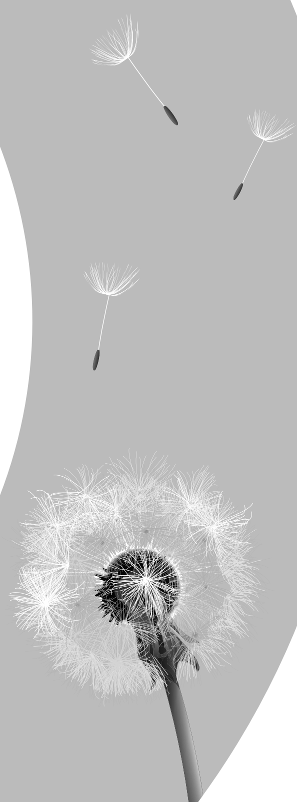
라이트 쎈

정답 및 풀이

기하와 벡터



● 정답을 확인하려고 할 때에는 〈 빠른 정답 찾기 〉를 이용하면 편리합니다.

Ⅰ. 평면 곡선

01 이차곡선

0001 $y^2=4\cdot 2x=8x$ 답 $y^2=8x$

0002 $y^2=4\cdot(-1)x=-4x$ 답 $y^2=-4x$

0003 $x^2=4\cdot 4y=16y$ 답 $x^2=16y$

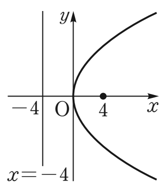
0004 $x^2=4\cdot(-3)y=-12y$ 답 $x^2=-12y$

0005 $4p=16$에서 $p=4$이므로

　초점의 좌표: $(4,\ 0)$,

　준선의 방정식: $x=-4$

또 포물선 $y^2=16x$는 오른쪽 그림과 같다.



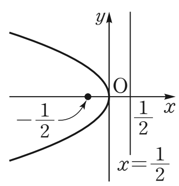
답 풀이 참조

0006 $4p=-2$에서 $p=-\frac{1}{2}$이므로

　초점의 좌표: $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$,

　준선의 방정식: $x=\frac{1}{2}$

또 포물선 $y^2=-2x$는 오른쪽 그림과 같다.



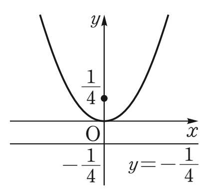
답 풀이 참조

0007 $4p=1$에서 $p=\frac{1}{4}$이므로

　초점의 좌표: $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$,

　준선의 방정식: $y=-\frac{1}{4}$

또 포물선 $x^2=y$는 오른쪽 그림과 같다.



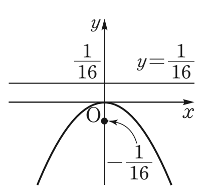
답 풀이 참조

0008 $4p=-\frac{1}{4}$에서 $p=-\frac{1}{16}$이므로

　초점의 좌표: $\left(0,\ -\frac{1}{16}\right)$,

　준선의 방정식: $y=\frac{1}{16}$

또 포물선 $x^2=-\frac{1}{4}y$는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0009 답 $(y+2)^2=3(x-1)$

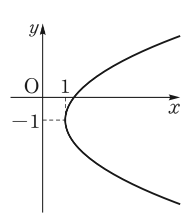
0010 주어진 포물선은 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=4x$의 초점의 좌표는 $(1,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-1$이므로

　초점의 좌표: $(2,\ -1)$,

　준선의 방정식: $x=0$

또 포물선 $(y+1)^2=4(x-1)$은 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

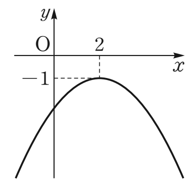
0011 주어진 포물선은 포물선 $x^2=-4y$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2=-4y$의 초점의 좌표는 $(0,\ -1)$, 준선의 방정식은 $y=1$이므로

　초점의 좌표: $(2,\ -2)$,

　준선의 방정식: $y=0$

또 포물선 $(x-2)^2=-4(y+1)$은 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0012 $y^2+2y=8x-9$에서

　$(y+1)^2=8(x-1)$ …… ㉠

이므로 포물선 ㉠은 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=8x$의 초점의 좌표는 $(2,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-2$이므로

　초점의 좌표: $(3,\ -1)$, 준선의 방정식: $x=-1$

답 초점의 좌표: $(3,\ -1)$, 준선의 방정식: $x=-1$

0013 $x^2-6x+9=-y-2$에서

　$(x-3)^2=-(y+2)$ …… ㉠

이므로 포물선 ㉠은 포물선 $x^2=-y$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2=-y$의 초점의 좌표는 $\left(0,\ -\frac{1}{4}\right)$, 준선의 방정식은 $y=\frac{1}{4}$이므로

　초점의 좌표: $\left(3,\ -\frac{9}{4}\right)$, 준선의 방정식: $y=-\frac{7}{4}$

답 초점의 좌표: $\left(3,\ -\frac{9}{4}\right)$, 준선의 방정식: $y=-\frac{7}{4}$

0014 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$이라 하면

$2a=8$에서　$a=4$

$a^2-b^2=3^2$에서　$b^2=4^2-3^2=7$

　$\therefore \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

답 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

0015 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$이라 하면

$2b=10$에서　$b=5$

$b^2-a^2=(\sqrt{7})^2$에서　$a^2=5^2-(\sqrt{7})^2=18$

　$\therefore \frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{25}=1$

답 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{25}=1$

0016 타원 $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$의

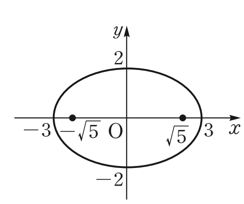
장축의 길이는　$2\cdot 3=6$

단축의 길이는　$2\cdot 2=4$

$\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$이므로 초점의 좌표는

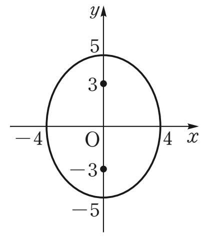
　$(\sqrt{5},\ 0)$, $(-\sqrt{5},\ 0)$

또 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$은 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0017 타원 $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$의



장축의 길이는 $\quad 2\cdot5=10$

단축의 길이는 $\quad 2\cdot4=8$

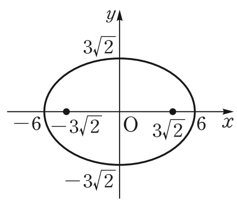
$\sqrt{25-16}=3$이므로 초점의 좌표는

$\quad (0,\ 3),\ (0,\ -3)$

또 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$은 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조

0018 $x^2+2y^2=36$에서 $\quad \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{18}=1$



장축의 길이는 $\quad 2\cdot6=12$

단축의 길이는 $\quad 2\cdot3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

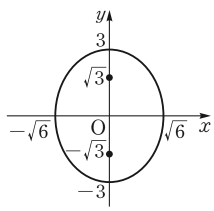
$\sqrt{36-18}=3\sqrt{2}$이므로 초점의 좌표는

$\quad (3\sqrt{2},\ 0),\ (-3\sqrt{2},\ 0)$

또 타원 $x^2+2y^2=36$은 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조

0019 $3x^2+2y^2=18$에서 $\quad \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{9}=1$



장축의 길이는 $\quad 2\cdot3=6$

단축의 길이는 $\quad 2\cdot\sqrt{6}=2\sqrt{6}$

$\sqrt{9-6}=\sqrt{3}$이므로 초점의 좌표는

$\quad (0,\ \sqrt{3}),\ (0,\ -\sqrt{3})$

또 타원 $3x^2+2y^2=18$은 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조

0020 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$이라 하면

$2a=12$에서 $\quad a=6$

$a^2-b^2=3^2$에서 $\quad b^2=6^2-3^2=27$

$\therefore\ \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$

답 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$

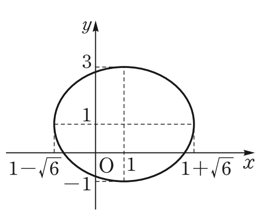
0021 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$의 초점의 좌표는 $(\sqrt{2},\ 0),\ (-\sqrt{2},\ 0)$이므로 주어진 타원의 초점의 좌표는

$\quad (\sqrt{2}+1,\ 1),\ (-\sqrt{2}+1,\ 1)$

평행이동하여도 장축, 단축의 길이는 변하지 않으므로 주어진 타원의 장축, 단축의 길이는 각각

$\quad 2\cdot\sqrt{6}=2\sqrt{6},\ 2\cdot2=4$



또 타원 $\frac{(x-1)^2}{6}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$은 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조

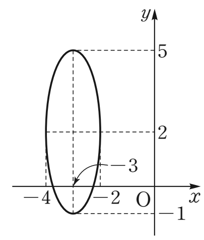
0022 주어진 타원은 타원 $x^2+\frac{y^2}{9}=1$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $x^2+\frac{y^2}{9}=1$의 초점의 좌표는 $(0,\ 2\sqrt{2}),\ (0,\ -2\sqrt{2})$이므로 주어진 타원의 초점의 좌표는

$\quad (-3,\ 2\sqrt{2}+2),\ (-3,\ -2\sqrt{2}+2)$

평행이동하여도 장축, 단축의 길이는 변하지 않으므로 주어진 타원의 장축, 단축의 길이는 각각

$\quad 2\cdot3=6,\ 2\cdot1=2$



또 타원 $(x+3)^2+\frac{(y-2)^2}{9}=1$은 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조

0023 $x^2+4y^2-4x-8y+4=0$에서

$\quad (x-2)^2+4(y-1)^2=4$

$\quad \therefore\ \frac{(x-2)^2}{4}+(y-1)^2=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

따라서 타원 ㉠은 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

(1) 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$의 중심은 원점이므로 타원 ㉠의 중심의 좌표는

$\quad (2,\ 1)$

(2) 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$의 초점의 좌표는 $(\sqrt{3},\ 0),\ (-\sqrt{3},\ 0)$이므로 타원 ㉠의 초점의 좌표는

$\quad (\sqrt{3}+2,\ 1),\ (-\sqrt{3}+2,\ 1)$

(3) 평행이동하여도 장축의 길이는 변하지 않으므로 타원 ㉠의 장축의 길이는 $\quad 2\cdot2=4$

(4) 평행이동하여도 단축의 길이는 변하지 않으므로 타원 ㉠의 단축의 길이는 $\quad 2\cdot1=2$

답 (1) $(2,\ 1)$ (2) $(\sqrt{3}+2,\ 1),\ (-\sqrt{3}+2,\ 1)$ (3) 4 (4) 2

0024 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$이라 하면 $2a=8$에서 $\quad a=4$

$a^2+b^2=6^2$에서 $\quad b^2=6^2-4^2=20$

$\therefore\ \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$

답 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$

0025 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\ (a>0,\ b>0)$이라 하면 $2b=6$에서 $\quad b=3$

$a^2+b^2=(2\sqrt{5})^2$에서 $\quad a^2=(2\sqrt{5})^2-3^2=11$

$\therefore\ \frac{x^2}{11}-\frac{y^2}{9}=-1$

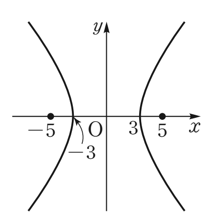
답 $\frac{x^2}{11}-\frac{y^2}{9}=-1$

0026 쌍곡선 $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$에서 $\sqrt{9+16}=5$이므로

초점의 좌표는 $\quad (5,\ 0),\ (-5,\ 0)$

꼭짓점의 좌표는 $\quad (3,\ 0),\ (-3,\ 0)$

주축의 길이는 $\quad 2\cdot3=6$



또 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$은 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조

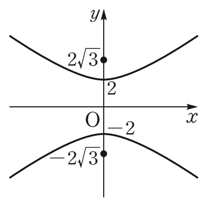
0027 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{(2\sqrt{2})^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=-1$에서 $\sqrt{8+4}=2\sqrt{3}$이므로

초점의 좌표는 $(0,\ 2\sqrt{3}),\ (0,\ -2\sqrt{3})$

꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 2),\ (0,\ -2)$

주축의 길이는 $2\cdot2=4$

또 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{4}=-1$은 오른쪽 그림과 같다. 답 풀이 참조



0028 $4x^2-3y^2=12$에서 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{4}=1$

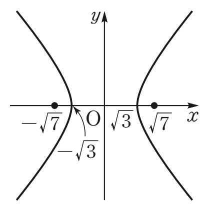
$\sqrt{3+4}=\sqrt{7}$이므로

초점의 좌표는 $(\sqrt{7},\ 0),\ (-\sqrt{7},\ 0)$

꼭짓점의 좌표는 $(\sqrt{3},\ 0),\ (-\sqrt{3},\ 0)$

주축의 길이는 $2\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

또 쌍곡선 $4x^2-3y^2=12$는 오른쪽 그림과 같다. 답 풀이 참조



0029 $2x^2-y^2=-4$에서 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=-1$

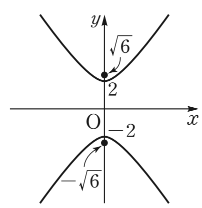
$\sqrt{2+4}=\sqrt{6}$이므로

초점의 좌표는 $(0,\ \sqrt{6}),\ (0,\ -\sqrt{6})$

꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 2),\ (0,\ -2)$

주축의 길이는 $2\cdot2=4$

또 쌍곡선 $2x^2-y^2=-4$는 오른쪽 그림과 같다. 답 풀이 참조



0030 구하는 쌍곡선의 방정식을 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$이라 하면

$1^2+b^2=(\sqrt{5})^2$에서 $b^2=(\sqrt{5})^2-1^2=4$

$\therefore\ x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 답 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$

0031 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1\ (a>0,\ b>0)$이라 하면 주축의 길이가 12이므로 $2b=12$ $\therefore\ b=6$

$a^2+b^2=8^2$에서 $a^2=8^2-6^2=28$

$\therefore\ \dfrac{x^2}{28}-\dfrac{y^2}{36}=-1$ 답 $\dfrac{x^2}{28}-\dfrac{y^2}{36}=-1$

0032 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{6^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm\dfrac{2}{6}x$, 즉 $y=\pm\dfrac{1}{3}x$ 답 $y=\pm\dfrac{1}{3}x$

0033 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{(2\sqrt{6})^2}=-1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{5}x$ 답 $y=\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{5}x$

0034 $7x^2-4y^2=84$에서 $\dfrac{x^2}{(2\sqrt{3})^2}-\dfrac{y^2}{(\sqrt{21})^2}=1$

따라서 구하는 점근선의 방정식은

$y=\pm\dfrac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}}x$, 즉 $y=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}x$ 답 $y=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}x$

0035 $x^2-27y^2=-27$에서 $\dfrac{x^2}{(3\sqrt{3})^2}-y^2=-1$

따라서 구하는 점근선의 방정식은

$y=\pm\dfrac{1}{3\sqrt{3}}x$, 즉 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{9}x$ 답 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{9}x$

0036 답 $\dfrac{(x-3)^2}{9}-\dfrac{(y+1)^2}{7}=1$

0037 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$의 초점의 좌표는 $(\sqrt{13},\ 0),\ (-\sqrt{13},\ 0)$이고, 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 0),\ (-2,\ 0)$이므로 주어진 쌍곡선의

초점의 좌표: $(\sqrt{13}+2,\ -1),\ (-\sqrt{13}+2,\ -1)$

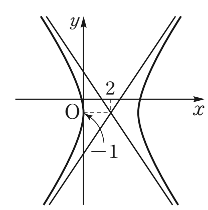
꼭짓점의 좌표: $(4,\ -1),\ (0,\ -1)$

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$의 점근선의 방정식이 $y=\pm\dfrac{3}{2}x$이므로 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$y+1=\pm\dfrac{3}{2}(x-2)$

$\therefore\ y=\dfrac{3}{2}x-4,\ y=-\dfrac{3}{2}x+2$

또 쌍곡선 $\dfrac{(x-2)^2}{4}-\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$은 오른쪽 그림과 같다. 답 풀이 참조



0038 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{16}=-1$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{16}=-1$의 초점의 좌표는 $(0,\ \sqrt{17}),\ (0,\ -\sqrt{17})$이고, 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 4),\ (0,\ -4)$이므로 주어진 쌍곡선의

초점의 좌표: $(-3,\ \sqrt{17}+2),\ (-3,\ -\sqrt{17}+2)$

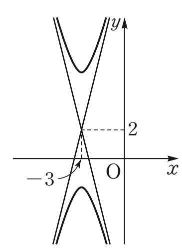
꼭짓점의 좌표: $(-3,\ 6),\ (-3,\ -2)$

$x^2-\dfrac{y^2}{16}=-1$의 점근선의 방정식이 $y=\pm4x$이므로 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$y-2=\pm4(x+3)$

$\therefore\ y=4x+14,\ y=-4x-10$

또 쌍곡선 $(x+3)^2-\dfrac{(y-2)^2}{16}=-1$은 오른쪽 그림과 같다. 답 풀이 참조



0039 $3(x-4)^2-4(y+5)^2=12$에서

$\dfrac{(x-4)^2}{4}-\dfrac{(y+5)^2}{3}=1$

이므로 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

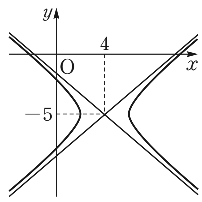
이때 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$의 초점의 좌표는 $(\sqrt{7},\ 0),\ (-\sqrt{7},\ 0)$이고, 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 0),\ (-2,\ 0)$이므로 주어진 쌍곡선의

초점의 좌표: $(\sqrt{7}+4,\ -5)$, $(-\sqrt{7}+4,\ -5)$
꼭짓점의 좌표: $(6,\ -5)$, $(2,\ -5)$

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$의 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$이므로 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y+5=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}(x-4)$$

$$\therefore\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}x-2\sqrt{3}-5,\quad y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+2\sqrt{3}-5$$



또 쌍곡선 $3(x-4)^2-4(y+5)^2=12$는 오른쪽 그림과 같다. 답 풀이 참조

0040 $4x^2-(y+1)^2=-36$에서

$$\frac{x^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{36}=-1$$

이므로 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=-1$을 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

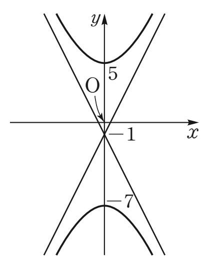
이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=-1$의 초점의 좌표는 $(0,\ 3\sqrt{5})$, $(0,\ -3\sqrt{5})$이고, 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 6)$, $(0,\ -6)$이므로 주어진 쌍곡선의

초점의 좌표: $(0,\ 3\sqrt{5}-1)$, $(0,\ -3\sqrt{5}-1)$
꼭짓점의 좌표: $(0,\ 5)$, $(0,\ -7)$

쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=-1$의 점근선의 방정식이 $y=\pm 2x$이므로 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y+1=\pm 2x$$

$$\therefore\ y=2x-1,\ y=-2x-1$$



또 쌍곡선 $4x^2-(y+1)^2=-36$은 오른쪽 그림과 같다. 답 풀이 참조

0041 $x^2-4y^2-6x+5=0$에서 $(x-3)^2-4y^2=4$

$$\therefore\ \frac{(x-3)^2}{4}-y^2=1$$

따라서 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$을 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$의 중심은 원점이고, 초점의 좌표는 $(\sqrt{5},\ 0)$, $(-\sqrt{5},\ 0)$이므로 주어진 쌍곡선의

중심의 좌표: $(3,\ 0)$
초점의 좌표: $(\sqrt{5}+3,\ 0)$, $(-\sqrt{5}+3,\ 0)$

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$의 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{1}{2}x$이므로 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y=\pm\frac{1}{2}(x-3)$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2},\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$ 답 풀이 참조

0042 $9x^2-16y^2-36x-32y+164=0$에서

$$9(x-2)^2-16(y+1)^2=-144$$

$$\therefore\ \frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{9}=-1$$

따라서 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$의 중심은 원점이고, 초점의 좌표는 $(0,\ 5)$, $(0,\ -5)$이므로 주어진 쌍곡선의

중심의 좌표: $(2,\ -1)$
초점의 좌표: $(2,\ 4)$, $(2,\ -6)$

쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$의 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{3}{4}x$이므로 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y+1=\pm\frac{3}{4}(x-2)$$

$$\therefore\ y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{2},\ y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$$ 답 풀이 참조

0043 $x^2+y^2-4=0$에서 $x^2+y^2=4$
따라서 주어진 방정식은 원을 나타낸다. 답 원

0044 $4x^2-9y^2+144=0$에서 $4x^2-9y^2=-144$

$$\therefore\ \frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=-1$$

따라서 주어진 방정식은 쌍곡선을 나타낸다. 답 쌍곡선

0045 $y^2+x+2y=0$에서 $(y+1)^2=-(x-1)$
따라서 주어진 방정식은 포물선을 나타낸다. 답 포물선

0046 $x^2+2y^2-8=0$에서 $x^2+2y^2=8$

$$\therefore\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$$

따라서 주어진 방정식은 타원을 나타낸다. 답 타원

0047 초점의 좌표가 $(-3,\ 0)$이고 꼭짓점이 원점인 포물선의 방정식은

$y^2=4\cdot(-3)x$, 즉 $y^2=-12x$

이 포물선이 점 $(k,\ 6)$을 지나므로

$36=-12k \qquad \therefore\ k=-3$ 답 -3

0048 포물선 $y^2=8x=4\cdot 2x$의 초점의 좌표는 $(2,\ 0)$이고 준선의 방정식이 $x=-2$이므로 원의 반지름의 길이는 $2+2=4$
따라서 구하는 원의 넓이는 $\pi\cdot 4^2=16\pi$ 답 ③

0049 포물선 $x^2=4y$의 초점의 좌표는 $(0,\ 1)$
포물선 $y^2=kx=4\cdot\frac{k}{4}x$의 초점의 좌표는 $\left(\frac{k}{4},\ 0\right)$
두 초점 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$$\sqrt{\left(\frac{k}{4}\right)^2+(-1)^2}=\sqrt{5},\qquad \frac{k^2}{16}+1=5$$

$k^2=64 \qquad \therefore\ k=8\ (\because\ k>0)$ 답 8

0050 꼭짓점이 원점이고 제1사분면 위의 점과 제4사분면 위의 점을 지나므로 포물선의 방정식을 $y^2=4px\,(p\neq0)$로 놓을 수 있다.
이때 이 포물선이 두 점 $(1,\ -4)$, $(4,\ 8)$을 지나므로

$16=4p,\ 64=16p \qquad \therefore\ p=4$

즉 포물선의 방정식은

$y^2=4\cdot4x$, 즉 $y^2=16x$ ⇨ ❶

이 포물선의 초점의 좌표는 $(4,\ 0)$이므로 초점을 지나고 y축에 수직인 직선의 방정식은 $\quad x=4$
$x=4$를 $y^2=16x$에 대입하면 $y=\pm8$이므로 직선 $x=4$가 포물선 $y^2=16x$와 만나는 두 점의 좌표는

$(4,\ 8),\ (4,\ -8)$ ⇨ ❷

따라서 구하는 두 점 사이의 거리는 $\quad 8-(-8)=16$ ⇨ ❸

답 16

채점 기준	비율
❶ 포물선의 방정식을 구할 수 있다.	50%
❷ 직선과 포물선의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❸ 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.	20%

0051 $y^2-x+2y+5=0$에서

$(y+1)^2=x-4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이므로 포물선 ㉠은 포물선 $y^2=x$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
이때 포물선 $y^2=x$의 초점의 좌표는 $\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$, 준선의 방정식은 $x=-\frac{1}{4}$이므로 포물선 ㉠의 초점의 좌표는

$\left(\frac{1}{4}+4,\ -1\right)$, 즉 $\left(\frac{17}{4},\ -1\right)$

이고 준선의 방정식은 $\quad x=-\frac{1}{4}+4$, 즉 $x=\frac{15}{4}$
따라서 $a=\frac{17}{4}$, $b=-1$, $c=\frac{15}{4}$이므로

$a+b+c=7$ 답 ⑤

0052 $x^2-4x-4y=0$에서 $\quad (x-2)^2=4(y+1)$
ㄱ. 주어진 포물선은 포물선 $x^2=4y$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
ㄴ. 포물선 $x^2=4y$의 꼭짓점은 원점이므로 주어진 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $\quad (2,\ -1)$
ㄷ. 포물선 $x^2=4y$의 초점의 좌표는 $(0,\ 1)$이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\quad (2,\ 0)$
ㄹ. 포물선 $x^2=4y$의 준선의 방정식은 $y=-1$이므로 주어진 포물선의 준선의 방정식은 $\quad y=-2$
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

0053 주어진 포물선은 초점의 좌표가 $(1,\ 0)$이고 준선이 $x=-1$인 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$(y-1)^2=4(x-1) \qquad \therefore\ y^2-4x-2y+5=0$

따라서 $a=-4$, $b=-2$, $c=5$이므로

$abc=40$ 답 40

0054 $y^2-4x+6y+21=0$에서 $\qquad (y+3)^2=4(x-3)$
이 포물선의 초점의 좌표는

$(1+3,\ -3)$, 즉 $(4,\ -3)$

$x^2-8x-8y+a=0$에서 $\qquad (x-4)^2=8\left(y+\frac{16-a}{8}\right)$
이 포물선의 초점의 좌표는

$\left(4,\ 2-\frac{16-a}{8}\right)$, 즉 $\left(4,\ \frac{a}{8}\right)$

두 포물선의 초점이 일치하므로

$\frac{a}{8}=-3 \qquad \therefore\ a=-24$ 답 ①

0055 축이 x축에 평행하므로 구하는 포물선의 방정식을 $y^2+ax+by+c=0\ (a\neq0)$이라 하고 주어진 세 점의 좌표를 각각 대입하면

$-a+c=0,\ 16+a-4b+c=0,\ 16+5a+4b+c=0$

위의 세 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-4,\ b=2,\ c=-4$
따라서 구하는 포물선의 방정식은

$y^2-4x+2y-4=0$ 답 $y^2-4x+2y-4=0$

라쎈 특강 축이 좌표축에 평행한 포물선의 방정식

① 축이 x축에 평행한 포물선의 방정식
➡ $y^2+ax+by+c=0$ (단, $a\neq0$)
② 축이 y축에 평행한 포물선의 방정식
➡ $x^2+ax+by+c=0$ (단, $b\neq0$)

0056 포물선 $y^2=4x$의 준선의 방정식은 $\qquad x=-1$
점 P에서 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}=6$이므로 $\quad |a-(-1)|=6 \qquad \therefore\ a=5\ (\because\ a\geq0)$
점 $\mathrm{P}(5,\ b)$는 포물선 $y^2=4x$ 위에 있으므로

$b^2=4\cdot5=20$

$\therefore\ a^2+b^2=5^2+20=45$ 답 ⑤

다른 풀이 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 포물선 $y^2=4x$ 위에 있으므로

$b^2=4a \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 포물선 $y^2=4x$의 초점의 좌표는 $(1,\ 0)$이므로

$\sqrt{(a-1)^2+b^2}=6 \qquad \therefore\ a^2-2a+1+b^2=36$

㉠을 위의 식에 대입하여 정리하면 $\quad a^2+2a-35=0$

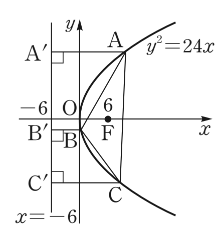
$(a+7)(a-5)=0 \qquad \therefore\ a=5\ (\because\ a\geq0)$

$a=5$를 ㉠에 대입하면 $\quad b^2=20$

0057 포물선 $y^2=24x=4\cdot6x$에서 $\mathrm{F}(6,\ 0)$이므로 세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 $x_1,\ x_2,\ x_3$이라 하면

$\underbrace{\frac{x_1+x_2+x_3}{3}}_{\triangle\mathrm{ABC}\text{의 무게중심의 } x\text{좌표}}=6 \qquad \therefore\ x_1+x_2+x_3=18$

한편 포물선의 준선의 방정식은 $x=-6$이므로 오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, C에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′, C′이라 하면



$\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{CF}}$
$=\overline{\mathrm{AA'}}+\overline{\mathrm{BB'}}+\overline{\mathrm{CC'}}$
$=(x_1+6)+(x_2+6)+(x_3+6)$
$=x_1+x_2+x_3+18$
$=18+18=36$ 답 ⑤

0058 주어진 포물선의 꼭짓점이 원점이고 F(3, 0)이므로 준선의 방정식은 $x=-3$

점 P에서 준선 $x=-3$에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$\overline{PF}=\overline{PH'}$

$\therefore \overline{PH}+\overline{PF}=\overline{PH}+\overline{PH'}=\overline{HH'}=6$

답 ③

0059 주어진 포물선의 꼭짓점이 원점이고 F(0, 1)이므로 준선의 방정식은 $y=-1$

점 P_n에서 준선 $y=-1$에 내린 수선의 발을 P_n'이라 하면

$\overline{FP_n}=\overline{P_nP_n'}$

이때 $x^2=4y$에서 $x=n$일 때 $y=\frac{n^2}{4}$이므로 $P_n\left(n, \frac{n^2}{4}\right)$

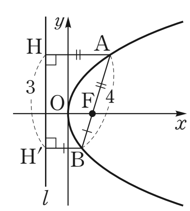
따라서 $\overline{P_nP_n'}=\frac{n^2}{4}+1$이므로

$$\sum_{n=1}^{8}\overline{FP_n}=\sum_{n=1}^{8}\overline{P_nP_n'}=\sum_{n=1}^{8}\left(\frac{n^2}{4}+1\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{8\cdot9\cdot17}{6}+8=59$$

답 59

0060 오른쪽 그림에서



$\overline{AH}=\overline{AF}$, $\overline{BH'}=\overline{BF}$

$\therefore \overline{AH}+\overline{BH'}=\overline{AF}+\overline{BF}$

$=\overline{AB}=4$

따라서 □AHH′B의 둘레의 길이는

$\overline{AH}+\overline{HH'}+\overline{BH'}+\overline{AB}$

$=(\overline{AH}+\overline{BH'})+\overline{HH'}+\overline{AB}$

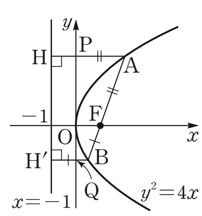
$=4+3+4=11$

답 11

0061 포물선 $y^2=4x$의 준선의 방정식은

$x=-1$

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면



$\overline{AF}=\overline{AH}$, $\overline{BF}=\overline{BH'}$

이때 $\overline{AP}=2$, $\overline{BQ}=\frac{1}{2}$이므로

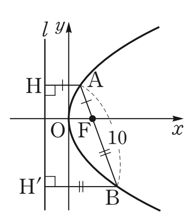
$\overline{AF}=\overline{AH}=\overline{AP}+1=2+1=3$

$\overline{BF}=\overline{BH'}=\overline{BQ}+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

$\therefore \overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

답 $\frac{9}{2}$

0062 오른쪽 그림에서



$\overline{AH}=\overline{AF}$, $\overline{BH'}=\overline{BF}$

$\therefore \overline{AH}+\overline{BH'}=\overline{AF}+\overline{BF}=\overline{AB}=10$

□AHH′B의 넓이가 40이므로

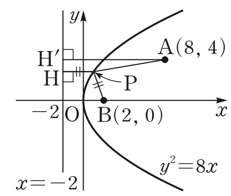
$\frac{1}{2}\cdot(\overline{AH}+\overline{BH'})\cdot\overline{HH'}=40$

$\frac{1}{2}\cdot10\cdot\overline{HH'}=40$ $\quad\therefore \overline{HH'}=8$

답 8

0063 $y^2=8x=4\cdot2x$에서 점 B(2, 0)은 주어진 포물선의 초점이고, 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, A에서 준선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면 $\overline{PB}=\overline{PH}$이므로



$\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{PH}\geq\overline{AH'}$

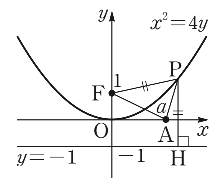
$=8-(-2)=10$

따라서 $\overline{PA}+\overline{PB}$의 최솟값은 10이다.

답 ④

0064 포물선 $x^2=4y$의 초점을 F라 하면 F(0, 1)이고 준선의 방정식은 $y=-1$이다.

오른쪽 그림에서 $\overline{PF}=\overline{PH}$이므로



$\overline{AP}+\overline{PH}=\overline{AP}+\overline{PF}\geq\overline{AF}$

$=\sqrt{a^2+1}$

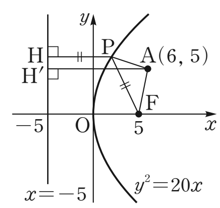
즉 $\sqrt{a^2+1}=3$이므로 $\quad a^2+1=9$

$a^2=8$ $\quad\therefore a=2\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

답 $2\sqrt{2}$

0065 $y^2=20x=4\cdot5x$에서 F(5, 0)이고 준선의 방정식은 $x=-5$이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, A에서 준선 $x=-5$에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면 $\overline{PF}=\overline{PH}$이므로



$\overline{PF}+\overline{PA}=\overline{PH}+\overline{PA}\geq\overline{AH'}$

$=6-(-5)=11$

이때 $\overline{FA}=\sqrt{(6-5)^2+5^2}=\sqrt{26}$이므로 △APF의 둘레의 길이는

$\overline{AP}+\overline{PF}+\overline{FA}\geq\overline{AH'}+\overline{FA}=11+\sqrt{26}$

따라서 △APF의 둘레의 길이의 최솟값은 $11+\sqrt{26}$이다.

답 $11+\sqrt{26}$

0066 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 점 P가 포물선 $y^2=6x$ 위에 있으므로

$b^2=6a$ …… ㉠

$\overline{OP}$의 중점 Q의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{b}{2}$

$\therefore a=2x$, $b=2y$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad(2y)^2=6\cdot2x$

$\therefore y^2=3x$

답 ④

0067 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=|x+4|$

위의 식의 양변을 제곱하면

$x^2-2x+1+y^2-4y+4=x^2+8x+16$

$\therefore y^2-10x-4y-11=0$

답 $y^2-10x-4y-11=0$

0068 원이 y축에 접하므로 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$이라 하자. ⇨ ❶

이 원이 점 (2, 0)을 지나므로

$(2-a)^2+b^2=a^2$ $\quad\therefore b^2=4(a-1)$ ⇨ ❷

따라서 구하는 원의 중심의 자취의 방정식이 $y^2=4(x-1)$이므로

$p=4$, $q=-1$ ⇨ ❸

$\therefore p-q=5$ ⇨ ❹

답 5

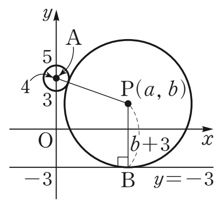
채점 기준	비율
❶ y축에 접하는 원의 방정식을 세울 수 있다.	30%
❷ a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40%
❸ p, q의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ $p-q$의 값을 구할 수 있다.	10%

0069 $x^2+y^2-8y+15=0$에서

$x^2+(y-4)^2=1$

이므로 원의 중심의 좌표는 $(0,\ 4)$이고 반지름의 길이는 1이다.

오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2-8y+15=0$의 중심을 A, 중심이 P인 원과 직선 $y=-3$의 접점을 B라 하면



$\overline{PA}=\overline{PB}+1$

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$\sqrt{a^2+(b-4)^2}=b+3+1$

위의 식의 양변을 제곱하면

$a^2+(b-4)^2=(b+4)^2 \qquad \therefore\ a^2=16b$

따라서 점 P의 자취의 방정식이 $x^2=16y=4\cdot 4y$이므로 구하는 초점의 좌표는

$(0,\ 4)$ 답 $(0,\ 4)$

0070 두 초점이 $F(0,\ 2)$, $F'(0,\ -2)$이므로 구하는 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$이라 하자.

이 타원이 점 $(0,\ 4)$를 지나므로

$\dfrac{16}{b^2}=1 \qquad \therefore\ b^2=16$

$b^2-a^2=2^2$에서 $\qquad a^2=16-2^2=12$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 답 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{16}=1$

0071 $\overline{PA}+\overline{PB}=6$을 만족시키는 점 P의 자취는 타원이고, 두 점 $A(\sqrt{5},\ 0)$, $B(-\sqrt{5},\ 0)$은 이 타원의 초점이다.

구하는 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$이라 하면

$2a=6$에서 $\qquad a=3$

$a^2-b^2=(\sqrt{5})^2$에서 $\qquad b^2=3^2-(\sqrt{5})^2=4$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 답 ②

0072 타원 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{9}=1$의 초점의 좌표는

$(0,\ \underbrace{\sqrt{7}}_{\sqrt{9-2}=\sqrt{7}}),\ (0,\ -\sqrt{7})$

이므로 구하는 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$이라 하면

$2b=14$에서 $\qquad b=7$

$b^2-a^2=(\sqrt{7})^2$에서 $\qquad a^2=7^2-(\sqrt{7})^2=42$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$\dfrac{x^2}{42}+\dfrac{y^2}{49}=1$ 답 $\dfrac{x^2}{42}+\dfrac{y^2}{49}=1$

0073 주어진 타원의 장축의 길이가 12이므로

$2|a|=12 \qquad \therefore\ |a|=6$

$\sqrt{6^2-8}=2\sqrt{7}$이므로 두 초점의 좌표는

$(2\sqrt{7},\ 0),\ (-2\sqrt{7},\ 0)$

따라서 두 초점 사이의 거리는 $\qquad 2\cdot 2\sqrt{7}=4\sqrt{7}$ 답 $4\sqrt{7}$

0074 ④ 초점의 좌표는 $(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$이다. 답 ④

0075 두 초점이 $F(4,\ 0)$, $F'(-4,\ 0)$이므로 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$이라 하면

$a^2-b^2=16$ …… ㉠

장축과 단축의 길이의 차가 4이므로

$2a-2b=4 \qquad \therefore\ a-b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\qquad a=5,\ b=3$

$\therefore\ \overline{PF}+\overline{PF'}=2a=10$ 답 ④

0076 포물선 $x^2=-8y=4\cdot(-2)y$의 초점의 좌표는

$(0,\ -2)$

즉 타원 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 초점의 좌표가 $(0,\ 2)$, $(0,\ -2)$이므로

$b^2-8=2^2, \qquad b^2=12 \qquad \therefore\ |b|=2\sqrt{3}$

따라서 타원의 장축의 길이는

$2|b|=2\cdot 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ 답 $4\sqrt{3}$

0077 $2x^2+3y^2-8x+6y+5=0$에서

$2(x-2)^2+3(y+1)^2=6$

이 타원을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 타원의 방정식은

$2(x-2-a)^2+3(y+1-b)^2=6$

이 식이 $2x^2+3y^2=c$와 일치해야 하므로

$-2-a=0,\ 1-b=0,\ c=6$

$\therefore\ a=-2,\ b=1,\ c=6$

$\therefore\ a+b+c=5$ 답 ②

0078 $4x^2+y^2+8x-8y+8=0$에서

$4(x+1)^2+(y-4)^2=12$

$\therefore\ \dfrac{(x+1)^2}{3}+\dfrac{(y-4)^2}{12}=1$ …… ㉠ ⇨ ❶

타원 ㉠은 타원 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{12}=1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

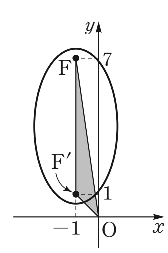
이때 타원 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{12}=1$의 초점의 좌표는

$(0,\ 3),\ (0,\ -3)$

이므로 타원 ㉠의 초점의 좌표는

$(-1,\ 7),\ (-1,\ 1)$ ⇨ ❷

따라서 오른쪽 그림에서



$\triangle OFF'=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot(7-1)=3$ ⇨ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 타원의 방정식을 변형할 수 있다.	30%
❷ 타원의 초점의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❸ $\triangle$OFF′의 넓이를 구할 수 있다.	30%

0079 두 점 A, C의 y좌표가 같으므로 $\overline{\text{AC}}$는 타원의 장축 또는 단축이다. 선분 AC의 중점을 M이라 하면 $\quad$ M$(1, 2)$

$\therefore \overline{\text{AM}}=3,\ \overline{\text{BM}}=1$

이때 점 M은 타원의 중심이므로 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 타원은 타원 $\dfrac{x^2}{3^2}+y^2=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것과 같다.

즉 구하는 타원의 방정식은 $\dfrac{(x-1)^2}{9}+(y-2)^2=1$이므로

$a=-1,\ b=9,\ c=-2,\ d=1$

$\therefore abcd=18$ 답 18

0080 타원의 정의에 의하여

$\overline{\text{AF}}+\overline{\text{AF}'}=\overline{\text{BF}}+\overline{\text{BF}'}=2\cdot\sqrt{6}=2\sqrt{6}$

따라서 $\triangle$ABF′의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{\text{AB}}+\overline{\text{BF}'}+\overline{\text{AF}'}&=\overline{\text{AF}}+\overline{\text{BF}}+\overline{\text{BF}'}+\overline{\text{AF}'}\\&=(\overline{\text{AF}}+\overline{\text{AF}'})+(\overline{\text{BF}}+\overline{\text{BF}'})\\&=2\sqrt{6}+2\sqrt{6}=4\sqrt{6}\end{aligned}$$

답 ③

0081 타원의 정의에 의하여

$\overline{\text{PF}}+\overline{\text{PF}'}=2\cdot5=10$

$\overline{\text{PF}}:\overline{\text{PF}'}=1:4$에서 $\quad \overline{\text{PF}}=10\cdot\dfrac{1}{5}=2$

또 $\sqrt{25-9}=4$에서 타원의 두 초점의 좌표는 $(0, 4)$, $(0, -4)$이므로 $\quad \overline{\text{FF}'}=8$

$\therefore \dfrac{\overline{\text{PF}}}{\overline{\text{FF}'}}=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$ 답 $\dfrac{1}{4}$

0082 주어진 타원의 장축 위의 다른 꼭짓점을 C라 하면 $\overline{\text{CF}'}=\overline{\text{BF}}=2$이므로

$\overline{\text{BC}}=\overline{\text{BF}}+\overline{\text{FF}'}+\overline{\text{CF}'}=2+10+2=14$

타원의 정의에 의하여

$\overline{\text{AF}}+\overline{\text{AF}'}=\overline{\text{BC}}=14$ ⇨ ❶

$\overline{\text{AF}}=14-\overline{\text{AF}'}$이므로 직각삼각형 AF′F에서

$(14-\overline{\text{AF}'})^2=\overline{\text{AF}'}^2+10^2$

$28\overline{\text{AF}'}=96 \qquad \therefore \overline{\text{AF}'}=\dfrac{24}{7}$ ⇨ ❷

$\therefore \triangle\text{AF}'\text{F}=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\text{FF}'}\cdot\overline{\text{AF}'}=\dfrac{1}{2}\cdot10\cdot\dfrac{24}{7}=\dfrac{120}{7}$ ⇨ ❸

답 $\dfrac{120}{7}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{\text{AF}}+\overline{\text{AF}'}$의 길이를 구할 수 있다.	40%
❷ $\overline{\text{AF}'}$의 길이를 구할 수 있다.	40%
❸ $\triangle$AF′F의 넓이를 구할 수 있다.	20%

0083 $\overline{\text{AP}}=a$, $\overline{\text{BP}}=b$라 하면 타원의 정의에 의하여

$a+b=2\cdot6=12$

이때 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\geq2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$12\geq2\sqrt{ab} \qquad \therefore ab\leq36$

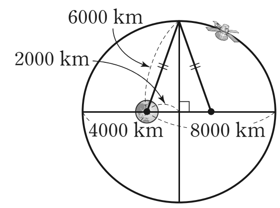
따라서 $\overline{\text{AP}}\cdot\overline{\text{BP}}$의 최댓값은 36이다. 답 ④

타쎈 특강 산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때,

$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

0084 최단 거리와 최장 거리의 합은 타원 궤도의 장축의 길이와 같으므로 장축의 길이는



$4000+8000=12000\,(\text{km})$

타원 궤도의 중심에서 초점인 지구까지의 거리는

$\dfrac{1}{2}\cdot12000-4000=2000\,(\text{km})$

따라서 구하는 타원 궤도의 단축의 길이는

$2\sqrt{6000^2-2000^2}=8000\sqrt{2}\,(\text{km})$ 답 $8000\sqrt{2}$ km

0085 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\sqrt{(x-2)^2+y^2}:|x-5|=1:2$

$\therefore |x-5|=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$x^2-10x+25=4(x^2-4x+4+y^2)$

$3x^2-6x+4y^2-9=0, \qquad 3(x-1)^2+4y^2=12$

$\therefore \dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 답 $\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

0086 점 P(a, b)가 원 $x^2+y^2=27$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=27$ …… ㉠

점 H의 좌표는 $(a, 0)$이므로 $\overline{\text{PH}}$를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$\left(\dfrac{2\cdot a+a}{2+1}, \dfrac{2\cdot0+1\cdot b}{2+1}\right)$이므로 $\left(a, \dfrac{1}{3}b\right)$

$x=a,\ y=\dfrac{1}{3}b$

$\therefore a=x,\ b=3y$

이것을 ㉠에 대입하면

$x^2+(3y)^2=27 \qquad \therefore x^2+9y^2=27$ ⇨ ❶

따라서 $p=9$, $q=27$이므로 ⇨ ❷

$pq=243$ ⇨ ❸

답 243

채점 기준	비율
❶ 자취의 방정식을 구할 수 있다.	60%
❷ p, q의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ pq의 값을 구할 수 있다.	10%

0087 두 꼭짓점의 좌표가 $(1, 0)$, $(-1, 0)$이므로 쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$이라 하면 $\qquad a^2=1$

$\therefore x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

이 쌍곡선이 점 $(2, \sqrt{15})$를 지나므로

$4-\dfrac{15}{b^2}=1 \qquad \therefore b^2=5$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$x^2-\dfrac{y^2}{5}=1$ 답 $x^2-\dfrac{y^2}{5}=1$

0088 점 P의 자취는 쌍곡선이고 두 점 A, B가 쌍곡선의 초점이므로 $|\overline{PA}-\overline{PB}|=10$에서

$2|a|=10 \qquad \therefore |a|=5$

$a^2+b^2=6^2$에서 $\quad b^2=6^2-5^2=11$

$\therefore a^2-b^2=5^2-11=14$ 답 ①

0089 $8x^2+4y^2=64$에서 $\quad \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{16}=1$

$\sqrt{16-8}=2\sqrt{2}$이므로 타원의 초점의 좌표는

$(0, 2\sqrt{2}), (0, -2\sqrt{2})$

쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ $(a>0, b>0)$이라 하면 주축의 길이가 4이므로

$2b=4 \qquad \therefore b=2$

$a^2+b^2=(2\sqrt{2})^2$에서 $\quad a^2=(2\sqrt{2})^2-2^2=4$

따라서 쌍곡선의 방정식은 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=-1$, 즉 $x^2-y^2=-4$이므로

$k=-4$ 답 -4

0090 두 점 $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$가 쌍곡선의 초점이므로 쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$이라 하자.

$a^2+b^2=(\sqrt{5})^2$에서 $\quad b^2=5-a^2$ …… ㉠

쌍곡선이 점 $(3, 2\sqrt{2})$를 지나므로

$\dfrac{9}{a^2}-\dfrac{8}{b^2}=-1 \qquad \therefore 9b^2-8a^2=-a^2b^2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $\quad a^4+12a^2-45=0$

$(a^2+15)(a^2-3)=0 \qquad \therefore a^2=3\ (\because a^2>0)$

$a^2=3$을 ㉠에 대입하면 $\quad b^2=2$

따라서 쌍곡선의 방정식은 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{2}=-1$이므로 이 쌍곡선의 주축의 길이는

$2\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

0091 $x^2-4y^2+4x=0$에서 $\quad (x+2)^2-4y^2=4$

$\therefore \dfrac{(x+2)^2}{4}-y^2=1$ …… ㉠

따라서 쌍곡선 ㉠은 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$을 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

이때 $\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$에서 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$의 초점의 좌표는

$(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$

이므로 쌍곡선 ㉠의 초점의 좌표는

$(\sqrt{5}-2, 0), (-\sqrt{5}-2, 0)$

$\therefore a+b=(\sqrt{5}-2)+(-\sqrt{5}-2)=-4$ 답 -4

0092 $3x^2-4y^2-12x-8y-4=0$에서

$3(x-2)^2-4(y+1)^2=12$

$\therefore \dfrac{(x-2)^2}{4}-\dfrac{(y+1)^2}{3}=1$ …… ㉠

따라서 쌍곡선 ㉠은 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

ㄱ. 평행이동하여도 주축의 길이는 변하지 않으므로 쌍곡선 ㉠의 주축의 길이는 $\quad 2\cdot2=4$

ㄴ. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$의 중심은 원점이므로 쌍곡선 ㉠의 중심의 좌표는 $\quad (2, -1)$

ㄷ. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$의 꼭짓점의 좌표는 $(2, 0)$, $(-2, 0)$이므로 쌍곡선 ㉠의 꼭짓점의 좌표는

$(4, -1), (0, -1)$

ㄹ. $\sqrt{4+3}=\sqrt{7}$에서 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$의 초점의 좌표는 $(\sqrt{7}, 0)$, $(-\sqrt{7}, 0)$이므로 쌍곡선 ㉠의 초점의 좌표는

$(\sqrt{7}+2, -1), (-\sqrt{7}+2, -1)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ④

0093 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=-1$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

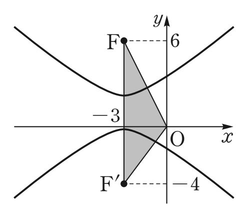
이때 $\sqrt{16+9}=5$에서 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=-1$의 초점의 좌표는

$(0, 5), (0, -5)$

이므로 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$(-3, 6), (-3, -4)$ ➪ ❶

$\therefore \triangle OFF'=\dfrac{1}{2}\cdot10\cdot3=15$ ➪ ❷



답 15

채점 기준	비율
❶ 쌍곡선의 초점의 좌표를 구할 수 있다.	60%
❷ △OFF′의 넓이를 구할 수 있다.	40%

0094 쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0, b>0)$이라 하면

$\dfrac{b}{a}=2 \qquad \therefore b=2a$

즉 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{4a^2}=1$이 점 $(1, 1)$을 지나므로

$\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{4a^2}=1, \qquad \dfrac{3}{4a^2}=1 \qquad \therefore a^2=\dfrac{3}{4}$

따라서 $b^2=4a^2=3$이므로 쌍곡선의 방정식은

$\dfrac{x^2}{\frac{3}{4}}-\dfrac{y^2}{3}=1$, 즉 $4x^2-y^2=3$

이 쌍곡선이 점 $(2, k)$를 지나므로

$16-k^2=3, \qquad k^2=13 \qquad \therefore k=-\sqrt{13}\ (\because k<0)$ 답 ①

참고 쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$이라 하면 $a^2=-\dfrac{3}{4}$이 되므로 조건을 만족시키지 않는다.

0095 점근선의 방정식은 $\quad y=\pm\sqrt{3}x$

두 직선 $y=\sqrt{3}x$, $y=-\sqrt{3}x$가 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2 $(0\le\theta_1<\pi,\ 0\le\theta_2<\pi)$라 하면

$\tan\theta_1=\sqrt{3}$, $\tan\theta_2=-\sqrt{3}$

$\therefore\ \theta_1=\dfrac{\pi}{3}$, $\theta_2=\dfrac{2}{3}\pi$

따라서 구하는 예각의 크기는 $\quad \theta_2-\theta_1=\dfrac{\pi}{3}$ 답 $\dfrac{\pi}{3}$

0096 $x^2-y^2=16$에서 $\quad \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{16}=1$

$\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$이므로 두 초점의 좌표는

$(4\sqrt{2},\ 0)$, $(-4\sqrt{2},\ 0)$ ⇨ ❶

쌍곡선의 점근선의 방정식은

$y=\pm x \qquad \therefore\ y=x,\ y=-x$ ⇨ ❷

쌍곡선의 초점에서 두 점근선까지의 거리는 모두 같으므로 점 $(4\sqrt{2},\ 0)$에서 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$까지의 거리는

$\dfrac{|4\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=4$ ⇨ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 쌍곡선의 초점의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ 쌍곡선의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ 초점에서 점근선까지의 거리를 구할 수 있다.	40%

0097 쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$이라 하면

점근선의 방정식은 $\quad y=\pm\dfrac{b}{a}x$

두 점근선이 서로 수직으로 만나므로

$\dfrac{b}{a}\cdot\left(-\dfrac{b}{a}\right)=-1 \qquad \therefore\ a^2=b^2$

즉 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$이 점 $(3,\ 1)$을 지나므로

$\dfrac{9}{a^2}-\dfrac{1}{a^2}=1 \qquad \therefore\ a^2=8$

따라서 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$의 초점의 좌표는

$(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$ $\sqrt{8+8}=4$

이므로 두 초점 사이의 거리는 $\quad 8$ 답 ③

참고 쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$이라 하면 $a^2=-8$이 되므로 조건을 만족시키지 않는다.

0098 $\sqrt{12+4}=4$에서 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=1$의 초점의 좌표는

$(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$

이 두 초점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식은

$x^2+y^2=16$ 중심이 원점이고 반지름의 길이가 4이다. …… ㉠

또 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$y=\pm\dfrac{2}{2\sqrt{3}}x$, 즉 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

이것을 ㉠에 대입하면

$x^2+\dfrac{1}{3}x^2=16, \qquad \dfrac{4}{3}x^2=16 \qquad \therefore\ x^2=12$

$x^2=12$를 ㉠에 대입하면 $\quad y^2=4$

따라서 원과 점근선의 교점의 좌표는

$(2\sqrt{3},\ 2)$, $(2\sqrt{3},\ -2)$, $(-2\sqrt{3},\ 2)$, $(-2\sqrt{3},\ -2)$

이므로 구하는 사각형의 넓이는

$4\sqrt{3}\cdot4=16\sqrt{3}$ 답 $16\sqrt{3}$

0099 주어진 쌍곡선의 주축의 길이는 $2\cdot3=6$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{BC}-\overline{AC}=6$, $\overline{BD}-\overline{AD}=6$

$\therefore\ \overline{BC}=\overline{AC}+6$, $\overline{BD}=\overline{AD}+6$

한편 $\triangle BCD$의 둘레의 길이가 40이므로

$\overline{BC}+\overline{BD}+\overline{CD}=40$

$(\overline{AC}+6)+(\overline{AD}+6)+\overline{CD}=40$

이때 $\overline{AC}+\overline{AD}=\overline{CD}$이므로

$2\overline{CD}+12=40 \qquad \therefore\ \overline{CD}=14$ 답 14

0100 $\sqrt{9+7}=4$이므로 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$(4,\ 0)$, $(-4,\ 0) \qquad \therefore\ \overline{FF'}=8$

주축의 길이는 $2\cdot3=6$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'}-\overline{PF}=6$ …… ㉠

이때 $\overline{FF'}$, $\overline{PF}$, $\overline{PF'}$의 길이가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\overline{PF}^2=\overline{FF'}\cdot\overline{PF'}=8\overline{PF'}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\overline{PF'}=18$, $\overline{PF}=12$

$\therefore\ \overline{PF'}^2-\overline{PF}^2=18^2-12^2=180$ 답 ⑤

0101 $2x^2-3y^2=6$에서 $\quad \dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{2}=1$

$\sqrt{3+2}=\sqrt{5}$이므로 두 초점의 좌표는

$(\sqrt{5},\ 0)$, $(-\sqrt{5},\ 0) \qquad \therefore\ \overline{FF'}=2\sqrt{5}$

쌍곡선의 정의에 의하여

$|\overline{PF}-\overline{PF'}|=2\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

이때 $\overline{PF'}=2\overline{PF}$이므로

$\overline{PF}=2\sqrt{3}$, $\overline{PF'}=4\sqrt{3}$

따라서 $\triangle PFF'$의 둘레의 길이는

$\overline{PF}+\overline{FF'}+\overline{PF'}=6\sqrt{3}+2\sqrt{5}$ 답 $6\sqrt{3}+2\sqrt{5}$

0102 $\sqrt{4+5}=3$에서 쌍곡선의 초점의 좌표는 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$이고 $\sqrt{25-16}=3$에서 타원의 초점의 좌표도 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$이므로 쌍곡선과 타원은 초점을 공유한다. ⇨ ❶

쌍곡선의 주축의 길이가 $2\cdot2=4$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'}-\overline{PF}=4$ ⇨ ❷

또 타원의 장축의 길이가 $2\cdot5=10$이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF'}+\overline{PF}=10$ ⇨ ❸

$\therefore\ \overline{PF'}^2-\overline{PF}^2=(\overline{PF'}+\overline{PF})(\overline{PF'}-\overline{PF})$

$=10\cdot4=40$ ⇨ ❹

답 40

채점 기준	비율
❶ 쌍곡선과 타원이 초점을 공유함을 알 수 있다.	20%
❷ $\overline{PF'}-\overline{PF}$의 길이를 구할 수 있다.	30%
❸ $\overline{PF'}+\overline{PF}$의 길이를 구할 수 있다.	30%
❹ $\overline{PF'}^2-\overline{PF}^2$의 값을 구할 수 있다.	20%

0103 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\sqrt{(x-3)^2+y^2} : |x-1|=2 : 1$

$\therefore 2|x-1|=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4x^2-8x+4=x^2-6x+9+y^2$

$\therefore 3x^2-y^2-2x-5=0$

따라서 $a=3$, $b=-1$, $c=-2$이므로

$a+b+c=0$ 답 ③

0104 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 $Q(0, y)$이므로 $\overline{PQ}=\overline{AQ}$에서

$|x|=\sqrt{(-2)^2+(y-1)^2}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$x^2=4+(y-1)^2 \qquad \therefore \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$

따라서 구하는 주축의 길이는 $2\cdot 2=4$ 답 ④

0105 이차곡선 $(1-k)x^2+(5+2k)y^2+2x+y=0$이 포물선이려면

$1-k=0$ 또는 $5+2k=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=-\dfrac{5}{2}$

따라서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 $-\dfrac{3}{2}$이다. 답 ③

0106 $kx^2+3y^2+k-6=0$에서

$kx^2+3y^2=6-k$

이 이차곡선이 타원이려면

$k>0$, $k\neq 3$, $6-k>0$

$\therefore 0<k<3$ 또는 $3<k<6$ 답 ③

참고 $k<0$이면 주어진 방정식은 쌍곡선을, $k=3$이면 주어진 방정식은 원을 나타내고 $k=6$이면 점 $(0, 0)$을 나타낸다.
또 $k>6$이면 주어진 식을 만족시키는 실수 x, y가 존재하지 않는다.

0107 $x^2+(k-3)y^2+4x+8y+4=0$에서

$x^2+4x+4+(k-3)\left\{y^2+\dfrac{8}{k-3}y+\left(\dfrac{4}{k-3}\right)^2\right\}=\dfrac{16}{k-3}$

$\therefore (x+2)^2+(k-3)\left(y+\dfrac{4}{k-3}\right)^2=\dfrac{16}{k-3}$

이 이차곡선이 쌍곡선이려면

$k-3<0 \qquad \therefore k<3$ 답 $k<3$

참고 이차곡선 $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$이 쌍곡선이려면

$AB<0$, $\dfrac{C^2}{4A}+\dfrac{D^2}{4B}-E\neq 0$

이어야 한다.

0108 전략 초점이 $(0, p)$이고 준선이 $y=-p$인 포물선의 방정식은 $x^2=4py$임을 이용한다. (단, $p\neq 0$)

풀이 초점이 $(0, 6)$이고 준선이 $y=-6$인 포물선의 방정식은

$x^2=4\cdot 6y$, 즉 $x^2=24y$

이 포물선이 점 $(12, a)$를 지나므로

$12^2=24a \qquad \therefore a=6$ 답 ②

0109 전략 포물선 위의 점에서 초점과 준선까지의 거리가 같음을 이용한다.

풀이 $y^2=12x=4\cdot 3x$에서 $F(3, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-3$이다.

포물선의 정의에 의하여 점 P에서 초점 F와 준선 $x=-3$까지의 거리가 같으므로

$\overline{PF}=a+3=6 \qquad \therefore a=3$

이때 점 $P(a, b)$는 포물선 위의 점이므로

$b^2=12a=36$

$\therefore a^2+b^2=3^2+36=45$ 답 45

0110 전략 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$의 장축의 길이는 $2a$, 단축의 길이는 $2b$임을 이용한다.

풀이 점 $(2\sqrt{3}, 1)$을 지나는 타원의 방정식을

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$이라 하면 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1$과 장축의 길이가 같으므로

$a^2=16$

즉 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이 점 $(2\sqrt{3}, 1)$을 지나므로

$\dfrac{12}{16}+\dfrac{1}{b^2}=1, \qquad \dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{4}$

$b^2=4 \qquad \therefore b=2\ (\because b>0)$

따라서 구하는 단축의 길이는 $2\cdot 2=4$ 답 4

0111 전략 주어진 타원의 방정식을 $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}+\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$ 꼴로 변형한다.

풀이 $5x^2+y^2-10x+2y+1=0$에서

$5(x-1)^2+(y+1)^2=5$

$\therefore (x-1)^2+\dfrac{(y+1)^2}{5}=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠ ⇨ ❶

따라서 타원 ㉠은 타원 $x^2+\dfrac{y^2}{5}=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이때 $\sqrt{5-1}=2$에서 타원 $x^2+\dfrac{y^2}{5}=1$의 초점의 좌표는

$(0, 2)$, $(0, -2)$

이므로 타원 ㉠의 초점의 좌표는

$(1, 1)$, $(1, -3)$ ⇨ ❷

$\therefore \overline{FF'}=1-(-3)=4$ ⇨ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 주어진 타원의 방정식을 변형할 수 있다.	40%
❷ 타원의 초점의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❸ $\overline{FF'}$의 길이를 구할 수 있다.	20%

0112 전략 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm 1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$임을 이용한다.

