{1}{x}+1\right)\left(x-\frac{1}{x}-3\right)$$
$$=(x^2+x-1)(x^2-3x-1)$$
답 ④

0237

| 전략 | 주어진 식을 전개한 후 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

주어진 식을 a에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$
$=(b-c)a^2-(b-c)(b+c)a+bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
$=(b-c)(a-b)(a-c)$
$=-(a-b)(b-c)(c-a)$ 답 ③

참고 b나 c에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해해도 그 결과는 같다.

0238

주어진 식을 a에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$
$=a^2(b+c)+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b+2abc$
$=(b+c)a^2+(b^2+c^2+2bc)a+b^2c+c^2b$
$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$
$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$
$=(b+c)(a+b)(a+c)$
$=(a+b)(b+c)(c+a)$ 답 $(a+b)(b+c)(c+a)$

0239

$[a, b]+[b, c]+[c, a]$
$=ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$
$=a^2b-ab^2+bc(b-c)+c^2a-ca^2$
$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$
$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
$=(b-c)(a-b)(a-c)$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ③이다. 답 ③

0240

주어진 식을 a에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$(a+b)(b+c)(c+a)+abc$
$=(ab+ac+b^2+bc)(c+a)+abc$
$=abc+a^2b+ac^2+a^2c+b^2c+b^2a+bc^2+abc+abc$
$=(b+c)a^2+(b^2+c^2+3bc)a+bc(b+c)$
$=\{(b+c)a+bc\}(a+b+c)$
$=(ab+bc+ca)(a+b+c)$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ④이다. 답 ④

다른 풀이 $a+b+c=t$로 놓으면

$a+b=t-c, b+c=t-a, c+a=t-b$이므로

$(a+b)(b+c)(c+a)+abc$
$=(t-c)(t-a)(t-b)+abc$
$=t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ca)t$
$=(ab+bc+ca)t$ ($\because a+b+c=t$)
$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

0241

| 전략 | 주어진 식을 인수분해한 후 조건을 대입하여 식을 간단히 한다.

$ab+c=1$에서 $c=1-ab, ab=1-c$

$\therefore 2ab-a^2b-ab^2-abc=2ab-a^2b-ab^2-ab(1-ab)$
$=ab(2-a-b-1+ab)$
$=ab(1-a-b+ab)$
$=ab(1-a)(1-b)$
$=(1-c)(1-a)(1-b)$
$=(1-a)(1-b)(1-c)$ 답 ④

0242

$a+b+c=0$에서 $a=-(b+c)$

$\therefore 2a^2+bc=2\{-(b+c)\}^2+bc$
$=2b^2+5bc+2c^2$
$=(2b+c)(b+2c)$
$=(b+b+c)(b+c+c)$
$=(b-a)(c-a)$ ($\because b+c=-a$)
$=(a-b)(a-c)$ 답 ④

3 인수분해

0243

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$2x^2+xy-y^2-7x-y+6$

$=2x^2+(y-7)x-(y^2+y-6)$

$=2x^2+(y-7)x-(y+3)(y-2)$

$=\{x+(y-2)\}\{2x-(y+3)\}$

$=(x+y-2)(2x-y-3)$

이때, $x-y-2=0$에서 $x-2=y,\ y+2=x$

$\therefore$ (주어진 식)$=(y+y)\{2(y+2)-y-3\}$

$=2y(y+1)$ 답 ⑤

다른 풀이 $x-y-2=0$에서 $y=x-2$

$\therefore 2x^2+xy-y^2-7x-y+6$

$=2x^2+x(x-2)-(x-2)^2-7x-(x-2)+6$

$=2x^2+x^2-2x-x^2+4x-4-7x-x+2+6$

$=2x^2-6x+4=2(x^2-3x+2)$

$=2(x-1)(x-2)$

$=2y(y+1)$ ($\because x=y+2$)

0244

주어진 식을 z에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$xyz+x^2y-xy+x+z-1$

$=(xy+1)z+(x^2y-xy+x-1)$

$=(xy+1)z+\{xy(x-1)+(x-1)\}$

$=(xy+1)z+(x-1)(xy+1)$

$=(xy+1)(z+x-1)$

이때, $x+y+z=1$에서 $x+z=1-y$

$\therefore$ (주어진 식)$=(xy+1)(1-y-1)$

$=-y(xy+1)$ 답 ⑤

0245

|전략| $x^4+ax^2+b=(x-1)^2Q(x)$로 놓으면 이 식은 x에 대한 항등식이므로 주어진 식에 $x=1$을 두 번 대입하여 상수 a, b의 값을 구한다.

$f(x)=x^4+ax^2+b$라 하면 $f(x)$가 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로

$f(1)=1+a+b=0$

$\therefore b=-a-1$ ······ ㉠

따라서 $f(x)=x^4+ax^2-a-1$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
1 & 1 & 0 & a & 0 & -a-1 \\
 & & 1 & 1 & a+1 & a+1 \\ \hline
1 & 1 & 1 & a+1 & a+1 & 0 \\
 & & 1 & 2 & a+3 & \\ \hline
 & 1 & 2 & a+3 & 2a+4 &
\end{array}$$

$f(x)$가 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로

$2a+4=0$ $\quad\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore b-a=3$ 답 ③

다른 풀이 x^4+ax^2+b가 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로

$x^4+ax^2+b=(x-1)^2Q(x)$ 꼴로 나타낼 수 있다.

조립제법에 의하여

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
1 & 1 & 0 & a & 0 & b \\
 & & 1 & 1 & a+1 & a+1 \\ \hline
1 & 1 & 1 & a+1 & a+1 & a+b+1 \\
 & & 1 & 2 & a+3 & \\ \hline
 & 1 & 2 & a+3 & 2a+4 &
\end{array}$$

이때, 나머지가 모두 0이므로

$a+b+1=0,\ 2a+4=0$ $\quad\therefore a=-2,\ b=1$

$\therefore b-a=3$

0246

$f(x)=2x^3+5x^2-ax-3$이라 하면 $f(x)$가 $x-1$을 인수로 가지므로

$f(1)=2+5-a-3=0$ $\quad\therefore a=4$

따라서 $f(x)=2x^3+5x^2-4x-3$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrr|r}
1 & 2 & 5 & -4 & -3 \\
 & & 2 & 7 & 3 \\ \hline
 & 2 & 7 & 3 & 0
\end{array}$$

$f(x)=(x-1)(2x^2+7x+3)$

$=(x-1)(x+3)(2x+1)$

따라서 $b=1$이므로 $a+b=5$ 답 ③

다른 풀이 $2x^3+5x^2-ax-3=(x+3)(x-1)(2x+b)$에서

$2x^3+5x^2-ax-3=(x^2+2x-3)(2x+b)$

$=2x^3+(4+b)x^2-(6-2b)x-3b$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$5=4+b,\ a=6-2b,\ 3=3b$

$\therefore b=1,\ a=4$ $\quad\therefore a+b=5$

0247

$P(x)=x^4-x^3+3x^2+ax+b$라 하면 $P(x)$가 $x+1$, $x-1$을 인수로 가지므로

$P(-1)=1+1+3-a+b=0$

$\therefore -a+b=-5$ ······ ㉠

$P(1)=1-1+3+a+b=0$

$\therefore a+b=-3$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-4$

따라서 $P(x)=x^4-x^3+3x^2+x-4$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
-1 & 1 & -1 & 3 & 1 & -4 \\
 & & -1 & 2 & -5 & 4 \\ \hline
1 & 1 & -2 & 5 & -4 & 0 \\
 & & 1 & -1 & 4 & \\ \hline
 & 1 & -1 & 4 & 0 &
\end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x-1)(x^2-x+4)$

$\therefore f(x)=x^2-x+4$

$\therefore 2a-b+f(1)=2-(-4)+4=10$ 답 10

0248

| 전략 | 주어진 등식의 좌변을 인수분해하여 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

주어진 식의 좌변을 c에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2$

$=-(a+b)c^2+a^3+a^2b+ab^2+b^3$

$=-(a+b)c^2+a^2(a+b)+b^2(a+b)$

$=(a+b)(a^2+b^2-c^2)$

즉, $(a+b)(a^2+b^2-c^2)=0$에서

$a>0, b>0$이므로 $a+b\neq0$

$\therefore a^2+b^2-c^2=0 \qquad \therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

답 ⑤

0249

주어진 식의 좌변을 인수분해하면

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=(a+b+c)\cdot\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$ … ❶

즉, $(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$에서

$a>0, b>0, c>0$이므로 $a+b+c\neq0$

$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\therefore a=b=c$ … ❷

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 정삼각형이다. … ❸

답 정삼각형

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변을 인수분해 할 수 있다.	40 %
❷ a, b, c 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 삼각형의 모양을 판단할 수 있다.	20 %

0250

주어진 식의 좌변을 a에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$a^2(b-c)-b^2(a+c)-c^2(a-b)+2abc$

$=(b-c)a^2-(b^2+c^2-2bc)a-b^2c+bc^2$

$=(b-c)a^2-(b-c)^2a-bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b-c)a-bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a+c)$

즉, $(b-c)(a-b)(a+c)=0$에서

$a>0, c>0$이므로 $a+c\neq0$

$\therefore b-c=0$ 또는 $a-b=0$

$\therefore a=b$ 또는 $b=c$

따라서 보기 중 가능한 삼각형은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0251

| 전략 | $a^3+b^3+c^3=3abc$에서 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$이므로 이 등식의 좌변을 인수분해한다.

$a^3+b^3+c^3=3abc$에서 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$이므로

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

그런데 $a>0, b>0, c>0$에서 $a+b+c\neq0$이므로

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \qquad \therefore a=b=c$

$\therefore \frac{b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{3a}{c}=1+2+3=6$

답 6

0252

$a^3+b^3+a^2b+ab^2=(a^3+a^2b)+(b^3+ab^2)$

$=a^2(a+b)+b^2(a+b)$

$=(a+b)(a^2+b^2)$

$=(a+b)\{(a+b)^2-2ab\}$

$=3(3^2-2\cdot2)=15$

답 15

0253

$a-b=3$ …… ㉠, $b-c=1$ …… ㉡

㉠+㉡에서 $a-c=4$, 즉 $c-a=-4$

주어진 식을 a에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$ab^2-a^2b+bc^2-b^2c+ca^2-c^2a$

$=(-b+c)a^2+(b^2-c^2)a-b^2c+bc^2$

$=(-b+c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b-c)$

$=(b-c)\{-a^2+(b+c)a-bc\}$

$=-(b-c)(a-b)(a-c)$

$=(a-b)(b-c)(c-a)$

$=3\cdot1\cdot(-4)=-12$

답 ②

0254

$a+b+c=0$에서 $b+c=-a, c+a=-b, a+b=-c$이므로

$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)=-a^3-b^3-c^3$

한편, $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

에서 $a+b+c=0$이므로 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$\therefore a^3+b^3+c^3=3abc=3\cdot(-3)=-9$

$\therefore$ (주어진 식)$=-(a^3+b^3+c^3)=9$

답 ⑤

0255

| 전략 | 주어진 식을 적당히 변형하여 인수분해 공식 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용한다.

$3^2-5^2+7^2-9^2+11^2-13^2+15^2-17^2$

$=(3+5)(3-5)+(7+9)(7-9)+(11+13)(11-13)$
$\quad+(15+17)(15-17)$

$=(-2)\cdot8+(-2)\cdot16+(-2)\cdot24+(-2)\cdot32$

$=-2(8+16+24+32)$

$=-2\cdot80=-160$

답 -160

3 인수분해

0256

$9999=x$로 놓으면

$$\frac{9999^3+1}{9998\times9999+1}=\frac{x^3+1}{(x-1)x+1}$$
$$=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$
$$=x+1$$
$$=9999+1=10000$$

답 ④

0257

$50=n$으로 놓으면

$$50\times51\times52\times53+1=n(n+1)(n+2)(n+3)+1$$
$$=\{n(n+3)\}\{(n+1)(n+2)\}+1$$
$$=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$$
$$=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1$$
$$=(n^2+3n+1)^2$$
$$=(50^2+3\cdot50+1)^2=2651^2$$

$\therefore \sqrt{50\times51\times52\times53+1}=2651$

답 ④

0258

$f(x)=x^4+6x^3-24x^2+26x-9$에 대하여 $f(1)=0$, $f(-9)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & 6 & -24 & 26 & -9 \\
 & & 1 & 7 & -17 & 9 \\
\hline
-9 & 1 & 7 & -17 & 9 & \boxed{0} \\
 & & -9 & 18 & -9 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$$f(x)=(x-1)(x+9)(x^2-2x+1)$$
$$=(x-1)^3(x+9)$$

$\therefore f(1.1)=(1.1-1)^3(1.1+9)$

$=0.1^3\times10.1=0.0101$

답 ⑤

STEP 3 내신 마스터

0259

유형 01 공식을 이용한 인수분해

|전략| 공통인수를 묶어낸 후 인수분해 공식을 적용한다.

① $(x-y)x^2-(x-y)y^2=(x-y)(x^2-y^2)$

$=(x-y)(x+y)(x-y)$

$=(x+y)(x-y)^2$

③ $27x^3-y^3=(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)$

따라서 인수분해가 잘못된 것은 ③이다.

답 ③

0260

유형 01 공식을 이용한 인수분해

|전략| 인수분해 공식 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$을 이용한다.

$(x-2y)^3-125y^3$

$=(x-2y)^3-(5y)^3$

$=(x-2y-5y)\{(x-2y)^2+(x-2y)\cdot5y+(5y)^2\}$

$=(x-7y)(x^2-4xy+4y^2+5xy-10y^2+25y^2)$

$=(x-7y)(x^2+xy+19y^2)$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0261

유형 02 공통부분이 있는 식의 인수분해

|전략| 공통부분이 생기도록 적당히 두 일차식을 묶은 후 공통부분을 치환하여 인수분해한다.

$(x^2+4x+3)(x^2+12x+35)+15$

$=(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

$=\{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\}+15$

$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$

$x^2+8x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t+7)(t+15)+15$

$=t^2+22t+120$

$=(t+12)(t+10)$

$=(x^2+8x+12)(x^2+8x+10)$

$=(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$

따라서 $a=6$, $b=8$, $c=10$이므로

$a+b+c=24$

답 ④

0262

유형 03 복이차식 (x^4+ax^2+b 꼴)의 인수분해

|전략| 주어진 식에 $4x^2y^2$을 더하고 빼서 A^2-B^2 꼴로 변형하여 인수분해한다.

$x^4+4y^4=x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2$

$=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2$

$=(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$

따라서 $a=2$, $b=2$ 또는 $a=-2$, $b=2$이므로

$a^2+b^2=4+4=8$

답 ②

0263

유형 03 복이차식 (x^4+ax^2+b 꼴)의 인수분해

|전략| x^4+5x^2+9는 x^2항을 적당히 분리하여 A^2-B^2 꼴로 변형한 후 인수분해하고, $x^4+2x^3+x^2-9$는 공통인수 x^2을 묶어 인수분해 공식 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용한다.

$x^4+5x^2+9=x^4+6x^2+9-x^2$

$=(x^2+3)^2-x^2$

$=(x^2+x+3)(x^2-x+3)$

$$x^4+2x^3+x^2-9=x^2(x^2+2x+1)-9$$
$$=x^2(x+1)^2-3^2$$
$$=\{x(x+1)+3\}\{x(x+1)-3\}$$
$$=(x^2+x+3)(x^2+x-3)$$

따라서 두 다항식의 공통인 인수는 x^2+x+3이다. 답 ③

0264

유형 04 여러 개의 문자가 포함된 식의 인수분해

| 전략 | 주어진 식을 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$$2x^2+xy-y^2+2x-7y-12$$
$$=2x^2+(y+2)x-(y^2+7y+12)$$
$$=2x^2+(y+2)x-(y+3)(y+4)$$
$$=\{x+(y+3)\}\{2x-(y+4)\}$$
$$=(x+y+3)(2x-y-4)$$

따라서 두 인수의 합은

$(x+y+3)+(2x-y-4)=3x-1$ 답 ①

0265

유형 05 인수정리와 조립제법을 이용한 인수분해

| 전략 | 식의 값을 0으로 만드는 x의 값을 찾아 인수정리와 조립제법을 이용하여 주어진 식을 인수분해한다.

$f(x)=2x^4+5x^3-8x^2-17x-6$이라 하면 $f(-1)=0$, $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 2 & 5 & -8 & -17 & -6 \\ & & -2 & -3 & 11 & 6 \\ \hline 2 & 2 & 3 & -11 & -6 & \boxed{0} \\ & & 4 & 14 & 6 & \\ \hline & 2 & 7 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$f(x)=(x+1)(x-2)(2x^2+7x+3)$$
$$=(x+1)(x-2)(2x+1)(x+3)$$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ②이다. 답 ②

0266

유형 05 인수정리와 조립제법을 이용한 인수분해

| 전략 | (직육면체의 부피)=(밑넓이)×(높이)이므로 인수정리와 조립제법을 이용하여 부피를 인수분해하고, 밑면의 한 변의 길이와 높이를 구한다.

$f(x)=x^3+5x^2+7x+3$이라 하면 $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 5 & 7 & 3 \\ & & -1 & -4 & -3 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$$f(x)=(x+1)(x^2+4x+3)$$
$$=(x+1)(x+1)(x+3)$$
$$=(x+1)^2(x+3)$$

이때, 주어진 직육면체의 밑면의 한 변의 길이는 $x+1$, 높이는 $x+3$이므로 겉넓이는

$$2(x+1)^2+4(x+1)(x+3)$$
$$=2(x+1)\{(x+1)+2(x+3)\}$$
$$=2(x+1)(3x+7)$$

따라서 $a=1$, $b=3$, $c=7$이므로

$a+b+c=11$ 답 ④

Lecture

(1) (직육면체의 겉넓이)$=2\times$(밑넓이)$+$(옆넓이)
(2) (직육면체의 부피)$=$(밑넓이)$\times$(높이)

0267

유형 06 $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$ 꼴의 인수분해

| 전략 | 주어진 식을 x^2으로 묶어낸 후 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$임을 이용한다.

$$x^4-x^3-4x^2+x+1$$
$$=x^2\left(x^2-x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}-\left(x-\frac{1}{x}\right)-4\right\}$$
$$=x^2\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)-2\right\}$$
$$=x^2\left(x-\frac{1}{x}+1\right)\left(x-\frac{1}{x}-2\right)$$
$$=(x^2+x-1)(x^2-2x-1)$$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ①이다. 답 ①

0268

유형 07 순환하는 꼴의 다항식의 인수분해

| 전략 | 주어진 식을 전개한 후 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$$
$$=(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)+(y^3-3y^2z+3yz^2-z^3)$$
$$+(z^3-3z^2x+3zx^2-x^3)$$
$$=-3x^2y+3xy^2-3y^2z+3yz^2-3z^2x+3zx^2$$
$$=-3(y-z)x^2+3(y^2-z^2)x-3y^2z+3yz^2$$
$$=-3(y-z)x^2+3(y+z)(y-z)x-3yz(y-z)$$
$$=-3(y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$$
$$=-3(y-z)(x-y)(x-z)$$
$$=3(x-y)(y-z)(z-x)$$

답 ②

다른 풀이 $x-y=a$, $y-z=b$, $z-x=c$로 놓으면

$a+b+c=0$

$$\therefore (x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$$
$$=a^3+b^3+c^3$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$$
$$=3abc\ (\because a+b+c=0)$$
$$=3(x-y)(y-z)(z-x)$$

0269

유형 **08** 인수분해를 이용한 식의 변형 – 조건식이 주어진 경우

|전략| 조건식을 변형하여 주어진 식에 대입한 후 인수분해한다.

$x-y+3z=0$에서 $y=x+3z$

$\therefore x^2+y^2+3zx=x^2+(x+3z)^2+3zx$

$=x(x+3z)+(x+3z)^2$

$=(x+3z)(x+x+3z)$

$=(x+3z)(2x+3z)$

$=y(2x+3z)$ ($\because y=x+3z$)

답 ③

0270

유형 **09** 인수정리와 인수분해를 이용하여 미정계수 구하기

|전략| $x^3-x^2+2f(x)=(x-1)(x+\alpha)(x+\beta)$로 놓고 이 식이 x에 대한 항등식임을 이용한다.

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^3-x^2+2f(x)=x^3-x^2+2(ax+b)$

$=x^3-x^2+2ax+2b$

이 식이 $x-1$을 인수로 가지므로 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -1 & 2a & 2b \\ & & 1 & 0 & 2a \\ \hline & 1 & 0 & 2a & \boxed{2a+2b} \end{array}$$

이때, 나머지가 0이므로

$2a+2b=0 \quad \therefore a+b=0$ …… ㉠

$x^3-x^2+2ax+2b=(x-1)(x^2+2a)$

따라서 $(x+\alpha)(x+\beta)=x^2+2a$이므로

$x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=x^2+2a$에서 $\alpha+\beta=0$, $\alpha\beta=2a$

그런데 $\alpha\beta=-2$이므로 $a=-1$

이 값을 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore f(x)=-x+1$

답 ②

다른 풀이

$x^3-x^2+2f(x)=(x-1)(x+\alpha)(x+\beta)$

$=(x-1)\{x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$

$=x^3+(\alpha+\beta-1)x^2-(\alpha+\beta-\alpha\beta)x-\alpha\beta$

즉, $\alpha+\beta-1=-1$에서 $\alpha+\beta=0$이고, $\alpha\beta=-2$이므로

$2f(x)=-(\alpha+\beta-\alpha\beta)x-\alpha\beta$

$=-2x+2$

$\therefore f(x)=-x+1$

0271

유형 **11** 인수분해를 이용한 식의 값 구하기

|전략| 먼저 인수분해 공식 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$를 이용하여 $ab+bc+ca$의 값을 구한다.

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$12=2^2-2(ab+bc+ca) \quad \therefore ab+bc+ca=-4$

$\therefore \dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}-3=\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{abc}$

$=\dfrac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{abc}$

$=\dfrac{2\{12-(-4)\}}{4}=8$

답 ②

0272

유형 **12** 인수분해를 이용한 수의 계산

|전략| 29를 문자로 치환한 후 인수분해 공식을 이용한다.

$29=x$로 놓으면

$\dfrac{29^4+29^2+1}{29^2+29+1}=\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}=\dfrac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{x^2+x+1}$

$=x^2-x+1=x^2+2x+1-3x$

$=(x+1)^2-3x$

$=(29+1)^2-3\cdot29$

$=30^2-87$

$\therefore A=87$

답 ④

0273

유형 **12** 인수분해를 이용한 수의 계산

|전략| 인수분해 공식을 이용하여 주어진 식을 인수분해하고, 10과 30 사이의 자연수 중에서 3^6-1의 인수를 찾는다.

$3^6-1=(3^3)^2-1$

$=(3^3+1)(3^3-1)$

$=(3+1)(3^2-3+1)(3-1)(3^2+3+1)$

$=4\times7\times2\times13$

따라서 10과 30 사이에 있는 자연수 중에서 3^6-1을 나누어떨어지도록 하는 자연수는 13, 14, 26, 28의 4개이다.

답 ②

0274

유형 **04** 여러 개의 문자가 포함된 식의 인수분해

|전략| 주어진 식을 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2-2xy+y^2+ax-4y-5$

$=x^2-(2y-a)x+y^2-4y-5$

$=x^2-(2y-a)x+(y+1)(y-5)$ … ❶

주어진 식이 x, y에 대한 일차식의 곱으로 인수분해되려면

$-(y+1)-(y-5)=-2y+a$

$\therefore a=4$ … ❷

답 4

채점 기준	배점
❶ 주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리할 수 있다.	4점
❷ a의 값을 구할 수 있다.	3점

0275

유형 **05** 인수정리와 조리제법을 이용한 인수분해

|전략| 인수정리와 조립제법을 이용하여 주어진 식을 인수분해하고, $f(0)\neq 0$, $g(3)\neq 0$임을 이용하여 이차식 $f(x)$, $g(x)$를 구한다.

$x^4+x^3-8x^2-12x=x(x^3+x^2-8x-12)$

$h(x)=x^3+x^2-8x-12$라 하면 $h(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & -8 & -12 \\ & & -2 & 2 & 12 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$h(x)=(x+2)(x^2-x-6)$

$=(x+2)(x+2)(x-3)$

$=(x+2)^2(x-3)$

$\therefore x^4+x^3-8x^2-12x=x(x+2)^2(x-3)$ … ❶

$f(x)$, $g(x)$는 각각 이차식이고 $f(0)\neq 0$, $g(3)\neq 0$이므로 $f(x)$는 x를 인수로 갖지 않고, $g(x)$는 $x-3$을 인수로 갖지 않는다.

즉, $f(x)=(x+2)(x-3)$, $g(x)=x(x+2)$ … ❷

$\therefore g(1)=3$ … ❸

답 3

채점 기준	배점
❶ 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	3점
❷ $f(x)$, $g(x)$를 구할 수 있다.	2점
❸ $g(1)$의 값을 구할 수 있다.	1점

0276

유형 **11** 인수분해를 이용한 식의 값 구하기

|전략| $x+y$, xy의 값을 구하여 주어진 식을 인수분해한 식에 대입한다.

$x=1+\sqrt{3},\ y=1-\sqrt{3}$에서

$x+y=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=2$

$xy=(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=-2$ … ❶

$\therefore x(y^2-2)+y(x^2-2)=xy^2-2x+yx^2-2y$

$=(xy^2+x^2y)-(2x+2y)$

$=xy(x+y)-2(x+y)$

$=(x+y)(xy-2)$ … ❷

$=2(-2-2)=-8$ … ❸

답 -8

채점 기준	배점
❶ $x+y$, xy의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	3점
❸ ❷의 식에 $x+y$, xy의 값을 대입하여 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	2점

0277

유형 **09** 인수정리와 인수분해를 이용하여 미정계수 구하기

|전략| $x^4+ax^3+bx^2+3x-4=(x+1)(x-1)f(x)$는 x에 대한 항등식이므로 주어진 식에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하여 상수 a, b의 값을 구한다.

(1) $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+3x-4$라 하면 $P(x)$가 $x+1$, $x-1$을 각각 인수로 가지므로

$P(-1)=1-a+b-3-4=0$

$\therefore -a+b=6$ …… ㉠

$P(1)=1+a+b+3-4=0$

$\therefore a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=3$

(2) $P(x)=x^4-3x^3+3x^2+3x-4$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -3 & 3 & 3 & -4 \\ & & -1 & 4 & -7 & 4 \\ \hline 1 & 1 & -4 & 7 & -4 & \boxed{0} \\ & & 1 & -3 & 4 & \\ \hline & 1 & -3 & 4 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x-1)(x^2-3x+4)$

$\therefore f(x)=x^2-3x+4$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 상수 a, b의 값을 구할 수 있다.	4점
(2) $f(x)$를 구할 수 있다.	6점

0278

유형 **10** 인수분해를 이용하여 삼각형의 모양 판단하기

|전략| 주어진 등식의 좌변을 인수분해하여 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

(1) 주어진 식의 좌변을 c에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$a^4+a^2c^2+b^2c^2-b^4=(a^2+b^2)c^2+a^4-b^4$

$=(a^2+b^2)c^2+(a^2+b^2)(a^2-b^2)$

$=(a^2+b^2)(c^2+a^2-b^2)$

즉, $(a^2+b^2)(c^2+a^2-b^2)=0$에서

$a>0$, $b>0$이므로 $a^2+b^2\neq 0$

$\therefore c^2+a^2-b^2=0 \qquad \therefore b^2=a^2+c^2$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다.

(2) 빗변의 길이가 b인 직각삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ac$이다.

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 주어진 식의 좌변을 인수분해하여 삼각형의 모양을 판단할 수 있다.	8점
(2) 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.	4점

창의·융합 교과서 속 심화문제

0279

|전략| $x^2+x-n=(x+a)(x-b)$ (a, b는 자연수)를 만족하는 a, b의 값을 구한다.

$f_n(x)=x^2+x-n=(x+a)(x-b)$ (a, b는 자연수)에서
$x^2+x-n=x^2+(a-b)x-ab$
$\therefore a-b=1,\ ab=n$
이때, ab의 값은 1000 이하인 자연수이고, $a-b=1$인 a, b의 값을 구해 보면 다음 표와 같다.

a	2	3	4	$\cdots$	31	32
b	1	2	3	$\cdots$	30	31
ab	2	6	12	$\cdots$	930	992

따라서 1000개의 다항식 중 $(x+a)(x-b)$ 꼴로 인수분해되는 $f_n(x)$의 개수는 31이다. 답 ③

0280

|전략| n^4-6n^2+25의 값이 소수이려면 인수는 1과 자기 자신뿐이어야 한다.

$n^4-6n^2+25=n^4+10n^2+25-16n^2$
$=(n^2+5)^2-(4n)^2$
$=(n^2+4n+5)(n^2-4n+5)$
이것이 소수이므로
$n^2+4n+5=1$ 또는 $n^2-4n+5=1$
이어야 한다. 즉,
$n^2+4n+4=(n+2)^2=0$에서 $n=-2$
$n^2-4n+4=(n-2)^2=0$에서 $n=2$
이때, $n^4-6n^2+25=17$로 소수가 되므로 조건을 만족시킨다.
따라서 구하는 정수 n은 -2, 2의 2개이다. 답 2

0281

|전략| 인수정리와 조립제법을 이용하여 $x^3+(a-1)x^2+(2-a)x-2$를 인수분해하고, 서로 다른 세 일차식의 곱으로 인수분해되도록 하는 상수 a의 값을 구한다.

$f(x)=x^3+(a-1)x^2+(2-a)x-2$라 하면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a-1 & 2-a & -2 \\ & & 1 & a & 2 \\ \hline & 1 & a & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2+ax+2)$
이때, $x^2+ax+2=(x+p)(x+q)$ (p, q는 정수)라 하면
$x^2+ax+2=x^2+(p+q)x+pq$에서
$a=p+q$ $\cdots\cdots$ ㉠, $2=pq$ $\cdots\cdots$ ㉡
그런데 ㉡에서 $p=-1$, $q=-2$ 또는 $p=-2$, $q=-1$일 때는 $f(x)=(x-1)^2(x-2)$가 되어 $f(x)$가 서로 다른 세 일차식의 곱으로 인수분해된다는 조건을 만족하지 않는다.
따라서 $p=1$, $q=2$ 또는 $p=2$, $q=1$이므로 ㉠에서
$a=1+2=3$ 답 3

0282

|전략| 다항식 $f(x)$가 $x-c$로 나누어떨어지면 $f(c)=0$임을 이용하여 주어진 식을 인수분해한 다음 a, b, c 사이의 관계를 조사한다.

$f(x)=x^3-(a+b)x^2-(a^2+b^2)x+a^3+b^3+a^2b+ab^2$이라 하면
다항식 $f(x)$가 $x-c$로 나누어떨어지므로
$f(c)=c^3-(a+b)c^2-(a^2+b^2)c+a^3+b^3+a^2b+ab^2$
$=c^3-(a+b)c^2-(a^2+b^2)c+a^2(a+b)+b^2(a+b)$
$=c^3-(a+b)c^2-(a^2+b^2)c+(a^2+b^2)(a+b)$
$=c^2\{c-(a+b)\}+(a^2+b^2)\{(a+b)-c\}$
$=c^2(c-a-b)-(a^2+b^2)(c-a-b)$
$=(c-a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$
이때, a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $c\neq a+b$
즉, $c^2-a^2-b^2=0$ $\quad\therefore c^2=a^2+b^2$
따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다. 답 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

Lecture

인수정리
다항식 $f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 ⇨ $f(\alpha)=0$

0283

|전략| 주어진 조건을 이용하여 a, b, c, d, e, f 사이의 관계식을 구한다.

여덟 개의 정삼각형 모양의 면에 적힌 수의 합을 구하면
$abc+acd+ade+aeb+fbc+fcd+fde+feb=105$
$a(bc+cd+de+eb)+f(bc+cd+de+eb)=105$
$(a+f)\{b(c+e)+d(c+e)\}=105$
$(a+f)(b+d)(c+e)=105$
이때, 여섯 개의 꼭짓점에 적힌 수는 모두 자연수이고, $105=3\cdot5\cdot7$이므로
$a+b+c+d+e+f=3+5+7=15$ 답 15

0284

|전략| $15=A$로 놓고 A^3+A^2-A+2를 인수분해한다.

$A=15$로 놓으면
$15^3+15^2-15+2=A^3+A^2-A+2$
$f(A)=A^3+A^2-A+2$라 하면 $f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ & & -2 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(A)=(A+2)(A^2-A+1)$ $A=15$를 대입
$=(15+2)(15^2-15+1)$
$=17\times211=a\times b$
이때, a, b는 자연수이고 17과 211은 소수이므로
$a=17$, $b=211$ 또는 $a=211$, $b=17$
$\therefore a+b=228$ 답 228

본책 52~61쪽

4 | 복소수

STEP 1 개념 마스터

0285 답 실수부분 : 0, 허수부분 : 6

0286 답 실수부분 : -3, 허수부분 : $\sqrt{5}$

0287 답 실수부분 : $\frac{7}{2}$, 허수부분 : $-\frac{3}{2}$

0288 답 실수부분 : $2-\sqrt{3}$, 허수부분 : 0

0289 답 ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㅂ

0290

$(x+2y)-4i=-1+2yi$에서

$x+2y=-1,\ 2y=-4$

$\therefore x=3,\ y=-2$ 답 $x=3,\ y=-2$

0291

$(2x-y)+(x+3y)i=4-5i$에서

$2x-y=4,\ x+3y=-5$

$\therefore x=1,\ y=-2$ 답 $x=1,\ y=-2$

0292

$\overline{3+2i}=3-2i$ 답 $3-2i$

0293

$\overline{5}=5$ 답 5

0294

$\overline{-3i}=3i$ 답 $3i$

0295

$\overline{4i-\sqrt{2}}=\overline{-\sqrt{2}+4i}=-\sqrt{2}-4i$ 답 $-4i-\sqrt{2}$

0296

$(5-2i)+(3+4i)=(5+3)+(-2+4)i$

$=8+2i$ 답 $8+2i$

0297

$(2-i)-(-3+4i)=(2+3)+(-1-4)i$

$=5-5i$ 답 $5-5i$

0298

$(3+i)(2-i)=6-3i+2i-i^2=6-i-(-1)$

$=7-i$ 답 $7-i$

0299

$\frac{1+i}{1+3i}=\frac{(1+i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{1-3i+i-3i^2}{1-9i^2}$

$=\frac{4-2i}{10}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$ 답 $\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$

0300

(1) $x^2+y^2=(1+i)^2+(1-i)^2=2i-2i=0$

(2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}=\frac{1-i+1+i}{(1+i)(1-i)}$

$=\frac{2}{1-i^2}=\frac{2}{2}=1$

답 (1) 0 (2) 1

다른 풀이 $x=1+i,\ y=1-i$이므로

$x+y=(1+i)+(1-i)=2,\ xy=(1+i)(1-i)=2$

(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=2^2-2\cdot2=0$

(2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{2}{2}=1$

0301

$i^8=(i^4)^2=1$ 답 1

0302

$(-i)^5=-i^5=-i^4\cdot i=-i$ 답 $-i$

0303

$i^{50}=(i^4)^{12}\cdot i^2=1\cdot(-1)=-1$ 답 -1

0304

$i^{100}+i^{200}=(i^4)^{25}+(i^4)^{50}=1+1=2$ 답 2

0305

$\sqrt{-3}=\sqrt{3}i$ 답 $\sqrt{3}i$

0306

$\sqrt{-16}=\sqrt{16}i=4i$ 답 $4i$

0307

$-\sqrt{-18}=-\sqrt{18}i=-3\sqrt{2}i$ 답 $-3\sqrt{2}i$

0308

$\sqrt{-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}i=\frac{3}{5}i$ 답 $\frac{3}{5}i$

0309

$\pm\sqrt{-2}=\pm\sqrt{2}i$ 답 $\pm\sqrt{2}i$

Lecture

a의 제곱근

실수 a에 대하여 제곱하여 a가 되는 수, 즉 $x^2=a$를 만족시키는 x를 a의 제곱근이라 한다.

0310

$\pm\sqrt{-16}=\pm\sqrt{16}i=\pm 4i$ 답 $\pm 4i$

0311

$\sqrt{-3}\sqrt{-12}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{12}i=\sqrt{36}i^2=-6$ 답 -6

0312

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}i}=\dfrac{\sqrt{2}i}{\sqrt{3}i^2}=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}i$ 답 $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}i$

STEP 2 유형 마스터

0313

① $5-2i$의 실수부분은 5이고, 허수부분은 -2이다.
② 모든 실수는 복소수에 포함되므로 0도 복소수이다.
③ $1+2i$는 순허수가 아니다.
④ $a=2i$, $b=0$이면 $a+bi=2i$는 순허수이다. 답 ⑤
a가 실수라는 조건이 없으므로 허수일 수도 있다.

0314

| 전략 | 허수 중에서 실수부분이 0인 허수가 순허수이다.

허수는 $-i$, $1+3i$, $\sqrt{2}i$, $2-\dfrac{3}{4}i$이고, 이 중 순허수는 $-i$, $\sqrt{2}i$이므로

보기 중 순허수가 아닌 허수는 $1+3i$, $2-\dfrac{3}{4}i$의 2개이다. 답 2

0315

| 전략 | 복소수의 곱셈은 i를 문자처럼 생각하여 전개한 후 $i^2=-1$임을 이용하여 계산하고, 복소수의 나눗셈은 분모, 분자에 분모의 켤레복소수를 곱하여 계산한다.

$(2+3i)(5-i)+\dfrac{2(-3+2i)}{1+i}$

$=10-2i+15i+3+\dfrac{2(-3+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$=13+13i+\dfrac{2(-3+3i+2i+2)}{2}$

$=13+13i-1+5i$

$=12+18i$

따라서 $a=12$, $b=18$이므로

$a+b=30$ 답 30

0316

$(1+2i)(2-\sqrt{3}i)^2(2+\sqrt{3}i)^2$

$=(1+2i)\{(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)\}^2$

$=(1+2i)(4+3)^2$

$=49+98i$

따라서 $a=49$, $b=98$이므로

$a-b=-49$ 답 -49

0317

$\dfrac{2-\sqrt{3}i}{2+\sqrt{3}i}+\dfrac{2+\sqrt{3}i}{2-\sqrt{3}i}=\dfrac{(2-\sqrt{3}i)^2+(2+\sqrt{3}i)^2}{(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)}$

$=\dfrac{4-4\sqrt{3}i-3+4+4\sqrt{3}i-3}{4+3}$

$=\dfrac{2}{7}$ 답 ①

0318

$(2+i)◎(4-i)=(2+i)+(4-i)-2(2+i)(4-i)$

$=6-2(8-2i+4i+1)$

$=6-18-4i$

$=-12-4i$

따라서 구하는 허수부분은 -4이다. 답 ①

0319

| 전략 | $x=a+bi$ (a, b는 실수)가 주어지고 x에 대한 식의 값을 구할 때에는 $x-a=bi$로 변형한 후 양변을 제곱하여 x에 대한 이차방정식을 만든다.

$x=\dfrac{3+i}{2}$에서 $2x-3=i$

양변을 제곱하면 $4x^2-12x+9=-1$

$4x^2-12x=-10$ $\quad\therefore 2x^2-6x=-5$

$\therefore 6x^2-18x+14=3(2x^2-6x)+14$

$=3\cdot(-5)+14=-1$ 답 -1

0320

$\alpha+\beta=(2+i)+(2-i)=4$

$\alpha\beta=(2+i)(2-i)=5$

$\therefore \dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{4^2-2\cdot 5}{5}=\dfrac{6}{5}$ 답 $\dfrac{6}{5}$

다른 풀이

$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{2-i}{2+i}+\dfrac{2+i}{2-i}=\dfrac{(2-i)^2+(2+i)^2}{(2+i)(2-i)}$

$=\dfrac{3-4i+3+4i}{5}=\dfrac{6}{5}$

0321

|전략| 복소수 $a+bi$(a, b는 실수)가 순허수이면 $a=0$, $b\neq0$이다.

$(1+i)x^2+(3-i)x+2(1-i)$

$=x^2+x^2i+3x-xi+2-2i$

$=(x^2+3x+2)+(x^2-x-2)i$

이 복소수가 순허수가 되려면

$x^2+3x+2=0$ ······㉠, $x^2-x-2\neq0$ ······㉡

㉠에서 $(x+1)(x+2)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=-2$

㉡에서 $(x+1)(x-2)\neq0$ $\therefore x\neq-1, x\neq2$

따라서 구하는 x의 값은 $x=-2$

답 -2

0322

$z=i(x-2i)^2=i(x^2-4xi-4)$

$=4x+(x^2-4)i$ ··· ❶

z가 실수가 되려면

$x^2-4=0$, $(x+2)(x-2)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

이때, 음수 x의 값이 a이므로 $a=-2$

또, $x=-2$를 $z=4x+(x^2-4)i$에 대입하면

$z=-8$, 즉 $b=-8$ ··· ❷

$\therefore a-b=-2-(-8)=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ z를 (실수부분)+(허수부분)i로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0323

z^2이 실수가 되려면 z는 실수이거나 순허수이어야 한다.

$z=a(1+i)-3(1-i)=(a-3)+(a+3)i$에서

(i) z가 실수일 때

$a+3=0$ $\therefore a=-3$

(ii) z가 순허수일 때

$a-3=0$이고 $a+3\neq0$ $\therefore a=3$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $-3+3=0$

답 ②

다른 풀이 $z^2=(a-3)^2+2(a-3)(a+3)i-(a+3)^2$

z^2이 실수가 되려면

$2(a-3)(a+3)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=3$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $-3+3=0$

0324

$z=a^2(1-2i)+a(1+i)-(2-i)$

$=a^2-2a^2i+a+ai-2+i$

$=(a^2+a-2)+(-2a^2+a+1)i$

z^2이 음의 실수가 되려면 z는 순허수이어야 하므로

$a^2+a-2=0$ ······㉠, $-2a^2+a+1\neq0$ ······㉡

㉠에서 $(a+2)(a-1)=0$ $\therefore a=-2$ 또는 $a=1$

㉡에서 $(2a+1)(a-1)\neq0$ $\therefore a\neq-\frac{1}{2}, a\neq1$

따라서 구하는 a의 값은 $a=-2$

답 ①

Lecture

「복소수 z에 대하여 z^2이 음의 실수이면 z는 순허수이다.」를 설명하여 보자.

$z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면

$z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$

z^2이 음의 실수가 되려면

$a^2-b^2<0$ ······㉠, $2ab=0$ ······㉡

㉡에서 $a=0$ 또는 $b=0$

이때, $b=0$이면 ㉠에서 $a^2<0$이 되어 성립하지 않는다. ($\because a^2\geq0$)

따라서 $a=0$이고 ㉠에서 $-b^2<0$이므로 $b\neq0$

즉, $a=0$, $b\neq0$이므로 z는 순허수이다.

0325

|전략| $a+bi=c+di$(a, b, c, d는 실수)이면 $a=c$, $b=d$이다.

$(1+2i)x+(2-i)y=-5+10i$에서

$x+2xi+2y-yi=-5+10i$

$(x+2y)+(2x-y)i=-5+10i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+2y=-5$, $2x-y=10$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=-4$

$\therefore x+y=-1$

답 ②

0326

$\frac{x}{1+i}+\frac{y}{1-i}=\frac{x(1-i)+y(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{(x+y)+(-x+y)i}{2}$

즉, $\frac{x+y}{2}+\frac{-x+y}{2}i=3-i$이므로

$(x+y)+(-x+y)i=6-2i$ ··· ❶

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=6$, $-x+y=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $x=4$, $y=2$ ··· ❷

$\therefore xy=8$ ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 좌변을 (실수부분)+(허수부분)i로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ x, y의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ xy의 값을 구할 수 있다.	20 %

0327

$x^2+y^2i+x+yi-2-6i=0$에서

$(x^2+x-2)+(y^2+y-6)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2+x-2=0$, $y^2+y-6=0$

$x^2+x-2=0$에서 $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

$y^2+y-6=0$에서 $(y+3)(y-2)=0$

$\therefore\ y=-3$ 또는 $y=2$

따라서 $x+y$의 값이 될 수 있는 것은

$-2-3=-5,\ -2+2=0,\ 1-3=-2,\ 1+2=3$ 답 ⑤

0328

| 전략 | $z=a+bi$, $\overline{z}=a-bi$(a, b는 실수)로 놓고 주어진 보기의 식을 계산하여 본다.

$z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

ㄱ. $a+bi=-(a-bi)$에서 $2a=0$ $\quad\therefore a=0$

따라서 $z=bi$이므로 z는 순허수이다.

ㄴ. $(a+bi)-(a-bi)=0$에서 $2bi=0$ $\quad\therefore b=0$

따라서 $z=a$이므로 z는 실수이다.

ㄷ. $z=i$이면 $z^2=-1$로 실수이지만 $(z+1)^2=(i+1)^2=2i$이므로 허수이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다. 답 ②

0329

$z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

ㄱ. $(z+1)(\overline{z}+1)=z\overline{z}+z+\overline{z}+1$

$=(a+bi)(a-bi)+a+bi+a-bi+1$

$=a^2+b^2+2a+1$ (실수)

ㄴ. $(z+1)(\overline{z}-1)=z\overline{z}-z+\overline{z}-1$

$=(a+bi)(a-bi)-(a+bi)+a-bi-1$

$=a^2+b^2-1-2bi$

이때, $b\neq0$이면 실수가 아니다.

ㄷ. $(2z+1)(\overline{z}+1)-z=2z\overline{z}+2z+\overline{z}+1-z$

$=2z\overline{z}+z+\overline{z}+1$

$=2(a+bi)(a-bi)+a+bi+a-bi+1$

$=2(a^2+b^2)+2a+1$ (실수)

따라서 항상 실수인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0330

| 전략 | 허수 z에 대하여 복소수 $f(z)$가 실수이면 $f(z)$는 그 켤레복소수 $\overline{\{f(z)\}}$와 같다. 즉, $\overline{\{f(z)\}}=f(z)$이다.

복소수 $\frac{1}{1-z^2}$이 실수이므로

$\frac{1}{1-z^2}=\overline{\left(\frac{1}{1-z^2}\right)},\ \frac{1}{1-z^2}=\frac{1}{\overline{1-z^2}}$

$1-z^2=\overline{1-z^2},\ 1-z^2=1-\overline{z}^2$

$z^2-\overline{z}^2=0$ $\quad\therefore (z-\overline{z})(z+\overline{z})=0$

그런데 z는 허수이므로 $z\neq\overline{z}$

$\therefore z+\overline{z}=0$

이때, $z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$z+\overline{z}=2a=0$ $\quad\therefore a=0$

따라서 z의 실수부분은 0이다. 답 0

0331

| 전략 | 주어진 식을 간단히 정리한 후 α, β의 값을 대입한다.

$\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=\overline{\alpha}(\alpha+\beta)+\overline{\beta}(\alpha+\beta)$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$

이때, $\alpha=-1+2i$, $\beta=2-i$이므로

$\alpha+\beta=1+i$, $\overline{\alpha+\beta}=1-i$

$\therefore$ (주어진 식)$=(1+i)(1-i)=2$ 답 ①

0332

$\overline{z_1}-\overline{z_2}=\overline{z_1-z_2}=3+2i$이므로 $z_1-z_2=3-2i$

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=\overline{z_1z_2}=6+i$이므로 $z_1z_2=6-i$

$\therefore (2z_1+1)(2z_2-1)=4z_1z_2-2(z_1-z_2)-1$

$=4(6-i)-2(3-2i)-1$

$=17$ 답 ②

0333

$z=\frac{\overline{w}+1}{2w-1}=\frac{1-\sqrt{2}i+1}{2(1+\sqrt{2}i)-1}=\frac{2-\sqrt{2}i}{1+2\sqrt{2}i}$

$\therefore z\overline{z}=\frac{2-\sqrt{2}i}{1+2\sqrt{2}i}\cdot\overline{\left(\frac{2-\sqrt{2}i}{1+2\sqrt{2}i}\right)}=\frac{2-\sqrt{2}i}{1+2\sqrt{2}i}\cdot\frac{\overline{2-\sqrt{2}i}}{\overline{1+2\sqrt{2}i}}$

$=\frac{2-\sqrt{2}i}{1+2\sqrt{2}i}\cdot\frac{2+\sqrt{2}i}{1-2\sqrt{2}i}=\frac{4+2}{1+8}=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

다른 풀이 $\overline{z}=\overline{\left(\frac{\overline{w}+1}{2w-1}\right)}=\frac{\overline{\overline{w}+1}}{\overline{2w-1}}=\frac{w+1}{2\overline{w}-1}$에서

$z\overline{z}=\frac{\overline{w}+1}{2w-1}\cdot\frac{w+1}{2\overline{w}-1}=\frac{w\overline{w}+w+\overline{w}+1}{4w\overline{w}-2(w+\overline{w})+1}$

이때, $w+\overline{w}=(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)=2$,

$w\overline{w}=(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=3$이므로

(주어진 식)$=\frac{3+2+1}{4\cdot3-2\cdot2+1}=\frac{2}{3}$

0334

$\alpha\overline{\alpha}=3$, $\beta\overline{\beta}=3$에서 $\alpha=\frac{3}{\overline{\alpha}}$, $\beta=\frac{3}{\overline{\beta}}$

$\alpha+\beta=6i$에서 $\frac{3}{\overline{\alpha}}+\frac{3}{\overline{\beta}}=6i$

$\frac{3(\overline{\alpha}+\overline{\beta})}{\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}}=6i$, $3(\overline{\alpha+\beta})=6i\overline{\alpha\beta}$

$3\cdot\overline{6i}=6i\overline{\alpha\beta}$, $3\cdot(-6i)=6i\overline{\alpha\beta}$

$\overline{\alpha\beta}=-3$ $\quad\therefore \alpha\beta=-3$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{6i}{-3}=-2i$ 답 $-2i$

다른 풀이 $\alpha\overline{\alpha}=3$, $\beta\overline{\beta}=3$에서 $\frac{1}{\alpha}=\frac{\overline{\alpha}}{3}$, $\frac{1}{\beta}=\frac{\overline{\beta}}{3}$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\overline{\alpha}}{3}+\frac{\overline{\beta}}{3}=\frac{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}{3}=\frac{\overline{\alpha+\beta}}{3}$

$=\frac{\overline{6i}}{3}=\frac{-6i}{3}=-2i$

0335

|전략| $z=a+bi$(a, b는 실수)로 놓고 주어진 식에 대입한 후 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

$z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$(1+2i)z+3\overline{z}i=6i+2$에서

$(1+2i)(a+bi)+3(a-bi)i=6i+2$

$a+bi+2ai-2b+3ai+3b=2+6i$

$(a+b)+(5a+b)i=2+6i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=2$, $5a+b=6$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

$\therefore z=1+i$ 답 ④

0336

$z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=8$ $\quad\therefore a=4$

$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=16+b^2=16$

$b^2=0$ $\quad\therefore b=0$

따라서 $z=4$이므로

$\dfrac{z}{1-i}=\dfrac{4(1+i)}{(1-i)(1+i)}=2+2i$ 답 ⑤

0337

$z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면

$z+zi=(a+bi)+(a+bi)i=a+bi+ai-b$

$\quad=(a-b)+(a+b)i$

이므로

$\overline{z+zi}=(a-b)-(a+b)i=1-i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a-b=1$, $a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=0$

따라서 $z=1$이므로 $z+\dfrac{1}{z}=1+1=2$ 답 2

0338

$z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$(2+i)z+(3-2i)\overline{z}=2-2i$에서

$(2+i)(a+bi)+(3-2i)(a-bi)=2-2i$

$2a+2bi+ai-b+3a-3bi-2ai-2b=2-2i$

$(5a-3b)-(a+b)i=2-2i$ … ❶

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$5a-3b=2$, $a+b=2$

두 식을 연립하면 풀면 $a=1$, $b=1$ … ❷

즉, $z=1+i$이므로

$z^2=(1+i)^2=1+2i-1=2i$

$z^4=z^2\cdot z^2=2i\cdot 2i=-4$

$z^8=z^4\cdot z^4=(-4)\cdot(-4)=16$

따라서 z^n이 양수가 되는 자연수 n의 최솟값은 8이다. … ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ $z=a+bi$로 놓고 주어진 등식에 대입하여 식을 정리할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ z^n이 양수가 되는 자연수 n의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

0339

|전략| 음이 아닌 정수 n에 대하여 $i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$, $i^{4n+4}=1$임을 이용한다.

$1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{3050}$

$=(1+i+i^2+i^3)+(i^4+i^5+i^6+i^7)+\cdots+i^{3048}+i^{3049}+i^{3050}$

$=(1+i-1-i)+(1+i-1-i)+\cdots+1+i-1$

$=i$ 답 i

0340

$\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\dfrac{1}{i^4}+\cdots+\dfrac{1}{i^{102}}$

$=\left(\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\dfrac{1}{i^4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{i^{97}}+\dfrac{1}{i^{98}}+\dfrac{1}{i^{99}}+\dfrac{1}{i^{100}}\right)$

$\quad+\dfrac{1}{i^{101}}+\dfrac{1}{i^{102}}$

$=\left(\dfrac{1}{i}-1-\dfrac{1}{i}+1\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{i}-1-\dfrac{1}{i}+1\right)+\dfrac{1}{i}-1$

$=\dfrac{1}{i}-1=-1-i$

따라서 $a=-1$, $b=-1$이므로

$a+b=-2$ 답 -2

0341

|전략| $\dfrac{1+i}{1-i}=i$, $\dfrac{1-i}{1+i}=-i$임을 이용한다.

$\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}=i$

$\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$

$\therefore \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{1000}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{1010}=i^{1000}+(-i)^{1010}$

$\quad=(i^4)^{250}+\{(-i)^4\}^{252}\cdot(-i)^2$

$\quad=1+i^2$

$\quad=1+(-1)=0$ 답 ④

0342

$(1-i)^{300}=\{(1-i)^2\}^{150}=(-2i)^{150}$
$\qquad\qquad=(-2)^{150}\cdot i^{4\cdot37+2}=-2^{150}$

$(1+i)^{300}=\{(1+i)^2\}^{150}=(2i)^{150}$
$\qquad\qquad=2^{150}\cdot i^{4\cdot37+2}=-2^{150}$

$\therefore (1-i)^{300}-(1+i)^{300}=-2^{150}-(-2^{150})=0$

답 0

0343

$z^2=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2i}{2}=i$이므로 $z^4=-1$

$\therefore 1+z+z^2+\cdots+z^8$
$=(1+z+z^2+z^3)+z^4(1+z+z^2+z^3)+z^8$
$=(1+z+i+zi)-(1+z+i+zi)+z^8$
$=z^8=(z^2)^4=i^4$
$=1$

답 1

다른 풀이 $z^2=i$이므로

$1+z^2+z^4+z^6=1+i-1-i=0$

$\therefore 1+z+z^2+\cdots+z^8$
$=(1+z^2+z^4+z^6)+z(1+z^2+z^4+z^6)+z^8$
$=z^8=1$

0344

| 전략 | $\frac{1-i}{1+i}=-i$, $\frac{1+i}{1-i}=i$ 임을 이용하여 $f(n)$을 간단히 한 후 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$의 값을 구한다.

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$\therefore f(n)=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{4n}-\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n}$
$\qquad=(-i)^{4n}-i^{2n}=1-(-1)^n$

즉, n이 짝수일 때 $f(n)=0$이고, n이 홀수일 때 $f(n)=2$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$
$=2+0+2+\cdots+0$
$=2\cdot50=100$

답 100

0345

| 전략 | $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i\,(a>0)$임을 이용하여 음수의 제곱근을 허수단위 i를 사용하여 나타낸다.

① $\sqrt{-2}\sqrt{-5}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{5}i=\sqrt{10}i^2=-\sqrt{10}$

② $\sqrt{-5}\sqrt{20}=\sqrt{5}i\cdot2\sqrt{5}=10i$

③ $(-\sqrt{-2})^2=(\sqrt{-2})^2=\sqrt{-2}\sqrt{-2}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{2}i=-2$

④ $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}i}=\frac{2}{i}=-2i$

⑤ $\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}i}{\sqrt{2}}=2i$

답 ③

0346

$\sqrt{-3}\sqrt{12}+\sqrt{-3}\sqrt{-12}+\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{12}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-12}}$

$=\sqrt{3}i\cdot2\sqrt{3}+\sqrt{3}i\cdot2\sqrt{3}i+\frac{\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}i}$

$=6i-6+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}i$

$=-6+6i$ … ❶

따라서 $-6+6i=a+bi$이므로

$a=-6,\ b=6$ … ❷

$\therefore a+b=0$ … ❸

답 0

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	60 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0347

| 전략 | 음수의 제곱근의 성질을 이용한다.

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이므로 $a>0,\ b<0$

① $\sqrt{ab^2}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b^2}=-b\sqrt{a}$

② $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ $\quad\sqrt{b^2}=|b|=-b$

③ $-a<0,\ -b>0$이므로 $\sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{(-a)\cdot(-b)}=\sqrt{ab}$

④ $ab<0$이므로 $|ab|=-ab$

⑤ $a-b>0$이므로 $|a-b|=a-b$

답 ③

0348

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이므로 $a>0,\ b<0$

$\therefore \sqrt{(a-b)^2}+|a|-\sqrt{b^2}=|a-b|+|a|-|b|$
$\qquad=a-b+a-(-b)$
$\qquad=2a$

답 ③

0349

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 $a<0,\ b<0$

ㄱ. $a+b<0$

ㄴ. $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{b}{a}}$

ㄷ. $\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}=|a|\cdot|b|=(-a)\cdot(-b)=ab$

ㄹ. $a+b<0$이므로 $|a+b|=-a-b$
$\quad|a|+|b|=-a-b$
$\quad\therefore |a+b|=|a|+|b|$

ㅁ. $-a>0,\ b<0$이므로 $\sqrt{-a}\sqrt{b}=\sqrt{-ab}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ의 2개이다.

답 ②

STEP 3 내신 마스터

0350

유형 02 복소수의 사칙연산

|전략| 복소수의 나눗셈은 분모, 분자에 분모의 켤레복소수를 곱하여 계산한다.

$3-2i+\dfrac{1-2i}{1-i}+3i+\dfrac{-1+2i}{1+i}$

$=3-2i+\dfrac{(1-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}+3i+\dfrac{(-1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$=3-2i+\dfrac{3-i}{2}+3i+\dfrac{1+3i}{2}$

$=5+2i$

답 ⑤

0351

유형 02 복소수의 사칙연산

|전략| 규칙을 찾아 주어진 등식을 간단히 한다.

$f(1,\ 2)=\dfrac{1-2i}{1+2i},\ f(2,\ 4)=\dfrac{2-4i}{2+4i}=\dfrac{1-2i}{1+2i},\ \cdots,$

$f(5,\ 10)=\dfrac{5-10i}{5+10i}=\dfrac{1-2i}{1+2i}$

이때, $\dfrac{1-2i}{1+2i}=\dfrac{(1-2i)^2}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{-3-4i}{5}$이므로

(주어진 식)$=5\cdot\dfrac{-3-4i}{5}=-3-4i$

답 ①

다른 풀이 $f(a,\ b)=\dfrac{a-bi}{a+bi}=\dfrac{(a-bi)^2}{(a+bi)(a-bi)}$

$=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-\dfrac{2ab}{a^2+b^2}i$

이때, $b=2a$이면

$f(a,\ 2a)=\dfrac{a^2-(2a)^2}{a^2+(2a)^2}-\dfrac{4a^2}{a^2+(2a)^2}i=\dfrac{-3-4i}{5}\ (\because a\neq0)$

$\therefore f(1,\ 2)=f(2,\ 4)=\cdots=f(5,\ 10)=\dfrac{-3-4i}{5}$

$\therefore$ (주어진 식)$=5\cdot\dfrac{-3-4i}{5}=-3-4i$

0352

유형 03 복소수가 주어질 때의 식의 값

|전략| $x,\ y$가 서로 켤레복소수이므로 $x+y,\ xy$의 값을 이용하여 식의 값을 구한다.

$x+y=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$

$xy=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{4}{4}=1$

$\therefore x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy$

$=1^2-3\cdot1=-2$

답 ②

다른 풀이

$x^2-xy+y^2=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}+\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2$

$=\dfrac{-2+2\sqrt{3}i}{4}-\dfrac{4}{4}+\dfrac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=-2$

0353

유형 04 복소수가 실수 또는 순허수가 될 조건

|전략| 복소수 z에 대하여 z^2이 양의 실수이면 z는 0이 아닌 실수이어야 한다.

$z=(a+2i)(1-2i)=a-2ai+2i+4$

$=(a+4)-2(a-1)i$

z^2이 양의 실수가 되려면 z는 0이 아닌 실수이어야 하므로

$a+4\neq0,\ a-1=0$

$\therefore a=1$

답 ⑤

0354

유형 05 복소수가 서로 같을 조건

|전략| 좌변을 정리하여 $a+bi$ 꼴로 나타낸 후 $a+bi=c+di\,(a,\ b,\ c,\ d$는 실수)이면 $a=c,\ b=d$임을 이용한다.

$(x+i)(2i-y)+(2y-x)i=2+4i$에서

$2xi-xy-2-yi+2yi-xi=2+4i$

$-xy-2+xi+yi=2+4i$

$(-xy-2)+(x+y)i=2+4i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$-xy-2=2,\ x+y=4$

$\therefore xy=-4,\ x+y=4$

$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{4}{-4}=-1$

답 ②

0355

유형 06 켤레복소수의 성질

|전략| $\alpha=a+bi\,(a,\ b$는 실수)로 놓고 복소수의 연산과 켤레복소수의 성질을 이용한다.

ㄱ. $\alpha=i$이면 $\alpha-\overline{\alpha}=i-(-i)=2i$이므로 허수이다.

ㄴ. $\alpha=a+bi\,(a,\ b$는 실수)라 하면 $\overline{\alpha}=a-bi$이므로

$\alpha\overline{\alpha}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=0$

따라서 $a=b=0$이므로 $\alpha=0$

ㄷ. $\alpha=0$이면 $\alpha^2-\overline{\alpha}^2=0$이므로 실수이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

0356

유형 07 켤레복소수의 성질을 이용한 연산

|전략| 주어진 식을 간단히 정리한 후 $\alpha+\beta$와 $\overline{\alpha+\beta}$의 값을 대입한다.

$\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=\overline{\alpha}(\alpha+\beta)+\overline{\beta}(\alpha+\beta)$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$

$=(3+\sqrt{5}i)(3-\sqrt{5}i)$

$=14$

답 ③

0357

유형 04 복소수가 실수 또는 순허수가 될 조건
+ 08 $z=a+bi$로 놓고 조건을 만족시키는 복소수 z 구하기

| 전략 | $z=a+bi$(a, b는 실수, $b\neq 0$)로 놓고 $\frac{z}{2}+\frac{2}{z}$에 대입한 식이 실수이려면 허수부분이 0이어야 한다.

$z=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq 0$)라 하면

$$\begin{aligned}\frac{z}{2}+\frac{2}{z}&=\frac{a+bi}{2}+\frac{2}{a+bi}\\&=\frac{a+bi}{2}+\frac{2(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}\\&=\frac{a+bi}{2}+\frac{2a-2bi}{a^2+b^2}\\&=\left(\frac{a}{2}+\frac{2a}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{b}{2}-\frac{2b}{a^2+b^2}\right)i\end{aligned}$$

이때, $\frac{z}{2}+\frac{2}{z}$가 실수이려면

$\frac{b}{2}-\frac{2b}{a^2+b^2}=0 \quad \therefore a^2+b^2=4$

$\therefore z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=4$

답 ④

0358

유형 09 i의 거듭제곱

| 전략 | 음이 아닌 정수 n에 대하여 $i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$, $i^{4n+4}=1$임을 이용하여 식을 정리한 후 네 항씩 묶어 계산한다.

$i+2i^2+3i^3+\cdots+49i^{49}+50i^{50}$

$=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)+\cdots+49i-50$

$=(2-2i)+(2-2i)+\cdots+49i-50$

$=12(2-2i)+49i-50$

$=-26+25i$

따라서 $a=-26$, $b=25$이므로

$a+b=-1$

답 ②

0359

유형 10 복소수의 거듭제곱

| 전략 | $\frac{1+i}{1-i}=i$, $\frac{1-i}{1+i}=-i$임을 이용한다.

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

$$\begin{aligned}\therefore f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)+f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)&=f(i)+f(-i)\\&=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{130}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{130}\\&=(-i)^{130}+i^{130}\\&=\{(-i)^4\}^{32}\cdot(-i)^2+(i^4)^{32}\cdot i^2\\&=-1-1=-2\end{aligned}$$

답 ①

0360

유형 11 음수의 제곱근의 계산

| 전략 | $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$ $(a>0)$임을 이용하여 음수의 제곱근을 허수단위 i를 사용하여 나타낸다.

$0<x<y$에서 $x-y<0$, $y-x>0$이므로

$\sqrt{x^2}+\sqrt{-x}\sqrt{-x}+\frac{\sqrt{-4y}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y-x}}{\sqrt{x-y}}$

$=x+\sqrt{x}i\sqrt{x}i+\frac{2\sqrt{y}i}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y-x}}{\sqrt{y-x}i}$

$=x-x+2i+\frac{1}{i}$

$=2i-i=i$

답 ④

0361

유형 08 $z=a+bi$로 놓고 조건을 만족시키는 복소수 z 구하기

| 전략 | $z=a+bi$(a, b는 실수)로 놓고 주어진 식에 대입한 후 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$(2+i)z+(1-i)\bar{z}=1+4i$에서

$(2+i)(a+bi)+(1-i)(a-bi)=1+4i$

$2a+2bi+ai-b+a-bi-ai-b=1+4i$

$(3a-2b)+bi=1+4i$ ··· ❶

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3a-2b=1$, $b=4$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=4$ ··· ❷

$\therefore z\bar{z}=(3+4i)(3-4i)=25$ ··· ❸

답 25

채점 기준	배점
❶ $z=a+bi$로 놓고 주어진 등식에 대입하여 식을 정리할 수 있다.	3점
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $z\bar{z}$의 값을 구할 수 있다.	1점

0362

유형 10 복소수의 거듭제곱

| 전략 | $\frac{1+i}{1-i}=i$임을 이용하여 $f(n+k)=f(n)$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값을 구한다.

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$이므로

$f(n)=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n=i^n$ ··· ❶

$f(n+k)=f(n)$에서 $i^{n+k}=i^n \quad \therefore i^k=1$

이것을 만족시키는 k의 값은 4의 배수이므로 자연수 k의 최솟값은 4이다. ··· ❷

답 4

채점 기준	배점
❶ $f(n)$을 간단히 할 수 있다.	3점
❷ $f(n+k)=f(n)$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	4점

0363

유형 **12 음수의 제곱근의 성질**

|전략| 음수의 제곱근의 성질을 이용하여 a, b, c의 부호를 결정한다.

(1) $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서 $a<0, b<0$

$\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{c}{b}}$에서 $b<0, c>0$

$\therefore a<0, b<0, c>0$

(2) $\sqrt{a^2}+|b|-\sqrt{(a+b-c)^2}=|a|+|b|-\underline{|a+b-c|}$

$=-a-b+(a+b-c)$

$=-c$

$a<0, b<0, c>0$에서
$a+b<0, -c<0$이므로
$a+b-c<0$
$\therefore |a+b-c|=-(a+b-c)$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) a, b, c의 부호를 결정할 수 있다.	4점
(2) 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	6점

창의·융합 교과서 속 심화문제

0364

|전략| $z=a+bi$(a, b는 실수)가 주어지고 z에 대한 식의 값을 구할 때는 $z-a=bi$ 꼴로 변형하여 양변을 제곱한다.

$z^2=-3+2i$에서 $z^2+3=2i$

양변을 제곱하면 $z^4+6z^2+9=-4$

$\therefore z^4+6z^2+13=0$

이 식의 양변을 z로 나누면 $z^3+6z+\dfrac{13}{z}=0$

$\therefore z^4+z^3+2z^2+6z+\dfrac{13}{z}=z^4+2z^2+\left(z^3+6z+\dfrac{13}{z}\right)$

$=(-6z^2-13)+2z^2$

$=-4z^2-13$

$=-4(-3+2i)-13$

$=-1-8i$ 답 $-1-8i$

0365

|전략| z_1+z_2, z_1z_2가 모두 실수이므로 z_1+z_2, z_1z_2의 허수부분이 0임을 이용한다.

$z_1=a+bi$, $z_2=c+di$(a, b, c, d는 실수)라 하면 두 복소수 z_1, z_2는 실수가 아니므로

$b\neq0, d\neq0$

$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$에서 z_1+z_2는 실수이므로

$b+d=0 \quad \therefore b=-d$ …… ㉠

$z_1z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i$에서 z_1z_2는 실수이므로

$ad+bc=0$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$ad-cd=0,\ d(a-c)=0$

$a-c=0\ (\because d\neq0) \quad \therefore a=c$

따라서 $z_1=a+bi$이면 $z_2=a-bi=\overline{z_1}$이다.

ㄱ. $\overline{z_1}+z_2=\overline{z_1}+\overline{z_1}=2\overline{z_1}$, $z_1+\overline{z_2}=z_1+\underline{z_1}=2z_1$이므로 $\overline{z_2}=\overline{\overline{z_1}}=z_1$

$\overline{z_1}+z_2\neq z_1+\overline{z_2}$

ㄴ. $\overline{z_1}-z_2=\overline{z_1}-\overline{z_1}=0$, $z_1-\overline{z_2}=z_1-z_1=0$이므로

$\overline{z_1}-z_2=z_1-\overline{z_2}$

ㄷ. z_1z_2는 실수이므로 $z_1z_2=\overline{z_1z_2}$

ㄹ. $z_1\overline{z_2}=z_1\cdot z_1=z_1^{\,2}$, $\overline{z_1}z_2=\overline{z_1}\cdot\overline{z_1}=\overline{z_1}^{\,2}$이므로

$z_1\overline{z_2}\neq\overline{z_1}z_2$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ②

0366

|전략| $z=a+bi$(a, b는 실수)에 대하여 $\overline{z}=a-bi$임을 이용하여 z_n(n은 자연수)의 규칙성을 찾는다.

$z_2=\overline{(1+2i)}+(1+i)=(1-2i)+(1+i)=2-i$

$z_3=\overline{(2-i)}+(1+i)=(2+i)+(1+i)=3+2i$

$z_4=\overline{(3+2i)}+(1+i)=(3-2i)+(1+i)=4-i$

$z_5=\overline{(4-i)}+(1+i)=(4+i)+(1+i)=5+2i$

⋮

이때, $z_2, z_3, z_4, z_5, \cdots$에서 실수부분은 $2, 3, 4, 5, \cdots$로 나타나고, 허수부분은 $-1, 2$가 반복되어 나타난다.

$\therefore z_{100}=100-i$ 답 $100-i$

0367

|전략| 음이 아닌 정수 k에 대하여 $i^{4k+1}=i, i^{4k+2}=-1, i^{4k+3}=-i, i^{4k+4}=1$임을 이용하여 S_n을 구한다.

$S_n=i-1-i+1+\cdots+i^n$

$$=\begin{cases} i & (n=4m-3) \\ -1+i & (n=4m-2) \\ -1 & (n=4m-1) \\ 0 & (n=4m) \end{cases} \quad (m\text{은 자연수})$$

ㄱ. $20=4\cdot5$이므로 $S_{20}=0$

ㄴ. $S_n=-1$을 만족시키는 경우는 $n=4m-1$일 때이므로 50 이하의 자연수 n은 $3, 7, 11, \cdots, 47$의 12개이다.

ㄷ. $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{40}$

$=(i-1+i-1+0)+(i-1+i-1+0)+\cdots+(i-1+i-1+0)$

$=(-2+2i)\cdot10$

$=-20+20i$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0368

|전략| $z=\dfrac{1-i}{1+i}=-i$이므로 k가 자연수일 때, $(-i)^{4k}=1$, $(-i)^{4k-1}=i$, $(-i)^{4k-2}=-1$, $(-i)^{4k-3}=-i$임을 이용하여 z^n+z를 구한다.

$z=\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$이므로

$z^n+z=(-i)^n-i$

4 복소수

(i) $n=4k$ (k는 자연수)일 때, $(-i)^{4k}=1$이므로
$z^n+z=1-i$
(ii) $n=4k-1$ (k는 자연수)일 때, $(-i)^{4k-1}=i$이므로
$z^n+z=i-i=0$
(iii) $n=4k-2$ (k는 자연수)일 때, $(-i)^{4k-2}=-1$이므로
$z^n+z=-1-i$
(iv) $n=4k-3$ (k는 자연수)일 때, $(-i)^{4k-3}=-i$이므로
$z^n+z=(-i)-i=-2i$
(i)~(iv)에서 $z^n+z=0$을 만족시키는 경우는 $n=4k-1$ (k는 자연수)일 때이다.
따라서 100 이하의 자연수 중 조건을 만족시키는 자연수 n은 3, 7, 11, 15, $\cdots$, 99의 25개이다. 답 ③

다른 풀이 $z=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$이므로
$z^2=z\cdot z=-1$, $z^3=z^2\cdot z=i$,
$z^4=z^3\cdot z=1$, $z^5=z^4\cdot z=z=-i$,
$z^6=z^4\cdot z^2=z^2=-1$, $z^7=z^4\cdot z^3=z^3=i$, $\cdots$
이때, $z^n+z=0$이려면 $z^n=-z=i$이어야 한다.
$z^3=z^7=z^{11}=\cdots=z^{99}=i$이므로 구하는 100 이하의 자연수 n은 3, 7, 11, $\cdots$, 99의 25개이다.

0369

|전략| 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 a, b의 값을 구한 후 $(z^2+1)^n$ (n은 자연수)의 규칙성을 찾는다.

$z^2+\bar{z}=(a+bi)^2+(a-bi)$
$=(a^2-b^2+a)+(2ab-b)i$
$z^2+\bar{z}=0$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a^2-b^2+a=0$ …… ㉠
$2ab-b=0$ $\therefore b(2a-1)=0$ …… ㉡
$b>0$이므로 ㉡에서 $2a-1=0$ $\therefore a=\frac{1}{2}$
㉠에 $a=\frac{1}{2}$을 대입하여 정리하면 $b^2=\frac{3}{4}$ $\therefore b=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\because b>0$)
$\therefore z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$
이때, $z^2+1=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2+1=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$,
$(z^2+1)^2=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$,
$(z^2+1)^3=(z^2+1)(z^2+1)^2=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=-1$,
$(z^2+1)^4=(z^2+1)(z^2+1)^3=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot(-1)=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$,
$(z^2+1)^5=(z^2+1)^2(z^2+1)^3=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot(-1)=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$,
$(z^2+1)^6=\{(z^2+1)^3\}^2=(-1)^2=1$
$\vdots$
이므로 $(z^2+1)^n$이 정수이려면 n은 3의 배수이어야 한다.
즉, 구하는 자연수 n의 개수는 100 이하의 자연수 중 3의 배수의 개수와 같으므로 33이다. 답 33

본책 64~81쪽

5 | 이차방정식

STEP 1 개념 마스터 ❶

0370

$x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$ 답 $x=-1$ 또는 $x=2$

0371

$3x^2+5x-2=0$에서 $(x+2)(3x-1)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{3}$ 답 $x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

0372

$9x^2-6x+1=0$에서 $(3x-1)^2=0$
$\therefore x=\frac{1}{3}$ 답 $x=\frac{1}{3}$

0373

$\frac{1}{2}x^2-3x+4=0$의 양변에 2를 곱하면
$x^2-6x+8=0$, $(x-2)(x-4)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=4$ 답 $x=2$ 또는 $x=4$

0374

$x^2-4x-3=0$에서
$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot(-3)}}{1}=2\pm\sqrt{7}$ 답 $x=2\pm\sqrt{7}$

0375

$x^2+x+1=0$에서
$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$
$=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 답 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

0376

$x^2+6x+11=0$에서
$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-1\cdot11}}{1}=-3\pm\sqrt{-2}$
$=-3\pm\sqrt{2}i$ 답 $x=-3\pm\sqrt{2}i$

0377

$9x^2-6\sqrt{2}x+1=0$에서
$x=\frac{-(-3\sqrt{2})\pm\sqrt{(-3\sqrt{2})^2-9\cdot1}}{9}=\frac{3\sqrt{2}\pm3}{9}$
$=\frac{\sqrt{2}\pm1}{3}$ 답 $x=\frac{\sqrt{2}\pm1}{3}$

0378

$2x^2-5x+2=0$에서 $(2x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$ (실근) 답 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$ (실근)

0379

$x^2-6x+4=0$에서 $x^2+2\cdot(-3)x+4=0$이므로

$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\cdot 4}}{1}=3\pm\sqrt{5}$ (실근)

답 $x=3\pm\sqrt{5}$ (실근)

0380

$x^2+3=0$에서 $x^2=-3$

$\therefore x=\pm\sqrt{-3}=\pm\sqrt{3}i$ (허근) 답 $x=\pm\sqrt{3}i$ (허근)

0381

$3x^2+4x+2=0$에서 $3x^2+2\cdot 2x+2=0$이므로

$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-3\cdot 2}}{3}=\frac{-2\pm\sqrt{-2}}{3}$

$=\frac{-2\pm\sqrt{2}i}{3}$ (허근) 답 $x=\frac{-2\pm\sqrt{2}i}{3}$ (허근)

0382

$|x+1|=3x-1$에서

(i) $x<-1$일 때, $-x-1=3x-1$

$-4x=0 \quad \therefore x=0$

그런데 $x<-1$이므로 해가 없다.

(ii) $x\ge-1$일 때, $x+1=3x-1$

$-2x=-2 \quad \therefore x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은 $x=1$ 답 $x=1$

0383

$|2x-4|=|x|$에서

(i) $x<0$일 때, $-2x+4=-x \quad \therefore x=4$

그런데 $x<0$이므로 해가 없다.

(ii) $0\le x<2$일 때, $-2x+4=x \quad \therefore x=\frac{4}{3}$

(iii) $x\ge2$일 때, $2x-4=x \quad \therefore x=4$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=\frac{4}{3}$ 또는 $x=4$ 답 $x=\frac{4}{3}$ 또는 $x=4$

다른 풀이 $|2x-4|=|x|$에서 $2x-4=\pm x$

(i) $2x-4=x$일 때, $x=4$

(ii) $2x-4=-x$일 때, $3x=4 \quad \therefore x=\frac{4}{3}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=\frac{4}{3}$ 또는 $x=4$

0384

$|x-3|+|x+2|=7$에서

(i) $x<-2$일 때, $-x+3-x-2=7$

$-2x+1=7,\ -2x=6 \quad \therefore x=-3$

(ii) $-2\le x<3$일 때, $-x+3+x+2=7$

그런데 $5\ne7$이므로 해가 없다.

(iii) $x\ge3$일 때, $x-3+x+2=7$

$2x-1=7,\ 2x=8 \quad \therefore x=4$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-3$ 또는 $x=4$ 답 $x=-3$ 또는 $x=4$

0385

$x^2-5|x|-6=0$에서

(i) $x<0$일 때, $x^2+5x-6=0$

$(x+6)(x-1)=0 \quad \therefore x=-6$ 또는 $x=1$

그런데 $x<0$이므로 $x=-6$

(ii) $x\ge0$일 때, $x^2-5x-6=0$

$(x+1)(x-6)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=6$

그런데 $x\ge0$이므로 $x=6$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은 $x=\pm6$ 답 $x=\pm6$

다른 풀이 $x^2=|x|^2$이므로 주어진 방정식은

$|x|^2-5|x|-6=0,\ (|x|+1)(|x|-6)=0$

그런데 $|x|\ge0$이므로 $|x|=6$

$\therefore x=\pm6$

0386

보기에 주어진 각 이차방정식의 판별식을 D라 하면

ㄱ. $D=(-5)^2-4\cdot1\cdot2=17>0$

ㄴ. $\frac{D}{4}=(-4)^2-1\cdot16=0$

ㄷ. $\frac{D}{4}=(-1)^2-2\cdot1=-1<0$

ㄹ. $D=3^2-4\cdot5\cdot1=-11<0$

ㅁ. $\frac{D}{4}=3^2-2\cdot3=3>0$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로 ㄱ, ㅁ이다.

(2) 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로 ㄴ이다.

(3) 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로 ㄷ, ㄹ이다.

답 (1) ㄱ, ㅁ (2) ㄴ (3) ㄷ, ㄹ

0387

이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot k=1-k$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=1-k>0 \qquad \therefore k<1$

(2) 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=1-k=0 \qquad \therefore k=1$

(3) 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=1-k<0 \qquad \therefore k>1$

답 (1) $k<1$ (2) 1 (3) $k>1$

STEP 2 유형 마스터 ❶

0388

|전략| 주어진 이차방정식을 (x에 대한 이차식)$=0$ 꼴로 변형한 후 인수분해를 이용하여 해를 구한다.

$2(x+2)^2-3=3x+8$에서

$2(x^2+4x+4)-3=3x+8$

$2x^2+5x-3=0,\ (x+3)(2x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

답 ①

0389

$x^2-5x+7=0$에서 근의 공식을 이용하여 해를 구하면

$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot7}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{3}i}{2}$

$p,\ q$는 유리수이므로 $p=5,\ q=3$

$\therefore p+q=8$

답 8

0390

$(x*x)+2(3*x)+2=0$에서

$(2x^2+x-x)+2(6x+3-x)+2=0$

$2x^2+10x+8=0,\ x^2+5x+4=0$

$(x+1)(x+4)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=-4$

따라서 주어진 식을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합은

$-1+(-4)=-5$

답 ①

0391

주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{2}-1$을 곱하면

$x^2+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)x-(\sqrt{2}-1)=0$

$x^2+(2-\sqrt{2})x-\sqrt{2}+1=0$

$(x+1)(x-\sqrt{2}+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\sqrt{2}-1$

답 $x=-1$ 또는 $x=\sqrt{2}-1$

0392

|전략| $x=-1$을 주어진 이차방정식에 대입한다.

이차방정식 $x^2-2ax-a+1=0$의 한 근이 -1이므로

$(-1)^2-2a\cdot(-1)-a+1=0 \qquad \therefore a=-2$

$a=-2$를 주어진 방정식에 대입하면

$x^2+4x+3=0,\ (x+1)(x+3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-3$

따라서 다른 한 근은 -3이다.

답 ②

0393

이차방정식 $x^2+kx+\sqrt{2}-2=0$의 한 근이 $-1+\sqrt{2}$이므로

$(-1+\sqrt{2})^2+k(-1+\sqrt{2})+\sqrt{2}-2=0$

$1-2\sqrt{2}+2+k(-1+\sqrt{2})+\sqrt{2}-2=0$

$1-\sqrt{2}+k(-1+\sqrt{2})=0$

$k(-1+\sqrt{2})=-1+\sqrt{2}$

$\therefore k=1$

답 1

주의 이차방정식의 켤레근의 성질을 이용하려면 계수가 모두 유리수이어야 하므로 다른 한 근을 $-1-\sqrt{2}$로 생각하여 문제를 해결하지 않도록 주의한다.

0394

이차방정식 $mx^2-3x+m+1=0$의 한 근이 2이므로

$2^2m-3\cdot2+m+1=0,\ 5m=5$

$\therefore m=1$ ··· ❶

$m=1$을 주어진 방정식에 대입하면

$x^2-3x+2=0,\ (x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

따라서 다른 한 근은 1이므로 $\alpha=1$ ··· ❷

$\therefore m+\alpha=2$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ m의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ α의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $m+\alpha$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0395

$x=1$이 이차방정식 $kx^2+ax+(k+1)b=0$의 근이므로

$k+a+(k+1)b=0$

$(b+1)k+(a+b)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로 k에 대한 항등식

$b+1=0,\ a+b=0$

따라서 $a=1,\ b=-1$이므로

$a-b=2$

답 ②

0396

|전략| 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나눈다.

(i) $x<\frac{1}{2}$일 때, $x^2-(2x-1)=7$

$x^2-2x-6=0 \qquad \therefore x=1\pm\sqrt{7}$

그런데 $x<\frac{1}{2}$이므로 $x=1-\sqrt{7}$

(ii) $x\geq\frac{1}{2}$일 때, $x^2+(2x-1)=7$

$x^2+2x-8=0$, $(x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

그런데 $x\geq\frac{1}{2}$이므로 $x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=1-\sqrt{7}$ 또는 $x=2$

$\therefore \alpha+\beta=(1-\sqrt{7})+2=3-\sqrt{7}$ 답 $3-\sqrt{7}$

0397

(i) $x<0$일 때, $2x^2-5x+3=0$

$(x-1)(2x-3)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

그런데 $x<0$이므로 해가 없다.

(ii) $x\geq0$일 때, $2x^2+5x+3=0$

$(x+1)(2x+3)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=-\frac{3}{2}$

그런데 $x\geq0$이므로 해가 없다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식은 해가 없다. 답 해가 없다.

0398

$|2\triangle x|=x\triangle x$에서

$|2x-2-x|=x^2-x-x$, $|x-2|=x^2-2x$

(i) $x<2$일 때, $-x+2=x^2-2x$

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

그런데 $x<2$이므로 $x=-1$

(ii) $x\geq2$일 때, $x-2=x^2-2x$

$x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

그런데 $x\geq2$이므로 $x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-1$ 또는 $x=2$ 답 ④

0399

$\sqrt{x^2}=|x|$이므로 $x^2-|x|=|x-1|+3$

(i) $x<0$일 때, $x^2-(-x)=-(x-1)+3$

$x^2+2x-4=0 \qquad \therefore x=-1\pm\sqrt{5}$

그런데 $x<0$이므로 $x=-1-\sqrt{5}$

(ii) $0\leq x<1$일 때, $x^2-x=-(x-1)+3$

$x^2=4 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=2$

그런데 $0\leq x<1$이므로 해가 없다.

(iii) $x\geq1$일 때, $x^2-x=x-1+3$

$x^2-2x-2=0 \qquad \therefore x=1\pm\sqrt{3}$

그런데 $x\geq1$이므로 $x=1+\sqrt{3}$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-1-\sqrt{5}$ 또는 $x=1+\sqrt{3}$

따라서 모든 근의 합은

$(-1-\sqrt{5})+(1+\sqrt{3})=\sqrt{3}-\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{3}-\sqrt{5}$

Lecture

절댓값 기호를 2개 포함한 방정식

절댓값 기호를 2개 포함한 방정식 $|x-a|+|x-b|=c\,(a<b,\ c>0)$는 $x<a$, $a\leq x<b$, $x\geq b$로 범위를 나누어 방정식을 푼다.

이때, 각각의 범위에서 구한 x의 값 중 해당 범위에 속하는 것만이 방정식의 근이다.

0400

|전략| 정수 n에 대하여 $n\leq x<n+1$일 때, $[x]=n$이므로 $2\leq x<3$, $3\leq x<4$인 경우로 구간을 나누어 푼다.

(i) $2\leq x<3$일 때, $[x]=2$이므로

$x^2-2x-2=0 \qquad \therefore x=1\pm\sqrt{3}$

그런데 $2\leq x<3$이므로 $x=1+\sqrt{3}$

(ii) $3\leq x<4$일 때, $[x]=3$이므로

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

그런데 $3\leq x<4$이므로 $x=3$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=1+\sqrt{3}$ 또는 $x=3$ 답 $x=1+\sqrt{3}$ 또는 $x=3$

0401

$2[x]^2+[x]-3=0$에서 $(2[x]+3)([x]-1)=0$

$\therefore [x]=-\frac{3}{2}$ 또는 $[x]=1$

그런데 $[x]$는 정수이므로 $[x]=1$

$\therefore 1\leq x<2$ 답 $1\leq x<2$

0402

$[x]^2-3[x]-10=0$에서 $([x]+2)([x]-5)=0$

$\therefore [x]=-2$ 또는 $[x]=5$

$[x]=-2$에서 $-2\leq x<-1$

$[x]=5$에서 $5\leq x<6$

$\therefore -2\leq x<-1$ 또는 $5\leq x<6$

따라서 주어진 방정식의 해가 아닌 것은 ③이다. 답 ③

5 이차방정식

0403

(ⅰ) $0 \le x < 1$일 때, $[x]=0$이므로

$2x^2-x=0$, $x(2x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

(ⅱ) $1 \le x < 2$일 때, $[x]=1$이므로

$2x^2-x-3=0$, $(2x-3)(x+1)=0$

$\therefore x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=-1$

그런데 $1 \le x < 2$이므로 $x=\frac{3}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식의 근은

$x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

따라서 모든 근의 합은

$0+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$

답 ④

0404

| 전략 | 처음 토지의 한 변의 길이를 x m라 하고 주어진 조건을 이용하여 x에 대한 방정식을 세운다.

처음 토지의 한 변의 길이를 x m라 하면 길을 제외한 토지의 넓이는

$(x-3)(x-5)$ (m^2)

길을 제외한 토지의 넓이가 처음 토지의 넓이의 $\frac{3}{4}$이므로

$(x-3)(x-5)=\frac{3}{4}x^2$

$4x^2-32x+60=3x^2$

$x^2-32x+60=0$, $(x-2)(x-30)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=30$

이때, $x>5$이므로 $x=30$

따라서 처음 토지의 한 변의 길이는 30 m이므로 그 넓이는 900 m^2이다.

답 900 m^2

주의 구하는 값이 길이, 인원 수, 물건의 개수, 시간, 거리 등인 경우에는 그 값이 양수이어야 함에 주의한다.

0405

길의 폭을 x m라 하면 길을 제외한 부분의 가로, 세로의 길이는 각각 $(30-x)$ m, $(20-2x)$ m이므로

$(30-x)(20-2x)=448$

$2x^2-80x+152=0$, $x^2-40x+76=0$

$(x-2)(x-38)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=38$

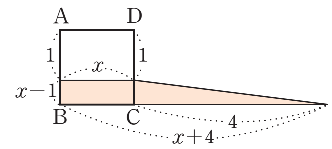
그런데 세로의 길이에서 $0<2x<20$, 즉 $0<x<10$이므로

$x=2$

따라서 구하는 길의 폭은 2 m이다.

답 2 m

0406



오른쪽 그림에서 처음 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하면 색칠한 부분은

(윗변의 길이)$=x$,

(아랫변의 길이)$=x+4$,

(높이)$=x-1$

인 사다리꼴이므로

$\frac{1}{2}\{x+(x+4)\}(x-1)=\frac{3}{4}x^2$, $(x+2)(x-1)=\frac{3}{4}x^2$

$4x^2+4x-8=3x^2$, $x^2+4x-8=0$

$\therefore x=-2\pm2\sqrt{3}$

이때, $x>1$이므로 $x=-2+2\sqrt{3}$

따라서 처음 정사각형의 한 변의 길이는 $-2+2\sqrt{3}$이다.

답 $-2+2\sqrt{3}$

0407

케이크의 밑면의 가로와 세로의 길이를 각각 x cm씩 줄였을 때, 줄인 밑면의 가로의 길이와 세로의 길이는 각각 $(16-x)$ cm, $(20-x)$ cm이므로 케이크의 부피는

$10(16-x)(20-x)$ (cm^3) ··· ❶

부피를 40 % 줄인 케이크의 부피는

$\frac{60}{100}\cdot16\cdot20\cdot10=1920$ (cm^3) ··· ❷

즉, $10(16-x)(20-x)=1920$이므로 ··· ❸

$x^2-36x+128=0$, $(x-4)(x-32)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=32$

그런데 밑면의 가로의 길이에서 $0<x<16$이므로 $x=4$

따라서 케이크의 밑면의 가로, 세로의 길이는 각각 4 cm씩 줄여야 한다. ··· ❹

답 4 cm

채점 기준	비율
❶ 케이크의 밑면의 가로와 세로의 길이를 각각 x cm씩 줄였을 때, 줄인 케이크의 부피를 x로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ 처음 케이크에서 부피를 40 % 줄인 케이크의 부피를 구할 수 있다.	10 %
❸ 주어진 조건을 이용하여 x에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	30 %
❹ 방정식을 풀어 x의 값을 구할 수 있다.	40 %

0408

처음 청바지의 가격을 A원이라 하면

x % 인하한 가격은 $A\left(1-\frac{x}{100}\right)$원

다시 이 가격을 x % 인상한 가격은 $A\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)$원

이 가격이 처음 청바지의 가격 A원보다 4 % 낮으므로

$A\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)=A\left(1-\frac{4}{100}\right)$

$(100-x)(100+x)=9600$

$10000-x^2=9600$, $x^2=400$ $\therefore x=\pm 20$

이때, $x>0$이므로 구하는 x의 값은 20이다. 답 20

다른 풀이 $\frac{x}{100}$만큼 인하 후 $\frac{x}{100}$만큼 인상하였으므로

$\left(-\frac{x}{100}\right)\cdot\frac{x}{100}=-\frac{4}{100}$, $x^2=400$

$\therefore x=\pm 20$

이때, $x>0$이므로 구하는 x의 값은 20이다.

