일품 미적분 Ⅰ

정답 및 풀이

Ⅰ 수열의 극한

01 수열의 극한

개념 & 기출 유형 (본책 8쪽 ~ 10쪽)

001 ③	002 ④	003 ④	004 -1	005 3
006 ②	007 2	008 ④	009 6	010 ②
011 ②	012 ③	013 ④	014 ④	015 $\frac{1}{3}$
016 ③	017 ②	018 0		

내신 1등급 도전하기 (본책 11쪽 ~ 14쪽)

019 44	020 ⑤	021 ③	022 $\frac{5}{3}$	023 40
024 ②	025 5	026 2	027 12	028 ⑤
029 ⑤	030 ⑤	031 $\frac{1}{2}$	032 $\frac{3}{4}$	033 25
034 ⑤	035 $\frac{1}{3}$	036 ③	037 $\frac{13}{2}$	038 ①
039 $\frac{4}{3}$	040 ④	041 ④	042 9	043 ①

수능 따라잡기 (본책 15쪽)

044 4	045 ②	046 1	047 ②	048 5
049 ④				

02 급수

개념 & 기출 유형 (본책 16쪽 ~ 18쪽)

050 ⑤	051 $-\frac{1}{2}$	052 9	053 ②	054 5
055 ①	056 ②	057 6	058 ②	059 9
060 ①	061 ①	062 ⑤	063 100	064 ②
065 ①	066 ④			

내신 1등급 도전하기 (본책 19쪽 ~ 22쪽)

067 15	068 ①	069 8	070 1	071 ②
072 3	073 ③	074 12	075 ②	076 ⑤
077 30	078 ③	079 ①	080 ①	081 ④
082 ⑤	083 11	084 121	085 34	086 ③
087 ③	088 ⑤	089 81	090 ②	

수능 따라잡기 (본책 23쪽)

091 15	092 ④	093 17	094 4	095 19
096 ③				

1등급 완성하기 (본책 24쪽 ~ 27쪽)

097 3	098 ③	099 9	100 3	101 ②
102 150	103 ③	104 1	105 ④	106 10
107 ①	108 -4	109 8	110 ⑤	111 7
112 4	113 ①	114 ③	115 ④	116 $\frac{1}{7}$
117 11	118 ①	119 ③	120 $\frac{1}{2}$	
121 $\frac{27\sqrt{3}}{80}$	122 $\frac{3}{4}\pi$	123 17		

Ⅱ 함수의 극한과 연속

03 함수의 극한

개념 & 기출 유형 (본책 30쪽 ~ 32쪽)

124 ⑤	125 ②	126 ④	127 4	128 ③
129 $\frac{1}{12}$	130 ⑤	131 2	132 ④	133 ④
134 16	135 5	136 ③	137 4	138 ①
139 ③	140 -1			

내신 1등급 도전하기

본책 33쪽 ~ 35쪽

141 12	**142** ②	**143** 6	**144** 8	**145** 1
146 ③	**147** ⑤	**148** ⑤	**149** 14	**150** ④
151 ②	**152** $\frac{5}{2}$	**153** $-\frac{9}{8}$	**154** ②	**155** 30
156 ②	**157** ①	**158** 8		

수능 따라잡기

본책 36쪽

159 ②	**160** ④	**161** ③	**162** 5	**163** 96

04 함수의 연속

개념 & 기출 유형

본책 37쪽 ~ 39쪽

164 ⑤	**165** 8	**166** ③	**167** ③	**168** ③
169 ②	**170** 5	**171** ②	**172** -1	**173** ②
174 ②	**175** 3	**176** ③		

내신 1등급 도전하기

본책 40쪽 ~ 42쪽

177 ②	**178** ②	**179** 23	**180** 5	**181** 19
182 12	**183** ⑤	**184** 1	**185** ①	**186** 20
187 ②	**188** ⑤	**189** 2	**190** ①	**191** ⑤
192 4	**193** ②	**194** ③		

수능 따라잡기

본책 43쪽

195 ⑤	**196** ④	**197** 120	**198** ③

1등급 완성하기

본책 44쪽 ~ 47쪽

199 ③	**200** 1	**201** 1	**202** ③	**203** $\frac{15}{8}$
204 ④	**205** 3	**206** ②	**207** ④	**208** 48
209 17	**210** ①	**211** $x=0$ 또는 $x=\frac{3}{4}$	**212** 5	
213 ⑤	**214** ④	**215** ③	**216** ①	**217** 8
218 ②	**219** $\frac{4}{21}$	**220** ⑤	**221** ⑤	**222** 4

Ⅲ 다항함수의 미분법

05 미분계수와 도함수

개념 & 기출 유형

본책 50쪽 ~ 52쪽

223 3	**224** ④	**225** 2	**226** ②	**227** ③
228 16	**229** 3	**230** 3	**231** ⑤	**232** ④
233 ②	**234** ②	**235** ①	**236** 152	**237** ④
238 3	**239** ①	**240** $f'(x)=x^2+1$		

내신 1등급 도전하기

본책 53쪽 ~ 55쪽

241 ①	**242** $\frac{1}{3}$	**243** ②	**244** ③	**245** ⑤
246 ⑤	**247** 9	**248** ②	**249** ②	**250** 5
251 ③	**252** ⑤	**253** 18	**254** -2	**255** ①
256 42	**257** ①	**258** 43	**259** ③	**260** ①

수능 따라잡기

본책 56쪽

261 ①	**262** ④	**263** 34	**264** 50	**265** ④
266 ⑤				

06 도함수의 활용 (1)

개념 & 기출 유형

본책 57쪽 ~ 58쪽

267 ⑤	**268** ②	**269** 16	**270** ④	
271 $\left(-\frac{1}{2}, 5\right)$		**272** ④	**273** ⑤	**274** ②
275 ⑤	**276** ②	**277** ④		

내신 1등급 도전하기

본책 59쪽 ~ 61쪽

278 ②	**279** ①	**280** $\frac{5}{2}$	**281** 8	**282** ④
283 $\frac{\sqrt{10}}{2}$	**284** $\frac{4}{3}$	**285** ③	**286** 5	**287** 10

288 ④	**289** 14	**290** -2	**291** ③	**292** ①
293 0	**294** ①	**295** $\frac{9}{4}$	**296** 12	**297** ①

수능 따라잡기 (본책 62쪽)

298 ④	**299** ③	**300** 18	**301** ②	**302** ③

07 도함수의 활용 (2)

개념 & 기출 유형 (본책 63쪽 ~ 64쪽)

303 7	**304** ④	**305** ④	**306** -12	**307** ④
308 ②	**309** ①	**310** 1	**311** 6	**312** ③
313 ②				

내신 1등급 도전하기 (본책 65쪽 ~ 67쪽)

314 $\frac{16}{3}$	**315** ⑤	**316** ④	**317** ④	**318** ④
319 6	**320** ④	**321** 3	**322** -11	**323** $\frac{3}{4}$
324 0	**325** ④	**326** ③	**327** ④	**328** $\frac{\pi}{2}$
329 58	**330** ③	**331** ④	**332** ①	**333** 95

수능 따라잡기 (본책 68쪽)

334 70	**335** 2	**336** ④	**337** ③	**338** ⑤
339 30				

08 도함수의 활용 (3)

개념 & 기출 유형 (본책 69쪽 ~ 70쪽)

340 ⑤	**341** ③	**342** ⑤	**343** ③	**344** ③
345 ⑤	**346** 8	**347** ③	**348** ⑤	**349** ②
350 $135\sqrt{3}$				

내신 1등급 도전하기 (본책 71쪽 ~ 72쪽)

351 0	**352** ③	**353** ②	**354** 14	**355** ①
356 66	**357** 40	**358** ②	**359** ③	**360** -96
361 ④	**362** 4			

수능 따라잡기 (본책 73쪽)

363 ②	**364** ④	**365** ④	**366** ③	**367** 29

1등급 완성하기 (본책 74쪽 ~ 78쪽)

368 8	**369** $\frac{9}{2}$	**370** 2	**371** ④	**372** ③
373 0	**374** ③	**375** $\frac{1}{2}$	**376** 4	
377 $y=x$	**378** $-\frac{9}{4}$	**379** ②	**380** ④	
381 $y=-4x+4$		**382** 1	**383** 3	**384** ⑤
385 $\frac{9}{2}$	**386** 19	**387** ③	**388** ②	**389** ④
390 432	**391** ⑤	**392** ④	**393** 4	**394** ②
395 0	**396** ②	**397** ④	**398** 4	**399** -4
400 ④	**401** $\frac{5}{2}$			

Ⅳ 다항함수의 적분법

09 부정적분

개념 & 기출 유형 (본책 80쪽 ~ 81쪽)

402 16	**403** 8	**404** ④	**405** $\frac{3}{5}$	**406** 8
407 $\frac{1}{2}x^2+5x+C$		**408** ①	**409** 1	**410** ③
411 ⑤	**412** $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+x-3$			**413** ②

내신 1등급 도전하기 본책 82쪽 ~ 83쪽

414 3 **415** -2 **416** 50 **417** ③ **418** 10
419 ⑤ **420** ⑤ **421** ② **422** ④ **423** -4
424 ③ **425** 15 **426** ⑤ **427** 7

수능 따라잡기 본책 84쪽

428 ④ **429** ③ **430** 4 **431** ② **432** 140
433 16

10 정적분

개념 & 기출 유형 본책 85쪽 ~ 88쪽

434 ② **435** ⑤ **436** ⑤ **437** 1008 **438** -6
439 18 **440** ⑤ **441** ⑤ **442** ⑤ **443** $\frac{64}{3}$
444 ⑤ **445** 79 **446** ④ **447** -9 **448** ④
449 3 **450** ① **451** $\frac{13}{3}$ **452** $\frac{12}{5}$ **453** ②

내신 1등급 도전하기 본책 89쪽 ~ 91쪽

454 ① **455** ② **456** ③ **457** ① **458** ①
459 12 **460** 17 **461** 10 **462** ② **463** 2
464 ⑤ **465** 0 **466** 12 **467** ④ **468** 12
469 22 **470** ①

수능 따라잡기 본책 92쪽

471 ③ **472** 5 **473** ⑤ **474** ① **475** 2
476 ⑤

11 정적분의 활용

개념 & 기출 유형 본책 93 ~ 95쪽

477 $\frac{37}{12}$ **478** 10 **479** ③ **480** ⑤ **481** 7
482 $\frac{76}{3}$ **483** $\frac{1}{2}$ **484** ① **485** 3 **486** ①
487 1 **488** 22 **489** 6 **490** ① **491** 90 m
492 ⑤ **493** ④

내신 1등급 도전하기 본책 96쪽 ~ 98쪽

494 ② **495** $\frac{27}{128}$ **496** 64 **497** 3
498 $\frac{5}{8}\pi+\frac{1}{4}$ **499** ⑤ **500** 162 **501** ②
502 $\frac{5}{3}$ **503** ① **504** ③ **505** 36 **506** ⑤
507 ⑤ **508** 10 **509** ② **510** ㄴ **511** ④

수능 따라잡기 본책 99쪽

512 30 **513** ④ **514** 8 **515** ② **516** ④
517 3

1등급 완성하기 본책 100쪽 ~ 104쪽

518 ⑤ **519** 5 **520** ① **521** 13 **522** ②
523 12 **524** $f(x)=x^2+2$ **525** 10 **526** ③
527 ③ **528** $\frac{17}{6}$ **529** 1008 **530** ④ **531** ④
532 $\frac{11}{3}$ **533** 17 **534** ② **535** ① **536** 6
537 ③ **538** 16 **539** ④ **540** $\sqrt{6}$ **541** $\frac{27}{32}$
542 ① **543** 11 **544** $\frac{625}{2}$ **545** ② **546** 55
547 ② **548** ③

I 수열의 극한

01 수열의 극한 본책 8쪽

001 ① 일반항이 $(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2n}$이므로

$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2n}=0$

② 일반항이 $\frac{2^n-1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$

③ 일반항이 $\frac{n}{1000}$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1000}=\infty$

④ 일반항이 $\frac{\sqrt{3n}}{n}=\sqrt{\frac{3}{n}}$이므로 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3}{n}}=0$

⑤ 일반항이 $\frac{2n}{n^2}=\frac{2}{n}$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$

답 ③

일반항을 $(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2n}$이라 할 수도 있다.

002 ㄱ. 수열 $\{2\cdot(-1)^n\}$의 각 항을 나열하면

$-2,\ 2,\ -2,\ 2,\ \cdots$

이므로 발산(진동)한다.

ㄴ. 수열 $\{(-1)^n\cdot(-1)^{n+1}\}$의 각 항을 나열하면

$-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ \cdots$

이므로 -1에 수렴한다.

ㄷ. 수열 $\left\{\frac{(-1)^n-(-1)^{n+1}}{n}\right\}$의 각 항을 나열하면

$\frac{-2}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{-2}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{-2}{5},\ \frac{2}{6},\ \cdots$

이므로 0에 수렴한다.

이상에서 수렴하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

일반항이 $\frac{2\cdot(-1)^n}{n}$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot(-1)^n}{n}=0$

003 ① [반례] $a_n=n,\ b_n=n^2$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이지만

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

② [반례] $a_n=n+1,\ b_n=n$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이지만

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}1=1$

③ [반례] $a_n=1-\frac{1}{n},\ b_n=1+\frac{1}{n}$이면 $a_n<b_n$이지만

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=1$

④ $a_n-b_n=c_n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}c_n=0$

이때 $b_n=a_n-c_n$이고, $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$이므로

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(a_n-c_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}c_n$

$=\alpha-0=\alpha$

⑤ [반례] $a_n=n,\ b_n=\frac{1}{n}$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이지만

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}1=1$

답 ④

004 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+1)-1\}$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n+1)-\lim_{n\to\infty}1$

$=-2-1=-3$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=-3$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\alpha$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}+k}{a_{n+1}-k}=2$에서

$\frac{-3+k}{-3-k}=2 \qquad \therefore k=-1$

답 -1

005 $\lim_{n\to\infty}a_n^2=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}a_n=(\lim_{n\to\infty}a_n)^2=25$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=5\ (\because a_n>0)$

이때 $\lim_{n\to\infty}(3a_n-2b_n)=3\lim_{n\to\infty}a_n-2\lim_{n\to\infty}b_n=9$이므로

$3\cdot5-2\lim_{n\to\infty}b_n=9, \qquad -2\lim_{n\to\infty}b_n=-6$

$\therefore \lim_{n\to\infty}b_n=3$

답 3

006 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$

$=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

답 ②

007 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{3n}k-\sum_{k=1}^{n}k}{\sum_{k=1}^{2n}k}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n(3n+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{2n(2n+1)}{2}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n(3n+1)-n(n+1)}{2n(2n+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+2n}{4n^2+2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{2}{n}}{4+\frac{2}{n}}$

$=2$

답 2

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

008 $\lim_{n\to\infty}(3n+5)a_n=\lim_{n\to\infty}(n-3)a_n\cdot\frac{3n+5}{n-3}$

$=\lim_{n\to\infty}(n-3)a_n\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{n-3}$

$=2\cdot3=6$

답 ④

009 $a\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+1}{2n-1}=\pm\infty$이므로

$a=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+1}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn+1}{2n-1}=\frac{b}{2}$

따라서 $\frac{b}{2}=-3$이므로 $b=-6$

$\therefore a-b=6$

답 6

010 $\lim_{n\to\infty}(n\sqrt{9n^2+2}-3n^2)$

$=\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{9n^2+2}-3n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{9n^2+2}+3n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{9+\frac{2}{n^2}}+3}$

$=\frac{2}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{3}$

답 ②

011 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{(n+2)(n+3)}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{(n+2)(n+3)}}{n(n+1)-(n+2)(n+3)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+5n+6}}{-4n-6}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}}{-4-\frac{6}{n}}$

$=\frac{1+1}{-4}=-\frac{1}{2}$

답 ②

012 분자와 분모를 각각 유리화하면

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3}-(n-1)}{\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt{n^2+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2+1})}{(2n+2)\{\sqrt{n^2+3}+(n-1)\}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+3}+n-1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+1-\frac{1}{n}}$

$=\frac{1+1}{1+1}=1$

답 ③

일품 BOX

- $a>0$이면 양의 무한대로 발산하고, $a<0$이면 음의 무한대로 발산한다.

- $a>0$, $a\neq1$이고 $M>0$, $N>0$일 때
  $\log_a a=1$,
  $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

- 분자, 분모에 $\{\sqrt{n^2+3}+(n-1)\}$과 $(\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2+1})$을 각각 곱한다.

013 $\frac{3n^2}{n+1}<a_n<\frac{3n^2+n}{n+1}$의 각 변을 n으로 나누면

$\frac{3n}{n+1}<\frac{a_n}{n}<\frac{3n+1}{n+1}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n+1}=3$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=3$

답 ④

014 $1+\log_2 n<\log_2 n+\log_2 a_n<1+\log_2(n+1)$에서

$\log_2 2n<\log_2 na_n<\log_2 2(n+1)$

$2n<na_n<2n+2$

각 변을 n으로 나누면

$2<a_n<2+\frac{2}{n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}2=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{2}{n}\right)=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=2$

답 ④

015 $|a_n-2n^2|<n$에서 $-n<a_n-2n^2<n$이므로

$2n^2-n<a_n<2n^2+n$

각 변을 n^2으로 나누면

$2-\frac{1}{n}<\frac{a_n}{n^2}<2+\frac{1}{n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n-n^2}{a_n+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n^2}-1}{\frac{a_n}{n^2}+1}$

$=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

016 주어진 수열이 수렴하려면

$-1<\frac{x^2-3x-2}{2}\le1$

(i) $\frac{x^2-3x-2}{2}>-1$에서

$x^2-3x-2>-2$, $x(x-3)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>3$

(ii) $\frac{x^2-3x-2}{2}\le1$에서

$x^2-3x-2\le2$, $(x+1)(x-4)\le0$

$\therefore -1\le x\le4$

(i), (ii)에서

$-1\le x<0$ 또는 $3<x\le4$

따라서 정수 x는 -1, 4이므로 구하는 합은

$-1+4=3$

답 ③

017 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(2^{n+1}-1)}{4^{n+1}+2^n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}-2^n}{2^{2n+2}+2^n-3}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2^{2n}-2^n}{4\cdot2^{2n}+2^n-3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{2^n}}{4+\frac{1}{2^n}-\frac{3}{2^{2n}}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

답 ②

018 (i) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=1$$

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=1$이므로

$$b=\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(iii) $|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$이므로

$$c=\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^n}-1}{\frac{1}{r^n}+1}=-1$$

이상에서 $a+b+c=0$

답 0

019 문제 이해 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{8}{n^2+2n}=\dfrac{8}{n(n+2)}$

$$=4\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$ ● 20%

해결 과정 위의 식의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2-a_1=4\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)$$
$$a_3-a_2=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$$
$$a_4-a_3=4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$
$$\vdots$$
$$a_{n-1}-a_{n-2}=4\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)$$
$$+\big)\ a_n-a_{n-1}=4\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$a_n-a_1=4\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$\therefore a_n=a_1+4\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$ ● 30%

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{a_1+4\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=a_1+4\cdot\dfrac{3}{2}=a_1+6$ ● 30%

답 구하기 즉 $a_1+6=50$이므로

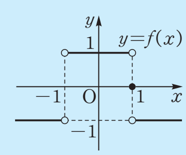
$a_1=44$ ● 20%

답 44

일품 BOX

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$
$=\sum_{k=1}^{n}k^2$
$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-x^n}{1+x^n}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$A\neq B$일 때
$\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$

$a_n=\dfrac{1}{n^2+2n}$의 n에 $2n$을 대입하면

$a_{2n}=\dfrac{1}{(2n)^2+2\cdot2n}$
$=\dfrac{1}{4n^2+4n}$
$=\dfrac{1}{4n(n+1)}$

020 ㄱ. $a_n=0$ 또는 $a_n=1$이므로 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 극한값은 반드시 0 또는 1이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_n=1$이면 어떤 항 이후부터는 모든 항의 값이 1이다. 따라서 집합 $\{n\,|\,a_n=0\}$은 유한집합이다.

ㄷ. (i) 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 1인 경우
$b_n=1$이므로 수열 $\{b_n\}$은 1에 수렴한다.
(ii) 수열 $\{a_n\}$의 항 중에서 0이 하나라도 있는 경우
수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 0이 나오는 항을 제m항이라 하면
$$b_m=b_{m+1}=b_{m+2}=\cdots=0$$
이므로 수열 $\{b_n\}$은 0에 수렴한다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

021 $\lim_{n\to\infty}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)a_n=5$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}a_n=5$$

즉 $\lim_{n\to\infty}n(n+1)(2n+1)a_n=30$이므로

$\lim_{n\to\infty}n(n+1)(n+2)a_n$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{n(n+1)(2n+1)a_n\cdot\dfrac{n+2}{2n+1}\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}n(n+1)(2n+1)a_n\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{2n+1}$

$=30\cdot\dfrac{1}{2}=15$

답 ③

022 해결 과정 $\dfrac{a_n-2}{b_n}=c_n$으로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}c_n=\dfrac{1}{3}$이고

$b_n=\dfrac{a_n-2}{c_n}$ ● 30%

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-2}{c_n}=\frac{3-2}{\frac{1}{3}}=3$ ● 40%

답 구하기 $\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{b_n}=\frac{3+2}{3}=\frac{5}{3}$ ● 30%

답 $\dfrac{5}{3}$

023 $a_{2n}=\dfrac{1}{4n(n+1)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$이므로

$a_2+a_4+\cdots+a_{2n}$

$=\sum_{k=1}^{n}a_{2k}$

$=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$

$=\dfrac{1}{4}\left\{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{10}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}$$
$$=\frac{10}{\frac{1}{4}}=40$$

답 40

024 ㄱ. [반례] $a_n=\frac{2}{n}$, $b_n=\frac{1}{n}$이면

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$이지만

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}2=2$$

ㄴ. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하면 수열 $\{a_nb_n\}$도 수렴하므로 수열 $\{a_nb_n\}$이 발산하면 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 중 적어도 하나는 발산한다. 그런데 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 수열 $\{b_n\}$은 발산한다.

ㄷ. [반례] $a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^{n+1}$이라 하면

$$a_nb_n=-1,\ a_n+b_n=0$$

이므로 두 수열 $\{a_nb_n\}$, $\{a_n+b_n\}$은 모두 수렴하지만 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모두 발산한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

> **일품 BOX**
>
> 명제 $p\to q$가 참이면 그 대우 $\sim q\to\sim p$도 참이다.

025 $\lim_{n\to\infty}\frac{20n+5}{a_n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n^2+2n+3}{(n+2)a_n}\cdot\frac{(20n+5)(n+2)}{n^2+2n+3}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+3}{(n+2)a_n}\lim_{n\to\infty}\frac{(20n+5)(n+2)}{n^2+2n+3}$$
$$=\frac{1}{4}\cdot 20=5$$

답 5

026 $a_n=\sum_{k=1}^{3n}k-\sum_{k=1}^{n}3k$

$$=\frac{3n(3n+1)}{2}-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=3n^2$$

$b_n=1+4+7+10+\cdots+(3n-2)$

$$=\sum_{k=1}^{n}(3k-2)$$
$$=3\cdot\frac{n(n+1)}{2}-2n$$
$$=\frac{3n^2-n}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{\frac{3n^2-n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2}{3n^2-n}$$
$$=2$$

답 2

참고 1, $\cancel{2}$, $\cancel{3}$, 4, $\cancel{5}$, $\cancel{6}$, 7, $\cancel{8}$, $\cancel{9}$, 10, $\cancel{11}$, $\cancel{12}$, $\cdots$, $3n-2$, $\cancel{3n-1}$, $\cancel{3n}$

➡ $\{b_n\}$: 1, 4, 7, 10, $\cdots$, $3n-2$

027 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}(3a_n-2b_n)=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2b_n}{a_n}\right)=0$$

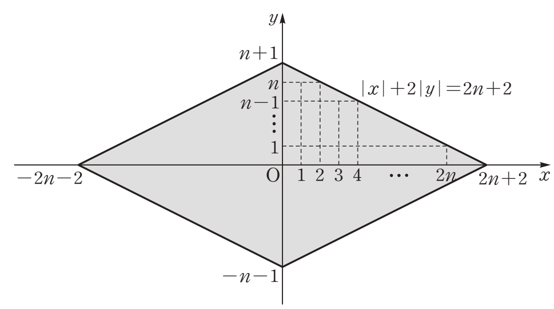
즉 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{3}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{b_n}{a_n}}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9a_n}{b_n}+\frac{4b_n}{a_n}\right)=9\cdot\frac{2}{3}+4\cdot\frac{3}{2}=12$$

답 12

028 주어진 부등식이 나타내는 영역은 다음 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



$x=1$, 2일 때, $y=1, 2, \cdots, n$의 n개

$x=3$, 4일 때, $y=1, 2, \cdots, n-1$의 $(n-1)$개

⋮

$x=2n-1$, $2n$일 때, $y=1$의 1개

이므로 제1 사분면에 있는 순서쌍 (α, β)의 개수는

$$2\cdot\{n+(n-1)+\cdots+1\}=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=n(n+1)$$

x축과 y축 위에 있는 순서쌍 (α, β)의 개수는

$$2(2n+2)+2(n+1)+1=6n+7$$

이므로

$$f(n)=4\cdot n(n+1)+6n+7$$
$$=4n^2+10n+7$$

또 도형 $|x|+2|y|=2n+2$에 내접하는 원의 반지름의 길이는 원점과 직선 $x+2y=2n+2$, 즉 $x+2y-(2n+2)=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$g(n)=\frac{|-(2n+2)|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2n+2}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{\{g(n)\}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+10n+7}{\frac{(2n+2)^2}{5}}$$
$$=\frac{4}{\frac{4}{5}}=5$$

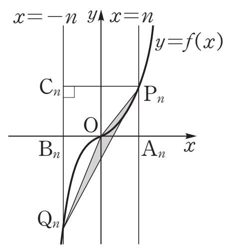
답 ⑤

> 점 $P(x_1, y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는
> $$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
> 특히 원점과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는
> $$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

029 $A_n(n, 0)$, $B_n(-n, 0)$, $P_n(n, n^2)$, $Q_n(-n, -n^3)$이므로

$S_n=\frac{1}{2}\cdot n\cdot n^2=\frac{1}{2}n^3$

$T_n=\frac{1}{2}\cdot n\cdot n^3=\frac{1}{2}n^4$



오른쪽 그림과 같이 점 P_n에서 직선 $x=-n$에 내린 수선의 발을 C_n이라 하면

$C_n(-n,\ n^2)$

이므로

$$R_n=\triangle P_nC_nQ_n-\triangle Q_nOB_n-\square P_nC_nB_nO$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2n(n^2+n^3)-\frac{1}{2}\cdot n\cdot n^3-\frac{1}{2}(n+2n)\cdot n^2$$
$$=n^3+n^4-\frac{1}{2}n^4-\frac{1}{2}n^3-n^3$$
$$=\frac{1}{2}n^4-\frac{1}{2}n^3$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{R_n}{S_n+T_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n^4-\frac{1}{2}n^3}{\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{2}n^3}=1$$

답 ⑤

030 $\overline{A_nB_1}=2+4+\cdots+2n=2(1+2+\cdots+n)$

$$=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=n(n+1)$$

이므로 $\triangle A_nB_1C_1$에서

$$\overline{A_nC_1}=\sqrt{n^2(n+1)^2+1^2}=\sqrt{n^4+2n^3+n^2+1}$$

또 $\overline{B_1C_n}=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$이므로

$\triangle A_1B_1C_n$에서

$$\overline{A_1C_n}=\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2}{4}+2^2}$$
$$=\frac{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+16}}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{A_1C_n}}{\overline{A_nC_1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+16}}{2}}{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+1}}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+16}}{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+1}}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{16}{n^4}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}}$$
$$=\frac{1}{2}$$

답 ⑤

1등급 비밀노트

문제 해결 순서
(i) $\overline{A_nB_1}$, $\overline{B_1C_n}$의 길이를 각각 n에 대한 식으로 나타낸다.
(ii) 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{A_nC_1}$, $\overline{A_1C_n}$의 길이를 각각 n에 대한 식으로 나타낸다.
(iii) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값을 구한다.

일품 BOX

$1+2+\cdots+n$
$=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

분모를 1로 두고 분자를 유리화한다.

031 문제 이해 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$

$$=\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$$
$$=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}$$ ● 30%

해결 과정 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}$의 양변에 n 대신 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}$$
$$\frac{a_3}{a_2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}$$
$$\frac{a_4}{a_3}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}$$
$$\vdots$$
$$\times)\ \frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}$$
$$\frac{a_n}{a_1}=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)$$
$$\therefore a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$$
$$=\frac{n+1}{2n}\ (\because a_1=1)$$ ● 50%

답 구하기 $\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$ ● 20%

답 $\frac{1}{2}$

032 해결 과정 자연수 n에 대하여

$(2n-1)^2<4n^2-n<(2n)^2$

$\therefore 2n-1<\sqrt{4n^2-n}<2n$

따라서 $\sqrt{4n^2-n}$의 정수 부분은 $2n-1$이므로

$a_n=\sqrt{4n^2-n}-(2n-1)$ ● 40%

답 구하기 $\therefore \lim_{n\to\infty}a_n$

$$=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{4n^2-n}-(2n-1)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{4n^2-n}-(2n-1)\}\{\sqrt{4n^2-n}+(2n-1)\}}{\sqrt{4n^2-n}+(2n-1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n^2-n)-(2n-1)^2}{\sqrt{4n^2-n}+2n-1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{4n^2-n}+2n-1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{\sqrt{4-\frac{1}{n}}+2-\frac{1}{n}}$$
$$=\frac{3}{2+2}=\frac{3}{4}$$ ● 60%

답 $\frac{3}{4}$

033 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{kn+1}}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{kn+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{kn^2+(1+k)n+1}+\sqrt{kn^2+(1-k)n-1}}{2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{k+\frac{1+k}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{k+\frac{1-k}{n}-\frac{1}{n^2}}}{2}$

$=\sqrt{k}$

따라서 $\sqrt{k}=5$이므로 $k=25$ 답 25

034 함수 $y=\frac{n}{x}$의 그래프와 직선 $y=-x+n$의 교점의 x좌표는 $\frac{n}{x}=-x+n$에서

$n=-x^2+nx,\quad x^2-nx+n=0$

$\therefore x=\frac{n\pm\sqrt{n^2-4n}}{2}$

이때 $P_n\left(\frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}, \frac{n+\sqrt{n^2-4n}}{2}\right)$, $Q_n\left(\frac{n+\sqrt{n^2-4n}}{2}, \frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}\right)$이라 하면

$\overline{P_nQ_n}=\sqrt{(\sqrt{n^2-4n})^2+(-\sqrt{n^2-4n})^2}$

$=\sqrt{2}\sqrt{n^2-4n}$

또 $A_n(0, n)$, $B_n(n, 0)$이므로

$\overline{A_nB_n}=\sqrt{n^2+(-n)^2}=\sqrt{2}n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(\overline{A_nB_n}-\overline{P_nQ_n})$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}n-\sqrt{2}\sqrt{n^2-4n})$

$=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-4n})$

$=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+\sqrt{n^2-4n}}$

$=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{n}}}=2\sqrt{2}$ 답 ⑤

035 $n(n-2)<a_n<n^2$에서

$\sum_{k=1}^{n}k(k-2)<\sum_{k=1}^{n}a_k<\sum_{k=1}^{n}k^2$

이때

$\sum_{k=1}^{n}k(k-2)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k)$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n(n+1)$

$=\frac{n(n+1)(2n-5)}{6}$

$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

이므로

$\frac{n(n+1)(2n-5)}{6}<\sum_{k=1}^{n}a_k<\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\therefore \frac{(n+1)(2n-5)}{6n^2}<\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}a_k<\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

그런데

$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n-5)}{6n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\frac{1}{3}$

이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

036 $a_n-\frac{1}{2}=b_n$으로 놓으면 조건 (가)에서

$a_n-\frac{1}{2}>0,\ a_{n+1}-\frac{1}{2}>0\qquad \therefore b_n>0,\ b_{n+1}>0$

조건 (나)에서

$a_{n+1}-\frac{1}{2}<\frac{2}{3}\left(a_n-\frac{1}{2}\right)$, 즉 $b_{n+1}<\frac{2}{3}b_n$

$\therefore b_{n+1}<\frac{2}{3}b_n<\left(\frac{2}{3}\right)^2 b_{n-1}<\cdots<\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot b_1$

즉 $0<b_n<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot b_1$이고 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot b_1=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}b_n=0$, 즉 $\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{1}{2}\right)=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{1}{2}\right)\left(a_n+\frac{2}{3}\right)(a_n+1)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{1}{2}\right)\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{2}{3}\right)\lim_{n\to\infty}(a_n+1)$

$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{7}{4}$ 답 ③

037 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{x^{2n}+1}$에서

$f(-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{(-1)^{2n}+1}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{10}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+1}}{\left(\frac{1}{10}\right)^{2n}+1}=\frac{0}{0+1}=0$

$f(7)=\lim_{n\to\infty}\frac{7^{2n+1}}{7^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{7}{1+\frac{1}{7^{2n}}}=7$

$\therefore f(-1)+f\left(\frac{1}{10}\right)+f(7)=\frac{13}{2}$ 답 $\frac{13}{2}$

038 $a_n+b_n=\frac{1}{3^n}$, $a_n-b_n=\frac{1}{2^n}$의 양변을 각각 제곱하면

$a_n{}^2+b_n{}^2+2a_nb_n=\frac{1}{9^n}$ …… ㉠

$a_n{}^2+b_n{}^2-2a_nb_n=\frac{1}{4^n}$ …… ㉡

일품 BOX

$\frac{2}{3}b_n<\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot b_1$이므로 $b_n<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot b_1$

• 두 점 P_n, Q_n이 직선 $y=-x+n$ 위에 있음을 이용하여 두 점의 y좌표를 각각 구한다.

$|x|<1$이면 $f(x)=0$

$|x|>1$이면 $f(x)=x$

㉠+㉡, ㉠−㉡을 각각 하면

$$2(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{9^n}+\frac{1}{4^n},\ 4a_nb_n=\frac{1}{9^n}-\frac{1}{4^n}$$

$$\therefore\ a_n^2+b_n^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9^n}+\frac{1}{4^n}\right),\ a_nb_n=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9^n}-\frac{1}{4^n}\right)$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{a_nb_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9^n}+\frac{1}{4^n}\right)}{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9^n}-\frac{1}{4^n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(4^n+9^n)}{4^n-9^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left\{\left(\frac{4}{9}\right)^n+1\right\}}{\left(\frac{4}{9}\right)^n-1}$$

$$=-2$$

답 ①

039 n년 후의 A회사와 B회사의 매출액은 각각

$a_n=10(1.08)^n+15(1.12)^n$

$b_n=5(1.08)^n+20(1.12)^n$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5(1.08)^n+20(1.12)^n}{10(1.08)^n+15(1.12)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5\left(\frac{1.08}{1.12}\right)^n+20}{10\left(\frac{1.08}{1.12}\right)^n+15}$$

$$=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

040 수족관의 물을 n번째 교체한 후의 수족관의 물의 양을 $a_n\,\mathrm{m}^3$라 하면

$$a_{n+1}=\frac{95}{100}a_n+50\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$\therefore\ a_{n+1}-1000=\frac{19}{20}(a_n-1000)$$

따라서 수열 $\{a_n-1000\}$은 첫째항이 a_1-1000, 공비가 $\frac{19}{20}$인 등비수열이다.

이때 $a_1=\frac{19}{20}\cdot400+50=430$이므로

$$a_n-1000=(430-1000)\left(\frac{19}{20}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n=-570\left(\frac{19}{20}\right)^{n-1}+1000$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=1000$이고, 수족관의 밑면의 가로, 세로의 길이가 각각 $10\,\mathrm{m}$이므로 구하는 최소 높이는 $10\,\mathrm{m}$이다.

답 ④

다른 풀이 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$라 하면 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$이므로

$a_{n+1}=\frac{95}{100}a_n+50$에서 $\quad\alpha=\frac{95}{100}\alpha+50$

$\frac{5}{100}\alpha=50\qquad\therefore\ \alpha=1000$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=1000$이므로 구하는 최소 높이는 $10\,\mathrm{m}$이다.

일품 BOX

첫째항이 1, 공비가 10인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합

분모 중에서 밑이 가장 큰 거듭제곱으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

$\dfrac{50}{1-\frac{95}{100}}=1000$

최소 높이를 $h\,\mathrm{m}$라 하면

$10\cdot10\cdot h=1000$

$\therefore\ h=10$

041 ㄱ. $b_n=1+10+10^2+\cdots+10^{n-1}=\dfrac{1\cdot(10^n-1)}{10-1}$

$$=\frac{10^n-1}{9}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{10^{n+1}-1}{9}}{\frac{10^n-1}{9}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10^{n+1}-1}{10^n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10^n}}$$

$$=10$$

ㄴ. $c_n=\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10^2}+\cdots+\dfrac{1}{10^n}$

$$+\frac{2}{10^{n+1}}+\frac{2}{10^{n+2}}+\cdots+\frac{2}{10^{2n}}$$

$$=\left(1+\frac{2}{10^n}\right)\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{10^n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{2}{10^n}\right)\cdot\frac{\frac{1}{10}\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{1}{9}\left(1+\frac{2}{10^n}\right)\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{9}\left(1+\frac{2}{10^n}\right)\left(1-\frac{1}{10^n}\right)=\frac{1}{9}$$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{10^n-1}{9}=\infty$

ㄴ에서 $\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{1}{9}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{b_n}=0$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

042 $a_1=3$이고,

$a_1a_2=2$에서 $\quad a_2=\frac{1}{a_1}\cdot2=\frac{1}{3}\cdot2$

$a_2a_3=2^2$에서 $\quad a_3=\frac{1}{a_2}\cdot2^2=3\cdot2$

$a_3a_4=2^3$에서 $\quad a_4=\frac{1}{a_3}\cdot2^3=\frac{1}{3}\cdot2^2$

$a_4a_5=2^4$에서 $\quad a_5=\frac{1}{a_4}\cdot2^4=3\cdot2^2$

$a_5a_6=2^5$에서 $\quad a_6=\frac{1}{a_5}\cdot2^5=\frac{1}{3}\cdot2^3$

$a_6a_7=2^6$에서 $\quad a_7=\frac{1}{a_6}\cdot2^6=3\cdot2^3$

$\vdots$

즉 $a_{2n-1}=3\cdot2^{n-1}$, $a_{2n}=\frac{1}{3}\cdot2^n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}(3\cdot 2^{k-1})$$
$$=3\cdot\frac{2^n-1}{2-1}=3(2^n-1)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}}{a_{2n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3(2^n-1)}{\frac{1}{3}\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}9\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$
$$=9$$

답 9

043 ㄱ. $-1<r<1$이면 $-1<-r<1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{n-1}=0,\quad \lim_{n\to\infty}(-r)^n=0$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+(-r)^n}{1+r^{n-1}}=\frac{0+0}{1+0}=0$$

ㄴ. $r=1$이면

$$a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}=\begin{cases}0 & (n\text{이 홀수})\\ 1 & (n\text{이 짝수})\end{cases}$$

일품 BOX: n이 홀수이면 $a_n=\frac{1-1}{2}=0$

n이 짝수이면 $a_n=\frac{1+1}{2}=1$

$b_n=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}$이라 하면 자연수 k에 대하여

$$\lim_{k\to\infty}b_{2k-1}=\lim_{k\to\infty}\frac{0+1+0+1+\cdots+0}{2k-1}$$
$$=\lim_{k\to\infty}\frac{k-1}{2k-1}=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{k\to\infty}b_{2k}=\lim_{k\to\infty}\frac{0+1+0+1+\cdots+0+1}{2k}$$
$$=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{2k}=\frac{1}{2}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{2}$$

ㄷ. $r>1$이면 $a_n=\begin{cases}0 & (n\text{이 홀수})\\ \frac{2r^n}{1+r^{n-1}} & (n\text{이 짝수})\end{cases}$

일품 BOX: n이 홀수이면 $(-r)^n=-r^n$ $\therefore a_n=0$

n이 짝수이면 $(-r)^n=r^n$ $\therefore a_n=\frac{2r^n}{1+r^{n-1}}$

$c_n=\frac{a_n}{n}$이라 하면 자연수 k에 대하여

$$\lim_{k\to\infty}c_{2k-1}=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{2k-1}}{2k-1}=\lim_{k\to\infty}\frac{0}{2k-1}=0$$
$$\lim_{k\to\infty}c_{2k}=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{2k}}{2k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k}\cdot\frac{2r^{2k}}{1+r^{2k-1}}$$
$$=\lim_{k\to\infty}\frac{r}{k\left(\frac{1}{r^{2k-1}}+1\right)}=0$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}c_n=0$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

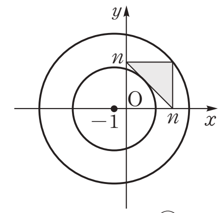
1등급 비밀노트

홀수 번째 항들의 일반항 a_{2n-1}과 짝수 번째 항들의 일반항 a_{2n}에 대하여 a_n의 극한값은 다음과 같다.

① $\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\alpha$ (α는 실수) ➡ $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$
➡ $\{a_n\}$은 수렴

② $\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}a_{2n}$ ➡ $\{a_n\}$은 발산

044 주어진 연립부등식이 나타내는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



$x^2+y^2+2x=k$라 하면

$(x+1)^2+y^2=k+1$ …… ㉠

일품 BOX: 중심이 $(-1,\ 0)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{k+1}$인 원이다.

(i) 원 ㉠이 점 $(n,\ n)$을 지날 때 k의 값이 최대이므로

$$(n+1)^2+n^2=k+1$$
$$\therefore k=2n^2+2n$$

(ii) 원 ㉠이 직선 $y=-x+n$과 접할 때 k의 값이 최소이다.

이때 원 ㉠의 반지름의 길이는 점 $(-1,\ 0)$과 직선 $y=-x+n$, 즉 $x+y-n=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{k+1}=\frac{|-1-n|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{n+1}{\sqrt{2}}$$

양변을 제곱하면 $k+1=\frac{(n+1)^2}{2}$

$$\therefore k=\frac{n^2+2n-1}{2}$$

(i), (ii)에서

$$f(n)=2n^2+2n,\ g(n)=\frac{n^2+2n-1}{2}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n}{\frac{n^2+2n-1}{2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n}{n^2+2n-1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{4}{n}}{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}$$
$$=4$$

답 4

045 $$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{-n+2}+a\cdot 3^{n+1}}{3^{n-1}+3^{-n-2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{9}{3^{2n-1}}+9a}{1+\frac{1}{3\cdot 3^{2n}}}=9a$$
$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+3n}{(2n+3)(an-1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{3}{n}}{\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(a-\frac{1}{n}\right)}=\frac{4}{a}$$

따라서 $9a=\frac{4}{a}$에서

$$9a^2=4,\quad a^2=\frac{4}{9}$$
$$\therefore a=\frac{2}{3}\ (\because a>0)$$

답 ②

046 $\sqrt{x}=\frac{1}{n}x$에서 $\quad x=\frac{1}{n^2}x^2$

$x^2-n^2x=0, \quad x(x-n^2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=n^2$

$\therefore a_n=n^2\ (\because a_n>0)$

$\sqrt{x+1}=\frac{1}{n}x$에서 $\quad x+1=\frac{1}{n^2}x^2$

$x^2-n^2x-n^2=0$

$$\therefore x=\frac{n^2\pm\sqrt{n^4+4n^2}}{2}=\frac{n^2\pm n\sqrt{n^2+4}}{2}$$

$$\therefore b_n=\frac{n^2+n\sqrt{n^2+4}}{2}\ (\because b_n>0)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+n\sqrt{n^2+4}}{2}}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}{2}$$

$$=\frac{1+1}{2}=1$$

답 1

047 (i) $-1<x<1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}x^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-x+1}{x^n+1}=-x+1$$

즉 $-x+1=\frac{3}{2}$이므로 $\quad x=-\frac{1}{2}$

(ii) $x=1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-x+1}{x^n+1}=\frac{1}{2}$$

이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $x>1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}x^n=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-x+1}{x^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x-\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}}$$

$$=x$$

$\therefore x=\frac{3}{2}$

이상에서 $\quad x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

따라서 구하는 모든 x의 값의 합은

$-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$

답 ②

048 (i) $0<x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$f(x)=-x$

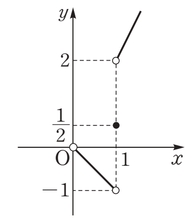
(ii) $x=1$일 때,

$$f(1)=\frac{2-1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(iii) $x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x-\left(\frac{1}{x}\right)^{2n-1}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}$$

$$=2x$$



이상에서 $x>0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$g(x)=-x^2-2x+k$

$=-(x+1)^2+k+1$

이고, $y=g(x)$의 그래프가 $y=f(x)$의 그래프와 만나지 않도록 하는 k의 값이 최대일 때는

$y=g(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지날 때이므로

$g(1)=k-3=2$

$\therefore k=5$

답 5

일품 BOX

함수 $y=g(x)$의 그래프는 점 $(-1,\ k+1)$을 꼭짓점으로 하는 위로 볼록한 포물선이다.

049 선분 P_nP_{n+1}의 중점은 $P_{n+2}\left(\frac{x_n+x_{n+1}}{2}\right)$이므로

$$x_{n+2}=\frac{x_n+x_{n+1}}{2}$$

즉 $2x_{n+2}=x_n+x_{n+1}$에서

$$x_{n+2}-x_{n+1}=-\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_n)$$

수열 $\{a_n\}$이
$a_{n+1}=ka_n$
을 만족시키면 $\{a_n\}$은 공비가 k인 등비수열이다.

따라서 수열 $\{x_{n+1}-x_n\}$은 첫째항이 $x_2-x_1=50$, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$x_{n+1}-x_n=50\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore x_{n+1}=x_n+50\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

위의 식의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$x_2=x_1+50$$
$$x_3=x_2+50\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^1$$
$$x_4=x_3+50\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\vdots$$
$$+\big)\ x_n=x_{n-1}+50\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$x_n=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}50\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$x_1=0$

$$=\frac{50\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{100}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{100}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{100}{3}$$

답 ④

02 급수 본책 16쪽

050 ㄱ. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$

$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$

따라서 주어진 급수는 양의 무한대로 발산한다.

ㄴ. 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_{2n-1}=1,\ S_{2n}=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty} S_{2n}=1$$

따라서 주어진 급수는 1에 수렴한다.

ㄷ. 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=-\frac{n-1}{n}+\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

따라서 주어진 급수는 1에 수렴한다.

이상에서 수렴하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

051 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\log_4\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}=\log_4\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$
$$=\log_4\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)$$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\log_4\left(\frac{k}{k+1}\cdot\frac{k+2}{k+1}\right)$$
$$=\log_4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)+\log_4\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)$$
$$+\cdots+\log_4\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$=\log_4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$=\log_4\frac{n+2}{2(n+1)}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\log_4\frac{n+2}{2(n+1)}$$
$$=\log_4\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

일품 BOX

홀수 번째 항까지의 부분합 S_{2n-1}과 짝수 번째 항까지의 부분합 S_{2n}에 대하여
① $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty} S_{2n}=\alpha$
➡ $\lim_{n\to\infty} S_n=\alpha$
(단, α는 실수)
② $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty} S_{2n}$
➡ $\lim_{n\to\infty} S_n$은 존재하지 않는다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구한다. 이때 극한값이 0이 아니면 주어진 급수는 발산한다.
(ii) $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$를 구한다.
(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} S_n$을 구한다.

$f(n)>0$이고, $\lim_{n\to\infty} f(n)=\alpha>0$이면
$\lim_{n\to\infty}\{\log f(n)\}$
$=\log\{\lim_{n\to\infty} f(n)\}$

$\log_4\frac{1}{2}=\log_{2^2}2^{-1}$
$=-\frac{1}{2}$

052 $a_n=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

이므로

$$\frac{4(n+1)}{a_n}=\frac{12(n+1)}{n(n+1)(n+2)}=\frac{12}{n(n+2)}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{4(k+1)}{a_k}$$
$$=12\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$$
$$=6\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=6\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=6\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(n+1)}{a_n}=\lim_{n\to\infty}6\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=6\cdot\frac{3}{2}=9$$

답 9

053 ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄴ. 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{2n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1$$

따라서 주어진 급수는 1에 수렴한다.

ㄷ. 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$
$$+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$=\sqrt{n+1}-1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

이상에서 수렴하는 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

054 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an^2+3}{9n^2+3n-2}$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+3}{9n^2+3n-2}=0$$

$$\frac{a}{9}=0 \qquad \therefore a=0$$

$a=0$을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}b&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2+3n-2}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{(3k-1)(3k+2)}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore 10(a+b)=10\left(0+\frac{1}{2}\right)=5$$

답 5

055 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\quad\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}a_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{1}{2}\right)$이 수렴하면 $\quad\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{1}{2}\right)=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$$

ㄷ. [반례] 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, 0, $\cdots$

$\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, 1, $\cdots$

이면 $a_nb_n=0$이므로 $\quad\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=0$

즉 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이지만 $\lim_{n\to\infty}b_n\neq0$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

056 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{3n-1}(\sqrt{3})^n$

$$\begin{aligned}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{3n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n-1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\\&=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

답 ②

일품 BOX

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$이 수렴하면

$a=0$ 또는 $-1<r<1$

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

① $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$

② $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n$

$\sum_{n=1}^{\infty}r^{n+1}$은 첫째항이 r^2, 공비가 r인 등비급수이다.

$r=-\frac{1}{2}$이면 $\frac{1-2r}{2}=1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-2r}{2}\right)^n$은 발산한다.

057 $a_n=\left(\frac{x}{4}\right)^n(x-3)^{n-1}=\frac{x}{4}\left\{\frac{x(x-3)}{4}\right\}^{n-1}$에서

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하려면

$$\frac{x}{4}=0 \text{ 또는 } -1<\frac{x(x-3)}{4}<1$$

이어야 한다.

(i) $\frac{x}{4}=0$에서 $\quad x=0$

(ii) $-1<\frac{x(x-3)}{4}$에서 $\quad x^2-3x+4>0$

$$\therefore \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$$

따라서 위의 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(iii) $\frac{x(x-3)}{4}<1$에서 $\quad x^2-3x-4<0$

$$(x+1)(x-4)<0 \qquad \therefore -1<x<4$$

이상에서 $\quad -1<x<4$

따라서 주어진 급수가 수렴하도록 하는 정수 x는 0, 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$$0+1+2+3=6$$

답 6

058 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 수렴하므로 $\quad -1<r<1$

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}r^{n+1}=r\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}r^{n+1}$은 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}r^{2n}$은 공비가 r^2인 등비급수이다.

이때 $-1<r<1$에서 $\quad 0\le r^2<1$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}r^{2n}$은 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-2r}{2}\right)^n$은 공비가 $\frac{1-2r}{2}$인 등비급수이다.

이때 $-1<r<1$이므로 $\quad -1<1-2r<3$

$$\therefore -\frac{1}{2}<\frac{1-2r}{2}<\frac{3}{2}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-2r}{2}\right)^n$은 반드시 수렴한다고 할 수 없다.

이상에서 반드시 수렴하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

059 $3a_n+2b_n=c_n$이라 하면 $\quad b_n=\frac{c_n-3a_n}{2}$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=4$, $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=30$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}b_n&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n-3a_n}{2}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}c_n-\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\\&=\frac{1}{2}\cdot30-\frac{3}{2}\cdot4=9\end{aligned}$$

답 9

060 $\dfrac{5-2}{10}+\dfrac{5^2-2^2}{10^2}+\dfrac{5^3-2^3}{10^3}+\cdots$

$=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots\right)-\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{5^3}+\cdots\right)$

$=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}$

$=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ 답 ①

061 ㄱ. $a_n+b_n=c_n$이라 하면

$b_n=c_n-a_n$

이때 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=\beta$이므로

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$

$=\beta-\alpha$

ㄴ. [반례] $a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$, $b_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$이면

$\alpha=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2,$

$\beta=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}$

이때 $a_nb_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$이므로

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{6}}=\dfrac{6}{5}$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n\neq\alpha\beta$

ㄷ. [반례] $a_n=2^n$, $b_n=4^n$이면

$\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{2^n}{4^n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

따라서 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$은 수렴하지만 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$은 모두 발산한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

062 $0.2\dot{6}=0.2+0.06+0.006+0.0006+\cdots$

첫째항이 0.06, 공비가 0.1인 등비급수

$=0.2+\dfrac{0.06}{1-0.1}$

$=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{15}=\dfrac{4}{15}$

$0.1\dot{3}=0.1+0.03+0.003+0.0003+\cdots$

첫째항이 0.03, 공비가 0.1인 등비급수

$=0.1+\dfrac{0.03}{1-0.1}$

$=\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{30}=\dfrac{2}{15}$

첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\dfrac{4}{15}r=\dfrac{2}{15}\qquad \therefore r=\dfrac{1}{2}$

제2항이 $\dfrac{4}{15}$이므로

$\dfrac{1}{2}a=\dfrac{4}{15}\qquad \therefore a=\dfrac{8}{15}$

따라서 구하는 등비급수의 합은

$\dfrac{\frac{8}{15}}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{16}{15}=1.0\dot{6}$ 답 ⑤

063 $P=\dfrac{1}{10+\dfrac{1}{0.1+0.1+0.1+\cdots}}$에서

$0.1+0.1+0.1+\cdots$은 양의 무한대로 발산하므로

공비가 1인 등비급수이므로 발산한다.

$P=\dfrac{1}{10+0}=\dfrac{1}{10}$

$Q=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{0.\dot{1}}}$에서

$0.\dot{1}=0.1+0.01+0.001+\cdots=\dfrac{0.1}{1-0.1}=\dfrac{1}{9}$

이므로 $Q=\dfrac{1}{1+9}=\dfrac{1}{10}$

$\therefore \dfrac{1}{PQ}=\dfrac{1}{\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}}=100$ 답 100

064 $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=7$, $a_4=5$, $a_5=1$, $\cdots$이므로

$n=1$이면 $7^1+4=11$이므로 $a_1=1$
$n=2$이면 $7^2+4=53$이므로 $a_2=3$
$n=3$이면 $7^3+4=347$이므로 $a_3=7$
$n=4$이면 $7^4+4=2405$이므로 $a_4=5$
$n=5$이면 $7^5+4=16811$이므로 $a_5=1$
⋮
따라서 수열 $\{a_n\}$은 1, 3, 7, 5가 이 순서대로 반복된다.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{10^n}=\dfrac{1}{10^1}+\dfrac{3}{10^2}+\dfrac{7}{10^3}+\dfrac{5}{10^4}+\dfrac{1}{10^5}+\cdots$

$=0.1+0.03+0.007+0.0005+0.00001+\cdots$

$=0.\dot{1}37\dot{5}$ 답 ②

065 $\overline{\mathrm{PP_1}}=\overline{\mathrm{OP}}\sin 60°=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{P_1P_2}}=\overline{\mathrm{PP_1}}\cos 60°=\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{\mathrm{P_2P_3}}=\overline{\mathrm{P_1P_2}}\cos 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

⋮

$\therefore \overline{\mathrm{PP_1}}+\overline{\mathrm{P_1P_2}}+\overline{\mathrm{P_2P_3}}+\cdots=\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\cdots$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}$

답 ①

066 정삼각형 $\mathrm{OA_1B_1}$의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot2^2=\sqrt{3}$이므로

$S_1=\sqrt{3}$

이때 $\overline{\mathrm{OA_1}}=2$, $\overline{\mathrm{OA_2}}=\overline{\mathrm{OA_1}}\sin 60°=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$에서 이웃한 두 정삼각형의 닮음비가 $2:\sqrt{3}$이므로 넓이의

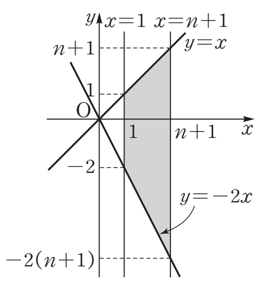
비는 $4:3$이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\sqrt{3}$, 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\sqrt{3}}{1-\frac{3}{4}} = 4\sqrt{3}$$

답 ④

067 네 직선 $x=1$, $x=n+1$, $y=x$, $y=-2x$로 둘러싸인 사각형은 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



$$\therefore S_n = \frac{1}{2}\{3+3(n+1)\}\cdot n = \frac{3n(n+2)}{2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{30}{S_n}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{30\cdot 2}{3n(n+2)}$$
$$= 10 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$
$$= 10 \lim_{n\to\infty} \left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$= 10 \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$= 10\cdot\frac{3}{2} = 15$$

답 15

068 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(3^n+1)(3^{n+1}+1)}$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{(3^k+1)(3^{k+1}+1)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^k+1} - \frac{1}{3^{k+1}+1}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3^1+1}-\frac{1}{3^2+1}\right) + \left(\frac{1}{3^2+1}-\frac{1}{3^3+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{3^n+1}-\frac{1}{3^{n+1}+1}\right)\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3^{n+1}+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

답 ①

일품 BOX

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은
$a_n = a+(n-1)d$

069 주어진 수열은 첫째항이 1, 제$(n+2)$항이 5인 등차수열이므로

$$5 = 1+(n+1)d_n \qquad \therefore d_n = \frac{4}{n+1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} d_n d_{n+1}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n+1}\cdot\frac{4}{n+2}\right)$$
$$= 16 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$= 16 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$= 16 \lim_{n\to\infty} \left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$= 16 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$= 16\cdot\frac{1}{2} = 8$$

답 8

070 급수 $a_1+a_2+a_3+\cdots$이 -4에 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -4$$

또 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}+a_n^2}{S_n} = \frac{-4+0}{-4} = 1$$

답 1

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n^2$
$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} a_n$
$= 0\cdot 0 = 0$

071 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 - 2n^2}{na_n+2n^2-3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{n}\right)^2 - 2}{\frac{a_n}{n}+2-\frac{3}{n}}$$
$$= \frac{-2}{2} = -1$$

답 ②

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n = \infty$
이므로
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$

072 주어진 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_n - \frac{n^3}{1^2+2^2+\cdots+n^2}\right) = 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6n^3}{2n^3+3n^2+n}$$
$$= 3$$

답 3

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$
은 수렴한다.

073 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(-1<r<1)$라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=3$에서 $\frac{a}{1-r}=3$ …… ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cdot(-1)^n\}=-1$에서 $\frac{-a}{1-(-r)}=-1$

$\therefore \frac{a}{1+r}=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{2}$, $r=\frac{1}{2}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}=a_2+a_4+a_6+\cdots$$
$$=ar+ar^3+ar^5+\cdots$$
$$=\frac{ar}{1-r^2}$$
$$=\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$$

답 ③

074 문제 이해 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{(-2)^a+100\}^n}{3^{4n}}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-2)^a+100}{81}\right\}^n$$ ● 30%

해결 과정 이 급수가 수렴하려면

$$-1<\frac{(-2)^a+100}{81}<1$$
$$-81<(-2)^a+100<81$$
$$-181<(-2)^a<-19$$
$\therefore a=5$ 또는 $a=7$ ● 50%

답 구하기 따라서 구하는 합은

$5+7=12$ ● 20%

답 12

075 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}\right)^n$이 수렴하므로

$-1<\frac{r}{2}<1$ $\quad\therefore -2<r<2$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r^2+2r+a}{10}\right)^n$은 공비가 $\frac{r^2+2r+a}{10}$인 등비급수

이므로 $f(r)=\frac{r^2+2r+a}{10}$라 하면

$$f(r)=\frac{1}{10}(r+1)^2+\frac{a-1}{10}$$

$-2<r<2$에서 $f(r)$의 최솟값은

$$f(-1)=\frac{a-1}{10}$$

또 $-2<r<2$에서

$$f(r)<f(2)=\frac{a+8}{10}$$

이때 $-1<f(r)<1$이어야 하므로

$$\frac{a-1}{10}>-1,\ \frac{a+8}{10}\le 1$$
$$\therefore -9<a\le 2$$

따라서 정수 a는 -8, -7, $\cdots$, 2의 11개이다. 답 ②

일품 BOX

• 수열 $\{a_n\cdot(-1)^n\}$은 첫째항이 $-a$, 공비가 $-r$인 등비수열이다.

