정답 및 풀이

I 집합과 명제

II 함수

III 순열과 조합

* 정답을 확인하려 할 때에는 「빠른 정답 찾기」를 이용하면 편리합니다.

01 집합의 뜻과 표현

개념 정리

본책 6쪽

❶ 조건제시법 ❷ 0 ❸ 부분집합
❹ $A\subset C$ ❺ $B\subset A$ ❻ $A\neq B$ ❼ 2^n-1 ❽ 2^{n-k}

쎈B 유형 뽀개기

본책 7쪽

01 '큰', '가까운', '맑은', '잘하는'은 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다. 답 ④

02 '빠른', '긴', '좋은'은 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
따라서 집합인 것은 ㄱ, ㄹ의 2개이다. 답 ②

03 $x^2+2x-3<0$에서
$(x+3)(x-1)<0$
$\therefore -3<x<1$
$\therefore A=\{x|-3<x<1\}$
ㄱ. $-2\in A$ ㄹ. $1\notin A$
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ③

04 ① $\frac{\sqrt{5}}{5}$는 무리수이므로 $\frac{\sqrt{5}}{5}\notin Q$
② $\sqrt{4}=2$는 유리수이므로 $\sqrt{4}\in Q$
③ $\frac{i^2}{2}=-\frac{1}{2}$은 실수이므로 $\frac{i^2}{2}\in R$
④ $i^3=-i$는 허수이므로 $i^3\notin R$
⑤ $\sqrt{2}-1$은 실수이므로 $\sqrt{2}-1\in R$
답 ⑤

05 ① $A=\{1, 2, 4, 8\}$
② $A=\{1, 2, 4, 8, 16\}$
③ $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
④ $A=\{2, 4, 6, \cdots, 16\}$
⑤ $A=\{4, 8, 12, 16\}$
답 ②

06 ③ $\{1, 3, 9\}$ 답 ③

07 ① $4=1\cdot4=1\cdot(1+3)$
② $18=3\cdot6=3\cdot(3+3)$
③ $27=1\cdot27=3\cdot9$
④ $40=5\cdot8=5\cdot(5+3)$
⑤ $54=6\cdot9=6\cdot(6+3)$
답 ③

08 □ 이하의 소수인 자연수가 2, 3, 5, 7이므로 □ 안에 들어갈 수 있는 자연수는 7, 8, 9, 10의 4개이다. 답 4

참고 □=11일 때, $\{x|x$는 11 이하의 소수인 자연수$\}$를 원소나열법으로 나타내면 $\{2, 3, 5, 7, 11\}$

09 ② $\{7, 14, 21, 28, \cdots\}$: 무한집합
③ $\{2, 4, 8, 16, \cdots\}$: 무한집합
④ $\{-1, 1\}$: 유한집합
⑤ $|x|>2$에서 $x<-2$ 또는 $x>2$
$\therefore \{\cdots, -4, -3, 3, 4, \cdots\}$: 무한집합
답 ④

10 ⑤ $\{0\}$이므로 공집합이 아니다. 답 ⑤

11 16의 양의 약수는 1, 2, 4, 8, 16이므로 집합 A가 공집합이 되려면 $1\notin A$, $2\notin A$, $4\notin A$, $8\notin A$, $16\notin A$이어야 한다. ··· ❶
따라서 k의 값이 될 수 있는 자연수는 5, 6, 7, 8이므로 구하는 합은
$5+6+7+8=26$ ··· ❷
답 26

채점 기준	비율
❶ 집합 A가 공집합이 되기 위한 조건을 알 수 있다.	40 %
❷ 모든 k의 값의 합을 구할 수 있다.	60 %

참고 $k=8$일 때, $A=\{x|x$는 $4<x<8$인 16의 양의 약수$\}$이므로
$A=\varnothing$
$k=9$일 때, $A=\{x|x$는 $4<x<9$인 16의 양의 약수$\}$이므로 $A=\{8\}$

12 $A=\{4, 7, 10\}$, $B=\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$
$i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, $\cdots$이므로
$C=\{i, -1, -i, 1\}$
따라서 $n(A)=3$, $n(B)=6$, $n(C)=4$이므로
$n(A)+n(B)-n(C)=5$ 답 ④

13 ① $n(\{10\})=n(\{15\})=1$
② $n(\{1, 2, 3\})-n(\{1, 2\})=3-2=1$
④ $n(\varnothing)+n(\{7\})=0+1=1$
⑤ $A=\{\varnothing\}$이면 $n(A)=1$이다.
답 ③

14 $A=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2)\}$이므로
$n(A)=5$ ··· ❶
또 $n(B)=k-1$이므로 $n(A)+n(B)=12$에서
$5+k-1=12$ $\therefore k=8$ ··· ❷
답 8

채점 기준	비율
❶ $n(A)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	50 %

15 $x^2-8x+16=0$에서 $\quad (x-4)^2=0 \quad \therefore x=4$

즉 $A=\{4\}$이므로 $\quad n(A)=1$

이때 $n(A)=n(B)$가 되려면 $n(B)=1$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+4kx-2k+2=0$은 중근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+4kx-2k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-(-2k+2)=0$$

$$4k^2+2k-2=0, \qquad 2k^2+k-1=0$$

$$(k+1)(2k-1)=0$$

$$\therefore k=-1 \text{ 또는 } k=\frac{1}{2}$$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$$-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

답 ④

16 $\underbrace{\sqrt{10}}_{3<\sqrt{10}<4}$ 이하의 짝수인 자연수는 2의 1개이므로

$n(A_{10})=1$

$\sqrt{36}=6$ 이하의 짝수인 자연수는 2, 4, 6의 3개이므로

$n(A_{36})=3$

$\therefore n(A_k)=n(A_{10})+n(A_{36})=4$

즉 $\sqrt{k}$ 이하의 짝수인 자연수의 개수가 4이려면

2, 4, 6, 8의 4개이다.

$8\le\sqrt{k}<10$

$\therefore 64\le k<100$

따라서 자연수 k는 64, 65, 66, ⋯, 99의 36개이다.

답 36

17 집합 A의 두 원소 a, b에 대하여 $2a-b$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

a \ b	0	1	2
0	0	-1	-2
1	2	1	0
2	4	3	2

$X=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

따라서 집합 X의 모든 원소의 합은

$-2+(-1)+0+1+2+3+4=7$

답 7

18 $B=\{1, 2, 4, 8\}$

$x\in A$, $y\in B$인 x, y에 대하여 xy의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	1	2	4	8
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
0	0	0	0	0
1	1	2	4	8

$C=\left\{0, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8\right\}$

$\therefore n(C)=6$

답 ③

19 $x\in A$, $y\in B$인 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	3	6	9
0	3	6	9
1	4	7	10
2	5	8	11
a	$a+3$	$a+6$	$a+9$

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, $a+3$, $a+6$, $a+9$ ⋯ ❶

이때 $n(X)=11$이 되려면 $a+3$, $a+6$, $a+9$ 중 하나만 3, 4, 5, ⋯, 11 중 하나와 같아야 한다.

한편 a는 자연수이므로

$4\le a+3<a+6<a+9$

즉 $a+3$만 4, 5, 6, ⋯, 11 중 하나와 같아야 하므로

$4\le a+3\le 11$, $a+6>11$

$\therefore 5<a\le 8$

따라서 자연수 a의 최솟값은 6이다. ⋯ ❷

답 6

채점 기준	비율
❶ $x+y$의 값을 모두 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 최솟값을 구할 수 있다.	60 %

참고 $a+9$가 3, 4, 5, ⋯, 11 중 하나와 같은 경우 $n(X)=11$이 되려면 $a+6<3$, 즉 $a<-3$이어야 하고, 이는 a가 자연수라는 조건에 맞지 않는다.

20 $a<b<c$이므로 집합 B의 원소의 최댓값은 $2c$이다.

즉 $2c=20$이므로 $\quad c=10$

따라서 집합 A의 두 원소 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같다.

x \ y	a	b	10
a	$2a$	$a+b$	$a+10$
b	$a+b$	$2b$	$b+10$
10	$a+10$	$b+10$	20

이때 $a<b<10$이므로

$2a<a+b<a+10$,

$a+b<2b<b+10$,

$a+10<b+10<20$

그런데 $a+10$과 $2b$의 대소 관계는 알 수 없다.

(i) $a+10=2b$일 때,

$B=\{2a, a+b, a+10, b+10, 20\}$이고 집합 B의 모든 원소의 합이 80이므로

$2a+(a+b)+(a+10)+(b+10)+20=80$

$4a+2b=40, \qquad 4a+(a+10)=40$

$5a=30 \qquad \therefore a=6$

즉 $2b=6+10$이므로 $\quad b=8$

따라서 순서쌍 (a, b, c)는

$(6, 8, 10)$의 1개

(ii) $a+10\ne 2b$일 때,

$B=\{2a, a+b, a+10, 2b, b+10, 20\}$이고 집합 B의 모든 원소의 합이 80이므로

$2a+(a+b)+(a+10)+2b+(b+10)+20=80$

$4a+4b=40$

$\therefore a+b=10$

따라서 순서쌍 (a, b, c)는

$(1, 9, 10)$, $(2, 8, 10)$, $(3, 7, 10)$, $(4, 6, 10)$의 4개

(i), (ii)에서 구하는 집합 A의 개수는

$1+4=5$

답 5

21 ① a는 집합 A의 원소가 아니므로 $\quad a\notin A$

② $\{b\}$는 집합 A의 원소가 아니므로 $\quad \{b\}\notin A$

③ $\{a, b, c\}$는 집합 A의 원소가 아니므로

$\{a, b, c\}\notin A$

④ $a\notin A$이므로 $\quad \{a, b\}\not\subset A$

⑤ $b\in A$, $c\in A$이므로 $\quad \{b, c\}\subset A$

답 ⑤

쎈B특강

집합을 원소로 갖는 집합

집합 $A=\{\{a\}, b, c\}$는 집합을 원소로 갖는 집합이다. 집합 A의 원소는 $\{a\}$, b, c이고, 집합 $\{\{a\}\}$는 집합 A의 부분집합이다. 즉

$\{a\}\in A$, $b\in A$, $c\in A$, $\{\{a\}\}\subset A$

22 $A=\{4, 5\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

⑤ $\{1, 3, 5\}\subset B$ 답 ⑤

23 ㄱ. $\varnothing$은 집합 A의 원소이므로 $\varnothing\in A$

ㄷ. $\{b\}$는 집합 A의 원소가 아니므로 $\{b\}\notin A$

ㅁ. $c\notin A$이므로 $\{a, c\}\not\subset A$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ, ㅂ이다. 답 ㄴ, ㄹ, ㅂ

24 집합 X의 두 원소 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

a \ b	-1	0	1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2

$Y=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

또 $(-1)^2=1$, $0^2=0$, $1^2=1$이므로

$Z=\{0, 1\}$

$\therefore Z\subset X\subset Y$ 답 ④

25 주어진 벤다이어그램에서 두 집합 A, B 사이의 포함 관계는 $A\subset B$이다.

① $B\subset A$

② $A=\{1, 2, 5, 10\}$, $B=\{1, 2, 4\}$이므로

$A\not\subset B$, $B\not\subset A$

③ $A=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$, $B=\{4, 6, 8, 10, \cdots\}$이므로

$B\subset A$

⑤ $A=\{-1, 0, 1\}$, $B=\{-1, 1\}$이므로

$B\subset A$

답 ④

26 $(-1)^2-2=-1$, $1^2-2=-1$, $2^2-2=2$이므로

$B=\{-1, 2\}$

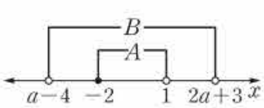
또 집합 A의 두 원소 x, y에 대하여 xy의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	-1	1	2
-1	1	-1	-2
1	-1	1	2
2	-2	2	4

$C=\{-2, -1, 1, 2, 4\}$

$\therefore B\subset A\subset C$ 답 ③

27 $A\subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



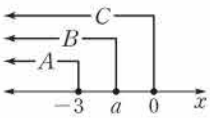
$a-4<-2$, $2a+3\ge 1$

즉 $a<2$, $a\ge -1$이므로

$-1\le a<2$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1의 3개이다. 답 3

28 $A\subset B\subset C$가 성립하도록 세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$-3\le a\le 0$

따라서 정수 a는 -3, -2, -1, 0의 4개이다. 답 ③

29 $x^2-8x+12=0$에서

$(x-2)(x-6)=0$ $\therefore x=2$ 또는 $x=6$

$\therefore B=\{2, 6\}$ ⋯ ❶

$B\subset A$가 성립하려면 $a<2$ ⋯ ❷

따라서 정수 a의 최댓값은 1이다. ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 집합 B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

30 $A\subset B$이므로 $2\in A$에서 $2\in B$

$\therefore a-1=2$ 또는 $b=2$

(i) $a-1=2$, 즉 $a=3$일 때,

$A=\{2, 7\}$, $B=\{2, 6, b\}$이므로 $A\subset B$가 성립하려면

$b=7$

$\therefore a+b=10$

(ii) $b=2$일 때,

$A=\{2, 2a+1\}$, $B=\{2, 6, a-1\}$이므로 $A\subset B$가 성립하려면

$2a+1=6$ 또는 $2a+1=a-1$

$\therefore a=\frac{5}{2}$ 또는 $a=-2$

$\therefore a+b=\frac{9}{2}$ 또는 $a+b=0$

(i), (ii)에서 $a+b$의 최댓값은 10, 최솟값은 0이므로 구하는 합은

$10+0=10$ 답 ③

31 $x^2-6x+5<0$에서 $(x-1)(x-5)<0$

$\therefore 1<x<5$

즉 주어진 집합은 $\{2, 3, 4\}$

따라서 구하는 부분집합은

$\varnothing$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$

답 풀이 참조

32 집합 $P(A)$는 집합 A의 부분집합을 원소로 갖는 집합이므로 $P(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

따라서 집합 $P(A)$의 원소가 아닌 것은 ② $\{\varnothing\}$이다. 답 ②

33 $A=\{1, 2, 3, 6\}$에 대하여 $B\subset A$이고 $n(B)=2$를 만족시키는 집합 B는 집합 A의 부분집합 중에서 원소가 2개인 집합이므로

$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 6\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 6\}$, $\{3, 6\}$