0409

| 전략 | 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 조건은 $D>0$이다.

이차방정식 $x^2+2(k-1)x+k^2+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2+2)>0$

$k^2-2k+1-k^2-2>0$, $-2k-1>0$

$\therefore k<-\frac{1}{2}$

따라서 정수 k의 최댓값은 -1이다. 답 ②

0410

이차방정식 $x^2-k(2x-1)+6=0$, 즉 $x^2-2kx+k+6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k+6)=0$

$k^2-k-6=0$, $(k+2)(k-3)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $-2+3=1$ 답 1

0411

이차방정식 $x^2-2ax+a^2-a+6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-1\cdot(a^2-a+6)<0$

$a^2-a^2+a-6<0$, $a-6<0$

$\therefore a<6$

따라서 자연수 a의 값은 1, 2, 3, 4, 5이고, 그 개수는 5이다. 답 5

0412

이차방정식 $x^2-2(k-a)x+k^2+a^2-b+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-a)\}^2-(k^2+a^2-b+1)=0$

$k^2-2ak+a^2-k^2-a^2+b-1=0$

$-2ak+b-1=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$-2a=0$, $b-1=0$ $\therefore a=0$, $b=1$

$\therefore a+b=1$ 답 ②

0413

$(m^2-1)x^2+2(m-1)x+2=0$이 이차방정식이므로

$m^2-1\neq 0$, $(m+1)(m-1)\neq 0$

$\therefore m\neq -1$, $m\neq 1$ …… ㉠

이 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(m-1)^2-2(m^2-1)=0$

$m^2-2m+1-2m^2+2=0$

$m^2+2m-3=0$, $(m+3)(m-1)=0$

$\therefore m=-3$ 또는 $m=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $m=-3$ 답 ①

0414

$(k-1)x^2+2(k+1)x+k+2=0$이 이차방정식이므로

$k-1\neq 0$ $\therefore k\neq 1$ …… ㉠ … ❶

이 이차방정식이 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+1)^2-(k-1)(k+2)\geq 0$

$k^2+2k+1-(k^2+k-2)\geq 0$

$k+3\geq 0$ $\therefore k\geq -3$ …… ㉡ … ❷

㉠, ㉡에서 실수 k의 값의 범위는

$-3\leq k<1$ 또는 $k>1$ … ❸

답 $-3\leq k<1$ 또는 $k>1$

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식이 이차방정식이기 위한 k의 조건을 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 이차방정식이 실근을 가지기 위한 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 실수 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

0415

| 전략 | 두 이차방정식의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면 $D_1\geq 0$일 때, D_2의 부호를 조사한다.

이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 실근을 가지므로 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=a^2-4b\geq 0$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+(a-2)x-a+b=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(a-2)^2-4(-a+b)$

$=a^2-4a+4+4a-4b$

$=a^2-4b+4>0$ ($\because$ ㉠)

따라서 이차방정식 $x^2+(a-2)x-a+b=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 답 ③

0416

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

$D=b^2-4ac$ …… ㉠

$b=a+c$를 ㉠에 대입하면

$D=(a+c)^2-4ac=(a-c)^2$

이때, a, c가 서로 다른 실수이므로
$D=(a-c)^2>0$
따라서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
답 서로 다른 두 실근

0417
$\sqrt{ab}=-\sqrt{a}\sqrt{b}$이므로 $a<0$, $b<0$ ($\because ab\neq0$)
ㄱ. 이차방정식 $x^2-bx+a=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$D_1=(-b)^2-4a=b^2-4a>0$
이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄴ. 이차방정식 $x^2+ax-b=0$의 판별식을 D_2라 하면
$D_2=a^2-4\cdot1\cdot(-b)=a^2+4b$
a^2+4b의 값의 부호는 알 수 없으므로 이 이차방정식의 근을 판별할 수 없다.
ㄷ. 이차방정식 $ax^2+bx-1=0$의 판별식을 D_3라 하면
$D_3=b^2-4\cdot a\cdot(-1)=b^2+4a$
b^2+4a의 값의 부호는 알 수 없으므로 이 이차방정식의 근을 판별할 수 없다.
ㄹ. 이차방정식 $bx^2+x-a=0$의 판별식을 D_4라 하면
$D_4=1^2-4\cdot b\cdot(-a)=1+4ab>0$
이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
따라서 항상 서로 다른 두 실근을 갖는 이차방정식은 ㄱ, ㄹ이다.
답 ③

0418
|전략| 이차식 ax^2+bx+c가 완전제곱식이면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 갖는다.
주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식
$x^2-2(k-a)x+(k-1)^2-b=0$의 판별식을 D라 할 때
$\frac{D}{4}=\{-(k-a)\}^2-\{(k-1)^2-b\}=0$
$k^2-2ak+a^2-k^2+2k-1+b=0$
$(-2a+2)k+a^2-1+b=0$
이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로
$-2a+2=0$, $a^2-1+b=0$
두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=0$
$\therefore a+b=1$
답 1

Lecture
x에 대한 이차식 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 실수)에 대하여
이차식 $f(x)$가 완전제곱식이 된다.
$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $f(x)=0$이 중근을 갖는다.
$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식 $D=0$이다.

0419
주어진 이차식이 $(x+\alpha)^2$ 꼴로 인수분해되려면 완전제곱식이 되어야 한다.
x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+4=0$의 판별식을 D라 할 때
$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-(2k^2-6k+4)=0$
$k^2-4k+3=0$, $(k-1)(k-3)=0$
$\therefore k=3$ ($\because k>1$)
이때, 주어진 이차식은 x^2-4x+4, 즉 $(x-2)^2$으로 인수분해되므로
$\alpha=-2$
$\therefore k-\alpha=5$
답 ⑤

0420
$(k-2)x^2+(4k-8)x+3k-2$가 이차식이므로 $k\neq2$
또, 이 식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식
$(k-2)x^2+(4k-8)x+3k-2=0$의 판별식을 D라 할 때
$\frac{D}{4}=(2k-4)^2-(k-2)(3k-2)=0$
$k^2-8k+12=0$, $(k-2)(k-6)=0$
$\therefore k=6$ ($\because k\neq2$)
답 ⑤

0421
주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식
$(a-c)x^2-2bx+a+c=0$의 판별식을 D라 할 때
$\frac{D}{4}=(-b)^2-(a-c)(a+c)=0$
$b^2-(a^2-c^2)=0$
$\therefore a^2=b^2+c^2$
따라서 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.
답 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

0422
|전략| 주어진 식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 (주어진 식)$=0$의 판별식 D가 완전제곱식이 되어야 한다.
$2x^2+xy-y^2-x+ky-1$을 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$2x^2+(y-1)x+(-y^2+ky-1)$
이때, x에 대한 이차방정식 $2x^2+(y-1)x+(-y^2+ky-1)=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(y-1)^2-4\cdot2\cdot(-y^2+ky-1)$
$=9y^2-2(4k+1)y+9$
가 완전제곱식이 되어야 한다.
즉, y에 대한 이차방정식 $9y^2-2(4k+1)y+9=0$의 판별식을 D'이라 하면
$\frac{D'}{4}=\{-(4k+1)\}^2-9\cdot9=0$
$(4k+1+9)(4k+1-9)=0$, $8(2k+5)(k-2)=0$
$\therefore k=2$ ($\because k>0$)
답 2

0423

$x^2+4xy+my^2-x-5y-2$를 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2+(4y-1)x+my^2-5y-2$

이때, x에 대한 이차방정식 $x^2+(4y-1)x+my^2-5y-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(4y-1)^2-4(my^2-5y-2)$

$=(16-4m)y^2+12y+9$

가 완전제곱식이 되어야 한다.

즉, y에 대한 이차방정식 $(16-4m)y^2+12y+9=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\dfrac{D'}{4}=6^2-9(16-4m)=0$

$16-4m=4 \quad \therefore m=3$ 답 ③

0424

$x^2+xy+3x-2y^2+3y+k$를 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2+(y+3)x+(-2y^2+3y+k)$

이때, x에 대한 이차방정식 $x^2+(y+3)x+(-2y^2+3y+k)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(y+3)^2-4(-2y^2+3y+k)$

$=9y^2-6y+9-4k$

가 완전제곱식이 되어야 한다.

즉, y에 대한 이차방정식 $9y^2-6y+9-4k=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\dfrac{D'}{4}=9-9(9-4k)=0$

$-72+36k=0 \quad \therefore k=2$ 답 ④

STEP 1 개념 마스터 ❷

0425

이차방정식 $x^2+2x-2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-2$

(1) $\alpha+\beta+\alpha\beta=-2-2=-4$

(2) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\cdot(-2)=8$

(3) $|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{|1|}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

(4) $(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$

$=-2-(-2)+1=1$

답 (1) -4 (2) 8 (3) $2\sqrt{3}$ (4) 1

다른 풀이 (3) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$(\alpha-\beta)^2=(-2)^2-4\cdot(-2)=12 \quad \therefore |\alpha-\beta|=2\sqrt{3}$

0426

이차방정식 $x^2+2x+3=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$

(1) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=3\cdot(-2)=-6$

(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\dfrac{2}{3}$

(3) $(2\alpha-1)(2\beta-1)=4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1$

$=4\cdot3-2\cdot(-2)+1=17$

(4) $\left(\alpha+\dfrac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\dfrac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+\dfrac{1}{\alpha\beta}+2$

$=3+\dfrac{1}{3}+2=\dfrac{16}{3}$

답 (1) -6 (2) $-\dfrac{2}{3}$ (3) 17 (4) $\dfrac{16}{3}$

0427

$x^2-(1+3)x+1\cdot3=0$

$\therefore x^2-4x+3=0$ 답 $x^2-4x+3=0$

0428

$x^2-(-2+4)x+(-2)\cdot4=0$

$\therefore x^2-2x-8=0$ 답 $x^2-2x-8=0$

0429

$x^2-\{(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\}x+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=0$

$\therefore x^2-2x-1=0$ 답 $x^2-2x-1=0$

0430

$x^2-\{(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})\}x+(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=0$

$\therefore x^2-4x-1=0$ 답 $x^2-4x-1=0$

0431

$x^2-\{(1+i)+(1-i)\}x+(1+i)(1-i)=0$

$\therefore x^2-2x+2=0$ 답 $x^2-2x+2=0$

0432

$x^2-\{(2+3i)+(2-3i)\}x+(2+3i)(2-3i)=0$

$\therefore x^2-4x+13=0$ 답 $x^2-4x+13=0$

0433

$4\left\{x^2-\left(-1+\dfrac{1}{4}\right)x+(-1)\cdot\dfrac{1}{4}\right\}=0$

$4\left(x^2+\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}\right)=0 \quad \therefore 4x^2+3x-1=0$ 답 $4x^2+3x-1=0$

0434

$6\left\{x^2-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\right)x+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\right\}=0$

$6\left(x^2-\dfrac{7}{6}x+\dfrac{1}{3}\right)=0 \quad \therefore 6x^2-7x+2=0$ 답 $6x^2-7x+2=0$

0435

두 수 α, β를 근으로 하는 이차방정식은 근과 계수의 관계에 의하여

$x^2-4x-3=0$

$\therefore x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot(-3)}=2\pm\sqrt{7}$

이때, $\alpha<\beta$이므로

$\alpha=2-\sqrt{7}$, $\beta=2+\sqrt{7}$ 답 $\alpha=2-\sqrt{7}$, $\beta=2+\sqrt{7}$

0436

$x^2-x-1=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\therefore x^2-x-1=\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

답 $\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

0437

$x^2+25=0$에서 $x^2=-25$

$x=\pm\sqrt{-25}=\pm5i$

$\therefore x^2+25=(x+5i)(x-5i)$

답 $(x+5i)(x-5i)$

0438

$x^2+2x-6=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-6)}}{1}=-1\pm\sqrt{7}$

$\therefore x^2+2x-6=\{x-(-1+\sqrt{7})\}\{x-(-1-\sqrt{7})\}$

$=(x+1-\sqrt{7})(x+1+\sqrt{7})$

답 $(x+1-\sqrt{7})(x+1+\sqrt{7})$

0439

$4x^2-8x+7=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot7}}{4}=\frac{4\pm\sqrt{-12}}{4}$

$=\frac{4\pm2\sqrt{3}i}{4}=\frac{2\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore 4x^2-8x+7=4\left(x-\frac{2+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{2-\sqrt{3}i}{2}\right)$

답 $4\left(x-\frac{2+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{2-\sqrt{3}i}{2}\right)$

0440

a, b가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $1+\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{3}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=-a$, $(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=b$

$\therefore a=-2$, $b=-2$

답 $a=-2$, $b=-2$

0441

a, b가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $3-\sqrt{5}$이므로 다른 한 근은 $3+\sqrt{5}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(3-\sqrt{5})+(3+\sqrt{5})=-a$, $(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})=b$

$\therefore a=-6$, $b=4$

답 $a=-6$, $b=4$

0442

a, b가 실수이고 주어진 방정식의 한 근이 $-1-i$이므로 다른 한 근은 $-1+i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1-i)+(-1+i)=-a$, $(-1-i)(-1+i)=b$

$\therefore a=2$, $b=2$

답 $a=2$, $b=2$

0443

a, b가 실수이고 주어진 방정식의 한 근이 $1+2i$이므로 다른 한 근은 $1-2i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+2i)+(1-2i)=-a$, $(1+2i)(1-2i)=b$

$\therefore a=-2$, $b=5$

답 $a=-2$, $b=5$

STEP 2 유형 마스터 ❷

0444

|전략| 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β일 때, $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$임을 이용한다.

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{2}{3}$, $\alpha\beta=\frac{4}{3}$

$\therefore \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\cdot\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}}=-\frac{5}{3}$

답 $-\frac{5}{3}$

0445

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$

① $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{3}{1}=3$

② $(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=1-3+1=-1$

③ $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=3^2-4\cdot1=5$

$\therefore |\alpha-\beta|=\sqrt{5}$

④ $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=3^3-3\cdot1\cdot3=18$

⑤ $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta=3^2-3\cdot1=6$

답 ③

0446

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=1$ ...... ㉠

$\therefore (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$

$=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$ ($\because$ ㉠에서 $\alpha>0$, $\beta>0$)

$=4+2\cdot1=6$

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{6}$

답 ③

0447

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-3$

이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(-1)^2-4\cdot(-3)=13$

$\therefore\ \alpha-\beta=\sqrt{13}\ (\because\ \alpha>\beta)$

$\therefore\ \alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$

$=(\sqrt{13})^3+3\cdot(-3)\cdot\sqrt{13}=4\sqrt{13}$ 답 $4\sqrt{13}$

0448

| 전략 | 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$일 때, $a\alpha^2+b\alpha+c=0$, $a\beta^2+b\beta+c=0$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 하고, $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$의 값을 대입하여 주어진 식의 값을 구한다.

이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$\alpha^2-4\alpha+2=0$에서 $\alpha^2-3\alpha+1=\alpha-1$

$\beta^2-4\beta+2=0$에서 $\beta^2-3\beta+1=\beta-1$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=2$

$\therefore\ (\alpha^2-3\alpha+1)(\beta^2-3\beta+1)=(\alpha-1)(\beta-1)$

$=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$

$=2-4+1=-1$ 답 ③

0449

이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$\alpha^2-2\alpha+3=0$에서 $\alpha^2+3=2\alpha$

$\beta^2-2\beta+3=0$에서 $\beta^2+3=2\beta$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$

$\therefore\ \dfrac{9\beta}{\alpha^2+\alpha+3}+\dfrac{9\alpha}{\beta^2+\beta+3}=\dfrac{9\beta}{3\alpha}+\dfrac{9\alpha}{3\beta}=\dfrac{3\beta}{\alpha}+\dfrac{3\alpha}{\beta}$

$=\dfrac{3(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\beta}=\dfrac{3\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{3(2^2-2\cdot3)}{3}=-2$ 답 ②

0450

이차방정식 $x^2+x-1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$\alpha^2+\alpha-1=0$에서 $\alpha^2+\alpha=1$

$\beta^2+\beta-1=0$에서 $\beta^2+\beta=1$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-1$

$\therefore\ (1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)(1+\beta+\beta^2+\beta^3)$

$=\{1+\alpha+\alpha(\alpha+\alpha^2)\}\{1+\beta+\beta(\beta+\beta^2)\}$

$=(1+\alpha+\alpha)(1+\beta+\beta)$

$=(1+2\alpha)(1+2\beta)$

$=1+2(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$

$=1+2\cdot(-1)+4\cdot(-1)=-5$ 답 ①

0451

| 전략 | 근과 계수의 관계를 이용하여 미정계수 사이의 관계식을 세운다.

이차방정식 $x^2-2ax-1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a,\ \alpha\beta=-1$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+3x+b=0$의 두 근이 $\alpha^2\beta,\ \beta^2\alpha$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha^2\beta+\beta^2\alpha=-3,\ \alpha^2\beta\cdot\beta^2\alpha=b$

$\therefore\ \alpha\beta(\alpha+\beta)=-3,\ \alpha^3\beta^3=b$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $-1\cdot2a=-3,\ (-1)^3=b$

$\therefore\ a=\dfrac{3}{2},\ b=-1$

$\therefore\ ab=-\dfrac{3}{2}$ 답 ③

0452

이차방정식 $3x^2-ax+4=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\dfrac{a}{3},\ \alpha\beta=\dfrac{4}{3}$ …… ㉠

이차방정식 $4x^2+2x+b=0$의 두 근이 $\dfrac{1}{\alpha},\ \dfrac{1}{\beta}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{b}{4}$

$\therefore\ \alpha+\beta=-\dfrac{1}{2}\alpha\beta,\ \alpha\beta=\dfrac{4}{b}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\dfrac{a}{3}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}=-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3}=\dfrac{4}{b}$

$\therefore\ a=-2,\ b=3$

$\therefore\ a+b=1$ 답 1

0453

이차방정식 $x^2-mx+n=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m,\ \alpha\beta=n$ …… ㉠ … ❶

이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 근이 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\alpha\beta=4,\ (\alpha+\beta)\cdot\alpha\beta=2$ …… ㉡ … ❷

㉠을 ㉡에 대입하면 $m+n=4,\ mn=2$

$\therefore\ m^3+n^3=(m+n)^3-3mn(m+n)$

$=4^3-3\cdot2\cdot4=40$ … ❸

답 40

채점 기준	비율
❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 ㉠을 구할 수 있다.	40 %
❷ 근과 계수의 관계를 이용하여 ㉡을 구할 수 있다.	40 %
❸ m^3+n^3의 값을 구할 수 있다.	20 %

5 이차방정식

0454

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-(b-3)x+2a+4=0$의 두 근이 $\alpha-1$, $\beta-1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha-1)+(\beta-1)=b-3$, $(\alpha-1)(\beta-1)=2a+4$

$\therefore$ $\alpha+\beta-2=b-3$, $\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=2a+4$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-a-2=b-3$, $b+a+1=2a+4$

$a+b=1$, $-a+b=3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$

$\therefore$ $a^2+b^2=5$ 답 5

0455

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ …… ㉠

이차방정식 $ax^2-bx+c=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta(\alpha+\beta)=\dfrac{c}{a}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-(\alpha+\beta)$ …… ㉢

$\alpha\beta(\alpha+\beta)=\alpha\beta$ …… ㉣

㉣에서 $\alpha+\beta=1$이므로 이를 ㉢에 대입하면 $\alpha\beta=-2$

$\therefore$ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=1^2-2\cdot(-2)=5$ 답 ①

참고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이고 $c\neq0$이므로 $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$

즉, $\alpha\beta\neq0$이므로 ㉣에서 $\alpha+\beta=1$

0456

|전략| $\alpha^2+\beta^2=28$에서 좌변을 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$에 대한 식으로 변형한 후 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 대입한다.

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2m$, $\alpha\beta=10-4m^2$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=28$에서

$(2m)^2-2(10-4m^2)=28$

$12m^2-20=28$, $m^2=4$

$\therefore$ $m=2$ ($\because$ $m>0$) 답 ②

0457

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k+1$, $\alpha\beta=k-4$

$\therefore$ $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+2\alpha+2\beta=\alpha\beta(\alpha+\beta)+2(\alpha+\beta)$

$=(\alpha\beta+2)(\alpha+\beta)$

$=(k-2)(2k+1)=2k^2-3k-2$

즉, $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+2\alpha+2\beta=3$에서

$2k^2-3k-2=3$, $2k^2-3k-5=0$

$(2k-5)(k+1)=0$

$\therefore$ $k=-1$ ($\because$ k는 정수) 답 -1

0458

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k+1$, $\alpha\beta=4k-1$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=21$에서

$(2k+1)^2-4(4k-1)=21$

$4k^2+4k+1-16k+4=21$, $4k^2-12k-16=0$

$k^2-3k-4=0$, $(k+1)(k-4)=0$

$\therefore$ $k=4$ ($\because$ k는 자연수) 답 4

0459

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2k$, $\alpha\beta=k^2-2k+2$

$|\alpha|+|\beta|=2\sqrt{2}$의 양변을 제곱하면

$|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2=8$

$\alpha^2+\beta^2+2|\alpha\beta|=8$에서 $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|=8$이므로

$(-2k)^2-2(k^2-2k+2)+2|k^2-2k+2|=8$

이때, $k^2-2k+2=(k-1)^2+1>0$이므로

$(-2k)^2-2(k^2-2k+2)+2(k^2-2k+2)=8$

$(-2k)^2=8$, $4k^2=8$, $k^2=2$

$\therefore$ $k=\sqrt{2}$ ($\because$ $k>0$) 답 ②

0460

|전략| 주어진 이차방정식의 두 근의 비가 $2:3$이므로 두 근을 2α, 3α로 놓는다.

주어진 방정식의 두 근을 2α, 3α $(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+3\alpha=10k$ …… ㉠

$2\alpha\cdot3\alpha=-k^2+1$ …… ㉡

㉠에서 $\alpha=2k$이므로 ㉡에 대입하면

$6\cdot(2k)^2=-k^2+1$, $25k^2=1$

$k^2=\dfrac{1}{25}$ $\quad\therefore$ $k=\dfrac{1}{5}$ ($\because$ $k>0$) 답 ①

0461

주어진 방정식의 두 근을 α, $\alpha+3$이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+3)=2k+1$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+3)=k^2$ …… ㉡

㉠에서 $\alpha=k-1$이므로 ㉡에 대입하면

$(k-1)(k+2)=k^2$, $k^2+k-2=k^2$, $k-2=0$

$\therefore$ $k=2$ 답 2

다른 풀이 주어진 방정식의 두 근을 α, $\beta(\alpha>\beta)$라 하면

$\alpha-\beta=3$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k+1$, $\alpha\beta=k^2$

이때, $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$3^2=(2k+1)^2-4k^2$

$4k=8 \qquad \therefore k=2$

0462

주어진 방정식의 두 근을 α, $\alpha+1$(α는 정수)이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+1)=a$ ······ ㉠

$\alpha(\alpha+1)=a+11$ ······ ㉡

㉠에서 $a=2\alpha+1$이므로 ㉡에 대입하면

$\alpha^2+\alpha=2\alpha+12$, $\alpha^2-\alpha-12=0$

$(\alpha+3)(\alpha-4)=0 \qquad \therefore \alpha=-3$ 또는 $\alpha=4$

(i) $\alpha=-3$일 때, $a=-5$

(ii) $\alpha=4$일 때, $a=9$

(i), (ii)에서 a는 양수이므로 $a=9$

답 ②

0463

주어진 방정식의 두 근을 α, 4α $(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+4\alpha=5(k-1)$ ······ ㉠

$\alpha\cdot4\alpha=-16k$ ······ ㉡

㉠에서 $\alpha=k-1$이므로 ㉡에 대입하면

$4(k-1)^2=-16k$, $(k-1)^2=-4k$, $k^2+2k+1=0$

$(k+1)^2=0 \qquad \therefore k=-1$

답 ②

0464

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 $-18<0$이므로 두 근의 부호는 서로 다르다.

주어진 방정식의 두 근을 α, -2α라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-2\alpha)=-(k-5) \qquad \therefore \alpha=k-5$ ······ ㉠

$\alpha\cdot(-2\alpha)=-18$, $\alpha^2=9$

$\therefore \alpha=-3$ 또는 $\alpha=3$ ··· ❶

(i) $\alpha=3$일 때, ㉠에 대입하면 $k=8$

(ii) $\alpha=-3$일 때, ㉠에 대입하면 $k=2$ ··· ❷

(i), (ii)에서 $k=8$ 또는 $k=2$이므로 모든 실수 k의 값의 합은

$8+2=10$ ··· ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ α의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 모든 실수 k의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0465

|전략| 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$이다.

이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$

이때, α^2, β^2을 두 근으로 하는 이차방정식에 대하여

(두 근의 합)$=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-2)^2-2\cdot3=-2$

(두 근의 곱)$=\alpha^2\cdot\beta^2=(\alpha\beta)^2=3^2=9$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2+2x+9=0$

답 ④

0466

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$

이때, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식에 대하여

(두 근의 합)$=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{a}{b}$

(두 근의 곱)$=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{b}$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}=0$, 즉 $bx^2-ax+1=0$이다.

답 ⑤

0467

$\overline{AP}$, $\overline{BP}$의 길이를 두 근으로 하는 이차방정식에 대하여

(두 근의 합)$=\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AB}=22$

(두 근의 곱)$=\overline{AP}\cdot\overline{BP}=\overline{CP}\cdot\overline{DP}=8\cdot12=96$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-22x+96=0$이다.

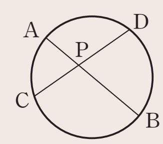
답 $x^2-22x+96=0$

Lecture

원에서의 비례 관계

한 원에서 두 현 AB와 CD가 만나는 점을 P라 하면

⇨ $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$



0468

이차방정식 $x^2-3x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-2$

이때, $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하는 이차방정식에 대하여

(두 근의 합)$=\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$=3+\frac{3}{-2}=\frac{3}{2}$

(두 근의 곱)$=\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+2+\frac{1}{\alpha\beta}$

$=-2+2+\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$

따라서 구하는 이차방정식은 $2\left(x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right)=0$,

즉 $2x^2-3x-1=0$이다. 답 $2x^2-3x-1=0$

0469

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 2, α이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2+\alpha=-a$, $2\alpha=b$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+(b-1)x+2a+3=0$의 두 근이 -1, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+\beta=-(b-1)$, $-\beta=2a+3$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-1+\beta=-(2\alpha-1)$, $-\beta=2(-2-\alpha)+3$

$\therefore 2\alpha+\beta=2$, $-2\alpha+\beta=1$

두 식을 연립하여 풀면 $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{3}{2}$

따라서 α, β, 즉 $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 8인 이차방정식은

$8\left\{x^2-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)x+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}\right\}=0$

$8\left(x^2-\frac{7}{4}x+\frac{3}{8}\right)=0$, $8x^2-14x+3=0$

이므로 $m=-14$, $n=3$

$\therefore m+n=-11$ 답 -11

0470

|전략| 대한이는 이차항의 계수와 상수항을, 민국이는 이차항의 계수와 일차항의 계수를 바르게 보았다.

대한이는 방정식의 x^2의 계수와 상수항을 바르게 보고 풀었으므로

(두 근의 곱)$=\frac{c}{a}=(1+\sqrt{6})(1-\sqrt{6})=-5$

또한, 민국이는 방정식의 x^2의 계수와 x의 계수를 바르게 보고 풀었으므로

(두 근의 합)$=-\frac{b}{a}=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

따라서 주어진 이차방정식은

$a\left(x^2-\frac{4}{3}x-5\right)=0$, $\frac{a}{3}(3x^2-4x-15)=0$

$\frac{a}{3}(3x+5)(x-3)=0$

$\therefore x=-\frac{5}{3}$ 또는 $x=3$ 답 $x=-\frac{5}{3}$ 또는 $x=3$

0471

|전략| 잘못된 근의 공식을 이용하여 두 근의 곱을 a, c에 대한 식으로 나타내어 본다.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 공식을 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{2a}$로 잘못 적용하여 얻은 두 근이 -1, 6이므로

$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}$

$=\frac{b^2-(b^2-ac)}{4a^2}=\frac{ac}{4a^2}=\frac{c}{4a}=-6$

이때, 방정식에서 원래의 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$이므로

$\frac{c}{4a}=-6$에서 $\frac{c}{a}=-24$

따라서 이 이차방정식의 원래의 두 근의 곱은 -24이다. 답 -24

다른 풀이 근의 공식에서 $\sqrt{b^2-4ac}$를 $\sqrt{b^2-ac}$로 잘못 적용하였다는 것은 c의 값을 $\frac{1}{4}c$로 잘못 대입한 것과 같다.

-1, 6을 두 근으로 하고, x^2의 계수가 a인 이차방정식은

$a(x+1)(x-6)=0$, $ax^2-5ax-6a=0$

이때, $-6a$ 대신에 $(-6a)\cdot 4$를 대입하면 원래의 방정식의 상수항이 된다.

즉, 원래의 방정식은 $ax^2-5ax-24a=0$

따라서 이 이차방정식의 원래의 두 근의 곱은 $\frac{-24a}{a}=-24$

0472

|전략| 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면 $f(2x+1)=0$의 근은 $2x+1=\alpha$, $2x+1=\beta$를 만족시키는 x의 값이 된다.

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=3$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(2x+1)=0$이려면

$2x+1=\alpha$ 또는 $2x+1=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha-1}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta-1}{2}$

따라서 이차방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합은

$\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0473

방정식 $f(x)=0$이 -1을 근으로 가지므로 $f(-1)=0$

이때, 선택지의 각 식의 좌변에 $x=-1$을 대입하여 $f(-1)=0$을 만족하는 것을 찾으면 ⑤이다. 답 ⑤

0474

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha\beta=4$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(2x)=0$이려면

$2x=\alpha$ 또는 $2x=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta}{2}$

따라서 이차방정식 $f(2x)=0$의 두 근의 곱은

$\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha\beta}{4}=\frac{4}{4}=1$ 답 ①

0475

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$

즉, $f(2x-2)=0$이려면

$2x-2=\alpha$ 또는 $2x-2=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha+2}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta+2}{2}$

따라서 이차방정식 $f(2x-2)=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{\alpha+2}{2}\cdot\frac{\beta+2}{2}=\frac{\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4}{4}$$
$$=\frac{4+2\cdot2+4}{4}\ (\because \alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=4)$$
$$=3$$ 답 3

다른 풀이 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 2, 두 근의 곱이 4이므로 $f(x)=a(x^2-2x+4)$이다.

$\therefore f(2x-2)=a\{(2x-2)^2-2(2x-2)+4\}$
$=a(4x^2-12x+12)$

따라서 이차방정식 $f(2x-2)=0$의 두 근의 곱은 $\frac{12a}{4a}=3$

0476

|전략| 먼저 주어진 근의 분모를 실수화한 후 이차방정식의 켤레근의 성질을 이용한다.

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

계수가 실수인 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 한 근이 i이면 다른 한 근은 $-i$이다.

이때, 근과 계수의 관계에 의하여

$i+(-i)=-a \quad \therefore a=0$

$i\cdot(-i)=b \quad \therefore b=1$

$\therefore a+b=1$ 답 1

다른 풀이 $\frac{1+i}{1-i}=i$이므로 주어진 이차방정식에 대입하면

$i^2+ai+b=0$, $(b-1)+ai=0$

a, b가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$b-1=0$, $a=0 \quad \therefore a=0$, $b=1$

$\therefore a+b=1$

0477

계수가 실수인 이차방정식 $x^2-ax+4b=0$에서 한 근이 $2+ai$이면 다른 한 근은 $2-ai$이다.

이때, 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+ai)+(2-ai)=a \quad \therefore a=4$

$(2+ai)(2-ai)=4b$

즉, $4+a^2=4b$에서 $4+4^2=4b \quad \therefore b=5$

$\therefore a+b=9$ 답 ⑤

0478

$\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$ … ❶

계수가 유리수인 이차방정식 $x^2+2ax+b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다. … ❷

이때, 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=-2a \quad \therefore a=-1$

$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=b \quad \therefore b=-1$ … ❸

따라서 이차방정식 $x^2+bx+a=0$, 즉 $x^2-x-1=0$의 근은

$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ … ❹

답 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$의 분모를 유리화할 수 있다.	20 %
❷ 켤레근의 성질을 이용하여 다른 한 근을 구할 수 있다.	30 %
❸ 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 근을 구할 수 있다.	20 %

0479

계수가 실수인 이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 한 근이 $-1+2i$이면 다른 한 근은 $-1-2i$이다.

이때, 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1+2i)+(-1-2i)=-m \quad \therefore m=2$

$(-1+2i)(-1-2i)=n \quad \therefore n=5$

$\therefore \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$, $\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$

따라서 $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)x+\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}=0$에서 $x^2-\frac{7}{10}x+\frac{1}{10}=0$이므로

$a=-\frac{7}{10}$, $b=\frac{1}{10}$

$\therefore 5(a+b)=5\left(-\frac{7}{10}+\frac{1}{10}\right)=-3$ 답 ③

STEP 3 내신 마스터

0480

유형 01 이차방정식의 풀이

|전략| 이차항의 계수를 유리화한 후 주어진 이차방정식의 해를 구한다.

주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{2}$를 곱하면

$\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}(2-\sqrt{6})x-\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=0$

$4x^2+(2\sqrt{2}-2\sqrt{3})x-\sqrt{6}=0$

$(2x-\sqrt{3})(2x+\sqrt{2})=0$

$\therefore x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$2\alpha^2-\beta^2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$ 답 ①

0481

유형 02 이차방정식의 한 근이 주어질 때 미정계수 구하기

| 전략 | $x=1$을 주어진 이차방정식에 대입한다.

이차방정식 $x^2-(a+5)x+a^2-2a=0$의 한 근이 1이므로

$1-(a+5)+a^2-2a=0$

$a^2-3a-4=0$, $(a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

$a=4$를 주어진 방정식에 대입하면

$x^2-9x+8=0$, $(x-1)(x-8)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=8$

따라서 다른 한 근은 8이므로 $\alpha=8$

$\therefore a+\alpha=12$ 답 ④

0482

유형 02 이차방정식의 한 근이 주어질 때 미정계수 구하기

| 전략 | $x=\alpha$, $x=\beta$를 주어진 식에 각각 대입한 후 식을 변형하거나 양변을 β로 나눈다.

$x^2-3x+1=0$의 한 근이 α이므로 $\alpha^2-3\alpha+1=0$

$\therefore \alpha^2=3\alpha-1$

$x^2-\alpha x+1=0$의 한 근이 β이므로 $\beta^2-\alpha\beta+1=0$

이때, $\beta\neq0$이므로 양변을 β로 나누면

$\beta-\alpha+\frac{1}{\beta}=0 \qquad \therefore \beta+\frac{1}{\beta}=\alpha$

$\therefore 3\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)-\alpha^2=3\alpha-(3\alpha-1)=1$ 답 ④

0483

유형 04 가우스 기호를 포함한 이차방정식의 풀이

| 전략 | 정수 n에 대하여 $n\le x<n+1$일 때, $[x]=n$이므로 $0<x<1$, $1\le x<2$, $2\le x<3$인 경우로 구간을 나누어 푼다.

(i) $0<x<1$일 때, $[x]=0$이므로

$x^2=2 \qquad \therefore x=\pm\sqrt{2}$

그런데 $0<x<1$이므로 해는 없다.

(ii) $1\le x<2$일 때, $[x]=1$이므로

$x^2-1=2$, $x^2=3 \qquad \therefore x=\pm\sqrt{3}$

그런데 $1\le x<2$이므로 $x=\sqrt{3}$

(iii) $2\le x<3$일 때, $[x]=2$이므로

$x^2-2=2$, $x^2=4 \qquad \therefore x=\pm2$

그런데 $2\le x<3$이므로 $x=2$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 근은 $x=\sqrt{3}$ 또는 $x=2$이므로

$\alpha=\sqrt{3}$, $\beta=2$ ($\because \alpha<\beta$)

$\therefore \alpha^2+\beta^2=7$ 답 ②

0484

유형 05 이차방정식의 활용

| 전략 | (나중 호박밭의 넓이)$=\frac{1}{3}$(처음 호박밭의 넓이)임을 이용하여 x에 대한 방정식을 세운다.

새로 만든 호박밭의 넓이가 $(12-x)(10+x)$이므로

$(12-x)(10+x)=\frac{1}{3}\cdot12\cdot10$

$120+2x-x^2=40$, $x^2-2x-80=0$

$(x+8)(x-10)=0$

$\therefore x=-8$ 또는 $x=10$

그런데 $x>0$이므로 $x=10$ 답 ⑤

0485

유형 06 판별식을 이용한 이차방정식의 근의 판별

| 전략 | 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 중근을 가질 조건은 $D=0$, 허근을 가질 조건은 $D<0$이다.

이차방정식 $x^2-2(a+2)x+2a^2-1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(a+2)^2-(2a^2-1)=0$

$a^2+4a+4-2a^2+1=0$, $-a^2+4a+5=0$

$a^2-4a-5=0$, $(a+1)(a-5)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=5$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+2x+2a+1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=1^2-(2a+1)<0$, $-2a<0$

$\therefore a>0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=5$ 답 ⑤

0486

유형 06 판별식을 이용한 이차방정식의 근의 판별

| 전략 | 이차방정식이 m의 값에 관계없이 중근을 가지면 이차방정식의 판별식 $D=0$은 m에 대한 항등식이다.

이차방정식 $x^2-2(m-a+1)x+m^2+a^2-2b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(m-a+1)^2-(m^2+a^2-2b)=0$

$m^2+a^2+1-2am-2a+2m-m^2-a^2+2b=0$

$-2am+2m-2a+2b+1=0$

$(-2a+2)m-2a+2b+1=0$

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$-2a+2=0$, $-2a+2b+1=0$

따라서 $a=1$, $b=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{a}{b}=2$ 답 ③

0487

유형 08 이차식이 완전제곱식이 될 조건

| 전략 | 이차식 ax^2+bx+c가 완전제곱식이면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=0$이므로 a, b, c 사이의 관계를 알아본다.

주어진 식을 x에 대하여 정리하면

$x^2-(a+c)x+ac+2x^2-(a+2b+c)x+ab+bc$

$\therefore 3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)$

주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식 $3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=0$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

a, b, c가 실수이므로 $a-b=0, b-c=0, c-a=0$

$\therefore a=b=c$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 정삼각형이다. 답 ⑤

Lecture

변의 길이에 따른 삼각형의 종류

$\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=c, \overline{BC}=a, \overline{CA}=b$이고 c가 가장 긴 변의 길이일 때

(1) $a=b=c$ ⇨ $\triangle ABC$는 정삼각형

(2) $a^2+b^2>c^2$ ⇨ $\triangle ABC$는 예각삼각형

(3) $a^2+b^2=c^2$ ⇨ $\triangle ABC$는 직각삼각형

(4) $a^2+b^2<c^2$ ⇨ $\triangle ABC$는 둔각삼각형

0488

유형 **09** 이차식이 두 일차식의 곱으로 인수분해될 조건

| 전략 | 주어진 식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 (주어진 식)$=0$의 판별식 D가 완전제곱식이 되어야 한다.

$2x^2+xy-y^2-x+2y+k$를 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$2x^2+(y-1)x-(y^2-2y-k)$

이때, x에 대한 이차방정식 $2x^2+(y-1)x-(y^2-2y-k)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(y-1)^2-4\cdot2\cdot\{-(y^2-2y-k)\}$

$\quad=9y^2-18y+1-8k$

가 완전제곱식이 되어야 한다.

즉, y에 대한 이차방정식 $9y^2-18y+1-8k=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\frac{D'}{4}=(-9)^2-9(1-8k)=0$

$72k+72=0 \qquad \therefore k=-1$ 답 ②

0489

유형 **10** 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값 구하기

| 전략 | 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta, \alpha\beta$의 값을 구하고, 이를 이용하여 α, β의 부호를 결정한다.

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4, \alpha\beta=2$

이때, α, β는 모두 실수이고 $\alpha+\beta<0, \alpha\beta>0$이므로

$\alpha<0, \beta<0$

$\therefore \frac{1}{|\alpha|}+\frac{1}{|\beta|}=\frac{1}{-\alpha}+\frac{1}{-\beta}=-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$

$\quad=-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{-4}{2}=2$ 답 ④

0490

유형 **12** 근과 계수의 관계를 이용하여 미정계수 구하기 – 두 이차방정식이 주어진 경우

| 전략 | 근과 계수의 관계를 이용하여 미정계수 사이의 관계식을 세운다.

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a, \alpha\beta=b$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-bx+a=0$의 두 근이 $\alpha+3, \beta+3$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+3)+(\beta+3)=b, (\alpha+3)(\beta+3)=a$

$\therefore \alpha+\beta+6=b, \alpha\beta+3(\alpha+\beta)+9=a$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $a+6=b, b+3a+9=a$

$a-b=-6, 2a+b=-9$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-5, b=1$

$\therefore ab=-5$ 답 ⑤

0491

유형 **12** 근과 계수의 관계를 이용하여 미정계수 구하기 – 두 이차방정식이 주어진 경우 + **13** 근과 계수의 관계를 이용하여 미정계수 구하기 – 근의 관계식이 주어진 경우

| 전략 | 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha, \beta, \gamma, a, b$의 관계식을 찾고 주어진 관계식을 이용한다.

이차방정식 $x^2+(a-4)x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a+4$ …… ㉠

$\alpha\beta=-1$ …… ㉡

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\gamma=-a$ …… ㉢

$\alpha\gamma=b$ …… ㉣

㉠$-$㉢을 하면 $\beta-\gamma=4$

이때, $2\alpha=\beta-\gamma$이므로 $2\alpha=4 \qquad \therefore \alpha=2$

$\alpha=2$를 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣에 대입하여 풀면

$\beta=-\frac{1}{2}, \gamma=-\frac{9}{2}, a=\frac{5}{2}, b=-9$

$\therefore 2a-b=14$ 답 ③

0492

유형 **14** 두 근의 조건이 주어진 이차방정식

| 전략 | 주어진 이차방정식의 두 근의 절댓값의 비가 $1:2$이고, 두 근의 부호가 서로 다르므로 두 근을 $\alpha, -2\alpha$로 놓는다.

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 $-\frac{6}{m}<0$ ($\because m$은 자연수)

이므로 두 근의 부호는 서로 다르다.

주어진 방정식의 두 근을 α, -2α라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-2\alpha)=-\dfrac{2m-3}{m}$ $\quad\therefore \alpha=\dfrac{2m-3}{m}$

$\alpha\cdot(-2\alpha)=-\dfrac{6}{m}$ $\quad\therefore \alpha^2=\dfrac{3}{m}$

즉, $\left(\dfrac{2m-3}{m}\right)^2=\dfrac{3}{m}$이므로

$4m^2-12m+9=3m$, $4m^2-15m+9=0$

$(4m-3)(m-3)=0$ $\quad\therefore m=\dfrac{3}{4}$ 또는 $m=3$

따라서 자연수 m의 값은 3이다.

답 ③

0493

유형 **17 이차방정식 $f(x)=0$과 $f(ax+b)=0$의 관계**

|전략| 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로 $f(4x-3)=0$의 근은 $4x-3=\alpha$, $4x-3=\beta$를 만족시키는 x의 값이 된다.

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$

즉, $f(4x-3)=0$이려면

$4x-3=\alpha$ 또는 $4x-3=\beta$

$\therefore x=\dfrac{\alpha+3}{4}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+3}{4}$

따라서 이차방정식 $f(4x-3)=0$의 두 근의 합은

$$\frac{\alpha+3}{4}+\frac{\beta+3}{4}=\frac{\alpha+\beta+6}{4}$$
$$=\frac{-2+6}{4}\ (\because \alpha+\beta=-2)$$
$$=1$$

답 ④

0494

유형 **03 절댓값 기호를 포함한 이차방정식의 풀이**

|전략| 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나눈다.

$\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$이므로 $x^2+|x+1|=|x-1|-1$

(i) $x<-1$일 때, $x^2-(x+1)=-(x-1)-1$

$x^2=1$ $\quad\therefore x=\pm1$

그런데 $x<-1$이므로 해가 없다. … ❶

(ii) $-1\le x<1$일 때, $x^2+x+1=-(x-1)-1$

$x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$ $\quad\therefore x=-1$ … ❷

(iii) $x\ge1$일 때, $x^2+x+1=x-1-1$

$x^2=-3$이므로 해가 없다. … ❸

(i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 근은 $x=-1$ … ❹

답 $x=-1$

채점 기준	배점
❶ $x<-1$일 때 x의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ $-1\le x<1$일 때 x의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $x\ge1$일 때 x의 값을 구할 수 있다.	2점
❹ x의 값을 구할 수 있다.	1점

0495

유형 **07 계수가 문자인 이차방정식의 근의 판별**

|전략| 두 이차방정식의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면 $D_1=0$일 때, D_2의 부호를 조사한다.

이차방정식 $x^2-2ax+b^2+1=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D_1이라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=(-a)^2-(b^2+1)=0$

$\therefore a^2=b^2+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠ … ❶

이차방정식 $x^2+4ax+2b+1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=(2a)^2-(2b+1)=4a^2-2b-1$$
$$=4(b^2+1)-2b-1\ (\because ㉠)$$
$$=4b^2-2b+3$$
$$=4\left(b-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{11}{4}>0\ \left(\because \left(b-\frac{1}{4}\right)^2\ge0\right)$$ … ❷

따라서 이차방정식 $x^2+4ax+2b+1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. … ❸

답 서로 다른 두 실근

채점 기준	배점
❶ a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	2점
❷ 이차방정식 $x^2+4ax+2b+1=0$의 판별식의 부호를 조사할 수 있다.	3점
❸ 이차방정식 $x^2+4ax+2b+1=0$의 근을 판별할 수 있다.	1점

0496

유형 **10 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값 구하기 + 18 이차방정식의 켤레근**

|전략| 이차방정식의 켤레근의 성질을 이용하여 a, b의 값을 구하고, $x^2+bx+a=0$에서 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근의 차의 제곱의 값을 구한다.

계수가 유리수인 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $2+\sqrt{2}$이다.

이때, 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-\sqrt{2})+(2+\sqrt{2})=-a$ $\quad\therefore a=-4$

$(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})=b$ $\quad\therefore b=2$ … ❶

따라서 이차방정식 $x^2+bx+a=0$, 즉 $x^2+2x-4=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-4$ … ❷

$$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=(-2)^2-4\cdot(-4)=20$$ … ❸

답 20

채점 기준	배점
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ $x^2+bx+a=0$에서 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근의 합과 곱을 구할 수 있다.	2점
❸ $x^2+bx+a=0$의 두 근의 차의 제곱의 값을 구할 수 있다.	2점

0497

유형 **15** 이차방정식의 작성

|전략| 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$이다.

(1) 이차방정식 $x^2+3x+4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=4$

(2) $\dfrac{\beta}{\alpha+1}$, $\dfrac{\alpha}{\beta+1}$를 두 근으로 하는 이차방정식에 대하여

$$(\text{두 근의 합})=\frac{\beta}{\alpha+1}+\frac{\alpha}{\beta+1}=\frac{\beta(\beta+1)+\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}$$
$$=\frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\alpha+\beta}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}$$
$$=\frac{(-3)^2-2\cdot4+(-3)}{4+(-3)+1}=-1$$
$$(\text{두 근의 곱})=\frac{\beta}{\alpha+1}\cdot\frac{\alpha}{\beta+1}=\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}$$
$$=\frac{4}{4+(-3)+1}=2$$

(3) $\dfrac{\beta}{\alpha+1}$, $\dfrac{\alpha}{\beta+1}$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2+x+2=0$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	4점
(2) $\dfrac{\beta}{\alpha+1}$, $\dfrac{\alpha}{\beta+1}$를 두 근으로 하는 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 구할 수 있다.	6점
(3) 이차방정식을 구할 수 있다.	2점

0498

유형 **16** 잘못 보고 푼 이차방정식

|전략| 갑은 x^2의 계수와 상수항을, 을은 x^2의 계수와 x의 계수를 바르게 보았다.

(1) 갑은 방정식의 x^2의 계수와 상수항을 바르게 보고 풀었으므로

$(\text{두 근의 곱})=\dfrac{c}{a}=2\cdot(-4)=-8 \qquad \therefore c=-8a$

(2) 을은 방정식의 x^2의 계수와 x의 계수를 바르게 보고 풀었으므로

$(\text{두 근의 합})=-\dfrac{b}{a}=(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)=2 \qquad \therefore b=-2a$

(3) 구하는 이차방정식은 $ax^2-2ax-8a=0$, 즉 $a(x^2-2x-8)=0$이므로

$a(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

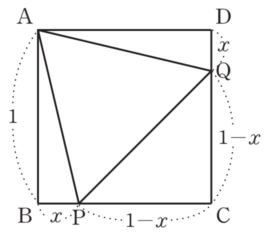
답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) c를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	3점
(2) b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	3점
(3) 이차방정식을 바르게 풀었을 때의 해를 구할 수 있다.	4점

창의·융합 교과서 속 심화문제

0499

|전략| $\overline{BP}=x$라 하고 합동인 두 삼각형을 찾아 피타고라스 정리를 이용한다.



$\triangle$ABP와 $\triangle$ADQ에서

$\overline{AB}=\overline{AD}$, $\overline{AP}=\overline{AQ}$,

$\angle B=\angle D=90^\circ$

$\therefore \triangle ABP\equiv\triangle ADQ$ (RHS 합동)

$\overline{BP}=\overline{DQ}=x$라 하면

$\overline{CP}=\overline{CQ}=1-x$

삼각형 APQ가 정삼각형이므로

$\overline{AP}=\overline{PQ}$, 즉 $\overline{AP}^2=\overline{PQ}^2$에서

$1+x^2=(1-x)^2+(1-x)^2$

$x^2-4x+1=0 \qquad \therefore x=2\pm\sqrt{3}$

이때, $0<x<1$이므로 $x=2-\sqrt{3}$

따라서 선분 BP의 길이는 $2-\sqrt{3}$이다.

답 ④

0500

|전략| 두 이차방정식의 판별식을 이용하여 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 따져 본다.

ㄱ. $b=a+c$이므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$ax^2+(a+c)x+c=0$, $(ax+c)(x+1)=0$

$\therefore x=-\dfrac{c}{a}$ 또는 $x=-1$

이때, $0<a<c$이므로 $\dfrac{c}{a}>1$

즉, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 -1보다 작은 실근을 갖는다.

ㄴ. 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$이 허근을 가지므로 판별식을 D_1이라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=b^2-ac<0$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=b^2-4ac$

이때, $0<a<c$이므로 $ac>0$

즉, $D_2=b^2-4ac<b^2-ac<0$

따라서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$도 허근을 갖는다.

ㄷ. 두 이차방정식의 공통인 실근을 α라 하면

$a\alpha^2+b\alpha+c=0$ …… ㉠

$a\alpha^2+2b\alpha+c=0$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면 $b\alpha=0$

이때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\text{두 근의 곱})=\dfrac{c}{a}$이고, $0<a<c$에서 $\dfrac{c}{a}\neq0$이므로 $\alpha\neq0$

$\therefore b=0$

$b=0$을 ㉠에 대입하여 정리하면 $\alpha^2=-\dfrac{c}{a}<-1$이므로 α는 허근이다. 이는 α가 실근이라는 조건을 만족하지 않는다.

따라서 두 이차방정식은 공통인 실근을 갖지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

0501

| 전략 | 근과 계수의 관계를 이용하여 두 실근의 합을 구하고 이를 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

이차방정식 $(n+\sqrt{n(n+1)})x^2-\sqrt{n}x-n=0$의 두 실근이 α_n, β_n이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\alpha_n+\beta_n&=\frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n(n+1)}}\\&=\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n(n+1)}-n)}{(\sqrt{n(n+1)}+n)(\sqrt{n(n+1)}-n)}\\&=\frac{\sqrt{n^2(n+1)}-n\sqrt{n}}{n(n+1)-n^2}=\frac{n\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}}{n}\\&=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\end{aligned}$$

이때, $n=1, 2, 3, \cdots, 48$을 차례로 대입하면

$\alpha_1+\beta_1=\sqrt{2}-\sqrt{1}$

$\alpha_2+\beta_2=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$\alpha_3+\beta_3=\sqrt{4}-\sqrt{3}$

⋮

$\alpha_{48}+\beta_{48}=\sqrt{49}-\sqrt{48}$

$\therefore$ (주어진 식)$=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)+\cdots+(\alpha_{48}+\beta_{48})$

$=(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+\cdots+(\sqrt{49}-\cancel{\sqrt{48}})$

$=\sqrt{49}-\sqrt{1}=7-1=6$ 답 6

0502

| 전략 | 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β 사이의 관계식을 찾고 서로 다른 두 실근 α, β의 부호를 이용한다.

이차방정식 $x^2+ax+2b=0$의 서로 다른 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=2b$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-(5a-2b)x-10b=0$의 두 근이 $|\alpha|+|\beta|$, $|\alpha\beta|$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(|\alpha|+|\beta|)+|\alpha\beta|=5a-2b$

$(|\alpha|+|\beta|)\cdot|\alpha\beta|=-10b$

이때, α, β가 서로 다른 부호이므로 $\alpha<0<\beta$라 하면

$-\alpha+\beta-\alpha\beta=5a-2b$ …… ㉡

$(-\alpha+\beta)\cdot(-\alpha\beta)=-10b$ …… ㉢

㉠의 $\alpha\beta=2b$를 ㉢에 대입하면

$(-\alpha+\beta)\cdot(-2b)=-10b$

$\therefore -\alpha+\beta=5\ (\because b\neq0)$ …… ㉣

$-\alpha+\beta=5$와 ㉠의 $\alpha\beta=2b$를 ㉡에 대입하면

$5-2b=5a-2b \qquad \therefore a=1$

㉠에서 $\alpha+\beta=-1$이므로 ㉣과 연립하여 풀면

$\alpha=-3$, $\beta=2$

㉠에서 $\alpha\beta=2b$이므로

$-3\cdot2=2b \qquad \therefore b=-3$ 답 $a=1$, $b=-3$

0503

| 전략 | 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β 사이의 관계식을 구하여 $f(x)$를 찾는다.

이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$

$\therefore \alpha=3-\beta$, $\beta=3-\alpha$

$f(\alpha)=\beta$, $f(\beta)=\alpha$에서 $f(\alpha)=3-\alpha$, $f(\beta)=3-\beta$이므로

$f(\alpha)+\alpha-3=0$, $f(\beta)+\beta-3=0$

따라서 α, β는 이차방정식 $f(x)+x-3=0$의 두 근이므로 $f(x)$의 x^2의 계수를 a라 하면

$f(x)+x-3=a(x^2-3x+1)$

$\therefore f(x)=a(x^2-3x+1)-x+3$

이때, $f(0)=2$이므로 $a+3=2 \qquad \therefore a=-1$

따라서 $f(x)=-(x^2-3x+1)-x+3=-x^2+2x+2$이므로

$f(2)=-2^2+2\cdot2+2=2$ 답 2

Lecture

x에 대한 이차식 $f(x)$에 대하여 $(a\neq0)$

(1) $f(\alpha)=k\alpha$, $f(\beta)=k\beta \Rightarrow f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)+kx$

(2) $f(\alpha)=k\beta$, $f(\beta)=k\alpha \Rightarrow f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)+k(\alpha+\beta-x)$

(3) $f(\alpha)=\alpha^2$, $f(\beta)=\beta^2 \Rightarrow f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)+x^2$

으로 놓고 문제를 푼다.

0504

| 전략 | 이차방정식의 한 근이 α이면 다른 한 근은 $\overline{\alpha}$임을 알고, α^3이 실수가 되기 위한 조건과 근과 계수의 관계를 이용하여 p에 대한 이차방정식을 세운다.

계수가 실수인 이차방정식 $x^2-px+p+3=0$의 한 허근이 α이므로 다른 한 근은 $\overline{\alpha}$이다.

$\alpha=a+bi$(a는 실수, $b\neq0$)라 하면 $\overline{\alpha}=a-bi$이고, 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=(a+bi)+(a-bi)=2a=p \qquad \therefore a=\dfrac{p}{2}$ …… ㉠

(두 근의 곱)$=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=p+3$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\left(\dfrac{p}{2}\right)^2+b^2=p+3$

$\therefore b^2=-\dfrac{p^2}{4}+p+3$ …… ㉢

한편,

$\alpha^3=(a+bi)^3=a^3+3a^2bi+3a(bi)^2+(bi)^3$

$=a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i$

$=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i$

이고, α^3이 실수가 되려면 허수부분 $3a^2b-b^3$이 0이어야 한다.

즉, $3a^2b-b^3=b(3a^2-b^2)=0$

이때, $b\neq0$이므로 $3a^2-b^2=0 \qquad \therefore 3a^2=b^2$

㉠, ㉢을 $3a^2=b^2$에 대입하면 $3\cdot\left(\dfrac{p}{2}\right)^2=-\dfrac{p^2}{4}+p+3$

$\therefore p^2-p-3=0$

따라서 이차방정식 $p^2-p-3=0$의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 p의 값의 곱은 -3이다. 답 ②

본책 84~97쪽

6 | 이차방정식과 이차함수

STEP 1 개념 마스터

0505

이차방정식 $2x^2+8x=0$에서 $2x(x+4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-4$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $0, -4$이다.

답 $0, -4$

0506

이차방정식 $-x^2+5x-4=0$에서 $x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=4$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $1, 4$이다.

답 $1, 4$

0507

이차방정식 $-3x^2+x+2=0$에서 $3x^2-x-2=0$

$(3x+2)(x-1)=0$ $\therefore x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=1$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $-\frac{2}{3}, 1$이다.

답 $-\frac{2}{3}, 1$

0508

이차방정식 $x^2+7x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=7^2-4\cdot1\cdot(-2)=57>0$

이므로 방정식 $x^2+7x-2=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 2개이다. 답 2

0509

이차방정식 $2x^2-3x+6=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot6=-39<0$

이므로 방정식 $2x^2-3x+6=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 없다. 답 0

0510

이차방정식 $-x^2+6x-9=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-(-1)\cdot(-9)=0$

이므로 방정식 $-x^2+6x-9=0$은 중근을 갖는다.

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 1개이다. 답 1

0511

이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot k=4-k$

(1) $4-k>0$ $\therefore k<4$

(2) $4-k=0$ $\therefore k=4$

(3) $4-k<0$ $\therefore k>4$

답 (1) $k<4$ (2) 4 (3) $k>4$

0512

이차방정식 $x^2-6x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\cdot(-k)=9+k$

주어진 이차함수의 그래프가 x축과 만나려면 $D\geq0$이어야 하므로

$9+k\geq0$ $\therefore k\geq-9$ 답 $k\geq-9$

0513

$x^2-5x+1=-x-3$에서 $x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$ $\therefore x=2$ 답 2

0514

$x^2-x-4=-2x+2$에서 $x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=2$ 답 $-3, 2$

0515

$-x^2+7x+9=4x-1$에서

$-x^2+3x+10=0$, $x^2-3x-10=0$

$(x+2)(x-5)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=5$ 답 $-2, 5$

0516

이차방정식 $x^2+2x-1=x-3$, 즉 $x^2+x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot1\cdot2=-7<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

답 만나지 않는다.

0517

이차방정식 $2x^2-3x-2=-x+5$, 즉 $2x^2-2x-7=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-2\cdot(-7)=15>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다. 답 서로 다른 두 점에서 만난다.

0518

이차방정식 $-x^2-7x+4=-3x+8$, 즉 $x^2+4x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot4=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다.(접한다.) 답 한 점에서 만난다.(접한다.)

0519

이차방정식 $x^2+7x-3=x+k$, 즉 $x^2+6x-k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=3^2-1\cdot(-k-3)=k+12$$

(1) $k+12>0 \qquad \therefore k>-12$

(2) $k+12=0 \qquad \therefore k=-12$

(3) $k+12<0 \qquad \therefore k<-12$

답 (1) $k>-12$ (2) -12 (3) $k<-12$

0520

이차방정식 $2x^2-x+2=x+k$, 즉 $2x^2-2x+2-k=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-2\cdot(2-k)=2k-3$$

주어진 이차함수의 그래프와 직선이 만나려면 $D\geq 0$이어야 하므로

$2k-3\geq 0 \qquad \therefore k\geq\frac{3}{2}$

답 $k\geq\frac{3}{2}$

0521

(1) $y=2x^2-4x+9=2(x-1)^2+7$

(2) 최솟값은 7이고, 그때의 x의 값은 1이다.

답 (1) $y=2(x-1)^2+7$ (2) 최솟값 : 7, x의 값 : 1

0522

(1) $y=-\frac{1}{2}x^2-2x+3=-\frac{1}{2}(x+2)^2+5$

(2) 최댓값은 5이고, 그때의 x의 값은 -2이다.

답 (1) $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+5$ (2) 최댓값 : 5, x의 값 : -2

0523

$y=x^2-6x+3=(x-3)^2-6$

따라서 $x=3$일 때 최솟값은 -6이고, 최댓값은 없다.

답 최솟값 : -6, 최댓값 : 없다.

0524

$y=-x^2+4x-7=-(x-2)^2-3$

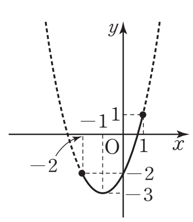
따라서 $x=2$일 때 최댓값은 -3이고, 최솟값은 없다.

답 최댓값 : -3, 최솟값 : 없다.

0525

$f(x)=x^2+2x-2=(x+1)^2-3$

이므로 $-2\leq x\leq 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



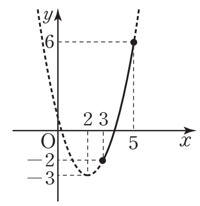
따라서 $f(-2)=-2$, $f(-1)=-3$, $f(1)=1$이므로 $f(x)$의 최댓값은 1, 최솟값은 -3이다.

답 최댓값 : 1, 최솟값 : -3

0526

$f(x)=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$

이므로 $3\leq x\leq 5$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



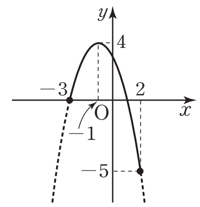
따라서 $f(3)=-2$, $f(5)=6$이므로 $f(x)$의 최댓값은 6, 최솟값은 -2이다.

답 최댓값 : 6, 최솟값 : -2

0527

$f(x)=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$

이므로 $-3\leq x\leq 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



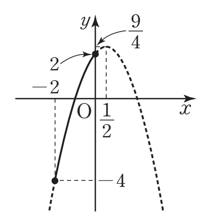
따라서 $f(-3)=0$, $f(-1)=4$, $f(2)=-5$이므로 $f(x)$의 최댓값은 4, 최솟값은 -5이다.

답 최댓값 : 4, 최솟값 : -5

0528

$$f(x)=-x^2+x+2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

이므로 $-2\leq x\leq 0$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $f(-2)=-4$, $f(0)=2$이므로 $f(x)$의 최댓값은 2, 최솟값은 -4이다.

답 최댓값 : 2, 최솟값 : -4

STEP 2 유형 마스터

0529

| 전략 | 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=0$의 실근과 같다.

이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -1, 2이므로 -1, 2는 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+2=-\frac{a}{2}$, $(-1)\cdot 2=\frac{b}{2} \qquad \therefore a=-2, b=-4$

$\therefore ab=8$

답 8

다른 풀이 이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프가 두 점 $(-1,\ 0)$, $(2,\ 0)$을 지나므로 이차함수의 식은

$y=2(x+1)(x-2) \qquad \therefore y=2x^2-2x-4$

따라서 $a=-2$, $b=-4$이므로 $ab=8$

0530

이차함수 $y=x^2-ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 2, 3이므로 2, 3은 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$2+3=a$, $2\cdot 3=b \qquad \therefore a=5, b=6$

이차함수 $y=x^2-bx+a$, 즉 $y=x^2-6x+5$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-6x+5=0$의 근이므로

$(x-1)(x-5)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=5$

따라서 두 점 사이의 거리는 $5-1=4$ 답 ④

0531

이차함수 $y=-x^2+x+k$의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$ $(\alpha>\beta)$이라 하면 이차방정식 $-x^2+x+k=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-k$ ······ ㉠

이때, 주어진 이차함수의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 4이므로 $\alpha-\beta=4$

양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=16$

$\therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $1^2+4k=16$

$\therefore k=\dfrac{15}{4}$ 답 $\dfrac{15}{4}$

다른 풀이 이차방정식 $-x^2+x+k=0$의 두 근을 α, $\alpha+4$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+4)=1$ ······ ㉠

$\alpha(\alpha+4)=-k$ ······ ㉡

㉠에서 $2\alpha=-3 \quad \therefore \alpha=-\dfrac{3}{2}$

$\alpha=-\dfrac{3}{2}$을 ㉡에 대입하면

$\left(-\dfrac{3}{2}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{2}+4\right)=-k,\ -\dfrac{15}{4}=-k$

$\therefore k=\dfrac{15}{4}$

0532

꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 4)$이므로 주어진 이차함수를

$y=a(x-1)^2+4$라 하면

$y=a(x-1)^2+4=ax^2-2ax+a+4$ ······ ㉠

이때, 주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이고 $\overline{AB}=4$이므로 두 점 A, B의 x좌표는 -1, 3이다.

-1, 3은 이차방정식 $ax^2-2ax+a+4=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1)\cdot3=\dfrac{a+4}{a},\ a+4=-3a,\ 4a=-4 \quad \therefore a=-1$ ··· ❶

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $y=-x^2+2x+3$

따라서 $b=2$, $c=3$이므로 ··· ❷

$abc=(-1)\cdot2\cdot3=-6$ ··· ❸

답 -6

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ b, c의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ abc의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이고 $\overline{AB}=4$이므로 두 점 A, B의 x좌표는 -1, 3이다.

이차함수의 식을 $y=a(x+1)(x-3)$으로 놓으면 이 이차함수의 그래프가 점 $(1,\ 4)$를 지나므로

$4=-4a \quad \therefore a=-1$

즉, $y=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3$이므로

$b=2$, $c=3$

$\therefore abc=(-1)\cdot2\cdot3=-6$

0533

| 전략 | 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 할 때, $D>0$이다.

이차함수 $y=x^2+2kx+k^2-3k+6$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2+2kx+k^2-3k+6=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=k^2-(k^2-3k+6)>0,\ 3k-6>0 \quad \therefore k>2$ 답 ④

0534

이차함수 $y=x^2+ax+2a-3$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+2a-3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4(2a-3)=0 \quad \therefore a^2-8a+12=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 8이다.

답 8

0535

이차함수 $y=x^2-2bx-a^2+12$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2-2bx-a^2+12=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=b^2-(-a^2+12)<0,\ a^2+b^2-12<0$

$\therefore a^2+b^2<12$ ······ ㉠

㉠을 만족하는 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$의 6개이다. 답 ③

0536

이차함수 $y=x^2-2(a+k)x+k^2-2k+b$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $x^2-2(a+k)x+k^2-2k+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(a+k)^2-(k^2-2k+b)=0$

$a^2+2ak+k^2-k^2+2k-b=0$

$\therefore 2(a+1)k+a^2-b=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$a+1=0,\ a^2-b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$

$\therefore ab=-1$ 답 ②

Lecture

항등식의 성질

(1) $ax+b=0$이 x에 대한 항등식일 때 ⇨ $a=0$, $b=0$

(2) $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식일 때 ⇨ $a=0$, $b=0$, $c=0$

(3) $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식일 때

⇨ $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$

0537

| 전략 | 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 합은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표의 합이다.

$f(x)-g(x)=0$에서 $f(x)=g(x)$ ······ ㉠

㉠을 만족시키는 근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이므로

$x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 모든 근의 합은 0이다. 답 0

0538

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-1,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서 만나므로

$f(x)=a(x+1)(x-3)\ (a>0)$이라 하면

$f(x+5)=a(x+5+1)(x+5-3)$

$=a(x+6)(x+2)$

따라서 이차방정식 $f(x+5)=0$의 두 실근은 -6, -2이므로 그 합은 -8이다. 답 ②

0539

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점 $(x_1,\ 0)$, $(x_2,\ 0)$에서 만나므로

$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$라 하면

$f\left(\frac{x-2}{3}\right)=a\left(\frac{x-2}{3}-x_1\right)\left(\frac{x-2}{3}-x_2\right)$

$=\frac{1}{9}a(x-2-3x_1)(x-2-3x_2)$

따라서 이차방정식 $f\left(\frac{x-2}{3}\right)=0$의 두 실근은 $2+3x_1$, $2+3x_2$이므로 그 합은

$(2+3x_1)+(2+3x_2)=4+3(x_1+x_2)$

$=4+3\cdot(-2)=-2$ 답 -2

0540

| 전략 | 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 만나지 않으려면 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이다.

이차함수 $y=x^2-3x+3$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2-3x+3=-x+k$, 즉 $x^2-2x-k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-k+3)<0$, $k-2<0$ $\quad\therefore k<2$

따라서 정수 k의 최댓값은 1이다. 답 1

0541

이차함수 $y=x^2+2kx+k$의 그래프와 직선 $y=2x-5$가 접하므로 이차방정식 $x^2+2kx+k=2x-5$, 즉 $x^2+2(k-1)x+k+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k+5)=0$, $k^2-3k-4=0$

$(k+1)(k-4)=0$ $\quad\therefore k=-1$ 또는 $k=4$

그런데 $k>0$이므로 $k=4$ 답 ④

0542

이차함수 $y=x^2+2ax+a^2$의 그래프와 직선 $y=2x+1$이 적어도 한 점에서 만나야 하므로 이차방정식 $x^2+2ax+a^2=2x+1$, 즉 $x^2+2(a-1)x+a^2-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-(a^2-1)\ge0$, $-2a+2\ge0$

$\therefore a\le1$

따라서 실수 a의 최댓값은 1이다. 답 1

0543

이차함수 $y=(k-1)x^2+2kx+3$의 그래프와 직선 $y=2x-k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 이차방정식

$(k-1)x^2+2kx+3=2x-k$, 즉

$(k-1)x^2+2(k-1)x+3+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k-1)(3+k)>0$

$-4k+4>0$ $\quad\therefore k<1$

따라서 구하는 a의 값은 1이다. 답 ①

0544

| 전략 | 직선 $y=-3x-\frac{1}{2}$에 평행한 직선의 기울기는 -3이므로 직선의 방정식을 $y=-3x+b$로 놓고 이차함수의 식과 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식이 0임을 이용한다.

직선 $y=ax+b$가 직선 $y=-3x-\frac{1}{2}$에 평행하므로

$a=-3$

직선 $y=-3x+b$가 이차함수 $y=x^2-4x+2$의 그래프와 접하므로 이차방정식 $x^2-4x+2=-3x+b$, 즉 $x^2-x-b+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4(-b+2)=0$, $4b-7=0$ $\quad\therefore b=\frac{7}{4}$

$\therefore ab=-\frac{21}{4}$ 답 $-\frac{21}{4}$

참고 두 직선 $y=ax+b$, $y=a'x+b'$이 평행하면 ⇨ $a=a'$, $b\ne b'$

0545

직선 $y=-x+1$을 y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-x+m+1$

이 직선이 이차함수 $y=x^2-3x$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-3x=-x+m+1$, 즉 $x^2-2x-m-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-m-1)=0,\ m+2=0 \qquad \therefore m=-2$ 답 ②

0546

점 (2, 1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y-1=m(x-2) \qquad \therefore y=mx-2m+1$

이 직선이 이차함수 $y=-x^2+2x-3$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-x^2+2x-3=mx-2m+1$, 즉 $x^2+(m-2)x-2m+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(m-2)^2-4(-2m+4)=0,\ m^2+4m-12=0$

$(m+6)(m-2)=0 \qquad \therefore m=-6$ 또는 $m=2$

따라서 두 직선의 기울기는 -6, 2이다. 답 -6, 2

0547

직선 $y=mx+n$이 이차함수 $y=x^2-2ax+a^2+2a-1$의 그래프와 접하므로 이차방정식 $x^2-2ax+a^2+2a-1=mx+n$, 즉

$x^2-(2a+m)x+a^2+2a-n-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2a+m)^2-4(a^2+2a-n-1)=0$

$\therefore (4m-8)a+m^2+4n+4=0$ … ❶

이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$4m-8=0,\ m^2+4n+4=0$

두 식을 연립하여 풀면 $m=2,\ n=-2$ … ❷

$\therefore m+n=0$ … ❸

답 0

채점 기준	비율
❶ 직선이 주어진 이차함수의 그래프와 접하기 위한 조건을 이용하여 식을 세울 수 있다.	50 %
❷ m, n의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0548

| 전략 | 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같다.

이차방정식 $x^2-2x+a=bx+2$, 즉 $x^2-(b+2)x+a-2=0$의 두 근이 -1, 4이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+4=b+2$에서 $b=1$

$(-1)\cdot 4=a-2$에서 $a=-2$

$\therefore a+b=-1$ 답 -1

0549

이차방정식 $-x^2+3x+2=ax+b$, 즉 $x^2+(a-3)x+b-2=0$의 두 근이 -1, 6이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+6=-a+3$에서 $a=-2$

$(-1)\cdot 6=b-2$에서 $b=-4$

$\therefore ab=8$ 답 8

0550

이차방정식 $x^2+b=ax$, 즉 $x^2-ax+b=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이고 a, b는 유리수이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=a$에서 $a=4$

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=b$에서 $b=1$

$\therefore a-b=3$ 답 ③

Lecture

이차방정식의 켤레근

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 a, b, c가 유리수일 때, $p+q\sqrt{m}$이 근이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다. (단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)

0551

이차함수 $y=x^2+2x-4$의 그래프와 직선 $y=-2x+k$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만나므로 두 점 A, B의 x좌표는 이차방정식

$x^2+2x-4=-2x+k$, 즉 $x^2+4x-k-4=0$ ⋯⋯ ㉠

의 두 근과 같다.

이때, 점 A의 x좌표가 -5이므로 ㉠에서

$25-20-k-4=0 \qquad \therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면 $x^2+4x-5=0$

$(x+5)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-5$ 또는 $x=1$

따라서 점 B의 x좌표는 1이다. 답 1

0552

| 전략 | 이차함수 $y=a(x-m)^2+n$에서 $a>0$이면 최댓값은 없고, 최솟값은 n이며, $a<0$이면 최댓값은 n이고, 최솟값은 없다.

$y=-2x^2+4x=-2(x-1)^2+2$이므로

$x=1$일 때 최댓값 2를 갖는다. $\qquad \therefore M=2$

$y=\frac{1}{2}x^2-4x+3=\frac{1}{2}(x-4)^2-5$이므로

$x=4$일 때 최솟값 -5를 갖는다. $\qquad \therefore m=-5$

$\therefore M-m=2-(-5)=7$ 답 7

0553

x^2의 계수가 음수일 때, 이차함수는 최댓값을 갖는다.

① $y=-x^2+4x-1=-(x-2)^2+3$이므로 $x=2$일 때 최댓값 3을 갖는다.

② $x=0$일 때 최댓값 -2를 갖는다.
③ $x=2$일 때 최댓값 -1을 갖는다.
④, ⑤ x^2의 계수가 양수이므로 최댓값은 없다.
따라서 가장 큰 최댓값을 갖는 이차함수는 ①이다. 답 ①

0554
| 전략 | 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=m$이면 이차함수의 식을 $y=a(x-m)^2+n$으로 놓는다.
주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=3$이므로
이차함수의 식을 $y=\frac{1}{2}(x-3)^2+n$으로 놓으면
$\frac{1}{2}(x-3)^2+n=\frac{1}{2}x^2-(k+1)x+2$에서
$\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{9}{2}+n=\frac{1}{2}x^2-(k+1)x+2$
즉, $-(k+1)=-3$, $\frac{9}{2}+n=2$
$\therefore k=2,\ n=-\frac{5}{2}$
따라서 주어진 이차함수는 $x=3$일 때 최솟값 $-\frac{5}{2}$를 갖는다.
답 $-\frac{5}{2}$

0555
$y=2x^2-4x+k=2(x-1)^2+k-2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ k-2)$
이때, 이 꼭짓점이 직선 $y=-x-3$ 위에 있으므로
$k-2=-1-3 \qquad \therefore k=-2$
따라서 $y=2(x-1)^2-4$의 최솟값은 $x=1$일 때 -4이므로 최솟값과 상수 k의 값의 합은 -6이다. 답 -6

0556
| 전략 | 이차함수 $y=a(x-m)^2+n\ (a<0)$은 $x=m$에서 최댓값 n을 갖는다.
$y=-x^2+2kx+2k+3$
$\ \ =-(x-k)^2+k^2+2k+3$
이때, 이 이차함수의 최댓값이 18이므로
$k^2+2k+3=18$
$k^2+2k-15=0$, $(k+5)(k-3)=0$
$\therefore k=3\ (\because k>0)$ 답 3

0557
$y=ax^2+8ax+7=a(x+4)^2-16a+7$
이때, 이 이차함수의 최솟값이 -1이므로
$-16a+7=-1 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0558
$y=\frac{1}{3}x^2-4x+3+k=\frac{1}{3}(x-6)^2-9+k$이므로
$x=6$일 때 최솟값 $-9+k$를 갖는다.
$y=-4x^2+8x-7-2k=-4(x-1)^2-3-2k$이므로
$x=1$일 때 최댓값 $-3-2k$를 갖는다.
이때, 최솟값과 최댓값이 같으므로 $-9+k=-3-2k$
$3k=6 \qquad \therefore k=2$ 답 ①

0559
$y=2x^2+2ax=2\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{2}$
이때, 이 이차함수의 최솟값이 -8이므로
$-\frac{a^2}{2}=-8$, $a^2=16 \qquad \therefore a=-4\ (\because a<0)$
따라서 $y=2x^2-8x$의 그래프가 점 $(-1,\ b)$를 지나므로
$b=2\cdot(-1)^2-8\cdot(-1)=10$
$\therefore a+b=6$ 답 6

0560
| 전략 | 이차함수 $f(x)$가 $x=m$에서 최댓값 n을 가지면 $f(x)=a(x-m)^2+n\ (a<0)$으로 놓는다.
이차함수 $y=ax^2+bx-3$이 $x=2$에서 최댓값 5를 가지므로
$y=a(x-2)^2+5=ax^2-4ax+4a+5$
즉, $b=-4a$, $-3=4a+5$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=8$
$\therefore a+b=6$ 답 6

0561
이차함수 $f(x)=-x^2+ax+b$의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이고, 최댓값이 3이므로 $x=1$에서 최댓값 3을 갖는다.
즉, $f(x)=-(x-1)^2+3=-x^2+2x+2$에서
$a=2$, $b=2$
$\therefore f(2)=-4+4+2=2$
$\therefore a+b+f(2)=6$ 답 ④

0562
이차함수 $y=2x^2-4(a+1)x+1$이 $x=k$에서 최솟값 -17을 가지므로
$y=2(x-k)^2-17=2x^2-4kx+2k^2-17$
즉, $-4k=-4(a+1)$ ⋯⋯ ㉠, $2k^2-17=1$ ⋯⋯ ㉡
㉡에서 $2k^2=18$, $k^2=9 \qquad \therefore k=3\ (\because k>0)$
$k=3$을 ㉠에 대입하면
$-4\cdot 3=-4(a+1) \qquad \therefore a=2$
$\therefore a-k=-1$ 답 ②

0563

|전략| 먼저 이차함수의 식을 $f(x)=a(x-1)^2+1$로 놓고 $f(2)=3$을 이용하여 a의 값을 구한다.

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 $x=1$에서 최솟값 1을 가지므로

$f(x)=a(x-1)^2+1$ ······ ㉠

$f(2)=3$에서 $a+1=3$ $\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$f(x)=2(x-1)^2+1=2x^2-4x+3$이므로

$b=-4$, $c=3$

$\therefore a-b+c=2-(-4)+3=9$ 답 ⑤

0564

구하는 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=3$이고, 최솟값이 5이므로 $x=3$에서 최솟값 5를 갖는다.

즉, 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 5)$이다.

이차함수의 식을 $y=a(x-3)^2+5$로 놓으면

$y=3x^2+2$의 그래프와 폭이 같으므로 $a=3$

$\therefore y=3(x-3)^2+5=3x^2-18x+32$

따라서 $b=-18$, $c=32$이므로

$a+b+c=17$ 답 17

0565

이차함수 $f(x)=-x^2+ax+b$에 대하여 $f(-1)=f(3)$이므로

$-1-a+b=-9+3a+b$

$-4a=-8$ $\therefore a=2$ ··· ❶

$f(x)=-x^2+2x+b=-(x-1)^2+b+1$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 $b+1$을 갖는다.

즉, $\alpha=1$, $b+1=2$에서 $\alpha=1$, $b=1$ ··· ❷

$\therefore a+\alpha+b=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ α, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+\alpha+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0566

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 -1, 3이므로 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 -1, 3이다.

$\therefore y=a(x+1)(x-3)=a(x^2-2x-3)$

$=a(x-1)^2-4a$

이때, 이 이차함수의 최댓값이 12이므로

$-4a=12$ $\therefore a=-3$

따라서 $y=-3(x^2-2x-3)=-3x^2+6x+9$이므로

$b=6$, $c=9$

$\therefore ab+c=-9$ 답 -9

다른 풀이 주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{-1+3}{2}=1$이고, 최댓값이 12이므로 $x=1$에서 최댓값 12를 갖는다.

즉, 이차함수의 식을 $y=a(x-1)^2+12$로 놓을 수 있다.

이때, 이 이차함수의 그래프가 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$0=4a+12$ $\therefore a=-3$

따라서 $y=-3(x-1)^2+12=-3x^2+6x+9$이므로

$b=6$, $c=9$

$\therefore ab+c=-9$

Lecture

- 이차함수의 그래프가 x축과 두 점 $(m,\ 0)$, $(n,\ 0)$에서 만난다.
  ⇨ 축의 방정식 $x=\frac{m+n}{2}$, 꼭짓점의 x좌표 : $\frac{m+n}{2}$
- 이차함수의 최댓값 또는 최솟값이 k이다. ⇨ 꼭짓점의 y좌표 : k

0567

|전략| 주어진 이차함수의 식을 $f(x)=a(x-m)^2+n\ (a<0)$ 꼴로 변형한 후 n에 대하여 최솟값을 구한다.

$y=-x^2+4kx+8k=-(x-2k)^2+4k^2+8k$

이므로 $x=2k$에서 최댓값 $4k^2+8k$를 갖는다.

$\therefore M=4k^2+8k=4(k+1)^2-4$

따라서 M은 $k=-1$일 때 최솟값 -4를 갖는다. 답 -4

0568

$y=x^2+2ax+2a+5=(x+a)^2-a^2+2a+5$

이므로 $x=-a$일 때 최솟값 $-a^2+2a+5$를 갖는다.

$\therefore f(a)=-a^2+2a+5=-(a-1)^2+6$

따라서 $f(a)$는 $a=1$일 때 최댓값 6을 갖는다. 답 ③

0569

|전략| 주어진 이차함수의 식을 $f(x)=a(x-m)^2+n$ 꼴로 변형한 후 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속하는지 확인한다.

$f(x)=x^2+6x+k=(x+3)^2+k-9$

그래프의 꼭짓점의 x좌표 -3이 $-2\le x\le 1$에 속하지 않으므로

$f(-2)$, $f(1)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

$f(-2)=k-8$, $f(1)=k+7$이므로 최솟값은 $k-8$, 최댓값은 $k+7$이다.

이때, 최솟값이 -2이므로

$k-8=-2$ $\therefore k=6$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $k+7=6+7=13$ 답 ⑤

0570

$y=-2x^2+4x+k-1=-2(x-1)^2+k+1$

그래프의 꼭짓점의 x좌표 1이 $-3\le x\le 2$에 속하므로 $x=1$일 때 최댓값 $k+1$을 갖는다.

이때, 최댓값이 5이므로

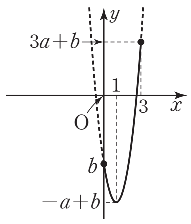
$k+1=5$ $\therefore k=4$ 답 ⑤

0571

$f(x)=ax^2-2ax+b$라 하면

$f(x)=a(x-1)^2-a+b$이므로

$0\le x\le 3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 $3a+b$, $x=1$일 때 최솟값 $-a+b$를 가지므로

$3a+b=4$, $-a+b=-8$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-5$ … ❶

$\therefore a+b=-2$ … ❷

답 -2

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	80 %
❷ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0572

$f(x)=x^2-2|x|+3$이라 하면

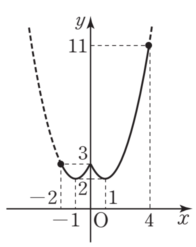
(i) $-2\le x<0$일 때

$f(x)=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$

(ii) $0\le x\le 4$일 때

$f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$

(i), (ii)에서 $-2\le x\le 4$일 때 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 $M=11$, $x=\pm1$일 때 최솟값 $m=2$를 갖는다.



$\therefore Mm=11\cdot 2=22$

답 ⑤

Lecture

$y=x^2-2|x|+3$의 그래프는 $y=x^2-2x+3$의 그래프에서 $x\ge0$인 부분은 그대로 두고, $x<0$인 부분은 $x\ge0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

0573

$y=-x^2+2kx=-(x-k)^2+k^2$

(i) $k<1$일 때

꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속하지 않으므로 주어진 함수는 $x=1$에서 최댓값 $-1+2k$를 갖는다.

즉, $-1+2k=4$ $\therefore k=\dfrac{5}{2}$

이때, $k<1$이므로 조건을 만족시키는 k의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $k\ge1$일 때

꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속하므로 주어진 함수는 $x=k$에서 최댓값 k^2을 갖는다.

즉, $k^2=4$ $\therefore k=\pm2$

이때, $k\ge1$이므로 $k=2$

(i), (ii)에서 $k=2$

답 2

0574

| 전략 | $x^2-2x+3=t$로 놓고 주어진 함수를 t에 대한 이차함수로 나타낸다. 이때, t의 값의 범위에 주의한다.

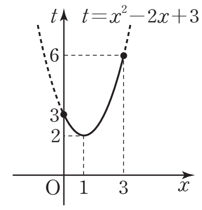
$x^2-2x+3=t$로 놓으면

$t=x^2-2x+3$

$=(x-1)^2+2$

$0\le x\le 3$이므로 오른쪽 그림에서

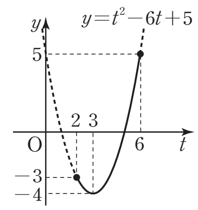
$2\le t\le 6$



이때, 주어진 함수는

$y=t^2-6t+5=(t-3)^2-4$

$2\le t\le 6$이므로 오른쪽 그림에서 $t=6$일 때 최댓값 $M=5$, $t=3$일 때 최솟값 $m=-4$를 갖는다.



$\therefore M+m=1$

답 1

0575

$y=(x^2-2x)^2+2x^2-4x=(x^2-2x)^2+2(x^2-2x)$

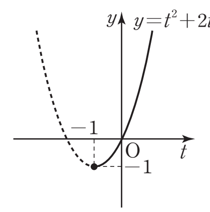
$x^2-2x=t$로 놓으면

$t=x^2-2x=(x-1)^2-1$이므로 $t\ge-1$

이때, 주어진 함수는

$y=t^2+2t=(t+1)^2-1$

$t\ge-1$이므로 오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최솟값 -1을 갖는다.



$t=-1$에서 $x^2-2x=-1$

$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$ $\therefore x=1$

따라서 $a=1$, $b=-1$이므로 $a-b=2$

답 ②

0576

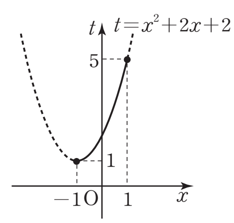
$x^2+2x+2=t$로 놓으면

$t=x^2+2x+2$

$=(x+1)^2+1$

$-1\le x\le 1$이므로 오른쪽 그림에서

$1\le t\le 5$



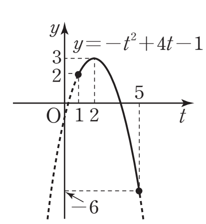
이때, 주어진 함수는

$y=-t^2+4(t-3)+11$

$=-t^2+4t-1$

$=-(t-2)^2+3$

$1\le t\le 5$이므로 오른쪽 그림에서 $t=2$일 때 최댓값 3, $t=5$일 때 최솟값 -6을 갖는다.



따라서 최댓값과 최솟값의 곱은

$3\cdot(-6)=-18$

답 -18

0577

$x^2+2x+2=t$로 놓으면

$t=x^2+2x+2=(x+1)^2+1$이므로 $t\ge1$

이때, 주어진 함수는

$y=t^2-8(t-2)+k-3=t^2-8t+k+13$

$=(t-4)^2+k-3\ (t\geq 1)$

따라서 $t=4$일 때 최솟값 -5를 가지므로

$k-3=-5 \qquad \therefore k=-2$ 답 ②

0578

|전략| 주어진 식을 $a(x-m)^2+b(y-n)^2+k$ 꼴로 변형한 후 (실수)$^2\geq 0$임을 이용한다.

$2x^2+y^2-8x+4y+9=2(x-2)^2+(y+2)^2-3$

이때, x, y가 실수이므로

$(x-2)^2\geq 0$, $(y+2)^2\geq 0$

$\therefore 2x^2+y^2-8x+4y+9\geq -3$

따라서 $x=2$, $y=-2$일 때 주어진 식의 최솟값은 -3이다. 답 ①

0579

$-x^2-y^2-4x+6y-12$

$=-(x^2+4x+4)-(y^2-6y+9)+1$

$=-(x+2)^2-(y-3)^2+1$

이때, x, y가 실수이므로

$(x+2)^2\geq 0$, $(y-3)^2\geq 0$

$\therefore -x^2-y^2-4x+6y-12\leq 1$ $-(x+2)^2\leq 0$, $-(y-3)^2\leq 0$

따라서 $x=-2$, $y=3$일 때 주어진 식의 최댓값은 1이므로

$\alpha=-2$, $\beta=3$, $\gamma=1$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma=2$ 답 2

0580

|전략| $y=2x-1$을 주어진 이차식에 대입하여 x에 대한 이차식으로 나타낸 후 최댓값과 최솟값을 구한다.

$2x-y-1=0$에서 $y=2x-1$

$y=2x-1$을 x^2-xy에 대입하면

$x^2-xy=x^2-x(2x-1)=-x^2+x$

$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

이때, $1\leq x\leq 2$이므로 $x=1$일 때 최댓값 0, $x=2$일 때 최솟값 -2를 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $0+(-2)=-2$ 답 ①

0581

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 직선 $x+2y+3=0$ 위를 움직이므로

$a+2b+3=0$에서 $a=-2b-3$

$a=-2b-3$을 a^2+2b^2에 대입하면

$a^2+2b^2=(-2b-3)^2+2b^2=6b^2+12b+9$

$=6(b+1)^2+3$

따라서 $b=-1$일 때 최솟값 3을 갖는다. 답 ①

0582

|전략| 점 B의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하고, 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 a에 대한 이차식으로 나타낸다.

이차방정식 $-x^2+6x=0$에서 $-x(x-6)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=6$

따라서 이차함수 $y=-x^2+6x$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 0, 6이다.

점 $\mathrm{B}(a,\ 0)\ (0<a<3)$이라 하면

$\mathrm{A}(a,\ -a^2+6a)$, $\mathrm{C}(6-a,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=-a^2+6a$, $\overline{\mathrm{BC}}=6-2a$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$2(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}})=2\{(-a^2+6a)+(6-2a)\}$

$=-2a^2+8a+12$

$=-2(a-2)^2+20$

이때, $0<a<3$이므로 $a=2$일 때 최댓값 20을 갖는다.

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 20이다. 답 ④

0583

입장료를 $100x$원 올릴 때의 수입을 y원이라 하면

(수입)=(입장료)×(관람객의 수)이므로

$y=(3000+100x)(2000-50x)$

$=5000(30+x)(40-x)$

$=5000(-x^2+10x+1200)$

$=5000\{-(x-5)^2+1225\}$

이때, $0\leq x\leq 40$이므로 $x=5$일 때 y가 최대이다. $2000-50x\geq 0$에서 $x\leq 40$

따라서 수입을 최대로 하는 입장료는

$3000+100\cdot 5=3500$(원) 답 ⑤

0584

$h(t)=-5t^2+20t+25=-5(t-2)^2+45$

즉, $t=2$일 때 최댓값은 45이므로 공이 최고 높이에 도달하는 것은 2초 후이다.

공이 지면에 떨어지는 것은 $h(t)=0$일 때이므로

$-5t^2+20t+25=0$에서

$t^2-4t-5=0$, $(t+1)(t-5)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=5$

그런데 $t>0$이므로 공이 지면에 떨어지는 것은 5초 후이다.

