베이직쎈 수학 I

정답 및 풀이

I. 지수와 로그

01 지수

01 거듭제곱과 거듭제곱근

개념 01 거듭제곱

본책 8쪽

01 $a^4\times a^2=a^{4+2}=a^6$ 　　답 a^6

02 $(a^3)^4=a^{3\times4}=a^{12}$ 　　답 a^{12}

03 답 a^3b^3 　　**04** 답 $\dfrac{a^5}{b^5}$

05 $a^6\div a^3=a^{6-3}=a^3$ 　　답 a^3

06 답 1

07 $a^2\div a^8=\dfrac{1}{a^{8-2}}=\dfrac{1}{a^6}$ 　　답 $\dfrac{1}{a^6}$

08 $ab^5\times a^2b^4=a^{1+2}b^{5+4}=a^3b^9$ 　　답 a^3b^9

09 $a^4\times a^3b\times b^5=a^{4+3}b^{1+5}=a^7b^6$ 　　답 a^7b^6

10 $(ab)^4\times(a^2b)^3=a^4b^4\times a^6b^3$
$=a^{4+6}b^{4+3}=a^{10}b^7$ 　　답 $a^{10}b^7$

11 $\left(\dfrac{a}{b^2}\right)^2\times\left(\dfrac{b}{a}\right)^6=\dfrac{a^2}{b^4}\times\dfrac{b^6}{a^6}=\dfrac{b^{6-4}}{a^{6-2}}=\dfrac{b^2}{a^4}$ 　　답 $\dfrac{b^2}{a^4}$

12 $(-2a^3b^2)^4\div(2ab)^3=16a^{12}b^8\div8a^3b^3$
$=2a^{12-3}b^{8-3}$
$=2a^9b^5$ 　　답 $2a^9b^5$

13 $5a^3b^5\div\left(\dfrac{3a}{b^2}\right)^2=5a^3b^5\div\dfrac{9a^2}{b^4}=5a^3b^5\times\dfrac{b^4}{9a^2}$
$=\dfrac{5}{9}a^{3-2}b^{5+4}=\dfrac{5}{9}ab^9$ 　　답 $\dfrac{5}{9}ab^9$

14 $6a^7b^2\times5ab^2\div\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^3=6a^7b^2\times5ab^2\div\dfrac{a^6}{b^3}$
$=6a^7b^2\times5ab^2\times\dfrac{b^3}{a^6}$
$=30a^{7+1-6}b^{2+2+3}$
$=30a^2b^7$ 　　답 $30a^2b^7$

개념 02 거듭제곱근

본책 9쪽

15 9의 제곱근을 x라 하면 $x^2=9$이므로
$x^2-9=0$, 　$(x+3)(x-3)=0$ 　$\therefore x=\pm3$
따라서 9의 제곱근은 -3, 3이다. 　　답 -3, 3

베이직쎈 BOX

a^3+b^3
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

a^3-b^3
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

a^2-b^2
$=(a+b)(a-b)$

16 답 1, $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

x^2+x+1, $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$, $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

17 -8의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-8$이므로
$x^3+8=0$, 　$(x+2)(x^2-2x+4)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$
따라서 -8의 세제곱근은 -2, $1-\sqrt{3}i$, $1+\sqrt{3}i$이다.
답 -2, $1-\sqrt{3}i$, $1+\sqrt{3}i$

18 16의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=16$이므로
$x^4-16=0$, 　$(x^2+4)(x^2-4)=0$
$(x+2i)(x-2i)(x+2)(x-2)=0$
$\therefore x=\pm2i$ 또는 $x=\pm2$
따라서 16의 네제곱근은 $-2i$, $2i$, -2, 2이다.
답 $-2i$, $2i$, -2, 2

19 256의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=256$이므로
$x^4-256=0$, 　$(x^2+16)(x^2-16)=0$
$(x+4i)(x-4i)(x+4)(x-4)=0$
$\therefore x=\pm4i$ 또는 $x=\pm4$
따라서 256의 네제곱근은 $-4i$, $4i$, -4, 4이다.
답 $-4i$, $4i$, -4, 4

20 49의 제곱근을 x라 하면 $x^2=49$이므로
$x^2-49=0$, 　$(x+7)(x-7)=0$
$\therefore x=\pm7$
따라서 49의 제곱근 중 실수인 것은 -7, 7이다.
답 -7, 7

21 -1의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-1$이므로
$x^3+1=0$, 　$(x+1)(x^2-x+1)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$
따라서 -1의 세제곱근 중 실수인 것은 -1이다.
답 -1

22 27의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=27$이므로
$x^3-27=0$, 　$(x-3)(x^2+3x+9)=0$
$\therefore x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$
따라서 27의 세제곱근 중 실수인 것은 3이다. 　답 3

23 81의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=81$이므로
$x^4-81=0$, 　$(x^2+9)(x^2-9)=0$
$(x+3i)(x-3i)(x+3)(x-3)=0$
$\therefore x=\pm3i$ 또는 $x=\pm3$
따라서 81의 네제곱근 중 실수인 것은 -3, 3이다.
답 -3, 3

24 -16의 네제곱근을 x라 하면 　$x^4=-16$
이때 실수 x에 대하여 $x^4\ge0$이므로 $x^4=-16$의 실근은 없다.
따라서 -16의 네제곱근 중 실수인 것은 없다. 　답 없다.

베이직쎈 BOX

25 125의 세제곱근 중에서 실수인 것은 5이므로
$\sqrt[3]{125}=5$ 답 5

26 256의 네제곱근 중에서 실수인 것은 -4, 4이므로
$-\sqrt[4]{256}=-4$ 답 -4

27 -32의 다섯제곱근 중에서 실수인 것은 -2이므로
$\sqrt[5]{-32}=-2$ 답 -2

28 0.0001의 네제곱근 중에서 실수인 것은 -0.1, 0.1이므로
$\sqrt[4]{0.0001}=0.1$ 답 0.1

29 0.216의 세제곱근 중에서 실수인 것은 0.6이므로
$\sqrt[3]{0.216}=0.6$ 답 0.6

30 $-\frac{8}{27}$의 세제곱근 중에서 실수인 것은 $-\frac{2}{3}$이므로
$\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}=-\frac{2}{3}$ 답 $-\frac{2}{3}$

31 625의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=625$이므로
$x^4-625=0$, $\quad(x^2+25)(x^2-25)=0$
$(x+5i)(x-5i)(x+5)(x-5)=0$
$\therefore x=\pm5i$ 또는 $x=\pm5$
따라서 625의 네제곱근은 $-5i$, $5i$, -5, 5이다. 답 ○

32 0의 네제곱근 중 실수인 것은 0의 1개이다. 답 ×

33 -5의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-5}$의 1개이다.
답 ○

34 -49의 네제곱근을 x라 하면 $\quad x^4=-49$
이때 실수 x에 대하여 $x^4\geq0$이므로 $x^4=-49$의 실근은 없다.
따라서 -49의 네제곱근 중 실수인 것은 없다. 답 ×

> 실수 a의 n제곱근은 복소수의 범위에서 n개가 있다.

35 답 ○

개념 03 거듭제곱근의 성질

본책 11쪽

> $a>0$, $b>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때
> $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

36 $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{4\cdot16}=\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$ 답 4

37 $\sqrt[5]{27}\sqrt[5]{9}=\sqrt[5]{27\cdot9}=\sqrt[5]{243}=\sqrt[5]{3^5}=3$ 답 3

38 $\sqrt[4]{\frac{1}{4}}\sqrt[4]{\frac{1}{64}}=\sqrt[4]{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{64}}=\sqrt[4]{\frac{1}{256}}$
$=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^4}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

> $a>0$, $b>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때
> $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

39 $\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{2}}=\sqrt[6]{\frac{128}{2}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$ 답 2

40 $\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}=\sqrt[4]{\frac{243}{3}}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$ 답 3

41 $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{625}}=\sqrt[3]{\frac{5}{625}}=\sqrt[3]{\frac{1}{125}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{5}\right)^3}=\frac{1}{5}$ 답 $\frac{1}{5}$

42 $\frac{\sqrt[5]{0.0001}}{\sqrt[5]{10}}=\sqrt[5]{\frac{0.0001}{10}}=\sqrt[5]{0.00001}$
$=\sqrt[5]{0.1^5}=0.1$ 답 0.1

> $a>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때
> $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

43 $(\sqrt[7]{16})^7=\sqrt[7]{16^7}=16$ 답 16

44 $(\sqrt[6]{49})^3=\sqrt[6]{49^3}=\sqrt[6]{(7^2)^3}=\sqrt[6]{7^6}=7$ 답 7

45 $\left(\sqrt[8]{\frac{1}{9}}\right)^4=\sqrt[8]{\left(\frac{1}{9}\right)^4}=\sqrt[8]{\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^4}$
$=\sqrt[8]{\left(\frac{1}{3}\right)^8}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

> $a>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때
> $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

46 $\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[3\times2]{2^6}=\sqrt[6]{2^6}=2$ 답 2

47 $\sqrt{\sqrt{625}}=\sqrt[2\times2]{5^4}=\sqrt[4]{5^4}=5$ 답 5

48 $\sqrt[3]{\sqrt[5]{8}}=\sqrt[5]{\sqrt[3]{8}}=\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^3}}=\sqrt[5]{2}$ 답 $\sqrt[5]{2}$

> $a>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때
> $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$
> (단, p는 자연수)

49 $\sqrt[4]{25^2}=\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$ 답 5

50 $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^6}=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^3}=\sqrt{\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^3}=\sqrt{\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}^2}$
$=\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{1}{8}$ 답 $\frac{1}{8}$

51 $(\sqrt[10]{7})^5=\sqrt[10]{7^5}=\sqrt{7}$ 답 $\sqrt{7}$

52 $\sqrt[8]{a^5}\times\sqrt[8]{a^3}=\sqrt[8]{a^5\times a^3}=\sqrt[8]{a^{5+3}}=\sqrt[8]{a^8}=a$ 답 a

53 $\frac{\sqrt{a^6}}{\sqrt{a^2}}=\sqrt{\frac{a^6}{a^2}}=\sqrt{a^{6-2}}=\sqrt{a^4}=\sqrt{(a^2)^2}=a^2$ 답 a^2

54 $(\sqrt[3]{a^4})^6=\sqrt[3]{(a^4)^6}=\sqrt[3]{a^{24}}=\sqrt[3]{(a^8)^3}=a^8$ 답 a^8

55 $\sqrt[7]{\sqrt{a^{28}}}=\sqrt[7\times2]{a^{28}}=\sqrt[14]{a^{28}}=\sqrt[14]{(a^2)^{14}}=a^2$ 답 a^2

56 $\sqrt[8]{\sqrt[5]{a^4}}\times\sqrt[10]{a^9}=\sqrt[8\times5]{a^4}\times\sqrt[10]{a^9}$
$=\sqrt[40]{a^4}\times\sqrt[10]{a^9}$
$=\sqrt[10]{a}\times\sqrt[10]{a^9}$
$=\sqrt[10]{a\times a^9}$
$=\sqrt[10]{a^{10}}=a$ 답 a

57 $\sqrt[4]{a^{16}b^2}\div\sqrt{a^2b^5}=\sqrt{a^8b}\div\sqrt{a^2b^5}$
$=\sqrt{\frac{a^8b}{a^2b^5}}=\sqrt{\frac{a^6}{b^4}}$
$=\sqrt{\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^2}=\frac{a^3}{b^2}$ 답 $\frac{a^3}{b^2}$

58 $\sqrt[4]{4}\times\sqrt{8}=\sqrt[4]{2^2}\times\sqrt{8}=\sqrt{2}\times\sqrt{8}$
$=\sqrt{2\times8}=\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=4$ 답 4

59 $\sqrt[12]{5^8}\div\sqrt[3]{5^5}=\sqrt[3]{5^2}\div\sqrt[3]{5^5}$
$=\sqrt[3]{\frac{5^2}{5^5}}=\sqrt[3]{\frac{1}{5^3}}$
$=\frac{1}{5}$ 답 $\frac{1}{5}$

60 $\sqrt{\sqrt{81}}\times\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[2\times2]{81}\times\sqrt[3\times2]{64}$
$=\sqrt[4]{81}\times\sqrt[6]{64}$
$=\sqrt[4]{3^4}\times\sqrt[6]{2^6}$
$=3\times2=6$ 답 6

61 $\sqrt[15]{2^9}\times\sqrt[10]{2^4}=\sqrt[5]{2^3}\times\sqrt[5]{2^2}$
$=\sqrt[5]{2^3\times2^2}$
$=\sqrt[5]{2^{3+2}}$
$=\sqrt[5]{2^5}=2$ 답 2

62 $\sqrt[4]{\sqrt{1024}}\div\sqrt[4]{2}=\sqrt[4\times2]{1024}\div\sqrt[4]{2}=\sqrt[8]{1024}\div\sqrt[4]{2}$
$=\sqrt[8]{2^{10}}\div\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{2^5}\div\sqrt[4]{2}$
$=\sqrt[4]{\frac{2^5}{2}}=\sqrt[4]{2^4}$
$=2$ 답 2

63 $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{16}-\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}=\sqrt[3]{4\times16}-\sqrt[4]{\frac{243}{3}}$
$=\sqrt[3]{64}-\sqrt[4]{81}$
$=\sqrt[3]{4^3}-\sqrt[4]{3^4}$
$=4-3=1$ 답 1

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 13쪽

01 ① $a\times a^2\times a^6=a^9$
② $(-a^4)^3=-a^{12}$
③ $(a^2b^3)^4=a^8b^{12}$
④ $\left(-\frac{2}{a^3}\right)^4=\frac{16}{a^{12}}$
⑤ $a^7\div(a^3)^4=a^7\div a^{12}=\frac{1}{a^5}$ 답 ⑤

02 $3^5\div15^3\times5^5=(3\times5)^5\div15^3$
$=15^5\div15^3$
$=15^2=225$ 답 225

03 $(a^2b)^2\times\frac{b}{3a}\div3a^2b^2=a^4b^2\times\frac{b}{3a}\times\frac{1}{3a^2b^2}$
$=\frac{ab}{9}$ 답 ①

04 64의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=64$이므로
$x^3-64=0,\quad (x-4)(x^2+4x+16)=0$
$\therefore x=4$ 또는 $x=-2\pm2\sqrt{3}i$
따라서 64의 세제곱근은 4, $-2-2\sqrt{3}i$, $-2+2\sqrt{3}i$이다. 답 ③

베이직쎈 BOX

n이 짝수일 때, 음수의 n제곱근 중 실수인 것은 없다.

05 ㄱ. 64의 제곱근을 x라 하면 $x^2=64$이므로
$x^2-64=0,\quad (x+8)(x-8)=0$
$\therefore x=\pm8$
따라서 64의 제곱근은 -8, 8이다.
ㄴ. 제곱근 25는 $\sqrt{25}=5$이다.
ㄷ. -12의 네제곱근 중 실수인 것은 없다.
ㄹ. -27의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-27$이므로
$x^3+27=0,\quad (x+3)(x^2-3x+9)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$
따라서 -27의 세제곱근 중 실수인 것은 -3이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

06 ① 9의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=9$이므로
$x^4-9=0,\quad (x^2+3)(x^2-3)=0$
$(x+\sqrt{3}i)(x-\sqrt{3}i)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$
$\therefore x=\pm\sqrt{3}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$
따라서 9의 네제곱근은 $-\sqrt{3}i$, $\sqrt{3}i$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$이다.
③ 0의 n제곱근은 0이다.
답 ①, ③

07 -4의 다섯제곱근 중 실수인 것은 1개이고, 7의 네제곱근 중 실수인 것은 2개이므로
$m=1,\ n=2\quad \therefore m+n=3$ 답 3

$\sqrt[5]{-4}$

$-\sqrt[4]{7}$, $\sqrt[4]{7}$

08 ① $\sqrt[3]{18}\times\sqrt[3]{12}=\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{6^3}=6$
② $\frac{\sqrt[5]{192}}{\sqrt[5]{6}}=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$
③ $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^3}\times\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{2^5}$
④ $\sqrt[3]{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[9]{64}=\sqrt[9]{2^6}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4}$
⑤ $\left(\sqrt[3]{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6=(\sqrt[3]{3})^6\times\frac{1}{(\sqrt{3})^6}=\sqrt[3]{3^6}\times\frac{1}{\sqrt{3^6}}$
$=\sqrt[3]{(3^2)^3}\times\frac{1}{\sqrt{(3^3)^2}}=3^2\times\frac{1}{3^3}=\frac{1}{3}$
답 ⑤

09 $\sqrt[3]{12}\times\sqrt[6]{\frac{81}{4}}\div\sqrt[3]{250}=\sqrt[3]{12}\times\sqrt[6]{\left(\frac{9}{2}\right)^2}\div\sqrt[3]{250}$
$=\sqrt[3]{12}\times\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\div\sqrt[3]{250}$
$=\sqrt[3]{12\times\frac{9}{2}\times\frac{1}{250}}$
$=\sqrt[3]{\frac{27}{125}}=\sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}\right)^3}$
$=\frac{3}{5}$ 답 ④

10 $\sqrt{\frac{4^6+8^6}{4^3+8^4}}=\sqrt{\frac{(2^2)^6+(2^3)^6}{(2^2)^3+(2^3)^4}}=\sqrt{\frac{2^{12}+2^{18}}{2^6+2^{12}}}$
$=\sqrt{\frac{2^{12}(1+2^6)}{2^6(1+2^6)}}=\sqrt{\frac{2^{12}}{2^6}}=\sqrt{2^6}$
$=\sqrt{(2^3)^2}=2^3=8$ 답 8

11 $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[8]{3}}}=\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{\sqrt[8]{3}}}=\dfrac{\sqrt[6]{3}}{\sqrt[24]{3}}=\dfrac{\sqrt[24]{3^4}}{\sqrt[24]{3}}=\sqrt[24]{\dfrac{3^4}{3}}=\sqrt[24]{3^3}$이므로 $k=3$ 답 3

12 $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[4]{x}}}\times\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}}}\times\sqrt[6]{\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}}=\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt[6]{x}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}}\times\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[4]{\sqrt[6]{x}}}\times\dfrac{\sqrt[6]{\sqrt[4]{x}}}{\sqrt[6]{\sqrt[3]{x}}}$

$=\dfrac{\sqrt[18]{x}}{\sqrt[12]{x}}\times\dfrac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[24]{x}}\times\dfrac{\sqrt[24]{x}}{\sqrt[18]{x}}$

$=1$ 답 1

13 $\sqrt[6]{ab^5}\times\sqrt[3]{a^2b^2}\div\sqrt[4]{a^3b^4}=\sqrt[12]{a^2b^{10}}\times\sqrt[12]{a^8b^8}\div\sqrt[12]{a^9b^{12}}$

$=\sqrt[12]{\dfrac{a^2b^{10}\times a^8b^8}{a^9b^{12}}}$

$=\sqrt[12]{ab^6}$

따라서 $p=12$, $q=6$이므로

$p-q=6$ 답 ⑤

02 지수의 확장

개념 04 지수가 0 또는 음의 정수인 경우

본책 15쪽

01 답 1 **02** 답 1

03 답 $\dfrac{1}{4}$

04 $(-2)^{-3}=\dfrac{1}{(-2)^3}=-\dfrac{1}{8}$ 답 $-\dfrac{1}{8}$

05 $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}=4^2=16$ 답 16

06 $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-4}=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^4=\dfrac{81}{16}$ 답 $\dfrac{81}{16}$

07 $2^4\times2^{-8}\times2^2=2^{4-8+2}=2^{-2}=\dfrac{1}{4}$ 답 $\dfrac{1}{4}$

08 $(-3)^8\times(-3)^{-2}\div(-3)^4=(-3)^{8-2-4}$

$=(-3)^2=9$ 답 9

09 $a^5\div(a^{-2})^{-3}=a^5\div a^6=a^{5-6}$

$=a^{-1}=\dfrac{1}{a}$ 답 $\dfrac{1}{a}$

10 답 a^5b^{-15}

11 $(a^2)^3\div(a^{-1})^4\times a^6=a^6\div a^{-4}\times a^6$

$=a^{6-(-4)+6}=a^{16}$ 답 a^{16}

12 $(a^{-2}b^3)^5\div(ab^{-3})^2=a^{-10}b^{15}\div a^2b^{-6}$

$=a^{-10-2}b^{15-(-6)}$

$=a^{-12}b^{21}$ 답 $a^{-12}b^{21}$

베이직쎈 BOX

$a>0$이고 m, n $(n\ge2)$이 정수일 때

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

지수가 정수가 아닌 유리수인 경우 밑이 음수이면 지수법칙을 이용할 수 없다.

$a\ne0$일 때 $a^0=1$

$a\ne0$이고 n이 양의 정수일 때

$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

개념 05 지수가 유리수인 경우

본책 16쪽

13 답 1, 2 **14** 답 $2^{\frac{1}{4}}$

15 답 $3^{\frac{3}{5}}$ **16** 답 $7^{\frac{5}{9}}$

17 답 $2^{-\frac{5}{6}}$ **18** 답 $3^{-\frac{3}{7}}$

19 답 3

20 $3^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{3^3}=\sqrt[4]{27}$ 답 $\sqrt[4]{27}$

21 $10^{0.25}=10^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{10}$ 답 $\sqrt[4]{10}$

22 $5^{0.4}=5^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{5^2}=\sqrt[5]{25}$ 답 $\sqrt[5]{25}$

23 답 $\sqrt[4]{4^{-5}}$

24 $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1}}=\sqrt[3]{4}$ 답 $\sqrt[3]{4}$

25 $3^{\frac{3}{2}}\times3^{\frac{5}{2}}=3^{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}=3^4=81$ 답 81

26 $a^{-\frac{4}{3}}\div a^{-\frac{1}{3}}=a^{-\frac{4}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)}=a^{-1}=\dfrac{1}{a}$ 답 $\dfrac{1}{a}$

27 $\{(-2)^4\}^{\frac{3}{4}}=(2^4)^{\frac{3}{4}}=2^{4\times\frac{3}{4}}=2^3=8$ 답 8

28 $(a^{-\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{5}})^{\frac{5}{6}}=a^{-\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}}b^{\frac{2}{5}\times\frac{5}{6}}=a^{-\frac{5}{8}}b^{\frac{1}{3}}$ 답 $a^{-\frac{5}{8}}b^{\frac{1}{3}}$

29 $(5^{\frac{4}{3}}\times5^{-2})^{-\frac{3}{2}}=(5^{\frac{4}{3}-2})^{-\frac{3}{2}}=(5^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}}$

$=5^{-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)}=5$ 답 5

30 $(a^2b^4)^{\frac{1}{8}}\times(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{4}})^6=a^{2\times\frac{1}{8}}b^{4\times\frac{1}{8}}\times a^{\frac{1}{3}\times6}b^{\frac{1}{4}\times6}$

$=a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}\times a^2b^{\frac{3}{2}}$

$=a^{\frac{1}{4}+2}b^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}$

$=a^{\frac{9}{4}}b^2$ 답 $a^{\frac{9}{4}}b^2$

31 $(\sqrt{a^3}\times\sqrt[4]{a})^{\frac{1}{3}}=(a^{\frac{3}{2}}\times a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}=(a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}$

$=(a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{7}{4}\times\frac{1}{3}}=a^{\frac{7}{12}}$ 답 $a^{\frac{7}{12}}$

32 $\sqrt[4]{a^3}\times\sqrt[3]{a^2}\div\sqrt{a}=a^{\frac{3}{4}}\times a^{\frac{2}{3}}\div a^{\frac{1}{2}}$

$=a^{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}$

$=a^{\frac{11}{12}}$ 답 $a^{\frac{11}{12}}$

33 $\sqrt[4]{ab^3}\div\sqrt{a^4b}\times\sqrt[3]{a^5b^2}$

$=(ab^3)^{\frac{1}{4}}\div(a^4b)^{\frac{1}{2}}\times(a^5b^2)^{\frac{1}{3}}$

$=a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}\div a^2b^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}}$

$=a^{\frac{1}{4}-2+\frac{5}{3}}b^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}$

$=a^{-\frac{1}{12}}b^{\frac{11}{12}}$ 답 $a^{-\frac{1}{12}}b^{\frac{11}{12}}$

34 $5^{\frac{3}{2}}\div 25^{\frac{5}{4}}=5^{\frac{3}{2}}\div(5^2)^{\frac{5}{4}}$
$=5^{\frac{3}{2}}\div 5^{2\times\frac{5}{4}}$
$=5^{\frac{3}{2}}\div 5^{\frac{5}{2}}$
$=5^{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}$
$=5^{-1}=\frac{1}{5}$ 답 $\frac{1}{5}$

35 $8^{\frac{1}{8}}\times 4^{\frac{2}{3}}\div 2^{\frac{5}{2}}=(2^3)^{\frac{1}{8}}\times(2^2)^{\frac{2}{3}}\div 2^{\frac{5}{2}}$
$=2^{\frac{3}{8}}\times 2^{\frac{4}{3}}\div 2^{\frac{5}{2}}$
$=2^{\frac{3}{8}+\frac{4}{3}-\frac{5}{2}}$
$=2^{-\frac{19}{24}}$ 답 $2^{-\frac{19}{24}}$

36 답 $\sqrt[8]{a}$, $\frac{1}{8}$, 1, $\frac{7}{8}$

37 $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}\times\sqrt{\sqrt[6]{a^3}}=\sqrt[12]{a}\times\sqrt[6]{a^3}$
$=a^{\frac{1}{12}}\times a^{\frac{1}{2}}$
$=a^{\frac{1}{12}+\frac{1}{2}}$
$=a^{\frac{7}{12}}$ 답 $a^{\frac{7}{12}}$

38 $\sqrt{a^4\sqrt{a^3\sqrt{a}}}=\sqrt{a^4}\times\sqrt[4]{a^3}\times\sqrt[8]{a}$
$=a^2\times a^{\frac{3}{4}}\times a^{\frac{1}{8}}$
$=a^{2+\frac{3}{4}+\frac{1}{8}}$
$=a^{\frac{23}{8}}$ 답 $a^{\frac{23}{8}}$

39 $\sqrt[5]{a^2\sqrt{a\sqrt{a^3}}}=\sqrt[5]{a^2}\times\sqrt[10]{a}\times\sqrt[20]{a^3}$
$=a^{\frac{2}{5}}\times a^{\frac{1}{10}}\times a^{\frac{3}{20}}$
$=a^{\frac{2}{5}+\frac{1}{10}+\frac{3}{20}}=a^{\frac{13}{20}}$ 답 $a^{\frac{13}{20}}$

개념 06 지수가 실수일 때의 지수법칙

본책 18쪽

40 $2^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times 2^{\frac{5\sqrt{3}}{2}}=2^{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}}=2^{3\sqrt{3}}$ 답 $2^{3\sqrt{3}}$

41 $3^{\sqrt{3}+4}\div 3^{\sqrt{3}}=3^{\sqrt{3}+4-\sqrt{3}}=3^4=81$ 답 81

42 $(a^{\sqrt{12}})^{\sqrt{3}}=a^{\sqrt{12}\times\sqrt{3}}=a^6$ 답 a^6

43 $(4^{\sqrt{5}})^{\frac{\sqrt{5}}{2}}=4^{\frac{5}{2}}=(2^2)^{\frac{5}{2}}=2^5=32$ 답 32

44 $(a^{2\sqrt{3}}b^{-\sqrt{6}})^{\sqrt{3}}=a^{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}b^{-\sqrt{6}\times\sqrt{3}}=a^6b^{-3\sqrt{2}}$ 답 $a^6b^{-3\sqrt{2}}$

45 $(2^{2\sqrt{2}}\times 3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=2^{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\times 3^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=2^4\times 3^2=144$
답 144

46 $a^{3\sqrt{5}}\times a^{2\sqrt{5}}\div a^{\sqrt{5}}=a^{3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-\sqrt{5}}=a^{4\sqrt{5}}$ 답 $a^{4\sqrt{5}}$

47 $5^{\sqrt{32}}\div 5^{\sqrt{8}}\times 5^{-\sqrt{2}}=5^{4\sqrt{2}}\div 5^{2\sqrt{2}}\times 5^{-\sqrt{2}}$
$=5^{4\sqrt{2}-2\sqrt{2}-\sqrt{2}}=5^{\sqrt{2}}$ 답 $5^{\sqrt{2}}$

48 $3^{\sqrt{3}}\times 9^{\sqrt{27}}=3^{\sqrt{3}}\times(3^2)^{3\sqrt{3}}$
$=3^{\sqrt{3}}\times 3^{6\sqrt{3}}$
$=3^{\sqrt{3}+6\sqrt{3}}$
$=3^{7\sqrt{3}}$ 답 $3^{7\sqrt{3}}$

49 $(a^{\frac{\sqrt{5}}{3}})^6\div a^{\sqrt{45}}=a^{2\sqrt{5}}\div a^{3\sqrt{5}}$
$=a^{2\sqrt{5}-3\sqrt{5}}$
$=a^{-\sqrt{5}}$ 답 $a^{-\sqrt{5}}$

50 $(3^{\sqrt{8}}\times 3^6\div 3^{-\sqrt{2}})^{\frac{1}{3}}=(3^{2\sqrt{2}}\times 3^6\div 3^{-\sqrt{2}})^{\frac{1}{3}}$
$=\{3^{2\sqrt{2}+6-(-\sqrt{2})}\}^{\frac{1}{3}}$
$=(3^{3\sqrt{2}+6})^{\frac{1}{3}}$
$=3^{\sqrt{2}+2}$ 답 $3^{\sqrt{2}+2}$

51 $(a^{4\sqrt{3}}b^{-3\sqrt{3}})^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\times(a^{5\sqrt{6}}b^{2\sqrt{6}})^{\frac{1}{\sqrt{6}}}$
$=a^4b^{-3}\times a^5b^2$
$=a^{4+5}b^{-3+2}$
$=a^9b^{-1}$ 답 a^9b^{-1}

개념 07 지수법칙과 곱셈 공식을 이용한 식의 계산

본책 19쪽

52 $(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})$
$=\{(a^{\frac{1}{4}})^2-(b^{\frac{1}{4}})^2\}(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})$
$=(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})$
$=(a^{\frac{1}{2}})^2-(b^{\frac{1}{2}})^2$
$=a-b$ 답 $a-b$

베이직쎈 BOX: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

53 $(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})$
$=(a^{\frac{1}{3}})^3+(b^{\frac{1}{3}})^3$
$=a+b$ 답 $a+b$

베이직쎈 BOX: $(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$=a^3+b^3$

54 $(a^{\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}})$
$=(a^{\frac{1}{3}})^3-(b^{-\frac{1}{3}})^3$
$=a-b^{-1}$
$=a-\frac{1}{b}$ 답 $a-\frac{1}{b}$

베이직쎈 BOX: $(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$=a^3-b^3$

55 $(5^{\frac{1}{2}}+1)(5^{\frac{1}{2}}-1)=(5^{\frac{1}{2}})^2-1$
$=5-1=4$ 답 4

56 $(4+6^{\frac{1}{2}})(2+6^{\frac{1}{4}})(2-6^{\frac{1}{4}})$
$=(4+6^{\frac{1}{2}})\{2^2-(6^{\frac{1}{4}})^2\}$
$=(4+6^{\frac{1}{2}})(4-6^{\frac{1}{2}})$
$=4^2-(6^{\frac{1}{2}})^2$
$=16-6=10$ 답 10

베이직쎈 BOX

57 $(3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}})^2=(3^{\frac{1}{2}})^2+2\times3^{\frac{1}{2}}\times3^{-\frac{1}{2}}+(3^{-\frac{1}{2}})^2$

$=3+2+3^{-1}=\frac{16}{3}$　답 $\frac{16}{3}$

$(a+b)^2$
$=a^2+2ab+b^2$

58 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 제곱하면

$(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2=3^2$,　$a+2+a^{-1}=9$

$2\times a^{\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{1}{2}}=2$

$\therefore a+a^{-1}=7$　답 7

다른 풀이 $a+a^{-1}=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-2a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}$

$=3^2-2=7$

a^2+b^2
$=(a+b)^2-2ab$

59 $a+a^{-1}=7$의 양변을 제곱하면

$(a+a^{-1})^2=7^2$,　$a^2+2+a^{-2}=49$

$\therefore a^2+a^{-2}=47$　답 47

다른 풀이 $a^2+a^{-2}=(a+a^{-1})^2-2aa^{-1}$

$=7^2-2=47$

60 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 세제곱하면

$(a+b)^3$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^3=3^3$

$a^{\frac{3}{2}}+3aa^{-\frac{1}{2}}+3a^{\frac{1}{2}}a^{-1}+a^{-\frac{3}{2}}=27$

$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}+3a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})=27$

$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}+3\cdot3=27$

$\therefore a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=18$　답 18

다른 풀이 $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^3-3a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})$

$=3^3-3\cdot3=18$

a^3+b^3
$=(a+b)^3-3ab(a+b)$

61 $a+a^{-1}=5$의 양변을 제곱하면

$(a+a^{-1})^2=5^2$,　$a^2+2+a^{-2}=25$

$\therefore a^2+a^{-2}=23$　답 23

다른 풀이 $a^2+a^{-2}=(a+a^{-1})^2-2aa^{-1}$

$=5^2-2=23$

62 $a+a^{-1}=5$의 양변을 세제곱하면

$(a+a^{-1})^3=5^3$

$a^3+3a^2a^{-1}+3aa^{-2}+a^{-3}=125$

$a^3+a^{-3}+3(a+a^{-1})=125$

$a^3+a^{-3}+3\cdot5=125$

$\therefore a^3+a^{-3}=110$　답 110

다른 풀이 $a^3+a^{-3}=(a+a^{-1})^3-3aa^{-1}(a+a^{-1})$

$=5^3-3\cdot5=110$

63 $(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2=a+2+a^{-1}=5+2=7$

이므로　$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$ ($\because a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}>0$)　답 $\sqrt{7}$

개념 08 거듭제곱근의 대소 비교

본책 20쪽

64 $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$를 지수가 유리수인 꼴로 나타내면

$\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}$

지수의 분모인 2, 3의 최소공배수가 6이므로

$3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{6}}=(3^3)^{\frac{1}{6}}=27^{\frac{1}{6}}$

$5^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{2}{6}}=(5^2)^{\frac{1}{6}}=25^{\frac{1}{6}}$

이때 $25<27$이므로　$25^{\frac{1}{6}}<27^{\frac{1}{6}}$

$\therefore \sqrt[3]{5}<\sqrt{3}$　답 $\sqrt[3]{5}<\sqrt{3}$

다른 풀이 2, 3의 최소공배수가 6이므로

$\sqrt{3}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{27}$, $\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[6]{25}$

$\sqrt[6]{25}<\sqrt[6]{27}$이므로　$\sqrt[3]{5}<\sqrt{3}$

65 $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[6]{3}$을 지수가 유리수인 꼴로 나타내면

$\sqrt[4]{2}=2^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[6]{3}=3^{\frac{1}{6}}$

지수의 분모인 4, 6의 최소공배수가 12이므로

$2^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{12}}=(2^3)^{\frac{1}{12}}=8^{\frac{1}{12}}$

$3^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{2}{12}}=(3^2)^{\frac{1}{12}}=9^{\frac{1}{12}}$

이때 $8<9$이므로　$8^{\frac{1}{12}}<9^{\frac{1}{12}}$

$\therefore \sqrt[4]{2}<\sqrt[6]{3}$　답 $\sqrt[4]{2}<\sqrt[6]{3}$

66 $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[5]{4}$를 지수가 유리수인 꼴로 나타내면

$\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[5]{4}=4^{\frac{1}{5}}$

지수의 분모인 3, 5의 최소공배수가 15이므로

$3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{5}{15}}=(3^5)^{\frac{1}{15}}=243^{\frac{1}{15}}$

$4^{\frac{1}{5}}=4^{\frac{3}{15}}=(4^3)^{\frac{1}{15}}=64^{\frac{1}{15}}$

이때 $64<243$이므로　$64^{\frac{1}{15}}<243^{\frac{1}{15}}$

$\therefore \sqrt[5]{4}<\sqrt[3]{3}$　답 $\sqrt[5]{4}<\sqrt[3]{3}$

67 $\sqrt{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\sqrt[4]{5}}$를 지수가 유리수인 꼴로 나타내면

$\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}=2^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\sqrt[4]{5}}=\sqrt[8]{5}=5^{\frac{1}{8}}$

지수의 분모인 4, 8의 최소공배수가 8이므로

$2^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{2}{8}}=(2^2)^{\frac{1}{8}}=4^{\frac{1}{8}}$

이때 $4<5$이므로　$4^{\frac{1}{8}}<5^{\frac{1}{8}}$

$\therefore \sqrt{\sqrt{2}}<\sqrt{\sqrt[4]{5}}$　답 $\sqrt{\sqrt{2}}<\sqrt{\sqrt[4]{5}}$

68 $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[6]{10}$을 지수가 유리수인 꼴로 나타내면

$\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{6}=6^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[6]{10}=10^{\frac{1}{6}}$

지수의 분모인 2, 3, 6의 최소공배수가 6이므로

$3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{6}}=(3^3)^{\frac{1}{6}}=27^{\frac{1}{6}}$

$6^{\frac{1}{3}}=6^{\frac{2}{6}}=(6^2)^{\frac{1}{6}}=36^{\frac{1}{6}}$

이때 $10<27<36$이므로　$10^{\frac{1}{6}}<27^{\frac{1}{6}}<36^{\frac{1}{6}}$

$\therefore \sqrt[6]{10}<\sqrt{3}<\sqrt[3]{6}$　답 $\sqrt[6]{10}<\sqrt{3}<\sqrt[3]{6}$

69 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{6}$을 지수가 유리수인 꼴로 나타내면

$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{4}=4^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[4]{6}=6^{\frac{1}{4}}$

지수의 분모인 2, 3, 4의 최소공배수가 12이므로

$2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{6}{12}}=(2^6)^{\frac{1}{12}}=64^{\frac{1}{12}}$

$4^{\frac{1}{3}}=4^{\frac{4}{12}}=(4^4)^{\frac{1}{12}}=256^{\frac{1}{12}}$

$6^{\frac{1}{4}}=6^{\frac{3}{12}}=(6^3)^{\frac{1}{12}}=216^{\frac{1}{12}}$

이때 $64<216<256$이므로 $\quad 64^{\frac{1}{12}}<216^{\frac{1}{12}}<256^{\frac{1}{12}}$

$\therefore \sqrt{2}<\sqrt[4]{6}<\sqrt[3]{4}$ 　　답 $\sqrt{2}<\sqrt[4]{6}<\sqrt[3]{4}$

70 $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[9]{10}$을 지수가 유리수인 꼴로 나타내면

$\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[6]{3}=3^{\frac{1}{6}}$, $\sqrt[9]{10}=10^{\frac{1}{9}}$

지수의 분모인 3, 6, 9의 최소공배수가 18이므로

$2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{6}{18}}=(2^6)^{\frac{1}{18}}=64^{\frac{1}{18}}$

$3^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{3}{18}}=(3^3)^{\frac{1}{18}}=27^{\frac{1}{18}}$

$10^{\frac{1}{9}}=10^{\frac{2}{18}}=(10^2)^{\frac{1}{18}}=100^{\frac{1}{18}}$

이때 $27<64<100$이므로 $\quad 27^{\frac{1}{18}}<64^{\frac{1}{18}}<100^{\frac{1}{18}}$

$\therefore \sqrt[6]{3}<\sqrt[3]{2}<\sqrt[9]{10}$ 　　답 $\sqrt[6]{3}<\sqrt[3]{2}<\sqrt[9]{10}$

71 $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt{\sqrt{2}}$, $\sqrt[4]{\sqrt[5]{5}}$를 지수가 유리수인 꼴로 나타내면

$\sqrt[5]{3}=3^{\frac{1}{5}}$, $\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}=2^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[4]{\sqrt[5]{5}}=\sqrt[20]{5}=5^{\frac{1}{20}}$

지수의 분모인 5, 4, 20의 최소공배수가 20이므로

$3^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{4}{20}}=(3^4)^{\frac{1}{20}}=81^{\frac{1}{20}}$

$2^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{5}{20}}=(2^5)^{\frac{1}{20}}=32^{\frac{1}{20}}$

이때 $5<32<81$이므로 $\quad 5^{\frac{1}{20}}<32^{\frac{1}{20}}<81^{\frac{1}{20}}$

$\therefore \sqrt[4]{\sqrt[5]{5}}<\sqrt{\sqrt{2}}<\sqrt[5]{3}$ 　　답 $\sqrt[4]{\sqrt[5]{5}}<\sqrt{\sqrt{2}}<\sqrt[5]{3}$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 21쪽

01 ① $-3^{-2}=-\left(\frac{1}{3}\right)^2=-\frac{1}{9}$

② $3^{-1}=\frac{1}{3}$ 　　③ $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=4$

④ $\left(\frac{1}{4}\right)^0=1$

⑤ $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3}=(-4)^3=-64$

따라서 세 번째로 큰 것은 ②이다. 　　답 ②

02 $4^{-3}\times16^2\div\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=(2^2)^{-3}\times(2^4)^2\div(2^{-1})^{-4}$

$=2^{-6}\times2^8\div2^4$

$=2^{-6+8-4}$

$=2^{-2}=\frac{1}{4}$ 　　답 $\frac{1}{4}$

03 $25^{-2}\div(5^{-7}\div5^{-2})^{-2}=(5^2)^{-2}\div(5^{-7}\div5^{-2})^{-2}$

$=5^{-4}\div(5^{-7}\div5^{-2})^{-2}$

$=5^{-4}\div(5^{-5})^{-2}$

$=5^{-4}\div5^{10}$

$=5^{-4-10}=5^{-14}$ 　　답 ③

04 $\frac{6^5+6^{10}}{6^{-5}+6^{-10}}=\frac{6^5(1+6^5)}{6^{-10}(6^5+1)}=\frac{6^5}{6^{-10}}=6^{5-(-10)}=6^{15}$

$\therefore k=15$ 　　답 15

베이직쎈 BOX

분모, 분자를 각각 지수가 작은 수로 묶는다.

05 $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2^5}}=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[12]{2^5}=2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{5}{12}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{5}{12}}=2^{\frac{3}{4}}$

$\sqrt[6]{2^k}=2^{\frac{k}{6}}$이므로 $2^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{k}{6}}$에서

$\frac{3}{4}=\frac{k}{6} \quad \therefore k=\frac{9}{2}$ 　　답 ⑤

06 $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}\times\sqrt{\sqrt{a^5}}=\sqrt[6]{a^2}\times\sqrt[4]{a^5}=a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{5}{4}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{5}{4}}=a^{\frac{19}{12}}$

답 ②

07 $3^{\frac{5}{4}}\times(2^{\frac{1}{3}}\times3^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}\times2^{-\frac{5}{6}}$

$=3^{\frac{5}{4}}\times2^{-\frac{1}{6}}\times3^{\frac{1}{4}}\times2^{-\frac{5}{6}}$

$=2^{-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}}\times3^{\frac{5}{4}+\frac{1}{4}}$

$=2^{-1}\times3^{\frac{3}{2}}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 　　답 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

08 $(a^{\frac{6}{5}})^{\frac{3}{2}}\times(\sqrt{a})^{\frac{4}{3}}\div a^{\frac{k}{3}}=a^{\frac{9}{5}}\times(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{4}{3}}\div a^{\frac{k}{3}}$

$=a^{\frac{9}{5}}\times a^{\frac{2}{3}}\div a^{\frac{k}{3}}$

$=a^{\frac{9}{5}+\frac{2}{3}-\frac{k}{3}}$

$=a^{\frac{37-5k}{15}}$

$a^{\frac{37-5k}{15}}=a^{\frac{2}{15}}$에서 $\quad \frac{37-5k}{15}=\frac{2}{15}$

$37-5k=2 \quad \therefore k=7$ 　　답 7

09 $5^{\sqrt{7}+2}\div(5^{\sqrt{2}})^{3\sqrt{2}}\times5^{3-\sqrt{7}}=5^{\sqrt{7}+2}\div5^6\times5^{3-\sqrt{7}}$

$=5^{\sqrt{7}+2-6+3-\sqrt{7}}$

$=5^{-1}=\frac{1}{5}$ 　　답 ②

10 ① $3^{\frac{1}{5}}\times3^{\frac{3}{2}}=3^{\frac{1}{5}+\frac{3}{2}}=3^{\frac{17}{10}}=\sqrt[10]{3^{17}}$

② $(3^{-4})^{\frac{1}{2}}=3^{-2}=\frac{1}{9}$

③ $5^{2\sqrt{2}+3}\div5^{\sqrt{2}+3}=5^{2\sqrt{2}+3-(\sqrt{2}+3)}=5^{\sqrt{2}}$

④ $\{(-4)^2\}^{\frac{3}{2}}=(4^2)^{\frac{3}{2}}=4^3=64$

⑤ $(\sqrt{5})^{10\sqrt{5}}=(5^{\frac{1}{2}})^{10\sqrt{5}}=5^{5\sqrt{5}}$

$(25\sqrt{5})^{2\sqrt{5}}=(5^2\times5^{\frac{1}{2}})^{2\sqrt{5}}=(5^{\frac{5}{2}})^{2\sqrt{5}}=5^{5\sqrt{5}}$

$\therefore (\sqrt{5})^{10\sqrt{5}}=(25\sqrt{5})^{2\sqrt{5}}$ 　　답 ④

11 $2^6=a$에서 $\quad 2=a^{\frac{1}{6}}$

$\therefore 4^7=(2^2)^7=2^{14}=(a^{\frac{1}{6}})^{14}=a^{\frac{7}{3}}$ 　　답 $a^{\frac{7}{3}}$

$2^6=a$에서

$(2^6)^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{6}}$

$\therefore 2=a^{\frac{1}{6}}$

12 $2^3=a$에서 $\quad 2=a^{\frac{1}{3}}$

$3^2=b$에서 $\quad 3=b^{\frac{1}{2}}$

$\therefore 6^{12}=(2\times3)^{12}=2^{12}\times3^{12}$

$=(a^{\frac{1}{3}})^{12}\times(b^{\frac{1}{2}})^{12}=a^4b^6$ 　　답 ④

13 $a=27^3=(3^3)^3=3^9$에서 $\quad 3=a^{\frac{1}{9}}$

$81^6=(3^4)^6=3^{24}=(a^{\frac{1}{9}})^{24}=a^{\frac{8}{3}}$이므로

$k=\frac{8}{3}$ 　　답 $\frac{8}{3}$

베이직쎈 BOX

14 $a=\sqrt[4]{2}=2^{\frac{1}{4}}$에서 $a^4=2$

$b=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$에서 $b^3=3$

$\therefore \sqrt[8]{18}=(2\times3^2)^{\frac{1}{8}}=2^{\frac{1}{8}}\times3^{\frac{1}{4}}$

$=(a^4)^{\frac{1}{8}}\times(b^3)^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}$

따라서 $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{3}{4}$이므로

$mn=\frac{3}{8}$ 답 ③

15 $(4^{\frac{1}{2}}+4^{-\frac{1}{2}})(4^{\frac{1}{2}}-4^{-\frac{1}{2}})+(4^{\frac{1}{2}}+4^{-\frac{1}{2}})^2$

$=(4-4^{-1})+(4+2\cdot4^{\frac{1}{2}}\cdot4^{-\frac{1}{2}}+4^{-1})$

$=10$ 답 10

16 $(a^{\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}})^2+(a^{\frac{1}{4}}-a^{-\frac{1}{4}})^2$

$=(a^{\frac{1}{2}}+2a^{\frac{1}{4}}a^{-\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{2}})$

$+(a^{\frac{1}{2}}-2a^{\frac{1}{4}}a^{-\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{2}})$

$=2(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})=2(4^{\frac{1}{2}}+4^{-\frac{1}{2}})$

$=2\left(2+\frac{1}{2}\right)=5$ 답 ④

17 $(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{2}{3}})^3+(a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{2}{3}})^3$

$=a+3a^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{2}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{4}{3}}+a^{-2}$

$+(a-3a^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{2}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{4}{3}}-a^{-2})$

$=2(a+3a^{-1})=2\left(a+\frac{3}{a}\right)$ 답 $2\left(a+\frac{3}{a}\right)$

18 $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=4$의 양변을 제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2=4^2$, $x-2+x^{-1}=16$

$\therefore x+x^{-1}=18$ 답 ④

19 $3^x+3^{-x}=5$의 양변을 세제곱하면

$(3^x+3^{-x})^3=5^3$

$3^{3x}+3\cdot3^{2x}\cdot3^{-x}+3\cdot3^x\cdot3^{-2x}+3^{-3x}=125$

$3^{3x}+3^{-3x}+3(3^x+3^{-x})=125$

$\therefore \underline{27^x+27^{-x}}=125-3\cdot5=110$ 답 110

$3^{3x}+3^{-3x}$
$=(3^3)^x+(3^3)^{-x}$
$=27^x+27^{-x}$

20 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$의 양변을 제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=(\sqrt{7})^2$

$x+2+x^{-1}=7$ $\therefore x+x^{-1}=5$

$(x-x^{-1})^2=(x+x^{-1})^2-4=5^2-4=21$이므로

$x-x^{-1}=\pm\sqrt{21}$

따라서 $x-x^{-1}$의 값이 될 수 있는 것은 ②이다. 답 ②

21 $(x+x^{-1})^2=x^2+x^{-2}+2=7+2=9$이므로

$x+x^{-1}=3$ ($\because x+x^{-1}>0$)

또 $(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+x^{-1}+2=3+2=5$이므로

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$ ($\because x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}>0$)

$\therefore \frac{x+x^{-1}}{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 답 ③

22 $\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$의 분모, 분자에 a^x을 곱하면

$\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{a^x(a^x-a^{-x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$

$=\frac{7-1}{7+1}=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

다른 풀이 $\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{a^{-x}(a^{2x}-1)}{a^{-x}(a^{2x}+1)}=\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$

$=\frac{7-1}{7+1}=\frac{3}{4}$

23 $9^x=2$에서 $3^{2x}=2$

$\frac{3^x+3^{-x}}{27^x+27^{-x}}$의 분모, 분자에 3^x을 곱하면

$\frac{3^x+3^{-x}}{27^x+27^{-x}}=\frac{3^x(3^x+3^{-x})}{3^x(3^{3x}+3^{-3x})}=\frac{3^{2x}+1}{3^{4x}+3^{-2x}}$

$=\frac{3^{2x}+1}{(3^{2x})^2+(3^{2x})^{-1}}$

$=\frac{2+1}{2^2+2^{-1}}=\frac{2}{3}$ 답 ⑤

24 $2^{\frac{1}{x}}=a$에서 $a^x=2$

$\frac{a^{2x}+a^{-2x}}{a^{2x}-a^{-2x}}$의 분모, 분자에 a^{2x}을 곱하면

$\frac{a^{2x}+a^{-2x}}{a^{2x}-a^{-2x}}=\frac{a^{2x}(a^{2x}+a^{-2x})}{a^{2x}(a^{2x}-a^{-2x})}$

$=\frac{a^{4x}+1}{a^{4x}-1}=\frac{(a^x)^4+1}{(a^x)^4-1}$

$=\frac{2^4+1}{2^4-1}=\frac{17}{15}$ 답 $\frac{17}{15}$

25 $\frac{4^x+4^{-x}}{4^x-4^{-x}}$의 분모, 분자에 4^x을 곱하면

$\frac{4^x+4^{-x}}{4^x-4^{-x}}=\frac{4^x(4^x+4^{-x})}{4^x(4^x-4^{-x})}=\frac{4^{2x}+1}{4^{2x}-1}=\frac{16^x+1}{16^x-1}$

즉 $\frac{16^x+1}{16^x-1}=6$이므로 $16^x+1=6(16^x-1)$

$16^x+1=6\cdot16^x-6$, $5\cdot16^x=7$

$\therefore 16^x=\frac{7}{5}$

$\therefore 16^x+16^{-x}=\frac{7}{5}+\frac{5}{7}=\frac{74}{35}$ 답 $\frac{74}{35}$

26 $2^x=6$에서 $2=6^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$3^y=6$에서 $3=6^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

㉠×㉡을 하면 $6=6^{\frac{1}{x}}\times6^{\frac{1}{y}}=6^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ 답 ①

27 $20^x=8$에서 $20=(2^3)^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{3}{x}}$ …… ㉠

$5^y=2$에서 $5=2^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면 $4=2^{\frac{3}{x}}\div2^{\frac{1}{y}}$

$2^{\frac{3}{x}-\frac{1}{y}}=2^2$ $\therefore \frac{3}{x}-\frac{1}{y}=2$ 답 2

28 $3^x=12$에서 $\quad 3=12^{\frac{1}{x}}$ ⋯⋯ ㉠

$2^y=12$에서 $\quad 2=12^{\frac{1}{y}}$ ⋯⋯ ㉡

$24^z=12$에서 $\quad 24=12^{\frac{1}{z}}$ ⋯⋯ ㉢

㉠×㉡×㉢을 하면 $\quad 144=12^{\frac{1}{x}}\times12^{\frac{1}{y}}\times12^{\frac{1}{z}}$

$12^2=12^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \quad \therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$ 답 2

29 $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[6]{7}$을 지수가 유리수인 꼴로 나타내면

$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[4]{3}=3^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[6]{7}=7^{\frac{1}{6}}$

지수의 분모인 2, 4, 6의 최소공배수가 12이므로

$2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{6}{12}}=(2^6)^{\frac{1}{12}}=64^{\frac{1}{12}}$

$3^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{3}{12}}=(3^3)^{\frac{1}{12}}=27^{\frac{1}{12}}$

$7^{\frac{1}{6}}=7^{\frac{2}{12}}=(7^2)^{\frac{1}{12}}=49^{\frac{1}{12}}$

이때 $27<49<64$이므로 $\quad 27^{\frac{1}{12}}<49^{\frac{1}{12}}<64^{\frac{1}{12}}$

$\therefore \sqrt[4]{3}<\sqrt[6]{7}<\sqrt{2}$ 답 ③

30 세 수 A, B, C를 지수가 유리수인 꼴로 나타내면

$A=\sqrt[3]{\sqrt[4]{54}}=\sqrt[12]{54}=54^{\frac{1}{12}}$

$B=\sqrt[6]{5\sqrt{2}}=\sqrt[6]{\sqrt{50}}=\sqrt[12]{50}=50^{\frac{1}{12}}$

$C=\sqrt[4]{2\sqrt[3]{5}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{40}}=\sqrt[12]{40}=40^{\frac{1}{12}}$

이때 $40<50<54$이므로 $\quad 40^{\frac{1}{12}}<50^{\frac{1}{12}}<54^{\frac{1}{12}}$

따라서 $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{5}}<\sqrt[6]{5\sqrt{2}}<\sqrt[3]{\sqrt[4]{54}}$이므로

$C<B<A$ 답 $C<B<A$

31 $\sqrt{\sqrt[4]{6}}$, $\sqrt[12]{3\sqrt{7}}$, $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$를 지수가 유리수인 꼴로 나타내면

$\sqrt{\sqrt[4]{6}}=\sqrt[8]{6}=6^{\frac{1}{8}}$

$\sqrt[12]{3\sqrt{7}}=\sqrt[12]{\sqrt{63}}=\sqrt[24]{63}=63^{\frac{1}{24}}$

$\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{16}}=\sqrt[12]{16}=16^{\frac{1}{12}}$

지수의 분모인 8, 24, 12의 최소공배수가 24이므로

$6^{\frac{1}{8}}=6^{\frac{3}{24}}=(6^3)^{\frac{1}{24}}=216^{\frac{1}{24}}$

$16^{\frac{1}{12}}=16^{\frac{2}{24}}=(16^2)^{\frac{1}{24}}=256^{\frac{1}{24}}$

이때 $63<216<256$이므로 $\quad 63^{\frac{1}{24}}<216^{\frac{1}{24}}<256^{\frac{1}{24}}$

$\therefore \sqrt[12]{3\sqrt{7}}<\sqrt{\sqrt[4]{6}}<\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$

따라서 가장 큰 수는 $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$이다. 답 $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 25쪽

01 전략 n이 짝수일 때, 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 $a>0$이면 2개, $a=0$이면 1개, $a<0$이면 없다.

풀이 ① 1의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=1$이므로

$x^3-1=0, \quad (x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

따라서 1의 세제곱근은 1, $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$이다.

② -9의 제곱근을 x라 하면 $x^2=-9$이므로

$x=\pm3i$

따라서 -9의 제곱근은 $-3i$, $3i$이다.

③ 16의 네제곱근 중에서 실수인 것은 $-\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[4]{16}$이다.

⑤ n이 홀수이고 $x>0$일 때, x의 n제곱근 중 실수인 것은 1개이다. 답 ④

02 전략 거듭제곱근의 성질을 이용한다.

풀이 ① $\sqrt[4]{3}\times\sqrt[5]{3}=\sqrt[4\times5]{3^5}\times\sqrt[5\times4]{3^4}$
$=\sqrt[20]{3^5}\times\sqrt[20]{3^4}=\sqrt[20]{3^9}$

② $\sqrt[3]{-\sqrt{64}}=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$

③ $\sqrt[6]{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[6\times3]{4}=\sqrt[18]{2^2}=\sqrt[9]{2}$

④ $\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{\frac{128}{8\times4}}=\sqrt[3]{4}$

⑤ $\sqrt[4]{\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[3]{9}}}\times\sqrt{\frac{\sqrt[6]{9}}{\sqrt[8]{5}}}=\frac{\sqrt[4\times4]{5}}{\sqrt[4\times3]{9}}\times\frac{\sqrt[2\times6]{9}}{\sqrt[2\times8]{5}}$

$=\frac{\sqrt[16]{5}}{\sqrt[12]{9}}\times\frac{\sqrt[12]{9}}{\sqrt[16]{5}}=1$ 답 ③

03 전략 거듭제곱근의 성질을 이용하여 자연수 n의 값을 구한다.

풀이 (좌변)$=\sqrt[n]{9}\times\sqrt[n]{81}=\sqrt[n]{729}$

(우변)$=\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3^2}=\sqrt[3\times3]{3^{2\times3}}=\sqrt[9]{3^6}=\sqrt[9]{729}$

$\therefore n=9$ 답 ④

다른 풀이 $\sqrt[n]{9}\times\sqrt[n]{81}=3^{\frac{2}{n}}\times3^{\frac{4}{n}}=3^{\frac{2}{n}+\frac{4}{n}}=3^{\frac{6}{n}}$

$3^{\frac{6}{n}}=3^{\frac{2}{3}}$에서 $\quad \frac{6}{n}=\frac{2}{3} \quad \therefore n=9$

04 전략 지수가 유리수일 때, 밑이 양수이어야 지수법칙이 성립함을 이용한다.

풀이 ③ $\{(-7)^2\}^{\frac{1}{2}}$에서 밑이 음수이므로 지수법칙을 이용할 수 없다. 답 ③

05 전략 지수가 유리수일 때의 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구한다.

풀이 $\left\{\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{4}{9}}\right\}^{\frac{3}{2}}\times\left\{\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{5}{3}}\right\}^{-\frac{6}{5}}=\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}\times\left(\frac{1}{9}\right)^{-2}$

$=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^3\right\}^{\frac{2}{3}}\times(3^{-2})^{-2}$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times3^4$

$=36$ 답 ④

06 전략 a를 2의 거듭제곱으로 나타낸 후 $p^x=q$이면 $p=q^{\frac{1}{x}}$임을 이용한다.

풀이 $a=8^4=(2^3)^4=2^{12}$이므로 $\quad 2=a^{\frac{1}{12}}$

$\therefore 64^7=(2^6)^7=2^{42}=(a^{\frac{1}{12}})^{42}=a^{\frac{7}{2}}$

$\therefore k=\frac{7}{2}$ 답 ③

베이직쎈 BOX

$5\sqrt{2}=\sqrt{5^2\cdot2}=\sqrt{50}$

$2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2^3\cdot5}=\sqrt[3]{40}$

$3\sqrt{7}=\sqrt{3^2\cdot7}=\sqrt{63}$

$2\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2^3\cdot2}=\sqrt[3]{16}$

$\sqrt[n]{x}$의 1개

07 전략 곱셈 공식을 이용하여 주어진 조건식을 구하는 식의 꼴로 변형한다.

풀이 $(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+x^{-1}+2=18+2=20$이므로

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=2\sqrt{5}\ (\because x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}>0)$ 답 ③

08 전략 $\dfrac{2^{3x}-2^{-3x}}{2^x-2^{-x}}$의 분모, 분자에 2^x을 곱하여 2^{2x}에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\dfrac{2^{3x}-2^{-3x}}{2^x-2^{-x}}$의 분모, 분자에 2^x을 곱하면

$$\frac{2^{3x}-2^{-3x}}{2^x-2^{-x}}=\frac{2^x(2^{3x}-2^{-3x})}{2^x(2^x-2^{-x})}=\frac{2^{4x}-2^{-2x}}{2^{2x}-1}=\frac{6^2-\frac{1}{6}}{6-1}=\frac{43}{6}$$

답 ④

09 전략 A, B, C를 a^r (r는 유리수) 꼴로 변형하여 지수를 통일한다.

풀이 세 수 A, B, C를 지수가 유리수인 꼴로 나타내면

$A=\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$, $B=\sqrt[8]{5}=5^{\frac{1}{8}}$, $C=\sqrt{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[6]{3}=3^{\frac{1}{6}}$

지수의 분모인 3, 8, 6의 최소공배수가 24이므로

$2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{8}{24}}=(2^8)^{\frac{1}{24}}=256^{\frac{1}{24}}$

$5^{\frac{1}{8}}=5^{\frac{3}{24}}=(5^3)^{\frac{1}{24}}=125^{\frac{1}{24}}$

$3^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{4}{24}}=(3^4)^{\frac{1}{24}}=81^{\frac{1}{24}}$

이때 $81<125<256$이므로

$81^{\frac{1}{24}}<125^{\frac{1}{24}}<256^{\frac{1}{24}}$ $\quad\therefore \sqrt{\sqrt[3]{3}}<\sqrt[8]{5}<\sqrt[3]{2}$

$\therefore C<B<A$ 답 ⑤

10 전략 n이 짝수일 때, 양수 a의 n제곱근 중 양수인 것은 $\sqrt[n]{a}$이다.

풀이 81의 제곱근 중 양수인 것은

$\sqrt{81}=9$ $\quad\therefore a=9$

네제곱근 256은 $\sqrt[4]{256}=\sqrt[4]{4^4}=4$ $\quad\therefore b=4$

$\therefore a-b=5$ 답 5

11 전략 정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm로 놓고 부피에 대한 식을 세운다.

풀이 정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라 하면 부피가 36 cm^{3}이므로

$x^3=36$ $\quad\therefore x=\sqrt[3]{36}$

따라서 구하는 모서리의 길이는 $\sqrt[3]{36}$ cm이다.

답 $\sqrt[3]{36}$ cm

한 모서리의 길이가 a인 정육면체의 부피를 V라 하면
$V=a^3$

12 전략 지수가 유리수인 꼴로 나타낸다.

풀이 $\left(\dfrac{1}{2^8}\right)^{\frac{1}{n}}=(2^{-8})^{\frac{1}{n}}=2^{-\frac{8}{n}}$

이때 $2^{-\frac{8}{n}}$이 자연수가 되려면 $-\dfrac{8}{n}$이 음이 아닌 정수이어야 한다.

따라서 정수 n은 -8, -4, -2, -1의 4개이다. 답 4

$n=-8$일 때, $2^{-\frac{8}{n}}=2^1=2$
$n=-4$일 때, $2^{-\frac{8}{n}}=2^2=4$
$n=-2$일 때, $2^{-\frac{8}{n}}=2^4=16$
$n=-1$일 때, $2^{-\frac{8}{n}}=2^8=256$

13 전략 $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$임을 이용하여 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\sqrt{a\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt{a}\times\sqrt[4]{a}\times\sqrt[6]{a^2}$

$=a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{3}}$

$=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}$

$=a^{\frac{13}{12}}$ ······ ㉠ ··· ❶

$\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a^m}}=\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[12]{a^m}$

$=a^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{m}{12}}$

$=a^{\frac{2}{3}+\frac{m}{12}}$

$=a^{\frac{8+m}{12}}$ ······ ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡에서 $\dfrac{13}{12}=\dfrac{8+m}{12}$이므로

$13=8+m$ $\quad\therefore m=5$ ··· ❸

답 5

단계	채점 기준	비율
❶	좌변을 지수가 유리수인 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷	우변을 지수가 유리수인 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸	m의 값을 구할 수 있다.	20%

14 전략 $a>0$, $b>0$이고 r, s가 유리수일 때, $(a^r+b^s)(a^r-b^s)=a^{2r}-b^{2s}$임을 이용한다.

풀이 $\left(\sqrt[4]{x}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)\left(\sqrt[4]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=(x^{\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(x+x^{-1})$

$=(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(x+x^{-1})$

$=(x-x^{-1})(x+x^{-1})$

$=x^2-x^{-2}=x^2-\dfrac{1}{x^2}$

$=3^2-\dfrac{1}{3^2}$

$=\dfrac{80}{9}$ 답 $\dfrac{80}{9}$

15 전략 $a>0$, $b>0$이고 0이 아닌 실수 x에 대하여 $a^x=b$이면 $a=b^{\frac{1}{x}}$임을 이용한다.