의 6개이다. 답 6

34 $A=\{3, 5, 7, 11, 13\}$이므로 집합 A의 부분집합 중에서 모든 원소의 합이 25보다 크려면 원소가 3개 이상이어야 한다.
(i) 원소가 3개인 경우
$\{3, 11, 13\}, \{5, 11, 13\}, \{7, 11, 13\}$의 3개이다. ⋯ ❶
(ii) 원소가 4개인 경우
$\{3, 5, 7, 11\}, \{3, 5, 7, 13\}, \{3, 5, 11, 13\}$,
$\{3, 7, 11, 13\}, \{5, 7, 11, 13\}$의 5개이다. ⋯ ❷
(iii) 원소가 5개인 경우
$\{3, 5, 7, 11, 13\}$의 1개이다. ⋯ ❸
이상에서 구하는 부분집합의 개수는
$3+5+1=9$ ⋯ ❹
답 9

채점 기준	비율
❶ 원소가 3개인 경우의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 원소가 4개인 경우의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 원소가 5개인 경우의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 모든 원소의 합이 25보다 큰 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	10 %

35 $A=B$이므로 $a^2-a+1=3$
$a^2-a-2=0$, $(a+1)(a-2)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$
(i) $a=-1$일 때,
$A=\{-5, 1, 3\}, B=\{-2, 3, 4\}$이므로
$A\neq B$
(ii) $a=2$일 때,
$A=\{-5, 1, 3\}, B=\{-5, 1, 3\}$이므로
$A=B$
(i), (ii)에서 $a=2$
답 2

36 $A\subset B, B\subset A$이므로 $A=B$
이때 $x-3<x-2<x+2$이므로
$x-3=-2, x-2=-1, x+2=3$
$\therefore x=1$
답 ④

37 ㄱ. $\{1, 3, 5\}$ ㄴ. $\{3, 5\}$
ㄷ. $\{1, 3\}$ ㄹ. $\{3, 5\}$
$x^2-8x+15=0$에서
$(x-3)(x-5)=0$
$\therefore x=3$ 또는 $x=5$
이상에서 집합 A와 서로 같은 집합인 것은 ㄴ, ㄹ이다.
답 ④

38 $A=B$이므로
$3a-b=7, a+4b=-2$ ⋯ ❶
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=2, b=-1$ ⋯ ❷
$\therefore a^2+b^2=5$ ⋯ ❸
답 5

채점 기준	비율
❶ a, b에 대한 두 일차방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

39 $A=B$이므로
$a^2-2a=3, b^2-5=11$
$a^2-2a=3$에서 $a^2-2a-3=0$
$(a+1)(a-3)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=3$
$b^2-5=11$에서 $b^2=16$
$\therefore b=\pm4$
따라서 $a=3, b=4$일 때 $a+b$의 값은 최대이고 그 값은 7이다.
답 ⑤

40 $n(A)=a, n(B)=b$라 하면
$2^a=128, 2^b-1=31$
$2^a=128=2^7$에서 $a=7$
$2^b=32=2^5$에서 $b=5$
$\therefore n(A)+n(B)=12$
답 ③

41 $x^4+2x^2-8=0$에서 $x^2=X$로 놓으면
$X^2+2X-8=0$, $(X+4)(X-2)=0$
$\therefore X=-4$ 또는 $X=2$
즉 $x^2=-4$ 또는 $x^2=2$이므로
$x=\pm2i$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$ ⋯ ❶
$\therefore A=\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ ⋯ ❷
즉 $n(A)=2$이므로 구하는 부분집합의 개수는
$2^2=4$ ⋯ ❸
답 4

채점 기준	비율
❶ 방정식 $x^4+2x^2-8=0$의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 집합 A의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	30 %

쎈B 특강

$x^4+ax^2+b=0$ 꼴의 방정식의 풀이
① $x^2=X$로 치환한 후 좌변을 인수분해한다.
② 이차항을 적당히 분리하여 $A^2-B^2=0$ 꼴로 변형한 후 좌변을 인수분해한다.

42 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$이므로 집합 A의 원소 중에서 4의 배수는
$4, 8, 12, 24$
모든 원소가 4의 배수로만 이루어진 집합은 집합 $\{4, 8, 12, 24\}$의 부분집합 중에서 공집합을 제외한 것이므로 그 개수는
$2^4-1=15$
답 ①

43 $2x^2-x-15<0$에서 $(2x+5)(x-3)<0$
$\therefore -\frac{5}{2}<x<3$
$\therefore A=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
이때 집합 X는 집합 A의 진부분집합 중에서 공집합을 제외한 것이므로 그 개수는
$2^5-1-1=30$
답 30

44 $A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$
집합 X는 집합 A의 진부분집합이고, 1, 9를 반드시 원소로 가지므로 집합 X의 개수는
$2^{8-2}-1=2^6-1$ 집합 $\{3, 5, 7, 11, 13, 15\}$의 진부분집합의 개수와 같다.
$=63$ 답 63

45 0을 반드시 원소로 갖고 -1, 1을 원소로 갖지 않는 부분집합 X의 개수는
$2^{5-1-2}=2^2=4$ 답 ②

46 $A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$
집합 A의 원소 중에서 6의 배수는 6, 12, 18이므로 이를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는
$2^{7-3}=2^4=16$ 답 16

47 $A=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$이므로 소수인 원소를 2개만 가지려면 소수 중에서 2, 3 또는 2, 5 또는 3, 5만을 원소로 가져야 한다. ··· ❶
이때 집합 A의 부분집합 중에서 2, 3을 반드시 원소로 갖고 5를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는
$2^{8-2-1}=2^5=32$ 소수 중에서 2, 3만을 원소로 갖는 부분집합
마찬가지로 소수 중에서 2, 5 또는 3, 5만을 원소로 갖는 집합 A의 부분집합의 개수도 각각 32이므로 구하는 부분집합의 개수는
$32\cdot3=96$ ··· ❷
답 96

채점 기준	비율
❶ 소수인 원소를 2개만 갖는 집합의 조건을 알 수 있다.	30 %
❷ 소수인 원소를 2개만 갖는 집합의 개수를 구할 수 있다.	70 %

48 $n(A)=k-1$이므로 1, 2, 3을 반드시 원소로 갖고 4, 5를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는
$2^{(k-1)-3-2}=128=2^7$
$k-6=7$
$\therefore k=13$ 답 ④

49 $x^2-10x+16=0$에서
$(x-2)(x-8)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=8$
$\therefore A=\{2, 8\}$
$B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$이므로 집합 X의 개수는 집합 B의 부분집합 중에서 2, 8을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같다.
$\therefore 2^{5-2}=2^3=8$ 답 ②

50 집합 X의 개수는 집합 B의 부분집합 중에서 3, 5를 반드시 원소로 갖고 7을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로
$2^{7-2-1}=2^4=16$ 답 ⑤

51 $A=\{1, 3, 9\}$, $\underbrace{B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}}$ 18의 양의 약수의 집합 ··· ❶
따라서 집합 X의 개수는 집합 B의 부분집합 중에서 1, 3, 9를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로 ··· ❷
$2^{6-3}=2^3=8$ ··· ❸
답 8

채점 기준	비율
❶ 두 집합 A, B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 조건을 만족시키는 집합 X의 개수와 같은 경우를 구할 수 있다.	40 %
❸ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	30 %

52 $3x^2-10x+3<0$에서 $(3x-1)(x-3)<0$
$\therefore \frac{1}{3}<x<3$
$\therefore B=\{1, 2\}$
$|x|\le k$에서
$-k\le x\le k$
$\therefore A=\{-k, -k+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, k-1, k\}$
이때 $n(A)=2k+1$이고 집합 X의 개수는 집합 A의 진부분집합 중에서 1, 2를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로
$2^{(2k+1)-2}-1=31$, $2^{2k-1}=32=2^5$
$2k-1=5$
$\therefore k=3$ 답 3

53 $A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$이므로 집합 A의 부분집합 중에서 3 또는 13을 원소로 갖는 부분집합은 집합 A의 부분집합 중에서 집합 $\{2, 5, 7, 11, 17\}$의 부분집합을 제외하면 된다.
따라서 구하는 부분집합의 개수는 집합 A에서 3, 13을 제외한 집합
$2^7-2^5=128-32=96$ 답 ①
다른 풀이 3 또는 13을 원소로 갖는 집합은 집합 $\{2, 5, 7, 11, 17\}$의 부분집합에 3을 추가하거나 13을 추가하거나 3, 13을 모두 추가하면 된다.
따라서 구하는 부분집합의 개수는
$2^5\cdot3=96$

54 집합 A의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 3의 배수를 원소로 갖는 부분집합은 집합 A의 부분집합 중에서 집합 $\{8, 10, 14, 16\}$의 부분집합을 제외하면 된다.
따라서 구하는 부분집합의 개수는 집합 A에서 3의 배수인 6, 12를 제외한 집합
$2^6-2^4=64-16=48$ 답 48

55 $m(X)\le2$를 만족시키려면 집합 X는 0, 1, 2 중 적어도 하나를 원소로 가져야 한다.
따라서 집합 B의 부분집합 중에서 집합 $\{3, 4\}$의 부분집합을 제외하면 되므로 구하는 집합 X의 개수는
$2^5-2^2=32-4=28$ 답 ④

56 조건 (가), (나)를 모두 만족시키려면 집합 A의 원소는 24의 양의 약수이어야 한다.
이때 24의 양의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24이고 조건 (나)에 의하여 1과 24, 2와 12, 3과 8, 4와 6은 어느 하나가 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 A의 원소이다.
따라서 공집합이 아닌 집합 A의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같으므로

$2^4-1=15$ 답 ③

참고 집합 A를 구하면 다음과 같다.
(i) $n(A)=2$인 경우
$\{1, 24\}, \{2, 12\}, \{3, 8\}, \{4, 6\}$
(ii) $n(A)=4$인 경우
$\{1, 2, 12, 24\}, \{1, 3, 8, 24\}, \{1, 4, 6, 24\},$
$\{2, 3, 8, 12\}, \{2, 4, 6, 12\}, \{3, 4, 6, 8\}$
(iii) $n(A)=6$인 경우
$\{1, 2, 3, 8, 12, 24\}, \{1, 2, 4, 6, 12, 24\}, \{1, 3, 4, 6, 8, 24\},$
$\{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$
(iv) $n(A)=8$인 경우
$\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

57 조건 (가), (나)를 모두 만족시키려면 집합 B는 공집합이 아니어야 하고, 집합 B의 원소는 20의 양의 약수이어야 한다.
이때 20의 양의 약수는 1, 2, 4, 5, 10, 20이고 조건 (나)에 의하여 1과 20, 2와 10, 4와 5는 어느 하나가 B의 원소이면 나머지 하나도 반드시 B의 원소이다.
(i) $n(B)=2$인 경우
$\{1, 20\}, \{2, 10\}, \{4, 5\}$이므로
$a_2=3$
(ii) $n(B)=4$인 경우
$\{1, 2, 10, 20\}, \{1, 4, 5, 20\}, \{2, 4, 5, 10\}$이므로
$a_4=3$
(i), (ii)에서 $a_2+a_4=6$ 답 6

58 조건 (가), (나)를 모두 만족시키려면 집합 A의 원소는 64의 양의 약수이어야 한다.
이때 64의 양의 약수는 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64이고 조건 (나)에 의하여 1과 64, 2와 32, 4와 16은 어느 하나가 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 A의 원소이다.
$n(A)$가 홀수가 되려면 집합 A는 8을 반드시 원소로 가져야 하므로 집합 A의 개수는 집합 $\{1, 2, 4\}$의 부분집합의 개수와 같다.
따라서 구하는 집합 A의 개수는
$2^3=8$ 답 8

59 $1\notin X$, $9\in X$인 집합 X의 개수는
$2^{5-1-1}=2^3=8$
한편 8개의 집합 중에서 3을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는 $1\notin X$, $3\in X$, $9\in X$인 집합의 개수와 같으므로
$2^{5-1-2}=2^2=4$
마찬가지로 5, 7을 각각 반드시 원소로 갖는 집합의 개수도 4이므로 $S(X)$의 합은
$8\cdot 9+4(3+5+7)=132$ 답 ②

60 집합 B_k 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합은
$\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 4, 5\},$
$\{1, 2, 4, 6\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 6\},$
$\{1, 3, 5, 6\}, \{1, 4, 5, 6\}$
의 10개이다.
마찬가지로 2, 3, 4, 5, 6을 각각 반드시 원소로 갖는 집합의 개수도 10이므로
$$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{15}=10(1+2+3+4+5+6)$$
$$=210$$
답 ⑤

61 집합 A의 부분집합 중에서 2를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는
$2^{5-1}=2^4=16$
마찬가지로 4, 6, 8, 10을 각각 반드시 원소로 갖는 집합의 개수도 16이므로
$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{32}=16(2+4+6+8+10)$$
$$=480$$
답 480

62 집합 A의 부분집합 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는
$2^{4-1}=2^3=8$
마찬가지로 3, 9, 27을 각각 반드시 원소로 갖는 집합의 개수도 8이므로
$$f(A_1)\times f(A_2)\times f(A_3)\times\cdots\times f(A_{15})$$
$$=1^8\cdot 3^8\cdot 9^8\cdot 27^8$$
$$=3^8\cdot (3^2)^8\cdot (3^3)^8$$
$$=3^8\cdot 3^{16}\cdot 3^{24}$$
$$=3^{8+16+24}$$
$$=3^{48}$$
$\therefore k=48$ 답 48

02 집합의 연산

개념 정리

본책 18쪽

❶ $\varnothing$ ❷ $B\cap C$ ❸ $A\cap B$ ❹ $\cap$ ❺ $\not\subset$
❻ $\in$ ❼ A ❽ $\varnothing$ ❾ $\cap$ ❿ $A^C\cup B^C$
⓫ $A\cap B$ ⓬ $n(A)$

쎈 B 유형 뽀개기

본책 19쪽

01 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$, $C=\{2, 4, 6, 8\}$이므로

$A\cup(B\cap C)=\{1, 2, 3, 4\}\cup\{2, 6\}$
$=\{1, 2, 3, 4, 6\}$ 답 $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

02 $B=\{1, 3, 9\}$, $C=\{2, 3, 5, 7\}$
③ $B\cup C=\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ 답 ③

03 집합 B는 a, c를 반드시 원소로 갖고, b, d, e를 원소로 갖지 않아야 하므로 B가 될 수 있는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

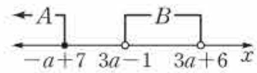
04 ① $x^2-9=0$에서 $x^2=9$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=3$
따라서 $A=\{-3, 3\}$이므로 $A\cap B=\{3\}$
② $B=\{x|x<-1$ 또는 $x>1\}$이므로
$A\cap B=\varnothing$
③ $A\cap B=\{x|x$는 $\underbrace{35}_{5,\ 7\text{의 최소공배수}}$의 양의 배수$\}$
④ $A=\{2, 3, 5, 7, \cdots\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$이므로
$A\cap B=\{2\}$
⑤ $A=\{1, 4, 9, 16, 25, \cdots\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, 9, \cdots\}$이므로
$A\cap B=\{1, 9, 25, \cdots\}$
답 ②