풀이 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식이 $y=\pm 3x$이므로

$\dfrac{b}{a}=3 \qquad \therefore b=3a \qquad \cdots\cdots$ ㉠

주축의 길이가 4이므로 $\quad 2a=4 \quad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=6$

$\therefore ab=12$

답 ③

0113 전략 주어진 포물선의 방정식을 $(y-n)^2=4p(x-m)$ 꼴로 변형한다.

풀이 $y^2+8x+2y+k=0$에서

$$(y+1)^2=-8\left(x+\frac{k-1}{8}\right) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이므로 포물선 ㉠은 포물선 $y^2=-8x$를 x축의 방향으로 $-\frac{k-1}{8}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=-8x=4\cdot(-2)x$의 초점의 좌표는 $(-2,\ 0)$이므로 포물선 ㉠의 초점의 좌표는

$$\left(-2-\frac{k-1}{8},\ -1\right), \text{ 즉 } \left(-\frac{k+15}{8},\ -1\right)$$

이 점이 점 $(-1,\ -1)$과 일치하므로

$$\frac{k+15}{8}=1 \qquad \therefore k=-7$$

답 ④

0114 전략 점 P의 좌표를 $(a,\ a^2)\ (a>0)$으로 놓고 $\overline{\mathrm{FH}}=\overline{\mathrm{PH}}$임을 이용한다.

풀이 포물선 $x^2=y=4\cdot\frac{1}{4}y$의 초점 F의 좌표는 $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$이고, 준선의 방정식은 $y=-\frac{1}{4}$이다.

점 P의 좌표를 $(a,\ a^2)\ (a>0)$이라 하면 $\mathrm{H}\left(a,\ -\frac{1}{4}\right)$이고 $\triangle\mathrm{PFH}$가 정삼각형이므로 $\quad \overline{\mathrm{FH}}=\overline{\mathrm{PH}}$

$$\sqrt{a^2+\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)^2}=a^2+\frac{1}{4}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$a^2+\frac{1}{4}=a^4+\frac{a^2}{2}+\frac{1}{16}, \qquad 16a^4-8a^2-3=0$$

$$(4a^2+1)(4a^2-3)=0 \qquad \therefore a^2=\frac{3}{4}\ (\because a^2>0)$$

따라서 점 P의 y좌표는 $\frac{3}{4}$이다.

답 ②

0115 전략 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하고 주어진 조건을 만족시키는 $a,\ b$ 사이의 관계식을 구한다.

풀이 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$$a^2=6b \quad \cdots\cdots ㉠$$

점 Q의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$$x=\frac{2}{3}a,\ y=\frac{2}{3}b \qquad \therefore a=\frac{3}{2}x,\ b=\frac{3}{2}y \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\left(\frac{3}{2}x\right)^2=6\cdot\frac{3}{2}y \qquad \therefore x^2=4y$$

따라서 점 Q의 자취를 나타내는 포물선의 초점의 좌표는 $(0,\ 1)$이므로

$$p=0,\ q=1 \qquad \therefore p-q=-1$$

답 ①

0116 전략 직각삼각형에서 $\cos 30°$의 값을 이용하여 타원의 장축의 길이를 구한다.

풀이 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$이라 하면 장축의 길이가 $2a$이므로

$$2a\cos 30°=6, \qquad 2a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6$$

$$\therefore a=2\sqrt{3}$$

단축의 길이가 $2b$이므로 $\quad 2b=6 \quad \therefore b=3$

$\sqrt{(2\sqrt{3})^2-3^2}=\sqrt{3}$이므로 두 초점 사이의 거리는

$$2\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

답 ③

0117 전략 주어진 타원의 방정식을 $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$ 꼴로 변형한다.

풀이 $2x^2+3y^2-4x+12y+8=0$에서

$$2(x-1)^2+3(y+2)^2=6$$

$$\therefore \frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y+2)^2}{2}=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

타원 ㉠은 타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

이때 $\sqrt{3-2}=1$에서 타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$의 초점의 좌표는 $(1,\ 0)$, $(-1,\ 0)$이므로 타원 ㉠의 초점의 좌표는

$$(2,\ -2),\ (0,\ -2)$$

$$\therefore \overline{\mathrm{FF'}}=2$$

타원의 정의에 의하여

$$\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF'}}=2\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

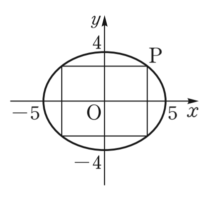
따라서 $\triangle\mathrm{AF'F}$의 둘레의 길이는

$$\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{FF'}}+\overline{\mathrm{AF'}}=2\sqrt{3}+2$$

답 $2\sqrt{3}+2$

0118 전략 주어진 타원을 좌표평면 위에 놓고 타원의 방정식을 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 타원의 장축이 x축, 단축이 y축 위에 오도록 타원을 좌표평면 위에 놓고, 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$이라 하면



$$2a=10,\ 2b=8 \qquad \therefore a=5,\ b=4$$

즉 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

⇨ ❶

제1사분면 위에 있는 닭장의 꼭짓점을 $\mathrm{P}(c,\ d)$라 하면

$$\frac{c^2}{25}+\frac{d^2}{16}=1$$

$c^2>0,\ d^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{c^2}{25}+\frac{d^2}{16}\geq 2\sqrt{\frac{c^2}{25}\cdot\frac{d^2}{16}}\ \left(\text{단, 등호는 } \frac{c^2}{25}=\frac{d^2}{16}\text{일 때 성립}\right)$$

$$1\geq\frac{cd}{10} \qquad \therefore cd\leq 10$$

⇨ ❷

따라서 닭장의 넓이는

$$2c\cdot 2d=4cd\leq 4\cdot 10=40$$

이므로 닭장의 최대 넓이는 $40\,\mathrm{m}^2$이다.

⇨ ❸

답 $40\,\mathrm{m}^2$

채점 기준	비율
❶ 타원의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❷ cd의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 닭장의 최대 넓이를 구할 수 있다.	30%

0119 전략 타원과 쌍곡선의 초점의 좌표를 각각 구한 후 네 초점을 꼭짓점으로 하는 사각형이 어떤 사각형인지 파악한다.

풀이 타원 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$의 초점의 좌표는

$(\sqrt{2},\ 0),\ (-\sqrt{2},\ 0)$

또 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a}-y^2=-1$의 초점의 좌표는

$(0,\ \sqrt{a+1}),\ (0,\ -\sqrt{a+1})$

이때 타원과 쌍곡선의 초점을 네 꼭짓점으로 하는 사각형은 마름모이므로 그 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{a+1}=6\sqrt{6}$

$\sqrt{a+1}=3\sqrt{3},\qquad a+1=27$

$\therefore\ a=26$ 답 ④

0120 전략 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$임을 이용한다.

풀이 점 P$(a,\ b)$가 쌍곡선 위의 점이므로

$a^2-4b^2=4$ …… ㉠

$x^2-4y^2=4$에서 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$이므로 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$y=\pm\dfrac{1}{2}x$, 즉 $x\pm2y=0$

점 P$(a,\ b)$와 직선 $x+2y=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|a+2b|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|a+2b|}{\sqrt{5}}$

또 점 P$(a,\ b)$와 직선 $x-2y=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|a-2b|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|a-2b|}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ \overline{\text{PQ}}\cdot\overline{\text{PR}}=\dfrac{|a+2b|}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{|a-2b|}{\sqrt{5}}$

$=\dfrac{|a^2-4b^2|}{5}=\dfrac{4}{5}\ (\because\ ㉠)$ 답 ④

0121 전략 주어진 조건을 이용하여 쌍곡선의 방정식을 구한다.

풀이 ㄱ. $y=x+1,\ y=-x-1$을 연립하여 풀면

$x=-1,\ y=0$

즉 두 점근선의 교점의 좌표가 $(-1,\ 0)$이므로 쌍곡선의 중심의 좌표는 $(-1,\ 0)$이다.

ㄴ. ㄱ에서 점 $(-1,\ 0)$이 중심이고 점 $(-5,\ 0)$이 한 초점이므로

쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{(x+1)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$이라 하자.

두 점 $(-5,\ 0),\ (-1,\ 0)$ 사이의 거리가 4이므로

$\sqrt{a^2+b^2}=4\qquad\therefore\ a^2+b^2=16$ …… ㉠

또 점근선의 기울기가 ±1이므로

$\dfrac{b}{a}=1\qquad\therefore\ a=b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2\sqrt{2},\ b=2\sqrt{2}\ (\because\ a>0,\ b>0)$

따라서 주축의 길이는 $\quad2\cdot2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

ㄷ. 주어진 쌍곡선의 방정식은 $\dfrac{(x+1)^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$이므로 이 쌍곡선을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{(y-3)^2}{8}=1$과 포갤 수 있다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0122 전략 점 $(a,\ b)$를 지나고 x축에 수직인 직선의 방정식은 $x=a$임을 이용한다.

풀이 $x^2-y^2=18$에서 $\quad\dfrac{x^2}{18}-\dfrac{y^2}{18}=1$

$\sqrt{18+18}=6$이므로 초점의 좌표는

$(6,\ 0),\ (-6,\ 0)$

점 F$(6,\ 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선의 방정식은 $x=6$이므로 $x=6$을 $x^2-y^2=18$에 대입하면

$y^2=18\qquad\therefore\ y=\pm3\sqrt{2}$

따라서 A$(6,\ 3\sqrt{2})$, B$(6,\ -3\sqrt{2})$이므로

$\overline{\text{AB}}=3\sqrt{2}-(-3\sqrt{2})=6\sqrt{2}$ 답 ⑤

0123 전략 배의 자취의 방정식은 두 점 A, B를 초점으로 하고 주축의 길이가 40인 쌍곡선임을 이용한다.

풀이 배가 두 점 A, B에서의 거리의 차가 일정하도록 움직이므로 점 P의 자취는 쌍곡선이다.

쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$이라 하면

$2a=40\qquad\therefore\ a=20$

A$(-60,\ 0)$, B$(60,\ 0)$이므로

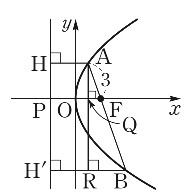
$a^2+b^2=60^2\qquad\therefore\ b^2=60^2-20^2=3200$

따라서 점 P의 자취의 방정식은

$\dfrac{x^2}{400}-\dfrac{y^2}{3200}=1$ 답 $\dfrac{x^2}{400}-\dfrac{y^2}{3200}=1$

0124 전략 포물선 위의 점에서 초점과 준선에 이르는 거리가 같음을 이용하다.

풀이 $y^2=8x=4\cdot2x$에서 F$(2,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-2$이다.



오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하고, 준선이 x축과 만나는 점을 P라 하자. 또 점 A에서 x축, $\overline{\text{BH}'}$에 내린 수선의 각각 Q, R라 하면 $\overline{\text{AH}}=\overline{\text{AF}}=3$이므로

$\overline{\text{FQ}}=\overline{\text{FP}}-\underbrace{\overline{\text{QP}}}_{\text{QP}=\text{AH}}=4-3=1$

$\overline{\text{BF}}=\overline{\text{BH}'}=k$라 하면

$\overline{\text{BR}}=\overline{\text{BH}'}-\underbrace{\overline{\text{RH}'}}_{\text{RH}'=\text{AH}}=k-3$

$\triangle$AQF$\backsim\triangle$ARB (AA 닮음)이므로

$\underbrace{1:(k-3)=3:(k+3)}_{\text{FQ}:\text{BR}=\text{AF}:\text{AB}},\qquad k+3=3k-9$

$2k=12\qquad\therefore\ k=6$

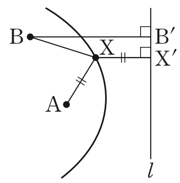
$\therefore\ \overline{\text{BF}}=6$ 답 6

0125 전략 포물선의 준선을 그어 거리의 합이 최소가 되는 지점을 찾는다.

풀이 포물선 위의 한 지점을 X라 하면 점 X와 두 동네 A, B로부터의 거리의 합은

$\overline{AX}+\overline{BX}$

오른쪽 그림과 같이 두 점 X, B에서 포물선의 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 X′, B′이라 하면 $\overline{AX}=\overline{XX'}$이므로



$\overline{AX}+\overline{BX}=\overline{XX'}+\overline{BX}$

$\geq\overline{BB'}$

이때 점 S는 $\overline{BB'}$ 위에 있으므로 두 점 A, B로부터의 거리의 합이 최소인 지점은 S이다.

따라서 공항의 위치로 가장 알맞은 지점은 S이다. 답 S

0126 전략 타원의 정의를 이용하여 $\overline{PF'}$의 길이를 $\overline{PF}$의 길이로 나타낸다.

풀이 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF'}=2\cdot5=10$

이므로 $\overline{PF'}=10-\overline{PF}$

$\therefore \overline{AP}-\overline{PF'}=\overline{AP}-(10-\overline{PF})$

$=\overline{AP}+\overline{PF}-10$

$\geq\overline{AF}-10$

$\sqrt{25-9}=4$에서 F(0, 4), F′(0, −4)이므로

$\overline{AF}=\sqrt{a^2+(-4)^2}=\sqrt{a^2+16}$

즉 $\sqrt{a^2+16}-10=1$이므로

$\sqrt{a^2+16}=11,\quad a^2+16=121$

$\therefore a^2=105$ 답 ②

0127 전략 사각형 PF′QF가 평행사변형임을 이용한다.

풀이 점 P(a, b)가 쌍곡선 $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점이므로

$\frac{a^2}{20}-\frac{b^2}{16}=1$ ······ ㉠

$\sqrt{20+16}=6$에서 쌍곡선의 초점의 좌표는

(6, 0), (−6, 0)

$\therefore \overline{FF'}=12$

이때 □PF′QF는 평행사변형이므로

$\triangle PF'F=\frac{1}{2}\square PF'QF=\frac{1}{2}\cdot96=48$

즉 $\frac{1}{2}\cdot12\cdot b=48$이므로 $b=8$ ⇨ ❶

$b=8$을 ㉠에 대입하면

$\frac{a^2}{20}-\frac{64}{16}=1,\quad a^2=100\quad \therefore a=10\ (\because a>0)$ ⇨ ❷

$\therefore a+b=18$ ⇨ ❸

답 18

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

Ⅰ. 평면 곡선

02 평면 곡선의 접선

0128 답 (가) $2x$ (나) $\frac{dy}{dx}$ (다) $-\frac{x}{2y}$

0129 $y^2-5x=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2y\frac{dy}{dx}-5=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{5}{2y}\ (y\neq0)$ 답 $\frac{dy}{dx}=\frac{5}{2y}\ (y\neq0)$

0130 $2x^2+y^2=6$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$4x+2y\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{y}\ (y\neq0)$ 답 $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{y}\ (y\neq0)$

0131 $xy=10$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$y+x\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$ 답 $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$

0132 $x^2+xy+y^2=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+y+x\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=0$

$(x+2y)\frac{dy}{dx}=-(2x+y)$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y}{x+2y}\ (x+2y\neq0)$

답 $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y}{x+2y}\ (x+2y\neq0)$

0133 $y^3=\frac{1}{x^2}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3y^2\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{x^3}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2}{3x^3y^2}$

답 $\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{3x^3y^2}$

0134 $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{1}{y}+x\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)\frac{dy}{dx}-\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}\right)=0$

$\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{y^2}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}+\frac{y}{x^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2+y^2}{x^2y}}{\frac{x^2+y^2}{xy^2}}=\frac{y}{x}$ 답 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$

0135 $\sqrt{y^2+1}=x^2$의 양변을 제곱하면

$y^2+1=x^4$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2y\dfrac{dy}{dx}=4x^3 \qquad \therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x^3}{y}\ (y\neq 0)$ 답 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x^3}{y}\ (y\neq 0)$

0136 $\ln|y|=x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=2x \qquad \therefore \dfrac{dy}{dx}=2xy$ 답 $\dfrac{dy}{dx}=2xy$

0137 $x^2-2x+y^2=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x-2+2y\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-x+1}{y}\ (y\neq 0)$

위의 식에 $x=2$, $y=1$을 대입하면

$\dfrac{dy}{dx}=-1$ 답 -1

0138 $\sin x+\cos y=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\cos x-\sin y\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos x}{\sin y}\ (\sin y\neq 0)$

위의 식에 $x=\dfrac{\pi}{6}$, $y=\dfrac{\pi}{3}$를 대입하면 $\dfrac{dy}{dx}=1$ 답 1

0139 (1) $x^2+4xy-y^2=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+4y+4x\dfrac{dy}{dx}-2y\dfrac{dy}{dx}=0$

$(2x-y)\dfrac{dy}{dx}=-(x+2y)$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x+2y}{2x-y}\ (2x\neq y)$

(2) $x=-1$, $y=0$을 대입하면 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{2}$

(3) $y=-\dfrac{1}{2}(x+1) \qquad \therefore y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ 답 풀이 참조

0140 $x^2+xy-y^3=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+y+x\dfrac{dy}{dx}-3y^2\dfrac{dy}{dx}=0$

$(x-3y^2)\dfrac{dy}{dx}=-(2x+y)$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+y}{x-3y^2}\ (x\neq 3y^2)$

위의 식에 $x=1$, $y=0$을 대입하면 $\dfrac{dy}{dx}=-2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=-2(x-1) \qquad \therefore y=-2x+2$ 답 $y=-2x+2$

0141 $(x+1)^2+(y-1)^2=8$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2(x+1)+2(y-1)\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x+1}{y-1}\ (y\neq 1)$

앞의 식에 $x=-3$, $y=3$을 대입하면 $\dfrac{dy}{dx}=1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-3=x+3 \qquad \therefore y=x+6$ 답 $y=x+6$

0142 $-2y=2\cdot 1\cdot(x+1)$

$\therefore y=-x-1$ 답 $y=-x-1$

0143 $4x=2\cdot 4\cdot(y+1)$

$\therefore y=\dfrac{1}{2}x-1$ 답 $y=\dfrac{1}{2}x-1$

0144 $\dfrac{-3\cdot x}{12}+\dfrac{1\cdot y}{4}=1$

$\therefore x-y+4=0$ 답 $x-y+4=0$

0145 $2\cdot(-1)\cdot x+2\cdot y=6$

$\therefore x-y+3=0$ 답 $x-y+3=0$

0146 $\dfrac{3\cdot x}{6}-\dfrac{2\cdot y}{8}=1$

$\therefore 2x-y-4=0$ 답 $2x-y-4=0$

0147 $3\cdot 2x-2\cdot 3y=-6$

$\therefore x-y+1=0$ 답 $x-y+1=0$

0148 $t=y-2$이므로

$x=(y-2)^2$ 답 $x=(y-2)^2$

0149 $\sin^2 t+\cos^2 t=1$이므로

$x^2+y^2=1$ 답 $x^2+y^2=1$

0150 $\dfrac{dx}{dt}=6t^2$, $\dfrac{dy}{dt}=1$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1}{6t^2}$ 답 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{6t^2}$

0151 $\dfrac{dx}{dt}=2t$, $\dfrac{dy}{dt}=1-\dfrac{1}{t^2}$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1-\frac{1}{t^2}}{2t}=\dfrac{\frac{t^2-1}{t^2}}{2t}=\dfrac{t^2-1}{2t^3}$ 답 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t^2-1}{2t^3}$

0152 (1) $\dfrac{dx}{dt}=\cos t$, $\dfrac{dy}{dt}=-\sin t$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-\sin t}{\cos t}=-\tan t\ (\cos t\neq 0)$

(2) $x=\sin\dfrac{\pi}{6}+1=\dfrac{3}{2}$, $y=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $t=\frac{\pi}{6}$이면 $\frac{dy}{dx}=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)$

$\therefore y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$ 답 풀이 참조

0153 $\frac{dx}{dt}=-\frac{2}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=1$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{-\frac{2}{t^2}}=-\frac{t^2}{2}$$

$x=1$, $y=3$일 때 $t=2$이므로 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{dy}{dx}=-\frac{2^2}{2}=-2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-3=-2(x-1)$

$\therefore y=-2x+5$ 답 $y=-2x+5$

0154 $x^3+ax-by^3=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+a-3by^2\frac{dy}{dx}=0$ $\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+a}{3by^2}$ $(y\neq0)$

$x=1$, $y=1$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값이 $\frac{2}{3}$이므로

$\frac{3+a}{3b}=\frac{2}{3}$, $9+3a=6b$

$\therefore a-2b=-3$ …… ㉠

또 주어진 곡선이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$1+a-b=0$

$\therefore a-b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

$\therefore a+b=3$ 답 ③

0155 $(x+1)^2-(y-1)^2=2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2(x+1)-2(y-1)\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x+1}{y-1}$ $(y\neq1)$ 답 $\frac{dy}{dx}=\frac{x+1}{y-1}$ $(y\neq1)$

0156 (1) $x^2+y^2=5^2$, 즉 $x^2+y^2=25$ ⇨ ❶

(2) $x^2+y^2=25$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$ $\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ $(y\neq0)$ ⇨ ❷

(3) $x=3$일 때 $y=4$이므로 $\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{4}$ ⇨ ❸

답 (1) $x^2+y^2=25$ (2) $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ $(y\neq0)$ (3) $-\frac{3}{4}$

채점 기준	비율
❶ x, y 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30%
❷ $\frac{dy}{dx}$를 구할 수 있다.	40%
❸ $x=3$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값을 구할 수 있다.	30%

0157 $x+\sin x-xy=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$1+\cos x-y-x\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1+\cos x-y}{x}$ $(x\neq0)$

위의 식에 $x=\pi$, $y=1$을 대입하면

$\frac{dy}{dx}=\frac{1+\cos\pi-1}{\pi}=-\frac{1}{\pi}$ 답 $-\frac{1}{\pi}$

0158 $2x^2y-y^3=8$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$4xy+2x^2\frac{dy}{dx}-3y^2\frac{dy}{dx}=0$

$(2x^2-3y^2)\frac{dy}{dx}=-4xy$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{4xy}{2x^2-3y^2}$ $(2x^2\neq3y^2)$

따라서 점 $(3,\ 4)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{dy}{dx}=-\frac{4\cdot3\cdot4}{2\cdot3^2-3\cdot4^2}=\frac{8}{5}$ 답 $\frac{8}{5}$

0159 $x+\frac{2x}{y}=4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$1+\frac{2}{y}+2x\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{2x}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}=1+\frac{2}{y}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y+2}{y}}{\frac{2x}{y^2}}=\frac{y^2+2y}{2x}$$

한편 $x=2$를 $x+\frac{2x}{y}=4$에 대입하면

$2+\frac{4}{y}=4$, $\frac{4}{y}=2$ $\therefore y=2$

따라서 점 $(2,\ 2)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{dy}{dx}=\frac{2^2+2\cdot2}{2\cdot2}=2$ 답 ④

0160 $x\sin y+y\sin x=\frac{\pi}{6}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\sin y+x\cos y\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}\sin x+y\cos x=0$

$(\sin x+x\cos y)\frac{dy}{dx}=-(\sin y+y\cos x)$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\sin y+y\cos x}{\sin x+x\cos y}$ $(\sin x+x\cos y\neq0)$

따라서 점 $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}}=-1$$ 답 -1

0161 점 $(1,\ 2)$가 곡선 $x^3+ay^3-2xy+b=0$ 위에 있으므로

$1+8a-4+b=0$

$\therefore 8a+b=3$ …… ㉠

$x^3+ay^3-2xy+b=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+3ay^2\dfrac{dy}{dx}-2y-2x\dfrac{dy}{dx}=0$

$(2x-3ay^2)\dfrac{dy}{dx}=3x^2-2y$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2-2y}{2x-3ay^2}$ $(2x\neq 3ay^2)$

점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기가 $\dfrac{1}{10}$이므로

$\dfrac{3-4}{2-12a}=\dfrac{1}{10}$, $\quad 12a-2=10 \quad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=-5$

$\therefore a-b=6$ 답 ⑤

0162 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0 \quad \therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ $(x\neq 0)$

따라서 점 $(1, 16)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx}=-4$

이므로 접선의 방정식은

$y-16=-4(x-1) \quad \therefore y=-4x+20$

이 직선이 점 $(3, a)$를 지나므로

$a=-4\cdot3+20=8$ 답 ③

0163 $x^3+y^2-4xy=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+2y\dfrac{dy}{dx}-4y-4x\dfrac{dy}{dx}=0$

$(4x-2y)\dfrac{dy}{dx}=3x^2-4y$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2-4y}{4x-2y}$ $(2x\neq y)$

따라서 점 $(3, 9)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3\cdot3^2-4\cdot9}{4\cdot3-2\cdot9}=\dfrac{3}{2}$

이므로 접선의 방정식은

$y-9=\dfrac{3}{2}(x-3) \quad \therefore y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{2}$

이 직선이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{3}{2}a+\dfrac{9}{2} \quad \therefore a=-3$ 답 -3

0164 $xy^2=8$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$y^2+x\cdot2y\dfrac{dy}{dx}=0 \quad \therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{2x}$ ⇨ ❶

따라서 점 $(2, 2)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{2}$

이므로 접선의 방정식은

$y-2=-\dfrac{1}{2}(x-2) \quad \therefore x+2y-6=0$ ⇨ ❷

이 직선과 원점 사이의 거리는

$\dfrac{|-6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ ⇨ ❸

답 $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

채점 기준	비율
❶ $\dfrac{dy}{dx}$를 구할 수 있다.	30%
❷ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ 접선과 원점 사이의 거리를 구할 수 있다.	30%

0165 $y^2=\ln(2-x^2)+xy+20$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2y\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2x}{2-x^2}+y+x\dfrac{dy}{dx}$

$(x-2y)\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-2y+x^2y}{2-x^2}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-2y+x^2y}{(2-x^2)(x-2y)}$ $(x\neq 2y)$

따라서 점 $(1, 5)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2-10+5}{1\cdot(-9)}=\dfrac{1}{3}$

이므로 접선의 방정식은

$y-5=\dfrac{1}{3}(x-1) \quad \therefore y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{14}{3}$

즉 $a=\dfrac{1}{3}$, $b=\dfrac{14}{3}$이므로

$\dfrac{b}{a}=14$ 답 ③

0166 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(4, -4)$에서의 접선의 방정식은

$-4y=2(x+4) \quad \therefore y=-\dfrac{1}{2}x-2$

이 직선이 점 $(a, 1)$을 지나므로

$1=-\dfrac{1}{2}a-2 \quad \therefore a=-6$ 답 ④

0167 점 $(18, a)$가 포물선 $y^2=2x$ 위에 있으므로

$a^2=36 \quad \therefore a=6$ $(\because a>0)$

따라서 점 $(18, 6)$에서의 접선의 방정식은

$6y=2\cdot\dfrac{1}{2}(x+18) \quad \therefore y=\dfrac{1}{6}x+3$ 답 $y=\dfrac{1}{6}x+3$

다른풀이 $y^2=2x$에 $x=18$, $y=a$를 대입하면

$a^2=36 \quad \therefore a=6$ $(\because a>0)$

$y^2=2x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2y\dfrac{dy}{dx}=2 \quad \therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{y}$ $(y\neq 0)$

따라서 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{6}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-6=\dfrac{1}{6}(x-18) \quad \therefore y=\dfrac{1}{6}x+3$

0168 포물선 $x^2=-8y=4\cdot(-2)y$의 초점의 좌표는

$(0, -2)$

점 $(8, -8)$에서의 접선의 방정식은

$8x=2\cdot(-2)(y-8) \quad \therefore y=-2x+8$

이 직선과 평행한 직선의 기울기는 -2이므로 기울기가 -2이고 점 $(0, -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+2=-2(x-0) \quad \therefore y=-2x-2$

답 $y=-2x-2$

0169 포물선 $y^2=12x=4\cdot3x$ 위의 점 $\left(\frac{1}{3},\ 2\right)$에서의 접선의 방정식은 $2y=2\cdot3\left(x+\frac{1}{3}\right)$ $\therefore y=3x+1$ …… ㉠

점 $(3,\ 6)$에서의 접선의 방정식은

$6y=2\cdot3(x+3)$ $\therefore y=x+3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=4$

따라서 두 접선의 교점의 좌표가 $(1,\ 4)$이므로

$a=1,\ b=4$ $\therefore a+b=5$

답 ⑤

0170 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$by=2(x+a)$

이 접선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각

$(-a,\ 0),\ \left(0,\ \frac{2a}{b}\right)$

이므로 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{2a}{b}=\frac{1}{2}$, 즉 $\frac{a^2}{b}=\frac{1}{2}$ …… ㉠

이때 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 포물선 $y^2=4x$ 위에 있으므로

$b^2=4a$ $\therefore a=\frac{b^2}{4}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{b^3}{16}=\frac{1}{2}$, $b^3=8$ $\therefore b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면

$\frac{a^2}{2}=\frac{1}{2}$, $a^2=1$ $\therefore a=1\ (\because a>0)$

$\therefore ab=2$

답 2

0171 포물선 $y^2=8x=4\cdot2x$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $y_1y=2\cdot2(x+x_1)$ $\therefore y=\frac{4}{y_1}x+\frac{4x_1}{y_1}$

직선 $y=-\frac{1}{2}x+8$에 수직인 직선의 기울기는 2이므로

$\frac{4}{y_1}=2$ $\therefore y_1=2$

이때 $y_1^2=8x_1$이므로 $x_1=\frac{y_1^2}{8}=\frac{2^2}{8}=\frac{1}{2}$

따라서 접선의 방정식은 $y=2x+1$이고, 이 직선의 y절편은 1이다.

답 ②

0172 포물선 $x^2=-y=4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)y$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $x_1x=2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)(y+y_1)$ $\therefore y=-2x_1x-y_1$

이 직선의 기울기가 -1이므로

$-2x_1=-1$ $\therefore x_1=\frac{1}{2}$

이때 $x_1^2=-y_1$이므로 $y_1=-x_1^2=-\left(\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}$

따라서 접선의 방정식은 $y=-x+\frac{1}{4}$

이 직선이 점 $\left(-\frac{1}{4},\ a\right)$를 지나므로

$a=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

답 ⑤

0173 초점의 좌표가 $(0,\ 1)$이고 준선의 방정식이 $y=-1$인 포물선의 방정식은

$x^2=4y$ ⇨ ❶

포물선 $x^2=4y$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$x_1x=2(y+y_1)$ $\therefore y=\frac{x_1}{2}x-y_1$

직선 $y=-2x+1$에 평행한 직선의 기울기는 -2이므로

$\frac{x_1}{2}=-2$ $\therefore x_1=-4$ ⇨ ❷

이때 $x_1^2=4y_1$이므로 $y_1=\frac{x_1^2}{4}=\frac{(-4)^2}{4}=4$ ⇨ ❸

따라서 접선의 방정식은 $y=-2x-4$ ⇨ ❹

답 $y=-2x-4$

채점 기준	비율
❶ 포물선의 방정식을 구할 수 있다.	20%
❷ x_1의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ y_1의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	20%

0174 포물선 $y^2=2x=4\cdot\frac{1}{2}x$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$y_1y=2\cdot\frac{1}{2}(x+x_1)$ $\therefore y=\frac{1}{y_1}x+\frac{x_1}{y_1}$

이 직선이 직선 $y=mx-2m+2$와 일치해야 하므로

$\frac{1}{y_1}=m,\ \frac{x_1}{y_1}=-2m+2$

$m=\frac{1}{y_1}$을 $\frac{x_1}{y_1}=-2m+2$에 대입하면

$\frac{x_1}{y_1}=-\frac{2}{y_1}+2$ $\therefore x_1=-2+2y_1$

이때 $y_1^2=2x_1$이므로

$y_1^2=-4+4y_1$, $y_1^2-4y_1+4=0$

$(y_1-2)^2=0$ $\therefore y_1=2$

$\therefore m=\frac{1}{y_1}=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

0175 포물선 $y^2=12x=4\cdot3x$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$y_1y=2\cdot3(x+x_1)$ $\therefore y=\frac{6}{y_1}x+\frac{6x_1}{y_1}$

직선 $x+y+9=0$, 즉 $y=-x-9$와 평행한 직선의 기울기는 -1이므로

$\frac{6}{y_1}=-1$ $\therefore y_1=-6$

이때 $y_1^2=12x_1$이므로 $x_1=\frac{y_1^2}{12}=\frac{(-6)^2}{12}=3$

따라서 접선의 방정식은 $y=-x-3$

직선 $y=-x-3$ 위의 점 $(0,\ -3)$과 직선 $x+y+9=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-3+9|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$

이므로 구하는 거리의 최솟값은 $3\sqrt{2}$ 이다.

답 $3\sqrt{2}$

타쎈 특강

기울기가 m인 직선 l과 포물선 사이의 거리의 최솟값은 기울기가 m인 포물선의 접선과 직선 l 사이의 거리와 같다.

0176 포물선 $y^2=x=4\cdot\frac{1}{4}x$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2\cdot\frac{1}{4}(x+x_1) \qquad \therefore\ y=\frac{1}{2y_1}x+\frac{x_1}{2y_1}$$

이 직선이 점 $(-9,\ 0)$을 지나므로

$$0=-\frac{9}{2y_1}+\frac{x_1}{2y_1} \qquad \therefore\ x_1=9$$

이때 $y_1{}^2=x_1$이므로 $\quad y_1{}^2=9 \quad \therefore\ y_1=\pm3$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{6}x+\frac{3}{2},\ y=-\frac{1}{6}x-\frac{3}{2}$$

답 $y=\frac{1}{6}x+\frac{3}{2},\ y=-\frac{1}{6}x-\frac{3}{2}$

0177 포물선 $y^2=-8x=4\cdot(-2)x$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2\cdot(-2)(x+x_1) \qquad \therefore\ y=-\frac{4}{y_1}x-\frac{4x_1}{y_1}$$

이 직선이 점 $(4,\ -2)$를 지나므로

$$-2=-\frac{16}{y_1}-\frac{4x_1}{y_1} \qquad \therefore\ x_1=\frac{y_1}{2}-4$$

이때 $y_1{}^2=-8x_1$이므로

$$y_1{}^2=-8\left(\frac{y_1}{2}-4\right), \qquad y_1{}^2+4y_1-32=0$$

$$(y_1+8)(y_1-4)=0 \qquad \therefore\ y_1=-8 \text{ 또는 } y_1=4$$

따라서 접점의 좌표는

$(-8,\ -8),\ (-2,\ 4)$

이므로 두 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}x-4,\ y=-x+2$$

점 $(a,\ 2)$는 직선 $y=\frac{1}{2}x-4$ 위에 있으므로

$$2=\frac{1}{2}a-4 \qquad \therefore\ a=12$$

답 ⑤

0178 포물선 $x^2=16y=4\cdot4y$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x=2\cdot4(y+y_1) \qquad \therefore\ y=\frac{x_1}{8}x-y_1$$ ⇨ ❶

이 직선이 점 $(8,\ a)$를 지나므로

$$a=x_1-y_1 \qquad \therefore\ y_1=x_1-a$$

이때 $x_1{}^2=16y_1$이므로

$$x_1{}^2=16(x_1-a), \qquad x_1{}^2-16x_1+16a=0$$

이 이차방정식의 두 실근을 α, β라 하면 접선의 기울기는 $\frac{\alpha}{8}$, $\frac{\beta}{8}$이고 두 접선이 서로 수직이므로

$$\frac{\alpha}{8}\cdot\frac{\beta}{8}=-1 \qquad \therefore\ \alpha\beta=-64$$ ⇨ ❷

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=16a$이므로

$$16a=-64 \qquad \therefore\ a=-4$$ ⇨ ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	20%
❷ $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30%

타쎈 특강

포물선 $x^2=4py$ 밖의 한 점 $(a,\ b)$에서 포물선에 그은 두 접선이 서로 수직이면 점 $(a,\ b)$는 포물선의 준선 $y=-p$ 위에 있다.

0179 접점의 좌표를 $\left(x_1,\ \frac{x_1{}^2}{4}\right)$이라 하면 포물선 $x^2=4y$ 위의 점 $\left(x_1,\ \frac{x_1{}^2}{4}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x=2\left(y+\frac{x_1{}^2}{4}\right) \qquad \therefore\ y=\frac{x_1}{2}x-\frac{x_1{}^2}{4}$$

이 직선이 점 $(4,\ 3)$을 지나므로

$$3=2x_1-\frac{x_1{}^2}{4}, \qquad x_1{}^2-8x_1+12=0$$

$$(x_1-2)(x_1-6)=0 \qquad \therefore\ x_1=2 \text{ 또는 } x_1=6$$

따라서 두 접점의 좌표는 $(2,\ 1)$, $(6,\ 9)$이므로

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(6-2)^2+(9-1)^2}=4\sqrt{5}$$

답 $4\sqrt{5}$

0180 접점의 좌표를 $\left(\frac{y_1{}^2}{6},\ y_1\right)$이라 하면 포물선 $y^2=6x=4\cdot\frac{3}{2}x$ 위의 점 $\left(\frac{y_1{}^2}{6},\ y_1\right)$에서의 접선의 방정식은

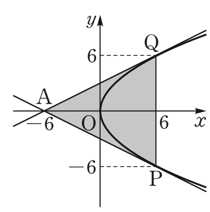
$$y_1y=2\cdot\frac{3}{2}\left(x+\frac{y_1{}^2}{6}\right) \qquad \therefore\ y=\frac{3}{y_1}x+\frac{y_1}{2}$$

이 직선이 점 $\mathrm{A}(-6,\ 0)$을 지나므로

$$0=\frac{-18}{y_1}+\frac{y_1}{2}, \qquad y_1{}^2=36$$

$$\therefore\ y_1=\pm6$$

따라서 $\mathrm{P}(6,\ -6)$, $\mathrm{Q}(6,\ 6)$이라 하면 오른쪽 그림에서



$$\triangle\mathrm{APQ}=\frac{1}{2}\cdot12\cdot12=72$$

답 ③

0181 타원 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x}{2}+\frac{2y}{8}=1 \qquad \therefore\ \frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$$

이 직선의 x절편은 2, y절편은 4이므로 구하는 합은

$2+4=6$

답 ③

0182 타원 $x^2+3y^2=12$ 위의 점 $(3,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$$3x+3y=12 \qquad \therefore\ x+y=4$$

이 직선이 점 $(a,\ -4)$를 지나므로

$$a-4=4 \qquad \therefore\ a=8$$

답 8

0183 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ 위의 점 $(2, 6)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{a}+\frac{6y}{b}=1 \qquad \therefore y=-\frac{b}{3a}x+\frac{b}{6}$$

이 직선의 기울기가 -2이므로

$$-\frac{b}{3a}=-2 \qquad \therefore b=6a \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 점 $(2, 6)$이 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ 위에 있으므로

$$\frac{4}{a}+\frac{36}{b}=1$$

㉠을 위의 식에 대입하면

$$\frac{4}{a}+\frac{36}{6a}=1, \qquad \frac{10}{a}=1 \qquad \therefore a=10$$

㉠에서 $b=6a=60$이므로 $\quad ab=600$

답 600

0184 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$이라 하면 $\quad \mathrm{H}(x_1, 0)$ ⇨ ❶

타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{16}+\frac{y_1y}{4}=1$$

$y=0$일 때 $x=\frac{16}{x_1}$이므로 $\quad \mathrm{Q}\left(\frac{16}{x_1}, 0\right)$ ⇨ ❷

$$\therefore \overline{\mathrm{OH}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}=x_1\cdot\frac{16}{x_1}=16$$ ⇨ ❸

답 16

채점 기준	비율
❶ 점 H의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ 점 Q의 좌표를 구할 수 있다.	50%
❸ $\overline{\mathrm{OH}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}$의 값을 구할 수 있다.	20%

0185 타원 $x^2+4y^2=20$ 위의 점 $(4, 1)$에서의 접선의 방정식은

$$4x+4y=20 \qquad \therefore x+y-5=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠과 점 P 사이의 거리의 최댓값은 점 $(4, 1)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점 $(-4, -1)$과 직선 ㉠ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-4-1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=5\sqrt{2}$$

답 ②

0186 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{8}+\frac{y_1y}{2}=1 \qquad \therefore y=-\frac{x_1}{4y_1}x+\frac{2}{y_1}$$

직선 $2x+y-5=0$, 즉 $y=-2x+5$에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로

$$-\frac{x_1}{4y_1}=\frac{1}{2} \qquad \therefore x_1=-2y_1$$

이때 $\frac{{x_1}^2}{8}+\frac{{y_1}^2}{2}=1$이므로

$$\frac{(-2y_1)^2}{8}+\frac{{y_1}^2}{2}=1, \qquad {y_1}^2=1 \qquad \therefore y_1=\pm1$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}x\pm2$$

답 $y=\frac{1}{2}x\pm2$

0187 타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{12}+\frac{y_1y}{4}=1 \qquad \therefore y=-\frac{x_1}{3y_1}x+\frac{4}{y_1}$$

이 직선의 기울기가 $\tan45°=1$이므로

$$-\frac{x_1}{3y_1}=1 \qquad \therefore x_1=-3y_1$$

이때 $\frac{{x_1}^2}{12}+\frac{{y_1}^2}{4}=1$이므로

$$\frac{(-3y_1)^2}{12}+\frac{{y_1}^2}{4}=1, \qquad {y_1}^2=1 \qquad \therefore y_1=\pm1$$

따라서 접선의 방정식은

$$y=x\pm4$$

즉 두 접선의 y절편은 4, -4이므로 구하는 곱은

$$4\cdot(-4)=-16$$

답 ③

0188 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a}+\frac{y_1y}{9}=1 \qquad \therefore y=-\frac{9x_1}{ay_1}x+\frac{9}{y_1}$$

이 직선이 직선 $y=2x-5$와 일치하므로

$$-\frac{9x_1}{ay_1}=2, \quad \frac{9}{y_1}=-5$$

$$\therefore x_1=\frac{2a}{5}, \quad y_1=-\frac{9}{5}$$

이때 $\frac{{x_1}^2}{a}+\frac{{y_1}^2}{9}=1$이므로

$$\frac{4a}{25}+\frac{9}{25}=1 \qquad \therefore a=4$$

즉 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$이므로 $\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$에서 초점의 좌표는

$$(0, \sqrt{5}), \ (0, -\sqrt{5})$$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$$\sqrt{5}-(-\sqrt{5})=2\sqrt{5}$$

답 ②

0189 타원 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{20}=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{5}+\frac{y_1y}{20}=1 \qquad \therefore y=-\frac{4x_1}{y_1}x+\frac{20}{y_1}$$

이 직선의 기울기가 -4이므로

$$-\frac{4x_1}{y_1}=-4 \qquad \therefore x_1=y_1$$

이때 $\frac{{x_1}^2}{5}+\frac{{y_1}^2}{20}=1$이므로

$$\frac{{x_1}^2}{5}+\frac{{x_1}^2}{20}=1, \qquad {x_1}^2=4 \qquad \therefore x_1=\pm2$$

따라서 두 접선의 방정식은

$$y=-4x\pm10$$ ⇨ ❶

구하는 거리는 직선 $y=-4x+10$ 위의 점 $(0, 10)$과 직선 $y=-4x-10$, 즉 $4x+y+10=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|10+10|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{20\sqrt{17}}{17}$$ ⇨ ❷

답 $\frac{20\sqrt{17}}{17}$

채점 기준	비율
❶ 두 접선의 방정식을 구할 수 있다.	60%
❷ 두 접선 사이의 거리를 구할 수 있다.	40%

0190 타원 $12x^2+y^2=16$ 위의 점 $(-1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은
$-12x+2y=16$
$\therefore y=6x+8$ …… ㉠
타원 $x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은
$ax+\dfrac{by}{3}=1 \qquad \therefore y=-\dfrac{3a}{b}x+\dfrac{3}{b}$ …… ㉡
두 직선 ㉠, ㉡이 서로 평행하므로
$-\dfrac{3a}{b}=6 \qquad \therefore a=-2b$
이때 $a^2+\dfrac{b^2}{3}=1$이므로
$(-2b)^2+\dfrac{b^2}{3}=1 \qquad \therefore b^2=\dfrac{3}{13}$
$a^2=4b^2=4\cdot\dfrac{3}{13}=\dfrac{12}{13}$이므로
$a^2+b^2=\dfrac{15}{13}$ 답 $\dfrac{15}{13}$

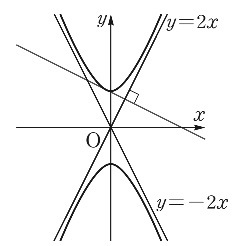
0191 타원 $x^2+3y^2=12$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은
$x_1x+3y_1y=12$
이 직선이 점 $(2,\ 2)$를 지나므로
$2x_1+6y_1=12 \qquad \therefore x_1=-3y_1+6$
이때 $x_1{}^2+3y_1{}^2=12$이므로
$(-3y_1+6)^2+3y_1{}^2=12, \qquad y_1{}^2-3y_1+2=0$
$(y_1-1)(y_1-2)=0 \qquad \therefore y_1=1$ 또는 $y_1=2$
따라서 접점의 좌표는 $(3,\ 1)$, $(0,\ 2)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$3x+3y=12,\ 6y=12$
$\therefore y=-x+4,\ y=2$ 답 $y=-x+4,\ y=2$

0192 타원 $\dfrac{x^2}{6}+y^2=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은
$\dfrac{x_1x}{6}+y_1y=1 \qquad \therefore y=-\dfrac{x_1}{6y_1}x+\dfrac{1}{y_1}$
이 직선이 점 $(0,\ 5)$를 지나므로
$5=\dfrac{1}{y_1} \qquad \therefore y_1=\dfrac{1}{5}$
이때 $\dfrac{x_1{}^2}{6}+y_1{}^2=1$이므로
$\dfrac{x_1{}^2}{6}+\left(\dfrac{1}{5}\right)^2=1, \qquad x_1{}^2=\dfrac{144}{25} \qquad \therefore x_1=\pm\dfrac{12}{5}$
따라서 접선의 기울기 m은 $-\dfrac{x_1}{6y_1}=\pm2$이므로
$m^2=4$ 답 ④

0193 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은
$ax-\dfrac{by}{3}=1$
이 직선이 점 $(0,\ -1)$을 지나므로
$\dfrac{b}{3}=1 \qquad \therefore b=3$
이때 $a^2-\dfrac{b^2}{3}=1$이므로
$a^2-\dfrac{9}{3}=1, \qquad a^2=4 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$
$\therefore a+b=5$ 답 ①

0194 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은
$\dfrac{ax}{6}-\dfrac{by}{2}=1 \qquad \therefore y=\dfrac{a}{3b}x-\dfrac{2}{b}$
이 직선의 기울기가 1이므로
$\dfrac{a}{3b}=1 \qquad \therefore a=3b$
이때 $\dfrac{a^2}{6}-\dfrac{b^2}{2}=1$이므로
$\dfrac{(3b)^2}{6}-\dfrac{b^2}{2}=1 \qquad \therefore b^2=1$
$a^2=9b^2=9$이므로 $\quad a^2+b^2=10$ 답 10

0195 쌍곡선 $4x^2-y^2=a$ 위의 점 $(b,\ 8)$에서의 접선의 방정식은
$4bx-8y=a \qquad \therefore y=\dfrac{b}{2}x-\dfrac{a}{8}$
$4x^2-y^2=a$에서 $a<0$이므로 $\quad \dfrac{4}{|a|}x^2-\dfrac{1}{|a|}y^2=-1$
쌍곡선의 점근선의 방정식은
$y=\pm\dfrac{\sqrt{|a|}}{\dfrac{\sqrt{|a|}}{2}}x$, 즉 $y=\pm2x$
$b<0$이므로 직선 $y=\dfrac{b}{2}x-\dfrac{a}{8}$는 직선 $y=2x$와 수직이다.
즉 $\dfrac{b}{2}=-\dfrac{1}{2}$이므로 $\quad b=-1$
이때 $4b^2-64=a$이므로 $\quad a=-60$
$\therefore a+b=-61$



답 ①

0196 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 위의 점 $\mathrm{A}(2,\ 1)$에서의 접선의 방정식은
$\dfrac{2x}{2}-y=1 \qquad \therefore y=x-1$
$\therefore \mathrm{P}(0,\ -1)$ ⇨ ❶
한편 점 $\mathrm{A}(2,\ 1)$을 지나고 직선 $y=x-1$에 수직인 직선의 방정식은
$y-1=-(x-2) \qquad \therefore y=-x+3$
$\therefore \mathrm{Q}(0,\ 3)$ ⇨ ❷
따라서 $\triangle\mathrm{APQ}$의 무게중심의 좌표는
$\left(\dfrac{2+0+0}{3},\ \dfrac{1-1+3}{3}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{2}{3},\ 1\right)$ ⇨ ❸
답 $\left(\dfrac{2}{3},\ 1\right)$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❷ 점 Q의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❸ △APQ의 무게중심의 좌표를 구할 수 있다.	20%

0197 쌍곡선 $x^2-y^2=5$ 위의 점 $(3,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$3x-2y=5$ ...... ㉠

쌍곡선의 두 점근선의 방정식은

$y=x$ 또는 $y=-x$ ...... ㉡

$x^2-y^2=5$에서 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{5}=1$이므로 $y=\pm x$

㉡을 ㉠에 대입하면

$x=5$ 또는 $x=1$

따라서 $\mathrm{P}(5,\ 5)$, $\mathrm{Q}(1,\ -1)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(1-5)^2+(-1-5)^2}=2\sqrt{13}$ 답 $2\sqrt{13}$

0198 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{2x}{8}+\frac{y}{2}=1 \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x+2$ ...... ㉠ ⇨ ❶

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{2x}{a^2}-\frac{y}{b^2}=1 \quad \therefore y=\frac{2b^2}{a^2}x-b^2$ ...... ㉡ ⇨ ❷

두 직선 ㉠, ㉡이 서로 수직이므로

$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2b^2}{a^2}=-1 \quad \therefore a^2=b^2$ ...... ㉢

이때 점 $(2,\ 1)$이 쌍곡선 위에 있으므로

$\frac{4}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1$

㉢을 위의 식에 대입하면

$\frac{4}{a^2}-\frac{1}{a^2}=1 \quad \therefore a^2=b^2=3$ ⇨ ❸

$\therefore a^2+b^2=6$ ⇨ ❹

답 6

채점 기준	비율
❶ 타원의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❷ 쌍곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ a^2, b^2의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	10%

0199 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-y^2=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{x_1x}{5}-y_1y=1 \quad \therefore y=\frac{x_1}{5y_1}x-\frac{1}{y_1}$

이 직선의 기울기가 2이므로

$\frac{x_1}{5y_1}=2 \quad \therefore x_1=10y_1$

이때 $\frac{{x_1}^2}{5}-{y_1}^2=1$이므로

$\frac{100{y_1}^2}{5}-{y_1}^2=1, \quad {y_1}^2=\frac{1}{19} \quad \therefore y_1=\pm\frac{1}{\sqrt{19}}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{19}$ 답 $y=2x\pm\sqrt{19}$

0200 쌍곡선 $\frac{x^2}{k}-\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{x_1x}{k}-\frac{y_1y}{2}=1 \quad \therefore y=\frac{2x_1}{ky_1}x-\frac{2}{y_1}$

이 직선이 직선 $y=-x-2$와 일치하므로

$\frac{2x_1}{ky_1}=-1,\ -\frac{2}{y_1}=-2$

$\therefore x_1=-\frac{k}{2},\ y_1=1$

이때 $\frac{{x_1}^2}{k}-\frac{{y_1}^2}{2}=1$이므로

$\frac{\frac{k^2}{4}}{k}-\frac{1}{2}=1, \quad \frac{k}{4}=\frac{3}{2} \quad \therefore k=6$

즉 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$이므로 $\sqrt{6+2}=2\sqrt{2}$에서 두 초점의 좌표는

$(2\sqrt{2},\ 0)$, $(-2\sqrt{2},\ 0)$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$2\sqrt{2}-(-2\sqrt{2})=4\sqrt{2}$ 답 ③

0201 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$x_1x-\frac{y_1y}{3}=1 \quad \therefore y=\frac{3x_1}{y_1}x-\frac{3}{y_1}$

이 직선의 기울기가 3이므로

$\frac{3x_1}{y_1}=3 \quad \therefore x_1=y_1$

이때 ${x_1}^2-\frac{{y_1}^2}{3}=1$이므로

${y_1}^2-\frac{{y_1}^2}{3}=1, \quad \frac{2}{3}{y_1}^2=1 \quad \therefore y_1=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

따라서 두 접선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{6}$

두 접선 사이의 거리는 직선 $y=3x+\sqrt{6}$ 위의 점 $(0,\ \sqrt{6})$과 직선 $y=3x-\sqrt{6}$, 즉 $3x-y-\sqrt{6}=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|-\sqrt{6}-\sqrt{6}|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{2\sqrt{15}}{5}$ 답 $\frac{2\sqrt{15}}{5}$

0202 쌍곡선 $x^2-y^2=2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$x_1x-y_1y=2 \quad \therefore y=\frac{x_1}{y_1}x-\frac{2}{y_1}$

이 직선이 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=-\frac{2}{y_1} \quad \therefore y_1=2$

이때 ${x_1}^2-{y_1}^2=2$이므로

${x_1}^2-4=2, \quad {x_1}^2=6 \quad \therefore x_1=\pm\sqrt{6}$

따라서 접선의 방정식은

$y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}x-1$

즉 $m=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $n=-1$ ($\because m>0$)이므로

$m^2+n^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+(-1)^2=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

0203 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x-\frac{y_1y}{4}=1$$

이 직선이 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$$x_1-\frac{3}{4}y_1=1 \qquad \therefore\ x_1=\frac{3}{4}y_1+1$$

이때 $x_1^2-\frac{y_1^2}{4}=1$이므로

$$\left(\frac{3}{4}y_1+1\right)^2-\frac{y_1^2}{4}=1, \qquad 5y_1^2+24y_1=0$$

$$y_1(5y_1+24)=0 \qquad \therefore\ y_1=0 \text{ 또는 } y_1=-\frac{24}{5}$$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(1,\ 0)$, $\left(-\frac{13}{5},\ -\frac{24}{5}\right)$이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{\left(-\frac{13}{5}-1\right)^2+\left(-\frac{24}{5}\right)^2}=6$$

답 ③

0204 쌍곡선 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{6}-\frac{y_1y}{2}=1$$

이 직선이 점 $A(0,\ 2)$를 지나므로

$y_1=-1$ ⇨ ❶

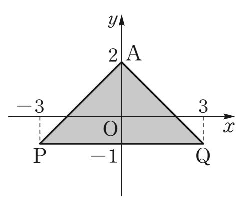
이때 $\frac{x_1^2}{6}-\frac{y_1^2}{2}=1$이므로

$$\frac{x_1^2}{6}-\frac{1}{2}=1, \qquad x_1^2=9$$

$\therefore\ x_1=\pm3$ ⇨ ❷

따라서 $P(-3,\ -1)$, $Q(3,\ -1)$이라 하면 오른쪽 그림에서

$\triangle APQ=\frac{1}{2}\cdot6\cdot3=9$ ⇨ ❸



답 9

채점 기준	비율
❶ y_1의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ x_1의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ △APQ의 넓이를 구할 수 있다.	40%

0205 $\frac{dx}{dt}=-\frac{2}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{2t\cdot t-(1+t^2)\cdot1}{t^2}=\frac{t^2-1}{t^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{t^2-1}{t^2}}{-\frac{2}{t^2}}=-\frac{t^2-1}{2}$$

$t=2$일 때 $\frac{dy}{dx}=-\frac{2^2-1}{2}=-\frac{3}{2}$

답 ①

0206 $\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{dy}{dx}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{1}{1-0}=1$$

답 ②

0207 $\frac{dx}{dt}=10$, $\frac{dy}{dt}=-10t+10$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-10t+10}{10}=-t+1$$

따라서 $t=\frac{3}{2}$일 때 $\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2}+1=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

0208 $\frac{dx}{dt}=1$, $\frac{dy}{dt}=2t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{1}=2t$$

이때 $2t=-1$, 즉 $t=-\frac{1}{2}$이므로

$$a=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ b=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2=\frac{9}{4}$$

$$\therefore\ a+b=\frac{11}{4}$$

답 $\frac{11}{4}$

0209 $\frac{dx}{dt}=2\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-\sin t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sin t}{2\cos t}=-\frac{1}{2}\tan t$$

따라서 $t=\frac{\pi}{4}$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}$$

답 ①

0210 $\frac{dx}{dt}=t$, $\frac{dy}{dt}=2t+a$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t+a}{t}$ ⇨ ❶

$x=5$일 때 t의 값은 $5=\frac{t^2+1}{2}$ $\quad\therefore\ t=3\ (\because\ t>0)$ ⇨ ❷

$t=3$일 때 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}$이므로 $\frac{6+a}{3}=\frac{1}{3}$

$6+a=1 \qquad \therefore\ a=-5$ ⇨ ❸

답 -5

채점 기준	비율
❶ $\frac{dy}{dx}$를 구할 수 있다.	40%
❷ t의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30%

0211 곡선 $x=a\sec\theta$, $y=1-\cot\theta$가 점 $(b,\ 0)$을 지나므로

$$1-\cot\theta=0, \qquad \cot\theta=1 \qquad \therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}\ (\because\ 0<\theta<\pi)$$

이때 $\frac{dx}{d\theta}=a\sec\theta\tan\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=\csc^2\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\csc^2\theta}{a\sec\theta\tan\theta}=\frac{\cos^2\theta}{a\sin^3\theta}$$

$\theta=\frac{\pi}{4}$일 때 접선의 기울기는

$$\frac{\cos^2\frac{\pi}{4}}{a\sin^3\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{2}}{a\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{a}$$

즉 $\frac{\sqrt{2}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $\quad a=2$

따라서 $b=2\sec\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}$이므로 $\quad ab=4\sqrt{2}$ 답 ⑤

0212 곡선 $x=\sqrt{3}\tan\beta$, $y=\sqrt{3}\sec\beta$가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$\sqrt{3}\tan\beta=1$, $\sqrt{3}\sec\beta=2$

$\tan\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sec\beta=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \beta=\frac{\pi}{6}\ (\because\ 0\le\beta<2\pi)$

한편 $\frac{dx}{d\beta}=\sqrt{3}\sec^2\beta$, $\frac{dy}{d\beta}=\sqrt{3}\sec\beta\tan\beta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\beta}}{\frac{dx}{d\beta}}=\frac{\sqrt{3}\sec\beta\tan\beta}{\sqrt{3}\sec^2\beta}=\sin\beta$$

곡선 $x=\sqrt{3}\tan\beta$, $y=\sqrt{3}\sec\beta$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $\sin\beta=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$이므로 곡선 $x=a\cos\alpha$, $y=b\sin\alpha$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 -2이다.

$\frac{dx}{d\alpha}=-a\sin\alpha$, $\frac{dy}{d\alpha}=b\cos\alpha$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\alpha}}{\frac{dx}{d\alpha}}=-\frac{b\cos\alpha}{a\sin\alpha}=-\frac{b}{a}\cot\alpha\ (\sin\alpha\neq0)$$

따라서 $-\frac{b}{a}\cot\alpha=-2$이므로 $\quad \frac{b}{a}=2\tan\alpha$ …… ㉠

이때 $a\cos\alpha=1$, $b\sin\alpha=2$에서

$a=\frac{1}{\cos\alpha}$, $b=\frac{2}{\sin\alpha}$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad \frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}=2\underbrace{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}_{\tan\alpha}$

$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0$, $\quad (1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha=0$

$2\sin^2\alpha=1 \quad \therefore\ \sin^2\alpha=\frac{1}{2}$

따라서 $\underbrace{\cos^2\alpha}_{\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha}=\frac{1}{2}$이므로

$a^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}=2$, $b^2=\frac{4}{\sin^2\alpha}=8$

$\therefore\ a^2+b^2=10$ 답 ③

0213 $\frac{dx}{dt}=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}\ (t\neq0)$$

$t=\ln3$일 때

$$x=\frac{e^{\ln3}+e^{-\ln3}}{2}=\frac{3+\frac{1}{3}}{2}=\frac{5}{3},$$

$$y=\frac{e^{\ln3}-e^{-\ln3}}{2}=\frac{3-\frac{1}{3}}{2}=\frac{4}{3},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{\ln3}+e^{-\ln3}}{e^{\ln3}-e^{-\ln3}}=\frac{\frac{10}{3}}{\frac{8}{3}}=\frac{5}{4}$$

이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{4}{3}=\frac{5}{4}\left(x-\frac{5}{3}\right) \quad \therefore\ y=\frac{5}{4}x-\frac{3}{4}$

따라서 $a=\frac{5}{4}$, $b=-\frac{3}{4}$이므로 $\quad a+b=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0214 $\frac{dx}{dt}=2t+2$, $\frac{dy}{dt}=3t^2$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2}{2t+2}\ (t\neq-1)$$ ➩ ❶

$t=2$일 때

$x=2^2+2\cdot2=8$, $y=2^3+1=9$, $\frac{dy}{dx}=\frac{3\cdot2^2}{2\cdot2+2}=2$

이므로 접선의 방정식은

$y-9=2(x-8) \quad \therefore\ y=2x-7$ ➩ ❷

이 직선이 점 $(a,\ 5)$를 지나므로

$5=2a-7$, $\quad 2a=12 \quad \therefore\ a=6$ ➩ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $\frac{dy}{dx}$를 구할 수 있다.	40%
❷ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20%

0215 $\frac{dx}{dt}=3t^2$, $\frac{dy}{dt}=2at$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2at}{3t^2}=\frac{2a}{3t}\ (t\neq0)$$

$t=1$일 때 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{2a}{3}=\frac{1}{2} \quad \therefore\ a=\frac{3}{4}$

이때 $t=1$일 때 $x=1$, $y=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{7}{4}=\frac{1}{2}(x-1) \quad \therefore\ y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$ 답 $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$

0216 $\frac{dx}{d\theta}=4\cos2\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=-4\sin2\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-4\sin2\theta}{4\cos2\theta}=-\tan2\theta\ (\cos2\theta\neq0)$$

이때 $2\cos2\theta=1$에서 $\quad \cos2\theta=\frac{1}{2}$

$0<2\theta<\pi$이므로 $\quad 2\theta=\frac{\pi}{3} \quad \therefore\ \theta=\frac{\pi}{6}$

$\theta=\frac{\pi}{6}$일 때 $\quad \frac{dy}{dx}=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

즉 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 점 $(\sqrt{3},\ 1)$을 지나고 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$인 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\sqrt{3}) \qquad \therefore\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$$

따라서 구하는 직선의 y절편은 0이다. 답 ③

0217 전략 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

풀이 $x^2+2xy-y^2+7=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x+2y+2x\frac{dy}{dx}-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$(x-y)\frac{dy}{dx}=-(x+y)$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x+y}{x-y}$$

따라서 점 $(-1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{-1+2}{-1-2}=\frac{1}{3}$$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-2=\frac{1}{3}(x+1) \qquad \therefore\ y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$$

답 $y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$

0218 전략 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $y_1y=2p(x+x_1)$임을 이용한다.