풀이 $7^m=16$에서

$7=16^{\frac{1}{m}}=(2^4)^{\frac{1}{m}}=2^{\frac{4}{m}}$ ······ ㉠

$112^n=8$에서

$112=8^{\frac{1}{n}}=(2^3)^{\frac{1}{n}}=2^{\frac{3}{n}}$ ······ ㉡ ··· ❶

㉠÷㉡을 하면 $\dfrac{7}{112}=2^{\frac{4}{m}}\div 2^{\frac{3}{n}}$ ··· ❷

$2^{\frac{4}{m}-\frac{3}{n}}=\dfrac{1}{16}=2^{-4}$

$\therefore \dfrac{4}{m}-\dfrac{3}{n}=-4$ ··· ❸

답 -4

단계	채점 기준	비율
❶	7, 112를 각각 m, n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷	$7\div112$를 m, n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
❸	$\dfrac{4}{m}-\dfrac{3}{n}$의 값을 구할 수 있다.	50%

Ⅰ. 지수와 로그

02 로그

03 로그

개념 09 로그

본책 28쪽

01 답 밑: 6, 진수: 8

02 답 밑: 20, 진수: 4

03 답 밑: $\frac{1}{3}$, 진수: 7

04 답 밑: $\sqrt{2}$, 진수: $\frac{1}{4}$

05 답 $4=\log_2 16$

> $a^x=N$
> $\Longleftrightarrow x=\log_a N$

06 답 $-2=\log_3 \frac{1}{9}$

07 답 $-3=\log_{\frac{1}{5}} 125$

08 답 $\frac{1}{2}=\log_7 \sqrt{7}$

09 답 $0=\log_6 1$

10 답 $2^3=8$

11 답 $10^{-3}=0.001$

12 답 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=16$

13 답 $(\sqrt{3})^6=27$

14 답 $5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

15 답 $12^0=1$

16 답 2 ◎ 9, 2, 2, 2

17 $\log_4 64=x$로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$4^x=64$, $\quad 4^x=4^3 \quad \therefore x=3$

$\therefore \log_4 64=3$ 답 3

18 $\log_5 \frac{1}{125}=x$로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$5^x=\frac{1}{125}$, $\quad 5^x=5^{-3} \quad \therefore x=-3$

$\therefore \log_5 \frac{1}{125}=-3$ 답 -3

19 $\log_{\frac{1}{3}} 81=x$로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=81$, $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \quad \therefore x=-4$

$\therefore \log_{\frac{1}{3}} 81=-4$ 답 -4

20 답 32 ◎ 5, 32

21 $\log_3 x=-3$에서 $\quad 3^{-3}=x$

$\therefore x=\frac{1}{27}$ 답 $\frac{1}{27}$

22 $\log_8 x=\frac{1}{3}$에서 $\quad 8^{\frac{1}{3}}=x \quad \therefore x=2$ 답 2

> $x=8^{\frac{1}{3}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}=2$

23 $\log_{15} x=0$에서 $\quad 15^0=x \quad \therefore x=1$ 답 1

24 답 5 ◎ 25, 5

베이직쎈 BOX

25 $\log_x \frac{1}{64}=3$에서 $\quad x^3=\frac{1}{64}$

> $\frac{1}{64}=\left(\frac{1}{4}\right)^3$

$\therefore x=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

26 $\log_x \sqrt{11}=\frac{1}{2}$에서 $\quad x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{11}$

$\therefore x=11$ 답 11

27 밑의 조건에서 $\quad x-4>0,\ x-4\neq 1$

> $\log_a N$이 정의되기 위한 조건
> ① $a>0,\ a\neq 1$
> ② $N>0$

$x>4,\ x\neq 5 \quad \therefore 4<x<5$ 또는 $x>5$

답 $4<x<5$ 또는 $x>5$

28 진수의 조건에서 $\quad x+3>0$

$\therefore x>-3$ 답 $x>-3$

29 진수의 조건에서 $\quad x^2-4x>0$

$x(x-4)>0 \quad \therefore x<0$ 또는 $x>4$

답 $x<0$ 또는 $x>4$

30 답 $3<x<4$ 또는 $4<x<10$

◎ 0, 10, 1, 4, 4, 4, 4, 4, 10

31 진수의 조건에서 $\quad 6-x>0$

$\therefore x<6$ ······ ㉠

밑의 조건에서 $\quad 3x-2>0,\ 3x-2\neq 1$

$x>\frac{2}{3},\ x\neq 1$

> $3x-2>0$에서
> $3x>2 \quad \therefore x>\frac{2}{3}$
> $3x-2\neq 1$에서
> $3x\neq 3 \quad \therefore x\neq 1$

$\therefore \frac{2}{3}<x<1$ 또는 $x>1$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{2}{3}<x<1$ 또는 $1<x<6$

답 $\frac{2}{3}<x<1$ 또는 $1<x<6$

개념 10 로그의 성질

본책 30쪽

32 답 0

33 답 1

34 답 2, 4, 8, 1

> $a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0$일 때
> $\log_a MN$
> $=\log_a M+\log_a N$

35 $\log_3 81+\log_3 \frac{1}{27}=\log_3\left(81\times\frac{1}{27}\right)$

$=\log_3 3=1$ 답 1

36 $\log_{12}\sqrt{3}+\log_{12}4\sqrt{3}=\log_{12}(\sqrt{3}\times 4\sqrt{3})$

$=\log_{12}12=1$ 답 1

37 답 10, 2, 5, 1

> $a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0$일 때
> $\log_a \frac{M}{N}$
> $=\log_a M-\log_a N$

38 $\log_7 28-\log_7 4=\log_7 \frac{28}{4}=\log_7 7=1$ 답 1

39 $\log_{40} 60-\log_{40}\frac{3}{2}=\log_{40}\left(60\div\frac{3}{2}\right)$

$=\log_{40} 40=1$ 답 1

베이직쎈 BOX

40 답 4, 4

$a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때
$\log_a N^k = k\log_a N$
(단, k는 실수)

41 $\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2$ 답 -2

$\log_3 3^{-2} = -2\log_3 3$
$= -2$

42 $\log_5 \sqrt[4]{5} = \log_5 5^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

43 $\log_2 24 + \log_2 \frac{1}{3} = \log_2\left(24\times\frac{1}{3}\right)$
$= \log_2 8 = \log_2 2^3$
$= 3$ 답 3

44 $\log_3\sqrt{15} - \log_3\sqrt{5} = \log_3 \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$
$= \log_3\sqrt{3}$
$= \log_3 3^{\frac{1}{2}}$
$= \frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

45 $\log_5 50 - \log_5 \frac{2}{5} = \log_5\left(50\div\frac{2}{5}\right)$
$= \log_5 125$
$= \log_5 5^3$
$= 3$ 답 3

46 $\log_3 72 - 3\log_3 2 = \log_3 72 - \log_3 2^3$
$= \log_3 \frac{72}{8}$
$= \log_3 9$
$= \log_3 3^2$
$= 2$ 답 2

47 $\log_2 18 + 2\log_2 \frac{2}{3} = \log_2 18 + \log_2\left(\frac{2}{3}\right)^2$
$= \log_2\left(18\times\frac{4}{9}\right)$
$= \log_2 8 = \log_2 2^3$
$= 3$ 답 3

48 $\log_3 \frac{3}{2} + 2\log_3\sqrt{54} = \log_3\frac{3}{2} + \log_3(\sqrt{54})^2$
$= \log_3\left(\frac{3}{2}\times 54\right)$
$= \log_3 81 = \log_3 3^4$
$= 4$ 답 4

49 $\log_{10} 5\sqrt{2} - \frac{1}{2}\log_{10} 5 = \log_{10} 5\sqrt{2} - \log_{10} 5^{\frac{1}{2}}$
$= \log_{10} 5\sqrt{2} - \log_{10}\sqrt{5}$
$= \log_{10}\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$
$= \log_{10}\sqrt{10}$
$= \log_{10} 10^{\frac{1}{2}}$
$= \frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

50 $\log_2 6 + \log_2 5 - \log_2 15 = \log_2 \frac{6\times5}{15}$
$= \log_2 2$
$= 1$ 답 1

51 $\log_2 12 + \log_2 6 - \log_2 9 = \log_2 \frac{12\times 6}{9}$
$= \log_2 8$
$= \log_2 2^3$
$= 3$ 답 3

52 $\log_5 4 - \log_5 \frac{8}{5} + \log_5 10 = \log_5\left(4\div\frac{8}{5}\times 10\right)$
$= \log_5 25$
$= \log_5 5^2$
$= 2$ 답 2

53 $\log_4 6 + \log_4 24 - 2\log_4 3$
$= \log_4 6 + \log_4 24 - \log_4 3^2$
$= \log_4 6 + \log_4 24 - \log_4 9$
$= \log_4 \frac{6\times 24}{9} = \log_4 16$
$= \log_4 4^2 = 2$ 답 2

54 $4\log_2\sqrt{6} + \log_2\frac{1}{24} - \log_2 3$
$= \log_2(\sqrt{6})^4 + \log_2\frac{1}{24} - \log_2 3$
$= \log_2 36 + \log_2 \frac{1}{24} - \log_2 3$
$= \log_2\left(36\times\frac{1}{24}\div 3\right)$
$= \log_2\frac{1}{2} = \log_2 2^{-1}$
$= -1$ 답 -1

55 $\log_3\sqrt{5} - \frac{1}{2}\log_3 15 - 3\log_3\frac{1}{3}$
$= \log_3\sqrt{5} - \log_3 15^{\frac{1}{2}} - \log_3\left(\frac{1}{3}\right)^3$
$= \log_3\sqrt{5} - \log_3\sqrt{15} - \log_3\frac{1}{27}$
$= \log_3\frac{27\sqrt{5}}{\sqrt{15}} = \log_3 9\sqrt{3}$
$= \log_3 3^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

개념 11 로그의 밑의 변환

본책 32쪽

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$,
$c>0$, $c\neq1$일 때
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

56 $\log_{27} 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 27} = \frac{\log_3 3^2}{\log_3 3^3} = \frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

57 $\log_{16} 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 16} = \frac{\log_2 2^5}{\log_2 2^4} = \frac{5}{4}$ 답 $\frac{5}{4}$

58 $\log_{1000}\frac{1}{10} = \frac{\log_{10}\frac{1}{10}}{\log_{10} 1000}$
$= \frac{\log_{10} 10^{-1}}{\log_{10} 10^3}$
$= -\frac{1}{3}$ 답 $-\frac{1}{3}$

베이직쎈 BOX

59 $\dfrac{\log_7 125}{\log_7 5}=\log_5 125=\log_5 5^3=3$ 답 3

60 $\dfrac{1}{\log_{32} 2}=\log_2 32=\log_2 2^5=5$ 답 5

> $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$일 때
> $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

61 $\dfrac{1}{\log_{27} 3}=\log_3 27=\log_3 3^3=3$ 답 3

62 $\log_2 27\times\log_3 2=\dfrac{\log_3 27}{\log_3 2}\times\log_3 2$

$=\log_3 27$

$=\log_3 3^3$

$=3$ 답 3

> $a>0$, $a\neq1$, $b>0$일 때
> $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$
> (단, $m\neq0$)

63 $\log_5 2\times\log_2 25=\log_5 2\times\dfrac{\log_5 25}{\log_5 2}$

$=\log_5 25$

$=\log_5 5^2$

$=2$ 답 2

> $a>0$, $a\neq1$, $b>0$일 때
> ① $a^{\log_a b}=b$
> ② $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$
> (단, $c>0$, $c\neq1$)

64 $\log_2 3\times\log_4 2\times\log_3 8$

$=\dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}\times\dfrac{\log_{10} 2}{\log_{10} 4}\times\dfrac{\log_{10} 8}{\log_{10} 3}$

$=\dfrac{\log_{10} 8}{\log_{10} 4}=\dfrac{\log_{10} 2^3}{\log_{10} 2^2}$

$=\dfrac{3\log_{10} 2}{2\log_{10} 2}=\dfrac{3}{2}$ 답 $\dfrac{3}{2}$

65 $\log_5 3\times\log_3 10\times\log_{10} 125$

$=\dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} 5}\times\dfrac{\log_{10} 10}{\log_{10} 3}\times\log_{10} 125$

$=\dfrac{\log_{10} 125}{\log_{10} 5}=\dfrac{\log_{10} 5^3}{\log_{10} 5}$

$=\dfrac{3\log_{10} 5}{\log_{10} 5}=3$ 답 3

66 $\log_4 2+\dfrac{1}{\log_{32} 4}=\log_4 2+\log_4 32$

$=\log_4 (2\times32)$

$=\log_4 64$

$=\log_4 4^3=3$ 답 3

67 $\log_3 18-\dfrac{1}{\log_6 3}=\log_3 18-\log_3 6$

$=\log_3 \dfrac{18}{6}$

$=\log_3 3=1$ 답 1

개념 12 로그의 여러 가지 성질

본책 33쪽

> $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$일 때
> $\log_a b\cdot\log_b a=1$

68 답 1

69 $\log_5 16\cdot\log_4 5=\log_5 4^2\cdot\log_4 5$

$=2\log_5 4\cdot\log_4 5$

$=2$ 답 2

70 $\log_{100}\dfrac{1}{1000}=\log_{10^2} 10^{-3}=-\dfrac{3}{2}$ 답 $-\dfrac{3}{2}$

71 $\log_4 128=\log_{2^2} 2^7=\dfrac{7}{2}$ 답 $\dfrac{7}{2}$

72 $\log_{81} 3+\log_{27} 3=\log_{3^4} 3+\log_{3^3} 3$

$=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}$

$=\dfrac{7}{12}$ 답 $\dfrac{7}{12}$

73 $\log_{\frac{1}{25}} 5-\log_2\dfrac{1}{64}=\log_{5^{-2}} 5-\log_2 2^{-6}$

$=-\dfrac{1}{2}-(-6)$

$=\dfrac{11}{2}$ 답 $\dfrac{11}{2}$

74 $4^{\log_4 10}=10^{\log_4 4}=10$ 답 10

75 $9^{\log_3 2}=2^{\log_3 9}=2^{\log_3 3^2}=2^2=4$ 답 4

다른 풀이 $9^{\log_3 2}=3^{2\log_3 2}=3^{\log_3 2^2}=3^{\log_3 4}=4$

76 $6^{\log_6 2+\log_6 7}=6^{\log_6 (2\cdot7)}=6^{\log_6 14}=14^{\log_6 6}=14$ 답 14

77 $3^{\log_3 7}-2^{\log_2 5}=7^{\log_3 3}-5^{\log_2 2}=7-5=2$ 답 2

78 $25^{\log_5 2}\cdot2^{\log_2 6}=2^{\log_5 25}\cdot6^{\log_2 2}$

$=2^{\log_5 5^2}\cdot6^{\log_2 2}$

$=2^2\cdot6=24$ 답 24

다른 풀이 $25^{\log_5 2}\cdot2^{\log_2 6}=5^{2\log_5 2}\cdot2^{\log_2 6}$

$=5^{\log_5 2^2}\cdot2^{\log_2 6}$

$=5^{\log_5 4}\cdot2^{\log_2 6}$

$=4^{\log_5 5}\cdot6^{\log_2 2}$

$=4\cdot6=24$

79 $5^{3\log_5 4+\log_5 3-5\log_5 2}=5^{\log_5 4^3+\log_5 3-\log_5 2^5}$

$=5^{\log_5 64+\log_5 3-\log_5 32}$

$=5^{\log_5 \frac{64\cdot3}{32}}=5^{\log_5 6}$

$=6^{\log_5 5}=6$ 답 6

개념 13 로그의 값을 문자로 나타내기

본책 34쪽

80 $\log_5 18=\log_5 (2\cdot3^2)$

$=\log_5 2+\log_5 3^2$

$=\log_5 2+2\log_5 3$

$=a+2b$ 답 $a+2b$

81 $\log_5 24=\log_5 (2^3\cdot3)$

$=\log_5 2^3+\log_5 3$

$=3\log_5 2+\log_5 3$

$=3a+b$ 답 $3a+b$

82 $\log_5 \frac{1}{27} = \log_5 3^{-3} = -3\log_5 3 = -3b$ 답 $-3b$

83 $\log_5 \frac{9}{8} = \log_5 \frac{3^2}{2^3}$

$= \log_5 3^2 - \log_5 2^3$

$= 2\log_5 3 - 3\log_5 2$

$= 2b - 3a$ 답 $2b-3a$

84 $\log_5 300 = \log_5 (2^2 \cdot 3 \cdot 5^2)$

$= \log_5 2^2 + \log_5 3 + \log_5 5^2$

$= 2\log_5 2 + \log_5 3 + 2$

$= 2a + b + 2$ 답 $2a+b+2$

85 $\log_4 3 = \frac{\log_5 3}{\log_5 4} = \frac{\log_5 3}{\log_5 2^2} = \frac{\log_5 3}{2\log_5 2} = \frac{b}{2a}$

답 $\frac{b}{2a}$

86 $\log_2 27 = \frac{\log_5 27}{\log_5 2} = \frac{\log_5 3^3}{\log_5 2} = \frac{3\log_5 3}{\log_5 2} = \frac{3b}{a}$

답 $\frac{3b}{a}$

87 $\log_6 24 = \frac{\log_5 24}{\log_5 6} = \frac{\log_5 (2^3 \cdot 3)}{\log_5 (2 \cdot 3)}$

$= \frac{\log_5 2^3 + \log_5 3}{\log_5 2 + \log_5 3}$

$= \frac{3\log_5 2 + \log_5 3}{\log_5 2 + \log_5 3}$

$= \frac{3a+b}{a+b}$ 답 $\frac{3a+b}{a+b}$

88 $\log_{10} 6 = \frac{\log_5 6}{\log_5 10} = \frac{\log_5 (2 \cdot 3)}{\log_5 (2 \cdot 5)}$

$= \frac{\log_5 2 + \log_5 3}{\log_5 2 + \log_5 5}$

$= \frac{a+b}{a+1}$ 답 $\frac{a+b}{a+1}$

89 $\log_4 \sqrt{12} = \frac{\log_5 \sqrt{12}}{\log_5 4} = \frac{\log_5 (2^2 \cdot 3)^{\frac{1}{2}}}{\log_5 2^2}$

$= \frac{\frac{1}{2}\log_5 (2^2 \cdot 3)}{2\log_5 2} = \frac{\log_5 2^2 + \log_5 3}{4\log_5 2}$

$= \frac{2\log_5 2 + \log_5 3}{4\log_5 2}$

$= \frac{2a+b}{4a}$ 답 $\frac{2a+b}{4a}$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 35쪽

01 $\log_a 2 = 4$에서 $a^4 = 2$ $\therefore a = \sqrt[4]{2}$

$\log_b 6 = 4$에서 $b^4 = 6$ $\therefore b = \sqrt[4]{6}$

$\therefore ab = \sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{12}$ 답 ④

베이직쎈 BOX

$a>0$, $a \neq 1$일 때,
$\log_a 1 = 0$
$\log_a a = 1$

$a>0$, $b>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때
① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
② $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

02 $x = \log_5 3$에서 $5^x = 3$

$\therefore 5^x - 5^{-x} = 5^x - \frac{1}{5^x} = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$ 답 ③

다른 풀이 $5^x - 5^{-x} = 5^{\log_5 3} - 5^{-\log_5 3}$

$= 3^{\log_5 5} - 3^{-\log_5 5}$

$= 3 - 3^{-1}$

$= 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$

03 $\log_8 \{\log_4 (\log_2 n)\} = 0$에서

$\log_4 (\log_2 n) = 8^0 = 1$

$\log_2 n = 4^1 = 4$

$\therefore n = 2^4 = 16$ 답 16

04 진수의 조건에서 $16 - x > 0$ $\therefore x < 16$

따라서 x의 값으로 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

05 진수의 조건에서 $-x^2 + 6x + 16 > 0$

$x^2 - 6x - 16 < 0$, $(x+2)(x-8) < 0$

$\therefore -2 < x < 8$ …… ㉠

밑의 조건에서 $x - 4 > 0$, $x - 4 \neq 1$

$x > 4$, $x \neq 5$

$\therefore 4 < x < 5$ 또는 $x > 5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$4 < x < 5$ 또는 $5 < x < 8$

따라서 정수 x는 6, 7이므로 구하는 합은

$6 + 7 = 13$ 답 13

06 진수의 조건에서 $-x^2 - x + 12 > 0$

$x^2 + x - 12 < 0$, $(x+4)(x-3) < 0$

$\therefore -4 < x < 3$ …… ㉠

밑의 조건에서 $x + 5 > 0$, $x + 5 \neq 1$

$x > -5$, $x \neq -4$

$\therefore -5 < x < -4$ 또는 $x > -4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-4 < x < 3$

따라서 정수 x는 -3, -2, -1, 0, 1, 2의 6개이다.

답 ①

07 ③ $\log_4 \frac{1}{64} = \log_4 4^{-3} = -3$

④ $\log_2 \sqrt[5]{4} = \log_2 2^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}$

⑤ $\frac{1}{3}\log_3 \sqrt[3]{10} = \log_3 (\sqrt[3]{10})^{\frac{1}{3}} = \log_3 (10^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}$

$= \log_3 10^{\frac{1}{9}} = \frac{1}{9}\log_3 10$ 답 ⑤

08 $\log_2 \frac{4}{9} + 2\log_2 \sqrt{48} - \log_2 \frac{1}{3}$

$= \log_2 \frac{4}{9} + \log_2 (\sqrt{48})^2 - \log_2 \frac{1}{3}$

$= \log_2 \frac{4}{9} + \log_2 48 - \log_2 \frac{1}{3}$

$= \log_2 \left(\frac{4}{9} \cdot 48 \cdot 3\right) = \log_2 64$

$= \log_2 2^6 = 6$ 답 6

베이직쎈 BOX

09 $\log_3(\log_5 125)=\log_3(\log_5 5^3)=\log_3 3=1$ 답 1

10 $\log_6\frac{2}{1}+\log_6\frac{3}{2}+\log_6\frac{4}{3}+\cdots+\log_6\frac{36}{35}$

$=\log_6\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{36}{35}\right)$

$=\log_6 36=\log_6 6^2$

$=2$ 답 ③

11 $\log_2 5\cdot\log_3 16\cdot\log_5 3=\frac{\log_{10}5}{\log_{10}2}\cdot\frac{\log_{10}16}{\log_{10}3}\cdot\frac{\log_{10}3}{\log_{10}5}$

$=\frac{\log_{10}16}{\log_{10}2}=\frac{\log_{10}2^4}{\log_{10}2}$

$=\frac{4\log_{10}2}{\log_{10}2}$

$=4$ 답 ③

12 $\log_4 32+\frac{1}{\log_6 4}-\frac{\log_3 12}{\log_3 4}$

$=\log_4 32+\log_4 6-\log_4 12$

$=\log_4\frac{32\cdot 6}{12}$

$=\log_4 16$

$=\log_4 4^2$

$=2$ 답 2

13 $\frac{1}{\log_4 x}+\frac{1}{\log_5 x}+\frac{1}{\log_6 x}$

$=\log_x 4+\log_x 5+\log_x 6$

$=\log_x(4\cdot 5\cdot 6)$

$=\log_x 120$

$=\frac{1}{\log_{120}x}$

즉 $\frac{1}{\log_{120}x}=\frac{1}{\log_a x}$이므로 $a=120$ 답 ⑤

14 $\log_a c=\frac{1}{5}$에서 $\frac{1}{\log_c a}=\frac{1}{5}$

$\therefore \log_c a=5$

$\log_b c=\frac{1}{8}$에서 $\frac{1}{\log_c b}=\frac{1}{8}$

$\therefore \log_c b=8$

$\therefore \frac{1}{\log_{ab}c}=\log_c ab$

$=\log_c a+\log_c b$

$=5+8=13$ 답 13

15 $\log_2\sqrt{27}\cdot\log_3 16=\log_2 3^{\frac{3}{2}}\cdot\log_3 2^4$

$=\frac{3}{2}\log_2 3\cdot 4\log_3 2$

$=6$ 답 ④

16 $\log_{16}3^{\log_3 2}=\log_{16}2^{\log_2 3}=\log_{16}2$

$=\log_{2^4}2=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

17 $(8\log_4 5+2\log_2\sqrt{5})\cdot\log_{25}\sqrt{32}$

$=(8\log_{2^2}5+2\log_2 5^{\frac{1}{2}})\cdot\log_{5^2}2^{\frac{5}{2}}$

$=(4\log_2 5+\log_2 5)\cdot\frac{5}{4}\log_5 2$

$=5\log_2 5\cdot\frac{5}{4}\log_5 2$

$=\frac{25}{4}$ 답 $\frac{25}{4}$

18 $A=3^{\log_3\frac{5}{2}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{\log_3 3}=\frac{5}{2}$

$B=\log_4 2\sqrt{2}=\log_{2^2}2^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{4}$

$C=\log_5(\log_2 32)=\log_5(\log_2 2^5)=\log_5 5=1$

이때 $\frac{3}{4}<1<\frac{5}{2}$이므로 $B<C<A$ 답 ④

19 $\log_{\frac{1}{10}}24=\log_{10^{-1}}(2^3\cdot 3)$

$=-\log_{10}(2^3\cdot 3)$

$=-(\log_{10}2^3+\log_{10}3)$

$=-(3\log_{10}2+\log_{10}3)$

$=-(3a+b)$

$=-3a-b$ 답 ①

20 $\log_2 5=a$에서 $\frac{1}{\log_5 2}=a$

$\therefore \log_5 2=\frac{1}{a}$

$\therefore \log_9 10=\frac{\log_5 10}{\log_5 9}=\frac{\log_5(2\cdot 5)}{\log_5 3^2}$

$=\frac{\log_5 2+1}{2\log_5 3}=\frac{\frac{1}{a}+1}{2b}$

$=\frac{1+a}{2ab}$ 답 $\frac{1+a}{2ab}$

$\frac{\frac{1}{a}+1}{2b}=\frac{\frac{1+a}{a}}{2b}=\frac{1+a}{2ab}$

21 $\log_2 15=a$에서

$\log_2 3+\log_2 5=a$ ······ ㉠

$\log_2\frac{3}{5}=b$에서

$\log_2 3-\log_2 5=b$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면 $2\log_2 3=a+b$

$\begin{array}{rl} & \log_2 3+\cancel{\log_2 5}=a \\ +) & \log_2 3-\cancel{\log_2 5}=b \\ \hline & 2\log_2 3 \quad =a+b \end{array}$

$\therefore \log_2 3=\frac{a+b}{2}$

㉠−㉡을 하면 $2\log_2 5=a-b$

$\begin{array}{rl} & \cancel{\log_2 3}+\log_2 5=a \\ -) & \cancel{\log_2 3}-\log_2 5=b \\ \hline & 2\log_2 5=a-b \end{array}$

$\therefore \log_2 5=\frac{a-b}{2}$

$\therefore \log_2 45=\log_2(3^2\cdot 5)$

$=\log_2 3^2+\log_2 5$

$=2\log_2 3+\log_2 5$

$=2\cdot\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}$

$=\frac{3a+b}{2}$

따라서 $p=\frac{3}{2}$, $q=\frac{1}{2}$이므로

$p+q=2$ 답 ③

베이직쎈 BOX

22 $4^a=5$에서 $\log_4 5=a$

$\therefore \log_{64}5=\log_{4^3}5=\frac{1}{3}\log_4 5=\frac{1}{3}a$

$\therefore p=\frac{1}{3}$ 답 ①

23 $3^a=x$, $3^b=y$에서 $\log_3 x=a$, $\log_3 y=b$

$$\therefore \log_{xy}x^2y=\frac{\log_3 x^2y}{\log_3 xy}=\frac{2\log_3 x+\log_3 y}{\log_3 x+\log_3 y}=\frac{2a+b}{a+b}$$

답 $\frac{2a+b}{a+b}$

다른 풀이 $3^a=x$, $3^b=y$에서

$xy=3^a\cdot 3^b=3^{a+b}$, $x^2y=(3^a)^2\cdot 3^b=3^{2a+b}$

$$\therefore \log_{xy}x^2y=\frac{\log_3 x^2y}{\log_3 xy}=\frac{\log_3 3^{2a+b}}{\log_3 3^{a+b}}=\frac{2a+b}{a+b}$$

$a>0$이고 x, y가 실수일 때
$a^xa^y=a^{x+y}$

24 $6^a=5$에서 $\log_6 5=a$

$6^b=4$에서 $\log_6 4=b$

$\log_6 2^2=b$, $2\log_6 2=b$ $\therefore \log_6 2=\frac{b}{2}$

$$\therefore \log_{20}50=\frac{\log_6 50}{\log_6 20}=\frac{\log_6(2\cdot 5^2)}{\log_6(2^2\cdot 5)}=\frac{\log_6 2+2\log_6 5}{2\log_6 2+\log_6 5}=\frac{\frac{b}{2}+2a}{2\cdot\frac{b}{2}+a}=\frac{4a+b}{2(a+b)}$$

답 ⑤

$$\frac{\frac{b}{2}+2a}{2\cdot\frac{b}{2}+a}=\frac{\frac{b+4a}{2}}{a+b}=\frac{4a+b}{2(a+b)}$$

25 $4^x=a$, $4^y=b$에서 $\log_4 a=x$, $\log_4 b=y$

$\log_{2^2}a=x$, $\log_{2^2}b=y$

$\frac{1}{2}\log_2 a=x$, $\frac{1}{2}\log_2 b=y$

$\therefore \log_2 a=2x$, $\log_2 b=2y$

$$\therefore \log_2\frac{a^2}{\sqrt{b}}=2\log_2 a-\frac{1}{2}\log_2 b=2\cdot 2x-\frac{1}{2}\cdot 2y=4x-y$$

따라서 $p=4$, $q=-1$이므로

$p+q=3$ 답 3

내항의 곱
$a:b=c:d$
외항의 곱
➡ $ad=bc$

26 $8^x=27^y=36$에서 $x=\log_8 36$, $y=\log_{27}36$

$$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\log_8 36}+\frac{1}{\log_{27}36}=\log_{36}8+\log_{36}27=\log_{36}(2^3\cdot 3^3)=\log_{6^2}6^3=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

다른 풀이 $8^x=36$에서 $8=36^{\frac{1}{x}}$

$2^3=6^{\frac{2}{x}}$ $\therefore 2=6^{\frac{2}{3x}}$ …… ㉠

$27^y=36$에서 $27=36^{\frac{1}{y}}$

$3^3=6^{\frac{2}{y}}$ $\therefore 3=6^{\frac{2}{3y}}$ …… ㉡

㉠×㉡을 하면 $6=6^{\frac{2}{3x}+\frac{2}{3y}}$

따라서 $1=\frac{2}{3x}+\frac{2}{3y}$이므로

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2}$

27 $40^x=5^y=2$에서

$x=\log_{40}2$, $y=\log_5 2$

$$\therefore \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{\log_{40}2}-\frac{1}{\log_5 2}=\log_2 40-\log_2 5=\log_2\frac{40}{5}=\log_2 8=\log_2 2^3=3$$

답 3

28 $7^x=27$, $21^y=243$에서

$x=\log_7 27$, $y=\log_{21}243$

$$\therefore \frac{3}{x}-\frac{5}{y}=\frac{3}{\log_7 27}-\frac{5}{\log_{21}243}=3\log_{27}7-5\log_{243}21=3\log_{3^3}7-5\log_{3^5}21=3\cdot\frac{1}{3}\log_3 7-5\cdot\frac{1}{5}\log_3 21=\log_3 7-\log_3 21=\log_3\frac{7}{21}=\log_3\frac{1}{3}=\log_3 3^{-1}=-1$$

답 ④

29 $\log_2 x+\log_4 y^2=1$에서

$\log_2 x+\log_{2^2}y^2=1$

$\therefore \log_2 x+\log_2 y=1$

$$\therefore 4^{\log_2\sqrt{x}}\cdot 2^{\log_2 y}=(2^2)^{\log_2\sqrt{x}}\cdot 2^{\log_2 y}=2^{2\log_2\sqrt{x}}\cdot 2^{\log_2 y}=2^{\log_2(\sqrt{x})^2}\cdot 2^{\log_2 y}=2^{\log_2 x}\cdot 2^{\log_2 y}=2^{\log_2 x+\log_2 y}=2^1=2$$

답 ①

30 $\log_b a:\log_b c=1:3$에서

$3\log_b a=\log_b c$

$\log_b a^3=\log_b c$ $\therefore c=a^3$

$$\therefore \log_a c+\log_c a=\log_a a^3+\log_{a^3}a=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$$

답 $\frac{10}{3}$

31 $a^2b=1$의 양변에 a를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_a a^2b=\log_a 1$, $\log_a a^2+\log_a b=0$

$2+\log_a b=0$ $\therefore \log_a b=-2$

$$\therefore \log_a ab^2=\log_a a+\log_a b^2=1+2\log_a b=1+2\cdot(-2)=-3$$

답 -3

다른 풀이 $a^2b=1$에서 $b=a^{-2}$

$\therefore b^2=(a^{-2})^2=a^{-4}$

$\therefore \log_a ab^2=\log_a(a\cdot a^{-4})=\log_a a^{-3}=-3$

32 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$

(1) $\log_3 \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\log_3 \dfrac{1}{3}=\log_3 3^{-1}=-1$

(2) $\log_3 (\alpha^{-1}+\beta^{-1})=\log_3\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)$

$=\log_3 \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$=\log_3 3$

$=1$

(3) $\log_3 (\alpha^2+\beta^2)=\log_3 \{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$

$=\log_3 (3^2-2\cdot 1)$

$=\log_3 7$

답 (1) -1 (2) 1 (3) $\log_3 7$

베쎈 TIP

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

33 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=12,\ \alpha\beta=4$

$\therefore \log_{\alpha+\beta} 3\alpha+\log_{\alpha+\beta}\beta=\log_{\alpha+\beta} 3\alpha\beta$

$=\log_{12}(3\cdot 4)$

$=\log_{12} 12$

$=1$

답 ②

34 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_5 a+\log_5 b=3,\quad \log_5 ab=3$

$\therefore ab=5^3=125$

답 125

35 (1) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 a+\log_2 b=-5,\ \log_2 a\cdot\log_2 b=1$

$\therefore \log_a b+\log_b a$

$=\dfrac{\log_2 b}{\log_2 a}+\dfrac{\log_2 a}{\log_2 b}$

$=\dfrac{(\log_2 a)^2+(\log_2 b)^2}{\log_2 a\cdot\log_2 b}$

$=\dfrac{(\log_2 a+\log_2 b)^2-2\cdot\log_2 a\cdot\log_2 b}{\log_2 a\cdot\log_2 b}$

$=\dfrac{(-5)^2-2\cdot 1}{1}$

$=23$

(2) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 a+\log_2 b=6,\ \log_2 a\cdot\log_2 b=4$

$\therefore \log_a b+\log_b a$

$=\dfrac{\log_2 b}{\log_2 a}+\dfrac{\log_2 a}{\log_2 b}$

$=\dfrac{(\log_2 a)^2+(\log_2 b)^2}{\log_2 a\cdot\log_2 b}$

$=\dfrac{(\log_2 a+\log_2 b)^2-2\cdot\log_2 a\cdot\log_2 b}{\log_2 a\cdot\log_2 b}$

$=\dfrac{6^2-2\cdot 4}{4}$

$=7$

(3) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 a+\log_2 b=4,\ \log_2 a\cdot\log_2 b=-2$

$\therefore \log_a b+\log_b a$

$=\dfrac{\log_2 b}{\log_2 a}+\dfrac{\log_2 a}{\log_2 b}$

$=\dfrac{(\log_2 a)^2+(\log_2 b)^2}{\log_2 a\cdot\log_2 b}$

$=\dfrac{(\log_2 a+\log_2 b)^2-2\cdot\log_2 a\cdot\log_2 b}{\log_2 a\cdot\log_2 b}$

$=\dfrac{4^2-2\cdot(-2)}{-2}=-10$

답 (1) 23 (2) 7 (3) -10

36 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+\log_2 7=-a,\ 1\cdot\log_2 7=b$

$\therefore a=-(1+\log_2 7)=-(\log_2 2+\log_2 7)$

$=-\log_2 14$

$b=\log_2 7$

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{\log_2 7}{-\log_2 14}=-\log_{14} 7$

답 ①

04 상용로그

개념 14 상용로그

본책 40쪽

베이직쎈 BOX

n이 실수일 때, $\log 10^n=n$

$100\sqrt{10}=10^2\cdot 10^{\frac{1}{2}}=10^{\frac{5}{2}}$

01 $\log 1000=\log 10^3=3$ 답 3

02 $\log \dfrac{1}{10}=\log 10^{-1}=-1$ 답 -1

03 $\log 0.0001=\log 10^{-4}=-4$ 답 -4

04 $\log \sqrt[5]{10}=\log 10^{\frac{1}{5}}=\dfrac{1}{5}$ 답 $\dfrac{1}{5}$

05 $\log \sqrt[6]{10^5}=\log 10^{\frac{5}{6}}=\dfrac{5}{6}$ 답 $\dfrac{5}{6}$

06 $\log \dfrac{1}{\sqrt[4]{10}}=\log 10^{-\frac{1}{4}}=-\dfrac{1}{4}$ 답 $-\dfrac{1}{4}$

07 $\log 100\sqrt{10}=\log 10^{\frac{5}{2}}=\dfrac{5}{2}$ 답 $\dfrac{5}{2}$

08 $\log 10+\log 10000=\log 10+\log 10^4=1+4=5$

답 5

09 $\log 100000+\log \dfrac{1}{100}=\log 10^5+\log 10^{-2}$

$=5+(-2)=3$ 답 3

10 $\log 300-\log 3=\log \dfrac{300}{3}=\log 100$

$=\log 10^2=2$ 답 2

베이직쎈 BOX

11 $\log\sqrt{1000}-\log 0.1=\log 10^{\frac{3}{2}}-\log 10^{-1}$

$=\frac{3}{2}-(-1)=\frac{5}{2}$ 　답 $\frac{5}{2}$

12 $\log\sqrt{10}+\log\sqrt[3]{10^2}=\log 10^{\frac{1}{2}}+\log 10^{\frac{2}{3}}$

$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$ 　답 $\frac{7}{6}$

13 $\log\sqrt[4]{10^3}-\log\frac{1}{\sqrt[3]{10}}=\log 10^{\frac{3}{4}}-\log 10^{-\frac{1}{3}}$

$=\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{3}\right)$

$=\frac{13}{12}$ 　답 $\frac{13}{12}$

14 $\log 10\sqrt{10}+\log\sqrt[3]{\frac{1}{100}}=\log 10^{\frac{3}{2}}+\log 10^{-\frac{2}{3}}$

$10\sqrt{10}=10\cdot 10^{\frac{1}{2}}=10^{\frac{3}{2}}$

$=\frac{3}{2}+\left(-\frac{2}{3}\right)$

$=\frac{5}{6}$ 　답 $\frac{5}{6}$

개념 15 상용로그표

본책 41쪽

15 답 0.5832

16 답 0.5922

17 답 0.6042

18 답 10, 10, 1, 1.7505

베쎈 TIP

$\log a=k$임을 이용하여 상용로그의 값을 구할 때

→ 진수를 $a\times 10^n$ ($1\le a<10$, n은 정수) 꼴로 변형

→ $\log(a\times 10^n)=\log a+\log 10^n=k+n$

19 $\log 5630=\log(5.63\times 10^3)$

$=\log 5.63+\log 10^3$

$=0.7505+3$

$=3.7505$ 　답 3.7505

20 $\log 0.563=\log(5.63\times 10^{-1})$

$=\log 5.63+\log 10^{-1}$

$=0.7505-1$

$=-0.2495$ 　답 -0.2495

21 $\log 0.00563=\log(5.63\times 10^{-3})$

$=\log 5.63+\log 10^{-3}$

$=0.7505-3$

$=-2.2495$ 　답 -2.2495

22 $\log 626=\log(6.26\times 10^2)$

$=\log 6.26+\log 10^2$

$=0.7966+2$

$=2.7966$ 　답 2.7966

23 $\log 6570=\log(6.57\times 10^3)$

$=\log 6.57+\log 10^3$

$=0.8176+3$

$=3.8176$ 　답 3.8176

24 $\log 0.634=\log(6.34\times 10^{-1})$

$=\log 6.34+\log 10^{-1}$

$=0.8021-1$

$=-0.1979$ 　답 -0.1979

25 $\log 0.0645=\log(6.45\times 10^{-2})$

$=\log 6.45+\log 10^{-2}$

$=0.8096-2$

$=-1.1904$ 　답 -1.1904

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 42쪽

01 $\log 54+\log 5=\log(2\cdot 3^3\cdot 5)$

$=\log(3^3\cdot 10)$

$=3\log 3+1$

$\log 10=\log_{10}10=1$

$=3\times 0.4771+1$

$=2.4313$ 　답 2.4313

02 ㄱ. $\log 4=\log 2^2=2\log 2=2\times 0.3010=0.6020$

ㄴ. $\log\frac{1}{8}=\log 2^{-3}=-3\log 2$

$=-3\times 0.3010=-0.9030$

ㄷ. $\log 0.2=\log\frac{2}{10}=\log 2-1$

$=0.3010-1=-0.6990$

ㄹ. $\log 80=\log(8\times 10)=\log 2^3+1$

$=3\log 2+1=3\times 0.3010+1$

$=1.9030$

ㅁ. $\log 5=\log\frac{10}{2}=1-\log 2$

$=1-0.3010=0.6990$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 　답 ②

03 상용로그표에서 $\log 7.21=0.8579$이므로

$\log 72.1^3=3\log(7.21\times 10)$

$=3(\log 7.21+1)$

$=3(0.8579+1)$

$=5.5737$ 　답 5.5737

04 $\log\frac{9}{5}=\log\frac{3^2}{5}$

$=\log 3^2-\log 5$

$=2\log 3-\log\frac{10}{2}$

$=2\log 3-(1-\log 2)$

$=a+2b-1$ 　답 ③

05 $\log x^2=0.8$에서 $\quad 2\log x=0.8$

$\therefore \log x=0.4$

$$\begin{aligned}\therefore \log\sqrt{x}+\log x^4&=\log x^{\frac{1}{2}}+\log x^4\\&=\frac{1}{2}\log x+4\log x\\&=\frac{9}{2}\log x\\&=\frac{9}{2}\times0.4\\&=1.8\end{aligned}$$

답 ④

06 $\log a=2.9165=2+0.9165$

$=\log 10^2+\log 8.25$

$=\log(10^2\times8.25)$

$=\log 825$

$\therefore a=825$

$\log b=-0.0835=-1+0.9165$

$=\log 10^{-1}+\log 8.25$

$=\log(10^{-1}\times8.25)$

$=\log 0.825$

$\therefore b=0.825$

답 $a=825$, $b=0.825$

07 $H=40$을 $M=\log H+6.5$에 대입하면

$M=\log 40+6.5$

$=\log(4\times10)+6.5$

$=\log 4+1+6.5$

$=0.6+1+6.5=8.1$

따라서 구하는 지진의 규모는 8.1이다.

답 ①

08 원본 사진 A를 압축했을 때, 최대 신호 대 잡음비가 P_A, 평균 제곱오차가 E_A이므로

$P_A=20\log 255-10\log E_A$

원본 사진 B를 압축했을 때, 최대 신호 대 잡음비가 P_B, 평균 제곱오차가 E_B이므로

$P_B=20\log 255-10\log E_B$

이때 $E_B=1000E_A$이므로

$$\begin{aligned}P_A-P_B&=(20\log 255-10\log E_A)\\&\quad-(20\log 255-10\log E_B)\\&=10(\log E_B-\log E_A)\\&=10\log\frac{E_B}{E_A}=10\log\frac{1000E_A}{E_A}\\&=10\log 1000=30\end{aligned}$$

답 30

09 2등급인 별의 밝기를 I_1이라 하면

$2=-\frac{5}{2}\log I_1+C$ ...... ㉠

12등급인 별의 밝기를 I_2라 하면

$12=-\frac{5}{2}\log I_2+C$ ...... ㉡

㉠-㉡을 하면

$-10=-\frac{5}{2}(\log I_1-\log I_2)$

$-10=-\frac{5}{2}\log\frac{I_1}{I_2}$

$\log\frac{I_1}{I_2}=4 \qquad \therefore \frac{I_1}{I_2}=10^4=10000$

따라서 2등급인 별의 밝기는 12등급인 별의 밝기의 10000배이다.

답 10000배

베이직쎈 BOX

$\frac{I_1}{I_2}=10000$에서

$I_1=10000I_2$

이므로 2등급인 별의 밝기는 12등급인 별의 밝기의 10000배이다.

10 (1) 이 공장의 첫해 생산량이 A, 생산량이 매년 증가하는 비율이 a %이므로 1년, 2년, ⋯, 5년 후 생산량은 각각

$A\left(1+\frac{\boxed{a}}{100}\right)$, $A\left(1+\frac{\boxed{a}}{100}\right)^{\boxed{2}}$, $A\left(1+\frac{\boxed{a}}{100}\right)^{\boxed{3}}$,

$A\left(1+\frac{\boxed{a}}{100}\right)^{\boxed{4}}$, $A\left(1+\frac{\boxed{a}}{100}\right)^{\boxed{5}}$

(3) $A\left(1+\frac{a}{100}\right)^5=2A$에서 $\quad \left(1+\frac{a}{100}\right)^5=2$

양변에 상용로그를 취하면

$5\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\log 2$

$\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\frac{1}{5}\log 2=\frac{1}{5}\times0.3=0.06$

이때 $\log 1.15=0.06$이므로

$1+\frac{a}{100}=1.15 \qquad \therefore a=15$

따라서 생산량은 매년 15 %씩 증가하였다.

답 (1) a, a, 2, a, 3, a, 4, a, 5

(2) $A\left(1+\frac{a}{100}\right)^5=2A$

(3) 15 %

베이직쎈 BOX

$1+\frac{a}{100}=1.15$에서

$\frac{a}{100}=0.15$

$\therefore a=15$

11 올해 매출액을 A, 매출액의 증가율을 a %라 하면

$A\left(1+\frac{a}{100}\right)^{12}=3A$

$\therefore \left(1+\frac{a}{100}\right)^{12}=3$

양변에 상용로그를 취하면

$12\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\log 3$

$\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\frac{1}{12}\log 3=\frac{1}{12}\times0.48=0.04$

이때 $\log 1.1=0.04$이므로

$1+\frac{a}{100}=1.1 \qquad \therefore a=10$

따라서 매출액을 매년 10 %씩 증가시켜야 한다.

답 10 %

베이직쎈 BOX

$1+\frac{a}{100}=1.1$에서

$\frac{a}{100}=0.1$

$\therefore a=10$

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 44쪽

01 전략 로그의 정의와 $\log_a b^m=m\log_a b$임을 이용한다.

풀이 $\log_3 a=\frac{1}{2}$에서 $\quad a=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

$b=\log_2 32=\log_2 2^5=5\log_2 2=5$

$\therefore a^b=(\sqrt{3})^5=9\sqrt{3}$

답 ⑤

베이직쎈 BOX

02 전략 (밑)>0, (밑)$\neq 1$, (진수)>0임을 이용한다.

풀이 (i) $\log_{x-3}(x-4)^2$이 정의되려면 진수의 조건에서 $(x-4)^2>0$이어야 하므로

$x\neq 4$ …… ㉠

밑의 조건에서 $x-3>0$, $x-3\neq 1$

$x>3$, $x\neq 4$

$\therefore 3<x<4$ 또는 $x>4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$3<x<4$ 또는 $x>4$

(ii) $\log_{9-x}|9-x|$가 정의되려면 진수의 조건에서 $|9-x|>0$이어야 하므로 $x\neq 9$ …… ㉢

밑의 조건에서 $9-x>0$, $9-x\neq 1$

$x<9$, $x\neq 8$

$\therefore x<8$ 또는 $8<x<9$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$x<8$ 또는 $8<x<9$

(i), (ii)에서

$3<x<4$ 또는 $4<x<8$ 또는 $8<x<9$

따라서 정수 x는 5, 6, 7이므로 구하는 합은

$5+6+7=18$ 답 ④

03 전략 $\log_a M+\log_a N=\log_a MN$, $\log_a M-\log_a N=\log_a \frac{M}{N}$임을 이용한다.

풀이 $\log_3 15+\log_3 \frac{1}{10}-\log_3 \frac{1}{18}=\log_3\left(15\cdot\frac{1}{10}\cdot 18\right)$

$=\log_3 27$

$=\log_3 3^3$

$=3$ 답 ②

04 전략 $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 $(\log_2 3+\log_4 27)(\log_3 8-\log_9 32)$

$=(\log_2 3+\log_{2^2} 3^3)(\log_3 2^3-\log_{3^2} 2^5)$

$=\left(\log_2 3+\frac{3}{2}\log_2 3\right)\left(3\log_3 2-\frac{5}{2}\log_3 2\right)$

$=\frac{5}{2}\log_2 3\cdot\frac{1}{2}\log_3 2$

$=\frac{5}{4}$ 답 ⑤

05 전략 x, y를 로그로 나타낸 후 주어진 식에 대입한다.

풀이 $98^x=2^y=7$에서 $x=\log_{98} 7$, $y=\log_2 7$

$\therefore \frac{y-x}{xy}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$

$=\frac{1}{\log_{98} 7}-\frac{1}{\log_2 7}$

$=\log_7 98-\log_7 2$

$=\log_7 \frac{98}{2}$

$=\log_7 49$

$=\log_7 7^2$

$=2$ 답 ②

$\cancel{2}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\cdots\cdot\frac{100}{\cancel{99}}$
$=100$

수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

06 전략 주어진 식을 변형하여 x, y에 대한 관계식을 얻는다.

풀이 $\log_2(x+y)=3$에서 $x+y=2^3=8$

$\log_2 x+\log_2 y=2$에서 $\log_2 xy=2$

$\therefore xy=2^2=4$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=8^2-2\cdot 4=56$ 답 ③

07 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=13$, $\alpha\beta=2$

$\therefore \log_{\alpha\beta}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$

$=\log_{\alpha\beta}\left(1+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$

$=\log_{\alpha\beta}\left(1+\frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$

$=\log_2\left(1+\frac{1+13}{2}\right)$

$=\log_2 8=\log_2 2^3=3$ 답 ①

08 전략 $\log M+\log N=\log MN$임을 이용한다.

풀이 $\log\left(1+\frac{1}{1}\right)+\log\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{1}{99}\right)$

$=\log 2+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\cdots+\log\frac{100}{99}$

$=\log\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{100}{99}\right)$

$=\log 100=\log 10^2=2$ 답 ②

09 전략 주어진 조건을 식에 대입한다.

풀이 $I=40$, $S=0.4$를 $S=k\log I$에 대입하면

$0.4=k\log 40$

$\therefore k=\frac{0.4}{\log 40}=\frac{0.4}{\log(2^2\times 10)}$

$=\frac{0.4}{2\log 2+1}=\frac{0.4}{2\times 0.3+1}$

$=\frac{0.4}{1.6}=\frac{1}{4}$

따라서 $I=4$일 때의 감각의 세기는

$\frac{1}{4}\log 4=\frac{1}{4}\log 2^2=\frac{1}{2}\log 2$

$=\frac{1}{2}\times 0.3=0.15$ 답 ③

10 전략 두 직선의 수직 조건과 로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

풀이 직선 AB는 직선 $y=-x+2$에 수직이므로 직선 AB의 기울기는 1이다. 즉

$\frac{\log_3 b-\log_3 a}{1-(-3)}=1$, $\log_3 b-\log_3 a=4$

$\log_3\frac{b}{a}=4$ $\therefore \frac{b}{a}=3^4=81$ 답 81

11 전략 $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$임을 이용한다.

풀이 $\log_{25}2+\log_{25}3=\log_{25}(2\cdot3)=\log_{5^2}6=\frac{1}{2}\log_5 6$,

$\log_2 3+\log_2 7=\log_2(3\cdot7)=\log_2 21$이므로

$$\begin{aligned}&(5^{\log_{25}2+\log_{25}3})^2-(2^{\log_2 3+\log_2 7})^{\log_{21}2}\\&=(5^{\frac{1}{2}\log_5 6})^2-(2^{\log_2 21})^{\log_{21}2}\\&=5^{\log_5 6}-2^{\log_2 21\cdot\log_{21}2}\\&=6^{\log_5 5}-2^{\log_2 21\cdot\log_{21}2}\\&=6-2=4\end{aligned}$$

답 4

12 전략 먼저 주어진 식을 이용하여 $\log_3 2$와 $\log_3 5$를 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\log_3 10=a$에서 $\log_3(2\cdot5)=a$

$\log_3 2+\log_3 5=a$ ...... ㉠

$\log_3\frac{2}{5}=b$에서

$\log_3 2-\log_3 5=b$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면 $2\log_3 2=a+b$

$\therefore \log_3 2=\frac{a+b}{2}$ ··· ❶

㉠−㉡을 하면 $2\log_3 5=a-b$

$\therefore \log_3 5=\frac{a-b}{2}$ ··· ❷

$$\begin{aligned}\therefore \log_3 20&=\log_3(2^2\cdot5)\\&=2\log_3 2+\log_3 5\\&=2\cdot\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\\&=\frac{3a+b}{2}\end{aligned}$$ ··· ❸

답 $\frac{3a+b}{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	$\log_3 2$를 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷	$\log_3 5$를 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸	$\log_3 20$을 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%

베이직쎈 BOX

$$\begin{array}{rl}&\log_3 2+\cancel{\log_3 5}=a\\+)&\log_3 2-\cancel{\log_3 5}=b\\\hline&2\log_3 2\qquad=a+b\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}&\cancel{\log_3 2}+\log_3 5=a\\-)&\cancel{\log_3 2}-\log_3 5=b\\\hline&2\log_3 5=a-b\end{array}$$

13 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_5 a+\log_5 b=15$, $\log_5 a\cdot\log_5 b=-5$

$$\begin{aligned}&\therefore \log_a b+\log_b a\\&=\frac{\log_5 b}{\log_5 a}+\frac{\log_5 a}{\log_5 b}\\&=\frac{(\log_5 a)^2+(\log_5 b)^2}{\log_5 a\cdot\log_5 b}\\&=\frac{(\log_5 a+\log_5 b)^2-2\cdot\log_5 a\cdot\log_5 b}{\log_5 a\cdot\log_5 b}\\&=\frac{15^2-2\cdot(-5)}{-5}\\&=-47\end{aligned}$$

답 -47

14 전략 로그의 정의를 이용하여 10^a의 값을 구한 후 $10^{-a}=\frac{1}{10^a}$임을 이용한다.

풀이 $a=\log(\sqrt{2}+\sqrt{3})$에서 $10^a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$이므로

$$\begin{aligned}10^{-a}&=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\\&=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}\\&=\sqrt{3}-\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{10^a+10^{-a}}{10^a-10^{-a}}&=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})}\\&=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

베이직쎈 BOX

$a>0$, $b>0$이고 a, b는 유리수, c는 실수일 때

$\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$ (단, $a\neq b$)

15 전략 양수 A에 대하여 $\log A=k$일 때, $\log(10^n\times A)=n+k$임을 이용한다. (단, n은 실수)

풀이 $a=\log 1240=\log(1.24\times10^3)$

$=\log 1.24+3=0.0934+3$

$=3.0934$ ··· ❶

$\log b=-1.9066=-2+0.0934$

$=\log 10^{-2}+\log 1.24$

$=\log(10^{-2}\times1.24)$

$=\log 0.0124$

$\therefore b=0.0124$ ··· ❷

$\therefore a+b=3.1058$ ··· ❸

답 3.1058

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷	b의 값을 구할 수 있다.	50%
❸	$a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

Ⅱ. 지수함수와 로그함수

03 지수함수

05 지수함수

개념 16 지수함수

본책 48쪽

01 답 ○

02 답 ×

03 답 ○

04 답 ○

05 답 ○

06 답 ×

07 답 ○

베이직쎈 BOX: $y=\frac{1}{9^x}=\left(\frac{1}{9}\right)^x$

08 $f(-3)=3^{-3}=\frac{1}{27}$ 답 $\frac{1}{27}$

09 $f\left(\frac{1}{2}\right)=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ 답 $\sqrt{3}$

10 $f(1)f(3)=3^1\cdot3^3=3^4=81$ 답 81

11 $\frac{f(4)}{f(-1)}=\frac{3^4}{3^{-1}}=3^5=243$ 답 243

12 $f(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$ 답 1

13 $f(4)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$ 답 $\frac{1}{16}$

14 $f(-2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$ 답 4

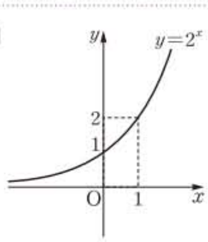
15 $f(2)f(-5)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$ 답 8

개념 17 지수함수의 그래프와 성질

본책 49쪽

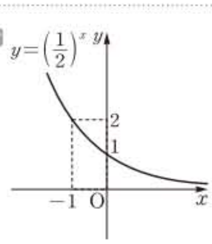
$a^0=1$, $a^1=a$이므로 지수함수 $y=a^x(a>0,\ a\neq1)$의 그래프는 항상 점 $(0,\ 1)$과 점 $(1,\ a)$를 지난다.

16 답

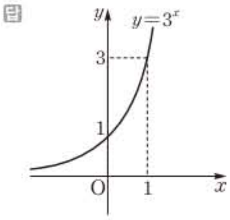


$y=2^x$의 그래프와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

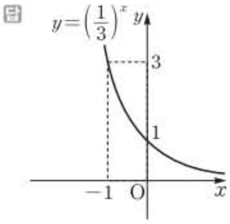
17 답



18 답



19 답



20 답 ○

21 치역은 $\{y\,|\,y$는 양의 실수$\}$이다. 답 ×

22 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. 답 ×

23 답 ○

24 $y=4^x$에 $x=1$을 대입하면 $y=4$
따라서 그래프는 점 $(1,\ 4)$를 지난다. 답 ○

25 그래프의 점근선은 x축이다. 답 ×

26 답 ○

27 답 ○

28 그래프는 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이다. 답 ×

29 정의역은 실수 전체의 집합이다. 답 ×

30 치역은 양의 실수 전체의 집합이다. 답 ×

31 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. 답 ×

32 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$에 $x=1$을 대입하면 $y=\frac{1}{5}$
따라서 그래프는 점 $\left(1,\ \frac{1}{5}\right)$을 지난다. 답 ×

33 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$에 $x=-2$를 대입하면 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}=25$
따라서 그래프는 점 $(-2,\ 25)$를 지난다. 답 ○

34 답 ○

03 지수함수

35 그래프는 제1사분면과 제2사분면을 지난다. 답 ×

36 답 ○ **37** 답 ○

38 그래프가 점 $(2,\ a)$를 지나므로

$a=3^2=9$

또 점 $(b,\ 81)$을 지나므로 $81=3^b$에서

$3^b=3^4 \quad \therefore b=4$ 답 $a=9,\ b=4$

39 그래프가 점 $(-1,\ a)$를 지나므로

$a=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$

또 점 $(b,\ 64)$를 지나므로 $64=\left(\frac{1}{2}\right)^b$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^b=\left(\frac{1}{2}\right)^{-6} \quad \therefore b=-6$

답 $a=2,\ b=-6$

개념 18 지수함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

본책 51쪽

40 $y-3=2^{x-1}$에서

$y=2^{x-1}+3$ 답 $y=2^{x-1}+3$

41 $y-(-1)=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-5}$에서

$y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-5}-1$ 답 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-5}-1$

42 $y-(-2)=-5^{x-(-3)}$에서

$y=-5^{x+3}-2$ 답 $y=-5^{x+3}-2$

43 $-y=3^x$에서 $y=-3^x$ 답 $y=-3^x$

44 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$에서 $y=(2^{-1})^{-x}$

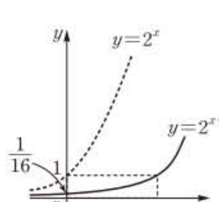
$\therefore y=2^x$ 답 $y=2^x$

45 $-y=\left(\frac{1}{6}\right)^{-x}$에서 $-y=(6^{-1})^{-x}$

$\therefore y=-6^x$ 답 $y=-6^x$

46 $y=2^{x-4}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



베이직쎈 BOX

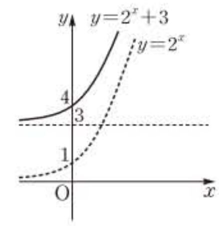
방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 도형의 방정식은
$f(x-m,\ y-n)=0$

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은
① x축: $f(x,\ -y)=0$
② y축: $f(-x,\ y)=0$
③ 원점
: $f(-x,\ -y)=0$

함수 $y=a^{x-m}+n$
$(a>0,\ a\neq1)$에서
① 치역: $\{y|y>n\}$
② 점근선의 방정식
: $y=n$

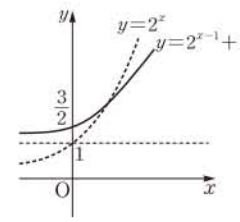
47 $y=2^x+3$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



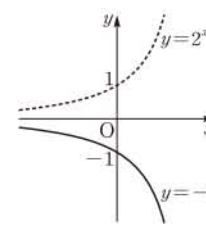
48 $y=2^{x-1}+1$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



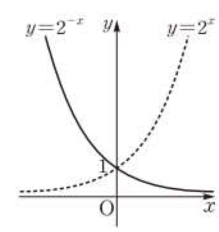
49 $y=-2^x$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



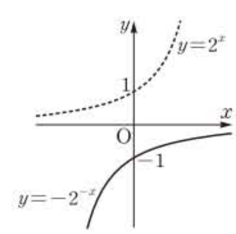
50 $y=2^{-x}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



51 $y=-2^{-x}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

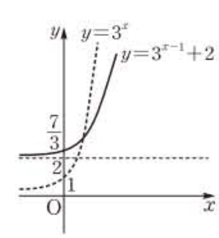
답 풀이 참조



52 $y=3^{x-1}+2$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

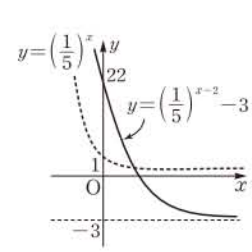
따라서 치역은 $\{y|y>2\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=2$이다.

답 풀이 참조



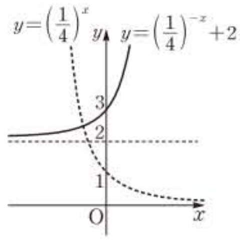
53 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}-3$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 치역은 $\{y|y>-3\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=-3$이다. 답 풀이 참조



베이직쎈 BOX

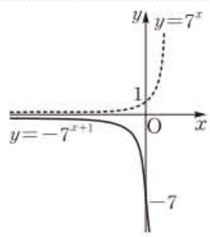
54 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}+2$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 치역은 $\{y|y>2\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=2$이다.



답 풀이 참조

$y=\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$

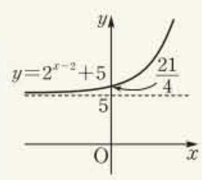
55 $y=-7^{x+1}$의 그래프는 $y=7^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 치역은 $\{y|y<0\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=0$이다.



답 풀이 참조

$y=-7^x$

56 답 ○ **57** 답 ○

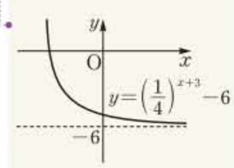


58 치역은 $\{y|y>5\}$이다. 답 ×

59 답 ○

주어진 함수를 $y=a^x$ 꼴로 변형한 후 $0<a<1$인 함수를 찾는다.

60 함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 것이다. 답 ×



61 제1사분면을 지나지 않는다. 답 ×

62 답 ○ **63** 답 ○

64 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=3^{x-5}-4$
이 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$-y=3^{x-5}-4$ $\therefore y=-3^{x-5}+4$
답 $y=-3^{x-5}+4$

65 $y=\left(\frac{1}{8}\right)^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\left(\frac{1}{8}\right)^{x+2}+1$
이 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$y=\left(\frac{1}{8}\right)^{-x+2}+1$ $\therefore y=8^{x-2}+1$
답 $y=8^{x-2}+1$

$y=(8^{-1})^{-x+2}+1$
$=8^{x-2}+1$

66 $y=6^x$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=6^{x-3}-2$
이 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$-y=6^{-x-3}-2$, $-y=\left(\frac{1}{6}\right)^{x+3}-2$
$\therefore y=-\left(\frac{1}{6}\right)^{x+3}+2$ 답 $y=-\left(\frac{1}{6}\right)^{x+3}+2$

$-y=(6^{-1})^{x+3}-2$
$=\left(\frac{1}{6}\right)^{x+3}-2$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 53쪽

01 ③ $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}=4^{-x}$이므로 그래프는 $y=4^x$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이다. 답 ③

02 ㄱ. $a>0$일 때, a^x은 항상 양수이므로 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.
ㄴ. $f(-1)=a^{-1}=\frac{1}{a}$이므로 그래프는 점 $\left(-1,\ \frac{1}{a}\right)$을 지난다.
ㄷ. 함수 $f(x)$는 $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

03 주어진 조건을 만족시키는 함수는 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하는 함수이다. 이때
$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=2^x$, $f(x)=\left(\frac{4}{3}\right)^{-x}=\left(\frac{3}{4}\right)^{x}$
이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ⑤이다.
답 ⑤

04 그래프가 점 $(-2,\ a)$를 지나므로
$a=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$
또 점 $(b,\ 243)$을 지나므로 $243=\left(\frac{1}{3}\right)^{b}$에서
$\left(\frac{1}{3}\right)^{b}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-5}$ $\therefore b=-5$
$\therefore a-b=14$ 답 14

05 그래프가 두 점 $(a,\ p)$, $(b,\ q)$를 지나므로
$p=5^a$, $q=5^b$
이때 $pq=125$이므로 $5^a\cdot 5^b=125$
$5^{a+b}=5^3$ $\therefore a+b=3$ 답 3

직선 $y=x$ 위의 점의 x좌표와 y좌표가 같음을 이용한다.

06 $y=2^x$의 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $a=1$
$2^a=b$이므로 $b=2$
$2^b=c$이므로 $c=2^2=4$
$\therefore a+b-c=-1$ 답 ②

07 $y=\frac{1}{8}\cdot 2^x+9=2^{x-3}+9$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 9만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $m=3$, $n=9$이므로
$m+n=12$ 답 ⑤

03 지수함수

08 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 -16만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=a^{x+5}-16$

이 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=a^{-x+5}-16 \qquad \therefore y=-a^{-x+5}+16$

이 함수의 그래프가 점 $(3, 0)$을 지나므로

$0=-a^{-3+5}+16, \qquad a^2=16$

$\therefore a=4\ (\because a>1)$ 답 4

09 ㄱ. $y=27\cdot 3^x=3^{x+3}$이므로 $y=27\cdot 3^x$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\frac{3^x}{9}=3^{x-2}$이므로 $y=\frac{3^x}{9}$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x=3^{-2x}$

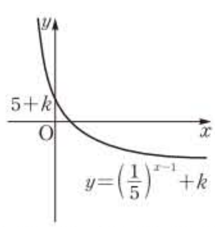
ㄹ. $y=3^{-x}+5$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

ㅂ. $y=\sqrt{3^x}=3^{\frac{x}{2}}$

이상에서 $y=3^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

10 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}+k$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면



$5+k\ge 0 \qquad \therefore k\ge -5$

따라서 k의 최솟값은 -5이다.

답 -5

$x=0$일 때의 함숫값

11 주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $y=-9$이므로

$b=-9$

그래프가 원점을 지나므로

$0=\left(\frac{1}{3}\right)^{-a}-9, \qquad 3^a=9$

$3^a=3^2 \qquad \therefore a=2$

$\therefore b-a=-11$ 답 ③

베이직쎈 BOX

함수 $y=a^{x-m}+n$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프의 점근선의 방정식 ➡ $y=n$

06 지수함수의 최대·최소

개념 19 지수함수를 이용한 수의 대소 비교

본책 55쪽

01 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-5}$에서 $-3>-5$이고, 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-5}$ 답 <

02 답 < 　 2, 14, 3, 15, <, <

03 $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{5^2}$을 밑이 5인 거듭제곱의 꼴로 나타내면

$\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{5^2}=5^{\frac{2}{3}}$

이때 $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$이고 함수 $y=5^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$5^{\frac{1}{2}}<5^{\frac{2}{3}} \qquad \therefore \sqrt{5}<\sqrt[3]{5^2}$ 답 <

04 $32^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[5]{64}$를 밑이 2인 거듭제곱의 꼴로 나타내면

$32^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{5}{3}}$, $\sqrt[5]{64}=2^{\frac{6}{5}}$

$32^{\frac{1}{3}}=(2^5)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{5}{3}}$, $\sqrt[5]{64}=\sqrt[5]{2^6}=2^{\frac{6}{5}}$

이때 $\frac{5}{3}>\frac{6}{5}$이고 함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$2^{\frac{5}{3}}>2^{\frac{6}{5}} \qquad \therefore 32^{\frac{1}{3}}>\sqrt[5]{64}$ 답 >

05 $\sqrt[3]{0.09}$, $\sqrt[4]{0.027}$을 밑이 0.3인 거듭제곱의 꼴로 나타내면

$\sqrt[3]{0.09}=0.3^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[4]{0.027}=0.3^{\frac{3}{4}}$

$\sqrt[3]{0.09}=\sqrt[3]{0.3^2}=0.3^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[4]{0.027}=\sqrt[4]{0.3^3}=0.3^{\frac{3}{4}}$

이때 $\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$이고 함수 $y=0.3^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$0.3^{\frac{2}{3}}>0.3^{\frac{3}{4}} \qquad \therefore \sqrt[3]{0.09}>\sqrt[4]{0.027}$ 답 >

06 $4^{\frac{1}{3}}$, $16^{\frac{1}{2}}$, $64^{\frac{1}{4}}$을 밑이 4인 거듭제곱의 꼴로 나타내면

$4^{\frac{1}{3}}$, $16^{\frac{1}{2}}=4$, $64^{\frac{1}{4}}=4^{\frac{3}{4}}$

$16^{\frac{1}{2}}=(4^2)^{\frac{1}{2}}=4$, $64^{\frac{1}{4}}=(4^3)^{\frac{1}{4}}=4^{\frac{3}{4}}$

이때 $\frac{1}{3}<\frac{3}{4}<1$이고 함수 $y=4^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$4^{\frac{1}{3}}<4^{\frac{3}{4}}<4 \qquad \therefore 4^{\frac{1}{3}}<64^{\frac{1}{4}}<16^{\frac{1}{2}}$

답 $4^{\frac{1}{3}}<64^{\frac{1}{4}}<16^{\frac{1}{2}}$

07 $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{27}}$, $\sqrt[5]{\frac{1}{81}}$을 밑이 $\frac{1}{3}$인 거듭제곱의 꼴로 나타내면

$\sqrt[3]{\frac{1}{9}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{27}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$, $\sqrt[5]{\frac{1}{81}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{5}}$

$\sqrt[3]{\frac{1}{9}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{27}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$, $\sqrt[5]{\frac{1}{81}}=\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^4}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{5}}$

이때 $\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$이고 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{5}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$

$\therefore \sqrt[5]{\frac{1}{81}}<\sqrt[4]{\frac{1}{27}}<\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

답 $\sqrt[5]{\frac{1}{81}}<\sqrt[4]{\frac{1}{27}}<\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

08 $\sqrt{0.1}$, $\sqrt[3]{0.01}$, $\sqrt[5]{0.001}$을 밑이 0.1인 거듭제곱의 꼴로 나타내면

$\sqrt{0.1}=0.1^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{0.01}=0.1^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[5]{0.001}=0.1^{\frac{3}{5}}$

$\sqrt[3]{0.01}=\sqrt[3]{0.1^2}=0.1^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[5]{0.001}=\sqrt[5]{0.1^3}=0.1^{\frac{3}{5}}$

이때 $\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{2}{3}$이고 함수 $y=0.1^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $0.1^{\frac{2}{3}}<0.1^{\frac{3}{5}}<0.1^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \sqrt[3]{0.01}<\sqrt[5]{0.001}<\sqrt{0.1}$

답 $\sqrt[3]{0.01}<\sqrt[5]{0.001}<\sqrt{0.1}$

베이직쎈 BOX

09 $\sqrt[5]{4}$, $0.5^{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{2}$를 밑이 2인 거듭제곱의 꼴로 나타내면

$\sqrt[5]{4}=2^{\frac{2}{5}}$, $0.5^{\frac{3}{4}}=2^{-\frac{3}{4}}$, $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$

이때 $-\frac{3}{4}<\frac{2}{5}<\frac{1}{2}$이고 함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$2^{-\frac{3}{4}}<2^{\frac{2}{5}}<2^{\frac{1}{2}}$ $\quad\therefore 0.5^{\frac{3}{4}}<\sqrt[5]{4}<\sqrt{2}$

답 $0.5^{\frac{3}{4}}<\sqrt[5]{4}<\sqrt{2}$

$\sqrt[5]{4}=\sqrt[5]{2^2}=2^{\frac{2}{5}}$,
$0.5^{\frac{3}{4}}=(2^{-1})^{\frac{3}{4}}=2^{-\frac{3}{4}}$

10 $9^{\frac{2}{3}}$, $\frac{1}{27}$, $\sqrt[6]{243}$을 밑이 3인 거듭제곱의 꼴로 나타내면 $9^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{4}{3}}$, $\frac{1}{27}=3^{-3}$, $\sqrt[6]{243}=3^{\frac{5}{6}}$

이때 $-3<\frac{5}{6}<\frac{4}{3}$이고 함수 $y=3^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$3^{-3}<3^{\frac{5}{6}}<3^{\frac{4}{3}}$ $\quad\therefore \frac{1}{27}<\sqrt[6]{243}<9^{\frac{2}{3}}$

답 $\frac{1}{27}<\sqrt[6]{243}<9^{\frac{2}{3}}$

$9^{\frac{2}{3}}=(3^2)^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{4}{3}}$,
$\frac{1}{27}=27^{-1}=(3^3)^{-1}=3^{-3}$,
$\sqrt[6]{243}=\sqrt[6]{3^5}=3^{\frac{5}{6}}$

개념 20 지수함수의 최대·최소

본책 56쪽

11 함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $1\le x\le 4$에서

$x=4$일 때 최대이고, 최댓값은

$2^4=16$

$x=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$2^1=2$

답 최댓값: 16, 최솟값: 2

12 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $-1\le x\le 3$에서

$x=-1$일 때 최대이고, 최댓값은

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$

$x=3$일 때 최소이고, 최솟값은

$\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

답 최댓값: 3, 최솟값: $\frac{1}{27}$

13 함수 $y=5^{-x}=\left(\frac{1}{5}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $-3\le x\le 2$에서

$x=-3$일 때 최대이고, 최댓값은

$\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=5^3=125$

$x=2$일 때 최소이고, 최솟값은

$\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$

답 최댓값: 125, 최솟값: $\frac{1}{25}$

14 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x}=4^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $-1\le x\le 4$에서

$x=4$일 때 최대이고, 최댓값은

$4^4=256$

$x=-1$일 때 최소이고, 최솟값은

$4^{-1}=\frac{1}{4}$

답 최댓값: 256, 최솟값: $\frac{1}{4}$

15 함수 $y=4^{x-4}+1$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $3\le x\le 5$에서

$x=5$일 때 최대이고, 최댓값은

$4^{5-4}+1=4+1=5$

$x=3$일 때 최소이고, 최솟값은

$4^{3-4}+1=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$

답 최댓값: 5, 최솟값: $\frac{5}{4}$

16 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x+2}-3$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $-4\le x\le -1$에서

$x=-4$일 때 최대이고, 최댓값은

$\left(\frac{1}{5}\right)^{-4+2}-3=25-3=22$

$x=-1$일 때 최소이고, 최솟값은

$\left(\frac{1}{5}\right)^{-1+2}-3=\frac{1}{5}-3=-\frac{14}{5}$

답 최댓값: 22, 최솟값: $-\frac{14}{5}$

17 함수 $y=2^{-x}\cdot 3^x=\left(\frac{3}{2}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $-2\le x\le 3$에서

$2^{-x}\cdot 3^x=\left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot 3^x=\left(\frac{3}{2}\right)^x$

$x=3$일 때 최대이고, 최댓값은

$\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}$

$x=-2$일 때 최소이고, 최솟값은

$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}=\frac{4}{9}$

답 최댓값: $\frac{27}{8}$, 최솟값: $\frac{4}{9}$

18 함수 $y=3^x\cdot 7^{-x}=\left(\frac{3}{7}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $-1\le x\le 1$에서

$3^x\cdot 7^{-x}=3^x\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^x=\left(\frac{3}{7}\right)^x$

$x=-1$일 때 최대이고, 최댓값은

$\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}=\frac{7}{3}$

$x=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$\left(\frac{3}{7}\right)^1=\frac{3}{7}$

답 최댓값: $\frac{7}{3}$, 최솟값: $\frac{3}{7}$

19 함수 $y=3^{2x}\cdot 5^{-x}=\left(\frac{9}{5}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $0\le x\le 2$에서

$3^{2x}\cdot 5^{-x}=9^x\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x=\left(\frac{9}{5}\right)^x$

$x=2$일 때 최대이고, 최댓값은

$\left(\frac{9}{5}\right)^2=\frac{81}{25}$

$x=0$일 때 최소이고, 최솟값은

$\left(\frac{9}{5}\right)^0=1$

답 최댓값: $\frac{81}{25}$, 최솟값: 1

베이직쎈 BOX

20 함수 $y=4^{-x}\cdot3^x+2=\left(\frac{3}{4}\right)^x+2$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $-2\le x\le1$에서

$x=-2$일 때 최대이고, 최댓값은

$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}+2=\frac{16}{9}+2=\frac{34}{9}$

$x=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$\left(\frac{3}{4}\right)^1+2=\frac{11}{4}$ 답 최댓값: $\frac{34}{9}$, 최솟값: $\frac{11}{4}$

$4^{-x}\cdot3^x+2=\left(\frac{1}{4}\right)^x\cdot3^x+2$
$=\left(\frac{3}{4}\right)^x+2$

21 답 최댓값: 8, 최솟값: $\frac{1}{2}$

1, -1, -1, 3, 3, 8, -1, -1, $\frac{1}{2}$

베쎈TIP

$\alpha\le x\le\beta$에서 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은

① $\alpha\le p\le\beta$일 때

→ $f(p)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

② $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$일 때

→ $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

22 $f(x)=x^2-2x-3$으로 놓으면

$f(x)=(x-1)^2-4$

$f(-1)=0$, $f(1)=-4$, $f(3)=0$이므로 $-1\le x\le3$에서 $-4\le f(x)\le0$

따라서 $y=3^{x^2-2x-3}=3^{f(x)}$은

$f(x)=0$일 때 최대이고, 최댓값은

$3^0=1$

$f(x)=-4$일 때 최소이고, 최솟값은

$3^{-4}=\frac{1}{81}$ 답 최댓값: 1, 최솟값: $\frac{1}{81}$

함수 $y=3^{x^2-2x-3}$에서 밑이 3이고 $3>1$이므로 x^2-2x-3의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

23 $f(x)=x^2+4x-1$로 놓으면

$f(x)=(x+2)^2-5$

$f(-4)=-1$, $f(-2)=-5$, $f(1)=4$이므로

$-4\le x\le1$에서 $-5\le f(x)\le4$

따라서 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$은

$f(x)=-5$일 때 최대이고, 최댓값은

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=2^5=32$

$f(x)=4$일 때 최소이고, 최솟값은

$\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$ 답 최댓값: 32, 최솟값: $\frac{1}{16}$

함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x-1}$에서 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 x^2+4x-1의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

24 $f(x)=-x^2+6x-5$로 놓으면

$f(x)=-(x-3)^2+4$

$f(1)=0$, $f(3)=4$이므로 $1\le x\le3$에서

$0\le f(x)\le4$

따라서 $y=5^{-x^2+6x-5}=5^{f(x)}$은

$f(x)=4$일 때 최대이고, 최댓값은

$5^4=625$

$f(x)=0$일 때 최소이고, 최솟값은

$5^0=1$ 답 최댓값: 625, 최솟값: 1

함수 $y=5^{-x^2+6x-5}$에서 밑이 5이고 $5>1$이므로 $-x^2+6x-5$의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

25 $f(x)=-x^2+2x+1$로 놓으면

$f(x)=-(x-1)^2+2$

$f(-1)=-2$, $f(1)=2$, $f(2)=1$이므로

$-1\le x\le2$에서 $-2\le f(x)\le2$

따라서 $y=\left(\frac{3}{4}\right)^{-x^2+2x+1}=\left(\frac{3}{4}\right)^{f(x)}$은

$f(x)=-2$일 때 최대이고, 최댓값은

$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}=\frac{16}{9}$

$f(x)=2$일 때 최소이고, 최솟값은

$\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$ 답 최댓값: $\frac{16}{9}$, 최솟값: $\frac{9}{16}$

함수 $y=\left(\frac{3}{4}\right)^{-x^2+2x+1}$에서 밑이 $\frac{3}{4}$이고 $0<\frac{3}{4}<1$이므로 $-x^2+2x+1$의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

26 답 최댓값: 6, 최솟값: 2

2, 2, 3, 3, 2, 6, 2, 2

27 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$로 놓으면 주어진 함수는

$y=t^2-2t-4=(t-1)^2-5$

이때 $-3\le x\le1$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^1\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ $\therefore \frac{1}{2}\le t\le8$

따라서 $\frac{1}{2}\le t\le8$에서 함수 $y=(t-1)^2-5$는

$t=8$일 때 최대이고, 최댓값은

$(8-1)^2-5=44$

$t=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$(1-1)^2-5=-5$ 답 최댓값: 44, 최솟값: -5

28 $y=16^x-4^{x+1}=4^{2x}-4\cdot4^x$

$4^x=t$로 놓으면 주어진 함수는

$y=t^2-4t=(t-2)^2-4$

이때 $-1\le x\le1$에서

$4^{-1}\le4^x\le4^1$ $\therefore \frac{1}{4}\le t\le4$

따라서 $\frac{1}{4}\le t\le4$에서 함수 $y=(t-2)^2-4$는

$t=4$일 때 최대이고, 최댓값은

$(4-2)^2-4=0$

$t=2$일 때 최소이고, 최솟값은

$(2-2)^2-4=-4$ 답 최댓값: 0, 최솟값: -4

29 $y=4^x-2^{x+2}+5=2^{2x}-4\cdot2^x+5$

$2^x=t$로 놓으면 주어진 함수는

$y=t^2-4t+5=(t-2)^2+1$

이때 $-2\le x\le3$에서

$2^{-2}\le2^x\le2^3$ $\therefore \frac{1}{4}\le t\le8$

따라서 $\frac{1}{4}\le t\le8$에서 함수 $y=(t-2)^2+1$은

$t=8$일 때 최대이고, 최댓값은

$(8-2)^2+1=37$

$t=2$일 때 최소이고, 최솟값은

$(2-2)^2+1=1$ 답 최댓값: 37, 최솟값: 1

30 $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x-6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+4=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}-6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+4$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$로 놓으면 주어진 함수는

$$y=t^2-6t+4=(t-3)^2-5$$

이때 $-2\le x\le 0$에서

$$\left(\frac{1}{3}\right)^0\le\left(\frac{1}{3}\right)^x\le\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\qquad \therefore\ 1\le t\le 9$$

따라서 $1\le t\le 9$에서 함수 $y=(t-3)^2-5$는

$t=9$일 때 최대이고, 최댓값은

$$(9-3)^2-5=31$$

$t=3$일 때 최소이고, 최솟값은

$$(3-3)^2-5=-5$$

답 최댓값: 31, 최솟값: -5

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 58쪽

01 $A=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $B=\sqrt[3]{16}=2^{\frac{4}{3}}$, $C=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{6}}$

이때 $\frac{1}{6}<\frac{1}{2}<\frac{4}{3}$이고 함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$$2^{\frac{1}{6}}<2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{4}{3}}\qquad \therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{6}}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{16}$$

$$\therefore\ C<A<B$$

답 ④

02 $\sqrt[4]{0.5}=\sqrt[4]{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$,

$\sqrt[5]{\frac{1}{64}}=\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^6}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6}{5}}$,

$\sqrt[3]{0.25}=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

이때 $\frac{1}{4}<\frac{2}{3}<\frac{6}{5}$이고 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6}{5}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore \sqrt[5]{\frac{1}{64}}<\sqrt[3]{0.25}<\sqrt[4]{0.5}$$

따라서 가장 큰 수는 $\sqrt[4]{0.5}$, 가장 작은 수는 $\sqrt[5]{\frac{1}{64}}$이다.