참고 ⑤ $(\text{짝수})^2=(\text{짝수})$, $(\text{홀수})^2=(\text{홀수})$이므로
$A\cap B=\{x|x=m^2$, m은 홀수인 자연수$\}$

05 ㄱ. $\{2, 3, 5, 7, \cdots\}$ ㄴ. $\{1, 2\}$
ㄷ. $\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$ ㄹ. $\{5\}$
ㅁ. $\{1, 2, 4, 8\}$ ㅂ. $\{1, 3, 7, 21\}$
이상에서 집합 $\{3, 5, 7\}$과 서로소인 집합은 ㄴ, ㄷ, ㅁ이다.
답 ③

06 구하는 집합의 개수는 집합 A의 부분집합 중 i, e를 원소로 갖지 않는 집합의 개수와 같다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$2^{6-2}=2^4=16$ 답 16

07 A, B가 서로소, 즉 $A\cap B=\varnothing$이려면 오른쪽 그림과 같아야 한다. ··· ❶

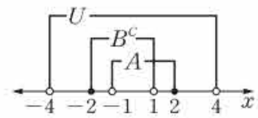


즉 $-a+7\le 3a-1$에서
$-4a\le -8$ $\therefore a\ge 2$ ··· ❷
따라서 a의 최솟값은 2이다. ··· ❸
답 2

채점 기준	비율
❶ 두 집합 A, B가 서로소가 되도록 수직선 위에 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 두 집합 A, B가 서로소일 때의 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ a의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

08 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$, $A=\{3, 6, 9\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$이므로 $B-A=\{1, 5, 7\}$
$\therefore (B-A)^C=\{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$
따라서 집합 $(B-A)^C$의 원소의 개수는 6이다. 답 6

09 $B^C=\{x|-2\le x<1\}$이므로 오른쪽 그림에서



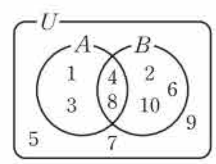
$A\cup B^C=\{x|-2\le x\le 2\}$
답 ④

10 $A-B=\{a, b\}$이므로
$(A-B)^C=\{c, d, e, f, g\}$
$B^C=\{a, b, f, g\}$이므로
$A-B^C=\{c, d\}$
$\therefore (A-B)^C\cap(A-B^C)=\{c, d\}$ 답 $\{c, d\}$

11 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 12\}$, $A=\{2, 5, 8, 11\}$,
$B=\{3, 5, 7, 9, 11\}$이므로 ··· ❶
$A-B=\{2, 8\}$, $B-A=\{3, 7, 9\}$ ··· ❷
$\therefore (A-B)\cup(B-A)=\{2, 3, 7, 8, 9\}$ ··· ❸
답 $\{2, 3, 7, 8, 9\}$

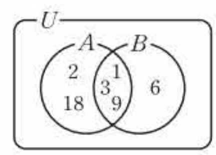
채점 기준	비율
❶ 두 집합 A, B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 두 집합 $A-B$, $B-A$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 집합 $(A-B)\cup(B-A)$를 구할 수 있다.	30 %

12 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$A=\{1, 3, 4, 8\}$
답 ④

13 $U=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$,
$A\cap B=\{1, 3, 9\}$
이때 $(A\cup B)^C=\varnothing$에서 $A\cup B=U$이므로 오른쪽 벤다이어그램에서

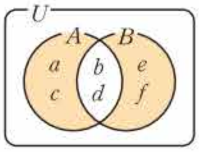


$B=\{1, 3, 6, 9\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$1+3+6+9=19$ 답 ④

14 집합 $(A\cup B)-(A\cap B)$는 오른쪽 벤다이어그램의 색칠한 부분과 같고



$A=\{a, b, c, d\}$이므로

$A-B=\{a, c\}$,

$B-A=\{e, f\}$ ⋯ ❶

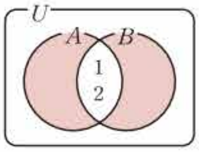
이때 $A\cap B=\{b, d\}$이므로

$\underbrace{B}_{B=(B-A)\cup(A\cap B)}=\{b, d, e, f\}$ ⋯ ❷

답 $\{b, d, e, f\}$

채점 기준	비율
❶ 두 집합 $A-B$, $B-A$를 구할 수 있다.	50 %
❷ 집합 B를 구할 수 있다.	50 %

15 $A\cap B=\{1, 2\}$, $A\cup B=U$이므로 이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같고, 색칠한 부분에 들어갈 원소가 4, 7, 8이다.



이때 $3S(A)=2S(B)$에서

$S(A)<S(B)$이므로 4, 7, 8 중 집합 A에 속하는 원소는 한 개 이하이어야 한다.

(i) $4\in A$인 경우

$A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 2, 7, 8\}$이므로

$S(A)=7$, $S(B)=18$

$\therefore 3S(A)\neq 2S(B)$

(ii) $7\in A$인 경우

$A=\{1, 2, 7\}$, $B=\{1, 2, 4, 8\}$이므로

$S(A)=10$, $S(B)=15$

$\therefore 3S(A)=2S(B)$

(iii) $8\in A$인 경우

$A=\{1, 2, 8\}$, $B=\{1, 2, 4, 7\}$이므로

$S(A)=11$, $S(B)=14$

$\therefore 3S(A)\neq 2S(B)$

(iv) $4\in B$, $7\in B$, $8\in B$인 경우

$A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2, 4, 7, 8\}$이므로

$S(A)=3$, $S(B)=22$

$\therefore 3S(A)\neq 2S(B)$

이상에서 $A=\{1, 2, 7\}$, $B=\{1, 2, 4, 8\}$이므로

$B-A=\{4, 8\}$ 답 $\{4, 8\}$

다른 풀이 $S(A)+S(B)=S(A\cup B)+S(A\cap B)$

$=(1+2+4+7+8)+(1+2)=25$

이때 $3S(A)=2S(B)$에서 $S(B)=\frac{3}{2}S(A)$이므로

$\frac{5}{2}S(A)=25$ $\therefore S(A)=10$

따라서 $S(A)=10$, $S(B)=\frac{3}{2}\cdot 10=15$를 만족시키는 두 집합 A, B는 $A=\{1, 2, 7\}$, $B=\{1, 2, 4, 8\}$

$\therefore B-A=\{4, 8\}$

16 $A\cap B=\{1, 4\}$이므로 $4\in B$

따라서 $a^2-2a+1=4$이므로 $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

(i) $a=-1$일 때,

$A=\{-3, 4, 6\}$, $B=\{-3, 1, 4\}$이므로

$A\cap B=\{-3, 4\}$

에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=3$일 때,

$A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{-3, 1, 4\}$이므로

$A\cap B=\{1, 4\}$

(i), (ii)에서 $a=3$ 답 3

17 $A-B=\{-1, 2\}$이므로 9, $2a+b$는 집합 B의 원소이다.

이때 $B=\{4, a-3b\}$이므로

$a-3b=9$, $2a+b=4$ ⋯ ❶

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-2$ ⋯ ❷

$\therefore ab=-6$ ⋯ ❸

답 -6

채점 기준	비율
❶ a, b에 대한 두 방정식을 세울 수 있다.	60 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

18 $A\cup B=\{0, 2, 3, 5\}$이고 $A=\{0, 3, -a+4\}$이므로

$-a+4=2$ 또는 $-a+4=5$

$\therefore a=2$ 또는 $a=-1$

(i) $a=2$일 때,

$A=\{0, 2, 3\}$, $B=\{-4, 0, 5\}$이므로

$A\cup B=\{-4, 0, 2, 3, 5\}$

에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=-1$일 때,

$A=\{0, 3, 5\}$, $B=\{0, 2, 5\}$이므로

$A\cup B=\{0, 2, 3, 5\}$

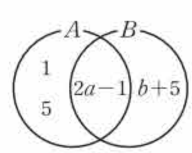
(i), (ii)에서

$B=\{0, 2, 5\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$0+2+5=7$ 답 7

19 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $2a-1\in(A\cap B)$이므로 $2a-1$은 집합 B의 원소이다.

이때 $2a-1\neq 2a+7$이므로

$2a-1=a^2+a-13$

$a^2-a-12=0$, $(a+3)(a-4)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=4$

(i) $a=-3$일 때,

$A=\{-7, 1, 5\}$, $B=\{-7, 1\}$이므로

$(A-B)\cup(B-A)=\{5\}$

에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=4$일 때,

$A=\{1, 5, 7\}$, $B=\{7, 15\}$이므로

$(A-B)\cup(B-A)=\{1, 5, 15\}$

(i), (ii)에서 $a=4$이고, $b+5=15$에서 $b=10$이므로

$a+b=14$

답 ③

20 ② $U^C=\varnothing$이므로 $U^C\subset A$

③ $A\cap(B\cup B^C)=A\cap U=A$

④ $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$

답 ④

21 ① $A\cap\varnothing=\varnothing$

② $B\cup B^C=U$

③ $(U-A)^C=(A^C)^C=A$

④ $A-\varnothing^C=A-U=\varnothing$

⑤ $U=\{1, 2, 3\}$, $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3\}$이면 $A\cap B=\{2\}$이므로 $(A\cap B)^C=\{1, 3\}$

$\therefore (A\cap B)^C\not\subset A$

답 ③

참고 집합 A의 여집합 A^C는 전체집합 U에 대한 집합 A의 차집합으로 생각할 수 있다.

➡ $A^C=U-A$

22 ㄴ. $B^C-A^C=B^C\cap(A^C)^C=B^C\cap A=A-B$

ㄷ. $A\cap(U\cap B^C)=A\cap B^C=A-B$

ㄹ. $A\cap(U-B^C)=A\cap B$

이상에서 $A-B$와 항상 같은 집합인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

23 $A\cap B=B$이므로 $B\subset A$

② $B\subset A$이므로 $A^C\subset B^C$

④ $B\subset A$이므로

$A^C-B^C=A^C\cap(B^C)^C=A^C\cap B=B-A=\varnothing$

⑤ $B\subset A$이고 $A\neq B$이므로

$(A\cup B)=A\not\subset B$

답 ⑤

24 $B^C\subset A^C$이므로 $A\subset B$

① $A\cup B=B$

② $A\cup(A\cap B)=A\cup A=A$

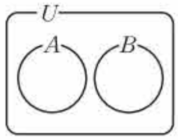
③ $(A\cup B)\cap B=B\cap B=B$

④ $(A-B)\cup B=\varnothing\cup B=B$

⑤ $(A\cup B)\cup(A\cap B)=B\cup A=B$

답 ②

25 $A\cap B=\varnothing$이므로 오른쪽 벤다이어그램에서



ㄴ. $B\cap A^C=B$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ⑤

26 $(A\cup B)-(A\cap B)=\varnothing$에서

$(A\cup B)\subset(A\cap B)$ …… ㉠

한편 두 집합 A, B에 대하여

$(A\cap B)\subset(A\cup B)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $A\cap B=A\cup B$

$\therefore A=B$

답 ①

27 $(A\cap B^C)\cup X=X$에서

$(A-B)\cup X=X$

즉 $(A-B)\subset X$이므로 $\{1\}\subset X$ …… ㉠

$B\cap X=B$에서 $B\subset X$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 집합 X는 1, 2, 3, 5, 7을 반드시 원소로 가져야 하므로 구하는 집합 X의 개수는

$2^{7-5}=2^2=4$

답 4

28 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$

$A\cup B=U$이므로 집합 B는 집합 A^C의 원소

1, 3, 5, 7, 9

를 반드시 원소로 가져야 한다.

따라서 집합 B의 개수는

$2^{9-5}=2^4=16$

답 ③

29 $A-(A\cap X)=A$이므로 $A\cap(A\cap X)=\varnothing$

$(A\cap A)\cap X=\varnothing$ $\therefore A\cap X=\varnothing$ ··· ❶

즉 집합 X는 전체집합 U의 부분집합 중 -2, 2를 원소로 갖지 않는 집합이다. ··· ❷

따라서 집합 X의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$ ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ $A\cap X=\varnothing$임을 알 수 있다.	30 %
❷ 집합 X가 ❶을 만족시키기 위한 조건을 구할 수 있다.	40 %
❸ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	30 %

30 전체집합 U의 부분집합 X가

$\{a, b, c\}\cup X=\{a, c, e, f, h\}\cup X$

를 만족시키려면 집합 X는 두 집합 $\{a, b, c\}$, $\{a, c, e, f, h\}$의 공통인 원소 a, c를 제외한 나머지 원소 b, e, f, h를 반드시 원소로 가져야 한다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{8-4}=2^4=16$

답 ②

31 $A=\{1, 2, 4, 8, 16\}$

$x^2-10x+16=0$에서 $\quad (x-2)(x-8)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=8$

$\therefore B=\{2, 8\}$

이때 $X\cap(A-B)=X$이므로

$X\subset(A-B)$

$A-B=\{1, 4, 16\}$이고 $n(X)=2$이므로 집합 X의 개수는 1, 4, 16 중 2개를 원소로 갖는 집합의 개수와 같다.

따라서 집합 X는

$\{1, 4\}, \{1, 16\}, \{4, 16\}$

의 3개이다. 답 3

32 $(A\cap B)\cup X=X$에서 $\quad (A\cap B)\subset X$

$\therefore \{0, 1\}\subset X$ …… ㉠

$B-A=\{-3, 3\}$이고 $(B-A)\cap X=\{3\}$이므로

$-3\notin X,\ 3\in X$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 집합 X는 0, 1, 3을 반드시 원소로 갖고 -3을 원소로 갖지 않아야 한다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{7-3-1}=2^3=8$ 답 8

33 조건 (나)에서

$\underline{\{(A-B)\cup(B-A)\}\subset(B-A)}$

이므로 $\quad A-B=\varnothing$ $(A-B)\subset(B-A)$이고, 두 집합 $A-B$, $B-A$는 서로소이므로 $A-B=\varnothing$

$\therefore A\subset B$

따라서 집합 A는 공집합이 아닌 집합 B의 진부분집합이고, 조건 (가)에서 $B=\{1, 2, 4\}$이므로 구하는 집합 A의 개수는

$2^3-1-1=6$ 답 6

34 $(A^c\cap B^c)^c\cap(A\cap B)=\{(A\cup B)^c\}^c\cap(A\cap B)$

$=\underline{(A\cup B)\cap(A\cap B)}$ $(A\cap B)\subset(A\cup B)$

$=A\cap B$

$=\{3, 5, 7\}$

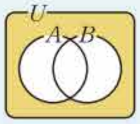
따라서 구하는 모든 원소의 합은

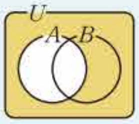
$3+5+7=15$ 답 ⑤

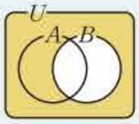
쎈B특강

드모르간의 법칙은 벤다이어그램을 이용하면 쉽게 이해할 수 있다.