• ㉠에서
$a+3r=3$ … ㉢
㉡에서
$a-r=1$ … ㉣
㉢−㉣을 하면
$4r=2$ $\therefore r=\frac{1}{2}$
$r=\frac{1}{2}$을 ㉣에 대입하면
$a=\frac{3}{2}$

• $(-2)^3=-8$,
$(-2)^5=-32$,
$(-2)^7=-128$,
$(-2)^9=-512$이므로
$a=5$ 또는 $a=7$

• a_n과 k는 모두 자연수이므로 $\frac{1}{n+3}<\frac{a_n}{k}$에서
$k<(n+3)a_n$
$\frac{a_n}{k}<\frac{1}{n}$에서 $na_n<k$
$\therefore na_n<k<(n+3)a_n$

자연수 a, b에 대하여 $a<k<b$를 만족시키는 자연수 k의 개수는
$b-a-1$

1등급 비밀노트

이차함수 $f(x)=a(x-m)^2+n\ (a>0)$에 대하여 $\alpha\le x\le\beta$일 때,
① $m>\beta$인 경우
➡ $f(x)$의 최댓값은 $f(\alpha)$, 최솟값은 $f(\beta)$이다.
② $\alpha\le m\le\beta$인 경우
➡ $f(x)$의 최솟값은 $f(m)=n$, 최댓값은 $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이다.
③ $m<\alpha$인 경우
➡ $f(x)$의 최댓값은 $f(\beta)$, 최솟값은 $f(\alpha)$이다.

076 ㄱ. $P(x)-S_3(x)=(x+x^2+x^3+\cdots)$
$$-(x^3+x^4+x^5+\cdots)$$
$$=x+x^2$$

ㄴ. $S_n\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}+\cdots$
$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

이므로 $S_n\left(\frac{1}{2}\right)\le 1$

ㄷ. $P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$, $S_n\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$에서

$$S_n\left(\frac{1}{2}\right)\ge S_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

이므로 $n>10$일 때,

$$S_n\left(\frac{1}{2}\right)\le S_{11}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\therefore P\left(\frac{1}{2}\right)-S_n\left(\frac{1}{2}\right)\ge P\left(\frac{1}{2}\right)-S_{11}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=1-\frac{1}{2^{10}}$$
$$>1-\frac{1}{1000}=\frac{999}{1000}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

077 $\frac{1}{n+3}<\frac{a_n}{k}<\frac{1}{n}$에서

$na_n<k<(n+3)a_n$

이므로 자연수 k의 개수는

$$(n+3)a_n-na_n-1=3a_n-1$$

따라서 $a_{n+1}=3a_n-1$이므로

$$a_{n+1}-\frac{1}{2}=3\left(a_n-\frac{1}{2}\right)$$

즉 수열 $\left\{a_n-\frac{1}{2}\right\}$은 첫째항이 $a_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, 공비가 3인 등비수열이므로

$$a_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}$$
$$\therefore a_n=\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}+\frac{1}{2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{20}{2a_n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{20}{3^{n-1}}$$
$$=\frac{20}{1-\frac{1}{3}}=30$$

답 30

078 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(-1<r<1)$라 하면
$a_n=9r^{n-1}$이므로

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k=\sum_{k=n+1}^{\infty}9r^{k-1}=\frac{9r^n}{1-r}$$

$a_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k$에서 $\quad 9r^{n-1}=\frac{9r^n}{1-r}$

이때 $r\neq0$이므로 $\quad 1=\frac{r}{1-r}$

$1-r=r \qquad \therefore r=\frac{1}{2}$

따라서 $a_n=9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}$$
$$=\frac{81}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{81}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{81}{2}\cdot\frac{4}{3}=54$$

답 ③

079 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}S_n$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}$$

또 $a_1=S_1=1$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}=a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}=S_{n+1}-a_1$$
$$=\frac{n+1}{2(n+1)-1}-1=-\frac{n}{2n+1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{2n+1}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2a_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+2\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$$
$$=\frac{1}{2}+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}$$

답 ①

1등급 비밀노트

(1) 수열 $\{a_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)이면
$\lim_{n\to\infty}a_{n+k}=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}a_{kn}=\alpha$ (단, k는 자연수)

(2) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$도 수렴하지만 일반적으로 그 값은 다르다.

일품 BOX

- $a_1=\sum_{k=2}^{\infty}a_k$, 즉 $\sum_{k=2}^{\infty}a_k=9$이므로 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$는 수렴한다.
- 첫째항이 $9r^n$, 공비가 r인 등비급수이다.
- $r=0$이면 수열 $\{a_n\}$은 $9,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots$
  $a_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k$의 n에 1을 대입하면
  $a_1=\sum_{k=2}^{\infty}a_k=0$
  이므로 등식이 성립하지 않는다.

모든 자연수 n에 대하여 $0<a_n\le b_n$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$도 발산한다.

080 수열 $\{a_n\}$은
$1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ \cdots$
이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{2}{3^6}+\cdots$$
$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^5}+\cdots\right)$$
$$+\left(\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\frac{2}{3^6}+\cdots\right)$$
$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}+\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{9}}$$
$$=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$$

답 ①

081 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 r, s라 하자.

ㄱ. 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 각 항이 양수이고, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 각각 수렴하므로
$0<r<1,\ 0<s<1$
이때 수열 $\{a_nb_n\}$은 공비가 rs인 등비수열이고
$0<rs<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$은 수렴한다.

ㄴ. [반례] $r=\frac{1}{2}$, $s=2$라 하면 수열 $\{a_nb_n\}$은 공비가 1인 등비수열이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$은 발산하지만 수열 $\{a_n\}$은 0에 수렴한다.

ㄷ. 주어진 명제의 대우는
'$\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이고 $\lim_{n\to\infty}b_n\neq0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$은 발산한다.'
이다. $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$, $\lim_{n\to\infty}b_n\neq0$에서
$r\ge1,\ s\ge1$
이때 수열 $\{a_nb_n\}$은 공비가 rs인 등비수열이고
$rs\ge1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$은 발산한다.
따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

082 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=S$라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{S}{4}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$은 수렴한다.

ㄴ. $\frac{2}{2n-1}>\frac{2}{2n}=\frac{1}{n}$이고 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$이 발산하므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}$도 발산한다.

ㄷ. $\frac{n^2+n}{n^3}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n}$이고 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$이 발산하므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n}{n^3}$도 발산한다.

이상에서 발산하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

083 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=B$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)=5$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3b_n)=3$

에서

$A-2B=5$, $A-3B=3$

위의 식을 연립하여 풀면

$A=9$, $B=2$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=A+B=11$

답 11

084 문제 이해 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 $S_{n-1}=4a_n$

$n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=4a_{n+1}-4a_n$

이므로

$a_{n+1}=\frac{5}{4}a_n$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제2항부터 공비가 $\frac{5}{4}$인 등비수열이다.

● 30%

해결 과정 또 $a_1=1$, $4a_2=a_1$이므로 $a_2=\frac{1}{4}$

따라서 수열 $\{a_n\}$이

$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{4},\ \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2,\ \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^3,\ \cdots$

이므로 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은

$1,\ 4,\ 4\cdot\frac{4}{5},\ 4\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2,\ 4\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3,\ \cdots$

● 30%

답 구하기 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9a_n+a_{2n}}{a_na_{2n}}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{a_{2n}}+\frac{1}{a_n}\right)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{a_{2n}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$

$=9\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n}}+\frac{1}{a_1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{a_n}$

$=9\cdot\frac{4}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}+1+\frac{4}{1-\frac{4}{5}}$

$=100+1+20=121$

● 40%

답 121

일품 BOX

$a_1=2$, $a_2=5$, $a_3=1$, $a_4=5$, $a_5=1$, $\cdots$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)$
$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-2\sum_{n=1}^{\infty}b_n$
$=A-2B$

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\left(\frac{4}{5}\right)^n$

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 일반항은
$\frac{1}{a_1}=1$,
$\frac{1}{a_n}=4\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}$ $(n\geq2)$

점 P_n은 제1사분면 위의 점이므로
$x_p>0$, $y_p>0$
점 Q_n은 제4사분면 위의 점이므로
$x_q>0$, $y_q<0$

첫째항이 $\frac{1}{a_2}=4$, 공비가 $\left(\frac{4}{5}\right)^2$인 등비급수이다.

085 $\frac{83}{330}=0.2515151\cdots$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\frac{2}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots$

$=1+\left(\frac{5}{2^2}+\frac{5}{2^4}+\frac{5}{2^6}+\cdots\right)$
$+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\cdots\right)$

$=1+\frac{\frac{5}{4}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}}$

$=1+\frac{5}{3}+\frac{1}{6}=\frac{17}{6}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12a_n}{2^n}=12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=12\cdot\frac{17}{6}=34$

답 34

086 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 x좌표는

$\overline{\mathrm{OP}_1}-\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}\cos60°-\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}\cos60°+\overline{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4}$
$-\overline{\mathrm{P}_4\mathrm{P}_5}\cos60°-\overline{\mathrm{P}_5\mathrm{P}_6}\cos60°+\overline{\mathrm{P}_6\mathrm{P}_7}-\cdots$

$=1-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}-\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{4}{5}\right)^3-\left(\frac{4}{5}\right)^4\cdot\frac{1}{2}$
$-\left(\frac{4}{5}\right)^5\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{4}{5}\right)^6-\cdots$

$=\left\{1+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{5}\right)^6+\cdots\right\}-\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^4+\cdots\right\}$
$-\frac{1}{2}\cdot\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^5+\cdots\right\}$

$=\frac{1}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^3}-\frac{\frac{2}{5}}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^3}-\frac{\frac{8}{25}}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^3}$

$=\frac{35}{61}$

답 ③

1등급 비밀노트

양수와 음수가 번갈아 가며 나타나는 급수의 합은 등비급수가 되도록 적당한 항끼리 묶어서 그 합을 각각 계산한다.

087 두 점 P_n, Q_n이 한없이 가까워지는 점을 각각 $\mathrm{P}(x_p,\ y_p)$, $\mathrm{Q}(x_q,\ y_q)$라 하자.

(i) $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OP}_1}+\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}+\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}+\cdots$

$=\sqrt{5}+\sqrt{5}\cdot\frac{3}{4}+\sqrt{5}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots$

$=\frac{\sqrt{5}}{1-\frac{3}{4}}=4\sqrt{5}$

이때 $\overline{\mathrm{OP}}$와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 α라 하면

$x_p=\overline{\mathrm{OP}}\cos\alpha=4\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=4$

$y_p=\overline{\mathrm{OP}}\sin\alpha=4\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=8$

따라서 점 P의 좌표는 $(4,\ 8)$

(ii) $\overline{OQ}=\overline{OQ_1}+\overline{Q_1Q_2}+\overline{Q_2Q_3}+\cdots$

$$=\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\frac{5}{6}+\sqrt{2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+\cdots$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{5}{6}}=6\sqrt{2}$$

이때 $\overline{OQ}$와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 β라 하면

$$x_q=\overline{OQ}\cos\beta=6\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=6$$

$$y_q=-\overline{OQ}\sin\beta=-6\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-6$$

따라서 점 Q의 좌표는 $(6,\ -6)$

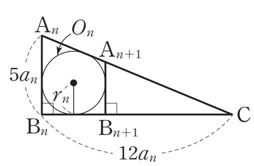
(i), (ii)에서 $\quad$ P$(4,\ 8)$, Q$(6,\ -6)$

따라서 점 M_n이 한없이 가까워지는 점을 M이라 하면 점 M은 $\overline{PQ}$의 중점이므로

$$\mathrm{M}\left(\frac{4+6}{2},\ \frac{8-6}{2}\right),\ \text{즉 } \mathrm{M}(5,\ 1)$$

답 ③

088 원 O_n의 반지름의 길이를 r_n, $\overline{A_nB_n}=5a_n$, $\overline{B_nC}=12a_n$이라 하면 $\overline{A_nC}=13a_n$이므로



$(5a_n-r_n)+(12a_n-r_n)=13a_n$

원 O_n의 중심은 삼각형 A_nB_nC의 내심이다.

$17a_n-2r_n=13a_n$

$\therefore r_n=2a_n$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 $\overline{B_{n+1}C}=\overline{B_nC}-\overline{B_nB_{n+1}}$이므로

$12a_{n+1}=12a_n-2r_n=12a_n-4a_n=8a_n$

$\therefore a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$

수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이다.

$a_1=1$이므로 $\quad a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

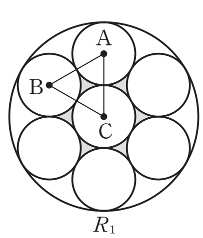
이것을 ㉠에 대입하면 $\quad r_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$\therefore l_n=2\pi r_n=4\pi\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n=\frac{4\pi}{1-\frac{2}{3}}=12\pi$$

답 ⑤

089 오른쪽 그림과 같이 그림 R_1에서 서로 이웃한 세 원의 중심을 각각 A, B, C라 하자.



세 원으로 둘러싸인 부분의 넓이를 T_1이라 하면 T_1은 삼각형 ABC의 넓이에서 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 60°인 부채꼴 3개의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$T_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2-3\cdot\pi\cdot 1^2\cdot\frac{60°}{360°}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore S_1=6T_1=6\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)=6\sqrt{3}-3\pi$$

한편 그림 R_n에서 제일 가운데 색칠된 도형과 그림 R_{n+1}에서 제일 가운데 색칠된 도형의 닮음비는 $3:1$이므로 넓이의 비는 $9:1$이다.

R_n에서 그려 넣는 7개의 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하면
$r_n : r_{n+1}=3:1$

$$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}(6\sqrt{3}-3\pi)\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}$$

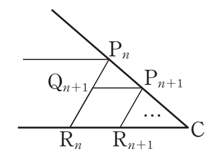
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{6\sqrt{3}-3\pi}{1-\frac{1}{9}}=\frac{54\sqrt{3}-27\pi}{8}$$

따라서 $p=54$, $q=27$이므로

$p+q=81$

답 81

090 $\overline{P_nR_n}=a_n$이라 하면



$\overline{Q_{n+1}R_n}=\overline{R_nR_{n+1}}=\overline{Q_{n+1}P_{n+1}}$
$=\overline{P_{n+1}R_{n+1}}=a_{n+1}$

$\therefore \overline{P_nQ_{n+1}}=a_n-a_{n+1}$

이때 △ABC와 $\triangle P_nQ_{n+1}P_{n+1}$은 닮음이므로

$(a_n-a_{n+1}):a_{n+1}=2:3$

$\therefore a_{n+1}=\frac{3}{5}a_n$

따라서 n번째 마름모의 넓이를 S_n이라 하면

$S_{n+1}=\frac{9}{25}S_n$

한편 △ABC와 $\triangle AQ_1P_1$은 닮음이므로

$(2-a_1):a_1=2:3 \qquad \therefore a_1=\frac{6}{5}$

$$\therefore S_1=\left(\frac{6}{5}\right)^2\cdot\sin 60°=\frac{36}{25}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{18\sqrt{3}}{25}$$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{18\sqrt{3}}{25}$, 공비가 $\frac{9}{25}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{\frac{18\sqrt{3}}{25}}{1-\frac{9}{25}}=\frac{9\sqrt{3}}{8}$$

답 ②

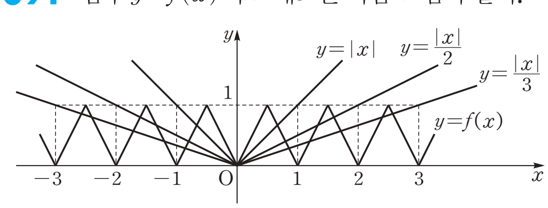
참고 닮음인 두 도형의 닮음비가 $m:n$일 때, 넓이의 비는 $m^2:n^2$이다. 즉 만들어지는 모든 마름모는 닮음이고,

$a_{n+1}:a_n=\frac{3}{5}a_n:a_n=3:5$

이므로

$S_{n+1}:S_n=3^2:5^2=9:25$

091 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



위의 그림에서

$a_1=3$, $a_2=7$, $a_3=11$, $\cdots$

이므로 $\quad a_n=4n-1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{180}{a_n a_{n+1}}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{180}{(4n-1)(4n+3)}$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{180}{(4k-1)(4k+3)}$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 45\left(\frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k+3}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} 45\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)\right\}$

$= \lim_{n\to\infty} 45\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3}\right)$

$= 45 \cdot \frac{1}{3} = 15$ 답 15

092 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a^n-b^n)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a^n-b^n)=0$ …… ㉠

ㄱ. [반례] $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$일 때,

$\sum_{n=1}^{\infty}(a^n-b^n) = \sum_{n=1}^{\infty}a^n - \sum_{n=1}^{\infty}b^n$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$

$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

즉 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a^n-b^n)$은 수렴하지만 $\sum_{n=1}^{\infty}a^n=1$, $\sum_{n=1}^{\infty}b^n=\frac{1}{2}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a^n \neq \sum_{n=1}^{\infty}b^n$

ㄴ. $-1<a<1$이면 $\lim_{n\to\infty}a^n=0$

㉠에서 $a^n-b^n=c_n$으로 놓으면 $\lim_{n\to\infty}c_n=0$이고 $b^n=a^n-c_n$이므로

$\lim_{n\to\infty}b^n = \lim_{n\to\infty}(a^n-c_n)=0$

$\therefore -1<b<1$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a^n+b^n)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\lim_{n\to\infty}(a^n-b^n)+\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)$

$=\lim_{n\to\infty}(a^n-b^n+a^n+b^n)$

$=\lim_{n\to\infty}2a^n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a^n=0$

따라서 $-1<a<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a^n$도 수렴한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

일품 BOX

이차부등식이 항상 성립할 조건은 다음과 같다.
① $ax^2+bx+c>0$
$\Longleftrightarrow a>0,\ D<0$
② $ax^2+bx+c<0$
$\Longleftrightarrow a<0,\ D<0$
(단, $D=b^2-4ac$)

$\overline{P_nQ_n}=|a_n|$
$=8\cdot\left|-\frac{1}{4}\right|^{n-1}$,
$\overline{Q_nQ_{n+1}}=1$

093 주어진 등비급수가 수렴하려면

$-1<\frac{\sqrt{30}x}{x^2+a}<1$

이때 $x^2+a>0$이므로

$-(x^2+a)<\sqrt{30}x<x^2+a$

(i) $-(x^2+a)<\sqrt{30}x$에서

$x^2+\sqrt{30}x+a>0$

위의 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+\sqrt{30}x+a=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=30-4a<0$ $\quad\therefore a>\frac{15}{2}$

(ii) $\sqrt{30}x<x^2+a$에서

$x^2-\sqrt{30}x+a>0$

위의 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-\sqrt{30}x+a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=30-4a<0$ $\quad\therefore a>\frac{15}{2}$

(i), (ii)에서 $a>\frac{15}{2}$

따라서 한 자리 자연수 a는 8, 9이므로 구하는 합은

$8+9=17$ 답 17

094 $\frac{203}{999}$을 순환소수로 나타내면

$\frac{203}{999}=0.203203203\cdots=0.\dot{2}0\dot{3}$

이때 자연수 n에 대하여 소수점 아래 $(3n-2)$째 자리의 수는 2, $(3n-1)$째 자리의 수는 0, $3n$째 자리의 수는 3이므로 $22=3\cdot8-2$에서 $a=2$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a+1}{a^2}\right)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

$=\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=4$ 답 4

095 $a_n=8\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$이므로

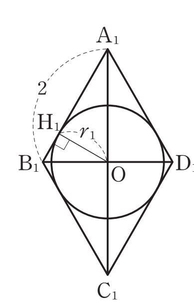
$S_n=\frac{1}{2}\overline{P_nQ_n}\cdot\overline{Q_nQ_{n+1}}=\frac{1}{2}\cdot8\cdot\left|-\frac{1}{4}\right|^{n-1}\cdot1=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{4}{1-\frac{1}{4}}=\frac{16}{3}$

따라서 $p=3$, $q=16$이므로

$p+q=19$ 답 19

096 마름모 $A_1B_1C_1D_1$의 두 대각선의 교점을 O, 마름모 $A_nB_nC_nD_n$과 원 O_n의 한 접점을 H_n, 원 O_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하자.



$\triangle A_1B_1O$에서

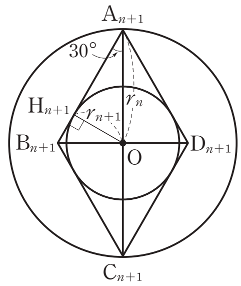
$\overline{B_1O}=2\cos 60°=2\cdot\frac{1}{2}=1$

즉 $\triangle B_1OH_1$에서

$$r_1=\overline{OH_1}=\overline{OB_1}\sin 60°=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore S_1=\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}\pi$$

또 $\triangle A_{n+1}OH_{n+1}$에서 $\overline{OH_{n+1}}=\overline{OA_{n+1}}\sin 30°$이므로



$$r_{n+1}=r_n\sin 30°=\frac{r_n}{2}$$

$$\therefore S_{n+1}=\pi r_{n+1}^2=\pi\left(\frac{r_n}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}r_n^2=\frac{1}{4}S_n$$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{3}{4}\pi$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{3}{4}\pi}{1-\frac{1}{4}}=\pi$$

답 ③

1등급 완성하기

▶ 본책 24쪽

097 문제 이해 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha\ (\alpha>0)$라 하면 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$ ● 30%

해결 과정 $a_{n+1}=\sqrt{8a_n+9}$에서 $a_{n+1}^2=8a_n+9$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}^2=\lim_{n\to\infty}(8a_n+9)$$

$$\alpha^2=8\alpha+9,\quad \alpha^2-8\alpha-9=0$$

$(\alpha+1)(\alpha-9)=0 \qquad \therefore \alpha=9\ (\because \alpha>0)$ ● 50%

답 구하기 따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=9$이므로

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{9}=3$ ● 20%

답 3

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\beta\ (\beta>0)$라 하면 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_n})^2=\lim_{n\to\infty}a_n$에서 $\beta^2=9 \quad \therefore \beta=3$

098 ㄱ. [반례] $a_n=n$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$

ㄴ. [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, ⋯

$\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, ⋯

이면 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모두 발산하지만

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$이므로 수열 $\{a_nb_n\}$은 수렴한다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\beta$라 하면

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)\}=\frac{1}{2}\{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)+\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)\}=\frac{1}{2}\{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\}=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

따라서 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모두 수렴한다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

나머지정리
다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(\alpha)$

099 $f(x)=(2n^2+n)x^2+(n+2)x-3$으로 놓으면

$$a_n=f(1)=2n^2+2n-1$$

$$b_n=f(3)=18n^2+12n+3$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{18n^2+12n+3}{2n^2+2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{18+\frac{12}{n}+\frac{3}{n^2}}{2+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}=9$$

답 9

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$, $N>0$일 때,
$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$

100 $a_n=3\cdot2^{n-1}$, $b_n=5\cdot8^{n-1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\log_{a_n}b_n=\lim_{n\to\infty}\log_{3\cdot2^{n-1}}(5\cdot8^{n-1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(5\cdot8^{n-1})}{\log(3\cdot2^{n-1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log5+(n-1)\log8}{\log3+(n-1)\log2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\log5}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\log8}{\frac{\log3}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\log2}=\frac{\log8}{\log2}=3$$

답 3

101 (i) $n=1$일 때, $a_1=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이므로 $[a_1]=2$

(ii) $n\geq2$일 때, $a_n=\sqrt{n^2+2^2}=\sqrt{n^2+4}$이고

$n<\sqrt{n^2+4}<\sqrt{n^2+2n+1}=n+1$

이므로 $[a_n]=n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{[a_1]+[a_2]+[a_3]+\cdots+[a_n]}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+2+3+\cdots+n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+2}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

답 ②

$2+2+3+\cdots+n$
$=1+1+2+3+\cdots+n$
$=1+\sum_{k=1}^{n}k$
$=1+\frac{n(n+1)}{2}$

102 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례대로 나열하면

$5,\ -2,\ 5,\ -2,\ 5,\ -2,\ \cdots$

(i) $n=2m$ (m은 자연수)일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$$
$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{2m}a_k$$
$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m}\left(\sum_{k=1}^{m}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{m}a_{2k}\right)$$
$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m}\left\{\sum_{k=1}^{m}5+\sum_{k=1}^{m}(-2)\right\}$$
$$=\lim_{m\to\infty}\frac{3m}{2m}=\frac{3}{2}$$

(ii) $n=2m-1$ (m은 자연수)일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$$
$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m-1}\sum_{k=1}^{2m-1}a_k$$
$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m-1}\left(\sum_{k=1}^{m}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{m-1}a_{2k}\right)$$
$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m-1}\left\{\sum_{k=1}^{m}5+\sum_{k=1}^{m-1}(-2)\right\}$$
$$=\lim_{m\to\infty}\frac{3m+2}{2m-1}=\frac{3}{2}$$

(i), (ii)에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{3}{2}$$

$\therefore$ (주어진 식) $=\lim_{n\to\infty}\frac{100}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$

$=100\cdot\frac{3}{2}=150$

답 150

일품 BOX

$a_1=5$

$a_1+a_2=3$에서

$a_2=-2$

$a_2+a_3=3$에서

$a_3=5$

$a_3+a_4=3$에서

$a_4=-2$

$\vdots$

$\sum_{k=1}^{m}5+\sum_{k=1}^{m}(-2)$
$=5m-2m=3m$

$\sum_{k=1}^{m}5+\sum_{k=1}^{m-1}(-2)$
$=5m-2(m-1)$
$=3m+2$

103 $\sqrt{n^2+4n+4}<\sqrt{n^2+6n+3}<\sqrt{n^2+6n+9}$

이므로

$\sqrt{(n+2)^2}<\sqrt{n^2+6n+3}<\sqrt{(n+3)^2}$

$\therefore n+2<\sqrt{n^2+6n+3}<n+3$

즉 $a_n=n+2$, $b_n=\sqrt{n^2+6n+3}-(n+2)$이므로

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+6n+3}-(n+2)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+6n+3-(n+2)^2}{\sqrt{n^2+6n+3}+n+2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{\sqrt{n^2+6n+3}+n+2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{6}{n}+\frac{3}{n^2}}+1+\frac{2}{n}}$$
$$=\frac{2}{1+1}=1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}b_n$$
$$=1\cdot1=1$$

답 ③

104 $a_n=4n-1$에서

$a_{2k}=4\cdot2k-1=8k-1$,

$a_{2k-1}=4(2k-1)-1=8k-5$

이므로

$$a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=\sum_{k=1}^{n}(8k-1)$$
$$=8\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n$$
$$=4n^2+3n$$
$$a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}(8k-5)$$
$$=8\cdot\frac{n(n+1)}{2}-5n$$
$$=4n^2-n$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}-\sqrt{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}})$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+3n}-\sqrt{4n^2-n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{4n^2+3n}+\sqrt{4n^2-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+\sqrt{4-\frac{1}{n}}}$$
$$=\frac{4}{2+2}=1$$

답 1

105 $\lim_{n\to\infty}na_n=3$에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+na_n+5}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\{(n^2+na_n+5)-n^2\}}{\sqrt{n^2+na_n+5}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(na_n+5)}{\sqrt{n^2+na_n+5}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+5}{\sqrt{1+\frac{a_n}{n}+\frac{5}{n^2}}+1}$$
$$=\frac{3+5}{1+1}=4$$

답 ④

106 주어진 부등식의 해는

$$\frac{2n-1}{n}<a_n<\frac{2n+1}{n}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n(a_n+3)=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}(a_n+3)$$
$$=2(2+3)=10$$

답 10

107 (i) $|x|>1$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(x^{2n}-1)}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x\cdot\left(1-\frac{1}{x^{2n}}\right)}{1+\frac{1}{x^{2n}}}$$

$$=x$$

(ii) $x=\pm1$일 때,

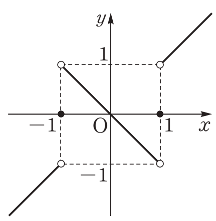
$\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=1$이므로 $\quad f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(x^{2n}-1)}{x^{2n}+1}=0$

(iii) $|x|<1$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(x^{2n}-1)}{x^{2n}+1}=-x$$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $-1<x<1$일 때,

$f(x)=-x$이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

ㄴ. [반례] $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{1}{2}$이면 $x_1<x_2$이지만

$f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$이므로

$f(x_2)<f(x_1)$

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점은 없으므로 방정식 $f(x)=1$은 실근을 갖지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

108 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2^{n+1}-3^n)(2^n+3^{n+1})}{4^n+9^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot4^n+6^{n+1}-6^n-3\cdot9^n}{4^n+9^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\frac{4}{9}\right)^n+6\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n-3}{\left(\frac{4}{9}\right)^n+1}$$

$$=-3$$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)-a_n\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-\lim_{n\to\infty}a_n$$

$$=-3-1=-4$$

답 -4

109 문제 이해 점 $\mathrm{P}_n(2^n,\ -1)$에서의 접선의 방정식은

$$2^n x-y=4^n+1$$

$$\therefore y=2^n x-4^n-1$$

● 30%

해결 과정 따라서 $\mathrm{A}_n(2^n+2^{-n},\ 0)$, $\mathrm{B}_n(0,\ -4^n-1)$이므로

$$S_n=\frac{1}{2}(2^n+2^{-n})(4^n+1)$$

$$=\frac{1}{2}(8^n+2^{n+1}+2^{-n})$$

● 30%

답 구하기 $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8^{n+1}+2^{n+2}+2^{-n-1}}{8^n+2^{n+1}+2^{-n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8+4\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^n}{1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{16}\right)^n}$$

$$=8$$

● 40%

답 8

110 $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$이므로

$$\left[\frac{3^4}{2^n}\right]+\left[\frac{3^4}{2^n}+\frac{1}{2}\right]=\left[2\cdot\frac{3^4}{2^n}\right]=\boxed{\left[\frac{3^4}{2^{n-1}}\right]}$$

급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{3^4}{2^n}+\dfrac{1}{2}\right]$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{3^4}{2^k}+\frac{1}{2}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{3^4}{2^{k-1}}\right]-\left[\frac{3^4}{2^k}\right]\right)$$

$$=\left([3^4]-\left[\frac{3^4}{2}\right]\right)+\left(\left[\frac{3^4}{2}\right]-\left[\frac{3^4}{2^2}\right]\right)$$

$$+\cdots+\left(\left[\frac{3^4}{2^{n-1}}\right]-\left[\frac{3^4}{2^n}\right]\right)$$

$$=\boxed{[3^4]-\left[\frac{3^4}{2^n}\right]}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3^4}{2^n}+\frac{1}{2}\right]=\lim_{n\to\infty}S_n=[3^4]=\boxed{81}$$

답 ⑤

111 $a_1=S_1=\dfrac{1\cdot3}{1\cdot3}=1$이고,

$$\lim_{n\to\infty}S_{n+1}=\lim_{n\to\infty}S_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(2n+1)}{n(n+2)}=4$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k+a_{k+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(S_n+S_{n+1}-a_1)$$

$$=\lim_{n\to\infty}S_n+\lim_{n\to\infty}S_{n+1}-a_1$$

$$=4+4-1=7$$

답 7

112 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}}{S_n\cdot S_{n+1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}}{S_k\cdot S_{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)\right.$$

$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)$$

일품 BOX

$\left[\dfrac{3^4}{2^n}\right]+\left[\dfrac{3^4}{2^n}+\dfrac{1}{2}\right]=\left[\dfrac{3^4}{2^{n-1}}\right]$ 이므로

$\left[\dfrac{3^4}{2^n}+\dfrac{1}{2}\right]=\left[\dfrac{3^4}{2^{n-1}}\right]-\left[\dfrac{3^4}{2^n}\right]$

$\sum\limits_{k=1}^{n}a_{k+1}=a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}=\sum\limits_{k=1}^{n+1}a_k-a_1$

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=r^2$

$S_{k+1}-S_k=a_{k+1}\ (k\ge1)$이므로

$\dfrac{a_{k+1}}{S_k\cdot S_{k+1}}=\dfrac{a_{k+1}}{S_{k+1}-S_k}\left(\dfrac{1}{S_k}-\dfrac{1}{S_{k+1}}\right)=\dfrac{1}{S_k}-\dfrac{1}{S_{k+1}}$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $S_1=a$이고

$$S_{n+1}=\frac{(n+1)(2\cdot a+nd)}{2}=\frac{(n+1)(dn+2a)}{2}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n+1)(dn+2a)}=0$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{S_n\cdot S_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)=\frac{1}{S_1}=\frac{1}{a}$$

따라서 $\frac{1}{a}=\frac{1}{4}$이므로 $a=4$ 답 4

113 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$라 하고 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$의 제$n$항까지의 부분합을 T_n이라 하면

$T_n=S_{n+1}-a_1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}(S_{n+1}-a_1)=\lim_{n\to\infty}S_{n+1}-a_1$$
$$=S-a_1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}=S-a_1$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$도 수렴한다.

ㄴ. [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, 0, …

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}=0+0+0+\cdots=0$$

그러나 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.

ㄷ. [반례] $a_n=(-1)^{n+1}$이면 $b_n=0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 수렴하지만 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

114 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$에서 $\frac{a}{1-r}=2$ …… ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=12$에서 $\frac{a^2}{1-r^2}=12$

$\therefore \frac{a^2}{(1+r)(1-r)}=12$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ r=-\frac{1}{2}$

따라서 수열 $\{a_n^3\}$은 첫째항이 $a^3=27$, 공비가 $r^3=-\frac{1}{8}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3=\frac{27}{1-\left(-\frac{1}{8}\right)}=24$$ 답 ③

115 $0<x<1$이므로

$$y=1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

$\therefore y>1$

$$z=1+\frac{2}{y}+\frac{3}{y^2}+\frac{4}{y^3}+\frac{5}{y^4}+\cdots \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $\frac{1}{y}$을 곱하면

$$\frac{z}{y}=\frac{1}{y}+\frac{2}{y^2}+\frac{3}{y^3}+\frac{4}{y^4}+\frac{5}{y^5}+\cdots \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠－㉡을 하면

$$\left(1-\frac{1}{y}\right)z=1+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{y^4}+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{y}}\ \left(\because 0<\frac{1}{y}<1\right)$$

$$\therefore z=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{y}\right)^2}$$

이때 $y=\frac{1}{1-x}$이므로

$$z=\frac{1}{\{1-(1-x)\}^2}=\frac{1}{x^2}$$

$\therefore x^2z=1$ 답 ④

116 해결 과정 등비급수 $\frac{x}{7}+\frac{x^2}{7^2}+\frac{x^3}{7^3}+\cdots$의 공비가 $\frac{x}{7}$이므로 수렴하려면

$$-1<\frac{x}{7}<1$$

$\therefore -7<x<7$ ● 30%

이 부등식을 만족시키는 정수 x의 최댓값은 6이므로

$m=6$ ● 20%

답 구하기 등비급수 $\frac{1}{6}-\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}-\cdots$은 첫째항이 $\frac{1}{6}$이고 공비가 $-\frac{1}{6}$이므로 구하는 합은

$$\frac{\frac{1}{6}}{1-\left(-\frac{1}{6}\right)}=\frac{1}{7}$$ ● 50%

답 $\frac{1}{7}$

117 $2^{n-1}a_n=b_n$이라 하면

$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=3n+5$

$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=S_n$이라 하면

$b_1=S_1=8$

$n\geq2$일 때,

$b_n=S_n-S_{n-1}=3n+5-\{3(n-1)+5\}=3$

따라서 $a_1=b_1=8$, $a_n=\frac{b_n}{2^{n-1}}=\frac{3}{2^{n-1}}$ $(n\geq2)$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{2^{n-1}}$$
$$=8+\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}}=11$$ 답 11

일품 BOX

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은 $\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$2\cdot\frac{a}{1+r}=12$

$a=6(1+r)$

$\therefore a-6r=6$ … ㉢

㉠에서 $a=2(1-r)$

$a+2r=2$ … ㉣

㉢－㉣을 하면

$-8r=4$

$\therefore r=-\frac{1}{2}$

$r=-\frac{1}{2}$을 ㉢에 대입하면 $a=3$

공비가 $\frac{1}{2}$이고 첫째항이 $\frac{3}{2}$인 등비급수

$0<x<1$에서

$-1<-x<0$

$0<1-x<1$

$\frac{1}{1-x}>1$

$\therefore y>1$

118 ㄱ. 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_{2n-1}=0$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} A_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이고,

$\lim_{n\to\infty} A_{2n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n} a_k=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이므로

$\lim_{n\to\infty} A_n=\lim_{n\to\infty} A_{2n}$

ㄷ. 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(0<r<1)$라 하면

$\lim_{n\to\infty} A_n=\dfrac{a_1}{1-r}$,

$\lim_{n\to\infty} B_n=\dfrac{a_1}{1-r^2}=\dfrac{a_1}{1-r}\cdot\dfrac{1}{1+r}$

이때 $\dfrac{1}{1+r}<1$이므로

$\dfrac{a_1}{1-r}\cdot\dfrac{1}{1+r}<\dfrac{a_1}{1-r}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} B_n<\lim_{n\to\infty} A_n$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

참고 ㄷ. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이므로

$\{a_{2n-1}\}$: $a_1,\ a_3,\ a_5,\ a_7,\ \cdots$

➡ $a_1,\ a_1r^2,\ a_1r^4,\ a_1r^6,\ \cdots$

따라서 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 a_1, 공비가 r^2인 등비수열이므로

$\lim_{n\to\infty} B_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}=\dfrac{a_1}{1-r^2}$

119 $\{a_n\}$: 1, 11, 111, 1111, 11111, $\cdots$

이므로 수열 $\{b_n\}$은 다음과 같다.

$\{b_n\}$: 1, 2, 0, 1, 2, 0, $\cdots$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{10^n}&=\frac{1}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{0}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{2}{10^5}\\&\quad+\frac{0}{10^6}+\frac{1}{10^7}+\frac{2}{10^8}+\frac{0}{10^9}+\cdots\\&=\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^7}+\cdots\right)\\&\quad+\left(\frac{2}{10^2}+\frac{2}{10^5}+\frac{2}{10^8}+\cdots\right)\\&=\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10^3}}+\frac{\frac{2}{10^2}}{1-\frac{1}{10^3}}\\&=\frac{1000}{999}\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{10^2}\right)\\&=\frac{40}{333}\end{aligned}$$

답 ③

120 $2^{2n}\cdot5^nx^2-(2^{2n+1}+3\cdot5^n)x+6=0$에서

$(4^nx-3)(5^nx-2)=0$

$\therefore x=\dfrac{3}{4^n}$ 또는 $x=\dfrac{2}{5^n}$

따라서 $l_n=\dfrac{3}{4^n}-\dfrac{2}{5^n}$이므로

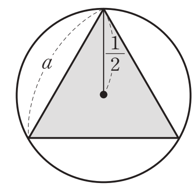
$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4^n}-\frac{2}{5^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^n}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}}-\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{5}}$$

$$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

답 $\dfrac{1}{2}$

121 반지름의 길이가 $\dfrac{1}{2}$인 원에 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이를 a라 하면



$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore S_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$

일품 BOX

원의 중심은 정삼각형의 무게중심과 일치하므로 원의 반지름의 길이는 정삼각형의 높이의 $\frac{2}{3}$이다.

한편 R_n에서 새로 만들어진 작은 원과 큰 원의 반지름의 길이를 각각 r_n, $2r_n$이라 하면 R_{n+1}에서 만들어진 작은 원의 반지름의 길이 r_{n+1}은

$r_{n+1}=2\cdot2r_n\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}r_n$

일품 BOX

R_n에서 만들어진 큰 원의 지름의 길이는

$2\cdot2r_n$

이므로 R_{n+1}에서 만들어진 작은 원의 지름의 길이는

$2\cdot2r_n\cdot\frac{1}{3}$

$\therefore r_{n+1}=2\cdot2r_n\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$

따라서 R_n에서 새로 색칠한 정삼각형과 R_{n+1}에서 새로 색칠한 정삼각형의 닮음비는

$r_n:r_{n+1}=r_n:\dfrac{2}{3}r_n=3:2$

이므로 넓이의 비는 $9:4$이다. 즉

$S_n=\dfrac{3\sqrt{3}}{16}+\dfrac{3\sqrt{3}}{16}\cdot\dfrac{4}{9}+\dfrac{3\sqrt{3}}{16}\cdot\left(\dfrac{4}{9}\right)^2+\cdots+\dfrac{3\sqrt{3}}{16}\cdot\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}$

이므로 S_n은 첫째항이 $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$, 공비가 $\dfrac{4}{9}$인 등비급수의 제n항까지의 부분합이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{16}}{1-\frac{4}{9}}=\dfrac{27\sqrt{3}}{80}$

답 $\dfrac{27\sqrt{3}}{80}$

122 전략 부채꼴 $\mathrm{P_0OP}_n$의 중심각의 크기를 θ_n이라 하고 θ_n과 θ_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

Step 1 부채꼴 $\mathrm{P_0OP}_n$의 중심각의 크기를 θ_n이라 하면

$\theta_{n+1}=\dfrac{2}{3}\theta_n+90°$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$\therefore \theta_{n+1}-270°=\dfrac{2}{3}(\theta_n-270°)$

Step 2 따라서 수열 $\{\theta_n-270°\}$는 첫째항이 $\theta_1-270°=90°-270°=-180°$, 공비가 $\dfrac{2}{3}$인 등비수열이므로

$\theta_n-270°=-180°\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore \theta_n=270°-180°\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\theta_n=270°$

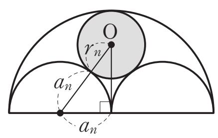
Step ❸ $S_n=\pi\cdot 1^2\cdot\dfrac{\theta_n}{360°}=\dfrac{\theta_n}{360°}\pi$이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\theta_n}{360°}\pi=\frac{3}{4}\pi$$

답 $\frac{3}{4}\pi$

123 전략 그림 R_n에서 새로 색칠한 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하고, 수열 $\{r_n\}$의 일반항을 구하여 수열 $\{S_n\}$을 귀납적으로 정의한다.

Step ❶ 오른쪽 그림과 같이 그림 R_n에서 새로 색칠한 원의 반지름의 길이를 r_n, 새로 색칠한 원에 외접하는 반원의 반지름의 길이를 a_n이라 하면



$$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$$

$$\therefore a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

Step ❷ 이때 $(a_n+r_n)^2=a_n^{\ 2}+(2a_n-r_n)^2$이므로

$$4a_n^{\ 2}-6a_nr_n=0$$

$a_n\neq 0$이므로 $\quad 2a_n-3r_n=0$

$$\therefore r_n=\frac{2}{3}a_n=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ (\because ㉠)$$

Step ❸ 그림 R_n에서 새로 색칠한 원의 개수는 2^{n-1}이므로

$$S_n=S_{n-1}+2^{n-1}\pi r_n^{\ 2}=S_{n-1}+2^{n-1}\pi\left\{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^2$$

$$=S_{n-1}+\frac{4}{9}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

위의 식의 n에 2, 3, 4, …, n을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$S_2=S_1+\frac{4}{9}\pi\cdot\frac{1}{2}$$

$$S_3=S_2+\frac{4}{9}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$S_4=S_3+\frac{4}{9}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\vdots$$

$$+\big)\ S_n=S_{n-1}+\frac{4}{9}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$S_n=S_1+\frac{4}{9}\pi\cdot\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{4}{9}\pi+\frac{4}{9}\pi\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{8}{9}\pi$$

Step ❹ 따라서 $p=9$, $q=8$이므로

$$p+q=17$$

답 17

일품 BOX

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

$r_1=\frac{2}{3}a_1=\frac{2}{3}$ 이므로 $S_1=\pi r_1^{\ 2}=\frac{4}{9}\pi$

$\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$의 값은 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)g(x)$, $\lim\limits_{x\to a-}f(x)g(x)$의 값을 각각 구하여 비교한다. 이때 두 값이 다르면 극한값은 존재하지 않는다.

$x=1$에서 $f(x)$와 $h(x)$의 극한값이 존재하므로 $g(x)$를 두 함수로 나타낸다.

Ⅱ 함수의 극한과 연속

03 함수의 극한 본책 30쪽

124 $\lim\limits_{x\to -1-}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=-1$, $f(0)=2$이므로

$$\lim_{x\to -1-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)+f(0)=2$$

답 ⑤

125 $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0-}(-1)=-1$

$-1<x<0$일 때, $\quad [x]=-1$

$$\therefore \lim_{x\to 0-}\frac{x}{[x]}=\lim_{x\to 0-}\frac{x}{-1}=0$$

$-1<x<0$일 때, $-2<x-1<-1$이므로

$$[x-1]=-2$$

$$\therefore \lim_{x\to 0-}\frac{[x-1]}{x-1}=\lim_{x\to 0-}\frac{-2}{x-1}=2$$

따라서 $a=-1$, $b=0$, $c=2$이므로

$$a+2b+3c=-1+2\cdot 0+3\cdot 2=5$$

답 ②

참고 정수 n에 대하여

① $n<x<n+1$이면

$[x]=n \quad \therefore \lim\limits_{x\to n+}[x]=n$

② $n-1<x<n$이면

$[x]=n-1 \quad \therefore \lim\limits_{x\to n-}[x]=n-1$

126 ㄱ. $\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1-}g(x)=-1$이므로

$$\lim_{x\to 1-}\{f(x)+g(x)\}$$

$$=\lim_{x\to 1-}f(x)+\lim_{x\to 1-}g(x)=1+(-1)=0$$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 1+}g(x)=1$이므로

$$\lim_{x\to 1+}\{f(x)-2g(x)\}$$

$$=\lim_{x\to 1+}f(x)-2\lim_{x\to 1+}g(x)=-1-2\cdot 1=-3$$

ㄷ. $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 1+}f(x)\lim\limits_{x\to 1+}g(x)$

$$=-1\cdot 1=-1$$

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 1-}f(x)\lim\limits_{x\to 1-}g(x)$

$$=1\cdot(-1)=-1$$

따라서 $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 1-}f(x)g(x)=-1$이므로

$$\lim_{x\to 1}f(x)g(x)=-1$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

127 $2f(x)-g(x)=h(x)$로 놓으면

$$\lim_{x\to 1}h(x)=2$$

$g(x)=2f(x)-h(x)$이므로

$$\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}\{2f(x)-h(x)\}$$
$$=2\lim_{x\to1}f(x)-\lim_{x\to1}h(x)$$
$$=2\cdot5-2=8$$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)-3}=\frac{\lim_{x\to1}g(x)}{\lim_{x\to1}\{f(x)-3\}}$$
$$=\frac{\lim_{x\to1}g(x)}{\lim_{x\to1}f(x)-3}$$
$$=\frac{8}{5-3}=4$$

답 4

128 $\lim_{x\to-1}\frac{x^3-x^2-4x-2}{x^3+1}$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-2x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-2x-2}{x^2-x+1}=\frac{1}{3}$$

답 ③

129 $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2x+5}-3}{x^2-4}$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)}{(x+2)(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2(x-2)}{(x+2)(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2}{(x+2)(\sqrt{2x+5}+3)}$$
$$=\frac{2}{4\cdot6}=\frac{1}{12}$$

답 $\frac{1}{12}$

130 $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-\sqrt{3x-2}}$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(x+\sqrt{3x-2})}{(x-\sqrt{3x-2})(x+\sqrt{3x-2})(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x+2-4)(x+\sqrt{3x-2})}{(x^2-3x+2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+\sqrt{3x-2})}{(x-2)(x-1)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x+\sqrt{3x-2}}{(x-1)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\frac{2+2}{1\cdot4}=1$$

답 ⑤

131 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{(\sqrt{x}-1)f(x)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)f(x)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}+1)(x+1)}{f(x)}$$

$\frac{(\sqrt{x}+1)(x+1)}{f(x)}=g(x)$라 하면 $\lim_{x\to1}g(x)=2$이고

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x}+1)(x+1)}{g(x)}$$

$$\therefore \lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}+1)(x+1)}{g(x)}$$
$$=\frac{2\cdot2}{2}=2$$

답 2

132 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-2x}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1+2t}{\sqrt{4t^2+1}+\sqrt{t^2-1}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t}+2}{\sqrt{4+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}$$
$$=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$$

답 ④

133 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x-2})$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x+2)-(x^2-2x-2)}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x-2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x-2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}}$$
$$=\frac{4}{1+1}=2$$

답 ④

134 $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{4+x}}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{4+x}-2}{2\sqrt{4+x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{(4+x)-4}{2\sqrt{4+x}(\sqrt{4+x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2\sqrt{4+x}(\sqrt{4+x}+2)}$$
$$=\frac{1}{2\cdot2\cdot(2+2)}=\frac{1}{16}$$

즉 $\frac{1}{a}=\frac{1}{16}$이므로 $a=16$

답 16

135 $x>-\frac{1}{2}$에서 $x^2+2>0$, $2x+1>0$이므로

$$\frac{(2x+1)(ax-2)}{x^2+2}\le\frac{(2x+1)f(x)}{x^2+2}$$
$$\le\frac{(2x+1)(ax+2)}{x^2+2}$$

이때

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)(ax-2)}{x^2+2}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)(ax+2)}{x^2+2}=2a$$

일품 BOX

분자, 분모를 각각 t로 나눈다.

분자, 분모 중 무리식이 있으면 근호가 있는 쪽을 유리화한다.

분모를 1로 보고, 분자, 분모에 각각 $\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x-2}$를 곱하여 분자를 유리화한다.

부등식의 기본 성질
실수 a, b, m에 대하여
① $a>b$이고 $m>0$이면
➡ $am>bm$, $\frac{a}{m}>\frac{b}{m}$
② $a>b$이고 $m<0$이면
➡ $am<bm$, $\frac{a}{m}<\frac{b}{m}$

주어진 부등식의 각 변에 $\frac{2x+1}{x^2+2}$을 곱하여도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

분자, 분모에서 $x-1$이 약분된다.

이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)f(x)}{x^2+2}=2a$

따라서 $2a=10$이므로 $a=5$

답 5

136 $(4x^2-x)-1<[4x^2-x]\le 4x^2-x$이므로

$12x^2-3x-3<3[4x^2-x]\le 12x^2-3x$

$\frac{12x^2-3x-3}{2x^2+1}<\frac{3[4x^2-x]}{2x^2+1}\le\frac{12x^2-3x}{2x^2+1}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2-3x-3}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2-3x}{2x^2+1}=6$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{3[4x^2-x]}{2x^2+1}=6$

답 ③

137 $x^2-4\le f(x)\le 3x^2-8x+4$에서

(i) $x>2$일 때,

$\frac{x^2-4}{x-2}\le\frac{f(x)}{x-2}\le\frac{3x^2-8x+4}{x-2}$

(ii) $x<2$일 때,

$\frac{3x^2-8x+4}{x-2}\le\frac{f(x)}{x-2}\le\frac{x^2-4}{x-2}$

이때

$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}(x+2)=4,$

$\lim_{x\to2}\frac{3x^2-8x+4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(3x-2)(x-2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}(3x-2)=4$

이므로 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=4$

답 4

138 $\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{x+3}+a}{x+2}=b$에서 $x\to-2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-2}(\sqrt{x+3}+a)=0$이므로 $1+a=0$

$\therefore a=-1$

$a=-1$을 주어진 식에 대입하면

$b=\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{(\sqrt{x+3}-1)(\sqrt{x+3}+1)}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{1}{\sqrt{x+3}+1}=\frac{1}{2}$

$\therefore a+2b=-1+2\cdot\frac{1}{2}=0$

답 ①

139 $\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax+b}{x-1}=2$에서 $x\to1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(x^3+ax+b)=0$이므로 $1+a+b=0$

$\therefore b=-a-1$ ······ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax-a-1}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+a+1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x^2+x+a+1)$

$=a+3$

즉 $a+3=2$이므로 $a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=0$

$\therefore ab=0$

답 ③

140 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x^2+x+1}=1$에서 $f(x)$는 x^2의 계수가 2인 이차함수이다.

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2-x-2}=1$에서 $x\to2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로 $f(2)=0$

$f(x)=2(x-2)(x+a)$ (a는 상수)로 놓으면

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2(x-2)(x+a)}{(x-2)(x+1)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{2x+2a}{x+1}=\frac{4+2a}{3}$

즉 $\frac{4+2a}{3}=1$이므로 $a=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=2x^2-5x+2$이므로

$f(1)=-1$

답 -1

141 주어진 그래프에서 x가 정수가 아닌 점에서 모두 연속이므로 정수가 아닌 t에 대하여

$\lim_{x\to t+}f(x)=\lim_{x\to t-}f(x)$

(i) $t=1, t=4, t=7$일 때,

$\lim_{x\to t+}f(x)>\lim_{x\to t-}f(x)$

(ii) $t=2, t=3$일 때,

$\lim_{x\to t+}f(x)=\lim_{x\to t-}f(x)$

(iii) $t=5, t=6$일 때,

$\lim_{x\to t+}f(x)<\lim_{x\to t-}f(x)$

이상에서 $\lim_{x\to t+}f(x)>\lim_{x\to t-}f(x)$를 만족시키는 t의 값은 1, 4, 7이므로 그 합은

$1+4+7=12$

답 12

142 ㄱ. $x\to1+$일 때, $f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1+}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to1+}f(f(x))$

$=f(1)=-1$

$x\to1-$일 때, $f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to1-}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to1-}f(f(x))$

$=f(-1)=1$

일품 BOX

1	1	0	a	$-a-1$
		1	1	$a+1$
	1	1	$a+1$	0

$\therefore x^3+ax-a-1$
$=(x-1)(x^2+x+a+1)$

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여
$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=c\ (c\ne0)$
이면 $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 같고, $f(x)$와 $g(x)$의 최고차항의 계수의 비는 c이다.

$f(x)=2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$
$=(x-2)(2x-1)$
$=2x^2-5x+2$

따라서 $\lim_{x\to1+}(f\circ f)(x)\neq\lim_{x\to1-}(f\circ f)(x)$이므로 $x=1$에서 함수 $(f\circ f)(x)$의 극한값이 존재하지 않는다.

ㄴ. $x\to1+$일 때, $-x\to-1-$이고 $f(-x)\to1-$이므로 $f(-x)=t$로 놓으면

$$\lim_{x\to1+}(f\circ f)(-x)=\lim_{t\to1-}f(t)=-1$$

$x\to1-$일 때, $-x\to-1+$이고 $f(-x)\to0-$이므로 $f(-x)=t$로 놓으면

$$\lim_{x\to1-}(f\circ f)(-x)=\lim_{t\to0-}f(t)=-1$$

$$\therefore \lim_{x\to1}(f\circ f)(-x)=-1$$

ㄷ. $x\to1+$일 때, $x-1\to0+$이고 $f(x-1)=-1$이므로

$$\lim_{x\to1+}(f\circ f)(x-1)=f(-1)=1$$

$x\to1-$일 때, $x-1\to0-$이고 $f(x-1)\to-1+$이므로 $f(x-1)=t$로 놓으면

$$\lim_{x\to1-}(f\circ f)(x-1)=\lim_{t\to-1+}f(t)=0$$

따라서 $\lim_{x\to1+}(f\circ f)(x-1)\neq\lim_{x\to1-}(f\circ f)(x-1)$이므로 $x=1$에서 함수 $(f\circ f)(x-1)$의 극한값이 존재하지 않는다.

이상에서 $x=1$에서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

1등급 비밀노트

$\lim_{x\to a}g(f(x))$의 값을 구할 때에는 $x\to a$일 때 $f(x)\to b$인 것과 $f(x)=b$인 것을 구분하여 계산한다.

① $x\to a$일 때 $f(x)\to b$이면 $f(x)=t$로 놓고 $\lim_{x\to a}g(f(x))=\lim_{t\to b}g(t)$

② $x\to a$일 때 $f(x)=b$이면 $\lim_{x\to a}g(f(x))=g(b)$

143 해결 과정 $n<x<n+1$일 때, $[x]=n$

$$\therefore \lim_{x\to n+}\frac{[x]^2+x}{[x]}=\frac{n^2+n}{n}=n+1$$ ● 20%

$n-1<x<n$일 때, $[x]=n-1$

$$\therefore \lim_{x\to n-}\frac{[x]^2+x}{[x]}=\frac{(n-1)^2+n}{n-1}=\frac{n^2-n+1}{n-1}$$ ● 20%

$\lim_{x\to n}\frac{[x]^2+x}{[x]}$의 값이 존재하려면

$$\frac{n^2-n+1}{n-1}=n+1,\quad n^2-n+1=n^2-1$$

$\therefore n=2$ ● 30%

답 구하기 $\therefore \lim_{x\to n}\frac{x^2+nx-2n^2}{x-n}$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x+4)(x-2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}(x+4)=2+4=6$$ ● 30%

답 6

일품 BOX

$-x=s$로 놓으면 $x=-s$이므로 $x\to1+$일 때, $-s\to1+$ $\therefore s\to-1-$

$x-1=s$로 놓으면 $x=s+1$이므로 $x\to1+$일 때, $s+1\to1+$ $\therefore s\to0+$

분자, 분모를 각각 t로 나눈다.

$\lim_{x\to\infty}h(x)=3$에서 $x\to\infty$일 때 함수 $h(x)$가 수렴하므로 극한에 대한 성질을 이용할 수 있다.

귀류법

어떤 명제의 결론을 부정한 후 모순이 생기는 것을 보임으로써 주어진 명제가 참임을 증명하는 방법이다.

144 $x-1=t$로 놓으면 $x=t+1$이고, $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{f(x-2)}=\lim_{t\to0}\frac{(t+1)^2-1}{f(t-1)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t(t+2)}{f(t-1)}$$

$$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{t}{f(t-1)}\cdot(t+2)\right\}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{\frac{f(t-1)}{t}}\cdot\lim_{t\to0}(t+2)$$

$$=4\cdot2=8$$

답 8

145 문제 이해 $\frac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}=h(x)$라 하면

$f(x)+g(x)=h(x)\{f(x)-g(x)\}$

$\{h(x)-1\}f(x)=\{h(x)+1\}g(x)$이므로

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{h(x)-1}{h(x)+1}$$ ● 20%

해결 과정 $\lim_{x\to\infty}h(x)=3$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)-1}{h(x)+1}$$

$$=\frac{3-1}{3+1}=\frac{1}{2}$$ ● 30%

답 구하기 $\lim_{x\to\infty}\frac{3f(x)-2g(x)}{f(x)+2g(x)}$의 분자, 분모를 각각 $f(x)$로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3f(x)-2g(x)}{f(x)+2g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-2\cdot\frac{g(x)}{f(x)}}{1+2\cdot\frac{g(x)}{f(x)}}$$

$$=\frac{3-2\cdot\frac{1}{2}}{1+2\cdot\frac{1}{2}}=1$$ ● 50%

답 1

146 ㄱ. $\lim_{x\to a}g(x)$가 존재한다고 가정하고

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ (α, β는 실수)로 놓으면

$$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$$

$$=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=\alpha+\beta$$

즉 $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$가 존재하므로 가정에 모순이다.

따라서 $\lim_{x\to a}g(x)$는 존재하지 않는다.