답 $\sqrt[4]{0.5}$, $\sqrt[5]{\frac{1}{64}}$

03 함수 $y=a^x$은 $0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $0<a<1$에서

$$a^1<a^a<a^0\qquad \therefore\ a<a^a<1$$

이때 함수 $y=3^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$$3^a<3^{a^a}<3$$

답 ④

베이직쎈 BOX

지수함수를 이용한 수의 대소 비교
① $a>1$일 때
$x_1<x_2$이면 $a^{x_1}<a^{x_2}$
② $0<a<1$일 때
$x_1<x_2$이면 $a^{x_1}>a^{x_2}$

$\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^4}=2^{\frac{4}{3}}$,
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{6}}=(2^{-1})^{-\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{6}}$

$2^{3x}\cdot 3^{-2x}=8^x\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^x$
$=\left(\frac{8}{9}\right)^x$

$f(x)$는 $x=3$일 때 최소값을 갖는다.

함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x-3}$에서 밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 x^2+2x-3의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

04 함수 $y=2^{x+3}-5$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $-3\le x\le 2$에서

$x=2$일 때 최대이고, 최댓값은

$$2^{2+3}-5=32-5=27$$

$x=-3$일 때 최소이고, 최솟값은

$$2^{-3+3}-5=1-5=-4$$

따라서 $M=27$, $m=-4$이므로

$$M+m=23$$

답 23

05 함수 $y=5^{x+a}$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 이 함수는 $x=-4$일 때 최솟값을 갖는다.

즉 $5^{-4+a}=\frac{1}{25}$이므로 $\quad 5^{-4+a}=5^{-2}$

$$-4+a=-2\qquad \therefore\ a=2$$

답 ③

06 함수 $y=2^{3x}\cdot 3^{-2x}=\left(\frac{8}{9}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $-1\le x\le 2$에서

$x=-1$일 때 최대이고, 최댓값은

$$\left(\frac{8}{9}\right)^{-1}=\frac{9}{8}$$

$x=2$일 때 최소이고, 최솟값은

$$\left(\frac{8}{9}\right)^2=\frac{64}{81}$$

따라서 치역은 $\left\{y\,\middle|\,\frac{64}{81}\le y\le\frac{9}{8}\right\}$이므로

$$a=\frac{64}{81},\ b=\frac{9}{8}$$

$$\therefore\ ab=\frac{8}{9}$$

답 $\frac{8}{9}$

07 함수 $f(x)=3^{-a-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{a+x}$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $f(x)$는 $x=-3$일 때 최댓값을 갖는다.

즉 $\left(\frac{1}{3}\right)^{a-3}=9$이므로 $\quad\left(\frac{1}{3}\right)^{a-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

$$a-3=-2\qquad \therefore\ a=1$$

따라서 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{1+x}$이므로 구하는 최솟값은

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1+3}=\frac{1}{81}$$

답 $\frac{1}{81}$

08 $f(x)=x^2-4x+6$으로 놓으면

$$f(x)=(x-2)^2+2$$

$y=2^{x^2-4x+6}=2^{f(x)}$에서 밑이 1보다 크므로 $f(x)$가 최소일 때 y는 최솟값을 갖는다.

따라서 $y=2^{x^2-4x+6}=2^{f(x)}$은 $f(x)=2$, 즉 $x=2$일 때 최솟값 $2^2=4$를 가지므로

$$a=2,\ b=4\qquad \therefore\ a-b=-2$$

답 ①

09 $f(x)=x^2+2x-3$으로 놓으면

$$f(x)=(x+1)^2-4$$

$f(-1)=-4$, $f(2)=5$이므로 $-1\le x\le 2$에서

$$-4\le f(x)\le 5$$

따라서 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}$은

$f(x)=-4$일 때 최대이고, 최댓값은 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$

$f(x)=5$일 때 최소이고, 최솟값은 $\left(\frac{1}{3}\right)^{5}$

따라서 구하는 곱은

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{5}=\frac{1}{3}$ 답 ③

10 $f(x)=-x^2+4x+a$로 놓으면

$f(x)=-(x-2)^2+a+4$

$y=5^{-x^2+4x+a}=5^{f(x)}$에서 밑이 1보다 크므로 $f(x)$가 최대일 때 y는 최댓값을 갖는다.

따라서 $y=5^{f(x)}$은 $f(x)=a+4$, 즉 $x=2$일 때 최댓값 $\frac{1}{125}$을 가지므로

$5^{a+4}=\frac{1}{125}$, $5^{a+4}=5^{-3}$

$a+4=-3$ $\therefore a=-7$ 답 -7

11 $f(x)=x^2+6x+7$로 놓으면

$f(x)=(x+3)^2-2$

$y=a^{x^2+6x+7}=a^{f(x)}$에서 밑이 a이고 $0<a<1$이므로 $f(x)$가 최소일 때 y는 최댓값을 갖는다.

따라서 $y=a^{f(x)}$은 $f(x)=-2$, 즉 $x=-3$일 때 최댓값 64를 가지므로

$a^{-2}=64$, $a^2=\frac{1}{64}$

$\therefore a=\frac{1}{8}$ ($\because 0<a<1$) 답 ④

12 $y=9^x-6\cdot3^x+5=3^{2x}-6\cdot3^x+5$

$3^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 주어진 함수는

$y=t^2-6t+5=(t-3)^2-4$

따라서 y는 $t=3$, 즉 $x=1$일 때 최솟값 -4를 가지므로

$a=1$, $b=-4$

$\therefore a+b=-3$ 답 -3

13 $y=2^{-2x}-2^{-x+1}+2$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=t$로 놓으면 주어진 함수는

$y=t^2-2t+2=(t-1)^2+1$

이때 $-2\le x\le1$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$\therefore \frac{1}{2}\le t\le4$

따라서 $\frac{1}{2}\le t\le4$에서 함수 $y=(t-1)^2+1$은

$t=4$일 때 최대이고, 최댓값은

$(4-1)^2+1=10$

$t=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$(1-1)^2+1=1$

베이직쎈 BOX

$t=4$일 때

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=4$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$\therefore x=-2$

$t=3$일 때 $3^x=3$

$\therefore x=1$

따라서 $M=10$, $m=1$이므로

$M-m=9$ 답 ②

14 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+k$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+k$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=t$ $(t>0)$로 놓으면 주어진 함수는

$y=t^2-8t+k=(t-4)^2+k-16$

따라서 y는 $t=4$, 즉 $x=-2$일 때 최솟값 $k-16$을 가지므로

$k-16=-11$

$\therefore k=5$, $a=-2$

$\therefore k-a=7$ 답 7

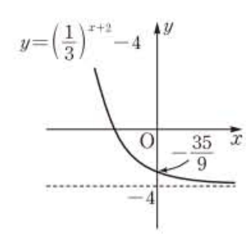
학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 60쪽

01 전략 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y-b=f(x-a)$이고, 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=f(-x)$임을 이용한다.

풀이 ① 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

②, ④, ⑤ $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}-4$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}-4$의 그래프는 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면을 지나고, 점근선의 방정식은 $y=-4$이다.

③ $y=3^{x-2}+4$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=3^{-x-2}+4$ $\therefore y=-\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}-4$

답 ③, ⑤

02 전략 함수 $y=a^x$ $(a>0, a\ne1)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y-n=a^{x-m}$임을 이용한다.

풀이 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-n=2^{x-m}$ $\therefore y=2^{x-m}+n$

이 함수의 그래프가 점 $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$를 지나므로

$2^{-m}+n=-\frac{5}{2}$ …… ㉠

베이직쎈 BOX

또 점 $(1,\ -2)$를 지나므로

$$2^{1-m}+n=-2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡$-$㉠을 하면 $\quad 2^{1-m}-2^{-m}=\frac{1}{2}$

$$2^{-m}=\frac{1}{2} \qquad \therefore m=1$$

$2^{1-m}-2^{-m}=\frac{1}{2}$에서
$2\cdot 2^{-m}-2^{-m}=\frac{1}{2}$
$2^{-m}(2-1)=\frac{1}{2}$
$\therefore 2^{-m}=\frac{1}{2}$

$m=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad 2^{-1}+n=-\frac{5}{2}$

$\therefore n=-3$

$\therefore m+n=-2$

답 ①

03 전략 함수 $y=a^{x-m}+n\ (a>0,\ a\neq1)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=n$임을 이용한다.

풀이 함수 $y=4^{-x+a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식이 $y=-9$이므로

$b=-9$

함수 $y=4^{-x+a}-9$의 그래프가 점 $(2,\ 7)$을 지나므로

$7=4^{-2+a}-9, \quad 4^{-2+a}=16$

$4^{-2+a}=4^2, \quad -2+a=2$

$\therefore a=4$

$\therefore a-b=13$

답 ④

04 전략 밑이 $\frac{1}{3}$인 거듭제곱의 꼴로 나타낸 후 지수함수의 성질을 이용한다.

두 점 A, B의 y좌표는 모두 8이다.

풀이 $A=\sqrt{\frac{1}{27}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}},\ B=\sqrt[4]{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}},$

$C=\sqrt[3]{\frac{1}{81}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{3}}$

$\sqrt{\frac{1}{27}}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$

$\sqrt[3]{\frac{1}{81}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^4}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{3}}$

이때 $\frac{1}{4}<\frac{4}{3}<\frac{3}{2}$이고 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{3}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{1}{27}}<\sqrt[3]{\frac{1}{81}}<\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$$

$\therefore A<C<B$

답 ②

05 전략 함수 $y=a^x\ (0<a<1)$에서 x가 최소일 때 y는 최대, x가 최대일 때 y는 최소가 됨을 이용한다.

풀이 $0<a<1$이므로 $f(x)=a^x$은 $x=-1$일 때 최댓값 $f(-1)$, $x=2$일 때 최솟값 $f(2)$를 갖는다.

즉 $f(-1)=a^{-1}=\frac{3}{2}$에서 $\quad a=\frac{2}{3}$

따라서 $m=f(2)=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$이므로

$$am=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}=\frac{8}{27}$$

답 ①

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

06 전략 밑이 1보다 크므로 $-x^2+4x-2$가 최대일 때 y는 최대가 됨을 이용한다.

풀이 $f(x)=-x^2+4x-2$로 놓으면

$f(x)=-(x-2)^2+2$

$y=5^{-x^2+4x-2}=5^{f(x)}$에서 밑이 1보다 크므로 $f(x)$가 최대일 때 y는 최댓값을 갖는다.

따라서 $y=5^{-x^2+4x-2}=5^{f(x)}$은 $f(x)=2$, 즉 $x=2$일 때 최댓값 $5^2=25$를 갖는다.

답 ⑤

07 전략 $2^x=t$로 놓고 주어진 함수를 t에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $y=4^x-2^{x+2}+10$

$=2^{2x}-4\cdot2^x+10$

$2^x=t$로 놓으면 주어진 함수는

$y=t^2-4t+10=(t-2)^2+6$

이때 $0\le x\le2$에서

$2^0\le2^x\le2^2 \qquad \therefore 1\le t\le4$

따라서 $1\le t\le4$에서 함수 $y=(t-2)^2+6$은 $t=4$일 때 최대이고, 최댓값은

$(4-2)^2+6=10$

$t=2$일 때 최소이고, 최솟값은

$(2-2)^2+6=6$

따라서 구하는 합은

$10+6=16$

답 ①

08 전략 먼저 두 점 A, B의 좌표를 구한다.

풀이 두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b라 하면 점 $A(a,\ 8)$이 $y=2^x$의 그래프 위의 점이므로

$2^a=8, \quad 2^a=2^3 \qquad \therefore a=3$

$\therefore A(3,\ 8)$

또 점 $B(b,\ 8)$이 $y=8^x$의 그래프 위의 점이므로

$8^b=8 \qquad \therefore b=1$

$\therefore B(1,\ 8)$

따라서 $\overline{AB}=3-1=2$이므로

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot2\cdot8=8$

답 8

09 전략 함수 $f(x)=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$에 대하여 $f(p)=k$이면 $a^p=k$임을 이용한다.

풀이 $f(p)=8$이므로

$a^p+a^{-p}=8$ ⋯ ❶

$\therefore f(2p)=a^{2p}+a^{-2p}$

$=(a^p+a^{-p})^2-2$

$=8^2-2$

$=62$ ⋯ ❷

답 62

단계	채점 기준	비율
❶	a^p+a^{-p}의 값을 구할 수 있다.	30%
❷	$f(2p)$의 값을 구할 수 있다.	70%

10 전략 함수 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y-n=a^{x-m}$이고, 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=a^{-x}$임을 이용한다.

풀이 $y=5^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -7만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-(-7)=5^{x-(-2)}$

$\therefore y=5^{x+2}-7$ ··· ❶

이 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=5^{-x+2}-7$

$\therefore y=-5^{-x+2}+7$ ··· ❷

따라서 $y=-25\cdot5^{-x}+7$이 $y=a\cdot5^{-x}+b$와 일치하므로

$a=-25,\ b=7$

$\therefore a+b=-18$ ··· ❸

답 -18

단계	채점 기준	비율
❶	평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40%
❷	대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40%
❸	$a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

11 전략 함수 $y=a^x$은 $0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소함을 이용한다.

풀이 $0<a<1$의 각 변에 a를 곱하면

$0<a^2<a \qquad \therefore a^2<a<1$

함수 $y=a^x$은 $0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $a^2<a<1$에서

$a^1<a^a<a^{a^2} \qquad \therefore a<a^a<a^{a^2}$ 답 $a<a^a<a^{a^2}$

12 전략 함수 $y=a^x$은 $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가함을 이용한다.

풀이 함수 $y=2^{x-3}+b$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 함수 $y=2^{x-3}+b$는 $x=8$일 때 최댓값 34를 갖는다.

즉 $2^{8-3}+b=34$이므로 $2^5+b=34$

$\therefore b=2$

함수 $y=2^{x-3}+2$는 $x=a$일 때 최솟값 6을 가지므로

$2^{a-3}+2=6$

$2^{a-3}=4, \qquad 2^{a-3}=2^2$

$a-3=2 \qquad \therefore a=5$

$\therefore b-a=-3$ 답 -3

13 전략 $0<a<1$이므로 $-x^2+8x-12$의 값이 증가하면 y의 값은 감소함을 이용한다.

풀이 $f(x)=-x^2+8x-12$로 놓으면

$f(x)=-(x-4)^2+4$

$f(3)=3,\ f(4)=4,\ f(7)=-5$이므로 $3\le x\le7$에서

$-5\le f(x)\le4$ ··· ❶

$y=a^{-x^2+8x-12}=a^{f(x)}$에서 밑이 a이고 $0<a<1$이므로 $f(x)$가 최대일 때 y는 최솟값을 갖고, $f(x)$가 최소일 때 y는 최댓값을 갖는다.

따라서 $y=a^{-x^2+8x-12}=a^{f(x)}$은 $f(x)=4$일 때 최솟값 $\frac{1}{16}$을 가지므로

$a^4=\frac{1}{16}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because 0<a<1$) ··· ❷

베이직쎈 BOX

$y=-5^{-x}\cdot5^2+7$
$=-25\cdot5^{-x}+7$

또 $f(x)=-5$일 때 최댓값을 가지므로 최댓값은

$a^{-5}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=32$ ··· ❸

답 32

단계	채점 기준	비율
❶	지수의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❷	a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸	최댓값을 구할 수 있다.	30%

Ⅱ. 지수함수와 로그함수

04 로그함수

07 로그함수

개념 21 로그함수

본책 62쪽

01 답 ○

02 $y=\log_2 16=\log_2 2^4=4$이므로 로그함수가 아니다. 답 ×

03 답 ○

04 $y=x\log_5 25=x\log_5 5^2=2x$이므로 로그함수가 아니다. 답 ×

05 $f(1)=\log_2 1=0$ 답 0

06 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\log_2 \frac{1}{4}=\log_2 2^{-2}=-2$ 답 -2

07 $f(2)=\log_2 2=1$, $f\left(\frac{1}{8}\right)=\log_2 \frac{1}{8}=\log_2 2^{-3}=-3$

$\therefore f(2)f\left(\frac{1}{8}\right)=1\cdot(-3)=-3$ 답 -3

08 $f(32)=\log_2 32=\log_2 2^5=5$,
$f(4)=\log_2 4=\log_2 2^2=2$

$\therefore \frac{f(32)}{f(4)}=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

09 $f(1)=\log_{\frac{1}{3}} 1=0$ 답 0

10 $f\left(\frac{1}{27}\right)=\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^3=3$ 답 3

11 $f(3)-f(9)=\log_{\frac{1}{3}} 3-\log_{\frac{1}{3}} 9$

$=\log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{9}$

$=\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}=1$ 답 1

12 $f(18)+f\left(\frac{3}{2}\right)=\log_{\frac{1}{3}} 18+\log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2}$

$=\log_{\frac{1}{3}}\left(18\cdot\frac{3}{2}\right)=\log_{\frac{1}{3}} 27$

$=\log_{3^{-1}} 3^3=-3$ 답 -3

13 $y=6^x$에서 로그의 정의에 의하여 $x=\log_6 y$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=\log_6 x$ 답 $y=\log_6 x$

함수 $y=6^x$은 $\{x|x$는 실수$\}$에서 $\{y|y>0\}$으로의 일대일대응이다. 따라서 역함수가 존재한다.

$y=\log_6 x$에서 정의역 $\{x|x>0\}$은 생략할 수 있다.

베쎈 TIP

일대일대응인 함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $y=f(x)$에서 x를 y에 대한 식으로 나타낸다. 즉 $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 나타낸다.

(ii) $x=f^{-1}(y)$의 x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$ 꼴로 나타낸다.

14 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$에서 로그의 정의에 의하여

$x=\log_{\frac{1}{5}} y$

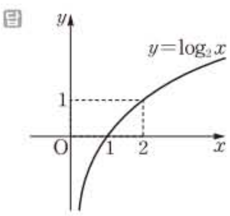
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\log_{\frac{1}{5}} x$ 답 $y=\log_{\frac{1}{5}} x$

개념 22 로그함수의 그래프와 성질

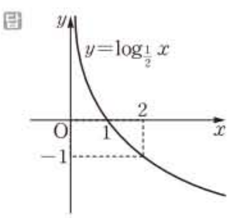
본책 63쪽

15 답



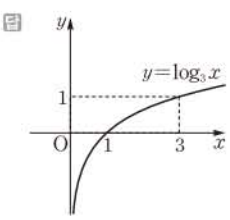
$\log_a 1=0$, $\log_a a=1$이므로 로그함수 $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq1$)의 그래프는 항상 점 (1, 0)과 점 (a, 1)을 지난다.

16 답

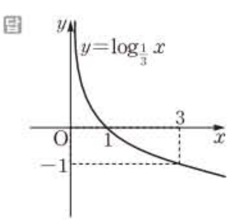


$y=\log_2 x$의 그래프와 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이다.

17 답



18 답



19 정의역은 양의 실수 전체의 집합이다. 답 ×

20 치역은 실수 전체의 집합이다. 답 ×

21 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. 답 ○

22 답 ○

23 $y=\log_4 x$에 $x=16$을 대입하면
$y=\log_4 16=\log_4 4^2=2$
따라서 그래프는 점 (16, 2)를 지난다. 답 ○

24 답 ○

25 그래프는 제1사분면과 제4사분면을 지난다. 답 ×

일대일함수의 그래프
➡ 치역의 각 원소 k에 대하여 직선 $y=k$와 한 점에서 만난다.

26 답 ○

04 로그함수

27 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다. 답 ×

28 답 ○ **29** 답 ○

30 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. 답 ○

31 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지난다. 답 ×

32 $y=\log_{\frac{1}{5}}x$에 $x=25$를 대입하면

$$y=\log_{\frac{1}{5}}25=\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}=-2$$

따라서 그래프는 점 $(25,\ -2)$를 지난다. 답 ○

33 답 ○ **34** 답 ○

35 답 ○

36 그래프는 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 답 ×

37 그래프가 점 $\left(\frac{1}{3},\ a\right)$를 지나므로

$$a=\log_3\frac{1}{3}=\log_3 3^{-1}=-1$$

또 점 $(b,\ 3)$을 지나므로

$$3=\log_3 b \qquad \therefore\ b=3^3=27$$

답 $a=-1,\ b=27$

38 그래프가 점 $\left(\frac{1}{2},\ a\right)$를 지나므로

$$a=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$$

또 점 $(b,\ -2)$를 지나므로

$$-2=\log_{\frac{1}{2}}b \qquad \therefore\ b=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$$

답 $a=1,\ b=4$

개념 23 로그함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

본책 65쪽

39 $y-2=\log_3(x-4)$에서

$y=\log_3(x-4)+2$ 답 $y=\log_3(x-4)+2$

40 $y-(-5)=\log_{\frac{1}{4}}(x-1)$에서

$y=\log_{\frac{1}{4}}(x-1)-5$ 답 $y=\log_{\frac{1}{4}}(x-1)-5$

41 $y-3=-\log_7\{x-(-6)\}$에서

$y=-\log_7(x+6)+3$ 답 $y=-\log_7(x+6)+3$

42 $-y=\log_6 x$에서 $y=-\log_6 x$ 답 $y=-\log_6 x$

43 답 $y=\log_{\frac{1}{3}}(-x)$

베이직쎈 BOX

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 도형의 방정식은
$f(x-m,\ y-n)=0$

함수
$y=\log_a(x-m)+n$
$(a>0,\ a\neq1)$에서
① 정의역: $\{x|x>m\}$
② 점근선의 방정식
: $x=m$

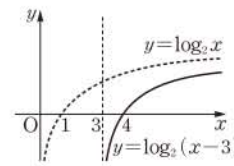
방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은
① x축: $f(x,\ -y)=0$
② y축: $f(-x,\ y)=0$
③ 원점: $f(-x,\ -y)=0$

44 $-y=\log_4(-x)$에서

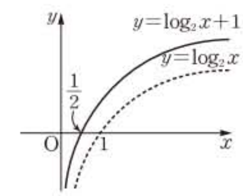
$y=-\log_4(-x)$ 답 $y=-\log_4(-x)$

45 $x=\log_5 y$에서 $y=5^x$ 답 $y=5^x$

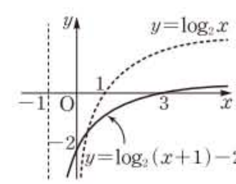
46 $y=\log_2(x-3)$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. 답 풀이 참조



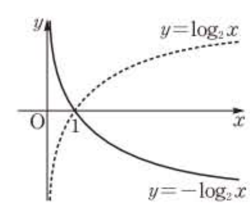
47 $y=\log_2 x+1$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. 답 풀이 참조



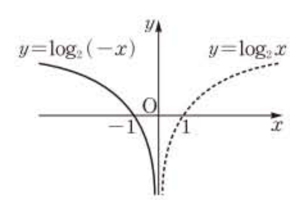
48 $y=\log_2(x+1)-2$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. 답 풀이 참조



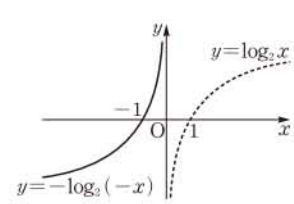
49 $y=-\log_2 x$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. 답 풀이 참조



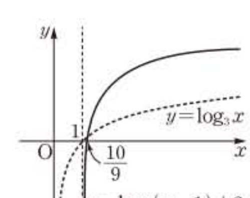
50 $y=\log_2(-x)$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. 답 풀이 참조



51 $y=-\log_2(-x)$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. 답 풀이 참조

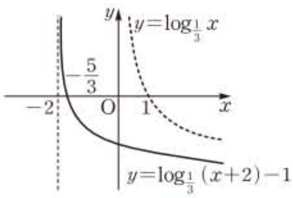


52 $y=\log_3(x-1)+2$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 정의역은 $\{x|x>1\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=1$이다. 답 풀이 참조



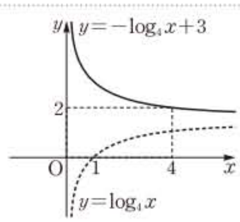
베이직쎈 BOX

53 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+2)-1$의 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x|x>-2\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=-2$이다. 답 풀이 참조

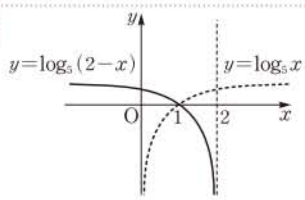
54 $y=-\log_4 x+3$의 그래프는 $y=\log_4 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x|x>0\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=0$이다. 답 풀이 참조

$y=-\log_4 x$

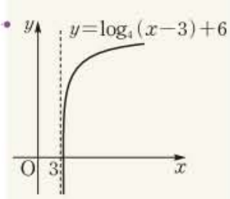
55 $y=\log_5(2-x)=\log_5\{-(x-2)\}$의 그래프는 $y=\log_5 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x|x<2\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=2$이다. 답 풀이 참조

$y=\log_5(-x)$

56 함수 $y=\log_4 x$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이다. 답 ×

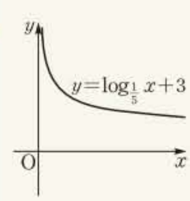


57 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. 답 ×

58 답 ○

59 답 ○

60 $y=\log_{\frac{1}{5}}x+3=\log_{5^{-1}}x+3=-\log_5 x+3$ 이므로 함수 $y=\log_5 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다. 답 ○



61 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. 답 ○

62 그래프는 제1사분면과 제4사분면을 지난다. 답 ×

63 답 ○

64 $y=\log_4 x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-(-3)=\log_4(x-2)$

$\therefore y=\log_4(x-2)-3$

이 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\log_4(x-2)-3$

$\therefore y=-\log_4(x-2)+3$

답 $y=-\log_4(x-2)+3$

65 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-(-1)=\log_{\frac{1}{3}}\{x-(-5)\}$

$\therefore y=\log_{\frac{1}{3}}(x+5)-1$

이 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\log_{\frac{1}{3}}(-x+5)-1$

답 $y=\log_{\frac{1}{3}}(-x+5)-1$

66 $y=\log_5 x$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-2=\log_5(x-3)$

$\therefore y=\log_5(x-3)+2$

이 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\log_5(-x-3)+2$

$\therefore y=-\log_5(-x-3)-2$

답 $y=-\log_5(-x-3)-2$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 67쪽

01 ④ $y=\log_{\frac{1}{a}}x=-\log_a x$이므로 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{a}}x$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다. 답 ④

02 $y=\log_3(-x^2-4x+21)$에서

$-x^2-4x+21>0,\quad x^2+4x-21<0$

$(x+7)(x-3)<0\quad \therefore -7<x<3$

따라서 구하는 정의역은

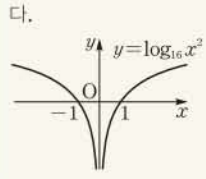
$\{x|-7<x<3\}$ 답 $\{x|-7<x<3\}$

03 ㄱ. 밑이 1보다 크므로 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이다.

ㄷ. 그래프는 $y=5^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

함수 $y=\log_{16}x^2$의 정의역은 $x^2>0$에서 $\{x|x\neq0$인 실수$\}$이고, 그래프는 다음 그림과 같다.



04 ㄱ. $y=-\log_4\frac{1}{x}=-\log_4 x^{-1}=\log_4 x$

ㄴ. $y=\log_{\frac{1}{4}}(-x)=\log_{4^{-1}}(-x)=-\log_4(-x)$

ㄷ. $y=\log_{16}x^2=\log_{4^2}x^2=\log_4|x|$

ㄹ. $y=\frac{1}{3}\log_4 x^3=\frac{1}{3}\cdot3\log_4 x=\log_4 x$

이상에서 함수 $y=\log_4 x$와 같은 함수인 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ②

05 그래프가 점 $(4,\ a)$를 지나므로

$a=\log_2 4=\log_2 2^2=2$

또 점 $(b,\ 5)$를 지나므로 $5=\log_2 b$에서

$b=2^5=32$

$\therefore\ b-a=30$ 답 30

06 $\mathrm{A}(0,\ \log_{\frac{1}{4}} a)$, $\mathrm{B}(0,\ \log_{\frac{1}{4}} b)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\log_{\frac{1}{4}} a-\log_{\frac{1}{4}} b=\log_{\frac{1}{4}}\dfrac{a}{b}$

즉 $\log_{\frac{1}{4}}\dfrac{a}{b}=3$이므로 $\log_4\dfrac{b}{a}=3$

$\therefore\ \dfrac{b}{a}=4^3=64$ 답 ⑤

07 함수 $y=3^x$의 그래프에서

$3^a=e,\ 3^b=f$

$\therefore\ \log_3 e=a,\ \log_3 f=b$

함수 $y=\log_3 x$의 그래프에서

$\log_3 c=e,\ \log_3 d=f$

$\therefore\ \log_3 cdef=\log_3 c+\log_3 d+\log_3 e+\log_3 f$

$=e+f+a+b$

$=a+b+e+f$ 답 ③

08 $y=\log_2(2x+8)=\log_2 2(x+4)=1+\log_2(x+4)$

$y=\log_2(x+4)+1$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$m=-4,\ n=1$

$\therefore\ m+n=-3$ 답 -3

09 $y=\log_{\frac{1}{5}} x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\log_{\frac{1}{5}} x \qquad \therefore\ y=-\log_{\frac{1}{5}} x$

이 그래프를 x축의 방향으로 -10만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\log_{\frac{1}{5}}(x+10)-4$

이 그래프가 점 $(a,\ -2)$를 지나므로

$-2=-\log_{\frac{1}{5}}(a+10)-4$

$\log_{\frac{1}{5}}(a+10)=-2,\qquad a+10=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}=25$

$\therefore\ a=15$ 답 15

10 ㄱ. $y=\log_3\dfrac{1}{x}=\log_3 x^{-1}=-\log_3 x$이므로

$y=\log_3\dfrac{1}{x}$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄴ. $y=\log_3(-9x)=\log_3(-x)+2$이므로

$y=\log_3(-9x)$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\log_{27} x=\log_{3^3} x=\dfrac{1}{3}\log_3 x$

베이직쎈 BOX

$\log_{\frac{1}{4}}\dfrac{a}{b}=\log_{4^{-1}}\dfrac{a}{b}$

$=-\log_4\dfrac{a}{b}$

$=\log_4\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}$

$=\log_4\dfrac{b}{a}$

$x=0$일 때의 함숫값

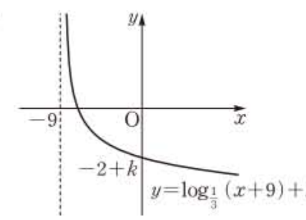
함수 $y=\log_a(x-m)+n$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 그래프의 점근선의 방정식 ➡ $x=m$

ㄹ. $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+2)=\log_{3^{-1}}(x+2)=-\log_3(x+2)$이므로 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

이상에서 $y=\log_3 x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

11 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+9)+k$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면



$-2+k\le 0$

$\therefore\ k\le 2$

따라서 k의 최댓값은 2이다. 답 2

12 주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3$이므로

$a=3$

그래프가 점 $(7,\ -2)$를 지나므로

$-2=\log_2(7-3)+b,\qquad -2=\log_2 4+b$

$\therefore\ b=-2-2=-4$

$\therefore\ a+b=-1$ 답 ③

13 (1) $y=2^{x-5}$에서 로그의 정의에 의하여

$x-5=\log_2 y \qquad \therefore\ x=\log_2 y+5$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\log_2 x+5$

(2) $y=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x+6}$에서 로그의 정의에 의하여

$x+6=\log_{\frac{1}{5}} y \qquad \therefore\ x=\log_{\frac{1}{5}} y-6$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\log_{\frac{1}{5}} x-6$

(3) $y=\log_3 3x=\log_3 x+1$에서 $\log_3 x=y-1$

로그의 정의에 의하여 $3^{y-1}=x$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=3^{x-1}$

답 (1) $y=\log_2 x+5$ (2) $y=\log_{\frac{1}{5}} x-6$ (3) $y=3^{x-1}$

14 $y=\log_5(x+a)+6$에서

$\log_5(x+a)=y-6,\qquad x+a=5^{y-6}$

$\therefore\ x=5^{y-6}-a$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=5^{x-6}-a$

따라서 $y=\log_5(x+a)+6$의 역함수는 $y=5^{x-6}-a$이고, 이것이 $y=5^{x+b}-7$과 일치해야 하므로

$a=7,\ b=-6$

$\therefore\ a-b=13$ 답 13

베이직쎈 **BOX**

15 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+4)-3$에서

$\log_{\frac{1}{2}}(x+4)=y+3,\quad x+4=\left(\frac{1}{2}\right)^{y+3}$

$\therefore x=\left(\frac{1}{2}\right)^{y+3}-4$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}-4$

$\therefore g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}-4$

$\therefore g(-3)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3+3}-4=1-4=-3$ 답 ①

다른 풀이 $g(-3)=a$라 하면 $f(a)=-3$이므로

$\log_{\frac{1}{2}}(a+4)-3=-3,\quad \log_{\frac{1}{2}}(a+4)=0$

$a+4=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1\quad \therefore a=-3$

$\therefore g(-3)=-3$

16 함수 $y=\log_8(x+5)+a$는 함수 $y=8^{x+3}+b$의 역함수이다.

$y=8^{x+3}+b$에서 $\quad 8^{x+3}=y-b$

로그의 정의에 의하여 $\quad x+3=\log_8(y-b)$

$\therefore x=\log_8(y-b)-3$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\log_8(x-b)-3$

따라서 $y=8^{x+3}+b$의 역함수는 $y=\log_8(x-b)-3$이고, 이것이 $y=\log_8(x+5)+a$와 일치해야 하므로

$a=-3,\ b=-5$

$\therefore ab=15$ 답 ④

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
➡ 함수 $y=f(x)$는 항상 함수 $y=g(x)$의 역함수이다.

17 함수 $y=\log_4(x+m)+2$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점을 직선 $y=x$가 지나므로 함수 $y=\log_4(x+m)+2$의 그래프는 점 $(3,\ 3)$을 지난다.

즉 $3=\log_4(3+m)+2$에서 $\quad \log_4(3+m)=1$

$3+m=4\quad \therefore m=1$ 답 ④

18 $f(x)$는 $y=3^x$의 역함수이므로

$f(x)=\log_3 x$

점 A는 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점이므로

$\mathrm{A}(1,\ 0)$

점 B의 x좌표가 1이므로 $\quad y=3^1=3$

$\therefore \mathrm{B}(1,\ 3)$

점 C의 y좌표가 3이므로 $3=\log_3 x$에서 $\quad x=3^3=27$

$\therefore \mathrm{C}(27,\ 3)$

따라서 $a=27,\ b=3$이므로

$a+b=30$ 답 30

08 로그함수의 최대·최소

개념 24 로그함수를 이용한 수의 대소 비교 본책 70쪽

01 $\log_5 9$, $\log_5 12$에서 $9<12$이고, 함수 $y=\log_5 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$\log_5 9<\log_5 12$ 답 <

02 $-\log_{\frac{1}{4}}5=\log_{\frac{1}{4}}5^{-1}=\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{5}$

이때 $\frac{1}{8}<\frac{1}{5}$이고 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{8}>\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{5}\qquad \therefore \log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{8}>-\log_{\frac{1}{4}}5$

답 >

03 $2\log_2\sqrt{13}=\log_2(\sqrt{13})^2=\log_2 13$

이때 $13>12$이고 함수 $y=\log_2 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$\log_2 13>\log_2 12\qquad \therefore 2\log_2\sqrt{13}>\log_2 12$

답 >

04 $2\log_{0.3}6=\log_{0.3}6^2=\log_{0.3}36$,

$3\log_{0.3}4=\log_{0.3}4^3=\log_{0.3}64$

이때 $36<64$이고 함수 $y=\log_{0.3}x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\log_{0.3}36>\log_{0.3}64$

$\therefore 2\log_{0.3}6>3\log_{0.3}4$ 답 >

05 $\log_9 65$를 밑이 3인 로그로 나타내면

$\log_9 65=\log_{3^2}65=\frac{1}{2}\log_3 65=\log_3\sqrt{65}$

이때 $8<\sqrt{65}$이고 함수 $y=\log_3 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$\log_3 8<\log_3\sqrt{65}\qquad \therefore \log_3 8<\log_9 65$

답 <

06 $\log_{\frac{1}{8}}20$을 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그로 나타내면

$\log_{\frac{1}{8}}20=\log_{\left(\frac{1}{2}\right)^3}20=\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}}20=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{20}$

이때 $3>\sqrt[3]{20}$이고 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$3=\sqrt[3]{27}$이므로 $3>\sqrt[3]{20}$

$\log_{\frac{1}{2}}3<\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{20}\qquad \therefore \log_{\frac{1}{2}}3<\log_{\frac{1}{8}}20$ 답 <

07 $3=\log_2 2^3=\log_2 8$

이때 $5<8<9$이고 함수 $y=\log_2 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$\log_2 5<\log_2 8<\log_2 9\qquad \therefore \log_2 5<3<\log_2 9$

답 $\log_2 5<3<\log_2 9$

08 $\log_{\frac{1}{5}}3$, $\log_{\frac{1}{5}}\frac{5}{2}$, $\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{25}$에서 $\frac{1}{25}<\frac{5}{2}<3$이고, 함수 $y=\log_{\frac{1}{5}}x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $\quad \log_{\frac{1}{5}}3<\log_{\frac{1}{5}}\frac{5}{2}<\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{25}$

답 $\log_{\frac{1}{5}}3<\log_{\frac{1}{5}}\frac{5}{2}<\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{25}$

09 $2\log_2 3=\log_2 3^2=\log_2 9$,

$4=\log_2 2^4=\log_2 16$,

$\log_4 49=\log_{2^2}7^2=\log_2 7$

이때 $7<9<16$이고 함수 $y=\log_2 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$\log_2 7<\log_2 9<\log_2 16$ $\quad\therefore \log_4 49<2\log_2 3<4$

답 $\log_4 49<2\log_2 3<4$

10 $\log_9 10=\log_{3^2}10=\frac{1}{2}\log_3 10=\log_3\sqrt{10}$,

$2\log_3 2\sqrt{2}=\log_3(2\sqrt{2})^2=\log_3 8$

이때 $\sqrt{10}<5<8$이고 함수 $y=\log_3 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$\log_3\sqrt{10}<\log_3 5<\log_3 8$

$\therefore \log_9 10<\log_3 5<2\log_3 2\sqrt{2}$

답 $\log_9 10<\log_3 5<2\log_3 2\sqrt{2}$

11 $\log_{\frac{1}{16}}3=\log_{(\frac{1}{4})^2}3=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}}3=\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{3}$,

$-1=\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=\log_{\frac{1}{4}}4$

이때 $\frac{1}{5}<\sqrt{3}<4$이고 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\log_{\frac{1}{4}}4<\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{3}<\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{5}$

$\therefore -1<\log_{\frac{1}{16}}3<\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{5}$

답 $-1<\log_{\frac{1}{16}}3<\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{5}$

12 $\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{3}=\log_{(\frac{1}{2})^2}\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{3}}$,

$\log_4 5=\log_{(\frac{1}{2})^{-2}}5=-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}5=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{5}}$

이때 $\sqrt{\frac{1}{5}}<\sqrt{\frac{1}{3}}<\sqrt{6}$이고 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{6}<\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{3}}<\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{5}}$

$\therefore \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{6}<\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{3}<\log_4 5$

답 $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{6}<\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{3}<\log_4 5$

개념 25 로그함수의 최대·최소

본책 71쪽

13 함수 $y=\log_3 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $3\le x\le 27$에서

$x=27$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_3 27=\log_3 3^3=3$

$x=3$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_3 3=1$

답 최댓값: 3, 최솟값: 1

14 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $\frac{1}{16}\le x\le 16$에서

$x=\frac{1}{16}$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{16}=\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^2=2$

$x=16$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_{\frac{1}{4}}16=\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=-2$

답 최댓값: 2, 최솟값: -2

15 함수 $y=\log_2(x+3)$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $1\le x\le 5$에서

$x=5$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_2(5+3)=\log_2 8=\log_2 2^3=3$

$x=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_2(1+3)=\log_2 4=\log_2 2^2=2$

답 최댓값: 3, 최솟값: 2

16 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $3\le x\le 10$에서

$x=3$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_{\frac{1}{2}}(3-2)=\log_{\frac{1}{2}}1=0$

$x=10$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_{\frac{1}{2}}(10-2)=\log_{\frac{1}{2}}8=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=-3$

답 최댓값: 0, 최솟값: -3

17 함수 $y=\log_2 8x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $1\le x\le 4$에서

$x=4$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_2(8\cdot 4)=\log_2 32=\log_2 2^5=5$

$x=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_2(8\cdot 1)=\log_2 8=\log_2 2^3=3$

답 최댓값: 5, 최솟값: 3

18 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}9x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $3\le x\le 9$에서

$x=3$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_{\frac{1}{3}}(9\cdot 3)=\log_{\frac{1}{3}}27=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=-3$

$x=9$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_{\frac{1}{3}}(9\cdot 9)=\log_{\frac{1}{3}}81=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}=-4$

답 최댓값: -3, 최솟값: -4

19 함수 $y=\log_2(3x-1)$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $1\le x\le 3$에서

$x=3$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_2(3\cdot 3-1)=\log_2 8=\log_2 2^3=3$

$x=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_2(3\cdot 1-1)=\log_2 2=1$

답 최댓값: 3, 최솟값: 1

베이직쎈 BOX

$a>0$, $b>0$일 때, $a<b$이면 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$

베이직쎈 BOX

20 함수 $y=\log_{\frac{1}{5}}x+1$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $\frac{1}{125}\le x\le 1$에서

$x=\frac{1}{125}$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{125}+1=\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^3+1=3+1=4$

$x=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_{\frac{1}{5}}1+1=0+1=1$

답 최댓값: 4, 최솟값: 1

21 함수 $y=\log_3(x-3)-2$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $6\le x\le 12$에서

$x=12$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_3(12-3)-2=\log_3 9-2$
$=\log_3 3^2-2$
$=2-2=0$

$x=6$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_3(6-3)-2=\log_3 3-2=1-2=-1$

답 최댓값: 0, 최솟값: -1

22 $y=-\log_3(x+4)=\log_{3^{-1}}(x+4)=\log_{\frac{1}{3}}(x+4)$

함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+4)$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $-1\le x\le 5$에서

$x=-1$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_{\frac{1}{3}}(-1+4)=\log_{\frac{1}{3}}3=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=-1$

$x=5$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_{\frac{1}{3}}(5+4)=\log_{\frac{1}{3}}9=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=-2$

답 최댓값: -1, 최솟값: -2

23 답 최댓값: 3, 최솟값: 2

4, 4, 4, 8, 8, 3, 4, 4, 2

24 $f(x)=x^2-2x+3$으로 놓으면

$f(x)=(x-1)^2+2$

$f(2)=3$, $f(6)=27$이므로 $2\le x\le 6$에서

$3\le f(x)\le 27$

따라서 $y=\log_3(x^2-2x+3)=\log_3 f(x)$는

$f(x)=27$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_3 27=\log_3 3^3=3$

$f(x)=3$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_3 3=1$ 답 최댓값: 3, 최솟값: 1

25 $f(x)=x^2-4x+8$로 놓으면

$f(x)=(x-2)^2+4$

$f(0)=8$, $f(2)=4$, $f(3)=5$이므로 $0\le x\le 3$에서

$4\le f(x)\le 8$

따라서 $y=\log_{\frac{1}{4}}(x^2-4x+8)=\log_{\frac{1}{4}}f(x)$는

$f(x)=4$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_{\frac{1}{4}}4=\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=-1$

$f(x)=8$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_{\frac{1}{4}}8=\log_{2^{-2}}2^3=-\frac{3}{2}$

답 최댓값: -1, 최솟값: $-\frac{3}{2}$

26 $f(x)=-x^2-6x-1$로 놓으면

$f(x)=-(x+3)^2+8$

$f(-4)=7$, $f(-3)=8$, $f(-1)=4$이므로

$-4\le x\le -1$에서 $4\le f(x)\le 8$

따라서 $y=\log_4(-x^2-6x-1)=\log_4 f(x)$는

$f(x)=8$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_4 8=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}$

$f(x)=4$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_4 4=1$ 답 최댓값: $\frac{3}{2}$, 최솟값: 1

27 $f(x)=-x^2+8x-6$으로 놓으면

$f(x)=-(x-4)^2+10$

$f(1)=1$, $f(4)=10$, $f(5)=9$이므로 $1\le x\le 5$에서

$1\le f(x)\le 10$

따라서 $y=\log_{0.1}(-x^2+8x-6)=\log_{0.1}f(x)$는

$f(x)=1$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_{0.1}1=0$

$f(x)=10$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_{0.1}10=\log_{10^{-1}}10=-1$

답 최댓값: 0, 최솟값: -1

28 답 최댓값: 6, 최솟값: 2

2, 2, 3, 3, 2, 6, 2, 2

29 $\log_{\frac{1}{3}}x=t$로 놓으면 주어진 함수는

$y=t^2-4t-6=(t-2)^2-10$

이때 $\frac{1}{27}\le x\le 3$에서

$\log_{\frac{1}{3}}3\le \log_{\frac{1}{3}}x\le \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27}$

$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\le \log_{\frac{1}{3}}x\le \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^3$

$\therefore -1\le t\le 3$

따라서 $-1\le t\le 3$에서 함수 $y=(t-2)^2-10$은

$t=-1$일 때 최대이고, 최댓값은

$(-1-2)^2-10=-1$

$t=2$일 때 최소이고, 최솟값은

$(2-2)^2-10=-10$

답 최댓값: -1, 최솟값: -10

30 $y=(\log_4 x)^2-\log_4 x^2-1$
$=(\log_4 x)^2-2\log_4 x-1$

$\log_4 x=t$로 놓으면 주어진 함수는

$y=t^2-2t-1=(t-1)^2-2$

함수 $y=\log_4(-x^2-6x-1)$에서 밑이 4이고 $4>1$이므로 $-x^2-6x-1$의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

함수 $y=\log_{0.1}(-x^2+8x-6)$에서 밑이 0.1이고 $0<0.1<1$이므로 $-x^2+8x-6$의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

$\alpha\le x\le\beta$에서 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은
① $\alpha\le p\le\beta$일 때 $f(p)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.
② $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$일 때 $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

함수 $y=\log_3(x^2-2x+3)$에서 밑이 3이고 $3>1$이므로 x^2-2x+3의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

함수 $y=\log_{\frac{1}{4}}(x^2-4x+8)$에서 밑이 $\frac{1}{4}$이고 $0<\frac{1}{4}<1$이므로 x^2-4x+8의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

이때 $\frac{1}{4} \le x \le 16$에서

$\log_4 \frac{1}{4} \le \log_4 x \le \log_4 16$

$\log_4 4^{-1} \le \log_4 x \le \log_4 4^2$

$\therefore -1 \le t \le 2$

따라서 $-1 \le t \le 2$에서 함수 $y=(t-1)^2-2$는

$t=-1$일 때 최대이고, 최댓값은

$(-1-1)^2-2=2$

$t=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$(1-1)^2-2=-2$

답 최댓값: 2, 최솟값: -2

31 $y=(\log_{\frac{1}{5}} x)^2+\log_{\frac{1}{5}} x^4-6$

$=(\log_{\frac{1}{5}} x)^2+4\log_{\frac{1}{5}} x-6$

$\log_{\frac{1}{5}} x=t$로 놓으면 주어진 함수는

$y=t^2+4t-6=(t+2)^2-10$

이때 $\frac{1}{25} \le x \le 25$에서

$\log_{\frac{1}{5}} 25 \le \log_{\frac{1}{5}} x \le \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{25}$

$\log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \le \log_{\frac{1}{5}} x \le \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^2$

$\therefore -2 \le t \le 2$

따라서 $-2 \le t \le 2$에서 함수 $y=(t+2)^2-10$은

$t=2$일 때 최대이고, 최댓값은

$(2+2)^2-10=6$

$t=-2$일 때 최소이고, 최솟값은

$(-2+2)^2-10=-10$

답 최댓값: 6, 최솟값: -10

32 $y=\log_3 x \cdot \log_3 \frac{9}{x}$

$=\log_3 x(\log_3 9-\log_3 x)$

$=\log_3 x(\log_3 3^2-\log_3 x)$

$=\log_3 x(2-\log_3 x)$

$=-(\log_3 x)^2+2\log_3 x$

$\log_3 x=t$로 놓으면 주어진 함수는

$y=-t^2+2t=-(t-1)^2+1$

이때 $\frac{1}{81} \le x \le 27$에서

$\log_3 \frac{1}{81} \le \log_3 x \le \log_3 27$

$\log_3 3^{-4} \le \log_3 x \le \log_3 3^3$

$\therefore -4 \le t \le 3$

따라서 $-4 \le t \le 3$에서 함수 $y=-(t-1)^2+1$은

$t=1$일 때 최대이고, 최댓값은

$-(1-1)^2+1=1$

$t=-4$일 때 최소이고, 최솟값은

$-(-4-1)^2+1=-24$

답 최댓값: 1, 최솟값: -24

베이직쎈 BOX

$a>0$, $a \ne 1$, $b>0$일 때

$\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$

(단, $m \ne 0$)

$a>0$, $a \ne 1$, $b>0$, $b \ne 1$일 때

$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 73쪽

01 $\frac{1}{2}<\frac{4}{3}<2$이고 함수 $y=\log_a x$는 $0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\log_a 2<\log_a \frac{4}{3}<\log_a \frac{1}{2}$

$\therefore B<A<C$

답 ③

02 $2\log_{\frac{1}{2}} 3=\log_{\frac{1}{2}} 3^2=\log_{\frac{1}{2}} 9$,

$-3=\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=\log_{\frac{1}{2}} 8$,

$\log_{\frac{1}{4}} 80=\log_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} 80=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} 80=\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{80}$

이때 $8<\sqrt{80}<9$이고 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\log_{\frac{1}{2}} 9<\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{80}<\log_{\frac{1}{2}} 8$

$\therefore 2\log_{\frac{1}{2}} 3<\log_{\frac{1}{4}} 80<-3$

답 $2\log_{\frac{1}{2}} 3<\log_{\frac{1}{4}} 80<-3$

03 함수 $y=\log_5 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $1<a<5$에서

$\log_5 1<\log_5 a<\log_5 5$

$\therefore 0<\log_5 a<1$

$\log_5 \frac{1}{a}=\log_5 a^{-1}=-\log_5 a$이므로

$-1<-\log_5 a<0$

$\log_a 5=\frac{1}{\log_5 a}$이므로 $\frac{1}{\log_5 a}>1$

$\therefore \log_5 \frac{1}{a}<\log_5 a<\log_a 5$

따라서 가장 작은 수는 $\log_5 \frac{1}{a}$이다.

답 $\log_5 \frac{1}{a}$

04 함수 $y=\log_6 x+2$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $\frac{1}{6} \le x \le 36$에서

$x=36$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_6 36+2=\log_6 6^2+2=2+2=4$

$x=\frac{1}{6}$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_6 \frac{1}{6}+2=\log_6 6^{-1}+2=-1+2=1$

따라서 $M=4$, $m=1$이므로

$M+m=5$

답 ①

05 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}}(x-3)+5$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $4 \le x \le 11$에서 $x=4$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_{\frac{1}{4}}(4-3)+5=\log_{\frac{1}{4}} 1+5=0+5=5$

따라서 $a=4$, $M=5$이므로

$aM=20$

답 20

베이직쎈 BOX

06 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)+k$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $x=4$일 때 최솟값을 갖는다.
즉 $\log_{\frac{1}{3}}(8+1)+k=-5$이므로

$$\log_{\frac{1}{3}}9+k=-5, \qquad \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+k=-5$$
$$-2+k=-5 \qquad \therefore k=-3$$

답 -3

07 함수 $f(x)=\log_3(x-a)-3$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $x=16$일 때 최댓값을 갖는다.
즉 $\log_3(16-a)-3=-1$이므로

$$\log_3(16-a)=2$$
$$16-a=3^2 \qquad \therefore a=7$$

따라서 $f(x)=\log_3(x-7)-3$이므로 구하는 최솟값은

$$\log_3(10-7)-3=\log_3 3-3$$
$$=1-3=-2$$

> $f(x)$는 $x=10$일 때 최솟값을 갖는다.

답 ④

08 $f(x)=-x^2+4x$로 놓으면

$$f(x)=-(x-2)^2+4$$

$y=\log_2(-x^2+4x)=\log_2 f(x)$에서 밑이 1보다 크므로 $f(x)$가 최대일 때 y는 최댓값을 갖는다.

> $1\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 4를 갖는다.

따라서 $y=\log_2 f(x)$는 $f(x)=4$, 즉 $x=2$일 때 최댓값 $\log_2 4=2$를 가지므로 $\quad a=2,\ b=2$

$$\therefore a+b=4$$

답 ⑤

09 $f(x)=x^2-6x+18$로 놓으면

$$f(x)=(x-3)^2+9$$

$f(0)=18$, $f(3)=9$, $f(7)=25$이므로 $0\le x\le 7$에서

$$9\le f(x)\le 25$$

따라서 $y=\log_5(x^2-6x+18)=\log_5 f(x)$는
$f(x)=25$일 때 최대이고, 최댓값은

$$\log_5 25=\log_5 5^2=2$$

$f(x)=9$일 때 최소이고, 최솟값은

$$\log_5 9=\log_5 3^2=2\log_5 3$$

따라서 구하는 곱은

$$2\cdot 2\log_5 3=4\log_5 3$$

답 ④

10 $f(x)=x^2-4x+k$로 놓으면

$$f(x)=(x-2)^2+k-4$$

$y=\log_{\frac{1}{3}}(x^2-4x+k)=\log_{\frac{1}{3}}f(x)$에서 밑이 1보다 작으므로 $f(x)$가 최소일 때 y는 최댓값을 갖는다.
따라서 $y=\log_{\frac{1}{3}}f(x)$는 $f(x)=k-4$일 때 최댓값 -1을 가지므로 $\quad \log_{\frac{1}{3}}(k-4)=-1$

> $-2\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 $k-4$를 갖는다.

$$k-4=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3 \qquad \therefore k=7$$

답 7

11 진수의 조건에서 $\quad 5-x>0,\ x+3>0$

> $\log_{f(x)}g(x)$가 정의되려면
> ➡ $f(x)>0$, $f(x)\ne 1$, $g(x)>0$

$$\therefore -3<x<5$$
$$y=\log_{\frac{1}{4}}(5-x)+\log_{\frac{1}{4}}(x+3)$$
$$=\log_{\frac{1}{4}}(5-x)(x+3)$$
$$=\log_{\frac{1}{4}}(-x^2+2x+15)$$

이므로 $f(x)=-x^2+2x+15$로 놓으면

$$f(x)=-(x-1)^2+16$$

$y=\log_{\frac{1}{4}}(-x^2+2x+15)=\log_{\frac{1}{4}}f(x)$에서 밑이 1보다 작으므로 $f(x)$가 최대일 때 y는 최솟값을 갖는다.

> $-3<x<5$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 16을 갖는다.

따라서 $y=\log_{\frac{1}{4}}f(x)$는 $f(x)=16$일 때 최솟값을 가지므로 구하는 최솟값은

$$\log_{\frac{1}{4}}16=\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=-2$$

답 -2

12 $y=(\log_3 x)^2-3\log_3 x^2+4$

$$=(\log_3 x)^2-6\log_3 x+4$$

$\log_3 x=t$로 놓으면 주어진 함수는

$$y=t^2-6t+4=(t-3)^2-5$$

이때 $1\le x\le 27$에서

$$\log_3 1\le \log_3 x\le \log_3 27$$
$$\log_3 1\le \log_3 x\le \log_3 3^3$$
$$\therefore 0\le t\le 3$$

따라서 $0\le t\le 3$에서 함수 $y=(t-3)^2-5$는
$t=0$일 때 최대이고, 최댓값은

$$(0-3)^2-5=4$$

$t=3$일 때 최소이고, 최솟값은

$$(3-3)^2-5=-5$$

따라서 $M=4$, $m=-5$이므로

$$M+m=-1$$

답 -1

13 $\log_{\frac{1}{5}}x=t$로 놓으면 주어진 함수는

$$y=t^2-4t+11=(t-2)^2+7$$

이때 $\frac{1}{25}\le x\le 5$에서

$$\log_{\frac{1}{5}}5\le \log_{\frac{1}{5}}x\le \log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{25}$$
$$\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\le \log_{\frac{1}{5}}x\le \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{2}$$
$$\therefore -1\le t\le 2$$

따라서 $-1\le t\le 2$에서 함수 $y=(t-2)^2+7$은 $t=2$, 즉 $x=\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$일 때 최솟값 7을 가지므로

> $t=2$일 때
> $\log_{\frac{1}{5}}x=2$
> $\therefore x=\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$

$$a=\frac{1}{25},\ b=7$$
$$\therefore ab=\frac{7}{25}$$

답 ③

14 $y=\log_{\frac{1}{2}}x\cdot\log_{\frac{1}{2}}\frac{4}{x}$

$$=\log_{\frac{1}{2}}x(\log_{\frac{1}{2}}4-\log_{\frac{1}{2}}x)$$
$$=\log_{\frac{1}{2}}x\left\{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-\log_{\frac{1}{2}}x\right\}$$
$$=\log_{\frac{1}{2}}x(-2-\log_{\frac{1}{2}}x)$$
$$=-(\log_{\frac{1}{2}}x)^2-2\log_{\frac{1}{2}}x$$

$\log_{\frac{1}{2}}x=t$로 놓으면 주어진 함수는

$$y=-t^2-2t=-(t+1)^2+1$$

따라서 y는 $t=-1$일 때 최댓값 1을 갖는다.

답 1

04 로그함수

베이직쎈 BOX

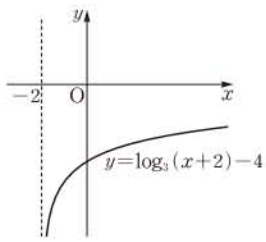
학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 75쪽

01 전략 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y-b=f(x-a)$이고, 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=f(-x)$임을 이용한다.

풀이 ① 밑이 1보다 크므로 $a<b$이면 $f(a)<f(b)$이다.

②, ③ $y=\log_3(x+2)-4$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



이때 정의역은 $\{x|x>-2\}$이고 치역은 실수 전체의 집합이다.

④ 일대일함수이므로 $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다.

> 함수 $f: X \longrightarrow Y$가 일대일함수이다.
> ➡ $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이다. $(x_1, x_2 \in X)$
> ➡ $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다. $(x_1, x_2 \in X)$

⑤ $y=\log_3(x+2)-4$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y=\log_3(-x+2)-4$$
$$\therefore y=-\log_3(-x+2)+4$$
$$=\log_{\frac{1}{3}}(-x+2)+4$$

따라서 두 함수 $y=\log_3(x+2)-4$, $y=\log_{\frac{1}{3}}(-x+2)+4$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

답 ④, ⑤

02 전략 함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\log_a(x-m)+n$임을 이용한다.

풀이 $y=\log_5(25x-100)$
$=\log_5 25(x-4)$
$=\log_5 25+\log_5(x-4)$
$=2+\log_5(x-4)$

$y=\log_5(x-4)+2$의 그래프는 $y=\log_5 x$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$m=4$, $n=2$

$\therefore mn=8$

답 ④

03 전략 평행이동과 대칭이동의 순서에 유의한다.

풀이 $y=\log_4 x+3$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-5=\log_4(x+3)+3$

$\therefore y=\log_4(x+3)+8$

이 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\log_4(-x+3)+8$

따라서 $g(x)=\log_4(-x+3)+8$이므로

$g(-1)=\log_4 4+8=1+8=9$

답 ②

04 전략 로그함수 $y=f(x)$의 역함수가 $y=g(x)$일 때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점을 직선 $y=x$가 지난다.

풀이 함수 $y=\log_a x+b$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점을 직선 $y=x$가 지나므로 함수 $y=\log_a x+b$의 그래프는 두 점 (1, 1), (2, 2)를 지난다.

즉 $1=\log_a 1+b$에서 $b=1$

따라서 $y=\log_a x+1$의 그래프가 점 (2, 2)를 지나므로

$2=\log_a 2+1$에서

$\log_a 2=1$ $\therefore a=2$

$\therefore a+b=3$

답 ③

05 전략 함수 $y=\log_a x$는 $0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소함을 이용한다.

> 로그의 대소 비교
> ① $a>1$일 때
> $x_1<x_2$이면 $\log_a x_1<\log_a x_2$
> ② $0<a<1$일 때
> $x_1<x_2$이면 $\log_a x_1>\log_a x_2$

풀이 ㄱ. $\log_3 8$, $\log_3 7$에서 $8>7$이고, 함수 $y=\log_3 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$\log_3 8>\log_3 7$

ㄴ. $-2=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=\log_{\frac{1}{2}}4$

이때 $5>4$이고 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\log_{\frac{1}{2}}5<\log_{\frac{1}{2}}4$ $\therefore \log_{\frac{1}{2}}5<-2$

ㄷ. $\log_{\frac{1}{9}}9=\log_{\left(\frac{1}{3}\right)^2}3^2=\log_{\frac{1}{3}}3$

이때 $2<3$이고 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\log_{\frac{1}{3}}2>\log_{\frac{1}{3}}3$ $\therefore \log_{\frac{1}{3}}2>\log_{\frac{1}{9}}9$

ㄹ. $2\log_5 6=\log_5 6^2=\log_5 36$,

$3\log_5 3=\log_5 3^3=\log_5 27$

이때 $36>27$이고 함수 $y=\log_5 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$\log_5 36>\log_5 27$

$\therefore 2\log_5 6>3\log_5 3$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

06 전략 함수 $y=\log_a f(x)$에서 $0<a<1$이면 $f(x)$가 최소일 때 y는 최대가 됨을 이용한다.

풀이 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-a)+5$는 밑이 1보다 작으므로 $x=-2$일 때 최댓값 4를 갖는다.

즉 $\log_{\frac{1}{2}}(-2-a)+5=4$이므로

$\log_{\frac{1}{2}}(-2-a)=-1$

$-2-a=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $-2-a=2$

$\therefore a=-4$

답 ⑤

07 전략 $\log_2 x=t$로 놓고 주어진 함수를 t에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\log_2 x=t$로 놓으면 주어진 함수는

$y=t^2-6t+5=(t-3)^2-4$

이때 $2\le x\le 64$에서

$\log_2 2\le\log_2 x\le\log_2 64$

$\log_2 2\le\log_2 x\le\log_2 2^6$

$\therefore 1\le t\le 6$

따라서 $1\le t\le 6$에서 함수 $y=(t-3)^2-4$는 $t=6$일 때 최대이고, 최댓값은

$(6-3)^2-4=5$

$t=3$일 때 최소이고, 최솟값은

$(3-3)^2-4=-4$

따라서 구하는 곱은 $5\cdot(-4)=-20$ 답 ②

08 전략 함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\ne1)$의 그래프가 점 $(m,\ n)$을 지나면 $n=\log_a m$에서 $m=a^n$임을 이용한다.

풀이 $\log_3 x_1=0$에서 $x_1=1$

$\log_3 x_2=1$에서 $x_2=3^1=3$

$\log_3 x_3=3$에서 $x_3=3^3=27$

$\therefore x_1+x_2+x_3=31$ 답 31

직선 $y=x$ 위의 점의 x좌표와 y좌표가 같음을 이용한다.

09 전략 함수 $y=\log_a(x-m)+n$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=m$임을 이용한다.

풀이 점근선의 방정식이 $x=8$이므로

$a=8$ ⋯ ❶

따라서 $f(x)=\log_4(x-8)+b$이므로 $f(12)=-5$에서

$\log_4 4+b=-5,\quad 1+b=-5$

$\therefore b=-6$ ⋯ ❷

$\therefore a-b=14$ ⋯ ❸

답 14

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷	b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸	$a-b$의 값을 구할 수 있다.	20%

10 전략 함수 $y=a^x\ (a>0,\ a\ne1)$의 역함수는 $y=\log_a x$임을 이용한다.

풀이 $g(x)=\log_6 x$이므로

$g(a)=\log_6 a=\frac{1}{4},\ g(b)=\log_6 b=\frac{1}{6}$

$\therefore g(ab)=\log_6 ab$

$=\log_6 a+\log_6 b$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$ 답 $\frac{5}{12}$

11 전략 $a<b<1$의 각 변에 밑이 a인 로그와 밑이 b인 로그를 각각 취해 본다.

풀이 함수 $y=\log_a x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $a<b<1$의 각 변에 밑이 a인 로그를 취하면

$\log_a 1<\log_a b<\log_a a$

$\therefore 0<\log_a b<1$ ⋯⋯ ㉠

또 함수 $y=\log_b x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $a<b<1$의 각 변에 밑이 b인 로그를 취하면

$\log_b 1<\log_b b<\log_b a$

$\therefore \log_b a>1$

한편 $\log_a \frac{b}{a}=\log_a b-\log_a a=\log_a b-1$이므로 ㉠에서

$-1<\log_a b-1<0$

$\therefore -1<\log_a \frac{b}{a}<0$

$\therefore \log_a \frac{b}{a}<\log_a b<\log_b a$

답 $\log_a \frac{b}{a}<\log_a b<\log_b a$

12 전략 주어진 정의역에서 $-x^2+4x+5$의 최솟값은 없음을 이용하여 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 $f(x)=-x^2+4x+5$로 놓으면

$f(x)=-(x-2)^2+9$

$0<x<3$에서 $f(x)$의 최댓값은 9이고 최솟값은 없다.

그런데 주어진 함수가 최솟값을 가지므로 $0<a<1$이다.

즉 $\log_a 9=-2$이므로

$a^{-2}=9,\quad \frac{1}{a^2}=9$

$\therefore a=\frac{1}{3}\ (\because 0<a<1)$ 답 $\frac{1}{3}$

13 전략 $\log_5 x=t$로 놓고 주어진 함수를 t에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $y=-(\log_5 x)^2+a\log_{\frac{1}{5}} x+b$

$=-(\log_5 x)^2-a\log_5 x+b$

$\log_5 x=t$로 놓으면

$y=-t^2-at+b$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

주어진 함수가 $x=\frac{1}{25}$, 즉 $t=\log_5 \frac{1}{25}=-2$일 때 최댓값 10을 가지므로

$y=-(t+2)^2+10$

$=-t^2-4t+6$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡이 서로 일치하므로

$a=4,\ b=6$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=10$ ⋯ ❸

답 10

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 함수를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷	$a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	60%
❸	$a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

Ⅱ. 지수함수와 로그함수

05 지수함수와 로그함수의 활용

09 지수함수의 활용

개념 26 지수방정식

본책 78쪽

01 답 $x=3$ 　 3, 3, 3

02 $3^{2x-1}=27$에서 $3^{2x-1}=3^3$이므로

$2x-1=3,\quad 2x=4\quad \therefore x=2$ 　 답 $x=2$

03 $16^x=4\cdot 4^{3x}$에서 $4^{2x}=4^{1+3x}$이므로

$2x=1+3x\quad \therefore x=-1$ 　 답 $x=-1$

04 $4^{x+2}=8^{3-x}$에서 $2^{2x+4}=2^{9-3x}$이므로

$2x+4=9-3x,\quad 5x=5\quad \therefore x=1$ 　 답 $x=1$

05 $25^{2x}=\left(\frac{1}{5}\right)^{9-x}$에서 $5^{4x}=5^{x-9}$이므로

$4x=x-9,\quad 3x=-9\quad \therefore x=-3$

답 $x=-3$

06 $\sqrt{2^x}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$에서 $2^{\frac{x}{2}}=2^{1-x}$이므로

$\frac{x}{2}=1-x,\quad \frac{3}{2}x=1\quad \therefore x=\frac{2}{3}$ 　 답 $x=\frac{2}{3}$

07 $3^{x^2+5x}=9^{x+2}$에서 $3^{x^2+5x}=3^{2x+4}$이므로

$x^2+5x=2x+4,\quad x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0\quad \therefore x=-4$ 또는 $x=1$

답 $x=-4$ 또는 $x=1$

08 $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-7x}=\left(\frac{4}{3}\right)^{-2+6x}$에서 $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-7x}=\left(\frac{3}{4}\right)^{2-6x}$이므로 $x^2-7x=2-6x$

$x^2-x-2=0,\quad (x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$ 　 답 $x=-1$ 또는 $x=2$

09 답 $x=0$ 　 3^x, t^2, $t-1$, 1, 1, 0, 0

10 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{1}{2}\right)^x-6=0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2+\left(\frac{1}{2}\right)^x-6=0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2+t-6=0$

$(t+3)(t-2)=0\quad \therefore t=2\ (\because t>0)$

즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$\therefore x=-1$ 　 답 $x=-1$

11 $25^x-2\cdot 5^x+1=0$에서 $(5^x)^2-2\cdot 5^x+1=0$

$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-2t+1=0$

$(t-1)^2=0\quad \therefore t=1$

즉 $5^x=1$이므로 $5^x=5^0\quad \therefore x=0$ 　 답 $x=0$

베이직쎈 BOX

$4^{x+2}=8^{3-x}$에서
$(2^2)^{x+2}=(2^3)^{3-x}$
$\therefore 2^{2x+4}=2^{9-3x}$

$25^{2x}=\left(\frac{1}{5}\right)^{9-x}$에서
$(5^2)^{2x}=(5^{-1})^{9-x}$
$\therefore 5^{4x}=5^{x-9}$

$3^0=5^0=1$과 같이 밑이 서로 달라도 지수가 0이면 등식이 성립하므로 지수가 0임을 이용한다.

12 $4^x-2^{x+1}-8=0$에서 $(2^x)^2-2\cdot 2^x-8=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-2t-8=0$

$(t+2)(t-4)=0\quad \therefore t=4\ (\because t>0)$

즉 $2^x=4$이므로 $2^x=2^2\quad \therefore x=2$ 　 답 $x=2$

13 $\left(\frac{1}{9}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-18=0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-18=0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2+3t-18=0$

$(t+6)(t-3)=0\quad \therefore t=3\ (\because t>0)$

즉 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=3$이므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

$\therefore x=-1$ 　 답 $x=-1$

14 $\frac{1}{25^x}-3\cdot 5^{-x}-10=0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}^2-3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x-10=0$

$\left(\frac{1}{5}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-3t-10=0$

$(t+2)(t-5)=0\quad \therefore t=5\ (\because t>0)$

즉 $\left(\frac{1}{5}\right)^x=5$이므로 $\left(\frac{1}{5}\right)^x=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$

$\therefore x=-1$ 　 답 $x=-1$

15 $(2^x-3)(2^x-7)=5$에서 $(2^x)^2-10\cdot 2^x+21=5$

$\therefore (2^x)^2-10\cdot 2^x+16=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-10t+16=0$

$(t-2)(t-8)=0\quad \therefore t=2$ 또는 $t=8$

즉 $2^x=2$ 또는 $2^x=8$이므로

$x=1$ 또는 $x=3$ 　 답 $x=1$ 또는 $x=3$

16 답 $x=2$ 　 t, $t-4$, 4, 4, 2, 2

17 $5^{x+2}+5^{-x}=10$에서 $25\cdot 5^x+\frac{1}{5^x}-10=0$

$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $25t+\frac{1}{t}-10=0$

양변에 t를 곱하면 $25t^2-10t+1=0$

$(5t-1)^2=0\quad \therefore t=\frac{1}{5}$

즉 $5^x=\frac{1}{5}$이므로 $5^x=5^{-1}$

$\therefore x=-1$ 　 답 $x=-1$

18 답 $x=-\frac{3}{2}$ 　 0, -3, $-\frac{3}{2}$

19 $4^{-x+6}=\left(\frac{1}{6}\right)^{x-6}$에서 $4^{-x+6}=6^{-x+6}$

밑은 다르고, 지수는 같으므로

$-x+6=0\quad \therefore x=6$ 　 답 $x=6$

20 답 $x=1$ 또는 $x=2$ 　 $6-x$, 2, 1, 2

베이직쎈 BOX

21 (i) $x+1=1$, 즉 $x=0$일 때, $1^{-7}=1^{-1}$이므로 등식이 성립한다.