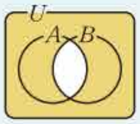
$(A\cup B)^c \quad = \quad A^c \quad \cap \quad B^c$

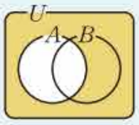


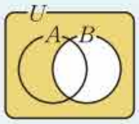




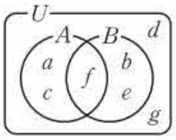
$(A\cap B)^c \quad = \quad A^c \quad \cup \quad B^c$







35 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$A^c\cap B^c=(A\cup B)^c=\{d, g\}$

답 $\{d, g\}$

36 $A\cap(B^c\cup C^c)=A\cap(B\cap C)^c$

$=A-(B\cap C)$

이므로 $\quad A-(B\cap C)=\{3, 4, 5\}$

이때 $A=\{1, 3, 4, 5, 7\}$이므로

$1\in(B\cap C),\ 7\in(B\cap C)$ 답 ①

37 $(A-B)\cup(A\cap C)=(A\cap B^c)\cup(A\cap C)$

$=A\cap(B^c\cup C)$

$=A\cap(B\cap C^c)^c$

$=A-(B-C)$ 답 ⑤

38 $(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)=(A\cup B)\cap(A\cap B)^c$

$=(A\cup B)-(A\cap B)$ ··· ❶

이때 $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{1, 2, 5, 10\}$이므로

$A\cup B=\{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10\}$, $A\cap B=\{2, 10\}$ ··· ❷

따라서 구하는 집합은

$(A\cup B)-(A\cap B)=\{1, 4, 5, 6, 8\}$ ··· ❸

답 $\{1, 4, 5, 6, 8\}$

채점 기준	비율
❶ 집합 $(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)$를 간단히 할 수 있다.	40 %
❷ 두 집합 $A\cup B$, $A\cap B$를 구할 수 있다.	40 %
❸ 집합 $(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)$를 구할 수 있다.	20 %

39 ㄱ. $(A^c\cap B)^c\cap B=(A\cup B^c)\cap B$

$=(A\cap B)\cup(B^c\cap B)$

$=(A\cap B)\cup\varnothing=A\cap B$

ㄴ. $(A\cap B)\cup(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$

$=\underline{\{A\cap(B\cup B^c)\}}\cup(A^c\cap B)$ $A\cap(B\cup B^c)=A\cap U=A$

$=A\cup(A^c\cap B)$

$=(A\cup A^c)\cap(A\cup B)=U\cap(A\cup B)$

$=A\cup B$

ㄷ. $(A\cap C)-(B\cap C)=(A\cap C)\cap(B\cap C)^c$

$=(A\cap C)\cap(B^c\cup C^c)$

$=\{(A\cap C)\cap B^c\}\cup\underline{\{(A\cap C)\cap C^c\}}$

$=\{(A\cap C)\cap B^c\}\cup\varnothing$ $(A\cap C)\cap C^c=A\cap(C\cap C^c)=A\cap\varnothing=\varnothing$

$=(A\cap C)-B$

ㄹ. $(A-B)-(A-C)=(A\cap B^c)\cap(A\cap C^c)^c$

$=(A\cap B^c)\cap(A^c\cup C)$

$=\{(A\cap B^c)\cap A^c\}\cup\{(A\cap B^c)\cap C\}$

$=\{\underline{(A\cap A^c)\cap B^c}\}\cup\{(A\cap C)\cap B^c\}$

$=\varnothing\cup\{(A\cap C)\cap B^c\}$ $(A\cap A^c)\cap B^c=\varnothing\cap B^c=\varnothing$

$=(A\cap C)-B$

이상에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄹ

40 $(A-B)\cup(A-C)=(A\cap B^C)\cup(A\cap C^C)$

$=A\cap(B^C\cup C^C)$

$=A\cap(B\cap C)^C$

$=A-(B\cap C)$

이때 $B-C=B$에서 $B\cap C=\varnothing$이므로

(주어진 식)$=A-(B\cap C)=A$

답 ②

41 조건 (가)에서 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$(A\cup B)^C=\{5\}$

$\therefore A\cup B=\{1, 2, 3, 4\}$ ...... ㉠ ⋯ ❶

조건 (나)에서

$(B-A)\cup\{(A\cup B^C)\cap B\}$

$=(B-A)\cup(A\cap B)\cup(B^C\cap B)$

$=(B-A)\cup(A\cap B)\cup\varnothing$

$=(B\cap A^C)\cup(B\cap A)$

$=B\cap(A^C\cup A)$

$=B\cap U=B$

$\therefore B=\{1, 3\}$ ...... ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡에서

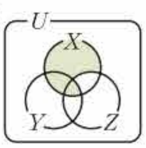
$A-B=(A\cup B)-B=\{2, 4\}$ ⋯ ❸

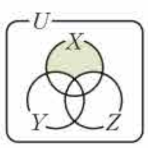
따라서 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은

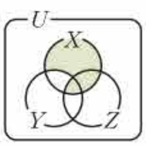
$2+4=6$ ⋯ ❹

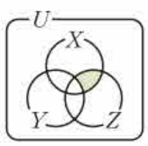
답 6

채점 기준	비율
❶ 집합 $A\cup B$를 구할 수 있다.	20 %
❷ 집합 B를 구할 수 있다.	50 %
❸ 집합 $A-B$를 구할 수 있다.	20 %
❹ 집합 $A-B$의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	10 %

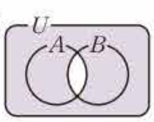
42 ① 

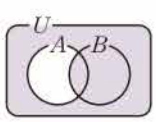
② 

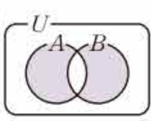
④ 

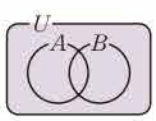
⑤ 

답 ③

43 ① 

② 

③ 

④ 

답 ⑤

44 $(A-C)\cap(B-C)=(A\cap C^C)\cap(B\cap C^C)$

$=(A\cap B)\cap C^C$

$=(A\cap B)-C$

따라서 집합 $(A-C)\cap(B-C)$를 벤다이어그램으로 바르게 나타낸 것은 ③이다.

답 ③

45 $(A_2\cup A_9)\cap A_4=(A_2\cap A_4)\cup(A_9\cap A_4)$

$=\underline{A_4\cup A_{36}}$ $A_{36}\subset A_4$

$=A_4$

전체집합 U의 원소 중 4의 배수는 25개이므로 구하는 원소의 개수는 25이다.

답 25

쎈B 특강

배수와 약수의 집합

자연수 k에 대하여

① k의 배수의 집합을 A_k라 할 때, 자연수 m이 자연수 n의 배수이면 $A_m\subset A_n$이므로

➡ $A_m\cap A_n=A_m$, $A_m\cup A_n=A_n$

예 4는 2의 배수이므로

$A_4\subset A_2$ ➡ $A_4\cap A_2=A_4$, $A_4\cup A_2=A_2$

② k의 약수의 집합을 B_k라 할 때, 자연수 m이 자연수 n의 약수이면 $B_m\subset B_n$이므로

➡ $B_m\cap B_n=B_m$, $B_m\cup B_n=B_n$

예 2는 4의 약수이므로

$B_2\subset B_4$ ➡ $B_2\cap B_4=B_2$, $B_2\cup B_4=B_4$

46 $(A_3\cup A_{21})\cap(A_5\cup A_{10})=A_3\cap A_5$

$=A_{15}$

답 ⑤

47 $A_{27}\cap A_{36}\cap A_{45}=(A_{27}\cap A_{36})\cap A_{45}$

$=A_9\cap A_{45}$

$=A_9$

$=\{1, 3, 9\}$

따라서 집합 $A_{27}\cap A_{36}\cap A_{45}$의 모든 원소의 합은

$1+3+9=13$

답 ④

48 집합 $A_4\cap A_{10}$은 4와 10의 양의 공배수의 집합, 즉 20의 양의 배수의 집합이므로

$A_4\cap A_{10}=A_{20}$

$A_p\subset A_{20}$을 만족시키는 p는 20의 양의 배수이므로 자연수 p의 최솟값은 20이다. ⋯ ❶

또 집합 $B_{16}\cap B_{24}$는 16과 24의 양의 공약수의 집합, 즉 8의 양의 약수의 집합이므로

$B_{16}\cap B_{24}=B_8$

$B_q\subset B_8$을 만족시키는 q는 8의 양의 약수이므로 자연수 q의 최댓값은 8이다. ⋯ ❷

따라서 구하는 합은

$20+8=28$ ⋯ ❸

답 28

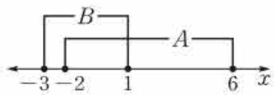
채점 기준	비율
❶ 자연수 p의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 자연수 q의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 자연수 p의 최솟값과 자연수 q의 최댓값의 합을 구할 수 있다.	20 %

49 $x^2-4x-12\le0$에서 $(x+2)(x-6)\le0$

$\therefore -2\le x\le6$

$\therefore A=\{x|-2\le x\le6\}$

$A\cap B=\{x|-2\le x\le1\}$, $A\cup B=\{x|-3\le x\le6\}$이려면 집합 B는 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$B=\{x|-3\le x\le1\}$

$=\{x|(x+3)(x-1)\le0\}$

$=\{x|x^2+2x-3\le0\}$

따라서 $p=2$, $q=-3$이므로

$p+q=-1$ 답 -1

50 $x^3+x^2-4x-4=0$에서

$(x+1)(x^2-4)=0$, $(x+1)(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$

$\therefore A=\{-2, -1, 2\}$ ··· ❶

$A-B=\{2\}$이므로 $-2\in B$, $-1\in B$

$-2\in B$에서 $4-2a+b=0$

$\therefore 2a-b=4$ ······ ㉠

$-1\in B$에서 $1-a+b=0$

$\therefore a-b=1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$ ··· ❷

$\therefore ab=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $-2\in B$, $-1\in B$이므로 -2, -1을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x+2)(x+1)=0$

$\therefore x^2+3x+2=0$

위의 식이 $x^2+ax+b=0$과 일치하므로

$a=3$, $b=2$ $\therefore ab=6$

51 $(4x-k)(2x-k)\le0$에서

$\frac{k}{4}\le x\le\frac{k}{2}$ ← k는 자연수이므로 $\frac{k}{4}<\frac{k}{2}$

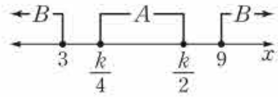
$\therefore A=\left\{x\middle|\frac{k}{4}\le x\le\frac{k}{2}\right\}$

$x^2-12x+27\ge0$에서 $(x-3)(x-9)\ge0$

$\therefore x\le3$ 또는 $x\ge9$

$\therefore B=\{x|x\le3$ 또는 $x\ge9\}$

$A\cap B=\varnothing$이 되려면 집합 A는 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\frac{k}{4}>3$, $\frac{k}{2}<9$

$\therefore 12<k<18$

따라서 자연수 k는 13, 14, 15, 16, 17의 5개이다. 답 ④

52 $x^2-8x+15<0$에서 $(x-3)(x-5)<0$

$\therefore 3<x<5$

$\therefore A=\{x|3<x<5\}$

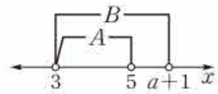
$x^2-(a+4)x+3a+3<0$에서

$(x-3)(x-a-1)<0$

$\therefore B=\{x|(x-3)(x-a-1)<0\}$

이때 $A\cup B=B$이므로 $A\subset B$

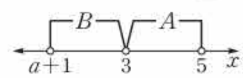
$A\subset B$이려면 집합 B는 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$a+1\ge5$ $\therefore a\ge4$

따라서 a의 최솟값은 4이다. 답 4

참고 $a+1<3$인 경우는 오른쪽 그림과 같으므로 $A\subset B$일 수 없다.

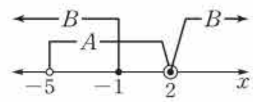


53 $x^2+3x-10<0$에서 $(x+5)(x-2)<0$

$\therefore -5<x<2$

$\therefore A=\{x|-5<x<2\}$

이때 $A\cup B=R$, $A\cap B=\{x|-5<x\le-1\}$이려면 집합 B는 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$B=\{x|x\le-1$ 또는 $x\ge2\}$

$=\{x|(x+1)(x-2)\ge0\}$

$=\{x|x^2-x-2\ge0\}$

따라서 $a=-1$, $b=-2$이므로

$a-b=1$ 답 ③

54 ㄱ. $A*\varnothing=(A-\varnothing)\cup(\varnothing-A)=A\cup\varnothing=A$

ㄴ. $A*U=(A-U)\cup(U-A)=\varnothing\cup A^C=A^C$

ㄷ. $A*A^C=\underline{(A-A^C)\cup(A^C-A)}=A\cup A^C=U$

ㄹ. $A^C*B^C=(A^C-B^C)\cup(B^C-A^C)$ ← $A\cap A^C=\varnothing$이므로 $A-A^C=A$, $A^C-A=A^C$

$=(A^C\cap B)\cup(B^C\cap A)$

$=(B-A)\cup(A-B)$

$=(A-B)\cup(B-A)$

$=A*B$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ④

55 $A\odot B=(A\cap B)\cup(A^C\cap B)$

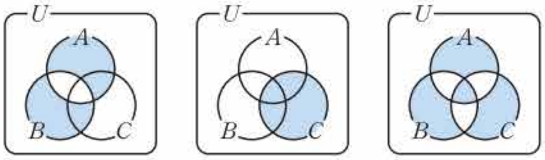
$=(A\cup A^C)\cap B$

$=U\cap B=B$

$\therefore (A\odot B)\odot A=B\odot A$

$=A$ 답 ①

56 $A\triangle B=(A\cap B^C)\cup(B\cap A^C)$
$=(A-B)\cup(B-A)$
이므로 집합 $(A\triangle B)\triangle C$를 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$(A\triangle B)\quad\triangle\quad C\quad=\quad(A\triangle B)\triangle C$

답 ④

57 $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$
이때
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=12+13-5=20$
이므로 $n(A^C\cap B^C)=26-20=6$ 답 ②

58 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=31+29-50$
$=10$
$\therefore n((A-B)\cup(B-A))=n((A\cup B)-(A\cap B))$
$=n(A\cup B)-n(A\cap B)$
$=50-10$
$=40$ 답 ④

다른 풀이 두 집합 $A-B$와 $B-A$가 서로소이므로
$n((A-B)\cup(B-A))=n(A-B)+n(B-A)$
$n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)$
$=50-29$
$=21$
$n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)$
$=50-31$
$=19$
$\therefore n((A-B)\cup(B-A))=21+19=40$