풀이 포물선 $y^2=-12x=4\cdot(-3)x$의 초점의 좌표는

$(-3,\ 0)$

포물선 위의 점 $(-3,\ 6)$에서의 접선의 방정식은

$$6y=2\cdot(-3)(x-3) \qquad \therefore\ y=-x+3$$

따라서 점 $(-3,\ 0)$과 직선 $y=-x+3$, 즉 $x+y-3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-3-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$$

답 ④

0219 전략 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기가 θ인 직선의 기울기는 $\tan\theta$임을 이용한다.

풀이 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{4}+y_1y=1 \qquad \therefore\ y=-\frac{x_1}{4y_1}x+\frac{1}{y_1}$$

이 직선의 기울기가 $\tan 45°=1$이므로

$$-\frac{x_1}{4y_1}=1 \qquad \therefore\ x_1=-4y_1$$

이때 $\frac{{x_1}^2}{4}+{y_1}^2=1$이므로

$$\frac{16{y_1}^2}{4}+{y_1}^2=1, \qquad 5{y_1}^2=1 \qquad \therefore\ y_1=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

따라서 접선의 방정식은 $y=x\pm\sqrt{5}$이므로

$a=1,\ b=\sqrt{5}\ (\because\ b>0)$

$\therefore\ a^2+b^2=1^2+(\sqrt{5})^2=6$

답 ②

0220 전략 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$임을 이용한다.

풀이 쌍곡선 $x^2-3y^2=6$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax-3by=6$

이 직선이 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$2a=6 \qquad \therefore\ a=3$

이때 $a^2-3b^2=6$이므로

$9-3b^2=6, \qquad b^2=1 \qquad \therefore\ b=1\ (\because\ b>0)$

$\therefore\ ab=3$

답 ③

0221 전략 매개변수로 나타낸 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 미분가능하고 $f'(t)\neq0$이면 $\frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$임을 이용하여 접선의 기울기를 t에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\frac{dx}{dt}=4t$, $\frac{dy}{dt}=8$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{8}{4t}=\frac{2}{t}\ (t\neq0)$$

이때 $\frac{2}{t}=2$, 즉 $t=1$이므로

$a=2-1=1,\ b=8-3=5$

$\therefore\ a+b=6$

답 ⑤

0222 전략 직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y=a(x-k)+b$임을 이용한다.

풀이 직선 $x-y+3=0$, 즉 $y=x+3$을 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=x-k+3$ …… ㉠ ⇨ ❶

한편 포물선 $y^2=24x=4\cdot6x$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2\cdot6(x+x_1) \qquad \therefore\ y=\frac{12}{y_1}x+\frac{12x_1}{y_1}$$

이 직선이 직선 ㉠과 일치하므로

$$\frac{12}{y_1}=1,\ \frac{12x_1}{y_1}=-k+3$$

$\therefore\ y_1=12,\ x_1=-k+3$ ⇨ ❷

이때 ${y_1}^2=24x_1$이므로

$144=24(-k+3), \qquad 6=-k+3$

$\therefore\ k=-3$ ⇨ ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ y_1의 값을 구하고 x_1을 k로 나타낼 수 있다.	30%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30%

0223 전략 기울기가 m인 직선 l과 포물선 사이의 거리의 최솟값은 기울기가 m인 포물선의 접선과 직선 l 사이의 거리와 같음을 이용한다.

풀이 포물선 위의 점 P와 직선 $y=-x+10$ 사이의 거리가 최소이려면 점 P에서의 접선이 직선 $y=-x+10$과 평행해야 한다.

포물선 $y^2=-2x=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$$by=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x+a) \qquad \therefore\ y=-\frac{1}{b}x-\frac{a}{b}$$

이 직선의 기울기가 -1이므로

$-\frac{1}{b}=-1 \quad \therefore b=1$

이때 $b^2=-2a$이므로

$1=-2a \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$

$\therefore ab=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

0224 전략 접점의 좌표를 (x_1, y_1)로 놓고 접선이 점 $(-2, -1)$을 지남을 이용한다.

풀이 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$y_1y=2(x+x_1)$

이 직선이 점 $(-2, -1)$을 지나므로

$-y_1=2(-2+x_1) \quad \therefore y_1=-2x_1+4$

이때 $y_1{}^2=4x_1$이므로

$(-2x_1+4)^2=4x_1, \quad x_1{}^2-5x_1+4=0$

$(x_1-1)(x_1-4)=0 \quad \therefore x_1=1$ 또는 $x_1=4$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(1, 2)$, $(4, -4)$이므로 직선 AB의 기울기는

$\frac{-4-2}{4-1}=-2$ 답 ③

0225 전략 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1임을 이용한다.

풀이 포물선 $y^2=-2x=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$y_1y=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x+x_1) \quad \therefore y=-\frac{1}{y_1}x-\frac{x_1}{y_1}$

이 직선이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$0=-\frac{a}{y_1}-\frac{x_1}{y_1} \quad \therefore x_1=-a$

이때 $y_1{}^2=-2x_1$이므로

$y_1{}^2=2a \quad \therefore y_1=\pm\sqrt{2a}$

따라서 접선의 기울기는 $\pm\frac{1}{\sqrt{2a}}$이고 두 접선이 서로 수직이므로

$\frac{1}{\sqrt{2a}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)=-1, \quad \frac{1}{2a}=1 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$ 답 ②

0226 전략 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$임을 이용한다.

풀이 타원 $x^2+4y^2=20$ 위의 두 점 $(4, 1)$, $(-2, 2)$에서의 접선의 방정식은 각각

$4x+4y=20, \ -2x+8y=20$

$\therefore x+y=5, \ x-4y=-10$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=2, y=3$

따라서 교점의 좌표는 $(2, 3)$이다. 답 $(2, 3)$

0227 전략 타원 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선이 점 $(2, 4)$를 지남을 이용한다.

풀이 타원 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$x_1x+\frac{y_1y}{4}=1$

이 직선이 점 $(2, 4)$를 지나므로

$2x_1+y_1=1 \quad \therefore y_1=-2x_1+1$

이때 $x_1{}^2+\frac{y_1{}^2}{4}=1$이므로

$x_1{}^2+\frac{(-2x_1+1)^2}{4}=1$

$8x_1{}^2-4x_1-3=0$

이 이차방정식의 두 실근이 a_1, a_2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a_1+a_2=\frac{1}{2}, \ a_1a_2=-\frac{3}{8}$

$\therefore b_1+b_2=(-2a_1+1)+(-2a_2+1)$

$=-2(a_1+a_2)+2=-2\cdot\frac{1}{2}+2=1$ 답 1

0228 전략 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$임을 이용한다.

풀이 $x^2-y^2=9$에서 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$이고 $\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$이므로 두 초점의 좌표는

$F(3\sqrt{2}, 0), \ F'(-3\sqrt{2}, 0)$ ⇨ ❶

쌍곡선 $x^2-y^2=9$ 위의 점 $(5, 4)$에서의 접선의 방정식은

$5x-4y=9$, 즉 $5x-4y-9=0$ ⇨ ❷

이므로

$\overline{FP}=\frac{|15\sqrt{2}-9|}{\sqrt{5^2+(-4)^2}}=\frac{15\sqrt{2}-9}{\sqrt{41}}$

$\overline{F'Q}=\frac{|-15\sqrt{2}-9|}{\sqrt{5^2+(-4)^2}}=\frac{15\sqrt{2}+9}{\sqrt{41}}$ ⇨ ❸

$\therefore \overline{FP}\cdot\overline{F'Q}=\frac{15\sqrt{2}-9}{\sqrt{41}}\cdot\frac{15\sqrt{2}+9}{\sqrt{41}}=\frac{369}{41}=9$ ⇨ ❹

답 9

채점 기준	비율
❶ 점 F, F′의 좌표를 구할 수 있다.	20%
❷ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ $\overline{FP}$, $\overline{F'Q}$의 길이를 구할 수 있다.	30%
❹ $\overline{FP}\cdot\overline{F'Q}$의 값을 구할 수 있다.	20%

0229 전략 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$임을 이용한다.

풀이 쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은

$\frac{ax}{10}-\frac{by}{6}=1$

이 접선의 x절편은 $\frac{10}{a}$, y절편은 $-\frac{6}{b}$이고 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 2이므로

$\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{10}{a}\right|\cdot\left|-\frac{6}{b}\right|=2, \quad |ab|=15$

$\therefore ab=15 \ (\because a>0, b>0)$

답 ⑤

0230 전략 $r(t)$와 $V(t)$를 구한 후 t에 대하여 미분하여 $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dV}{dt}$를 구한다.

풀이 $r(t)=5+0.2t$, $V(t)=\frac{4}{3}\pi(5+0.2t)^3$이므로

$$\frac{dr}{dt}=0.2,\ \frac{dV}{dt}=\frac{4}{5}\pi(5+0.2t)^2$$

$$\therefore \frac{dV}{dr}=\frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dr}{dt}}=\frac{\frac{4}{5}\pi(5+0.2t)^2}{0.2}=4\pi(5+0.2t)^2$$

따라서 $t=5$일 때 $\frac{dV}{dr}=4\pi\cdot6^2=144\pi$ 답 144π

0231 전략 $t=-2$일 때 $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{3}$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 $\frac{dx}{dt}=6t^2+2at$, $\frac{dy}{dt}=2t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{6t^2+2at}=\frac{1}{3t+a}\left(t\neq-\frac{a}{3}\right)$$

$t=-2$일 때 $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{3}$이므로

$$\frac{1}{-6+a}=-\frac{1}{3}\qquad\therefore a=3$$

따라서 $t=-2$일 때 $x=-4$, $y=3$이므로 접선의 방정식은

$$y-3=-\frac{1}{3}(x+4)\qquad\therefore y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$$

즉 구하는 직선의 y절편은 $\frac{5}{3}$이다. 답 ④

0232 전략 $\theta=\frac{\pi}{2}$일 때 x, y, $\frac{dy}{dx}$의 값을 구한 후 접선의 방정식을 구한다.

풀이 $\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=-\sin\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta}\ (\cos\theta\neq1)$$

$\theta=\frac{\pi}{2}$일 때 $x=\frac{\pi}{2}-1$, $y=1$, $\frac{dy}{dx}=-1$이므로 접선의 방정식은

$$y-1=-\left(x-\frac{\pi}{2}+1\right)\qquad\therefore y=-x+\frac{\pi}{2}$$

따라서 $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

답 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

0233 전략 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $\triangle\mathrm{APB}$의 밑변으로 생각하면 높이가 최소일 때 $\triangle\mathrm{APB}$의 넓이가 최소이다.

풀이 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 일정하므로 $\triangle\mathrm{APB}$의 넓이가 최소이려면 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최소이어야 하므로 점 P에서의 접선이 직선 AB와 평행해야 한다.

직선 AB의 방정식은

$$y-5=\frac{4-5}{4-3}(x-3)\qquad\therefore y=-x+8$$

$\mathrm{P}(x_1, y_1)$이라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은

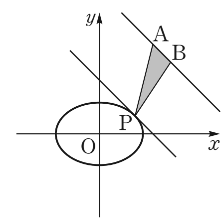
$$x_1x+2y_1y=6\qquad\therefore y=-\frac{x_1}{2y_1}x+\frac{3}{y_1}$$

이 직선의 기울기가 -1이므로

$$-\frac{x_1}{2y_1}=-1\qquad\therefore x_1=2y_1$$

이때 $x_1^2+2y_1^2=6$이므로

$$6y_1^2=6\qquad\therefore y_1=\pm1$$



따라서 두 접점의 좌표는 $(2, 1)$, $(-2, -1)$이고 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최소일 때는 오른쪽 그림에서 접점의 좌표가 $(2, 1)$일 때이다.

점 $(2, 1)$과 직선 $y=-x+8$, 즉 $x+y-8=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2+1-8|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(4-3)^2+(4-5)^2}=\sqrt{2}$이므로 $\triangle\mathrm{APB}$의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{5}{2}$$

답 ②

0234 전략 쌍곡선의 방정식과 직선 l의 방정식을 연립하여 교점의 좌표를 구한다.

풀이 쌍곡선 $2x^2-y^2=1$ 위의 점 $(-1, 1)$에서의 접선의 방정식은

$$-2x-y=1,\ 즉\ y=-2x-1$$

이므로 직선 l의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x$

직선 l과 쌍곡선 $2x^2-y^2=1$의 교점의 x좌표는

$$2x^2-\left(\frac{1}{2}x\right)^2=1,\qquad x^2=\frac{4}{7}\qquad\therefore x=\pm\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

따라서 교점의 좌표는 $\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}, \frac{\sqrt{7}}{7}\right)$, $\left(-\frac{2\sqrt{7}}{7}, -\frac{\sqrt{7}}{7}\right)$이므로

$$a=\frac{2\sqrt{7}}{7},\ b=\frac{\sqrt{7}}{7}\ (\because a>0,\ b>0)$$

$$\therefore ab=\frac{2}{7}$$

답 $\frac{2}{7}$

0235 전략 직선 AC와 타원의 접점의 좌표를 (a, b)로 놓고 두 직선 AB, AC의 방정식을 구한다.

풀이 직선 AC와 타원의 접점의 좌표를 (a, b) $(a>0, b>0)$라 하면 접선의 방정식은

$$\frac{ax}{16}+\frac{by}{9}=1\qquad\therefore y=-\frac{9a}{16b}x+\frac{9}{b}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

직선 AB와 타원의 접점의 좌표는 $(-a, b)$이므로 접선의 방정식은

$$\frac{-ax}{16}+\frac{by}{9}=1\qquad\therefore y=\frac{9a}{16b}x+\frac{9}{b}\qquad\cdots\cdots ㉡$$

두 직선 ㉠, ㉡이 서로 수직이므로

$$-\frac{9a}{16b}\cdot\frac{9a}{16b}=-1\qquad\therefore a=\frac{16}{9}b\ (\because a>0,\ b>0)$$

이때 $\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{9}=1$이므로

$\frac{16}{81}b^2+\frac{b^2}{9}=1, \quad b^2=\frac{81}{25} \quad \therefore b=\frac{9}{5}\ (\because b>0)$

$\therefore a=\frac{16}{9}\cdot\frac{9}{5}=\frac{16}{5}$

따라서 직선 AB, AC의 방정식이 각각 $y=x+5$, $y=-x+5$이므로 $\quad A(0, 5)$

한편 두 점 B, C의 y좌표가 -3이므로

$B(-8, -3)$, $C(8, -3)$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\{8-(-8)\}\cdot\{5-(-3)\}$

$=\frac{1}{2}\cdot16\cdot8=64$ 답 64

0236 전략 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 $f'(3)$에 대한 식으로 변형한다.

풀이 $\lim_{h\to0}\frac{f(3+5h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(3+5h)-f(3)}{5h}\cdot5=5f'(3)$

한편 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{(t+1)^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t^2}{(t+1)^2}$$

이때 $\frac{t-1}{t}=3$에서 $\quad t-1=3t \quad \therefore t=-\frac{1}{2}$

$t=-\frac{1}{2}$일 때 $\frac{dy}{dx}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2}=1$이므로 $\quad f'(3)=1$

따라서 주어진 식의 값은 $\quad 5f'(3)=5$ 답 ⑤

0237 전략 $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$을 만족시키는 θ의 값을 구한다.

풀이 $\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\cot\theta$$ ⇨ ❶

이때 $\cos\theta=\frac{1}{2}$에서 $\quad \theta=\frac{\pi}{3}\ (\because 0<\theta<\pi)$

$\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 $\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right) \quad \therefore y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ⇨ ❷

따라서 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 즉 $x+\sqrt{3}y-2=0$과 원점 사이의 거리는

$$\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=1$$ ⇨ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ $\frac{dy}{dx}$를 구할 수 있다.	30%
❷ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ 접선과 원점 사이의 거리를 구할 수 있다.	30%

Ⅱ. 평면벡터

03 벡터의 연산

0238 답 시점: O, 종점: A

0239 답 시점: B, 종점: C

0240 답 시점: A, 종점: C

0241 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=4$이므로 $\quad |\overrightarrow{BC}|=4$ 답 4

0242 $\overline{DB}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$이므로

$|\overrightarrow{DB}|=5$ 답 5

0243 답 $\vec{d}$

0244 답 $\vec{f}$

0245 답 $\overrightarrow{AB}$

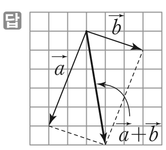
0246 답 $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AO}$

0247 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}=\vec{c}$

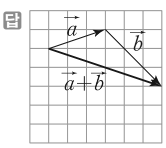
$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OA}=-\vec{a}$

$\overrightarrow{BO}=-\overrightarrow{OB}=-\vec{b}$ 답 $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=-\vec{a}$, $\overrightarrow{BO}=-\vec{b}$

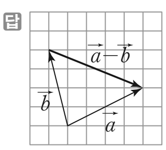
0248 답



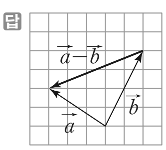
0249 답



0250 답



0251 답



0252 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ 답 $\vec{0}$

0253 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE})$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}$ 답 $\overrightarrow{AE}$

0254 $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{AD}$

$=(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})+\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}$ 답 $\overrightarrow{CD}$

0255 $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB})-\overrightarrow{AC}$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})-\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ 답 $\vec{0}$

0256 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$

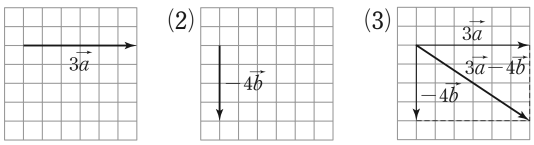
$=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})-\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$ 답 $\overrightarrow{DC}$

0257 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$
$=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\vec{a}+\vec{b}$ 답 $-\vec{a}+\vec{b}$

0258 $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}$
$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$ 답 $\vec{a}+\vec{b}$

0259 (1) (2) (3)



답 풀이 참조

0260 답 $2\vec{a}+5\vec{b}$

0261 답 $3\vec{a}-4\vec{b}$

0262 $4(\vec{a}-\vec{b})+3(2\vec{a}+\vec{b})=4\vec{a}-4\vec{b}+6\vec{a}+3\vec{b}$
$=(4+6)\vec{a}+(-4+3)\vec{b}$
$=10\vec{a}-\vec{b}$ 답 $10\vec{a}-\vec{b}$

0263 $2(3\vec{a}+\vec{b})-5(\vec{a}-\vec{b})=6\vec{a}+2\vec{b}-5\vec{a}+5\vec{b}$
$=(6-5)\vec{a}+(2+5)\vec{b}$
$=\vec{a}+7\vec{b}$ 답 $\vec{a}+7\vec{b}$

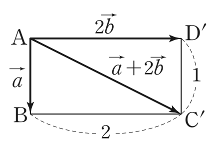
0264 $3(3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})-2(\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c})$
$=9\vec{a}+6\vec{b}+3\vec{c}-2\vec{a}+6\vec{b}-4\vec{c}$
$=(9-2)\vec{a}+(6+6)\vec{b}+(3-4)\vec{c}$
$=7\vec{a}+12\vec{b}-\vec{c}$ 답 $7\vec{a}+12\vec{b}-\vec{c}$

0265 $\vec{a}+\vec{x}=3\vec{a}-\vec{b}$ 에서 $\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b}$ 답 $2\vec{a}-\vec{b}$

0266 $2(\vec{x}-2\vec{a})=3\vec{b}+\vec{x}$ 에서 $2\vec{x}-4\vec{a}=3\vec{b}+\vec{x}$
$\therefore \vec{x}=4\vec{a}+3\vec{b}$ 답 $4\vec{a}+3\vec{b}$

0267 $3(\vec{b}-\vec{x})+2(\vec{x}-2\vec{a})=4\vec{b}$ 에서
$3\vec{b}-3\vec{x}+2\vec{x}-4\vec{a}=4\vec{b}$, $-\vec{x}=4\vec{a}+\vec{b}$
$\therefore \vec{x}=-4\vec{a}-\vec{b}$ 답 $-4\vec{a}-\vec{b}$

0268 오른쪽 그림에서
$|\vec{a}+2\vec{b}|=|\overrightarrow{AC'}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$
답 $\sqrt{5}$



0269 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ 이므로 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=2\vec{c}$
$\therefore |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=2|\vec{c}|=2\sqrt{1^2+1^2}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

0270 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ 이므로 $2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}-(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}$
$\therefore |2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|=|\vec{a}|=1$ 답 1

0271 $\vec{c}=-2\vec{m}$ 이므로 $\vec{m}\,/\!/\,\vec{c}$ 답 $\vec{c}$

0272 $\vec{p}+\vec{q}=2\vec{a}+3\vec{b}$
$\vec{r}-\vec{q}=(4\vec{a}+9\vec{b})-3\vec{b}=\boxed{4\vec{a}+6\vec{b}}$
이때 $\boxed{4\vec{a}+6\vec{b}}=\boxed{2}(2\vec{a}+3\vec{b})$이므로
$\boxed{\vec{r}-\vec{q}}=\boxed{2}(\vec{p}+\vec{q})$
따라서 두 벡터 $\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{r}-\vec{q}$는 서로 평행하다.
$\therefore$ (가) $4\vec{a}+6\vec{b}$ (나) 2 (다) $\vec{r}-\vec{q}$
답 (가) $4\vec{a}+6\vec{b}$ (나) 2 (다) $\vec{r}-\vec{q}$

0273 $\vec{p}+\vec{q}=(\vec{a}+\vec{b})+2\vec{b}=\vec{a}+3\vec{b}$
$\vec{r}-\vec{p}=(3\vec{a}+7\vec{b})-(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+6\vec{b}$
이때 $2\vec{a}+6\vec{b}=2(\vec{a}+3\vec{b})$이므로 $\vec{r}-\vec{p}=2(\vec{p}+\vec{q})$
따라서 두 벡터 $\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{r}-\vec{p}$는 서로 평행하다. 답 풀이 참조

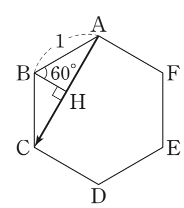
0274 $(m-1)\vec{a}+(2n+3)\vec{b}=\vec{0}$ 에서
$m-1=0$, $2n+3=0$
$\therefore m=1,\ n=-\frac{3}{2}$ 답 $m=1,\ n=-\frac{3}{2}$

0275 $(2m+1)\vec{a}+(4-3n)\vec{b}=-\vec{a}+\vec{b}$ 에서
$2m+1=-1$, $4-3n=1$
$\therefore m=-1,\ n=1$ 답 $m=-1,\ n=1$

0276 $k\vec{a}+3\vec{b}$ 와 $6\vec{a}+9\vec{b}$ 가 서로 평행하므로
$k\vec{a}+3\vec{b}=t(6\vec{a}+9\vec{b})\ (t\neq 0)$
라 하면 $k=6t$, $3=9t$ $\therefore t=\frac{1}{3},\ k=2$ 답 2

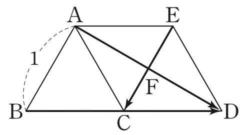
0277 (1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$
(2) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-\vec{a}+2\vec{b})-\vec{a}=-2\vec{a}+2\vec{b}$
(3) $\overrightarrow{AC}=2(\vec{b}-\vec{a})=2\overrightarrow{AB}$
따라서 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다. 답 풀이 참조

0278 정육각형의 한 내각의 크기는
$\frac{180^\circ\times(6-2)}{6}=120^\circ$
오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\angle ABH=60^\circ$
따라서 $\overline{AH}=\overline{AB}\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로
$\overline{AC}=2\overline{AH}=\sqrt{3}$
$\therefore |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$ 답 $\sqrt{3}$



0279 ㄱ. $\overline{AB}=\overline{AC}=2$이므로 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=2$
ㄴ. $\overline{BD}=\frac{1}{2}\overline{BC}=1$이므로 $|\overrightarrow{BD}|=1$
ㄷ. $\overline{AD}$는 정삼각형 ABC의 높이와 같으므로
$\overline{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\sqrt{3}$
$\therefore |\overrightarrow{AD}|=\sqrt{3}$
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0280 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}$, $\overline{CE}$의 교점을 F라 하면 $\overline{AF}$는 정삼각형 ACE의 높이와 같으므로



$\overline{AF}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1=\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 $\overline{AD}=2\overline{AF}=\sqrt{3}$이므로

$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{3}$

또 $|\overrightarrow{BD}|=2$, $|\overrightarrow{EC}|=1$이므로

$|\overrightarrow{AD}|+|\overrightarrow{BD}|+|\overrightarrow{EC}|=3+\sqrt{3}$ 답 $3+\sqrt{3}$

0281 답 ②

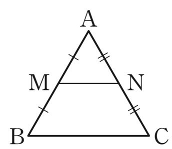
0282 답 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$와 $\overrightarrow{BD}$

0283 답 ②

라쎈 특강 삼각형의 중점 연결 정리

△ABC에서 두 변 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하면

$\overline{BC}/\!/\overline{MN}$, $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$



0284 $\overrightarrow{AF}$와 같은 벡터는

$\overrightarrow{BE}$ $\therefore a=1$ ⇨ ❶

$\overrightarrow{FD}$와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터는

$\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{IG}$, $\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{DF}$ $\therefore b=4$ ⇨ ❷

$\therefore a+b=5$ ⇨ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

0285 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\underbrace{\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}}_{\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CD}=\vec{0}}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$ 답 ⑤

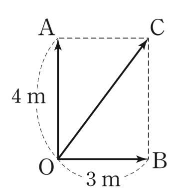
0286 ② $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

③ $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$

④ $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$

⑤ $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$ 답 ④

0287 오른쪽 그림과 같이 열기구가 출발한 지점을 O, 바람이 불지 않을 때 열기구가 1초 동안 움직여 도착하는 지점을 A, 바람이 지점 O에서 1초 동안 이동한 지점을 B, 열기구가 실제로 1초 후 도착한 지점을 C라 하면



$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

$\overline{OA}\perp\overline{OB}$이므로 $\overline{OC}=\sqrt{4^2+3^2}=5\,(\mathrm{m})$

따라서 $|\overrightarrow{OC}|=5\,\mathrm{m}$이므로 열기구가 실제로 움직이는 속력은 $5\,\mathrm{m/s}$이다. 답 $5\,\mathrm{m/s}$

0288 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$에서

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$

$\therefore \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$

따라서 $\overline{BA}=\overline{CD}$, $\overline{BA}/\!/\overline{CD}$이므로 □ABCD는 평행사변형이다. ⇨ ❶

$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$일 때 □ABCD의 넓이가 최대이므로 구하는 최댓값은

$4\cdot 2=8$ ⇨ ❷

답 8

채점 기준	비율
❶ □ABCD가 어떤 사각형인지 알 수 있다.	50%
❷ □ABCD의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	50%

0289 $\vec{x}+2\vec{y}=\vec{a}$ …… ㉠

$2\vec{x}+3\vec{y}=\vec{b}$ …… ㉡

㉠×2−㉡을 하면 $\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$

이것을 ㉠에 대입하면 $\vec{x}+2(2\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}$

$\therefore \vec{x}=\vec{a}-2(2\vec{a}-\vec{b})=-3\vec{a}+2\vec{b}$

$\therefore 3\vec{x}-\vec{y}=3(-3\vec{a}+2\vec{b})-(2\vec{a}-\vec{b})$

$=-9\vec{a}+6\vec{b}-2\vec{a}+\vec{b}$

$=-11\vec{a}+7\vec{b}$ 답 ②

0290 $3(\vec{a}-2\vec{b})-4(\vec{a}+3\vec{c})+2(\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c})$

$=3\vec{a}-6\vec{b}-4\vec{a}-12\vec{c}+2\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}$

$=\vec{a}-8\vec{b}-8\vec{c}$ 답 $\vec{a}-8\vec{b}-8\vec{c}$

0291 $3(\vec{x}+\vec{a})=2(\vec{x}-\vec{a}+2\vec{b})$에서

$3\vec{x}+3\vec{a}=2\vec{x}-2\vec{a}+4\vec{b}$

$\therefore \vec{x}=-5\vec{a}+4\vec{b}$ ⇨ ❶

$4(-\vec{a}+2\vec{y})+2\vec{b}=6\vec{y}$에서

$-4\vec{a}+8\vec{y}+2\vec{b}=6\vec{y}$, $2\vec{y}=4\vec{a}-2\vec{b}$

$\therefore \vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$ ⇨ ❷

$\therefore \vec{x}+\vec{y}=(-5\vec{a}+4\vec{b})+(2\vec{a}-\vec{b})$

$=-3\vec{a}+3\vec{b}$ ⇨ ❸

답 $-3\vec{a}+3\vec{b}$

채점 기준	비율
❶ $\vec{x}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낼 수 있다.	40%
❷ $\vec{y}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낼 수 있다.	40%
❸ $\vec{x}+\vec{y}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낼 수 있다.	20%

0292 $\vec{a}+\vec{b}=2\vec{x}$ …… ㉠

$\vec{b}+\vec{c}=2\vec{y}$ …… ㉡

$\vec{c}+\vec{a}=2\vec{z}$ …… ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

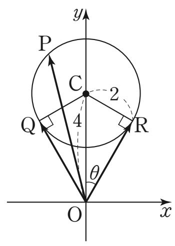
$2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=2(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})$

$\therefore \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}$ …… ㉣

㉣−㉢을 하면

$\vec{b}=(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})-2\vec{z}=\vec{x}+\vec{y}-\vec{z}$ 답 ①

0293 오른쪽 그림과 같이 원점을 지나면서 원 $x^2+(y-4)^2=4$에 접하는 두 직선과 원의 접점을 각각 Q, R라 하면 $\overrightarrow{OP}$는 $\overrightarrow{OQ}$와 $\overrightarrow{OR}$ 사이($\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ 포함)에 있다.



이때 원의 중심을 C, $\angle COR=\theta$라 하면

$$\sin\theta=\frac{\overline{CR}}{\overline{OC}}=\frac{1}{2} \qquad \therefore \theta=\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \angle QOR=\frac{\pi}{3}$$

또 $\overrightarrow{OX}=\dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$에서 $\overrightarrow{OX}$는 $\overrightarrow{OP}$와 방향이 같고 크기가 1인 벡터이므로 종점 X가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$인 부채꼴의 호이다.

따라서 구하는 도형의 길이는 $1\cdot\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$

답 $\dfrac{\pi}{3}$

0294 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{CD}$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{OE}&=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\\&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

답 ②

0295 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BO}=-2\overrightarrow{OB}=-2\vec{b}$

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=-2\vec{b}+(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}-3\vec{b}$

답 ④

0296 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{4}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{a}$

답 $\dfrac{3}{4}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{a}$

0297
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH}&=\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{JH}=\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}\\&=\underbrace{2\overrightarrow{CJ}}_{2\overrightarrow{BA}}+\overrightarrow{BC}=-4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-4\vec{a}+\vec{b}\end{aligned}$$

답 $-4\vec{a}+\vec{b}$

0298 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$이므로

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{GH}|=|\overrightarrow{AB}|=1$

답 ①

0299
$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}&=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{BD}\\&=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BD}\end{aligned}$$ ⇨ ❶

이때 $|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}|=4\sqrt{2}$이므로

$2|\overrightarrow{BD}|=4\sqrt{2} \qquad \therefore |\overrightarrow{BD}|=2\sqrt{2}$ ⇨ ❷

따라서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 k라 하면 대각선의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{2}k=2\sqrt{2} \qquad \therefore k=2$

즉 정사각형의 한 변의 길이는 2이다. ⇨ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}$를 간단히 할 수 있다.	40%
❷ $\lvert\overrightarrow{BD}\rvert$를 구할 수 있다.	30%
❸ 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 구할 수 있다.	30%

0300 ㄱ. $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}$

$\therefore |\vec{a}+\vec{b}|=|\overrightarrow{AF}|=1$

ㄴ. $\vec{a}-\vec{c}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$

이때 $\overline{AE}$는 정삼각형 ABC의 높이와 같으므로

$\overline{AE}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\sqrt{3}$

$\therefore |\vec{a}-\vec{c}|=|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{3}$

ㄷ. $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FC}$
$=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AC}$

$\therefore |\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|=|\overrightarrow{AC}|=2$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

0301
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}\\&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF})+\overrightarrow{AD}\\&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{AD}\\&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

이때 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}|=6$이므로

$3|\overrightarrow{AD}|=6 \qquad \therefore |\overrightarrow{AD}|=2$

따라서 $\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\overline{AD}=1$이므로 정육각형의 한 변의 길이는 1이다.

답 1

0302 $(2x+y)\vec{a}-(x+3y)\vec{b}=5\vec{a}-10\vec{b}$이므로

$2x+y=5,\ x+3y=10$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=3$

$\therefore xy=3$

답 ④

0303 $m(\vec{a}-\vec{b})+n(2\vec{a}-3\vec{b})-\vec{b}=n\vec{a}+m(-\vec{a}+3\vec{b})$에서

$m\vec{a}-m\vec{b}+2n\vec{a}-3n\vec{b}-\vec{b}=n\vec{a}-m\vec{a}+3m\vec{b}$

$\therefore (m+2n)\vec{a}+(-m-3n-1)\vec{b}=(n-m)\vec{a}+3m\vec{b}$

따라서 $m+2n=n-m,\ -m-3n-1=3m$이므로

$2m+n=0,\ 4m+3n=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $m=\dfrac{1}{2},\ n=-1$

$\therefore m+n=-\dfrac{1}{2}$

답 ②

0304 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(k\vec{a}+2\vec{b})-\vec{a}=(k-1)\vec{a}+2\vec{b}$,

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$ ⇨ ❶

이므로 $4\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{BA}$에서

$4(k-1)\vec{a}+8\vec{b}=m\vec{a}-m\vec{b}$ ⇨ ❷

따라서 $4(k-1)=m,\ 8=-m$이므로

$m=-8,\ k=-1$

$\therefore k+m=-9$ ⇨ ❸

답 -9

채점 기준	비율
❶ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낼 수 있다.	30%
❷ $4\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{BA}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낼 수 있다.	30%
❸ $k+m$의 값을 구할 수 있다.	40%

0305 □ABCD가 평행사변형이므로 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

이때 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$ 이므로

$3m\vec{a}+(n-1)\vec{b}-2\vec{a}-m\vec{b}=-n\vec{a}+2\vec{b}+(m+3)\vec{a}-4n\vec{b}$

$\therefore (3m-2)\vec{a}+(n-m-1)\vec{b}=(m-n+3)\vec{a}+(2-4n)\vec{b}$

따라서 $3m-2=m-n+3$, $n-m-1=2-4n$이므로

$2m+n=5$, $m-5n=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $m=2$, $n=1$

$\therefore m-n=1$

답 1

0306 $4\vec{a}+k\vec{b}$와 $2\vec{b}-\vec{a}$가 서로 평행하므로

$4\vec{a}+k\vec{b}=m(2\vec{b}-\vec{a})$ $(m\neq0)$

라 하면 $4=-m$, $k=2m$

$\therefore m=-4$, $k=-8$

답 ①

0307 $\vec{p}-\vec{q}=(\vec{a}-\vec{b})-(2\vec{a}+\vec{b})=-\vec{a}-2\vec{b}$

$\vec{q}+\vec{r}=(2\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}+k\vec{b})=3\vec{a}+(k+1)\vec{b}$

$\vec{p}-\vec{q}$와 $\vec{q}+\vec{r}$가 서로 평행하므로

$\vec{q}+\vec{r}=m(\vec{p}-\vec{q})$ $(m\neq0)$

라 하면 $3\vec{a}+(k+1)\vec{b}=m(-\vec{a}-2\vec{b})$

따라서 $3=-m$, $k+1=-2m$이므로

$m=-3$, $k=5$

답 5

0308 ㄱ. $\vec{a}+\vec{c}=\vec{a}+(2\vec{a}+3\vec{b})=3\vec{a}+3\vec{b}=3(\vec{a}+\vec{b})$

따라서 두 벡터 $\vec{a}+\vec{c}$와 $\vec{a}+\vec{b}$는 서로 평행하다.

ㄴ. $\vec{a}-\vec{c}=\vec{a}-(2\vec{a}+3\vec{b})=-\vec{a}-3\vec{b}$

따라서 두 벡터 $\vec{a}-\vec{c}$와 $\vec{a}+\vec{b}$는 서로 평행하지 않다.

ㄷ. $\vec{b}+\vec{c}=\vec{b}+(2\vec{a}+3\vec{b})=2\vec{a}+4\vec{b}$

따라서 두 벡터 $\vec{b}+\vec{c}$와 $\vec{a}+\vec{b}$는 서로 평행하지 않다.

ㄹ. $\vec{b}-\vec{c}=\vec{b}-(2\vec{a}+3\vec{b})=-2\vec{a}-2\vec{b}=-2(\vec{a}+\vec{b})$

따라서 두 벡터 $\vec{b}-\vec{c}$와 $\vec{a}+\vec{b}$는 서로 평행하다.

이상에서 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$와 평행한 벡터는 ㄱ, ㄹ이다.

답 ③

0309 (1) $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 서로 평행하므로 $\vec{b}=m\vec{a}$ $(m\neq0)$라 하면

$2\vec{a}+k(\vec{c}-2\vec{a})+2\vec{b}-4\vec{c}=\vec{0}$ 에서

$2\vec{a}+k\vec{c}-2k\vec{a}+2m\vec{a}-4\vec{c}=\vec{0}$

$\therefore (2-2k+2m)\vec{a}+(k-4)\vec{c}=\vec{0}$

따라서 $2-2k+2m=0$, $k-4=0$이므로

$k=4$, $m=3$ ⇨ ❶

(2) (1)에서 $m=3$이므로 $\vec{b}=3\vec{a}$

$\therefore |\vec{b}|=3|\vec{a}|=3\cdot3=9$ ⇨ ❷

답 (1) 4 (2) 9

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	60%
❷ $\lvert\vec{a}\rvert=3$일 때, 벡터 $\vec{b}$의 크기를 구할 수 있다.	40%

0310 조건 (가)에서 $\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}$

이것을 조건 (나)의 식에 대입하면

$\vec{y}+4\vec{b}=m(\vec{a}-\vec{b})-(2\vec{a}-3\vec{b})$

$\therefore \vec{y}=(m-2)\vec{a}-(m+1)\vec{b}$

$\vec{x}$와 $\vec{y}$가 서로 평행하므로 $\vec{y}=t\vec{x}$ $(t\neq0)$라 하면

$(m-2)\vec{a}-(m+1)\vec{b}=t(2\vec{a}-3\vec{b})$

$\therefore m-2=2t$, $m+1=3t$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$m=8$, $t=3$

답 ④

0311 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ $(k\neq0)$

이때 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ 이므로

$(m\vec{a}-4\vec{b})-3\vec{a}=k(-\vec{b}-3\vec{a})$

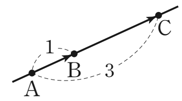
$\therefore (m-3)\vec{a}-4\vec{b}=-3k\vec{a}-k\vec{b}$

따라서 $m-3=-3k$, $-4=-k$이므로

$k=4$, $m=-9$

답 ①

0312 평면 위의 세 점 A, B, C에 대하여 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$ 이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.



이때 $|\overrightarrow{AB}|=1$이므로 $|\overrightarrow{AC}|=3$

$\therefore |\overrightarrow{BC}|=2$

답 2

0313 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ $(k\neq0)$ ⇨ ❶

즉 $(m-1)\vec{a}+2\vec{b}=k(2\vec{a}-\vec{b})$이므로

$m-1=2k$, $2=-k$

$\therefore k=-2$, $m=-3$ ⇨ ❷

답 -3

채점 기준	비율
❶ 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있을 조건을 알 수 있다.	40%
❷ m의 값을 구할 수 있다.	60%

0314 세 점 P, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$\overrightarrow{PB}=k\overrightarrow{BC}$ $(k\neq0)$

$\therefore \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}=k(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

이때 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$이므로

$\overrightarrow{AB}-(m\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})=k(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

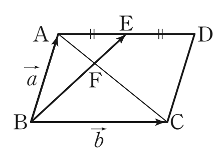
$\therefore (1-m)\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=-k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$

따라서 $1-m=-k$, $-2=k$이므로

$k=-2$, $m=-1$

답 -1

0315 오른쪽 그림과 같이 $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$라 하면



$\overrightarrow{BE}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

세 점 B, F, E가 한 직선 위에 있고 $|\overrightarrow{BF}|=m|\overrightarrow{BE}|$이므로

$\overrightarrow{BF}=m\overrightarrow{BE}=m\vec{a}+\frac{m}{2}\vec{b}$ …… ㉠

한편 세 점 A, F, C가 한 직선 위에 있으려면

$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AC}$ $(k\neq0)$

$\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BA}=k(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})$

$\therefore\ \overrightarrow{BF}=(1-k)\overrightarrow{BA}+k\overrightarrow{BC}=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $m=1-k,\ \frac{m}{2}=k$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $m=\frac{2}{3},\ k=\frac{1}{3}$ 답 ②

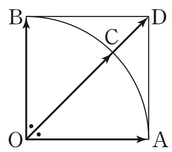
0316 $\overrightarrow{AP}=k(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{FD})$

$=k(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{DE})=k(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{CF})$

$=k\overrightarrow{CA}=-k\overrightarrow{AC}$

따라서 세 점 A, C, P는 한 직선 위에 있으므로 점 P는 직선 AC 위에 있다. 답 ②

0317 오른쪽 그림과 같이 정사각형 OADB를 그리면



$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$

즉 $\overrightarrow{OC}=k(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=k\overrightarrow{OD}$ 이므로 세 점 O, C, D는 한 직선 위에 있다.

이때 $\overline{OC}=1,\ \overline{OD}=\sqrt{2}$이므로

$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{OD}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

$\therefore\ k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0318 전략 직사각형의 대각선은 서로를 이등분함을 이용한다.

풀이 $\overline{AC}=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$이므로

$\overline{AO}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\sqrt{13}$

$\therefore\ |\overrightarrow{AO}|=\sqrt{13}$ 답 $\sqrt{13}$

0319 전략 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ 임을 이용한다.

풀이 ③ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$

④ $-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}$

⑤ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CD}$

답 ③

0320 전략 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$ 이고, 평행사변형 ABCD에서 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ 임을 이용한다.

풀이 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}$ 답 ④

0321 전략 벡터가 서로 같을 조건을 이용하여 m, n에 대한 연립방정식을 세운다.

풀이 $(4-m)\vec{a}+(m-2n)\vec{b}=(m-n)\vec{a}+(n+7)\vec{b}$ 에서

$4-m=m-n,\ m-2n=n+7$

$\therefore\ 2m-n=4,\ m-3n=7$ ⇨ ❶

위의 두 식을 연립하여 풀면 $m=1,\ n=-2$ ⇨ ❷

$\therefore\ mn=-2$ ⇨ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ m, n에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	50%
❷ m, n의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ mn의 값을 구할 수 있다.	10%

0322 전략 크기와 방향이 각각 같은 벡터는 서로 같은 벡터임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{BC}|=1$이고 두 벡터 $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BC}$ 의 방향이 같으므로

$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BC}$

ㄷ. $|\overrightarrow{CF}|=2|\overrightarrow{BA}|=2$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0323 전략 주어진 두 식을 연립하여 $\vec{x}$, $\vec{y}$를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낸다.

풀이 $\vec{x}+2\vec{y}=5\vec{a}+\vec{b}$ ...... ㉠

$\vec{x}-\vec{y}=-\vec{a}+4\vec{b}$ ...... ㉡

㉠－㉡을 하면 $3\vec{y}=6\vec{a}-3\vec{b}$

$\therefore\ \vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$

이것을 ㉡에 대입하면 $\vec{x}-(2\vec{a}-\vec{b})=-\vec{a}+4\vec{b}$

$\therefore\ \vec{x}=\vec{a}+3\vec{b}$

$\therefore\ 2\vec{x}-3\vec{y}=2(\vec{a}+3\vec{b})-3(2\vec{a}-\vec{b})$

$=2\vec{a}+6\vec{b}-6\vec{a}+3\vec{b}$

$=-4\vec{a}+9\vec{b}$ 답 ③

0324 전략 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ 임을 이용하여 $\overrightarrow{CE}$ 를 두 벡터의 합으로 나타낸다.

풀이 $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FE}=2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

$=-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-2\vec{a}+\vec{b}$ 답 ①

0325 전략 삼각형의 세 중선의 교점은 무게중심임을 이용한다.

풀이 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overrightarrow{GF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB})$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

$=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}$

따라서 $m=-\frac{1}{3},\ n=\frac{1}{6}$이므로

$m-n=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

0326 전략 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ 임을 이용하여 한 벡터를 두 벡터의 차로 나타낸다.

풀이 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EF}$

$=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})-(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE})$

$=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE})-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}-(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OF})$

$=\vec{0}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}-\vec{0}$

$=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{OD}$ 답 ④

0327 전략 $\vec{m}=k\vec{n}\ (k\neq0)$이면 $\vec{m}$, $\vec{n}$은 서로 평행함을 이용한다.

풀이 ① $\vec{a}+2\vec{p}=\vec{a}+2(\vec{a}-2\vec{b})=3\vec{a}-4\vec{b}$

② $\vec{a}-\vec{p}=\vec{a}-(\vec{a}-2\vec{b})=2\vec{b}$

③ $-\vec{a}-\vec{p}=-\vec{a}-(\vec{a}-2\vec{b})=-2\vec{a}+2\vec{b}=-2(\vec{a}-\vec{b})$

④ $\vec{b}-\vec{p}=\vec{b}-(\vec{a}-2\vec{b})=-\vec{a}+3\vec{b}$

⑤ $-3\vec{b}-\vec{p}=-3\vec{b}-(\vec{a}-2\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}$ 답 ③

0328 전략 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면 $\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}\ (m\neq0)$임을 이용한다.

풀이 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}\ (m\neq0)$ ⇨ ❶

이때 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$이므로

$\vec{a}-k\vec{b}-(2\vec{a}-3\vec{b})=m\{4\vec{a}+\vec{b}-(2\vec{a}-3\vec{b})\}$

$\therefore -\vec{a}+(-k+3)\vec{b}=2m\vec{a}+4m\vec{b}$ ⇨ ❷

따라서 $-1=2m$, $-k+3=4m$이므로

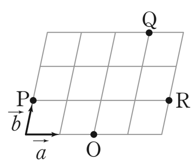
$m=-\dfrac{1}{2}$, $k=5$ ⇨ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있을 조건을 알 수 있다.	30%
❷ $\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낼 수 있다.	50%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20%

0329 전략 주어진 도형에서 기준이 되는 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 정하여 $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 정하면



$\overrightarrow{OR}=2\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{OP}=-2\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{OQ}=\vec{a}+3\vec{b}$ ⇨ ❶

$\overrightarrow{OR}=m\overrightarrow{OP}+n\overrightarrow{OQ}$이므로

$2\vec{a}+\vec{b}=m(-2\vec{a}+\vec{b})+n(\vec{a}+3\vec{b})$

$=(-2m+n)\vec{a}+(m+3n)\vec{b}$

$\therefore 2=-2m+n,\ 1=m+3n$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $m=-\dfrac{5}{7}$, $n=\dfrac{4}{7}$ ⇨ ❷

$\therefore m+n=-\dfrac{1}{7}$ ⇨ ❸

답 $-\dfrac{1}{7}$

채점 기준	비율
❶ $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낼 수 있다.	40%
❷ m, n의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	10%

0330 전략 각 벡터를 $\overrightarrow{PO}$와 다른 한 벡터의 합으로 나타낸다.

풀이 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF}$

$=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC})$

$+(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OD})+(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OE})+(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OF})$

$=(\underbrace{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}}_{\vec{0}})+6\overrightarrow{PO}$

$=6\overrightarrow{PO}$

이므로 $k=6$ 답 6

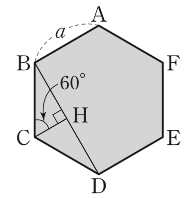
0331 전략 정육각형의 넓이는 합동인 6개의 정삼각형의 넓이의 합과 같음을 이용한다.

풀이 $-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$이므로

$|-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{BD}|=6$

$\therefore \overline{BD}=6$

정육각형의 한 변의 길이를 a라 하고 오른쪽 그림과 같이 점 C에서 $\overline{BD}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle BCH=60°$이므로



$2\cdot a\sin 60°=6$

$2a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6 \qquad \therefore a=2\sqrt{3}$

따라서 구하는 정육각형의 넓이는

$6\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot(2\sqrt{3})^2=18\sqrt{3}$ 답 ④

0332 전략 타원 위의 점에서 두 초점에 이르는 거리의 합은 타원의 장축의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{F'O}$이므로

$|\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{F'O}+\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{F'P}|=6$

$\therefore \overline{F'P}=6$

한편 $9x^2+25y^2=225$에서 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}=2\cdot5=10$이므로

$\overline{PF}=10-\overline{PF'}=4$ 답 4

라쎈 특강 타원의 정의의 활용

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 P와 두 초점 F, F′에 대하여

① $a>b>0$일 때, $\overline{PF}+\overline{PF'}=2a$

② $b>a>0$일 때, $\overline{PF}+\overline{PF'}=2b$

Ⅱ. 평면벡터

04 평면벡터와 평면 운동

0333 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=2\vec{a}+\vec{b}-\vec{a}=\vec{a}+\vec{b}$ 답 $\vec{a}+\vec{b}$

0334 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=2\vec{a}+\vec{b}-\vec{b}=2\vec{a}$ 답 $2\vec{a}$

0335 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}&=\vec{b}-\vec{a}+2(\vec{c}-\vec{b})\\&=\vec{b}-\vec{a}+2\vec{c}-2\vec{b}\\&=-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}\end{aligned}$$

답 $-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$

0336 $\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$, $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$ 이므로

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}&=3(\vec{c}-\vec{a})-(\vec{a}-\vec{b})\\&=3\vec{c}-3\vec{a}-\vec{a}+\vec{b}\\&=-4\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}\end{aligned}$$

답 $-4\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}$

0337 $\vec{p}=\dfrac{3\vec{b}+2\vec{a}}{3+2}=\dfrac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$ 답 $\vec{p}=\dfrac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$

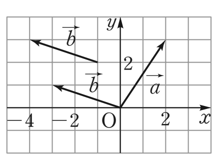
0338 답 $\vec{m}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

0339 $\vec{q}=\dfrac{2\vec{b}-\vec{a}}{2-1}=-\vec{a}+2\vec{b}$ 답 $\vec{q}=-\vec{a}+2\vec{b}$

0340 답 (가) $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ (나) $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OG}$ (다) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

0341 (1) 오른쪽 그림에서

$\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(-3,\ 1)$



(2) $\vec{a}=(2,\ 3)$이므로 $\vec{a}=2\vec{e_1}+3\vec{e_2}$

$\vec{b}=(-3,\ 1)$이므로 $\vec{b}=-3\vec{e_1}+\vec{e_2}$

답 (1) $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(-3,\ 1)$
(2) $\vec{a}=2\vec{e_1}+3\vec{e_2}$, $\vec{b}=-3\vec{e_1}+\vec{e_2}$

0342 답 $\vec{a}=(-2,\ 5)$

0343 답 $\vec{b}=(4,\ -3)$

0344 $m-1=2$, $3=3n$이므로 $m=3$, $n=1$

답 $m=3$, $n=1$

0345 $m+n=1$, $4=m-2n$이므로 $m=2$, $n=-1$

답 $m=2$, $n=-1$

0346 $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$ 답 5

0347 $|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{5}$

0348 $\vec{a}-\vec{b}=(5,\ 1)-(-2,\ 3)=(7,\ -2)$ 답 $(7,\ -2)$

0349 $-3\vec{c}=-3(1,\ -4)=(-3,\ 12)$ 답 $(-3,\ 12)$

0350
$$\begin{aligned}2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}&=2(5,\ 1)-(-2,\ 3)+3(1,\ -4)\\&=(10,\ 2)+(2,\ -3)+(3,\ -12)\\&=(15,\ -13)\end{aligned}$$

답 $(15,\ -13)$

0351
$$\begin{aligned}3(\vec{a}+2\vec{b})-2(\vec{a}+\vec{c})&=3\vec{a}+6\vec{b}-2\vec{a}-2\vec{c}\\&=\vec{a}+6\vec{b}-2\vec{c}\\&=(5,\ 1)+6(-2,\ 3)-2(1,\ -4)\\&=(5,\ 1)+(-12,\ 18)+(-2,\ 8)\\&=(-9,\ 27)\end{aligned}$$

답 $(-9,\ 27)$

0352 $\overrightarrow{AB}=(-3-1,\ 1-2)=(-4,\ -1)$이므로

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2}=\sqrt{17}$

답 $\overrightarrow{AB}=(-4,\ -1)$, $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{17}$

0353 $\overrightarrow{AB}=(4-(-2),\ 3-5)=(6,\ -2)$이므로

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{6^2+(-2)^2}=2\sqrt{10}$

답 $\overrightarrow{AB}=(6,\ -2)$, $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{10}$

0354 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3}=3\times2\times\dfrac{1}{2}=3$ 답 3

0355 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos135°=3\times2\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-3\sqrt{2}$

답 $-3\sqrt{2}$

0356 (1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A=5\times3\times\dfrac{3}{5}=9$

(2) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos B=5\times4\times\dfrac{4}{5}=16$

(3) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\cos C=3\times4\times0=0$

답 (1) 9 (2) 16 (3) 0

0357 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-3)+4\times2=2$ 답 2

0358 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3\times1+5\times(-4)=-23$ 답 -23

0359 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\times(-8)+(-7)\times3=-21$ 답 -21

0360 답 (가) $\vec{a}+\vec{b}$ (나) $\vec{b}$

0361
$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})&=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}\\&=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{b}\\&=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\end{aligned}$$

답 풀이 참조

0362 답 $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, 5, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{\pi}{4}$

0363 $\cos\theta=\dfrac{1\times4+2\times3}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}\times5}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 답 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

0364 $\cos\theta=\dfrac{6\times0+(-4)\times2}{\sqrt{6^2+(-4)^2}\sqrt{0^2+2^2}}=\dfrac{-8}{2\sqrt{13}\times2}=-\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

답 $-\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

0365 $\cos\theta=\dfrac{-7\times5+1\times(-5)}{\sqrt{(-7)^2+1^2}\sqrt{5^2+(-5)^2}}=\dfrac{-40}{5\sqrt{2}\times5\sqrt{2}}=-\dfrac{4}{5}$

답 $-\dfrac{4}{5}$

0366 $\cos\theta=\dfrac{4\times5+(-1)\times3}{\sqrt{4^2+(-1)^2}\sqrt{5^2+3^2}}=\dfrac{17}{\sqrt{17}\sqrt{34}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{4}\ (\because\ 0\le\theta\le\pi)$ 답 $\dfrac{\pi}{4}$

0367 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}\times(-2\sqrt{3})+1\times2}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+2^2}}=\dfrac{-4}{2\times4}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \theta=\dfrac{2}{3}\pi\ (\because\ 0\le\theta\le\pi)$ 답 $\dfrac{2}{3}\pi$

0368 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$에서 $2\times x+(-5)\times1=0$

$2x=5$ $\quad\therefore\ x=\dfrac{5}{2}$ 답 $\dfrac{5}{2}$

0369 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$에서 $3x\times1+2\times(-4)=0$

$3x=8$ $\quad\therefore\ x=\dfrac{8}{3}$ 답 $\dfrac{8}{3}$

0370 $\vec{b}=k\vec{a}\ (k\ne0)$라 하면

$(2,\ 4x+5)=k(6,\ 3)$

$2=6k,\ 4x+5=3k$

$\therefore\ k=\dfrac{1}{3},\ x=-1$ 답 -1

0371 $\vec{b}=k\vec{a}\ (k\ne0)$라 하면

$(x,\ x+2)=k(4,\ -1)$

$x=4k,\ x+2=-k$

$\therefore\ k=-\dfrac{2}{5},\ x=-\dfrac{8}{5}$ 답 $-\dfrac{8}{5}$

0372 답 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{4}$ **0373** 답 $\dfrac{x-8}{2}=\dfrac{y-2}{5}$

0374 방향벡터가 $(7,\ -1)$이므로

$\dfrac{x-5}{7}=\dfrac{y-3}{-1}$ $\quad\therefore\ \dfrac{x-5}{7}=3-y$ 답 $\dfrac{x-5}{7}=3-y$

0375 답 $y=4$

0376 답 $x=7$

0377 $\dfrac{x-1}{3-1}=\dfrac{y-5}{2-5}$이므로 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{5-y}{3}$

답 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{5-y}{3}$

0378 $\dfrac{x-(-6)}{2-(-6)}=\dfrac{y-4}{1-4}$이므로 $\dfrac{x+6}{8}=\dfrac{4-y}{3}$

답 $\dfrac{x+6}{8}=\dfrac{4-y}{3}$

0379 $(x-4)-3(y+7)=0$에서

$x-3y-25=0$ 답 $x-3y-25=0$

0380 법선벡터가 $\vec{n}=(2,\ 1)$이므로

$2(x-5)+(y-6)=0$ $\quad\therefore\ 2x+y-16=0$

답 $2x+y-16=0$

0381 법선벡터가 $(4,\ -1)$이므로

$4(x-3)-(y-2)=0$ $\quad\therefore\ 4x-y-10=0$

답 $4x-y-10=0$

0382 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u},\ \vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(2,\ -1),\ \vec{v}=(4,\ 3)$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{|2\times4+(-1)\times3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\sqrt{4^2+3^2}}$

$=\dfrac{5}{\sqrt{5}\times5}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 답 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

0383 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u},\ \vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(-6,\ 2),\ \vec{v}=(2,\ 1)$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{|-6\times2+2\times1|}{\sqrt{(-6)^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2}}$

$=\dfrac{10}{2\sqrt{10}\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

0384 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u},\ \vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(3,\ -2),\ \vec{v}=(-1,\ 5)$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{|3\times(-1)+(-2)\times5|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}\sqrt{(-1)^2+5^2}}$

$=\dfrac{13}{\sqrt{13}\sqrt{26}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{4}\left(\because\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ 답 $\dfrac{\pi}{4}$

0385 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u},\ \vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(\sqrt{3},\ -1),\ \vec{v}=(1,\ -\sqrt{3})$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{|\sqrt{3}\times1+(-1)\times(-\sqrt{3})|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{6}\left(\because\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ 답 $\dfrac{\pi}{6}$

0386 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$ 라 하면

$\vec{u}=(3,\ a+6)$, $\vec{v}=(1,\ -2)$

두 직선이 평행하면 두 직선의 방향벡터도 평행하므로

$\vec{u}=k\vec{v}\ (k\neq 0)$

라 하면 $(3,\ a+6)=k(1,\ -2)$

따라서 $k=3$, $a+6=-2k$이므로 $a=-12$

답 -12

0387 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$ 라 하면

$\vec{u}=(3,\ a+6)$, $\vec{v}=(1,\ -2)$

두 직선이 수직이면 두 직선의 방향벡터도 수직이므로

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0,\quad 3\times 1+(a+6)\times(-2)=0$

$-2a-9=0 \quad \therefore a=-\frac{9}{2}$

답 $-\frac{9}{2}$

0388 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하고 점 P의 위치벡터를 $\vec{p}$라 하면 $\overline{\mathrm{OP}}=\vec{p}$이므로

$|\vec{p}|=2$

즉 $\vec{p}\cdot\vec{p}=2^2$이므로

$(x,\ y)\cdot(x,\ y)=4$

$\therefore x^2+y^2=4$

답 $x^2+y^2=4$

참고 점 P가 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

0389 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하고 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}-\vec{a}$이므로

$|\vec{p}-\vec{a}|=1$

즉 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=1^2$이므로

$(x-2,\ y+1)\cdot(x-2,\ y+1)=1$

$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=1$

답 $(x-2)^2+(y+1)^2=1$

참고 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 $\mathrm{A}(2,\ -1)$이고 반지름의 길이가 1인 원이다.