밑이 1인 경우

(ii) $x+1\neq1$일 때, $4x-7=2x-1$에서

지수가 같은 경우

$2x=6$ $\quad\therefore x=3$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=0$ 또는 $x=3$ 답 $x=0$ 또는 $x=3$

22 답 $x=4$ 또는 $x=9$ 0, 4, 1, 6, 9, 4, 9

23 (i) $3x-1=0$, 즉 $x=\frac{1}{3}$일 때,

지수가 0인 경우

$\left(\frac{5}{3}\right)^0=\left(\frac{10}{3}\right)^0=1$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $3x-1\neq0$일 때, $2x+1=x+3$에서 $\quad x=2$

밑이 같은 경우

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=2$ 답 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=2$

개념 27 지수부등식

본책 80쪽

24 답 $x>4$ 4, $>$, 4, 4

25 $3^{x-1}<81$에서 $\quad 3^{x-1}<3^4$

밑이 1보다 크므로 $\quad x-1<4$

$\therefore x<5$ 답 $x<5$

26 $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}\geq\left(\frac{1}{8}\right)^{2x-3}$에서 $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{6x-9}$

$\left(\frac{1}{8}\right)^{2x-3}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}^{2x-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{6x-9}$

밑이 1보다 작으므로 $\quad 3x\leq6x-9$

$-3x\leq-9$ $\quad\therefore x\geq3$ 답 $x\geq3$

27 $(\sqrt{5})^{4x}<5^{6-x}$에서 $\quad 5^{2x}<5^{6-x}$

$(\sqrt{5})^{4x}=(5^{\frac{1}{2}})^{4x}=5^{2x}$

밑이 1보다 크므로 $\quad 2x<6-x$

$3x<6$ $\quad\therefore x<2$ 답 $x<2$

28 $0.3^{2x}>0.09^{4-x}$에서 $\quad 0.3^{2x}>0.3^{8-2x}$

$0.09^{4-x}=(0.3^2)^{4-x}=0.3^{8-2x}$

밑이 1보다 작으므로 $\quad 2x<8-2x$

$4x<8$ $\quad\therefore x<2$ 답 $x<2$

29 $3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}\geq48$에서 $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}\geq16$

$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

밑이 1보다 작으므로 $\quad x-2\leq-4$

$\therefore x\leq-2$ 답 $x\leq-2$

30 $5^{x^2-1}\leq125^{x+3}$에서 $\quad 5^{x^2-1}\leq5^{3x+9}$

밑이 1보다 크므로 $\quad x^2-1\leq3x+9$

$x^2-3x-10\leq0$, $\quad (x+2)(x-5)\leq0$

$\therefore -2\leq x\leq5$ 답 $-2\leq x\leq5$

31 $\frac{1}{64}<4^x\leq16$에서 $\quad 4^{-3}<4^x\leq4^2$

밑이 1보다 크므로 $\quad -3<x\leq2$ 답 $-3<x\leq2$

32 $\frac{1}{25}\leq5^{2x}<5\sqrt{5}$에서 $\quad 5^{-2}\leq5^{2x}<5^{\frac{3}{2}}$

밑이 1보다 크므로 $\quad -2\leq2x<\frac{3}{2}$

$\therefore -1\leq x<\frac{3}{4}$ 답 $-1\leq x<\frac{3}{4}$

33 $\frac{1}{81}\leq\left(\frac{1}{3}\right)^x\leq27$에서 $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^4\leq\left(\frac{1}{3}\right)^x\leq\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

밑이 1보다 작으므로 $\quad -3\leq x\leq4$ 답 $-3\leq x\leq4$

34 답 $x\geq1$ 3^x, t^2, $t-3$, -2, 3, 3, 1, 1

35 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-28>0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-28>0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2+3t-28>0$

$(t+7)(t-4)>0$ $\quad\therefore t<-7$ 또는 $t>4$

그런데 $t>0$이므로 $\quad t>4$

즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^x>4$에서 $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

밑이 1보다 작으므로 $\quad x<-2$ 답 $x<-2$

36 $4^x-10\cdot2^x+16\leq0$에서 $\quad (2^x)^2-10\cdot2^x+16\leq0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-10t+16\leq0$

$(t-2)(t-8)\leq0$ $\quad\therefore 2\leq t\leq8$

즉 $2\leq2^x\leq8$에서 $\quad 2\leq2^x\leq2^3$

밑이 1보다 크므로 $\quad 1\leq x\leq3$ 답 $1\leq x\leq3$

37 $\left(\frac{1}{9}\right)^x-12\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+27<0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-12\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+27<0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-12t+27<0$

$(t-3)(t-9)<0$ $\quad\therefore 3<t<9$

즉 $3<\left(\frac{1}{3}\right)^x<9$에서 $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}<\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

밑이 1보다 작으므로 $\quad -2<x<-1$

답 $-2<x<-1$

38 $2^{2x+1}-5\cdot2^x+2\leq0$에서 $\quad 2\cdot(2^x)^2-5\cdot2^x+2\leq0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad 2t^2-5t+2\leq0$

$(2t-1)(t-2)\leq0$ $\quad\therefore \frac{1}{2}\leq t\leq2$

즉 $\frac{1}{2}\leq2^x\leq2$에서 $\quad 2^{-1}\leq2^x\leq2$

밑이 1보다 크므로 $\quad -1\leq x\leq2$ 답 $-1\leq x\leq2$

39 $3^{2x+1}-5\cdot3^x-3^{x+1}-3\geq0$에서

$3\cdot(3^x)^2-5\cdot3^x-3\cdot3^x-3\geq0$

$\therefore 3\cdot(3^x)^2-8\cdot3^x-3\geq0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad 3t^2-8t-3\geq0$

$(3t+1)(t-3)\geq0$ $\quad\therefore t\leq-\frac{1}{3}$ 또는 $t\geq3$

그런데 $t>0$이므로 $\quad t\geq3$

즉 $3^x\geq3$에서 밑이 1보다 크므로 $\quad x\geq1$ 답 $x\geq1$

40 $\left(\frac{1}{25}\right)^x-\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}<\left(\frac{1}{5}\right)^x-5$에서

$\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^2\right\}^x-5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x<\left(\frac{1}{5}\right)^x-5$

$\therefore \left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}^2-6\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x+5<0$

$\left(\frac{1}{5}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-6t+5<0$

$(t-1)(t-5)<0 \quad \therefore 1<t<5$

즉 $1<\left(\frac{1}{5}\right)^x<5$에서 $\left(\frac{1}{5}\right)^0<\left(\frac{1}{5}\right)^x<\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$

밑이 1보다 작으므로 $-1<x<0$ 답 $-1<x<0$

41 답 $x\geq1$ 3t, $t-2$, -5, 2, 2, 1, 1

42 $3^x-10+3^{-x+2}<0$에서 $3^x-10+\frac{9}{3^x}<0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t-10+\frac{9}{t}<0$

양변에 t를 곱하면 $t^2-10t+9<0$

$(t-1)(t-9)<0 \quad \therefore 1<t<9$

즉 $1<3^x<9$에서 $3^0<3^x<3^2$

밑이 1보다 크므로 $0<x<2$ 답 $0<x<2$

43 답 $0<x\leq1$ $\leq$, $\leq$, $\geq$, $\geq$, $\geq$, $\leq$, $\leq$

44 $x>1$일 때, 밑이 1보다 크므로

$x^2-2x>-x+6,\quad x^2-x-6>0$

$(x+2)(x-3)>0 \quad \therefore x<-2$ 또는 $x>3$

그런데 $x>1$이므로 $x>3$

따라서 주어진 부등식의 해는 $x>3$ 답 $x>3$

45 (i) $x=1$일 때, $1^3<1^6$이므로 부등식이 성립하지 않는다. 밑이 1인 경우

(ii) $0<x<1$일 때, 밑이 1보다 작으므로 $0<(\text{밑})<1$

$2x+1>x+5 \quad \therefore x>4$

그런데 $0<x<1$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x>1$일 때, 밑이 1보다 크므로 $(\text{밑})>1$

$2x+1<x+5 \quad \therefore x<4$

그런데 $x>1$이므로 $1<x<4$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$1<x<4$ 답 $1<x<4$

46 (i) $x=1$일 때, $1^0\leq1^5$이므로 부등식이 성립한다. 밑이 1인 경우

(ii) $0<x<1$일 때, 밑이 1보다 작으므로 $0<(\text{밑})<1$

$x^2-x\geq-3x+8,\quad x^2+2x-8\geq0$

$(x+4)(x-2)\geq0 \quad \therefore x\leq-4$ 또는 $x\geq2$

그런데 $0<x<1$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x>1$일 때, 밑이 1보다 크므로 $(\text{밑})>1$

$x^2-x\leq-3x+8,\quad x^2+2x-8\leq0$

$(x+4)(x-2)\leq0 \quad \therefore -4\leq x\leq2$

그런데 $x>1$이므로 $1<x\leq2$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$1\leq x\leq2$ 답 $1\leq x\leq2$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 82쪽

01 $2^{-3+x}=4^{x-3}$에서 $2^{-3+x}=2^{2x-6}$이므로

$-3+x=2x-6 \quad \therefore x=3$

따라서 $a=3$이므로 $4a=12$ 답 ②

02 $27^x-3^{x^2-4}=0$에서 $3^{3x}=3^{x^2-4}$이므로

$3x=x^2-4,\quad x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=4$

따라서 모든 근의 합은

$-1+4=3$ 답 3

03 $8^{x^2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-x+a}$에서 $2^{3x^2}=2^{2x-2a}$이므로

$3x^2=2x-2a$

$\therefore 3x^2-2x+2a=0$ …… ㉠

이때 주어진 방정식의 한 근이 2이므로 ㉠에 $x=2$를 대입하면

$12-4+2a=0,\quad 2a=-8$

$\therefore a=-4$ 답 ③

04 $(2^x-16)(4^{2x}-64)=0$에서

$2^x-16=0$ 또는 $4^{2x}-64=0$

$2^x-16=0$에서 $2^x=16$이므로

$2^x=2^4 \quad \therefore x=4$

$4^{2x}-64=0$에서 $4^{2x}=64$이므로

$4^{2x}=4^3 \quad \therefore x=\frac{3}{2}$

따라서 $\alpha=4$, $\beta=\frac{3}{2}$ 또는 $\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=4$이므로

$\alpha\beta=6$ 답 ③

05 $4^x-9\cdot2^x+8=0$에서 $(2^x)^2-9\cdot2^x+8=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-9t+8=0$

$(t-1)(t-8)=0 \quad \therefore t=1$ 또는 $t=8$

즉 $2^x=1$ 또는 $2^x=8$이므로

$x=0$ 또는 $x=3$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=3$이므로

$\beta-\alpha=3$ 답 ②

06 $3\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^x-28\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+9=0$에서

$3\cdot\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-28\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+9=0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $3t^2-28t+9=0$

$(3t-1)(t-9)=0 \quad \therefore t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=9$

즉 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{3}$ 또는 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=9$이므로

$x=1$ 또는 $x=-2$

따라서 구하는 곱은

$1\cdot(-2)=-2$ 답 -2

베이직쎈 BOX

07 $64^x-16^x=30\cdot4^x$에서

$(4^x)^3-(4^x)^2-30\cdot4^x=0$

$4^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^3-t^2-30t=0$

$t(t+5)(t-6)=0$ $\therefore t=6\ (\because t>0)$

즉 $4^a=6$이므로 $2^a=\sqrt{6}\ (\because 2^a>0)$ 답 $\sqrt{6}$

$4^a=6$에서

$(2^2)^a=6,\quad 2^{2a}=6$

$\therefore 2^a=6^{\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$

참고 $4^x=6$에서 $x=\log_4 6$이므로 $a=\log_4 6$

08 $6^{x+1}+6^{-x}=7$에서 $6\cdot6^x+\frac{1}{6^x}-7=0$

$6^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $6t+\frac{1}{t}-7=0$

양변에 t를 곱하면 $6t^2-7t+1=0$

$(6t-1)(t-1)=0$ $\therefore t=\frac{1}{6}$ 또는 $t=1$

즉 $6^x=\frac{1}{6}$ 또는 $6^x=1$이므로

$x=-1$ 또는 $x=0$

따라서 $\alpha=-1,\ \beta=0$이므로

$\alpha-\beta=-1$ 답 ⑤

09 $9^x-4\cdot3^{x+1}+9=0$에서 $(3^x)^2-12\cdot3^x+9=0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-12t+9=0$

이 이차방정식의 두 근이 3^α, 3^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

이차방정식
$ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$,
$\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$3^\alpha\cdot3^\beta=9,$ $3^{\alpha+\beta}=3^2$

$\therefore \alpha+\beta=2$ 답 2

베센 TIP

x에 대한 방정식 $(a^x)^2-pa^x+q=0$ (p, q는 상수)의 두 근이 α, β일 때, $a^x=t\ (t>0)$로 놓으면 t에 대한 방정식 $t^2-pt+q=0$의 두 근은 a^α, a^β이다.

10 (i) $x=1$일 때,

$1^1=1^{25}$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x\neq1$일 때, $x^2=4x+21$에서

$x^2-4x-21=0,$ $(x+3)(x-7)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=7$

그런데 $x>0$이므로 $x=7$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=1$ 또는 $x=7$

따라서 모든 근의 곱은

$1\cdot7=7$ 답 ③

11 (i) $x-8=0$, 즉 $x=8$일 때,

$13^0=7^0=1$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x-8\neq0$일 때, $x+5=7$에서

$x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=2$ 또는 $x=8$

따라서 모든 x의 값의 합은

$2+8=10$ 답 ②

12 (i) $6x=0$, 즉 $x=0$일 때,

$5^0=3^0=1$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $6x\neq0$일 때, $4x+5=x+3$에서

$3x=-2$ $\therefore x=-\frac{2}{3}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{3}$ 답 $x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{3}$

13 5마리의 미생물이 3시간 후 135마리가 되므로

$5a^3=135,$ $a^3=27$ $\therefore a=3$

5마리의 미생물이 x시간 후 $5\cdot3^x$마리가 되므로

$5\cdot3^x=1215$에서 $3^x=243$

$3^x=3^5$ $\therefore x=5$

따라서 미생물은 처음으로부터 5시간 후에 1215마리가 된다. 답 5시간

14 빛의 세기가 $\frac{A}{128}$ $\mathrm{W/m^2}$인 곳의 수심을 x m라 하면

$A\times2^{-\frac{x}{4}}=\frac{A}{128},$ $2^{-\frac{x}{4}}=\frac{1}{128}$

$2^{-\frac{x}{4}}=2^{-7},$ $-\frac{x}{4}=-7$ $\therefore x=28$

따라서 이 호수에서 빛의 세기가 $\frac{A}{128}$ $\mathrm{W/m^2}$인 곳의 수심은 28 m이다. 답 28 m

15 처음 ^{14}C의 양이 400 mg일 때 x년 후에 남아 있는 ^{14}C의 양이 50 mg이라 하면

$400\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}=50,$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}=\frac{50}{400}$

$\frac{50}{400}=\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}=\left(\frac{1}{2}\right)^3,$ $\frac{x}{5730}=3$

$\therefore x=17190$

따라서 유물은 17190년 전의 것이라 할 수 있다.

답 17190년

16 $9^{x+4}\leq\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+4x}$에서 $3^{2x+8}\leq3^{-x^2-4x}$

밑이 1보다 크므로 $2x+8\leq-x^2-4x$

$x^2+6x+8\leq0,$ $(x+4)(x+2)\leq0$

$\therefore -4\leq x\leq-2$

따라서 정수 x는 $-4,\ -3,\ -2$이므로 구하는 합은

$-4+(-3)+(-2)=-9$ 답 ②

17 $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x+15}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x+15}$

밑이 1보다 작으므로 $2x^2<x+15$

$2x^2-x-15<0,$ $(2x+5)(x-3)<0$

$\therefore -\frac{5}{2}<x<3$

따라서 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$의 5개이다. 답 5

18 $\left(\frac{1}{49}\right)^{x^2+3x-3}>\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2+x}$에서

$\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+6x-6}>\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2+x}$

밑이 1보다 작으므로 $2x^2+6x-6<x^2+x$

$x^2+5x-6<0$,　　$(x+6)(x-1)<0$

$\therefore -6<x<1$

따라서 $\alpha=-6$, $\beta=1$이므로

$\alpha\beta=-6$　　　답 ②

19 $4^x<\frac{\sqrt{2}}{8}<2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$에서　　$2^{2x}<2^{-\frac{5}{2}}<2^{1+x}$

밑이 1보다 크므로　　$2x<-\frac{5}{2}<1+x$

(i) $2x<-\frac{5}{2}$에서　　$x<-\frac{5}{4}$

(ii) $-\frac{5}{2}<1+x$에서　　$x>-\frac{7}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-\frac{7}{2}<x<-\frac{5}{4}$　　　답 $-\frac{7}{2}<x<-\frac{5}{4}$

베쎈TIP

$A<B<C$ 꼴의 부등식은 두 부등식 $A<B$와 $B<C$를 하나로 나타낸 것이므로 연립부등식 $\begin{cases}A<B\\B<C\end{cases}$ 꼴로 고쳐서 푼다.

20 $2^{2x+1}-5\cdot2^x+2\le0$에서　　$2\cdot(2^x)^2-5\cdot2^x+2\le0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면　　$2t^2-5t+2\le0$

$(2t-1)(t-2)\le0$　　$\therefore \frac{1}{2}\le t\le2$

즉 $\frac{1}{2}\le2^x\le2$에서　　$2^{-1}\le2^x\le2$

밑이 1보다 크므로　　$-1\le x\le1$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1의 3개이다.　　　답 ④

21 $25^x-14\cdot5^x+24<0$에서　　$(5^x)^2-14\cdot5^x+24<0$

$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면　　$t^2-14t+24<0$

$(t-2)(t-12)<0$　　$\therefore 2<t<12$

즉 $2<5^x<12$이고 밑이 1보다 크므로

$5^\alpha=2$, $5^\beta=12$

$\therefore 5^\alpha+5^\beta=14$　　　답 ⑤

22 $3^x-3^{1-x}>2$에서　　$3^x-\frac{3}{3^x}-2>0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면　　$t-\frac{3}{t}-2>0$

양변에 t를 곱하면　　$t^2-2t-3>0$

$(t+1)(t-3)>0$　　$\therefore t<-1$ 또는 $t>3$

그런데 $t>0$이므로　　$t>3$

즉 $3^x>3$에서 밑이 1보다 크므로

$x>1$　　　답 $x>1$

23 $\left(\frac{1}{3}\right)^x\ge\left(\frac{1}{3}\right)^{-2x+6}$에서 밑이 1보다 작으므로

$x\le-2x+6$,　　$3x\le6$

$\therefore x\le2$　　…… ㉠

$\left(\frac{1}{4}\right)^x-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+8<0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+8<0$

베이직쎈 BOX

$\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^3}=2^{-\frac{5}{2}}$

밑이 1보다 크므로
$\alpha<x<\beta$에서
$5^\alpha<5^x<5^\beta$
$\therefore 5^\alpha=2$, $5^\beta=12$

$\frac{450}{200}=\frac{9}{4}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면　　$t^2-6t+8<0$

$(t-2)(t-4)<0$　　$\therefore 2<t<4$

즉 $2<\left(\frac{1}{2}\right)^x<4$에서　　$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

밑이 1보다 작으므로　　$-2<x<-1$　　…… ㉡

㉠, ㉡에서 주어진 연립부등식의 해는

$-2<x<-1$　　　답 $-2<x<-1$

24 $x>1$일 때, 밑이 1보다 크므로

$2x+5>x^2+2$,　　$x^2-2x-3<0$

$(x+1)(x-3)<0$　　$\therefore -1<x<3$

그런데 $x>1$이므로　　$1<x<3$　　　답 ②

25 (i) $x=1$일 때, $1^1\le1^{13}$이므로 부등식이 성립한다.

(ii) $0<x<1$일 때, 밑이 1보다 작으므로

$6x-5\ge2x+11$

$4x\ge16$　　$\therefore x\ge4$

그런데 $0<x<1$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x>1$일 때, 밑이 1보다 크므로

$6x-5\le2x+11$

$4x\le16$　　$\therefore x\le4$

그런데 $x>1$이므로　　$1<x\le4$

이상에서 주어진 부등식의 해는 $1\le x\le4$이므로 모든 정수 x의 값의 합은

$1+2+3+4=10$　　　답 ④

26 (i) $x=1$일 때, $1^{-35}<1^5$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(ii) $0<x<1$일 때, 밑이 1보다 작으므로

$x^2-36>5x$,　　$x^2-5x-36>0$

$(x+4)(x-9)>0$　　$\therefore x<-4$ 또는 $x>9$

그런데 $0<x<1$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x>1$일 때, 밑이 1보다 크므로

$x^2-36<5x$,　　$x^2-5x-36<0$

$(x+4)(x-9)<0$　　$\therefore -4<x<9$

그런데 $x>1$이므로　　$1<x<9$

이상에서 주어진 부등식의 해는 $1<x<9$이므로 정수 x는 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 7개이다.　　　답 7

27 200만 원을 투자한 지 x년 후 투자 이익금이 450만 원 이상이 된다고 하면

$200\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{4}}\ge450$,　　$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{4}}\ge\frac{450}{200}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{4}}\ge\left(\frac{3}{2}\right)^2$,　　$\frac{x}{4}\ge2$　　$\therefore x\ge8$

따라서 처음 투자 금액이 200만 원일 때 투자 이익금이 450만 원 이상이 되기 위해서는 최소 8년을 투자해야 한다.　　　답 8년

28 처음의 빛의 양을 a라 하면 필름을 x장 붙인 유리를 통과한 빛의 양은

$a\cdot(1-0.6)^x=a\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x$

통과한 빛의 양이 처음의 양의 $\frac{16}{625}$ 이하가 되려면

$a\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x\le\frac{16}{625}a,\quad \left(\frac{2}{5}\right)^x\le\frac{16}{625}$

$\left(\frac{2}{5}\right)^x\le\left(\frac{2}{5}\right)^4\quad \therefore x\ge4$

따라서 필름을 최소 4장 붙여야 한다. 답 ③

29 x시간 후 혈중 농도는

$1.25\times(1-0.2)^x=1.25\times\left(\frac{4}{5}\right)^x$ (μg/mL)

혈중 농도가 0.64 μg/mL 이하가 되려면

$1.25\times\left(\frac{4}{5}\right)^x\le0.64,\quad \left(\frac{4}{5}\right)^x\le\frac{0.64}{1.25}$

$\left(\frac{4}{5}\right)^x\le\left(\frac{4}{5}\right)^3\quad \therefore x\ge3$

따라서 치료제의 혈중 농도가 처음으로 0.64 μg/mL 이하가 되는 것은 3시간 후이다. 답 3시간

10 로그함수의 활용

개념 28 로그방정식

본책 86쪽

01 답 $x=-2$ 🎯 1, 2, -2, -2

02 진수의 조건에서 $x+1>0$이므로

$x>-1$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=-2$에서 $x+1=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

$x+1=9\quad \therefore x=8$

$x=8$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다. 답 $x=8$

03 밑의 조건에서 $x>0,\ x\ne1$ …… ㉠

$\log_x 9=-2$에서 $x^{-2}=9$

$x^2=\frac{1}{9}\quad \therefore x=\pm\frac{1}{3}$

㉠에 의하여 구하는 해는 $x=\frac{1}{3}$이다. 답 $x=\frac{1}{3}$

04 밑의 조건에서 $2x>0,\ 2x\ne1$

$\therefore x>0,\ x\ne\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\log_{2x}64=2$에서 $(2x)^2=64$

$4x^2=64,\quad x^2=16\quad \therefore x=\pm4$

㉠에 의하여 구하는 해는 $x=4$이다. 답 $x=4$

05 답 $x=3$ 🎯 10, 3, 3

06 진수의 조건에서 $2x-1>0,\ 11-x>0$이므로

$x>\frac{1}{2},\ x<11\quad \therefore \frac{1}{2}<x<11$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{5}}(2x-1)=\log_{\frac{1}{5}}(11-x)$에서

$2x-1=11-x,\quad 3x=12\quad \therefore x=4$

$x=4$는 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다. 답 $x=4$

베이직쎈 BOX

$a>0,\ a\ne1,\ N>0$일 때 $\log_a N^k=k\log_a N$ (단, k는 실수)

$a>0,\ a\ne1,\ M>0,\ N>0$일 때 $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

$\frac{0.64}{1.25}=\frac{64}{125}=\left(\frac{4}{5}\right)^3$

07 진수의 조건에서 $x+2>0,\ 3x+6>0$이므로

$x>-2$ …… ㉠

$2\log_2(x+2)=\log_2(3x+6)$에서

$\log_2(x+2)^2=\log_2(3x+6)$

$(x+2)^2=3x+6,\quad x^2+4x+4=3x+6$

$x^2+x-2=0,\quad (x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

㉠에 의하여 구하는 해는 $x=1$이다. 답 $x=1$

08 진수의 조건에서 $x>0,\ x-2>0$이므로

$x>0,\ x>2\quad \therefore x>2$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)=\log_{\frac{1}{2}}15$에서

$\log_{\frac{1}{2}}x(x-2)=\log_{\frac{1}{2}}15$

$x(x-2)=15,\quad x^2-2x=15$

$x^2-2x-15=0,\quad (x+3)(x-5)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=5$

㉠에 의하여 구하는 해는 $x=5$이다. 답 $x=5$

09 답 $x=1$ 또는 $x=8$

🎯 $3t$, $t-3$, 0, 3, 0, 3, 1, 3, 8

참고 $\log_2 x=t$에서 $x=2^t$이므로 $x>0$이다. 즉 진수의 조건을 항상 만족시킨다.

10 $\log_{\frac{1}{3}}x=t$로 놓으면 $t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0\quad \therefore t=-1$ 또는 $t=3$

즉 $\log_{\frac{1}{3}}x=-1$ 또는 $\log_{\frac{1}{3}}x=3$이므로

$x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$ 또는 $x=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

답 $x=\frac{1}{27}$ 또는 $x=3$

11 $(\log_4 x)^2-\log_4 x^2=0$에서

$(\log_4 x)^2-2\log_4 x=0$

$\log_4 x=t$로 놓으면 $t^2-2t=0$

$t(t-2)=0\quad \therefore t=0$ 또는 $t=2$

즉 $\log_4 x=0$ 또는 $\log_4 x=2$이므로

$x=1$ 또는 $x=4^2=16$ 답 $x=1$ 또는 $x=16$

12 $(\log_2 4x)(\log_2 16x)=3$에서

$(2+\log_2 x)(4+\log_2 x)=3$

$\therefore (\log_2 x)^2+6\log_2 x+5=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2+6t+5=0$

$(t+5)(t+1)=0\quad \therefore t=-5$ 또는 $t=-1$

즉 $\log_2 x=-5$ 또는 $\log_2 x=-1$이므로

$x=2^{-5}=\frac{1}{32}$ 또는 $x=2^{-1}=\frac{1}{2}$

답 $x=\frac{1}{32}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

13 답 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=27$

🎯 3, 3, $t-3$, 3, 3, 3, 27

14 $\log_2 x - \log_x 16 = 3$에서 $\log_2 x - \frac{\log_2 16}{\log_2 x} = 3$

$\therefore \log_2 x - \frac{4}{\log_2 x} = 3$

$\log_2 x = t$로 놓으면 $t - \frac{4}{t} = 3$

양변에 t를 곱하여 정리하면 $t^2 - 3t - 4 = 0$

$(t+1)(t-4) = 0$ $\therefore t = -1$ 또는 $t = 4$

즉 $\log_2 x = -1$ 또는 $\log_2 x = 4$이므로

$x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ 또는 $x = 2^4 = 16$

답 $x = \frac{1}{2}$ 또는 $x = 16$

15 답 $x = -1$ 1, -1, -1

16 진수의 조건에서 $4x+3>0$이므로

$x > -\frac{3}{4}$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(4x+3) = \log_{\frac{1}{3}}(4x+3)$에서 진수가 같으므로

$4x+3=1$, $4x=-2$ $\therefore x = -\frac{1}{2}$

$x = -\frac{1}{2}$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

답 $x = -\frac{1}{2}$

17 답 $x=1$ $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $3x$, 1, 1

18 밑의 조건에서 $x^2>0$, $x^2 \neq 1$, $x+2>0$, $x+2 \neq 1$ 이므로

$-2<x<-1$ 또는 $-1<x<0$

또는 $0<x<1$ 또는 $x>1$ …… ㉠

$\log_{x^2} 3 = \log_{x+2} 3$에서 진수가 같으므로 $x^2 = x+2$

$x^2 - x - 2 = 0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x = -1$ 또는 $x = 2$

㉠에 의하여 구하는 해는 $x=2$이다. 답 $x=2$

19 답 $x = \frac{1}{2}$ 또는 $x=4$ 2, 2, $t-2$, 2, 2, 2, 4

20 $x^{\log_3 x} = 81x^3$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 81x^3$

$\log_3 x \cdot \log_3 x = \log_3 81 + \log_3 x^3$

$\therefore (\log_3 x)^2 - 3\log_3 x - 4 = 0$

$\log_3 x = t$로 놓으면 $t^2 - 3t - 4 = 0$

$(t+1)(t-4)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=4$

즉 $\log_3 x = -1$ 또는 $\log_3 x = 4$이므로

$x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ 또는 $x = 3^4 = 81$

답 $x = \frac{1}{3}$ 또는 $x = 81$

개념 29 로그부등식

본책 88쪽

21 답 $-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$ 4, 4, $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$

베이직쎈 BOX

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $c>0$, $c\neq1$일 때

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

22 진수의 조건에서 $2x+1>0$이므로

$x > -\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(2x+1) \geq 1$에서 $\log_{\frac{1}{2}}(2x+1) \geq \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$

밑이 1보다 작으므로 $2x+1 \leq \frac{1}{2}$

$2x \leq -\frac{1}{2}$ $\therefore x \leq -\frac{1}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면

$-\frac{1}{2}<x\leq-\frac{1}{4}$ 답 $-\frac{1}{2}<x\leq-\frac{1}{4}$

23 진수의 조건에서 $2x-1>0$이므로

$x>\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\log_3(2x-1)>\log_3 5$에서 밑이 1보다 크므로

$2x-1>5$ $\therefore x>3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면 $x>3$ 답 $x>3$

24 진수의 조건에서 $x-5>0$, $11-x>0$이므로

$x>5$, $x<11$ $\therefore 5<x<11$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(x-5) \leq \log_{\frac{1}{2}}(11-x)$에서 밑이 1보다 작으므로

$x-5 \geq 11-x$

$2x \geq 16$ $\therefore x \geq 8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면

$8 \leq x < 11$ 답 $8 \leq x < 11$

25 진수의 조건에서 $x+1>0$, $2x+10>0$이므로

$x>-1$, $x>-5$ $\therefore x>-1$ …… ㉠

$2\log_2(x+1) \geq \log_2(2x+10)$에서

$\log_2(x+1)^2 \geq \log_2(2x+10)$

밑이 1보다 크므로 $(x+1)^2 \geq 2x+10$

$x^2+2x+1 \geq 2x+10$, $x^2-9 \geq 0$

$(x+3)(x-3) \geq 0$

$\therefore x \leq -3$ 또는 $x \geq 3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면 $x \geq 3$ 답 $x \geq 3$

26 진수의 조건에서 $x>0$, $x-5>0$이므로

$x>0$, $x>5$ $\therefore x>5$ …… ㉠

$\log_4 x + \log_4(x-5) < \log_4 14$에서

$\log_4 x(x-5) < \log_4 14$

밑이 1보다 크므로 $x(x-5)<14$

$x^2-5x-14<0$, $(x+2)(x-7)<0$

$\therefore -2<x<7$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면

$5<x<7$ 답 $5<x<7$

27 진수의 조건에서 $x+7>0$, $15-3x>0$이므로

$x>-7$, $x<5$ $\therefore -7<x<5$ …… ㉠

$-\log_{\frac{1}{3}}(x+7) < \log_3(15-3x)$에서

$\log_3(x+7) < \log_3(15-3x)$

베이직쎈 BOX

밑이 1보다 크므로 $x+7<15-3x$

$4x<8 \quad \therefore x<2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면

$-7<x<2$ 답 $-7<x<2$

28 진수의 조건에서 $x-4>0$, $x+2>0$이므로

$x>4$, $x>-2 \quad \therefore x>4$ …… ㉠

$\log_2(x-4)\le\log_4(x+2)$에서

$\log_2(x-4)\le\log_{2^2}(x+2)$

$\log_2(x-4)\le\frac{1}{2}\log_2(x+2)$

$2\log_2(x-4)\le\log_2(x+2)$

$\therefore \log_2(x-4)^2\le\log_2(x+2)$

밑이 1보다 크므로 $(x-4)^2\le x+2$

$x^2-8x+16\le x+2$, $\quad x^2-9x+14\le0$

$(x-2)(x-7)\le0 \quad \therefore 2\le x\le7$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면

$4<x\le7$ 답 $4<x\le7$

29 진수의 조건에서 $x+1>0$, $5-x>0$이므로

$x>-1$, $x<5 \quad \therefore -1<x<5$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{5}}(x+1)>\log_{\frac{1}{25}}(5-x)$에서

$\log_{\frac{1}{5}}(x+1)>\log_{\left(\frac{1}{5}\right)^2}(5-x)$

$\log_{\frac{1}{5}}(x+1)>\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{5}}(5-x)$

$2\log_{\frac{1}{5}}(x+1)>\log_{\frac{1}{5}}(5-x)$

$\therefore \log_{\frac{1}{5}}(x+1)^2>\log_{\frac{1}{5}}(5-x)$

밑이 1보다 작으므로 $(x+1)^2<5-x$

$x^2+2x+1<5-x$, $\quad x^2+3x-4<0$

$(x+4)(x-1)<0$

$\therefore -4<x<1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면

$-1<x<1$ 답 $-1<x<1$

30 답 $2<x<4$ $\quad t-1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 2, 4$

31 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}x=t$로 놓으면 $t^2+4t+3\ge0$

$(t+3)(t+1)\ge0 \quad \therefore t\le-3$ 또는 $t\ge-1$

즉 $\log_{\frac{1}{3}}x\le-3$ 또는 $\log_{\frac{1}{3}}x\ge-1$이므로

$\log_{\frac{1}{3}}x\le\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ 또는 $\log_{\frac{1}{3}}x\ge\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

밑이 1보다 작으므로

$x\ge27$ 또는 $x\le3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면

$0<x\le3$ 또는 $x\ge27$ 답 $0<x\le3$ 또는 $x\ge27$

32 진수의 조건에서 $x>0$, $x^6>0$이므로

$x^6>0$에서
$x<0$ 또는 $x>0$

$x>0$ …… ㉠

$(\log_2x)^2+\log_2x^6>-8$에서

$(\log_2x)^2+6\log_2x+8>0$

$\log_2x=t$로 놓으면 $t^2+6t+8>0$

$(t+4)(t+2)>0 \quad \therefore t<-4$ 또는 $t>-2$

즉 $\log_2x<-4$ 또는 $\log_2x>-2$이므로

$\log_2x<\log_22^{-4}$ 또는 $\log_2x>\log_22^{-2}$

밑이 1보다 크므로

$x<\frac{1}{16}$ 또는 $x>\frac{1}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면

$0<x<\frac{1}{16}$ 또는 $x>\frac{1}{4}$

답 $0<x<\frac{1}{16}$ 또는 $x>\frac{1}{4}$

33 진수의 조건에서 $x>0$, $x^3>0$이므로

$x>0$ …… ㉠

$(\log_{\frac{1}{5}}x)^2+\log_{\frac{1}{5}}x^3+2\le0$에서

$(\log_{\frac{1}{5}}x)^2+3\log_{\frac{1}{5}}x+2\le0$

$\log_{\frac{1}{5}}x=t$로 놓으면 $t^2+3t+2\le0$

$(t+2)(t+1)\le0 \quad \therefore -2\le t\le-1$

즉 $-2\le\log_{\frac{1}{5}}x\le-1$이므로

$\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\le\log_{\frac{1}{5}}x\le\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$

밑이 1보다 작으므로 $5\le x\le25$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면

$5\le x\le25$ 답 $5\le x\le25$

34 진수의 조건에서 $x>0$, $64x^2>0$이므로

$64x^2>0$에서
$x^2>0$
$\therefore x<0$ 또는 $x>0$

$x>0$ …… ㉠

$(\log_4x)^2-\log_464x^2<0$에서

$(\log_4x)^2-3-\log_4x^2<0$

$\therefore (\log_4x)^2-2\log_4x-3<0$

$\log_4x=t$로 놓으면 $t^2-2t-3<0$

$(t+1)(t-3)<0 \quad \therefore -1<t<3$

즉 $-1<\log_4x<3$이므로

$\log_44^{-1}<\log_4x<\log_44^3$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{4}<x<64$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면

$\frac{1}{4}<x<64$ 답 $\frac{1}{4}<x<64$

35 진수의 조건에서 $\frac{16}{x}>0$, $\frac{64}{x}>0$이므로

$x>0$ …… ㉠

$\left(\log_2\frac{16}{x}\right)\left(\log_2\frac{64}{x}\right)\le8$에서

$(4-\log_2x)(6-\log_2x)\le8$

$(\log_2x)^2-10\log_2x+24\le8$

$\therefore (\log_2x)^2-10\log_2x+16\le0$

$\log_2x=t$로 놓으면 $t^2-10t+16\le0$

$(t-2)(t-8)\le0 \quad \therefore 2\le t\le8$

즉 $2\le\log_2x\le8$이므로

$\log_22^2\le\log_2x\le\log_22^8$

밑이 1보다 크므로 $4\le x\le256$ …… ㉡

05 지수함수와 로그함수의 활용

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면

$4\le x\le 256$ 답 $4\le x\le 256$

36 진수의 조건에서 $x>0$, $3x>0$이므로

$x>0$ …… ㉠

$(\log_{\frac{1}{3}} x)(\log_{\frac{1}{3}} 3x)<2$에서

$(\log_{\frac{1}{3}} x)(-1+\log_{\frac{1}{3}} x)<2$

$(\log_{\frac{1}{3}} x)^2-\log_{\frac{1}{3}} x-2<0$

$\log_{\frac{1}{3}} x=t$로 놓으면 $t^2-t-2<0$

$(t+1)(t-2)<0$ $\therefore -1<t<2$

즉 $-1<\log_{\frac{1}{3}} x<2$이므로

$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}<\log_{\frac{1}{3}} x<\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2$

밑이 1보다 작으므로 $\frac{1}{9}<x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면

$\frac{1}{9}<x<3$ 답 $\frac{1}{9}<x<3$

37 답 $0<x<\frac{1}{4}$ 또는 $x>4$

4, 4, $t-2$, 2, 2, 2, 4, 4

38 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log_3 x}<9x$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}<\log_3 9x$, $\log_3 x\cdot\log_3 x<2+\log_3 x$

$\therefore (\log_3 x)^2-\log_3 x-2<0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $t^2-t-2<0$

$(t+1)(t-2)<0$ $\therefore -1<t<2$

즉 $-1<\log_3 x<2$이므로

$\log_3 3^{-1}<\log_3 x<\log_3 3^2$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{3}<x<9$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면

$\frac{1}{3}<x<9$ 답 $\frac{1}{3}<x<9$

39 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log x}\ge 10000x^3$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}\ge\log 10000x^3$

$\log x\cdot\log x\ge 4+\log x^3$

$\therefore (\log x)^2-3\log x-4\ge 0$

$\log x=t$로 놓으면 $t^2-3t-4\ge 0$

$(t+1)(t-4)\ge 0$ $\therefore t\le -1$ 또는 $t\ge 4$

즉 $\log x\le -1$ 또는 $\log x\ge 4$이므로

$\log x\le\log 10^{-1}$ 또는 $\log x\ge\log 10^4$

밑이 1보다 크므로

$x\le\frac{1}{10}$ 또는 $x\ge 10000$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면

$0<x\le\frac{1}{10}$ 또는 $x\ge 10000$

답 $0<x\le\frac{1}{10}$ 또는 $x\ge 10000$

베이직쎈 BOX

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{64}$
$=\log_{\frac{1}{2}} x-\log_{\frac{1}{2}} 64$
$=\log_{\frac{1}{2}} x-\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$
$=\log_{\frac{1}{2}} x+6$

40 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log_{\frac{1}{2}} x}<\frac{x}{64}$의 양변에 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{2}} x^{\log_{\frac{1}{2}} x}>\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{64}$

$\log_{\frac{1}{2}} x\cdot\log_{\frac{1}{2}} x>\log_{\frac{1}{2}} x+6$

$\therefore (\log_{\frac{1}{2}} x)^2-\log_{\frac{1}{2}} x-6>0$

$\log_{\frac{1}{2}} x=t$로 놓으면 $t^2-t-6>0$

$(t+2)(t-3)>0$ $\therefore t<-2$ 또는 $t>3$

즉 $\log_{\frac{1}{2}} x<-2$ 또는 $\log_{\frac{1}{2}} x>3$이므로

$\log_{\frac{1}{2}} x<\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ 또는 $\log_{\frac{1}{2}} x>\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3$

밑이 1보다 작으므로

$x>4$ 또는 $x<\frac{1}{8}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면

$0<x<\frac{1}{8}$ 또는 $x>4$ 답 $0<x<\frac{1}{8}$ 또는 $x>4$

자신감 UP! 기본 & 핵심유형

본책 90쪽

01 진수의 조건에서 $(x+2)^2>0$, $2x+12>0$이므로

$x\ne -2$, $x>-6$

$\therefore -6<x<-2$ 또는 $x>-2$ …… ㉠

$\log_3 (x+2)^2=\log_3 (2x+12)$에서

$(x+2)^2=2x+12$, $x^2+4x+4=2x+12$

$x^2+2x-8=0$, $(x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$ ($\because$ ㉠)

따라서 모든 근의 합은

$-4+2=-2$ 답 ④

02 진수의 조건에서 $5+x>0$, $5-x>0$이므로

$x>-5$, $x<5$ $\therefore -5<x<5$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}} (5+x)+\log_{\frac{1}{2}} (5-x)=-4$에서

$\log_{\frac{1}{2}} (5+x)(5-x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

$(5+x)(5-x)=16$

$25-x^2=16$, $x^2=9$ $\therefore x=\pm 3$ ($\because$ ㉠)

따라서 모든 근의 곱은 $-3\cdot 3=-9$ 답 -9

03 진수의 조건에서 $x+3>0$, $x+5>0$이므로

$x>-3$, $x>-5$ $\therefore x>-3$ …… ㉠

$\log_2 (x+3)=\log_4 (x+5)$에서

$\log_2 (x+3)=\log_{2^2} (x+5)$

$\log_2 (x+3)=\frac{1}{2}\log_2 (x+5)$

$2\log_2 (x+3)=\log_2 (x+5)$

$\log_2 (x+3)^2=\log_2 (x+5)$

베이직쎈 BOX

$(x+3)^2=x+5,\quad x^2+6x+9=x+5$
$x^2+5x+4=0,\quad (x+4)(x+1)=0$
$\therefore x=-1$ ($\because$ ㉠)

따라서 $a=-1$이므로 $\quad 3^a=3^{-1}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

04 진수의 조건에서 $2x-1>0$, $(x+1)^2>0$이므로

$x>\frac{1}{2}$, $x\neq-1 \quad \therefore x>\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{5}}(2x-1)+\log_{\frac{1}{25}}(x+1)^2=-1$에서

$\log_{\frac{1}{5}}(2x-1)+\log_{\left(\frac{1}{5}\right)^2}(x+1)^2=-1$

$\log_{\frac{1}{5}}(2x-1)+\log_{\frac{1}{5}}(x+1)=-1$

$\log_{\frac{1}{5}}(2x-1)(x+1)=\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$

$(2x-1)(x+1)=5,\quad 2x^2+x-6=0$

$(2x-3)(x+2)=0 \quad \therefore x=\frac{3}{2}$ ($\because$ ㉠)

따라서 $a=\frac{3}{2}$이므로 $\quad 4a=4\cdot\frac{3}{2}=6$ 답 ②

05 $\log_2 x=t$로 놓으면 $\quad t^2-t-12=0$

$(t+3)(t-4)=0 \quad \therefore t=-3$ 또는 $t=4$

즉 $\log_2 x=-3$ 또는 $\log_2 x=4$이므로

$x=2^{-3}=\frac{1}{8}$ 또는 $x=2^4=16$

따라서 $\alpha=\frac{1}{8}$, $\beta=16$이므로

$8\alpha+\beta=8\cdot\frac{1}{8}+16=17$ 답 ③

06 $\log_3 x\cdot\log_3 9x=3$에서

$\log_3 x(2+\log_3 x)=3$

$\therefore (\log_3 x)^2+2\log_3 x-3=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $\quad t^2+2t-3=0$

$(t+3)(t-1)=0 \quad \therefore t=-3$ 또는 $t=1$

즉 $\log_3 x=-3$ 또는 $\log_3 x=1$이므로

$x=3^{-3}=\frac{1}{27}$ 또는 $x=3$

따라서 모든 근의 곱은 $\quad \frac{1}{27}\cdot 3=\frac{1}{9}$ 답 ②

07 $(\log_2 4x)^2-\log_2 2x^8=0$에서

$(2+\log_2 x)^2-(1+8\log_2 x)=0$

$\therefore (\log_2 x)^2-4\log_2 x+3=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $\quad t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0 \quad \therefore t=1$ 또는 $t=3$

즉 $\log_2 x=1$ 또는 $\log_2 x=3$이므로

$x=2$ 또는 $x=2^3=8$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=8$ 또는 $\alpha=8$, $\beta=2$이므로

$\alpha^2+\beta^2=68$ 답 68

$(2+\log_2 x)^2-(1+8\log_2 x)=0$
에서
$4+4\log_2 x+(\log_2 x)^2-1-8\log_2 x=0$
$\therefore (\log_2 x)^2-4\log_2 x+3=0$

$2^2+8^2=68$

08 $\log_2 x\cdot\log_2 x-2\log_{\frac{1}{2}} x+k=0$에서

$(\log_2 x)^2+2\log_2 x+k=0$ …… ㉠

㉠의 한 근이 8이므로

$(\log_2 8)^2+2\log_2 8+k=0$

$3^2+2\cdot 3+k=0 \quad \therefore k=-15$

$k=-15$를 ㉠에 대입하면

$(\log_2 x)^2+2\log_2 x-15=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $\quad t^2+2t-15=0$

$(t+5)(t-3)=0 \quad \therefore t=-5$ 또는 $t=3$

즉 $\log_2 x=-5$ 또는 $\log_2 x=3$이므로

$x=2^{-5}=\frac{1}{32}$ 또는 $x=2^3=8$

따라서 다른 한 근은 $\frac{1}{32}$이다. 답 $\frac{1}{32}$

09 $\log_5 x+\log_x 25=3$에서 $\quad \log_5 x+\frac{\log_5 25}{\log_5 x}=3$

$\therefore \log_5 x+\frac{2}{\log_5 x}=3$

$\log_5 x=t$로 놓으면 $\quad t+\frac{2}{t}=3$

양변에 t를 곱하여 정리하면 $\quad t^2-3t+2=0$

$(t-1)(t-2)=0 \quad \therefore t=1$ 또는 $t=2$

즉 $\log_5 x=1$ 또는 $\log_5 x=2$이므로

$x=5$ 또는 $x=5^2=25$

따라서 $\alpha=5$, $\beta=25$이므로

$\beta-\alpha=20$ 답 ④

10 $(\log x)\left(\log\frac{x}{16}\right)=2$에서

$(\log x)(\log x-\log 16)=2$

$\therefore (\log x)^2-\log 16\cdot\log x-2=0$

$\log x=t$로 놓으면 $\quad t^2-\log 16\cdot t-2=0$

이 방정식의 두 근은 $\log\alpha$, $\log\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log\alpha+\log\beta=\log 16$

$\log\alpha\beta=\log 16 \quad \therefore \alpha\beta=16$ 답 ⑤

베쎈TIP

x에 대한 방정식

$p(\log_a x)^2+q\log_a x+r=0$ (p, q, r는 상수)

의 두 근이 α, β일 때, $\log_a x=t$로 놓으면 t에 대한 방정식 $pt^2+qt+r=0$의 두 근은 $\log_a\alpha$, $\log_a\beta$이다.

11 밑의 조건에서

$x^2>0$, $x^2\neq1$, $x+6>0$, $x+6\neq1$

$\therefore -6<x<-5$ 또는 $-5<x<-1$ 또는 $-1<x<0$ 또는 $0<x<1$ 또는 $x>1$ …… ㉠

$\log_{x^2}4=\log_{x+6}4$에서 진수가 같으므로

$x^2=x+6,\quad x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$ ($\because$ ㉠)

따라서 모든 근의 합은 $\quad -2+3=1$ 답 ③

12 밑과 진수의 조건에서

$x+8>0$, $x+8\neq1$, $3x-6>0$,

$3x-6\neq1$, $x-5>0$

$\therefore x>5$ …… ㉠

베이직쎈 BOX

(i) $x+8=3x-6$일 때,

$-2x=-14$ $\quad\therefore x=7$

$x=7$은 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

(ii) $x-5=1$일 때, $\quad x=6$

$x=6$은 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=6$ 또는 $x=7$

따라서 $\alpha=6$, $\beta=7$이므로 $\quad \beta-\alpha=1$ 답 ①

밑이 같은 경우

진수가 1인 경우

13 밑과 진수의 조건에서

$x^2>0$, $x^2\neq1$, $2x+8>0$, $2x+8\neq1$, $5x-2>0$

$\therefore \frac{2}{5}<x<1$ 또는 $x>1$ ...... ㉠

(i) $x^2=2x+8$일 때,

$x^2-2x-8=0$, $\quad (x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=4$ ($\because$ ㉠)

(ii) $5x-2=1$일 때, $\quad x=\frac{3}{5}$

$x=\frac{3}{5}$은 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=\frac{3}{5}$ 또는 $x=4$ 답 $x=\frac{3}{5}$ 또는 $x=4$

밑이 같은 경우

진수가 1인 경우

14 $x^{\log x}=10000$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}=\log 10000$, $\quad \log x\cdot\log x=4$

$\therefore (\log x)^2-4=0$

$\log x=t$로 놓으면 $\quad t^2-4=0$

$(t+2)(t-2)=0$ $\quad\therefore t=\pm2$

즉 $\log x=-2$ 또는 $\log x=2$이므로

$x=10^{-2}$ 또는 $x=10^2$

따라서 모든 근의 곱은 $\quad 10^{-2}\cdot10^2=1$ 답 ③

15 $x^{\log_2 x}=4x^{-1}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2 4x^{-1}$

$\log_2 x\cdot\log_2 x=2-\log_2 x$

$\therefore (\log_2 x)^2+\log_2 x-2=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $\quad t^2+t-2=0$

$(t+2)(t-1)=0$ $\quad\therefore t=-2$ 또는 $t=1$

즉 $\log_2 x=-2$ 또는 $\log_2 x=1$이므로

$x=2^{-2}=\frac{1}{4}$ 또는 $x=2$

주어진 방정식의 모든 근의 합은 $\quad \frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}$

따라서 $p=4$, $q=9$이므로 $\quad q-p=5$ 답 5

16 $(3x)^{\log 3}=(5x)^{\log 5}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log(3x)^{\log 3}=\log(5x)^{\log 5}$

$(\log 3)(\log 3x)=(\log 5)(\log 5x)$

$(\log 3)(\log 3+\log x)=(\log 5)(\log 5+\log x)$

$(\log 3-\log 5)\log x=(\log 5)^2-(\log 3)^2$

즉 $\log x=-(\log 3+\log 5)=-\log 15=\log 15^{-1}$이므로 $\quad x=\frac{1}{15}$ 답 ②

$(\log 5)^2-(\log 3)^2$
$=(\log 5+\log 3)$
$\times(\log 5-\log 3)$

17 카페 안의 소음의 크기가 60 dB일 때, 소음의 세기를 x W/m²라 하면

$60=10\log\frac{x}{10^{-12}}$, $\quad \log\frac{x}{10^{-12}}=6$

$\frac{x}{10^{-12}}=10^6$ $\quad\therefore x=10^{-6}$

따라서 카페 안의 소음의 크기가 60 dB일 때, 소음의 세기는 10^{-6} W/m²이다. 답 ③

18 n년 후 관광객 수가 6배가 된다고 하면

$a\times1.07^n=6a$ $\quad\therefore 1.07^n=6$

양변에 상용로그를 취하면

$n\log 1.07=\log 6$

$\therefore n=\frac{\log 6}{\log 1.07}=\frac{0.78}{0.03}=26$

따라서 관광객 수가 올해의 6배가 되는 것은 지금으로부터 26년 후이다. 답 26년

19 현재의 운동화의 생산량을 a라 하면 x개월 후 운동화의 생산량은

$\left(1+\frac{5}{100}\right)^x a=1.05^x a$

x개월 후에 운동화의 생산량이 2배가 된다고 하면

$1.05^x a=2a$ $\quad\therefore 1.05^x=2$

양변에 상용로그를 취하면

$x\log 1.05=\log 2$

$\therefore x=\frac{\log 2}{\log 1.05}=\frac{0.3}{0.02}=15$

따라서 운동화의 생산량이 현재의 2배가 되는 것은 지금으로부터 15개월 후이다. 답 ④

20 진수의 조건에서 $x^2+4x+3>0$이므로

$(x+3)(x+1)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>-1$ ...... ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+4x+3)\geq-3$에서

$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+4x+3)\geq\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

밑이 1보다 작으므로 $\quad x^2+4x+3\leq8$

$x^2+4x-5\leq0$, $\quad (x+5)(x-1)\leq0$

$\therefore -5\leq x\leq1$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면

$-5\leq x<-3$ 또는 $-1<x\leq1$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은

$-5+(-4)+0+1=-8$ 답 -8

21 진수의 조건에서 $x+3>0$, $2x-8>0$이므로

$x>-3$, $x>4$ $\quad\therefore x>4$ ...... ㉠

$\log_7(x+3)>\log_7(2x-8)$에서 밑이 1보다 크므로

$x+3>2x-8$, $\quad -x>-11$

$\therefore x<11$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면 $\quad 4<x<11$

따라서 정수 x는 5, 6, 7, 8, 9, 10의 6개이다. 답 6

22 진수의 조건에서 $x+2>0$, $x-6>0$이므로

$x>-2$, $x>6$

$\therefore x>6$ …… ㉠

$\log_3(x+2)+\log_3(x-6)\le 2$에서

$\log_3(x+2)(x-6)\le\log_3 3^2$

밑이 1보다 크므로 $(x+2)(x-6)\le 9$

$x^2-4x-21\le 0$, $(x+3)(x-7)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 7$ …… ㉡

$(x+2)(x-6)\le 9$에서
$x^2-4x-12\le 9$
$\therefore x^2-4x-21\le 0$

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면

$6<x\le 7$

따라서 $\alpha=6$, $\beta=7$이므로

$\beta-\alpha=1$ 답 ①

23 진수의 조건에서 $x-4>0$, $x+2>0$이므로

$x>4$, $x>-2$ $\therefore x>4$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(x-4)\le\log_{\frac{1}{9}}(x+2)$에서

$\log_{\frac{1}{3}}(x-4)\le\log_{(\frac{1}{3})^2}(x+2)$

$\log_{\frac{1}{3}}(x-4)\le\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$

$2\log_{\frac{1}{3}}(x-4)\le\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$

$\log_{\frac{1}{3}}(x-4)^2\le\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$

밑이 1보다 작으므로 $(x-4)^2\ge x+2$

$x^2-9x+14\ge 0$, $(x-2)(x-7)\ge 0$

$\therefore x\le 2$ 또는 $x\ge 7$ …… ㉡

$(x-4)^2\ge x+2$에서
$x^2-8x+16\ge x+2$
$\therefore x^2-9x+14\ge 0$

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면 $x\ge 7$

따라서 자연수 x의 최솟값은 7이다. 답 ③

24 진수의 조건에서 $\log_3 x>0$이므로

$x>1$ …… ㉠

$\log_4(\log_3 x)<1$에서 $\log_4(\log_3 x)<\log_4 4$

밑이 1보다 크므로 $\log_3 x<4$

$\therefore \log_3 x<\log_3 81$

밑이 1보다 크므로 $x<81$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면

$1<x<81$ 답 $1<x<81$

25 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$\log_3 x=t$로 놓으면 $t^2-4t-5\le 0$

$(t+1)(t-5)\le 0$ $\therefore -1\le t\le 5$

즉 $-1\le\log_3 x\le 5$이므로

$\log_3 3^{-1}\le\log_3 x\le\log_3 3^5$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{3}\le x\le 243$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면 $\frac{1}{3}\le x\le 243$

따라서 $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=243$이므로

$\alpha\beta=81$ 답 ⑤

26 진수의 조건에서 $x>0$, $x^5>0$이므로

$x>0$ …… ㉠

$(\log_2 x)^2-\log_2 x^5<-4$에서

$(\log_2 x)^2-5\log_2 x<-4$

$\therefore (\log_2 x)^2-5\log_2 x+4<0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-5t+4<0$

$(t-1)(t-4)<0$ $\therefore 1<t<4$

즉 $1<\log_2 x<4$이므로

$\log_2 2<\log_2 x<\log_2 2^4$

밑이 1보다 크므로 $2<x<16$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면 $2<x<16$

따라서 정수 x는 3, 4, 5, …, 15의 13개이다. 답 13

27 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$-\log_2 x\cdot(\log_{\frac{1}{2}}x+1)\le 2$에서

$-\log_2 x\cdot(-\log_2 x+1)\le 2$

$\log_2 x\cdot(\log_2 x-1)\le 2$

$\therefore (\log_2 x)^2-\log_2 x-2\le 0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-t-2\le 0$

$(t+1)(t-2)\le 0$ $\therefore -1\le t\le 2$

즉 $-1\le\log_2 x\le 2$이므로

$\log_2 2^{-1}\le\log_2 x\le\log_2 2^2$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{2}\le x\le 4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면 $\frac{1}{2}\le x\le 4$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은

$1+2+3+4=10$ 답 ③

28 진수의 조건에서 $4x>0$, $\frac{x}{8}>0$이므로

$x>0$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}4x\cdot\log_2\frac{x}{8}\ge 0$에서

$(-\log_2 4x)\cdot\log_2\frac{x}{8}\ge 0$

$(-2-\log_2 x)(\log_2 x-3)\ge 0$

$-(\log_2 x)^2+\log_2 x+6\ge 0$

$\therefore (\log_2 x)^2-\log_2 x-6\le 0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-t-6\le 0$

$(t+2)(t-3)\le 0$ $\therefore -2\le t\le 3$

즉 $-2\le\log_2 x\le 3$이므로

$\log_2 2^{-2}\le\log_2 x\le\log_2 2^3$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{4}\le x\le 8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면 $\frac{1}{4}\le x\le 8$

따라서 $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=8$이므로

$4\alpha+\beta=4\cdot\frac{1}{4}+8=9$ 답 9

29 $x^{\log_4 x}\le 16x$의 양변에 밑이 4인 로그를 취하면

$\log_4 x^{\log_4 x}\le\log_4 16x$

$\log_4 x\cdot\log_4 x\le 2+\log_4 x$

$\therefore (\log_4 x)^2-\log_4 x-2\le 0$

베이직쎈 BOX

$\log_4 x=t$로 놓으면 $t^2-t-2\le 0$

$(t+1)(t-2)\le 0$ $\therefore -1\le t\le 2$

즉 $-1\le\log_4 x\le 2$이므로

$\log_4 4^{-1}\le\log_4 x\le\log_4 4^2$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{4}\le x\le 16$

따라서 자연수 x는 1, 2, 3, ⋯, 16의 16개이다. 답 ④

진수의 조건 $x>0$을 만족시킨다.

30 $x^{\log x}\le x^2$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}\le\log x^2$

$\log x\cdot\log x\le 2\log x$

$\therefore (\log x)^2-2\log x\le 0$

$\log x=t$로 놓으면 $t^2-2t\le 0$

$t(t-2)\le 0$ $\therefore 0\le t\le 2$

즉 $0\le\log x\le 2$이므로

$\log 10^0\le\log x\le\log 10^2$

밑이 1보다 크므로 $1\le x\le 100$

진수의 조건 $x>0$을 만족시킨다.

따라서 $\alpha=1$, $\beta=100$이므로

$\alpha\beta=100$ 답 ⑤

31 $x^{\log_{\frac{1}{3}}x}<\frac{x^2}{27}$의 양변에 밑이 $\frac{1}{3}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{3}}x^{\log_{\frac{1}{3}}x}>\log_{\frac{1}{3}}\frac{x^2}{27}$

$\log_{\frac{1}{3}}x\cdot\log_{\frac{1}{3}}x>\log_{\frac{1}{3}}x^2-\log_{\frac{1}{3}}27$

$\therefore (\log_{\frac{1}{3}}x)^2-2\log_{\frac{1}{3}}x-3>0$

$-\log_{\frac{1}{3}}27$
$=-\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$
$=3$

$\log_{\frac{1}{3}}x=t$로 놓으면 $t^2-2t-3>0$

$(t+1)(t-3)>0$ $\therefore t<-1$ 또는 $t>3$

즉 $\log_{\frac{1}{3}}x<-1$ 또는 $\log_{\frac{1}{3}}x>3$이므로

$\log_{\frac{1}{3}}x<\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ 또는 $\log_{\frac{1}{3}}x>\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^3$

밑이 1보다 작으므로 $x>3$ 또는 $x<\frac{1}{27}$

진수의 조건에서 $x>0$이므로 주어진 부등식의 해는 $x>3$

따라서 자연수 x의 최솟값은 4이다. 답 4

32 화재가 발생한 지 x분 후 온도가 360 °C 이상이 된다고 하면

$15+345\log(8x+1)\ge 360$

$345\log(8x+1)\ge 345$

$\log(8x+1)\ge 1$, $8x+1\ge 10$

$8x\ge 9$ $\therefore x\ge\frac{9}{8}$

따라서 화재가 발생한 지 $\frac{9}{8}$분 후 처음으로 온도가 360 °C 이상이므로 구하는 a의 값은 $\frac{9}{8}$이다. 답 ②

33 평균 해수면에서의 높이가 6640 m 이상 13280 m 이하이므로

6640 m=6.64 km

13280 m=13.28 km

$6.64\le h\le 13.28$

$6.64\le -3.32\log P\le 13.28$

$-4\le\log P\le -2$

$\log 10^{-4}\le\log P\le\log 10^{-2}$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{10000}\le P\le\frac{1}{100}$

따라서 구하는 기압의 범위는 $\frac{1}{10000}$기압 이상 $\frac{1}{100}$기압 이하이다. 답 $\frac{1}{10000}$기압 이상 $\frac{1}{100}$기압 이하

34 n년 후의 노트북의 가격은

$2000000\times(1-0.2)^n=0.8^n\times 2000000$(원)

n년 후에 노트북의 가격이 20만 원 이하가 된다고 하면

$0.8^n\times 2000000\le 200000$

$\therefore 0.8^n\le\frac{1}{10}$

양변에 상용로그를 취하면 $n\log 0.8\le -1$

$\log 0.8=\log\frac{8}{10}$
$=\log 8-1$
$=0.9-1$
$=-0.1$

$-0.1n\le -1$ $\therefore n\ge 10$

따라서 10년 후인 2030년에 노트북의 가격이 처음으로 20만 원 이하가 된다. 답 2030년

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 95쪽

01 전략 밑을 같게 한 후 지수에 대한 방정식을 세운다.

풀이 $25^{2x+4}=5^{x^2-4}$에서 $5^{4x+8}=5^{x^2-4}$이므로

$25^{2x+4}=(5^2)^{2x+4}$
$=5^{4x+8}$

$4x+8=x^2-4$, $x^2-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=6$

따라서 모든 근의 합은

$-2+6=4$ 답 ③

02 전략 $2^x=t\ (t>0)$로 놓고 t에 대한 방정식을 푼다.

풀이 $4^x-3\cdot 2^{x+2}+32=0$에서

$(2^x)^2-12\cdot 2^x+32=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-12t+32=0$

$(t-4)(t-8)=0$ $\therefore t=4$ 또는 $t=8$

즉 $2^x=4$ 또는 $2^x=8$이므로

$2^x=2^2$ 또는 $2^x=2^3$ $\therefore x=2$ 또는 $x=3$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=3$ 또는 $\alpha=3$, $\beta=2$이므로

$\alpha^2+\beta^2=13$ 답 ④

$2^2+3^2=13$

03 전략 초기 불량률이 a %이고 매달 절반으로 감소할 때, n개월 후의 불량률은 $a\left(\frac{1}{2}\right)^n$ %이다.

풀이 n개월 후의 불량률은 $\frac{64}{1000}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$이므로 n개월 후의 불량률이 0.1 %가 된다고 하면

$6.4\ \%=\frac{6.4}{100}=\frac{64}{1000}$

$\frac{64}{1000}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1000}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{64}$

$0.1\ \%=\frac{0.1}{100}=\frac{1}{1000}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^6$ $\therefore n=6$

따라서 불량률이 0.1 %가 되는 것은 6개월 후이다.

답 ③

베이직쎈 BOX

04 전략 밑을 같게 통일한 후 지수에 대한 부등식을 세운다.

풀이 $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-3x} \geq \left(\frac{9}{16}\right)^{x+7}$에서

$\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-3x} \geq \left(\frac{3}{4}\right)^{2x+14}$

$\left(\frac{9}{16}\right)^{x+7}=\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}^{x+7}=\left(\frac{3}{4}\right)^{2x+14}$

밑이 1보다 작으므로 $x^2-3x \leq 2x+14$

$x^2-5x-14 \leq 0$, $(x+2)(x-7) \leq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq 7$

따라서 정수 x는 $-2, -1, 0, \cdots, 7$의 10개이다. 답 ②

05 전략 $3^x=t\ (t>0)$로 놓고 t에 대한 부등식을 푼다.

풀이 $3^{2x+1}-28\cdot 3^x+9 \geq 0$에서

$3\cdot(3^x)^2-28\cdot 3^x+9 \geq 0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $3t^2-28t+9 \geq 0$

$(3t-1)(t-9) \geq 0$ $\therefore t \leq \frac{1}{3}$ 또는 $t \geq 9$

즉 $3^x \leq \frac{1}{3}$ 또는 $3^x \geq 9$이므로

$3^x \leq 3^{-1}$ 또는 $3^x \geq 3^2$

밑이 1보다 크므로 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$

따라서 자연수 x의 최솟값은 2이다. 답 ②

06 전략 로그의 성질을 이용하여 방정식의 해를 구한다.

풀이 진수의 조건에서 $x+2>0$, $x>0$이므로

$x>-2$, $x>0$ $\therefore x>0$ …… ㉠

$\log_2(x+2)+\log_2 x=3$에서

$\log_2 x(x+2)=\log_2 2^3$, $x(x+2)=8$

$x^2+2x-8=0$, $(x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=2$ ($\because$ ㉠)

따라서 $\alpha=2$이므로 $2^\alpha=2^2=4$ 답 ①

07 전략 주어진 방정식의 양변에 밑이 5인 로그를 취한 후 로그의 성질을 이용하여 식을 정리한다.

풀이 $x^{\log_5 x}=\frac{125}{x^2}$의 양변에 밑이 5인 로그를 취하면

$\log_5 x^{\log_5 x}=\log_5 \frac{125}{x^2}$

$\log_5 x\cdot\log_5 x=3-2\log_5 x$

$\therefore (\log_5 x)^2+2\log_5 x-3=0$

$\log_5 x=t$로 놓으면 $t^2+2t-3=0$

$(t+3)(t-1)=0$ $\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

즉 $\log_5 x=-3$ 또는 $\log_5 x=1$이므로

$x=5^{-3}=\frac{1}{125}$ 또는 $x=5$

따라서 모든 근의 곱은 $\frac{1}{125}\cdot 5=\frac{1}{25}$ 답 ②

08 전략 $\log_2 x=X$, $\log_3 y=Y$로 놓고 X, Y에 대한 연립방정식으로 나타낸다.

풀이 $\log_2 x=X$, $\log_3 y=Y$로 놓으면 주어진 연립방정식은 $\begin{cases} X+Y=5 \\ XY=4 \end{cases}$

이 연립방정식을 풀면

X, Y는 이차방정식 $t^2-5t+4=0$의 두 근이다.

$X=1, Y=4$ 또는 $X=4, Y=1$

(i) $X=1$, $Y=4$일 때,

$\log_2 x=1$, $\log_3 y=4$이므로

$x=2$, $y=3^4=81$

(ii) $X=4$, $Y=1$일 때,

$\log_2 x=4$, $\log_3 y=1$이므로

$x=2^4=16$, $y=3$

그런데 이것은 $\alpha<\beta$를 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\alpha=2$, $\beta=81$

$\therefore \beta-\alpha=79$ 답 ②

09 전략 로그부등식 $\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$에서 $0<a<1$이면 $f(x)>0$, $g(x)>0$, $f(x) \leq g(x)$의 공통인 범위를 구한다.

풀이 진수의 조건에서 $x-1>0$, $\frac{1}{2}x+k>0$이므로

$x-1>0$, $\frac{1}{2}x+k>0$에서 $x>1$, $x>-2k$ $\therefore x>1$ ($\because$ k는 자연수)

$x>1$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{4}}(x-1) \geq \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x+k\right)$에서 밑이 1보다 작으므로 $x-1 \leq \frac{1}{2}x+k$, $\frac{1}{2}x \leq k+1$

$\therefore x \leq 2k+2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면 $1<x \leq 2k+2$

이 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 7이므로

$2k+2-1=7$ $\therefore k=3$ 답 ③

10 전략 $\log_4 x=t$로 놓고 t에 대한 부등식을 푼다.

풀이 $(\log_4 x^3)(\log_4 16x) \leq 9$에서

$3\log_4 x\cdot(2+\log_4 x) \leq 9$

$\log_4 x\cdot(2+\log_4 x) \leq 3$

$\therefore (\log_4 x)^2+2\log_4 x-3 \leq 0$

$\log_4 x=t$로 놓으면 $t^2+2t-3 \leq 0$

$(t+3)(t-1) \leq 0$ $\therefore -3 \leq t \leq 1$

즉 $-3 \leq \log_4 x \leq 1$이므로

$\log_4 4^{-3} \leq \log_4 x \leq \log_4 4$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{64} \leq x \leq 4$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 1, 2, 3, 4이므로 구하는 합은 $1+2+3+4=10$ 답 ④

11 전략 밑을 같게 통일한 후 지수에 대한 방정식을 세운다.

풀이 $(3\sqrt{3})^{2x^2-2}=9^{4x}$에서 $3^{3x^2-3}=3^{8x}$이므로

$(3\sqrt{3})^{2x^2-2}=9^{4x}$에서 $(3^{\frac{3}{2}})^{2x^2-2}=(3^2)^{4x}$ $\therefore 3^{3x^2-3}=3^{8x}$

$3x^2-3=8x$, $3x^2-8x-3=0$

$(3x+1)(x-3)=0$ $\therefore x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 정수 x의 값은 3이다. 답 3

12 전략 $x=1$일 때와 $x \neq 1$일 때로 나누어 방정식의 해를 구한다.

풀이 $(x^3)^2=x^x\cdot x^4$에서 $x^6=x^{x+4}$

(i) $x=1$일 때, $1^6=1^5$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x \neq 1$일 때, $6=x+4$에서 $x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=1$ 또는 $x=2$

따라서 모든 근의 합은 $1+2=3$ 답 3

13 전략 밑을 같게 한 후 지수에 대한 부등식을 세운다.

풀이 $5^{x^2-1} \geq (\sqrt{125})^x$에서 $5^{x^2-1} \geq 5^{\frac{3}{2}x}$

밑이 1보다 크므로 $x^2-1 \geq \frac{3}{2}x$

$2x^2-3x-2 \geq 0$, $(2x+1)(x-2) \geq 0$

$\therefore x \leq -\frac{1}{2}$ 또는 $x \geq 2$ …… ㉠

$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-x} > \left(\frac{1}{16}\right)^{3x-3}$에서 $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-x} > \left(\frac{1}{4}\right)^{6x-6}$

밑이 1보다 작으므로 $x^2-x < 6x-6$

$x^2-7x+6<0$, $(x-1)(x-6)<0$

$\therefore 1<x<6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면 $2 \leq x < 6$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=6$이므로

$\alpha+\beta=8$

답 8

14 전략 $\log_3 x = t$로 놓고 주어진 방정식을 t에 대한 이차방정식으로 나타낸 후 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 $(\log_3 27x)^2 - 2\log_3 9x^3 = 10$에서

$(3+\log_3 x)^2 - 2(2+3\log_3 x) = 10$

$9+6\log_3 x + (\log_3 x)^2 - 4 - 6\log_3 x = 10$

$\therefore (\log_3 x)^2 - 5 = 0$

$\log_3 x = t$로 놓으면 $t^2-5=0$ ··· ❶

이 방정식의 두 근은 $\log_3 \alpha$, $\log_3 \beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3 \alpha + \log_3 \beta = 0$, $\log_3 \alpha\beta = \log_3 1$

$\therefore \alpha\beta = 1$ ··· ❷

답 1

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 방정식을 t에 대한 이차방정식으로 나타낼 수 있다.	50%
❷	$\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	50%

15 전략 이차방정식이 실근을 갖지 않을 조건을 이용한다.

풀이 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D = (\log a)^2 - 4(8+\log a) < 0$

$\therefore (\log a)^2 - 4\log a - 32 < 0$ ··· ❶

$\log a = t$로 놓으면 $t^2-4t-32<0$

$(t+4)(t-8)<0$ $\therefore -4<t<8$

즉 $-4 < \log a < 8$이므로

$\log 10^{-4} < \log a < \log 10^8$

밑이 1보다 크므로 $10^{-4} < a < 10^8$ ··· ❷

따라서 $\alpha = 10^{-4}$, $\beta = 10^8$이므로

$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{10^8}{10^{-4}} = 10^{12}$ ··· ❸

답 10^{12}

단계	채점 기준	비율
❶	$D<0$임을 이용하여 부등식을 세울 수 있다.	40%
❷	a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸	$\frac{\beta}{\alpha}$의 값을 구할 수 있다.	20%

베이직쎈 BOX

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

베쎈TIP

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이

① 서로 다른 두 실근을 가지면 → $b^2-4ac>0$

② 실근을 가지면 → $b^2-4ac \geq 0$

③ 실근을 갖지 않으면 → $b^2-4ac<0$

16 전략 현재의 미세 먼지 농도가 a이고 매년 b %씩 농도가 증가할 때, n년 후의 농도는 $a\left(1+\frac{b}{100}\right)^n$이다.