ㄴ. $f(x)+2g(x)=h(x)$, $2f(x)+g(x)=k(x)$라 하고 $\lim_{x\to a}\{f(x)+2g(x)\}=\alpha$,

$\lim_{x\to a}\{2f(x)+g(x)\}=\beta$ (α, β는 실수)로 놓으면

$$\lim_{x\to a}h(x)=\alpha,\ \lim_{x\to a}k(x)=\beta$$

이때 $f(x)=\frac{2k(x)-h(x)}{3}$이므로

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{2k(x)-h(x)}{3}=\frac{2\beta-\alpha}{3}$$

즉 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

ㄷ. [반례] $f(x)=\begin{cases}x+1 & (x\ge0)\\ x-1 & (x<0)\end{cases}$,

$g(x)=\begin{cases}x+2 & (x\ge0)\\ 3x-2 & (x<0)\end{cases}$이면

$$2f(x)-g(x)=\begin{cases}x & (x\ge0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$$

이므로 $\lim_{x\to0}\{2f(x)-g(x)\}=0$이지만 $\lim_{x\to0}f(x)$와 $\lim_{x\to0}g(x)$는 존재하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

147 ㄱ. $\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)\lim_{x\to1+}g(x)$

$=0\cdot1=0$

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)\lim_{x\to1-}g(x)$

$=0\cdot(-1)=0$

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)g(x)=0$

ㄴ. $x\to1+$일 때 $f(x)\to0+$, $g(x)=1$이므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)}{f(x)}=\infty$$

$x\to1-$일 때 $f(x)\to0-$, $g(x)=-1$이므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)}{f(x)}=\infty$$

따라서 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)}$는 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to1+}[\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]=0^2+1^2=1$

$\lim_{x\to1-}[\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]=0^2+(-1)^2=1$

$\therefore \lim_{x\to1}[\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]=1$

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ⑤

148 $\sqrt{x}=\sqrt{3x-2}$의 양변을 제곱하면

$x=3x-2$ $\quad\therefore x=1$ $\quad\therefore \mathrm{P}(1,\ 1)$

$\mathrm{A}(t, \sqrt{3t-2})$라 하면 $\mathrm{B}(t, \sqrt{t})$, $\mathrm{C}(t, 1)$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=|\sqrt{3t-2}-1|$, $\overline{\mathrm{BC}}=|\sqrt{t}-1|$

점 A가 점 P에 한없이 가까워질 때 $t\to1$이므로

$$\lim_{t\to1}\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BC}}}$$

$$=\lim_{t\to1}\left|\frac{\sqrt{3t-2}-1}{\sqrt{t}-1}\right|$$

$$=\lim_{t\to1}\left|\frac{(\sqrt{3t-2}-1)(\sqrt{3t-2}+1)(\sqrt{t}+1)}{(\sqrt{t}-1)(\sqrt{t}+1)(\sqrt{3t-2}+1)}\right|$$

$$=\lim_{t\to1}\left|\frac{3(t-1)(\sqrt{t}+1)}{(t-1)(\sqrt{3t-2}+1)}\right|$$

$$=\lim_{t\to1}\left|\frac{3(\sqrt{t}+1)}{\sqrt{3t-2}+1}\right|=3$$

답 ⑤

일품 BOX

$f(x)+2g(x)=h(x)$ ··· ㉠

$2f(x)+g(x)=k(x)$ ··· ㉡

$2\times$㉡$-$㉠을 하면

$3f(x)=2k(x)-h(x)$

$\therefore f(x)=\frac{2k(x)-h(x)}{3}$

$-5\le x\le5$에서 함수 $f(x)$의 양 끝 점에서의 함숫값과 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점에서의 함숫값을 구한 후 그 값을 비교한다.

점 P의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같다.

주어진 식을 $\{x-f(x)\}$와 $\frac{f(x)}{x}$에 대한 식으로 변형한다.

1등급 비밀노트

길이 또는 넓이의 극한값을 구할 때에는 길이 또는 넓이를 미지수를 이용한 식으로 나타낸 다음 극한값을 구한다.
이때 대부분 $\frac{0}{0}$ 꼴이므로 분자와 분모를 인수분해하거나 근호가 있는 쪽을 유리화한다.

149 해결 과정 $t=-s$로 놓으면 $t\to-\infty$일 때 $s\to\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{t\to-\infty}\frac{x^2-2t(x^2+2x-3)}{\sqrt{16t^2+100x^2}}$$

$$=\lim_{s\to\infty}\frac{x^2+2s(x^2+2x-3)}{\sqrt{16s^2+100x^2}}$$

$$=\lim_{s\to\infty}\frac{\frac{x^2}{s}+2(x^2+2x-3)}{\sqrt{16+\frac{100x^2}{s^2}}}$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+2x-3)$$ ● 50%

답 구하기 즉 $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)^2-2$이므로

$f(-5)=6,\ f(-1)=-2,\ f(5)=16$ ● 30%

따라서 $-5\le x\le5$에서 $f(x)$의 최댓값은 16, 최솟값은 -2이므로 구하는 합은

$16+(-2)=14$ ● 20%

답 14

150 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$[1-4x]=(1-4x)-\alpha$

$=(1+4t)-\alpha\ \ (0\le\alpha<1)$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}+[1-4x]}{x}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{4t^2+1}+(1+4t)-\alpha}{-t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{t^2}}+\frac{1}{t}+4-\frac{\alpha}{t}}{-1}$$

$=-6$

답 ④

151 $\lim_{x\to\infty}\{x-f(x)\}=\lim_{x\to\infty}x\left\{1-\frac{f(x)}{x}\right\}=3$에서

$x\to\infty$일 때 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x\to\infty}\left\{1-\frac{f(x)}{x}\right\}=0 \quad \therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{f(x)+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{f(x)}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{f(x)+1})(\sqrt{x}+\sqrt{f(x)+1})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{f(x)})(\sqrt{x+1}+\sqrt{f(x)})}\cdot\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{f(x)})}{(\sqrt{x}+\sqrt{f(x)+1})}\right\}$$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\{x-f(x)-1\}(\sqrt{x+1}+\sqrt{f(x)})}{\{x+1-f(x)\}(\sqrt{x}+\sqrt{f(x)+1})}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\{x-f(x)-1\}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{f(x)}{x}}\right)}{\{x-f(x)+1\}\left(1+\sqrt{\frac{f(x)}{x}+\frac{1}{x}}\right)}$

$=\frac{(3-1)(1+1)}{(3+1)(1+1)}=\frac{1}{2}$ 답 ②

152 $x>0$이므로 $\frac{1}{4x+3}\le xf(x)\le\frac{1}{4x+1}$에서

$\frac{1}{x(4x+3)}\le f(x)\le\frac{1}{x(4x+1)}$

$x\to\infty$일 때 $(10x^2-1)\to\infty$이므로

$\frac{10x^2-1}{x(4x+3)}\le(10x^2-1)f(x)\le\frac{10x^2-1}{x(4x+1)}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{10x^2-1}{x(4x+3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{10x^2-1}{x(4x+1)}=\frac{5}{2}$이므로

$\lim_{x\to\infty}(10x^2-1)f(x)=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

153 해결 과정 $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+ax+b}{x^2}=c$에서

$x\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(\sqrt{x^2+x+1}+ax+b)=0$이므로

$1+b=0 \quad \therefore b=-1$ ● 20%

$b=-1$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+ax-1}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x^2+x+1}+ax-1)\{\sqrt{x^2+x+1}-(ax-1)\}}{x^2\{\sqrt{x^2+x+1}-(ax-1)\}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x^2+x+1-(ax-1)^2}{x^2(\sqrt{x^2+x+1}-ax+1)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(1-a^2)x^2+(1+2a)x}{x^2(\sqrt{x^2+x+1}-ax+1)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(1-a^2)x+(1+2a)}{x(\sqrt{x^2+x+1}-ax+1)}$ …… ㉠

㉠에서 $x\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}\{(1-a^2)x+(1+2a)\}=0$이므로

$1+2a=0 \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$ ● 40%

$a=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{\frac{3}{4}x}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}x+1\right)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}x+1}=\frac{3}{8}$

$\therefore c=\frac{3}{8}$ ● 30%

답 구하기 $\therefore a+b+c=-\frac{9}{8}$ ● 10%

답 $-\frac{9}{8}$

154 $\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{f(x)}-x\}=\lim_{x\to\infty}x\left\{\sqrt{\frac{f(x)}{x^2}}-1\right\}=1$에서 $x\to\infty$일 때 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{\frac{f(x)}{x^2}}-1\right\}=0$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{f(x)}{x^2}}=1$

따라서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{f(x)}-x\}=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax+b}-x)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b}{\sqrt{x^2+ax+b}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}+1}$

$=\frac{a}{2}$

즉 $\frac{a}{2}=1$이므로 $\quad a=2$

따라서 $f(x)=x^2+2x+b$이므로

$f(3)-f(1)=(15+b)-(3+b)$

$=12$ 답 ②

155 문제 이해 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{f(x)-x^3}=\frac{1}{2}$에서 $x\to\infty$일 때 극한값이 존재하므로

$f(x)=x^3+2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다. ● 20%

해결 과정 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$에서 $x\to1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $\quad \lim_{x\to1}(x^3+2x^2+ax+b)=0$

$3+a+b=0$

$\therefore b=-a-3$ …… ㉠ ● 30%

즉 $f(x)=x^3+2x^2+ax-a-3$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^3+2x^2+ax-a-3}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+3x+a+3)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x^2+3x+a+3)$

$=7+a$

즉 $7+a=1$이므로 $\quad a=-6$

$a=-6$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=3$ ● 40%

일품 BOX

$\lim_{x\to\infty}\{x-f(x)\}=3$, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

$10x^2-1>0$이므로 부등식의 각 변에 $10x^2-1$을 곱해도 부등호의 방향은 변하지 않는다.

분모를 1로 보고 분자, 분모에 각각 $\sqrt{x^2+ax+b}+x$를 곱하여 분자를 유리화한다.

$f(x)-x^3$은 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2 & a & -a-3 \\ & & 1 & 3 & a+3 \\ \hline & 1 & 3 & a+3 & 0 \end{array}$$

$\therefore x^3+2x^2+ax-a-3$
$=(x-1)(x^2+3x+a+3)$

답 구하기 따라서 $f(x)=x^3+2x^2-6x+3$이므로

$f(3)=30$ ● 10%

답 30

156 $f(x)=a(x+1)(x-2)\,(a<0)$로 놓으면

일품 BOX
- 주어진 그래프에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -1, 2이다.

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{a(x+1)(x-2)}{x-2}=3a$$

즉 $3a=-4$이므로 $a=-\frac{4}{3}$

따라서 $f(x)=-\frac{4}{3}(x+1)(x-2)$이므로

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{-\frac{4}{3}(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=-\frac{4}{3}\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x-1}=-2$$

즉 $p=-2$이므로 $p^2=4$

답 ②

함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

157 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$에서 $x\to 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다. 즉

$\lim_{x\to 0}f(x)=0$ ······ ㉠

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=3$에서 $x\to 3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다. 즉

$\lim_{x\to 3}f(x)=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서

$$\lim_{x\to 3}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to 3}f(f(x))=\lim_{t\to 0}f(t)=0$$

- $f(x)=t$로 놓으면 $x\to 3$일 때 $t\to 0$이므로 $\lim_{x\to 3}f(f(x))=\lim_{t\to 0}f(t)$

$$\therefore \lim_{x\to 3}\frac{\{(f\circ f)(x)-3\}f(x-3)}{x^2-9}$$

$$=\lim_{x\to 3}\left\{\frac{(f\circ f)(x)-3}{x+3}\cdot\frac{f(x-3)}{x-3}\right\}$$

$$=\frac{0-3}{3+3}\cdot\lim_{x\to 3}\frac{f(x-3)}{x-3}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 3}\frac{f(x-3)}{x-3}$$

이때 $x-3=t$로 놓으면 $x\to 3$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x-3)}{x-3}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=3$$

따라서 구하는 값은 $-\frac{1}{2}\cdot 3=-\frac{3}{2}$

답 ①

158 함수 $y=\sqrt{x^2-4x}$의 그래프가 x의 값이 한없이 커질 때 직선 $y=ax+b$에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{x^2-4x}-(ax+b)\}=0$이 성립한다.

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\{\sqrt{x^2-4x}-(ax+b)\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-4x)-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2-4x}+(ax+b)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a^2)x^2-(4+2ab)x-b^2}{\sqrt{x^2-4x}+(ax+b)}=0$$

- 0에 수렴하므로 (분자의 차수) < (분모의 차수)

앞의 등식이 성립하려면

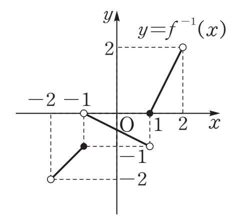
$1-a^2=0,\ 4+2ab=0$

$\therefore a=1\ (\because a>0),\ b=-2$

$\therefore 10a+b=10+(-2)=8$

답 8

159 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 값은

$$\lim_{x\to -1+}f^{-1}(x)+\lim_{x\to 1-}f^{-1}(x)$$

$=0+(-1)$

$=-1$

답 ②

160 주어진 그래프에서

$\lim_{x\to 0+}f(x)=1,\ \lim_{x\to 0-}f(x)=-1$

$x=-t$로 놓으면 $x\to 0+$일 때 $t\to 0-$, $x\to 0-$일 때 $t\to 0+$이므로

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{t\to 0-}f(-t)=1,$

$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{t\to 0+}f(-t)=-1$

즉 $\lim_{x\to 0+}f(-x)=-1,\ \lim_{x\to 0-}f(-x)=1$이다.

ㄱ. $\lim_{x\to 0+}\{2f(x)+f(-x)\}=2\cdot 1+(-1)=1$

$\lim_{x\to 0-}\{2f(x)+f(-x)\}=2\cdot(-1)+1=-1$

따라서

$\lim_{x\to 0+}\{2f(x)+f(-x)\}$

$\neq \lim_{x\to 0-}\{2f(x)+f(-x)\}$

이므로 $\lim_{x\to 0}\{2f(x)+f(-x)\}$는 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to 0+}\frac{f(-x)}{f(x)}=\frac{-1}{1}=-1,$

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(-x)}{f(x)}=\frac{1}{-1}=-1$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(-x)}{f(x)}=-1$

ㄷ. $\lim_{x\to 0+}\{f(x)-f(-x)\}f(x)=\{1-(-1)\}\cdot 1=2,$

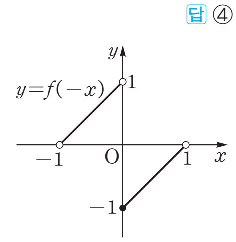
$\lim_{x\to 0-}\{f(x)-f(-x)\}f(x)=(-1-1)\cdot(-1)$
$=2$

$\therefore \lim_{x\to 0}\{f(x)-f(-x)\}f(x)=2$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

참고 함수 $y=f(-x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore \lim_{x\to 0+}f(-x)=-1,$

$\lim_{x\to 0-}f(-x)=1$

161 $n<x<n+1$일 때, $f(x)=[x]=n$이므로

$$\lim_{x\to n+}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to n+}g(f(x))=g(n)$$

$n-1<x<n$일 때, $f(x)=[x]=n-1$이므로

$$\lim_{x\to n-}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to n-}g(f(x))=g(n-1)$$

(i) $n=0$일 때,

$$\lim_{x\to 0+}(g\circ f)(x)=g(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0-}(g\circ f)(x)=g(-1)=[-1]=-1$$

따라서 $\lim_{x\to 0+}(g\circ f)(x)\neq\lim_{x\to 0-}(g\circ f)(x)$이므로 $\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x)$는 존재하지 않는다.

(ii) $n=1$일 때,

$$\lim_{x\to 1+}(g\circ f)(x)=g(1)=[1]=1$$

$$\lim_{x\to 1-}(g\circ f)(x)=g(0)=0$$

따라서 $\lim_{x\to 1+}(g\circ f)(x)\neq\lim_{x\to 1-}(g\circ f)(x)$이므로 $\lim_{x\to 1}(g\circ f)(x)$는 존재하지 않는다.

(iii) $n=2$일 때,

$$\lim_{x\to 2+}(g\circ f)(x)=g(2)=\left[\frac{1}{2}\right]=0$$

$$\lim_{x\to 2-}(g\circ f)(x)=g(1)=[1]=1$$

따라서 $\lim_{x\to 2+}(g\circ f)(x)\neq\lim_{x\to 2-}(g\circ f)(x)$이므로 $\lim_{x\to 2}(g\circ f)(x)$는 존재하지 않는다.

(iv) $n\le-1$일 때,

$$\lim_{x\to n+}(g\circ f)(x)=g(n)=\left[\frac{1}{n}\right]=-1$$

$$\lim_{x\to n-}(g\circ f)(x)=g(n-1)=\left[\frac{1}{n-1}\right]=-1$$

$$\therefore \lim_{x\to n}(g\circ f)(x)=-1$$

(v) $n\ge3$일 때

$$\lim_{x\to n+}(g\circ f)(x)=g(n)=\left[\frac{1}{n}\right]=0$$

$$\lim_{x\to n-}(g\circ f)(x)=g(n-1)=\left[\frac{1}{n-1}\right]=0$$

$$\therefore \lim_{x\to n}(g\circ f)(x)=0$$

이상에서 $\lim_{x\to n}(g\circ f)(x)$가 존재하지 않도록 하는 정수 n은 0, 1, 2의 3개이다.

답 ③

1등급 비밀노트

(i) $x<-1$이면 $-1<\frac{1}{x}<0$ $\therefore \left[\frac{1}{x}\right]=-1$

(ii) $-1<x<0$이면 $\frac{1}{x}<-1$ $\therefore \left[\frac{1}{x}\right]\le-2$

(iii) $0<x<1$이면 $\frac{1}{x}>1$ $\therefore \left[\frac{1}{x}\right]\ge1$

(iv) $x>1$이면 $0<\frac{1}{x}<1$ $\therefore \left[\frac{1}{x}\right]=0$

이상에서 $n=-1$ 또는 $n=0$ 또는 $n=1$일 때 $\lim_{x\to n}g(x)$는 존재하지 않는다. 따라서 $f(x)=-1$ 또는 $f(x)=0$ 또는 $f(x)=1$일 때를 기준으로 $\lim_{x\to n}(g\circ f)(x)$를 조사한다.

일품 BOX

직선 PQ는 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$과 수직이므로 기울기가 -2이고 점 $P(2t,\ t+1)$을 지난다.

$-1<\frac{1}{n-1}<0$, $-1<\frac{1}{n}<0$이므로 $\left[\frac{1}{n-1}\right]=\left[\frac{1}{n}\right]=-1$

$0<\frac{1}{n-1}<1$, $0<\frac{1}{n}<1$이므로 $\left[\frac{1}{n-1}\right]=\left[\frac{1}{n}\right]=0$

$x=q$에서 좌극한과 우극한이 같으므로 극한값이 존재한다.

162 $\overline{AP}^2=(2t+2)^2+(t+1)^2$

$$=5t^2+10t+5$$

직선 PQ의 방정식은

$$y-(t+1)=-2(x-2t)$$

$$\therefore y=-2x+5t+1$$

따라서 $Q(0,\ 5t+1)$이므로

$$\overline{AQ}^2=2^2+(5t+1)^2=25t^2+10t+5$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{25t^2+10t+5}{5t^2+10t+5}=5$$

답 5

163 $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2+ax+b}=\alpha$ ($\alpha\neq0$, α는 정수)라 하면 $x\to2$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to0$이므로 (분모) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}(x^2+ax+b)=0$이므로 $4+2a+b=0$

$$\therefore b=-2a-4$$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2+ax+b}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2+ax-2a-4}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+a+2)}=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{x+a+2}=\frac{4}{4+a}$$

이때 $\frac{4}{4+a}$가 정수이려면 $4+a$는 4의 약수이어야 한다. 즉

$$4+a=-4,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 4$$

이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(-8,\ 12)$, $(-6,\ 8)$, $(-5,\ 6)$, $(-3,\ 2)$, $(-2,\ 0)$, $(0,\ -4)$

따라서 ab의 최솟값 p는 $-8\cdot12=-96$이므로

$$|p|=96$$

답 96

04 함수의 연속 본책 37쪽

164 ㄴ. $x=r$, $x=s$에서 좌극한과 우극한이 다르므로 극한값이 존재하지 않는다.

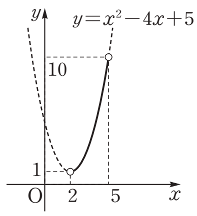
ㄷ. $x=q$, $x=r$, $x=s$에서 불연속이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

165 함수 $f(x)=[x^2-4x+5]$는 x^2-4x+5의 값이 정수인 점에서 불연속이다.

$y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$

이므로 구간 $(2,\ 5)$에서 함수 $y=x^2-4x+5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $1<x^2-4x+5<10$이므로 $\quad 1\le[x^2-4x+5]\le 9$

따라서 $f(x)$는

$x^2-4x+5=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 9$

인 점에서 불연속이므로 불연속이 되는 점의 개수는 8이다.

답 8

166 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이 되려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2+5x+a\neq0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2+5x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=25-4a<0$

$\therefore\ a>\dfrac{25}{4}=6.25$

따라서 구하는 정수 a의 최솟값은 7이다.

답 ③

167 ㄱ. 두 함수 $y=x$, $y=|x|$는 모든 실수 x에서 연속이므로 $f(x)=x+|x|$도 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄴ. 두 함수 $y=x$, $y=|x^2-2x|$는 모든 실수 x에서 연속이므로 $g(x)=x|x^2-2x|$도 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄷ. $\displaystyle\lim_{x\to0+}h(x)=\lim_{x\to0+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to0+}x=0$,

$\displaystyle\lim_{x\to0-}h(x)=\lim_{x\to0-}\frac{x^2}{-x}=\lim_{x\to0-}(-x)=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to0}h(x)=0$

그런데 $h(0)=1$이므로 $\quad\displaystyle\lim_{x\to0}h(x)\neq h(0)$

따라서 $h(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

이상에서 모든 실수 x에 대하여 연속인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

168 $x\neq1$이면 $\quad f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1}$

함수 $f(x)$가 연속함수이므로

$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{2x+7}-3)(\sqrt{2x+7}+3)}{(x-1)(\sqrt{2x+7}+3)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{2x+7}+3)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{2}{\sqrt{2x+7}+3}=\frac{1}{3}$$

답 ③

일품 BOX

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 모든 실수 x에 대하여 연속이면
➡ $f(x)\neq0$

$x\to1$일 때 $(x-1)^2\to0+$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to1}[(x-1)^2]=0$

함수 $f(x)$가 연속함수이다.
$\iff f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속이다.

169 (i) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$a=\lim_{x\to1}f(x)$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-(x-1)(x+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\{-(x+1)\}=-2$$

(ii) 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$b=\lim_{x\to1}g(x)$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{|x|-1}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{|x|-1}{(|x|-1)(|x|+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{|x|+1}$$
$$=\frac{1}{2}$$

(iii) 함수 $h(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$c=\lim_{x\to1}h(x)=\lim_{x\to1}[(x-1)^2]=0$$

이상에서 $\quad a<c<b$

답 ②

170 (i) $|4x|<1$, 즉 $|x|<\dfrac{1}{4}$일 때,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(4x)^{2n}=\lim_{n\to\infty}(4x)^{2n+1}=0$이므로

$$f(x)=\frac{0-1}{1+0}=-1$$

(ii) $|4x|>1$, 즉 $|x|>\dfrac{1}{4}$일 때,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(4x)^{2n}=\lim_{n\to\infty}|(4x)^{2n+1}|=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{4x-\dfrac{1}{(4x)^{2n}}}{\dfrac{1}{(4x)^{2n}}+1}=4x$$

(iii) $4x=1$, 즉 $x=\dfrac{1}{4}$일 때,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(4x)^{2n}=\lim_{n\to\infty}(4x)^{2n+1}=1$이므로

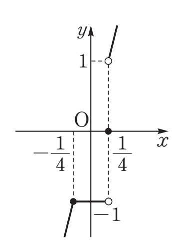
$f(x)=0$

(iv) $4x=-1$, 즉 $x=-\dfrac{1}{4}$일 때,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(4x)^{2n}=1,\ \lim_{n\to\infty}(4x)^{2n+1}=-1$이므로

$$f(x)=\frac{-1-1}{1+1}=-1$$

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{4}$에서 불연속이다.



즉 $a=\dfrac{1}{4}$이므로

$20a=20\cdot\dfrac{1}{4}=5$

답 5

171 (i) $|2x|<1$, 즉 $|x|<\frac{1}{2}$일 때,

$\lim_{n\to\infty}(2x)^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\frac{0}{1+0}=0$$

(ii) $|2x|>1$, 즉 $|x|>\frac{1}{2}$일 때,

$\lim_{n\to\infty}(2x)^{2n}=\infty$이므로

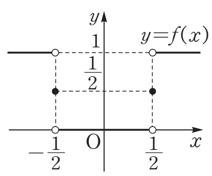
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{(2x)^{2n}}+1}=\frac{1}{0+1}=1$$

(iii) $|2x|=1$, 즉 $x=\pm\frac{1}{2}$일 때,

$\lim_{n\to\infty}(2x)^{2n}=1$이므로

$$f(x)=\frac{1}{2}$$

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$에서 불연속이다.



따라서 보기에서 함수 $f(x)$가 연속인 구간은 ②이다.

답 ②

172 (i) $|x|<1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n-1}=0$이므로

$$f(x)=2x+a$$

(ii) $|x|>1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}|x^n|=\lim_{n\to\infty}|x^{n-1}|=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^{n-1}}+\frac{a}{x^n}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^n}}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$$

(iii) $x=1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n-1}=1$이므로

$$f(x)=\frac{3+a}{2}$$

$f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$$

$$1=2+a=\frac{3+a}{2}\qquad\therefore a=-1$$

답 -1

173 $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(0)=a$이고

$$\lim_{x\to0}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to0}g(f(x))$$
$$=\lim_{x\to0}g(x^2+1)$$
$$=g(1)=2a+1$$

합성함수 $(g\circ f)(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(0)$에서

$$2a+1=a\qquad\therefore a=-1$$

답 ②

일품 BOX

$x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$을 포함하지 않은 구간을 찾는다.

함수 $h(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $h(a)h(b)<0$이면 방정식 $h(x)=0$은 구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}x=1$,

$\lim_{x\to1-}f(x)$

$=\lim_{x\to1-}(2x+a)$

$=2+a$

174 ㄱ. $\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=(-1)\cdot1=-1$,

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=1\cdot(-1)=-1$이므로

$$\lim_{x\to1}f(x)g(x)=-1$$

이때 $f(1)g(1)=1\cdot1=1$이므로

$$\lim_{x\to1}f(x)g(x)\neq f(1)g(1)$$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to1+}f(g(x))=f(1)=1$,

$\lim_{x\to1-}f(g(x))=f(-1)=1$이므로

$$\lim_{x\to1}f(g(x))=1$$

이때 $f(g(1))=f(1)=1$이므로

$$\lim_{x\to1}f(g(x))=f(g(1))$$

따라서 $f(g(x))$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to1+}g(f(x))=g(-1)=-1$,

$\lim_{x\to1-}g(f(x))=g(1)=1$이므로

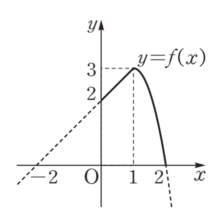
$$\lim_{x\to1+}g(f(x))\neq\lim_{x\to1-}g(f(x))$$

따라서 $g(f(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

이상에서 $x=1$에서 연속인 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

175 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $f(x)$는 구간 $[0, 2]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다.



함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)=3$, 최솟값은 $f(2)=0$이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$$3+0=3$$

답 3

176 $h(x)=f(x)-x$로 놓으면 함수 $h(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$$h(0)=f(0)-0=-\frac{1}{3}<0,$$
$$h\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}<0,$$
$$h\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}<0,$$
$$h\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}>0,$$
$$h\left(\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}=\frac{1}{20}>0,$$
$$h(1)=f(1)-1=0$$

이므로 사이값 정리에 의하여 방정식 $h(x)=0$은 구간 $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 ③

177 ㄱ. $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, $f(0)=1$이므로

$\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{|x+2|-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)-2}{x}$

$=1$

이때 $g(0)=1$이므로 $\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)$

따라서 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to 0+} h(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2-3|x|}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2-3x}{x}$

$=\lim_{x\to 0+}\frac{x(x-3)}{x}=\lim_{x\to 0+}(x-3)$

$=-3$

$\lim_{x\to 0-} h(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2-3|x|}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2+3x}{x}$

$=\lim_{x\to 0-}\frac{x(x+3)}{x}=\lim_{x\to 0-}(x+3)$

$=3$

$\therefore \lim_{x\to 0+} h(x)\neq \lim_{x\to 0-} h(x)$

따라서 $h(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

이상에서 $x=0$에서 연속인 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

$x\to 0$일 때, $x+2>0$이므로 $|x+2|=x+2$

178 ㄱ. $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$\therefore \lim_{x\to 0}\{f(x)+f(-x)\}$

$=\lim_{x\to 0} f(x)+\lim_{x\to 0} f(-x)$

$=f(0)+f(0)$

따라서 $f(x)+f(-x)$도 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$, $\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)$이면 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 $f(x)\{f(x)-g(x)\}$도 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. [반례] $f(x)=x+1$, $g(x)=x$이면

$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$, $\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)$이지만

$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+1}{x}$은 $x=0$에서 정의되지 않으므로 불연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

$-x=t$로 놓으면 $x\to 0$일 때 $t\to 0$이므로 $\lim_{x\to 0} f(-x)=\lim_{t\to 0} f(t)=f(0)$

179 해결 과정 $f(x+4)=f(x)$이므로

$f(-2)=f(2)$에서 $0=4+2a+b$

$\therefore 2a+b=-4$ …… ㉠ ● 40%

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)$이므로

$6=1+a+b$

$\therefore a+b=5$ …… ㉡ ● 40%

$f(-2)=f(-2+4)=f(2)$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-9$, $b=14$ ● 10%

답 구하기 $\therefore b-a=23$ ● 10%

답 23

180 $|x|>2$일 때, $|x^2-4|=x^2-4$이므로

$f(x)=\frac{|x^2-4|}{x-2}=\frac{x^2-4}{x-2}=x+2$

$\therefore f(x)=\begin{cases} x+2 & (|x|>2) \\ ax^2+bx & (|x|\le 2)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=2$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to 2+} f(x)=f(2)$이므로

$4=4a+2b$ $\therefore 2a+b=2$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -2-} f(x)=f(-2)$

$0=4a-2b$ $\therefore 2a-b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}$, $b=1$

$\therefore 10ab=10\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=5$ 답 5

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}(x+2)=4$

$\lim_{x\to -2-} f(x)=\lim_{x\to -2-}(x+2)=0$

정수 n에 대하여
① $f(x)\to n+$이면 ➡ $[f(x)]=n$
② $f(x)\to n-$이면 ➡ $[f(x)]=n-1$

181 $\lim_{x\to -3+}[x]=-3$, $\lim_{x\to -3-}[x]=-4$이므로

$\lim_{x\to -3+} f(x)=\lim_{x\to -3+}([x]^2+a[x])=9-3a$

$\lim_{x\to -3-} f(x)=\lim_{x\to -3-}([x]^2+a[x])=16-4a$

$f(x)$가 $x=-3$에서 연속이려면

$\lim_{x\to -3+} f(x)=\lim_{x\to -3-} f(x)=f(-3)$

이어야 하므로

$9-3a=16-4a=b$

$\therefore a=7$, $b=-12$

$\therefore a-b=19$ 답 19

182 해결 과정 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0+}(x^2+ax+b)f(x)$

$=b\cdot(-1)=-b$

$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-}(x^2+ax+b)f(x)$

$=b\cdot(-2)=-2b$

$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0-} g(x)$이므로

$-b=-2b$ $\therefore b=0$

$\therefore g(x)=(x^2+ax)f(x)$ ● 40%

또 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1+} g(x)=\lim_{x\to 1+}(x^2+ax)f(x)$

$=(1+a)\cdot 2=2a+2$

$\lim_{x\to 1-} g(x)=\lim_{x\to 1-}(x^2+ax)f(x)$

$=(1+a)\cdot 0=0$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=a$에서 끊어져 있으면 $x=a$에서 $g(x)$의 연속성을 조사한다.

Ⅱ 함수의 극한과 연속

$\lim\limits_{x\to1+} g(x)=\lim\limits_{x\to1-} g(x)$이므로

$2a+2=0$　　∴ $a=-1$　　● 40%

답 구하기 $g(x)=(x^2-x)f(x)$이므로

$g(-2)=6f(-2)$

$=6\cdot2=12$　　● 20%

답 12

183 $x+2=t$로 놓으면 $x=t-2$이고 $x \to 0+$일 때 $t \to 2+$이므로

$\lim\limits_{x\to0+} f(x)f(x+2)$

$=\lim\limits_{x\to0+} f(x)\lim\limits_{t\to2+} f(t)$

$=\lim\limits_{x\to0+}(-x+a)\lim\limits_{t\to2+}(-t+a)$

$=a(a-2)$

$x \to 0-$일 때 $t \to 2-$이므로

$\lim\limits_{x\to0-} f(x)f(x+2)=\lim\limits_{x\to0-} f(x)\lim\limits_{t\to2-} f(t)$

$=\lim\limits_{x\to0-}(-x+4)\lim\limits_{t\to2-}(-t+a)$

$=4\cdot(-2+a)=4a-8$

이때 $f(0)f(2)=4(-2+a)=4a-8$이므로

$f(x)f(x+2)$가 $x=0$에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to0+} f(x)f(x+2)=\lim\limits_{x\to0-} f(x)f(x+2)$

$=f(0)f(2)$

$a(a-2)=4a-8$,　　$a^2-6a+8=0$

$(a-2)(a-4)=0$

∴ $a=2$ 또는 $a=4$

따라서 모든 상수 a의 값의 곱은

$2\cdot4=8$

답 ⑤

184 해결 과정 (i) $0<x<1$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty} x^n=\lim\limits_{n\to\infty} x^{n+1}=0$이므로

$f(x)=\dfrac{ax-1}{2}$

(ii) $x>1$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty} x^n=\lim\limits_{n\to\infty} x^{n-1}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\dfrac{a}{x^{n-1}}-\dfrac{1}{x^n}}{a+\dfrac{2}{x^n}}=\frac{x}{a}$$

(iii) $x=1$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty} x^n=\lim\limits_{n\to\infty} x^{n+1}=1$이므로

$f(x)=\dfrac{a}{a+2}$　　● 50%

$f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to1+} f(x)=\lim\limits_{x\to1-} f(x)=f(1)$

일품 BOX

$\lim\limits_{x\to1+} f(x)=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{x}{a}$

$=\dfrac{1}{a}$

$\lim\limits_{x\to1-} f(x)=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{ax-1}{2}$

$=\dfrac{a-1}{2}$

$\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-1}{2}=\dfrac{a}{a+2}$,　　$a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$

∴ $a=-1$ 또는 $a=2$　　● 40%

답 구하기 따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-1+2=1$　　● 10%

답 1

185 (i) $|x|<1$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n-1}=0$이므로

$f(x)=ax+b$

(ii) $|x|>1$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} |x^{2n-1}|=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^{2n-1}}+\dfrac{b}{x^{2n}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=\frac{1}{x}$$

(iii) $x=1$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n-1}=1$이므로

$f(x)=\dfrac{a+b+1}{2}$

(iv) $x=-1$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=1$,　$\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n-1}=-1$이므로

$f(x)=\dfrac{-a+b-1}{2}$

$f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1+} f(x)=\lim\limits_{x\to1-} f(x)=f(1)$

일품 BOX

$\lim\limits_{x\to1+} f(x)$

$=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{1}{x}=1$,

$\lim\limits_{x\to1-} f(x)$

$=\lim\limits_{x\to1-}(ax+b)$

$=a+b$

$1=a+b=\dfrac{a+b+1}{2}$

∴ $a+b=1$　　…… ㉠

$f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to-1+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1-} f(x)=f(-1)$

일품 BOX

$\lim\limits_{x\to-1+} f(x)$

$=\lim\limits_{x\to-1+}(ax+b)$

$=-a+b$,

$\lim\limits_{x\to-1-} f(x)$

$=\lim\limits_{x\to-1-}\dfrac{1}{x}=-1$

$-a+b=-1=\dfrac{-a+b-1}{2}$

∴ $a-b=1$　　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면　　$a=1$, $b=0$

∴ $\dfrac{b}{a}=0$

답 ①

186 (i) $|x|<1$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty} x^n=\lim\limits_{n\to\infty} x^{n+2}=0$이므로　　$f(x)=\dfrac{b}{a}$

(ii) $|x|>1$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty} |x^n|=\lim\limits_{n\to\infty} |x^{n+2}|=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^2+\dfrac{b}{x^n}}{1+\dfrac{a}{x^n}}=ax^2$$

(iii) $x=1$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty} x^n=\lim\limits_{n\to\infty} x^{n+2}=1$이므로　　$f(x)=\dfrac{a+b}{1+a}$

$f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$a=\frac{b}{a}=\frac{a+b}{1+a}\qquad\therefore b=a^2\qquad\cdots\cdots$ ㉠

한편 $\lim_{x\to-2}f(x)=-8$이므로

$\lim_{x\to-2}ax^2=4a=-8\qquad\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=4$

$\therefore a^2+b^2=(-2)^2+4^2=20$

답 20

일품 BOX

- $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}ax^2=a$

  $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}\frac{b}{a}$

  $=\frac{b}{a}$

- $x\to-2$일 때 $|x|>1$이므로

  $\lim_{x\to-2}f(x)$

  $=\lim_{x\to-2}ax^2$

187 (i) $|f(x)|<1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\{f(x)\}^{2n}=0$이므로

$g(x)=\frac{1}{1+0}=1$

(ii) $|f(x)|>1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\{f(x)\}^{2n}=\infty$이므로

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\{f(x)\}^{2n}}}{\frac{1}{\{f(x)\}^{2n}}+1}=0$$

(iii) $|f(x)|=1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\{f(x)\}^{2n}=1$이므로 $\quad g(x)=\frac{1}{2}$

이상에서 함수 $g(x)$는 $f(x)=-1$ 또는 $f(x)=1$일 때 불연속이다.

$f(x)=-1$이면

$\frac{1}{8}(x^2-2x-7)=-1,\qquad x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0\qquad\therefore x=1$

$f(x)=1$이면

$\frac{1}{8}(x^2-2x-7)=1,\qquad x^2-2x-15=0$

$(x+3)(x-5)=0\qquad\therefore x=-3$ 또는 $x=5$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=-3$ 또는 $x=1$ 또는 $x=5$에서 불연속이므로 모든 실수 a의 값의 합은

$-3+1+5=3$

답 ②

188 $x\neq0$일 때, $f(x)$는 첫째항이 x^2, 공비가 $\frac{1}{1+x^2}$인 등비급수의 합이다.

이때 $0<\frac{1}{1+x^2}<1$이므로

$$f(x)=\frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}}=x^2+1$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}x^2+1 & (x\neq0)\\ a & (x=0)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$\therefore a=1$

답 ⑤

> 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}\ (a\neq0)$
>
> (i) $|r|<1$일 때
>
> ➡ $\frac{a}{1-r}$에 수렴
>
> (ii) $|r|\geq1$일 때
>
> ➡ 발산

- 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

189 해결 과정 $x\neq0$일 때, $f(x)$는 첫째항이 x^2+1, 공비가 $\frac{1}{x^2+2}$인 등비급수의 합이다.

이때 $0<\frac{1}{x^2+2}<1$이므로

$$f(x)=\frac{x^2+1}{1-\frac{1}{x^2+2}}=x^2+2$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}x^2+2 & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$ ● 40%

$f(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow0$일 때, $t\longrightarrow2$이므로

$\lim_{x\to0}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to0}g(f(x))=\lim_{t\to2}g(t)$

$=4-a$

$(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(0)=a$ ● 40%

답 구하기 $(g\circ f)(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(0)$

$4-a=a\qquad\therefore a=2$ ● 20%

답 2

190 ㄱ. 임의의 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)=b$로 놓으면 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로

$f(a)=b$

$f(x)=t$로 놓으면 $x\to a$일 때 $t\to b$이므로

$\lim_{x\to a}g(f(x))=\lim_{t\to b}g(t)$

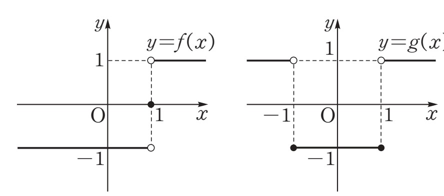
이때 $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로

$\lim_{t\to b}g(t)=g(b)=g(f(a))$

즉 $\lim_{x\to a}g(f(x))=g(f(a))$이므로 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

따라서 $(g\circ f)(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄴ. [반례] 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다고 하자.



$x\to1+$일 때 $f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1+}g(f(x))=g(1)=-1$

$x\to1-$일 때 $f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to1-}g(f(x))=g(-1)=-1$

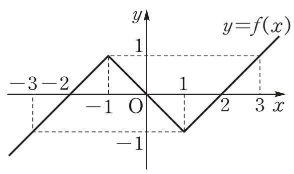
$\therefore\lim_{x\to1}g(f(x))=-1$

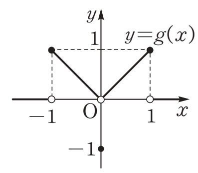
이때 $g(f(1))=g(0)=-1$이므로

$\lim_{x\to1}g(f(x))=g(f(1))$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이지만 $(g\circ f)(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. [반례] 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다고 하자.





$f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

이때 $f(-1)=1$이므로 $f(x)=t$로 놓으면

$x \to -1$일 때 $t \to 1-$이므로

$$\lim_{x\to-1} g(f(x))=\lim_{t\to1-} g(t)=1$$

이때 $g(f(-1))=g(1)=1$이므로

$$\lim_{x\to-1} g(f(x))=g(f(-1))$$

따라서 $(g\circ f)(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

1등급 비밀노트

ㄷ에서 함수 $(g\circ f)(x)$의 $x=3$에서의 연속성을 알아 보자.

$$\lim_{x\to3+} g(f(x))=\lim_{t\to1+} g(t)=0,$$

$$\lim_{x\to3-} g(f(x))=\lim_{t\to1-} g(t)=1$$

$$\therefore \lim_{x\to3+} g(f(x))\neq\lim_{x\to3-} g(f(x))$$

따라서 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

즉 $f(k)=1$인 k에 대하여 $(g\circ f)(x)$는 연속일 수도 불연속일 수도 있다.

191 ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to-1+} f(x)g(x)=1\cdot1=1$,

$\displaystyle\lim_{x\to-1-} f(x)g(x)=0\cdot(-1)=0$이므로

$$\lim_{x\to-1+} f(x)g(x)\neq\lim_{x\to-1-} f(x)g(x)$$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

ㄴ. $f(x)=t$라 하면 $x\to-1+$일 때 $t\to1-$이므로

$$\lim_{x\to-1+}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to-1+} f(f(x))=\lim_{t\to1-} f(t)=1$$

$x\to-1-$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to-1-}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to-1-} f(f(x))=\lim_{t\to0+} f(t)=0$$

$$\therefore \lim_{x\to-1+}(f\circ f)(x)\neq\lim_{x\to-1-}(f\circ f)(x)$$

따라서 함수 $(f\circ f)(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

ㄷ. $\displaystyle\lim_{x\to-1+}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to-1+} f(g(x))=f(1)=0$,

$\displaystyle\lim_{x\to-1-}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to-1-} f(g(x))=f(-1)=0$

이므로

$$\lim_{x\to-1}(f\circ g)(x)=0$$

일품 BOX

$g(k)=3$이므로 $y=g(x)$의 그래프에서 y좌표가 3일 때의 x좌표를 찾는다.

함수 $f(x)$에서
$f(a+x)=f(a-x)$
➡ 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=a$에 대하여 대칭이다.

$x\to-1+$일 때 $g(x)=1$,
$x\to-1-$일 때 $g(x)=-1$이므로
$\displaystyle\lim_{x\to-1+} f(g(x))=f(1)$,
$\displaystyle\lim_{x\to-1-} f(g(x))$
$=f(-1)$

이때 $(f\circ g)(-1)=f(g(-1))=f(0)=1$이므로

$$\lim_{x\to-1}(f\circ g)(x)\neq(f\circ g)(-1)$$

따라서 $(f\circ g)(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 $x=-1$에서 불연속이다. 답 ⑤

192 문제 이해 함수 $(g\circ f)(x)$가 $x=1$에서 연속이려면 $\displaystyle\lim_{x\to1}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(1)$이어야 한다. ● 30%

해결 과정 $f(x)=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to1}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to1} g(f(x))=\lim_{t\to0+} g(t)=3$$ ● 50%

답 구하기 $f(1)=k$에서

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(k)$이므로

$g(k)=3$ $\quad\therefore k=4$ ● 20%

답 4

193 $x^3=4-2x$에서

$x^3+2x-4=0$

$f(x)=x^3+2x-4$로 놓으면 $f(x)$는 연속함수이고

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{23}{8}<0$,

$f(1)=-1<0$,

$f(\sqrt[3]{2})=2\sqrt[3]{2}-2>0$,

$f(\sqrt{2})=4\sqrt{2}-4>0$,

$f(\sqrt[3]{4})=2\sqrt[3]{4}>0$,

$f(2)=8>0$

따라서 $f(1)f(\sqrt[3]{2})<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 $(1, \sqrt[3]{2})$이다.

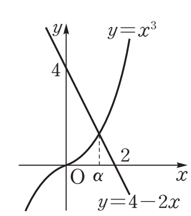
답 ②

1등급 비밀노트

오른쪽 그림에서 두 함수 $y=x^3$, $y=4-2x$의 그래프는 한 점에서 만나므로 주어진 방정식은 단 하나의 실근을 갖는다.

이때 교점의 x좌표를 α라 하면

$0<\alpha<2$



194 $f(1+x)=f(1-x)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

ㄱ. $f(3)=f(-1)$, $f(2)=f(0)$이므로

$f(2)f(3)=f(0)f(-1)<0$

따라서 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(2, 3)$에서 적어도 한 개의 실근을 갖는다.

ㄴ. $f(-2)f(-1)$의 값의 부호를 알 수 없으므로 구간 $(-2, -1)$에서 실근의 존재 여부는 알 수 없다.

ㄷ. $f(-2)=f(4)$, $f(-3)=f(5)$이므로

$$f(-2)f(-3)=f(4)f(5)<0$$

따라서 사이값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 $(-3, -2)$에서 적어도 한 개의 실근을 갖는다.

함수 $f(x)$는 연속함수이고

$$f(-3)f(-2)<0,\ f(-1)f(0)<0,$$
$$f(2)f(3)<0,\ f(4)f(5)<0$$

이므로 사이값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-3, -2)$, $(-1, 0)$, $(2, 3)$, $(4, 5)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 $f(x)=0$을 만족시키는 x는 적어도 4개 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

195 ㄱ. [반례] $a=2$이면

$$g(x)=|2x-2|=\begin{cases} 2x-2 & (x\geq 1) \\ -2x+2 & (x<1) \end{cases}$$

$$\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=1\cdot0=0,$$
$$\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=2\cdot0=0\text{이므로}$$
$$\lim_{x\to1} f(x)g(x)=0$$

이때 $f(1)g(1)=1\cdot0=0$이므로

$$\lim_{x\to1} f(x)g(x)=f(1)g(1)$$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이고, $g(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이므로 $(g\circ f)(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이려면 $(g\circ f)(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$f(x)=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때, $t\to1+$이므로

$$\lim_{x\to1+} g(f(x))=\lim_{t\to1+} g(t)=g(1)$$

$x\to1-$일 때 $t\to2-$이므로

$$\lim_{x\to1-} g(f(x))=\lim_{t\to2-} g(t)=g(2)$$

$$\lim_{x\to1+} g(f(x))=\lim_{x\to1-} g(f(x))\text{에서}$$
$$|2-a|=|4-a|$$

양변을 제곱하면

$$4-4a+a^2=16-8a+a^2$$
$$4a=12 \qquad \therefore a=3$$

ㄷ. $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로 $g(x)=1$을 만족시키는 x에서 $(f\circ g)(x)$의 연속성을 확인한다.

$|2x-a|=1$에서

$$2x-a=-1 \text{ 또는 } 2x-a=1$$
$$\therefore x=\frac{a-1}{2} \text{ 또는 } x=\frac{a+1}{2}$$

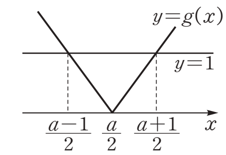
일품 BOX

$g(x)$가 연속함수이므로 $\lim_{t\to a+} g(t)=\lim_{t\to a-} g(t)=g(a)$

$\lim_{x\to1+} f(x)=-1$, $\lim_{x\to1+} f(-x)=1$

$\lim_{x\to1-} f(x)=1$, $\lim_{x\to1-} f(-x)=-1$

$g(x)=t$로 놓으면 오른쪽 그림에서



$$\lim_{x\to\frac{a-1}{2}+} (f\circ g)(x)$$
$$=\lim_{x\to\frac{a-1}{2}+} f(g(x))$$
$$=\lim_{t\to1-} f(t)=\lim_{t\to1-} (t+1)=2,$$
$$\lim_{x\to\frac{a-1}{2}-} (f\circ g)(x)$$
$$=\lim_{x\to\frac{a-1}{2}-} f(g(x))=\lim_{t\to1+} f(t)$$
$$=\lim_{t\to1+} (t^2-t+1)=1$$
$$\therefore \lim_{x\to\frac{a-1}{2}+} (f\circ g)(x)\neq \lim_{x\to\frac{a-1}{2}-} (f\circ g)(x)$$

따라서 함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=\frac{a-1}{2}$에서 불연속이다.

같은 방법으로 하면 함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=\frac{a+1}{2}$에서 불연속이다.

따라서 함수 $(f\circ g)(x)$가 불연속이 되는 점은 항상 2개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

참고 ㄷ. $x\to\frac{a}{2}$일 때 $g(x)<1$이므로

$$(f\circ g)(x)=g(x)+1=|2x-a|+1$$
$$\therefore \lim_{x\to\frac{a}{2}} (f\circ g)(x)=\lim_{x\to\frac{a}{2}} (|2x-a|+1)=1$$

이때 $f\left(g\left(\frac{a}{2}\right)\right)=f(0)=1$이므로

$$\lim_{x\to\frac{a}{2}} (f\circ g)(x)=(f\circ g)\left(\frac{a}{2}\right)$$

따라서 함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=\frac{a}{2}$에서 항상 연속이다.

196 ㄱ. $-x=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때, $t\to-1-$이므로

$$\lim_{x\to1+} f(-x)=\lim_{t\to-1-} f(t)=1$$
$$\therefore \lim_{x\to1+} \{f(x)+f(-x)\}=(-1)+1=0$$

$x\to1-$일 때, $t\to-1+$이므로

$$\lim_{x\to1-} f(-x)=\lim_{t\to-1+} f(t)=-1$$
$$\therefore \lim_{x\to1-} \{f(x)+f(-x)\}=1+(-1)=0$$
$$\therefore \lim_{x\to1} \{f(x)+f(-x)\}=0$$

이때 $f(1)+f(-1)=0$이므로

$$\lim_{x\to1} \{f(x)+f(-x)\}=f(1)+f(-1)$$

따라서 $f(x)+f(-x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to1+} f(x)f(-x)=(-1)\cdot1=-1,$

$$\lim_{x\to1-} f(x)f(-x)=1\cdot(-1)=-1\text{이므로}$$
$$\lim_{x\to1} f(x)f(-x)=-1$$

이때 $f(1)f(-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1} f(x)f(-x)\neq f(1)f(-1)$

따라서 $f(x)f(-x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $x\to1+$일 때, $f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to1+} f(f(x))=f(-1)=0$

$x\to1+$일 때, $f(-x)=1$이므로

$\lim_{x\to1+} f(f(-x))=f(1)=0$

$\therefore \lim_{x\to1+}\{(f\circ f)(x)+(f\circ f)(-x)\}=0$

$f(x)=s$로 놓으면 $x\to1-$일 때, $s\to1-$이므로

$\lim_{x\to1-} f(f(x))=\lim_{s\to1-} f(s)=1$

$f(-x)=r$로 놓으면 $x\to1-$일 때, $r\to-1+$이므로 $\lim_{x\to1-} f(f(-x))=\lim_{r\to-1+} f(r)=-1$

$\therefore \lim_{x\to1-}\{(f\circ f)(x)+(f\circ f)(-x)\}=0$

$\therefore \lim_{x\to1}\{(f\circ f)(x)+(f\circ f)(-x)\}=0$

이때 $(f\circ f)(1)+(f\circ f)(-1)=f(0)+f(0)=0$이므로

$\lim_{x\to1}\{(f\circ f)(x)+(f\circ f)(-x)\}$

$=(f\circ f)(1)+(f\circ f)(-1)$

따라서 $(f\circ f)(x)+(f\circ f)(-x)$는 $x=1$에서 연속이다.

이상에서 $x=1$에서 연속인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

197 $f(x)=[\log_3 x]+\left[\log_{\frac{1}{3}} x\right]$

$=[\log_3 x]+[-\log_3 x]$

(i) $x=3^n$ (n은 정수)일 때

$\log_3 x=n$이므로

$f(x)=[\log_3 x]+[-\log_3 x]=n-n=0$

(ii) $3^n<x<3^{n+1}$ (n은 정수)일 때

$n<\log_3 x<n+1$이므로

$-n-1<-\log_3 x<-n$

$\therefore [\log_3 x]=n,\ [-\log_3 x]=-n-1$

$\therefore f(x)=[\log_3 x]+[-\log_3 x]$

$=n-n-1=-1$

(i), (ii)에서 $f(x)=\begin{cases} -1 & (x\neq3,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ \cdots) \\ 0 & (x=3,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ \cdots) \end{cases}$

따라서 구간 $(1,\ 100)$에서 함수 $f(x)$는 $x=3,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4$일 때 불연속이므로 구하는 합은

$3^4<100<3^5$

$3+3^2+3^3+3^4=120$

답 120

198 (i) $\lim_{x\to1+} f(x)g_1(x)=1\cdot(-1)=-1,$

$\lim_{x\to1-} f(x)g_1(x)=-1\cdot(-1)=1$이므로

$\lim_{x\to1+} f(x)g_1(x)\neq\lim_{x\to1-} f(x)g_1(x)$

따라서 $f(x)g_1(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로

$a_1=1$

일품 BOX

정수 n에 대하여

① $n<x<n+1$이면

$[x]=n$이므로

$\lim_{x\to n+}[x]=n$

② $n-1<x<n$이면

$[x]=n-1$이므로

$\lim_{x\to n-}[x]=n-1$

(ii) $\lim_{x\to1+} f(x)g_2(x)=1\cdot(-1)=-1,$

$\lim_{x\to1-} f(x)g_2(x)=-1\cdot1=-1$이므로

$\lim_{x\to1} f(x)g_2(x)=-1$

$f(1)g_2(1)=1\cdot1=1$이므로

$\lim_{x\to1} f(x)g_2(x)\neq f(1)g_2(1)$

$\lim_{x\to-1+} f(x)g_2(x)=-1\cdot1=-1,$

$\lim_{x\to-1-} f(x)g_2(x)=-1\cdot(-1)=1$이므로

$\lim_{x\to-1+} f(x)g_2(x)\neq\lim_{x\to-1-} f(x)g_2(x)$

따라서 $f(x)g_2(x)$는 $x=-1,\ x=1$에서 불연속이므로

$a_2=2$

(iii) $\lim_{x\to1+} f(x)g_3(x)=1\cdot(-1)=-1,$

$\lim_{x\to1-} f(x)g_3(x)=-1\cdot(-1)=1$이므로

$\lim_{x\to1+} f(x)g_3(x)\neq\lim_{x\to1-} f(x)g_3(x)$

$\lim_{x\to0+} f(x)g_3(x)=0\cdot1=0,$

$\lim_{x\to0-} f(x)g_3(x)=0\cdot1=0$이므로

$\lim_{x\to0} f(x)g_3(x)=0$

$f(0)g_3(0)=0\cdot(-1)=0$이므로

$\lim_{x\to0} f(x)g_3(x)=f(0)g_3(0)$

따라서 $f(x)g_3(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로

$a_3=1$

이상에서 $a_1=a_3<a_2$

답 ③

1등급 완성하기

▶ 본책 44쪽

199 $f(x)=t$로 놓으면 $x\to1-$일 때 $t\to0+$이므로 $\lim_{x\to1-} g(f(x))=\lim_{t\to0+} g(t)=-1$

$x\to1+$일 때 $t\to1-$이므로

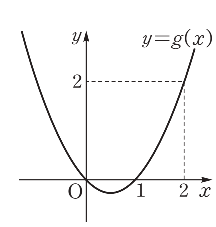
$\lim_{x\to1+} g(f(x))=\lim_{t\to1-} g(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to1-} g(f(x))+\lim_{x\to1+} g(f(x))$

$=-1+1=0$

답 ③

200 $g(x)=x^2-x$로 놓으면 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x\to0-$일 때 $g(x)\to0+$이므로

$\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0-}[g(x)]=0$

$x \to 1-$일 때 $g(x) \to 0-$이므로

$\lim_{x\to1-} f(x) = \lim_{x\to1-} [g(x)] = -1$

$x \to 2+$일 때 $g(x) \to 2+$이므로

$\lim_{x\to2+} f(x) = \lim_{x\to2+} [g(x)] = 2$

$\therefore \lim_{x\to0-} f(x) + \lim_{x\to1-} f(x) + \lim_{x\to2+} f(x) = 1$

답 1

201 해결 과정 $g(x)=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to a$이므로

$\lim_{x\to0+} (f\circ g)(x) = \lim_{x\to0+} f(g(x)) = \lim_{t\to a} f(t)$

$= \lim_{t\to a} (-2t+1)$

$= -2a+1$ ● 40%

$x\to0-$일 때 $t\to-a$이므로

$\lim_{x\to0-} (f\circ g)(x) = \lim_{x\to0-} f(g(x))$

$= \lim_{t\to-a} f(t) = \lim_{t\to-a} (3t+2)$

$= -3a+2$ ● 40%

답 구하기 $\lim_{x\to0} (f\circ g)(x)$의 값이 존재하려면

$\lim_{x\to0+} (f\circ g)(x) = \lim_{x\to0-} (f\circ g)(x)$이어야 하므로

$-2a+1=-3a+2 \quad \therefore a=1$ ● 20%

답 1

202 $\lim_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+2x^2}}{\sqrt{1-2x}-\sqrt{1+x^2}}$

$= \lim_{x\to0} \dfrac{\{1+x-(1+2x^2)\}(\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+x^2})}{\{1-2x-(1+x^2)\}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x^2})}$

$= \lim_{x\to0} \dfrac{x(1-2x)(\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+x^2})}{-x(2+x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x^2})}$

$= \lim_{x\to0} \dfrac{(1-2x)(\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+x^2})}{-(2+x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x^2})}$

$= \dfrac{1\cdot2}{-2\cdot2} = -\dfrac{1}{2}$

답 ③

203 $\lim_{x\to5} \dfrac{x^3-125}{4x^2-100} = \lim_{x\to5} \dfrac{x^3-5^3}{4(x^2-5^2)}$

$= \lim_{x\to5} \dfrac{(x-5)(x^2+5x+25)}{4(x+5)(x-5)}$

$= \lim_{x\to5} \dfrac{x^2+5x+25}{4(x+5)}$

$= \dfrac{15}{8}$

답 $\dfrac{15}{8}$

204 $4x^2+x \le f(x) \le 4x^2+x+1$에서

$\sqrt{4x^2+x}-2x+1 \le \sqrt{f(x)}-2x+1$

$\le \sqrt{4x^2+x+1}-2x+1$

일품 BOX

분자, 분모를 x로 각각 나눈 후 극한값을 계산한다.

