만렙 PM

정답과 해설

수학Ⅱ

01 함수의 극한

핵심 유형

	유형01 4	유형02 6	유형03 -1
유형04 $-\frac{8}{7}$	유형05 10	유형06 2	유형07 ①
유형08 2	유형09 $\frac{1}{2}$	유형10 $\frac{1}{20}$	유형11 10
유형12 5	유형13 8	유형14 $\frac{1}{2}$	

핵심 유형 완성하기

001 -1	002 ㄷ, ㄹ	003 ④	004 ㄴ, ㄷ	005 5
006 0	007 -1	008 10	009 ㄱ, ㄷ	010 3
011 ㄴ, ㄷ	012 6	013 4	014 $\frac{1}{4}$	015 2
016 12	017 ㄷ, ㄹ	018 2	019 13	
020 -7	021 ③	022 4	023 ④	024 0
025 ①	026 16	027 ③	028 $-\frac{1}{2}$	029 $\frac{\sqrt{2}}{4}$
030 1	031 ④	032 -1	033 3	034 ②
035 ①	036 $-\frac{1}{2}$	037 5	038 ⑤	039 $\frac{1}{2}$
040 $\frac{3}{2}$	041 ①	042 2	043 -2	044 $\frac{1}{4}$
045 ⑤	046 2	047 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	048 ③	049 12
050 5	051 ①	052 7	053 -66	054 ②
055 12	056 ③	057 5	058 $\frac{3}{5}$	059 5
060 ②	061 4	062 $\frac{1}{2}$	063 2	064 2

핵심 유형 최종 점검하기

1 ㄱ, ㄹ	2 ②	3 2	4 ②	5 -2
6 ㄹ	7 ⑤	8 6	9 2	10 ②
11 6	12 ②	13 4	14 2	15 23
16 ①	17 ④	18 $\frac{3}{2}$	19 $\frac{1}{2}$	20 8

핵심 유형 8~10쪽

유형01 답 4

$\lim_{x\to 3+} f(x)=\lim_{x\to 3+}(kx+3)=3k+3$

$\lim_{x\to 3-} f(x)=\lim_{x\to 3-}(x^2+2x)=15$

$\lim_{x\to 3} f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to 3+} f(x)=\lim_{x\to 3-} f(x)$이어야 하므로

$3k+3=15,\ 3k=12 \qquad \therefore k=4$

유형02 답 6

$\lim_{x\to 0} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)+\lim_{x\to 1-} f(x)=2+3+1=6$

유형03 답 -1

$f(x)=t$라고 하면 $x\to 1+$일 때 $t\to 1-$이므로

$\lim_{x\to 1+} f(f(x))=\lim_{t\to 1-} f(t)=-2$

$x\to 0+$일 때 $t\to -1-$이므로

$\lim_{x\to 0+} f(f(x))=\lim_{t\to -1-} f(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to 1+} f(f(x))+\lim_{x\to 0+} f(f(x))=-2+1=-1$

유형04 답 $-\frac{8}{7}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-5f(x)}{x+3f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2-5\times\frac{f(x)}{x}}{1+3\times\frac{f(x)}{x}}=\frac{2-5\times 2}{1+3\times 2}=-\frac{8}{7}$$

유형05 답 10

$\lim_{x\to 3+}[x]=3,\ \lim_{x\to 3-}[x]=2,\ \lim_{x\to 3-}[3x+6]=14$이므로

$$\lim_{x\to 3+}\frac{[x]+6}{[x]}+\lim_{x\to 3-}\frac{[3x+6]}{[x]}=\frac{3+6}{3}+\frac{14}{2}=10$$

유형06 답 2

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+5x-4}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-x+4)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x+4}{x+1}=2$$

유형07 답 ①

$f(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$이므로

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)}{|x-1|}=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}(x-2)=-1$$
$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)}{|x-2|}=\lim_{x\to 2-}\frac{(x-1)(x-2)}{-(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to 2-}\{-(x-1)\}=-1$$
$$\therefore \lim_{x\to 1+}\frac{f(x)}{|x-1|}+\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)}{|x-2|}=-1+(-1)=-2$$

유형08 답 2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x+2}{\sqrt{4x^2+3}-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{2}{x}}{\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}-\frac{5}{x}}=\frac{4+0}{2-0}=2$$

유형09 답 $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to\infty}(2x-\sqrt{4x^2-2x+3})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-\sqrt{4x^2-2x+3})(2x+\sqrt{4x^2-2x+3})}{2x+\sqrt{4x^2-2x+3}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-(4x^2-2x+3)}{2x+\sqrt{4x^2-2x+3}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{2x+\sqrt{4x^2-2x+3}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}}{2+\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\frac{2-0}{2+2}=\frac{1}{2}$$

유형10 답 $\frac{1}{20}$

$$\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\left(\frac{5}{x+2}-\frac{4}{x+1}\right)=\lim_{x\to3}\left\{\frac{1}{x-3}\times\frac{x-3}{(x+2)(x+1)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{1}{(x+2)(x+1)}=\frac{1}{20}$$

유형11 답 10

$x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(x^2+ax+2)=0$이므로

$1+a+2=0$ $\quad\therefore a=-3$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x-2)=-1$$

$\therefore b=-1$

$\therefore a^2+b^2=(-3)^2+(-1)^2=10$

유형12 답 5

(가)에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

(나)에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$f(x)=(x-1)(2x+a)$ (a는 상수)라고 하면 (나)에서

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x+a)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(2x+a)=a+2$$

$a+2=3$이므로 $a=1$

따라서 $f(x)=(x-1)(2x+1)$이므로

$f(2)=1\times5=5$

유형13 답 8

$$\lim_{x\to1+}\frac{x^3-x^2+7x-7}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x^2+7)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}(x^2+7)=8$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}(x+1)(\sqrt{x+3}+2)=2\times4=8$$

$\therefore \lim_{x\to1+}f(x)=8$

유형14 답 $\frac{1}{2}$

$A(t^2, t)$, $B(t, \sqrt{t})$이므로

$\overline{PA}=|t-t^2|$, $\overline{PB}=|t-\sqrt{t}|$

$t\to1-$일 때 $|t-t^2|=t-t^2$, $|t-\sqrt{t}|=\sqrt{t}-t$이므로

$$\lim_{t\to1-}\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}=\lim_{t\to1-}\frac{|t-\sqrt{t}|}{|t-t^2|}=\lim_{t\to1-}\frac{\sqrt{t}-t}{t-t^2}$$
$$=\lim_{t\to1-}\frac{(\sqrt{t}-t)(\sqrt{t}+t)}{(t-t^2)(\sqrt{t}+t)}=\lim_{t\to1-}\frac{t-t^2}{(t-t^2)(\sqrt{t}+t)}$$
$$=\lim_{t\to1-}\frac{1}{\sqrt{t}+t}=\frac{1}{2}$$

핵심 유형 **완성하기** 11~20쪽

001 답 -1

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(x^2-2k)=4-2k$

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(kx+8)=2k+8$

$\lim_{x\to2}f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)$이어야 하므로

$4-2k=2k+8$, $-4k=4$ $\quad\therefore k=-1$

002 답 ㄷ, ㄹ

ㄱ. $\lim_{x\to0+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to0-}f(x)=\infty$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to0+}f(x)=1$, $\lim_{x\to0-}f(x)=2$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=-1$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값이 존재한다.

ㄹ. $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=3$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값이 존재한다.

따라서 보기 중 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값이 존재하는 것은 ㄷ, ㄹ이다.

003 답 ④

① $\lim_{x\to1-}f(x)=3$

② $\lim_{x\to1+}f(x)=2$

③ $f(2)=2$

④ $\lim_{x\to2+}f(x)=1$, $\lim_{x\to2-}f(x)=2$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

⑤ $\lim_{x\to3}f(x)=0$

따라서 그 값이 존재하지 않는 것은 ④이다.

004 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\lim\limits_{x \to 1+} f(x)=1$, $\lim\limits_{x \to 1-} f(x)=2$이므로 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim\limits_{x \to 2+} f(x)=\lim\limits_{x \to 2-} f(x)=0$이므로 $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$의 값이 존재한다.

ㄷ. $-1<a<1$인 a에 대하여 $\lim\limits_{x \to a+} f(x)=\lim\limits_{x \to a-} f(x)$이므로 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$의 값이 존재한다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

005 답 5

$a \neq \pm 1$인 임의의 실수 a에 대해서는 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$가 존재하므로

(i) $a=1$인 경우

$\lim\limits_{x \to 1+} f(x)=\lim\limits_{x \to 1+} (5x+m)=5+m$

$\lim\limits_{x \to 1-} f(x)=\lim\limits_{x \to 1-} (-x^2+3x)=2$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim\limits_{x \to 1+} f(x)=\lim\limits_{x \to 1-} f(x)$이어야 하므로

$5+m=2 \qquad \therefore m=-3$

(ii) $a=-1$인 경우

$\lim\limits_{x \to -1+} f(x)=\lim\limits_{x \to -1+} (-x^2+3x)=-4$

$\lim\limits_{x \to -1-} f(x)=\lim\limits_{x \to -1-} (kx+4)=-k+4$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim\limits_{x \to -1+} f(x)=\lim\limits_{x \to -1-} f(x)$이어야 하므로

$-4=-k+4 \qquad \therefore k=8$

(i), (ii)에서 $m+k=-3+8=5$

006 답 0

$\lim\limits_{x \to -1+} f(x)=\lim\limits_{x \to -1-} f(x)=-1$이므로 $\lim\limits_{x \to -1} f(x)=-1$

$\therefore \lim\limits_{x \to -1} f(x)+\lim\limits_{x \to 0+} f(x)+\lim\limits_{x \to 1-} f(x)=-1+1+0=0$

007 답 −1

$\lim\limits_{x \to 3-} f(x)=1$이므로 $a=1$

$\lim\limits_{x \to -1+} f(x)=\lim\limits_{x \to -1-} f(x)=0$이므로 $\lim\limits_{x \to -1} f(x)=0$

$\therefore f(a)-\lim\limits_{x \to a-} f(x)+\lim\limits_{x \to -a} f(x)$

$=f(1)-\lim\limits_{x \to 1-} f(x)+\lim\limits_{x \to -1} f(x)=2-3+0=-1$

008 답 10

$\lim\limits_{x \to 2+} f(x)=\lim\limits_{x \to 2+} (5x-2)=8$

$\lim\limits_{x \to 2-} f(x)=\lim\limits_{x \to 2-} (kx+4)=2k+4$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim\limits_{x \to 2+} f(x)=\lim\limits_{x \to 2-} f(x)$이어야 하므로

$8=2k+4$, $2k=4 \qquad \therefore k=2 \qquad \therefore \lim\limits_{x \to 2} f(x)=8$

$\therefore \lim\limits_{x \to 2} f(x)+\lim\limits_{x \to -2+} f(x)+\lim\limits_{x \to -2-} f(x)$

$=8+\lim\limits_{x \to -2+} (2x+4)+\lim\limits_{x \to -2-} (2x^2-6)$

$=8+0+2=10$

009 답 ㄱ, ㄷ

$f(x)=t$라고 하면

ㄱ. $x \to 1-$일 때 $t \to 1+$이므로

$\lim\limits_{x \to 1-} f(f(x))=\lim\limits_{t \to 1+} f(t)=1$

ㄴ. $x \to 2+$일 때 $t=3$이므로

$\lim\limits_{x \to 2+} f(f(x))=f(3)=2$

ㄷ. $x \to 3+$일 때 $t \to 2-$이므로

$\lim\limits_{x \to 3+} f(f(x))=\lim\limits_{t \to 2-} f(t)=2$

ㄹ. $x \to 4-$일 때 $t \to 1+$이므로

$\lim\limits_{x \to 4-} f(f(x))=\lim\limits_{t \to 1+} f(t)=1$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

010 답 3

$f(x)=t$라고 하면 $x \to 2-$일 때 $t \to 1+$이므로

$\lim\limits_{x \to 2-} g(f(x))=\lim\limits_{t \to 1+} g(t)=1$

$g(x)=s$라고 하면 $x \to 1+$일 때 $s \to 1+$이므로

$\lim\limits_{x \to 1+} f(g(x))=\lim\limits_{s \to 1+} f(s)=2$

$\therefore \lim\limits_{x \to 2-} g(f(x))+\lim\limits_{x \to 1+} f(g(x))=1+2=3$

011 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $f(0)=-1$

ㄴ. $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)=\lim\limits_{x \to 0+} (x^2+2)=2$

ㄷ. $f(x)=t$라고 하면 $x \to 0-$일 때 $t \to -1+$이므로

$\lim\limits_{x \to 0-} f(f(x))=\lim\limits_{t \to -1+} f(t)=0$

ㄹ. $f(x)=t$라고 하면 $x \to -1-$일 때 $t \to 0+$이므로

$\lim\limits_{x \to -1-} f(f(x))=\lim\limits_{t \to 0+} f(t)=2$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

012 답 6

$g(0)=2$이므로

$f(g(0))=f(2)=2$

$g(x)=t$라고 하면

$x \to 0+$일 때 $t \to 1+$이므로

$\lim\limits_{x \to 0+} f(g(x))=\lim\limits_{t \to 1+} f(t)=1$

$x \to 0-$일 때 $t \to 1-$이므로

$\lim\limits_{x \to 0-} f(g(x))=\lim\limits_{t \to 1-} f(t)=3$

$\therefore f(g(0))+\lim\limits_{x \to 0+} f(g(x))+\lim\limits_{x \to 0-} f(g(x))=2+1+3=6$

013 답 4

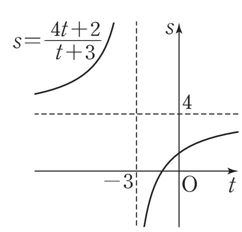
$s=\dfrac{4t+2}{t+3}$라고 하면

$s=\dfrac{4t+2}{t+3}=\dfrac{-10}{t+3}+4$

$t \to -\infty$일 때 $s \to 4+$이므로

$\lim\limits_{t \to -\infty} f\left(\dfrac{4t+2}{t+3}\right)=\lim\limits_{s \to 4+} f(s)$

$=4$



014 답 $\frac{1}{4}$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-3x}{2f(x)-4x}=\lim_{x\to0}\frac{\{f(x)+x\}-4x}{2\{f(x)+x\}-6x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)+x}{x}-4}{2\times\frac{f(x)+x}{x}-6}$$
$$=\frac{5-4}{2\times5-6}=\frac{1}{4}$$

015 답 2

$\lim_{x\to2}f(x)=k$, $\lim_{x\to2}g(x)=2$로 각각 수렴하므로

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)+\{g(x)\}^2}{2f(x)+g(x)}=\frac{k+4}{2k+2}$$

따라서 $\frac{k+4}{2k+2}=1$이므로 $k+4=2k+2$ $\quad\therefore k=2$

016 답 12

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3}\left\{\frac{f(x)-f(3)}{(x-3)(x+3)}\times(x+3)\right\}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x^2-9}\times\lim_{x\to3}(x+3)$$
$$=2\times6=12$$

017 답 ㄷ, ㄹ

주어진 그래프에서

$\lim_{x\to1+}f(x)=1$, $\lim_{x\to1-}f(x)=2$

$\lim_{x\to1+}g(x)=0$, $\lim_{x\to1-}g(x)=0$

ㄱ. $\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=1+0=1$

$\lim_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}=2+0=2$

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}$의 값이 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to1+}\{g(x)-f(x)\}=0-1=-1$

$\lim_{x\to1-}\{g(x)-f(x)\}=0-2=-2$

즉, $\lim_{x\to1}\{g(x)-f(x)\}$의 값이 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=1\times0=0$

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=2\times0=0$

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)g(x)=0$

ㄹ. $\lim_{x\to1+}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{0}{1}=0$, $\lim_{x\to1-}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{0}{2}=0$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)}=0$

따라서 보기 중 극한값이 존재하는 것은 ㄷ, ㄹ이다.

018 답 2

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ $(\alpha\beta\neq0)$라고 하면

$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=6$에서 $\alpha+\beta=6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=2$에서 $\frac{\beta}{\alpha}=2$ $\quad\therefore \beta=2\alpha$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=2$, $\beta=4$

즉, $\lim_{x\to a}f(x)=2$, $\lim_{x\to a}g(x)=4$이므로

$$\lim_{x\to a}\frac{3f(x)g(x)-2}{2f(x)g(x)-5}=\frac{3\times2\times4-2}{2\times2\times4-5}=2$$

019 답 13

$x+2=t$라고 하면 $x\to-2$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x+2)}{x+2}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=-1$$

$x-3=s$라고 하면 $x\to3$일 때 $s\to0$이므로

$$\lim_{x\to3}\frac{g(x-3)}{x-3}=\lim_{s\to0}\frac{g(s)}{s}=3$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{3f(x)-2g(x)}{2f(x)-g(x)+x}=\lim_{x\to0}\frac{3\times\frac{f(x)}{x}-2\times\frac{g(x)}{x}}{2\times\frac{f(x)}{x}-\frac{g(x)}{x}+1}$$
$$=\frac{3\times(-1)-2\times3}{2\times(-1)-3+1}=\frac{9}{4}$$

따라서 $p=4$, $q=9$이므로 $p+q=4+9=13$

020 답 -7

$2f(x)+g(x)=h(x)$라고 하면 $g(x)=h(x)-2f(x)$이고

$\lim_{x\to\infty}h(x)=a$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3g(x)}{3f(x)+2g(x)-1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3\{h(x)-2f(x)\}}{3f(x)+2\{h(x)-2f(x)\}-1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7f(x)-3h(x)}{-f(x)+2h(x)-1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7-3\times\frac{h(x)}{f(x)}}{-1+2\times\frac{h(x)}{f(x)}-\frac{1}{f(x)}}$$
$$=-7\left(\because \lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{f(x)}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=0\right)$$

021 답 ③

ㄱ. $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}\{2f(x)+g(x)\}=\beta$ (α, β는 실수)라고 하면

$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\{2f(x)+g(x)-2f(x)\}=\beta-2\alpha$

ㄴ. $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha$, $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\beta$ (α, β는 실수)

라고 하면

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)+g(x)\}+\{f(x)-g(x)\}}{2}$$
$$=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)+g(x)\}-\{f(x)-g(x)\}}{2}$$
$$=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

ㄷ. [반례] $f(x)=g(x)=\begin{cases}1 & (x\geq a)\\-1 & (x<a)\end{cases}$이면

$f(x)-g(x)=0$이므로 $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=0$이지만

$\lim_{x\to a}f(x)$와 $\lim_{x\to a}g(x)$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

022 답 4

$\lim_{x\to2+}[x]=2$, $\lim_{x\to2+}[x+2]=4$, $\lim_{x\to2-}[x]=1$이므로

$$\lim_{x\to2+}\frac{[x]+2}{[x+2]}+\lim_{x\to2-}\frac{[x]^2+x}{[x]}=\frac{2+2}{4}+\frac{1^2+2}{1}=4$$

023 답 ④

① $\lim_{x\to0-}\frac{[x-1]}{x-1}=\frac{-2}{-1}=2$

② $\lim_{x\to0+}\frac{x-1}{[x-1]}=\frac{-1}{-1}=1$

③ $\lim_{x\to0-}\frac{[x-2]}{x-2}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$

④ $x\to-2-$일 때 $-\frac{5}{2}<x<-2$에서 $-5<2x<-4$이므로

$\lim_{x\to-2-}[2x]=-5$

$\therefore \lim_{x\to-2-}\frac{[2x]}{[x+2]}=\frac{-5}{-1}=5$

⑤ $\lim_{x\to-2+}\frac{[x-3]}{x-3}=\frac{-5}{-5}=1$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

024 답 0

$\lim_{x\to2+}[x]=2$, $\lim_{x\to2-}[x]=1$이므로

$$\lim_{x\to2+}\frac{a[x]^2+2[x]}{x}=\frac{a\times2^2+2\times2}{2}=2a+2$$

$$\lim_{x\to2-}\frac{a[x]^2+2[x]}{x}=\frac{a\times1^2+2\times1}{2}=\frac{a+2}{2}$$

이때 $\lim_{x\to2}\frac{a[x]^2+2[x]}{x}$의 값이 존재하고 그 값이 b이므로

$2a+2=\frac{a+2}{2}=b$ $\quad\therefore a=-\frac{2}{3},\ b=\frac{2}{3}$

$\therefore a+b=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=0$

025 답 ①

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+2)(x-1)}{x-3}=\frac{1}{2}$$

따라서 $p=2$, $q=1$이므로 $p+q=2+1=3$

026 답 16

$$\lim_{x\to2}\frac{4x-8}{\sqrt{x+2}-2}=\lim_{x\to2}\frac{(4x-8)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{4(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}4(\sqrt{x+2}+2)=16$$

027 답 ③

$$\lim_{x\to2}\frac{x^4-16}{(x^2-4)f(x)}=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-4)(x^2+4)}{(x^2-4)f(x)}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+4}{f(x)}=\frac{8}{k}$$

따라서 $\frac{8}{k}=1$이므로 $k=8$

028 답 $-\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\frac{2}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}(x-1)}{2-2x}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}(x-1)}{-2(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\left(-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

029 답 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4+2x}-\sqrt{4+x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{4+2x}-\sqrt{4+x})(\sqrt{4+2x}+\sqrt{4+x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})(\sqrt{4+2x}+\sqrt{4+x})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{2x(\sqrt{4+2x}+\sqrt{4+x})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{2(\sqrt{4+2x}+\sqrt{4+x})}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

030 답 1

$f(x)=x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$이므로

$$\lim_{x\to-2-}\frac{f(x)}{|x+2|}=\lim_{x\to-2-}\frac{(x+2)(x-4)}{-(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to-2-}\{-(x-4)\}=6$$

$$\lim_{x\to4+}\frac{|x-4|}{f(x)}=\lim_{x\to4+}\frac{x-4}{(x+2)(x-4)}$$
$$=\lim_{x\to4+}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore \lim_{x\to-2-}\frac{f(x)}{|x+2|}\times\lim_{x\to4+}\frac{|x-4|}{f(x)}=6\times\frac{1}{6}=1$$

031 답 ④

① $\lim_{x\to-2+}\frac{|6+3x|}{x+2}=\lim_{x\to-2+}\frac{6+3x}{x+2}=\lim_{x\to-2+}\frac{3(x+2)}{x+2}=3$

② $\lim_{x\to1-}\frac{x-1}{|2-2x|}=\lim_{x\to1-}\frac{x-1}{2-2x}$

$=\lim_{x\to1-}\frac{x-1}{-2(x-1)}=-\frac{1}{2}$

③ $\lim_{x\to0+}\frac{|2x^3|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{2x^3}{x}=\lim_{x\to0+}2x^2=0$

$\lim_{x\to0-}\frac{|2x^3|}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{-2x^3}{x}=\lim_{x\to0-}(-2x^2)=0$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{|2x^3|}{x}=0$

④ $\lim_{x\to1+}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to1+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}(x+1)=2$

$\lim_{x\to1-}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to1-}\frac{x^2-1}{-(x-1)}=\lim_{x\to1-}\frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)}$

$=\lim_{x\to1-}\{-(x+1)\}=-2$

즉, $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{|x-1|}$의 값은 존재하지 않는다.

⑤ $\lim_{x\to3+}\frac{(x-3)^2}{|x-3|}=\lim_{x\to3+}\frac{(x-3)^2}{x-3}=\lim_{x\to3+}(x-3)=0$

$\lim_{x\to3-}\frac{(x-3)^2}{|x-3|}=\lim_{x\to3-}\frac{(x-3)^2}{-(x-3)}=\lim_{x\to3-}\{-(x-3)\}=0$

$\therefore \lim_{x\to3}\frac{(x-3)^2}{|x-3|}=0$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

032 답 -1

$$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}\frac{x^3-x}{|x^2-1|}=\lim_{x\to-1+}\frac{x(x^2-1)}{-(x^2-1)}$$
$$=\lim_{x\to-1+}(-x)=1$$

$\therefore a=1$

$$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}\frac{x^3-x}{|x^2-1|}=\lim_{x\to1-}\frac{x(x^2-1)}{-(x^2-1)}$$
$$=\lim_{x\to1-}(-x)=-1$$

$\therefore b=-1$

$\therefore ab=1\times(-1)=-1$

033 답 3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{4x-\sqrt{9x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{4-\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}=\frac{3-0}{4-3}=3$$

034 답 ②

ㄱ. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+4}{x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{5}{x^2}}=\frac{0}{1}=0$

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^2}{-x^2+3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-4x+1}{-x^2+3x+2}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{-1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{4}{-1}=-4$$

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{8x^2+5x}+4}{\sqrt{2x^2+3}-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{8+\frac{5}{x}}+\frac{4}{x}}{\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-1}$

$$=\frac{2\sqrt{2}+0}{\sqrt{2}-1}=4+2\sqrt{2}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ이다.

035 답 ①

$x=-t$라고 하면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{4x^2+1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-6t}{\sqrt{t^2+3t}+\sqrt{4t^2+1}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-6}{\sqrt{1+\frac{3}{t}}+\sqrt{4+\frac{1}{t^2}}}$$
$$=\frac{-6}{1+2}=-2$$

036 답 $-\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-f(x)}{3x+f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\{f(x)-3x\}-x}{\{f(x)-3x\}+6x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{f(x)-3x}{2x+1}-\frac{x}{2x+1}}{\frac{f(x)-3x}{2x+1}+\frac{6x}{2x+1}}$$
$$=\frac{-\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3x}{2x+1}-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{x}}}{\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3x}{2x+1}+\lim_{x\to\infty}\frac{6}{2+\frac{1}{x}}}$$
$$=\frac{-2-\frac{1}{2}}{2+\frac{6}{2}}=-\frac{1}{2}$$

037 답 5

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{xg(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{f(x)}{2x^2-x+3}\times\frac{2x+1}{g(x)}\times\frac{2x^2-x+3}{x(2x+1)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x^2-x+3}\times\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{g(x)}{2x+1}}\times\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{1}{x}}$$
$$=10\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{2}=5$$

038 답 ⑤

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+4x}-3x+1)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\{\sqrt{9x^2+4x}-(3x-1)\}\{\sqrt{9x^2+4x}+(3x-1)\}}{\sqrt{9x^2+4x}+(3x-1)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{10x-1}{\sqrt{9x^2+4x}+3x-1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{10-\frac{1}{x}}{\sqrt{9+\frac{4}{x}}+3-\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{10}{3+3}=\frac{5}{3}$$

039 답 $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x})}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}{4x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{4}$$
$$=\frac{1+1}{4}=\frac{1}{2}$$

040 답 $\frac{3}{2}$

$[4x^2+6x]=4x^2+6x-h$ $(0\le h<1)$라고 하면

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{[4x^2+6x]}-2x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+6x-h}-2x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+6x-h}-2x)(\sqrt{4x^2+6x-h}+2x)}{\sqrt{4x^2+6x-h}+2x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x-h}{\sqrt{4x^2+6x-h}+2x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{h}{x}}{\sqrt{4+\frac{6}{x}-\frac{h}{x^2}}+2}$$
$$=\frac{6}{2+2}=\frac{3}{2}$$

041 답 ①

$$\lim_{x\to-2}\frac{1}{x^2-4}\left(2-\frac{2}{x+3}\right)$$
$$=\lim_{x\to-2}\left\{\frac{1}{(x+2)(x-2)}\times\frac{2(x+2)}{x+3}\right\}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{2}{(x-2)(x+3)}=-\frac{1}{2}$$

042 답 2

$$\lim_{x\to2}(\sqrt{x^2-3}-1)\left(2+\frac{1}{x-2}\right)$$
$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{(\sqrt{x^2-3}-1)(\sqrt{x^2-3}+1)}{\sqrt{x^2-3}+1}\times\frac{2x-3}{x-2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to2}\left(\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-3}+1}\times\frac{2x-3}{x-2}\right)$$
$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{(x+2)(x-2)}{\sqrt{x^2-3}+1}\times\frac{2x-3}{x-2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(2x-3)}{\sqrt{x^2-3}+1}=2$$

043 답 -2

$x=-t$라고 하면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-4x}}+1\right)=\lim_{t\to\infty}\left\{-t\left(\frac{-t}{\sqrt{t^2+4t}}+1\right)\right\}$$
$$=\lim_{t\to\infty}t\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+4t}}-1\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(t\times\frac{t-\sqrt{t^2+4t}}{\sqrt{t^2+4t}}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left\{t\times\frac{(t-\sqrt{t^2+4t})(t+\sqrt{t^2+4t})}{\sqrt{t^2+4t}(t+\sqrt{t^2+4t})}\right\}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t\times(-4t)}{\sqrt{t^2+4t}(t+\sqrt{t^2+4t})}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{1+\frac{4}{t}}\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{t}}\right)}$$
$$=\frac{-4}{1\times(1+1)}=-2$$

044 답 $\frac{1}{4}$

$[x]=x-h$ $(0\le h<1)$라고 하면

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{4+\frac{[x]}{x^2}}-2\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{4+\frac{x-h}{x^2}}-2\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x-h}-2x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+x-h}-2x)(\sqrt{4x^2+x-h}+2x)}{\sqrt{4x^2+x-h}+2x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x-h}{\sqrt{4x^2+x-h}+2x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{h}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{h}{x^2}}+2}$$
$$=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

045 답 ⑤

$x\to2$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}(x^2+3x+a)=0$이므로

$4+6+a=0$ $\quad\therefore a=-10$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+3x+a}{4-2x}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+3x-10}{4-2x}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x+5)(x-2)}{-2(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x+5}{-2}=-\frac{7}{2}$$

따라서 $b=-\frac{7}{2}$이므로

$$ab=-10\times\left(-\frac{7}{2}\right)=35$$

046 답 2

$x\to-2$일 때 (분자) $\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-2}(x^2+b)=0$이므로

$4+b=0$ $\quad\therefore b=-4$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+(a+2)x+2a}{x^2+b}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+(a+2)x+2a}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x+a)}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{x+a}{x-2}=\frac{-2+a}{-4}$$

따라서 $\frac{-2+a}{-4}=5$이므로

$-2+a=-20$ $\quad\therefore a=-18$

$\therefore a-5b=-18-5\times(-4)=2$

047 답 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x \to -1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x \to -1}(\sqrt{2x+a}-\sqrt{x+3})=0$이므로

$\sqrt{a-2}-\sqrt{2}=0 \qquad \therefore a=4$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \to -1}\frac{\sqrt{2x+a}-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x \to -1}\frac{\sqrt{2x+4}-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x \to -1}\frac{(\sqrt{2x+4}-\sqrt{x+3})(\sqrt{2x+4}+\sqrt{x+3})}{(x^2-1)(\sqrt{2x+4}+\sqrt{x+3})}$$
$$=\lim_{x \to -1}\frac{x+1}{(x+1)(x-1)(\sqrt{2x+4}+\sqrt{x+3})}$$
$$=\lim_{x \to -1}\frac{1}{(x-1)(\sqrt{2x+4}+\sqrt{x+3})}=-\frac{\sqrt{2}}{8}$$

따라서 $b=-\frac{\sqrt{2}}{8}$이므로

$$ab=4\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

048 답 ③

$x \to 2$일 때 (분자) $\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

(분모) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 2}(\sqrt{x^2+a}-b)=0$이므로

$\sqrt{4+a}-b=0 \qquad \therefore b=\sqrt{4+a} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+a}-b}=\lim_{x \to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{4+a}}$$
$$=\lim_{x \to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a})}{(\sqrt{x^2+a}-\sqrt{4+a})(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a})}$$
$$=\lim_{x \to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a})}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x \to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a})}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\lim_{x \to 2}\frac{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a}}{x+2}=\frac{\sqrt{4+a}}{2}$$

따라서 $\frac{\sqrt{4+a}}{2}=2$이므로

$\sqrt{4+a}=4 \qquad \therefore a=12$

이를 ㉠에 대입하면 $b=4$

$\therefore a+b=12+4=16$

049 답 12

주어진 식에서

$$\lim_{x \to 0}\frac{1}{x}\left\{a-\frac{b}{(x+2)^2}\right\}=\lim_{x \to 0}\frac{a(x+2)^2-b}{x(x+2)^2}=4 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$x \to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 0}\{a(x+2)^2-b\}=0$이므로

$4a-b=0 \qquad \therefore b=4a \qquad \cdots\cdots$ ㉡

이를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x \to 0}\frac{1}{x}\left\{a-\frac{b}{(x+2)^2}\right\}=\lim_{x \to 0}\frac{a(x+2)^2-4a}{x(x+2)^2}$$
$$=\lim_{x \to 0}\frac{ax(x+4)}{x(x+2)^2}$$
$$=\lim_{x \to 0}\frac{a(x+4)}{(x+2)^2}=a$$

따라서 $a=4$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$b=16$

$\therefore b-a=16-4=12$

050 답 5

$b\le 0$이면 $\lim_{x \to \infty}(\sqrt{x^2+ax+2}-bx)=\infty$이므로

$b>0$

주어진 식의 좌변에서

$$\lim_{x \to \infty}(\sqrt{x^2+ax+2}-bx)$$
$$=\lim_{x \to \infty}\frac{(\sqrt{x^2+ax+2}-bx)(\sqrt{x^2+ax+2}+bx)}{\sqrt{x^2+ax+2}+bx}$$
$$=\lim_{x \to \infty}\frac{(1-b^2)x^2+ax+2}{\sqrt{x^2+ax+2}+bx} \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠의 극한값이 존재하므로

$1-b^2=0$, $(1-b)(1+b)=0$

$\therefore b=1$ ($\because b>0$)

이를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x \to \infty}(\sqrt{x^2+ax+2}-bx)=\lim_{x \to \infty}\frac{ax+2}{\sqrt{x^2+ax+2}+x}$$
$$=\lim_{x \to \infty}\frac{a+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}$$
$$=\frac{a}{1+1}=\frac{a}{2}$$

따라서 $\frac{a}{2}=3$이므로 $a=6$

$\therefore a-b=6-1=5$

051 답 ①

(가)에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 -3인 이차함수이다.

(나)에서 $x \to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 0}f(x)=0$이므로

$f(0)=0$

$f(x)=-3x(x+a)$ (a는 상수)라고 하면 (나)의 좌변에서

$$\lim_{x \to 0}\frac{f(x)}{x^2-x}=\lim_{x \to 0}\frac{-3x(x+a)}{x(x-1)}$$
$$=\lim_{x \to 0}\frac{-3(x+a)}{x-1}=3a$$

따라서 $3a=1$이므로 $a=\frac{1}{3}$

$f(x)=-3x\left(x+\frac{1}{3}\right)=-3x^2-x$이므로

$f(-1)+f(1)=(-3+1)+(-3-1)=-6$

052 답 7

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{2x+1}=2$에서 $f(x)-x^3$은 최고차항의 계수가 4인 일차함수이므로 $f(x)-x^3=4x+a$ (a는 상수)라고 하면

$f(x)=x^3+4x+a$

$\lim_{x\to 0}f(x)=-5$에서

$\lim_{x\to 0}(x^3+4x+a)=-5 \qquad \therefore a=-5$

따라서 $f(x)=x^3+4x-5$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+4x-5}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+5)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+5)=7$$

053 답 -66

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$에서 $x\to 1$일 때 (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to 1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{f(x)}=2$에서 $x\to 2$일 때 (분자) $\to$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to 2}f(x)=0$이므로 $f(2)=0$

$f(x)$는 삼차함수이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(ax+b)$ (a, b는 상수)라고 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)(ax+b)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-2)(ax+b)=-a-b$$

따라서 $-a-b=1$이므로 $a+b=-1$ …… ㉠

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{f(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-1)(x-2)(ax+b)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-1)(ax+b)}=\frac{1}{2a+b}$$

따라서 $\frac{1}{2a+b}=2$이므로 $4a+2b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{5}{2}$

$f(x)=(x-1)(x-2)\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}\right)$이므로

$f(-2)=-3\times(-4)\times\left(-\frac{11}{2}\right)=-66$

054 답 ②

$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}=\frac{1}{3}$에서 $x\to 0$일 때 (분자) $\to$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to 0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$

$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(x)}=-1$에서 $x\to 1$일 때 (분자) $\to$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to 1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$f(x)$는 삼차함수이므로 $f(x)=x(x-1)(ax+b)$ (a, b는 상수)라고 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(x-1)(ax+b)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x-1)(ax+b)}=-\frac{1}{b}$$

따라서 $-\frac{1}{b}=\frac{1}{3}$이므로 $b=-3$ …… ㉠

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x(x-1)(ax+b)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x(ax+b)}=\frac{1}{a+b}$$

따라서 $\frac{1}{a+b}=-1$이므로 $a+b=-1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a-3=-1 \qquad \therefore a=2$

$f(x)=x(x-1)(2x-3)$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)}{2x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)x(2x-1)}{x(2x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)(2x-1)}{2x+1}=-1$$

055 답 12

$f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면 나머지가 $g(x)$이므로

$f(x)=(x-2)^2Q(x)+g(x)$ …… ㉠

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x^2-4}=3$에서 $x\to 2$일 때 (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to 2}f(x)=0$이므로 $f(2)=0$

이때 ㉠에서 $f(2)=g(2)=0$이므로 $g(x)=a(x-2)$ (a는 상수)라고 하면

$f(x)=(x-2)^2Q(x)+a(x-2)$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2Q(x)+a(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)Q(x)+a}{x+2}=\frac{a}{4}$$

따라서 $\frac{a}{4}=3$이므로

$a=12$

$g(x)=12(x-2)$이므로

$g(3)=12$

056 답 ③

$$\lim_{x\to 2+}\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2+}\frac{(x+3)(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 2+}\frac{x+3}{x-1}=5$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{2x^2-3x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{(2x+1)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}(2x+1)=5$$

$\therefore \lim_{x\to 2+}f(x)=5$

057 답 5

$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+3}{4x^2}=\frac{3}{2}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+1}{2x^2}=\frac{3}{2}$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{3}{2}$

따라서 $p=2$, $q=3$이므로

$p+q=2+3=5$

058 답 $\frac{3}{5}$

$x^3+3x^2-4<f(x)<x^3+3x^2+7$에서

$3x^2-4<f(x)-x^3<3x^2+7$이므로

$\frac{3x^2-4}{5x^2+1}<\frac{f(x)-x^3}{5x^2+1}<\frac{3x^2+7}{5x^2+1}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4}{5x^2+1}=\frac{3}{5}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+7}{5x^2+1}=\frac{3}{5}$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{5x^2+1}=\frac{3}{5}$

059 답 5

$2x^2+1<\frac{x}{f(x)}<2x^2+x+3$에서 $x>0$이므로

$\frac{2x^2+1}{x^2}<\frac{1}{xf(x)}<\frac{2x^2+x+3}{x^2}$

$\therefore \frac{2x^2+1}{10x^2}<\frac{1}{10xf(x)}<\frac{2x^2+x+3}{10x^2}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{10x^2}=\frac{1}{5}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+3}{10x^2}=\frac{1}{5}$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{10xf(x)}=\frac{1}{5}$

$\therefore \lim_{x\to\infty}10xf(x)=5$

060 답 ②

$\mathrm{P}(t, \sqrt{3t})$, $\mathrm{H}(t, 0)$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+(\sqrt{3t})^2}=\sqrt{t^2+3t}$

$\overline{\mathrm{OH}}=t$

따라서 $f(t)=\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{t^2+3t}-t$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}f(t)&=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+3t}-t)\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+3t}-t)(\sqrt{t^2+3t}+t)}{\sqrt{t^2+3t}+t}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{3t}{\sqrt{t^2+3t}+t}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{t}}+1}\\&=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

061 답 4

$\mathrm{A}(2, a^2)$, $\mathrm{B}(a, 4)$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=|2-a|$, $\overline{\mathrm{PB}}=|4-a^2|$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{a\to2-}\frac{\overline{\mathrm{PB}}}{\overline{\mathrm{PA}}}&=\lim_{a\to2-}\frac{|4-a^2|}{|2-a|}=\lim_{a\to2-}\frac{(2+a)(2-a)}{2-a}\\&=\lim_{a\to2-}(2+a)=4\end{aligned}$$

062 답 $\frac{1}{2}$

중심이 원점이고 반지름의 길이가 a인 원의 방정식은

$x^2+y^2=a^2$

이 원과 직선 $y=2ax$의 제1사분면에서의 교점 P의 x좌표는

$x^2+(2ax)^2=a^2$, $x^2=\frac{a^2}{4a^2+1}$

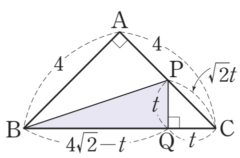
$\therefore x=\frac{a}{\sqrt{4a^2+1}}$ ($\because x>0$)

따라서 $f(a)=\frac{a}{\sqrt{4a^2+1}}$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty}f(a)&=\lim_{a\to\infty}\frac{a}{\sqrt{4a^2+1}}\\&=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{a^2}}}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

063 답 2

오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이므로



$\overline{\mathrm{BC}}=4\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{QC}}=t$라고 하면

$\overline{\mathrm{BQ}}=4\sqrt{2}-t$

$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{QCP}$이므로 삼각형 QCP도 직각이등변삼각형이다.

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=t$, $\overline{\mathrm{PC}}=\sqrt{2}t$

따라서 삼각형 BPQ의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}t(4\sqrt{2}-t)$

$\mathrm{P}\to\mathrm{C}$이면 $\sqrt{2}t\to0+$, 즉 $t\to0+$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{C}}\frac{S}{\overline{\mathrm{PC}}}&=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{2}t(4\sqrt{2}-t)}{\sqrt{2}t}\\&=\lim_{t\to0+}\left(2-\frac{\sqrt{2}}{4}t\right)=2\end{aligned}$$

064 답 2

농도가 15 %인 1000 L의 소금물에 들어 있는 소금의 양은

$\frac{15}{100}\times1000=150(\mathrm{kg})$

1 L당 20 g의 소금이 들어 있는 소금물을 1시간에 5 L씩 섞으므로 1시간당 섞이는 소금의 양은

$20\times5=100(\mathrm{g})$, 즉 0.1 kg이다.

t시간 후의 소금물의 농도 $f(t)$ %는

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{150+0.1t}{1000+5t}\times100\\&=\frac{15000+10t}{1000+5t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{t\to\infty}f(t)&=\lim_{t\to\infty}\frac{15000+10t}{1000+5t}\\&=\frac{10}{5}=2\end{aligned}$$

1 답 ㄱ, ㄹ

유형 01 함수의 극한값의 존재

ㄱ. $\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1-} f(x) = 0$이므로 $\lim_{x \to -1} f(x)$의 값이 존재한다.

ㄴ. $\lim_{x \to 0+} f(x) = -1$, $\lim_{x \to 0-} f(x) = 1$이므로 $\lim_{x \to 0} f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x \to 1+} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 1-} f(x) = 0$이므로 $\lim_{x \to 1} f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

ㄹ. $\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2-} f(x) = 0$이므로 $\lim_{x \to 2} f(x)$의 값이 존재한다.

따라서 보기 중 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

2 답 ②

유형 02 함수의 극한값 구하기

① $\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1-} f(x) = 2$이므로

$\lim_{x \to -1} f(x) = 2$

② $\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0-} f(x) = 3$이므로

$\lim_{x \to 0} f(x) = 3$

③ $f(0) = 0$

④ $\lim_{x \to 1-} f(x) = 2$

⑤ $\lim_{x \to 1+} f(x) = 1$

따라서 옳은 것은 ②이다.

3 답 2

유형 03 합성함수의 극한

$f(x) = t$라고 하면

$x \to -1-$일 때 $t \to -1+$이므로

$\lim_{x \to -1-} g(f(x)) = \lim_{t \to -1+} g(t) = \lim_{t \to -1+} (t^2 - 2t) = 3$

$x \to 1-$일 때 $t \to 1+$이므로

$\lim_{x \to 1-} g(f(x)) = \lim_{t \to 1+} g(t) = \lim_{t \to 1+} (t^2 - 2t) = -1$

$\therefore \lim_{x \to -1-} g(f(x)) + \lim_{x \to 1-} g(f(x)) = 3 + (-1) = 2$

4 답 ②

유형 04 함수의 극한에 대한 성질

$$\lim_{x \to 1} \frac{4f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \left\{ \frac{f(x)}{x-1} \times \frac{4}{x+1} \right\}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} \times \lim_{x \to 1} \frac{4}{x+1}$$

$$= -3 \times 2 = -6$$

5 답 -2

유형 04 함수의 극한에 대한 성질

$3f(x) + g(x) = h(x)$, $f(x) - 2g(x) = k(x)$라고 하면

$\lim_{x \to 2} h(x) = 1$, $\lim_{x \to 2} k(x) = 5$

$f(x) = \frac{1}{7}\{2h(x) + k(x)\}$이므로

$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{7}(2 \times 1 + 5) = 1$

$g(x) = \frac{1}{7}\{h(x) - 3k(x)\}$이므로

$\lim_{x \to 2} g(x) = \frac{1}{7}(1 - 3 \times 5) = -2$

$\therefore \lim_{x \to 2} f(x)g(x) = 1 \times (-2) = -2$

6 답 ㄹ

유형 05 가우스 기호를 포함한 함수의 극한

ㄱ. $\lim_{x \to 0+} [x] = 0$이므로

$\lim_{x \to 0+} \frac{[x]}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{0}{x} = 0$

$\lim_{x \to 0-} [x] = -1$이므로

$\lim_{x \to 0-} \frac{[x]}{x} = \lim_{x \to 0-} \left(-\frac{1}{x}\right) = \infty$

즉, $\lim_{x \to 0} \frac{[x]}{x}$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x \to 1+} [x] = 1$이므로

$\lim_{x \to 1+} \frac{x+3}{[x]+1} = \frac{1+3}{1+1} = 2$

$\lim_{x \to 1-} [x] = 0$이므로

$\lim_{x \to 1-} \frac{x+3}{[x]+1} = \frac{1+3}{0+1} = 4$

즉, $\lim_{x \to 1} \frac{x+3}{[x]+1}$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x \to -1+} [x] = -1$, $\lim_{x \to -1+} [x+2] = 1$이므로

$\lim_{x \to -1+} \frac{[x+2]}{[x]-2} = \frac{1}{-1-2} = -\frac{1}{3}$

$\lim_{x \to -1-} [x] = -2$, $\lim_{x \to -1-} [x+2] = 0$이므로

$\lim_{x \to -1-} \frac{[x+2]}{[x]-2} = \frac{0}{-2-2} = 0$

즉, $\lim_{x \to -1} \frac{[x-2]}{[x]-2}$의 값은 존재하지 않는다.

ㄹ. $x \to 2$일 때 $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \to 0+$이므로

$\lim_{x \to 2} [x^2 - 4x + 4] = 0$

따라서 보기 중 극한값이 존재하는 것은 ㄹ이다.

7 답 ⑤

유형 06 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한 – 분수식, 무리식

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+3} - 2}{\sqrt{x+8} - 3}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x^2+3} - 2)(\sqrt{x^2+3} + 2)(\sqrt{x+8} + 3)}{(\sqrt{x+8} - 3)(\sqrt{x+8} + 3)(\sqrt{x^2+3} + 2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 1)(\sqrt{x+8} + 3)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3} + 2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+8} + 3)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3} + 2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(\sqrt{x+8} + 3)}{\sqrt{x^2+3} + 2} = 3$$

8 답 6

유형 07 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한 – 절댓값 기호를 포함한 식

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^2+2x}{|x|}=\lim_{x\to 0+}\frac{x(x+2)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}(x+2)=2$$

$\therefore a=2$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{3x^2-4x}{|x|}=\lim_{x\to 0-}\frac{x(3x-4)}{-x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}(-3x+4)=4$$

$\therefore b=4$

$\therefore a+b=2+4=6$

9 답 2

유형 08 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2-1}+3x}{\sqrt{x^2+3x}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9-\frac{1}{x^2}}+3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+2}$$
$$=\frac{3+3}{1+2}=2$$

10 답 ②

유형 08 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한

$1-x=t$라고 하면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(1-x)}{x-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{-t}=-3$$

즉, $-\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}=-3$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=3$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3+2f(x)}{x^2-1-xf(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+2\times\frac{f(x)}{x}\times\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}-\frac{f(x)}{x}}$$
$$=\frac{2-0+0+0}{1-0-3}=-1$$

11 답 6

유형 09 $\infty-\infty$ 꼴의 극한

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{9x+1}-3x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{9x+1}-3\sqrt{x})}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x+1}+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{9x+1}-3\sqrt{x})(\sqrt{9x+1}+3\sqrt{x})}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x+1}+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9+\frac{1}{x}}+3\right)$$
$$=3+3=6$$

12 답 ②

유형 09 $\infty-\infty$ 꼴의 극한

$x=-t$라고 하면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-3x}+2x)$$
$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-4t}+\sqrt{t^2+3t}-2t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\{(\sqrt{t^2-4t}-t)+(\sqrt{t^2+3t}-t)\}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{(\sqrt{t^2-4t}-t)(\sqrt{t^2-4t}+t)}{\sqrt{t^2-4t}+t}+\frac{(\sqrt{t^2+3t}-t)(\sqrt{t^2+3t}+t)}{\sqrt{t^2+3t}+t}\right\}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{-4t}{\sqrt{t^2-4t}+t}+\frac{3t}{\sqrt{t^2+3t}+t}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{-4}{\sqrt{1-\frac{4}{t}}+1}+\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{t}}+1}\right)$$
$$=\frac{-4}{1+1}+\frac{3}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

13 답 4

유형 10 $\infty\times0$ 꼴의 극한

$$\lim_{x\to1}(\sqrt{x}-1)\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\left\{(\sqrt{x}-1)\times\frac{x^2}{x^2-1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2}{(\sqrt{x}+1)(x+1)}=\frac{1}{4}$$

따라서 $p=4$, $q=1$이므로 $pq=4\times1=4$

14 답 2

유형 10 $\infty\times0$ 꼴의 극한

$\left[\frac{x+2}{2}\right]=\frac{x+2}{2}-h$ $(0\le h<1)$라고 하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}\left[\frac{x+2}{2}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}\left(\frac{x+2}{2}-h\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{4}{x}-\frac{4h}{x}\right)=2$$

15 답 23

유형 11 극한값의 성질을 이용하여 미정계수 구하기

$x\to-2$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-2}(\sqrt{x+a}-3)=0$이므로

$\sqrt{-2+a}-3=0$ $\quad\therefore a=11$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-2}\frac{2x+4}{\sqrt{x+a}-3}=\lim_{x\to-2}\frac{2x+4}{\sqrt{x+11}-3}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{(2x+4)(\sqrt{x+11}+3)}{(\sqrt{x+11}-3)(\sqrt{x+11}+3)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{2(x+2)(\sqrt{x+11}+3)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}2(\sqrt{x+11}+3)=12$$

따라서 $b=12$이므로 $a+b=11+12=23$

16 답 ①

유형 11 극한값의 성질을 이용하여 미정계수 구하기

$\lim_{x \to -2} \frac{f(x)}{x+2} = b$에서 $x \to -2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $f(x) = t$라고 하면 $x \to -2$일 때 $t \to 0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -2} \frac{f(f(x))}{x^2-4} &= \lim_{x \to -2} \left\{ \frac{f(f(x))}{f(x)} \times \frac{f(x)}{x+2} \times \frac{1}{x-2} \right\} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} \times \lim_{x \to -2} \frac{f(x)}{x+2} \times \lim_{x \to -2} \frac{1}{x-2} \\ &= a \times b \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{ab}{4}\end{aligned}$$

17 답 ④

유형 12 극한값이 주어졌을 때 함수의 식 구하기

(가)에서 $f(x)$는 이차 이하의 함수이다.

(나)에서 $x \to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 2} f(x) = 0$이므로 $f(2) = 0$

$f(x) = (x-2)(ax+b)$ (a, b는 상수)라고 하면 (나)의 좌변에서

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x-2} &= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(ax+b)}{x-2} \\ &= \lim_{x \to 2} (ax+b) = 2a+b\end{aligned}$$

$\therefore 2a+b=6$ $\cdots\cdots$ ㉠

(다)에서 방정식 $(x-2)(ax+b) = 3x-4$의 한 근이 $x=1$이므로 이를 대입하면

$-(a+b) = -1$ $\quad \therefore a+b=1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=5$, $b=-4$

따라서 $f(x) = (x-2)(5x-4)$이므로

$f(3) = 1 \times 11 = 11$

18 답 $\frac{3}{2}$

유형 13 함수의 극한의 대소 관계

$x>0$일 때 $\sqrt{9x+1}>0$, $\sqrt{9x+4}>0$이므로

$\sqrt{9x+1} < f(x) < \sqrt{9x+4}$에서

$9x+1 < \{f(x)\}^2 < 9x+4$

$x>0$일 때 $6x+2>0$이므로

$\frac{9x+1}{6x+2} < \frac{\{f(x)\}^2}{6x+2} < \frac{9x+4}{6x+2}$

이때 $\lim_{x \to \infty} \frac{9x+1}{6x+2} = \frac{3}{2}$, $\lim_{x \to \infty} \frac{9x+4}{6x+2} = \frac{3}{2}$이므로

$\lim_{x \to \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{6x+2} = \frac{3}{2}$

19 답 $\frac{1}{2}$

유형 14 함수의 극한의 활용

점 A$(t, 1)$을 지나고 기울기가 2인 직선 l의 방정식은

$y-1 = 2(x-t)$

$\therefore y = 2x-2t+1$

점 B의 좌표는 $(0, -2t+1)$이므로

$\overline{\mathrm{OB}} = |-2t+1|$

직선 m의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 m의 방정식은

$y-1 = -\frac{1}{2}(x-t)$

$\therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{t}{2} + 1$

점 C의 좌표는 $(t+2, 0)$이므로

$\overline{\mathrm{OC}} = |t+2|$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{t \to \infty} \frac{\overline{\mathrm{OC}}}{\overline{\mathrm{OB}}} &= \lim_{t \to \infty} \frac{|t+2|}{|-2t+1|} \\ &= \lim_{t \to \infty} \frac{t+2}{2t-1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

20 답 8

유형 14 함수의 극한의 활용

두 점 A$(0, t)$, B$(-2, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y = \frac{0-t}{-2-0}x + t$ $\quad \therefore y = \frac{t}{2}x + t$

점 P는 직선 $y = \frac{t}{2}x + t$와 원 $x^2+y^2=4$의 한 교점이므로 점 P의 y좌표는

$\left(\frac{2}{t}y-2\right)^2 + y^2 = 4$, $\left(\frac{4}{t^2}+1\right)y^2 - \frac{8}{t}y = 0$

$y\left\{\left(\frac{4}{t^2}+1\right)y - \frac{8}{t}\right\} = 0$

$\therefore y = \frac{\frac{8}{t}}{\frac{4}{t^2}+1} = \frac{8t}{4+t^2}$ ($\because y \neq 0$)

따라서 $\overline{\mathrm{OA}} = t$, $\overline{\mathrm{PH}} = \frac{8t}{4+t^2}$이고, P $\to$ B일 때 $t \to \infty$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{\mathrm{P} \to \mathrm{B}} (\overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{PH}}) &= \lim_{t \to \infty} \left(t \times \frac{8t}{4+t^2}\right) \\ &= \lim_{t \to \infty} \frac{8t^2}{4+t^2} = 8\end{aligned}$$

다른 풀이 점 P의 좌표를 (a, b)라고 하면 H$(a, 0)$이므로

$\overline{\mathrm{PH}} = b$

직선 BP의 방정식은

$y = \frac{b-0}{a+2}(x+2)$ $\quad \therefore y = \frac{b}{a+2}x + \frac{2b}{a+2}$

점 A는 이 직선이 y축과 만나는 점이므로

A$\left(0, \frac{2b}{a+2}\right)$ $\quad \therefore \overline{\mathrm{OA}} = \frac{2b}{a+2}$

점 P(a, b)는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=4$ $\quad \therefore b^2 = 4-a^2$

P $\to$ B일 때 $a \to -2+$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{\mathrm{P} \to \mathrm{B}} (\overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{PH}}) &= \lim_{a \to -2+} \left(\frac{2b}{a+2} \times b\right) \\ &= \lim_{a \to -2+} \frac{2b^2}{a+2} \\ &= \lim_{a \to -2+} \frac{2(4-a^2)}{a+2} \\ &= \lim_{a \to -2+} \frac{2(2+a)(2-a)}{a+2} \\ &= \lim_{a \to -2+} 2(2-a) = 8\end{aligned}$$

02 함수의 연속

핵심 유형

	유형01 ㄱ, ㄷ	유형02 ㄱ, ㄴ, ㄷ	
유형03 2	유형04 7	유형05 −1	유형06 ㄴ
유형07 ④	유형08 ⑤		

핵심 유형 완성하기

001 3	002 ⑤	003 ⑤	004 3	005 −4
006 ③	007 ④	008 3	009 ㄱ	010 3
011 4	012 −1	013 1	014 32	015 20
016 4	017 ⑤	018 ①	019 6	020 ④
021 ①	022 ③	023 2	024 ㄱ	
025 ㄱ, ㄴ, ㄹ		026 ㄱ	027 ④	
028 ㄱ, ㄴ	029 ④	030 ㄱ	031 ④	032 30
033 2	034 ③	035 ㄱ, ㄴ		

핵심 유형 최종 점검하기

1 ㄱ, ㄴ	2 ⑤	3 ㄴ	4 5	5 ③
6 8	7 ⑤	8 3	9 ③	10 ㄴ
11 ④	12 3			

핵심 유형 26~27쪽

유형01 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $f(0)=1$이고,

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(x+1)=1$,

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}(x^2+1)=1$에서

$\lim_{x\to0}f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\dfrac{1}{x}=\infty$

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\dfrac{1}{x}=-\infty$

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. $f(0)=2$이고,

$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\dfrac{x^2+2x}{x}=\lim_{x\to0}(x+2)=2$

$\therefore \lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 보기 중 $x=0$에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

유형02 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\lim_{x\to0}f(x)=0$

ㄴ. $\lim_{x\to-1+}f(x)\neq\lim_{x\to-1-}f(x)$, $\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=1$에서 불연속이다.

즉, 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 2개이다.

ㄷ. $\{f(1)\}^2=(-1)^2=1$이고

$\lim_{x\to1+}\{f(x)\}^2=1^2=1$, $\lim_{x\to1-}\{f(x)\}^2=(-1)^2=1$에서

$\lim_{x\to1}\{f(x)\}^2=1$

$\therefore \lim_{x\to1}\{f(x)\}^2=\{f(1)\}^2$

따라서 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=1$에서 연속이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

유형03 답 2

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이면 $\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$

$\therefore \lim_{x\to3}\dfrac{x^2+ax-3}{x-3}=b$ …… ㉠

$x\to3$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to3}(x^2+ax-3)=0$이므로

$9+3a-3=0$ $\therefore a=-2$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2+ax-3}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x+1)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to3}(x+1)=4$$

따라서 $b=4$이므로

$a+b=-2+4=2$

유형04 답 7

$x\neq2$일 때, 주어진 등식의 양변을 $x-2$로 나누면

$f(x)=\dfrac{x^3-kx+2}{x-2}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=2$에서도 연속이므로

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

$\therefore \lim_{x\to2}\dfrac{x^3-kx+2}{x-2}=f(2)$ …… ㉠

$x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}(x^3-kx+2)=0$이므로

$8-2k+2=0$ $\therefore k=5$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-kx+2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^3-5x+2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x-1)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x^2+2x-1)=7$$

$\therefore f(2)=7$

유형05 답 -1

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이면 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이어야 한다.

$\lim_{x\to1+}[x+2]=3$, $\lim_{x\to1+}[x]=1$이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=3+a$

$\lim_{x\to1-}[x+2]=2$, $\lim_{x\to1-}[x]=0$이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=2$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$이어야 하므로

$3+a=2\qquad\therefore a=-1$

유형06 답 ㄴ

ㄱ. [반례] $f(x)=\begin{cases}2x+1 & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$이라고 하면

$f(0)=0$이고, $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(2x+1)=1$로 그 값이 모두 존재하지만 $\lim_{x\to0}f(x)\neq f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄴ. $h(x)=f(x)-g(x)$라고 하면 $g(x)=f(x)-h(x)$

이때 두 함수 $f(x)$, $h(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 함수 $g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

ㄷ. [반례] $f(x)=x-1$, $g(x)=x$라고 하면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 모두 $x=1$에서 연속이지만 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x}{x-1}$는 $x=1$에서 정의되지 않으므로 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ이다.

유형07 답 ④

① $\lim_{x\to3+}f(x)=3$

② $f(2)=2$이고,

$\lim_{x\to2+}f(x)=1$, $\lim_{x\to2-}f(x)=1$에서 $\lim_{x\to2}f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to2}f(x)\neq f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

③ 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 $x=2$, $x=3$의 2개이다.

④ $0\le x\le2$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $x=2$일 때 2이다.