59 $B-A=B$이므로 $A\cap B=\varnothing$
$\therefore n(A\cap B)=0$
$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)$
$=16+8$
$=24$ 답 24

60 $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로
$15=45-n(A\cup B)$
$\therefore n(A\cup B)=30$ ⋯ ❶
이때
$n(A\cup B)=n(A\cap B^C)+n(B\cap A^C)+n(A\cap B)$
이므로
$30=6+20+n(A\cap B)$
$\therefore n(A\cap B)=4$ ⋯ ❷
답 4

채점 기준	비율
❶ $n(A\cup B)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $n(A\cap B)$를 구할 수 있다.	60 %

61 두 집합 A와 B가 서로소이므로
$A\cap B=\varnothing$, $A\cap B\cap C=\varnothing$
$\therefore n(A\cap B)=0$, $n(A\cap B\cap C)=0$
$n(B\cap C)=n(B)+n(C)-n(B\cup C)$
$=6+10-14=2$,
$n(C\cap A)=n(C)+n(A)-n(C\cup A)$
$=10+5-12=3$
이므로
$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=5+6+10-0-2-3+0$
$=16$ 답 ④

62 (i) $X\subset Y$일 때, $n(X\cap Y)$가 최대이므로
$M=n(X)=9$
(ii) $X\cup Y=U$일 때, $n(X\cap Y)$가 최소이므로
$n(X\cap Y)=n(X)+n(Y)-n(X\cup Y)$에서
$m=9+16-22=3$
(i), (ii)에서 $M-m=6$ 답 ⑤

다른 풀이 $n(X\cap Y)=n(X)+n(Y)-n(X\cup Y)$
$=9+16-n(X\cup Y)$
$=25-n(X\cup Y)$ ⋯⋯ ㉠
$X\subset(X\cup Y)$, $Y\subset(X\cup Y)$이므로
$n(X)\le n(X\cup Y)$, $n(Y)\le n(X\cup Y)$ ⋯⋯ ㉡
$(X\cup Y)\subset U$이므로
$n(X\cup Y)\le n(U)$ ⋯⋯ ㉢
㉡, ㉢에서 $16\le n(X\cup Y)\le 22$이므로
$-22\le -n(X\cup Y)\le -16$
$\therefore 3\le 25-n(X\cup Y)\le 9$
따라서 ㉠에서 $3\le n(X\cap Y)\le 9$이므로
$M=9$, $m=3$
$\therefore M-m=6$

63 $(A\cap B)\subset A$, $(A\cap B)\subset B$이므로
$n(A\cap B)\le n(A)$, $n(A\cap B)\le n(B)$
또 $n(A\cap B)\ge 2$이므로 ($n(A)=11$, $n(B)=5$이므로 $n(A\cap B)\le 5$)
$2\le n(A\cap B)\le 5$ ⋯ ❶
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서
(i) $n(A\cap B)=2$일 때,
$n(A\cup B)=11+5-2=14$
(ii) $n(A\cap B)=5$일 때,
$n(A\cup B)=11+5-5=11$
(i), (ii)에서 $11\le n(A\cup B)\le 14$ ⋯ ❷

따라서 $n(A\cup B)$의 최댓값은 14, 최솟값은 11이므로 구하는 합은

$14+11=25$ ⋯ ❸

답 25

채점 기준	비율
❶ $n(A\cap B)$의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ $n(A\cup B)$의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ $n(A\cup B)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	10 %

64 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$

(i) $A\cup B=U$일 때, $n(B)$가 최대이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$에서

$k-2=k+M-9$ $n(A)=n(A-B)+n(A\cap B)=2+k-2=k$

$\therefore M=7$

(ii) $B\subset A$일 때, $n(B)$가 최소이므로

$n(B)=n(A\cap B)=k-2$

$\therefore m(k)=k-2$

(i), (ii)에서 $M+m(5)=7+(5-2)=10$

답 10

65 학생 전체의 집합을 U, A 회사의 휴대폰을 사용해 본 학생의 집합을 A, B 회사의 휴대폰을 사용해 본 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=35,\ n(A)=18,\ n(B)=15,\ n(A^C\cap B^C)=5$

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$에서

$n(A\cup B)=35-5=30$

따라서 A 회사와 B 회사의 휴대폰을 모두 사용해 본 학생 수는

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=18+15-30$

$=3$

답 ①

66 회원 전체의 집합을 U, 추리 소설을 좋아하는 회원의 집합을 A, 과학 소설을 좋아하는 회원의 집합을 B라 하면

$n(U)=30,\ n(A)=13,\ n(B)=20,$

$n(A^C\cap B^C)=3$ ⋯ ❶

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$에서

$n(A\cup B)=30-3=27$

$\therefore n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=13+20-27$

$=6$ ⋯ ❷

따라서 추리 소설만 좋아하는 회원 수는

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$=13-6=7$ ⋯ ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 집합으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $n(A\cap B)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ 추리 소설만 좋아하는 회원 수를 구할 수 있다.	30 %

67 학생 전체의 집합을 U, 골프를 선택한 학생의 집합을 A, 수영을 선택한 학생의 집합을 B라 하면 조건 (가), (나), (다)에서

$n(U)=40,\ n(A)=17,\ n(A-B)=14,\ n(A^C\cap B^C)=11$

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$에서

$n(A\cap B)=17-14=3$

또 $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$에서

$n(A\cup B)=40-11=29$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$29=17+n(B)-3$

$\therefore n(B)=15$

따라서 수영을 선택한 학생 수는 15이다.

답 ④

68 학생 전체의 집합을 U, 세 단체 A, B, C를 신청한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(U)=n(A\cup B\cup C)=50,\ n(A)=24,\ n(B)=19,$

$n(C)=25,\ n(A\cap B\cap C)=5$ 모든 학생이 한 개 이상의 단체를 신청했으므로 $U=A\cup B\cup C$

세 단체 중 두 단체만 신청한 학생 수는

$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-3\times n(A\cap B\cap C)$ ⋯⋯ ㉠

이때

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

에서

$50=24+19+25-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+5$

$\therefore n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=23$

따라서 ㉠에서 구하는 학생 수는

$23-3\cdot5=8$

답 8

69 학생 전체의 집합을 U, 버스를 이용하여 등교하는 학생의 집합을 A, 지하철을 이용하여 등교하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=110,\ n(A)=65,\ n(B)=58$

버스와 지하철을 모두 이용하여 등교하는 학생의 집합은 $A\cap B$이므로 $B\subset A$일 때 $n(A\cap B)$가 최대이다.

$\therefore M=n(B)=58$

또 $A\cup B=U$일 때 $n(A\cap B)$가 최소이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$에서

$m=65+58-110=13$

$\therefore M-m=45$

답 ④

70 회원 전체의 집합을 U, 피아노를 갖고 있는 회원의 집합을 A, 바이올린을 갖고 있는 회원의 집합을 B라 하면

$n(U)=60,\ n(A)=36,\ n(B)=28$

피아노만 갖고 있는 회원의 집합은 $A-B$이고

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$ ⋯⋯ ㉠

이므로 $n(A\cap B)$가 최소일 때 $n(A-B)$는 최대이다.

$A\cup B=U$일 때 $n(A\cap B)$가 최소이므로 $n(A\cap B)$의 최솟값을 m이라 하면 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$에서

$m=36+28-60=4$

따라서 $n(A\cap B)$의 최솟값은 4이므로 ㉠에서 구하는 최댓값은

$36-4=32$ 답 ⑤

71 고객 전체의 집합을 U, 멜론 빙수를 주문한 고객의 집합을 A, 망고 빙수를 주문한 고객의 집합을 B라 하면

$n(U)=42,\ n(A)=15,\ n(B)=21$

멜론 빙수와 망고 빙수 중 어느 것도 주문하지 않은 고객 수는

$$\begin{aligned} a&=n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)\\ &=n(U)-n(A\cup B)\\ &=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}\\ &=42-15-21+n(A\cap B)\\ &=6+n(A\cap B) \end{aligned}$$

따라서 a는 $n(A\cap B)$가 최소일 때 최소이고, $n(A\cap B)$가 최대일 때 최대이다.

이때 $n(A\cap B)$의 최댓값이 15, 최솟값이 0이므로

$M=6+15=21,\ m=6+0=6$

$\therefore M+m=27$ 답 27

쎈B 특강

① $A\subset B$일 때, 즉 $n(A\cap B)=n(A)$일 때, $n(A\cap B)$가 최대이다.
따라서 $n(A\cap B)$의 최댓값은 15이다.

② $n(A)+n(B)=36<42=n(U)$이므로 $A\cap B=\varnothing$일 때, $n(A\cap B)$가 최소이다.
따라서 $n(A\cap B)$의 최솟값은 0이다.

03 명제

개념 정리

본책 32쪽

❶ 증명 ❷ 거짓 ❸ P^C ❹ 그리고 ❺ 또는
❻ 결론 ❼ 참 ❽ $P=\varnothing$ ❾ 모든 ❿ $\sim q$
⓫ 거짓 ⓬ 필요조건 ⓭ 대우 ⓮ 0 ⓯ $\sqrt{b}$
⓰ $\sqrt{ab}$ ⓱ a^2+b^2

쎈B 유형 뽀개기

본책 34쪽

001 ①, ⑤ 참인 명제이다.

②, ④ 거짓인 명제이다.

③ x의 값이 정해져 있지 않으므로 참, 거짓을 판별할 수 없다. 따라서 명제가 아니다.

답 ③

002 ㄱ. 참인 명제이다.

ㄴ. 거짓인 명제이다.

ㄷ. x의 값이 정해져 있지 않으므로 참, 거짓을 판별할 수 없다. 따라서 명제가 아니다.

ㄹ. $3x=3(x-2)$에서 $0=-6$이므로 거짓인 명제이다.

이상에서 참인 명제인 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

003 ① $0.\dot{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$이므로 참인 명제이다.

②, ④ x의 값이 정해져 있지 않으므로 참, 거짓을 판별할 수 없다. 따라서 명제가 아니다.

③ 거짓인 명제이다.

⑤ $2x>x-(2-x)$에서 $0>-2$이므로 참인 명제이다.

답 ③

004 '$\sim p$ 또는 q'의 부정은 'p 그리고 $\sim q$'

p: $-1\le x\le 3$, $\sim q$: $2<x\le 6$이므로 'p 그리고 $\sim q$'는

$2<x\le 3$ 답 ①

005 각 명제의 부정과 그 참, 거짓은 다음과 같다.

① $-2\ge 5$ (거짓)

② $\{1,\ 5\}\not\subset\{1,\ 2,\ 5,\ 8\}$ (거짓)

③ 0은 자연수이다. (거짓)

④ 15는 3의 배수가 아니다. (거짓)

⑤ 정사각형은 마름모이다. (참)

답 ⑤

다른 풀이 명제가 거짓이면 그 부정은 참이다. 주어진 명제 ①, ②, ③, ④는 참, ⑤는 거짓이므로 명제의 부정이 참인 것은 ⑤이다.

006 '$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq0$'의 부정은

'$\underbrace{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}_{(a-b)^2\geq0,\ (b-c)^2\geq0,\ (c-a)^2\geq0}=0$'

이므로

$(a-b)^2=0$이고 $(b-c)^2=0$이고 $(c-a)^2=0$

$\therefore\ a=b$이고 $b=c$이고 $c=a$

$\therefore\ a=b=c$

답 ①

007 q: $x^2-10x+21\leq0$에서

$(x-3)(x-7)\leq0\qquad\therefore\ 3\leq x\leq7$

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9\}$이므로 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $Q=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$

① 조건 $\sim p$의 진리집합은 $P^C=\{1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9\}$이므로

$n(P^C)=5$

② 조건 $\sim q$의 진리집합은 $Q^C=\{1,\ 2,\ 8,\ 9\}$이므로

$n(Q^C)=4$

③ 조건 'p이고 q'의 진리집합은 $P\cap Q=\{3,\ 5,\ 7\}$이므로

$n(P\cap Q)=3$

④ 조건 'p이고 $\sim q$'의 진리집합은 $P\cap Q^C=\{2\}$이므로

$n(P\cap Q^C)=1$

⑤ 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합은

$P^C\cup Q=\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$이므로

$n(P^C\cup Q)=8$

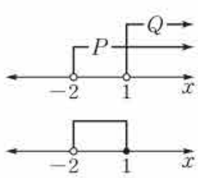
답 ④

008 1, 2, 3, ⋯, 30 중 3의 배수는 3, 6, 9, ⋯, 30이고, 30의 약수는 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30이므로 조건 p의 진리집합은

$\{3,\ 6,\ 15,\ 30\}$ 답 $\{3,\ 6,\ 15,\ 30\}$

009 두 진리집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

또 조건 '$-2<x\leq1$'의 진리집합을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 집합은



$P\cap Q^C$ 답 ③

참고 ① $P\cap Q=\{x\mid x>1\}$

② $P\cup Q=\{x\mid x>-2\}$

④ $P^C\cup Q=\{x\mid x\leq-2$ 또는 $x>1\}$

⑤ $(P\cap Q)^C=\{x\mid x\leq1\}$

010 $|x|\leq2$에서 $\quad -2\leq x\leq2$

$\therefore\ U=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$

p: $x^3-4x=0$에서 $\quad x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

조건 p의 진리집합을 P라 하면 $\quad P=\{-2,\ 0,\ 2\}$ ⋯ ❶

q: $x^2-3x+2=0$에서 $\quad (x-1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=2$

조건 q의 진리집합을 Q라 하면 $\quad Q=\{1,\ 2\}$ ⋯ ❷

이때 조건 '$\sim p$ 또는 $\sim q$'의 진리집합은 $P^C\cup Q^C$, 즉 $(P\cap Q)^C$이고 $P\cap Q=\{2\}$이므로

$(P\cap Q)^C=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$ ⋯ ❸

따라서 구하는 집합의 모든 원소의 합은

$-2+(-1)+0+1=-2$ ⋯ ❹

답 -2

채점 기준	비율
❶ 조건 p의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❷ 조건 q의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❸ 조건 '$\sim p$ 또는 $\sim q$'의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❹ 조건 '$\sim p$ 또는 $\sim q$'의 진리집합의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	10 %

011 ㄱ. [반례] $x=-2$, $y=-1$이면 $x<y$이지만 $\underbrace{x^2>y^2}_{4>1}$이다.

ㄷ. [반례] $x=2$, $y=-1$이면 $x+y>0$이지만 $xy<0$이다.

이상에서 거짓인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

012 ① [반례] $x=1$이면 $-x^2+x=0$이지만 $x>0$이다.