이때

$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{4x^2+x}-2x+1)$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{4x^2+x-(2x-1)^2}{\sqrt{4x^2+x}+(2x-1)}$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{5x-1}{\sqrt{4x^2+x}+(2x-1)}$

$= \dfrac{5}{2+2} = \dfrac{5}{4}$

$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{4x^2+x+1}-2x+1)$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{4x^2+x+1-(2x-1)^2}{\sqrt{4x^2+x+1}+(2x-1)}$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{5x}{\sqrt{4x^2+x+1}+(2x-1)}$

$= \dfrac{5}{2+2} = \dfrac{5}{4}$

이므로 $\lim_{x\to\infty} \{\sqrt{f(x)}-2x+1\} = \dfrac{5}{4}$

답 ④

205 문제 이해 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty} \left(x+\dfrac{1}{3x}+\sqrt{ax^2-bx}\right)$

$= \lim_{t\to\infty} \left(-t-\dfrac{1}{3t}+\sqrt{at^2+bt}\right)$ ● 20%

해결 과정 $\lim_{t\to\infty} \dfrac{1}{3t}=0$이므로

$\lim_{t\to\infty} (-t+\sqrt{at^2+bt}) = 1$

$\lim_{t\to\infty} \dfrac{(\sqrt{at^2+bt}-t)(\sqrt{at^2+bt}+t)}{\sqrt{at^2+bt}+t} = 1$

$\lim_{t\to\infty} \dfrac{(a-1)t^2+bt}{\sqrt{at^2+bt}+t} = 1$ ······ ㉠ ● 30%

이때 $a\ne1$이면 좌변의 극한값이 존재하지 않으므로

$a=1$ ● 20%

$a=1$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$\lim_{t\to\infty} \dfrac{bt}{\sqrt{t^2+bt}+t} = \lim_{t\to\infty} \dfrac{b}{\sqrt{1+\dfrac{b}{t}}+1}$

$= \dfrac{b}{2}$

즉 $\dfrac{b}{2}=1$이므로 $b=2$ ● 20%

답 구하기 $\therefore a+b=3$ ● 10%

답 3

1등급 비밀노트

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$와 자연수 n에 대하여 $f(x)$가 $2n$차함수일 때

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{g(x)}{\sqrt{f(x)}} = \alpha$ ($\alpha\ne0$, α는 상수)

이면 $g(x)$는 n차함수이다.

206 (i) x가 유리수일 때,

$|f(x)-f(1)|=|3x-3|=3|x-1|$

(ii) x가 무리수일 때,

$|f(x)-f(1)|=|-x+4-3|=|-x+1|$
$=\boxed{|x-1|}$

(i), (ii)에서 $|f(x)-f(1)|\le\boxed{3|x-1|}$

$0\le|f(x)-f(1)|\le3|x-1|$

이때 $\lim_{x\to1}3|x-1|=\boxed{0}$이므로

$\lim_{x\to1}|f(x)-f(1)|=0$

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\therefore$ (가) $|x-1|$ (나) $3|x-1|$ (다) 0 답 ②

207 $\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{(x-a)(x-b)}-x\}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-(a+b)x+ab}{\sqrt{(x-a)(x-b)}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-(a+b)+\frac{ab}{x}}{\sqrt{\left(1-\frac{a}{x}\right)\left(1-\frac{b}{x}\right)}+1}$$

$$=-\frac{a+b}{2}$$

즉 $-\frac{a+b}{2}=3$이므로 $a+b=-6$

$$\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\left(\frac{ab}{x+ab}-1\right)\right\}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{-x}{x+ab}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{x+ab}$$

$$=-\frac{1}{ab}$$

즉 $-\frac{1}{ab}=\frac{1}{4}$이므로 $ab=-4$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=(-6)^2-2\cdot(-4)=44$ 답 ④

208 문제 이해 주어진 조건에 의하여 $\lim_{x\to1}f(x)=0$, $\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$, $f(2)=0$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)(ax+b)$ (a, b는 상수, $a\ne0$)로 놓을 수 있다. ● 20%

해결 과정 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)(ax+b)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x-2)(ax+b)$

$=-a-b$

이므로 $-a-b=1$ …… ㉠ ● 20%

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x-2)(ax+b)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}(x-1)(ax+b)$

$=2a+b$

이므로 $2a+b=2$ …… ㉡ ● 20%

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-4$ ● 20%

답 구하기 따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)(3x-4)$이므로

$f(4)=48$ ● 20%

답 48

209 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{f(x)}+x}{x+1}=1$에서 $x\to-1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}(\sqrt{f(x)}+x)=0$이므로 $f(-1)=1$

$f(-1)=1-a+b=1$에서 $a=b$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{f(x)}+x}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(\sqrt{f(x)}+x)(\sqrt{f(x)}-x)}{(x+1)(\sqrt{f(x)}-x)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-x^2}{(x+1)(\sqrt{f(x)}-x)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{ax+a}{(x+1)(\sqrt{f(x)}-x)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{a}{\sqrt{f(x)}-x}$$

$$=\frac{a}{1-(-1)}=\frac{a}{2}$$

즉 $\frac{a}{2}=1$이므로 $a=2$, $b=2$

따라서 $f(x)=x^2+2x+2$이므로

$f(3)=3^2+2\cdot3+2=17$ 답 17

210 $\lim_{x\to a}\frac{bx+a}{x^2-a^2}=\frac{1}{6}$에서 $x\to a$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to a}(bx+a)=0$이므로 $ba+a=0$

$\therefore a(b+1)=0$

이때 $a\ne0$이므로 $b=-1$

$b=-1$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to a}\frac{bx+a}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{-(x-a)}{(x-a)(x+a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{-1}{x+a}=-\frac{1}{2a}$$

즉 $-\frac{1}{2a}=\frac{1}{6}$이므로 $a=-3$

$\therefore ab=3$ 답 ①

211 문제 이해 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0$이므로 $f(x)$는 이차 이하의 다항함수이다. ● 10%

해결 과정 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=-3$에서 $x\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$

일품 BOX

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$일 때, $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$

실수 x에 대하여 $|x-1|\le3|x-1|$

분자, 분모에 각각 $\sqrt{f(x)}-x$를 곱하여 분자를 유리화한다.

분모를 1로 보고, 분자, 분모에 각각 $\sqrt{(x-a)(x-b)}+x$를 곱하여 분자를 유리화한다.

$f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$이고 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$

따라서 $f(x)=ax^2+bx$ (a, b는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{ax^2+bx}{x}=\lim_{x\to0}(ax+b)=b$$

$\therefore b=-3$ ● 40%

한편 방정식 $ax^2-3x=x^2$의 한 근이 $x=1$이므로

$a-3=1$ $\quad\therefore a=4$ ● 30%

답 구하기 따라서 $f(x)=4x^2-3x$이므로 $f(x)=0$에서

$x(4x-3)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=\dfrac{3}{4}$ ● 20%

답 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{3}{4}$

212 방정식 $x^2+2x-a^2+5a+7=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1-(-a^2+5a+7)=(a+1)(a-6)$$

(i) $\dfrac{D}{4}<0$일 때, 즉 $-1<a<6$일 때,

$f(a)=0$

(ii) $\dfrac{D}{4}>0$일 때, 즉 $a<-1$ 또는 $a>6$일 때,

$f(a)=2$

(iii) $\dfrac{D}{4}=0$일 때, 즉 $a=-1$ 또는 $a=6$일 때,

$f(a)=1$

이상에서 $f(a)$는 $a=-1$ 또는 $a=6$에서 불연속이므로 $\quad t=-1$ 또는 $t=6$

따라서 모든 t의 값의 합은

$-1+6=5$

답 5

213 ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to0+}\{f(x)+g(x)\}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0+}f(x)+\lim_{x\to0+}g(x)$

$=1+0=1$

$\displaystyle\lim_{x\to0-}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to0-}g(x)$

$=-1+2=1$

$\displaystyle\therefore\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}=1$

이때 $f(0)+g(0)=1+0=1$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}=f(0)+g(0)$

따라서 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to1+}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to1+}f(x)-\lim_{x\to1+}g(x)$

$=-1-(-1)=0$

$\displaystyle\lim_{x\to1-}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to1-}f(x)-\lim_{x\to1-}g(x)$

$=1-1=0$

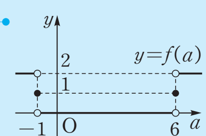
$\displaystyle\therefore\lim_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}=0$

이때 $f(1)-g(1)=-1-(-1)=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}=f(1)-g(1)$

따라서 $f(x)-g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

일품 BOX



$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=\beta$일 때,

① $\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\alpha\pm\beta$ (복호동순)

② $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\alpha\beta$

$2<x<3$일 때 $1<x-1<2$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to2+}[x-1]=1$

$1<x<2$일 때 $0<x-1<1$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to2-}[x-1]=0$

ㄷ. $\displaystyle\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)\lim_{x\to1+}g(x)$

$=(-1)\cdot(-1)=1$

$\displaystyle\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)\lim_{x\to1-}g(x)$

$=1\cdot1=1$

$\displaystyle\therefore\lim_{x\to1}f(x)g(x)=1$

이때 $f(1)g(1)=(-1)\cdot(-1)=1$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)g(x)=f(1)g(1)$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

214 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-1$에서 연속이어야 한다.

$\displaystyle f(-1)=\lim_{x\to-1-}f(x)$에서 $\quad k=-4+a$

$\therefore a=k+4$ …… ㉠

$\displaystyle f(-1)=\lim_{x\to-1+}f(x)$에서

$\displaystyle k=\lim_{x\to-1+}\frac{2x^3+b}{x+1}$ …… ㉡

㉡에서 $x\to-1+$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\displaystyle\lim_{x\to-1+}(2x^3+b)=0$이므로 $\quad -2+b=0$

$\therefore b=2$

$b=2$를 ㉡에 대입하면

$\displaystyle k=\lim_{x\to-1+}\frac{2x^3+2}{x+1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-1+}\frac{2(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-1+}2(x^2-x+1)=6$

$k=6$을 ㉠에 대입하면 $\quad a=10$

$\therefore abk=120$

답 ④

215 $\displaystyle\lim_{x\to2+}[x]=2$, $\displaystyle\lim_{x\to2+}[x-1]=1$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}([x]^2-ax[x-1])=4-2a$

$\displaystyle\lim_{x\to2-}[x]=1$, $\displaystyle\lim_{x\to2-}[x-1]=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}([x]^2-ax[x-1])=1$

$f(x)$가 $x=2$에서 연속이려면

$\displaystyle\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$

이어야 하므로

$4-2a=1$ $\quad\therefore a=\dfrac{3}{2}$

답 ③

216 $\displaystyle\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)\lim_{x\to1+}g(x)$

$=1\cdot(a+1)=a+1$

$\displaystyle\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)\lim_{x\to1-}g(x)$

$=(-1)\cdot(1+b)=-b-1$

함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=f(1)g(1)$$

이어야 하므로

$a+1=-b-1 \qquad \therefore a+b=-2$ 답 ①

217 해결 과정 (i) $|x|<1$일 때,

$\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\lim_{n\to\infty} x^{2n+2}=0$이므로

$$f(x)=\frac{ax^3+b}{4}$$

(ii) $|x|>1$일 때,

$\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\lim_{n\to\infty} |x^{2n+2}|=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+\frac{a}{x^{2n-3}}+\frac{b}{x^{2n}}}{1+\frac{4}{x^{2n}}}=x^2$$

(iii) $x=1$일 때,

$\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\lim_{n\to\infty} x^{2n+2}=1$이므로

$$f(x)=\frac{a+b+1}{5}$$

(iv) $x=-1$일 때,

$\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\lim_{n\to\infty} x^{2n+2}=1$이므로

$$f(x)=\frac{-a+b+1}{5}$$ ● 40%

$f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1-} f(x)=f(1)$$

$$1=\frac{a+b}{4}=\frac{a+b+1}{5}$$

$\therefore a+b=4$ …… ㉠

$f(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1-} f(x)=f(-1)$$

$$\frac{-a+b}{4}=1=\frac{-a+b+1}{5}$$

$\therefore -a+b=4$ …… ㉡ ● 40%

답 구하기 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0,\ b=4$

$\therefore 2b-a=2\cdot4-0=8$ ● 20%

답 8

218 ㄱ. $\lim_{x\to1+} f(f(x))=f(-1)=0$,

$\lim_{x\to1-} f(f(x))=f(1)=0$

$\therefore \lim_{x\to1} f(f(x))=0$

이때 $f(f(1))=f(0)=1$이므로

$\lim_{x\to1} f(f(x))\neq f(f(1))$

따라서 $f(f(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄴ. $g(x)=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $t\to-1-$이므로

$\lim_{x\to1+} g(g(x))=\lim_{t\to-1-} g(t)=1$

$x\to1-$일 때 $t\to-1+$이므로

$\lim_{x\to1-} g(g(x))=\lim_{t\to-1+} g(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to1} g(g(x))=1$

이때 $g(g(1))=g(1)=1$이므로

$\lim_{x\to1} g(g(x))=g(g(1))$

따라서 $g(g(x))$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. $g(x)=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $t\to-1-$이므로

$\lim_{x\to1+} f(g(x))=\lim_{t\to-1-} f(t)=-1$

$x\to1-$일 때 $t\to-1+$이므로

$\lim_{x\to1-} f(g(x))=\lim_{t\to-1+} f(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to1+} f(g(x))\neq\lim_{x\to1-} f(g(x))$

따라서 $f(g(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

이상에서 $x=1$에서 연속인 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

1등급 비밀노트

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 합성함수 $g(f(x))$의 연속성을 확인할 때에는 좌극한과 우극한에 주의하면서 $f(x)=t$로 치환하여 생각한다.

$x\to a+$일 때 $f(x)\to b+$인 경우에 $f(x)=t$로 놓으면 $t\to b+$이므로

$\lim_{x\to a+} g(f(x))=\lim_{t\to b+} g(t)$

219 $f(x)=x^2-3x+3=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$이라 하면

$$f(-1)=7,\ f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4},\ f(3)=3$$

이므로

$$\frac{3}{4}\le f(x)\le7 \qquad \therefore \frac{1}{7}\le\frac{1}{f(x)}\le\frac{4}{3}$$

즉 $\frac{1}{7}\le y\le\frac{4}{3}$이므로 $M=\frac{4}{3},\ m=\frac{1}{7}$

$\therefore Mm=\frac{4}{21}$ 답 $\frac{4}{21}$

220 ㄱ. $g(x)=f(x)-x$로 놓으면 함수 $g(x)$는 구간 $[-1, 1]$에서 연속이고

$g(-1)=f(-1)-(-1)=1+1=2>0$

$g(1)=f(1)-1=-1-1=-2<0$

따라서 사이값 정리에 의하여 방정식 $f(x)-x=0$은 구간 $(-1, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. $h(x)=(x^2+1)f(x)$로 놓으면 함수 $h(x)$는 구간 $[-1, 1]$에서 연속이고

$h(-1)=2f(-1)=2>0$

$h(1)=2f(1)=-2<0$

따라서 사이값 정리에 의하여 방정식 $(x^2+1)f(x)=0$은 구간 $(-1, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

일품 BOX

함수 $y=\frac{1}{x^2-3x+3}$은 구간 $[-1, 3]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1+} x^2$,
$\lim_{x\to1-} f(x)$
$=\lim_{x\to1-}\frac{ax^3+b}{4}$

$\lim_{x\to-1+} f(x)$
$=\lim_{x\to-1+}\frac{ax^3+b}{4}$,
$\lim_{x\to-1-} f(x)$
$=\lim_{x\to-1-} x^2$

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. $k(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$로 놓으면 함수 $k(x)$는 구간 $[-1, 1]$에서 연속이고

$$k(-1)=f(f(-1))=f(1)=-1<0$$
$$k(1)=f(f(1))=f(-1)=1>0$$

따라서 사이값 정리에 의하여 방정식 $(f\circ f)(x)=0$은 구간 $(-1, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 주어진 구간에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. 답 ⑤

221 전략 두 점 Q, R의 x좌표를 이용하여 $\overline{QR}$, $\overline{PR}$의 길이를 a로 나타낸다.

Step 1 $y=a$를 $x^2+(y-3)^2=9$에 대입하면

$$x^2+(a-3)^2=9$$
$$x^2=9-(a-3)^2=6a-a^2$$
$$\therefore x=\sqrt{6a-a^2}\ (\because x>0)$$
$$\therefore \mathrm{Q}(\sqrt{6a-a^2},\ a)$$

Step 2 $y=a$를 $y=\frac{1}{16}x^2$에 대입하면

$$a=\frac{1}{16}x^2,\quad x^2=16a\quad \therefore x=4\sqrt{a}\ (\because x>0)$$
$$\therefore \mathrm{R}(4\sqrt{a},\ a)$$

Step 3 점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $a\to 0+$이므로 구하는 값은

$$\lim_{a\to 0+}\frac{\overline{QR}}{\overline{PR}}=\lim_{a\to 0+}\frac{4\sqrt{a}-\sqrt{6a-a^2}}{4\sqrt{a}}$$
$$=\lim_{a\to 0+}\frac{4-\sqrt{6-a}}{4}$$
$$=\frac{4-\sqrt{6}}{4}$$

답 ⑤

222 전략 그래프가 끊어진 점에서 합성함수의 연속성을 조사한다.

Step 1 (i) $f(x)=t$로 놓으면 $x\to 0+$일 때 $t\to -1+$, $x\to 0-$일 때 $t\to 1-$이므로

$$\lim_{x\to 0+}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 0+}g(f(x))=\lim_{t\to -1+}g(t)=-1,$$
$$\lim_{x\to 0-}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 0-}g(f(x))=\lim_{t\to 1-}g(t)=-1$$
$$\therefore \lim_{x\to 0}(g\circ f)(x)=-1$$

이때 $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(-1)=1$이므로

$$\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x)\neq(g\circ f)(0)$$

따라서 $(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

$x\to 1$일 때 $t\to 0-$이므로

$$\lim_{x\to 1}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 1}g(f(x))=\lim_{t\to 0-}g(t)=1$$

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(1)=-1$이므로

$$\lim_{x\to 1}(g\circ f)(x)\neq(g\circ f)(1)$$

일품 BOX

$f(x)$는 $x=0$, $x=1$에서 불연속이다. 또 $h(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 $f(-1)=0$이므로 $x=0$, $x=1$, $x=-1$에서 $(h\circ f)(x)$의 연속성을 확인한다.

분자, 분모를 각각 $\sqrt{a}$로 나눈다.

$f(x)$는 $x=0$, $x=1$에서 불연속이다. 또 $g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이고 $f(0)=-1$, $f(2)=-1$이므로 $x=0$, $x=1$, $x=2$에서 $(g\circ f)(x)$의 연속성을 확인한다.

따라서 $(g\circ f)(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

$x\to 2+$일 때 $t\to -1-$이고, $x\to 2-$일 때 $t\to -1+$이므로

$$\lim_{x\to 2+}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 2+}g(f(x))=\lim_{t\to -1-}g(t)=-1,$$
$$\lim_{x\to 2-}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 2-}g(f(x))=\lim_{t\to -1+}g(t)=-1$$
$$\therefore \lim_{x\to 2}(g\circ f)(x)=-1$$

이때 $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(-1)=1$이므로

$$\lim_{x\to 2}(g\circ f)(x)\neq(g\circ f)(2)$$

따라서 $(g\circ f)(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

$$\therefore a=3$$

Step 2 (ii) $f(x)=t$로 놓으면

$$\lim_{x\to 0+}(h\circ f)(x)=\lim_{x\to 0+}h(f(x))=\lim_{t\to -1+}h(t)=1,$$
$$\lim_{x\to 0-}(h\circ f)(x)=\lim_{x\to 0-}h(f(x))=\lim_{t\to 1-}h(t)=1$$
$$\therefore \lim_{x\to 0}(h\circ f)(x)=1$$

이때 $(h\circ f)(0)=h(f(0))=h(-1)=1$이므로

$$\lim_{x\to 0}(h\circ f)(x)=(h\circ f)(0)$$

따라서 $(h\circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to 1}(h\circ f)(x)=\lim_{x\to 1}h(f(x))=\lim_{t\to 0-}h(t)=0$$

이고,

$$(h\circ f)(1)=h(f(1))=h(1)=1$$

이므로

$$\lim_{x\to 1}(h\circ f)(x)\neq(h\circ f)(1)$$

따라서 $(h\circ f)(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

$x\to -1$일 때 $t\to 0+$이므로

$$\lim_{x\to -1}(h\circ f)(x)=\lim_{x\to -1}h(f(x))=\lim_{t\to 0+}h(t)=-1,$$
$$(h\circ f)(-1)=h(f(-1))=h(0)=-1$$

이므로 $\lim_{x\to -1}(h\circ f)(x)=(h\circ f)(-1)$

따라서 $(h\circ f)(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

$$\therefore b=1$$

Step 3 $\therefore a+b=4$ 답 4

1등급 비밀노트

$y=f(x)$가 $x=a$에서 연속이고, $y=g(x)$가 $x=f(a)$에서 연속이면 $y=(g\circ f)(x)$는 $x=a$에서 연속이다.
따라서 함수 $y=(g\circ f)(x)$가 불연속인 점은 다음 두 가지 경우의 x의 값에서만 확인하면 된다.
① $y=f(x)$가 불연속인 점의 x의 값
② $y=g(x)$가 불연속인 점의 x의 값을 함숫값으로 갖는 $f(x)$의 x의 값

Ⅲ 다항함수의 미분법

05 미분계수와 도함수 본책 50쪽

223 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{(9+3a)-(1+a)}{2}=a+4$$

따라서 $a+4=7$이므로 $a=3$

답 3

224 함수 $f(x)=2x+3$에 대하여 x의 값이 2에서 4까지 변할 때의 평균변화율은 직선 $y=f(x)$의 기울기와 같으므로 2

함수 $g(x)=ax^2+1$에 대하여 x의 값이 2에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{g(4)-g(2)}{4-2}=\frac{(16a+1)-(4a+1)}{2}=6a$$

따라서 $6a=2$이므로 $a=\frac{1}{3}$

답 ④

225 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{15-3}{2}=6$$

$x=c$에서의 순간변화율은

$$\begin{aligned}f'(c)&=\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\{(c+h)^2+2(c+h)\}-(c^2+2c)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{2ch+h^2+2h}{h}\\&=2c+2\end{aligned}$$

따라서 $2c+2=6$이므로 $c=2$

답 2

226

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{3h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\cdot\frac{2}{3}\\&=\frac{2}{3}f'(a)\\&=\frac{2}{3}\cdot3=2\end{aligned}$$

답 ②

227

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}\\&=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+2)}\\&=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}\\&=f'(2)\cdot\frac{1}{4}\\&=4\cdot\frac{1}{4}=1\end{aligned}$$

$x^2=t$로 놓으면 $x\to2$일 때, $t\to4$이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{\{f(x^2)-f(4)\}(x+2)}{x^2-4}\\&=\lim_{x\to2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\cdot\lim_{x\to2}(x+2)\\&=\lim_{t\to4}\frac{f(t)-f(4)}{t-4}\cdot4\\&=4f'(4)\\&=4\cdot10=40\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}+\lim_{x\to2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x-2}=1+40=41$$

답 ③

228 $\frac{1}{n}=h$로 놓으면 $n\to\infty$일 때, $h\to0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f(1)\right\}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$$

따라서 $f'(1)=4$이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(1+\frac{2}{n}\right)-f\left(1-\frac{2}{n}\right)\right\}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1-2h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot2\\&\quad+\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\cdot2\\&=2f'(1)+2f'(1)=4f'(1)\\&=4\cdot4=16\end{aligned}$$

답 16

229 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로 $x=3$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)=f(3)$이므로

$$\lim_{x\to3+}(-x^2)=\lim_{x\to3-}(ax+b)=-9$$

$3a+b=-9$ $\therefore b=-3a-9$ …… ㉠

$f(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0+}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}&=\lim_{h\to0+}\frac{-(3+h)^2-(-9)}{h}\\&=\lim_{h\to0+}(-h-6)=-6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0-}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}\\&=\lim_{h\to0-}\frac{a(3+h)-3a-9-(-9)}{h}=a\end{aligned}$$

에서 $a=-6$

$a=-6$을 ㉠에 대입하면 $b=18-9=9$

$\therefore a+b=3$

답 3

일품 BOX

분자, 분모에 각각 $x+2$를 곱한다.

일차함수 $y=ax+b$에서 x가 α에서 β까지 변할 때의 평균변화율은 항상 a이다.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서
① 연속이면
➡ $f(a)$, $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하고, 두 값이 같다.
② 미분가능하면
➡ $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$의 값이 존재한다.

$b=-3a-9$이므로 b 대신 $-3a-9$를 대입한다.

230 $x \neq 2$일 때, $f(x)=\dfrac{g(x)}{x-2}$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to2} f(x)=f(2)$이므로

$\lim_{x\to2} \dfrac{g(x)}{x-2}=3$

$(x-2)f(x)=g(x)$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$g(2)=0$

$\therefore g'(2)=\lim_{x\to2} \dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2} \dfrac{g(x)}{x-2}=3$ 답 3

231 ㄱ. $x=3$인 점에서의 접선의 기울기가 양수이므로 $f'(3)>0$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=4$, $x=6$에서 불연속이므로 불연속인 점은 2개이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=2$, $x=4$, $x=6$에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 점은 3개이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

1등급 비밀노트

함수 $y=f(x)$의 그래프에서
① 불연속인 점 ➡ 연결되어 있지 않고 끊어져 있는 점
② 미분가능하지 않은 점 ➡ 불연속인 점, 뾰족한 점

232 $f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{10}$에서

$f(1)=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{11\text{개}}=11$

$f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+10x^9$이므로

$f'(1)=1+2+3+\cdots+10=55$

$\therefore f'(1)-f(1)=55-11=44$ 답 ④

233 $f(-1)=4$에서 $a-b=4$ …… ㉠

$f'(x)=2ax+b$이므로 $f'(1)=-1$에서

$2a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$

$\therefore ab=-3$ 답 ②

234 $f_n'(x)=nx^{n-1}-2nx^{2n-1}$이므로

$f_n'(-1)=n\cdot(-1)^{n-1}-2n\cdot(-1)^{2n-1}$

$=n\cdot(-1)^{n-1}+2n$

$=\begin{cases} 3n & (n\text{은 홀수}) \\ n & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$

$\therefore \sum_{n=1}^{10} f_n'(-1)$

$=\{f_1'(-1)+f_3'(-1)+\cdots+f_9'(-1)\}$
$\quad+\{f_2'(-1)+f_4'(-1)+\cdots+f_{10}'(-1)\}$

$=3(1+3+5+7+9)+(2+4+6+8+10)$

$=3\cdot25+30=105$ 답 ②

일품 BOX

$x\to a$일 때,
① (분모) → 0이고 극한값이 존재
➡ (분자) → 0
② (분자) → 0이고 0이 아닌 극한값이 존재
➡ (분모) → 0

$f'(3)$은 $x=3$인 점에서의 접선의 기울기와 같다.

$\sum_{k=1}^{10} k=\dfrac{10\cdot11}{2}=55$

235 $f(1)=4(a+b)=-8$이므로

$a+b=-2$ …… ㉠

$f'(x)=2x(ax^2+bx)+(x^2+3)(2ax+b)$에서

$f'(1)=2(a+b)+4(2a+b)=10a+6b=0$

$\therefore 5a+3b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-5$

따라서 $f'(x)=2x(3x^2-5x)+(x^2+3)(6x-5)$이므로

$f'(2)=4\cdot2+7\cdot7=57$ 답 ①

236 $\lim_{x\to1} \dfrac{f(x)-6}{x-1}=10$에서 $x\to1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) → 0이므로 (분자) → 0이다.

즉 $\lim_{x\to1}\{f(x)-6\}=0$이므로 $f(1)=6$

$\lim_{x\to1} \dfrac{f(x)-6}{x-1}=\lim_{x\to1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=10$에서

$f'(1)=10$

$\lim_{x\to1} \dfrac{g(x)-8}{x-1}=12$에서 $x\to1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) → 0이므로 (분자) → 0이다.

즉 $\lim_{x\to1}\{g(x)-8\}=0$이므로 $g(1)=8$

$\lim_{x\to1} \dfrac{g(x)-8}{x-1}=\lim_{x\to1} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=12$에서

$g'(1)=12$

$y=f(x)g(x)$에서 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

따라서 $y=f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=10\cdot8+6\cdot12$

$=152$

답 152

237 다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-2)^2Q(x)$ …… ㉠

양변에 $x=2$를 대입하면 $f(2)=0$

$16+2a+b=0$

$\therefore 2a+b=-16$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)$

양변에 $x=2$를 대입하면 $f'(2)=0$

이때 $f'(x)=4x^3+a$이므로

$f'(2)=32+a=0$ $\therefore a=-32$

$a=-32$를 ㉡에 대입하면

$-64+b=-16$ $\therefore b=48$

$\therefore a+b=16$ 답 ④

238 $f(x+y)=f(x)f(y)$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)\cdot f(0)$ $\therefore f(0)=1$ ($\because f(0)>0$)

도함수의 정의에 의하여

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)\{f(h)-1\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)\{f(h)-f(0)\}}{h}$$
$$=f(x)f'(0)$$
$$\therefore \frac{f'(x)}{f(x)}=f'(0)=3$$

답 3

239 $f(x+y)=f(x)+f(y)-2xy$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\therefore f(0)=0$

$f'(0)=1$에서

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}$$

즉 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=1$이므로

$$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(2)+f(h)-4h\}-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-4h}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-4$$
$$=1-4=-3$$

답 ①

240 $f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)+h(1+h)+1-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}+\lim_{h\to0}(1+h)$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}+1$$

따라서 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}+1=2$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}=1$$

$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+xh(x+h)+1-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}+\lim_{h\to0}x(x+h)$$
$$=x^2+1$$

답 $f'(x)=x^2+1$

241 $f(2)=-3$이므로 $4+2a+b=-3$

$\therefore 2a+b=-7$ …… ㉠

점 $(2, -3)$에서의 접선의 기울기는 $x=2$에서의 미분계수와 같으므로 $f'(2)=2$

$f'(x)=2x+a$이므로

$4+a=2$ $\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$-4+b=-7$ $\therefore b=-3$

$\therefore a+b=-5$

답 ①

242 문제 이해 $f(a)=-1$, $f(b)=5$이므로

$g(-1)=a$, $g(5)=b$ ● 30%

해결 과정 $f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{5-(-1)}{b-a}=\frac{6}{b-a}$$

즉 $\frac{6}{b-a}=3$이므로 $b-a=2$ …… ㉠ ● 30%

답 구하기 $g(x)$에서 x의 값이 -1에서 5까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{g(5)-g(-1)}{5-(-1)}=\frac{b-a}{6}=\frac{1}{3}\ (\because ㉠)$$ ● 40%

답 $\frac{1}{3}$

243 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-(1-2h)f(1)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)+2hf(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{2hf(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot2+2f(1)$$
$$=2f'(1)+2f(1)$$
$$=2\cdot5+2\cdot(-2)=6$$

답 ②

244 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)-g(h)}{2h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{2h}-\lim_{h\to0}\frac{g(h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\cdot\frac{3}{2}$$
$$-\lim_{h\to0}\frac{g(h)-g(0)}{h}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{2}f'(a)-\frac{1}{2}g'(0)=3-\frac{1}{2}g'(0)$$

즉 $3-\frac{1}{2}g'(0)=0$이므로

$g'(0)=6$

답 ③

245 $x+1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to2$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x+1)-4}{x^2-1}=\lim_{t\to2}\frac{f(t)-4}{(t-1)^2-1}$$
$$=\lim_{t\to2}\frac{f(t)-4}{t(t-2)}$$

일품 BOX

함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여
$f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

0이 아닌 상수 p, q에 대하여
$\lim_{h\to0}\frac{f(a+qh)-f(a)}{ph}=\frac{q}{p}f'(a)$

$g(0)=0$이므로
$\frac{g(h)}{2h}=\frac{g(h)-g(0)}{h}\cdot\frac{1}{2}$

$\lim_{t\to2}\frac{f(t)-4}{t(t-2)}=8$에서 $t\to2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{t\to2}\{f(t)-4\}=0$이므로 $\quad f(2)=4$

$$\therefore \lim_{t\to2}\frac{f(t)-4}{t(t-2)}=\lim_{t\to2}\frac{f(t)-f(2)}{t-2}\cdot\lim_{t\to2}\frac{1}{t}=\frac{1}{2}f'(2)$$

즉 $\frac{1}{2}f'(2)=8$이므로 $\quad f'(2)=16$

$\therefore f(2)+f'(2)=4+16=20$

답 ⑤

246 $f'(-a)=\lim_{h\to0}\frac{f(-a+h)-f(-a)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{-f(a-h)+f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$$
$$=f'(a)$$

답 ⑤

247 해결 과정 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{ah+1-1}{h}=a$$
$$\lim_{h\to0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{h^2+4h+1-1}{h}=\lim_{h\to0-}(h+4)=4$$

에서 $\quad a=4$ ● 30%

또 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다. 즉 $\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$이므로

$$\lim_{x\to2+}(-x^2+bx+c)=\lim_{x\to2-}(4x+1)$$
$$-4+2b+c=4\cdot2+1$$
$$\therefore 2b+c=13 \quad \cdots\cdots ㉠$$ ● 20%

$f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{-(2+h)^2+b(2+h)+c-9}{h}=\lim_{h\to0+}(-h+b-4)=b-4$$
$$\lim_{h\to0-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{4(2+h)+1-9}{h}=4$$

에서 $\quad b-4=4 \quad \therefore b=8$

$b=8$을 ㉠에 대입하면

$c=-3$ ● 40%

답 구하기 $\therefore a+b+c=4+8+(-3)=9$ ● 10%

답 9

일품 BOX

- $f(-x)=-f(x)$이므로 $f(-a+h)=-f(a-h)$
- 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 $x=0$에서도 미분가능하다.
- $|h^2-2h|=\begin{cases}-h^2+2h\,(0\le h\le2)\\ h^2-2h\,(h<0)\end{cases}$
- $f(2)=\lim_{x\to2-}f(x)$에서 $f(2)=\lim_{x\to2-}(4x+1)=9$
- 분자를 전개하면 $-h^2-4h-4+2b+bh+c-9=-h^2+(b-4)h$ $(\because ㉠)$

다른 풀이 $f(x)=\begin{cases}x^2+4x+1 & (x<0)\\ ax+1 & (0\le x<2)\\ -x^2+bx+c & (x\ge2)\end{cases}$에서

$$f'(x)=\begin{cases}2x+4 & (x<0)\\ a & (0<x<2)\\ -2x+b & (x>2)\end{cases}$$

$f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to0+}f'(x)=\lim_{x\to0-}f'(x)$

$\lim_{x\to0+}a=\lim_{x\to0-}(2x+4) \quad \therefore a=4$

$f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to2+}f'(x)=\lim_{x\to2-}f'(x)$

$\lim_{x\to2+}(-2x+b)=\lim_{x\to2-}a$

$-4+b=a \quad \therefore b=a+4=8$

$f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\quad f(2)=\lim_{x\to2-}f(x)$

$12+c=9 \quad \therefore c=-3$

$\therefore a+b+c=9$

1등급 비밀노트

미분가능한 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여

$h(x)=\begin{cases}f(x)\,(x\ge a)\\ g(x)\,(x<a)\end{cases} \Rightarrow h'(x)=\begin{cases}f'(x)\,(x>a)\\ g'(x)\,(x<a)\end{cases}$

248 ㄱ. $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}x|x|=0$, $f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h|h|}{h}=\lim_{h\to0+}h=0$$
$$\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{h|h|}{h}=\lim_{h\to0-}(-h)=0$$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄴ. $\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}|x^2-2x|=0$, $g(0)=0$이므로 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{|h^2-2h|}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{-h^2+2h}{h}=\lim_{h\to0+}(-h+2)=2$$
$$\lim_{h\to0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{|h^2-2h|}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{h^2-2h}{h}=\lim_{h\to0-}(h-2)=-2$$

이므로 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $\lim_{x\to0}k(x)=\lim_{x\to0}[|x|]=0$, $k(0)=0$이므로 $k(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0+}\frac{k(0+h)-k(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{[\,|h|\,]}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{[h]}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{0}{h}=0$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{k(0+h)-k(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{[\,|h|\,]}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{[-h]}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{0}{h}=0$$

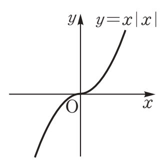
이므로 $k(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

이상에서 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

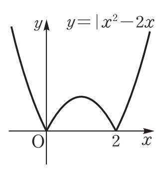
1등급 비밀노트

함수의 그래프를 그려서 함수의 연속과 미분가능 여부를 확인할 수 있다.

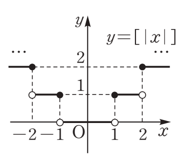
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



따라서 ㄱ, ㄷ은 $x=0$에서 미분가능하고, ㄴ은 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

249 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 모든 실수 x에서 연속이다.

$f(x)$가 $x=-1$에서 연속이고, 조건 (나)에 의하여

$$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}(x^3+ax^2+bx)$$

$$=a-b-1$$

$$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(x^3+ax^2+bx)$$

$$=a+b+1$$

즉 $a-b-1=a+b+1$이므로 $b=-1$

$\therefore f(x)=x^3+ax^2-x$

조건 (나)에 의하여 $f(-1)=f(1)=a$이고, $f(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1+}\frac{x^3+ax^2-x-a}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1+}\frac{(x+a)(x+1)(x-1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1+}(x+a)(x-1)$$

$$=-2(a-1)$$

$x+2=t$로 놓으면 $x\to-1-$일 때 $t\to1-$이므로

$$\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$

일품 BOX

조건 (나)에 의하여
$f(t-2)=f(t)$
$f(-1)=f(1)$

$f(1)=\dfrac{a+b+1}{2}$
$=\dfrac{1+1}{2}$ ($\because$ ㉠)
$=1$

조건 (나)에 의하여
$f(1\pm a)=f(-1\pm a)$
(복호동순)
이므로
$\displaystyle\lim_{x\to-1-}f(x)$
$=\displaystyle\lim_{x\to1-}f(x)$,
$\displaystyle\lim_{x\to1+}f(x)$
$=\displaystyle\lim_{x\to-1+}f(x)$

㉠에서 $a+b=1$이므로
$\dfrac{a+ah+b-1}{h}$
$=\dfrac{ah}{h}=a$

$f(x+2)=f(x)$에
$x=-1$을 대입하면
$f(1)=f(-1)$

$$=\lim_{t\to1-}\frac{f(t-2)-f(-1)}{t-1}$$

$$=\lim_{t\to1-}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}$$

$$=\lim_{t\to1-}\frac{t^3+at^2-t-a}{t-1}$$

$$=\lim_{t\to1-}\frac{(t+a)(t+1)(t-1)}{t-1}$$

$$=\lim_{t\to1-}(t+a)(t+1)$$

$$=2(a+1)$$

에서 $-2(a-1)=2(a+1)$ $\quad\therefore a=0$

$\therefore a+b=-1$ 답 ②

250 (i) $|x|<1$일 때,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+2}=0$이므로 $\quad f(x)=ax+b$

(ii) $|x|>1$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|x^n|=\lim_{n\to\infty}|x^{n+2}|=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+\dfrac{a}{x^{n-1}}+\dfrac{b}{x^n}}{1+\dfrac{1}{x^n}}=x^2$$

(iii) $x=1$일 때,

$$f(x)=\frac{a+b+1}{2}$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉 $\displaystyle\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$이므로

$$\lim_{x\to1+}x^2=\lim_{x\to1-}(ax+b)=\frac{a+b+1}{2}$$

$$1=a+b=\frac{a+b+1}{2}$$

$\therefore a+b=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{(1+h)^2-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}(2+h)=2$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{a(1+h)+b-1}{h}$$

$$=a$$

에서 $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=-1$

$\therefore a^2+b^2=4+1=5$ 답 5

251 $f(x)=x^{3n}+x^{2n}+x^n$으로 놓으면 $\quad f(1)=3$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^{3n}+x^{2n}+x^n-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=f'(1)$$

즉 $f'(1)=30$이므로

$f'(x)=3nx^{3n-1}+2nx^{2n-1}+nx^{n-1}$에서

$f'(1)=3n+2n+n=30$, $\quad 6n=30$

$\therefore n=5$ 답 ③

252 $f_n(x)=nx^n$에서

$f_n(1)=n,\ f_n'(x)=n^2x^{n-1}$

$$\therefore \lim_{x\to1}\sum_{n=1}^{10}\frac{f_n(x)-n}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\sum_{n=1}^{10}\frac{f_n(x)-f_n(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f_1(x)-f_1(1)}{x-1}+\lim_{x\to1}\frac{f_2(x)-f_2(1)}{x-1}$$
$$+\cdots+\lim_{x\to1}\frac{f_{10}(x)-f_{10}(1)}{x-1}$$
$$=f_1'(1)+f_2'(1)+\cdots+f_{10}'(1)$$
$$=\sum_{n=1}^{10}f_n'(1)=\sum_{n=1}^{10}n^2$$
$$=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}=385$$

답 ⑤

1등급 비밀노트

$x=a$에서 연속인 함수 $f_n(x)$ (n은 자연수)에 대하여

$$\lim_{x\to a}\sum_{k=1}^{n}f_k(x)=\lim_{x\to a}\{f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots+f_n(x)\}$$
$$=\lim_{x\to a}f_1(x)+\lim_{x\to a}f_2(x)+\lim_{x\to a}f_3(x)$$
$$+\cdots+\lim_{x\to a}f_n(x)$$
$$=f_1(a)+f_2(a)+f_3(a)+\cdots+f_n(a)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}f_k(a)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to a}f_k(x)$$

253 $f'(x)=3x^2-2xf'(1)+6$이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=3-2f'(1)+6 \qquad \therefore f'(1)=3$

따라서 $f'(x)=3x^2-6x+6$이므로

$f'(2)=12-12+6=6$

$\therefore f'(1)\cdot f'(2)=3\cdot6=18$

답 18

다른 풀이 $f'(1)=a$ (a는 상수)로 놓으면

$f(x)=x^3-ax^2+6x$에서

$f'(x)=3x^2-2ax+6$

따라서 $f'(1)=9-2a$이므로 $\qquad 9-2a=a$

$\therefore a=3$

$\therefore f'(x)=3x^2-6x+6$

254 문제 이해 $f(x)=x^2-4x$에서

$f'(x)=2x-4$ ● 40%

해결 과정 이를 주어진 등식에 대입하면

$x(2x-4)+a(x^2-4x)-4x=0$

$(a+2)x^2-4(a+2)x=0$ ● 30%

답 구하기 위의 등식이 x의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$a+2=0 \qquad \therefore a=-2$ ● 30%

답 -2

255 $f(x)=ax^n$에서 $\qquad g(x)=f'(x)=anx^{n-1}$

$\therefore g'(x)=an(n-1)x^{n-2}$

$\{g(x)\}^2=\{g'(x)\}^3$에서

$(anx^{n-1})^2=\{an(n-1)x^{n-2}\}^3$

$\therefore a^2n^2x^{2(n-1)}=a^3n^3(n-1)^3x^{3(n-2)}$

이때 $a\neq0$이므로 $\qquad an(n-1)^3x^{n-4}=1$

위의 등식이 x의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$n-4=0,\ an(n-1)^3=1$

$n=4$이므로

$$a=\frac{1}{n(n-1)^3}=\frac{1}{4\cdot3^3}=\frac{1}{108}$$

답 ①

256 문제 이해 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x+1)^2Q(x)+3x-4$ …… ㉠ ● 20%

해결 과정 ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=-7, \qquad a-b+7=-7$

$\therefore a-b=-14$ …… ㉡ ● 20%

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+3$

위의 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f'(-1)=3$

이때 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f'(-1)=3-2a+b=3$

$\therefore -2a+b=0$ …… ㉢ ● 40%

답 구하기 ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $\qquad a=14,\ b=28$

$\therefore a+b=42$ ● 20%

답 42

257 방정식 $f(x)=1$의 세 실근이 0, 1, 2이므로

$f(x)-1=kx(x-1)(x-2)$ (k는 실수)

로 놓을 수 있다.

따라서 $f(x)=kx(x-1)(x-2)+1$에서

$f'(x)=k(x-1)(x-2)+kx(x-2)+kx(x-1)$

$=3kx^2-6kx+2k$

$f'(0)=2k=2$이므로 $\qquad k=1$

$\therefore f'(1)+f'(2)=-1+2=1$

답 ①

258 문제 이해 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$에서 $x\to2$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}\{f(x)-3\}=0$이므로 $\qquad f(2)=3$ ● 30%

해결 과정 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

에서 $\qquad f'(2)=5$ ● 30%

답 구하기 $y'=(2x+2)f(x)+(x^2+2x-3)f'(x)$이므로 $x=2$에서의 미분계수는

$6f(2)+5f'(2)=6\cdot3+5\cdot5=43$ ● 40%

답 43

일품 BOX

$x^0=1$

$f(x)=0$의 한 실근이 $x=a$이면 $f(x)$는 $x-a$를 인수로 갖는다.

$ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면
$a=b=c=0$

259 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1$

$\therefore f(0)=1$

ㄱ. $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$의 양변에 $y=-x$를 대입하면

$f(0)=f(x)+f(-x)-2x^2-1$

$1=f(x)+f(-x)-2x^2-1$

$\therefore f(x)+f(-x)=2x^2+2$

ㄴ. $f'(0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-1}{h}=3$이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-1-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)-1}{h}+2x\right\}=2x+3$$

$\therefore f'(1)+f'(-1)=5+1=6$

ㄷ. $\lim\limits_{h\to0}f(a+h)=\lim\limits_{h\to0}\{f(a)+f(h)+2ah-1\}$

$=f(a)+f(0)-1$

$=f(a)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

260 조건 (가)에서 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$g(0)=2f(0)g(0)=2g(0)$ ($\because f(0)=1$)

$\therefore g(0)=0$

$$\therefore g'(0)=\lim_{h\to0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(0)g(h)+g(0)f(h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}$$

즉 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(h)}{h}=-1$이고, 조건 (나)에서 $f'(0)=g(0)=0$이므로

$$g'(x)=\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x)g(h)+g(x)f(h)-g(x)}{h}$$

$$=f(x)\cdot\lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}+g(x)\cdot\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}$$

$$=f(x)\cdot(-1)+g(x)\cdot\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$=-f(x)+g(x)f'(0)=-f(x)$$

답 ①

261 x의 값이 1에서 2까지 변할 때의 평균변화율은

일품 BOX

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\beta$이면 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta\neq0$)

함수 $f(x)$가 미분가능하면 연속이므로 $\lim\limits_{h\to0}f(h)=f(0)=1$

$f(0)=1$, $g(0)=0$이다.

$f(x)=x^2-x$이므로 $-f(-x)=-\{(-x)^2-(-x)\}=-(x^2+x)=-x^2-x$

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{(4a+2b)-(a+b)}{2-1}=3a+b$$

즉 $3a+b=0$이므로 $b=-3a$

$f(x)=ax^2-3ax$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{f(1+h)-f(1)}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{f(3+2h)-f(3)}{h}}{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{f(3+2h)-f(3)}{2h}\cdot2}{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}}=\frac{2f'(3)}{f'(1)}$$

이때 $f'(x)=2ax-3a$이므로

$f'(1)=-a$, $f'(3)=3a$

$$\therefore (\text{주어진 식})=\frac{2f'(3)}{f'(1)}=\frac{6a}{-a}=-6$$

답 ①

262 ㄱ. $F(x)=|f(x)|$

$$=\begin{cases}x^2-x & (x<0 \text{ 또는 } x\geq1)\\ -x^2+x & (0\leq x<1)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{-x^2+x}{x}=\lim_{x\to0+}(-x+1)=1$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{x^2-x}{x}=\lim_{x\to0-}(x-1)=-1$$

이므로 $F(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $G(x)=x|f(x)|$

$$=\begin{cases}x(x^2-x) & (x<0 \text{ 또는 } x\geq1)\\ -x(x^2-x) & (0\leq x<1)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{G(x)-G(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{-x(x^2-x)}{x}=\lim_{x\to0+}(-x^2+x)=0$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{G(x)-G(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{x(x^2-x)}{x}=\lim_{x\to0-}(x^2-x)=0$$

이므로 $G(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. $H(x)=\begin{cases}-f(-x) & (x<0)\\ f(x) & (x\geq0)\end{cases}$

$$=\begin{cases}-x^2-x & (x<0)\\ x^2-x & (x\geq0)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{H(x)-H(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x^2-x}{x}=\lim_{x\to0+}(x-1)=-1$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{H(x)-H(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{-x^2-x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0-}(-x-1)=-1$$

이므로 $H(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
이상에서 $x=0$에서 미분가능한 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

263 조건 (나)에서
$(x-1)f'(x)=x^3+3x^2-4x-2f(x)$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=-2f(1)$ $\therefore f(1)=0$

$x\neq1$일 때 $f'(x)=\dfrac{x^3+3x^2-4x-2f(x)}{x-1}$

조건 (가)에서 $f'(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$$f'(1)$$
$$=\lim_{x\to1}f'(x)$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x(x+4)(x-1)-2f(x)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}x(x+4)-2\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\quad(\because f(1)=0)$$
$$=5-2f'(1)$$

즉 $f'(1)=5-2f'(1)$에서 $3f'(1)=5$

$\therefore f'(1)=\dfrac{5}{3}$

따라서 $m=3$, $n=5$이므로

$m^2+n^2=9+25=34$

답 34

264 xL의 샴푸를 생산할 때의 한계 생산 비용은

$f'(x)=-\dfrac{1}{6}x+a$ (원)

$f'(900)=100$에서 $-\dfrac{1}{6}\cdot900+a=100$

$\therefore a=250$

따라서 $f'(x)=-\dfrac{1}{6}x+250$이므로

$p=f'(1200)=-\dfrac{1}{6}\cdot1200+250=50$

답 50

265 $g(x)=(2x^2-x)f(x)$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g(1)=f(1)$

$$\therefore\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-g(1-h)}{2h}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+g(1)-g(1-h)}{h}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\frac{g(1-h)-g(1)}{-h}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\{f'(1)+g'(1)\}$$

즉 $\dfrac{1}{2}\{f'(1)+g'(1)\}=23$이므로

$f'(1)+g'(1)=46$

이때 $f'(x)=3x^2+2ax$,
$g'(x)=(4x-1)f(x)+(2x^2-x)f'(x)$이므로

$f'(1)=2a+3$

$g'(1)=3f(1)+f'(1)=3(a+4)+2a+3$
$=5a+15$

$\therefore f'(1)+g'(1)=7a+18$

즉 $7a+18=46$이므로 $7a=28$

$\therefore a=4$

답 ④

일품 BOX

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 a이다.
➡ $x=a$가 방정식 $f(x)=k$의 해이다.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이다.
➡ $f(a)$와 $\lim_{x\to a}f(x)$가 각각 존재하고 $f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$가 성립한다.

266 방정식 $f(x)=k$의 세 실근이 α, β, γ이므로

$f(x)-k=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

로 놓을 수 있다.
따라서 $f(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)+k$에서

$f'(x)=2(x-\beta)(x-\gamma)+2(x-\alpha)(x-\gamma)$
$+2(x-\alpha)(x-\beta)$

$\therefore f'(\beta)=2(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)$

이때 $\beta-\alpha=\overline{AB}=3$, $\gamma-\beta=\overline{BC}=4$이므로

$f'(\beta)=2\cdot3\cdot(-4)=-24$

답 ⑤

06 도함수의 활용 (1) 본책 57쪽

267 $f(x)=x^2+3$이라 하면 $f'(x)=2x$
점 $(a,\ a^2+3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=2a$

따라서 접선의 방정식은

$y-(a^2+3)=2a(x-a)$, 즉 $y=2ax-a^2+3$

이 직선이 점 $(2,\ -2)$를 지나므로

$-2=4a-a^2+3$, $a^2-4a-5=0$

$(a+1)(a-5)=0$ $\therefore a=5$ $(\because a>0)$

답 ⑤

268 점 $(1,\ 3)$이 곡선 $y=x^3+ax^2+b$ 위의 점이므로

$3=1+a+b$ $\therefore a+b=2$ …… ㉠

$f(x)=x^3+ax^2+b$라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax$
점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=2a+3$

따라서 접선의 방정식은

$y-3=(2a+3)(x-1)$, 즉 $y=(2a+3)x-2a$

이 직선의 y절편이 4이므로

$-2a=4$ $\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $-2+b=2$ $\therefore b=4$

$\therefore ab=-8$

답 ②

269 $f(x)=-x^3+2x+3$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+2$

점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 $\quad f'(1)=-1$

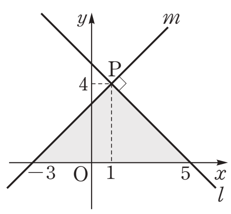
따라서 접선 l의 방정식은

$y-4=-(x-1)$, 즉 $y=-x+5$

직선 m은 기울기가 1이고 점 $\mathrm{P}(1,\ 4)$를 지나므로 직선 m의 방정식은

$y-4=x-1$, 즉 $y=x+3$

따라서 두 직선 l, m은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 도형의 넓이는



$\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 4=16$ 답 16

> **일품 BOX**
> 두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$가
> ① 평행하다
> ➡ $a=c$, $b\neq d$
> ② 일치한다
> ➡ $a=c$, $b=d$
> ③ 수직이다
> ➡ $ac=-1$

270 $f(x)=x^3-2x$라 하면 $\quad f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3-2a)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(a)=3a^2-2=1, \quad a^2=1$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 접점의 좌표가 $(-1,\ 1)$, $(1,\ -1)$이므로 접선의 방정식은

$y-1=x+1 \quad \therefore x-y+2=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$y+1=x-1 \quad \therefore x-y-2=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

두 직선 사이의 거리는 직선 ㉠ 위의 점 $(0,\ 2)$와 직선 ㉡ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|-2-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$ 답 ④

> 직선 $ax+by+c=0$과 점 $(x_1,\ y_1)$ 사이의 거리는
> $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

271 $f(x)=2x^3+3x^2-9x$라 하면

$f'(x)=6x^2+6x-9$

접점의 좌표를 $(a,\ 2a^3+3a^2-9a)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 3이므로

$f'(a)=6a^2+6a-9=3$

$a^2+a-2=0, \quad (a+2)(a-1)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=1$

따라서 접점의 좌표가 $(-2,\ 14)$, $(1,\ -4)$이므로 두 점을 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(-\dfrac{1}{2},\ 5\right)$ 답 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 5\right)$

272 $f(x)=x^3+ax^2+3x-2$라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+3$

접점의 x좌표를 t라 할 때, 직선 $y=-x+3$과 평행한 접선이 존재하지 않으려면 $f'(t)=-1$인 실수 t의 값이 존재하지 않아야 한다.

$f'(t)=3t^2+2at+3=-1$에서

$3t^2+2at+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-12<0$

$\therefore -2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$

따라서 정수 a의 값은 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3의 7개이다. 답 ④

273 $f(x)=-x^2+2x+3$이라 하면

$f'(x)=-2x+2$

접점의 좌표를 $(a,\ -a^2+2a+3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=-2a+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(-a^2+2a+3)=(-2a+2)(x-a)$, 즉

$y=(-2a+2)x+a^2+3$

이 직선이 점 $(2,\ 4)$를 지나므로

$4=(-2a+2)\cdot 2+a^2+3$

$a^2-4a+3=0, \quad (a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

따라서 접점의 좌표가 $(1,\ 4)$, $(3,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(3-1)^2+(0-4)^2}=2\sqrt{5}$ 답 ⑤

> 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는
> $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

274 $f(x)=x^3-4x+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-4$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3-4a+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2-4$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^3-4a+1)=(3a^2-4)(x-a)$, 즉

$y=(3a^2-4)x-2a^3+1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(0,\ -15)$를 지나므로

$-2a^3+1=-15, \quad a^3=8 \quad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$y=8x-15$ 답 ②

275 $f(x)=x^3-3x+4$라 하면

$f'(x)=3x^2-3$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3-3a+4)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2-3$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^3-3a+4)=(3a^2-3)(x-a)$, 즉

$y=(3a^2-3)x-2a^3+4$

이 직선이 점 $(2,\ k)$를 지나므로

$k=(3a^2-3)\cdot 2-2a^3+4$

$\therefore 2a^3-6a^2+k+2=0$

따라서 세 접점의 x좌표의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여

$-\dfrac{k+2}{2}=-3 \quad \therefore k=4$ 답 ⑤

> 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 실근을 α, β, γ라 하면
> $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$,
> $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$,
> $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

276 $f(x)=x^3-3x^2+3x+4$, $g(x)=x^2+kx+6$이라 하면

$f'(x)=3x^2-6x+3$, $g'(x)=2x+k$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 한 점 $(a,\ b)$에서 접하므로

> 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=a$인 점에서 공통인 접선을 갖는다.

$f(a)=g(a), f'(a)=g'(a)$

$f(a)=g(a)$에서

$a^3-3a^2+3a+4=a^2+ka+6$

$\therefore a^3-4a^2+(3-k)a-2=0$ …… ㉠

$f'(a)=g'(a)$에서

$3a^2-6a+3=2a+k$

$\therefore k=3a^2-8a+3$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a^3-4a^2+(3-3a^2+8a-3)a-2=0$

$a^3-2a^2+1=0$, $(a-1)(a^2-a-1)=0$

이때 a는 정수이므로 $a=1$

$a=1$을 ㉡에 대입하면 $k=-2$

$\therefore a+k=-1$

답 ②

277 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-6x+2$에서

$f(0)=2$, $f(6)=72-36-36+2=2$

이므로 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(0, 6)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=x^2-2x-6$이므로

$f'(c)=c^2-2c-6=0$ $\therefore c=1\pm\sqrt{7}$

이때 $0<c<6$이므로 $c=1+\sqrt{7}$

답 ④

278 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{\sqrt{x+2}-2}=12$에서 $x\to 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2}\{f(x)-3\}=0$에서 $f(2)=3$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{\sqrt{x+2}-2}&=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{\sqrt{x+2}-2}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{\{f(x)-f(2)\}(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\lim_{x\to 2}(\sqrt{x+2}+2)\\&=4f'(2)\end{aligned}$$

즉 $4f'(2)=12$이므로 $f'(2)=3$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$f(-2)=f(2)=3$

$$\begin{aligned}\therefore f'(-2)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}\\&=-\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\\&=-f'(2)=-3\end{aligned}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-3=-3(x+2)$, 즉 $y=-3x-3$

답 ②

일품 BOX

함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0, 6]$에서 연속이고 열린 구간 $(0, 6)$에서 미분가능하다.

$f(-x)=f(x)$

1등급 비밀노트

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(-x)=f(x)$가 성립하면

$$\begin{aligned}f'(-x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\\&=-\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\\&=-f'(x)\end{aligned}$$

279 $y=xf(x)$에서 $y'=f(x)+xf'(x)$

곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$, 즉 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기는

$f(1)+f'(1)=3+0=3$

따라서 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선의 방정식은

$y-3=3(x-1)$ $\therefore y=3x$

이 접선이 점 $(a, 6)$을 지나므로

$6=3a$ $\therefore a=2$

답 ①

280 문제 이해 $f(x)=x^2-1$이라 하면

$f'(x)=2x$ ● 10%

해결 과정 점 (t, t^2-1)에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=2t$

따라서 접선의 방정식은

$y-(t^2-1)=2t(x-t)$, 즉 $y=2tx-t^2-1$

$\therefore \mathrm{P}(0, -t^2-1)$ ● 30%

이 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2t}$이므로 접선과 수직인 직선의 방정식은

$y-(t^2-1)=-\frac{1}{2t}(x-t)$, 즉

$y=-\frac{1}{2t}x+t^2-\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{Q}\left(0, t^2-\frac{1}{2}\right)$ ● 30%

답 구하기 따라서

$\overline{\mathrm{PQ}}=\left(t^2-\frac{1}{2}\right)-(-t^2-1)=2t^2+\frac{1}{2}$이므로

$\lim_{t\to 1}\overline{\mathrm{PQ}}=\lim_{t\to 1}\left(2t^2+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$ ● 30%

답 $\frac{5}{2}$

281 $f'(x)=3x^2$, $g'(x)=3x^2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (a, a^3)에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2$이므로 접선의 방정식은

$y-a^3=3a^2(x-a)$, 즉 $y=3a^2x-2a^3$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 (b, b^3+32)에서의 접선의 기울기는 $g'(b)=3b^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(b^3+32)=3b^2(x-b)$, 즉 $y=3b^2x-2b^3+32$

이때 두 접선이 일치하므로

$3a^2=3b^2$ …… ㉠

$-2a^3=-2b^3+32$ …… ㉡

㉠에서 $a=-b$ ($\because a\neq b$)

$a=-b$와 ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=2$

$\therefore a^2+b^2=4+4=8$

답 8

282 $f(x)=-x^3-6x^2-9x+1$이라 하면

$f'(x)=-3x^2-12x-9=-3(x+2)^2+3$

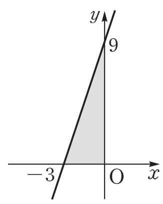
따라서 $x=-2$일 때 $f'(x)$는 최댓값 3을 가지므로 기울기가 최대인 접선의 접점의 좌표는 $(-2,\ f(-2))$, 즉 $(-2,\ 3)$이고 접선의 기울기는 3이다.