⑤ $3\le x\le5$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 존재하지 않는다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

유형08 답 ⑤

$f(x)=2x^3-5x-9$라고 하면 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이고

$f(-2)=-15<0$, $f(-1)=-6<0$,

$f(0)=-9<0$, $f(1)=-12<0$,

$f(2)=-3<0$, $f(3)=30>0$

즉, $f(2)f(3)<0$이므로 사잇값의 정리에 의해 주어진 방정식은 구간 $(2,\ 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

참고 사잇값의 정리의 활용

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(a,\ b)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

핵심 유형 완성하기 28~33쪽

001 답 3

ㄱ. $f(3)=7$, $\lim_{x\to3}f(x)=7$이므로

$\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

ㄴ. $f(3)=0$, $\lim_{x\to3}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

ㄷ. $x=3$에서 함수 $f(x)$가 정의되지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

ㄹ. $f(3)=2$이고,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3}f(x)&=\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}\\&=\lim_{x\to3}\frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)}\\&=\lim_{x\to3}\frac{x+3}{x}=2\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{x\to3}f(x)=f(3)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

따라서 보기 중 $x=3$에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄹ의 3개이다.

002 답 ⑤

① $f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}=\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$

$f(-1)=0$, $\lim_{x\to-1}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

② $f(-1)=0$이고,

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}(2+2x)=0$,

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}(1+x)=0$에서

$\lim_{x\to-1}f(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

③ $f(-1)=1$이고,

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}(-x)=1$,

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}x^2=1$에서

$\lim_{x\to-1}f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

④ $f(-1)=-1$이고,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1}f(x)&=\lim_{x\to-1}\frac{x+x^2}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1}\frac{x(x+1)}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1}x=-1\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

⑤ $\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1+}\frac{x+1}{x+1}=1$

$\lim_{x\to-1-} f(x)=\lim_{x\to-1-}\frac{-(x+1)}{x+1}=-1$

$\therefore \lim_{x\to-1+} f(x)\neq\lim_{x\to-1-} f(x)$

$\lim_{x\to-1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

따라서 $x=-1$에서 불연속인 함수는 ⑤이다.

003 답 ⑤

ㄱ. 함수 $f(x)$가 $x\neq1$인 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$에서 연속인지 확인한다.

$f(1)=2$이고,

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

$\therefore \lim_{x\to1} f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서도 연속이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x\neq2$인 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=2$에서 연속인지 확인한다.

$f(2)=1$이고,

$\lim_{x\to2+} f(x)=\lim_{x\to2+}(\sqrt{2x-4}+1)=1$, $\lim_{x\to2-} f(x)=1$에서

$\lim_{x\to2} f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to2} f(x)=f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서도 연속이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x\neq1$인 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$에서 연속인지 확인한다.

$f(1)=4$이고,

$$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1+}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1+}(\sqrt{x+3}+2)=4$$

$\lim_{x\to1-} f(x)=4$에서

$\lim_{x\to1} f(x)=4$

$\therefore \lim_{x\to1} f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서도 연속이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 보기 중 모든 실수 x에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

004 답 3

$$f(x)=2-\frac{1}{\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}}=2-\frac{1}{\frac{x-2}{x(x-1)}}$$
$$=2-\frac{x(x-1)}{x-2}$$

$x=0$, $x-1=0$, $x-2=0$인 x의 값에서 함수 $f(x)$가 정의되지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 $x=0$, $x=1$, $x=2$의 3개이다.

005 답 -4

$f(g(x))=f(5-x^2)$이므로

$$f(g(x))=\begin{cases}\frac{(5-x^2)-1}{|(5-x^2)-1|} & (5-x^2\neq1)\\ 0 & (5-x^2=1)\end{cases}=\begin{cases}\frac{4-x^2}{|4-x^2|} & (x^2\neq4)\\ 0 & (x^2=4)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-1 & (x^2>4)\\ 0 & (x^2=4)\\ 1 & (x^2<4)\end{cases}$$

함수 $f(g(x))$는 $x^2=4$인 x의 값에서 불연속이므로 $x=2$, $x=-2$에서 불연속이다.

따라서 구하는 모든 x의 값의 곱은 $2\times(-2)=-4$

006 답 ③

① $f(-1)=0$

② $\lim_{x\to0} f(x)=-1$

③ (i) $\lim_{x\to-1+} f(x)=0$, $\lim_{x\to-1-} f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to-1} f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(ii) $f(0)=1$, $\lim_{x\to0} f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to0} f(x)\neq f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(iii) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 정의되지 않으므로 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 3개이다.

④ $\{f(0)\}^2=1^2=1$이고, $\lim_{x\to0}\{f(x)\}^2=(-1)^2=1$이므로

$\lim_{x\to0}\{f(x)\}^2=\{f(0)\}^2$

따라서 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=0$에서 연속이다.

⑤ $f(1+1)=f(2)=0$

$x+1=t$라고 하면 $x\to1$일 때 $t\to2$이므로

$\lim_{x\to1} f(x+1)=\lim_{t\to2} f(t)=0$

$\therefore \lim_{x\to1} f(x+1)=f(1+1)$

따라서 함수 $f(x+1)$은 $x=1$에서 연속이다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

007 답 ④

(i) $x=-1$일 때

$\lim_{x\to-1+} f(x)=1$, $\lim_{x\to-1-} f(x)=-1$이므로 $\lim_{x\to-1} f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $x=0$일 때

$f(0)=0$이고, $\lim_{x\to0} f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to0} f(x)\neq f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(iii) $x=1$일 때

$\lim_{x\to1+}f(x)=-1$, $\lim_{x\to1-}f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

(iv) $x=2$일 때

$f(2)=-1$이고, $\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to2}f(x)\neq f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 극한값이 존재하지 않으므로

$m=2$

함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=2$에서 불연속이므로

$n=4$

$\therefore m+n=2+4=6$

008 답 3

(i) $x=1$일 때

$f(1)g(1)=1\times1=1$이고, $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=0\times1=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)g(x)\neq f(1)g(1)$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(ii) $x=2$일 때

$f(2)g(2)=-1\times1=-1$이고,

$\lim_{x\to2+}f(x)g(x)=-1\times0=0$, $\lim_{x\to2-}f(x)g(x)=1\times0=0$에서

$\lim_{x\to2}f(x)g(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to2}f(x)g(x)\neq f(2)g(2)$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(iii) $x=3$일 때

$f(3)g(3)=0\times2=0$이고,

$\lim_{x\to3+}f(x)g(x)=0\times2=0$, $\lim_{x\to3-}f(x)g(x)=0\times1=0$에서

$\lim_{x\to3}f(x)g(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to3}f(x)g(x)=f(3)g(3)$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)g(x)$가 불연속인 x의 값은 $x=1$, $x=2$이므로 그 합은 $1+2=3$

009 답 ㄱ

ㄱ. $\lim_{x\to0}f(x)=1$

ㄴ. $f(x)=t$라고 하면 $x\to0$일 때 $t\to1-$이므로

$\lim_{x\to0}f(f(x))=\lim_{t\to1-}f(t)=0$

ㄷ. $f(x)=t$라고 하면 $x\to1+$일 때 $t\to-1+$이므로

$\lim_{x\to1+}f(f(x))=\lim_{t\to-1+}f(t)=0$

$x\to1-$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to1-}f(f(x))=\lim_{t\to0+}f(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to1+}f(f(x))\neq\lim_{x\to1-}f(f(x))$

$\lim_{x\to1}f(f(x))$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(f(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ이다.

010 답 3

함수 $g(x)$가 $x=0$, $x=1$에서 불연속이므로 함수 $g(f(x))$에 대하여 $f(x)=0$, $f(x)=1$인 x의 값 즉, $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 연속성을 조사한다.

(i) $x=-1$일 때

$g(f(-1))=g(1)=-1$

$f(x)=t$라고 하면 $x\to-1$일 때 $t\to1$이므로

$\lim_{x\to-1}g(f(x))=\lim_{t\to1}g(t)=0$

$\therefore \lim_{x\to-1}g(f(x))\neq g(f(-1))$

따라서 함수 $g(f(x))$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(ii) $x=0$일 때

$g(f(0))=g(0)=2$

$f(x)=t$라고 하면 $x\to0$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to0}g(f(x))=\lim_{t\to0+}g(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to0}g(f(x))\neq g(f(0))$

따라서 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

(iii) $x=1$일 때

$g(f(1))=g(1)=-1$

$f(x)=t$라고 하면 $x\to1$일 때 $t\to1$이므로

$\lim_{x\to1}g(f(x))=\lim_{t\to1}g(t)=0$

$\therefore \lim_{x\to1}g(f(x))\neq g(f(1))$

따라서 함수 $g(f(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 함수 $g(f(x))$가 불연속인 x의 값은 $x=-1$, $x=0$, $x=1$의 3개이다.

011 답 4

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이면 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=-4$ …… ㉠

$x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$이므로

$1+a+b=0$ $\quad\therefore b=-a-1$ …… ㉡

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-a-1}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}(x+a+1)=a+2\end{aligned}$$

따라서 $a+2=-4$이므로 $a=-6$

이를 ㉡에 대입하면 $b=5$

$\therefore a+2b=-6+2\times5=4$

012 답 −1

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-1$, $x=1$에서도 연속이다.

$x=-1$에서 연속이면 $\lim_{x\to-1}f(x)$의 값이 존재하므로

$\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1-} f(x)$에서

$\lim_{x \to -1+} (-x^2+ax+b) = \lim_{x \to -1-} (x-1)^2$

$-1-a+b=4 \qquad \therefore a-b=-5 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x=1$에서 연속이면 $\lim_{x \to 1} f(x)$의 값이 존재하므로

$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1-} f(x)$에서

$\lim_{x \to 1+} (x-1)^2 = \lim_{x \to 1-} (-x^2+ax+b)$

$0=-1+a+b \qquad \therefore a+b=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=3$

$\therefore 2a+b=2\times(-2)+3=-1$

013 답 1

함수 $f(x)$는 $x \neq a$인 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=a$에서 연속이어야 한다.

$x=a$에서 연속이면 $\lim_{x \to a} f(x)$의 값이 존재하므로

$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x)$에서

$\lim_{x \to a+} (3-x^2) = \lim_{x \to a-} (x^2-2x)$

$3-a^2=a^2-2a \qquad \therefore 2a^2-2a-3=0$

이 이차방정식은 두 실근을 가지므로 근과 계수의 관계에 의해 모든 실수 a의 값의 합은 1이다.

014 답 32

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이면 $\lim_{x \to 2} f(x)=f(2)$

$\therefore \lim_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+a}-2}=b \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x \to 2$일 때 (분자) $\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

(분모) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 2}(\sqrt{x+a}-2)=0$이므로

$\sqrt{2+a}-2=0 \qquad \therefore a=2$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x+a}-2} &= \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \to 2}(x+2)(\sqrt{x+2}+2)=16\end{aligned}$$

따라서 $b=16$이므로 $ab=2\times16=32$

015 답 20

$x=2$에서 연속이면 $\lim_{x \to 2} f(x)g(x)=f(2)g(2)$이어야 한다.

$f(2)g(2)=2\times(-2)=-4$

$\lim_{x \to 2+} f(x)g(x) = \lim_{x \to 2+} \{(2x+a)\times(-x)\}=-2a-8$

$\lim_{x \to 2-} f(x)g(x) = \lim_{x \to 2-} x(x+b)=2b+4$

$\lim_{x \to 2+} f(x)g(x) = \lim_{x \to 2-} f(x)g(x)=f(2)g(2)$에서

$-2a-8=2b+4=-4$

$\therefore a=-2$, $b=-4$

$\therefore a^2+b^2=4+16=20$

016 답 4

$x \neq 1$일 때, 주어진 등식의 양변을 $x-1$로 나누면

$f(x)=\dfrac{x^2+ax+a-5}{x-1}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서도 연속이므로

$\lim_{x \to 1} f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x \to 1} \dfrac{x^2+ax+a-5}{x-1}=f(1) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x \to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 1}(x^2+ax+a-5)=0$이므로

$1+a+a-5=0$

$2a-4=0 \qquad \therefore a=2$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1} \frac{x^2+ax+a-5}{x-1} &= \lim_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{(x+3)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \to 1}(x+3)=4\end{aligned}$$

$\therefore f(1)=4$

017 답 ⑤

$x \neq -1$일 때, (가)의 양변을 $x+1$로 나누면

$f(x)=\dfrac{3x^5+ax+b}{x+1} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-1$에서도 연속이므로

$\lim_{x \to -1} f(x)=f(-1)$

$\therefore \lim_{x \to -1} \dfrac{3x^5+ax+b}{x+1}=f(-1) \qquad \cdots\cdots$ ㉡

$x \to -1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x \to -1} (3x^5+ax+b)=0$이므로

$-3-a+b=0 \qquad \therefore a-b=-3 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

한편 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서도 연속이므로 (나)에서

$\lim_{x \to 1} f(x)=f(1)=6$

이때 ㉠에서

$f(1)=\dfrac{3+a+b}{2}=6$

$3+a+b=12 \qquad \therefore a+b=9 \qquad \cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=6$

이를 ㉡의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -1} \frac{3x^5+ax+b}{x+1} &= \lim_{x \to -1} \frac{3x^5+3x+6}{x+1} \\ &= \lim_{x \to -1} \frac{3(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+2)}{x+1} \\ &= \lim_{x \to -1} 3(x^4-x^3+x^2-x+2)=18\end{aligned}$$

$\therefore f(-1)=18$

018 답 ①

$x\neq 3$일 때, 주어진 등식의 양변을 $x-3$으로 나누면

$f(x)=\dfrac{a\sqrt{x+6}+b}{x-3}$

함수 $f(x)$가 $x\geq -6$인 모든 실수 x에서 연속이면 $x=3$에서도 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{a\sqrt{x+6}+b}{x-3}=-\dfrac{1}{3}$ …… ㉠

$x\to 3$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 3}(a\sqrt{x+6}+b)=0$이므로

$3a+b=0$ $\therefore b=-3a$ …… ㉡

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{a\sqrt{x+6}+b}{x-3}&=\lim_{x\to 3}\frac{a\sqrt{x+6}-3a}{x-3}\\&=\lim_{x\to 3}\frac{a(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}\\&=\lim_{x\to 3}\frac{a(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}\\&=\lim_{x\to 3}\frac{a}{\sqrt{x+6}+3}=\frac{a}{6}\end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{a}{6}=-\dfrac{1}{3}$이므로

$a=-2$

이를 ㉡에 대입하면 $b=6$

$\therefore a+b=-2+6=4$

019 답 6

$x\neq -1$이고 $x\neq 2$일 때, 주어진 등식의 양변을 x^2-x-2로 나누면

$f(x)=\dfrac{2x^3+ax+b}{x^2-x-2}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-1$에서도 연속이므로

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)$

$\therefore \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3+ax+b}{x^2-x-2}=f(-1)$ …… ㉠

$x\to -1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to -1}(2x^3+ax+b)=0$이므로

$-2-a+b=0$ $\therefore a-b=-2$ …… ㉡

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=2$에서도 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3+ax+b}{x^2-x-2}=f(2)$ …… ㉢

$x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 2}(2x^3+ax+b)=0$이므로

$16+2a+b=0$ $\therefore 2a+b=-16$ …… ㉣

㉡, ㉣을 연립하여 풀면

$a=-6$, $b=-4$ …… ㉤

㉤을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{2x^3+ax+b}{x^2-x-2}&=\lim_{x\to -1}\frac{2x^3-6x-4}{x^2-x-2}\\&=\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)^2(x-2)}{(x+1)(x-2)}\\&=\lim_{x\to -1}2(x+1)=0\end{aligned}$$

$\therefore f(-1)=0$

㉤을 ㉢의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{2x^3+ax+b}{x^2-x-2}&=\lim_{x\to 2}\frac{2x^3-6x-4}{x^2-x-2}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{2(x+1)^2(x-2)}{(x+1)(x-2)}\\&=\lim_{x\to 2}2(x+1)=6\end{aligned}$$

$\therefore f(2)=6$

$\therefore f(-1)+f(2)=0+6=6$

020 답 ④

$x=-1$에서 연속이면 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)$이어야 한다.

$x\to -1+$일 때 $-1<x<-\dfrac{1}{2}$에서 $-2<2x<-1$

$\therefore -1<2x+1<0$

즉, $\lim\limits_{x\to -1+}[2x+1]=-1$, $\lim\limits_{x\to -1+}[x]=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to -1+} f(x)=-1-a\times(-1)=a-1$

$x\to -1-$일 때 $-\dfrac{3}{2}<x<-1$에서 $-3<2x<-2$

$\therefore -2<2x+1<-1$

즉, $\lim\limits_{x\to -1-}[2x+1]=-2$, $\lim\limits_{x\to -1-}[x]=-2$이므로

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=-2-a\times(-2)=2a-2$

$\lim\limits_{x\to -1+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1-} f(x)$이어야 하므로

$a-1=2a-2$ $\therefore a=1$

021 답 ①

$x=3$에서 연속이면 $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$이어야 한다.

$x^2-6x=(x-3)^2-9$에서 $x\to 3$일 때

$(x^2-6x)\to -9+$이므로

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}[x^2-6x]=-9$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$이어야 하므로 $a=-9$

022 답 ③

(i) $x=-1$에서 연속이면 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to -1+}[x]=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to -1+} f(x)=(-1)^2+(-a+b)\times(-1)=a-b+1$

$\lim\limits_{x\to -1-}[x]=-2$이므로

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=(-2)^2+(-a+b)\times(-2)=2a-2b+4$

$\lim\limits_{x\to -1+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1-} f(x)$이어야 하므로

$a-b+1=2a-2b+4$ $\therefore a-b=-3$ …… ㉠

(ii) $x=1$에서 연속이면 $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$이어야 한다.

$\lim_{x\to 1+}[x]=1$이므로 $\lim_{x\to 1+} f(x)=1+a+b$

$\lim_{x\to 1-}[x]=0$이므로 $\lim_{x\to 1-} f(x)=0$

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)$이어야 하므로

$1+a+b=0$ $\quad\therefore a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=1$

$\therefore ab=-2\times 1=-2$

023 답 2

$-1<x<3$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=1$, $x=2$일 때 불연속이므로 함수 $f(g(x))$에서 $g(x)=0$, $g(x)=1$, $g(x)=2$인 x에서 연속성을 조사한다.

(i) $g(x)=|x|=0$, 즉 $x=0$일 때 $f(g(0))=f(0)=0$

$g(x)=t$라고 하면 $x\to 0$일 때 $t\to 0+$이므로

$\lim_{x\to 0} f(g(x))=\lim_{t\to 0+} f(t)=0$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(g(x))=f(g(0))$

따라서 함수 $f(g(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $g(x)=|x|=1$, 즉 $x=1$일 때 $f(g(1))=f(1)=1$

$g(x)=t$라고 하면 $x\to 1+$일 때 $t\to 1+$이므로

$\lim_{x\to 1+} f(g(x))=\lim_{t\to 1+} f(t)=1$

$x\to 1-$일 때 $t\to 1-$이므로

$\lim_{x\to 1-} f(g(x))=\lim_{t\to 1-} f(t)=0$

$\therefore \lim_{x\to 1+} f(g(x))\neq \lim_{x\to 1-} f(g(x))$

따라서 $\lim_{x\to 1} f(g(x))$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(g(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

(iii) $g(x)=|x|=2$, 즉 $x=2$일 때 $f(g(2))=f(2)=2$

$g(x)=t$라고 하면 $x\to 2+$일 때 $t\to 2+$이므로

$\lim_{x\to 2+} f(g(x))=\lim_{t\to 2+} f(t)=2$

$x\to 2-$일 때 $t\to 2-$이므로

$\lim_{x\to 2-} f(g(x))=\lim_{t\to 2-} f(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to 2+} f(g(x))\neq \lim_{x\to 2-} f(g(x))$

따라서 $\lim_{x\to 2} f(g(x))$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(g(x))$는 $x=2$에서 불연속이다.

따라서 함수 $f(g(x))$가 불연속인 x의 값은 $x=1$, $x=2$의 2개이다.

024 답 ㄱ

ㄱ. 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이면 $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$

$h(x)=\{f(x)\}^2$이라고 하면

$\lim_{x\to 1} h(x)=\lim_{x\to 1}\{f(x)\}^2=\{f(1)\}^2=h(1)$

따라서 함수 $\{f(x)\}^2$도 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $\dfrac{f(x)}{x-1}$는 $x=1$에서 정의되지 않으므로 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. [반례] $f(x)=x$, $g(x)=-1$이라고 하면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 모두 $x=1$에서 연속이지만 함수 $\dfrac{1}{f(x)+g(x)}=\dfrac{1}{x-1}$은 $x=1$에서 정의되지 않으므로 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ이다.

025 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

ㄱ. $f(x)+g(x)=x^2+x-2$는 $x=3$에서 연속이다.

ㄴ. $f(x)g(x)=x^3-3x^2+x-3$은 $x=3$에서 연속이다.

ㄷ. $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2+1}{x-3}$은 $x=3$에서 정의되지 않으므로 $x=3$에서 불연속이다.

ㄹ. $f(g(x))=(x-3)^2+1$은 $x=3$에서 연속이다.

따라서 보기 중 $x=3$에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

026 답 ㄱ

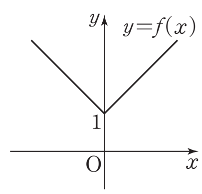
ㄱ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면

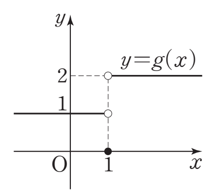
$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$이므로

$\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=f(a)g(a)$

따라서 함수 $f(x)g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. [반례] 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 모두 $x=0$에서 연속이다.





함수 $g(f(x))$에서 $g(f(0))=g(1)=0$

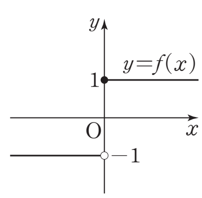
$f(x)=t$라고 하면 $x\to 0$일 때 $t\to 1+$이므로

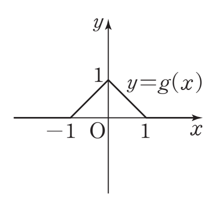
$\lim_{x\to 0} g(f(x))=\lim_{t\to 1+} g(t)=2$

$\therefore \lim_{x\to 0} g(f(x))\neq g(f(0))$

따라서 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. [반례] 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다고 하자.





함수 $g(f(x))$에서 $g(f(0))=g(1)=0$

$f(x)=t$라고 하면 $x\to 0+$일 때 $t\to 1$이므로

$\lim_{x\to 0+} g(f(x))=\lim_{t\to 1} g(t)=0$

$x\to 0-$일 때 $t\to -1$이므로

$\lim_{x\to 0-} g(f(x))=\lim_{t\to -1} g(t)=0$

$\therefore \lim_{x\to 0} g(f(x))=0$

$\therefore \lim_{x\to 0} g(f(x))=g(f(0))$

따라서 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이지만, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ이다.

027 답 ④

① $f(-1)=2$

② $\lim_{x \to 1+} f(x)=2$

③ 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 $x=-1$, $x=1$의 2개이다.

④ $-2 \le x \le 1$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 존재하지 않는다.

⑤ $1 \le x \le 3$에서 함수 $f(x)$는 연속이므로 최대·최소 정리에 의해 최댓값과 최솟값이 모두 존재한다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

028 답 ㄱ, ㄴ

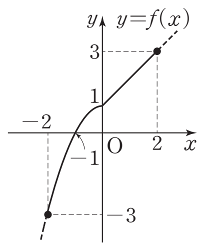
ㄱ. $f(0)=1$이고,

$\lim_{x \to 0+} f(x)=1$, $\lim_{x \to 0-} f(x)=1$에서

$\lim_{x \to 0} f(x)=1$

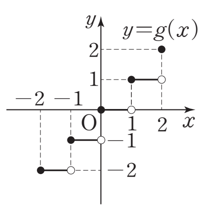
$\therefore \lim_{x \to 0} f(x)=f(0)$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 $-2 \le x \le 2$에서 연속이다. 따라서 최대·최소 정리에 의해 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.



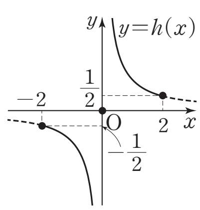
ㄴ. $g(x)=[x]$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $-2 \le x \le 2$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 2, 최솟값은 -2이다.



ㄷ. $h(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & (x \ne 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

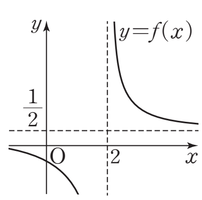
따라서 $-2 \le x \le 2$에서 함수 $h(x)$의 최댓값과 최솟값은 존재하지 않는다.



따라서 보기 중 $-2 \le x \le 2$에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

029 답 ④

함수 $f(x)=\dfrac{x+2}{2x-4}=\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{1}{2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① 함수 $f(x)$는 구간 $(0, 1]$에서 최댓값을 갖지 않는다.

② 함수 $f(x)$는 구간 $[1, 2]$에서 최솟값을 갖지 않는다.

③ 함수 $f(x)$는 구간 $[2, 3]$에서 최댓값을 갖지 않는다.

④ 함수 $f(x)$는 구간 $[3, 4]$에서 최댓값이 $\dfrac{5}{2}$, 최솟값이 $\dfrac{3}{2}$이다.

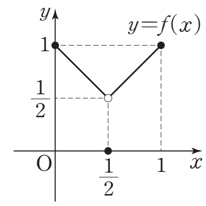
⑤ 함수 $f(x)$는 구간 $[4, 5)$에서 최솟값을 갖지 않는다.

따라서 최댓값과 최솟값이 모두 존재하는 구간은 ④이다.

030 답 ㄱ

ㄱ. 함수 $f(x)$가 구간 $[0, 1]$에서 연속이면 최대·최소 정리에 의해 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

ㄴ. [반례] 구간 $[0, 1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 구간 $[0, 1]$에서 최댓값이 1, 최솟값이 0이지만, $x=\dfrac{1}{2}$에서 불연속이다.



ㄷ. [반례] $f(x)=x$라고 하면 구간 $(0, 1)$에서 연속이지만 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않는다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ이다.

031 답 ④

$f(x)=x^3-8x-10$이라고 하면 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이고

$f(0)=-10<0$, $f(1)=-17<0$, $f(2)=-18<0$,

$f(3)=-7<0$, $f(4)=22>0$, $f(5)=75>0$

즉, $f(3)f(4)<0$이므로 사잇값의 정리에 의해 주어진 방정식은 구간 $(3, 4)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

032 답 30

$f(x)=x^3-4x^2+a$라고 하면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

$f(1)=a-3$, $f(3)=a-9$이므로 $f(1)f(3)<0$이라고 하면

$(a-3)(a-9)<0$ $\quad \therefore 3<a<9$

즉, $3<a<9$이면 사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$이 구간 $(1, 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이때 정수 a는 4, 5, 6, 7, 8이므로 그 합은

$4+5+6+7+8=30$

033 답 2

$g(x)=f(x)-x$라고 하면 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 구간 $[-1, 2]$에서도 연속이다.

$g(-1)=f(-1)-(-1)=-2+1=-1<0$

$g(0)=f(0)-0=2>0$

$g(1)=f(1)-1=-3-1=-4<0$

$g(2)=f(2)-2=-2-2=-4<0$

$\therefore g(-1)g(0)<0$, $g(0)g(1)<0$

사잇값의 정리에 의해 방정식 $g(x)=0$은 구간 $(-1, 0)$과 구간 $(0, 1)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $g(x)=0$은 적어도 2개의 실근을 갖는다.

034 답 ③

ㄱ. $f(x)=x^3-3x^2+3$이라고 하면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$f(2)=-1<0$, $f(3)=3>0$

즉, $f(2)f(3)<0$이므로 사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(2, 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. $f(x)=\frac{4}{2x-1}-1$이라고 하면 함수 $f(x)$는 $x\neq\frac{1}{2}$인 모든 실수 x에서 연속이고

$f(2)=\frac{1}{3}>0$, $f(3)=-\frac{1}{5}<0$

즉, $f(2)f(3)<0$이므로 사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(2,\ 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. $f(x)=\sqrt{x}-\frac{3}{x}-1$이라고 하면 함수 $f(x)$는 $x>0$인 모든 실수 x에서 연속이고

$f(2)=\sqrt{2}-\frac{5}{2}<0$, $f(3)=\sqrt{3}-2<0$

즉, $f(2)f(3)>0$이므로 구간 $(2,\ 3)$에서 실근을 갖는지 알 수 없다.

따라서 구간 $(2,\ 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다고 할 수 있는 방정식은 ㄱ, ㄴ이다.

035 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. 사잇값의 정리에 의해 A 지점에서 휴게소까지 갈 때 속력이 70 km/h인 순간이 적어도 2번 존재한다.

ㄴ. 사잇값의 정리에 의해 A 지점에서 휴게소까지 갈 때 속력이 50 km/h인 순간이 적어도 2번, 휴게소에서 B 지점까지 갈 때 속력이 50 km/h인 순간이 적어도 2번 존재한다.
즉, 50 km/h인 순간이 적어도 4번 존재한다.

ㄷ. 최고 속력이 빠르다고 해서 평균 속력이 빠르다고 말할 수 없다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

핵심 유형 **최종 점검**하기 • 34~35쪽

1 답 ㄱ, ㄴ

유형 01 함수의 연속

ㄱ. $f(1)=1$, $\lim_{x\to1}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. $f(1)=0$, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. $f(1)=3$이고,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}f(x)&=\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)\neq f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 보기 중 $x=1$에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

2 답 ⑤

유형 02 함수의 그래프와 연속

① $\lim_{x\to-1}f(x)=0$

② $f(1)=2$, $\lim_{x\to1}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)\neq f(1)$

③ $\lim_{x\to0+}f(x)=0$, $\lim_{x\to0-}f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to0+}f(x)\neq\lim_{x\to0-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

④ $xf(x)=g(x)$라고 하면

$g(0)=0$

$\lim_{x\to0+}g(x)=0$, $\lim_{x\to0-}g(x)=0$에서

$\lim_{x\to0}g(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to0}g(x)=g(0)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

⑤ $(x-1)f(x)=h(x)$라고 하면

$h(1)=0$

$\lim_{x\to1+}h(x)=0$, $\lim_{x\to1-}h(x)=0$에서 $\lim_{x\to1}h(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to1}h(x)=h(1)$

따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

3 답 ㄴ

유형 02 함수의 그래프와 연속

ㄱ. $\lim_{x\to0+}\{f(x)+g(x)\}=1+0=1$

$\lim_{x\to0-}\{f(x)+g(x)\}=-1+0=-1$

$\therefore \lim_{x\to0+}\{f(x)+g(x)\}\neq\lim_{x\to0-}\{f(x)+g(x)\}$

따라서 $\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄴ. $f(0)g(0)=0\times1=0$이고,

$\lim_{x\to0+}f(x)g(x)=1\times0=0$,

$\lim_{x\to0-}f(x)g(x)=-1\times0=0$에서

$\lim_{x\to0}f(x)g(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to0}f(x)g(x)=f(0)g(0)$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $f(g(0))=f(1)=0$

$g(x)=t$라고 하면 $x\to0$일 때 $t\to0-$이므로

$\lim_{x\to0}f(g(x))=\lim_{t\to0-}f(t)=-1$

$\therefore \lim_{x\to0}f(g(x))\neq f(g(0))$

따라서 함수 $f(g(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄹ. $g(f(0))=g(0)=1$

$f(x)=s$라고 하면 $x\to0+$일 때 $s\to1-$이므로

$\lim_{x\to0+}g(f(x))=\lim_{s\to1-}g(s)=-1$

$x \to 0-$일 때 $s \to -1+$이므로

$\lim_{x \to 0-} g(f(x)) = \lim_{s \to -1+} g(s) = -1$

$\therefore \lim_{x \to 0} g(f(x)) = -1$

$\therefore \lim_{x \to 0} g(f(x)) \neq g(f(0))$

따라서 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 보기 중 $x=0$에서 연속인 함수는 ㄴ이다.

4 답 5

유형 03 함수가 연속일 조건

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$, $x=-1$에서도 연속이다.

$x=1$에서 연속이면 $\lim_{x \to 1} f(x)$의 값이 존재하므로

$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1-} f(x)$에서

$\lim_{x \to 1+} (x^2+a) = \lim_{x \to 1-} (3x+3)$

$1+a=6 \qquad \therefore a=5$

$x=-1$에서 연속이면 $\lim_{x \to -1} f(x)$의 값이 존재하므로

$\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1-} f(x)$에서

$\lim_{x \to -1+} (3x+3) = \lim_{x \to -1-} (x+b)$

$0=-1+b \qquad \therefore b=1$

따라서 $f(x) = \begin{cases} x^2+5 & (x \geq 1) \\ 3x+3 & (-1 \leq x < 1) \\ x+1 & (x < -1) \end{cases}$이므로

$f(-2)+f(1) = (-2+1)+(1+5) = 5$

5 답 ③

유형 03 함수가 연속일 조건

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이면 $\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$

$\therefore \lim_{x \to -2} \frac{2x+4}{\sqrt{x^2-a}+b} = -1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x \to -2$일 때 (분자) $\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x \to -2} (\sqrt{x^2-a}+b) = 0$이므로

$\sqrt{4-a}+b=0 \qquad \therefore b=-\sqrt{4-a} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x+4}{\sqrt{x^2-a}+b} = \lim_{x \to -2} \frac{2x+4}{\sqrt{x^2-a}-\sqrt{4-a}}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{(2x+4)(\sqrt{x^2-a}+\sqrt{4-a})}{(\sqrt{x^2-a}-\sqrt{4-a})(\sqrt{x^2-a}+\sqrt{4-a})}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{(2x+4)(\sqrt{x^2-a}+\sqrt{4-a})}{x^2-4}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{2(x+2)(\sqrt{x^2-a}+\sqrt{4-a})}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{2(\sqrt{x^2-a}+\sqrt{4-a})}{x-2} = -\sqrt{4-a}$$

따라서 $-\sqrt{4-a} = -1$이므로 $a=3$

이를 ㉡에 대입하면 $b=-1$

$\therefore a-b = 3-(-1) = 4$

6 답 8

유형 04 $(x-a)f(x)$ 꼴의 함수의 연속

$x \neq 1$일 때, ㈎의 양변을 $x-1$로 나누면

$g(x) = \frac{f(x)-x^2}{x-1} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㈏에서 $\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)-x^2}{x-1} = 2$이므로 $f(x)-x^2$은 최고차항의 계수가 2인 일차함수이다.

즉, $f(x)-x^2 = 2x+a$ (a는 상수)라고 하면

$f(x) = x^2+2x+a \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $g(x) = \frac{2x+a}{x-1}$ (단, $x \neq 1$)

함수 $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서도 연속이므로

$\lim_{x \to 1} g(x) = g(1) \qquad \therefore \lim_{x \to 1} \frac{2x+a}{x-1} = g(1) \qquad \cdots\cdots$ ㉢

$x \to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 1} (2x+a) = 0$이므로

$2+a=0 \qquad \therefore a=-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉣

㉣을 ㉢의 좌변에 대입하면

$\lim_{x \to 1} \frac{2x+a}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x-2}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$

$\therefore g(1) = 2$

㉣을 ㉡에 대입하면 $f(x) = x^2+2x-2$이므로

$f(2)+g(1) = (4+4-2)+2 = 8$

7 답 ⑤

유형 04 $(x-a)f(x)$ 꼴의 함수의 연속

$x \neq 1$일 때, 주어진 등식의 양변을 $\sqrt{2x+2}-\sqrt{x+3}$으로 나누면

$f(x) = \frac{ax^2-1}{\sqrt{2x+2}-\sqrt{x+3}}$

함수 $f(x)$가 $x \geq -1$인 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서도 연속이므로 $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{ax^2-1}{\sqrt{2x+2}-\sqrt{x+3}} = f(1) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x \to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 1} (ax^2-1) = 0$이므로

$a-1=0 \qquad \therefore a=1$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \to 1} \frac{ax^2-1}{\sqrt{2x+2}-\sqrt{x+3}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{2x+2}-\sqrt{x+3}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x^2-1)(\sqrt{2x+2}+\sqrt{x+3})}{(\sqrt{2x+2}-\sqrt{x+3})(\sqrt{2x+2}+\sqrt{x+3})}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{2x+2}+\sqrt{x+3})}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x+1)(\sqrt{2x+2}+\sqrt{x+3}) = 8$$

$\therefore f(1) = 8$

$\therefore a+f(1) = 1+8 = 9$

8 답 3

유형 05 가우스 기호를 포함한 함수의 연속

함수 $g(f(x))$에서 $f(x)=|x-3|$이므로 $x=3$을 기준으로 정수 a의 값의 범위를 나누어 연속성을 조사한다.

(i) $a>3$일 때

$f(x)=t$라고 하면 $x\to a+$일 때 $t\to(a-3)+$이므로

$\lim_{x\to a+}g(f(x))=\lim_{t\to(a-3)+}g(t)=2a-6$

$x\to a-$일 때 $t\to(a-3)-$이므로

$\lim_{x\to a-}g(f(x))=\lim_{t\to(a-3)-}g(t)=2a-7$

$\therefore \lim_{x\to a+}g(f(x))\neq\lim_{x\to a-}g(f(x))$

따라서 $\lim_{x\to a}g(f(x))$의 값이 존재하지 않으므로 $a>3$일 때 함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 불연속이다.

(ii) $a<3$일 때

(i)과 같은 방법으로 조사하면 $\lim_{x\to a}g(f(x))$의 값이 존재하지 않으므로 $a<3$일 때 함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 불연속이다.

(iii) $a=3$일 때

$g(f(3))=g(0)=0$

$f(x)=t$라고 하면 $x\to3$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to3}g(f(x))=\lim_{t\to0+}g(t)=0$

$\therefore \lim_{x\to3}g(f(x))=g(f(3))$

따라서 함수 $g(f(x))$는 $x=3$에서 연속이다.

(i), (ii), (iii)에 의해 함수 $g(f(x))$가 연속이 되도록 하는 정수 a의 값은

$a=3$

9 답 ③

유형 06 연속함수의 성질

① $2f(x)-g(x)=2|x+1|-x^2$은 모든 실수 x에서 연속이다.

② $f(x)g(x)=|x+1|x^2$은 모든 실수 x에서 연속이다.

③ $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{|x+1|}{x^2}$은 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

④ $f(g(x))=|x^2+1|$은 모든 실수 x에서 연속이다.

⑤ $g(f(x))=(x+1)^2$은 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 모든 실수 x에서 연속인 함수가 아닌 것은 ③이다.

10 답 ㄴ

유형 06 연속함수의 성질

ㄱ. [반례] $f(x)=\begin{cases}1 & (x\geq0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-1 & (x\geq0)\\ 1 & (x<0)\end{cases}$이라고 하면

$f(x)+g(x)=0$

따라서 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로

$\lim_{x\to0}|f(x)|=|f(0)|$

따라서 함수 $|f(x)|$도 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. [반례] $f(x)=\begin{cases}1 & (x\geq0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$이라고 하면

$|f(x)|=1$

따라서 함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 연속이지만 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ이다.

11 답 ④

유형 07 최대·최소 정리

최대·최소 정리의 역은 "함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 최댓값과 최솟값을 가지면 이 구간에서 연속이다."이므로 이 역이 성립하지 않음을 보이기 위해서는 함수 $f(x)$가 구간 $[-2, 2]$에서 최댓값과 최솟값을 갖지만 연속이 아닌 예를 찾으면 된다.

①, ②, ③ 구간 $[-2, 2]$에서 최댓값과 최솟값을 갖고, 이 구간에서 연속이다.

④ 구간 $[-2, 2]$에서 최댓값은 $f(-2)=4$, 최솟값은 $f(0)=1$이지만 $x=0$에서 불연속이다. ($\because \lim_{x\to0+}f(x)=1$, $\lim_{x\to0-}f(x)=2$)

⑤ 구간 $[-2, 2]$에서 최댓값과 최솟값을 갖지 않고, $x=-1$에서 불연속이다.

따라서 최대·최소 정리의 역이 성립하지 않음을 보이는 예로 적절한 것은 ④이다.

12 답 3

유형 08 사잇값의 정리

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=4$에서 $x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=2$에서 $x\to2$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로 $f(2)=0$

$f(0)=0$, $f(2)=0$이므로

$f(x)=x(x-2)g(x)$ ($g(x)$는 다항함수)라고 하자.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x-2)g(x)}{x}=\lim_{x\to0}(x-2)g(x)=4$$

$\therefore g(0)=-2$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x(x-2)g(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}xg(x)=2$$

$\therefore g(2)=1$

즉, 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고, $g(0)g(2)=-2<0$이므로 사잇값의 정리에 의해 방정식 $g(x)=0$은 구간 $(0, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 $x=0$, $x=2$를 근으로 갖고 구간 $(0, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가지므로 구간 $[0, 2]$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

03 미분계수와 도함수

핵심 유형

	유형01 5	유형02 -2	유형03 0
유형04 -3	유형05 $\frac{1}{3}$	유형06 ③	유형07 12
유형08 ㄱ, ㄴ	유형09 7	유형10 ㄱ, ㄴ	
유형11 ⑤	유형12 -4	유형13 9	유형14 -2
유형15 1	유형16 4	유형17 1	유형18 19

핵심 유형 완성하기

001 3	002 -3	003 1	004 $-\frac{1}{8}$	005 ④
006 ⑤	007 -3	008 ②	009 ③	010 6
011 6	012 ⑤	013 $\frac{1}{2}$	014 3	015 24
016 -6	017 ④	018 4	019 2	020 4
021 4	022 3	023 1	024 8	025 8
026 ③	027 ⑤	028 5	029 ③	030 9
031 ④	032 ㄴ	033 ㄴ, ㄷ	034 ④	035 ③
036 ㄷ	037 ㄱ, ㄷ	038 17	039 ③	040 1
041 ㄱ, ㄴ	042 (가) $x+h$ (나) nx^{n-1}	043 ③	044 ⑤	
045 4	046 1	047 1	048 $-\frac{5}{9}$	049 19
050 28	051 ⑤	052 4	053 -16	054 72
055 ④	056 -10	057 15	058 3	059 14
060 $\frac{11}{6}$	061 ⑤	062 ④	063 -4	064 ③
065 3	066 20	067 ④	068 ③	069 ②
070 -6	071 1	072 6	073 2	074 2

핵심 유형 최종 점검하기

1 ③	2 9	3 1	4 $-\frac{1}{3}$	5 2
6 2	7 4	8 ㄴ, ㄷ	9 ㄱ, ㄴ	10 ③
11 ③	12 8	13 13	14 22	15 6
16 11	17 -11	18 5	19 3	20 6

핵심 유형 38~39쪽

유형01 답 5

함수 $f(x)=x^2-3x$에 대하여 x의 값이 2에서 a까지 변할 때 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a)-f(2)}{a-2}=\frac{(a^2-3a)-(4-6)}{a-2}$$
$$=\frac{a^2-3a+2}{a-2}=\frac{(a-2)(a-1)}{a-2}=a-1$$

따라서 $a-1=4$이므로 $a=5$

유형02 답 -2

함수 $f(x)$에 대하여 x의 값이 1에서 3까지 변할 때 평균변화율은 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(1, f(1))$, $\mathrm{B}(3, f(3))$을 지나는 직선의 기울기와 같다.

따라서 직선 AB의 기울기는 -2이다.

유형03 답 0

함수 $f(x)=-x^2+x+2$에 대하여 x의 값이 -1에서 1까지 변할 때 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{2-0}{2}=1 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

함수 $f(x)$의 $x=a$에서 미분계수 $f'(a)$는

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{-(a+h)^2+(a+h)+2\}-(-a^2+a+2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2+(-2a+1)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(-h-2a+1)$$
$$=-2a+1 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠=㉡이므로 $1=-2a+1$ $\quad\therefore a=0$

유형04 답 -3

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1-2h)}{5h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)+f(1)-f(1-2h)}{5h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times\frac{3}{5}-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\times\left(-\frac{2}{5}\right)$$
$$=\frac{3}{5}f'(1)-\left\{-\frac{2}{5}f'(1)\right\}$$
$$=f'(1)=-3$$

유형05 답 $\frac{1}{3}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x^2+2x+4}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2+2x+4}$$
$$=f'(2)\times\frac{1}{12}=4\times\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$$

유형06 답 ③

$f(a+b)=f(a)+f(b)+ab$의 양변에 $a=0$, $b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0$ $\quad\therefore f(0)=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

미분계수의 정의에 의해 $f'(0)$은

$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$ ($\because$ ㉠)

이때 $f'(0)=1$이므로 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=1$ …… ㉡

미분계수의 정의에 의해 $f'(1)$은

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1)+f(h)+h-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+1$$
$$=2\ (\because ㉡)$$

$\therefore f(0)+f'(1)=0+2=2$

유형07 답 12

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(4, f(4))$에서의 접선의 기울기가 3이므로

$f'(4)=3$

$x^2=t$라고 하면 $x\to 2$일 때 $t\to 4$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\times(x+2)\right\}$$
$$=\lim_{t\to 4}\frac{f(t)-f(4)}{t-4}\times\lim_{x\to 2}(x+2)$$
$$=f'(4)\times 4=3\times 4=12$$

유형08 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{(h-h)-0}{h}=0$$
$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{(h+h)-0}{h}=2$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$이고 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h-0}{h}=1$$
$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h-0}{h}=-1$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h^3-0}{h}=0$$
$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h^3-0}{h}=0$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 보기 중 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

유형09 답 7

$x=1$, $x=3$, $x=4$에서 불연속이므로 $a=3$

$x=1$, $x=3$, $x=4$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다. 또 $x=2$에서 연속이지만 그래프가 꺾이는 모양이므로 미분가능하지 않다.

$\therefore b=4$

$\therefore a+b=3+4=7$

핵심 유형 완성하기 40~45쪽

001 답 3

함수 $f(x)=x^2-x+2$에 대하여 x의 값이 1에서 $1+a$까지 변할 때 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+a)-f(1)}{(1+a)-1}=\frac{\{(1+a)^2-(1+a)+2\}-(1-1+2)}{a}$$
$$=\frac{a^2+a}{a}=a+1$$

따라서 $a+1=4$이므로 $a=3$

002 답 -3

함수 $f(x)=x^3-ax+1$에 대하여 x의 값이 -2에서 3까지 변할 때 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=\frac{(27-3a+1)-(-8+2a+1)}{5}$$
$$=\frac{35-5a}{5}=7-a$$

따라서 $7-a=10$이므로 $a=-3$

003 답 1

함수 $f(x)=2x^2-3x+1$에 대하여 x의 값이 a에서 b까지 변할 때 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(2b^2-3b+1)-(2a^2-3a+1)}{b-a}$$
$$=\frac{2(b-a)(b+a)-3(b-a)}{b-a}=2(a+b)-3$$

따라서 $2(a+b)-3=-1$이므로 $a+b=1$

004 답 $-\frac{1}{8}$

$$f^1(x)=f(x)=\frac{x}{x-1}$$

$$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f(x))=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=x$$

$\vdots$

$\therefore g(x)=f^{2019}(x)=f^{2\times 1009+1}(x)=f(x)=\frac{x}{x-1}$

따라서 함수 $g(x)$에 대하여 x의 값이 3에서 5까지 변할 때 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{g(5)-g(3)}{5-3}=\frac{\frac{5}{4}-\frac{3}{2}}{2}=-\frac{1}{8}$$

다른 풀이 $f^1(3)=\frac{3}{2}$, $f^2(3)=f(f^1(3))=f\left(\frac{3}{2}\right)=3$,

$f^3(3)=f(f^2(3))=f(3)=\frac{3}{2}$, …이므로

$g(3)=f^{2019}(3)=\frac{3}{2}$

$f^1(5)=\frac{5}{4}$, $f^2(5)=f(f^1(5))=f\left(\frac{5}{4}\right)=5$,

$f^3(5)=f(f^2(5))=f(5)=\frac{5}{4}$, …이므로

$g(5)=f^{2019}(5)=\frac{5}{4}$

따라서 함수 $g(x)$에 대하여 x의 값이 3에서 5까지 변할 때 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{g(5)-g(3)}{5-3}=\frac{\frac{5}{4}-\frac{3}{2}}{2}=-\frac{1}{8}$$

005 답 ④

함수 $f(x)$에 대하여 x의 값이 -1에서 2까지 변할 때 평균변화율은 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ f(-1))$, $\mathrm{B}(2,\ f(2))$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

따라서 직선 AB의 기울기는 $\frac{3}{2}$이다.

006 답 ⑤

함수 $f(x)$에 대하여 x의 값이 2에서 5까지 변할 때 평균변화율은 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $(2,\ -4)$, $(5,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기와 같으므로

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2-(-4)}{5-2}=\frac{6}{3}=2$$

007 답 -3

두 점 $\mathrm{A}(0,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ f(3))$을 지나는 직선 AB의 기울기가 1이므로

$$\frac{f(3)-0}{3-0}=1 \qquad \therefore f(3)=3$$

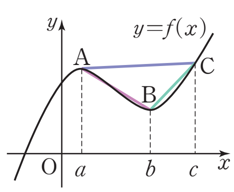
함수 $f(x)$에 대하여 x의 값이 3에서 4까지 변할 때 평균변화율은 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{B}(3,\ f(3))$, $\mathrm{C}(4,\ 0)$을 지나는 직선의 기울기와 같으므로

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0-f(3)}{4-3}=\frac{0-3}{1}=-3$$

008 답 ②

오른쪽 그림과 같은 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 α, β, γ의 값은 각각 직선 AB의 기울기, 직선 BC의 기울기, 직선 AC의 기울기와 같으므로

$\alpha<\gamma<\beta$



009 답 ③

$(f\circ g)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

오른쪽 그림에서 $f(b)=c$이므로

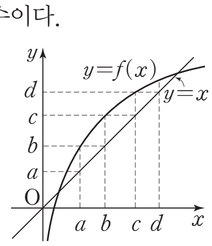
$f^{-1}(c)=b \qquad \therefore g(c)=b$

또 $f(a)=b$이므로

$f^{-1}(b)=a \qquad \therefore g(b)=a$

따라서 함수 $g(x)$에 대하여 x의 값이 b에서 c까지 변할 때 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{g(c)-g(b)}{c-b}=\frac{b-a}{c-b}=\frac{a-b}{b-c}$$



010 답 6

함수 $f(x)=x^2-4x+1$에 대하여 x의 값이 0에서 c까지 변할 때 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{(c^2-4c+1)-1}{c}$$

$$=\frac{c^2-4c}{c}=c-4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

함수 $f(x)$의 $x=3$에서 미분계수 $f'(3)$은

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(3+h)^2-4(3+h)+1\}-(9-12+1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(h+2)=2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠=㉡이므로 $c-4=2 \qquad \therefore c=6$

011 답 6

함수 $f(x)=x^2+ax$의 $x=-1$에서 미분계수 $f'(-1)$은

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(-1+h)^2+a(-1+h)\}-(1-a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+(a-2)h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\{h+(a-2)\}=a-2$$

따라서 $a-2=4$이므로 $a=6$

012 답 ⑤

함수 $f(x)=-x^2+5$에 대하여 x의 값이 a에서 b까지 변할 때 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(-b^2+5)-(-a^2+5)}{b-a}$$

$$=\frac{-(b-a)(b+a)}{b-a}=-(a+b) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

함수 $f(x)$의 $x=2$에서 미분계수 $f'(2)$는

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{-(2+h)^2+5\}-(-4+5)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2-4h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(-h-4)=-4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠=㉡이므로 $-(a+b)=-4 \qquad \therefore a+b=4$

013 답 $\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$의 $x=1$에서 미분계수 $f'(1)$은 x의 값이 1에서 $1+h$까지 변할 때 평균변화율에 대하여 $h \to 0$일 때 평균변화율의 극한값과 같으므로

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4-h}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{4+h}-\sqrt{4-h})(\sqrt{4+h}+\sqrt{4-h})}{h(\sqrt{4+h}+\sqrt{4-h})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h(\sqrt{4+h}+\sqrt{4-h})}=\lim_{h\to 0}\frac{2}{\sqrt{4+h}+\sqrt{4-h}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

014 답 3

함수 $f(x)=x^3-2kx^2$에 대하여 x의 값이 -1에서 1까지 변할 때 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{(1-2k)-(-1-2k)}{2}=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

함수 $f(x)$의 $x=a$에서 미분계수 $f'(a)$는

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(a+h)^3-2k(a+h)^2\}-(a^3-2ka^2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^3+(3a-2k)h^2+(3a^2-4ka)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\{h^2+(3a-2k)h+(3a^2-4ka)\}$$
$$=3a^2-4ka \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠$=$㉡이므로 $1=3a^2-4ka$ $\quad\therefore 3a^2-4ka-1=0$

위의 방정식을 만족하는 모든 a의 값의 합이 4이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\frac{4k}{3}=4,\ 4k=12 \quad \therefore k=3$

015 답 24

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+5h)-f(a-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+5h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+5h)-f(a)}{5h}\times 5-\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\times(-1)$$
$$=5f'(a)+f'(a)=6f'(a)=6\times 4=24$$

016 답 -6

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2-3h)-f(2)}{4h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2-3h)-f(2)}{-3h}\times\left(-\frac{3}{4}\right)$$
$$=-\frac{3}{4}f'(2)=-\frac{3}{4}\times 8=-6$$

017 답 ④

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-2h)}{3h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-3h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\times\frac{2}{3}$$
$$=\frac{2}{3}f'(a)$$

018 답 4

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\times 3=3f'(a)$$

따라서 $3f'(a)=6$이므로 $f'(a)=2$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^2)-f(a-4h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^2)-f(a)+f(a)-f(a-4h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}\times\frac{h}{2}\right\}-\lim_{h\to 0}\frac{f(a-4h)-f(a)}{-4h}\times(-2)$$
$$=f'(a)\times 0+2f'(a)$$
$$=2f'(a)=2\times 2=4$$

019 답 2

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-5h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)+f(0)-f(-5h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(-5h)-f(0)}{-5h}\times(-5)$$
$$=f'(0)+5f'(0)=6f'(0)$$

따라서 $6f'(0)=12$이므로 $f'(0)=2$

020 답 4

$\frac{1}{t}=h$라고 하면 $t\to\infty$일 때 $h\to 0$이므로

$$\lim_{t\to\infty}t\left\{f\left(a+\frac{b}{t}\right)-f\left(a-\frac{b}{t}\right)\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+bh)-f(a-bh)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+bh)-f(a)+f(a)-f(a-bh)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+bh)-f(a)}{bh}\times b-\lim_{h\to 0}\frac{f(a-bh)-f(a)}{-bh}\times(-b)$$
$$=bf'(a)+bf'(a)=2bf'(a)$$

따라서 $2bf'(a)=8b$이므로 $f'(a)=4$

021 답 4

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)-g(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\times(-2)-\frac{g(h)}{h}\right\}$$
$$=-2f'(a)-\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}=4-\alpha$$

따라서 $4-\alpha=0$이므로 $\alpha=4$

022 답 3

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\times\frac{x^3-1}{x^2-1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=f'(1)\times\frac{3}{2}=2\times\frac{3}{2}=3$$

023 답 1

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{f(x)-f(-1)}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{f(x)-f(-1)}$$
$$=\lim_{x\to -1}\left\{\frac{x-(-1)}{f(x)-f(-1)}\times(x^2-x+1)\right\}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{1}{\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}}\times\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)$$
$$=\frac{1}{f'(-1)}\times 3=\frac{1}{3}\times 3=1$$

024 답 8

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-2}{x^2-9}=1$에서 $x\to3$일 때 (분모) $\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to3}\{f(x)-2\}=0$이므로 $f(3)=2$ ······ ㉠

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to3}\frac{f(x)-2}{x^2-9}&=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x^2-9}\ (\because ㉠)\\&=\lim_{x\to3}\left\{\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\times\frac{1}{x+3}\right\}\\&=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\times\lim_{x\to3}\frac{1}{x+3}\\&=\frac{1}{6}f'(3)\end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{6}f'(3)=1$이므로 $f'(3)=6$

$\therefore f(3)+f'(3)=2+6=8$

025 답 8

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to2}\frac{x^2f(2)-4f(x)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{x^2f(2)-4f(2)+4f(2)-4f(x)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-4)f(2)}{x-2}-\lim_{x\to2}\frac{4\{f(x)-f(2)\}}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)f(2)}{x-2}-4\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\\&=4f(2)-4f'(2)\\&=4\times(-1)-4\times(-3)=8\end{aligned}$$

026 답 ③

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(1)}}{x^2-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{\{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(1)}\}\{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(1)}\}}{(x-1)(x+1)\{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(1)}\}}\\&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+1)\{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(1)}\}}\\&=f'(1)\times\frac{1}{4\sqrt{f(1)}}=6\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

027 답 ⑤

$f(a+b)=f(a)+f(b)+3ab-1$의 양변에 $a=0$, $b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1$ $\quad\therefore f(0)=1$ ······ ㉠

미분계수의 정의에 의해 $f'(0)$은

$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}$ $(\because ㉠)$

이때 $f'(0)=3$이므로 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}=3$ ······ ㉡

미분계수의 정의에 의해 $f'(2)$는

$$\begin{aligned}f'(2)&=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(2)+f(h)+6h-1-f(2)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}+6=9\ (\because ㉡)\end{aligned}$$

028 답 5

$f(a+b)=f(a)+f(b)$의 양변에 $a=0$, $b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\quad\therefore f(0)=0$ ······ ㉠

미분계수의 정의에 의해 $f'(0)$은

$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}$ $(\because ㉠)$

이때 $f'(0)=5$이므로 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=5$ ······ ㉡

미분계수의 정의에 의해 $f'(1)$은

$$\begin{aligned}f'(1)&=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)-f(1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=5\ (\because ㉡)\end{aligned}$$

029 답 ③

$f(a+b)=2f(a)f(b)$의 양변에 $a=0$, $b=0$을 대입하면

$f(0)=2f(0)f(0)$ $\quad\therefore f(0)=\frac{1}{2}$ $(\because f(0)>0)$ ······ ㉠

미분계수의 정의에 의해 $f'(0)$은

$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-\frac{1}{2}}{h}$ $(\because ㉠)$

이때 $f'(0)=2$이므로 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-\frac{1}{2}}{h}=2$ ······ ㉡

미분계수의 정의에 의해 $f'(1)$은

$$\begin{aligned}f'(1)&=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{2f(1)f(h)-f(1)}{h}\\&=2f(1)\times\lim_{h\to0}\frac{f(h)-\frac{1}{2}}{h}\\&=2f(1)\times2\ (\because ㉡)\\&=4f(1)\end{aligned}$$

$\therefore \frac{f'(1)}{f(1)}=4$

030 답 9

곡선 $y=f(x)$가 점 $(2, 5)$를 지나므로 $f(2)=5$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 5)$에서의 접선의 기울기가 3이므로

$f'(2)=3$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-5}{h}&=\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}\times3\\&=3f'(2)=3\times3=9\end{aligned}$$

031 답 ④

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+3}{x-1}=4$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)+3\}=0$이므로 $f(1)=-3$ ······ ㉠

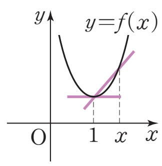
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이므로

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)+3}{x-1}\ (\because\ ㉠)=4$$

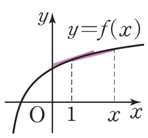
032 답 ㄴ

$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$은 두 점 $(1,\ f(1))$, $(x,\ f(x))$를 지나는 직선의 기울기와 같고, $f'(1)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기와 같다.

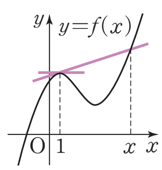
ㄱ. 오른쪽 그림에서 두 점 $(1,\ f(1))$, $(x,\ f(x))$를 지나는 직선의 기울기가 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기보다 크므로 $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}>f'(1)$이 항상 성립한다.



ㄴ. 오른쪽 그림에서 두 점 $(1,\ f(1))$, $(x,\ f(x))$를 지나는 직선의 기울기가 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기보다 작으므로 $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}<f'(1)$이 항상 성립한다.



ㄷ. 오른쪽 그림에서 두 점 $(1,\ f(1))$, $(x,\ f(x))$를 지나는 직선의 기울기가 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기보다 크므로 $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}>f'(1)$인 경우가 있다.

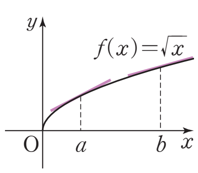


따라서 보기 중 조건을 항상 만족하는 함수의 그래프는 ㄴ이다.

033 답 ㄴ, ㄷ

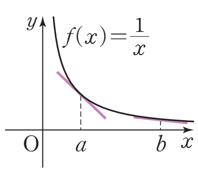
$0<a<b$일 때 $f'(a)<f'(b)$이면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(b,\ f(b))$에서의 접선의 기울기보다 작다.

ㄱ.



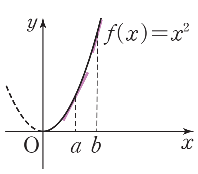
➡ $f'(a)>f'(b)$

ㄴ.



➡ $f'(a)<f'(b)$

ㄷ.