따라서 이 공은 최고 높이에 도달한 지 $5-2=3$(초) 후에 지면에 떨어진다. 답 3초 후

0585

가축 우리의 밑면에서 직각을 낀 한 변의 길이를 x m라 하면 다른 한 변의 길이는 $(120-x)$ m이다.

가축 우리의 밑면의 넓이를 y m^{2}라 하면

$y=\frac{1}{2}x(120-x)=-\frac{1}{2}x^2+60x$

$=-\frac{1}{2}(x-60)^2+1800$ … ❶

이때, $0<x<120$이므로 $x=60$일 때 최댓값 1800을 갖는다.
따라서 가축 우리의 밑면의 넓이의 최댓값은 1800 m^2이다. ⋯ ❷

답 1800 m^2

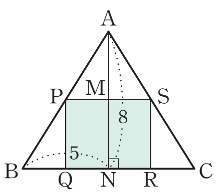
채점 기준	비율
❶ 가축 우리의 밑면의 넓이를 이차식으로 나타낼 수 있다.	70 %
❷ 가축 우리의 밑면의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

0586

물받이의 높이를 x cm라 하면 색칠한 단면은 가로의 길이가 $(20-2x)$ cm, 세로의 길이가 x cm인 직사각형이다.
색칠한 단면의 넓이를 $y\text{ cm}^2$라 하면
$y=x(20-2x)=-2x^2+20x=-2(x-5)^2+50$
이때, $\underbrace{0<x<10}_{20-2x>0\text{에서 } x<10}$이므로 $x=5$일 때 최댓값 50을 갖는다.
따라서 색칠한 단면의 넓이가 최대가 되려면 물받이의 높이를 5 cm로 해야 한다.

답 ④

0587



오른쪽 그림에서 $\overline{PM}=x(0<x<5)$라 하면 $\triangle ABN \backsim \triangle APM$이므로
$\overline{BN}:\overline{PM}=\overline{AN}:\overline{AM}$에서
$5:x=8:\overline{AM}$ $\quad\therefore \overline{AM}=\frac{8}{5}x$
$\therefore \overline{PQ}=\overline{MN}=8-\frac{8}{5}x$
$\overline{PS}=2\overline{PM}=2x$이므로 직사각형 PQRS의 넓이는
$$\overline{PS}\cdot\overline{PQ}=2x\left(8-\frac{8}{5}x\right)=-\frac{16}{5}x^2+16x$$
$$=-\frac{16}{5}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+20$$
이때, $0<x<5$이므로 $x=\frac{5}{2}$일 때 최댓값 20을 갖는다.
따라서 $x=\frac{5}{2}$일 때 직사각형 PQRS의 넓이가 최대이므로 이때의 가로의 길이와 세로의 길이의 차는
$\left|2\cdot\frac{5}{2}-\left(8-\frac{8}{5}\cdot\frac{5}{2}\right)\right|=|5-4|=1$

답 1

STEP 3 내신 마스터

0588

유형 02 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계

|전략| 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하려면 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이다.

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 점 $(-2,\ 1)$을 지나므로
$1=4-2a+b$ $\quad\therefore b=2a-3$ ⋯⋯ ㉠
또, 이차함수의 그래프가 x축에 접하므로 방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 하면
$D=a^2-4b=0$ ⋯⋯ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $a^2-4(2a-3)=0,\ a^2-8a+12=0$
$(a-2)(a-6)=0$ $\quad\therefore a=2\ (\because a<3)$
$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=1$
$\therefore a+b=3$

답 ③

0589

유형 03 이차함수의 그래프와 이차방정식의 실근의 합

|전략| 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=0$의 실근과 같다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 $-3,\ 1$이므로 이차방정식 $f(x)=0$의 두 실근은 $-3,\ 1$이다.
이차방정식 $f(x+a)=0$의 두 실근은 $x+a=-3,\ x+a=1$에서
$x=-3-a,\ x=1-a$이고, 그 합이 4이므로
$(-3-a)+(1-a)=4$ $\quad\therefore a=-3$

답 ②

0590

유형 04 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

|전략| 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접하려면 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이다.

이차함수 $y=x^2+ax+a$의 그래프와 직선 $y=x+1$이 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+a=x+1$, 즉 $x^2+(a-1)x+a-1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(a-1)^2-4(a-1)=0,\ a^2-6a+5=0$
$(a-1)(a-5)=0$ $\quad\therefore a=5\ (\because a>3)$
$a=5$를 $x^2+(a-1)x+a-1=0$에 대입하면
$x^2+4x+4=0,\ (x+2)^2=0$ $\quad\therefore x=-2$
$x=-2$를 $y=x+1$에 대입하면 $y=-1$
따라서 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 좌표는 $(-2,\ -1)$이므로 $m=-2,\ n=-1$
$\therefore m+n=-3$

답 ③

0591

유형 05 이차함수의 그래프에 접하는 직선의 방정식

|전략| 점 $(-1,\ 1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구하고, 이차함수의 식과 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식이 0임을 이용한다.

점 $(-1,\ 1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$y-1=m(x+1)$ $\quad\therefore y=mx+m+1$
이 직선이 이차함수 $y=2x^2+6x+5$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $2x^2+6x+5=mx+m+1$, 즉 $2x^2+(6-m)x-m+4=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(6-m)^2-8(-m+4)=0$
$m^2-4m+4=0,\ (m-2)^2=0$
$\therefore m=2$
따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=2x+3$이므로
$a=2,\ b=3$ $\quad\therefore ab=6$

답 ③

0592

유형 **01** 이차함수의 그래프와 x축의 교점
+ **08** 이차함수의 식을 구하여 최댓값 또는 최솟값 구하기

| 전략 | 두 점 P, Q의 x좌표가 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이므로 켤레 근의 성질을 이용하여 점 Q의 x좌표를 구한다.

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 x축과 두 점 P, Q에서 만나므로 두 점 P, Q의 x좌표는 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이다.
즉, 점 P의 x좌표가 $1-\sqrt{3}$이므로 $1-\sqrt{3}$은 이차방정식
$x^2+ax+b=0$의 한 근이다.
이때, 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1-\sqrt{3}$이면 다른 한 근은 $1+\sqrt{3}$이므로 점 Q의 x좌표는 $1+\sqrt{3}$이다.
근과 계수의 관계에 의하여
$(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})=-a \qquad \therefore a=-2$
$(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})=b \qquad \therefore b=-2$
따라서 이차함수 $y=x^2-2x-2=(x-1)^2-3$은 $x=1$일 때 최솟값 -3을 갖는다.

답 ⑤

0593

유형 **09** 최댓값 또는 최솟값이 주어질 때 미지수의 값 구하기(1)

| 전략 | 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$를 $y=k(x-m)^2+n$ 꼴로 변형하고, n의 값이 최솟값 또는 최댓값임을 이용하여 상수 a, b의 값을 구한다.

$f(x)=ax^2+4ax+b=a(x+2)^2-4a+b$에서 최솟값이 -7이므로 $-4a+b=-7$
$\therefore 4a-b=7$ …… ㉠
$g(x)=-x^2+4x+2a+b=-(x-2)^2+2a+b+4$에서 최댓값이 3이므로 $2a+b+4=3$
$\therefore 2a+b=-1$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$
$\therefore a-b=4$

답 ②

0594

유형 **10** 최댓값 또는 최솟값이 주어질 때 미지수의 값 구하기(2)

| 전략 | 이차함수가 $x=m$에서 최솟값 n을 가지면 이차함수의 식을 $y=k(x-m)^2+n\ (k>0)$으로 놓고, 평행이동한 이차함수의 식과 계수를 비교한다.

이차함수 $y=x^2-2ax+b=(x-a)^2-a^2+b$의 그래프를 x축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=(x-2a-a)^2-a^2+b=(x-3a)^2-a^2+b$ …… ㉠
이 그래프의 축의 방정식이 $x=-3$이고, 최솟값이 4이므로
$x=-3$에서 최솟값 4를 갖는다.
즉, $y=(x+3)^2+4$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $-3a=3$, $-a^2+b=4$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=5$
$\therefore ab=-5$

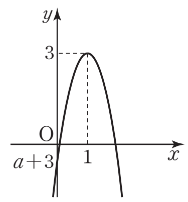
답 ①

0595

유형 **11** 최댓값 또는 최솟값이 주어질 때 이차함수의 식 구하기

| 전략 | 이차함수의 그래프가 제2사분면을 지나지 않으려면 (이차항의 계수)<0, (y절편)≤ 0이어야 한다.

이차함수 $y=ax^2+bx+c$가 $x=1$에서 최댓값 3을 가지므로 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 3)$이고 $a<0$이다.
따라서 $y=a(x-1)^2+3$으로 놓고 그래프가 오른쪽 그림과 같이 제2사분면을 지나지 않으려면 (y절편)≤ 0이어야 하므로
$a+3\le 0 \qquad \therefore a\le -3$



답 ③

0596

유형 **13** 제한된 범위에서의 이차함수의 최대·최소

| 전략 | 주어진 이차함수의 식을 $f(x)=k(x-m)^2+n$ 꼴로 변형한 후 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속하는지 확인한다.

$f(x)=x^2+2x+a=(x+1)^2+a-1$
$b<-1$이므로 그래프의 꼭짓점의 x좌표 -1은 $b\le x\le 0$에 속한다.
따라서 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최솟값 $a-1$을 갖는다.
이때, 최솟값이 -1이므로
$a-1=-1 \qquad \therefore a=0$
또, $f(x)=x^2+2x$에서 최댓값은 $f(0)$, $f(b)$ 중 큰 값이고 $f(0)=0$이므로 최댓값이 3이 되려면 $f(b)=3$이어야 한다.
즉, $f(b)=b^2+2b=3$에서 $b^2+2b-3=0$
$(b+3)(b-1)=0 \qquad \therefore b=-3\ (\because b<-1)$
$\therefore a+b=-3$

답 ④

0597

유형 **15** 완전제곱식을 이용한 이차식의 최대·최소

| 전략 | 주어진 식을 $a(x-m)^2+b(y-n)^2+c(z-l)^2+k$ 꼴로 변형한 후 $(\text{실수})^2\ge 0$임을 이용한다.

$-x^2-y^2-2z^2+2x-6y+8z-10$
$=-(x-1)^2-(y+3)^2-2(z-2)^2+8$
이때, x, y, z가 실수이므로
$(x-1)^2\ge 0$, $(y+3)^2\ge 0$, $2(z-2)^2\ge 0$
$\therefore -x^2-y^2-2z^2+2x-6y+8z-10\le 8$ $-(x-1)^2\le 0$, $-(y+3)^2\le 0$, $-2(z-2)^2\le 0$
따라서 $x=1$, $y=-3$, $z=2$일 때 주어진 식의 최댓값은 8이므로
$a=1$, $b=-3$, $c=2$, $d=8$
$\therefore a+b+c+d=8$

답 ④

0598

유형 **17** 이차함수의 최대·최소의 활용

| 전략 | 직선 $2x+y=4$ 위의 점 A의 좌표를 $(a,\ 4-2a)$라 하고, △OAB의 넓이를 a에 대한 이차식으로 나타낸다.

직선 $2x+y=4$ 위의 점 A의 좌표를 $(a, 4-2a)$라 하면 점 A가 제 1 사분면 위의 점이므로
$a>0,\ 4-2a>0$
$\therefore\ 0<a<2$
이때, $\mathrm{B}(a,\ 0)$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=4-2a$이므로
$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}a(4-2a)=-a^2+2a$
$=-(a-1)^2+1\ (0<a<2)$
따라서 $\triangle\mathrm{OAB}$의 넓이의 최댓값은 $a=1$일 때 1이다. 답 ①

0599

유형 **02** 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계
+ **04** 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

| 전략 | x축$(y=0)$ 또는 직선의 방정식을 각각 이차함수의 식과 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식의 부호를 이용한다.

이차함수 $y=x^2+px+q$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$D_1=p^2-4q=0$
$\therefore\ q=\frac{1}{4}p^2$ ...... ㉠ … ❶
또, 이차함수 $y=x^2+px+q$의 그래프와 직선 $y=-x$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2+px+q=-x$, 즉
$x^2+(p+1)x+q=0$의 판별식을 D_2라 하면
$D_2=(p+1)^2-4q>0$ … ❷
위 부등식에 ㉠을 대입하면
$(p+1)^2-p^2>0,\ 2p+1>0$
$\therefore\ p>-\frac{1}{2}$
따라서 정수 p의 최솟값은 0이다. … ❸
답 0

채점 기준	배점
❶ 주어진 이차함수의 그래프가 x축과 만나게 하는 조건을 구할 수 있다.	2점
❷ 주어진 이차함수의 그래프와 직선이 서로 다른 두 점에서 만나게 하는 조건을 구할 수 있다.	2점
❸ 정수 p의 최솟값을 구할 수 있다.	2점

0600

유형 **16** 조건식이 주어진 이차식의 최대 · 최소

| 전략 | $y=3-x$를 주어진 이차식에 대입하여 x에 대한 이차식으로 나타낸 후 최댓값과 최솟값을 구한다.

$x+y=3$에서 $y=3-x$ ...... ㉠
$x,\ y$가 음이 아닌 실수이므로
$x\ge0,\ y=3-x\ge0$
$\therefore\ 0\le x\le3$ … ❶
㉠을 $2x^2+y^2$에 대입하면
$2x^2+y^2=2x^2+(3-x)^2=3x^2-6x+9$
$=3(x-1)^2+6$ … ❷
이때, $0\le x\le3$이므로 $x=3$일 때 최댓값 $M=18$, $x=1$일 때 최솟값 $m=6$을 갖는다.
$\therefore\ M+m=24$ … ❸
답 24

채점 기준	배점
❶ y를 x에 대한 식으로 나타내고, x의 값의 범위를 구할 수 있다.	2점
❷ $2x^2+y^2$를 x에 대한 이차식으로 나타낼 수 있다.	2점
❸ $2x^2+y^2$의 최댓값 M과 최솟값 m을 구하여 그 합을 계산할 수 있다.	3점

0601

유형 **12** 최댓값의 최솟값 또는 최솟값의 최댓값
+ **13** 제한된 범위에서의 이차함수의 최대 · 최소

| 전략 | 주어진 이차함수의 식을 $f(x)=k(x-m)^2+n\ (k>0)$ 꼴로 변형한 후 $-4\le a\le4$에서 n의 최댓값과 최솟값을 구한다.

(1) $y=2x^2-4ax+a^2-4a+1=2(x-a)^2-a^2-4a+1$
이므로 $x=a$에서 최솟값 $-a^2-4a+1$을 갖는다.
(2) $g(a)=-a^2-4a+1=-(a+2)^2+5$
따라서 $-4\le a\le4$에서 $g(a)$는 $a=-2$일 때 최댓값 5, $a=4$일 때 최솟값 -31을 가지므로 $g(a)$의 최댓값과 최솟값의 합은 -26이다.
답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 주어진 이차함수의 최솟값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	4점
(2) $-4\le a\le4$에서 $g(a)$의 최댓값과 최솟값을 구하여 그 합을 계산할 수 있다.	6점

창의 · 융합 교과서 속 심화문제

0602

| 전략 | $f(a+x)=f(a-x)$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=a$에 대하여 대칭임을 이용한다.

$f(x+2)=f(-x)$에 $x=t-1$을 대입하면
$f(t-1+2)=f(-t+1)$
$\therefore\ f(1+t)=f(1-t)$
이때, $f(x+2)=f(-x)$가 모든 실수 x에 대하여 성립하므로
$f(1+t)=f(1-t)$도 모든 실수 t에 대하여 성립한다.
즉, x와 t는 모두 모든 실수이므로
$f(1+t)=f(1-t)$에 $t=x$를 대입하면
$f(1+x)=f(1-x)$
따라서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 이차방정식 $f(x)=0$, 즉 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근의 합은
$1\cdot2=2$ 답 2

Lecture

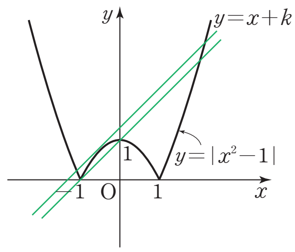
이차함수 $y=f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(a-x)=f(a+x)$가 성립하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=a$에 대하여 대칭이다.
즉, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=a$이다.

0603

| 전략 | 방정식 $|f(x)|=g(x)$의 실근의 개수는 두 함수 $y=|f(x)|$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

방정식 $|x^2-1|-x-k=0$에서 $|x^2-1|=x+k$이므로 방정식의 실근의 개수는 $y=|x^2-1|$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 교점의 개수와 같다.

$y=|x^2-1|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖는 경우는 다음과 같다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때

$0=-1+k \qquad \therefore k=1$

(ii) 직선 $y=x+k$가 $y=-x^2+1$의 그래프에 접할 때

이차방정식 $-x^2+1=x+k$, 즉 $x^2+x+k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1-4(k-1)=0 \qquad \therefore k=\dfrac{5}{4}$

답 ③, ④

0604

| 전략 | 근과 계수의 관계를 이용하여 $(\alpha-1)(\beta-1)$을 a에 대한 식으로 나타낸다.

이차방정식 $x^2+(3a-1)x+a^2-a=0$이 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$D=(3a-1)^2-4(a^2-a)\ge 0$

$5a^2-2a+1\ge 0$

$\therefore 5\left(a-\dfrac{1}{5}\right)^2+\dfrac{4}{5}\ge 0$

위 부등식은 a의 값에 관계없이 항상 성립하므로 a는 모든 실수이다.

이때, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-(3a-1)$, $\alpha\beta=a^2-a$이므로

$$\begin{aligned}(\alpha-1)(\beta-1)&=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1\\&=a^2-a+(3a-1)+1\\&=a^2+2a\\&=(a+1)^2-1\end{aligned}$$

따라서 $(\alpha-1)(\beta-1)$의 최솟값은 $a=-1$일 때 -1이다. 답 ①

0605

| 전략 | $f(x)=(x-p)^2+q$ 꼴로 나타낸 후 $0\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 최댓값 M, 최솟값 m을 구한다.

$f(x)=x^2-ax=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}$

$0\le a\le 2$에서 $0\le \dfrac{a}{2}\le 1$이므로 꼭짓점의 x좌표 $\dfrac{a}{2}$는 $0\le x\le 3$에 속한다.

따라서 최댓값 $M=f(3)=9-3a$, 최솟값 $m=f\left(\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{4}$이므로

$$\begin{aligned}M+m&=(9-3a)+\left(-\dfrac{a^2}{4}\right)\\&=-\dfrac{1}{4}(a+6)^2+18\end{aligned}$$

이때, $0\le a\le 2$이므로 $M+m$은 $a=0$일 때 최댓값 9를 갖는다.

답 ⑤

참고 $0\le a\le 2$이므로 $f(3)=9-3a$에서

$-6\le -3a\le 0 \qquad \therefore 3\le 9-3a\le 9$

이때, $f(0)=0$이므로 $f(0)<f(3)$이다.

따라서 최댓값은 $f(3)$이다.

0606

| 전략 | 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 함수 $y=-x^2-2x+3$의 그래프 위의 점임을 이용하여 $a+b$를 a에 대한 식으로 나타낸다.

점 B는 이차함수 $y=-x^2-2x+3$의 그래프와 y축의 교점이므로 $\mathrm{B}(0,\ 3)$

두 점 A, C는 이차함수 $y=-x^2-2x+3$의 그래프와 x축의 교점이므로 $-x^2-2x+3=0$에서

$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

$\therefore \mathrm{A}(-3,\ 0)$, $\mathrm{C}(1,\ 0)$

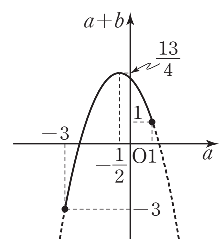
점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 이차함수 $y=-x^2-2x+3$의 그래프 위의 점이므로

$b=-a^2-2a+3$

이때, 점 P가 점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$에서 점 $\mathrm{C}(1,\ 0)$까지 움직이므로

$-3\le a\le 1$

$$\begin{aligned}\therefore a+b&=a+(-a^2-2a+3)\\&=-a^2-a+3\\&=-\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{13}{4}\end{aligned}$$



따라서 $-3\le a\le 1$에서 $a+b$는

$a=-\dfrac{1}{2}$일 때 최댓값 $\dfrac{13}{4}$,

$a=-3$일 때 최솟값 -3을 갖는다.

답 최댓값 : $\dfrac{13}{4}$, 최솟값 : -3

0607

| 전략 | 점 P의 x좌표를 a라 하고 점 P와 점 Q의 y좌표가 같음을 이용하여 점 Q의 x좌표를 a에 대한 식으로 나타낸다.

점 P의 x좌표를 a라 하면 점 P는 이차함수 $y=x^2+3$의 그래프 위의 점이므로 $\mathrm{P}(a,\ a^2+3)$

이때, 점 P와 직선 $y=x-4$ 위의 점 Q의 y좌표가 같으므로

$y=a^2+3$을 $y=x-4$에 대입하여 풀면 $x=a^2+7$

$\therefore \mathrm{Q}(a^2+7,\ a^2+3)$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{\mathrm{PQ}}&=a^2+7-a=a^2-a+7\\&=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{27}{4}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이의 최솟값은 $\dfrac{27}{4}$이다. 답 $\dfrac{27}{4}$

7 | 여러 가지 방정식

본책 100~117쪽

STEP 1 개념 마스터 ❶

0608

$x^3+8=0$에서 $(x+2)(x^2-2x+4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

답 $x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

0609

$x^3-x^2-12x=0$에서

$x(x^2-x-12)=0$, $x(x+3)(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=4$

답 $x=0$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=4$

0610

$x^3+5x^2-x-5=0$에서

$x^2(x+5)-(x+5)=0$, $(x+5)(x^2-1)=0$

$(x+5)(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

답 $x=-5$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

0611

$x^4-27x=0$에서

$x(x^3-27)=0$, $x(x-3)(x^2+3x+9)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

답 $x=0$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

0612

$f(x)=x^3-2x^2+1$로 놓으면

$f(1)=1-2+1=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ & & 1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-x-1)$

즉, $(x-1)(x^2-x-1)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

답 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

0613

$f(x)=x^3-6x^2+11x-6$으로 놓으면

$f(1)=1-6+11-6=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-5x+6)$

$\quad=(x-1)(x-2)(x-3)$

즉, $(x-1)(x-2)(x-3)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

답 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

0614

$f(x)=x^4-4x^2-x+2$로 놓으면

$f(-1)=1-4+1+2=0$, $f(2)=16-16-2+2=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 0 & -4 & -1 & 2 \\ & & -1 & 1 & 3 & -2 \\ \hline 2 & 1 & -1 & -3 & 2 & \boxed{0} \\ & & 2 & 2 & -2 & \\ \hline & 1 & 1 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+x-1)$

즉, $(x+1)(x-2)(x^2+x-1)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

답 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

0615

$f(x)=x^4-x^3-5x^2-x-6$으로 놓으면

$f(-2)=16+8-20+2-6=0$, $f(3)=81-27-45-3-6=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & -1 & -5 & -1 & -6 \\ & & -2 & 6 & -2 & 6 \\ \hline 3 & 1 & -3 & 1 & -3 & \boxed{0} \\ & & 3 & 0 & 3 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x+2)(x-3)(x^2+1)$

즉, $(x+2)(x-3)(x^2+1)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\pm i$

답 $x=-2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\pm i$

0616

$x^2-x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-8t+12=0$, $(t-2)(t-6)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=6$

(i) $t=2$, 즉 $x^2-x=2$일 때

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

(ii) $t=6$, 즉 $x^2-x=6$일 때

$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

(i), (ii)에서 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=3$

답 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=3$

0617

$x^2+2x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-3t-4=0$, $(t+1)(t-4)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=4$

(ⅰ) $t=-1$, 즉 $x^2+2x=-1$일 때

$x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$

$\therefore x=-1$

(ⅱ) $t=4$, 즉 $x^2+2x=4$일 때

$x^2+2x-4=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{5}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=-1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{5}$

답 $x=-1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{5}$

0618

$x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-6t+9=0$, $(t-3)^2=0$

$\therefore t=3$

즉, $x^2=3$이므로 $x=\pm\sqrt{3}$

답 $x=\pm\sqrt{3}$

0619

$x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-t-2=0$, $(t-2)(t+1)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=-1$

즉, $x^2=2$ 또는 $x^2=-1$이므로 $x=\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm i$

답 $x=\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm i$

0620

$x^4-3x^2+1=0$에서 $x^4-2x^2+1-x^2=0$

$(x^2-1)^2-x^2=0$, $(x^2+x-1)(x^2-x-1)=0$

$x^2+x-1=0$ 또는 $x^2-x-1=0$

$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

답 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

0621

$x^4+7x^2+16=0$에서 $x^4+8x^2+16-x^2=0$

$(x^2+4)^2-x^2=0$, $(x^2+x+4)(x^2-x+4)=0$

$x^2+x+4=0$ 또는 $x^2-x+4=0$

$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{15}i}{2}$

답 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{15}i}{2}$

0622

$x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+2x-1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$, $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-1=0$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-\boxed{\text{(가) } 3}=0$

이때, $x+\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 $t^2+2t-\boxed{\text{(가) } 3}=0$

$(t+3)(t-\boxed{\text{(나) } 1})=0$　　$\therefore t=-3$ 또는 $t=\boxed{\text{(나) } 1}$

(ⅰ) $t=-3$, 즉 $x+\dfrac{1}{x}=-3$일 때

$x^2+3x+1=0$　　$\therefore x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

(ⅱ) $t=\boxed{\text{(나) } 1}$, 즉 $x+\dfrac{1}{x}=1$일 때

$x^2-x+\boxed{\text{(다) } 1}=0$　　$\therefore x=\boxed{\text{(라) } \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\boxed{\text{(라) } \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}$

답 풀이 참조

0623

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(1) $\alpha+\beta+\gamma=2$

(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$

(3) $\alpha\beta\gamma=-1$

답 (1) 2 (2) 3 (3) -1

0624

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-4$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=6$, $\alpha\beta\gamma=-4$

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=(-4)^2-2\cdot6=4$

(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{6}{-4}=-\dfrac{3}{2}$

(3) $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

$=\alpha\beta\gamma+(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+1$

$=-4+(-4)+6+1=-1$

답 (1) 4 (2) $-\dfrac{3}{2}$ (3) -1

0625

x^3의 계수가 1이고 세 근이 1, 2, 4인 삼차방정식은

$x^3-(1+2+4)x^2+(1\cdot2+2\cdot4+4\cdot1)x-1\cdot2\cdot4=0$

$\therefore x^3-7x^2+14x-8=0$

답 $x^3-7x^2+14x-8=0$

0626

x^3의 계수가 1이고 세 근이 -1, $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$인 삼차방정식은

$x^3-(-1+1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3})x^2$

$+\{(-1)\cdot(1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})\cdot(-1)\}x$

$-(-1)\cdot(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=0$

$\therefore x^3-x^2-4x-2=0$

답 $x^3-x^2-4x-2=0$

0627

x^3의 계수가 1이고 세 근이 1, $1+5i$, $1-5i$인 삼차방정식은

$x^3-(1+1+5i+1-5i)x^2$

$+\{1\cdot(1+5i)+(1+5i)(1-5i)+(1-5i)\cdot1\}x$

$-1\cdot(1+5i)(1-5i)=0$

$\therefore x^3-3x^2+28x-26=0$

답 $x^3-3x^2+28x-26=0$

0628
삼차방정식의 계수가 유리수이므로 $1+\sqrt{2}$가 근이면 $1-\sqrt{2}$도 근이다.
따라서 세 근이 -2, $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-2(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\cdot(-2)=a$
$\therefore a=-5$
$-2(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-b \qquad \therefore b=-2$
$\therefore a+b=-7$
답 -7

0629
삼차방정식의 계수가 실수이므로 $1-i$가 근이면 $1+i$도 근이다.
따라서 세 근이 1, $1-i$, $1+i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$1\cdot(1-i)+(1-i)(1+i)+(1+i)\cdot 1=-a \qquad \therefore a=-4$
$1\cdot(1-i)(1+i)=b \qquad \therefore b=2$
$\therefore ab=-8$
답 -8

0630
$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$
(1) ω는 $x^2+x+1=0$의 한 근이므로 $\omega^2+\omega+1=0$
(2), (3) $x^2+x+1=0$의 두 근이 ω, $\bar{\omega}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\omega+\bar{\omega}=-1$, $\omega\bar{\omega}=1$
(4) $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$이므로
$\omega^5+\omega^4+\omega^3=\omega^3\cdot\omega^2+\omega^3\cdot\omega+\omega^3=\omega^2+\omega+1=0$
(5) $\omega^3=1$이고, $\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega^2+\omega=-1$이므로
$\omega^{14}+\omega^{10}=(\omega^3)^4\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega=\omega^2+\omega=-1$
(6) $\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega^2+1=-\omega$이므로
$$\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$$
답 (1) 0 (2) -1 (3) 1 (4) 0 (5) -1 (6) -1

0631
$x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$
(1) ω는 $x^2-x+1=0$의 한 근이므로 $\omega^2-\omega+1=0$
(2), (3) $x^2-x+1=0$의 두 근이 ω, $\bar{\omega}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\omega+\bar{\omega}=1$, $\omega\bar{\omega}=1$
(4) $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$이므로
$\omega^5-\omega^4+\omega^3=\omega^3\cdot\omega^2-\omega^3\cdot\omega+\omega^3=-(\omega^2-\omega+1)=0$
(5) $\omega^3=-1$이고, $\omega^2-\omega+1=0$에서 $\omega^2-\omega=-1$이므로
$\omega^{14}+\omega^{10}=(\omega^3)^4\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega=\omega^2-\omega=-1$
(6) $\omega^2-\omega+1=0$에서 $\omega^2+1=\omega$이므로
$$\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{\omega}{\omega}=1$$
답 (1) 0 (2) 1 (3) 1 (4) 0 (5) -1 (6) 1

STEP 2 유형 마스터 ❶

0632
| 전략 | 인수정리와 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

$f(x)=x^3-3x^2-13x+15$로 놓으면
$f(1)=1-3-13+15=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & -13 & 15 \\ & & 1 & -2 & -15 \\ \hline & 1 & -2 & -15 & 0 \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-2x-15)$
$\quad=(x-1)(x-5)(x+3)$
즉, $(x-1)(x-5)(x+3)=0$에서
$x=1$ 또는 $x=5$ 또는 $x=-3$
따라서 $\alpha=5$, $\beta=-3$이므로 $\alpha+\beta=2$
답 2

Lecture
삼차식 $f(x)$를 인수분해할 때, $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값은
$\pm\dfrac{(f(x)\text{의 상수항의 약수})}{(f(x)\text{의 최고차항의 계수의 약수})}$ 중에서 찾는다.

0633
$f(x)=x^3-3x^2+4x-2$로 놓으면
$f(1)=1-3+4-2=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 4 & -2 \\ & & 1 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-2x+2)$
즉, $(x-1)(x^2-2x+2)=0$에서
$x=1$ 또는 $x=1\pm i$
따라서 $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=1$이므로 $\alpha+\beta-\gamma=1$
답 ①

0634
$f(x)=x^4+3x^3+3x^2-3x-4$로 놓으면
$f(1)=1+3+3-3-4=0$, $f(-1)=1-3+3+3-4=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 3 & 3 & -3 & -4 \\ & & 1 & 4 & 7 & 4 \\ \hline -1 & 1 & 4 & 7 & 4 & 0 \\ & & -1 & -3 & -4 & \\ \hline & 1 & 3 & 4 & 0 & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+3x+4)$
즉, $(x-1)(x+1)(x^2+3x+4)=0$에서
$x=\pm1$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{7}i}{2}$
따라서 모든 실근의 합은 $1+(-1)=0$
답 ⑤

0635
$f(x)=x^4-4x^3+6x^2-5x+2$로 놓으면
$f(1)=1-4+6-5+2=0$, $f(2)=16-32+24-10+2=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$
\begin{array}{c|ccccc}
1 & 1 & -4 & 6 & -5 & 2 \\
 & & 1 & -3 & 3 & -2 \\
\hline
2 & 1 & -3 & 3 & -2 & \boxed{0} \\
 & & 2 & -2 & 2 & \\
\hline
 & 1 & -1 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

$f(x)=(x-1)(x-2)(x^2-x+1)$ … ❶

즉, $(x-1)(x-2)(x^2-x+1)=0$에서 α, β는 $x^2-x+1=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=1$ … ❷

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=1^2-2\cdot1=-1$ … ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 인수정리와 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해할 수 있다.	50 %
❷ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0636

| 전략 | 공통부분을 t로 치환하여 t에 대한 방정식으로 변형한 후 인수분해한다.

$x^2+x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-14t+24=0$, $(t-2)(t-12)=0$

$\therefore\ t=2$ 또는 $t=12$

(i) $t=2$, 즉 $x^2+x=2$일 때

$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$

(ii) $t=12$, 즉 $x^2+x=12$일 때

$x^2+x-12=0$, $(x+4)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-4$ 또는 $x=3$

(i), (ii)에서 음수인 근의 합은 $-2+(-4)=-6$

답 -6

0637

$x^2+x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$(t+1)(t-2)-4=0$, $t^2-t-6=0$

$(t+2)(t-3)=0$ $\quad\therefore\ t=-2$ 또는 $t=3$

(i) $t=-2$, 즉 $x^2+x=-2$일 때

$x^2+x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot1\cdot2=-7<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $t=3$, 즉 $x^2+x=3$일 때

$x^2+x-3=0$의 판별식을 D'이라 하면

$D'=1^2-4\cdot1\cdot(-3)=13>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 -3이다.

(i), (ii)에서 모든 실근의 곱은 -3이다.

답 ②

0638

$x(x-1)(x-2)(x-3)-15=0$에서

$\{x(x-3)\}\{(x-1)(x-2)\}-15=0$

$(x^2-3x)(x^2-3x+2)-15=0$

이때, $x^2-3x=t$로 놓으면 위의 방정식은

$t(t+2)-15=0$, $t^2+2t-15=0$

$(t+5)(t-3)=0$ $\quad\therefore\ t=-5$ 또는 $t=3$

(i) $t=-5$, 즉 $x^2-3x=-5$일 때

$x^2-3x+5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot5=-11<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이때, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 허근의 곱은 5이다.

(ii) $t=3$, 즉 $x^2-3x=3$일 때

$x^2-3x-3=0$의 판별식을 D'이라 하면

$D'=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-3)=21>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 곱은 -3이다.

(i), (ii)에서 $a=-3$, $b=5$이므로

$a-b=-8$

답 ②

Lecture

이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식의 판별식을 D라 하면

(1) $D>0$ ⇨ 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) $D=0$ ⇨ 중근을 갖는다.

(3) $D<0$ ⇨ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

0639

| 전략 | $x^2=t$로 치환한 후 좌변을 인수분해한다.

$x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-13t+36=0$, $(t-4)(t-9)=0$

$\therefore\ t=4$ 또는 $t=9$

즉, $x^2=4$ 또는 $x^2=9$이므로 $x=\pm2$ 또는 $x=\pm3$

$\therefore\ |\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|$

$=|2|+|-2|+|3|+|-3|=10$

답 ③

0640

| 전략 | x^2항을 적당히 변형하여 $A^2-B^2=0$ 꼴로 변형한 후 좌변을 인수분해한다.

$x^4-7x^2+1=0$에서 $(x^4+2x^2+1)-9x^2=0$

$(x^2+1)^2-(3x)^2=0$, $(x^2+3x+1)(x^2-3x+1)=0$

$x^2+3x+1=0$의 두 근을 α, β라 하고, $x^2-3x+1=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=1$, $\gamma+\delta=3$, $\gamma\delta=1$

$$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}\right)$$

$$=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}=\frac{-3}{1}+\frac{3}{1}=0$$

답 0

0641

| 전략 | 양변을 x^2으로 나눈 후 $x+\frac{1}{x}=t$로 치환하여 t에 대한 방정식을 푼다.

$x^4+5x^3-4x^2+5x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+5x-4+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$x^2+\frac{1}{x^2}+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$

이때, $x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면 위의 방정식은

$t^2+5t-6=0$, $(t+6)(t-1)=0$

$\therefore t=-6$ 또는 $t=1$

(i) $t=-6$, 즉 $x+\frac{1}{x}=-6$일 때

$x^2+6x+1=0 \qquad \therefore x=-3\pm2\sqrt{2}$

(ii) $t=1$, 즉 $x+\frac{1}{x}=1$일 때

$x^2-x+1=0 \qquad \therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에서 두 실근의 합은

$(-3+2\sqrt{2})+(-3-2\sqrt{2})=-6$

답 -6

0642

$9x^4-24x^3-2x^2-24x+9=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$9x^2-24x-2-\frac{24}{x}+\frac{9}{x^2}=0$

$9\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-24\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0$

$9\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-24\left(x+\frac{1}{x}\right)-20=0$

이때, $x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면 위의 방정식은

$9t^2-24t-20=0$, $(3t+2)(3t-10)=0$

$\therefore t=-\frac{2}{3}$ 또는 $t=\frac{10}{3}$

(i) $t=-\frac{2}{3}$, 즉 $x+\frac{1}{x}=-\frac{2}{3}$일 때

$3x^2+2x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-3\cdot3=-8<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $t=\frac{10}{3}$, 즉 $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$일 때

$3x^2-10x+3=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\frac{D'}{4}=(-5)^2-3\cdot3=16>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 α는 $3x^2-10x+3=0$, 즉 $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$의 한 실근이므로

$\alpha+\frac{1}{\alpha}=\frac{10}{3}$

답 $\frac{10}{3}$

0643

| 전략 | 삼차방정식 $f(x)=0$의 한 근이 α이면 $f(\alpha)=0$임을 이용한다.

$x=-2$를 $x^3-kx^2-(k+1)x+10=0$에 대입하면

$-8-4k+2(k+1)+10=0$

$-2k+4=0 \qquad \therefore k=2$

따라서 주어진 방정식은 $x^3-2x^2-3x+10=0$

$f(x)=x^3-2x^2-3x+10$으로 놓으면

$f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-2	1	-2	-3	10
		-2	8	-10
	1	-4	5	0

$f(x)=(x+2)(x^2-4x+5)$

즉, $(x+2)(x^2-4x+5)=0$

이때, a, b는 이차방정식 $x^2-4x+5=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $a+b=4$

$\therefore k+a+b=6$

답 ①

0644

$1+i$를 $x^3+ax+2=0$에 대입하면

$(1+i)^3+a(1+i)+2=0$

$1+3i+3i^2+\underbrace{i^3}_{i^3=i^2\cdot i=-i}+a(1+i)+2=0$, $2i+a(1+i)=0$

$a(1+i)=-2i$

$\therefore a=\frac{-2i}{1+i}=\frac{-2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2-2i}{2}=-1-i$

답 $-1-i$

주의 a가 실수라는 조건이 없으므로 켤레근의 성질이나 복소수가 서로 같을 조건을 이용할 수 없음에 주의한다.

0645

$f(x)=x^4+ax^3-x^2+ax+b$로 놓으면

$f(-1)=0$에서 $1-a-1-a+b=0$

$\therefore 2a-b=0$ ...... ㉠

$f(2)=0$에서 $16+8a-4+2a+b=0$

$\therefore 10a+b=-12$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-2$ ··· ❶

즉, $f(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	-1	-1	-1	-2
		-1	2	-1	2
2	1	-2	1	-2	0
		2	0	2	
	1	0	1	0	

$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+1)$ ··· ❷

이때, 나머지 두 근은 $x^2+1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 나머지 두 근의 곱은 1이다. ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	30 %
❸ 나머지 두 근의 곱을 구할 수 있다.	20 %

0646

$x=\alpha$를 $x^3-3x+1=0$에 대입하면

$\alpha^3-3\alpha+1=0$

$x=\beta$를 $x^2-\alpha x+1=0$에 대입하면

$\beta^2-\alpha\beta+1=0$

이때, $\beta\neq0$이므로 양변을 β로 나누면

$\beta-\alpha+\dfrac{1}{\beta}=0 \qquad \therefore\ \beta+\dfrac{1}{\beta}=\alpha$

$\therefore\ \beta^3+\dfrac{1}{\beta^3}=\left(\beta+\dfrac{1}{\beta}\right)^3-3\left(\beta+\dfrac{1}{\beta}\right)=\alpha^3-3\alpha=-1$ 답 ②

0647

| 전략 | 삼차방정식을 $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)=0$ 꼴로 인수분해한 후 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 $x=\alpha$를 근으로 갖거나 중근을 가져야 함을 이용한다.

$f(x)=x^3+(3-k)x^2+kx-4$로 놓으면

$f(1)=1+(3-k)+k-4=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 3-k & k & -4 \\ & & 1 & 4-k & 4 \\ \hline & 1 & 4-k & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)\{x^2+(4-k)x+4\}$

이때, 방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지려면

(i) 이차방정식 $x^2+(4-k)x+4=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우

$1+(4-k)+4=0 \qquad \therefore\ k=9$

(ii) 이차방정식 $x^2+(4-k)x+4=0$이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(4-k)^2-16=0,\ k^2-8k=0$

$k(k-8)=0 \qquad \therefore\ k=0$ 또는 $k=8$

그런데 k는 자연수이므로 $k=8$

(i), (ii)에서 자연수 k는 8, 9의 2개이다. 답 2

0648

$f(x)=2x^3+(1-a)x+a-3$으로 놓으면

$f(1)=2+(1-a)+a-3=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & 0 & 1-a & a-3 \\ & & 2 & 2 & 3-a \\ \hline & 2 & 2 & 3-a & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(2x^2+2x+3-a)$

이때, 방정식 $f(x)=0$의 근이 모두 실수이려면 이차방정식 $2x^2+2x+3-a=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1-2(3-a)\geq0 \qquad \therefore\ a\geq\dfrac{5}{2}$ 답 ⑤

0649

$f(x)=x^3+(2a-4)x^2+(a^2-2a+3)x-a^2$으로 놓으면

$f(1)=1+(2a-4)+(a^2-2a+3)-a^2=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 2a-4 & a^2-2a+3 & -a^2 \\ & & 1 & 2a-3 & a^2 \\ \hline & 1 & 2a-3 & a^2 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)\{x^2+(2a-3)x+a^2\}$

이때, 방정식 $f(x)=0$이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+(2a-3)x+a^2=0$이 두 개의 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2a-3)^2-4a^2<0,\ -12a+9<0$

$\therefore\ a>\dfrac{3}{4}$

따라서 자연수 a의 최솟값은 1이다. 답 ①

0650

$f(x)=x^3+(2k-1)x+2k$로 놓으면

$f(-1)=-1-(2k-1)+2k=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & 0 & 2k-1 & 2k \\ & & -1 & 1 & -2k \\ \hline & 1 & -1 & 2k & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2-x+2k)$

이때, 방정식 $f(x)=0$이 오직 한 개의 실근을 가지려면

(i) 이차방정식 $x^2-x+2k=0$이 실근을 갖지 않는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1-8k<0 \qquad \therefore\ k>\dfrac{1}{8}$

(ii) 이차방정식 $x^2-x+2k=0$이 $x=-1$을 중근으로 갖는 경우

$x=-1$을 $x^2-x+2k=0$에 대입하면

$1+1+2k=0 \qquad \therefore\ k=-1$

그런데 $x^2-x+2k=0$에서 $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0 \qquad \therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

즉, 이차방정식 $x^2-x+2k=0$은 $k=-1$일 때 중근을 갖지 않는다.

(i), (ii)에서 $k>\dfrac{1}{8}$ 답 $k>\dfrac{1}{8}$

0651

| 전략 | 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근이 α, β, γ일 때, $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$임을 이용한다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1,\ \alpha\beta\gamma=4$이므로

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=1-(-2)+1-4=0$ 답 ③

다른 풀이 $x^3+2x^2+x-4=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1+2+1-4=0$

0652

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, $\alpha\beta\gamma=2$

이때, $\alpha+\beta=3-\gamma$, $\beta+\gamma=3-\alpha$, $\gamma+\alpha=3-\beta$이므로

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(3-\gamma)(3-\alpha)(3-\beta)$

$=27-9(\alpha+\beta+\gamma)+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=27-9\cdot3+3\cdot1-2=1$

답 ①

0653

주어진 삼차방정식의 세 근을 α, 2α, $3\alpha(\alpha\neq0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha+3\alpha=6$, $6\alpha=6$ $\quad\therefore \alpha=1$

따라서 세 근이 1, 2, 3이므로

$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot1=a$, $1\cdot2\cdot3=-b$

$\therefore a=11$, $b=-6$

$\therefore a+2b=-1$

답 ②

0654

주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=p$

주어진 삼차방정식의 세 근을 α, β, γ라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta\gamma=-2$

$\alpha+\beta+\gamma=3$에서 $\alpha+\beta=2$이므로 $\gamma=1$

$\alpha\beta\gamma=-2$에서 $\alpha\beta=p$, $\gamma=1$이므로 $p=-2$

이때, $\gamma=1$이므로 $x=1$이 $x^3-3x^2+qx+2=0$의 근이다.

즉, $1-3+q+2=0$ $\quad\therefore q=0$

$\therefore p^2+q^2=4$

답 4

0655

| 전략 | 세 수 α, β, γ를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$이다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=1$이므로

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{3}{1}=3$

$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{2}{1}=2$

$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=1$

즉, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-3x^2+2x-1=0$

따라서 $a=-3$, $b=2$, $c=-1$이므로

$a+b+c=-2$

답 -2

0656

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=7$이므로

$(\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=(\alpha+\beta+\gamma)+3=-3+3=0$

$(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2(\alpha+\beta+\gamma)+3=3+2\cdot(-3)+3=0$

$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$

$=7+3+(-3)+1=8$

즉, $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3-8=0$

따라서 $a=0$, $b=0$, $c=-8$이므로

$a-b+c=-8$

답 ①

0657

$f(1)=f(3)=f(5)=4$에서

$f(1)-4=f(3)-4=f(5)-4=0$이므로 삼차방정식 $f(x)-4=0$의 세 근이 1, 3, 5이다.

이때, 1, 3, 5를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(1+3+5)x^2+(1\cdot3+3\cdot5+5\cdot1)x-1\cdot3\cdot5=0$

$\therefore x^3-9x^2+23x-15=0$

즉, $f(x)-4=x^3-9x^2+23x-15$이므로

$f(x)=x^3-9x^2+23x-11$

따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 11이다.

답 11

0658

| 전략 | 계수가 유리수인 삼차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다. (단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)

주어진 삼차방정식의 계수가 모두 유리수이므로 한 근이 $2+\sqrt{3}$이면 $2-\sqrt{3}$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})+\alpha=2$ …… ㉠

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\alpha+\alpha(2+\sqrt{3})=a$ …… ㉡

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\alpha=-b$ …… ㉢

㉠에서 $\alpha=-2$

$\alpha=-2$를 ㉡, ㉢에 대입하면 $a=-7$, $b=2$

$\therefore ab=-14$

답 ②

0659

주어진 삼차방정식의 계수가 모두 유리수이므로 한 근이 $1-\sqrt{2}$이면 $1+\sqrt{2}$도 근이다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})+2=-\frac{b}{a}$ …… ㉠

$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})\cdot2+2(1-\sqrt{2})=\frac{c}{a}$ …… ㉡

$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})\cdot2=-\frac{2}{a}$ …… ㉢

㉢에서 $a=1$

$a=1$을 ㉠, ㉡에 대입하면 $b=-4$, $c=3$

$\therefore a+b+c=0$ 답 0

0660

주어진 삼차방정식의 계수가 모두 실수이므로 한 근이 $1-\sqrt{3}i$이면 $1+\sqrt{3}i$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)\alpha=4 \qquad \therefore \alpha=1$

따라서 나머지 두 근의 합은 $(1+\sqrt{3}i)+1=2+\sqrt{3}i$ 답 $2+\sqrt{3}i$

0661

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$(a, b, c는 실수)라 하면

삼차방정식 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c=0$의 계수가 모두 실수이므로 한 근이 $1+2i$이면 $1-2i$도 근이다.

즉, 주어진 방정식의 세 근이 -1, $1+2i$, $1-2i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+(1+2i)+(1-2i)=-a$

$-1\cdot(1+2i)+(1+2i)(1-2i)+(1-2i)\cdot(-1)=b$

$-1\cdot(1+2i)(1-2i)=-c$

$\therefore a=-1$, $b=3$, $c=5$

따라서 $f(x)=x^3-x^2+3x+5$이므로 $f(1)=8$ 답 ⑤

0662

| 전략 | $x^3=1$의 한 허근이 ω이면 $\overline{\omega}$도 $x^3=1$의 한 허근임을 이용한다.
(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x^3-1=0$, $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이고, 방정식의 계수가 모두 실수이므로 ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^3-1=0$, $x^2+x+1=0$의 허근이다. 즉,

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$, $\overline{\omega}^3=1$, $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$

ㄱ. $1+\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}=\dfrac{\omega^2+\omega+1}{\omega^2}=0$이므로

$$1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}+\cdots+\frac{1}{\omega^{21}}$$
$$=\left(1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}\right)+\frac{1}{\omega^3}\left(1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}\right)$$
$$+\cdots+\frac{1}{(\omega^3)^6}\left(1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}\right)+\frac{1}{\omega^{21}}$$
$$=\frac{1}{\omega^{21}}=\frac{1}{(\omega^3)^7}=1$$

ㄴ. $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4)(1+\omega^5)(1+\omega^6)$

$=(1+\omega)(1+\omega^2)(1+1)(1+\omega)(1+\omega^2)(1+1)$

$=4(1+\omega)^2(1+\omega^2)^2$

$=4(-\omega^2)^2(-\omega)^2$

$=4\omega^6=4(\omega^3)^2=4$

ㄷ. $\dfrac{1+\omega^2}{\omega}+\dfrac{1+\overline{\omega}}{\overline{\omega}^2}=\dfrac{-\omega}{\omega}+\dfrac{-\overline{\omega}^2}{\overline{\omega}^2}=-1+(-1)=-2$

ㄹ. $\dfrac{\omega^2+1}{\omega+1}+\dfrac{\omega+1}{\omega^2+1}=\dfrac{-\omega}{-\omega^2}+\dfrac{-\omega^2}{-\omega}=\dfrac{1}{\omega}+\omega$

$=\dfrac{1+\omega^2}{\omega}=\dfrac{-\omega}{\omega}$

$=-1$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

0663

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

$x^3=-1$, $x^2-x+1=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

$\therefore \omega^6+2\omega^5+3\omega^4+4\omega^3+5\omega^2+6\omega+7$

$=(\omega^3)^2+2\omega^3\cdot\omega^2+3\omega^3\cdot\omega+4\omega^3+5\omega^2+6\omega+7$

$=1-2\omega^2-3\omega-4+5\omega^2+6\omega+7$

$=3\omega^2+3\omega+4=3(\omega-1)+3\omega+4$

$=6\omega+1$

따라서 $a=6$, $b=1$이므로 $ab=6$ 답 6

0664

$x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$, $x^3-1=0$

즉, $x^3=1$, $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$ ··· ❶

$f(1)=\dfrac{\omega^2}{1+\omega^2}=\dfrac{\omega^2}{-\omega}=-\omega$

$f(2)=\dfrac{\omega^4}{1+\omega^4}=\dfrac{\omega}{1+\omega}=\dfrac{\omega}{-\omega^2}=-\dfrac{1}{\omega}$

$f(3)=\dfrac{\omega^6}{1+\omega^6}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

$f(4)=\dfrac{\omega^8}{1+\omega^8}=\dfrac{\omega^2}{1+\omega^2}=f(1)$

$f(5)=\dfrac{\omega^{10}}{1+\omega^{10}}=\dfrac{\omega}{1+\omega}=f(2)$

$f(6)=\dfrac{\omega^{12}}{1+\omega^{12}}=\dfrac{1}{1+1}=f(3)$

⋮ ··· ❷

이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(9)$

$=3\{f(1)+f(2)+f(3)\}=3\left(-\omega-\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{2}\right)$

$=3\left(\dfrac{-\omega^2-1}{\omega}+\dfrac{1}{2}\right)=3\left(\dfrac{\omega}{\omega}+\dfrac{1}{2}\right)$

$=3\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{9}{2}$

$\therefore 2\{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(9)\}=2\cdot\dfrac{9}{2}=9$ ··· ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$임을 알 수 있다.	20 %
❷ $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, …의 값을 구하여 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값이 순서대로 반복됨을 알 수 있다.	50 %
❸ $2\{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(9)\}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0665

| 전략 | 똑같이 늘어난 모서리의 길이를 x cm라 하고 상자의 부피를 x에 대한 식으로 나타낸다.

똑같이 늘어난 모서리의 길이를 x cm라 하면 부피의 합이 처음보다 180 cm^{3}만큼 늘어났으므로

$(1+x)^3+(2+x)^3=1^3+2^3+180$

$2x^3+9x^2+15x-180=0$, $(x-3)(2x^2+15x+60)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=\dfrac{-15\pm\sqrt{255}i}{4}$

그런데 x는 양의 실수이어야 하므로 $x=3$

따라서 똑같이 늘어난 모서리의 길이는 3 cm이다. 답 3 cm

0666

상자의 밑면의 가로의 길이는 $(8-2x)$ cm, 세로의 길이는 $(6-2x)$ cm이고, 높이는 x cm인 직육면체 모양의 뚜껑 없는 상자의 부피가 16 cm^{3}이므로

$(8-2x)(6-2x)x=16$ … ❶

$x^3-7x^2+12x-4=0$, $(x-2)(x^2-5x+2)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$ … ❷

그런데 x는 자연수이므로 $x=2$ … ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ x에 대한 삼차방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ ❶의 삼차방정식을 인수분해하여 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 자연수 x의 값을 구할 수 있다.	20 %

0667

A 그릇에 담겨 있던 물의 부피는

$\pi\cdot3^2\cdot12=108\pi$ (cm^3)

B 그릇의 밑면의 반지름의 길이를 x cm라 하면 B 그릇에 담긴 물의 양이 108π cm^{3}이므로

$\pi x^2(x-3)=108\pi$

$x^3-3x^2-108=0$, $(x-6)(x^2+3x+18)=0$

$\therefore x=6$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{7}i}{2}$

그런데 x는 $x>3$인 양의 실수이어야 하므로 $x=6$

따라서 B 그릇의 밑면의 반지름의 길이는 6 cm이다. 답 6 cm

STEP 1 개념 마스터 ❷

0668

$\begin{cases} x-y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=13 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-1$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(x-1)^2=13$, $2x^2-2x-12=0$

$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

㉢에서 $x=-2$이면 $y=-3$, $x=3$이면 $y=2$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

0669

$\begin{cases} x+y=-2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-3y^2=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=-y-2$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(-y-2)^2-3y^2=4$, $-2y^2+4y=0$

$y^2-2y=0$, $y(y-2)=0$

$\therefore y=0$ 또는 $y=2$

㉢에서 $y=0$이면 $x=-2$, $y=2$이면 $x=-4$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$

0670

$\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3y^2=28 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(x-2y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+3y^2=28$, $4y^2=28$

$y^2=7$ $\quad\therefore y=\pm\sqrt{7}$

$\therefore x=\pm\sqrt{7}$, $y=\pm\sqrt{7}$ (복호동순)

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$(2y)^2+3y^2=28$, $7y^2=28$

$y^2=4$ $\quad\therefore y=\pm2$

$\therefore x=\pm4$, $y=\pm2$ (복호동순)

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{7} \\ y=\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{7} \\ y=-\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=\sqrt{7} \\ y=\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{7} \\ y=-\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$

0671

$\begin{cases} x^2-xy+y^2=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×5−㉡×3을 하면

$2x^2-5xy+2y^2=0$, $(2x-y)(x-2y)=0$

$\therefore y=2x$ 또는 $y=\dfrac{1}{2}x$

(ⅰ) $y=2x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+(2x)^2=5,\ 5x^2=5$

$x^2=1 \qquad \therefore x=\pm 1$

$\therefore x=\pm 1,\ y=\pm 2$ (복호동순)

(ⅱ) $y=\frac{1}{2}x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+\left(\frac{1}{2}x\right)^2=5,\ \frac{5}{4}x^2=5$

$x^2=4 \qquad \therefore x=\pm 2$

$\therefore x=\pm 2,\ y=\pm 1$ (복호동순)

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

0672

$\begin{cases} 3x^2-2x+5y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-3x+4y=-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡$\times 3$을 하면

$7x-7y=7 \qquad \therefore y=x-1$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2-3x+4(x-1)=-2,\ x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=1$

㉢에서 $x=-2$이면 $y=-3$, $x=1$이면 $y=0$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

0673

x, y는 이차방정식 $t^2-3t-10=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t-5)=0 \qquad \therefore t=-2$ 또는 $t=5$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$

0674

x, y는 이차방정식 $t^2+2t-24=0$의 두 근이므로

$(t+6)(t-4)=0 \qquad \therefore t=-6$ 또는 $t=4$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-6 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-6 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=-6 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-6 \end{cases}$

0675

$2x+y=9$에서 $y=-2x+9$

y는 자연수이므로 $-2x+9\geq 1 \qquad \therefore x\leq 4$

x는 자연수이므로 $x=1, 2, 3, 4$

x	1	2	3	4
y	7	5	3	1

위의 표에서 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(1,\ 7)$, $(2,\ 5)$, $(3,\ 3)$, $(4,\ 1)$의 4개이다.

답 4

0676

$(x-2)(y+1)=3$에서 x, y는 정수이므로

$x-2$	-3	-1	1	3
$y+1$	-1	-3	3	1

위의 표에서 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(-1,\ -2)$, $(1,\ -4)$, $(3,\ 2)$, $(5,\ 0)$의 4개이다.

답 4

0677

$x^2+2x+y^2-4y+5=0$에서

$(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)=0$

$\therefore (x+1)^2+(y-2)^2=0$

이때, x, y는 실수이므로

$x+1=0,\ y-2=0$

$\therefore x=-1,\ y=2$

답 $x=-1,\ y=2$

STEP 2 유형 마스터 ❷

0678

| 전략 | 일차방정식을 어느 한 문자에 대하여 푼 후 이차방정식에 대입한다.

$\begin{cases} x-y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-2$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(x-2)^2=10,\ 2x^2-4x-6=0$

$x^2-2x-3=0,\ (x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

㉢에서 $x=-1$이면 $y=-3$, $x=3$이면 $y=1$

따라서 $\alpha=3,\ \beta=1$이므로 $\alpha-2\beta=1$

답 ④

0679

$\begin{cases} x-y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2xy=-8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-1$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2-2x(x-1)=-8,\ x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

㉢에서 $x=-2$이면 $y=-3$, $x=4$이면 $y=3$

따라서 $\alpha=4$, $\beta=3$이므로 $\alpha^2+\beta^2=25$ 답 ③

0680

$\begin{cases} ax+y=1 \\ x+y=8 \end{cases}$의 해가 $\begin{cases} x-y=b \\ x^2+y^2=34 \end{cases}$의 해가 되므로 두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식 $\begin{cases} x+y=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=34 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉠에서 $y=8-x$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(8-x)^2=34$, $2x^2-16x+30=0$

$x^2-8x+15=0$, $(x-3)(x-5)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=5$

㉢에서 $x=3$이면 $y=5$, $x=5$이면 $y=3$

그런데 $b=x-y>0$이므로 $x=5$, $y=3$ $\qquad \therefore b=5-3=2$

또, $ax+y=1$에서 $5a+3=1$ $\qquad \therefore a=-\frac{2}{5}$

$\therefore a-b=-\frac{12}{5}$ 답 $-\frac{12}{5}$

0681

$\begin{cases} 2x+y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2xy-3y=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-2x+1$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+2x(-2x+1)-3(-2x+1)=1$

$3x^2-8x+4=0$, $(3x-2)(x-2)=0$

$\therefore x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

㉢에서 $x=\frac{2}{3}$이면 $y=-\frac{1}{3}$, $x=2$이면 $y=-3$

따라서 $x+y$의 값은 $\frac{1}{3}$ 또는 -1이므로 최댓값은 $\frac{1}{3}$이다. 답 $\frac{1}{3}$

0682

| 전략 | 인수분해가 되는 이차방정식을 두 일차식의 곱으로 인수분해한다.

$\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+y^2=9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+y)(x-y)=0$ $\qquad \therefore x=-y$ 또는 $x=y$

(i) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+y^2+y^2=9$, $3y^2=9$, $y^2=3$

$\therefore y=\pm\sqrt{3}$, $x=\mp\sqrt{3}$ (복호동순)

(ii) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2-y^2+y^2=9$, $y^2=9$

$\therefore y=\pm 3$, $x=\pm 3$ (복호동순)

(i), (ii)에서 $M=3+3=6$, $m=-3-3=-6$이므로

$Mm=-36$ 답 -36

0683

$\begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3xy+2y^2=30 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(x-4y)=0$ $\qquad \therefore x=y$ 또는 $x=4y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+3y\cdot y+2y^2=30$, $6y^2=30$, $y^2=5$

$\therefore y=\pm\sqrt{5}$, $x=\pm\sqrt{5}$ (복호동순)

(ii) $x=4y$를 ㉡에 대입하면

$(4y)^2+3\cdot 4y\cdot y+2y^2=30$, $30y^2=30$, $y^2=1$

$\therefore y=\pm 1$, $x=\pm 4$ (복호동순)

(i), (ii)에서 $\alpha+\beta$의 값은 $2\sqrt{5}$ 또는 $-2\sqrt{5}$ 또는 5 또는 -5이므로 $\alpha+\beta$의 값이 될 수 있는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0684

$\begin{cases} 2x^2-2y^2+x+y=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+xy-2y^2=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $2(x+y)(x-y)+x+y=0$

$(x+y)(2x-2y+1)=0$ $\qquad \therefore y=-x$ 또는 $y=x+\frac{1}{2}$

(i) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$2x^2+x\cdot(-x)-2\cdot(-x)^2=-1$, $x^2=1$

$\therefore x=\pm 1$, $y=\mp 1$ (복호동순)

(ii) $y=x+\frac{1}{2}$을 ㉡에 대입하면

$2x^2+x\left(x+\frac{1}{2}\right)-2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=-1$

$2x^2-3x+1=0$, $(x-1)(2x-1)=0$

$\therefore x=1$, $y=\frac{3}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$, $y=1$

(i), (ii)에서 서로 다른 부호를 가지는 x, y의 값에 대하여

$x^2+y^2=1+1=2$ 답 2

0685

| 전략 | 상수항을 소거하여 인수분해한 후 두 이차방정식 중 하나에 대입하여 푼다.

$\begin{cases} x^2-xy+y^2=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2xy-4y^2=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 4-$㉡$\times 3$을 하면

$x^2-10xy+16y^2=0$, $(x-2y)(x-8y)=0$

$\therefore x=2y$ 또는 $x=8y$

(i) $x=2y$를 ㉠에 대입하면

$(2y)^2-2y\cdot y+y^2=3$, $3y^2=3$, $y^2=1$

$\therefore y=\pm 1$, $x=\pm 2$ (복호동순)

(ii) $x=8y$를 ㉠에 대입하면

$(8y)^2-8y\cdot y+y^2=3$, $57y^2=3$, $y^2=\frac{1}{19}$

이때, y는 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $xy=2$ 답 2

0686

$\begin{cases} x^2-xy=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ y^2-xy=-4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×4+㉡×5를 하면

$4x^2-9xy+5y^2=0$, $(x-y)(4x-5y)=0$

$\therefore y=x$ 또는 $y=\frac{4}{5}x$

(i) $y=x$를 ㉠에 대입하면

$x^2-x\cdot x=5$, $0\cdot x^2=5$

따라서 해는 존재하지 않는다.

(ii) $y=\frac{4}{5}x$를 ㉠에 대입하면

$x^2-x\cdot\frac{4}{5}x=5$, $\frac{1}{5}x^2=5$, $x^2=25$

$\therefore x=\pm5$, $y=\pm4$ (복호동순)

(i), (ii)에서 $\alpha\beta=20$

답 ③

0687

$\begin{cases} 4x^2-11xy+7y^2=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2xy+2y^2=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡×2를 하면

$2x^2-7xy+3y^2=0$, $(2x-y)(x-3y)=0$

$\therefore y=2x$ 또는 $y=\frac{1}{3}x$ ··· ❶

(i) $y=2x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-2x\cdot2x+2\cdot(2x)^2=5$, $5x^2=5$, $x^2=1$

$\therefore x=\pm1$, $y=\pm2$ (복호동순) ··· ❷

(ii) $y=\frac{1}{3}x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-2x\cdot\frac{1}{3}x+2\cdot\left(\frac{1}{3}x\right)^2=5$, $\frac{5}{9}x^2=5$, $x^2=9$

$\therefore x=\pm3$, $y=\pm1$ (복호동순) ··· ❸

(i), (ii)에서 $\alpha^2+\beta^2$의 값은 5 또는 10이므로 최댓값은 10이다. ··· ❹

답 10

채점 기준	비율
❶ 상수항을 소거하여 인수분해한 후 y를 x에 대하여 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $y=2x$를 ㉡에 대입하여 해를 구할 수 있다.	30 %
❸ $y=\frac{1}{3}x$를 ㉡에 대입하여 해를 구할 수 있다.	30 %
❹ $\alpha^2+\beta^2$의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

0688

| 전략 | 이차항을 소거하여 일차방정식을 얻은 후 두 이차방정식 중 하나에 대입하여 푼다.

$\begin{cases} x^2+y^2-7x+y=-10 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2-x-2y=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면

$-6x+3y=-15$ $\therefore y=2x-5$ ······ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(2x-5)^2-7x+(2x-5)=-10$

$5x^2-25x+30=0$, $x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$ $\therefore x=2$ 또는 $x=3$

㉢에서 $x=2$이면 $y=-1$, $x=3$이면 $y=1$

따라서 $\alpha^2+\beta^2$의 값은 5 또는 10이다.

답 ⑤

0689

$\begin{cases} 3x^2-2x+5y=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-x+2y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡×3을 하면

$x-y=2$ $\therefore y=x-2$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2-x+2(x-2)=2$, $x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

㉢에서 $x=-3$이면 $y=-5$, $x=2$이면 $y=0$

따라서 $\alpha+\beta$의 값은 -8 또는 2이다.

답 -8 또는 2

0690

$\begin{cases} x^2+xy-3y=-3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+2xy+x-5y=-3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×2−㉡을 하면

$-x-y=-3$ $\therefore y=-x+3$ ······ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+x(-x+3)-3(-x+3)=-3$, $6x=6$ $\therefore x=1$

㉢에서 $x=1$이면 $y=2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로 $\alpha\beta=2$

답 2

0691

$\begin{cases} y^2+2x-3y=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2y^2-3x+y=-5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×2−㉡을 하면

$7x-7y=21$, $x-y=3$ $\therefore x=y+3$ ······ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$y^2+2(y+3)-3y=8$, $y^2-y-2=0$

$(y+1)(y-2)=0$ $\therefore y=-1$ 또는 $y=2$

㉢에서 $y=-1$이면 $x=2$, $y=2$이면 $x=5$

따라서 $\alpha+\beta$의 값은 1 또는 7이므로 최댓값은 7이다.

답 7

0692

| 전략 | $x+y=u$, $xy=v$로 놓고 x, y가 이차방정식 $t^2-ut+v=0$의 두 근임을 이용한다.

$x+y=u$, $xy=v$라 하면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u-v=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-v=13 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $v=u-1$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$u^2-(u-1)=13$, $u^2-u-12=0$

$(u+3)(u-4)=0$ $\quad\therefore u=-3$ 또는 $u=4$

㉢에서 $u=-3$이면 $v=-4$, $u=4$이면 $v=3$

(i) $u=-3$, $v=-4$, 즉 $x+y=-3$, $xy=-4$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2+3t-4=0$의 두 근이므로

$(t+4)(t-1)=0$ $\quad\therefore t=-4$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$

(ii) $u=4$, $v=3$, 즉 $x+y=4$, $xy=3$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-4t+3=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=1$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

(i), (ii)에서 x^2-y^2의 최솟값은 $1^2-(-4)^2=-15$ 답 -15

0693

$x+y=u$, $xy=v$라 하면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} v=20 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-2v=41 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$u^2-40=41$, $u^2=81$ $\quad\therefore u=\pm 9$

(i) $u=9$, $v=20$, 즉 $x+y=9$, $xy=20$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-9t+20=0$의 두 근이므로

$(t-4)(t-5)=0$ $\quad\therefore t=4$ 또는 $t=5$

$\therefore \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$

(ii) $u=-9$, $v=20$, 즉 $x+y=-9$, $xy=20$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2+9t+20=0$의 두 근이므로

$(t+5)(t+4)=0$ $\quad\therefore t=-5$ 또는 $t=-4$

$\therefore \begin{cases} x=-5 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-5 \end{cases}$

(i), (ii)에서 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(4,\ 5)$, $(5,\ 4)$, $(-5,\ -4)$, $(-4,\ -5)$의 4개이다. 답 4

0694

$x+y=u$, $xy=v$라 하면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u^2+u-2v=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-v=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면 $u-v=1$ $\quad\therefore v=u-1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$u^2-(u-1)=1$, $u^2-u=0$

$u(u-1)=0$ $\quad\therefore u=0$ 또는 $u=1$

㉢에서 $u=0$이면 $v=-1$, $u=1$이면 $v=0$

(i) $u=0$, $v=-1$, 즉 $x+y=0$, $xy=-1$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-1=0$의 두 근이므로

$(t+1)(t-1)=0$ $\quad\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

(ii) $u=1$, $v=0$, 즉 $x+y=1$, $xy=0$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-t=0$의 두 근이므로

$t(t-1)=0$ $\quad\therefore t=0$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

(i), (ii)에서 $|x-y|$의 값은 2 또는 1이므로 최댓값은 2이다. 답 ①

0695

$\begin{cases} (x-y)^2+xy=12 \\ (x-1)^2+(y-1)^2=10 \end{cases}$에서 $\begin{cases} x^2-xy+y^2=12 \\ x^2+y^2-2(x+y)=8 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} (x+y)^2-3xy=12 \\ (x+y)^2-2(x+y)-2xy=8 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$라 하면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u^2-3v=12 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-2u-2v=8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면 $2u-v=4$ $\quad\therefore v=2u-4$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$u^2-3(2u-4)=12$, $u^2-6u=0$

$u(u-6)=0$ $\quad\therefore u=0$ 또는 $u=6$

㉢에서 $u=0$이면 $v=-4$, $u=6$이면 $v=8$

(i) $u=0$, $v=-4$, 즉 $x+y=0$, $xy=-4$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-4=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t-2)=0$ $\quad\therefore t=-2$ 또는 $t=2$

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$

(ii) $u=6$, $v=8$, 즉 $x+y=6$, $xy=8$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-6t+8=0$의 두 근이므로

$(t-2)(t-4)=0$ $\quad\therefore t=2$ 또는 $t=4$

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(-2,\ 2)$, $(2,\ -2)$, $(2,\ 4)$, $(4,\ 2)$이다. 답 $(-2,\ 2)$, $(2,\ -2)$, $(2,\ 4)$, $(4,\ 2)$

0696

| 전략 | 일차방정식을 이차방정식에 대입하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 오직 하나의 해를 가지면 $D=0$이다.

$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+y=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $y=-2x+k$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(-2x+k)^2=5$, $5x^2-4kx+k^2-5=0$

이를 만족시키는 x의 값이 오직 한 개 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5(k^2-5)=0$

$k^2=25$ $\quad\therefore k=\pm5$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$5\cdot(-5)=-25$ 답 ⑤

0697

$\begin{cases} x-2y=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+m=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=2y-1$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(2y-1)^2+(2y-1)y+m=0$, $6y^2-5y+m+1=0$

이 이차방정식의 실근이 존재하지 않아야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=25-24(m+1)<0$ $\quad\therefore m>\frac{1}{24}$

따라서 정수 m의 최솟값은 1이다. 답 ①

0698

$\begin{cases} x+y=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy+x+y=2k+3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

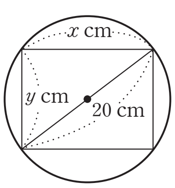
$xy+6=2k+3$ $\quad\therefore xy=2k-3$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉢을 만족시키는 실수 x, y는 이차방정식 $t^2-6t+2k-3=0$의 두 실근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(2k-3)\geq0$ $\quad\therefore k\leq6$ 답 $k\leq6$

0699

| 전략 | 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x cm, y cm라 하고 주어진 조건을 이용하여 연립이차방정식을 세운다.



넓이가 100π cm^{2}인 원의 반지름의 길이는 10 cm이다. 직사각형의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하면

직사각형의 둘레의 길이가 56 cm이므로

$2(x+y)=56$ $\quad\therefore y=28-x$ ⋯⋯ ㉠

직사각형의 대각선의 길이가 원의 지름의 길이와 같으므로

$x^2+y^2=20^2$ $\quad\therefore x^2+y^2=400$ ⋯⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2+(28-x)^2=400$, $x^2-28x+192=0$

$(x-12)(x-16)=0$ $\quad\therefore x=12$ 또는 $x=16$

㉠에서 $x=12$이면 $y=16$, $x=16$이면 $y=12$

따라서 직사각형의 이웃하는 두 변의 길이의 차는

$16-12=4$ (cm) 답 ④

0700

두 자리 자연수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라 하면 각 자리의 숫자의 제곱의 합이 53이므로

$x^2+y^2=53$ ⋯⋯ ㉠

일의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자를 바꾼 수와 처음 수의 합이 99이므로

$(10y+x)+(10x+y)=99$ $\quad\therefore y=9-x$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^2+(9-x)^2=53$, $x^2-9x+14=0$

$(x-2)(x-7)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=7$

㉡에서 $x=2$이면 $y=7$, $x=7$이면 $y=2$

그런데 $x<y$이므로 $x=2$, $y=7$

따라서 처음 수는 27이다. 답 27

0701

처음 땅의 가로의 길이를 x km, 세로의 길이를 y km라 하면

$x^2+y^2=160$ ⋯⋯ ㉠

이 땅의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 1 km씩 줄인 땅의 넓이가 처음 땅의 넓이보다 15 km^{2}만큼 작으므로

$(x-1)(y-1)=xy-15$

$x+y=16$ $\quad\therefore y=16-x$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^2+(16-x)^2=160$, $x^2-16x+48=0$

$(x-4)(x-12)=0$ $\quad\therefore x=4$ 또는 $x=12$

㉡에서 $x=4$이면 $y=12$, $x=12$이면 $y=4$

따라서 처음 땅의 가로의 길이와 세로의 길이의 차는

$12-4=8$ (km) 답 8 km

0702

| 전략 | 공통근 α를 두 이차방정식에 대입하여 α와 k에 대한 연립방정식을 푼다.

공통근이 α이므로 주어진 방정식에 대입하면

$3\alpha^2-(k+1)\alpha+4k=0$ ⋯⋯ ㉠

$3\alpha^2+(2k-1)\alpha+k=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $-3k\alpha+3k=0$

$3k(1-\alpha)=0$ $\quad\therefore k=0$ 또는 $\alpha=1$

(i) $k=0$을 ㉠에 대입하면

$3\alpha^2-\alpha=0$, $\alpha(3\alpha-1)=0$

$\therefore \alpha=0$ 또는 $\alpha=\frac{1}{3}$

즉, 공통근이 0, $\frac{1}{3}$의 2개이므로 $k\neq0$이다.

(ii) $\alpha=1$을 ㉠에 대입하면

$3-(k+1)+4k=0$ $\quad\therefore k=-\frac{2}{3}$

(i), (ii)에서 $3k+\alpha=3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+1=-1$ 답 ①

0703

$x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

(i) 공통근이 -1일 때

$-1-2(a+1)+a^2=0$에서 $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=3$

(ii) 공통근이 2일 때

$8-8(a+1)+a^2=0$에서 $a^2-8a=0$

$a(a-8)=0 \qquad \therefore a=0$ 또는 $a=8$

(i), (ii)에서 정수 a의 개수는 4이다. 답 4

0704

두 방정식의 공통근을 $\alpha(\alpha\neq0)$라 하면

$\alpha^2-2(k-2)\alpha+3k=0$ ...... ㉠

$\alpha^2+(2k+6)\alpha-3k=0$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면 $2\alpha^2+10\alpha=0$

$2\alpha(\alpha+5)=0 \qquad \therefore \alpha=-5\ (\because \alpha\neq0)$

$\alpha=-5$를 ㉠에 대입하면

$25+10(k-2)+3k=0 \qquad \therefore k=-\dfrac{5}{13}$ 답 $-\dfrac{5}{13}$

0705

두 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 공통근을 α라 하면

$\alpha^2+m\alpha+2n=0$ ...... ㉠

$\alpha^2+n\alpha+2m=0$ ...... ㉡

㉠−㉡을 하면 $(m-n)\alpha+2(n-m)=0$

$(m-n)(\alpha-2)=0 \qquad \therefore m=n$ 또는 $\alpha=2$

그런데 $m=n$이면 두 방정식이 일치하므로 서로 다른 두 이차식이라는 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore \alpha=2$

공통근이 아닌 $f(x)=0$의 근과 $g(x)=0$의 근의 비가 $2:1$이므로 두 근을 $2t$, t라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+2t=-m,\ 2\cdot2t=2n \qquad \therefore m=-2t-2,\ n=2t$

$2+t=-n,\ 2\cdot t=2m \qquad \therefore n=-t-2,\ m=t$

즉, $-2t-2=t$, $2t=-t-2$이므로 $t=-\dfrac{2}{3}$

따라서 $m=-\dfrac{2}{3}$, $n=-\dfrac{4}{3}$이므로

$mn=\dfrac{8}{9}$ 답 $\dfrac{8}{9}$

0706

| 전략 | (일차식)×(일차식)=(정수) 꼴로 고쳐서 정수 조건을 이용한다.

$xy+x-y=3$에서 $x(y+1)-(y+1)+1=3$

$\therefore (x-1)(y+1)=2$

이때, x, y는 정수이므로

$x-1$	-2	-1	1	2
$y+1$	-1	-2	2	1

$\therefore \begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=0\\y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}$

따라서 $x-y$의 최댓값은 3이다. 답 ⑤

0707

$3(x+y)=xy$에서 $xy-3x-3y=0$

$x(y-3)-3(y-3)-9=0$

$\therefore (x-3)(y-3)=9$

이때, x, y는 양의 정수이므로

$x-3$	1	3	9
$y-3$	9	3	1

따라서 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(4,\ 12)$, $(6,\ 6)$, $(12,\ 4)$의 3개이다.

답 3

0708

$x^2+y^2-2x+4y=0$에서 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$

이때, x, y는 정수이므로

$x-1$	-2	-2	-1	-1	1	1	2	2
$y+2$	-1	1	-2	2	-2	2	-1	1

$\therefore \begin{cases}x=-1\\y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=0\\y=-4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 또는

$\begin{cases}x=2\\y=-4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$

따라서 $x+y$의 최댓값은 2, 최솟값은 -4이므로 그 합은

$2+(-4)=-2$ 답 -2

0709

이차방정식 $x^2-(m+1)x+2m=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m+1$ ...... ㉠

$\alpha\beta=2m$ ...... ㉡

㉠×2−㉡을 하면 $2\alpha+2\beta-\alpha\beta=2$

$\alpha\beta-2\alpha-2\beta=-2$, $\alpha(\beta-2)-2(\beta-2)-4=-2$

$\therefore (\alpha-2)(\beta-2)=2$

이때, α, β는 정수이므로

$\alpha-2$	-2	-1	1	2
$\beta-2$	-1	-2	2	1

$\therefore \begin{cases}\alpha=0\\\beta=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=1\\\beta=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=3\\\beta=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=4\\\beta=3\end{cases}$

이것을 ㉡에 대입하면 $m=0$ 또는 $m=6$

따라서 모든 실수 m의 값의 합은 $0+6=6$ 답 6

0710

| 전략 | x에 대한 내림차순으로 정리한 후 판별식 $D\geq 0$임을 이용하여 푼다.

주어진 방정식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$2x^2+4(y-1)x+5y^2+2y+5=0$ ······ ㉠

이때, x는 실수이므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4(y-1)^2-2(5y^2+2y+5)\geq 0,\ -6y^2-12y-6\geq 0$

$y^2+2y+1\leq 0 \quad \therefore (y+1)^2\leq 0$

y는 실수이므로 $y=-1$

$y=-1$을 ㉠에 대입하면

$2x^2-8x+8=0,\ x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0 \quad \therefore x=2$

$\therefore x-y=3$ 답 ④

다른 풀이 $2x^2+4xy+5y^2-4x+2y+5=0$에서

$(x^2+4xy+4y^2)+(x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)=0$

$\therefore (x+2y)^2+(x-2)^2+(y+1)^2=0$

이때, x, y가 실수이므로

$x+2y=0,\ x-2=0,\ y+1=0 \quad \therefore x=2,\ y=-1$

$\therefore x-y=3$

0711

주어진 방정식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2+2(y-1)x+2y^2-6y+5=0$ ······ ㉠

이때, x는 실수이므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(y-1)^2-(2y^2-6y+5)\geq 0,\ -y^2+4y-4\geq 0$

$y^2-4y+4\leq 0 \quad \therefore (y-2)^2\leq 0$

y는 실수이므로 $y=2$ ··· ❶

$y=2$를 ㉠에 대입하면

$x^2+2x+1=0,\ (x+1)^2=0 \quad \therefore x=-1$ ··· ❷

$\therefore xy=-2$ ··· ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ y의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ xy의 값을 구할 수 있다.	20 %

0712

$x^2(1+y^2)=12xy+4x-40$에서

$x^2+x^2y^2-12xy-4x+40=0$

$(x^2y^2-12xy+36)+(x^2-4x+4)=0$

$\therefore (xy-6)^2+(x-2)^2=0$

이때, x, y는 실수이므로

$xy=6,\ x=2 \quad \therefore x=2,\ y=3$

$\therefore x+y=5$ 답 ⑤

STEP 3 내신 마스터

0713

유형 01 삼·사차방정식의 풀이

| 전략 | 인수정리와 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

$f(x)=x^3-4x^2+x+6$으로 놓으면

$f(-1)=-1-4-1+6=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2-5x+6)$

$\quad=(x+1)(x-2)(x-3)$

즉, $(x+1)(x-2)(x-3)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

따라서 $\alpha=-1,\ \beta=2,\ \gamma=3$이므로 $\alpha+\beta-\gamma=-2$ 답 ①

0714

유형 02 치환을 이용한 사차방정식의 풀이

| 전략 | 먼저 주어진 두 이차식을 인수분해한 후 다시 공통부분이 생기도록 일차식을 2개씩 묶는다.

$(x^2+4x+3)(x^2+6x+8)=3$에서

$(x+1)(x+3)(x+2)(x+4)=3$

$\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}=3$

$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=3$

이때, $x^2+5x=t$로 놓으면 위의 방정식은

$(t+4)(t+6)=3,\ t^2+10t+21=0$

$(t+7)(t+3)=0 \quad \therefore t=-7$ 또는 $t=-3$

(ⅰ) $t=-7$, 즉 $x^2+5x=-7$일 때

$x^2+5x+7=0$의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-4\cdot 1\cdot 7=-3<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ⅱ) $t=-3$, 즉 $x^2+5x=-3$일 때

$x^2+5x+3=0$의 판별식을 D'이라 하면

$D'=5^2-4\cdot 1\cdot 3=13>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 실근 α, β는 $x^2+5x+3=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-5,\ \alpha\beta=3$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-5)^2-4\cdot 3=13$ 답 ③

0715

유형 03 복이차방정식의 풀이 – $x^4+ax^2+b=0\,(a\neq 0)$ 꼴

| 전략 | $x^2=t$로 치환한 후 좌변을 인수분해한다.

$x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-7t-18=0,\ (t+2)(t-9)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=9$

즉, $x^2=-2$ 또는 $x^2=9$이므로

$x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm 3$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=(-2)+(-2)+9+9=14$ 답 ③

0716

유형 05 삼·사차방정식의 근이 주어질 때 미정계수 구하기

|전략| 삼차방정식 $f(x)=0$의 한 근이 α이면 $f(\alpha)=0$임을 이용한다.

$f(x)=x^3+ax^2+2x+b$로 놓으면

$f(1)=0$에서 $1+a+2+b=0$

$\therefore a+b=-3$ …… ㉠

$f(2)=0$에서 $8+4a+4+b=0$

$\therefore 4a+b=-12$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3, b=0$

$\therefore ab=0$

답 ①

0717

유형 06 삼차방정식의 근의 조건이 주어질 때 미정계수 구하기

|전략| 삼차방정식의 근을 판별할 때에는 삼차방정식을 $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)=0$ 꼴로 인수분해한 후 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 이용한다.

$f(x)=x^3+x^2+2(k-1)x-2k$로 놓으면

$f(1)=1+1+2(k-1)-2k=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & 2k-2 & -2k \\ & & 1 & 2 & 2k \\ \hline & 1 & 2 & 2k & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+2x+2k)$

ㄱ. 방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지려면

(i) 이차방정식 $x^2+2x+2k=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우

$1+2+2k=0 \qquad \therefore k=-\dfrac{3}{2}$

(ii) 이차방정식 $x^2+2x+2k=0$이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1^2-1\cdot 2k=0,\ 2k=1 \qquad \therefore k=\dfrac{1}{2}$

(i), (ii)에서 실수 k의 값은 $-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}$의 2개이다.

ㄴ. 방정식 $f(x)=0$의 근이 모두 실수이려면 이차방정식 $x^2+2x+2k=0$의 근이 모두 실수이어야 한다. 즉,

$\dfrac{D}{4}=1^2-1\cdot 2k\geq 0,\ 2k\leq 1 \qquad \therefore k\leq\dfrac{1}{2}$

따라서 실수 k의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$이다.

ㄷ. 방정식 $f(x)=0$은 항상 1을 근으로 가지므로 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

0718

유형 07 삼차방정식의 근과 계수의 관계

|전략| 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2,\ \alpha\beta\gamma=-3$이므로

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$

$=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$

$=1\cdot\{1^2-3\cdot(-2)\}+3\cdot(-3)=-2$

답 ①

0719

유형 07 삼차방정식의 근과 계수의 관계

|전략| 주어진 삼차방정식의 세 근을 $\alpha-1, \alpha, \alpha+1$이라 하고 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

주어진 삼차방정식의 세 근을 $\alpha-1, \alpha, \alpha+1$이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha-1)+\alpha+(\alpha+1)=a \qquad \therefore a=3\alpha$ …… ㉠

$\alpha(\alpha-1)+\alpha(\alpha+1)+(\alpha+1)(\alpha-1)=26$

$3\alpha^2-1=26,\ \alpha^2=9 \qquad \therefore \alpha=-3$ 또는 $\alpha=3$

(i) $\alpha=-3$일 때, ㉠에서 $a=-9$

그런데 $a>0$이므로 $a\neq -9$

(ii) $\alpha=3$일 때, ㉠에서 $a=9$

따라서 세 근은 2, 3, 4이므로

$2\cdot 3\cdot 4=-b \qquad \therefore b=-24$

$\therefore a+b=-15$

답 ①

0720

유형 10 방정식 $x^3=1, x^3=-1$의 허근의 성질

|전략| $x^3=-1$의 한 허근이 ω이면 $\overline{\omega}$도 $x^3=-1$의 한 허근임을 이용한다.

(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0,\ (x+1)(x^2-x+1)=0$

$x^2-x+1=0$의 한 허근이 ω이고, 계수가 실수이므로 나머지 한 허근은 $\overline{\omega}$이다.

즉, $\omega^3=-1,\ \omega^2-\omega+1=0,\ \overline{\omega}^3=-1,\ \overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1=0,\ \omega\overline{\omega}=1$이므로

$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6+\omega^7+\omega^8$

$=1+\omega+\omega^2-1-\omega-\omega^2+1+\omega+\omega^2$

$=1+\omega+\omega^2=1+\omega+(\omega-1)=2\omega$

같은 방법으로 $1+\overline{\omega}+\overline{\omega}^2+\cdots+\overline{\omega}^8=2\overline{\omega}$

$\therefore (1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^8)(1+\overline{\omega}+\overline{\omega}^2+\cdots+\overline{\omega}^8)$

$=2\omega\cdot 2\overline{\omega}=4\omega\overline{\omega}$

$=4\cdot 1=4$

답 ④

0721

유형 10 방정식 $x^3=1, x^3=-1$의 허근의 성질

|전략| $x^3=1$의 한 허근이 ω이면 $\overline{\omega}$도 $x^3=1$의 한 허근임을 이용한다.

(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

ㄱ. $\dfrac{\omega+1}{2\omega+1}\cdot\overline{\left(\dfrac{\omega+1}{2\omega+1}\right)}=\dfrac{\omega+1}{2\omega+1}\cdot\dfrac{\overline{\omega+1}}{\overline{2\omega+1}}$

$=\dfrac{\omega+1}{2\omega+1}\cdot\dfrac{\overline{\omega}+1}{2\overline{\omega}+1}$

$=\dfrac{(\omega+1)(\overline{\omega}+1)}{(2\omega+1)(2\overline{\omega}+1)}$

$=\dfrac{\omega\overline{\omega}+\omega+\overline{\omega}+1}{4\omega\overline{\omega}+2(\omega+\overline{\omega})+1}$

$=\dfrac{1-1+1}{4\cdot 1+2\cdot(-1)+1}=\dfrac{1}{3}$

ㄴ. $\omega\bar{\omega}^5+\omega^5\bar{\omega}=\omega(\bar{\omega}^3)\cdot\bar{\omega}^2+\omega^3\cdot\omega^2\bar{\omega}=\omega\bar{\omega}^2+\omega^2\bar{\omega}$

$=\omega\bar{\omega}(\omega+\bar{\omega})$

$=1\cdot(-1)=-1$

ㄷ. $\omega^{100}+\frac{1}{\omega^{100}}=(\omega^3)^{33}\cdot\omega+\frac{1}{(\omega^3)^{33}\cdot\omega}=\omega+\frac{1}{\omega}$

$=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0722

유형 11 삼·사차방정식의 활용

| 전략 | 구멍을 파내고 남은 부분의 부피를 x에 대한 식으로 나타낸다.

구멍을 파내고 남은 부분의 부피가 62 m^3이므로

$x^3-1\cdot1\cdot\frac{x}{2}=62$, $2x^3-x-124=0$

$(x-4)(2x^2+8x+31)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=-2\pm\frac{\sqrt{46}i}{2}$

그런데 x는 양의 실수이므로 $x=4$ 답 ③

0723

유형 14 상수항을 소거하는 연립이차방정식

| 전략 | 상수항을 소거하여 인수분해한 후 두 이차방정식 중 하나에 대입하여 푼다.

$\begin{cases}3x^2+xy+2y^2=48 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2+2xy+y^2=16 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠$-$㉡$\times3$을 하면

$-5xy-y^2=0$, $y(5x+y)=0$

$\therefore y=0$ 또는 $y=-5x$

(i) $y=0$을 ㉠에 대입하면

$3x^2=48$, $x^2=16$

$\therefore x=\pm4$

(ii) $y=-5x$를 ㉠에 대입하면

$48x^2=48$, $x^2=1$

$\therefore x=\pm1$, $y=\mp5$ (복호동순)

(i), (ii)에서 $\alpha+\beta$의 값은 4 또는 -4이므로 최댓값은 4이다. 답 ⑤

0724

유형 15 이차항을 소거하는 연립이차방정식

| 전략 | 이차항을 소거하여 일차방정식을 만든 후 이차방정식과 연립하여 푼다.

$\begin{cases}x^2-y^2-2x+y=0 & \cdots\cdots ㉠\\ 2x^2-2y^2+x+3y=1 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠$\times2-$㉡을 하면

$-5x-y=-1$ $\quad\therefore y=-5x+1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2-(-5x+1)^2-2x+(-5x+1)=0$, $8x^2-x=0$

$x(8x-1)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{1}{8}$

㉢에서 $x=0$이면 $y=1$, $x=\frac{1}{8}$이면 $y=\frac{3}{8}$

따라서 정수인 해는 $x=0$, $y=1$이므로 $\alpha=0$, $\beta=1$

$\therefore \alpha-\beta=-1$ 답 ②

0725

유형 16 x, y에 대한 대칭식인 연립이차방정식

| 전략 | $x+y=u$, $xy=v$로 놓고 x, y가 이차방정식 $t^2-ut+v=0$의 두 근임을 이용한다.

$x+y=u$, $xy=v$라 하면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases}u+v=3 & \cdots\cdots ㉠\\ u^2-3v=1 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $v=3-u$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$u^2-3(3-u)=1$, $u^2+3u-10=0$

$(u+5)(u-2)=0$ $\quad\therefore u=-5$ 또는 $u=2$

㉢에서 $u=-5$이면 $v=8$, $u=2$이면 $v=1$

따라서 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{u}{v}$이므로 구하는 값은 $-\frac{5}{8}$ 또는 2이다.