따라서 접선의 방정식은

$y-3=3(x+2)$, 즉 $y=3x+9$

이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot3\cdot9=\frac{27}{2}$



답 ④

283 구하는 최솟값은 곡선의 접선 중 기울기가 3인 접선의 접점과 직선 $y=3x-12$, 즉 $3x-y-12=0$ 사이의 거리와 같다.

$f(x)=x^2-3x+2$라 하면 $f'(x)=2x-3$

접점의 좌표를 $(a,\ a^2-3a+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 3이어야 하므로

$f'(a)=2a-3=3$ $\therefore a=3$

따라서 접점의 좌표는 $(3,\ 2)$이므로 구하는 거리의 최솟값은

$\frac{|9-2-12|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

1등급 비밀노트

곡선 위의 점과 직선 사이의 거리의 최솟값 구하기
(i) 곡선의 접선 중 주어진 직선과 평행한 직선의 방정식을 구한다.
(ii) (i)에서 구한 접선과 주어진 직선 사이의 거리가 구하는 거리의 최솟값임을 이용한다.

284 문제 이해 $\triangle$APB의 넓이가 최대일 때 $\square$OAPB의 넓이도 최대이고, 점 P에서의 접선이 직선 AB에 평행할 때, $\triangle$APB의 넓이가 최대가 된다.

● 30%

해결 과정 $x^3-6x^2+16=0$에서

$(x-2)(x^2-4x-8)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=2\pm2\sqrt{3}$

따라서 A$(2,\ 0)$, B$(0,\ 16)$이므로 직선 AB의 기울기는

$\frac{16-0}{0-2}=-8$ ● 20%

$f(x)=x^3-6x^2+16$이라 하면

$f'(x)=3x^2-12x$

일품 BOX

$a=b$이면 ㉡을 만족시키는 a가 존재하지 않는다.

$a=-b$를 ㉡에 대입하면

$-2(-b)^3=-2b^3+32$

$4b^3=32,\quad b^3=8$

$\therefore b=2$

이것을 $a=-b$에 대입하면 $a=-2$

점 $(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점은

$(x+a,\ y+b)$

점 P$(a,\ a^3-6a^2+16)$에서의 접선의 기울기가 -8이어야 하므로

$f'(a)=3a^2-12a=-8$

$3a^2-12a+8=0$

$\therefore a=\frac{6-2\sqrt{3}}{3}=2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ($\because 0<a<2$) ● 40%

답 구하기 따라서 $p=2,\ q=-\frac{2}{3}$이므로

$p+q=\frac{4}{3}$ ● 10%

답 $\frac{4}{3}$

285 $\triangle$RPQ의 넓이가 최대일 때 S_1+S_2의 값이 최소이고, 점 R에서의 접선이 직선 PQ에 평행할 때 $\triangle$RPQ의 넓이가 최대가 된다.

직선 PQ의 기울기는 $\frac{20-0}{3-1}=10$

$f(x)=x^3-12x^2+45x-34$라 하면

$f'(x)=3x^2-24x+45$

점 R에서의 접선의 기울기가 10이어야 하므로

$f'(t)=3t^2-24t+45=10$

$3t^2-24t+35=0$

$\therefore t=\frac{12-\sqrt{39}}{3}$ ($\because 1<t<3$)

답 ③

286 $f(x)=x^3-6x^2+10x$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+10$

기울기가 -2인 접선의 접점을 $(a,\ f(a))$라 하면

$f'(a)=3a^2-12a+10=-2,\quad 3(a-2)^2=0$

$\therefore a=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2,\ 4)$이다.

접점 $(2,\ 4)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점 $(2+m,\ 4+n)$이 직선 $y=-2x+3$ 위에 있으므로

$4+n=-2(2+m)+3$

$\therefore n=-2m-5$

$\therefore m^2+n^2=m^2+(-2m-5)^2$

$=5m^2+20m+25$

$=5(m+2)^2+5$

따라서 m^2+n^2은 $m=-2,\ n=-1$일 때 최솟값 5를 갖는다.

답 5

1등급 비밀노트

곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 직선 $y=ax+b$와 접한다.

➡ 기울기가 a인 접선을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 직선 $y=ax+b$와 일치한다.

➡ 곡선 $y=f(x)$와 기울기가 a인 접선의 접점을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 직선 $y=ax+b$ 위에 있다.

287 $f(x)=x^n$이라 하면 $f'(x)=nx^{n-1}$
접점의 좌표를 $(a,\ a^n)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=na^{n-1}$이므로 접선의 방정식은

$$y-a^n=na^{n-1}(x-a)$$

이 직선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$$-a^n=na^{n-1}(1-a),\quad a^{n-1}(n-na+a)=0$$

$a>0$이므로

$$n-na+a=0$$

$$\therefore a=\frac{n}{n-1}$$

따라서 $g(n)=na^{n-1}=n\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}=\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}$

이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{10}\log g(n)&=\sum_{n=2}^{10}\log\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}\\&=\sum_{n=2}^{10}\{n\log n-(n-1)\log(n-1)\}\\&=(2\log 2-0)+(3\log 3-2\log 2)\\&\quad+\cdots+(10\log 10-9\log 9)\\&=10\log 10=10\end{aligned}$$

답 10

$a>0,\ a\neq1,\ M>0,$
$N>0$일 때
① $\log_a\frac{M}{N}$
$=\log_a M-\log_a N$
② $\log_a M^k=k\log_a M$
(단, k는 실수)

288 $f(x)=x^2+4$라 하면 $f'(x)=2x$
접점의 좌표를 $(a,\ a^2+4)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=2a$이므로 접선의 방정식은

$$y-(a^2+4)=2a(x-a)$$

이 직선이 원점을 지나므로 $-(a^2+4)=-2a^2$

$$a^2=4\quad\therefore a=-2\ 또는\ a=2$$

따라서 $\mathrm{P}(-2,\ 8)$이므로

$$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-2)^2+8^2}=2\sqrt{17}$$

$f'(-2)=-4$에서 직선 PR의 기울기는 $\frac{1}{4}$이므로 직선 PR의 방정식은

$$y-8=\frac{1}{4}(x+2),\ 즉\ y=\frac{1}{4}x+\frac{17}{2}$$

이때 점 R는 y축 위의 점이므로 $\mathrm{R}\left(0,\ \frac{17}{2}\right)$

직각삼각형 POR에서

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{\mathrm{OP}}}{\overline{\mathrm{OR}}}=\frac{2\sqrt{17}}{\frac{17}{2}}=\frac{4\sqrt{17}}{17}$$

답 ④

• $f'(2)=4$이므로 직선 QR의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이다.
따라서 직선 QR의 방정식은
$y-8=-\frac{1}{4}(x-2)$
$\therefore y=-\frac{1}{4}x+\frac{17}{2}$
$\therefore \mathrm{R}\left(0,\ \frac{17}{2}\right)$

• 두 삼각형 POR와 QOR는 합동이므로
$\angle\mathrm{PRO}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{PRQ}$
$=\frac{\theta}{2}$

1등급 비밀노트

곡선 $y=x^2+4$가 y축에 대하여 대칭이므로 직선 OP와 직선 OQ도 y축에 대하여 대칭이고 직선 PR와 직선 QR도 y축에 대하여 대칭이다. 따라서 점 R는 y축 위의 점이다.

289 $\frac{b}{a}$는 원점과 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$를 잇는 직선의 기울기이므로 $\frac{b}{a}$의 값이 최소인 경우는 직선 OP와 곡선 $y=x^2+2x+4$가 접할 때이다.
$f(x)=x^2+2x+4$라 하면 $f'(x)=2x+2$
접점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, 즉 $(a,\ a^2+2a+4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=2a+2$이므로 접선의 방정식은

$$y-(a^2+2a+4)=(2a+2)(x-a),\ 즉$$
$$y=(2a+2)x-a^2+4$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-a^2+4=0,\quad a^2=4$$
$$\therefore a=2\ (\because a>0)$$

따라서 $a=2,\ b=2^2+2\cdot2+4=12$이므로

$$a+b=14$$

답 14

290 (해결 과정) $f(x)=\frac{1}{4}x^2$이라 하면

$$f'(x)=\frac{1}{2}x$$

점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=1$
따라서 직선 l의 방정식은

$$y-1=x-2,\ 즉\ y=x-1$$

점 P는 직선 l과 직선 $y=-2$의 교점이므로

$$\mathrm{P}(-1,\ -2)$$ ● 30%

점 P에서 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $\left(a,\ \frac{1}{4}a^2\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=\frac{1}{2}a$이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{2}a(x-a),\ 즉\ y=\frac{1}{2}ax-\frac{1}{4}a^2$$

이 직선이 점 $\mathrm{P}(-1,\ -2)$를 지나므로

$$-2=-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}a^2,\quad a^2+2a-8=0$$
$$(a+4)(a-2)=0\quad\therefore a=-4\ 또는\ a=2$$

따라서 접점의 좌표는 $(-4,\ 4),\ (2,\ 1)$이다. ● 50%

(답 구하기) 이때 직선 m의 접점은 $(-4,\ 4)$이므로 구하는 기울기는

$$\frac{1}{2}\cdot(-4)=-2$$ ● 20%

답 -2

291 조건 (가)에 의하여 $f(x)=x^3+ax$ (a는 상수)로 놓으면

$$f'(x)=3x^2+a$$

점 $(0,\ -16)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3+at)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+a$이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3+at)=(3t^2+a)(x-t),\ 즉$$
$$y=(3t^2+a)x-2t^3$$

이 직선이 점 $(0,\ -16)$을 지나므로

$$-2t^3=-16,\quad t^3=8\quad\therefore t=2$$

따라서 접점의 좌표는 $(2,\ 8+2a)$이고 이 점이 x축 위에 있으므로

$$8+2a=0\quad\therefore a=-4$$

$f(-x)=-f(x)$가 성립하므로 $f(x)$는 기함수이다.

따라서 $f(x)=x^3-4x$이므로

$f(3)=27-12=15$

답 ③

292 $f(x)=x^3-3x^2+2$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-6t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t^2+2)=(3t^2-6t)(x-t)$, 즉

$y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2+2$

이 직선이 점 $(a,\ 2)$를 지나므로

$2=(3t^2-6t)a-2t^3+3t^2+2$

$2t^3-3(a+1)t^2+6at=0$

$t\{2t^2-3(a+1)t+6a\}=0$

이때 접선이 오직 한 개 존재하려면 이차방정식 $2t^2-3(a+1)t+6a=0$이 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=9(a+1)^2-48a<0$

$3a^2-10a+3<0,\quad (3a-1)(a-3)<0$

$\therefore \frac{1}{3}<a<3$

답 ①

1등급 비밀노트

방정식 $2t^2-3(a+1)t+6a=0$이 $t=0$을 중근으로 가지면 접선이 오직 하나 존재하게 된다. 그러나 $-3(a+1)=0$, $6a=0$을 모두 만족시키는 a의 값이 존재하지 않으므로 $2t^2-3(a+1)t+6a=0$이 허근을 갖는 경우만 생각한다.

293 문제 이해 $f(x)=-x^3+ax+3$, $g(x)=x^2+2$라 하면

$f'(x)=-3x^2+a,\ g'(x)=2x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(t)=g(t),\ f'(t)=g'(t)$ ● 20%

해결 과정 $f(t)=g(t)$에서

$-t^3+at+3=t^2+2$

$\therefore t^3+t^2-at-1=0$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad -3t^2+a=2t$

$\therefore a=3t^2+2t$ …… ㉡ ● 20%

㉡을 ㉠에 대입하면

$t^3+t^2-3t^3-2t^2-1=0,\quad 2t^3+t^2+1=0$

$(t+1)(2t^2-t+1)=0$

$\therefore t=-1\ (\because 2t^2-t+1>0)$

$t=-1$을 ㉡에 대입하면 $\quad a=1$ ● 20%

따라서 $t=-1$일 때, 즉 점 $(-1,\ 3)$에서 공통인 접선을 갖고 접선의 기울기는 $f'(-1)=g'(-1)=-2$이므로 공통인 접선의 방정식은

$y-3=-2(x+1)$, 즉 $y=-2x+1$

$\therefore b=-2,\ c=1$ ● 30%

답 구하기 $\therefore a+b+c=0$ ● 10%

답 0

일품 BOX

$-2t^3=-16$에서
$t^3=8 \quad \therefore t=2$
$3t^2+a=8$에서
$a=8-3t^2=8-3\cdot 2^2$
$=-4$

접선이 오직 한 개 존재하려면 접점이 오직 한 개 존재해야 하므로 이 방정식이 한 개의 실근을 가져야 한다.

$t=2,\ a=-4$이므로
$t^3+at=2^3-4\cdot 2=0$

$2t^2-t+1$
$=2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0$

점 $(s,\ as^2)$은 직선 $y=12x-16$ 위의 점이므로
$as^2=12s-16$
또 $g'(s)=12$이므로
$2as=12$

294 $f(x)=x^3+ax$라 하면

$f'(x)=3x^2+a$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+at)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+a$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+at)=(3t^2+a)(x-t)$, 즉

$y=(3t^2+a)x-2t^3$ …… ㉠

직선 ㉠은 직선 $y=8x-16$과 일치하므로

$3t^2+a=8,\ -2t^3=-16$

$\therefore t=2,\ a=-4$

따라서 접점의 좌표는 $(2,\ 0)$이고, 이 점은 곡선 $y=2x^2+b$ 위의 점이므로

$0=8+b \qquad \therefore b=-8$

즉 $y=x^3-4x$, $y=2x^2-8$이므로

$x^3-4x=2x^2-8$에서

$x^3-2x^2-4x+8=0$

$(x+2)(x-2)^2=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 두 곡선의 접점이 아닌 교점의 좌표는 $(-2,\ 0)$이므로

$m=-2,\ n=0$

$\therefore m+n=-2$

답 ①

295 해결 과정 $f(x)=x^3$이라 하면

$f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-t^3=3t^2(x-t)$, 즉 $y=3t^2x-2t^3$

이 직선이 점 $\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$을 지나므로

$4t^2-2t^3=0,\qquad 2t^2(2-t)=0$

$\therefore t=2\ (\because t>0)$ ● 50%

따라서 공통인 접선의 방정식은

$y=12x-16$ ● 20%

답 구하기 곡선 $y=ax^2$과 직선 $y=12x-16$이 접하므로 $ax^2=12x-16$, 즉 이차방정식 $ax^2-12x+16=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=6^2-16a=0 \qquad \therefore a=\frac{9}{4}$ ● 30%

답 $\frac{9}{4}$

다른 풀이 $g(x)=ax^2$이라 하면

$g'(x)=2ax$

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=12x-16$의 접점의 좌표를 $(s,\ as^2)$이라 하면

$as^2=12s-16,\ 2as=12$

$\therefore s=\frac{8}{3},\ a=\frac{9}{4}$

1등급 비밀노트

(1) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다.
⇒ $f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$
(2) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 공통인 접선을 갖는다.
⇒ 곡선 $y=f(x)$의 접선이 곡선 $y=g(x)$에 접한다.

296 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[x, x+4]$에서 연속이고 열린 구간 $(x, x+4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x+4)-f(x)}{4}=f'(c)$$

인 c가 구간 $(x, x+4)$에 적어도 하나 존재한다.
$x<c<x+4$에서 $x\to\infty$이면 $c\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x+4)-f(x)\}=\lim_{c\to\infty}4f'(c)$$
$$=4\cdot 3=12$$

답 12

297 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[1, 3]$에서 연속이고, 열린 구간 $(1, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(c)$$

인 c가 구간 $(1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.
조건 (나)에 의하여 $|f'(c)|\le 2$이므로

$$\left|\frac{f(3)-f(1)}{2}\right|\le 2,\qquad \left|\frac{1-f(1)}{2}\right|\le 2$$
$$|f(1)-1|\le 4,\qquad -4\le f(1)-1\le 4$$
$$\therefore -3\le f(1)\le 5$$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 -4이다.

답 ①

298 $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy$ ······ ㉠
㉠의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)+0\qquad \therefore f(0)=0$$

㉠의 양변에 $x=2$, $y=-2$를 대입하면

$$f(0)=f(2)+f(-2)-12\qquad \therefore f(2)=2$$

한편 $f'(0)=-2$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=-2$$
$$\therefore f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2)+f(h)+6h-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+6h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+6$$
$$=-2+6=4$$

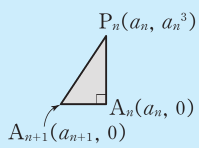
따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-2=4(x-2)\qquad \therefore y=4x-6$$

답 ④

일품 BOX

함수 $f(x)$가 미분가능하므로 $f(x)$는 모든 실수에서 미분가능하고 연속이다.



직선 PQ가 x축과 평행하려면 직선 PQ의 기울기가 0이어야 하므로

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=0$$
$$\therefore f(\alpha)=f(\beta)\quad (\because \alpha\ne\beta)$$

$f(0)=0$, $f(-2)=10$이므로

$$0=f(2)+10-12$$
$$\therefore f(2)=2$$

299 $f(x)=x^3$이라 하면 $\quad f'(x)=3x^2$
점 A_n의 좌표를 $(a_n, 0)$이라 하면 점 P_n의 좌표는 (a_n, a_n^3)이고 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a_n)=3a_n^2$이므로 접선의 방정식은

$$y-a_n^3=3a_n^2(x-a_n),\text{ 즉 } y=3a_n^2x-2a_n^3$$

이 직선의 x절편은 $\frac{2}{3}a_n$이므로

$$A_{n+1}\left(\frac{2}{3}a_n, 0\right)$$

즉 $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이다.

$$\therefore a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

따라서 삼각형 $A_nP_nA_{n+1}$의 넓이는

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot\overline{A_nA_{n+1}}\cdot\overline{A_nP_n}=\frac{1}{2}\cdot(a_n-a_{n+1})\cdot a_n^3$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}a_n\cdot a_n^3=\frac{1}{6}a_n^4=\frac{1}{6}\left(\frac{16}{81}\right)^{n-1}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{16}{81}}=\frac{27}{130}$$

답 ③

300 $f(x)=x^3+6x^2+3x$라 하면

$$f'(x)=3x^2+12x+3$$

$P(\alpha, f(\alpha))$, $Q(\beta, f(\beta))$라 하면 접선의 기울기가 m이므로

$$f'(\alpha)=m,\ f'(\beta)=m$$

따라서 이차방정식 $3x^2+12x+3=m$, 즉 $3x^2+12x+3-m=0$의 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-4,\quad \alpha\beta=\frac{3-m}{3}$$

직선 PQ가 x축과 평행하려면 $f(\alpha)=f(\beta)$이어야 하므로

$$\alpha^3+6\alpha^2+3\alpha=\beta^3+6\beta^2+3\beta$$
$$(\alpha-\beta)\{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+6(\alpha+\beta)+3\}=0$$

$\alpha\ne\beta$이므로 $\quad \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+6(\alpha+\beta)+3=0$

$$(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+6(\alpha+\beta)+3=0$$
$$16-\frac{3-m}{3}-24+3=0,\qquad 3-m=-15$$
$$\therefore m=18$$

답 18

301 $f(x)=x^4-x^2+2$라 하면

$$f'(x)=4x^3-2x$$

접점의 좌표를 (t, t^4-t^2+2)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=4t^3-2t$이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^4-t^2+2)=(4t^3-2t)(x-t),\text{ 즉}$$
$$y=(4t^3-2t)x-3t^4+t^2+2$$

이 직선이 원점을 지나므로

$-3t^4+t^2+2=0, \quad (t+1)(t-1)(3t^2+2)=0$

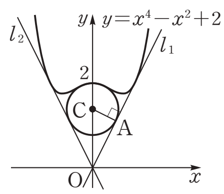
$\therefore t=1$ 또는 $t=-1$

따라서 두 접점의 좌표는 $(1,\ 2)$, $(-1,\ 2)$이므로 접선의 방정식은

l_1: $y=2x$, $\quad l_2$: $y=-2x$

원의 반지름의 길이는 $2-c$이므로 원의 중심을 C, 직선 l_1과 원의 접점을 A라 하면

$\overline{\mathrm{CA}}=2-c$



점 $\mathrm{C}(0,\ c)$와 직선 $y=2x$, 즉 $2x-y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|-c|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2-c, \qquad c=\sqrt{5}(2-c)$$

$(\sqrt{5}+1)c=2\sqrt{5}$

$$\therefore c=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

답 ②

참고 두 직선 l_1, l_2에 동시에 접하고 점 $(0,\ 2)$를 지나는 원의 중심을 $\mathrm{C}(0,\ c)$라 하면 $c=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$인 두 개의 원이 생긴다.

302 $f(x)=x^4-3x^2+2x$라 하면

$f'(x)=4x^3-6x+2$

구하는 접선의 접점의 x좌표를 각각 α, $\beta(\alpha\neq\beta)$라 하자.

점 $(\alpha,\ \alpha^4-3\alpha^2+2\alpha)$에서의 접선의 기울기는 $f'(\alpha)=4\alpha^3-6\alpha+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(\alpha^4-3\alpha^2+2\alpha)=(4\alpha^3-6\alpha+2)(x-\alpha)$, 즉

$y=(4\alpha^3-6\alpha+2)x-3\alpha^4+3\alpha^2 \quad \cdots\cdots ㉠$

점 $(\beta,\ \beta^4-3\beta^2+2\beta)$에서의 접선의 기울기는 $f'(\beta)=4\beta^3-6\beta+2$이므로 접선의 방정식은

$y=(4\beta^3-6\beta+2)x-3\beta^4+3\beta^2$

이때 두 접선이 일치하므로

$4\alpha^3-6\alpha+2=4\beta^3-6\beta+2 \quad \cdots\cdots ㉡$

$-3\alpha^4+3\alpha^2=-3\beta^4+3\beta^2 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉡에서 $2(\alpha^3-\beta^3)=3(\alpha-\beta)$이므로

$2(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=3(\alpha-\beta)$

$2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=3 \ (\because \alpha\neq\beta) \quad \cdots\cdots ㉣$

㉢에서 $\alpha^4-\beta^4=\alpha^2-\beta^2$이므로

$(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

$(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-1)=0 \ (\because \alpha\neq\beta)$

(i) $\alpha+\beta\neq0$일 때

$\alpha^2+\beta^2=1$이므로 ㉣에서

$2+2\alpha\beta=3 \qquad \therefore 2\alpha\beta=1$

$\alpha^2+\beta^2-1=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2=0$에서

$\alpha-\beta=0$, 즉 $\alpha=\beta$이므로 모순이다.

일품 BOX

$2(\alpha^2-\alpha^2+\alpha^2)=3$에서

$2\alpha^2=3 \qquad \therefore \alpha^2=\frac{3}{2}$

(i) $\alpha=\frac{\sqrt{6}}{2}$일 때

$4\alpha^3-6\alpha+2$

$=4\cdot\frac{3\sqrt{6}}{4}-6\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}+2$

$=2,$

$-3\alpha^4+3\alpha^2$

$=-3\cdot\frac{9}{4}+3\cdot\frac{3}{2}=-\frac{9}{4}$

(ii) $\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{2}$일 때

$4\alpha^3-6\alpha+2$

$=4\cdot\left(-\frac{3\sqrt{6}}{4}\right)$

$-6\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)+2$

$=2,$

$-3\alpha^4+3\alpha^2$

$=-3\cdot\frac{9}{4}+3\cdot\frac{3}{2}=-\frac{9}{4}$

함수 $f(x)$가 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
① $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이다.
➡ $f(x)$는 증가한다.
② $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다.
➡ $f(x)$는 감소한다.

두 접선이 일치하려면 두 식 ㉡, ㉢이 모두 성립해야 한다.
따라서 식 ㉣과 등식 $(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-1)=0$이 모두 성립해야 한다.

(ii) $\alpha+\beta=0$일 때

$\beta=-\alpha$를 ㉣에 대입하여 정리하면

$\alpha^2=\frac{3}{2} \qquad \therefore \alpha=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

(i), (ii)에서 $\quad \alpha=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$, $\beta=\mp\frac{\sqrt{6}}{2}$ (복호동순)

$\alpha=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$y=2x-\frac{9}{4}$

답 ③

07 도함수의 활용 (2)

본책 63쪽

303 $f(x)=x^3+ax^2+3x-6$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+3$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 증가하려면 $f'(x)\geq0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-9\leq0, \qquad (a+3)(a-3)\leq0$

$\therefore -3\leq a\leq3$

따라서 정수 a는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 7개이다.

답 7

304 $f(x)=-x^3+2x^2+ax+3$에서

$f'(x)=-3x^2+4x+a$

함수 $f(x)$가 $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>f(x_2)$가 성립하려면 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 감소해야 한다.

즉 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2+3a\leq0 \qquad \therefore a\leq-\frac{4}{3}$

따라서 a의 최댓값은 $-\frac{4}{3}$이다.

답 ④

305 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 감소하는 구간이 $(-1,\ 2)$이므로 부등식 $f'(x)<0$, 즉 $3x^2+2ax+b<0$의 해가 $-1<x<2$이다.

따라서 이차방정식 $3x^2+2ax+b=0$의 두 근이 -1, 2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+2=-\frac{2}{3}a, \ (-1)\cdot2=\frac{b}{3}$

$\therefore a=-\frac{3}{2},\ b=-6$

따라서 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+1$이므로

$f(4)=64-24-24+1=17$

답 ④

306 $f(x)=x^3+ax^2+bx+6$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값을 가지므로 $f'(-1)=0$, $f'(3)=0$

$3-2a+b=0$, $27+6a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-9$

$\therefore a+b=-12$

답 -12

307 $f(x)=3x^4-8x^3-18x^2+1$에서

$f'(x)=12x^3-24x^2-36x$

$=12x(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)$는 $x=-1$, $x=3$에서 극솟값을 갖고, $x=0$에서 극댓값을 가지므로

$a+c=2$, $b=0$

따라서 $f(b)=f(0)=1$, $f\left(\frac{a+c}{2}\right)=f(1)=-22$이므로

$f(b)-f\left(\frac{a+c}{2}\right)=23$

답 ④

308 $f(x)=x^3+ax^2+(2a+9)x-2$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+2a+9$

삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3(2a+9)>0$, $(a+3)(a-9)>0$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>9$

답 ②

309 $f(x)=x^4-4x^3+2ax^2+5$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2+4ax$

$=4x(x^2-3x+a)$

$f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

즉 이차방정식 $x^2-3x+a=0$은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$a\neq0$, $D=9-4a>0$

$\therefore a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{4}$

따라서 자연수 a는 1, 2이므로 구하는 합은

$1+2=3$

답 ①

참고 $a=0$이면 $f'(x)=4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

따라서 $a=0$이면 $f(x)$는 극댓값을 갖지 않는다.

일품 BOX

$f'(x)=-12(x-1)g(x)$에 대하여 이차방정식 $g(x)=0$이

(i) 허근을 갖는 경우 ➡ $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는다.

(ii) $x=1$을 근으로 갖는 경우 ➡ $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는다.

(iii) 중근을 갖는 경우 ➡ $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는다.

삼차 이상인 함수 $f(x)$의 극대와 극소를 판정할 때에는 함수의 증가와 감소를 표로 나타내어 본다.

310 $f(x)=-3x^4-8x^3+6(a+3)x^2-12ax+5$에서

$f'(x)=-12x^3-24x^2+12(a+3)x-12a$

$=-12(x-1)(x^2+3x-a)$

$f(x)$가 극솟값을 갖지 않으려면 방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근을 갖거나 삼중근을 가져야 한다.

$g(x)=x^2+3x-a$라 할 때

(i) 방정식 $g(x)=0$이 허근을 갖는 경우

판별식을 D라 하면

$D=3^2+4a<0$ $\therefore a<-\frac{9}{4}$

(ii) 방정식 $g(x)=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우

$g(1)=4-a=0$이므로 $a=4$

(iii) 방정식 $g(x)=0$이 중근을 갖는 경우

판별식을 D라 하면

$D=3^2+4a=0$ $\therefore a=-\frac{9}{4}$

이상에서 $a=4$ 또는 $a\leq-\frac{9}{4}$

따라서 자연수 a는 4의 1개이다.

답 1

311 $f(x)=ax^3-3ax+2b$에서

$f'(x)=3ax^2-3a=3a(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$2a+2b$	↘	$-2a+2b$	↗	$18a+2b$

$a>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $18a+2b$를 갖고, $x=1$에서 최솟값 $-2a+2b$를 갖는다.

즉 $18a+2b=42$, $-2a+2b=2$이므로

$a=2$, $b=3$ $\therefore ab=6$

답 6

312 $f(x)=x^3-3x^2+k$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 1\leq x\leq3$)

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k-2$	↘	$k-4$	↗	k

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 k를 갖고, $x=2$에서 최솟값 $k-4$를 갖는다.

즉 $M=k$, $m=k-4$이므로 $M+m=16$에서

$k+k-4=16$ $\therefore k=10$

답 ③

313 점 P의 좌표는 $(a, -a^2+6a)$이므로

$\overline{PQ}=-a^2+6a$

$\overline{OQ}=a$이므로 $\overline{QR}=6-2a$

따라서 직사각형 PQRS의 넓이를 $S(a)$라 하면

$$S(a)=(6-2a)(-a^2+6a)$$
$$=2a^3-18a^2+36a\ (0<a<3)$$
$$\therefore S'(a)=6a^2-36a+36=6(a^2-6a+6)$$

$S'(a)=0$에서 $a=3-\sqrt{3}$ ($\because 0<a<3$)

a	(0)	$\cdots$	$3-\sqrt{3}$	$\cdots$	(3)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $S(a)$는 $a=3-\sqrt{3}$에서 극대이면서 최대이다.

답 ②

일품 BOX

곡선 $y=-x^2+6x$가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로
$\overline{QR}=2(3-a)$
$=6-2a$

다항함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 b를 갖는다.
➡ $f'(a)=0$, $f(a)=b$

314

문제 이해 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)$가 증가해야 한다.

즉 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다. ● 40%

해결 과정 $f'(x)=3x^2-8x+a$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-4)^2-3a\leq 0 \qquad \therefore a\geq\frac{16}{3}$$ ● 40%

답 구하기 따라서 a의 최솟값은 $\frac{16}{3}$이다. ● 20%

답 $\frac{16}{3}$

1등급 비밀노트

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일 대응이어야 한다. 따라서 함수 $f(x)$는 증가하거나 감소해야 한다.
즉 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$ 또는 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.

315

$f(x)=x^3+kx^2-15x+4$에서

$$f'(x)=3x^2+2kx-15$$

함수 $f(x)$가 구간 $(-3,\ 1)$에서 감소하려면 이 구간에서 $f'(x)\leq 0$이어야 하므로

$$f'(-3)\leq 0,\ f'(1)\leq 0$$

$f'(-3)=27-6k-15\leq 0$에서 $k\geq 2$

$f'(1)=3+2k-15\leq 0$에서 $k\leq 6$

$$\therefore 2\leq k\leq 6$$

따라서 정수 k는 2, 3, 4, 5, 6의 5개이다.

답 ⑤

316

조건 ㈏에 의하여 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고, 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

$f'(x)=3x^2+2ax+3-a^2$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-3(3-a^2)\leq 0$$

$4a^2-9\leq 0$, $(2a+3)(2a-3)\leq 0$

$\therefore -\frac{3}{2}\leq a\leq\frac{3}{2}$ ...... ㉠

조건 ㈎에서 $f(1)=6$이므로

$$f(1)=1+a+3-a^2+4=6$$

$a^2-a-2=0$, $(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ ($\because$ ㉠)

따라서 $f'(x)=3x^2-2x+2$이므로

$$f'(1)=3$$

답 ④

317

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극솟값 -6을 가지므로

$$g'(2)=0,\ g(2)=-6$$

$g(x)=(x^2-3x)f(x)$에서

$$g'(x)=(2x-3)f(x)+(x^2-3x)f'(x)$$

$g(2)=-2f(2)=-6$이므로 $f(2)=3$

$g'(2)=0$이므로 $f(2)-2f'(2)=0$

$$3-2f'(2)=0$$
$$\therefore f'(2)=\frac{3}{2}$$

답 ④

318

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

주어진 그래프에서 이차방정식 $f'(x)=0$의 해가 $x=-2$ 또는 $x=1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{2a}{3}=-1,\ \frac{b}{3}=-2 \qquad \therefore a=\frac{3}{2},\ b=-6$$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $-\frac{11}{2}$을 가지므로

$$f(1)=1+a+b+c=-\frac{11}{2} \qquad \therefore c=-2$$
$$\therefore f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-2$$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 삼차방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 2이다.

답 ④

$f'(1)=0$이고, $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀐다.

319

해결 과정 $f(x)=x^{n+1}(x-1)^2$
$=x^{n+3}-2x^{n+2}+x^{n+1}$

이므로

$$f'(x)=(n+3)x^{n+2}-2(n+2)x^{n+1}+(n+1)x^n$$
$$=x^n(x-1)\{(n+3)x-(n+1)\}$$ ● 30%

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{n+1}{n+3}$ 또는 $x=1$ ($\because x>0$)

x	(0)	$\cdots$	$\frac{n+1}{n+3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

● 40%

$n+1<n+3$이므로
$0<\frac{n+1}{n+3}<1$

답 구하기 따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{n+1}{n+3}$에서 극댓값을 가지므로

$$\frac{2}{3}<\frac{n+1}{n+3}<\frac{4}{5},\qquad \frac{2}{3}<1-\frac{2}{n+3}<\frac{4}{5}$$

$\frac{1}{10} < \frac{1}{n+3} < \frac{1}{6}$ $\quad \therefore 3 < n < 7$

따라서 자연수 n의 최댓값은 6이다. ● 30%

답 6

320 곡선 $y=f(x)$가 $x=\alpha$에서 x축에 접하고 $f(0)=0$이므로 $f(x)=x(x-\alpha)^2$으로 놓을 수 있다.

$\therefore f'(x)=(x-\alpha)^2+2x(x-\alpha)$
$=(x-\alpha)(3x-\alpha)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\alpha$ 또는 $x=\frac{\alpha}{3}$

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{\alpha}{3}$에서 극솟값 -4를 가지므로

$f\left(\frac{\alpha}{3}\right)=\frac{\alpha}{3}\left(\frac{\alpha}{3}-\alpha\right)^2=-4$

$\frac{4}{27}\alpha^3=-4, \quad \alpha^3=-27$

$\therefore \alpha=-3$

따라서 $f(x)=x(x+3)^2=x^3+6x^2+9x$이므로

$a=6, \ b=9 \quad \therefore a+b=15$

답 ④

일품 BOX

주어진 그래프에서 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극댓값을 가지므로 $x=\frac{\alpha}{3}$에서 극솟값을 갖는다.

321 $y=\{f(x)\}^2=f(x)f(x)$에서

$y'=f'(x)f(x)+f(x)f'(x)=2f(x)f'(x)$

$y'=0$에서 $\quad f(x)=0$ 또는 $f'(x)=0$

$f(x)=0$에서 $\quad x=a$ 또는 $x=c$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=b$ 또는 $x=c$

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$\{f(x)\}^2$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $y=\{f(x)\}^2$은 $x=a, x=b, x=c$에서 극값을 가지므로 극값을 갖는 점은 3개이다.

답 3

주어진 그래프에서 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극솟값을 갖고, 구간 $(-\infty, b)$에서 감소하고 구간 (b, ∞)에서 증가한다.

322 조건 (가)에서 $f(x)=ax^3+bx \ (a\neq0)$로 놓으면

$f'(x)=3ax^2+b$

조건 (나)에서 $f(2)=-16, \ f'(2)=0$이므로

$8a+2b=-16, \ 12a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=1, \ b=-12$

따라서 $f(x)=x^3-12x$이므로

$f(1)=-11$

답 -11

삼차함수 $f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이면 함수 $f(x)$가 기함수이므로
$f(x)=ax^3+bx \ (a\neq0)$
로 놓을 수 있다.

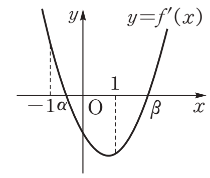
323 문제 이해 $f(x)=x^3+2kx^2-4k^2x+1$에서

$f'(x)=3x^2+4kx-4k^2$ ● 10%

해결 과정 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 $\alpha, \ \beta \ (\alpha<\beta)$라 하면

$-1<\alpha<1, \ \beta>1$

따라서 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f'(-1)>0, \ f'(1)<0$ ● 30%

$f'(-1)=3-4k-4k^2>0$에서

$(2k+3)(2k-1)<0$

$\therefore -\frac{3}{2}<k<\frac{1}{2}$ ······ ㉠ ● 20%

$f'(1)=3+4k-4k^2<0$에서

$(2k+1)(2k-3)>0$

$\therefore k<-\frac{1}{2}$ 또는 $k>\frac{3}{2}$ ······ ㉡ ● 20%

답 구하기 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-\frac{3}{2}<k<-\frac{1}{2}$

따라서 $a=-\frac{3}{2}, \ b=-\frac{1}{2}$이므로

$ab=\frac{3}{4}$ ● 20%

답 $\frac{3}{4}$

324 $f(x)=3x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=9x^2+2ax+b$

조건 (가)에서 두 점 $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta))$를 잇는 선분의 중점의 좌표가 $(0, 1)$이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=0, \quad \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=1$

$\therefore \beta=-\alpha, \ f(\alpha)+f(\beta)=2$

따라서 이차방정식 $f'(x)=0$의 해는 $\alpha, -\alpha$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{2a}{9}=0, \quad \frac{b}{9}=-\alpha^2 \quad \therefore a=0, \ b=-9\alpha^2$

$f(x)=3x^3-9\alpha^2x+c$이므로 $f(\alpha)+f(-\alpha)=2$에서

$2c=2 \quad \therefore c=1$

$f(\alpha)=-6\alpha^3+c,$
$f(-\alpha)=6\alpha^3+c$
$\therefore f(\alpha)+f(-\alpha)=2c$

조건 (나)에서 $|f(\alpha)-f(-\alpha)|=\frac{4}{9}$이므로

$|12\alpha^3|=\frac{4}{9}, \quad 12\alpha^3=\pm\frac{4}{9}, \quad \alpha^3=\pm\frac{1}{27}$

$\therefore \alpha=\pm\frac{1}{3}$

따라서 $b=-9\alpha^2=-1$이므로

$a+b+c=0$

답 0

325 $f(x)=x^3+3ax^2+bx+2$에서

$f'(x)=3x^2+6ax+b$

$f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9a^2-3b\le0 \quad \therefore b\ge3a^2$

$a=1$일 때, $3\le b\le20$이므로 순서쌍 (a, b)는 18개

$a=2$일 때, $12\le b\le20$이므로 순서쌍 (a, b)는 9개

$a \ge 3$일 때, $b \ge 3a^2$을 만족시키는 20 이하의 자연수 b는 존재하지 않는다.
따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$$18+9=27$$

답 ④

326 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+ax^3+bx^2+2x$에서

$$f'(x)=x^3+3ax^2+2bx+2$$

주어진 조건에서 방정식 $f'(x)=0$은 한 실근 -2와 중근 c를 가지므로

$$f'(x)=(x+2)(x-c)^2$$
$$=x^3+(2-2c)x^2+(c^2-4c)x+2c^2$$

따라서 $3a=2-2c,\ 2b=c^2-4c,\ 2=2c^2$이므로

$$a=0,\ b=-\frac{3}{2},\ c=1\ (\because c>0)$$

$$\therefore a+b+c=-\frac{1}{2}$$

답 ③

327 $f(x)=x^3+3(a-1)x^2-3(a-3)x$에서

$$f'(x)=3x^2+6(a-1)x-3(a-3)$$

$f(x)$가 $x \le 0$에서 극값을 갖지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) $f(x)$가 모든 실수 x에서 극값을 갖지 않는 경우
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=9(a-1)^2+9(a-3) \le 0$$
$$a^2-a-2 \le 0, \qquad (a+1)(a-2) \le 0$$
$$\therefore -1 \le a \le 2$$

(ii) $f(x)$가 $x>0$에서 극값을 모두 갖는 경우
이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}>0$에서 $\quad a<-1$ 또는 $a>2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

(두 근의 합)$=-2(a-1)>0$에서

$a<1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

(두 근의 곱)$=-(a-3)>0$에서

$a<3 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $\quad a<-1$

(i), (ii)에서 $a \le 2$이므로 a의 최댓값은 2이다.

답 ④

328 $f(x)=(a-2)x^3+3bx^2-3ax+1$에서

$$f'(x)=3(a-2)x^2+6bx-3a$$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

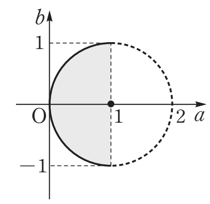
$$\frac{D}{4}=(3b)^2+9a(a-2) \le 0$$
$$a^2-2a+b^2 \le 0 \qquad \therefore (a-1)^2+b^2 \le 1$$

일품 BOX

$2t^2+2t+5$
$=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}>0$

$2=2c^2$에서
$c=1\ (\because c>0)$
$3a=2-2=0$이므로
$a=0$
$2b=1-4=-3$이므로
$b=-\frac{3}{2}$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면
① $b^2-4ac>0$
② $-\frac{b}{a}>0$
③ $\frac{c}{a}>0$



이때 $a<1$이므로 점 $(a,\ b)$가 나타내는 영역은 반지름의 길이가 1인 반원의 내부이다.
따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot1^2=\frac{\pi}{2}$$

답 $\frac{\pi}{2}$

329 문제 이해 점 P의 좌표를 $(t,\ t^2+1)$이라 하면

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$$
$$=(t-2)^2+(t^2+1)^2+(t-8)^2+(t^2+1)^2$$
$$=2t^4+6t^2-20t+70$$

● 40%

해결 과정 $f(t)=2t^4+6t^2-20t+70$이라 하면

$$f'(t)=8t^3+12t-20$$
$$=4(t-1)(2t^2+2t+5)$$

$f'(t)=0$에서 $\qquad t=1$

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	극소	↗

● 40%

답 구하기 따라서 $f(t)$는 $t=1$에서 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은

$$f(1)=2+6-20+70=58$$

● 20%

답 58

330 $f(x)=-ax^3+3x^2$에서

$$f'(x)=-3ax^2+6x=-3x(ax-2)$$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=0$ 또는 $x=\frac{2}{a}$

(i) $\frac{2}{a} \ge 4$, 즉 $0<a \le \frac{1}{2}$일 때

x	0	$\cdots$	4
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$48-64a$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 0을 가지므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $0<\frac{2}{a}<4$, 즉 $a>\frac{1}{2}$일 때

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{a}$	$\cdots$	4
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	극대	↘	$48-64a$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최솟값 $48-64a$를 가지므로

$$48-64a=-80 \qquad \therefore a=2$$

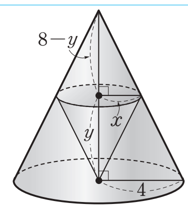
(i), (ii)에서 $\qquad a=2$

따라서 $f(x)=-2x^3+3x^2$이고 $f(x)$는 $x=\frac{2}{a}$, 즉 $x=1$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

$$f(1)=1$$

답 ③

331 오른쪽 그림과 같이 내접하는 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 x, 높이를 y라 하면



$(8-y) : x=8 : 4$

$\therefore y=8-2x$

내접하는 원뿔의 부피를 $V(x)$라 하면

$$V(x)=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot x^2\cdot(8-2x)=-\frac{2}{3}\pi x^3+\frac{8}{3}\pi x^2$$

$$\therefore V'(x)=-2\pi x^2+\frac{16}{3}\pi x=-2\pi x\left(x-\frac{8}{3}\right)$$

$V'(x)=0$에서 $\quad x=\frac{8}{3}$ ($\because 0<x<4$)

x	(0)	$\cdots$	$\frac{8}{3}$	$\cdots$	(4)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $V(x)$는 $x=\frac{8}{3}$에서 극대이면서 최대이므로 내접하는 원뿔의 부피의 최댓값은

$V\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{512}{81}\pi$ 답 ④

일품 BOX

- 삼각형의 닮음을 이용하여 원뿔의 높이 y를 밑면의 반지름의 길이 x에 대한 식으로 나타낸다.

332 $g(x)=x^2+2x=(x+1)^2-1$이므로 $g(x)=t$로 놓으면 $t\ge -1$이고

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=-t^3+3t$

이므로 $\quad f'(t)=-3t^2+3=-3(t+1)(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=-1$ 또는 $t=1$

t	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(t)$ $(t\ge -1)$는 $t=1$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

$f(1)=2$ 답 ①

333 문제 이해 구슬 1개당 판매 가격을 x원 인상하였을 때의 판매 이익은 $(15+x)$원이고, 일일 판매량은 $(600-x^2)$개이므로 일일 판매 이익을 $f(x)$원이라 하면

$f(x)=(15+x)(600-x^2)$

$\quad=-x^3-15x^2+600x+9000$ ● 40%

해결 과정 $\therefore f'(x)=-3x^2-30x+600$

$\quad=-3(x+20)(x-10)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=10$ ($\because x\ge 0$)

x	0	$\cdots$	10	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

● 40%

답 구하기 따라서 함수 $f(x)$는 $x=10$에서 극대이면서 최대이므로 구슬 1개당 판매 가격은

$a=85+10=95$ ● 20%

답 95

334 조건 (가)에서 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=-1$에서 $x\to 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2}f(x)=0$이므로 $\quad f(2)=0$

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-1$이므로

$f'(2)=-1$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(2)=-1$이므로 $\quad 4a+b=-13 \quad \cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에서 $f'(1)=0$이므로

$2a+b=-3 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5,\ b=7$

㉠−㉡을 하면
$2a=-10$
$\therefore a=-5$
$a=-5$를 ㉠에 대입하면
$-20+b=-13$
$\therefore b=7$

따라서 $f(x)=x^3-5x^2+7x+c$이고, $f(2)=0$이므로

$8-20+14+c=0 \qquad \therefore c=-2$

$\therefore abc=70$ 답 70

335 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy(x+y)$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0$

$f'(0)=-2$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=-2$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+2xh(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+2xh(x+h)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)}{h}+2x(x+h)\right\}\\&=-2+2x^2=2(x+1)(x-1)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값, $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$\alpha=-1,\ \beta=1$

$\therefore \beta-\alpha=2$ 답 2

336 $f(x)=x^3+3ax^2-6x-5$에서

$f'(x)=3x^2+6ax-6$

$f(x)$가 극값을 2개 가지므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2a$, $\alpha\beta=-2$

$f(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 가지므로 두 점 A, B의 x좌표는 각각 α, β이다.

따라서 두 점 P, Q의 x좌표는 각각 $\dfrac{\beta+3\alpha}{4}$, $\dfrac{3\beta+\alpha}{4}$

이므로 선분 PQ가 y축과 만나려면

$$\frac{\beta+3\alpha}{4}\cdot\frac{3\beta+\alpha}{4}\le 0,\qquad (3\alpha+\beta)(\alpha+3\beta)\le 0$$

$$3\alpha^2+10\alpha\beta+3\beta^2\le 0,\qquad 3(\alpha+\beta)^2+4\alpha\beta\le 0$$

$$3\cdot(-2a)^2+4\cdot(-2)\le 0,\qquad a^2\le\frac{2}{3}$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{6}}{3}\le a\le\frac{\sqrt{6}}{3}$$

답 ④

337 $f(x)=x^3+3ax^2+9b^2x+2$에서

$f'(x)=3x^2+6ax+9b^2$

$f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2a$, $\alpha\beta=3b^2$

$$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4a^2-12b^2$$
$$=4(a^2-3b^2)$$

이때 $a^2-3b^2=1$이므로 $\qquad(\alpha-\beta)^2=4$

$\therefore \alpha-\beta=-2$ ($\because \alpha<\beta$)

$f(x)$의 극댓값은 $f(\alpha)$, 극솟값 $f(\beta)$이므로

$$\begin{aligned}&f(\alpha)-f(\beta)\\&=\alpha^3-\beta^3+3a(\alpha^2-\beta^2)+9b^2(\alpha-\beta)\\&=(\alpha-\beta)\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+3a(\alpha+\beta)+9b^2\}\\&=-2(4a^2-3b^2-6a^2+9b^2)\\&=4(a^2-3b^2)\\&=4\end{aligned}$$

답 ③

참고 $f'(x)=3(x^2+2ax+3b^2)$에서 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-3b^2=1>0$$

이므로 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$는 항상 극댓값과 극솟값을 갖는다는 것을 알 수 있다.

338 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, $g(x)=x^2+dx+e$ (a, b, c, d, e는 상수)로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$, $g'(x)=2x+d$

주어진 그래프에서 $y=f'(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 0, 2이므로

$f'(x)=3x(x-2)=3x^2-6x$

$\therefore a=-3$, $b=0$

일품 BOX

미분가능한 함수 $F(x)$에 대하여 $F'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $F'(x)$의 부호가

① 양에서 음으로 바뀌면
➡ $F(x)$는 $x=a$에서 극대

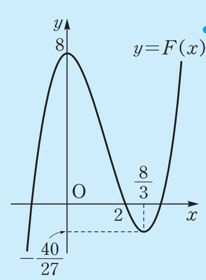
② 음에서 양으로 바뀌면
➡ $F(x)$는 $x=a$에서 극소

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점을 (a, b)라 하면

$a=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$,

$b=\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}$

$\alpha^3-\beta^3$
$=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
$=(\alpha-\beta)\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}$



$\overline{PA}^2$의 값이 최소일 때 $\overline{PA}$의 값이 최소이고, $\overline{PA}$의 값이 최소일 때 원의 넓이가 최소이다.

또 직선 $y=g'(x)$가 원점을 지나므로 $\qquad g'(0)=0$

$\therefore d=0$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2+c$, $g(x)=x^2+e$

ㄱ. $f'(x)=g'(x)$를 만족시키는 x의 값을 0, k $(k>2)$라 하면 $F'(x)=f'(x)-g'(x)$이므로

$F'(0)=F'(k)=0$

이고, $x=0$의 좌우에서 함수 $F'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $F(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

또 $x=k$의 좌우에서 함수 $F'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $F(x)$는 $x=k$에서 극솟값을 갖는다. 따라서 함수 $F(x)$는 극값을 갖는다.

ㄴ. $f'(x)=3x^2-6x$, $g'(x)=2x$이므로

$F'(x)=f'(x)-g'(x)=3x^2-8x$

$\therefore F'(2)=12-16=-4$

ㄷ. $F(x)=f(x)-g(x)=x^3-4x^2+c-e$

$F(2)=0$이므로 $\qquad -8+c-e=0$

$\therefore c-e=8$

따라서 $F(x)=x^3-4x^2+8$이므로 방정식 $x^3-4x^2+8=0$의 모든 실근의 곱은 -8이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

참고 ㄷ. $F(2)=0$이면 $F(x)=x^3-4x^2+8$이므로

$F'(x)=3x^2-8x=x(3x-8)$

$F'(x)=0$에서 $\qquad x=0$ 또는 $x=\dfrac{8}{3}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{8}{3}$	$\cdots$
$F'(x)$	+	0	−	0	+
$F(x)$	↗	8	↘	$-\frac{40}{27}$	↗

따라서 방정식 $F(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

339 점 P의 좌표를 (x, x^2-x-2)라 하면

$$\overline{PA}^2=(x-8)^2+(x^2-x-5)^2$$
$$=x^4-2x^3-8x^2-6x+89$$

$f(x)=x^4-2x^3-8x^2-6x+89$라 하면

$$f'(x)=4x^3-6x^2-16x-6$$
$$=2(x+1)(2x+1)(x-3)$$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=-1$ 또는 $x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	−1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	90	↗	$\frac{1445}{16}$	↘	26	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이면서 최소이므로 $\overline{PA}^2$의 최솟값은 26이다.

따라서 원의 넓이의 최솟값은

$S=\pi\cdot\left(\frac{\overline{\mathrm{PA}}}{2}\right)^2=\frac{\overline{\mathrm{PA}}^2}{4}\pi=\frac{13}{2}\pi$

$\therefore \frac{60S}{13\pi}=\frac{60}{13\pi}\cdot\frac{13}{2}\pi=30$ 답 30

08 도함수의 활용 (3) 본책 69쪽

340 $x^3-2x^2-4x+k=0$에서

$x^3-2x^2-4x=-k$

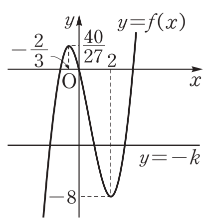
$f(x)=x^3-2x^2-4x$라 하면

$f'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{40}{27}$	$\searrow$	-8	$\nearrow$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 양근과 한 개의 음근을 가지려면



$-8<-k<0$

$\therefore 0<k<8$

따라서 정수 k는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7개이다.

답 ⑤

341 $3x^4-4x^3-24x^2+48x-k=0$에서

$3x^4-4x^3-24x^2+48x=k$

$f(x)=3x^4-4x^3-24x^2+48x$라 하면

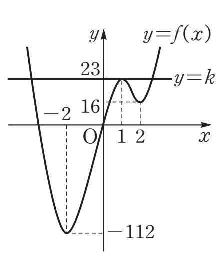
$f'(x)=12x^3-12x^2-48x+48$

$=12(x+2)(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-112	$\nearrow$	23	$\searrow$	16	$\nearrow$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면



$k=16$ 또는 $k=23$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$16+23=39$ 답 ③

일품 BOX

방정식 $f(x)=a$ (a는 상수)의 실근의 개수

➡ 두 함수 $y=f(x)$, $y=a$의 그래프의 교점의 개수

342 $f(x)=x^3-12x$라 하면

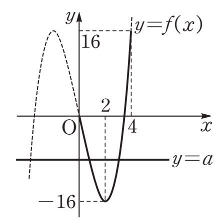
$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 0\le x\le 4$)

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-16	$\nearrow$	16

따라서 $0\le x\le 4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$가 교점을 가져야 하므로 a의 값의 범위는



$-16\le a\le 16$

따라서 정수 a의 개수는 33이다. 답 ⑤

343 $f(x)=nx^{n+1}+1-(n+1)x^n$이라 하면

$f'(x)=n(n+1)x^n-n(n+1)x^{n-1}$

$=n(n+1)\boxed{x^{n-1}(x-1)}$

따라서 $x>1$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 $\boxed{\text{증가}}$한다.

이때 $f(1)=n+1-(n+1)=\boxed{0}$이므로 $x>1$에서

$f(x)>0$

$\therefore nx^{n+1}+1>(n+1)x^n$

$\therefore$ (가) $x^{n-1}(x-1)$ (나) 증가 (다) 0 답 ③

344 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2a^2$이라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax-a^2=(x+a)(3x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{a}{3}$ ($\because x\ge 0$)

x	0	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$2a^2$	$\searrow$	$-\frac{5}{27}a^3+2a^2$	$\nearrow$

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{a}{3}$에서 극소이면서 최소이고, 최솟값 $-\frac{5}{27}a^3+2a^2$을 갖는다.

이때 주어진 부등식이 항상 성립하려면 $f\left(\frac{a}{3}\right)\ge 0$이어야 하므로 $-\frac{5}{27}a^3+2a^2\ge 0$

$a^2>0$이므로 $-\frac{5}{27}a+2\ge 0$ $\therefore a\le\frac{54}{5}$

따라서 자연수 a의 최댓값은 10이다. 답 ③

345 물체를 던진 지 t초 후의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-10t+30$

물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로

$-10t+30=0 \qquad \therefore t=3$

$t=3$일 때 물체의 높이는

$-5\cdot3^2+30\cdot3+10=55(\mathrm{m})$

따라서 최고 높이에 도달할 때까지 움직인 거리는

$55-10=45(\mathrm{m})$ 답 ⑤

1등급 비밀노트

물체가 최고 높이에 도달했을 때, 지면으로부터의 높이가 55 m 이므로 물체가 움직인 거리는 45 m이다.
지면으로부터의 높이와 움직인 거리를 혼동하지 않도록 주의한다.

346 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-16t+16=(3t-4)(t-4)$$

$$a=\frac{dv}{dt}=6t-16$$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$t=\frac{4}{3}$ 또는 $t=4$

즉 $t=\frac{4}{3}$일 때 점 P는 첫 번째로 운동 방향을 바꾸고 $t=4$일 때 두 번째로 운동 방향을 바꾼다.

따라서 $t=4$일 때 점 P의 가속도는

$6\cdot4-16=8$ 답 8

347 $f(t)=t^3+4t^2+4t,\ g(t)=t^2+13t$라 하자.

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $v_P,\ v_Q$라 하면

$v_P=f'(t)=3t^2+8t+4,\ v_Q=g'(t)=2t+13$

이때 $t\geq0$에서 $f'(t)>0,\ g'(t)>0$이므로

$v_P>0,\ v_Q>0$

ㄱ. 두 점 P, Q가 만나려면 $f(t)=g(t)$이어야 하므로

$t^3+4t^2+4t=t^2+13t, \qquad t(t^2+3t-9)=0$

$\therefore t=\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}\ (\because t>0)$

따라서 두 점 P, Q는 출발한 후 한 번 만난다.

ㄴ. $v_P-v_Q=3t^2+6t-9=3(t+3)(t-1)$

$0<t<1$에서 $v_P-v_Q<0$이므로 $\qquad v_P<v_Q$

$\therefore |v_P|<|v_Q|$

따라서 $0<t<1$에서 점 Q의 속력이 점 P의 속력보다 크다.

ㄷ. ㄱ에서 $t=\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$일 때 두 점 P, Q가 처음 만나고, $t=\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$일 때 $v_P>v_Q$이므로

$|v_P|>|v_Q|$

따라서 점 P의 속력이 점 Q의 속력보다 크다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

일품 BOX

두 함수 $f(x),\ g(x)$가 미분가능할 때
$y=f(x)g(x)$이면
$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

△ABC에서 두 변의 길이가 $b,\ c$이고 그 끼인각의 크기가 $\theta\,(0°<\theta<90°)$일 때,
$\triangle ABC=\frac{1}{2}bc\sin\theta$

$\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}>1$이고, $t>1$에서 $v_P-v_Q>0$이므로 $\quad v_P>v_Q$

348 t초 후의 직사각형의 가로의 길이는 $(10+t)$cm, 세로의 길이는 $(5+2t)$cm이고, 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이가 서로 같을 때, 정사각형이 되므로

$10+t=5+2t \qquad \therefore t=5$

직사각형의 넓이를 $S\,\mathrm{cm}^2$라 하면

$S=(10+t)(5+2t)=2t^2+25t+50$

양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dS}{dt}=4t+25$$

따라서 $t=5$일 때의 직사각형의 넓이의 변화율은

$4\cdot5+25=45(\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$

답 ⑤

349 t초 후의 정삼각형의 한 변의 길이는 $6+t$이고, 삼각뿔의 높이는 $24-at$이므로 삼각뿔의 부피를 V라 하면

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}(6+t)^2(24-at)$$

양변을 t에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&=\frac{\sqrt{3}}{12}\{2(6+t)(24-at)+(6+t)^2\cdot(-a)\}\\&=\frac{\sqrt{3}}{12}(6+t)(48-6a-3at)\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}(6+t)(16-2a-at)\end{aligned}$$

$t=4$일 때 $\frac{dV}{dt}=0$이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot10\cdot(16-6a)=0$$

$\therefore a=\frac{8}{3}$ 답 ②

350 t초 후의 삼각형 OPQ의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\cdot\overline{OP}\cdot\overline{OQ}\cdot\sin60°\\&=\frac{1}{2}(t^2+t)\cdot4t^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\sqrt{3}(t^4+t^3)\end{aligned}$$

양변에 t을 대하여 미분하면

$$\frac{dS}{dt}=\sqrt{3}(4t^3+3t^2)$$

따라서 $t=3$일 때의 삼각형 OPQ의 넓이의 변화율은

$\sqrt{3}(4\cdot3^3+3\cdot3^2)=135\sqrt{3}$

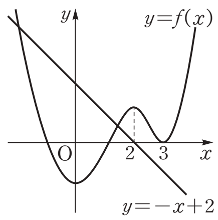
답 $135\sqrt{3}$

351 해결 과정 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

이때 $f(0)<0$, $f(3)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ● 50%



방정식 $f(x)+x=2$, 즉 $f(x)=-x+2$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+2$의 교점의 x좌표와 같으므로 방정식 $f(x)+x=2$의 양근의 개수는 1, 음근의 개수는 1이다.