➡ $f'(a)<f'(b)$

따라서 보기 중 조건을 만족하는 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

034 답 ④

ㄱ. 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기가 직선 $y=2x$의 기울기보다 작으므로

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<2 \qquad \therefore\ f(b)-f(a)<2(b-a)$$

ㄴ. 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기가 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기보다 작으므로

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(a)$$

$$\therefore\ f(b)-f(a)<(b-a)f'(a)$$

ㄷ. 두 점 $(0,\ 0)$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기가 점 $(b,\ f(b))$에서의 접선의 기울기보다 크므로

$$\frac{f(b)}{b}>f'(b) \qquad \therefore\ f(b)>bf'(b)$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

035 답 ③

① $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h-0}{h}=1$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

② $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(1+h)h-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}(1+h)=1$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

③ $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{(1+h)h-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}(1+h)=1$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-(1+h)h-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\{-(1+h)\}=-1$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

④ 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 정의되지 않으므로 $x=1$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

⑤ $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{(1+h)^2-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}(h+2)=2$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{\{2(1+h)-1\}-1}{h}=2$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

따라서 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ③이다.

036 답 ㄷ

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h^3-0}{h}=0$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{0}{h}=0$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{h\to0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{2h-0}{h}=2$

$\lim_{h\to0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-2h-0}{h}=-2$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

따라서 보기 중 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ㄷ이다.

037 답 ㄱ, ㄷ

$$f(x)=\frac{x-1}{|x-2|+1}=\begin{cases}1 & (x\ge2)\\ \frac{x-1}{-x+3} & (x<2)\end{cases}$$

ㄱ. $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)=1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

ㄴ. $(x-3)f(x)=g(x)$라고 하면

$$g(x)=\begin{cases}x-3 & (x\ge2)\\ -(x-1) & (x<2)\end{cases}$$

$\lim_{h\to0+}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{(h-1)-(-1)}{h}=1$

$\lim_{h\to0-}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-(h+1)-(-1)}{h}=-1$

이므로 함수 $(x-3)f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $x(x-3)f(x)=k(x)$라고 하면

$$k(x)=\begin{cases}x(x-3) & (x\ge2)\\ -x(x-1) & (x<2)\end{cases}$$

$\lim_{x\to2}k(x)=k(2)=-2$이므로 함수 $x(x-3)f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

$\lim_{h\to0+}\frac{k(2+h)-k(2)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{(2+h)(h-1)-(-2)}{h}$

$=\lim_{h\to0+}(h+1)=1$

$\lim_{h\to0-}\frac{k(2+h)-k(2)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-(2+h)(1+h)-(-2)}{h}$

$=\lim_{h\to0-}(-h-3)=-3$

이므로 함수 $x(x-3)f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

038 답 17

$x=3$, $x=5$에서 불연속이므로

$m=3+5=8$

$x=1$, $x=3$, $x=5$에서 미분가능하지 않으므로

$n=1+3+5=9$

$\therefore m+n=8+9=17$

039 답 ③

① 점 $(0,\ f(0))$에서의 접선의 기울기가 0보다 크므로

$f'(0)>0$

② $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재한다.

③ 미분가능하면서 접선의 기울기가 0인 점이 존재하지 않으므로

$f'(x)=0$인 점도 존재하지 않는다.

④ 불연속인 x의 값은 $x=1$, $x=3$의 2개이다.

⑤ 미분가능하지 않은 x의 값은 $x=1$, $x=2$, $x=3$의 3개이다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

040 답 1

집합 A의 원소 a는 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 연속인 x의 값이다.

또 집합 B의 원소 a는 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 미분가능한 x의 값이다.

즉, 집합 $A\cap B^C$의 원소는 연속이지만 미분가능하지 않은 x의 값이므로 2이다.

따라서 집합 $A\cap B^C$의 원소의 개수는 1이다.

핵심 유형 46~47쪽

유형10 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}=f'(x)$

ㄴ. $\lim_{h\to0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}=f'(x)$

ㄷ. $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{3h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)+f(x)-f(x-h)}{3h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\times\frac{1}{3}-\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\times\left(-\frac{1}{3}\right)$

$=\frac{1}{3}f'(x)+\frac{1}{3}f'(x)=\frac{2}{3}f'(x)$

따라서 보기 중 $f'(x)$와 같은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

유형11 답 ⑤

$f(x)=(1+x-x^2)(1-x+x^2)$에서 $f(2)=-1\times3=-3$

$f'(x)=(1+x-x^2)'(1-x+x^2)+(1+x-x^2)(1-x+x^2)'$

$=(1-2x)(1-x+x^2)+(1+x-x^2)(-1+2x)$

$\therefore f'(2)=-3\times3+(-1)\times3=-12$

$\therefore \frac{f'(2)}{f(2)}=\frac{-12}{-3}=4$

유형12 답 -4

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\times(-1)$

$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$

$f'(x)=-3x^2+4x-3$이므로

$f'(1)=-3+4-3=-2$

따라서 구하는 극한값은 $2f'(1)=2\times(-2)=-4$

유형13 답 9

$f(x)=x^n+x^2+x$라고 하면 $f(1)=3$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n+x^2+x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=12$$

$f'(x)=nx^{n-1}+2x+1$이므로

$f'(1)=n+3$

따라서 $n+3=12$이므로 $n=9$

유형14 답 −2

$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=5$에서 $x\to -1$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to -1}f(x)=0$이므로 $f(-1)=0$

$$\therefore \lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)=5$$

$f(x)=ax^3+bx+1$에서 $f'(x)=3ax^2+b$

$f(-1)=0$에서 $-a-b+1=0$ …… ㉠

$f'(-1)=5$에서 $3a+b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-1$

$\therefore ab=2\times(-1)=-2$

유형15 답 1

$f(x)=x^4+ax^2+b$라고 하면 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, -2)$를 지나므로

$f(1)=1+a+b=-2$ $\quad\therefore a+b=-3$ …… ㉠

점 $(1, -2)$에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(1)=2$

$f'(x)=4x^3+2ax$이므로

$f'(1)=4+2a=2$ $\quad\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$-1+b=-3$ $\quad\therefore b=-2$

$\therefore a-b=-1-(-2)=1$

유형16 답 4

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)라고 하면

$f'(x)=2ax+b$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 식에 대입하면

$ax^2+bx+c+x(2ax+b)=3x^2+4x-3$

$\therefore 3ax^2+2bx+c=3x^2+4x-3$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$3a=3$, $2b=4$, $c=-3$

$\therefore a=1$, $b=2$, $c=-3$

따라서 $f'(x)=2x+2$이므로

$f'(1)=2+2=4$

참고 (1) $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식

$\iff a=0, b=0, c=0$

(2) $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식

$\iff a=a', b=b', c=c'$

유형17 답 1

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이고 미분계수 $f'(1)$이 존재한다.

(i) $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$에서

$b+1=a+2$ $\quad\therefore a-b=-1$ …… ㉠

(ii) 미분계수 $f'(1)$이 존재하므로

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\&=\lim_{h\to 0+}\frac{\{a(1+h)^2+2(1+h)\}-(a+2)}{h}\\&=\lim_{h\to 0+}(2a+2+ah)\\&=2a+2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\&=\lim_{h\to 0-}\frac{\{b(1+h)+1\}-(b+1)}{h}\\&=b\end{aligned}$$

따라서 $2a+2=b$이므로 $2a-b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=0$

$\therefore a^2+b^2=1+0=1$

다른 풀이 $g(x)=ax^2+2x$, $h(x)=bx+1$이라고 하면

$g'(x)=2ax+2$, $h'(x)=b$

(i) $x=1$에서 연속이므로 $g(1)=h(1)$에서

$a+2=b+1$ $\quad\therefore a-b=-1$ …… ㉠

(ii) $x=1$에서 미분계수가 존재하므로 $g'(1)=h'(1)$에서

$2a+2=b$ $\quad\therefore 2a-b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=0$

$\therefore a^2+b^2=1+0=1$

참고 두 다항함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여 함수

$f(x)=\begin{cases}g(x) & (x\geq a)\\ h(x) & (x<a)\end{cases}$가 $x=a$에서 미분가능하면

(i) $g(a)=h(a)$ (ii) $g'(a)=h'(a)$

유형18 답 19

다항식 $x^{10}+ax+b$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면 나머지가 0이므로

$x^{10}+ax+b=(x+1)^2Q(x)$ …… ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면

$1-a+b=0$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9+a=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-10+a=0$ $\quad\therefore a=10$

이를 ㉡에 대입하면

$1-10+b=0$ $\quad\therefore b=9$

$\therefore a+b=10+9=19$

핵심 유형 **완성**하기 48~52쪽

041 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h^3)-f(x)}{h^3}=f'(x)$

ㄴ. $\lim_{t\to x}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=f'(x)$

ㄷ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)+f(x)-f(x-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}\times 3-\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\times(-1)$

$=3f'(x)+f'(x)=4f'(x)$

따라서 보기 중 $f'(x)$와 같은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

042 답 (가) $x+h$ (나) nx^{n-1}

$f'(x)$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{\boxed{(가)\ x+h}-x\}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\}$

$=\underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}}_{n\text{개}}$

$=\boxed{(나)\ nx^{n-1}}$

043 답 ③

$f(a+b)=f(a)+f(b)+6ab-1$의 양변에 $a=0$, $b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1$ $\therefore f(0)=1$ …… ㉠

$\therefore f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+6xh-1-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+6xh-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}+6x$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+6x$ ($\because$ ㉠)

$=f'(0)+6x=6x+2$

044 답 ⑤

$f'(x)=(x^3+1)'(x^2+k)+(x^3+1)(x^2+k)'$

$=3x^2(x^2+k)+(x^3+1)\times 2x$

$=5x^4+3kx^2+2x$

$f'(-1)=9$에서

$5+3k-2=9$ $\therefore k=2$

045 답 4

$f'(x)=-1+2x-3x^2+\cdots+10x^9$이므로

$f'(0)=-1$

$f'(1)=-1+2-3+\cdots+10=5$

$\therefore f'(0)+f'(1)=-1+5=4$

046 답 1

$f'(x)=x^2+2ax-(a+1)$

$f'(2)=6$에서

$4+4a-a-1=6$ $\therefore a=1$

047 답 1

$f(0)=1$에서 $c=1$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 $f'(1)=-1$에서

$3+2a+b=-1$ $\therefore 2a+b=-4$ …… ㉠

$f'(-1)=3$에서

$3-2a+b=3$ $\therefore 2a-b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-2$

따라서 $f(x)=x^3-x^2-2x+1$이므로

$f(2)=8-4-4+1=1$

048 답 $-\frac{5}{9}$

$f'(x)=(x+1)'(2x-1)(3x+1)+(x+1)(2x-1)'(3x+1)+(x+1)(2x-1)(3x+1)'$

$=(2x-1)(3x+1)+(x+1)\times 2\times(3x+1)+(x+1)(2x-1)\times 3$

$=18x^2+10x-2$

$f'(a)=0$에서 a는 이차방정식 $18a^2+10a-2=0$의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의해 구하는 합은 $-\frac{10}{18}=-\frac{5}{9}$이다.

049 답 19

$g'(x)=(x^3+x+1)'f(x)+(x^3+x+1)f'(x)$

$=(3x^2+1)f(x)+(x^3+x+1)f'(x)$

$\therefore g'(1)=4f(1)+3f'(1)$

$=4\times 4+3\times 1=19$

050 답 28

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 세 점의 x좌표가 각각 a, b, c이고 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$

$\therefore f'(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 A에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$와 같으므로

$f'(a)=(a-b)(a-c)=(b-a)(c-a)$

$=\overline{AB}\times\overline{AC}=4\times(4+3)=28$

051 답 ⑤

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x^2+x+1}\right\}$

$=\frac{1}{3}f'(1)$

$f'(x)=3x^2+3$이므로 $f'(1)=3+3=6$

따라서 구하는 극한값은

$\frac{1}{3}f'(1)=\frac{1}{3}\times 6=2$

052 답 4

$f(1)=-1$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)+1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\times(-2)$$
$$=-2f'(1)$$

$f'(x)=-3x^2+2x-1$이므로 $f'(1)=-3+2-1=-2$

따라서 구하는 극한값은

$-2f'(1)=-2\times(-2)=4$

053 답 −16

$$\lim_{x\to2}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(2)\}^2}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{\{f(x)-f(2)\}\{f(x)+f(2)\}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to2}\{f(x)+f(2)\}$$
$$=f'(2)\times2f(2)=2f'(2)f(2)$$

$f(x)=x^4-2x^3-1$에서 $f(2)=16-16-1=-1$

$f'(x)=4x^3-6x^2$이므로 $f'(2)=32-24=8$

따라서 구하는 극한값은

$2f'(2)f(2)=2\times8\times(-1)=-16$

054 답 72

$\frac{1}{t}=h$라고 하면 $t\to\infty$일 때 $h\to0$이므로

$$\lim_{t\to\infty}t\left\{f\left(2+\frac{3}{t}\right)-f\left(2-\frac{5}{t}\right)\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2-5h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2)+f(2)-f(2-5h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}\times3-\lim_{h\to0}\frac{f(2-5h)-f(2)}{-5h}\times(-5)$$
$$=3f'(2)+5f'(2)=8f'(2)$$

$f'(x)=2x(x-1)+(x^2+1)=3x^2-2x+1$이므로

$f'(2)=12-4+1=9$

따라서 구하는 극한값은

$8f'(2)=8\times9=72$

055 답 ④

$f(x)=x^n+2x$라고 하면 $f(1)=3$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n+2x-3}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}=\frac{1}{2}f'(1)$$

$\frac{1}{2}f'(1)=10$이므로 $f'(1)=20$

$f'(x)=nx^{n-1}+2$이므로 $f'(1)=n+2$

따라서 $n+2=20$이므로 $n=18$

056 답 −10

$f(x)=x^{10}-x^3+3x$라고 하면 $f(-1)=-1$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^{10}-x^3+3x+1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$
$$=f'(-1)$$

$f'(x)=10x^9-3x^2+3$이므로 구하는 극한값은

$f'(-1)=-10-3+3=-10$

057 답 15

$\lim_{x\to2}\frac{x^n-4x^3+8x-16}{x^2-4}=\alpha$에서 $x\to2$일 때 (분모) $\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}(x^n-4x^3+8x-16)=0$이므로

$2^n-32+16-16=0$, $2^n=32$ $\quad\therefore n=5$

$f(x)=x^5-4x^3+8x$라고 하면 $f(2)=16$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{x^5-4x^3+8x-16}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}f'(2)$$

$\therefore \alpha=\frac{1}{4}f'(2)$

$f'(x)=5x^4-12x^2+8$이므로

$\alpha=\frac{1}{4}f'(2)=\frac{1}{4}(80-48+8)=10$

$\therefore n+\alpha=5+10=15$

058 답 3

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-5}{h}=6$에서 $h\to0$일 때 (분모) $\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{h\to0}\{f(1+h)-5\}=0$이므로 $f(1)=5$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-5}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=6$$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(1)=5$에서 $1+a+b+1=5$ $\quad\therefore a+b=3$ $\quad$…… ㉠

$f'(1)=6$에서 $3+2a+b=6$ $\quad\therefore 2a+b=3$ $\quad$…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=3$

$\therefore b-a=3-0=3$

059 답 14

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}=\frac{1}{2}f'(1)$$

$\frac{1}{2}f'(1)=\frac{5}{2}$이므로 $f'(1)=5$

$f(x)=x^3+ax^2+b$에서 $f'(x)=3x^2+2ax$

$f(-1)=2$에서 $-1+a+b=2$ $\quad\therefore a+b=3$ $\quad$…… ㉠

$f'(1)=5$에서 $3+2a=5$ $\quad\therefore a=1$

이를 ㉠에 대입하면 $1+b=3$ $\quad\therefore b=2$

따라서 $f(x)=x^3+x^2+2$이므로

$f(2)=8+4+2=14$

060 답 $\frac{11}{6}$

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 2$에서 $x \to 0$일 때 (분모) $\to$ 0이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$이므로 $f(0) = 0$ …… ㉠

$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 2$ …… ㉡

$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2} = 3$에서 $x \to 2$일 때 (분모) $\to$ 0이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉, $\lim_{x \to 2} \{f(x) - 1\} = 0$이므로 $f(2) = 1$ …… ㉢

$\therefore \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = 3$ …… ㉣

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d는 상수, $a \neq 0$)라고 하면

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

㉠에서 $f(0) = 0$이므로 $d = 0$

㉡에서 $f'(0) = 2$이므로 $c = 2$

㉢에서 $f(2) = 1$이므로 $8a + 4b + 2c + d = 1$

이 식에 $c = 2$, $d = 0$을 대입하면 $8a + 4b = -3$ …… ㉤

㉣에서 $f'(2) = 3$이므로 $12a + 4b + c = 3$

이 식에 $c = 2$를 대입하면 $12a + 4b = 1$ …… ㉥

㉤, ㉥을 연립하여 풀면 $a = 1$, $b = -\frac{11}{4}$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - \frac{11}{2}x + 2$

따라서 방정식 $f'(x) = 0$의 모든 근의 합은 근과 계수의 관계에 의해 $\frac{11}{6}$이다.

061 답 ⑤

$f(x) = -x^3 + 2ax^2 + bx - 1$이라고 하면 곡선 $y = f(x)$가 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$f(-1) = 1 + 2a - b - 1 = 2$

$\therefore 2a - b = 2$ …… ㉠

점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기가 3이므로 $f'(-1) = 3$

$f'(x) = -3x^2 + 4ax + b$이므로

$f'(-1) = -3 - 4a + b = 3$

$\therefore 4a - b = -6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a = -4$, $b = -10$

$\therefore a - b = -4 - (-10) = 6$

062 답 ④

$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 2$

두 점 $(-1, f(-1))$과 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기가 같으므로 $f'(-1) = f'(1)$에서

$3 - 2a - 2 = 3 + 2a - 2$ $\quad\therefore a = 0$

따라서 $f'(-1) = f'(1) = 1$이므로 $m = 1$

$\therefore a + m = 0 + 1 = 1$

063 답 -4

$f(x) = ax^3 + bx + c$라고 하면 곡선 $y = f(x)$가 점 $(0, -2)$를 지나므로

$f(0) = c = -2$

점 $(1, 2)$를 지나므로 $f(1) = a + b + c = 2$

이 식에 $c = -2$를 대입하면 $a + b = 4$ …… ㉠

점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기가 6이므로 $f'(1) = 6$

$f'(x) = 3ax^2 + b$이므로

$f'(1) = 3a + b = 6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 1$, $b = 3$

$\therefore a - b + c = 1 - 3 + (-2) = -4$

064 답 ③

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c는 상수, $a \neq 0$)라고 하면

$f'(x) = 2ax + b$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 식에 대입하면

$x(2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = x + 2$

$\therefore -bx - 2c = x + 2$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$-b = 1$, $-2c = 2$ $\quad\therefore b = -1$, $c = -1$

$f(1) = 2$에서 $a + b + c = 2$

$b = -1$, $c = -1$을 대입하면

$a - 1 - 1 = 2$ $\quad\therefore a = 4$

따라서 $f'(x) = 8x - 1$이므로

$f'(2) = 16 - 1 = 15$

065 답 3

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c는 상수, $a \neq 0$)라고 하면

$f'(x) = 2ax + b$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 식에 대입하면

$(x + 1)(2ax + b) - (ax^2 + bx + c) = 2x^2 + 4x$

$\therefore ax^2 + 2ax + b - c = 2x^2 + 4x$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a = 2$, $b - c = 0$ …… ㉠

$f'(-1) = 1$에서 $-2a + b = 1$

$a = 2$를 대입하면 $-4 + b = 1$ $\quad\therefore b = 5$

이를 ㉠에 대입하면 $5 - c = 0$ $\quad\therefore c = 5$

따라서 $f(x) = 2x^2 + 5x + 5$이므로

$f(-2) = 8 - 10 + 5 = 3$

066 답 20

$f(x)$를 n차함수라고 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차함수이다.

(가)에서 $n = 1$이면 좌변은 상수함수이고, 우변은 일차함수가 되어 모순이다. 즉, $n \geq 2$이다.

(가)에서 좌변의 차수는 $2(n-1)$, 우변의 차수는 n이므로

$2(n-1) = n$ $\quad\therefore n = 2$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c는 상수, $a \neq 0$)라고 하면

$f'(x) = 2ax + b$

$f(x)$와 $f'(x)$를 ㈎의 식에 대입하면

$(2ax+b)^2=4(ax^2+bx+c)+1$

$\therefore 4a^2x^2+4abx+b^2=4ax^2+4bx+4c+1$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$4a^2=4a,\ 4ab=4b,\ b^2=4c+1$ …… ㉠

$\therefore a=1\ (\because a\neq0)$

한편 ㈏에서 $f'(1)=5$이므로 $2a+b=5$

이 식에 $a=1$을 대입하면 $2+b=5$ $\therefore b=3$

이를 ㉠에 대입하면 $9=4c+1$ $\therefore c=2$

따라서 $f(x)=x^2+3x+2$이므로

$f(3)=9+9+2=20$

067 답 ④

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하면 $x=-1$에서 연속이고 미분계수 $f'(-1)$이 존재한다.

(i) $x=-1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$에서

$-4=-a+b$ $\therefore a-b=4$ …… ㉠

(ii) 미분계수 $f'(-1)$이 존재하므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{\{a(-1+h)+b\}-(-a+b)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{ah}{h}=a$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{\{(-1+h)^3+3(-1+h)\}-(-4)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{h^3-3h^2+6h}{h}=\lim_{h\to0-}(h^2-3h+6)=6$$

$\therefore a=6$

$a=6$을 ㉠에 대입하면 $6-b=4$ $\therefore b=2$

$\therefore a+b=6+2=8$

다른 풀이 $g(x)=ax+b,\ h(x)=x^3+3x$라고 하면

$g'(x)=a,\ h'(x)=3x^2+3$

(i) $x=-1$에서 연속이므로 $g(-1)=h(-1)$에서

$-a+b=-4$ $\therefore a-b=4$ …… ㉠

(ii) $x=-1$에서 미분계수가 존재하므로 $g'(-1)=h'(-1)$에서

$a=6$

$a=6$을 ㉠에 대입하면 $6-b=4$ $\therefore b=2$

$\therefore a+b=6+2=8$

068 답 ③

$f(x)=|x-1|(x-2a)$에서

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)(x-2a) & (x\geq1)\\ -(x-1)(x-2a) & (x<1)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하면 $x=1$에서도 미분가능하다.

(i) $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$에서

$0=0$ ➡ 항상 성립

(ii) 미분계수 $f'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h(1+h-2a)-0}{h}=\lim_{h\to0+}(1+h-2a)=1-2a$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-h(1+h-2a)-0}{h}=\lim_{h\to0-}\{-(1+h-2a)\}=-1+2a$$

따라서 $1-2a=-1+2a$이므로 $a=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{2}$

069 답 ②

$x\neq3$일 때, $f(x)=\frac{2x^2-5x+a}{x-3}$ …… ㉠

미분가능한 함수 $f(x)$는 $x=3$에서도 미분가능하다.

(i) $x=3$에서 연속이므로 $\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$에서

$\lim_{x\to3}\frac{2x^2-5x+a}{x-3}=f(3)$

$x\to3$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to3}(2x^2-5x+a)=0$이므로

$18-15+a=0$ $\therefore a=-3$

이를 ㉠에 대입하면 $x\neq3$일 때

$f(x)=\frac{2x^2-5x-3}{x-3}=\frac{(2x+1)(x-3)}{x-3}$

$=2x+1$ …… ㉡

(ii) 미분계수 $f'(3)$이 존재하므로 ㉡에서

$\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\{2(3+h)+1\}-7}{h}=2$

$\therefore f'(3)=2$

(i), (ii)에서 $a+f'(3)=-3+2=-1$

070 답 -6

$0\leq x<1$에서 $[x]=0$, $1\leq x<2$에서 $[x]=1$이므로

$$f(x)=\begin{cases}0 & (0\leq x<1)\\ x^3+ax+b & (1\leq x<2)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이고 미분계수 $f'(1)$이 존재한다.

(i) $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$에서

$0=1+a+b$ $\therefore a+b=-1$ …… ㉠

(ii) 미분계수 $f'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{\{(1+h)^3+a(1+h)+b\}-(1+a+b)}{h}=\lim_{h\to0+}(h^2+3h+a+3)=a+3$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{0-0}{h}=0$$

따라서 $a+3=0$이므로 $a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $-3+b=-1$ $\therefore b=2$

$\therefore ab=-3\times2=-6$

071 답 1

다항식 x^7-ax^3+bx+2를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면 나머지가 0이므로

$x^7-ax^3+bx+2=(x-1)^2Q(x)$ ...... ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$1-a+b+2=0$ $\therefore a-b=3$ ...... ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$7x^6-3ax^2+b=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$

양변에 $x=1$을 대입하면

$7-3a+b=0$ $\therefore 3a-b=7$ ...... ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$

$\therefore a+b=2+(-1)=1$

072 답 6

다항식 $x^{10}+x^5+1$을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)$를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$x^{10}+x^5+1=(x+1)^2Q(x)+ax+b$ ...... ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면

$1-1+1=-a+b$ $\therefore a-b=-1$ ...... ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9+5x^4=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-10+5=a$ $\therefore a=-5$

이를 ㉡에 대입하면

$-5-b=-1$ $\therefore b=-4$

따라서 $R(x)=-5x-4$이므로 $R(-2)=10-4=6$

073 답 2

다항식 x^3-3x^2+b를 $(x-a)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면 나머지가 0이므로

$x^3-3x^2+b=(x-a)^2Q(x)$ ...... ㉠

양변에 $x=a$를 대입하면

$a^3-3a^2+b=0$ ...... ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2-6x=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)$

양변에 $x=a$를 대입하면

$3a^2-6a=0$, $3a(a-2)=0$ $\therefore a=2$ ($\because a\neq0$)

이를 ㉡에 대입하면 $8-12+b=0$ $\therefore b=4$

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{2}=2$

074 답 2

$\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{f(x)+3}{x+2}=1$에서 $x\to-2$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to-2}\{f(x)+3\}=0$이므로 $f(-2)=-3$ ...... ㉠

$$\therefore \lim_{x\to-2}\frac{f(x)+3}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=f'(-2)=1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

다항식 $f(x)$를 $(x+2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면 나머지가 $ax+b$이므로

$f(x)=(x+2)^2Q(x)+ax+b$ ...... ㉢

㉠에서 $f(-2)=-3$이므로 $-3=-2a+b$ ...... ㉣

㉢의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x+2)Q(x)+(x+2)^2Q'(x)+a$

㉡에서 $f'(-2)=1$이므로 $a=1$

이를 ㉣에 대입하면 $-3=-2+b$ $\therefore b=-1$

$\therefore a-b=1-(-1)=2$

핵심 유형 최종 점검하기 53~55쪽

1 답 ③

유형 01 평균변화율

함수 $f(x)=x^2-2x$에 대하여 x의 값이 a에서 b까지 변할 때 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(b^2-2b)-(a^2-2a)}{b-a}=\frac{(b-a)(b+a)-2(b-a)}{b-a}=a+b-2$$

따라서 $a+b-2=2$이므로 $a+b=4$ ...... ㉠

함수 $f(x)$에 대하여 x의 값이 $2a$에서 $2b$까지 변할 때 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2b)-f(2a)}{2b-2a}=\frac{(4b^2-4b)-(4a^2-4a)}{2b-2a}=\frac{4(b-a)(b+a)-4(b-a)}{2(b-a)}=2(a+b)-2=2\times4-2\ (\because ㉠)=6$$

2 답 9

유형 02 평균변화율의 기하학적 의미

직선 AB의 기울기가 -3이므로

$\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=-3$ $\therefore f(4)-f(1)=-9$

$f(0)=f(4)$이므로 함수 $f(x)$에 대하여 x의 값이 0에서 1까지 변할 때 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f(1)-f(4)}{1-0}=-\{f(4)-f(1)\}=9$$

3 답 1

유형 03 미분계수

함수 $f(x)=x^2-5x+4$에 대하여 x의 값이 a에서 $a+2$까지 변할 때 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+2)-f(a)}{(a+2)-a}=\frac{\{(a+2)^2-5(a+2)+4\}-(a^2-5a+4)}{2}=\frac{4a-6}{2}=2a-3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

함수 $f(x)$의 $x=2$에서 미분계수는

$$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(2+h)^2-5(2+h)+4\}-(4-10+4)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h^2-h}{h}=\lim_{h\to0}(h-1)=-1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠=㉡이므로

$2a-3=-1 \qquad \therefore a=1$

다른 풀이 함수 $f(x)=x^2-5x+4$에 대하여 x의 값이 a에서 $a+2$까지 변할 때 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+2)-f(a)}{(a+2)-a}$$
$$=\frac{\{(a+2)^2-5(a+2)+4\}-(a^2-5a+4)}{2}$$
$$=\frac{4a-6}{2}=2a-3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$f(x)=x^2-5x+4$에서 $f'(x)=2x-5$

$\therefore f'(2)=4-5=-1 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠=㉡이므로

$2a-3=-1 \qquad \therefore a=1$

4 답 $-\frac{1}{3}$

유형 03 미분계수

$$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{h^2+4h+9}-h-3}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{(\sqrt{h^2+4h+9}-h-3)(\sqrt{h^2+4h+9}+h+3)}{h(\sqrt{h^2+4h+9}+h+3)}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{-2h}{h(\sqrt{h^2+4h+9}+h+3)}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{-2}{\sqrt{h^2+4h+9}+h+3}=-\frac{1}{3}$$

5 답 2

유형 04 미분계수를 이용한 극한값의 계산 – $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 꼴

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+kh)-f(1)}{(k+1)h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+kh)-f(1)}{kh}\times\frac{k}{k+1}$$
$$=f'(1)\times\frac{k}{k+1}=\frac{3k}{k+1}$$

따라서 $\frac{3k}{k+1}=2$이므로 $3k=2(k+1) \qquad \therefore k=2$

6 답 2

유형 05 미분계수를 이용한 극한값의 계산 – $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 꼴

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a-4h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)+f(a)-f(a-4h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\times\frac{3}{2}-\lim_{h\to0}\frac{f(a-4h)-f(a)}{-4h}\times(-2)$$
$$=\frac{3}{2}f'(a)+2f'(a)=\frac{7}{2}f'(a)$$

따라서 $\frac{7}{2}f'(a)=14a$이므로 $f'(a)=4a$

$$\therefore \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)(x+a)}$$
$$=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\frac{1}{x+a}\right\}$$
$$=f'(a)\times\frac{1}{2a}$$
$$=4a\times\frac{1}{2a}=2$$

7 답 4

유형 06 관계식이 주어졌을 때 미분계수 구하기

$f(a+b)=f(a)+f(b)-2ab+1$의 양변에 $a=0$, $b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+1 \qquad \therefore f(0)=-1 \quad \cdots\cdots ㉠$

미분계수의 정의에 의해 $f'(1)$은

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)-2h+1-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}-2$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}-2 \ (\because ㉠)$$
$$=f'(0)-2$$

따라서 $f'(0)-2=2$이므로 $f'(0)=4$

8 답 ㄴ, ㄷ

유형 07 미분계수의 기하학적 의미

ㄱ. 원점 및 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 원점과 점 $(a,\ f(a))$를 지나는 직선의 기울기와 원점과 점 $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기는 모두 1이다.

$\therefore \frac{f(a)}{a}=\frac{f(b)}{b}=1$

ㄴ. 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기가 점 $(b,\ f(b))$에서의 접선의 기울기보다 크므로

$f'(a)>f'(b)$

ㄷ. 점 $(b,\ f(b))$에서의 접선의 기울기가 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기보다 작으므로

$f'(b)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

9 답 ㄱ, ㄴ

유형 08 미분가능성과 연속성 – 정의를 이용하는 경우

ㄱ. $0\le x<1$에서 $[x]=0$, $1\le x<2$에서 $[x]=1$이므로

$$f(x)=\begin{cases}0 & (0\le x<1)\\ x-1 & (1\le x<2)\end{cases}$$

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{(1+h-1)-0}{h}=1$$
$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{0-0}{h}=0$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $f(x)=\begin{cases} 0 & (x\ge 1) \\ -2x+2 & (x<1) \end{cases}$

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{0-0}{h}=0$

$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{\{-2(1+h)+2\}-0}{h}=-2$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{(1+h)^3-1}{h}$

$=\lim_{h\to0+}(h^2+3h+3)=3$

$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{\{3(1+h)-2\}-1}{h}=3$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

따라서 보기 중 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

10 답 ③

유형 09 미분가능성과 연속성 – 그래프를 이용하는 경우

① $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이고, 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기가 0보다 작으므로 $f'(1)<0$이다.

② $\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to3}f(x)$의 값이 존재한다.

③ 미분가능하면서 접선의 기울기가 0인 x의 값은 $x=-1$의 1개이다.

④ 불연속인 x의 값은 $x=0$, $x=3$의 2개이다.

⑤ 미분가능하지 않은 x의 값은 $x=0$, $x=2$, $x=3$의 3개이다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

11 답 ③

유형 10 도함수의 정의

$f(a-b)=f(a)+f(b)-ab$의 양변에 $a=0$, $b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)\qquad \therefore f(0)=0\qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f(a-b)=f(a)+f(b)-ab$의 양변에 b 대신 $-b$를 대입하면

$f(a+b)=f(a)+f(-b)+ab$

$\therefore f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(-h)+xh-f(x)}{h}$

$=-\lim_{h\to0}\frac{f(-h)}{-h}+x$

$=-\lim_{h\to0}\frac{f(-h)-f(0)}{-h}+x$ ($\because$ ㉠)

$=-f'(0)+x=x-5$

12 답 8

유형 11 미분법의 공식

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=1$에서 $x\to2$일 때 (분모) $\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}\{f(x)-3\}=0$이므로 $f(2)=3$

$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=1$

$\lim_{x\to2}\frac{g(x)+1}{x-2}=3$에서 $x\to2$일 때 (분모) $\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}\{g(x)+1\}=0$이므로 $g(2)=-1$

$\therefore \lim_{x\to2}\frac{g(x)+1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)=3$

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$h'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)$

$=1\times(-1)+3\times3=8$

13 답 13

유형 11 미분법의 공식

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지나므로

$f(2)=3$

또 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(2)$와 같고, 이 접선은 두 점 $(-1, 0)$, $(2, 3)$을 지나므로

$f'(2)=\frac{3-0}{2-(-1)}=1$

$g(x)=(x^2-2x+1)^2f(x)$에서

$g'(x)=\{(x^2-2x+1)^2\}'f(x)+(x^2-2x+1)^2f'(x)$

$=2(x^2-2x+1)(2x-2)f(x)+(x^2-2x+1)^2f'(x)$

$\therefore g'(2)=4f(2)+f'(2)$

$=4\times3+1=13$

14 답 22

유형 12 미분계수를 이용한 극한값의 계산 – 함수의 식이 주어진 경우

$f(1)=g(1)=1$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-g(1-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)+g(1)-g(1-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2-\lim_{h\to0}\frac{g(1-3h)-g(1)}{-3h}\times(-3)$

$=2f'(1)+3g'(1)$

$f'(x)=5x^4+3x^2$, $g'(x)=4x^3-2x$이므로 구하는 극한값은

$2f'(1)+3g'(1)=2(5+3)+3(4-2)=22$

15 답 6

유형 13 치환을 이용한 극한값의 계산

$f(x)=x^{3n}-x^{2n}+x^n$이라고 하면 $f(1)=1$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{x^{3n}-x^{2n}+x^n-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=12$

$f'(x)=3nx^{3n-1}-2nx^{2n-1}+nx^{n-1}$이므로

$f'(1)=3n-2n+n=2n$

따라서 $2n=12$이므로 $n=6$

16 답 11

유형 14 미분계수를 이용하여 미정계수 구하기

(가)에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이므로

$f(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라고 하자.

(나)에서 $x \to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 1} f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$

$f'(x)=4x+a$이므로 $f'(1)=4+a=3$

$\therefore a=-1$

따라서 $f'(x)=4x-1$이므로

$f'(3)=4\times3-1=11$

17 답 -11

유형 15 접선의 기울기를 이용하여 미정계수 구하기

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라고 하면 곡선 $y=f(x)$가 점 $\mathrm{A}(0, 1)$을 지나므로 $f(0)=c=1$

곡선 $y=f(x)$가 점 $\mathrm{B}(-1, 5)$를 지나므로

$f(-1)=-1+a-b+c=5$

$\therefore a-b+c=6$

$c=1$을 대입하면 $a-b=5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

점 $\mathrm{A}(0, 1)$에서의 접선의 기울기가 4이므로 $f'(0)=4$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 $f'(0)=b=4$

이를 ㉠에 대입하면

$a-4=5 \qquad \therefore a=9$

따라서 $f'(x)=3x^2+18x+4$이므로 점 $\mathrm{B}(-1, 5)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=3-18+4=-11$

18 답 5

유형 16 미분의 항등식에의 활용

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)라고 하면

$f'(x)=2ax+b$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 식에 대입하면

$x(2ax+b)=ax^2+bx+c-2x^2+1$

$\therefore 2ax^2+bx=(a-2)x^2+bx+c+1$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2a=a-2$, $0=c+1 \qquad \therefore a=-2$, $c=-1$

$f(1)=4$에서 $a+b+c=4$

$a=-2$, $c=-1$을 대입하면

$-2+b-1=4 \qquad \therefore b=7$

따라서 $f(x)=-2x^2+7x-1$이므로

$f(2)=-8+14-1=5$

19 답 3

유형 17 미분가능할 조건과 미분계수

$g(x)=\begin{cases} x+2 & (x\le0) \\ a(x-1)^2+b & (0<x<2) \\ -x+4 & (x\ge2) \end{cases}$라고 하자.

함수 $g(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 미분가능하면 $x=0$과 $x=2$에서도 각각 미분가능하다.

(i) $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x \to 0} g(x)=g(0)$에서

$a+b=2 \quad\cdots\cdots$ ㉠

$x=2$에서 연속이므로 $\lim_{x \to 2} g(x)=g(2)$에서

$a+b=2$

(ii) 미분계수 $g'(0)$이 존재하므로

$\lim_{h \to 0+} \frac{g(0+h)-g(0)}{h}$

$=\lim_{h \to 0+} \frac{\{a(h-1)^2+b\}-(a+b)}{h}$

$=\lim_{h \to 0+} (ah-2a)=-2a$

$\lim_{h \to 0-} \frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h \to 0-} \frac{(h+2)-2}{h}=1$

따라서 $-2a=1$이므로 $a=-\frac{1}{2}$

미분계수 $g'(2)$가 존재하므로

$\lim_{h \to 0+} \frac{g(2+h)-g(2)}{h}$

$=\lim_{h \to 0+} \frac{\{-(2+h)+4\}-(-2+4)}{h}=-1$

$\lim_{h \to 0-} \frac{g(2+h)-g(2)}{h}$

$=\lim_{h \to 0-} \frac{\{a(1+h)^2+b\}-(a+b)}{h}$

$=\lim_{h \to 0-} (ah+2a)=2a$

따라서 $-1=2a$이므로 $a=-\frac{1}{2}$

$a=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$-\frac{1}{2}+b=2 \qquad \therefore b=\frac{5}{2}$

$\therefore b-a=\frac{5}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=3$

20 답 6

유형 18 미분법과 다항식의 나눗셈

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지나므로 $f(2)=3$

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선의 기울기가 -3이므로 $f'(2)=-3$

다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)$를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$f(x)=(x-2)^2Q(x)+ax+b \quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(2)=3$이므로 ㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2a+b=3 \quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)+a$

$f'(2)=-3$이므로 위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$a=-3$

이를 ㉡에 대입하면

$-6+b=3 \qquad \therefore b=9$

따라서 $R(x)=-3x+9$이므로

$R(1)=-3+9=6$

04 도함수의 활용 (1)

핵심 유형

	유형01 ③	유형02 6	유형03 2
유형04 ④	유형05 4	유형06 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$	유형07 ①
유형08 $\frac{2}{3}$	유형09 $\frac{\sqrt{3}}{3}$		

핵심 유형 완성하기

001 ②	002 $-\frac{5}{3}$	003 3	004 17	005 ⑤
006 ③	007 -40	008 $-\frac{4}{3}$	009 -2	010 $\frac{1}{2}$
011 7	012 4	013 ⑤	014 $2\sqrt{2}$	015 8
016 2	017 -16	018 $\sqrt{5}$	019 6	020 $\frac{3}{4}$
021 ③	022 $\frac{32}{3}$	023 ④	024 11	025 ②
026 ②	027 $\frac{7-\sqrt{13}}{3}$		028 ⑤	029 -3
030 -1	031 ③	032 ③	033 $\frac{1}{2}$	034 ②
035 5	036 ③	037 3	038 5	039 9
040 $\frac{1}{2}$				

핵심 유형 최종 점검하기

1 -6	2 ⑤	3 0	4 $-\frac{5}{2}$	5 1
6 8	7 $\frac{1}{2}$	8 ④	9 $\frac{3\sqrt{17}}{17}$	10 $\sqrt{5}$
11 ④	12 -21	13 4		

핵심 유형 58～59쪽

유형01 탑 ③

$f(x)=-x^3+ax+3$이라고 하면 $f'(x)=-3x^2+a$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 4)$를 지나므로

$f(1)=-1+a+3=4 \qquad \therefore a=2$

점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-3+a=-1$이므로 접선의 방정식은

$y-4=-(x-1)$

$\therefore y=-x+5$

따라서 $b=-1$, $c=5$이므로

$abc=2\times(-1)\times5=-10$

유형02 탑 6

$f(x)=x^3+2x+1$이라고 하면 $f'(x)=3x^2+2$

점 $(-1,\ -2)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는

$-\frac{1}{f'(-1)}=-\frac{1}{5}$

따라서 직선의 방정식은

$y+2=-\frac{1}{5}(x+1)$

$\therefore x+5y+11=0$

따라서 $a=1$, $b=5$이므로

$a+b=1+5=6$

유형03 탑 2

$f(x)=-x^3+3x^2+2$라고 하면 $f'(x)=-3x^2+6x$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^3+3t^2+2)$라고 하면 직선 $3x-y+2=0$, 즉 $y=3x+2$에 평행한 접선의 기울기는 3이므로

$f'(t)=-3t^2+6t=3,\ 3t^2-6t+3=0$

$(t-1)^2=0 \qquad \therefore t=1$

접점의 좌표는 $(1,\ 4)$이므로 접선의 방정식은

$y-4=3(x-1)$

$\therefore 3x-y+1=0$

따라서 $a=3$, $b=1$이므로

$a-b=3-1=2$

유형04 탑 ④

$f(x)=x^3+3$이라고 하면 $f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+3)$이라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+3)=3t^2(x-t)$

$\therefore y=3t^2x-2t^3+3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=-2t^3+3,\ t^3-1=0$

$(t-1)(t^2+t+1)=0$

$\therefore t=1$ ($\because$ t는 실수)

이를 ㉠에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$y=3x+1$

따라서 $a=3$, $b=1$이므로

$a+2b=3+2=5$

유형05 탑 4

$f(x)=x^3-5x+6$이라고 하면 $f'(x)=3x^2-5$

점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-2$이므로 접선의 방정식은

$y-2=-2(x-1)$

$\therefore y=-2x+4$

따라서 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 4)$이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\times2\times4=4$

유형06 답 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

곡선 $y=-x^2+x+2$에 접하고 직선 $y=x+5$와 기울기가 같은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+t+2)$라고 하면 구하는 거리의 최솟값은 이 점과 직선 $y=x+5$ 사이의 거리와 같다.

$f(x)=-x^2+x+2$라고 하면 $f'(x)=-2x+1$

접선의 기울기가 1이므로

$f'(t)=-2t+1=1 \qquad \therefore t=0$

따라서 접점의 좌표는 $(0,\ 2)$이므로 이 점과 직선 $y=x+5$, 즉 $x-y+5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|0-2+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

유형07 답 ①

$f(x)=x^3+a$, $g(x)=bx^2+c$라고 하면

$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=2bx$

(i) 두 곡선이 각각 점 $(2,\ 6)$을 지나므로

$f(2)=8+a=6 \qquad \therefore a=-2$

$g(2)=4b+c=6 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) 점 $(2,\ 6)$에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(2)=g'(2)$에서

$12=4b \qquad \therefore b=3$

$b=3$을 ㉠에 대입하면

$12+c=6 \qquad \therefore c=-6$

$\therefore a+b+c=-2+3+(-6)=-5$

유형08 답 $\frac{2}{3}$

함수 $f(x)=x(x-2)^2=x^3-4x^2+4x$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(2)=0$이므로 롤의 정리에 의해 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-8x+4$이므로

$f'(c)=3c^2-8c+4=0$

$(3c-2)(c-2)=0$

$\therefore c=\frac{2}{3}\ (\because 0<c<2)$

유형09 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

함수 $f(x)=x^3+2x$는 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의해

$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2+2$이므로

$\frac{3-0}{1-0}=3c^2+2$, $c^2=\frac{1}{3}$

$\therefore c=\frac{\sqrt{3}}{3}\ (\because 0<c<1)$

핵심 유형 완성하기 60~65쪽

001 답 ②

$f(x)=x^3+2x^2+ax+1$이라고 하면 $f'(x)=3x^2+4x+a$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1,\ 3)$을 지나므로

$f(-1)=-1+2-a+1=3 \qquad \therefore a=-1$

점 $(-1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=-1+a=-2$이므로 접선의 방정식은

$y-3=-2(x+1) \qquad \therefore y=-2x+1$

따라서 $b=-2$, $c=1$이므로

$a+b+c=-1+(-2)+1=-2$

002 답 $-\frac{5}{3}$

$f(x)=x^3-3x^2+2$라고 하면 $f'(x)=3x^2-6x$

점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-3$이므로 접선의 방정식은

$y=-3(x-1) \qquad \therefore y=-3x+3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

점 $(3,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=9$이므로 접선의 방정식은

$y-2=9(x-3) \qquad \therefore y=9x-25 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\frac{7}{3}$, $y=-4$

따라서 교점의 좌표는 $\left(\frac{7}{3},\ -4\right)$이므로 $a=\frac{7}{3}$, $b=-4$

$\therefore a+b=\frac{7}{3}+(-4)=-\frac{5}{3}$

003 답 3

$f(x)=2x^3+ax+b$라고 하면 $f'(x)=6x^2+a$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$f(1)=2+a+b=1 \qquad \therefore a+b=-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=6+a$이므로 접선의 방정식은

$y-1=(6+a)(x-1)$

이 직선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$-1=-(6+a) \qquad \therefore a=-5$

이를 ㉠에 대입하면 $-5+b=-1 \qquad \therefore b=4$

$\therefore a+2b=-5+8=3$

004 답 17

$f(x)=-x^3+2x^2-1$이라고 하면 $f'(x)=-3x^2+4x$

점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=-4$이므로 접선의 방정식은

$y+1=-4(x-2) \qquad \therefore y=-4x+7$

곡선 $y=-x^3+2x^2-1$과 접선 $y=-4x+7$의 교점의 x좌표는

$-x^3+2x^2-1=-4x+7$에서 $x^3-2x^2-4x+8=0$

$(x+2)(x-2)^2=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 다시 만나는 점의 좌표는 $(-2,\ 15)$이므로

$a=-2$, $b=15$

$\therefore b-a=15-(-2)=17$

005 답 ⑤

$y=x^3+ax^2+2ax+a+3$을 a에 대하여 정리하면

$(x^2+2x+1)a+(x^3-y+3)=0$

이 등식이 a에 대한 항등식이므로

$x^2+2x+1=0$, $x^3-y+3=0$

$x^2+2x+1=0$에서 $(x+1)^2=0$ $\quad\therefore x=-1$

이를 $x^3-y+3=0$에 대입하면

$-1-y+3=0$ $\quad\therefore y=2$

$\therefore$ P$(-1, 2)$

$f(x)=x^3+ax^2+2ax+a+3$이라고 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+2a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P$(-1, 2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=3-2a+2a=3$이므로 접선의 방정식은

$y-2=3(x+1)$ $\quad\therefore y=3x+5$

006 답 ③

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=2$에서 $x \to 1$일 때 (분모) $\to$ 0이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-1\}=0$이므로 $f(1)=1$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 2이므로 접선의 방정식은

$y-1=2(x-1)$ $\quad\therefore 2x-y=1$

따라서 $a=2$, $b=-1$이므로

$a-b=2-(-1)=3$

007 답 -40

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기가 2이므로

$f(1)=3$, $f'(1)=2$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, -1)$에서의 접선의 기울기가 -2이므로

$g(1)=-1$, $g'(1)=-2$

곡선 $y=f(x)g(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 y좌표는

$f(1)g(1)=3\times(-1)=-3$

이때 $y=f(x)g(x)$에서 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$x=1$인 점에서의 접선의 기울기는

$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=2\times(-1)+3\times(-2)=-8$

따라서 점 $(1, -3)$을 지나고 기울기가 -8인 접선의 방정식은

$y+3=-8(x-1)$ $\quad\therefore y=-8x+5$

따라서 $a=-8$, $b=5$이므로

$ab=-8\times5=-40$

008 답 $-\frac{4}{3}$

$f(x)=-3x^3+3x^2+2$라고 하면 $f'(x)=-9x^2+6x$

점 $(1, 2)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는

$-\frac{1}{f'(1)}=-\frac{1}{-3}=\frac{1}{3}$

따라서 직선의 방정식은

$y-2=\frac{1}{3}(x-1)$ $\quad\therefore y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

따라서 $m=\frac{1}{3}$, $n=\frac{5}{3}$이므로

$m-n=\frac{1}{3}-\frac{5}{3}=-\frac{4}{3}$

009 답 -2

$f(x)=x^3-2x+3$이라고 하면 $f'(x)=3x^2-2$

점 $(-1, 4)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는

$-\frac{1}{f'(-1)}=-\frac{1}{1}=-1$

따라서 직선의 방정식은

$y-4=-(x+1)$ $\quad\therefore y=-x+3$

이 직선이 점 $(5, a)$를 지나므로

$a=-5+3=-2$

010 답 $\frac{1}{2}$

$g(x)=x^3+x^2$이라고 하면 $g'(x)=3x^2+2x$

점 P(t, t^3+t^2)에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는

$-\frac{1}{g'(t)}=-\frac{1}{3t^2+2t}$

따라서 직선의 방정식은

$y-(t^3+t^2)=-\frac{1}{3t^2+2t}(x-t)$

$\therefore y=-\frac{1}{3t^2+2t}x+\frac{1}{3t+2}+t^3+t^2$

$x=0$일 때 $y=\frac{1}{3t+2}+t^3+t^2$이므로

$f(t)=\frac{1}{3t+2}+t^3+t^2$

$\therefore \lim_{t\to0}f(t)=\lim_{t\to0}\left(\frac{1}{3t+2}+t^3+t^2\right)=\frac{1}{2}$

011 답 7

$f(x)=-x^2+3x+1$이라고 하면 $f'(x)=-2x+3$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+3t+1)$이라고 하면 직선

$2x+10y-3=0$, 즉 $y=-\frac{1}{5}x+\frac{3}{10}$에 수직인 접선의 기울기는 5이므로

$f'(t)=-2t+3=5$ $\quad\therefore t=-1$

접점의 좌표는 $(-1, -3)$이므로 접선의 방정식은

$y+3=5(x+1)$ $\quad\therefore 5x-y+2=0$

따라서 $a=5$, $b=2$이므로 $a+b=5+2=7$

012 답 4

$f(x)=x^3-x+2$라고 하면 $f'(x)=3x^2-1$

접점의 좌표를 (t, t^3-t+2)라고 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(t)=3t^2-1=2$, $t^2=1$ $\quad\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

접점의 좌표는 $(-1, 2)$ 또는 $(1, 2)$이므로 접선의 방정식은

$y-2=2(x+1)$ 또는 $y-2=2(x-1)$

$\therefore y=2x+4$ 또는 $y=2x$

이때 k는 양수이므로 $k=4$

013 답 ⑤

$f(x)=-x^2+2x+5$라고 하면 $f'(x)=-2x+2$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+2t+5)$라고 하면 두 점 $A(0, 5)$, $B(4, -3)$을 지나는 직선 AB의 기울기는 $\frac{-3-5}{4-0}=-2$이므로

$f'(t)=-2t+2=-2 \quad \therefore t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2, 5)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-5=-2(x-2) \quad \therefore 2x+y-9=0$

014 답 $2\sqrt{2}$

$f(x)=x^3-4x+5$라고 하면 $f'(x)=3x^2-4$

접점의 좌표를 (t, t^3-4t+5)라고 하면 직선 $x+y+1=0$, 즉 $y=-x-1$에 평행한 접선의 기울기는 -1이므로

$f'(t)=3t^2-4=-1$, $t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

접점의 좌표는 $(-1, 8)$ 또는 $(1, 2)$이므로 접선의 방정식은

$y-8=-(x+1)$ 또는 $y-2=-(x-1)$

$\therefore x+y-7=0$ 또는 $x+y-3=0$

따라서 두 접선 사이의 거리는 직선 $x+y-7=0$ 위의 점 $(0, 7)$과 직선 $x+y-3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|0+7-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$

015 답 8

$f(x)=-2x^3+7x+1$이라고 하면 $f'(x)=-6x^2+7$

접점의 좌표를 $(t, -2t^3+7t+1)$이라고 하면 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$인 접선의 기울기는 $\tan 45°=1$이므로

$f'(t)=-6t^2+7=1$, $t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

접점의 좌표가 $(-1, -4)$ 또는 $(1, 6)$이므로 접선의 방정식은

$y+4=x+1$ 또는 $y-6=x-1$

$\therefore y=x-3$ 또는 $y=x+5$

따라서 $A(0, -3)$, $B(0, 5)$ 또는 $A(0, 5)$, $B(0, -3)$이므로

$\overline{AB}=5-(-3)=8$

016 답 2

$f(x)=x^3+2x+1$이라고 하면 $f'(x)=3x^2+2$

접점의 좌표를 (t, t^3+2t+1)이라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+2t+1)=(3t^2+2)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+2)x-2t^3+1 \quad \cdots\cdots ㉠$

이 직선이 점 $(0, 3)$을 지나므로

$3=-2t^3+1$, $t^3+1=0$

$(t+1)(t^2-t+1)=0 \quad \therefore t=-1$ ($\because t$는 실수)

이를 ㉠에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$y=5x+3$

따라서 $a=5$, $b=3$이므로

$a-b=5-3=2$

017 답 -16

$f(x)=x^4+3$이라고 하면 $f'(x)=4x^3$

접점의 좌표를 (t, t^4+3)이라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=4t^3$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^4+3)=4t^3(x-t)$

$\therefore y=4t^3x-3t^4+3 \quad \cdots\cdots ㉠$

이 직선이 점 $(0, 0)$을 지나므로

$0=-3t^4+3$, $t^4-1=0$

$(t+1)(t-1)(t^2+1)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$ ($\because t$는 실수)

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$f'(-1)f'(1)=-4\times4=-16$

018 답 $\sqrt{5}$

$f(x)=x^3-x$라고 하면 $f'(x)=3x^2-1$

접점의 좌표를 (t, t^3-t)라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-1)x-2t^3 \quad \cdots\cdots ㉠$

이 직선이 점 $(0, -2)$를 지나므로

$-2=-2t^3$, $t^3-1=0$

$(t-1)(t^2+t+1)=0 \quad \therefore t=1$ ($\because t$는 실수)

따라서 접점 P의 좌표는 $(1, 0)$이므로

$\overline{AP}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

019 답 6

$f(x)=x^3-3x^2+2$라고 하면 $f'(x)=3x^2-6x$

접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+2)라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-6t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t^2+2)=(3t^2-6t)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2+2$

이 직선이 점 $(3, 0)$을 지나므로

$0=9t^2-18t-2t^3+3t^2+2$

$\therefore t^3-6t^2+9t-1=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

이때 x_1, x_2, x_3은 삼차방정식 ㉠의 세 실근이므로 근과 계수의 관계에 의해

$x_1+x_2+x_3=6$

020 답 $\frac{3}{4}$

$f(x)=x^2+1$이라고 하면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 (t, t^2+1)이라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+1)=2t(x-t)$

$\therefore y=2tx-t^2+1$

이 직선이 점 $(1, k)$를 지나므로

$k=2t-t^2+1$

$\therefore t^2-2t+k-1=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

t에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근을 α, β라고 하면 $t=\alpha$, $t=\beta$에서의 접선의 기울기는 각각 $f'(\alpha)=2\alpha$, $f'(\beta)=2\beta$이고 두 접선이 서로 수직이므로

$2\alpha\times2\beta=-1 \qquad \therefore \alpha\beta=-\dfrac{1}{4} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

또 이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha\beta=k-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서 $k-1=-\dfrac{1}{4} \qquad \therefore k=\dfrac{3}{4}$

021 답 ③

$f(x)=-x^3+x-5$라고 하면 $f'(x)=-3x^2+1$

점 $(1,\ -5)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-2$이므로 접선의 방정식은

$y+5=-2(x-1) \qquad \therefore y=-2x-3$

따라서 접선의 x절편은 $-\dfrac{3}{2}$, y절편은 -3이므로 구하는 도형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\left|-\dfrac{3}{2}\right|\times|-3|=\dfrac{9}{4}$

022 답 $\dfrac{32}{3}$

$f(x)=x^2-x-4$라고 하면 $f'(x)=2x-1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2-t-4)$라고 하면 접선의 기울기가 3이므로

$f'(t)=2t-1=3 \qquad \therefore t=2$

접점의 좌표는 $(2,\ -2)$이므로 접선의 방정식은

$y+2=3(x-2) \qquad \therefore y=3x-8$

따라서 접선의 x절편은 $\dfrac{8}{3}$, y절편은 -8이므로 구하는 도형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8}{3}\times|-8|=\dfrac{32}{3}$

023 답 ④

$f(x)=x^2+4$라고 하면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2+4)$라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+4)=2t(x-t)$

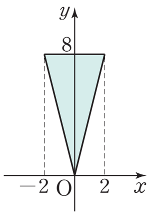
$\therefore y=2tx-t^2+4$

이 직선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=-t^2+4,\ t^2=4 \qquad \therefore t=-2$ 또는 $t=2$

따라서 두 접점의 좌표는 $(-2,\ 8)$, $(2,\ 8)$이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times4\times8=16$



024 답 11

$f(x)=x^3-2x+1$이라고 하면 $f'(x)=3x^2-2$

점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$이므로 접선의 방정식은

$y=x-1$

곡선 $y=x^3-2x+1$과 접선 $y=x-1$의 교점의 x좌표는

$x^3-2x+1=x-1$에서 $x^3-3x+2=0$

$(x+2)(x-1)^2=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=1$

다시 만나는 점 B의 좌표는 $(-2,\ -3)$이므로 $\mathrm{H}(-2,\ 0)$

따라서 삼각형 ABH의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AH}}\times\overline{\mathrm{BH}}=\dfrac{1}{2}\times3\times3=\dfrac{9}{2}$

따라서 $a=2$, $b=9$이므로 $a+b=2+9=11$

025 답 ②

곡선 $y=x^2+1$에 접하고 직선 $y=2x-3$과 기울기가 같은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^2+1)$이라고 하면 구하는 거리의 최솟값은 이 점과 직선 $y=2x-3$ 사이의 거리와 같다.

$f(x)=x^2+1$이라고 하면 $f'(x)=2x$

접선의 기울기가 2이므로

$f'(t)=2t=2 \qquad \therefore t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(1,\ 2)$이므로 이 접점과 직선 $y=2x-3$, 즉 $2x-y-3=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|2-2-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

026 답 ②

곡선 $y=2x^3+3\ (x>0)$ 위의 점 P와 직선 $y=6x-11$ 사이의 거리가 최소가 될 때는 점 P가 직선 $y=6x-11$과 기울기가 같은 접선의 접점일 때이다.

$f(x)=2x^3+3$이라고 하면 $f'(x)=6x^2$

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 6이어야 하므로

$f'(a)=6a^2=6 \qquad \therefore a=1\ (\because a>0)$

따라서 점 P의 좌표는 $(1,\ 5)$이므로

$a=1,\ b=5 \qquad \therefore a+b=1+5=6$

027 답 $\dfrac{7-\sqrt{13}}{3}$

삼각형 OAP의 넓이가 최대가 될 때는 곡선 위의 점 P와 직선 OA 사이의 거리가 최대가 될 때이다.

즉, 점 P가 직선 OA와 기울기가 같은 접선의 접점이어야 한다.

$f(x)=x^3-7x^2+15x$라고 하면 $f'(x)=3x^2-14x+15$

점 P의 x좌표를 $t\ (0<t<3)$라고 하면 점 P에서의 접선의 기울기가 선분 OA의 기울기 $\dfrac{9-0}{3-0}=3$과 같으므로

$f'(t)=3t^2-14t+15=3,\ 3t^2-14t+12=0$

$\therefore t=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{3}$

이때 $0<t<3$이므로 $t=\dfrac{7-\sqrt{13}}{3}$

따라서 점 P의 x좌표는 $\dfrac{7-\sqrt{13}}{3}$이다.