답 ①

0726

유형 17 연립이차방정식의 해의 조건

| 전략 | x, y를 근으로 하는 이차방정식 $t^2-(x+y)t+xy=0$의 판별식을 D라 할 때, 실근을 가지면 $D\geq0$이다.

주어진 연립방정식을 만족시키는 실수 x, y는 이차방정식 $t^2-2(5-a)t+(a^2+5)=0$의 두 실근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(5-a)^2-(a^2+5)\geq0$, $-10a+20\geq0$ $\quad\therefore a\leq2$

따라서 실수 a의 최댓값은 2이다. 답 ②

0727

유형 20 정수 조건의 부정방정식

| 전략 | 근과 계수의 관계를 이용하여 (일차식)$\times$(일차식)$=$(정수) 꼴로 고치고 두 근을 구한다.

이차방정식 $x^2-(a+1)x-2a+1=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a+1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\beta=-2a+1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠$\times2+$㉡을 하면 $2\alpha+2\beta+\alpha\beta=3$

$\alpha(\beta+2)+2(\beta+2)-4=3$

$\therefore (\alpha+2)(\beta+2)=7$

이때, α, β는 음의 정수이므로

$\alpha+2$	-7	-1
$\beta+2$	-1	-7

$\therefore \begin{cases}\alpha=-9\\ \beta=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=-3\\ \beta=-9\end{cases}$

㉠에서 $-9+(-3)=a+1$ $\quad\therefore a=-13$ 답 ①

0728

유형 **08** 삼차방정식의 작성

| 전략 | 세 수 α, β, γ를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$이다.

삼차방정식 $x^3-2x^2+7x+a=0$에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=7,\ \alpha\beta\gamma=-a$ ··· ❶

삼차방정식 $x^3+bx^2+cx-14=0$의 세 근이 $\alpha+1, \beta+1, \gamma+1$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=-b$에서

$\alpha+\beta+\gamma+3=-b \quad \therefore b=-5$

$(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)=c$에서

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+2(\alpha+\beta+\gamma)+3=c \quad \therefore c=14$

$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=14$에서

$\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1=14$

$-a+10=14 \quad \therefore a=-4$ ··· ❷

$\therefore a+b+c=5$ ··· ❸

답 5

채점 기준	배점
❶ 삼차방정식 $x^3-2x^2+7x+a=0$에서 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.	2점
❷ 삼차방정식 $x^3+bx^2+cx-14=0$에서 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b, c의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	1점

0729

유형 **13** 하나의 이차방정식이 인수분해되는 연립이차방정식

| 전략 | 인수분해가 되는 이차방정식을 두 일차식의 곱으로 인수분해한다.

$$\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $(x-2y)(x-3y)=0 \quad \therefore x=2y$ 또는 $x=3y$ ··· ❶

(i) $x=2y$를 ㉡에 대입하면 $5y^2=10,\ y^2=2$

$\therefore y=\pm\sqrt{2},\ x=\pm2\sqrt{2}$ (복호동순) ··· ❷

(ii) $x=3y$를 ㉡에 대입하면 $10y^2=10,\ y^2=1$

$\therefore y=\pm1,\ x=\pm3$ (복호동순) ··· ❸

(i), (ii)에서 $x+y$의 값은 $3\sqrt{2}$ 또는 $-3\sqrt{2}$ 또는 4 또는 -4이므로 최댓값은 $3\sqrt{2}$이다. ··· ❹

답 $3\sqrt{2}$

채점 기준	배점
❶ ㉠을 인수분해한 후 x를 y에 대하여 나타낼 수 있다.	2점
❷ $x=2y$를 ㉡에 대입하여 해를 구할 수 있다.	2점
❸ $x=3y$를 ㉡에 대입하여 해를 구할 수 있다.	2점
❹ $x+y$의 최댓값을 구할 수 있다.	1점

0730

유형 **18** 연립이차방정식의 활용

| 전략 | 처음 직육면체의 밑면의 가로, 세로의 길이를 각각 x cm, y cm라 하고 주어진 조건을 이용하여 연립이차방정식을 세운다.

처음 직육면체의 밑면의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하면 밑면의 대각선의 길이가 10 cm이므로

$x^2+y^2=100$ ······ ㉠

밑면의 가로와 세로의 길이를 각각 1 cm씩 줄였더니 부피가 처음 직육면체의 부피보다 65 cm^3만큼 감소하였으므로

$5(x-1)(y-1)=5xy-65 \quad \therefore y=14-x$ ······ ㉡ ··· ❶

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^2+(14-x)^2=100,\ x^2-14x+48=0$

$(x-6)(x-8)=0 \quad \therefore x=6$ 또는 $x=8$

㉡에서 $x=6$이면 $y=8$, $x=8$이면 $y=6$ ··· ❷

따라서 처음 직육면체의 밑면의 가로와 세로의 길이의 차는

$8-6=2$ (cm) ··· ❸

답 2 cm

채점 기준	배점
❶ 연립방정식을 세울 수 있다.	2점
❷ x, y의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ 처음 직육면체의 밑면의 가로와 세로의 길이의 차를 구할 수 있다.	1점

0731

유형 **09** 삼차방정식의 켤레근

| 전략 | 계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $p+qi$이면 $p-qi$도 근이다. (단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

(1) 주어진 삼차방정식의 계수가 모두 실수이므로 한 근이 $2-i$이면 $2+i$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(2-i)+(2+i)=-1 \quad \therefore \alpha=-5$

따라서 주어진 삼차방정식의 나머지 두 근은 $2+i$, -5이다.

(2) $a=(-5)\cdot(2-i)+(2-i)(2+i)+(-5)\cdot(2+i)=-15$

$-b=(-5)\cdot(2-i)(2+i)=-25 \quad \therefore b=25$

$\therefore a+b=10$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 삼차방정식의 켤레근과 나머지 한 근을 구할 수 있다.	5점
(2) $a+b$의 값을 구할 수 있다.	5점

0732

유형 **19** 공통근을 가지는 방정식

| 전략 | 두 이차방정식의 공통근을 α라 하고 두 이차방정식에 대입하여 연립방정식을 세운다.

(1) 두 이차방정식의 공통근을 α라 하면

$\alpha^2-a\alpha+b=0$ ······ ㉠

$\alpha^2-b\alpha+a=0$ ······ ㉡

㉠−㉡을 하면 $(a-b)\alpha+(a-b)=0$

$(a-b)(\alpha+1)=0$ $\therefore \alpha=-1$ $(\because a\neq b)$

(2) $\alpha=-1$을 ㉠에 대입하면 $1+a+b=0$

$\therefore b=-(a+1)$

이차방정식 $x^2-ax+b=0$에서

$x^2-ax-(a+1)=0$, $(x+1)(x-a-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=a+1$

또, 이차방정식 $x^2-bx+a=0$에서

$x^2+(a+1)x+a=0$, $(x+1)(x+a)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-a$

따라서 공통근이 아닌 근의 합은

$(a+1)-a=1$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 두 이차방정식의 공통근을 구할 수 있다.	5점
(2) 두 이차방정식의 공통근이 아닌 근을 각각 구하여 그 합을 구할 수 있다.	7점

다른 풀이 (1)에서 두 이차방정식의 공통근이 $\alpha=-1$이므로 $x^2-ax+b=0$의 두 근을 -1, m, $x^2-bx+a=0$의 두 근을 -1, n이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+m=a$, $-1+n=b$

$\therefore m=a+1$, $n=b+1$

이때, $b=-(a+1)$이므로 $n=-a$

따라서 공통근이 아닌 근의 합은

$m+n=a+1-a=1$

창의·융합 교과서 속 심화문제

0733

| 전략 | 인수정리와 조립제법을 이용하여 구한 삼차방정식의 근 중 삼각형의 결정 조건을 만족시키는 x의 값을 찾는다.

$f(x)=x^3-8x^2-(k-12)x+2k$로 놓으면

$f(2)=8-32-2k+24+2k=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -8 & -k+12 & 2k \\ & & 2 & -12 & -2k \\ \hline & 1 & -6 & -k & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2-6x-k)$

즉, $(x-2)(x^2-6x-k)=0$에서

$x=2$ 또는 $x^2-6x-k=0$

이등변삼각형의 세 변의 길이가 주어진 방정식의 세 근이므로

(i) 두 변의 길이가 모두 2일 때

$x^2-6x-k=0$의 한 근이 $x=2$이므로

$4-12-k=0$ $\therefore k=-8$

$x^2-6x+8=0$에서 $(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

따라서 삼차방정식의 세 근이 2, 2, 4이다.

그런데 세 변의 길이가 2, 2, 4이면 삼각형이 결정되지 않는다.

(ii) 등변이 아닌 다른 한 변의 길이가 2일 때

$x^2-6x-k=0$이 $x\neq2$인 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2+k=0$ $\therefore k=-9$

$x^2-6x+9=0$에서 $(x-3)^2=0$

$\therefore x=3$

따라서 삼차방정식의 세 근은 2, 3, 3이다.

이때, 세 변의 길이가 2, 3, 3이면 삼각형이 결정된다.

(i), (ii)에서 구하는 k의 값은 -9이다. 답 -9

참고 삼각형이 결정되려면 삼각형의 가장 긴 변의 길이가 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 한다.

0734

| 전략 | 인수정리와 삼차방정식의 켤레근의 성질을 이용하여 방정식 $f(x)=0$의 세 근을 구한다.

조건 (가)에서 $f(x)$는 $x+1$을 인수로 가지므로 -1은 방정식 $f(x)=0$의 한 근이다.

조건 (나)에서 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 $1-\sqrt{2}i$이고 계수가 모두 실수이므로 $1+\sqrt{2}i$도 근이다.

삼차방정식 $f(2x+3)=0$에서

$2x+3=-1$ 또는 $2x+3=1-\sqrt{2}i$ 또는 $2x+3=1+\sqrt{2}i$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{-2-\sqrt{2}i}{2}$ 또는 $x=\frac{-2+\sqrt{2}i}{2}$

따라서 구하는 모든 근의 곱은

$-2\cdot\frac{-2-\sqrt{2}i}{2}\cdot\frac{-2+\sqrt{2}i}{2}=-3$ 답 -3

Lecture

삼차방정식의 근의 변형

삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근이 α, β, γ이면

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$, $f(\gamma)=0$이므로 $f(ax+b)=0$ $(a\neq0)$의 세 근은

⇨ $ax+b=\alpha$, $ax+b=\beta$, $ax+b=\gamma$에서

$x=\frac{\alpha-b}{a}$ 또는 $x=\frac{\beta-b}{a}$ 또는 $x=\frac{\gamma-b}{a}$

0735

| 전략 | 직육면체의 세 모서리의 길이를 a cm, b cm, c cm라 하고, 모서리의 길이의 합, 겉넓이, 부피를 각각 a, b, c에 대한 식으로 나타낸다.

직육면체의 세 모서리의 길이를 a cm, b cm, c cm라 하면

모서리의 길이의 합이 56 cm이므로

$4(a+b+c)=56$ $\therefore a+b+c=14$

겉넓이가 112 cm^2이므로

$2(ab+bc+ca)=112$ $\therefore ab+bc+ca=56$

부피가 64 cm^3이므로 $abc=64$

이때, a, b, c를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-14x^2+56x-64=0$

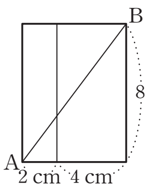
$(x-2)(x^2-12x+32)=0$, $(x-2)(x-4)(x-8)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=8$

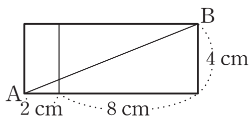
즉, 직육면체의 세 모서리의 길이는 2 cm, 4 cm, 8 cm이다.

전개도를 이용하여 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B에 이르는 가장 짧은 거리를 구하면

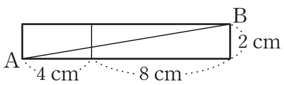
(i)



(ii)



(iii)



(i)에서 $\overline{AB}=\sqrt{6^2+8^2}=10\,(cm)$

(ii)에서 $\overline{AB}=\sqrt{10^2+4^2}=2\sqrt{29}\,(cm)$

(iii)에서 $\overline{AB}=\sqrt{12^2+2^2}=2\sqrt{37}\,(cm)$

따라서 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B에 이르는 가장 짧은 거리는 10 cm이다.

답 ①

0736

|전략| $x>y$일 때와 $x<y$일 때로 나누어 각 연립방정식을 푼다.

(i) $x>y$일 때

$x\vee y=x$이므로 $2x^2+y^2=x$ ······ ㉠

$x\wedge y=y$이므로 $2x^2+y^2-1=y$ ······ ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$x-y=1 \qquad \therefore y=x-1$

이것을 ㉠에 대입하면

$2x^2+(x-1)^2=x \qquad \therefore 3x^2-3x+1=0$

이때, 이차방정식 $3x^2-3x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot3\cdot1=-3<0$이므로 방정식을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다.

(ii) $x<y$일 때

$x\vee y=y$이므로 $2x^2+y^2=y$ ······ ㉢

$x\wedge y=x$이므로 $2x^2+y^2-1=x$ ······ ㉣

㉢$-$㉣을 하면

$y-x=1 \qquad \therefore y=x+1$ ······ ㉤

이것을 ㉢에 대입하면

$2x^2+(x+1)^2=x+1$, $3x^2+x=0$

$x(3x+1)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=-\dfrac{1}{3}$

㉤에서 $x=0$이면 $y=1$, $x=-\dfrac{1}{3}$이면 $y=\dfrac{2}{3}$

그런데 x, y는 정수이므로 $x=0, y=1$

(i), (ii)에서 $\alpha=0, \beta=1$

$\therefore \alpha+\beta=1$

답 1

0737

|전략| 두 원 A, B의 반지름의 길이를 각각 x, y로 놓고 x, y에 대한 연립방정식을 세운다.

두 원 A, B의 반지름의 길이를 각각 x, y라 하면

두 원의 지름의 길이의 합이 16이므로

$2x+2y=16 \qquad \therefore x=8-y$ ······ ㉠

(원 C의 지름)$=$(원 A의 지름)$-$(원 B의 지름)

$=2x-2y$

(원 D의 지름)$=$(원 B의 지름)$-$(원 C의 지름)

$=2y-(2x-2y)$

$=-2x+4y$

$\therefore$ (원 D의 반지름)$=-x+2y$

(원 A의 넓이)$=\pi x^2$, (원 D의 넓이)$=\pi(-x+2y)^2$이고

두 원 A, D의 넓이의 차가 24π이므로

$\pi x^2-\pi(-x+2y)^2=24\pi$

$x^2-(x^2-4xy+4y^2)=24$

$\therefore xy-y^2-6=0$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(8-y)y-y^2-6=0$, $y^2-4y+3=0$

$(y-1)(y-3)=0 \qquad \therefore y=1$ 또는 $y=3$

㉠에서 $y=1$이면 $x=7$, $y=3$이면 $x=5$

그런데 $x=7, y=1$이면 (원 D의 반지름)$=-5<0$이므로

$x=5, y=3$

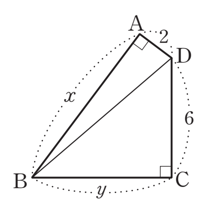
따라서 원 A의 지름의 길이는

$5\cdot2=10$

답 10

0738

|전략| 선분 BD를 그은 후 피타고라스 정리를 이용한다.



$\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=y$라 하고 $\overline{BD}$를 그으면

두 직각삼각형에서 $x^2+2^2=y^2+6^2$

$x^2-y^2=32$

$\therefore (x+y)(x-y)=32$

이때, x, y는 자연수이고 $x+y>x-y$이므로

$x+y$	8	16	32
$x-y$	4	2	1

$\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=4 \end{cases}$에서 $x=6, y=2$

$\begin{cases} x+y=16 \\ x-y=2 \end{cases}$에서 $x=9, y=7$

$\begin{cases} x+y=32 \\ x-y=1 \end{cases}$에서 $x=\dfrac{33}{2}, y=\dfrac{31}{2}$

$\therefore \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=9 \\ y=7 \end{cases}$ ($\because x, y$는 자연수)

따라서 □ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은

$2+6+x+y=2+6+9+7=24$

답 24

본책 120~137쪽

8 | 연립일차부등식

STEP 1 개념 마스터 ❶

0739 답 $-5<x<4$

0740 답 $x>3$

0741 답 $x\le 2$

0742 답 $-2<x<6$

0743 답 $-3\le x\le 7$

0744 답 $x\le 0$

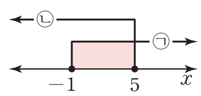
0745 답 $x\ge 5$

0746

$\begin{cases} x+4\ge 3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x\le 10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\ge -1$

㉡에서 $x\le 5$



따라서 주어진 연립부등식의 해는

$-1\le x\le 5$

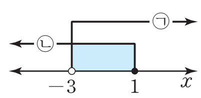
답 $-1\le x\le 5$

0747

$\begin{cases} 2x+7>1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-1\le 2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x>-3$

㉡에서 $x\le 1$



따라서 주어진 연립부등식의 해는

$-3<x\le 1$

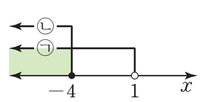
답 $-3<x\le 1$

0748

$\begin{cases} 4x-1<3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+5\le x-3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x<1$

㉡에서 $x\le -4$



따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x\le -4$

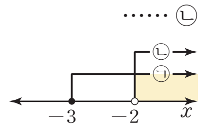
답 $x\le -4$

0749

$\begin{cases} 3x+7\ge x+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x+1>3x-3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\ge -3$

㉡에서 $x>-2$



따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x>-2$

답 $x>-2$

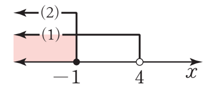
0750

(1) $3(x-1)<x+5$에서 $3x-3<x+5$ $\therefore x<4$

(2) $7-x\ge 2(x+5)$에서 $7-x\ge 2x+10$ $\therefore x\le -1$

(3) (1), (2)의 공통부분을 구하면

$x\le -1$



답 (1) $x<4$ (2) $x\le -1$ (3) $x\le -1$

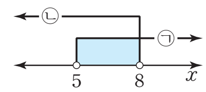
0751

$\begin{cases} 4+3x<5x-6 & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{x-1}{7}>\dfrac{x-5}{3} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x>5$

㉡의 양변에 21을 곱하면

$3x-3>7x-35$ $\therefore x<8$



따라서 주어진 연립부등식의 해는

$5<x<8$

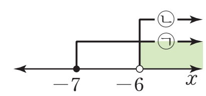
답 $5<x<8$

0752

$\begin{cases} 0.7x+5.9\ge 1 & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{x+2}{4}-\dfrac{x-3}{3}<2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 양변에 10을 곱하면

$7x+59\ge 10$ $\therefore x\ge -7$



㉡의 양변에 12를 곱하면

$3x+6-4x+12<24$ $\therefore x>-6$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x>-6$

답 $x>-6$

0753 답 $x=1$

0754 답 해가 없다.

0755 답 해가 없다.

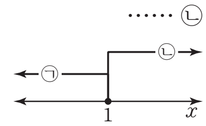
0756 답 해가 없다.

0757

$\begin{cases} 5-3x\ge 2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+3\ge 5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\le 1$

㉡에서 $x\ge 1$



따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x=1$

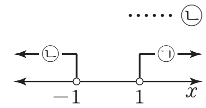
답 $x=1$

0758

$\begin{cases} 3x+2>5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-11<-13 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x>1$

㉡에서 $x<-1$



따라서 주어진 연립부등식은 해가 없다.

답 해가 없다.

8 | 연립일차부등식

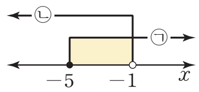
0759

주어진 부등식에서

$\begin{cases} -2\le x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+3<2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\ge -5$

㉡에서 $x<-1$



따라서 주어진 부등식의 해는

$-5\le x<-1$

답 $-5\le x<-1$

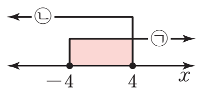
0760

주어진 부등식에서

$\begin{cases} 2x-3\le 3x+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+1\le x+9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\ge -4$

㉡에서 $x\le 4$



따라서 주어진 부등식의 해는

$-4\le x\le 4$

답 $-4\le x\le 4$

STEP 2 유형 마스터 ❶

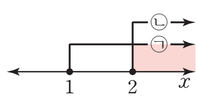
0761

|전략| 각 일차부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 공통부분을 찾는다.

$\begin{cases} 5(x+1)\ge x+9 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+3\le 3(x-1)+2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $5x+5\ge x+9 \qquad \therefore x\ge 1$

㉡에서 $x+3\le 3x-1 \qquad \therefore x\ge 2$

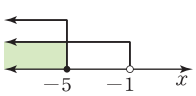


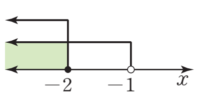
따라서 주어진 연립부등식의 해는

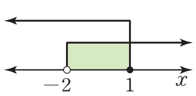
$x\ge 2$

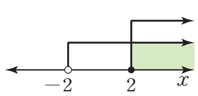
답 $x\ge 2$

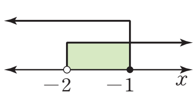
0762

①


②


③


④


⑤


답 ③

0763

$\begin{cases} -x+1\le 2x-2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3(2x+1)-4(x+1)\le 7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

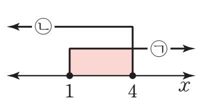
㉠에서 $x\ge 1$

㉡에서 $6x+3-4x-4\le 7 \qquad \therefore x\le 4$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$1\le x\le 4$이므로 x의 값이 될 수 없는 것은

⑤이다.



답 ⑤

0764

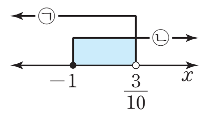
$\begin{cases} 4x-(-5-9x)<3x+8 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5(x+1)\ge x+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $4x+5+9x<3x+8$

$10x<3 \qquad \therefore x<\dfrac{3}{10}$

㉡에서 $5x+5\ge x+1 \qquad \therefore x\ge -1$

따라서 주어진 연립부등식의 해는



$-1\le x<\dfrac{3}{10}$이므로

$M=0,\ m=-1$

$\therefore M-m=1$

답 1

0765

|전략| 양변에 적당한 수를 곱하여 계수를 정수로 만든 다음 부등식을 푼다.

$\begin{cases} \dfrac{x-2}{3}-\dfrac{5x-3}{4}<1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 0.5(x-1)+0.8\ge 0.2(x+3) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $4(x-2)-3(5x-3)<12,\ 4x-8-15x+9<12$

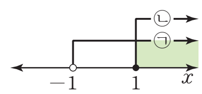
$-11x<11 \qquad \therefore x>-1$

㉡에서 $5(x-1)+8\ge 2(x+3),\ 5x-5+8\ge 2x+6$

$3x\ge 3 \qquad \therefore x\ge 1$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x\ge 1$



답 ⑤

0766

$\begin{cases} 2(3x-1)-6<12x+5 & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{x-1}{3}-\dfrac{x+1}{4}\le\dfrac{1}{6} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $6x-2-6<12x+5$

$-6x<13 \qquad \therefore x>-\dfrac{13}{6}$

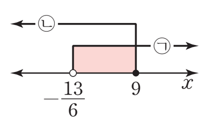
㉡에서 $4(x-1)-3(x+1)\le 2$

$4x-4-3x-3\le 2 \qquad \therefore x\le 9$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$-\dfrac{13}{6}<x\le 9$이므로 정수 x의 최댓값은 9

이다.



답 ④

0767

$\begin{cases} \dfrac{3}{2}x-2.1<x+4.4 & \cdots\cdots ㉠ \\ \sqrt{2}x\le 3(\sqrt{2}x-1)+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $15x-21<10x+44$

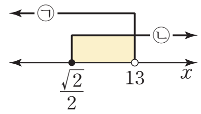
$5x<65 \qquad \therefore x<13$

㉡에서 $\sqrt{2}x\le 3\sqrt{2}x-3+1$

$2\sqrt{2}x\ge 2 \qquad \therefore x\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$\frac{\sqrt{2}}{2} \le x < 13$이므로 정수 x는 1, 2, 3, ⋯,



12의 12개이다.

답 12

0768

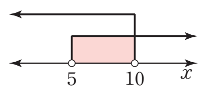
|전략| 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내었을 때, 공통부분이 없으면 연립부등식의 해가 없다.

① $x-2>3$에서 $x>5$

$2x-6<14$에서 $x<10$

따라서 연립부등식의 해는

$5<x<10$

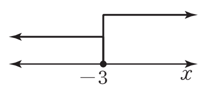


② $3x-5 \ge 5x+1$에서 $x \le -3$

$3x+4 \ge -2+x$에서 $x \ge -3$

따라서 연립부등식의 해는

$x=-3$

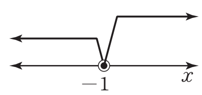


③ $2x+3<-x$에서 $x<-1$

$3(1-x) \le 2(2-x)$에서

$3-3x \le 4-2x \qquad \therefore x \ge -1$

따라서 연립부등식의 해가 없다.



④ $5+2x>-(8-5x)+1$에서 $5+2x>-8+5x+1$

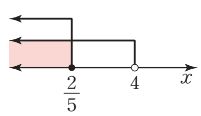
$-3x>-12 \qquad \therefore x<4$

$5-2(x+2) \ge 3x-1$에서 $5-2x-4 \ge 3x-1$

$-5x \ge -2 \qquad \therefore x \le \frac{2}{5}$

따라서 연립부등식의 해는

$x \le \frac{2}{5}$



⑤ $2(3x-1) \le 4(x+1)$에서 $6x-2 \le 4x+4$

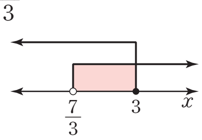
$2x \le 6 \qquad \therefore x \le 3$

$1-\frac{x-4}{2}<\frac{2x-1}{2}$에서 $2-(x-4)<2x-1$

$2-x+4<2x-1,\ -3x<-7 \qquad \therefore x>\frac{7}{3}$

따라서 연립부등식의 해는

$\frac{7}{3}<x \le 3$



답 ③

0769

$$\begin{cases} 2(x+5)>7x & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{3(1-x)}{2} \le -(x+1) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $2x+10>7x \qquad \therefore x<2$

㉡에서 $3(1-x) \le -2(x+1)$

$3-3x \le -2x-2 \qquad \therefore x \ge 5$

따라서 주어진 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 ④와 같다.

답 ④

0770

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{2} \le \frac{2x+3}{5} & \cdots\cdots ㉠ \\ 3-\frac{1}{4}(x+1) \le \frac{1}{2}(2x+3) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $5(3x-1) \le 2(2x+3)$

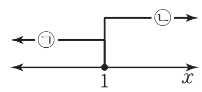
$15x-5 \le 4x+6 \qquad \therefore x \le 1$

㉡에서 $12-(x+1) \le 2(2x+3)$

$12-x-1 \le 4x+6 \qquad \therefore x \ge 1$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x=1$



답 $x=1$

0771

|전략| $A<B<C$ 꼴의 부등식은 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ 꼴로 고쳐서 푼다.

주어진 부등식에서

$$\begin{cases} 1+5(x-6)<9x+15 & \cdots\cdots ㉠ \\ 9x+15<6(x+1) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

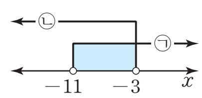
㉠에서 $1+5x-30<9x+15 \qquad \therefore x>-11$

㉡에서 $9x+15<6x+6 \qquad \therefore x<-3$

따라서 주어진 부등식의 해는

$-11<x<-3$이므로 정수 x는

$-10, -9, -8, \cdots, -4$의 7개이다.



답 ④

0772

주어진 부등식에서

$$\begin{cases} 4-x \le 3x-4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-4 \le 2(x+1) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x \ge 2$

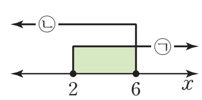
㉡에서 $3x-4 \le 2x+2 \qquad \therefore x \le 6$

따라서 주어진 부등식의 해는

$2 \le x \le 6$이므로

$a=2,\ b=6$

$\therefore a+b=8$



답 8

0773

주어진 부등식에서

$$\begin{cases} 1-\frac{2(1-x)}{3}<\frac{3x+5}{4} & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{3x+5}{4}<\frac{1-x}{2}-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $12-8(1-x)<3(3x+5)$

$12-8+8x<9x+15 \qquad \therefore x>-11$

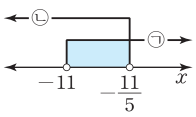
㉡에서 $3x+5<2(1-x)-8$

$3x+5<2-2x-8 \qquad \therefore x<-\frac{11}{5}$

8 연립일차부등식

따라서 주어진 부등식의 해는

$-11<x<-\frac{11}{5}$이므로



$M=-3,\ m=-10$

$\therefore M-m=7$

답 7

0774

$3x-y=9$에서 $y=3x-9$

이를 주어진 부등식에 대입하면

$3x-8<2x+(3x-9)+15<12-x$

$\therefore 3x-8<5x+6<12-x$

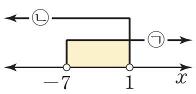
즉, $\begin{cases} 3x-8<5x+6 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x+6<12-x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x>-7$

㉡에서 $x<1$

따라서 주어진 부등식의 해는

$-7<x<1$



즉, 정수 x는 $-6,\ -5,\ -4,\ \cdots,\ 0$이므로 구하는 해의 개수는 7이다.

답 7

참고 $y=3x-9$에서 x가 정수이면 y도 정수이다.

0775

|전략| 각 부등식의 해의 공통부분이 $-1<x<4$임을 이용한다.

$x-a<3x-4$에서 $x>\frac{4-a}{2}$

$2x-3<17-3x$에서 $x<4$

주어진 연립부등식의 해가 $-1<x<4$이므로

$\frac{4-a}{2}=-1,\ 4-a=-2 \qquad \therefore a=6$

답 6

0776

$2x+2a<4$에서 $x<2-a$

$x-\sqrt{2}\le 3x-b$에서 $x\ge\frac{b-\sqrt{2}}{2}$

이때, 수직선 위에 나타낸 연립부등식의 해가 $\sqrt{2}\le x<5$이므로

$2-a=5,\ \frac{b-\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2} \qquad \therefore a=-3,\ b=3\sqrt{2}$

$\therefore ab=-9\sqrt{2}$

답 $-9\sqrt{2}$

0777

주어진 부등식에서

$\begin{cases} 2x-3a\le x+a & \cdots\cdots ㉠ \\ x+a\le 3x+b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ … ❶

㉠에서 $x\le 4a$ … ❷

㉡에서 $x\ge\frac{a-b}{2}$ … ❸

주어진 연립부등식의 해가 $5\le x\le 12$이므로

$4a=12,\ \frac{a-b}{2}=5 \qquad \therefore a=3,\ b=-7$

$\therefore ab=-21$ … ❹

답 -21

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식을 연립부등식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ ㉠의 해를 구할 수 있다.	20 %
❸ ㉡의 해를 구할 수 있다.	20 %
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	40 %

0778

$2(x-5)^2-15=-4x+3$에서

$2(x^2-10x+25)-15=-4x+3$

$x^2-8x+16=0,\ (x-4)^2=0$

$\therefore x=4$

한편, $\begin{cases} 6x+a\le 2(x+7) & \cdots\cdots ㉠ \\ 2(x+1)\le 7x+b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $6x+a\le 2x+14 \qquad \therefore x\le\frac{14-a}{4}$

㉡에서 $2x+2\le 7x+b \qquad \therefore x\ge\frac{2-b}{5}$

이때, 주어진 연립부등식의 해가 $x=4$이므로

$\frac{14-a}{4}=4,\ \frac{2-b}{5}=4$

$14-a=16,\ 2-b=20$

$\therefore a=-2,\ b=-18$

$\therefore a+b=-20$

답 ①

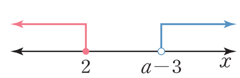
0779

|전략| 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분이 없도록 수직선 위에 나타내 본다.

$2(5-x)\ge 3x$에서 $10-2x\ge 3x \qquad \therefore x\le 2$

$x-a>-3$에서 $x>a-3$

주어진 연립부등식의 해가 없으려면 오른쪽 그림에서



$a-3\ge 2 \qquad \therefore a\ge 5$

답 ⑤

0780

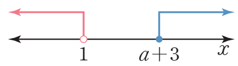
주어진 부등식에서

$\begin{cases} 3x+1<x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+3\le 2x-a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ … ❶

㉠에서 $x<1$ … ❷

㉡에서 $x\ge a+3$ … ❸

주어진 연립부등식의 해가 없으려면 오른쪽 그림에서



$a+3\geq 1$ $\quad\therefore a\geq -2$ ··· ❹

답 $a\geq -2$

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식을 연립부등식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ ㉠의 해를 구할 수 있다.	20 %
❸ ㉡의 해를 구할 수 있다.	20 %
❹ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

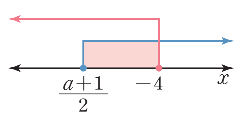
0781

$x\geq 2(x+2)$에서 $x\geq 2x+4$

$-x\geq 4$ $\quad\therefore x\leq -4$

$2x+1\geq a+2$에서 $x\geq\dfrac{a+1}{2}$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$\dfrac{a+1}{2}\leq -4$, $a+1\leq -8$

$\therefore a\leq -9$

답 $a\leq -9$

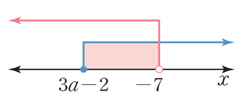
0782

$\dfrac{x+2}{3}\geq a$에서 $x+2\geq 3a$ $\quad\therefore x\geq 3a-2$

$2(x-3)>3x+1$에서 $2x-6>3x+1$

$-x>7$ $\quad\therefore x<-7$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$3a-2<-7$, $3a<-5$ $\quad\therefore a<-\dfrac{5}{3}$

따라서 정수 a의 최댓값은 -2이다.

답 -2

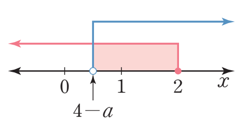
0783

| 전략 | 각 부등식의 해를 구한 후 정수가 2개 포함되도록 수직선 위에 나타내어 실수 a의 값의 범위를 구한다.

$3x+1\leq 7$에서 $x\leq 2$

$2x+a>x+4$에서 $x>4-a$

이때, 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이려면 오른쪽 그림에서



$0\leq 4-a<1$, $-4\leq -a<-3$

$\therefore 3<a\leq 4$

답 $3<a\leq 4$

Lecture

$x<a<y$일 때

(1) $x+p<a+p<y+p$

(2) $p>0$이면 $\quad px<pa<py$

$\quad p<0$이면 $\quad py<pa<px$

0784

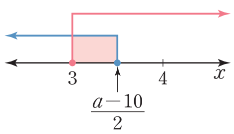
$3x+21\leq 5(x+3)$에서 $3x+21\leq 5x+15$

$-2x\leq -6$ $\quad\therefore x\geq 3$

$4x-a\leq 2(x-5)$에서 $4x-a\leq 2x-10$

$2x\leq a-10$ $\quad\therefore x\leq\dfrac{a-10}{2}$

이때, 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 하나뿐이려면 오른쪽 그림에서



$3\leq\dfrac{a-10}{2}<4$, $6\leq a-10<8$

$\therefore 16\leq a<18$

따라서 a의 값이 될 수 있는 것은 ④이다.

답 ④

0785

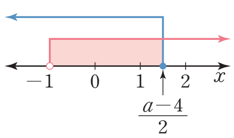
주어진 부등식에서

$$\begin{cases}3-3x<4-2x & \cdots\cdots ㉠\\ 4-2x\leq -4x+a & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $x>-1$

㉡에서 $2x\leq a-4$ $\quad\therefore x\leq\dfrac{a-4}{2}$

이때, 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이려면 오른쪽 그림에서



$1\leq\dfrac{a-4}{2}<2$, $2\leq a-4<4$

$\therefore 6\leq a<8$

따라서 a의 최솟값은 6이다.

답 6

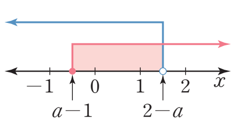
0786

$$\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3}\geq\dfrac{x}{6}+\dfrac{a}{3} & \cdots\cdots ㉠\\ 2(x+1)>3x+a & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $3x+2\geq x+2a$ $\quad\therefore x\geq a-1$

㉡에서 $2x+2>3x+a$ $\quad\therefore x<2-a$

이때, 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 0과 1뿐이려면 오른쪽 그림에서



(i) $-1<a-1\leq 0$ $\quad\therefore 0<a\leq 1$

(ii) $1<2-a\leq 2$, $-1<-a\leq 0$

$\quad\therefore 0\leq a<1$

(i), (ii)에서 구하는 a의 값의 범위는 $0<a<1$

답 $0<a<1$

0787

| 전략 | 연속하는 세 정수를 $x-1$, x, $x+1$로 놓고 조건을 이용하여 연립부등식을 세운다.

연속하는 세 정수를 $x-1$, x, $x+1$이라 하면

$$\begin{cases}(x-1)+x+(x+1)\geq 33 & \cdots\cdots ㉠\\ (x-1)+x-(x+1)<10 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $3x \ge 33$ $\quad \therefore x \ge 11$
㉡에서 $x-2<10$ $\quad \therefore x<12$
$\therefore 11 \le x < 12$
이때, x는 정수이므로 $x=11$
따라서 세 정수 중 가운데 수는 11이다. 답 ①

0788
연속하는 세 홀수를 $x-2$, x, $x+2$라 하면
$42<(x-2)+x+(x+2)<48$
$42<3x<48$ $\quad \therefore 14<x<16$
이때, x는 홀수이므로 $x=15$
따라서 연속하는 세 홀수는 13, 15, 17이므로 가장 큰 수는 17이다.
답 17

0789
|전략| 우유를 x개 산다고 하면 빵은 $(10-x)$개 살 수 있으므로 조건을 이용하여 연립부등식을 세운다.
우유를 x개 산다고 하면 빵은 $(10-x)$개 살 수 있으므로
$$\begin{cases} 400(10-x)+500x \le 4600 & \cdots\cdots ㉠ \\ x>10-x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$
㉠에서 $100x+4000 \le 4600$ $\quad \therefore x \le 6$
㉡에서 $2x>10$ $\quad \therefore x>5$
$\therefore 5<x \le 6$
따라서 우유는 6개 살 수 있다. 답 ①

0790
장미를 x송이 산다고 하면 백합은 $(15-x)$송이 살 수 있으므로
$$\begin{cases} 12000 \le 900x+700(15-x)<12500 & \cdots\cdots ㉠ \\ x>15-x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$
㉠에서 $12000 \le 200x+10500<12500$
$1500 \le 200x < 2000$ $\quad \therefore \frac{15}{2} \le x < 10$
㉡에서 $2x>15$ $\quad \therefore x>\frac{15}{2}$
$\therefore \frac{15}{2}<x<10$
따라서 장미는 8송이 또는 9송이 살 수 있다. 답 8송이 또는 9송이

0791
|전략| 2 %의 소금물의 양을 x g으로 놓고 소금의 양에 대한 연립부등식을 세운다.
2 %의 소금물을 x g 섞는다고 하면
$$\frac{5}{100}(300+x) \le \frac{10}{100} \times 300+\frac{2}{100}x \le \frac{7}{100}(300+x)$$
즉, $\begin{cases} 5(300+x) \le 3000+2x & \cdots\cdots ㉠ \\ 3000+2x \le 7(300+x) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $3x \le 1500$ $\quad \therefore x \le 500$
㉡에서 $5x \ge 900$ $\quad \therefore x \ge 180$
따라서 2 %의 소금물을 180 g 이상 500 g 이하로 섞어야 한다.
답 ④

Lecture
(1) $(\text{소금물의 농도}) = \frac{(\text{소금의 양})}{(\text{소금물의 양})} \times 100\ (\%)$
(2) $(\text{소금의 양}) = \frac{(\text{소금물의 농도})}{100} \times (\text{소금물의 양})$

0792
6 %의 설탕물을 x g 섞는다고 하면
$$\frac{8}{100} \times 600 \le \frac{6}{100}x+\frac{12}{100}(600-x) \le \frac{10}{100} \times 600 \quad \cdots ❶$$
즉, $\begin{cases} 4800 \le 6x+12(600-x) & \cdots\cdots ㉠ \\ 6x+12(600-x) \le 6000 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $6x \le 2400$ $\quad \therefore x \le 400$
㉡에서 $6x \ge 1200$ $\quad \therefore x \ge 200$
$\therefore 200 \le x \le 400$
따라서 6 %의 설탕물을 200 g 이상 400 g 이하로 섞어야 한다.
$\cdots$ ❷
답 200 g 이상 400 g 이하

채점 기준	비율
❶ 부등식을 세울 수 있다.	50 %
❷ 6 %의 설탕물의 양의 범위를 구할 수 있다.	50 %

0793
5 %의 소금물 200 g에 들어 있는 소금의 양은
$\frac{5}{100} \times 200 = 10\ (\text{g})$
물을 x g 증발시킨다고 하면
$8 \le \frac{10}{200-x} \times 100 \le 10$
$8(200-x) \le 1000 \le 10(200-x)$
즉, $\begin{cases} 8(200-x) \le 1000 & \cdots\cdots ㉠ \\ 100 \le 200-x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $8x \ge 600$ $\quad \therefore x \ge 75$
㉡에서 $x \le 100$
$\therefore 75 \le x \le 100$
따라서 최소 75 g의 물을 증발시켜야 한다. 답 75 g

0794
8 %의 설탕물 300 g에 들어 있는 설탕의 양은
$\frac{8}{100} \times 300 = 24\ (\text{g})$
설탕을 x g 더 넣는다고 하면
$\frac{20}{100}(300+x) \le 24+x \le \frac{25}{100}(300+x)$

즉, $\begin{cases} 20(300+x)\le 2400+100x & \cdots\cdots ㉠ \\ 2400+100x\le 25(300+x) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $80x\ge 3600$ $\quad\therefore x\ge 45$

㉡에서 $75x\le 5100$ $\quad\therefore x\le 68$

$\therefore 45\le x\le 68$

따라서 더 넣어야 하는 설탕의 양은 45 g 이상 68 g 이하이다.

답 45 g 이상 68 g 이하

0795

|전략| 1 g당 열량과 단백질의 양을 이용하여 연립부등식을 세운다.

섭취해야 하는 식품 A의 양을 x g이라 하면

식품 B는 $(200-x)$ g 섭취해야 하므로

$\begin{cases} \frac{170}{100}x+\frac{370}{100}(200-x)\ge 400 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{20}{100}x+\frac{10}{100}(200-x)\ge 30 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $17x+37(200-x)\ge 4000$

$-20x+7400\ge 4000$ $\quad\therefore x\le 170$

㉡에서 $2x+(200-x)\ge 300$

$x+200\ge 300$ $\quad\therefore x\ge 100$

$\therefore 100\le x\le 170$

따라서 섭취해야 하는 식품 A의 양은 100 g 이상 170 g 이하이다.

답 100 g 이상 170 g 이하

0796

섭취해야 하는 식품 A의 양을 x g이라 하면

식품 B는 $(400-x)$ g 섭취해야 하므로

$\begin{cases} \frac{30}{100}x+\frac{20}{100}(400-x)\le 100 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{10}{100}x+\frac{5}{100}(400-x)\ge 25 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $3x+2(400-x)\le 1000$

$x+800\le 1000$ $\quad\therefore x\le 200$

㉡에서 $2x+400-x\ge 500$ $\quad\therefore x\ge 100$

$\therefore 100\le x\le 200$

따라서 섭취해야 하는 식품 A의 양은 100 g 이상 200 g 이하이다.

답 100 g 이상 200 g 이하

0797

합금 A의 무게를 x g이라 하면 합금 B의 무게는 $(400-x)$ g이므로

$\begin{cases} \frac{15}{100}x+\frac{10}{100}(400-x)\ge 50 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{15}{100}x+\frac{30}{100}(400-x)\ge 75 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $15x+10(400-x)\ge 5000$

$5x+4000\ge 5000$ $\quad\therefore x\ge 200$

㉡에서 $x+2(400-x)\ge 500$

$-x+800\ge 500$ $\quad\therefore x\le 300$

$\therefore 200\le x\le 300$

따라서 합금 A의 무게는 200 g 이상 300 g 이하이다.

답 200 g 이상 300 g 이하

0798

|전략| 상자의 개수를 x라 하고 한 상자에 n개씩 넣으면 오렌지 nx개가 필요함을 이용하여 연립부등식을 세운다.

상자의 개수를 x라 하면

$\begin{cases} 180>20x & \cdots\cdots ㉠ \\ 180<25x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x<9$

㉡에서 $x>\frac{36}{5}$

$\therefore \frac{36}{5}<x<9$

이때, x는 자연수이므로 $x=8$

따라서 상자는 8개이다.

답 8개

0799

상자의 개수를 x라 하면

$30x+60\le 1500\le 36x-210$

즉, $\begin{cases} 30x+60\le 1500 & \cdots\cdots ㉠ \\ 1500\le 36x-210 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\le 48$

㉡에서 $x\ge\frac{95}{2}$

$\therefore \frac{95}{2}\le x\le 48$

이때, x는 자연수이므로 $x=48$

따라서 상자는 48개이다.

답 48개

0800

회원 수를 x라 하면

$\begin{cases} 55-5x\ge 13 & \cdots\cdots ㉠ \\ 15x-100\ge 15 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\le\frac{42}{5}$

㉡에서 $x\ge\frac{23}{3}$

$\therefore \frac{23}{3}\le x\le\frac{42}{5}$

이때, x는 자연수이므로 $x=8$

따라서 모임의 회원은 8명이다.

답 8명

0801

|전략| 학생 수를 의자의 개수로 나타낸다.

의자의 개수를 x라 하면 학생은 $(4x+6)$명이므로

$5(x-5)+1\le 4x+6\le 5(x-5)+5$

즉, $\begin{cases} 5(x-5)+1\le 4x+6 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+6\le 5(x-5)+5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $5x-24\le 4x+6$ $\quad\therefore x\le 30$

㉡에서 $4x+6\le 5x-20$ $\quad\therefore x\ge 26$

$\therefore 26\le x\le 30$

이때, x는 자연수이므로 $x=26, 27, 28, 29, 30$

따라서 의자의 개수가 될 수 있는 것은 ②이다. 답 ②

0802

상자의 개수를 x라 하면 볼펜은 $(5x+4)$개이므로

$6(x-3)+1\le 5x+4\le 6(x-3)+6$

즉, $\begin{cases} 6(x-3)+1\le 5x+4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x+4\le 6(x-3)+6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $6x-17\le 5x+4$ $\quad\therefore x\le 21$

㉡에서 $5x+4\le 6x-12$ $\quad\therefore x\ge 16$

$\therefore 16\le x\le 21$

따라서 상자는 최대 21개이다. 답 21개

0803

승용차의 수를 x라 하면 사람은 $(4x+16)$명이므로

$5(x-4)+1\le 4x+16\le 5(x-4)+5$

즉, $\begin{cases} 5(x-4)+1\le 4x+16 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+16\le 5(x-4)+5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $5x-19\le 4x+16$ $\quad\therefore x\le 35$

㉡에서 $4x+16\le 5x-15$ $\quad\therefore x\ge 31$

$\therefore 31\le x\le 35$

따라서 승합차는 최소 31대이다. 답 31대

0804

학생 수를 x라 하면 사탕은 $(5x+12)$개이므로

$7(x-1)+1\le 5x+12<7(x-1)+5$

즉, $\begin{cases} 7(x-1)+1\le 5x+12 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x+12<7(x-1)+5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $7x-6\le 5x+12$ $\quad\therefore x\le 9$

㉡에서 $5x+12<7x-2$ $\quad\therefore x>7$

$\therefore 7<x\le 9$

따라서 학생은 최대 9명이다. 답 9명

STEP 1 개념 마스터 ❷

0805

$|x-1|<2$에서 $-2<x-1<2$ $\quad\therefore -1<x<3$ 답 $-1<x<3$

0806

$|7-x|\le 3$에서 $-3\le 7-x\le 3$

$-10\le -x\le -4$ $\quad\therefore 4\le x\le 10$ 답 $4\le x\le 10$

0807

$|3x+1|\ge 4$에서 $3x+1\le -4$ 또는 $3x+1\ge 4$

$3x\le -5$ 또는 $3x\ge 3$ $\quad\therefore x\le -\frac{5}{3}$ 또는 $x\ge 1$

답 $x\le -\frac{5}{3}$ 또는 $x\ge 1$

0808

$|x-2|<3x$에서

(i) $x<2$일 때, $-(x-2)<3x$

$-4x<-2$ $\quad\therefore x>\frac{1}{2}$

그런데 $x<2$이므로 $\frac{1}{2}<x<2$

(ii) $x\ge 2$일 때, $x-2<3x$

$-2x<2$ $\quad\therefore x>-1$

그런데 $x\ge 2$이므로 $x\ge 2$

(i), (ii)에서 $x>\frac{1}{2}$ 답 $x>\frac{1}{2}$

0809

$1\le |4x+5|\le 7$에서

$-7\le 4x+5\le -1$ 또는 $1\le 4x+5\le 7$

(i) $-7\le 4x+5\le -1$에서 $-12\le 4x\le -6$

$\therefore -3\le x\le -\frac{3}{2}$

(ii) $1\le 4x+5\le 7$에서 $-4\le 4x\le 2$

$\therefore -1\le x\le \frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $-3\le x\le -\frac{3}{2}$ 또는 $-1\le x\le \frac{1}{2}$

답 $-3\le x\le -\frac{3}{2}$ 또는 $-1\le x\le \frac{1}{2}$

0810

(1) $x<-1$이면 $x+1<0$, $x-2<0$이므로 주어진 부등식은

$-(x+1)-(x-2)<5$, $-x-1-x+2<5$

$-2x<4$ $\quad\therefore x>-2$

그런데 $x<-1$이므로 $-2<x<-1$

(2) $-1\le x<2$이면 $x+1\ge 0$, $x-2<0$이므로 주어진 부등식은

$x+1-(x-2)<5$, $x+1-x+2<5$

즉, $0\cdot x<2$이므로 부등식의 해는 모든 실수이다.

그런데 $-1\le x<2$이므로 $-1\le x<2$

(3) $x\ge 2$이면 $x+1>0$, $x-2\ge 0$이므로 주어진 부등식은

$x+1+(x-2)<5$

$2x<6$ $\quad\therefore x<3$

그런데 $x\ge 2$이므로 $2\le x<3$

(4) (1), (2), (3)에서 주어진 부등식의 해는 $-2<x<3$

답 (1) $-2<x<-1$ (2) $-1\le x<2$
(3) $2\le x<3$ (4) $-2<x<3$

0811

$|2x-1|-|x|<3$에서

(i) $x<0$이면 $2x-1<0$, $x<0$이므로 주어진 부등식은

$-(2x-1)-(-x)<3$, $-2x+1+x<3$

$-x<2 \qquad \therefore x>-2$

그런데 $x<0$이므로 $-2<x<0$

(ii) $0\le x<\frac{1}{2}$이면 $2x-1<0$, $x\ge0$이므로 주어진 부등식은

$-(2x-1)-x<3$, $-2x+1-x<3$

$-3x<2 \qquad \therefore x>-\frac{2}{3}$

그런데 $0\le x<\frac{1}{2}$이므로 $0\le x<\frac{1}{2}$

(iii) $x\ge\frac{1}{2}$이면 $2x-1\ge0$, $x>0$이므로 주어진 방정식은

$2x-1-x<3 \qquad \therefore x<4$

그런데 $x\ge\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{2}\le x<4$

(i), (ii), (iii)에서 $-2<x<4$ 　답 $-2<x<4$

0812

주어진 이차방정식의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

(i) $\frac{D}{4}=(-1)^2-(2k-1)\ge0$, $2-2k\ge0 \qquad \therefore k\le1$

(ii) $\alpha+\beta=2>0$

(iii) $\alpha\beta=2k-1>0 \qquad \therefore k>\frac{1}{2}$

(i), (ii), (iii)에서 $\frac{1}{2}<k\le1$ 　답 $\frac{1}{2}<k\le1$

0813

주어진 이차방정식의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

(i) $\frac{D}{4}=2^2-2k\ge0 \qquad \therefore k\le2$

(ii) $\alpha+\beta=-4<0$

(iii) $\alpha\beta=2k>0 \qquad \therefore k>0$

(i), (ii), (iii)에서 $0<k\le2$ 　답 $0<k\le2$

0814

주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha\beta=k+2<0 \qquad \therefore k<-2$ 　답 $k<-2$

0815

(1) 이차방정식 $f(x)=0$이 실근을 가져야 하므로 $D\ge0$

주어진 그림에서 $f(1)>0$, $k>1$

(2) 이차방정식 $f(x)=0$이 실근을 가져야 하므로 $D\ge0$

주어진 그림에서 $f(1)>0$, $k<1$

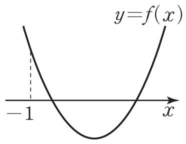
(3) 주어진 그림에서 $f(1)<0$

답 (1) $\ge$, $>$, $>$ (2) $\ge$, $>$, $<$ (3) $<$

0816

$f(x)=x^2-2x+k-1$이라 하면

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -1보다 크므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(k-1)\ge0 \qquad \therefore k\le$ $\boxed{(가)\ 2}$

(ii) $f(-1)=2+k>0$에서 $k>$ $\boxed{(나)\ -2}$

(iii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이고 $1>-1$이다.

(i), (ii), (iii)에서 $\boxed{(다)\ -2<k\le2}$ 　답 풀이 참조

STEP 2 유형 마스터 ❷

0817

|전략| $|ax+b|<c\,(c>0)$ 꼴의 부등식은 $-c<ax+b<c$임을 이용하여 절댓값 기호를 없앤 후 푼다.

$|2-3x|\le4$에서 $-4\le2-3x\le4$

$-6\le-3x\le2 \qquad \therefore -\frac{2}{3}\le x\le2$

따라서 정수 x는 0, 1, 2의 3개이다. 　답 ③

0818

$|2x+a|\ge3$에서 $2x+a\le-3$ 또는 $2x+a\ge3$

$\therefore x\le\frac{-3-a}{2}$ 또는 $x\ge\frac{3-a}{2}$

주어진 부등식의 해가 $x\le-1$ 또는 $x\ge b$이므로

$\frac{-3-a}{2}=-1$, $\frac{3-a}{2}=b$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로

$a+b=1$ 　답 ②

0819

$ab<0$이므로 $b\ne0$

$b<0$이면 $|ax-1|\le b$의 해가 존재하지 않으므로 $b>0$

이때, $ab<0$이므로 $a<0$

$|ax-1|\le b$에서 $-b\le ax-1\le b$

$1-b\le ax\le1+b \qquad \therefore \frac{b+1}{a}\le x\le\frac{-b+1}{a}$ ($\because a<0$)

주어진 부등식의 해가 $-3\le x\le1$이므로

$\frac{b+1}{a}=-3$, $\frac{-b+1}{a}=1$

$\therefore 3a+b=-1$, $a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$

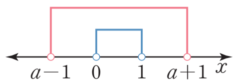
$\therefore ab=-2$ 　답 -2

0820

$|x-a|<1$에서 $-1<x-a<1$

$\therefore a-1<x<a+1$

$a-1<x<a+1$이 $0<x<1$을 포함하려면 오른쪽 그림에서



$a-1\le 0 \qquad \therefore a\le 1$

$a+1\ge 1 \qquad \therefore a\ge 0$

$\therefore 0\le a\le 1$

답 $0\le a\le 1$

0821

|전략| $x<2$, $x\ge 2$로 범위를 나누어 푼다.

$2|x-2|<-x+5$에서

(i) $x<2$일 때, $-2(x-2)<-x+5$

$-x<1 \qquad \therefore x>-1$

그런데 $x<2$이므로 $-1<x<2$

(ii) $x\ge 2$일 때, $2(x-2)<-x+5$

$3x<9 \qquad \therefore x<3$

그런데 $x\ge 2$이므로 $2\le x<3$

(i), (ii)에서 $-1<x<3$

따라서 $a=-1$, $b=3$이므로

$a+b=2$

답 ⑤

0822

$|4-x|\le 8-x$에서

(i) $x<4$일 때, $4-x\le 8-x$

$0\cdot x\le 4 \qquad \therefore$ 모든 실수

그런데 $x<4$이므로 $x<4$

(ii) $x\ge 4$일 때, $-(4-x)\le 8-x$

$2x\le 12 \qquad \therefore x\le 6$

그런데 $x\ge 4$이므로 $4\le x\le 6$

(i), (ii)에서 $x\le 6$

따라서 자연수 x는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다.

답 ⑤

0823

부등식 $2|x-1|<3x-7$에서

(i) $x<1$일 때, $-2(x-1)<3x-7$

$-5x<-9 \qquad \therefore x>\frac{9}{5}$

그런데 $x<1$이므로 해는 없다.

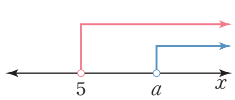
(ii) $x\ge 1$일 때, $2(x-1)<3x-7$

$-x<-5 \qquad \therefore x>5$

그런데 $x\ge 1$이므로 $x>5$

(i), (ii)에서 $x>5$

따라서 $x>5$가 $x>a$를 포함하려면 오른쪽 그림에서



$a\ge 5$

답 ④

0824

|전략| $x<-1$, $-1\le x<1$, $x\ge 1$로 범위를 나누어 푼다.

$2|x-1|+3|x+1|\le 6$에서

(i) $x<-1$일 때, $-2(x-1)-3(x+1)\le 6$

$-5x\le 7 \qquad \therefore x\ge -\frac{7}{5}$

그런데 $x<-1$이므로 $-\frac{7}{5}\le x<-1$

(ii) $-1\le x<1$일 때, $-2(x-1)+3(x+1)\le 6$

$\therefore x\le 1$

그런데 $-1\le x<1$이므로 $-1\le x<1$

(iii) $x\ge 1$일 때, $2(x-1)+3(x+1)\le 6$

$5x\le 5 \qquad \therefore x\le 1$

그런데 $x\ge 1$이므로 $x=1$

(i), (ii), (iii)에서 $-\frac{7}{5}\le x\le 1$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1의 3개이다.

답 ③

0825

$|2x+3|-|x-1|>5$에서

(i) $x<-\frac{3}{2}$일 때, $-(2x+3)+(x-1)>5$

$-x>9 \qquad \therefore x<-9$

그런데 $x<-\frac{3}{2}$이므로 $x<-9$ ··· ❶

(ii) $-\frac{3}{2}\le x<1$일 때, $(2x+3)+(x-1)>5$

$3x>3 \qquad \therefore x>1$

그런데 $-\frac{3}{2}\le x<1$이므로 해는 없다. ··· ❷

(iii) $x\ge 1$일 때, $(2x+3)-(x-1)>5$

$\therefore x>1$

그런데 $x\ge 1$이므로 $x>1$ ··· ❸

(i), (ii), (iii)에서 $x<-9$ 또는 $x>1$ ··· ❹

답 $x<-9$ 또는 $x>1$

채점 기준	비율
❶ $x<-\frac{3}{2}$일 때의 부등식의 해를 구할 수 있다.	25 %
❷ $-\frac{3}{2}\le x<1$일 때의 부등식의 해를 구할 수 있다.	25 %
❸ $x\ge 1$일 때의 부등식의 해를 구할 수 있다.	25 %
❹ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	25 %

0826

$2\sqrt{(x+1)^2}+|x-2|\le 6$에서 $2|x+1|+|x-2|\le 6$

(i) $x<-1$일 때, $-2(x+1)-(x-2)\le 6$

$-3x\le 6 \qquad \therefore x\ge -2$

그런데 $x<-1$이므로 $-2\le x<-1$

(ii) $-1\le x<2$일 때, $2(x+1)-(x-2)\le 6$

$\therefore x\le 2$

그런데 $-1\le x<2$이므로 $-1\le x<2$

(iii) $x\ge 2$일 때, $2(x+1)+(x-2)\le 6$

$3x\le 6$ $\therefore x\le 2$

그런데 $x\ge 2$이므로 $x=2$

(i), (ii), (iii)에서 $-2\le x\le 2$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=2$이므로

$\alpha+\beta=0$ 답 ③

0827

$||x+1|-1|\ge 2$에서

$|x+1|-1\le -2$ 또는 $|x+1|-1\ge 2$

$\therefore |x+1|\le -1$ 또는 $|x+1|\ge 3$

그런데 $|x+1|\ge 0$이므로 $|x+1|\ge 3$

$x+1\le -3$ 또는 $x+1\ge 3$

$\therefore x\le -4$ 또는 $x\ge 2$ 답 $x\le -4$ 또는 $x\ge 2$

다른 풀이 $||x+1|-1|\ge 2$에서

(i) $x<-1$일 때, $|-(x+1)-1|\ge 2$, $|-x-2|\ge 2$

$-x-2\le -2$ 또는 $-x-2\ge 2$

$-x\le 0$ 또는 $-x\ge 4$

$\therefore x\ge 0$ 또는 $x\le -4$

그런데 $x<-1$이므로 $x\le -4$

(ii) $x\ge -1$일 때, $|x+1-1|\ge 2$, $|x|\ge 2$

$\therefore x\le -2$ 또는 $x\ge 2$

그런데 $x\ge -1$이므로 $x\ge 2$

(i), (ii)에서 $x\le -4$ 또는 $x\ge 2$

0828

|전략| 부등식 $|ax+b|>c$의 해가 모든 실수가 되려면 $c<0$이어야 한다.

$|2x+1|>a+1$의 해가 모든 실수이려면

$a+1<0$ $\therefore a<-1$ 답 ①

0829

$|2x-1|\ge 0$이므로 $|2x-1|\le 6-2k$의 해가 존재하지 않으려면

$6-2k<0$ $\therefore k>3$ … ❶

따라서 정수 k의 최솟값은 4이다. … ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	70 %
❷ 정수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

0830

$\sqrt{(3x+3)^2}\le a-1$에서 $|3x+3|\le a-1$

$|3a+3|\ge 0$이므로 이 부등식의 해가 존재하려면

$a-1\ge 0$ $\therefore a\ge 1$ 답 $a\ge 1$

0831

$|x-a|\ge 0$이므로 $|x-a|\le a^2-a$를 만족시키는 해가 오직 한 개만 존재하려면

$a^2-a=0$, $a(a-1)=0$ $\therefore a=0$ 또는 $a=1$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 1이다. 답 1

0832

|전략| 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 조건은 $D>0$, 허근을 가질 조건은 $D<0$이다.

이차방정식 $x^2-2x+k-3=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-1)^2-(k-3)>0$

$-k+4>0$ $\therefore k<4$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+2x+2k+1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=1^2-(2k+1)<0$

$-2k<0$ $\therefore k>0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 k의 값의 범위는 $0<k<4$ 답 $0<k<4$

0833

이차방정식 $x^2-4x-2a+6=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-2)^2-(-2a+6)\ge 0$

$2a-2\ge 0$ $\therefore a\ge 1$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-2x-2a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-(-2a)\ge 0$

$2a+1\ge 0$ $\therefore a\ge -\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 a의 값의 범위는 $a\ge 1$

따라서 정수 a의 최솟값은 1이다. 답 1

0834

이차방정식 $x^2-2ax+a^2-a+6=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-a)^2-(a^2-a+6)<0$

$a-6<0$ $\therefore a<6$ …… ㉠

이차방정식 $4x^2+4ax+a^2+a-2=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(2a)^2-4(a^2+a-2)<0$

$-4a+8<0$ $\therefore a>2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 a의 값의 범위는 $2<a<6$ 답 ④

0835

이차방정식 $x^2+2(k-2)x+k^2+k-1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(k-2)^2-(k^2+k-1)<0$

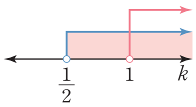
$-5k+5<0$ $\therefore k>1$

이차방정식 $x^2+2(2k-3)x+4k^2+3=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(2k-3)^2-(4k^2+3)<0$

$-12k+6<0 \qquad \therefore k>\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 주어진 두 이차방정식 중 적어도 하나가 허근을 갖는 실수 k의 값의 범위는



$k>\frac{1}{2}$

답 $k>\frac{1}{2}$

0836

|전략| 이차방정식의 두 실근 α, β가 모두 양수이면 판별식 $D\geq 0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$이다.

주어진 이차방정식의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 양수이므로

(i) $\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2+1)\geq 0$, $-2k\geq 0 \qquad \therefore k\leq 0$

(ii) $\alpha+\beta=-2(k-1)>0 \qquad \therefore k<1$

(iii) $\alpha\beta=k^2+1>0$

(i), (ii), (iii)에서 $k\leq 0$

따라서 정수 k의 최댓값은 0이다.

답 0

0837

주어진 이차방정식이 한 개의 양의 근과 한 개의 음의 근을 가지므로 두 근은 서로 다른 부호이다. 즉, 두 근을 α, β라 하면

$\alpha\beta=2a-4<0 \qquad \therefore a<2$

따라서 실수 a의 값이 될 수 있는 것은 ①이다.

답 ①

0838

주어진 이차방정식의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 음수이므로

(i) $\frac{D}{4}=4^2-4(8k-3)\geq 0$, $-32k+28\geq 0 \qquad \therefore k\leq\frac{7}{8}$

(ii) $\alpha+\beta=-2<0$

(iii) $\alpha\beta=\frac{8k-3}{4}>0 \qquad \therefore k>\frac{3}{8}$

(i), (ii), (iii)에서 $\frac{3}{8}<k\leq\frac{7}{8}$

따라서 $a=\frac{3}{8}$, $b=\frac{7}{8}$이므로 $a+b=\frac{5}{4}$

답 $\frac{5}{4}$

0839

|전략| 이차방정식의 두 실근 α, β의 부호가 서로 다르고 음의 근의 절댓값이 양의 근보다 크면 $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta<0$이다.

주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면

(i) $\alpha+\beta=-2(m+3)<0 \qquad \therefore m>-3$

(ii) $\alpha\beta=5m<0 \qquad \therefore m<0$

(i), (ii)에서 $-3<m<0$

따라서 모든 정수 m의 값의 곱은 $(-2)\cdot(-1)=2$

답 2

0840

주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면

(i) $\alpha+\beta=-\frac{m^2+m-6}{3}=0$

$m^2+m-6=0$, $(m+3)(m-2)=0$

$\therefore m=-3$ 또는 $m=2$

(ii) $\alpha\beta=\frac{-m+1}{3}<0 \qquad \therefore m>1$

(i), (ii)에서 구하는 실수 m의 값은 2이다.

답 2

0841

|전략| x에 대한 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 $x^2=t$로 치환한 t에 대한 이차방정식이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

$x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-2t-k+3=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때, 주어진 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 방정식 ㉠은 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

(i) $\frac{D}{4}=(-1)^2-(-k+3)>0 \qquad \therefore k>2$

(ii) (두 근의 합)$=-(-2)>0$

(iii) (두 근의 곱)$=-k+3>0 \qquad \therefore k<3$

(i), (ii), (iii)에서 $2<k<3$

답 $2<k<3$

0842

$x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2+(k+1)t+2k-4=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때, 주어진 사차방정식이 서로 다른 두 실근과 서로 다른 두 허근을 가지려면 방정식 ㉠은 서로 다른 부호의 두 실근을 가져야 한다.

(두 근의 곱)$=2k-4<0 \qquad \therefore k<2$

따라서 정수 k의 최댓값은 1이다.

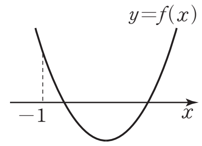
답 1

0843

|전략| 이차방정식 $f(x)=0$의 근의 조건이 주어지면 $f(x)=0$의 판별식의 부호, 경계에서의 함숫값의 부호, $y=f(x)$의 그래프의 축의 위치를 생각한다.

$f(x)=x^2-2x+6-5k$라 하면

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -1보다 크므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(6-5k)\geq 0 \qquad \therefore k\geq 1$

(ii) $f(-1)=9-5k>0$에서 $k<\frac{9}{5}$

(iii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이고 $1>-1$이다.

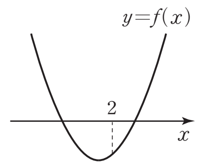
(i), (ii), (iii)에서 $1\leq k<\frac{9}{5}$

답 $1\leq k<\frac{9}{5}$

0844

$f(x)=x^2-mx+2$라 하면

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 2가 있으므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, $f(2)=-2m+6<0$에서 $m>3$

답 ⑤

0845

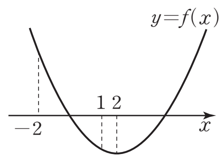
$x^2+x-2=0$에서 $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

즉, $x^2-4x+k=0$의 두 근 중 한 근만이 -2와 1 사이에 있어야 한다.

$f(x)=x^2-4x+k$라 하면

$f(x)=(x-2)^2-4+k$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=2$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $f(-2)=k+12>0$에서 $k>-12$

(ii) $f(1)=-3+k<0$에서 $k<3$

(i), (ii)에서 $-12<k<3$

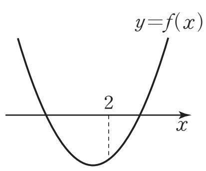
따라서 정수 k는 -11, -10, $\cdots$, 2의 14개이다. 답 14

0846

$f(x)=ax^2-(a+1)x+4$라 하면

이차방정식 $f(x)=0$의 한 근은 2보다 크고 다른 한 근은 2보다 작으므로

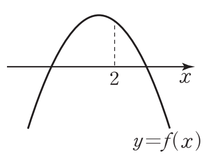
(i) $a>0$일 때, $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(2)=2a+2<0$에서 $a<-1$

그런데 $a>0$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a<0$일 때, $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(2)=2a+2>0$에서 $a>-1$

그런데 $a<0$이므로 $-1<a<0$

(i), (ii)에서 $-1<a<0$ 답 $-1<a<0$

STEP 3 내신 마스터

0847

유형 01 연립일차부등식의 풀이

|전략| 각 일차부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 공통부분을 찾는다.

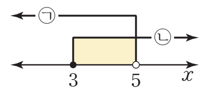
$$\begin{cases} x-2>4x-17 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3(x-2)-2\geq 2x-5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x<5$

㉡에서 $3x-6-2\geq 2x-5$ $\therefore x\geq 3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 $3\leq x<5$이므로

$a=3$, $b=5$ $\therefore a+b=8$



답 ④

0848

유형 02 계수가 유리수 또는 무리수인 연립일차부등식의 풀이

|전략| 먼저 연립부등식의 해를 구하고 부등식의 성질을 이용하여 $A=-2x+3$의 최솟값을 구한다.

$$\begin{cases} \sqrt{3}(x+\sqrt{3})>2(x+2) & \cdots\cdots ㉠ \\ -2-\dfrac{x+2}{3}\geq\dfrac{x-4}{9} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\sqrt{3}x+3>2x+4$

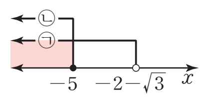
$\sqrt{3}-2<0$이므로 부등호의 부호 바뀜.

$(\sqrt{3}-2)x>1$ $\therefore x<\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}=-2-\sqrt{3}$

㉡에서 $-18-3(x+2)\geq x-4$

$-18-3x-6\geq x-4$ $\therefore x\leq -5$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 $x\leq -5$이므로



$-2x\geq 10$ $\therefore -2x+3\geq 13$

즉, $A\geq 13$

따라서 A의 최솟값은 13이다. 답 ⑤

0849

유형 05 해가 주어진 연립일차부등식

|전략| 각 부등식의 해의 공통부분이 $x<-2$임을 이용한다.

$$\begin{cases} \dfrac{3x-a}{2}>4x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{2x-1}{3}\leq\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{x-1}{6} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $3x-a>2(4x+3)$

$3x-a>8x+6$ $\therefore x<-\dfrac{a+6}{5}$

㉡에서 $2(2x-1)\leq 2(x+1)+x-1$

$4x-2\leq 2x+2+x-1$ $\therefore x\leq 3$

이때, 주어진 연립부등식의 해가 $x<-2$이므로

$-\dfrac{a+6}{5}=-2$ $\therefore a=4$ 답 ④

0850

유형 10 연립일차부등식의 활용 – 농도

|전략| 물을 x g 더 넣는다고 하고 설탕물의 농도에 대한 연립부등식을 세운다.

10 %의 설탕물 300 g에 들어 있는 설탕의 양은

$\dfrac{10}{100}\times 300=30$ (g)

물을 x g 더 넣는다고 하면

$4\leq\dfrac{30}{300+x}\times 100\leq 6$

$4(300+x)\leq 3000\leq 6(300+x)$

즉, $\begin{cases} 4(300+x)\leq 3000 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3000\leq 6(300+x) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $1200+4x\le3000$ $\quad\therefore x\le450$

㉡에서 $3000\le1800+6x$ $\quad\therefore x\ge200$

$\therefore 200\le x\le450$

따라서 $a=200$, $b=450$이므로 $a+b=650$ 답 ④

0851

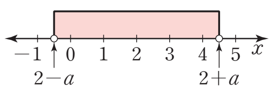
유형 14 $|ax+b|<c$, $|ax+b|>c$ 꼴의 부등식의 풀이

|전략| 부등식의 해를 만족시키는 정수가 5개 포함되도록 수직선 위에 나타내 본다.

$|x-2|<a$에서 $-a<x-2<a$

$\therefore 2-a<x<2+a$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 5개이려면 오른쪽 그림에서



(ⅰ) $-1\le2-a<0$, $-3\le-a<-2$

$\quad\therefore 2<a\le3$

(ⅱ) $4<2+a\le5$ $\quad\therefore 2<a\le3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $2<a\le3$이므로 정수 a의 값은 3이다. 답 ③

0852

유형 06 연립일차부등식에서 미지수의 값의 범위 구하기
– 해가 없는 경우 또는 해를 갖는 경우
+ 15 $|ax+b|<cx+d$ 꼴의 부등식의 풀이

|전략| 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분이 없도록 수직선 위에 나타내 본다.

$|x-1|\le2x+1$에서

(ⅰ) $x<1$일 때, $-(x-1)\le2x+1$ $\quad\therefore x\ge0$

그런데 $x<1$이므로 $0\le x<1$

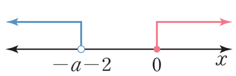
(ⅱ) $x\ge1$일 때, $x-1\le2x+1$ $\quad\therefore x\ge-2$

그런데 $x\ge1$이므로 $x\ge1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x\ge0$ ...... ㉠

$2(x+1)<x-a$에서 $x<-a-2$ ...... ㉡

이때, 주어진 연립부등식의 해가 없으려면 ㉠, ㉡의 공통부분이 존재하지 않아야 하므로 오른쪽 그림에서



$-a-2\le0$ $\quad\therefore a\ge-2$ 답 ③

0853

유형 16 절댓값 기호를 2개 포함한 부등식의 풀이

|전략| $x<0$, $0\le x<\frac{1}{2}$, $x\ge\frac{1}{2}$로 범위를 나누어 푼다.

$|2x-1|-|x|\ge2$에서

(ⅰ) $x<0$일 때, $-(2x-1)+x\ge2$

$-x\ge1$ $\quad\therefore x\le-1$

그런데 $x<0$이므로 $x\le-1$

(ⅱ) $0\le x<\frac{1}{2}$일 때, $-(2x-1)-x\ge2$

$-3x\ge1$ $\quad\therefore x\le-\frac{1}{3}$

그런데 $0\le x<\frac{1}{2}$이므로 해는 없다.

(ⅲ) $x\ge\frac{1}{2}$일 때, $2x-1-x\ge2$ $\quad\therefore x\ge3$

그런데 $x\ge\frac{1}{2}$이므로 $x\ge3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $x\le-1$ 또는 $x\ge3$

따라서 $a=-1$, $b=3$이므로 $a+b=2$ 답 ①

0854

유형 14 $|ax+b|<c$, $|ax+b|>c$ 꼴의 부등식의 풀이
+ 16 절댓값 기호를 2개 포함한 부등식의 풀이

|전략| 두 부등식의 해를 각각 구하여 해가 같아지는 상수 k의 값을 구한다.

$3|x+1|\le2|x+2|$에서

(ⅰ) $x<-2$일 때, $-3(x+1)\le-2(x+2)$

$-x\le-1$ $\quad\therefore x\ge1$

그런데 $x<-2$이므로 해는 없다.

(ⅱ) $-2\le x<-1$일 때, $-3(x+1)\le2(x+2)$

$-5x\le7$ $\quad\therefore x\ge-\frac{7}{5}$

그런데 $-2\le x<-1$이므로 $-\frac{7}{5}\le x<-1$

(ⅲ) $x\ge-1$일 때, $3(x+1)\le2(x+2)$ $\quad\therefore x\le1$

그런데 $x\ge-1$이므로 $-1\le x\le1$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $-\frac{7}{5}\le x\le1$

$|5x+k|\le6$에서 $-6\le5x+k\le6$

$-6-k\le5x\le6-k$ $\quad\therefore \frac{-6-k}{5}\le x\le\frac{6-k}{5}$

따라서 $\frac{-6-k}{5}=-\frac{7}{5}$, $\frac{6-k}{5}=1$이므로

$k=1$ 답 ③

0855

유형 17 절댓값 기호를 포함한 부등식의 해의 조건이 주어진 경우

|전략| $x<0$, $0\le x<2$, $x\ge2$로 범위를 나누어 해가 존재할 조건을 구한다.

$|x|+|x-2|\le a$에서

(ⅰ) $x<0$일 때, $-x-(x-2)\le a$ $\quad\therefore x\ge\frac{2-a}{2}$

그런데 $x<0$이므로 해가 존재하려면

$\frac{2-a}{2}<0$ $\quad\therefore a>2$

(ⅱ) $0\le x<2$일 때, $x-(x-2)\le a$, $0\cdot x\le a-2$

해가 존재하려면

$a-2\ge0$ $\quad\therefore a\ge2$

(ⅲ) $x\ge2$일 때, $x+x-2\le a$ $\quad\therefore x\le\frac{a+2}{2}$

그런데 $x\ge2$이므로 해가 존재하려면

$\frac{a+2}{2}\ge2$ $\quad\therefore a\ge2$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $a\ge2$

따라서 적당하지 않은 것은 ①이다. 답 ①

0856

유형 **18** 이차방정식의 근의 판별과 연립일차부등식

|전략| 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 실근을 가질 조건은 $D\geq 0$이다.

이차방정식 $x^2-x+k=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-1)^2-4k\geq 0$

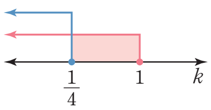
$1-4k\geq 0 \qquad \therefore k\leq\frac{1}{4}$

이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-k\geq 0$

$1-k\geq 0 \qquad \therefore k\leq 1$

오른쪽 그림에서 주어진 두 이차방정식 중 어느 하나만 실근을 갖도록 하는 k의 값의 범위는



$k=\frac{1}{4}$은 $k\leq\frac{1}{4}$, $k\leq 1$을 모두 만족시킨다.

$\frac{1}{4}<k\leq 1$

따라서 정수 k는 1의 1개이다. 답 ①

0857

유형 **19** 이차방정식의 실근의 부호 (1)

|전략| 이차방정식의 두 근 중 한 근만 음수인 경우는 한 개의 음의 근과 한 개의 양의 근을 갖는 경우와 한 개의 음의 근과 0을 근으로 갖는 경우이다.

주어진 이차방정식 $x^2+ax+a-2=0$의 두 근 중 한 근만 음수인 경우는 한 개의 음의 근과 한 개의 양의 근을 갖는 경우와 한 개의 음의 근과 0을 근으로 갖는 경우가 있다.

(i) 한 개의 음의 근과 한 개의 양의 근을 갖는 경우

두 근을 α, β라 하면

$\alpha\beta=a-2<0 \qquad \therefore a<2$

(ii) 한 개의 음의 근과 0을 근으로 갖는 경우

$x=0$을 주어진 방정식에 대입하면

$a-2=0 \qquad \therefore a=2$

$x^2+2x=0$에서 $x(x+2)=0$이므로 다른 한 근은 $x=-2$

따라서 $a=2$이면 한 개의 음의 근과 0을 근으로 갖는다.

(i), (ii)에서 $a\leq 2$

따라서 자연수 a는 1, 2의 2개이다. 답 ②

0858

유형 **20** 이차방정식의 실근의 부호 (2)

|전략| a, b, c의 부호를 따져 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근을 판별한다.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

$D=b^2-4ac>0$

즉, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$ab>0$에서 a와 b의 부호가 같으므로 $-\frac{b}{a}<0$

$\therefore$ (두 근의 합)$=-\frac{b}{a}<0$

$bc<0$에서 b와 c의 부호가 서로 다르므로 a와 c의 부호도 서로 다르다. 즉, $\frac{c}{a}<0$

$\therefore$ (두 근의 곱)$=\frac{c}{a}<0$

두 근의 곱이 음수이므로 두 근의 부호는 서로 다르고 두 근의 합이 음수이므로 음의 실근의 절댓값이 양의 실근보다 크다. 답 ③

0859

유형 **21** 사차방정식의 근의 조건

|전략| x에 대한 사차방정식이 실근을 가지려면 $x^2=t$로 치환한 t에 대한 이차방정식이 적어도 하나의 음이 아닌 실근을 가져야 한다.

$x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2+2t+a-7=0$ ...... ㉠

이때, 주어진 사차방정식이 실근을 가지려면 방정식 ㉠은 적어도 하나의 음이 아닌 실근을 가져야 한다. ($\because$ x가 실수일 때, $x^2\geq 0$)

또, ㉠의 두 근의 합이 -2이므로 두 근 중에서 적어도 하나는 음수이다.

따라서 ㉠은 하나의 음이 아닌 실근과 하나의 음수인 근을 갖는다.

(두 근의 곱)$=a-7\leq 0 \qquad \therefore a\leq 7$

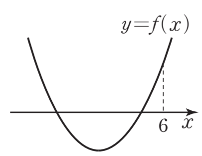
따라서 자연수 a는 1, 2, ⋯, 7의 7개이다. 답 ③

0860

유형 **22** 이차방정식의 근의 분리

|전략| 이차방정식 $f(x)=0$의 근의 조건이 주어지면 $f(x)=0$의 판별식의 부호, 경계에서의 함숫값의 부호, $y=f(x)$의 그래프의 축의 위치를 생각한다.

$f(x)=x^2-8x-3a+4$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 6보다 작으므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-(-3a+4)\geq 0 \qquad \therefore a\geq -4$

(ii) $f(6)=-8-3a>0$에서 $a<-\frac{8}{3}$

(iii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=4$이고 $4<6$이다.

(i), (ii), (iii)에서 $-4\leq a<-\frac{8}{3}$

따라서 정수 a는 -4, -3의 2개이다. 답 ①

0861

유형 **01** 연립일차부등식의 풀이

|전략| 각 일차부등식을 풀어 a, b의 값을 구하고, 이를 대입한 연립부등식의 해를 구한다.

$-3x+1<-5$에서 $x>2 \qquad \therefore a=2$ ··· ❶

$2x+\frac{2}{3}\leq x-\frac{1}{3}$에서 $x\leq -1 \qquad \therefore b=-1$ ··· ❷

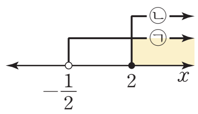
8 연립일차부등식

$a=2$, $b=-1$을 주어진 연립부등식에 대입하면

$$\begin{cases} 2x+1>0 & \cdots\cdots ㉠ \\ -x+2\le 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x>-\dfrac{1}{2}$

㉡에서 $x\ge 2$



따라서 구하는 연립부등식의 해는

$x\ge 2$ ··· ❸

답 $x\ge 2$

채점 기준	배점
❶ a의 값을 구할 수 있다.	1점
❷ b의 값을 구할 수 있다.	1점
❸ 연립일차부등식의 해를 구할 수 있다.	4점

0862

유형 07 연립일차부등식에서 미지수의 값의 범위 구하기
– 정수인 해의 개수가 주어진 경우

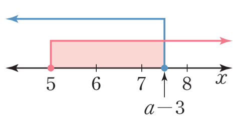
|전략| 각 부등식의 해를 구한 후 정수가 3개 포함되도록 수직선 위에 나타내 본다.

$$\begin{cases} x+a\ge 3+2x & \cdots\cdots ㉠ \\ 2(x-1)\ge x+3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x\le a-3$ ··· ❶

㉡에서 $2x-2\ge x+3$ $\quad\therefore x\ge 5$ ··· ❷

이때, 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 3개이려면 오른쪽 그림에서



$7\le a-3<8$

$\therefore 10\le a<11$ ··· ❸

답 $10\le a<11$

채점 기준	배점
❶ ㉠의 해를 구할 수 있다.	1점
❷ ㉡의 해를 구할 수 있다.	1점
❸ 조건을 만족시키는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	4점

0863

유형 18 이차방정식의 근의 판별과 연립일차부등식

|전략| 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 실근을 가질 조건은 $D\ge 0$, 허근을 가질 조건은 $D<0$이다.
이때, (이차항의 계수)$\neq 0$임에 주의한다.

이차방정식 $(k-1)x^2+2(k+1)x+k+2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=(k+1)^2-(k-1)(k+2)\ge 0$, $k+3\ge 0$ $\quad\therefore k\ge -3$

이때, $k\neq 1$이므로

$-3\le k<1$ 또는 $k>1$ ······ ㉠ ··· ❶

이차방정식 $kx^2+2(k+2)x+k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=(k+2)^2-k\cdot k<0$, $4k+4<0$ $\quad\therefore k<-1$

이때, $k\neq 0$이지만 범위에 포함되지 않으므로

$k<-1$ ······ ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡에서 구하는 k의 값의 범위는 $-3\le k<-1$ ··· ❸

답 $-3\le k<-1$

채점 기준	배점
❶ ㉠을 구할 수 있다.	3점
❷ ㉡을 구할 수 있다.	2점
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	2점

0864

유형 04 $A<B<C$ 꼴의 부등식의 풀이

|전략| 이차방정식의 양수인 근 a를 구하고, 이를 부등식에 대입하여 해를 구한다.

(1) 이차방정식 $x^2-2x-1=0$에서

$x=1\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot(-1)}=1\pm\sqrt{2}$

$\therefore a=1+\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

(2) $a=1+\sqrt{2}$를 $\dfrac{2x-a}{2}\le\sqrt{2}(x-1)$에 대입하여 정리하면

$2x-1-\sqrt{2}\le 2\sqrt{2}(x-1)$

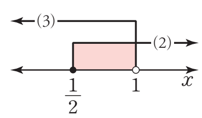
$2(\sqrt{2}-1)x\ge\sqrt{2}-1$ $\quad\therefore x\ge\dfrac{1}{2}$ ($\because \sqrt{2}-1>0$)

(3) $a=1+\sqrt{2}$를 $\sqrt{2}(x-1)<0.5(\sqrt{2}x-a)+\dfrac{1}{2}$에 대입하여 정리하면

$2\sqrt{2}(x-1)<\sqrt{2}x-1-\sqrt{2}+1$

$\sqrt{2}x<\sqrt{2}$ $\quad\therefore x<1$

(4) (2), (3)에서 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위는



$\dfrac{1}{2}\le x<1$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 이차방정식을 풀어 a의 값을 구할 수 있다.	3점
(2) $\dfrac{2x-a}{2}\le\sqrt{2}(x-1)$의 해를 구할 수 있다.	3점
(3) $\sqrt{2}(x-1)<0.5(\sqrt{2}x-a)+\dfrac{1}{2}$의 해를 구할 수 있다.	3점
(4) 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	3점

0865

유형 13 연립일차부등식의 활용 – 과부족 (2)

|전략| 사과의 개수를 상자의 개수로 나타낸다.

(1) 상자의 개수를 x라 하면 사과는 $(9x+3)$개이므로

$12(x-3)+1\le 9x+3\le 12(x-3)+12$

(2) (1)에서 세운 부등식에서

$$\begin{cases} 12(x-3)+1\le 9x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 9x+3\le 12(x-3)+12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $12x-36+1\le 9x+3$ $\quad\therefore x\le\dfrac{38}{3}$

㉡에서 $9x+3\le 12x-36+12$ $\quad\therefore x\ge 9$

$\therefore 9\le x\le\dfrac{38}{3}$

(3) x는 자연수이므로 상자의 최대 개수는 12이다.

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 부등식을 세울 수 있다.	4점
(2) (1)에서 세운 부등식의 해를 구할 수 있다.	4점
(3) 상자의 최대 개수를 구할 수 있다.	2점

창의·융합 교과서 속 심화문제

0866

|전략| $a+2b>0$, $a+2b<0$인 경우로 나누어 부등식을 푼다.

(i) $a+2b>0$일 때

$\frac{2a+5b-5}{a+2b}<x<\frac{a+b-1}{a+2b}$

이때, 연립부등식의 해가 $4<x<5$이므로

$\frac{2a+5b-5}{a+2b}=4$에서 $2a+5b-5=4a+8b$

$\therefore 2a+3b=-5$ …… ㉠

$\frac{a+b-1}{a+2b}=5$에서 $a+b-1=5a+10b$

$\therefore 4a+9b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-7$, $b=3$

그런데 $a+2b=-7+6=-1>0$이 성립하지 않는다.

(ii) $a+2b<0$일 때

$\frac{a+b-1}{a+2b}<x<\frac{2a+5b-5}{a+2b}$

이때, 연립부등식의 해가 $4<x<5$이므로

$\frac{a+b-1}{a+2b}=4$에서 $a+b-1=4a+8b$

$\therefore 3a+7b=-1$ …… ㉢

$\frac{2a+5b-5}{a+2b}=5$에서 $2a+5b-5=5a+10b$

$\therefore 3a+5b=-5$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=2$

이때, $a+2b=-5+4=-1<0$이 성립한다.

(i), (ii)에서 $a=-5$, $b=2$

$\therefore a+b=-3$

답 -3

0867

|전략| 주어진 부등식에서 절댓값을 없앤 후 $\left[\frac{x}{4}-1\right]$은 정수임을 이용한다.

$\left|\left[\frac{x}{4}-1\right]-4\right|<2$에서 $-2<\left[\frac{x}{4}-1\right]-4<2$

$\therefore 2<\left[\frac{x}{4}-1\right]<6$

이때, $\left[\frac{x}{4}-1\right]$은 정수이므로

$\left[\frac{x}{4}-1\right]=3$ 또는 $\left[\frac{x}{4}-1\right]=4$ 또는 $\left[\frac{x}{4}-1\right]=5$

(i) $\left[\frac{x}{4}-1\right]=3$일 때, $3\le\frac{x}{4}-1<4$이므로

$4\le\frac{x}{4}<5$ $\quad\therefore 16\le x<20$

(ii) $\left[\frac{x}{4}-1\right]=4$일 때, $4\le\frac{x}{4}-1<5$이므로

$5\le\frac{x}{4}<6$ $\quad\therefore 20\le x<24$

(iii) $\left[\frac{x}{4}-1\right]=5$일 때, $5\le\frac{x}{4}-1<6$이므로

$6\le\frac{x}{4}<7$ $\quad\therefore 24\le x<28$

(i), (ii), (iii)에서 $16\le x<28$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 16, 17, 18, …, 27의 12개이다.

답 12

0868

|전략| $\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$임을 이용하여 주어진 부등식을 정리한 후 절댓값 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나눈다.

$\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$이므로 주어진 부등식은

$||x+3|+|x-2||\le5$

$\therefore 0\le|x+3|+|x-2|\le5$

(i) $x<-3$일 때, $0\le-(x+3)-(x-2)\le5$

$1\le-2x\le6$ $\quad\therefore -3\le x\le-\frac{1}{2}$

그런데 $x<-3$이므로 해가 없다.

(ii) $-3\le x<2$일 때, $0\le x+3-(x-2)\le5$

$\therefore 0\le0\cdot x+5\le5$

즉, 부등식의 해는 모든 실수이다.

그런데 $-3\le x<2$이므로 $-3\le x<2$

(iii) $x\ge2$일 때, $0\le x+3+x-2\le5$

$-1\le2x\le4$ $\quad\therefore -\frac{1}{2}\le x\le2$

그런데 $x\ge2$이므로 $x=2$

(i), (ii), (iii)에서 $-3\le x\le2$

따라서 $a=-3$, $b=2$이므로 $a+b=-1$

답 ②

참고 $||x+3|+|x-2||\le5$에서 $-5\le|x+3|+|x-2|\le5$

그런데 $|x+3|\ge0$, $|x-2|\ge0$이므로 $|x+3|+|x-2|\ge0$

$\therefore 0\le|x+3|+|x-2|\le5$

0869

|전략| 삼차방정식을 인수분해한 다음 세 근이 모두 음수가 되도록 하는 조건을 찾아 k의 값의 범위를 구한다.