0390 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=-e^{-t}$, $a(t)=f''(t)=e^{-t}$

이므로 $t=0$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v(0)=-1$, $a(0)=1$

답 속도: -1, 가속도: 1

0391 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=1+2\cos t$, $a(t)=f''(t)=-2\sin t$

이므로 $t=0$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v(0)=3$, $a(0)=0$

답 속도: 3, 가속도: 0

0392 $\frac{dx}{dt}=4$, $\frac{dy}{dt}=2t+1$이므로 $\vec{v}=(4,\ 2t+1)$

따라서 $t=3$에서의 속도는 $\vec{v}=(4,\ 7)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=0$, $\frac{d^2y}{dt^2}=2$이므로 $\vec{a}=(0,\ 2)$

따라서 $t=3$에서의 가속도는 $\vec{a}=(0,\ 2)$

답 $\vec{v}=(4,\ 7)$, $\vec{a}=(0,\ 2)$

0393 $\frac{dx}{dt}=6t$, $\frac{dy}{dt}=4t+1$이므로

$\vec{v}=(6t,\ 4t+1)$

따라서 $t=3$에서의 속도는 $\vec{v}=(18,\ 13)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=6$, $\frac{d^2y}{dt^2}=4$이므로

$\vec{a}=(6,\ 4)$

따라서 $t=3$에서의 가속도는 $\vec{a}=(6,\ 4)$

답 $\vec{v}=(18,\ 13)$, $\vec{a}=(6,\ 4)$

0394 $\frac{dx}{dt}=3t^2-6t$, $\frac{dy}{dt}=4t^3-8$이므로

$\vec{v}=(3t^2-6t,\ 4t^3-8)$

따라서 $t=3$에서의 속도는

$\vec{v}=(9,\ 100)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=6t-6$, $\frac{d^2y}{dt^2}=12t^2$이므로

$\vec{a}=(6t-6,\ 12t^2)$

따라서 $t=3$에서의 가속도는

$\vec{a}=(12,\ 108)$

답 $\vec{v}=(9,\ 100)$, $\vec{a}=(12,\ 108)$

0395 $\frac{dx}{dt}=\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-\sin t$이므로

$\vec{v}=(\cos t,\ -\sin t)$

따라서 $t=\frac{\pi}{6}$에서의 속도는 $\vec{v}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\sin t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\cos t$이므로

$\vec{a}=(-\sin t,\ -\cos t)$

따라서 $t=\frac{\pi}{6}$에서의 가속도는 $\vec{a}=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

답 $\vec{v}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$, $\vec{a}=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

0396 $\frac{dx}{dt}=1+\cos t$, $\frac{dy}{dt}=2t+\sin t$이므로

$\vec{v}=(1+\cos t,\ 2t+\sin t)$

따라서 $t=\frac{\pi}{6}$에서의 속도는

$\vec{v}=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\right)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\sin t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=2+\cos t$이므로

$\vec{a}=(-\sin t,\ 2+\cos t)$

따라서 $t=\frac{\pi}{6}$에서의 가속도는 $\vec{a}=\left(-\frac{1}{2},\ 2+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

답 $\vec{v}=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\right)$, $\vec{a}=\left(-\frac{1}{2},\ 2+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

0397 점 P의 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$ 라 하면 $\frac{dx}{dt}=1$, $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{\sqrt{t}}$

이므로 $\vec{v}=\left(1,\ \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

따라서 $t=1$에서의 속도는 $\vec{v}=(1,\ 1)$이므로 속력은

$|\vec{v}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

또 점 P의 시각 t에서의 가속도를 $\vec{a}$ 라 하면 $\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$,

$\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}$이므로 $\quad \vec{a}=\left(0,\ -\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}\right)$

따라서 $t=1$에서의 가속도는 $\vec{a}=\left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$이므로 가속도의 크기는

$$|\vec{a}|=\sqrt{0^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}$$

답 속력: $\sqrt{2}$, 가속도의 크기: $\dfrac{1}{2}$

0398 점 P의 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$ 라 하면 $\dfrac{dx}{dt}=1+e^t$,

$\dfrac{dy}{dt}=1-e^t$이므로 $\quad \vec{v}=(1+e^t,\ 1-e^t)$

따라서 $t=2$에서의 속도는 $\vec{v}=(1+e^2,\ 1-e^2)$이므로 속력은

$$|\vec{v}|=\sqrt{(1+e^2)^2+(1-e^2)^2}=\sqrt{2+2e^4}$$

또 점 P의 시각 t에서의 가속도를 $\vec{a}$ 라 하면 $\dfrac{d^2x}{dt^2}=e^t$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-e^t$

이므로 $\quad \vec{a}=(e^t,\ -e^t)$

따라서 $t=2$에서의 가속도는 $\vec{a}=(e^2,\ -e^2)$이므로 가속도의 크기는

$$|\vec{a}|=\sqrt{(e^2)^2+(-e^2)^2}=\sqrt{2}e^2$$

답 속력: $\sqrt{2+2e^4}$, 가속도의 크기: $\sqrt{2}e^2$

0399 $t=0$에서의 위치가 0이므로

(1) $\displaystyle\int_0^t 3\sqrt{t}\,dt=\left[2t^{\frac{3}{2}}\right]_0^t=2t\sqrt{t}$

(2) $\displaystyle\int_0^4 3\sqrt{t}\,dt=\left[2t^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=2\times4^{\frac{3}{2}}=16$

답 (1) $2t\sqrt{t}$ (2) 16

0400 $t=0$에서의 위치가 0이므로

(1) $\displaystyle\int_0^t 2\sin t\,dt=\left[-2\cos t\right]_0^t=-2\cos t+2$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t\,dt=\left[-2\cos t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{3}$

답 (1) $-2\cos t+2$ (2) $\sqrt{3}$

0401 $\dfrac{dx}{dt}=2t$, $\dfrac{dy}{dt}=-2t$이므로

$$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=(2t)^2+(-2t)^2=8t^2$$

따라서 구하는 거리는

$$\int_0^1\sqrt{8t^2}\,dt=\int_0^1 2\sqrt{2}t\,dt=\left[\sqrt{2}t^2\right]_0^1=\sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

0402 $\dfrac{dx}{dt}=6t$, $\dfrac{dy}{dt}=3t^2-3$이므로

$$\begin{aligned}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2&=(6t)^2+(3t^2-3)^2\\&=9t^4+18t^2+9=(3t^2+3)^2\end{aligned}$$

따라서 구하는 거리는

$$\int_0^1\sqrt{(3t^2+3)^2}\,dt=\int_0^1(3t^2+3)\,dt=\left[t^3+3t\right]_0^1=4$$

답 4

0403 $\dfrac{dx}{dt}=\cos t$, $\dfrac{dy}{dt}=\sin t$이므로

$$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1$$

따라서 구하는 거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1}\,dt=\left[t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{2}$$

답 $\dfrac{\pi}{2}$

0404 $\dfrac{dx}{dt}=2\cos t$, $\dfrac{dy}{dt}=-2\sin t$이므로

$$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=4\cos^2 t+4\sin^2 t=4$$

따라서 구하는 거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4}\,dt=\left[2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

답 π

0405 $\dfrac{dx}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t)$,

$\dfrac{dy}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t)$

이므로

$$\begin{aligned}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2&=e^{2t}(1-2\sin t\cos t)+e^{2t}(1+2\sin t\cos t)\\&=2e^{2t}\end{aligned}$$

따라서 구하는 거리는

$$\int_0^2\sqrt{2e^{2t}}\,dt=\int_0^2\sqrt{2}e^t\,dt=\left[\sqrt{2}e^t\right]_0^2=\sqrt{2}(e^2-1)$$

답 $\sqrt{2}(e^2-1)$

0406 $y'=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2x^2}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}\int_1^3\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx&=\int_1^3\sqrt{\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4x^4}}\,dx\\&=\int_1^3\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx\\&=\int_1^3\left(\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2x^2}\right)dx\\&=\left[\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{2x}\right]_1^3\\&=\dfrac{14}{3}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{14}{3}$

0407 $y'=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1\sqrt{1+\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx&=\int_{-1}^1\sqrt{\dfrac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}}\,dx\\&=\int_{-1}^1\sqrt{\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx\\&=\int_{-1}^1\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx\\&=\dfrac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\right]_{-1}^1\\&=e-\dfrac{1}{e}\end{aligned}$$

답 $e-\dfrac{1}{e}$

0408 $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$

$=3(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})-(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$=3\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}$

$=-5\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

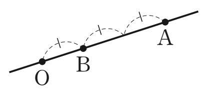
$=-5\vec{a}+4\vec{b}+\vec{c}$ 답 ③

0409 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(4\vec{a}+3\vec{b})-(2\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a}+4\vec{b}$

답 $2\vec{a}+4\vec{b}$

0410 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$ 답 $\vec{b}-\vec{a}$

0411 (ⅰ) 오른쪽 그림에서

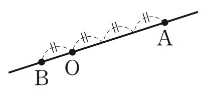


$\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\vec{a}$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{a}=-\frac{2}{3}\vec{a}$

(ⅱ) 오른쪽 그림에서



$\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{3}\vec{a}$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=-\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{a}=-\frac{4}{3}\vec{a}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $k=-\frac{2}{3}$ 또는 $k=-\frac{4}{3}$이므로 모든 k의 값의 합은

$-\frac{2}{3}+\left(-\frac{4}{3}\right)=-2$ 답 ②

0412 점 P의 위치벡터를 $\vec{p}$라 하면

$\vec{p}=\frac{\vec{b}+2\vec{a}}{1+2}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

따라서 점 M의 위치벡터를 $\vec{m}$이라 하면

$\vec{m}=\frac{\vec{p}+\vec{c}}{2}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)+\vec{c}\right\}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

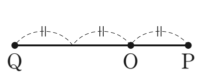
답 $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

0413 $\vec{m}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\frac{(\vec{a}-2\vec{b})+(2\vec{a}+3\vec{b})}{2}=\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

답 ④

0414 $\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{b}+3\vec{a}}{1+3}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

점 Q는 $\overline{OP}$를 2 : 3으로 외분하는 점이므로 오른쪽 그림에서



$\overrightarrow{OQ}=-2\overrightarrow{OP}=-2\left(\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}\right)$

$=-\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$ 답 ②

0415 점 C는 $\overline{AB}$를 1 : 3으로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{OC}=\frac{\vec{b}+3\vec{a}}{1+3}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$ ➡ ❶

점 E는 $\overline{AB}$를 3 : 1로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{OE}=\frac{3\vec{b}+\vec{a}}{3+1}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$ ➡ ❷

$\therefore\ \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\left(\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}\right)+\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}\right)=\vec{a}+\vec{b}$ ➡ ❸

답 $\vec{a}+\vec{b}$

채점 기준	비율
❶ $\overrightarrow{OC}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낼 수 있다.	40%
❷ $\overrightarrow{OE}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낼 수 있다.	40%
❸ $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낼 수 있다.	20%

참고 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{OD}$

0416 점 D의 위치벡터를 $\vec{d}$라 하면 □ABCD는 평행사변형이므로

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, $\quad\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$

$\vec{d}-\vec{a}=\vec{c}-\vec{b}$ $\quad\therefore\ \vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ ➡ ❶

점 P의 위치벡터를 $\vec{p}$라 하면

$\vec{p}=\frac{3\vec{d}+2\vec{a}}{3+2}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{d}$

$=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}$ ➡ ❷

답 $\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}$

채점 기준	비율
❶ 점 D의 위치벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타낼 수 있다.	50%
❷ 점 P의 위치벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타낼 수 있다.	50%

0417 △ABC에서

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=2:1$

즉 점 D는 $\overline{BC}$를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{AD}=\frac{2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}}{2+1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

따라서 $m=\frac{1}{3}$, $n=\frac{2}{3}$이므로 $\quad mn=\frac{2}{9}$ 답 $\frac{2}{9}$

0418 $\overrightarrow{OG}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$, $\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{c}-2\vec{a}}{1-2}=2\vec{a}-\vec{c}$이므로

$\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OG}$

$=(2\vec{a}-\vec{c})-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

$=\frac{5}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{4}{3}\vec{c}$

따라서 $p=\frac{5}{3}$, $q=-\frac{1}{3}$, $r=-\frac{4}{3}$이므로

$p+q+r=0$ 답 0

0419 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$에서

$\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=-\vec{a}-\vec{b}$

$\therefore\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB}=(-\vec{a}-\vec{b})-\vec{b}=-\vec{a}-2\vec{b}$

따라서 $m=-1$, $n=-2$이므로 $\quad m-n=1$ 답 1

참고 $\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$이므로

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$

$=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OG})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OG})$

$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OG}=\vec{0}$

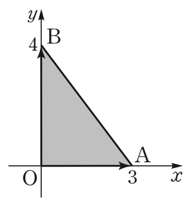
0420 점 G는 △OAB의 무게중심이므로

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$

$\therefore \overrightarrow{GB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OG}=\vec{b}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}=-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

따라서 $m=-\dfrac{1}{3}$, $n=\dfrac{2}{3}$이므로 $\quad m+n=\dfrac{1}{3}$ 답 ③

0421 $m+n\le1$, $m\ge0$, $n\ge0$일 때, $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 △OAB의 내부와 그 둘레이다.



따라서 구하는 넓이는

$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\times3\times4=6$ 답 ⑤

0422 $m+n=1$, $m\ge0$, $n\ge0$이므로

$\overrightarrow{OP}=2m\overrightarrow{OA}+3n\overrightarrow{OB}=\dfrac{m(2\overrightarrow{OA})+n(3\overrightarrow{OB})}{m+n}$

즉 점 P는 두 벡터 $2\overrightarrow{OA}$, $3\overrightarrow{OB}$의 종점을 이은 선분을 $m:n$으로 내분하는 점이다.

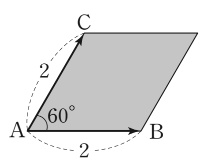
$\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'}=3\overrightarrow{OB}$라 하면

$A'(4,\ 0)$, $B'(0,\ 3)$

따라서 점 P의 자취의 길이는

$\overline{A'B'}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$ 답 5

0423 $0\le m\le1$, $0\le n\le1$일 때, $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형의 내부와 그 둘레이다.



따라서 구하는 넓이는

$\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin60^\circ=2\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ 답 ②

타쎈 특강 평행사변형의 넓이

평행사변형 ABCD에서 이웃하는 두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인 각의 크기가 θ일 때, 평행사변형 ABCD의 넓이 S는

$S=ab\sin\theta$

0424 $2(-\vec{a}+3\vec{b})+3(2\vec{a}-\vec{b})=-2\vec{a}+6\vec{b}+6\vec{a}-3\vec{b}$

$=4\vec{a}+3\vec{b}$

$=4(-1,\ 1)+3(3,\ -4)$

$=(5,\ -8)$ 답 $(5,\ -8)$

0425 $4\vec{a}+3\vec{b}=4(\vec{e_1}-2\vec{e_2})+3(-2\vec{e_1}+4\vec{e_2})$

$=4\vec{e_1}-8\vec{e_2}-6\vec{e_1}+12\vec{e_2}$

$=-2\vec{e_1}+4\vec{e_2}$

$=-2(1,\ 0)+4(0,\ 1)$

$=(-2,\ 4)$

$\therefore |4\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$ 답 ③

0426 $\vec{b}-2\vec{a}+\vec{c}=(3,\ 0)-2(-1,\ 2)+(-2,\ -5)=(3,\ -9)$

$\therefore |\vec{b}-2\vec{a}+\vec{c}|^2=3^2+(-9)^2=90$ 답 ⑤

0427 $3(2\vec{a}-\vec{x})=\vec{x}+2\vec{b}$에서 $\quad 4\vec{x}=6\vec{a}-2\vec{b}$

$\therefore \vec{x}=\dfrac{3}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}$

$=\dfrac{3}{2}(2,\ 7)-\dfrac{1}{2}(-4,\ -3)=(5,\ 12)$ ⇨ ❶

$\therefore |\vec{x}|=\sqrt{5^2+12^2}=13$ ⇨ ❷

답 13

채점 기준	비율
❶ $\vec{x}$를 성분으로 나타낼 수 있다.	60%
❷ $\vec{x}$의 크기를 구할 수 있다.	40%

0428 $\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ -3)+t(-1,\ -1)=(2-t,\ -3-t)$이므로

$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(2-t)^2+(-3-t)^2}=\sqrt{2t^2+2t+13}$

$=\sqrt{2\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{25}{2}}$

따라서 $|\vec{a}+t\vec{b}|$는 $t=-\dfrac{1}{2}$일 때 최솟값 $\sqrt{\dfrac{25}{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$를 갖는다.

답 $-\dfrac{1}{2}$

0429 $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$에서

$(5,\ 2)=m(3,\ -1)+n(-1,\ 4)$

$=(3m-n,\ -m+4n)$

$\therefore 3m-n=5,\ -m+4n=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad m=2,\ n=1$

$\therefore mn=2$ 답 ②

0430 $\vec{a}=\vec{b}$이므로 $\quad x+2y=1,\ 2x-y=7$ ⇨ ❶

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=3,\ y=-1$ ⇨ ❷

$\therefore x+y=2$ ⇨ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 평면벡터가 서로 같을 조건을 이용할 수 있다.	50%
❷ x, y의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $x+y$의 값을 구할 수 있다.	10%

0431 $\vec{c}=q\vec{a}+\vec{b}$에서

$(1,\ -2p)=q(p,\ 2)+(-1,\ -6)$

$=(pq-1,\ 2q-6)$

$\therefore pq-1=1,\ 2q-6=-2p$

즉 $p+q=3$, $pq=2$이므로

$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=5$ 답 5

0432 □ABCD가 평행사변형이므로 $\quad \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{OD}=(a,\ b)$라 하면

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(0,\ 4)-(5,\ 1)=(-5,\ 3)$

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=(-1,\ 6)-(a,\ b)=(-1-a,\ 6-b)$

따라서 $(-5,\ 3)=(-1-a,\ 6-b)$이므로

$-1-a=-5,\ 6-b=3 \qquad \therefore a=4,\ b=3$

$\therefore a+b=7$ 답 ③

다른풀이 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})$

$\therefore \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(4,\ 3)$

0433 점 D의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{AB}=(6-3,\ -2-3)=(3,\ -5),\ \overrightarrow{CD}=(x,\ y-4)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$에서 $\quad x=3,\ y-4=-5$

$\therefore x=3,\ y=-1$

따라서 점 D의 좌표는 $(3,\ -1)$이다. 답 ④

0434 $\overrightarrow{AB}=(2-x,\ x+1)$이므로 $|\overrightarrow{AB}|=3$에서

$\sqrt{(2-x)^2+(x+1)^2}=3, \qquad (2-x)^2+(x+1)^2=9$

$2x^2-2x-4=0, \qquad x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=2$ 답 $-1,\ 2$

0435 $\overrightarrow{PA}=(2-a,\ 2-b),\ \overrightarrow{PB}=(-1-a,\ -1-b),$

$\overrightarrow{PC}=(-a,\ 5-b)$이므로

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$

$=(2-a,\ 2-b)+(-1-a,\ -1-b)+(-a,\ 5-b)$

$=(1-3a,\ 6-3b)$

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$이므로

$1-3a=0,\ 6-3b=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{3},\ b=2$

$\therefore a-b=-\frac{5}{3}$ 답 ①

0436 $M\left(\frac{1+7}{2},\ \frac{-6-2}{2}\right)$, 즉 $M(4,\ -4)$이므로

$\overrightarrow{AM}=(4-x,\ -4-3)=(4-x,\ -7)$

$\overrightarrow{MC}=(5-4,\ y+4)=(1,\ y+4)$

이때 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$이므로

$4-x=1,\ -7=y+4 \qquad \therefore x=3,\ y=-11$

$\therefore x-y=14$ 답 14

다른풀이 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$가 성립하려면 점 M은 대각선 AC의 중점이어야 한다.

따라서 대각선 AC의 중점 $\left(\frac{x+5}{2},\ \frac{y+3}{2}\right)$과 대각선 BD의 중점 $M(4,\ -4)$가 일치하므로

$\frac{x+5}{2}=4,\ \frac{y+3}{2}=-4 \qquad \therefore x=3,\ y=-11$

0437 $\vec{a}+2\vec{b}=(2,\ 4)+2(x,\ 3)=(2x+2,\ 10)$

$2\vec{a}-\vec{b}=2(2,\ 4)-(x,\ 3)=(4-x,\ 5)$

두 벡터 $\vec{a}+2\vec{b},\ 2\vec{a}-\vec{b}$가 서로 평행하므로

$\vec{a}+2\vec{b}=t(2\vec{a}-\vec{b})\ (t\neq 0)$

라 하면 $\quad (2x+2,\ 10)=t(4-x,\ 5)$

$2x+2=t(4-x),\ 10=5t$

$\therefore t=2,\ x=\frac{3}{2}$ 답 ③

0438 $\overrightarrow{AB}=(5-1,\ -1+4)=(4,\ 3)$

$\overrightarrow{AC}=(-3-1,\ x+4)=(-4,\ x+4)$

$\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{AC}$이므로

$\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}\ (t\neq 0)$

라 하면 $\quad (-4,\ x+4)=t(4,\ 3)$

$-4=4t,\ x+4=3t$

$\therefore t=-1,\ x=-7$ 답 ③

0439 $\vec{a}+k\vec{b}=(3,\ 2)+k(-1,\ 2)=(-k+3,\ 2k+2)$

$3\vec{a}+\vec{b}=3(3,\ 2)+(-1,\ 2)=(8,\ 8)$

두 벡터 $\vec{a}+k\vec{b},\ 3\vec{a}+\vec{b}$가 서로 평행하므로

$\vec{a}+k\vec{b}=t(3\vec{a}+\vec{b})\ (t\neq 0)$

라 하면 $\quad (-k+3,\ 2k+2)=t(8,\ 8)$

$-k+3=8t,\ 2k+2=8t$

$\therefore k=\frac{1}{3},\ t=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0440 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$\overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{AC}\ (t\neq 0)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(k-3,\ -2),\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-6,\ -3)$이므로

$(k-3,\ -2)=t(-6,\ -3)$

$k-3=-6t,\ -2=-3t$

$\therefore t=\frac{2}{3},\ k=-1$ 답 -1

0441 $\angle B=45°$이므로 $\qquad \angle A=135°$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos 135°$

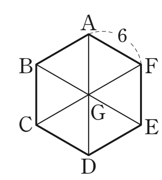
$=1\times 1\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 ②

0442 $|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{5^2-3^2}=4$이므로 $\angle AOM=\theta$라 하면

$\cos\theta=\frac{4}{5}$

$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OM}|\cos\theta=5\times 4\times\frac{4}{5}=16$ 답 16

0443 오른쪽 그림과 같이 정육각형의 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 G라 하면



$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AG}$ ⇨ ❶

정육각형의 한 내각의 크기는

$\frac{180°\times(6-2)}{6}=120°$

이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AG}$가 이루는 각의 크기는 $60°$이다. ⇨ ❷

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AG}|\cos 60°$

$=6\times 6\times\frac{1}{2}=18$ ⇨ ❸

답 18

채점 기준	비율
❶ $\overrightarrow{BC}$와 같은 벡터를 찾을 수 있다.	40%
❷ $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AG}$가 이루는 각의 크기를 구할 수 있다.	30%
❸ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$를 구할 수 있다.	30%

0444 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$에서

$(2,\ x+1)\cdot(1,\ 3-x)=-3$

$2+(x+1)(3-x)=-3$

$x^2-2x-8=0, \qquad (x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=4\ (\because x>0)$ 답 4

0445 $\overrightarrow{AB}=(2+3,\ 1-3)=(5,\ -2)$

$\overrightarrow{BC}=(4-2,\ -2-1)=(2,\ -3)$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(5,\ -2)\cdot(2,\ -3)$

$=10+6=16$ 답 ④

0446 $|\vec{a}|=\sqrt{13}$에서

$\sqrt{(1-k)^2+3^2}=\sqrt{13}, \qquad (1-k)^2+9=13$

$k^2-2k-3=0, \qquad (k+1)(k-3)=0$

$\therefore k=-1\ (\because k<0)$

따라서 $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(-1,\ 4)$이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(2,\ 3)\cdot(-1,\ 4)=-2+12=10$ 답 10

0447 두 점 P, Q가 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로 $\mathrm{P}\left(\frac{a^2}{4},\ a\right)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{b^2}{4},\ b\right)$라 하면

$\overrightarrow{OP}=\left(\frac{a^2}{4},\ a\right)$, $\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{b^2}{4},\ b\right)$

$\therefore \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\frac{(ab)^2}{16}+ab=\frac{1}{16}\{(ab)^2+16ab\}$

$=\frac{1}{16}(ab+8)^2-4$

따라서 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$는 $ab=-8$일 때 최솟값 -4를 갖는다. 답 ④

0448 $|2\vec{a}-\vec{b}|^2=(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$

$=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=4\times3^2-4\times1+2^2=36$

$\therefore |2\vec{a}-\vec{b}|=6$ 답 6

0449 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{6}=6\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$이므로

$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=2|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2$

$=2\times6^2+3\times9\sqrt{3}-2\times3^2$

$=54+27\sqrt{3}$

따라서 $p=54$, $q=27$이므로 $\quad p-q=27$ 답 27

0450 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=5\times2\times\frac{1}{2}=5$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(2\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}+2\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$이므로

$|\overrightarrow{PQ}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=5^2-2\times5+2^2=19$

$\therefore \overline{PQ}=|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{19}$ 답 $\sqrt{19}$

0451 $|\vec{x}|=1$, $|\vec{y}|=1$이고 $\angle A=60°$이므로

$\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}||\vec{y}|\cos60°=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore |\vec{x}+3\vec{y}|^2=|\vec{x}|^2+6\vec{x}\cdot\vec{y}+9|\vec{y}|^2$

$=1^2+6\times\frac{1}{2}+9\times1^2=13$

$\therefore |\vec{x}+3\vec{y}|=\sqrt{13}$ 답 ⑤

0452 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$이므로 $\quad \vec{a}=-\vec{b}-\vec{c}$

$\therefore |\vec{a}|=|\vec{b}+\vec{c}|$

이때 $\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\frac{2}{3}\pi=7\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-14$이므로

$|\vec{b}+\vec{c}|^2=|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2$

$=7^2+2\times(-14)+4^2=37$

$\therefore |\vec{a}|=|\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{37}$ 답 $\sqrt{37}$

0453 $|\vec{a}+\vec{b}|=2$의 양변을 제곱하면

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4$ …… ㉠

$|\vec{a}-\vec{b}|=2\sqrt{3}$의 양변을 제곱하면

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=12$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $\quad 4\vec{a}\cdot\vec{b}=-8$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=-2$ 답 ①

0454 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$의 양변을 제곱하면

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=3, \qquad 2^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+1^2=3$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=-1$ ⇨ ❶

$\therefore (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-3|\vec{b}|^2$

$=2^2+2\times(-1)-3\times1^2=-1$ ⇨ ❷

답 -1

채점 기준	비율
❶ $\vec{a}\cdot\vec{b}$를 구할 수 있다.	50%
❷ $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})$를 구할 수 있다.	50%

0455 $|\vec{a}+\vec{b}|=3$의 양변을 제곱하면

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=9$ …… ㉠

$|\vec{a}-\vec{b}|=1$의 양변을 제곱하면

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $\quad 2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2=10$

$\therefore |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=5$

$\therefore |\vec{a}+2\vec{b}|^2+|2\vec{a}-\vec{b}|^2$

$=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2+4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=5(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)=5\times5=25$ 답 25

0456 $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-1}{1\times2}=-\frac{1}{2}$

$\therefore \theta=\frac{2}{3}\pi\ (\because 0\le\theta\le\pi)$ 답 ⑤

0457 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1\times(-3)+\sqrt{3}\times k}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\sqrt{(-3)^2+k^2}}$

$\frac{1}{2}=\frac{-3+\sqrt{3}k}{2\sqrt{9+k^2}}, \qquad \sqrt{9+k^2}=-3+\sqrt{3}k$

$9+k^2=9-6\sqrt{3}k+3k^2, \qquad 2k^2-6\sqrt{3}k=0$

$2k(k-3\sqrt{3})=0$

$\therefore k=3\sqrt{3}\ (\because k>0)$ 답 $3\sqrt{3}$

0458 $\vec{a}+\vec{b}=(-2,\ 6)$, $\vec{a}-\vec{b}=(4,\ -2)$이므로

$$\cos\theta=\frac{-2\times4+6\times(-2)}{\sqrt{(-2)^2+6^2}\sqrt{4^2+(-2)^2}}=\frac{-20}{2\sqrt{10}\times2\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore\ \theta=\frac{3}{4}\pi\ (\because\ 0\le\theta\le\pi)$ 답 ⑤

0459 $|\vec{a}-\vec{b}|=1$의 양변을 제곱하면

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1,\qquad(\sqrt{3})^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2^2=1$

$2\vec{a}\cdot\vec{b}=6\qquad\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=3$

따라서 $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{3}{\sqrt{3}\times2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\theta=\frac{\pi}{6}\ (\because\ 0\le\theta\le\pi)$ 답 $\frac{\pi}{6}$

0460 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{6\sqrt{2}}{3\times4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}\ (\because\ 0<\theta<\pi)$ ⇨ ❶

따라서 평행사변형 AOBC의 넓이는

$\overline{OA}\times\overline{OB}\times\sin\frac{\pi}{4}=3\times4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$ ⇨ ❷

답 $6\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기를 구할 수 있다.	60%
❷ 평행사변형 AOBC의 넓이를 구할 수 있다.	40%

0461 $\overrightarrow{BA}=(1,\ 2)$, $\overrightarrow{BC}=(6,\ 3)$이므로

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{1\times6+2\times3}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{6^2+3^2}}$$

$$=\frac{12}{\sqrt{5}\times3\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$$

$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}\ (\because\ 0<\theta<\pi)$

답 ③

0462 $\vec{p}$와 $\vec{q}$가 서로 수직이므로 $\qquad\vec{p}\cdot\vec{q}=0$

$(-4,\ a)\cdot(b,\ 2)=0,\qquad-4b+2a=0$

$\therefore\ a-2b=0$ …… ㉠

$\vec{p}$와 $\vec{r}$가 서로 평행하므로

$\vec{p}=t\vec{r}\ (t\ne0)$

라 하면

$(-4,\ a)=t(-2,\ 3)$

$-4=-2t,\ a=3t\qquad\therefore\ t=2,\ a=6$

$a=6$을 ㉠에 대입하면 $\qquad b=3$

$\therefore\ a+b=9$ 답 9

0463 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 서로 수직이므로 $\qquad\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$(t+1,\ 2t)\cdot\left(3,\ -\frac{1}{t}\right)=0,\qquad3t+3-2=0\qquad\therefore\ t=-\frac{1}{3}$

따라서 $\vec{a}=\left(\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$, $\vec{b}=(3,\ 3)$이므로

$3\vec{a}-\vec{b}=3\left(\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right)-(3,\ 3)=(-1,\ -5)$

$\therefore\ |3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+(-5)^2}=\sqrt{26}$ 답 ②

0464 $\triangle$ABC는 $\angle B=90°$인 직각삼각형이므로 $\qquad\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

이때 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(4m^2-3,\ m-3)$이므로

$(1,\ 4)\cdot(4m^2-3,\ m-3)=0$

$4m^2-3+4(m-3)=0$

$4m^2+4m-15=0,\qquad(2m+5)(2m-3)=0$

$\therefore\ m=\frac{3}{2}\ (\because\ m>0)$ 답 $\frac{3}{2}$

0465 $|\vec{a}+\vec{b}|=8$의 양변을 제곱하면

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=64,\qquad6^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+4^2=64$

$2\vec{a}\cdot\vec{b}=12\qquad\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=6$

이때 $\vec{a}+k\vec{b}$와 $\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직이므로

$(\vec{a}+k\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$

$|\vec{a}|^2+(k-1)\vec{a}\cdot\vec{b}-k|\vec{b}|^2=0$

$6^2+6(k-1)-4^2k=0$

$-10k+30=0\qquad\therefore\ k=3$ 답 ①

0466 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{AP}=(x-2,\ y+1)$, $\overrightarrow{BP}=(x+3,\ y-4)$

$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BP}|$에서

$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}$

$(x-2)^2+(y+1)^2=(x+3)^2+(y-4)^2$

$10x-10y+20=0\qquad\therefore\ x-y+2=0$ 답 ②

0467 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=(3-x,\ 2-y)+(-1-x,\ -4-y)$

$=(2-2x,\ -2-2y)$ ⇨ ❶

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=4$에서

$\sqrt{(2-2x)^2+(-2-2y)^2}=4$

$(2-2x)^2+(-2-2y)^2=16$

$\therefore\ (x-1)^2+(y+1)^2=4$ ⇨ ❷

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(1,\ -1)$이고 반지름의 길이가 2인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$2\pi\times2=4\pi$ ⇨ ❸

답 4π

채점 기준	비율
❶ $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}$를 성분으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ 점 P가 나타내는 도형의 둘레의 길이를 구할 수 있다.	30%

0468 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$에서

$(x+1,\ y-2)\cdot(x-1,\ y+6)=0$

$(x+1)(x-1)+(y-2)(y+6)=0$

$x^2+y^2+4y-13=0\qquad\therefore\ x^2+(y+2)^2=17$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(0,\ -2)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{17}$인 원이므로 구하는 넓이는

$\pi \times (\sqrt{17})^2 = 17\pi$ 답 ④

0469 직선 $\frac{x+1}{2}=\frac{1-y}{3}$의 방향벡터는 $(2,\ -3)$이므로 점 $(3,\ -2)$를 지나고 방향벡터가 $(2,\ -3)$인 직선의 방정식은

$\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{-3}$

이 직선이 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$\frac{1-3}{2}=\frac{a+2}{-3}$ $\quad \therefore a=1$ 답 ④

0470 직선 $\begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t+4 \end{cases}$의 방향벡터는 $(3,\ 2)$이므로 점 $(2,\ 5)$를 지나고 방향벡터가 $(3,\ 2)$인 직선의 방정식은

$\frac{x-2}{3}=\frac{y-5}{2}$ 답 $\frac{x-2}{3}=\frac{y-5}{2}$

0471 점 $(1,\ 2)$를 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(1,\ -3)$인 직선의 방정식은

$x-1-3(y-2)=0$

$\therefore x-3y+5=0$ …… ㉠ ⇨ ❶

점 $(-5,\ -4)$를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(3,\ 2)$인 직선의 방정식은

$\frac{x+5}{3}=\frac{y+4}{2}$

$\therefore 2x-3y-2=0$ …… ㉡ ⇨ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad x=7,\ y=4$

따라서 $a=7,\ b=4$이므로 $\quad a+b=11$ ⇨ ❸

답 11

채점 기준	비율
❶ 점 $(1,\ 2)$를 지나고 법선벡터가 $\vec{n}$인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❷ 점 $(-5,\ -4)$를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}$인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	40%

0472 $\overrightarrow{AB}=(1,\ -3)$이므로 두 점 A, B를 지나는 직선과 수직인 직선의 법선벡터는 $(1,\ -3)$이다.

점 $(-3,\ 1)$을 지나고 법선벡터가 $(1,\ -3)$인 직선의 방정식은

$x+3-3(y-1)=0$

$\therefore x-3y+6=0$

이 직선의 x절편은 -6, y절편은 2이므로 이 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times|-6|\times 2=6$ 답 6

0473 주어진 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u},\ \vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(m,\ -1),\ \vec{v}=(4,\ 2)$

두 직선이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|4m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}\sqrt{4^2+2^2}}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|4m-2|}{\sqrt{m^2+1}\times 2\sqrt{5}}$, $\quad \sqrt{10m^2+10}=|4m-2|$

$10m^2+10=16m^2-16m+4$, $\quad 6m^2-16m-6=0$

$3m^2-8m-3=0$, $\quad (3m+1)(m-3)=0$

$\therefore m=3\ (\because m>0)$ 답 ③

0474 주어진 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u},\ \vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(1,\ 3),\ \vec{v}=(2,\ -6)$

$\therefore \cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{|1\times2+3\times(-6)|}{\sqrt{1^2+3^2}\sqrt{2^2+(-6)^2}}$

$=\frac{16}{\sqrt{10}\times 2\sqrt{10}}=\frac{4}{5}$

$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}\left(\because 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$

답 $\frac{3}{5}$

0475 주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$, x축의 방향벡터를 $\vec{e_1}$, y축의 방향벡터를 $\vec{e_2}$라 하면

$\vec{u}=(2,\ -1),\ \vec{e_1}=(1,\ 0),\ \vec{e_2}=(0,\ 1)$

$\therefore \cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{e_1}|}{|\vec{u}||\vec{e_1}|}=\frac{|2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$,

$\cos\beta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{e_2}|}{|\vec{u}||\vec{e_2}|}=\frac{|-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore \cos\alpha\cos\beta=\frac{2}{5}$ 답 $\frac{2}{5}$

0476 주어진 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u},\ \vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(k-2,\ -1),\ \vec{v}=(3,\ k)$

두 직선이 서로 수직이므로 $\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

$3(k-2)-k=0$, $\quad 2k-6=0$ $\quad \therefore k=3$ 답 ⑤

0477 주어진 세 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1},\ \vec{u_2},\ \vec{u_3}$이라 하면

$\vec{u_1}=(3,\ 2),\ \vec{u_2}=(6,\ a),\ \vec{u_3}=(b,\ -3)$

두 직선 $\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{2}$, $\frac{x+2}{6}=\frac{y}{a}$가 서로 평행하므로

$\vec{u_2}=t\vec{u_1}\ (t\ne0)$

이라 하면 $\quad (6,\ a)=t(3,\ 2)$

$6=3t,\ a=2t$ $\quad \therefore t=2,\ a=4$ ⇨ ❶

두 직선 $\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{2}$, $\frac{x+5}{b}=\frac{4-y}{3}$가 서로 수직이므로

$\vec{u_1}\cdot\vec{u_3}=0$

$3b-6=0$ $\quad \therefore b=2$ ⇨ ❷

$\therefore a+b=6$ ⇨ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

0478 (1) $\frac{x+4}{3}=\frac{y-1}{2}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=3t-4,\ y=2t+1$

점 H는 주어진 직선 위에 있으므로 $\mathrm{H}(3t-4,\ 2t+1)$로 놓으면

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(3t-5,\ 2t+1)$

이때 직선 $\frac{x+4}{3}=\frac{y-1}{2}$의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(3,\ 2)$이고

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\vec{u}$이므로 $\quad\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{u}=0$

$3(3t-5)+2(2t+1)=0$

$13t-13=0 \qquad \therefore t=1$

$\therefore \mathrm{H}(-1,\ 3)$

(2) 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{H}(-1,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x-1}{-1-1}=\frac{y-0}{3-0} \qquad \therefore \frac{1-x}{2}=\frac{y}{3}$

답 (1) $\mathrm{H}(-1,\ 3)$ (2) $\frac{1-x}{2}=\frac{y}{3}$

다른풀이 (1) 점 H의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 H는 주어진 직선 위의 점이므로 $\quad\frac{a+4}{3}=\frac{b-1}{2}$

$\therefore 2a-3b=-11$ …… ㉠

주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\quad\vec{u}=(3,\ 2)$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{u}=0$이므로

$(a-1,\ b)\cdot(3,\ 2)=0$

$3(a-1)+2b=0$

$\therefore 3a+2b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-1,\ b=3$

$\therefore \mathrm{H}(-1,\ 3)$

0479 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-4,\ y-1)$, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x,\ y-3)$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$에서

$x(x-4)+(y-1)(y-3)=0$

$x^2-4x+y^2-4y+3=0$

$\therefore (x-2)^2+(y-2)^2=5$

따라서 점 P의 자취는 중심의 좌표가 $(2,\ 2)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원이므로 $\quad a=2,\ b=2,\ r=\sqrt{5}$

$\therefore a+b+r^2=9$ 답 ①

다른풀이 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$에서 $\angle\mathrm{APB}=90°$이므로 점 P의 자취는 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{4+0}{2},\ \frac{1+3}{2}\right)$, 즉 $(2,\ 2)$이고

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(0-4)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{5}$이므로

$a=2,\ b=2,\ r=\sqrt{5}$

0480 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x+6,\ y-3)$

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=5$, 즉 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=25$에서

$(x+6)^2+(y-3)^2=25$ …… ㉠

즉 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(-6,\ 3)$이고 반지름의 길이가 5인 원이다.

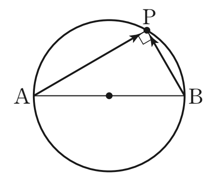
$y=0$을 ㉠에 대입하면 $\quad(x+6)^2=16$

$x+6=\pm4 \qquad \therefore x=-10$ 또는 $x=-2$

따라서 원이 x축과 만나는 두 점의 좌표가 $(-10,\ 0)$, $(-2,\ 0)$이므로 두 점 사이의 거리는

$-2-(-10)=8$ 답 8

0481 원 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면



$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-3,\ y+4)$

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x-7,\ y+2)$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP}}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$

$(x-3)(x-7)+(y+4)(y+2)=0$

$x^2-10x+21+y^2+6y+8=0$

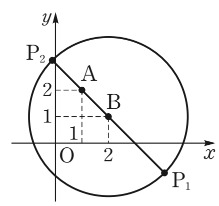
$\therefore (x-5)^2+(y+3)^2=5$ 답 $(x-5)^2+(y+3)^2=5$

0482 $(\vec{p}-\vec{b})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=9$에서

$|\vec{p}-\vec{b}|^2=3^2 \qquad \therefore |\vec{p}-\vec{b}|=3$

따라서 점 P는 중심이 점 $\mathrm{B}(2,\ 1)$이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 점이다.

이때 $|\vec{p}-\vec{a}|$는 두 점 A, P 사이의 거리를 나타내므로 $|\vec{p}-\vec{a}|$가 최대, 최소인 경우는 오른쪽 그림과 같이 점 P가 각각 점 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$에 있을 때이다.



이때

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(2-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$

이므로

(최댓값)$=\overline{\mathrm{P_1A}}=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BP_1}}=3+\sqrt{2}$,

(최솟값)$=\overline{\mathrm{P_2A}}=\overline{\mathrm{P_2B}}-\overline{\mathrm{AB}}=3-\sqrt{2}$

답 최댓값: $3+\sqrt{2}$, 최솟값: $3-\sqrt{2}$

0483 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=\frac{a}{2}\cos\frac{t}{2}$

$v(2\pi)=2$이므로 $\qquad\frac{a}{2}\cos\pi=2$

$-\frac{a}{2}=2 \qquad \therefore a=-4$ 답 -4

0484 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=1-2\sin 2t$

운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $t=a$일 때 점 P의 속도가 0이라 하면

$1-2\sin 2a=0, \qquad \sin 2a=\frac{1}{2}$

$a>0$이므로

$2a=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi,\ \frac{17}{6}\pi,\ \cdots$

$\therefore a=\frac{\pi}{12},\ \frac{5}{12}\pi,\ \frac{13}{12}\pi,\ \frac{17}{12}\pi,\cdots$

따라서 점 P가 처음으로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $\frac{\pi}{12}$이다.

답 ①

0485 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=p\cos t-q\sin t$

$a(t)=v'(t)=-p\sin t-q\cos t$

$v(\pi)=-6$이므로 $\quad p\cos\pi-q\sin\pi=-6$

$-p=-6 \quad \therefore p=6$

$a(\pi)=4$이므로 $\quad -p\sin\pi-q\cos\pi=4$

$\therefore q=4$

따라서 $f(t)=6\sin t+4\cos t$이므로 $t=\frac{\pi}{4}$에서의 점 P의 위치는

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=6\sin\frac{\pi}{4}+4\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}+4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$$

답 ③

0486 $\frac{dx}{dt}=4$, $\frac{dy}{dt}=4-4t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$라 하면 $\quad \vec{v}=(4,\ 4-4t)$

따라서 시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{4^2+(4-4t)^2}=4\sqrt{t^2-2t+2}$

$t=a$일 때 점 P의 속력이 $4\sqrt{17}$이라 하면

$4\sqrt{a^2-2a+2}=4\sqrt{17}, \quad a^2-2a+2=17$

$a^2-2a-15=0, \quad (a+3)(a-5)=0$

$\therefore a=5\ (\because a>0)$

따라서 구하는 시각은 5이다.

답 5

0487 $\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=2t-8$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$라 하면 $\quad \vec{v}=(2t,\ 2t-8)$

따라서 시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{(2t)^2+(2t-8)^2}=\sqrt{8(t-2)^2+32}$

이므로 $t=2$일 때 최솟값 $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$를 갖는다.

답 ②

0488 $\frac{dx}{dt}=6t$, $\frac{dy}{dt}=3t^2$이므로 $\quad \vec{v}=(6t,\ 3t^2)$ ➡ ❶

속도 $\vec{v}$가 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\tan\theta=\frac{3t^2}{6t}=\frac{t}{2}$$

따라서 $t=2$일 때 $\tan\theta=1$이므로 $\quad \theta=\frac{\pi}{4}$ ➡ ❷

답 $\frac{\pi}{4}$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 시각 t에서의 속도를 구할 수 있다.	50%
❷ $t=2$에서 속도 $\vec{v}$가 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 구할 수 있다.	50%

0489 $\frac{dx}{dt}=t-\frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt}=2$이므로 시각 t에서의 점 P의 속도를 $\vec{v}$라 하면 $\quad \vec{v}=\left(t-\frac{1}{t},\ 2\right)$

따라서 시각 t에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2^2}=\sqrt{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}=\underbrace{t+\frac{1}{t}}_{t>0\text{이므로 } t+\frac{1}{t}>0}$$

이때 $t>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t+\frac{1}{t}\ge 2\sqrt{t\times\frac{1}{t}}=2$$

이고 등호는 $t=\frac{1}{t}$, 즉 $t=1$일 때 성립하므로 구하는 속도는 $(0,\ 2)$이다.

답 $(0,\ 2)$

0490 $\frac{dx}{dt}=5\sqrt{2}$, $\frac{dy}{dt}=-10t+5\sqrt{2}$이므로 시각 t에서의 축구공의 속도를 $\vec{v}$라 하면

$\vec{v}=(5\sqrt{2},\ -10t+5\sqrt{2})$

축구공이 지면에 떨어질 때 $y=0$이므로

$-5t^2+5\sqrt{2}t=0, \quad -5t(t-\sqrt{2})=0$

$\therefore t=\sqrt{2}\ (\because t>0)$

따라서 시각 $t=\sqrt{2}$에서의 축구공의 속도는 $(5\sqrt{2},\ -5\sqrt{2})$이므로 구하는 속력은

$\sqrt{(5\sqrt{2})^2+(-5\sqrt{2})^2}=10\ (\text{m/s})$

답 ④

0491 $\frac{dx}{dt}=6$, $\frac{dy}{dt}=3t^2-4$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$라 하면

$\vec{v}=(6,\ 3t^2-4)$

점 P의 속력이 10이므로

$\sqrt{6^2+(3t^2-4)^2}=10, \quad (3t^2-4)^2=64$

$3t^2-4=\pm 8, \quad t^2=4\ (\because t^2>0)$

$\therefore t=2\ (\because t>0)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=0$, $\frac{d^2y}{dt^2}=6t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도를 $\vec{a}$라 하면

$\vec{a}=(0,\ 6t)$

따라서 시각 $t=2$에서의 가속도는 $(0,\ 12)$이므로 구하는 가속도의 크기는

$\sqrt{0^2+12^2}=12$

답 ②

0492 $\frac{dx}{dt}=2\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-8\cos t\sin t=-4\sin 2t$에서

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-2\sin t,\ \frac{d^2y}{dt^2}=-8\cos 2t$$

이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도를 $\vec{a}$라 하면

$\vec{a}=(-2\sin t,\ -8\cos 2t)$ ➡ ❶

$x=1$일 때 $2\sin t=1$에서 $\sin t=\frac{1}{2}$이므로

$t=\frac{\pi}{6}\ \left(\because 0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$ ➡ ❷

따라서 시각 $t=\frac{\pi}{6}$에서의 가속도는 $(-1,\ -4)$이므로 구하는 가속도의 크기는

$\sqrt{(-1)^2+(-4)^2}=\sqrt{17}$ ➡ ❸

답 $\sqrt{17}$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 시각 t에서의 가속도를 구할 수 있다.	40%
❷ 점 P의 위치가 $(1,\ 3)$일 때의 시각을 구할 수 있다.	30%
❸ 점 P의 위치가 $(1,\ 3)$일 때의 가속도의 크기를 구할 수 있다.	30%

0493 $\frac{dx}{dt}=-\sin t$, $\frac{dy}{dt}=\cos t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도 $\vec{v}$는

$\vec{v}=(-\sin t,\ \cos t)$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\cos t$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\sin t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도 $\vec{a}$는

$$\vec{a}=(-\cos t,\ -\sin t)$$

$$\therefore\ \vec{v}\cdot\vec{a}=(-\sin t,\ \cos t)\cdot(-\cos t,\ -\sin t)$$
$$=\sin t\cos t-\cos t\sin t=0$$

따라서 점 P의 속도 $\vec{v}$와 가속도 $\vec{a}$가 이루는 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{2}$이다.

답 $\dfrac{\pi}{2}$

0494 $0\le t\le 1$일 때 $v(t)\le 0$이므로 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^1 |(t-1)e^t|dt=\int_0^1 (1-t)e^t dt$$

이때 $u(t)=1-t$, $v'(t)=e^t$으로 놓으면

$$u'(t)=-1,\ v(t)=e^t$$

$$\therefore\ \int_0^1 (1-t)e^t dt=\Big[(1-t)e^t\Big]_0^1+\int_0^1 e^t dt$$
$$=-1+\Big[e^t\Big]_0^1$$
$$=-1+(e-1)=e-2$$

답 ①

0495 $t=a$ $(0<a\le 5)$일 때, 점 P의 위치는

$$0+\int_0^a \cos\pi t\,dt=\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_0^a=\frac{1}{\pi}\sin\pi a$$

점 P가 원점을 지날 때,

$$\frac{1}{\pi}\sin\pi a=0,\qquad \sin\pi a=0$$

$$\therefore\ a=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ (\because\ 0<a\le 5)$$

따라서 점 P는 원점을 5번 지난다.

답 5

0496 점 P의 시각 t에서의 위치를 x라 하면

$$x=\int_0^t (\sin t-\sin 2t)dt=\left[-\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^t$$
$$=-\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{2}=-\cos t+\frac{1}{2}(2\cos^2 t-1)+\frac{1}{2}$$
$$=\cos^2 t-\cos t=\left(\cos t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

$0\le t\le\pi$에서 $-1\le\cos t\le 1$이므로

$$-\frac{3}{2}\le\cos t-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2},\qquad 0\le\left(\cos t-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{9}{4}$$

$$\therefore\ -\frac{1}{4}\le\left(\cos t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\le 2$$

즉 $-\dfrac{1}{4}\le x\le 2$이므로 원점과 점 P 사이의 거리의 최댓값은 2이다.

답 2

다른풀이 $t=a$ $(0\le a\le\pi)$에서 원점과 점 P 사이의 거리가 최대라 하면 점 P는 시각 $t=a$에서 운동 방향이 바뀌므로 $v(a)=0$에서

$$\sin a-\sin 2a=0,\qquad \sin a-2\sin a\cos a=0$$

$$\sin a(1-2\cos a)=0,\qquad \sin a=0 \text{ 또는 } \cos a=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ a=0 \text{ 또는 } a=\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } a=\pi\ (\because\ 0\le a\le\pi)$$

(i) $t=0$일 때, 점 P의 위치는 0이다.

(ii) $t=\dfrac{\pi}{3}$일 때, 점 P의 위치는

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin t-\sin 2t)dt=\left[-\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{4}$$

(iii) $t=\pi$일 때, 점 P의 위치는

$$\int_0^{\pi}(\sin t-\sin 2t)dt=\left[-\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\pi}=2$$

이상에서 원점과 점 P 사이의 거리의 최댓값은 2이다.

0497 $\dfrac{dx}{dt}=-\pi\sin\pi t$, $\dfrac{dy}{dt}=\pi\cos\pi t$이므로 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2\sqrt{(-\pi\sin\pi t)^2+(\pi\cos\pi t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^2\sqrt{\pi^2(\sin^2\pi t+\cos^2\pi t)}\,dt$$
$$=\int_0^2\pi\,dt=\Big[\pi t\Big]_0^2=2\pi$$

답 ④

0498 $\dfrac{dx}{dt}=2t-2$, $\dfrac{dy}{dt}=4\sqrt{t}$

이때 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리가 8이므로

$$\int_0^a\sqrt{(2t-2)^2+(4\sqrt{t})^2}\,dt=8$$

$$\int_0^a\sqrt{(2t+2)^2}\,dt=8,\qquad \int_0^a(2t+2)dt=8$$

$$\Big[t^2+2t\Big]_0^a=8,\qquad a^2+2a=8$$

$$a^2+2a-8=0,\qquad (a+4)(a-2)=0$$

$$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$$

답 ②

0499 $\dfrac{dx}{dt}=-3\cos^2 t\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cos t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$라 하면

$$\vec{v}=(-3\cos^2 t\sin t,\ 3\sin^2 t\cos t)$$ ⇨ ❶

점 P의 속력은

$$\sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t+9\sin^4 t\cos^2 t}$$
$$=\sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}$$
$$=3|\sin t\cos t|=\frac{3}{2}|\sin 2t|$$ ⇨ ❷

이때 출발 후 처음으로 점 P의 속력이 0이 되는 때는 $\dfrac{3}{2}|\sin 2t|=0$, 즉 $|\sin 2t|=0$에서

$$t=\frac{\pi}{2}$$ ⇨ ❸

따라서 $t=0$에서 $t=\dfrac{\pi}{2}$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}|\sin 2t|\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}\sin 2t\,dt=\left[-\frac{3}{4}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}$$ ⇨ ❹

답 $\dfrac{3}{2}$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 시각 t에서의 속도를 구할 수 있다.	20%
❷ 점 P의 시각 t에서의 속력을 구할 수 있다.	20%
❸ 점 P의 속력이 0일 때의 시각을 구할 수 있다.	30%
❹ 점 P의 속력이 0이 될 때까지 점 P가 움직인 거리를 구할 수 있다.	30%

0500 $y'=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}=\frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{2}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{1+\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)^2}dx=\int_{-2}^{2}\sqrt{\frac{e^x+2+e^{-x}}{4}}dx$$
$$=\int_{-2}^{2}\sqrt{\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)^2}dx$$
$$=\int_{-2}^{2}\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{2}dx$$
$$=\left[e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right]_{-2}^{2}$$
$$=2\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

답 $2\left(e-\frac{1}{e}\right)$

0501 $y'=\frac{1}{4}x-\frac{1}{x}$이므로

$$l=\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{x}\right)^2}dx=\int_1^e\sqrt{\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}}dx$$
$$=\int_1^e\sqrt{\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{x}\right)^2}dx=\int_1^e\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{8}x^2+\ln|x|\right]_1^e=\frac{1}{8}(e^2+7)$$
$$\therefore 8l=e^2+7$$

답 e^2+7

0502 $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$이므로

$$y'=\frac{1}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\times 2x=x\sqrt{x^2+2}$$

따라서 주어진 곡선의 길이는

$$\int_0^a\sqrt{1+(x\sqrt{x^2+2})^2}dx=\int_0^a\sqrt{x^4+2x^2+1}dx$$
$$=\int_0^a\sqrt{(x^2+1)^2}dx$$
$$=\int_0^a(x^2+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^a$$
$$=\frac{a^3}{3}+a$$

즉 $\frac{a^3}{3}+a=12$에서 $\quad a^3+3a-36=0$

$$(a-3)(a^2+3a+12)=0$$
$$\therefore a=3\ (\because a>0)$$

답 ③

0503 전략 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$를 각각 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$로 나타낸다.

풀이 $\overrightarrow{OP}=\frac{2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}}{2+1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OQ}=\frac{2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}}{2-1}=-\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$

$$\therefore \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right)+(-\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB})$$
$$=-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{8}{3}\overrightarrow{OB}$$

따라서 $m=-\frac{2}{3}$, $n=\frac{8}{3}$이므로

$$m+n=2$$

답 ④

0504 전략 $3\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$를 성분으로 나타낸다.

풀이 $3\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=3(-2,\ 4)+(3,\ -5)-(1,\ 10)=(-4,\ -3)$

$$\therefore |3\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$$

답 5

0505 전략 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하면 $\vec{a}=k\vec{b}\ (k\neq 0)$임을 이용한다.

풀이 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하므로

$$\vec{a}=k\vec{b}\ (k\neq 0)$$

라 하면 $\quad (-2t+1,\ 2)=k(3t,\ -4)$

$$-2t+1=3kt,\ 2=-4k$$
$$\therefore k=-\frac{1}{2},\ t=2$$

답 ③

0506 전략 두 벡터 $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$가 이루는 각의 크기를 구한다.

풀이 두 벡터 $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{2}{3}\pi$이므로 ⇨ ❶

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{CA}|\cos\frac{2}{3}\pi$$
$$=2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$$

⇨ ❷

답 -4

채점 기준	비율
❶ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$가 이루는 각의 크기를 구할 수 있다.	50%
❷ $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$를 구할 수 있다.	50%

0507 전략 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 t에서 점 P의 속력은 $\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$임을 이용한다.

풀이 $\frac{dx}{dt}=e^t$, $\frac{dy}{dt}=e^{-t}$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$라 하면

$$\vec{v}=(e^t,\ e^{-t})$$

따라서 $t=\ln 2$에서의 속도는 $\vec{v}=\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$이므로 구하는 속력은

$$|\vec{v}|=\sqrt{2^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

답 ②

0508 전략 단위벡터의 크기는 1임을 이용하여 k에 대한 방정식을 세운다.

풀이 $\frac{1}{5}\vec{a}-\vec{b}=\frac{1}{5}(2,\ 5)-(1,\ k)=\left(-\frac{3}{5},\ 1-k\right)$

이 벡터가 단위벡터이므로

$$\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2+(1-k)^2}=1$$
$$(k-1)^2=\frac{16}{25},\qquad k-1=-\frac{4}{5}\ (\because k<1)$$
$$\therefore k=\frac{1}{5}$$

답 ①

0509 전략 정삼각형의 외심과 무게중심은 일치함을 이용한다.

풀이 정삼각형의 외심과 무게중심은 일치하므로 점 P는 정삼각형 ABC의 외심이면서 무게중심이다.

즉 $\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$이므로 $\quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=3\overrightarrow{OP}$

$$\therefore |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=3|\overrightarrow{OP}|=3\sqrt{3^2+2^2}=3\sqrt{13}$$

답 $3\sqrt{13}$

0510 전략 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면 $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}\ (k\neq0)$임을 이용한다.

풀이 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}\ (k\neq0)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}=(a+1,\ -10)$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}=(3,\ -5)$이므로 $(a+1,\ -10)=k(3,\ -5)$

$a+1=3k,\ -10=-5k$

$\therefore\ k=2,\ a=5$ 답 5

0511 전략 평면벡터의 내적의 연산법칙을 이용하여 주어진 식을 정리한다.

풀이 $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=4,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=2\times4\times\frac{1}{2}=4$이므로

$(3\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=3|\vec{a}|^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2$

$=3\times2^2-5\times4-2\times4^2=-40$ 답 ①

0512 전략 평면벡터의 내적의 연산법칙을 이용하여 주어진 등식을 정리한다.

풀이 $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA})=0$에서

$(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA})=0$

$(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})\cdot(-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=0$

$-|\overrightarrow{CB}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2=0$

$\therefore\ |\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2$, 즉 $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$

따라서 △ABC는 $\overline{AC}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다. 답 ⑤

0513 전략 내적의 연산법칙을 이용하여 주어진 등식의 양변을 제곱한다.

풀이 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{4}=2\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$

$|\vec{a}+k\vec{b}|=\sqrt{10}$의 양변을 제곱하면

$|\vec{a}|^2+2k\vec{a}\cdot\vec{b}+k^2|\vec{b}|^2=10$

$2^2+2k\times2+k^2\times(\sqrt{2})^2=10$

$2k^2+4k-6=0,\qquad k^2+2k-3=0$

$(k+3)(k-1)=0\qquad\therefore\ k=1\ (\because\ k>0)$ 답 1

0514 전략 두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인 각의 크기가 θ인 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$임을 이용한다.

풀이 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{42}{7\times4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{6}\ (\because\ 0<\theta<\pi)$

$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{1}{2}\times7\times4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=7\sqrt{3}$ 답 ④

0515 전략 두 직선이 서로 수직이면 두 직선의 방향벡터가 서로 수직임을 이용한다.

풀이 직선 AB의 방향벡터는 $\overrightarrow{AB}=(k+3,\ 5-k)$

직선 $\frac{x-1}{3}=2-y$의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=(3,\ -1)$ ⇨ ❶

이때 두 직선이 서로 수직이므로 $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=0$ ⇨ ❷

$3(k+3)-(5-k)=0,\qquad 4k+4=0$

$\therefore\ k=-1$ ⇨ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 두 직선의 방향벡터를 구할 수 있다.	20%
❷ 두 직선이 서로 수직일 조건을 알 수 있다.	50%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30%

0516 전략 $\vec{p}=(x,\ y)$라 하고 주어진 식을 이용하여 x, y 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $\vec{p}=(x,\ y)$라 하면 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$에서

$(x-2,\ y+1)\cdot(x-4,\ y-3)=0$

$(x-2)(x-4)+(y+1)(y-3)=0$

$x^2-6x+8+y^2-2y-3=0$

$\therefore\ (x-3)^2+(y-1)^2=5$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(3,\ 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원이므로 구하는 넓이는 5π이다. 답 5π

0517 전략 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 t에서 점 P의 속도는 $(f'(t),\ g'(t))$, 가속도는 $(f''(t),\ g''(t))$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. 시각 t에서의 점 P의 위치벡터를 $\vec{p}$라 하면

$\vec{p}=(e^t+e^{-t},\ e^t-e^{-t})$

$\frac{dx}{dt}=e^t-e^{-t},\ \frac{dy}{dt}=e^t+e^{-t}$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$라 하면 $\vec{v}=(e^t-e^{-t},\ e^t+e^{-t})$

$\frac{d^2x}{dt^2}=e^t+e^{-t},\ \frac{d^2y}{dt^2}=e^t-e^{-t}$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도를 $\vec{a}$라 하면

$\vec{a}=(e^t+e^{-t},\ e^t-e^{-t})$

$\therefore\ \vec{p}=\vec{a}$

ㄴ. $t=\ln2$에서의 속도는 $\vec{v}=\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$이므로 속력은

$\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{2}$

또 $t=\ln2$에서의 가속도는 $\vec{a}=\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$이므로 가속도의 크기는

$\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{2}$

따라서 $t=\ln2$에서의 점 P의 속력과 가속도의 크기는 서로 같다.