028 답 ⑤

$f(x)=x^3+a$, $g(x)=-x^2+bx+c$라고 하면

$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=-2x+b$

(i) 두 곡선이 각각 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$f(1)=1+a=2 \qquad \therefore a=1$

$g(1)=-1+b+c=2 \qquad \therefore b+c=3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ⅱ) 점 $(1,\ 2)$에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(1)=g'(1)$에서

$3=-2+b \qquad \therefore b=5$

$b=5$를 ㉠에 대입하면

$5+c=3 \qquad \therefore c=-2$

$\therefore a+b-c=1+5-(-2)=8$

029 답 -3

$f(x)=x^3+1$, $g(x)=3x^2-3$이라고 하면

$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=6x$

(ⅰ) $x=t$인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(t)=g(t)$에서

$t^3+1=3t^2-3$, $t^3-3t^2+4=0$

$(t+1)(t-2)^2=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=2$

(ⅱ) $x=t$인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(t)=g'(t)$에서

$3t^2=6t$, $3t(t-2)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=2$

(ⅰ), (ⅱ)를 동시에 만족하는 t의 값은 $t=2$

접점의 좌표는 $(2,\ 9)$이고, 접선의 기울기는 12이므로 공통접선의 방정식은

$y-9=12(x-2) \qquad \therefore y=12x-15$

따라서 $a=12$, $b=-15$이므로

$a+b=12+(-15)=-3$

030 답 -1

$f(x)=x^3+ax$, $g(x)=x^2-1$이라고 하면

$f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=2x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통접선을 갖는다고 하면

(ⅰ) $x=t$인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(t)=g(t)$에서

$t^3+at=t^2-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ⅱ) $x=t$인 점에서 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(t)=g'(t)$에서

$3t^2+a=2t \qquad \therefore a=2t-3t^2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$t^3+(2t-3t^2)t=t^2-1$

$2t^3-t^2-1=0$, $(t-1)(2t^2+t+1)=0$

$\therefore t=1$ ($\because$ t는 실수)

이를 ㉡에 대입하면 $a=2-3=-1$

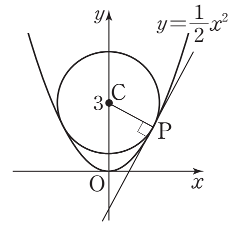
031 답 ③

$f(x)=\frac{1}{2}x^2$이라고 하면 $f'(x)=x$

원과 곡선의 접점을 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$이라고 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=t$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{2}t^2=t(x-t)$

$\therefore y=tx-\frac{1}{2}t^2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠



원의 중심을 C라고 하면 직선 CP와 접선 ㉠이 서로 수직이고, 직선 CP의 기울기는 $\dfrac{\frac{1}{2}t^2-3}{t-0}$이므로

$\dfrac{\frac{1}{2}t^2-3}{t}\times t=-1$, $t^2=4$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=2$

따라서 기울기가 양수인 공통접선의 방정식은 ㉠에 $t=2$를 대입하면 되므로

$y=2x-2$

032 답 ③

함수 $f(x)=x^4-8x^2+5$는 닫힌구간 $[-3,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-3,\ 3)$에서 미분가능하며 $f(-3)=f(3)=14$이므로 롤의 정리에 의해 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-3,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=4x^3-16x$이므로

$f'(c)=4c^3-16c=0$, $4c(c+2)(c-2)=0$

$\therefore c=-2$ 또는 $c=0$ 또는 $c=2$

따라서 상수 c는 3개이다.

033 답 $\frac{1}{2}$

함수 $f(x)=x^2-ax+1$은 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 2)$에서 미분가능하다.

이때 롤의 정리를 만족하면 $f(-1)=f(2)$이므로

$1+a+1=4-2a+1 \qquad \therefore a=1$

이때 롤의 정리에 의해 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(x)=x^2-x+1$에서 $f'(x)=2x-1$이므로

$f'(c)=2c-1=0 \qquad \therefore c=\frac{1}{2}$

034 답 ②

롤의 정리에 의해 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능할 때, $f(0)=f(1)$이면 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

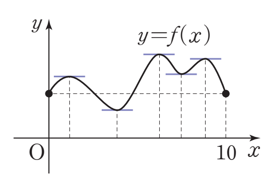
②의 함수는 열린구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하지 않으므로 롤의 정리가 성립하지 않는다.

035 답 5

함수 $y=f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 10]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 10)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(10)$이므로 롤의 정리에 의해 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 10)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(c)$는 곡선 $y=f(x)$의 $x=c$인 점에서의 접선의 기울기이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 접선의 기울기가 0이 되는 x의 값은 5개이므로 구하는 c의 개수는 5이다.



036 답 ③

함수 $f(x)=x^3+3x^2-2$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의해

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(-1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2+6x$이므로

$$\frac{18-0}{2-(-1)}=3c^2+6c,\ c^2+2c-2=0$$

$\therefore\ c=-1+\sqrt{3}\ (\because\ -1<c<2)$

037 답 3

함수 $f(x)=-x^2+3x$는 닫힌구간 $[1, k]$에서 연속이고 열린구간 $(1, k)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의해

$$\frac{f(k)-f(1)}{k-1}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(1, k)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-2x+3$이고, $c=2$이므로

$$\frac{(-k^2+3k)-2}{k-1}=-1,\ k^2-4k+3=0$$

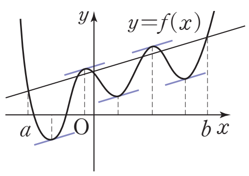
$(k-1)(k-3)=0$

$\therefore\ k=3\ (\because\ k>1)$

038 답 5

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기이고, $f'(c)$는 곡선 $y=f(x)$의 $x=c$인 점에서의 접선의 기울기이다.

이때 다음 그림과 같이 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선과 평행한 접선을 5개 그을 수 있으므로 주어진 조건을 만족하는 상수 c의 개수는 5이다.



039 답 9

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 모든 실수에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[x-1, x+2]$에서 연속이고 열린구간 $(x-1, x+2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의해

$$\frac{f(x+2)-f(x-1)}{(x+2)-(x-1)}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(x-1, x+2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $x-1<c<x+2$에서 $x\to\infty$이면 $c\to\infty$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\{f(x-1)-f(x+2)\}&=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+2)-f(x-1)}{(x+2)-(x-1)}\times(-3)\\&=\lim_{c\to\infty}f'(c)\times(-3)\\&=-3\times(-3)=9\end{aligned}$$

040 답 $\frac{1}{2}$

$f(x)=x^2-4x+3$에서

$f'(x)=2x-4$

$f(x+h)=f(x)+hf'(x+kh)$에서

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+kh)$$

$$\frac{\{(x+h)^2-4(x+h)+3\}-(x^2-4x+3)}{h}=2(x+kh)-4$$

$$\frac{2xh+h^2-4h}{h}=2x+2kh-4$$

$2x+h-4=2x+2kh-4$

$\therefore\ k=\dfrac{1}{2}$

핵심 유형 **최종 점검하기** 66~67쪽

1 답 -6

유형 01 접점이 주어진 접선의 방정식

$f(x)=x^3+ax+b$라고 하면

$f'(x)=3x^2+a$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 2)$를 지나므로

$f(1)=1+a+b=2\qquad\therefore\ a+b=1\qquad\cdots\cdots$ ㉠

점 $(1, 2)$에서의 접선 $y=x+c$의 기울기는 1이므로

$f'(1)=3+a=1\qquad\therefore\ a=-2$

이를 ㉠에 대입하면

$-2+b=1\qquad\therefore\ b=3$

점 $(1, 2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2=x-1\qquad\therefore\ y=x+1$

따라서 $c=1$이므로

$abc=-2\times3\times1=-6$

2 답 ⑤

유형 01 접점이 주어진 접선의 방정식

$f(x)=x^3-6x^2+9x$라고 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9$

점 $(1, 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=0$이므로 접선의 방정식은

$y-4=0\times(x-1)\qquad\therefore\ y=4$

곡선 $y=x^3-6x^2+9x$와 접선 $y=4$의 교점의 x좌표는

$x^3-6x^2+9x=4$에서

$x^3-6x^2+9x-4=0$

$(x-1)^2(x-4)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=4$

따라서 $\mathrm{P}(4, 4)$이고 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(4)=9$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-4=9(x-4)\qquad\therefore\ y=9x-32$

3 답 0

유형 02 접선에 수직인 직선의 방정식

$f(x)=x^3+x+k$라고 하면

$f'(x)=3x^2+1$

점 $(1,\ a)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는

$-\dfrac{1}{f'(1)}=-\dfrac{1}{4}$

따라서 직선의 방정식은

$y-a=-\dfrac{1}{4}(x-1)\qquad \therefore\ y=-\dfrac{1}{4}x+a+\dfrac{1}{4}$

이 직선의 y절편이 $\dfrac{5}{4}$이므로

$a+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}\qquad \therefore\ a=1$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$f(1)=1+1+k=1\qquad \therefore\ k=-1$

$\therefore\ a+k=1+(-1)=0$

4 답 $-\dfrac{5}{2}$

유형 03 기울기가 주어진 접선의 방정식

$f(x)=3x^2-4x-2$라고 하면 $f'(x)=6x-4$

접점의 좌표를 $(t,\ 3t^2-4t-2)$라고 하면 직선 $2x-y+7=0$,

즉 $y=2x+7$에 평행한 접선의 기울기는 2이므로

$f'(t)=6t-4=2\qquad \therefore\ t=1$

접점의 좌표는 $(1,\ -3)$이므로 접선의 방정식은

$y+3=2(x-1)\qquad \therefore\ y=2x-5$

이 직선이 두 점 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$를 지나므로

$0=2a-5,\ b=-5$

$\therefore\ a=\dfrac{5}{2},\ b=-5$

$\therefore\ a+b=\dfrac{5}{2}+(-5)=-\dfrac{5}{2}$

5 답 1

유형 03 기울기가 주어진 접선의 방정식

직선 $y=2x+3$을 x축의 방향으로 m만큼 평행이동하면

$y=2(x-m)+3\qquad \therefore\ y=2x-2m+3\qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f(x)=x^3-x+3$이라고 하면

$f'(x)=3x^2-1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-t+3)$이라고 하면 이 점에서의 접선 ㉠의 기울기는 2이므로

$f'(t)=3t^2-1=2,\ t^2=1$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=1$

접점의 좌표는 $(-1,\ 3)$ 또는 $(1,\ 3)$이므로 접선의 방정식은

$y-3=2(x+1)$ 또는 $y-3=2(x-1)$

$\therefore\ y=2x+5$ 또는 $y=2x+1$

이 접선의 방정식이 ㉠과 일치하므로

$-2m+3=5$ 또는 $-2m+3=1$

$\therefore\ m=-1$ 또는 $m=1$

이때 m은 양수이므로

$m=1$

6 답 8

유형 04 곡선 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식

$f(x)=x^2-2x$라고 하면

$f'(x)=2x-2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2-2t)$라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-2t)=(2t-2)(x-t)$

$\therefore\ y=(2t-2)x-t^2\qquad \cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(0,\ -4)$를 지나므로

$-4=-t^2$

$\therefore\ t=-2$ 또는 $t=2$

이를 ㉠에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$y=-6x-4$ 또는 $y=2x-4$

이때 $a>0$이므로

$a=2,\ b=-6$

$\therefore\ a-b=2-(-6)=8$

7 답 $\dfrac{1}{2}$

유형 05 접선과 좌표축으로 둘러싸인 도형의 넓이

$f(x)=x^3-3x^2+2x$라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x+2$

$\quad\ =3(x-1)^2-1$

따라서 접선의 기울기는 $x=1$에서 최솟값이 -1이다.

이때 접점의 좌표는 $(1,\ 0)$이고 접선의 기울기가 -1이므로 접선의 방정식은

$y-0=-(x-1)\qquad \therefore\ y=-x+1$

이 접선의 x절편과 y절편이 모두 1이므로 구하는 도형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times1\times1=\dfrac{1}{2}$

8 답 ④

유형 05 접선과 좌표축으로 둘러싸인 도형의 넓이

$f(x)=x^3-3x^2+2x+4$라고 하면

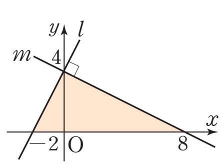
$f'(x)=3x^2-6x+2$

점 $\mathrm{P}(0,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=2$이므로 접선 l의 방정식은

$y-4=2(x-0)\qquad \therefore\ y=2x+4$

직선 l에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이므로 점 $\mathrm{P}(0,\ 4)$를 지나고 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$인 직선 m의 방정식은

$y-4=-\dfrac{1}{2}(x-0)\qquad \therefore\ y=-\dfrac{1}{2}x+4$



따라서 두 직선 l, m 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times10\times4=20$

9 답 $\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$

유형 06 곡선 위의 점과 직선 사이의 거리의 최솟값

곡선 $y=x^2-2x+5$에 접하고 직선 $y=4x-1$과 기울기가 같은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^2-2t+5)$라고 하면 구하는 최단 거리는 이 점과 직선 $y=4x-1$ 사이의 거리와 같다.

$f(x)=x^2-2x+5$라고 하면

$f'(x)=2x-2$

접선의 기울기가 4이므로

$f'(t)=2t-2=4 \qquad \therefore t=3$

따라서 접점의 좌표가 $(3,\ 8)$이므로 이 점과 직선 $y=4x-1$, 즉 $4x-y-1=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|12-8-1|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$

10 답 $\sqrt{5}$

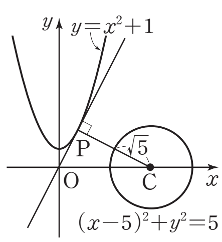
유형 06 곡선 위의 점과 직선 사이의 거리의 최솟값

$f(x)=x^2+1$이라고 하면

$f'(x)=2x$

점 P의 좌표를 $(t,\ t^2+1)$이라고 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$

원 $(x-5)^2+y^2=5$의 중심을 $C(5,\ 0)$이라고 하면 곡선 위의 점 P와 원 사이의 거리의 최솟값은 점 P에서의 접선과 직선 CP가 서로 수직일 때의 점 P와 점 C 사이의 거리에서 반지름의 길이 $\sqrt{5}$를 뺀 것과 같다.



직선 CP의 기울기는 $\dfrac{t^2+1}{t-5}$이므로

$\dfrac{t^2+1}{t-5}\times 2t=-1,\ 2t^3+3t-5=0$

$(t-1)(2t^2+2t+5)=0$

$\therefore t=1\ (\because t$는 실수$)$

점 P의 좌표는 $(1,\ 2)$이므로

$\overline{CP}=\sqrt{(1-5)^2+2^2}=2\sqrt{5}$

따라서 구하는 거리의 최솟값은

$2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$

11 답 ④

유형 07 두 곡선의 공통접선

$f(x)=x^3+a,\ g(x)=-x^2+bx+c$라고 하면

$f'(x)=3x^2,\ g'(x)=-2x+b$

두 곡선의 접점의 좌표를 $(t,\ 3t-1)$이라고 하면

(i) 두 곡선이 각각 점 $(t,\ 3t-1)$을 지나므로

$f(t)=t^3+a=3t-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$g(t)=-t^2+bt+c=3t-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

(ii) 점 $(t,\ 3t-1)$에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 3이므로

$f'(t)=3$에서 $3t^2=3$

$\therefore t=1\ (\because t>0)$

$g'(t)=3$에서 $-2t+b=3$

$t=1$을 대입하면

$-2+b=3 \qquad \therefore b=5$

$t=1$을 ㉠에 대입하면

$1+a=2 \qquad \therefore a=1$

$t=1,\ b=5$를 ㉡에 대입하면

$-1+5+c=2 \qquad \therefore c=-2$

$\therefore a+b-c=1+5-(-2)=8$

12 답 -21

유형 09 평균값 정리

함수 $f(x)=x^2+ax+1$은 닫힌구간 $[1,\ 5]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 5)$에서 미분가능하다.

이때 롤의 정리를 만족하면 $f(1)=f(5)$이므로

$1+a+1=25+5a+1$

$\therefore a=-6$

함수 $f(x)=x^2-6x+1$은 닫힌구간 $[1,\ 6]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 6)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의해

$\dfrac{f(6)-f(1)}{6-1}=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(1,\ 6)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=2x-6$이므로

$\dfrac{1-(-4)}{6-1}=2c-6$

$\therefore c=\dfrac{7}{2}$

$\therefore ac=-6\times\dfrac{7}{2}=-21$

13 답 4

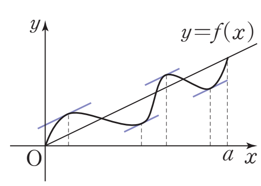
유형 09 평균값 정리

$f(0)=0$이므로 $f(a)=af'(c)$에서

$\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}=f'(c)$

$\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(0,\ 0),\ (a,\ f(a))$를 지나는 직선의 기울기이고, $f'(c)$는 곡선 $y=f(x)$의 $x=c$인 점에서의 접선의 기울기이다.

이때 다음 그림과 같이 두 점 $(0,\ 0),\ (a,\ f(a))$를 지나는 직선과 평행한 접선을 4개 그을 수 있으므로 주어진 조건을 만족하는 상수 c의 개수는 4이다.



05 도함수의 활용 (2)

핵심 유형

	유형01 ①	유형02 4	유형03 $\frac{4}{3}$
유형04 ④	유형05 ⑤	유형06 ①	유형07 4
유형08 ⑤	유형09 ①	유형10 ④	유형11 ①
유형12 $-\frac{9}{4}$	유형13 -3	유형14 6	유형15 $\sqrt{5}$
유형16 $8\sqrt{2}$	유형17 16 cm^3		
유형18 6000원			

핵심 유형 완성하기

001 ①	002 ③	003 10	004 39	005 -3
006 ⑤	007 3	008 -8	009 ④	010 2
011 ③	012 -2	013 $0\le a\le 6$		014 ③
015 ①	016 ④	017 ②	018 -1	019 28
020 ②	021 ③	022 ④	023 1	024 ③
025 ②	026 4	027 1	028 -4	029 27
030 $\frac{3}{2}$	031 5	032 ㄴ, ㄷ	033 ②	034 -1
035 -3	036 ③	037 ③	038 ①	039 ③
040 ㄱ, ㄴ	041 4	042 10	043 6	044 4
045 ⑤	046 ④	047 2	048 1	049 ⑤
050 $a=-2$ 또는 $a\ge\frac{1}{4}$			051 12	052 ⑤
053 -7	054 $\frac{81}{4}$	055 $-\frac{2\sqrt{6}}{9}$		056 12
057 -3	058 ④	059 ④	060 -25	
061 $(1, 0)$, $2\sqrt{5}$		062 28	063 $\sqrt{17}-2$	
064 $\frac{64\sqrt{3}}{9}$	065 256	066 $\frac{5}{2}$	067 $\frac{5}{3}$ cm	068 ⑤
069 $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$	070 32 cm^3		071 3시간	
072 1450원				

핵심 유형 최종 점검하기

1 ③	2 -2	3 -1	4 3	5 ④
6 4	7 -2	8 $\frac{32}{3}$	9 ㄱ, ㄷ	10 2
11 3	12 $-\frac{1}{5}<k<0$		13 1	14 -9
15 40	16 ③	17 17π	18 $\frac{1}{2}$	19 $16\sqrt{2}$
20 5년				

핵심 유형 70~72쪽

유형01 답 ①

$f(x)=x^3-3x^2-9x+1$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	6	↘	-26	↗

따라서 함수 $f(x)$가 감소하는 구간은 $[-1, 3]$이므로

$a=-1$, $b=3$ $\quad\therefore b-a=3-(-1)=4$

유형02 답 4

$f(x)=x^3+ax^2+ax-1$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

$\therefore 3x^2+2ax+a\ge 0$

이차방정식 $3x^2+2ax+a=0$의 판별식 $D\le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2-3a\le 0$, $a(a-3)\le 0$ $\quad\therefore 0\le a\le 3$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

참고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라고 할 때

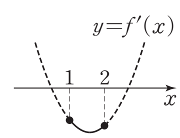
- 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\ge 0$일 조건 ➡ $a>0$, $D\le 0$
- 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\le 0$일 조건 ➡ $a<0$, $D\le 0$

유형03 답 $\frac{4}{3}$

$f(x)=x^3-(a+2)x^2+ax-1$에서

$f'(x)=3x^2-2(a+2)x+a$

함수 $f(x)$가 구간 $[1, 2]$에서 감소하려면 이 구간에서 $f'(x)\le 0$이어야 한다.



$\therefore f'(1)\le 0$, $f'(2)\le 0$

$f'(1)=3-2(a+2)+a\le 0$에서 $a\ge -1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

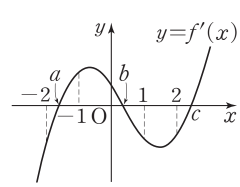
$f'(2)=12-4(a+2)+a\le 0$에서 $a\ge\frac{4}{3}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는 $a\ge\frac{4}{3}$

따라서 a의 최솟값은 $\frac{4}{3}$이다.

유형04 답 ④

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f'(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 차례로 a, b, c라고 하자.



① 구간 $(-\infty, -2)$에서 $f(x)$는 감소한다.

② 구간 $(-2, a]$에서 $f(x)$는 감소한다.

③ 구간 $(-1, b]$에서 $f(x)$는 증가한다.

⑤ 구간 $(2, c]$에서 $f(x)$는 감소한다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

유형05 답 ⑤

$f(x)=-x^3+6x^2+5$에서

$f'(x)=-3x^2+12x=-3x(x-4)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	5 극소	$\nearrow$	37 극대	$\searrow$

함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(4)=37$, 극솟값은 $f(0)=5$이므로

$M=37$, $m=5$ $\quad\therefore M+m=37+5=42$

유형06 답 ①

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+1$에서 $f'(x)=6x^2+2ax+b$

$x=-1$에서 극댓값이 8이므로

$f'(-1)=0$, $f(-1)=8$

$f'(-1)=6-2a+b=0$에서 $2a-b=6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(-1)=-2+a-b+1=8$에서 $a-b=9$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-12$

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$이므로

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	8 극대	$\searrow$	-19 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(2)=-19$

유형07 답 4

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

주어진 그래프에서 $f'(-1)=0$, $f'(1)=0$이므로

$f'(-1)=3-2a+b=0$에서 $2a-b=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(1)=3+2a+b=0$에서 $2a+b=-3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-3$

$\therefore f(x)=x^3-3x+c$

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$c+2$ 극대	$\searrow$	$c-2$ 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$의 극솟값이 0이므로

$f(1)=c-2=0$ $\quad\therefore c=2$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(-1)=c+2=2+2=4$

유형08 답 ⑤

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-4	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	

① 함수 $f(x)$는 $-1\le x\le 1$에서 감소한다.

② 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대이다.

③ 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이다.

④ 함수 $f(x)$는 $2<x\le 3$에서 증가하고, $x\ge 3$에서 감소한다.

⑤ 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 점은 $x=-3$, $x=1$, $x=3$일 때의 점 3개이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

유형09 답 ①

$f(x)=x^4-6x^2+5$라고 하면

$f'(x)=4x^3-12x=4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-4 극소	$\nearrow$	5 극대	$\searrow$	-4 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ①이다.

핵심 유형 **완성하기** 73~79쪽

001 답 ①

$f(x)=-x^3+6x^2+15x+4$에서

$f'(x)=-3x^2+12x+15=-3(x+1)(x-5)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=5$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	104	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$가 증가하는 x의 값의 범위가 $-1\le x\le 5$이므로

$a=-1$, $b=5$

$\therefore b-a=5-(-1)=6$

002 답 ③

$f(x)=x^4-2x^2-2$에서

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-3	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1]$, $[0,\ 1]$에서 감소하고, 구간 $[-1,\ 0]$, $[1,\ \infty)$에서 증가한다.

003 답 10

$f(x)=x^3+6x^2+ax-2$에서 $f'(x)=3x^2+12x+a$

함수 $f(x)$가 감소하는 x의 값의 범위가 $-3\le x\le b$이므로

$x=-3$, $x=b$는 이차방정식 $3x^2+12x+a=0$의 두 근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의해

$-3+b=-4,\ -3\times b=\dfrac{a}{3}$

$\therefore\ a=9,\ b=-1 \qquad \therefore\ a-b=9-(-1)=10$

004 답 39

$f(x)=-2x^3+ax^2+bx-1$에서 $f'(x)=-6x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ -2]$, $[3,\ \infty)$에서 감소하고,

구간 $[-2,\ 3]$에서 증가하므로 $x=-2$, $x=3$은 이차방정식

$-6x^2+2ax+b=0$의 두 근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의해

$-2+3=\dfrac{a}{3},\ -2\times 3=-\dfrac{b}{6}$

$\therefore\ a=3,\ b=36 \qquad \therefore\ a+b=3+36=39$

005 답 −3

$f(x)=-x^3+ax^2-3x+5$에서 $f'(x)=-3x^2+2ax-3$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

$\therefore\ -3x^2+2ax-3\le 0$

이차방정식 $-3x^2+2ax-3=0$의 판별식 $D\le 0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=a^2-9\le 0,\ (a+3)(a-3)\le 0$

$\therefore\ -3\le a\le 3$

따라서 a의 최솟값은 -3이다.

006 답 ⑤

$f(x)=ax^3+x^2+4x$에서 $f'(x)=3ax^2+2x+4$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

$\therefore\ a>0$ …… ㉠, $3ax^2+2x+4\ge 0$ …… ㉡

㉡에서 이차방정식 $3ax^2+2x+4=0$의 판별식 $D\le 0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=1-12a\le 0 \qquad \therefore\ a\ge\dfrac{1}{12}$ …… ㉢

㉠, ㉢을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는 $a\ge\dfrac{1}{12}$

007 답 3

$f(x)=-x^3+3ax^2+(a-4)x+1$에서

$f'(x)=-3x^2+6ax+a-4$

$x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

$\therefore\ -3x^2+6ax+(a-4)\le 0$

이차방정식 $-3x^2+6ax+(a-4)=0$의 판별식 $D\le 0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=9a^2+3(a-4)\le 0,\ 3(3a+4)(a-1)\le 0$

$\therefore\ -\dfrac{4}{3}\le a\le 1$

따라서 정수 a는 $-1,\ 0,\ 1$의 3개이다.

008 답 −8

$f(x)=\dfrac{2}{3}x^3+4x^2-kx-1$에서

$f'(x)=2x^2+8x-k$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

$\therefore\ 2x^2+8x-k\ge 0$

이차방정식 $2x^2+8x-k=0$의 판별식 $D\le 0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=16+2k\le 0 \qquad \therefore\ k\le -8$

따라서 k의 최댓값은 -8이다.

009 답 ④

$f(x)=x^3-(a+2)x^2+3ax+2$에서

$f'(x)=3x^2-2(a+2)x+3a$

$x_1\ne x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)\ne f(x_2)$를 만족하는 함수는 일대일함수이고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

$\therefore\ 3x^2-2(a+2)x+3a\ge 0$

이차방정식 $3x^2-2(a+2)x+3a=0$의 판별식 $D\le 0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=(a+2)^2-9a\le 0,\ (a-1)(a-4)\le 0$

$\therefore\ 1\le a\le 4$

따라서 정수 a는 $1,\ 2,\ 3,\ 4$이므로 구하는 합은

$1+2+3+4=10$

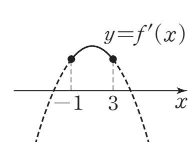
010 답 2

$f(x)=-x^3+ax^2+12x+1$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+12$

함수 $f(x)$가 구간 $[-1,\ 3]$에서 증가하려면

이 구간에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.



$\therefore\ f'(-1)\ge 0,\ f'(3)\ge 0$

$f'(-1)=-3-2a+12\ge 0$에서 $a\le\dfrac{9}{2}$ …… ㉠

$f'(3)=-27+6a+12\ge 0$에서 $a\ge\dfrac{5}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는

$\frac{5}{2} \le a \le \frac{9}{2}$

따라서 정수 a는 3, 4의 2개이다.

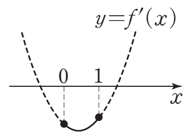
011 답 ③

$f(x)=x^3-x^2-ax+2$에서

$f'(x)=3x^2-2x-a$

함수 $f(x)$가 $0 \le x \le 1$에서 감소하려면

이 구간에서 $f'(x) \le 0$이어야 한다.



$\therefore f'(0) \le 0,\ f'(1) \le 0$

$f'(0)=-a \le 0$에서 $a \ge 0$ ...... ㉠

$f'(1)=3-2-a \le 0$에서 $a \ge 1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는 $a \ge 1$

따라서 a의 최솟값은 1이다.

다른 풀이 $f(x)=x^3-x^2-ax+2$에서

$f'(x)=3x^2-2x-a=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}-a$

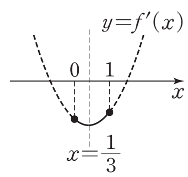
함수 $f(x)$가 $0 \le x \le 1$에서 감소하려면

이 구간에서 $f'(x) \le 0$이어야 하므로

오른쪽 그림에서

$f'(1)=3-2-a \le 0$ $\therefore a \ge 1$

따라서 a의 최솟값은 1이다.

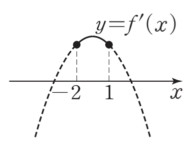


012 답 −2

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3-kx^2+(k+6)x-1$에서

$f'(x)=-x^2-2kx+k+6$

구간 $[-2,\ 1]$에 속하는 $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$가 구간 $[-2,\ 1]$에서 증가해야 하므로 이 구간에서 $f'(x) \ge 0$이어야 한다.



$\therefore f'(-2) \ge 0,\ f'(1) \ge 0$

$f'(-2)=-4+4k+k+6 \ge 0$에서 $k \ge -\frac{2}{5}$ ...... ㉠

$f'(1)=-1-2k+k+6 \ge 0$에서 $k \le 5$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 k의 값의 범위는

$-\frac{2}{5} \le k \le 5$

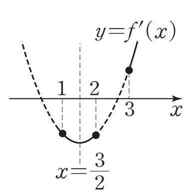
따라서 $\alpha=-\frac{2}{5}$, $\beta=5$이므로 $\alpha\beta=-\frac{2}{5} \times 5=-2$

013 답 $0 \le a \le 6$

$f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+ax+5$에서

$f'(x)=3x^2-9x+a=3\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{27}{4}+a$

함수 $f(x)$가 구간 $[1,\ 2]$에서 감소하려면 이 구간에서 $f'(x) \le 0$이어야 하고, 구간 $[3,\ \infty)$에서 증가하려면 이 구간에서 $f'(x) \ge 0$이어야 한다.



$\therefore f'(1) \le 0,\ f'(2) \le 0,\ f'(3) \ge 0$

$f'(1)=3-9+a \le 0$에서 $a \le 6$ ...... ㉠

$f'(2)=12-18+a \le 0$에서 $a \le 6$ ...... ㉡

$f'(3)=27-27+a \ge 0$에서 $a \ge 0$ ...... ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는

$0 \le a \le 6$

014 답 ③

① 구간 $(-\infty,\ -3]$에서 $f(x)$는 감소한다.

② 구간 $[-2,\ -1]$에서 $f(x)$는 증가한다.

④ 구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)$는 감소한다.

⑤ 구간 $[2,\ 3]$에서 $f(x)$는 증가한다.

따라서 옳은 것은 ③이다.

015 답 ①

$f'(x)<0$이면 함수 $f(x)$가 그 구간에서 감소한다. 주어진 그래프에서 구간 $(-\infty,\ -1)$, $(0,\ 2)$에서 함수 $f(x)$가 감소하므로

$A=\{x \mid f'(x)<0\}=\{x \mid x<-1$ 또는 $0<x<2\}$

따라서 집합 A의 부분집합이 될 수 있는 것은 ①이다.

016 답 ④

$f(x)f'(x)>0$에서

$f(x)>0,\ f'(x)>0$ 또는 $f(x)<0,\ f'(x)<0$

(i) $f(x)>0,\ f'(x)>0$인 경우

$f(x)>0$인 구간은 $(-\infty,\ \alpha)$ 또는 $(\gamma,\ \infty)$ ...... ㉠

$f'(x)>0$인 구간은 $(p,\ \beta)$ 또는 $(q,\ \infty)$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 구간은 $(\gamma,\ \infty)$

(ii) $f(x)<0,\ f'(x)<0$인 경우

$f(x)<0$인 구간은 $(\alpha,\ \beta)$ 또는 $(\beta,\ \gamma)$ ...... ㉢

$f'(x)<0$인 구간은 $(-\infty,\ p)$ 또는 $(\beta,\ q)$ ...... ㉣

㉢, ㉣을 동시에 만족하는 구간은 $(\alpha,\ p)$ 또는 $(\beta,\ q)$

따라서 $f(x)f'(x)>0$을 만족하는 구간은 ④이다.

017 답 ②

$f(x)=x^3+3x^2-9x+1$에서

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	28 극대	↘	-4 극소	↗

함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(-3)=28$, 극솟값은 $f(1)=-4$이므로

$M=28,\ m=-4$ $\therefore M+m=28+(-4)=24$

018 답 −1

$f(x)=x^4-4x^3+16x+11$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2+16=4(x+1)(x-2)^2$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	0 극소	↗	27	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값이 0이므로
$a=-1$, $m=0$ $\quad\therefore a+m=-1+0=-1$

019 답 28

$f(x)=-3x^4+4x^3+12x^2-3$에서
$f'(x)=-12x^3+12x^2+24x=-12x(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	2 극대	↘	-3 극소	↗	29 극대	↘

함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(-1)=2$, $f(2)=29$, 극솟값은 $f(0)=-3$이므로 구하는 극값의 합은
$2+29+(-3)=28$

020 답 ②

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+k$에서
$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$k+\frac{7}{2}$ 극대	↘	$k-10$ 극소	↗

함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(-1)=k+\frac{7}{2}$, 극솟값은 $f(2)=k-10$이고 극댓값과 극솟값의 부호가 서로 다르므로
$\left(k+\frac{7}{2}\right)(k-10)<0$ $\quad\therefore -\frac{7}{2}<k<10$
따라서 정수 k는 -3, -2, -1, $\cdots$, 9의 13개이다.

021 답 ③

$f(x)=(x-k)(x-2k)(x-4k)$에서
$f'(x)=(x-2k)(x-4k)+(x-k)(x-4k)+(x-k)(x-2k)$
$=3x^2-14kx+14k^2$
함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 가지므로 α, β는 이차방정식 $3x^2-14kx+14k^2=0$의 두 근이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta=\frac{14}{3}k$

022 답 ④

$f(x)=x^3-6x^2+9x+1$에서
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5 극대	↘	1 극소	↗

A(1, 5), B(3, 1)이므로 선분 AB의 길이는
$\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(1-5)^2}=2\sqrt{5}$

023 답 1

$f(x)=x^4-2x^2+3$에서
$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2 극소	↗	3 극대	↘	2 극소	↗

A(0, 3)이고, B(−1, 2), C(1, 2) 또는 B(1, 2), C(−1, 2)이므로 삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times2\times1=1$

024 답 ③

$f(x)=-x^3+ax^2+bx+3$에서
$f'(x)=-3x^2+2ax+b$
$x=1$에서 극솟값이 -1이므로
$f'(1)=0$, $f(1)=-1$
$f'(1)=-3+2a+b=0$에서 $2a+b=3$ …… ㉠
$f(1)=-1+a+b+3=-1$에서 $a+b=-3$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=-9$
$f(x)=-x^3+6x^2-9x+3$이므로
$f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1 극소	↗	3 극대	↘

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(3)=3$

025 답 ②

$f(x)=ax^3+bx^2+c$에서
$f'(x)=3ax^2+2bx$

$x=-1$에서 극댓값이 -7이므로
$f'(-1)=0$, $f(-1)=-7$
$f'(-1)=3a-2b=0$ ...... ㉠
$f(-1)=-a+b+c=-7$ ...... ㉡
곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기가 6이므로 $f'(1)=6$에서
$3a+2b=6$ ...... ㉢
㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=\frac{3}{2}$
이를 ㉡에 대입하면
$-1+\frac{3}{2}+c=-7$　　$\therefore c=-\frac{15}{2}$
$\therefore a+b+c=1+\frac{3}{2}+\left(-\frac{15}{2}\right)=-5$

026 답 4

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
$x=1$, $x=3$에서 극값을 가지므로
$f'(1)=0$, $f'(3)=0$
$f'(1)=3+2a+b=0$에서 $2a+b=-3$ ...... ㉠
$f'(3)=27+6a+b=0$에서 $6a+b=-27$ ...... ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=9$
$f(x)=x^3-6x^2+9x+c$이므로
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$4+c$ 극대	↘	c 극소	↗

함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(1)=4+c$, 극솟값은 $f(3)=c$이므로 그 차는
$(4+c)-c=4$

027 답 1

$f(x)=2x^3+3ax^2-12a^2x+a^3$에서
$f'(x)=6x^2+6ax-12a^2=6(x+2a)(x-a)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2a$ 또는 $x=a$
이때 $a>0$이므로 $-2a<a$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$21a^3$ 극대	↘	$-6a^3$ 극소	↗

함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(-2a)=21a^3$, 극솟값은 $f(a)=-6a^3$이고 그 합이 15이므로
$21a^3+(-6a^3)=15$, $a^3-1=0$
$(a-1)(a^2+a+1)=0$　　$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

028 답 −4

$f(x)=-2x^3+(a+2)x^2+6x+b$에서
$f'(x)=-6x^2+2(a+2)x+6$
함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소라고 하면 α, β는 이차방정식 $-6x^2+2(a+2)x+6=0$의 두 근이다.
이때 극대인 점과 극소인 점이 원점에 대하여 대칭이므로
$\alpha=-\beta$　　$\therefore \alpha+\beta=0$
근과 계수의 관계에 의해
$\frac{2(a+2)}{6}=0$　　$\therefore a=-2$
$f(x)=-2x^3+6x+b$이므로
$f'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	$b-4$ 극소	↗	$b+4$ 극대	↘

극대인 점과 극소인 점이 원점에 대하여 대칭이므로
$b-4=-(b+4)$　　$\therefore b=0$
따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(-1)=-4$

029 답 27

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)라고 하면
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$
$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=-9$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.
즉, $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$　　$\therefore d=0$
$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=-9$이므로
$c=-9$
(나)에서 함수 $f(x)$가 $x=1$일 때 극솟값 -5를 가지므로
$f'(1)=0$, $f(1)=-5$
$f'(1)=3a+2b+c=0$에 $c=-9$를 대입하면
$3a+2b=9$ ...... ㉠
$f(1)=a+b+c+d=-5$에 $c=-9$, $d=0$을 대입하면
$a+b=4$ ...... ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$
$f(x)=x^3+3x^2-9x$이므로
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-3$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	27 극대	↘	-5 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(-3)=27$

030 답 $\frac{3}{2}$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라고 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

주어진 그래프에서 $f'(-2)=0$, $f'(1)=0$이므로

$f'(-2)=12-4a+b=0$에서 $4a-b=12$ …… ㉠

$f'(1)=3+2a+b=0$에서 $2a+b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{2}$, $b=-6$

$\therefore f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+c$

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$c+10$ 극대	↘	$c-\frac{7}{2}$ 극소	↗

함수 $f(x)$의 극댓값이 15이므로

$f(-2)=c+10=15$ $\therefore c=5$

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은

$f(1)=c-\frac{7}{2}=5-\frac{7}{2}=\frac{3}{2}$

031 답 5

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)라고 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

주어진 그래프에서 $f'(-1)=0$, $f'(0)=0$이므로

$f'(-1)=3a-2b+c=0$ …… ㉠

$f'(0)=c=0$

$c=0$을 ㉠에 대입하면 $3a-2b=0$ …… ㉡

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$의 극댓값이 1, 극솟값이 0이므로

$f(0)=d=1$

$f(-1)=-a+b-c+d=0$ …… ㉢

$c=0$, $d=1$을 ㉢에 대입하면

$-a+b-0+1=0$ $\therefore a-b=1$ …… ㉣

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-3$

따라서 $f(x)=-2x^3-3x^2+1$이므로

$f(-2)=16-12+1=5$

032 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $f(1)=-2$에서

$1+a+b+c=-2$ $\therefore a+b+c=-3$

ㄴ. 주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 점은 2개이다.

ㄷ. $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ …… ㉠

주어진 그래프에서 $f'(0)=0$, $f'(2)=0$이므로

$f'(0)=b=0$

$f'(2)=12+4a+b=0$ …… ㉡

$b=0$을 ㉡에 대입하면 $12+4a=0$ $\therefore a=-3$

$f(x)=x^3-3x^2+c$이므로 $f(1)=-2$에서

$1-3+c=-2$ $\therefore c=0$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2$

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은

$f(2)=8-12=-4$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

033 답 ②

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

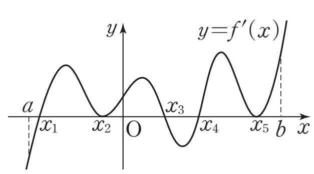
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘	극소	↗

① 구간 $(2, 3]$에서 $f(x)$는 증가한다.
② $f'(1)=0$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
③ $f'(2)\neq0$이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖지 않는다.
④ $f(x)$는 $x=3$에서 극대이다.
⑤ 구간 $(-1, 5)$에서 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 점은 $x=3$인 점 1개이다.

따라서 옳은 것은 ②이다.

034 답 -1

다음 그림과 같이 함수 $y=f'(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 차례로 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5라고 하자.



주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	a	$\cdots$	x_1	$\cdots$	x_2	$\cdots$	x_3	$\cdots$	x_4	$\cdots$	x_5	$\cdots$	b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗		↗	극대	↘	극소	↗		↗	

함수 $f(x)$는 $x=x_3$에서 극대, $x=x_1$, $x=x_4$에서 극소이므로

$m=1$, $n=2$ $\therefore m-n=1-2=-1$

035 답 -3

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-10	$\cdots$	-8	$\cdots$	-5	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	4	$\cdots$	8	$\cdots$	10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗		↗	극대	↘	극소	↗	

함수 $f(x)$는 $x=-8$, $x=-3$, $x=8$에서 극솟값을 가지므로 구하는 모든 x의 값의 합은 $-8+(-3)+8=-3$

036 답 ③

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$

$h'(x)=0$인 x의 값은 두 함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같으므로

$x=b$ 또는 $x=c$ 또는 $x=f$

$h'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $h(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	f	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $h(x)$는 $x=c$에서 극소이므로 구하는 x의 값은 c이다.

037 답 ③

$f(x)=-x^4+4x^3-4x^2-2$라고 하면

$f'(x)=-4x^3+12x^2-8x=-4x(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-2 극대	↘	-3 극소	↗	-2 극대	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ③이다.

038 답 ①

$f(x)=2x^3+12x^2+18x+5$라고 하면

$f'(x)=6x^2+24x+18=6(x+3)(x+1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-3$ 또는 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5 극대	↘	-3 극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ①이다.

039 답 ③

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↗	극대	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ③이다.

040 답 ㄱ, ㄴ

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대, $x=\beta$에서 극소이므로

$f'(\alpha)=0$, $f'(\beta)=0$

따라서 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근은 α, β이고, $\alpha<0$, $\beta>0$, $|\beta|>|\alpha|$이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=-\dfrac{2a}{3}>0$에서 $a<0$

$\alpha\beta=\dfrac{b}{3}<0$에서 $b<0$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=0$일 때 y축의 양의 부분과 만나므로 $c>0$

ㄱ. $a<0$, $b<0$, $c>0$이므로 $abc>0$

ㄴ. $a<0$, $bc<0$이므로 $a+bc<0$

ㄷ. $\dfrac{|a|}{a}+\dfrac{|b|}{b}+\dfrac{|c|}{c}=\dfrac{-a}{a}+\dfrac{-b}{b}+\dfrac{c}{c}=-1-1+1=-1$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

핵심 유형 80~81쪽

유형10 답 ④

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-ax^2+(2a+3)x+3$에서

$f'(x)=x^2-2ax+2a+3$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식 $D>0$에서

$\dfrac{D}{4}=a^2-(2a+3)>0$, $a^2-2a-3>0$

$(a+1)(a-3)>0$ $\quad\therefore a<-1$ 또는 $a>3$

따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다.

유형11 답 ①

$f(x)=x^3-ax^2+2ax+1$에서

$f'(x)=3x^2-2ax+2a$

함수 $f(x)$가 $-2<x<2$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근이 -2와 2 사이에 있어야 하므로

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식 $D>0$에서

$\dfrac{D}{4}=a^2-6a>0$, $a(a-6)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

(ii) $f'(-2)>0$에서

$12+4a+2a>0$ $\quad\therefore a>-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

(iii) $f'(2)>0$에서

$12-4a+2a>0$ $\therefore a<6$ …… ㉢

(iv) $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{a}{3}$이므로

$-2<\frac{a}{3}<2$ $\therefore -6<a<6$ …… ㉣

㉠~㉣을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는

$-2<a<0$

유형12 답 $-\frac{9}{4}$

$f(x)=x^4-4x^3-2ax^2$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2-4ax=4x(x^2-3x-a)$

함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-3x-a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) $x=0$이 이차방정식 $x^2-3x-a=0$의 근이 아니어야 하므로

$a\neq0$ …… ㉠

(ii) 이차방정식 $x^2-3x-a=0$의 판별식 $D>0$이어야 하므로

$D=9+4a>0$ $\therefore a>-\frac{9}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는

$-\frac{9}{4}<a<0$ 또는 $a>0$

따라서 $\alpha=-\frac{9}{4}$, $\beta=0$, $\gamma=0$이므로 $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{9}{4}$

유형13 답 -3

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+5$에서

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

구간 $[-2, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	…	-1	…	2	…	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	12 극대	↘	-15 극소	↗	-4

함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(-1)=12$, 최솟값은 $f(2)=-15$이므로

$M=12$, $m=-15$

$\therefore M+m=12+(-15)=-3$

유형14 답 6

$f(x)=2x^3-3x^2+k$에서

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$

구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	1	…	2
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	k	↘	$k-1$ 극소	↗	$k+4$

함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)=k-1$이므로

$k-1=1$ $\therefore k=2$

따라서 최댓값은 $f(2)=k+4=2+4=6$

유형15 답 $\sqrt{5}$

점 P의 좌표를 (a, a^2)이라고 하면

$\overline{AP}=\sqrt{(a-3)^2+a^4}=\sqrt{a^4+a^2-6a+9}$

$\overline{AP}^2=f(a)=a^4+a^2-6a+9$라고 하면

$f'(a)=4a^3+2a-6=2(a-1)(2a^2+2a+3)$

$f'(a)=0$인 a의 값은 $a=1$ ($\because a$는 실수)

함수 $f(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	…	1	…
$f'(a)$	$-$	0	$+$
$f(a)$	↘	5 극소	↗

따라서 $f(a)$의 최솟값은 $f(1)=5$이므로 선분 AP의 길이의 최솟값은 $\sqrt{5}$이다.

유형16 답 $8\sqrt{2}$

점 A의 좌표를 $A(a, 6-a^2)$ $(0<a<\sqrt{6})$이라고 하면

$\overline{AB}=2a$, $\overline{AD}=6-a^2$

직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$라고 하면

$S(a)=2a(6-a^2)=-2a^3+12a$

$\therefore S'(a)=-6a^2+12=-6(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})$

$S'(a)=0$인 a의 값은 $a=\sqrt{2}$ ($\because 0<a<\sqrt{6}$)

$0<a<\sqrt{6}$에서 함수 $S(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	…	$\sqrt{2}$	…	$\sqrt{6}$
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	$8\sqrt{2}$ 극대	↘	

따라서 넓이 $S(a)$의 최댓값은 $S(\sqrt{2})=8\sqrt{2}$

유형17 답 16 cm^3

잘라 낼 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라고 하면 상자의 밑면의 가로의 길이와 세로의 길이는 $(6-2x)$ cm

이때 $x>0$, $6-2x>0$이어야 하므로 $0<x<3$

상자의 부피를 $V(x)\text{ cm}^3$라고 하면

$V(x)=x(6-2x)^2=4x^3-24x^2+36x$

$\therefore V'(x)=12x^2-48x+36=12(x-1)(x-3)$

$V'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because 0<x<3$)

$0<x<3$에서 함수 $V(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	1	…	3
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	16 극대	↘	

따라서 부피 $V(x)$의 최댓값은 $V(1)=16(\text{cm}^3)$

유형18 답 6000원

입장 수입을 $f(x)$백 원이라고 하면

$f(x)=xy=x\left(4800-10x-\frac{1}{3}x^2\right)=-\frac{1}{3}x^3-10x^2+4800x$

$f'(x)=-x^2-20x+4800=-(x+80)(x-60)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=60$ ($\because$ $x>0$)

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	60	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=60$일 때 최대이므로 입장 수입이 최대가 되기 위한 입장료는 6000원이다.

핵심 유형 완성하기 82~86쪽

041 답 4

$f(x)=ax^3-6x^2+3ax-2$에서

$f'(x)=3ax^2-12x+3a$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식 $D>0$에서

$\frac{D}{4}=36-9a^2>0$, $a^2-4<0$

$(a+2)(a-2)<0$

$\therefore$ $-2<a<0$ 또는 $0<a<2$ ($\because$ $a\neq0$)

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=2$이므로

$\beta-\alpha=2-(-2)=4$

042 답 10

$f(x)=x^3+ax^2-(a-6)x+5$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-(a-6)$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식 $D\leq0$에서

$\frac{D}{4}=a^2+3(a-6)\leq0$, $a^2+3a-18\leq0$

$(a+6)(a-3)\leq0$

$\therefore$ $-6\leq a\leq3$

따라서 정수 a는 -6, -5, -4, $\cdots$, 2, 3의 10개이다.

043 답 6

$f(x)=-x^3+ax+2$에서

$f'(x)=-3x^2+a$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식 $D_1>0$에서

$D_1=12a>0$ $\quad\therefore$ $a>0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$g(x)=x^3-6x^2+a^2x+1$에서

$g'(x)=3x^2-12x+a^2$

함수 $g(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $g'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $g'(x)=0$의 판별식 $D_2>0$에서

$\frac{D_2}{4}=36-3a^2>0$, $a^2-12<0$, $(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3})<0$

$\therefore$ $-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는

$0<a<2\sqrt{3}$

따라서 정수 a는 1, 2, 3이므로 그 합은 6이다.

044 답 4

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3-ax^2+(2a-3)x-1$에서

$f'(x)=-x^2-2ax+2a-3$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식 $D_1>0$에서

$\frac{D_1}{4}=a^2+2a-3>0$, $(a+3)(a-1)>0$

$\therefore$ $a<-3$ 또는 $a>1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$g(x)=\frac{4}{3}x^3-(a+2)x^2+(2a+1)x+1$에서

$g'(x)=4x^2-2(a+2)x+2a+1$

함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $g'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $g'(x)=0$의 판별식 $D_2\leq0$에서

$\frac{D_2}{4}=(a+2)^2-4(2a+1)\leq0$, $a^2-4a\leq0$

$a(a-4)\leq0$ $\quad\therefore$ $0\leq a\leq4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는

$1<a\leq4$

따라서 a의 최댓값은 4이다.

045 답 ⑤

$f(x)=-x^3+ax^2-(a+6)x$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax-(a+6)$

함수 $f(x)$가 $x>-1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근이 -1보다 커야 하므로

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식 $D>0$에서

$\frac{D}{4}=a^2-3(a+6)>0$, $a^2-3a-18>0$

$(a+3)(a-6)>0$ $\quad\therefore$ $a<-3$ 또는 $a>6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

(ii) $f'(-1)<0$에서

$-3-2a-(a+6)<0$ $\quad\therefore$ $a>-3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

(iii) $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{a}{3}$이므로

$\frac{a}{3}>-1$ $\quad\therefore$ $a>-3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는

$a>6$

따라서 자연수 a의 최솟값은 7이다.

046 답 ④

$f(x)=x^3-(a+1)x^2+x-1$에서

$f'(x)=3x^2-2(a+1)x+1$

함수 $f(x)$가 $x<1$에서 극댓값을 $x>1$에서 극솟값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근 중 한 근은 1보다 작고, 다른 한 근은 1보다 커야 하므로 $f'(1)<0$에서

$3-2(a+1)+1<0 \qquad \therefore a>1$

047 답 2

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-1)x+3$에서

$f'(x)=x^2-2ax+a^2-1$

함수 $f(x)$가 구간 $(-1, 2)$에서 극댓값, 구간 $(2, \infty)$에서 극솟값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근 중 한 근은 -1과 2 사이에 있고, 다른 한 근은 2보다 커야 하므로

(i) $f'(-1)>0$에서

$1+2a+a^2-1>0,\ a^2+2a>0$

$a(a+2)>0 \qquad \therefore a<-2$ 또는 $a>0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) $f'(2)<0$에서

$4-4a+a^2-1<0,\ a^2-4a+3<0$

$(a-1)(a-3)<0 \qquad \therefore 1<a<3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는

$1<a<3$

따라서 정수 a의 값은 2이다.

048 답 1

$f(x)=x^4-4ax^3+3ax^2+1$에서

$f'(x)=4x^3-12ax^2+6ax=2x(2x^2-6ax+3a)$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $2x^2-6ax+3a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) $x=0$이 이차방정식 $2x^2-6ax+3a=0$의 근이 아니어야 하므로

$a\neq0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) 이차방정식 $2x^2-6ax+3a=0$의 판별식 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=9a^2-6a>0,\ 3a(3a-2)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는

$a<0$ 또는 $a>\frac{2}{3}$

따라서 자연수 a의 최솟값은 1이다.

049 답 ⑤

$f(x)=-x^4+2x^3-3ax^2$에서

$f'(x)=-4x^3+6x^2-6ax=-2x(2x^2-3x+3a)$

함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $2x^2-3x+3a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) $x=0$이 이차방정식 $2x^2-3x+3a=0$의 근이 아니어야 하므로

$a\neq0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) 이차방정식 $2x^2-3x+3a=0$의 판별식 $D>0$이어야 하므로

$D=9-24a>0 \qquad \therefore a<\frac{3}{8} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는

$a<0$ 또는 $0<a<\frac{3}{8}$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

050 답 $a=-2$ 또는 $a\geq\frac{1}{4}$

$f(x)=-x^4-2(a-1)x^2-4ax+1$에서

$f'(x)=-4x^3-4(a-1)x-4a$

$=-4(x+1)(x^2-x+a)$

함수 $f(x)$가 극솟값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 중근을 갖거나 허근을 가져야 한다.

(i) $-4(x+1)(x^2-x+a)=0$이 중근을 갖는 경우

ⓘ $x=-1$이 이차방정식 $x^2-x+a=0$의 한 근인 경우

$1+1+a=0 \qquad \therefore a=-2$

ⓘⓘ 이차방정식 $x^2-x+a=0$이 중근을 갖는 경우

판별식 $D=0$이어야 하므로

$D=1-4a=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$

(ii) $-4(x+1)(x^2-x+a)=0$이 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2-x+a=0$이 허근을 가져야 하므로 판별식 $D<0$에서

$D=1-4a<0 \qquad \therefore a>\frac{1}{4}$

(i), (ii)에 의해 $a=-2$ 또는 $a\geq\frac{1}{4}$

051 답 12

$f(x)=3x^4-4x^3-3(a+4)x^2+12ax$에서

$f'(x)=12x^3-12x^2-6(a+4)x+12a$

$=6(x-2)(2x^2+2x-a)$

함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 중근을 갖거나 허근을 가져야 한다.

(i) $6(x-2)(2x^2+2x-a)=0$이 중근을 갖는 경우

ⓘ $x=2$가 이차방정식 $2x^2+2x-a=0$의 한 근인 경우

$8+4-a=0 \qquad \therefore a=12$

ⓘⓘ 이차방정식 $2x^2+2x-a=0$이 중근을 갖는 경우

판별식 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=1+2a=0 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$

(ii) $6(x-2)(2x^2+2x-a)=0$이 허근을 갖는 경우

이차방정식 $2x^2+2x-a=0$이 허근을 가져야 하므로 판별식 $D<0$에서

$\frac{D}{4}=1+2a<0 \qquad \therefore a<-\frac{1}{2}$

(i), (ii)에 의해 $a\leq-\frac{1}{2}$ 또는 $a=12$

따라서 a의 최댓값은 12이다.

052 답 ⑤

$f(x)=-x^3+6x^2-9x+10$에서

$f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

구간 $[0,\ 5]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	10	↘	6 극소	↗	10 극대	↘	-10

함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)=f(3)=10$, 최솟값은 $f(5)=-10$이므로

$M=10,\ m=-10$

$\therefore\ M-m=10-(-10)=20$

053 답 -7

$f(x)=x^4-6x^2-8x+15$에서

$f'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	18	↘	-9 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값이 -9이므로

$a=2,\ m=-9$

$\therefore\ a+m=2+(-9)=-7$

054 답 $\frac{81}{4}$

$2x+y=6$에서 $y=6-2x$

$y\geq0$이므로 $y=6-2x\geq0$에서 $x\leq3$

$\therefore\ 0\leq x\leq3$

$f(x)=x^2y^2=x^2(6-2x)^2=4x^4-24x^3+36x^2$이라고 하면

$f'(x)=16x^3-72x^2+72x$

$\quad\quad=8x(2x-3)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=3$

$0\leq x\leq3$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{81}{4}$ 극대	↘	0

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{81}{4}$

055 답 $-\frac{2\sqrt{6}}{9}$

$f(x)=-x^3+\frac{3}{2}ax^2-a$에서

$f'(x)=-3x^2+3ax=-3x(x-a)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=a$

구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-a$	↗	$\frac{1}{2}a^3-a$ 극대	↘	$\frac{1}{2}a-1$

함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(a)=\frac{1}{2}a^3-a$이므로

$g(a)=\frac{1}{2}a^3-a\qquad\therefore\ g'(a)=\frac{3}{2}a^2-1$

$g'(a)=0$인 a의 값은 $a=\frac{\sqrt{6}}{3}$ $(\because\ 0<a<1)$

$0<a<1$에서 함수 $g(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	1
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$		↘	$-\frac{2\sqrt{6}}{9}$ 극소	↗	

따라서 함수 $g(a)$의 최솟값은 $g\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=-\frac{2\sqrt{6}}{9}$

056 답 12

$g(x)=t$라고 하면

$t=g(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$

$\therefore\ t\geq-1$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=-3t^4-4t^3+6t^2+12t+1$이므로

$f'(t)=-12t^3-12t^2+12t+12=-12(t+1)^2(t-1)$

$f'(t)=0$인 t의 값은 $t=-1$ 또는 $t=1$

$t\geq-1$에서 함수 $f(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	-4	↗	12 극대	↘

따라서 함수 $f(t)$의 최댓값은 $f(1)=12$

057 답 -3

$f(x)=-2x^3+6x^2+a$에서

$f'(x)=-6x^2+12x=-6x(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$a+8$	↘	a 극소	↗	$a+8$ 극대	↘	a

함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(-1)=f(2)=a+8$이므로

$a+8=5\qquad\therefore\ a=-3$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(0)=f(3)=a=-3$

058 답 ④

$f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x+a$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12$

$=4(x+1)(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$ ($\because 0\le x\le 4$)

구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	a	↗	$a+7$ 극대	↘	$a-9$ 극소	↗	$a+16$

함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(4)=a+16$, 최솟값은 $f(3)=a-9$이고, 최댓값과 최솟값의 합이 11이므로

$a+16+a-9=11$　　$\therefore a=2$

059 답 ④

$f(x)=ax^3-3ax+b$에서

$f'(x)=3ax^2-3a=3a(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-2a+b$	↗	$2a+b$ 극대	↘	$-2a+b$ 극소	↗	$2a+b$

a, b는 양수이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(-1)=f(2)=2a+b$, 최솟값은 $f(-2)=f(1)=-2a+b$이다.

$\therefore 2a+b=10$, $-2a+b=6$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=8$　　$\therefore a+b=1+8=9$

060 답 -25

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

주어진 그래프에서 $f'(-1)=0$, $f'(3)=0$이므로

$f'(-1)=3-2a+b=0$　　$\therefore 2a-b=3$　　…… ㉠

$f'(3)=27+6a+b=0$　　$\therefore 6a+b=-27$　　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-9$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2-9x+c$

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 구간 $[-2, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$c-2$	↗	$c+5$ 극대	↘	$c-27$ 극소	↗	$c-20$

함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(-1)=c+5$이므로

$c+5=7$　　$\therefore c=2$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은

$f(3)=c-27=2-27=-25$

061 답 $(1, 0)$, $2\sqrt{5}$

점 P의 좌표를 (a, a^2-1)이라고 하면 점 P와 점 $(5, -2)$ 사이의 거리 l은

$l=\sqrt{(a-5)^2+(a^2+1)^2}=\sqrt{a^4+3a^2-10a+26}$

$l^2=f(a)=a^4+3a^2-10a+26$이라고 하면

$f'(a)=4a^3+6a-10=2(a-1)(2a^2+2a+5)$

$f'(a)=0$인 a의 값은 $a=1$ ($\because a$는 실수)

함수 $f(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(a)$	−	0	+
$f(a)$	↘	20 극소	↗

함수 $f(a)$는 $a=1$에서 최소이므로 이때 점 P의 좌표는 $(1, 0)$이고, l의 최솟값은 $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$이다.