$f(x)=2x^3+5x^2+(k+3)x+k$라 하면

$f(-1)=-2+5-(k+3)+k=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 5 & k+3 & k \\ & & -2 & -3 & -k \\ \hline & 2 & 3 & k & 0 \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(2x^2+3x+k)$

즉, $f(x)=0$의 세 근이 모두 음수가 되려면 $2x^2+3x+k=0$의 두 근이 음수이어야 한다.
$2x^2+3x+k=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 음수이므로

(ⅰ) $D=9-8k\ge0$ $\quad\therefore k\le\frac{9}{8}$

(ⅱ) $\alpha+\beta=-\frac{3}{2}<0$

(ⅲ) $\alpha\beta=\frac{k}{2}>0$ $\quad\therefore k>0$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $0<k\le\frac{9}{8}$

답 $0<k\le\frac{9}{8}$

0870

|전략| 이차방정식의 $ax^2+bx+c=0$의 두 근의 합, 두 근의 곱의 부호를 주어진 조건에 맞도록 결정한다.

ㄱ. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로
$b^2-4ac>0$

ㄴ. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

(ⅰ) $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}<0$, $\frac{b}{a}>0$ $\quad\therefore ab>0$
a와 b의 부호가 서로 같다.

(ⅱ) $\alpha\beta=\frac{c}{a}<0$ $\quad\therefore ac<0$
a와 c의 부호가 서로 다르다.

$b<0$이면 $ab>0$에서 $a<0$
$a<0$이므로 $ac<0$에서 $c>0$
$\therefore c>0$

ㄷ. $a=-1$, $b=-1$, $c=2$이면
$-x^2-x+2=0$, $x^2+x-2=0$
$(x+2)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=1$
즉, 두 근이 서로 다른 부호이고, 음의 근의 절댓값이 양의 근보다 크지만 $a+b+c=(-1)+(-1)+2=0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

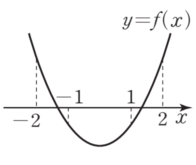
답 ②

0871

|전략| 주어진 방정식이 이차방정식이므로 $a>0$, $a<0$인 경우로 나누어 푼다.

$f(x)=ax^2-(a-1)x-4$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 한 근은 -2와 -1 사이에 있고, 다른 한 근은 1과 2 사이에 있다.

(ⅰ) $a>0$일 때, $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f(-2)=6a-6>0$에서 $a>1$

$f(-1)=2a-5<0$에서 $a<\frac{5}{2}$

$f(1)=-3<0$

$f(2)=2a-2>0$에서 $a>1$

따라서 a의 값의 범위는 $1<a<\frac{5}{2}$

(ⅱ) $a<0$일 때, $f(0)=-4$이므로 조건을 만족시키는 $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 없다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $1<a<\frac{5}{2}$

답 $1<a<\frac{5}{2}$

주의 주어진 방정식이 이차방정식이므로 $a\ne0$이다.

본책 140~157쪽

9 | 이차부등식과 연립이차부등식

STEP 1 개념 마스터 ❶

0872

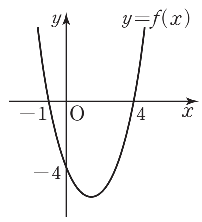
(1) $f(x)>0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $x<-2$ 또는 $x>1$

(2) $f(x)\le0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나거나 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $-2\le x\le1$

답 (1) $x<-2$ 또는 $x>1$ (2) $-2\le x\le1$

0873

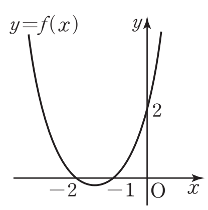
이차방정식 $x^2-3x-4=0$에서
$(x+1)(x-4)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$
$f(x)=x^2-3x-4$라 하면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 이차부등식 $f(x)<0$의 해는 $-1<x<4$



답 $-1<x<4$

0874

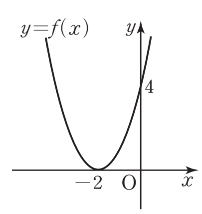
이차방정식 $x^2+3x+2=0$에서
$(x+2)(x+1)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$
$f(x)=x^2+3x+2$라 하면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 이차부등식 $f(x)\ge0$의 해는 $x\le-2$ 또는 $x\ge-1$



답 $x\le-2$ 또는 $x\ge-1$

0875

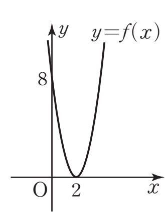
$f(x)=x^2+4x+4$라 하면
$f(x)=(x+2)^2$
따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 이차부등식 $f(x)>0$의 해는 $x\ne-2$인 모든 실수이다.



답 $x\ne-2$인 모든 실수

0876

$f(x)=2x^2-8x+8$이라 하면
$f(x)=2(x-2)^2$
따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 이차부등식 $f(x)\le0$의 해는 $x=2$이다.



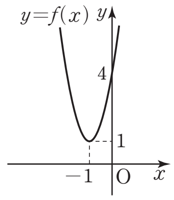
답 $x=2$

0877

$f(x)=3x^2+6x+4$라 하면

$f(x)=3(x+1)^2+1$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 이차부등식 $f(x)\geq 0$의 해는 모든 실수이다.



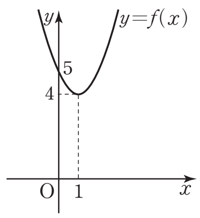
답 모든 실수

0878

$f(x)=x^2-2x+5$라 하면

$f(x)=(x-1)^2+4$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 이차부등식 $f(x)<0$의 해는 없다.



답 해는 없다.

0879

$x^2-3x-10>0$에서 $(x+2)(x-5)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>5$ 답 $x<-2$ 또는 $x>5$

0880

$3x^2-7x+2\leq 0$에서 $(3x-1)(x-2)\leq 0$

$\therefore \frac{1}{3}\leq x\leq 2$ 답 $\frac{1}{3}\leq x\leq 2$

0881

$10x^2-11x-6\geq 0$에서 $(5x+2)(2x-3)\geq 0$

$\therefore x\leq -\frac{2}{5}$ 또는 $x\geq \frac{3}{2}$ 답 $x\leq -\frac{2}{5}$ 또는 $x\geq \frac{3}{2}$

0882

$-2x^2+5x+3<0$에서 $2x^2-5x-3>0$

$(2x+1)(x-3)>0$ $\quad\therefore x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>3$

답 $x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>3$

0883

$x^2-6x+9=(x-3)^2\geq 0$

따라서 $x^2-6x+9>0$의 해는 $x\neq 3$인 모든 실수이다.

답 $x\neq 3$인 모든 실수

0884

$x^2+4x+6=(x+2)^2+2\geq 2$

따라서 $x^2+4x+6<0$의 해는 없다. 답 해는 없다.

0885

$4x^2+4x+1=(2x+1)^2\geq 0$

따라서 $4x^2+4x+1\leq 0$의 해는 $x=-\frac{1}{2}$이다. 답 $x=-\frac{1}{2}$

0886

$2x^2+2x+1=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\geq \frac{1}{2}$

따라서 $2x^2+2x+1\geq 0$의 해는 모든 실수이다. 답 모든 실수

0887

$(x+7)(x-1)<0$에서 $x^2+6x-7<0$ 답 $x^2+6x-7<0$

0888

$(x+3)(x-6)\geq 0$에서 $x^2-3x-18\geq 0$ 답 $x^2-3x-18\geq 0$

0889

모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=x^2+4x+k-1$의 그래프가 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $x^2+4x+k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-(k-1)<0$ $\quad\therefore k>5$ 답 $k>5$

0890

모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=-x^2+kx-k-3$의 그래프가 x축보다 항상 아래쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $-x^2+kx-k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2+4(-k-3)<0$, $k^2-4k-12<0$

$(k+2)(k-6)<0$ $\quad\therefore -2<k<6$ 답 $-2<k<6$

참고 $-x^2+kx-k-3<0$에서 $x^2-kx+k+3>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-kx+k+3>0$이 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구해도 된다.

STEP 2 유형 마스터 ❶

0891

| 전략 | 부등식 $f(x)\geq g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프와 만나거나 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다.

$ax^2+(b-m)x+c-n\geq 0$에서 $ax^2+bx+c\geq mx+n$

따라서 주어진 이차부등식의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$과 만나거나 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $x\leq -6$ 또는 $x\geq 2$ 답 ④

0892

이차부등식 $f(x)\leq 0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나거나 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $-3\leq x\leq 2$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=2$이므로 $\alpha\beta=-6$ 답 -6

0893

$f(x)g(x)<0$에서 $f(x)>0$, $g(x)<0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)>0$

(i) $f(x)>0$, $g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$x<-2$ 또는 $x>4$

(ii) $f(x)<0$, $g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$-2<x<0$

(i), (ii)에서 $x<-2$ 또는 $-2<x<0$ 또는 $x>4$

답 $x<-2$ 또는 $-2<x<0$ 또는 $x>4$

0894

| 전략 | $ax^2+bx+c=0\,(a>0)$이 서로 다른 두 실근 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$를 가질 때, $ax^2+bx+c>0$의 해는 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$이다.

이차방정식 $x^2-2x-5=0$의 해는 $x=1\pm\sqrt{6}$이므로 이차부등식

$x^2-2x-5>0$의 해는 $x<1-\sqrt{6}$ 또는 $x>1+\sqrt{6}$

따라서 $\alpha=1-\sqrt{6}$, $\beta=1+\sqrt{6}$이므로

$\alpha-\beta=-2\sqrt{6}$

답 $-2\sqrt{6}$

0895

$(x+2)(x-1)<4x+16$에서 $x^2+x-2<4x+16$

$x^2-3x-18<0$, $(x+3)(x-6)<0$ $\quad\therefore -3<x<6$

따라서 정수 x는 $-2, -1, 0, 1, \cdots, 5$의 8개이다.

답 8

0896

| 전략 | 각 부등식의 좌변을 $a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한다. 이때, x^2의 계수가 음수이면 부등식의 양변에 -1을 곱한 후 변형한다.

ㄱ. $x^2-8x+16=(x-4)^2\geq 0$

즉, $x^2-8x+16\leq 0$의 해는 $x=4$이다.

ㄴ. $x^2+2x+3=(x+1)^2+2\geq 2$

즉, $x^2+2x+3>0$의 해는 모든 실수이다.

ㄷ. $9x^2+6x+1=(3x+1)^2\geq 0$

즉, $9x^2+6x+1<0$의 해는 없다.

ㄹ. $-3x^2+2x-3>0$에서 $3x^2-2x+3<0$

그런데 $3x^2-2x+3=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{3}\geq\frac{8}{3}$이므로

$3x^2-2x+3<0$, 즉 $-3x^2+2x-3>0$의 해는 없다.

따라서 해가 없는 부등식은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ⑤

다른 풀이 ㄱ. 이차방정식 $x^2-8x+16=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-1\cdot 16=0$

이므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2-8x+16\geq 0$

즉, $x^2-8x+16\leq 0$의 해는 $x=4$이다.

ㄴ. 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-1\cdot 3=-2<0$

이므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2x+3>0$

즉, $x^2+2x+3>0$의 해는 모든 실수이다.

ㄷ. 이차방정식 $9x^2+6x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-9\cdot 1=0$

이므로 모든 실수 x에 대하여 $9x^2+6x+1\geq 0$

즉, $9x^2+6x+1<0$의 해는 없다.

ㄹ. $-3x^2+2x-3>0$에서 $3x^2-2x+3<0$

이차방정식 $3x^2-2x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-3\cdot 3=-8<0$

이므로 모든 실수 x에 대하여 $3x^2-2x+3>0$

즉, $-3x^2+2x-3>0$의 해는 없다.

0897

$x^2+2x-24\leq 0$에서 $(x+6)(x-4)\leq 0$ $\quad\therefore -6\leq x\leq 4$

① $|x-2|\leq 3$에서 $-3\leq x-2\leq 3$ $\quad\therefore -1\leq x\leq 5$

② $|x-1|\leq 4$에서 $-4\leq x-1\leq 4$ $\quad\therefore -3\leq x\leq 5$

③ $|x+1|\leq 4$에서 $-4\leq x+1\leq 4$ $\quad\therefore -5\leq x\leq 3$

④ $|x-1|\leq 5$에서 $-5\leq x-1\leq 5$ $\quad\therefore -4\leq x\leq 6$

⑤ $|x+1|\leq 5$에서 $-5\leq x+1\leq 5$ $\quad\therefore -6\leq x\leq 4$

따라서 주어진 이차부등식과 해가 같은 부등식은 ⑤이다.

답 ⑤

0898

$a<0$이므로 $ax^2-4a^2x-21a^3\geq 0$의 양변을 a로 나누면

$x^2-4ax-21a^2\leq 0$, $(x-7a)(x+3a)\leq 0$

이때, $7a<-3a$이므로 구하는 해는 $7a\leq x\leq -3a$

답 $7a\leq x\leq -3a$

0899

α, β가 이차방정식 $x^2-5ax+6a^2=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5a$, $\alpha\beta=6a^2$

$(\alpha-1)(\beta-1)\leq 0$에서 $\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1\leq 0$

$6a^2-5a+1\leq 0$, $(3a-1)(2a-1)\leq 0$

$\therefore \frac{1}{3}\leq a\leq\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{3}\leq a\leq\frac{1}{2}$

다른 풀이 $x^2-5ax+6a^2=0$에서 $(x-2a)(x-3a)=0$

$\therefore \alpha=2a$, $\beta=3a$ 또는 $\alpha=3a$, $\beta=2a$

이것을 $(\alpha-1)(\beta-1)\leq 0$에 대입하면

$(2a-1)(3a-1)\leq 0$ $\quad\therefore \frac{1}{3}\leq a\leq\frac{1}{2}$

0900

| 전략 | 해가 $\alpha<x<\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$임을 이용한다.

$x^2+ax+b<0$의 해가 $-1<x<3$이므로

$(x+1)(x-3)<0$

즉, $x^2-2x-3<0$에서 $a=-2$, $b=-3$

이것을 $ax^2+x-b>0$에 대입하면

$-2x^2+x+3>0$, $2x^2-x-3<0$

$(x+1)(2x-3)<0$ $\quad\therefore -1<x<\frac{3}{2}$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=\frac{3}{2}$이므로 $2\beta-\alpha=4$

답 4

0901

$ax^2+4x+b>0$의 해가 $-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$이므로

$a<0$이고 $a\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)>0$ … ❶

즉, $ax^2-ax-\frac{3}{4}a>0$에서 $-a=4$, $-\frac{3}{4}a=b$

$\therefore a=-4, b=3$ … ❷

$\therefore ab=-12$ … ❸

답 -12

채점 기준	비율
❶ 조건을 만족시키는 이차부등식을 세울 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0902

$ax^2+6x-4>0$의 해가 $1<x<b$이므로

$a<0$이고 $a(x-1)(x-b)>0$

즉, $ax^2-a(b+1)x+ab>0$에서 $-a(b+1)=6$, $ab=-4$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=2$

$\therefore a+b=0$

답 ③

다른 풀이 $ax^2+6x-4>0$의 해가 $1<x<b$이므로 1, b는 이차방정식 $ax^2+6x-4=0$의 두 근이다.

이 이차방정식에 $x=1$을 대입하면

$a+6-4=0 \qquad \therefore a=-2$

근과 계수의 관계에 의하여

$1\cdot b=\frac{-4}{a}=2 \qquad \therefore b=2$

$\therefore a+b=0$

0903

$ax^2+bx+c\leq0$의 해가 $x\leq2$ 또는 $x\geq5$이므로

$a<0$이고 $a(x-2)(x-5)\leq0$

즉, $ax^2-7ax+10a\leq0$에서 $b=-7a$, $c=10a$

$\therefore \frac{b}{c}=\frac{-7a}{10a}=-\frac{7}{10}$

답 $-\frac{7}{10}$

0904

$ax^2+bx+c>0$의 해가 $x<-2$ 또는 $x>1$이므로

$a>0$이고 $a(x+2)(x-1)>0$

즉, $ax^2+ax-2a>0$에서 $b=a$, $c=-2a$

이것을 $cx^2-bx+a>0$에 대입하면

$-2ax^2-ax+a>0$

이때, $-a<0$이므로 $2x^2+x-1<0$

$(x+1)(2x-1)<0 \qquad \therefore -1<x<\frac{1}{2}$

따라서 정수 x는 0의 1개이다.

답 1

0905

$ax^2+bx+c>0$의 해가 $-1<x<2$이므로

$a<0$이고 $a(x+1)(x-2)>0$

즉, $ax^2-ax-2a>0$에서 $b=-a$, $c=-2a$

이것을 $(b+c)x^2+(a-2c)x-2b>0$에 대입하면

$-3ax^2+5ax+2a>0$

이때, $-a>0$이므로 $3x^2-5x-2>0$

$(3x+1)(x-2)>0 \qquad \therefore x<-\frac{1}{3}$ 또는 $x>2$

답 $x<-\frac{1}{3}$ 또는 $x>2$

0906

| 전략 | $f(x)\leq0$의 해를 이용하여 $f(x)$를 작성한 후 x에 $2x+1$을 대입하여 $f(2x+1)\leq0$의 해를 구한다.

$f(x)\leq0$의 해가 $-1\leq x\leq3$이므로 양수 a에 대하여

$f(x)=a(x+1)(x-3)$이라 하면

$f(2x+1)=a(2x+1+1)(2x+1-3)$

$\qquad\quad=4a(x+1)(x-1)$

부등식 $f(2x+1)\leq0$, 즉 $4a(x+1)(x-1)\leq0$에서

$(x+1)(x-1)\leq0 \qquad \therefore -1\leq x\leq1$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=1$이므로 $\beta-\alpha=2$

답 2

다른 풀이 $f(x)\leq0$의 해가 $-1\leq x\leq3$이므로

$f(2x+1)\leq0$의 해는 $-1\leq2x+1\leq3$에서 $-1\leq x\leq1$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=1$이므로 $\beta-\alpha=2$

0907

$f(x)\geq0$의 해가 $-2\leq x\leq1$이므로 음수 a에 대하여

$f(x)=a(x+2)(x-1)$이라 하면

$f(2018-x)=a(2018-x+2)(2018-x-1)$

$\qquad\qquad\quad=a(x-2020)(x-2017)$

부등식 $f(2018-x)<0$, 즉 $a(x-2020)(x-2017)<0$에서

$(x-2020)(x-2017)>0 \qquad \therefore x<2017$ 또는 $x>2020$

따라서 $f(2018-x)<0$을 만족시키는 x의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

답 ③

다른 풀이 $f(x)\geq0$의 해가 $-2\leq x\leq1$이므로

$f(x)<0$의 해는 $x<-2$ 또는 $x>1$

$f(2018-x)<0$의 해는 $2018-x<-2$ 또는 $2018-x>1$에서

$x>2020$ 또는 $x<2017$

따라서 $f(2018-x)<0$을 만족시키는 x의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

0908

$f(x)<0$의 해가 $x<-2$ 또는 $x>4$이므로 음수 a에 대하여

$f(x)=a(x+2)(x-4)$라 하면

$f(-2x)=a(-2x+2)(-2x-4)$

$\qquad\quad=4a(x-1)(x+2)$

부등식 $f(-2x)\geq 0$, 즉 $4a(x-1)(x+2)\geq 0$에서
$(x-1)(x+2)\leq 0 \qquad \therefore -2\leq x\leq 1$
따라서 $f(-2x)\geq 0$을 만족시키는 정수 x의 값은 -2, -1, 0, 1로 그 합은 -2이다. 답 -2

다른 풀이 $f(x)<0$의 해가 $x<-2$ 또는 $x>4$이므로
$f(x)\geq 0$의 해는 $-2\leq x\leq 4$
$f(-2x)\geq 0$의 해는 $-2\leq -2x\leq 4$에서 $-2\leq x\leq 1$
따라서 $f(-2x)\geq 0$을 만족시키는 정수 x의 값은 -2, -1, 0, 1로 그 합은 -2이다.

0909
$ax^2+bx+c<0$의 해가 $-1<x<2$이므로
$a>0$이고 $ax^2+bx+c=a(x+1)(x-2)$라 하면
$$a(x-2)^2+b(x-2)+c=a(x-2+1)(x-2-2)$$
$$=a(x-1)(x-4)$$
부등식 $a(x-2)^2+b(x-2)+c<0$, 즉 $a(x-1)(x-4)<0$에서
$(x-1)(x-4)<0 \qquad \therefore 1<x<4$ 답 $1<x<4$

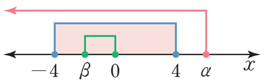
다른 풀이 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면
부등식 $a(x-2)^2+b(x-2)+c<0$은 $f(x-2)<0$이다.
$f(x)<0$의 해가 $-1<x<2$이므로
$f(x-2)<0$의 해는 $-1<x-2<2$에서 $1<x<4$

0910
| 전략 | 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 만드는 -4를 기준으로 $x<-4$일 때와 $x\geq 4$일 때로 나누어 절댓값 기호를 푼다.

$x^2-2x<|x+4|$에서
(i) $x<-4$일 때, $x^2-2x<-(x+4)$
$x^2-x+4<0$
그런데 $x^2-x+4=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\geq\frac{15}{4}$이므로 해는 없다.
(ii) $x\geq -4$일 때, $x^2-2x<x+4$
$x^2-3x-4<0$, $(x+1)(x-4)<0$
$\therefore -1<x<4$
그런데 $x\geq -4$이므로 $-1<x<4$
(i), (ii)에서 $-1<x<4$
따라서 $\alpha=-1$, $\beta=4$이므로 $3\alpha+\beta=1$ 답 ①

0911
$x^2-5|x|-6<0$에서
(i) $x<0$일 때, $x^2+5x-6<0$
$(x+6)(x-1)<0 \qquad \therefore -6<x<1$
그런데 $x<0$이므로 $-6<x<0$
(ii) $x\geq 0$일 때, $x^2-5x-6<0$
$(x+1)(x-6)<0 \qquad \therefore -1<x<6$
그런데 $x\geq 0$이므로 $0\leq x<6$
(i), (ii)에서 $-6<x<6$
따라서 정수 x는 -5, -4, $\cdots$, 5의 11개이다. 답 ①

0912
$x^2-4|x|\leq 0$에서
(i) $x<0$일 때, $x^2+4x\leq 0$
$x(x+4)\leq 0 \qquad \therefore -4\leq x\leq 0$
그런데 $x<0$이므로 $-4\leq x<0$
(ii) $x\geq 0$일 때, $x^2-4x\leq 0$
$x(x-4)\leq 0 \qquad \therefore 0\leq x\leq 4$
그런데 $x\geq 0$이므로 $0\leq x\leq 4$
(i), (ii)에서 $-4\leq x\leq 4$
주어진 조건이 성립하려면 오른쪽 그림에서



$\alpha\geq 4$, $-4\leq\beta<0$
따라서 $\alpha+\beta$의 최솟값은 $4+(-4)=0$ 답 ②

0913
| 전략 | 정수 n에 대하여 $[x]=n$일 때, $n\leq x<n+1$이다.

$2[x]^2-[x]-1<0$에서 $(2[x]+1)([x]-1)<0$
$\therefore -\frac{1}{2}<[x]<1$
$[x]$는 정수이므로 $[x]=0$
$\therefore 0\leq x<1$
따라서 $\alpha=0$, $\beta=1$이므로 $\alpha+\beta=1$ 답 1

0914
$[x]^2-[x]-6<0$에서 $([x]+2)([x]-3)<0$
$\therefore -2<[x]<3$
$[x]$는 정수이므로 $[x]=-1$, 0, 1, 2
$[x]=-1$에서 $-1\leq x<0$
$[x]=0$에서 $0\leq x<1$
$[x]=1$에서 $1\leq x<2$
$[x]=2$에서 $2\leq x<3$
따라서 구하는 부등식의 해는 $-1\leq x<3$ 답 $-1\leq x<3$

0915
| 전략 | 이차부등식 $ax^2+bx+c\leq 0$이 오직 한 개의 실근을 가지려면 $a>0$, $D=b^2-4ac=0$이어야 한다.

이차부등식 $x^2-(k+1)x+2k+2\leq 0$의 해가 오직 하나이므로
이차방정식 $x^2-(k+1)x+2k+2=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(k+1)^2-4(2k+2)=0$
$k^2-6k-7=0$, $(k+1)(k-7)=0$
$\therefore k=-1$ 또는 $k=7$
따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $-1+7=6$ 답 6

0916
이차부등식 $ax^2-2(a+4)x+2a+2\geq 0$의 해가 하나뿐이므로
$a<0$ ⋯ ❶

이차방정식 $ax^2-2(a+4)x+2a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+4)^2-a(2a+2)=0$

$-a^2+6a+16=0$, $a^2-6a-16=0$

$(a+2)(a-8)=0$ $\quad\therefore a=-2$ ($\because a<0$) ⋯ ❷

이것을 주어진 부등식에 대입하면

$-2x^2-4x-2\geq0$, $x^2+2x+1\leq0$

$(x+1)^2\leq0$ $\quad\therefore x=-1$

$\therefore b=-1$ ⋯ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ a의 부호를 알 수 있다.	20 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30 %

0917

| 전략 | 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$이 해를 가지려면 $a<0$일 때는 이차부등식은 항상 해를 갖고, $a>0$일 때는 $D=b^2-4ac>0$이어야 한다.

$(a-3)x^2-4x+a<0$에서

(i) $a-3>0$, 즉 $a>3$일 때

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $(a-3)x^2-4x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(a-3)\cdot a>0$, $a^2-3a-4<0$

$(a+1)(a-4)<0$ $\quad\therefore -1<a<4$

그런데 $a>3$이므로 $3<a<4$

(ii) $a-3<0$, 즉 $a<3$일 때

이차함수 $y=(a-3)x^2-4x+a$의 그래프는 위로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(i), (ii)에서 $a<3$ 또는 $3<a<4$

따라서 해를 갖도록 하는 정수 a의 값이 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

참고 $a=3$이면 주어진 부등식이 이차부등식이 아니므로 $a\neq3$

0918

이차부등식 $-3x^2+2ax+a>0$, 즉 $3x^2-2ax-a<0$이 해를 가지려면 이차방정식 $3x^2-2ax-a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-3\cdot(-a)>0$, $a(a+3)>0$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>0$

따라서 자연수 a의 최솟값은 1이다. 답 ①

0919

$(a-1)x^2+2(a-1)x-9>0$에서

(i) $a-1>0$, 즉 $a>1$일 때

이차함수 $y=(a-1)x^2+2(a-1)x-9$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a-1=0$, 즉 $a=1$일 때

$0\cdot x^2+0\cdot x-9=-9<0$이므로 부등식의 해는 없다.

(iii) $a-1<0$, 즉 $a<1$일 때

부등식의 해가 존재하려면 이차방정식 $(a-1)x^2+2(a-1)x-9=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-(a-1)\cdot(-9)>0$, $a^2+7a-8>0$

$(a-1)(a+8)>0$ $\quad\therefore a<-8$ 또는 $a>1$

그런데 $a<1$이므로 $a<-8$

(i), (ii), (iii)에서 $a<-8$ 또는 $a>1$ 답 ④

0920

| 전략 | 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립하려면 $a>0$, $D=b^2-4ac<0$이어야 한다.

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k+2)x-k>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+2(k+2)x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+2)^2+k<0$, $k^2+5k+4<0$

$(k+4)(k+1)<0$ $\quad\therefore -4<k<-1$ 답 $-4<k<-1$

0921

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{x^2-(k-1)x+k+2}$가 실수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-(k-1)x+k+2\geq0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-(k-1)x+k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k-1)^2-4(k+2)\leq0$, $k^2-6k-7\leq0$

$(k+1)(k-7)\leq0$ $\quad\therefore -1\leq k\leq7$

따라서 정수 k의 최댓값은 7이다. 답 7

0922

이차부등식 $a(x^2-2x+2)>2x$, 즉 $ax^2-2(a+1)x+2a>0$의 해가 모든 실수이므로 $a>0$

이차방정식 $ax^2-2(a+1)x+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+1)^2-2a^2<0$, $a^2-2a-1>0$

이차방정식 $a^2-2a-1=0$의 해는 $a=1\pm\sqrt{2}$이므로

이차부등식 $a^2-2a-1>0$의 해는

$a<1-\sqrt{2}$ 또는 $a>1+\sqrt{2}$

그런데 $a>0$이므로 $a>1+\sqrt{2}$ $\quad 1<\sqrt{2}<2$에서 $2<1+\sqrt{2}<3$

따라서 정수 a의 최솟값은 3이다. 답 ②

0923

$(k+3)x^2+2(k+3)x+2>0$에서

(i) $k=-3$일 때, $0\cdot x^2+0\cdot x+2=2>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립한다. ⋯ ❶

(ii) $k\neq-3$일 때, 모두 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면

$k+3>0$ $\quad\therefore k>-3$

9 이차부등식과 연립이차부등식

이차방정식 $(k+3)x^2+2(k+3)x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+3)^2-2(k+3)<0$, $k^2+4k+3<0$

$(k+3)(k+1)<0$ $\quad\therefore -3<k<-1$

그런데 $k>-3$이므로 $-3<k<-1$ … ②

(i), (ii)에서 $-3\le k<-1$ … ③

따라서 정수 k는 -3, -2로 그 합은 -5이다. … ④

답 -5

채점 기준	비율
① $k=-3$일 때, 이차부등식이 항상 성립함을 알 수 있다.	30 %
② $k\ne-3$일 때, 이차부등식이 항상 성립할 조건을 구할 수 있다.	40 %
③ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
④ 정수 k의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

0924

| 전략 | 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 해를 갖지 않으려면 $a<0$, $D=b^2-4ac\le0$이어야 한다.

$-x^2+2(k+3)x+4(k+3)>0$에서

$x^2-2(k+3)x-4(k+3)<0$

이 이차부등식의 해가 없으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-2(k+3)x-4(k+3)\ge0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2(k+3)x-4(k+3)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+3)^2+4(k+3)\le0$, $(k+7)(k+3)\le0$

$\therefore -7\le k\le-3$

따라서 $M=-3$, $m=-7$이므로 $M-m=4$

답 ②

0925

이차부등식 $x^2-2ax+a+6\le0$의 해가 없으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-2ax+a+6>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2ax+a+6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(a+6)<0$, $a^2-a-6<0$

$(a+2)(a-3)<0$ $\quad\therefore -2<a<3$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1, 2의 4개이다.

답 ④

0926

$kx^2+2kx+3<(x+1)^2$에서

$(k-1)x^2+2(k-1)x+2<0$

이 이차부등식의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $(k-1)x^2+2(k-1)x+2\ge0$이 성립해야 하므로

$k-1>0$ $\quad\therefore k>1$

이차방정식 $(k-1)x^2+2(k-1)x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-2(k-1)\le0$, $(k-1)(k-3)\le0$

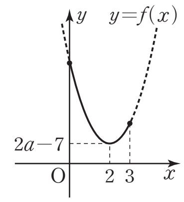
$\therefore 1\le k\le3$

그런데 $k>1$이므로 $1<k\le3$

답 ③

0927

| 전략 | $p\le x\le q$에서 이차부등식 $f(x)>0$이 항상 성립하려면 $p\le x\le q$에서 $(f(x)$의 최솟값$)>0$이어야 한다.



$f(x)=x^2-4x+2a-3$이라 하면

$f(x)=(x-2)^2+2a-7$

$0\le x\le3$에서 $f(x)>0$이어야 하므로

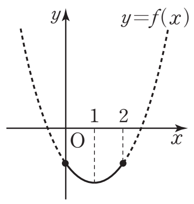
$y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

이때, 최솟값은 $f(2)$이므로 $f(2)>0$

즉, $2a-7>0$ $\quad\therefore a>\frac{7}{2}$

답 $a>\frac{7}{2}$

0928



$f(x)=2x^2-4x+a^2-3a+2$라 하면

$f(x)=2(x-1)^2+a^2-3a$

$0\le x\le2$에서 $f(x)<0$이어야 하므로

$y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

이때, 최댓값은 $f(0)$ 또는 $f(2)$이므로 $f(0)<0$

즉, $a^2-3a+2<0$에서 $(a-1)(a-2)<0$

$\therefore 1<a<2$

답 $1<a<2$

참고 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $f(0)=f(2)$

0929

| 전략 | 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 이차부등식 $f(x)>g(x)$의 해와 같다.

$x^2-ax-b>-2x+3$에서 $x^2+(-a+2)x-b-3>0$ …… ㉠

해가 $x<-5$ 또는 $x>1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+5)(x-1)>0$ $\quad\therefore x^2+4x-5>0$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 일치해야 하므로

$-a+2=4$, $-b-3=-5$ $\quad\therefore a=-2$, $b=2$

$\therefore a+2b=2$

답 ④

0930

$3x^2-2x-7<x^2+3x+5$에서 $2x^2-5x-12<0$

$(2x+3)(x-4)<0$ $\quad\therefore -\frac{3}{2}<x<4$

답 $-\frac{3}{2}<x<4$

0931

$x^2-2x<a$에서 $x^2-2x-a<0$ …… ㉠

해가 $-1<x<b$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-b)<0$ $\quad\therefore x^2+(-b+1)x-b<0$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 일치해야 하므로

$-2=-b+1$, $-a=-b$ $\quad\therefore a=3$, $b=3$

$\therefore ab=9$

답 ③

0932

$mx^2+nx+mn+2>0$ …… ㉠

이 이차부등식의 해가 $-1<x<3$이므로 $m<0$

해가 $-1<x<3$이고 x^2의 계수가 $m(m<0)$인 이차부등식은

$m(x+1)(x-3)>0 \quad \therefore mx^2-2mx-3m>0$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 일치해야 하므로

$n=-2m,\ mn+2=-3m$

$n=-2m$을 $mn+2=-3m$에 대입하면

$-2m^2+2=-3m,\ 2m^2-3m-2=0$

$(2m+1)(m-2)=0 \quad \therefore m=-\frac{1}{2}\ (\because m<0)$

$\therefore n=-2m=-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

$\therefore m-n=-\frac{3}{2}$ 답 $-\frac{3}{2}$

0933

| 전략 | 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 항상 위쪽에 있으면 이차부등식 $f(x)>g(x)$가 항상 성립한다.

$x^2-2ax+1>2x+a$에서 $x^2-2(a+1)x-a+1>0$

이 이차부등식이 항상 성립해야 하므로 이차방정식

$x^2-2(a+1)x-a+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+1)^2-(-a+1)<0,\ a^2+3a<0$

$a(a+3)<0 \quad \therefore -3<a<0$

따라서 정수 a의 최댓값은 -1이다. 답 -1

0934

$-2x^2+4x-5<2ax+3$에서 $2x^2+2(a-2)x+8>0$

$\therefore x^2+(a-2)x+4>0$ … ❶

이 이차부등식이 항상 성립해야 하므로 이차방정식

$x^2+(a-2)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-2)^2-16<0,\ a^2-4a-12<0$

$(a+2)(a-6)<0 \quad \therefore -2<a<6$ … ❷

따라서 $\alpha=-2,\ \beta=6$이므로 $\beta-\alpha=8$ … ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 만족시키는 이차부등식을 세울 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ $\beta-\alpha$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0935

$ax^2+6x+2a-3<2x+a$에서 $ax^2+4x+a-3<0$

이 이차부등식이 항상 성립해야 하므로 $a<0$

이차방정식 $ax^2+4x+a-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-a(a-3)<0,\ a^2-3a-4>0$

$(a+1)(a-4)>0 \quad \therefore a<-1$ 또는 $a>4$

그런데 $a<0$이므로 $a<-1$ 답 $a<-1$

0936

$kx^2+kx-1<x^2+x+1$에서 $(k-1)x^2+(k-1)x-2<0$

이 부등식이 항상 성립해야 하므로

(i) $k=1$일 때, $0\cdot x^2+0\cdot x-2=-2<0$이므로 위의 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $k\neq1$일 때, 위의 부등식이 항상 성립하려면

$k-1<0 \quad \therefore k<1$

이차방정식 $(k-1)x^2+(k-1)x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k-1)^2+8(k-1)<0,\ (k+7)(k-1)<0$

$\therefore -7<k<1$

그런데 $k<1$이므로 $-7<k<1$

(i), (ii)에서 $-7<k\le1$

따라서 정수 k는 $-6, -5, \cdots, 1$의 8개이다. 답 ④

0937

| 전략 | 주어진 식을 y에 대한 이차방정식으로 정리한 후 판별식 $D\ge0$임을 이용한다.

주어진 식을 y에 대한 내림차순으로 정리하면

$2y^2-2xy+x^2-4=0$

이 식을 y에 대한 이차방정식으로 보면 이 방정식을 만족시키는 실수 y가 존재해야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-x)^2-2(x^2-4)\ge0,\ x^2-8\le0$

$(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})\le0 \quad \therefore -2\sqrt{2}\le x\le2\sqrt{2}$

따라서 x의 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다. 답 ⑤

0938

| 전략 | (실수)$^2\ge0$임을 이용하여 x의 값의 범위를 구한 후 $2x+2y^2$을 x에 대한 식으로 나타내어 최솟값을 구한다.

$x^2+2y^2=4$에서 $2y^2=4-x^2$

이때, y는 실수이므로 $4-x^2\ge0$

$x^2-4\le0,\ (x+2)(x-2)\le0$

$\therefore -2\le x\le2$

$2y^2=4-x^2$을 $2x+2y^2$에 대입하면

$2x+2y^2=2x+(4-x^2)=-x^2+2x+4$

$=-(x-1)^2+5$

이때, $-2\le x\le2$이므로 $x=-2$일 때 최솟값 -4를 갖는다.

답 -4

0939

| 전략 | 텃밭의 가로의 길이를 x m라 하고 텃밭의 넓이가 20 m^2 이상이 되도록 x에 대한 이차부등식을 세운다.

텃밭의 둘레의 길이가 18 m이므로 가로의 길이를 x m라 하면 세로의 길이는

$\frac{18-2x}{2}=9-x$ (m)

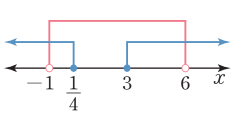
9 이차부등식과 연립이차부등식

이때, 텃밭의 넓이가 20 m^2 이상이 되어야 하므로
$x(9-x)\geq 20$, $x^2-9x+20\leq 0$
$(x-4)(x-5)\leq 0$ $\quad\therefore 4\leq x\leq 5$
따라서 가로의 길이의 최댓값과 최솟값의 차는 $5-4=1$ (m) 답 ①

0940
t초 후의 수면으로부터의 높이가 $(-5t^2+6t+10)$ m이므로 수면에서 2 m 이상의 높이에 있으려면
$-5t^2+6t+10\geq 2$에서 $5t^2-6t-8\leq 0$
$(5t+4)(t-2)\leq 0$ $\quad\therefore -\frac{4}{5}\leq t\leq 2$
그런데 $t\geq 0$이므로 $0\leq t\leq 2$
따라서 다이빙 선수가 2 m 이상의 높이에 있는 시간은 2초 동안이다.
답 2초

0941
가격을 올리기 전의 상품의 가격을 A원, 판매량을 B개라 하면
x % 오른 가격은 $A\left(1+\frac{x}{100}\right)$원,
$\frac{2x}{3}$ % 감소한 판매량은 $B\left(1-\frac{2x}{300}\right)$개이므로
$A\left(1+\frac{x}{100}\right)\cdot B\left(1-\frac{2x}{300}\right)\geq AB$
$(100+x)(300-2x)\geq 30000$, $x^2-50x\leq 0$
$x(x-50)\leq 0$ $\quad\therefore 0\leq x\leq 50$
따라서 x의 최댓값은 50이다. 답 ⑤

STEP 1 개념 마스터 ❷

0942
(1) $x^2-5x-6<0$에서 $(x+1)(x-6)<0$
$\therefore -1<x<6$ …… ㉠
(2) $4x^2-13x+3\geq 0$에서 $(4x-1)(x-3)\geq 0$
$\therefore x\leq\frac{1}{4}$ 또는 $x\geq 3$ …… ㉡
(3)


(4) (3)에서 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-1<x\leq\frac{1}{4}$ 또는 $3\leq x<6$
답 풀이 참조

0943
$2x-1\geq x$에서 $x\geq 1$ …… ㉠
$x^2-x-6>0$에서 $(x+2)(x-3)>0$
$\therefore x<-2$ 또는 $x>3$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $x>3$ 답 $x>3$

0944
$x+1\geq 4x-3$에서 $x\leq\frac{4}{3}$ …… ㉠
$2x^2-3x-9<0$에서 $(2x+3)(x-3)<0$
$\therefore -\frac{3}{2}<x<3$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-\frac{3}{2}<x\leq\frac{4}{3}$ 답 $-\frac{3}{2}<x\leq\frac{4}{3}$

0945
$x^2-4x\geq 0$에서 $x(x-4)\geq 0$
$\therefore x\leq 0$ 또는 $x\geq 4$ …… ㉠
$x^2+3x-10<0$에서 $(x+5)(x-2)<0$
$\therefore -5<x<2$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-5<x\leq 0$ 답 $-5<x\leq 0$

0946
$x^2-2x-8<0$에서 $(x+2)(x-4)<0$
$\therefore -2<x<4$ …… ㉠
$2x^2-x-6\geq 0$에서 $(2x+3)(x-2)\geq 0$
$\therefore x\leq-\frac{3}{2}$ 또는 $x\geq 2$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-2<x\leq-\frac{3}{2}$ 또는 $2\leq x<4$
답 $-2<x\leq-\frac{3}{2}$ 또는 $2\leq x<4$

0947
$-9<x^2+7x+1$에서 $x^2+7x+10>0$
$(x+2)(x+5)>0$ $\quad\therefore x<-5$ 또는 $x>-2$ …… ㉠
$x^2+7x+1<9$에서 $x^2+7x-8<0$
$(x+8)(x-1)<0$ $\quad\therefore -8<x<1$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-8<x<-5$ 또는 $-2<x<1$
답 $-8<x<-5$ 또는 $-2<x<1$

0948
$-2x-7<x^2-15$에서 $x^2+2x-8>0$
$(x+4)(x-2)>0$ $\quad\therefore x<-4$ 또는 $x>2$ …… ㉠
$x^2-15\leq-2x$에서 $x^2+2x-15\leq 0$
$(x+5)(x-3)\leq 0$ $\quad\therefore -5\leq x\leq 3$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-5\leq x<-4$ 또는 $2<x\leq 3$
답 $-5\leq x<-4$ 또는 $2<x\leq 3$

STEP 2 유형 마스터 ❷

0949
| 전략 | 각 이차부등식의 해를 구하여 공통부분을 찾는다.
$x^2-3x-4\geq 0$에서 $(x+1)(x-4)\geq 0$
$\therefore x\leq -1$ 또는 $x\geq 4$ …… ㉠

$3x^2-5x-12<0$에서 $(3x+4)(x-3)<0$

$\therefore -\frac{4}{3}<x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-\frac{4}{3}<x\le-1$

따라서 $a=-\frac{4}{3}$, $b=-1$이므로 $ab=\frac{4}{3}$ 답 ④

0950

$x^2-5x\ge-4$에서 $x^2-5x+4\ge0$

$(x-1)(x-4)\ge0$ $\quad\therefore x\le1$ 또는 $x\ge4$ …… ㉠

$-x^2+7x>10$에서 $x^2-7x+10<0$

$(x-2)(x-5)<0$ $\quad\therefore 2<x<5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $4\le x<5$ 답 $4\le x<5$

0951

$6x-9\ge-x^2+x+5$에서 $x^2+5x-14\ge0$

$(x+7)(x-2)\ge0$ $\quad\therefore x\le-7$ 또는 $x\ge2$ …… ㉠

$3x^2-4x+3<x^2+7x-2$에서 $2x^2-11x+5<0$

$(2x-1)(x-5)<0$ $\quad\therefore \frac{1}{2}<x<5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2\le x<5$

따라서 정수 x는 2, 3, 4의 3개이다. 답 ③

0952

$x^2+7x+2<3x^2+2x+5$에서 $2x^2-5x+3>0$

$(x-1)(2x-3)>0$ $\quad\therefore x<1$ 또는 $x>\frac{3}{2}$ …… ㉠

$3x^2+2x+5\le2x^2+x+7$에서 $x^2+x-2\le0$

$(x+2)(x-1)\le0$ $\quad\therefore -2\le x\le1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-2\le x<1$

따라서 정수 x는 -2, -1, 0으로 그 합은 -3이다. 답 ①

0953

$x^2-4\le0$에서 $(x+2)(x-2)\le0$

$\therefore -2\le x\le2$ …… ㉠

$x^2+5x-6\ge0$에서 $(x+6)(x-1)\ge0$

$\therefore x\le-6$ 또는 $x\ge1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $1\le x\le2$ … ❶

이때, 이차부등식 $ax^2+3bx-4\ge0$의 해가 $1\le x\le2$이므로

$a<0$이고 $a(x-1)(x-2)\ge0$ … ❷

즉, $ax^2-3ax+2a\ge0$에서 $3b=-3a$, $-4=2a$

따라서 $a=-2$, $b=2$이므로 $2a+b=-2$ … ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ 주어진 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ 조건을 만족시키는 이차부등식을 세울 수 있다.	40 %
❸ $2a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0954

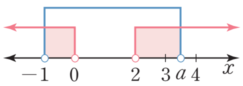
| 전략 | 각 이차부등식을 풀어 해의 공통부분에 속하는 정수가 3뿐이 되도록 생각해 본다.

$x^2+(1-a)x-a<0$에서 $(x+1)(x-a)<0$ …… ㉠

$x^2-2x>0$에서 $x(x-2)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분에 속하는 정수가 3뿐이므로 오른쪽 그림에서



$3<a\le4$

답 $3<a\le4$

0955

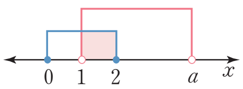
$x^2-2x\le0$에서 $x(x-2)\le0$

$\therefore 0\le x\le2$ …… ㉠

$x^2-(a+1)x+a<0$에서 $(x-1)(x-a)<0$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 $1<x\le2$이므로

오른쪽 그림에서 $a>2$



답 $a>2$

0956

$2x^2+1<3x$에서 $2x^2-3x+1<0$

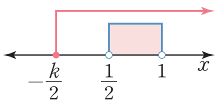
$(2x-1)(x-1)<0$ $\quad\therefore \frac{1}{2}<x<1$ …… ㉠

$3x\le5x+k$에서 $2x+k\ge0$

$\therefore x\ge-\frac{k}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 $\frac{1}{2}<x<1$이므로

오른쪽 그림에서 $-\frac{k}{2}\le\frac{1}{2}$



$\therefore k\ge-1$ 답 ⑤

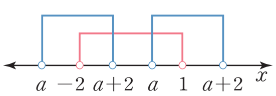
0957

$x^2+x-2<0$에서 $(x+2)(x-1)<0$

$\therefore -2<x<1$ …… ㉠

$(x-a)(x-a-2)<0$에서 $a<x<a+2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 존재하려면 오른쪽 그림에서



$-2<a+2<1$ 또는 $-2<a<1$

$\therefore -4<a<1$

따라서 정수 a는 -3, -2, -1, 0의 4개이다. 답 ③

0958

$2x^2+3x>0$에서 $x(2x+3)>0$

$\therefore x<-\frac{3}{2}$ 또는 $x>0$

$3x^2-(3a-4)x-a+1<0$에서 $(3x+1)(x-a+1)<0$

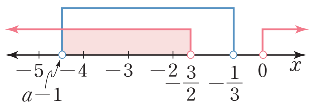
9 이차부등식과 연립이차부등식

(i) $a-1<-\frac{1}{3}$, 즉 $a<\frac{2}{3}$일 때

오른쪽 그림에서

$-5\le a-1<-4$

$\therefore\ -4\le a<-3$



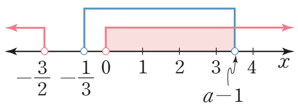
(ii) $a-1=-\frac{1}{3}$, 즉 $a=\frac{2}{3}$일 때, $(3x+1)^2<0$이 되어 해가 존재하지 않으므로 $a\neq\frac{2}{3}$

(iii) $a-1>-\frac{1}{3}$, 즉 $a>\frac{2}{3}$일 때

오른쪽 그림에서

$3<a-1\le 4$

$\therefore\ 4<a\le 5$



(i), (ii), (iii)에서 $-4\le a<-3$ 또는 $4<a\le 5$

답 $-4\le a<-3$ 또는 $4<a\le 5$

0959

| 전략 | 각 부등식을 풀어 해의 공통부분을 구한다.
이때, 양수 k에 대하여 $|f(x)|<k$는 $-k<f(x)<k$임을 이용한다.

$|x-2|<4$에서 $-4<x-2<4$

$\therefore\ -2<x<6$ ...... ㉠

$-x^2+x+12<0$에서 $x^2-x-12>0$

$(x+3)(x-4)>0 \qquad \therefore\ x<-3$ 또는 $x>4$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $4<x<6$ 답 ⑤

0960

$|x^2-3x-4|<6$에서 $-6<x^2-3x-4<6$

$-6<x^2-3x-4$에서 $x^2-3x+2>0$

$(x-1)(x-2)>0 \qquad \therefore\ x<1$ 또는 $x>2$ ...... ㉠

$x^2-3x-4<6$에서 $x^2-3x-10<0$

$(x+2)(x-5)<0 \qquad \therefore\ -2<x<5$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-2<x<1$ 또는 $2<x<5$

따라서 정수 x는 $-1, 0, 3, 4$로 그 합은 6이다. 답 6

0961

$x^2+8x+7>0$에서 $(x+7)(x+1)>0$

$\therefore\ x<-7$ 또는 $x>-1$ ...... ㉠

$x^2+|x|-6\le 0$에서

(i) $x<0$일 때, $x^2-x-6\le 0$

$(x+2)(x-3)\le 0 \qquad \therefore\ -2\le x\le 3$

그런데 $x<0$이므로 $-2\le x<0$

(ii) $x\ge 0$일 때, $x^2+x-6\le 0$

$(x+3)(x-2)\le 0 \qquad \therefore\ -3\le x\le 2$

그런데 $x\ge 0$이므로 $0\le x\le 2$

(i), (ii)에서 $-2\le x\le 2$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-1<x\le 2$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로 $a+b=1$ 답 ④

0962

| 전략 | 삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c이고, a가 가장 긴 변의 길이일 때, 둔각삼각형이면 $a^2>b^2+c^2$이다.

$x>0$이므로 세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $2x+1$

삼각형이 만들어질 조건에 의하여 (가장 긴 변의 길이)<(나머지 두 변의 길이의 합)

$2x+1<x+(2x-1) \qquad \therefore\ x>2$ ...... ㉠

둔각삼각형이려면 $x^2+(2x-1)^2<(2x+1)^2$

$x^2-8x<0$, $x(x-8)<0$

$\therefore\ 0<x<8$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2<x<8$

따라서 자연수 x는 3, 4, 5, 6, 7의 5개이다. 답 5

0963

보행로의 넓이는

$(10+2x)(6+2x)-10\cdot 6=4x^2+32x\ (\mathrm{m}^2)$

보행로의 넓이가 $80\ \mathrm{m}^2$ 이상 $192\ \mathrm{m}^2$ 이하이어야 하므로

$80\le 4x^2+32x\le 192 \qquad \therefore\ 20\le x^2+8x\le 48$

$20\le x^2+8x$에서 $x^2+8x-20\ge 0$

$(x+10)(x-2)\ge 0 \qquad \therefore\ x\le -10$ 또는 $x\ge 2$

그런데 $x>0$이므로 $x\ge 2$ ...... ㉠

$x^2+8x\le 48$에서 $x^2+8x-48\le 0$

$(x+12)(x-4)\le 0 \qquad \therefore\ -12\le x\le 4$

그런데 $x>0$이므로 $0<x\le 4$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2\le x\le 4$ 답 $2\le x\le 4$

0964

상품 A kg을 $100x$ km 운송하는 데 드는 비용이

자동차는 $A(x^2+2x+2)$만 원, 철도는 $A(x+14)$만 원,

선박은 $A\left(\frac{1}{2}x+16\right)$만 원이므로

$$\begin{cases} A(x+14)<A(x^2+2x+2) & \cdots\cdots ㉠ \\ A(x+14)<A\left(\frac{1}{2}x+16\right) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x^2+x-12>0$, $(x+4)(x-3)>0$

$\therefore\ x<-4$ 또는 $x>3$

그런데 $x>0$이므로 $x>3$ ...... ㉢

㉡에서 $x+14<\frac{1}{2}x+16 \qquad \therefore\ x<4$

그런데 $x>0$이므로 $0<x<4$ ...... ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $3<x<4$

따라서 구하는 운송 거리는 300 km 초과 400 km 미만이다. 답 ③

0965

| 전략 | 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 조건은 $D>0$, 허근을 가질 조건은 $D<0$이다.

이차방정식 $x^2+kx+1=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=k^2-4>0$, $(k+2)(k-2)>0$

$\therefore\ k<-2$ 또는 $k>2$ ...... ㉠

이차방정식 $x^2-2kx+k+6=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-k)^2-(k+6)<0$, $k^2-k-6<0$

$(k+2)(k-3)<0$ $\quad\therefore -2<k<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2<k<3$ 답 $2<k<3$

0966

$ax^2+(a+1)x+2a-1=0$이 이차방정식이므로 $a\neq0$

이차방정식 $ax^2+(a+1)x+2a-1=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a+1)^2-4a(2a-1)\geq0$, $7a^2-6a-1\leq0$

$(7a+1)(a-1)\leq0$ $\quad\therefore -\frac{1}{7}\leq a\leq1$

따라서 정수 a는 0, 1의 2개이다. 답 2

0967

이차방정식 $x^2+2(k-1)x+4=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(k-1)^2-4<0$, $k^2-2k-3<0$

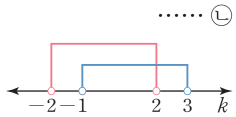
$(k+1)(k-3)<0$ $\quad\therefore -1<k<3$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-2kx+4=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=k^2-4<0$, $(k+2)(k-2)<0$

$\therefore -2<k<2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 주어진 두 이차방정식 중 적어도 하나가 허근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $-2<k<3$



답 ②

0968

이차방정식 $x^2-2kx+2k(k-1)=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-2k(k-1)\geq0$, $k^2-2k\leq0$

$k(k-2)\leq0$ $\quad\therefore 0\leq k\leq2$ …… ㉠

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k$, $\alpha\beta=2k(k-1)$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(2k)^2-2\cdot2k(k-1)=4k$

㉠에서 $0\leq4k\leq8$이므로 $\alpha^2+\beta^2$의 최댓값은 8이다. 답 8

0969

| 전략 | 이차방정식의 두 실근 α, β가 모두 음수이면 판별식 $D\geq0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$이다.

주어진 이차방정식의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 음수이므로

(i) $\frac{D}{4}=(3m+1)^2-3(m+1)\geq0$, $9m^2+3m-2\geq0$

$(3m+2)(3m-1)\geq0$ $\quad\therefore m\leq-\frac{2}{3}$ 또는 $m\geq\frac{1}{3}$

(ii) $\alpha+\beta=-\frac{2(3m+1)}{3}<0$ $\quad\therefore m>-\frac{1}{3}$

(iii) $\alpha\beta=\frac{m+1}{3}>0$ $\quad\therefore m>-1$

(i), (ii), (iii)에서 $m\geq\frac{1}{3}$ 답 $m\geq\frac{1}{3}$

0970

주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=m^2-6m+5<0$, $(m-1)(m-5)<0$

$\therefore 1<m<5$

따라서 정수 m의 최솟값은 2이다. 답 ②

0971

주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면

(i) $\alpha+\beta=k^2+2k-8<0$, $(k+4)(k-2)<0$

$\therefore -4<k<2$

(ii) $\alpha\beta=k^2-9<0$, $(k+3)(k-3)<0$

$\therefore -3<k<3$

(i), (ii)에서 $-3<k<2$

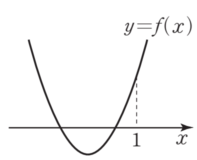
따라서 정수 k는 -2, -1, 0, 1로 그 합은 -2이다. 답 ①

0972

| 전략 | 이차방정식 $f(x)=0$의 근의 조건이 주어지면 $f(x)=0$의 판별식의 부호, 경계에서의 함숫값의 부호, $y=f(x)$의 그래프의 축의 위치를 생각한다.

$f(x)=x^2-2mx+m+6$이라 하면

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 작으므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-m)^2-(m+6)\geq0$, $m^2-m-6\geq0$

$(m+2)(m-3)\geq0$ $\quad\therefore m\leq-2$ 또는 $m\geq3$

(ii) $f(1)=-m+7>0$에서 $m<7$

(iii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=m$이므로

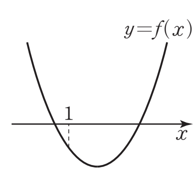
$m<1$

(i), (ii), (iii)에서 $m\leq-2$ 답 $m\leq-2$

0973

$f(x)=x^2+a^2x+a-7$이라 하면

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 1이 있으므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(1)=1+a^2+a-7<0$에서 $a^2+a-6<0$

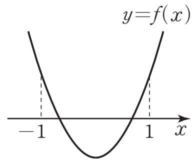
$(a+3)(a-2)<0$ $\quad\therefore -3<a<2$

따라서 정수 a의 최댓값은 1이다. 답 1

0974

$f(x)=x^2-kx+2k$라 하면

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -1과 1 사이에 있으므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-8k\ge0,\ k(k-8)\ge0 \qquad \therefore k\le0$ 또는 $k\ge8$

(ii) $f(-1)=3k+1>0$에서 $k>-\frac{1}{3}$

(iii) $f(1)=k+1>0$에서 $k>-1$

(iv) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{k}{2}$이므로

$-1<\frac{k}{2}<1 \qquad \therefore -2<k<2$

(i)~(iv)에서 $-\frac{1}{3}<k\le0$ 답 ④

0975

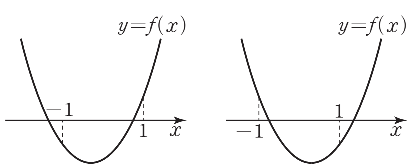
| 전략 | 이차방정식 $x^2-1=0$의 해를 이용하여 이차함수 $y=x^2+ax-6$의 그래프의 개형을 생각해 본다.

$x^2-1=0$에서 $(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=\pm1$ ··· ❶

즉, $x^2+ax-6=0$의 한 근이 -1과 1 사이에 있어야 하므로

$f(x)=x^2+ax-6$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(-1)f(1)<0$에서 $(-a-5)(a-5)<0$

$(a+5)(a-5)>0 \qquad \therefore a<-5$ 또는 $a>5$ ··· ❷

따라서 자연수 a의 최솟값은 6이다. ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $x^2-1=0$의 두 근을 구할 수 있다.	20 %
❷ a에 대한 이차부등식을 세우고, 그 해를 구할 수 있다.	60 %
❸ a의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

STEP 3 내신 마스터

0976

유형 01 그래프를 이용한 이차부등식의 풀이

| 전략 | 부등식 $f(x)<g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다.

$f(x)<g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $1<x<6$

따라서 $a=1,\ b=6$이므로 $a+b=7$ 답 ④

0977

유형 03 해가 주어진 이차부등식

| 전략 | 먼저 주어진 해를 이용하여 x^2의 계수의 부호를 조사한다.

이차부등식 $ax^2+bx+c\ge0$의 해가 $x=3$뿐이므로

$a<0$이고 $a(x-3)^2\ge0$

즉, $ax^2-6ax+9a\ge0$에서 $b=-6a,\ c=9a$

이것을 $bx^2+cx+6a<0$에 대입하면

$-6ax^2+9ax+6a<0$

이때, $-3a>0$이므로 $2x^2-3x-2<0$

$(2x+1)(x-2)<0 \qquad \therefore -\frac{1}{2}<x<2$

따라서 정수 x는 0, 1로 그 합은 1이다. 답 ①

0978

유형 01 그래프를 이용한 이차부등식의 풀이
+ 04 부등식 $f(x)<0$과 부등식 $f(ax+b)<0$의 관계

| 전략 | 주어진 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 $f(x)$를 작성한 후 x에 $\frac{x-1}{3}$을 대입하여 $f\left(\frac{x-1}{3}\right)<0$의 해를 구한다.

$f(x)=a(x+2)(x-1)\,(a>0)$이라 하면

$f\left(\frac{x-1}{3}\right)=a\left(\frac{x-1}{3}+2\right)\left(\frac{x-1}{3}-1\right)=\frac{1}{9}a(x+5)(x-4)$

부등식 $f\left(\frac{x-1}{3}\right)<0$, 즉 $\frac{1}{9}a(x+5)(x-4)<0$에서

$(x+5)(x-4)<0 \qquad \therefore -5<x<4$ 답 ③

다른 풀이 $\frac{x-1}{3}=t$로 놓으면 $f\left(\frac{x-1}{3}\right)<0$에서 $f(t)<0$

주어진 그래프에서 $f(t)<0$을 만족시키는 t의 값의 범위는 $-2<t<1$이므로 $-2<\frac{x-1}{3}<1,\ -6<x-1<3$

$\therefore -5<x<4$

0979

유형 03 해가 주어진 이차부등식 + 05 절댓값 기호를 포함한 이차부등식의 풀이

| 전략 | $x<1$일 때와 $x\ge1$일 때로 나누어 절댓값 기호를 풀어 이차부등식의 해를 구하고, 그 해를 이용하여 이차부등식을 작성한다.

부등식 $x^2-2x-3>3|x-1|$에서

(i) $x<1$일 때, $x^2-2x-3>-3(x-1)$

$x^2+x-6>0,\ (x+3)(x-2)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>2$

그런데 $x<1$이므로 $x<-3$

(ii) $x\ge1$일 때, $x^2-2x-3>3(x-1)$

$x^2-5x>0,\ x(x-5)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>5$

그런데 $x\ge1$이므로 $x>5$

(i), (ii)에서 $x<-3$ 또는 $x>5$

이때, 부등식 $ax^2+2x+b<0$의 해가 $x<-3$ 또는 $x>5$이므로

$a<0$이고 $a(x+3)(x-5)<0$

즉, $ax^2-2ax-15a<0$에서 $-2a=2,\ -15a=b$

따라서 $a=-1,\ b=15$이므로 $a+b=14$ 답 ③

0980

유형 07 이차부등식이 해를 한 개만 가질 조건

| 전략 | 이차부등식 $ax^2+bx+c\le0$이 단 하나의 실근을 가지려면 $a>0$, $D=b^2-4ac=0$이어야 한다.

이차부등식 $(k+1)x^2-2(k+1)x+1\le0$이 단 하나의 해를 가져야 하므로

$k+1>0 \quad \therefore k>-1$

이차방정식 $(k+1)x^2-2(k+1)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+1)^2-(k+1)=0$, $k^2+k=0$

$k(k+1)=0 \quad \therefore k=0$ 또는 $k=-1$

그런데 $k>-1$이므로 $k=0$

답 ③

0981

유형 09 이차부등식이 항상 성립할 조건

| 전략 | 실수 x의 값에 관계없이 이차부등식 $ax^2+bx+c\le0$이 성립하려면 $a<0$, $D=b^2-4ac\le0$이어야 한다.

실수 x의 값에 관계없이 이차부등식 $ax^2-4x+a+3\le0$이 성립해야 하므로 $a<0$

이차방정식 $ax^2-4x+a+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-a(a+3)\le0$, $a^2+3a-4\ge0$

$(a+4)(a-1)\ge0 \quad \therefore a\le-4$ 또는 $a\ge1$

그런데 $a<0$이므로 $a\le-4$

따라서 정수 a의 최댓값은 -4이다.

답 ①

0982

유형 10 이차부등식이 해를 갖지 않을 조건

| 전략 | 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$이 해를 갖지 않으려면 $a>0$, $D=b^2-4ac\le0$이어야 한다.

이차부등식 $(k^2-k)x^2-2kx+2<0$의 해가 없으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $(k^2-k)x^2-2kx+2\ge0$이 성립해야 하므로

$k^2-k>0$, $k(k-1)>0 \quad \therefore k<0$ 또는 $k>1$ …… ㉠

이차방정식 $(k^2-k)x^2-2kx+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-2(k^2-k)\le0$, $k^2-2k\ge0$

$k(k-2)\ge0 \quad \therefore k\le0$ 또는 $k\ge2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k<0$ 또는 $k\ge2$

답 ⑤

0983

유형 12 이차부등식과 두 그래프의 위치 관계 – 특정한 범위에서 성립

| 전략 | 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 이차함수 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 이차부등식 $f(x)<g(x)$의 해와 같다.

$2x^2+5x-9<-x^2+ax+b$에서

$3x^2+(5-a)x-b-9<0$ …… ㉠

해가 $-4<x<1$이고 x^2의 계수가 3인 이차부등식은

$3(x+4)(x-1)<0 \quad \therefore 3x^2+9x-12<0$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 일치해야 하므로 $5-a=9$, $-b-9=-12$에서

$a=-4$, $b=3 \quad \therefore b-a=7$

답 ④

0984

유형 13 이차부등식과 두 그래프의 위치 관계 – 항상 성립

| 전략 | 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 항상 위쪽에 있으면 이차부등식 $f(x)>g(x)$가 항상 성립한다.

$x^2+(k-3)x+5>x+1$에서 $x^2+(k-4)x+4>0$

이 이차부등식이 항상 성립해야 하므로 이차방정식

$x^2+(k-4)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k-4)^2-16<0$, $k^2-8k<0$

$k(k-8)<0 \quad \therefore 0<k<8$

따라서 정수 k의 최댓값은 7이다.

답 ⑤

0985

유형 14 최대·최소와 이차부등식

| 전략 | $y=-2x+k$를 $2x^2+y^2=12$에 대입하여 x에 대한 이차방정식으로 정리한 후 판별식 $D\ge0$임을 이용한다.

$2x+y=k$라 하면 $y=-2x+k$

이것을 $2x^2+y^2=12$에 대입하면 $2x^2+(-2x+k)^2=12$

$\therefore 6x^2-4kx+k^2-12=0$

이 식을 x에 대한 이차방정식으로 보면 이 방정식을 만족시키는 실수 x가 존재해야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-6(k^2-12)\ge0$, $k^2-36\le0$

$(k+6)(k-6)\le0 \quad \therefore -6\le k\le6$

따라서 $2x+y$의 최댓값과 최솟값의 차는 $6-(-6)=12$

답 ⑤

0986

유형 06 가우스 기호를 포함한 이차부등식의 풀이 + 16 연립이차부등식의 풀이

| 전략 | 정수 n에 대하여 $[x]=n$일 때, $n\le x<n+1$이다.

$[x]^2-[x]-6<0$에서 $([x]+2)([x]-3)<0$

$\therefore -2<[x]<3$ …… ㉠

$2[x]-3\le0$에서 $[x]\le\frac{3}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-2<[x]\le\frac{3}{2}$

이때, $[x]$의 값은 정수이므로 $[x]=-1, 0, 1$

$[x]=-1$에서 $-1\le x<0$

$[x]=0$에서 $0\le x<1$

$[x]=1$에서 $1\le x<2$

주어진 연립부등식의 해는 $-1\le x<2$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로 $a+b=1$

답 ④

0987

유형 17 해가 주어진 연립이차부등식

| 전략 | 먼저 이차부등식의 해를 구하고 이 해가 연립부등식의 해가 되도록 수직선 위에 나타내 본다.

$x^2-13x+40<0$에서 $(x-5)(x-8)<0 \quad \therefore 5<x<8$

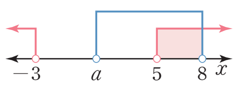
즉, 주어진 연립부등식의 해는 $5<x<8$이다.

$x^2-2x-15>0$에서 $(x+3)(x-5)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>5$ …… ㉠

9 이차부등식과 연립이차부등식

그런데 ㉠, $(x-8)(x-a)<0$의 공통부분이 $5<x<8$이므로 오른쪽 그림에서



$-3\le a\le 5$

따라서 정수 a의 최댓값은 5이다. 답 ③

0988

유형 19 연립이차부등식의 활용

| 전략 | 새로 만든 직육면체의 부피와 처음 정육면체의 부피를 구하고 조건에 맞는 부등식을 세운다.

새로 만든 직육면체의 밑면의 가로, 세로의 길이, 높이는 각각 $a+4$, a, $a-2$이므로 $a-2>0$ $\quad\therefore a>2$ ...... ㉠

이 직육면체의 부피는 $a(a+4)(a-2)$이고 처음 정육면체의 부피는 a^3이므로 $a(a+4)(a-2)<a^3$

$2a^2-8a<0$, $2a(a-4)<0$ $\quad\therefore 0<a<4$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $2<a<4$이므로 자연수 a는 3의 1개이다. 답 ①

0989

유형 21 이차방정식의 실근의 부호

| 전략 | 이차방정식의 두 실근 α, β가 모두 양수이면 판별식 $D\ge 0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$이다.

주어진 이차방정식의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 양수이므로

(i) $D=(k-4)^2-4(k-1)\ge 0$, $k^2-12k+20\ge 0$

$(k-2)(k-10)\ge 0$ $\quad\therefore k\le 2$ 또는 $k\ge 10$

(ii) $\alpha+\beta=-(k-4)>0$ $\quad\therefore k<4$

(iii) $\alpha\beta=k-1>0$ $\quad\therefore k>1$

(i), (ii), (iii)에서 $1<k\le 2$ 답 ④

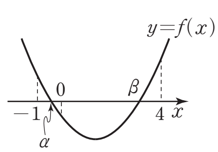
0990

유형 22 이차방정식의 근의 분리

| 전략 | $f(x)=x^2-4kx+k^2-1$이라 하고 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 조건에 맞게 그려 본다.

$f(x)=x^2-4kx+k^2-1$이라 하면

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 α, β가 $-1<\alpha<0<\beta<4$를 만족시키므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $f(-1)=k^2+4k>0$에서 $k(k+4)>0$

$\therefore k<-4$ 또는 $k>0$

(ii) $f(0)=k^2-1<0$에서 $(k+1)(k-1)<0$

$\therefore -1<k<1$

(iii) $f(4)=k^2-16k+15>0$에서 $(k-1)(k-15)>0$

$\therefore k<1$ 또는 $k>15$

(i), (ii), (iii)에서 $0<k<1$ 답 ④

0991

유형 02 이차부등식의 풀이

| 전략 | 주어진 이차부등식을 풀어 정수 해의 합이 6이 되도록 하는 정수 a의 값을 구한다.

$x^2-2(a+1)x+a^2+2a\le 0$에서 $x^2-2(a+1)x+a(a+2)\le 0$

$(x-a)(x-a-2)\le 0$ $\quad\therefore a\le x\le a+2$ ... ❶

이때, 주어진 이차부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 6이므로

$a+(a+1)+(a+2)=6$

$3a+3=6$ $\quad\therefore a=1$ ... ❷

답 1

채점 기준	배점
❶ 이차부등식을 풀 수 있다.	4점
❷ a의 값을 구할수 있다.	2점

0992

유형 11 제한된 범위에서 이차부등식이 항상 성립할 조건

| 전략 | $p<x<q$에서 이차부등식 $f(x)>0$이 항상 성립하려면 $p<x<q$에서 ($f(x)$의 최솟값)>0이어야 한다.

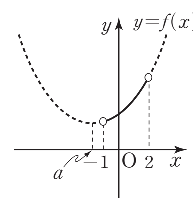
$f(x)=x^2-2ax+2a+3$이라 하면

$f(x)=(x-a)^2-a^2+2a+3$

$-1<x<2$에서 $f(x)>0$이어야 하므로

(i) $a\le -1$일 때

$-1<x<2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

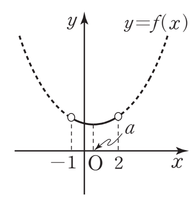


$f(-1)=4a+4\ge 0$에서 $a\ge -1$

그런데 $a\le -1$이므로 $a=-1$ ... ❶

(ii) $-1<a<2$일 때

$-1<x<2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(a)=-a^2+2a+3>0$에서

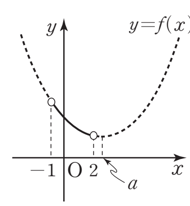
$a^2-2a-3<0$, $(a+1)(a-3)<0$

$\therefore -1<a<3$

그런데 $-1<a<2$이므로 $-1<a<2$ ... ❷

(iii) $a\ge 2$일 때

$-1<x<2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(2)=-2a+7\ge 0$에서 $a\le\dfrac{7}{2}$

그런데 $a\ge 2$이므로 $2\le a\le\dfrac{7}{2}$ ... ❸

(i), (ii), (iii)에서 $-1\le a\le\dfrac{7}{2}$

따라서 정수 a의 최댓값은 3이다. ... ❹

답 3

채점 기준	배점
❶ $a\le -1$일 때, a의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ $-1<a<2$일 때, a의 값의 범위를 구할 수 있다.	2점
❸ $a\ge 2$일 때, a의 값의 범위를 구할 수 있다.	2점
❹ 정수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	1점

0993

유형 **17** 해가 주어진 연립이차부등식
+ **18** 절댓값 기호를 포함한 연립이차부등식의 풀이

| 전략 | 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분이 없도록 수직선 위에 나타내 본다. 이때, 양수 k에 대하여 $|f(x)|<k$는 $-k<f(x)<k$임을 이용한다.

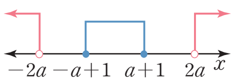
$|x-1|\le a$에서 $a>0$이므로 $-a\le x-1\le a$

$\therefore\ -a+1\le x\le a+1$ …… ㉠ … ❶

$x^2-4a^2>0$에서 $(x+2a)(x-2a)>0$

$\therefore\ x<-2a$ 또는 $x>2a$ ($\because a>0$) …… ㉡ … ❷

㉠, ㉡의 공통부분이 없으려면 오른쪽 그림에서 $-2a\le -a+1$, $a+1\le 2a$



즉, $a\ge -1$, $a\ge 1$에서 $a\ge 1$ … ❸

답 $a\ge 1$

채점 기준	배점
❶ $|x-1|\le a$의 해를 구할 수 있다.	2점
❷ $x^2-4a^2>0$의 해를 구할 수 있다.	2점
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	3점

0994

유형 **17** 해가 주어진 연립이차부등식

| 전략 | 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분이 없도록 수직선 위에 나타내 본다.

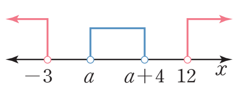
(1) $x^2-9x-36>0$에서 $(x+3)(x-12)>0$

$\therefore\ x<-3$ 또는 $x>12$ …… ㉠

(2) $x^2-2(a+2)x+a^2+4a<0$에서 $(x-a)(x-a-4)<0$

$\therefore\ a<x<a+4$ …… ㉡

(3) ㉠, ㉡의 공통부분이 없으려면 오른쪽 그림에서



$-3\le a$, $a+4\le 12$

$\therefore\ -3\le a\le 8$

(4) $M=8$, $m=-3$이므로 $M+m=5$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) $x^2-9x-36>0$의 해를 구할 수 있다.	3점
(2) $x^2-2(a+2)x+a^2+4a<0$의 해를 구할 수 있다.	3점
(3) a의 값의 범위를 구할 수 있다.	4점
(4) $M+m$의 값을 구할 수 있다.	2점

0995

유형 **20** 이차방정식의 근의 판별과 이차부등식

| 전략 | 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 허근을 가질 조건은 $D<0$이다.

(1) 이차방정식 $x^2-(a-1)x+4=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(a-1)^2-16<0$, $a^2-2a-15<0$

$(a+3)(a-5)<0$ $\quad\therefore\ -3<a<5$ …… ㉠

(2) 이차방정식 $x^2-(a+1)x+a^2-1=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(a+1)^2-4(a^2-1)<0$, $3a^2-2a-5>0$

$(a+1)(3a-5)>0$ $\quad\therefore\ a<-1$ 또는 $a>\dfrac{5}{3}$ …… ㉡

(3) ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-3<a<-1$ 또는 $\dfrac{5}{3}<a<5$

따라서 정수 a의 최댓값은 4이다.

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) $x^2-(a-1)x+4=0$이 허근을 갖도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	3점
(2) $x^2-(a+1)x+a^2-1=0$이 허근을 갖도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	3점
(3) 정수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	4점

창의·융합 교과서 속 심화문제

0996

| 전략 | 부등식 $f(x)>0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위임을 이용한다.

ㄱ. $f(x)g(x)>0$에서

$f(x)>0$, $g(x)>0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)<0$

(i) $f(x)>0$, $g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$a<x<c$

(ii) $f(x)<0$, $g(x)<0$을 만족시키는 x는 없다.

(i), (ii)에서 부등식 $f(x)g(x)>0$의 해는 $a<x<c$

ㄴ. $\{f(x)\}^2=f(x)g(x)$에서 $\{f(x)\}^2-f(x)g(x)=0$

$f(x)\{f(x)-g(x)\}=0$ $\quad\therefore\ f(x)=0$ 또는 $f(x)=g(x)$

$f(x)=0$에서 $x=c$ 또는 $x=d$

$f(x)=g(x)$에서 $x=b$ 또는 $x=d$

따라서 방정식 $\{f(x)\}^2=f(x)g(x)$의 해는

$x=b$ 또는 $x=c$ 또는 $x=d$

ㄷ. (i) $f(x)<0$, 즉 $c<x<d$일 때

$h(x)=\dfrac{f(x)-f(x)}{2}=0$

$h(x)\le 0$에서 $0\le 0$이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $c<x<d$이므로 $c<x<d$

(ii) $f(x)\ge 0$, 즉 $x\le c$ 또는 $x\ge d$일 때

$h(x)=\dfrac{f(x)+f(x)}{2}=f(x)$

$h(x)\le 0$에서 $f(x)\le 0$

$\therefore\ c\le x\le d$

그런데 $x\le c$ 또는 $x\ge d$이므로 $x=c$ 또는 $x=d$

(i), (ii)에서 $c\le x\le d$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0997

|전략| $\{x\}$에 대한 이차부등식을 푼 후 $\{x\}$의 값이 정수임을 이용한다.

$\{x\}^2-4\{x\}+3\le 0$에서 $(\{x\}-1)(\{x\}-3)\le 0$

$\therefore 1\le \{x\}\le 3$

이때, $\{x\}$는 정수이므로 $\{x\}=1, 2, 3$

$\{x\}=1$에서 $1-\frac{1}{2}\le x<1+\frac{1}{2}$ $\quad\therefore \frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}$

$\{x\}=2$에서 $2-\frac{1}{2}\le x<2+\frac{1}{2}$ $\quad\therefore \frac{3}{2}\le x<\frac{5}{2}$

$\{x\}=3$에서 $3-\frac{1}{2}\le x<3+\frac{1}{2}$ $\quad\therefore \frac{5}{2}\le x<\frac{7}{2}$

따라서 주어진 부등식의 해는 $\frac{1}{2}\le x<\frac{7}{2}$ 답 $\frac{1}{2}\le x<\frac{7}{2}$

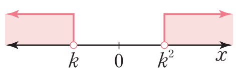
0998

|전략| $k<0$, $0<k<1$, $k>1$인 경우로 나누어 부등식을 푼다.

(i) $k<0$일 때, $k<0<k^2$이므로

$(x-k)(x-k^2)>0$ $\quad\therefore x<k$ 또는 $x>k^2$

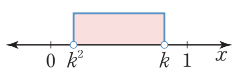
오른쪽 그림에서 이를 만족시키는 정수 x는 무수히 많이 존재한다.



(ii) $0<k<1$일 때, $0<k^2<k<1$이므로

$(x-k)(x-k^2)<0$ $\quad\therefore k^2<x<k$

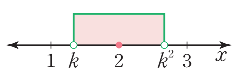
오른쪽 그림에서 이를 만족시키는 정수 x는 존재하지 않는다.



(iii) $k>1$일 때, $1<k<k^2$이므로

$(x-k)(x-k^2)<0$ $\quad\therefore k<x<k^2$

오른쪽 그림에서 이 범위에 속하는 정수 x의 값이 2뿐이려면



$1\le k<2$, $2<k^2\le 3$

$\therefore \sqrt{2}<k\le\sqrt{3}$ $(\because k>1)$

(i), (ii), (iii)에서 $\sqrt{2}<k\le\sqrt{3}$ 답 $\sqrt{2}<k\le\sqrt{3}$

0999

|전략| 연립이차부등식의 해를 구한 후 주어진 해와 비교하여 a, c의 값을 구한다.

$x^2-(a+b)x+ab>0$에서 $(x-a)(x-b)>0$

$\therefore x<a$ 또는 $x>b$ ······ ㉠

$x^2-(b+c)x+bc>0$에서 $(x-b)(x-c)>0$

$\therefore x<b$ 또는 $x>c$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $x<a$ 또는 $x>c$

이때, 주어진 연립부등식의 해가 $x<-3$ 또는 $x>2$이므로

$a=-3$, $c=2$

즉, 이차부등식 $x^2-ax+c<0$은 $x^2+3x+2<0$이므로

$(x+2)(x+1)<0$ $\quad\therefore -2<x<-1$ 답 $-2<x<-1$

1000

|전략| $[x-1]=[x]-1$이고, $[x]$의 값이 정수임을 이용한다.

$[x-1]^2-[x]-5\le 0$에서 $([x]-1)^2-[x]-5\le 0$

$[x]^2-3[x]-4\le 0$, $([x]+1)([x]-4)\le 0$

$\therefore -1\le [x]\le 4$

이때, $[x]$는 정수이므로 $[x]=-1, 0, 1, 2, 3, 4$

$[x]=-1$에서 $-1\le x<0$

$[x]=0$에서 $0\le x<1$

$[x]=1$에서 $1\le x<2$

$\vdots$

$[x]=4$에서 $4\le x<5$

구하는 부등식의 해는 $-1\le x<5$ ······ ㉠

$x|x|-4\ge 0$에서

(i) $x<0$일 때, $-x^2-4\ge 0$, $x^2+4\le 0$

그런데 $x^2+4>0$이므로 해는 없다.

(ii) $x\ge 0$일 때, $x^2-4\ge 0$, $(x+2)(x-2)\ge 0$

$\therefore x\le -2$ 또는 $x\ge 2$

그런데 $x\ge 0$이므로 $x\ge 2$

(i), (ii)에서 $x\ge 2$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2\le x<5$

따라서 $a=2$, $b=5$이므로 $a+b=7$ 답 7

1001

|전략| 직사각형 PQCR와 두 삼각형 APR, PBQ의 넓이를 각각 a에 대한 식으로 나타낸다.

$\overline{QC}=a$이므로 $0<a<12$

$\triangle$ABC가 직각이등변삼각형이므로 $\triangle$APR, $\triangle$PBQ도 직각이등변삼각형이다. 즉,

$\overline{AR}=\overline{PR}=a$, $\overline{PQ}=\overline{BQ}=12-a$

$\square$PQCR의 넓이는 $\overline{QC}\cdot\overline{PQ}=a(12-a)$

$\triangle$APR의 넓이는 $\frac{1}{2}\overline{PR}\cdot\overline{AR}=\frac{1}{2}a^2$

$\triangle$PBQ의 넓이는 $\frac{1}{2}\overline{BQ}\cdot\overline{PQ}=\frac{1}{2}(12-a)^2$

이때, $\square$PQCR$>\triangle$APR에서 $a(12-a)>\frac{1}{2}a^2$

$2a(12-a)>a^2$, $a^2-8a<0$

$a(a-8)<0$ $\quad\therefore 0<a<8$ ······ ㉠

$\square$PQCR$>\triangle$PBQ에서 $a(12-a)>\frac{1}{2}(12-a)^2$

$2a(12-a)>144-24a+a^2$, $a^2-16a+48<0$

$(a-4)(a-12)<0$ $\quad\therefore 4<a<12$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $4<a<8$

따라서 자연수 a는 5, 6, 7로 그 합은 18이다. 답 18

본책 160~171쪽

10 | 평면좌표

STEP 1 개념 마스터

1002

$\overline{AB}=|8-2|=6$ 답 6

1003

$\overline{AB}=|-6-4|=10$ 답 10

1004

점 Q의 좌표를 x라 하면

$|x-1|=2$에서 $x-1=\pm 2$

$\therefore x=3$ 또는 $x=-1$

$\therefore$ Q(3) 또는 Q(-1) 답 Q(3) 또는 Q(-1)

1005

점 R의 좌표를 x라 하면

$|x-(-3)|=8$에서 $x+3=\pm 8$

$\therefore x=5$ 또는 $x=-11$

$\therefore$ R(5) 또는 R(-11) 답 R(5) 또는 R(-11)

1006

$\overline{AB}=\sqrt{(-1-3)^2+\{2-(-1)\}^2}=5$ 답 5

1007

$\overline{AB}=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(5-1)^2}=2\sqrt{5}$ 답 $2\sqrt{5}$

1008

$\overline{AB}=\sqrt{\{3-(-2)\}^2+\{7-(-3)\}^2}=5\sqrt{5}$ 답 $5\sqrt{5}$

1009

$\overline{OA}=\sqrt{8^2+(-6)^2}=10$ 답 10

1010 답 C

1011 답 E

1012 답 D

1013

(1) $P\left(\frac{3\cdot3+1\cdot(-5)}{3+1}\right)$, 즉 $P(1)$

(2) $Q\left(\frac{2\cdot3-1\cdot(-5)}{2-1}\right)$, 즉 $Q(11)$

(3) $M\left(\frac{-5+3}{2}\right)$, 즉 $M(-1)$

답 (1) $P(1)$ (2) $Q(11)$ (3) $M(-1)$

1014

$p=\frac{2\cdot2+1\cdot(-4)}{2+1}=0$

$q=\frac{2\cdot2-3\cdot(-4)}{2-3}=-16$

$\therefore p+q=-16$ 답 -16

1015

(1) $P\left(\frac{1\cdot2+2\cdot(-3)}{1+2}, \frac{1\cdot7+2\cdot4}{1+2}\right)$, 즉 $P\left(-\frac{4}{3}, 5\right)$

(2) $Q\left(\frac{3\cdot2-2\cdot(-3)}{3-2}, \frac{3\cdot7-2\cdot4}{3-2}\right)$, 즉 $Q(12, 13)$

(3) $M\left(\frac{-3+2}{2}, \frac{4+7}{2}\right)$, 즉 $M\left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$

답 (1) $P\left(-\frac{4}{3}, 5\right)$ (2) $Q(12, 13)$ (3) $M\left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$

1016

선분 AB의 중점의 좌표가 $(-1, 4)$이므로

$\frac{6+b}{2}=-1$, $\frac{a+5}{2}=4$ $\quad\therefore a=3, b=-8$

$\therefore a-b=11$ 답 11

1017

$G\left(\frac{1+(-4)+6}{3}, \frac{2+3+(-5)}{3}\right)$, 즉 $G(1, 0)$ 답 $G(1, 0)$

1018

$G\left(\frac{3+5+(-2)}{3}, \frac{6+(-1)+4}{3}\right)$, 즉 $G(2, 3)$ 답 $G(2, 3)$

1019

$G\left(\frac{-1+2+4}{3}, \frac{3+(-7)+1}{3}\right)$, 즉 $G\left(\frac{5}{3}, -1\right)$ 답 $G\left(\frac{5}{3}, -1\right)$

STEP 2 유형 마스터

1020

|전략| 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$임을 이용한다.

$\overline{AB}=2\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{(3-1)^2+\{4-(a+2)\}^2}=2\sqrt{5}$

10 평면좌표

양변을 제곱하면 $4+(2-a)^2=20$

$a^2-4a-12=0,\ (a+2)(a-6)=0$

$\therefore\ a=6\ (\because\ a>0)$

답 ⑤

1021

$\overline{AB}=\overline{BC}$이므로

$\sqrt{(a-2)^2+1^2}=\sqrt{(-2-a)^2+(6-1)^2}$

양변을 제곱하면 $(a-2)^2+1=(-2-a)^2+25$

$a^2-4a+5=a^2+4a+29,\ -8a=24$

$\therefore\ a=-3$

답 -3

1022

$\overline{AB}\le 4$에서 $\overline{AB}^2\le 4^2$이므로

$\{(k+2)-1\}^2+(3-k)^2\le 16$

$2k^2-4k-6\le 0,\ 2(k+1)(k-3)\le 0$

$\therefore\ -1\le k\le 3$

따라서 정수 k는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 5개이다.

답 ⑤

1023

$\overline{AB}=\sqrt{\{-3-(-k+1)\}^2+\{(k+1)-3\}^2}$

$=\sqrt{(-4+k)^2+(k-2)^2}$

$=\sqrt{2k^2-12k+20}$

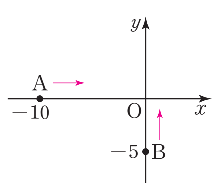
$=\sqrt{2(k-3)^2+2}$

따라서 $\overline{AB}\ge\sqrt{2}$이므로 $\overline{AB}$의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.

답 ②

1024

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 O지점을 원점, 일직선 모양의 두 도로를 각각 x축, y축으로 놓으면 출발한지 t시간 후의 A, B 두 사람의 위치는



$(-10+3t,\ 0),\ (0,\ -5+4t)$ ⋯ ❶

이때, 두 사람 사이의 거리를 l이라 하면

$l=\sqrt{(-10+3t)^2+(-5+4t)^2}$

$=\sqrt{25t^2-100t+125}$

$=5\sqrt{t^2-4t+5}$

$=5\sqrt{(t-2)^2+1}$ ⋯ ❷

즉, $t=2$일 때 l은 최솟값 5를 갖는다.

따라서 두 사람 A, B가 가장 가까이 있을 때의 거리는 5 km이다. ⋯ ❸

답 5 km

채점 기준	비율
❶ t시간 후의 두 사람 A, B의 위치를 좌표로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 두 사람 사이의 거리를 구할 수 있다.	50 %
❸ 두 사람 A, B가 가장 가까이 있을 때의 거리를 구할 수 있다.	20 %

1025

|전략| 점 $P(a,\ b)$가 직선 $y=x+2$ 위의 점이면 $b=a+2$이다.

점 $P(a,\ b)$가 직선 $y=x+2$ 위의 점이므로

$b=a+2$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-2)^2+(b+1)^2=(a+3)^2+(b-2)^2$

$a^2-4a+4+b^2+2b+1=a^2+6a+9+b^2-4b+4$

$\therefore\ -5a+3b=4$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=3$

$\therefore\ a^2+b^2=10$

답 10

1026

구하는 점을 $P(0,\ a)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(-3)^2+(a+2)^2=(-1)^2+(a+4)^2$

$a^2+4a+13=a^2+8a+17$

$-4a=4\qquad \therefore\ a=-1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(0,\ -1)$이다.

답 $(0,\ -1)$

1027

$P(a,\ 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-2)^2+(-5)^2=(a-4)^2+(-1)^2$

$a^2-4a+29=a^2-8a+17$

$4a=-12\qquad \therefore\ a=-3$

$\therefore\ P(-3,\ 0)$

또, $Q(0,\ b)$라 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$(-2)^2+(b-5)^2=(-4)^2+(b-1)^2$

$b^2-10b+29=b^2-2b+17$

$8b=12\qquad \therefore\ b=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ Q\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$

$\therefore\ \overline{PQ}=\sqrt{3^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{45}{4}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

답 ③

1028

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-3)^2+(b-3)^2=(a+1)^2+(b-5)^2$

$a^2-6a+9+b^2-6b+9=a^2+2a+1+b^2-10b+25$

$\therefore\ 2a-b=-2$ ⋯⋯ ㉠

또, $\overline{BP}=\overline{CP}$에서 $\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$(a+1)^2+(b-5)^2=(a+5)^2+(b-3)^2$

$a^2+2a+1+b^2-10b+25=a^2+10a+25+b^2-6b+9$

$\therefore\ 2a+b=-2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=0$

$\therefore\ a+b=-1$

답 ②

1029

점 $P(a,\ b)$가 삼각형 ABC의 외심이므로 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a+4)^2+(b+1)^2=(a-2)^2+(b-7)^2$

$a^2+8a+16+b^2+2b+1=a^2-4a+4+b^2-14b+49$

$\therefore 3a+4b=9$ ······ ㉠

$\overline{AP}=\overline{CP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$(a+4)^2+(b+1)^2=(a-4)^2+(b-3)^2$

$a^2+8a+16+b^2+2b+1=a^2-8a+16+b^2-6b+9$

$\therefore 2a+b=1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=3$

$\therefore b-a=4$ 답 ①

Lecture

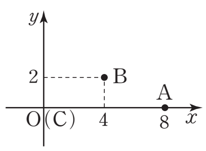
삼각형의 외심

(1) 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점이다.

(2) 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

1030

오른쪽 그림과 같이 C 도서관을 원점, A 도서관을 x축 위에 오도록 좌표평면을 정하면



$A(8,\ 0),\ B(4,\ 2),\ C(0,\ 0)$

공원을 만들려는 지점을 $P(a,\ b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a-8)^2+b^2=(a-4)^2+(b-2)^2$

$a^2-16a+64+b^2=a^2-8a+16+b^2-4b+4$

$\therefore -2a+b=-11$ ······ ㉠

또, $\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a-8)^2+b^2=a^2+b^2$

$a^2-16a+64+b^2=a^2+b^2$

$-16a+64=0 \quad \therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=-3$

따라서 $P(4,\ -3)$이므로 새로 만들 공원과 A 도서관 사이의 거리는

$\sqrt{(8-4)^2+\{0-(-3)\}^2}=5\ (\text{km})$ 답 5 km

1031

|전략| $\overline{AB},\ \overline{BC},\ \overline{CA}$의 길이를 구한 후 $\triangle ABC$의 세 변의 길이 사이의 관계를 알아본다.