ㄷ. 점 P가 $t=0$에서 $t=2$까지 움직인 거리는

$\int_0^2\sqrt{(e^t-e^{-t})^2+(e^t+e^{-t})^2}\,dt=\int_0^2\sqrt{2e^{2t}+2e^{-2t}}\,dt$

이때 $2e^{2t}>0$, $2e^{-2t}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2e^{2t}+2e^{-2t}\geq2\sqrt{2e^{2t}\times2e^{-2t}}=2\times2=4$

(단, 등호는 $t=0$일 때 성립)

$\therefore\ \int_0^2\sqrt{2e^{2t}+2e^{-2t}}\,dt\geq\int_0^2 2\,dt=\Big[2t\Big]_0^2=4$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0518 전략 닫힌 구간 $[a, b]$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이는 $\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$임을 이용한다.

풀이 $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln x$이므로 $y'=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\int_1^4 \sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)^2}dx=\int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}}\,dx$$
$$=\int_1^4 \sqrt{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)^2}dx$$
$$=\int_1^4 \left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln|x|\right]_1^4$$
$$=\frac{15}{4}+\ln 2$$

답 $\frac{15}{4}+\ln 2$

0519 전략 $\overline{AB}$를 $m:n\,(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 P라 하면 $\overrightarrow{OP}=\frac{m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OA}}{m+n}$임을 이용한다.

풀이 $\overrightarrow{p_k}=\frac{k\vec{b}+(10-k)\vec{a}}{k+(10-k)}=\frac{(10-k)\vec{a}+k\vec{b}}{10}$이므로

$$\sum_{k=1}^{9}\overrightarrow{p_k}=\sum_{k=1}^{9}\frac{(10-k)\vec{a}+k\vec{b}}{10}$$
$$=\frac{\vec{a}}{10}\sum_{k=1}^{9}(10-k)+\frac{\vec{b}}{10}\sum_{k=1}^{9}k$$
$$=\frac{\vec{a}}{10}\left(9\times10-\frac{9\times10}{2}\right)+\frac{\vec{b}}{10}\times\frac{9\times10}{2}$$
$$=\frac{9}{2}\vec{a}+\frac{9}{2}\vec{b}$$

따라서 $m=\frac{9}{2}$, $n=\frac{9}{2}$이므로

$$\frac{n}{m}=1$$

답 1

0520 전략 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 수직이 되지 않으려면 $\vec{a}\cdot\vec{b}\neq0$이어야 함을 이용한다.

풀이 $\vec{a}\cdot\vec{b}=(4t-k,\ -2t+1)\cdot(t^2,\ 2t^2+kt-1)$
$=t^2(4t-k)+(-2t+1)(2t^2+kt-1)$
$=(2-3k)t^2+(k+2)t-1$ ⇨ ❶

이때 모든 실수 t에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}\neq0$이려면 t에 대한 이차방정식 $(2-3k)t^2+(k+2)t-1=0$이 실근을 갖지 않아야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(k+2)^2+4(2-3k)<0$
$k^2-8k+12<0,\quad (k-2)(k-6)<0$
$\therefore\ 2<k<6$ ⇨ ❷

따라서 정수 k는 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$3+4+5=12$ ⇨ ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ $\vec{a}\cdot\vec{b}$를 구할 수 있다.	30%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ 모든 정수 k의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

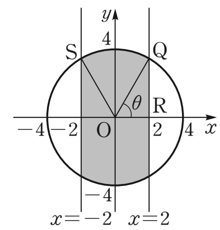
0521 전략 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하고 주어진 조건을 이용하여 x, y 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 $|\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}|\le6$에서

$|3x|\le6\qquad\therefore\ -2\le x\le2$ …… ㉠

$|\overrightarrow{OP}|^2\le16$에서 $\quad x^2+y^2\le16$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 점 P가 존재하는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



$\angle\mathrm{QOR}=\theta$라 하면 $\cos\theta=\frac{1}{2}$이므로

$\theta=\frac{\pi}{3}$

$\therefore\ \angle\mathrm{QOS}=\pi-2\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$

따라서 점 P가 존재하는 영역의 넓이는

$2\times\{2\triangle\mathrm{QOR}+(\text{부채꼴 OQS의 넓이})\}$
$=2\times\left(2\times\frac{1}{2}\times2\times4\times\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\times4^2\times\frac{\pi}{3}\right)$
$=8\sqrt{3}+\frac{16}{3}\pi$

따라서 $a=8$, $b=\frac{16}{3}$이므로

$a-b=\frac{8}{3}$

답 ③

0522 전략 벡터 $\overrightarrow{AH}$는 직선 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}$에 수직임을 이용한다.

풀이 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=2t+1$, $y=3t-2$

점 H는 주어진 직선 위에 있으므로 $\mathrm{H}(2t+1,\ 3t-2)$로 놓으면

$\overrightarrow{AH}=(2t-1,\ 3t+5)$

이때 직선 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}$의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(2,\ 3)$이고

$\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}$이므로 $\quad\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$

$2(2t-1)+3(3t+5)=0$
$13t+13=0\qquad\therefore\ t=-1$

따라서 $\overrightarrow{AH}=(-3,\ 2)$이므로

$\overline{AH}=|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$

답 ④

0523 전략 점 P의 좌표를 시각 t에 대하여 나타낸다.

풀이 점 P는 매초 2라디안의 속력으로 이동하므로 시각 t에서 y축의 양의 부분과 직선 OP가 이루는 각의 크기는 $2t$라디안이다.

즉 직선 OP가 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{2}-2t$이므로

$\mathrm{P}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-2t\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)\right)$, 즉 $\mathrm{P}(\sin 2t,\ \cos 2t)$

$x=\sin 2t$, $y=\cos 2t$로 놓으면

$\frac{dx}{dt}=2\cos 2t$, $\frac{dy}{dt}=-2\sin 2t$

이므로 $\quad\frac{d^2x}{dt^2}=-4\sin 2t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-4\cos 2t$

따라서 시각 t에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{(-4\sin 2t)^2+(-4\cos 2t)^2}$
$=\sqrt{16(\sin^2 2t+\cos^2 2t)}=4$

답 4

04 평면벡터와 평면 운동

Ⅲ. 공간도형과 공간좌표

05 공간도형

0524 ㄱ. 세 점 A, B, D는 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점이므로 한 평면을 결정한다.
ㄴ. 직선 CD와 이 직선 위에 있지 않은 한 점 B는 한 평면을 결정한다.
ㄷ. 직선 AD와 직선 BC는 꼬인 위치에 있으므로 두 직선 AD와 BC를 포함하는 평면은 존재하지 않는다.
이상에서 평면이 하나로 결정되는 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

0525 평면 ABC, 평면 ABD, 평면 ABE, 평면 ACD, 평면 ACE, 평면 ADE, 평면 BCDE의 7개이다. 답 7
다른풀이 사각뿔의 5개의 꼭짓점 중에서 3개를 택하면 하나의 평면이 만들어진다. 그런데 사각뿔의 밑면에 있는 4개의 꼭짓점 중에서 3개를 택하여 만들어진 평면은 하나의 평면이므로 구하는 평면의 개수는

$${}_5C_3-{}_4C_3+1=10-4+1=7$$

0526 답 모서리 AC, 모서리 AD, 모서리 BC, 모서리 BE

0527 답 모서리 DE

0528 답 모서리 CF, 모서리 DF, 모서리 EF

0529 답 면 ABCD, 면 AEFB

0530 답 면 AEHD, 면 BFGC

0531 답 면 DHGC, 면 EFGH

0532 답 모서리 AE, 모서리 BF, 모서리 CG, 모서리 DH

0533 답 모서리 EF, 모서리 FG, 모서리 GH, 모서리 HE

0534 답 면 AFGB, 면 BGHC, 면 CHID, 면 DIJE, 면 AFJE

0535 답 면 FGHIJ

0536 $\overline{AB}/\!/\overline{EF}$이고 $\overline{EF}\perp\overline{FG}$이므로 $\overline{AB}\perp\overline{FG}$이다.
따라서 직선 AB와 직선 FG가 이루는 각의 크기는 90°이다. 답 90°

0537 $\overline{DH}/\!/\overline{AE}$이고 $\underbrace{\overline{AD}\perp\overline{AE},\ \overline{AB}\perp\overline{AE}}_{\overline{AE}\perp(\text{면 }ABCD)}$에서 $\overline{AC}\perp\overline{AE}$이므로 $\overline{AC}\perp\overline{DH}$이다.
따라서 직선 AC와 직선 DH가 이루는 각의 크기는 90°이다. 답 90°

0538 $\overline{DC}/\!/\overline{AB}$이므로 직선 AF와 직선 DC가 이루는 각의 크기는 직선 AF와 직선 AB가 이루는 각의 크기와 같다.
이때 □AEFB는 정사각형이므로 $\angle BAF=45°$
따라서 직선 AF와 직선 DC가 이루는 각의 크기는 45°이다. 답 45°

0539 $\overline{AD}\perp\overline{AB}$, $\overline{AD}\perp\overline{AE}$이므로
$\overline{AD}\perp$(평면 AEFB)
따라서 직선 AD와 평면 AEFB가 이루는 각의 크기는 90°이다.
답 90°

0540 답 (가) $\overline{BD}$ (나) $\overline{BF}$ (다) 수직

0541 답 l

0542 답 $\overline{OB}$

0543 답 (가) 평면 PHO (나) l

0544 (가) m (나) n

0545 답 점 B

0546 답 선분 DG

0547 답 점 F

0548 답 삼각형 HEF

0549 $4\sqrt{2}=\overline{AB}\cos 45°$에서 $4\sqrt{2}=\overline{AB}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\therefore\ \overline{AB}=8$ 답 8

0550 $\sqrt{3}=2\cos\theta$에서 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\therefore\ \theta=30°\ (\because\ 0°\le\theta\le 90°)$ 답 30°

0551 $24=S\cos 30°$에서 $24=S\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\therefore\ S=16\sqrt{3}$ 답 $16\sqrt{3}$

0552 $6=12\cos\theta$에서 $\cos\theta=\frac{1}{2}$
$\therefore\ \theta=60°\ (\because\ 0°\le\theta\le 90°)$ 답 60°

0553 평면 ABC, 평면 DEF, 평면 ADEB, 평면 BEFC, 평면 CFDA, 평면 ABF, 평면 BCD, 평면 ACE, 평면 DEC, 평면 EFA, 평면 DFB의 11개이다. 답 11
다른풀이 삼각기둥의 6개의 꼭짓점 중에서 3개를 택하면 하나의 평면이 만들어진다. 그런데 면 ADEB, 면 BEFC, 면 CFDA의 각 면에 있는 4개의 꼭짓점 중에서 3개를 택하여 만들어진 평면은 각각 하나의 평면이므로 구하는 평면의 개수는

$${}_6C_3-3\cdot{}_4C_3+3=11$$

0554 답 ④

0555 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 한 평면을 결정하므로 구하는 평면의 개수는

$${}_4C_3={}_4C_1=4$$ 답 4

0556 (i) 직선 l과 직선 l 위에 있지 않은 한 점으로 만들 수 있는 평면의 개수는

$${}_3C_1=3$$ ➪ ❶

(ii) 직선 l 위의 한 점과 직선 l 위에 있지 않은 두 점으로 만들 수 있는 평면의 개수는

$${}_3C_1\cdot{}_3C_2=9$$ ➪ ❷

(iii) 직선 l 위에 있지 않은 세 점으로 만들 수 있는 평면의 개수는

1 ⇨ ❸

이상에서 만들 수 있는 서로 다른 평면의 최대 개수는

$3+9+1=13$ ⇨ ❹

답 13

채점 기준	비율
❶ 직선 l과 직선 l 위에 있지 않은 한 점으로 만들 수 있는 평면의 개수를 구할 수 있다.	30%
❷ 직선 l 위의 한 점과 직선 l 위에 있지 않은 두 점으로 만들 수 있는 평면의 개수를 구할 수 있다.	30%
❸ 직선 l 위에 있지 않은 세 점으로 만들 수 있는 평면의 개수를 구할 수 있다.	30%
❹ 서로 다른 평면의 최대 개수를 구할 수 있다.	10%

참고 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점은 한 평면을 결정하므로 (i)에서 결정되는 평면의 개수는 직선 l 위에 있지 않은 세 점 중 한 점을 택하는 경우의 수와 같다.

0557 (i) $\overline{AG}$와 $\overline{EG}$로 만들 수 있는 평면은

평면 AEG

(ii) 네 점 B, D, F, H는 한 평면 위에 있으므로 만들 수 있는 평면은

평면 BDHF

(iii) $\overline{AG}$와 네 점 B, D, F, H로 만들 수 있는 평면은

평면 AGB, 평면 AGD, 평면 AGF, 평면 AGH

그런데 네 점 A, B, G, H는 한 평면 위에 있으므로 평면 AGB와 평면 AGH는 같은 평면이다.

또 네 점 A, D, F, G는 한 평면 위에 있으므로 평면 AGD와 평면 AGF는 같은 평면이다.

(iv) $\overline{EG}$와 네 점 B, D, F, H로 만들 수 있는 평면은

평면 EGB, 평면 EGD, 평면 EGF, 평면 EGH

그런데 네 점 E, F, G, H는 한 평면 위에 있으므로 평면 EGF와 평면 EGH는 같은 평면이다.

이상에서 구하는 서로 다른 평면의 개수는

$1+1+(4-2)+(4-1)=7$

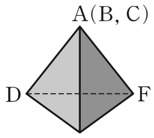
답 7

0558 ④ 직선 CI, 직선 DJ, 직선 EK, 직선 FL, 직선 HI, 직선 IJ, 직선 KL, 직선 GL의 8개이다.

⑤ 직선 AG, 직선 BH, 직선 CI, 직선 DJ, 직선 EK, 직선 FL의 6개이다.

답 ④

0559 주어진 전개도로 만든 정사면체는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 AD와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 EF이다. 답 직선 EF



0560 모서리 AB와 평행한 모서리는

모서리 DF의 1개 $\therefore a=1$

모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리는

모서리 CD, 모서리 DE, 모서리 CF, 모서리 EF의 4개

$\therefore b=4$

$\therefore ab=4$

답 4

참고 정팔면체의 모든 모서리의 길이는 같으므로

$\overline{AB}=\overline{BF}=\overline{FD}=\overline{DA}$

따라서 □ABFD는 마름모이므로 $\overline{AB}/\!/\overline{DF}$이다.

0561 직선 AC와 한 점에서 만나는 면의 개수는

면 AEFB, 면 BFGC, 면 CGHD, 면 DHEA의 4개

$\therefore m=4$

직선 AC와 꼬인 위치에 있는 직선은

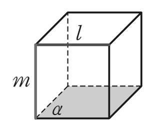
직선 BF, 직선 DH, 직선 EF, 직선 FG, 직선 GH, 직선 HE의 6개

$\therefore n=6$

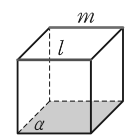
$\therefore m+n=10$

답 ⑤

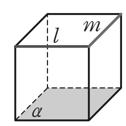
0562 ㄱ. 오른쪽 그림과 같이 $l\perp m$, $l/\!/\alpha$이지만 $m\perp\alpha$일 수도 있다.



ㄴ. 오른쪽 그림과 같이 $l/\!/m$, $l/\!/\alpha$이면 $m/\!/\alpha$이다.



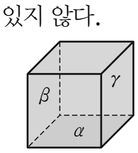
ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 $l/\!/\alpha$, $m/\!/\alpha$이지만 두 직선 l, m이 한 점에서 만날 수도 있다.



이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ①

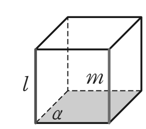
0563 ㄴ. 꼬인 위치에 있는 두 직선은 한 평면 위에 있지 않다.

ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 $\alpha\perp\beta$, $\alpha\perp\gamma$이지만 두 평면 β, γ가 만날 수도 있다.

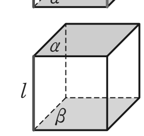


이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ②

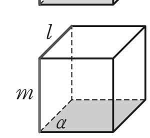
0564 ① 오른쪽 그림과 같이 $l\perp\alpha$, $m\perp\alpha$이면 $l/\!/m$이다.



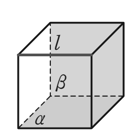
② 오른쪽 그림과 같이 $l\perp\alpha$, $l\perp\beta$이면 $\alpha/\!/\beta$이다.



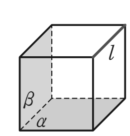
③ 오른쪽 그림과 같이 $l/\!/\alpha$, $m\perp\alpha$이면 $l\perp m$이다.



④ 오른쪽 그림과 같이 $l/\!/\alpha$, $l/\!/\beta$이지만 두 평면 α, β가 만날 수도 있다.



⑤ 오른쪽 그림과 같이 $l/\!/\alpha$, $\alpha\perp\beta$이지만 $l/\!/\beta$일 수도 있다.



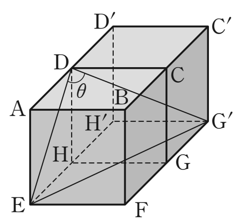
답 ②

0565 $\overline{AC} /\!/ \overline{EG}$이므로 두 직선 AC, BE가 이루는 각의 크기는 두 직선 EG, BE가 이루는 각의 크기와 같다.
이때 △BEG는 정삼각형이므로 $\angle BEG = 60°$
따라서 구하는 각의 크기는 60°이다. 답 60°

0566 $\overline{CD} /\!/ \overline{BE}$이므로 두 직선 AB, CD가 이루는 각의 크기는 두 직선 AB, BE가 이루는 각의 크기와 같다.
이때 △ABE는 정삼각형이므로 $\angle ABE = 60°$
따라서 구하는 각의 크기는 60°이다. 답 60°

0567 $\overline{BC} /\!/ \overline{AD}$이므로 두 직선 AG, BC가 이루는 각의 크기는 두 직선 AG, AD가 이루는 각의 크기와 같다.
$\therefore \angle DAG = \theta$
이때 △ADG는 $\angle ADG = 90°$인 직각삼각형이고
$\overline{AG} = \sqrt{3^2+5^2+4^2} = 5\sqrt{2}$
이므로 $\cos\theta = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AG}} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 답 ④

0568 오른쪽 그림과 같이 합동인 두 정육면체를 붙여 직육면체를 만들면 $\overline{AG} /\!/ \overline{DG'}$이므로 두 직선 AG, DE가 이루는 각의 크기는 두 직선 DG′, DE가 이루는 각의 크기와 같다.



$\therefore \angle EDG' = \theta$
이때 $\overline{DE} = \sqrt{2}$, $\overline{DG'} = \sqrt{3}$,
$\overline{EG'} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$이므로 △EDG′에서
$\overline{DE}^2 + \overline{DG'}^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 = 5$, $\overline{EG'}^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$
$\therefore \overline{DE}^2 + \overline{DG'}^2 = \overline{EG'}^2$
따라서 △EDG′은 $\angle EDG' = 90°$인 직각삼각형이므로 $\theta = 90°$
$\therefore \sin\theta = 1$ 답 ⑤

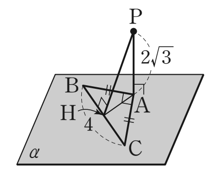
0569 ㄱ. △ABC는 정삼각형이므로
$\overline{AM} \perp \overline{BC}$
ㄴ. △BCD는 정삼각형이므로 $\overline{BC} \perp \overline{DM}$이고, $\overline{BC} \perp \overline{AM}$이므로
$\overline{BC} \perp$ (면 AMD)
ㄷ. $\overline{BC} \perp$ (면 AMD)이고 $\overline{AD}$가 면 AMD에 포함되므로
$\overline{BC} \perp \overline{AD}$
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0570 답 (가) $\overline{AE}$ (나) $\overline{AG}$

0571 $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OH} \perp \overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{PH} \perp \overline{AB}$
따라서 △PAH는 직각삼각형이므로
$\overline{PH} = \sqrt{5^2-3^2} = 4$
또 △PHO는 직각삼각형이므로
$\overline{OH} = \sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2} = 2$ 답 ③

0572 △PAH는 직각삼각형이므로
$\overline{PA} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$
또 $\overline{PH} \perp \alpha$, $\overline{AH} \perp l$이므로 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{PA} \perp l$
따라서 △PBA는 직각삼각형이므로
$\overline{AB} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 - 5^2} = 5$ 답 ①

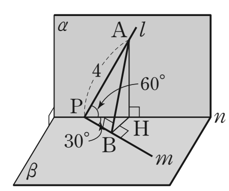
0573 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{PA} \perp \alpha$, $\overline{PH} \perp \overline{BC}$
이므로 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{AH} \perp \overline{BC}$ ⇨ ❶
이때 △ABC는 직각이등변삼각형이므로
$\overline{AH} = \dfrac{1}{2}\overline{BC} = 2$ ⇨ ❷
직각삼각형 PHA에서
$\overline{PH} = \sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2} = 4$
따라서 점 P와 직선 BC 사이의 거리는 4이다. ⇨ ❸
답 4

채점 기준	비율
❶ $\overline{AH} \perp \overline{BC}$임을 알 수 있다.	40%
❷ $\overline{AH}$의 길이를 구할 수 있다.	20%
❸ 점 P와 직선 BC 사이의 거리를 구할 수 있다.	40%

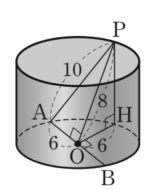
0574 점 A에서 직선 n에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH} \perp \beta$, $\overline{AB} \perp m$
이므로 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{BH} \perp m$
직각삼각형 APH에서
$\overline{PH} = \overline{AP}\cos 60° = 4 \cdot \dfrac{1}{2} = 2$
직각삼각형 HPB에서
$\overline{PB} = \overline{PH}\cos 30° = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ 답 ①

0575 $\overline{DH} \perp$ (평면 EFGH), $\overline{DI} \perp \overline{EG}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HI} \perp \overline{EG}$
직각삼각형 HEG에서 $\overline{HE} \cdot \overline{HG} = \overline{HI} \cdot \overline{EG}$이므로
$3 \cdot 4 = \overline{HI} \cdot \sqrt{3^2+4^2}$ $\therefore \overline{HI} = \dfrac{12}{5}$
따라서 직각삼각형 DHI에서
$\overline{DI} = \sqrt{3^2 + \left(\dfrac{12}{5}\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{41}}{5}$ 답 ④

0576 $\overline{PH}$와 밑면이 수직이고 $\overline{OH} \perp \overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

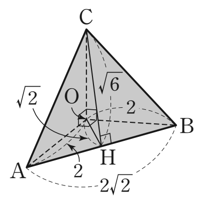


$\overline{PO} \perp \overline{AB}$ ⇨ ❶
직각삼각형 PAO에서
$\overline{PO} = \sqrt{10^2-6^2} = 8$ ⇨ ❷
직각삼각형 POH에서
$\overline{PH} = \sqrt{8^2-6^2} = 2\sqrt{7}$
따라서 구하는 원기둥의 높이는 $2\sqrt{7}$이다. ⇨ ❸
답 $2\sqrt{7}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{PO}\perp\overline{AB}$임을 알 수 있다.	30%
❷ $\overline{PO}$의 길이를 구할 수 있다.	30%
❸ 원기둥의 높이를 구할 수 있다.	40%

0577 $\triangle OAB$는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{AB}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$



$\overline{OC}\perp$(평면 OAB), $\overline{CH}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{OH}\perp\overline{AB}$

이때 직각삼각형 OAB에서

$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\overline{OH}\cdot\overline{AB}$이므로

$2\cdot 2=\overline{OH}\cdot 2\sqrt{2}$ $\quad\therefore \overline{OH}=\sqrt{2}$

따라서 직각삼각형 COH에서

$\overline{OC}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2}=2$ 답 2

0578 $\overline{DH}\perp$(평면 EFGH), $\overline{DI}\perp\overline{GM}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\quad\overline{HI}\perp\overline{GM}$

이때 $\overline{GM}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이므로 $\triangle HMG$의 넓이에서

$\frac{1}{2}\cdot\overline{HG}\cdot\overline{HE}=\frac{1}{2}\cdot\overline{GM}\cdot\overline{HI}$

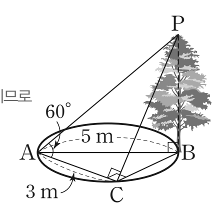
$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\overline{HI}$

$\therefore \overline{HI}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 답 ①

0579 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$를 그으면

$\overline{PB}\perp$(평면 ABC), $\overline{AC}\perp\overline{BC}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여 └ $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 $\angle ACB=90°$



$\overline{AC}\perp\overline{PC}$

직각삼각형 PAC에서

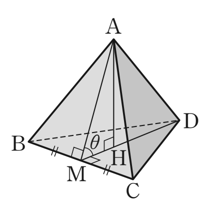
$\overline{PA}=\dfrac{\overline{AC}}{\cos 60°}=\dfrac{3}{\frac{1}{2}}=6(\text{m})$

직각삼각형 PAB에서

$\overline{PB}=\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}(\text{m})$

따라서 구하는 나무의 높이는 $\sqrt{11}$m이다. 답 $\sqrt{11}$m

0580 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면



$\overline{AM}\perp\overline{BC}$, $\overline{DM}\perp\overline{BC}$

이므로 $\quad\angle AMD=\theta$

점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 $\triangle BCD$의 무게중심이므로

$\overline{HM}=\frac{1}{3}\overline{DM}=\frac{1}{3}\overline{AM}$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\overline{HM}}{\overline{AM}}=\dfrac{\frac{1}{3}\overline{AM}}{\overline{AM}}=\dfrac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0581 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기는 $\angle PBQ$의 크기와 같다.

직각삼각형 APB에서

$\overline{PB}=\overline{AB}\tan 30°=2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=2$ ⇨ ❶

직각삼각형 AQB에서

$\overline{BQ}=\overline{AB}\tan 45°=2\sqrt{3}\cdot 1=2\sqrt{3}$ ⇨ ❷

이때 $\triangle PBQ$에서

$\overline{PB}^2+\overline{BQ}^2=2^2+(2\sqrt{3})^2=16$, $\overline{PQ}^2=4^2=16$

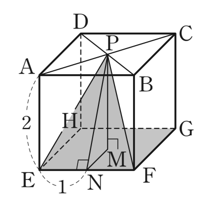
$\therefore \overline{PB}^2+\overline{BQ}^2=\overline{PQ}^2$

따라서 $\triangle PBQ$는 $\angle PBQ=90°$인 직각삼각형이므로 구하는 각의 크기는 90°이다. ⇨ ❸

답 90°

채점 기준	비율
❶ $\overline{PB}$의 길이를 구할 수 있다.	30%
❷ $\overline{BQ}$의 길이를 구할 수 있다.	30%
❸ 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 구할 수 있다.	40%

0582 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 M, $\overline{EF}$에 내린 수선의 발을 N이라 하면



$\overline{PM}\perp$(평면 EFGH), $\overline{PN}\perp\overline{EF}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{MN}\perp\overline{EF}$

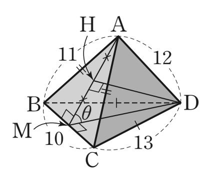
따라서 두 평면 PEF와 EFGH가 이루는 각의 크기는 $\angle PNM$의 크기와 같다.

직각삼각형 PNM에서

$\overline{PN}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, $\overline{PM}=2$

이므로 $\quad\sin\theta=\dfrac{\overline{PM}}{\overline{PN}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 답 ⑤

0583 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면



$\overline{AM}\perp\overline{BC}$, $\overline{DM}\perp\overline{BC}$

이므로 $\quad\angle AMD=\theta$

$\overline{AM}=\sqrt{11^2-5^2}=4\sqrt{6}$,

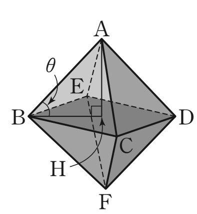
$\overline{DM}=\sqrt{13^2-5^2}=12$이므로 $\triangle AMD$는 $\overline{DA}=\overline{DM}$인 이등변삼각형이다.

점 D에서 $\overline{AM}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{MH}=\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AM}=2\sqrt{6}$

이므로 $\quad\cos\theta=\dfrac{\overline{MH}}{\overline{DM}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{12}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ 답 $\frac{\sqrt{6}}{6}$

0584 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 H, 직선 AB와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기를 θ라 하면



$\angle ABH=\theta$

이때 점 H는 정사각형 BCDE와 AEFC의 두 대각선의 교점이므로 $\triangle ABH$는 직각이등변삼각형이다.

따라서 $\theta=45°$이므로 구하는 각의 크기는 45°이다. 답 45°

0585 점 D에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발이 H이므로

$\angle DFH=\theta$

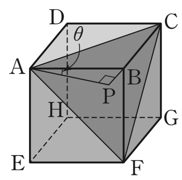
따라서 주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{FH}}}{\overline{\mathrm{DF}}}=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

답 ⑤

0586 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 평면 AFC에 내린 수선의 발을 P라 하면

$\angle\mathrm{BAP}=\theta$



주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면 점 P는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}a$인 정삼각형 AFC의 무게중심이므로

$$\overline{\mathrm{AP}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}a=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

따라서 직각삼각형 ABP에서

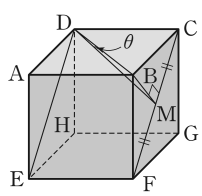
$$\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$\therefore \sin\theta=\frac{\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ③

0587 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{CF}}$의 중점을 M이라 하면 $\triangle$BFC는 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{BM}}\perp\overline{\mathrm{CF}}$



주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면

$$\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{2}a,\ \overline{\mathrm{BM}}=\overline{\mathrm{CM}}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

또 □DEFC는 직사각형이므로 직각삼각형 CDM에서

$$\overline{\mathrm{DM}}=\sqrt{a^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}a$$

이때 $\triangle$BDM에서

$$\overline{\mathrm{BM}}^2+\overline{\mathrm{DM}}^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)^2=2a^2,\ \overline{\mathrm{BD}}^2=2a^2$$

$$\therefore \overline{\mathrm{BM}}^2+\overline{\mathrm{DM}}^2=\overline{\mathrm{BD}}^2$$

즉 $\triangle$BDM은 $\angle\mathrm{BMD}=90^\circ$인 직각삼각형이므로

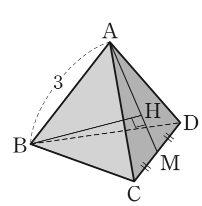
$\overline{\mathrm{BM}}\perp\overline{\mathrm{DM}}$

따라서 직선 BD와 평면 DEFC가 이루는 각의 크기는 두 직선 DB와 DM이 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{DM}}}{\overline{\mathrm{BD}}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}a}{\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

0588 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 평면 ACD에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}$의 평면 ACD 위로의 정사영은 $\overline{\mathrm{AH}}$이다.



이때 점 H는 $\triangle$ACD의 무게중심이므로 $\overline{\mathrm{CD}}$의 중점을 M이라 하면

$$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{AM}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot3=\sqrt{3}$$

답 $\sqrt{3}$

0589 점 A에서 평면 BFGC에 내린 수선의 발이 B이므로 $\overline{\mathrm{AG}}$의 평면 BFGC 위로의 정사영은 $\overline{\mathrm{BG}}$이다.

$$\therefore \overline{\mathrm{BG}}=2\sqrt{2}$$

답 ⑤

0590 $\overline{\mathrm{A'B'}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos\theta$에서

$$6=8\cos\theta \qquad \therefore \cos\theta=\frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

답 $\frac{\sqrt{7}}{4}$

0591 $\overline{\mathrm{AB}}$와 평면 β가 이루는 각의 크기는 30°이므로

$$\overline{\mathrm{A'B'}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos30^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$ ⇨ ❶

$\overline{\mathrm{BC}}$와 평면 β가 이루는 각의 크기는 0°이므로

$$\overline{\mathrm{B'C'}}=\overline{\mathrm{BC}}\cos0^\circ=2\cdot1=2$$ ⇨ ❷

따라서 □A′B′C′D′의 둘레의 길이는

$$2(\sqrt{3}+2)=2\sqrt{3}+4$$ ⇨ ❸

답 $2\sqrt{3}+4$

채점 기준	비율
❶ $\overline{\mathrm{A'B'}}$의 길이를 구할 수 있다.	40%
❷ $\overline{\mathrm{B'C'}}$의 길이를 구할 수 있다.	40%
❸ □A′B′C′D′의 둘레의 길이를 구할 수 있다.	20%

0592 평면 AFGD 위에 있는 원의 넓이는

$$\pi\cdot4^2=16\pi$$

이고 두 평면 AFGD와 EFGH가 이루는 각의 크기는 45°이므로 구하는 정사영의 넓이는

$$16\pi\cos45^\circ=16\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=8\sqrt{2}\pi$$

답 ④

0593 도형 B의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot2^2=\sqrt{3}$$

두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 30°이므로 도형 A의 넓이를 S라 하면

$$S\cos30^\circ=\sqrt{3},\qquad S\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

$$\therefore S=2$$

따라서 도형 A의 넓이는 2이다.

답 2

0594 단면의 삼각기둥의 밑면 위로의 정사영은 삼각기둥의 밑면인 정삼각형이다.

삼각기둥의 밑면인 정삼각형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot4^2=4\sqrt{3}$$

단면과 밑면이 이루는 각의 크기가 45°이므로 단면의 넓이를 S라 하면

$$S\cos45^\circ=4\sqrt{3},\qquad S\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{3}$$

$$\therefore S=4\sqrt{6}$$

따라서 구하는 단면의 넓이는 $4\sqrt{6}$이다.

답 ③

0595 단면의 원기둥의 밑면 위로의 정사영은 원기둥의 밑면인 원이다.

원기둥의 밑면인 원의 넓이는

$$\pi\cdot3^2=9\pi$$

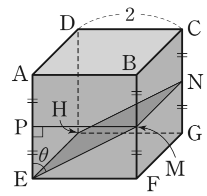
단면과 밑면이 이루는 각의 크기가 60°이므로 단면의 넓이를 S라 하면

$$S\cos 60^\circ=9\pi,\qquad S\cdot\frac{1}{2}=9\pi$$

$$\therefore\ S=18\pi$$

따라서 구하는 단면의 넓이는 18π이다. 답 ③

0596 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AE}$의 중점을 P, 두 평면 AEHD, EMNH가 이루는 각의 크기를 θ라 하면



$\angle PEM=\theta$ ⇨ ❶

직각삼각형 MPE에서

$\overline{EM}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, $\overline{PE}=1$

이므로 $\cos\theta=\dfrac{\overline{PE}}{\overline{EM}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ⇨ ❷

따라서 □AEHD의 평면 EMNH 위로의 정사영의 넓이는

$\square AEHD\cos\theta=4\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ ⇨ ❸

답 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

채점 기준	비율
❶ $\angle PEM=\theta$임을 알 수 있다.	20%
❷ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 정사영의 넓이를 구할 수 있다.	40%

0597 △AFC의 평면 EFGH 위로의 정사영은 △EFG이므로

$\triangle EFG=\triangle AFC\cos\theta$

이때 주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면

$\triangle EFG=\dfrac{1}{2}a^2$, $\triangle AFC=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{2}a)^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$

이므로 $\dfrac{1}{2}a^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2\cos\theta$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 답 ③

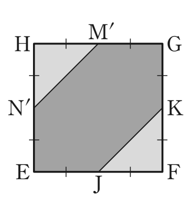
0598 $\overline{AB}$의 밑면 위로의 정사영이 밑면의 지름 AC이므로 △ABC는 직각삼각형이다.

따라서 $\overline{AB}=\sqrt{6^2+8^2}=10$이므로

$\cos\theta=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$ 답 $\dfrac{3}{5}$

0599 도형 IJKLMN은 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정육각형이므로 그 넓이는

$6\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{2})^2=3\sqrt{3}$ ⇨ ❶



두 점 I, L에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발이 각각 E, G이고, 두 점 N, M에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 각각 N′, M′이라 하면 두 점 N′, M′은 각각 $\overline{EH}$, $\overline{GH}$의 중점이므로 도형 IJKLMN의 평면 EFGH 위로의 정사영의 넓이는

$2^2-1^2=3$ ⇨ ❷

따라서 $3\sqrt{3}\cos\theta=3$에서 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ⇨ ❸

답 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

채점 기준	비율
❶ 도형 IJKLMN의 넓이를 구할 수 있다.	40%
❷ 정사영의 넓이를 구할 수 있다.	40%
❸ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	20%

0600 $\overline{BE}$, $\overline{CF}$, $\overline{DG}$의 교점을 O라 하면 △ABC의 밑면 위로의 정사영은 △OBC이므로

$\triangle OBC=\triangle ABC\cos\theta$

점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 ABH에서

$\overline{AH}=\sqrt{5^2-1^2}=2\sqrt{6}$

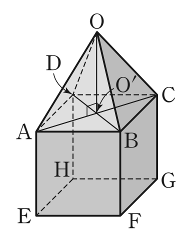
이므로

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot2\sqrt{6}=2\sqrt{6}$

또 $\triangle OBC=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot2^2=\sqrt{3}$이므로

$\sqrt{3}=2\sqrt{6}\cos\theta\qquad\therefore\ \cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 답 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

0601 점 O에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 O′이라 하면 점 O′은 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점이므로 △OAB의 평면 ABCD 위로의 정사영은 △O′AB이다. 두 평면 OAB, ABCD가 이루는 각의 크기를 α, 주어진 입체도형의 한 모서리의 길이를 a라 하면

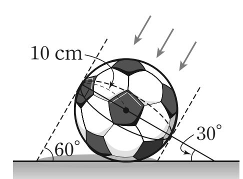


$\triangle O'AB=\triangle OAB\cos\alpha$

$\dfrac{1}{4}a^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2\cos\alpha\qquad\therefore\ \cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \sin\theta=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 답 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

0602 햇빛과 수직이고 구의 중심을 지나는 평면이 지면과 이루는 각의 크기가 30°이고, 구를 이 평면으로 자른 단면의 넓이는



$\pi\cdot10^2=100\pi(\text{cm}^2)$

구하는 그림자의 넓이를 $S\,\text{cm}^2$라 하면

$S\cos30^\circ=100\pi,\qquad S\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=100\pi$

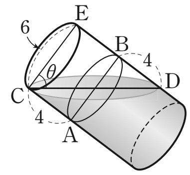
$\therefore\ S=\dfrac{200\sqrt{3}}{3}\pi$

따라서 구하는 넓이는 $\dfrac{200\sqrt{3}}{3}\pi\,\text{cm}^2$이다. 답 ③

0603 (그림자의 넓이)=(집열판의 넓이)$\cdot\cos\theta$이므로

$360=450\cos\theta\qquad\therefore\ \cos\theta=\dfrac{4}{5}$ 답 $\dfrac{4}{5}$

0604 오른쪽 그림과 같이 컵을 기울이기 전의 수면의 지름을 $\overline{AB}$, 컵을 기울였을 때의 수면의 장축을 $\overline{CD}$라 하면 $\overline{AC}=\overline{BD}=4$이므로



$\overline{DE}=8$

직각삼각형 CDE에서 $\overline{CD}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

$\angle DCE=\theta$라 하면 $\cos\theta=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{CD}}=\dfrac{3}{5}$

이때 컵의 밑면의 넓이는 $\pi\cdot 3^2=9\pi$이므로 구하는 수면의 넓이를 S라 하면

$S\cos\theta=9\pi,\quad \dfrac{3}{5}S=9\pi$

$\therefore S=15\pi$

답 15π

0605 전략 직선과 평면의 위치 관계를 생각하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 직선 AD와 수직인 면은

면 ABC, 면 DEF의 2개 $\quad\therefore a=2$

직선 AD와 꼬인 위치에 있는 직선은

직선 BC, 직선 EF의 2개 $\quad\therefore b=2$

$\therefore a+b=4$

답 4

0606 전략 한 평면 위에 있으면서 만나지 않는 두 직선은 서로 평행함을 이용한다.

풀이 $l\,/\!/\,\alpha$이므로 직선 l과 평면 α는 만나지 않는다. 따라서 직선 l은 평면 α 위의 직선 $\boxed{m}$과 만나지 않는다. 그런데 두 직선 l, m은 모두 평면 $\boxed{\beta}$ 위에 있으므로 $\quad l\,/\!/\,m$

$\therefore$ (가) m (나) β

답 (가) m (나) β

0607 전략 무게중심은 삼각형의 세 중선의 교점이므로 점 H가 △BCD의 두 중선 위에 있음을 보인다.

풀이 △ABC는 정삼각형이므로

$\boxed{\overline{AM}}\perp\overline{BC}$

$\overline{AH}\perp$(평면 BCD)이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\boxed{\overline{HM}}\perp\overline{BC}$

이때 $\overline{DM}\perp\overline{BC}$이므로 점 H는 $\boxed{\overline{DM}}$ 위의 점이다.

$\therefore$ (가) $\overline{AM}$ (나) $\overline{HM}$ (다) $\overline{DM}$

답 (가) $\overline{AM}$ (나) $\overline{HM}$ (다) $\overline{DM}$

0608 전략 단면의 원기둥의 밑면 위로의 정사영은 원기둥의 밑면임을 이용한다.

풀이 원기둥의 밑면인 원의 넓이는 $\quad\pi\cdot 2^2=4\pi$

구하는 각의 크기를 θ라 하면

$8\pi\cos\theta=4\pi,\quad \cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \theta=60^\circ$

답 ④

0609 전략 꼬인 위치에 있는 두 직선이 한 점에서 만나도록 직선을 평행이동한다.

풀이 $\overline{AB}\,/\!/\,\overline{DC}$이므로 두 직선 AB, DF가 이루는 각의 크기는 두 직선 DC, DF가 이루는 각의 크기와 같다.

$\therefore \angle CDF=\theta$ $\quad$ ⇨ ❶

이때 주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면

$\overline{DF}=\sqrt{3}a$, $\overline{CF}=\sqrt{2}a$ $\quad$ ⇨ ❷

이므로 직각삼각형 CDF에서

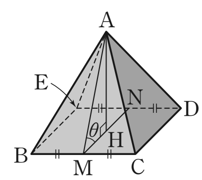
$\sin\theta=\dfrac{\overline{CF}}{\overline{DF}}=\dfrac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ $\quad$ ⇨ ❸

답 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

채점 기준	비율
❶ $\angle CDF=\theta$임을 알 수 있다.	40%
❷ $\overline{DF}$, $\overline{CF}$의 길이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ $\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.	30%

0610 전략 $\overline{CD}$와 평행하면서 $\overline{AM}$과 한 점에서 만나는 선분을 찾는다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{DE}$의 중점을 N이라 하면



$\overline{CD}\,/\!/\,\overline{MN}$

$\therefore \angle AMN=\theta$

점 A에서 $\overline{MN}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 $\overline{MN}$의 중점이다.

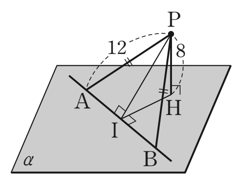
이때 주어진 사각뿔의 한 모서리의 길이를 a라 하면

$\cos\theta=\dfrac{\overline{MH}}{\overline{AM}}=\dfrac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

답 ②

0611 전략 삼수선의 정리를 이용하여 수직인 두 선분을 찾는다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 H에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 I라 하면



$\overline{HI}\perp\overline{AB}$, $\overline{PH}\perp\alpha$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{PI}\perp\overline{AB}$

이때 △PAB가 한 변의 길이가 12인 정삼각형이므로

$\overline{PI}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 12=6\sqrt{3}$

따라서 직각삼각형 PIH에서

$\overline{HI}=\sqrt{(6\sqrt{3})^2-8^2}=2\sqrt{11}$

답 ⑤

0612 전략 삼수선의 정리를 이용하여 $\overline{AQ}$의 길이를 구한다.

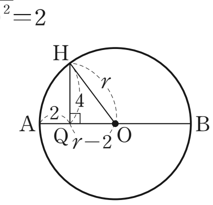
풀이 $\overline{PH}$와 밑면이 수직이고 $\overline{HQ}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{PQ}\perp\overline{AB}$

직각삼각형 PHQ에서 $\quad\overline{PQ}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

직각삼각형 PAQ에서 $\quad\overline{AQ}=\sqrt{6^2-(4\sqrt{2})^2}=2$

밑면의 반지름의 길이를 r라 하면 직각삼각형 OQH에서



$r^2=4^2+(r-2)^2$

$4r=20 \quad \therefore r=5$

$\therefore \overline{AB}=2r=10$

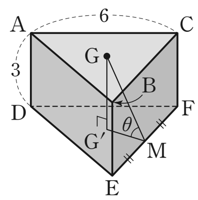
답 10

다른풀이 $\overline{AQ}\cdot\overline{QB}=\overline{HQ}^2$에서

$2(2r-2)=4^2,\quad 4r=20\quad \therefore r=5$

0613 전략 구하는 각의 크기를 θ라 하고 삼각비의 값을 이용하여 θ의 값을 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 G에서 평면 DEF에 내린 수선의 발을 G′이라 하고, 구하는 각의 크기를 θ라 하면



$\overline{GG'}=3$, $\angle GMG'=\theta$

점 G′은 정삼각형 DEF의 무게중심이므로

$$\overline{G'M}=\frac{1}{3}\overline{DM}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6=\sqrt{3}$$

직각삼각형 GG′M에서

$$\tan\theta=\frac{\overline{GG'}}{\overline{G'M}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

$\therefore\ \theta=60^\circ$

답 60°

0614 전략 두 단면의 원기둥의 밑면 위로의 정사영은 모두 원기둥의 밑면임을 이용한다.

풀이 원기둥의 밑넓이는

$$S\cos 60^\circ=6\cdot\frac{1}{2}=3$$

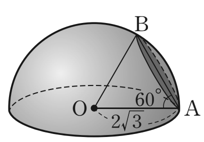
이므로 $\quad T\cos 45^\circ=3,\quad \frac{\sqrt{2}}{2}T=3$

$\therefore\ T=3\sqrt{2}$

답 $3\sqrt{2}$

0615 전략 구를 자를 때 생기는 단면은 항상 원임을 이용하여 단면의 넓이를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 밑면과 60°의 각을 이루는 평면으로 자른 단면은 원이므로 단면의 지름을 AB라 하면 $\triangle$OAB는 정삼각형이다.



$\therefore\ \overline{AB}=2\sqrt{3}$

따라서 단면의 넓이는 $\pi\cdot(\sqrt{3})^2=3\pi$이므로 구하는 정사영의 넓이는

$$3\pi\cos 60^\circ=3\pi\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\pi$$

답 $\frac{3}{2}\pi$

0616 전략 두 평면 ABC, BCD가 이루는 각의 크기를 θ라 하고 $\triangle$ABC와 $\triangle$HBC의 넓이를 이용하여 $\cos\theta$의 값을 구한다.

풀이 두 평면 ABC, BCD가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\triangle$ABC의 평면 BCD 위로의 정사영이 $\triangle$HBC이므로

$\triangle HBC=\triangle ABC\cos\theta$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 점 H는 $\triangle$BCD의 무게중심이므로

$$\triangle HBC=\frac{1}{3}\triangle BCD=\frac{1}{3}\triangle ABC$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{3}\triangle ABC=\triangle ABC\cos\theta\qquad\therefore\ \cos\theta=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$\triangle HBC\cos\theta=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 6^2\cdot\frac{1}{3}=\sqrt{3}$$

답 ③

0617 전략 $\overline{AM}$의 평면 AEFB, 평면 BFGC 위로의 정사영의 길이를 이용한다.

풀이 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면

$$\overline{AM}=\sqrt{a^2+a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}a$$ ➡ ❶

$\overline{AM}$의 평면 AEFB 위로의 정사영은 $\overline{AF}$이고 $\overline{AF}=\sqrt{2}a$이므로

$$\sqrt{2}a=\frac{3}{2}a\cos\theta_1\qquad\therefore\ \cos\theta_1=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\overline{AM}$의 평면 BFGC 위로의 정사영은 $\overline{BM}$이고

$\overline{BM}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$이므로

$$\frac{\sqrt{5}}{2}a=\frac{3}{2}a\cos\theta_2\qquad\therefore\ \cos\theta_2=\frac{\sqrt{5}}{3}$$ ➡ ❷

$$\therefore\ \cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2=\frac{8}{9}+\frac{5}{9}=\frac{13}{9}$$ ➡ ❸

답 $\frac{13}{9}$

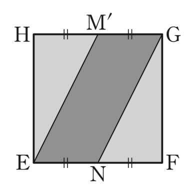
채점 기준	비율
❶ $\overline{AM}$의 길이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ $\cos\theta_1$, $\cos\theta_2$의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2$의 값을 구할 수 있다.	20%

0618 전략 □ANGM의 평면 EFGH 위로의 정사영의 넓이를 이용한다.

풀이 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면 □ANGM은 마름모이므로

$$\square ANGM=\frac{1}{2}\cdot\overline{AG}\cdot\overline{MN}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}a\cdot\sqrt{2}a=\frac{\sqrt{6}}{2}a^2$$

점 M에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 M′이라 하면 □ANGM의 평면 EFGH 위로의 정사영은 □ENGM′이므로 그 넓이는



$$\frac{1}{2}a\cdot a=\frac{a^2}{2}$$

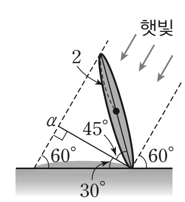
따라서 $\frac{a^2}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}a^2\cos\theta$에서

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

답 ⑤

0619 전략 원판과 원판의 그림자의 햇빛과 수직인 평면 위로의 정사영은 서로 같음을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 햇빛과 수직인 평면을 α라 하면 평면 α가 지면과 이루는 각의 크기는 30°이고, 원판과 이루는 각의 크기는 45°이다. ➡ ❶



또 원판의 평면 α 위로의 정사영은 원판의 그림자의 평면 α 위로의 정사영과 같다. ➡ ❷

따라서 구하는 그림자의 넓이를 S라 하면

$$\pi\cdot 2^2\cdot\cos 45^\circ=S\cos 30^\circ$$

$$4\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}S$$

$$\therefore\ S=\frac{4\sqrt{6}}{3}\pi$$

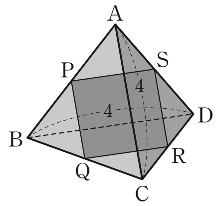
즉 구하는 그림자의 넓이는 $\frac{4\sqrt{6}}{3}\pi$이다. ➡ ❸

답 $\frac{4\sqrt{6}}{3}\pi$

채점 기준	비율
❶ 평면 α가 지면, 원판과 이루는 각의 크기를 구할 수 있다.	40%
❷ 원판과 그림자의 평면 α 위로의 정사영이 서로 같음을 알 수 있다.	30%
❸ 그림자의 넓이를 구할 수 있다.	30%

0620 전략 단면인 사각형의 각 변과 평행한 모서리를 찾는다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$와 이 사면체를 자른 평면과의 교점을 각각 P, Q, R, S라 하자.



$\overline{AC}\,/\!/\,\overline{PQ}$, $\overline{AC}\,/\!/\,\overline{SR}$이므로

$\overline{PQ}\,/\!/\,\overline{SR}$

$\overline{BD}\,/\!/\,\overline{PS}$, $\overline{BD}\,/\!/\,\overline{QR}$이므로

$\overline{PS}\,/\!/\,\overline{QR}$

따라서 □PQRS는 평행사변형이다.

$\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$이라 하면 $\overline{PQ}\,/\!/\,\overline{AC}$이므로

$\overline{PQ} : \overline{AC} = n : (m+n)$

$\therefore\ \overline{PQ} = \dfrac{n}{m+n}\cdot\overline{AC} = \dfrac{4n}{m+n}$

또 $\overline{PS}\,/\!/\,\overline{BD}$이므로

$\overline{PS} : \overline{BD} = m : (m+n)$

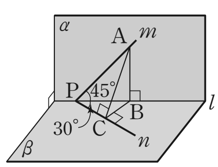
$\therefore\ \overline{PS} = \dfrac{m}{m+n}\cdot\overline{BD} = \dfrac{4m}{m+n}$

따라서 구하는 사각형의 둘레의 길이는

$2(\overline{PQ}+\overline{PS}) = 2\left(\dfrac{4n}{m+n}+\dfrac{4m}{m+n}\right) = 8\cdot\dfrac{m+n}{m+n} = 8$ 답 ③

0621 전략 직선 m 위의 한 점에서 두 직선 l, n에 각각 수선의 발을 내려 삼수선의 정리를 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 m 위의 한 점 A에서 두 직선 l, n에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 하면 $\overline{AB}\perp\beta$, $\overline{AC}\perp n$이므로 삼수선의 정리에 의하여



$\overline{BC}\perp n$

따라서 $\overline{PA}=a$라 하면 직각삼각형 APB에서

$\overline{PB} = \overline{PA}\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$

이므로 직각삼각형 PBC에서

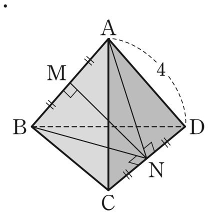
$\overline{PC} = \overline{PB}\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}a$

따라서 직각삼각형 APC에서

$\cos\theta = \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = \dfrac{\frac{\sqrt{6}}{4}a}{a} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$ 답 ③

0622 전략 평면 α와 직선 l에 대하여 $\alpha\perp l$이면 α 위의 직선 m에 대하여 $m\perp l$임을 이용하여 공통인 수선을 찾는다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$의 중점을 각각 M, N이라 하면 △ACD, △BCD는 모두 정삼각형이므로



$\overline{CD}\perp\overline{AN}$, $\overline{CD}\perp\overline{BN}$

$\therefore\ \overline{CD}\perp$(평면 ABN)

$\overline{MN}$은 평면 ABN 위에 있으므로

$\overline{CD}\perp\overline{MN}$

같은 방법으로 $\overline{AB}\perp$(평면 CDM)이므로

$\overline{AB}\perp\overline{MN}$

따라서 두 모서리 AB, CD 사이의 최단 거리는 $\overline{MN}$의 길이와 같다.

이때 $\overline{AN} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4 = 2\sqrt{3}$, $\overline{AM} = \dfrac{1}{2}\cdot 4 = 2$이므로 직각삼각형 AMN에서

$\overline{MN} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2-2^2} = 2\sqrt{2}$ 답 ②

0623 전략 정삼각형은 내심과 무게중심이 일치함을 이용한다.