062 답 28

점 P의 좌표를 $(a, -a^2)$이라고 하면

$\overline{OP}^2+\overline{AP}^2=a^2+a^4+(a-6)^2+a^4=2a^4+2a^2-12a+36$

$f(a)=2a^4+2a^2-12a+36$이라고 하면

$f'(a)=8a^3+4a-12=4(a-1)(2a^2+2a+3)$

$f'(a)=0$인 a의 값은 $a=1$ ($\because a$는 실수)

함수 $f(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(a)$	−	0	+
$f(a)$	↘	28 극소	↗

따라서 $f(a)=\overline{OP}^2+\overline{AP}^2$의 최솟값은 $f(1)=28$

063 답 $\sqrt{17}-2$

원 $(x-6)^2+y^2=4$의 중심을 $C(6, 0)$, 점 P의 좌표를 $(a, -a^2+3)$이라고 하면 원의 반지름의 길이가 2이므로

$\overline{PQ}\ge\overline{PC}-2$

$=\sqrt{(a-6)^2+(-a^2+3)^2}-2$

$=\sqrt{a^4-5a^2-12a+45}-2$

$f(a)=a^4-5a^2-12a+45$라고 하면

$f'(a)=4a^3-10a-12=2(a-2)(2a^2+4a+3)$

$f'(a)=0$인 a의 값은 $a=2$ ($\because a$는 실수)

함수 $f(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(a)$	−	0	+
$f(a)$	↘	17 극소	↗

함수 $f(a)$의 최솟값은 $f(2)=17$이므로 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $\sqrt{17}-2$이다.

064 답 $\frac{64\sqrt{3}}{9}$

직사각형의 꼭짓점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하고 점 P의 x좌표를 a라고 하면

$P(a,\ -a^2+4)$ (단, $0<a<2$)

직사각형의 넓이를 $S(a)$라고 하면

$S(a)=2a\times2(-a^2+4)=-4a^3+16a$

$\therefore S'(a)=-12a^2+16=-4(3a^2-4)$

$S'(a)=0$인 a의 값은 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ($\because 0<a<2$)

$0<a<2$에서 함수 $S(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	2
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	$\frac{64\sqrt{3}}{9}$ 극대	↘	

따라서 넓이 $S(a)$의 최댓값은 $S\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{64\sqrt{3}}{9}$

065 답 256

곡선 $y=-x^2+8x+20$과 x축의 교점의 x좌표는

$-x^2+8x+20=0$에서 $-(x+2)(x-10)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=10$

$\therefore A(-2,\ 0),\ B(10,\ 0)$

점 C의 좌표를 $(a,\ -a^2+8a+20)(4<a<10)$이라 하고, 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $H(a,\ 0)$이므로

$\overline{AB}=12,\ \overline{CD}=2(a-4)=2a-8,\ \overline{CH}=-a^2+8a+20$

사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(a)$라고 하면

$S(a)=\frac{1}{2}(2a-8+12)(-a^2+8a+20)=-a^3+6a^2+36a+40$

$\therefore S'(a)=-3a^2+12a+36=-3(a+2)(a-6)$

$S'(a)=0$인 a의 값은 $a=6$ ($\because 4<a<10$)

$4<a<10$에서 함수 $S(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	4	$\cdots$	6	$\cdots$	10
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	256 극대	↘	

따라서 넓이 $S(a)$의 최댓값은 $S(6)=256$

066 답 $\frac{5}{2}$

정사각형의 한 변의 길이를 x라고 하면 정사각형의 둘레의 길이는 $4x$, 원의 둘레의 길이는 $20-4x$이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{20-4x}{2\pi}=\frac{10-2x}{\pi}$

이때 $x>0$, $\frac{20-4x}{2\pi}>0$이어야 하므로 $0<x<5$

정사각형의 넓이와 원의 넓이의 곱을 $S(x)$라고 하면

$S(x)=x^2\times\pi\left(\frac{10-2x}{\pi}\right)^2=\frac{4}{\pi}x^2(x-5)^2$

$\therefore S'(x)=\frac{4}{\pi}\{2x(x-5)^2+x^2\times2(x-5)\}=\frac{8}{\pi}x(2x-5)(x-5)$

$S'(x)=0$인 x의 값은 $x=\frac{5}{2}$ ($\because 0<x<5$)

$0<x<5$에서 함수 $S(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$	5
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		↗	극대	↘	

따라서 두 도형의 넓이의 곱 $S(x)$는 $x=\frac{5}{2}$일 때 최대이므로 이때의 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{5}{2}$이다.

067 답 $\frac{5}{3}$ cm

잘라 낸 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라고 하면 상자의 밑면의 가로와 세로의 길이는 각각

$(15-2x)$ cm, $(8-2x)$ cm

이때 $x>0$, $15-2x>0$, $8-2x>0$이어야 하므로 $0<x<4$

상자의 부피를 $V(x)$ cm^{3}라고 하면

$V(x)=x(15-2x)(8-2x)=2(2x^3-23x^2+60x)$

$\therefore V'(x)=2(6x^2-46x+60)=4(3x-5)(x-6)$

$V'(x)=0$인 x의 값은 $x=\frac{5}{3}$ ($\because 0<x<4$)

$0<x<4$에서 함수 $V(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	4
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 상자의 부피 $V(x)$는 $x=\frac{5}{3}$에서 최대이므로 잘라 낸 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{5}{3}$ cm이다.

068 답 ⑤

원뿔의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라고 하면

$r^2+h^2=144 \qquad \therefore r^2=144-h^2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $h>0$, $r^2=144-h^2>0$이므로 $0<h<12$

원뿔의 부피를 $V(h)$라고 하면

$V(h)=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(144-h^2)h=\frac{1}{3}\pi(-h^3+144h)$

$\therefore V'(h)=\frac{1}{3}\pi(-3h^2+144)=-\pi(h+4\sqrt{3})(h-4\sqrt{3})$

$V'(h)=0$인 h의 값은 $h=4\sqrt{3}$ ($\because 0<h<12$)

$0<h<12$에서 함수 $V(h)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

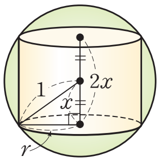
h	0	$\cdots$	$4\sqrt{3}$	$\cdots$	12
$V'(h)$		$+$	0	$-$	
$V(h)$		↗	극대	↘	

원뿔의 부피 $V(h)$가 최대일 때, 원뿔의 높이는 $h=4\sqrt{3}$이므로 ㉠에 대입하면

$r^2=144-48=96 \qquad \therefore r=4\sqrt{6}$ ($\because r>0$)

$\therefore r:h=4\sqrt{6}:4\sqrt{3}=\sqrt{2}:1$

069 답 $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$



오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 $2x$라고 하면

$r^2=1-x^2$

이때 $x>0$, $r^2=1-x^2>0$이므로 $0<x<1$

원기둥의 부피를 $V(x)$라고 하면

$V(x)=\pi r^2\times 2x=\pi(1-x^2)\times 2x=2\pi(-x^3+x)$

$\therefore V'(x)=2\pi(-3x^2+1)$

$V'(x)=0$인 x의 값은 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ($\because 0<x<1$)

$0<x<1$에서 함수 $V(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	1
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$ 극대	$\searrow$	

따라서 원기둥의 부피 $V(x)$의 최댓값은 $V\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$

070 답 32 cm^3

직육면체의 밑면의 한 변의 길이를 x cm, 높이를 y cm라고 하면 사용한 종이의 넓이의 합은 (x^2+4xy) cm^2이므로

$x^2+4xy=48 \qquad \therefore y=\frac{48-x^2}{4x}$

이때 $x>0$, $y=\frac{48-x^2}{4x}>0$이므로 $0<x<4\sqrt{3}$

상자의 부피를 $V(x)$ cm^3라고 하면

$V(x)=x^2y=x^2\times\frac{48-x^2}{4x}=-\frac{1}{4}x^3+12x$

$\therefore V'(x)=-\frac{3}{4}x^2+12=-\frac{3}{4}(x+4)(x-4)$

$V'(x)=0$인 x의 값은 $x=4$ ($\because 0<x<4\sqrt{3}$)

$0<x<4\sqrt{3}$에서 함수 $V(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	$4\sqrt{3}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	32 극대	$\searrow$	

따라서 상자의 부피 $V(x)$의 최댓값은 $V(4)=32(\text{cm}^3)$

071 답 3시간

$f(t)=-t^3+3t^2+9t$라고 하면

$f'(t)=-3t^2+6t+9=-3(t+1)(t-3)$

$f'(t)=0$인 t의 값은 $t=3$ ($\because t\ge 0$)

함수 $f(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(t)$는 $x=3$에서 최대이므로 약효가 최대가 되는 것은 3시간 후이다.

072 답 1450원

1 L당 가격을 $10x$원 올렸을 경우 휘발유 1 L의 가격은 $(1350+10x)$원이고, 이때 하루 판매량은 $(3000-x^2)$ L이다.

이때 $x>0$, $3000-x^2>0$이므로 $0<x<10\sqrt{30}$

가격을 $10x$원 올렸을 경우 하루 판매 금액을 $f(x)$원이라고 하면

$f(x)=(1350+10x)(3000-x^2)$

$\therefore f'(x)=10(3000-x^2)+(1350+10x)\times(-2x)$

$\qquad\quad =-30(x+100)(x-10)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=10$ ($\because 0<x<10\sqrt{30}$)

$0<x<10\sqrt{30}$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	10	$\cdots$	$10\sqrt{30}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=10$에서 최대이므로 하루 판매 금액이 최대가 되려면 휘발유 가격을 $1350+10\times 10=1450$(원)으로 정해야 한다.

핵심 유형 **최종 점검하기** 87~89쪽

1 답 ③

유형 01 함수의 증가, 감소

$f(x)=2x^3-\frac{1}{2}(a+1)x^2+6ax+1$에서

$f'(x)=6x^2-(a+1)x+6a$

함수 $f(x)$가 감소하는 x의 값의 범위가 $b\le x\le 1$이므로 $x=b$, $x=1$은 이차방정식 $6x^2-(a+1)x+6a=0$의 두 근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의해 $b+1=\frac{a+1}{6}$, $b\times 1=a$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-1$

$\therefore ab=-1\times(-1)=1$

2 답 -2

유형 02 삼차함수가 실수 전체의 집합에서 증가 또는 감소하기 위한 조건

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-(2a-3)x+1$에서

$f'(x)=x^2+2ax-(2a-3)$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

$\therefore x^2+2ax-(2a-3)\ge 0$

이차방정식 $x^2+2ax-(2a-3)=0$의 판별식 $D\le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2+2a-3\le 0$, $(a+3)(a-1)\le 0 \qquad \therefore -3\le a\le 1$

따라서 $M=1$, $m=-3$이므로 $M+m=1+(-3)=-2$

3 답 -1

유형 02 삼차함수가 실수 전체의 집합에서 증가 또는 감소하기 위한 조건

$f(x)=2ax^3-x^2+6ax+5$에서

$f'(x)=6ax^2-2x+6a$

$x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로

$6a<0$ …… ㉠, $6ax^2-2x+6a\le 0$ …… ㉡

㉠에서 $a<0$ …… ㉢

㉡에서 이차방정식 $6ax^2-2x+6a=0$의 판별식 $D\le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=1-36a^2\le 0$, $36a^2-1\ge 0$, $(6a+1)(6a-1)\ge 0$

$\therefore a\le -\frac{1}{6}$ 또는 $a\ge \frac{1}{6}$ …… ㉣

㉢, ㉣을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는 $a\le -\frac{1}{6}$

따라서 정수 a의 최댓값은 -1이다.

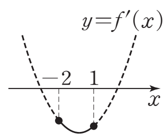
4 답 3

유형 03 삼차함수가 주어진 구간에서 증가 또는 감소하기 위한 조건

$f(x)=2x^3+ax^2-4ax+1$에서

$f'(x)=6x^2+2ax-4a$

함수 $f(x)$가 $-2<x<1$에서 감소하려면 이 구간에서 $f'(x)\le 0$이어야 한다.



$\therefore f'(-2)\le 0$, $f'(1)\le 0$

$f'(-2)=24-4a-4a\le 0$에서

$a\ge 3$ …… ㉠

$f'(1)=6+2a-4a\le 0$에서 $a\ge 3$ …… ㉡

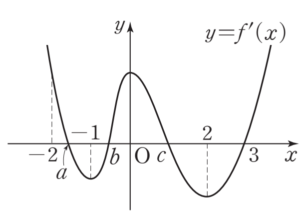
㉠, ㉡을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는 $a\ge 3$

따라서 a의 최솟값은 3이다.

5 답 ④

유형 04 함수의 그래프와 증가, 감소

다음 그림과 같이 함수 $y=f'(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 차례로 a, b, c라고 하자.



① 구간 $[a,\ -1]$에서 $f(x)$는 감소한다.

② 구간 $[-1,\ b]$에서 $f(x)$는 감소한다.

③ 구간 $[0,\ c]$에서 $f(x)$는 증가한다.

⑤ 구간 $[3,\ \infty)$에서 $f(x)$는 증가한다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

6 답 4

유형 05 함수의 극대, 극소

$f(x)=x^3-3x+1$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3 극대	↘	-1 극소	↗

함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(-1)=3$, 극솟값은 $f(1)=-1$이므로

$M=3$, $m=-1$ $\quad\therefore M-m=3-(-1)=4$

7 답 -2

유형 06 함수의 극대, 극소를 이용하여 미정계수 구하기

$f(x)=x^3-6x^2+9x+a$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$a+4$ 극대	↘	a 극소	↗

함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(1)=a+4$, 극솟값은 $f(3)=a$이다.

이때 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 그 부호가 서로 다르므로

$a+4=-a$ $\quad\therefore a=-2$

8 답 $\frac{32}{3}$

유형 07 도함수의 그래프와 함수의 극대, 극소

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq 0$)라고 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

주어진 그래프에서 $f'(0)=3$, $f'(-1)=0$, $f'(3)=0$이므로

$f'(0)=c=3$

$f'(-1)=3a-2b+c=0$에 $c=3$을 대입하면

$3a-2b=-3$ …… ㉠

$f'(3)=27a+6b+c=0$에 $c=3$을 대입하면

$27a+6b=-3$ $\quad\therefore 9a+2b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\frac{1}{3}$, $b=1$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+d$

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{5}{3}+d$ 극소	↗	$9+d$ 극대	↘

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는

$f(3)-f(-1)=(9+d)-\left(-\frac{5}{3}+d\right)=\frac{32}{3}$

9 답 ㄱ, ㄷ

유형 08 도함수 $y=f'(x)$의 그래프를 이용한 함수 $f(x)$의 해석

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $-2<x<-1$에서 감소한다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이다.
ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극소이다.
ㄹ. 함수 $f(x)$는 $3<x\le4$에서 감소한다.
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

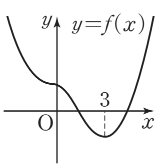
10 답 2

유형 09 함수의 그래프의 개형

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	$f(3)$ 극소	↗

이때 $f(3)<0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 2이다.



11 답 3

유형 10 삼차함수가 극값을 가질 조건

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
$f(1)=9$에서
$1+a+b+1=9 \qquad \therefore a+b=7 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식 $D>0$에서
$\frac{D}{4}=a^2-3b>0 \qquad \therefore a^2>3b \qquad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 동시에 만족하는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$의 3개이다.

12 답 $-\frac{1}{5}<k<0$

유형 11 삼차함수가 주어진 구간에서 극값을 가질 조건

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx^2+3kx+7$에서
$f'(x)=x^2-2kx+3k$
함수 $f(x)$가 $-1<x<1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근이 -1과 1 사이에 있어야 하므로

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식 $D>0$에서
$\frac{D}{4}=k^2-3k>0$, $k(k-3)>0$
$\therefore k<0$ 또는 $k>3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
(ii) $f'(-1)>0$에서
$1+2k+3k>0 \qquad \therefore k>-\frac{1}{5} \qquad \cdots\cdots$ ㉡
(iii) $f'(1)>0$에서
$1-2k+3k>0 \qquad \therefore k>-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉢
(iv) $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=k$이므로
$-1<k<1 \qquad \cdots\cdots$ ㉣
㉠~㉣을 동시에 만족하는 k의 값의 범위는
$-\frac{1}{5}<k<0$

13 답 1

유형 12 사차함수가 극값을 가질 조건

$f(x)=x^4+2ax^3+ax^2$에서
$f'(x)=4x^3+6ax^2+2ax=2x(2x^2+3ax+a)$
함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $2x^2+3ax+a=0$은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
(i) $x=0$이 이차방정식 $2x^2+3ax+a=0$의 근이 아니어야 하므로
$a\ne0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
(ii) 이차방정식 $2x^2+3ax+a=0$의 판별식 $D>0$이어야 하므로
$D=9a^2-8a>0$, $a(9a-8)>0$
$\therefore a<0$ 또는 $a>\frac{8}{9} \qquad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는
$a<0$ 또는 $a>\frac{8}{9}$
따라서 자연수 a의 최솟값은 1이다.

14 답 -9

유형 13 함수의 최대, 최소

$f(x)=x^3-3x^2-9x+4$에서
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ ($\because -2\le x\le2$)
구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	↗	9 극대	↘	-18

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값이 9이므로
$a=-1$, $b=9 \qquad \therefore ab=-1\times9=-9$

15 답 40

유형 13 함수의 최대, 최소

$t=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$라고 하면 구간 $[0, 3]$에서
$-2\le t\le2$
$f(t)=t^3+3t^2+10$에서

$f'(t)=3t^2+6t=3t(t+2)$
$f'(t)=0$인 t의 값은 $t=-2$ 또는 $t=0$
$-2\le t\le 2$에서 함수 $f(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	14	↘	10 극소	↗	30

함수 $f(t)$의 최댓값은 $f(2)=30$, 최솟값은 $f(0)=10$이므로
$M=30$, $m=10$ $\quad\therefore M+m=30+10=40$

16 답 ③

유형 14 함수의 최대, 최소를 이용하여 미정계수 구하기

$f(x)=ax^3-3ax^2+b$에서
$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$
구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	b	↘	$-4a+b$ 극소	↗	$16a+b$

이때 $a>0$이면 $-4a+b<b<16a+b$이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(4)=16a+b$, 최솟값은 $f(2)=-4a+b$이다.
$\therefore 16a+b=5$, $-4a+b=-15$
두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-11$
$\therefore a-b=1-(-11)=12$

17 답 17π

유형 15 함수의 최대, 최소의 활용 – 길이

점 P의 좌표를 (a, a^2)이라 하고 원의 반지름의 길이를 r라고 하면
$r^2=(a-6)^2+(a^2-3)^2=a^4-5a^2-12a+45$
$r^2=f(a)=a^4-5a^2-12a+45$라고 하면
$f'(a)=4a^3-10a-12=2(a-2)(2a^2+4a+3)$
$f'(a)=0$인 a의 값은 $a=2$ ($\because$ a는 실수)
함수 $f(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(a)$	$-$	0	$+$
$f(a)$	↘	17 극소	↗

따라서 함수 $f(a)$의 최솟값은 $f(2)=17$이므로 구하는 원의 넓이의 최솟값은 $\pi r^2=17\pi$

18 답 $\frac{1}{2}$

유형 16 함수의 최대, 최소의 활용 – 넓이

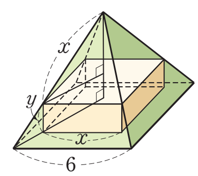
점 P의 좌표를 $(a, a(a-2)^2)$ $(0<a<2)$이라고 하면
$\overline{\mathrm{OH}}=a$, $\overline{\mathrm{PH}}=a(a-2)^2$
삼각형 OHP의 넓이를 $S(a)$라고 하면
$S(a)=\frac{1}{2}\times a\times a(a-2)^2=\frac{1}{2}a^4-2a^3+2a^2$
$\therefore S'(a)=2a^3-6a^2+4a=2a(a-1)(a-2)$
$S'(a)=0$인 a의 값은 $a=1$ ($\because$ $0<a<2$)
$0<a<2$에서 함수 $S(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	$\frac{1}{2}$ 극대	↘	

따라서 넓이 $S(a)$의 최댓값은 $S(1)=\frac{1}{2}$

19 답 $16\sqrt{2}$

유형 17 함수의 최대, 최소의 활용 – 부피



오른쪽 그림과 같이 직육면체의 밑면의 한 변의 길이를 x, 높이를 y라고 하면 정사각뿔의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=3\sqrt{2}$이므로
$6:3\sqrt{2}=(6-x):y$
$\therefore y=\frac{\sqrt{2}}{2}(6-x)$
이때 $x>0$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(6-x)>0$이므로 $0<x<6$
직육면체의 부피를 $V(x)$라고 하면
$V(x)=x^2y=\frac{\sqrt{2}}{2}x^2(6-x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(6x^2-x^3)$
$\therefore V'(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(12x-3x^2)=\frac{3\sqrt{2}}{2}x(4-x)$
$V'(x)=0$인 x의 값은 $x=4$ ($\because$ $0<x<6$)
$0<x<6$에서 함수 $V(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	$16\sqrt{2}$ 극대	↘	

따라서 직육면체의 부피 $V(x)$의 최댓값은 $V(4)=16\sqrt{2}$

20 답 5년

유형 18 함수의 최대, 최소의 활용 – 실생활

$f(x)=-2x^3+15x^2+100$에서
$f'(x)=-6x^2+30x=-6x(x-5)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=5$ ($\because$ $0<x\le 8$)
$0<x\le 8$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	5	$\cdots$	8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 최대이므로 식물의 개체 수가 최대가 되는 해는 5년 후이다.

06 도함수의 활용 (3)

핵심 유형

	유형01 ③	유형02 ③	유형03 6
유형04 27	유형05 ④	유형06 ④	유형07 11
유형08 -18	유형09 -2	유형10 ④	
유형11 64 m	유형12 45 m	유형13 ⑤	
유형14 2 m/s		유형15 13.5π m²/s	
유형16 $\frac{88}{3}$ cm³/s			

핵심 유형 완성하기

001 $\frac{19}{2}$	002 3	003 -4	004 35	005 4
006 ⑤	007 -7	008 $0<a<\frac{1}{4}$		009 1
010 3	011 ③	012 6	013 -4	014 ⑤
015 9	016 14	017 3	018 -3	
019 -13	020 $k<-1$		021 5	
022 $k\ge 8$	023 1	024 4	025 ⑤	
026 -25	027 6	028 ①	029 4	030 18
031 36	032 15	033 ③	034 ③	035 6
036 64	037 ①	038 ⑤	039 $\frac{3}{2}$	
040 $\frac{125}{2}$ m		041 40 m/s		042 50
043 ⑤	044 ①	045 b	046 ㄴ, ㄷ, ㄹ	
047 1 m/s		048 ④	049 ④	
050 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$	051 3.2	052 ①	053 $3\sqrt{3}$ cm²/s	
054 6	055 ④	056 648π cm³/s		057 ③
058 $\frac{9}{2}\pi$ m³/s				

핵심 유형 최종 점검하기

1 6	2 ③	3 ④	4 ②	5 -2
6 3	7 $6<a<8$		8 ②	9 -63
10 7	11 $k<0$	12 -1	13 ②	14 15
15 ㄱ, ㄷ	16 ⑤	17 $\frac{5}{2}$	18 36	19 $4\sqrt{3}$
20 $\frac{13}{2}$초				

핵심 유형 92~93쪽

유형01 답 ③

$3x^4-4x^3-12x^2-k=0$에서 $3x^4-4x^3-12x^2=k$

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$이라고 하면

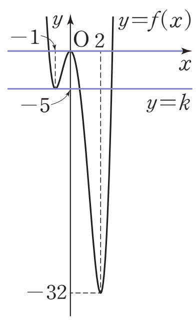
$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-5 극소	↗	0 극대	↘	-32 극소	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$와 서로 다른 세 점에서 만나려면



$k=-5$ 또는 $k=0$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-5+0=-5$

유형02 답 ③

$f(x)=x^3+3x^2-9x+n$이라고 하면

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-3$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

(극댓값)$\times$(극솟값)<0이어야 하므로

$f(-3)f(1)=(n+27)(n-5)<0$

$\therefore -27<n<5$

따라서 정수 n은 $-26, -25, -24, \cdots, 3, 4$의 31개이다.

유형03 답 6

주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $2x^3-3x^2-10x=2x+k$, 즉 $2x^3-3x^2-12x-k=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=2x^3-3x^2-12x-k$라고 하면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

(극댓값)$\times$(극솟값)<0이어야 하므로

$f(-1)f(2)=(7-k)(-20-k)<0$

$(k-7)(k+20)<0$

$\therefore -20<k<7$

따라서 자연수 k의 최댓값은 6이다.

유형04 답 27

$x^3-3x^2-9x+k=0$에서 $x^3-3x^2-9x=-k$

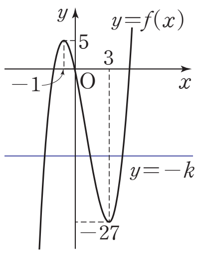
$f(x)=x^3-3x^2-9x$라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5 극대	↘	-27 극소	↗



함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=-k$와의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 다른 두 개는 양수이려면

$-27<-k<0$ $\quad\therefore 0<k<27$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=27$이므로 $\alpha+\beta=27$

유형05 답 ④

$x^4+4x^2-5x+a\geq x^2+5x$에서

$x^4+3x^2-10x+a\geq 0$

$f(x)=x^4+3x^2-10x+a$라고 하면

$f'(x)=4x^3+6x-10=2(x-1)(2x^2+2x+5)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because$ x는 실수)

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$a-6$ 극소	↗

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$(f(x)$의 최솟값$)\geq 0$ ➡ $f(1)=a-6\geq 0$

$\therefore a\geq 6$

따라서 정수 a의 최솟값은 6이다.

유형06 답 ④

$x^3-3x^2-9x+30\geq k$에서

$x^3-3x^2-9x+30-k\geq 0$

$f(x)=x^3-3x^2-9x+30-k$라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=3$ ($\because$ $x>0$)

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$3-k$ 극소	↗

$x>0$일 때, $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$(f(x)$의 최솟값$)\geq 0$ ➡ $f(3)=3-k\geq 0$

$\therefore k\leq 3$

유형07 답 11

$f(x)=2x^3+9x^2-k$라고 하면

$f'(x)=6x^2+18x=6x(x+3)$

$1<x<3$일 때, $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $1<x<3$에서 증가한다.

$1<x<3$일 때, $f(x)>0$이 성립하려면 $f(1)\geq 0$이어야 하므로

$f(1)=11-k\geq 0$ $\quad\therefore k\leq 11$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, $\cdots$, 11의 11개이다.

유형08 답 -18

$x>0$에서 곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=g(x)$보다 위쪽에 있으려면 $f(x)>g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)>0$이어야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라고 하면

$h(x)=(2x^3-12x+3)-(3x^2+k)$

$\quad=2x^3-3x^2-12x+3-k$

$h'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$h'(x)=0$인 x의 값은 $x=2$ ($\because$ $x>0$)

$x>0$에서 함수 $h(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		↘	$-17-k$ 극소	↗

$x>0$에서 $h(x)=f(x)-g(x)>0$이 성립하려면

$(h(x)$의 최솟값$)>0$ ➡ $h(2)=-17-k>0$

$\therefore k<-17$

따라서 정수 k의 최댓값은 -18이다.

핵심 유형 **완성**하기 94~97쪽

001 답 $\frac{19}{2}$

$\frac{3}{2}x^4+4x^3-3x^2-12x+k=0$에서

$\frac{3}{2}x^4+4x^3-3x^2-12x=-k$

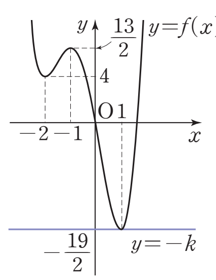
$f(x)=\frac{3}{2}x^4+4x^3-3x^2-12x$라고 하면

$f'(x)=6x^3+12x^2-6x-12=6(x+2)(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	4 극소	↗	$\frac{13}{2}$ 극대	↘	$-\frac{19}{2}$ 극소	↗



함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=-k$와 한 점에서 만나려면

$-k=-\frac{19}{2}$ $\quad\therefore k=\frac{19}{2}$

002 답 3

$x^3-6x^2+9x-k=0$에서 $x^3-6x^2+9x=k$

$f(x)=x^3-6x^2+9x$라고 하면

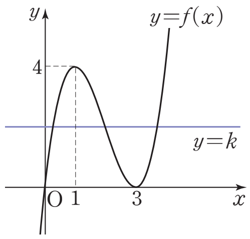
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4 극대	↘	0 극소	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $0<k<4$에서 직선 $y=k$와 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



003 답 −4

$2f(x)-k=0$에서 $f(x)=\frac{k}{2}$

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	2 극대	↘	-4 극소	↗

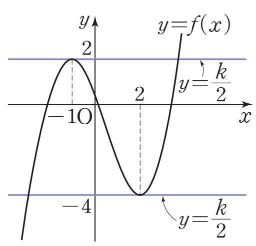
함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=\frac{k}{2}$와 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{k}{2}=2$ 또는 $\frac{k}{2}=-4$

$\therefore$ $k=4$ 또는 $k=-8$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$4+(-8)=-4$



004 답 35

$2x^4-8x^2+9-n=0$에서 $2x^4-8x^2+9=n$

$g(x)=2x^4-8x^2+9$라고 하면

$g'(x)=8x^3-16x=8x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

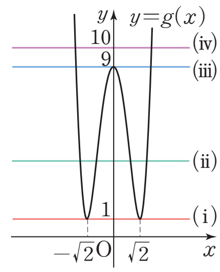
$g'(x)=0$인 x의 값은

$x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

함수 $g(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$g(x)$	↘	1 극소	↗	9 극대	↘	1 극소	↗

함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $n=1, 2, 3, \cdots, 10$일 때, 직선 $y=n$과의 교점의 개수는



(i) $n=1$일 때, $f(1)=2$

(ii) $n=2, 3, \cdots, 8$일 때,

$f(2)=f(3)=\cdots=f(8)=4$

(iii) $n=9$일 때, $f(9)=3$

(iv) $n=10$일 때, $f(10)=2$

$\therefore$ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)=2+4\times7+3+2=35$

005 답 4

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x-k$라고 하면

$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면

(극댓값)$\times$(극솟값)>0이어야 하므로

$f(-1)f(2)=\left(\frac{7}{2}-k\right)(-10-k)>0$

$\left(k-\frac{7}{2}\right)(k+10)>0$ $\quad\therefore$ $k<-10$ 또는 $k>\frac{7}{2}$

따라서 자연수 k의 최솟값은 4이다.

006 답 ⑤

$f(x)=2x^3-3ax^2+8$이라고 하면

$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=a$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

(극댓값)$\times$(극솟값)<0이어야 하므로

$f(0)f(a)=8(8-a^3)<0$

$a^3-8>0$, $(a-2)(a^2+2a+4)>0$

$\therefore$ $a>2$ ($\because$ $a^2+2a+4>0$)

007 답 −7

함수 $f(x)=2x^3-15x^2+24x+6$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 겹쳐지므로

$g(x)=2x^3-15x^2+24x+6+a$

$\therefore$ $g'(x)=6x^2-30x+24=6(x-1)(x-4)$

$g'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=4$

삼차방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

(극댓값)$\times$(극솟값)$=0$이어야 하므로

$g(1)g(4)=(a+17)(a-10)=0$

$\therefore$ $a=-17$ 또는 $a=10$

따라서 모든 a의 값의 합은 $-17+10=-7$

008 답 $0<a<\frac{1}{4}$

$f(x)=x^3-3ax+a$에서 $f'(x)=3x^2-3a$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식 $D>0$에서

$D=36a>0$ $\quad\therefore$ $a>0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(x)=3x^2-3a=3(x+\sqrt{a})(x+\sqrt{a})$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-\sqrt{a}$ 또는 $x=\sqrt{a}$

삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 한 실근만을 가지려면

(극댓값)×(극솟값)>0이어야 하므로

$f(-\sqrt{a})f(\sqrt{a})=(2a\sqrt{a}+a)(-2a\sqrt{a}+a)>0$

$a^2-4a^3>0$, $a^2(1-4a)>0$

$a^2\neq 0$이고 $1-4a>0$ $\quad\therefore a<0$ 또는 $0<a<\frac{1}{4}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는

$0<a<\frac{1}{4}$

009 답 1

주어진 직선이 곡선과 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $-x+k=-x^3+x^2$, 즉 $x^3-x^2-x+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-x^2-x+k$라고 하면

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

(극댓값)×(극솟값)=0이어야 하므로

$f\left(-\frac{1}{3}\right)f(1)=\left(k+\frac{5}{27}\right)(k-1)=0$

$\therefore k=1$ ($\because k>0$)

010 답 3

두 곡선이 오직 한 점에서 만나려면 방정식 $x^3-3x^2+4x-k=3x^2-5x+k$, 즉 $x^3-6x^2+9x-2k=0$이 한 실근만을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-6x^2+9x-2k$라고 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근만을 가지려면

(극댓값)×(극솟값)>0이어야 하므로

$f(1)f(3)=(4-2k)\times(-2k)>0$

$k(k-2)>0$ $\quad\therefore k<0$ 또는 $k>2$

따라서 자연수 k의 최솟값은 3이다.

011 답 ③

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 오직 한 점에서 만나려면 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $h(x)=0$이 한 실근만을 가져야 한다.

주어진 그래프에서 $h'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $h(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

삼차방정식 $h(x)=0$이 한 실근만을 가지려면

(극댓값)×(극솟값)>0이어야 하므로

$h(\alpha)h(\beta)>0$

012 답 6

$2x^3-3x^2-12x-k=0$에서

$2x^3-3x^2-12x=k$

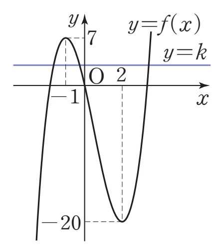
$f(x)=2x^3-3x^2-12x$라고 하면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7 극대	↘	-20 극소	↗



함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$와의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수이려면

$0<k<7$

따라서 정수 k는 1, 2, 3, $\cdots$, 6의 6개이다.

013 답 −4

$x^3-3x+a=0$에서

$x^3-3x=-a$

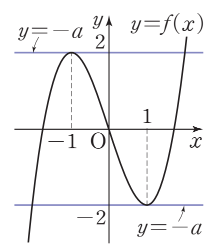
$f(x)=x^3-3x$라고 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2 극대	↘	-2 극소	↗



함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=-a$와의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 한 개는 양수이려면

$-a=2$ 또는 $-a=-2$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$-2\times 2=-4$

014 답 ⑤

$2x^3-15x^2+24x-k=0$에서

$2x^3-15x^2+24x=k$

$f(x)=2x^3-15x^2+24x$라고 하면

$f'(x)=6x^2-30x+24=6(x-1)(x-4)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=4$

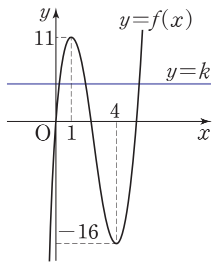
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	11 극대	↘	-16 극소	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$와의 교점이 세 개이고 교점의 x좌표가 양수이려면

$0<k<11$

따라서 실수 k의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.



015 답 9

$4x^3-12x=x^4-2x^2+k$에서 $-x^4+4x^3+2x^2-12x=k$

$f(x)=-x^4+4x^3+2x^2-12x$라고 하면

$f'(x)=-4x^3+12x^2+4x-12=-4(x+1)(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

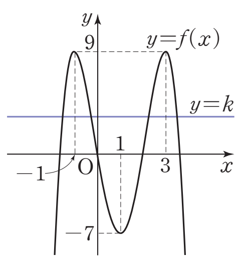
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	9 극대	↘	-7 극소	↗	9 극대	↘

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$와의 교점의 x좌표가 두 개는 음수이고, 다른 두 개는 양수이려면

$0<k<9$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=9$이므로

$\alpha+\beta=9$



016 답 14

$x^4+x^3-2x^2+10\geq x^3+4x^2+8x-a$에서

$x^4-6x^2-8x+10+a\geq 0$

$f(x)=x^4-6x^2-8x+10+a$라고 하면

$f'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$a+13$	↘	$a-14$ 극소	↗

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

($f(x)$의 최솟값)≥ 0 ➡ $f(2)=a-14\geq 0$

$\therefore a\geq 14$

따라서 a의 최솟값은 14이다.

017 답 3

(i) $k=0$일 때, 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $k\neq 0$일 때,

$f(x)=x^4-4k^3x+12$라고 하면

$f'(x)=4x^3-4k^3=4(x-k)(x^2+kx+k^2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=k$ ($\because x^2+kx+k^2>0$)

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	k	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-3k^4+12$ 극소	↗

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이 성립하려면

($f(x)$의 최솟값)>0 ➡ $f(k)=-3k^4+12>0$

$k^4-4<0$, $(k^2+2)(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})<0$

$\therefore -\sqrt{2}<k<0$ 또는 $0<k<\sqrt{2}$ ($\because k^2+2>0$, $k\neq 0$)

(i), (ii)에 의해 $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

따라서 정수 k는 -1, 0, 1의 3개이다.

018 답 −3

$f(x)\leq g(x)$에서 $f(x)-g(x)\leq 0$

$h(x)=f(x)-g(x)$라고 하면

$h(x)=(-3x^4+16x^3-14x^2-24)-(4x^2-k)$

$\quad=-3x^4+16x^3-18x^2-24+k$

$\therefore h'(x)=-12x^3+48x^2-36x=-12x(x-1)(x-3)$

$h'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $h(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	$k-24$ 극대	↘	$k-29$ 극소	↗	$k+3$ 극대	↘

모든 실수 x에 대하여 $h(x)=f(x)-g(x)\leq 0$이 성립하려면

($h(x)$의 최댓값)≤ 0 ➡ $h(3)=k+3\leq 0$

$\therefore k\leq -3$

따라서 k의 최댓값은 -3이다.

019 답 −13

$f(x)=2x^3-9x^2-24x+k$라고 하면

$f'(x)=6x^2-18x-24=6(x+1)(x-4)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ ($\because x<0$)

$x<0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↗	$k+13$ 극대	↘	

$x<0$일 때, $f(x)\leq 0$이 성립하려면

($f(x)$의 최댓값)≤ 0 ➡ $f(-1)=k+13\leq 0$

$\therefore k\leq -13$

따라서 k의 최댓값은 -13이다.

020 답 $k<-1$

$x^3-x^2+x+3>2x^2+x+k$에서 $x^3-3x^2+3-k>0$

$f(x)=x^3-3x^2+3-k$라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

$-1<x<3$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-k-1$	↗	$-k+3$ 극대	↘	$-k-1$ 극소	↗	

$-1<x<3$일 때, $f(x)>0$이 성립하려면

($f(x)$의 최솟값)>0 ➡ $f(2)=-k-1>0$ $\quad\therefore k<-1$

021 답 5

$|x^4-4x^3-2x^2+12x+k|\le10$에서

$-10\le x^4-4x^3-2x^2+12x+k\le10$

$f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x+k$라고 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12=4(x+1)(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$ ($\because 0\le x\le3$)

$0\le x\le3$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	k	↗	$k+7$ 극대	↘	$k-9$

$0\le x\le3$일 때, $-10\le f(x)\le10$이 성립하려면

($f(x)$의 최솟값)≥-10, ($f(x)$의 최댓값)≤10

➡ $f(3)=k-9\ge-10$, $f(1)=k+7\le10$

$\therefore -1\le k\le3$

따라서 정수 k는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

022 답 $k\ge8$

$x^3+16x<8x^2+k$에서 $x^3-8x^2+16x-k<0$

$f(x)=x^3-8x^2+16x-k$라고 하면

$f'(x)=3x^2-16x+16=(3x-4)(x-4)$

$2<x<4$일 때, $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 $2<x<4$에서 감소한다.

$2<x<4$일 때, $f(x)<0$이 성립하려면 $f(2)\le0$이어야 하므로

$f(2)=8-32+32-k\le0$ $\quad\therefore k\ge8$

023 답 1

$f(x)=x^3+5x-a(a-1)$이라고 하면

$f'(x)=3x^2+5$

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x>1$에서 증가한다.

$x>1$일 때, $f(x)>0$이 성립하려면 $f(1)\ge0$이어야 하므로

$f(1)=1+5-a(a-1)\ge0$, $a^2-a-6\le0$

$(a+2)(a-3)\le0$ $\quad\therefore -2\le a\le3$

따라서 $M=3$, $m=-2$이므로 $M+m=3+(-2)=1$

024 답 4

$x^n+n(n-3)>nx+1$에서 $x^n-nx+n(n-3)-1>0$

$f(x)=x^n-nx+n(n-3)-1$이라고 하면

$f'(x)=nx^{n-1}-n=n(x^{n-1}-1)$

이때 $n\ge2$이므로 $x>1$일 때, $f'(x)>0$이다. 즉, 함수 $f(x)$는 $x>1$에서 증가한다.

$x>1$일 때, $f(x)>0$이 성립하려면 $f(1)\ge0$이어야 하므로

$f(1)=1-n+n(n-3)-1\ge0$, $n^2-4n\ge0$, $n(n-4)\ge0$

$\therefore n\ge4$ ($\because n\ge2$)

따라서 자연수 n의 최솟값은 4이다.

025 답 ⑤

$x>0$에서 곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=g(x)$보다 위쪽에 있으려면 $f(x)>g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)>0$이어야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라고 하면

$h(x)=(x^3-x^2+x+k)-(2x^2+x+1)$

$\quad=x^3-3x^2+k-1$

$\therefore h'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$h'(x)=0$인 x의 값은 $x=2$ ($\because x>0$)

$x>0$에서 함수 $h(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		↘	$k-5$ 극소	↗

$x>0$에서 $h(x)=f(x)-g(x)>0$이 성립하려면

($h(x)$의 최솟값)>0 ➡ $h(2)=k-5>0$ $\quad\therefore k>5$

026 답 -25

함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)>0$이어야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라고 하면

$h(x)=(x^4-x^2-4x)-(5x^2+4x+a)$

$\quad=x^4-6x^2-8x-a$

$\therefore h'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$

$h'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $h(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$-a+3$	↘	$-a-24$ 극소	↗

모든 실수 x에 대하여 $h(x)=f(x)-g(x)>0$이 성립하려면

($h(x)$의 최솟값)>0 ➡ $h(2)=-a-24>0$

$\therefore a<-24$

따라서 정수 a의 최댓값은 -25이다.

027 답 6

$f(x)=-2x^3+8x+1$, $g(x)=2x+k$라고 하자.

$0<x<3$에서 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=g(x)$보다 아래쪽에 있으려면 $f(x)<g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)<0$이어야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라고 하면

$h(x)=(-2x^3+8x+1)-(2x+k)$

$\quad=-2x^3+6x+1-k$

$\therefore\ h'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$

$h'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because\ 0<x<3$)

$0<x<3$에서 함수 $h(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	$-k+5$ 극대	$\searrow$	

$0<x<3$에서 $h(x)=f(x)-g(x)<0$이 성립하려면

$(h(x)$의 최댓값$)<0$ ➡ $h(1)=-k+5<0$

$\therefore\ k>5$

따라서 자연수 k의 최솟값은 6이다.

핵심 유형 98~99쪽

유형09 답 -2

점 P가 원점을 지나면 $x=0$이므로

$t^3-4t^2+3t=0,\ t(t-1)(t-3)=0$

$\therefore\ t=1$ 또는 $t=3$ ($\because\ t>0$)

즉, 점 P가 출발 후 처음으로 다시 원점을 지나는 시각은 $t=1$이다.

시각 t에서 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-8t+3$

$a=\dfrac{dv}{dt}=6t-8$

따라서 $t=1$일 때 점 P의 가속도는

$6\times1-8=-2$

유형10 답 ④

시각 t에서 점 P의 속도를 v라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-6t-9$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$3t^2-6t-9=0,\ 3(t+1)(t-3)=0 \qquad \therefore\ t=3\ (\because\ t>0)$

시각 t에서 점 P의 가속도를 a라고 하면

$a=\dfrac{dv}{dt}=6t-6$

따라서 $t=3$일 때 점 P의 가속도는

$6\times3-6=12$

유형11 답 64 m

제동을 건 지 t초 후의 열차의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=32-8t$

열차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$32-8t=0 \qquad \therefore\ t=4$

따라서 4초 동안 열차가 움직인 거리는

$32\times4-4\times4^2=64$(m)

유형12 답 45 m

t초 후의 물체의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\dfrac{dh}{dt}=30-10t$

물체가 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로

$30-10t=0 \qquad \therefore\ t=3$

따라서 $t=3$일 때 물체의 높이는

$30\times3-5\times3^2=45$(m)

유형13 답 ⑤

시각 t에서 가속도는 $v'(t)$이므로 속도 $v(t)$의 그래프에서 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.

① $t=a$에서 $v'(a)>0$이므로 가속도는 양의 값이다.

② $t=b$에서 $v'(b)=0$이므로 가속도는 0이다.

③ $v(t)=0$이고 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 $t=c$일 때 점 P는 운동 방향을 바꾼다.

④ $b<t<d$일 때 속도는 감소한다.

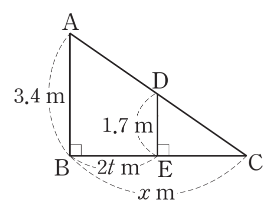
⑤ $t=c$에서부터 점 P는 다시 원점 방향으로 움직이지만 원점과 가장 가까워지는 위치는 알 수 없다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

유형14 답 2 m/s

학생이 2 m/s의 속도로 움직이므로 t초 동안 움직이는 거리는 $2t$ m

그림자 끝이 t초 동안 움직이는 거리를 x m라고 하면 오른쪽 그림에서



$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{DEC}$이므로

$3.4 : x=1.7 : (x-2t)$

$1.7x=3.4x-6.8t \qquad \therefore\ x=4t$

그림자의 길이를 l m라고 하면 $l=\overline{\mathrm{EC}}$이므로

$l=4t-2t=2t$

따라서 그림자의 길이의 변화율은

$\dfrac{dl}{dt}=2$(m/s)

유형15 답 13.5π m²/s

t초 후의 원의 반지름의 길이는 $1.5t$ m이므로 원의 넓이를 S m² 라고 하면

$S=\pi(1.5t)^2=2.25\pi t^2$

$\therefore\ \dfrac{dS}{dt}=4.5\pi t$

따라서 $t=3$에서 원의 넓이의 변화율은

$4.5\pi\times3=13.5\pi$(m²/s)

유형16 답 $\dfrac{88}{3}$ cm³/s

t초 후의 정사각뿔의 밑면의 한 변의 길이는 $(2+t)$ cm, 높이는 $(3+2t)$ cm이므로 정사각뿔의 부피를 V cm³라고 하면

$$V=\frac{1}{3}(2+t)^2(3+2t)=\frac{1}{3}(2t^3+11t^2+20t+12)$$

$$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{1}{3}(6t^2+22t+20)$$

따라서 $t=2$에서 정사각뿔의 부피의 변화율은

$$\frac{1}{3}(6\times 2^2+22\times 2+20)=\frac{88}{3}(\text{cm}^3/\text{s})$$

핵심 유형 **완성**하기 100~104쪽

028 답 ①

점 P가 원점을 지나면 $x=0$이므로

$-t^3+2t^2+3t=0,\ -t(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=3\ (\because t>0)$

즉, 점 P가 출발 후 처음으로 다시 원점을 지나는 시각은 $t=3$이다.

시각 t에서 점 P의 속도를 v라고 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-3t^2+4t+3$

따라서 $t=3$일 때 점 P의 속도는

$-3\times 3^2+4\times 3+3=-12$

029 답 4

시각 t에서 점 P의 속도를 v라고 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2+2at$

$t=1$일 때, $v=11$이므로

$3+2a=11 \qquad \therefore a=4$

030 답 18

시각 t에서 점 P의 속도를 v라고 하면

$v=\frac{dx}{dt}=6t^2-6t-10$

점 P의 속도가 2이면

$6t^2-6t-10=2,\ 2(t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=2\ (\because t>0)$

시각 t에서 점 P의 가속도를 a라고 하면

$a=\frac{dv}{dt}=12t-6$

따라서 $t=2$일 때 점 P의 가속도는

$12\times 2-6=18$

031 답 36

시각 t에서 점 P의 속도를 v라고 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-6t^2+12t+12=-6(t-1)^2+18$

즉, $0\le t\le 4$에서 점 P의 속도의 최댓값은 18, 최솟값은 -36이므로

$-36\le v\le 18$

이때 점 P의 속력은 $|v|$이므로

$0\le |v|\le 36$

따라서 점 P의 속력의 최댓값은 36이다.

032 답 15

두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라고 하면

$v_P=\frac{dx_P}{dt}=4t^3-24t^2+36t,\ v_Q=\frac{dx_Q}{dt}=m$

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간이 세 번 있으려면 $v_P=v_Q$를 만족하는 양수 t가 세 개 존재해야 하므로 방정식

$4t^3-24t^2+36t=m$이 서로 다른 세 개의 양의 근을 가져야 한다.

$f(t)=4t^3-24t^2+36t$라고 하면

$f'(t)=12t^2-48t+36=12(t-1)(t-3)$

$f'(t)=0$인 t의 값은 $t=1$ 또는 $t=3$

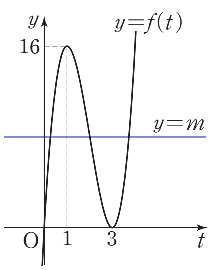
$t>0$에서 함수 $f(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(t)$		+	0	$-$	0	+
$f(t)$		↗	16 극대	↘	0 극소	↗

함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=m$과의 교점이 세 개이고 x좌표가 양수이려면

$0<m<16$

따라서 정수 m은 1, 2, 3, $\cdots$, 15의 15개이다.



033 답 ③

시각 t에서 점 P의 속도를 v라고 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-12t+9$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$3t^2-12t+9=0,\ 3(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

즉, $t=3$일 때 점 P가 두 번째로 운동 방향을 바꾼다.

시각 t에서 점 P의 가속도를 a라고 하면

$a=\frac{dv}{dt}=6t-12$

따라서 $t=3$일 때 점 P의 가속도는

$6\times 3-12=6$

034 답 ③

두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라고 하면

$v_P=\frac{dx_P}{dt}=2t-6,\ v_Q=\frac{dx_Q}{dt}=4t-8$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 속도의 부호가 서로 반대이므로 $v_Pv_Q<0$에서

$(2t-6)(4t-8)<0,\ 8(t-3)(t-2)<0$

$\therefore 2<t<3$

035 답 6

시각 t에서 점 P의 속도를 v라고 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2+2at+b$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $t=1$일 때 $v=0$이다.

$3+2a+b=0$ $\therefore 2a+b=-3$ …… ㉠

$t=1$일 때 점 P의 위치 x가 4이므로

$1+a+b=4$ $\therefore a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=9$

$\therefore v=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)$

$v=0$에서 $t=1$ 또는 $t=3$

따라서 점 P가 $t=1$ 이외에 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=3$이다.

시각 t에서 점 P의 가속도를 α라고 하면

$\alpha=\dfrac{dv}{dt}=6t-12$

따라서 $t=3$일 때 점 P의 가속도는

$6\times3-12=6$

036 답 64

선분 AB의 중점 M의 좌표를 x라고 하면

$x=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{(t^3-8t^2+12t)+(t^3-10t^2+36t)}{2}$

$=t^3-9t^2+24t$

시각 t에서 점 M의 속도를 v라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-18t+24$

점 M이 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$3t^2-18t+24=0$, $3(t-2)(t-4)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=4$

즉, $t=4$일 때 점 M이 두 번째로 운동 방향을 바꾸므로 이 때의 두 점 A, B의 좌표는 각각

$x_A=4^3-8\times4^2+12\times4=-16$

$x_B=4^3-10\times4^2+36\times4=48$

따라서 선분 AB의 길이는 $48-(-16)=64$

037 답 ①

브레이크를 밟은 지 t초 후의 자동차의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=18-9t$

자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$18-9t=0$ $\therefore t=2$

따라서 정지할 때까지 걸린 시간은 2초이다.

038 답 ⑤

제동을 건 지 t초 후의 지하철의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=48-6t$

지하철이 정지할 때의 속도는 0이므로

$48-6t=0$ $\therefore t=8$

8초 동안 지하철이 달린 거리는

$48\times8-3\times8^2=192$(m)

따라서 목적지로부터 전방 192 m 지점에서 제동을 걸어야 한다.

039 답 $\dfrac{3}{2}$

제동을 건 지 t초 후의 열차의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=30-2at$

열차가 멈출 때의 속도는 0이므로

$30-2at=0$ $\therefore t=\dfrac{15}{a}$

열차가 정지할 때까지 움직인 거리는

$30\times\dfrac{15}{a}-a\times\left(\dfrac{15}{a}\right)^2=\dfrac{225}{a}$(m)

이때 열차가 정지선을 넘지 않고 멈추려면 움직인 거리가 150 m 이하이어야 하므로

$\dfrac{225}{a}\le150$ $\therefore a\ge\dfrac{3}{2}$

따라서 양수 a의 최솟값은 $\dfrac{3}{2}$이다.

040 답 $\dfrac{125}{2}$ m

t초 후의 물체의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\dfrac{dh}{dt}=25-10t$

물체가 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로

$25-10t=0$ $\therefore t=\dfrac{5}{2}$

$t=\dfrac{5}{2}$일 때 물체의 높이는

$25\times\dfrac{5}{2}-5\times\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{125}{4}$(m)

따라서 물체가 지면에 떨어질 때까지 움직인 거리는

$2\times\dfrac{125}{4}=\dfrac{125}{2}$(m)

041 답 40 m/s

로켓이 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로

$35+30t-5t^2=0$, $(t+1)(t-7)=0$

$\therefore t=7$ ($\because t>0$)

로켓의 t초 후 속도를 v m/s라고 하면

$v=\dfrac{dh}{dt}=30-10t$

따라서 $t=7$일 때 로켓의 속력은

$|v|=|30-10\times7|=40$(m/s)

042 답 50

t초 후의 공의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\dfrac{dh}{dt}=a-10t$

공이 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로

$a-10t=0$ $\therefore t=\dfrac{a}{10}$

$t=\dfrac{a}{10}$일 때 공의 높이가 125 m 이상이어야 하므로

$a\times\dfrac{a}{10}-5\times\left(\dfrac{a}{10}\right)^2\ge125$, $a^2\ge2500$

$(a+50)(a-50)\ge0$ $\therefore a\ge50$ ($\because a>0$)

따라서 a의 최솟값은 50이다.

043 답 ⑤

시각 t에서 가속도는 $v'(t)$이므로 속도 $v(t)$의 그래프에서 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.

① $t=a$에서 $v'(a)=0$이므로 가속도는 0이다.

② $t=b$에서 $v'(b)>0$이므로 가속도는 양의 값이다.

③ $v(b)<0$, $v(d)>0$이므로 $t=b$일 때와 $t=d$일 때의 운동 방향은 서로 반대이다.

④ $c<t<d$일 때 점 P의 속도는 증가한다.

⑤ $v(t)=0$이고 그 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 $0<t<f$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각은 $t=c$이다. 즉, 점 P는 운동 방향을 한 번 바꾼다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

044 답 ①

시각 t에서 가속도는 $v'(t)$이므로 속도 $v(t)$의 그래프에서 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.

주어진 그래프에서

$v'(a)>0$, $v'(b)=0$, $v'(c)<0$, $v'(d)<0$, $v'(e)=0$

따라서 $t=a$일 때 점 P의 가속도가 가장 크다.

045 답 b

점 P의 시각 t에서 속도를 $v(t)$라고 하면 $v(t)=0$이고 그 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀐다.

이때 $v(t)=f'(t)$이므로 위치 $x=f(t)$의 그래프에서 속도는 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.

즉, 주어진 그래프에서 접선의 기울기가 0이고 그 좌우에서 접선의 기울기의 부호가 바뀔 때 점 P의 운동 방향이 바뀌므로 운동 방향이 바뀌는 시각은 $t=b$ 또는 $t=d$ 또는 $t=e$이다.

따라서 $t=b$일 때 점 P의 운동 방향이 처음으로 바뀐다.

046 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

속도는 $f'(t)$이므로 위치 $x=f(t)$의 그래프에서 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.

ㄱ. $t=2$에서 점 P의 속도는 0이다.

ㄴ. 접선의 기울기가 0이고 그 좌우에서 접선의 기울기의 부호가 바뀔 때 점 P의 운동 방향이 바뀌므로 $0<t<5$에서 운동 방향이 바뀌는 시각은 $t=2$ 또는 $t=4$이다.
따라서 $0<t<5$에서 점 P는 운동 방향을 두 번 바꾼다.

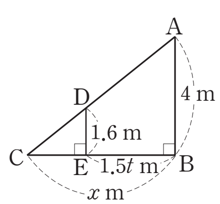
ㄷ. $t=4$에서 접선의 기울기가 0이므로 속도는 0이다.