풀이 현재의 미세 먼지 농도를 a라 하면 n년 후의 미세 먼지 농도는

$a(1+0.02)^n = 1.02^n a$ ··· ❶

이므로 n년 후에 미세 먼지 농도가 3배 이상이 된다고 하면

$1.02^n a \geq 3a$ $\therefore 1.02^n \geq 3$

양변에 상용로그를 취하면

$n\log 1.02 \geq \log 3$, $0.01n \geq 0.48$

$\therefore n \geq 48$ ··· ❷

따라서 미세 먼지 농도가 현재의 3배 이상이 되는 것은 최소 48년 후이다. ··· ❸

답 48년

단계	채점 기준	비율
❶	n년 후의 미세 먼지 농도에 대한 식을 세울 수 있다.	40%
❷	n의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸	미세 먼지 농도가 3배 이상이 되는 것은 최소 몇 년 후인지 구할 수 있다.	20%

Ⅲ. 삼각함수

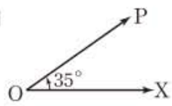
06 삼각함수

11 일반각과 호도법

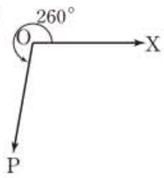
개념 30 일반각

본책 98쪽

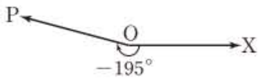
01 답



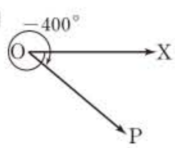
02 답



03 답



04 답



05 답 $360° \times n + 120°$ **06** 답 $360° \times n + 320°$

07 답 $360° \times n + 225°$ **08** 답 $360° \times n + 60°$

09 답 $360° \times n + 140°$ **10** 답 $360° \times n + 80°$

11 답 $360° \times n + 175°$ **12** 답 $360° \times n + 130°$

13 답 $360° \times n + 100°$ **14** 답 $360° \times n + 120°$

개념 31 사분면의 각

본책 99쪽

15 $410° = 360° \times 1 + 50°$
따라서 $410°$는 제1사분면의 각이다. 답 제1사분면

16 $820° = 360° \times 2 + 100°$
따라서 $820°$는 제2사분면의 각이다. 답 제2사분면

17 $1380° = 360° \times 3 + 300°$
따라서 $1380°$는 제4사분면의 각이다. 답 제4사분면

18 $-530° = 360° \times (-2) + 190°$
따라서 $-530°$는 제3사분면의 각이다. 답 제3사분면

19 $-995° = 360° \times (-3) + 85°$
따라서 $-995°$는 제1사분면의 각이다. 답 제1사분면

20 $-1110° = 360° \times (-4) + 330°$
따라서 $-1110°$는 제4사분면의 각이다. 답 제4사분면

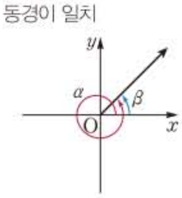
21 답 제1사분면 또는 제3사분면
90, 45, 45, 1, 180, 225, 3, 1, 3

베이직쎈 BOX

$360° = 180° \times 2$이므로 $\frac{\theta}{2}$의 범위를 일반각으로 나타내려면 $n=2k$, $n=2k+1$ (k는 정수)로 나누어 생각한다.

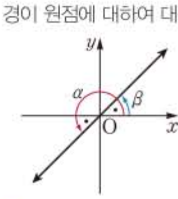
주어진 각을
$360° \times n + \alpha°$
(n은 정수, $0° \le \alpha° < 360°$)
로 나타낸다.

두 각 α, β를 나타내는 동경이 일치



➡ $\alpha - \beta = 360° \times n$ (n은 정수)

두 각 α, β를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭



➡ $\alpha - \beta = 360° \times n + 180°$ (n은 정수)

22 θ가 제4사분면의 각이므로
$360° \times n + 270° < \theta < 360° \times n + 360°$ (n은 정수)
$\therefore 180° \times n + 135° < \frac{\theta}{2} < 180° \times n + 180°$
(i) $n=2k$(k는 정수)일 때,
$360° \times k + 135° < \frac{\theta}{2} < 360° \times k + 180°$이므로 $\frac{\theta}{2}$는 제2사분면의 각이다.
(ii) $n=2k+1$(k는 정수)일 때,
$360° \times k + 315° < \frac{\theta}{2} < 360° \times k + 360°$이므로 $\frac{\theta}{2}$는 제4사분면의 각이다.
(i), (ii)에서 $\frac{\theta}{2}$는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.
답 제2사분면 또는 제4사분면

23 θ가 제2사분면의 각이므로
$360° \times n + 90° < \theta < 360° \times n + 180°$ (n은 정수)
$\therefore 120° \times n + 30° < \frac{\theta}{3} < 120° \times n + 60°$
(i) $n=3k$(k는 정수)일 때,
$360° \times k + 30° < \frac{\theta}{3} < 360° \times k + 60°$이므로 $\frac{\theta}{3}$는 제1사분면의 각이다.
(ii) $n=3k+1$(k는 정수)일 때,
$360° \times k + 150° < \frac{\theta}{3} < 360° \times k + 180°$이므로 $\frac{\theta}{3}$는 제2사분면의 각이다.
(iii) $n=3k+2$(k는 정수)일 때,
$360° \times k + 270° < \frac{\theta}{3} < 360° \times k + 300°$이므로 $\frac{\theta}{3}$는 제4사분면의 각이다.
이상에서 $\frac{\theta}{3}$는 제1사분면 또는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.
답 제1사분면 또는 제2사분면 또는 제4사분면

개념 32 두 동경의 위치 관계

본책 100쪽

24 답 $120°$ 120, 120, $\frac{3}{2}$, 1, 120

25 각 θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 일치하므로
$6\theta - \theta = 360° \times n$ (n은 정수)
$5\theta = 360° \times n \quad \therefore \theta = 72° \times n \quad \cdots\cdots$ ㉠
$0° < \theta < 90°$에서 $0° < 72° \times n < 90°$이므로
$0 < n < \frac{5}{4} \quad \therefore n = 1$
이것을 ㉠에 대입하면 $\theta = 72°$ 답 $72°$

26 각 θ를 나타내는 동경과 각 3θ를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로
$3\theta - \theta = 360° \times n + 180°$ (n은 정수)

$2\theta=360^\circ\times n+180^\circ$

$\therefore\ \theta=180^\circ\times n+90^\circ$ …… ㉠

$180^\circ<\theta<360^\circ$에서 $180^\circ<180^\circ\times n+90^\circ<360^\circ$이므로

$90^\circ<180^\circ\times n<270^\circ$

$\frac{1}{2}<n<\frac{3}{2}$ $\quad\therefore\ n=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=270^\circ$ 답 270°

27 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$5\theta-\theta=360^\circ\times n+180^\circ$ (n은 정수)

$4\theta=360^\circ\times n+180^\circ$

$\therefore\ \theta=90^\circ\times n+45^\circ$ …… ㉠

$180^\circ<\theta<270^\circ$에서 $180^\circ<90^\circ\times n+45^\circ<270^\circ$이므로

$135^\circ<90^\circ\times n<225^\circ$

$\frac{3}{2}<n<\frac{5}{2}$ $\quad\therefore\ n=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=225^\circ$ 답 225°

28 각 θ를 나타내는 동경과 각 3θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$\theta+3\theta=360^\circ\times n$ (n은 정수)

$4\theta=360^\circ\times n$ $\quad\therefore\ \theta=90^\circ\times n$ …… ㉠

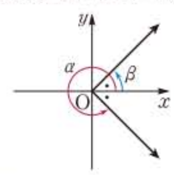
$180^\circ<\theta<360^\circ$에서 $180^\circ<90^\circ\times n<360^\circ$이므로

$2<n<4$ $\quad\therefore\ n=3$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=270^\circ$ 답 270°

베이직쎈 BOX

두 각 α, β를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭



➡ $\alpha+\beta=360^\circ\times n$ (n은 정수)

29 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$\theta+5\theta=360^\circ\times n+180^\circ$ (n은 정수)

$6\theta=360^\circ\times n+180^\circ$

$\therefore\ \theta=60^\circ\times n+30^\circ$ …… ㉠

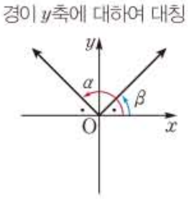
$270^\circ<\theta<360^\circ$에서 $270^\circ<60^\circ\times n+30^\circ<360^\circ$이므로

$240^\circ<60^\circ\times n<330^\circ$

$4<n<\frac{11}{2}$ $\quad\therefore\ n=5$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=330^\circ$ 답 330°

두 각 α, β를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭



➡ $\alpha+\beta$
$=360^\circ\times n+180^\circ$
(n은 정수)

30 각 θ를 나타내는 동경과 각 2θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+2\theta=360^\circ\times n+90^\circ$ (n은 정수)

$3\theta=360^\circ\times n+90^\circ$

$\therefore\ \theta=120^\circ\times n+30^\circ$ …… ㉠

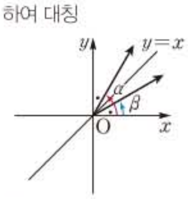
$90^\circ<\theta<270^\circ$에서 $90^\circ<120^\circ\times n+30^\circ<270^\circ$이므로

$60^\circ<120^\circ\times n<240^\circ$

$\frac{1}{2}<n<2$ $\quad\therefore\ n=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=150^\circ$ 답 150°

두 각 α, β를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭



➡ $\alpha+\beta$
$=360^\circ\times n+90^\circ$
(n은 정수)

31 각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+4\theta=360^\circ\times n+90^\circ$ (n은 정수)

$5\theta=360^\circ\times n+90^\circ$

$\therefore\ \theta=72^\circ\times n+18^\circ$ …… ㉠

$90^\circ<\theta<180^\circ$에서 $90^\circ<72^\circ\times n+18^\circ<180^\circ$이므로

$72^\circ<72^\circ\times n<162^\circ$

$1<n<\frac{9}{4}$ $\quad\therefore\ n=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=162^\circ$ 답 162°

개념 33 호도법

본책 101쪽

32 $90^\circ=90\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{2}$ 답 $\frac{\pi}{2}$

33 $150^\circ=150\times\frac{\pi}{180}=\frac{5}{6}\pi$ 답 $\frac{5}{6}\pi$

34 $240^\circ=240\times\frac{\pi}{180}=\frac{4}{3}\pi$ 답 $\frac{4}{3}\pi$

35 $330^\circ=330\times\frac{\pi}{180}=\frac{11}{6}\pi$ 답 $\frac{11}{6}\pi$

36 $-108^\circ=(-108)\times\frac{\pi}{180}=-\frac{3}{5}\pi$ 답 $-\frac{3}{5}\pi$

37 $-225^\circ=(-225)\times\frac{\pi}{180}=-\frac{5}{4}\pi$ 답 $-\frac{5}{4}\pi$

38 $-300^\circ=(-300)\times\frac{\pi}{180}=-\frac{5}{3}\pi$ 답 $-\frac{5}{3}\pi$

39 $-420^\circ=(-420)\times\frac{\pi}{180}=-\frac{7}{3}\pi$ 답 $-\frac{7}{3}\pi$

40 $\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\times\frac{180^\circ}{\pi}=60^\circ$ 답 60°

41 $\frac{2}{5}\pi=\frac{2}{5}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=72^\circ$ 답 72°

42 $\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{4}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=135^\circ$ 답 135°

43 $\frac{5}{2}\pi=\frac{5}{2}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=450^\circ$ 답 450°

44 $-\frac{\pi}{6}=\left(-\frac{\pi}{6}\right)\times\frac{180^\circ}{\pi}=-30^\circ$ 답 -30°

45 $-\frac{10}{9}\pi=\left(-\frac{10}{9}\pi\right)\times\frac{180^\circ}{\pi}=-200^\circ$ 답 -200°

46 $-\frac{7}{4}\pi=\left(-\frac{7}{4}\pi\right)\times\frac{180^\circ}{\pi}=-315^\circ$ 답 -315°

47 $-\frac{17}{6}\pi=\left(-\frac{17}{6}\pi\right)\times\frac{180^\circ}{\pi}=-510^\circ$ 답 -510°

48 $\frac{8}{5}\pi$의 일반각은 $2n\pi+\frac{8}{5}\pi$이므로 $\frac{8}{5}\pi$는 제4사분면의 각이다. 답 $2n\pi+\frac{8}{5}\pi$, 제4사분면

베이직쎈 BOX

베쎈 TIP

호도법에서 동경이 나타내는 한 각의 크기를 θ라 할 때, 일반각은

$2n\pi+\theta$ (n은 정수)

와 같이 나타낸다.

이때 θ는 보통 $0\le\theta<2\pi$인 것을 택한다.

49 $\frac{9}{4}\pi=2\pi\times1+\frac{\pi}{4}$이므로 일반각은 $2n\pi+\frac{\pi}{4}$

따라서 $\frac{9}{4}\pi$는 제1사분면의 각이다.

답 $2n\pi+\frac{\pi}{4}$, 제1사분면

50 $-\frac{7}{6}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{5}{6}\pi$이므로 일반각은

$2n\pi+\frac{5}{6}\pi$

따라서 $-\frac{7}{6}\pi$는 제2사분면의 각이다.

답 $2n\pi+\frac{5}{6}\pi$, 제2사분면

51 $-\frac{8}{3}\pi=2\pi\times(-2)+\frac{4}{3}\pi$이므로 일반각은

$2n\pi+\frac{4}{3}\pi$

따라서 $-\frac{8}{3}\pi$는 제3사분면의 각이다.

답 $2n\pi+\frac{4}{3}\pi$, 제3사분면

개념 34 부채꼴의 호의 길이와 넓이

본책 102쪽

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

$l=r\theta$,

$S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$

52 $l=3\times\frac{\pi}{3}=\pi$, $S=\frac{1}{2}\times3\times\pi=\frac{3}{2}\pi$

답 $l=\pi$, $S=\frac{3}{2}\pi$

53 $l=6\times\frac{\pi}{2}=3\pi$, $S=\frac{1}{2}\times6\times3\pi=9\pi$

답 $l=3\pi$, $S=9\pi$

54 $l=8\times\frac{7}{8}\pi=7\pi$, $S=\frac{1}{2}\times8\times7\pi=28\pi$

답 $l=7\pi$, $S=28\pi$

55 $r\times\frac{\pi}{4}=\pi$이므로 $r=4$

$\therefore S=\frac{1}{2}\times4\times\pi=2\pi$

답 $r=4$, $S=2\pi$

(부채꼴의 호의 길이)$=r\times$(중심각의 크기)임을 이용하여 먼저 반지름의 길이를 구한다.

56 $r\times\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}\pi$이므로 $r=9$

$\therefore S=\frac{1}{2}\times9\times\frac{3}{2}\pi=\frac{27}{4}\pi$

답 $r=9$, $S=\frac{27}{4}\pi$

57 $r\times\frac{3}{4}\pi=\frac{9}{2}\pi$이므로 $r=6$

$\therefore S=\frac{1}{2}\times6\times\frac{9}{2}\pi=\frac{27}{2}\pi$

답 $r=6$, $S=\frac{27}{2}\pi$

58 $\frac{1}{2}\times3\times l=3\pi$이므로 $l=2\pi$

$3\times\theta=2\pi$이므로 $\theta=\frac{2}{3}\pi$

답 $\theta=\frac{2}{3}\pi$, $l=2\pi$

59 $\frac{1}{2}\times5\times l=20\pi$이므로 $l=8\pi$

$5\times\theta=8\pi$이므로 $\theta=\frac{8}{5}\pi$

답 $\theta=\frac{8}{5}\pi$, $l=8\pi$

60 $\frac{1}{2}\times4\times l=9\pi$이므로 $l=\frac{9}{2}\pi$

$4\times\theta=\frac{9}{2}\pi$이므로 $\theta=\frac{9}{8}\pi$

답 $\theta=\frac{9}{8}\pi$, $l=\frac{9}{2}\pi$

61 $\frac{1}{2}\times r^2\times\frac{5}{6}\pi=\frac{20}{3}\pi$이므로

$r^2=16$ $\therefore r=4$

$\therefore l=4\times\frac{5}{6}\pi=\frac{10}{3}\pi$

답 $r=4$, $l=\frac{10}{3}\pi$

62 $\frac{1}{2}\times r^2\times\frac{3}{2}\pi=3\pi$이므로

$r^2=4$ $\therefore r=2$

$\therefore l=2\times\frac{3}{2}\pi=3\pi$

답 $r=2$, $l=3\pi$

63 $\frac{1}{2}\times r^2\times\frac{7}{12}\pi=\frac{21}{2}\pi$이므로

$r^2=36$ $\therefore r=6$

$\therefore l=6\times\frac{7}{12}\pi=\frac{7}{2}\pi$

답 $r=6$, $l=\frac{7}{2}\pi$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 103쪽

01 ① $20^\circ=20\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{9}$

② $126^\circ=126\times\frac{\pi}{180}=\frac{7}{10}\pi$

③ $270^\circ=270\times\frac{\pi}{180}=\frac{3}{2}\pi$

④ $\frac{4}{5}\pi=\frac{4}{5}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=144^\circ$

⑤ $\frac{5}{6}\pi=\frac{5}{6}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=150^\circ$

답 ④

02 ㄱ. $50^\circ=50\times\frac{\pi}{180}=\frac{5}{18}\pi$

ㄴ. $135^\circ=135\times\frac{\pi}{180}=\frac{3}{4}\pi$

ㄷ. $\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\times\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{30^\circ}{\pi}$

ㄹ. $2=2\times\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{360^\circ}{\pi}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

베이직쎈 BOX

03 $120° = 120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2}{3}\pi$, $230° = 230 \times \frac{\pi}{180} = \frac{23}{18}\pi$ 이므로

$$120° + \frac{5}{2}\pi - 230° = \frac{2}{3}\pi + \frac{5}{2}\pi - \frac{23}{18}\pi = \frac{17}{9}\pi$$

$\therefore a = \frac{17}{9}$ 답 $\frac{17}{9}$

04 ① $-660° = 360° \times (-2) + 60°$
② $-300° = 360° \times (-1) + 60°$
③ $420° = 360° \times 1 + 60°$
④ $560° = 360° \times 1 + 200°$
⑤ $780° = 360° \times 2 + 60°$ 답 ④

05 ① $-\frac{7}{4}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{\pi}{4}$
② $-\frac{3}{2}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{\pi}{2}$
③ $\frac{13}{6}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{\pi}{6}$
④ $\frac{11}{3}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{5}{3}\pi$
⑤ $\frac{9}{2}\pi = 2\pi \times 2 + \frac{\pi}{2}$ 답 ③

06 ① $-1030° = 360° \times (-3) + 50°$
② $-\frac{31}{18}\pi = -310° = 360° \times (-1) + 50°$
③ $50° = 360° \times 0 + 50°$
④ $\frac{5}{2}\pi = 450° = 360° \times 1 + 90°$
⑤ $1490° = 360° \times 4 + 50°$ 답 ④

$-\frac{31}{18}\pi$
$= \left(-\frac{31}{18}\pi\right) \times \frac{180°}{\pi}$
$= -310°$

$\frac{5}{2}\pi = \frac{5}{2}\pi \times \frac{180°}{\pi}$
$= 450°$

07 ㄱ. $-175° = 360° \times (-1) + 185°$ ➡ 제3사분면
ㄴ. $-\frac{4}{9}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{14}{9}\pi$ ➡ 제4사분면
ㄷ. $\frac{11}{4}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{3}{4}\pi$ ➡ 제2사분면
ㄹ. $1270° = 360° \times 3 + 190°$ ➡ 제3사분면
이상에서 제3사분면의 각인 것은 ㄱ, ㄹ이다.
답 ㄱ, ㄹ

08 ① $-1100° = 360° \times (-4) + 340°$ ➡ 제4사분면
② $-790° = 360° \times (-3) + 290°$ ➡ 제4사분면
③ $680° = 360° \times 1 + 320°$ ➡ 제4사분면
④ $-\frac{25}{3}\pi = 2\pi \times (-5) + \frac{5}{3}\pi$ ➡ 제4사분면
⑤ $\frac{9}{4}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{\pi}{4}$ ➡ 제1사분면 답 ⑤

09 θ가 제4사분면의 각이므로
$360° \times n + 270° < \theta < 360° \times n + 360°$ (n은 정수)
$\therefore 120° \times n + 90° < \frac{\theta}{3} < 120° \times n + 120°$
(i) $n = 3k$ (k는 정수)일 때,
$360° \times k + 90° < \frac{\theta}{3} < 360° \times k + 120°$이므로 $\frac{\theta}{3}$는 제2사분면의 각이다.
(ii) $n = 3k+1$ (k는 정수)일 때,
$360° \times k + 210° < \frac{\theta}{3} < 360° \times k + 240°$이므로 $\frac{\theta}{3}$는 제3사분면의 각이다.
(iii) $n = 3k+2$ (k는 정수)일 때,
$360° \times k + 330° < \frac{\theta}{3} < 360° \times k + 360°$이므로 $\frac{\theta}{3}$는 제4사분면의 각이다.
이상에서 $\frac{\theta}{3}$는 제2사분면 또는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이므로 $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경은 제1사분면에 존재할 수 없다. 답 제1사분면

10 2θ가 제3사분면의 각이므로
$360° \times n + 180° < 2\theta < 360° \times n + 270°$ (n은 정수)
$\therefore 180° \times n + 90° < \theta < 180° \times n + 135°$
(i) $n = 2k$ (k는 정수)일 때,
$360° \times k + 90° < \theta < 360° \times k + 135°$이므로 θ는 제2사분면의 각이다.
(ii) $n = 2k+1$ (k는 정수)일 때,
$360° \times k + 270° < \theta < 360° \times k + 315°$이므로 θ는 제4사분면의 각이다.
(i), (ii)에서 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.
답 ⑤

11 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로
$\theta + 5\theta = 2n\pi$ (n은 정수)
$6\theta = 2n\pi$ $\therefore \theta = \frac{n}{3}\pi$ ...... ㉠
$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$에서 $\frac{3}{2}\pi < \frac{n}{3}\pi < 2\pi$이므로
$\frac{9}{2} < n < 6$ $\therefore n = 5$
이것을 ㉠에 대입하면 $\theta = \frac{5}{3}\pi$ 답 ②

12 각 θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 일치하므로
$7\theta - \theta = 360° \times n$ (n은 정수)
$6\theta = 360° \times n$ $\therefore \theta = 60° \times n$ ...... ㉠
$0° < \theta < 90°$에서 $0° < 60° \times n < 90°$이므로
$0 < n < \frac{3}{2}$ $\therefore n = 1$
이것을 ㉠에 대입하면 $\theta = 60°$
$\therefore \sin(60° - 15°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

13 각 2θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로
$2\theta + 4\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n은 정수)
$6\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ $\therefore \theta = \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{12}$ ...... ㉠

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\pi<\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{12}<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\frac{11}{12}\pi<\frac{n}{3}\pi<\frac{17}{12}\pi,\quad \frac{11}{4}<n<\frac{17}{4}$

$\therefore$ $n=3$ 또는 $n=4$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad\theta=\frac{13}{12}\pi$ 또는 $\theta=\frac{17}{12}\pi$

답 ①, ⑤

14 각 3θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

베이직쎈 BOX: 원점에 대하여 대칭이다.

$7\theta-3\theta=2n\pi+\pi$ (n은 정수)

$4\theta=2n\pi+\pi \qquad \therefore\ \theta=\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\pi<\theta<2\pi$에서 $\pi<\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}<2\pi$이므로

$\frac{3}{4}\pi<\frac{n}{2}\pi<\frac{7}{4}\pi,\quad \frac{3}{2}<n<\frac{7}{2}$

$\therefore$ $n=2$ 또는 $n=3$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad\theta=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $\theta=\frac{7}{4}\pi$

따라서 모든 θ의 값의 합은

$\frac{5}{4}\pi+\frac{7}{4}\pi=3\pi$ 답 3π

15 $8\times a\pi=6\pi$이므로 $\quad a=\frac{3}{4}$

$\frac{1}{2}\times8\times6\pi=b\pi$이므로 $\quad b=24$

$\therefore\ ab=\frac{3}{4}\times24=18$ 답 ④

16 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ라 하면 $\quad\frac{1}{2}\times r\times\pi=2\pi \qquad \therefore\ r=4$

따라서 $4\theta=\pi$이므로 $\quad\theta=\frac{\pi}{4}$ 답 ②

17 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면

$12+6\theta=\frac{1}{2}\times6^2\times\theta$

$12\theta=12 \qquad \therefore\ \theta=1$ 답 ①

베이직쎈 BOX: 반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴의 둘레의 길이는
$2\times$(반지름의 길이) $+$(호의 길이) $=2r+r\theta$

18 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 둘레의 길이가 10이므로 호의 길이는 $\quad 10-2r$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}r(10-2r)$

$=-r^2+5r$

$=-\left(r-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$ $(0<r<5)$

베이직쎈 BOX: $10-2r>0$, $r>0$이므로 $0<r<5$

따라서 $r=\frac{5}{2}$일 때 S가 최대이므로 넓이가 최대인 부채꼴의 반지름의 길이는 $\frac{5}{2}$이다. 답 ④

베이직쎈 BOX: 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고 빗변의 길이를 c라 하면
$a^2+b^2=c^2$

베쎈 TIP

$\alpha\le x\le\beta$에서 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은

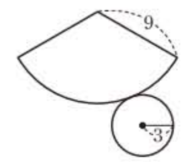
① $\alpha\le p\le\beta$일 때

→ $f(p)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

② $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$일 때

→ $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

19 원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 부채꼴의 호의 길이는 원의 둘레의 길이와 같으므로



$2\pi\times3=6\pi$

따라서 옆면인 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times9\times6\pi=27\pi$

$\therefore$ (원뿔의 겉넓이)$=27\pi+\pi\times3^2=36\pi$ 답 ④

20 부채꼴 AOB의 넓이는 $\quad\frac{1}{2}\times3\times2\pi=3\pi$

부채꼴 AOB의 중심각의 크기를 θ라 하면

$3\theta=2\pi \qquad \therefore\ \theta=\frac{2}{3}\pi$

부채꼴 A′OB′의 넓이는 $\quad\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$3\pi-\frac{4}{3}\pi=\frac{5}{3}\pi$ 답 $\frac{5}{3}\pi$

12 삼각함수

개념 35 삼각비

본책 106쪽

01 답 $\frac{3}{5}$ $\quad$ 5, 9, 3, $\frac{3}{5}$

02 답 $\frac{4}{5}$

03 답 $\frac{3}{4}$

04 답 $\frac{4}{5}$

05 답 $\frac{3}{5}$

06 답 $\frac{4}{3}$

07 피타고라스 정리에 의하여 $\quad\overline{BC}^2+5^2=13^2$

$\overline{BC}^2=144 \qquad \therefore\ \overline{BC}=12$

$\therefore\ \sin A=\frac{12}{13}$ 답 $\frac{12}{13}$

08 답 $\frac{5}{13}$

09 답 $\frac{12}{5}$

10 답 $\frac{5}{13}$

11 답 $\frac{12}{13}$

12 답 $\frac{5}{12}$

06 삼각함수

개념 36 삼각함수

본책 107쪽

13 답 $\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=\frac{3}{5}$, $\tan\theta=\frac{4}{3}$

5, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{3}$

14 $\overline{OP}=\sqrt{(-5)^2+12^2}=13$이므로

$\sin\theta=\frac{12}{13}$, $\cos\theta=-\frac{5}{13}$, $\tan\theta=-\frac{12}{5}$

답 $\sin\theta=\frac{12}{13}$, $\cos\theta=-\frac{5}{13}$, $\tan\theta=-\frac{12}{5}$

15 $\overline{OP}=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$이므로

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$

답 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$

16 $\overline{OP}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2}=2$이므로

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta=-1$

답 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta=-1$

17 $\overline{OP}=\sqrt{(-6)^2+8^2}=10$이므로

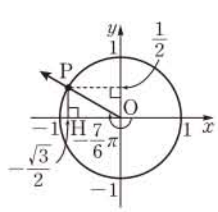
$\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=-\frac{3}{5}$, $\tan\theta=-\frac{4}{3}$

답 $\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=-\frac{3}{5}$, $\tan\theta=-\frac{4}{3}$

18 답 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$

1, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}$

19 오른쪽 그림과 같이 각 $\theta=-\frac{7}{6}\pi$를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

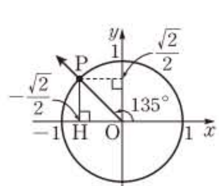


$\overline{OP}=1$이고, $\angle POH=\frac{\pi}{6}$이므로 $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\therefore \sin\theta=\frac{1}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 $\sin\theta=\frac{1}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

20 오른쪽 그림과 같이 각 $\theta=135°$를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

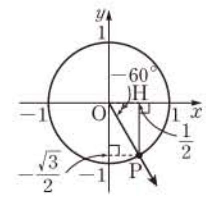


$\overline{OP}=1$이고, $\angle POH=45°$이므로 $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta=-1$

답 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta=-1$

21 오른쪽 그림과 같이 각 $\theta=-60°$를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{OP}=1$이고, $\angle POH=60°$이므로 $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\therefore \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\tan\theta=-\sqrt{3}$

답 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\tan\theta=-\sqrt{3}$

베이직쎈 BOX

$\overline{OP}=r$인 점 $P(x, y)$에 대하여 동경 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\sin\theta=\frac{y}{r}$,

$\cos\theta=\frac{x}{r}$,

$\tan\theta=\frac{y}{x}$ $(x\neq0)$

$\overline{PH}=\overline{OP}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$\overline{OH}=\overline{OP}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

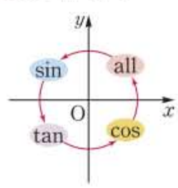
$\overline{PH}=\overline{OP}\sin45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\overline{OH}=\overline{OP}\cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\overline{PH}=\overline{OP}\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{OH}=\overline{OP}\cos60°=\frac{1}{2}$

각 사분면에서 양수인 값을 갖는 삼각함수



개념 37 삼각함수의 값의 부호

본책 108쪽

22 $\theta=\frac{2}{3}\pi$는 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

답 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

23 $\theta=\frac{9}{4}\pi=2\pi\times1+\frac{\pi}{4}$에서 θ는 제1사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$

답 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$

24 $\theta=-\frac{13}{6}\pi=2\pi\times(-2)+\frac{11}{6}\pi$에서 θ는 제4사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

답 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

25 $\theta=570°=360°\times1+210°$에서 θ는 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

답 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

26 $\theta=700°=360°\times1+340°$에서 θ는 제4사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

답 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

27 $\theta=-610°=360°\times(-2)+110°$에서 θ는 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

답 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

28 답 제2사분면　1, 2, 2, 3, 2

29 $\sin\theta<0$이므로 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

$\tan\theta>0$이므로 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

따라서 θ는 제3사분면의 각이다.　답 제3사분면

베이직쎈 BOX

30 $\cos\theta>0$이므로 θ는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.
$\tan\theta>0$이므로 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.
따라서 θ는 제1사분면의 각이다. 답 제1사분면

31 $\sin\theta\cos\theta>0$에서
$\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$
이므로 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.
답 제1사분면 또는 제3사분면

$\sin\theta$와 $\cos\theta$의 값의 부호가 서로 같다.

32 $\cos\theta\tan\theta<0$에서
$\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$ 또는 $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$
이므로 θ는 제4사분면 또는 제3사분면의 각이다.
답 제3사분면 또는 제4사분면

$\cos\theta$와 $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 다르다.

33 $\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta}>0$에서
$\sin\theta>0$, $\tan\theta>0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\tan\theta<0$
이므로 θ는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.
답 제1사분면 또는 제4사분면

$\sin\theta$와 $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 같다.

개념 38 삼각함수 사이의 관계

본책 109쪽

34 답 $\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$, $\tan\theta=-\dfrac{4}{3}$

$\dfrac{9}{25}$, $<$, $-\dfrac{3}{5}$, $-\dfrac{4}{3}$

35 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\dfrac{12}{13}\right)^2=\dfrac{25}{169}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

이때 θ는 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta=-\dfrac{5}{13}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{5}{12}$

답 $\sin\theta=-\dfrac{5}{13}$, $\tan\theta=\dfrac{5}{12}$

36 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

이때 θ는 제1사분면의 각이므로 $\cos\theta>0$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

답 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

37 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}$

이때 θ는 제4사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-2\sqrt{2}$

답 $\sin\theta=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\theta=-2\sqrt{2}$

38 $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$
$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta$
$\quad-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$
$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2$ 답 2

39 $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

$=\dfrac{\cos\theta(1-\sin\theta)+\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$=\dfrac{\cos\theta-\cos\theta\sin\theta+\cos\theta+\cos\theta\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$

$=\dfrac{2\cos\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{2}{\cos\theta}$ 답 $\dfrac{2}{\cos\theta}$

40 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta-1}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos\theta(\cos\theta-1)}{(\cos\theta-1)\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta-\cos\theta}{(\cos\theta-1)\sin\theta}$

$=\dfrac{1-\cos\theta}{(\cos\theta-1)\sin\theta}$

$=-\dfrac{1}{\sin\theta}$ 답 $-\dfrac{1}{\sin\theta}$

41 $\dfrac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}+\cos\theta\tan\theta$

$=\dfrac{1-\sin^2\theta}{1+\sin\theta}+\cos\theta\times\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\dfrac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}+\sin\theta$

$=1-\sin\theta+\sin\theta=1$ 답 1

42 $\dfrac{1-\cos^4\theta}{\sin^2\theta}+\sin^2\theta$

$=\dfrac{(1+\cos^2\theta)(1-\cos^2\theta)}{\sin^2\theta}+\sin^2\theta$

$=\dfrac{(1+\cos^2\theta)\sin^2\theta}{\sin^2\theta}+\sin^2\theta$

$=1+\cos^2\theta+\sin^2\theta=2$ 답 2

43 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$, $\quad 2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$ 답 $-\dfrac{3}{8}$

44 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$

$=\dfrac{1}{\cos\theta\sin\theta}=-\dfrac{8}{3}$ 답 $-\dfrac{8}{3}$

45 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\times\left(-\dfrac{3}{8}\right)=\dfrac{7}{4}$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ 답 $\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

베이직쎈 BOX

46 $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{3}{8}\right)\right\}=\frac{11}{16}$ 　답 $\frac{11}{16}$

> a^3+b^3
> $=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

47 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$, 　$-2\sin\theta\cos\theta=-\frac{8}{9}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$ 　답 $\frac{4}{9}$

48 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$

$=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{9}{4}$ 　답 $\frac{9}{4}$

49 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\times\frac{4}{9}=\frac{17}{9}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{17}}{3}$ 　답 $\pm\frac{\sqrt{17}}{3}$

50 $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{4}{9}\right)=\frac{13}{27}$ 　답 $\frac{13}{27}$

> a^3-b^3
> $=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

51 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ 　답 $\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

52 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 　답 $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

53 $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=\pm\frac{3\sqrt{6}}{8}$ 　답 $\pm\frac{3\sqrt{6}}{8}$

54 $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)=\pm\frac{5\sqrt{2}}{8}$ 　답 $\pm\frac{5\sqrt{2}}{8}$

55 답 $-\frac{3}{4}$ 　◎ $-\frac{1}{2}$, $\frac{a}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, a, $-\frac{3}{4}$

> 이차방정식
> $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면
> $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$,
> $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

56 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$ 　…… ㉠

$\sin\theta\cos\theta=-\frac{a}{3}$ 　…… ㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$ 　…… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$1-\frac{2}{3}a=\frac{1}{9}$ 　$\therefore a=\frac{4}{3}$ 　답 $\frac{4}{3}$

57 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{4}$ 　…… ㉠

$\sin\theta\cos\theta=-\frac{a}{4}$ 　…… ㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{16}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{16}$ 　…… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$1-\frac{a}{2}=\frac{1}{16}$ 　$\therefore a=\frac{15}{8}$ 　답 $\frac{15}{8}$

자신감 UP! 기본 & 핵심유형

본책 111쪽

01 $\overline{OP}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$이므로

$\sin\theta=-\frac{3}{5}$, $\cos\theta=\frac{4}{5}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$ 　답 ④

02 $\tan\theta=\frac{1}{a}=-\frac{2}{3}$이므로 　$a=-\frac{3}{2}$

즉 점 P의 좌표가 $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$이므로

$\overline{OP}=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$ 　답 $\frac{\sqrt{13}}{2}$

03 점 D의 좌표는 　$(\cos\theta, \sin\theta)$

점 C는 점 D와 x축에 대하여 대칭이므로 점 C의 좌표는

$(\cos\theta, -\sin\theta)$

따라서 점 C의 y좌표는 　$-\sin\theta$ 　답 ①

> 점 (a, b)를 x축에 대하여 대칭이동한 점
> ➡ 점 $(a, -b)$

04 θ가 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

$\therefore \sin\theta\cos\theta<0$, $\frac{\tan\theta}{\cos\theta}<0$, $\frac{\sin\theta}{\tan\theta}>0$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 　답 ⑤

05 θ가 제3사분면의 각이므로 $\quad \sin\theta<0,\ \cos\theta<0$

$\therefore \sqrt{\sin^2\theta}-|\cos\theta|-\cos\theta$

$=-\sin\theta-(-\cos\theta)-\cos\theta$

$=-\sin\theta$ 　　답 $-\sin\theta$

$\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & (a\ge 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

06 (i) $\sin\theta\cos\theta<0$일 때,

$\sin\theta$와 $\cos\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

$\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$

$\sin\theta<0,\ \cos\theta>0$

(ii) $\cos\theta\tan\theta>0$일 때,

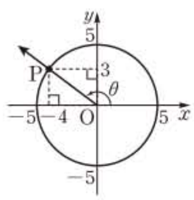
$\cos\theta$와 $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 같으므로 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

$\cos\theta>0,\ \tan\theta>0$

$\cos\theta<0,\ \tan\theta<0$

(i), (ii)에서 θ는 제2사분면의 각이다. 　　답 ②

07 $\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$에서 θ가 제2사분면의 각이고 $\sin\theta=\frac{3}{5}$이므로 오른쪽 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원을 그리면 각 θ를 나타내는 동경과 원이 만나는 점 P는 $\quad$P$(-4,\ 3)$



따라서 삼각함수의 정의에 의하여

$\cos\theta=-\frac{4}{5},\ \tan\theta=-\frac{3}{4}$

$\therefore \tan\theta-\cos\theta=-\frac{3}{4}-\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{20}$ 　　답 $\frac{1}{20}$

08 $\cos^2\theta(1+\tan\theta)^2+\cos^2\theta(1-\tan\theta)^2$

$=\cos^2\theta\{(1+\tan\theta)^2+(1-\tan\theta)^2\}$

$=\cos^2\theta(1+2\tan\theta+\tan^2\theta+1-2\tan\theta+\tan^2\theta)$

$=\cos^2\theta(2+2\tan^2\theta)=2\cos^2\theta\left(1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$

$=2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=2$ 　　답 2

09 $\left(\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}-1\right)\left(1-\frac{1}{\tan\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\right)$

$=\frac{\sin\theta+1-\cos\theta}{\cos\theta}\times\frac{\sin\theta-\cos\theta-1}{\sin\theta}$

$=\frac{\{(\sin\theta-\cos\theta)+1\}\{(\sin\theta-\cos\theta)-1\}}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{(\sin\theta-\cos\theta)^2-1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{-2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=-2$ 　　답 -2

10 ① $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\frac{\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$

$=\frac{\cos\theta(1+\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$

$=\frac{\cos\theta(1+\sin\theta)}{\cos^2\theta}$

$=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

② $\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta-\cos^3\theta}=\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta(1-\cos^2\theta)}$

$=\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta\sin^2\theta}$

$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\tan\theta$

③ $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

④ $\frac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta(1-\cos\theta)+\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$

$=\frac{\sin^2\theta-\sin^2\theta\cos\theta+\sin^2\theta+\sin^2\theta\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$

$=\frac{2\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=2$

⑤ $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\frac{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\frac{1+2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\frac{2(1+\sin\theta)}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\frac{2}{\cos\theta}$

답 ⑤

11 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{3}$이므로 $\quad \cos\theta=3\sin\theta$

$\therefore \frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{3\sin\theta-\sin\theta}{3\sin\theta+\sin\theta}=\frac{1}{2}$ 　　답 $\frac{1}{2}$

12 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$

이때 θ는 제3사분면의 각이므로 $\quad \sin\theta=-\frac{12}{13}$

$\sin\theta<0$

$\therefore \frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{1-\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}$

$=-\frac{2}{3}$ 　　답 ①

13 $\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}=\frac{(1-\sin\theta)+(1+\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$

$=\frac{2}{\cos^2\theta}$

즉 $\frac{2}{\cos^2\theta}=3$이므로 $\quad \cos^2\theta=\frac{2}{3}$

$\therefore \sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

베이직쎈 BOX

이때 $\tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$이므로 $\tan^2\theta=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$

θ는 제4사분면의 각이므로 $\tan\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 ④

$\tan\theta<0$

14 $|\sin\theta|=|\cos\theta|$이고 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$2\sin^2\theta=1$ $\therefore \sin^2\theta=\frac{1}{2}$

이때 θ는 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0,\ \cos\theta>0$

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-1$이므로

$\sin\theta\cos\theta+\tan\theta=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$ 답 ②

15 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{4}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{16}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{16}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{15}{32}$

$$\begin{aligned}\therefore \tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}&=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\&=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\\&=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\\&=-\frac{32}{15}\end{aligned}$$ 답 $-\frac{32}{15}$

16 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$
$=1-2\times\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{4}$

이때 θ는 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$

따라서 $\sin\theta-\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{7}}{2}$

17 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{2}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{4}{9}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{5}{18}$

$\therefore \sin^3\theta-\cos^3\theta$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\frac{2}{3}\times\left(1+\frac{5}{18}\right)=\frac{23}{27}$ 답 ⑤

18 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}\therefore (\sin\theta-\cos\theta)^2&=1-2\sin\theta\cos\theta\\&=1-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)\\&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

이때 θ는 제4사분면의 각이므로 $\sin\theta<0,\ \cos\theta>0$

따라서 $\sin\theta-\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{6}}{2}$ 답 ①

19 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$ ⋯⋯ ㉠

$\sin\theta\cos\theta=-\frac{k}{2}$ ⋯⋯ ㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ ⋯⋯ ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$1-k=\frac{1}{4}$ $\therefore k=\frac{3}{4}$ 답 ⑤

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 114쪽

01 전략 어떤 각의 동경의 위치를 구할 때는 그 각을 $360°\times(\text{정수})+\alpha°\ (0°\le\alpha°<360°)$ 꼴로 나타낸다.

풀이 ㄱ. $98°=98\times\frac{\pi}{180}=\frac{49}{90}\pi$

ㄴ. $1330°=360°\times3+250°$이므로 $1330°$는 제3사분면의 각이다.

ㄷ. $-30°=360°\times(-1)+330°$, $\frac{11}{6}\pi=330°$,

$\frac{11}{6}\pi=\frac{11}{6}\pi\times\frac{180°}{\pi}=330°$

$-750°=360°\times(-3)+330°$

따라서 $-30°$, $\frac{11}{6}\pi$, $-750°$를 나타내는 동경은 모두 일치한다.

ㄹ. $\frac{\pi}{4}+\frac{7}{4}\pi=2\pi$이므로 $\frac{\pi}{4}$와 $\frac{7}{4}\pi$를 나타내는 동경은 x축에 대하여 대칭이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ③

02 전략 θ가 제2사분면의 각

➡ $360°\times n+90°<\theta<360°\times n+180°$

풀이 ① $-265°=360°\times(-1)+95°$ ➡ 제2사분면

② $-120°=360°\times(-1)+240°$ ➡ 제3사분면

③ $440°=360°\times1+80°$ ➡ 제1사분면

④ $\frac{17}{6}\pi=2\pi\times1+\frac{5}{6}\pi$ ➡ 제2사분면

⑤ $-\frac{11}{3}\pi=2\pi\times(-2)+\frac{\pi}{3}$ ➡ 제1사분면

답 ①, ④

베이직쎈 BOX

03 전략 두 각 α, β를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭 → $\alpha+\beta=2n\pi+\pi$ (n은 정수)

풀이 각 θ를 나타내는 동경과 각 3θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$\theta+3\theta=2n\pi+\pi$ (n은 정수)

$4\theta=2n\pi+\pi \qquad \therefore \theta=\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4} \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}<\pi$이므로

$\frac{\pi}{4}<\frac{n}{2}\pi<\frac{3}{4}\pi, \qquad \frac{1}{2}<n<\frac{3}{2} \qquad \therefore n=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{3}{4}\pi$

답 ③

04 전략 반지름의 길이가 r, 호의 길이가 l인 부채꼴의 넓이 → $\frac{1}{2}rl$

풀이 반지름의 길이가 r인 원의 넓이는 πr^2

반지름의 길이가 $5r$이고 호의 길이가 4π인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 5r\times 4\pi=10\pi r$

두 넓이가 서로 같으므로 $\pi r^2=10\pi r$

$r^2-10r=0, \qquad r(r-10)=0$

$\therefore r=10$

답 ③

05 전략 삼각함수의 정의를 이용하여 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 구한다.

풀이 $\overline{OP}=\sqrt{(-5)^2+12^2}=13$이므로

$\sin\theta=\frac{12}{13}$, $\cos\theta=-\frac{5}{13}$, $\tan\theta=-\frac{12}{5}$

$\therefore 13(\sin\theta+\cos\theta)-5\tan\theta$

$=13\times\left(\frac{12}{13}-\frac{5}{13}\right)-5\times\left(-\frac{12}{5}\right)$

$=19$

답 ⑤

06 전략 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 각 삼각함수의 값의 부호를 조사한다.

풀이 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

θ는 제2사분면의 각이다.

$\therefore \sin\theta\cos\theta<0$, $\cos\theta+\tan\theta<0$,

$\sin\theta-\tan\theta>0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

07 전략 주어진 조건을 동시에 만족시키는 각 θ가 제몇 사분면의 각인지 알아본다.

풀이 (i) $\sin\theta\tan\theta>0$일 때,

$\sin\theta$와 $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 같으므로 θ는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

$\sin\theta>0$, $\tan\theta>0$

$\sin\theta<0$, $\tan\theta<0$

(ii) $\cos\theta\tan\theta<0$일 때,

$\cos\theta$와 $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

$\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

$\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

(i), (ii)에서 θ는 제4사분면의 각이다.

$-\frac{\pi}{6}=2\pi\times(-1)+\frac{11}{6}\pi$이므로 θ의 값이 될 수 있는 것은 ③ $-\frac{\pi}{6}$이다.

답 ③

참고 ① $-\frac{5}{4}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{3}{4}\pi$이므로 $-\frac{5}{4}\pi$는 제2사분면의 각이다.

② $-\frac{2}{3}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{4}{3}\pi$이므로 $-\frac{2}{3}\pi$는 제3사분면의 각이다.

④ $\frac{\pi}{8}$는 제1사분면의 각이다.

⑤ $\frac{5}{9}\pi$는 제2사분면의 각이다.

08 전략 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용한다.

풀이 ① $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta+\sin\theta+\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$

$=\frac{1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$

$=\frac{1}{\cos\theta}$

② $(1-\sin^2\theta)(1+\tan^2\theta)=\cos^2\theta\left(1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

③ $\cos^4\theta-\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$=(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta$

$=1-2\sin^2\theta$

④ $\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}=\frac{\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$

$=2\sin\theta\cos\theta$

⑤ $\left(\frac{1}{\sin\theta}+1\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}+1\right)\left(\frac{1}{\sin\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)$

$=\left(\frac{1}{\sin\theta}+1\right)\left(\frac{1}{\sin\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}+1\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)$

$=\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)=\frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}\times\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\times\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=1$

답 ⑤

09 전략 $\sin\theta$의 값을 구한 후 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용한다.

풀이 $\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{1}{6}$에서 $6(1-\sin\theta)=1+\sin\theta$

$6-6\sin\theta=1+\sin\theta, \qquad -7\sin\theta=-5$

$\therefore \sin\theta=\frac{5}{7}$

$\therefore \cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{24}{49}$

이때 θ는 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta=-\frac{2\sqrt{6}}{7}$

$\cos\theta<0$

답 ④

10 전략 주어진 이차방정식의 계수가 유리수이므로 이차방정식의 한 근이 $2-\sqrt{3}$이면 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$이다.

06 삼각함수

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=4$$

이때

$$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

에서 $\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=4$이므로 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\therefore 4\sin\theta\cos\theta=1$ 답 ③

베쎈TIP

a, b, c가 유리수일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$이다.
(단, p, q는 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)

11 전략 각의 크기는 양의 방향으로 회전하면 '+'를, 음의 방향으로 회전하면 '−'를 붙인다.

풀이 동경 OP가 원점 O를 중심으로 시초선에서 음의 방향으로 250°만큼 회전하면 그 각의 크기는 −250°이고, 양의 방향으로 130°만큼 회전하면 동경 OP가 나타내는 각의 크기는

$-250°+130°=-120°$

이때 $-120°=360°\times(-1)+240°$이므로 동경 OP는 제3사분면에 있다. 답 제3사분면

12 전략 두 각 α, β를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭 → $\alpha-\beta=2n\pi+\pi$ (n은 정수)

풀이 각 2θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$5\theta-2\theta=2n\pi+\pi$ (n은 정수)

$3\theta=2n\pi+\pi$ $\therefore \theta=\frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{3}$

이때 $0<\theta<2\pi$이므로 $0<\frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{3}<2\pi$

$-\frac{\pi}{3}<\frac{2n}{3}\pi<\frac{5}{3}\pi$ $\therefore -\frac{1}{2}<n<\frac{5}{2}$

$\therefore n=0$ 또는 $n=1$ 또는 $n=2$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\pi$ 또는 $\theta=\frac{5}{3}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{5}{3}\pi$, $\beta=\frac{\pi}{3}$이므로

$\alpha+\beta=2\pi$ 답 2π

베이직쎈 BOX

(i) $n=0$일 때, $\theta=\frac{\pi}{3}$
(ii) $n=1$일 때, $\theta=\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{3}=\pi$
(iii) $n=2$일 때, $\theta=\frac{4}{3}\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{3}\pi$

13 전략 중심각의 크기가 θ(라디안)이고, 반지름의 길이가 r인 부채꼴의 호의 길이와 넓이는 각각 $r\theta$, $\frac{1}{2}r^2\theta$이다.

풀이 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}$이고 둘레의 길이가 16이므로

$2r+\frac{2}{3}r=16$, $\frac{8}{3}r=16$

$\therefore r=6$ ··· ❶

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{2}{3}=12$ ··· ❷

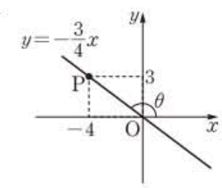
답 12

단계	채점 기준	비율
❶	부채꼴의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	60%
❷	부채꼴의 넓이를 구할 수 있다.	40%

14 전략 직선 $y=mx+n$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ일 때, $m=\tan\theta$임을 이용한다.

풀이 $y=-\frac{3}{4}x$에서 $\tan\theta=-\frac{3}{4}$

$0<\theta<\pi$이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-\frac{3}{4}x$ 위의 점 P$(-4, 3)$에 대하여



$\overline{OP}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$

따라서 $\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=-\frac{4}{5}$이므로

$$\sin\theta\cos\theta-\tan\theta=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{4}{5}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{12}{25}+\frac{3}{4}=\frac{27}{100}$$

답 $\frac{27}{100}$

15 전략 먼저 θ가 제몇 사분면의 각인지 알아본다.

풀이 $\frac{\sqrt{\cos\theta}}{\sqrt{\sin\theta}}=-\sqrt{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$에서

$\cos\theta>0$, $\sin\theta<0$ ··· ❶

즉 θ는 제4사분면의 각이므로

$\tan\theta<0$ ··· ❷

$\therefore \sqrt{(\tan\theta-\cos\theta)^2}-|\tan\theta|$
$=-(\tan\theta-\cos\theta)-(-\tan\theta)$
$=\cos\theta$ ··· ❸

답 $\cos\theta$

베이직쎈 BOX

0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이면 $a>0$, $b<0$

단계	채점 기준	비율
❶	$\sin\theta$, $\cos\theta$의 값의 부호를 알 수 있다.	40%
❷	$\tan\theta$의 값의 부호를 알 수 있다.	20%
❸	주어진 식을 간단히 할 수 있다.	40%

베이직쎈 BOX

Ⅲ. 삼각함수

07 삼각함수의 그래프

13 삼각함수의 그래프

개념 39 주기함수

본책 116쪽

01 답 3　　2, 3, 1, 1, 3

주기가 p인 주기함수 f
➡ $f(x+p)=f(x)$

02 함수 $f(x)$의 주기가 3이므로　$f(x+3)=f(x)$
$\therefore f(11)=f(8+3)=f(8)$
$=f(5+3)=f(5)$
$=f(2+3)=f(2)=5$　답 5

03 함수 $f(x)$의 주기가 5이므로　$f(x+5)=f(x)$
$\therefore f(17)=f(12+5)=f(12)$
$=f(7+5)=f(7)$
$=f(2+5)=f(2)$
$=f(-3+5)=f(-3)=2$　답 2

04 함수 $f(x)$의 주기가 2이므로　$f(x)=f(x+2)$
$\therefore f(-8)=f(-8+2)=f(-6)$
$=f(-6+2)=f(-4)$
$=f(-4+2)=f(-2)$
$=f(-2+2)=f(0)=-1$　답 -1

05 함수 $f(x)$의 주기가 4이므로　$f(x)=f(x+4)$
$\therefore f(-13)=f(-13+4)=f(-9)$
$=f(-9+4)=f(-5)$
$=f(-5+4)=f(-1)=-3$　답 -3

06 함수 $f(x)$의 주기가 2이므로　$f(x+2)=f(x)$
$\therefore f(7)=f(5)=f(3)=f(1)$
$0\le x<2$에서 $f(x)=x$이므로
$f(7)=f(1)=1$　답 1

07 함수 $f(x)$의 주기가 3이므로　$f(x+3)=f(x)$
$\therefore f(9)=f(6)=f(3)=f(0)$
$0\le x<3$에서 $f(x)=-x$이므로
$f(9)=f(0)=0$　답 0

08 함수 $f(x)$의 주기가 2이므로　$f(x+2)=f(x)$
$\therefore f(6)=f(4)=f(2)=f(0)$
$0\le x<2$에서 $f(x)=x-1$이므로
$f(6)=f(0)=-1$　답 -1

09 함수 $f(x)$의 주기가 4이므로　$f(x+4)=f(x)$
$\therefore f(11)=f(7)=f(3)=f(-1)$
$-2\le x<2$에서 $f(x)=x+2$이므로
$f(11)=f(-1)=1$　답 1

개념 40 사인함수의 그래프

본책 117쪽

10 답 ○　　**11** 답 ○

12 주기가 2π인 주기함수이다.　답 ×

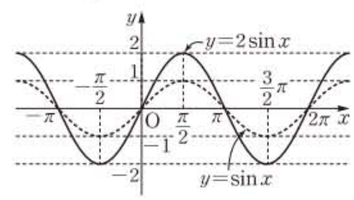
13 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.　답 ×

14 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.　답 ×

15 답 ○

$y=a\sin x$의 그래프
➡ $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 $|a|$배하여 그린다.

16 $y=2\sin x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배한 것과 같다.
따라서 그래프는 다음 그림과 같고 치역은 $\{y\mid -2\le y\le 2\}$, 주기는 2π이다.

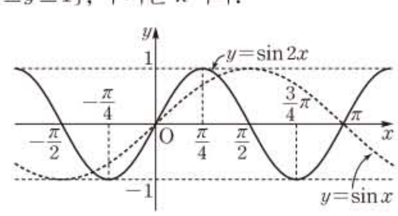


답 풀이 참조

베쎈TIP
삼각함수의 치역과 주기
① 삼각함수의 그래프를 y축의 방향으로 확대하거나 축소하면 주기가 변하지 않고, x축의 방향으로 확대하거나 축소하면 치역이 변하지 않는다.
② 삼각함수의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하면 치역과 주기는 모두 변하지 않고, y축의 방향으로 평행이동하면 주기가 변하지 않는다.

$y=\sin bx$의 그래프
➡ $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{|b|}$배하여 그린다.

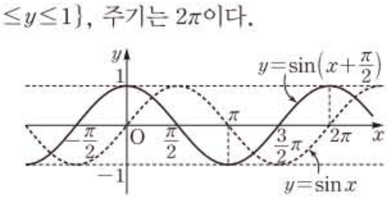
17 $y=\sin 2x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배한 것과 같다.
따라서 그래프는 다음 그림과 같고 치역은 $\{y\mid -1\le y\le 1\}$, 주기는 π이다.



답 풀이 참조

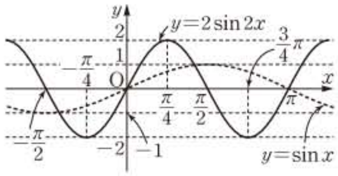
$y=\sin(x-a)+b$의 그래프
➡ $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하여 그린다.

18 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것과 같다.
따라서 그래프는 다음 그림과 같고 치역은 $\{y\mid -1\le y\le 1\}$, 주기는 2π이다.



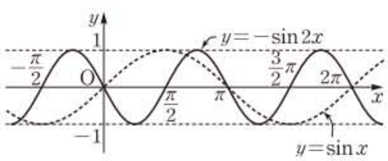
답 풀이 참조

19 $y=2\sin 2x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배, y축의 방향으로 2배한 것과 같다.
따라서 그래프는 다음 그림과 같고 치역은 $\{y|-2\le y\le 2\}$, 주기는 π이다.



답 풀이 참조

20 $y=-\sin 2x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것과 같다.
따라서 그래프는 다음 그림과 같고 치역은 $\{y|-1\le y\le 1\}$, 주기는 π이다.



답 풀이 참조

베이직쎈 BOX

$y=\cos(x-a)+b$의 그래프
➡ $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하여 그린다.

도형 $y=f(x)$를 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식
➡ $y=-f(x)$

개념 41 코사인함수의 그래프

본책 118쪽

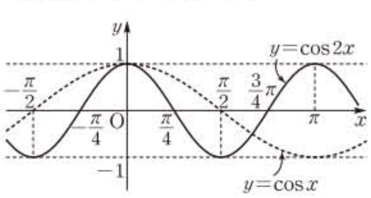
21 정의역은 실수 전체의 집합이다. 답 ×

22 답 ○　**23** 답 ○

24 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. 답 ×

25 답 ○　**26** 답 ○

27 $y=\cos 2x$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배한 것과 같다.
따라서 그래프는 다음 그림과 같고 치역은 $\{y|-1\le y\le 1\}$, 주기는 π이다.

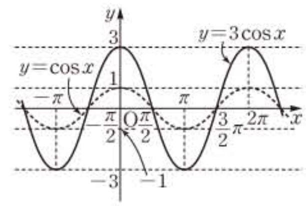


답 풀이 참조

$y=\cos bx$의 그래프
➡ $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{|b|}$배하여 그린다.

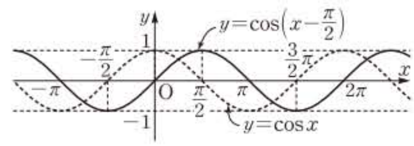
28 $y=3\cos x$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 3배한 것과 같다.
따라서 그래프는 다음 그림과 같고 치역은 $\{y|-3\le y\le 3\}$, 주기는 2π이다.

$y=a\cos x$의 그래프
➡ $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 $|a|$배하여 그린다.



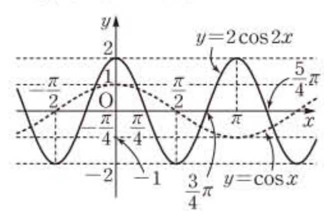
답 풀이 참조

29 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것과 같다.
따라서 그래프는 다음 그림과 같고 치역은 $\{y|-1\le y\le 1\}$, 주기는 2π이다.



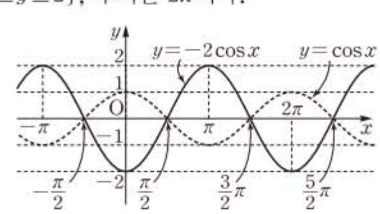
답 풀이 참조

30 $y=2\cos 2x$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배, y축의 방향으로 2배한 것과 같다.
따라서 그래프는 다음 그림과 같고 치역은 $\{y|-2\le y\le 2\}$, 주기는 π이다.



답 풀이 참조

31 $y=-2\cos x$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것과 같다.
따라서 그래프는 다음 그림과 같고 치역은 $\{y|-2\le y\le 2\}$, 주기는 2π이다.



답 풀이 참조

개념 42 탄젠트함수의 그래프

본책 119쪽

32 정의역은 $n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)가 아닌 실수 전체의 집합이다. 답 ×

33 치역은 실수 전체의 집합이다. 답 ×

34 답 ○

베이직쎈 BOX

35 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 답 ×

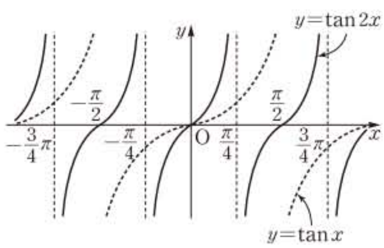
36 치역이 실수 전체의 집합이므로 최댓값과 최솟값은 없다. 답 ○

37 답 ○

38 $y=\tan 2x$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배한 것과 같다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같고 주기는 $\frac{\pi}{2}$, 점근선의 방정식은 $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$ (n은 정수)이다.

> $y=\tan bx$의 그래프
> ➡ $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{|b|}$배하여 그린다.

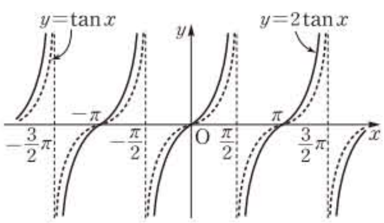


답 풀이 참조

39 $y=2\tan x$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배한 것과 같다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같고 주기는 π, 점근선의 방정식은 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

> $y=a\tan x$의 그래프
> ➡ $y=\tan x$의 그래프를 y축의 방향으로 $|a|$배하여 그린다.



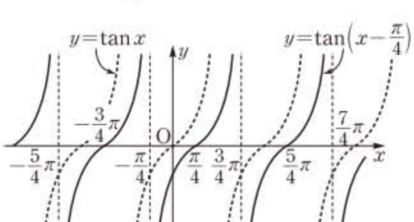
답 풀이 참조

> $y=a\sin(bx+c)+d$의
> 최댓값 ➡ $|a|+d$
> 최솟값 ➡ $-|a|+d$
> 주기 ➡ $\frac{2\pi}{|b|}$

40 $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같고 주기는 π, 점근선의 방정식은 $x=n\pi+\frac{3}{4}\pi$ (n은 정수)이다.

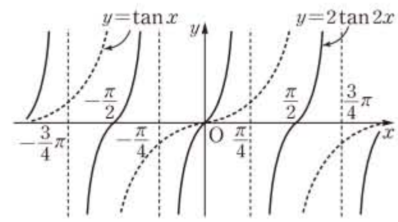
> $y=\tan(x-a)+b$의 그래프
> ➡ $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하여 그린다.



답 풀이 참조

41 $y=2\tan 2x$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배, y축의 방향으로 2배한 것과 같다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같고 주기는 $\frac{\pi}{2}$, 점근선의 방정식은 $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$ (n은 정수)이다.

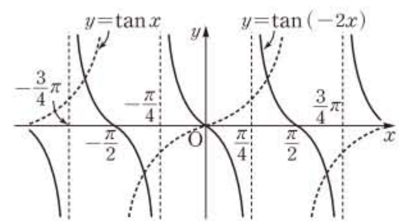


답 풀이 참조

42 $y=\tan(-2x)$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배한 후 y축에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

> 도형 $y=f(x)$를 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식
> ➡ $y=f(-x)$

따라서 그래프는 다음 그림과 같고 주기는 $\frac{\pi}{2}$, 점근선의 방정식은 $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$ (n은 정수)이다.



답 풀이 참조

개념 43 삼각함수의 최댓값, 최솟값, 주기

본책 120쪽

43 $y=\frac{1}{3}\sin 2x$의 최댓값은 $\frac{1}{3}$, 최솟값은 $-\frac{1}{3}$이고 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

답 최댓값: $\frac{1}{3}$, 최솟값: $-\frac{1}{3}$, 주기: π

44 $y=\sin x-1$의 최댓값은 $1-1=0$, 최솟값은 $-1-1=-2$이고 주기는 2π이다.

답 최댓값: 0, 최솟값: −2, 주기: 2π

45 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$의 최댓값은 2, 최솟값은 −2이고 주기는 2π이다.

답 최댓값: 2, 최솟값: −2, 주기: 2π

46 $y=-\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$에서 $y=-\sin\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 최댓값은 1, 최솟값은 −1이고 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$이다.

답 최댓값: 1, 최솟값: −1, 주기: 4π

47 $y=4\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2$의 최댓값은 $4-2=2$, 최솟값은 $-4-2=-6$이고 주기는 2π이다.

답 최댓값: 2, 최솟값: −6, 주기: 2π

48 $y=\frac{1}{2}\cos 3x$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$, 최솟값은 $-\frac{1}{2}$이고 주기는 $\frac{2}{3}\pi$이다.

답 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\frac{1}{2}$, 주기: $\frac{2}{3}\pi$

49 $y=\cos x+1$의 최댓값은 $1+1=2$, 최솟값은 $-1+1=0$이고 주기는 2π이다.

답 최댓값: 2, 최솟값: 0, 주기: 2π

50 $y=3\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의 최댓값은 3, 최솟값은 -3이고 주기는 2π이다.

답 최댓값: 3, 최솟값: -3, 주기: 2π

51 $y=-\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$에서 $y=-\cos\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

따라서 최댓값은 1, 최솟값은 -1이고 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$이다.

답 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: 4π

52 $y=5\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2$의 최댓값은 $5-2=3$, 최솟값은 $-5-2=-7$이고 주기는 2π이다.

답 최댓값: 3, 최솟값: -7, 주기: 2π

53 $y=\tan 4x$의 주기는 $\frac{\pi}{4}$이고 점근선의 방정식은 $4x=n\pi+\frac{\pi}{2}$, 즉 $x=\frac{n}{4}\pi+\frac{\pi}{8}$ (n은 정수)이다.

답 주기: $\frac{\pi}{4}$,
점근선의 방정식: $x=\frac{n}{4}\pi+\frac{\pi}{8}$ (n은 정수)

54 $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$의 주기는 π이고 점근선의 방정식은 $x+\frac{\pi}{6}=n\pi+\frac{\pi}{2}$, 즉 $x=n\pi+\frac{\pi}{3}$ (n은 정수)이다.

답 주기: π,
점근선의 방정식: $x=n\pi+\frac{\pi}{3}$ (n은 정수)

55 $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$의 주기는 π이고 점근선의 방정식은 $x-\frac{\pi}{4}=n\pi+\frac{\pi}{2}$, 즉 $x=n\pi+\frac{3}{4}\pi$ (n은 정수)이다.

답 주기: π,
점근선의 방정식: $x=n\pi+\frac{3}{4}\pi$ (n은 정수)

56 $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-2$에서 $y=\tan 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-2$

따라서 주기는 $\frac{\pi}{2}$이고 점근선의 방정식은

$2x-\frac{\pi}{3}=n\pi+\frac{\pi}{2}$, 즉 $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{5}{12}\pi$ (n은 정수)이다.

답 주기: $\frac{\pi}{2}$,
점근선의 방정식: $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{5}{12}\pi$ (n은 정수)

베이직쎈 BOX

$y=a\cos(bx+c)+d$의
최댓값 ➡ $|a|+d$
최솟값 ➡ $-|a|+d$
주기 ➡ $\frac{2\pi}{|b|}$

$y=a\tan(bx+c)+d$의
주기 ➡ $\frac{\pi}{|b|}$

$y=a\tan bx$의 그래프의 점근선의 방정식
➡ $x=\frac{n}{b}\pi+\frac{\pi}{2b}$ (n은 정수)

$2x=n\pi+\frac{5}{6}\pi$
$\therefore x=\frac{n}{2}\pi+\frac{5}{12}\pi$

$2x=n\pi+\frac{3}{2}\pi$
$\therefore x=\frac{n}{2}\pi+\frac{3}{4}\pi$

57 $y=2\tan(2x-\pi)-3$에서

$y=2\tan 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-3$

따라서 주기는 $\frac{\pi}{2}$이고 점근선의 방정식은

$2x-\pi=n\pi+\frac{\pi}{2}$, 즉 $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{3}{4}\pi$ (n은 정수)이다.

답 주기: $\frac{\pi}{2}$,
점근선의 방정식: $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{3}{4}\pi$ (n은 정수)

58 답 $a=2$, $b=1$ 3, $\frac{1}{2}a$, 2, 1

59 $f(x)=a\sin\pi x+b$의 최솟값이 -1이고 $a>0$이므로

$-a+b=-1$ …… ㉠

또 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$이므로 $a\sin\frac{\pi}{2}+b=2$

$\therefore a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{1}{2}$

답 $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{1}{2}$

60 $f(x)=a\sin bx+c$의 최댓값이 4, 최솟값이 -2이고 $a>0$이므로

$a+c=4$, $-a+c=-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $c=1$

또 주기가 3π이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=3\pi$ $\therefore b=\frac{2}{3}$

답 $a=3$, $b=\frac{2}{3}$, $c=1$

61 $f(x)=a\cos\pi x+b$의 최댓값이 2이고 $a>0$이므로

$a+b=2$ …… ㉠

또 $f\left(\frac{1}{3}\right)=-2$이므로 $a\cos\frac{\pi}{3}+b=-2$

$\therefore \frac{1}{2}a+b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8$, $b=-6$

답 $a=8$, $b=-6$

62 $f(x)=a\cos\pi x+b$의 최솟값이 -2이고 $a>0$이므로 $-a+b=-2$ …… ㉠

또 $f(0)=1$이므로 $a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$

답 $a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$

63 $f(x)=a\cos bx+c$의 최솟값이 -3이고 $a>0$이므로 $-a+c=-3$ …… ㉠

주기가 π이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=\pi$ $\therefore b=2$

또 $f(\pi)=1$이므로 $a\cos 2\pi+c=1$

$\therefore a+c=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $c=-1$

답 $a=2$, $b=2$, $c=-1$

64 $f(x)=a\tan bx+2$의 주기가 2π이고 $b>0$이므로

$\frac{\pi}{b}=2\pi$ $\therefore b=\frac{1}{2}$

또 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3$이므로 $\quad a\tan\frac{\pi}{6}+2=3$

$\frac{\sqrt{3}}{3}a+2=3, \quad \frac{\sqrt{3}}{3}a=1$

$\therefore a=\sqrt{3}$

답 $a=\sqrt{3},\ b=\frac{1}{2}$

65 $f(x)=a\tan bx-1$의 주기가 $\frac{\pi}{2}$이고 $b>0$이므로

$\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{2} \quad \therefore b=2$

또 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=4$이므로 $\quad a\tan\frac{\pi}{4}-1=4$

$a-1=4 \quad \therefore a=5$

답 $a=5,\ b=2$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 122쪽

01 조건 (가)에서 $\quad f(20)=f(17)=f(14)=\cdots=f(2)$
조건 (나)에서 $\quad f(2)=-2\times2+5=1$

$\therefore f(20)=f(2)=1$

답 1

02 $f(30)=f(28)=f(26)=\cdots=f(0)$
$f(31)=f(29)=f(27)=\cdots=f(1)$
$f(32)=f(30)=f(0)$

$\therefore f(30)+f(31)+f(32)=f(0)+f(1)+f(0)$
$=1+(-4)+1=-2$

답 -2

03 ⑤ $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

답 ⑤

04 ㄱ. 주기는 2π이다.
ㄴ. 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
ㄷ. 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le1\}$이므로 치역에 속하는 서로 다른 정수의 개수는 $-1,\ 0,\ 1$의 3이다.
이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ②

05 ① 정의역은 $n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)가 아닌 실수 전체의 집합이다.
② 주기가 π이므로 $\quad \tan(x+\pi)=\tan x$
③ 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로
$\tan(-x)=-\tan x$
④ 최댓값과 최솟값은 없다.

답 ⑤

06 $y=3\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-2$에서

$a=3-2=1,\ b=-3-2=-5,\ c=2\pi$

$\therefore a+b+c=-4+2\pi$

답 $-4+2\pi$

07 ① 주기는 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$이다.
② 최댓값은 $2+1=3$이다.
③ 최솟값은 $-2+1=-1$이다.

④ $x=\frac{\pi}{8}$를 대입하면 $\quad y=2\sin\frac{\pi}{6}+1=2$

따라서 그래프는 점 $\left(\frac{\pi}{8},\ 2\right)$를 지난다.

⑤ $y=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)+1=2\sin4\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+1$의 그래프는 $y=2\sin4x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{12}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

답 ④

베이직쎈 BOX

함수 $y=a\sin(bx+c)+d$의 그래프는 함수 $y=a\sin bx$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{c}{b}$만큼, y축의 방향으로 d만큼 평행이동한 것이다.

08 $y=\tan\frac{\pi}{6}x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 그래프의 식은

x 대신 $x-\frac{1}{2}$을 대입한다.

$y=\tan\frac{\pi}{6}\left(x-\frac{1}{2}\right)$

이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{5}{2},\ a\right)$를 지나므로

$a=\tan\frac{\pi}{6}\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

답 $\sqrt{3}$

09 각 함수의 최댓값은 다음과 같다.

ㄱ. 2 ㄴ. 3 ㄷ. 2 ㄹ. 7

$1+1=2$
$2+5=7$

이상에서 ㄱ, ㄷ의 최댓값이 2로 같다.

답 ①

10 $y=2\cos\frac{1}{3}x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은

x 대신 $x+\frac{\pi}{3}$, y 대신 $y-4$를 대입한다.

$y=2\cos\frac{1}{3}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+4$

이 함수의 최댓값은 $2+4=6$, 최솟값은 $-2+4=2$이므로 $\quad M=6,\ m=2$

$\therefore Mm=12$

답 12

11 ㄱ. $y=\sin(x+\pi)-2$의 그래프는 $y=\sin x+1$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\pi$만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것과 같다.
ㄴ. $y=3\tan\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1=3\tan2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+1$의 그래프는 $y=3\tan2x+1$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{12}$만큼 평행이동한 것과 같다.
ㄷ. $y=\cos x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것과 같다.
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 두 함수의 그래프가 평행이동에 의해 겹쳐질 수 있다.

답 ⑤

12 함수 $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$의 주기는 $\quad \frac{\pi}{2}$

각 함수의 주기는 다음과 같다.