풀이 두 평면 ABC, BCD가 이루는 각의 크기를 θ, 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면

△HBC=△ABC $\cos\theta$

이때 점 H는 △BCD의 무게중심이므로

$\underbrace{\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}}_{\triangle\mathrm{HBC}=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}} = \triangle\mathrm{ABC}\cos\theta$

$\therefore\ \cos\theta = \dfrac{1}{3}$

△ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\pi = \pi r^2\cos\theta,\qquad \pi = \pi r^2\cdot\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ r=\sqrt{3}\ (\because\ r>0)$

정삼각형 ABC는 내심과 무게중심이 일치하므로 정사면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면

$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}a = \sqrt{3}\qquad \therefore\ a=6$

따라서 구하는 정사면체의 한 모서리의 길이는 6이다. 답 6

Ⅲ. 공간도형과 공간좌표

06 공간좌표

0624 답 A$(0, 0, 2)$, B$(0, 4, 0)$, C$(3, 4, 2)$

0625 답 A$(3, 0, 0)$, B$(0, -3, 5)$, C$(3, -3, 5)$

0626 답 x축

0627 답 z축

0628 답 xy평면

0629 답 zx평면

0630 답 $(3, 0, 0)$

0631 답 $(0, 4, 0)$

0632 답 $(0, 4, -1)$

0633 답 $(3, 0, -1)$

0634 답 $(-1, 5, 2)$

0635 답 $(1, -5, -2)$

0636 답 $(-1, -5, 2)$

0637 답 $(-1, 5, -2)$

0638 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(4-2)^2+\{-2-(-1)\}^2+(3-5)^2}=3$ 답 3

0639 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+(-2-2)^2+(1-3)^2}=6$ 답 6

0640 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{-3-(-2)\}^2+(7-4)^2+(\sqrt{6}-0)^2}=4$ 답 4

0641 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{3^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{11}$ 답 $\sqrt{11}$

0642 $\mathrm{P}\left(\frac{2\cdot(-2)+1\cdot1}{2+1}, \frac{2\cdot0+1\cdot3}{2+1}, \frac{2\cdot5+1\cdot(-4)}{2+1}\right)$
$\therefore$ P$(-1, 1, 2)$ 답 P$(-1, 1, 2)$

0643 $\mathrm{M}\left(\frac{1+(-2)}{2}, \frac{3+0}{2}, \frac{-4+5}{2}\right)$
$\therefore \mathrm{M}\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 답 $\mathrm{M}\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

0644 $\mathrm{Q}\left(\frac{3\cdot(-2)-2\cdot1}{3-2}, \frac{3\cdot0-2\cdot3}{3-2}, \frac{3\cdot5-2\cdot(-4)}{3-2}\right)$
$\therefore$ Q$(-8, -6, 23)$ 답 Q$(-8, -6, 23)$

0645 $\mathrm{G}\left(\frac{2+2+(-1)}{3}, \frac{1+8+0}{3}, \frac{1+1+4}{3}\right)$
$\therefore$ G$(1, 3, 2)$ 답 G$(1, 3, 2)$

0646 답 중심의 좌표: $(2, -1, 1)$, 반지름의 길이: 3

0647 답 중심의 좌표: $(0, 0, 0)$, 반지름의 길이: 5

0648 답 $(x-1)^2+(y-5)^2+(z+2)^2=4$

0649 답 $x^2+y^2+z^2=49$

0650 구의 반지름의 길이는
$\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$
따라서 구하는 구의 방정식은
$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=9$
답 $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=9$

0651 구의 반지름의 길이는
$\sqrt{\{0-(-4)\}^2+(2-2)^2+(-3-0)^2}=5$
따라서 구하는 구의 방정식은
$(x+4)^2+(y-2)^2+z^2=25$ 답 $(x+4)^2+(y-2)^2+z^2=25$

0652 답 $(x-2)^2+(y+6)^2+(z-1)^2=1$

0653 답 $(x+3)^2+(y+1)^2+(z-7)^2=9$

0654 답 $(x-5)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=16$

0655 $x^2+y^2+z^2+4x-2z-11=0$에서
$(x^2+4x+4)+y^2+(z^2-2z+1)=16$
$\therefore (x+2)^2+y^2+(z-1)^2=4^2$
따라서 중심의 좌표는 $(-2, 0, 1)$, 반지름의 길이는 4이다.
답 중심의 좌표: $(-2, 0, 1)$, 반지름의 길이: 4

0656 $x^2+y^2+z^2-6x-8y+2z=0$에서
$(x^2-6x+9)+(y^2-8y+16)+(z^2+2z+1)=26$
$\therefore (x-3)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=26$
따라서 중심의 좌표는 $(3, 4, -1)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{26}$이다.
답 중심의 좌표: $(3, 4, -1)$, 반지름의 길이: $\sqrt{26}$

0657 $x^2+y^2+z^2-2x+2ky-6z+4k+22=0$에서
$(x-1)^2+(y+k)^2+(z-3)^2=k^2-4k-12$
이 방정식이 구를 나타내려면
$k^2-4k-12>0$, $(k+2)(k-6)>0$
$\therefore k<-2$ 또는 $k>6$ 답 $k<-2$ 또는 $k>6$

0658 점 (a, b, c)와 x축에 대하여 대칭인 점의 좌표는
$(a, -b, -c)$ └ y좌표와 z좌표의 부호가 바뀐다.
이 점에서 zx평면에 내린 수선의 발의 좌표는
$(a, 0, -c)$ └ y좌표가 0이다. 답 ④

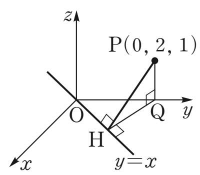
0659 점 $(4, -2, 7)$을 xy평면에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(4, -2, -7)$
이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(-4, 2, 7)$ 답 $(-4, 2, 7)$

0660 점 F는 점 B에서 xy평면에 내린 수선의 발이므로
F$(a, 4, 0)$
점 F와 y축에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(-a, 4, 0)$
따라서 $-a=-3$, $4=b$이므로 $a=3$, $b=4$
$\therefore a+b=7$ 답 7

0661 H(1, 3, 0)이고 $\overline{AB}=4$, $\overline{AD}=\overline{AE}=3$이므로
B(1+3, 3+4, 0+3), 즉 B(4, 7, 3) ⇨ ❶
따라서 구하는 합은 $4+7+3=14$ ⇨ ❷
답 14

채점 기준	비율
❶ 점 B의 좌표를 구할 수 있다.	70%
❷ 점 B의 x좌표, y좌표, z좌표의 합을 구할 수 있다.	30%

0662 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 Q라 하면 삼수선의 정리에 의하여



$\overline{HQ}\perp\overline{OH}$
$\overline{OQ}=2$이고 $\angle QOH=45°$이므로 직각삼각형 OHQ에서
$\overline{HQ}=\overline{OQ}\sin 45°=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$
또 $\overline{PQ}=1$이므로 직각삼각형 PHQ에서
$\overline{PH}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$
답 ②

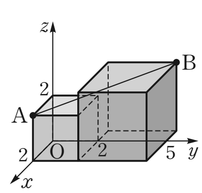
0663 P(−3, −2, 5), Q(−3, −2, −5)이므로
$\overline{PQ}=\sqrt{(-3+3)^2+(-2+2)^2+(-5-5)^2}=10$
답 ③

0664 $\overline{PQ}=6$이므로 $\sqrt{(-2-2)^2+(a+3)^2+(3-a)^2}=6$
$2a^2+34=36$, $a^2=1$ $\therefore a=\pm1$
따라서 모든 a의 값의 곱은 −1이다.
답 ②

0665 구하는 점의 좌표를 (0, 0, a)라 하면
$\sqrt{(-5)^2+3^2+(-1-a)^2}=5\sqrt{2}$
$a^2+2a+35=50$, $a^2+2a-15=0$
$(a+5)(a-3)=0$ $\therefore a=-5$ 또는 $a=3$
따라서 구하는 점의 좌표는
(0, 0, −5) 또는 (0, 0, 3)
답 (0, 0, −5), (0, 0, 3)

0666 $\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2$이므로
$(a-2)^2+(1-a-3)^2+(3-4)^2$
$=2^2+3^2+4^2+a^2+(1-a)^2+3^2$
$2a^2+9=2a^2-2a+39$
$2a=30$ $\therefore a=15$
답 ⑤

0667 주어진 도형을 오른쪽 그림과 같이 좌표공간에 놓으면



A(2, 0, 2), B(−1, 5, 3)
이므로
$\overline{AB}=\sqrt{(-1-2)^2+5^2+(3-2)^2}$
$=\sqrt{35}$
답 $\sqrt{35}$

0668 $\overline{AB}=\sqrt{(a-4)^2+(-a)^2+(5-b)^2}$
$=\sqrt{2a^2-8a+16+(5-b)^2}$
$=\sqrt{2(a-2)^2+(b-5)^2+8}$
따라서 선분 AB의 길이는 $a=2$, $b=5$일 때 최솟값 $2\sqrt{2}$를 갖는다.
답 ③

0669 구하는 점을 R(0, a, 0)이라 하면 $\overline{PR}=\overline{QR}$에서
$\overline{PR}^2=\overline{QR}^2$이므로
$(-1)^2+(a-1)^2+2^2=(-2)^2+(a-4)^2$
$a^2-2a+6=a^2-8a+20$
$6a=14$ $\therefore a=\frac{7}{3}$
따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(0,\ \frac{7}{3},\ 0\right)$이다.
답 $\left(0,\ \frac{7}{3},\ 0\right)$

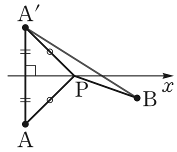
0670 $\overline{PO}=\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PO}^2=\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$
$\overline{PO}^2=\overline{PA}^2$에서
$a^2+b^2=(a+3)^2+(b-4)^2+(-1)^2$
$a^2+b^2=a^2+6a+b^2-8b+26$
$\therefore 3a-4b+13=0$ …… ㉠
$\overline{PO}^2=\overline{PB}^2$에서
$a^2+b^2=(a-3)^2+(b+1)^2+2^2$
$a^2+b^2=a^2-6a+b^2+2b+14$
$\therefore 3a-b-7=0$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{41}{9}$, $b=\frac{20}{3}$
$\therefore a+b=\frac{101}{9}$
답 ①

0671 점 C의 좌표를 (a, 0, b)라 하면 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$에서
$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$
$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$에서 $(-2)^2+(2-1)^2+1^2=a^2+(-2)^2+(b-1)^2$
$6=a^2+b^2-2b+5$
$\therefore a^2+b^2-2b-1=0$ …… ㉠
$\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$에서 $a^2+(-2)^2+(b-1)^2=(a-2)^2+(-1)^2+b^2$
$a^2+b^2-2b+5=a^2-4a+b^2+5$
$\therefore b=2a$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$a^2+4a^2-4a-1=0$, $5a^2-4a-1=0$
$(5a+1)(a-1)=0$ $\therefore a=-\frac{1}{5}$ 또는 $a=1$
$a=-\frac{1}{5}$을 ㉡에 대입하면 $b=-\frac{2}{5}$
$a=1$을 ㉡에 대입하면 $b=2$
따라서 점 C의 좌표는
$\left(-\frac{1}{5},\ 0,\ -\frac{2}{5}\right)$ 또는 (1, 0, 2)
답 $\left(-\frac{1}{5},\ 0,\ -\frac{2}{5}\right)$, (1, 0, 2)

0672 두 점 A, B의 z좌표의 부호가 같으므로 두 점은 좌표공간에서 xy평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.
점 A와 xy평면에 대하여 대칭인 점을 A′이라 하면
A′(6, 1, 4)
이때 $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로
$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}\ge\overline{A'B}$
$=\sqrt{(2-6)^2+(3-1)^2+(-2-4)^2}$
$=2\sqrt{14}$
답 ②

0673 두 점 A, B는 xy평면 위의 점이고 두 점의 y좌표의 부호가 같으므로 xy평면에서 x축을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A와 x축에 대하여 대칭인 점을 A′이라 하면



$A'(-3,\ 4,\ 0)$

이때 $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}\geq\overline{A'B}$$
$$=\sqrt{(5+3)^2+(-2-4)^2}$$
$$=10$$

답 ②

0674 두 점 A, B의 y좌표의 부호가 같으므로 두 점은 좌표공간에서 zx평면을 기준으로 같은 쪽에 있다. ⇨ ❶

점 A와 zx평면에 대하여 대칭인 점을 A′이라 하면

$A'(-2,\ -5,\ -1)$ ⇨ ❷

이때 $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}\geq\overline{A'B}$$
$$=\sqrt{(a+2)^2+(1+5)^2+(2+1)^2}$$
$$=\sqrt{a^2+4a+49}$$ ⇨ ❸

즉 $\sqrt{a^2+4a+49}=3\sqrt{6}$이므로 $a^2+4a-5=0$

$(a+5)(a-1)=0$ $\therefore a=1\ (\because a>0)$ ⇨ ❹

답 1

채점 기준	비율
❶ 두 점 A, B가 zx평면을 기준으로 같은 쪽에 있음을 알 수 있다.	10%
❷ 점 A와 zx평면에 대하여 대칭인 점의 좌표를 구할 수 있다.	20%
❸ $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❹ a의 값을 구할 수 있다.	30%

0675 두 점 A, B의 x좌표의 부호가 같으므로 두 점은 좌표공간에서 yz평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 B와 yz평면에 대하여 대칭인 점을 B′이라 하면

$B'(-3,\ -2,\ -1)$

이때 $\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로 △ABP의 둘레의 길이는

$$\overline{AB}+\overline{BP}+\overline{PA}=\overline{AB}+\overline{B'P}+\overline{PA}$$
$$\geq\overline{AB}+\overline{AB'}$$
$$=\sqrt{(3-1)^2+(-2-2)^2+(-1-1)^2}$$
$$+\sqrt{(-3-1)^2+(-2-2)^2+(-1-1)^2}$$
$$=2\sqrt{6}+6$$

답 $2\sqrt{6}+6$

0676 두 점 A, B의 zx평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 하면 $A'(-1,\ 0,\ 1)$, $B'(2,\ 0,\ -1)$

따라서 선분 AB의 zx평면 위로의 정사영의 길이는

$$\overline{A'B'}=\sqrt{(2+1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{13}$$

답 ⑤

0677 (1) $\overline{AB}=\sqrt{(5-2)^2+(8-4)^2+(8-3)^2}=5\sqrt{2}$ ⇨ ❶

(2) 두 점 A, B의 xy평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 하면

$A'(2,\ 4,\ 0)$, $B'(5,\ 8,\ 0)$

따라서 선분 AB의 xy평면 위로의 정사영의 길이는

$$\overline{A'B'}=\sqrt{(5-2)^2+(8-4)^2}=5$$ ⇨ ❷

(3) $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$이므로 $5=5\sqrt{2}\cos\theta$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ⇨ ❸

답 (1) $5\sqrt{2}$ (2) 5 (3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

채점 기준	비율
❶ 선분 AB의 길이를 구할 수 있다.	30%
❷ 선분 AB의 xy평면 위로의 정사영의 길이를 구할 수 있다.	40%
❸ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	30%

0678 두 점 A, B의 yz평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 하면

$A'(0,\ 3,\ \sqrt{11})$, $B'(0,\ 7,\ 2\sqrt{11})$

따라서 선분 AB의 yz평면 위로의 정사영의 길이는

$$\overline{A'B'}=\sqrt{(7-3)^2+(2\sqrt{11}-\sqrt{11})^2}=3\sqrt{3}$$

이때 $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos 60°$이므로

$$3\sqrt{3}=\sqrt{(a-3)^2+(7-3)^2+(2\sqrt{11}-\sqrt{11})^2}\cdot\frac{1}{2}$$

$108=(a-3)^2+27,$ $(a-3)^2=81$

$a-3=\pm9$ $\therefore a=12\ (\because a>0)$

답 12

0679 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{1\cdot2+2\cdot1}{1+2},\ \frac{1\cdot3+2\cdot0}{1+2},\ \frac{1\cdot1+2\cdot1}{1+2}\right)$$

$\therefore P\left(\dfrac{4}{3},\ 1,\ 1\right)$

선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$Q\left(\frac{2\cdot2-1\cdot1}{2-1},\ \frac{2\cdot3-1\cdot0}{2-1},\ \frac{2\cdot1-1\cdot1}{2-1}\right)$$

$\therefore Q(3,\ 6,\ 1)$

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{\frac{4}{3}+3}{2},\ \frac{1+6}{2},\ \frac{1+1}{2}\right),\ 즉\ \left(\frac{13}{6},\ \frac{7}{2},\ 1\right)$$

답 ②

0680 점 A의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 하면 선분 OA를 3 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\cdot a+2\cdot0}{3+2},\ \frac{3\cdot b+2\cdot0}{3+2},\ \frac{3\cdot c+2\cdot0}{3+2}\right)$$

$\therefore \left(\dfrac{3}{5}a,\ \dfrac{3}{5}b,\ \dfrac{3}{5}c\right)$

따라서 $\dfrac{3}{5}a=3,\ \dfrac{3}{5}b=-9,\ \dfrac{3}{5}c=6$이므로

$a=5,\ b=-15,\ c=10$

$\therefore A(5,\ -15,\ 10)$

답 $A(5,\ -15,\ 10)$

0681 $P(2,\ -4,\ -3)$, $Q(-2,\ 4,\ 3)$이므로 선분 PQ를 3 : 1로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\cdot(-2)-1\cdot2}{3-1},\ \frac{3\cdot4-1\cdot(-4)}{3-1},\ \frac{3\cdot3-1\cdot(-3)}{3-1}\right)$$

$\therefore (-4,\ 8,\ 6)$

답 ②

0682 $2\overline{AP}=\overline{BP}$, 즉 $\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$이고 점 P가 선분 AB 위의 점이므로 점 P는 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점이다.

즉 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{1\cdot a+2\cdot2}{1+2},\ \frac{1\cdot b+2\cdot3}{1+2},\ \frac{1\cdot c+2\cdot6}{1+2}\right)$$

$$\therefore P\left(\frac{a+4}{3},\ \frac{b+6}{3},\ \frac{c+12}{3}\right)$$

따라서 $\frac{a+4}{3}=1$, $\frac{b+6}{3}=1$, $\frac{c+12}{3}=2$이므로

$a=-1$, $b=-3$, $c=-6$

$\therefore a+b+c=-10$ 답 ①

다른풀이 $2\overline{AP}=\overline{BP}$, 즉 $\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$이므로

$\overline{AB}:\overline{BP}=3:2$

즉 점 B는 선분 AP를 3 : 2로 외분하는 점이므로

$B\left(\frac{3\cdot1-2\cdot2}{3-2}, \frac{3\cdot1-2\cdot3}{3-2}, \frac{3\cdot2-2\cdot6}{3-2}\right)$

$\therefore B(-1, -3, -6)$

따라서 $a=-1$, $b=-3$, $c=-6$이므로

$a+b+c=-10$

참고 $\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$에서 점 P는 선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점일 수도 있으나, 이때 점 P는 선분 AB 위에 있지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

0683 점 A는 선분 PP′의 중점이므로 점 P′의 좌표를 (a, b, c)라 하면

$A\left(\frac{1+a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{-3+c}{2}\right)$

따라서 $\frac{1+a}{2}=2$, $\frac{b}{2}=1$, $\frac{-3+c}{2}=-5$이므로

$a=3$, $b=2$, $c=-7$

$\therefore P'(3, 2, -7)$ 답 ④

0684 선분 AB를 m : 1로 내분하는 점이 zx평면 위에 있으므로 내분점의 y좌표는 0이다.

즉 $\frac{m\cdot(-3)+1\cdot6}{m+1}=0$이므로 $-3m+6=0$

$\therefore m=2$ 답 2

0685 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점이 yz평면 위에 있으므로 내분점의 x좌표는 0이다.

즉 $\frac{2\cdot a+3\cdot2}{2+3}=0$이므로 $2a+6=0$ $\therefore a=-3$

또 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점이 x축 위에 있으므로 외분점의 y좌표, z좌표는 모두 0이다.

즉 $\frac{2\cdot b-1\cdot(-1)}{2-1}=0$, $\frac{2\cdot c-1\cdot4}{2-1}=0$이므로

$2b+1=0$, $2c-4=0$ $\therefore b=-\frac{1}{2}$, $c=2$

$\therefore a+b+c=-\frac{3}{2}$ 답 ②

0686 선분 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{a+4}{2}, \frac{7+1}{2}\right)$, 즉 $\left(-1, \frac{a+4}{2}, 4\right)$

선분 BD의 중점의 좌표는

$\left(\frac{b-1}{2}, \frac{-1+8}{2}, \frac{4+4}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{b-1}{2}, \frac{7}{2}, 4\right)$

평행사변형의 두 대각선의 중점은 일치하므로

$-1=\frac{b-1}{2}$, $\frac{a+4}{2}=\frac{7}{2}$ $\therefore a=3$, $b=-1$

$\therefore ab=-3$ 답 ②

0687 점 C의 좌표를 (a, b, c)라 하면 선분 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-3+a}{2}, \frac{9+b}{2}, \frac{1+c}{2}\right)$ ⇨ ❶

$\overline{AC}$의 중점은 두 대각선의 교점이므로

$\frac{-3+a}{2}=0$, $\frac{9+b}{2}=-1$, $\frac{1+c}{2}=3$

$\therefore a=3$, $b=-11$, $c=5$

따라서 $C(3, -11, 5)$이므로 ⇨ ❷

$\overline{BC}=\sqrt{(3+5)^2+(-11-5)^2+(5-5)^2}=8\sqrt{5}$ ⇨ ❸

답 $8\sqrt{5}$

채점 기준	비율
❶ $C(a, b, c)$라 하고 $\overline{AC}$의 중점의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ 점 C의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❸ $\overline{BC}$의 길이를 구할 수 있다.	30%

0688 선분 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{a-1}{2}, \frac{-4+7}{2}, \frac{-4+1}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{a-1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

선분 BD의 중점의 좌표는

$\left(\frac{b+2}{2}, \frac{0+3}{2}, \frac{1-4}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{b+2}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

이때 마름모의 두 대각선의 중점은 일치하므로

$\frac{a-1}{2}=\frac{b+2}{2}$ $\therefore b=a-3$ …… ㉠

또 마름모의 네 변의 길이는 모두 같으므로 $\overline{AD}=\overline{CD}$에서

$\overline{AD}^2=\overline{CD}^2$

$(2-a)^2+(3+4)^2+(-4+4)^2$

$=(2+1)^2+(3-7)^2+(-4-1)^2$

$(a-2)^2+49=50$, $(a-2)^2=1$

$a-2=\pm1$ $\therefore a=1$ ($\because a<2$)

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-2$

$\therefore a+b=-1$ 답 -1

0689 △ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{a+2+0}{3}, \frac{-4+b+6}{3}, \frac{2+4+c}{3}\right)$

$\therefore \left(\frac{a+2}{3}, \frac{b+2}{3}, \frac{c+6}{3}\right)$

따라서 $\frac{a+2}{3}=2$, $\frac{b+2}{3}=-2$, $\frac{c+6}{3}=0$이므로

$a=4$, $b=-8$, $c=-6$

$\therefore a-b+c=6$ 답 ⑤

0690 $P(1, 3, 6)$, $Q(-1, 3, -6)$, $R(1, -3, -6)$이므로 △PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{1-1+1}{3}, \frac{3+3-3}{3}, \frac{6-6-6}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{1}{3}, 1, -2\right)$

따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=1$, $c=-2$이므로

$a+b+c=-\frac{2}{3}$ 답 ①

0691 세 점 P, Q, R의 좌표는 각각

$P\left(\frac{6+4}{2}, \frac{4-2}{2}, \frac{-1-3}{2}\right)$, 즉 $P(5, 1, -2)$

$Q\left(\frac{4+2}{2}, \frac{-2-2}{2}, \frac{-3+5}{2}\right)$, 즉 $Q(3, -2, 1)$

$R\left(\frac{2+6}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{5-1}{2}\right)$, 즉 $R(4, 1, 2)$ ⇨ ❶

따라서 △PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{5+3+4}{3}, \frac{1-2+1}{3}, \frac{-2+1+2}{3}\right)$

$\therefore \left(4, 0, \frac{1}{3}\right)$ ⇨ ❷

답 $\left(4, 0, \frac{1}{3}\right)$

채점 기준	비율
❶ 세 점 P, Q, R의 좌표를 구할 수 있다.	60%
❷ △PQR의 무게중심의 좌표를 구할 수 있다.	40%

다른풀이 △PQR의 무게중심은 △ABC의 무게중심과 일치하므로 그 좌표는

$\left(\frac{6+4+2}{3}, \frac{4-2-2}{3}, \frac{-1-3+5}{3}\right)$, 즉 $\left(4, 0, \frac{1}{3}\right)$

0692 점 C의 좌표를 (a, b, c)라 하면 $\overline{CM}$을 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는
└△ABC의 무게중심과 일치한다.

$\left(\frac{2\cdot2+1\cdot a}{2+1}, \frac{2\cdot3+1\cdot b}{2+1}, \frac{2\cdot5+1\cdot c}{2+1}\right)$

$\therefore \left(\frac{4+a}{3}, \frac{6+b}{3}, \frac{10+c}{3}\right)$

이 점이 점 $(1, -4, 3)$과 일치하므로

$\frac{4+a}{3}=1, \frac{6+b}{3}=-4, \frac{10+c}{3}=3$

$\therefore a=-1, b=-18, c=-1$

$\therefore C(-1, -18, -1)$ 답 $C(-1, -18, -1)$

다른풀이 1 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3)이라 하면 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{b_1+b_2}{2}, \frac{c_1+c_2}{2}\right)$

따라서 $\frac{a_1+a_2}{2}=2, \frac{b_1+b_2}{2}=3, \frac{c_1+c_2}{2}=5$이므로

$a_1+a_2=4, b_1+b_2=6, c_1+c_2=10$

△ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}, \frac{b_1+b_2+b_3}{3}, \frac{c_1+c_2+c_3}{3}\right)$

$\therefore \left(\frac{4+a_3}{3}, \frac{6+b_3}{3}, \frac{10+c_3}{3}\right)$

따라서 $\frac{4+a_3}{3}=1, \frac{6+b_3}{3}=-4, \frac{10+c_3}{3}=3$이므로

$a_3=-1, b_3=-18, c_3=-1$

$\therefore C(-1, -18, -1)$

다른풀이 2 △ABC의 무게중심을 G라 하면 점 C는 $\overline{MG}$를 3 : 2로 외분하는 점이므로

$C\left(\frac{3\cdot1-2\cdot2}{3-2}, \frac{3\cdot(-4)-2\cdot3}{3-2}, \frac{3\cdot3-2\cdot5}{3-2}\right)$

$\therefore C(-1, -18, -1)$

0693 구하는 구의 중심의 좌표가 $(1, 3, -2)$이므로 반지름의 길이는

$\sqrt{(-2-1)^2+(4-3)^2+(3+2)^2}=\sqrt{35}$

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=35$

답 $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=35$

다른풀이 구하는 구의 방정식을 $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=r^2$이라 하면 이 구가 점 $(-2, 4, 3)$을 지나므로

$(-2-1)^2+(4-3)^2+(3+2)^2=r^2 \quad \therefore r^2=35$

$\therefore (x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=35$

0694 $x^2+y^2+z^2+2x-4y+4z-16=0$에서

$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=25$

따라서 구의 중심의 좌표는 $(-1, 2, -2)$이고 반지름의 길이는 5이므로

$a=-1, b=2, c=-2, r=5$

$\therefore a+b+c+r=4$ 답 ④

0695 $x^2+y^2+z^2+6x-2y-4z+5=0$에서

$(x+3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$

따라서 구의 중심의 좌표는 $(-3, 1, 2)$이므로 구하는 거리는

$\sqrt{(-3)^2+1^2+2^2}=\sqrt{14}$ 답 $\sqrt{14}$

0696 구하는 구의 중심은 $\overline{AB}$의 중점이므로 그 좌표는

$\left(\frac{2-6}{2}, \frac{7+5}{2}, \frac{1-3}{2}\right)$, 즉 $(-2, 6, -1)$

또 $\overline{AB}$가 구의 지름이므로 구의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(-6-2)^2+(5-7)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{21}$

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x+2)^2+(y-6)^2+(z+1)^2=21$

답 $(x+2)^2+(y-6)^2+(z+1)^2=21$

0697 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$P\left(\frac{2\cdot(-2)+1\cdot1}{2+1}, \frac{2\cdot6+1\cdot3}{2+1}, \frac{2\cdot3+1\cdot(-3)}{2+1}\right)$

$\therefore P(-1, 5, 1)$

선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점 Q의 좌표는

$Q\left(\frac{2\cdot(-2)-1\cdot1}{2-1}, \frac{2\cdot6-1\cdot3}{2-1}, \frac{2\cdot3-1\cdot(-3)}{2-1}\right)$

$\therefore Q(-5, 9, 9)$ ⇨ ❶

구하는 구의 중심은 $\overline{PQ}$의 중점이므로 그 좌표는

$\left(\frac{-1-5}{2}, \frac{5+9}{2}, \frac{1+9}{2}\right)$, 즉 $(-3, 7, 5)$ ⇨ ❷

또 $\overline{PQ}$가 구의 지름이므로 구의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{1}{2}\sqrt{(-5+1)^2+(9-5)^2+(9-1)^2}=2\sqrt{6}$ ⇨ ❸

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x+3)^2+(y-7)^2+(z-5)^2=24$ ⇨ ❹

답 $(x+3)^2+(y-7)^2+(z-5)^2=24$

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ 구의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	20%
❸ 구의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	30%
❹ 구의 방정식을 구할 수 있다.	20%

0698 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$에 주어진 네 점의 좌표를 각각 대입하면

$D=0,\ 1+A+D=0,\ 4+4+2A+2C+D=0,$
$16+9-4B+3C+D=0$

위의 네 식을 연립하여 풀면

$A=-1,\ B=4,\ C=-3,\ D=0$
$\therefore\ A+B+C+D=0$ 답 ③

0699 구의 방정식을 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$이라 하고 주어진 네 점의 좌표를 각각 대입하면

$D=0,\ 4-2A+D=0,\ 16+4B+D=0,$
$1+1-B+C+D=0$

위의 네 식을 연립하여 풀면

$A=2,\ B=-4,\ C=-6,\ D=0$

따라서 구의 방정식은

$x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z=0$
$\therefore\ (x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$

즉 구하는 구의 반지름의 길이는 $\sqrt{14}$이다. 답 ④

0700 구의 방정식을 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$이라 하고 주어진 네 점의 좌표를 각각 대입하면

$D=0,\ 49+7C+D=0,\ 4+1-2A+B+D=0,$
$1+4-B+2C+D=0$

위의 네 식을 연립하여 풀면

$A=-2,\ B=-9,\ C=-7,\ D=0$

따라서 구의 방정식은

$x^2+y^2+z^2-2x-9y-7z=0$

이때 점 $(a,\ 2,\ 5)$가 이 구 위의 점이므로

$a^2+4+25-2a-18-35=0$
$a^2-2a-24=0, \qquad (a+4)(a-6)=0$
$\therefore\ a=-4$ 또는 $a=6$ 답 $-4,\ 6$

0701 $x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z-k=0$에서

$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=k+14$

이 구가 xy평면에 접하므로

$k+14=(-3)^2 \qquad \therefore\ k=-5$ 답 ①

0702 구가 y축에 접하므로 구의 중심에서 y축에 이르는 거리는 반지름의 길이와 같다.

이때 구의 중심에서 y축에 내린 수선의 발의 좌표는 $(0,\ -6,\ 0)$이므로 구의 반지름의 길이는 $\sqrt{4^2+3^2}=5$

따라서 구하는 구의 부피는 $\frac{4}{3}\pi\cdot5^3=\frac{500}{3}\pi$ 답 $\frac{500}{3}\pi$

0703 구가 x축, y축, z축에 동시에 접하면 구의 중심에서 x축, y축, z축에 이르는 거리가 모두 같으므로 구의 중심의 좌표를 $(a,\ a,\ a)\ (a>0)$로 놓을 수 있다.

이때 구의 중심에서 x축에 내린 수선의 발의 좌표는 $(a,\ 0,\ 0)$이므로 구의 반지름의 길이는

$\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a\ (\because\ a>0)$

즉 $\sqrt{2}a=4$이므로 $\qquad a=2\sqrt{2}$

따라서 구의 중심의 좌표는 $(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$이므로 원점과 구의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{6}$ 답 ④

0704 구가 xy평면, yz평면, zx평면에 동시에 접하면 구의 중심에서 xy평면, yz평면, zx평면에 이르는 거리가 모두 반지름의 길이와 같고, 이 구가 점 $(5,\ 1,\ -2)$를 지나므로 구의 반지름의 길이를 r라 하면 구의 방정식은

$(x-r)^2+(y-r)^2+(z+r)^2=r^2$ ⇨ ❶

점 $(5,\ 1,\ -2)$가 이 구 위에 있으므로

$(5-r)^2+(1-r)^2+(-2+r)^2=r^2$
$r^2-8r+15=0, \qquad (r-3)(r-5)=0$
$\therefore\ r=3$ 또는 $r=5$ ⇨ ❷

따라서 두 구의 반지름의 길이의 곱은 15이다. ⇨ ❸

답 15

채점 기준	비율
❶ 구의 반지름의 길이를 r라 하고 구의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ r의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 두 구의 반지름의 길이의 곱을 구할 수 있다.	20%

0705 점 A의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 하면 점 A는 구 $x^2+y^2+z^2=36$ 위에 있으므로

$a^2+b^2+c^2=36$ …… ㉠

선분 AB의 중점의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면

$x=\frac{a+8}{2},\ y=\frac{b-2}{2},\ z=\frac{c+4}{2}$
$\therefore\ a=2x-8,\ b=2y+2,\ c=2z-4$

이것을 ㉠에 대입하면

$(2x-8)^2+(2y+2)^2+(2z-4)^2=36$
$\therefore\ (x-4)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$

따라서 $\overline{AB}$의 중점의 자취는 반지름의 길이가 3인 구이므로 그 부피는 $\frac{4}{3}\pi\cdot3^3=36\pi$ 답 36π

0706 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=16$에서

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2+(x-3)^2+y^2+(z-1)^2=16$
$2x^2+2y^2+2z^2-10x+2y=0$
$\therefore\ x^2+y^2+z^2-5x+y=0$ 답 ②

0707 주어진 조건을 만족시키는 점을 $P(x,\ y,\ z)$라 하면 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$에서

$\overline{AP}=2\overline{BP}$, 즉 $\overline{AP}^2=4\overline{BP}^2$
$x^2+(y+3)^2+z^2=4\{x^2+y^2+(z-9)^2\}$
$x^2+y^2+z^2-2y-24z+105=0$
$\therefore\ x^2+(y-1)^2+(z-12)^2=40$

따라서 점 P의 자취는 반지름의 길이가 $2\sqrt{10}$인 구이므로 그 겉넓이는 $4\pi\cdot(2\sqrt{10})^2=160\pi$ 답 ④

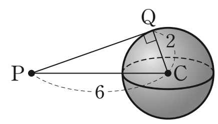
0708 $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z+10=0$에서

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$

주어진 구의 중심을 C라 하면 $C(1,\ 2,\ -3)$이므로

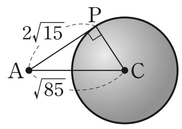
$\overline{PC}=\sqrt{(1-3)^2+(2+2)^2+(-3-1)^2}=6$

점 P에서 구에 그은 접선의 접점을 Q라 하면 △PCQ는 직각삼각형이므로 구하는 접선의 길이는



$\overline{PQ}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$ 답 ③

0709 점 A에서 구에 그은 접선의 접점을 P라 하면



$\overline{PA}=2\sqrt{15}$

$\overline{CA}=\sqrt{(4+2)^2+(-1-6)^2+(1-1)^2}$

$=\sqrt{85}$

△PAC는 직각삼각형이므로 구하는 구의 반지름의 길이는

$\overline{CP}=\sqrt{(\sqrt{85})^2-(2\sqrt{15})^2}=5$ 답 ①

0710 주어진 구의 중심의 좌표가 $(0,\ 3,\ -4)$이므로 원점과 구의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

주어진 구의 반지름의 길이는 3이므로 원점과 점 P 사이의 거리의 최솟값은

$5-3=2$ 답 2

0711 $x^2+y^2+z^2+2x-4y-4z+6=0$에서

$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=3$

주어진 구의 중심을 C라 하면 $C(-1,\ 2,\ 2)$이므로

$\overline{AC}=\sqrt{(-1-2)^2+(2-1)^2+(2-2)^2}=\sqrt{10}$

주어진 구의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$이므로 $\overline{AP}$의 길이의 최댓값은 $\sqrt{10}+\sqrt{3}$, 최솟값은 $\sqrt{10}-\sqrt{3}$이다.

따라서 구하는 곱은

$(\sqrt{10}+\sqrt{3})(\sqrt{10}-\sqrt{3})=7$ 답 ②

0712 $x^2+y^2+z^2+4x+6y-12z+33=0$에서

$(x+2)^2+(y+3)^2+(z-6)^2=16$

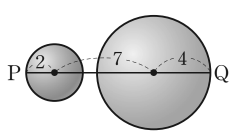
주어진 두 구의 중심의 좌표가 각각

$(0,\ 0,\ 0)$, $(-2,\ -3,\ 6)$

이므로 두 구의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+6^2}=7$

두 구의 반지름의 길이는 각각 2, 4이고, 오른쪽 그림과 같을 때 $\overline{PQ}$의 길이가 최대이므로 구하는 최댓값은



$2+7+4=13$ 답 13

0713 zx평면 위의 점은 y좌표가 0이므로 주어진 구의 방정식에 $y=0$을 대입하면

$(x-4)^2+(z+2)^2=16$

따라서 주어진 구와 zx평면이 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가 4인 원이므로 그 넓이는

$\pi\cdot4^2=16\pi$ 답 16π

0714 구의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=25$

yz평면 위의 점은 x좌표가 0이므로 위의 식에 $x=0$을 대입하면

$(y-b)^2+(z-c)^2=25-a^2$

이 식이 $(y-1)^2+(z-1)^2=9$와 같으므로

$b=1,\ c=1,\ 25-a^2=9$

$25-a^2=9$에서 $a^2=16$ $\therefore a=4\ (\because a>0)$

$\therefore a+b+c=6$ 답 ②

0715 구의 중심의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$, 반지름의 길이를 r라 하면 구의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ …… ㉠

xy평면 위의 점은 z좌표가 0이므로 $z=0$을 ㉠에 대입하면

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2-c^2$

이 식이 $x^2+y^2-6y=0$, 즉 $x^2+(y-3)^2=9$와 같으므로

$a=0,\ b=3,\ r^2-c^2=9$ …… ㉡

또 yz평면 위의 점은 x좌표가 0이므로 $x=0$을 ㉠에 대입하면

$(y-b)^2+(z-c)^2=r^2-a^2$

이 식이 $y^2+z^2-6y+4z=0$, 즉 $(y-3)^2+(z+2)^2=13$과 같으므로

$b=3,\ c=-2,\ r^2-a^2=13$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $a=0,\ b=3,\ c=-2,\ r=\sqrt{13}$

따라서 구하는 구의 반지름의 길이는 $\sqrt{13}$이다. 답 $\sqrt{13}$

0716 x축 위의 점은 y좌표와 z좌표가 모두 0이므로 주어진 구의 방정식에 $y=0$, $z=0$을 대입하면

$(x-2)^2=25$, $x-2=\pm5$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=7$

따라서 주어진 구와 x축의 두 교점 A, B의 좌표는 $(-3,\ 0,\ 0)$, $(7,\ 0,\ 0)$이므로

$\overline{AB}=|7-(-3)|=10$ 답 ③

0717 y축 위의 점은 x좌표와 z좌표가 모두 0이므로 주어진 구의 방정식에 $x=0$, $z=0$을 대입하면

$y^2-8y+k=0$ …… ㉠

주어진 구와 y축이 만나는 두 점 사이의 거리가 4이므로 y에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근의 차가 4이다.

따라서 ㉠의 두 근을 α, $\alpha+4$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+4)=8,\ \alpha(\alpha+4)=k$

$\therefore \alpha=2,\ k=12$ 답 ④

0718 구의 중심은 $\overline{AB}$의 중점이므로 그 좌표는

$\left(\frac{0-2}{2},\ \frac{-3+1}{2},\ \frac{5+1}{2}\right)$, 즉 $(-1,\ -1,\ 3)$

또 $\overline{AB}$가 구의 지름이므로 구의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{(-2)^2+(1+3)^2+(1-5)^2}=3$

따라서 구의 방정식은

$(x+1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9$

z축 위의 점은 x좌표와 y좌표가 모두 0이므로 위의 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$(z-3)^2=7, \quad z-3=\pm\sqrt{7}$

$\therefore z=3\pm\sqrt{7}$

즉 구와 z축의 두 교점의 좌표는 $(0, 0, 3-\sqrt{7})$, $(0, 0, 3+\sqrt{7})$이므로 구하는 길이는

$|3+\sqrt{7}-(3-\sqrt{7})|=2\sqrt{7}$ 답 $2\sqrt{7}$

0719 $x^2+y^2+z^2+8x+4y-4z+k=0$에서

$(x+4)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=24-k$

즉 두 구의 중심의 좌표가 각각 $(0, 0, 0)$, $(-4, -2, 2)$이므로 두 구의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+2^2}=2\sqrt{6}$

또 두 구의 반지름의 길이가 각각 $\sqrt{6}$, $\sqrt{24-k}$이므로 두 구가 외접하려면

$\sqrt{6}+\sqrt{24-k}=2\sqrt{6}, \quad \sqrt{24-k}=\sqrt{6}$

$24-k=6 \quad \therefore k=18$ 답 ④

0720 $x^2+y^2+z^2-4z=0$에서

$x^2+y^2+(z-2)^2=4$

두 구의 중심의 좌표가 각각 $(0, 0, 2)$, $(-2, 4, 6)$이므로 두 구의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(-2)^2+4^2+(6-2)^2}=6$

중심의 좌표가 $(-2, 4, 6)$인 구의 반지름의 길이를 r라 하면 두 구가 내접하므로

$|r-2|=6, \quad r-2=\pm6$

$\therefore r=8 \ (\because r>0)$

따라서 구하는 구의 반지름의 길이는 8이다. 답 ⑤

0721 두 구의 중심의 좌표는 각각 $(-1, 0, 2)$, $(1, k, 0)$이므로 두 구의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(1+1)^2+k^2+(-2)^2}=\sqrt{k^2+8}$ ⇨ ❶

두 구의 반지름의 길이는 각각 3, 4이므로 두 구가 만나려면

$4-3\le\sqrt{k^2+8}\le4+3$ ⇨ ❷

$1\le\sqrt{k^2+8}\le7, \quad 1\le k^2+8\le49$

$0\le k^2\le41 \ (\because k^2\ge0)$

$\therefore -\sqrt{41}\le k\le\sqrt{41}$ ⇨ ❸

답 $-\sqrt{41}\le k\le\sqrt{41}$

채점 기준	비율
❶ 두 구의 중심 사이의 거리를 구할 수 있다.	30%
❷ 두 구가 만나도록 하는 k의 조건을 구할 수 있다.	40%
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%

0722 전략 점 (a, b, c)에서 y축, zx평면에 내린 수선의 발의 좌표는 각각 $(0, b, 0)$, $(a, 0, c)$임을 이용한다.

풀이 점 P의 좌표를 (a, b, c)라 하면 두 점 A, P에서 y축에 내린 수선의 발의 좌표는 각각 $(0, 5, 0)$, $(0, b, 0)$이므로

$b=5$

또 두 점 B, P에서 zx평면에 내린 수선의 발의 좌표는 각각 $(2, 0, 1)$, $(a, 0, c)$이므로

$a=2, c=1$

$\therefore P(2, 5, 1)$ 답 $P(2, 5, 1)$

0723 전략 y축 위의 점 P의 좌표를 $(0, a, 0)$으로 놓고 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$임을 이용한다.

풀이 점 P의 좌표를 $(0, a, 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$2^2+a^2+(-3)^2=(-2)^2+(a+1)^2+(-4)^2$

$a^2+13=a^2+2a+21, \quad 2a=-8$

$\therefore a=-4$

따라서 $P(0, -4, 0)$이므로

$\overline{AP}=\sqrt{2^2+(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{29}$ 답 ②

0724 전략 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$에 대하여 $\overline{AB}$를 $m:n$ $(m>0, n>0, m\ne n)$으로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$임을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}$를 $2:3$으로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\cdot(-1)-3\cdot a}{2-3}, \frac{2\cdot(-4)-3\cdot(-2)}{2-3}, \frac{2\cdot2-3\cdot0}{2-3}\right)$

$\therefore (3a+2, 2, -4)$

따라서 $3a+2=5$, $2=b$, $-4=c$이므로

$a=1, b=2, c=-4$

$\therefore a+b+c=-1$ 답 -1

0725 전략 세 점 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$임을 이용한다.

풀이 점 C의 좌표를 (a, b, c)라 하면 $\triangle ABC$의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{0+4+a}{3}, \frac{-2+0+b}{3}, \frac{4-1+c}{3}\right)$

$\therefore \left(\frac{4+a}{3}, \frac{-2+b}{3}, \frac{3+c}{3}\right)$

따라서 $\frac{4+a}{3}=2$, $\frac{-2+b}{3}=-1$, $\frac{3+c}{3}=2$이므로

$a=2, b=-1, c=3$

$\therefore C(2, -1, 3)$ 답 $C(2, -1, 3)$

0726 전략 구의 부피를 이등분하는 평면은 구의 중심을 지남을 이용한다.

풀이 주어진 구의 중심의 좌표는 $(1, -2, -k)$이고, xy평면이 구의 부피를 이등분하므로 xy평면은 구의 중심을 지난다.

즉 구의 중심의 z좌표는 0이므로 $\quad k=0$ 답 0

0727 전략 주어진 구의 중심은 $\overline{AB}$의 중점이고 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AB}$의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 구의 중심은 $\overline{AB}$의 중점이므로 그 좌표는

$\left(\frac{2-2}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$, 즉 $(0, 1, 2)$

또 $\overline{AB}$가 구의 지름이므로 구의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(-2-2)^2+(3+1)^2+(1-3)^2}=3$

따라서 구의 방정식은

$x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$

$\therefore x^2+y^2+z^2-2y-4z-4=0$

즉 $a=-2$, $b=-4$, $c=-4$이므로

$a+b+c=-10$

답 ①

0728 전략 구와 yz평면의 교선의 방정식은 구의 방정식에 $x=0$을 대입하여 구한다.

풀이 yz평면 위의 점은 x좌표가 0이므로 주어진 구의 방정식에 $x=0$을 대입하면

$y^2+z^2-6y+10z+25=0$

$\therefore (y-3)^2+(z+5)^2=9$ ⇨ ❶

따라서 주어진 구와 yz평면이 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가 3인 원이므로 그 둘레의 길이는

$2\pi \cdot 3=6\pi$ ⇨ ❷

답 6π

채점 기준	비율
❶ 구와 yz평면이 만나서 생기는 도형의 방정식을 구할 수 있다.	50%
❷ 도형의 둘레의 길이를 구할 수 있다.	50%

0729 전략 점 (a, b, c)와 y축, zx평면에 대하여 대칭인 점의 좌표는 각각 $(-a, b, -c)$, $(a, -b, c)$임을 이용한다.

풀이 $\mathrm{Q}(-3, -1, -a)$, $\mathrm{R}(3, 1, a)$이므로 $\overline{\mathrm{QR}}=2\sqrt{14}$에서

$\sqrt{(3+3)^2+(1+1)^2+(a+a)^2}=2\sqrt{14}$

$4a^2+40=56, \quad a^2=4$

$\therefore a=2 \ (\because a>0)$

답 ④

0730 전략 점 (a, b, c)에서 xy평면, yz평면, zx평면에 내린 수선의 발의 좌표는 각각 $(a, b, 0)$, $(0, b, c)$, $(a, 0, c)$임을 이용한다.

풀이 점 P의 좌표를 (a, b, c)라 하면

$\mathrm{A}(a, b, 0)$, $\mathrm{B}(0, b, c)$, $\mathrm{C}(a, 0, c)$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CA}}=2\sqrt{3}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{CA}}^2=12$이므로

$a^2+c^2=a^2+b^2=b^2+c^2=12$

$\therefore a^2=b^2=c^2=6$

$\therefore \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{CP}}=|c|+|a|+|b|=3\sqrt{6}$

답 ③

0731 전략 △ABC의 세 변의 길이를 구하여 △ABC가 어떤 삼각형인지 먼저 파악한다.

풀이 $\overline{\mathrm{AB}}^2=(-4+2)^2+(-1+1)^2+(-1-1)^2=8$

$\overline{\mathrm{BC}}^2=(-3+4)^2+1^2+(-2+1)^2=3$

$\overline{\mathrm{CA}}^2=(-2+3)^2+(-1)^2+(1+2)^2=11$

$\therefore \overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2$

따라서 △ABC는 ∠B=90°인 직각삼각형이므로

$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$

답 ①

0732 전략 두 점 A, B의 zx평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 하고 직선 AB와 zx평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\overline{\mathrm{A'B'}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos\theta$임을 이용한다.

풀이 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3-7)^2+(-7+2)^2+(-3)^2}=5\sqrt{2}$

두 점 A, B의 zx평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 하면

$\mathrm{A'}(7, 0, 3)$, $\mathrm{B'}(3, 0, 0)$

따라서 선분 AB의 zx평면 위로의 정사영의 길이는

$\overline{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{(3-7)^2+(-3)^2}=5$

구하는 각의 크기를 θ라 하면 $\overline{\mathrm{A'B'}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos\theta$이므로

$5=5\sqrt{2}\cos\theta \qquad \therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \theta=45° \ (\because 0°<\theta<90°)$

답 45°

0733 전략 xy평면 위의 점은 z좌표가 0이고 zx평면 위의 점은 y좌표가 0임을 이용한다.

풀이 선분 AB를 $1:m$으로 내분하는 점이 xy평면 위에 있으므로 내분점의 z좌표는 0이다.

즉 $\frac{1\cdot 2+m\cdot(-1)}{1+m}=0$이므로 $\quad 2-m=0 \quad \therefore m=2$

선분 AB를 $1:n$으로 외분하는 점이 zx평면 위에 있으므로 외분점의 y좌표는 0이다.

즉 $\frac{1\cdot 6-n\cdot 2}{1-n}=0$이므로 $\quad 6-2n=0 \quad \therefore n=3$

$\therefore m+n=5$

답 5

0734 전략 구가 yz평면에 접하면 |(중심의 x좌표)|=(반지름의 길이)임을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2+z^2+ax-8y+10z+b=0$에서

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+(y-4)^2+(z+5)^2=\frac{a^2}{4}-b+41$

이 구가 yz평면에 접하므로

$\left|\frac{a}{2}\right|=\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+41}, \qquad \frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{4}-b+41$

$\therefore b=41$

또 점 $(3, 4, -2)$가 주어진 구 위의 점이므로

$9+16+4+3a-32-20+41=0$

$3a=-18 \qquad \therefore a=-6$

$\therefore a+b=35$

답 ⑤

0735 전략 점 P의 좌표를 (x, y, z)라 하고 주어진 조건을 만족시키도록 식을 세운다.

풀이 점 P의 좌표를 (x, y, z)라 하면 △ABP는 ∠APB=90°인 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2$

$x^2+(y-2)^2+(z-1)^2+(x-4)^2+(y-6)^2+(z-5)^2$

$=4^2+(6-2)^2+(5-1)^2$

$\therefore x^2+y^2+z^2-4x-8y-6z+17=0$

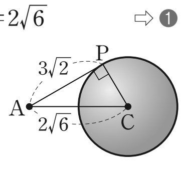
답 $x^2+y^2+z^2-4x-8y-6z+17=0$

0736 전략 점 A에서 구에 그은 접선은 접점을 지나는 구의 반지름에 수직임을 이용한다.

풀이 주어진 구의 중심을 C라 하면 $\mathrm{C}(-2, 1, -1)$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(-2+4)^2+(1-3)^2+(-1-3)^2}=2\sqrt{6}$ ⇨ ❶

점 A에서 구에 그은 접선의 접점을 P라 하면 △PAC는 직각삼각형이므로 구의 반지름의 길이는



$\overline{\mathrm{PC}}=\sqrt{(2\sqrt{6})^2-(3\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$ ⇨ ❷

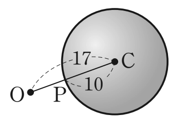
$\therefore a=6$ ⇨ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $\overline{AC}$의 길이를 구할 수 있다.	40%
❷ $\overline{PC}$의 길이를 구할 수 있다.	40%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20%

0737 전략 $a^2+b^2+c^2$의 값은 원점과 점 $P(a,\ b,\ c)$ 사이의 거리와 같음을 이용한다.

풀이 주어진 구의 중심을 C라 하면



$C(8,\ 9,\ 12)$이므로 원점 O에 대하여

$\overline{OC}=\sqrt{8^2+9^2+12^2}=17$

$\overline{OP}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

주어진 구의 반지름의 길이가 10이므로 $\overline{OP}$의 길이, 즉 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$의 최솟값은

$17-10=7$

따라서 $a^2+b^2+c^2$의 최솟값은 $7^2=49$ 답 ④

0738 전략 구와 zx평면의 교선의 방정식은 구의 방정식에 $y=0$을 대입하여 구한다.

풀이 $x^2+z^2+4x-10z-20=0$에서

$(x+2)^2+(z-5)^2=49$ ······ ㉠

구의 중심의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 하면 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$이므로 구의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=50$

zx평면 위의 점은 y좌표가 0이므로 위의 식에 $y=0$을 대입하면

$(x-a)^2+(z-c)^2=50-b^2$

이 식이 ㉠과 같으므로

$a=-2,\ c=5,\ 50-b^2=49$

$50-b^2=49$에서 $b^2=1$ $\therefore b=\pm1$

따라서 두 구의 중심의 좌표는 $(-2,\ -1,\ 5)$, $(-2,\ 1,\ 5)$이므로 구하는 거리는

$|1-(-1)|=2$ 답 2

0739 전략 두 구의 중심 사이의 거리와 반지름의 길이를 이용하여 위치 관계를 파악한다.

풀이 두 구의 중심의 좌표는 각각 $(2,\ 0,\ 3)$, $(1,\ -2,\ 1)$이므로 두 구의 중심 사이의 거리를 d라 하면

$d=\sqrt{(1-2)^2+(-2)^2+(1-3)^2}=3$

두 구의 반지름의 길이를 각각 $r,\ r'$이라 하면

$r=\sqrt{a},\ r'=1$

ㄱ. $a=9$이면 $r=3$이므로

$3-1<3<3+1$, 즉 $r-r'<d<r+r'$

따라서 두 구는 만나서 원이 생긴다.

ㄴ. $a=4$이면 $r=2$이므로

$2+1=3$, 즉 $r+r'=d$

따라서 두 구는 외접한다.

ㄷ. $a>16$이면 $r>4$이므로 $r-r'>d$

따라서 두 구는 만나지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

참고 ㄱ. 두 구가 내접하려면 $|r-r'|=d$이어야 하므로

$|\sqrt{a}-1|=3,\quad \sqrt{a}=4 \quad \therefore a=16$

0740 전략 평면 α를 xy평면으로 생각한다.

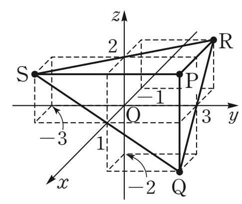
풀이 평면 α를 xy평면으로 생각하면 세 구의 중심 A, B, C의 z좌표는 각각 5, 10, 15이므로 △ABC의 무게중심의 z좌표는

$\dfrac{5+10+15}{3}=10$

따라서 △ABC의 무게중심과 평면 α 사이의 거리는 10이다. 답 10

0741 전략 네 점 P, Q, R, S를 좌표공간에 나타낸 후 사면체의 모양을 파악한다.

풀이 $Q(1,\ 3,\ -2)$, $R(-1,\ 3,\ 2)$, $S(1,\ -3,\ 2)$이므로 네 점 P, Q, R, S를 좌표공간에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때

$\overline{PQ}=2-(-2)=4$,

$\overline{PR}=1-(-1)=2$,

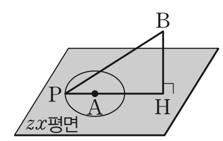
$\overline{PS}=3-(-3)=6$

이므로 사면체 P-QRS의 부피는

$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{PR}\cdot\overline{PS}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot2\cdot6=8$ 답 8

0742 전략 점 B에서 zx평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 원 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{PH}$의 길이가 최대일 때 $\overline{BP}$의 길이가 최대임을 이용한다.

풀이 점 B에서 zx평면에 내린 수선의 발을 H, 원 위의 한 점을 P라 하면



$\overline{BP}=\sqrt{\overline{BH}^2+\overline{PH}^2}$

이때 $H(3,\ 0,\ 1)$이므로 $\overline{BH}=3$

또 $\overline{PH}$의 길이가 최대일 때는 $\overline{PH}$가 원의 중심 A를 지날 때이고 $\overline{AH}=\sqrt{(3+1)^2+(1+2)^2}=5$, $\overline{PA}=1$이므로 $\overline{PH}$의 길이의 최댓값은 $5+1=6$

따라서 구하는 최댓값은

$\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$ 답 ①

0743 전략 두 점 A, B와 각각 xy평면, zx평면에 대하여 대칭인 점을 이용하여 구하는 최솟값과 길이가 같은 선분을 찾는다.

풀이 두 점 A, B의 z좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 좌표공간에서 xy평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A와 xy평면에 대하여 대칭인 점을 A′이라 하면

$A'(2,\ 1,\ -3)$

또 두 점 A, B의 y좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 좌표공간에서 zx평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 B와 zx평면에 대하여 대칭인 점을 B′이라 하면

$B'(4,\ -3,\ 1)$

이때 $\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{QB}=\overline{QB'}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}\ge\overline{A'B'}$

$=\sqrt{(4-2)^2+(-3-1)^2+(1+3)^2}$

$=6$ 답 6

0744 전략 구의 반지름의 길이를 r, 구의 중심과 yz평면 사이의 거리를 d라 하면 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $\sqrt{r^2-d^2}$임을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2+z^2+6x-6y-2z-6=0$에서

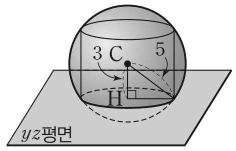
$(x+3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=25$

이므로 구의 중심을 C라 하면

$C(-3,\ 3,\ 1)$

점 C에서 yz평면에 내린 수선의 발을 H 라 하면 $H(0,\ 3,\ 1)$이므로

$\overline{CH}=3$

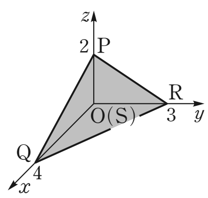


따라서 원기둥의 높이가 6이고 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $\sqrt{5^2-3^2}=4$이므로 원기둥의 부피는

$\pi\cdot4^2\cdot6=96\pi$ 답 ③

0745 전략 주어진 도형을 좌표공간에 놓은 후 구의 방정식을 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{PS}$, $\overline{QS}$, $\overline{RS}$가 각각 z축, x축, y축의 양의 방향에 오도록 주어진 도형을 좌표공간에 놓으면



$P(0,\ 0,\ 2)$, $Q(4,\ 0,\ 0)$,

$R(0,\ 3,\ 0)$, $S(0,\ 0,\ 0)$ ⇨ ❶

사면체 P−QRS에 외접하는 구의 방정식을 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$이라 하고 네 점 P, Q, R, S의 좌표를 각각 대입하면

$4+2C+D=0,\ 16+4A+D=0,\ 9+3B+D=0,\ D=0$

$\therefore\ A=-4,\ B=-3,\ C=-2,\ D=0$

즉 구의 방정식은

$x^2+y^2+z^2-4x-3y-2z=0$

$\therefore\ (x-2)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2+(z-1)^2=\dfrac{29}{4}$ ⇨ ❷

따라서 구의 반지름의 길이는 $\dfrac{\sqrt{29}}{2}$이므로 구의 겉넓이는

$4\pi\cdot\left(\dfrac{\sqrt{29}}{2}\right)^2=29\pi$ ⇨ ❸

답 29π

채점 기준	비율
❶ 주어진 도형을 좌표공간에 놓고 네 점 P, Q, R, S의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ 구의 방정식을 구할 수 있다.	50%
❸ 구의 겉넓이를 구할 수 있다.	20%

Ⅳ. 공간벡터

07 공간벡터

0746 $\overrightarrow{HD}=-\overrightarrow{AE}=-\vec{c}$ 답 $-\vec{c}$

0747 $\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\vec{a}-\vec{b}$ 답 $\vec{a}-\vec{b}$

0748 $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\vec{c}-\vec{b}$ 답 $\vec{c}-\vec{b}$

0749 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

답 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

0750 답 $\vec{e_1}+2\vec{e_2}-4\vec{e_3}$

0751 답 $3\vec{e_1}-2\vec{e_3}$

0752 $m-4=2,\ 10=n+6$이므로

$m=6,\ n=4$ 답 $m=6,\ n=4$

0753 $2m-8=-4,\ -2=3n+1$이므로

$m=2,\ n=-1$ 답 $m=2,\ n=-1$

0754 $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3$ 답 3

0755 $|\vec{b}|=\sqrt{3^2+(-2)^2+(\sqrt{5})^2}=3\sqrt{2}$ 답 $3\sqrt{2}$

0756 $2\vec{a}+4\vec{b}=2(2,\ 1,\ 0)+4(-1,\ 3,\ 5)$

$=(0,\ 14,\ 20)$ 답 $(0,\ 14,\ 20)$

0757 $-\vec{a}+3\vec{c}=-(2,\ 1,\ 0)+3(4,\ 0,\ -2)$

$=(10,\ -1,\ -6)$ 답 $(10,\ -1,\ -6)$

0758 $3(\vec{a}-\vec{b})+\vec{c}=3\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$

$=3(2,\ 1,\ 0)-3(-1,\ 3,\ 5)+(4,\ 0,\ -2)$

$=(13,\ -6,\ -17)$ 답 $(13,\ -6,\ -17)$

0759 $\vec{a}-2\vec{b}+3(\vec{a}-\vec{c})$

$=4\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{c}$

$=4(2,\ 1,\ 0)-2(-1,\ 3,\ 5)-3(4,\ 0,\ -2)$

$=(-2,\ -2,\ -4)$ 답 $(-2,\ -2,\ -4)$

0760 $\overrightarrow{AB}=(2,\ -2,\ 3)$이므로

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{17}$

답 $\overrightarrow{AB}=(2,\ -2,\ 3)$, $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{17}$

0761 $\overrightarrow{AB}=(-4,\ 1,\ -1)$이므로

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-4)^2+1^2+(-1)^2}=3\sqrt{2}$

답 $\overrightarrow{AB}=(-4,\ 1,\ -1)$, $|\overrightarrow{AB}|=3\sqrt{2}$

0762 답 $\sqrt{2}$, 60, 60, 1

0763 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AE}$이므로
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AE}|\cos 90^\circ=2\times2\times0=0$ 답 0

0764 $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{EF}$이므로
$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{EF}=|\overrightarrow{DC}||\overrightarrow{EF}|\cos 0^\circ=2\times2\times1=4$ 답 4

0765 $\overrightarrow{AE}\,/\!/\,\overrightarrow{GC}$이고 두 벡터의 방향이 서로 반대이므로
$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{GC}=|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{GC}|\cos 180^\circ$
$=2\times2\times(-1)=-4$ 답 -4

0766 □ABCD가 정사각형이므로 $\angle CAB=45^\circ$
$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 45^\circ$
$=2\times2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=4$ 답 4

0767 답 $2,\ 3,\ -1,\ -4$

0768 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times3+2\times(-1)+4\times0=1$ 답 1

0769 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\times3+5\times5+(-1)\times6=13$ 답 13

0770 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-7\times1+1\times(-3)+2\times5=0$ 답 0

0771 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-6\times0+2\times1+3\times(-4)=-10$ 답 -10

0772 답 $\sqrt{6},\ \sqrt{6},\ 3,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{\pi}{3}$

0773 $\cos\theta=\dfrac{0\times(-2)+1\times1+2\times0}{\sqrt{0^2+1^2+2^2}\sqrt{(-2)^2+1^2+0^2}}$
$=\dfrac{1}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\dfrac{1}{5}$ 답 $\dfrac{1}{5}$

0774 $\cos\theta=\dfrac{2\times1+(-1)\times(-2)+7\times(-1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+7^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}}$
$=\dfrac{-3}{\sqrt{54}\sqrt{6}}=-\dfrac{1}{6}$ 답 $-\dfrac{1}{6}$

0775 $\cos\theta=\dfrac{5\times(-1)+(-4)\times0+3\times7}{\sqrt{5^2+(-4)^2+3^2}\sqrt{(-1)^2+0^2+7^2}}$
$=\dfrac{16}{\sqrt{50}\sqrt{50}}=\dfrac{8}{25}$ 답 $\dfrac{8}{25}$

0776 $\cos\theta=\dfrac{1\times2+1\times1+0\times(-2)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}$
$=\dfrac{3}{\sqrt{2}\times3}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{4}\ (\because\ 0\le\theta\le\pi)$ 답 $\dfrac{\pi}{4}$

0777 $\cos\theta=\dfrac{1\times3+2\times(-1)+3\times2}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=\dfrac{1}{2}$
$\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{3}\ (\because\ 0\le\theta\le\pi)$ 답 $\dfrac{\pi}{3}$

0778 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$에서 $-12+5k+k=0$
$6k=12\quad\therefore\ k=2$ 답 2

0779 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$에서 $-3+k^2+2k=0$
$k^2+2k-3=0,\quad (k+3)(k-1)=0$
$\therefore\ k=-3$ 또는 $k=1$ 답 $-3,\ 1$

0780 $\vec{b}=k\vec{a}\ (k\ne0)$라 하면
$(2x,\ -2,\ 5y)=k(2,\ 1,\ -5)$
$2x=2k,\ -2=k,\ 5y=-5k$
$\therefore\ k=-2,\ x=-2,\ y=2$ 답 $x=-2,\ y=2$

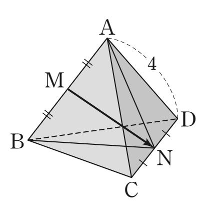
0781 $\vec{b}=k\vec{a}\ (k\ne0)$라 하면
$(3,\ 5x+1,\ 4y)=k(1,\ -3,\ 4)$
$3=k,\ 5x+1=-3k,\ 4y=4k$
$\therefore\ k=3,\ x=-2,\ y=3$ 답 $x=-2,\ y=3$

0782 $|\overrightarrow{DF}|=\overline{DF}=\sqrt{4^2+3^2+3^2}=\sqrt{34}$
$|\overrightarrow{FC}|=\overline{FC}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$
$\therefore\ |\overrightarrow{DF}||\overrightarrow{FC}|=\sqrt{34}\times3\sqrt{2}=6\sqrt{17}$ 답 ④

0783 주어진 정육면체의 대각선의 길이가 $\sqrt{3}$이므로 구하는 벡터는
$\overrightarrow{AG},\ \overrightarrow{BH},\ \overrightarrow{CE},\ \overrightarrow{DF},\ \overrightarrow{EC},\ \overrightarrow{FD},\ \overrightarrow{GA},\ \overrightarrow{HB}$
의 8개이다. 답 8

0784 ①, ② 정팔면체의 모든 모서리의 길이는 같으므로
$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{EB}=2$
$\therefore\ |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{EB}|=2$
③, ④ $\overline{BD},\ \overline{AF},\ \overline{CE}$의 길이는 한 변의 길이가 2인 정사각형의 대각선의 길이와 같으므로
$\overline{BD}=\overline{AF}=\overline{CE}=2\sqrt{2}$
$\therefore\ |\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{AF}|=|\overrightarrow{CE}|=2\sqrt{2}$
⑤ $|\overrightarrow{FA}|=|\overrightarrow{AF}|=2\sqrt{2}$ 답 ⑤

0785 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AN},\ \overline{BN}$을 그으면 △ACD, △BCD는 모두 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로



$\overline{AN}=\overline{BN}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times4=2\sqrt{3}$ ⇨ ❶
따라서 △ABN은 $\overline{AN}=\overline{BN}$인 이등변삼각형이므로 직각삼각형 AMN에서
$\overline{MN}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-2^2}=2\sqrt{2}$
$\therefore\ |\overrightarrow{MN}|=2\sqrt{2}$ ⇨ ❷
답 $2\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AN},\ \overline{BN}$의 길이를 구할 수 있다.	50%
❷ $\overrightarrow{MN}$의 크기를 구할 수 있다.	50%

0786 답 ②

0787 답 ④

0788 ㄱ. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{FE}$

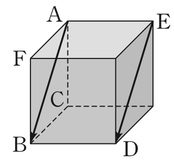
ㄴ. □ADEB가 직사각형이므로 $\overline{AE}=\overline{BD}$