ㄹ. $0<t<5$에서 $t=2$일 때 $|x|$의 값이 가장 크므로 점 P가 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

047 답 1 m/s

사람이 1.5 m/s의 속도로 움직이므로
t초 동안 움직이는 거리는 $1.5t$ m
그림자 끝이 t초 동안 움직이는 거리를
x m라고 하면 오른쪽 그림에서
$\triangle ABC \backsim \triangle DEC$이므로



$4:x=1.6:(x-1.5t)$

$1.6x=4x-6t \qquad \therefore x=2.5t$

그림자의 길이를 l m라고 하면 $l=\overline{EC}$이므로

$l=2.5t-1.5t=t$

따라서 그림자의 길이의 변화율은

$\frac{dl}{dt}=1$(m/s)

048 답 ④

$l=t^2+2t+15$에서 $\frac{dl}{dt}=2t+2$

따라서 $t=3$에서 고무줄의 길이의 변화율은

$2\times3+2=8$(cm/s)

049 답 ④

선분 AB의 길이를 l이라고 하면

$l=|t^3+t^2+t-(t^2-2t)|=t^3+3t$ ($\because t>0$)

$\therefore \frac{dl}{dt}=3t^2+3$

따라서 $t=2$에서 선분 AB의 길이의 변화율은

$3\times2^2+3=15$

050 답 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

t초 후의 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(t, 0)$, $(0, 2t)$

두 점 A, B를 1 : 2로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{1\times0+2\times t}{1+2}, \frac{1\times2t+2\times0}{1+2}\right) \qquad \therefore \left(\frac{2t}{3}, \frac{2t}{3}\right)$

선분 OP의 길이를 l이라고 하면

$l=\sqrt{\left(\frac{2t}{3}\right)^2+\left(\frac{2t}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}t$ ($\because t>0$)

따라서 선분 OP의 길이의 변화율은

$\frac{dl}{dt}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

051 답 3.2

t초 후의 풍선의 반지름의 길이는 $(1+0.2t)$ cm이므로 풍선의 겉넓이를 S cm^{2}라고 하면

$S=4\pi(1+0.2t)^2$

$\therefore \frac{dS}{dt}=4\pi\times2(1+0.2t)\times0.2=1.6\pi(1+0.2t)$

따라서 $t=5$에서 풍선의 겉넓이의 변화율은

$1.6\pi(1+0.2\times5)=3.2\pi$(cm^2/s)

$\therefore a=3.2$

052 답 ①

t초 후의 직사각형의 가로의 길이는 $(10+2t)$ cm, 세로의 길이는 $(10-t)$ cm이므로 $0<t<10$ ($\because t>0$)

t초 후의 직사각형의 넓이를 S cm^{2}라고 하면

$S=(10+2t)(10-t)=-2t^2+10t+100$

$\therefore \frac{dS}{dt}=-4t+10$

따라서 $t=4$에서 직사각형의 넓이의 변화율은

$-4\times4+10=-6$(cm^2/s)

053 답 $3\sqrt{3}\ \mathrm{cm^2/s}$

t초 후의 정삼각형의 한 변의 길이는 $(2+t)$ cm이므로 정삼각형의 넓이를 $S\ \mathrm{cm^2}$라고 하면

$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(2+t)^2$

$\therefore \frac{dS}{dt}=\frac{\sqrt{3}}{2}(2+t)$

정삼각형의 넓이가 $9\sqrt{3}\ \mathrm{cm^2}$이면

$\frac{\sqrt{3}}{4}(2+t)^2=9\sqrt{3}$, $(2+t)^2=36$ $\quad\therefore t=4\ (\because t>0)$

따라서 $t=4$에서 정삼각형의 넓이의 변화율은

$\frac{\sqrt{3}}{2}(2+4)=3\sqrt{3}(\mathrm{cm^2/s})$

054 답 6

t초 후의 점 P의 좌표는 $(2t,\ 0)$이므로 점 Q의 좌표는 $(2t,\ t+1)$

점 Q의 x좌표와 y좌표가 같으면

$2t=t+1$ $\quad\therefore t=1$

t초 후의 사각형 OPQR의 넓이를 S라고 하면

$S=2t(t+1)=2t^2+2t$

$\therefore \frac{dS}{dt}=4t+2$

따라서 $t=1$에서 사각형 OPQR의 넓이의 변화율은

$4\times1+2=6$

055 답 ④

t초 후의 밑면의 반지름의 길이는 $(2+2t)$ cm, 높이는 $(4+t)$ cm이므로 원기둥의 부피를 $V\ \mathrm{cm^3}$라고 하면

$V=\pi(2+2t)^2(4+t)=\pi(4t^3+24t^2+36t+16)$

$\therefore \frac{dV}{dt}=\pi(12t^2+48t+36)$

따라서 $t=1$에서 원기둥의 부피의 변화율은

$\pi(12+48+36)=96\pi(\mathrm{cm^3/s})$

056 답 $648\pi\ \mathrm{cm^3/s}$

t초 후의 구의 반지름의 길이는 $(3+2t)$ cm이므로 구의 부피를 $V\ \mathrm{cm^3}$라고 하면

$V=\frac{4}{3}\pi(3+2t)^3$

$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{4}{3}\pi\times3(3+2t)^2\times2=8\pi(3+2t)^2$

따라서 $t=3$에서 구의 부피의 변화율은

$8\pi(3+2\times3)^2=648\pi(\mathrm{cm^3/s})$

057 답 ③

t초 후의 정육면체의 한 모서리의 길이는 $(2+0.5t)$ cm이므로 정육면체의 겉넓이를 $S\ \mathrm{cm^2}$, 부피를 $V\ \mathrm{cm^3}$라고 하면

$S=6(2+0.5t)^2$, $V=(2+0.5t)^3$

$\therefore \frac{dV}{dt}=3(2+0.5t)^2\times0.5=1.5(2+0.5t)^2$

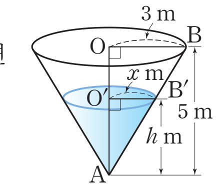
정육면체의 겉넓이가 $150\ \mathrm{cm^2}$이면

$6(2+0.5t)^2=150$ $\quad\therefore t=6\ (\because t>0)$

따라서 $t=6$에서 정육면체의 부피의 변화율은

$1.5(2+0.5\times6)^2=37.5(\mathrm{cm^3/s})$

058 답 $\frac{9}{2}\pi\ \mathrm{m^3/s}$



오른쪽 그림과 같이 t초 후의 물의 높이를 h m, 수면의 반지름의 길이를 x m라고 하면 매초 0.5 m의 속도로 높이가 상승하므로

$h=0.5t$

$\triangle\mathrm{OAB}\backsim\triangle\mathrm{O'AB'}$이므로

$5:3=0.5t:x$

$1.5t=5x$ $\quad\therefore x=0.3t$

물의 부피를 $V\ \mathrm{cm^3}$라고 하면

$V=\frac{1}{3}\pi(0.3t)^2\times0.5t=\frac{3}{200}\pi t^3$

$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{9}{200}\pi t^2$

물이 가득 차는 순간의 수면의 높이는 5 m이므로

$0.5t=5$ $\quad\therefore t=10$

따라서 $t=10$에서 물의 부피의 변화율은

$\frac{9}{200}\pi\times10^2=\frac{9}{2}\pi(\mathrm{m^3/s})$

핵심 유형 **최종 점검하기** • 105~107쪽

1 답 6

유형 01 함수의 그래프를 이용한 방정식 $f(x)=k$의 실근의 개수

$3x^4+4x^3-24x^2-48x-k=0$에서

$3x^4+4x^3-24x^2-48x=k$

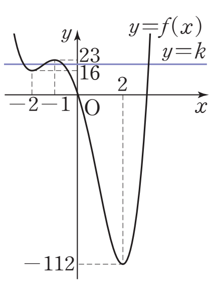
$f(x)=3x^4+4x^3-24x^2-48x$라고 하면

$f'(x)=12x^3+12x^2-48x-48=12(x+2)(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	16 극소	↗	23 극대	↘	-112 극소	↗



함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$와 서로 다른 네 점에서 만나려면

$16<k<23$

따라서 정수 k는 17, 18, 19, 20, 21, 22의 6개이다.

2 답 ③

유형 01 함수의 그래프를 이용한 방정식 $f(x)=k$의 실근의 개수

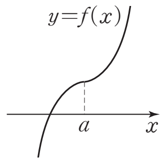
ㄱ. $a=b$이면 $f'(x)=(x-a)^2$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=a$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗		↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=0$은 오직 한 실근만을 갖는다.

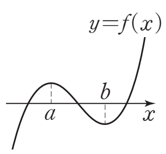


ㄴ. $f'(x)=0$인 x의 값은 $x=a$ 또는 $x=b$

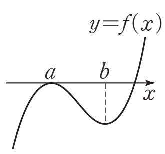
$a<b$일 때 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$f(a)$ 극대	↘	$f(b)$ 극소	↗

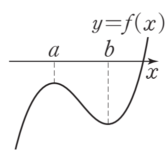
$f(b)<0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



[$f(a)>0$인 경우]



[$f(a)=0$인 경우]



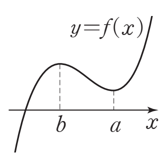
[$f(a)<0$인 경우]

따라서 방정식 $f(x)=0$은 $f(a)=0$인 경우에는 서로 다른 두 실근을 갖고, $f(a)<0$인 경우에는 오직 한 실근만을 갖는다.

ㄷ. $a>b$일 때 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	b	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$f(b)$ 극대	↘	$f(a)$ 극소	↗

$f(a)>0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=0$은 오직 한 실근만을 갖는다.



따라서 보기 중 옳은 것은 ㄷ이다.

3 답 ④

유형 02 함수의 극값을 이용한 삼차방정식의 근의 판별

$f(x)=2x^3-6x^2-18x-k$라고 하면

$f'(x)=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 한 실근만을 가지려면

(극댓값)$\times$(극솟값)>0이어야 하므로

$f(-1)f(3)=(10-k)(-54-k)>0$, $(k-10)(k+54)>0$

$\therefore$ $k<-54$ 또는 $k>10$

따라서 자연수 k의 최솟값은 11이다.

4 답 ②

유형 02 함수의 극값을 이용한 삼차방정식의 근의 판별

사차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^4-8x^3+18x^2+ax$에서

$f'(x)=4x^3-24x^2+36x+a$

$g(x)=4x^3-24x^2+36x+a$라고 하면

$g'(x)=12x^2-48x+36=12(x-1)(x-3)$

$g'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

(극댓값)$\times$(극솟값)<0이어야 하므로

$g(1)g(3)=(a+16)\times a<0$

$\therefore$ $-16<a<0$

5 답 -2

유형 03 두 곡선의 교점의 개수

주어진 두 곡선이 한 점에서 만나고 다른 한 점에서 접하려면 방정식 $x^3+2x^2-5x-12=-x^2+4x+k$, 즉

$x^3+3x^2-9x-12-k=0$이 중근과 다른 한 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3+3x^2-9x-12-k$라고 하면

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-3$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 중근과 한 실근을 가지려면

(극댓값)$\times$(극솟값)$=0$이어야 하므로

$f(-3)f(1)=(15-k)(-17-k)=0$

$\therefore$ $k=-17$ 또는 $k=15$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $-17+15=-2$

6 답 3

유형 04 방정식의 실근의 부호

$(x+2)(x-1)^2-k=0$에서 $x^3-3x+2=k$

$f(x)=x^3-3x+2$라고 하면

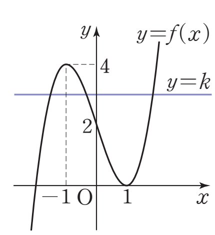
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4 극대	↘	0 극소	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$와의 교점의 x좌표가 두 개는 음수이고, 다른 한 개는 양수이려면



$2<k<4$

따라서 정수 k의 값은 3이다.

7 답 $6<a<8$

유형 05 모든 실수 x에 대하여 성립하는 부등식

$f(x)=x^4-32x-a^2+14a$라고 하면

$f'(x)=4x^3-32=4(x-2)(x^2+2x+4)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=2$ ($\because$ x는 실수)

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-a^2+14a-48$ 극소	$\nearrow$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이 성립하려면

($f(x)$의 최솟값)>0 ➡ $f(2)=-a^2+14a-48>0$

$a^2-14a+48<0$, $(a-6)(a-8)<0$ $\therefore$ $6<a<8$

8 답 ②

유형 06 주어진 구간에서 성립하는 부등식 – 최대, 최소 이용

$f(x)=x^3-3x+k^2+k$라고 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

$-1\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	k^2+k+2	$\searrow$	k^2+k-2 극소	$\nearrow$	k^2+k+2

$-1\le x\le 2$일 때, $0\le f(x)\le 4$가 성립하려면

($f(x)$의 최솟값)≥ 0, ($f(x)$의 최댓값)≤ 4

➡ $f(1)=k^2+k-2\ge 0$, $f(-1)=f(2)=k^2+k+2\le 4$

즉, $k^2+k-2=0$이므로 $(k+2)(k-1)=0$

$\therefore$ $k=-2$ 또는 $k=1$

따라서 모든 k의 값의 합은 $-2+1=-1$

9 답 -63

유형 07 주어진 구간에서 성립하는 부등식 – 증가, 감소 이용

$f(x)<g(x)$에서 $f(x)-g(x)<0$

$h(x)=f(x)-g(x)$라고 하면

$h(x)=(4x^3-6x)-(3x^2-k)=4x^3-3x^2-6x+k$

$\therefore$ $h'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$

$1<x<3$일 때, $h'(x)>0$이므로 함수 $h(x)$는 $1<x<3$에서 증가한다.

$1<x<3$일 때, $h(x)<0$이 성립하려면 $h(3)\le 0$이어야 하므로

$h(3)=108-27-18+k\le 0$ $\therefore$ $k\le -63$

따라서 k의 최댓값은 -63이다.

10 답 7

유형 08 두 곡선의 위치 관계

구간 $[0, 2]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있으려면 $f(x)>g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)>0$이어야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라고 하면

$h(x)=(x^4+2x^2-6x+a)-(-x^2+4x)$

$=x^4+3x^2-10x+a$

$\therefore$ $h'(x)=4x^3+6x-10=2(x-1)(2x^2+2x+5)$

$h'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because$ x는 실수)

구간 $[0, 2]$에서 함수 $h(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	a	$\searrow$	$a-6$ 극소	$\nearrow$	$a+8$

구간 $[0, 2]$에서 $h(x)=f(x)-g(x)>0$이 성립하려면

($h(x)$의 최솟값)>0 ➡ $h(1)=a-6>0$

$\therefore$ $a>6$

따라서 정수 a의 최솟값은 7이다.

11 답 $k<0$

유형 08 두 곡선의 위치 관계

$f(x)=x^3+3x^2-4$라고 하면

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=0$

$x<1$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

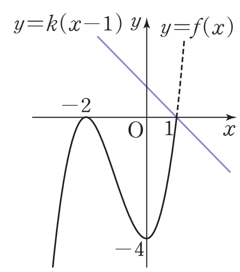
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	0 극대	$\searrow$	-4 극소	$\nearrow$	

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=k(x-1)$은 점 $(1, 0)$을 지나는 직선이다.

따라서 $x<1$일 때 부등식

$f(x)<k(x-1)$이 성립하려면

$k<0$



12 답 -1

유형 09 속도와 가속도

시각 t에서 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-6t+2$, $a=\dfrac{dv}{dt}=6t-6$

점 P의 가속도가 0이면

$6t-6=0$ $\therefore$ $t=1$

따라서 $t=1$일 때 점 P의 속도는

$3-6+2=-1$

13 답 ②

유형 10 속도, 가속도와 운동 방향

시각 t에서 점 P의 속도를 v라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=6t^2-18t+12$

ㄱ. 출발할 때는 시각이 $t=0$이므로 $t=0$일 때 점 P의 속도는 12이다.

ㄴ. 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$6t^2-18t+12=0$, $6(t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$

이때 $t=1$, $t=2$의 각각의 좌우에서 속도의 부호가 바뀌므로 점 P는 $t=1$, $t=2$에서 운동 방향을 바꾼다.

따라서 점 P는 운동 방향을 두 번 바꾼다.

ㄷ. 시각 t에서 점 P의 가속도를 a라고 하면

$a=\dfrac{dv}{dt}=12t-18$

따라서 $t=2$일 때 점 P의 가속도는

$12\times2-18=6$

ㄹ. 점 P가 원점을 지나면 $x=0$이므로

$2t^3-9t^2+12t=0$, $t(2t^2-9t+12)=0$

$t>0$이므로 해가 없다.

따라서 점 P는 출발 후 다시 원점을 지나지 않는다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

14 답 15

유형 11 정지하는 물체의 속도

브레이크를 밟은 지 t초 후의 자동차의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=60-2at$

자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$60-2at=0 \qquad \therefore t=\dfrac{30}{a}$

자동차의 제동 거리가 60 m이므로

$60\times\dfrac{30}{a}-a\times\left(\dfrac{30}{a}\right)^2=60$

$\dfrac{900}{a}=60 \qquad \therefore a=15$

15 답 ㄱ, ㄷ

유형 12 위로 던진 물체의 위치와 속도

물체의 t초 후의 속도를 v m/s, 가속도를 a m/s^{2}이라고 하면

$v=\dfrac{dh}{dt}=5-10t$, $a=\dfrac{dv}{dt}=-10$

ㄱ. 가속도 a는 상수이므로 물체의 가속도는 일정하다.

ㄴ. 물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로

$5-10t=0 \qquad \therefore t=\dfrac{1}{2}$

ㄷ. 물체가 지면에 떨어질 때의 높이는 0 m이므로

$10+5t-5t^2=0$, $-5(t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t>0$)

$t=2$일 때 물체의 속도는

$5-10\times2=-15$(m/s)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

16 답 ⑤

유형 13 속도, 가속도와 그래프

ㄱ. 점 P는 $t=2$, $t=4$에서 운동 방향을 바꾼다.

ㄴ. $1<x<3$에서 점 P의 속도가 감소하므로 가속도는 음의 값이다.

ㄷ. $v'(t)=0$인 t의 값은 $t=1$ 또는 $t=3$

$t=1$에서 속도는 1이므로 속력은 1

$t=3$에서 속도는 -1이므로 속력은 1

따라서 두 시각에서의 속력은 같다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

17 답 $\dfrac{5}{2}$

유형 13 속도, 가속도와 그래프

삼차함수 $f(t)$가 $t=1$에서 극대, $t=4$에서 극소이므로

$f'(t)=k(t-1)(t-4)=k(t^2-5t+4)$ (단, $k>0$)

시각 t에서 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=f'(t)=k(t^2-5t+4)$, $a=\dfrac{dv}{dt}=k(2t-5)$

점 P의 가속도가 0이면

$k(2t-5)=0 \qquad \therefore t=\dfrac{5}{2}$

18 답 36

유형 14 시각에 대한 길이의 변화율

t초 후의 점 P의 좌표는 $(2t, 0)$이므로 점 Q의 좌표는

$(2t, 8t^3-16t^2+4t+5)$

선분 PQ의 길이를 l이라고 하면

$l=8t^3-16t^2+4t+5$

$\therefore \dfrac{dl}{dt}=24t^2-32t+4$

따라서 $t=2$에서 선분 PQ의 길이의 변화율은

$24\times2^2-32\times2+4=36$

19 답 $4\sqrt{3}$

유형 15 시각에 대한 넓이의 변화율

출발한 지 t초 후의 선분 OP, 선분 OQ의 길이는 각각 $2t$, t이므로

삼각형 OPQ의 넓이를 S라고 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times2t\times t\times\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2$

$\therefore \dfrac{dS}{dt}=\sqrt{3}t$

따라서 $t=4$에서 삼각형 OPQ의 넓이의 변화율은

$\sqrt{3}\times4=4\sqrt{3}$

20 답 $\dfrac{13}{2}$초

유형 16 시각에 대한 부피의 변화율

t초 후의 직육면체의 밑면의 각 변의 길이는 $(1+2t)$ cm, 높이는 $(10-t)$ cm이므로 $0<t<10$

t초 후의 직육면체의 부피를 V cm^{3}라고 하면

$V=(1+2t)^2(10-t)=-4t^3+36t^2+39t+10$

$\therefore \dfrac{dV}{dt}=-12t^2+72t+39$

부피의 변화율이 0 cm^3/s가 되면

$-12t^2+72t+39=0$, $-3(2t+1)(2t-13)=0$

$\therefore t=\dfrac{13}{2}$ ($\because 0<t<10$)

07 부정적분

핵심 유형

	유형01 6	유형02 8	유형03 8
유형04 ④	유형05 ⑤	유형06 ②	유형07 −1
유형08 0	유형09 ③	유형10 ③	

핵심 유형 완성하기

001 ③	002 ④	003 ②	004 30	005 19
006 ㄱ, ㄴ	007 ②	008 5	009 ④	010 4
011 1	012 20	013 ③	014 $12\sqrt{2}$	
015 ㄷ	016 −2	017 2	018 10	019 4
020 5	021 ②	022 $-\frac{3}{2}$	023 ②	
024 920만 원		025 ③	026 ④	027 ①
028 0	029 ③	030 ②	031 $\frac{1}{6}$	032 ④
033 −40	034 $F(x)=2x$	035 ①	036 4	
037 4	038 2	039 9	040 10	
041 $f(x)=-2x-5$		042 ⑤	043 ②	044 −8
045 $\frac{10}{3}$	046 ①	047 −3	048 ⑤	049 4

핵심 유형 최종 점검하기

1 −3	2 4	3 15	4 ①	5 ③
6 29	7 ⑤	8 ⑤	9 ②	10 ②
11 23	12 −3	13 ③	14 $-\frac{4}{3}$	15 ⑤
16 0	17 10	18 −2	19 −7	20 ①

핵심 유형 110~112쪽

유형01 답 6

$\int f(x)\,dx=2x^4+5x^3+ax^2+C$에서

$f(x)=(2x^4+5x^3+ax^2+C)'$

$\quad=8x^3+15x^2+2ax$

$f(-1)=-5$에서

$-8+15-2a=-5,\ -2a=-12 \qquad \therefore a=6$

유형02 답 8

$\frac{d}{dx}\left\{\int(2x^3+ax^2+5)\,dx\right\}=2x^3+ax^2+5$이므로 주어진 등식은

$2x^3+ax^2+5=bx^3+x^2+c$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=1,\ b=2,\ c=5$

$\therefore a+b+c=1+2+5=8$

유형03 답 8

$f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^3+3x^2-5x)\right\}dx$

$\quad=x^3+3x^2-5x+C$

$f(1)=0$에서

$1+3-5+C=0 \qquad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-5x+1$이므로

$f(-1)=-1+3+5+1=8$

유형04 답 ④

$f(x)=\int\frac{x^3}{x+1}dx+\int\frac{1}{x+1}dx=\int\frac{x^3+1}{x+1}dx$

$\quad=\int\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx=\int(x^2-x+1)\,dx$

$\quad=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$

$f(0)=1$에서 $C=1$

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+1$이므로

$f(1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1+1=\frac{11}{6}$

따라서 $p=6,\ q=11$이므로 $p+q=6+11=17$

유형05 답 ⑤

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2+a)\,dx$

$\quad=x^3+ax+C$

$f(1)=3$에서

$1+a+C=3 \qquad \therefore a+C=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f(2)=4$에서

$8+2a+C=4 \qquad \therefore 2a+C=-4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6,\ C=8$

따라서 $f(x)=x^3-6x+8$이므로

$f(-2)=-8+12+8=12$

유형06 답 ②

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $6x^2+2x+10$이므로

$f'(x)=6x^2+2x+10$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(6x^2+2x+10)\,dx$

$\quad=2x^3+x^2+10x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$f(0)=C=3$

따라서 $f(x)=2x^3+x^2+10x+3$이므로

$f(1)=2+1+10+3=16$

유형07 답 −1

$F(x)=xf(x)+2x^3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+6x^2$

$xf'(x)=-6x^2$

$\therefore f'(x)=-6x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-6x)\,dx$

$=-3x^2+C$

$f(0)=2$에서 $C=2$

따라서 $f(x)=-3x^2+2$이므로

$f(1)=-3+2=-1$

유형08 답 0

$f'(x)=\begin{cases} 2x-1 & (x>0) \\ 3x^2+1 & (x<0) \end{cases}$에서

(i) $x>0$일 때

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(2x-1)\,dx$

$=x^2-x+C_1$

$f(1)=2$에서

$1-1+C_1=2 \qquad \therefore C_1=2$

(ii) $x<0$일 때

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2+1)\,dx$

$=x^3+x+C_2$

(i), (ii)에 의해 $f(x)=\begin{cases} x^2-x+2 & (x>0) \\ x^3+x+C_2 & (x<0) \end{cases}$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$에서

$\lim_{x\to0+}(x^2-x+2)=\lim_{x\to0-}(x^3+x+C_2)=f(0)$

$\therefore C_2=f(0)=2$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^2-x+2 & (x\ge0) \\ x^3+x+2 & (x<0) \end{cases}$이므로

$f(-1)=-1-1+2=0$

유형09 답 ③

$f(a+b)=f(a)+f(b)+2ab$의 양변에 $a=0,\ b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

미분계수의 정의에 의해

$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}$

$f'(0)=1$에서 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

도함수의 정의에 의해

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x)+f(h)+2xh\}-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+2x$

$=2x+1$ ($\because$ ㉡)

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(2x+1)\,dx$

$=x^2+x+C$

㉠에서 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=x^2+x$이므로

$f(3)=9+3=12$

유형10 답 ③

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2-12x)\,dx$

$=x^3-6x^2+C$

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$이므로

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값이 15이므로

$f(0)=C=15$

$\therefore f(x)=x^3-6x^2+15$

함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극소이므로 극솟값은

$f(4)=64-96+15=-17$

핵심 유형 완성하기 113~120쪽

001 답 ③

$\int xf(x)\,dx=2x^3+3x^2+C$에서

$xf(x)=(2x^3+3x^2+C)'$

$=6x^2+6x=x(6x+6)$

$\therefore f(x)=6x+6$

$\therefore f(1)+f(-1)=(6+6)+(-6+6)=12$

002 답 ④

$f(x)=F'(x)=(x^3+ax^2)'$

$=3x^2+2ax$

$f(2)=-4$에서

$12+4a=-4 \qquad \therefore a=-4$

따라서 $f(x)=3x^2-8x$이므로

$f(3)=27-24=3$

003 답 ②

$\int\{x^3-2f(x)\}\,dx=\frac{1}{4}x^4+6x^2+2x+C$에서

$x^3-2f(x)=\left(\frac{1}{4}x^4+6x^2+2x+C\right)'$

$=x^3+12x+2$

$2f(x)=-12x-2$

$\therefore f(x)=-6x-1$

이때 방정식 $f(x)=x^2$은

$-6x-1=x^2$

$\therefore x^2+6x+1=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의해 모든 근의 합은 -6이다.

004 답 30

(가)에서

$$f(x)=F'(x)=\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+ax^2\right)'$$
$$=x^3+2x^2+2ax$$

$\therefore f'(x)=3x^2+4x+2a$

(나)에서 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=5$이므로

$3+4+2a=5 \qquad \therefore a=-1$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-2x$, $f'(x)=3x^2+4x-2$이므로

$$F'(2)+f'(2)=f(2)+f'(2)$$
$$=(8+8-4)+(12+8-2)=30$$

005 답 19

$\int h(x)\,dx=f(x)g(x)+C$에서

$$h(x)=\{f(x)g(x)+C\}'$$
$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$
$$=(4x^2+6x+3)+(2x^2+4x)=6x^2+10x+3$$

$\therefore h(1)=6+10+3=19$

006 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $\int 3f(x)\,dx=3F(x)+C$가 성립하면

$$3f(x)=\{3F(x)+C\}'$$
$$=3F'(x)=3f(x)$$

ㄴ. $\int \{f(x)+2\}\,dx=F(x)+2x+C$가 성립하면

$$f(x)+2=\{F(x)+2x+C\}'$$
$$=F'(x)+2=f(x)+2$$

ㄷ. $\int \{f(x)\}^2\,dx=\{F(x)\}^2+C$가 성립하면

$$\{f(x)\}^2=[\{F(x)\}^2+C]'$$
$$=2F(x)F'(x)=2F(x)f(x)$$

그런데 $f(x)\neq 2F(x)$이므로 성립하지 않는다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

007 답 ②

$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\}=f(x)$이므로 주어진 등식은

$f(x)=-2x^4+4x^2+c$

$\therefore ax^4+bx^2-3=-2x^4+4x^2+c$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=-2,\ b=4,\ c=-3$

따라서 $f(x)=-2x^4+4x^2-3$이므로

$f(-1)=-2+4-3=-1$

008 답 5

$f(x)=\frac{d}{dx}\left\{\int(2x^2-3x+7)\,dx\right\}=2x^2-3x+7$이므로

$f'(x)=4x-3$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)=8-3=5$

009 답 ④

(가)에서 $\frac{d}{dx}\left\{\int(3x^2+3x-2)\,dx\right\}=3x^2+3x-2$이므로

$f(x)+g(x)=3x^2+3x-2 \qquad \cdots\cdots ㉠$

(나)에서 $\frac{d}{dx}\left[\int\{g(x)-f(x)\}\,dx\right]=g(x)-f(x)$이므로

$g(x)-f(x)=x^2-x-8 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$f(x)=x^2+2x+3,\ g(x)=2x^2+x-5$

$\therefore f(1)+g(2)=(1+2+3)+(8+2-5)=11$

010 답 4

$\frac{d}{dx}\left\{\int(x-2)f(x)\,dx\right\}=(x-2)f(x)$이므로

$(x-2)f(x)=x^3-x^2-a \qquad \cdots\cdots ㉠$

㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=8-4-a \qquad \therefore a=4$

이를 ㉠에 대입하면

$(x-2)f(x)=x^3-x^2-4$

양변에 $x=1$을 대입하면

$-f(1)=1-1-4 \qquad \therefore f(1)=4$

011 답 1

(가)에서

$$f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(-x^2+2x)\right\}dx=-x^2+2x+C$$

(나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 5)$를 지나므로

$f(1)=-1+2+C=5 \qquad \therefore C=4$

따라서 $f(x)=-x^2+2x+4$이므로

$f(3)=-9+6+4=1$

012 답 20

$$f(x)=\frac{d}{dx}\left\{\int(3x^2-2x)\,dx\right\}+\int\left\{\frac{d}{dx}(2x^2)\right\}dx$$
$$=(3x^2-2x)+(2x^2+C)$$
$$=5x^2-2x+C$$

$f(0)=4$에서 $C=4$

따라서 $f(x)=5x^2-2x+4$이므로

$f(2)=20-4+4=20$

013 답 ③

(가)에서 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^3+ax)\right\}dx=x^3+ax+C$

$\therefore f'(x)=3x^2+a$

(나)에서 $f(2)=4$이므로

$8+2a+C=4 \qquad \therefore 2a+C=-4 \qquad \cdots\cdots ㉠$

(다)에서 $f'(0)=-3$이므로 $a=-3$

이를 ㉠에 대입하면

$-6+C=-4 \qquad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=x^3-3x+2$, $f'(x)=3x^2-3$이므로

$f(1)+f'(1)=(1-3+2)+(3-3)=0$

014 답 $12\sqrt{2}$

$\int\left\{\frac{d}{dx}(x^7+x^3+x)\right\}dx=x^7+x^3+x+C_1$이므로

$f(x)=\int\left(\frac{d}{dx}\left[\int\left\{\frac{d}{dx}(x^7+x^3+x)\right\}dx\right]\right)dx$

$=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^7+x^3+x+C_1)\right\}dx$

$=x^7+x^3+x+C_2$

$f(0)=\sqrt{2}$에서 $C_2=\sqrt{2}$

따라서 $f(x)=x^7+x^3+x+\sqrt{2}$이므로

$f(\sqrt{2})=8\sqrt{2}+2\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}=12\sqrt{2}$

015 답 ㄷ

ㄱ. $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$, $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\}=f(x)$이므로

$\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx\neq\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\}$

ㄴ. $\frac{d}{dx}\left[\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx\right]=\frac{d}{dx}\{f(x)+C\}=f'(x)$

ㄷ. $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\}=f(x)$, $\int\left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\}dx=g(x)+C$이므로

$f(x)=g(x)+C$

양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x)=g'(x)$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄷ이다.

016 답 -2

$f(x)=\int\frac{x^2}{x-2}dx-\int\frac{5x-6}{x-2}dx=\int\frac{x^2-5x+6}{x-2}dx$

$=\int\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}dx=\int(x-3)\,dx$

$=\frac{1}{2}x^2-3x+C$

$f(-2)=10$에서 $2+6+C=10$ $\quad\therefore C=2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+2$이므로

$f(4)=8-12+2=-2$

017 답 2

$f(x)=\int(5x^4+4x^3+3x^2+2x+1)\,dx$

$=x^5+x^4+x^3+x^2+x+C$

$f(0)=-3$에서 $C=-3$

따라서 $f(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x-3$이므로

$f(1)=1+1+1+1+1-3=2$

018 답 10

$f(x)=\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx-\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx$

$=\int\left\{\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2-\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\right\}dx$

$=\int 4\,dx=4x+C$

$f(1)=2$에서 $4+C=2$ $\quad\therefore C=-2$

따라서 $f(x)=4x-2$이므로

$f(3)=12-2=10$

019 답 4

(가)에서 $f(x)=\int(2x-4)\,dx=x^2-4x+C$

(나)에서 모든 실수 x에 대하여 $x^2-4x+C\geq 0$이므로

$x^2-4x+C=0$의 판별식 D에 대하여

$\frac{D}{4}=4-C\leq 0$ $\quad\therefore C\geq 4$

이때 $f(0)=C$이므로 $f(0)$의 최솟값은 4이다.

020 답 5

$f(x)+g(x)=\frac{1}{x}+3x^2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$2f(x)+3g(x)=\frac{1}{x}+2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡$-$㉠을 하면

$f(x)+2g(x)=-3x^2+2$

(가)에서

$h(x)=\int f(x)\,dx+2\int g(x)\,dx$

$=\int\{f(x)+2g(x)\}\,dx=\int(-3x^2+2)\,dx$

$=-x^3+2x+C$

(나)에서 $h(1)=10$이므로

$-1+2+C=10$ $\quad\therefore C=9$

따라서 $h(x)=-x^3+2x+9$이므로

$h(2)=-8+4+9=5$

021 답 ②

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(ax^2-2x+3)\,dx$

$=\frac{a}{3}x^3-x^2+3x+C$

$f(0)=1$에서 $C=1$

$f(2)=19$에서

$\frac{8}{3}a-4+6+C=19$ $\quad\therefore \frac{8}{3}a+C=17$

$C=1$을 대입하면

$\frac{8}{3}a+1=17$ $\quad\therefore a=6$

022 답 $-\frac{3}{2}$

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(4x+a)\,dx$

$=2x^2+ax+C$

$f(2)=4$에서

$8+2a+C=4$ $\quad\therefore 2a+C=-4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

방정식 $f(x)=0$, 즉 $2x^2+ax+C=0$의 모든 근의 곱이 -5이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\frac{C}{2}=-5$ $\quad\therefore C=-10$

이를 ㉠에 대입하면 $2a-10=-4$ $\quad\therefore a=3$

$\therefore f(x)=2x^2+3x-10$

따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $2x^2+3x-10=0$의 모든 근의 합은 근과 계수의 관계에 의해 $-\frac{3}{2}$이다.

023 답 ②

㈎에서

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (3x^2+2x+a)\,dx$$
$$=x^3+x^2+ax+C$$

㈏에서 $x \to 1$일 때 (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to1} f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$1+1+a+C=0 \qquad \therefore a+C=-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㈏의 좌변에서

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

즉, $f'(1)=2a+4$이므로 ㈎에서

$3+2+a=2a+4 \qquad \therefore a=1$

이를 ㉠에 대입하면

$1+C=-2 \qquad \therefore C=-3$

따라서 $f(x)=x^3+x^2+x-3$이므로

$f(2)=8+4+2-3=11$

024 답 920만 원

$$c(x)=\int c'(x)\,dx=\int (2-0.002x)\,dx$$
$$=2x-0.001x^2+C$$

물품을 100개 생산할 때의 총비용이 600만 원이면 $c(100)=600$이므로

$200-10+C=600 \qquad \therefore C=410$

따라서 $c(x)=2x-0.001x^2+410$이므로 물품을 300개 생산할 때의 총비용은

$c(300)=600-90+410=920$(만 원)

025 답 ③

$\{f(x)+g(x)\}'=2$에서

$$f(x)+g(x)=\int 2\,dx=2x+C_1$$

$f(0)+g(0)=C_1$이고 $f(0)=3$, $g(0)=2$이므로

$C_1=5$

$\therefore f(x)+g(x)=2x+5 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\{f(x)g(x)\}'=-6x+7$에서

$$f(x)g(x)=\int (-6x+7)\,dx=-3x^2+7x+C_2$$

$f(0)g(0)=C_2$이고 $f(0)=3$, $g(0)=2$이므로

$C_2=6$

$$\therefore f(x)g(x)=-3x^2+7x+6$$
$$=(3x+2)(-x+3) \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $f(x)$, $g(x)$는 일차함수이므로

$\begin{cases} f(x)=3x+2 \\ g(x)=-x+3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} f(x)=-x+3 \\ g(x)=3x+2 \end{cases}$

그런데 $f(0)=3$, $g(0)=2$이므로

$f(x)=-x+3$, $g(x)=3x+2$

$\therefore f(2)+g(3)=(-2+3)+(9+2)=12$

026 답 ④

$f'(x)=4x^3-6x^2+20x$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (4x^3-6x^2+20x)\,dx$$
$$=x^4-2x^3+10x^2+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1,\ 13)$을 지나므로

$f(-1)=1+2+10+C=13 \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=x^4-2x^3+10x^2$이므로

$f(1)+f(2)=(1-2+10)+(16-16+40)=49$

027 답 ①

$f'(x)=-2x+4$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (-2x+4)\,dx$$
$$=-x^2+4x+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 7)$을 지나므로

$f(1)=-1+4+C=7 \qquad \therefore C=4$

$\therefore f(x)=-x^2+4x+4$

따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $-x^2+4x+4=0$의 모든 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의해 -4이다.

028 답 0

$f'(x)=3x^2+2ax+1$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (3x^2+2ax+1)\,dx$$
$$=x^3+ax^2+x+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ -1)$을 지나므로

$f(1)=1+a+1+C=-1$

$\therefore a+C=-3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

곡선 $y=f(x)$가 점 $(-2,\ 2)$를 지나므로

$f(-2)=-8+4a-2+C=2$

$\therefore 4a+C=12 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $C=-8$

$\therefore f(x)=x^3+5x^2+x-8$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1,\ b)$를 지나므로

$f(-1)=-1+5-1-8=b \qquad \therefore b=-5$

$\therefore a+b=5+(-5)=0$

029 답 ③

$f'(x)=2x+2$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (2x+2)\,dx$$
$$=x^2+2x+C$$

$f(-2)=3$에서

$4-4+C=3 \qquad \therefore C=3$

$$\therefore f(x)=x^2+2x+3$$
$$=(x+1)^2+2$$

구간 $[-3,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(2)=11$이고, 최솟값은 $f(-1)=2$이므로 그 차는

$11-2=9$

030 답 ②

$F(x)-xf(x)=x^3+2x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)-\{f(x)+xf'(x)\}=3x^2+4x$

$-xf'(x)=3x^2+4x=-x(-3x-4)$

$\therefore f'(x)=-3x-4$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-3x-4)\,dx=-\frac{3}{2}x^2-4x+C$

$f(0)=5$에서 $C=5$

$\therefore f(x)=-\frac{3}{2}x^2-4x+5$

따라서 함수 $f(x)$의 모든 계수의 합은 $-\frac{3}{2}+(-4)+5=-\frac{1}{2}$

031 답 $\frac{1}{6}$

$xf(x)=\int f(x)\,dx+4x^3-3x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=f(x)+12x^2-6x$

$xf'(x)=12x^2-6x=x(12x-6)$

$\therefore f'(x)=12x-6$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(12x-6)\,dx=6x^2-6x+C$

$f(1)=1$에서 $6-6+C=1$ $\qquad \therefore C=1$

$\therefore f(x)=6x^2-6x+1$

따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $6x^2-6x+1=0$의 모든 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의해 $\frac{1}{6}$이다.

032 답 ④

$2\int f(x)\,dx=xf(x)+4x+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)=f(x)+xf'(x)+4$

$\therefore f(x)=xf'(x)+4$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f(x)$가 일차함수이므로 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)라고 하면 $f'(x)=a$이므로 ㉠에서

$ax+b=ax+4$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 $b=4$

$f(1)=5$에서 $a+b=5$

$b=4$를 대입하면 $a+4=5$ $\qquad \therefore a=1$

따라서 $f(x)=x+4$이므로 $f(2)=2+4=6$

033 답 -40

$F(x)=\int(x-1)f(x)\,dx+x^4-4x^3+4x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=(x-1)f(x)+4x^3-12x^2+8x$

$(x-2)f(x)=-4x^3+12x^2-8x=-4x(x-1)(x-2)$

$\therefore f(x)=-4x(x-1)=-4x^2+4x$

$\therefore F(x)=\int f(x)\,dx=\int(-4x^2+4x)\,dx=-\frac{4}{3}x^3+2x^2+C$

$F(0)=2$에서 $C=2$

따라서 $F(x)=-\frac{4}{3}x^3+2x^2+2$이므로

$f(3)+F(3)=(-36+12)+(-36+18+2)=-40$

034 답 $F(x)=2x$

$F'(x)=f(x)$이므로

$\{(x^2-1)F(x)\}'=2xF(x)+(x^2-1)F'(x)$

$\qquad =(x^2-1)f(x)+2xF(x)$

이는 주어진 등식의 좌변과 같으므로

$(x^2-1)f(x)+2xF(x)=6x^2-2$에서

$\{(x^2-1)F(x)\}'=6x^2-2$

$\therefore (x^2-1)F(x)=\int(6x^2-2)\,dx$

$\qquad =2x^3-2x+C$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉠

$F(0)=0$이므로 ㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-F(0)=C$ $\qquad \therefore C=0$

따라서 $(x^2-1)F(x)=2x^3-2x=2x(x^2-1)$이므로

$F(x)=2x$

035 답 ①

$f'(x)=\begin{cases}-4x & (x\geq 1)\\ 4x^3-8x & (x<1)\end{cases}$에서

(i) $x\geq 1$일 때

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-4x)\,dx=-2x^2+C_1$

(ii) $x<1$일 때

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(4x^3-8x)\,dx$

$\qquad =x^4-4x^2+C_2$

$f(0)=3$에서 $C_2=3$

(i), (ii)에 의해 $f(x)=\begin{cases}-2x^2+C_1 & (x\geq 1)\\ x^4-4x^2+3 & (x<1)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)=f(1)$에서

$\lim_{x\to 1+}(-2x^2+C_1)=\lim_{x\to 1-}(x^4-4x^2+3)$

$-2+C_1=1-4+3$ $\qquad \therefore C_1=2$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-2x^2+2 & (x\geq 1)\\ x^4-4x^2+3 & (x<1)\end{cases}$이므로

$f(2)=-8+2=-6$

036 답 4

$f'(x)=-x+|x-1|=\begin{cases}-1 & (x>1)\\ -2x+1 & (x<1)\end{cases}$에서

(i) $x>1$일 때

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-1)\,dx=-x+C_1$

$f(2)=3$에서 $-2+C_1=3$ $\qquad \therefore C_1=5$

(ii) $x<1$일 때

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-2x+1)\,dx=-x^2+x+C_2$

(i), (ii)에 의해 $f(x)=\begin{cases}-x+5 & (x>1)\\ -x^2+x+C_2 & (x<1)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)=f(1)$에서

$\lim_{x\to1+}(-x+5)=\lim_{x\to1-}(-x^2+x+C_2)=f(1)$

$-1+5=-1+1+C_2 \quad \therefore C_2=f(1)=4$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-x+5 & (x\ge1)\\ -x^2+x+4 & (x<1)\end{cases}$이므로 $f(0)=4$

037 답 4

주어진 그래프에서 $f'(x)=\begin{cases}-x+1 & (x\ge0)\\ x+1 & (x<0)\end{cases}$

(i) $x\ge0$일 때

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-x+1)\,dx$

$=-\frac{1}{2}x^2+x+C_1$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$f(0)=C_1=2$

(ii) $x<0$일 때

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(x+1)\,dx$

$=\frac{1}{2}x^2+x+C_2$

(i), (ii)에 의해 $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+x+2 & (x\ge0)\\ \frac{1}{2}x^2+x+C_2 & (x<0)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$에서

$\lim_{x\to0+}\left(-\frac{1}{2}x^2+x+2\right)=\lim_{x\to0-}\left(\frac{1}{2}x^2+x+C_2\right)$

$\therefore C_2=2$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+x+2 & (x\ge0)\\ \frac{1}{2}x^2+x+2 & (x<0)\end{cases}$이므로

$f(1)+f(-1)=\left(-\frac{1}{2}+1+2\right)+\left(\frac{1}{2}-1+2\right)=4$

038 답 2

$f'(x)=\begin{cases}5-2x & (x>1)\\ 2x+a & (x<1)\end{cases}$에서

(i) $x>1$일 때

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(5-2x)\,dx=5x-x^2+C_1$

(ii) $x<1$일 때

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(2x+a)\,dx=x^2+ax+C_2$

(i), (ii)에 의해 $f(x)=\begin{cases}-x^2+5x+C_1 & (x>1)\\ x^2+ax+C_2 & (x<1)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$에서

$\lim_{x\to1+}(-x^2+5x+C_1)=\lim_{x\to1-}(x^2+ax+C_2)$

$-1+5+C_1=1+a+C_2$

$\therefore C_1-C_2=a-3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(3)-f(-3)=2$에서

$(-9+15+C_1)-(9-3a+C_2)=2$

$\therefore C_1-C_2=-3a+5 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a-3=-3a+5 \quad \therefore a=2$

039 답 9

$f'(x)=\begin{cases}x^2 & (x\ge1)\\ a & (-1\le x<1)\\ 2x+b & (x<-1)\end{cases}$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}f'(x)=\lim_{x\to1-}f'(x)=f'(1)$에서

$\lim_{x\to1+}x^2=\lim_{x\to1-}a \quad \therefore a=1$

$f'(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1+}f'(x)=\lim_{x\to-1-}f'(x)=f'(-1)$에서

$\lim_{x\to-1+}a=\lim_{x\to-1-}(2x+b)$

$\therefore a=-2+b$

$a=1$을 대입하면

$1=-2+b \quad \therefore b=3$

따라서 $f'(x)=\begin{cases}x^2 & (x\ge1)\\ 1 & (-1\le x<1)\\ 2x+3 & (x<-1)\end{cases}$에서

(i) $x\ge1$일 때

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3+C_1$

(ii) $-1\le x<1$일 때

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 1\,dx=x+C_2$

$f(0)=0$에서 $C_2=0$

(iii) $x<-1$일 때

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(2x+3)\,dx=x^2+3x+C_3$

(i), (ii), (iii)에 의해

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+C_1 & (x\ge1)\\ x & (-1\le x<1)\\ x^2+3x+C_3 & (x<-1)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$에서

$\lim_{x\to1+}\left(\frac{1}{3}x^3+C_1\right)=\lim_{x\to1-}x$

$\frac{1}{3}+C_1=1 \quad \therefore C_1=\frac{2}{3}$

함수 $f(x)$가 미분가능하면 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$에서

$\lim_{x\to-1+}x=\lim_{x\to-1-}(x^2+3x+C_3)$

$-1=1-3+C_3 \quad \therefore C_3=1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3} & (x\ge1)\\ x & (-1\le x<1)\\ x^2+3x+1 & (x<-1)\end{cases}$이므로

$3f(2)+f(-2)=3\left(\frac{8}{3}+\frac{2}{3}\right)+(4-6+1)=9$

040 답 10

$f(a+b)=f(a)+f(b)+3ab(a+b)$의 양변에 $a=0$, $b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

미분계수의 정의에 의해

$$\begin{aligned} f'(1)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1)+f(h)+3h(1+h)\}-f(1)}{h} \\ &=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)}{h}+3(1+h)\right\} \\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+3 \end{aligned}$$

$f'(1)=4$에서 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+3=4$

$\displaystyle\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

도함수의 정의에 의해

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x)+f(h)+3xh(x+h)\}-f(x)}{h} \\ &=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)}{h}+3x(x+h)\right\} \\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+3x^2 \\ &=3x^2+1 \ (\because ㉡) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x)&=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2+1)\,dx \\ &=x^3+x+C \end{aligned}$$

㉠에서 $f(0)=0$이므로

$C=0$

따라서 $f(x)=x^3+x$이므로

$f(2)=8+2=10$

041 답 $f(x)=-2x-5$

$f(a+b)=f(a)+f(b)+5$의 양변에 $a=0$, $b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+5 \quad \therefore f(0)=-5 \quad \cdots\cdots$ ㉠

도함수의 정의에 의해

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x)+f(h)+5\}-f(x)}{h} \\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+5}{h} \\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} \ (\because ㉠) \\ &=-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x)&=\int f'(x)\,dx=\int(-2)\,dx \\ &=-2x+C \end{aligned}$$

㉠에서 $f(0)=-5$이므로

$C=-5$

$\therefore f(x)=-2x-5$

042 답 ⑤

도함수의 정의에 의해

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(-x^2+1)\Delta x+2(\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &=(-x^2+1)+\lim_{\Delta x\to 0}2\Delta x=-x^2+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x)&=\int f'(x)\,dx=\int(-x^2+1)\,dx \\ &=-\frac{1}{3}x^3+x+C \end{aligned}$$

$f(0)=8$에서 $C=8$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x+8$이므로

$f(3)=-9+3+8=2$

043 답 ②

$f(a+b)=f(a)+f(b)+kab$의 양변에 $a=0$, $b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

미분계수의 정의에 의해

$\displaystyle f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} \ (\because ㉠)$

$f'(0)=5$에서 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=5 \quad \cdots\cdots$ ㉡

도함수의 정의에 의해

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x)+f(h)+kxh\}-f(x)}{h} \\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+kx=kx+5 \ (\because ㉡) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x)&=\int f'(x)\,dx=\int(kx+5)\,dx \\ &=\frac{k}{2}x^2+5x+C \end{aligned}$$

㉠에서 $f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=\frac{k}{2}x^2+5x$

$f(2)=6$에서

$2k+10=6 \quad \therefore k=-2$

044 답 -8

$f(a-b)=f(a)+f(-b)+5ab$의 양변에 $a=0$, $b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(a-b)=f(a)+f(-b)+5ab$의 양변에 b 대신 $-b$를 대입하면

$f(a+b)=f(a)+f(b)-5ab$

도함수의 정의에 의해

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x)+f(h)-5xh\}-f(x)}{h} \\ &=-5x+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} \\ &=-5x+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} \ (\because ㉠) \\ &=-5x+f'(0) \end{aligned}$$

$f'(0)=k$ (k는 상수)라고 하면 $f'(x)=-5x+k$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-5x+k)\,dx$

$=-\frac{5}{2}x^2+kx+C$

㉠에서 $f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=-\frac{5}{2}x^2+kx$

$f(-2)=6$에서

$-10-2k=6 \qquad \therefore k=-8$

$\therefore f'(0)=k=-8$

045 답 $\frac{10}{3}$

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(x^2-4)\,dx=\frac{1}{3}x^3-4x+C$

$f(0)=-2$에서 $C=-2$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x-2$

$f'(x)=x^2-4=(x+2)(x-2)$이므로

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이므로 극댓값은

$f(-2)=-\frac{8}{3}+8-2=\frac{10}{3}$

046 답 ①

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-6x^2+6x)\,dx$

$=-2x^3+3x^2+C$

$f'(x)=-6x^2+6x=-6x(x-1)$이므로

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로 극댓값은

$f(1)=-2+3+C=1+C$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이므로 극솟값은

$f(0)=C$

따라서 극댓값과 극솟값의 차는 $(1+C)-C=1$

047 답 -3

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(ax^2-a)\,dx$

$=\frac{a}{3}x^3-ax+C$

$f'(x)=a(x^2-1)=a(x+1)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

$a<0$이므로 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값이 3이므로

$f(1)=\frac{a}{3}-a+C=3 \qquad \therefore -\frac{2}{3}a+C=3$ …… ㉠

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이고 극솟값이 -1이므로

$f(-1)=-\frac{a}{3}+a+C=-1 \qquad \therefore \frac{2}{3}a+C=-1$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$-\frac{4}{3}a=4 \qquad \therefore a=-3$

048 답 ⑤

$f'(x)=ax(x-2)$ (a는 상수)라고 하면 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 점 $(1, -2)$를 지나므로

$f'(1)=-a=-2 \qquad \therefore a=2$

$\therefore f'(x)=2x(x-2)=2x^2-4x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(2x^2-4x)\,dx$

$=\frac{2}{3}x^3-2x^2+C$

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값이 6이므로

$f(0)=C=6$

$\therefore f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+6$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 극솟값은

$f(2)=\frac{16}{3}-8+6=\frac{10}{3}$

049 답 4

(가)에서 $f'(x)=0$인 x의 값이 $x=1$ 또는 $x=3$이므로

$f'(x)=a(x-1)(x-3)$ (a는 상수)라고 하면

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int a(x-1)(x-3)\,dx$

$=\int(ax^2-4ax+3a)\,dx$

$=\frac{a}{3}x^3-2ax^2+3ax+C$

$0\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$		↗	극대	↘	

$f(0)=C$, $f(1)=\frac{a}{3}-2a+3a+C=\frac{4}{3}a+C$,

$f(3)=9a-18a+9a+C=C$이고 (나)에서 최댓값이 4, 최솟값이 0이므로

$\frac{4}{3}a+C=4$, $C=0$ $\quad\therefore a=3$

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+9x$이므로

$f(4)=64-96+36=4$

핵심 유형 **최종 점검하기** • 121~123쪽

1 답 -3

유형 01 부정적분의 정의

$F(x)$, $G(x)$가 $f(x)$의 부정적분이므로

$F(x)-G(x)=k$ (k는 상수)라고 하면

$k=F(0)-G(0)=5-2=3$

$G(x)=F(x)-k$이므로

$$\begin{aligned}G(x)&=(x^5-x^4+3x+5)-3\\&=x^5-x^4+3x+2\end{aligned}$$

$\therefore G(-1)=-1-1-3+2=-3$

2 답 4

유형 01 부정적분의 정의

$$\begin{aligned}f(x)=F'(x)&=(-x^4+ax^2+bx)'\\&=-4x^3+2ax+b\end{aligned}$$

$f(1)=3$에서

$-4+2a+b=3$ $\quad\therefore 2a+b=7$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(-1)=-1$에서

$4-2a+b=-1$ $\quad\therefore 2a-b=5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=1$

$\therefore a+b=3+1=4$

3 답 15

유형 01 부정적분의 정의

$\int (x+1)f(x)\,dx=x^3+\frac{9}{2}x^2+6x+C$에서

$$\begin{aligned}(x+1)f(x)&=\left(x^3+\frac{9}{2}x^2+6x+C\right)'\\&=3x^2+9x+6\end{aligned}$$

양변에 $x=3$을 대입하면

$4f(3)=27+27+6$ $\quad\therefore f(3)=15$

4 답 ①

유형 02 부정적분과 미분의 관계 (1)

$\frac{d}{dx}\left[\int \{2x+f(x)\}\,dx\right]=2x+f(x)$이므로

$2x+f(x)=x^2+5x-4$

$\therefore f(x)=x^2+3x-4$

방정식 $f(x)=0$을 풀면

$x^2+3x-4=0$, $(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

따라서 양수인 근은 $x=1$이다.

5 답 ③

유형 02 부정적분과 미분의 관계 (1)

$f(x)=\frac{d}{dx}\left\{\int (-x^2+kx+3)\,dx\right\}=-x^2+kx+3$이므로

$f'(x)=-2x+k$

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 최댓값을 가지면 $f'(-2)=0$이므로

$4+k=0$ $\quad\therefore k=-4$

따라서 $f(x)=-x^2-4x+3$이므로 최댓값은

$m=f(-2)=-4+8+3=7$

$\therefore k+m=-4+7=3$

6 답 29

유형 03 부정적분과 미분의 관계 (2)

(가)에서 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^4+5x)\right\}dx=x^4+5x+C$

$\therefore f'(x)=4x^3+5$

(나)에서 $f(1)=f'(1)$이므로

$1+5+C=4+5$ $\quad\therefore C=3$

따라서 $f(x)=x^4+5x+3$이므로

$f(2)=16+10+3=29$

7 답 ⑤

유형 03 부정적분과 미분의 관계 (2)

$\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$이므로

$g(x)=\{f(x)+C\}^2=(x^2+4x+C)^2$

$g(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지면 $g(-1)=0$이므로

$(1-4+C)^2=0$, $(C-3)^2=0$ $\quad\therefore C=3$

따라서 $g(x)=(x^2+4x+3)^2$이므로

$g(1)=(1+4+3)^2=64$

8 답 ⑤

유형 04 부정적분의 계산

$\int\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+ax\right)dx=bx^4+cx^3+x^2+C$에서

$\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{6}x^3+\frac{a}{2}x^2+C_1=bx^4+cx^3+x^2+C$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=2$, $b=\frac{1}{12}$, $c=\frac{1}{6}$

$\therefore a+b+c=2+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{9}{4}$

다른 풀이 $\int\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+ax\right)dx=bx^4+cx^3+x^2+C$에서

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+ax&=(bx^4+cx^3+x^2+C)'\\&=4bx^3+3cx^2+2x\end{aligned}$$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=2$, $4b=\frac{1}{3}$, $3c=\frac{1}{2}$

$\therefore a=2$, $b=\frac{1}{12}$, $c=\frac{1}{6}$

$\therefore a+b+c=2+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{9}{4}$

9 답 ②

유형 04 부정적분의 계산

$$f(x)=\int \frac{2x^2}{x-1}\,dx+\int \frac{3x}{x-1}\,dx-\int \frac{5}{x-1}\,dx$$
$$=\int \frac{2x^2+3x-5}{x-1}\,dx=\int \frac{(2x+5)(x-1)}{x-1}\,dx$$
$$=\int (2x+5)\,dx=x^2+5x+C$$

$f(1)=4$에서

$1+5+C=4 \qquad \therefore C=-2$

따라서 $f(x)=x^2+5x-2$이므로

$f(2)=4+10-2=12$

10 답 ②

유형 05 도함수가 주어졌을 때 함수 구하기

$f'(x)=6x+8$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (6x+8)\,dx=3x^2+8x+C_1$$

$f(0)=3$에서 $C_1=3$

$\therefore f(x)=3x^2+8x+3$

따라서 함수 $f(x)$를 적분하면

$$\int f(x)\,dx=\int (3x^2+8x+3)\,dx=x^3+4x^2+3x+C$$

11 답 23

유형 05 도함수가 주어졌을 때 함수 구하기

이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근이 $x=-1$ 또는 $x=0$이므로

$f'(x)=ax(x+1)$ (a는 상수)이라고 하면

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int ax(x+1)\,dx$$
$$=\int (ax^2+ax)\,dx$$
$$=\frac{a}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+C$$

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 2이므로

$\frac{a}{3}=2 \qquad \therefore a=6$

$\therefore f(x)=2x^3+3x^2+C$

방정식 $f(x)=0$의 한 실근이 $x=1$이므로

$f(1)=2+3+C=0 \qquad \therefore C=-5$

따라서 $f(x)=2x^3+3x^2-5$이므로

$f(2)=16+12-5=23$

12 답 -3

유형 06 부정적분과 접선의 기울기

(가)에서 $f'(x)=4x+a$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (4x+a)\,dx$$
$$=2x^2+ax+C \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(나)에서 곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -5)$이고 ㉠에서 $f(x)$의 최고차항의 계수가 2이므로

$f(x)=2(x-2)^2-5$

$=2x^2-8x+3$

$\therefore f(1)=2-8+3=-3$

13 답 ③

유형 07 함수와 그 부정적분 사이의 관계식이 주어졌을 때 함수 구하기

$F(x)=xf(x)-3x^4+x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^3+2x$

$xf'(x)=12x^3-2x=x(12x^2-2)$

$\therefore f'(x)=12x^2-2$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (12x^2-2)\,dx$$
$$=4x^3-2x+C$$

$f(1)=5$에서 $4-2+C=5 \qquad \therefore C=3$

따라서 $f(x)=4x^3-2x+3$이므로 함수 $f(x)$의 상수항은 3이다.

14 답 $-\frac{4}{3}$

유형 07 함수와 그 부정적분 사이의 관계식이 주어졌을 때 함수 구하기

$\int f(x)\,dx=(x-2)f(x)+2x^3-6x^2+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x-2)f'(x)+6x^2-12x$

$(x-2)f'(x)=-6x^2+12x=-6x(x-2)$

$\therefore f'(x)=-6x$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (-6x)\,dx=-3x^2+C$$

$f(0)=4$에서 $C=4$

$\therefore f(x)=-3x^2+4$

따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $-3x^2+4=0$의 모든 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의해 $-\frac{4}{3}$이다.