② $x+5=9$에서 $x=4$이고 $4^2-4\neq0$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

③ [반례] $x=2$이면 x는 6의 약수이지만 9의 약수는 아니다.

⑤ [반례] $x=1$, $y=0$이면 $x^2+y^2\neq0$이지만 $y=0$이다.

답 ④

013 ㄱ. 두 조건 p, q를

p: x는 14의 양의 배수이다.

q: x는 7의 양의 배수이다.

라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{14,\ 28,\ 42,\ 56,\ \cdots\}$, $Q=\{7,\ 14,\ 21,\ 28,\ \cdots\}$

따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄴ. [반례] $x=2$이면 x는 소수이지만 $x+1=3$은 홀수이다.

ㄷ. 사각형 ABCD가 정사각형이면

$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$

따라서 $\angle A=\angle D$이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄹ. [반례] $x=0$이면 $-1<x<1$이지만 $x^2=0$이다.

이상에서 거짓인 명제는 ㄴ, ㄹ의 2개이다. 답 2

014 명제 'q이면 p이다.'가 거짓임을 보이는 원소는 집합 Q에는 속하고 집합 P에는 속하지 않으므로 집합 $P^C\cap Q$의 원소이다.

따라서 구하는 원소는 c, d이다. 답 ②

015 두 조건 p, q를

p: n은 24의 약수이다.

q: n은 18의 약수이다.

라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$, $Q=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$

이때 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 집합 P에는 속하고 집합 Q에는 속하지 않으므로 집합 $P\cap Q^C$의 원소이다.

따라서 구하는 반례는 4, 8, 12, 24이다.

답 4, 8, 12, 24

016 명제 'p이면 q 또는 $\sim r$이다.'가 거짓임을 보이는 원소는 집합 P에는 속하고 집합 $Q\cup R^C$에는 속하지 않는다.
따라서 구하는 집합은

$$P\cap(Q\cup R^C)^C=P\cap(Q^C\cap R)=(P\cap R)\cap Q^C$$
$$=(P\cap R)-Q$$

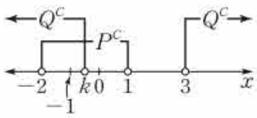
답 ③

017 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|x\le -2$ 또는 $x\ge 1\}$, $Q=\{x|k\le x\le 3\}$

이때 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 집합 P^C에는 속하고 집합 Q에는 속하지 않으므로 집합 $P^C\cap Q^C$의 원소이다.

$P^C=\{x|-2<x<1\}$,
$Q^C=\{x|x<k$ 또는 $x>3\}$이므로
집합 $P^C\cap Q^C$의 정수인 원소가 -1뿐이려면 오른쪽 그림에서



$-1<k\le 0$

따라서 k의 최댓값은 0이다.

답 0

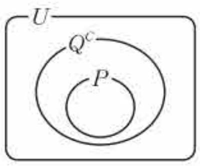
018 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로

$P\subset Q^C$

따라서 오른쪽 그림에서

$P\cap Q=\varnothing$

답 ③



019 주어진 벤다이어그램에서

$P\subset R^C$, $Q\subset P$, $R\subset Q^C$, $P^C\subset Q^C$

이므로 네 명제

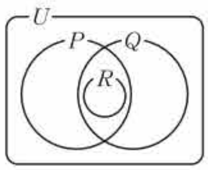
$p \longrightarrow \sim r$, $q \longrightarrow p$, $r \longrightarrow \sim q$, $\sim p \longrightarrow \sim q$

도 모두 참이다.
그러나 $Q^C\not\subset R^C$이므로 명제 $\sim q \longrightarrow \sim r$는 거짓이다.

답 ⑤

020 세 집합 P, Q, R에 대하여 $R\subset(P\cap Q)$를 만족시키도록 벤다이어그램을 그리면 오른쪽 그림과 같다.
이때 $R\subset Q$, $P^C\subset R^C$이므로 두 명제 $r \longrightarrow q$, $\sim p \longrightarrow \sim r$는 모두 참이다.
이상에서 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ③



021 명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$
이때 $P=\{1, 2, 4\}$이므로 집합 Q는 1, 2, 4를 반드시 원소로 가져야 한다.
따라서 집합 Q의 개수는

$2^{7-3}=2^4=16$

답 16

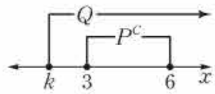
022 p: $x^2-9x+18>0$에서 $(x-3)(x-6)>0$

$\therefore x<3$ 또는 $x>6$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|x<3$ 또는 $x>6\}$,
$Q=\{x|x\ge k\}$

$P^C=\{x|3\le x\le 6\}$이고 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P^C\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



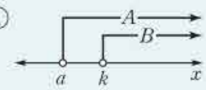
$k\le 3$

따라서 자연수 k의 합은 $1+2+3=6$

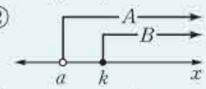
답 6

쎈B특강

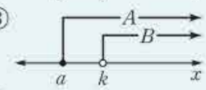
$B\subset A$가 되도록 하는 a의 값의 범위 구하기

①


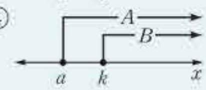
⇒ $a\le k$

②


⇒ $a<k$

③


⇒ $a\le k$

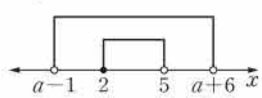
④


⇒ $a\le k$

023 주어진 명제가 참이 되려면

$\{x|2\le x<5\}\subset\{x|a-1<x<a+6\}$

이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a-1<2$, $a+6\ge 5$

$\therefore -1\le a<3$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1, 2의 4개이다.

답 4

024 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

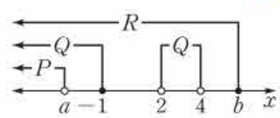
$P=\{x|x<a\}$,
$Q=\{x|x\le -1$ 또는 $2<x<4\}$,
$R=\{x|x\le b\}$ ··· ❶

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면

$P\subset Q$

이고, 명제 $q \longrightarrow r$가 참이 되려면

$Q\subset R$



이어야 하므로 위의 그림에서

$a\le -1$, $b\ge 4$ ··· ❷

따라서 a의 최댓값은 -1, b의 최솟값은 4이므로 구하는 합은

$-1+4=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 세 조건 p, q, r의 진리집합을 구할 수 있다.	20 %
❷ a, b의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
❸ a의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구할 수 있다.	20 %

025 $\sim p$: $|x-2|\ge k$에서

$x-2\le -k$ 또는 $x-2\ge k$

$\therefore x\le -k+2$ 또는 $x\ge k+2$

q: $x^2+8x+15<0$에서 $(x+5)(x+3)<0$

$\therefore -5<x<-3$

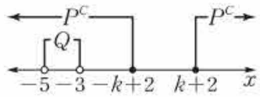
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P^C=\{x|x\le -k+2$ 또는 $x\ge k+2\}$,

$Q=\{x|-5<x<-3\}$

명제 $q \longrightarrow \sim p$가 참이 되려면 $Q\subset P^C$이어야 한다.

이때 $k>0$에서 $k+2>2$이므로 두 집합 P^C, Q는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $-k+2\ge -3$이므로

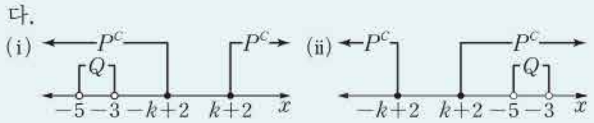
$0<k\le 5$ ($\because k>0$)

따라서 k의 최댓값은 5이다.

답 5

쎈B 특강

$Q\subset P^C$가 되는 경우를 다음과 같은 두 가지 경우로 생각할 수 있다.



그런데 $k+2>2$에서 $k+2$의 값은 -5보다 작을 수 없으므로 (ii)의 경우는 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

026 ① [반례] 2는 소수이지만 짝수이다.

② [반례] $x=0$이면 $|x|=0$이다.

③ $x<0$이면 $x^2>0$이므로 모든 음의 실수 x에 대하여 $x^2>x$이다. 따라서 주어진 명제는 거짓이다.

④ $x=3$이면 $x^2=x+6$이므로 주어진 명제는 참이다.

⑤ [반례] $x=\sqrt{2}$이면 $x^2=2$는 유리수이다.

답 ④

027 ③ $-2\le x\le 2$에서

$3\le x+5\le 7$

따라서 모든 x에 대하여 $x+5\notin U$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

④ $x=2$, $y=2$이면 $x+y=4$이므로 주어진 명제는 참이다.

⑤ 모든 x, y에 대하여 $x^2\le 4$, $y^2\le 4$이므로 $x^2+y^2\le 8$이다.

답 ③

028 주어진 명제의 부정은

'모든 실수 x에 대하여 $x^2-kx+k+3\ge 0$이다.'

이다. ··· ❶

위의 명제가 참이려면 이차방정식 $x^2-kx+k+3=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=(-k)^2-4(k+3)\le 0$, $\quad k^2-4k-12\le 0$

$(k+2)(k-6)\le 0$

$\therefore -2\le k\le 6$

따라서 k의 최댓값은 6이다. ··· ❷

답 6

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 부정을 구할 수 있다.	40 %
❷ k의 최댓값을 구할 수 있다.	60 %

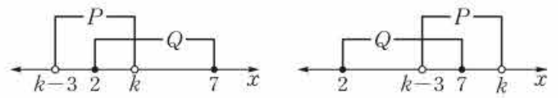
029 두 조건 p, q를

p: $k-3<x<k$, q: $2\le x\le 7$

이라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|k-3<x<k\}$, $Q=\{x|2\le x\le 7\}$

주어진 명제가 참이려면 $P\cap Q\ne\varnothing$이어야 하므로 다음 그림과 같아야 한다.



즉 $k>2$, $k-3<7$이므로

$2<k<10$

답 $2<k<10$

030 ① 역: $x=2$이면 $x^2=4$이다. (참)

② 역: $x<3$이면 $5-2x<0$이다.

[반례] $x=\frac{5}{2}$이면 $x<3$이지만 $5-2x=0$이다.

③ 역: x, y가 모두 짝수이면 $x+y$는 짝수이다. (참)

④ 역: $x>0$, $y<0$이면 $xy<0$이다. (참)

⑤ 역: $x^2+y^2=0$이면 $x=0$, $y=0$이다. (참)

답 ②

031 명제 $q \longrightarrow p$의 역인 $p \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우인

$\sim q \longrightarrow \sim p$

도 참이다.

답 ⑤

032 ㄱ. 명제: [반례] $a=1+\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$이면 $a+b=1$은 유리수이지만 a, b는 모두 유리수가 아니다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

ㄴ. 대우: $a<1$이고 $b<1$이면 $a+b<2$이다. (참)

ㄷ. 대우: $a>2$이면 $a>3$이다.

[반례] $a=2.5$이면 $a>2$이지만 $a<3$이다.

이상에서 대우가 거짓인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

033 ① 역: $a-b>0$이면 $a<b$이다.

[반례] $a=2$, $b=1$이면 $a-b>0$이지만 $a>b$이다.

명제: [반례] $a=1$, $b=2$이면 $a<b$이지만 $a-b<0$이다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

② 역: $x^2-x=0$이면 $x=1$이다.

[반례] $x=0$이면 $x^2-x=0$이지만 $x\ne 1$이다.

또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

③ 역: $ab=0$이면 $a=0$이다.

[반례] $a=1$, $b=0$이면 $ab=0$이지만 $a\ne 0$이다.

또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

④ 역: $a+c=b+c$이면 $a=b$이다. (참)

또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

⑤ 역: x가 10의 약수이면 x는 20의 약수이다. (참)

명제: [반례] $x=20$이면 x는 20의 약수이지만 10의 약수는 아니다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

따라서 그 역과 대우가 모두 참인 명제는 ④이다.

답 ④

034 명제 $p \longrightarrow \sim q$의 역은 $\sim q \longrightarrow p$이다.

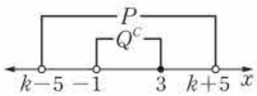
p: $|x-k|<5$에서 $\quad -5<x-k<5$

$\therefore k-5<x<k+5$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|k-5<x<k+5\}$, $Q^C=\{x|-1<x\le 3\}$

이때 명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q^C \subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$k-5\le -1$, $k+5>3$

$\therefore -2<k\le 4$

따라서 정수 k는 -1, 0, 1, 2, 3, 4의 6개이다. 답 6

035 주어진 명제가 참이므로 그 대우

'$a<-2$이고 $b<k$이면 $a+b<-5$이다.'

도 참이다.

$a<-2$, $b<k$에서 $a+b<k-2$이므로

$\underline{k-2\le -5}$ $\{(a, b)|a+b<k-2\}\subset\{(a, b)|a+b<-5\}$

$\therefore k\le -3$

따라서 k의 최댓값은 -3이다. 답 -3

036 주어진 명제가 참이므로 그 대우

'$x+6=0$이면 $x^2+kx-6=0$이다.'

도 참이다.

$x+6=0$에서 $x=-6$이므로 이것을 $x^2+kx-6=0$에 대입하면

$36-6k-6=0, \qquad 6k=30$

$\therefore k=5$ 답 ⑤

037 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 그 대우 $q \longrightarrow p$가 참이 되어야 한다. ⋯ ❶

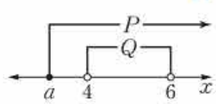
q: $|x-5|<1$에서 $\quad -1<x-5<1$

$\therefore 4<x<6$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|x\ge a\}$, $Q=\{x|4<x<6\}$ ⋯ ❷

명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q\subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a\le 4$ ⋯ ❸

답 $a\le 4$

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 대우가 참이어야 함을 알 수 있다.	10 %
❷ 두 조건 p, q의 진리집합을 구할 수 있다.	50 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

다른 풀이 $\sim p$: $x<a$

$\sim q$: $|x-5|\ge 1$에서 $\quad x-5\le -1$ 또는 $x-5\ge 1$

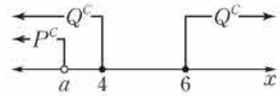
$\therefore x\le 4$ 또는 $x\ge 6$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P^C=\{x|x<a\}$,

$Q^C=\{x|x\le 4$ 또는 $x\ge 6\}$

명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 $P^C\subset Q^C$이어야 하므로 오른쪽 그림에서 $\quad a\le 4$



038 두 명제 $p \longrightarrow q$, $r \longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 각각의 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$, $q \longrightarrow \sim r$도 모두 참이다.

또 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$가 참이고, 그 대우 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 $q \longrightarrow r$이다.

답 ②

039 ㄱ. 명제 $r \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim r$도 참이다. 이때 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$는 참이다.