$\therefore |\overrightarrow{AE}|=|\overrightarrow{BD}|$

ㄷ. $\overrightarrow{FB}$와 $\overrightarrow{EC}$는 크기는 같지만 방향이 다르므로 같은 벡터가 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

0789 주어진 전개도로 만든 정육면체는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 같은 벡터는 $\overrightarrow{ED}$이다. 답 ④



0790 $2(\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c})-3(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$

$=2\vec{a}-4\vec{b}+4\vec{c}-3\vec{a}+3\vec{b}-3\vec{c}$

$=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

$=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

$=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}$

$=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CE}$ 답 ④

0791 $\vec{c}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})$

$=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{d}$ 답 $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{d}$

0792 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{HB}$

$=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{EC})+(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{HB})$

$=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE})+(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BH})$

$=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DH}=2\overrightarrow{CG}$

$\therefore m=2$ 답 ②

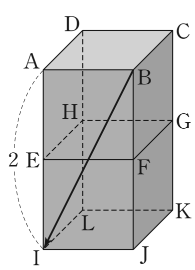
0793 오른쪽 그림과 같이 합동인 두 정육면체를 나란히 붙이면

$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DH}-\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{GH}$

$=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BI}$

이때 $\overline{BI}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이므로

$|\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DH}-\overrightarrow{HG}|=|\overrightarrow{BI}|=\sqrt{5}$ 답 ⑤



0794 직사각형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 점 P는 $\overline{EG}$의 중점이다.

$$\therefore \overrightarrow{DP}=\frac{\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DG}}{2}$$

이때

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\vec{c}-\vec{b}$,

$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\vec{c}$

이므로

$$\overrightarrow{DP}=\frac{(\vec{c}-\vec{b})+(\vec{a}+\vec{c})}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$$ 답 $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

0795 점 M은 $\overline{CD}$의 중점이므로

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

$$\therefore \overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\vec{a}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

따라서 $l=-1$, $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{2}$이므로

$l+m+n=0$ 답 ③

0796 점 G는 △ABC의 무게중심이므로

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

$$\therefore \overrightarrow{AG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}-\vec{a}$$

$$=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$ 답 $-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

0797 점 P는 $\overline{EG}$를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{CP}=\frac{\overrightarrow{CG}+2\overrightarrow{CE}}{1+2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CG}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$$

이때

$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AE}=\vec{c}$,

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}$

이므로

$$\overrightarrow{CP}=\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}(\vec{c}-\vec{a}-\vec{b})=-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\vec{c}$$ ⇨ ❶

따라서 $l=-\frac{2}{3}$, $m=-\frac{2}{3}$, $n=1$이므로

$lmn=\frac{4}{9}$ ⇨ ❷

답 $\frac{4}{9}$

채점 기준	비율
❶ $\overrightarrow{CP}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타낼 수 있다.	70%
❷ lmn의 값을 구할 수 있다.	30%

다른풀이 $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{AE}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$$=\vec{c}-\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b})=-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\vec{c}$$

0798 $2(\vec{a}-\vec{b})+3(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$

$=2\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{a}+3\vec{b}-3\vec{c}$

$=5\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$

$=5(2, 1, 0)+(-3, 3, -4)-3(3, 0, -2)$

$=(-2, 8, 2)$

따라서 구하는 크기는

$\sqrt{(-2)^2+8^2+2^2}=6\sqrt{2}$ 답 ③

0799 $4(\vec{a}-2\vec{b})-(2\vec{a}-3\vec{c})$

$=4\vec{a}-8\vec{b}-2\vec{a}+3\vec{c}$

$=2\vec{a}-8\vec{b}+3\vec{c}$

$=2(-1, 0, 3)-8(2, -4, 1)+3(3, -7, -2)$

$=(-9, 11, -8)$

따라서 구하는 합은

$-9+11+(-8)=-6$ 답 ④

0800 $3(\vec{x}+\vec{a})=2(\vec{b}-\vec{x})-\vec{a}$에서

$3\vec{x}+3\vec{a}=2\vec{b}-2\vec{x}-\vec{a}$

$5\vec{x}=-4\vec{a}+2\vec{b}$

$\therefore \vec{x}=-\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$ ⇨ ❶

$=-\frac{4}{5}(-4, 2, 1)+\frac{2}{5}(-3, -1, 2)$

$=(2, -2, 0)$ ⇨ ❷

$\therefore |\vec{x}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+0^2}=2\sqrt{2}$ ⇨ ❸

답 $2\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $\vec{x}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낼 수 있다.	40%
❷ $\vec{x}$를 성분으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ $\vec{x}$의 크기를 구할 수 있다.	30%

0801 $\vec{a}+t\vec{b}=(-1, 3, 5)+t(2, 1, 1)=(2t-1, t+3, t+5)$ 이므로

$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(2t-1)^2+(t+3)^2+(t+5)^2}$

$=\sqrt{6t^2+12t+35}$

$=\sqrt{6(t+1)^2+29}$

따라서 $|\vec{a}+t\vec{b}|$는 $t=-1$일 때 최솟값 $\sqrt{29}$를 가지므로

$\alpha=-1$, $\beta=\sqrt{29}$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(-1)^2+(\sqrt{29})^2=30$

답 30

0802 $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$이므로

$(-8, 5, 3)=m(-3, 2, 4)+n(2, -1, 5)$

$=(-3m+2n, 2m-n, 4m+5n)$

$\therefore -3m+2n=-8$, $2m-n=5$, $4m+5n=3$

위의 세 식을 연립하여 풀면 $m=2$, $n=-1$

$\therefore mn=-2$

답 -2

0803 $\vec{a}=\vec{b}$이므로

$x+y+z=4$, $x-y-z=0$, $2x+z=7$

위의 세 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=-1$, $z=3$

$\therefore x^2+y^2+z^2=2^2+(-1)^2+3^2=14$

답 ③

0804 $2\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$에서 $\vec{a}=3\vec{b}+\vec{c}$이므로

$(2, 5, 4)=3(-1, x, 2)+(y, -4, z)$

$=(-3+y, 3x-4, 6+z)$

$\therefore 2=-3+y$, $5=3x-4$, $4=6+z$

따라서 $x=3$, $y=5$, $z=-2$이므로

$x+y+z=6$

답 6

0805 $\overrightarrow{OP}=(1, 1, -1)$이므로

$\overrightarrow{OA}=(1, 1, 0)$, $\overrightarrow{OB}=(0, 1, -1)$, $\overrightarrow{OC}=(1, 0, -1)$

$\overrightarrow{OP}=l\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$에서

$(1, 1, -1)=l(1, 1, 0)+m(0, 1, -1)+n(1, 0, -1)$

$=(l+n, l+m, -m-n)$

$\therefore l+n=1$, $l+m=1$, $-m-n=-1$

위의 세 식을 연립하여 풀면 $l=\frac{1}{2}$, $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{2}$

$\therefore lmn=\frac{1}{8}$

답 $\frac{1}{8}$

0806 $3\overrightarrow{AB}=3(-1, 4, -3)=(-3, 12, -9)$

$\overrightarrow{CD}=(x-2, y+3, z)$

$3\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$에서

$x-2=-3$, $y+3=12$, $z=-9$

$\therefore x=-1$, $y=9$, $z=-9$

$\therefore x+y-z=17$

답 ⑤

0807 $\overrightarrow{AB}=(4, 2, -4)$이므로

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4^2+2^2+(-4)^2}=6$

따라서 구하는 단위벡터는

$-\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=-\frac{1}{6}(4, 2, -4)$

$=\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

답 $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

0808 $\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점 P의 좌표는

$P\left(\frac{1\times5+2\times(-1)}{1+2}, \frac{1\times(-3)+2\times3}{1+2}, \frac{1\times1+2\times4}{1+2}\right)$

$\therefore P(1, 1, 3)$ ⇨ ❶

$\overline{BC}$를 2 : 1로 외분하는 점 Q의 좌표는

$Q\left(\frac{2\times2-1\times5}{2-1}, \frac{2\times0-1\times(-3)}{2-1}, \frac{2\times(-3)-1\times1}{2-1}\right)$

$\therefore Q(-1, 3, -7)$ ⇨ ❷

따라서 $\overrightarrow{PQ}=(-2, 2, -10)$이므로

$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-10)^2}=6\sqrt{3}$ ⇨ ❸

답 $6\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ 점 Q의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❸ $\overline{PQ}$의 크기를 구할 수 있다.	40%

타쎈 특강 선분의 내분점과 외분점

좌표공간에서 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$에 대하여 $\overline{AB}$를 $m : n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라 하면

$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$,

$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$ (단, $m\neq n$)

0809 $\overrightarrow{OD}=(a, b, c)$라 하면 □ABCD가 평행사변형이므로

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

이때

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-4, -1, -1)$,

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=(-2-a, -b, -4-c)$

이므로

$-2-a=-4$, $-b=-1$, $-4-c=-1$

$\therefore a=2$, $b=1$, $c=-3$

따라서 $\overrightarrow{OD}=(2, 1, -3)$이므로 구하는 합은

$2+1+(-3)=0$

답 ③

0810 $\vec{a}-\vec{c}=(2-x,\ -2,\ 8-2y)$, $\vec{b}+\vec{c}=(x+1,\ -4,\ 2y+4)$
두 벡터 $\vec{a}-\vec{c}$, $\vec{b}+\vec{c}$가 서로 평행하므로

$\vec{a}-\vec{c}=k(\vec{b}+\vec{c})\ (k\neq0)$

라 하면 $(2-x,\ -2,\ 8-2y)=k(x+1,\ -4,\ 2y+4)$

$\therefore 2-x=k(x+1),\ -2=-4k,\ 8-2y=k(2y+4)$

따라서 $k=\frac{1}{2}$, $x=1$, $y=2$이므로

$x+y=3$ 답 ③

다른풀이 두 벡터 $\vec{a}-\vec{c}=(2-x,\ -2,\ 8-2y)$, $\vec{b}+\vec{c}=(x+1,\ -4,\ 2y+4)$가 서로 평행하므로 두 벡터의 각 성분의 비가 일정하다.

즉 $\frac{2-x}{x+1}=\frac{-2}{-4}=\frac{8-2y}{2y+4}$이므로

$-8+4x=-2x-2,\ -4y-8=-32+8y$

$\therefore x=1,\ y=2$

0811 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하므로

$\vec{a}=k\vec{b}\ (k\neq0)$

라 하면 $(4,\ 2x-4,\ 2)=k(-6,\ x-6,\ 2y-5)$

$\therefore 4=-6k,\ 2x-4=k(x-6),\ 2=k(2y-5)$

따라서 $k=-\frac{2}{3}$, $x=3$, $y=1$이므로

$xy=3$ 답 ④

0812 $\overrightarrow{AB}=(-3,\ -1,\ 2)$, $\overrightarrow{CD}=(x-5,\ y-2,\ 1)$
$\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{CD}$이므로

$\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}\ (k\neq0)$

라 하면 $(x-5,\ y-2,\ 1)=k(-3,\ -1,\ 2)$

$\therefore x-5=-3k,\ y-2=-k,\ 1=2k$

따라서 $k=\frac{1}{2}$, $x=\frac{7}{2}$, $y=\frac{3}{2}$이므로

$x-y=2$ 답 2

0813 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}\ (k\neq0)$

라 하면 $\overrightarrow{AC}=(4x-3,\ -3,\ 3y+6)$, $\overrightarrow{AB}=(-3,\ 1,\ 4)$이므로

$(4x-3,\ -3,\ 3y+6)=k(-3,\ 1,\ 4)$

$\therefore 4x-3=-3k,\ -3=k,\ 3y+6=4k$

따라서 $k=-3$, $x=3$, $y=-6$이므로

$x^2+y^2=3^2+(-6)^2=45$ 답 45

0814 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면

$\overrightarrow{AP}=(x,\ y-1,\ z+1)$, $\overrightarrow{BP}=(x-3,\ y+2,\ z-5)$

$|\overrightarrow{AP}|=2|\overrightarrow{BP}|$에서

$\sqrt{x^2+(y-1)^2+(z+1)^2}=2\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2+(z-5)^2}$

$x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4\{(x-3)^2+(y+2)^2+(z-5)^2\}$

$3x^2+3y^2+3z^2-24x+18y-42z+150=0$

$x^2+y^2+z^2-8x+6y-14z+50=0$

$\therefore (x-4)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=24$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(4,\ -3,\ 7)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{6}$인 구이므로 구하는 겉넓이는

$4\pi\times(2\sqrt{6})^2=96\pi$ 답 ⑤

0815 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$

$=(2-x,\ 3-y,\ -2-z)+(-2-x,\ -1-y,\ -z)$

$\quad+(-x,\ 4-y,\ -1-z)$

$=(-3x,\ 6-3y,\ -3-3z)$

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=6$에서

$\sqrt{(-3x)^2+(6-3y)^2+(-3-3z)^2}=6$

$(-3x)^2+(6-3y)^2+(-3-3z)^2=36$

$\therefore x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=4$

따라서 점 P의 자취는 중심의 좌표가 $(0,\ 2,\ -1)$이고 반지름의 길이가 2인 구이므로

$a=0,\ b=2,\ c=-1,\ r=2$

$\therefore a+b+c+r=3$ 답 ①

0816 $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\ (0\leq t\leq1)$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB이므로 구하는 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(3-2)^2+(2+1)^2+(1-4)^2}=\sqrt{19}$ 답 $\sqrt{19}$

0817 $\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AD}$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AD}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 직각삼각형 AGD에서

$\cos\theta=\frac{\overline{AD}}{\overline{AG}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AG}||\overrightarrow{AD}|\cos\theta$

$=\sqrt{3}\times1\times\frac{1}{\sqrt{3}}=1$ 답 ②

0818 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CF}$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{CF}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 직각삼각형 CEF에서

$\cos\theta=\frac{\overline{CF}}{\overline{CE}}$

$\therefore \overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}=|\overrightarrow{CE}||\overrightarrow{CF}|\cos\theta$

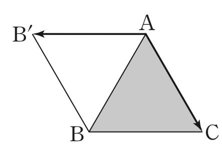
$=\overline{CE}\times\overline{CF}\times\frac{\overline{CF}}{\overline{CE}}=\overline{CF}^2$

$=2^2+1^2=5$ 답 5

0819 정사면체의 한 모서리의 길이를 x라 하면

$a=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos60°=\frac{1}{2}x^2$

오른쪽 그림과 같이 점 A를 시점으로 하고 $\overrightarrow{CB}$와 같은 벡터를 $\overrightarrow{AB'}$이라 하면 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB'}$이 이루는 각의 크기는 120°이므로



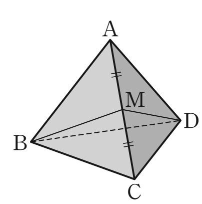
$b=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB'}$

$=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB'}|\cos120°=-\frac{1}{2}x^2$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$의 중점을 M이라 하면 $\overline{AC}\perp\overline{BM}$, $\overline{AC}\perp\overline{DM}$이므로

$\overline{AC}\perp$(평면 BMD)

따라서 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$가 이루는 각의 크기는 90°이다.



$\therefore c=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{BD}|\cos90°=0$

이때 $x>0$이므로 $b<c<a$ 답 ③

0820 $\triangle$OAB는 정삼각형이므로 $\angle AOB=60°$
정사면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos 60°=a\times a\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a^2$$

즉 $\frac{1}{2}a^2=16$이므로 $a^2=32$

$\therefore a=4\sqrt{2}$ ($\because a>0$) 답 ⑤

0821 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FG}$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{FD}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 직각삼각형 DFG에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{FG}}{\overline{FD}}$$

$$\therefore \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{FD}=|\overrightarrow{FG}||\overrightarrow{FD}|\cos\theta$$
$$=\overline{FG}\times\overline{FD}\times\frac{\overline{FG}}{\overline{FD}}=\overline{FG}^2$$

즉 $\overline{FG}^2=9$이므로 $\overline{FG}=3$
따라서 주어진 정육면체의 한 모서리의 길이가 3이므로 구하는 부피는 $3^3=27$ 답 27

0822 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-4$에서

$(3,\ x+1,\ -2)\cdot(x,\ 2-x,\ 5)=-4$
$3x+(x+1)(2-x)-10=-4$
$x^2-4x+4=0,\quad (x-2)^2=0$
$\therefore x=2$ 답 ④

0823 $\vec{a}+2\vec{b}=(3,\ -1,\ 4)+2(-1,\ 2,\ 5)=(1,\ 3,\ 14)$
$3\vec{a}-2\vec{b}=3(3,\ -1,\ 4)-2(-1,\ 2,\ 5)=(11,\ -7,\ 2)$

$\therefore (\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})=(1,\ 3,\ 14)\cdot(11,\ -7,\ 2)$
$=11-21+28=18$ 답 ⑤

다른풀이 $|\vec{a}|^2=3^2+(-1)^2+4^2=26$
$|\vec{b}|^2=(-1)^2+2^2+5^2=30$
$\vec{a}\cdot\vec{b}=(3,\ -1,\ 4)\cdot(-1,\ 2,\ 5)=-3-2+20=15$

$\therefore (\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})=3|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}-4|\vec{b}|^2$
$=3\times26+4\times15-4\times30$
$=18$

0824 $|\vec{a}|=5\sqrt{2}$에서 $|\vec{a}|^2=50$이므로

$(3k-1)^2+3^2+(4-k)^2=50$
$5k^2-7k-12=0,\quad (k+1)(5k-12)=0$
$\therefore k=-1$ ($\because k<0$) ⇨ ❶

따라서 $\vec{a}=(-4,\ 3,\ 5)$, $\vec{b}=(-2,\ -3,\ 3)$이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-4,\ 3,\ 5)\cdot(-2,\ -3,\ 3)$
$=8-9+15=14$ ⇨ ❷

답 14

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ $\vec{a}\cdot\vec{b}$를 구할 수 있다.	50%

0825 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{c}$이므로 $\vec{c}=k\vec{a}$ ($k\neq0$)라 하면 $\vec{b}\cdot\vec{c}=10$에서

$(1,\ 1,\ -1)\cdot(3k,\ -2k,\ 6k)=10$
$-5k=10\quad \therefore k=-2$

따라서 $\vec{c}=(-6,\ 4,\ -12)$이므로

$|\vec{c}|=\sqrt{(-6)^2+4^2+(-12)^2}=14$ 답 ③

0826 점 P의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 하면

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=(a,\ b,\ c)\cdot(8,\ 0,\ 0)=8a$

한편 점 $P(a,\ b,\ c)$는 중심의 좌표가 $(2,\ -1,\ 3)$이고 반지름의 길이가 3인 구 위의 점이므로

$2-3\le a\le 2+3$, 즉 $-1\le a\le 5$
$\therefore -8\le 8a\le 40$

따라서 $-8\le\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}\le 40$이므로

$M=40,\ m=-8$
$\therefore M+m=32$ 답 32

0827 $2\vec{a}+\vec{b}=2(1,\ -1,\ 0)+(1,\ 0,\ -1)=(3,\ -2,\ -1)$,
$3\vec{a}-2\vec{b}=3(1,\ -1,\ 0)-2(1,\ 0,\ -1)=(1,\ -3,\ 2)$이므로

$$\cos\theta=\frac{3\times1+(-2)\times(-3)+(-1)\times2}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}}$$
$$=\frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=\frac{1}{2}$$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$ ($\because 0\le\theta\le\pi$) 답 $\frac{\pi}{3}$

0828 $$\cos\frac{2}{3}\pi=\frac{2\times(-3)+1\times2+x\times(-1)}{\sqrt{2^2+1^2+x^2}\sqrt{(-3)^2+2^2+(-1)^2}}$$

$-\frac{1}{2}=\frac{-4-x}{\sqrt{5+x^2}\sqrt{14}},\quad \sqrt{5+x^2}\sqrt{14}=8+2x$
$70+14x^2=64+32x+4x^2$
$5x^2-16x+3=0,\quad (5x-1)(x-3)=0$
$\therefore x=3$ ($\because x$는 자연수) 답 ②

0829 $\overrightarrow{AB}=(2,\ -2,\ 1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,\ 2,\ 2)$이므로 ⇨ ❶

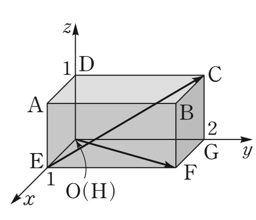
$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{2\times(-1)+(-2)\times2+1\times2}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}}$$
$$=\frac{-4}{3\times3}=-\frac{4}{9}$$ ⇨ ❷

$$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\frac{4}{9}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{65}}{9}\ (\because 0\le\theta\le\pi)$$ ⇨ ❸

답 $\frac{\sqrt{65}}{9}$

채점 기준	비율
❶ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$를 성분으로 나타낼 수 있다.	20%
❷ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.	30%

0830 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 H가 원점, 모서리 HE, HG, HD가 각각 x축, y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 직육면체를 좌표공간에 놓으면



$H(0,\ 0,\ 0)$, $E(1,\ 0,\ 0)$,
$F(1,\ 2,\ 0)$, $C(0,\ 2,\ 1)$

이므로

$\overrightarrow{EC}=(-1,\ 2,\ 1)$, $\overrightarrow{HF}=(1,\ 2,\ 0)$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{HF}}{|\overrightarrow{EC}||\overrightarrow{HF}|}$$
$$=\frac{-1\times1+2\times2+1\times0}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2+0^2}}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$$
답 $\frac{\sqrt{30}}{10}$

0831 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=(x-1,\ y+1,\ z-2)$
두 벡터 $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{OA}$가 서로 평행하므로
$\overrightarrow{BP}=k\overrightarrow{OA}\ (k\neq0)$
라 하면 $(x-1,\ y+1,\ z-2)=k(3,\ 1,\ -2)$
$x-1=3k,\ y+1=k,\ z-2=-2k$
$\therefore x=3k+1,\ y=k-1,\ z=-2k+2$ …… ㉠
또 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OB}$가 서로 수직이므로 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=0$
$(x,\ y,\ z)\cdot(1,\ -1,\ 2)=0$
$\therefore x-y+2z=0$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$3k+1-(k-1)+2(-2k+2)=0$
$-2k+6=0$ $\therefore k=3$
$k=3$을 ㉠에 대입하면
$x=10,\ y=2,\ z=-4$
$\therefore xyz=-80$
답 ①

0832 $\vec{a}-k\vec{b}=(1,\ 3,\ -1)-k(2,\ 1,\ 2)$
$=(1-2k,\ 3-k,\ -1-2k)$
$2\vec{a}+\vec{b}=2(1,\ 3,\ -1)+(2,\ 1,\ 2)=(4,\ 7,\ 0)$
두 벡터 $\vec{a}-k\vec{b}$, $2\vec{a}+\vec{b}$가 서로 수직이므로
$(\vec{a}-k\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=0$
$(1-2k,\ 3-k,\ -1-2k)\cdot(4,\ 7,\ 0)=0$
$4(1-2k)+7(3-k)=0,$ $25-15k=0$
$\therefore k=\frac{5}{3}$
답 $\frac{5}{3}$

0833 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 수직이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
$(2,\ k+1,\ 3)\cdot(2-k,\ -1,\ 2k)=0$
$2(2-k)-(k+1)+6k=0,$ $3+3k=0$
$\therefore k=-1$
따라서 $\vec{a}=(2,\ 0,\ 3)$, $\vec{b}=(3,\ -1,\ -2)$이므로
$2\vec{a}+\vec{b}=2(2,\ 0,\ 3)+(3,\ -1,\ -2)=(7,\ -1,\ 4)$
$\therefore |2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7^2+(-1)^2+4^2}=\sqrt{66}$
답 ④

0834 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(x-2,\ 1,\ -2)$
$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$이므로 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$
$(2,\ 0,\ -1)\cdot(x-2,\ 1,\ -2)=0$
$2(x-2)+2=0,$ $2x-2=0$
$\therefore x=1$
답 1

0835 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{p}$가 서로 수직이므로 $\vec{a}\cdot\vec{p}=0$
$(1,\ 3,\ -4)\cdot(x,\ y,\ z)=0$
$\therefore x+3y-4z=0$ …… ㉠
두 벡터 $\vec{b}$, $\vec{p}$가 서로 서로 수직이므로 $\vec{b}\cdot\vec{p}=0$
$(2,\ -1,\ -1)\cdot(x,\ y,\ z)=0$
$\therefore 2x-y-z=0$ …… ㉡
㉠$\times2-$㉡을 하면 $7y-7z=0$ $\therefore y=z$
$y=z$를 ㉡에 대입하면 $2x-z-z=0$ $\therefore x=z$
$\therefore \vec{p}=(z,\ z,\ z)$
이때 $|\vec{p}|=3\sqrt{3}$이므로
$\sqrt{z^2+z^2+z^2}=3\sqrt{3},$ $3z^2=27$
$z^2=9$ $\therefore z=\pm3$
그런데 $xyz>0$에서 $z^3>0$이므로 $z>0$
$\therefore z=3$
따라서 $x=y=z=3$이므로
$x+y+z=9$
답 ②

0836 전략 $\overrightarrow{AM}$의 크기는 $\overline{AM}$의 길이와 같음을 이용한다.
풀이 $\overline{AM}=\sqrt{4^2+4^2+2^2}=6$이므로
$|\overrightarrow{AM}|=6$
답 ⑤

0837 전략 주어진 벡터를 성분으로 나타낸다.
풀이 $\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}$
$=(2,\ 0,\ -1)+3(-1,\ 2,\ 2)-2(2,\ 1,\ -3)$
$=(-5,\ 4,\ 11)$
$\therefore |\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}|=\sqrt{(-5)^2+4^2+11^2}=9\sqrt{2}$
답 $9\sqrt{2}$

0838 전략 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$에 대하여 $\vec{a}=\vec{b}$이면 $a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3$임을 이용한다.
풀이 $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$이므로
$(-1,\ z,\ 9)=2(2x,\ 1,\ -3)+3(1,\ -4,\ y)$
$=(4x+3,\ -10,\ -6+3y)$
$\therefore -1=4x+3,\ z=-10,\ 9=-6+3y$
따라서 $x=-1,\ y=5,\ z=-10$이므로
$xyz=50$
답 ②

0839 전략 두 점 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $B(b_1,\ b_2,\ b_3)$에 대하여 $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$임을 이용한다.
풀이 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면
$\overrightarrow{AP}=(x+1,\ y-4,\ z-5)$, $\overrightarrow{PB}=(3-x,\ -y,\ -2-z)$ ⇨ ❶
$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PB}$에서
$x+1=3-x,\ y-4=-y,\ z-5=-2-z$ ⇨ ❷
$\therefore x=1,\ y=2,\ z=\frac{3}{2}$
$\therefore P\left(1,\ 2,\ \frac{3}{2}\right)$ ⇨ ❸
답 $P\left(1,\ 2,\ \frac{3}{2}\right)$

채점 기준	비율
❶ $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PB}$를 성분으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ 벡터가 서로 같을 조건을 이용할 수 있다.	30%
❸ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	30%

0840 전략 $\triangle AFC$가 정삼각형임을 이용하여 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$가 이루는 각의 크기를 구한다.
풀이 $\triangle AFC$는 한 변의 길이가 $3\sqrt{2}$인 정삼각형이므로
$\angle CAF=60°$

$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AF}|\cos 60°$

$=3\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}\times \frac{1}{2}=9$ 답 9

0841 전략 두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$임을 이용한다.

풀이 $\vec{a}-\vec{b}=(-1, 3, 6)-(2, 4, 2)=(-3, -1, 4)$

$\vec{a}+\vec{c}=(-1, 3, 6)+(5, -1, 0)=(4, 2, 6)$

$\therefore (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})=(-3, -1, 4)\cdot(4, 2, 6)$

$=-12-2+24=10$ 답 ①

0842 전략 $\overline{AB}$의 중점이 M이면 $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$임을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}$의 중점이 M, $\overline{OC}$의 중점이 N이므로

$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\vec{c}$

$\therefore \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$

$=\frac{1}{2}\vec{c}-\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)$

$=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

따라서 $l=-\frac{1}{2}$, $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{2}$이므로

$l+m+n=-\frac{1}{2}$ 답 ②

0843 전략 주어진 두 식을 연립하여 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 성분으로 나타낸다.

풀이 $\vec{a}+\vec{b}=(-2, -3, 4)$ …… ㉠

$3\vec{a}-\vec{b}=(2, -5, 0)$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $4\vec{a}=(0, -8, 4)$

$\therefore \vec{a}=(0, -2, 1)$

이것을 ㉠에 대입하면

$\vec{b}=(-2, -3, 4)-(0, -2, 1)=(-2, -1, 3)$ ⇨ ❶

$\therefore \vec{a}-2\vec{b}=(0, -2, 1)-2(-2, -1, 3)$

$=(4, 0, -5)$ ⇨ ❷

$\therefore |\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{4^2+0^2+(-5)^2}=\sqrt{41}$ ⇨ ❸

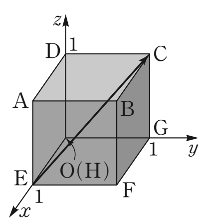
답 $\sqrt{41}$

채점 기준	비율
❶ $\vec{a}$, $\vec{b}$를 성분으로 나타낼 수 있다.	50%
❷ $\vec{a}-2\vec{b}$를 성분으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ $|\vec{a}-2\vec{b}|$를 구할 수 있다.	20%

0844 전략 정육면체를 좌표공간에 놓고 각 벡터를 성분으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 H가 원점, 모서리 HE, HG, HD가 각각 x축, y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 정육면체를 좌표공간에 놓으면

$A(1, 0, 1)$, $C(0, 1, 1)$,
$E(1, 0, 0)$, $F(1, 1, 0)$



이때 $\overrightarrow{EC}=(-1, 1, 1)$이므로

$(-1, 1, 1)=l(1, 1, 0)+m(1, 0, 1)+n(0, 1, 1)$

$=(l+m, l+n, m+n)$

$\therefore l+m=-1, l+n=1, m+n=1$

위의 세 식을 변끼리 더하면 $2(l+m+n)=1$

$\therefore l+m+n=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0845 전략 두 점 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$에 대하여 $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)$임을 이용한다.

풀이 $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=(x+1, y-4, z)+(x-3, y-5, z+7)$

$=(2x-2, 2y-9, 2z+7)$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}$에서

$(x-1, y-3, z+2)=(2x-2, 2y-9, 2z+7)$

$\therefore x-1=2x-2, y-3=2y-9, z+2=2z+7$

따라서 $x=1$, $y=6$, $z=-5$이므로

$x+y+z=2$ 답 ①

0846 전략 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하면 $\vec{a}=k\vec{b}$ $(k\neq 0)$임을 이용한다.

풀이 $n\vec{a}+\vec{b}=n(-1, 1, 2)+(6, 0, -2)$

$=(-n+6, n, 2n-2)$

두 벡터 $n\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c}$가 서로 평행하므로

$n\vec{a}+\vec{b}=k\vec{c}$ $(k\neq 0)$

라 하면 $(-n+6, n, 2n-2)=k(-8, -4, m)$

$\therefore -n+6=-8k, n=-4k, 2n-2=km$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$k=-\frac{1}{2}$, $m=-4$, $n=2$

$\therefore mn=-8$ 답 -8

0847 전략 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ $(0\le\theta\le\pi)$라 할 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AE}$이고 $\angle CAE=90°$이므로

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AE}|\cos 90°=0$

ㄴ. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{DE}$이고 $\angle CDE=90°$이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DE}=|\overrightarrow{DC}||\overrightarrow{DE}|\cos 90°=0$

ㄷ. $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DC}$이고 $\angle CDB=45°$이므로

$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=|\overrightarrow{DB}||\overrightarrow{DC}|\cos 45°$

$=\sqrt{2}\times 1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$

ㄹ. $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AF}$이고 $\triangle AFH$는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정삼각형이므로

$\angle HAF=60°$

$\therefore \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AF}=|\overrightarrow{AH}||\overrightarrow{AF}|\cos 60°$

$=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ②

0848 전략 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos(\angle BAC)$임을 이용하여 정팔면체의 한 모서리의 길이를 구한다.

풀이 $\triangle ABC$는 정삼각형이므로 $\angle BAC=60°$

정팔면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60°=a\times a\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a^2$

즉 $\frac{1}{2}a^2=9$이므로 $a^2=18$

따라서 구하는 겉넓이는

$$8\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=2\sqrt{3}\times18=36\sqrt{3}$$

답 $36\sqrt{3}$

0849 전략 x축 위의 점은 y좌표, z좌표가 모두 0임을 이용한다.

풀이 점 P의 좌표를 $(x,\ 0,\ 0)$이라 하면

$$\overrightarrow{PA}=(-1-x,\ 2,\ 1),\ \overrightarrow{PB}=(3-x,\ 2,\ -4)$$

이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}&=(-1-x,\ 2,\ 1)\cdot(3-x,\ 2,\ -4)\\&=(-1-x)(3-x)+4-4\\&=x^2-2x-3=(x-1)^2-4\end{aligned}$$

따라서 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$는 $x=1$일 때 최솟값 -4를 갖는다.

답 ②

0850 전략 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 $\theta(0\le\theta\le\pi)$라 할 때, $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$임을 이용한다.

풀이 $\vec{a}+\vec{b}=(x,\ 2,\ 0)$, $\vec{a}+\vec{c}=(1,\ 1,\ \sqrt{6})$이므로

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{x\times1+2\times1+0\times\sqrt{6}}{\sqrt{x^2+2^2+0^2}\sqrt{1^2+1^2+(\sqrt{6})^2}}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}\times2\sqrt{2}},\qquad \sqrt{2x^2+8}=x+2$$

$$2x^2+8=x^2+4x+4,\qquad x^2-4x+4=0$$

$$(x-2)^2=0\qquad \therefore\ x=2$$

답 ⑤

0851 전략 $\vec{a}\parallel\vec{b}$이면 $\vec{a}=k\vec{b}\ (k\neq0)$, $\vec{a}\perp\vec{c}$이면 $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$임을 이용한다.

풀이 $\overline{OA}\,/\!/\,\overline{OC}$이므로

$$\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}\ (k\neq0)$$

라 하면 $\overrightarrow{OC}=(-3k,\ k,\ 2k)$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(-3k-8,\ k-2,\ 2k+3)$이고 $\overline{BC}\perp\overline{OC}$이므로

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OC}=0$$

$$(-3k-8,\ k-2,\ 2k+3)\cdot(-3k,\ k,\ 2k)=0$$

$$3k(3k+8)+k(k-2)+2k(2k+3)=0$$

$$14k^2+28k=0,\qquad 14k(k+2)=0$$

$$\therefore\ k=-2\ (\because\ k\neq0)$$

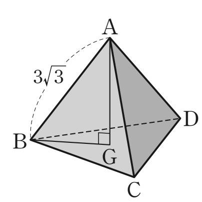
따라서 $\overrightarrow{OC}=(6,\ -2,\ -4)$이므로

$$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{6^2+(-2)^2+(-4)^2}=2\sqrt{14}$$

답 $2\sqrt{14}$

0852 전략 △ABC의 무게중심이 G일 때, $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$임을 이용한다.

풀이 △BCD의 무게중심을 G라 하면



$$\overrightarrow{AG}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{3}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$$

이때 $\overline{BG}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times3\sqrt{3}=3$이므로 직각삼각형 ABG에서

$$\overline{AG}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-3^2}=3\sqrt{2}$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}|=3|\overrightarrow{AG}|=3\times3\sqrt{2}=9\sqrt{2}$$

답 $9\sqrt{2}$

0853 전략 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$로 놓고 주어진 조건을 만족시키는 점 P의 자취의 방정식을 구한다.

풀이 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면

$$\overrightarrow{AP}=(x-1,\ y-4,\ z+2),\ \overrightarrow{BP}=(x+3,\ y-2,\ z-2)$$

이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}&=(x-1,\ y-4,\ z+2)\cdot(x+3,\ y-2,\ z-2)\\&=(x-1)(x+3)+(y-4)(y-2)+(z+2)(z-2)\\&=x^2+2x-3+y^2-6y+8+z^2-4\\&=(x+1)^2+(y-3)^2+z^2-9\end{aligned}$$

즉 $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2-9\le0$이므로

$$(x+1)^2+(y-3)^2+z^2\le9$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(-1,\ 3,\ 0)$이고 반지름의 길이가 3인 구의 경계와 그 내부이므로 구하는 부피는

$$\frac{4}{3}\pi\times3^3=36\pi$$

답 ④

0854 전략 $\vec{x}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$를 $\vec{x}$의 내적에 대한 식에 대입하여 l, m, n에 대한 연립방정식을 세운다.

풀이 △OAB, △OBC, △OCA는 모두 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로

$$|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2=4,$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60^\circ=2\times2\times\frac{1}{2}=2,$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos60^\circ=2\times2\times\frac{1}{2}=2,$$

$$\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos60^\circ=2\times2\times\frac{1}{2}=2$$

$\vec{x}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$이므로 $\vec{x}\cdot\vec{a}=7$에서

$$(l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c})\cdot\vec{a}=7,\qquad l|\vec{a}|^2+m\vec{a}\cdot\vec{b}+n\vec{a}\cdot\vec{c}=7$$

$$\therefore\ 4l+2m+2n=7 \qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

$\vec{x}\cdot\vec{b}=6$에서

$$(l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c})\cdot\vec{b}=6,\qquad l\vec{a}\cdot\vec{b}+m|\vec{b}|^2+n\vec{b}\cdot\vec{c}=6$$

$$\therefore\ 2l+4m+2n=6 \qquad\cdots\cdots\ ㉡$$

$\vec{x}\cdot\vec{c}=3$에서

$$(l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c})\cdot\vec{c}=3,\qquad l\vec{a}\cdot\vec{c}+m\vec{b}\cdot\vec{c}+n|\vec{c}|^2=3$$

$$\therefore\ 2l+2m+4n=3 \qquad\cdots\cdots\ ㉢$$

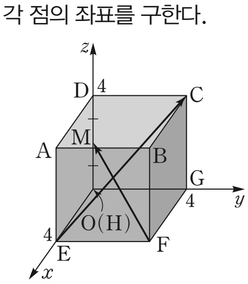
㉠+㉡+㉢을 하면 $8(l+m+n)=16$

$$\therefore\ l+m+n=2$$

답 ⑤

0855 전략 정육면체를 좌표공간에 놓고 각 점의 좌표를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 H가 원점, 모서리 HE, HG, HD가 각각 x축, y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 정육면체를 좌표공간에 놓으면



C(0, 4, 4), E(4, 0, 0),
F(4, 4, 0), M(0, 0, 2) ⇨ ❶

이므로

$$\overrightarrow{EC}=(-4,\ 4,\ 4),\ \overrightarrow{FM}=(-4,\ -4,\ 2) \quad ⇨ ❷$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \cos\theta&=\frac{\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{FM}}{|\overrightarrow{EC}||\overrightarrow{FM}|}\\&=\frac{-4\times(-4)+4\times(-4)+4\times2}{\sqrt{(-4)^2+4^2+4^2}\sqrt{(-4)^2+(-4)^2+2^2}}\\&=\frac{8}{4\sqrt{3}\times6}=\frac{\sqrt{3}}{9}\end{aligned} \quad ⇨ ❸$$

답 $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

채점 기준	비율
❶ 정육면체를 좌표공간에 놓고 네 점 C, E, F, M의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{FM}$을 성분으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40%

0856 전략 주어진 조건을 이용하여 x, y, z에 대한 연립방정식을 세운다.

풀이 $|\vec{p}|=\sqrt{6}$이므로 $x^2+y^2+z^2=6$ …… ㉠

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{p}$가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이므로

$$\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}||\vec{p}|\cos\frac{\pi}{3}$$

$$(1,\ 1,\ -2)\cdot(x,\ y,\ z)=\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}\times\sqrt{6}\times\frac{1}{2}$$

$\therefore x+y-2z=3$ …… ㉡

$\vec{b}\perp\vec{p}$이므로 $\vec{b}\cdot\vec{p}=0$

$(2,\ -1,\ -4)\cdot(x,\ y,\ z)=0$

$\therefore 2x-y-4z=0$ …… ㉢

㉡$\times2-$㉢을 하면 $3y=6$ $\therefore y=2$

$y=2$를 ㉡에 대입하면

$x+2-2z=3$ $\therefore x=2z+1$ …… ㉣

$x=2z+1$, $y=2$를 ㉠에 대입하면

$(2z+1)^2+2^2+z^2=6$, $5z^2+4z-1=0$

$(z+1)(5z-1)=0$ $\therefore z=-1$ 또는 $z=\frac{1}{5}$

$z=-1$을 ㉣에 대입하면 $x=-1$

$z=\frac{1}{5}$을 ㉣에 대입하면 $x=\frac{7}{5}$

이때 $x<0$이므로 $x=-1$, $y=2$, $z=-1$

$\therefore x+y+z=0$ 답 ③

Ⅳ. 공간벡터

08 도형의 방정식

0857 답 $(2,\ -5,\ 4)$

0858 답 $(6,\ 0,\ 3)$

0859 주어진 직선의 방정식을 t에 대하여 풀면

$$t=\frac{x+4}{2}=\frac{y-1}{3}=5-z$$

이므로 구하는 방향벡터는 $(2,\ 3,\ -1)$ 답 $(2,\ 3,\ -1)$

0860 답 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+5}{-5}$

0861 답 $x-3=\frac{2-y}{2}=\frac{z-8}{4}$

0862 직선 $\frac{x+2}{4}=\frac{1-y}{2}=z-2$의 방향벡터는 $(4,\ -2,\ 1)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$\frac{x-2}{4}=\frac{6-y}{2}=z+3$ 답 $\frac{x-2}{4}=\frac{6-y}{2}=z+3$

0863 답 $x+4=y+1$, $z=1$

참고 xy평면에 평행한 직선이다.

0864 답 $x=3$, $y=-5$

0865 주어진 직선의 방정식을 t에 대하여 풀면

$$t=\frac{x}{2}=\frac{y+9}{3}=-z$$

즉 방향벡터는 $(2,\ 3,\ -1)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$\frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{3}=-z-7$ 답 $\frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{3}=-z-7$

0866 주어진 직선의 방정식을 t에 대하여 풀면

$$t=\frac{x+5}{4}=\frac{8-y}{4},\ z=1$$

즉 방향벡터는 $(4,\ -4,\ 0)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{-4}$, $z=-7$, 즉 $x+3=2-y$, $z=-7$

답 $x+3=2-y$, $z=-7$

0867 $\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-0}{1-0}=\frac{z-0}{-2-0}$

$\therefore \frac{x}{2}=y=\frac{z}{-2}$, 즉 $x=2y=-z$ 답 $x=2y=-z$

0868 $\frac{x-3}{4-3}=\frac{y-6}{3-6}=\frac{z-1}{-2-1}$

$\therefore x-3=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-1}{-3}$, 즉 $x-3=\frac{6-y}{3}=\frac{1-z}{3}$

답 $x-3=\frac{6-y}{3}=\frac{1-z}{3}$

0869 $\dfrac{x+5}{-4+5}=\dfrac{y+2}{1+2},\ z=3$

$\therefore\ x+5=\dfrac{y+2}{3},\ z=3$ 답 $x+5=\dfrac{y+2}{3},\ z=3$

0870 $\overrightarrow{u_1}=\boxed{(2,\ -1,\ -2)},\ \overrightarrow{u_2}=\boxed{(1,\ -1,\ 0)}$

이때

$|\overrightarrow{u_1}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}=\boxed{3},$

$|\overrightarrow{u_2}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=\boxed{\sqrt{2}},$

$|\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}|=|2\times1+(-1)\times(-1)+(-2)\times0|=\boxed{3}$

이므로

$\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}=\dfrac{3}{3\sqrt{2}}=\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

$\therefore\ \theta=\boxed{\dfrac{\pi}{4}}\left(\because\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ 답 풀이 참조

0871 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u},\ \vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(3,\ -1,\ 1),\ \vec{v}=(-1,\ 3,\ 1)$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{|3\times(-1)+(-1)\times3+1\times1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{(-1)^2+3^2+1^2}}$

$=\dfrac{5}{\sqrt{11}\sqrt{11}}=\dfrac{5}{11}$ 답 $\dfrac{5}{11}$

0872 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u},\ \vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(1,\ 3,\ 5),\ \vec{v}=(2,\ -4,\ -1)$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{|1\times2+3\times(-4)+5\times(-1)|}{\sqrt{1^2+3^2+5^2}\sqrt{2^2+(-4)^2+(-1)^2}}$

$=\dfrac{15}{\sqrt{35}\sqrt{21}}=\dfrac{\sqrt{15}}{7}$ 답 $\dfrac{\sqrt{15}}{7}$

0873 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u},\ \vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(-1,\ 4,\ -1),\ \vec{v}=(3,\ 1,\ 1)$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{|-1\times3+4\times1+(-1)\times1|}{\sqrt{(-1)^2+4^2+(-1)^2}\sqrt{3^2+1^2+1^2}}=0$

$\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{2}\left(\because\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ 답 $\dfrac{\pi}{2}$

0874 $2(1-x)=3(y+2)=6z$에서

$\dfrac{1-x}{3}=\dfrac{y+2}{2}=z$

$3(x-4)=6(y+1)=-2(z-5)$에서

$\dfrac{x-4}{2}=y+1=\dfrac{z-5}{-3}$

두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u},\ \vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(-3,\ 2,\ 1),\ \vec{v}=(2,\ 1,\ -3)$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{|-3\times2+2\times1+1\times(-3)|}{\sqrt{(-3)^2+2^2+1^2}\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}}$

$=\dfrac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{3}\left(\because\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ 답 $\dfrac{\pi}{3}$

0875 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u},\ \vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(a,\ -2,\ 4),\ \vec{v}=(-2,\ 1,\ b)$

두 직선이 서로 평행하므로

$\vec{u}=k\vec{v}\ (k\ne0)$

라 하면 $a=-2k,\ -2=k,\ 4=bk$

$\therefore\ k=-2,\ a=4,\ b=-2$ 답 $a=4,\ b=-2$

0876 $a(x+4)=4(y-3)=az$에서

$\dfrac{x+4}{4}=\dfrac{y-3}{a}=\dfrac{z}{4}$

$12(x+1)=-6(y-2)=b(z-3)$에서

$\dfrac{x+1}{b}=\dfrac{y-2}{-2b}=\dfrac{z-3}{12}$

두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u},\ \vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(4,\ a,\ 4),\ \vec{v}=(b,\ -2b,\ 12)$

두 직선이 서로 평행하므로

$\vec{u}=k\vec{v}\ (k\ne0)$

라 하면 $4=bk,\ a=-2bk,\ 4=12k$

$\therefore\ k=\dfrac{1}{3},\ a=-8,\ b=12$ 답 $a=-8,\ b=12$

0877 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u},\ \vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(1,\ k,\ -2),\ \vec{v}=(k+3,\ -2,\ 1)$

두 직선이 서로 수직이므로 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

$k+3-2k-2=0,\qquad 1-k=0$

$\therefore\ k=1$ 답 1

0878 $k(x-3)=y-4=2(z+1)$에서

$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-4}{2k}=\dfrac{z+1}{k}$

$2x-3=k(y+2)=6-2z$에서

$\dfrac{x-\frac{3}{2}}{k}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{3-z}{k}$

두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u},\ \vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(2,\ 2k,\ k),\ \vec{v}=(k,\ 2,\ -k)$

두 직선이 서로 수직이므로 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

$2k+4k-k^2=0,\qquad k^2-6k=0$

$k(k-6)=0\qquad\therefore\ k=6\ (\because\ k\ne0)$ 답 6

0879 답 $(3,\ 5,\ -1)$

0880 답 $(1,\ -2,\ 4)$

0881 $3(x-1)-3(y+6)+(z-4)=0$

$\therefore\ 3x-3y+z-25=0$ 답 $3x-3y+z-25=0$

0882 $(x+2)+4(y-5)-2(z-5)=0$

$\therefore\ x+4y-2z-8=0$ 답 $x+4y-2z-8=0$

0883 직선 $x+8=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+4}{3}$의 방향벡터는 $(1,\ 2,\ 3)$이므로

구하는 평면의 방정식은

$(x-3)+2(y+2)+3z=0$

$\therefore\ x+2y+3z+1=0$ 답 $x+2y+3z+1=0$

0884 평면 $4x-2y+3z-5=0$의 법선벡터는 $(4,\ -2,\ 3)$이므로

$4(x-1)-2(y+2)+3(z-3)=0$

$\therefore 4x-2y+3z-17=0$ 답 $4x-2y+3z-17=0$

0885 답 $z=4$

0886 답 $x=-1$

0887 답 $y=3$

0888 구하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라 하고 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 대입하면

$b+c+d=0,\ 2a+c+d=0,\ 3a+b+d=0$

$\therefore b=2a,\ c=3a,\ d=-5a$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$ax+2ay+3az-5a=0$

$a\neq0$이므로 $x+2y+3z-5=0$ 답 $x+2y+3z-5=0$

$a=0$이면 $b=c=d=0$

0889 구하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라 하고 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 대입하면

$2b+d=0,\ 4a-9c+d=0,\ a-4b+6c+d=0$

$\therefore a=2b,\ c=\frac{2}{3}b,\ d=-2b$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$2bx+by+\frac{2}{3}bz-2b=0$

$b\neq0$이므로 $2x+y+\frac{2}{3}z-2=0$

$\therefore 6x+3y+2z-6=0$ 답 $6x+3y+2z-6=0$

0890 $\overrightarrow{n_1}=\boxed{(1,\ 2,\ 3)}$, $\overrightarrow{n_2}=\boxed{(3,\ -1,\ 2)}$

이때

$|\overrightarrow{n_1}|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\boxed{\sqrt{14}}$,

$|\overrightarrow{n_2}|=\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}=\boxed{\sqrt{14}}$,

$|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|=|1\times3+2\times(-1)+3\times2|=\boxed{7}$

이므로

$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=\boxed{\frac{1}{2}}$

$\therefore \theta=\boxed{\frac{\pi}{3}}\left(\because 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$ 답 풀이 참조

0891 두 평면의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$\overrightarrow{n_1}=(4,\ 5,\ -3)$, $\overrightarrow{n_2}=(2,\ 3,\ 6)$

$\therefore \cos\theta=\frac{|4\times2+5\times3+(-3)\times6|}{\sqrt{4^2+5^2+(-3)^2}\sqrt{2^2+3^2+6^2}}$

$=\frac{5}{5\sqrt{2}\times7}=\frac{\sqrt{2}}{14}$ 답 $\frac{\sqrt{2}}{14}$

0892 두 평면의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$\overrightarrow{n_1}=(4,\ -3,\ -1)$, $\overrightarrow{n_2}=(3,\ 1,\ -4)$

$\therefore \cos\theta=\frac{|4\times3+(-3)\times1+(-1)\times(-4)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2+(-1)^2}\sqrt{3^2+1^2+(-4)^2}}$

$=\frac{13}{\sqrt{26}\sqrt{26}}=\frac{1}{2}$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}\left(\because 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$ 답 $\frac{\pi}{3}$

0893 두 평면의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$\overrightarrow{n_1}=(1,\ -4,\ 5)$, $\overrightarrow{n_2}=(2,\ 3,\ 2)$

$\therefore \cos\theta=\frac{|1\times2+(-4)\times3+5\times2|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+5^2}\sqrt{2^2+3^2+2^2}}=0$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{2}\left(\because 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$ 답 $\frac{\pi}{2}$

0894 두 평면의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$\overrightarrow{n_1}=(a,\ -2,\ 3)$, $\overrightarrow{n_2}=(2,\ 4,\ b)$

두 평면이 서로 평행하므로

$\overrightarrow{n_1}=k\overrightarrow{n_2}\ (k\neq0)$

라 하면 $a=2k,\ -2=4k,\ 3=bk$

$\therefore k=-\frac{1}{2},\ a=-1,\ b=-6$ 답 $a=-1,\ b=-6$

0895 두 평면의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$\overrightarrow{n_1}=(3,\ a,\ 1)$, $\overrightarrow{n_2}=(b,\ -6,\ 3)$

두 평면이 서로 평행하므로

$\overrightarrow{n_1}=k\overrightarrow{n_2}\ (k\neq0)$

라 하면 $3=bk,\ a=-6k,\ 1=3k$

$\therefore k=\frac{1}{3},\ a=-2,\ b=9$ 답 $a=-2,\ b=9$

0896 두 평면의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$\overrightarrow{n_1}=(2,\ -3,\ 4)$, $\overrightarrow{n_2}=(5,\ 6,\ k)$

두 평면이 서로 수직이므로 $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$

$10-18+4k=0,\quad 4k-8=0$

$\therefore k=2$ 답 2

0897 두 평면의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$\overrightarrow{n_1}=(6,\ 3,\ k)$, $\overrightarrow{n_2}=(2,\ -k,\ -9)$

두 평면이 서로 수직이므로 $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$

$12-3k-9k=0,\quad 12-12k=0$

$\therefore k=1$ 답 1

0898 $\frac{|1-(-3)+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$ 답 $2\sqrt{3}$

0899 $\frac{|-3+4-2\times5+5|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 답 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

0900 $\frac{|2\times6-3\times3+6\times(-1)+10|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}}=1$ 답 1

0901 $\frac{|3|}{\sqrt{1^2+4^2+(-8)^2}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0902 구 위의 한 점을 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$라 하고 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라 하면 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\overline{\mathrm{AP}}=4$이므로

$|\vec{p}-\vec{a}|=4$

즉 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=4^2$이므로

$(x-1,\ y+2,\ z-4)\cdot(x-1,\ y+2,\ z-4)=4^2$

$\therefore (x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=16$

답 $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=16$

0903 두 점 $(-2, 1, 3)$, $(-1, 0, 6)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(-1+2)^2+(-1)^2+(6-3)^2}=\sqrt{11}$$

이므로 구의 반지름의 길이는 $\sqrt{11}$이다.
따라서 구 위의 한 점을 $P(x, y, z)$라 하고 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라 하면 $|\overrightarrow{AP}|=\overline{AP}=\sqrt{11}$이므로

$$|\vec{p}-\vec{a}|=\sqrt{11}$$

즉 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=(\sqrt{11})^2$이므로

$$(x+2, y-1, z-3)\cdot(x+2, y-1, z-3)=(\sqrt{11})^2$$

$$\therefore (x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=11$$

답 $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=11$

0904 점 P의 좌표를 (x, y, z)라 하고, 점 P의 위치벡터를 $\vec{p}$라 하면 $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$이므로 $\quad |\vec{p}|=3$
즉 $\vec{p}\cdot\vec{p}=3^2$이므로 $\quad (x, y, z)\cdot(x, y, z)=9$

$$\therefore x^2+y^2+z^2=9$$

답 $x^2+y^2+z^2=9$

0905 점 P의 좌표를 (x, y, z)라 하고, 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라 하면 $\overrightarrow{AP}=\vec{p}-\vec{a}$이므로

$$|\vec{p}-\vec{a}|=2$$

즉 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=2^2$이므로

$$(x+1, y-3, z-5)\cdot(x+1, y-3, z-5)=4$$

$$\therefore (x+1)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=4$$

답 $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=4$

0906 직선 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+3}{4}=z+4$의 방향벡터는 $(3, 4, 1)$이므로 점 $(1, 6, -5)$를 지나고 방향벡터가 $(3, 4, 1)$인 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-6}{4}=z+5$$

이 직선이 점 $(4, a, b)$를 지나므로

$$\frac{4-1}{3}=\frac{a-6}{4}=b+5 \qquad \therefore a=10, b=-4$$

$$\therefore a+b=6$$

답 ⑤

0907 $3(x-5)=-2(y+2)=6(z-3)$에서

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y+2}{-3}=z-3$$

이므로 점 $(2, 3, -7)$을 지나고 방향벡터가 $(2, -3, 1)$인 직선의 방정식은

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-3}=z+7$$

답 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{-3}=z+7$

0908 직선 $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{2-y}{2}=\dfrac{z-1}{3}$의 방향벡터는 $(4, -2, 3)$이므로 점 $(8, 1, 3)$을 지나고 방향벡터가 $(4, -2, 3)$인 직선의 방정식은

$$\frac{x-8}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{3} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

xy평면 위의 점은 z좌표가 0이므로 $z=0$을 ㉠에 대입하면

$$\frac{x-8}{4}=\frac{y-1}{-2}=-1 \qquad \therefore x=4, y=3$$

$$\therefore A(4, 3, 0)$$

yz평면 위의 점은 x좌표가 0이므로 $x=0$을 ㉠에 대입하면

$$-2=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{3} \qquad \therefore y=5, z=-3$$

$$\therefore B(0, 5, -3)$$

$$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(-4)^2+(5-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{29}$$

답 ④

0909 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{1\times6+2\times3}{1+2}, \frac{1\times2+2\times(-4)}{1+2}, \frac{1\times(-2)+2\times7}{1+2}\right)$$

$$\therefore P(4, -2, 4)$$

따라서 점 P를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(1, -1, 2)$인 직선 l의 방정식은

$$x-4=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-4}{2}$$

③ $1-4=\dfrac{1+2}{-1}=\dfrac{-2-4}{2}$이므로 점 $(1, 1, -2)$는 직선 l 위의 점이다.

답 ③

타쎈 특강 선분의 내분점과 외분점

좌표공간에서 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n(m>0, n>0)$으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라 하면

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right),$$

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right) \text{(단, } m\neq n\text{)}$$

0910 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-2}{10-2}=\frac{y+4}{-2+4}=\frac{z-3}{8-3}$$

$$\therefore \frac{x-2}{8}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-3}{5}$$

zx평면 위의 점은 y좌표가 0이므로 위의 식에 $y=0$을 대입하면

$$\frac{x-2}{8}=\frac{4}{2}=\frac{z-3}{5} \qquad \therefore x=18, z=13$$

따라서 주어진 직선이 zx평면과 만나는 점의 좌표는 $(18, 0, 13)$이므로 $\quad p=18, q=0, r=13$

$$\therefore p+q-r=5$$

답 ③

0911 $x^2+y^2+z^2+2x-2z-7=0$에서

$$(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=9$$

따라서 구의 중심의 좌표는 $(-1, 0, 1)$이므로 두 점 $(1, 2, -3)$, $(-1, 0, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{-1-1}=\frac{y-2}{0-2}=\frac{z+3}{1+3}$$

$$\therefore x-1=y-2=\frac{z+3}{-2}$$

이 직선이 점 $(a, b, -1)$을 지나므로

$$a-1=b-2=\frac{-1+3}{-2} \qquad \therefore a=0, b=1$$

$$\therefore a+b=1$$

답 1

0912 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-0}{3-0}=\frac{y+2}{1+2}=\frac{z-6}{4-6}$$

$\therefore \dfrac{x}{3}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-6}{-2}$ ⇨ ❶

점 $C(a, b, 8)$이 이 직선 위에 있으므로

$\dfrac{a}{3}=\dfrac{b+2}{3}=\dfrac{8-6}{-2}$ $\therefore a=-3, b=-5$ ⇨ ❷

$\therefore ab=15$ ⇨ ❸

답 15

채점 기준	비율
❶ 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10%

0913 정육면체의 한 모서리의 길이가 3이므로

$C(0, 3, 3)$, $P(3, 2, 0)$

따라서 두 점 C, P를 지나는 직선의 방정식은

$\dfrac{x-0}{3-0}=\dfrac{y-3}{2-3}=\dfrac{z-3}{0-3}$

$\therefore x=9-3y=3-z$

답 ①

0914 $\dfrac{x-3}{4}=y+1=z-2=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=4t+3, y=t-1, z=t+2$ …… ㉠

$\dfrac{x-5}{6}=-y-3=\dfrac{z-4}{3}=s$ (s는 실수)로 놓으면

$x=6s+5, y=-s-3, z=3s+4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$4t+3=6s+5, t-1=-s-3, t+2=3s+4$

$\therefore t=-1, s=-1$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는 $(-1, -2, 1)$이므로

$p=-1, q=-2, r=1$

$\therefore p+q+r=-2$

답 -2

0915 직선 l의 방정식은

$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-5}{2}$

이므로 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-5}{2}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=3t+2, y=-t-1, z=2t+5$ …… ㉠ ⇨ ❶

직선 m의 방정식은

$\dfrac{x-1}{3-1}=\dfrac{y-4}{1-4}=\dfrac{z+3}{2+3}$, 즉 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z+3}{5}$

이므로 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z+3}{5}=s$ (s는 실수)로 놓으면

$x=2s+1, y=-3s+4, z=5s-3$ …… ㉡ ⇨ ❷

㉠, ㉡에서

$3t+2=2s+1, -t-1=-3s+4, 2t+5=5s-3$

$\therefore t=1, s=2$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는 $(5, -2, 7)$이다. ⇨ ❸

답 $(5, -2, 7)$

채점 기준	비율
❶ 직선 l의 방정식을 매개변수 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ 직선 m의 방정식을 매개변수 s에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ 두 직선의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	40%

0916 직선 AB의 방정식은

$\dfrac{x-3}{4-3}=\dfrac{y-0}{2-0}=\dfrac{z-0}{5-0}$, 즉 $x-3=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{5}$

이므로 $x-3=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{5}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=t+3, y=2t, z=5t$ …… ㉠

직선 CD의 방정식은

$\dfrac{x+2}{1+2}=\dfrac{y-0}{m-0}=\dfrac{z+3}{1+3}$, 즉 $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{m}=\dfrac{z+3}{4}$

이므로 $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{m}=\dfrac{z+3}{4}=s$ (s는 실수)로 놓으면

$x=3s-2, y=ms, z=4s-3$ …… ㉡

두 직선 AB, CD가 한 점에서 만나려면 ㉠, ㉡에서

$t+3=3s-2, 2t=ms, 5t=4s-3$

을 만족시키는 (t, s)가 하나 존재해야 한다.