$\overline{AB}^2=(-2-2)^2+(-2-1)^2=25$

$\overline{BC}^2=(-1+2)^2+(5+2)^2=50$

$\overline{CA}^2=(2+1)^2+(1-5)^2=25$

이므로 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$이고 $\overline{AB}^2=\overline{CA}^2$, 즉 $\overline{AB}=\overline{CA}$

따라서 삼각형 ABC는 $\angle A=90^\circ$인 직각이등변삼각형이다. 답 ④

1032

$\overline{AB}^2=(a-1)^2+(a-1)^2=2a^2-4a+2$

$\overline{BC}^2=1^2+(-1-a)^2=a^2+2a+2$

$\overline{CA}^2=(-a)^2+(1+1)^2=a^2+4$

삼각형 ABC는 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{CA}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$에서

$a^2+4=2a^2-4a+2+a^2+2a+2,\ 2a^2-2a=0$

$a(a-1)=0 \quad \therefore a=0$ 또는 $a=1$

그런데 $a=1$이면 점 A와 점 B의 좌표가 같게 되므로 $a=0$ 답 0

1033

삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

$\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(1+1)^2+(-1-1)^2=(a-1)^2+(b+1)^2$

$\therefore a^2-2a+b^2+2b=6$ ······ ㉠

$\overline{BC}=\overline{CA}$에서 $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이므로

$(a-1)^2+(b+1)^2=(-1-a)^2+(1-b)^2$

$-4a+4b=0 \quad \therefore b=a$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a^2-2a+a^2+2a=6,\ a^2=3$

$\therefore a=\pm\sqrt{3},\ b=\pm\sqrt{3}$ (복호동순)

그런데 점 C가 제 1 사분면 위의 점이므로 $a=\sqrt{3},\ b=\sqrt{3}$

$\therefore a+b=2\sqrt{3}$ 답 $2\sqrt{3}$

1034

삼각형 ABC가 이등변삼각형이 되려면 $\overline{AB}=\overline{BC}$ 또는 $\overline{BC}=\overline{CA}$ 또는 $\overline{CA}=\overline{AB}$이어야 한다.

(i) $\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$1^2+(5-2)^2=(a-1)^2+(1-5)^2$

$10=(a-1)^2+16,\ (a-1)^2=-6$

그런데 $(a-1)^2\ge 0$이므로 이를 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $\overline{BC}=\overline{CA}$에서 $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이므로

$(a-1)^2+(1-5)^2=(-a)^2+(2-1)^2$

$a^2-2a+17=a^2+1,\ 2a=16 \quad \therefore a=8$

(iii) $\overline{CA}=\overline{AB}$에서 $\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$이므로

$(-a)^2+(2-1)^2=1^2+(5-2)^2$

$a^2+1=10,\ a^2=9 \quad \therefore a=\pm 3$

(i), (ii), (iii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$8+3+(-3)=8$ 답 8

1035

|전략| $O(0,\ 0),\ A(x,\ y),\ B(1,\ -2)$라 하고, 주어진 식이 무엇을 나타내는지 생각해 본다.

$O(0,\ 0),\ A(x,\ y),\ B(1,\ -2)$라 하면

$\sqrt{x^2+y^2}=\overline{OA},\ \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\overline{AB}$이므로

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\overline{OA}+\overline{AB}$$
$$\ge\overline{OB}=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$$

따라서 $m=\sqrt{5}$이므로 $m^2=5$ 답 ⑤

1036

$A(2,\ -3)$, $B(x,\ y)$, $C(-4,\ 5)$라 하면

$\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}=\overline{AB}$, $\sqrt{(x+4)^2+(y-5)^2}=\overline{BC}$이므로

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}+\sqrt{(x+4)^2+(y-5)^2}$$
$$=\overline{AB}+\overline{BC}$$
$$\ge\overline{AC}=\sqrt{(-4-2)^2+(5+3)^2}=10$$

따라서 구하는 최솟값은 10이다. 답 ⑤

1037

$A(a,\ 0)$, $B(0,\ -1)$, $C(3,\ 3)$이라 하면

$\sqrt{a^2+1}=\overline{AB}$, $\sqrt{(a-3)^2+9}=\overline{AC}$이므로

$$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{(a-3)^2+9}=\overline{AB}+\overline{AC}$$
$$\ge\overline{BC}=\sqrt{(3-0)^2+(3+1)^2}=5$$

따라서 구하는 최솟값은 5이다. 답 ④

Lecture

이 문제에서 $A(a,\ 0)$으로 놓으면 두 점 B, C의 좌표를 정하는 방법은 다음과 같이 네 가지가 있다.

(ⅰ) $B(0,\ 1)$, $C(3,\ -3)$ (ⅱ) $B(0,\ -1)$, $C(3,\ 3)$

(ⅲ) $B(0,\ 1)$, $C(3,\ 3)$ (ⅳ) $B(0,\ -1)$, $C(3,\ -3)$

(ⅰ), (ⅱ)의 경우 위와 같이 풀면 되지만, (ⅲ), (ⅳ)의 경우 점 $A(a,\ 0)$은 x축 위의 점이므로 $\overline{BC}$ 위에 있을 수 없다.

따라서 이 경우에는 점 B, 점 C 중 하나를 x축에 대하여 대칭이동한 다음 위와 같이 문제를 풀면 된다.

1038

|전략| $P(0,\ a)$라 하고, $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$을 a에 대한 식으로 나타낸다.

점 P는 y축 위의 점이므로 $P(0,\ a)$라 하면

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=1^2+(a+2)^2+(-1)^2+(a-4)^2$$
$$=2a^2-4a+22$$
$$=2(a-1)^2+20$$

따라서 $a=1$일 때 주어진 식의 최솟값은 20이다. 답 20

1039

점 P는 직선 $y=x+3$ 위의 점이므로 $P(a,\ a+3)$이라 하면

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=(a+2)^2+(a+3)^2+(a-2)^2+(a+3)^2$$
$$=4a^2+12a+26$$
$$=4\left(a+\frac{3}{2}\right)^2+17$$

따라서 $a=-\frac{3}{2}$일 때 주어진 식의 최솟값이 17이므로 점 P의 x좌표는 $-\frac{3}{2}$이다. 답 ①

1040

$P(a,\ b)$라 하면

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$$
$$=(a+1)^2+(b-2)^2+(a-4)^2+(b-6)^2+a^2+(b-1)^2$$
$$=3a^2-6a+3b^2-18b+58$$
$$=3(a-1)^2+3(b-3)^2+28 \quad \cdots ❶$$

이때, a, b가 실수이므로 $(a-1)^2\ge0$, $(b-3)^2\ge0$

$\therefore\ \overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2\ge28$

따라서 $a=1$, $b=3$일 때 주어진 식의 최솟값이 28이므로

$P(1,\ 3)$ ⋯ ❷

답 $P(1,\ 3)$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하고, 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 이차식을 세울 수 있다.	60 %
❷ ❶의 식의 값이 최소일 때의 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	40 %

Lecture

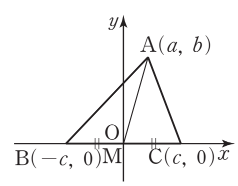
실수의 성질

모든 실수 A, B에 대하여 $A^2\ge0$, $B^2\ge0$ $\quad\therefore\ A^2+B^2\ge0$

특히 $A^2+B^2=0$이면 $A=0$, $B=0$

1041

|전략| 주어진 점이 원점 또는 좌표축 위의 점이 되도록 좌표축을 정한다.



오른쪽 그림과 같이 변 BC를 x축 위에 놓고 변 BC의 중점 M을 원점 O가 되도록 좌표평면을 잡는다.

이때, △ABC의 세 꼭짓점의 좌표를 각각 $A(a,\ b)$, $B(-c,\ 0)$, $C(\boxed{(가)\ c},\ 0)$이라 하면

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}$$
$$=(a^2+2ac+c^2+b^2)+(a^2-2ac+c^2+b^2)$$
$$=2a^2+2b^2+2c^2$$
$$=2(\boxed{(나)\ a^2+b^2+c^2})$$

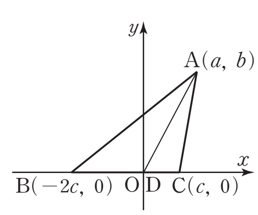
또, $\overline{AM}^2=a^2+b^2$, $\overline{BM}^2=c^2$이므로

$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=\boxed{(나)\ a^2+b^2+c^2}$

$\therefore\ \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 답 (가) c (나) $a^2+b^2+c^2$

참고 이를 파푸스(Pappos)의 정리(중선정리)라 한다.

1042



오른쪽 그림과 같이 변 BC를 x축 위에 놓고 $\overline{BD}=2\overline{CD}$인 점 D를 원점 O가 되도록 좌표평면을 잡는다.

이때, △ABC의 세 꼭짓점의 좌표를 각각 $A(a,\ b)$, $B(\boxed{(가)\ -2c},\ 0)$, $C(c,\ 0)$이라 하면

$\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=\{(a+2c)^2+b^2\}+2\{(a-c)^2+b^2\}$

$=(a^2+4ac+4c^2+b^2)+2(a^2-2ac+c^2+b^2)$

$=3a^2+3b^2+6c^2$

$=3(\boxed{(나)\ a^2+b^2+2c^2})$

또, $\overline{AD}^2=a^2+b^2$, $\overline{CD}^2=c^2$이므로

$\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2=\boxed{(나)\ a^2+b^2+2c^2}$

$\therefore \overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=3(\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2)$ 답 (가) $-2c$ (나) $a^2+b^2+2c^2$

1043

|전략| 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$에 대하여 $\overline{AB}$를 $m:n(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q, 중점을 M이라 하면

$P\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$, $Q\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \dfrac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$ (단, $m\neq n$),

$M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점은

$P\left(\dfrac{3\cdot1+2\cdot(-4)}{3+2},\ \dfrac{3\cdot(-3)+2\cdot7}{3+2}\right)$, 즉 $P(-1,\ 1)$

선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점은

$Q\left(\dfrac{3\cdot1-2\cdot(-4)}{3-2},\ \dfrac{3\cdot(-3)-2\cdot7}{3-2}\right)$, 즉 $Q(11,\ -23)$

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-1+11}{2},\ \dfrac{1+(-23)}{2}\right)$, 즉 $(5,\ -11)$ 답 $(5,\ -11)$

1044

선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점의 좌표가 $(-6,\ b)$이므로

$\dfrac{1\cdot a-2\cdot(-1)}{1-2}=-6$, $\dfrac{1\cdot(-6)-2\cdot2}{1-2}=b$ $\quad\therefore a=4,\ b=10$

$\therefore ab=40$ 답 ⑤

1045

$\overline{AB}$를 $3:1$로 내분하는 점의 좌표가 $(0,\ 0)$이므로

$\dfrac{3\cdot(b+1)+1\cdot3}{3+1}=0$, $\dfrac{3\cdot(-1)+1\cdot(a+1)}{3+1}=0$

$3b+6=0$, $a-2=0$

$\therefore a=2,\ b=-2$ ··· ❶

즉, $B(-1,\ -1)$, $C(4,\ -2)$ ··· ❷

$\overline{BC}$를 $4:3$으로 외분하는 점의 좌표가 $(x,\ y)$이므로

$x=\dfrac{4\cdot4-3\cdot(-1)}{4-3}=19$, $y=\dfrac{4\cdot(-2)-3\cdot(-1)}{4-3}=-5$ ··· ❸

$\therefore x-y=24$ ··· ❹

답 24

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 두 점 B, C의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸ x, y의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $x-y$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1046

선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{m\cdot(-2)-n\cdot1}{m-n},\ \dfrac{m\cdot6-n\cdot(-3)}{m-n}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{-2m-n}{m-n},\ \dfrac{6m+3n}{m-n}\right)$

이 점이 $(-5,\ 15)$와 같으므로

$\dfrac{-2m-n}{m-n}=-5$, $\dfrac{6m+3n}{m-n}=15$에서 $m=2n$

$\therefore m:n=2:1$

따라서 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\cdot(-2)+1\cdot1}{2+1},\ \dfrac{2\cdot6+1\cdot(-3)}{2+1}\right)$, 즉 $(-1,\ 3)$ 답 $(-1,\ 3)$

1047

점 A를 원점, 직선 AB를 x축으로 하는 새로운 좌표평면에 대하여 $A(0,\ 0)$, $B(b,\ 0)(b>0)$이라 하면

선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점은

$P\left(\dfrac{2\cdot b+3\cdot0}{2+3},\ \dfrac{0}{2+3}\right)$, 즉 $P\left(\dfrac{2b}{5},\ 0\right)$

선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점은

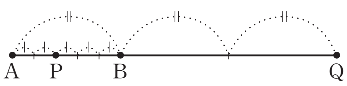
$Q\left(\dfrac{3\cdot b-2\cdot0}{3-2},\ \dfrac{0}{3-2}\right)$, 즉 $Q(3b,\ 0)$

이때, $\overline{PQ}=13$이므로 $\sqrt{\left(3b-\dfrac{2b}{5}\right)^2}=13$에서

$\left(\dfrac{13b}{5}\right)^2=13^2$, $b^2=25$ $\quad\therefore b=5\ (\because b>0)$

$\therefore \overline{AB}=5$ 답 5

다른 풀이



위의 그림에서 $\overline{PQ}=13$이므로 $\overline{AB}=5$이다.

1048

$3\overline{AB}=2\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=2:3$

이때, $a>0$이므로 직선 AB 위의 세 점 A, B, C는 이 순서대로 놓여 있고, 점 C는 선분 AB를 $5:3$으로 외분하는 점이다.

$a=\dfrac{5\cdot4-3\cdot(-2)}{5-3}=13$, $b=\dfrac{5\cdot1-3\cdot(-1)}{5-3}=4$

$\therefore a+b=17$ 답 17

다른 풀이 $3\overline{AB}=2\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=2:3$

이때, $a>0$이므로 점 B는 $\overline{AC}$를 $2:3$으로 내분하는 점이다.

즉, $\dfrac{2a+3\cdot(-2)}{2+3}=4$, $\dfrac{2b+3\cdot(-1)}{2+3}=1$에서

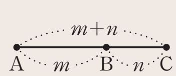
$2a-6=20$, $2b-3=5$ $\quad\therefore a=13,\ b=4$

$\therefore a+b=17$

Lecture

등식을 만족시키는 선분의 연장선 위의 점 구하기

$\overline{AB}$의 연장선 위에 $n\overline{AB}=m\overline{BC}(m>0,\ n>0)$가 되도록 점 C를 잡으면



(1) 점 B는 $\overline{AC}$를 $m:n$으로 내분하는 점이다.

(2) 점 C는 $\overline{AB}$를 $(m+n):n$으로 외분하는 점이다.

10 평면좌표

1049

|전략| 점 $P(a,\ b)$를 구한 후 이 점이 제1사분면 위의 점이므로 $a>0$, $b>0$임을 이용하여 t의 값의 범위를 구한다.

$t:(1-t)$에서 $t>0$, $1-t>0$

$\therefore 0<t<1$ …… ㉠

$P(a,\ b)$라 하면

$$a=\frac{t\cdot 6+(1-t)\cdot(-3)}{t+(1-t)}=9t-3$$

$$b=\frac{t\cdot 3+(1-t)\cdot 5}{t+(1-t)}=-2t+5$$

이때, 점 P가 제1사분면 위에 있으므로 $a>0$, $b>0$이다.

즉, $9t-3>0$, $-2t+5>0$에서 $\frac{1}{3}<t<\frac{5}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 t의 값의 범위는 $\frac{1}{3}<t<1$

답 $\frac{1}{3}<t<1$

1050

선분 AB를 $m:3$으로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{m\cdot 3-3\cdot 1}{m-3},\ \frac{m\cdot 4-3\cdot 1}{m-3}\right)$, 즉 $\left(\frac{3m-3}{m-3},\ \frac{4m-3}{m-3}\right)$

이 점이 직선 $y=x+4$ 위에 있으므로

$\frac{4m-3}{m-3}=\frac{3m-3}{m-3}+4$, $\frac{m}{m-3}=4$

$m=4m-12$, $3m=12$ $\quad\therefore m=4$

답 ③

1051

선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{m\cdot 3+n\cdot(-1)}{m+n},\ \frac{m\cdot(-1)+n\cdot(-4)}{m+n}\right)$

즉, $\left(\frac{3m-n}{m+n},\ \frac{-m-4n}{m+n}\right)$ … ❶

이 점이 y축 위에 있으므로 $\frac{3m-n}{m+n}=0$

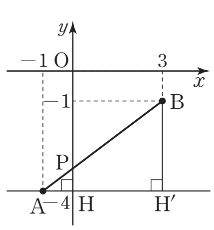
$3m-n=0$ $\quad\therefore n=3m$ … ❷

따라서 $m:n=1:3$이므로 이를 만족시키는 서로소인 두 자연수 m, n은 $m=1$, $n=3$ … ❸

답 $m=1$, $n=3$

채점 기준	비율
❶ 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ m과 n 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❸ m, n의 값을 구할 수 있다.	30 %

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 선분 AB와 y축이 만나는 점을 P라 하고, 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 y축과 만나는 점을 H, 점 B에서 직선 AH에 내린 수선의 발을 H′이라 하자.



$\overline{PH}\,/\!/\,\overline{BH'}$이므로

$\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{AH}:\overline{HH'}$

$\therefore m:n=1:3$

이때, m, n은 서로소인 자연수이므로 $m=1$, $n=3$

1052

|전략| 세 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$에 대하여 $\triangle ABC$의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$임을 이용한다.

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(2,\ -2)$이므로

$\frac{a+(-b-2)+5}{3}=2$, $\frac{-3+(2a+3)+b}{3}=-2$

$\therefore a-b=3$, $2a+b=-6$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-4$

$\therefore ab=4$

답 4

1053

$\overline{BC}$의 중점을 $M(x,\ y)$라 하면 삼각형 ABC의 무게중심은 $\overline{AM}$을 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\frac{2\cdot x+1\cdot 2}{2+1}=4$, $\frac{2\cdot y+1\cdot 5}{2+1}=3$ $\quad\therefore x=5$, $y=2$

$\therefore M(5,\ 2)$

답 ②

다른 풀이 $\overline{BC}$의 중점을 $M(x,\ y)$, 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면 점 M은 $\overline{AG}$를 $3:1$로 외분하는 점이므로

$x=\frac{3\cdot 4-1\cdot 2}{3-1}=5$, $y=\frac{3\cdot 3-1\cdot 5}{3-1}=2$

$\therefore M(5,\ 2)$

1054

$B(a,\ b)$라 하면 $\overline{AB}$의 중점의 좌표가 $(-1,\ -1)$이므로

$\frac{-3+a}{2}=-1$, $\frac{-5+b}{2}=-1$ $\quad\therefore a=1$, $b=3$

$\therefore B(1,\ 3)$

$C(c,\ d)$라 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(1,\ -2)$이므로

$\frac{-3+1+c}{3}=1$, $\frac{-5+3+d}{3}=-2$ $\quad\therefore c=5$, $d=-4$

$\therefore C(5,\ -4)$

$\overline{BC}$를 $1:2$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot 5-2\cdot 1}{1-2},\ \frac{1\cdot(-4)-2\cdot 3}{1-2}\right)$, 즉 $(-3,\ 10)$

따라서 $p=-3$, $q=10$이므로

$p+q=7$

답 7

1055

세 백화점의 위치를 각각 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$이라 하고 물류창고의 위치를 $P(x,\ y)$라 하면

$$\begin{aligned}&\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2\\&=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2\\&=3x^2-2(x_1+x_2+x_3)x+x_1^2+x_2^2+x_3^2\\&\qquad+3y^2-2(y_1+y_2+y_3)y+y_1^2+y_2^2+y_3^2\\&=3\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2-\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3}+x_1^2+x_2^2+x_3^2\\&\qquad+3\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2-\frac{(y_1+y_2+y_3)^2}{3}+y_1^2+y_2^2+y_3^2\end{aligned}$$

따라서 운반비용이 최소가 되는 물류창고의 위치는

$P\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$이므로 △ABC의 무게중심이다.

답 ③

Lecture

△ABC에서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 값이 최소가 되는 점 P는 △ABC의 무게중심이다.

1056

삼각형 PQR의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치하므로

$a=\frac{-3+(-2)+5}{3}=0,\ b=\frac{-3+4+8}{3}=3$

$\therefore a-b=-3$

답 ①

다른 풀이 세 점 P, Q, R의 좌표를 각각 구해 보면

$P\left(\frac{2\cdot(-2)+1\cdot(-3)}{2+1}, \frac{2\cdot4+1\cdot(-3)}{2+1}\right)$, 즉 $P\left(-\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right)$

$Q\left(\frac{2\cdot5+1\cdot(-2)}{2+1}, \frac{2\cdot8+1\cdot4}{2+1}\right)$, 즉 $Q\left(\frac{8}{3}, \frac{20}{3}\right)$

$R\left(\frac{2\cdot(-3)+1\cdot5}{2+1}, \frac{2\cdot(-3)+1\cdot8}{2+1}\right)$, 즉 $R\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

삼각형 PQR의 무게중심의 좌표가 (a, b)이므로

$a=\frac{-\frac{7}{3}+\frac{8}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)}{3}=0,\ b=\frac{\frac{5}{3}+\frac{20}{3}+\frac{2}{3}}{3}=3$

$\therefore a-b=-3$

1057

|전략| 평행사변형에서 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분함을 이용한다.

두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로

$\frac{-1+4}{2}=\frac{1+a}{2},\ \frac{2+1}{2}=\frac{0+b}{2}\qquad \therefore a=2, b=3$

$\therefore a+b=5$

답 ⑤

1058

$C(a, b)$, $D(c, d)$라 하면 두 대각선 AC와 BD의 교점은 두 대각선 AC, BD 각각의 중점과 일치한다. … ❶

대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2+a}{2}, \frac{3+b}{2}\right)$이므로

$\frac{2+a}{2}=\frac{7}{2},\ \frac{3+b}{2}=\frac{5}{2}\qquad \therefore a=5, b=2$

$\therefore C(5, 2)$ … ❷

대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{3+c}{2}, \frac{-1+d}{2}\right)$이므로

$\frac{3+c}{2}=\frac{7}{2},\ \frac{-1+d}{2}=\frac{5}{2}\qquad \therefore c=4, d=6$

$\therefore D(4, 6)$ … ❸

답 $C(5, 2)$, $D(4, 6)$

채점 기준	비율
❶ 두 꼭짓점 C, D의 좌표를 미지수를 이용하여 나타낼 수 있다.	20 %
❷ 점 C의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ 점 D의 좌표를 구할 수 있다.	40 %

1059

$B(a, b)$라 하면 변 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$이므로

$\frac{1+a}{2}=0,\ \frac{2+b}{2}=0\qquad \therefore a=-1,\ b=-2$

$\therefore B(-1, -2)$

$C(c, d)$라 하면 변 BC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-1+c}{2}, \frac{-2+d}{2}\right)$이므로

$\frac{-1+c}{2}=3,\ \frac{-2+d}{2}=-1\qquad \therefore c=7, d=0$

$\therefore C(7, 0)$

$D(x, y)$라 하면 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로

$\frac{1+7}{2}=\frac{-1+x}{2},\ \frac{2+0}{2}=\frac{-2+y}{2}\qquad \therefore x=9, y=4$

$\therefore D(9, 4)$

답 $D(9, 4)$

1060

두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로 두 중점의 x좌표가 같다.

$\frac{a+7}{2}=\frac{3+b}{2}\qquad \therefore b=a+4$ …… ㉠

또, $\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(3-a)^2+(-1-3)^2=(7-3)^2+(4+1)^2$

$a^2-6a-16=0,\ (a+2)(a-8)=0$

$\therefore a=-2\ (\because a<0)$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $b=2$

$\therefore a+b=0$

답 0

1061

|전략| 각의 이등분선의 성질과 두 점 사이의 거리 공식을 이용한다.

$\overline{AB}=\sqrt{(-4-1)^2+(-7-5)^2}=13$

$\overline{AC}=\sqrt{(5-1)^2+(2-5)^2}=5$

$\overline{AD}$는 ∠A의 이등분선이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=13:5$

따라서 점 D는 $\overline{BC}$를 13 : 5로 내분하는 점이므로

$a=\frac{13\cdot5+5\cdot(-4)}{13+5}=\frac{5}{2},\ b=\frac{13\cdot2+5\cdot(-7)}{13+5}=-\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=2$

답 2

1062

$\overline{AO}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\overline{AB}=\sqrt{(7-3)^2+(1-4)^2}=5$

$\overline{AC}$는 ∠OAB의 이등분선이므로

$\overline{OC}:\overline{BC}=\overline{AO}:\overline{AB}=1:1$

따라서 점 C는 $\overline{OB}$의 중점이므로

$C\left(\frac{0+7}{2}, \frac{0+1}{2}\right)$, 즉 $C\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$

답 $C\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$

1063

$\overline{AB}=\sqrt{\{4-(-4)\}^2+(10-4)^2}=10$

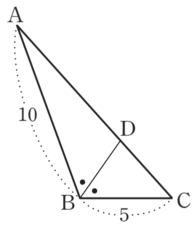
$\overline{BC}=\sqrt{(8-4)^2+(7-10)^2}=5$

$\overline{BD}$가 $\angle B$의 이등분선이므로

$\overline{AD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{BC}=2:1$

$\therefore \triangle DAB:\triangle DBC=\overline{AD}:\overline{DC}$

$=2:1$



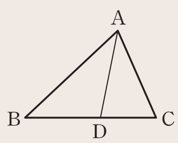
따라서 $p=2$, $q=1$이므로 $p+q=3$ 답 ③

Lecture

높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비

오른쪽 그림에서 $\triangle ABD$와 $\triangle ADC$는 각각 $\overline{BD}$와 $\overline{CD}$를 밑변으로 하고 높이가 같은 삼각형이므로

$\triangle ABD:\triangle ADC=\overline{BD}:\overline{CD}$



1064

|전략| 점 B의 좌표를 $(a,\ b)$, $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표를 $(x,\ y)$라 하고, a, b 사이의 관계식을 이용한다.

점 B의 좌표를 $(a,\ b)$, $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\dfrac{2a+4}{2+1}$, $y=\dfrac{2b+2}{2+1}$

$\therefore a=\dfrac{3x-4}{2}$, $b=\dfrac{3y-2}{2}$

이때, $b=2a+3$이므로

$\dfrac{3y-2}{2}=2\cdot\dfrac{3x-4}{2}+3 \qquad \therefore 2x-y=0$ 답 ①

1065

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overline{PA}^2=(x+2)^2+(y-1)^2$, $\overline{PB}^2=(x-4)^2+(y+3)^2$

이때, $\overline{PB}^2-\overline{PA}^2=16$이므로

$(x-4)^2+(y+3)^2-\{(x+2)^2+(y-1)^2\}=16$

$12x-8y-4=0 \qquad \therefore 3x-2y-1=0$ 답 $3x-2y-1=0$

1066

두 점 A, B로부터 같은 거리에 있는 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(x-2)^2+(y+2)^2=(x+1)^2+(y-3)^2$

$x^2-4x+y^2+4y+8=x^2+2x+y^2-6y+10$

$-6x+10y-2=0 \qquad \therefore 3x-5y+1=0$ 답 $3x-5y+1=0$

STEP 3 내신 마스터

1067

유형 **02** 같은 거리에 있는 점의 좌표

|전략| $\overline{AC}=\overline{BC}$일 때, $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이다.

$\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(-1-1)^2+(a-2)^2=(-1+2)^2+(a-3)^2$

$4+a^2-4a+4=1+a^2-6a+9$

$2a=2 \qquad \therefore a=1$ 답 ④

1068

유형 **02** 같은 거리에 있는 점의 좌표

|전략| 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점은 외심이므로 $\triangle ABC$의 외심을 $P(a,\ b)$라 하고, a, b 사이의 관계식을 구한다.

삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점은 외심이다.

즉, 점 $P(a,\ b)$가 삼각형 ABC의 외심이므로 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a+2)^2+b^2=(a-4)^2+b^2$

$a^2+4a+4+b^2=a^2-8a+16+b^2$

$\therefore a=1$ …… ㉠

또, $\overline{BP}=\overline{CP}$에서 $\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$(a-4)^2+b^2=a^2+(b-3)^2$

$a^2-8a+16+b^2=a^2+b^2-6b+9$

$\therefore -8a+6b=-7$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $b=\dfrac{1}{6}$

$\therefore a+b=\dfrac{7}{6}$ 답 ③

1069

유형 **04** 거리의 합의 최솟값

|전략| $A(a,\ b)$, $B(1,\ 0)$, $C(0,\ 1)$이라 하고, 주어진 식이 무엇을 나타내는지 생각해 본다.

$A(a,\ b)$, $B(1,\ 0)$, $C(0,\ 1)$이라 하면

$\sqrt{(a-1)^2+b^2}=\overline{AB}$, $\sqrt{a^2+(b-1)^2}=\overline{AC}$이므로

$\sqrt{(a-1)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(b-1)^2}=\overline{AB}+\overline{AC}$

$\geq\overline{BC}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{2}$이다. 답 ②

1070

유형 **05** 거리의 제곱의 합의 최솟값

|전략| $P(a,\ 0)\ (0\leq a\leq 7)$이라 하고, $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$을 a에 대한 식으로 나타낸다.

$P(a,\ 0)\ (0\leq a\leq 7)$이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(a-8)^2+(0-4)^2+a^2$

$=2a^2-16a+80$

$=2(a-4)^2+48$

즉, $a=4$일 때 주어진 식의 최솟값은 48이다.

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소일 때, 점 P의 좌표는 $(4,\ 0)$이므로

$\overline{BP}=4$, $\overline{CP}=3$

$\therefore \overline{BP}:\overline{CP}=4:3$ 답 ②

1071

유형 07 선분의 내분점과 외분점

|전략| 점 C는 점 B의 방향으로 그은 연장선 위에 있으므로 점 B가 $\overline{AC}$를 $3:2$로 내분하는 점임을 이용한다.

$2\overline{AB}=3\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:2$

이때, 점 C는 점 B의 방향으로 그은 연장선 위에 있으므로 점 B는 $\overline{AC}$를 $3:2$로 내분하는 점이다.

$a=\dfrac{3\cdot(-4)+2\cdot1}{3+2}=-2$, $b=\dfrac{3\cdot(-3)+2\cdot2}{3+2}=-1$

$\therefore a+b=-3$ 답 ①

다른 풀이 $2\overline{AB}=3\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:2$이므로

$\overline{AC}:\overline{BC}=5:2$

즉, 점 C는 $\overline{AB}$를 $5:2$로 외분하는 점이므로

$\dfrac{5\cdot a-2\cdot1}{5-2}=-4$, $\dfrac{5\cdot b-2\cdot2}{5-2}=-3$

$5a-2=-12$, $5b-4=-9$

$\therefore a=-2$, $b=-1$

$\therefore a+b=-3$

1072

유형 07 선분의 내분점과 외분점

|전략| $P*Q$는 $\overline{PQ}$를 $1:2$로 내분하는 점임을 이용한다.

$A*B$는 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이므로 $A*B$의 좌표는

$\left(\dfrac{1\cdot3+2\cdot(-3)}{1+2}, \dfrac{1\cdot4+2\cdot1}{1+2}\right)$, 즉 $(-1, 2)$

따라서 $(A*B)*C$는 $(-1, 2)*(5, -4)$와 같으므로

$(A*B)*C$의 좌표는

$\left(\dfrac{1\cdot5+2\cdot(-1)}{1+2}, \dfrac{1\cdot(-4)+2\cdot2}{1+2}\right)$, 즉 $(1, 0)$ 답 ④

1073

유형 08 선분의 내분점과 외분점 – 조건이 주어진 경우

|전략| $\overline{AB}$를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표를 구한 후, 이 점이 직선 $x+y=1$ 위의 점임을 이용하여 m, n 사이의 관계식을 구한다.

두 점 $A(-1, 0)$, $B(3, 4)$를 이은 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{m\cdot3+n\cdot(-1)}{m+n}, \dfrac{m\cdot4+n\cdot0}{m+n}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{3m-n}{m+n}, \dfrac{4m}{m+n}\right)$

이 점이 직선 $x+y=1$ 위의 점이므로

$\dfrac{3m-n}{m+n}+\dfrac{4m}{m+n}=1$

양변에 $m+n$을 곱하면

$7m-n=m+n$, $6m=2n$

$\therefore 3m=n$

따라서 $m:n=1:3$이므로 이를 만족시키는 서로소인 두 자연수 m, n은 $m=1$, $n=3$

$\therefore m+n=4$ 답 ②

1074

유형 09 삼각형의 무게중심

|전략| 두 점 $B(a, b)$, $C(c, d)$라 하고, $\overline{BC}$의 중점의 좌표를 이용하여 $\triangle ABC$의 무게중심의 좌표를 구한다.

$B(a, b)$, $C(c, d)$라 하면 $\overline{BC}$의 중점의 좌표가 $(-2, -5)$이므로

$\dfrac{a+c}{2}=-2$, $\dfrac{b+d}{2}=-5$에서 $a+c=-4$, $b+d=-10$

이때, $\dfrac{1+a+c}{3}=\dfrac{1-4}{3}=-1$, $\dfrac{-2+b+d}{3}=\dfrac{-2-10}{3}=-4$

이므로 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는 $(-1, -4)$이다.

따라서 $x=-1$, $y=-4$이므로 $x+y=-5$ 답 ③

다른 풀이 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면 삼각형 ABC의 무게중심은 중선 AM을 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\left(\dfrac{2\cdot(-2)+1\cdot1}{2+1}, \dfrac{2\cdot(-5)+1\cdot(-2)}{2+1}\right)$, 즉 $(-1, -4)$

따라서 $x=-1$, $y=-4$이므로 $x+y=-5$

1075

유형 10 사각형에서 중점의 활용

|전략| 평행사변형에서 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분함을 이용한다.

평행사변형에서 두 대각선의 교점은 두 대각선의 중점과 일치한다.

대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{c+d}{2}, \dfrac{-4+6}{2}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{c+d}{2}, 1\right)$

이고, 이 점은 직선 $y=\dfrac{1}{2}x$ 위에 있으므로

$1=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{c+d}{2}$ $\qquad\therefore c+d=4$

또, 대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{a+6}{2}, \dfrac{b-2}{2}\right)$이고, 이것은 대각선 BD의 중점의 좌표 $(2, 1)$과 일치하므로

$\dfrac{a+6}{2}=2$, $\dfrac{b-2}{2}=1$ $\qquad\therefore a=-2$, $b=4$

$\therefore a+b+c+d=6$ 답 ④

1076

유형 10 사각형에서 중점의 활용

|전략| 마름모는 네 변의 길이가 같고, 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분함을 이용한다.

두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로

$\dfrac{5+7}{2}=\dfrac{a+b}{2}$, $\dfrac{1+3}{2}=\dfrac{-1+c}{2}$

$\therefore a+b=12$, $c=5$ …… ㉠

또, $\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(a-5)^2+(-1-1)^2=(7-a)^2+(3+1)^2$

$a^2-10a+29=a^2-14a+65$

$4a=36$ $\qquad\therefore a=9$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $b=3$

$\therefore a-b-c=1$ 답 ④

10 평면좌표

1077

유형 **12** 자취의 방정식 – 점의 자취

|전략| 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓고 주어진 식을 정리한다.

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{AP}^2+3\overline{BP}^2=4\overline{CP}^2$에서

$(x+2)^2+y^2+3\{x^2+(y+3)^2\}=4\{(x+1)^2+(y-2)^2\}$

$x^2+4x+4+y^2+3x^2+3y^2+18y+27$

$=4x^2+8x+4+4y^2-16y+16$

$\therefore\ 4x-34y-11=0$

답 ③

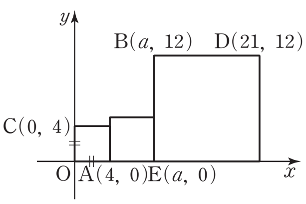
1078

유형 **01** 두 점 사이의 거리

|전략| 두 점 A, B의 좌표를 구한 후 두 점 사이의 거리 공식을 이용한다.

점 $C(0,\ 4)$이고, $\overline{OA}=\overline{OC}=4$이므로 $A(4,\ 0)$ ··· ❶

또, 오른쪽 그림과 같이 점 E를 잡고, 점 E의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면 $B(a,\ 12)$



이때, $\overline{BD}=\overline{BE}$이므로

$21-a=12\qquad \therefore\ a=9$

$\therefore\ B(9,\ 12)$ ··· ❷

따라서 두 점 $A(4,\ 0)$, $B(9,\ 12)$ 사이의 거리는

$\overline{AB}=\sqrt{(9-4)^2+(12-0)^2}=13$ ··· ❸

답 13

채점 기준	배점
❶ 점 A의 좌표를 구할 수 있다.	2점
❷ 점 B의 좌표를 구할 수 있다.	3점
❸ 두 점 A, B 사이의 거리를 구할 수 있다.	2점

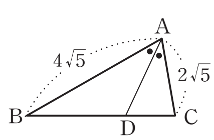
1079

유형 **11** 각의 이등분선의 성질

|전략| 각의 이등분선의 성질과 두 점 사이의 거리 공식을 이용한다.

$\overline{AB}=\sqrt{(-4-4)^2+(-3-1)^2}=4\sqrt{5}$

$\overline{AC}=\sqrt{(2-4)^2+(5-1)^2}=2\sqrt{5}$ ··· ❶



$\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=2:1$ ··· ❷

따라서 점 D는 $\overline{BC}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$D\left(\dfrac{2\cdot2+1\cdot(-4)}{2+1},\ \dfrac{2\cdot5+1\cdot(-3)}{2+1}\right)$

즉, $D\left(0,\ \dfrac{7}{3}\right)$ ··· ❸

답 $D\left(0,\ \dfrac{7}{3}\right)$

채점 기준	배점
❶ $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 길이를 구할 수 있다.	2점
❷ 각의 이등분선의 성질을 이용하여 $\overline{BD}:\overline{CD}$를 구할 수 있다.	3점
❸ 점 D의 좌표를 구할 수 있다.	2점

1080

유형 **03** 세 변의 길이와 삼각형의 모양

|전략| $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$의 길이를 구한 후 $\triangle ABC$의 세 변의 길이 사이의 관계를 알아본다.

(1) $\overline{AB}^2=(-1-3)^2+(-3-1)^2=32$

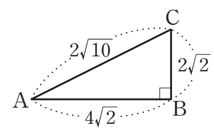
$\overline{BC}^2=(-3+1)^2+(-1+3)^2=8$

$\overline{CA}^2=(3+3)^2+(1+1)^2=40$

따라서 $\overline{CA}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$이므로 $\triangle ABC$는 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형이다.

(2) $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}=8$



답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 어떤 삼각형인지 구할 수 있다.	6점
(2) $\triangle ABC$의 넓이를 구할 수 있다.	4점

창의·융합 교과서 속 심화문제

1081

|전략| 방정식 $xy+x+y-1=0$을 만족시키는 정수 x, y를 구하고, 좌표평면 위의 점 $(x,\ y)$로 나타낸 사각형의 둘레의 길이를 구한다.

$xy+x+y-1=0$에서 $x(y+1)+(y+1)=2$

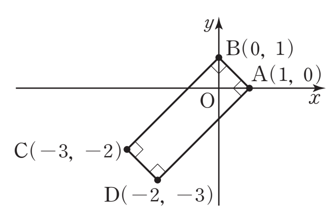
$\therefore\ (x+1)(y+1)=2$

이때, x, y는 정수이므로

$x+1$	-2	-1	1	2
$y+1$	-1	-2	2	1

$\therefore\ \begin{cases}x=-3\\y=-2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\\y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$

네 점 $A(1,\ 0)$, $B(0,\ 1)$, $C(-3,\ -2)$, $D(-2,\ -3)$을 꼭짓점으로 하는 사각형을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같고, □ABCD에서 $\overline{AB}=\overline{CD}$, $\overline{BC}=\overline{DA}$이므로 둘레의 길이는



$2(\overline{AB}+\overline{BC})=2\{\sqrt{(-1)^2+1^2}+\sqrt{(-3)^2+(-2-1)^2}\}$

$=2(\sqrt{2}+3\sqrt{2})=2\cdot4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

답 $8\sqrt{2}$

Lecture

부정방정식

(1) 정수 조건의 부정방정식은 (일차식)×(일차식)=(정수) 꼴로 변형하여 푼다.

(2) 실수 조건의 부정방정식은 $A^2+B^2=0 \Longleftrightarrow A=0,\ B=0$임을 이용하여 푼다.

1082

| 전략 | 평행선 사이의 선분의 길이의 비를 이용하여 두 선분 PB와 PC의 길이의 비를 구한다.

$A(0,\ 3),\ B(-5,\ -9),\ C(4,\ 0)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(-5-0)^2+(-9-3)^2}=13$

$\overline{AC}=\sqrt{(4-0)^2+(0-3)^2}=5$

$\overline{AD}=\overline{AC}=5$

선분 AP와 선분 DC가 평행하므로

$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{PB}:\overline{PC}=13:5$

즉, 점 P는 선분 BC를 13 : 5로 외분하는 점이다.

따라서 구하는 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{13\cdot 4-5\cdot(-5)}{13-5},\ \dfrac{13\cdot 0-5\cdot(-9)}{13-5}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{77}{8},\ \dfrac{45}{8}\right)$ 답 ⑤

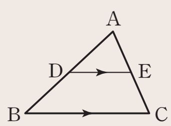
Lecture

평행선 사이의 선분의 길이의 비

△ABC에서 두 점 D, E가 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 위의 점일 때, $\overline{BC}\,/\!/\,\overline{DE}$이면

$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}=\overline{BC}:\overline{DE}$

$\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{AC}:\overline{EC}$

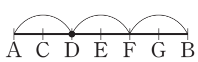


1083

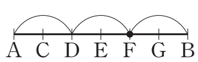
| 전략 | $\overline{AB}$를 6등분한 점을 차례로 C, D, E, F, G로 놓고 연산 △, ＊, ◎의 결과가 나타내는 점을 조사한다.

선분 AB를 6등분한 점을 차례로 C, D, E, F, G라 하면

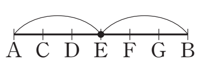
A△B=D=B＊A



A＊B=F=B△A



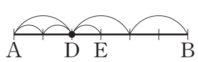
A◎B=E=B◎A



이므로

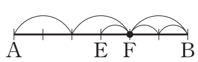
ㄱ. A＊(A◎B)

=A＊E=D=A△B



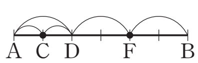
ㄴ. (A◎B)△B

=E△B=F=A＊B



ㄷ. (B＊A)◎A=D◎A=C

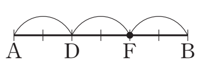
B△A=F



∴ (B＊A)◎A≠B△A

ㄹ. B◎(A△B)

=B◎D=F=B△A



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

1084

| 전략 | $\overline{AB}$, $\overline{AC}$를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표를 구하고, 이 점들이 y축, x축 위의 점임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

$\overline{AB}$를 $m:n$으로 내분하는 점을 P라 하면 점 P의 좌표는

$P\left(\dfrac{-m+na}{m+n},\ \dfrac{m+nb}{m+n}\right)$

조건 (나)에 의하여 점 P가 y축 위의 점이므로

$\dfrac{-m+na}{m+n}=0$

$\therefore m=na$ …… ㉠

$\overline{AC}$를 $m:n$으로 내분하는 점을 Q라 하면 점 Q의 좌표는

$Q\left(\dfrac{2m+na}{m+n},\ \dfrac{-2m+nb}{m+n}\right)$

조건 (나)에 의하여 점 Q가 x축 위의 점이므로

$\dfrac{-2m+nb}{m+n}=0$

$\therefore 2m=nb$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $2\cdot na=nb$

$n(2a-b)=0$

이때, n은 자연수이므로 $2a-b=0$ $\quad\therefore 2a=b$ …… ㉢

조건 (가)와 ㉢을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는

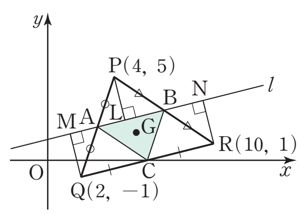
$(1,\ 2),\ (2,\ 4),\ (3,\ 6),\ (4,\ 8),\ (5,\ 10),\ (6,\ 12),\ (7,\ 14)$

따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 점 A는 7개이다. 답 7

1085

| 전략 | 세 점 P, Q, R에서 직선 l에 이르는 거리가 같음을 이용하여 두 점 A, B의 좌표를 구하고, 점 C가 $\overline{QR}$의 중점임을 이용하여 점 C의 좌표를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 세 점 P, Q, R에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 L, M, N이라 하자.



△PLA≡△QMA(ASA 합동)이므로

$\overline{PA}=\overline{QA}$

따라서 점 A는 $\overline{PQ}$의 중점이므로

$A\left(\dfrac{4+2}{2},\ \dfrac{5-1}{2}\right)$ $\quad\therefore A(3,\ 2)$

같은 방법으로 △PLB≡△RNB (ASA 합동)이므로

$\overline{PB}=\overline{RB}$

따라서 점 B는 $\overline{PR}$의 중점이므로

$B\left(\dfrac{4+10}{2},\ \dfrac{5+1}{2}\right)$ $\quad\therefore B(7,\ 3)$

또, 점 C는 $\overline{QR}$의 중점이므로

$C\left(\dfrac{2+10}{2},\ \dfrac{-1+1}{2}\right)$ $\quad\therefore C(6,\ 0)$

△ABC의 무게중심의 좌표가 $G(x,\ y)$이므로

$G\left(\dfrac{3+7+6}{3},\ \dfrac{2+3+0}{3}\right)$ $\quad\therefore G\left(\dfrac{16}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$

따라서 $x=\dfrac{16}{3}$, $y=\dfrac{5}{3}$이므로 $x+y=7$ 답 7

다른 풀이 세 점 A, B, C는 각각 세 선분 PQ, PR, QR의 중점이므로 △ABC의 무게중심은 △PQR의 무게중심과 일치한다.

이때, △ABC의 무게중심의 좌표가 $G(x,\ y)$이므로

$G\left(\dfrac{4+2+10}{3},\ \dfrac{5-1+1}{3}\right)$ $\quad\therefore G\left(\dfrac{16}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$

따라서 $x=\dfrac{16}{3}$, $y=\dfrac{5}{3}$이므로 $x+y=7$

10 평면좌표

본책 174~187쪽

11 | 직선의 방정식

STEP 1 개념 마스터

1086
$y-1=3(x-2)$ $\quad\therefore y=3x-5$ 답 $y=3x-5$

1087
x축에 평행한 직선이므로 $y=-4$ 답 $y=-4$

1088
y축에 평행한 직선이므로 $x=5$ 답 $x=5$

1089
$y-(-2)=\dfrac{4-(-2)}{4-1}(x-1)$ $\quad\therefore y=2x-4$ 답 $y=2x-4$

1090
$y-5=\dfrac{-4-5}{2-(-1)}\{x-(-1)\}$ $\quad\therefore y=-3x+2$

답 $y=-3x+2$

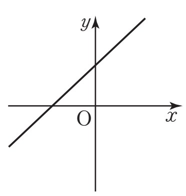
1091
$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-6}=1$ $\quad\therefore y=3x-6$ 답 $y=3x-6$

1092
(1) $ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$

$a>0,\ b<0,\ c>0$이므로

(기울기)$=-\dfrac{a}{b}>0$, (y절편)$=-\dfrac{c}{b}>0$

따라서 직선 $ax+by+c=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 2, 3 사분면을 지난다.

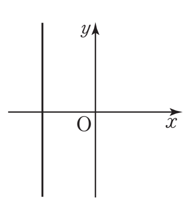


(2) $ax+by+c=0$에서 $b=0$이므로

$ax+c=0$ $\quad\therefore x=-\dfrac{c}{a}$

$a<0,\ c<0$이므로 $-\dfrac{c}{a}<0$

따라서 직선 $ax+by+c=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제 2, 3 사분면을 지난다.



답 (1) 제 1, 2, 3 사분면 (2) 제 2, 3 사분면

1093
$\dfrac{1}{1}=\dfrac{-3}{-3}\neq\dfrac{2}{-1}$이므로 두 직선은 평행하다. 답 평행하다.

1094
$\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{-1}{-2}$이므로 두 직선은 일치한다. 답 일치한다.

1095
$4\cdot2+2\cdot(-4)=0$이므로 두 직선은 수직이다. 답 수직이다.

1096
(1) 두 직선이 평행하려면

$2=m-1$ $\quad\therefore m=3$

(2) 두 직선이 수직이려면

$2\cdot(m-1)=-1$ $\quad\therefore m=\dfrac{1}{2}$

답 (1) 3 (2) $\dfrac{1}{2}$

1097
(1) 두 직선이 평행하려면

$\dfrac{a}{1}=\dfrac{2}{a+1}\neq\dfrac{-1}{-1}$ …… ㉠

$a^2+a=2,\ a^2+a-2=0$

$(a+2)(a-1)=0$ $\quad\therefore a=-2$ 또는 $a=1$

㉠에서 $a\neq1$이므로 $a=-2$

(2) 두 직선이 일치하려면

$\dfrac{a}{1}=\dfrac{2}{a+1}=\dfrac{-1}{-1}$ $\quad\therefore a=1$

(3) 두 직선이 수직이려면

$a\cdot1+2\cdot(a+1)=0$ $\quad\therefore a=-\dfrac{2}{3}$

답 (1) -2 (2) 1 (3) $-\dfrac{2}{3}$

1098
직선 $y=-4x+5$에 평행한 직선의 기울기는 -4이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-2=-4(x-1)$ $\quad\therefore y=-4x+6$ 답 $y=-4x+6$

1099
$x+2y-4=0$에서 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 2이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-(-7)=2(x-5)$ $\quad\therefore y=2x-17$ 답 $y=2x-17$

1100
주어진 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+y-4=0,\ 2x-y+1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=3$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(1,\ 3)$이다. 답 $(1,\ 3)$

1101

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+2y+6)k+(x+2)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+2y+6=0$, $x+2=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=-2$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-2,\ -2)$이다. 답 $(-2,\ -2)$

1102

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$(x-y-9)+k(3x+2y+3)=0$ (k는 실수) …… ㉠

으로 놓으면 이 직선이 원점을 지나므로

$-9+3k=0 \quad \therefore k=3$

$k=3$을 ㉠에 대입하면

$x-y-9+9x+6y+9=0 \quad \therefore y=-2x$ 답 $y=-2x$

1103

$\dfrac{|1\cdot1+1\cdot3-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ 답 $\sqrt{2}$

1104

$\dfrac{|3\cdot(-2)-4\cdot4+2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{20}{5}=4$ 답 4

1105

$\dfrac{|-10|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$ 답 $2\sqrt{5}$

1106

두 직선 $x+y-2=0$, $x+y+6=0$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $x+y-2=0$ 위의 한 점 $(0,\ 2)$와 직선 $x+y+6=0$ 사이의 거리와 같다.

$\therefore \dfrac{|0+2+6|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$ 답 $4\sqrt{2}$

STEP 2 유형 마스터

1107

| 전략 | 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y-y_1=m(x-x_1)$이다.

두 점 $(2,\ 7)$, $(3,\ 1)$을 이은 선분의 중점 $\left(\dfrac{2+3}{2},\ \dfrac{7+1}{2}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{5}{2},\ 4\right)$를 지나고 기울기가 4인 직선의 방정식은

$y-4=4\left(x-\dfrac{5}{2}\right) \quad \therefore 4x-y-6=0$

따라서 $a=4$, $b=-6$이므로 $ab=-24$ 답 ①

1108

x절편이 3이므로 점 $(3,\ 0)$을 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y-0=-2(x-3) \quad \therefore y=-2x+6$ 답 $y=-2x+6$

1109

$-2x+y-1=0$에서 $y=2x+1$

즉, 직선 $ax+(b-1)y+3=0$은 기울기가 2이고 점 $(-1,\ 1)$을 지나는 직선이므로

$y-1=2\{x-(-1)\}$, $y=2x+3$

$\therefore 2x-y+3=0$

따라서 $a=2$, $b-1=-1$이므로 $a=2$, $b=0$

$\therefore a+b=2$ 답 2

1110

점 $(2,\ 1)$을 지나고 기울기가 $\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$인 직선의 방정식은

$y-1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-2) \quad \therefore \sqrt{3}x-3y+3-2\sqrt{3}=0$

따라서 $a=3$, $b=3-2\sqrt{3}$이므로

$a+b=6-2\sqrt{3}$ 답 ②

1111

| 전략 | 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은 $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$이다. (단, $x_1\neq x_2$)

두 점 $(1,\ 1)$, $(3,\ -7)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\dfrac{-7-1}{3-1}(x-1) \quad \therefore y=-4x+5$

두 점 $(4,\ a)$, $(b,\ 9)$가 직선 $y=-4x+5$ 위의 점이므로

$a=-16+5=-11$, $9=-4b+5$에서 $b=-1$

$\therefore a-b=-10$ 답 -10

1112

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$G\left(\dfrac{-1+(-5)+3}{3},\ \dfrac{2+(-2)+0}{3}\right)$, 즉 $G(-1,\ 0)$

따라서 직선 BG의 방정식은

$y-0=\dfrac{0-(-2)}{-1-(-5)}\{x-(-1)\} \quad \therefore y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

답 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

1113

선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{3\cdot3+2\cdot(-2)}{3+2},\ \dfrac{3\cdot6+2\cdot1}{3+2}\right)$, 즉 $(1,\ 4)$ … ❶

두 점 $(1,\ 4)$, $(-3,\ -4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\dfrac{-4-4}{-3-1}(x-1) \quad \therefore y=2x+2$ … ❷

따라서 $a=2$, $b=2$이므로 $a^2+b^2=8$ … ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$를 $3:2$로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❸ a, b의 값을 구하고, a^2+b^2의 값을 계산할 수 있다.	10 %

1114

직선 AC의 방정식은

$y-4=\frac{-2-4}{4-2}(x-2)$ $\quad\therefore y=-3x+10$ ······ ㉠

직선 OB의 방정식은 $y=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\frac{10}{3}$, $y=0$

따라서 두 대각선의 교점의 좌표는 $\left(\frac{10}{3},\ 0\right)$이다. 답 $\left(\frac{10}{3},\ 0\right)$

1115

| 전략 | x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이다. (단, $ab\neq0$)

x절편을 a라 하면 y절편은 $-a$이므로 직선의 방정식은

$\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$ $\quad\therefore y=x-a$

이 직선이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로 $2=1-a$ $\quad\therefore a=-1$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=x+1$이다. 답 ③

1116

x절편이 -3, y절편이 -9인 직선의 방정식은

$\frac{x}{-3}+\frac{y}{-9}=1$ $\quad\therefore y=-3x-9$

이 직선이 점 $(a,\ 6)$을 지나므로

$6=-3a-9$ $\quad\therefore a=-5$ 답 -5

1117

| 전략 | 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 함을 이용한다.

두 점 $(2,\ 0)$, $(-3+a,\ 3)$을 지나는 직선의 기울기와 두 점 $(2,\ 0)$, $(6,\ a-1)$을 지나는 직선의 기울기가 같으므로

$\frac{3-0}{-3+a-2}=\frac{a-1-0}{6-2}$에서 $\frac{3}{a-5}=\frac{a-1}{4}$

$(a-1)(a-5)=12$ $\quad\therefore a^2-6a-7=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 a의 값의 곱은 -7이다.

답 ①

1118

직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기가 같으므로

$\frac{a-2}{3-1}=\frac{3-2}{-a-1}$에서 $-(a-2)(a+1)=2$

$a^2-a=0$, $a(a-1)=0$ $\quad\therefore a=1\ (\because a>0)$ ··· ❶

이때, 두 점 A$(1,\ 2)$, B$(3,\ 1)$을 지나는 직선 l의 방정식은

$y-2=\frac{1-2}{3-1}(x-1)$ $\quad\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ ··· ❷

따라서 직선 l의 y절편은 $\frac{5}{2}$이다. ··· ❸

답 $\frac{5}{2}$

채점 기준	비율
❶ 기울기를 이용하여 a에 대한 식을 세우고, a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ 직선 l의 y절편을 구할 수 있다.	20 %

1119

| 전략 | △ABC의 꼭짓점 A를 지나면서 그 넓이를 이등분하는 직선은 $\overline{BC}$의 중점을 지나야 함을 이용한다.

점 A를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 직선이 $\overline{BC}$의 중점을 지나야 한다.

$\overline{BC}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2+(-4)}{2},\ \frac{3+5}{2}\right)$, 즉 $(-1,\ 4)$이므로 두 점 $(1,\ -2)$, $(-1,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-(-2)=\frac{4-(-2)}{-1-1}(x-1)$ $\quad\therefore y=-3x+1$ 답 ②

1120

두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하려면 직선이 두 직사각형의 대각선의 교점을 모두 지나야 한다.

제 1 사분면 위에 있는 직사각형의 대각선의 교점의 좌표는

$\left(\frac{2+6}{2},\ \frac{3+5}{2}\right)$, 즉 $(4,\ 4)$

제 3 사분면 위에 있는 직사각형의 대각선의 교점의 좌표는

$\left(\frac{-2+0}{2},\ \frac{-2+(-4)}{2}\right)$, 즉 $(-1,\ -3)$

이때, 직선 $ax+by-8=0$이 두 점 $(4,\ 4)$, $(-1,\ -3)$을 지나므로

$4a+4b-8=0$, $-a-3b-8=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=7$, $b=-5$

$\therefore a-b=12$ 답 12

1121

△ABD와 △ACD의 넓이의 비가 3 : 2이므로 점 D는 $\overline{BC}$를 3 : 2로 내분하는 점이다.

D$\left(\frac{3\cdot4+2\cdot(-1)}{3+2},\ \frac{3\cdot(-3)+2\cdot2}{3+2}\right)$, 즉 D$(2,\ -1)$

따라서 두 점 A$(3,\ 3)$, D$(2,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{-1-3}{2-3}(x-3)$ $\quad\therefore y=4x-9$ 답 $y=4x-9$

1122

| 전략 | 직선 $ax+by+c=0$을 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ 꼴로 변형하고 기울기와 y절편의 부호를 알아본다.

$ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

$ac>0$, $bc>0$이므로 $ab>0$

따라서 (기울기)$=-\frac{a}{b}<0$, (y절편)$=-\frac{c}{b}<0$이므로 직선의 개형은 ③과 같다. 답 ③

1123

$ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

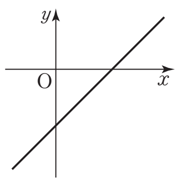
이 직선의 기울기는 음수이고 y절편은 양수이므로

$-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}>0$ $\quad\therefore ac<0$

$cx+ay+b=0$에서 $a\neq0$이므로 $y=-\frac{c}{a}x-\frac{b}{a}$

따라서 (기울기)$=-\frac{c}{a}>0$,

(y절편)$=-\frac{b}{a}<0$이므로 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같고 제 2 사분면을 지나지 않는다.



답 ②

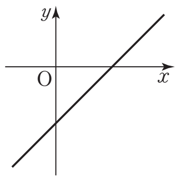
1124

$ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이면 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

ㄱ. $ac<0$, $bc>0$에서 $ab<0$이므로

(기울기)$=-\frac{a}{b}>0$, (y절편)$=-\frac{c}{b}<0$

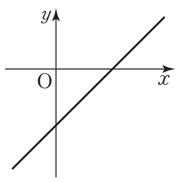
즉, 오른쪽 그림과 같이 제 1, 3, 4 사분면을 지난다.



ㄴ. $ab<0$, $ac<0$에서 $bc>0$이므로

(기울기)$=-\frac{a}{b}>0$, (y절편)$=-\frac{c}{b}<0$

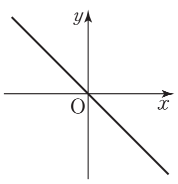
즉, 오른쪽 그림과 같이 제 1, 3, 4 사분면을 지난다.



ㄷ. $ab>0$에서 (기울기)$=-\frac{a}{b}<0$이고

$bc=0$에서 $\underbrace{c=0}_{ab>0\text{에서 } b\neq0}$

즉, 오른쪽 그림과 같이 제 2, 4 사분면을 지난다.



따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ③

1125

| 전략 | 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 평행하면 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$, 일치하면 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$이다.

두 직선 $(k+1)x+y-1=0$, $2x-(k-2)y-1=0$이 평행하거나 일치하려면

$\frac{k+1}{2}=\frac{1}{-k+2}$에서 $(k+1)(-k+2)=2$

$k^2-k=0$, $k(k-1)=0$ $\quad\therefore k=0$ 또는 $k=1$

(i) $k=0$일 때, $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq\frac{-1}{-1}$이므로 두 직선은 평행하다.

(ii) $k=1$일 때, $\frac{2}{2}=\frac{1}{1}=\frac{-1}{-1}$이므로 두 직선은 일치한다.

(i), (ii)에서 $a=0$, $b=1$이므로 $a-b=-1$ 답 ③

1126

두 직선 $ax-4y+1=0$, $(a-2)x+2y+3=0$이 서로 수직이려면

$a(a-2)+(-4)\cdot2=0$ $\quad\therefore a^2-2a-8=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 a의 값의 합은 2이다. 답 ③

1127

직선 $3x+ay-1=0$이 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$-3+2a-1=0$ $\quad\therefore a=2$

직선 $bx+cy-4=0$도 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$-b+2c-4=0$ $\quad\therefore b-2c=-4$ ...... ㉠

두 직선 $3x+2y-1=0$, $bx+cy-4=0$이 수직이므로

$3b+2c=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=-1$, $c=\frac{3}{2}$

$\therefore a+b+2c=4$ 답 4

1128

직선 $x+ay+1=0$과 직선 $2x-by+1=0$이 수직이므로

$1\cdot2+a\cdot(-b)=0$ $\quad\therefore ab=2$ ··· ❶

또, 직선 $x+ay+1=0$과 직선 $x-(b-3)y-1=0$이 평행하므로

$\frac{1}{1}=\frac{a}{-b+3}\neq\frac{1}{-1}$, $-b+3=a$ $\quad\therefore a+b=3$ ··· ❷

$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=3^3-3\cdot2\cdot3=9$ ··· ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ ab의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a^3+b^3의 값을 구할 수 있다.	20 %

1129

| 전략 | 두 직선이 평행하면 두 직선의 기울기는 같고, y절편이 다르다.

두 점 $(-2,\ 1)$, $(4,\ -1)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-1-1}{4-(-2)}=-\frac{1}{3}$

기울기가 $-\frac{1}{3}$이고 점 $(3,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=-\frac{1}{3}(x-3)$ $\quad\therefore x+3y-9=0$

따라서 $a=3$, $b=-9$이므로 $a-b=12$ 답 ⑤

1130

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{2-5}{4-1}=-1$이므로 구하는 직선의 기울기는 1이다.

$\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot4+2\cdot1}{1+2},\ \frac{1\cdot2+2\cdot5}{1+2}\right)$, 즉 $(2,\ 4)$

따라서 기울기가 1이고 점 $(2,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=x-2$ $\quad\therefore y=x+2$ 답 $y=x+2$

1131

직선 $2x-y-1=0$, 즉 $y=2x-1$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 점 $\mathrm{P}(-2,\ 5)$를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y-5=-\frac{1}{2}\{x-(-2)\}$ $\quad\therefore y=-\frac{1}{2}x+4$

이때, 점 H는 두 직선 $y=2x-1$, $y=-\frac{1}{2}x+4$의 교점이므로 두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=3$

$\therefore$ H$(2,\ 3)$ 답 ④

1132

$\angle$BAO$=\angle$ACO이므로

$\angle$BAC$=\angle$BAO$+\angle$CAO$=\angle$ACO$+\angle$CAO$=90^\circ$

즉, 두 직선 l_1, l_2는 서로 수직이다.

이때, 두 점 A$(0,\ 2)$, B$(-1,\ 0)$을 지나는 직선 l_2의 기울기는

$\frac{0-2}{-1-0}=2$이므로 직선 l_1의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

따라서 직선 l_1에 평행하고 점 $(3,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=-\frac{1}{2}(x-3)$ $\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}$ 답 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}$

1133

| 전략 | $\overline{\text{AB}}$의 수직이등분선은 $\overline{\text{AB}}$의 중점을 지나고, 직선 AB와 수직임을 이용한다.

$\overline{\text{AB}}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-1+3}{2},\ \frac{3+(-5)}{2}\right)$, 즉 $(1,\ -1)$

직선 AB의 기울기는 $\frac{-5-3}{3-(-1)}=-2$

따라서 $\overline{\text{AB}}$의 수직이등분선은 기울기가 $\frac{1}{2}$이고 점 $(1,\ -1)$을 지나므로 $y-(-1)=\frac{1}{2}(x-1)$ $\therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

이 직선이 점 $(5,\ a)$를 지나므로 $a=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=1$ 답 1

1134

직선 $3x+2y-6=0$, 즉 $y=-\frac{3}{2}x+3$의 x절편, y절편이 각각 2, 3이므로 양 끝점을 A$(2,\ 0)$, B$(0,\ 3)$이라 하면

$\overline{\text{AB}}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2+0}{2},\ \frac{0+3}{2}\right)$, 즉 $\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$

직선 AB의 기울기는 $-\frac{3}{2}$

따라서 $\overline{\text{AB}}$의 수직이등분선은 기울기가 $\frac{2}{3}$이고 점 $\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$을 지나므로 $y-\frac{3}{2}=\frac{2}{3}(x-1)$ $\therefore y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{6}$

이 직선이 점 $\left(\frac{1}{4},\ a\right)$를 지나므로

$a=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{5}{6}=1$ 답 ⑤

1135

$\overline{\text{AB}}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{3+1}{2},\ \frac{m+n}{2}\right)$, 즉 $\left(2,\ \frac{m+n}{2}\right)$

직선 $x-2y=0$이 이 점을 지나므로

$2-2\cdot\frac{m+n}{2}=0$ $\therefore m+n=2$ …… ㉠

직선 $x-2y=0$과 직선 AB는 수직이므로

$\frac{1}{2}\cdot\frac{n-m}{1-3}=-1$ $\therefore m-n=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=-1$, $n=3$

$\therefore mn=-3$ 답 ②

1136

(i) $\overline{\text{AC}}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-3+1}{2},\ \frac{-1+3}{2}\right)$, 즉 $(-1,\ 1)$

직선 AC의 기울기는 $\frac{3-(-1)}{1-(-3)}=1$

즉, $\overline{\text{AC}}$의 수직이등분선은 기울기가 -1이고 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로

$y-1=-\{x-(-1)\}$ $\therefore y=-x$ …… ㉠

(ii) $\overline{\text{BC}}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2+1}{2},\ \frac{2+3}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$

직선 BC의 기울기는 $\frac{3-2}{1-2}=-1$

즉, $\overline{\text{BC}}$의 수직이등분선은 기울기가 1이고 점 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$를 지나므로

$y-\frac{5}{2}=x-\frac{3}{2}$ $\therefore y=x+1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이다. 답 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

다른 풀이 삼각형 ABC의 세 변의 수직이등분선의 교점은 외심이고 외심을 P$(a,\ b)$라 하면 $\overline{\text{AP}}=\overline{\text{BP}}=\overline{\text{CP}}$가 성립한다.

$\overline{\text{AP}}=\overline{\text{BP}}$에서 $\overline{\text{AP}}^2=\overline{\text{BP}}^2$이므로

$(a+3)^2+(b+1)^2=(a-2)^2+(b-2)^2$

$a^2+6a+9+b^2+2b+1=a^2-4a+4+b^2-4b+4$

$\therefore 5a+3b=-1$ …… ㉠

또, $\overline{\text{BP}}=\overline{\text{CP}}$에서 $\overline{\text{BP}}^2=\overline{\text{CP}}^2$이므로

$(a-2)^2+(b-2)^2=(a-1)^2+(b-3)^2$

$a^2-4a+4+b^2-4b+4=a^2-2a+1+b^2-6b+9$

$\therefore a-b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$

$\therefore$ P$\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

1137

| 전략 | 서로 다른 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 세 직선이 모두 평행할 때, 두 직선이 평행할 때, 세 직선이 한 점에서 만날 때이다.

$x-y=0$ … ㉠, $x+y=2$ … ㉡, $5x-ky=15$ … ㉢이라 하자.

(i) 두 직선 ㉠, ㉢이 평행할 때

$\frac{1}{5}=\frac{-1}{-k}\neq\frac{0}{15}$ $\therefore k=5$

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 평행할 때

$\frac{1}{5}=\frac{1}{-k}\neq\frac{2}{15}$ $\therefore k=-5$

(iii) 직선 ㉢이 두 직선 ㉠, ㉡의 교점 $(1,\ 1)$을 지날 때

$5-k=15 \qquad \therefore k=-10$

(i), (ii), (iii)에서 모든 상수 k의 값의 합은

$5+(-5)+(-10)=-10$ 답 ④

1138

$x-2y+m+1=0$ ⋯㉠, $x-y-1=0$ ⋯㉡, $mx-2y+4=0$ ⋯㉢

이라 하자.

세 직선 ㉠, ㉡, ㉢이 한 점에서 만나려면 직선 ㉢이 두 직선 ㉠, ㉡의 교점을 지나야 한다.

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=m+3$, $y=m+2$

직선 ㉢이 점 $(m+3,\ m+2)$를 지나려면

$m(m+3)-2(m+2)+4=0$

$m^2+m=0$, $m(m+1)=0 \qquad \therefore m=-1$ 또는 $m=0$

따라서 모든 실수 m의 값의 합은 $-1+0=-1$ 답 ②

1139

서로 다른 세 직선 $ax+y-1=0$, $2x-y+3=0$, $x+by+1=0$에 의하여 좌표평면이 4개의 영역으로 나누어지려면 세 직선이 모두 평행해야 한다.

두 직선 $ax+y-1=0$, $2x-y+3=0$이 평행하려면

$\frac{a}{2}=\frac{1}{-1}\neq\frac{-1}{3} \qquad \therefore a=-2$

두 직선 $2x-y+3=0$, $x+by+1=0$이 평행하려면

$\frac{2}{1}=\frac{-1}{b}\neq\frac{3}{1} \qquad \therefore b=-\frac{1}{2}$

$\therefore ab=1$ 답 1

1140

| 전략 | 주어진 직선이 k의 값에 관계없이 일정한 점을 지나므로 주어진 식은 k에 대한 항등식이다.

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(3x+y-4)k+(x+y+2)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$3x+y-4=0$, $x+y+2=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=-5 \qquad \therefore \mathrm{P}(3,\ -5)$

따라서 점 $\mathrm{P}(3,\ -5)$와 원점 사이의 거리는

$\sqrt{3^2+(-5)^2}=\sqrt{34}$ 답 ②

1141

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x-y+2)k+(x+y+a)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x-y+2=0$, $x+y+a=0$

즉, 점 $(-3,\ b)$는 위의 두 직선의 교점이므로

$-3-b+2=0$, $-3+b+a=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-1$

$\therefore ab=-4$ 답 -4

1142

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x+y-3)k-(x-2y+1)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x+y-3=0$, $x-2y+1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=1 \qquad \therefore \mathrm{P}(1,\ 1)$

따라서 점 $\mathrm{P}(1,\ 1)$을 지나고 직선 $x=2y$, 즉 $y=\frac{1}{2}x$에 평행한 직선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{2}(x-1) \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 답 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

1143

직선 $2x-y=1$이 점 $(a,\ b)$를 지나므로

$2a-b=1 \qquad \therefore b=2a-1$

$b=2a-1$을 $ax+2by=-2$에 대입하면

$ax+2(2a-1)y=-2$

이 식을 a에 대하여 정리하면

$(x+4y)a-2y+2=0$

이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+4y=0$, $-2y+2=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-4$, $y=1$

따라서 직선 $ax+2by=-2$는 항상 점 $(-4,\ 1)$을 지난다. 답 ⑤

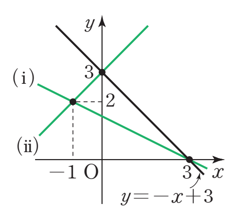
1144

| 전략 | 직선 $k(x-a)+y-b=0$은 k의 값에 관계없이 정점 $(a,\ b)$를 지난다.

$y=mx+m+2$에서 $m(x+1)-(y-2)=0$ ⋯⋯ ㉠

이 직선은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 2)$를 지난다.

오른쪽 그림과 같이 두 직선이 제 1 사분면에서 만나도록 직선 ㉠을 움직여 보면



(i) 직선 ㉠이 점 $(3,\ 0)$을 지날 때

$4m+2=0 \qquad \therefore m=-\frac{1}{2}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0,\ 3)$을 지날 때

$m-1=0 \qquad \therefore m=1$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는 $-\frac{1}{2}<m<1$

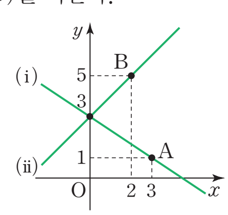
답 $-\frac{1}{2}<m<1$

1145

$y=mx+3$에서 $mx-(y-3)=0$ ⋯⋯ ㉠

이 직선은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 3)$을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 두 점 A, B 사이를 지나도록 움직여 보면



(i) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$을 지날 때

$3m+2=0 \qquad \therefore m=-\frac{2}{3}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{B}(2,\ 5)$를 지날 때

$2m-2=0 \qquad \therefore m=1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 직선 ㉠이 두 점 A, B 사이를 지나기 위한 m의 값의 범위는 $-\frac{2}{3}<m<1$

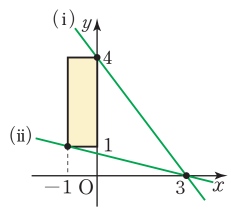
따라서 $a=-\frac{2}{3}$, $b=1$이므로 $a+b=\frac{1}{3}$ 답 ①

1146

$y=kx-3k$에서 $k(x-3)-y=0$ …… ㉠

이 직선은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(3,\ 0)$을 지난다. … ❶

오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 직사각형과 만나도록 움직여 보면



(ⅰ) 직선 ㉠이 점 $(0,\ 4)$를 지날 때

$-3k-4=0 \qquad \therefore k=-\frac{4}{3}$

(ⅱ) 직선 ㉠이 점 $(-1,\ 1)$을 지날 때

$-4k-1=0 \qquad \therefore k=-\frac{1}{4}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 직선 ㉠이 직사각형과 만나도록 하는 k의 값의 범위는

$-\frac{4}{3}\le k\le -\frac{1}{4}$ … ❷

따라서 $M=-\frac{1}{4}$, $m=-\frac{4}{3}$이므로 $Mm=\frac{1}{3}$ … ❸

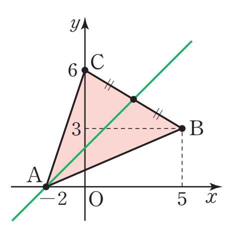
답 $\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ 직선 $y=kx-3k$가 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❷ 직선과 직사각형이 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
❸ M, m의 값을 구하여 Mm의 값을 계산할 수 있다.	20 %

1147

$kx-y+2k=0$에서

$k(x+2)-y=0$ …… ㉠



직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 0)$을 지난다.

이때, $A(-2,\ 0)$이므로 직선 ㉠이 △ABC의 넓이를 이등분하려면 직선 ㉠은 $\overline{BC}$의 중점을 지나야 한다.

$\overline{BC}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{5+0}{2},\ \frac{3+6}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{9}{2}\right)$

이므로 이를 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{5}{2}+2\right)k-\frac{9}{2}=0$, $\frac{9}{2}k-\frac{9}{2}=0 \qquad \therefore k=1$ 답 1

1148

| 전략 | 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$ (k는 실수)으로 놓는다.

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$(x-2y-4)+k(x+2y-4)=0$ (k는 실수)

으로 놓으면

$(k+1)x+(2k-2)y-4k-4=0$ …… ㉠

이 직선이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$k+1+(2k-2)\cdot 2-4k-4=0$

$k-7=0 \qquad \therefore k=7$

$k=7$을 ㉠에 대입하면 $8x+12y-32=0$

$\therefore 2x+3y-8=0$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로 $a^2+b^2=13$ 답 13

다른 풀이 두 직선 $x-2y-4=0$, $x+2y-4=0$의 교점의 좌표는 $(4,\ 0)$

두 점 $(4,\ 0)$, $(1,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-0=\frac{2-0}{1-4}(x-4) \qquad \therefore 2x+3y-8=0$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로 $a^2+b^2=13$

1149

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$(2x+y-7)+k(3x+2y-12)=0$ (k는 실수)

으로 놓으면

$(3k+2)x+(2k+1)y-12k-7=0$ …… ㉠ … ❶

이 직선이 직선 $8x+5y-2=0$에 평행하므로

$\frac{3k+2}{8}=\frac{2k+1}{5}\neq\frac{-12k-7}{-2}$

$15k+10=16k+8 \qquad \therefore k=2$ … ❷

$k=2$를 ㉠에 대입하면 $8x+5y-31=0$ … ❸

답 $8x+5y-31=0$

채점 기준	비율
❶ 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을 이용하여 ㉠을 구할 수 있다.	30 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 직선의 방정식을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 두 직선 $2x+y-7=0$, $3x+2y-12=0$의 교점의 좌표는 $(2,\ 3)$이고 직선 $8x+5y-2=0$의 기울기는 $-\frac{8}{5}$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-3=-\frac{8}{5}(x-2) \qquad \therefore 8x+5y-31=0$

1150

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$(x-2y+3)+k(2x+3y+a)=0$ (k는 실수)

으로 놓으면

$(2k+1)x+(3k-2)y+ak+3=0$ …… ㉠

이 직선이 직선 $8x-3y+4=0$에 수직이므로

$(2k+1)\cdot 8+(3k-2)\cdot(-3)=0$

$7k+14=0 \qquad \therefore k=-2$

$k=-2$를 ㉠에 대입하면 $-3x-8y-2a+3=0$

이 직선이 점 $(-5,\ 1)$을 지나므로

$15-8-2a+3=0 \qquad \therefore a=5$ 답 5

1151

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$(2x+3y+4)+k(x-y+6)=0$ (k는 실수)

으로 놓으면

$(2+k)x+(3-k)y+6k+4=0$ ······ ㉠

이 직선이 점 $(-5,\ 4)$를 지나므로

$(2+k)\cdot(-5)+(3-k)\cdot 4+6k+4=0$

$-3k+6=0 \qquad \therefore k=2$

$k=2$를 ㉠에 대입하면 $4x+y+16=0 \qquad \therefore y=-4x-16$

따라서 이 직선이 x축과 만나는 점은 $(-4,\ 0)$, y축과 만나는 점은 $(0,\ -16)$이므로 좌표축에 의하여 잘린 선분의 길이는

$\sqrt{4^2+(-16)^2}=4\sqrt{17}$ 답 ⑤

1152

| 전략 | 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용한다.

점 $(3,\ 1)$을 지나는 직선의 기울기를 m이라 하면

$y-1=m(x-3)$, 즉 $mx-y-3m+1=0$

이 직선과 원점 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\dfrac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $|-3m+1|=\sqrt{5(m^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면

$2m^2-3m-2=0$, $(2m+1)(m-2)=0$

$\therefore m=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $m=2$ 답 $-\dfrac{1}{2}$, 2

1153

직선 $y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}$에 수직인 직선의 기울기는 3이므로 구하는 직선의 방정식을 $y=3x+a$, 즉 $3x-y+a=0$으로 놓을 수 있다.

원점과 이 직선 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이므로

$\dfrac{|a|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$, $|a|=\sqrt{20}$

$|a|=2\sqrt{5} \qquad \therefore a=\pm 2\sqrt{5}$

이때, 제 4 사분면을 지나지 않는 직선의 방정식은

$y=3x+2\sqrt{5}$ └ y절편이 양수이어야 한다. 답 $y=3x+2\sqrt{5}$

1154

직선 $(x+y-2)+(x-y)k=0$은 k의 값에 관계없이 항상 두 직선 $x+y-2=0$, $x-y=0$의 교점 $(1,\ 1)$을 지난다.

$\therefore \mathrm{A}(1,\ 1)$

이때, 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$과 직선 $2x-y+b=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\dfrac{|2\cdot 1-1\cdot 1+b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $|b+1|=5$

$b+1=\pm 5 \qquad \therefore b=4$ 또는 $b=-6$

따라서 모든 실수 b의 값의 합은 $4+(-6)=-2$ 답 ①

1155

$x-y+4+k(x+y)=0$에서

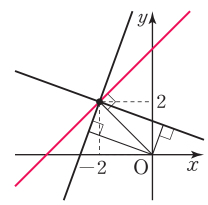
$(k+1)x+(k-1)y+4=0$

이 직선과 원점 사이의 거리 $f(k)$는

$f(k)=\dfrac{|4|}{\sqrt{(k+1)^2+(k-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2k^2+2}}$

따라서 $\sqrt{2k^2+2}$가 최소, 즉 $k=0$일 때 $f(k)$가 최대이므로 구하는 최댓값은 $f(0)=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

다른 풀이 직선



$x-y+4+k(x+y)=0$ ······ ㉠

은 k의 값에 관계없이 두 직선 $x-y+4=0$, $x+y=0$의 교점 $(-2,\ 2)$를 항상 지난다.

원점과 직선 ㉠ 사이의 거리가 최대일 때는 오른쪽 그림과 같이 원점에서 직선 ㉠에 내린 수선의 발이 점 $(-2,\ 2)$일 때이다.

따라서 이 직선과 원점 사이의 거리의 최댓값은 점 $(-2,\ 2)$와 원점 사이의 거리와 같으므로

$\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

1156

| 전략 | 평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 임의의 점과 직선 l' 사이의 거리와 같다.

두 직선이 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x-4y+4=0$ 위의 한 점 $(0,\ 1)$과 직선 $3x-4y-1=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는

$\dfrac{|3\cdot 0-4\cdot 1-1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{5}{5}=1$ 답 ①

1157

두 직선이 평행하므로 직선 $x+y-3=0$ 위의 한 점 $(3,\ 0)$과 직선 $x+y+m=0$ 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$이다.

즉, $\dfrac{|1\cdot 3+1\cdot 0+m|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4\sqrt{2}$, $|m+3|=8$

$m+3=\pm 8 \qquad \therefore m=5$ 또는 $m=-11$

따라서 모든 m의 값의 곱은 -55이다. 답 -55

1158

두 직선이 평행하므로

$\dfrac{p}{1}=\dfrac{-2}{1-p}\neq\dfrac{p+3}{2-p}$

$\dfrac{p}{1}=\dfrac{-2}{1-p}$에서 $p(1-p)=-2$, $p^2-p-2=0$

$(p+1)(p-2)=0 \qquad \therefore p=-1\ (\because p<0)$

두 직선 $-x-2y+2=0$, 즉 $x+2y-2=0$과 $x+2y+3=0$ 사이의 거리는 직선 $x+2y-2=0$ 위의 한 점 $(0,\ 1)$과 직선 $x+2y+3=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는

$\dfrac{|1\cdot 0+2\cdot 1+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{5}$

1159

정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 평행한 두 직선 $y=mx+2$, $y=mx-1$ 사이의 거리와 같다.

이때, 직선 $y=mx+2$ 위의 한 점 $(0,\ 2)$와 직선 $y=mx-1$, 즉 $mx-y-1=0$ 사이의 거리를 d라 하면 $d^2=\frac{36}{13}$이므로

$\left\{\frac{|m\cdot0-1\cdot2-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}\right\}^2=\frac{36}{13}$, $36(m^2+1)=117$

$m^2+1=\frac{13}{4}$, $m^2=\frac{9}{4}$ $\quad\therefore m=\frac{3}{2}$ $(\because m>0)$ 답 $\frac{3}{2}$

1160

| 전략 | $\triangle$ABC의 밑변을 $\overline{\rm AB}$라 하면 높이는 점 C에서 직선 AB까지의 거리이다.

$\overline{\rm AB}=\sqrt{(5-3)^2+(-1-3)^2}=2\sqrt{5}$

직선 AB의 방정식은

$y-3=\frac{-1-3}{5-3}(x-3)$ $\quad\therefore 2x+y-9=0$

점 C$(-1,\ 1)$과 직선 AB 사이의 거리는

$\frac{|2\cdot(-1)+1\cdot1-9|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt5}=2\sqrt5$

$\therefore \triangle{\rm ABC}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt5\cdot2\sqrt5=10$ 답 ③

1161

$\overline{\rm AB}=\sqrt{(-3-0)^2+(0-6)^2}=3\sqrt5$

직선 AB의 방정식은

$y-6=\frac{0-6}{-3-0}(x-0)$ $\quad\therefore 2x-y+6=0$

점 C$(3,\ k)$와 직선 AB 사이의 거리는

$\frac{|2\cdot3-1\cdot k+6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|12-k|}{\sqrt5}$

이때, 삼각형 ABC의 넓이가 15이므로

$\frac{1}{2}\cdot3\sqrt5\cdot\frac{|12-k|}{\sqrt5}=15$, $|12-k|=10$

$12-k=\pm10$ $\quad\therefore k=2$ 또는 $k=22$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 24이다. 답 ⑤

1162

직선 OA와 직선 $4x-3y-30=0$의 기울기가 $\frac{4}{3}$로 같으므로 두 직선은 평행하다.

따라서 삼각형 OAP에서 $\overline{\rm OA}$를 밑변으로 하면 원점에서 직선 $4x-3y-30=0$까지의 거리가 높이가 된다.

$\overline{\rm OA}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

원점과 직선 $4x-3y-30=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-30|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=6$

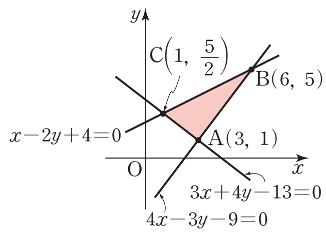
$\therefore \triangle{\rm OAP}=\frac{1}{2}\cdot5\cdot6=15$ 답 15

1163

$3x+4y-13=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$4x-3y-9=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

$x-2y+4=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢



두 직선 ㉠, ㉡의 교점을 A,
두 직선 ㉡, ㉢의 교점을 B,
두 직선 ㉠, ㉢의 교점을 C
라 하면

A$(3,\ 1)$, B$(6,\ 5)$, C$\left(1,\ \frac{5}{2}\right)$

이때, $\overline{\rm AB}=\sqrt{(6-3)^2+(5-1)^2}=5$이고 점 C$\left(1,\ \frac{5}{2}\right)$와 직선 $4x-3y-9=0$ 사이의 거리는

$\frac{\left|4\cdot1-3\cdot\frac{5}{2}-9\right|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{5}{2}$

$\therefore \triangle{\rm ABC}=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\frac{5}{2}=\frac{25}{4}$ 답 $\frac{25}{4}$

다른 풀이 두 직선 $3x+4y-13=0$, $4x-3y-9=0$에서

$3\cdot4+4\cdot(-3)=0$

즉, 두 직선은 수직이므로 $\angle{\rm CAB}=90^\circ$

$\therefore \triangle{\rm ABC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\rm AB}\cdot\overline{\rm AC}=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\frac{5}{2}=\frac{25}{4}$

1164

| 전략 | 두 직선의 각의 이등분선 위의 점에서 두 직선에 이르는 거리는 같다.

두 직선 $x+2y-1=0$, $2x-y-1=0$이 이루는 각의 이등분선 위의 한 점의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 점 $(x,\ y)$에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2x-y-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$

$x+2y-1=\pm(2x-y-1)$

$\therefore x-3y=0$ 또는 $3x+y-2=0$

이 중에서 기울기가 음수인 것은 $3x+y-2=0$

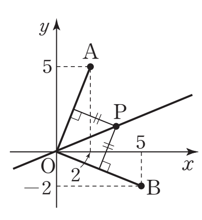
따라서 $a=3$, $b=1$이므로 $a-b=2$ 답 ②

1165

직선 OA의 방정식은 $y=\frac{5}{2}x$ $\quad\therefore 5x-2y=0$

직선 OB의 방정식은 $y=-\frac{2}{5}x$ $\quad\therefore 2x+5y=0$

오른쪽 그림과 같이 $\angle$AOB의 이등분선 위의 한 점을 P$(x,\ y)$라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로



$\frac{|5x-2y|}{\sqrt{5^2+(-2)^2}}=\frac{|2x+5y|}{\sqrt{2^2+5^2}}$

$5x-2y=\pm(2x+5y)$

$\therefore 3x-7y=0$ 또는 $7x+3y=0$

이때, $\angle$AOB의 이등분선의 기울기는 양수이므로 구하는 방정식은 $3x-7y=0$ 답 ⑤

1166

$\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 $2\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{PS}}$이므로

$2\cdot\dfrac{|x+2y+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|2x+y-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}$

$2(x+2y+3)=\pm(2x+y-3)$

$\therefore y=-3$ 또는 $4x+5y+3=0$ 　　답 $y=-3$ 또는 $4x+5y+3=0$

STEP 3 내신 마스터

1167

유형 01 기울기와 한 점이 주어진 직선의 방정식

| 전략 | 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y-y_1=m(x-x_1)$이다.

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\cdot(-12)+2\cdot3}{1+2},\ \dfrac{1\cdot(-5)+2\cdot4}{1+2}\right)$, 즉 $(-2,\ 1)$

따라서 점 $(-2,\ 1)$을 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y-1=-2(x+2)$ 　　$\therefore y=-2x-3$ 　　답 ③

1168

유형 02 두 점을 지나는 직선의 방정식

| 전략 | 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은 $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$이다. (단, $x_1\neq x_2$)

두 점 $(-1,\ 1)$, $(3,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\dfrac{5-1}{3-(-1)}\{x-(-1)\}$ 　　$\therefore y=x+2$

이 직선이 x축, y축에 의하여 잘리는 선분의 길이는 직선이 x축과 만나는 점 $(-2,\ 0)$과 y축과 만나는 점 $(0,\ 2)$ 사이의 거리이므로 구하는 길이는

$\sqrt{(0+2)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{2}$ 　　답 ②

1169

유형 03 x절편, y절편이 주어진 직선의 방정식

| 전략 | x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$이다. (단, $ab\neq0$)

x절편이 4, y절편이 2이므로 주어진 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}=1$ 　　$\therefore y=-\dfrac{1}{2}x+2$

③ $x=2$, $y=1$을 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$에 대입하면

$1=-\dfrac{1}{2}\cdot2+2$

따라서 이 직선 위의 점은 ③ $(2,\ 1)$이다. 　　답 ③

1170

유형 04 세 점이 한 직선 위에 있을 조건

| 전략 | 임의의 세 점이 삼각형을 이루지 않으려면 세 점 중 어느 두 점이 일치하거나 세 점이 일직선 위에 있어야 한다.

세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형이 존재하지 않으므로 세 점은 한 직선 위에 있다.

두 점 $(1,\ 1)$, $(-1,\ 5)$를 지나는 직선의 기울기와 두 점 $(-1,\ 5)$, $(-k+2,\ k+1)$을 지나는 직선의 기울기가 같으므로

$\dfrac{5-1}{-1-1}=\dfrac{k+1-5}{-k+2-(-1)}$에서 $-2=\dfrac{k-4}{-k+3}$

$2k-6=k-4$ 　　$\therefore k=2$ 　　답 ③

다른 풀이 두 점 $(1,\ 1)$, $(-1,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\dfrac{5-1}{-1-1}(x-1)$ 　　$\therefore y=-2x+3$

이 직선이 점 $(-k+2,\ k+1)$을 지나므로

$k+1=2k-4+3$ 　　$\therefore k=2$

1171

유형 06 계수의 부호에 따른 직선의 개형

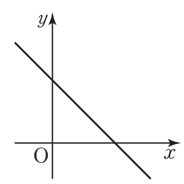
| 전략 | 직선 $ax+by+c=0$을 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$ 꼴로 변형하고 기울기와 y절편의 부호를 알아본다.

$ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$

$ab>0$, $ac<0$이므로 $bc<0$

따라서 (기울기)$=-\dfrac{a}{b}<0$,

(y절편)$=-\dfrac{c}{b}>0$이므로 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같고 제 3 사분면을 지나지 않는다.



답 ③

1172

유형 07 두 직선의 위치 관계

| 전략 | 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 수직이면 $aa'+bb'=0$, 평행하면 $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$이다.