ㄴ. 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow \sim p$도 참이다. 이때 명제 $\sim p \longrightarrow s$가 참이므로 명제 $q \longrightarrow s$는 참이다.

ㄷ. ㄱ에서 명제 $p \longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다. 이때 명제 $\sim p \longrightarrow s$가 참이므로 명제 $r \longrightarrow s$는 참이지만 명제 $r \longrightarrow \sim s$의 참, 거짓은 추론할 수 없다.

이상에서 항상 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

040 명제 $\sim s \longrightarrow r$가 참이므로 그 대우 $\sim r \longrightarrow s$도 참이다.

두 명제 $p \longrightarrow q$, $\sim r \longrightarrow s$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow s$가 참이 되려면 명제 $q \longrightarrow \sim r$가 참이어야 한다.

또 명제 $q \longrightarrow \sim r$가 참이면 그 대우 $r \longrightarrow \sim q$도 참이다.

따라서 명제 $p \longrightarrow s$가 참임을 보이기 위해 필요한 참인 명제는 $r \longrightarrow \sim q$이다. 답 ④

041 세 조건 p, q, r를

p: 사과를 좋아한다.

q: 배를 좋아한다.

r: 수박을 좋아한다.

로 놓으면 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow r$도 참이고, 그 대우 $\sim r \longrightarrow \sim p$도 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ③이다. 답 ③

참고 각 선택지를 p, q, r로 나타내면 다음과 같다.

① $p \longrightarrow \sim r$ ② $q \longrightarrow p$ ③ $\sim r \longrightarrow \sim p$

④ $r \longrightarrow q$ ⑤ $\sim q \longrightarrow \sim r$

042 (i) C가 1반인 경우

(라)에 의하여 A가 1반이고 (다)에 의하여 B도 1반이다.

즉 A, B, C 모두 1반이므로 (나)에 모순이다. ⋯ ❶

(ii) C가 2반인 경우

(가), (다)에 의하여 A, B가 모두 1반이거나 2반이다.

이때 A, B, C 모두 2반이면 (나)에 모순이므로 A, B는 모두 1반이다. ⋯ ❷

(i), (ii)에서 1반인 학생은 A, B이다. ⋯ ❸

답 A, B

채점 기준	비율
❶ C가 1반일 때, 모순임을 알 수 있다.	40 %
❷ C가 2반일 때, A, B의 반을 알 수 있다.	50 %
❸ 1반인 학생을 모두 고를 수 있다.	10 %

다른 풀이 (i) A, B가 모두 1반인 경우

㈎, ㈏에 의하여 C는 2반이다.

(ii) A, B가 모두 2반인 경우

㈎, ㈏에 의하여 C는 1반이다. 이때 ㈑의 대우에 모순이다.
A가 1반이 아니면 C도 1반이 아니다. 즉 A가 2반이면 C도 2반이다.

(i), (ii)에서 1반인 학생은 A, B이다.

043 ① p: $xy=0$에서 $x=0$ 또는 $y=0$

q: $|x|+|y|=0$에서 $x=0$, $y=0$

따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

② $z>0$이므로 $x>y \Longleftrightarrow \frac{x}{z}>\frac{y}{z}$

따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

③ p: $x^2=1$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

④ 모든 정수는 유리수이다.

따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

⑤ $x-y<0 \Longleftrightarrow x<y$

따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

따라서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ④이다. 답 ④

044 ① $x-y=0$, 즉 $x=y$이면 $|x|=y$이므로

$p \Longrightarrow q$

[←의 반례] $x=-1$, $y=1$이면 $|x|=y$이지만 $x-y\neq0$이다.

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

② $x\le0$, $y\le0$이면 $xy\ge0$이므로

$p \Longrightarrow q$

[←의 반례] $x=1$, $y=1$이면 $xy\ge0$이지만 $x>0$, $y>0$이다.

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

③ p: $x^2=y^2 \Longleftrightarrow q$: $|x|=|y|$

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

④ [→의 반례] $x=0$, $y=1$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $x=0$이다.

$x\neq0$, $y\neq0$이면 $x^2+y^2>0$이므로

$q \Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

⑤ [→의 반례] $x=4$이면 $x<5$이지만 $x>3$이다.

$x<3$이면 $x<5$이므로 $q \Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

따라서 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ③이다. 답 ③

045 ㄱ. $a=b=c$이면

$(a-b)(b-c)(c-a)=0$

이므로 $p \Longrightarrow q$

$(a-b)(b-c)(c-a)=0$이면

$a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ — $a-b=0$ 또는 $b-c=0$ 또는 $c-a=0$

이므로 $q \not\Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. [→의 반례] $a=1$, $b=2$, $c=0$이면 $a>c$이지만 $a<b$이다.

$a>b$, $b>c$이면 $a>b>c$이므로

$q \Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. [→의 반례] $a=-3$, $b=-3$이면 $ab>6$이지만 $a<2$, $b<3$이다.

$a>2$, $b>3$이면 $ab>6$이므로

$q \Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

이상에서 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

046 p: $a^2+b^2=0$에서 $a=0$, $b=0$

q: $a^2-ab=0$에서 $a(a-b)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=b$

r: $a^3=b^3$에서 $a=b$

ㄱ. $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $q \not\Longrightarrow r$, $r \Longrightarrow q$이므로 q는 r이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. p이고 r: $a=b=0$

따라서 (p이고 r) $\Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow$ (p이고 r)이므로 p이고 r는 q이기 위한 충분조건이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

047 ① $q \Longrightarrow r$, $r \Longrightarrow p$이므로 $q \Longrightarrow p$

④ $r \Longrightarrow p$이므로 $\sim p \Longrightarrow \sim r$

답 ⑤

048 ㄱ. $r \Longrightarrow p$이므로 p는 r이기 위한 필요조건이다.

ㄴ. $q \Longrightarrow \sim p$이므로 $p \Longrightarrow \sim q$

따라서 p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.

ㄷ. $r \Longrightarrow p$에서 $\sim p \Longrightarrow \sim r$

이때 $q \Longrightarrow \sim p$이므로 $q \Longrightarrow \sim r$

따라서 q는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

049 p는 r이기 위한 충분조건이므로

$P\subset R$

r는 q이기 위한 충분조건이므로

$R\subset Q$

따라서 $P\subset R\subset Q$이므로 항상 옳은 것은 ③이다. 답 ③

050 ② $P\subset R^C$이므로 p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.

③ $P\subset Q$이므로 q는 p이기 위한 필요조건이다.

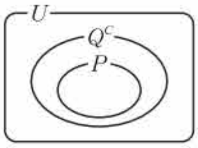
⑤ $Q^C\subset P^C$이므로 $\sim q$는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.

답 ②

051 $\sim q$는 p이기 위한 필요조건이므로

$P \subset Q^C$

두 집합 P, Q 사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.



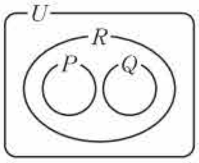
답 ④

052 $(P \cup Q)-R=\varnothing$이므로 $\quad (P \cup Q) \subset R$

$Q-P^C=\varnothing$이므로 $\quad Q-P^C=Q\cap(P^C)^C=P\cap Q$

$P \cap Q=\varnothing$

세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



② $P \subset R$이므로 p는 r이기 위한 충분조건이다.

③ $Q \subset R$이므로 r는 q이기 위한 필요조건이다.

④ $Q \subset P^C$이므로 q는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.

답 ④

053 p: $|x-k| \le 3$에서 $\quad -3 \le x-k \le 3$

$\therefore k-3 \le x \le k+3$

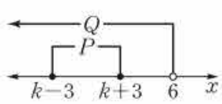
q: $x-8<2(5-x)$에서 $\quad x-8<10-2x$

$3x<18 \quad \therefore x<6$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid k-3 \le x \le k+3\}$, $Q=\{x \mid x<6\}$

p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 $P \subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$k+3<6$

$\therefore k<3$

따라서 자연수 k의 합은 $\quad 1+2=3$

답 3

054 p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 명제

'$3x^2+x-a \ne 0$이면 $3x-2 \ne 0$이다.'

가 참이어야 하고, 이 명제의 대우

'$3x-2=0$이면 $3x^2+x-a=0$이다.'

도 참이어야 한다. ⋯ ❶

$3x-2=0$에서 $x=\frac{2}{3}$이므로 이것을 $3x^2+x-a=0$에 대입하면

$3 \cdot \frac{4}{9}+\frac{2}{3}-a=0, \quad 2-a=0$

$\therefore a=2$ ⋯ ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ p가 q이기 위한 필요조건임을 이용하여 참인 명제를 찾을 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %

055 $7x+2=5x+3$에서 $\quad 2x=1 \quad \therefore x=\frac{1}{2}$

이때 $7x+2=5x+3$은 $4x^2-ax+b=0$이기 위한 필요충분조건이므로 이차방정식 $4x^2-ax+b=0$의 해는 $x=\frac{1}{2}$뿐이어야 한다.

중근 $x=\frac{1}{2}$을 갖고 x^2의 계수가 4인 이차방정식은 $4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$, 즉 $(2x-1)^2=0$이므로

$4x^2-ax+b=(2x-1)^2$

$\therefore 4x^2-ax+b=4x^2-4x+1$

따라서 $a=4$, $b=1$이므로

$a-b=3$

답 3

056 q는 p이기 위한 충분조건이므로

$Q \subset P$ ⋯⋯ ㉠

r는 q이기 위한 필요조건이므로

$Q \subset R$ ⋯⋯ ㉡

㉠에서 $-3 \in P$이어야 하므로

$a^2-4=-3$ 또는 $b+2=-3$

(i) $a^2-4=-3$일 때, $a=\pm 1$이므로

$P=\{-3, b+2\}$, $R=\{0, b-5\}$

또는 $P=\{-3, b+2\}$, $R=\{-2, b-5\}$

㉡에서 $-3 \in R$이어야 하므로

$b-5=-3 \quad \therefore b=2$

$\therefore a+b=3$ 또는 $a+b=1$

(ii) $b+2=-3$일 때, $b=-5$이므로

$P=\{a^2-4, -3\}$, $R=\{a-1, -10\}$

㉡에서 $-3 \in R$이어야 하므로

$a-1=-3 \quad \therefore a=-2$

$\therefore a+b=-7$

(i), (ii)에서 $a+b$의 최솟값은 -7이다.

답 ①

다른 풀이 ㉡에서 $-3 \in R$이어야 하므로

$a-1=-3$ 또는 $b-5=-3$

(i) $a-1=-3$일 때, $a=-2$이므로

$P=\{0, b+2\}$, $R=\{-3, b-5\}$

㉠에서 $-3 \in P$이어야 하므로

$b+2=-3 \quad \therefore b=-5$

$\therefore a+b=-7$

(ii) $b-5=-3$일 때, $b=2$이므로

$P=\{a^2-4, 4\}$, $R=\{a-1, -3\}$

㉠에서 $-3 \in P$이어야 하므로

$a^2-4=-3 \quad \therefore a=\pm 1$

$\therefore a+b=3$ 또는 $a+b=1$

057 $\sim p$: $x \ge a$

$\sim r$: $(x-b)(x-b-2)<0$에서 $\quad b<x<b+2$

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P^C=\{x \mid x \ge a\}$,

$Q=\{x \mid -4<x<0$ 또는 $x \ge 2\}$,

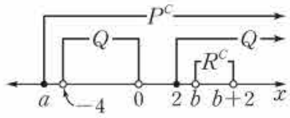
$R^C=\{x \mid b<x<b+2\}$

이때 q는 $\sim p$이기 위한 충분조건이고 q는 $\sim r$이기 위한 필요조건이므로 두 명제 $q \longrightarrow \sim p$, $\sim r \longrightarrow q$는 모두 참이다.

즉 $Q \subset P^C$, $R^C \subset Q$이므로

$R^C \subset Q \subset P^C$

오른쪽 그림에서 $a \le -4$, $b \ge 2$ 이므로



$a \le -4$, $-b \le -2$

$\therefore a-b \le -6$

따라서 $a-b$의 최댓값은 -6이다. 답 -6

058 $(A \cup B)-(A-B)=(A \cup B) \cap (A \cap B^C)^C$

$=(A \cup B) \cap (A^C \cup B)$

$=(A \cap A^C) \cup B$

$=\varnothing \cup B=B$

따라서 $B=A \cap B$가 성립하기 위한 필요충분조건은 $B \subset A$이다.

답 ②

059 두 집합 A, B가 서로소 $\Longleftrightarrow A \cap B=\varnothing$

$\Longleftrightarrow A-B=A$

$\Longleftrightarrow A \subset B^C$

따라서 두 집합 A, B가 서로소이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ①

060 ㄱ. $(A-B) \cup (B-A)=\varnothing$이면

$A-B=\varnothing$, $B-A=\varnothing$

즉 $A \subset B$, $B \subset A$이므로 $A=B$

따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄴ. $B-A^C=B \cap A$이므로 $A \cap B=B$ $\therefore B \subset A$

$A \cup B=A$이면 $B \subset A$

따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. $(A \cup B) \cap C=C$이면 $C \subset (A \cup B)$

$A \cap B=C$이면 $C \subset (A \cap B)$

따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

이상에서 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

061 주어진 명제의 대우는 'n이 $\boxed{홀수}$이면 n^2도 홀수이다.'이다.

$n=2k-1$ (k는 자연수)이라 하면

$n^2=(2k-1)^2=\boxed{4k^2-4k+1}$

$=2(\boxed{2k^2-2k})+1$ ...... ㉠

이때 k가 자연수이므로 $2k^2-2k$는 $\boxed{0}$ 또는 자연수이다.

따라서 ㉠에서 $\boxed{n^2}$은 홀수이다.

$\therefore$ (가) 홀수 (나) $4k^2-4k+1$ (다) $2k^2-2k$ (라) 0 (마) n^2

답 ③

062 'x, y 중 적어도 하나는 양수이다.'는 '$x>0$ 또는 $y>0$이다.'와 같다.

즉 주어진 명제는

'$x+y>0$이면 $x>0$ 또는 $y>0$이다.'

이므로 그 대우는

'$x \le 0$이고 $y \le 0$이면 $x+y \le 0$이다.'

이때 위의 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

063 (1) 주어진 명제의 대우는

'n이 유리수이면 n^2도 유리수이다.' ··· ❶

(2) $n=\dfrac{a}{b}$ (a, b는 정수, $b \ne 0$)라 하면

$n^2=\dfrac{a^2}{b^2}$

a, b는 정수이고 $b \ne 0$이므로 a^2, b^2도 정수이고 $b^2 \ne 0$이다.