15 답 ⑤

유형 08 부정적분과 함수의 연속성

$f'(x)=\begin{cases} x+a & (x>2) \\ -2x & (x<2) \end{cases}$에서

(i) $x>2$일 때

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (x+a)\,dx=\frac{1}{2}x^2+ax+C_1$$

$f(3)=\frac{5}{2}$에서

$\frac{9}{2}+3a+C_1=\frac{5}{2} \qquad \therefore C_1=-3a-2$

(ii) $x<2$일 때

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (-2x)\,dx=-x^2+C_2$$

$f(0)=-1$에서 $C_2=-1$

(i), (ii)에 의해 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+ax-3a-2 & (x>2) \\ -x^2-1 & (x<2) \end{cases}$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)=f(2)$에서

$$\lim_{x\to 2+}\left(\frac{1}{2}x^2+ax-3a-2\right)=\lim_{x\to 2-}(-x^2-1)$$

$2+2a-3a-2=-4-1$

$\therefore a=5$

16 답 0

유형 08 부정적분과 함수의 연속성

주어진 그래프에서 $f'(x)=\begin{cases} 1 & (x>0) \\ 2x+2 & (x<0) \end{cases}$

(i) $x>0$일 때

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 1\,dx=x+C_1$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나므로

$f(1)=1+C_1=2 \qquad \therefore C_1=1$

(ii) $x<0$일 때

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (2x+2)\,dx=x^2+2x+C_2$

(i), (ii)에 의해 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x>0) \\ x^2+2x+C_2 & (x<0) \end{cases}$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=f(0)$에서

$\lim\limits_{x\to 0+} (x+1)=\lim\limits_{x\to 0-} (x^2+2x+C_2)$

$\therefore C_2=1$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x\geq 0) \\ x^2+2x+1 & (x<0) \end{cases}$이므로

$f(-1)=1-2+1=0$

17 답 10

유형 09 부정적분과 도함수의 정의를 이용하여 함수 구하기

도함수의 정의에 의해

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(4x^3+ax)\Delta x-(\Delta x)^3}{\Delta x}$

$=4x^3+ax-\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^2$

$=4x^3+ax$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (4x^3+ax)\,dx$

$=x^4+\frac{a}{2}x^2+C$

$f(0)=0$에서 $C=0$

$\therefore f(x)=x^4+\frac{a}{2}x^2$

$f(-1)=6$에서

$1+\frac{a}{2}=6 \qquad \therefore a=10$

18 답 −2

유형 09 부정적분과 도함수의 정의를 이용하여 함수 구하기

$f(a+b)=f(a)+f(b)-3$의 양변에 $a=0$, $b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-3 \qquad \therefore f(0)=3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

도함수의 정의에 의해

$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\{f(x)+f(h)-3\}-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ ($\because$ ㉠)

$=f'(0)$

$f'(0)=k$ (k는 상수)라고 하면 $f'(x)=k$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int k\,dx=kx+C$

㉠에서 $f(0)=3$이므로 $C=3$

$\therefore f(x)=kx+3$

$f(3)=-3$에서

$3k+3=-3 \qquad \therefore k=-2 \qquad \therefore f'(0)=k=-2$

19 답 −7

유형 10 부정적분과 극대, 극소

$f'(x)=2x^2-6x$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (2x^2-6x)\,dx$

$=\frac{2}{3}x^3-3x^2+C$

$f'(x)=2x^2-6x=2x(x-3)$이므로

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값이 2이므로

$f(0)=C=2$

$\therefore f(x)=\frac{2}{3}x^3-3x^2+2$

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이므로 극솟값은

$f(3)=18-27+2=-7$

20 답 ①

유형 10 부정적분과 극대, 극소

주어진 그래프에서 $f'(x)=ax(x+3)\,(a<0)$이라고 하면

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int ax(x+3)\,dx$

$=\int (ax^2+3ax)\,dx=\frac{a}{3}x^3+\frac{3}{2}ax^2+C$

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	−3	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값이 4이므로

$f(0)=C=4$

$\therefore f(x)=\frac{a}{3}x^3+\frac{3}{2}ax^2+4$

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극소이고 극솟값이 −5이므로

$f(-3)=-9a+\frac{27}{2}a+4=-5$

$\therefore a=-2$

따라서 $f(x)=-\frac{2}{3}x^3-3x^2+4$이므로

$f(1)=-\frac{2}{3}-3+4=\frac{1}{3}$

08 정적분

핵심 유형

	유형01 ④	유형02 50	유형03 6
유형04 $\frac{46}{3}$	유형05 ①	유형06 4	
유형07 $-\frac{2}{3}$	유형08 5	유형09 4	유형10 $\frac{29}{2}$
유형11 $-\frac{20}{3}$	유형12 10	유형13 ①	

핵심 유형 완성하기

001 -9	002 ⑤	003 ②	004 $\frac{4}{3}$	005 $\frac{61}{80}$
006 2 J	007 ⑤	008 -16	009 ③	010 -1
011 ④	012 9	013 ①	014 ⑤	015 72
016 24	017 0	018 $\frac{11}{2}$	019 3	
020 $-\frac{19}{12}$	021 ③	022 $\frac{5}{2}$	023 4	024 ②
025 $\frac{59}{4}$	026 10	027 9	028 $\frac{9}{2}$	029 ③
030 $\frac{25}{3}$	031 -1	032 ②	033 2	034 8
035 3	036 ②	037 36	038 $\frac{2}{3}$	039 $\frac{22}{3}$
040 $f(x)=6x-2$		041 0	042 14	043 10
044 ①	045 81	046 5	047 1	048 ③
049 -6	050 18	051 ㄱ, ㄴ, ㄷ		052 -3
053 $\frac{2}{3}$	054 ④	055 ㄱ, ㄴ	056 ①	057 ②
058 6	059 ①	060 ⑤	061 ③	

핵심 유형 최종 점검하기

1 ⑤	2 2	3 2	4 28	5 -2
6 ②	7 8	8 5	9 1	10 ⑤
11 12	12 -13	13 ③	14 ①	15 -5
16 ④	17 -11	18 4	19 ③	

핵심 유형 126~128쪽

유형01 답 ④

$$\int_2^2 (x^4-3)\,dx+\int_0^2 (3x^2+6x)\,dx=0+\int_0^2 (3x^2+6x)\,dx$$
$$=\left[x^3+3x^2\right]_0^2$$
$$=(8+12)-0=20$$

유형02 답 50

$$\int_0^5 (x+1)^2\,dx-\int_0^5 (x-1)^2\,dx$$
$$=\int_0^5 \{(x+1)^2-(x-1)^2\}\,dx=\int_0^5 4x\,dx$$
$$=\left[2x^2\right]_0^5=50$$

유형03 답 6

$$\int_1^4 f(x)\,dx-\int_2^4 f(x)\,dx+\int_{-1}^1 f(x)\,dx$$
$$=\int_1^4 f(x)\,dx+\int_4^2 f(x)\,dx+\int_{-1}^1 f(x)\,dx$$
$$=\int_1^2 f(x)\,dx+\int_{-1}^1 f(x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^2 f(x)\,dx=\int_{-1}^2 (3x^2-2x)\,dx$$
$$=\left[x^3-x^2\right]_{-1}^2=(8-4)-(-1-1)=6$$

유형04 답 $\frac{46}{3}$

$$\int_{-1}^2 f(x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^1 (x^2+4)\,dx+\int_1^2 (-x^2+6x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{-1}^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_1^2$$
$$=\left(\frac{1}{3}+4\right)-\left(-\frac{1}{3}-4\right)+\left(-\frac{8}{3}+12\right)-\left(-\frac{1}{3}+3\right)=\frac{46}{3}$$

유형05 답 ①

$$x|x-2|=\begin{cases} x^2-2x & (x\ge 2) \\ -x^2+2x & (x\le 2)\end{cases}$$ 이므로

$$\int_1^3 x|x-2|\,dx$$
$$=\int_1^2 (-x^2+2x)\,dx+\int_2^3 (x^2-2x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3$$
$$=\left(-\frac{8}{3}+4\right)-\left(-\frac{1}{3}+1\right)+(9-9)-\left(\frac{8}{3}-4\right)=2$$

유형06 답 4

(가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이므로

$$\int_0^4 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^3 f(x)\,dx+\int_3^4 f(x)\,dx$$
$$=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^3 f(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx$$
$$=2\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^3 f(x)\,dx$$
$$=2\int_0^1 2x\,dx+\int_1^3 (3-x)\,dx$$
$$=2\left[x^2\right]_0^1+\left[3x-\frac{1}{2}x^2\right]_1^3$$
$$=2(1-0)+\left(9-\frac{9}{2}\right)-\left(3-\frac{1}{2}\right)=4$$

유형07 답 $-\frac{2}{3}$

$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt=k$ (k는 상수)라고 하면 $f(x)=x^2-2x+k$이므로

$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt=\int_{-1}^{1}(t^2-2t+k)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2+kt\right]_{-1}^{1}$

$=\left(\frac{1}{3}-1+k\right)-\left(-\frac{1}{3}-1-k\right)=\frac{2}{3}+2k$

따라서 $\frac{2}{3}+2k=k$이므로 $k=-\frac{2}{3}$

$f(x)=x^2-2x-\frac{2}{3}$이므로

$f(2)=4-4-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$

유형08 답 5

$\int_{1}^{x} f(t)\,dt=-2x^2+ax+5$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=-2+a+5\qquad\therefore a=-3$

$\int_{1}^{x} f(t)\,dt=-2x^2-3x+5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-4x-3\qquad\therefore f(-2)=8-3=5$

유형09 답 4

$\int_{1}^{x}(x-t)f(t)\,dt=2x^3-4x^2+2x$에서

$x\int_{1}^{x} f(t)\,dt-\int_{1}^{x} tf(t)\,dt=2x^3-4x^2+2x$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\left\{\int_{1}^{x} f(t)\,dt+xf(x)\right\}-xf(x)=6x^2-8x+2$

$\therefore \int_{1}^{x} f(t)\,dt=6x^2-8x+2$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=12x-8\qquad\therefore f(1)=12-8=4$

유형10 답 $\frac{29}{2}$

$f(x)=\int_{-2}^{x}(t^2-3t+2)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로 극댓값은

$f(1)=\int_{-2}^{1}(t^2-3t+2)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_{-2}^{1}$

$=\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)-\left(-\frac{8}{3}-6-4\right)=\frac{27}{2}$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=\frac{27}{2}$이므로

$\alpha+\beta=1+\frac{27}{2}=\frac{29}{2}$

유형11 답 $-\frac{20}{3}$

$f(x)=\int_{0}^{x} t(t-2)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

$-2\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$		↗	극대	↘	

$f(-2)=\int_{0}^{-2}(t^2-2t)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_{0}^{-2}=-\frac{8}{3}-4=-\frac{20}{3}$

$f(2)=\int_{0}^{2}(t^2-2t)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_{0}^{2}=\frac{8}{3}-4=-\frac{4}{3}$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\frac{20}{3}$이다.

유형12 답 10

주어진 이차함수 $y=F(x)$의 그래프에서

$F(x)=a(x+1)(x-2)\ (a>0)$라고 하면

$\int_{-1}^{x} f(t)\,dt=a(x^2-x-2)$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=a(2x-1)$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-2,\ -10)$을 지나므로

$f(-2)=-5a=-10\qquad\therefore a=2$

따라서 $f(x)=2(2x-1)$이므로

$f(3)=2\times 5=10$

유형13 답 ①

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x} f(t)\,dt=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\Big[F(t)\Big]_{1}^{x}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$

$=F'(1)=f(1)=1+2=3$

핵심 유형 **완성하기** 129~138쪽

001 답 -9

$\int_{-2}^{1} 2(x+2)(x-1)\,dx+\int_{3}^{3}(2x-1)^3\,dx$

$=\int_{-2}^{1} 2(x+2)(x-1)\,dx+0=\int_{-2}^{1}(2x^2+2x-4)\,dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^3+x^2-4x\right]_{-2}^{1}$

$=\left(\frac{2}{3}+1-4\right)-\left(-\frac{16}{3}+4+8\right)=-9$

002 답 ⑤

$$\int_{-1}^{0}(4x^3-3x^2+a)\,dx=\Big[x^4-x^3+ax\Big]_{-1}^{0}$$
$$=0-(1+1-a)=a-2$$

따라서 $a-2=8$이므로 $a=10$

003 답 ②

$$\int_{-a}^{a}\left(x^2+\frac{2}{3}x\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}x^2\right]_{-a}^{a}$$
$$=\left(\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{3}a^2\right)-\left(-\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{3}a^2\right)=\frac{2}{3}a^3$$

따라서 $\frac{2}{3}a^3=\frac{1}{12}$이므로 $a^3=\frac{1}{8}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because a$는 실수)

004 답 $\frac{4}{3}$

$$\int_0^3\{f(x)\}^2\,dx=\int_0^3(x-1)^2\,dx=\int_0^3(x^2-2x+1)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^3=9-9+3=3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3(x-1)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_0^3=\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 주어진 등식에 대입하면

$3=\frac{9}{4}k$ $\quad\therefore k=\frac{4}{3}$

005 답 $\frac{61}{80}$

$$\int_0^1\{f(x)\}^2\,dx=\int_0^1(x^2-ax)^2\,dx=\int_0^1(x^4-2ax^3+a^2x^2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}ax^4+\frac{1}{3}a^2x^3\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{5}=\frac{1}{3}\left(a-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{80}$$

따라서 $\int_0^1\{f(x)\}^2\,dx$는 $a=\frac{3}{4}$일 때 최솟값이 $\frac{1}{80}$이므로

$m=\frac{3}{4}$, $n=\frac{1}{80}$ $\quad\therefore m+n=\frac{3}{4}+\frac{1}{80}=\frac{61}{80}$

006 답 2 J

처음 길이에서 x m만큼 늘이는 데 필요한 힘의 크기가 $400x$ N이므로

$f(x)=400x$

용수철의 길이를 20 cm에서 30 cm까지 늘이려면 0.1 m만큼 늘여야 하므로 이때 필요한 일의 양은

$$W=\int_0^{0.1}400x\,dx=\Big[200x^2\Big]_0^{0.1}=2(\mathrm{J})$$

007 답 ⑤

$$\int_1^2\left(4x^3+\frac{1}{x}\right)dx-\int_1^2\left(\frac{1}{x}-4\right)dx$$
$$=\int_1^2\left\{\left(4x^3+\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{x}-4\right)\right\}dx$$
$$=\int_1^2(4x^3+4)\,dx=\Big[x^4+4x\Big]_1^2$$
$$=(16+8)-(1+4)=19$$

008 답 -16

$$\int_{-1}^{3}\frac{4x^2}{x+2}\,dx+\int_{3}^{-1}\frac{16}{t+2}\,dt$$
$$=\int_{-1}^{3}\frac{4x^2}{x+2}\,dx-\int_{-1}^{3}\frac{16}{x+2}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{3}\frac{4x^2-16}{x+2}\,dx=\int_{-1}^{3}\frac{4(x+2)(x-2)}{x+2}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{3}(4x-8)\,dx=\Big[2x^2-8x\Big]_{-1}^{3}$$
$$=(18-24)-(2+8)=-16$$

009 답 ③

$$\int_0^2(3x^3+2x)\,dx+\int_0^2(k+2x-3x^3)\,dx$$
$$=\int_0^2\{(3x^3+2x)+(k+2x-3x^3)\}\,dx$$
$$=\int_0^2(4x+k)\,dx=\Big[2x^2+kx\Big]_0^2=2k+8$$

따라서 $2k+8=16$이므로 $k=4$

010 답 -1

$$\int_1^k(8x+4)\,dx+4\int_k^1(1+x-x^3)\,dx$$
$$=\int_1^k(8x+4)\,dx-\int_1^k4(1+x-x^3)\,dx$$
$$=\int_1^k\{(8x+4)-4(1+x-x^3)\}\,dx$$
$$=\int_1^k(4x^3+4x)\,dx=\Big[x^4+2x^2\Big]_1^k$$
$$=(k^4+2k^2)-(1+2)=k^4+2k^2-3$$

따라서 $k^4+2k^2-3=0$이므로

$(k^2+3)(k+1)(k-1)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=1$ ($\because k$는 실수)

이때 모든 실수 k의 값의 곱은 $-1\times1=-1$

011 답 ④

$$\int_0^2 f(x)\,dx-\int_{-3}^{2}f(x)\,dx+\int_{-3}^{3}f(x)\,dx$$
$$=\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^{-3}f(x)\,dx+\int_{-3}^{3}f(x)\,dx$$
$$=\int_0^{-3}f(x)\,dx+\int_{-3}^{3}f(x)\,dx$$
$$=\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3(x^2-x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^3=9-\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$$

012 답 9

$$\int_3^8 f(x)\,dx=\int_3^6 f(x)\,dx+\int_6^8 f(x)\,dx$$
$$=\left\{\int_3^2 f(x)\,dx+\int_2^6 f(x)\,dx\right\}+\int_6^8 f(x)\,dx$$
$$=-\int_2^3 f(x)\,dx+\int_2^6 f(x)\,dx+\int_6^8 f(x)\,dx$$
$$=-5+6+8=9$$

013 답 ①

$$\int_0^2 (2x+1)^2\,dx - \int_{-1}^2 (2x+1)^2\,dx + \int_{-1}^0 (2x-1)^2\,dx$$
$$= \int_0^2 (2x+1)^2\,dx + \int_2^{-1} (2x+1)^2\,dx + \int_{-1}^0 (2x-1)^2\,dx$$
$$= \int_0^{-1} (2x+1)^2\,dx - \int_0^{-1} (2x-1)^2\,dx$$
$$= \int_0^{-1} \{(2x+1)^2-(2x-1)^2\}\,dx = \int_0^{-1} 8x\,dx$$
$$= \Big[4x^2\Big]_0^{-1} = 4$$

014 답 ⑤

$$\int_1^a f(x)\,dx - \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^a f(x)\,dx + \int_2^1 f(x)\,dx$$
$$= \int_2^a f(x)\,dx = \int_2^a (2ax+3)\,dx$$
$$= \Big[ax^2+3x\Big]_2^a$$
$$= (a^3+3a)-(4a+6) = a^3-a-6$$

따라서 $a^3-a-6=a^3-2a^2+2a+3$이므로

$2a^2-3a-9=0$, $(2a+3)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

015 답 72

$\int_{-1}^3 \{f(x)-f'(x)\}\,dx = \int_{-1}^0 f(x)\,dx$에서

$$\int_{-1}^3 f(x)\,dx - \int_{-1}^3 f'(x)\,dx = \int_{-1}^0 f(x)\,dx$$
$$\int_{-1}^3 f(x)\,dx - \int_{-1}^0 f(x)\,dx = \int_{-1}^3 f'(x)\,dx$$
$$\int_{-1}^3 f(x)\,dx + \int_0^{-1} f(x)\,dx = \int_{-1}^3 f'(x)\,dx$$
$$\therefore \int_0^3 f(x)\,dx = \int_{-1}^3 f'(x)\,dx$$

$f(x)=x^4-x^2+a$에서 $f'(x)=4x^3-2x$이므로

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_{-1}^3 f'(x)\,dx = \int_{-1}^3 (4x^3-2x)\,dx$$
$$= \Big[x^4-x^2\Big]_{-1}^3 = (81-9)-(1-1) = 72$$

016 답 24

$$\int_{-2}^2 f(x)\,dx = \int_{-2}^0 (2-4x)\,dx + \int_0^2 (3x^2+2)\,dx$$
$$= \Big[2x-2x^2\Big]_{-2}^0 + \Big[x^3+2x\Big]_0^2$$
$$= 0-(-4-8)+(8+4)-0 = 24$$

017 답 0

$$\int_1^3 xf(x)\,dx = \int_1^2 x(6x-12)\,dx + \int_2^3 x(3x-6)\,dx$$
$$= \int_1^2 (6x^2-12x)\,dx + \int_2^3 (3x^2-6x)\,dx$$
$$= \Big[2x^3-6x^2\Big]_1^2 + \Big[x^3-3x^2\Big]_2^3$$
$$= (16-24)-(2-6)+(27-27)-(8-12) = 0$$

018 답 $\frac{11}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \ge 3) \\ -\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} & (1 \le x \le 3) \\ x+1 & (x \le 1) \end{cases}$$이므로

$$\int_{-2}^4 f(x)\,dx$$
$$= \int_{-2}^1 (x+1)\,dx + \int_1^3 \left(-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)dx + \int_3^4 1\,dx$$
$$= \Big[\frac{1}{2}x^2+x\Big]_{-2}^1 + \Big[-\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{2}x\Big]_1^3 + \Big[x\Big]_3^4$$
$$= \left(\frac{1}{2}+1\right)-(2-2)+\left(-\frac{9}{4}+\frac{15}{2}\right)-\left(-\frac{1}{4}+\frac{5}{2}\right)+4-3 = \frac{11}{2}$$

019 답 3

$k>1$이므로

$$\int_{-2}^k f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} (3x^2+3)\,dx + \int_{-1}^k (4-2x)\,dx$$
$$= \Big[x^3+3x\Big]_{-2}^{-1} + \Big[4x-x^2\Big]_{-1}^k$$
$$= (-1-3)-(-8-6)+(4k-k^2)-(-4-1)$$
$$= -k^2+4k+15$$

따라서 $-k^2+4k+15=18$이므로

$k^2-4k+3=0$, $(k-1)(k-3)=0$

$\therefore k=3$ ($\because k>1$)

020 답 $-\frac{19}{12}$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \begin{cases} x^3+x+C_1 & (x \ge 0) \\ x^2+x+C_2 & (x \le 0) \end{cases}$$

$f(1)=1$에서

$1+1+C_1=1 \qquad \therefore C_1=-1$

함수 $f(x)$가 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0-} f(x) = f(0)$에서

$\lim_{x \to 0+} (x^3+x-1) = \lim_{x \to 0-} (x^2+x+C_2)$

$\therefore C_2=-1$

따라서 $f(x) = \begin{cases} x^3+x-1 & (x \ge 0) \\ x^2+x-1 & (x \le 0) \end{cases}$이므로

$$\int_{-2}^1 f(x)\,dx = \int_{-2}^0 (x^2+x-1)\,dx + \int_0^1 (x^3+x-1)\,dx$$
$$= \Big[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x\Big]_{-2}^0 + \Big[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-x\Big]_0^1$$
$$= 0-\left(-\frac{8}{3}+2+2\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1\right)-0 = -\frac{19}{12}$$

021 답 ③

$$f(x) = |2x+4| = \begin{cases} 2x+4 & (x \ge -2) \\ -2x-4 & (x \le -2) \end{cases}$$이므로

$$\int_{-3}^0 f(x)\,dx = \int_{-3}^{-2} (-2x-4)\,dx + \int_{-2}^0 (2x+4)\,dx$$
$$= \Big[-x^2-4x\Big]_{-3}^{-2} + \Big[x^2+4x\Big]_{-2}^0$$
$$= (-4+8)-(-9+12)+0-(4-8) = 5$$

022 답 $\frac{5}{2}$

$|x^2-4|=\begin{cases} x^2-4 & (x\le -2 \text{ 또는 } x\ge 2) \\ -x^2+4 & (-2\le x\le 2) \end{cases}$이므로

$\int_0^3 \frac{|x^2-4|}{x+2}\,dx$

$=\int_0^2 \frac{-x^2+4}{x+2}\,dx+\int_2^3 \frac{x^2-4}{x+2}\,dx$

$=\int_0^2 \frac{-(x+2)(x-2)}{x+2}\,dx+\int_2^3 \frac{(x+2)(x-2)}{x+2}\,dx$

$=\int_0^2 (-x+2)\,dx+\int_2^3 (x-2)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2+\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_2^3$

$=(-2+4)-0+\left(\frac{9}{2}-6\right)-(2-4)=\frac{5}{2}$

023 답 4

$|x-2|=\begin{cases} x-2 & (x\ge 2) \\ -x+2 & (x\le 2) \end{cases}$이고, $a>2$이므로

$\int_1^a |x-2|\,dx=\int_1^2 (-x+2)\,dx+\int_2^a (x-2)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_1^2+\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_2^a$

$=(-2+4)-\left(-\frac{1}{2}+2\right)+\left(\frac{1}{2}a^2-2a\right)-(2-4)$

$=\frac{1}{2}a^2-2a+\frac{5}{2}$

따라서 $\frac{1}{2}a^2-2a+\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$이므로 $a^2-4a=0$

$a(a-4)=0 \qquad \therefore a=4 \ (\because a>2)$

024 답 ②

$|x|+|x-1|=\begin{cases} 2x-1 & (x\ge 1) \\ 1 & (0\le x\le 1) \\ -2x+1 & (x\le 0) \end{cases}$이므로

$\int_{-1}^2 (|x|+|x-1|)\,dx$

$=\int_{-1}^0 (-2x+1)\,dx+\int_0^1 1\,dx+\int_1^2 (2x-1)\,dx$

$=\left[-x^2+x\right]_{-1}^0+\left[x\right]_0^1+\left[x^2-x\right]_1^2$

$=0-(-1-1)+1-0+(4-2)-(1-1)=5$

025 답 $\frac{59}{4}$

$(g\circ f)(x)=|x^3-3x+2|=|(x-1)^2(x+2)|$

$=\begin{cases} x^3-3x+2 & (x\ge -2) \\ -x^3+3x-2 & (x\le -2) \end{cases}$

$\therefore \int_{-3}^2 (g\circ f)(x)\,dx$

$=\int_{-3}^{-2} (-x^3+3x-2)\,dx+\int_{-2}^2 (x^3-3x+2)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_{-3}^{-2}+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^2$

$=(-4+6+4)-\left(-\frac{81}{4}+\frac{27}{2}+6\right)+(4-6+4)-(4-6-4)$

$=\frac{59}{4}$

026 답 10

(가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이므로

$\int_4^8 f(x)\,dx$

$=\int_4^5 f(x)\,dx+\int_5^6 f(x)\,dx+\int_6^7 f(x)\,dx+\int_7^8 f(x)\,dx$

$=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_{-1}^0 f(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx+\int_{-1}^0 f(x)\,dx$

$=2\int_0^1 f(x)\,dx+2\int_{-1}^0 f(x)\,dx$

$=2\int_0^1 (4x+1)\,dx+2\int_{-1}^0 (1-4x^3)\,dx$

$=2\left[2x^2+x\right]_0^1+2\left[x-x^4\right]_{-1}^0$

$=2\{(2+1)-0\}+2\{0-(-1-1)\}=10$

027 답 9

모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이므로

$\int_{10}^{19} f(x)\,dx=\int_{10}^{13} f(x)\,dx+\int_{13}^{16} f(x)\,dx+\int_{16}^{19} f(x)\,dx$

$=\int_1^4 f(x)\,dx+\int_1^4 f(x)\,dx+\int_1^4 f(x)\,dx$

$=3\int_1^4 f(x)\,dx=3\times 3=9$

028 답 $\frac{9}{2}$

주어진 그래프에서 $f(x)=\begin{cases} -x+3 & (0\le x\le 3) \\ 3x+3 & (-1\le x\le 0) \end{cases}$

모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로

$\int_{2018}^{2021} f(x)\,dx$

$=\int_2^5 f(x)\,dx=\int_2^3 f(x)\,dx+\int_3^5 f(x)\,dx$

$=\int_2^3 f(x)\,dx+\int_{-1}^1 f(x)\,dx$

$=\int_2^3 f(x)\,dx+\int_{-1}^0 f(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx$

$=\int_2^3 (-x+3)\,dx+\int_{-1}^0 (3x+3)\,dx+\int_0^1 (-x+3)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_2^3+\left[\frac{3}{2}x^2+3x\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_0^1$

$=\left(-\frac{9}{2}+9\right)-(-2+6)+0-\left(\frac{3}{2}-3\right)+\left(-\frac{1}{2}+3\right)-0=\frac{9}{2}$

029 답 ③

모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이므로

ㄱ. $\int_1^2 f(x)\,dx=\int_4^5 f(x)\,dx=1$

ㄴ. $\int_{-1}^1 f(x)\,dx=\int_5^7 f(x)\,dx=\int_5^4 f(x)\,dx+\int_4^7 f(x)\,dx$

$=-\int_4^5 f(x)\,dx+\int_4^7 f(x)\,dx=-1+5=4$

ㄷ. $\int_{10}^{14} f(x)\,dx=\int_4^8 f(x)\,dx=\int_4^7 f(x)\,dx+\int_7^8 f(x)\,dx$

$=\int_4^7 f(x)\,dx+\int_4^5 f(x)\,dx$

$=5+1=6$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

030 답 $\frac{25}{3}$

$\int_0^2 f(t)\,dt=a$ (a는 상수)라고 하면 $f(x)=3x^2+2ax$이므로

$$\int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^2 (3t^2+2at)\,dt$$
$$=\Big[t^3+at^2\Big]_0^2=8+4a$$

따라서 $8+4a=a$이므로 $a=-\frac{8}{3}$

$f(x)=3x^2-\frac{16}{3}x$이므로

$f(-1)=3+\frac{16}{3}=\frac{25}{3}$

031 답 -1

$\int_{-1}^3 f'(x)\,dx=a$ (a는 상수)라고 하면 $f(x)=x^3-2x+a$이므로

$f'(x)=3x^2-2$

$$\therefore \int_{-1}^3 f'(x)\,dx=\int_{-1}^3 (3x^2-2)\,dx=\Big[x^3-2x\Big]_{-1}^3$$
$$=(27-6)-(-1+2)=20$$

따라서 $a=20$이므로 $f(x)=x^3-2x+20$

$\therefore f(-3)=-27+6+20=-1$

032 답 ②

$\int_0^1 f(t)\,dt=a$, $\int_{-1}^0 f(t)\,dt=b$ (a, b는 상수)라고 하면

$f(x)=-3x^2+6ax+b$이므로

$$\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1 (-3t^2+6at+b)\,dt$$
$$=\Big[-t^3+3at^2+bt\Big]_0^1=-1+3a+b$$

따라서 $-1+3a+b=a$이므로 $2a+b=1$ …… ㉠

$$\int_{-1}^0 f(t)\,dt=\int_{-1}^0 (-3t^2+6at+b)\,dt$$
$$=\Big[-t^3+3at^2+bt\Big]_{-1}^0=-1-3a+b$$

따라서 $-1-3a+b=b$이므로

$3a=-1$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{3}$

이를 ㉠에 대입하면

$-\frac{2}{3}+b=1$ $\quad\therefore b=\frac{5}{3}$

따라서 $f(x)=-3x^2-2x+\frac{5}{3}$이므로

$f(-1)=-3+2+\frac{5}{3}=\frac{2}{3}$

033 답 2

$\int_0^2 f(t)\,dt=a$, $\int_0^1 g(t)\,dt=b$ (a, b는 상수)라고 하면

$f(x)=2bx$, $g(x)=4x^3+a$이므로

$\int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^2 2bt\,dt=\Big[bt^2\Big]_0^2=4b$

따라서 $4b=a$이므로 $a-4b=0$ …… ㉠

$\int_0^1 g(t)\,dt=\int_0^1 (4t^3+a)\,dt=\Big[t^4+at\Big]_0^1=1+a$

따라서 $1+a=b$이므로 $a-b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{4}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=-\frac{2}{3}x$, $g(x)=4x^3-\frac{4}{3}$이므로

$f(1)+g(1)=-\frac{2}{3}+\left(4-\frac{4}{3}\right)=2$

034 답 8

$f(x)=12x^2+\int_0^1 (6x-4t)f(t)\,dt$에서

$f(x)=12x^2+6x\int_0^1 f(t)\,dt-4\int_0^1 tf(t)\,dt$

$\int_0^1 f(t)\,dt=a$, $\int_0^1 tf(t)\,dt=b$ (a, b는 상수)라고 하면

$f(x)=12x^2+6ax-4b$이므로

$$\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1 (12t^2+6at-4b)\,dt$$
$$=\Big[4t^3+3at^2-4bt\Big]_0^1=4+3a-4b$$

따라서 $4+3a-4b=a$이므로 $a-2b=-2$ …… ㉠

$$\int_0^1 tf(t)\,dt=\int_0^1 (12t^3+6at^2-4bt)\,dt$$
$$=\Big[3t^4+2at^3-2bt^2\Big]_0^1=3+2a-2b$$

따라서 $3+2a-2b=b$이므로 $2a-3b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=1$

따라서 $f(x)=12x^2-4$이므로

$f(1)=12-4=8$

035 답 3

$\int_2^x f(t)\,dt=x^3+ax^2+8$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=8+4a+8$ $\quad\therefore a=-4$

$\int_2^x f(t)\,dt=x^3-4x^2+8$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-8x$ $\quad\therefore f(3)=27-24=3$

036 답 ②

$\int_a^x f(t)\,dt=x^2+ax-8$의 양변에 $x=a$를 대입하면

$0=a^2+a^2-8$, $a^2=4$ $\quad\therefore a=2$ ($\because a>0$)

$\int_2^x f(t)\,dt=x^2+2x-8$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x+2$ $\quad\therefore f(1)=2+2=4$

$\therefore a+f(1)=2+4=6$

037 답 36

$f(x)=\int_x^{x+2} t^3\,dt$에서

$f(1)=\int_1^3 t^3\,dt=\Big[\frac{1}{4}t^4\Big]_1^3=\frac{81}{4}-\frac{1}{4}=20$

$f(x)=\int_x^{x+2} t^3\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x+2)^3-x^3=6x^2+12x+8$

$\therefore \int_0^1 f'(x)\,dx=\int_0^1(6x^2+12x+8)\,dx$

$=\left[2x^3+6x^2+8x\right]_0^1=2+6+8=16$

$\therefore f(1)+\int_0^1 f'(x)\,dx=20+16=36$

참고 $f(x)=\int_x^{x+a} g(t)\,dt$에서 $g(t)$의 한 부정적분을 $G(t)$라고 하면

$f(x)=\left[G(t)\right]_x^{x+a}$ $\quad\therefore f(x)=G(x+a)-G(x)$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=G'(x+a)-G'(x)=g(x+a)-g(x)$

038 답 $\frac{2}{3}$

$\int_0^1 f(t)\,dt=a$ (a는 상수)라고 하면 주어진 등식은

$\int_0^x f(t)\,dt=-3x^3+2x^2-2ax$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-9x^2+4x-2a$

$\therefore \int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1(-9t^2+4t-2a)\,dt=\left[-3t^3+2t^2-2at\right]_0^1$

$=-3+2-2a=-2a-1$

따라서 $-2a-1=a$이므로 $a=-\frac{1}{3}$

$f(x)=-9x^2+4x+\frac{2}{3}$이므로 $f(0)=\frac{2}{3}$

039 답 $\frac{22}{3}$

$\int_1^x f(t)\,dt=xf(x)-\frac{4}{3}x^3$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=f(1)-\frac{4}{3}$ $\quad\therefore f(1)=\frac{4}{3}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\int_1^x f(t)\,dt=xf(x)-\frac{4}{3}x^3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-4x^2$

$xf'(x)=4x^2$ $\quad\therefore f'(x)=4x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 4x\,dx=2x^2+C$

㉠에서 $f(1)=2+C=\frac{4}{3}$ $\quad\therefore C=-\frac{2}{3}$

따라서 $f(x)=2x^2-\frac{2}{3}$이므로 $f(2)=8-\frac{2}{3}=\frac{22}{3}$

040 답 $f(x)=6x-2$

$\int_x^1(x-t)f(t)\,dt=-x^3+x^2+x-1$에서

$-\int_1^x(x-t)f(t)\,dt=-x^3+x^2+x-1$

$-x\int_1^x f(t)\,dt+\int_1^x tf(t)\,dt=-x^3+x^2+x-1$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$-\left\{\int_1^x f(t)\,dt+xf(x)\right\}+xf(x)=-3x^2+2x+1$

$\therefore \int_1^x f(t)\,dt=3x^2-2x-1$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-2$

041 답 0

$\int_2^x(x-t)f(t)\,dt=x^3+ax^2+4x$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=8+4a+8$ $\quad\therefore a=-4$

$\int_2^x(x-t)f(t)\,dt=x^3-4x^2+4x$에서

$x\int_2^x f(t)\,dt-\int_2^x tf(t)\,dt=x^3-4x^2+4x$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\left\{\int_2^x f(t)\,dt+xf(x)\right\}-xf(x)=3x^2-8x+4$

$\therefore \int_2^x f(t)\,dt=3x^2-8x+4$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-8$ $\quad\therefore f(2)=12-8=4$

$\therefore a+f(2)=-4+4=0$

042 답 14

$\int_{-1}^x(x-t)f(t)\,dt=2x^3+ax^2+bx$의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-2+a-b$ $\quad\therefore a-b=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\int_{-1}^x(x-t)f(t)\,dt=2x^3+ax^2+bx$에서

$x\int_{-1}^x f(t)\,dt-\int_{-1}^x tf(t)\,dt=2x^3+ax^2+bx$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\left\{\int_{-1}^x f(t)\,dt+xf(x)\right\}-xf(x)=6x^2+2ax+b$

$\therefore \int_{-1}^x f(t)\,dt=6x^2+2ax+b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

위의 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=6-2a+b$ $\quad\therefore 2a-b=6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=2$

이를 ㉡에 대입하면 $\int_{-1}^x f(t)\,dt=6x^2+8x+2$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=12x+8$

$\therefore \int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1(12x+8)\,dx=\left[6x^2+8x\right]_0^1=6+8=14$

043 답 10

$\int_0^x(x-t)f'(t)\,dt=x^4-x^3$에서

$x\int_0^x f'(t)\,dt-\int_0^x tf'(t)\,dt=x^4-x^3$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\left\{\int_0^x f'(t)\,dt+xf'(x)\right\}-xf'(x)=4x^3-3x^2$

$\therefore \int_0^x f'(t)\,dt=4x^3-3x^2$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=12x^2-6x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(12x^2-6x)\,dx=4x^3-3x^2+C$

$f(0)=3$에서 $C=3$

따라서 $f(x)=4x^3-3x^2+3$이므로

$f'(1)+f(1)=(12-6)+(4-3+3)=10$

044 답 ①

$f(x)=\int_{1}^{x}(4t-t^3)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=4x-x^3=-x(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이므로 극솟값은

$f(0)=\int_{1}^{0}(4t-t^3)\,dt=\left[2t^2-\frac{1}{4}t^4\right]_{1}^{0}$

$=0-\left(2-\frac{1}{4}\right)=-\frac{7}{4}$

045 답 81

$f(x)=\int_{0}^{x}(-t^2+t+a)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=-x^2+x+a$

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극대이면 $f'(3)=0$이므로

$-9+3+a=0 \qquad \therefore a=6$

극댓값은 $f(3)$이므로

$M=f(3)=\int_{0}^{3}(-t^2+t+6)\,dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+6t\right]_{0}^{3}=-9+\frac{9}{2}+18=\frac{27}{2}$

$\therefore aM=6\times\frac{27}{2}=81$

046 답 5

$f(x)=\int_{0}^{x}(t^2+at+b)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극소이면 $f'(2)=0$이므로

$4+2a+b=0 \qquad \therefore 2a+b=-4$ ······ ㉠

$x=2$에서 극솟값이 $\frac{2}{3}$이면 $f(2)=\frac{2}{3}$이므로

$f(2)=\int_{0}^{2}(t^2+at+b)\,dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_{0}^{2}=\frac{8}{3}+2a+2b$

따라서 $\frac{8}{3}+2a+2b=\frac{2}{3}$이므로 $a+b=-1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=2$

$\therefore b-a=2-(-3)=5$

047 답 1

$f(x)=\int_{x}^{x+1}(2t^3-2t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\{2(x+1)^3-2(x+1)\}-(2x^3-2x)$

$=6x^2+6x=6x(x+1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이므로 극댓값은

$M=f(-1)=\int_{-1}^{0}(2t^3-2t)\,dt$

$=\left[\frac{1}{2}t^4-t^2\right]_{-1}^{0}=0-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이므로 극솟값은

$m=f(0)=\int_{0}^{1}(2t^3-2t)\,dt$

$=\left[\frac{1}{2}t^4-t^2\right]_{0}^{1}=\left(\frac{1}{2}-1\right)-0=-\frac{1}{2}$

$\therefore M-m=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

048 답 ③

$f(x)=\int_{-1}^{x}(6t^3-6t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=6x^3-6x=6x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

$-1\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최대이므로 최댓값은

$f(0)=\int_{-1}^{0}(6t^3-6t)\,dt=\left[\frac{3}{2}t^4-3t^2\right]_{-1}^{0}$

$=0-\left(\frac{3}{2}-3\right)=\frac{3}{2}$

049 답 -6

$\int_{0}^{x}(x-t)f(t)\,dt=\frac{1}{2}x^4-3x^2$에서

$x\int_{0}^{x}f(t)\,dt-\int_{0}^{x}tf(t)\,dt=\frac{1}{2}x^4-3x^2$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\left\{\int_{0}^{x}f(t)\,dt+xf(x)\right\}-xf(x)=2x^3-6x$

$\therefore \int_{0}^{x}f(t)\,dt=2x^3-6x$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x^2-6$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값이 -6이다.

050 답 18

$f(x)=\int_{x-1}^{x+1}(t^2-2t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\{(x+1)^2-2(x+1)\}-\{(x-1)^2-2(x-1)\}$

$=4x-4$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$

$-2\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗	

$$f(-2)=\int_{-3}^{-1}(t^2-2t)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_{-3}^{-1}$$
$$=\left(-\frac{1}{3}-1\right)-(-9-9)=\frac{50}{3}$$
$$f(1)=\int_{0}^{2}(t^2-2t)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{8}{3}-4=-\frac{4}{3}$$
$$f(2)=\int_{1}^{3}(t^2-2t)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_{1}^{3}$$
$$=(9-9)-\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{2}{3}$$

따라서 $M=\frac{50}{3}$, $m=-\frac{4}{3}$이므로

$$M-m=\frac{50}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)=18$$

051 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$f(x)=\int_{0}^{x}t(x-t)\,dt$에서

$f(x)=x\int_{0}^{x}t\,dt-\int_{0}^{x}t^2\,dt$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\int_{0}^{x}t\,dt+x\times x-x^2$$
$$=\int_{0}^{x}t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{0}^{x}=x^2$$

ㄱ. $f'(0)=0$

ㄴ. $f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$

구간 $[-1, 6]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	6
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
$f(x)$	↗	↗		↗	↗

따라서 구간 $[-1, 6]$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

ㄷ. 구간 $[-1, 6]$에서 함수 $f(x)$가 증가하므로 최솟값은

$$f(-1)=\int_{0}^{-1}t(-1-t)\,dt=\int_{0}^{-1}(-t^2-t)\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_{0}^{-1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

052 답 -3

주어진 삼차함수 $y=F(x)$의 그래프에서

$F(x)=ax^2(x-2)$ $(a<0)$라고 하면

$\int_{0}^{x}f(t)\,dt=ax^3-2ax^2$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3ax^2-4ax$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-1, -7)$을 지나므로

$f(-1)=3a+4a=-7$ $\quad\therefore a=-1$

$\therefore f(x)=-3x^2+4x$

따라서 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 -3이다.

053 답 $\frac{2}{3}$

주어진 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$f(x)=ax(x-2)$ $(a<0)$라고 하면

$f(x)=a(x^2-2x)=a(x-1)^2-a$

함수 $f(x)$의 최댓값이 1이므로

$-a=1$ $\quad\therefore a=-1$

$\therefore f(x)=-x(x-2)=-x^2+2x$

$F(x)=\int_{1}^{x}f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

즉, $f(x)$는 $F(x)$의 도함수이다.

주어진 그래프에서 $f(x)$의 부호를 조사하여 함수 $F(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$F(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $F(x)$는 $x=2$에서 극대이므로 극댓값은

$$F(2)=\int_{1}^{2}(-t^2+2t)\,dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_{1}^{2}$$
$$=\left(-\frac{8}{3}+4\right)-\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2}{3}$$

054 답 ④

$F(x)=\int_{0}^{x}f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

즉, $f(x)$는 $F(x)$의 도함수이다.

주어진 그래프에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대, $x=2$에서 극소이므로

$f'(-2)=0$, $f'(2)=0$

$f'(x)=a(x+2)(x-2)$ $(a>0)$라고 하면

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int a(x^2-4)\,dx=a\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)+C$$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로 $f(0)=C=0$

$$\therefore f(x)=a\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)=\frac{1}{3}ax(x^2-12)$$

$f(x)=0$인 x의 값은 $x=-2\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2\sqrt{3}$

구간 $[0, 4]$에서 함수 $F(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$2\sqrt{3}$	$\cdots$	4
$f(x)$	0	$-$	0	$+$	$+$
$F(x)$		↘	극소	↗	

따라서 함수 $F(x)$는 $x=2\sqrt{3}$에서 최소이므로 최솟값은 $F(2\sqrt{3})$이다.

055 답 ㄱ, ㄴ

주어진 함수 $y=F(x)$의 그래프에서

$F(x)=ax^2(x+3)(x-3)\ (a>0)$이라고 하면

$\int_0^x f(t)\,dt=a(x^4-9x^2)$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=a(4x^3-18x)$

ㄱ. $f(0)=0$

ㄴ. $a>0$이므로

$f(2)=-4a<0,\ f(3)=54a>0$

$\therefore f(2)<f(3)$

ㄷ. $f'(x)=a(12x^2-18)=6a(2x^2-3)$이므로

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-\frac{\sqrt{6}}{2}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

056 답 ①

$f(x)=5x^2-4x-8$이라 하고, 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x(5t^2-4t-8)\,dt=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\Big[F(t)\Big]_2^x$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$$
$$=F'(2)$$
$$=f(2)$$
$$=20-8-8=4$$

057 답 ②

$f(x)=3x^2-2x$라 하고, 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x(3t^2-2t)\,dt=\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\Big[F(t)\Big]_a^x$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}$$
$$=F'(a)$$
$$=f(a)$$
$$=3a^2-2a$$

따라서 $3a^2-2a=-\frac{1}{3}$이므로

$9a^2-6a+1=0,\ (3a-1)^2=0\qquad \therefore a=\frac{1}{3}$

058 답 6

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_1^{1+2h}f(x)\,dx=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_1^{1+2h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+2h)-F(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+2h)-F(1)}{2h}\times2$$
$$=2F'(1)=2f(1)$$
$$=2(-2+5)=6$$

059 답 ①

함수 $\{f(x)\}^3$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^x\{f(t)\}^3\,dt=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\Big[F(t)\Big]_{-1}^x$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{F(x)-F(-1)}{x+1}$$
$$=F'(-1)=\{f(-1)\}^3$$
$$=(1-3)^3=-8$$

060 답 ⑤

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$g'(x)=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(t)\Big]_x^{x+h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$
$$=F'(x)=f(x)$$

즉, $g'(x)=2x-4$이므로

$$g(x)=\int g'(x)\,dx=\int(2x-4)\,dx$$
$$=x^2-4x+C$$

$g(1)=-1$에서

$1-4+C=-1\qquad \therefore C=2$

$\therefore g(x)=x^2-4x+2$

따라서 방정식 $g(x)=0$의 모든 근의 합은 근과 계수의 관계에 의해 4이다.

061 답 ③

$f(x)=x^8+x^7+\cdots+x+1$이라 하고, 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}(t^8+t^7+\cdots+t+1)\,dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\Big[F(t)\Big]_1^{x^2}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}$$
$$=2F'(1)=2f(1)$$
$$=2(\underbrace{1+1+\cdots+1+1}_{9개})=18$$

1 답 ⑤

유형 01 정적분의 정의

$$\int_0^2 (x^2+2x+4)f(x)\,dx=\int_0^2 (x^2+2x+4)(x-2)\,dx$$
$$=\int_0^2 (x^3-8)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-8x\right]_0^2$$
$$=(4-16)-0=-12$$

2 답 2

유형 02 정적분의 계산 – 실수배, 합, 차의 정적분

$$\int_0^1 (x^2-2xy-6y^2)\,dy=x^2\int_0^1 1\,dy-x\int_0^1 2y\,dy-\int_0^1 6y^2\,dy$$
$$=x^2\Big[y\Big]_0^1-x\Big[y^2\Big]_0^1-\Big[2y^3\Big]_0^1$$
$$=x^2(1-0)-x(1-0)-(2-0)$$
$$=x^2-x-2$$

따라서 $x^2-x-2\le 0$에서

$(x+1)(x-2)\le 0$ $\quad\therefore -1\le x\le 2$

모든 정수 x의 값의 합은

$-1+0+1+2=2$

3 답 2

유형 02 정적분의 계산 – 실수배, 합, 차의 정적분

$$\int_{-1}^k (x^2-2x)\,dx-2\int_k^{-1} (x^2+x+3)\,dx$$
$$=\int_{-1}^k (x^2-2x)\,dx+\int_{-1}^k 2(x^2+x+3)\,dx$$
$$=\int_{-1}^k \{(x^2-2x)+2(x^2+x+3)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^k (3x^2+6)\,dx$$
$$=\Big[x^3+6x\Big]_{-1}^k$$
$$=(k^3+6k)-(-1-6)=k^3+6k+7$$

따라서 $k^3+6k+7=9k+9$이므로

$k^3-3k-2=0$, $(k+1)^2(k-2)=0$

$\therefore k=2$ ($\because k\ne -1$)

4 답 28

유형 03 정적분의 계산 – 나누어진 구간에서 정적분

$$\int_2^4 (\sqrt{x}+2)^2\,dx-\int_4^8 (\sqrt{t}-2)^2\,dt+\int_2^8 (\sqrt{y}-2)^2\,dy$$
$$=\int_2^4 (\sqrt{x}+2)^2\,dx+\int_8^4 (\sqrt{x}-2)^2\,dx+\int_2^8 (\sqrt{x}-2)^2\,dx$$
$$=\int_2^4 (\sqrt{x}+2)^2\,dx+\int_2^4 (\sqrt{x}-2)^2\,dx$$
$$=\int_2^4 \{(\sqrt{x}+2)^2+(\sqrt{x}-2)^2\}\,dx$$
$$=\int_2^4 (2x+8)\,dx$$
$$=\Big[x^2+8x\Big]_2^4$$
$$=(16+32)-(4+16)=28$$

5 답 -2

유형 04 구간에 따라 식이 다른 함수의 정적분

주어진 그래프에서 $f(x)=\begin{cases} -4 & (x\ge 0) \\ -2x-4 & (x\le 0)\end{cases}$이므로

$$\int_{-3}^1 xf(x)\,dx=\int_{-3}^0 x(-2x-4)\,dx+\int_0^1 \{x\times(-4)\}\,dx$$
$$=\int_{-3}^0 (-2x^2-4x)\,dx+\int_0^1 (-4x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-2x^2\right]_{-3}^0+\Big[-2x^2\Big]_0^1$$
$$=0-(18-18)+(-2)-0=-2$$

6 답 ②

유형 05 절댓값 기호를 포함한 함수의 정적분

$|f(x)|=|3x^2-3|=\begin{cases} 3x^2-3 & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 1) \\ -3x^2+3 & (-1\le x\le 1)\end{cases}$이므로

$$\int_{-2}^3 |f(x)|\,dx$$
$$=\int_{-2}^{-1} (3x^2-3)\,dx+\int_{-1}^1 (-3x^2+3)\,dx+\int_1^3 (3x^2-3)\,dx$$
$$=\Big[x^3-3x\Big]_{-2}^{-1}+\Big[-x^3+3x\Big]_{-1}^1+\Big[x^3-3x\Big]_1^3$$
$$=(-1+3)-(-8+6)+(-1+3)-(1-3)+(27-9)-(1-3)$$
$$=28$$

7 답 8

유형 05 절댓값 기호를 포함한 함수의 정적분

$f(x)=|4-2x|+3$에서 $|4-2x|\ge 0$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 3이다.

$\therefore a=3$

$f(x)=|4-2x|+3=\begin{cases} 2x-1 & (x\ge 2) \\ -2x+7 & (x\le 2)\end{cases}$이므로

$$\int_1^a f(x)\,dx=\int_1^3 f(x)\,dx$$
$$=\int_1^2 (-2x+7)\,dx+\int_2^3 (2x-1)\,dx$$
$$=\Big[-x^2+7x\Big]_1^2+\Big[x^2-x\Big]_2^3$$
$$=(-4+14)-(-1+7)+(9-3)-(4-2)=8$$

8 답 5

유형 06 $f(x+k)=f(x)$인 함수의 정적분

$-1\le x\le 1$에서

$f(x)=|x|+2=\begin{cases} x+2 & (0\le x\le 1) \\ -x+2 & (-1\le x\le 0)\end{cases}$

모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이므로

$$\int_5^7 f(x)\,dx=\int_{-1}^1 f(x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^0 (-x+2)\,dx+\int_0^1 (x+2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^1$$
$$=0-\left(-\frac{1}{2}-2\right)+\left(\frac{1}{2}+2\right)-0=5$$

9 답 1

유형 06 $f(x+k)=f(x)$인 함수의 정적분

(가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x-1)$이므로 x 대신 $x+1$을 대입하면

$f(x+2)=f(x)$

$\therefore \int_3^8 f(x)\,dx$

$=\int_3^5 f(x)\,dx+\int_5^7 f(x)\,dx+\int_7^8 f(x)\,dx$

$=\int_{-1}^1 f(x)\,dx+\int_{-1}^1 f(x)\,dx+\int_{-1}^0 f(x)\,dx$

$=\int_{-1}^1 f(x)\,dx+\int_{-1}^1 f(x)\,dx+\int_{-1}^1 f(x)\,dx+\int_1^0 f(x)\,dx$

$=3\int_{-1}^1 f(x)\,dx-\int_0^1 f(x)\,dx$

$=3\times2-5=1$

10 답 ⑤

유형 07 적분 구간에 상수만 있는 정적분을 포함한 등식

$f(x)=-4x^3+\int_0^1 (2x+2)f(t)\,dt$에서

$f(x)=-4x^3+2x\int_0^1 f(t)\,dt+2\int_0^1 f(t)\,dt$

$\int_0^1 f(t)\,dt=a$ (a는 상수)라고 하면

$f(x)=-4x^3+2ax+2a$이므로

$\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1 (-4t^3+2at+2a)\,dt$

$=\Big[-t^4+at^2+2at\Big]_0^1$

$=-1+a+2a=3a-1$

따라서 $3a-1=a$이므로 $a=\frac{1}{2}$

$f(x)=-4x^3+x+1$이므로 $f(0)=1$

11 답 12

유형 07 적분 구간에 상수만 있는 정적분을 포함한 등식

$\int_0^3 f'(t)\,dt=a$, $\int_0^1 g(t)\,dt=b$ (a, b는 상수)라고 하면

$f(x)=x^2+2bx$, $g(x)=3x^2+ax-a$이므로

$\int_0^3 f'(t)\,dt=\int_0^3 (2t+2b)\,dt$

$=\Big[t^2+2bt\Big]_0^3=9+6b$

따라서 $9+6b=a$이므로 $a-6b=9$ …… ㉠

$\int_0^1 g(t)\,dt=\int_0^1 (3t^2+at-a)\,dt$

$=\Big[t^3+\frac{a}{2}t^2-at\Big]_0^1=1+\frac{a}{2}-a=1-\frac{a}{2}$

따라서 $1-\frac{a}{2}=b$이므로 $a+2b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{15}{4}$, $b=-\frac{7}{8}$

따라서 $f(x)=x^2-\frac{7}{4}x$, $g(x)=3x^2+\frac{15}{4}x-\frac{15}{4}$이므로

$f(4)+g(1)=(16-7)+\left(3+\frac{15}{4}-\frac{15}{4}\right)=12$

12 답 −13

유형 08 적분 구간에 변수가 있는 정적분을 포함한 등식 (1)

$2\int_1^x tf(t)\,dt=x^2f(x)+3x^4-2x^3$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=f(1)+3-2 \qquad \therefore f(1)=-1$ …… ㉠

$2\int_1^x tf(t)\,dt=x^2f(x)+3x^4-2x^3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x)=2xf(x)+x^2f'(x)+12x^3-6x^2$

$x^2f'(x)=-12x^3+6x^2=x^2(-12x+6)$

$\therefore f'(x)=-12x+6$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-12x+6)\,dx$

$=-6x^2+6x+C$

㉠에서 $f(1)=-6+6+C=-1 \qquad \therefore C=-1$

따라서 $f(x)=-6x^2+6x-1$이므로

$f(-1)=-6-6-1=-13$

13 답 ③

유형 09 적분 구간에 변수가 있는 정적분을 포함한 등식 (2)

$\int_0^x (x-t)f(t)\,dt=x^4-2x^3+3x^2$에서

$x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt=x^4-2x^3+3x^2$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\left\{\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)\right\}-xf(x)=4x^3-6x^2+6x$

$\therefore \int_0^x f(t)\,dt=4x^3-6x^2+6x$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=12x^2-12x+6$

$\therefore f(2)=48-24+6=30$

14 답 ①

유형 10 정적분으로 정의된 함수의 극대, 극소

$f(x)=\int_2^x (3t^2+3t-6)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+3x-6=3(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이므로 극댓값은

$f(-2)=\int_2^{-2}(3t^2+3t-6)\,dt=\Big[t^3+\frac{3}{2}t^2-6t\Big]_2^{-2}$

$=(-8+6+12)-(8+6-12)=8$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 극솟값은

$f(1)=\int_2^1 (3t^2+3t-6)\,dt=\Big[t^3+\frac{3}{2}t^2-6t\Big]_2^1$

$=\left(1+\frac{3}{2}-6\right)-(8+6-12)=-\frac{11}{2}$

따라서 극댓값과 극솟값의 곱은 $8\times\left(-\frac{11}{2}\right)=-44$

15 답 -5

유형 11 정적분으로 정의된 함수의 최대, 최소

$\int_{0}^{x}(t-x)f(t)\,dt=-x^4+x^3+ax^2$에서

$\int_{0}^{x}tf(t)\,dt-x\int_{0}^{x}f(t)\,dt=-x^4+x^3+ax^2$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)-\left\{\int_{0}^{x}f(t)\,dt+xf(x)\right\}=-4x^3+3x^2+2ax$

$\therefore \int_{0}^{x}f(t)\,dt=4x^3-3x^2-2ax$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=12x^2-6x-2a=12\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{3}{4}-2a$

함수 $f(x)$의 최솟값이 $\frac{37}{4}$이므로

$-\frac{3}{4}-2a=\frac{37}{4}$, $2a=-10$ $\quad\therefore a=-5$

16 답 ④

유형 12 정적분으로 정의된 함수의 그래프

$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

즉, $f(x)$는 $F(x)$의 도함수이다.

주어진 그래프에서 $f(x)$의 부호를 조사하여 함수 $F(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $F(x)$는 $x=3$에서 극소이므로 극솟값은

$F(3)=\int_{-1}^{3}f(t)\,dt$

주어진 그래프에서 $f(x)=\begin{cases}x-3 & (x\ge 2)\\ -x+1 & (x\le 2)\end{cases}$이므로

$$F(3)=\int_{-1}^{3}f(t)\,dt=\int_{-1}^{2}(-t+1)\,dt+\int_{2}^{3}(t-3)\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}t^2+t\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{1}{2}t^2-3t\right]_{2}^{3}$$
$$=(-2+2)-\left(-\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{9}{2}-9\right)-(2-6)=1$$

17 답 -11

유형 12 정적분으로 정의된 함수의 그래프

주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$f(x)=a(x-1)(x-4)\ (a<0)$라고 하자.

$g(x)=\int_{x}^{x+1}f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x+1)-f(x)$이므로

$$g'(x)=ax(x-3)-a(x-1)(x-4)$$
$$=2ax-4a$$

함수 $g(x)$는 이차함수이고, $a<0$이므로 $g'(x)=0$인 x의 값에서 최댓값을 갖는다.