두 직선 $(a-2)x+2y-1=0$, $3x+(a-1)y+1=0$에 대하여

(i) 두 직선이 수직으로 만날 때

$(a-2)\cdot3+2(a-1)=0$

$5a=8$ 　　$\therefore a=\dfrac{8}{5}$

(ii) 두 직선이 만나지 않을 때, 즉 평행할 때

$\dfrac{a-2}{3}=\dfrac{2}{a-1}\neq\dfrac{-1}{1}$

$(a-2)(a-1)=6$, $a^2-3a-4=0$

$(a+1)(a-4)=0$ 　　$\therefore a=-1$ 또는 $a=4$

그런데 $a=-1$일 때 $\dfrac{-3}{3}=\dfrac{2}{-2}=\dfrac{-1}{1}$이므로 두 직선은 일치한다.

$\therefore a=4$

(i), (ii)에서 $\alpha=\dfrac{8}{5}$, $\beta=4$이므로 $5\alpha\beta=32$ 　　답 ②

1173

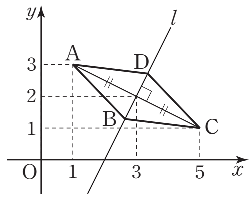
유형 09 선분의 수직이등분선의 방정식

| 전략 | 마름모 ABCD에 대하여 두 점 B, D를 지나는 직선 l은 $\overline{\mathrm{AC}}$의 수직이등분선이다.

□ABCD는 마름모이므로 두 점 B, D를 지나는 직선 l은 선분 AC의 수직이등분선이다.
두 점 A$(1,\ 3)$, C$(5,\ 1)$에 대하여 선분 AC의 중점의 좌표는
$\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{3+1}{2}\right)$, 즉 $(3,\ 2)$

직선 AC의 기울기는 $\frac{1-3}{5-1}=-\frac{1}{2}$

따라서 직선 l은 오른쪽 그림과 같이 선분 AC의 중점 $(3,\ 2)$를 지나고 기울기가 2인 직선이므로



$y-2=2(x-3)$
$\therefore 2x-y-4=0$
즉, $a=-1$, $b=-4$이므로 $ab=4$ 답 ②

Lecture

사각형의 성질
(1) 평행사변형에서 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.
(2) 직사각형의 두 대각선은 길이가 서로 같고, 서로 다른 것을 이등분한다.
(3) 마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분한다.
(4) 정사각형의 두 대각선은 길이가 서로 같고, 서로 다른 것을 수직이등분한다.

1174

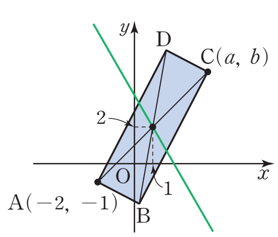
유형 **11** 정점을 지나는 직선의 방정식
| 전략 | 주어진 식을 k에 대하여 정리한다.

주어진 식을 k에 대하여 정리하면
$(2x-y+10)k+(3x+2y+1)=0$
이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$2x-y+10=0$, $3x+2y+1=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=-3$, $y=4$ $\quad\therefore$ P$(-3,\ 4)$
이때, 직선 $3x-y=1$, 즉 $y=3x-1$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이므로 기울기가 $-\frac{1}{3}$이고 점 P를 지나는 직선의 방정식은
$y-4=-\frac{1}{3}\{x-(-3)\}$ $\quad\therefore y=-\frac{1}{3}x+3$
따라서 직선 $y=-\frac{1}{3}x+3$의 x절편은 9이다. 답 ④

1175

유형 **12** 정점을 지나는 직선의 활용
| 전략 | 주어진 직선이 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하려면 이 직선이 두 대각선의 교점을 지나야 한다.

$kx-y-k+2=0$에서
$k(x-1)-y+2=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ 2)$를 지난다.
이때, 직선 ㉠이 k의 값에 관계없이 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하려면 점 $(1,\ 2)$는 두 대각선의 교점이어야 한다.



즉, 점 C의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $\overline{\text{AC}}$의 중점의 좌표는
$\left(\frac{-2+a}{2},\ \frac{-1+b}{2}\right)$이고, 이 점의 좌표가 $(1,\ 2)$이어야 하므로
$-2+a=2$, $-1+b=4$ $\quad\therefore a=4$, $b=5$
따라서 점 C의 좌표는 $(4,\ 5)$이다. 답 ③

다른 풀이 직선 $kx-y-k+2=0$이 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하려면 이 직선이 두 대각선의 교점을 지나야 한다.
점 C의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $\overline{\text{AC}}$의 중점의 좌표는
$\left(\frac{-2+a}{2},\ \frac{-1+b}{2}\right)$
이 점이 직선 $k(x-1)-(y-2)=0$ 위의 점이므로
$k\left(\frac{-2+a}{2}-1\right)-\left(\frac{-1+b}{2}-2\right)=0$
$k\left(\frac{-4+a}{2}\right)-\left(\frac{-5+b}{2}\right)=0$
이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$\frac{-4+a}{2}=0$, $\frac{-5+b}{2}=0$ $\quad\therefore a=4$, $b=5$
따라서 점 C의 좌표는 $(4,\ 5)$이다.

1176

유형 **13** 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식
| 전략 | 직선 l이 k의 값에 관계없이 일정한 점을 지나므로 직선 l은 k에 대한 항등식이다. 이때, 주어진 k의 값을 직선 l에 대입하여 참, 거짓을 따져 본다.

ㄱ. 직선 l : $2x+y-4+k(x-y+1)=0$이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$2x+y-4=0$, $x-y+1=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=2$
따라서 직선 l은 실수 k의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ 2)$를 지난다.
ㄴ. $k=-2$이면 직선 l은 $2x+y-4-2(x-y+1)=0$
$3y-6=0$ $\quad\therefore y=2$
따라서 x축에 평행하다. (y축에 수직이다.)
ㄷ. $k=1$이면 직선 l은 $2x+y-4+x-y+1=0$
$3x-3=0$ $\quad\therefore x=1$
따라서 y축에 평행하다. (x축에 수직이다.)
ㄹ. $k=2$이면 직선 l은 $2x+y-4+2(x-y+1)=0$
$\therefore 4x-y-2=0$
따라서 $4\cdot1+(-1)\cdot4=0$이므로 직선 l은 직선 $x+4y+3=0$과 수직이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ⑤

1177

유형 **14** 점과 직선 사이의 거리
| 전략 | $\overline{\text{AP}}$의 최솟값은 점 A와 주어진 직선 사이의 거리와 같다.

$\overline{\text{AP}}$의 최솟값은 점 A$(a,\ 1)$과 직선 $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$, 즉 $3x+4y-12=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|3\cdot a+4\cdot 1-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$

$|3a-8|=10$, $3a-8=\pm 10$

$\therefore a=6$ ($\because a>0$) 답 ④

1178

유형 **14** 점과 직선 사이의 거리

| 전략 | 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용한다.

점 $\mathrm{P}(a,\ 0)$에서 두 직선 $2x+y-2=0$, $x-y-4=0$에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|2\cdot a-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|a-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}},\ \sqrt{2}|2a-2|=\sqrt{5}|a-4|$$

$2(2a-2)^2=5(a-4)^2$

$2(4a^2-8a+4)=5(a^2-8a+16)$, $3a^2+24a-72=0$

$\therefore a^2+8a-24=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 -8이다.

답 ⑤

1179

유형 **14** 점과 직선 사이의 거리

| 전략 | 점 P와 직선 l 사이의 거리를 $f(k)=\dfrac{c}{g(k)}$ $(c>0)$라 하면 $g(k)$가 최소일 때 $f(k)$는 최댓값을 갖는다.

두 직선 $2x+y-5=0$, $x-2y=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$2x+y-5+k(x-2y)=0$

$\therefore (2+k)x+(1-2k)y-5=0$

이 직선과 원점 사이의 거리를 $f(k)$라 하면

$$f(k)=\frac{|-5|}{\sqrt{(2+k)^2+(1-2k)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5k^2+5}}$$

따라서 $\sqrt{5k^2+5}$가 최소, 즉 $k=0$일 때 $f(k)$가 최대이므로 구하는 최댓값은

$$f(0)=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$ 답 ②

다른 풀이 두 직선 $2x+y-5=0$, $x-2y=0$의 교점 $(2,\ 1)$을 지나는 직선과 원점 사이의 거리가 최대일 때는 원점에서 직선에 내린 수선의 발이 점 $(2,\ 1)$일 때이다.

따라서 구하는 최댓값은 점 $(2,\ 1)$과 원점 사이의 거리와 같으므로

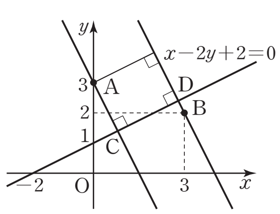
$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

1180

유형 **15** 평행한 두 직선 사이의 거리

| 전략 | 두 직선 AC, BD는 평행하므로 점 A와 직선 BD 사이의 거리를 구한다.

두 직선 AC, BD 사이의 거리는 점 A와 직선 BD 사이의 거리와 같다.



직선 BD는 직선 $x-2y+2=0$, 즉 $y=\dfrac{1}{2}x+1$과 수직이므로 기울기가 -2이고, 점 $\mathrm{B}(3,\ 2)$를 지난다.

즉, 직선 BD의 방정식은 $y-2=-2(x-3)$

$\therefore 2x+y-8=0$

따라서 점 $\mathrm{A}(0,\ 3)$과 직선 $2x+y-8=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3-8|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$ 답 ⑤

1181

유형 **17** 자취의 방정식 – 점과 직선 사이의 거리

| 전략 | 두 직선의 각의 이등분선 위의 점에서 두 직선에 이르는 거리는 같다.

두 직선 $3x+y+1=0$, $x-3y-1=0$이 이루는 각의 이등분선 위의 한 점의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 점 $(x,\ y)$에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|3x+y+1|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|x-3y-1|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}$$

$|3x+y+1|=|x-3y-1|$

$3x+y+1=\pm(x-3y-1)$

$\therefore x+2y+1=0$ 또는 $2x-y=0$

따라서 주어진 두 직선이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ 또는 $y=2x$이므로 기울기의 합은

$-\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{3}{2}$ 답 ④

1182

유형 **02** 두 점을 지나는 직선의 방정식

| 전략 | 마름모의 네 변의 길이는 같으므로 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이를 이용하여 두 점 C, D의 좌표를 구한다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-1-2)^2+(-1-3)^2}=5$

이때, $\overline{\mathrm{BC}}$와 $\overline{\mathrm{AD}}$는 x축에 평행하고, $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AD}}=5$이므로

$\mathrm{C}(4,\ -1)$, $\mathrm{D}(7,\ 3)$ ··· ❶

따라서 직선 CD의 방정식은

$y-(-1)=\dfrac{3-(-1)}{7-4}(x-4)$, 즉 $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{19}{3}$ ··· ❷

이므로 구하는 y절편은 $-\dfrac{19}{3}$이다. ··· ❸

답 $-\dfrac{19}{3}$

채점 기준	배점
❶ $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이를 이용하여 두 점 C, D의 좌표를 구할 수 있다.	3점
❷ 직선 CD의 방정식을 구할 수 있다.	2점
❸ 직선 CD의 y절편을 구할 수 있다.	1점

1183

유형 **10** 세 직선의 위치 관계

| 전략 | 세 직선에 의해 좌표평면이 6개의 영역으로 나누어지는 경우는 세 직선 중 두 직선이 평행한 경우, 세 직선이 한 점에서 만나는 경우이다.

세 직선이 좌표평면을 6개의 영역으로 나누는 경우는 세 직선 중 두 직선이 평행하고 다른 한 직선이 평행한 두 직선과 각각 한 점에서 만나는 경우와 주어진 세 직선이 한 점에서 만나는 경우이다. ··· ❶

(ⅰ) 직선 $ax-y=4$가 직선 $x-y=2$ 또는 $x+y=2$와 평행할 때

$\frac{a}{1}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{4}{2}$ 또는 $\frac{a}{1}=\frac{-1}{1}\neq\frac{4}{2}$

$\therefore a=1$ 또는 $a=-1$ ··· ❷

(ⅱ) 세 직선이 한 점에서 만날 때

두 직선 $x-y=2$와 $x+y=2$의 교점 $(2,\ 0)$이 직선 $ax-y=4$ 위에 있어야 하므로

$2a=4 \qquad \therefore a=2$ ··· ❸

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 실수 a의 값의 곱은

$-1\cdot1\cdot2=-2$ ··· ❹

답 -2

채점 기준	배점
❶ 세 직선이 좌표평면을 6개의 영역으로 나누는 경우를 생각할 수 있다.	2점
❷ 직선 $ax-y=4$가 직선 $x-y=2$ 또는 $x+y=2$와 평행할 때의 a의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ 세 직선이 한 점에서 만날 때의 a의 값을 구할 수 있다.	2점
❹ 모든 실수 a의 값의 곱을 구할 수 있다.	1점

1184

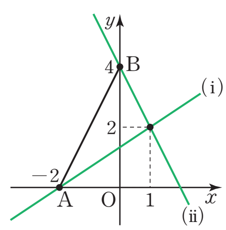
유형 **12** 정점을 지나는 직선의 활용

| 전략 | k의 값에 관계없이 항상 지나는 정점을 찾아 선분 AB와 만나도록 직접 그려 보면서 실수 k의 값의 범위를 알아본다.

$kx-y-k+2=0$에서

$k(x-1)-(y-2)=0$ ······ ㉠

이 직선은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ 2)$를 지난다. ··· ❶



오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 선분 AB와 한 점에서 만나도록 움직여 보면

(ⅰ) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$을 지날 때

$-3k+2=0 \qquad \therefore k=\frac{2}{3}$ ··· ❷

(ⅱ) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{B}(0,\ 4)$를 지날 때

$-k-2=0 \qquad \therefore k=-2$ ··· ❸

(ⅰ), (ⅱ)에서 직선 ㉠과 선분 AB가 한 점에서 만나도록 하는 k의 값의 범위는 $-2\le k\le\frac{2}{3}$ ··· ❹

답 $-2\le k\le\frac{2}{3}$

채점 기준	배점
❶ 직선 $kx-y-k+2=0$이 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구할 수 있다.	1점
❷ 직선이 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$을 지날 때의 k의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ 직선이 점 $\mathrm{B}(0,\ 4)$를 지날 때의 k의 값을 구할 수 있다.	2점
❹ 직선과 선분 AB가 한 점에서 만날 때의 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	1점

1185

유형 **13** 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식

| 전략 | 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$ (k는 실수)으로 놓는다.

(1) 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$(x-2y+2)+k(2x+y-6)=0$ (k는 실수)

으로 놓으면

$(2k+1)x+(k-2)y-6k+2=0$ ······ ㉠

이 직선이 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

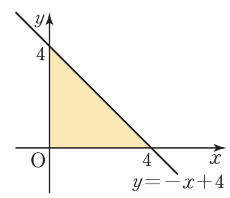
$2k+1+(k-2)\cdot3-6k+2=0$

$-k-3=0 \qquad \therefore k=-3$

$k=-3$을 ㉠에 대입하면 $-5x-5y+20=0$

$\therefore x+y-4=0$

(2) 직선 $y=-x+4$가 x축과 만나는 점의 좌표는 $(4,\ 0)$이고, y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ 4)$이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot4\cdot4=8$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) $f(x,\ y)=0$을 구할 수 있다.	6점
(2) $f(x,\ y)=0$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	4점

다른 풀이 (1) 두 직선 $x-2y+2=0$, $2x+y-6=0$의 교점의 좌표는 $(2,\ 2)$

두 점 $(2,\ 2)$, $(1,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{3-2}{1-2}(x-2) \qquad \therefore y=-x+4$

1186

유형 **16** 꼭짓점의 좌표가 주어진 삼각형의 넓이

| 전략 | $\triangle\mathrm{ABC}$의 밑변을 $\overline{\mathrm{BC}}$라 하면 높이는 점 A에서 직선 BC까지의 거리이다.

(1) $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(-2-2)^2+(-2-4)^2}=2\sqrt{13}$

(2) 직선 BC의 방정식은

$y-4=\frac{-2-4}{-2-2}(x-2) \qquad \therefore 3x-2y+2=0$

점 $\mathrm{A}(0,\ -1)$과 직선 $3x-2y+2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-2\cdot(-1)+2|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{4}{\sqrt{13}}=\frac{4\sqrt{13}}{13}$

(3) $\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{13}\cdot\frac{4\sqrt{13}}{13}=4$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) $\overline{\mathrm{BC}}$의 길이를 구할 수 있다.	3점
(2) 점 A와 직선 BC 사이의 거리를 구할 수 있다.	4점
(3) $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이를 구할 수 있다.	3점

창의·융합 교과서 속 심화문제

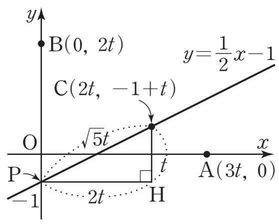
1187

|전략| t초 후의 점 A, B, C의 좌표를 t에 대한 식으로 각각 나타낸 후, 세 점이 한 직선 위에 있을 조건을 이용하여 t의 값을 구한다.

두 점 A, B가 초당 3, 2의 속력으로 움직이므로 $t(t\neq0)$초 후의 두 점 A, B의 좌표는 $A(3t,\ 0)$, $B(0,\ 2t)$

점 C는 직선 $y=\frac{1}{2}x-1$ 위를 초당 $\sqrt{5}$의 속력으로 움직이므로 t초 동안 움직인 거리는 $\sqrt{5}t$

이때, 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=\frac{1}{2}x-1$이 y축과 만나는 점을 P, 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선과 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선의 교점을 H라 하면 직선 $y=\frac{1}{2}x-1$의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로



$\overline{PH}=2\overline{CH}$

따라서 $\overline{CH}=a$, $\overline{PH}=2a$라 하면 △CPH는 직각삼각형이므로

$a^2+(2a)^2=(\sqrt{5}t)^2 \quad \therefore a=t$

즉, t초 후의 점 C의 좌표는 $C(2t,\ -1+t)$

세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{2t-0}{0-3t}=\frac{(t-1)-0}{2t-3t},\ -\frac{2}{3}=\frac{1}{t}-1$

$\therefore t=3$(초)

따라서 출발한 지 3초 후에 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 놓이게 된다. **답** 3초 후

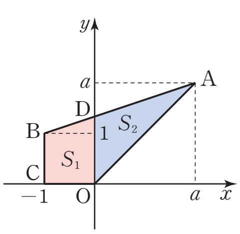
참고 출발한 지 3초 후에 세 점 A, B, C의 좌표는 각각 $A(9,\ 0)$, $B(0,\ 6)$, $C(6,\ 2)$이고, 세 점은 직선 $y=-\frac{2}{3}x+6$ 위에 있다.

1188

|전략| 직선 AB의 y절편을 구한 다음 넓이가 같을 조건을 이용하여 a의 값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 선분 AB와 y축의 교점을 D라 하자.

두 점 $A(a,\ a)$, $B(-1,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은



$y-1=\frac{a-1}{a-(-1)}\{x-(-1)\}$

$\therefore y=\frac{a-1}{a+1}x+\frac{2a}{a+1}$

따라서 점 D의 좌표는 $D\left(0,\ \frac{2a}{a+1}\right)$ ─직선 AB의 y절편

한편, □ODBC의 넓이를 S_1, △OAD의 넓이를 S_2라 하면

$S_1=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2a}{a+1}+1\right)\cdot1=\frac{3a+1}{2(a+1)}$

$S_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{a+1}\cdot a=\frac{a^2}{a+1}$

이때, y축이 사각형 OABC의 넓이를 이등분하므로

$S_1=S_2$에서 $\frac{3a+1}{2(a+1)}=\frac{a^2}{a+1}$

$(a+1)(3a+1)=2a^2(a+1)$

$(a+1)(2a^2-3a-1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$

이때, $a>0$이므로 $a=\frac{3+\sqrt{17}}{4}$ **답** $\frac{3+\sqrt{17}}{4}$

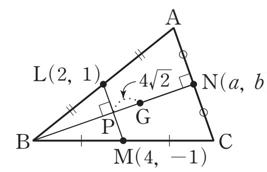
└점 $A(a,\ a)$는 제1사분면 위의 점이므로 $a>0$

1189

|전략| 삼각형의 무게중심의 성질을 이용하여 $\overline{BN}$, $\overline{LM}$의 교점과 점 N 사이의 거리를 구하고, $\overline{BN}\perp\overline{LM}$임을 이용하여 a, b에 대한 식을 세운다.

삼각형 ABC에서 $\overline{BN}\perp\overline{LM}$이고 $\overline{LM}\mathbin{/\!/}\overline{AC}$이므로 $\overline{BN}\perp\overline{AC}$

이때, 두 직선 LM, BN의 교점을 P라 하면 점 N이 변 AC의 중점이므로 점 P는 선분 LM의 중점이다.



따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{1-1}{2}\right)$, 즉 $(3,\ 0)$

삼각형 LMN의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심 G와 같고 선분 NP는 삼각형 LMN의 중선이므로

$\overline{NP}=3\overline{GP}=12\sqrt{2}$ └무게중심은 중선을 2 : 1로 내분한다.

이때, $N(a,\ b)$이고 $P(3,\ 0)$이므로

$\overline{NP}^2=(a-3)^2+b^2=(12\sqrt{2})^2=288$ ······ ㉠

한편, 직선 NP와 직선 LM이 서로 수직이므로

$\frac{b-0}{a-3}\cdot\frac{-1-1}{4-2}=-1$에서 $\frac{b}{a-3}=1$

$\therefore b=a-3$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(a-3)^2+(a-3)^2=288$, $2(a-3)^2=288$

$(a-3)^2=144=12^2$

$a-3=-12$ 또는 $a-3=12$

$\therefore a=-9$ 또는 $a=15$

그런데 삼각형 LMN의 무게중심 $G\left(\frac{a+6}{3},\ \frac{b}{3}\right)$가 제1사분면 위의 점이므로 $a=15$

$a=15$를 ㉡에 대입하면 $b=12$

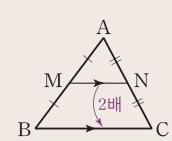
$\therefore ab=180$ **답** ⑤

Lecture

삼각형 ABC에서

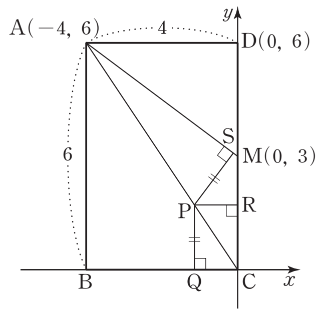
(1) $\overline{AM}=\overline{MB}$, $\overline{AN}=\overline{NC}$이면
$\overline{MN}\mathbin{/\!/}\overline{BC}$, $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$

(2) $\overline{AM}=\overline{MB}$, $\overline{MN}\mathbin{/\!/}\overline{BC}$이면
$\overline{AN}=\overline{NC}$



1190

|전략| 직사각형을 좌표평면 위에 놓고 점과 직선 사이의 거리를 구하는 공식을 이용한다.



오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 직사각형 ABCD를 점 C를 원점으로 하고, 선분 BC를 x축, 선분 DC를 y축에 오도록 놓으면 두 점 A, M의 좌표는 각각 $A(-4,\ 6)$, $M(0,\ 3)$이다.

직선 AC의 방정식은

$y=-\frac{3}{2}x$이므로 $\overline{PR}$의 길이를 a라 하면 점 Q의 좌표는 $Q(-a,\ 0)$, 점 P의 좌표는 $P\left(-a,\ \frac{3}{2}a\right)$이다. (단, $0<a<4$)

한편, 직선 AM의 방정식은

$y-3=\frac{3-6}{0-(-4)}(x-0)\qquad \therefore\ 3x+4y-12=0$

점 $P\left(-a,\ \frac{3}{2}a\right)$와 직선 $3x+4y-12=0$ 사이의 거리는

$\overline{PS}=\frac{|-3a+6a-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|3a-12|}{5}$

이때, $\overline{PQ}=\overline{PS}$이므로

$\frac{3}{2}a=\frac{|3a-12|}{5}$, $5a=2|a-4|$

$5a=\pm2(a-4)$

$3a=-8$ 또는 $7a=8$

$\therefore\ a=\frac{8}{7}$ ($\because\ 0<a<4$)

따라서 $p=7$, $q=8$이므로 $p+q=15$ 답 15

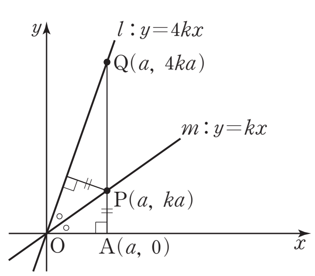
1191

|전략| 직선 m은 직선 l과 x축이 이루는 각의 이등분선이므로 직선 m 위의 임의의 점에서 직선 l과 x축에 이르는 거리가 같음을 이용한다.

주어진 조건을 만족시키는 두 직선을

$l : y=4kx$, $m : y=kx$ ($k>0$)

라 하고, 이를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때, x축 위의 한 점 $A(a,\ 0)$ $(a>0)$을 잡고, 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선을 그어 두 직선 m, l과 만나는 점을 각각 P, Q라 하면

$P(a,\ ka)$, $Q(a,\ 4ka)$

직선 m은 직선 l과 x축이 이루는 각의 이등분선이므로 점 P에서 직선 l과 x축에 이르는 거리는 같다.

즉, 점 $P(a,\ ka)$에서 두 직선 $4kx-y=0$, $y=0$에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{|4ka-ka|}{\sqrt{(4k)^2+(-1)^2}}=ka$

$\therefore\ \sqrt{16k^2+1}=3$

양변을 제곱하여 풀면

$16k^2+1=9$, $k^2=\frac{1}{2}\qquad \therefore\ k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because\ k>0$)

따라서 직선 l의 기울기는

$4k=4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

다른 풀이 $\triangle OAQ$에서 $\overline{OP}$는 $\angle AOQ$의 이등분선이므로

$\overline{OA} : \overline{OQ}=\overline{AP} : \overline{QP}$

$a : \sqrt{a^2+(4ka)^2}=ka : 3ka$

$1 : \sqrt{1+16k^2}=1 : 3$

$\therefore\ \sqrt{1+16k^2}=3$

양변을 제곱하여 풀면

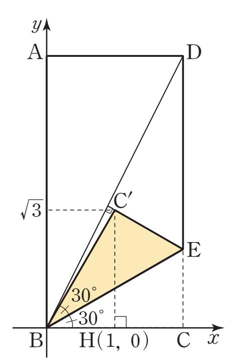
$1+16k^2=9$, $k^2=\frac{1}{2}\qquad \therefore\ k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because\ k>0$)

따라서 직선 l의 기울기는

$4k=4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

1192

|전략| 직사각형 모양의 종이를 좌표평면 위에 나타낸 다음 $\overline{BC}=\overline{BC'}$임을 이용하여 점 C′의 좌표를 구하고 점 C′과 직선 BD 사이의 거리를 구한다.



오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 직사각형 ABCD를 점 B를 원점으로 하고, 선분 BC를 x축, 선분 AB를 y축에 오도록 놓자.

점 C′에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 C′BH에서

$\angle C'BH=60°$이고 $\overline{BC'}=\overline{BC}=2$이므로

$\overline{BH}=1$, $\overline{C'H}=\sqrt{3}$

$\therefore\ C'(1,\ \sqrt{3})$

이때, 두 점 $B(0,\ 0)$, $D(2,\ 4)$를 지나는 직선 BD의 방정식은 $y=2x$이므로 점 $C'(1,\ \sqrt{3})$과 직선 $y=2x$, 즉 $2x-y=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2\cdot1-1\cdot\sqrt{3}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}-\frac{1}{5}\sqrt{15}$

따라서 $a=\frac{2}{5}$, $b=\frac{1}{5}$이므로

$100ab=100\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}=8$ 답 8

본책 190~207쪽

12 | 원의 방정식

STEP 1 개념 마스터 ❶

1193
$(x-3)^2+(y+5)^2=2^2$에서 원의 중심의 좌표는 $(3,\ -5)$, 반지름의 길이는 2이다.
답 $(3,\ -5)$, 2

1194
$x^2+(y+2)^2=5^2$에서 원의 중심의 좌표는 $(0,\ -2)$, 반지름의 길이는 5이다.
답 $(0,\ -2)$, 5

1195
$(x-1)^2+y^2=4^2$에서 원의 중심의 좌표는 $(1,\ 0)$, 반지름의 길이는 4이다.
답 $(1,\ 0)$, 4

1196
$x^2+y^2+4x-5=0$에서 $(x+2)^2+y^2=9$
따라서 원의 중심의 좌표는 $(-2,\ 0)$, 반지름의 길이는 3이다.
답 $(-2,\ 0)$, 3

1197
$x^2+y^2-2x-10y-7=0$에서 $(x-1)^2+(y-5)^2=33$
따라서 원의 중심의 좌표는 $(1,\ 5)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{33}$이다.
답 $(1,\ 5)$, $\sqrt{33}$

1198
중심의 좌표가 $(2,\ 1)$이고 반지름의 길이가 1이므로 원의 방정식은
$(x-2)^2+(y-1)^2=1$
답 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$

1199
중심의 좌표가 $(-2,\ -3)$이고 반지름의 길이가 2이므로 원의 방정식은 $(x+2)^2+(y+3)^2=4$
답 $(x+2)^2+(y+3)^2=4$

1200
중심이 원점이고 반지름의 길이가 7인 원의 방정식은
$x^2+y^2=49$
답 $x^2+y^2=49$

1201
중심이 점 $(-4,\ 1)$이고 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은
$(x+4)^2+(y-1)^2=4$
답 $(x+4)^2+(y-1)^2=4$

1202
반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y+2)^2=r^2$이고, 이 원이 점 $(2,\ 0)$을 지나므로
$(-1)^2+2^2=r^2 \qquad \therefore r^2=5$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y+2)^2=5$
답 $(x-3)^2+(y+2)^2=5$

1203
원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고 세 점의 좌표를 각각 대입하면
$C=0$
$1+1-A+B+C=0 \qquad \therefore -A+B+C=-2$ …… ㉠
$49+1+7A+B+C=0 \qquad \therefore 7A+B+C=-50$ …… ㉡
$C=0$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면
$-A+B=-2,\ 7A+B=-50$
두 식을 연립하여 풀면 $A=-6,\ B=-8$
따라서 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2-6x-8y=0$
답 $x^2+y^2-6x-8y=0$

STEP 2 유형 마스터 ❶

1204
|전략| 중심이 x축 위에 있는 원의 방정식은 $(x-a)^2+y^2=r^2$으로 놓는다.
원의 중심이 x축 위에 있으므로 원의 방정식을
$(x-a)^2+y^2=r^2$
으로 놓으면 이 원이 두 점 $(2,\ 0)$, $(3,\ 1)$을 지나므로
$(2-a)^2=r^2,\ (3-a)^2+1=r^2$
두 식을 연립하여 풀면 $a=3,\ r^2=1$
따라서 원의 방정식이 $(x-3)^2+y^2=1$이므로 구하는 넓이는 π이다.
답 π

다른 풀이 원의 중심을 $C(a,\ 0)$이라 하고
$A(2,\ 0)$, $B(3,\ 1)$이라 하면 $\overline{AC}=\overline{BC}$이므로
$\sqrt{(a-2)^2}=\sqrt{(a-3)^2+(-1)^2}$
양변을 제곱하여 풀면 $a=3$
이때, 원의 반지름의 길이는 $\overline{AC}=\sqrt{(3-2)^2}=1$
따라서 구하는 원의 넓이는 π이다.

1205
원의 중심이 y축 위에 있으므로 원의 방정식을
$x^2+(y-b)^2=r^2$
으로 놓으면 이 원이 두 점 $(-4,\ 1)$, $(3,\ 0)$을 지나므로
$16+(1-b)^2=r^2,\ 9+b^2=r^2$
두 식을 연립하여 풀면 $b=4,\ r^2=25$
따라서 원의 방정식은 $x^2+(y-4)^2=25$

ㄴ. $(\sqrt{6})^2+(3-4)^2=7\neq25$이므로 주어진 원은 점 $(\sqrt{6},\ 3)$을 지나지 않는다.

ㄷ. 원의 반지름의 길이가 5이므로 둘레의 길이는 10π이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

다른 풀이 원의 중심을 $C(0,\ b)$라 하고

$A(-4,\ 1)$, $B(3,\ 0)$이라 하면 $\overline{AC}=\overline{BC}$이므로

$\sqrt{4^2+(b-1)^2}=\sqrt{(-3)^2+b^2}$

양변을 제곱하여 풀면 $b=4$

따라서 원의 반지름의 길이는 $\overline{AC}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

1206

원의 중심이 직선 $y=x-2$ 위에 있으므로 원의 방정식을

$(x-a)^2+(y-a+2)^2=r^2$

으로 놓으면 이 원이 두 점 $(0,\ 1)$, $(3,\ 4)$를 지나므로

$a^2+(3-a)^2=r^2$, $(3-a)^2+(6-a)^2=r^2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $r^2=9$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 3이다. 답 3

1207

$x^2+y^2-2x-10y+1=0$에서

$(x-1)^2+(y-5)^2=25$ …… ㉠

$x^2+y^2+2bx+4by+10=0$에서

$(x+b)^2+(y+2b)^2=5b^2-10$ …… ㉡

직선 $3x-y+a=0$이 원 ㉠의 중심 $(1,\ 5)$를 지나므로

$3-5+a=0$ $\quad\therefore a=2$

직선 $3x-y+2=0$이 원 ㉡의 중심 $(-b,\ -2b)$를 지나므로

$-3b+2b+2=0$ $\quad\therefore b=2$

$\therefore ab=4$ 답 4

1208

|전략| 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은 (원의 중심)=($\overline{AB}$의 중점), (반지름의 길이)$=\frac{1}{2}\overline{AB}$임을 이용한다.

원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{-1+(-3)}{2}\right)$, 즉 $(3,\ -2)$

반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\sqrt{(4-2)^2+(-3+1)^2}=\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+2)^2=2$ 답 $(x-3)^2+(y+2)^2=2$

1209

원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{a+2}{2},\ \frac{1+b}{2}\right)$

주어진 원 $x^2+y^2=c$의 중심의 좌표가 $(0,\ 0)$이므로

$a=-2$, $b=-1$

이때, 점 $(-2,\ 1)$이 원 $x^2+y^2=c$ 위의 점이므로

$(-2)^2+1^2=c$ $\quad\therefore c=5$

$\therefore a+b+c=2$ 답 2

1210

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-4+4+(-6)}{3},\ \frac{8+(-1)+8}{3}\right)$, 즉 $(-2,\ 5)$

이므로 구하는 원은 두 점 $(-2,\ 5)$, $(4,\ -1)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원이다.

원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{-2+4}{2},\ \frac{5+(-1)}{2}\right)$, 즉 $(1,\ 2)$

반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\sqrt{(4+2)^2+(-1-5)^2}=3\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-1)^2+(y-2)^2=18$이므로 이 원 위의 점인 것은 ②이다. 답 ②

1211

원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{4+6}{2}\right)$, 즉 $(3,\ 5)$

반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\sqrt{(5-1)^2+(6-4)^2}=\sqrt{5}$

즉, 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-5)^2=5$

$x=2$를 원의 방정식에 대입하여 풀면 $y=3$ 또는 $y=7$

$\therefore A(3,\ 5)$, $B(2,\ 3)$, $C(2,\ 7)$

이때, $\triangle ABC$의 밑변의 길이는 $\overline{BC}=7-3=4$, 높이는 점 A와 직선 $x=2$ 사이의 거리이므로 1이다.

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot4\cdot1=2$ 답 2

1212

|전략| 주어진 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 꼴로 변형한 후 $r^2>0$이어야 함을 이용한다.

$x^2+y^2+6x-2my+2m^2-4m+4=0$에서

$(x+3)^2+(y-m)^2=-m^2+4m+5$

이 방정식이 원을 나타내려면

$-m^2+4m+5>0$, $m^2-4m-5<0$

$(m+1)(m-5)<0$ $\quad\therefore -1<m<5$ 답 $-1<m<5$

1213

① $x^2+y^2+6x=0$에서 $(x+3)^2+y^2=9$

② $x^2+y^2+2x-8y-8=0$에서 $(x+1)^2+(y-4)^2=25$

③ $x^2+y^2+10x+2y+26=0$에서 $(x+5)^2+(y+1)^2=0$

④ $x^2+y^2+4x+2y+1=0$에서 $(x+2)^2+(y+1)^2=4$

⑤ $x^2+y^2-2x+4y=0$에서 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$

따라서 원의 방정식이 아닌 것은 ③이다. 답 ③

참고 ③ 방정식 $(x+5)^2+(y+1)^2=0$은 점 $(-5,\ -1)$을 나타낸다.

1214

$x^2+y^2-2x-4y+k-2=0$에서

$(x-1)^2+(y-2)^2=7-k$

이 방정식이 반지름의 길이가 1 미만인 원을 나타내려면

$0<7-k<1$　　$\therefore 6<k<7$

따라서 $a=6$, $b=7$이므로 $a+b=13$ 　답 13

1215

$x^2+y^2-2(k-1)x+2ky+4k^2-3=0$에서

$\{x-(k-1)\}^2+(y+k)^2=-2k^2-2k+4$

이 방정식이 원을 나타내려면

$-2k^2-2k+4>0$, $k^2+k-2<0$

$(k+2)(k-1)<0$　　$\therefore -2<k<1$

이때, 원의 넓이가 최대이려면 반지름의 길이가 최대이어야 하므로

$-2k^2-2k+4=-2\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$

따라서 $-2<k<1$에서 $k=-\frac{1}{2}$일 때 반지름의 길이는 최대이고, 그때의 반지름의 길이는 $\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$이다. 　답 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

1216

|전략| 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하고 세 점의 좌표를 대입한다.

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고 세 점 $(-2,\ -6)$, $(1,\ 3)$, $(5,\ 1)$의 좌표를 각각 대입하면

$4+36-2A-6B+C=0$　　$\therefore -2A-6B+C=-40$ ⋯ ㉠

$1+9+A+3B+C=0$　　$\therefore A+3B+C=-10$ ⋯⋯ ㉡

$25+1+5A+B+C=0$　　$\therefore 5A+B+C=-26$ ⋯⋯ ㉢

㉠−㉡을 하면 $-3A-9B=-30$　　$\therefore A+3B=10$

㉡−㉢을 하면 $-4A+2B=16$　　$\therefore 2A-B=-8$

두 식을 연립하여 풀면 $A=-2$, $B=4$

이것을 ㉠에 대입하여 풀면 $C=-20$

즉, 원의 방정식은

$x^2+y^2-2x+4y-20=0$　　$\therefore (x-1)^2+(y+2)^2=25$

따라서 중심의 좌표는 $(1,\ -2)$, 반지름의 길이는 5이므로

$a=1$, $b=-2$, $r=5$

$\therefore a+b+r=4$ 　답 ④

1217

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고 세 점 $(2,\ 1)$, $(-4,\ 3)$, $(-1,\ -3)$의 좌표를 각각 대입하면

$4+1+2A+B+C=0$　　$\therefore 2A+B+C=-5$ ⋯⋯ ㉠

$16+9-4A+3B+C=0$　　$\therefore -4A+3B+C=-25$ ⋯⋯ ㉡

$1+9-A-3B+C=0$　　$\therefore -A-3B+C=-10$ ⋯⋯ ㉢

㉠−㉡을 하면 $6A-2B=20$　　$\therefore 3A-B=10$

㉡−㉢을 하면 $-3A+6B=-15$　　$\therefore A-2B=5$

두 식을 연립하여 풀면 $A=3$, $B=-1$

이것을 ㉠에 대입하여 풀면 $C=-10$

즉, 원의 방정식은

$x^2+y^2+3x-y-10=0$

이때, 점 $(k,\ 3)$이 이 원 위의 점이므로

$k^2+3^2+3k-3-10=0$, $k^2+3k-4=0$

$(k+4)(k-1)=0$　　$\therefore k=1\ (\because k>0)$ 　답 ①

1218

$x+2y=0$ ⋯⋯ ㉠

$2x-y=0$ ⋯⋯ ㉡

$3x+y-10=0$ ⋯⋯ ㉢

두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는 $(0,\ 0)$, 두 직선 ㉡, ㉢의 교점의 좌표는 $(2,\ 4)$, 두 직선 ㉠, ㉢의 교점의 좌표는 $(4,\ -2)$이므로 세 점 $(0,\ 0)$, $(2,\ 4)$, $(4,\ -2)$를 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고 세 점의 좌표를 각각 대입하면

$C=0$

$4+16+2A+4B+C=0$　　$\therefore 2A+4B+C=-20$ ⋯⋯ ㉣

$16+4+4A-2B+C=0$　　$\therefore 4A-2B+C=-20$ ⋯⋯ ㉤

$C=0$을 ㉣, ㉤에 각각 대입하면

$2A+4B=-20$, $4A-2B=-20$

두 식을 연립하여 풀면 $A=-6$, $B=-2$

즉, 삼각형의 외접원의 방정식은

$x^2+y^2-6x-2y=0$　　$\therefore (x-3)^2+(y-1)^2=10$

따라서 구하는 외접원의 넓이는 10π이다. 　답 10π

1219

|전략| x축에 접하는 원은 (원의 반지름의 길이)$=$|(중심의 y좌표)|임을 이용한다.

$x^2+y^2+4kx-2y+8=0$에서

$(x+2k)^2+(y-1)^2=4k^2-7$

이 원의 중심의 좌표는 $(-2k,\ 1)$이고 원이 x축에 접하므로 반지름의 길이는 $|1|=1$이다.

즉, $4k^2-7=1^2$에서 $4k^2=8$

$k^2=2$　　$\therefore k=\pm\sqrt{2}$ ⋯⋯ ㉠

이때, 원의 중심이 제1사분면 위에 있으므로

$-2k>0$　　$\therefore k<0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $k=-\sqrt{2}$ 　답 $-\sqrt{2}$

1220

원의 중심이 직선 $y=x-1$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a,\ a-1)$로 놓자. 이때, 원이 x축에 접하므로 반지름의 길이는 $|a-1|$이다.

즉, 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-a+1)^2=(a-1)^2$

이 원이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$(1-a)^2+(2-a)^2=(a-1)^2$, $(2-a)^2=0$　　$\therefore a=2$

따라서 원의 방정식은 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$이므로 구하는 둘레의 길이는 2π이다. 　답 2π

1221

|전략| y축에 접하는 원은 (원의 반지름의 길이)$=$|(중심의 x좌표)| 임을 이용한다.

원의 중심이 점 $(a,\ 1)$이고 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 $|a|$이다.

즉, 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-1)^2=a^2$

이 원이 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$(1-a)^2+4=a^2$, $-2a=-5$ $\quad\therefore a=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

1222

원 $x^2+y^2-2ax-2y+b=0$이 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$1+4+2a-4+b=0 \quad \therefore 2a+b=-1 \quad \cdots\cdots$ ㉠ ⋯ ❶

$x^2+y^2-2ax-2y+b=0$에서

$(x-a)^2+(y-1)^2=a^2-b+1$ ⋯ ❷

이 원의 중심의 좌표는 $(a,\ 1)$이고 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 $|a|$이다.

즉, $\sqrt{a^2-b+1}=|a|$이므로 양변을 제곱하면

$a^2-b+1=a^2 \quad \therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면 $a=-1$ ⋯ ❸

$\therefore a+b=0$ ⋯ ❹

답 0

채점 기준	비율
❶ 원이 점 $(-1,\ 2)$를 지남을 이용할 수 있다.	30 %
❷ 주어진 원의 방정식을 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ 꼴로 변형할 수 있다.	20 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1223

|전략| x축, y축에 동시에 접하면서 중심이 제 2사분면 위에 있는 원의 방정식은 $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2\ (r>0)$으로 놓을 수 있다.

원의 중심이 제2사분면 위에 있어야 하므로 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(-r,\ r)$이다.

즉, 원의 방정식은 $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

이 원이 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$(-1+r)^2+(2-r)^2=r^2$, $r^2-6r+5=0$

$(r-1)(r-5)=0 \quad \therefore r=1$ 또는 $r=5$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 각각 $(-1,\ 1)$, $(-5,\ 5)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(-5+1)^2+(5-1)^2}=4\sqrt{2}$ 답 ④

1224

원의 중심이 제4사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(r,\ -r)$이다.

이때, 중심 $(r,\ -r)$가 직선 $y=2x-3$ 위의 점이므로

$-r=2r-3 \quad \therefore r=1$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y+1)^2=1$ 답 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$

1225

주어진 원의 중심은 곡선 $y=x^2-6$과 직선 $y=x$ 또는 $y=-x$의 교점이다.

(i) $x^2-6=x$에서 $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

즉, 곡선 $y=x^2-6$과 직선 $y=x$의 교점의 좌표는

$(-2,\ -2)$, $(3,\ 3)$

(ii) $x^2-6=-x$에서 $(x-2)(x+3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-3$

즉, 곡선 $y=x^2-6$과 직선 $y=-x$의 교점의 좌표는

$(2,\ -2)$, $(-3,\ 3)$

(i), (ii)에서 $m=4$

또, 네 원의 중심의 좌표는 $(-2,\ -2)$, $(3,\ 3)$, $(2,\ -2)$, $(-3,\ 3)$이고 반지름의 길이는 각각 2, 3, 2, 3이다.

따라서 네 원의 넓이의 합은 $4\pi+9\pi+4\pi+9\pi=26\pi$이므로 $n=26$

$\therefore m+n=30$ 답 ③

Lecture

x축, y축에 동시에 접하는 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다.

1226

|전략| 원의 중심과 점 A 사이의 거리, 원의 반지름의 길이를 이용하여 $\overline{AP}$의 길이의 최댓값과 최솟값을 구한다.

$x^2+y^2-2x-2y-2=0$에서

$(x-1)^2+(y-1)^2=4$

원의 중심 $(1,\ 1)$과 점 $A(-2,\ 3)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(-2-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{13}$

이때, 원의 반지름의 길이가 2이므로 $\overline{AP}$의 길이의 최댓값은 $\sqrt{13}+2$, 최솟값은 $\sqrt{13}-2$이다.

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 곱은

$(\sqrt{13}+2)(\sqrt{13}-2)=13-4=9$ 답 9

1227

원 $x^2+y^2=r^2$의 중심 $(0,\ 0)$과 점 $A(4,\ 2)$ 사이의 거리는

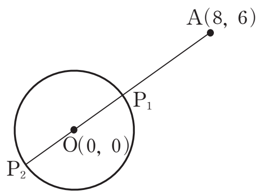
$\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

이때, 원의 반지름의 길이는 r이고 $\overline{AP}$의 길이의 최댓값이 $3+2\sqrt{5}$이므로

$2\sqrt{5}+r=3+2\sqrt{5} \quad \therefore r=3$ 답 ④

1228

오른쪽 그림과 같이 원 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}$의 길이가 최소인 점을 P_1, 최대인 점을 P_2라 하자.



원 $x^2+y^2=9$의 중심 $O(0, 0)$과 점 $A(8, 6)$ 사이의 거리는

$\overline{AO}=\sqrt{8^2+6^2}=10$

$\overline{AP_1}=\overline{AO}-3=10-3=7$

$\overline{AP_2}=\overline{AO}+3=10+3=13$

$\therefore 7\le\overline{AP}\le 13$

이때, $\overline{AP}$의 길이가 정수가 되는 점 P를 찾아보면

(i) $\overline{AP}=8, 9, 10, 11, 12$를 만족시키는 점 P는 각각 2개

(ii) $\overline{AP}=7, 13$을 만족시키는 점 P는 각각 1개

따라서 구하는 점 P의 개수는

$5\cdot 2+2\cdot 1=12$ 답 ④

1229

|전략| $P(a, b)$, $\overline{AP}$의 중점의 좌표를 (x, y)라 하고 주어진 조건을 이용하여 x, y 사이의 관계식을 구한다.

원 $x^2+y^2-2x+4y=0$, 즉 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ 위의 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면

$(a-1)^2+(b+2)^2=5$ …… ㉠

이때, $\overline{AP}$의 중점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\dfrac{-1+a}{2}$, $y=\dfrac{3+b}{2}$

$\therefore a=2x+1, b=2y-3$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(2x+1-1)^2+(2y-3+2)^2=5$

$\therefore x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$

따라서 $\overline{AP}$의 중점이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$이고, 반지름의 길이가 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$인 원이므로 구하는 길이는

$2\pi\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}\pi$ 답 $\sqrt{5}\pi$

1230

원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면

$a^2+b^2=9$ …… ㉠

이때, △APB의 무게중심 G의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\dfrac{1+8+a}{3}$, $y=\dfrac{6+0+b}{3}$

$\therefore a=3x-9, b=3y-6$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(3x-9)^2+(3y-6)^2=9$ $\quad\therefore (x-3)^2+(y-2)^2=1$ 답 ⑤

1231

$\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$에서 $\overline{AP}=2\overline{BP}$이므로 $\overline{AP}^2=4\overline{BP}^2$

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$(x+3)^2+(y-4)^2=4\{(x-3)^2+(y-1)^2\}$

$x^2+y^2-10x+5=0$ $\quad\therefore (x-5)^2+y^2=20$

따라서 점 P의 자취는 중심이 점 $(5, 0)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$인 원이므로 구하는 자취의 길이는

$2\pi\cdot 2\sqrt{5}=4\sqrt{5}\pi$ 답 $4\sqrt{5}\pi$

다른 풀이 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$에서

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\cdot 3+1\cdot(-3)}{2+1}, \dfrac{2\cdot 1+1\cdot 4}{2+1}\right)$, 즉 $(1, 2)$

선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\cdot 3-1\cdot(-3)}{2-1}, \dfrac{2\cdot 1-1\cdot 4}{2-1}\right)$, 즉 $(9, -2)$

따라서 점 P의 자취는 두 점 $(1, 2)$, $(9, -2)$를 지름의 양 끝점으로 하는 원이고, 이 원의 반지름의 길이는

$\dfrac{1}{2}\sqrt{(9-1)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{5}$

따라서 구하는 자취의 길이는 $2\pi\cdot 2\sqrt{5}=4\sqrt{5}\pi$

Lecture

선분의 내분점과 외분점

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n(m>0, n>0)$으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라 하면

$P\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$, $Q\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}, \dfrac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$

(단, $m\ne n$)

1232

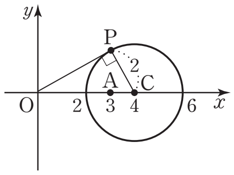
$\overline{OP}:\overline{AP}=2:1$에서 $\overline{OP}=2\overline{AP}$이므로 $\overline{OP}^2=4\overline{AP}^2$

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$x^2+y^2=4\{(x-3)^2+y^2\}$

$x^2+y^2-8x+12=0$ $\quad\therefore (x-4)^2+y^2=4$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OP}$가 원의 접선일 때, ∠POA의 크기가 최대가 된다.



이때, 원의 중심을 C라 하면 직각삼각형 OCP에서

$\overline{OP}=\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{CP}^2}$

$=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$ 답 $2\sqrt{3}$

STEP 1 개념 마스터 ❷

1233

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+6x-4y+1+k(x^2+y^2+2x-8y-7)=0\,(k\ne -1)$ … ㉠

으로 놓으면 이 원이 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$-4-8k=0$ $\quad\therefore k=-\dfrac{1}{2}$

$k=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2+6x-4y+1-\frac{1}{2}(x^2+y^2+2x-8y-7)=0$

$\therefore x^2+y^2+10x+9=0$ 답 $x^2+y^2+10x+9=0$

1234

$(x-2)^2+y^2=10$에서 $x^2+y^2-4x-6=0$

두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-4x-6-(x^2+y^2+y-5)=0$

$\therefore 4x+y+1=0$ 답 $4x+y+1=0$

1235

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-2x+4y-3-(x^2+y^2+4x-6y+2)=0$

$\therefore 6x-10y+5=0$ 답 $6x-10y+5=0$

1236

$y=2x-4$를 $x^2+y^2=25$에 대입하면

$x^2+(2x-4)^2=25$

$\therefore 5x^2-16x-9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-8)^2-5\cdot(-9)=109>0$

따라서 교점의 개수는 2이다. 답 2

1237

$x+y-1=0$에서 $y=-x+1$

$y=-x+1$을 $x^2+y^2-2x-6y+6=0$에 대입하면

$x^2+(-x+1)^2-2x-6(-x+1)+6=0$

$\therefore 2x^2+2x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-2\cdot1=-1<0$

따라서 교점의 개수는 0이다. 답 0

1238

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $3x-y-10=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-10|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

이때, 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 원과 직선은 한 점에서 만난다.(접한다.) 답 한 점에서 만난다.(접한다.)

1239

원의 중심 $(-2,\ 1)$과 직선 $x-2y-2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-2-2-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

이때, 원의 반지름의 길이는 4이고 $\frac{6\sqrt{5}}{5}<4$이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다. 답 서로 다른 두 점에서 만난다.

1240

$x^2+y^2-6x+4y+9=0$에서

$(x-3)^2+(y+2)^2=4$

원의 중심 $(3,\ -2)$와 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3-2+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

이때, 원의 반지름의 길이는 2이고 $2\sqrt{2}>2$이므로 원과 직선은 만나지 않는다. 답 만나지 않는다.

1241

원 $x^2+y^2=4$에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y=3x\pm2\sqrt{3^2+1}$ $\therefore y=3x\pm2\sqrt{10}$ 답 $y=3x\pm2\sqrt{10}$

1242

직선 $y=2x+1$과 평행한 직선의 기울기는 2이므로 원 $x^2+y^2=9$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y=2x\pm3\sqrt{2^2+1}$ $\therefore y=2x\pm3\sqrt{5}$ 답 $y=2x\pm3\sqrt{5}$

1243

원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $(3,\ -2)$에서의 접선의 방정식은

$3x-2y=13$ $\therefore 3x-2y-13=0$ 답 $3x-2y-13=0$

1244

원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(2,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$2x+4y=20$ $\therefore x+2y-10=0$ 답 $x+2y-10=0$

1245

(1) $y=mx+4$

(2) 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=mx+4$, 즉 $mx-y+4=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 2와 같으므로

$\frac{|4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$, $4=2\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$16=4(m^2+1)$, $m^2=3$ $\therefore m=\pm\sqrt{3}$

(3) $y=\pm\sqrt{3}x+4$

답 (1) $y=mx+4$ (2) $\pm\sqrt{3}$ (3) $y=\pm\sqrt{3}x+4$

1246

(1) $x_1x+y_1y=5$

(2) 직선 $x_1x+y_1y=5$가 점 $(3,\ -1)$을 지나므로

$3x_1-y_1=5 \qquad \therefore y_1=3x_1-5$ …… ㉠

또, 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=5$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

${x_1}^2+(3x_1-5)^2=5,\ {x_1}^2-3x_1+2=0$

$(x_1-1)(x_1-2)=0 \qquad \therefore x_1=1$ 또는 $x_1=2$

$x_1=1$이면 $y_1=-2$, $x_1=2$이면 $y_1=1$

$\therefore x_1=1,\ y_1=-2$ 또는 $x_1=2,\ y_1=1$

(3) $x_1=1,\ y_1=-2$일 때, $x-2y=5$

$x_1=2,\ y_1=1$일 때, $2x+y=5$

답 (1) $x_1x+y_1y=5$ (2) $x_1=1,\ y_1=-2$ 또는 $x_1=2,\ y_1=1$
(3) $x-2y=5,\ 2x+y=5$

STEP 2 유형 마스터 ❷

1247

| 전략 | 두 원이 서로 다른 두 점에서 만나려면
(두 원의 반지름의 길이의 차)<(두 원의 중심 사이의 거리)<(두 원의 반지름의 길이의 합)임을 이용한다.

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(-3,\ 2)$, $(1,\ -a)$이므로 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(1+3)^2+(-a-2)^2}=\sqrt{a^2+4a+20}$

두 원의 반지름의 길이가 각각 2, 3이므로 두 원이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$3-2<\sqrt{a^2+4a+20}<3+2 \qquad \therefore 1<\sqrt{a^2+4a+20}<5$

(i) $1<\sqrt{a^2+4a+20}$의 양변을 제곱하면

$a^2+4a+20>1,\ a^2+4a+19>0$

이때, $a^2+4a+19=(a+2)^2+15>0$이므로 항상 성립한다.

(ii) $\sqrt{a^2+4a+20}<5$의 양변을 제곱하면

$a^2+4a+20<25,\ a^2+4a-5<0$

$(a+5)(a-1)<0 \qquad \therefore -5<a<1$

(i), (ii)에서 $-5<a<1$이므로 정수 a는 $-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0$의 5개이다. 답 ⑤

1248

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(3,\ 0)$, $(0,\ -4)$이므로 중심 사이의 거리는

$\sqrt{3^2+4^2}=5$

두 원의 반지름의 길이가 각각 2, r이므로 두 원이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$|r-2|<5<r+2$

(i) $|r-2|<5$에서 $-5<r-2<5$

$\therefore -3<r<7$

그런데 $r>0$이므로 $0<r<7$

(ii) $5<r+2$에서 $r>3$

(i), (ii)에서 $3<r<7$ 답 $3<r<7$

1249

두 원의 중심의 좌표는 각각 $(-a,\ 4)$, $(0,\ 5)$이므로 중심 사이의 거리는

$\sqrt{a^2+(5-4)^2}=\sqrt{a^2+1}$

두 원의 반지름의 길이가 각각 3, a이므로 두 원이 내접하려면

$\sqrt{a^2+1}=|3-a|$

양변을 제곱하면

$a^2+1=a^2-6a+9$

$-6a=-8 \qquad \therefore a=\frac{4}{3}$ 답 $\frac{4}{3}$

1250

$x^2+y^2-ax+2y+1=0$에서

$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{a^2}{4}$

$x^2+y^2+4x-4y+7=0$에서

$(x+2)^2+(y-2)^2=1$

두 원의 중심의 좌표는 각각 $\left(\frac{a}{2},\ -1\right)$, $(-2,\ 2)$이므로 중심 사이의 거리는

$\sqrt{\left(-2-\frac{a}{2}\right)^2+(2+1)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+2a+13}$

두 원 반지름의 길이가 각각 $\left|\frac{a}{2}\right|$, 1이므로 두 원이 외접하려면

$\sqrt{\frac{a^2}{4}+2a+13}=\left|\frac{a}{2}\right|+1$

양변을 제곱하면

$\frac{a^2}{4}+2a+13=\frac{a^2}{4}+|a|+1$

$2a-|a|=-12$

(i) $a<0$일 때, $3a=-12 \qquad \therefore a=-4$

(ii) $a\ge 0$일 때, $a=-12$

그런데 $a\ge 0$이므로 해는 없다.

(i), (ii)에서 $a=-4$ 답 ②

1251

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,\ 3)$, $(-3,\ -1)$이므로 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(-3)^2+(-1-3)^2}=5$

두 원의 반지름의 길이가 각각 1, r이고 한 원이 다른 원의 외부에 있으려면

$1+r<5 \qquad \therefore 0<r<4\ (\because r>0)$ 답 $0<r<4$

1252

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(-1,\ -2)$, $(2,\ 2)$이므로 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(2+1)^2+(2+2)^2}=5$

두 원의 반지름의 길이가 각각 4, r이므로 두 원이 접하려면

(i) 두 원이 외접하는 경우

$4+r=5$에서 $r=1$

(ii) 두 원이 내접하는 경우

$|4-r|=5$에서 $r=9$ ($\because r>0$)

(i), (ii)에서 모든 r의 값의 합은 10이다. 답 ⑤

1253

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,\ 0)$, $(a,\ b)$이므로 중심 사이의 거리는

$\sqrt{a^2+b^2}$

두 원의 반지름의 길이가 각각 5, 2이므로 두 원이 만나지 않으려면

(i) 한 원이 다른 원의 외부에 있는 경우

$5+2<\sqrt{a^2+b^2}$ $\quad\therefore a^2+b^2>49$

(ii) 한 원이 다른 원의 내부에 있는 경우

$5-2>\sqrt{a^2+b^2}$ $\quad\therefore 0\le a^2+b^2<9$

(i), (ii)에서 $a^2+b^2>49$ 또는 $0\le a^2+b^2<9$

답 $a^2+b^2>49$ 또는 $0\le a^2+b^2<9$

1254

|전략| 두 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 원의 방정식을 $x^2+y^2+ax+by+c+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0\ (k\neq-1)$으로 놓는다.

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+5x+y-6+k(x^2+y^2-x-y-2)=0\ (k\neq-1)$ …… ㉠

으로 놓으면 이 원이 점 $(4,\ 2)$를 지나므로

$36+12k=0$ $\quad\therefore k=-3$

$k=-3$을 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2+5x+y-6-3(x^2+y^2-x-y-2)=0$

$x^2+y^2-4x-2y=0$

따라서 $a=-4$, $b=-2$, $c=0$이므로

$a+b+c=-6$ 답 ①

1255

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2-6x+ay+8+k(x^2+y^2-4x)=0\ (k\neq-1)$ …… ㉠

으로 놓으면 이 원이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$3-3k=0$ $\quad\therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2-6x+ay+8+(x^2+y^2-4x)=0$

$x^2+y^2-5x+\frac{a}{2}y+4=0$

$\therefore \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{4}\right)^2=\frac{a^2+36}{16}$

이 원의 넓이가 $\frac{5}{2}\pi$이므로

$\frac{a^2+36}{16}=\frac{5}{2}$, $a^2=4$ $\quad\therefore a=2$ ($\because a>0$) 답 2

1256

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+2x-4y-6+k(x^2+y^2-18x-8y+6)=0\ (k\neq-1)$ …… ㉠

으로 놓으면

$(k+1)x^2+(k+1)y^2+(2-18k)x+(-4-8k)y-6+6k=0$

이때, 이 원의 중심이 x축 위에 있으므로 원의 중심의 y좌표는 0이다.

즉, y의 계수가 0이므로 $-4-8k=0$ $\quad\therefore k=-\frac{1}{2}$

$k=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2+2x-4y-6-\frac{1}{2}(x^2+y^2-18x-8y+6)=0$

$x^2+y^2+22x-18=0$

$\therefore (x+11)^2+y^2=139$

따라서 구하는 원의 넓이는 139π이다. 답 ⑤

1257

|전략| 두 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은 $x^2+y^2+ax+by+c-(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$이다.

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-x+2y-3-(x^2+y^2-3x+ay-1)=0$

$\therefore 2x+(2-a)y-2=0$

이 직선이 직선 $3x+y+1=0$과 수직이므로

$2\cdot3+(2-a)\cdot1=0$ $\quad\therefore a=8$ 답 ④

Lecture

(1) 두 직선 $y=ax+b$, $y=a'x+b'$이 수직이려면

$aa'=-1$

(2) 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 수직이려면

$aa'+bb'=0$

1258

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+x-2y-(x^2+y^2-x-y-2)=0$

$2x-y+2=0$ $\quad\therefore y=2x+2$

이 직선과 평행하고 점 $(1,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-(-1)=2(x-1)$ $\quad\therefore y=2x-3$

따라서 $a=2$, $b=-3$이므로

$ab=-6$ 답 -6

1259

원 $x^2+y^2-x+ay+14=0$이 원 $x^2+y^2-2x+8y+3=0$의 둘레를 이등분하려면 두 원의 공통인 현이 원 $x^2+y^2-2x+8y+3=0$의 지름이어야 한다. ··· ❶

두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-x+ay+14-(x^2+y^2-2x+8y+3)=0$

$\therefore x+(a-8)y+11=0$ ······ ㉠ ··· ❷

또, $x^2+y^2-2x+8y+3=0$에서

$(x-1)^2+(y+4)^2=14$ ······ ㉡

따라서 직선 ㉠이 원 ㉡의 중심 $(1,\ -4)$를 지나야 하므로

$1-4(a-8)+11=0,\ -4a=-44$

$\therefore a=11$ ··· ❸

답 11

채점 기준	비율
❶ 두 원의 공통인 현이 원 $x^2+y^2-2x+8y+3=0$의 지름임을 알 수 있다.	40 %
❷ 두 원의 공통인 현의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

1260

두 원의 중심을 지나는 직선은 공통인 현을 수직이등분하므로 선분 AB의 중점의 좌표는 두 원의 공통인 현과 두 원의 중심을 지나는 직선의 교점의 좌표이다.

두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-4x-20-(x^2+y^2-9x-10y+30)=0$

$\therefore x+2y-10=0$ ······ ㉠

$x^2+y^2-4x-20=0$에서 $(x-2)^2+y^2=24$

$x^2+y^2-9x-10y+30=0$에서 $\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+(y-5)^2=\frac{61}{4}$

두 원의 중심 $(2,\ 0)$, $\left(\frac{9}{2},\ 5\right)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-0=\dfrac{5-0}{\frac{9}{2}-2}(x-2)$ $\quad\therefore y=2x-4$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\frac{18}{5},\ y=\frac{16}{5}$

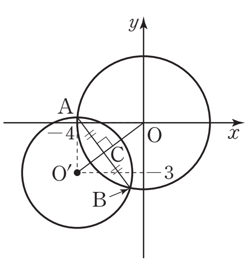
따라서 선분 AB의 중점의 좌표는 두 직선의 교점의 좌표인 $\left(\frac{18}{5},\ \frac{16}{5}\right)$이다.

답 $\left(\frac{18}{5},\ \frac{16}{5}\right)$

1261

|전략| 두 원의 공통인 현의 방정식을 구한 후 원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 수직이등분함을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=16$, $x^2+y^2+8x+6y+14=0$의 중심을 각각 O, O′이라 하고, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{\mathrm{OO'}}$과 $\overline{\mathrm{AB}}$의 교점을 C라 하자.



두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-16-(x^2+y^2+8x+6y+14)=0$

$\therefore 4x+3y+15=0$

원점 O와 공통인 현 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{OC}}=\dfrac{|15|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3$

직각삼각형 OAC에서

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OC}}^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

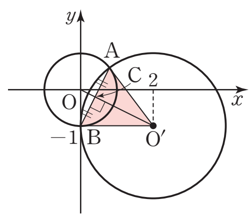
따라서 공통인 현의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{7}$

답 $2\sqrt{7}$

1262

오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-2)^2+(y+1)^2=4$의 중심을 각각 O, O′이라 하고, $\overline{\mathrm{OO'}}$과 $\overline{\mathrm{AB}}$의 교점을 C라 하자.



$(x-2)^2+(y+1)^2=4$에서

$x^2+y^2-4x+2y+1=0$

이므로 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-1-(x^2+y^2-4x+2y+1)=0$

$\therefore 2x-y-1=0$

점 $\mathrm{O'}(2,\ -1)$과 공통인 현 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{O'C}}=\dfrac{|4+1-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

직각삼각형 O′AC에서

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{O'A}}^2-\overline{\mathrm{OC}}^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 공통인 현의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \triangle\mathrm{O'AB}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{O'C}}$

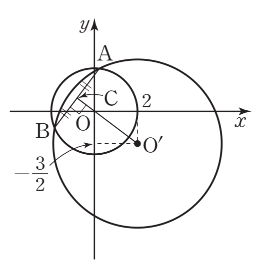
$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{4\sqrt{5}}{5}=\frac{8}{5}$

답 $\frac{8}{5}$

1263

두 원의 교점을 지나는 원의 넓이가 최소가 되려면 공통인 현이 그 원의 지름이어야 한다.

오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2-4x+3y=9$의 중심을 각각 O, O′이라 하고, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{\mathrm{OO'}}$의 연장선과 $\overline{\mathrm{AB}}$의 교점을 C라 하자.



두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-4x+3y-9)=0$

$\therefore 4x-3y+5=0$

원점 O와 공통인 현 사이의 거리는

$\overline{OC}=\dfrac{|5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=1$

직각삼각형 OAC에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OC}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

따라서 조건을 만족시키는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$이므로 구하는 원의 넓이는

$\pi\cdot(\sqrt{3})^2=3\pi$ 답 ③

1264

$x^2+y^2-2y-9=0$에서 $x^2+(y-1)^2=10$이므로 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다.

한편, 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-2y-9-(x^2+y^2-x+k)=0$

$\therefore x-2y-k-9=0$

원 $x^2+y^2-2y-9=0$의 중심 $(0,\ 1)$과 공통인 현 사이의 거리는

$\dfrac{|-2-k-9|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|-k-11|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|k+11|}{\sqrt{5}}$

이때, 공통인 현의 길이가 $2\sqrt{5}$이므로

$2\sqrt{(\sqrt{10})^2-\left(\dfrac{|k+11|}{\sqrt{5}}\right)^2}=2\sqrt{5}$

양변을 제곱하여 정리하면 $k^2+22k+96=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은 -22이다. 답 -22

1265

| 전략 | 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 반지름의 길이를 r라 할 때, $d<r$임을 이용한다.

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}$

이때, 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5},\ |k|<5 \qquad \therefore -5<k<5$

따라서 정수 k는 $-4,\ -3,\ \cdots,\ 4$의 9개이다. 답 ③

다른 풀이 $y=2x+k$를 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$x^2+(2x+k)^2=5 \qquad \therefore 5x^2+4kx+k^2-5=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$\dfrac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-5)>0,\ -k^2+25>0$

$k^2-25<0,\ (k+5)(k-5)<0 \qquad \therefore -5<k<5$

따라서 정수 k는 $-4,\ -3,\ \cdots,\ 4$의 9개이다.

1266

원의 중심 $(3,\ 2)$와 직선 $3x+4y+5=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|9+8+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{22}{5}$

이때, 원의 반지름의 길이는 r이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $r>\dfrac{22}{5}$이어야 한다.

따라서 자연수 r의 최솟값은 5이다. 답 ⑤

1267

원의 중심 $(2,\ -1)$과 직선 $mx+y-5m+2=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|2m-1-5m+2|}{\sqrt{m^2+1^2}}=\dfrac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+1^2}}$

이때, 원의 반지름의 길이는 1이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\dfrac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+1^2}}<1,\ |-3m+1|<\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$9m^2-6m+1<m^2+1,\ 4m^2-3m<0$

$m(4m-3)<0 \qquad \therefore 0<m<\dfrac{3}{4}$ 답 $0<m<\dfrac{3}{4}$

1268

| 전략 | 원과 직선이 접하면 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 반지름의 길이를 r라 할 때, $d=r$임을 이용한다.

$x^2+y^2-2x-2y+c=0$에서

$(x-1)^2+(y-1)^2=2-c$

원의 중심 $(1,\ 1)$과 직선 $x-y+4=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|1-1+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

이때, 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2-c}$이므로 원과 직선이 접하려면

$2\sqrt{2}=\sqrt{2-c}$

양변을 제곱하면

$8=2-c \qquad \therefore c=-6$ 답 -6

다른 풀이 $x-y+4=0$에서 $y=x+4$

이것을 $x^2+y^2-2x-2y+c=0$에 대입하면

$x^2+(x+4)^2-2x-2(x+4)+c=0$

$\therefore 2x^2+4x+8+c=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 접하므로

$\dfrac{D}{4}=2^2-2(8+c)=0,\ -12-2c=0 \qquad \therefore c=-6$

1269

원의 넓이가 10π이므로 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다.

원의 중심 $(-1,\ 4)$와 직선 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-2-4+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k-6|}{\sqrt{5}}$

이므로 원과 직선이 접하려면

$\dfrac{|k-6|}{\sqrt{5}}=\sqrt{10}$, $|k-6|=5\sqrt{2}$

$k-6=\pm 5\sqrt{2}$ $\quad \therefore k=6\pm 5\sqrt{2}$

따라서 모든 k의 값의 합은 $(6+5\sqrt{2})+(6-5\sqrt{2})=12$ 답 ④

1270

x축, y축에 동시에 접하고 중심이 제1사분면 위에 있는 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$으로 놓으면

원의 중심 $(a,\ a)$와 직선 $3x+4y-4=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|3a+4a-4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|7a-4|}{5}$

이때, 원의 반지름의 길이는 a이므로 원과 직선이 접하려면

$\dfrac{|7a-4|}{5}=a$, $|7a-4|=5a$

$7a-4=\pm 5a$ $\quad \therefore a=\dfrac{1}{3}$ 또는 $a=2$

따라서 두 원의 넓이의 합은 $\pi\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+2^2\right\}=\dfrac{37}{9}\pi$ 답 $\dfrac{37}{9}\pi$

1271

중심이 직선 $y=x+5$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a,\ a+5)$라 하자.

원의 중심 $(a,\ a+5)$와 직선 $x+2y-8=0$ 사이의 거리를 d_1, 직선 $2x-y+1=0$ 사이의 거리를 d_2라 하면

$d_1=\dfrac{|a+2(a+5)-8|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|3a+2|}{\sqrt{5}}$

$d_2=\dfrac{|2a-(a+5)+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|a-4|}{\sqrt{5}}$

원의 반지름의 길이를 r라 할 때, 이 원이 두 직선에 접하려면

$d_1=d_2=r$이므로

$\dfrac{|3a+2|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|a-4|}{\sqrt{5}}=r$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

$\dfrac{|3a+2|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|a-4|}{\sqrt{5}}$에서

$|3a+2|=|a-4|$, $3a+2=\pm(a-4)$

(i) $3a+2=a-4$일 때, $2a=-6$ $\quad \therefore a=-3$

(ii) $3a+2=-(a-4)$일 때, $4a=2$ $\quad \therefore a=\dfrac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $a=-3$ ($\because a<0$)

즉, 원의 중심의 좌표는 $(-3,\ 2)$이므로 $b=2$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $r=\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$

따라서 원의 넓이는 $\pi\cdot\left(\dfrac{7\sqrt{5}}{5}\right)^2=\dfrac{49}{5}\pi$ $\quad \therefore p=\dfrac{49}{5}$

$\therefore a+b+p=\dfrac{44}{5}$ 답 $\dfrac{44}{5}$

1272

| 전략 | 원과 직선이 만나지 않으려면 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 반지름의 길이를 r라 할 때, $d>r$임을 이용한다.

$x^2+y^2+2x=0$에서 $(x+1)^2+y^2=1$

원의 중심 $(-1,\ 0)$과 직선 $y=m(x-2)$, 즉 $mx-y-2m=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-m-2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\dfrac{|-3m|}{\sqrt{m^2+1}}$

이때, 원의 반지름의 길이는 1이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\dfrac{|-3m|}{\sqrt{m^2+1}}>1$, $|-3m|>\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$9m^2>m^2+1$, $8m^2>1$, $m^2>\dfrac{1}{8}$

$\therefore m<-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $m>\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 답 $m<-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $m>\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

다른 풀이 $y=m(x-2)$를 $x^2+y^2+2x=0$에 대입하면

$x^2+m^2(x-2)^2+2x=0$

$\therefore (1+m^2)x^2-2(2m^2-1)x+4m^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 만나지 않으므로

$\dfrac{D}{4}=(2m^2-1)^2-(1+m^2)\cdot 4m^2<0$

$-8m^2+1<0$, $m^2>\dfrac{1}{8}$ $\quad \therefore m<-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $m>\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

1273

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $x+\sqrt{3}y-a=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-a|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=\dfrac{|a|}{2}$

이때, 원의 반지름의 길이는 1이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\dfrac{|a|}{2}>1$, $|a|>2$ $\quad \therefore a<-2$ 또는 $a>2$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ③이다. 답 ③

1274

원의 중심 $(0,\ a)$와 직선 $x-y+1=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-a+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|1-a|}{\sqrt{2}}$

이때, 원의 반지름의 길이는 $3\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\dfrac{|1-a|}{\sqrt{2}}>3\sqrt{2}$, $|1-a|>6$

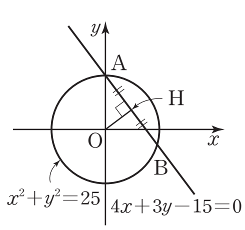
$1-a<-6$ 또는 $1-a>6$ $\quad \therefore a<-5$ 또는 $a>7$

따라서 자연수 a의 최솟값은 8이다. 답 ③

1275

| 전략 | 원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 수직이등분한다.

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 직선 $4x+3y-15=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{OH}=\dfrac{|-15|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{15}{5}=3$

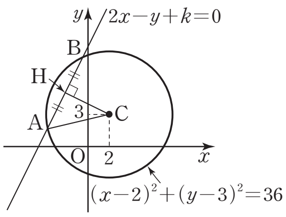
직각삼각형 AOH에서 $\overline{OA}=5$이므로

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=2\cdot4=8$ 답 8

1276

오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B, 원의 중심 C(2, 3)에서 직선 $2x-y+k=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot8=4$

직각삼각형 CHA에서 $\overline{CA}=6$이므로

$\overline{CH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$ …… ㉠

또, 점 C(2, 3)과 직선 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\overline{CH}=\frac{|4-3+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k+1|}{\sqrt{5}}$ …… ㉡

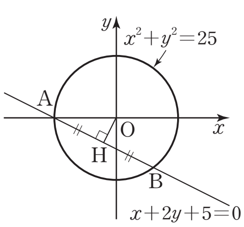
㉠, ㉡에서 $\frac{|k+1|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

$|k+1|=10,\ k+1=\pm10$

$\therefore k=9\ (\because k>0)$ 답 ③

1277

오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하면 두 점 A, B를 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 것은 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원이다. … ❶



원의 중심 (0, 0)에서 직선 $x+2y+5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=\frac{|5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ … ❷

직각삼각형 OAH에서 $\overline{OA}=5$이므로

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{5}$ … ❸

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\cdot(2\sqrt{5})^2=20\pi$ … ❹

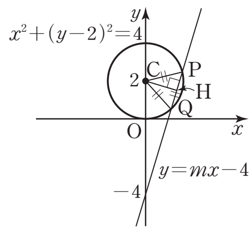
답 20π

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원이 넓이가 최소인 원임을 알 수 있다.	30 %
❷ $\overline{OH}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\overline{AH}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❹ 넓이가 최소인 원의 넓이를 구할 수 있다.	10 %

1278

$x^2+y^2-4y=0$에서

$x^2+(y-2)^2=4$



오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+(y-2)^2=4$와 직선 $y=mx-4$의 두 교점 P, Q와 원의 중심 C(0, 2)를 세 꼭짓점으로 하는 △CPQ를 좌표평면 위에 나타내면 $\overline{CP}$, $\overline{CQ}$는 원의 반지름이므로

$\overline{CP}=\overline{CQ}=2$

따라서 △CPQ가 정삼각형이려면 $\overline{PQ}=2$이어야 한다.

원의 중심 C에서 $\overline{PQ}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PH}=\frac{1}{2}\overline{PQ}=1$

직각삼각형 CPH에서

$\overline{CH}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{PH}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ …… ㉠

또, 점 C(0, 2)에서 직선 $mx-y-4=0$ 사이의 거리는

$\overline{CH}=\frac{|-2-4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{m^2+1}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{6}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{3},\ 6=\sqrt{3m^2+3}$

양변을 제곱하면

$36=3m^2+3,\ m^2=11$

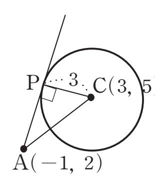
$\therefore m=\sqrt{11}\ (\because m>0)$ 답 $\sqrt{11}$

1279

|전략| 원의 중심을 C, 반지름의 길이를 r라 할 때, 원 밖의 한 점 A에서 그은 접선의 길이 l은 $l=\sqrt{\overline{AC}^2-r^2}$이다.

$x^2+y^2-6x-10y+25=0$에서

$(x-3)^2+(y-5)^2=9$



오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하면

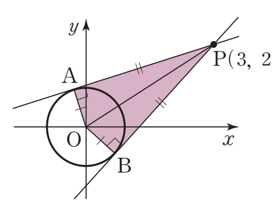
$\overline{CA}=\sqrt{(-1-3)^2+(2-5)^2}=5$

직각삼각형 ACP에서

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CP}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ 답 4

1280

오른쪽 그림에서



$\overline{OP}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

직각삼각형 OAP에서

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{13})^2-1^2}=2\sqrt{3}$

이때, △OAP≡△OBP(RHS 합동)이므로

□AOBP=2△OAP

$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ 답 $2\sqrt{3}$

1281

| 전략 | 원의 중심과 직선 사이의 거리, 원의 반지름의 길이를 이용하여 원과 직선 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 구한다.

$x^2+y^2-4x+2y-4=0$에서

$(x-2)^2+(y+1)^2=9$

원의 중심 $(2,\ -1)$과 직선 $3x-4y+15=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|6+4+15|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5$

이때, 원의 반지름의 길이는 3이므로

$M=5+3=8,\ m=5-3=2$

$\therefore\ Mm=16$

답 16

1282

$x^2+y^2-2x+2y-7=0$에서

$(x-1)^2+(y+1)^2=9$

원의 중심 $(1,\ -1)$과 직선 $x+y+8=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|1-1+8|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4\sqrt{2}$

원의 반지름의 길이는 3이므로 원 위의 점 P와 직선 $x+y+8=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$4\sqrt{2}-3\le d\le 4\sqrt{2}+3$

이때, $5<4\sqrt{2}<6$이므로 d가 될 수 있는 정수는 $3,\ 4,\ \cdots,\ 8$의 6개이고, 각각의 거리에 해당하는 점 P가 2개씩 있으므로 구하는 점 P의 개수는 12이다.

답 12

1283

| 전략 | 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$이다.

직선 $x+3y-2=0$, 즉 $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$에 수직인 직선의 기울기는 3이고, 원 $x^2+y^2=10$의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{10}\cdot\sqrt{3^2+1}\qquad\therefore\ y=3x\pm 10$

답 $y=3x\pm10$

1284

접선의 방정식을 $y=2x+k$라 하면 원의 중심 $(1,\ -3)$과 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$\dfrac{|2+3+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=1,\ |k+5|=\sqrt{5}$

$k+5=\pm\sqrt{5}\qquad\therefore\ k=-5\pm\sqrt{5}$

이때, k는 구하는 직선의 y절편이므로 두 직선의 y절편의 곱은

$(-5+\sqrt{5})(-5-\sqrt{5})=20$

답 20

1285

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60°인 직선의 기울기는 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$이므로 직선의 방정식을 $y=\sqrt{3}x+k$라 하면

이 직선이 점 $\mathrm{A}(3,\ 3)$을 지나므로

$3=3\sqrt{3}+k\qquad\therefore\ k=3-3\sqrt{3}$

이때, 원의 중심 $(1,\ 3)$과 직선 $y=\sqrt{3}x+3-3\sqrt{3}$, 즉 $\sqrt{3}x-y+3-3\sqrt{3}=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 r와 같으므로

$\dfrac{|\sqrt{3}-3+3-3\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\dfrac{|-2\sqrt{3}|}{2}=\sqrt{3}$

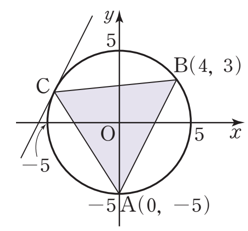
이때, 원의 반지름의 길이는 r이므로 원과 직선이 접하려면

$r=\sqrt{3}$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\pi\cdot(\sqrt{3})^2=3\pi$

답 ①

1286



점 C와 직선 AB 사이의 거리가 최대일 때 △ABC의 넓이가 최대이고, 이때는 오른쪽 그림과 같이 점 C에서의 접선이 직선 AB와 평행할 때이다.

직선 AB의 기울기는 $\dfrac{3-(-5)}{4-0}=2$이므로 기울기가 2인 접선의 방정식은

$y=2x\pm5\sqrt{2^2+1}\qquad\therefore\ y=2x\pm5\sqrt{5}$

위의 그림에서 점 C에서의 접선의 방정식은 $y=2x+5\sqrt{5}$이고 점 $\mathrm{A}(0,\ -5)$와 접선 $2x-y+5\sqrt{5}=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|5+5\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|5+5\sqrt{5}|}{\sqrt{5}}=5+\sqrt{5}$

이때, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(4-0)^2+(3+5)^2}=4\sqrt{5}$이므로 △ABC의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\cdot4\sqrt{5}\cdot(5+\sqrt{5})=10+10\sqrt{5}$

답 $10+10\sqrt{5}$

1287

| 전략 | 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$이다.

원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=20\qquad\therefore\ y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{20}{b}$

$b=0$이면 접선의 방정식이 y축과 평행하여 기울기가 2가 될 수 없다. $\therefore\ b\neq0$

이때, 접선의 기울기가 2이므로

$-\dfrac{a}{b}=2\qquad\therefore\ a=-2b$ …… ㉠

점 $(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=20$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4,\ b=2$ 또는 $a=4,\ b=-2$

$\therefore\ ab=-8$

답 -8

1288

원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(4,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$4x+3y=25\qquad\therefore\ 4x+3y-25=0$ …… ㉠ … ❶

원의 중심 $(5,\ 5)$와 직선 $4x+3y-25=0$ 사이의 거리는 원 O의 반지름의 길이와 같으므로

$\dfrac{|20+15-25|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{10}{5}=2$ … ❷

따라서 구하는 원 O의 넓이는 $\pi\cdot 2^2=4\pi$ … ❸

답 4π

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 원 O의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	50 %
❸ 원 O의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

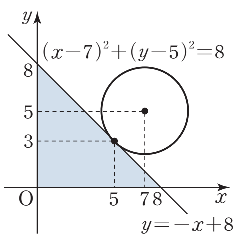
1289

$x^2+y^2-14x-10y+66=0$에서

$(x-7)^2+(y-5)^2=8$

원의 중심 $(7,\ 5)$와 접점 $(5,\ 3)$을 이은 직선의 기울기는

$\dfrac{3-5}{5-7}=1$이므로 이와 수직인 접선의 기울기는 -1이다.



이때, 기울기가 -1이고 점 $(5,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=-(x-5)\qquad \therefore y=-x+8$

따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 8=32$

답 ③

다른 풀이 원 $x^2+y^2-14x-10y+66=0$, 즉

$(x-7)^2+(y-5)^2=8$ 위의 점 $(5,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$(5-7)(x-7)+(3-5)(y-5)=8$

$\therefore y=-x+8$

따라서 구하는 넓이는 $\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 8=32$

1290

원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은 $ax+by=4$

$x^2+y^2-10x+24=0$에서 $(x-5)^2+y^2=1$

원의 중심 $(5,\ 0)$과 직선 $ax+by-4=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|5a-4|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

이때, 원의 반지름의 길이는 1이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\dfrac{|5a-4|}{\sqrt{a^2+b^2}}<1,\ |5a-4|<\sqrt{a^2+b^2}$

이때, 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로 $a^2+b^2=4$

즉, $|5a-4|<2$이므로 $-2<5a-4<2\qquad \therefore \dfrac{2}{5}<a<\dfrac{6}{5}$

따라서 $\alpha=\dfrac{2}{5},\ \beta=\dfrac{6}{5}$이므로 $\alpha+\beta=\dfrac{8}{5}$

답 $\dfrac{8}{5}$

1291

|전략| 접선의 기울기를 m이라 하고, 주어진 점을 지나는 접선의 방정식을 세운 후 원의 중심과 접선 사이의 거리가 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(1,\ -1)$을 지나는 접선의 방정식은

$y-(-1)=m(x-1)\qquad \therefore mx-y-m-1=0$

원의 중심 $(-1,\ 2)$와 접선 $mx-y-m-1=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 1과 같으므로

$\dfrac{|-m-2-m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1,\ |-2m-3|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2+12m+8=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 기울기의 합은 -4이다.

답 ④

1292

직선 l이 원 O'의 넓이를 이등분하므로 직선 l은 원 O'의 중심 $(-2,\ 0)$을 지난다.

즉, $0=-2m+n\qquad \therefore n=2m$ …… ㉠

직선 l의 방정식은 $mx-y+2m=0$

원 O의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 l 사이의 거리는 반지름의 길이 1과 같으므로

$\dfrac{|2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1,\ |2m|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2=1\qquad \therefore m=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$m=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$을 ㉠에 대입하면 $n=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore m^2+n^2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{5}{3}$

답 $\dfrac{5}{3}$

다른 풀이 직선 l과 원 O의 접점을 $(a,\ b)$라 하면 직선 l의 방정식은 $ax+by=1$

직선 l이 원 O'의 넓이를 이등분하므로 직선 l은 원 O'의 중심 $(-2,\ 0)$을 지난다. 즉, $-2a=1\qquad \therefore a=-\dfrac{1}{2}$

점 $(a,\ b)$는 원 O 위에 있으므로 $a^2+b^2=1$에서

$\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+b^2=1\qquad \therefore b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 직선 l의 방정식은 $-\dfrac{1}{2}x\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=1$,

즉 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$(복호동순)이므로 $m^2+n^2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{5}{3}$

1293

접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(2\sqrt{3},\ 4)$를 지나므로 접선의 방정식은

$y-4=m(x-2\sqrt{3})\qquad \therefore mx-y-2\sqrt{3}m+4=0$

원의 중심 $(0,\ 2)$와 접선 $mx-y-2\sqrt{3}m+4=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 2와 같으므로

$\dfrac{|-2-2\sqrt{3}m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2,\ |2-2\sqrt{3}m|=2\sqrt{m^2+1}$

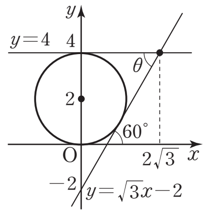
양변을 제곱하여 정리하면 $m^2-\sqrt{3}m=0$

$m(m-\sqrt{3})=0 \quad \therefore m=0$ 또는 $m=\sqrt{3}$

즉, 접선의 방정식은 $y=4$ 또는 $y=\sqrt{3}x-2$

이때, $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$이므로 오른쪽 그림에서 두 접선이 이루는 각의 크기는 60°이다.

$\therefore \theta=60^\circ$



답 ③

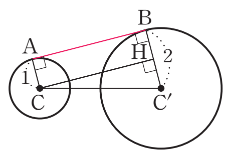
1294

| 전략 | 두 원의 공통내접선, 공통외접선과 두 원의 반지름으로 이루어진 직각삼각형을 찾는다.

두 원의 중심을 각각 C, C′이라 하면 C(0, 0), C′(4, 0)

$\therefore \overline{CC'}=4$

오른쪽 그림과 같이 공통외접선과 원의 두 접점을 각각 A, B라 하고 점 C에서 $\overline{BC'}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

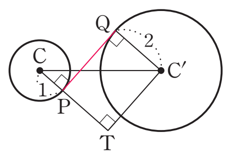


$\overline{C'H}=2-1=1$

$\overline{AB}=\overline{CH}=\sqrt{\overline{CC'}^2-\overline{C'H}^2}$

$=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$

오른쪽 그림과 같이 공통내접선과 원의 두 접점을 각각 P, Q라 하고 점 C′에서 $\overline{CP}$의 연장선에 내린 수선의 발을 T라 하면



$\overline{CT}=2+1=3$

$\overline{PQ}=\overline{TC'}=\sqrt{\overline{CC'}^2-\overline{CT}^2}$

$=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

따라서 공통외접선과 공통내접선의 길이의 차는

$\sqrt{15}-\sqrt{7}$

답 $\sqrt{15}-\sqrt{7}$

1295

$x^2+y^2+8x+4y+19=0$에서

$(x+4)^2+(y+2)^2=1$

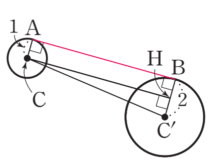
$x^2+y^2-6x+10y+30=0$에서

$(x-3)^2+(y+5)^2=4$

두 원의 중심을 각각 C, C′이라 하면 C(−4, −2), C′(3, −5)

$\therefore \overline{CC'}=\sqrt{(3+4)^2+(-5+2)^2}=\sqrt{58}$

오른쪽 그림과 같이 공통외접선과 원의 두 접점을 각각 A, B라 하고 점 C에서 $\overline{BC'}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{C'H}=2-1=1$

따라서 구하는 공통외접선의 길이는

$\overline{AB}=\overline{CH}=\sqrt{\overline{CC'}^2-\overline{C'H}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{58})^2-1^2}=\sqrt{57}$

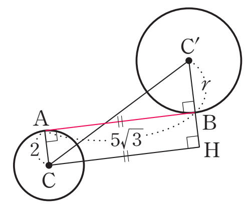
답 ③

1296

두 원의 중심을 각각 C, C′이라 하면 C(0, 0), C′(8, 6)

$\therefore \overline{CC'}=\sqrt{8^2+6^2}=10$

오른쪽 그림과 같이 공통내접선과 원의 두 접점을 각각 A, B라 하고 점 C에서 $\overline{C'B}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{CH}=\overline{AB}=5\sqrt{3}$이므로



$\sqrt{10^2-(2+r)^2}=5\sqrt{3}$

$-r^2-4r+96=75,\ r^2+4r-21=0$

$(r+7)(r-3)=0 \quad \therefore r=3\ (\because r>0)$

답 ③

STEP 3 내신 마스터

1297

유형 01 중심이 좌표축 또는 직선 위에 있는 원의 방정식

| 전략 | 중심이 y축 위에 있는 원의 방정식은 $x^2+(y-b)^2=r^2$으로 놓는다.