$t+3=3s-2, 5t=4s-3$을 연립하여 풀면

$t=1, s=2$

이것을 $2t=ms$에 대입하면

$2m=2$ $\therefore m=1$

답 ③

0917 $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{-3}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=4t+2, y=3t+2, z=-3t-1$

이것을 주어진 구의 방정식에 대입하면

$(4t+2)^2+(3t+2)^2+(-3t-1)^2=9$

$34t^2+34t=0$, $34t(t+1)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=-1$

따라서 교점의 좌표는 $(2, 2, -1)$, $(-2, -1, 2)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(-2-2)^2+(-1-2)^2+(2+1)^2}=\sqrt{34}$

답 ③

0918 (1) $\dfrac{x-4}{3}=1-y=z=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=3t+4, y=1-t, z=t$ …… ㉠ ⇨ ❶

㉠을 주어진 구의 방정식에 대입하면

$(3t+4)^2+(1-t)^2+t^2=k$

$11t^2+22t+17-k=0$ …… ㉡

직선과 구가 접하려면 이차방정식 ㉡이 중근을 가져야 하므로 이차방정식 ㉡의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=11^2-11(17-k)=0$

$11k-66=0$ $\therefore k=6$ ⇨ ❷

(2) $k=6$을 ㉡에 대입하면

$11t^2+22t+11=0$, $11(t+1)^2=0$

$\therefore t=-1$

$t=-1$을 ㉠에 대입하면

$x=1, y=2, z=-1$

따라서 접점의 좌표는 $(1, 2, -1)$이다. ⇨ ❸

답 (1) 6 (2) $(1, 2, -1)$

채점 기준	비율
❶ 주어진 직선의 방정식을 매개변수 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ 접점의 좌표를 구할 수 있다.	30%

0919 두 점 A, B를 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1,\ 3,\ 4)$

직선 $\frac{x-1}{4}=2-y=\frac{z-6}{3}$의 방향벡터를 $\vec{v}$라 하면

$\vec{v}=(4,\ -1,\ 3)$

두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{|1\times4+3\times(-1)+4\times3|}{\sqrt{1^2+3^2+4^2}\sqrt{4^2+(-1)^2+3^2}}$$
$$=\frac{13}{\sqrt{26}\sqrt{26}}=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{3}\left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 답 $\frac{\pi}{3}$

0920 $2(x-1)=2y=a(z+5)$에서

$\frac{x-1}{a}=\frac{y}{a}=\frac{z+5}{2}$

두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(1,\ 1,\ 3)$, $\vec{v}=(a,\ a,\ 2)$

두 직선이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|1\times a+1\times a+3\times2|}{\sqrt{1^2+1^2+3^2}\sqrt{a^2+a^2+2^2}},\qquad \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|2a+6|}{\sqrt{11}\sqrt{2a^2+4}}$$

$\therefore\ \sqrt{11}\sqrt{2a^2+4}=\sqrt{2}|2a+6|$

위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$7a^2-24a-14=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 곱은 -2이다. 답 ②

0921 $x=t-1$, $y=4t+2$, $z=-2t$에서

$x+1=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{-2}$

$x=-2s+5$, $y=-s-1$, $z=4s+1$에서

$\frac{x-5}{-2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{4}$

두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(1,\ 4,\ -2)$, $\vec{v}=(-2,\ -1,\ 4)$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{|1\times(-2)+4\times(-1)+(-2)\times4|}{\sqrt{1^2+4^2+(-2)^2}\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+4^2}}$$
$$=\frac{14}{\sqrt{21}\sqrt{21}}=\frac{2}{3}$$

$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ 답 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

0922 주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$, x축, y축, z축의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$이라 하면

$\vec{u}=(1,\ 2,\ 2)$, $\vec{u_1}=(1,\ 0,\ 0)$, $\vec{u_2}=(0,\ 1,\ 0)$,

$\vec{u_3}=(0,\ 0,\ 1)$

$$\therefore\ \cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{u_1}|}{|\vec{u}||\vec{u_1}|}=\frac{|1\times1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{1}{3},$$
$$\cos\beta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u}||\vec{u_2}|}=\frac{|2\times1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{2}{3},$$
$$\cos\gamma=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{u_3}|}{|\vec{u}||\vec{u_3}|}=\frac{|2\times1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{2}{3}$$

$\therefore\ \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\frac{5}{3}$ 답 $\frac{5}{3}$

0923 두 점 A, B를 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(a+4,\ 4,\ b-2)$

직선 $\frac{x+1}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+8}{3}$의 방향벡터를 $\vec{v}$라 하면

$\vec{v}=(3,\ 2,\ 3)$

두 직선이 서로 평행하므로

$\vec{u}=k\vec{v}\ (k\neq0)$

라 하면 $\quad a+4=3k,\ 4=2k,\ b-2=3k$

$\therefore\ k=2,\ a=2,\ b=8$

$\therefore\ ab=16$ 답 ⑤

다른풀이 $\vec{u}\,/\!/\,\vec{v}$이므로

$\frac{a+4}{3}=\frac{4}{2}=\frac{b-2}{3}\qquad\therefore\ a=2,\ b=8$

0924 두 점 A, B를 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(2,\ -4,\ 2)$

직선 $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+1}{k}$의 방향벡터를 $\vec{v}$라 하면

$\vec{v}=(3,\ 4,\ k)$

두 직선이 서로 수직이므로 $\quad\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

$6-16+2k=0,\qquad 2k-10=0\qquad\therefore\ k=5$ 답 5

0925 구하는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}=(l,\ m,\ n)$이라 하고 주어진 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$라 하면

$\vec{u_1}=(1,\ -2,\ 4)$, $\vec{u_2}=(2,\ -3,\ 5)$

구하는 직선이 주어진 두 직선과 모두 수직이므로

$\vec{u}\cdot\vec{u_1}=0$, $\vec{u}\cdot\vec{u_2}=0$

$l-2m+4n=0$, $2l-3m+5n=0$

$\therefore\ l=2n,\ m=3n$

따라서 $\vec{u}=(2n,\ 3n,\ n)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$\frac{x-1}{2n}=\frac{y-2}{3n}=\frac{z-3}{n}$

$\therefore\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=z-3$ 답 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=z-3$

0926 직선 $\frac{x+1}{a}=\frac{y-3}{b}=\frac{z}{2}$와 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$라 하면

$\vec{u}=(a,\ b,\ 2)$, $\vec{u_1}=(2k-1,\ k+2,\ 2)$,

$\vec{u_2}=(5-k,\ 3k-2,\ k)$ ⇨ ❶

직선 $\frac{x+1}{a}=\frac{y-3}{b}=\frac{z}{2}$가 두 직선 l, m과 모두 평행하므로

$l\,/\!/\,m$

따라서 $\vec{u_2}=t\vec{u_1}\ (t\neq0)$이라 하면

$5-k=t(2k-1)$, $3k-2=t(k+2)$, $k=2t$

(i) $k=2t$를 $5-k=t(2k-1)$에 대입하면

$5-2t=t(4t-1),\qquad 4t^2+t-5=0$

$(4t+5)(t-1)=0\qquad\therefore\ t=-\frac{5}{4}$ 또는 $t=1$

(ⅱ) $k=2t$를 $3k-2=t(k+2)$에 대입하면

$6t-2=t(2t+2)$, $\quad t^2-2t+1=0$

$(t-1)^2=0 \quad \therefore t=1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $t=1$이므로 $\quad k=2$

$\therefore \vec{u_1}=(3, 4, 2)$ ⇨ ❷

이때 $\vec{u}=s\vec{u_1}$ $(s\neq0)$이라 하면

$a=3s$, $b=4s$, $2=2s$

$\therefore s=1$, $a=3$, $b=4$

$\therefore a+b+k=9$ ⇨ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ 세 직선의 방향벡터를 구할 수 있다.	20%
❷ $\vec{u_1}$을 구할 수 있다.	50%
❸ $a+b+k$의 값을 구할 수 있다.	30%

0927 $\dfrac{x-3}{2}=y+1=\dfrac{2-z}{5}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=2t+3$, $y=t-1$, $z=-5t+2$

점 A에서 주어진 직선에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 주어진 직선 위에 있으므로 $\mathrm{H}(2t+3, t-1, -5t+2)$로 놓을 수 있다.

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AH}}=(2t+5, t+5, -5t-3)$

이때 주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(2, 1, -5)$이고 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\vec{u}$이므로 $\quad \overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{u}=0$

$2(2t+5)+t+5-5(-5t-3)=0$

$30t+30=0 \quad \therefore t=-1$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(3, 4, 2)$이므로 구하는 거리는

$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\sqrt{3^2+4^2+2^2}=\sqrt{29}$ 답 ④

0928 (1) $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{5-z}{2}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=3t-1$, $y=6$, $z=5-2t$

점 H는 주어진 직선 위에 있으므로 $\mathrm{H}(3t-1, 6, 5-2t)$로 놓으면

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(3t-1, 6, 5-2t)$

이때 주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(3, 0, -2)$이고 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\vec{u}$이므로 $\quad \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{u}=0$

$3(3t-1)-2(5-2t)=0$

$13t-13=0 \quad \therefore t=1$

$\therefore \mathrm{H}(2, 6, 3)$

(2) $\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{2^2+6^2+3^2}=7$ 답 (1) H(2, 6, 3) (2) 7

0929 $\dfrac{x+2}{5}=y-1=\dfrac{3-z}{7}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=5t-2$, $y=t+1$, $z=3-7t$

점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 직선 l 위에 있으므로 $\mathrm{H}(5t-2, t+1, 3-7t)$로 놓을 수 있다.

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AH}}=(5t-6, t-3, 6-7t)$

이때 직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(5, 1, -7)$이고 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\vec{u}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{u}=0$

$5(5t-6)+t-3-7(6-7t)=0$

$75t-75=0 \quad \therefore t=1$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AH}}=(-1, -2, -1)$

두 직선 l, m 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{AH}}$의 길이와 같으므로

$\overline{\mathrm{AH}}=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$ 답 ②

0930 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$는 주어진 평면의 법선벡터이고, 점 H는 주어진 평면 위의 점이므로 점 $\mathrm{H}(4, -1, -1)$을 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(3, -6, 1)$인 평면의 방정식은

$3(x-4)-6(y+1)+z+1=0$

$\therefore 3x-6y+z-17=0$

따라서 $a=3$, $b=1$, $c=-17$이므로

$a+b-c=21$ 답 ①

0931 점 $(5, -1, -3)$을 지나고 법선벡터가 $(1, -2, 3)$인 평면의 방정식은

$x-5-2(y+1)+3(z+3)=0$

$\therefore x-2y+3z+2=0$

따라서 $a=-2$, $b=3$, $c=2$이므로

$abc=-12$ 답 -12

0932 직선 $x-3=\dfrac{y+1}{6}=\dfrac{5-z}{6}$의 방향벡터는

$(1, 6, -6)$ ⇨ ❶

따라서 점 $(-1, 0, 7)$을 지나고 법선벡터가 $(1, 6, -6)$인 평면의 방정식은

$x+1+6(y-0)-6(z-7)=0$

$\therefore x+6y-6z+43=0$ ⇨ ❷

이 평면이 점 $(a, -6, 0)$을 지나므로

$a-36+43=0 \quad \therefore a=-7$ ⇨ ❸

답 -7

채점 기준	비율
❶ 직선의 방향벡터를 구할 수 있다.	20%
❷ 평면의 방정식을 구할 수 있다.	50%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30%

0933 구의 중심을 C라 하면 $\quad \mathrm{C}(-2, 1, 4)$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{CP}}=(2, 1, -2)$

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$는 주어진 평면에 수직이므로 점 $\mathrm{P}(0, 2, 2)$를 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(2, 1, -2)$인 평면의 방정식은

$2(x-0)+y-2-2(z-2)=0$

$\therefore 2x+y-2z+2=0$

y축 위의 점은 x좌표, z좌표가 모두 0이므로 $x=0$, $z=0$을 위의 식에 대입하면

$y+2=0 \quad \therefore y=-2$ 답 ④

0934 주어진 세 점을 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라 하고 세 점의 좌표를 각각 대입하면

$a+b+2c+d=0$, $-2a+2c+d=0$, $3a-b+d=0$

$\therefore b=-3a$, $c=4a$, $d=-6a$

따라서 평면의 방정식은

$ax-3ay+4az-6a=0$

$\therefore x-3y+4z-6=0$

① $-1-3+4\times3-6\neq0$
② $-3\times2+4-6\neq0$
③ $2-3+4\times3-6\neq0$
④ $4-3\times2+4\times(-1)-6\neq0$
⑤ $5-3+4-6=0$
따라서 평면 $x-3y+4z-6=0$ 위의 점은 ⑤이다. 답 ⑤

0935 주어진 세 점을 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라 하고 세 점의 좌표를 각각 대입하면

$a+4b+c+d=0$, $2a+3b-4c+d=0$, $-3a+5c+d=0$
$\therefore a=3c$, $b=-2c$, $d=4c$

따라서 평면의 방정식은

$3cx-2cy+cz+4c=0$
$\therefore 3x-2y+z+4=0$

z축 위의 점은 x좌표, y좌표가 모두 0이므로 $x=0$, $y=0$을 위의 식에 대입하면

$z+4=0$ $\quad\therefore z=-4$

즉 z축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ 0,\ -4)$이다. 답 $(0,\ 0,\ -4)$

0936 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라 하고 세 점의 좌표를 각각 대입하면

$a+b-c+d=0$, $3a-b+3c+d=0$, $5a+b+d=0$
$\therefore b=-7a$, $c=-4a$, $d=2a$

따라서 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식은

$ax-7ay-4az+2a=0$
$\therefore x-7y-4z+2=0$ ⇨ ❶

이 평면의 법선벡터가 $(1,\ -7,\ -4)$이므로 구하는 직선의 방향벡터는 $(1,\ -7,\ -4)$이다.
따라서 점 $A(1,\ 1,\ -1)$을 지나고 방향벡터가 $(1,\ -7,\ -4)$인 직선의 방정식은

$x-1=\dfrac{1-y}{7}=\dfrac{z+1}{-4}$ ⇨ ❷

답 $x-1=\dfrac{1-y}{7}=\dfrac{z+1}{-4}$

채점 기준	비율
❶ 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식을 구할 수 있다.	60%
❷ 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40%

0937 $x^2+y^2+z^2-4x-2z=0$에서

$(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=5$

$x^2+y^2+z^2-2x+6y=0$에서

$(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=10$

$x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z=0$에서

$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=3$

평면 $ax+by+cz-4=0$이 세 구의 부피를 모두 이등분하려면 세 구의 중심 $(2,\ 0,\ 1)$, $(1,\ -3,\ 0)$, $(1,\ -1,\ 1)$을 지나야 하므로

$2a+c-4=0$, $a-3b-4=0$, $a-b+c-4=0$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-1$, $c=2$
$\therefore a+b+c=2$ 답 2

0938 구하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$으로 놓으면 평면의 법선벡터 $(a,\ b,\ c)$와 주어진 직선의 방향벡터 $(3,\ -1,\ 1)$이 서로 수직이므로

$(a,\ b,\ c)\cdot(3,\ -1,\ 1)=0$
$\therefore 3a-b+c=0$ …… ㉠

한편 점 $(3,\ 3,\ 1)$과 직선 위의 점 $(-1,\ -4,\ -2)$는 모두 평면 위에 있으므로

$3a+3b+c+d=0$, $-a-4b-2c+d=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2b$, $c=-5b$, $d=-4b$
따라서 구하는 평면의 방정식은

$2bx+by-5bz-4b=0$
$\therefore 2x+y-5z=4$ 답 ③

0939 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(4,\ 1,\ -2)$, $\vec{v}=(2,\ 2,\ 5)$

평면이 두 직선을 포함하므로

$\vec{n}\perp\vec{u}$, $\vec{n}\perp\vec{v}$

$\vec{n}\perp\vec{u}$에서 $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$이므로

$(a,\ b,\ 2)\cdot(4,\ 1,\ -2)=0$
$\therefore 4a+b-4=0$ …… ㉠

$\vec{n}\perp\vec{v}$에서 $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$이므로

$(a,\ b,\ 2)\cdot(2,\ 2,\ 5)=0$
$\therefore 2a+2b+10=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-8$
$\therefore a-b=11$ 답 ②

0940 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(1,\ 3,\ 1)$, $\vec{v}=(2,\ 1,\ 3)$

구하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라 하고 이 평면의 법선벡터를 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$라 하면 평면이 두 직선을 포함하므로

$\vec{n}\perp\vec{u}$, $\vec{n}\perp\vec{v}$

$\vec{n}\perp\vec{u}$에서 $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$이므로

$(a,\ b,\ c)\cdot(1,\ 3,\ 1)=0$
$\therefore a+3b+c=0$ …… ㉠

$\vec{n}\perp\vec{v}$에서 $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$이므로

$(a,\ b,\ c)\cdot(2,\ 1,\ 3)=0$
$\therefore 2a+b+3c=0$ …… ㉡

이때 평면은 직선 $x-2=\dfrac{y+2}{3}=z-6$ 위의 점 $(2,\ -2,\ 6)$을 지나므로

$2a-2b+6c+d=0$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$a=-8b$, $c=5b$, $d=-12b$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$-8bx+by+5bz-12b=0$
$\therefore 8x-y-5z+12=0$ 답 $8x-y-5z+12=0$

0941 주어진 두 평면의 교선을 포함하는 평면의 방정식은

$2x+y-z+1+k(x-3y+3z-2)=0$ (k는 실수)

으로 놓으면 이 평면이 점 $(1,\ 1,\ 2)$를 지나므로

$2+2k=0 \qquad \therefore k=-1$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$2x+y-z+1-(x-3y+3z-2)=0$

$\therefore x+4y-4z+3=0$ 답 ②

0942 $x-4y+3z+1=0$ ...... ㉠

$x+z-5=0$ ...... ㉡

㉠−㉡을 하면

$-4y+2z+6=0 \qquad \therefore y=\frac{z+3}{2}$ ...... ㉢

㉠−㉡×3을 하면

$-2x-4y+16=0 \qquad \therefore y=\frac{8-x}{2}$ ...... ㉣

㉢, ㉣에서 두 평면의 교선의 방정식은

$\frac{8-x}{2}=y=\frac{z+3}{2}$ ⇨ ❶

따라서 교선의 방향벡터는 $(-2,\ 1,\ 2)$이므로 ⇨ ❷

$a=-2,\ b=2 \qquad \therefore ab=-4$ ⇨ ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ 교선의 방정식을 구할 수 있다.	60%
❷ 교선의 방향벡터를 구할 수 있다.	20%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20%

0943 $x-y+z=0$ ...... ㉠

$2x+y+z=4$ ...... ㉡

㉡−㉠을 하면

$x+2y=4 \qquad \therefore y=\frac{-x+4}{2}$ ...... ㉢

㉠×2−㉡을 하면

$-3y+z=-4 \qquad \therefore y=\frac{z+4}{3}$ ...... ㉣

㉢, ㉣에서 두 평면의 교선의 방정식은

$\frac{-x+4}{2}=y=\frac{z+4}{3}$

$\therefore \frac{x-4}{2}=-y=\frac{z+4}{-3}$ 답 ①

0944 $x+y-2z+5=0$ ...... ㉠

$x-y+4z-3=0$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면

$2x+2z+2=0 \qquad \therefore x=-z-1$ ...... ㉢

㉠×2+㉡을 하면

$3x+y+7=0 \qquad \therefore x=\frac{y+7}{-3}$ ...... ㉣

㉢, ㉣에서 두 평면의 교선의 방정식은

$x=\frac{y+7}{-3}=-z-1$

이때 이 직선과 직선 $\frac{x+5}{3}=\frac{y-4}{k}=\frac{z+1}{-3}$이 서로 수직이므로

$(1,\ -3,\ -1)\cdot(3,\ k,\ -3)=0$

$6-3k=0 \qquad \therefore k=2$ 답 2

0945 $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{5}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=3t+1,\ y=2t,\ z=5t-2$

이것을 주어진 평면의 방정식에 대입하면

$3t+1-10t+2(5t-2)=0$

$3t-3=0 \qquad \therefore t=1$

따라서 교점의 좌표는 $(4,\ 2,\ 3)$이므로

$a=4,\ b=2,\ c=3$

$\therefore a-b+c=5$ 답 ⑤

0946 $x-2=\frac{y+1}{3}=\frac{3-z}{4}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=t+2,\ y=3t-1,\ z=3-4t$

이것을 주어진 평면의 방정식에 대입하면

$2(t+2)-2(3t-1)-3(3-4t)-5=0$

$8t-8=0 \qquad \therefore t=1$

따라서 교점의 좌표는 $(3,\ 2,\ -1)$

이때 직선 l의 방향벡터는 $(1,\ 3,\ -4)$이므로 직선 l에 수직인 평면의 법선벡터는 $(1,\ 3,\ -4)$이다.

따라서 구하는 평면의 방정식은

$x-3+3(y-2)-4(z+1)=0$

$\therefore x+3y-4z-13=0$ 답 $x+3y-4z-13=0$

0947 벡터 $\overrightarrow{AH}$와 평면 $3x-2y+z=8$은 서로 수직이므로 이 평면의 법선벡터 $(3,\ -2,\ 1)$이 두 점 A, H를 지나는 직선의 방향벡터가 된다.

따라서 점 $A(-2,\ 0,\ 0)$을 지나고 방향벡터가 $(3,\ -2,\ 1)$인 직선의 방정식은

$\frac{x+2}{3}=\frac{y}{-2}=z$

$\frac{x+2}{3}=\frac{y}{-2}=z=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=3t-2,\ y=-2t,\ z=t$

이것을 $3x-2y+z=8$에 대입하면

$3(3t-2)+4t+t=8$

$14t=14 \qquad \therefore t=1$

따라서 점 H의 좌표는 $(1,\ -2,\ 1)$이므로

$a=1,\ b=-2,\ c=1$

$\therefore a+b+c=0$ 답 0

0948 두 평면 $x-y+z+3=0$, $x+2y-z+6=0$의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$\overrightarrow{n_1}=(1,\ -1,\ 1),\ \overrightarrow{n_2}=(1,\ 2,\ -1)$

$$\therefore \cos\theta=\frac{|1\times1+(-1)\times2+1\times(-1)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{3}$$ 답 ⑤

0949 yz평면과 평면 $2x+y-2z+3=0$의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$\overrightarrow{n_1}=(1,\ 0,\ 0)$, $\overrightarrow{n_2}=(2,\ 1,\ -2)$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{|1\times2|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\dfrac{2}{3}$ 답 $\dfrac{2}{3}$

0950 두 평면 $ax+y+z=4$, $x+2y-z=5$의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$\overrightarrow{n_1}=(a,\ 1,\ 1)$, $\overrightarrow{n_2}=(1,\ 2,\ -1)$

두 평면이 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$이므로

$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$

$\dfrac{1}{2}=\dfrac{|a+1\times2+1\times(-1)|}{\sqrt{a^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}$, $\quad \dfrac{1}{2}=\dfrac{|a+1|}{\sqrt{6}\sqrt{a^2+2}}$

$\sqrt{6a^2+12}=2|a+1|$, $\quad 6a^2+12=4a^2+8a+4$

$2a^2-8a+8=0$, $\quad 2(a-2)^2=0$

$\therefore a=2$ 답 2

0951 평면 $2x+2y+z-2=0$과 xy평면의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$\overrightarrow{n_1}=(2,\ 2,\ 1)$, $\overrightarrow{n_2}=(0,\ 0,\ 1)$ ⇨ ❶

두 평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta=\dfrac{|1\times1|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\dfrac{1}{3}$ ⇨ ❷

이때 한 변의 길이가 4인 정삼각형의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=4\sqrt{3}$

이므로 구하는 정사영의 넓이는

$4\sqrt{3}\cos\theta=4\sqrt{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ ⇨ ❸

답 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

채점 기준	비율
❶ 두 평면의 법선벡터를 구할 수 있다.	20%
❷ 두 평면이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 정사영의 넓이를 구할 수 있다.	40%

타쎈 특강 정사영의 넓이

평면 α 위의 넓이가 S인 도형의 평면 β 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 할 때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면

$S'=S\cos\theta$

0952 두 평면 $x-2y+3z-1=0$, $2x+ay+bz+1=0$의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$\overrightarrow{n_1}=(1,\ -2,\ 3)$, $\overrightarrow{n_2}=(2,\ a,\ b)$

두 평면이 서로 평행하므로

$\overrightarrow{n_2}=k\overrightarrow{n_1}\ (k\neq0)$

이라 하면 $\quad 2=k,\ a=-2k,\ b=3k$

$\therefore k=2,\ a=-4,\ b=6$

$\therefore a+b=2$ 답 ②

0953 두 평면 $x+(k-2)y+3kz=2$, $3x+(4-k)y-4z=1$의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$\overrightarrow{n_1}=(1,\ k-2,\ 3k)$, $\overrightarrow{n_2}=(3,\ 4-k,\ -4)$

두 평면이 서로 수직이므로 $\quad \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$

$(1,\ k-2,\ 3k)\cdot(3,\ 4-k,\ -4)=0$

$3+(k-2)(4-k)-12k=0$

$k^2+6k+5=0$, $\quad (k+5)(k+1)=0$

$\therefore k=-5$ 또는 $k=-1$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 -6이다. 답 -6

0954 주어진 두 평면의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$\overrightarrow{n_1}=(1,\ -1,\ 1)$, $\overrightarrow{n_2}=(3,\ 1,\ -5)$

구하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라 하고 이 평면의 법선벡터를 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$라 하면

$\vec{n}\perp\overrightarrow{n_1}$, $\vec{n}\perp\overrightarrow{n_2}$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{n_1}$에서 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{n_1}=0$이므로

$(a,\ b,\ c)\cdot(1,\ -1,\ 1)=0$

$\therefore a-b+c=0$ …… ㉠

$\vec{n}\perp\overrightarrow{n_2}$에서 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$이므로

$(a,\ b,\ c)\cdot(3,\ 1,\ -5)=0$

$\therefore 3a+b-5c=0$ …… ㉡

구하는 평면이 점 $(0,\ 2,\ -1)$을 지나므로

$2b-c+d=0$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $\quad a=c,\ b=2c,\ d=-3c$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$cx+2cy+cz-3c=0$

$\therefore x+2y+z-3=0$ 답 $x+2y+z-3=0$

0955 주어진 네 평면의 법선벡터를 차례대로 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$, $\overrightarrow{n_3}$, $\overrightarrow{n_4}$라 하면

$\overrightarrow{n_1}=(a,\ -2,\ 6)$, $\overrightarrow{n_2}=(2,\ -1,\ 2a-5)$,

$\overrightarrow{n_3}=(2,\ a,\ -b)$, $\overrightarrow{n_4}=(2-b,\ 2,\ a-2)$

$\overrightarrow{n_1}\,/\!/\,\overrightarrow{n_2}$이므로

$\overrightarrow{n_1}=k\overrightarrow{n_2}\ (k\neq0)$

라 하면 $\quad a=2k,\ -2=-k,\ 6=k(2a-5)$

$\therefore k=2,\ a=4$

$\overrightarrow{n_3}\perp\overrightarrow{n_4}$이므로 $\quad \overrightarrow{n_3}\cdot\overrightarrow{n_4}=0$

$2(2-b)+2a-b(a-2)=0$

$12-4b=0$ $\quad \therefore b=3$

$\therefore a+b=7$ 답 ①

0956 주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$, 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면

$\vec{u}=(2,\ 3,\ 1)$, $\vec{n}=(3,\ 1,\ -2)$

직선과 평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 두 벡터 $\vec{u}$, $\vec{n}$이 이루는 예각의 크기는 $\dfrac{\pi}{2}-\theta$이므로

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{|2\times3+3\times1+1\times(-2)|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}}$

$=\dfrac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=\dfrac{1}{2}$

따라서 $\sin\theta=\frac{1}{2}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 답 $\frac{\pi}{6}$

타쎈 특강 $\frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수

① $\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\cos\theta$

② $\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\mp\sin\theta$ (복호동순)

③ $\tan\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\mp\cot\theta$ (복호동순)

0957 x축의 방향벡터를 $\vec{u}$, 평면 $x-2y+z-3=0$의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면

$\vec{u}=(1, 0, 0)$, $\vec{n}=(1, -2, 1)$

두 벡터 $\vec{u}$, $\vec{n}$이 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{|1\times1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{6}$ 답 ②

0958 주어진 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$, 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{n}=(a, -4, 1)$, $\vec{u}=(2, -1, b)$

평면과 직선이 서로 수직이므로 — 평면의 법선벡터와 직선의 방향벡터가 서로 평행하다.

$\vec{n}=k\vec{u}$ $(k\neq0)$

라 하면 $a=2k$, $-4=-k$, $1=bk$

$\therefore k=4, a=8, b=\frac{1}{4}$

$\therefore ab=2$ 답 2

0959 두 점 $(1, 2, 3)$, $(-2, k, 4)$를 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=(-3, k-2, 1)$

주어진 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면

$\vec{n}=(1, -2, k)$

직선과 평면이 서로 평행하므로 $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$

$-3-2(k-2)+k=0$ $\therefore k=1$ 답 ③

참고 점 $(1, 2, 3)$의 좌표를 $x-2y+z-1=0$에 대입하면

$1-2\times2+3-1\neq0$

즉 점 $(1, 2, 3)$은 평면 $x-2y+z-1=0$ 위에 있지 않으므로 주어진 직선과 평면은 서로 평행하다.

0960 구하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라 하면 이 평면이 두 점 A, B를 지나므로

$3a+b+c+d=0$, $-a+2b+d=0$ …… ㉠ ⇨ ❶

또 주어진 직선과 평면이 서로 평행하므로 직선의 방향벡터 $(4, -3, -5)$와 평면의 법선벡터 (a, b, c)는 서로 수직이다.

즉 $(4, -3, -5)\cdot(a, b, c)=0$이므로

$4a-3b-5c=0$ …… ㉡ ⇨ ❷

㉠, ㉡에서 $a=-c$, $b=-3c$, $d=5c$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$-cx-3cy+cz+5c=0$

$\therefore x+3y-z-5=0$ ⇨ ❸

답 $x+3y-z-5=0$

채점 기준	비율
❶ 평면이 두 점 A, B를 지남을 이용할 수 있다.	20%
❷ 주어진 직선과 평면이 서로 평행함을 이용할 수 있다.	40%
❸ 평면의 방정식을 구할 수 있다.	40%

0961 $2x-1=y+3=z-5$에서

$$x-\frac{1}{2}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-5}{2}$$

이므로 주어진 직선의 방향벡터는 $(1, 2, 2)$이다.

직선과 평면이 만나지 않으려면 서로 평행해야 하므로 직선의 방향벡터와 평면의 법선벡터가 서로 수직이어야 한다.

ㄱ. 평면의 법선벡터가 $(2, 1, 1)$이므로

$(1, 2, 2)\cdot(2, 1, 1)=2+2+2\neq0$

따라서 직선과 평면은 만난다.

ㄴ. 평면의 법선벡터가 $(2, 1, -2)$이므로

$(1, 2, 2)\cdot(2, 1, -2)=2+2-4=0$

이때 $2\times\frac{1}{2}+(-3)-2\times5-2\neq0$에서 직선 위의 점 $\left(\frac{1}{2}, -3, 5\right)$가 평면 위에 있지 않으므로 직선과 평면은 만나지 않는다.

ㄷ. 평면의 법선벡터가 $(2, -2, 1)$이므로

$(1, 2, 2)\cdot(2, -2, 1)=2-4+2=0$

이때 $2\times\frac{1}{2}-2\times(-3)+5-12=0$에서 직선 위의 점 $\left(\frac{1}{2}, -3, 5\right)$가 평면 위에 있으므로 직선은 평면에 포함된다.

이상에서 주어진 직선과 만나지 않는 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

0962 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b-5}{2}, \frac{c+5}{2}\right)$$

$\overline{AB}$의 중점은 평면 $x+y-4z=-3$ 위에 있으므로

$$\frac{a+4}{2}+\frac{b-5}{2}-4\times\frac{c+5}{2}=-3$$

$\therefore a+b-4c=15$ …… ㉠

또 평면 $x+y-4z=-3$과 직선 AB가 서로 수직이므로 평면의 법선벡터 $(1, 1, -4)$와 직선 AB의 방향벡터 $\overrightarrow{AB}=(a-4, b+5, c-5)$는 서로 평행하다.

즉 $(a-4, b+5, c-5)=k(1, 1, -4)$ $(k\neq0)$라 하면

$a-4=k$, $b+5=k$, $c-5=-4k$

$\therefore a=k+4, b=k-5, c=-4k+5$

이것을 ㉠에 대입하면

$k+4+k-5-4(-4k+5)=15$

$18k=36$ $\therefore k=2$

따라서 $a=6$, $b=-3$, $c=-3$이므로

$a+b+c=0$ 답 ③

0963 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1-3}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{1+3}{2}\right),\ 즉\ (-2, 1, 2)$$

$\overline{AB}$의 중점은 평면 $ax+by+cz+7=0$ 위에 있으므로

$-2a+b+2c+7=0$ …… ㉠

또 평면 $ax+by+cz+7=0$과 직선 AB가 서로 수직이므로 평면의 법선벡터 $(a,\ b,\ c)$와 직선 AB의 방향벡터 $\overrightarrow{AB}=(-2,\ 6,\ 2)$는 서로 평행하다.

즉 $(a,\ b,\ c)=k(-2,\ 6,\ 2)\ (k\neq0)$라 하면

$a=-2k,\ b=6k,\ c=2k$

이것을 ㉠에 대입하면

$4k+6k+4k+7=0$

$14k+7=0 \qquad \therefore\ k=-\frac{1}{2}$

따라서 $a=1,\ b=-3,\ c=-1$이므로

$abc=3$ 답 3

0964 세 점 $(1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 2,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 1)$을 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라 하고 세 점의 좌표를 각각 대입하면

$a+d=0,\ 2b+d=0,\ c+d=0$

$\therefore\ a=-d,\ b=-\frac{d}{2},\ c=-d$

따라서 세 점을 지나는 평면의 방정식은

$-dx-\frac{d}{2}y-dz+d=0$, 즉 $2x+y+2z-2=0$

이므로 이 평면과 점 $(7,\ -3,\ 1)$ 사이의 거리는

$\frac{|14-3+2-2|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{11}{3}$ 답 ④

0965 점 $P(-5,\ 1,\ 0)$과 평면 $x-3y+z-14=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-5-3-14|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{22}{\sqrt{11}}=2\sqrt{11}$

$\therefore\ \overline{PP'}=2\times2\sqrt{11}=4\sqrt{11}$ 답 $4\sqrt{11}$

0966 두 평면 사이의 거리는 평면 $x-\sqrt{2}y+5z=6$ 위의 점 $(1,\ 0,\ 1)$과 평면 $x-\sqrt{2}y+5z-8=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|1+5-8|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{2})^2+5^2}}=\frac{2}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$ 답 $\frac{\sqrt{7}}{7}$

0967 벡터 $\vec{n}=(4,\ -1,\ 2)$와 수직이고 점 $(-3,\ 5,\ -2)$를 지나는 평면의 방정식은

$4(x+3)-(y-5)+2(z+2)=0$

$\therefore\ 4x-y+2z+21=0$

이때 $\overline{OP}$의 길이의 최솟값은 원점 O와 평면 $4x-y+2z+21=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|21|}{\sqrt{4^2+(-1)^2+2^2}}=\sqrt{21}$ 답 ②

0968 $x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z+8=0$에서

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=1$ ⇨ ❶

구의 중심 $(1,\ 2,\ -2)$와 평면 $2x+y+2z-9=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2+2-4-9|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=3$ ⇨ ❷

구의 반지름의 길이가 1이므로 구하는 최댓값은

$3+1=4$ ⇨ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 구의 방정식을 변형할 수 있다.	20%
❷ 구의 중심과 평면 사이의 거리를 구할 수 있다.	50%
❸ 구 위의 점과 평면 사이의 거리의 최댓값을 구할 수 있다.	30%

0969 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면

$\vec{p}=(x,\ y,\ z)$, $\vec{p}-\vec{a}=(x-2,\ y-4,\ z-2)$

$\vec{p}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$에서

$x(x-2)+y(y-4)+z(z-2)=0$

$x^2-2x+y^2-4y+z^2-2z=0$

$\therefore\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(1,\ 2,\ 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$인 구이므로 구하는 부피는

$\frac{4}{3}\pi\times(\sqrt{6})^3=8\sqrt{6}\pi$ 답 ③

0970 구 위의 임의의 점을 $P(x,\ y,\ z)$라 하면

$\overrightarrow{AP}=(x+1,\ y,\ z+3)$, $\overrightarrow{BP}=(x-1,\ y+4,\ z-5)$

$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$이므로 $\qquad \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$

$(x+1)(x-1)+y(y+4)+(z+3)(z-5)=0$

$x^2-1+y^2+4y+z^2-2z-15=0$

$\therefore\ x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=21$

점 $(4,\ -3,\ k)$가 이 구 위에 있으므로

$4^2+(-1)^2+(k-1)^2=21, \qquad (k-1)^2=4$

$k-1=\pm2 \qquad \therefore\ k=3\ (\because\ k>0)$ 답 ③

0971 $|\vec{x}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{x}+|\vec{a}|^2=9|\vec{b}|^2$에서

$|\vec{x}-\vec{a}|^2=|3\vec{b}|^2$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $3|\vec{b}|$인 구이다.

이때 $|\vec{b}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+4^2}=\sqrt{21}$이므로 구하는 겉넓이는

$4\pi\times(3\sqrt{21})^2=756\pi$ 답 756π

0972 구의 중심 $(2,\ -1,\ 0)$과 평면 $4x-y+8z-a=0$ 사이의 거리가 구의 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|8+1-a|}{\sqrt{4^2+(-1)^2+8^2}}=2, \qquad |9-a|=18$

$9-a=\pm18 \qquad \therefore\ a=27\ (\because\ a>0)$ 답 ⑤

0973 구의 중심 $(1,\ 1,\ 1)$과 평면 $6x+3y-2z-21=0$ 사이의 거리가 구의 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|6+3-2-21|}{\sqrt{6^2+3^2+(-2)^2}}=2$ 답 ①

0974 평행한 두 평면에 구가 동시에 접하면 두 평면 사이의 거리는 구의 지름의 길이와 같다. ⇨ ❶

평면 $4x-y+z-5=0$ 위의 한 점 $(1,\ 0,\ 1)$과 평면 $4x-y+z-8=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4+1-8|}{\sqrt{4^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⇨ ❷

따라서 구의 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로 구하는 겉넓이는

$4\pi\times\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{\pi}{2}$ ⇨ ❸

답 $\frac{\pi}{2}$

채점 기준	비율
❶ 두 평면 사이의 거리가 구의 지름의 길이와 같음을 알 수 있다.	20%
❷ 두 평면 사이의 거리를 구할 수 있다.	40%
❸ 구의 겉넓이를 구할 수 있다.	40%

0975 $x-1=y+2=\frac{z-1}{2}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=t+1,\ y=t-2,\ z=2t+1$

점 C는 주어진 직선 위에 있으므로 $\mathrm{C}(t+1,\ t-2,\ 2t+1)$ $(t>2)$로 놓으면 점 C와 평면 $2x-y+2z-5=0$ 사이의 거리는 구의 반지름의 길이와 같다. 즉

$b>0$이므로 $t-2>0$ $\therefore t>2$

$$\frac{|2(t+1)-(t-2)+2(2t+1)-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=7$$

$|5t+1|=21,\quad 5t+1=\pm21$

$\therefore t=4$ $(\because t>2)$

따라서 $\mathrm{C}(5,\ 2,\ 9)$이므로 $a=5,\ b=2,\ c=9$

$\therefore a-b+c=12$ 답 12

0976 구의 중심 $(1,\ 1,\ 1)$과 평면 $x-y+z-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1-1+1-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

구의 반지름의 길이는 2이므로 구가 평면과 만나서 생기는 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$ 답 ②

0977 구의 중심 $(2,\ 1,\ -3)$과 zx평면, 즉 평면 $y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}}=1$$

구의 반지름의 길이는 4이므로 구가 zx평면과 만나서 생기는 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$

따라서 구하는 원의 둘레의 길이는

$2\pi\times\sqrt{15}=2\sqrt{15}\pi$ 답 $2\sqrt{15}\pi$

다른풀이 zx평면 위의 점은 y좌표가 0이므로 주어진 구의 방정식에 $y=0$을 대입하면

$(x-2)^2+(z+3)^2=15$

따라서 주어진 구와 zx평면이 만나서 생기는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{15}$이므로 구하는 원의 둘레의 길이는

$2\pi\times\sqrt{15}=2\sqrt{15}\pi$

0978 구의 중심 $(-3,\ 1,\ -2)$와 평면 $x+2y+2z-7=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-3+2-4-7|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=4$$

이때 평면과 구가 만나서 생기는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\pi r^2=9\pi\quad \therefore r=3$

따라서 구의 반지름의 길이는 $\sqrt{4^2+3^2}=5$이므로

$k=5^2=25$ 답 ⑤

0979 (1) 구하는 원의 중심을 $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(a+1,\ b,\ c-1)$

이 벡터와 주어진 평면은 서로 수직이므로 평면의 법선벡터를 $\vec{n}=(1,\ 1,\ 1)$이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\,/\!/\,\vec{n}$

즉 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=k\vec{n}$ $(k\neq0)$이라 하면

$a+1=k,\ b=k,\ c-1=k$

$\therefore a=k-1,\ b=k,\ c=k+1$ ⇨ ❶

이때 점 $\mathrm{C}(k-1,\ k,\ k+1)$은 평면 $x+y+z-6=0$ 위에 있으므로

$k-1+k+k+1-6=0$

$3k-6=0\quad \therefore k=2$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(1,\ 2,\ 3)$이다. ⇨ ❷

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(2,\ 2,\ 2)$이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$ ⇨ ❸

따라서 평면과 구가 만나서 생기는 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$

이므로 구하는 넓이는 $\pi\times2^2=4\pi$ ⇨ ❹

답 (1) $(1,\ 2,\ 3)$ (2) 4π

채점 기준	비율
❶ $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\,/\!/\,\vec{n}$임을 이용할 수 있다.	30%
❷ 원의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	20%
❸ $\lvert\overrightarrow{\mathrm{OC}}\rvert$를 구할 수 있다.	20%
❹ 원의 넓이를 구할 수 있다.	30%

0980 전략 점 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(u_1,\ u_2,\ u_3)$인 직선의 방정식은 $\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{u_2}=\frac{z-z_1}{u_3}$임을 이용한다.

풀이 $3(x+1)=4(y-1)=-12z$에서

$\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{3}=-z$

이 직선의 방향벡터는 $(4,\ 3,\ -1)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$\frac{x-3}{4}=\frac{y+7}{3}=1-z$

이 직선이 점 $(a,\ b,\ 0)$을 지나므로

$\frac{a-3}{4}=\frac{b+7}{3}=1\quad \therefore a=7,\ b=-4$

$\therefore a-b=11$ 답 11

0981 전략 방향벡터가 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$인 두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$임을 이용한다.

풀이 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(-7,\ 1,\ 2),\ \vec{v}=(2,\ 1,\ -1)$

$$\therefore \cos\theta=\frac{|-7\times2+1\times1+2\times(-1)|}{\sqrt{(-7)^2+1^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{15}{\sqrt{54}\sqrt{6}}=\frac{5}{6}$$ 답 $\frac{5}{6}$

0982 전략 두 평면 $ax+by+cz+d=0$, $a'x+b'y+c'z+d'=0$의 교선을 포함하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d+k(a'x+b'y+c'z+d')=0$ (k는 실수)으로 놓는다.

풀이 주어진 두 평면의 교선을 포함하는 평면의 방정식은

$2x+y-z-6+k(x-y+3z-2)=0$ (k는 실수)

으로 놓으면 이 평면이 원점을 지나므로

$-6-2k=0 \quad \therefore k=-3$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$2x+y-z-6-3(x-y+3z-2)=0$

$\therefore x-4y+10z=0$

즉 $a=-4$, $b=10$이므로 $\quad a+b=6$ 답 ⑤

0983 전략 평면에 수직인 직선의 방향벡터는 그 평면의 법선벡터임을 이용한다.

풀이 주어진 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면

$\vec{n}=(2,\ -1,\ 4)$

따라서 점 $(3,\ 2,\ -2)$를 지나고 방향벡터가 $\vec{n}=(2,\ -1,\ 4)$인 직선의 방정식은

평면과 직선이 수직이므로 $\vec{n}$은 직선의 방향벡터이다.

$$\frac{x-3}{2}=2-y=\frac{z+2}{4}$$

이 직선이 점 $(a,\ 4,\ b)$를 지나므로

$$\frac{a-3}{2}=2-4=\frac{b+2}{4} \qquad \therefore a=-1,\ b=-10$$

$\therefore ab=10$ 답 ④

0984 전략 구의 중심과 평면 사이의 거리가 구의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 구의 중심 $(0,\ 5,\ -2)$와 평면 $x+2y-3z-2=0$ 사이의 거리는 구의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|10+6-2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$$

따라서 구하는 겉넓이는

$4\pi\times(\sqrt{14})^2=56\pi$ 답 ⑤

0985 전략 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구한 후 yz평면 위의 점은 x좌표가 0임을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z+13=0$에서

$(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=1$

이므로 점 $A(3,\ 5,\ 2)$와 구의 중심 $(2,\ 3,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{2-3}=\frac{y-5}{3-5}=\frac{z-2}{-1-2}$$

$$\therefore x-3=\frac{y-5}{2}=\frac{z-2}{3}$$

yz평면 위의 점은 x좌표가 0이므로 $x=0$을 위의 식에 대입하면

$$-3=\frac{y-5}{2}=\frac{z-2}{3} \qquad \therefore y=-1,\ z=-7$$

따라서 $B(0,\ -1,\ -7)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(-3)^2+(-1-5)^2+(-7-2)^2}=3\sqrt{14}$ 답 ③

0986 전략 두 직선의 방정식을 매개변수로 나타낸 후 연립하여 교점의 좌표를 구한다.

풀이 $\dfrac{x-1}{2}=-y=\dfrac{z-8}{3}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=2t+1,\ y=-t,\ z=3t+8$ …… ㉠

$x+3=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-2}{2}=s$ (s는 실수)로 놓으면

$x=s-3,\ y=4s+2,\ z=2s+2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$2t+1=s-3,\ -t=4s+2,\ 3t+8=2s+2$

$\therefore t=-2,\ s=0$ ➩ ❶

따라서 두 직선의 교점의 좌표는

$(-3,\ 2,\ 2)$ ➩ ❷

두 점 $(-3,\ 2,\ 2)$, $(-1,\ 3,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x+3}{-1+3}=\frac{y-2}{3-2}=\frac{z-2}{5-2}$$

$$\therefore \frac{x+3}{2}=y-2=\frac{z-2}{3}$$ ➩ ❸

답 $\dfrac{x+3}{2}=y-2=\dfrac{z-2}{3}$

채점 기준	비율
❶ t, s의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ 교점의 좌표를 구할 수 있다.	20%
❸ 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40%

0987 전략 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\overrightarrow{CP}\perp\vec{u}$임을 이용한다.

풀이 $\dfrac{x+1}{3}=1-y=\dfrac{z+3}{2}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=3t-1,\ y=1-t,\ z=2t-3$

점 P는 주어진 직선 위에 있으므로 $P(3t-1,\ 1-t,\ 2t-3)$으로 놓으면

$\overrightarrow{CP}=(3t-7,\ -t-3,\ 2t-5)$

주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(3,\ -1,\ 2)$이고

$\overrightarrow{CP}\perp\vec{u}$이므로 $\quad \overrightarrow{CP}\cdot\vec{u}=0$

$3(3t-7)-(-t-3)+2(2t-5)=0$

$14t-28=0 \qquad \therefore t=2$

따라서 $P(5,\ -1,\ 1)$이므로 $\quad a=5,\ b=-1,\ c=1$

$\therefore a+b+c=5$ 답 ①

0988 전략 방향벡터가 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$인 두 직선이 서로 수직이면 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$임을 이용한다.

풀이 구하는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}=(a,\ b,\ c)$라 하고 주어진 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$라 하면

$\vec{u_1}=(1,\ -1,\ 2)$, $\vec{u_2}=(-1,\ 3,\ 2)$

구하는 직선이 주어진 두 직선과 모두 수직이므로

$\vec{u}\cdot\vec{u_1}=0,\ \vec{u}\cdot\vec{u_2}=0$

$a-b+2c=0,\ -a+3b+2c=0$

$\therefore a=-4c,\ b=-2c$

따라서 $\vec{u}=(-4c,\ -2c,\ c)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x-2}{-4c}=\frac{y}{-2c}=\frac{z-1}{c}$$

$\therefore x-2=2y=4-4z$ 답 ④

0989 전략 직선 PQ는 주어진 직선과 서로 수직이고, $\overline{PQ}$의 중점은 주어진 직선 위에 있음을 이용한다.

풀이 점 Q의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 하면

$\overrightarrow{PQ}=(a-1,\ b,\ c-2)$

주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(1,\ 1,\ 1)$이고 $\overline{\mathrm{PQ}}\perp\vec{u}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{u}=0$

$a-1+b+c-2=0$

$\therefore a+b+c=3$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점 $\left(\frac{a+1}{2},\ \frac{b}{2},\ \frac{c+2}{2}\right)$는 주어진 직선 위에 있으므로

$\frac{a+1}{2}=\frac{b}{2}-1=\frac{c+2+5}{2}$

$\therefore a=c+6,\ b=c+9$

이것을 ㉠에 대입하면

$c+6+c+9+c=3$

$3c=-12 \quad \therefore c=-4$

따라서 $a=2,\ b=5$이므로 $\mathrm{Q}(2,\ 5,\ -4)$

$\therefore \overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{2^2+5^2+(-4)^2}=3\sqrt{5}$

답 ④

0990 전략 직선에 수직인 평면의 법선벡터는 그 직선의 방향벡터임을 이용한다.

풀이 점 $(a,\ 2,\ b)$가 주어진 직선 위에 있으므로

$\frac{a}{3}=\frac{4-2}{2}=\frac{b+5}{4} \quad \therefore a=3,\ b=-1$

또 주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=(3,\ -2,\ 4)$

점 $(3,\ 2,\ -1)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{u}=(3,\ -2,\ 4)$인 평면의 방정식은

$3(x-3)-2(y-2)+4(z+1)=0$

$\therefore 3x-2y+4z-1=0$

따라서 $c=4,\ d=-1$이므로

$a+b+c+d=5$

답 ④

0991 전략 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$으로 놓고 세 점 A, B, C의 좌표를 대입한다.

풀이 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라 하고 세 점의 좌표를 각각 대입하면

$a+b+d=0,\ a+4b+2c+d=0,\ 2a+3b+c+d=0$

$\therefore b=-2a,\ c=3a,\ d=a$

따라서 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식은

$ax-2ay+3az+a=0$

$\therefore x-2y+3z+1=0$

이 평면의 법선벡터는 $(1,\ -2,\ 3)$이므로 원점을 지나고 방향벡터가 $(1,\ -2,\ 3)$인 직선의 방정식은

$x=-\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$

답 $x=-\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$

0992 전략 법선벡터가 각각 $\vec{n_1},\ \vec{n_2}$인 두 평면이 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\cos\theta=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$임을 이용한다.

풀이 주어진 두 평면의 법선벡터를 각각 $\vec{n_1},\ \vec{n_2}$라 하면

$\vec{n_1}=(2,\ -2,\ 1),\ \vec{n_2}=(2,\ 6,\ -3)$ ⇨ ❶

yz평면의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면 $\vec{n}=(1,\ 0,\ 0)$이므로

$\cos\theta_1=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n_1}||\vec{n}|}=\frac{|2\times1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{2}{3}$

$\cos\theta_2=\frac{|\vec{n_2}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n_2}||\vec{n}|}=\frac{|2\times1|}{\sqrt{2^2+6^2+(-3)^2}}=\frac{2}{7}$ ⇨ ❷

따라서 $\sin\theta_1=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin\theta_2=\sqrt{1-\left(\frac{2}{7}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{7}$이므로

$\sin\theta_1\sin\theta_2=\frac{5}{7}$ ⇨ ❸

답 $\frac{5}{7}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 두 평면의 법선벡터를 구할 수 있다.	20%
❷ $\cos\theta_1$, $\cos\theta_2$의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $\sin\theta_1\sin\theta_2$의 값을 구할 수 있다.	30%

0993 전략 두 직선이 서로 평행하면 두 직선의 방향벡터도 서로 평행하고, 직선과 평면이 평행하면 직선의 방향벡터와 평면의 법선벡터는 서로 수직임을 이용한다.

풀이 두 직선 $l,\ m$의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1},\ \vec{u_2}$라 하고 평면 α의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면

$\vec{u_1}=(2,\ 2,\ -1),\ \vec{u_2}=(a,\ b,\ 2),\ \vec{n}=(3,\ c,\ -4)$

$l\,/\!/\,m$이므로

$\vec{u_2}=k\vec{u_1}\ (k\ne0)$

이라 하면 $a=2k,\ b=2k,\ 2=-k$

$\therefore k=-2,\ a=-4,\ b=-4$

또 $l\,/\!/\,\alpha$에서 $\vec{u_1}\perp\vec{n}$이므로 $\vec{u_1}\cdot\vec{n}=0$

$6+2c+4=0 \quad \therefore c=-5$

$\therefore a+b+c=-13$

답 -13

0994 전략 구의 중심과 평면 사이의 거리가 구의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 직선 $\frac{x}{2}=3-y=\frac{z+5}{2}$에 수직인 평면의 법선벡터는 $(2,\ -1,\ 2)$이므로 구하는 평면의 방정식을

$2x-y+2z+k=0$ (k는 상수)

으로 놓을 수 있다.

이 평면이 주어진 구와 접하므로 구의 중심 $(3,\ -1,\ -2)$와 평면 $2x-y+2z+k=0$ 사이의 거리는 구의 반지름의 길이와 같다. 즉

$\frac{|6+1-4+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=2, \quad |k+3|=6$

$k+3=\pm6 \quad \therefore k=-9$ 또는 $k=3$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$2x-y+2z-9=0$ 또는 $2x-y+2z+3=0$

답 $2x-y+2z-9=0,\ 2x-y+2z+3=0$

0995 전략 구의 반지름의 길이를 r, 구의 중심과 평면 사이의 거리를 d라 하면 교선인 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{r^2-d^2}$임을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z-3=0$에서

$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$

구의 반지름의 길이가 3이고, 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 구의 중심 $(-1,\ 2,\ 1)$과 평면 $x+2y+2z-k=0$ 사이의 거리는 2이어야 한다. 즉

$\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2$

$$\frac{|-1+4+2-k|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=2$$

$|5-k|=6, \quad 5-k=\pm 6$

$\therefore k=11 \ (\because k>0)$ 답 ①

0996 전략 직선의 방정식을 매개변수로 나타낸 후 구의 방정식에 대입하여 교점의 좌표를 구한다.

풀이 중심이 점 $C(1, 6, -3)$이고 반지름의 길이가 6인 구의 방정식은

$(x-1)^2+(y-6)^2+(z+3)^2=36$ …… ㉠

$\frac{x-1}{2}=3-y=z=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=2t+1, \ y=3-t, \ z=t$

이것을 ㉠에 대입하면

$(2t)^2+(-t-3)^2+(t+3)^2=36$

$t^2+2t-3=0, \quad (t+3)(t-1)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

따라서 교점의 좌표가 $(-5, 6, -3)$, $(3, 2, 1)$이므로

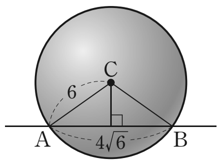
$\overline{AB}=\sqrt{(3+5)^2+(2-6)^2+(1+3)^2}=4\sqrt{6}$

오른쪽 그림에서 $\triangle CAB$의 높이는

$\sqrt{6^2-(2\sqrt{6})^2}=2\sqrt{3}$

$\therefore \triangle CAB=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{6}\times 2\sqrt{3}$

$=12\sqrt{2}$ 답 ④



0997 전략 점 A와 직선 사이의 거리는 정삼각형 ABC의 높이와 같음을 이용한다.

풀이 $x+1=2y-4=4-2z$에서

$\frac{x+1}{2}=y-2=2-z$

$\frac{x+1}{2}=y-2=2-z=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=2t-1, \ y=t+2, \ z=2-t$

점 A에서 주어진 직선에 내린 수선의 발을 $H(2t-1, \ t+2, \ 2-t)$로 놓으면

$\overrightarrow{AH}=(2t-3, \ t+3, \ 3-t)$

주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(2, 1, -1)$이고

$\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}$이므로 $\quad \overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$

$2(2t-3)+t+3-(3-t)=0$

$6t-6=0 \quad \therefore t=1$

따라서 $\overrightarrow{AH}=(-1, 4, 2)$이므로 정삼각형 ABC의 높이는

$\overline{AH}=|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{(-1)^2+4^2+2^2}=\sqrt{21}$

정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 a라 하면

$\frac{\sqrt{3}}{2}a=\sqrt{21} \quad \therefore a=2\sqrt{7}$

즉 구하는 길이는 $2\sqrt{7}$이다. 답 $2\sqrt{7}$

0998 전략 $\overline{AP}$의 길이의 최솟값은 점 A에서 직선 l에 내린 수선의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 직선 $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{2}=3-z$의 방향벡터는 $(2, 2, -1)$이므로 직선 l의 방정식은

$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{2}=2-z$

$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{2}=2-z=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=2t+1, \ y=2t-2, \ z=2-t$

점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AP}$의 길이의 최솟값은 $|\overrightarrow{AH}|$와 같다.

이때 점 H는 직선 l 위의 점이므로 $H(2t+1, \ 2t-2, \ 2-t)$로 놓으면

$\overrightarrow{AH}=(2t-4, \ 2t, \ 1-t)$

직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(2, 2, -1)$이고 $\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}$이므로 $\quad \overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$

$2(2t-4)+4t-(1-t)=0$

$9t-9=0 \quad \therefore t=1$

따라서 $\overrightarrow{AH}=(-2, 2, 0)$이므로 구하는 최솟값은

$|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

0999 전략 직선 AB와 평면이 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 구하는 정사영의 길이는 $\overline{AB}\cos\theta$임을 이용한다.

풀이 직선 AB의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(4, -2, 4)$

주어진 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면

$\vec{n}=(1, 1, -2)$ ⇨ ❶

직선 AB와 평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 두 벡터 $\vec{u}$, $\vec{n}$이 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{|4\times 1+(-2)\times 1+4\times(-2)|}{\sqrt{4^2+(-2)^2+4^2}\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}$$

$$=\frac{6}{6\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

즉 $\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{6}$이므로 $\quad \cos\theta=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{30}}{6}$ ⇨ ❷

따라서 구하는 정사영의 길이는

$|\overrightarrow{AB}|\cos\theta=6\times\frac{\sqrt{30}}{6}=\sqrt{30}$ ⇨ ❸

답 $\sqrt{30}$

채점 기준	비율
❶ 직선 AB의 방향벡터와 평면의 법선벡터를 구할 수 있다.	20%
❷ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ 정사영의 길이를 구할 수 있다.	30%

1000 전략 $\overrightarrow{OH}$, $\overrightarrow{OH'}$은 각각 평면 α, β의 법선벡터와 서로 평행함을 이용하여 두 직선 OH, OH′의 방정식을 구한다.

풀이 $\overrightarrow{OH}$는 평면 α의 법선벡터 $(3, -2, 1)$과 평행하므로 직선 OH의 방정식은

$\frac{x}{3}=-\frac{y}{2}=z$

$\frac{x}{3}=-\frac{y}{2}=z=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=3t, \ y=-2t, \ z=t$

$H(3t, \ -2t, \ t)$로 놓으면 점 H는 평면 α 위에 있으므로

$9t+4t+t+14=0 \quad \therefore t=-1$

08 도형의 방정식

$\therefore \mathrm{H}(-3,\ 2,\ -1)$

$\overrightarrow{\mathrm{OH'}}$은 평면 β의 법선벡터 $(1,\ 3,\ -4)$와 평행하므로 직선 $\mathrm{OH'}$의 방정식은

$$x=\frac{y}{3}=-\frac{z}{4}$$

$x=\frac{y}{3}=-\frac{z}{4}=s$ (s는 실수)로 놓으면

$$x=s,\ y=3s,\ z=-4s$$

$\mathrm{H'}(s,\ 3s,\ -4s)$로 놓으면 점 $\mathrm{H'}$은 평면 β 위에 있으므로

$$s+9s+16s-52=0 \qquad \therefore s=2$$

$$\therefore \mathrm{H'}(2,\ 6,\ -8)$$

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH'}}=(-3,\ 2,\ -1)\cdot(2,\ 6,\ -8)$$
$$=-6+12+8=14$$

답 ③

1001 전략 xy평면, yz평면, zx평면에 동시에 접하는 구의 중심의 x좌표, y좌표, z좌표의 절댓값과 반지름의 길이는 모두 같음을 이용한다.

풀이 세 평면 $x=0,\ y=0,\ z=0$에 접하는 구의 방정식을 $(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2\,(a>0)$이라 하면 구의 중심 $(a,\ a,\ a)$와 평면 $x+y+z-3=0$ 사이의 거리가 구의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|a+a+a-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=a, \qquad |3a-3|=\sqrt{3}a$$

$$9a^2-18a+9=3a^2 \qquad \therefore 2a^2-6a+3=0$$

이 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=\frac{3}{2}$$

이때 두 구의 반지름의 길이가 각각 α, β이므로 구하는 겉넓이의 합은

$$4\pi\alpha^2+4\pi\beta^2=4\pi(\alpha^2+\beta^2)=4\pi\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$$
$$=4\pi(3^2-3)=24\pi$$

답 24π