$g'(x)=0$인 x의 값은 $x=2$

따라서 함수 $g(x)$의 최댓값은 $g(2)$이므로

$$g(2)=\int_{2}^{3}a(t-1)(t-4)\,dt=\int_{2}^{3}(at^2-5at+4a)\,dt$$
$$=\left[\frac{a}{3}t^3-\frac{5}{2}at^2+4at\right]_{2}^{3}$$
$$=\left(9a-\frac{45}{2}a+12a\right)-\left(\frac{8}{3}a-10a+8a\right)=-\frac{13}{6}a$$

따라서 $-\frac{13}{6}a=13$이므로 $a=-6$

$f(x)=-6(x-1)(x-4)=-6x^2+30x-24$이므로

$$g(0)=\int_{0}^{1}(-6t^2+30t-24)\,dt=\left[-2t^3+15t^2-24t\right]_{0}^{1}$$
$$=-2+15-24=-11$$

18 답 4

유형 13 정적분으로 정의된 함수의 극한

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\int_{2}^{x}f(t)\,dt=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\Big[F(t)\Big]_{2}^{x}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}F'(2)=\frac{1}{4}f(2)$$
$$=\frac{1}{4}(8+12-4)=4$$

19 답 ③

유형 13 정적분으로 정의된 함수의 극한

$xf(x)-x^3=\int_{1}^{x}\{f(t)-t\}\,dt$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)-1=0$ $\quad\therefore f(1)=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$xf(x)-x^3=\int_{1}^{x}\{f(t)-t\}\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)-3x^2=f(x)-x$

$xf'(x)=3x^2-x=x(3x-1)$

$\therefore f'(x)=3x-1$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x-1)\,dx=\frac{3}{2}x^2-x+C$

㉠에서 $f(1)=\frac{3}{2}-1+C=1$ $\quad\therefore C=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{3-h}^{3+h}f(x)\,dx$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_{3-h}^{3+h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(3+h)-F(3-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(3+h)-F(3)-\{F(3-h)-F(3)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(3+h)-F(3)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{F(3-h)-F(3)}{-h}$$
$$=2F'(3)=2f(3)$$
$$=2\left(\frac{27}{2}-3+\frac{1}{2}\right)=22$$

09 정적분의 활용

핵심 유형

	유형01 $\frac{1}{2}$	유형02 ③	유형03 $\frac{32}{3}$
유형04 9	유형05 $\frac{4}{3}$	유형06 ③	유형07 $\frac{27}{2}$
유형08 36	유형09 1	유형10 ②	유형11 18
유형12 4			

핵심 유형 완성하기

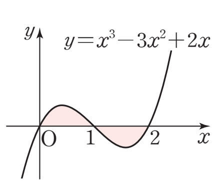
001 $\frac{37}{3}$	002 2	003 2	004 $\frac{71}{6}$	005 7
006 -6	007 ④	008 ④	009 $-\frac{3}{2}$	010 ③
011 $\frac{4}{3}$	012 ④	013 -4	014 ③	015 ⑤
016 $\frac{8}{3}$	017 ②	018 ③	019 6	020 ②
021 $\frac{1}{3}$	022 61	023 $\frac{2}{3}$	024 ⑤	025 3
026 6	027 $\frac{3}{2}$	028 $\frac{1}{3}$	029 1	030 24
031 8	032 5	033 6	034 54	035 ①
036 $\frac{32}{3}$	037 28	038 ③	039 $\frac{65}{12}$	040 4
041 $\frac{1}{2}$	042 $\frac{2}{3}$	043 -9	044 ③	045 ②
046 3초	047 -30	048 3	049 ③	050 5 m
051 $\frac{9}{2}$	052 192π cm^3		053 $\frac{33}{2}$	054 24
055 2	056 28 m	057 8초	058 $\frac{1}{6}$	059 ㄱ

핵심 유형 최종 점검하기

1 $24\sqrt{6}$	2 ②	3 ①	4 ④	5 ⑤
6 $\frac{27}{2}$	7 ①	8 3	9 -6	10 ③
11 ④	12 ②	13 $\frac{32}{3}$	14 4	15 ④
16 $\frac{8}{3}$	17 $-\frac{3}{2}$	18 2		

핵심 유형 144~146쪽

유형01 답 $\frac{1}{2}$



곡선 $y=x^3-3x^2+2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-3x^2+2x=0$에서

$x(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^2 |x^3-3x^2+2x|\,dx$$

$$=\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)\,dx+\int_1^2 (-x^3+3x^2-2x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_1^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

유형02 답 ③

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

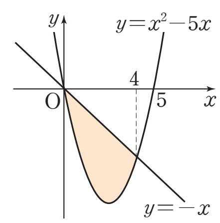
$$\int_{-4}^4 f(x)\,dx=0$$

모든 실수 x에 대하여 $g(-x)=g(x)$이면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-4}^4 g(x)\,dx=2\int_0^4 g(x)\,dx$$

$$\therefore \int_{-4}^4 \{f(x)+g(x)\}\,dx=0+2\int_0^4 g(x)\,dx=2\times3=6$$

유형03 답 $\frac{32}{3}$



곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=-x$의 교점의 x좌표는 $x^2-5x=-x$에서

$x^2-4x=0,\ x(x-4)=0$

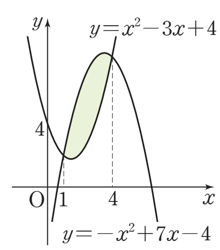
$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^4 \{-x-(x^2-5x)\}\,dx$$

$$=\int_0^4 (-x^2+4x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$$

유형04 답 9



두 곡선 $y=x^2-3x+4,\ y=-x^2+7x-4$의 교점의 x좌표는

$x^2-3x+4=-x^2+7x-4$에서

$x^2-5x+4=0,\ (x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 도형의 넓이는

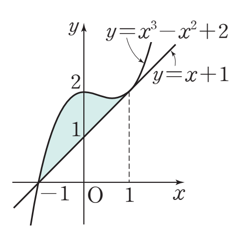
$$\int_1^4 \{(-x^2+7x-4)-(x^2-3x+4)\}\,dx$$

$$=\int_1^4 (-2x^2+10x-8)\,dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-8x\right]_1^4=9$$

유형05 답 $\frac{4}{3}$

$f(x)=x^3-x^2+2$라고 하면 $f'(x)=3x^2-2x$이므로 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$이고, 접선의 방정식은

$y-2=x-1 \quad \therefore y=x+1$



곡선 $y=x^3-x^2+2$와 접선 $y=x+1$의 교점의 x좌표는 $x^3-x^2+2=x+1$에서

$x^3-x^2-x+1=0$

$(x+1)(x-1)^2=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는

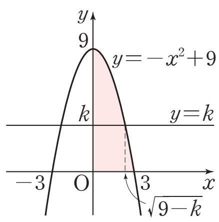
$$\int_{-1}^{1}\{(x^3-x^2+2)-(x+1)\}\,dx=\int_{-1}^{1}(x^3-x^2-x+1)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)\,dx$$
$$=2\Big[-\frac{1}{3}x^3+x\Big]_0^1=\frac{4}{3}$$

유형06 답 ③

두 도형의 넓이가 같으므로

$$\int_0^1 x(x-a)(x-1)\,dx=0,\ \int_0^1\{x^3-(a+1)x^2+ax\}\,dx=0$$
$$\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\Big]_0^1=0$$
$$\frac{1}{6}a-\frac{1}{12}=0\qquad\therefore\ a=\frac{1}{2}$$

유형07 답 $\frac{27}{2}$



곡선 $y=-x^2+9$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표는 $-x^2+9=k$에서

$x^2=9-k$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{9-k}$

곡선 $y=-x^2+9$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 직선 $y=k$가 이등분하므로

$$\int_0^3(-x^2+9)\,dx=2\int_0^{\sqrt{9-k}}(-x^2+9-k)\,dx\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

㉠의 좌변에서

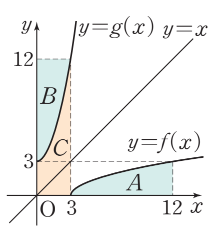
$$\int_0^3(-x^2+9)\,dx=\Big[-\frac{1}{3}x^3+9x\Big]_0^3=18$$

㉠의 우변에서 $\sqrt{9-k}=\alpha$라고 하면

$$2\int_0^{\alpha}(-x^2+\alpha^2)\,dx=2\Big[-\frac{1}{3}x^3+\alpha^2x\Big]_0^{\alpha}=2\times\frac{2}{3}\alpha^3=\frac{4}{3}\alpha^3$$

따라서 $18=\frac{4}{3}\alpha^3$이므로 $\alpha^3=\frac{27}{2}\qquad\therefore\ \sqrt{(9-k)^3}=\frac{27}{2}$

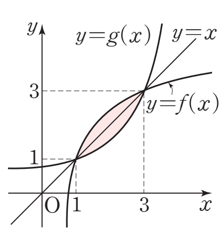
유형08 답 36



함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 $A=B$

$$\therefore\ \int_3^{12}f(x)\,dx+\int_0^3 g(x)\,dx$$
$$=A+C=B+C=3\times12=36$$

유형09 답 1

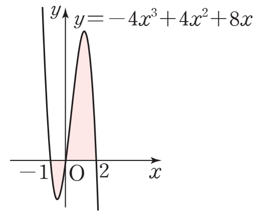


두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 도형의 넓이는

$$2\int_1^3\{f(x)-x\}\,dx$$
$$=2\int_1^3 f(x)\,dx-\int_1^3 2x\,dx$$
$$=2\times\frac{9}{2}-\Big[x^2\Big]_1^3=9-8=1$$

핵심 유형 **완성하기** 147~153쪽

001 답 $\frac{37}{3}$



곡선 $y=-4x^3+4x^2+8x$와 x축의 교점의 x좌표는

$-4x^3+4x^2+8x=0$에서

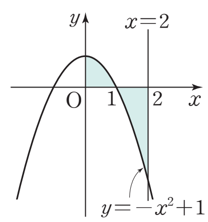
$-4x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{2}|-4x^3+4x^2+8x|\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(4x^3-4x^2-8x)\,dx+\int_0^2(-4x^3+4x^2+8x)\,dx$$
$$=\Big[x^4-\frac{4}{3}x^3-4x^2\Big]_{-1}^{0}+\Big[-x^4+\frac{4}{3}x^3+4x^2\Big]_0^2$$
$$=\frac{5}{3}+\frac{32}{3}=\frac{37}{3}$$

002 답 2



구간 $[0,\ 2]$에서 곡선 $y=-x^2+1$과 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+1=0$에서

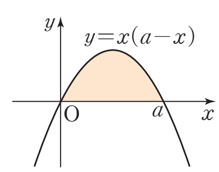
$(x+1)(x-1)=0$

$\therefore\ x=1\ (\because\ 0\le x\le 2)$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^2|-x^2+1|\,dx$$
$$=\int_0^1(-x^2+1)\,dx+\int_1^2(x^2-1)\,dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+x\Big]_0^1+\Big[\frac{1}{3}x^3-x\Big]_1^2$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$$

003 답 2



곡선 $y=x(a-x)$와 x축의 교점의 x좌표는 $x(a-x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=a$

$a>0$이므로 곡선 $y=x(a-x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^a|x(a-x)|\,dx=\int_0^a(ax-x^2)\,dx$$
$$=\Big[\frac{a}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\Big]_0^a=\frac{a^3}{6}$$

따라서 $\frac{a^3}{6}=\frac{4}{3}$이므로 $a^3=8\qquad\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

004 답 $\frac{71}{6}$

(가)에서 $f'(x)=-3x^2+2x+4$이므로

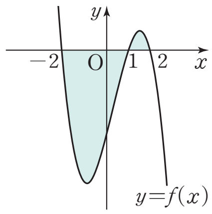
$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-3x^2+2x+4)\,dx$$
$$=-x^3+x^2+4x+C$$

(나)에서 $f(2)=0$이므로

$-8+4+8+C=0\qquad\therefore\ C=-4$

$\therefore\ f(x)=-x^3+x^2+4x-4$

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는



$-x^3+x^2+4x-4=0$에서

$-(x+2)(x-1)(x-2)=0$

∴ $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_{-2}^{2}|f(x)|\,dx$

$=\int_{-2}^{1}(x^3-x^2-4x+4)\,dx+\int_{1}^{2}(-x^3+x^2+4x-4)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_{-2}^{1}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+2x^2-4x\right]_{1}^{2}$

$=\frac{45}{4}+\frac{7}{12}=\frac{71}{6}$

005 답 7

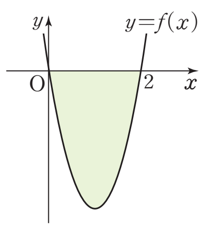
$\int_{3}^{x}f(t)\,dt=x^3-ax^2$의 양변에 $x=3$을 대입하면

$0=27-9a$ ∴ $a=3$

$\int_{3}^{x}f(t)\,dt=x^3-3x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-6x$

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는



$3x^2-6x=0$에서

$3x(x-2)=0$

∴ $x=0$ 또는 $x=2$

곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$S=\int_{0}^{2}|f(x)|\,dx=\int_{0}^{2}(-3x^2+6x)\,dx$

$=\left[-x^3+3x^2\right]_{0}^{2}=4$

∴ $a+S=3+4=7$

006 답 -6

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$\int_{-2}^{2}f(x)\,dx=2\int_{0}^{2}f(x)\,dx$

모든 실수 x에 대하여 $g(-x)=-g(x)$이면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$\int_{-2}^{2}g(x)\,dx=0$

∴ $\int_{-2}^{2}\{g(x)-f(x)\}\,dx=0-2\int_{0}^{2}f(x)\,dx=-2\times3=-6$

007 답 ④

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$\int_{-3}^{3}f(x)\,dx=2\int_{0}^{3}f(x)\,dx=2\int_{-3}^{0}f(x)\,dx$

008 답 ④

$\int_{-a}^{a}\left(x^3+2x+\frac{3}{2}\right)dx=2\int_{0}^{a}\frac{3}{2}\,dx=2\left[\frac{3}{2}x\right]_{0}^{a}=2\times\frac{3}{2}a=3a$

따라서 $3a=9$이므로 $a=3$

009 답 $-\frac{3}{2}$

$\int_{-1}^{1}x^2f(x)\,dx+\int_{-1}^{1}2xf(x)\,dx$

$=\int_{-1}^{1}(3x^3+ax^2)\,dx+\int_{-1}^{1}(6x^2+2ax)\,dx$

$=2\int_{0}^{1}ax^2\,dx+2\int_{0}^{1}6x^2\,dx=2\int_{0}^{1}(a+6)x^2\,dx$

$=2\left[\frac{a+6}{3}x^3\right]_{0}^{1}=2\times\frac{a+6}{3}=\frac{2}{3}a+4$

따라서 $\frac{2}{3}a+4=3$이므로 $a=-\frac{3}{2}$

010 답 ③

(가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=2\int_{-1}^{0}f(x)\,dx$

또 두 함수 $y=xf(x)$와 $y=x^3f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

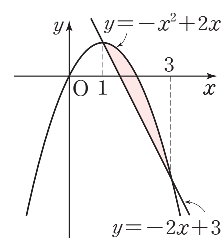
$\int_{-1}^{1}xf(x)\,dx=\int_{-1}^{1}x^3f(x)\,dx=0$

∴ $\int_{-1}^{1}(x^3+x+1)f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=2\int_{-1}^{0}f(x)\,dx$

$=2\times3=6$

011 답 $\frac{4}{3}$

곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=-2x+3$의 교점의 x좌표는 $-x^2+2x=-2x+3$에서



$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

∴ $x=1$ 또는 $x=3$

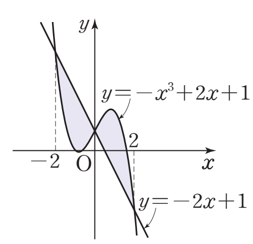
따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_{1}^{3}\{(-x^2+2x)-(-2x+3)\}\,dx=\int_{1}^{3}(-x^2+4x-3)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_{1}^{3}=\frac{4}{3}$

012 답 ④

곡선 $y=-x^3+2x+1$과 직선 $y=-2x+1$의 교점의 x좌표는



$-x^3+2x+1=-2x+1$에서

$x^3-4x=0$, $x(x+2)(x-2)=0$

∴ $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_{-2}^{0}\{(-2x+1)-(-x^3+2x+1)\}\,dx$

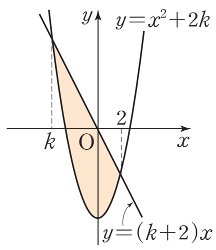
$+\int_{0}^{2}\{(-x^3+2x+1)-(-2x+1)\}\,dx$

$=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx+\int_{0}^{2}(-x^3+4x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_{0}^{2}=4+4=8$

013 답 -4

곡선 $y=x^2+2k$와 직선 $y=(k+2)x$의
교점의 x좌표는 $x^2+2k=(k+2)x$에서
$x^2-(k+2)x+2k=0$
$(x-k)(x-2)=0$
$\therefore\ x=k$ 또는 $x=2$



$k<2$이므로 곡선 $y=x^2+2k$와 직선
$y=(k+2)x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

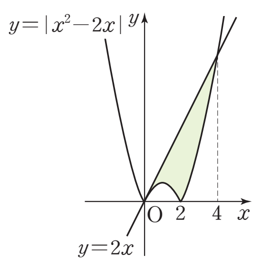
$$\int_k^2 \{(k+2)x-(x^2+2k)\}\,dx=\int_k^2 \{-x^2+(k+2)x-2k\}\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{k+2}{2}x^2-2kx\right]_k^2$$
$$=-\frac{1}{6}k^3+k^2-2k+\frac{4}{3}$$

따라서 $-\frac{1}{6}k^3+k^2-2k+\frac{4}{3}=36$이므로
$k^3-6k^2+12k+208=0$, $(k+4)(k^2-10k+52)=0$
$\therefore\ k=-4\ (\because\ k<2)$

014 답 ③

$$y=|x^2-2x|=\begin{cases} x^2-2x & (x\le 0 \text{ 또는 } x\ge 2) \\ -x^2+2x & (0\le x\le 2)\end{cases}$$ 이므로

$x\le 0$ 또는 $x\ge 2$에서 곡선 $y=x^2-2x$
와 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는
$x^2-2x=2x$에서
$x^2-4x=0$, $x(x-4)=0$
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=4$

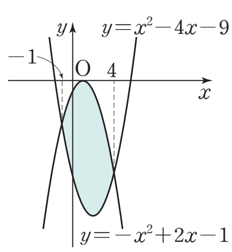


$0\le x\le 2$에서 곡선 $y=-x^2+2x$와 직
선 $y=2x$의 교점의 x좌표는
$-x^2+2x=2x$에서
$x^2=0$ $\quad\therefore\ x=0$
따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^2 \{2x-(-x^2+2x)\}\,dx+\int_2^4 \{2x-(x^2-2x)\}\,dx$$
$$=\int_0^2 x^2\,dx+\int_2^4 (-x^2+4x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_2^4=\frac{8}{3}+\frac{16}{3}=8$$

015 답 ⑤

두 곡선 $y=-x^2+2x-1$,
$y=x^2-4x-9$의 교점의 x좌표는
$-x^2+2x-1=x^2-4x-9$에서
$x^2-3x-4=0$
$(x+1)(x-4)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=4$

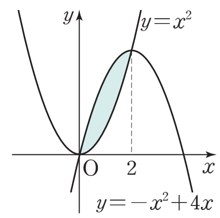


따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^4 \{(-x^2+2x-1)-(x^2-4x-9)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^4 (-2x^2+6x+8)\,dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2+8x\right]_{-1}^4=\frac{125}{3}$$

016 답 $\frac{8}{3}$

곡선 $y=x^2$을 원점에 대하여 대칭이동하면
$y=-x^2$
곡선 $y=-x^2$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면
$y=-(x-2)^2+4 \qquad \therefore\ y=-x^2+4x$
두 곡선 $y=x^2$과 $y=-x^2+4x$의 교점의
x좌표는 $x^2=-x^2+4x$에서
$2x^2-4x=0$, $2x(x-2)=0$
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^2 \{(-x^2+4x)-x^2\}\,dx=\int_0^2 (-2x^2+4x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_0^2$$
$$=\frac{8}{3}$$

017 답 ②

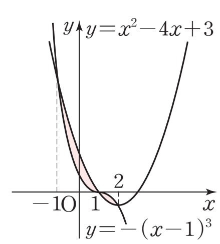
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표가 $x=-1$ 또는 $x=2$
이므로
$g(x)-f(x)=a(x+1)(x-2)$ (a는 상수)
라고 하면 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^2 \{g(x)-f(x)\}\,dx=\int_{-1}^2 a(x+1)(x-2)\,dx$$
$$=\int_{-1}^2 (ax^2-ax-2a)\,dx$$
$$=\left[\frac{a}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2-2ax\right]_{-1}^2$$
$$=-\frac{9}{2}a$$

따라서 $-\frac{9}{2}a=18$이므로 $a=-4$
$g(x)-f(x)=-4(x+1)(x-2)$이므로
$g(1)-f(1)=-4\times 2\times(-1)=8$

018 답 ③

두 곡선 $y=x^2-4x+3$, $y=-(x-1)^3$의
교점의 x좌표는
$x^2-4x+3=-(x-1)^3$에서
$x^3-2x^2-x+2=0$
$(x+1)(x-1)(x-2)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$



구간 $[-1,\ 1]$에서 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^1 \{(x^2-4x+3)+(x-1)^3\}\,dx=\int_{-1}^1 (x^3-2x^2-x+2)\,dx$$
$$=2\int_0^1 (-2x^2+2)\,dx$$
$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^1$$
$$=2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

09

구간 [1, 2]에서 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

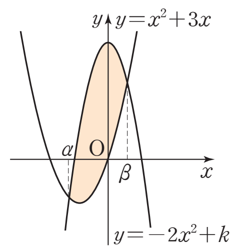
$\int_1^2\{-(x-1)^3-(x^2-4x+3)\}\,dx$

$=\int_1^2(-x^3+2x^2+x-2)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_1^2=\frac{5}{12}$

따라서 두 도형의 넓이의 차는 $\frac{8}{3}-\frac{5}{12}=\frac{9}{4}$

019 답 6



두 곡선 $y=x^2+3x$, $y=-2x^2+k$의 교점의 x좌표는 $x^2+3x=-2x^2+k$에서

$3x^2+3x-k=0$ …… ㉠

㉠의 두 근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라고 하면

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-\frac{k}{3}$이므로

$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{1+\frac{4}{3}k}$

두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_\alpha^\beta\{(-2x^2+k)-(x^2+3x)\}\,dx$

$=\int_\alpha^\beta(-3x^2-3x+k)\,dx$

$=\left[-x^3-\frac{3}{2}x^2+kx\right]_\alpha^\beta$

$=-(\beta^3-\alpha^3)-\frac{3}{2}(\beta^2-\alpha^2)+k(\beta-\alpha)$

$=-(\beta-\alpha)\left\{(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)+\frac{3}{2}(\alpha+\beta)-k\right\}$

$=-(\beta-\alpha)\left\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+\frac{3}{2}(\alpha+\beta)-k\right\}$

$=-\sqrt{1+\frac{4}{3}k}\left\{(-1)^2+\frac{k}{3}+\frac{3}{2}\times(-1)-k\right\}$

$=\sqrt{1+\frac{4}{3}k}\left(\frac{2}{3}k+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{4}{3}k}\left(1+\frac{4}{3}k\right)$

따라서 $\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{4}{3}k}\left(1+\frac{4}{3}k\right)=\frac{27}{2}$이므로 양변을 제곱하면

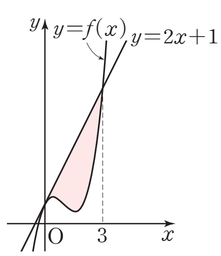
$\frac{1}{4}\left(1+\frac{4}{3}k\right)\left(1+\frac{4}{3}k\right)^2=\frac{3^6}{4}$, $\left(1+\frac{4}{3}k\right)^3=9^3$

$1+\frac{4}{3}k=9$ ($\because k>1$) $\therefore k=6$

020 답 ②

$f(x)=x^3-3x^2+2x+1$이라고 하면 $f'(x)=3x^2-6x+2$이므로 점 (0, 1)에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=2$이고, 접선의 방정식은

$y=2x+1$



곡선 $y=x^3-3x^2+2x+1$과 접선 $y=2x+1$의 교점의 x좌표는

$x^3-3x^2+2x+1=2x+1$에서

$x^3-3x^2=0$, $x^2(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_0^3\{(2x+1)-(x^3-3x^2+2x+1)\}\,dx$

$=\int_0^3(-x^3+3x^2)\,dx=\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_0^3=\frac{27}{4}$

021 답 $\frac{1}{3}$

$f(x)=x^2-3x+1$이라고 하면 $f'(x)=2x-3$

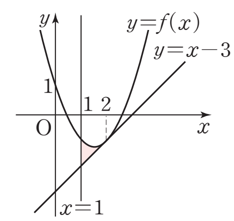
접점의 좌표를 $(t,\ t^2-3t+1)$이라고 하면 접선의 기울기가 1이므로

$2t-3=1$ $\therefore t=2$

따라서 접점의 좌표가 $(2,\ -1)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-1)=x-2$

$\therefore y=x-3$



따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_1^2\{(x^2-3x+1)-(x-3)\}\,dx$

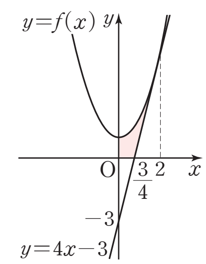
$=\int_1^2(x^2-4x+4)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_1^2=\frac{1}{3}$

022 답 61

$f(x)=x^2+1$이라고 하면 $f'(x)=2x$이므로 점 (2, 5)에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4$이고, 접선의 방정식은

$y-5=4(x-2)$ $\therefore y=4x-3$



따라서 도형의 넓이 S는

$S=\int_0^2\{(x^2+1)-(4x-3)\}\,dx-\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times3$

$=\int_0^2(x^2-4x+4)\,dx-\frac{9}{8}$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_0^2-\frac{9}{8}$

$=\frac{8}{3}-\frac{9}{8}=\frac{37}{24}$

따라서 $p=24$, $q=37$이므로

$p+q=24+37=61$

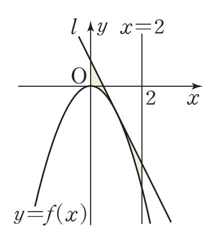
023 답 $\frac{2}{3}$

$f(x)=-x^2$이라고 하면 $f'(x)=-2x$이므로 점 $(a,\ -a^2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=-2a$이고, 접선의 방정식은

$y-(-a^2)=-2a(x-a)$

$\therefore y=-2ax+a^2$

$0\le a\le2$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라고 하면



$S=\int_0^2\{(-2ax+a^2)-(-x^2)\}\,dx$

$=\int_0^2(x^2-2ax+a^2)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-ax^2+a^2x\right]_0^2$

$=2a^2-4a+\frac{8}{3}$

$=2(a-1)^2+\frac{2}{3}$

따라서 $0\le a\le2$에서 구하는 넓이의 최솟값은 $\frac{2}{3}$이다.

024 답 ⑤

$f(x)=x^2$이라고 하면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2)$이라고 하면 접선의 방정식은

$y-t^2=2t(x-t)\qquad \therefore\ y=2tx-t^2$

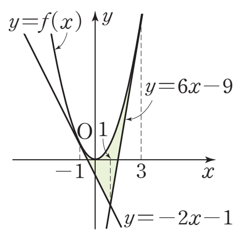
이 접선이 점 $(1,\ -3)$을 지나므로

$-3=2t-t^2,\ t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0\qquad \therefore\ t=-1$ 또는 $t=3$

따라서 접선의 방정식은

$y=-2x-1$ 또는 $y=6x-9$



구하는 도형의 넓이는

$\displaystyle\int_{-1}^{1}\{x^2-(-2x-1)\}\,dx$

$\displaystyle\qquad+\int_{1}^{3}\{x^2-(6x-9)\}\,dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)\,dx+\int_{1}^{3}(x^2-6x+9)\,dx$

$\displaystyle=2\int_{0}^{1}(x^2+1)\,dx+\int_{1}^{3}(x^2-6x+9)\,dx$

$\displaystyle=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_1^3$

$\displaystyle=2\times\frac{4}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$

025 답 3

두 도형의 넓이가 같으므로

$\displaystyle\int_{-1}^{a}(x^2-1)(x-a)\,dx=0$

$\displaystyle\int_{-1}^{a}(x^3-ax^2-x+a)\,dx=0$

$\displaystyle\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_{-1}^{a}=0$

$\displaystyle-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}a+\frac{1}{4}=0,\ a^4-6a^2-8a-3=0$

$(a+1)^3(a-3)=0\qquad \therefore\ a=3\ (\because\ a>1)$

026 답 6

두 도형의 넓이가 같으므로

$\displaystyle\int_{0}^{3}(x^2-6x+k)\,dx=0$

$\displaystyle\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+kx\right]_0^3=0$

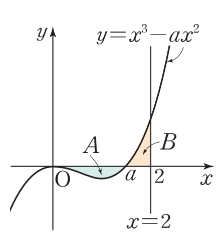
$3k-18=0\qquad \therefore\ k=6$

027 답 $\frac{3}{2}$

곡선 $y=x^3-ax^2$과 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-ax^2=0$에서

$x^2(x-a)=0\qquad \therefore\ x=0$ 또는 $x=a$

$A=B$이므로



$\displaystyle\int_{0}^{2}(x^3-ax^2)\,dx=0$

$\displaystyle\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3\right]_0^2=0$

$\displaystyle4-\frac{8}{3}a=0\qquad \therefore\ a=\frac{3}{2}$

028 답 $\frac{1}{3}$

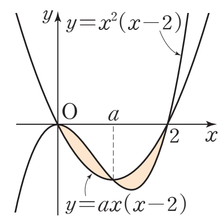
$A=B$이므로

$\displaystyle\int_{0}^{1}(x^2-a)\,dx=0,\ \left[\frac{1}{3}x^3-ax\right]_0^1=0$

$\displaystyle\frac{1}{3}-a=0\qquad \therefore\ a=\frac{1}{3}$

029 답 1

두 곡선 $y=x^2(x-2),\ y=ax(x-2)$의 교점의 x좌표는



$x^2(x-2)=ax(x-2)$에서

$x(x-a)(x-2)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=a$ 또는 $x=2$

두 도형의 넓이가 같으므로

$\displaystyle\int_{0}^{2}\{x^2(x-2)-ax(x-2)\}\,dx=0$

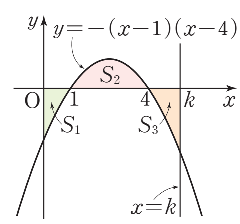
$\displaystyle\int_{0}^{2}\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}\,dx=0$

$\displaystyle\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+2}{3}x^3+ax^2\right]_0^2=0$

$\displaystyle\frac{4}{3}a-\frac{4}{3}=0\qquad \therefore\ a=1$

030 답 24

$S_2=S_1+S_3$이므로



$\displaystyle\int_{0}^{k}\{-(x-1)(x-4)\}\,dx=0$

$\displaystyle\int_{0}^{k}(-x^2+5x-4)\,dx=0$

$\displaystyle\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x\right]_0^k=0$

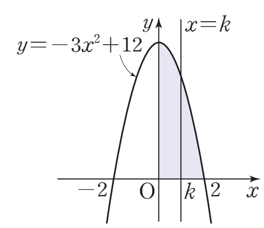
$\displaystyle-\frac{1}{3}k^3+\frac{5}{2}k^2-4k=0,\ k(2k^2-15k+24)=0$

$k\neq0$이므로 $2k^2-15k+24=0$

$\therefore\ 15k-2k^2=24$

031 답 8

곡선 $y=-3x^2+12$와 x축의 교점의 x좌표는 $-3x^2+12=0$에서



$x^2-4=0,\ (x+2)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=2$

곡선 $y=-3x^2+12$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형 중 제1사분면에 있는 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분하므로

$\displaystyle\int_{0}^{2}(-3x^2+12)\,dx=2\int_{0}^{k}(-3x^2+12)\,dx\qquad\cdots\cdots\ ㉠$

㉠의 좌변에서

$\displaystyle\int_{0}^{2}(-3x^2+12)\,dx=\left[-x^3+12x\right]_0^2=16$

㉠의 우변에서

$\displaystyle2\int_{0}^{k}(-3x^2+12)\,dx=2\left[-x^3+12x\right]_0^k$

$\qquad\qquad=2(-k^3+12k)=-2k^3+24k$

따라서 $16=-2k^3+24k$이므로 $12k-k^3=8$

032 답 5

$S_2=\int_0^1 x^5\,dx=\left[\frac{1}{6}x^6\right]_0^1=\frac{1}{6}$

$S_1=1-S_2=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}}=5$

033 답 6

$A=\int_1^3 f'(x)\,dx=3,\ B=\int_3^6\{-f'(x)\}\,dx=5$이므로

$\int_1^3 f'(x)\,dx=3,\ \int_3^6 f'(x)\,dx=-5$

$\therefore \int_1^6 f'(x)\,dx=\int_1^3 f'(x)\,dx+\int_3^6 f'(x)\,dx$

$=3+(-5)=-2$

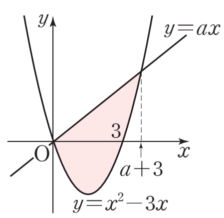
이때 $\int_1^6 f'(x)\,dx=\Big[f(x)\Big]_1^6=f(6)-f(1)$이므로

$f(6)-f(1)=-2$

$f(6)=4$에서

$4-f(1)=-2 \qquad \therefore f(1)=6$

034 답 54



곡선 $y=x^2-3x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는 $x^2-3x=ax$에서

$x^2-(a+3)x=0$

$x\{x-(a+3)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a+3$

곡선 $y=x^2-3x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-3x=0$에서

$x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

곡선 $y=x^2-3x$와 직선 $y=ax$로 둘러싸인 도형의 넓이를 x축이 이등분하므로

$\int_0^{a+3}\{ax-(x^2-3x)\}\,dx=2\int_0^3(-x^2+3x)\,dx \qquad \cdots\cdots ㉠$

㉠의 좌변에서

$\int_0^{a+3}\{ax-(x^2-3x)\}\,dx=\int_0^{a+3}\{-x^2+(a+3)x\}\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a+3}{2}x^2\right]_0^{a+3}$

$=\frac{(a+3)^3}{6}$

㉠의 우변에서

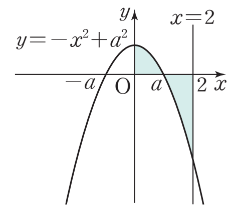
$2\int_0^3(-x^2+3x)\,dx=2\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3$

$=2\times\frac{9}{2}=9$

따라서 $\frac{(a+3)^3}{6}=9$이므로

$(a+3)^3=54$

035 답 ①



곡선 $y=-x^2+a^2$과 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+a^2=0$에서

$(x+a)(x-a)=0$

$\therefore x=-a$ 또는 $x=a$

$0<a<2$이므로 곡선 $y=-x^2+a^2$과 x축 및 두 직선 $x=0,\ x=2$로 둘러싸인 두 도형의 넓이의 합을 $S(a)$라고 하면

$S(a)=\int_0^a(-x^2+a^2)\,dx+\int_a^2(x^2-a^2)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+a^2x\right]_0^a+\left[\frac{1}{3}x^3-a^2x\right]_a^2$

$=\frac{2}{3}a^3+\left(\frac{8}{3}-2a^2+\frac{2}{3}a^3\right)$

$=\frac{4}{3}a^3-2a^2+\frac{8}{3}$

$\therefore S'(a)=4a^2-4a=4a(a-1)$

$S'(a)=0$인 a의 값은 $a=1$ ($\because 0<a<2$)

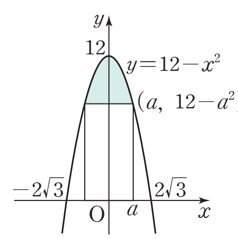
$0<a<2$에서 함수 $S(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	극소	↗	

따라서 함수 $S(a)$는 $a=1$에서 최소이므로 최솟값은

$S(1)=\frac{4}{3}-2+\frac{8}{3}=2$

036 답 $\frac{32}{3}$



오른쪽 그림과 같이 제1사분면 위의 직사각형의 꼭짓점의 좌표를 $(a,\ 12-a^2)$ $(0<a<2\sqrt{3})$이라고 할 때, 내접하는 직사각형의 넓이를 $f(a)$라고 하면

$f(a)=2a(12-a^2)$

$=-2a^3+24a$

$\therefore f'(a)=-6a^2+24$

$=-6(a+2)(a-2)$

$f'(a)=0$인 a의 값은 $a=2$ ($\because 0<a<2\sqrt{3}$)

$0<a<2\sqrt{3}$에서 함수 $f(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{3}$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		↗	극대	↘	

따라서 $f(a)$는 $a=2$일 때 최대이다.

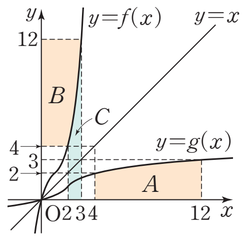
이때의 색칠한 부분의 넓이는 곡선 $y=12-x^2$과 직선 $y=12-a^2$, 즉 $y=8$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$\int_{-2}^2(12-x^2-8)\,dx=2\int_0^2(-x^2+4)\,dx$

$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_0^2=\frac{32}{3}$

037 답 28

함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서



$A=B$

$\therefore \int_{2}^{3} f(x)\,dx+\int_{4}^{12} g(x)\,dx$

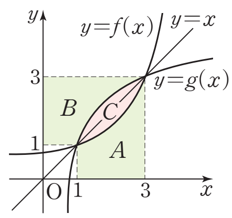
$=C+A$

$=C+B$

$=3\times12-2\times4=28$

038 답 ③

함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, $f(1)=1$, $f(3)=3$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다고 하면



$A=B$

$\therefore \int_{1}^{3} g(x)\,dx=A+C$

$=3\times3-1\times1-B$

$=8-B=8-A$

$=8-\int_{1}^{3} f(x)\,dx$

$=8-\dfrac{7}{2}=\dfrac{9}{2}$

039 답 $\dfrac{65}{12}$

$g(9)=a$라고 하면 $f(a)=9$이므로

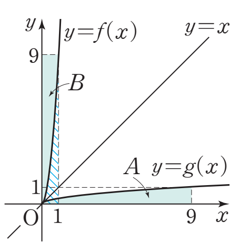
$a(a+2)^2=9$

$a^3+4a^2+4a-9=0$

$(a-1)(a^2+5a+9)=0$

$\therefore a=1\ (\because a\geq0)$

함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서



$A=B$

$\therefore \int_{0}^{9} g(x)\,dx=A$

$=B$

$=1\times9-$(빗금친 도형의 넓이)

$=9-\int_{0}^{1} f(x)\,dx=9-\int_{0}^{1} x(x+2)^2\,dx$

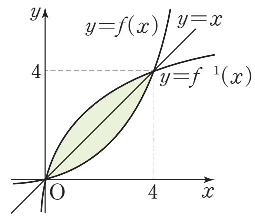
$=9-\int_{0}^{1}(x^3+4x^2+4x)\,dx$

$=9-\left[\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{4}{3}x^3+2x^2\right]_0^1$

$=9-\dfrac{43}{12}=\dfrac{65}{12}$

040 답 4

두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 도형의 넓이는



$2\int_{0}^{4}\{x-f(x)\}\,dx$

$=\int_{0}^{4} 2x\,dx-2\int_{0}^{4} f(x)\,dx$

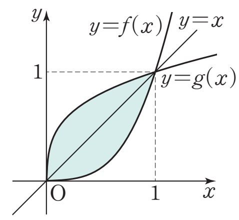
$=\left[x^2\right]_0^4-2\times6$

$=16-12=4$

041 답 $\dfrac{1}{2}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점은 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점과 같으므로 $x^3=x$에서



$x^3-x=0$

$x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1\ (\because x\geq0)$

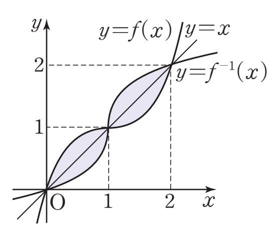
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 도형의 넓이는

$2\int_{0}^{1}(x-x^3)\,dx=2\left[\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{4}x^4\right]_0^1$

$=2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$

042 답 $\dfrac{2}{3}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 도형의 넓이는



$2\int_{0}^{2}|f(x)-x|\,dx$

$=2\left[\int_{0}^{1}\{f(x)-x\}\,dx+\int_{1}^{2}\{x-f(x)\}\,dx\right]$

이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

$\int_{0}^{1}\{f(x)-x\}\,dx=\int_{1}^{2}\{x-f(x)\}\,dx$

$\therefore 2\int_{0}^{2}|f(x)-x|\,dx=4\int_{0}^{1}\{f(x)-x\}\,dx$

$=4\int_{0}^{1} f(x)\,dx-\int_{0}^{1} 4x\,dx$

$=4\times\dfrac{2}{3}-\left[2x^2\right]_0^1=\dfrac{8}{3}-2=\dfrac{2}{3}$

핵심 유형 154쪽

유형10 답 ②

$v(t)=0$일 때 점 P가 움직이는 방향이 바뀌므로

$t^2-9=0$, $(t+3)(t-3)=0$

$\therefore t=3$ ($\because t>0$)

따라서 $t=3$에서 점 P의 위치는

$$\int_0^3 (t^2-9)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-9t\right]_0^3=-18$$

유형11 답 18

점 P가 출발한 후 다시 원점을 지나는 시각을 $t=a$라고 하면

$$\int_0^a (6-2t)\,dt=0$$

$$\left[6t-t^2\right]_0^a=0$$

$6a-a^2=0$, $a(6-a)=0$

$\therefore a=6$ ($\because a>0$)

따라서 점 P가 $t=6$까지 움직인 거리는

$$\int_0^6 |6-2t|\,dt=\int_0^3 (6-2t)\,dt+\int_3^6 (-6+2t)\,dt$$

$$=\left[6t-t^2\right]_0^3+\left[-6t+t^2\right]_3^6=9+9=18$$

유형12 답 4

$$a=\int_0^3 v(t)\,dt=\int_0^2 v(t)\,dt+\int_2^3 v(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\times(1+2)\times1-\frac{1}{2}\times1\times1=1$$

$$b=\int_0^4 |v(t)|\,dt=\int_0^2 v(t)\,dt+\int_2^4 \{-v(t)\}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\times(1+2)\times1+\frac{1}{2}\times(1+2)\times1=3$$

$\therefore a+b=1+3=4$

핵심 유형 완성하기 155~157쪽

043 답 -9

$v(t)=0$일 때 점 P가 움직이는 방향이 바뀌므로

$t^2-2t-3=0$, $(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=3$ ($\because t>0$)

따라서 $t=3$에서 점 P의 위치는

$$\int_0^3 (t^2-2t-3)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2-3t\right]_0^3=-9$$

044 답 ③

출발한 지 35분이 되었을 때, 열기구의 높이는

$$\int_0^{35} v(t)\,dt=\int_0^{20} t\,dt+\int_{20}^{35} (60-2t)\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{20}+\left[60t-t^2\right]_{20}^{35}$$

$$=200+75=275(\mathrm{m})$$

045 답 ②

점 P가 다시 원점으로 돌아오는 시각을 $t=a$라고 하면

$$\int_0^a (4t-2t^2)\,dt=0$$

$$\left[2t^2-\frac{2}{3}t^3\right]_0^a=0$$

$2a^2-\frac{2}{3}a^3=0$, $-\frac{2}{3}a^2(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

따라서 점 P가 출발한 후 다시 원점으로 돌아올 때까지 걸린 시간은 3초이다.

046 답 3초

두 점 P_1, P_2가 만나려면 위치가 같아야 하므로 두 점이 다시 만나는 시각을 $t=a$라고 하면

$$\int_0^a (2t^2-4t+1)\,dt=\int_0^a (-t^2+8t-8)\,dt$$

$$\left[\frac{2}{3}t^3-2t^2+t\right]_0^a=\left[-\frac{1}{3}t^3+4t^2-8t\right]_0^a$$

$$\frac{2}{3}a^3-2a^2+a=-\frac{1}{3}a^3+4a^2-8a$$

$a^3-6a^2+9a=0$, $a(a-3)^2=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

따라서 두 점 P_1, P_2가 다시 만나는 시각은 3초 후이다.

047 답 -30

시각 $t=a$에서 점 P의 위치는

$$-80+\int_0^a (20-4t)\,dt=-80+\left[20t-2t^2\right]_0^a$$

$$=-2a^2+20a-80$$

$$=-2(a-5)^2-30$$

따라서 점 P는 $t=5$일 때 원점에서 가장 가까이에 있으며 그때의 점 P의 위치는 -30이다.

048 답 3

두 점 P, Q가 만나려면 위치가 같아야 하므로 두 점이 만나는 시각을 $t=a$라고 하면

$$\int_0^a (4t+7)\,dt=-3+\int_0^a (3t^2-8t+16)\,dt$$

$$\left[2t^2+7t\right]_0^a=-3+\left[t^3-4t^2+16t\right]_0^a$$

$2a^2+7a=-3+a^3-4a^2+16a$

$\therefore a^3-6a^2+9a-3=0$ …… ㉠

$f(a)=a^3-6a^2+9a-3$이라고 하면

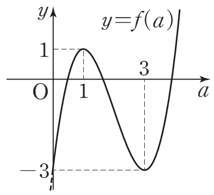
$f'(a)=3a^2-12a+9=3(a-1)(a-3)$

$f'(a)=0$인 a의 값은 $a=1$ 또는 $a=3$

$a>0$에서 함수 $f(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(a)$		↗	1 극대	↘	-3 극소	↗

따라서 $a>0$에서 함수 $y=f(a)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 $a>0$에서 함수 $y=f(a)$의 그래프는 a축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 삼차방정식 ㉠의 실근은 3개이다.

즉, 두 점 P, Q는 3회 만난다.

049 답 ③

점 P가 출발한 후 다시 원점을 지나는 시각을 $t=a$라고 하면

$$\int_0^a (t^3-3t^2)\,dt=0,\ \left[\frac{1}{4}t^4-t^3\right]_0^a=0$$

$$\frac{1}{4}a^4-a^3=0,\ \frac{1}{4}a^3(a-4)=0$$

$\therefore\ a=4\ (\because\ a>0)$

따라서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^4 |t^3-3t^2|\,dt&=\int_0^3(-t^3+3t^2)\,dt+\int_3^4(t^3-3t^2)\,dt\\&=\left[-\frac{1}{4}t^4+t^3\right]_0^3+\left[\frac{1}{4}t^4-t^3\right]_3^4\\&=\frac{27}{4}+\frac{27}{4}=\frac{27}{2}\end{aligned}$$

050 답 5 m

최고 지점에 도달했을 때 $v(t)=0$이므로

$30-10t=0 \qquad \therefore\ t=3$

따라서 3초부터 4초까지 공이 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_3^4 |30-10t|\,dt&=\int_3^4(-30+10t)\,dt\\&=\left[-30t+5t^2\right]_3^4=5(\text{m})\end{aligned}$$

051 답 $\frac{9}{2}$

출발할 때의 속도는 $v(0)=-4<0$이므로 출발할 때의 운동 방향과 반대 방향으로 움직인 구간은 $v(t)>0$에서

$-t^2+5t-4>0,\ t^2-5t+4<0$

$(t-1)(t-4)<0 \qquad \therefore\ 1<t<4$

따라서 구하는 거리는

$$\begin{aligned}\int_1^4 |-t^2+5t-4|\,dt&=\int_1^4(-t^2+5t-4)\,dt\\&=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2-4t\right]_1^4=\frac{9}{2}\end{aligned}$$

052 답 192π cm^3

$v(t)=0$일 때 용액이 멈추므로

$8t-2t^2=0,\ -2t(t-4)=0$

$\therefore\ t=4\ (\because\ t>0)$

구멍의 넓이가 9π cm^{2}이므로 흘러나온 A 용액의 양은

$$\begin{aligned}9\pi\times\int_0^4|8t-2t^2|\,dt&=9\pi\int_0^4(8t-2t^2)\,dt\\&=9\pi\left[4t^2-\frac{2}{3}t^3\right]_0^4\\&=9\pi\times\frac{64}{3}=192\pi(\text{cm}^3)\end{aligned}$$

053 답 $\frac{33}{2}$

점 P가 출발한 후 $t=6$에서 원점을 지나므로

$$\int_0^6 v(t)\,dt=0$$

$$\int_0^2(-3t^2)\,dt+\int_2^6\{a(t-2)-12\}\,dt=0$$

$$\left[-t^3\right]_0^2+\left[\frac{a}{2}t^2-(2a+12)t\right]_2^6=0$$

$-8+(8a-48)=0 \qquad \therefore\ a=7$

따라서 $v(t)=\begin{cases}-3t^2 & (0\le t\le 2)\\ 7t-26 & (t\ge 2)\end{cases}$이므로 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^3|v(t)|\,dt&=\int_0^2 3t^2\,dt+\int_2^3(-7t+26)\,dt\\&=\left[t^3\right]_0^2+\left[-\frac{7}{2}t^2+26t\right]_2^3=8+\frac{17}{2}=\frac{33}{2}\end{aligned}$$

054 답 24

시각 t에서 점 P의 좌표는

$$\int_0^t(6t^2+2t+2)\,dt=\left[2t^3+t^2+2t\right]_0^t=2t^3+t^2+2t$$

시각 t에서 점 Q의 좌표는

$$\int_0^t(3t^2+4t-5)\,dt=\left[t^3+2t^2-5t\right]_0^t=t^3+2t^2-5t$$

두 점 P$(2t^3+t^2+2t)$, Q(t^3+2t^2-5t)에 대하여 선분 PQ를 2 : 1로 외분하는 점 R의 좌표는

$$\frac{2(t^3+2t^2-5t)-(2t^3+t^2+2t)}{2-1}=3t^2-12t$$

점 R가 다시 원점을 지날 때의 시각은

$3t^2-12t=0,\ 3t(t-4)=0$

$\therefore\ t=4\ (\because\ t>0)$

점 R의 속도는 $(3t^2-12t)'=6t-12$이므로 구하는 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^4|6t-12|\,dt&=\int_0^2(-6t+12)\,dt+\int_2^4(6t-12)\,dt\\&=\left[-3t^2+12t\right]_0^2+\left[3t^2-12t\right]_2^4\\&=12+12=24\end{aligned}$$

055 답 2

$$\begin{aligned}a&=\int_0^5 v(t)\,dt=\int_0^2 v(t)\,dt+\int_2^5 v(t)\,dt\\&=-\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{1}{2}\times3\times2=2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b&=\int_0^5|v(t)|\,dt=\int_0^2\{-v(t)\}\,dt+\int_2^5 v(t)\,dt\\&=\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{1}{2}\times3\times2=4\end{aligned}$$

$\therefore\ b-a=4-2=2$

056 답 28 m

지상에서 옥상까지의 높이는 10초일 때 엘리베이터의 위치와 같으므로

$$\int_0^{10}v(t)\,dt=\frac{1}{2}\times(4+10)\times4=28(\text{m})$$

057 답 8초

원점으로 돌아오는 시각을 $t=a$라고 하면 $\int_0^a v(t)\,dt=0$이다.

$\int_0^4 v(t)\,dt=\frac{1}{2}\times4\times3=6$, $\int_4^6 v(t)\,dt=-\frac{1}{2}\times2\times2=-2$,

$\int_6^8 v(t)\,dt=-2\times2=-4$

즉, $\int_0^4 v(t)\,dt+\int_4^6 v(t)\,dt+\int_6^8 v(t)\,dt=0$이므로

$\int_0^8 v(t)\,dt=0$

따라서 점 P는 출발하고 8초 후 원점으로 다시 돌아온다.

058 답 $\frac{1}{6}$

$t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v(t)|\,dt=\int_0^2 v(t)\,dt+\int_2^3 \{-v(t)\}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{1}{2}\times1\times(-a)=-\frac{1}{2}a+1$$

따라서 $-\frac{1}{2}a+1=\frac{4}{3}$이므로 $a=-\frac{2}{3}$

$t=6$에서 점 P의 위치는

$$\int_0^6 v(t)\,dt=\int_0^2 v(t)\,dt+\int_2^5 v(t)\,dt+\int_5^6 v(t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\times2\times1-\frac{1}{2}\times(3+1)\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{6}$$

059 답 ㄱ

ㄱ. $v(t)=0$일 때 정지하므로 $t=1$에서 처음 정지한다.
$t=0$에서 $t=1$까지 물체가 움직인 거리는
$\int_0^1 |v(t)|\,dt=\frac{1}{2}\times1\times2=1$

ㄴ. $v(t)=0$이고 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 물체는 $t=3$에서 한 번 운동 방향을 바꾼다.

ㄷ. $t=6$일 때 물체의 위치는

$$\int_0^6 v(t)\,dt=\int_0^1 v(t)\,dt+\int_1^3 v(t)\,dt+\int_3^6 v(t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times2+\frac{1}{2}\times2\times1-\frac{1}{2}\times(3+1)\times1=0$$

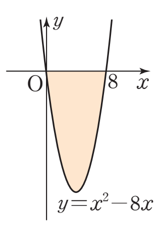
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ이다.

핵심 유형 최종 점검하기 • 158~160쪽

1 답 $24\sqrt{6}$

유형 01 곡선과 x축 사이의 넓이

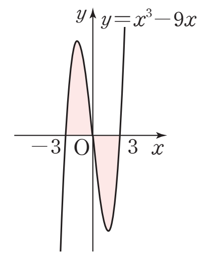
곡선 $y=x^2-8x$와 x축의 교점의 x좌표는
$x^2-8x=0$에서
$x(x-8)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=8$



곡선 $y=x^2-8x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S_1은

$$S_1=\int_0^8 |x^2-8x|\,dx=\int_0^8 (-x^2+8x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+4x^2\right]_0^8=\frac{256}{3}$$

곡선 $y=x^3-9x$와 x축의 교점의 x좌표는
$x^3-9x=0$에서
$x(x+3)(x-3)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$



곡선 $y=x^3-9x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S_2는

$$S_2=\int_{-3}^3 |x^3-9x|\,dx$$
$$=\int_{-3}^0 (x^3-9x)\,dx+\int_0^3 (-x^3+9x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{2}x^2\right]_{-3}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{9}{2}x^2\right]_0^3=\frac{81}{4}+\frac{81}{4}=\frac{81}{2}$$

$\therefore \sqrt{S_1S_2}=\sqrt{\frac{256}{3}\times\frac{81}{2}}=24\sqrt{6}$

2 답 ②

유형 01 곡선과 x축 사이의 넓이

$f'(x)=x^2-4$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (x^2-4)\,dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-4x+C$$

$f(0)=0$에서 $C=0$

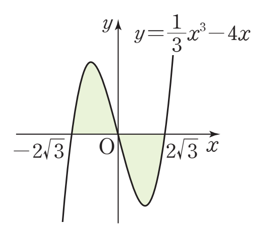
$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는

$\frac{1}{3}x^3-4x=0$에서

$\frac{1}{3}x(x^2-12)=0$

$\therefore x=-2\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2\sqrt{3}$



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left|\frac{1}{3}x^3-4x\right|\,dx$$
$$=\int_{-2\sqrt{3}}^0 \left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)dx+\int_0^{2\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{3}x^3+4x\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{12}x^4-2x^2\right]_{-2\sqrt{3}}^0+\left[-\frac{1}{12}x^4+2x^2\right]_0^{2\sqrt{3}}$$
$$=12+12=24$$

3 답 ①

유형 02 그래프가 대칭인 함수의 정적분

$$\int_{-1}^1 xf(x)\,dx=\int_{-1}^1 (ax^2+bx)\,dx$$
$$=2\int_0^1 ax^2\,dx=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}a$$

따라서 $\frac{2}{3}a=1$이므로 $a=\frac{3}{2}$

$$\int_{-1}^1 x^2f(x)\,dx=\int_{-1}^1 (ax^3+bx^2)\,dx$$
$$=2\int_0^1 bx^2\,dx=2\left[\frac{b}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}b$$

따라서 $\frac{2}{3}b=-2$이므로 $b=-3$

$\therefore 4(a+b)=4\left\{\frac{3}{2}+(-3)\right\}=-6$

4 답 ④

유형 02 그래프가 대칭인 함수의 정적분

(다)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-4}^{4}f(x)\,dx=2\int_{0}^{4}f(x)\,dx\ (\because (다))$$
$$=2\left\{\int_{0}^{2}f(x)\,dx+\int_{2}^{4}f(x)\,dx\right\}$$
$$=2\left\{\int_{0}^{2}f(x)\,dx+\int_{0}^{2}f(x)\,dx\right\}\ (\because (나))$$
$$=4\int_{0}^{2}f(x)\,dx=4\left\{\int_{0}^{1}f(x)\,dx+\int_{1}^{2}f(x)\,dx\right\}$$
$$=4\left\{\int_{0}^{1}f(x)\,dx+\int_{-1}^{0}f(x)\,dx\right\}\ (\because (나))$$
$$=4\left\{\int_{0}^{1}f(x)\,dx+\int_{0}^{1}f(x)\,dx\right\}\ (\because (다))$$
$$=8\int_{0}^{1}f(x)\,dx=8\times3=24$$

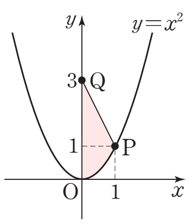
5 답 ⑤

유형 03 곡선과 직선 사이의 넓이

직선 PQ의 기울기는 $\frac{3-1}{0-1}=-2$이므로 직선의 방정식은

$y=-2x+3$

따라서 선분 PQ와 곡선 $y=x^2$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\int_{0}^{1}\{(-2x+3)-x^2\}\,dx$$
$$=\int_{0}^{1}(-x^2-2x+3)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{0}^{1}=\frac{5}{3}$$

6 답 $\frac{27}{2}$

유형 04 두 곡선 사이의 넓이

두 곡선 $y=2x^2-x-4$,

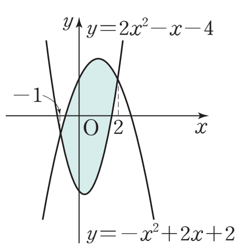
$y=-x^2+2x+2$의 교점의 x좌표는

$2x^2-x-4=-x^2+2x+2$에서

$x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{2}\{(-x^2+2x+2)-(2x^2-x-4)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-3x^2+3x+6)\,dx$$
$$=\left[-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x\right]_{-1}^{2}=\frac{27}{2}$$

7 답 ①

유형 05 곡선과 접선 사이의 넓이

$f(x)=-x^3-3x^2-x+1$이라고 하면 $f'(x)=-3x^2-6x-1$이므로 점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=-1$이고, 접선의 방정식은

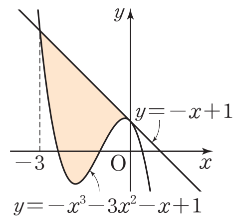
$y=-x+1$

곡선 $y=-x^3-3x^2-x+1$과 접선 $y=-x+1$의 교점의 x좌표는

$-x^3-3x^2-x+1=-x+1$에서

$x^3+3x^2=0,\ x^2(x+3)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=0$



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-3}^{0}\{(-x+1)-(-x^3-3x^2-x+1)\}\,dx$$
$$=\int_{-3}^{0}(x^3+3x^2)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_{-3}^{0}=\frac{27}{4}$$

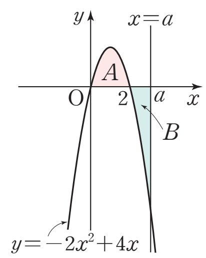
8 답 3

유형 06 두 도형의 넓이가 같을 조건

곡선 $y=-2x^2+4x$와 x축의 교점의 x좌표는 $-2x^2+4x=0$에서

$-2x(x-2)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$



$A=B$이므로

$$\int_{0}^{a}(-2x^2+4x)\,dx=0$$
$$\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{a}=0$$

$-\frac{2}{3}a^3+2a^2=0,\ -\frac{2}{3}a^2(a-3)=0$

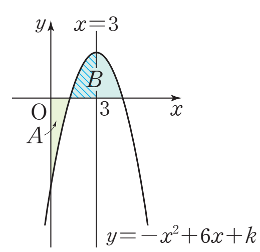
$\therefore\ a=3\ (\because\ a>2)$

9 답 −6

유형 06 두 도형의 넓이가 같을 조건

$A:B=1:2$에서 $B=2A$

곡선 $y=-x^2+6x+k$는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서



(빗금친 부분의 넓이)$=\frac{1}{2}B$

$\therefore\ A=$(빗금친 부분의 넓이)

즉, 구간 $[0,\ 3]$에서 곡선 $y=-x^2+6x+k$와 x축, y축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\int_{0}^{3}(-x^2+6x+k)\,dx=0$$
$$\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2+kx\right]_{0}^{3}=0$$

$18+3k=0\qquad\therefore\ k=-6$

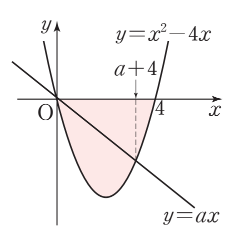
10 답 ③

유형 07 두 도형의 넓이의 활용

곡선 $y=x^2-4x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-4x=0$에서

$x(x-4)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=4$



곡선 $y=x^2-4x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는 $x^2-4x=ax$에서

$x\{x-(a+4)\}=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=a+4$

곡선 $y=x^2-4x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 직선 $y=ax$가 이등분하므로

$$\int_0^4(-x^2+4x)\,dx=2\int_0^{a+4}\{ax-(x^2-4x)\}\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 좌변에서

$$\int_0^4(-x^2+4x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$$

㉠의 우변에서

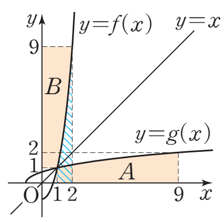
$$2\int_0^{a+4}\{ax-(x^2-4x)\}\,dx=2\int_0^{a+4}\{-x^2+(a+4)x\}\,dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a+4}{2}x^2\right]_0^{a+4}=\frac{(a+4)^3}{3}$$

따라서 $\frac{32}{3}=\frac{(a+4)^3}{3}$이므로 $(a+4)^3=32$

11 답 ④

유형 08 함수와 그 역함수의 정적분

함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서



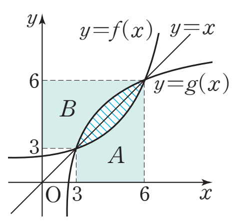
$A=B$

$$\therefore \int_1^2 f(x)\,dx+\int_1^9 g(x)\,dx$$
$=$(빗금친 도형의 넓이)$+A$
$=$(빗금친 도형의 넓이)$+B$
$=2\times9-1\times1=17$

12 답 ②

유형 08 함수와 그 역함수의 정적분

함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, $f(3)=3$, $f(6)=6$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다고 하면



$A=B$

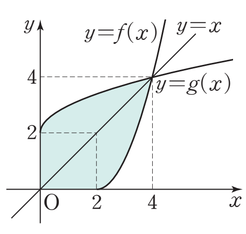
$$\therefore \int_3^6 g(x)\,dx=A+(\text{빗금친 도형의 넓이})$$
$$=6\times6-3\times3-B=27-B=27-A$$
$$=27-\int_3^6 f(x)\,dx=27-a$$

13 답 $\frac{32}{3}$

유형 09 함수와 그 역함수의 그래프 사이의 넓이

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점은 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점과 같으므로 $(x-2)^2=x$에서



$x^2-5x+4=0$, $(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=4$ ($\because x\ge2$)

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 도형의 넓이는

$$2\left[\frac{1}{2}\times2\times2+\int_2^4\{x-(x-2)^2\}\,dx\right]$$
$$=2\left\{2+\int_2^4(-x^2+5x-4)\,dx\right\}$$
$$=4+2\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x\right]_2^4=4+2\times\frac{10}{3}=\frac{32}{3}$$

14 답 4

유형 10 위치와 위치의 변화량

점 P가 원점을 지나는 시각을 $t=a$라고 하면 위치가 0이므로

$$-12+\int_0^a(3t^2-13)\,dt=0$$
$$-12+\left[t^3-13t\right]_0^a=0$$

$a^3-13a-12=0$, $(a+3)(a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

따라서 점 P가 원점을 지나는 시각은 $t=4$이다.

15 답 ④

유형 11 움직인 거리

$v(t)=0$일 때 자동차가 정지하므로

$10-2t=0 \qquad \therefore t=5$

따라서 자동차가 정지할 때까지 달린 거리는

$$\int_0^5|10-2t|\,dt=\int_0^5(10-2t)\,dt=\left[10t-t^2\right]_0^5=25(\text{m})$$

16 답 $\frac{8}{3}$

유형 11 움직인 거리

$v(t)=0$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀌므로

$t^2-4t+3=0$, $(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

즉, $t=3$일 때 두 번째로 운동 방향이 바뀐다.

따라서 구하는 거리는

$$\int_0^3|v(t)|\,dt=\int_0^1(t^2-4t+3)\,dt+\int_1^3(-t^2+4t-3)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_1^3$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

17 답 $-\frac{3}{2}$

유형 12 그래프에서의 위치와 움직인 거리

$$\int_0^5 v(t)\,dt=\int_0^1 v(t)\,dt+\int_1^3 v(t)\,dt+\int_3^5 v(t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times1-\frac{1}{2}\times2\times1-\frac{1}{2}\times2\times1=-\frac{3}{2}$$

18 답 2

유형 12 그래프에서의 위치와 움직인 거리

$v(t)=0$이고 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 점 P가 처음으로 운동 방향을 바꾼 시각은 $t=1$, 두 번째로 운동 방향을 바꾼 시각은 $t=4$이다.

따라서 구하는 거리는

$$\int_1^4|v(t)|\,dt=\int_1^4\{-v(t)\}\,dt=\frac{1}{2}\times(3+1)\times1=2$$