ㄱ. $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ ㄴ. $\frac{\pi}{\left|-\frac{1}{2}\right|}=2\pi$

ㄷ. $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ ㄹ. $\frac{2\pi}{|-6|}=\frac{\pi}{3}$

이상에서 $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$와 주기가 같은 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

베이직쎈 BOX

13 $f(x)=a\sin bx+c$의 최댓값이 5이고 $a>0$이므로

$a+c=5$ …… ㉠

주기가 2π이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=2\pi$

$\therefore b=1$

또 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=3$이므로 $a\sin\frac{\pi}{6}+c=3$

$\therefore \frac{1}{2}a+c=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $c=1$

$\therefore a+b-c=4$ 답 4

14 조건 (가)에서 함수 $f(x)=a\cos bx+c$의 최댓값이 7, 최솟값이 -1이고 $a>0$이므로

$a+c=7$, $-a+c=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $c=3$

조건 (나)에서 주기가 $\frac{\pi}{4}$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{4}$ $\therefore b=8$

$\therefore ac+b=20$ 답 20

15 $y=3\tan(ax-b)+2$의 주기가 4π이고 $a>0$이므로 $\frac{\pi}{a}=4\pi$ $\therefore a=\frac{1}{4}$

따라서 함수 $y=3\tan\left(\frac{1}{4}x-b\right)+2$의 그래프의 점근선의 방정식은

$\frac{1}{4}x-b=n\pi+\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{4}x=n\pi+\frac{\pi}{2}+b$

$\therefore x=4n\pi+2\pi+4b$ (n은 정수)

이 방정식이 $x=4n\pi$와 일치하므로

$2\pi+4b=4k\pi$ (k는 정수)

이때 $-\pi<b<0$이므로 $b=-\frac{\pi}{2}$

$-\pi<b<0$에서
$-4\pi<4b<0$
$-2\pi<2\pi+4b<2\pi$
따라서 $2\pi+4b=0$이므로
$b=-\frac{\pi}{2}$

$\therefore \frac{b}{a}=-2\pi$ 답 ④

16 주어진 그래프의 주기가 $\frac{\pi}{2}$이고 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore a=2$

따라서 주어진 함수는 $y=\tan(2x-b)$이고, 이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$을 지나므로

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-b\right)=0$

이때 $0<b<\pi$에서 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-b<\frac{\pi}{2}$이므로

$0<b<\pi$에서
$-\pi<-b<0$
$\therefore -\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-b<\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}-b=0$ $\therefore b=\frac{\pi}{2}$

$\therefore ab=\pi$ 답 ③

17 주어진 함수의 최댓값이 3, 최솟값이 -3이고 $a>0$이므로 $a=3$

또 주기가 $\frac{3}{4}\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi$ $\therefore b=2$

따라서 주어진 함수는 $y=3\sin(2x-c)$이고, 이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$을 지나므로

$0=3\sin\left(\frac{\pi}{2}-c\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-c\right)=0$

이때 $0<c<\pi$에서 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-c<\frac{\pi}{2}$이므로

$0<c<\pi$에서
$-\pi<-c<0$
$\therefore -\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-c<\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}-c=0$ $\therefore c=\frac{\pi}{2}$

$\therefore abc=3\pi$ 답 3π

18 주어진 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -6이고 $a>0$이므로 $a+c=2$, $-a+c=-6$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $c=-2$

또 주기가 8이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=8$ $\therefore b=\frac{\pi}{4}$

$\therefore abc=-2\pi$ 답 ②

14 삼각함수의 성질

개념 44 여러 가지 각에 대한 삼각함수의 성질

본책 125쪽

01 답 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$

02 $\cos\frac{13}{6}\pi=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

각을 $2n\pi+\theta$ (n은 정수) 꼴로 나타낸다.

03 $\tan\frac{7}{3}\pi=\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ 답 $\sqrt{3}$

04 $\sin\frac{13}{3}\pi=\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

05 $\tan\frac{17}{4}\pi=\tan\left(4\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$ 답 1

06 $\cos 420^\circ=\cos(360^\circ+60^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

07 $\sin 390^\circ=\sin(360^\circ+30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

08 $\cos 765^\circ=\cos(360^\circ\times 2+45^\circ)$

$=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

09 $\tan 750^\circ=\tan(360^\circ\times 2+30^\circ)$

$=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

10 답 $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

11 $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

베이직쎈 BOX

12 $\tan\left(-\frac{13}{6}\pi\right)=-\tan\frac{13}{6}\pi=-\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)$
$=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 답 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

13 $\cos\left(-\frac{13}{3}\pi\right)=\cos\frac{13}{3}\pi=\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)$
$=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

14 $\sin(-45°)=-\sin 45°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

15 $\tan(-60°)=-\tan 60°=-\sqrt{3}$ 답 $-\sqrt{3}$

16 $\cos(-750°)=\cos 750°=\cos(360°\times 2+30°)$
$=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

17 $\sin(-1140°)=-\sin 1140°$
$=-\sin(360°\times 3+60°)$
$=-\sin 60°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

18 $\tan(-1125°)=-\tan 1125°$
$=-\tan(360°\times 3+45°)$
$=-\tan 45°=-1$ 답 -1

19 답 $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

20 $\cos\frac{5}{6}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

각을 $\pi-\theta$ 꼴로 나타낸다.

21 $\tan\frac{5}{4}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$ 답 1

22 $\cos 225°=\cos(180°+45°)$
$=-\cos 45°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

23 $\sin 150°=\sin(180°-30°)=\sin 30°=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

24 $\tan 120°=\tan(180°-60°)=-\tan 60°=-\sqrt{3}$
답 $-\sqrt{3}$

25 답 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$

26 $\cos\frac{2}{3}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$
답 $-\frac{1}{2}$

각을 $\frac{\pi}{2}+\theta$ 꼴로 나타낸다.

27 $\tan\frac{3}{4}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4}}=-1$
답 -1

28 $\sin 135°=\sin(90°+45°)=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$
답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

29 $\cos 150°=\cos(90°+60°)=-\sin 60°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

30 $\tan 150°=\tan(90°+60°)=-\frac{1}{\tan 60°}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$
답 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

개념 45 여러 가지 각의 삼각함수의 변형 방법

본책 127쪽

31 답 -2
$\frac{17}{6}\pi$, $\frac{\pi}{6}$, 6, $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $-\sqrt{3}$,
$\frac{\pi}{6}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, -2

32 $\sin\left(-\frac{11}{6}\pi\right)=-\sin\frac{11}{6}\pi=-\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)$
$=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$\cos\left(-\frac{21}{4}\pi\right)=\cos\frac{21}{4}\pi=\cos\left(5\pi+\frac{\pi}{4}\right)$
$=\cos\left(\frac{\pi}{2}\times 10+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\frac{2}{3}\pi=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

$\therefore$ (주어진 식) $=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-(-\sqrt{3})$
$=-\frac{\sqrt{2}}{4}+\sqrt{3}$ 답 $-\frac{\sqrt{2}}{4}+\sqrt{3}$

33 $\cos 135°=\cos(90°+45°)=-\sin 45°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 300°=\tan(270°+30°)=-\frac{1}{\tan 30°}=-\sqrt{3}$

$\sin 420°=\sin(450°-30°)=\sin(90°\times 5-30°)$
$=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ (주어진 식) $=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$
$=-\frac{\sqrt{2}+3}{2}$ 답 $-\frac{\sqrt{2}+3}{2}$

다른 풀이 $\cos 135°=\cos(180°-45°)$
$=-\cos 45°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 300°=\tan(360°-60°)=-\tan 60°=-\sqrt{3}$

$\sin 420°=\sin(360°+60°)=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

베이직쎈 BOX

34 $\sin 210^\circ=\sin(270^\circ-60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$

$\cos 600^\circ=\cos(540^\circ+60^\circ)=\cos(90^\circ\times 6+60^\circ)$

$=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$

$\tan(-405^\circ)=-\tan 405^\circ=-\tan(450^\circ-45^\circ)$

$=-\tan(90^\circ\times 5-45^\circ)=-\frac{1}{\tan 45^\circ}$

$=-1$

$\therefore$ (주어진 식)$=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times(-1)=0$ 답 0

다른 풀이 $\sin 210^\circ=\sin(180^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$

$\tan(-405^\circ)=-\tan 405^\circ=-\tan(360^\circ+45^\circ)$

$=-\tan 45^\circ=-1$

35 답 θ, θ, 0

36 $\sin(2\pi+\theta)+\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)$

$=\sin\theta+\sin\theta=2\sin\theta$ 답 $2\sin\theta$

37 $\cos^2(\pi-\theta)+\cos^2\left(\frac{5}{2}\pi+\theta\right)=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 답 1

- $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$
- $\cos\left(\frac{5}{2}\pi+\theta\right)=-\sin\theta$

38 $\cos^2(2\pi+\theta)-\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=\cos^2\theta-\cos^2\theta=0$ 답 0

- $\cos(2\pi+\theta)=\cos\theta$
- $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\cos\theta$

개념 46 삼각함수표

본책 128쪽

39 $\sin 365^\circ=\sin(360^\circ+5^\circ)=\sin 5^\circ=0.0872$ 답 0.0872

40 $\cos 174^\circ=\cos(180^\circ-6^\circ)=-\cos 6^\circ=-0.9945$ 답 -0.9945

41 $\tan 185^\circ=\tan(180^\circ+5^\circ)=\tan 5^\circ=0.0875$ 답 0.0875

42 $\sin 353^\circ=\sin(360^\circ-7^\circ)=-\sin 7^\circ=-0.1219$ 답 -0.1219

43 $\cos 96^\circ=\cos(90^\circ+6^\circ)=-\sin 6^\circ=-0.1045$ 답 -0.1045

44 $\sin 753^\circ=\sin(360^\circ\times 2+33^\circ)=\sin 33^\circ=0.5446$ 답 0.5446

45 $\tan 211^\circ=\tan(180^\circ+31^\circ)=\tan 31^\circ=0.6009$ 답 0.6009

46 $\sin 122^\circ=\sin(90^\circ+32^\circ)=\cos 32^\circ=0.8480$ 답 0.8480

47 $\cos 147^\circ=\cos(180^\circ-33^\circ)$

$=-\cos 33^\circ=-0.8387$ 답 -0.8387

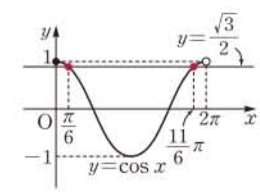
48 $\tan 392^\circ=\tan(360^\circ+32^\circ)=\tan 32^\circ=0.6249$ 답 0.6249

개념 47 삼각방정식

본책 129쪽

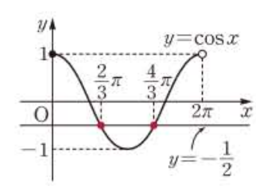
49 답 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ $\frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$

50 오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{11}{6}\pi$이므로



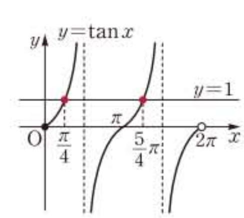
$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$ 답 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

51 오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$이므로



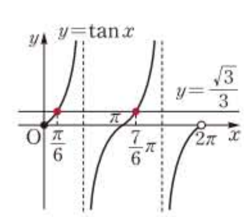
$x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ 답 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

52 오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$이므로



$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$ 답 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

53 오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{7}{6}\pi$이므로



$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$ 답 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$

54 답 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$

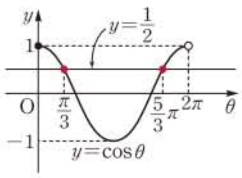
$-\frac{\pi}{4}$, $\frac{7}{4}\pi$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$

베이직쎈 BOX

55 $2x=\theta$로 놓으면 $0\le x<\pi$에서 $0\le\theta<2\pi$이고 주어진 방정식은

$2\cos\theta=1$, 즉 $\cos\theta=\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서



$\cos\theta=\frac{1}{2}$의 해를 구하면

$\theta=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\frac{5}{3}\pi$

즉 $2x=\frac{\pi}{3}$ 또는

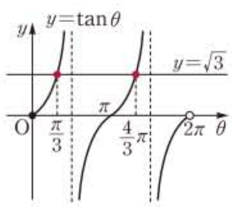
$2x=\frac{5}{3}\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 답 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

56 $x+\frac{\pi}{2}=\theta$로 놓으면 $-\frac{\pi}{2}\le x<\frac{3}{2}\pi$에서 $0\le\theta<2\pi$이고 주어진 방정식은

$\tan\theta=\sqrt{3}$

오른쪽 그림에서 $\tan\theta=\sqrt{3}$의 해를 구하면



$\theta=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\frac{4}{3}\pi$

즉 $x+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}$ 또는

$x+\frac{\pi}{2}=\frac{4}{3}\pi$이므로

$x=-\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

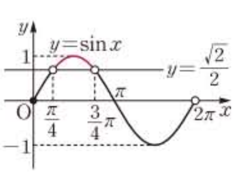
답 $x=-\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

개념 48 삼각부등식

본책 130쪽

57 답 $\frac{5}{6}\pi\le x\le\frac{7}{6}\pi$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$

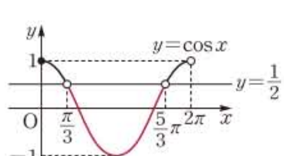
58 부등식 $\sin x>\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 위의 그림에서



$\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$ 답 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$

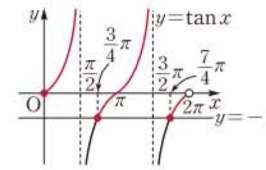
삼각부등식을 풀 때는 부등호를 등호로 바꾸어 삼각방정식을 푼 후 그래프를 이용하여 부등식을 만족시키는 미지수의 값의 범위를 구한다.

59 부등식 $\cos x<\frac{1}{2}$의 해는 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 위의 그림에서



$\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi$ 답 $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi$

60 부등식 $\tan x\ge-1$의 해는 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=-1$과 만나는 부분 또는 직선보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 위의 그림에서

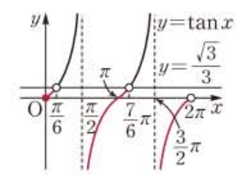


$0\le x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi\le x<\frac{3}{2}\pi$ 또는 $\frac{7}{4}\pi\le x<2\pi$

답 $0\le x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi\le x<\frac{3}{2}\pi$ 또는 $\frac{7}{4}\pi\le x<2\pi$

61 $\sqrt{3}\tan x<1$에서 $\tan x<\frac{\sqrt{3}}{3}$

부등식 $\tan x<\frac{\sqrt{3}}{3}$의 해는 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 위의 그림에서



$0\le x<\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$

답 $0\le x<\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$

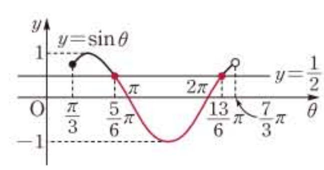
62 답 $\pi\le x\le\frac{5}{3}\pi$

$-\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{3}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$, π, $\frac{5}{3}\pi$

63 $x+\frac{\pi}{3}=\theta$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{7}{3}\pi$이고 주어진 부등식은

$\sin\theta\le\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 $\sin\theta\le\frac{1}{2}$의 해를 구하면



$\frac{5}{6}\pi\le\theta\le\frac{13}{6}\pi$

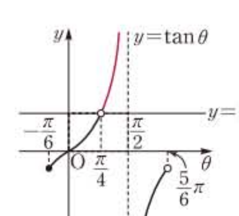
즉 $\frac{5}{6}\pi\le x+\frac{\pi}{3}\le\frac{13}{6}\pi$이므로

$\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{11}{6}\pi$ 답 $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{11}{6}\pi$

64 $x-\frac{\pi}{6}=\theta$로 놓으면 $0\le x<\pi$에서 $-\frac{\pi}{6}\le\theta<\frac{5}{6}\pi$이고 주어진 부등식은

$\tan\theta>1$

오른쪽 그림에서 $\tan\theta>1$의 해를 구하면



$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$

즉 $\frac{\pi}{4}<x-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{5}{12}\pi<x<\frac{2}{3}\pi$

답 $\frac{5}{12}\pi<x<\frac{2}{3}\pi$

베이직쎈 BOX

자신감 UP! 기본&핵심 유형

본책 131쪽

01 $\dfrac{\cos(2\pi-\theta)}{\cos(\pi+\theta)}-\dfrac{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)}{\sin(\pi-\theta)}$

$=\dfrac{\cos\theta}{-\cos\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}=-2$ 답 ①

02 $\sin 200^\circ=\sin(90^\circ\times3-70^\circ)$

$=-\cos 70^\circ=-0.3420$

$\cos 170^\circ=\cos(90^\circ+80^\circ)=-\sin 80^\circ=-0.9848$

$\therefore \sin 200^\circ-\cos 170^\circ=-0.3420-(-0.9848)$

$=0.6428$ 답 ④

03 ㄱ. $\sin 510^\circ=\sin(90^\circ\times5+60^\circ)$

$510^\circ=450^\circ+60^\circ$

$=\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$

$\cos 390^\circ=\cos(90^\circ\times4+30^\circ)=\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$390^\circ=360^\circ+30^\circ$

$\tan 225^\circ=\tan(90^\circ\times2+45^\circ)=\tan 45^\circ=1$

$225^\circ=180^\circ+45^\circ$

$\therefore \sin 510^\circ-\sqrt{3}\cos 390^\circ+\tan 225^\circ$

$=\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1=0$

ㄴ. $\cos\dfrac{10}{3}\pi=\cos\left(3\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\pi}{2}\times6$

$\tan\dfrac{3}{4}\pi=\tan\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\tan\dfrac{\pi}{4}=-1$

$\sin\dfrac{11}{6}\pi=\sin\left(2\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore \cos\dfrac{10}{3}\pi+\tan\dfrac{3}{4}\pi-\sin\dfrac{11}{6}\pi$

$=-\dfrac{1}{2}-1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$

ㄷ. $\tan 40^\circ=\tan(90^\circ-50^\circ)=\dfrac{1}{\tan 50^\circ}$

$\tan 140^\circ=\tan(90^\circ+50^\circ)=-\dfrac{1}{\tan 50^\circ}$

$\therefore (\tan 50^\circ+\tan 40^\circ)^2-(\tan 50^\circ+\tan 140^\circ)^2$

$=\left(\tan 50^\circ+\dfrac{1}{\tan 50^\circ}\right)^2-\left(\tan 50^\circ-\dfrac{1}{\tan 50^\circ}\right)^2$

$=\tan^2 50^\circ+\dfrac{1}{\tan^2 50^\circ}+2$

$-\left(\tan^2 50^\circ+\dfrac{1}{\tan^2 50^\circ}-2\right)$

$=4$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

04 $\sin(90^\circ-a^\circ)=\cos a^\circ$이므로

$\sin^2(90^\circ-a^\circ)+\sin^2 a^\circ=\cos^2 a^\circ+\sin^2 a^\circ=\boxed{1}$

$\therefore \sin^2 5^\circ+\sin^2 10^\circ+\sin^2 15^\circ+\cdots+\sin^2 85^\circ$

$=(\sin^2 5^\circ+\sin^2 85^\circ)+(\sin^2 10^\circ+\sin^2 80^\circ)$

$+(\sin^2 15^\circ+\sin^2 75^\circ)$

$+\cdots+(\sin^2 40^\circ+\sin^2 50^\circ)+\sin^2 45^\circ$

$\sin^2 45^\circ=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

$=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{8개}+\dfrac{1}{2}=8+\dfrac{1}{2}=\boxed{\dfrac{17}{2}}$

따라서 $a=1$, $b=\dfrac{17}{2}$이므로 $\quad a+b=\dfrac{19}{2}$ 답 ⑤

05 $\tan 89^\circ=\tan(90^\circ-1^\circ)=\dfrac{1}{\tan 1^\circ}$

$\tan 88^\circ=\tan(90^\circ-2^\circ)=\dfrac{1}{\tan 2^\circ}$

$\vdots$

$\tan 46^\circ=\tan(90^\circ-44^\circ)=\dfrac{1}{\tan 44^\circ}$

$\therefore \tan 1^\circ\times\tan 2^\circ\times\cdots\times\tan 88^\circ\times\tan 89^\circ$

$=\tan 1^\circ\times\tan 2^\circ\times\cdots\times\tan 44^\circ\times\tan 45^\circ$

$\times\dfrac{1}{\tan 44^\circ}\times\cdots\times\dfrac{1}{\tan 2^\circ}\times\dfrac{1}{\tan 1^\circ}$

$=\tan 45^\circ=1$ 답 1

06 삼각형의 세 내각의 크기 A, B, C에 대하여

$A+B+C=\pi \qquad \therefore B+C=\pi-A$

$\therefore \cos\left(\dfrac{B+C-2\pi}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi-A-2\pi}{2}\right)$

$=\cos\left(-\dfrac{\pi+A}{2}\right)$

$=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{A}{2}\right)$

$=-\sin\dfrac{A}{2}=-\dfrac{1}{4}$ 답 ②

07 (1) $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x$이므로

$y=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+3\cos x-2=\cos x-2$

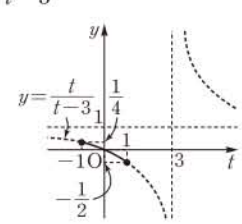
$-1\le\cos x\le1$이므로 $\qquad -3\le\cos x-2\le-1$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 -1, 최솟값은 -3이다.

(2) $y=\dfrac{\cos x}{\cos x-3}$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고

$y=\dfrac{t}{t-3}=\dfrac{t-3+3}{t-3}=\dfrac{3}{t-3}+1$

오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최댓값은 $\dfrac{1}{4}$, $t=1$일 때 최솟값은 $-\dfrac{1}{2}$이다.



(3) $y=\cos^2 x-4\sin x-1$

$=(1-\sin^2 x)-4\sin x-1$

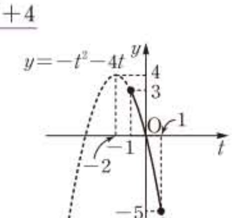
$=-\sin^2 x-4\sin x$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고

$y=-t^2-4t=-(t+2)^2+4$

$y=-t^2-4t$
$=-(t^2+4t+4)+4$
$=-(t+2)^2+4$

오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최댓값은 3, $t=1$일 때 최솟값은 -5이다.



답 (1) 최댓값: -1, 최솟값: -3

(2) 최댓값: $\dfrac{1}{4}$, 최솟값: $-\dfrac{1}{2}$

(3) 최댓값: 3, 최솟값: -5

베이직쎈 BOX

베쎈TIP

함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

08 $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin x$이므로 주어진 함수식은

$y=4\sin x-\sin x-1$

$=3\sin x-1$

$-1\le\sin x\le1$이므로

$-4\le3\sin x-1\le2$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 2, 최솟값은 -4이므로

$M=2,\ m=-4$

$\therefore\ M-m=6$ 답 6

09 $\tan x=t$로 놓으면 $\dfrac{3}{4}\pi\le x\le\pi$에서 $-1\le t\le0$이고 주어진 함수식은

$y=\dfrac{2t-1}{t-1}=\dfrac{2(t-1)+1}{t-1}=\dfrac{1}{t-1}+2$

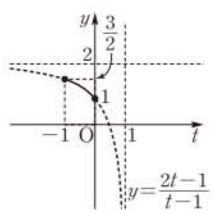
오른쪽 그림에서

$t=-1$일 때 최댓값은 $\dfrac{3}{2}$,

$t=0$일 때 최솟값은 1

이므로 주어진 함수의 치역은

$\left\{y\,\middle|\,1\le y\le\dfrac{3}{2}\right\}$



따라서 $a=1,\ b=\dfrac{3}{2}$이므로

$b-a=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{1}{2}$

10 $y=\sin^2x-2\cos(2\pi-x)+1$

$=(1-\cos^2x)-2\cos x+1$

$=-\cos^2x-2\cos x+2$

$\cos x=t$로 놓으면 $0\le x\le2\pi$에서 $-1\le t\le1$이고 주어진 함수식은

$y=-t^2-2t+2=-(t+1)^2+3$

$y=-t^2-2t+2$
$=-(t^2+2t+1)+3$
$=-(t+1)^2+3$

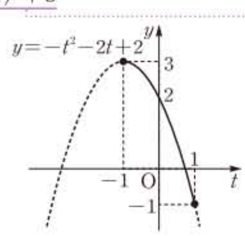
오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최댓값은 3이므로

$b=3$

또 $t=-1$, 즉 $\cos x=-1$에서 $x=\pi\ (\because\ 0\le x\le2\pi)$

$\therefore\ a=\pi$

$\therefore\ ab=3\pi$ 답 ⑤



11 $y=\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)+3\cos^2x+4\sin(\pi+x)$

$=\sin^2x+3\cos^2x-4\sin x$

$=\sin^2x+3(1-\sin^2x)-4\sin x$

$=-2\sin^2x-4\sin x+3$

$\sin x=t$로 놓으면 $0\le x<\pi$에서 $0\le t\le1$이고 주어진 함수식은

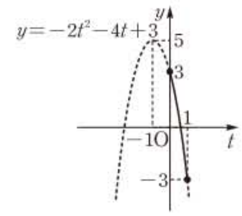
$y=-2t^2-4t+3=-2(t+1)^2+5$

$y=-2t^2-4t+3$
$=-2(t^2+2t+1)+5$
$=-2(t+1)^2+5$

오른쪽 그림에서 $t=0$일 때 최댓값은 3, $t=1$일 때 최솟값은 -3이므로

$M=3,\ m=-3$

$\therefore\ M+m=0$ 답 ⑤



12 $2\sin x=1$에서 $\sin x=\dfrac{1}{2}$

오른쪽 그림에서

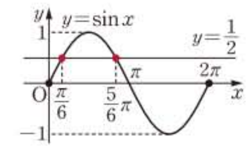
$\alpha=\dfrac{\pi}{6},\ \beta=\dfrac{5}{6}\pi$

$(\because\ \alpha<\beta)$

$\therefore\ \cos(\alpha+\beta)$

$=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{5}{6}\pi\right)$

$=\cos\pi=-1$ 답 ①



13 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$이므로 주어진 방정식은

$4\sin x-2\sin x=\sqrt{2}$

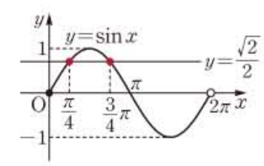
$\therefore\ \sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

오른쪽 그림에서

$x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{3}{4}\pi$

따라서 모든 실근의 합은

$\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3}{4}\pi=\pi$ 답 π



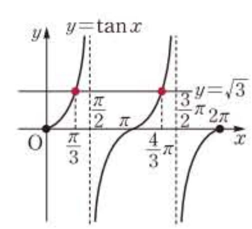
14 $\sin x=\sqrt{3}\cos x$에서

$\dfrac{\sin x}{\cos x}=\sqrt{3}$

즉 $\tan x=\sqrt{3}$이므로 오른쪽 그림에서

$x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$

답 ③



15 $x-\dfrac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $0\le x\le2\pi$에서 $-\dfrac{\pi}{6}\le t\le\dfrac{11}{6}\pi$

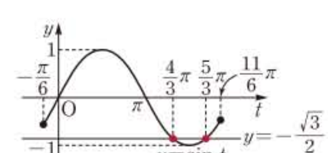
이고 주어진 방정식은

$\sin t=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

오른쪽 그림에서

$t=\dfrac{4}{3}\pi$ 또는

$t=\dfrac{5}{3}\pi$



즉 $x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{4}{3}\pi$ 또는 $x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5}{3}\pi$이므로

$x=\dfrac{3}{2}\pi$ 또는 $x=\dfrac{11}{6}\pi$ 답 ⑤

16 (1) $6\cos^2x+\sin x-1=0$에서

$6(1-\sin^2x)+\sin x-1=0$

$\therefore\ 6\sin^2x-\sin x-5=0$

$\sin x=t$로 놓으면 $0\le x<\pi$에서 $0\le t\le 1$이고 주어진 방정식은

$6t^2-t-5=0,\quad (6t+5)(t-1)=0$

$\therefore t=1\ (\because 0\le t\le 1)$

따라서 $\sin x=1$이므로 $\quad x=\frac{\pi}{2}\ (\because 0\le x<\pi)$

(2) $2\sin^2 x+3\cos x=0$에서

$2(1-\cos^2 x)+3\cos x=0$

$\therefore 2\cos^2 x-3\cos x-2=0$

$\cos x=t$로 놓으면 $0\le x<\pi$에서 $-1<t\le 1$이고 주어진 방정식은

$2t^2-3t-2=0,\quad (2t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=-\frac{1}{2}\ (\because -1<t\le 1)$

따라서 $\cos x=-\frac{1}{2}$이므로

$x=\frac{2}{3}\pi\ (\because 0\le x<\pi)$

(3) $\cos^2 x-\cos x+2\sin^2 x=0$에서

$\cos^2 x-\cos x+2(1-\cos^2 x)=0$

$\therefore \cos^2 x+\cos x-2=0$

$\cos x=t$로 놓으면 $0\le x<\pi$에서 $-1<t\le 1$이고 주어진 방정식은

$t^2+t-2=0,\quad (t+2)(t-1)=0$

$\therefore t=1\ (\because -1<t\le 1)$

따라서 $\cos x=1$이므로 $\quad x=0\ (\because 0\le x<\pi)$

답 (1) $x=\frac{\pi}{2}$ (2) $x=\frac{2}{3}\pi$ (3) $x=0$

17 $2\cos^2 x-\sin x-1=0$에서

$2(1-\sin^2 x)-\sin x-1=0$

$\therefore 2\sin^2 x+\sin x-1=0$

$\sin x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고 주어진 방정식은

$2t^2+t-1=0,\quad (t+1)(2t-1)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=\frac{1}{2}$

$\therefore \sin x=-1$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$이므로

$\sin x=-1$에서 $\quad x=\frac{3}{2}\pi$

$\sin x=\frac{1}{2}$에서 $\quad x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 $M=\frac{3}{2}\pi$, $m=\frac{\pi}{6}$이므로

$M+m=\frac{5}{3}\pi$ 답 $\frac{5}{3}\pi$

18 $\tan x=2-\frac{1}{\tan x}$에서 $\tan x\ne 0$이므로 양변에 $\tan x$를 곱하면

$\tan^2 x=2\tan x-1,\quad \tan^2 x-2\tan x+1=0$

$(\tan x-1)^2=0\quad \therefore \tan x=1$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi\ (\because 0\le x<2\pi)$

따라서 모든 실근의 합은

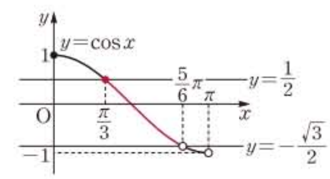
$\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$ 답 ⑤

19 오른쪽 그림에서

$-\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos x\le\frac{1}{2}$

의 해는

$\frac{\pi}{3}\le x<\frac{5}{6}\pi$



따라서 주어진 부등식의 해가 될 수 없는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

20 $x-\frac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{6}\le t<\frac{11}{6}\pi$

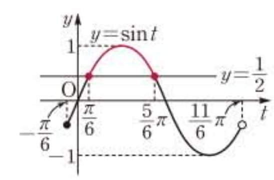
이고 주어진 부등식은 $\quad \sin t\ge\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 $\sin t\ge\frac{1}{2}$

의 해를 구하면

$\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{5}{6}\pi$

$\therefore \frac{\pi}{3}\le x\le\pi$

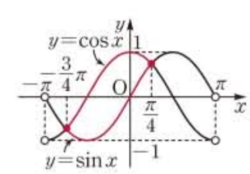


$\frac{\pi}{6}\le x-\frac{\pi}{6}\le\frac{5}{6}\pi$이므로 $\frac{\pi}{3}\le x\le\pi$

따라서 $a=\frac{\pi}{3}$, $b=\pi$이므로

$a+b=\frac{4}{3}\pi$ 답 $\frac{4}{3}\pi$

21 부등식 $\sin x\le\cos x$의 해는 $y=\sin x$의 그래프가 $y=\cos x$의 그래프와 만나는 부분 또는 $y=\sin x$의 그래프가 $y=\cos x$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 위의 그림에서



$\sin x\le\cos x$의 해는 $\quad -\frac{3}{4}\pi\le x\le\frac{\pi}{4}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값이 아닌 것은 ①이다. 답 ①

22 (1) $2\cos^2 x<3\sin x$에서 $\quad 2\cos^2 x-3\sin x<0$

$2(1-\sin^2 x)-3\sin x<0$

$2\sin^2 x+3\sin x-2>0$

$(2\sin x-1)(\sin x+2)>0$

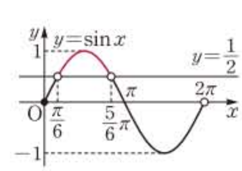
$0\le x<2\pi$에서 $\sin x+2>0$이므로

$0\le x<2\pi$에서 $-1\le\sin x\le 1$이므로 $\sin x+2>0$

$2\sin x-1>0\quad \therefore \sin x>\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 $\sin x>\frac{1}{2}$

의 해는 $\quad \frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$



(2) $2\cos^2 x-\sin x-1\ge 0$에서

$2(1-\sin^2 x)-\sin x-1\ge 0$

$2\sin^2 x+\sin x-1\le 0$

$(2\sin x-1)(\sin x+1)\le 0$

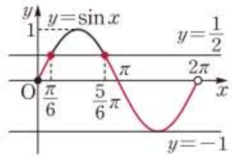
$\therefore -1\le\sin x\le\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서

$-1\le\sin x\le\frac{1}{2}$의 해는

$0\le x\le\frac{\pi}{6}$

또는 $\frac{5}{6}\pi\le x<2\pi$



(3) $2\sin^2 x+3\cos x-3\ge0$에서

$2(1-\cos^2 x)+3\cos x-3\ge0$

$2\cos^2 x-3\cos x+1\le0$

$(2\cos x-1)(\cos x-1)\le0$

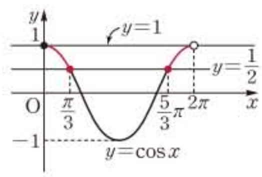
$\therefore\ \frac{1}{2}\le\cos x\le1$

오른쪽 그림에서

$\frac{1}{2}\le\cos x\le1$의 해는

$0\le x\le\frac{\pi}{3}$

또는 $\frac{5}{3}\pi\le x<2\pi$



답 (1) $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$

(2) $0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi\le x<2\pi$

(3) $0\le x\le\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi\le x<2\pi$

23 $\cos^2\theta-4\sin\theta\le2a$에서

$(1-\sin^2\theta)-4\sin\theta\le2a$

$\therefore\ \sin^2\theta+4\sin\theta+2a-1\ge0$

$\sin\theta=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고 주어진 부등식은

$t^2+4t+2a-1\ge0$

$y=t^2+4t+2a-1$이라 하면

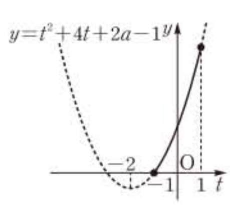
$y=(t+2)^2+2a-5$

오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최솟값 $2a-4$를 갖는다.

이때 부등식이 항상 성립하려면 $2a-4\ge0$이어야 하므로

$a\ge2$

따라서 a의 최솟값은 2이다. 답 ⑤



$y=t^2+4t+2a-1$
$=(t^2+4t+4)+2a-5$
$=(t+2)^2+2a-5$

24 $\sin\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)=-\cos x$이므로 주어진 부등식은

$2\cos^2 x\ge3(1-\sin x)$

$2\cos^2 x+3\sin x-3\ge0$

$2(1-\sin^2 x)+3\sin x-3\ge0$

$2\sin^2 x-3\sin x+1\le0$

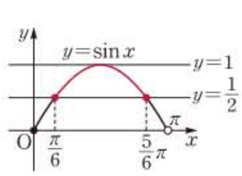
$(2\sin x-1)(\sin x-1)\le0$

$\therefore\ \frac{1}{2}\le\sin x\le1$

오른쪽 그림에서

$\frac{1}{2}\le\sin x\le1$의 해는

$\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5}{6}\pi$



답 $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5}{6}\pi$

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 135쪽

01 전략 주기함수의 성질을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$의 주기가 π이므로

$f(4\pi)=f(3\pi)=\cdots=f(0)=0$ 답 ③

$f(x+\pi)=f(x)$

02 전략 $y=\sin x$의 그래프는 직선 $x=\frac{2n+1}{2}\pi$ (n은 정수)에 대하여 대칭이다.

풀이 $y=\sin x$의 그래프에서

$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\pi}{2}\quad\therefore\ x_1+x_2=\pi$

$\frac{x_3+x_4}{2}=\frac{5}{2}\pi\quad\therefore\ x_3+x_4=5\pi$

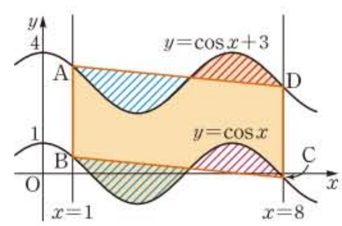
$\frac{x_5+x_6}{2}=\frac{9}{2}\pi\quad\therefore\ x_5+x_6=9\pi$

$\frac{x_7+x_8}{2}=\frac{13}{2}\pi\quad\therefore\ x_7+x_8=13\pi$

$\frac{x_9+x_{10}}{2}=\frac{17}{2}\pi\quad\therefore\ x_9+x_{10}=17\pi$ 답 ③

03 전략 $y=\cos x$와 $y=\cos x+3$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=\cos x+3$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것과 같으므로 $y=\cos x$와 $y=\cos x+3$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 빗금 친 부분의 넓이는 각각 서로 같으므로 두 함수의 그래프와 두 직선 $x=1$, $x=8$로 둘러싸인 부분의 넓이는 평행사변형 ABCD의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는

$(4-1)\cdot(8-1)=21$ 답 ④

04 전략 먼저 x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 그래프의 식을 구한다.

풀이 $y=\sin\frac{x}{2}$의 그래프를 x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 그래프의 식은

x 대신 $x-\pi$ 대입

$y=\sin\frac{1}{2}(x-\pi)$

이 함수의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

x 대신 $-x$ 대입

$y=\sin\frac{1}{2}(-x-\pi)$, $\quad y=-\sin\frac{1}{2}(x+\pi)$

$y=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)\quad\therefore\ y=-\cos\frac{x}{2}$ 답 ①

05 전략 $y=a\cos(bx+c)+d$

➡ 주기: $\frac{2\pi}{|b|}$, 최댓값: $|a|+d$, 최솟값: $-|a|+d$

풀이 ① 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

② 최댓값은 $3+1=4$이다.
③ 최솟값은 $-3+1=-2$이다.
④ $x=0$을 대입하면

$$y=3\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+1=3\cos\frac{\pi}{4}+1=\frac{3\sqrt{2}}{2}+1$$

따라서 그래프는 원점을 지나지 않는다.

⑤ $y=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1=3\cos 2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+1$의 그래프는 $y=3\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{8}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

답 ⑤

베이직쎈 BOX

함수 $y=a\cos(bx+c)+d$의 그래프는 함수 $y=a\cos bx$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{c}{b}$만큼, y축의 방향으로 d만큼 평행이동한 것이다.

06 전략 주어진 함수의 주기를 각각 구한다.

풀이 주어진 함수의 주기를 각각 구하면

① $\frac{2\pi}{\pi}=2$　② $\frac{2\pi}{\pi}=2$　③ $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$

④ $\frac{2\pi}{\pi}=2$　⑤ $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$

따라서 주기가 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.　답 ⑤

07 전략 먼저 주기를 이용하여 b의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=a\tan bx+3$의 주기가 4π이고 $b>0$이므로

$\frac{\pi}{b}=4\pi$　$\therefore b=\frac{1}{4}$

또 함수 $f(x)=a\tan\frac{1}{4}x+3$에서 $f(\pi)=1$이므로

$a+3=1$　$\therefore a=-2$

$\therefore ab=-\frac{1}{2}$

답 ③

08 전략 삼각함수의 성질을 이용한다.

풀이 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

ㄱ. $-\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\cos\theta$

ㄴ. $\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$

ㄷ. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

ㄹ. $-\cos(\pi+\theta)=\cos\theta$

이상에서 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$와 값이 같은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ②

09 전략 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $2\sin^2 x-2\sin x\cos x-\sin x+\cos x=0$에서

$2\sin x(\sin x-\cos x)-(\sin x-\cos x)=0$

$(2\sin x-1)(\sin x-\cos x)=0$

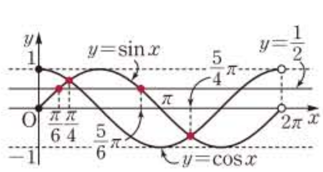
$\therefore \sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=\cos x$

(i) $\sin x=\frac{1}{2}$일 때,

$0\le x<2\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{6}$

또는 $x=\frac{5}{6}\pi$



(ii) $\sin x=\cos x$일 때,

$0\le x<2\pi$이므로　$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

이므로 해의 개수는 4이다.　답 ④

10 전략 $y=a\sin bx$에서 a는 최댓값, 최솟값을 결정하고, b는 주기를 결정함을 이용한다.

풀이 주어진 그래프에서 최댓값은 4, 최솟값은 -4이고 $a>0$이므로　$a=4$

주어진 그래프에서 주기가 $\frac{\pi}{2}$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$　$\therefore b=4$

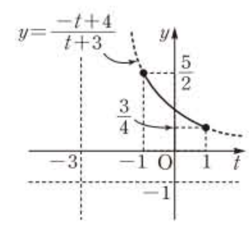
$\therefore a-b=0$　답 0

11 전략 $\sin x=t$로 놓고 주어진 함수를 t에 대한 함수로 나타낸다.

풀이 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는

$$y=\frac{-t+4}{t+3}=\frac{-(t+3)+7}{t+3}=\frac{7}{t+3}-1 \quad \cdots ❶$$

오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최댓값은 $\frac{5}{2}$, $t=1$일 때 최솟값은 $\frac{3}{4}$이다.　⋯ ❷



따라서 $M=\frac{5}{2}$, $m=\frac{3}{4}$이므로

$$12(M+m)=12\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{4}\right)=39 \quad \cdots ❸$$

답 39

단계	채점 기준	비율
❶	$\sin x=t$로 놓고 주어진 함수를 t에 대한 함수로 나타낼 수 있다.	40%
❷	$-1\le t\le 1$에서 함수 $y=\frac{7}{t+3}-1$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	40%
❸	$12(M+m)$의 값을 구할 수 있다.	20%

12 전략 삼각함수의 성질을 이용하여 각을 통일한다.

풀이 $\sin 65°=\sin(90°-25°)=\cos 25°$이므로

$\sin^2 65°=\cos^2 25°=1-\sin^2 25°=1-a^2$

또 $\cos 115°=\cos(90°+25°)=-\sin 25°=-a$이므로

$\sin^2 65°+\cos 115°=1-a-a^2$

답 $1-a-a^2$

13 전략 $10\theta=2\pi$이고 $\cos n\theta=\cos(2\pi-n\theta)$ (n은 정수)임을 이용하여 식을 간단히 한다.

풀이 $\angle P_1OP_2=\theta$이고 원의 둘레를 10등분하였으므로

$10\theta=2\pi$

$\therefore \cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos 9\theta+\cos 10\theta$

$=\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cos 4\theta+\cos 5\theta$
$\quad+\cos(10\theta-4\theta)+\cos(10\theta-3\theta)$
$\quad+\cos(10\theta-2\theta)+\cos(10\theta-\theta)+\cos 10\theta$

$=\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cos 4\theta+\cos 5\theta$
$\quad+\cos(2\pi-4\theta)+\cos(2\pi-3\theta)$
$\quad+\cos(2\pi-2\theta)+\cos(2\pi-\theta)+\cos 2\pi$

$=2\cos\theta+2\cos 2\theta+2\cos 3\theta+2\cos 4\theta$
$\quad+\cos 5\theta+\cos 2\pi$

$=2\{\cos\theta+\cos 2\theta+\cos(\pi-2\theta)+\cos(\pi-\theta)\}$
$\quad+\cos\pi+\cos 2\pi$

$=2(\cos\theta+\cos 2\theta-\cos 2\theta-\cos\theta)+(-1)+1$

$=0$

답 0

베이직쎈 BOX

$10\theta=2\pi$이므로 $5\theta=\pi$

$3\theta=5\theta-2\theta=\pi-2\theta$

$4\theta=5\theta-\theta=\pi-\theta$

14 전략 한 종류의 삼각함수로 통일한 후 인수분해한다.

풀이 $4\cos^2 x-2(\sqrt{3}-1)\sin x+\sqrt{3}-4>0$에서

$4(1-\sin^2 x)-2(\sqrt{3}-1)\sin x+\sqrt{3}-4>0$

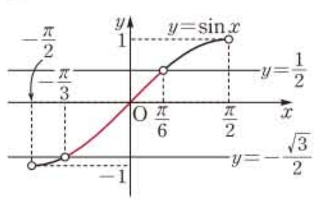
$4\sin^2 x+2(\sqrt{3}-1)\sin x-\sqrt{3}<0$

$(2\sin x+\sqrt{3})(2\sin x-1)<0$

$\therefore -\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sin x<\dfrac{1}{2}$ ··· ❶

따라서 오른쪽 그림에서 부등식의 해는

$-\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{\pi}{6}$ ··· ❷



이므로

$\alpha=-\dfrac{\pi}{3},\ \beta=\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore \alpha+\beta=-\dfrac{\pi}{6}$ ··· ❸

답 $-\dfrac{\pi}{6}$

단계	채점 기준	비율
❶	$\sin x$의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❷	부등식의 해를 구할 수 있다.	40%
❸	$\alpha+\beta$의 값을 구할 수 있다.	20%

Ⅲ. 삼각함수

08 삼각함수의 활용

15 사인법칙과 코사인법칙

개념 49 사인법칙

본책 138쪽

01 답 $4\sqrt{3}$ 　 120, 4, 4, 30, 120, $4\sqrt{3}$

02 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$이므로 $\dfrac{6}{\sin 30^\circ}=\dfrac{c}{\sin 60^\circ}$

$\therefore c=\dfrac{6}{\sin 30^\circ}\times\sin 60^\circ$

$=6\div\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$ 　 답 $6\sqrt{3}$

03 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$이므로 $\dfrac{b}{\sin 45^\circ}=\dfrac{2}{\sin 30^\circ}$

$\therefore b=\dfrac{2}{\sin 30^\circ}\times\sin 45^\circ$

$=2\div\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$ 　 답 $2\sqrt{2}$

04 $C=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$이므로 $\dfrac{8}{\sin 60^\circ}=\dfrac{c}{\sin 45^\circ}$

$\therefore c=\dfrac{8}{\sin 60^\circ}\times\sin 45^\circ$

$=8\div\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{8\sqrt{6}}{3}$ 　 답 $\dfrac{8\sqrt{6}}{3}$

05 답 30° 　 2, 45, 2, 45, $\dfrac{1}{2}$, 30

06 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$이므로 $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sin 120^\circ}=\dfrac{4}{\sin B}$

$\therefore \sin B=\dfrac{4}{2\sqrt{6}}\times\sin 120^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0^\circ<B<60^\circ$이므로 $B=45^\circ$ 　 답 45°

$\sin 120^\circ=\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

삼각형의 내각의 크기의 합이 180°이고 $A=120^\circ$이므로 $0^\circ<B<60^\circ$

07 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$이므로 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sin C}$

$\therefore \sin C=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\times\sin 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0^\circ<C<150^\circ$이므로 $C=60^\circ$ 또는 $C=120^\circ$

답 60° 또는 120°

08 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$이므로 $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}=\dfrac{2}{\sin B}$

$\therefore \sin B=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}\times\sin 135^\circ=\dfrac{1}{2}$

이때 $0^\circ<B<45^\circ$이므로 $B=30^\circ$ 　 답 30°

$\sin 135^\circ=\sin(180^\circ-45^\circ)=\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

09 답 4 　 4, 30, 4, 2, 30, 4

10 $\dfrac{b}{\sin B}=2R$이므로 $\dfrac{8}{\sin 120^\circ}=2R$

$\therefore R=\dfrac{8}{2\sin 120^\circ}=\dfrac{8}{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ 　 답 $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

11 $C=180°-(105°+45°)=30°$

$\frac{c}{\sin C}=2R$이므로 $\frac{6}{\sin 30°}=2R$

$\therefore R=\frac{6}{2\sin 30°}=\frac{6}{2\times\frac{1}{2}}=6$ 답 6

12 $A=180°-(60°+75°)=45°$

$\frac{a}{\sin A}=2R$이므로 $\frac{2\sqrt{2}}{\sin 45°}=2R$

$\therefore R=\frac{2\sqrt{2}}{2\sin 45°}=\frac{2\sqrt{2}}{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=2$ 답 2

13 $\frac{a}{\sin A}=2R$이므로 $\frac{a}{\sin 60°}=2$

$\therefore a=2\sin 60°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ 답 $\sqrt{3}$

14 $\frac{b}{\sin B}=2R$이므로 $\frac{2\sqrt{2}}{\sin B}=4$

$\therefore \sin B=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0°<B<180°$이므로 $B=45°$ 또는 $B=135°$

답 $45°$ 또는 $135°$

15 답 $3:4:5$ ◎ a, b, c, $3k$, $4k$, $5k$, 3, 4, 5

16 $a=5k$, $b=6k$, $c=7k$ $(k>0)$라 하면

$\sin A:\sin B:\sin C=\frac{a}{2R}:\frac{b}{2R}:\frac{c}{2R}$

$=\frac{5k}{2R}:\frac{6k}{2R}:\frac{7k}{2R}$

$=5:6:7$ 답 $5:6:7$

17 $a=5k$, $b=7k$, $c=8k$ $(k>0)$라 하면

$\sin A:\sin B:\sin C=\frac{a}{2R}:\frac{b}{2R}:\frac{c}{2R}$

$=\frac{5k}{2R}:\frac{7k}{2R}:\frac{8k}{2R}$

$=5:7:8$ 답 $5:7:8$

18 $A+B+C=180°$이므로

$A=180°\times\frac{1}{6}=30°$, $B=180°\times\frac{2}{6}=60°$,

$C=180°\times\frac{3}{6}=90°$

$\therefore a:b:c=2R\sin A:2R\sin B:2R\sin C$

$=\sin A:\sin B:\sin C$

$=\sin 30°:\sin 60°:\sin 90°$

$=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}:1$

$=1:\sqrt{3}:2$ 답 $1:\sqrt{3}:2$

19 $A+B+C=180°$이므로

$A=180°\times\frac{1}{4}=45°$, $B=180°\times\frac{1}{4}=45°$,

$C=180°\times\frac{2}{4}=90°$

$\therefore a:b:c=2R\sin A:2R\sin B:2R\sin C$

$=\sin A:\sin B:\sin C$

$=\sin 45°:\sin 45°:\sin 90°$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{\sqrt{2}}{2}:1$

$=1:1:\sqrt{2}$ 답 $1:1:\sqrt{2}$

20 $A+B+C=180°$이므로

$A=180°\times\frac{1}{6}=30°$, $B=180°\times\frac{1}{6}=30°$,

$C=180°\times\frac{4}{6}=120°$

$\therefore a:b:c=2R\sin A:2R\sin B:2R\sin C$

$=\sin A:\sin B:\sin C$

$=\sin 30°:\sin 30°:\sin 120°$

$=\frac{1}{2}:\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=1:1:\sqrt{3}$ 답 $1:1:\sqrt{3}$

베이직쎈 BOX

$\frac{a}{\sin A}=2R$에서

$\sin A=\frac{a}{2R}$

$\frac{a}{\sin A}=2R$에서

$a=2R\sin A$

$\cos 120°$

$=\cos(180°-60°)$

$=-\cos 60°$

$=-\frac{1}{2}$

$\cos 150°$

$=\cos(180°-30°)$

$=-\cos 30°$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

개념 50 코사인법칙

본책 140쪽

21 답 $\sqrt{13}$ ◎ 4, 24, 60, 13, $\sqrt{13}$

22 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$이므로

$b^2=(\sqrt{2})^2+3^2-2\times\sqrt{2}\times3\times\cos 45°$

$=2+9-2\times\sqrt{2}\times3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=5$

$\therefore b=\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{5}$

23 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$이므로

$a^2=3^2+5^2-2\times3\times5\times\cos 120°$

$=9+25-2\times3\times5\times\left(-\frac{1}{2}\right)=49$

$\therefore a=7$ 답 7

24 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$이므로

$b^2=(\sqrt{3})^2+3^2-2\times\sqrt{3}\times3\times\cos 150°$

$=3+9-2\times\sqrt{3}\times3\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=21$

$\therefore b=\sqrt{21}$ 답 $\sqrt{21}$

25 답 $30°$ ◎ 1, $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 30

26 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$이므로

$\cos C=\frac{1^2+(\sqrt{3})^2-2^2}{2\times1\times\sqrt{3}}=0$

이때 $0°<C<180°$이므로 $C=90°$ 답 $90°$

27 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$이므로

$\cos A=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=-\frac{1}{2}$

이때 $0°<A<180°$이므로 $A=120°$ 답 $120°$

베이직쎈 BOX

28 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$이므로

$$\cos C=\frac{2^2+3^2-(\sqrt{19})^2}{2\times2\times3}=-\frac{1}{2}$$

이때 $0°<C<180°$이므로 $C=120°$ 답 $120°$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 141쪽

01 $C=180°-(30°+105°)=45°$

사인법칙에 의하여 $\frac{3}{\sin 30°}=\frac{\overline{AB}}{\sin 45°}$

$$\therefore \overline{AB}=\frac{3}{\sin 30°}\times\sin 45°$$

$$=3\div\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$ 답 ⑤

02 $\overset{\frown}{BC}$에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$\angle BAC=\angle BDC=45°$

원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.

$\triangle ABC$에서 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AB}}{\sin 60°}=\frac{6}{\sin 45°}$

$$\therefore \overline{AB}=\frac{6}{\sin 45°}\times\sin 60°$$

$$=6\div\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{6}$$ 답 $3\sqrt{6}$

03 사인법칙에 의하여 $\frac{4}{\sin 30°}=\frac{6}{\sin B}$

$$\therefore \sin B=\frac{6}{4}\times\sin 30°=\frac{3}{4}$$

$$\therefore \cos^2 B=1-\sin^2 B=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$$ 답 ②

04 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin A}=2R$이므로

$$\frac{4\sqrt{2}}{\sin 45°}=2R$$

$$\therefore R=\frac{4\sqrt{2}}{2\sin 45°}=\frac{4\sqrt{2}}{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=4$$

따라서 외접원의 넓이는 $\pi\times4^2=16\pi$ 답 16π

05 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이가 5이므로 사인법칙에 의하여

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a}{2\times5}+\frac{b}{2\times5}+\frac{c}{2\times5}$$

$$=\frac{a+b+c}{10}=\frac{12}{5}$$ 답 ⑤

06 사인법칙에 의하여

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=4:5:6$

이므로 $a=4k$, $b=5k$, $c=6k$ $(k>0)$라 하면

$ab=4k\times5k=20k^2$, $bc=5k\times6k=30k^2$,

$ca=6k\times4k=24k^2$

$\therefore ab:bc:ca=20k^2:30k^2:24k^2$

$=10:15:12$ 답 $10:15:12$

07 $a+b=7k$, $b+c=9k$, $c+a=8k$ $(k>0)$라 하자.

위의 세 식을 변끼리 더하면

$2(a+b+c)=24k$ $\therefore a+b+c=12k$

$\therefore a=3k$, $b=4k$, $c=5k$

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$

$=3k:4k:5k$

$=3:4:5$ 답 $3:4:5$

08 $\overline{AC}=x$라 하면 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{19})^2=2^2+x^2-2\times2\times x\times\cos 120°$

$19=4+x^2-2\times2\times x\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$x^2+2x-15=0$, $(x+5)(x-3)=0$

$\therefore x=3$

따라서 $\overline{AC}$의 길이는 3이다. 답 3

09 $\overline{AC}^2=5^2+(4\sqrt{2})^2-2\times5\times4\sqrt{2}\cos 45°$

$=25+32-2\times5\times4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=17$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{17}$

외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{17}}{\sin 45°}=2R$$

$$\therefore R=\frac{\sqrt{17}}{2\sin 45°}=\frac{\sqrt{17}}{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{34}}{2}$$ 답 $\frac{\sqrt{34}}{2}$

10 □ABCD가 원에 내접하므로

$B+D=180°$

원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 $180°$이다.

즉 $D=180°-B$이므로

$\cos D=\cos(180°-B)=-\cos B=-\frac{1}{8}$

따라서 $\triangle DAC$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=2^2+4^2-2\times2\times4\times\left(-\frac{1}{8}\right)=22$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{22}$ 답 $\sqrt{22}$

11 가장 짧은 변의 대각의 크기가 가장 작으므로 그 크기를 θ라 하면 코사인법칙에 의하여

$2<2\sqrt{2}<\sqrt{2}+\sqrt{6}$이므로 가장 짧은 변의 길이는 2이다.

$$\cos\theta=\frac{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2-2^2}{2\times2\sqrt{2}\times(\sqrt{2}+\sqrt{6})}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

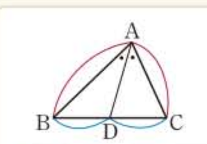
이때 $0°<\theta<180°$이므로 $\theta=30°$ 답 $30°$

12 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$이므로

$$\cos A=\frac{5^2+6^2-4^2}{2\times5\times6}=\frac{3}{4}$$

이때 $0°<A<180°$이므로

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$ 답 $\frac{\sqrt{7}}{4}$



➡ $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

13 $\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=1:2$이므로

$\overline{BD}=x$, $\overline{CD}=2x$ $(x>0)$라 하고 $\angle BAD=\theta$라 하면

$\triangle ABD$에서

$$\cos\theta=\frac{6^2+(4\sqrt{3})^2-x^2}{2\times6\times4\sqrt{3}}=\frac{84-x^2}{48\sqrt{3}}$$

$\triangle$ACD에서

$$\cos\theta=\frac{(4\sqrt{3})^2+12^2-(2x)^2}{2\times4\sqrt{3}\times12}=\frac{192-4x^2}{96\sqrt{3}}$$

따라서 $\frac{84-x^2}{48\sqrt{3}}=\frac{192-4x^2}{96\sqrt{3}}$이므로

$168-2x^2=192-4x^2,\quad 2x^2=24$

$x^2=12\quad \therefore x=2\sqrt{3}$

따라서 $\overline{BD}$의 길이는 $2\sqrt{3}$이다. 답 $2\sqrt{3}$

14 $\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

위의 식을 주어진 식에 대입하면

$$a\times\frac{a}{2R}=b\times\frac{b}{2R}+c\times\frac{c}{2R}\qquad \therefore a^2=b^2+c^2$$

따라서 $\triangle$ABC는 $A=90°$인 직각삼각형이다.

답 $A=90°$인 직각삼각형

베쎈TIP

삼각형의 모양

삼각형 ABC의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여

① $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$
→ $\triangle$ABC는 이등변삼각형이다.

② $a=b=c$ → $\triangle$ABC는 정삼각형이다.

③ 가장 긴 변의 길이가 c일 때

(i) $a^2+b^2<c^2$
→ $\triangle$ABC는 $\angle C>90°$인 둔각삼각형이다.

(ii) $a^2+b^2=c^2$
→ $\triangle$ABC는 $\angle C=90°$인 직각삼각형이다.

(iii) $a^2+b^2>c^2$
→ $\triangle$ABC는 예각삼각형이다.

15 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

위의 식을 주어진 식에 대입하면

$$c\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=a\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$b^2+c^2-a^2=a^2+b^2-c^2$

$a^2=c^2\quad \therefore a=c$

따라서 $\triangle$ABC는 $a=c$인 이등변삼각형이다. 답 ③

16 $\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 $\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R}$

코사인법칙에 의하여 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

위의 식을 주어진 식에 대입하면

$$\frac{a}{2R}=2\times\frac{b}{2R}\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$b^2=c^2\quad \therefore b=c$

따라서 $\triangle$ABC는 $\overline{AB}=\overline{CA}$인 이등변삼각형이다.

답 ①

베이직쎈 BOX

삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크다.

17 $\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

위의 식을 주어진 식에 대입하면

$$(a-b)\times\frac{c}{2R}=a\times\frac{a}{2R}-b\times\frac{b}{2R}$$

$a^2-b^2-ac+bc=0$

$(a+b)(a-b)-(a-b)c=0$

$(a-b)(a+b-c)=0$

$a+b\neq c$이므로 $\quad a-b=0$

$\therefore a=b$

따라서 $\triangle$ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다. 답 ②

18 삼각형의 나머지 한 각의 크기는

$180°-(75°+60°)=45°$

A 지점에서 비행기까지의 거리를 x m라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{40}{\sin 45°}=\frac{x}{\sin 60°}$$

$$\therefore x=40\div\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=20\sqrt{6}$$

따라서 A 지점에서 비행기까지의 거리는 $20\sqrt{6}$ m이다.

답 ⑤

19 $C=180°-(75°+45°)=60°$

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 Rm라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{50\sqrt{3}}{\sin 60°}=2R$$

$$\therefore R=\frac{50\sqrt{3}}{2\sin 60°}=\frac{50\sqrt{3}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=50$$

따라서 잔디밭의 넓이는

$\pi\times50^2=2500\pi\,(\text{m}^2)$ 답 2500π m^2

20 $\triangle$ACB에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2&=200^2+200^2-2\times200\times200\times\cos120°\\&=2\times200^2-2\times200^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=3\times200^2\end{aligned}$$

$\therefore \overline{AB}=200\sqrt{3}\,(\text{m})$

따라서 두 나무 A, B 사이의 거리는 $200\sqrt{3}$ m이다.

답 ⑤

21 $\angle ACB=\pi-\theta$이므로 $\triangle$ACB에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\pi-\theta)=\frac{3^2+6^2-(3\sqrt{7})^2}{2\times3\times6}=-\frac{1}{2}$$

$$-\cos\theta=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{1}{2}$$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}\ (\because 0<\theta<\pi)$ 답 $\frac{\pi}{3}$

16 삼각형의 넓이

개념 51 삼각형의 넓이
본책 144쪽

01 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times4\times6\times\sin 30°$

$=\frac{1}{2}\times4\times6\times\frac{1}{2}=6$ 답 6

02 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times5\times8\times\sin 120°$

$=\frac{1}{2}\times5\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$ 답 $10\sqrt{3}$

03 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times4\times5\times\sin 60°$

$=\frac{1}{2}\times4\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$ 답 $5\sqrt{3}$

04 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times7\times8\times\sin 45°$

$=\frac{1}{2}\times7\times8\times\frac{\sqrt{2}}{2}=14\sqrt{2}$ 답 $14\sqrt{2}$

05 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times6\times4\sqrt{2}\times\sin 135°$

$=\frac{1}{2}\times6\times4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=12$ 답 12

06 삼각형의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{6\times2\sqrt{5}\times2\sqrt{2}}{4\times\sqrt{10}}=6$ 답 6

07 삼각형의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{7\times8\times9}{4\times\frac{21\sqrt{5}}{10}}=12\sqrt{5}$ 답 $12\sqrt{5}$

08 삼각형의 넓이를 S라 하면

$S=2\times5^2\times\sin\frac{\pi}{6}\times\sin\frac{\pi}{2}\times\sin\frac{\pi}{3}$

$=2\times25\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{25\sqrt{3}}{2}$ 답 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$

09 삼각형의 넓이를 S라 하면

$S=2\times(4\sqrt{2})^2\times\sin\frac{\pi}{4}\times\sin\frac{\pi}{4}\times\sin\frac{\pi}{2}$

$=2\times32\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times1=32$ 답 32

개념 52 사각형의 넓이
본책 145쪽

10 답 $15\sqrt{3}$ 6, 60, $15\sqrt{3}$

베이직쎈 BOX

$\triangle ABC=\frac{1}{2}ca\sin B$

$\sin 150°$
$=\sin(180°-30°)$
$=\sin 30°$
$=\frac{1}{2}$

□ABCD에서 두 대각선의 길이가 p, q이고, 두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ일 때,
□ABCD$=\frac{1}{2}pq\sin\theta$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 R일 때,
$\triangle ABC=\frac{abc}{4R}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 R일 때,
$\triangle ABC$
$=2R^2\sin A\sin B\sin C$

평행사변형 ABCD에서 이웃하는 두 변의 길이가 a, b이고, 그 끼인각의 크기가 θ일 때,
□ABCD$=ab\sin\theta$

11 평행사변형의 넓이를 S라 하면

$S=3\times4\times\sin 30°=3\times4\times\frac{1}{2}=6$ 답 6

12 평행사변형의 넓이를 S라 하면

$S=5\times4\sqrt{2}\times\sin 45°=5\times4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=20$ 답 20

13 평행사변형의 넓이를 S라 하면

$S=6\times8\times\sin 150°=6\times8\times\frac{1}{2}=24$ 답 24

14 답 $20\sqrt{3}$ 10, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $20\sqrt{3}$

15 사각형의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times4\times\sin 135°$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{10}$ 답 $2\sqrt{10}$

16 사각형의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times5\times\sin 60°$

$=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=15$ 답 15

17 사각형의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times9\times4\times\sin 90°$

$=\frac{1}{2}\times9\times4\times1=18$ 답 18

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형
본책 146쪽

01 $A=180°-(60°+75°)=45°$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times8\times7\times\sin 45°$

$=\frac{1}{2}\times8\times7\times\frac{\sqrt{2}}{2}=14\sqrt{2}$ 답 $14\sqrt{2}$

02 $\cos A=\frac{1}{3}$이고 $0°<A<180°$이므로

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times6\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=16$ 답 ③

03 $\overline{AC}=x$라 하면 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{13})^2=3^2+x^2-2\times3\times x\times\cos 60°$

$13=9+x^2-2\times3\times x\times\frac{1}{2}$

$x^2-3x-4=0,\quad (x-4)(x+1)=0$

$\therefore x=4$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin 60°$

$=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$ 답 $3\sqrt{3}$

04 (1) 사인법칙에 의하여

$b=c=2\times4\times\sin30^\circ$

$=2\times4\times\frac{1}{2}=4$

(2) $A=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$

$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\times4\times4\times\sin120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times4\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

답 (1) 4 (2) $4\sqrt{3}$

05 $\overline{AD}=x$라 하면 $\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ACD$이므로

$\frac{1}{2}\times8\times6\times\sin60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times8\times x\times\sin30^\circ+\frac{1}{2}\times x\times6\times\sin30^\circ$

$\frac{1}{2}\times8\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{1}{2}\times8\times x\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times x\times6\times\frac{1}{2}$

$12\sqrt{3}=2x+\frac{3}{2}x,\qquad \frac{7}{2}x=12\sqrt{3}$

$\therefore\ x=\frac{24\sqrt{3}}{7}$, 즉 $\overline{AD}=\frac{24\sqrt{3}}{7}$ 답 $\frac{24\sqrt{3}}{7}$

06 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+1)^2-2^2}{2\times\sqrt{2}\times(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0^\circ<C<180^\circ$이므로

$\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times(\sqrt{3}+1)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

답 ③

07 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\frac{3\times\sqrt{5}\times2\sqrt{2}}{4R}=3\qquad\therefore\ R=\frac{\sqrt{10}}{2}$

따라서 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{10}}{2}$이다. 답 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

08 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times(7+8+9)=\frac{7\times8\times9}{4R}$

$\therefore\ R=\frac{21\sqrt{5}}{10}$

따라서 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{21\sqrt{5}}{10}$이다. 답 $\frac{21\sqrt{5}}{10}$

09 $A=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$

$\therefore\ \triangle ABC=2\times4^2\times\sin120^\circ\times\sin30^\circ\times\sin30^\circ$

$=2\times4^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=4\sqrt{3}$ 답 ④

10 $\square ABCD$

$=\triangle ABC+\triangle ADC$

$=\frac{1}{2}\times5\times8\times\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times7\times\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{1}{2}\times5\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times7\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=10\sqrt{3}+7\sqrt{3}=17\sqrt{3}$ 답 $17\sqrt{3}$

베이직쎈 BOX

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이가 r일 때,

$\triangle ABC$

$=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

11 $\triangle ABD$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=5^2+5^2-2\times5\times5\times\cos120^\circ$

$=25+25-2\times5\times5\times\left(-\frac{1}{2}\right)=75$

$\therefore\ \overline{BD}=5\sqrt{3}$

$\therefore\ \square ABCD$

$=\triangle ABD+\triangle BCD$

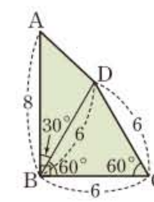
$=\frac{1}{2}\times5\times5\times\sin120^\circ+\frac{1}{2}\times8\times5\sqrt{3}\times\sin60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times5\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times8\times5\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=30+\frac{25\sqrt{3}}{4}$

즉 $a=30,\ b=\frac{25}{4}$이므로 $\quad a-4b=5$ 답 ②

12 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 그으면 $\triangle BCD$는 $\overline{BC}=\overline{CD}$인 이등변삼각형이므로



$\angle DBC=\frac{1}{2}\times(180^\circ-60^\circ)=60^\circ$

따라서 $\triangle BCD$는 정삼각형이고

$\angle ABD=90^\circ-60^\circ=30^\circ$이므로

$\square ABCD$

$=\triangle ABD+\triangle BCD$

$=\frac{1}{2}\times8\times6\times\sin30^\circ+\frac{1}{2}\times6\times6\times\sin60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times8\times6\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times6\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=12+9\sqrt{3}$ 답 ②

13 $\overline{AD}=\overline{BC}=8,\ \overline{DC}=\overline{AB}=6$이고 $\square ABCD$의 넓이가 $24\sqrt{2}$이므로

$8\times6\times\sin D=24\sqrt{2}\qquad\therefore\ \sin D=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0^\circ<D<90^\circ$이므로 $\quad D=45^\circ$ 답 45°

14 $a=2\times4\times\sin60^\circ=2\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

$\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$b^2=2^2+4^2-2\times2\times4\times\cos60^\circ$

$=4+16-2\times2\times4\times\frac{1}{2}=12$

$\therefore\ b=2\sqrt{3}$

$\therefore\ a+b=6\sqrt{3}$ 답 $6\sqrt{3}$

15 $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{4^2+6^2-(2\sqrt{7})^2}{2\times4\times6}=\frac{1}{2}$

이때 $0^\circ<B<90^\circ$이므로 $\quad B=60^\circ$

$\therefore\ \square ABCD=4\times6\times\sin60^\circ$

$=4\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$ 답 ③

16 $0^\circ<\theta<180^\circ$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

베이직쎈 BOX

$\therefore \square ABCD=\frac{1}{2}\times 5\times 10\times \frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{50\sqrt{2}}{3}$

답 $\frac{50\sqrt{2}}{3}$

17 대각선의 길이를 a라 하면

$\frac{1}{2}a^2\sin 60^\circ=6\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}a^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

$a^2=24$ $\therefore a=2\sqrt{6}$

따라서 대각선의 길이는 $2\sqrt{6}$이다. 답 ④

등변사다리꼴의 두 대각선의 길이는 같다.

18 $\triangle BCD$에서 $\overline{BD}=\frac{\overline{CD}}{\tan 30^\circ}=4\sqrt{3}$

$\therefore \square ABCD=\frac{1}{2}\times 7\times 4\sqrt{3}\times\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 7\times 4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=21$ 답 ⑤

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 149쪽

01 전략 $\triangle BCD$의 외접원의 반지름의 길이가 4임을 이용한다.

풀이 $\triangle BCD$의 외접원의 반지름의 길이가 4이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BD}}{\sin 120^\circ}=2\times 4$

$\therefore \overline{BD}=2\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ 답 ④

02 전략 $\sin A$의 값을 구한 후 사인법칙을 이용한다.

풀이 $0^\circ<A<180^\circ$이므로

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이가 10이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=2\times 10$

$\therefore \overline{BC}=2\times 10\times\frac{1}{2}=10$ 답 ⑤

03 전략 사인법칙을 이용하여 주어진 식을 변의 길이에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$ ······ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$a\times\frac{a^2}{4R^2}=b\times\frac{b^2}{4R^2}$ $\therefore a=b$

따라서 $\triangle ABC$는 $a=b$인 이등변삼각형이다. 답 ①

$a^3=b^3$에서
$a^3-b^3=0$
$(a-b)(a^2+ab+b^2)=0$
$\therefore a=b$

04 전략 사인법칙과 코사인법칙을 이용한다.

풀이 사인법칙에 의하여

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=1:1:\sqrt{2}$

따라서 $a=k$, $b=k$, $c=\sqrt{2}k\ (k>0)$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{k^2+(\sqrt{2}k)^2-k^2}{2\times k\times\sqrt{2}k}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 ③

05 전략 $\overline{AP}$, $\overline{BP}$의 길이를 구한 후 $\triangle APB$에서 코사인법칙을 이용한다.

풀이 직각삼각형 ACP에서

$\overline{AP}=\frac{\overline{AC}}{\sin 30^\circ}=\frac{12}{\frac{1}{2}}=24\ (m)$

직각삼각형 BPD에서

$\overline{BP}=\frac{\overline{BD}}{\sin 30^\circ}=\frac{8}{\frac{1}{2}}=16\ (m)$

이때 $\triangle APB$에서

$\angle APB=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$

이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=24^2+16^2-2\times 24\times 16\times\cos 120^\circ$

$=576+256-2\times 24\times 16\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1216$

$\therefore \overline{AB}=8\sqrt{19}\ (m)$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 $8\sqrt{19}$ m이다.

답 ⑤

06 전략 먼저 $\sin C$의 값을 구한다.

풀이 $A+B+C=180^\circ$이므로 $A+B=180^\circ-C$

따라서 $\sin(A+B)=\sin(180^\circ-C)=\sin C$이므로

$\sin C=\frac{1}{3}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 5\times 6\times\frac{1}{3}=5$ 답 ②

07 전략 대각선 AC를 그어 두 개의 삼각형으로 나누어 생각한다.

풀이 $\square ABCD$가 원에 내접하므로

$B+D=180^\circ$ $\therefore D=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

$\square ABCD$에서 대각선 AC를 그으면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 6\times 10\times\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 6\times 10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=15\sqrt{3}$

$\triangle ACD=\frac{1}{2}\times 6\times 4\times\sin 120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 6\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

$\therefore \square ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=15\sqrt{3}+6\sqrt{3}=21\sqrt{3}$ 답 ⑤

08 전략 먼저 $\triangle ACD$에서 코사인법칙을 이용하여 $\overline{CD}$의 길이를 구한다.

풀이 $\overline{CD}=x$라 하면 $\triangle ACD$에서 코사인법칙에 의하여

$(3\sqrt{3})^2=6^2+x^2-2\times 6\times x\times\cos 60^\circ$

$27=36+x^2-6x$, $x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2=0$ $\therefore x=3$

따라서 $\overline{CD}=3$이므로

$\square ABCD=6\times3\times\sin60^\circ$

$=6\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$ 답 ②

다른 풀이 △ACD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sin60^\circ}=\frac{6}{\sin(\angle ACD)}$$

$\therefore \sin(\angle ACD)=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3\sqrt{3}}=1$

$\therefore \angle ACD=90^\circ$

따라서 직각삼각형 ACD에서

$\overline{CD}=\sqrt{6^2-(3\sqrt{3})^2}=3$

$\therefore \square ABCD=6\times3\times\sin60^\circ=9\sqrt{3}$

베이직쎈 BOX

$\overline{AC}^2+\overline{CD}^2=\overline{AD}^2$이므로 $\overline{CD}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{AC}^2}$

09 전략 $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$임을 이용한다.