중심이 y축 위에 있으므로 원의 방정식을

$x^2+(y-b)^2=r^2$

으로 놓으면 이 원이 두 점 (−1, 0), (3, 2)를 지나므로

$1+b^2=r^2,\ 9+(2-b)^2=r^2$

두 식을 연립하여 풀면 $b=3,\ r^2=10$

따라서 원의 방정식은 $x^2+(y-3)^2=10$

$y=1$을 원의 방정식에 대입하면 $x=\pm\sqrt{6}$이므로

$A(-\sqrt{6}, 1), B(\sqrt{6}, 1)$ 또는 $A(\sqrt{6}, 1), B(-\sqrt{6}, 1)$

$\therefore \overline{AB}=2\sqrt{6}$

답 ④

1298

유형 03 원이 되기 위한 조건

| 전략 | 주어진 방정식을 $(x+a)^2+(y-b)^2=r^2\ (a>0,\ b>0)$ 꼴로 변형한 후 $r^2>0$임을 이용한다. 이때, 원이 제2사분면 위에 있으려면 $r<b$이어야 한다.

$x^2+y^2+6x-2y-2k+4=0$에서

$(x+3)^2+(y-1)^2=2k+6$

이 방정식이 원을 나타내려면

$2k+6>0 \quad \therefore k>-3$ …… ㉠

이 원이 제2사분면 위에 있으려면

$\sqrt{2k+6}<1,\ 2k+6<1 \quad \therefore k<-\frac{5}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-3<k<-\frac{5}{2}$

답 ②

1299

유형 04 세 점을 지나는 원의 방정식

| 전략 | 외접원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하고 세 점 A, B, C의 좌표를 대입한다.

세 점 A(1, 1), B(−1, 1), C(2, −2)는 이 세 점을 꼭짓점으로 하는 △ABC의 외접원 위의 점이므로 외접원의 방정식을

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고 세 점의 좌표를 각각 대입하면

$1+1+A+B+C=0 \quad \therefore A+B+C=-2$ ...... ㉠

$1+1-A+B+C=0 \quad \therefore -A+B+C=-2$ ...... ㉡

$4+4+2A-2B+C=0 \quad \therefore 2A-2B+C=-8$ ...... ㉢

㉠－㉡을 하면 $2A=0 \quad \therefore A=0$

㉡－㉢을 하면 $-3A+3B=6$

그런데 $A=0$이므로 $B=2$

$A=0$, $B=2$를 ㉠에 대입하여 풀면 $C=-4$

따라서 구하는 외접원의 방정식은

$x^2+y^2+2y-4=0$ 답 ④

1300

유형 06 y축에 접하는 원의 방정식

|전략| y축에 접하는 원은 (원의 반지름의 길이)$=$|(중심의 x좌표)|임을 이용한다.

원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 이 원이 y축에 접하므로 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$

이 원이 두 점 $(2,\ 0)$, $(4,\ 0)$을 지나므로

$(2-a)^2+b^2=a^2$ ...... ㉠

$(4-a)^2+b^2=a^2$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=\pm2\sqrt{2}$

따라서 두 원의 반지름의 길이는 모두 3이므로 두 원의 반지름의 길이의 합은 $3+3=6$ 답 ②

1301

유형 07 x축, y축에 동시에 접하는 원의 방정식

|전략| 중심의 좌표가 $(a,\ b)$, 반지름의 길이가 r인 원이 x축, y축에 동시에 접하면 $|a|=|b|=r$임을 이용한다.

$x^2+y^2-2kx-2ky+4k-4=0$에서

$(x-k)^2+(y-k)^2=2k^2-4k+4$

이 원의 중심의 좌표는 $(k,\ k)$이고 원이 x축, y축에 동시에 접하므로 원의 반지름의 길이는 $|k|$이다.

즉, $2k^2-4k+4=|k|^2$에서 $k^2-4k+4=0$

$(k-2)^2=0 \quad \therefore k=2$ 답 ②

1302

유형 08 원 밖의 한 점과 원 위의 점 사이의 거리

|전략| $\sqrt{(a-3)^2+(b-4)^2}$은 두 점 $(a,\ b)$, $(3,\ 4)$ 사이의 거리를 나타낸다.

$\sqrt{(a-3)^2+(b-4)^2}$은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$와 점 $(3,\ 4)$ 사이의 거리이다.

원의 중심 $(0,\ 0)$과 점 $(3,\ 4)$ 사이의 거리는

$\sqrt{3^2+4^2}=5$

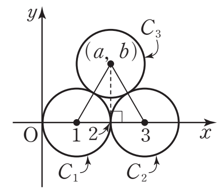
이때, 반지름의 길이는 1이므로 $\sqrt{(a-3)^2+(b-4)^2}$의 최댓값은

$5+1=6$ 답 ③

1303

유형 10 두 원의 위치 관계

|전략| 두 원이 외접하려면
(두 원의 반지름의 길이의 합)$=$(두 원의 중심 사이의 거리)임을 이용한다.



원 C_1, C_2의 중심의 좌표는 각각 $(1,\ 0)$, $(3,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1로 같다. 두 원 C_1, C_2에 동시에 외접하는 원 C_3의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 세 점 $(1,\ 0)$, $(3,\ 0)$, $(a,\ b)$를 이은 삼각형이 정삼각형일 때, 오른쪽 그림과 같고, 원 C_3의 반지름의 길이는 1이다.

점 $(a,\ b)$에서 x축에 내린 수선의 발은 두 원 C_1, C_2의 교점인 $(2,\ 0)$이므로 $a=2$

정삼각형의 한 변의 길이는 두 원의 반지름의 길이의 합과 같으므로

$\sqrt{(2-1)^2+b^2}=2$, $b^2=3 \quad \therefore b=\pm\sqrt{3}$

따라서 원점과 점 $(2,\ \pm\sqrt{3})$ 사이의 거리는

$\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$ 답 ④

다른 풀이 정삼각형의 한 변의 길이가 2이고, 한 내각의 크기는 $60°$이므로

$|b|=2\sin 60°=\sqrt{3} \quad \therefore b=\pm\sqrt{3}$

1304

유형 11 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식

|전략| 두 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 원의 방정식을
$x^2+y^2+ax+by+c+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0\ (k\neq-1)$으로 놓는다.

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+ax-2ay+k(x^2+y^2-4)=0\ (k\neq-1)$ ...... ㉠

으로 놓으면 이 원이 두 점 $(2,\ -1)$, $(-1,\ -1)$을 지나므로

$5+4a+k=0 \quad \therefore 4a+k=-5$ ...... ㉡

$2+a-2k=0 \quad \therefore a-2k=-2$ ...... ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-\frac{4}{3}$, $k=\frac{1}{3}$

$a=-\frac{4}{3}$, $k=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2-\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}y+\frac{1}{3}(x^2+y^2-4)=0$

$\therefore x^2+y^2-x+2y-1=0$

따라서 $A=-1$, $B=2$, $C=-1$이므로

$A-B+C=-4$ 답 ②

1305

유형 12 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식

|전략| 두 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은 $x^2+y^2+ax+by+c-(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$이다.

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+2x-1-(x^2+y^2-2x+4y-3)=0$

$2x-2y+1=0 \quad \therefore y=x+\frac{1}{2}$

이 직선과 수직이고 점 $(-4,\ 8)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-8=-\{x-(-4)\}$　　$\therefore y=-x+4$

따라서 구하는 y절편은 4이다. 답 ⑤

1306

유형 **12** 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식

|전략| 원에서 현의 길이가 최대인 경우는 지름일 때이므로 $\overline{AB}$의 길이가 최대이려면 $\overline{AB}$가 원의 지름이어야 한다.

$\overline{AB}$의 길이가 최대가 되려면 $\overline{AB}$가 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$의 지름이어야 한다.

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x+1)^2+(y-2)^2-5-\{x^2+(y-k)^2-10\}=0$

$\therefore 2x-4y+2ky-k^2+10=0$ ...... ㉠

따라서 직선 ㉠이 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$의 중심 $(-1,\ 2)$를 지나야 하므로

$-2-8+4k-k^2+10=0,\ k^2-4k=0$

$k(k-4)=0$　　$\therefore k=4\ (\because k>0)$ 답 ②

1307

유형 **15** 원과 직선의 위치 관계 – 접할 때

|전략| 원과 직선이 접하면 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 반지름의 길이를 r라 할 때, $d=r$임을 이용한다.

중심의 좌표가 $(1,\ 3)$이고 x축에 접하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-3)^2=9$

원의 중심 $(1,\ 3)$과 직선 $2x-3y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-9+k|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|k-7|}{\sqrt{13}}$$

이때, 원의 반지름의 길이는 3이므로 원과 직선이 접하려면

$\dfrac{|k-7|}{\sqrt{13}}=3,\ |k-7|=3\sqrt{13}$

$k-7=\pm3\sqrt{13}$　　$\therefore k=7\pm3\sqrt{13}$

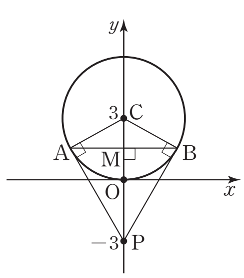
따라서 모든 k의 값의 곱은

$(7+3\sqrt{13})(7-3\sqrt{13})=-68$ 답 ②

1308

유형 **18** 접선의 길이

|전략| 원의 중심을 C, 반지름의 길이를 r라 할 때, 원 밖의 한 점 P에서 그은 접선의 길이 l은 $l=\sqrt{\overline{PC}^2-r^2}$이다.



오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C, 점 P에서 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B, $\overline{AB}$의 중점을 M이라 하면

$\overline{CP}=6$

직각삼각형 CAP에서

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CA}^2}$

$=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$

이때, $\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AP}\cdot\overline{CA}=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{CP}\cdot\overline{AM}$에서

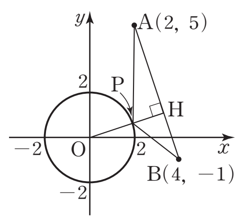
$\dfrac{1}{2}\cdot3\sqrt{3}\cdot3=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot\overline{AM}$　　$\therefore \overline{AM}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AM}=2\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$ 답 ④

1309

유형 **19** 원 위의 점과 직선 사이의 거리

|전략| 원의 중심과 직선 AB 사이의 거리, 원의 반지름의 길이를 이용하여 $\overline{PH}$의 길이의 최솟값을 구한다.



삼각형 PAB의 넓이가 최소가 되려면 오른쪽 그림과 같이 $\overline{PH}$의 길이가 최소이어야 한다.

△PAB의 높이가 최소

두 점 A$(2,\ 5)$, B$(4,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-5=\dfrac{-1-5}{4-2}(x-2)$

$\therefore 3x+y-11=0$

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $3x+y-11=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-11|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{11}{\sqrt{10}}=\frac{11\sqrt{10}}{10}$$

이때, 원의 반지름의 길이는 2이므로

($\overline{PH}$의 길이의 최솟값)$=\dfrac{11\sqrt{10}}{10}-2$

또, $\overline{AB}=\sqrt{(4-2)^2+(-1-5)^2}=2\sqrt{10}$이므로 △PAB의 넓이의 최솟값은

$\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{10}\cdot\left(\dfrac{11\sqrt{10}}{10}-2\right)=11-2\sqrt{10}$ 답 ③

1310

유형 **21** 원의 접선의 방정식 – 원 위의 한 점이 주어질 때

|전략| 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$이다.

점 P$(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은 $ax+by=2$

$\therefore$ A$\left(\dfrac{2}{a},\ 0\right)$, B$\left(0,\ \dfrac{2}{b}\right)$

$\overline{AB}=2\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{\left(\dfrac{2}{a}\right)^2+\left(-\dfrac{2}{b}\right)^2}=2\sqrt{2},\ \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}=8$

$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=2$　　$\therefore a^2+b^2=2a^2b^2$ ...... ㉠

이때, 점 P$(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=2$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2a^2b^2=2,\ a^2b^2=1$　　$\therefore ab=1\ (\because a>0,\ b>0)$ 답 ①

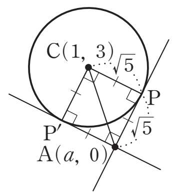
1311

유형 **18** 접선의 길이 + **22** 원의 접선의 방정식 – 원 밖의 한 점이 주어질 때

|전략| 점 A에서 원 C에 그은 두 접선이 서로 수직이고, 접점을 P, P′이라 하면 □CPAP′은 정사각형이다.

$x^2+y^2-2x-6y+5=0$에서

$(x-1)^2+(y-3)^2=5$



오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C, 점 A에서 원에 그은 접선의 두 접점을 각각 P, P′이라 하면 두 접선이 서로 수직일 때 □CPAP′은 정사각형이므로 $\overline{AP}=\overline{CP}=\sqrt{5}$

이때, 직각삼각형 CAP에서

$\overline{CA}^2=\overline{CP}^2+\overline{AP}^2$이므로

$(a-1)^2+9=5+5$, $a^2-2a=0$

$a(a-2)=0$ $\quad\therefore a=0$ 또는 $a=2$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 2이다. 답 ②

다른 풀이 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(a,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=m(x-a)$ $\quad\therefore mx-y-am=0$

원의 중심 $(1,\ 3)$과 직선 $mx-y-am=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같으므로

$\dfrac{|m-3-am|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $|m-3-am|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$(a^2-2a-4)m^2-6(1-a)m+4=0$

이때, 두 접선의 기울기는 이 이차방정식의 두 근이고, 두 접선이 수직이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{4}{a^2-2a-4}=-1$, $4=-a^2+2a+4$

$a^2-2a=0$, $a(a-2)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=2$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 2이다.

1312

유형 **02** 두 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식

|전략| 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은 (원의 중심)=($\overline{AB}$의 중점), (반지름의 길이)=$\frac{1}{2}\overline{AB}$임을 이용한다.

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\cdot(-6)+1\cdot6}{2+1},\ \dfrac{2\cdot(-3)+1\cdot9}{2+1}\right)$, 즉 $(-2,\ 1)$ ··· ❶

선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\cdot(-6)-2\cdot6}{1-2},\ \dfrac{1\cdot(-3)-2\cdot9}{1-2}\right)$, 즉 $(18,\ 21)$ ··· ❷

이므로 원의 중심의 좌표는 $\left(\dfrac{-2+18}{2},\ \dfrac{1+21}{2}\right)$, 즉 $(8,\ 11)$

반지름의 길이는 $\dfrac{1}{2}\sqrt{(18+2)^2+(21-1)^2}=10\sqrt{2}$ ··· ❸

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-8)^2+(y-11)^2=200$ ··· ❹

답 $(x-8)^2+(y-11)^2=200$

채점 기준	배점
❶ 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	2점
❷ 선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	2점
❸ 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구할 수 있다.	2점
❹ 원의 방정식을 구할 수 있다.	1점

1313

유형 **09** 자취의 방정식

|전략| $P(a,\ b)$, $Q(x,\ y)$라 하고 주어진 조건을 이용하여 x, y 사이의 관계식을 구한다.

원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$a^2+b^2=1$ ······ ㉠ ··· ❶

이때, 선분 AP를 2 : 1로 내분하는 점 Q의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x=\dfrac{2a-4}{2+1}$, $y=\dfrac{2b}{2+1}$

$\therefore a=\dfrac{3x+4}{2}$, $b=\dfrac{3}{2}y$ ······ ㉡ ··· ❷

㉡을 ㉠에 대입하면

$\left(\dfrac{3x+4}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}y\right)^2=1$ $\quad\therefore \left(x+\dfrac{4}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{4}{9}$

따라서 점 Q의 자취는 중심의 좌표가 $\left(-\dfrac{4}{3},\ 0\right)$이고 반지름의 길이가 $\dfrac{2}{3}$인 원이므로 구하는 넓이는

$\pi\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}\pi$ ··· ❸

답 $\dfrac{4}{9}\pi$

채점 기준	배점
❶ ㉠을 구할 수 있다.	1점
❷ ㉡을 구할 수 있다.	3점
❸ 점 Q의 자취가 나타내는 도형의 넓이를 구할 수 있다.	3점

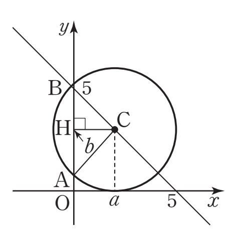
1314

유형 **17** 현의 길이

|전략| 원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 수직이등분한다.

원 C가 x축에 접하므로 원의 방정식을

$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$ $(a>0,\ b>0)$이라 하자.



오른쪽 그림과 같이 원 C와 y축의 두 교점을 각각 A, B라 하고, 원의 중심 C에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}=\sqrt{5}$ ··· ❶

직각삼각형 ACH에서

$\overline{CA}^2=\overline{CH}^2+\overline{AH}^2$이므로

$b^2=a^2+5$ ······ ㉠

또, 점 $C(a,\ b)$가 직선 $x+y-5=0$ 위에 있으므로

$a+b-5=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$ … ❷

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 3이다. … ❸

답 3

채점 기준	배점
❶ $\overline{AH}$의 길이를 구할 수 있다.	2점
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	3점
❸ 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	1점

1315

유형 **02** 두 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식
+ **14** 원과 직선의 위치 관계 – 서로 다른 두 점에서 만날 때

|전략| 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 반지름의 길이를 r라 할 때, $d<r$임을 이용한다.

(1) 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{5+1}{2},\ \frac{3+1}{2}\right)$, 즉 $(3,\ 2)$

반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\sqrt{(5-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}$

따라서 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-2)^2=5$

(2) 원의 중심 $(3,\ 2)$와 직선 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|6-2+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k+4|}{\sqrt{5}}$

이때, 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 두 점에서 만나려면

$\frac{|k+4|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$, $|k+4|<5$

$-5<k+4<5$ $\quad\therefore -9<k<1$

답 풀이 참조

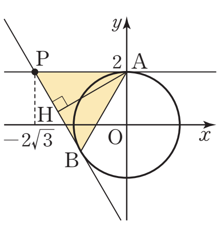
채점 기준	배점
(1) 주어진 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하여 원의 방정식을 구할 수 있다.	5점
(2) 실수 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	5점

1316

유형 **22** 원의 접선의 방정식 – 원 밖의 한 점이 주어질 때

|전략| 접선의 기울기를 m이라 하고, 주어진 점을 지나는 접선의 방정식을 세운 후 원의 중심과 접선 사이의 거리가 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

(1) 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은



$y-2=m(x+2\sqrt{3})$

$\therefore mx-y+2\sqrt{3}m+2=0$

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $mx-y+2\sqrt{3}m+2=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 2와 같으므로

$\frac{|2\sqrt{3}m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$, $|2\sqrt{3}m+2|=2\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$m^2+\sqrt{3}m=0$, $m(m+\sqrt{3})=0$

$\therefore m=0$ 또는 $m=-\sqrt{3}$

따라서 접선의 방정식은

$y=2$ 또는 $\sqrt{3}x+y+4=0$

(2) 점 $A(0,\ 2)$에서 직선 $\sqrt{3}x+y+4=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\frac{|2+4|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=3$

(3) $\overline{BP}=\overline{AP}=2\sqrt{3}$이므로

$\triangle PAB=\frac{1}{2}\cdot\overline{BP}\cdot\overline{AH}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot3=3\sqrt{3}$

답 풀이 참조

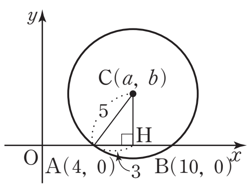
채점 기준	배점
(1) 접선의 방정식을 구할 수 있다.	5점
(2) 점 A와 직선 BP 사이의 거리를 구할 수 있다.	4점
(3) $\triangle PAB$의 넓이를 구할 수 있다.	3점

창의·융합 교과서 속 심화문제

1317

|전략| 원점과 원 위의 점 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $C(a,\ b)$라 하고 점 C에서 현 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 $\overline{AB}$의 중점이므로



$H\left(\frac{4+10}{2},\ 0\right)$, 즉 $H(7,\ 0)$

$\therefore a=7$

$\overline{AH}=7-4=3$이므로 직각삼각형 CAH에서

$\overline{CH}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ $\quad\therefore b=4$

즉, 주어진 원의 방정식은

$(x-7)^2+(y-4)^2=5^2$

원점과 원의 중심 $(7,\ 4)$ 사이의 거리는

$\sqrt{7^2+4^2}=\sqrt{65}$

이므로 $\overline{OP}$의 길이의 최댓값은 $\sqrt{65}+5$, 최솟값은 $\sqrt{65}-5$

$\therefore \sqrt{65}-5\le\overline{OP}\le\sqrt{65}+5$

이때, $8<\sqrt{65}<9$이므로 $\overline{OP}$의 길이가 될 수 있는 정수는 4, 5, …, 13의 10개이고, 각각에 대하여 점 P는 2개씩 존재하므로 구하는 점 P의 개수는 20이다.

답 20

1318

|전략| 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구한 후, 반지름의 길이가 2인 원이 통과할 수 있도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구한다.

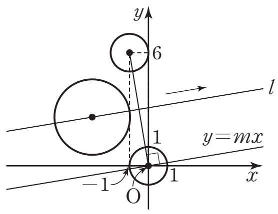
원점 O를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=mx$, 즉 $mx-y=0$

원 $(x+1)^2+(y-6)^2=1$의 중심 $(-1,\ 6)$과 직선 $mx-y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-m-6|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|-m-6|}{\sqrt{m^2+1}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 원이 기울기가 m인 직선 l을 따라 움직일 때, 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x+1)^2+(y-6)^2=1$과 모두 만나지 않고 그 사이를 통과하려면



㉠이 고정된 두 원의 반지름의 길이와 움직이는 원의 지름의 길이의 합보다 커야 한다.

$$\frac{|-m-6|}{\sqrt{m^2+1}}>1+1+2\cdot2,\ |-m-6|>6\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$35m^2-12m<0,\ m(35m-12)<0$

$\therefore\ 0<m<\frac{12}{35}$ 　　답 $0<m<\frac{12}{35}$

1319

|전략| 호 AB를 일부로 하는 원의 방정식과 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 이용한다.

두 점 A, B와 점 $(-1,\ 0)$을 지나는 원은 중심의 좌표가 $(-1,\ 2)$이고 반지름의 길이가 2인 원이므로

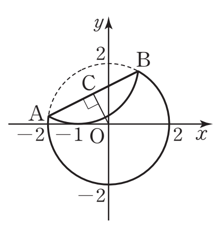
$(x+1)^2+(y-2)^2=4$

$\overline{\mathrm{AB}}$가 두 원 $x^2+y^2=4$, $(x+1)^2+(y-2)^2=4$의 공통인 현이므로 직선 AB의 방정식은

$(x^2+y^2-4)-(x^2+y^2+2x-4y+1)=0$

$\therefore\ 2x-4y+5=0$

이때, 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 AB 사이의 거리는



$$\overline{\mathrm{OC}}=\frac{|5|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\frac{5}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

직각삼각형 OBC에서

$$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OB}}^2-\overline{\mathrm{OC}}^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{11}}{2}$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{11}$ 　　답 $\sqrt{11}$

1320

|전략| 원 O의 접선 l의 방정식을 이용하여 직선 $\mathrm{OO_1}$의 방정식을 구한다.

점 P에서의 접선의 방정식은

$x-\sqrt{3}y=4 \qquad \therefore\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

직선 $\mathrm{OO_1}$과 직선 l은 평행하므로 직선 $\mathrm{OO_1}$의 방정식은

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$, 즉 $\sqrt{3}x-3y=0$

또, 원 O_2는 y축에 접하고 반지름의 길이가 3이므로 원의 중심의 좌표를 $(3,\ k)(k>0)$라 하면 점 $(3,\ k)$와 직선 $\sqrt{3}x-3y=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 3과 같다. 즉,

$$\frac{|3\sqrt{3}-3k|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-3)^2}}=3,\ |\sqrt{3}-k|=2\sqrt{3}$$

$\sqrt{3}-k=\pm2\sqrt{3} \qquad \therefore\ k=3\sqrt{3}\ (\because\ k>0)$

이때, $\overline{\mathrm{OO_2}}=\sqrt{3^2+(3\sqrt{3})^2}=6$이므로 직각삼각형 $\mathrm{OQO_2}$에서

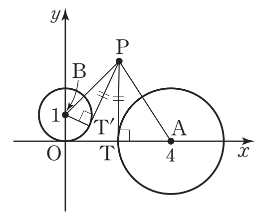
$\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OO_2}}^2-\overline{\mathrm{O_2Q}}^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$ 　　답 $3\sqrt{3}$

참고 두 원 O와 O_1은 모두 반지름의 길이가 2인 원이고 직선 l에 접한다. 즉, 점 O와 점 $\mathrm{O_1}$은 직선 l과 같은 거리에 있으므로 직선 $\mathrm{OO_1}$은 직선 l과 평행하다.

1321

|전략| $\mathrm{P}(x,\ y)$로 놓고 접선의 길이를 이용하여 x, y 사이의 관계를 식으로 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 두 원 $(x-4)^2+y^2=4$, $x^2+(y-1)^2=1$의 중심을 각각 A, B라 하면



$\overline{\mathrm{PT}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{AT}}^2$,

$\overline{\mathrm{PT'}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2-\overline{\mathrm{BT'}}^2$

이때, $\overline{\mathrm{PT}}=\overline{\mathrm{PT'}}$에서 $\overline{\mathrm{PT}}^2=\overline{\mathrm{PT'}}^2$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{AT}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2-\overline{\mathrm{BT'}}^2$, $\overline{\mathrm{AP}}^2-4=\overline{\mathrm{BP}}^2-1$

$\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면

$(x-4)^2+y^2-4=x^2+(y-1)^2-1$

$\therefore\ 4x-y-6=0$ 　　답 $4x-y-6=0$

1322

|전략| 주어진 원 위의 점 $(x_n,\ y_n)$에서의 접선의 방정식이 점 $(n,\ 0)$을 지남을 이용하여 y_n의 값의 규칙을 찾는다.

원 위의 점 $(x_n,\ y_n)$에서의 접선의 방정식은 $x_nx+y_ny=1$

이 접선이 점 $(n,\ 0)$을 지나므로

$x_n\cdot n=1 \qquad \therefore\ x_n=\frac{1}{n} \quad \cdots\cdots ㉠$

이때, 접점 $(x_n,\ y_n)$은 원 위의 점이므로

${x_n}^2+{y_n}^2=1 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$${y_n}^2=1-{x_n}^2=1-\frac{1}{n^2}$$
$$=\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}$$

$\therefore\ (y_2\times y_3\times y_4\times\cdots\times y_8)^2$

$$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\right)\times\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\right)\times\left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\right)\times\cdots\times\left(\frac{\cancel{7}}{\cancel{8}}\times\frac{9}{8}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{9}{8}=\frac{9}{16}$$

$\therefore\ y_2\times y_3\times y_4\times\cdots\times y_8=\frac{3}{4}\ (\because\ y_n>0)$ 　　답 ③

13 | 도형의 이동

본책 210~223쪽

STEP 1 개념 마스터

1323

$(0+2,\ 0-1)$, 즉 $(2,\ -1)$ 답 $(2,\ -1)$

1324

$(3+2,\ 2-1)$, 즉 $(5,\ 1)$ 답 $(5,\ 1)$

1325

$(-4+2,\ 3-1)$, 즉 $(-2,\ 2)$ 답 $(-2,\ 2)$

1326

$(-2+2,\ -1-1)$, 즉 $(0,\ -2)$ 답 $(0,\ -2)$

1327

$(2-2,\ -3+3)$, 즉 $(0,\ 0)$ 답 $(0,\ 0)$

1328

$(-2-2,\ 3+3)$, 즉 $(-4,\ 6)$ 답 $(-4,\ 6)$

1329

$(4-2,\ 2+3)$, 즉 $(2,\ 5)$ 답 $(2,\ 5)$

1330

$(-1-2,\ -5+3)$, 즉 $(-3,\ -2)$ 답 $(-3,\ -2)$

1331

$x+4=0$, $y-5=2$이므로

$x=-4,\ y=7$ $\quad\therefore (-4,\ 7)$ 답 $(-4,\ 7)$

1332

$x+4=4$, $y-5=7$이므로

$x=0,\ y=12$ $\quad\therefore (0,\ 12)$ 답 $(0,\ 12)$

1333

$x+4=2$, $y-5=-7$이므로

$x=-2$, $y=-2$ $\quad\therefore (-2,\ -2)$ 답 $(-2,\ -2)$

1334

$x+4=-3$, $y-5=-4$이므로

$x=-7$, $y=1$ $\quad\therefore (-7,\ 1)$ 답 $(-7,\ 1)$

1335

$-7+a=2$, $6+b=4$이므로

$a=9$, $b=-2$ 답 $a=9,\ b=-2$

1336

$(x-1)-2(y+2)-5=0$

$\therefore x-2y-10=0$ 답 $x-2y-10=0$

1337

$y+2=2(x-1)^2-(x-1)+1$

$\therefore y=2x^2-5x+2$ 답 $y=2x^2-5x+2$

1338

$(x-1+1)^2+(y+2-3)^2=4$

$\therefore x^2+(y-1)^2=4$ 답 $x^2+(y-1)^2=4$

[1339~1341]

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형이 평행이동

$(x,\ y) \longrightarrow (x-2,\ y+3)$에 의하여 옮겨지는 도형의 방정식은

$f(x+2,\ y-3)=0$이다.

1339

$5(x+2)-2(y-3)+1=0$

$\therefore 5x-2y+17=0$ 답 $5x-2y+17=0$

1340

$y-3=-(x+2)^2+6(x+2)+7$

$\therefore y=-x^2+2x+18$ 답 $y=-x^2+2x+18$

1341

$(x+2)^2+(y-3)^2-(x+2)+4(y-3)-20=0$

$\therefore x^2+y^2+3x-2y-21=0$ 답 $x^2+y^2+3x-2y-21=0$

1342

구하는 직선은 주어진 직선을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로 $2(x+1)+3(y-5)-1=0$

$\therefore 2x+3y-14=0$ 답 $2x+3y-14=0$

1343

(1) x축 : $(2,\ 3)$

(2) y축 : $(-2,\ -3)$

(3) 원점 : $(-2,\ 3)$

(4) 직선 $y=x$: $(-3,\ 2)$

(5) 직선 $y=-x$: $(3,\ -2)$

답 (1) $(2,\ 3)$ (2) $(-2,\ -3)$ (3) $(-2,\ 3)$ (4) $(-3,\ 2)$ (5) $(3,\ -2)$

1344

(1) x축 : $x+(-y)+1=0$, 즉 $x-y+1=0$

(2) y축 : $(-x)+y+1=0$, 즉 $x-y-1=0$

(3) 원점 : $(-x)+(-y)+1=0$, 즉 $x+y-1=0$

(4) 직선 $y=x$: $y+x+1=0$, 즉 $x+y+1=0$

(5) 직선 $y=-x$: $(-y)+(-x)+1=0$, 즉 $x+y-1=0$

답 (1) $x-y+1=0$ (2) $x-y-1=0$ (3) $x+y-1=0$ (4) $x+y+1=0$ (5) $x+y-1=0$

1345

(1) x축 : $(-y)=x^2-3x+1$, 즉 $y=-x^2+3x-1$

(2) y축 : $y=(-x)^2-3(-x)+1$, 즉 $y=x^2+3x+1$

(3) 원점 : $(-y)=(-x)^2-3(-x)+1$, 즉 $y=-x^2-3x-1$

(4) 직선 $y=x$: $x=y^2-3y+1$

(5) 직선 $y=-x$: $(-x)=(-y)^2-3(-y)+1$

즉, $x=-y^2-3y-1$

답 (1) $y=-x^2+3x-1$ (2) $y=x^2+3x+1$ (3) $y=-x^2-3x-1$ (4) $x=y^2-3y+1$ (5) $x=-y^2-3y-1$

1346

(1) x축 : $(x-1)^2+\{(-y)+4\}^2=25$

즉, $(x-1)^2+(y-4)^2=25$

(2) y축 : $\{(-x)-1\}^2+(y+4)^2=25$

즉, $(x+1)^2+(y+4)^2=25$

(3) 원점 : $\{(-x)-1\}^2+\{(-y)+4\}^2=25$

즉, $(x+1)^2+(y-4)^2=25$

(4) 직선 $y=x$: $(y-1)^2+(x+4)^2=25$

즉, $(x+4)^2+(y-1)^2=25$

(5) 직선 $y=-x$: $\{(-y)-1\}^2+\{(-x)+4\}^2=25$

즉, $(x-4)^2+(y+1)^2=25$

답 (1) $(x-1)^2+(y-4)^2=25$ (2) $(x+1)^2+(y+4)^2=25$ (3) $(x+1)^2+(y-4)^2=25$ (4) $(x+4)^2+(y-1)^2=25$ (5) $(x-4)^2+(y+1)^2=25$

1347

$\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 $x=\dfrac{-1+3}{2}=1$, $y=\dfrac{1-5}{2}=-2$

$\therefore \mathrm{P}(1,\ -2)$ 답 $\mathrm{P}(1,\ -2)$

1348

구하는 점의 좌표를 $(p,\ q)$라 하면

$\dfrac{-2+p}{2}=-1$, $\dfrac{3+q}{2}=2$ $\quad\therefore p=0, q=1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(0,\ 1)$ 답 $(0,\ 1)$

1349

(1) 두 점 $(a,\ b)$, $(p,\ q)$를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(2,\ 5)$이므로

$\dfrac{a+p}{2}=2$, $\dfrac{b+q}{2}=5$

$\therefore a=4-p, b=10-q$ ...... ㉠

(2) 점 $(a,\ b)$가 직선 $3x+4y-1=0$ 위의 점이므로

$3a+4b-1=0$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$3(4-p)+4(10-q)-1=0$

$\therefore 3p+4q-51=0$

따라서 점 $(p,\ q)$는 직선 $3x+4y-51=0$ 위의 점이므로 구하는 도형의 방정식은 $3x+4y-51=0$

답 (1) $a=4-p, b=10-q$ (2) $3x+4y-51=0$

1350

(1) $\left(\dfrac{-3+a}{2},\ \dfrac{1+b}{2}\right)$

(2) 두 점 A, B를 지나는 직선은 직선 $x-y+1=0$과 수직이다.

직선 $x-y+1=0$의 기울기가 1이므로 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 -1이다.

(3) 선분 AB의 중점 $\left(\dfrac{-3+a}{2},\ \dfrac{1+b}{2}\right)$가 직선 $x-y+1=0$ 위의 점이므로

$\dfrac{-3+a}{2}-\dfrac{1+b}{2}+1=0$ $\quad\therefore a-b=2$ ...... ㉠

또, 직선 AB의 기울기가 -1이므로

$\dfrac{b-1}{a-(-3)}=-1$ $\quad\therefore a+b=-2$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0, b=-2$

$\therefore \mathrm{B}(0,\ -2)$

답 (1) $\left(\dfrac{-3+a}{2},\ \dfrac{1+b}{2}\right)$ (2) -1 (3) $\mathrm{B}(0,\ -2)$

STEP 2 유형 마스터

1351

|전략| 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+m,\ y+n)$에 의하여 점 $(a,\ b)$가 점 $(p,\ q)$로 옮겨지면 $p=a+m, q=b+n$이다.

점 $(-2,\ 3)$을 점 $(1,\ -1)$로 옮기는 평행이동을

$(x,\ y) \longrightarrow (x+m,\ y+n)$이라 하면

$-2+m=1, 3+n=-1$ $\quad\therefore m=3, n=-4$

이때, 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+3,\ y-4)$에 의하여 점 $(3,\ -2)$로 옮겨지는 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$a+3=3, b-4=-2$ $\quad\therefore a=0, b=2$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(0,\ 2)$이다. 답 ⑤

1352

점 $(-2,\ 3)$이 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+1,\ y-2)$에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(-2+1,\ 3-2)$, 즉 $(-1,\ 1)$

이 점이 직선 $y=mx+5$ 위의 점이므로

$1=-m+5 \qquad \therefore m=4$ 답 4

1353

점 $(-1,\ 4)$가 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+2,\ y-b)$에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(-1+2,\ 4-b)$, 즉 $(1,\ 4-b)$

이 점이 점 $(a,\ 2)$와 일치하므로

$1=a,\ 4-b=2 \qquad \therefore a=1,\ b=2$

$\therefore a-b=-1$ 답 ②

1354

점 $(m,\ n)$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(m+3,\ n-2)$

한편, $x^2+y^2-4x+2y-2=0$에서

$(x-2)^2+(y+1)^2=7$

즉, 원의 중심의 좌표는 $(2,\ -1)$이므로

$m+3=2,\ n-2=-1 \qquad \therefore m=-1,\ n=1$

$\therefore m+n=0$ 답 0

1355

점 $\mathrm{A}(3,\ 4)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점을 A'이라 하면 점 A'의 좌표는

$(3+a,\ 4+2)$, 즉 $(a+3,\ 6)$

이때, 원점 O로부터의 거리가 처음의 거리의 2배가 되었으므로

$\overline{\mathrm{OA}'}=2\overline{\mathrm{OA}}$, 즉 $\overline{\mathrm{OA}'}^2=4\overline{\mathrm{OA}}^2$에서

$(a+3)^2+6^2=4(3^2+4^2),\ (a+3)^2=64$

$a+3=\pm 8 \qquad \therefore a=5\ (\because a>0)$ 답 5

1356

도형을 평행이동하여도 그 모양은 변하지 않는다.

즉, $\triangle\mathrm{O'A'B'}$이 정삼각형이므로 $\triangle\mathrm{OAB}$도 정삼각형이다.

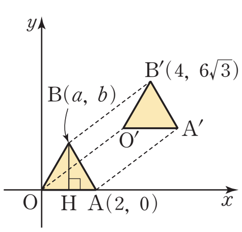
오른쪽 그림의 $\triangle\mathrm{OAB}$에서

$\overline{\mathrm{OA}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{OH}}=1$

이때, $\triangle\mathrm{OAB}$에서

$\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{3}$ ── 한 변의 길이가 2인

$\therefore \mathrm{B}(1,\ \sqrt{3})$ 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\sqrt{3}$



점 B가 평행이동

$(x,\ y) \longrightarrow (x+m,\ y+n)$에 의하여 옮겨지는 점이 $\mathrm{B}'(4,\ 6\sqrt{3})$이므로 $1+m=4,\ \sqrt{3}+n=6\sqrt{3} \qquad \therefore m=3,\ n=5\sqrt{3}$

$\therefore mn=15\sqrt{3}$ 답 ⑤

다른 풀이 정삼각형 OAB에서 $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OA}}=2$이므로

$|a|=2\cos 60°=1,\ |b|=2\sin 60°=\sqrt{3}$

$a>0,\ b>0$이므로 $a=1,\ b=\sqrt{3} \qquad \therefore \mathrm{B}(1,\ \sqrt{3})$

1357

x, y좌표의 부호가 같을 때에는 ㈎에 의하여

$(x,\ y) \longrightarrow (x-2,\ y+1)$이므로

$(5,\ 1) \longrightarrow (3,\ 2) \longrightarrow (1,\ 3) \longrightarrow (-1,\ 4)$

x, y좌표의 부호가 다를 때에는 ㈏에 의하여

$(x,\ y) \longrightarrow (x-2,\ y-1)$이므로

$(-1,\ 4) \longrightarrow (-3,\ 3) \longrightarrow (-5,\ 2) \longrightarrow (-7,\ 1)$

$\longrightarrow (-9,\ 0)$

이때, $(-9)\cdot 0=0$이므로 ㈐에 의하여 이동을 멈춘다.

따라서 멈출 때까지 이동한 횟수는 7이다. 답 7

1358

| 전략 | 직선 $ax+by+c=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $a(x-m)+b(y-n)+c=0$이다.

직선 $ax-y+1-a=0$을 주어진 평행이동에 의하여 평행이동한 직선의 방정식은

$a(x-m)-(y-2)+1-a=0$

$\therefore ax-y-am+3-a=0$

이 직선이 직선 $3x+y-9=0$, 즉 $-3x-y+9=0$과 일치하므로

$a=-3,\ -am+3-a=9$

따라서 $a=-3,\ m=1$이므로

$a+m=-2$ 답 -2

1359

점 $(2,\ 1)$이 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+m,\ y+n)$에 의하여 옮겨진 점의 좌표가 $(-2,\ 3)$이므로

$2+m=-2,\ 1+n=3 \qquad \therefore m=-4,\ n=2$

즉, $(x,\ y) \longrightarrow (x-4,\ y+2)$이다. … ❶

직선 $x+by+c=0$을 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$(x+4)+b(y-2)+c=0$

$\therefore x+by-2b+c+4=0$ … ❷

이 직선이 직선 $x-5y+10=0$과 일치하므로

$b=-5,\ -2b+c+4=10$에서 $c=-4$ … ❸

$\therefore m+n+b+c=-11$ … ❹

답 -11

채점 기준	비율
❶ m, n의 값을 구하여 평행이동을 알 수 있다.	30 %
❷ 주어진 평행이동에 의하여 직선 $x+by+c=0$이 옮겨지는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ b, c의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $m+n+b+c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1360

직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+1=a(x+2)+b \qquad \therefore y=ax+2a+b-1$

이 직선이 직선 $y=3x+2$와 y축 위의 점에서 수직으로 만나므로 기울기의 곱이 -1이고 y절편이 같아야 한다.

즉, $3a=-1$, $2a+b-1=2$에서 $a=-\dfrac{1}{3}$, $b=\dfrac{11}{3}$

$\therefore b-a=4$ 답 ⑤

1361

직선 $y=x-2$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+1=x-m-2$

$\therefore y=x-m-3$ ...... ㉠

직선 $y=-x-3$을 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-n=-x-3$

$\therefore y=-x+n-3$ ...... ㉡

이때, 두 직선 ㉠, ㉡이 모두 점 $(3,\ -4)$를 지나므로

$-4=3-m-3$에서 $m=4$, $-4=-3+n-3$에서 $n=2$

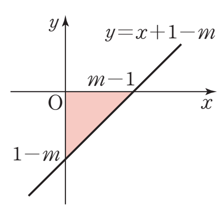
$\therefore m+n=6$ 답 ②

1362

직선 $x-y+2=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$(x-m)-(y+1)+2=0 \qquad \therefore x-y+1-m=0$

이 직선의 x절편은 $m-1$, y절편은 $1-m$이고 $m>1$이므로 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



이 부분의 넓이가 8이므로

$\dfrac{1}{2}(m-1)^2=8$, $(m-1)^2=16$

$m-1=\pm4 \qquad \therefore m=5\ (\because m>1)$ 답 5

1363

직선 $l : 2x+y+1=0$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선 m의 방정식은

$2(x-2)+(y-a)+1=0 \qquad \therefore 2x+y-a-3=0$

이때, 두 직선 l과 m 사이의 거리는 $\sqrt{5}$이므로 직선 l 위의 한 점 $(0,\ -1)$과 직선 m 사이의 거리는 $\sqrt{5}$이다.

즉, $\dfrac{|-1-a-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$에서 $|a+4|=5$

$a+4=\pm5 \qquad \therefore a=1\ (\because a>0)$ 답 1

1364

|전략| 원 $x^2+y^2=r^2$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원의 방정식은 $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$이다.

$x^2+y^2-4x+2y+1=0$에서 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$

원 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a-2)^2+(y-b+1)^2=4$

이 원이 원 $(x-4)^2+(y+2)^2=4$와 겹쳐지므로

$-a-2=-4,\ -b+1=2 \qquad \therefore a=2,\ b=-1$

$\therefore b-a=-3$ 답 ①

다른 풀이 원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동으로 생각할 수 있다.

원 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$, 즉 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$의 중심의 좌표는 $(2,\ -1)$이고, 이 점을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(2+a,\ -1+b)$

이때, 이 점이 원 $(x-4)^2+(y+2)^2=4$의 중심의 좌표 $(4,\ -2)$이므로

$2+a=4$, $-1+b=-2 \qquad \therefore a=2$, $b=-1$

$\therefore b-a=-3$

1365

원점을 점 $(1,\ 2)$로 옮기는 평행이동은

$(x,\ y) \longrightarrow (x+1,\ y+2)$

포물선 $y=x^2+4x-1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-2=(x-1)^2+4(x-1)-1$

$y=x^2+2x-2 \qquad \therefore y=(x+1)^2-3$

따라서 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ -3)$이므로

$m=-1$, $n=-3 \qquad \therefore m+n=-4$ 답 -4

다른 풀이 포물선의 평행이동은 꼭짓점의 평행이동으로 생각할 수 있다.

포물선 $y=x^2+4x-1$, 즉 $y=(x+2)^2-5$의 꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ -5)$이고, 이 점이 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+1,\ y+2)$에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는 $(-1,\ -3)$이므로 $m=-1$, $n=-3$

$\therefore m+n=-4$

1366

$x^2+y^2+ax+by+2=0$에서

$\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{b}{2}\right)^2=\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}-2$

이 원을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 원의 방정식은

$\left(x-2+\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(y+1+\dfrac{b}{2}\right)^2=\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}-2$

이때, 중심의 좌표가 $(-1,\ 2)$이므로

$2-\dfrac{a}{2}=-1,\ -1-\dfrac{b}{2}=2 \qquad \therefore a=6,\ b=-6$

또, 반지름의 길이는

$r=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}-2}=\sqrt{\dfrac{6^2}{4}+\dfrac{(-6)^2}{4}-2}=\sqrt{16}=4$

$\therefore a+b+r=4$ 답 ①

1367

포물선 $y=3x^2+6x+7$, 즉 $y=3(x+1)^2+4$를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 $p+3$만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-(p+3)=3(x-p+1)^2+4$

$\therefore y=3(x-p+1)^2+p+7$

이 포물선의 꼭짓점 $(p-1, p+7)$이 x축 위에 있으므로 y좌표는 0이다.

$p+7=0 \qquad \therefore p=-7$ 　　답 -7

다른 풀이 포물선의 평행이동은 꼭짓점의 평행이동으로 생각할 수 있다.

포물선 $y=3x^2+6x+7$, 즉 $y=3(x+1)^2+4$의 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 4)$이고, 이 점을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 $p+3$만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(-1+p,\ 4+p+3)$

이때, 이 점이 x축 위에 있으므로 y좌표는 0이다.

$4+p+3=0 \qquad \therefore p=-7$

1368

$x^2+y^2-2x+4y+1=0$에서

$(x-1)^2+(y+2)^2=4$

이 원을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-m-1)^2+(y-n+2)^2=4$

이 원이 원 $x^2+y^2=4$와 일치하려면

$-m-1=0,\ -n+2=0$

$\therefore m=-1,\ n=2$

원 $x^2+y^2-6y+8=0$, 즉 $x^2+(y-3)^2=1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-2-3)^2=1$

$\therefore (x+1)^2+(y-5)^2=1$

따라서 원의 중심 $(-1,\ 5)$와 원점 사이의 거리는

$\sqrt{(-1)^2+5^2}=\sqrt{26}$ 　　답 $\sqrt{26}$

1369

|전략| 원과 직선이 접하려면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 함을 이용한다.

직선 $y=2x+k$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+3=2(x-2)+k \qquad \therefore 2x-y+k-7=0$

이 직선이 원 $x^2+y^2=5$에 접하므로 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같다.

즉, $\dfrac{|k-7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$에서 $|k-7|=5$

$k-7=\pm5 \qquad \therefore k=2$ 또는 $k=12$

따라서 모든 k의 값의 합은 14이다. 　　답 14

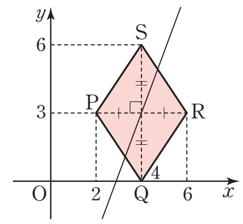
1370

|전략| 마름모의 넓이를 이등분하는 직선은 마름모의 두 대각선의 교점을 지남을 이용한다.

직선 $3x-2y-6=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$3(x-a)-2(y-b)-6=0$ 　　⋯⋯ ㉠

오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 마름모의 넓이를 이등분하려면 직선 ㉠이 마름모의 두 대각선의 교점을 지나야 한다.



이때, 마름모 PQRS의 두 대각선의 교점의 좌표는

$\left(\dfrac{2+6}{2}, \dfrac{3+3}{2}\right)$, 즉 $(4, 3)$이므로

$3(4-a)-2(3-b)-6=0$

$\therefore 3a-2b=0$ 　　답 ⑤

1371

|전략| 두 원이 외접하려면 두 원의 중심 사이의 거리가 두 원의 반지름의 길이의 합과 같음을 이용한다.

원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=1$

$x^2+y^2-6x+8=0$에서 $(x-3)^2+y^2=1$

외접하는 두 원의 중심 $(a,\ b)$, $(3,\ 0)$ 사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합 2와 같으므로

$\sqrt{(a-3)^2+b^2}=2$

양변을 제곱하면 $(a-3)^2+b^2=4$

이때, a, b는 정수이므로

$(a-3)^2=0,\ b^2=4$ 또는 $(a-3)^2=4,\ b^2=0$

$\therefore a=3,\ b=\pm2$ 또는 $a-3=\pm2,\ b=0$

따라서 구하는 정수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(3,\ 2),\ (3,\ -2),\ (5,\ 0),\ (1,\ 0)$

답 $(3,\ 2),\ (3,\ -2),\ (5,\ 0),\ (1,\ 0)$

1372

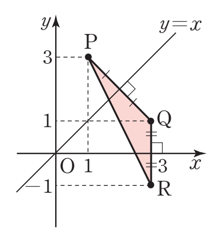
|전략| 점 $(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(y,\ x)$, x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(x,\ -y)$이다.

점 $P(1,\ 3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 $Q(3,\ 1)$

점 $Q(3,\ 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $R(3,\ -1)$

따라서 오른쪽 그림에서

$\triangle PQR=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot2=2$



답 2

1373

민주의 위치를 나타내는 점의 좌표를 $(m,\ n)$이라 하면

형식이의 위치를 나타내는 점의 좌표는 $(-m,\ -n)$

혜나의 위치를 나타내는 점의 좌표는 $(n,\ m)$

따라서 $a=-m$, $b=m$이므로 $a+b=0$ 답 0

1374

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$로 놓으면 점 P를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(a,\ -b)$

이 점이 제 3 사분면 위의 점이므로 $a<0$, $-b<0$

$\therefore a<0,\ b>0$

또한, 점 P를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-a,\ -b)$이고, 이 점을 다시 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-a,\ b)$이다.

이때, $-a>0$, $b>0$이므로 점 $(-a,\ b)$는 제 1 사분면 위의 점이다.

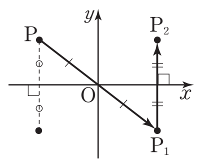
답 제 1 사분면

다른 풀이 점 P를 x축에 대하여 대칭이동한 점이 제 3 사분면 위에 있으므로 점 P는 제 2 사분면 위의 점이다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 생각할 수 있다.

$\mathrm{P} \xrightarrow[\text{대칭}]{\text{원점}} \mathrm{P}_1 \xrightarrow[\text{대칭}]{x\text{축}} \mathrm{P}_2$

(제 2 사분면) (제 4 사분면) (제 1 사분면)



1375

점 $\mathrm{P}(3,\ 2)$를 y축에 대하여 대칭이동하면 $\mathrm{P}_1(-3,\ 2)$

점 $\mathrm{P}_1(-3,\ 2)$를 x축에 대하여 대칭이동하면 $\mathrm{P}_2(-3,\ -2)$

점 $\mathrm{P}_2(-3,\ -2)$를 원점에 대하여 대칭이동하면 $\mathrm{P}_3(3,\ 2)$

즉, 점 P를 y축, x축, 원점에 대하여 이 순서로 대칭이동하면 자기 자신으로 돌아온다.

따라서 $2018=3\cdot672+2$이므로 대칭이동하는 과정을 2016번 반복하면 이동한 후의 점의 좌표는 $(3,\ 2)$이고, 2018번 이동한 후의 점의 좌표는 $(-3,\ -2)$이다. 답 $(-3,\ -2)$

1376

|전략| 도형 $f(x,\ y)=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(x,\ -y)=0$이다.

직선 $y=2x-1$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=2x-1 \qquad \therefore y=-2x+1$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로 기울기가 $\frac{1}{2}$이고 점 $(2,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{2}(x-2) \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x$ 답 $y=\frac{1}{2}x$

1377

처음 직선의 기울기를 m이라 하면 점 $(-1,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=m(x+1)$

이 직선을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=m(x+1)$

이 직선이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$-1=m(1+1) \qquad \therefore m=-\frac{1}{2}$ 답 ①

1378

직선 $ax+(b-1)y=1$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$ay+(b-1)x=1 \qquad \therefore (b-1)x+ay=1$

이 직선이 직선 $(a-3)x-(b+1)y=1$과 일치하므로

$b-1=a-3$, $a=-b-1$

$\therefore a-b=2$, $a+b=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$

$\therefore ab=-\frac{3}{4}$ 답 $-\frac{3}{4}$

1379

직선 $y=\frac{1}{2}ax-1$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}a(-x)-1 \qquad \therefore y=-\frac{1}{2}ax-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$ ··· ❶

직선 $y=\frac{1}{2}ax-1$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=\frac{1}{2}a(-x)-1 \qquad \therefore y=\frac{1}{2}ax+1 \qquad \cdots\cdots ㉡$ ··· ❷

이때, 두 직선 ㉠, ㉡이 수직이므로

$-\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}a=-1$, $a^2=4 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 직선을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 주어진 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ 양수 a의 값을 구할 수 있다.	40 %

1380

|전략| 도형 $f(x,\ y)=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x,\ y)=0$이다.

$x^2+y^2-4x+6y+9=0$에서 $(x-2)^2+(y+3)^2=4$

이 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-2)^2+(y+3)^2=4 \qquad \therefore (x+2)^2+(y+3)^2=4$

이때, 이 원의 중심 $(-2,\ -3)$이 원점을 지나는 직선 $l : y=ax$ 위에 있으므로

$-3=-2a \qquad \therefore a=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

1381

ㄱ. $(x-1)^2+(y-1)^2=2$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $(-y-1)^2+(-x-1)^2=2$

$\therefore (x+1)^2+(y+1)^2=2$

ㄴ. $2x-2y-1=0$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $2(-y)-2(-x)-1=0$

$\therefore 2x-2y-1=0$

ㄷ. $y=x^2+1$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$-x=(-y)^2+1$

$\therefore y^2=-x-1$

따라서 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하였을 때 처음의 도형과 일치하는 도형의 방정식은 ㄴ뿐이다. 답 ②

1382

중심이 점 $(-1,\ 2)$이고 반지름의 길이가 k인 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-2)^2=k^2$

이 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+1)^2+(-y-2)^2=k^2 \qquad \therefore (x+1)^2+(y+2)^2=k^2$

이때, 이 원이 점 $(2,\ 2)$를 지나므로

$(2+1)^2+(2+2)^2=k^2,\ k^2=25$

$\therefore k=5\ (\because k>0)$ 답 ⑤

1383

포물선 $y=x^2+mx+n$을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=(-x)^2+m(-x)+n,\ y=-x^2+mx-n$

$\therefore y=-\left(x-\dfrac{m}{2}\right)^2+\dfrac{m^2}{4}-n$

이때, 꼭짓점 $\left(\dfrac{m}{2},\ \dfrac{m^2}{4}-n\right)$이 점 $(2,\ 1)$과 일치하므로

$\dfrac{m}{2}=2,\ \dfrac{m^2}{4}-n=1 \qquad \therefore m=4,\ n=3$

$\therefore m-n=1$ 답 1

다른 풀이 점 $(2,\ 1)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-2,\ -1)$

이때, 주어진 포물선은 점 $(-2,\ -1)$을 꼭짓점으로 하므로

$y=(x+2)^2-1 \qquad \therefore y=x^2+4x+3$

따라서 $m=4,\ n=3$이므로 $m-n=1$

1384

직선 $3x-4y+a=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$3x-4(-y)+a=0 \qquad \therefore 3x+4y+a=0$

이 직선이 원 $x^2+(y-2)^2=9$에 접하므로 원의 중심 $(0,\ 2)$와 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 3과 같다.

즉, $\dfrac{|8+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$에서 $|8+a|=15$

$8+a=\pm15 \qquad \therefore a=7\ (\because a>0)$ 답 7

1385

|전략| 원과 직선이 만나지 않으려면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이보다 커야 함을 이용한다.

중심이 점 $(3,\ -1)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+1)^2=r^2$

이 원을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

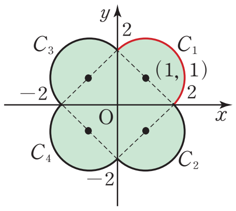
$(-y-3)^2+(-x+1)^2=r^2 \qquad \therefore (x-1)^2+(y+3)^2=r^2$

이때, 이 원과 직선 $3x+4y-1=0$이 만나지 않으려면

(원의 중심과 직선 사이의 거리)>(원의 반지름의 길이)이므로

$\dfrac{|3-12-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}>r,\ 10>5r \qquad \therefore 0<r<2\ (\because r>0)$ 답 $0<r<2$

1386



원 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$에서 C_1은 오른쪽 그림의 빨간색 곡선과 같고, 이것을 각각 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 C_2, C_3, C_4는 오른쪽 그림과 같다.

이때, 네 도형 C_1, C_2, C_3, C_4로 둘러싸인 부분의 넓이는

(삼각형 4개의 넓이)+(반원 4개의 넓이)이므로

(구하는 넓이)$=4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot2\right)+4\cdot\left\{\dfrac{1}{2}\cdot\pi\cdot(\sqrt{2})^2\right\}$

$=8+4\pi$ 답 ⑤

Lecture

대칭이동한 후 만들어지는 도형의 넓이 구하기

주어진 도형을 각각 대칭이동하여 만들어지는 도형의 넓이를 구할 때는 사각형, 반원 등으로 나누어 넓이를 구한 후 합한다.

1387

|전략| 이동하는 순서에 주의하여 평행이동과 대칭이동한 포물선의 방정식을 구한다.

포물선 $y=x^2+a$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-3=(x-2)^2+a \qquad \therefore y=x^2-4x+a+7$

이 포물선을 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=x^2-4x+a+7 \qquad \therefore y=-x^2+4x-a-7$

이 포물선이 $y=-x^2+4x-3$과 일치하므로

$-a-7=-3 \qquad \therefore a=-4$ 답 -4

1388

점 $(-2,\ a)$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 $(-1,\ a+3)$이고, 이 점을 다시 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하면 $(-a-3,\ 1)$이다.

이 점이 점 $(3,\ b)$와 일치하므로

$-a-3=3,\ 1=b \qquad \therefore a=-6,\ b=1$

$\therefore a+b=-5$ 답 ①

1389

|전략| 원의 넓이를 이등분하는 직선은 원의 중심을 지남을 이용한다.

직선 $y=x+2$를 y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-m=x+2 \qquad \therefore y=x+m+2$

이 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=-x+m+2 \qquad \therefore y=x-m-2$

이 직선이 원 $x^2+y^2-2x+6y+1=0$, 즉 $(x-1)^2+(y+3)^2=9$의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(1,\ -3)$을 지나야 하므로

$-3=1-m-2 \qquad \therefore m=2$ 답 2

1390

|전략| 중심의 좌표가 $(a,\ b)$, 반지름의 길이가 r인 원이 x축, y축에 동시에 접하면 $|a|=|b|=r$임을 이용한다.

원 $(x-p)^2+(y+q)^2=4$를 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $(x-p)^2+(-y+q)^2=4$

$\therefore (x-p)^2+(y-q)^2=4$ … ❶

이 원을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-p)^2+(y-1-q)^2=4$ … ❷

이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

$|p|=|1+q|=2$

$\therefore p=2,\ q=1\ (\because p>0,\ q>0)$

$\therefore p+q=3$ … ❸

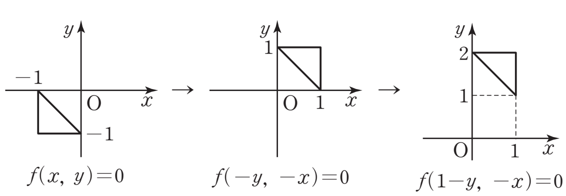
답 3

채점 기준	배점
❶ 주어진 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ ❶의 원을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	40 %

1391

|전략| 도형 $f(x,\ y)=0$과 $f(-y,\ -x)=0$은 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이다.

$f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하면 $f(-y,\ -x)=0$이고, 이것을 다시 y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $f(1-y,\ -x)=0$이다.



따라서 $f(1-y,\ -x)=0$이 나타내는 도형은 ⑤이다. 답 ⑤

다른 풀이 주어진 그림에서

$f(-1,\ 0)=0,\ f(0,\ -1)=0,\ f(-1,\ -1)=0$이므로

$f(-1,\ 0)=0$일 때, $f(1-y,\ -x)=0$에서

$1-y=-1,\ -x=0 \qquad \therefore x=0,\ y=2$

$f(0,\ -1)=0$일 때, $f(1-y,\ -x)=0$에서

$1-y=0,\ -x=-1 \qquad \therefore x=1,\ y=1$

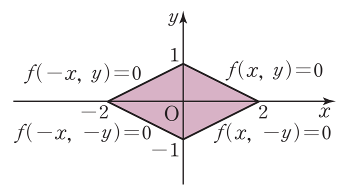
$f(-1,\ -1)=0$일 때, $f(1-y,\ -x)=0$에서

$1-y=-1,\ -x=-1 \qquad \therefore x=1,\ y=2$

따라서 세 점 $(0,\ 2),\ (1,\ 1),\ (1,\ 2)$를 지나는 도형은 ⑤이다.

1392

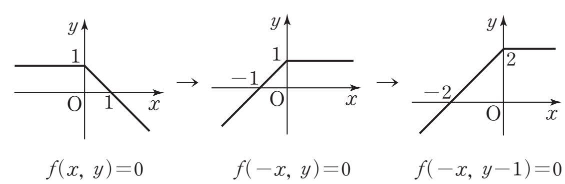
방정식 $f(-x,\ y)=0,\ f(x,\ -y)=0,\ f(-x,\ -y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 각각 y축, x축, 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 주어진 네 개의 도형으로 둘러싸인 부분은 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



따라서 구하는 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot4\cdot2=4$ 답 4

1393

$f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동하면 $f(-x,\ y)=0$이고, 이것을 다시 y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $f(-x,\ y-1)=0$이다.



따라서 $f(-x,\ y-1)=0$이 나타내는 도형은 ⑤이다. 답 ⑤

다른 풀이 주어진 그림의 도형은 점 $(0,\ 1)$에서 꺾이므로 $f(0,\ 1)=0$

$f(0,\ 1)=0$일 때, $f(-x,\ y-1)=0$에서

$-x=0,\ y-1=1 \qquad \therefore x=0,\ y=2$

즉, $f(-x,\ y-1)=0$이 나타내는 도형은 점 $(0,\ 2)$에서 꺾인다.

또, 주어진 그림에서 $f(1,\ 0)=0$이므로 $f(-x,\ y-1)=0$에서

$-x=1,\ y-1=0 \qquad \therefore x=-1,\ y=1$

즉, $f(-x,\ y-1)=0$이 나타내는 도형은 점 $(-1,\ 1)$을 지난다.

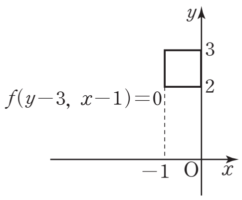
따라서 구하는 도형은 ⑤이다.

1394

ㄱ. $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동하면 $f(-x,\ -y)=0$이다.

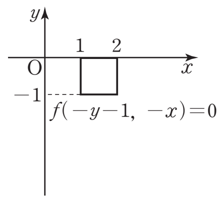
ㄴ. $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $f(x-1,\ y)=0$이고, 이것을 다시 x축에 대하여 대칭이동하면 $f(x-1,\ -y)=0$이다.

ㄷ. $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $f(x-3,\ y-1)=0$이고, 이것을 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $f(y-3,\ x-1)=0$이다.



이것은 도형 B를 나타내는 방정식이 아니다.

ㄹ. $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $f(x-1,\ y)=0$이고, 이것을 다시 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하면 $f(-y-1,\ -x)=0$이다.



이것은 도형 B를 나타내는 방정식이 아니다.

따라서 도형 B를 나타내는 방정식은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ①

1395

|전략| 점 $P(x,\ y)$를 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이동한 점을 P'이라 하면 점 $(a,\ b)$는 $\overline{PP'}$의 중점이다.

두 점 $(a,\ 2)$, $(-1,\ b)$를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(3,\ 4)$이므로

$\frac{a+(-1)}{2}=3,\ \frac{2+b}{2}=4 \qquad \therefore a=7,\ b=6$

$\therefore ab=42$ 답 42

1396

원 $x^2+y^2-2x-8=0$, 즉 $(x-1)^2+y^2=9$의 중심의 좌표는 $(1,\ 0)$이고 반지름의 길이는 3이다.

원의 중심 $(1,\ 0)$을 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$\frac{1+a}{2}=2,\ \frac{0+b}{2}=1 \qquad \therefore a=3,\ b=2$

원은 대칭이동하여도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 구하는 도형은 중심의 좌표가 $(3,\ 2)$이고 반지름의 길이가 3인 원이다.

$\therefore (x-3)^2+(y-2)^2=9$ 답 ①

1397

포물선 $y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$의 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 2)$

포물선 $y=-x^2+6x-13=-(x-3)^2-4$의 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ -4)$

두 포물선이 점 $P(a,\ b)$에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점도 점 $P(a,\ b)$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 꼭짓점을 이은 선분의 중점이 $P(a,\ b)$이므로

$a=\frac{-1+3}{2}=1,\ b=\frac{2+(-4)}{2}=-1 \qquad \therefore ab=-1$ 답 ②

1398

|전략| 두 점 P, Q가 직선 l에 대하여 대칭이면 직선 l은 $\overline{PQ}$의 수직이등분선이다.

두 점 $P(-3,\ 7)$, $Q(a,\ b)$에 대하여 $\overline{PQ}$의 중점 $\left(\frac{-3+a}{2},\ \frac{7+b}{2}\right)$가 직선 $y=2x+3$ 위의 점이므로

$\frac{7+b}{2}=2\cdot\frac{-3+a}{2}+3 \qquad \therefore 2a-b=7$ ⋯⋯ ㉠

또, 직선 PQ가 직선 $y=2x+3$과 수직이므로

$\frac{b-7}{a-(-3)}\cdot 2=-1 \qquad \therefore a+2b=11$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5,\ b=3$

$\therefore a-b=2$ 답 ②

1399

직선 l의 방정식을 $y=ax+b$라 하면 두 점 $P(2,\ 3)$, $Q(4,\ 2)$에 대하여 $\overline{PQ}$의 중점 $\left(3,\ \frac{5}{2}\right)$가 직선 l 위의 점이므로

$\frac{5}{2}=3a+b$ ⋯⋯ ㉠

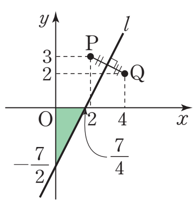
또, 직선 PQ가 직선 l과 수직이므로

$\frac{2-3}{4-2}\cdot a=-1 \qquad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=-\frac{7}{2} \qquad \therefore y=2x-\frac{7}{2}$

이때, 직선 l의 x절편은 $\frac{7}{4}$, y절편은 $-\frac{7}{2}$이므로 직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{7}{2}=\frac{49}{16}$



답 $\frac{49}{16}$

1400

원 $(x+2)^2+(y-1)^2=1$의 중심 $(-2,\ 1)$을 직선 $y=x-3$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 두 점 $(-2,\ 1)$, $(a,\ b)$를 이은 선분의 중점 $\left(\frac{-2+a}{2},\ \frac{1+b}{2}\right)$가 직선 $y=x-3$ 위의 점이므로

$\frac{1+b}{2}=\frac{-2+a}{2}-3 \qquad \therefore a-b=9$ ⋯⋯ ㉠

또, 두 점 $(-2,\ 1)$, $(a,\ b)$를 지나는 직선이 직선 $y=x-3$과 수직이므로

$\frac{b-1}{a+2}\cdot 1=-1 \qquad \therefore a+b=-1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=-5$

원은 대칭이동하여도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 구하는 도형은 중심의 좌표가 $(4,\ -5)$이고 반지름의 길이가 1인 원이다.

$\therefore (x-4)^2+(y+5)^2=1$ 답 $(x-4)^2+(y+5)^2=1$

1401

두 원의 중심 $(0,\ 0)$, $(3,\ 1)$을 이은 선분의 중점 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이 직선 $ax+by-5=0$ 위의 점이므로

$\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b-5=0 \qquad \therefore 3a+b=10 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또, 두 점 $(0,\ 0)$, $(3,\ 1)$을 지나는 직선이 직선 $ax+by-5=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{5}{b}$와 수직이므로

$\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{a}{b}\right)=-1 \qquad \therefore a=3b \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=1$

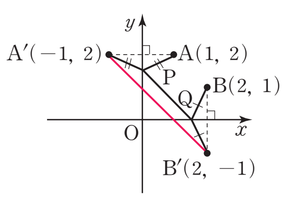
$\therefore a^2+b^2=10$

답 10

1402

|전략| 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′, 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}\ge\overline{A'B'}$임을 이용한다.

점 $A(1,\ 2)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′, 점 $B(2,\ 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면



$A'(-1,\ 2)$, $B'(2,\ -1)$

$\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{QB}=\overline{QB'}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}&=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}\\&\ge\overline{A'B'}\\&=\sqrt{(2+1)^2+(-1-2)^2}=3\sqrt{2}\end{aligned}$$

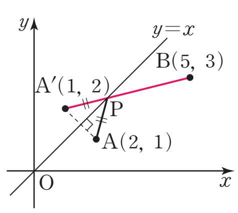
답 $3\sqrt{2}$

Lecture

점 P가 y축 위의 점이므로 점 A를 y축에 대하여 대칭이동하고, 점 Q가 x축 위의 점이므로 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한다.

1403

점 $A(2,\ 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면



$A'(1,\ 2)$

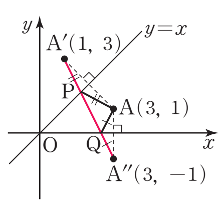
$\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{BP}&=\overline{A'P}+\overline{BP}\\&\ge\overline{A'B}\\&=\sqrt{(5-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{17}\end{aligned}$$

답 ④

1404

점 $A(3,\ 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′, x축에 대하여 대칭이동한 점을 A″이라 하면



$A'(1,\ 3)$, $A''(3,\ -1)$

$\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{QA}=\overline{QA''}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}&=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QA''}\\&\ge\overline{A'A''}\\&=\sqrt{(3-1)^2+(-1-3)^2}=2\sqrt{5}\end{aligned}$$

따라서 $\triangle APQ$의 둘레의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{5}$이다.

답 $2\sqrt{5}$

1405

점 $A(2,\ 4)$를 직선 $x+y-2=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(m,\ n)$이라 하자.

$\overline{AA'}$의 중점 $\left(\frac{2+m}{2},\ \frac{4+n}{2}\right)$이 직선 $x+y-2=0$ 위의 점이므로

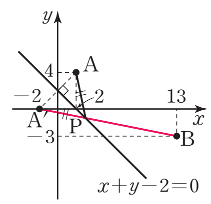
$\frac{2+m}{2}+\frac{4+n}{2}-2=0 \qquad \therefore m+n=-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또, 직선 AA′이 직선 $x+y-2=0$과 수직이므로

$\frac{n-4}{m-2}\cdot(-1)=-1 \qquad \therefore m-n=-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=-2$, $n=0$

$\therefore A'(-2,\ 0)$ ··· ❶



$\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{BP}&=\overline{A'P}+\overline{BP}\\&\ge\overline{A'B}\\&=\sqrt{(13+2)^2+(-3-0)^2}\\&=3\sqrt{26}\end{aligned}$$ ··· ❷

답 $3\sqrt{26}$

채점 기준	배점
❶ 점 A′의 좌표를 구할 수 있다.	60 %
❷ $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

STEP 3 내신 마스터

1406

유형 01 점의 평행이동

|전략| 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+m,\ y+n)$에 의하여 점 $(a,\ b)$가 점 $(p,\ q)$로 옮겨지면 $p=a+m$, $q=b+n$이다.

점 $(5,\ 2)$를 점 $(1,\ 4)$로 옮기는 평행이동을 $(x,\ y) \longrightarrow (x+m,\ y+n)$이라 하면

$5+m=1$, $2+n=4 \qquad \therefore m=-4$, $n=2$

이때, 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x-4,\ y+2)$에 의하여 점 $P(3,\ 1)$이 옮겨지는 점을 $P'(a,\ b)$라 하면

$a=3-4=-1$, $b=1+2=3 \qquad \therefore P'(-1,\ 3)$

$\therefore \overline{PP'}=\sqrt{(-1-3)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{5}$

답 ④

1407

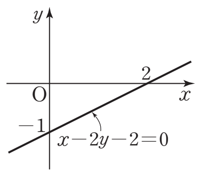
유형 02 도형의 평행이동 – 직선

|전략| 직선 $ax+by+c=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $a(x-m)+b(y-n)+c=0$이다.

직선 $x-2y+5=0$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$(x-1)-2(y+3)+5=0\qquad \therefore x-2y-2=0$

이 직선의 x절편은 2, y절편은 -1이므로 x축, y축에 의하여 잘리는 선분은 두 점 $(2,\ 0)$, $(0,\ -1)$을 이은 선분이다.



따라서 이 선분의 길이는

$\sqrt{(0-2)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{5}$

답 ③

1408

유형 04 평행이동의 활용

|전략| 두 원이 서로 다른 두 점에서 만나려면 (두 원의 반지름의 길이의 차)<(두 원의 중심 사이의 거리)<(두 원의 반지름의 길이의 합)임을 이용한다.

원 $(x+3)^2+(y-2)^2=3$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a+3)^2+(y-b-2)^2=3$

이 원과 원 $(x+3)^2+(y-2)^2=3$이 서로 다른 두 점에서 만나려면

(두 원의 반지름의 길이의 차)<(두 원의 중심 사이의 거리)

<(두 원의 반지름의 길이의 합)

이어야 한다.

즉, $\sqrt{3}-\sqrt{3}<\sqrt{a^2+b^2}<\sqrt{3}+\sqrt{3}$에서 $0<\sqrt{a^2+b^2}<2\sqrt{3}$

$\therefore 0<a^2+b^2<12$

따라서 a^2+b^2의 값 중 정수는 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 11$의 11개이다. 답 ④

1409

유형 04 평행이동의 활용

|전략| 평행이동한 원 O'의 방정식을 구하고, 두 원 O, O'의 공통인 현의 길이가 2가 되도록 하는 실수 a의 값을 구한다.

원 O : $x^2+y^2+4x-4y+4=0$에서

O : $(x+2)^2+(y-2)^2=4$

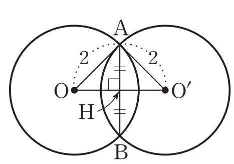
원 O를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원 O'의 방정식은

O' : $x^2+(y-a-2)^2=4$

이때, 두 원의 중심 $(-2,\ 2)$와 $(0,\ a+2)$ 사이의 거리 $\overline{OO'}$은

$\overline{OO'}=\sqrt{(0+2)^2+(a+2-2)^2}=\sqrt{a^2+4}$

오른쪽 그림과 같이 두 원 O, O'의 공통인 현을 $\overline{AB}$, $\overline{AB}$와 $\overline{OO'}$의 교점을 H라 하면 $\triangle AOO'$이 이등변삼각형이므로



$\overline{OH}=\dfrac{1}{2}\overline{OO'}=\dfrac{\sqrt{a^2+4}}{2}$

$\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=1$이므로 직각삼각형 AOH에서

$2^2=\left(\dfrac{\sqrt{a^2+4}}{2}\right)^2+1^2$

$a^2+4=12,\ a^2=8\qquad \therefore a=\pm 2\sqrt{2}$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 $2\sqrt{2}\cdot(-2\sqrt{2})=-8$ 답 ③

1410

유형 05 점의 대칭이동

|전략| 세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같아야 함을 이용한다.

점 $\mathrm{P}(3,\ -1)$을 x축, y축에 대하여 대칭이동한 점은 각각

$\mathrm{A}(3,\ 1)$, $\mathrm{B}(-3,\ -1)$

점 $\mathrm{Q}(a,\ b)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점은

$\mathrm{C}(a,\ -b)$

이때, 세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으려면

$\dfrac{-1-1}{-3-3}=\dfrac{-1+b}{-3-a}$, $-3-a=-3+3b$ (직선 AB의 기울기) =(직선 BC의 기울기)

$\therefore a=-3b$

따라서 직선 PQ의 기울기는

$\dfrac{b+1}{a-3}=\dfrac{b+1}{-3b-3}=\dfrac{b+1}{-3(b+1)}=-\dfrac{1}{3}$ 답 ③

1411

유형 08 대칭이동의 활용

|전략| 도형 $f(x,\ y)=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x,\ y)=0$이고, 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x,\ -y)=0$이다.

원 C의 방정식은 $(-x+3)^2+(y+2)^2=1$

$\therefore (x-3)^2+(y+2)^2=1$

직선 l의 방정식은 $(-x)+m(-y)-5=0$

$\therefore x+my+5=0$

이때, 직선 l이 원 C의 중심 $(3,\ -2)$를 지나므로

$3+(-2)\cdot m+5=0\qquad \therefore m=4$ 답 ④

1412

유형 08 대칭이동의 활용

|전략| 대칭이동한 원 C_2의 중심의 좌표를 구하고, 두 원 C_1, C_2의 중심을 연결한 직선을 그어 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값을 구한다.

원 C_1 : $x^2-2x+y^2+4y+4=0$, 즉 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원 C_2의 방정식은

$(y-1)^2+(x+2)^2=1\qquad \therefore (x+2)^2+(y-1)^2=1$

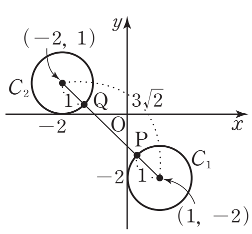
이때, 두 원 C_1, C_2의 중심 $(1,\ -2)$, $(-2,\ 1)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(-2-1)^2+(1+2)^2}=3\sqrt{2}$

또, 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이는 각각 1이다.

따라서 오른쪽 그림에서 두 점 P, Q 사이의 거리의 최솟값은

$3\sqrt{2}-1-1=3\sqrt{2}-2$



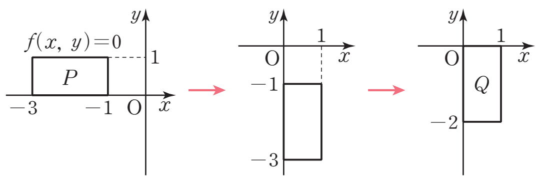
답 ④

1413

유형 **10 도형 $f(x,\ y)=0$의 평행이동과 대칭이동**

|전략| 도형 P를 어떻게 평행이동 또는 대칭이동하여야 도형 Q가 되는지 생각해 본다.

다음 그림과 같이 도형 Q는 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.



$f(x,\ y)=0$ $f(y,\ x)=0$ $f(y-1,\ x)=0$

$f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $f(y,\ x)=0$이고, 이것을 다시 y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $f(y-1,\ x)=0$이다.

따라서 도형 Q를 나타내는 방정식은 $f(y-1,\ x)=0$이다. 답 ④

1414

유형 **11 점 $(a,\ b)$에 대한 대칭이동**

|전략| 두 원이 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이면 두 원의 중심도 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이다.

두 원의 중심의 좌표는 각각 $(1,\ -2)$, $(-3,\ 2)$

두 원이 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이므로 두 원의 중심도 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 점 $(1,\ -2)$, $(-3,\ 2)$를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(a,\ b)$이므로

$a=\frac{1+(-3)}{2}=-1$, $b=\frac{-2+2}{2}=0$

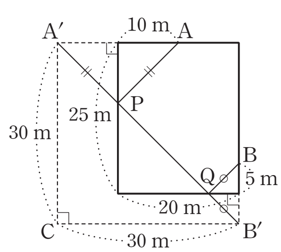
원은 대칭이동하여도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 $c=4$

$\therefore a+b+c=3$ 답 ①

1415

유형 **13 대칭이동을 이용한 거리의 합의 최솟값**

|전략| 두 지점 A, B를 담에 대하여 대칭이동한 점과 경비원이 지나는 담의 두 지점을 각각 잡아본다.



오른쪽 그림과 같이 두 지점 A, B를 담에 대하여 대칭이동한 지점을 각각 A′, B′이라 하고 경비원이 지나는 담의 두 지점을 각각 P, Q라 하면 $\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{QB}=\overline{QB'}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$

$=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$

$\geq\overline{A'B'}$

$=\sqrt{30^2+30^2}=30\sqrt{2}\ (\mathrm{m})$

따라서 경비원이 움직이는 최단 거리는 $30\sqrt{2}$ m이다. 답 ④

1416

유형 **07 도형의 대칭이동 – 포물선, 원**

|전략| 도형 $f(x,\ y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y,\ x)=0$이다.

원 $(x-2)^2+y^2=4$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y-2)^2+x^2=4$ $\quad\therefore x^2+(y-2)^2=4$ ··· ❶

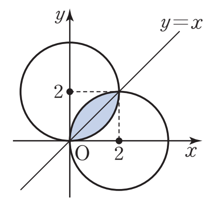
두 원의 교점의 x좌표는 원 $(x-2)^2+y^2=4$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같으므로 $(x-2)^2+y^2=4$에 $y=x$를 대입하면

$(x-2)^2+x^2=4$

$x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ ··· ❷

따라서 교점의 좌표가 $(0,\ 0)$, $(2,\ 2)$이므로 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$2\left(\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot2^2-\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\right)$

$=2(\pi-2)$ ··· ❸

답 $2(\pi-2)$

채점 기준	배점
❶ 주어진 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	2점
❷ 두 원의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	3점
❸ 겹쳐지는 부분의 넓이를 구할 수 있다.	3점

1417

유형 **09 평행이동과 대칭이동의 활용**

|전략| 이동하는 순서에 주의하여 대칭이동과 평행이동한 포물선의 방정식을 구한다.

포물선 $y=x^2+2ax+3$을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은 $-y=(-x)^2+2a(-x)+3$

$\therefore y=-x^2+2ax-3$ ··· ❶

이 포물선을 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-2=-x^2+2ax-3$

$\therefore y=-x^2+2ax-1$

$\quad=-(x-a)^2+a^2-1$ ··· ❷

이때, 포물선의 꼭짓점 $(a,\ a^2-1)$이 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로

$a^2-1=a+1$, $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$ ··· ❸

답 2

채점 기준	배점
❶ 주어진 포물선을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식을 구할 수 있다.	2점
❷ ❶의 포물선을 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 포물선의 방정식을 구할 수 있다.	2점
❸ 양수 a의 값을 구할 수 있다.	3점

1418

유형 **12 직선 $y=mx+n$에 대한 대칭이동**

|전략| 직선 $x-y+1=0$이 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 수직이등분선임을 이용하여 두 점 C, D의 좌표를 구한다.

(1) 점 C의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 두 점 $A(4,\ 1)$, $C(a,\ b)$를 이은 선분의 중점 $\left(\frac{4+a}{2},\ \frac{1+b}{2}\right)$가 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로

$\frac{1+b}{2}=\frac{4+a}{2}+1$ $\quad\therefore a-b=-5$ …… ㉠

또, 직선 AC가 직선 $y=x+1$과 수직이므로

$\frac{b-1}{a-4}\cdot 1=-1$ $\quad\therefore a+b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0,\ b=5$ $\quad\therefore C(0,\ 5)$

(2) 점 D의 좌표를 $(c,\ d)$라 하면 두 점 $B(5,\ 1)$, $D(c,\ d)$를 이은 선분의 중점 $\left(\frac{5+c}{2},\ \frac{1+d}{2}\right)$가 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로

$\frac{1+d}{2}=\frac{5+c}{2}+1$ $\quad\therefore c-d=-6$ …… ㉢

또, 직선 BD가 직선 $y=x+1$과 수직이므로

$\frac{d-1}{c-5}\cdot 1=-1$ $\quad\therefore c+d=6$ …… ㉣

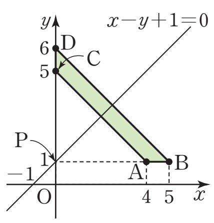
㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $c=0,\ d=6$ $\quad\therefore D(0,\ 6)$

(3) 오른쪽 그림에서

$\square ABDC=\triangle DPB-\triangle CPA$

$=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4$

$=\frac{9}{2}$



답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 점 C의 좌표를 구할 수 있다.	4점
(2) 점 D의 좌표를 구할 수 있다.	4점
(3) 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 구할 수 있다.	4점

창의·융합 교과서 속 심화문제

1419

|전략| 동전을 10회 던진 후 점 P의 좌표를 구하고, 점 P가 제 1사분면 위에 있기 위한 a의 값의 범위를 구한다.

동전을 10회 던졌을 때 앞면이 나온 횟수를 a라 하면 뒷면이 나온 횟수는 $10-a$이다.

동전을 10회 던진 후 점 P의 x좌표, y좌표는 각각

$1+2a-(10-a)$, $1-a+2(10-a)$

즉, $P(3a-9,\ -3a+21)$

이 점이 제1사분면 위에 있으려면

$3a-9>0$ $\quad\therefore a>3$

$-3a+21>0$ $\quad\therefore a<7$

따라서 $3<a<7$을 만족하는 정수 a는 4, 5, 6의 3개이다. 답 3

1420

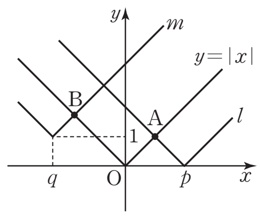
|전략| $y=|x|$의 그래프를 평행이동한 도형 l, m의 방정식을 구하고, $q<0<p$를 이용하여 두 점 A, B의 좌표를 구한다.

$y=|x|$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 도형의 방정식은 l : $y=|x-p|$이고, x축의 방향으로 q만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은 m : $y=|x-q|+1$이다.

이때, $q<0<p$이므로

$y=|x|$, $y=|x-p|$,

$y=|x-q|+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 점 A는 두 직선 $y=x$, $y=-x+p$의 교점이므로

$x=-x+p$에서 $2x=p$ $\quad\therefore x=\frac{p}{2}$

따라서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{p}{2},\ \frac{p}{2}\right)$

(ii) 점 B는 두 직선 $y=-x$, $y=x-q+1$의 교점이므로

$-x=x-q+1$에서 $2x=q-1$ $\quad\therefore x=\frac{q-1}{2}$

따라서 점 B의 좌표는 $\left(\frac{q-1}{2},\ \frac{-q+1}{2}\right)$

(i), (ii)에서 선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(\frac{p+q-1}{4},\ \frac{p-q+1}{4}\right)$이고, 이 점의 좌표가 $(-1,\ 2)$이므로

$\frac{p+q-1}{4}=-1$, $\frac{p-q+1}{4}=2$

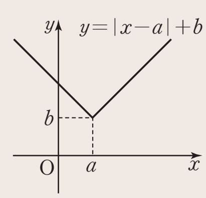
$\therefore p+q=-3$, $p-q=7$

두 식을 연립하여 풀면 $p=2$, $q=-5$

$\therefore pq=-10$ 답 -10

Lecture

$y=|x-a|+b=\begin{cases} x-a+b & (x\ge a) \\ -x+a+b & (x<a) \end{cases}$이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x=a$인 점에서 꺾인 모양이고, $y=|x-a|+b$는 $x=a$일 때 최솟값 b를 갖는다.



1421

|전략| 세 원 O_1, O_2, O_3의 방정식을 구한 후 좌표평면 위에 나타내어 공통부분을 찾는다.

중심의 좌표가 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$이고 반지름의 길이가 1인 원 O_1의 방정식은

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1$

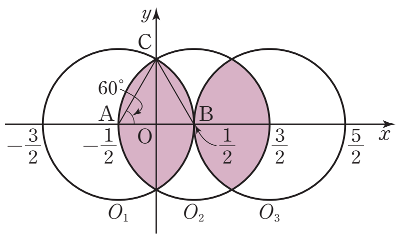
원 O_1을 y축에 대하여 대칭이동한 원 O_2의 방정식은

$\left(-x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1$ $\quad\therefore \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1$

원 O_1을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원 O_3의 방정식은

$\left\{(x-2)+\frac{1}{2}\right\}^2+y^2=1$ $\quad\therefore \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=1$

따라서 원 O_1의 내부와 원 O_2의 내부의 공통부분, 원 O_2의 내부와 원 O_3의 내부의 공통부분은 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



삼각형 ABC는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이므로

$\angle CAB = 60°$, $\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

이때, (부채꼴 ABC의 넓이)$= \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{60}{360} = \frac{\pi}{6}$이므로 구하는 넓이는

$4\left\{\frac{\pi}{6} + \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right\} = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$ 답 ③

1422

| 전략 | 주어진 원을 주사위를 던져 나온 눈의 수가 홀수일 때와 짝수일 때로 나누어 규칙에 맞게 이동시키고, 이동한 원과 일치하는지 알아본다.

원 $x^2+y^2-4x-4y+4=0$에서

$(x-2)^2+(y-2)^2=4$

주사위를 처음 던져서 나온 눈의 수가 2이므로 조건 (나)에 의해 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면

$(x-5)^2+(y-6)^2=4$ …… ㉠

두 번째 나온 주사위의 눈의 수가 a이므로

(i) a가 홀수일 때

조건 (가)에 의해 ㉠을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$(x-6)^2+(y-5)^2=4$

세 번째 나온 주사위의 눈의 수가 1이므로 조건 (가)에 의해 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$(x-5)^2+(y-6)^2=4$

이것은 $x^2+y^2+Ax-16y+B=0$과 일치할 수 없으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) a가 짝수일 때

조건 (나)에 의해 ㉠을 x축의 방향으로 $a+1$만큼, y축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동하면

$(x-a-6)^2+(y-2a-6)^2=4$

세 번째 나온 주사위의 눈의 수가 1이므로 조건 (가)에 의해 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$(x-2a-6)^2+(y-a-6)^2=4$ …… ㉡

㉡이 $x^2+y^2+Ax-16y+B=0$과 일치하려면

$2(-a-6)=-16 \qquad \therefore a=2$

㉡에 $a=2$를 대입하여 정리하면

$x^2+y^2-20x-16x+160=0$

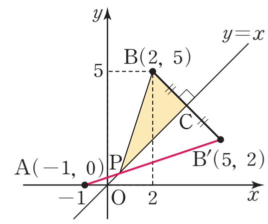
$\therefore A=-20,\ B=160$

(i), (ii)에 의하여 $a=2$, $A=-20$, $B=160$이므로

$a+A+B=142$ 답 142

1423

| 전략 | $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소가 되는 점 P의 좌표를 구하고, $\overline{PC}$, $\overline{BC}$의 길이를 구하여 삼각형 BPC의 넓이를 구한다.



오른쪽 그림과 같이 점 B(2, 5)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 점 B′의 좌표는 (5, 2)이고,

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P} \geq \overline{AB'}$

에서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $\overline{AB'}$이다.

이때, 직선 AB′의 방정식은

$y-2=\frac{2-0}{5-(-1)}(x-5)$, 즉 $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

이고, 점 P는 직선 AB′와 직선 $y=x$의 교점이므로

$\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}=x$에서 $\frac{2}{3}x=\frac{1}{3} \qquad \therefore x=\frac{1}{2}$

즉, 점 P의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$이다.

한편, 점 C는 선분 BB′의 중점이므로 점 C의 좌표는

$\left(\frac{2+5}{2}, \frac{5+2}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$

따라서

$\overline{PC}=\sqrt{\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\right)^2}=3\sqrt{2}$,

$\overline{BC}=\sqrt{\left(\frac{7}{2}-2\right)^2+\left(\frac{7}{2}-5\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

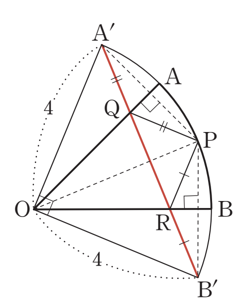
이므로 삼각형 BPC의 넓이는

$\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{2}$ 답 $\frac{9}{2}$

참고 세 점 A, B, P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소일 때는 A, P, B′이 차례로 일직선 위에 있는 경우이다.

1424

| 전략 | 두 반지름 OA, OB에 대하여 두 부채꼴 OAP, OBP와 대칭인 부채꼴을 각각 그린 후 구하는 세 변의 길이의 합이 한 선분의 길이가 되는 경우를 생각해 본다.



오른쪽 그림과 같이 부채꼴 OAP를 $\overline{OA}$에 대하여 대칭이동한 부채꼴 OAA′을 그리면

$\triangle OPQ \equiv \triangle OA'Q$, $\overline{PQ}=\overline{A'Q}$

부채꼴 OBP를 $\overline{OB}$에 대하여 대칭이동한 부채꼴 OBB′을 그리면

$\triangle OPR \equiv \triangle OB'R$, $\overline{RP}=\overline{RB'}$

$\therefore \overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}=\overline{A'Q}+\overline{QR}+\overline{RB'}$

$\geq \overline{A'B'}$

$=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$ 답 ②