● 40%

답 구하기 따라서 $a=1$, $b=1$이므로

$a-b=0$ ● 10%

답 0

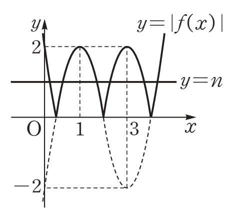
352

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	−2	↗

따라서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $|f(x)|=n$의 서로 다른 실근의 개수는 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=n$의 교점의 개수와 같으므로

$a_1=6$, $a_2=4$, $a_n=2$ $(n\geq3)$

$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n=6+4+2\cdot8=26$

답 ③

353

$f(x)=x^3+5$라 하면 $f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+5)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+5)=3t^2(x-t)$

이 직선이 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$a-t^3-5=3t^2(1-t)$

$\therefore 2t^3-3t^2+a-5=0$ …… ㉠

점 $(1,\ a)$에서 곡선 $y=x^3+5$에 세 개의 접선을 그을 수 있으려면 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$g(t)=2t^3-3t^2+a-5$라 하면

$g'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=1$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	+	0	−	0	+
$g(t)$	↗	$a-5$	↘	$a-6$	↗

삼차방정식 $g(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$g(0)g(1)<0$, $(a-5)(a-6)<0$

$\therefore 5<a<6$

따라서 $\alpha=5$, $\beta=6$이므로 $\alpha+\beta=11$

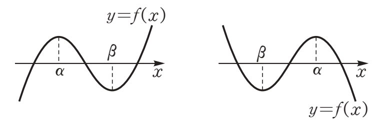
답 ②

일품 BOX

- 사차방정식 $f(x)+x=2$는 2개의 실근과 2개의 허근을 갖는다.
- x^2+x+2 $=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$ 이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$
- 세 개의 접선을 그을 수 있다.
  ➡ 서로 다른 세 개의 접점이 존재한다.
  ➡ 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 갖는다.
- 함수 $g(t)$는 $t=0$에서 극댓값 $a-5$, $t=1$에서 극솟값 $a-6$을 갖는다.

1등급 비밀노트

삼차함수 $f(x)$의 극댓값이 $f(\alpha)$, 극솟값이 $f(\beta)$일 때, 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 $f(\alpha)>0$, $f(\beta)<0$이어야 하므로

$f(\alpha)f(\beta)<0$

354

임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)\leq g(x_2)$가 성립하려면 $f(x)$의 최댓값을 M, $g(x)$의 최솟값을 m이라 할 때, $M\leq m$이어야 한다.

$f(x)=-x^4-2x^2+8x+5$에서

$f'(x)=-4x^3-4x+8=-4(x^3+x-2)$

$=-4(x-1)(x^2+x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	10	↘

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$M=f(1)=10$

$g(x)=x^2+4x+a=(x+2)^2+a-4$에서 함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 최솟값 $a-4$를 갖는다.

$\therefore m=a-4$

$10\leq a-4$에서 $a\geq14$

따라서 a의 최솟값은 14이다.

답 14

1등급 비밀노트

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

① 임의의 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\leq g(x)$가 성립한다.
➡ $F(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면 $F(x)\leq0$이어야 하므로 $(F(x)$의 최댓값$)\leq0$임을 보인다.

② 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식 $f(x_1)\leq g(x_2)$가 성립한다.
➡ $f(x)$의 최댓값을 M, $g(x)$의 최솟값을 m이라 할 때, $M\leq m$임을 보인다.

355

$f(x)=x^4-4x+a$라 하면

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

$x>1$에서 $f'(x)\boxed{>}0$

따라서 $x>1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>\boxed{f(1)}$이므로 $x>1$에서 부등식 $f(x)>0$이 항상 성립하기 위한 필요충분조건은

$f(1)=a-3\geq0$ $\therefore \boxed{a\geq3}$

$\therefore$ (가) $>$ (나) $f(1)$ (다) $a\geq3$

답 ①

356 $f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$k+7$	$\searrow$	$k-20$	$\nearrow$

$x>-3$에서 $f(x)>0$이려면 $f(-3)\geq 0$

$f(-3)=k-45$이므로

$k-45\geq 0$ $\therefore k\geq 45$

따라서 정수 k의 최솟값은 45이므로 $\alpha=45$

$x>1$에서 $f(x)>0$이려면 $f(2)>0$

$k-20>0$ $\therefore k>20$

따라서 정수 k의 최솟값은 21이므로 $\beta=21$

$\therefore \alpha+\beta=66$

답 66

일품 BOX

• $f(-3)=k-45$, $f(2)=k-20$이므로 $f(2)>f(-3)$ 따라서 $x\geq -3$일 때 $f(x)$는 $x=-3$에서 최솟값 $k-45$를 갖는다.

• $x>1$일 때 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $k-20$이다.

357 문제 이해 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=4t-8$, $v_Q=t-6$ ● 20%

해결 과정 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 $v_Pv_Q<0$이므로

$(4t-8)(t-6)<0$ $\therefore 2<t<6$ ● 40%

$t=2$일 때 점 P의 위치는 -8, $t=6$일 때 점 P의 위치는 24이므로 점 P가 움직인 거리는

$24-(-8)=32$

$t=2$일 때 점 Q의 위치는 -10, $t=6$일 때 점 Q의 위치는 -18이므로 점 Q가 움직인 거리는

$-10-(-18)=8$ ● 30%

답 구하기 따라서 두 점 P, Q가 움직인 거리의 합은

$32+8=40$ ● 10%

답 40

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가
① 같은 방향으로 움직인다. ➡ (두 점의 속도의 곱) >0
② 반대 방향으로 움직인다. ➡ (두 점의 속도의 곱) <0

358 $f'(t)=3t^2-18t+15=3(t-1)(t-5)$

점 P가 음의 방향으로 움직일 때, $f'(t)<0$이므로

$3(t-1)(t-5)<0$ $\therefore 1<t<5$

따라서 $1<t<5$에서 점 P의 속력 $|f'(t)|$는

$|f'(t)|=|3t^2-18t+15|$

$=-3t^2+18t-15$

$=-3(t-3)^2+12$

따라서 $t=3$일 때, 속력의 최댓값은 12이다.

답 ②

점 P의 속도를 v라 하면 $v=f'(t)$
이때 속력은 $|v|$이므로 $|f'(t)|$와 같다.

359 ㄱ. $3<t<4$에서 $f'(t)$가 증가하므로 점 P의 속도는 증가한다.

ㄴ. 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=k(t-2)(t-4)$

$=k(t^2-6t+8)$ $(k>0)$

점 P의 시각 t에서의 가속도를 $v'(t)$라 하면

$v'(t)=2k(t-3)$ $\therefore v'(3)=0$

따라서 $t=3$일 때, 점 P의 가속도는 0이다.

• $y=f'(t)$의 그래프는 이차함수의 그래프의 일부분이므로 $y=f'(t)$의 그래프는 직선 $t=3$에 대하여 대칭이다.

ㄷ. $f'(2)=f'(4)=0$이고 $t=2$, $t=4$의 좌우에서 $f'(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P는 $t=2$, $t=4$에서 운동 방향을 바꾼다. 즉 점 P는 운동 방향을 2번 바꾼다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

360 문제 이해 점 P의 시각 t에서의 x좌표는

$x=\frac{2}{3}t+\frac{2}{3}$ ● 10%

해결 과정 $f(x)=x^3$이라 하면 $f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 (a, a^3)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2$이므로 접선의 방정식은

$y-a^3=3a^2(x-a)$, 즉

$y=3a^2x-2a^3$ …… ㉠ ● 30%

이 직선이 점 $P\left(\frac{2}{3}t+\frac{2}{3},\ 0\right)$을 지나므로

$3a^2\left(\frac{2}{3}t+\frac{2}{3}\right)-2a^3=0$, $2a^3-2a^2t-2a^2=0$

$2a^2(a-t-1)=0$ $\therefore a=t+1$ ($\because a\neq 0$)

$a=t+1$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=3(t+1)^2x-2(t+1)^3$

이 직선의 y절편은 $-2(t+1)^3$, 즉 $-2t^3-6t^2-6t-2$이므로

$Q(0,\ -2t^3-6t^2-6t-2)$ ● 30%

점 Q가 y축 위를 움직이는 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=(-2t^3-6t^2-6t-2)'$

$=-6t^2-12t-6$ ● 20%

답 구하기 따라서 $t=3$일 때의 점 Q의 속도는

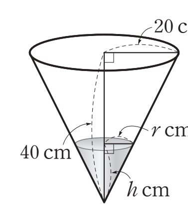
$v(3)=-96$ ● 10%

답 -96

1등급 비밀노트

① x축 위의 점 P의 시각 t에서의 좌표가 $(f(t),\ 0)$이면 점 P의 속도는 $f'(t)$이다.
② y축 위의 점 Q의 시각 t에서의 좌표가 $(0,\ g(t))$이면 점 Q의 속도는 $g'(t)$이다.

361 물을 채우기 시작한 지 t초 후의 수면의 반지름의 길이를 r cm, 수면의 높이를 h cm라 하면



$r:h=20:40$

$\therefore r=\frac{1}{2}h$

이때 $h=3t$이므로 $r=\frac{3}{2}t$

물의 부피를 V라 하면

$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{3}{2}t\right)^2\cdot 3t=\frac{9}{4}\pi t^3$

$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{27}{4}\pi t^2$

수면의 높이가 30 cm일 때, $3t=30$에서 $\quad t=10$

따라서 $t=10$일 때의 부피의 변화율은

$$\frac{27}{4}\pi\cdot10^2=675\pi\,(\text{cm}^3/\text{s})$$

답 ④

362 t초 후의 두 선분 AP, PB의 길이는 각각

$2t$ cm, $(12-2t)$ cm

두 선분 AP, PB를 각각 지름으로 하는 두 원의 넓이는 각각

$\pi t^2\,\text{cm}^2,\ \pi(6-t)^2\,\text{cm}^2$

$$\begin{aligned}\therefore S&=36\pi-\{\pi t^2+\pi(6-t)^2\}\\&=\pi\{36-(2t^2-12t+36)\}\\&=\pi(12t-2t^2)\,(\text{cm}^2)\end{aligned}$$

양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dS}{dt}=\pi(12-4t)$$

$2\overline{\text{AP}}=\overline{\text{PB}}$일 때, $2\cdot2t=12-2t$에서

$t=2$

따라서 $t=2$일 때의 S의 변화율은

$\pi(12-8)=4\pi\ (\text{cm}^2/\text{s})$

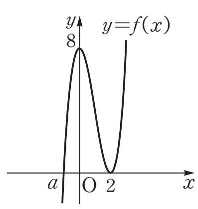
$\therefore k=4$

답 4

363 주어진 그래프에서 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

일품 BOX: $f'(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $f'(2)=0$이고 $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

$f(0)=8$이고, 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(x)=k(x-a)(x-2)^2$

$(k>0,\ a<0)$이라 하면

$f(0)=8$이므로 $\quad -4ak=8$

$\therefore ak=-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(x)=k(x-2)^2+2k(x-a)(x-2)$이고, $f'(0)=0$이므로

$4k+4ak=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4k-8=0 \qquad \therefore k=2$

$k=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad a=-1$

따라서 $f(x)=2(x+1)(x-2)^2$이므로

$f(1)=2\cdot2\cdot1=4$

답 ②

364 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2-b$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=4x^3+3ax^2+2bx\\&=x(4x^2+3ax+2b)\end{aligned}$$

방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$를 가지므로 이차방정식 $4x^2+3ax+2b=0$은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이차방정식 $4x^2+3ax+2b=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 $\frac{b}{2}<0$이므로 두 근의 부호가 서로 다르다.

이때 $\alpha<\beta<\gamma$이므로

$\alpha<0,\ \beta=0,\ \gamma>0$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	0	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	$-b$	↘	극소	↗

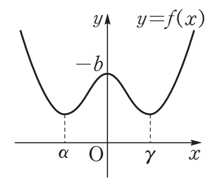
ㄱ. $f(\alpha)<-b,\ f(\gamma)<-b$이므로

일품 BOX: $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $-b$를 갖고, $x=\alpha$, $x=\gamma$에서 극솟값 $f(\alpha)$, $f(\gamma)$를 가지므로 $f(\alpha)<-b$, $f(\gamma)<-b$

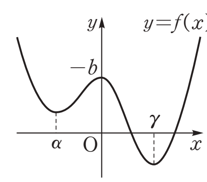
$f(\alpha)+f(\gamma)<-2b$

$$\therefore \frac{f(\alpha)+f(\gamma)}{2}<-b$$

ㄴ. [반례] $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으면 $f(\alpha)f(\gamma)>0$이지만 방정식 $f(x)=0$은 실근을 갖지 않는다.



ㄷ. $f(\alpha)>0$이고 $f(\gamma)<0$이면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 양의 실근과 두 허근을 갖는다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

365 $f(x)=x^3-3x^2+n$이라 하면

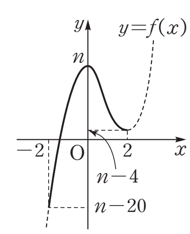
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$n-20$	↗	n	↘	$n-4$

따라서 $-2\le x\le2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$의 최댓값은 n, 최솟값은 $n-20$이다.



$|f(x)|<15$에서

$-15<f(x)<15$이므로

$-15<n-20,\ n<15$

따라서 $5<n<15$이므로 자연수 n의 값은 6, 7, 8, $\cdots$, 14의 9개이다.

답 ④

366 ㄱ. $0<t<b$에서 $h(t)>0$이므로

$f(t)-g(t)>0 \qquad \therefore f(t)>g(t)$

따라서 점 P가 점 Q보다 앞서 있으므로 점 Q는 점 P를 추월하지 못한다.

ㄴ. $b<t<c$에서 $h'(t)<0$이므로

$f'(t)<g'(t)$

$c<t<d$에서 $h'(t)>0$이므로

$f'(t)>g'(t)$

따라서 $c<t<d$에서 점 P의 속도가 점 Q의 속도보다 빠르다.

ㄷ. $a<t<b$에서 점 P가 일정한 속도로 움직이면 $f'(t)=k$ (k는 양수)로 놓을 수 있다.

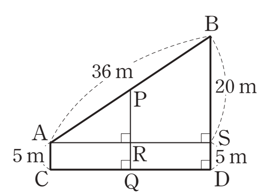
$\therefore h'(t)=f'(t)-g'(t)=k-g'(t)$

이때 $a<t<b$에서 $h'(t)$는 상수함수가 아니므로 $g'(t)$도 상수함수가 아니다.

즉 점 P의 속도가 일정하면 점 Q의 속도는 일정하지 않다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

367 오른쪽 그림에서



열차의 위치를 P라 하면

$\overline{AP}:\overline{PR}=\overline{AB}:\overline{BS}$

$(12t-t^2):\overline{PR}$

$=36:20$

$\therefore \overline{PR}=\frac{5}{9}(12t-t^2)$

출발한 지 t초 후의 열차의 지면으로부터의 높이를 h m라 하면

$h=\overline{PQ}=\overline{PR}+\overline{RQ}$

$=\frac{5}{9}(12t-t^2)+5=-\frac{5}{9}t^2+\frac{20}{3}t+5$

양변을 t에 대하여 미분하면

$\frac{dh}{dt}=\frac{10}{9}(6-t)$

$t=4$일 때의 열차의 지면으로부터의 높이의 변화율은

$\frac{10}{9}\cdot 2=\frac{20}{9}$(m/s)

따라서 $p=9$, $q=20$이므로

$p+q=29$ 답 29

1등급 완성하기 ▶ 본책 74쪽

368 x의 값이 α에서 β까지 변할 때의 평균변화율 m은

$m=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

$=\frac{(4\beta^2+k\beta+10)-(4\alpha^2+k\alpha+10)}{\beta-\alpha}$

$=\frac{4(\beta^2-\alpha^2)+k(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}$

$=4(\beta+\alpha)+k=8+k$

(가)에 의하여 $\alpha+\beta=2$

$f'(x)=8x+k$이므로

$n=\frac{f'(\alpha)+f'(\beta)}{2}$

$=\frac{(8\alpha+k)+(8\beta+k)}{2}$

$=4(\alpha+\beta)+k=8+k$

일품 BOX

두 수 a, b에 대하여

① 산술평균 ➡ $\frac{a+b}{2}$

② 기하평균 ➡ $\sqrt{ab}$ $(a>0,\ b>0)$

③ 조화평균 ➡ $\frac{2ab}{a+b}$

(나)에 의하여

$8+k=2(8+k)+1 \qquad \therefore k=-9$

$f(x)=4x^2-9x+10$이므로

$f(2)=16-18+10=8$ 답 8

369 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$

$=2f'(a)$

즉 $2f'(a)=6$이므로 $f'(a)=3$

$f(x)=x^3+kx^2-6x+3$에서 $f'(x)=3x^2+2kx-6$이므로

$f'(a)=3a^2+2ka-6=3$

$\therefore 3a^2+2ka-9=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 a의 값의 합은 $-\frac{2k}{3}$

즉 $-\frac{2k}{3}=-3$이므로 $k=\frac{9}{2}$

답 $\frac{9}{2}$

370 해결 과정 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉 $f(1)=\lim_{x\to 1-}f(x)$이므로

$1-4+a=b+3$

$\therefore a=b+6$ …… ㉠ ● 30%

$f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{x^2-4x+a-(a-3)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+}(x-3)=-2$

$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{bx+3-(a-3)}{x-1}$

㉠에서 $a=b+6$이므로 $a-3=b+3$

$=\lim_{x\to 1-}\frac{bx+3-(b+3)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1-}\frac{b(x-1)}{x-1}=b$

에서 $b=-2$ ● 50%

답 구하기 $b=-2$를 ㉠에 대입하면 $a=4$

$\therefore a+b=2$ ● 20%

답 2

다른 풀이 $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+a & (x\ge 1) \\ bx+3 & (x<1) \end{cases}$에서

$f'(x)=\begin{cases} 2x-4 & (x>1) \\ b & (x<1) \end{cases}$

$f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to 1+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1-} f'(x)$

$\lim\limits_{x\to 1+} (2x-4)=\lim\limits_{x\to 1-} b$

$\therefore b=-2$

$f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=f(1)$

$-2+3=-3+a \quad \therefore a=4$

371 점 $\mathrm{P}(0,\ b)$에서 곡선 $y=f(x)$에 이르는 거리가 최소가 되는 점이 $\mathrm{Q}(a,\ f(a))$이므로 선분 PQ와 곡선 위의 점 Q에서의 접선은 서로 수직이다.

선분 PQ의 기울기는 $\dfrac{f(a)-b}{a}$

점 Q에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이므로

$\dfrac{f(a)-b}{a}\cdot f'(a)=-1$

$\therefore b=f(a)+\dfrac{a}{f'(a)}$

$b\to 0$일 때 $a\to 0$이므로

$$\lim_{b\to 0}\frac{a}{b}=\lim_{a\to 0}\frac{a}{f(a)+\dfrac{a}{f'(a)}}$$

$$=\lim_{a\to 0}\frac{1}{\dfrac{f(a)}{a}+\dfrac{1}{f'(a)}}$$

$f(x)=x^2+3x$에서 $f(0)=0$이므로

$\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{f(a)}{a}=\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{f(a)-f(0)}{a}=f'(0)$

$f'(x)=2x+3$이므로 $f'(0)=3$

$$\therefore \lim_{a\to 0}\left\{\frac{f(a)}{a}+\frac{1}{f'(a)}\right\}=f'(0)+\frac{1}{f'(0)}$$

$$=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$$

$\therefore \lim\limits_{b\to 0}\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{10}$

답 ④

372 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$라 하면

$f'(x)=2ax+b$이므로 주어진 등식에 대입하면

$3(2ax+b)^2-x(2ax+b)$

$=10(ax^2+bx+c)-4x-2$

$(12a^2-2a)x^2+(12ab-b)x+3b^2$

$=10ax^2+(10b-4)x+(10c-2)$

위의 등식은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$12a^2-2a=10a,\ 12ab-b=10b-4,$

$3b^2=10c-2$

세 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-4,\ c=5$

따라서 $f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$이므로 $f(x)$의 최솟값은 $f(2)=1$이다.

답 ③

373 $f(x)$의 최고차항을 $ax^m\ (a\neq 0)$이라 하면 $f'(x)$의 최고차항은 max^{m-1}이므로 $(x^n-2)f'(x)$의 최고차항은 max^{n+m-1}이다.

$(x^n-2)f'(x)=f(x)$에서 양변의 최고차항을 비교하면

$max^{n+m-1}=ax^m$

$ma=a,\ n+m-1=m$

$\therefore m=1,\ n=1$

따라서 $f(x)$는 일차함수이므로 $f(x)=ax+b(a\neq 0)$로 놓을 수 있다.

$f'(x)=a$이므로 $(x-2)\cdot a=ax+b$

$\therefore b=-2a$ …… ㉠

$f(4)=3$에서 $4a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{3}{2},\ b=-3$

따라서 $f(x)=\dfrac{3}{2}x-3$이므로

$f(2)=0$

답 0

374 $g(x)=ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f(x)=(x-1)^2(x^2+3x)+ax+b$

$f'(x)=2(x-1)(x^2+3x)+(x-1)^2(2x+3)+a$

$f(1)=-2,\ f'(0)=5$이므로

$a+b=-2,\ 3+a=5$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-4$

따라서 $g(x)=2x-4$이므로

$g(2)=0$

답 ③

375 $f(x)=(2x-a)(2x-b)(2x-c)$에서

$f'(x)=2(2x-b)(2x-c)+2(2x-a)(2x-c)$
$+2(2x-a)(2x-b)$

$$\therefore \frac{a^2}{f'\left(\frac{a}{2}\right)}+\frac{b^2}{f'\left(\frac{b}{2}\right)}+\frac{c^2}{f'\left(\frac{c}{2}\right)}$$

$$=\frac{a^2}{2(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{2(b-a)(b-c)}$$

$$+\frac{c^2}{2(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)}{2(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)}{2(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{a^2-a(b+c)+bc}{2(a-b)(a-c)}$$

$$=\frac{(a-b)(a-c)}{2(a-b)(a-c)}=\frac{1}{2}$$

답 $\dfrac{1}{2}$

일품 BOX

$12a^2-2a=10a$에서
$12a^2-12a=0$
$12a(a-1)=0$
$\therefore a=1\ (\because a\neq 0)$
$12ab-b=10b-4$에서
$12b-b=10b-4$
$\therefore b=-4$
$3b^2=10c-2$에서
$48=10c-2$
$\therefore c=5$

$(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지 $g(x)$는 일차 이하의 다항식이다.

$f'\left(\frac{a}{2}\right)$
$=2(a-b)(a-c)$
$+2(a-a)(a-c)$
$+2(a-a)(a-b)$
$=2(a-b)(a-c)$
마찬가지로
$f'\left(\frac{b}{2}\right)$
$=2(b-a)(b-c)$
$f'\left(\frac{c}{2}\right)$
$=2(c-a)(c-b)$

ax^2+bx+c
$=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면
$a=a',\ b=b',\ c=c'$

다항함수의 미분법 Ⅲ

376 주어진 등식에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+1$

$\therefore f(0)=-1$

$f'(0)=2$이므로

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}=2$$

$f'(3)=14$이므로

$$f'(3)=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(3)+f(h)+3kh+1-f(3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}+3k$$
$$=2+3k$$

즉 $2+3k=14$이므로

$k=4$

답 4

377 점 $(a,\ a)$가 직선 $y=-2x+3$ 위의 점이므로

$a=-2a+3 \qquad \therefore a=1$

$\therefore f(1)=1,\ f'(1)=-2$

$g(x)=x^3f(x)$라 하면 $\qquad g(1)=f(1)=1$

$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$이므로

$g'(1)=3f(1)+f'(1)=3-2=1$

$g(1)=1,\ g'(1)=1$이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 방정식은

$y-1=x-1$, 즉 $y=x$

답 $y=x$

378 해결 과정 $f(x)=x^2$이라 하면 $\qquad f'(x)=2x$

점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$에서의 접선의 기울기는 $\qquad f'\left(\frac{1}{2}\right)=1$

따라서 점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$을 지나고 접선에 수직인 직선의 방정식은

$y-\frac{1}{4}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)$, 즉 $y=-x+\frac{3}{4}$ ● 30%

$g(x)=-x^4+3x+a$라 하면

$g'(x)=-4x^3+3$

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=-x+\frac{3}{4}$의 접점의 좌표를 $\left(t,\ -t+\frac{3}{4}\right)$이라 하면

$g'(t)=-4t^3+3=-1$

$t^3=1 \qquad \therefore t=1$ ● 40%

답 구하기 접점의 좌표가 $\left(1,\ -\frac{1}{4}\right)$이므로

$g(1)=-\frac{1}{4}, \qquad 2+a=-\frac{1}{4}$

$\therefore a=-\frac{9}{4}$ ● 30%

답 $-\frac{9}{4}$

일품 BOX

• $f(a)=a$이므로 $f(1)=1$
$x=1$에서의 접선의 기울기가 -2이므로 $f'(1)=-2$

• 접선의 기울기가 1이므로 접선에 수직인 직선의 기울기는 -1이다.

379 $f(x)=x^3-3x^2+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-6x$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3-3a^2+1)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2-6a$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^3-3a^2+1)=(3a^2-6a)(x-a)$

$\therefore y=(3a^2-6a)x-2a^3+3a^2+1$

접선이 곡선과 접점 이외의 점에서는 만나지 않으므로 방정식 $x^3-3x^2+1=(3a^2-6a)x-2a^3+3a^2+1$이 하나의 실근을 가져야 한다.

$x^3-3x^2-(3a^2-6a)x+2a^3-3a^2=0$에서

$(x-a)^2(x+2a-3)=0$

$\therefore x=a$ 또는 $x=-2a+3$

즉 $-2a+3=a$이므로 $\qquad a=1$

따라서 접선의 방정식이 $y=-3x+2$이므로 접선의 y절편은 2이다.

$\therefore \mathrm{P}(0,\ 2)$

답 ②

380 $f(x)=x^2+3x-1$이라 하면

$f'(x)=2x+3$

접점의 좌표를 $(a,\ a^2+3a-1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 5이므로

$f'(a)=2a+3=5 \qquad \therefore a=1$

따라서 접점의 좌표가 $(1,\ 3)$이므로 접선의 방정식은

$y-3=5(x-1)$, 즉 $y=5x-2$

$y=0$을 대입하면 $\qquad 0=5x-2 \qquad \therefore x=\frac{2}{5}$

따라서 직선의 x절편은 $\frac{2}{5}$이다.

답 ④

381 문제 이해 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+\frac{4}{3}$라 하면

$f'(x)=x^2-4x$ ● 20%

해결 과정 접점의 좌표를 $\left(a,\ \frac{1}{3}a^3-2a^2+\frac{4}{3}\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=a^2-4a=(a-2)^2-4$

이므로 접선의 기울기는 $a=2$일 때, 최솟값 -4를 갖는다. ● 50%

답 구하기 따라서 구하는 접선은 점 $(2,\ -4)$를 지나고 기울기가 -4이므로 직선의 방정식은

$y+4=-4(x-2)$, 즉 $y=-4x+4$ ● 30%

답 $y=-4x+4$

382 $f(x)=x^2$이라 하면

$f'(x)=2x$

점 P의 좌표를 $(p,\ p^2)$이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(p)=2p$이므로 접선의 방정식은

$y-p^2=2p(x-p)$, 즉 $y=2px-p^2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

한편 $g(x)=x^2-2ax+2a^2$이라 하면

$g'(x)=2x-2a$

점 Q의 좌표를 $(q,\ q^2-2aq+2a^2)$이라 하면 점 Q에서의 접선의 기울기는 $g'(q)=2q-2a$이므로 접선의 방정식은

$$y-(q^2-2aq+2a^2)=2(q-a)(x-q)$$

$$\therefore y=2(q-a)x+2a^2-q^2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

이때 직선 ㉠, ㉡이 일치하므로

$$2p=2(q-a),\ -p^2=2a^2-q^2$$

$$\therefore p=\frac{1}{2}a,\ q=\frac{3}{2}a$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{a}{2},\ \frac{a^2}{4}\right),\ \mathrm{Q}\left(\frac{3}{2}a,\ \frac{5}{4}a^2\right)$$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}$에서 $\overline{\mathrm{PQ}}^2=2$

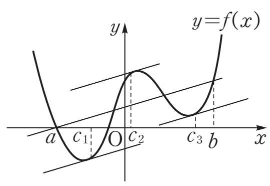
$$\left(\frac{3}{2}a-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{4}a^2-\frac{a^2}{4}\right)^2=2$$

$$a^4+a^2-2=0,\quad (a^2+2)(a+1)(a-1)=0$$

$$\therefore a=1\ (\because a>0)$$

답 1

383 주어진 등식을 만족시키는 상수 c는 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 잇는 직선과 기울기가 같은 접선의 접점의 x좌표이다.



따라서 오른쪽 그림과 같이 상수 c의 값은 $c_1,\ c_2,\ c_3$의 3개이다.

답 3

384 평균값 정리에 의하여 임의의 실수 $x_1,\ x_2$ $(x_1<x_2)$에 대하여 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$인 c가 구간 $(x_1,\ x_2)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄱ. [반례] 두 점 $(0,\ 0)$, $(2,\ 4)$를 잇는 직선의 기울기는 2이다.

ㄴ. $f'(x)=1-3x^2\le 1$이므로
임의의 실수 $x_1,\ x_2\ (x_1<x_2)$에 대하여
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)\le 1,\ 즉\ m\le 1$$

ㄷ. $f'(x)=-3x^2+6x-3=-3(x-1)^2\le 0$이므로
임의의 실수 $x_1,\ x_2\ (x_1<x_2)$에 대하여
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)\le 0,\ 즉\ m\le 0\le 1$$

이상에서 $m\le 1$을 만족시키는 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

385 $f(x)=x^3+kx^2+6x$에서

$$f'(x)=3x^2+2kx+6$$

함수 $f(x)$가 감소하는 구간이 $(\alpha,\ \alpha+1)$이므로 부등식 $f'(x)<0$, 즉 $3x^2+2kx+6<0$의 해가 $\alpha<x<\alpha+1$이다.

따라서 이차방정식 $3x^2+2kx+6=0$의 두 근이 α, $\alpha+1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

일품 BOX

$\alpha(\alpha+1)=2$에서
$\alpha^2+\alpha-2=0$
$(\alpha+2)(\alpha-1)=0$
$\therefore \alpha=-2$ 또는 $\alpha=1$
$k=-\frac{3}{2}(2\alpha+1)$이므로
$k=\frac{9}{2}\ (\because k>0)$

$p=q-a$이므로
$-(q-a)^2=2a^2-q^2$
$3a^2=2aq$
$\therefore q=\frac{3}{2}a\ (\because a\neq 0)$
$\therefore p=\frac{3}{2}a-a=\frac{1}{2}a$

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하므로 임의의 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 평균값 정리를 이용할 수 있다.

모든 실수 x에 대하여 $x^2\ge 0$이므로
$1-3x^2\le 1$

$$\alpha+(\alpha+1)=-\frac{2k}{3},\ \alpha(\alpha+1)=2$$

두 식을 연립하여 풀면

$$\alpha=-2,\ k=\frac{9}{2}\ 또는\ \alpha=1,\ k=-\frac{9}{2}$$

$$\therefore k=\frac{9}{2}\ (\because k>0)$$

답 $\frac{9}{2}$

386 문제 이해 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,\ b,\ c,\ d$는 상수$)$로 놓으면

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$$

조건 (가)에서 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이고, 조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극솟값 3을 가지므로 $x=0$에서도 극솟값 3을 갖는다. 또한 $x=2$에서 극댓값을 갖는다. ● 40%

해결 과정 $f'(x)=0$의 세 실근이 0, 2, 4이므로

$$f'(x)=4x(x-2)(x-4)$$
$$=4x^3-24x^2+32x$$

즉 $3a=-24,\ 2b=32,\ c=0$이므로

$$a=-8,\ b=16,\ c=0$$

$f(4)=3$이고 $f(4)=f(0)$이므로 $f(0)=3$에서

$$d=3$$

$$\therefore f(x)=x^4-8x^3+16x^2+3$$ ● 40%

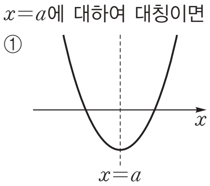
답 구하기 따라서 $f(x)$의 극댓값은

$$f(2)=16-64+64+3=19$$ ● 20%

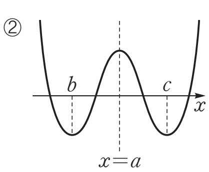
답 19

1등급 비밀노트

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=a$에 대하여 대칭이면



① $x=a$에서 극솟값만을 갖는다.



② $x=a$에서 극댓값을 갖고, $x=b$와 $x=c$에서 극솟값을 갖는다.

387 $f(x)=x^3-6x^2+k$에서

$$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $x=4$에서 극솟값을 갖는다.

$y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=3$과 접하려면 $f(x)$의 극댓값 또는 극솟값이 3이어야 한다.

(i) 극댓값이 3인 경우

$f(0)=3$에서 $k=3$

(ii) 극솟값이 3인 경우

$f(4)=3$에서 $\quad 64-96+k=3$

$\therefore k=35$

(i), (ii)에서 $\quad k=3$ 또는 $k=35$

따라서 k의 값의 합은

$3+35=38$

답 ③

388 주어진 그래프에서 $f'(x)=0$의 해는

$x=a$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	a	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ②이다.

답 ②

$f(x)$는 구간 $(-\infty, 0)$에서 감소하고, 구간 $(0, \infty)$에서 증가한다.

참고 보기의 그래프가 $y=f(x)$의 그래프가 될 수 없는 이유는 다음과 같다.

① $f'(a)$의 값이 존재하므로 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이어야 한다.

③ $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=a$에서 극값을 갖지 않아야 한다.

④ $f'(0)$의 값이 존재하므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능해야 한다.

⑤ $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 가져야 한다.

389 점 P의 좌표를 $(t, \ -t^2+3t)$라 하면 점 H의 좌표는 $(t, \ 0)$이다.

$-x^2+3x=0$에서 $\quad -x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

$\therefore 0<t<3$

삼각형 POH의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}t(-t^2+3t)=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t^2$

$\therefore S'(t)=-\frac{3}{2}t^2+3t=-\frac{3}{2}t(t-2)$

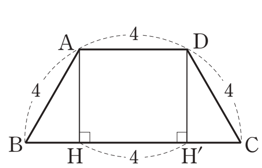
$S'(t)=0$에서 $\quad t=2 \ (\because \ 0<t<3)$

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 $S(t)$는 $t=2$일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 점 H의 x좌표는 2이다.

답 ④

390 문제 이해 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A, D에서 변 BC에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면



$\overline{HH'}=4, \ \overline{BH}=\overline{CH'}$

일품 BOX

$\overline{BC}>0$이므로

$x>0 \quad \cdots$ ㉠

$\overline{BH}<4, \ \overline{HH'}=4,$

$\overline{H'C}<4$이므로

$\overline{BC}<4+4+4$에서

$2x<12$

$\therefore x<6 \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$0<x<6$

$\overline{BC}=2x \ (0<x<6)$라 하면

$\overline{BH}=\frac{1}{2}(2x-4)=x-2$

$\therefore \overline{AH}=\sqrt{4^2-(x-2)^2}=\sqrt{12+4x-x^2}$

따라서 사다리꼴 ABCD의 넓이는

$S=\frac{1}{2}(2x+4)\sqrt{12+4x-x^2}$

$=(x+2)\sqrt{12+4x-x^2}$

$\therefore S^2=(x+2)^2(12+4x-x^2)$ ● 40%

해결 과정 $f(x)=(x+2)^2(12+4x-x^2)$이라 하면

$f'(x)=2(x+2)(12+4x-x^2)+(x+2)^2(4-2x)$

$=-4(x+2)(x^2-2x-8)$

$=-4(x+2)^2(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=4 \ (\because 0<x<6)$

x	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$	(6)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

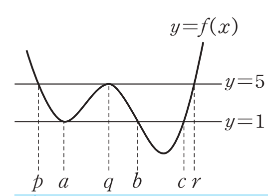
따라서 $f(x)$는 $x=4$에서 극대이면서 최대이다. ● 50%

답 구하기 따라서 S^2의 최댓값은

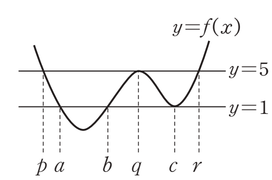
$f(4)=6^2\cdot 12=432$ ● 10%

답 432

391 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



[그림 1]



[그림 2]

최고차항의 계수가 양수인 사차식 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=k$ (k는 상수)가 서로 다른 세 실근을 가지면 k는 함수 $f(x)$의 극값이다.

ㄱ. [그림 1], [그림 2]에서 $\quad f'(q)=0$

ㄴ. $f'(a)=0$, 즉 [그림 1]에서 $f'(b)<0, \ f'(r)>0$이므로

$f'(b)f'(r)<0$

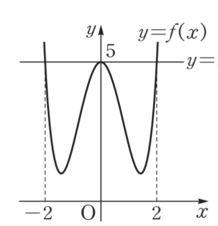
ㄷ. $f'(c)=0$, 즉 [그림 2]에서

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<f(a)=1$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

392 $f(-x)=f(x)$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로



$f(x)=x^4+ax^2+b$

(a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

또 방정식 $f(x)=5$가 서로 다른 세 실근을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같다.

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

① $f(-x)=f(x)$

➡ $f(x)$는 우함수

② $f(-x)=-f(x)$

➡ $f(x)$는 기함수

방정식 $f(x)=5$의 한 근이 -2이므로 나머지 두 근은 $0,\ 2$이다.

즉 $f(0)=5,\ f(2)=5$이므로

$b=5,\ 16+4a+b=5$

$\therefore a=-4,\ b=5$

따라서 $f(x)=x^4-4x^2+5$이므로

$f'(x)=4x^3-8x=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$에서

$x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

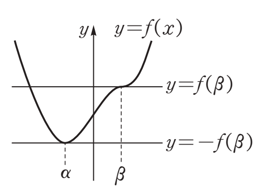
x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$에서 극솟값을 가지므로

$f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^4-4(\sqrt{2})^2+5=1$

답 ④

393 사차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $|f(x)|=f(\beta)$에서

$f(x)=f(\beta)$ 또는

$f(x)=-f(\beta)$

방정식 $f(x)=f(\beta)$의 서로 다른 실근이 2개이므로 방정식 $f(x)=-f(\beta)$의 서로 다른 실근은 1개이다.

즉 $-f(\beta)$가 극솟값이므로

$f(\alpha)=-f(\beta)$ …… ㉠

조건 (나)에 의하여

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{1}{2}f(\beta)$$

$$f(\beta)-f(\alpha)=\frac{1}{2}f(\beta)(\beta-\alpha)$$

㉠을 위의 등식에 대입하면

$$2f(\beta)=\frac{1}{2}f(\beta)(\beta-\alpha)$$

이때 $f(\beta)>0$이므로 $\beta-\alpha=4$

답 4

394 $f(x)=x^3-3abx+a^3+b^3\ (x>0)$으로 놓으면

$f'(x)=3(x^2-ab)=3(x+\sqrt{ab})(x-\sqrt{ab})$

$f'(x)=0$에서 $x=\sqrt{ab}\ (\because x>0)$

따라서 $f(x)$는 $x=\boxed{\sqrt{ab}}$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(\sqrt{ab})=a^3-2ab\sqrt{ab}+b^3=\boxed{(\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3})^2}$

이때 $(\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3})^2\geq 0$이므로 양수 c에 대하여

$f(c)=a^3+b^3+c^3-3abc\geq 0$

$$\therefore \frac{a^3+b^3+c^3}{3}\geq abc$$

$\therefore$ (가) $\sqrt{ab}$ (나) $(\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3})^2$

답 ②

일품 BOX

부등식 $F(x)\geq 0$이 성립하려면
$(F(x)$의 최솟값$)\geq 0$
이어야 한다.

$f(x)$가 우함수이므로
$f(\sqrt{2})=f(-\sqrt{2})$

$f(\beta)=0$이면 방정식 $f(x)=f(\beta)=0$이 서로 다른 세 실근을 가질 수 없으므로
$f(\beta)>0$

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$의 그래프에서
$x'(a)=0$이면
➡ $t=a$에서 정지하거나 운동 방향을 바꾼다.

양변을 $f(\beta)$로 나누면
$2=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$
$\therefore \beta-\alpha=4$

$f'(\sqrt{ab})=0$이고 $x=\sqrt{ab}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=\sqrt{ab}$에서 극솟값을 갖는다.

$\overline{AB}=4t$이므로 $\triangle ABC$가 정삼각형이 되는 순간의 높이는
$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4t=2\sqrt{3}t$

395 문제 이해 $F(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$F(x)=2x^3-x^2-x+1-(2x^2-x+a)$

$=2x^3-3x^2+1-a$

$\therefore F'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$ ● 30%

해결 과정 $F'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(x)$		$-$	0	$+$
$F(x)$	$1-a$	↘	$-a$	↗

따라서 $F(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 $x\geq 0$에서 부등식 $F(x)\geq 0$이 성립하려면

$F(1)=-a\geq 0$ $\therefore a\leq 0$ ● 50%

답 구하기 따라서 a의 최댓값은 0이다. ● 20%

답 0

396 ㄱ. 주어진 그래프에서 $t=1$일 때의 접선의 기울기가 0이므로 출발한 지 1초 후의 점 P의 속력은 0이다.

ㄴ. 출발할 때의 점 P의 속도는 양수이고, 주어진 그래프에서

$0<t<1,\ 2<t<3,\ 5<t<6$

일 때, 접선의 기울기가 양수이므로 출발할 때와 같은 방향으로 움직인 총 시간은 3초이다.

ㄷ. $t=4$일 때의 접선의 기울기가 음수이므로 $t=4$일 때 점 P의 운동 방향은 바뀌지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

397 t초 후의 정육면체의 한 모서리의 길이는 $(2+t)$cm이므로 t초 후의 정육면체의 부피를 $V(t)\text{cm}^3$라 하면

$V(t)=(2+t)^3=t^3+6t^2+12t+8$

$\therefore V'(t)=3t^2+12t+12=3(t+2)^2$

따라서 $t=1$일 때의 정육면체의 부피의 변화율은

$V'(1)=27(\text{cm}^3/\text{s})$

답 ④

398 문제 이해 시각 t일 때, 점 P의 좌표는 $(6t,\ 0)$이고, 두 점 A, B의 좌표는 각각 $A(t,\ 0)$, $B(5t,\ 0)$이다.

$f(x)=-2x(x-6t)=-2(x-3t)^2+18t^2$이므로

$C(3t,\ 18t^2)$ ● 30%

해결 과정 삼각형 ABC의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot 4t\cdot 18t^2=36t^3$$

$\therefore S'(t)=108t^2$ ● 20%

한편 삼각형 ABC가 정삼각형일 때 높이는 $2\sqrt{3}t$이므로

$2\sqrt{3}t=18t^2$ $\qquad \therefore t=\frac{\sqrt{3}}{9}$ $(\because t>0)$ ● 30%

답 구하기 따라서 삼각형 ABC가 정삼각형이 되는 순간의 삼각형 ABC의 넓이의 변화율은

$S'\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)=108\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^2=108\cdot\frac{1}{27}=4$ ● 20%

답 4

399 전략 함수 $f(x)$의 연속성과 미분가능성을 이용하여 $g(0)$, $g'(0)$, $g(1)$, $g'(1)$의 값을 구한다.

Step 1 함수 $g(x)$가 다항함수이므로 $g'(x)$가 존재하고 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$가 성립한다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)=f(0)$

$\lim_{x\to 0+} g(x)=0 \qquad \therefore g(0)=0$ ...... ㉠

또 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)$

$1=\lim_{x\to 1-} g(x) \qquad \therefore g(1)=1$ ...... ㉡

Step 2 $f'(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ g'(x) & (0<x<1) \\ 0 & (x>1)\end{cases}$ 이고 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능해야 하므로

$\lim_{x\to 0+} f'(x)=\lim_{x\to 0-} f'(x)$

$\lim_{x\to 0+} g'(x)=0 \qquad \therefore g'(0)=0$ ...... ㉢

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능해야 하므로

$\lim_{x\to 1+} f'(x)=\lim_{x\to 1-} f'(x)$

$0=\lim_{x\to 1-} g'(x) \qquad \therefore g'(1)=0$ ...... ㉣

Step 3 ㉠, ㉢에서 함수 $g(x)$는 x^2으로 나누어떨어지므로 $g_1(x)=x^2(ax+b)$로 놓으면 ㉡에서

$a+b=1$ ...... ㉤

$g_1'(x)=2x(ax+b)+x^2\cdot a=3ax^2+2bx$이므로 ㉣에서

$g_1'(1)=3a+2b=0$ ...... ㉥

㉤, ㉥을 연립하여 풀면 $\quad a=-2,\ b=3$

따라서 $g_1(x)=x^2(-2x+3)$이므로

$g_1(2)=-4$

답 -4

1등급 비밀노트

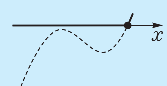
$f(x)\neq0$인 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$을 인수로 갖는다.
따라서 $f(x)=(x-\alpha)^2g(x)$ 꼴로 놓을 수 있다.

400 전략 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 부호에 따라 $g(x)$의 그래프의 개형을 그려서 미분가능성을 알아본다.

일품 BOX

다항함수는 연속함수이다.

$f(x)$의 극댓값이 $n+5>0$이므로 다음 그림과 같은 경우는 고려하지 않는다.



$g'(x)$도 다항함수이므로
$\lim_{x\to a} g'(x)=g'(a)$

$g_1(x)=ax^2$으로 놓으면 $g_1(1)=1$에서 $\quad a=1$
이때 $g_1'(x)=2x$이고, $g_1'(1)=2$가 되어 ㉣을 만족시키지 않는다.

등차중항
세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때
➡ $b=\frac{a+c}{2}$

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 경우
① $x=a$에서 불연속
② $x=a$에서 $y=f(x)$의 그래프가 꺾임

Step 1 $f(x)=x^3-3x^2-9x+n$에서

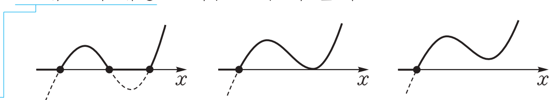
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$n+5$	↘	$n-27$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $n+5$를 갖고, $x=3$에서 극솟값 $n-27$을 갖는다.

Step 2 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq0) \\ 0 & (f(x)<0)\end{cases}$이므로 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

이때 $g(x)$가 미분가능하지 않은 점이 한 개이려면 [그림 2] 또는 [그림 3]과 같으므로 (극솟값)≥0이어야 한다.

Step 3 즉 $f(3)=n-27\geq0$이어야 하므로

$n\geq27$

따라서 자연수 n의 최솟값은 27이다.

답 ④

401 전략 주어진 조건을 이용하여 상수 k의 값을 먼저 구하고, 점 P의 좌표를 $(t,\ 0)$이라 할 때 사각형 OPQC의 넓이를 t에 대한 식으로 나타낸다.

Step 1 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(2)=0$

$f'(x)=3x^2+2kx$에서

$f'(2)=12+4k=0 \qquad \therefore k=-3$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2+5$

Step 2 점 P의 좌표를 $(t,\ 0)$이라 하면

$Q(t,\ t^3-3t^2+5)$

따라서 □OPQC의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}t(t^3-3t^2+5+5)$

$=\frac{1}{2}t^4-\frac{3}{2}t^3+5t$

$\therefore S'(t)=2t^3-\frac{9}{2}t^2+5$

Step 3 이때 $\overline{OC}=5$, $\overline{AB}=f(2)=1$이고, $\overline{OC}$, $\overline{PQ}$, $\overline{AB}$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\overline{PQ}=\frac{5+1}{2}=3$

즉 $\overline{PQ}=f(t)=3$이므로

$t^3-3t^2+5=3, \qquad t^3-3t^2+2=0$

$(t-1)(t^2-2t-2)=0 \qquad \therefore t=1\ (\because 0<t<2)$

Step 4 따라서 $\overline{OC}$, $\overline{PQ}$, $\overline{AB}$가 이 순서대로 등차수열을 이루는 순간의 사각형 OPQC의 넓이의 변화율은

$S'(1)=2-\frac{9}{2}+5=\frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

Ⅳ 다항함수의 적분법

09 부정적분

본책 80쪽

402 $f(x)=(x^3-6x^2+ax+1)'$

$=3x^2-12x+a$

$=3(x-2)^2+a-12$

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $a-12$를 가지므로

$a-12=4 \qquad \therefore a=16$

답 16

403 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int(x-1)f(x)dx=x^3+x-2$이므로

$(x-1)f(x)=x^3+x-2$

$=(x-1)(x^2+x+2)$

따라서 $f(x)=x^2+x+2$이므로

$f(2)=8$

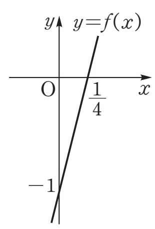
답 8

404 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2-f(x)=3x^2-4x+1$

$\therefore f(x)=4x-1$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 3, 4 사분면을 지난다.



답 ④

405 $f(x)=\displaystyle\int ax^4dx-\int bx^2dx=\frac{a}{5}x^5-\frac{b}{3}x^3+C$

$f(0)=f(1)$이므로 $\quad C=\dfrac{a}{5}-\dfrac{b}{3}+C$

$\dfrac{a}{5}=\dfrac{b}{3} \qquad \therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{5}$

답 $\dfrac{3}{5}$

406 $f(x)=\displaystyle\int(x-2)(x^2+x+1)dx$

$+\displaystyle\int(3x-2)(x^2+x+1)dx$

$=\displaystyle\int\{(x-2)(x^2+x+1)$

$+(3x-2)(x^2+x+1)\}dx$

$=\displaystyle\int\{(x-2)+(3x-2)\}(x^2+x+1)dx$

$=\displaystyle\int 4(x-1)(x^2+x+1)dx$

$=\displaystyle\int(4x^3-4)dx$

$=x^4-4x+C$

$f(0)=3$이므로 $\quad C=3$

따라서 $f(x)=x^4-4x+3$이므로

$f(-1)=8$

답 8

일품 BOX

- 각 부정적분의 적분상수를 하나로 나타낸다.
- $f'(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$가 증가하다가 감소한다.
또 $f'(2)=0$이고 $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$가 감소하다가 증가한다.

407 $\displaystyle\int\frac{x^2}{x-2}dx+\int\frac{3x-10}{x-2}dx$

$=\displaystyle\int\left(\frac{x^2}{x-2}+\frac{3x-10}{x-2}\right)dx$

$=\displaystyle\int\frac{x^2+3x-10}{x-2}dx=\int\frac{(x-2)(x+5)}{x-2}dx$

$=\displaystyle\int(x+5)dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2+5x+C$

답 $\dfrac{1}{2}x^2+5x+C$

408 $f(x)=\displaystyle\int(4ax^3-4x+5)dx$

$=ax^4-2x^2+5x+C$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(0, -1)$, $(1, 4)$를 지나므로 $\quad f(0)=-1$, $f(1)=4$

$C=-1$, $a+C=1 \qquad \therefore C=-1, a=2$

따라서 $f(x)=2x^4-2x^2+5x-1$,

$f'(x)=8x^3-4x+5$이므로

$f'(-1)+f(-1)=1-6=-5$

답 ①

409 $f(x)=\displaystyle\int f'(x)dx=\int(x^2-1)dx$

$=\dfrac{1}{3}x^3-x+C$

이때 $f'(x)=x^2-1=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고, $x=1$에서 극소이므로

$f(-1)=\dfrac{2}{3}+C=\dfrac{7}{3} \qquad \therefore C=\dfrac{5}{3}$

즉 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x+\dfrac{5}{3}$이므로 $f(x)$의 극솟값은

$f(1)=1$

답 1

410 $f'(x)=ax(x-2)\,(a>0)$로 놓으면

$f(x)=\displaystyle\int f'(x)dx=\int ax(x-2)dx$

$=\displaystyle\int(ax^2-2ax)dx=\frac{1}{3}ax^3-ax^2+C$

주어진 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고, $x=2$에서 극소이므로

$f(0)=5$, $f(2)=1$

즉 $C=5$, $-\dfrac{4}{3}a+C=1$이므로

$a=3$, $C=5$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+5$이므로

$f(1)=3$

답 ③

일품 BOX

411 $f(x+y)=f(x)+y^2+axy$에서
$f(x+y)-f(x)=y^2+axy$이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

도함수의 정의

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+axh}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(h+ax)=ax$$
$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int ax\,dx$$
$$=\frac{a}{2}x^2+C$$

이때 $f(-1)=4$, $f(2)=7$이므로
$$\frac{a}{2}+C=4,\ 2a+C=7 \qquad \therefore a=2,\ C=3$$
따라서 $f(x)=x^2+3$이므로
$f(4)=19$

답 ⑤

412 $f(x+y)=f(x)+f(y)-3xy+3$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면
$$f(0)=f(0)+f(0)+3 \qquad \therefore f(0)=-3$$
$f'(0)=1$이므로
$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+3}{h}=1$$
$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-3xh+3-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)+3}{h}-\frac{3xh}{h}\right\}$$
$$=-3x+1$$
$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(-3x+1)dx$$
$$=-\frac{3}{2}x^2+x+C$$
$f(0)=-3$이므로 $\quad C=-3$
$$\therefore f(x)=-\frac{3}{2}x^2+x-3$$

답 $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+x-3$

413 $F(x)=xf(x)-2x^3+x^2+3$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2+2x$$
$$xf'(x)=6x^2-2x$$
$$\therefore f'(x)=6x-2$$
$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x-2)dx$$
$$=3x^2-2x+C$$
$f(1)=3$이므로 $\quad 1+C=3 \qquad \therefore C=2$
즉 $f(x)=3x^2-2x+2$이므로
$f(2)=10$

답 ②

414 $f(x)=\int(4x^2-3x+2)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$$f'(x)=4x^2-3x+2$$
$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}f'(2)$$
$$=\frac{1}{4}\cdot 12=3$$

답 3

415 문제 이해 $f(x)=\int\frac{d}{dx}(x^2+2x)dx$
$$=x^2+2x+C$$
$$=(x+1)^2+C-1$$
● 30%

해결 과정 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=3$에 접하므로 꼭짓점 $(-1,\ C-1)$은 직선 $y=3$ 위에 있다. 즉
$$C-1=3 \qquad \therefore C=4$$
$$\therefore f(x)=x^2+2x+4$$
● 40%

답 구하기 이때 $f(x)=4$에서 $\quad x^2+2x+4=4$
$$x^2+2x=0, \qquad x(x+2)=0$$
$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=0$$
따라서 모든 실근의 합은
$$-2+0=-2$$
● 30%

답 -2

416 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$$f(x)=\int\{g(x)\}^2dx+x\{g(x)\}^2$$

$x\{g(x)\}^2$
$=x\cdot g(x)g(x)$
이므로 x에 대하여 미분하면
$g(x)g(x)$
$+xg'(x)g(x)$
$+xg(x)g'(x)$
$=\{g(x)\}^2$
$+2xg(x)g'(x)$

다시 양변을 x에 대하여 미분하면
$$f'(x)=\{g(x)\}^2+\{g(x)\}^2+2xg(x)g'(x)$$
$$=2g(x)\{g(x)+xg'(x)\}$$
$g(0)=5$이므로
$$f'(0)=2\cdot 5\cdot 5=50$$

답 50

417 ㄱ. $\int 0\,dx=C$

C는 적분상수이므로 항상 0이라 할 수는 없다.

ㄴ. [반례] $f(x)=x$, $g(x)=x+1$이면
$$f'(x)=1,\ g'(x)=1$$
이므로 $f'(x)=g'(x)$이지만 $f(x)\neq g(x)$이다.