풀이 사인법칙에 의하여

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=4:5:8$

따라서 $\sin A=4k$, $\sin B=5k$, $\sin C=8k$ $(k>0)$라 하면

$$\frac{\sin A\sin B}{\sin^2 C}=\frac{4k\times5k}{(8k)^2}=\frac{5}{16}$$ 답 $\frac{5}{16}$

10 전략 한 원에서 원주각의 크기는 호의 길이에 정비례함을 이용하여 삼각형의 세 각의 크기를 구한다.

풀이 $A+B+C=180^\circ$이고

$\widehat{AB}:\widehat{BC}:\widehat{CA}=3:4:5$이므로

$A=180^\circ\times\frac{4}{12}=60^\circ$, $B=180^\circ\times\frac{5}{12}=75^\circ$,

$C=180^\circ\times\frac{3}{12}=45^\circ$ ··· ❶

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin60^\circ}=\frac{4\sqrt{6}}{\sin45^\circ}$

$\therefore \overline{BC}=\frac{4\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12$ ··· ❷

답 12

단계	채점 기준	비율
❶	A, B, C의 크기를 구할 수 있다.	50%
❷	$\overline{BC}$의 길이를 구할 수 있다.	50%

11 전략 코사인법칙을 이용한다.

풀이 코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

$b^2=a^2-ac+c^2$을 ㉠에 대입하면

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-(a^2-ac+c^2)}{2ac}=\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=60^\circ$ 답 60°

12 전략 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 이용하여 $\cos B$의 값을 구한다.

풀이 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{5^2+9^2-7^2}{2\times5\times9}=\frac{19}{30}$$

△ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AD}^2=5^2+6^2-2\times5\times6\times\frac{19}{30}=23$

$\therefore \overline{AD}=\sqrt{23}$ 답 $\sqrt{23}$

13 전략 두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인각의 크기가 C인 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab\sin C$임을 이용한다.

풀이 △ABC의 넓이가 6이므로

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times4\times\sin A=6$

$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0^\circ<A<90^\circ$이므로 $A=60^\circ$ 답 60°

14 전략 두 대각선의 길이가 p, q이고 두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ인 사각형의 넓이는 $\frac{1}{2}pq\sin\theta$임을 이용한다.

풀이 □ABCD의 두 대각선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 □ABCD의 넓이가 15이므로

$\frac{1}{2}\times5\sqrt{2}\times6\sqrt{2}\times\sin\theta=15$

$\therefore \sin\theta=\frac{1}{2}$ ··· ❶

θ는 예각이므로 $\theta=30^\circ$

즉 구하는 각의 크기는 30°이다. ··· ❷

답 30°

단계	채점 기준	비율
❶	$\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.	70%
❷	θ의 크기를 구할 수 있다.	30%

베이직쎈 BOX

Ⅳ. 수열

09 등차수열

17 등차수열

개념 53 수열

본책 152쪽

01 답 4 **02** 답 -9 **03** 답 $\frac{1}{5}$

04 $a_1=1+1=2$, $a_2=2+1=3$, $a_3=3+1=4$
답 $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=4$

수열의 일반항 a_n의 n에 1, 2, 3을 차례대로 대입한다.

05 $a_1=-3\times1^2=-3$, $a_2=-3\times2^2=-12$, $a_3=-3\times3^2=-27$
답 $a_1=-3$, $a_2=-12$, $a_3=-27$

06 $a_1=2^1-1=1$, $a_2=2^2-1=3$, $a_3=2^3-1=7$
답 $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=7$

07 $a_1=\frac{5}{1+1}=\frac{5}{2}$, $a_2=\frac{5}{2+1}=\frac{5}{3}$, $a_3=\frac{5}{3+1}=\frac{5}{4}$
답 $a_1=\frac{5}{2}$, $a_2=\frac{5}{3}$, $a_3=\frac{5}{4}$

08 답 $a_n=4$

09 답 $a_n=-n$

10 답 $a_n=n^2$

11 답 $a_n=n(n+1)$

12 답 $a_n=3n$ 3, 3, 12, 3, 15, 3, $3n$

13 $a_1=\frac{1}{3}=\frac{1}{1+2}$, $a_2=\frac{2}{4}=\frac{2}{2+2}$, $a_3=\frac{3}{5}=\frac{3}{3+2}$, $a_4=\frac{4}{6}=\frac{4}{4+2}$, $a_5=\frac{5}{7}=\frac{5}{5+2}$, $\cdots$이므로

$a_n=\frac{n}{n+2}$ 답 $a_n=\frac{n}{n+2}$

개념 54 등차수열

본책 153쪽

14 주어진 수열의 공차가 $4-2=2$이므로 □ 안에 알맞은 수는

$6+2=8$ 답 8

15 주어진 수열의 공차가 $8-11=-3$이므로 □ 안에 알맞은 수는

$8+(-3)=5$ 답 5

16 주어진 수열의 공차가 $-15-(-11)=-4$이므로 □ 안에 알맞은 수는

$-3+(-4)=-7$ 답 -7

17 주어진 수열의 공차가 $2-7=-5$이므로

□$+(-5)=7$ ∴ □$=12$

따라서 □ 안에 알맞은 수는 12이다. 답 12

18 주어진 수열의 공차가 $3-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$이므로 □ 안에 알맞은 수는 차례대로

$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$ 답 $\frac{3}{2}$, 2

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은
$a_n=a+(n-1)d$

19 $a_n=3+(n-1)\times2=2n+1$ 답 $a_n=2n+1$

20 $a_n=8+(n-1)\times(-1)=-n+9$
답 $a_n=-n+9$

21 답 1, 1, 4, 1, 4, $4n-3$

22 첫째항이 -15, 공차가 $-12-(-15)=3$이므로 주어진 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=-15+(n-1)\times3=3n-18$
답 $a_n=3n-18$

23 첫째항이 7, 공차가 $5-7=-2$이므로 주어진 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=7+(n-1)\times(-2)=-2n+9$
답 $a_n=-2n+9$

24 첫째항이 -4, 공차가 $-9-(-4)=-5$이므로 주어진 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=-4+(n-1)\times(-5)=-5n+1$
답 $a_n=-5n+1$

25 답 2, 3, $3n-1$, 17

26 $a_n=5+(n-1)\times(-4)=-4n+9$이므로

$a_8=-4\times8+9=-23$ 답 -23

수열의 일반항 a_n의 n에 8을 대입한다.

27 $a_n=-12+(n-1)\times7=7n-19$이므로

$a_7=7\times7-19=30$ 답 30

28 $a_n=-4+(n-1)\times(-2)=-2n-2$이므로

$a_{10}=-2\times10-2=-22$ 답 -22

29 답 $a_n=3n+2$ 4, 5, 3, 5, 3, $3n+2$

30 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=5$에서 $a+2d=5$ …… ㉠

$a_8=25$에서 $a+7d=25$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $d=4$

∴ $a_n=-3+(n-1)\times4=4n-7$

답 $a_n=4n-7$

㉡－㉠을 하면
$5d=20$ ∴ $d=4$
$d=4$를 ㉠에 대입하면
$a+8=5$
∴ $a=-3$

31 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_4=9$에서 $a+3d=9$ ...... ㉠
$a_9=-1$에서 $a+8d=-1$ ...... ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=15$, $d=-2$
$\therefore a_n=15+(n-1)\times(-2)=-2n+17$
답 $a_n=-2n+17$

32 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_5=-12$에서 $a+4d=-12$ ...... ㉠
$a_7=-22$에서 $a+6d=-22$ ...... ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8$, $d=-5$
$\therefore a_n=8+(n-1)\times(-5)=-5n+13$
답 $a_n=-5n+13$

33 $a_n=-14+(n-1)\times 2=2n-16$
$2n-16>0$에서 $2n>16$
$\therefore n>8$
따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제9항이다.
답 제9항

34 $a_n=-21+(n-1)\times 4=4n-25$
$4n-25>0$에서 $4n>25$
$\therefore n>\frac{25}{4}=6.25$
따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제7항이다.
답 제7항

35 $a_n=-35+(n-1)\times 3=3n-38$
$3n-38>0$에서 $3n>38$
$\therefore n>\frac{38}{3}=12.666\cdots$
따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제13항이다.
답 제13항

36 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_2=-28$에서 $a+d=-28$ ...... ㉠
$a_6=-12$에서 $a+5d=-12$ ...... ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-32$, $d=4$
$\therefore a_n=-32+(n-1)\times 4=4n-36$
$4n-36>0$에서 $4n>36$
$\therefore n>9$
따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제10항이다.
답 제10항

개념 55 등차중항

본책 155쪽

37 x는 4와 12의 등차중항이므로
$x=\frac{4+12}{2}=8$
답 8

베이직쎈 BOX

(31) ㉡−㉠을 하면
$5d=-10$
$\therefore d=-2$
$d=-2$를 ㉠에 대입하면
$a-6=9$
$\therefore a=15$

(32) ㉡−㉠을 하면
$2d=-10$
$\therefore d=-5$
$d=-5$를 ㉠에 대입하면
$a-20=-12$
$\therefore a=8$

(33) $n>8$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

(36) ㉡−㉠을 하면
$4d=16 \quad \therefore d=4$
$d=4$를 ㉠에 대입하면
$a+4=-28$
$\therefore a=-32$

(46) $6(6-d)(6+d)=120$
이므로 $36-d^2=20$
$d^2=16 \quad \therefore d=\pm 4$

(47) $2(2-d)(2+d)=-10$
이므로 $4-d^2=-5$
$d^2=9 \quad \therefore d=\pm 3$

38 x는 3과 -13의 등차중항이므로
$x=\frac{3+(-13)}{2}=-5$
답 -5

39 x는 -8과 -12의 등차중항이므로
$x=\frac{-8+(-12)}{2}=-10$
답 -10

40 6은 x와 $3x$의 등차중항이므로
$6=\frac{x+3x}{2}$, $2x=6$ $\therefore x=3$
답 3

41 x는 5와 15의 등차중항이므로
$x=\frac{5+15}{2}=10$
또 y는 15와 25의 등차중항이므로
$y=\frac{15+25}{2}=20$
답 $x=10$, $y=20$

42 x는 16과 8의 등차중항이므로
$x=\frac{16+8}{2}=12$
또 y는 8과 0의 등차중항이므로
$y=\frac{8+0}{2}=4$
답 $x=12$, $y=4$

43 x는 -2와 14의 등차중항이므로
$x=\frac{-2+14}{2}=6$
또 y는 14와 30의 등차중항이므로
$y=\frac{14+30}{2}=22$
답 $x=6$, $y=22$

44 x는 -1과 -7의 등차중항이므로
$x=\frac{-1+(-7)}{2}=-4$
또 y는 -7과 -13의 등차중항이므로
$y=\frac{-7+(-13)}{2}=-10$
답 $x=-4$, $y=-10$

45 답 1, 3, 5 　 3, 3, ± 2, 1, 3, 5

46 세 수를 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면
$(a-d)+a+(a+d)=18$ ...... ㉠
$(a-d)\times a\times(a+d)=120$ ...... ㉡
㉠에서 $3a=18$ $\therefore a=6$
$a=6$을 ㉡에 대입하여 정리하면 $d=\pm 4$
따라서 세 수는 2, 6, 10이다.
답 2, 6, 10

47 세 수를 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면
$(a-d)+a+(a+d)=6$ ...... ㉠
$(a-d)\times a\times(a+d)=-10$ ...... ㉡
㉠에서 $3a=6$ $\therefore a=2$
$a=2$를 ㉡에 대입하여 정리하면 $d=\pm 3$
따라서 세 수는 -1, 2, 5이다.
답 -1, 2, 5

베이직쎈 BOX

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형 본책 156쪽

01 $a_n=4n-3$에서
$a_1=4\times1-3=1$, $a_6=4\times6-3=21$
$\therefore a_1+a_6=22$ 답 ②

02 $a_1=9=10-1$, $a_2=99=10^2-1$,
$a_3=999=10^3-1$, $a_4=9999=10^4-1$,
$a_5=99999=10^5-1$, ⋯이므로
$a_n=10^n-1$ 답 ②

03 $x=\frac{4}{3}$, $y=\frac{6}{5}$이므로
$xy=\frac{8}{5}$ 답 $\frac{8}{5}$

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=\frac{n+1}{n}$이므로
$x=a_3=\frac{4}{3}$,
$y=a_5=\frac{6}{5}$

04 주어진 수열은 첫째항이 -1, 공차가 $5-(-1)=6$인 등차수열이므로
$x=11+6=17$, $y=x+6=17+6=23$
$\therefore x+y=40$ 답 ③

05 주어진 등차수열의 공차를 d라 하면 제27항이 21이므로 $8+26d=21$
$26d=13$ $\therefore d=\frac{1}{2}$
따라서 주어진 등차수열의 공차는 $\frac{1}{2}$이다. 답 ②

06 주어진 등차수열은 첫째항이 4, 공차가 $1-4=-3$이므로
$a_n=4+(n-1)\times(-3)=-3n+7$
따라서 $A=-3$, $B=7$이므로
$A-B=-10$ 답 ①

07 주어진 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라 하고, 일반항을 a_n이라 하면
$a_2=7$에서 $a+d=7$ ⋯⋯ ㉠
$a_6=-9$에서 $a+5d=-9$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=11$, $d=-4$
따라서 $a_n=11+(n-1)\times(-4)=-4n+15$이므로
$a_{10}=-4\times10+15=-25$ 답 -25

㉡−㉠을 하면
$4d=-16$
$\therefore d=-4$
$d=-4$를 ㉠에 대입하면
$a-4=7$
$\therefore a=11$

08 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면
$a_7=26$에서 $a+6\times5=26$ $\therefore a=-4$
$\therefore a_n=-4+(n-1)\times5=5n-9$
$a_k=51$에서 $5k-9=51$
$5k=60$ $\therefore k=12$ 답 ③

09 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_2+a_4+2a_7=32$에서
$(a+d)+(a+3d)+2(a+6d)=32$
$4a+16d=32$ $\therefore a+4d=8$
$\therefore a_5=a+4d=8$ 답 ④

10 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_2+a_5=22$에서 $(a+d)+(a+4d)=22$
$\therefore 2a+5d=22$ ⋯⋯ ㉠
$a_3-a_7=-24$에서 $(a+2d)-(a+6d)=-24$
$-4d=-24$ $\therefore d=6$
$d=6$을 ㉠에 대입하면 $2a+30=22$
$2a=-8$ $\therefore a=-4$
따라서 $a_n=-4+(n-1)\times6=6n-10$이므로
$a_{15}=6\times15-10=80$ 답 80

11 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면
$a_3=a+2\times2=a+4$, $a_5=a+4\times2=a+8$
$a_3:a_5=3:4$에서 $4a_3=3a_5$이므로
$4(a+4)=3(a+8)$, $4a+16=3a+24$
$\therefore a=8$
따라서 $a_n=8+(n-1)\times2=2n+6$이므로
$a_{12}=2\times12+6=30$ 답 30

12 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_8=-6$에서 $a+7d=-6$ ⋯⋯ ㉠
$a_4:a_6=5:1$에서 $a_4=5a_6$이므로
$a+3d=5(a+5d)$, $a+3d=5a+25d$
$4a+22d=0$
$\therefore 2a+11d=0$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=22$, $d=-4$
따라서 $a_n=22+(n-1)\times(-4)=-4n+26$이므로
$a_{20}=-4\times20+26=-54$ 답 ⑤

㉠×2−㉡을 하면
$3d=-12$
$\therefore d=-4$
$d=-4$를 ㉠에 대입하면
$a-28=-6$
$\therefore a=22$

13 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_4=8$에서 $a+3d=8$ ⋯⋯ ㉠
$a_3+a_9=4$에서 $(a+2d)+(a+8d)=4$
$2a+10d=4$
$\therefore a+5d=2$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=17$, $d=-3$
$\therefore a_n=17+(n-1)\times(-3)=-3n+20$
-31을 제k항이라 하면 $-3k+20=-31$
$-3k=-51$ $\therefore k=17$
따라서 -31은 제17항이다. 답 ①

㉡−㉠을 하면
$2d=-6$
$\therefore d=-3$
$d=-3$을 ㉠에 대입하면
$a-9=8$
$\therefore a=17$

14 주어진 수열은 첫째항이 -100, 공차가 $-94-(-100)=6$이므로 일반항을 a_n이라 하면
$a_n=-100+(n-1)\times6=6n-106$
$6n-106>0$에서 $n>\frac{106}{6}=17.666\cdots$
따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제18항이다. 답 ③

15 $a_n=-5+(n-1)\times3=3n-8$
$3n-8>40$에서 $3n>48$
$\therefore n>16$
따라서 처음으로 40보다 커지는 항은 제17항이다.
답 ⑤

09 등차수열

16 주어진 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라 하고, 일반항을 a_n이라 하면

$a_3=35$에서 $a+2d=35$ …… ㉠

$a_6=14$에서 $a+5d=14$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=49$, $d=-7$

$\therefore a_n=49+(n-1)\times(-7)=-7n+56$

$-7n+56<0$에서 $-7n<-56$

$\therefore n>8$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제9항이다.

답 제9항

17 주어진 등차수열의 공차를 d라 하면 첫째항이 9, 제5항이 33이므로

$9+4d=33$, $4d=24$ $\therefore d=6$

따라서 이 수열의 공차는 6이다. 답 6

18 첫째항이 -2, 공차가 1인 등차수열의 제$(n+2)$항이 19이므로

$-2+(n+1)\times1=19$, $n+1=21$

$\therefore n=20$ 답 ②

19 주어진 등차수열의 공차를 d라 하면 첫째항이 3, 제12항이 25이므로

$3+11d=25$, $11d=22$ $\therefore d=2$

이때 a_5는 주어진 수열의 제6항이므로

$a_5=3+5\times2=13$ 답 13

20 세 수 1, a, 15가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a=\dfrac{1+15}{2}=8$

또 세 수 8, 5, b도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$5=\dfrac{8+b}{2}$, $8+b=10$ $\therefore b=2$

$\therefore a-b=6$ 답 6

21 세 수 x, $2x+5$, $8x$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2x+5=\dfrac{x+8x}{2}$, $4x+10=9x$

$5x=10$ $\therefore x=2$ 답 ①

22 두 수 a, b의 등차중항이 5이므로

$5=\dfrac{a+b}{2}$ $\therefore a+b=10$

이때 $ab=20$이므로

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=10^2-2\times20=60$ 답 ②

23 세 수를 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면

$(a-d)+a+(a+d)=15$ …… ㉠

$(a-d)\times a\times(a+d)=80$ …… ㉡

㉠에서 $3a=15$ $\therefore a=5$

$a=5$를 ㉡에 대입하여 정리하면 $d=\pm3$

베이직쎈 BOX

㉡−㉠을 하면
$3d=-21$
$\therefore d=-7$
$d=-7$을 ㉠에 대입하면
$a-14=35$
$\therefore a=49$

두 수 a, b 사이에 n개의 수를 넣어서 등차수열을 만들면
➡ b는 제$(n+2)$항

$(6-3d)(6+3d)=27$
이므로 $36-9d^2=27$
$d^2=1$ $\therefore d=\pm1$

등차수열의 첫째항이 a, 제n항이 l일 때
➡ $S_n=\dfrac{n(a+l)}{2}$

등차수열의 첫째항이 a, 공차가 d일 때
➡ $S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

$5(5-d)(5+d)=80$
이므로 $25-d^2=16$
$d^2=9$ $\therefore d=\pm3$

따라서 세 수는 2, 5, 8이므로 세 수의 제곱의 합은

$2^2+5^2+8^2=93$ 답 93

24 네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$로 놓으면

$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=24$ …… ㉠

$(a-3d)(a+3d)=27$ …… ㉡

㉠에서 $4a=24$ $\therefore a=6$

$a=6$을 ㉡에 대입하여 정리하면 $d=\pm1$

따라서 네 수는 3, 5, 7, 9이므로 네 수 중에서 가장 큰 수는 9이다. 답 9

25 삼차방정식의 세 실근을 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=-3$

$3a=-3$ $\therefore a=-1$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 -1이므로 방정식에 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^3+3\times(-1)^2+k\times(-1)-5=0$

$\therefore k=-3$ 답 ③

베쎈 TIP

삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

18 등차수열의 합

개념 56 등차수열의 합

본책 160쪽

01 $S_{10}=\dfrac{10(5+13)}{2}=90$ 답 90

02 $S_6=\dfrac{6\{-7+(-43)\}}{2}=-150$ 답 −150

03 $S_5=\dfrac{5\{2\times4+(5-1)\times5\}}{2}=70$ 답 70

04 $S_{12}=\dfrac{12\{2\times(-6)+(12-1)\times2\}}{2}=60$ 답 60

05 $S_9=\dfrac{9\{2\times3+(9-1)\times(-4)\}}{2}=-117$

답 −117

06 $S_{20}=\dfrac{20\{2\times(-1)+(20-1)\times(-3)\}}{2}=-590$

답 −590

07 첫째항이 2, 공차가 $5-2=3$인 등차수열이므로

$S_8=\dfrac{8\{2\times2+(8-1)\times3\}}{2}=100$ 답 100

베이직쎈 BOX

08 첫째항이 4, 공차가 $0-4=-4$인 등차수열이므로

$$S_{14}=\frac{14\{2\times4+(14-1)\times(-4)\}}{2}=-308$$

답 -308

09 첫째항이 -1, 공차가 $-3-(-1)=-2$인 등차수열이므로

$$S_{17}=\frac{17\{2\times(-1)+(17-1)\times(-2)\}}{2}=-289$$

답 -289

10 답 1, 5, 1, 5, 5, 4, 5, 4, 5, 7, 7, 1, 112

11 $-2, 0, 2, \cdots, 36$은 첫째항이 -2, 공차가 $0-(-2)=2$인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=-2+(n-1)\times2=2n-4$

36을 제k항이라 하면 $2k-4=36$

$2k=40$ $\therefore k=20$

따라서 구하는 합은 첫째항이 -2, 제20항이 36인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합이므로

$$\frac{20(-2+36)}{2}=340$$

답 340

12 34, 31, 28, $\cdots$, 7은 첫째항이 34, 공차가 $31-34=-3$인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=34+(n-1)\times(-3)=-3n+37$

7을 제k항이라 하면 $-3k+37=7$

$-3k=-30$ $\therefore k=10$

따라서 구하는 합은 첫째항이 34, 제10항이 7인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$\frac{10(34+7)}{2}=205$$

답 205

13 $21, 17, 13, \cdots, -23$은 첫째항이 21, 공차가 $17-21=-4$인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=21+(n-1)\times(-4)=-4n+25$

-23을 제k항이라 하면 $-4k+25=-23$

$-4k=-48$ $\therefore k=12$

따라서 구하는 합은 첫째항이 21, 제12항이 -23인 등차수열의 첫째항부터 제12항까지의 합이므로

$$\frac{12\{21+(-23)\}}{2}=-12$$

답 -12

14 $-19, -16, -13, \cdots, 20$은 첫째항이 -19, 공차가 $-16-(-19)=3$인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=-19+(n-1)\times3=3n-22$

20을 제k항이라 하면 $3k-22=20$

$3k=42$ $\therefore k=14$

따라서 구하는 합은 첫째항이 -19, 제14항이 20인 등차수열의 첫째항부터 제14항까지의 합이므로

$$\frac{14(-19+20)}{2}=7$$

답 7

15 답 첫째항: 2, 공차: -1 5, 2, -1, 2, -1

16 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=9$에서 $a+2d=9$ …… ㉠

$S_7=98$에서 $\dfrac{7(2a+6d)}{2}=98$

$\therefore a+3d=14$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $d=5$

따라서 첫째항은 -1, 공차는 5이다.

답 첫째항: -1, 공차: 5

ㄴ-ㄱ을 하면
$d=5$
$d=5$를 ㉠에 대입하면
$a+10=9$
$\therefore a=-1$

17 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_4=18$에서 $\dfrac{4(2a+3d)}{2}=18$

$\therefore 2a+3d=9$ …… ㉠

$S_8=52$에서 $\dfrac{8(2a+7d)}{2}=52$

$\therefore 2a+7d=13$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $d=1$

따라서 첫째항은 3, 공차는 1이다.

답 첫째항: 3, 공차: 1

㉡-㉠을 하면
$4d=4$ $\therefore d=1$
$d=1$을 ㉠에 대입하면
$2a+3=9$
$\therefore a=3$

18 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_{10}=70$에서 $\dfrac{10(2a+9d)}{2}=70$

$\therefore 2a+9d=14$ …… ㉠

$S_{20}=-60$에서 $\dfrac{20(2a+19d)}{2}=-60$

$\therefore 2a+19d=-6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=16$, $d=-2$

따라서 첫째항은 16, 공차는 -2이다.

답 첫째항: 16, 공차: -2

㉡-㉠을 하면
$10d=-20$
$\therefore d=-2$
$d=-2$를 ㉠에 대입하면
$2a-18=14$
$\therefore a=16$

19 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_5=-35$에서 $\dfrac{5(2a+4d)}{2}=-35$

$\therefore a+2d=-7$ …… ㉠

$S_{12}=84$에서 $\dfrac{12(2a+11d)}{2}=84$

$\therefore 2a+11d=14$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-15$, $d=4$

따라서 첫째항은 -15, 공차는 4이다.

답 첫째항: -15, 공차: 4

㉡-㉠×2를 하면
$7d=28$ $\therefore d=4$
$d=4$를 ㉠에 대입하면
$a+8=-7$
$\therefore a=-15$

개념 57 수열의 합과 일반항 사이의 관계

본책 162쪽

20 $S_n=n^2+n$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2+1=2$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=n^2+n-\{(n-1)^2+(n-1)\}$
$=n^2+n-(n^2-n)$
$=2n$ ...... ㉠

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n$ 답 $a_n=2n$

베쎈TIP

$a_n=S_n-S_{n-1}$을 이용하여 얻은 식은 $n\geq2$일 때만 적용된다.
따라서 여기에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 $a_1=S_1$을 이용하여 얻은 값을 서로 비교하여
① 같으면 → 일반항은 a_n만 쓴다.
② 다르면 → a_1과 일반항 a_n ($n\geq2$)으로 나누어 쓴다.

21 $S_n=n^2-3n$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2-3\times1=-2$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=n^2-3n-\{(n-1)^2-3(n-1)\}$
$=n^2-3n-(n^2-5n+4)$
$=2n-4$ ...... ㉠

이때 $a_1=-2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-4$ 답 $a_n=2n-4$

22 $S_n=2n^2-n$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2\times1^2-1=1$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=2n^2-n-\{2(n-1)^2-(n-1)\}$
$=2n^2-n-(2n^2-5n+3)$
$=4n-3$ ...... ㉠

이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4n-3$ 답 $a_n=4n-3$

23 $S_n=-n^2+4n$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=-1^2+4\times1=3$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=-n^2+4n-\{-(n-1)^2+4(n-1)\}$
$=-n^2+4n-(-n^2+6n-5)$
$=-2n+5$ ...... ㉠

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=-2n+5$ 답 $a_n=-2n+5$

24 $S_n=-5n^2+n$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=-5\times1^2+1=-4$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=-5n^2+n-\{-5(n-1)^2+(n-1)\}$
$=-5n^2+n-(-5n^2+11n-6)$
$=-10n+6$ ...... ㉠

이때 $a_1=-4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=-10n+6$ 답 $a_n=-10n+6$

25 $S_n=n^2+2n+3$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2+2\times1+3=6$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=n^2+2n+3-\{(n-1)^2+2(n-1)+3\}$
$=n^2+2n+3-(n^2+2)$
$=2n+1$ ...... ㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_1=2\times1+1=3$

베이직쎈 BOX: $a_1=S_1$을 이용하여 얻은 값과 다르다.

(i), (ii)에서 $a_1=6$, $a_n=2n+1$ ($n\geq2$)

답 $a_1=6$, $a_n=2n+1$ ($n\geq2$)

26 $S_n=3n^2-n+2$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=3\times1^2-1+2=4$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=3n^2-n+2-\{3(n-1)^2-(n-1)+2\}$
$=3n^2-n+2-(3n^2-7n+6)$
$=6n-4$ ...... ㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_1=6\times1-4=2$

(i), (ii)에서 $a_1=4$, $a_n=6n-4$ ($n\geq2$)

답 $a_1=4$, $a_n=6n-4$ ($n\geq2$)

27 $S_n=-2n^2+5n-1$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=-2\times1^2+5\times1-1=2$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=-2n^2+5n-1$
$-\{-2(n-1)^2+5(n-1)-1\}$
$=-2n^2+5n-1-(-2n^2+9n-8)$
$=-4n+7$ ...... ㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_1=-4\times1+7=3$

(i), (ii)에서 $a_1=2$, $a_n=-4n+7$ ($n\geq2$)

답 $a_1=2$, $a_n=-4n+7$ ($n\geq2$)

베이직쎈 BOX

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 163쪽

01 첫째항이 -7, 공차가 $-3-(-7)=4$인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이 81이므로

$$\frac{n\{2\times(-7)+(n-1)\times 4\}}{2}=81$$

$2n^2-9n=81$,　　$2n^2-9n-81=0$

$(2n+9)(n-9)=0$

$\therefore n=9$ ($\because$ n은 자연수)　　답 9

02 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 $a_3=0$에서

$a+2\times(-2)=0$　　$\therefore a=4$

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$

$=\dfrac{10\{2\times 4+(10-1)\times(-2)\}}{2}$

$=-50$　　답 -50

첫째항이 4, 공차가 -2인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합

03 주어진 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_3=27$에서　$\dfrac{3(2a+2d)}{2}=27$

$\therefore a+d=9$　　…… ㉠

$S_7=147$에서　$\dfrac{7(2a+6d)}{2}=147$

$\therefore a+3d=21$　　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $d=6$

$\therefore S_{20}=\dfrac{20\{2\times 3+(20-1)\times 6\}}{2}=1200$　　답 ④

㉡$-$㉠을 하면
$2d=12$　$\therefore d=6$
$d=6$을 ㉠에 대입하면
$a+6=9$　$\therefore a=3$

04 주어진 등차수열의 첫째항이 33, 공차가 $25-33=-8$이므로

$$S_n=\frac{n\{2\times 33+(n-1)\times(-8)\}}{2}=n(37-4n)$$

$n(37-4n)<0$에서　　$n>\dfrac{37}{4}=9.25$

따라서 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 음수가 되는 자연수 n의 최솟값은 10이다.　　답 ③

n은 자연수이므로
$37-4n<0$

05 $a_n=31+(n-1)\times(-3)=-3n+34$

$-3n+34<0$에서　　$-3n<-34$

$\therefore n>\dfrac{34}{3}=11.333\cdots$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제12항부터 음수이므로 첫째항부터 제11항까지의 합이 최대이다.

따라서 S_n의 값이 최대가 되게 하는 자연수 n의 값은 11이다.　　답 ④

06 주어진 등차수열의 공차를 d라 하고 일반항을 a_n이라 하면 첫째항부터 제4항까지의 합이 80이므로

$$\frac{4(2\times 26+3d)}{2}=80$$

$52+3d=40$,　　$3d=-12$

$\therefore d=-4$

$\therefore a_n=26+(n-1)\times(-4)=-4n+30$

$-4n+30<0$에서　　$-4n<-30$

$\therefore n>\dfrac{30}{4}=7.5$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제8항부터 음수이므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최대이다.

따라서 최댓값은

$$\frac{7\{2\times 26+6\times(-4)\}}{2}=98$$

이므로　　$p=7$, $q=98$

$\therefore q-p=91$　　답 ⑤

다른 풀이　$S_n=\dfrac{n\{2\times 26+(n-1)\times(-4)\}}{2}$

$=-2n^2+28n$

$=-2(n-7)^2+98$

따라서 S_n은 $n=7$일 때 최댓값 98을 가지므로

$p=7$, $q=98$

$\therefore q-p=91$

07 주어진 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 일반항을 a_n이라 하면

$S_6=-60$에서　$\dfrac{6(2a+5d)}{2}=-60$

$\therefore 2a+5d=-20$　　…… ㉠

$S_{12}=-48$에서　$\dfrac{12(2a+11d)}{2}=-48$

$\therefore 2a+11d=-8$　　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면　　$a=-15$, $d=2$

$\therefore a_n=-15+(n-1)\times 2=2n-17$

$2n-17>0$에서　　$2n>17$

$\therefore n>\dfrac{17}{2}=8.5$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제9항부터 양수이므로 첫째항부터 제8항까지의 합이 최소이다.

따라서 최솟값은

$$S_8=\frac{8\{2\times(-15)+(8-1)\times 2\}}{2}=-64$$

답 -64

㉡$-$㉠을 하면
$6d=12$　$\therefore d=2$
$d=2$를 ㉠에 대입하면
$2a+10=-20$
$\therefore a=-15$

08 20 이하의 자연수 중에서 2로 나누었을 때의 나머지가 1인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

1, 3, 5, …, 19

이때 $19=1+2\times 9$에서 구하는 값은 첫째항이 1, 끝항이 19, 항수가 10인 등차수열의 합이므로

$$\frac{10(1+19)}{2}=100$$

답 ④

첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열의 제10항

09 60 이하의 자연수 중에서 5로 나누었을 때의 나머지가 3인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

3, 8, 13, …, 58

이때 $58=3+5\times 11$에서 구하는 값은 첫째항이 3, 끝항이 58, 항수가 12인 등차수열의 합이므로

$$\frac{12(3+58)}{2}=366$$

답 366

첫째항이 3, 공차가 5인 등차수열의 제12항

베이직쎈 BOX

10 두 자리 자연수 중에서 4의 배수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$12, 16, 20, \cdots, 96$

이때 $96=12+4\times21$에서 구하는 값은 첫째항이 12, 끝항이 96, 항수가 22인 등차수열의 합이므로

첫째항이 12, 공차가 4인 등차수열의 제22항

$\frac{22(12+96)}{2}=1188$ 답 ①

11 $S_n=-n^2+2n$에서

$a_{10}=S_{10}-S_9$

$=(-10^2+2\times10)-(-9^2+2\times9)$

$=-80-(-63)$

$=-17$ 답 ③

다른 풀이 $S_n=-n^2+2n$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=-1^2+2\times1=1$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=-n^2+2n-\{-(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=-n^2+2n-(-n^2+4n-3)$

$=-2n+3$ …… ㉠

이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=-2n+3$

$\therefore a_{10}=-2\times10+3=-17$

12 $S_n=-3n^2-5n$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=-3\times1^2-5\times1=-8$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=-3n^2-5n-\{-3(n-1)^2-5(n-1)\}$

$=-3n^2-5n-(-3n^2+n+2)$

$=-6n-2$ …… ㉠

이때 $a_1=-8$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=-6n-2$

따라서 $a=-8$, $d=-6$이므로

$d=a_2-a_1$
$=(-6\times2-2)-(-8)$
$=-6$

$a^2+d^2=64+36=100$ 답 100

13 $S_n=2n^2+n-3$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2\times1^2+1-3=0$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2+n-3-\{2(n-1)^2+(n-1)-3\}$

$=2n^2+n-3-(2n^2-3n-2)$

$=4n-1$ …… ㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_1=4\times1-1=3$

(i), (ii)에서 $a_1=0$, $a_n=4n-1$ $(n\ge2)$

$\therefore a_1+a_3+a_5=0+(4\times3-1)+(4\times5-1)=30$

답 ①

14 $S_n=n^2-n+k$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2-1+k=k$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2-n+k-\{(n-1)^2-(n-1)+k\}$

$=n^2-n+k-(n^2-3n+2+k)$

$=2n-2$ …… ㉠

이때 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등차수열을 이루려면 $a_1=k$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같아야 하므로

$k=2\times1-2=0$ 답 0

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 165쪽

01 **전략** 일반항에 $n=2$, $n=5$를 대입하여 제2항과 제5항을 구한다.

풀이 주어진 수열의 제2항은 $2^2-3\times2=-2$

또 제5항은 $5^2-3\times5=10$

따라서 구하는 합은

$-2+10=8$ 답 ④

02 **전략** 첫째항과 공차를 모두 a로 놓고 주어진 식을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 모두 a라 하면

$a_n=a+(n-1)a=an$

$a_3+a_6=18$에서 $3a+6a=18$

$9a=18$ $\therefore a=2$

따라서 $a_n=2n$이므로 $a_7=2\times7=14$ 답 ⑤

03 **전략** 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은 $a_n=a+(n-1)d$임을 이용한다.

풀이 주어진 수열은 첫째항이 42, 공차가 $39-42=-3$이므로 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=42+(n-1)\times(-3)=-3n+45$

$-3n+45<-3$에서 $-3n<-48$

$\therefore n>16$

따라서 처음으로 공차보다 작아지는 항은 제17항이다.

답 ③

04 **전략** 세 수 p, q, r가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $q=\frac{p+r}{2}$임을 이용한다.

풀이 세 수 $6a$, a^2-2a, 12가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a^2-2a=\frac{6a+12}{2}$, $a^2-2a=3a+6$

$a^2-5a-6=0$, $(a+1)(a-6)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=6$

따라서 모든 a의 값의 합은

$-1+6=5$ 답 ④

베이직쎈 BOX

05 전략 등차수열을 이루는 세 변의 길이를 $a-d$, a, $a+d$로 놓고 식을 세운다.

풀이 조건 (가)에서 직각삼각형의 세 변의 길이를 $a-d$, a, $a+d$ $(a>d>0)$로 놓으면 삼각형의 가장 긴 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하므로

$(a-d)+a>a+d$

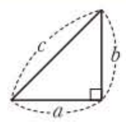
$\therefore a>2d$

피타고라스 정리에 의하여

$(a+d)^2=(a-d)^2+a^2$

$a(a-4d)=0$

$\therefore a=4d\ (\because a\neq0)$ …… ㉠



➡ $c^2=a^2+b^2$

조건 (나)에서 $(a-d)+a+(a+d)=48$이므로

$3a=48 \quad \therefore a=16$

$a=16$을 ㉠에 대입하여 정리하면 $\quad d=4$

따라서 직각삼각형의 빗변의 길이는

$a+d=16+4=20$ 답 ③

06 전략 첫째항이 a, 제n항이 l인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은 $\dfrac{n(a+l)}{2}$임을 이용한다.

풀이 $(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)+(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5)$

$=\dfrac{5(a_1+a_5)}{2}+\dfrac{5(b_1+b_5)}{2}$

$=\dfrac{5}{2}(a_1+b_1+a_5+b_5)$

이때 $a_1+b_1=6$이므로

$\dfrac{5}{2}(6+a_5+b_5)=40$

$6+a_5+b_5=16$

$\therefore a_5+b_5=10$ 답 ③

07 전략 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은 $\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$임을 이용한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_5=45$에서 $\quad \dfrac{5(2a+4d)}{2}=45$

$\therefore a+2d=9$ …… ㉠

$S_{10}=240$에서 $\quad \dfrac{10(2a+9d)}{2}=240$

$\therefore 2a+9d=48$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-3,\ d=6$

ⓛ−㉠×2를 하면
$5d=30 \quad \therefore d=6$
$d=6$을 ㉠에 대입하면
$a+12=9$
$\therefore a=-3$

따라서 $a_n=-3+(n-1)\times6=6n-9$이므로

$a_{10}=6\times10-9=51$ 답 ②

08 전략 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $a_k>0$, $a_{k+1}<0$이면 S_n의 최댓값은 S_k임을 이용한다.

풀이 주어진 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 일반항을 a_n이라 하면

$a_5=13$에서 $\quad a+4d=13$ …… ㉠

$a_{15}=-7$에서 $\quad a+14d=-7$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면
$10d=-20$
$\therefore d=-2$
$d=-2$를 ㉠에 대입하면
$a-8=13$
$\therefore a=21$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=21,\ d=-2$

$\therefore a_n=21+(n-1)\times(-2)=-2n+23$

$-2n+23<0$에서 $\quad -2n<-23$

$\therefore n>\dfrac{23}{2}=11.5$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제12항부터 음수이므로 첫째항부터 제11항까지의 합이 최대이다.

따라서 최댓값은

$S_{11}=\dfrac{11\{2\times21+10\times(-2)\}}{2}=121$ 답 ①

09 전략 3의 배수와 5의 배수의 합에서 15의 배수의 합을 뺀다.

풀이 50 이하의 자연수 중에서 3의 배수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$3,\ 6,\ 9,\ \cdots,\ 48$

이때 $48=3+3\times15$에서 위의 수열의 합은 첫째항이 3, 끝항이 48, 항수가 16인 등차수열의 합이므로

첫째항이 3, 공차가 3인 등차수열의 제16항

$\dfrac{16(3+48)}{2}=408$

50 이하의 자연수 중에서 5의 배수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$5,\ 10,\ 15,\ \cdots,\ 50$

이때 $50=5+5\times9$에서 위의 수열의 합은 첫째항이 5, 끝항이 50, 항수가 10인 등차수열의 합이므로

첫째항이 5, 공차가 5인 등차수열의 제10항

$\dfrac{10(5+50)}{2}=275$

한편 50 이하의 자연수 중에서 15의 배수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

3과 5의 최소공배수

$15,\ 30,\ 45$

이므로 이 세 수의 합은

$15+30+45=90$

따라서 구하는 합은

$408+275-90=593$ 답 ②

10 전략 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq2)$임을 이용한다.

풀이 $S_n=n^2-4n$, $T_n=-n^2+kn$이라 하면

$a_4=S_4-S_3=(4^2-4\times4)-(3^2-4\times3)=3$

$b_4=T_4-T_3=(-4^2+4k)-(-3^2+3k)=k-7$

이때 $a_4=b_4$이므로

$3=k-7 \quad \therefore k=10$ 답 ⑤

11 전략 주어진 조건을 이용하여 등차수열의 첫째항과 공차에 대한 연립방정식을 세운다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2+a_4+a_6+a_8=0$에서

$(a+d)+(a+3d)+(a+5d)+(a+7d)=0$

$4a+16d=0 \quad \therefore a+4d=0$ …… ㉠

$a_9=20$에서 $\quad a+8d=20$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면
$4d=20 \quad \therefore d=5$
$d=5$를 ㉠에 대입하면
$a+20=0$
$\therefore a=-20$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-20,\ d=5$

따라서 이 수열의 공차는 5이다. 답 5

09 등차수열

12 전략 주어진 항을 이용하여 등차수열의 일반항을 구한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_6=3$에서 $a+5d=3$ …… ㉠

$a_{10}=11$에서 $a+9d=11$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-7$, $d=2$ ··· ❶

$a_n=-7+(n-1)\times2=2n-9$이므로 $a_k\geq81$에서

$2k-9\geq81$, $2k\geq90$ $\therefore k\geq45$

따라서 자연수 k의 최솟값은 45이다. ··· ❷

답 45

단계	채점 기준	비율
❶	첫째항과 공차를 구할 수 있다.	50 %
❷	자연수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

베이직쎈 BOX

㉡－㉠을 하면

$4d=8$ $\therefore d=2$

$d=2$를 ㉠에 대입하면

$a+10=3$

$\therefore a=-7$

13 전략 b가 3과 21의 등차중항임을 이용한다.

풀이 세 수 3, b, 21도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$b=\frac{3+21}{2}=12$$

또 세 수 a, 12, c도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$12=\frac{a+c}{2} \qquad \therefore a+c=24$$

$\therefore a+b+c=36$

답 36

다른 풀이 세 수 3, a, b도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$a=\frac{3+b}{2}=\frac{3+12}{2}=\frac{15}{2}$$

또 세 수 b, c, 21도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$c=\frac{b+21}{2}=\frac{12+21}{2}=\frac{33}{2}$$

$\therefore a+b+c=36$

14 전략 주어진 조건을 이용하여 공차에 대한 식을 세운다.

풀이 (1) 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 제3항과 제5항은 절댓값이 같고 부호가 반대이므로

$a_3+a_5=0$에서

$(12+2d)+(12+4d)=0$

$6d=-24$ $\therefore d=-4$

따라서 공차는 -4이다. ··· ❶

(2) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{10\{2\times12+9\times(-4)\}}{2}=-60 \quad ··· ❷$$

답 (1) -4 (2) -60

단계	채점 기준	비율
❶	공차를 구할 수 있다.	50 %
❷	첫째항부터 제10항까지의 합을 구할 수 있다.	50 %

15 전략 첫째항이 a, 제n항이 l인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은 $\frac{n(a+l)}{2}$임을 이용한다.

풀이 첫째항이 -14, 끝항이 34, 항수가 20인 등차수열의 합은

$$\frac{20(-14+34)}{2}=200$$

따라서 $-14+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{18}+34=200$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{18}=200-(-14+34)=180$

답 180

16 전략 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq2)$임을 이용한다.

풀이 $S_n=3n^2-n$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=3\times1^2-1=2$

(ii) $n\geq2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=3n^2-n-\{3(n-1)^2-(n-1)\}\\&=3n^2-n-(3n^2-7n+4)\\&=6n-4 \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=6n-4$ ··· ❶

$a_k=20$에서 $6k-4=20$

$6k=24$ $\therefore k=4$ ··· ❷

답 4

단계	채점 기준	비율
❶	a_n을 구할 수 있다.	70 %
❷	k의 값을 구할 수 있다.	30 %

베이직쎈 BOX

Ⅳ. 수열

10 등비수열

19 등비수열

개념 58 등비수열

본책 168쪽

01 주어진 수열의 공비가 $\frac{3}{1}=3$이므로 □ 안에 알맞은 수는 $9\times3=27$

답 27

02 주어진 수열의 공비가 $\left(\frac{1}{2}\right)^2\div\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$이므로 □ 안에 알맞은 수는

$\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$

답 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

03 주어진 수열의 공비가 $\frac{-5}{1}=-5$이므로 □ 안에 알맞은 수는

$\frac{1}{25}\times(-5)=-\frac{1}{5}$

답 $-\frac{1}{5}$

04 주어진 수열의 공비가 $\frac{4}{-8}=-\frac{1}{2}$이므로

$\square\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-8$

$\therefore \square=16$

따라서 □ 안에 알맞은 수는 16이다.

답 16

05 주어진 수열의 공비가 $\frac{2}{9}\div\frac{2}{3}=\frac{2}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{3}$이므로 □ 안에 알맞은 수는 차례대로

$18\times\frac{1}{3}=6,\ 6\times\frac{1}{3}=2$

답 6, 2

06 답 $a_n=4\times6^{n-1}$

첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq0)$인 등비수열의 일반항 a_n은

$a_n=ar^{n-1}$

07 답 $a_n=\frac{1}{2}\times(-3)^{n-1}$

08 답 1, 1, 4, 1, 4, 4^{n-1}

09 첫째항이 1, 공비가 $\frac{7}{1}=7$이므로 주어진 등비수열의 일반항 a_n은

$a_n=1\times7^{n-1}=7^{n-1}$

답 $a_n=7^{n-1}$

10 첫째항이 5, 공비가 $\frac{-10}{5}=-2$이므로 주어진 등비수열의 일반항 a_n은

$a_n=5\times(-2)^{n-1}$

답 $a_n=5\times(-2)^{n-1}$

11 첫째항이 9, 공비가 $\frac{-3}{9}=-\frac{1}{3}$이므로 주어진 등비수열의 일반항 a_n은

$a_n=9\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

답 $a_n=9\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

12 답 2, 3, 54

13 $a_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$이므로

$4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
$=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

$a_6=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

수열의 일반항 a_n의 n에 6을 대입한다.

답 $\frac{1}{8}$

14 $a_n=5\times(-1)^{n-1}$이므로

$a_{10}=5\times(-1)^9=-5$

답 -5

15 $a_n=-1\times(-2)^{n-1}$이므로

$a_7=-1\times(-2)^6=-64$

답 -64

16 답 $a_n=3^{n-1}$ 4, 27, 3, 3, 1, 1, 3, 3^{n-1}

17 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_4=1$에서 $ar^3=1$ …… ㉠

$a_9=-1$에서 $ar^8=-1$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^5=-1$ $\therefore r=-1$

$r=-1$을 ㉠에 대입하면 $-a=1$ $\therefore a=-1$

$\therefore a_n=-1\times(-1)^{n-1}=(-1)^n$

답 $a_n=(-1)^n$

18 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=3$에서 $ar^2=3$ …… ㉠

$a_6=\frac{1}{9}$에서 $ar^5=\frac{1}{9}$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=\frac{1}{27}$ $\therefore r=\frac{1}{3}$

$r=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{9}a=3$ $\therefore a=27$

$\therefore a_n=27\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4}$

$27\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
$=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
$=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4}$

답 $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4}$

19 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_5=\frac{1}{2}$에서 $ar^4=\frac{1}{2}$ …… ㉠

$a_8=\frac{1}{16}$에서 $ar^7=\frac{1}{16}$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=\frac{1}{8}$ $\therefore r=\frac{1}{2}$

$r=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{16}a=\frac{1}{2}$ $\therefore a=8$

$\therefore a_n=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$

$8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
$=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$

답 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$

20 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=48$에서 $ar^2=48$ …… ㉠

$a_5=768$에서 $ar^4=768$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=16$ $\therefore r=4$ $(\because r>0)$

$r=4$를 ㉠에 대입하면 $16a=48$ $\therefore a=3$

$\therefore a_n=3\times4^{n-1}$

답 $a_n=3\times4^{n-1}$

21 $a_n=2\times2^{n-1}=2^n$

$2^n>1000$에서 $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

$n\geq10$

따라서 처음으로 1000보다 커지는 항은 제10항이다.

$n\geq10$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

답 제10항

22 $a_n=8\times4^{n-1}$

$8\times4^{n-1}>1000$에서 $4^{n-1}>125$

이때 $4^3=64$, $4^4=256$이므로

$n-1\geq 4$ $\quad\therefore n\geq 5$

따라서 처음으로 1000보다 커지는 항은 제5항이다.

답 제5항

23 공비를 r라 하면 $a_4=135$에서

$5r^3=135$, $\quad r^3=27$ $\quad\therefore r=3$

$\therefore a_n=5\times 3^{n-1}$

$5\times 3^{n-1}>1000$에서 $\quad 3^{n-1}>200$

이때 $3^4=81$, $3^5=243$이므로

$n-1\geq 5$ $\quad\therefore n\geq 6$

따라서 처음으로 1000보다 커지는 항은 제6항이다.

답 제6항

개념 59 등비중항

본책 170쪽

24 x는 1과 16의 등비중항이므로

$x^2=1\times 16=16$ $\quad\therefore x=\pm 4$ $\quad$ 답 -4 또는 4

25 x는 4와 25의 등비중항이므로

$x^2=4\times 25=100$ $\quad\therefore x=\pm 10$

답 -10 또는 10

26 x는 -3과 -12의 등비중항이므로

$x^2=-3\times(-12)=36$ $\quad\therefore x=\pm 6$

답 -6 또는 6

27 x는 -5와 -7의 등비중항이므로

$x^2=-5\times(-7)=35$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{35}$

답 $-\sqrt{35}$ 또는 $\sqrt{35}$

28 4는 x와 $2x$의 등비중항이므로

$4^2=x\times 2x$, $\quad x^2=8$

$\therefore x=\pm 2\sqrt{2}$ $\quad$ 답 $-2\sqrt{2}$ 또는 $2\sqrt{2}$

29 8은 $x-6$과 $x+6$의 등비중항이므로

$8^2=(x-6)(x+6)$, $\quad 64=x^2-36$

$x^2=100$ $\quad\therefore x=\pm 10$ $\quad$ 답 -10 또는 10

30 x는 2와 8의 등비중항이므로

$x^2=2\times 8=16$ $\quad\therefore x=\pm 4$

(i) $x=-4$일 때 이 수열의 공비는 $\frac{-4}{2}=-2$이므로

$y=8\times(-2)=-16$

(ii) $x=4$일 때 이 수열의 공비는 $\frac{4}{2}=2$이므로

$y=8\times 2=16$

(i), (ii)에서 $\quad x=-4$, $y=-16$ 또는 $x=4$, $y=16$

답 $x=-4$, $y=-16$ 또는 $x=4$, $y=16$

31 x는 $\frac{1}{9}$과 1의 등비중항이므로

$x^2=\frac{1}{9}\times 1=\frac{1}{9}$ $\quad\therefore x=\pm\frac{1}{3}$

베이직쎈 BOX

0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루면
➡ $b^2=ac$

$-\frac{2}{r}(1+r+r^2)=3$의 양변에 r를 곱하면
$-2(1+r+r^2)=3r$
$\therefore 2r^2+5r+2=0$

(i) $x=-\frac{1}{3}$일 때 이 수열의 공비는

$-\frac{1}{3}\div\frac{1}{9}=-\frac{1}{3}\times 9=-3$

이므로 $\quad y=1\times(-3)=-3$

(ii) $x=\frac{1}{3}$일 때 이 수열의 공비는

$\frac{1}{3}\div\frac{1}{9}=\frac{1}{3}\times 9=3$

이므로 $\quad y=1\times 3=3$

(i), (ii)에서 $\quad x=-\frac{1}{3}$, $y=-3$ 또는 $x=\frac{1}{3}$, $y=3$

답 $x=-\frac{1}{3}$, $y=-3$ 또는 $x=\frac{1}{3}$, $y=3$

32 x는 -5와 $-\frac{1}{5}$의 등비중항이므로

$x^2=-5\times\left(-\frac{1}{5}\right)=1$ $\quad\therefore x=\pm 1$

(i) $x=-1$일 때 이 수열의 공비는 $\frac{-1}{-5}=\frac{1}{5}$이므로

$y=-\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=-\frac{1}{25}$

(ii) $x=1$일 때 이 수열의 공비는 $\frac{1}{-5}=-\frac{1}{5}$이므로

$y=-\frac{1}{5}\times\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{25}$

(i), (ii)에서 $\quad x=-1$, $y=-\frac{1}{25}$ 또는 $x=1$, $y=\frac{1}{25}$

답 $x=-1$, $y=-\frac{1}{25}$ 또는 $x=1$, $y=\frac{1}{25}$

33 답 1, 3, 9 $\quad$ 9, 1, 3, 9

34 세 실수를 a, ar, ar^2으로 놓으면

$a+ar+ar^2=3$에서

$a(1+r+r^2)=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$a\times ar\times ar^2=-8$에서 $\quad (ar)^3=-8$

$\therefore ar=-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡에서 $a=-\frac{2}{r}$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$2r^2+5r+2=0$, $\quad (2r+1)(r+2)=0$

$\therefore r=-2$ 또는 $r=-\frac{1}{2}$

따라서 $r=-2$일 때 $a=1$, $r=-\frac{1}{2}$일 때 $a=4$이므로

세 실수는 1, -2, 4이다. $\quad$ 답 1, -2, 4

자신감 UP! 기본&핵심유형

본책 171쪽

01 주어진 등비수열의 첫째항을 a라 하면 제5항이 $3\sqrt{3}$이므로 $\quad a\times(\sqrt{3})^4=3\sqrt{3}$

$9a=3\sqrt{3}$ $\quad\therefore a=\frac{\sqrt{3}}{3}$

즉 첫째항은 $\frac{\sqrt{3}}{3}$이다. $\quad$ 답 ②

베이직쎈 BOX

02 주어진 등비수열은 첫째항이 $-\frac{2}{5}$, 공비가

$4\div\left(-\frac{2}{5}\right)=4\times\left(-\frac{5}{2}\right)=-10$이므로

$a_n=-\frac{2}{5}\times(-10)^{n-1}$

$\therefore a_4=-\frac{2}{5}\times(-10)^3=400$ 답 400

03 주어진 수열은 첫째항이 $\frac{2}{9}$, 공비가

$\frac{2}{3}\div\frac{2}{9}=\frac{2}{3}\times\frac{9}{2}=3$이므로 $a_n=\frac{2}{9}\times3^{n-1}$

$\therefore a_7=\frac{2}{9}\times3^6=162$

따라서 구하는 합은 $3+162=165$ 답 ③

04 주어진 등비수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=8\times2^{n-1}=2^{n+2}$

512를 제k항이라 하면 $2^{k+2}=512=2^9$

$k+2=9$ $\therefore k=7$

따라서 512는 제7항이다. 답 ①

$8\times2^{n-1}=2^3\times2^{n-1}=2^{n+2}$

05 주어진 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라 하고 일반항을 a_n이라 하면

$a_3=32$에서 $ar^2=32$ …… ㉠

$a_7=2$에서 $ar^6=2$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^4=\frac{1}{16}$ $\therefore r=\frac{1}{2}\ (\because r>0)$

$r=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{4}a=32$ $\therefore a=128$

따라서 $a_n=128\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-8}$이므로

$a_{10}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

$128\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-7}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-8}$

06 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3a_7=81$에서 $ar^2\times ar^6=81$

$(ar^4)^2=81$ $\therefore ar^4=9\ (\because a>0)$

$\therefore a_5=ar^4=9$ 답 ⑤

07 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\frac{a_1+a_3+a_7}{a_4+a_6+a_{10}}=125$에서 $\frac{a+ar^2+ar^6}{ar^3+ar^5+ar^9}=125$

$\frac{a(1+r^2+r^6)}{ar^3(1+r^2+r^6)}=125,$ $r^3=\frac{1}{125}$

$\therefore r=\frac{1}{5}$

따라서 이 수열의 공비는 $\frac{1}{5}$이다. 답 $\frac{1}{5}$

08 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=-2$에서 $ar=-2$ …… ㉠

$a_6:a_8=1:9$에서 $9a_6=a_8$이므로

$9ar^5=ar^7,$ $r^2=9$ $\therefore r=-3\ (\because r<0)$

$r=-3$을 ㉠에 대입하면 $-3a=-2$ $\therefore a=\frac{2}{3}$

따라서 $a_n=\frac{2}{3}\times(-3)^{n-1}$이므로

$a_6=\frac{2}{3}\times(-3)^5=-162$ 답 -162

09 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3a_5=4$에서 $ar^2\times ar^4=4$

$\therefore a^2r^6=4$ …… ㉠

$a_4a_6=16$에서 $ar^3\times ar^5=16$

$\therefore a^2r^8=16$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=4$ $\therefore r=2\ (\because r>0)$

수열의 모든 항이 양수이므로 공비는 양수이다.

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $64a^2=4$

$a^2=\frac{1}{16}$ $\therefore a=\frac{1}{4}\ (\because a>0)$

따라서 $a_n=\frac{1}{4}\times2^{n-1}=2^{n-3}$이므로

$\frac{1}{4}\times2^{n-1}=2^{-2}\times2^{n-1}=2^{n-3}$

$a_8=2^5=32$ 답 ⑤

10 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_4=28$에서 $a+ar^3=28$

$\therefore a(1+r^3)=28$ …… ㉠

$a_2+a_5=84$에서 $ar+ar^4=84$

$\therefore ar(1+r^3)=84$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r=3$

$r=3$을 ㉠에 대입하면 $28a=28$ $\therefore a=1$

$\therefore a_n=1\times3^{n-1}=3^{n-1}$

243을 제k항이라 하면 $3^{k-1}=243=3^5$

$k-1=5$ $\therefore k=6$

따라서 243은 제6항이다. 답 ②

11 주어진 등비수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=\frac{1}{5}\times3^{n-1}$

$\frac{1}{5}\times3^{n-1}>100$에서 $3^{n-1}>500$

이때 $3^5=243$, $3^6=729$이므로

$n-1\geq6$ $\therefore n\geq7$

따라서 처음으로 100보다 커지는 항은 제7항이다.

답 ②

12 주어진 등비수열의 공비를 r, 일반항을 a_n이라 하면

$a_4=8$에서 $64r^3=8,$ $r^3=\frac{1}{8}$ $\therefore r=\frac{1}{2}$

$\therefore a_n=64\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$64\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<1$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\frac{1}{64}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^6,$ $n-1>6$

$\therefore n>7$

따라서 처음으로 1보다 작아지는 항은 제8항이다.

답 제8항

13 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_4=3\sqrt{3}$에서 $ar^3=3\sqrt{3}$ …… ㉠

$a_5=9$에서 $ar^4=9$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r=\sqrt{3}$

$r=\frac{9}{3\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

$r=\sqrt{3}$을 ㉠에 대입하면 $3\sqrt{3}a=3\sqrt{3}$ $\therefore a=1$

따라서 $a_n=1\times(\sqrt{3})^{n-1}=(\sqrt{3})^{n-1}$이므로

$a_n^2=\{(\sqrt{3})^{n-1}\}^2=\{(\sqrt{3})^2\}^{n-1}=3^{n-1}$

10 등비수열

$a_n^2>200$에서 $3^{n-1}>200$
이때 $3^4=81$, $3^5=243$이므로
$n-1\geq5$ $\therefore n\geq6$
따라서 자연수 n의 최솟값은 6이다. 답 ①

14 주어진 등비수열의 공비를 r라 하면 첫째항이 27, 제5항이 $\frac{1}{3}$이므로
$27r^4=\frac{1}{3}$, $r^4=\frac{1}{81}$ $\therefore r=\frac{1}{3}$ ($\because r>0$)
따라서 이 수열의 공비는 $\frac{1}{3}$이다. 답 $\frac{1}{3}$

15 주어진 등비수열의 공비를 r라 하면 첫째항이 3, 제6항이 96이므로
$3r^5=96$, $r^5=32$ $\therefore r=2$
이때 a_3은 주어진 수열의 제4항이므로
$a_3=3\times2^3=24$ 답 ③

16 첫째항이 4, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 제$(n+2)$항이 $\frac{1}{32}$이므로
$4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{32}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{128}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^7$, $n+1=7$
$\therefore n=6$ 답 ③

17 세 수 a, $\sqrt{7}$, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$(\sqrt{7})^2=ab$ $\therefore ab=7$ 답 ④

18 세 수 x, $x+6$, $9x$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $(x+6)^2=x\times9x$
$x^2+12x+36=9x^2$, $8x^2-12x-36=0$
$2x^2-3x-9=0$, $(2x+3)(x-3)=0$
$\therefore x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=3$ 답 $-\frac{3}{2}$, 3

19 세 수 160, b, 10이 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $b^2=160\times10=1600$
$\therefore b=40$ ($\because b>0$)
또 세 수 a, 40, c도 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$ac=40^2=1600$
$\therefore ac+b=1640$ 답 ③

20 첫 번째 튀어 오른 공의 높이는 $3\times\frac{3}{5}$(m)
두 번째 튀어 오른 공의 높이는
$3\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=3\times\left(\frac{3}{5}\right)^2$(m)
⋮
n 번째 튀어 오른 공의 높이는 $3\times\left(\frac{3}{5}\right)^n$(m)
따라서 일곱 번째 튀어 오른 공의 높이는
$3\times\left(\frac{3}{5}\right)^7=3\times\frac{3^7}{5^7}=\frac{3^8}{5^7}$(m) 답 ②

베이직쎈 BOX

두 수 a, b 사이에 n개의 수를 넣어서 등비수열을 만들면
➡ b는 제$(n+2)$항

21 첫 번째 시행 후 남은 막대들의 길이의 합은
$6\times\frac{2}{3}$
두 번째 시행 후 남은 막대들의 길이의 합은
$6\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=6\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$
⋮
n 번째 시행 후 남은 막대들의 길이의 합은 $6\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$
따라서 아홉 번째 시행 후 남은 막대들의 길이의 합은
$6\times\left(\frac{2}{3}\right)^9=2\times3\times\frac{2^9}{3^9}=\frac{2^{10}}{3^8}$ 답 $\frac{2^{10}}{3^8}$

22 첫 번째 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는
$1024\times\frac{3}{4}$
두 번째 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는
$1024\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=1024\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$
⋮
n 번째 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는 $1024\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$
따라서 다섯 번째 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는
$1024\times\left(\frac{3}{4}\right)^5=2^{10}\times\frac{3^5}{2^{10}}=243$ 답 ④

23 한 변의 길이가 3인 정사각형의 넓이는 $3^2=9$
첫 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는 $9\times\frac{8}{9}$
두 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는
$9\times\frac{8}{9}\times\frac{8}{9}=9\times\left(\frac{8}{9}\right)^2$
⋮
n 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는 $9\times\left(\frac{8}{9}\right)^n$
따라서 열 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는
$9\times\left(\frac{8}{9}\right)^{10}=3^2\times\frac{2^{30}}{3^{20}}=\frac{2^{30}}{3^{18}}$

$\left(\frac{8}{9}\right)^{10}=\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^{10}=\frac{2^{30}}{3^{20}}$

이므로 $a=30$, $b=18$
$\therefore a-b=12$ 답 12

20 등비수열의 합

개념 60 등비수열의 합

본책 175쪽

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은
$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$
$=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$
(단, $r\neq1$)

01 $S_5=\frac{3(4^5-1)}{4-1}=1023$ 답 1023

02 $S_9=\frac{-1\times(2^9-1)}{2-1}=-511$ 답 -511

03 $S_4=\frac{1\times\{1-(-5)^4\}}{1-(-5)}=-104$ 답 -104

베이직쎈 BOX

04 $S_{12}=\dfrac{-5\{1-(-1)^{12}\}}{1-(-1)}=0$ 답 0

05 첫째항이 7, 공비가 $\dfrac{7}{7}=1$인 등비수열이므로

$S_{15}=15\times7=105$ 답 105

06 첫째항이 2, 공비가 $\dfrac{6}{2}=3$인 등비수열이므로

$S_6=\dfrac{2(3^6-1)}{3-1}=728$ 답 728

07 첫째항이 -5, 공비가 $\dfrac{-10}{-5}=2$인 등비수열이므로

$S_7=\dfrac{-5(2^7-1)}{2-1}=-635$ 답 -635

08 첫째항이 -3, 공비가 $\dfrac{6}{-3}=-2$인 등비수열이므로 $S_8=\dfrac{-3\{1-(-2)^8\}}{1-(-2)}=255$ 답 255

09 답 2, 2, 2, 2, 2, 7, 7, 2, 7, 254

10 32, 16, 8, …, 1은 첫째항이 32, 공비가 $\dfrac{16}{32}=\dfrac{1}{2}$인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=32\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

1을 제k항이라 하면 $32\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}=1$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}=\dfrac{1}{32}$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^5$

$k-1=5$ $\therefore k=6$

따라서 구하는 합은 첫째항이 32, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제6항까지의 합이므로

$\dfrac{32\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{2}}=63$ 답 63

11 1, -3, 9, …, -243은 첫째항이 1, 공비가 $\dfrac{-3}{1}=-3$인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=1\times(-3)^{n-1}$

-243을 제k항이라 하면 $1\times(-3)^{k-1}=-243$

$(-3)^{k-1}=(-3)^5$, $k-1=5$

$\therefore k=6$

따라서 구하는 합은 첫째항이 1, 공비가 -3인 등비수열의 첫째항부터 제6항까지의 합이므로

$\dfrac{1\times\{1-(-3)^6\}}{1-(-3)}=-182$ 답 -182

12 답 첫째항: 3, 공비: 2

a, 6, 3, 9, 8, 2, 2, 3

13 첫째항을 a, 공비를 r $(r\neq1)$이라 하면

$S_3=13$에서 $\dfrac{a(r^3-1)}{r-1}=13$ …… ㉠

$S_6=364$에서 $\dfrac{a(r^6-1)}{r-1}=364$

$\therefore \dfrac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=364$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3+1=28$

$r^3=27$ $\therefore r=3$

$r=3$을 ㉠에 대입하면 $13a=13$ $\therefore a=1$

따라서 첫째항은 1, 공비는 3이다.

답 첫째항: 1, 공비: 3

> a^2-b^2
> $=(a+b)(a-b)$

> 첫째항이 a, 공비가 1인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은
> $S_n=na$

14 첫째항을 a, 공비를 r $(r\neq1)$이라 하면

$S_5=2$에서 $\dfrac{a(r^5-1)}{r-1}=2$ …… ㉠

$S_{10}=66$에서 $\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}=66$

$\therefore \dfrac{a(r^5-1)(r^5+1)}{r-1}=66$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^5+1=33$

$r^5=32$ $\therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $31a=2$ $\therefore a=\dfrac{2}{31}$

따라서 첫째항은 $\dfrac{2}{31}$, 공비는 2이다.

답 첫째항: $\dfrac{2}{31}$, 공비: 2

15 첫째항을 a, 공비를 r $(r\neq1)$이라 하면

$S_3=5$에서 $\dfrac{a(r^3-1)}{r-1}=5$ …… ㉠

$S_6=-35$에서 $\dfrac{a(r^6-1)}{r-1}=-35$

$\therefore \dfrac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=-35$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3+1=-7$

$r^3=-8$ $\therefore r=-2$

$r=-2$를 ㉠에 대입하면 $3a=5$ $\therefore a=\dfrac{5}{3}$

따라서 첫째항은 $\dfrac{5}{3}$, 공비는 -2이다.

답 첫째항: $\dfrac{5}{3}$, 공비: -2

16 답 $a_n=2\times3^{n-1}$ 2, 2, 2, $2\times3^{n-1}$

17 $S_n=5^n-1$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=5^1-1=4$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=5^n-1-(5^{n-1}-1)$

$=5^{n-1}(5-1)=4\times5^{n-1}$ …… ㉠

이때 $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4\times5^{n-1}$ 답 $a_n=4\times5^{n-1}$

18 $S_n=2^n+3$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2^1+3=5$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n+3-(2^{n-1}+3)$
$=2^{n-1}(2-1)=2^{n-1}$ ······ ㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_1=2^0=1$

(i), (ii)에서 $a_1=5$, $a_n=2^{n-1}$ $(n\ge2)$

답 $a_1=5$, $a_n=2^{n-1}$ $(n\ge2)$

19 $S_n=4^{n+1}+1$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=4^2+1=17$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=4^{n+1}+1-(4^n+1)$
$=4^n(4-1)=3\times4^n$ ······ ㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_1=3\times4^1=12$

(i), (ii)에서 $a_1=17$, $a_n=3\times4^n$ $(n\ge2)$

답 $a_1=17$, $a_n=3\times4^n$ $(n\ge2)$

개념 61 원리합계

본책 177쪽

20 답 $a\times1.02^4$, $a\times1.02$, $a\times1.02$, 1.02, 5, $a\times1.02$, 5, 0.02, $5.1a$

21 100만 원을 연이율 5 %의 복리로 n년 동안 예금하면 n년 후의 원리합계는

$100\times(1+0.05)^n=100\times1.05^n$ (만 원)

따라서 구하는 적립금의 원리합계는

$\underline{100\times1.05+100\times1.05^2+\cdots+100\times1.05^{10}}$

$=\dfrac{100\times1.05(1.05^{10}-1)}{1.05-1}=\dfrac{100\times1.05(1.63-1)}{0.05}$

$=1323$ (만 원) 답 1323만 원

첫째항이 100×1.05, 공비가 1.05인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합

22 답 $a\times1.02^3$, a, a, 1.02, 5, a, 5, 0.02, $5a$

23 100만 원을 연이율 5 %의 복리로 n년 동안 예금하면 n년 후의 원리합계는

$100\times(1+0.05)^n=100\times1.05^n$ (만 원)

따라서 구하는 적립금의 원리합계는

$\underline{100+100\times1.05+\cdots+100\times1.05^9}$

$=\dfrac{100(1.05^{10}-1)}{1.05-1}=\dfrac{100(1.63-1)}{0.05}$

$=1260$ (만 원) 답 1260만 원

첫째항이 100, 공비가 1.05인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합

자신감 UP! 기본&핵심유형

본책 178쪽

01 주어진 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\dfrac{4\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{5}}=5\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\right\}=5-\left(\frac{1}{5}\right)^9$ 답 ④

베이직쎈 BOX

02 주어진 등비수열의 공비를 r라 하면 제5항이 48이므로

$3r^4=48$, $r^4=16$

$\therefore r=-2$ $(\because r<0)$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항부터 제5항까지의 합은 $\dfrac{3\{1-(-2)^5\}}{1-(-2)}=33$ 답 33

03 주어진 등비수열의 첫째항이 2, 공비가 $\frac{6}{2}=3$이므로 $S_n=\dfrac{2(3^n-1)}{3-1}=3^n-1$

$S_k=242$에서 $3^k-1=242$

$3^k=243=3^5$ $\therefore k=5$ 답 5

04 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=12$에서 $ar=12$ ······ ㉠

$a_5=96$에서 $ar^4=96$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$ $\therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $2a=12$ $\therefore a=6$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제6항까지의 합은

$\dfrac{6(2^6-1)}{2-1}=378$ 답 378

05 주어진 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r, 일반항을 a_n이라 하면

$a_1+a_3=6$에서 $a+ar^2=6$

$\therefore a(1+r^2)=6$ ······ ㉠

$a_3+a_5=12$에서 $ar^2+ar^4=12$

$\therefore ar^2(1+r^2)=12$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=2$ $\therefore r=\sqrt{2}$ $(\because r>0)$

$r=\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면 $3a=6$ $\therefore a=2$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항부터 제8항까지의 합은

$\dfrac{2\{(\sqrt{2})^8-1\}}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{30}{\underline{\sqrt{2}-1}}=30(\sqrt{2}+1)$ 답 ④

분모, 분자에 $\sqrt{2}+1$을 각각 곱하여 분모를 유리화한다.

06 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r\ne1)$라 하면

$S_3=\dfrac{1\times(r^3-1)}{r-1}=\dfrac{r^3-1}{r-1}$

$S_6=\dfrac{1\times(r^6-1)}{r-1}=\dfrac{(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}$

$\dfrac{S_6}{S_3}=126$에서 $r^3+1=126$

$r^3=125$ $\therefore r=5$

따라서 이 수열의 공비는 5이다. 답 ④

07 주어진 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r $(r\ne1)$, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_3=8$에서 $\dfrac{a(r^3-1)}{r-1}=8$ ······ ㉠

$S_6=32$에서 $\dfrac{a(r^6-1)}{r-1}=32$

$\therefore \dfrac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=32$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3+1=4$ $\therefore r^3=3$

베이직쎈 BOX

$\therefore S_9=\dfrac{a(r^9-1)}{r-1}$

$=\dfrac{a(r^3-1)(r^6+r^3+1)}{r-1}$

$=8(r^6+r^3+1)=104$ 답 104

a^3-b^3
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$r^3=3$이므로
$r^6+r^3+1=3^2+3+1$
$=13$

08 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r\ (r\neq1)$라 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=7$에서

$\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}=7$ ······ ㉠

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=7+35=42$에서

$\dfrac{a(r^{20}-1)}{r-1}=42$

$\therefore \dfrac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1}=42$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^{10}+1=6$ $\therefore r^{10}=5$

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{30}$

$=\dfrac{a(r^{30}-1)}{r-1}$

$=\dfrac{a(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r-1}$

$=7(r^{20}+r^{10}+1)=217$ 답 217

$r^{10}=5$이므로
$r^{20}+r^{10}+1$
$=5^2+5+1=31$

09 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r\ (r\neq1)$라 하면

$S_8=255$에서 $\dfrac{a(r^8-1)}{r-1}=255$ ······ ㉠

$a_1+a_3+a_5+a_7=85$에서 $\dfrac{a\{(r^2)^4-1\}}{r^2-1}=85$

첫째항이 a, 공비가 r^2인 등비수열의 첫째항부터 제4항까지의 합

$\therefore \dfrac{a(r^8-1)}{(r+1)(r-1)}=85$ ······ ㉡

㉠÷㉡을 하면 $r+1=3$ $\therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $255a=255$ $\therefore a=1$

$\therefore S_5=\dfrac{1\times(2^5-1)}{2-1}=31$ 답 ①

10 $S_n=5^n+1$에서

$a_{10}=S_{10}-S_9=5^{10}+1-(5^9+1)$

$=5^9(5-1)=4\times5^9$ 답 ④

11 $S_n=4^n-1$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=4^1-1=3$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=4^n-1-(4^{n-1}-1)$

$=4^{n-1}(4-1)=3\times4^{n-1}$ ······ ㉠

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=3\times4^{n-1}$

$a_k>900$에서 $3\times4^{k-1}>900$

$\therefore 4^{k-1}>300$

이때 $4^4=256$, $4^5=1024$이므로

$k-1\geq5$ $\therefore k\geq6$

따라서 자연수 k의 최솟값은 6이다. 답 6

12 $S_n=7\times2^{n+1}+k$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=7\times2^2+k=28+k$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=7\times2^{n+1}+k-(7\times2^n+k)$

$=7\times2^n(2-1)=7\times2^n$ ······ ㉠

이때 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면

$a_1=28+k$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같아야 하므로

$28+k=14$ $\therefore k=-14$ 답 -14

13 3만 원을 월이율 1.5 %의 복리로 n개월 동안 예금하면 n개월 후의 원리합계는

$3(1+0.015)^n=3\times1.015^n$ (만 원)

따라서 구하는 적립금의 원리합계는

1년째 말, 즉 12개월째 말의 적립금의 원리합계

$3+3\times1.015+\cdots+3\times1.015^{11}$

첫째항이 3, 공비가 1.015인 등비수열의 첫째항부터 제12항까지의 합

$=\dfrac{3(1.015^{12}-1)}{1.015-1}=\dfrac{3(1.2-1)}{0.015}$

$=40$ (만 원) 답 40만 원

14 매년 초에 a만 원씩 적립한다고 하자. a만 원을 연이율 4 %의 복리로 n년 동안 예금하면 n년 후의 원리합계는

$a(1+0.04)^n=a\times1.04^n$ (만 원)

따라서 적립금의 원리합계는

$a\times1.04+a\times1.04^2+\cdots+a\times1.04^{10}$

첫째항이 $a\times1.04$, 공비가 1.04인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합

$=\dfrac{a\times1.04(1.04^{10}-1)}{1.04-1}=\dfrac{a\times1.04(1.5-1)}{0.04}$

$=13a$ (만 원)

이때 $13a=520$이어야 하므로 $a=40$

따라서 매년 초에 40만 원씩 적립해야 한다. 답 ①

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 180쪽

01 전략 첫째항이 a, 공비가 $r\ (r\neq0)$인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=a\times r^{n-1}$임을 이용한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_n=a\times(-3)^{n-1}$

$a_3=18$에서 $9a=18$ $\therefore a=2$

즉 $a_n=2\times(-3)^{n-1}$이므로

$a_5=2\times(-3)^4=162$

$\therefore a_1+a_5=164$ 답 ⑤

02 전략 첫째항이 a, 공비가 $r\ (r\neq0)$인 등비수열의 제n항은 $a\times r^{n-1}$임을 이용하여 a, r의 값을 구한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_5=4a_3$에서 $ar^4=4ar^2$

$r^2=4$ $\therefore r=2\ (\because r>0)$

$a_4=a_2+3$에서 $\quad 8a=2a+3$

$6a=3 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore a_7=\frac{1}{2}\times 2^6=32$ 답 ⑤

03 전략 세 실수를 a, ar, ar^2으로 놓고 식을 세운다.

풀이 세 실수를 a, ar, ar^2으로 놓으면

$a+ar+ar^2=31$에서

$a(1+r+r^2)=31$ …… ㉠

$a\times ar\times ar^2=125$에서 $\quad (ar)^3=125$

$\therefore ar=5$ …… ㉡

㉡에서 $a=\frac{5}{r}$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$5r^2-26r+5=0, \quad (5r-1)(r-5)=0$

$\therefore r=\frac{1}{5}$ 또는 $r=5$

$r=\frac{1}{5}$일 때 $a=25$, $r=5$일 때 $a=1$이므로 세 실수는 1, 5, 25이다.

따라서 가장 큰 수는 25이다. 답 ⑤

04 전략 주어진 조건을 이용하여 수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비를 구한 후 등비수열의 합을 이용한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_4=27$에서 $\quad a+ar^3=27$

$\therefore a(1+r^3)=27$ …… ㉠

$a_4+a_7=216$에서 $\quad ar^3+ar^6=216$

$\therefore ar^3(1+r^3)=216$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\quad r^3=8 \quad \therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad 9a=27 \quad \therefore a=3$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항부터 제6항까지의 합은 $\frac{3(2^6-1)}{2-1}=189$ 답 ③

05 전략 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n>1000$을 만족시키는 n의 최솟값을 찾는다.

풀이 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 $\quad S_n=\frac{\frac{1}{2}(2^n-1)}{2-1}$

$\frac{1}{2}(2^n-1)>1000$에서 $\quad 2^n>2001$

이때 $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$이므로

$n\ge 11$

따라서 첫째항부터 제11항까지의 합이 처음으로 1000보다 커진다. 답 ②

06 전략 첫째항이 a, 공비가 r $(r\ne 1)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은 $\frac{a(r^n-1)}{r-1}$임을 이용한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r\ne 1)$라 하면

$S_2=\frac{a(r^2-1)}{r-1}$

$S_4=\frac{a(r^4-1)}{r-1}=\frac{a(r^2-1)(r^2+1)}{r-1}$

$\frac{S_4}{S_2}=11$에서 $\quad r^2+1=11 \quad \therefore r^2=10$

$\therefore \frac{a_6}{a_4}=\frac{ar^5}{ar^3}=r^2=10$ 답 ④

07 전략 첫째항이 a, 공비가 r $(r\ne 1)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은 $\frac{a(r^n-1)}{r-1}$임을 이용한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r\ne 1)$라 하면

$S_3=7$에서 $\quad \frac{a(r^3-1)}{r-1}=7$ …… ㉠

$S_6=63$에서 $\quad \frac{a(r^6-1)}{r-1}=63$

$\therefore \frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=63$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\quad r^3+1=9$

$r^3=8 \quad \therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad 7a=7 \quad \therefore a=1$

$\therefore a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=\frac{2\{(2^2)^5-1\}}{2^2-1}$

$=\frac{2}{3}(2^{10}-1)$ 답 ②

08 전략 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\ge 2)$임을 이용한다.

풀이 $S_n=2\times 5^n-k$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2\times 5^1-k=10-k$

(ii) $n\ge 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=2\times 5^n-k-(2\times 5^{n-1}-k)$

$=2\times 5^{n-1}(5-1)=8\times 5^{n-1}$ …… ㉠

이때 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 $a_1=10-k$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같아야 하므로

$10-k=8 \quad \therefore k=2$ 답 ④

09 전략 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\ge 2)$임을 이용한다.

풀이 ㄱ, ㄴ. $S_n=3^{n+1}-3$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=3^2-3=6$

(ii) $n\ge 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=3^{n+1}-3-(3^n-3)$

$=3^n(3-1)=2\times 3^n$ …… ㉠

이때 $a_1=6$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2\times 3^n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다.

ㄷ. $\frac{3}{2}a_n-3=\frac{3}{2}(2\times 3^n)-3=3^{n+1}-3$이므로

$S_n=\frac{3}{2}a_n-3$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

베이직쎈 BOX

$\frac{5}{r}(1+r+r^2)=31$의 양변에 r를 곱하면

$5(1+r+r^2)=31r$

$\therefore 5r^2-26r+5=0$

첫째항이 $1\times 2=2$, 공비가 2^2인 등비수열의 첫째항부터 제5항까지의 합

$r=1$이면 $\frac{S_4}{S_2}=\frac{4a}{2a}=2$ 이므로 $\quad r\ne 1$

10 전략 4년째 말의 적립금의 원리합계를 a의 식으로 나타낸다.

풀이 a만 원을 연이율 5 %의 복리로 n년 동안 예금하면 n년 후의 원리합계는

$a\times(1+0.05)^n=a\times1.05^n$ (만 원)

따라서 적립금의 원리합계는

$$a+a\times1.05+a\times1.05^2+a\times1.05^3$$
$$=\frac{a(1.05^4-1)}{1.05-1}=\frac{a(1.22-1)}{0.05}$$
$$=4.4a\text{ (만 원)}$$

첫째항이 a, 공비가 1.05인 등비수열의 첫째항부터 제4항까지의 합

이때 $4.4a=132$이어야 하므로 $a=30$

답 ③

11 전략 주어진 조건을 이용하여 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비를 구한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_6:a_7=2:1$에서 $a_6=2a_7$이므로

$ar^5=2ar^6 \quad \therefore r=\frac{1}{2}$ ··· ❶

$a_3+a_4=9$에서 $a\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=9$

$r=\frac{1}{2}$이므로
a_3+a_4
$=a\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+a\times\left(\frac{1}{2}\right)^3$
$=a\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)$

$\frac{3}{8}a=9 \quad \therefore a=24$ ··· ❷

따라서 $a_n=24\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$a_5=24\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{2}$ ··· ❸

답 $\frac{3}{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	공비를 구할 수 있다.	30%
❷	첫째항을 구할 수 있다.	40%
❸	a_5를 구할 수 있다.	30%

12 전략 각 시행에서 그린 정삼각형의 둘레의 길이는 등비수열을 이룸을 이용한다.

풀이 한 변의 길이가 6인 정삼각형의 둘레의 길이는

$3\times6=18$

1회 시행에서 그린 정삼각형의 둘레의 길이는

$18\times\frac{1}{2}$

2회 시행에서 그린 정삼각형의 둘레의 길이는

$18\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$

⋮

n회 시행에서 그린 정삼각형의 둘레의 길이는

$18\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

따라서 8회 시행에서 그린 정삼각형의 둘레의 길이는

$18\times\left(\frac{1}{2}\right)^8=2\times3^2\times\frac{1}{2^8}=\frac{3^2}{2^7}$

답 $\frac{3^2}{2^7}$

13 전략 두 수 사이에 n개의 수를 넣어서 만든 수열의 항수는 $n+2$임을 이용한다.

풀이 주어진 등비수열의 공비를 r라 하면 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 제10항이 32이므로 $\frac{1}{2}r^9=32 \quad \therefore r^9=64=2^6$

이때 a_3은 주어진 수열의 제4항이므로

$a_3=\frac{1}{2}\times r^3=\frac{1}{2}\times(r^9)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\times2^2=2$ ··· ❶

$\therefore \log_2 a_3=\log_2 2=1$ ··· ❷

답 1

단계	채점 기준	비율
❶	a_3을 구할 수 있다.	70%
❷	$\log_2 a_3$의 값을 구할 수 있다.	30%

14 전략 세 수 p, q, r가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $2q=p+r$, 등비수열을 이루면 $q^2=pr$임을 이용한다.

풀이 세 수 a, 12, b가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $a+b=24$ ······ ㉠

세 수 a, 12, 24가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$12^2=24a \quad \therefore a=6$

$a=6$을 ㉠에 대입하면 $6+b=24 \quad \therefore b=18$

$\therefore \frac{b}{a}=3$

답 3

15 전략 첫째항이 a, 공비가 $r\ (r\neq1)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은 $\frac{a(r^n-1)}{r-1}$임을 이용한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_4=80$에서 $\dfrac{a\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^4\right\}}{1-\frac{1}{3}}=80$

$\frac{40}{27}a=80 \quad \therefore a=54$

$\therefore a_n=54\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ··· ❶

$a_k=2$에서 $54\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=2$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=\frac{1}{27}=\left(\frac{1}{3}\right)^3$

$k-1=3 \quad \therefore k=4$ ··· ❷

답 4

단계	채점 기준	비율
❶	a_n을 구할 수 있다.	70%
❷	k의 값을 구할 수 있다.	30%

Ⅳ. 수열

11 수열의 합

21 기호 $\sum$의 뜻과 성질

개념 62 기호 $\sum$

본책 182쪽

01 답 1, k

02 답 15, k

03 답 12, 5

04 답 17, i

05 답 11, i

06 답 ○

07 $1+2+2^2+\cdots+2^{10}=\sum_{k=1}^{11}2^{k-1}$ 답 ×

08 답 ○

09 답 ○

10 $9+16+25+\cdots+n^2=3^2+4^2+5^2+\cdots+n^2$

$=\sum_{k=3}^{n}k^2$ 답 ×

11 답 $\sum_{k=1}^{n}3k$

12 답 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

13 답 $\sum_{k=1}^{n}k^2$

14 답 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$

15 답 $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$

16 답 $\sum_{k=7}^{20}5^k$

17 답 $\sum_{k=1}^{9}k(k+1)$

18 수열 1, 4, 7, …의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=1+(n-1)\times3=3n-2$

$a_m=22$에서 $3m-2=22$

$3m=24$ $\therefore m=8$

$\therefore 1+4+7+\cdots+22=\sum_{k=1}^{8}(3k-2)$

답 $\sum_{k=1}^{8}(3k-2)$

19 답 $2+4+6+8+10+12$ 6, 2, 12

20 7^k의 k에 1부터 4까지 대입하여 더한 것이므로

$\sum_{k=1}^{4}7^k=7+7^2+7^3+7^4$ 답 $7+7^2+7^3+7^4$

21 $\frac{1}{k+1}$의 k에 1부터 5까지 대입하여 더한 것이므로

$\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$

답 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$

22 $3i-1$의 i에 1부터 4까지 대입하여 더한 것이므로

$\sum_{i=1}^{4}(3i-1)=2+5+8+11$ 답 $2+5+8+11$

베이직쎈 BOX

$\sum_{k=1}^{14}5^{k+6}$과 같이 나타낼 수도 있다.

$m\le n$일 때 수열 $\{a_n\}$의 제m항부터 제n항까지의 합은 $\sum_{k=m}^{n}a_k$

첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열

23 $\frac{1}{i(i+2)}$의 i에 1부터 3까지 대입하여 더한 것이므로

$\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{i(i+2)}=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}$ 답 $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}$

24 j^3의 j에 2부터 6까지 대입하여 더한 것이므로

$\sum_{j=2}^{6}j^3=2^3+3^3+4^3+5^3+6^3$

답 $2^3+3^3+4^3+5^3+6^3$

25 $l(l+4)$의 l에 3부터 5까지 대입하여 더한 것이므로

$\sum_{l=3}^{5}l(l+4)=3\times7+4\times8+5\times9$

$=21+32+45$ 답 $21+32+45$

개념 63 $\sum$의 성질

본책 184쪽

26 답 k

27 답 8, $2k$, 1

28 답 k^2

29 답 6, 30

30 $\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}b_k=3+7=10$ 답 10

31 $\sum_{k=1}^{5}(3a_k-b_k)=3\sum_{k=1}^{5}a_k-\sum_{k=1}^{5}b_k=3\times3-7=2$ 답 2

32 $\sum_{k=1}^{5}(4a_k+b_k-2)=4\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}b_k-\sum_{k=1}^{5}2$

$=4\times3+7-2\times5=9$ 답 9

33 답 3, 5, 37

34 $\sum_{k=1}^{5}(a_k+1)(a_k-1)=\sum_{k=1}^{5}(a_k^2-1)$

$=\sum_{k=1}^{5}a_k^2-\sum_{k=1}^{5}1$

$=5-1\times5=0$ 답 0

35 $\sum_{k=1}^{5}(2a_k-1)^2=\sum_{k=1}^{5}(4a_k^2-4a_k+1)$

$=4\sum_{k=1}^{5}a_k^2-4\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}1$

$=4\times5-4\times3+1\times5=13$ 답 13

36 $\sum_{k=1}^{5}(a_k^3+1)-\sum_{k=1}^{5}(a_k^3-1)=\sum_{k=1}^{5}(a_k^3+1-a_k^3+1)$

$=\sum_{k=1}^{5}2=2\times5$

$=10$ 답 10

37 $\sum_{k=1}^{5}(2a_k^3+a_k)+\sum_{k=1}^{5}(-2a_k^3+a_k)$

$=\sum_{k=1}^{5}(2a_k^3+a_k-2a_k^3+a_k)$

$=2\sum_{k=1}^{5}a_k=2\times3=6$ 답 6

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 185쪽

01 ① $2+4+6+\cdots+2n=\sum_{k=1}^{n}2k$

② $1+3+9+\cdots+3^n=\sum_{k=1}^{n+1}3^{k-1}$

⑤ $1-1+1-1+1=\sum_{k=1}^{5}(-1)^{k+1}$

답 ③, ④

> 3^n은 수열 $\{3^{k-1}\}$의 제 $(n+1)$항이다.

02 $\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{9}a_k$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9)$

$=a_{10}$

이므로 $a_{10}=5$

답 5

03 $\sum_{k=2}^{5}a_k=2$에서

$a_2+a_3+a_4+a_5=2$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{4}a_k=5$에서

$a_1+a_2+a_3+a_4=5$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $a_5-a_1=-3$

답 ②

04 $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$

$=\sum_{k=1}^{2n}a_k$

이므로 $\sum_{k=1}^{2n}a_k=2n^2-n$

위의 식의 양변에 $n=5$를 대입하면

$\sum_{k=1}^{10}a_k=2\times5^2-5=45$

답 45

05 $\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k=15+\sum_{k=1}^{10}b_k$이므로

$15+\sum_{k=1}^{10}b_k=20$ $\therefore \sum_{k=1}^{10}b_k=5$

답 ①

06 $\sum_{k=1}^{15}(3a_k+1)^2=\sum_{k=1}^{15}(9a_k^2+6a_k+1)$

$=9\sum_{k=1}^{15}a_k^2+6\sum_{k=1}^{15}a_k+\sum_{k=1}^{15}1$

$=9\times10+6\times5+1\times15$

$=135$

답 135

07 $\sum_{k=1}^{20}a_k=\alpha$, $\sum_{k=1}^{20}b_k=\beta$라 하자.

$\sum_{k=1}^{20}(a_k+b_k)=16$에서 $\sum_{k=1}^{20}a_k+\sum_{k=1}^{20}b_k=16$

$\therefore \alpha+\beta=16$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{20}(a_k-b_k)=8$에서 $\sum_{k=1}^{20}a_k-\sum_{k=1}^{20}b_k=8$

$\therefore \alpha-\beta=8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=12$, $\beta=4$

> ㉠+㉡을 하면
> $2\alpha=24$ $\therefore \alpha=12$
> $\alpha=12$를 ㉠에 대입하면
> $12+\beta=16$
> $\therefore \beta=4$

따라서 $\sum_{k=1}^{20}a_k=12$, $\sum_{k=1}^{20}b_k=4$이므로

$\sum_{k=1}^{20}(2a_k+b_k)=2\sum_{k=1}^{20}a_k+\sum_{k=1}^{20}b_k$

$=2\times12+4=28$

답 ⑤

08 $\sum_{k=1}^{30}(a_k-b_k)^2=\sum_{k=1}^{30}(a_k^2-2a_kb_k+b_k^2)$

$=\sum_{k=1}^{30}(a_k^2+b_k^2)-2\sum_{k=1}^{30}a_kb_k$

$\therefore \sum_{k=1}^{30}(a_k^2+b_k^2)=\sum_{k=1}^{30}(a_k-b_k)^2+2\sum_{k=1}^{30}a_kb_k$

$=8+2\times15=38$

답 38

09 $\sum_{k=1}^{10}a_k=\dfrac{10\{2\times(-4)+(10-1)\times3\}}{2}=95$

답 95

> 첫째항이 -4, 공차가 3인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합

10 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$\sum_{k=1}^{20}a_k=\dfrac{20\{2a+(20-1)\times2\}}{2}=20a+380$

이므로 $20a+380=420$

$20a=40$ $\therefore a=2$

따라서 $a_n=2+(n-1)\times2=2n$이므로

$a_{10}=2\times10=20$

답 ③

11 $\sum_{k=4}^{6}a_k-\sum_{k=1}^{3}a_k=(a_4+a_5+a_6)-(a_1+a_2+a_3)$

$=(a_4-a_1)+(a_5-a_2)+(a_6-a_3)$

$=3\times5+3\times5+3\times5$

$=45$

답 45

> 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
> $a_{m+3}-a_m$
> $=a+(m+2)d$
> $-\{a+(m-1)d\}$
> $=3d$

12 $\sum_{k=1}^{5}2^k=\dfrac{2(2^5-1)}{2-1}=62$

답 ①

> 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제5항까지의 합

13 $\sum_{k=1}^{20}\dfrac{4^k-3^k}{5^k}=\sum_{k=1}^{20}\left(\dfrac{4}{5}\right)^k-\sum_{k=1}^{20}\left(\dfrac{3}{5}\right)^k$

$=\dfrac{\frac{4}{5}\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{20}\right\}}{1-\frac{4}{5}}-\dfrac{\frac{3}{5}\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^{20}\right\}}{1-\frac{3}{5}}$

$=4\left\{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^{20}\right\}-\dfrac{3}{2}\left\{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^{20}\right\}$

$=-4\left(\dfrac{4}{5}\right)^{20}+\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{20}+\dfrac{5}{2}$

따라서 $a=-4$, $b=3$이므로

$ab=-12$

답 -12

14 $\log_3 a_n=2n$에서 $a_n=3^{2n}$ $\therefore a_n=9^n$

> $a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때,
> $a^x=N$
> $\Longleftrightarrow x=\log_a N$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 9, 공비가 9인 등비수열이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\dfrac{9(9^{10}-1)}{9-1}=\dfrac{9^{11}-9}{8}=\dfrac{3^{22}-9}{8}$

> $9^{11}=(3^2)^{11}=3^{22}$

따라서 $p=8$, $q=22$이므로

$p+q=30$

답 ④

22 여러 가지 수열의 합

개념 64 자연수의 거듭제곱의 합

본책 187쪽

01 $1+2+3+\cdots+10=\dfrac{10\times11}{2}=55$

답 55

11 수열의 합

02 $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\dfrac{10\times11\times21}{6}=385$

답 385

03 $1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3=\left(\dfrac{10\times11}{2}\right)^2=3025$

답 3025

04 $\displaystyle\sum_{k=1}^{9}(k+2)=\sum_{k=1}^{9}k+\sum_{k=1}^{9}2$

$=\dfrac{9\times10}{2}+2\times9$

$=45+18=63$

답 63

05 $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(3k-5)=3\sum_{k=1}^{6}k-\sum_{k=1}^{6}5$

$=3\times\dfrac{6\times7}{2}-5\times6$

$=63-30=33$

답 33

06 $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}(k^2-2k)=\sum_{k=1}^{8}k^2-2\sum_{k=1}^{8}k$

$=\dfrac{8\times9\times17}{6}-2\times\dfrac{8\times9}{2}$

$=204-72=132$

답 132

07 $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}(k^3+1)=\sum_{k=1}^{7}k^3+\sum_{k=1}^{7}1$

$=\left(\dfrac{7\times8}{2}\right)^2+1\times7$

$=784+7=791$

답 791

08 $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(k^3-k)=\sum_{k=1}^{6}k^3-\sum_{k=1}^{6}k$

$=\left(\dfrac{6\times7}{2}\right)^2-\dfrac{6\times7}{2}$

$=441-21=420$

답 420

09 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(k+1)(k+2)=\sum_{k=1}^{5}(k^2+3k+2)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{5}k^2+3\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}2$

$=\dfrac{5\times6\times11}{6}+3\times\dfrac{5\times6}{2}+2\times5$

$=55+45+10$

$=110$

답 110

10 답 4, 11, 4, 5, 45

11 $\displaystyle\sum_{k=4}^{7}k^2=\sum_{k=1}^{7}k^2-\sum_{k=1}^{3}k^2$

$=\dfrac{7\times8\times15}{6}-\dfrac{3\times4\times7}{6}$

$=140-14=126$

답 126

12 $\displaystyle\sum_{k=3}^{8}(2k-1)=\sum_{k=1}^{8}(2k-1)-\sum_{k=1}^{2}(2k-1)$

$\displaystyle=2\sum_{k=1}^{8}k-\sum_{k=1}^{8}1-2\sum_{k=1}^{2}k+\sum_{k=1}^{2}1$

$=2\times\dfrac{8\times9}{2}-1\times8-2\times\dfrac{2\times3}{2}+1\times2$

$=72-8-6+2=60$

답 60

베이직쎈 BOX

항이 연달아 소거될 때, 앞에서 첫 번째가 남으면 뒤에서도 첫 번째가 남는다.

$\dfrac{2}{(2k+1)(2k+3)}$

$=\dfrac{2}{2}\left(\dfrac{1}{2k+1}-\dfrac{1}{2k+3}\right)$

$=\dfrac{1}{2k+1}-\dfrac{1}{2k+3}$

항이 건너뛰며 소거될 때, 앞에서 첫 번째, 세 번째가 남으면 뒤에서도 첫 번째, 세 번째가 남는다.

개념 65 분수 꼴인 수열의 합

본책 188쪽

13 $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k(k+1)}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{20}-\dfrac{1}{21}\right)$

$=1-\dfrac{1}{21}=\dfrac{20}{21}$

답 $\dfrac{20}{21}$

14 $\displaystyle\sum_{k=1}^{18}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{18}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}\right)$

$+\cdots+\left(\dfrac{1}{19}-\dfrac{1}{20}\right)$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{20}=\dfrac{9}{20}$

답 $\dfrac{9}{20}$

15 $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{15}\right)$

$=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{15}=\dfrac{4}{15}$

답 $\dfrac{4}{15}$

16 $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{k(k+2)}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{9}\right)+\left(\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{10}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{10}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{58}{45}=\dfrac{29}{45}$

답 $\dfrac{29}{45}$

17 (주어진 식)

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+2)(k+3)}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}\right)$

$+\cdots+\left(\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}\right)$

$=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{n+3}=\dfrac{n}{3(n+3)}$

답 $\dfrac{n}{3(n+3)}$

18 (주어진 식)

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n}{2n+1}$

답 $\dfrac{n}{2n+1}$

베이직쎈 BOX

개념 66 분모에 근호가 포함된 수열의 합

본책 189쪽

19 $\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{15}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$

$=\sum_{k=1}^{15}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})$
$\quad+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})$

$=-1+\sqrt{16}=3$ 답 3

20 $\sum_{k=1}^{34}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}$

$=\sum_{k=1}^{34}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2})}$

$=\sum_{k=1}^{34}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$

$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})$
$\quad+\cdots+(\sqrt{36}-\sqrt{35})$

$=-\sqrt{2}+\sqrt{36}=6-\sqrt{2}$ 답 $6-\sqrt{2}$

21 $\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{12}\frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{12}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$

$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})$
$\quad+\cdots+(\sqrt{25}-\sqrt{23})\}$

$=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{25})=2$ 답 2

22 $\sum_{k=1}^{23}\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}$

$=\sum_{k=1}^{23}\frac{2(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})}$

$=\sum_{k=1}^{23}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{6}-\sqrt{4})$
$\quad+\cdots+(\sqrt{24}-\sqrt{22})+(\sqrt{25}-\sqrt{23})$

$=-1-\sqrt{2}+\sqrt{24}+\sqrt{25}$

$=4-\sqrt{2}+2\sqrt{6}$ 답 $4-\sqrt{2}+2\sqrt{6}$

23 (주어진 식)

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+3}+\sqrt{k+4}}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+3}-\sqrt{k+4}}{(\sqrt{k+3}+\sqrt{k+4})(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+4})}$

$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+4}-\sqrt{k+3})$

$=(\sqrt{5}-\sqrt{4})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+(\sqrt{7}-\sqrt{6})$
$\quad+\cdots+(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+3})$

$=-\sqrt{4}+\sqrt{n+4}=\sqrt{n+4}-2$ 답 $\sqrt{n+4}-2$

24 (주어진 식)

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{3k-1}+\sqrt{3k+2}}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{3k-1}-\sqrt{3k+2}}{(\sqrt{3k-1}+\sqrt{3k+2})(\sqrt{3k-1}-\sqrt{3k+2})}$

$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{3k+2}-\sqrt{3k-1})$

$=\frac{1}{3}\{(\sqrt{5}-\sqrt{2})+(\sqrt{8}-\sqrt{5})+(\sqrt{11}-\sqrt{8})$
$\quad+\cdots+(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-1})\}$

$=\frac{\sqrt{3n+2}-\sqrt{2}}{3}$ 답 $\frac{\sqrt{3n+2}-\sqrt{2}}{3}$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 190쪽

01 $\sum_{k=1}^{10}(2k^2-k+5)-\sum_{i=1}^{10}(i^2-4i+5)$

$=\sum_{k=1}^{10}(2k^2-k+5)-\sum_{k=1}^{10}(k^2-4k+5)$

$=\sum_{k=1}^{10}(2k^2-k+5-k^2+4k-5)$

$=\sum_{k=1}^{10}(k^2+3k)=\sum_{k=1}^{10}k^2+3\sum_{k=1}^{10}k$

$=\frac{10\times11\times21}{6}+3\times\frac{10\times11}{2}$

$=385+165=550$ 답 ④

$\sum_{i=1}^{10}(i^2-4i+5)$는 i 대신 에 k를 사용하여 나타낼 수 있다.

02 $\sum_{k=1}^{6}(k-1)(k^2+k+1)=\sum_{k=1}^{6}(k^3-1)$

$=\sum_{k=1}^{6}k^3-\sum_{k=1}^{6}1$

$=\left(\frac{6\times7}{2}\right)^2-1\times6$

$=441-6=435$ 답 435

$(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$=a^3-b^3$

03 $\sum_{k=1}^{15}(k+a)=\sum_{k=1}^{15}k+\sum_{k=1}^{15}a$

$=\frac{15\times16}{2}+15a$

$=120+15a$

따라서 $120+15a=90$이므로

$15a=-30 \quad \therefore a=-2$ 답 ②

04 $\frac{1+2+3+\cdots+k}{k}=\frac{1}{k}(1+2+3+\cdots+k)$

$=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}i$

$=\frac{1}{k}\times\frac{k(k+1)}{2}$

$=\frac{k+1}{2}$

$\therefore \sum_{k=1}^{8}\frac{1+2+3+\cdots+k}{k}=\sum_{k=1}^{8}\frac{k+1}{2}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}(k+1)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{8\times9}{2}+1\times8\right)$

$=22$ 답 22

베이직쎈 BOX

05 $f(a)=\sum_{k=1}^{5}(k-a)^2$

$=\sum_{k=1}^{5}(k^2-2ak+a^2)$

$=\sum_{k=1}^{5}k^2-2a\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}a^2$

a를 상수로 생각한다.

$=\frac{5\times6\times11}{6}-2a\times\frac{5\times6}{2}+5a^2$

$=5a^2-30a+55$

$=5(a-3)^2+10$

$5a^2-30a+55$
$=5(a^2-6a+9)+10$
$=5(a-3)^2+10$

따라서 $f(a)$는 $a=3$일 때 최솟값 10을 갖는다. 답 ③

06 $a_n=2n-1$에서

$a_{3k}=2\times3k-1=6k-1$

$\therefore \sum_{k=1}^{n-1}a_{3k}=\sum_{k=1}^{n-1}(6k-1)$

$=6\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}1$

$=6\times\frac{(n-1)n}{2}-1\times(n-1)$

$=3n^2-3n-n+1$

$=3n^2-4n+1$ 답 ④

07 $\sum_{i=1}^{5}\left(\sum_{k=1}^{i}ik\right)=\sum_{i=1}^{5}i\left(\sum_{k=1}^{i}k\right)$

i를 상수로 생각한다.

$=\sum_{i=1}^{5}i\left\{\frac{i(i+1)}{2}\right\}$

$=\sum_{i=1}^{5}\frac{i^3+i^2}{2}$

$=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{5}i^3+\sum_{i=1}^{5}i^2\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5\times6}{2}\right)^2+\frac{5\times6\times11}{6}\right\}$

$=\frac{1}{2}(225+55)=140$ 답 140

08 $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{i}k\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2}$

$=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}i^2+\sum_{i=1}^{n}i\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$n(n+1)\frac{(2n+1)+3}{6}$
$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

따라서 $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)=35$이므로

$n(n+1)(n+2)=210=5\times6\times7$

$\therefore n=5$ 답 ③

09 $\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{k=1}^{n}(i-k)\right\}=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}i-\sum_{k=1}^{n}k\right)$

$=\sum_{i=1}^{m}\left\{in-\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$=n\sum_{i=1}^{m}i-\sum_{i=1}^{m}\frac{n(n+1)}{2}$

$=n\times\frac{m(m+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}\times m$

$=\frac{mn(m-n)}{2}$

$=\frac{40\times3}{2}=60$ 답 60

10 수열 2×1^2, 3×2^2, 4×3^2, …의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=(n+1)n^2=n^3+n^2$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(k^3+k^2)$

$=\sum_{k=1}^{10}k^3+\sum_{k=1}^{10}k^2$

$=\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2+\frac{10\times11\times21}{6}$

$=3025+385=3410$ 답 3410

11 수열 1×19, 2×18, 3×17, …의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=n(20-n)$

따라서 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제19항까지의 합이므로

$\sum_{k=1}^{19}a_k=\sum_{k=1}^{19}k(20-k)$

$=\sum_{k=1}^{19}(20k-k^2)$

$=20\sum_{k=1}^{19}k-\sum_{k=1}^{19}k^2$

$=20\times\frac{19\times20}{2}-\frac{19\times20\times39}{6}$

$=3800-2470=1330$ 답 ③

12 수열 1, $1+2$, $1+2+2^2$, $1+2+2^2+2^3$, …의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}$

첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합

$=\frac{1\times(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제9항까지의 합은

$\sum_{k=1}^{9}a_k=\sum_{k=1}^{9}(2^k-1)$

$=\sum_{k=1}^{9}2^k-\sum_{k=1}^{9}1$

$=\frac{2(2^9-1)}{2-1}-1\times9$

$=1022-9=1013$ 답 1013

13 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=4n^2-n$

$\therefore a_{10}=S_{10}-S_9=(4\times10^2-10)-(4\times9^2-9)$

$=75$ 답 75

다른 풀이 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=4n^2-n$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=4\times1^2-1=3$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=4n^2-n-\{4(n-1)^2-(n-1)\}$

$=4n^2-n-(4n^2-9n+5)$

$=8n-5$ …… ㉠

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=8n-5$

$\therefore a_{10}=8\times10-5=75$

14 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=2n^2+5$$

이므로 $a_1=S_1=2\times1^2+5=7$

$$\begin{aligned}a_{20}&=S_{20}-S_{19}\\&=(2\times20^2+5)-(2\times19^2+5)\\&=78\end{aligned}$$

$\therefore a_1+a_{20}=85$ 답 ⑤

다른 풀이 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=2n^2+5$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2\times1^2+5=7$

(ii) $n\geq2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=2n^2+5-\{2(n-1)^2+5\}\\&=2n^2+5-(2n^2-4n+7)\\&=4n-2 \quad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_1=4\times1-2=2$

(i), (ii)에서 $a_1=7$, $a_n=4n-2\ (n\geq2)$

$\therefore a_1+a_{20}=7+(4\times20-2)=85$

15 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2-3n$$

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2-3\times1=-2$

(ii) $n\geq2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=n^2-3n-\{(n-1)^2-3(n-1)\}\\&=n^2-3n-(n^2-5n+4)\\&=2n-4 \quad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $a_1=-2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-4$

따라서 $a_{2k+1}=2(2k+1)-4=4k-2$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}a_{2k+1}&=\sum_{k=1}^{10}(4k-2)\\&=4\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}2\\&=4\times\frac{10\times11}{2}-2\times10\\&=220-20=200\end{aligned}$$

답 200

16 $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{9k^2-3k-2}$

$$\begin{aligned}&=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}\\&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)\\&=\frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{28}-\frac{1}{31}\right)\right\}\\&=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{31}\right)=\frac{10}{31}\end{aligned}$$

답 ①

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

항이 연달아 소거될 때, 앞에서 두 번째가 남으면 뒤에서도 두 번째가 남는다.

17 수열 $\frac{2}{1\times3}$, $\frac{2}{2\times4}$, $\frac{2}{3\times5}$, $\cdots$의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=\frac{2}{n(n+2)}$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}a_k&=\sum_{k=1}^{10}\frac{2}{k(k+2)}\\&=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\\&\quad+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)\\&=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\\&=\frac{175}{132}\end{aligned}$$

답 $\frac{175}{132}$

18 수열 1, $\frac{1}{1+2}$, $\frac{1}{1+2+3}$, $\cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$$

$a_m=\frac{1}{1+2+3+\cdots+8}$에서

$$\frac{1}{1+2+3+\cdots+m}=\frac{1}{1+2+3+\cdots+8}$$

$\therefore m=8$

$\therefore$ (주어진 식)

$$\begin{aligned}&=\sum_{k=1}^{8}a_k=\sum_{k=1}^{8}\frac{2}{k(k+1)}\\&=\sum_{k=1}^{8}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)\right\}\\&=2\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{16}{9}\end{aligned}$$

답 $\frac{16}{9}$

19 $\sum_{k=1}^{22}\frac{1}{\sqrt{k+3}+\sqrt{k+2}}$

$$\begin{aligned}&=\sum_{k=1}^{22}\frac{\sqrt{k+3}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+3}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+2})}\\&=\sum_{k=1}^{22}(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+2})\\&=(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})\\&\quad+\cdots+(\sqrt{25}-\sqrt{24})\\&=5-\sqrt{3}\end{aligned}$$

답 ②

20 수열 $\frac{2}{\sqrt{4}+\sqrt{2}}$, $\frac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{4}}$, $\frac{2}{\sqrt{8}+\sqrt{6}}$, $\cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{2}{\sqrt{2n+2}+\sqrt{2n}}$$

$a_m=\frac{2}{\sqrt{32}+\sqrt{30}}$에서

$$\frac{2}{\sqrt{2m+2}+\sqrt{2m}}=\frac{2}{\sqrt{32}+\sqrt{30}} \qquad \therefore m=15$$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\sum_{k=1}^{15} a_k=\sum_{k=1}^{15} \frac{2}{\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k}}$

$=\sum_{k=1}^{15} \frac{2(\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k})}{(\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k})(\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k})}$

$=\sum_{k=1}^{15} (\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k})$

$=(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{6}-\sqrt{4})+(\sqrt{8}-\sqrt{6})$
$+\cdots+(\sqrt{32}-\sqrt{30})$

$=-\sqrt{2}+\sqrt{32}=3\sqrt{2}$ 답 $3\sqrt{2}$

$\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

21 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$

$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})$
$+\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\}$

$=\frac{-1+\sqrt{2n+1}}{2}$

이므로 $\frac{-1+\sqrt{2n+1}}{2}=3$

$\sqrt{2n+1}=7,\quad 2n+1=49$

$2n=48 \quad \therefore n=24$ 답 ③

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 193쪽

01 전략 $\sum_{k=1}^{n} a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$임을 이용한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{14} a_{k+1}-\sum_{k=2}^{15} a_{k-1}$

$=(a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{15})-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{14})$

$=a_{15}-a_1=47-3=44$ 답 ②

02 전략 $(a_k-1)^2$을 전개한 후 Σ의 성질을 이용한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{10} (a_k-1)^2=\sum_{k=1}^{10} (a_k^2-2a_k+1)$

$=\sum_{k=1}^{10} a_k^2-2\sum_{k=1}^{10} a_k+\sum_{k=1}^{10} 1$

$=\sum_{k=1}^{10} a_k^2-2\times(-5)+1\times10$

$=\sum_{k=1}^{10} a_k^2+20$

따라서 $\sum_{k=1}^{10} a_k^2+20=55$이므로

$\sum_{k=1}^{10} a_k^2=35$ 답 ③

03 전략 주어진 두 등식에 $n=6$을 대입한 값을 이용한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{n} a_k=4n,\ \sum_{k=1}^{n} b_k=\frac{1}{3}n^2$에 각각 $n=6$을 대입하면

$\sum_{k=1}^{6} a_k=4\times6=24,\ \sum_{k=1}^{6} b_k=\frac{1}{3}\times6^2=12$

$\therefore \sum_{k=1}^{6} (2a_k+b_k-5)=2\sum_{k=1}^{6} a_k+\sum_{k=1}^{6} b_k-\sum_{k=1}^{6} 5$

$=2\times24+12-5\times6$

$=30$ 답 ②

04 전략 $\sum_{k=1}^{n} a_{2k}=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}$임을 이용한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{n} a_{2k}=3n^2-5n$에 $n=3$을 대입하면

$a_2+a_4+a_6=3\times3^2-5\times3=12$ ······ ㉠

$n=2$를 대입하면

$a_2+a_4=3\times2^2-5\times2=2$ ······ ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $a_6=10$

이때 a_6은 a_5와 a_7의 등차중항이므로

$a_5+a_7=2a_6=20$ 답 ④

베이직쎈 BOX

세 수 $p,\ q,\ r$가 이 순서대로 등차수열을 이루면
$\Rightarrow q=\frac{p+r}{2}$

05 전략 먼저 주어진 수열의 일반항을 구한다.

풀이 $a_n=\sqrt{3}\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-2}$이므로

$a_n^2=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-2}\right\}^2=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right\}^{n-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$

$\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k^2=\sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}$

$=\frac{3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right\}}{1-\frac{1}{3}}$

$=\frac{9}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right\}$

따라서 $p=9,\ q=20$이므로

$pq=180$ 답 ④

첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq0)$인 등비수열의 일반항 a_n은
$a_n=ar^{n-1}$

06 전략 주어진 식을 하나의 Σ로 간단히 한 후 자연수의 거듭제곱의 합을 이용한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{10} k=1+2+3+\cdots+10,\ \sum_{k=2}^{10} k=2+3+\cdots+10,$

$\sum_{k=3}^{10} k=3+\cdots+10,\ \cdots,\ \sum_{k=10}^{10} k=10$이므로

$\sum_{k=1}^{10} k+\sum_{k=2}^{10} k+\sum_{k=3}^{10} k+\cdots+\sum_{k=10}^{10} k$

$=1+2\times2+3\times3+\cdots+10\times10$

$=1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$

$=\sum_{k=1}^{10} k^2$

$=\frac{10\times11\times21}{6}=385$ 답 ②

07 전략 일반항에서 상수인 것과 상수가 아닌 것을 구별하여 계산한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{n} (2n-k)=2\sum_{k=1}^{n} n-\sum_{k=1}^{n} k$

n을 상수로 생각한다.

$=2n\times n-\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n$

따라서 $p=\frac{3}{2},\ q=-\frac{1}{2}$이므로

$p-q=2$ 답 ③

베이직쎈 BOX

08 전략 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\ge2)$임을 이용한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+n$$

(i) $n=1$일 때,

$$a_1=S_1=1^2+1=2$$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=n^2+n-\{(n-1)^2+n-1\}\\&=n^2+n-(n^2-n)\\&=2n \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=2n$$

따라서 $ka_k=2k^2$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}ka_k=\sum_{k=1}^{10}2k^2=2\times\frac{10\times11\times21}{6}=770$$

답 ④

09 전략 $\dfrac{1}{a_n}$을 구하고 부분분수로 변형한다.

풀이 $a_n=\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$이므로 $\quad \dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2}{n(n+1)}$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{30}\frac{1}{a_n}&=\sum_{n=1}^{30}\frac{2}{n(n+1)}\\&=2\sum_{n=1}^{30}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{30}-\frac{1}{31}\right)\right\}\\&=2\left(1-\frac{1}{31}\right)=\frac{60}{31}\end{aligned}$$

답 ⑤

10 전략 일반항의 k에 $1, 2, 3, \cdots, n$을 대입한 후 $\log_a M+\log_a N=\log_a MN$ $(a>0,\ a\ne1,\ M>0,\ N>0)$임을 이용한다.

풀이 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log_2\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}$

$$\begin{aligned}&=\log_2\frac{\sqrt2}{\sqrt1}+\log_2\frac{\sqrt3}{\sqrt2}+\log_2\frac{\sqrt4}{\sqrt3}+\cdots+\log_2\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt n}\\&=\log_2\left(\frac{\sqrt2}{\sqrt1}\times\frac{\sqrt3}{\sqrt2}\times\frac{\sqrt4}{\sqrt3}\times\cdots\times\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt n}\right)\\&=\log_2\sqrt{n+1}\end{aligned}$$

따라서 $\log_2\sqrt{n+1}=3$이므로 $\quad \sqrt{n+1}=2^3=8$

$n+1=64 \qquad \therefore n=63$

답 ②

11 전략 $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}f(k+2)-\sum_{k=4}^{10}f(k-2)$를 $f(2)$와 $f(9)$로 나타낸다.

풀이 $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}f(k+2)-\sum_{k=4}^{10}f(k-2)$

$$\begin{aligned}&=f(3)+f(4)+f(5)+\cdots+f(9)\\&\quad-\{f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(8)\}\\&=f(9)-f(2)=40-10=30\end{aligned}$$

답 30

12 전략 등비수열의 합과 자연수의 거듭제곱의 합을 이용한다.

풀이

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{7}(2^k-k+3)&=\sum_{k=1}^{7}2^k-\sum_{k=1}^{7}k+\sum_{k=1}^{7}3\\&=\frac{2(2^7-1)}{2-1}-\frac{7\times8}{2}+3\times7\\&=254-28+21=247\end{aligned}$$

답 247

13 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계와 $\sum$의 성질을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2-3nx-n=0$의 두 근이 a_n, b_n이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

> 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

$$a_n+b_n=3n,\ a_nb_n=-n \qquad \cdots ❶$$

이때 $a_k^2+b_k^2=(a_k+b_k)^2-2a_kb_k$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}(a_k^2+b_k^2)&=\sum_{k=1}^{5}\{(a_k+b_k)^2-2a_kb_k\}\\&=\sum_{k=1}^{5}(9k^2+2k)\\&=9\sum_{k=1}^{5}k^2+2\sum_{k=1}^{5}k\\&=9\times\frac{5\times6\times11}{6}+2\times\frac{5\times6}{2}\\&=495+30=525 \qquad \cdots ❷\end{aligned}$$

답 525

단계	채점 기준	비율
❶	a_n+b_n, a_nb_n을 n의 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷	$\sum_{k=1}^{5}(a_k^2+b_k^2)$의 값을 구할 수 있다.	60%

14 전략 일반항에서 상수인 것과 상수가 아닌 것을 구별하여 괄호 안부터 계산한다.

풀이

> a를 상수로 생각한다.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}\left(\sum_{k=1}^{i}a\right)\right\}&=\sum_{j=1}^{10}\left(\sum_{i=1}^{j}ai\right)=\sum_{j=1}^{10}\left(a\sum_{i=1}^{j}i\right)\\&=\sum_{j=1}^{10}\left\{a\times\frac{j(j+1)}{2}\right\}\\&=\frac{a}{2}\sum_{j=1}^{10}(j^2+j)\\&=\frac{a}{2}\left(\sum_{j=1}^{10}j^2+\sum_{j=1}^{10}j\right)\\&=\frac{a}{2}\left(\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}\right)\\&=220a \qquad \cdots ❶\end{aligned}$$

따라서 $220a=220$이므로 $\quad a=1 \qquad \cdots ❷$

답 1

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 식의 좌변을 a의 식으로 나타낼 수 있다.	80%
❷	a의 값을 구할 수 있다.	20%

15 전략 주어진 식을 $\sum$를 사용한 합의 꼴로 나타내고 분수꼴인 수열의 합은 일반항을 부분분수로 변형한다.

풀이 수열 $\dfrac{2}{2^2-1}$, $\dfrac{2}{3^2-1}$, $\dfrac{2}{4^2-1}$, $\cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{2}{(n+1)^2-1}=\frac{2}{n^2+2n}=\frac{2}{n(n+2)}$$

11 수열의 합

$a_m=\dfrac{2}{10^2-1}$에서

$\dfrac{2}{(m+1)^2-1}=\dfrac{2}{10^2-1}$ $\therefore m=9$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\sum_{k=1}^{9} a_k=\sum_{k=1}^{9}\dfrac{2}{k(k+2)}$

$=\sum_{k=1}^{9}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)$

$=\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}\right)$

$+\cdots+\left(\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{10}\right)+\left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{11}\right)$

$=1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{11}$

$=\dfrac{72}{55}$ 답 $\dfrac{72}{55}$

16 전략 등차수열의 일반항을 구하고 분모에 근호가 포함된 수열의 합은 분모를 유리화한다.

풀이 $a_n=3+(n-1)\times 2=2n+1$이므로 ··· ❶

(주어진 식)

$=\sum_{k=1}^{12}\dfrac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k+3}}$

$=\sum_{k=1}^{12}\dfrac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k+3}}{(\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k+3})(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k+3})}$

$=\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{12}(\sqrt{2k+3}-\sqrt{2k+1})$

$=\dfrac{1}{2}\{(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+(\sqrt{9}-\sqrt{7})$

$+\cdots+(\sqrt{27}-\sqrt{25})\}$

$=\dfrac{1}{2}(-\sqrt{3}+\sqrt{27})=\sqrt{3}$ ··· ❷

답 $\sqrt{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구할 수 있다.	20%
❷	식의 값을 구할 수 있다.	80%

베이직쎈 BOX

관계식의 n에 1, 2, 3을 차례대로 대입한다.

$\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

Ⅳ. 수열

12 수학적 귀납법

23 수학적 귀납법

개념 67 수열의 귀납적 정의

본책 196쪽

01 $a_{n+1}=a_n+6$에서 $a_1=1$이므로

$a_2=a_1+6=1+6=7$

$a_3=a_2+6=7+6=13$

$\therefore a_4=a_3+6=13+6=19$ 답 19

02 $a_{n+1}=3a_n$에서 $a_1=\dfrac{1}{3}$이므로

$a_2=3a_1=3\times\dfrac{1}{3}=1$

$a_3=3a_2=3\times 1=3$

$\therefore a_4=3a_3=3\times 3=9$ 답 9

03 $a_{n+1}=2a_n-1$에서 $a_1=-1$이므로

$a_2=2a_1-1=2\times(-1)-1=-3$

$a_3=2a_2-1=2\times(-3)-1=-7$

$\therefore a_4=2a_3-1=2\times(-7)-1=-15$ 답 -15

04 $a_{n+1}=na_n$에서 $a_1=2$이므로

$a_2=a_1=2$

$a_3=2a_2=2\times 2=4$

$\therefore a_4=3a_3=3\times 4=12$ 답 12

05 $a_{n+1}=a_n+n+1$에서 $a_1=1$이므로

$a_2=a_1+1+1=1+1+1=3$

$a_3=a_2+2+1=3+2+1=6$

$\therefore a_4=a_3+3+1=6+3+1=10$ 답 10

06 $a_{n+1}=\dfrac{2}{a_n}$에서 $a_1=-2$이므로

$a_2=\dfrac{2}{a_1}=\dfrac{2}{-2}=-1$

$a_3=\dfrac{2}{a_2}=\dfrac{2}{-1}=-2$

$\therefore a_4=\dfrac{2}{a_3}=\dfrac{2}{-2}=-1$ 답 -1

07 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$에서 $a_1=3$, $a_2=-1$이므로

$a_3=a_2+a_1=-1+3=2$

$\therefore a_4=a_3+a_2=2+(-1)=1$ 답 1

08 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+1$에서 $a_1=2$이므로

$\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{1}{a_1}+1=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$

$\dfrac{1}{a_3}=\dfrac{1}{a_2}+1=\dfrac{3}{2}+1=\dfrac{5}{2}$

$\dfrac{1}{a_4}=\dfrac{1}{a_3}+1=\dfrac{5}{2}+1=\dfrac{7}{2}$

$\therefore a_4=\dfrac{2}{7}$ 답 $\dfrac{2}{7}$

베이직쎈 BOX

개념 68 등차수열의 귀납적 정의 본책 197쪽

09 답 $a_1=-1,\ a_{n+1}=a_n+5\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

10 답 $a_1=-3,\ a_{n+1}=a_n-2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

11 답 $a_1=4,\ a_{n+1}=a_n-\frac{1}{3}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

12 주어진 수열은 첫째항이 1, 공차가 $5-1=4$인 등차수열이므로

$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+4\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

답 $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+4\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

참고 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로

$a_1=1,\ a_2=5,\ a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$
$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

또는 $a_1=1,\ a_2=5,\ 2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$
$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

와 같이 정의할 수도 있다.

13 주어진 수열은 첫째항이 -5, 공차가 $1-(-5)=6$인 등차수열이므로

$a_1=-5,\ a_{n+1}=a_n+6\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

답 $a_1=-5,\ a_{n+1}=a_n+6\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

14 주어진 수열은 첫째항이 8, 공차가 $5-8=-3$인 등차수열이므로

$a_1=8,\ a_{n+1}=a_n-3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

답 $a_1=8,\ a_{n+1}=a_n-3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

15 답 $a_n=n+1$ 　 2, 1, 등차, 2, 1, $n+1$

16 주어진 수열은 첫째항이 6, 공차가 -3인 등차수열이므로

$a_n=6+(n-1)\times(-3)=-3n+9$

답 $a_n=-3n+9$

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은
$a_n=a+(n-1)d$

17 주어진 수열은 첫째항이 -4, 공차가 5인 등차수열이므로

$a_n=-4+(n-1)\times5=5n-9$ 　 답 $a_n=5n-9$

18 주어진 수열은 첫째항이 3, 공차가 -4인 등차수열이므로

$a_n=3+(n-1)\times(-4)=-4n+7$

답 $a_n=-4n+7$

19 주어진 수열은 첫째항이 7, 공차가 $5-7=-2$인 등차수열이므로

$a_n=7+(n-1)\times(-2)=-2n+9$

답 $a_n=-2n+9$

20 주어진 수열은 첫째항이 -9, 공차가 $-6-(-9)=3$인 등차수열이므로

$a_n=-9+(n-1)\times3=3n-12$

답 $a_n=3n-12$

첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq0)$인 등비수열의 일반항 a_n은
$a_n=ar^{n-1}$

개념 69 등비수열의 귀납적 정의 본책 198쪽

21 답 $a_1=3,\ a_{n+1}=-2a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

22 답 $a_1=-\frac{1}{2},\ a_{n+1}=4a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

23 답 $a_1=6,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

24 주어진 수열은 첫째항이 5, 공비가 $\frac{10}{5}=2$인 등비수열이므로

$a_1=5,\ a_{n+1}=2a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

답 $a_1=5,\ a_{n+1}=2a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

참고 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로

$a_1=5,\ a_2=10,\ a_{n+1}\div a_n=a_{n+2}\div a_{n+1}$
$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

또는 $a_1=5,\ a_2=10,\ {a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$
$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

와 같이 정의할 수도 있다.

25 주어진 수열은 첫째항이 -1, 공비가 $\frac{4}{-1}=-4$인 등비수열이므로

$a_1=-1,\ a_{n+1}=-4a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

답 $a_1=-1,\ a_{n+1}=-4a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

26 주어진 수열은 첫째항이 36, 공비가 $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$a_1=36,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

답 $a_1=36,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

27 답 $a_n=5^{n-1}$ 　 1, 5, 등비, 1, 5, 5^{n-1}

28 주어진 수열은 첫째항이 -3, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$a_n=-3\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ 　 답 $a_n=-3\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

29 주어진 수열은 첫째항이 7, 공비가 7인 등비수열이므로

$a_n=7\times7^{n-1}=7^n$ 　 답 $a_n=7^n$

30 주어진 수열은 첫째항이 3, 공비가 -1인 등비수열이므로

$a_n=3\times(-1)^{n-1}$ 　 답 $a_n=3\times(-1)^{n-1}$

31 주어진 수열은 첫째항이 -21, 공비가 $\frac{3}{-21}=-\frac{1}{7}$인 등비수열이므로

$a_n=-21\times\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}$

답 $a_n=-21\times\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}$

32 주어진 수열은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $5\div\frac{1}{2}=5\times2=10$인 등비수열이므로

$a_n=\frac{1}{2}\times10^{n-1}$ 답 $a_n=\frac{1}{2}\times10^{n-1}$

개념 70 수학적 귀납법

본책 199쪽

33 답 (가) $n=1$ (나) $k+1$

34 답 (가) $n=4$ (나) $k+1$

35 (ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)$=2\times1-1=1$, (우변)$=1^2=\boxed{1}$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$

위의 식의 양변에 $2k+1$을 더하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)$

$=k^2+2k+1$

$=\boxed{(k+1)^2}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다. 답 (가) 1 (나) $(k+1)^2$

자신감 UP! 기본&핵심 유형

본책 200쪽

01 $a_{n+1}=n-a_n$에서 $a_1=2$이므로

$a_2=1-a_1=1-2=-1$

$a_3=2-a_2=2-(-1)=3$

$a_4=3-a_3=3-3=0$

$\therefore a_5=4-a_4=4-0=4$ 답 ⑤

02 $a_{n+1}=\frac{2n+1}{2n-1}a_n$에서 $a_1=1$이므로

$a_2=\frac{3}{1}a_1=3$

$a_3=\frac{5}{3}a_2=\frac{5}{3}\times3=5$

$a_4=\frac{7}{5}a_3=\frac{7}{5}\times5=7$

$a_5=\frac{9}{7}a_4=\frac{9}{7}\times7=9$

$\therefore a_6=\frac{11}{9}a_5=\frac{11}{9}\times9=11$ 답 11

03 $a_{n+1}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}a_n$에서 $a_1=1$이므로

$a_2=\frac{\sqrt2}{\sqrt1}a_1=\sqrt2$

$a_3=\frac{\sqrt3}{\sqrt2}a_2=\frac{\sqrt3}{\sqrt2}\times\sqrt2=\sqrt3$

$a_4=\frac{\sqrt4}{\sqrt3}a_3=\frac{\sqrt4}{\sqrt3}\times\sqrt3=\sqrt4$

⋮

$a_{25}=\sqrt{25}$

$\therefore \log_5 a_{25}=\log_5\sqrt{25}=\log_5 5=1$ 답 1

베이직쎈 BOX

$a>0$, $a\neq1$일 때 $\log_a a=1$

04 $a_{n+1}=a_n+3^n+k$의 n에 3, 4를 차례대로 대입하면

$a_4=a_3+3^3+k$에서 $a_4=-14+27+k=13+k$

$a_5=a_4+3^4+k$에서 $a_5=(13+k)+81+k=2k+94$

이때 $a_5=100$이므로 $2k+94=100$

$2k=6$ $\therefore k=3$ 답 ③

05 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공차가 5인 등차수열이므로 $a_n=3+(n-1)\times5=5n-2$

$\therefore a_{20}=5\times20-2=98$ 답 ④

06 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 20, 공차가 -6인 등차수열이므로 $a_n=20+(n-1)\times(-6)=-6n+26$

따라서 $-6k+26=-16$이므로

$-6k=-42$ $\therefore k=7$ 답 ②

07 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5=1$에서 $a+4d=1$ …… ㉠

$a_{15}=21$에서 $a+14d=21$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-7$, $d=2$

따라서 $a_n=-7+(n-1)\times2=2n-9$이므로

$a_{30}=2\times30-9=51$ 답 51

베이직쎈 BOX

㉡−㉠을 하면

$10d=20$ $\therefore d=2$

$d=2$를 ㉠에 대입하면

$a+8=1$

$\therefore a=-7$

08 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6=\frac{2(2^6-1)}{2-1}$

$=2^7-2=126$ 답 126

베이직쎈 BOX

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$ (단, $r\neq1$)

09 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}$에서 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 9^2, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

$\therefore a_n=9^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-5}$

$a_k=\frac{1}{3^{10}}$에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^{k-5}=\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$

따라서 $k-5=10$이므로 $k=15$ 답 15

베이직쎈 BOX

$9^2=(3^2)^2=3^4=\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$

10 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=3$에서 $ar=3$ …… ㉠

$a_4=48$에서 $ar^3=48$ …… ㉡

베이직쎈 BOX

㉡÷㉠을 하면 $r^2=16$ $\therefore r=4\ (\because r>0)$

$r=4$를 ㉠에 대입하여 풀면 $a=\frac{3}{4}$

따라서 $a_n=\frac{3}{4}\times4^{n-1}$이므로

$a_6=\frac{3}{4}\times4^5=768$ 답 768

모든 항이 양수이므로 공비도 양수이다.

$4a=3$이므로 $a=\frac{3}{4}$

11 $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고 첫째항이 4, 공비가 $\frac{12}{4}=3$이므로 $a_n=4\times3^{n-1}$

$4\times3^{n-1}>1000$에서 $3^{n-1}>250$

이때 $3^5=243$, $3^6=729$이므로

$n-1\ge6$ $\therefore n\ge7$

따라서 처음으로 1000보다 커지는 항은 제7항이다.

답 ③

12 답 (가) 0 (나) n

13 $(n+1)$일째 되는 날의 연습 시간 a_{n+1}분은 n일째 되는 날의 연습 시간 a_n분의 $\frac{3}{2}$배에서 5분을 뺀 것이므로

$a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n-5\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

답 $a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n-5\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

14 (1) 미생물이 4마리였던 때로부터 1시간이 지난 후 살아 있는 미생물의 수 a_1은

$a_1=(4-2)\times5=10$

(2) $(n+1)$시간이 지난 후 살아 있는 미생물의 수 a_{n+1}은 n시간이 지난 후 살아 있는 미생물의 수 a_n에서 2마리는 죽고, 나머지는 각각 5마리로 분열하므로

$a_{n+1}=(a_n-2)\times5$

$=5a_n-10\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

답 (1) 10 (2) $a_{n+1}=5a_n-10\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

15 $a=2$, $b=2$이므로 $ab=4$ 답 4

$4=2+2$, $6=4+2$, $8=6+2$, $\cdots$ 이므로 $p(k)$가 참이면 $p(k+2)$도 참이어야 한다.

16 조건 (가)에서 $p(1)$이 참이므로 조건 (나)에서 $p(2)$가 참이다.

$p(2)$가 참이므로 조건 (나)에서 $p(4)$, 즉 $p(2^2)$이 참이다.

$p(4)$가 참이므로 조건 (나)에서 $p(8)$, 즉 $p(2^3)$이 참이다.

⋮

따라서 $p(2^k)$ (k는 자연수)이 모두 참이므로 반드시 참인 명제는 $p(32)$이다. 답 ②

17 조건 (가)에서 $p(1)$이 참이므로 조건 (나)에서 $p(3)$이 참이다.

$p(3)$이 참이므로 조건 (나)에서 $p(4)$가 참이다.

$p(4)$가 참이므로 조건 (나)에서 $p(5)$가 참이다.

⋮

따라서 $p(1)$, $p(3)$, $p(4)$, $p(5)$, $p(6)$, $\cdots$이 참이므로 반드시 참인 명제가 아닌 것은 ①이다. 답 ①

$p(2+1)$이 참이므로 $p(2+2)$가 참이다.

18 (i) $n=1$일 때,

(좌변)$=1$, (우변)$=\frac{1\times(1+1)}{2}=1$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$

위의 식의 양변에 $\boxed{k+1}$을 더하면

$1+2+3+\cdots+k+\boxed{k+1}$

$=\frac{k(k+1)}{2}+\boxed{k+1}$

$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$

$=\frac{(k+1)(\boxed{k+2})}{2}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다. 답 (가) $k+1$ (나) $k+2$

19 (i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=2^1-1=1$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=\boxed{k}$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$

위의 식의 양변에 $\boxed{2^k}$을 더하면

$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+\boxed{2^k}=2^k-1+2^k$

$=2\times2^k-1$

$=2^{k+1}-1$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다. 답 (가) k (나) 2^k

20 (i) $n=1$일 때,

(좌변)$=1\times2=2$, (우변)$=\frac{1\times2\times3}{3}=2$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+k(k+1)$

$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$

위의 식의 양변에 $\boxed{(k+1)(k+2)}$를 더하면

$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots$

$+k(k+1)+\boxed{(k+1)(k+2)}$

$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+\boxed{(k+1)(k+2)}$

$=\frac{\boxed{(k+1)(k+2)(k+3)}}{3}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

따라서

$f(k)=(k+1)(k+2)$, $g(k)=(k+1)(k+2)(k+3)$

이므로

$f(3)+g(2)=4\times5+3\times4\times5=80$ 답 ①

21 (i) $n=1$일 때,

$(\text{좌변})=1^3=1$, $(\text{우변})=\left(\frac{1\times2}{2}\right)^2=1$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$$

위의 식의 양변에 $(k+1)^3$을 더하면

$$\begin{aligned}&1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3\\&=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+(k+1)^3\\&=(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)\\&=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2\\&=\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다. 답 풀이 참조

22 (i) $n=2$일 때,

$(\text{좌변})=(1+h)^2=1+2h+h^2$, $(\text{우변})=1+2h$

이때 $h^2>0$이므로 $1+2h+h^2>1+2h$

따라서 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\geq2)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$(1+h)^k>1+kh$$

위의 식의 양변에 $1+h$를 곱하면

$$\begin{aligned}(1+h)^{k+1}&>(\boxed{1+kh})(1+h)\\&=1+\boxed{(k+1)h}+kh^2\\&>1+\boxed{(k+1)h}\ (\because kh^2>0)\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다. 답 (가) $1+kh$ (나) $(k+1)h$

23 (i) $n=\boxed{5}$일 때,

$(\text{좌변})=2^5=32$, $(\text{우변})=5^2=25$

따라서 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\geq5)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $2^k>k^2$

위의 식의 양변에 2를 곱하면

$$2^{k+1}>2k^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

그런데 $k\geq5$이면

$$k^2-2k-1=\boxed{(k-1)^2}-2>0$$

이므로 $k^2>2k+1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$$2^{k+1}>2k^2=k^2+k^2>k^2+2k+1=\boxed{(k+1)^2}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n\geq5$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

답 (가) 5 (나) $(k-1)^2$ (다) $(k+1)^2$

베이직쎈 BOX

$$\begin{aligned}&(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)\\&=\frac{1}{4}(k+1)^2(k^2+4k+4)\\&=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2\end{aligned}$$

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때,
$a_1=S_1$,
$a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq2)$

$$\begin{aligned}&k^2-2k-1\\&=(k^2-2k+1)-2\\&=(k-1)^2-2\end{aligned}$$

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 204쪽

01 전략 주어진 식의 n에 1, 2, 3, ⋯, 6을 차례대로 대입하여 구한다.

풀이 주어진 식에서 $a_1=2$이므로

$a_2=3a_1=3\times2=6$

$a_3=a_2+1=6+1=7$

$a_4=3a_3=3\times7=21$

$a_5=a_4+1=21+1=22$

$a_6=3a_5=3\times22=66$

$\therefore a_7=a_6+1=66+1=67$ 답 ③

02 전략 주어진 식의 n에 1, 2, 3, ⋯, 7을 차례대로 대입하여 규칙을 찾는다.

풀이 $a_{n+1}=a_n-\frac{1}{n(n+1)}$에서 $a_1=1$이므로

$$a_2=a_1-\frac{1}{1\times2}$$

$$a_3=a_2-\frac{1}{2\times3}=a_1-\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}\right)$$

$$a_4=a_3-\frac{1}{3\times4}=a_1-\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}\right)$$

⋮

$$\begin{aligned}\therefore a_8&=a_1-\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{7\times8}\right)\\&=a_1-\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)\right\}\\&=1-\left(1-\frac{1}{8}\right)\\&=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

답 ①

03 전략 주어진 식의 n에 1, 2, 3을 차례대로 대입한다.

풀이 $S_{n+1}=2S_n+5$에서 $S_1=-6$이므로

$S_2=2S_1+5=2\times(-6)+5=-7$

$S_3=2S_2+5=2\times(-7)+5=-9$

$S_4=2S_3+5=2\times(-9)+5=-13$

$\therefore a_4=S_4-S_3=-13-(-9)=-4$ 답 ⑤

04 전략 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(b)$를 이은 선분 AB의 중점의 좌표는 $\frac{a+b}{2}$임을 이용한다.

풀이 점 P_{n+1}은 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+2}$의 중점이므로

$$a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$$

즉 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고

$a_1=5$, $a_2-a_1=3$

이므로 첫째항이 5, 공차가 3이다.

$\therefore a_n=5+(n-1)\times3=3n+2$

따라서 $a_9=3\times9+2=29$이므로 점 P_9가 나타내는 수는 29이다. 답 ④

베이직쎈 BOX

05 전략 주어진 식을 간단히 하여 a_{n+1}과 a_n 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $(a_{n+1}+a_n)^2=4a_na_{n+1}+25$에서

$a_{n+1}{}^2+2a_{n+1}a_n+a_n{}^2=4a_na_{n+1}+25$

$a_{n+1}{}^2-2a_na_{n+1}+a_n{}^2=25$

$(a_{n+1}-a_n)^2=25$

$\therefore a_{n+1}-a_n=-5\ (\because a_n>a_{n+1})$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 100, 공차가 -5인 등차수열이므로

$a_n=100+(n-1)\times(-5)=-5n+105$

$\therefore a_{20}=-5\times20+105=5$ 답 ①

06 전략 수열 $\{a_n\}$이 등비수열임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

풀이 $a_{n+1}=ka_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 k인 등비수열이므로 첫째항을 a라 하면

$a_n=ak^{n-1}$

$a_2=8$에서 $ak=8$ …… ㉠

$a_5=1$에서 $ak^4=1$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $k^3=\frac{1}{8}$ $\therefore k=\frac{1}{2}$

$k=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=16$

$\frac{1}{2}a=8$이므로 $a=16$

따라서 $a_n=16\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$ka_{10}=\frac{1}{2}\times\left\{16\times\left(\frac{1}{2}\right)^9\right\}=\frac{1}{2^6}$ 답 ⑤

07 전략 $p(k)$가 참이고 $p(k+a)$가 참이면 $p(k+2a)$, $p(k+3a)$, …도 모두 참임을 이용한다.

풀이 (i) $p(1)$이 참이다.

(ii) $p(k)$가 참이면 $p(k+2)$가 참이다.

(i), (ii)에서 $p(1)$이 참이면 $p(3)$, $p(5)$, $p(7)$, …이 참이다.

이상에서 반드시 증명해야 할 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ②

08 전략 $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정한 후 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립하도록 하는 식을 부등식의 양변에 더해 준다.

풀이 (i) $n=2$일 때,

$(\text{좌변})=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}$, $(\text{우변})=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

따라서 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\ge2)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$을 더하면

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때

$$\left\{2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}-\left(2-\boxed{\frac{1}{k+1}}\right)$$
$$=-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{k+1}$$
$$=\frac{-(k+1)^2+k+k(k+1)}{k(k+1)^2}$$
$$=-\frac{1}{k(k+1)^2}<\boxed{0}$$

$-(k+1)^2+k+k(k+1)$
$=-k^2-2k-1+k+k^2+k$
$=-1$

$$\therefore 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\boxed{\frac{1}{k+1}} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\boxed{\frac{1}{k+1}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n\ge2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

따라서 $f(k)=\frac{1}{k+1}$, $a=0$이므로

$f(0)=1$ 답 ③

09 전략 주어진 식의 n에 1, 2를 차례대로 대입하여 a_3을 k의 식으로 나타낸다.

풀이 $a_{n+1}=\frac{k}{a_n+3}$에서 $a_1=-1$이므로

$a_2=\frac{k}{a_1+3}=\frac{k}{-1+3}=\frac{k}{2}$

$a_3=\frac{k}{a_2+3}=\frac{k}{\frac{k}{2}+3}=\frac{2k}{k+6}$ ··· ❶

$a_3=5$이어야 하므로

$\frac{2k}{k+6}=5$, $2k=5k+30$

$3k=-30$ $\therefore k=-10$ ··· ❷

답 -10

단계	채점 기준	비율
❶	a_3을 k의 식으로 나타낼 수 있다.	60%
❷	k의 값을 구할 수 있다.	40%

10 전략 $a_{n+1}=2^na_n$의 n에 1, 2, 3, …, 7을 차례대로 대입하여 규칙을 찾는다.

풀이 $a_{n+1}=2^na_n$에서 $a_1=4$이므로

$a_2=2^1a_1$

$a_3=2^2a_2=2^1\times2^2\times a_1$

$a_4=2^3a_3=2^1\times2^2\times2^3\times a_1$

⋮

$a_8=2^1\times2^2\times2^3\times\cdots\times2^7\times a_1$

$=2^{1+2+3+\cdots+7}\times4=2^{\frac{7\times8}{2}}\times2^2=2^{30}$

$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore \log_2a_8=\log_22^{30}=30$ 답 30

$a>0$, $a\ne1$일 때, $\log_aa^k=k$ (k는 실수)

11 전략 [1단계], [2단계], [3단계]에 사용된 성냥개비의 개수를 각각 구하여 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

12 수학적 귀납법

본책 205쪽

베이직쎈 BOX

풀이 $a_1=3$, $a_2=a_1+6$, $a_3=a_2+9$, $\cdots$이므로

$a_{n+1}=a_n+3(n+1)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

$a_2=a_1+3\times(1+1)$,
$a_3=a_2+3\times(2+1)$

답 $a_{n+1}=a_n+3(n+1)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

12 전략 $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정한 후 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립하도록 하는 식을 등식의 양변에 더해 준다.

풀이 (i) $n=1$일 때,

$$(\text{좌변})=1^2=1,\ (\text{우변})=\frac{1\times2\times3}{6}=1$$

따라서 주어진 등식이 성립한다. ➊

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

위의 식의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\&=\frac{(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}}{6}\\&=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}\\&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다. ➋

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다. ➌

답 풀이 참조

단계	채점 기준	비율
➊	$n=1$일 때 주어진 등식이 성립함을 보일 수 있다.	20%
➋	$n=k+1$일 때 주어진 등식이 성립함을 보일 수 있다.	70%
➌	모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립함을 보일 수 있다.	10%

MEMO

MEMO