ㄷ. $\int f(x)dx=\int g(x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx=\frac{d}{dx}\int g(x)dx$$
$$\therefore f(x)=g(x)$$
이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

일품 BOX

418 $\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2+2x+1$에서

$$f(x)g(x)=\int(3x^2+2x+1)dx$$
$$=x^3+x^2+x+C \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x=1$을 ㉠에 대입하면

$$f(1)g(1)=3+C=0$$
$$\therefore C=-3$$
$$\therefore f(x)g(x)=x^3+x^2+x-3$$
$$=(x-1)(x^2+2x+3)$$

이때 $f(1)=6$, $g(1)=0$이고, $f(x)$, $g(x)$는 상수함수가 아닌 다항함수이므로

$$f(x)=x^2+2x+3,\ g(x)=x-1$$
$$\therefore f(2)-g(2)=11-1=10$$

답 10

> $f(x)=x-1$, $g(x)=x^2+2x+3$이면 $f(1)=0$, $g(1)=6$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

419 $f(x)=\displaystyle\int\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{1}{10}x^{10}\right)dx$

$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2\cdot3}x^3+\frac{1}{3\cdot4}x^4+\cdots+\frac{1}{10\cdot11}x^{11}+C$$

$$\therefore f(1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{10\cdot11}+C$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+C$$
$$=1-\frac{1}{11}+C=\frac{10}{11}+C$$

$f(1)=2$이므로 $\quad \dfrac{10}{11}+C=2 \quad \therefore C=\dfrac{12}{11}$

$$\therefore f(0)=C=\frac{12}{11}$$

답 ⑤

420 $f'(x)=3x(x-a)=3x^2-3ax$에서

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-3ax)dx$$
$$=x^3-\frac{3}{2}ax^2+C$$

한편 $f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=a$

(i) $a>0$일 때

x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고, $x=a$에서 극소이므로

$$f(0)=3,\ f(a)=-1$$
$$C=3,\ -\frac{1}{2}a^3+C=-1$$
$$\therefore a=2,\ C=3$$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+3$이므로

$$f(2)=-1$$

(ii) $a<0$일 때

x	$\cdots$	a	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, $x=0$에서 극소이므로 $\quad f(a)=3,\ f(0)=-1$

$$-\frac{1}{2}a^3+C=3,\ C=-1$$
$$\therefore a=-2,\ C=-1$$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-1$이므로

$$f(2)=19$$

(i), (ii)에서

$$f(2)=-1 \text{ 또는 } f(2)=19$$

답 ⑤

참고 $a=0$이면 $\quad f'(x)=3x^2$
따라서 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗		↗

421 $f'(x)=2x-1$이므로

$$f(x)=\int(2x-1)dx=x^2-x+C$$

$f(1)=2$이므로 $\quad C=2$

> 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은
> $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

즉 $f(x)=x^2-x+2$이므로 점 $(n,\ f(n))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(n)=f'(n)(x-n)$$
$$y-(n^2-n+2)=(2n-1)(x-n)$$
$$\therefore y=(2n-1)x-n^2+2$$

따라서 접선의 y절편은 $-n^2+2$이므로

$$a_n=-n^2+2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-(2n)^2+2}{(n+1)^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-4n^2+2}{n^2+2n+1}$$
$$=-4$$

답 ②

> $$\lim_{n\to\infty}\frac{-4n^2+2}{n^2+2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-4+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{-4+0}{1+0+0}=-4$$

422 $f'(x)=x(x+2)(x-2)=x^3-4x$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^3-4x)dx$$
$$=\frac{1}{4}x^4-2x^2+C$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	−2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

이때 $y=f(x)$의 그래프가 $x=a\ (a\neq0)$인 점에서 x축에 접하므로

$$f(-2)=f(2)=0, \quad -4+C=0 \quad \therefore C=4$$

> 다항함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 평행한 직선과 접하는 접점의 y좌표는 $f(x)$의 극댓값 또는 극솟값이다.
> 이때 $a\neq0$이므로 $f(-2)=f(2)=0$

즉 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+4$이므로

$f(-1)=\frac{9}{4}$, $f(0)=4$, $f(1)=\frac{9}{4}$

따라서 $M=4$, $m=\frac{9}{4}$이므로

$Mm=9$

답 ④

423 해결 과정 (i) $x<0$일 때,

$f'(x)=-x+1$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-x+1)dx$$
$$=-\frac{1}{2}x^2+x+C_1$$

$f(-2)=0$이므로 $-4+C_1=0$ $\therefore C_1=4$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+4$ ● 30%

(ii) $x>0$일 때,

$f'(x)=a(x-2)^2-1$ $(a<0)$로 놓으면

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\{a(x-2)^2-1\}dx$$
$$=\int(ax^2-4ax+4a-1)dx$$
$$=\frac{a}{3}x^3-2ax^2+(4a-1)x+C_2$$

$f(2)=0$이므로 $\frac{8}{3}a-2+C_2=0$

$\therefore C_2=2-\frac{8}{3}a$

$\therefore f(x)=\frac{a}{3}x^3-2ax^2+(4a-1)x+2-\frac{8}{3}a$

● 30%

이때 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$$
$$\lim_{x\to0+}\left\{\frac{a}{3}x^3-2ax^2+(4a-1)x+2-\frac{8}{3}a\right\}$$
$$=\lim_{x\to0-}\left(-\frac{1}{2}x^2+x+4\right)$$

$2-\frac{8}{3}a=4$ $\therefore a=-\frac{3}{4}$ ● 30%

답 구하기 따라서 $x>0$에서

$f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x+4$이므로

$f(4)=-4$ ● 10%

답 -4

424 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 3을 가지므로

$f'(-1)=0$, $f(-1)=3$

$f'(-x)=f'(x)$이므로 $f'(1)=0$

$f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이고

$f'(-1)=0$, $f'(1)=0$이므로

$f'(x)=3(x+1)(x-1)=3x^2-3$

$\therefore f(x)=\int(3x^2-3)dx=x^3-3x+C$

일품 BOX

그래프의 꼭짓점의 좌표가 (p, q)인 이차함수는
$y=a(x-p)^2+q$

곱의 미분법
두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,
$y=f(x)g(x)$
➡ $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.

$f(-1)=3$이므로

$2+C=3$ $\therefore C=1$

따라서 $f(x)=x^3-3x+1$이므로

$f(1)=-1$

답 ③

425 해결 과정 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\therefore f(0)=0$ ● 10%

$f'(0)=2$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=2$$ ● 20%

$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+xh(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}+x^2+xh\right\}$$
$$=x^2+2$$ ● 30%

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2+2)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3+2x+C$$

$f(0)=0$이므로 $C=0$ ● 30%

답 구하기 따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x$이므로

$f(3)=15$ ● 10%

답 15

426 주어진 등식의 양변을 Δx로 나누면

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=(3x^2+4x+3)+(3x+2)\Delta x+(\Delta x)^2$$

$\therefore f'(x)$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\{3x^2+4x+3+(3x+2)\Delta x+(\Delta x)^2\}$$
$$=3x^2+4x+3$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+4x+3)dx$$
$$=x^3+2x^2+3x+C$$

$f(0)=-2$이므로 $C=-2$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2+3x-2$이므로

$f(2)=20$

답 ⑤

427 $(x^3-1)'=3x^2$이므로

$(x^3-1)f'(x)+3x^2f(x)$
$=(x^3-1)f'(x)+(x^3-1)'f(x)$
$=\{(x^3-1)f(x)\}'$

따라서 $\{(x^3-1)f(x)\}'=2x-3$이므로

$(x^3-1)f(x)=\int(2x-3)dx=x^2-3x+C$

앞의 식에 $x=1$을 대입하면 $\quad 0=-2+C$

$\therefore C=2$

따라서 $(x^3-1)f(x)=x^2-3x+2$이므로 $x\neq1$일 때

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
$$=\frac{x-2}{x^2+x+1}$$
$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{x-2}{f(x)}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\frac{x-2}{x^2+x+1}}$$
$$=\lim_{x\to2}(x^2+x+1)$$
$$=7$$

답 7

1등급 비밀노트

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $h(x)=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$이면

$h(x)=\{f(x)g(x)\}'$

$\therefore \int h(x)dx=f(x)g(x)+C$ (C는 적분상수)

428 $f_{n+1}(x)=\int f_n(x)dx$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$f_n(x)=\{f_{n+1}(x)\}'$

$f_{10}(x)=x^{11}+x^9+1$이므로

$f_9(x)=\{f_{10}(x)\}'=11x^{10}+9x^8$

$f_8(x)=\{f_9(x)\}'=11\cdot10x^9+9\cdot8x^7$

$\vdots$

$f_1(x)=\{f_2(x)\}'=11\cdot10\cdot\cdots\cdot3x^2+9\cdot8\cdot\cdots\cdot1$

$f(x)=\{f_1(x)\}'=11\cdot10\cdot\cdots\cdot3\cdot2x$

$$\therefore \frac{f_1(2)}{f(2)}=\frac{11\cdot10\cdot\cdots\cdot3\cdot2^2+9\cdot8\cdot\cdots\cdot1}{11\cdot10\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot2}$$
$$=1+\frac{1}{11\cdot10\cdot2}=\frac{221}{220}$$

답 ④

429 $f_n(x)=\int\left(\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}\right)dx$
$$=\int(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})dx$$
$$=x+x^2+x^3+\cdots+x^n+C$$

$f_n(0)=\frac{1}{2}$이므로 $\quad C=\frac{1}{2}$

따라서 $f_n(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\frac{1}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}f_n\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\right\}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

답 ③

일품 BOX

$(f\circ g)(x)$
$=f(g(x))$
$=f(x-5)$
$=(x-5+4)(x-5-1)$
$=(x-1)(x-6)$

$1+C_3=-\frac{1}{3}+C_2$
$=\frac{4}{3}$
이므로 $\quad C_3=\frac{1}{3}$

첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

430 조건 (가)에서

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$$f(x)g(x)=\int\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}dx$$
$$=\int(3x^2-4x-19)dx$$
$$=x^3-2x^2-19x+C$$

$x=0$을 대입하면

$f(0)g(0)=C \qquad \therefore C=20$

$\therefore f(x)g(x)=x^3-2x^2-19x+20$
$=(x+4)(x-1)(x-5)$

조건 (나)에서 $f(0)=-4$, $g(0)=-5$이므로

$f(x)=(x+4)(x-1)$, $g(x)=x-5$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)}{(f\circ g)(x)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+4)(x-1)(x-5)}{(x-1)(x-6)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+4)(x-5)}{x-6}=4$$

답 4

431 $x>1$일 때, $\quad f(x)=\int(-1)dx=-x+C_1$

$-1<x<1$일 때, $\quad f(x)=\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C_2$

$x<-1$일 때, $\quad f(x)=\int(-1)dx=-x+C_3$

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$, $x=-1$에서 연속이다.

(i) $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$-1+C_1=\frac{1}{3}+C_2=2 \qquad \therefore C_1=3,\ C_2=\frac{5}{3}$

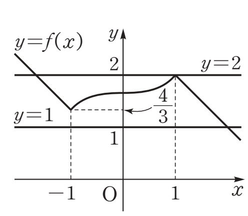
(ii) $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$

$-\frac{1}{3}+C_2=1+C_3 \qquad \therefore C_3=\frac{1}{3}$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}-x+3 & (x\geq1)\\ \frac{1}{3}x^3+\frac{5}{3} & (-1\leq x<1)\\ -x+\frac{1}{3} & (x<-1)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$a_1=1,\ a_2=2$

이고 $n\geq3$일 때,

$a_n=1$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}a_n=1+2+1\cdot8=11$

답 ②

432 $F'(t)=3.6t^2-72t+270$이므로

$$F(t)=\int(3.6t^2-72t+270)dt$$
$$=1.2t^3-36t^2+270t+C$$

$F(0)=100$이므로 $C=100$

$\therefore F(t)=1.2t^3-36t^2+270t+100$

한편 $F'(t)=3.6(t^2-20t+75)=3.6(t-5)(t-15)$이므로

$F'(t)=0$에서 $t=5$ ($\because 0\le t\le 10$)

t	0	$\cdots$	5	$\cdots$	10
$F'(t)$		$+$	0	$-$	
$F(t)$	100	↗	700	↘	400

따라서 $0\le t\le 10$에서 함수 $F(t)$는 $t=5$에서 최댓값 700을 가지므로

$n=5,\ a=700$

$\therefore \frac{a}{n}=\frac{700}{5}=140$ 답 140

433 $\int xf'(x)dx=x^4+2x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf'(x)=4x^3+4x$

$\therefore f'(x)=4x^2+4$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=4x^3+3x^2+5$이므로

$f'(x)+g'(x)=4x^3+3x^2+5$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$g'(x)=4x^3+3x^2+5-(4x^2+4)$
$=4x^3-x^2+1$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x^2+4)dx$
$=\frac{4}{3}x^3+4x+C_1$

$g(x)=\int g'(x)dx=\int(4x^3-x^2+1)dx$
$=x^4-\frac{1}{3}x^3+x+C_2$

이때 $f(x)$를 $x-2$로 나누면 나누어떨어지므로

$f(2)=0,\quad \frac{56}{3}+C_1=0$

$\therefore C_1=-\frac{56}{3}$

$g(x)$를 $x+1$로 나누면 나머지가 $\frac{4}{3}$이므로

$g(-1)=\frac{4}{3},\quad \frac{1}{3}+C_2=\frac{4}{3}$

$\therefore C_2=1$

따라서 $f(x)=\frac{4}{3}x^3+4x-\frac{56}{3}$, $g(x)=x^4-\frac{1}{3}x^3+x+1$이므로 $g(x)-f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$g(1)-f(1)=\frac{8}{3}-\left(-\frac{40}{3}\right)=16$ 답 16

일품 BOX

다항식 $f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.
$\Longleftrightarrow f(\alpha)=0$

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면
$R=f(\alpha)$

10 정적분 본책 85쪽

434 위에서부터 k번째 직육면체의 밑면의 한 변의 길이를 x라 하면

$\frac{k}{n}h : h=x : a \qquad \therefore x=\boxed{\frac{k}{n}a}$

직육면체의 부피의 총합을 V_n이라 하면

$$V_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}a\right)^2\cdot\frac{h}{n}=\frac{a^2h}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$
$$=\frac{a^2h}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$
$$=a^2h\cdot\boxed{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}}$$

따라서 사각뿔의 부피 V는

$$V=\lim_{n\to\infty}V_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{a^2h\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}\right\}$$
$$=\frac{1}{3}a^2h$$

$\therefore$ (가) $\frac{k}{n}a$ (나) $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$ 답 ②

435 구간 $[0,\ 2]$를 n등분하면

$\Delta x=\frac{2-0}{n}=\frac{2}{n},\ x_k=0+k\Delta x=\boxed{\frac{2k}{n}}$

$f(x)=x^2-1$이라 하면 $f(x)$는 구간 $[0,\ 2]$에서 연속이므로

$$\int_0^2(x^2-1)dx$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4k^2}{n^2}-1\right)\cdot\frac{2}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\boxed{\frac{8k^2}{n^3}-\frac{2}{n}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}1\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{8n(n+1)(2n+1)}{6n^3}-\frac{2}{n}\cdot n\right\}$$
$$=\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3}$$

$\therefore$ (가) $\frac{2k}{n}$ (나) $\frac{8k^2}{n^3}-\frac{2}{n}$ 답 ⑤

436 $\int_{-1}^{3}(3x^2+2x)dx-\int_{1}^{3}(3x^2+2x)dx$

$=\int_{-1}^{3}(3x^2+2x)dx+\int_{3}^{1}(3x^2+2x)dx$

$=\int_{-1}^{1}(3x^2+2x)dx$

$=\Big[x^3+x^2\Big]_{-1}^{1}=2$ 답 ⑤

437 $f(x)=f(x+2)$에서 $f(x)$는 주기함수이므로

$\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{1}^{2}f(x)dx$

$\therefore \int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$

$=\int_{1}^{2}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$

$=\int_{0}^{2}f(x)dx$

즉 $\int_{0}^{2}f(x)dx=1$이므로

$\sum_{k=1}^{2016}\int_{k-1}^{k}f(x)dx$

$=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx+\cdots+\int_{2015}^{2016}f(x)dx$

$=\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{4}f(x)dx+\cdots+\int_{2014}^{2016}f(x)dx$

$=1008\int_{0}^{2}f(x)dx=1008$

답 1008

438 $|x-1|=\begin{cases} x-1 & (1\le x\le 2) \\ -x+1 & (-2\le x\le 1)\end{cases}$ 이므로

$\int_{-2}^{2}|x-1|(3x+1)dx$

$=\int_{-2}^{1}(-x+1)(3x+1)dx$

$+\int_{1}^{2}(x-1)(3x+1)dx$

$=\int_{-2}^{1}(-3x^2+2x+1)dx+\int_{1}^{2}(3x^2-2x-1)dx$

$=\Big[-x^3+x^2+x\Big]_{-2}^{1}+\Big[x^3-x^2-x\Big]_{1}^{2}$

$=-9+3=-6$ 답 -6

439 $\int_{-3}^{3}x(x^3+x^2-1)dx+\int_{-3}^{3}y^2(y^3-y^2+1)dy$

$=\int_{-3}^{3}(x^4+x^3-x)dx+\int_{-3}^{3}(x^5-x^4+x^2)dx$

$=\int_{-3}^{3}(x^5+x^3+x^2-x)dx$

$=2\int_{0}^{3}x^2dx=2\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_{0}^{3}$

$=2\cdot 9=18$ 답 18

일품 BOX

함수 $f(x)$의 주기가 p이면 $f(x+p)=f(x)$이므로

① $\int_{a}^{b}f(x)dx$

$=\int_{a+p}^{b+p}f(x)dx$

② $\int_{a}^{a+p}f(x)dx$

$=\int_{b}^{b+p}f(x)dx$

$g(x)=xf(x)$로 놓으면

$g(-x)=-xf(-x)$

$=-xf(x)$

$=-g(x)$

$\int_{-3}^{3}(x^5+x^3+x^2-x)dx$

$=\int_{-3}^{3}(x^5+x^3-x)dx$

$+\int_{-3}^{3}x^2dx$

$=0+2\int_{0}^{3}x^2dx$

$=2\int_{0}^{3}x^2dx$

440 $\int_{2}^{4}f(x)dx-\int_{3}^{4}f(x)dx-\int_{2}^{-3}f(x)dx$

$=\int_{2}^{4}f(x)dx+\int_{4}^{3}f(x)dx+\int_{-3}^{2}f(x)dx$

$=\int_{-3}^{3}f(x)dx=\int_{-3}^{3}(2x^3+3x^2-6x+1)dx$

$=2\int_{0}^{3}(3x^2+1)dx$

$=2\Big[x^3+x\Big]_{0}^{3}$

$=2\cdot 30=60$ 답 ⑤

441 $f(-x)=f(x)$에서 함수 $f(x)$는 우함수이므로 $xf(x)$는 기함수이다.

따라서 $\int_{-5}^{5}xf(x)dx=0$이므로

$\int_{-5}^{5}(x-1)f(x)dx$

$=\int_{-5}^{5}xf(x)dx-\int_{-5}^{5}f(x)dx$

$=-2\int_{0}^{5}f(x)dx$

$=-2\cdot(-3)=6$ 답 ⑤

1등급 비밀노트

$f(x)$가 우함수, $g(x)$가 기함수일 때, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\ne 0)$는 기함수이고, $(g\circ f)(x)$는 우함수이다.

442 $f(x)=\int_{0}^{x}t(t-a)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=a$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고, $x=a$에서 극소이므로

$M=f(0)=\int_{0}^{0}t(t-a)dt=0$

$m=f(a)=\int_{0}^{a}t(t-a)dt$

$=\int_{0}^{a}(t^2-at)dt$

$=\Big[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}at^2\Big]_{0}^{a}=-\frac{1}{6}a^3$

이때 $M-m=\frac{9}{2}$이므로 $\frac{1}{6}a^3=\frac{9}{2}$

$a^3=27$ $\therefore a=3$ 답 ⑤

일품 BOX

443 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x)+x^2f'(x)=10x^4-3x^2+2xf(x)$

$x^2f'(x)=10x^4-3x^2$

$\therefore f'(x)=10x^2-3$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(10x^2-3)dx$

$=\frac{10}{3}x^3-3x+C$ …… ㉠

한편 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2-1+2\int_1^1 tf(t)dt$

$\therefore f(1)=1$

$\int_1^1 tf(t)dt=0$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=\frac{10}{3}-3+C=1$ $\quad\therefore C=\frac{2}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{10}{3}x^3-3x+\frac{2}{3}$이므로

$f(2)=\frac{64}{3}$

답 $\frac{64}{3}$

444 $f(x)=a(x-1)(x-4)$ $(a>0)$로 놓으면

$g'(x)=\frac{d}{dx}\int_x^{x+1}f(t)dt$

$=f(x+1)-f(x)$

$=ax(x-3)-a(x-1)(x-4)$

$=2a(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $\quad x=2$

x	…	2	…
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗

따라서 $g(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이므로 $g(x)$의 최솟값은

$g(2)=\int_2^3 f(t)dt=\int_2^3 a(t-1)(t-4)dt$

$=a\int_2^3(t^2-5t+4)dt$

$=a\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t\right]_2^3$

$=-\frac{13}{6}a$

즉 $-\frac{13}{6}a=-26$이므로 $\quad a=12$

따라서 $f(x)=12(x-1)(x-4)$이므로

$f(3)=-24$

답 ⑤

445 $f(x)+\int_0^1 xf(t)dt=x^2$에서

$f(x)+x\int_0^1 f(t)dt=x^2$

$\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓으면

$f(x)+kx=x^2$ $\quad\therefore f(x)=x^2-kx$

$\therefore k=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1(t^2-kt)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{k}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{k}{2}$

즉 $\frac{1}{3}-\frac{k}{2}=k$이므로 $\quad \frac{3}{2}k=\frac{1}{3}$

$\therefore k=\frac{2}{9}$

따라서 $f(x)=x^2-\frac{2}{9}x$이므로

$f(9)=79$

답 79

446 $\int_{-1}^1 g(t)dt=a$, $\int_{-1}^1 f(t)dt=b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f(x)=x^2+a$, $g(x)=x+b$

$\therefore a=\int_{-1}^1(t+b)dt=2\int_0^1 bdt$

$=2\Big[bt\Big]_0^1=2b$

$b=\int_{-1}^1(t^2+a)dt=2\int_0^1(t^2+a)dt$

$=2\left[\frac{1}{3}t^3+at\right]_0^1=\frac{2}{3}+2a$

즉 $a=2b$, $b=2a+\frac{2}{3}$이므로

$a=-\frac{4}{9}$, $b=-\frac{2}{9}$

$a=2b$를 $b=2a+\frac{2}{3}$에 대입하면

$b=4b+\frac{2}{3}$

$3b=-\frac{2}{3}$

$\therefore b=-\frac{2}{9}$

$\therefore a=2b=-\frac{4}{9}$

따라서 $f(x)=x^2-\frac{4}{9}$, $g(x)=x-\frac{2}{9}$이므로

$f(1)+g(1)=\frac{5}{9}+\frac{7}{9}=\frac{4}{3}$

답 ④

447 $\int_2^x f(t)dt=xg(x)+ax-4$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$\int_2^0 f(t)dt=-4$ $\quad\therefore \int_0^2 f(t)dt=4$

$\therefore g(x)=\int_0^2 xf(t)dt+3$

$=x\int_0^2 f(t)dt+3$

$=4x+3$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=2g(2)+2a-4$, $\quad 2\cdot 11+2a-4=0$

$\therefore a=-9$

$g(x)=4x+3$이므로

$g(2)=11$

답 -9

448 $f(x)=\int_0^x(t-1)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $\quad f'(x)=x-1$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_2^{2+x}f'(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{f(2+x)-f(2)}{x}$

$=f'(2)$

$=2-1=1$

답 ④

449 $xf(x)=x^2+\int_{-1}^{x} f(t)dt$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$-f(-1)=1+\int_{-1}^{-1} f(t)dt$$

$$\therefore f(-1)=-1$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)+xf'(x)=2x+f(x)$$

$$xf'(x)=2x \qquad \therefore f'(x)=2$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int 2\,dx=2x+C$$

$f(-1)=-1$이므로 $\quad -2+C=-1$

$$\therefore C=1$$

따라서 $f(x)=2x+1$이므로 $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{1}^{x+1} f(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_1^{x+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x+1)-F(1)}{x}$$

$$=F'(1)=f(1)=3$$

답 3

450 $f(t)=t^2+2t+2$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x (t^2+2t+2)dt$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}$$

$$=F'(a)=f(a)$$

즉 $f(a)=a^2+2a+2=4$이므로

$$a^2+2a-2=0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 a의 값의 합은 -2이다.

답 ①

451 $(n+2)^2+(n+4)^2+\cdots+(n+2n)^2$

$$=\sum_{k=1}^{n}(n+2k)^2$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\{(n+2)^2+(n+4)^2+\cdots+(n+2n)^2\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(n+2k)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(n+2k)^2\cdot\frac{1}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+2k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^3 x^2dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3$$

$$=\frac{13}{3}$$

답 $\frac{13}{3}$

일품 BOX

• 이차방정식
$a^2+2a-2=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=1^2-1\cdot(-2)$
$=3>0$
이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다.

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$
$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{2k}{2n}\right)^2\cdot\frac{2}{2n}$
에서 $2n=m$으로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $m\to\infty$이므로
$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\left(1+\frac{2k}{m}\right)^2\cdot\frac{2}{m}$
$=\int_0^2(1+x)^2dx$

• $1+\frac{2k}{n}$를 x로 놓으면
$k=1$, $n\to\infty$일 때
$x=1$
$k=n$일 때
$x=3$
이므로 적분 구간은 $[1, 3]$이다.

452 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4)}{(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{n^2\cdot\frac{n^4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4}{n^2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\times n^3\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3}$$

$$=\frac{\int_0^1 x^4dx}{\int_0^1 x^2dx\times\int_0^1 x^3dx}$$

$$=\frac{\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1}{\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1\times\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1}$$

$$=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{12}{5}$$

답 $\frac{12}{5}$

453 ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{2n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$

$$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{2n}\right)^2\cdot\frac{1}{2n}$$

$$=2\int_1^2 x^2dx$$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\int_0^2(1+x)^2dx$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{4n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$

$$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{2n}\right)^2\cdot\frac{1}{2n}$$

$$=2\int_0^1\left(1+\frac{1}{2}x\right)^2dx$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

참고 ㄷ. $\frac{k}{4n}$를 x로 놓으면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{4n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=4\int_0^{\frac{1}{2}}(1+x)^2dx$$

$1+\frac{k}{4n}$를 x로 놓으면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{4n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=4\int_1^{\frac{3}{2}}x^2dx$$

454 선분 OA를 n등분하면 양 끝 점과 각 분점의 x좌표는 차례대로

$$0,\ \frac{10}{n},\ \frac{20}{n},\ \cdots,\ \frac{10(n-1)}{n},\ 10$$

$$\therefore h_k=-\left(\frac{10}{n}k\right)^2+10\cdot\frac{10}{n}k$$

$$=\frac{100}{n}\left(\boxed{k-\frac{k^2}{n}}\right)$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}h_k\cdot\boxed{\frac{10}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{100}{n}\left(k-\frac{k^2}{n}\right)\cdot\frac{10}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1000}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(k-\frac{k^2}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1000}{n^2}\left\{\frac{n(n-1)}{2}-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n}\right\}$$

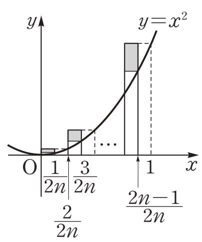
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1000n(n-1)(n+1)}{6n^3}$$

$$=\boxed{\frac{500}{3}}$$

$\therefore$ (가) $k-\dfrac{k^2}{n}$ (나) $\dfrac{10}{n}$ (다) $\dfrac{500}{3}$

답 ①

455 S_1-S_2의 값은 오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이의 합과 같으므로



S_1-S_2

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{2n}$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2\cdot\frac{1}{2n}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2-\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{2n}$$

$$=\frac{1}{8n^3}\sum_{k=1}^{n}(4k-1)$$

$$=\frac{1}{8n^3}\left\{4\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n\right\}$$

$$=\frac{2n+1}{8n^2}$$

따라서 $\dfrac{2n+1}{8n^2}\le 0.01$에서

$2n^2-50n-25\ge 0$

$\therefore n\ge\dfrac{25+\sqrt{675}}{2}$

$=25.\times\times\times$ ($\because n$은 자연수)

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 26이다.

답 ②

456 $\displaystyle\int_1^3(x^2+2x)dx$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(1+\frac{\boxed{2}k}{n}\right)^2+2\left(1+\frac{2k}{n}\right)\right\}\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4k^2}{n^2}+\frac{8k}{n}+3\right)\cdot\frac{2}{n}$$

일품 BOX

$h_k=|x_k^2-10x_k|$
주어진 그래프에서
$x_k^2-10x_k<0$이므로
$h_k=-(x_k^2-10x_k)$
$=-x_k^2+10x_k$

$f(x)=\begin{cases}3 & (x<0)\\ -x+3 & (x\ge 0)\end{cases}$
의 x에 $x+1$을 대입하면
$f(x+1)$
$=\begin{cases}3 & (x+1<0)\\ -(x+1)+3 & (x+1\ge 0)\end{cases}$
$=\begin{cases}3 & (x<-1)\\ -x+2 & (x\ge -1)\end{cases}$

$\dfrac{2n+1}{8n^2}\le\dfrac{1}{100}$
$\dfrac{2n+1}{2n^2}\le\dfrac{1}{25}$
$2n^2>0$이므로 양변에 $50n^2$을 곱해도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다. 즉
$50n+25\le 2n^2$
$\therefore 2n^2-50n-25\ge 0$

$x-k=0$에서 $x=k$이므로 $x=k$를 경계로 구간을 나누어 정적분의 값을 각각 구한다.

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{16}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{16}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{6}{n}\cdot n\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4(\boxed{n}+1)(2n+1)}{3n^2}+\frac{8(n+1)}{n}+6\right\}$$

$$=\frac{8}{3}+8+6$$

$$=\boxed{\frac{50}{3}}$$

$\therefore$ (가) 2 (나) n (다) $\dfrac{50}{3}$

따라서 $a=2$, $b=\dfrac{50}{3}$, $f(n)=n$이므로

$f(3b-a)=f(48)=48$

답 ③

457 $f(x)=\begin{cases}3 & (x<0)\\ -x+3 & (x\ge 0)\end{cases}$이므로

$$f(x+1)=\begin{cases}3 & (x<-1)\\ -x+2 & (x\ge -1)\end{cases}$$

$$\therefore \int_{-3}^{3}xf(x+1)dx$$

$$=\int_{-3}^{-1}3x\,dx+\int_{-1}^{3}x(-x+2)dx$$

$$=\left[\frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{-1}+\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{-1}^{3}$$

$$=-12-\frac{4}{3}=-\frac{40}{3}$$

답 ①

1등급 비밀노트

함수 $f(x)=\begin{cases}p(x) & (x<0)\\ q(x) & (x\ge 0)\end{cases}$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$f(x-m)=\begin{cases}p(x-m) & (x<m)\\ q(x-m) & (x\ge m)\end{cases}$$

458 $|x-k|=\begin{cases}x-k & (x\ge k)\\ -x+k & (x<k)\end{cases}$이므로

$$f(k)=\int_0^3|x-k|dx$$

$$=\int_0^k(-x+k)dx+\int_k^3(x-k)dx$$

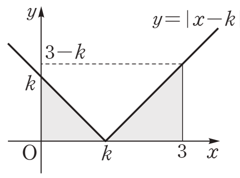
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+kx\right]_0^k+\left[\frac{1}{2}x^2-kx\right]_k^3$$

$$=k^2-3k+\frac{9}{2}=\left(k-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

따라서 $0<k<3$에서 $f(k)$는 $k=\dfrac{3}{2}$일 때 최솟값 $\dfrac{9}{4}$를 갖는다.

답 ①

다른 풀이 $\int_0^3 |x-k|dx$의 값은 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$$f(k)=\int_0^3 |x-k|dx$$
$$=\frac{1}{2}k\cdot k+\frac{1}{2}(3-k)\cdot(3-k)$$
$$=k^2-3k+\frac{9}{2}$$
$$=\left(k-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

따라서 $0<k<3$에서 $f(k)$는 $k=\frac{3}{2}$일 때 최솟값 $\frac{9}{4}$를 갖는다.

459 함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$$\lim_{x\to 3} f(x)=f(3)=0$$

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 증가함수이므로

$x<3$이면 $\quad f(x)<0$
$x>3$이면 $\quad f(x)>0$

조건 (다)에서 $\int_{-1}^6 f(x)dx=10$이므로

$$\int_{-1}^3 f(x)dx+\int_3^6 f(x)dx=10 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_{-1}^6 |f(x)|dx=14$이므로

$$\int_{-1}^3 \{-f(x)\}dx+\int_3^6 f(x)dx=14$$
$$-\int_{-1}^3 f(x)dx+\int_3^6 f(x)dx=14 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$\int_{-1}^3 f(x)dx=-2,\ \int_3^6 f(x)dx=12$$

답 12

460 문제 이해 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(2-x)=f(2+x)$를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다. ● 30%

해결 과정 따라서 $\int_0^2 f(x)dx=\int_2^4 f(x)dx=4$,

$\int_4^7 f(x)dx=\int_{-3}^0 f(x)dx=9$이므로 ● 40%

답 구하기 $\int_0^7 f(x)dx$

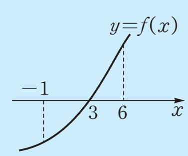
$$=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx+\int_4^7 f(x)dx$$
$$=4+4+9=17$$ ● 30%

답 17

일품 BOX

$\int_{-2}^2 (-4x^5-3x^4)dx$
$=\int_{-2}^2 (-4x^5)dx$
$\quad+\int_{-2}^2 (-3x^4)dx$
$=0+2\int_0^2 (-3x^4)dx$
$=2\int_0^2 (-3x^4)dx$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



$\int_{-1}^3 f(x)dx=A$,
$\int_3^6 f(x)dx=B$라 하면
$A+B=10 \quad \cdots ㉢$
$-A+B=14 \quad \cdots ㉣$
㉢+㉣을 하면
$2B=24 \quad \therefore B=12$
$B=12$를 ㉢에 대입하면 $\quad A=-2$

$f(m-x)=f(m+x)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

461 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f(-x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-2}^0 f(x)dx=\int_0^2 f(-x)dx$$
$$\therefore \int_{-2}^2 f(x)dx=\int_{-2}^0 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx$$
$$=\int_0^2 f(-x)dx+\int_0^2 f(x)dx$$
$$=\int_0^2 \{f(-x)+f(x)\}dx$$
$$=\int_0^2 (6x^4+5)dx$$

$g(-x)=4x^5-3x^4$의 양변에 x 대신 $-x$를 대입하면

$$g(x)=-4x^5-3x^4$$
$$\therefore \int_{-2}^2 g(x)dx=\int_{-2}^2 (-4x^5-3x^4)dx$$
$$=2\int_0^2 (-3x^4)dx$$
$$=\int_0^2 (-6x^4)dx$$
$$\therefore \int_{-2}^2 \{f(x)+g(x)\}dx$$
$$=\int_{-2}^2 f(x)dx+\int_{-2}^2 g(x)dx$$
$$=\int_0^2 5\,dx=\Big[5x\Big]_0^2=10$$

답 10

다른 풀이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 $y=g(-x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-2}^2 g(x)dx=\int_{-2}^2 g(-x)dx$$
$$=\int_{-2}^2 (4x^5-3x^4)dx$$
$$=2\int_0^2 (-3x^4)dx$$

462 $f(x)=px^3+qx^2+rx+s\ (p\neq 0)$라 하면

$$\int_{-3}^3 f(x)dx=\int_{-3}^3 (px^3+qx^2+rx+s)dx$$
$$=2\int_0^3 (qx^2+s)dx$$
$$=2\left[\frac{q}{3}x^3+sx\right]_0^3$$
$$=18q+6s$$
$$\therefore 18q+6s$$
$$=3f(\alpha)+3f(\beta)$$
$$=3p(\alpha^3+\beta^3)+3q(\alpha^2+\beta^2)+3r(\alpha+\beta)+6s$$

위의 식이 임의의 실수 p, q, r, s에 대하여 성립하므로

$$\alpha^3+\beta^3=0,\ \alpha^2+\beta^2=6,\ \alpha+\beta=0$$

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$이므로

$$0=6+2\alpha\beta, \qquad \alpha\beta=-3$$
$$\therefore |\alpha\beta|=3$$

답 ②

Ⅳ 다항함수의 적분법

463 $f(x)=\int_1^x 2f(t)dt$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=2f(x) \quad \therefore f(x)=\frac{f'(x)}{2}$$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $f(-2)=-4$에서 $f(2)=4$

$$\therefore \int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 \frac{f'(x)}{2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\Big[f(x)\Big]_1^2$$
$$=\frac{1}{2}\{f(2)-f(1)\}$$
$$=\frac{1}{2}(4-0)=2$$

답 2

464 ㄱ. $F\left(\frac{1}{2}\right)=\int_1^{\frac{1}{2}} f(t)dt=-\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt<0$

ㄴ. $F(x)=\int_1^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

$F'(x)=f(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

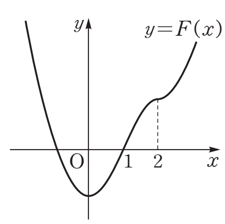
x	⋯	0	⋯	2	⋯
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$F(x)$	↘	극소	↗		↗

따라서 $F(x)$는 $x=0$에서 극소이므로 극솟값은

$$F(0)=\int_1^0 f(t)dt=-\int_0^1 f(t)dt<0$$

따라서 $F(x)$의 극솟값은 음수이다.

ㄷ. $F(1)=0$이므로 함수 $y=F(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



$$\therefore \int_0^1 F(x)dx<0$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

465 문제 이해 $\int_{-1}^1 f(t)dt=a$ (a는 상수)로 놓으면

$f(x)=a+2x+3x^2+4x^3+\cdots+2015x^{2014}$ ● 20%

해결 과정 $\therefore a=\int_{-1}^1 (a+2t+3t^2+4t^3+\cdots+2015t^{2014})dt$

$$=2\int_0^1 (a+3t^2+5t^4+\cdots+2015t^{2014})dt$$
$$=2\Big[at+t^3+t^5+\cdots+t^{2015}\Big]_0^1$$
$$=2a+2014$$

일품 BOX

● $x=2$의 좌우에서 $F'(x)$, 즉 $f(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $F(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖지 않는다.

㉠−㉢을 하면

$-a=1 \quad \therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=-1$

두 상수 a, b에 대하여 $\int_a^b f(x)dx$를 포함한 등식

➡ $\int_a^b f(x)dx=k$ (k는 상수)로 놓는다.

● t^3, t^5, ⋯, t^{2015}에서 3, 5, ⋯, 2015를 수열 $\{a_n\}$이라 하면 일반항 a_n은

$a_n=2n+1$

$a_k=2015$라 하면

$2k+1=2015$

$\therefore k=1007$

따라서 t^3, t^5, ⋯, t^{2015}의 항의 개수는 1007이다.

$0\le t\le 2$에서 $t^2-4\le 0$이므로 $|t^2-4|=4-t^2$

즉 $a=-2014$이므로

$f(x)=-2014+2x+3x^2+4x^3+\cdots+2015x^{2014}$ ● 50%

답 구하기 $\therefore \int_0^1 f(x)dx$

$$=\int_0^1 (-2014+2x+3x^2+4x^3+\cdots+2015x^{2014})dx$$
$$=\Big[-2014x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^{2015}\Big]_0^1$$
$$=-2014+2014=0$$ ● 30%

답 0

466 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=1+a+b+1$

$\therefore a+b=-2$ ⋯⋯ ㉠

주어진 등식에서

$$x\int_{-1}^x f(t)dt-\int_{-1}^x tf(t)dt$$
$$=(x+2)^3+a(x+2)^2+b(x+2)+1$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_{-1}^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)$$
$$=3(x+2)^2+2a(x+2)+b$$
$$\therefore \int_{-1}^x f(t)dt$$
$$=3x^2+(12+2a)x+12+4a+b \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=3+2a+b$

$\therefore 2a+b=-3$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-1$

$$\therefore \int_{-1}^x f(t)dt=3x^2+10x+7$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x+10$

$$\therefore \int_{-1}^{ab} f'(x)dx=\Big[f(x)\Big]_{-1}^1=f(1)-f(-1)$$
$$=16-4=12$$

답 12

467 $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-2}\int_2^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-2}\Big[F(t)\Big]_2^x$$
$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\cdot(x+1)\right\}$$
$$=3F'(2)=3f(2)$$
$$=3\int_0^2 |t^2-4|dt=3\int_0^2 (4-t^2)dt$$
$$=3\Big[4t-\frac{1}{3}t^3\Big]_0^2=3\cdot\frac{16}{3}=16$$

답 ④

468 해결 과정 주어진 등식의 좌변에서

$$\int_2^x 3(xt^2-8)dt=\int_2^x (3xt^2-24)dt$$
$$=\Big[xt^3-24t\Big]_2^x$$
$$=x^4-32x+48$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^n}\int_2^x 3(xt^2-8)dt$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^4-32x+48}{(x-2)^n}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x^2+4x+12)}{(x-2)^n}$$ ● 40%

즉 $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x^2+4x+12)}{(x-2)^n}=a$이고 $a\neq 0$이므로

$n=2$ ● 30%

$$\therefore a=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x^2+4x+12)}{(x-2)^2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x^2+4x+12)$$
$$=24$$ ● 20%

답 구하기 $\therefore \frac{a}{n}=\frac{24}{2}=12$ ● 10%

답 12

1등급 비밀노트

$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x^2+4x+12)}{(x-2)^n}$에서

(i) $n=1$이면

$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x^2+4x+12)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}(x-2)(x^2+4x+12)=0$

(ii) $n\geq 3$이면

$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x^2+4x+12)}{(x-2)^n}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4x+12}{(x-2)^{n-2}}$ ➡ 발산

(i), (ii)에서 $n=2$

469 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{3k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{3k}{n}\right)\cdot\frac{3}{n}\cdot\frac{2}{3}$$
$$=\frac{2}{3}\int_1^4 f(x)dx$$

즉 $\frac{2}{3}\int_1^4 f(x)dx=4$이므로

$$\int_1^4 f(x)dx=6 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(-1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(-1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\cdot 2$$
$$=2\int_{-1}^0 f(x)dx$$

즉 $2\int_{-1}^0 f(x)dx=10$이므로 $\int_{-1}^0 f(x)dx=5$

한편 $f(-x)=f(x)$에서 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx=5 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\int_{-4}^4 f(x)dx=2\int_0^4 f(x)dx$$
$$=2\left(\int_0^1 f(x)dx+\int_1^4 f(x)dx\right)$$
$$=2(5+6)=22$$

답 22

470 $f(t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-1+\frac{2t+1}{n}\cdot k\right)^3\cdot\frac{2t+1}{n}$

$$=\int_{-1}^{2t} x^3dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{2t}$$
$$=4t^4-\frac{1}{4}$$

$\therefore f'(t)=16t^3$

$$\therefore \lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-x-2}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{(x-2)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to -1}\left\{\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\cdot\frac{1}{x-2}\right\}$$
$$=-\frac{1}{3}f'(-1)$$
$$=-\frac{1}{3}\cdot(-16)$$
$$=\frac{16}{3}$$

답 ①

471 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=2$와 $x=-2$에서 연속이어야 한다.

(i) $x=2$에서 연속일 때,

$$\lim_{x\to 2-} f(x)=f(2)$$
$$\lim_{x\to 2-}(-x^2+ax+b)=0$$
$$-4+2a+b=0$$
$$\therefore 2a+b=4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) $x=-2$에서 연속일 때,

$$\lim_{x\to -2+} f(x)=f(-2)$$
$$\lim_{x\to -2+}(-x^2+ax+b)=8$$
$$-4-2a+b=8$$
$$\therefore 2a-b=-12 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=8$

일품 BOX

$f(x)=4x^4-\frac{1}{4}$에서 $f(1)=f(-1)$

$1+\frac{3k}{n}$를 x로 놓으면 $\frac{3}{n}$은 dx이고 $k=1$, $n\to\infty$이면 $x=1$, $k=n$이면 $x=4$이므로 적분 구간은 $[1, 4]$이다.

$-1+\frac{k}{n}$를 x로 놓으면 $\frac{1}{n}$은 dx이고 $k=1$, $n\to\infty$이면 $x=-1$, $k=n$이면 $x=0$이므로 적분 구간은 $[-1, 0]$이다.

㉠+㉡을 하면
$4a=-8 \quad \therefore a=-2$
$a=-2$를 ㉠에 대입하면
$-4+b=4 \quad \therefore b=8$

$\therefore \int_{-2}^{3} f(x)dx$

$=\int_{-2}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{3} f(x)dx$

$=\int_{-2}^{2} (-x^2-2x+8)dx+\int_{2}^{3} x(x-2)dx$

$=2\int_{0}^{2} (-x^2+8)dx+\int_{2}^{3} (x^2-2x)dx$

$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+8x\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3$

$=2\cdot\frac{40}{3}+\frac{4}{3}=28$

답 ③

472 $f(-x)=-f(x)$에서 $f(x)$는 기함수이므로
$f(x)=ax^3+bx\ (a\neq0)$로 놓으면

$f'(x)=3ax^2+b$

$f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 8을 가지므로

$f'(-1)=0,\ f(-1)=8$

$3a+b=0,\ -a-b=8$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=-12$
따라서 $f(x)=4x^3-12x$이므로

$\int_{-k}^{k} xf(x)dx=\int_{-k}^{k} (4x^4-12x^2)dx$

$=2\int_{0}^{k} (4x^4-12x^2)dx$

$=2\left[\frac{4}{5}x^5-4x^3\right]_0^k$

$=2\left(\frac{4}{5}k^5-4k^3\right)$

즉 $2\left(\frac{4}{5}k^5-4k^3\right)=0$이므로

$k^3(k^2-5)=0 \qquad \therefore k^2=5\ (\because k\neq0)$

답 5

473 ㄱ. $g(-x)=f(-x)+f(x)=g(x)$
따라서 $g(x)$는 우함수이므로

$\int_{-1}^{1} g(x)dx=2\int_{0}^{1} g(x)dx$

ㄴ. $h(-x)=f(-x)-f(x)$

$=-\{f(x)-f(-x)\}$

$=-h(x)$

따라서 $h(x)$는 기함수이다.
한편 $y=h(x-1)$의 그래프는 $y=h(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$\int_{0}^{4} h(x-1)dx=\int_{-1}^{3} h(x)dx$

$=\int_{-1}^{1} h(x)dx+\int_{1}^{3} h(x)dx$

$=\int_{1}^{3} h(x)dx$

일품 BOX

$y=F(x+1)$의 그래프는 $y=F(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$\int_0^2 F(x+1)dx$

$=\int_1^3 F(x)dx$

$y=F(x-1)$의 그래프는 $y=F(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$\int_{-2}^2 F(x-1)dx$

$=\int_{-3}^1 F(x)dx$

$3a+b=0 \quad \cdots ㉠$

$-a-b=8 \quad \cdots ㉡$

㉠+㉡을 하면

$2a=8 \quad \therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$12+b=0$

$\therefore b=-12$

$\int_{-1}^{-1} (|t-1|+1)dt=0$

ㄷ. $F(x)=g(x)h(x)$라 하면

$F(-x)=g(-x)h(-x)=-g(x)h(x)$

$=-F(x)$

따라서 $F(x)$는 기함수이다.
$F(x)=g(x)h(x)$이므로

$\int_{0}^{2} g(x+1)h(x+1)dx=\int_{0}^{2} F(x+1)dx$

$=\int_{1}^{3} F(x)dx$

$\int_{-2}^{2} g(x-1)h(x-1)dx=\int_{-2}^{2} F(x-1)dx$

$=\int_{-3}^{1} F(x)dx$

이때 $\int_{-3}^{3} F(x)dx=0$이므로

$\int_{-3}^{1} F(x)dx+\int_{1}^{3} F(x)dx=0$

$\therefore \int_{1}^{3} F(x)dx=-\int_{-3}^{1} F(x)dx$

$\therefore \int_{0}^{2} g(x+1)h(x+1)dx$

$=-\int_{-2}^{2} g(x-1)h(x-1)dx$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

1등급 비밀노트

연속함수 $f(x)$에 대하여

$\int_a^b f(x)dx=\int_{a+k}^{b+k} f(x-k)dx$

474 $f'(x)=|x-1|+1>0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다.
또 $t<1$일 때 $|t-1|=-t+1$이므로

$f(0)=\int_{-1}^{0} (|t-1|+1)dt$

$=\int_{-1}^{0} (-t+2)dt$

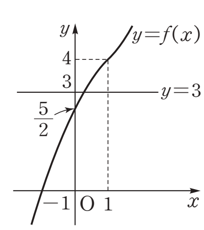
$=\left[-\frac{1}{2}t^2+2t\right]_{-1}^{0}=\frac{5}{2}$

$f(1)=\int_{-1}^{1} (|t-1|+1)dt$

$=\int_{-1}^{1} (-t+2)dt$

$=2\int_{0}^{1} 2dt=2\left[2t\right]_0^1=4$

즉 $f(0)=\frac{5}{2},\ f(1)=4$이고, $f(-1)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 방정식 $f(x)=3$은 한 개의 양의 실근을 갖는다.



답 ①

475 $a_n=\int_0^1 f_n(x)dx$이므로

$$a_1=\int_0^1 f_1(x)dx=\int_0^1 x^2dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$
$$a_{n+1}=\int_0^1 f_{n+1}(x)dx$$
$$=\int_0^1\left(x^2\int_0^1 f_n(x)dx\right)dx$$
$$=\int_0^1 x^2a_n\,dx$$
$$=a_n\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$$p=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{p}=2$$

답 2

일품 BOX

첫째항이 a, 공비가 r인 등비급수의 합은 $\frac{a}{1-r}$ (단, $-1<r<1$)

476 ㄱ. $\int_{-p}^0 f(x)dx=\int_0^p f(x)dx$이므로

$$\int_{-p}^p f(x)dx=2\int_0^p f(x)dx$$

즉 $2\int_0^p f(x)dx=0$이므로

$$\int_0^p f(x)dx=0$$
$$\therefore \int_1^{1+p} f(x)dx=0$$

ㄴ. $\int_0^p f(x+a)dx=\int_a^{a+p} f(x)dx=\int_0^p f(x)dx$

$$\int_0^p f(x+b)dx=\int_b^{b+p} f(x)dx=\int_0^p f(x)dx$$
$$\therefore \int_0^p f(x+a)dx=\int_0^p f(x+b)dx$$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\cdot\frac{mp}{n}=m\int_a^{a+p}f(x)dx$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{mp}{n}k\right)\cdot\frac{mp}{n}=\int_a^{a+mp}f(x)dx$$

이때 $\int_0^p f(x)dx=k$라 하면

$$m\int_a^{a+p}f(x)dx=mk$$
$$\int_a^{a+mp}f(x)dx$$
$$=\int_a^{a+p}f(x)dx+\int_{a+p}^{a+2p}f(x)dx$$
$$+\cdots+\int_{a+(m-1)p}^{a+mp}f(x)dx$$
$$=k+k+\cdots+k=mk$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\cdot\frac{mp}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{mp}{n}k\right)\cdot\frac{mp}{n}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

1등급 비밀노트

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키면 다음이 성립함을 이용하여 정적분의 값을 구한다.

① $\int_0^p f(x)dx=\int_a^{a+p}f(x)dx$

② $\int_a^{a+p}f(x)dx=\int_b^{b+p}f(x)dx$

③ $\int_a^{a+kp}f(x)dx=k\int_0^p f(x)dx$ (단, k는 자연수)

11 정적분의 활용

본책 93쪽

477 $x^3-2x^2-x+2=0$에서

$$(x+1)(x-1)(x-2)=0$$
$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 곡선 $y=x^3-2x^2-x+2$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-1}^2 |x^3-2x^2-x+2|dx$$
$$=\int_{-1}^1 (x^3-2x^2-x+2)dx$$
$$-\int_1^2 (x^3-2x^2-x+2)dx$$
$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^1-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_1^2$$
$$=2\cdot\frac{4}{3}-\left(-\frac{5}{12}\right)=\frac{37}{12}$$

답 $\frac{37}{12}$

$\int_{-1}^1 (x^3-x)dx=0$

478 $\int_{-1}^0 f(x)dx=-15$, $\int_0^1 f(x)dx=11$이므로

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$$
$$=-15+11=-4$$

이때 $\int_{-1}^1 f(x)dx=F(1)-F(-1)$이므로

$$F(1)-F(-1)=-4,\quad 6-F(-1)=-4$$
$$\therefore F(-1)=10$$

답 10

$\int_{-1}^1 f(x)dx$
$=\left[F(x)\right]_{-1}^1$
$=F(1)-F(-1)$

479 곡선 $x=y^2+k$와 두 직선 $y=-1$, $y=2$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{2}(y^2+k)dy=\left[\frac{1}{3}y^3+ky\right]_{-1}^{2}$$
$$=\left(\frac{8}{3}+2k\right)-\left(-\frac{1}{3}-k\right)$$
$$=3k+3$$

즉 $3k+3=12$이므로 $\quad k=3$

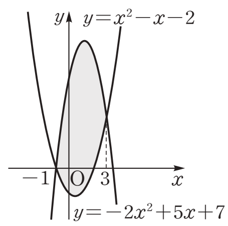
답 ③

480 $x^2-x-2=-2x^2+5x+7$에서

$3x^2-6x-9=0,\quad (x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_{-1}^{3}\{(-2x^2+5x+7)-(x^2-x-2)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{3}(-3x^2+6x+9)dx$$
$$=\left[-x^3+3x^2+9x\right]_{-1}^{3}$$
$$=27-(-5)=32$$

답 ⑤

다른 풀이 두 곡선 $y=x^2-x-2$와 $y=-2x^2+5x+7$의 교점의 x좌표가 -1, 3이므로 구하는 넓이는

$$\frac{|1-(-2)|\{3-(-1)\}^3}{6}=32$$

일품 BOX

$x<-1$ 또는 $x>3$이면
x^2-x-2
$>-2x^2+5x+7$
$-1\le x\le 3$이면
x^2-x-2
$\le -2x^2+5x+7$

1등급 비밀노트

① 포물선 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(a\neq 0,\ \alpha<\beta)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\frac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}$$

② 두 포물선 $y=ax^2+bx+c$, $y=a'x^2+b'x+c'$의 교점의 x좌표를 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

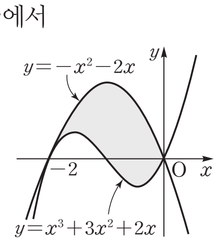
$$S=\frac{|a-a'|(\beta-\alpha)^3}{6}$$

481 $x^3+3x^2+2x=-x^2-2x$에서

$x^3+4x^2+4x=0$

$x(x+2)^2=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$



따라서 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^{0}\{-x^2-2x-(x^3+3x^2+2x)\}dx$$
$$=-\int_{-2}^{0}(x^3+4x^2+4x)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_{-2}^{0}=\frac{4}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=4$이므로

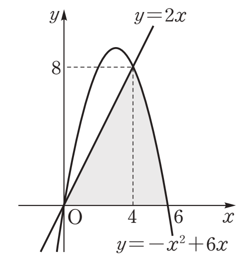
$p+q=7$

답 7

482 $-x^2+6x=2x$에서 $\quad x^2-4x=0$

$x(x-4)=0\quad \therefore x=0$ 또는 $x=4$

오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



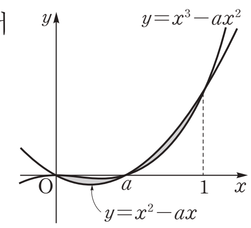
$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 8$$
$$+\int_{4}^{6}(-x^2+6x)dx$$
$$=16+\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_{4}^{6}$$
$$=16+\frac{28}{3}=\frac{76}{3}$$

답 $\frac{76}{3}$

483 $x^3-ax^2=x^2-ax$에서

$x(x-a)(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a$ 또는 $x=1$



오른쪽 그림에서 색칠한 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\int_{0}^{1}\{x^3-(a+1)x^2+ax\}dx=0$$
$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+1)x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_{0}^{1}=0$$
$$\frac{1}{6}a-\frac{1}{12}=0\qquad \therefore a=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

484 $\int_{a}^{k}x^2dx=\int_{k}^{b}x^2dx$에서

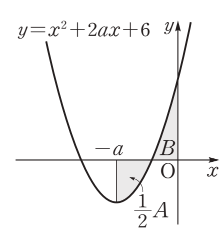
$$\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{a}^{k}=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{k}^{b}$$
$$\frac{1}{3}(k^3-a^3)=\frac{1}{3}(b^3-k^3)$$
$$2k^3=a^3+b^3,\qquad k^3=\frac{a^3+b^3}{2}$$
$$\therefore k=\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}$$

답 ①

485 $A:B=2:1$에서 $\quad B=\frac{1}{2}A$

$y=x^2+2ax+6$

$\quad=(x+a)^2-a^2+6$



즉 포물선 $y=x^2+2ax+6$은 직선 $x=-a$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 색칠한 두 도형의 넓이가 같다.

일품 BOX

포물선 $y=x^2+2ax+6$의 축이 직선 $x=-a$이므로 주어진 포물선과 x축으로 둘러싸인 도형은 직선 $x=-a$에 의해 그 넓이가 이등분된다.

따라서 $\int_{-a}^{0}(x^2+2ax+6)dx=0$이므로

$$\left[\frac{1}{3}x^3+ax^2+6x\right]_{-a}^{0}=0$$
$$-\frac{2}{3}a^3+6a=0,\qquad a^3-9a=0$$

$a(a+3)(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

답 3

486 $f(x)=x^3-5x^2+x+9$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-10x+1 \qquad \therefore f'(3)=-2$

따라서 점 $(3,\ -6)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-6)=-2(x-3) \qquad \therefore y=-2x$

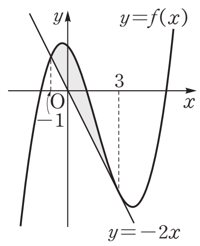
$x^3-5x^2+x+9=-2x$에서

$x^3-5x^2+3x+9=0, \qquad (x+1)(x-3)^2=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-2x$의 접점의 x좌표

오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_{-1}^{3}\{x^3-5x^2+x+9-(-2x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{3}(x^3-5x^2+3x+9)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+9x\right]_{-1}^{3}$$

$$=\frac{63}{4}-\left(-\frac{67}{12}\right)$$

$$=\frac{64}{3}$$

답 ①

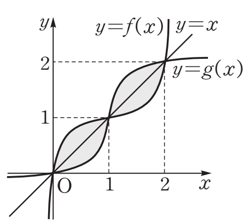
487 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

$x^3-3x^2+3x=x$에서

$x^3-3x^2+2x=0$

$x(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

$$2\left[\int_0^1(x^3-3x^2+3x-x)dx+\int_1^2\{x-(x^3-3x^2+3x)\}dx\right]$$

$$=2\left\{\int_0^1(x^3-3x^2+2x)dx+\int_1^2(-x^3+3x^2-2x)dx\right\}$$

$$=2\left\{\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_1^2\right\}$$

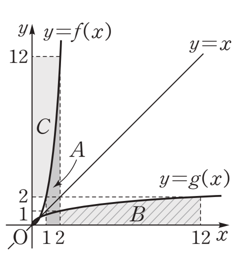
$$=2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1$$

답 1

488 함수 $f(x)=x^3+x^2$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$f(1)=2,\ f(2)=12$이므로

$g(2)=1,\ g(12)=2$



따라서 앞의 그림에서

$(B$의 넓이$)=(C$의 넓이$)$

이므로

$$\int_1^2 f(x)dx+\int_2^{12}g(x)dx$$

$=(A$의 넓이$)+(B$의 넓이$)$

$=(A$의 넓이$)+(C$의 넓이$)$

$=2\cdot12-1\cdot2=22$

답 22

489 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

점 P는 원점을 출발하여 움직이는 점이므로 $t=0$에서의 위치가 0이다.

$$x(t)=0+\int_0^t(3t^2-8t-12)dt$$

$$=\Big[t^3-4t^2-12t\Big]_0^t=t^3-4t^2-12t$$

점 P가 원점을 지날 때, $x(t)=0$이므로

$t^3-4t^2-12t=0, \qquad t(t+2)(t-6)=0$

$\therefore t=6\ (\because t>0)$

답 6

490 t초 후의 물체의 지상으로부터의 높이를 $h(t)$ m라 하면

물체는 높이가 30 m인 옥상에서 쏘아 올리므로 $t=0$에서의 위치가 30이다.

$$h(t)=30+\int_0^t(30-10t)dt=30+\Big[30t-5t^2\Big]_0^t$$

$$=-5t^2+30t+30$$

$-5t^2+30t+30=70$에서

$t^2-6t+8=0, \qquad (t-2)(t-4)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=4 \qquad \therefore a=2$

따라서 $t=2$에서 $t=5$까지 물체가 움직인 거리는

$$\int_2^5|30-10t|dt$$

$$=\int_2^3(30-10t)dt+\int_3^5(10t-30)dt$$

$$=\Big[30t-5t^2\Big]_2^3+\Big[5t^2-30t\Big]_3^5$$

$$=5+20=25(\text{m})$$

답 ①

속도가 0인 순간

① 움직이던 물체가 정지하는 순간

② 움직이던 물체가 운동 방향을 바꾸는 순간

③ 물체를 위로 던졌을 때 최고 높이에 도달하는 순간

491 열차가 멈추려면 $v(t)=0$이어야 하므로

$30-5t=0 \qquad \therefore t=6$

따라서 제동을 건 후 열차가 멈추기까지 이 열차가 움직인 거리는

$$\int_0^6|30-5t|dt=\int_0^6(30-5t)dt=\left[30t-\frac{5}{2}t^2\right]_0^6$$

$$=180-90=90(\text{m})$$

답 90 m

492 점 P가 $t=a$일 때 처음으로 원점을 지나므로

$$-2+\int_0^a v(t)dt=0 \qquad \therefore \int_0^a v(t)dt=2$$

$0<a<2$이므로 $\displaystyle\int_0^a v(t)dt=3a$

즉 $3a=2$이므로 $a=\dfrac{2}{3}$

또 점 P가 $t=b$일 때 두 번째로 원점을 지나므로

$$-2+\int_0^{\frac{2}{3}} v(t)dt+\int_{\frac{2}{3}}^{b} v(t)dt=0$$

$$\therefore \int_{\frac{2}{3}}^{b} v(t)dt=0$$

$4<b<6$이므로

$$\int_{\frac{2}{3}}^{b} v(t)dt=\left(2-\frac{2}{3}\right)\cdot 3-(b-4)\cdot 3$$
$$=16-3b$$

즉 $16-3b=0$이므로

$$b=\frac{16}{3}$$

$$\therefore 2a+b=\frac{4}{3}+\frac{16}{3}=\frac{20}{3}$$

답 ⑤

1등급 비밀노트

$\int_0^2 v(t)dt=2\cdot 3=6>2$이므로 a는 구간 $(0,\ 2)$에 존재한다.

또 $\int_0^4 v(t)dt=\int_0^2 v(t)dt=6$이고, $\int_0^6 v(t)dt=0$이므로 b는 구간 $(4,\ 6)$에 존재한다.

493 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$$1+\int_0^2 v(t)dt=1+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot a=1+a$$

즉 $1+a=5$이므로 $\quad a=4$

$4\le t\le 8$일 때, 점 P의 속도는 $v(t)=-2t+12$이므로

$$v(7)=-2$$

따라서 $t=0$에서 $t=7$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^7 |v(t)|dt=\frac{1}{2}(2+6)\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2$$
$$=17$$

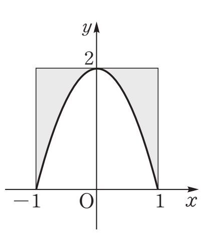
답 ④

1등급 비밀노트

$4\le t\le 8$일 때, 속도 $v(t)$의 그래프는 두 점 $(4,\ 4)$, $(8,\ -4)$를 지나는 직선이므로

$$v(t)=\frac{-4-4}{8-4}(t-4)+4 \qquad \therefore v(t)=-2t+12$$

494 오른쪽 그림과 같이 옆면의 포물선을 좌표평면 위에 나타내면 포물선의 방정식을 $y=ax^2+2\ (a<0)$로 놓을 수 있다.



이때 포물선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$$0=a+2 \qquad \therefore a=-2$$

즉 포물선의 방정식이 $y=-2x^2+2$이므로 위의 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

$$2\cdot 2-\int_{-1}^{1}(-2x^2+2)dx$$
$$=4-2\int_0^1(-2x^2+2)dx$$
$$=4-2\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^1$$
$$=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$$

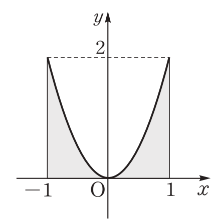
따라서 구하는 도형의 넓이는

$$4\cdot\frac{4}{3}+2^2=\frac{28}{3}$$

윗면의 넓이

답 ②

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 옆면의 포물선을 좌표평면 위에 나타내면 포물선의 방정식을 $y=ax^2\ (a>0)$으로 놓을 수 있다.



이때 포물선이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로 $\quad a=2$

즉 포물선의 방정식은 $y=2x^2$이므로 위의 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{1}2x^2\,dx=2\int_0^1 2x^2\,dx=2\left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

495 $f(-x)=4(-x)^3-3(-x)|-x|$

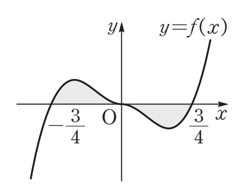
$$=-4x^3+3x|x|=-f(x)$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

함수 $f(x)$는 기함수이다.

$x\ge 0$일 때, $f(x)=4x^3-3x^2=x^2(4x-3)$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 $x\ge 0$인 부분을 그린 후 $x<0$인 부분은 $x\ge 0$인 부분을 원점에 대하여 대칭이동하여 그린다.



따라서 구하는 넓이는

$$2\int_0^{\frac{3}{4}}(-4x^3+3x^2)dx$$
$$=2\left[-x^4+x^3\right]_0^{\frac{3}{4}}$$
$$=2\left(-\frac{81}{256}+\frac{27}{64}\right)$$
$$=2\cdot\frac{27}{256}=\frac{27}{128}$$

답 $\frac{27}{128}$

다른 풀이 $f(x)=4x^3-3x|x|$에서

(i) $x\ge 0$일 때,

$$f(x)=4x^3-3x^2=x^2(4x-3)$$

$f(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=\frac{3}{4}$

$$\therefore \int_0^{\frac{3}{4}}|4x^3-3x^2|dx=\int_0^{\frac{3}{4}}(-4x^3+3x^2)dx$$
$$=\left[-x^4+x^3\right]_0^{\frac{3}{4}}=\frac{27}{256}$$

$0\le x\le\frac{3}{4}$에서 $4x^3-3x^2\le 0$

(ii) $x<0$일 때,

$$f(x)=4x^3+3x^2=x^2(4x+3)$$

$f(x)=0$에서 $\quad x=-\frac{3}{4}$ 또는 $x=0$

$$\therefore \int_{-\frac{3}{4}}^{0} |4x^3+3x^2|\,dx=\int_{-\frac{3}{4}}^{0} (4x^3+3x^2)dx$$

$-\frac{3}{4}\le x\le 0$에서 $4x^3+3x^2\ge 0$

$$=\Big[x^4+x^3\Big]_{-\frac{3}{4}}^{0}=\frac{27}{256}$$

(i), (ii)에서 구하는 넓이는

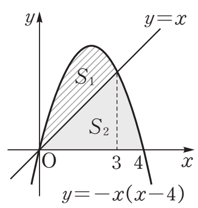
$$\frac{27}{256}+\frac{27}{256}=\frac{27}{128}$$

496 해결 과정 $-x(x-4)=x$에서

$x^2-3x=0,\quad x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$ ● 20%

따라서 곡선 $y=-x(x-4)$와 직선 $y=x$가 오른쪽 그림과 같으므로



$$S_1=\int_0^3 (-x^2+4x-x)dx$$

$$=\int_0^3 (-x^2+3x)dx$$

$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\Big]_0^3=\frac{9}{2}$$ ● 30%

한편 $S_1+S_2=\int_0^4 (-x^2+4x)dx$이므로

$$S_2=\Big[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\Big]_0^4-\frac{9}{2}$$

$$=\frac{32}{3}-\frac{9}{2}=\frac{37}{6}$$ ● 30%

답 구하기 따라서 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\frac{9}{2}}{\frac{37}{6}}=\dfrac{27}{37}$이므로

$p=37,\ q=27$

$\therefore p+q=64$ ● 20%

답 64

497 문제 이해 두 곡선 $y=(n+2)x^{n+1}$, $y=(n+1)x^n$의 교점의 x좌표를 k라 하면

$(n+2)x^{n+1}=(n+1)x^n$에서 $x=\dfrac{n+1}{n+2}$ $\therefore 0<k<1$

$$a=\int_0^k\{(n+1)x^n-(n+2)x^{n+1}\}dx,$$

$$b=\int_k^2\{(n+2)x^{n+1}-(n+1)x^n\}dx$$ ● 40%

해결 과정 $b-a=\int_k^2\{(n+2)x^{n+1}-(n+1)x^n\}dx$

$$-\int_0^k\{(n+1)x^n-(n+2)x^{n+1}\}dx$$

$$=\int_k^2\{(n+2)x^{n+1}-(n+1)x^n\}dx$$

$$+\int_0^k\{(n+2)x^{n+1}-(n+1)x^n\}dx$$

$$=\int_0^2\{(n+2)x^{n+1}-(n+1)x^n\}dx$$

$$=\Big[x^{n+2}-x^{n+1}\Big]_0^2$$

$=2^{n+2}-2^{n+1}\ =4\cdot 2^n-2\cdot 2^n$

$=2\cdot 2^n$ ● 50%

답 구하기 즉 $2\cdot 2^n=16$이므로 $2^n=8$

$\therefore n=3$ ● 10%

답 3

498 $f'(x)=3x^2-3$이므로 $f'(x)=0$에서

$x^2=1\qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=1$

$a<0$이므로 $a=-1$

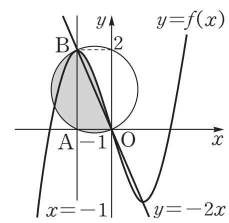
$\therefore f(a)=f(-1)=2\qquad \therefore \mathrm{B}(-1,\ 2)$

이때 삼각형 OAB는 직각삼각형이므로 원 C의 반지름의 길이는

원 C는 삼각형 OAB의 외접원이므로 원 C의 지름의 길이는 직각삼각형 OAB의 빗변 $\overline{\mathrm{OB}}$의 길이와 같다.

$$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+2^2}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}$$



또 직선 OB의 방정식은

$$y=\frac{0-2}{0-(-1)}x=-2x$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\pi\Big(\frac{\sqrt{5}}{2}\Big)^2+\int_{-1}^{0}\{x^3-3x-(-2x)\}dx$$

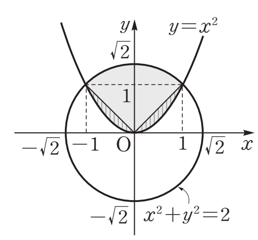
$$=\frac{5}{8}\pi+\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx$$

$$=\frac{5}{8}\pi+\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\Big]_{-1}^{0}$$

$$=\frac{5}{8}\pi+\frac{1}{4}$$

답 $\frac{5}{8}\pi+\frac{1}{4}$

499 두 부등식 $x^2+y^2\le 2,\ y\ge x^2$을 동시에 만족시키는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



$y=x^2$을 $x^2+y^2=2$에 대입하면

$x^4+x^2-2=0$

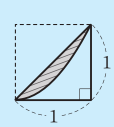
$(x^2+2)(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ ($\because x^2+2>0$)

따라서 구하는 영역의 넓이는

반지름의 길이가 $\sqrt{2}$, 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴의 넓이

$$\pi(\sqrt{2})^2\cdot\frac{90°}{360°}+2\Big(\frac{1}{2}\cdot1\cdot1-\int_0^1 x^2dx\Big)$$



위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이

$$=\frac{\pi}{2}+1-2\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}$$

$$=\frac{2+3\pi}{6}$$

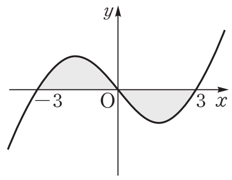
답 ⑤

500 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$가 이 순서대로 공차가 3인 등차수열을 이루므로

$\beta=\alpha+3,\ \gamma=\beta+3$

$\alpha=\beta-3,\ \gamma=\beta+3$

삼차함수 $y=4x^3+ax^2+bx+c$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\beta$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는 곡선 $y=4x(x+3)(x-3)$, 즉 $y=4x^3-36x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$-2\int_0^3 (4x^3-36x)dx=-2\Big[x^4-18x^2\Big]_0^3$$
$$=162$$

답 162

1등급 비밀노트

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 때에는 곡선 $y=f(x)$를 y축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동한 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 것이 간편하다.

501 $x^3-(k+2)x^2+2(k+1)x=2x$에서

$x^3-(k+2)x^2+2kx=0$

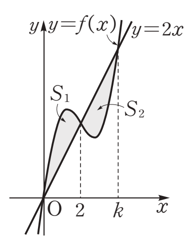
$x(x-2)(x-k)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=k$

$f(x)=x^3-(k+2)x^2+2(k+1)x$로 놓으면

(i) $k>2$일 때,

오른쪽 그림에서 $S_1=S_2$이므로



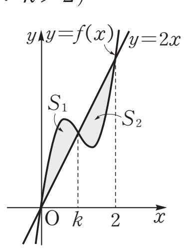
$$\int_0^k \{x^3-(k+2)x^2+2kx\}dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{k+2}{3}x^3+kx^2\right]_0^k=0$$

$k^3(k-4)=0 \qquad \therefore k=4\ (\because k>2)$

(ii) $0<k<2$일 때,

오른쪽 그림에서 $S_1=S_2$이므로



$$\int_0^2 \{x^3-(k+2)x^2+2kx\}dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{k+2}{3}x^3+kx^2\right]_0^2=0$$

$k-1=0 \qquad \therefore k=1$

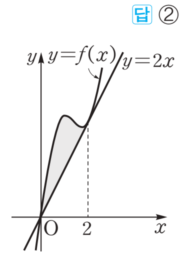
(i), (ii)에서 $k=1$ 또는 $k=4$

따라서 구하는 k의 값의 합은

$1+4=5$

답 ②

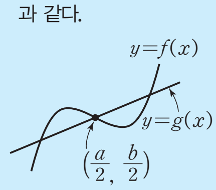
참고 $k=2$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x$가 오른쪽 그림과 같으므로 두 그래프로 둘러싸인 도형은 하나만 존재한다.
따라서 $k>2$, $0<k<2$인 경우만 생각한다.



일품 BOX

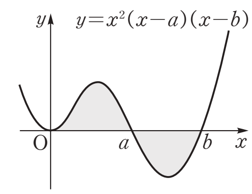
직선 $y=g(x)$는 점 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$를 지나는 직선이므로 직선 $y=g(x)$는 점 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$에 대하여 대칭이다.

$y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



502 $x^2(x-a)(x-b)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=a$ 또는 $x=b$



오른쪽 그림에서 색칠한 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\int_0^b x^2(x-a)(x-b)dx=0$$

$$\int_0^b \{x^4-(a+b)x^3+abx^2\}dx=0$$

$$\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}(a+b)x^4+\frac{1}{3}abx^3\right]_0^b=0$$

$$\frac{1}{5}b^5-\frac{1}{4}(a+b)b^4+\frac{1}{3}ab^4=0$$

$$\frac{1}{5}b-\frac{1}{4}(a+b)+\frac{1}{3}a=0\ (\because b>0)$$

$$\frac{1}{12}a-\frac{1}{20}b=0$$

$$\therefore \frac{b}{a}=\frac{5}{3}$$

답 $\frac{5}{3}$

503 $f(x)+f(a-x)=b$에 x 대신 $\frac{a}{2}-x$를 대입하면

$$f\left(\frac{a}{2}-x\right)+f\left(\frac{a}{2}+x\right)=b$$

$$\therefore \frac{f\left(\frac{a}{2}-x\right)+f\left(\frac{a}{2}+x\right)}{2}=\frac{b}{2}$$

즉 곡선 $y=f(x)$는 점 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$에 대하여 대칭이다.

$g(x)=x-\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$라 하면 직선 $y=g(x)$도 점 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$에 대하여 대칭이므로

$$\int_0^{\frac{a}{2}}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{\frac{a}{2}}^a\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$\therefore \int_0^a\left\{f(x)-\left(x-\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)\right\}dx$$
$$=\int_0^a\{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=0$$

답 ①

1등급 비밀노트

$f\left(\frac{a}{2}-x\right)+f\left(\frac{a}{2}+x\right)=b$일 때, $x=\frac{a}{2}$를 기준으로 같은 값을 더한 값과 뺀 값의 함숫값의 합이 항상 b로 일정하므로 곡선 $y=f(x)$는 점 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$에 대하여 대칭이다.

504 $f(x)=-x^2+4x$로 놓으면

$f'(x)=-2x+4 \qquad \therefore f'(4)=-4$

따라서 점 $(4, 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=-4(x-4)$

$\therefore y=-4x+16$

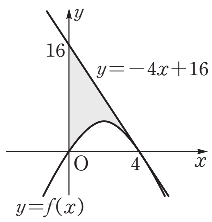
따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^4 \{-4x+16-(-x^2+4x)\}dx$$

$$=\int_0^4 (x^2-8x+16)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-4x^2+16x\right]_0^4$$

$$=\frac{64}{3}$$

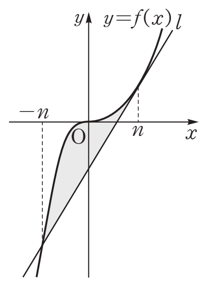


답 ③

505 $f(x)=x(2|x|-x)$에서

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\ge 0) \\ -3x^2 & (x<0)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x>0$일 때,

$f'(x)=2x$

점 $(n,\ f(n))$, 즉 $(n,\ n^2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(n)=2n$이므로 접선 l의 방정식은

$y-n^2=2n(x-n)$, 즉 $y=2nx-n^2$

$x<0$에서 곡선 $y=f(x)$와 접선 l의 교점의 x좌표는

$-3x^2=2nx-n^2$, $\quad 3x^2+2nx-n^2=0$

$(x+n)(3x-n)=0$

$\therefore x=-n\ (\because x<0)$

$\therefore S(n)$

$$=\int_{-n}^0 (-3x^2-2nx+n^2)dx+\int_0^n (x^2-2nx+n^2)dx$$

$$=\left[-x^3-nx^2+n^2x\right]_{-n}^0+\left[\frac{1}{3}x^3-nx^2+n^2x\right]_0^n$$

$$=n^3+\frac{1}{3}n^3=\frac{4}{3}n^3$$

따라서 $[S(n)]=S(n)$을 만족시키는 최소의 자연수 n은 3이므로 $S(n)$의 최솟값은

$S(3)=\frac{4}{3}\cdot 3^3=36$

답 36

1등급 비밀노트

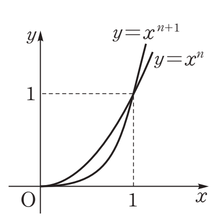
$[S(n)]=S(n)$에서 $\left[\frac{4}{3}n^3\right]=\frac{4}{3}n^3$을 만족시키려면 $\frac{4}{3}n^3$이 정수이어야 한다.
따라서 자연수 n은 3의 배수이어야 한다.

506 ㄱ. $0\le x\le 1$이면

$x^n\ge x^{n+1}$

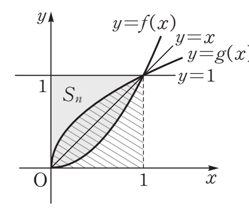
ㄴ. $y=x^n$과 $y=x^{n+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$S_n<S_{n+1}$



ㄷ. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$$S_n=\int_0^1 g(x)dx$$



이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

507 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

$$x(t)=-a+\int_0^t 3t(t-3)(t-4)dt$$

일품 BOX: $t=0$에서의 위치가 $-a$이다.

$$=-a+\int_0^t (3t^3-21t^2+36t)dt$$

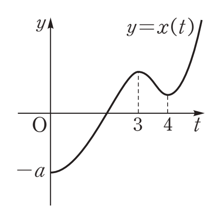
$$=-a+\left[\frac{3}{4}t^4-7t^3+18t^2\right]_0^t$$

$$=\frac{3}{4}t^4-7t^3+18t^2-a$$

$v(t)=0$에서 $\quad t=0$ 또는 $t=3$ 또는 $t=4$

t	0	⋯	3	⋯	4	⋯
$v(t)$	0	+	0	−	0	+
$x(t)$	$-a$	↗	극대	↘	극소	↗

이때 $0\le t\le 4$에서 $x(t)=0$을 만족시키는 t가 한 개 존재하려면 $y=x(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $x(4)>0$이어야 하므로

$32-a>0 \qquad \therefore a<32$

일품 BOX: $x(4)=\frac{3}{4}\cdot 4^4-7\cdot 4^3+18\cdot 4^2-a=32-a$

따라서 자연수 a의 최댓값은 31이다.

답 ⑤

508 해결 과정 10초 동안 물이 흐른 거리는

$$\int_0^{10}\left|\frac{3}{4}t(12-t)\right|dt=\int_0^{10}\left(9t-\frac{3}{4}t^2\right)dt$$

$$=\left[\frac{9}{2}t^2-\frac{1}{4}t^3\right]_0^{10}$$

$$=200$$

● 50%

따라서 10초 동안 흘러나온 물의 양은

일품 BOX: 밑넓이가 S, 높이가 200인 원기둥의 부피와 같다.

$200S$ mL

● 30%

답 구하기 즉 $200S=2000$이므로

일품 BOX: 2 L$=$2000 mL

$S=10$

● 20%

답 10

509 달리는 열차의 속도는 50 m/s이고, 제동을 건 후 열차의 속도가 일정한 비율로 감소하므로 제동을 건 후 t초 후의 속도를 $v(t)$ m/s라 하면

일품 BOX: 180 km/h $=180000$ m/60×60s $=50$ m/s

$v(t)=50-kt$ (k는 상수)

로 놓을 수 있다.

제동을 건 후 열차가 정지할 때까지 걸린 시간을 a초라 하면 $v(a)=0$에서

$50-ka=0 \qquad \therefore a=\frac{50}{k}$

이때 제동을 건 후 열차는 125 m를 더 달린 후 정지하므로 $\displaystyle\int_0^{\frac{50}{k}}(50-kt)dt=125$

$\left[50t-\dfrac{k}{2}t^2\right]_0^{\frac{50}{k}}=125,\qquad \dfrac{1250}{k}=125$

$\therefore k=10$

따라서 열차가 정지할 때까지 걸린 시간은

$a=\dfrac{50}{10}=5$

답 ②

510 ㄱ. 출발 속도가 6이므로 $\quad a=6$

$\therefore x(3)-x(2)$

$=\left\{0+\displaystyle\int_0^3 v(t)dt\right\}-\left\{0+\displaystyle\int_0^2 v(t)dt\right\}$

$=\displaystyle\int_0^3 v(t)dt-\int_0^2 v(t)dt$

$=\displaystyle\int_0^3 v(t)dt+\int_2^0 v(t)dt$

$=\displaystyle\int_2^3 v(t)dt$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot a$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 6=3$

ㄴ. 점 P는 $v(t)=0$, 즉 $t=3$, $t=7$일 때 운동 방향을 바꾸므로 10초 동안 운동 방향을 두 번 바꾼다.

ㄷ. $x(t)=0+\displaystyle\int_0^t v(t)dt$

$=\displaystyle\int_0^1 v(t)dt+\int_1^t v(t)dt$

$\therefore x(t)=x(1)+\displaystyle\int_1^t v(t)dt$

즉 $\displaystyle\int_1^t v(t)dt=0$일 때, 점 P는 $x(1)$인 지점을 지난다.

$5<t<7$일 때, $v(t)=\dfrac{a}{2}t-\dfrac{7}{2}a$이므로

$\displaystyle\int_1^t v(t)dt$

$=1\cdot a+\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot a-\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot a$

$\quad-\dfrac{1}{2}(t-5)\left(a-\dfrac{a}{2}t+\dfrac{7}{2}a\right)$

$=\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{4}(t-5)(t-9)=\dfrac{a}{4}(t^2-14t+47)$

$\dfrac{a}{4}(t^2-14t+47)=0$에서

$t^2-14t+47=0$

$\therefore t=7-\sqrt{2}$ ($\because 5<t<7$)

즉 점 P는 $t=7-\sqrt{2}=5.\times\times\times$일 때 $x(1)$인 지점을 지난다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

일품 BOX

$g(3-t)=g(3+t)$이므로 $y=g(t)$의 그래프는 $t=3$에 대하여 대칭이다.

원점에서 출발하므로 $t=0$에서의 위치가 0이다.

두 점 $(5,\ -a)$, $(7,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\dfrac{0-(-a)}{7-5}(x-7)$

$=\dfrac{a}{2}(x-7)$

$=\dfrac{a}{2}x-\dfrac{7}{2}a$

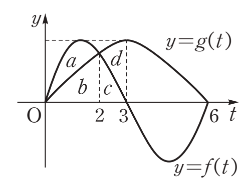
등차수열을 이루는 세 수를

$a-d,\ a,\ a+d$

로 놓고 식을 세운다.

511 ㄱ. $\displaystyle\int_0^6 f(t)dt=0$이므로 점 P는 6초 후 원점에 있다. 그런데 점 Q는 출발 후 운동 방향을 바꾸지 않으므로 6초 후 점 Q가 점 P보다 원점에서 멀리 떨어져 있다.

ㄴ. $\displaystyle\int_0^6|f(t)|dt=\int_0^6 g(t)dt$이므로 두 점 P, Q가 6초 동안 움직인 거리가 같다. 또 $y=f(t)$의 그래프는 점 $(3,\ 0)$에 대하여 대칭이고, $y=g(t)$의 그래프는 직선 $t=3$에 대하여 대칭이므로



$\displaystyle\int_0^3 f(t)dt$

$=\displaystyle\int_0^3 g(t)dt$

따라서 위의 그림과 같이 네 영역의 넓이를 각각 a, b, c, d라 하면

$a+b+c=b+c+d\qquad\therefore a=d$

$\therefore \displaystyle\int_0^2\{f(t)-g(t)\}dt=\int_2^3\{g(t)-f(t)\}dt$

ㄷ. $\displaystyle\int_0^2 f(t)dt>\int_2^3 g(t)dt$이면 ㄴ에서

$a+b>c+d$

$\therefore b>c$ ($\because a=d$)

이때 $\displaystyle\int_3^4|f(t)|dt=\int_2^3 f(t)dt=c$,

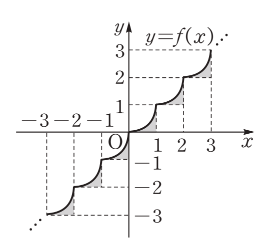
$\displaystyle\int_4^6 g(t)dt=\int_0^2 g(t)dt=b$이므로

$\displaystyle\int_3^4|f(t)|dt<\int_4^6 g(t)dt$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

512 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$a_n=\displaystyle\int_n^{n+1}\{f(x)-n\}dx$

$=\displaystyle\int_0^1 x^2dx$

$=\left[\dfrac{1}{3}x^3\right]_0^1=\dfrac{1}{3}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}n\geq 10$에서

$n\geq 30$

따라서 n의 최솟값은 30이다.

답 30

513 A, B, C가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d라 하면 $A=B-d$, $C=B+d$로 놓을 수 있다.

ㄱ. $A=\int_a^0 f(x)dx=10$이므로

$B=10+d,\ C=10+2d$

$\therefore \int_0^c f(x)dx=-B+C$
$=(-10-d)+(10+2d)$
$=d$

이때 $d\neq 10$이면 $\int_0^c f(x)dx\neq 10$

ㄴ. $A+B+C=(B-d)+B+(B+d)=3B$

즉 $3B=30$이므로 $B=10$

$\therefore \int_a^c f(x)dx=A-B+C$
$=(B-d)-B+(B+d)$
$=B=10$

ㄷ. $\int_a^b f(x)dx=A-B=10$이므로 $d=-10$

$\therefore \int_0^c f(x)dx=-B+C$
$=d$
$=-10$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

514 $f(x)=\int \frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}dx-\int \frac{x^4+x^2+1}{x^2-x+1}dx$

$=\int (x^2-x+1)dx-\int (x^2+x+1)dx$

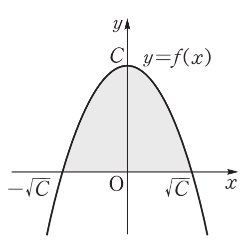
$=\int (-2x)dx=-x^2+C$

$f(x)=-x^2+C=0$에서

$(x+\sqrt{C})(x-\sqrt{C})=0$

$\therefore x=\pm\sqrt{C}$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\int_{-\sqrt{C}}^{\sqrt{C}}(-x^2+C)dx=2\int_0^{\sqrt{C}}(-x^2+C)dx$

$=2\Big[-\frac{1}{3}x^3+Cx\Big]_0^{\sqrt{C}}$

$=\frac{4}{3}C\sqrt{C}$

즉 $\frac{4}{3}C\sqrt{C}=36$이므로 $C=9$

따라서 $f(x)=-x^2+9$이므로

$f(1)=8$

답 8

515 $x^n=x^{n+1}$에서 $x^n(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

두 함수 $y=x^n$, $y=x^{n+1}$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이 S_n은

$S_n=\int_0^1 (x^n-x^{n+1})dx$

$=\Big[\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{1}{n+2}x^{n+2}\Big]_0^1$

$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} S_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$

$+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$

$\sum_{k=1}^{n} S_k<\frac{2}{5}$에서

$\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}<\frac{2}{5}$, $\frac{1}{n+2}>\frac{1}{10}$

$n+2<10$ $\therefore n<8$

따라서 자연수 n의 최댓값은 7이다.

답 ②

516 A지점에서 굴린 공의 t초 후의 속도 $v_1(t)$ m/s는

$v_1(t)=4-t$

이므로 $v_1(t)=0$에서 $t=4$

즉 4초 후 공이 멈추므로 두 지점 A, B 사이의 거리는

$\int_0^4 v_1(t)dt=\int_0^4 (4-t)dt$

$=\Big[4t-\frac{1}{2}t^2\Big]_0^4=8$ (m)

한편 B지점에서 굴린 공의 t초 후의 속도 $v_2(t)$ m/s는

$v_2(t)=a-0.5t=a-\frac{1}{2}t$

이므로 $v_2(t)=0$에서 $t=2a$

즉 $2a$초 후 공이 멈추므로 두 지점 A, B 사이의 거리는

$\int_0^{2a} v_2(t)dt=\int_0^{2a}\left(a-\frac{1}{2}t\right)dt$

$=\Big[at-\frac{1}{4}t^2\Big]_0^{2a}=a^2$ (m)

따라서 $a^2=8$이므로 $a=2\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

답 ④

517 $v(t)=t^2-(a+2)t+2a=(t-2)(t-a)$

이고 출발했을 때의 방향과 반대 방향으로 움직인 시간은 $v(t)\le 0$일 때이므로

$(t-2)(t-a)\le 0$

$\therefore 2\le t\le a$ ($\because a>2$)

점 P가 출발했을 때의 방향과 반대 방향으로 움직인 총 거리가 $\frac{1}{6}$이므로

일품 BOX

$0<x<1$에서
$x^n>x^{n+1}$

x^4+x^2+1
$=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

4초 동안 공이 굴러간 거리가 두 지점 A, B 사이의 거리이다.

$f(x)=-x^2+C$에서 $C\le 0$이면 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나지 않거나 접한다.
$\therefore C>0$

$2a$초 동안 공이 굴러간 거리가 두 지점 A, B 사이의 거리이다.

$C\sqrt{C}=27$, $(\sqrt{C})^3=27$
$\sqrt{C}=3$ $\therefore C=9$

Ⅳ 다항함수의 적분법

$$\int_2^a |t^2-(a+2)t+2a|dt$$
$$=\int_2^a \{-t^2+(a+2)t-2a\}dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{a+2}{2}t^2-2at\right]_2^a$$
$$=\left(\frac{a^3}{6}-a^2\right)-\left(-2a+\frac{4}{3}\right)$$
$$=\frac{a^3}{6}-a^2+2a-\frac{4}{3}$$

즉 $\frac{a^3}{6}-a^2+2a-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}$이므로

$a^3-6a^2+12a-9=0$

$(a-3)(a^2-3a+3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a^2-3a+3>0)$

답 3

1등급 완성하기

▶ 본책 100쪽

518 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)-f(x-h)+f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\cdot 2$

$\quad+\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$

$=2f'(x)+f'(x)$

$=3f'(x)$

즉 $3f'(x)=6x^3+3x$이므로

$f'(x)=2x^3+x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int (2x^3+x)dx$

$=\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$

이때 $f(1)=1$이므로 $\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+C=1$

$\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^2$이므로

$f(2)=10$

답 ⑤

519 $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x^2}=3$에서 $f'(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차함수이다.

또 $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=-2$에서 $x\to 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}f'(x)=0$이므로 $\quad f'(0)=0$

따라서 $f'(x)=3x(x+a)$ (a는 상수)로 놓으면

$\lim_{x\to 0}\frac{3x(x+a)}{x}=\lim_{x\to 0}3(x+a)=3a$

이때 $3a=-2$이므로 $\quad a=-\frac{2}{3}$

즉 $f'(x)=3x^2-2x$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int (3x^2-2x)dx$

$=x^3-x^2+C$

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$f(0)=C=1$

따라서 $f(x)=x^3-x^2+1$이므로

$f(2)=5$

답 5

520 $F(x)=\int f(x)dx=\int (-2x+4)dx$

$=-x^2+4x+C$

이때 모든 실수 x에 대하여 부등식 $F(x)<0$이 성립하려면

$-x^2+4x+C<0, \quad x^2-4x-C>0$

이차방정식 $x^2-4x-C=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(-C)<0, \quad 4+C<0$

$\therefore C<-4$

이때 $F(0)=C$이므로

$F(0)<-4$

답 ①

521 해결 과정 $f'(x)=\begin{cases}2x-2 & (x\ge 2)\\ 2 & (x<2)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}x^2-2x+C_1 & (x\ge 2)\\ 2x+C_2 & (x\le 2)\end{cases}$ ● 40%

$f(-1)=1$이므로 $\quad -2+C_2=1 \quad \therefore C_2=3$

한편 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2-}f(x)=f(2)$이므로

$4-4+C_1=4+3 \quad \therefore C_1=7$ ● 40%

답 구하기 따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+7 & (x\ge 2)\\ 2x+3 & (x\le 2)\end{cases}$이므로

$f(0)+f(3)=3+10=13$ ● 20%

답 13

522 주어진 그래프에서

$f(x)=\begin{cases}-2x+4 & (x\ge 1)\\ 2x & (x\le 1)\end{cases}$

$\therefore F(x)=\int f(x)dx$

$=\begin{cases}-x^2+4x+C_1 & (x\ge 1)\\ x^2+C_2 & (x\le 1)\end{cases}$

일품 BOX

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 $x=2$에서도 미분가능하다.

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

① $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha(\alpha\neq 0)$

➡ $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 같고, $f(x)$와 $g(x)$의 최고차항의 계수의 비는 α이다.

② $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta$, $\lim_{x\to a}g(x)=0$

➡ $\lim_{x\to a}f(x)=0$

주어진 $y=f(x)$의 그래프에서 $F(x)$는 $x=0$에서 극솟값 3을 가지므로

$F(0)=C_2=3$

또 함수 $F(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to 1+}F(x)=\lim_{x\to 1-}F(x)=F(1)$이므로

$-1+4+C_1=1+3$

$\therefore C_1=1$

따라서 $x\geq 1$일 때, $F(x)=-x^2+4x+1$이고 $F(x)$는 $x=2$에서 극대이므로 구하는 극댓값은

$F(2)=5$ 답 ②

523 해결 과정 $f_n(x)=\int(x^n+x^{n+1})dx$

$$=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\frac{1}{n+2}x^{n+2}+C$$

$f_n(0)=0$이므로 $C=0$ ● 30%

따라서 $f_n(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\frac{1}{n+2}x^{n+2}$이므로

$f_n(1)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$ ● 20%

이때 $f_{12}(1)=\frac{1}{13}+\frac{1}{14}>\frac{1}{14}+\frac{1}{14}=\frac{1}{7}$,

$f_{13}(1)=\frac{1}{14}+\frac{1}{15}<\frac{1}{14}+\frac{1}{14}=\frac{1}{7}$이므로

$f_{12}(1)>\frac{1}{7}>f_{13}(1)$ ● 40%

답 구하기 자연수 n에 대하여 $f_n(1)>f_{n+1}(1)$이므로 $f_n(1)>\frac{1}{7}$을 만족시키는 n의 최댓값은 12이다.

● 10%

답 12

524 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2x+1$에서

$f(x)+g(x)=\int(2x+1)dx=x^2+x+C_1$

위의 식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+g(0)=C_1$ $\therefore C_1=1$

$\therefore f(x)+g(x)=x^2+x+1$

또 $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2-2x+2$에서

$f(x)g(x)=\int(3x^2-2x+2)dx$

$=x^3-x^2+2x+C_2$

위의 식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)g(0)=C_2$ $\therefore C_2=-2$

$\therefore f(x)g(x)=x^3-x^2+2x-2$

$=(x-1)(x^2+2)$

이때 $f(0)=2$, $g(0)=-1$이므로

$f(x)=x^2+2$ 답 $f(x)=x^2+2$

일품 BOX

x	…	0	…	2	…
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$F(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

모든 실수 x에 대하여
① $ax^2+bx+c=0$
$\Leftrightarrow a=0,\ b=0,\ c=0$
② ax^2+bx+c
$=a'x^2+b'x+c'$
$\Leftrightarrow a=a',\ b=b',\ c=c'$

정n각형의 둘레의 길이가 l_n이므로 한 변의 길이는 $\frac{l_n}{n}$

525 $\int\{f(x)-g(x)\}dx=f(x)+g(x)+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)-g(x)=f'(x)+g'(x)$ …… ㉠

$g(x)=x^2+x-2$이므로 $g'(x)=2x+1$

따라서 $f(x)$가 일차함수이면 ㉠의 좌변은 이차식, 우변은 일차식이 되고, $f(x)$가 n차$(n\geq 3)$함수이면 ㉠의 좌변은 n차식, 우변은 $(n-1)$차식이 되므로 등식이 성립하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 이차함수이어야 하므로

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

로 놓으면 $f'(x)=2ax+b$

㉠에서

$ax^2+bx+c-(x^2+x-2)=2ax+b+2x+1$

$(a-1)x^2+(b-1)x+c+2=(2a+2)x+b+1$

위의 식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a-1=0,\ b-1=2a+2,\ c+2=b+1$

$\therefore a=1,\ b=5,\ c=4$

따라서 $f(x)=x^2+5x+4$이므로

$f(1)=10$ 답 10

526 원에 내접하는 정n각형은 n개의 합동인 삼각형으로 나누어지고 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot\frac{l_n}{n}\cdot h_n$이므로

$S_n=n\cdot\triangle\text{OAB}=\boxed{\frac{1}{2}l_nh_n}$

이때 $n\to\infty$이면 $h_n\to\boxed{r}$, $l_n\to\boxed{2\pi r}$이므로

$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}l_nh_n$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot r=\pi r^2$

$\therefore$ (가) $\frac{1}{2}l_nh_n$ (나) r (다) $2\pi r$ 답 ③

527 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극대, $x=3$에서 극소이므로

$x<0$에서 $f'(x)>0$,

$0<x<3$에서 $f'(x)<0$,

$x>3$에서 $f'(x)>0$

$\therefore\int_\alpha^\beta|f'(x)|dx$

$=\int_\alpha^0 f'(x)dx-\int_0^3 f'(x)dx+\int_3^\beta f'(x)dx$

$=\Big[f(x)\Big]_\alpha^0-\Big[f(x)\Big]_0^3+\Big[f(x)\Big]_3^\beta$

$=f(0)-f(\alpha)-f(3)+f(0)+f(\beta)-f(3)$

$=-f(\alpha)+2f(0)-2f(3)+f(\beta)$

$=8+2\cdot 3-2\cdot(-4)-1=21$ 답 ③

528 $f'(x)=\begin{cases} 3x^2+x & (x>0) \\ -x^2+2x & (x<0) \end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases} x^3+\frac{1}{2}x^2+C_1 & (x>0) \\ -\frac{1}{3}x^3+x^2+C_2 & (x<0) \end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)$$

$\therefore C_1=C_2$

$f(1)=\frac{5}{2}$이므로

$$1+\frac{1}{2}+C_1=\frac{5}{2} \qquad \therefore C_1=1$$

$$\therefore \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2+1\right)dx+\int_{0}^{1}\left(x^3+\frac{1}{2}x^2+1\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^3+x\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{17}{12}+\frac{17}{12}=\frac{17}{6}$$

답 $\frac{17}{6}$

529 $f(x)=\begin{cases} -x+2 & (0\le x\le 3) \\ x-4 & (3\le x\le 6) \end{cases}$이므로

$$\int_{0}^{6} f(x)dx=\int_{0}^{3} f(x)dx+\int_{3}^{6} f(x)dx$$

$$=\int_{0}^{3}(-x+2)dx+\int_{3}^{6}(x-4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{0}^{3}+\left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_{3}^{6}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$$

이때 $f(x+6)=f(x)$에서 $f(x)$는 주기함수이므로

$$\int_{0}^{6} f(x)dx=\int_{6}^{12} f(x)dx=\int_{12}^{18} f(x)dx$$

$$=\cdots=\int_{2010}^{2016} f(x)dx=3$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{2016}\int_{k-1}^{k} f(x)dx$$

$$=\int_{0}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{2} f(x)dx+\cdots+\int_{2015}^{2016} f(x)dx$$

$$=\int_{0}^{6} f(x)dx+\int_{6}^{12} f(x)dx+\cdots+\int_{2010}^{2016} f(x)dx$$

$$=336\int_{0}^{6} f(x)dx$$

$$=336\cdot 3=1008$$

답 1008

530 (i) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n}+2x}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{2x}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=2$$

(ii) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n}+2x}{x^{2n}+1}=2x$$

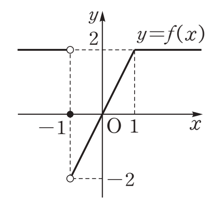
(iii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n}+2x}{x^{2n}+1}=2$$

(iv) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n}+2x}{x^{2n}+1}=0$$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$,

$\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=2$

이므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\neq\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

따라서 $x=1$에서 함수 $f(x)$는 미분가능하지 않다.

> **일품 BOX**
>
> 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 경우
> ① $x=a$에서 불연속인 경우
> ② $x=a$에서 그래프가 꺾인 경우

ㄴ. $\int_{0}^{2} f(x)dx=\int_{0}^{1} 2xdx+\int_{1}^{2} 2dx$

$$=\left[x^2\right]_{0}^{1}+\left[2x\right]_{1}^{2}=3$$

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x>1$인 부분과 $x<-1$인 부분이 y축에 대하여 대칭이므로 $a>2$일 때,

$$\int_{2}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{-2} f(x)dx$$

$$\int_{2}^{a} f(x)dx-\int_{-a}^{-2} f(x)dx=0$$

$$\therefore \int_{2}^{a} f(x)dx+\int_{-2}^{-a} f(x)dx=0$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

531 ㄱ. 함수 $y=f(-x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로

$$\int_{-a}^{a} f(-x)dx=\int_{-a}^{a} f(x)dx=p$$

ㄴ. $G(x)=xg(x)$로 놓으면

$$G(-x)=-xg(-x)$$
$$=-x\{f(-x)+f(x)\}$$
$$=-x\{f(x)+f(-x)\}$$
$$=-xg(x)=-G(x)$$

따라서 $G(x)$, 즉 $xg(x)$는 기함수이므로

$$\int_{-a}^{a} xg(x)dx=0$$

ㄷ. $H(x)=x^2h(x)$로 놓으면

$$H(-x)=(-x)^2h(-x)$$
$$=x^2\{f(-x)-f(x)\}$$
$$=-x^2\{f(x)-f(-x)\}$$
$$=-x^2h(x)=-H(x)$$

따라서 $H(x)$, 즉 $x^2h(x)$는 기함수이므로

$$\int_{-a}^{a} x^2h(x)dx=0$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

532 $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=px+q\ (p\neq 0)$로 놓으면 $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx=0$에서

$$\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)(px+q)dx=0$$

$$p\int_{-1}^{1}(x^3+ax^2+bx)dx+q\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)dx=0$$

이 등식이 임의의 실수 p, q에 대하여 성립해야 하므로

$$\int_{-1}^{1}(x^3+ax^2+bx)dx=2\int_{0}^{1}ax^2dx=0 \quad \cdots ㉠$$

$$\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)dx=2\int_{0}^{1}(x^2+b)dx=0 \quad \cdots ㉡$$

㉠에서 $\int_{0}^{1}ax^2dx=\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1=\frac{a}{3}=0$

$\therefore a=0$

㉡에서 $\int_{0}^{1}(x^2+b)dx=\left[\frac{x^3}{3}+bx\right]_0^1=\frac{1}{3}+b=0$

$\therefore b=-\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=x^2-\frac{1}{3}$이므로

$f(2)=\frac{11}{3}$ 답 $\frac{11}{3}$

533 해결 과정 (i) n이 짝수일 때,

$$\int_{-1}^{1}f_n(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(1+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1})dx$$
$$=2\int_{0}^{1}\{1+3^2x^2+5^2x^4+\cdots+(n-1)^2x^{n-2}\}dx$$
$$=2\left[x+3x^3+5x^5+\cdots+(n-1)x^{n-1}\right]_0^1$$
$$=2\{1+3+5+\cdots+(n-1)\}$$
$$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}\{1+(n-1)\}$$
$$=\frac{n^2}{2}$$

$\frac{n^2}{2}\geq 150$에서 $n^2\geq 300$

이때 $16^2=256$, $18^2=324$이므로

$n\geq 18$ ● 40%

(ii) n이 홀수일 때,

$$\int_{-1}^{1}f_n(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(1+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1})dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(1+3^2x^2+5^2x^4+\cdots+n^2x^{n-1})dx$$
$$=2\left[x+3x^3+5x^5+\cdots+nx^n\right]_0^1$$
$$=2(1+3+5+\cdots+n)$$
$$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}(1+n)=\frac{(n+1)^2}{2}$$

$\frac{(n+1)^2}{2}\geq 150$에서 $(n+1)^2\geq 300$

이때 $(15+1)^2=256$, $(17+1)^2=324$이므로

$n\geq 17$ ● 40%

답 구하기 (i), (ii)에서 $n\geq 17$

따라서 n의 최솟값은 17이다. ● 20%

답 17

일품 BOX

$g(x)=1+3^2x^2+\cdots+(n-1)^2x^{n-2}$, $h(x)=2^2x+4^2x^3+\cdots+n^2x^{n-1}$이라 하면 $\int_{-1}^{1}g(x)dx=2\int_{0}^{1}g(x)dx$, $\int_{-1}^{1}h(x)dx=0$

$g(x)=1+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}$, $h(x)=2^2x+4^2x^3+\cdots+(n-1)^2x^{n-2}$이라 하면 $\int_{-1}^{1}g(x)dx=2\int_{0}^{1}g(x)dx$, $\int_{-1}^{1}h(x)dx=0$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극한값이 존재하지 않는다.

534 $\int_{0}^{x}(x-t)f(t)dt=x^4+4x^3$에서

$$x\int_{0}^{x}f(t)dt-\int_{0}^{x}tf(t)dt=x^4+4x^3$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_{0}^{x}f(t)dt+xf(x)-xf(x)=4x^3+12x^2$$

$$\therefore \int_{0}^{x}f(t)dt=4x^3+12x^2$$

다시 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=12x^2+24x=12x(x+2)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{18}\frac{24}{f(n)}$$
$$=\sum_{n=1}^{18}\frac{2}{n(n+2)}=\sum_{n=1}^{18}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)+\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{20}\right)$$
$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{19}-\frac{1}{20}=\frac{531}{380}$$

답 ②

535 (i) $x>2$일 때,

$$\int_{2}^{x}f(t)dt=x(x-2)=x^2-2x$$

양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=2x-2$

(ii) $x<2$일 때,

$$\int_{2}^{x}f(t)dt=-x(x-2)=-x^2+2x$$

양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=-2x+2$

ㄱ. $f(1)=0$

ㄴ. $\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2+}(2x-2)=2$

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(-2x+2)=-2$

$\therefore \lim_{x\to 2+}f(x)\neq\lim_{x\to 2-}f(x)$

ㄷ. $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (-2x+2)dx=\left[-x^2+2x\right]_0^1=1$

$\int_3^4 f(x)dx=\int_3^4 (2x-2)dx=\left[x^2-2x\right]_3^4=5$

$\therefore \int_0^1 f(x)dx \neq -\int_3^4 f(x)dx$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

536 $f(x)=x-\int_0^1 (3x-2)f(t)dt$

$=x-3x\int_0^1 f(t)dt+2\int_0^1 f(t)dt$

$\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓으면

$f(x)=x-3kx+2k=(1-3k)x+2k$

$\therefore k=\int_0^1 \{(1-3k)t+2k\}dt$

$=\left[\frac{1-3k}{2}t^2+2kt\right]_0^1$

$=\frac{1-3k}{2}+2k=\frac{k+1}{2}$

즉 $k=\frac{k+1}{2}$에서 $k=1$

따라서 $f(x)=-2x+2$이므로

$f(-2)=6$ 답 6

537 ①, ⑤ $\frac{k}{n}$를 x로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 (3+2x)dx$

$=2\int_0^1\left(\frac{3}{2}+x\right)dx$

② $\frac{2k}{n}$를 x로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}$

$=\frac{1}{2}\int_0^2 (3+x)dx$

④ $3+\frac{2k}{n}$를 x로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}$

$=\frac{1}{2}\int_3^5 x\,dx$ 답 ③

538 해결 과정 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{3}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{2}$

$=\frac{3}{2}\int_1^3 f(x)dx$

일품 BOX

$y=x^3$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$\int_0^1 (3+2x)dx$
$=\int_0^1 2\left(\frac{3}{2}+x\right)dx$
$=2\int_0^1\left(\frac{3}{2}+x\right)dx$

$1+\frac{2k}{n}$를 x로 놓으면 $\frac{2}{n}$는 dx이고 $k=1$, $n\to\infty$이면 $x=1$, $k=n$이면 $x=3$이므로 적분 구간은 $[1, 3]$이다.

따라서 $\frac{3}{2}\int_1^3 f(x)dx=6$이므로

$\int_1^3 f(x)dx=4$ ● 50%

한편 $f(x)=f(x+2)$에서 $f(x)$는 주기함수이므로

$\int_1^3 f(x)dx=\int_3^5 f(x)dx=\int_5^7 f(x)dx$

$=\int_7^9 f(x)dx=4$ ● 20%

답 구하기 $\therefore F(9)-F(1)$

$=\int_1^9 f(x)dx$

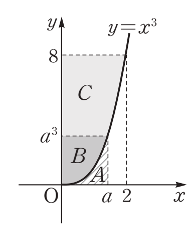
$=\int_1^3 f(x)dx+\int_3^5 f(x)dx+\int_5^7 f(x)dx$

$+\int_7^9 f(x)dx$

$=4\int_1^3 f(x)dx=4\cdot4=16$ ● 30%

답 16

539 오른쪽 그림과 같이 나누어 진 도형의 넓이를 각각 A, B, C라 하면



$S_1=A=\int_0^a x^3dx$

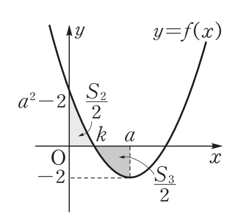
$=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^a=\frac{1}{4}a^4$

또 $B=a\cdot a^3-A=\frac{3}{4}a^4=3A$이므로

$3S_1+S_2=B+C=2\cdot8-\int_0^2 x^3dx$

$=16-\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2=12$ 답 ④

540 $f(k)=0$ $(0<k<a)$인 상수 k에 대하여 함수 $y=f(|x|)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로



$\int_0^k f(x)dx=\frac{S_2}{2}$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=a$에 대하여 대칭이므로

$-\int_k^a f(x)dx=\frac{S_3}{2}$

이때 $S_2=S_3$이므로 $\int_0^a f(x)dx=0$

$f(x)=x^2-2ax+a^2-2$이므로

$\int_0^a f(x)dx=\int_0^a (x^2-2ax+a^2-2)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-2)x\right]_0^a$

$=\frac{1}{3}a(a^2-6)$

따라서 $\frac{1}{3}a(a^2-6)=0$이므로

$a(a+\sqrt{6})(a-\sqrt{6})=0$

$\therefore a=\sqrt{6}$ ($\because a>\sqrt{2}$)

답 $\sqrt{6}$

541 $f'(x)=kx(x-1)$ $(k>0)$로 놓으면

$$\int_0^1 |kx(x-1)|dx=-k\int_0^1 (x^2-x)dx$$
$$=-k\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{6}k$$

즉 $\frac{1}{6}k=1$이므로 $k=6$

$\therefore f'(x)=6x(x-1)=6x^2-6x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int (6x^2-6x)dx$

$=2x^3-3x^2+C$

$f(1)=0$이므로 $-1+C=0$ $\therefore C=1$

$\therefore f(x)=2x^3-3x^2+1=(x-1)^2(2x+1)$

$f(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-\frac{1}{2}}^1 f(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^1 (2x^3-3x^2+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^4-x^3+x\right]_{-\frac{1}{2}}^1$$
$$=\frac{27}{32}$$

답 $\frac{27}{32}$

일품 BOX

$f(x)$가 $x=0$, $x=1$에서 극값을 가지므로 $f'(0)=f'(1)=0$

542 $F(x)=\int_\alpha^x \{f(t)-g(t)\}dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)-g(x)$

$F'(x)=f(x)-g(x)=0$에서

$x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	0	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $F(x)$는 $x=\alpha$, $x=0$에서 극소, $x=\beta$에서 극대이고

$$F(\alpha)=\int_\alpha^\alpha\{f(t)-g(t)\}dt=0,$$
$$F(\beta)=\int_\alpha^\beta\{f(t)-g(t)\}dt=S_1>0,$$
$$F(0)=\int_\alpha^0\{f(t)-g(t)\}dt=S_1-S_2<0$$

($\because S_1<S_2$)

이므로 $y=F(x)$의 그래프의 개형은 ①과 같다.

답 ①

543 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 두 함수의 그래프로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\int_4^6\{g(x)-x\}dx=\int_0^4\{f(x)-x\}dx$$
$$=\int_0^4 f(x)dx-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4$$
$$=9-8=1$$

$$\therefore \int_4^6 g(x)dx=\int_4^6\{g(x)-x\}dx+\frac{1}{2}\cdot(4+6)\cdot2$$
$$=1+10=11$$

답 11

일품 BOX

$\int_0^4\{f(x)-g(x)\}dx$

$=\int_4^6\{g(x)-f(x)\}dx$

이므로

$\int_0^4\{f(x)-x\}dx$

$=\int_0^4\{x-g(x)\}dx$

$=\int_4^6\{g(x)-x\}dx$

$=\int_4^6\{x-f(x)\}dx$

544 문제 이해 t초 후의 점 P의 위치를 $x_P(t)$라 하면

$$x_P(t)=0+\int_0^t(3t-6)dt$$
$$=\left[\frac{3}{2}t^2-6t\right]_0^t$$
$$=\frac{3}{2}t^2-6t$$

t초 후의 점 Q의 위치를 $x_Q(t)$라 하면

$$x_Q(t)=300+\int_0^t(-t+4)dt$$
$$=300+\left[-\frac{1}{2}t^2+4t\right]_0^t$$
$$=-\frac{1}{2}t^2+4t+300$$

● 20%

두 점 P, Q가 만날 때, $x_P(t)=x_Q(t)$이므로

$\frac{3}{2}t^2-6t=-\frac{1}{2}t^2+4t+300$

$t^2-5t-150=0$, $(t+10)(t-15)=0$

$\therefore t=15$ ($\because t>0$)

따라서 두 점 P, Q는 출발한 지 15초 후에 만난다.

● 30%

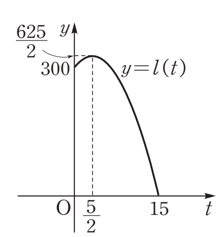
해결 과정 출발한 지 t초 후의 $\overline{PQ}$의 길이를 $l(t)$라 하면

$$l(t)=\left|\left(\frac{3}{2}t^2-6t\right)-\left(-\frac{1}{2}t^2+4t+300\right)\right|$$
$$=|2t^2-10t-300|$$
$$=\left|2\left(t-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{625}{2}\right|$$

● 30%

답 구하기 따라서 $0\le t\le15$에서 $y=l(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 선분 PQ의 길이의 최댓값은 $\frac{625}{2}$이다.

● 20%



답 $\frac{625}{2}$

일품 BOX

점 P는 원점에서 출발하므로 $t=0$일 때의 위치는 0이다.

점 Q는 좌표가 300인 점에서 출발하므로 $t=0$일 때 위치는 300이다.

545 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

$x(2)=12$, $x(6)=4$

본책 104쪽

$x(6)=x(0)+\int_0^6 v(t)dt$에서 $\int_0^6 v(t)dt=0$이므로

$$x(6)=x(0)=4$$

$$\therefore x(2)=x(0)+\int_0^2 v(t)dt=4+2a$$

즉 $4+2a=12$이므로 $\quad a=4$

$$\therefore x(7)=x(0)+\int_0^7 v(t)dt$$
$$=x(0)+\int_6^7 v(t)dt \left(\because \int_0^6 v(t)dt=0\right)$$
$$=4+\frac{1}{2}\cdot1\cdot(-4)=2$$

답 ②

546 전략 $\int_0^k f(x)dx$와 $\int_0^k f(k-x)dx$의 관계를 생각한다.

Step 1 $f(x)+f(k-x)=k$에서

$$\int_0^k \{f(x)+f(k-x)\}dx=\int_0^k k\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 좌변에서

$$\int_0^k \{f(x)+f(k-x)\}dx$$
$$=\int_0^k f(x)dx+\int_0^k f(k-x)dx$$
$$=\int_0^k f(x)dx+\int_{-k}^0 f(-x)dx$$
$$=2\int_0^k f(x)dx$$

Step 2 즉 $2\int_0^k f(x)dx=\int_0^k k\,dx$이므로

$$\int_0^k 2f(x)dx=\int_0^k k\,dx=\Big[kx\Big]_0^k=k^2$$

Step 3 $\therefore \sum_{k=1}^{5}\int_0^k 2f(x)dx=\sum_{k=1}^{5}k^2=\frac{5\cdot6\cdot11}{6}$
$$=55$$

답 55

547 전략 $\int_a^b f(x)dx=k$로 놓고 k를 이용하여 함숫값 사이의 관계식을 구한다.

Step 1 $\int_a^b f(x)dx=k$ (k는 상수)로 놓으면

$$\int_b^c f(x)dx=-k$$

이므로

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b$$
$$=F(b)-F(a)=k \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$\int_b^c f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_b^c$$
$$=F(c)-F(b)=-k \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면 $\quad F(c)-F(a)=0$

$$\therefore F(c)=F(a)$$

일품 BOX

$\int_0^6 v(t)dt$
$=\int_0^3 v(t)dt+\int_3^6 v(t)dt$
$=\left(2a+\frac{1}{2}\cdot1\cdot a\right)$
$\quad-\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot a+2a\right)$
$=0$

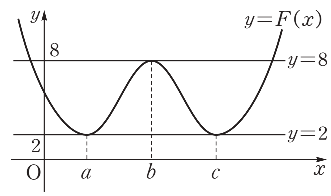
즉 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 점 P의 위치의 변화량은 0이다.

$F'(x)=f(x)$이고, $f(x)$가 삼차함수이므로 $F(x)$는 사차함수이다.

$k>8$일 때, $F(x)=k$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.
$2<k<8$일 때, $F(x)=k$는 서로 다른 네 실근을 갖는다.

$\int_{-k}^0 f(-x)dx$
$=\int_0^k f(x)dx$

Step 2 또 $y=F(x)$는 사차함수이고 $x=a$, $x=c$에서 극소, $x=b$에서 극대이므로 $y=F(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



Step 3 이때 방정식 $F(x)=2$는 서로 다른 두 실근을 갖고 방정식 $F(x)=8$은 서로 다른 세 실근을 가지므로

$$F(a)=F(c)=2,\ F(b)=8$$

$$\therefore \int_a^c |f(x)|dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c \{-f(x)\}dx$$
$$=F(b)-F(a)-F(c)+F(b)$$
$$=8-2-2+8$$
$$=12$$

답 ②

548 전략 $[x+1]=[x]+1$임을 이용하여 $f(x)$와 $f(x+1)$ 사이의 관계식을 구한다.

Step 1 $0\le x<1$일 때, $[x]=0$이므로

$$f(x)=2x-x^2=-(x-1)^2+1$$

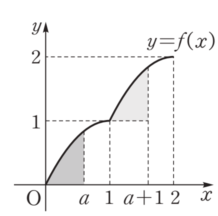
Step 2 또 모든 실수 x에 대하여

$$[x+1]=[x]+1$$

이므로

$$f(x+1)=[x+1]+2\{(x+1)-[x+1]\}$$
$$-\{(x+1)-[x+1]\}^2$$
$$=[x]+1+2(x+1-[x]-1)$$
$$-(x+1-[x]-1)^2$$
$$=[x]+1+2(x-[x])-(x-[x])^2$$
$$=\{[x]+2(x-[x])-(x-[x])^2\}+1$$
$$=f(x)+1$$

Step 3 따라서 $0\le x\le2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_a^{a+1} f(x)dx$$
$$=\int_0^1 f(x)dx+1\cdot\{(a+1)-1\}$$
$$=\int_0^1 (2x-x^2)dx+a$$
$$=\left[x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+a=a+\frac{2}{3}$$

답 ③