즉 n^2도 유리수이다. ··· ❷

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. ··· ❸

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 대우를 구할 수 있다.	30 %
❷ 주어진 명제의 대우가 참임을 보일 수 있다.	50 %
❸ 주어진 명제가 참임을 알 수 있다.	20 %

064 $\sqrt{3}$이 $\boxed{유리수}$라고 가정하면

$\sqrt{3}=\dfrac{a}{b}$ (a, b는 $\boxed{서로소}$인 자연수)

로 나타낼 수 있다. 양변을 제곱하여 정리하면

$a^2=3b^2$ ...... ㉠

이때 a^2이 $\boxed{3의\ 배수}$이므로 a도 3의 배수이다.

$a=3k$ (k는 자연수)로 놓으면 ㉠에서

$9k^2=3b^2$ $\therefore b^2=3k^2$

따라서 b^2이 3의 배수이므로 b도 3의 배수이다.

그러므로 a, b가 서로소라는 가정에 모순이므로 $\sqrt{3}$은 무리수이다.

$\therefore$ (가) 유리수 (나) 서로소 (다) 3의 배수 답 ②

065 $a^2+b^2=0$일 때, $a \ne 0$ 또는 $b \ne 0$이라 가정하자.

(i) $a \ne 0$, $b=0$이면 $a^2>0$, $b^2=0$이므로 $a^2+b^2>0$

(ii) $a=0$, $b \ne 0$이면 $a^2=0$, $b^2>0$이므로 $a^2+b^2>0$

(iii) $a \ne 0$, $b \ne 0$이면 $a^2>0$, $b^2>0$이므로 $a^2+b^2>0$

이상에서 $a^2+b^2>0$, 즉 $a^2+b^2 \ne 0$이므로 $a^2+b^2=0$이라는 가정에 모순이다.

따라서 주어진 명제는 참이다. 답 풀이 참조

066 이차방정식 $ax^2+ax-b=0$, 즉 $a(x^2+x)=b$가 정수인 해 $x=k$를 갖는다고 가정하면 $a(k^2+k)=b$이다. ··· ❶

(i) $k=2n$ (n은 정수)일 때,

$2a(2n^2+n)=b$

위의 등식에서 좌변은 짝수이고, 우변은 홀수이므로 모순이다.

(ii) $k=2n+1$ (n은 정수)일 때,

$2a(2n^2+3n+1)=b$

위의 등식에서 좌변은 짝수이고, 우변은 홀수이므로 모순이다. ··· ❷

(i), (ii)에서 b가 홀수이면 이차방정식 $ax^2+ax-b=0$은 정수인 해를 갖지 않는다. ··· ❸

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 결론의 부정을 구할 수 있다.	20 %
❷ 모순이 생김을 보일 수 있다.	60 %
❸ 주어진 명제가 참임을 알 수 있다.	20 %

067 $(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=(a-b)-(a-\boxed{2\sqrt{ab}}+b)$
$=2\sqrt{ab}-2b$
$=2\sqrt{b}\,(\boxed{\sqrt{a}-\sqrt{b}})$

$a>b>0$이므로 $\sqrt{b}>0$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$

즉 $2\sqrt{b}\,(\sqrt{a}-\sqrt{b})>0$이므로

$(\sqrt{a-b})^2>(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

이때 $\sqrt{a-b}>0$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$이므로

$\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$

$\therefore$ (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

답 (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

068 ㄱ. [반례] $x=-4$이면 $x^2+16=-8x$

ㄴ. $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

x가 실수이므로 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\ge0$에서

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

즉 $x^2-x+1>0$이므로 $x-1<x^2$

ㄷ. $x^2+2y^2-2xy=x^2-2xy+y^2+y^2$
$=(x-y)^2+y^2$

x, y가 실수이므로 $(x-y)^2\ge0$, $y^2\ge0$에서

$(x-y)^2+y^2\ge0$

$\therefore x^2+2y^2\ge2xy$ (단, 등호는 $x=y=0$일 때 성립)

이상에서 절대부등식인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

069 $A-B=a(3a+2b)-(2a+b)^2$
$=3a^2+2ab-(4a^2+4ab+b^2)$
$=-a^2-2ab-b^2$
$=-(a+b)^2$

a, b가 실수이므로 $(a+b)^2\ge0$에서

$-(a+b)^2\le0$

$\therefore A\le B$ (단, 등호는 $a=-b$일 때 성립) 답 ④

070 $(a^2+b^2+4)-(ab+2a+2b)$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2-2ab-4a-4b+8)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(a^2-4a+4)+(b^2-4b+4)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(a-2)^2+(b-2)^2\}$

a, b가 실수이므로 $(a-b)^2\ge0$, $(a-2)^2\ge0$, $(b-2)^2\ge0$에서

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(a-2)^2+(b-2)^2\}\ge0$

$\therefore a^2+b^2+4\ge ab+2a+2b$ ⋯ ❶

이때 등호는 $a-b=0$, $a-2=0$, $b-2=0$, 즉 $a=b=2$일 때 성립한다. ⋯ ❷

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ $a^2+b^2+4\ge ab+2a+2b$임을 증명할 수 있다.	70 %
❷ 등호가 성립하는 경우를 구할 수 있다.	30 %

071 (i) $|a|\ge|b|$일 때,

$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2$

$=(a-b)^2-(|a|^2-2|a||b|+|b|^2)$

$=(a^2-2ab+b^2)-(a^2-2|ab|+b^2)$

$=2(\boxed{|ab|-ab})\ge0$ ($\because$ $\underline{|ab|\ge ab}$) └ 모든 실수 A에 대하여 $|A|\ge A$

$\therefore |a-b|^2\ge(|a|-|b|)^2$

그런데 $|a-b|\ge0$, $|a|-|b|\ge0$이므로

$|a-b|\ge|a|-|b|$

(i), (ii)에서

$|a-b|\ge|a|-|b|$

(단, 등호는 $|ab|=ab$, 즉 $\boxed{ab\ge0}$일 때 성립)

$\therefore$ (가) $|ab|-ab$ (나) $ab\ge0$ 답 ②

072 ㄱ. $(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$

$=(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)-(a+b)^2$

$=(a^2+2|ab|+b^2)-(a^2+2ab+b^2)$

$=2(|ab|-ab)\ge0$ ($\because$ $|ab|\ge ab$)

$\therefore (|a|+|b|)^2\ge|a+b|^2$

그런데 $|a|+|b|\ge0$, $|a+b|\ge0$이므로

$|a|+|b|\ge|a+b|$

(단, 등호는 $|ab|=ab$, 즉 $ab\ge0$일 때 성립)

ㄴ. [반례] $a=1$, $b=-1$이면 — $|2a+b|^2-|a-2b|^2$의 부호는 알 수 없으므로 ㄱ과 같은 방법으로 증명하기 어렵다.

$|2a+b|=1$, $|a-2b|=3$

$\therefore |2a+b|<|a-2b|$

ㄷ. $(\sqrt{a^2+b^2})^2-(|a|+|b|)^2$

$=(a^2+b^2)-(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)$

$=a^2+b^2-(a^2+2|ab|+b^2)$

$=-2|ab|\le0$

$\therefore (\sqrt{a^2+b^2})^2\le(|a|+|b|)^2$

그런데 $\sqrt{a^2+b^2}\ge0$, $|a|+|b|\ge0$이므로

$\sqrt{a^2+b^2}\le|a|+|b|$ (단, 등호는 $ab=0$일 때 성립)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

073 $x>0$, $y>0$에서 $xy>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\left(x+\frac{12}{y}\right)\left(y+\frac{3}{x}\right)=xy+3+12+\frac{36}{xy}$

$\ge15+2\sqrt{xy\cdot\frac{36}{xy}}$ └ $xy>0$이므로 $\frac{36}{xy}>0$이다.

$=15+2\cdot6$

$=27$

등호는 $xy=\frac{36}{xy}$일 때 성립하므로 $(xy)^2=36$에서

$xy=6$ ($\because$ $xy>0$)

따라서 $\left(x+\frac{12}{y}\right)\left(y+\frac{3}{x}\right)$은 $xy=6$일 때 최솟값 27을 가지므로

$a=6,\ b=27$

$\therefore a+b=33$

답 33

쎈B특강

$x+\frac{12}{y}\ge 2\sqrt{\frac{12x}{y}}$ … ㉠, $\quad y+\frac{3}{x}\ge 2\sqrt{\frac{3y}{x}}$ … ㉡

㉠, ㉡을 변끼리 곱하면

$\left(x+\frac{12}{y}\right)\left(y+\frac{3}{x}\right)\ge 4\sqrt{\frac{12x}{y}\cdot\frac{3y}{x}}=24$

그러나 $\left(x+\frac{12}{y}\right)\left(y+\frac{3}{x}\right)$의 최솟값을 24라 생각하면 안 된다.

㉠, ㉡에서 등호가 성립하는 것은 각각 $x=\frac{12}{y}$, $y=\frac{3}{x}$일 때이고, 이 두 등식이 동시에 성립하도록 하는 양수 x, y가 존재하지 않기 때문이다.

074 $a>0$에서 $a^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(a+\frac{9}{a}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)=a^2+1+9+\frac{9}{a^2}$$
$$\ge 10+2\sqrt{a^2\cdot\frac{9}{a^2}}$$
$$=10+2\cdot 3=16$$

등호는 $a^2=\frac{9}{a^2}$일 때 성립하므로 $\quad a^4=9$

$a^2=3\ (\because a^2>0)\quad \therefore a=\sqrt{3}\ (\because a>0)$

답 $\sqrt{3}$

075 $x>0$에서 $\frac{1}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(4x^2-x)\left(\frac{16}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=64x-4-16+\frac{1}{x}$$
$$\ge -20+2\sqrt{64x\cdot\frac{1}{x}}$$
$$=-20+2\cdot 8$$
$$=-4\ \left(\text{단, 등호는 } x=\frac{1}{8}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 -4이다.

답 ①

참고 등호는 $64x=\frac{1}{x}$일 때 성립하므로

$64x^2=1\quad \therefore x=\frac{1}{8}\ (\because x>0)$

076 $x>0,\ y>0,\ z>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{z}{y}\right)\left(1+\frac{x}{z}\right)\ge 2\sqrt{1\cdot\frac{y}{x}}\cdot 2\sqrt{1\cdot\frac{z}{y}}\cdot 2\sqrt{1\cdot\frac{x}{z}}$$
$$=8\sqrt{\frac{y}{x}}\sqrt{\frac{z}{y}}\sqrt{\frac{x}{z}}$$
$$=8\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{x}{z}}=8$$

(단, 등호는 $x=y=z$일 때 성립)

따라서 주어진 식의 최솟값은 8이다.

답 ⑤

참고 등호는 $1=\frac{y}{x}$, $1=\frac{z}{y}$, $1=\frac{x}{z}$일 때 성립하므로

$x=y,\ y=z,\ x=z$

$\therefore x=y=z$

쎈B특강

이 문제는 073과 다르게 세 식 $1+\frac{y}{x}\ge 2\sqrt{1\cdot\frac{y}{x}}$, $1+\frac{z}{y}\ge 2\sqrt{1\cdot\frac{z}{y}}$, $1+\frac{x}{z}\ge 2\sqrt{1\cdot\frac{x}{z}}$에서 등호가 성립할 조건이 동시에 성립할 수 있으므로 위와 같이 풀 수 있다.

077 $a>0,\ b>0,\ c>0$에서 $\frac{2}{a(b+c)}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(\frac{1}{a}+2b+2c\right)\left(a+\frac{2}{b+c}\right)$$
$$=\left\{\frac{1}{a}+2(b+c)\right\}\left(a+\frac{2}{b+c}\right)$$
$$=1+\frac{2}{a(b+c)}+2a(b+c)+4$$
$$=5+\frac{2}{a(b+c)}+2a(b+c) \quad \cdots ❶$$
$$\ge 5+2\sqrt{\frac{2}{a(b+c)}\cdot 2a(b+c)}$$
$$=5+2\cdot 2=9\ \left(\text{단, 등호는 } a=\frac{1}{b+c}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 9이다. … ❷

답 9

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	60 %
❷ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 주어진 식의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

참고 등호는 $\frac{2}{a(b+c)}=2a(b+c)$일 때 성립하므로

$a^2=\frac{1}{(b+c)^2}\quad \therefore a=\frac{1}{b+c}\ \left(\because a>0,\ \frac{1}{b+c}>0\right)$

078 $x>4$에서 $x-4>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3x+\frac{3}{x-4}=3(x-4)+\frac{3}{x-4}+12$$
$$\ge 2\sqrt{3(x-4)\cdot\frac{3}{x-4}}+12$$
$$=2\cdot 3+12=18$$

등호는 $3(x-4)=\frac{3}{x-4}$일 때 성립하므로

$(x-4)^2=1$

$x-4=1\ (\because x-4>0)\quad \therefore x=5$

따라서 $3x+\frac{3}{x-4}$은 $x=5$일 때 최솟값 18을 가지므로

$m=18,\ n=5$

$\therefore m-n=13$

답 ③

079 $x>-2$에서 $x+2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} x+\frac{1}{x+2} &= x+2+\frac{1}{x+2}-2 \\ &\ge 2\sqrt{(x+2)\cdot\frac{1}{x+2}}-2 \\ &= 2-2=0 \text{ (단, 등호는 } x=-1\text{일 때 성립)} \end{aligned}$$

따라서 $x+\frac{1}{x+2}$의 최솟값은 0이다. 답 0

참고 등호는 $x+2=\frac{1}{x+2}$일 때 성립하므로 $(x+2)^2=1$

$x+2=1$ ($\because x+2>0$) $\quad \therefore x=-1$

080 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} 6x+5y+\frac{6}{x}+\frac{5}{y} &= \left(6x+\frac{6}{x}\right)+\left(5y+\frac{5}{y}\right) \\ &\ge 2\sqrt{6x\cdot\frac{6}{x}}+2\sqrt{5y\cdot\frac{5}{y}} \\ &= 2\cdot 6+2\cdot 5 \\ &= 22 \text{ (단, 등호는 } x=y=1\text{일 때 성립)} \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 22이다. 답 ④

참고 등호는 $6x=\frac{6}{x}$, $5y=\frac{5}{y}$일 때 성립하므로

$x^2=y^2=1 \quad \therefore x=y=1$ ($\because x>0$, $y>0$)

081 $x>3$에서 $x-3>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$5x-2+\frac{5}{x-3}=5(x-3)+\frac{5}{x-3}+13 \quad \cdots ❶$$

$$\begin{aligned} &\ge 2\sqrt{5(x-3)\cdot\frac{5}{x-3}}+13 \\ &= 2\cdot 5+13 \\ &= 23 \text{ (단, 등호는 } x=4\text{일 때 성립)} \quad \cdots ❷ \end{aligned}$$

따라서 $5x-2+\frac{5}{x-3}\ge m$이 항상 성립하려면 $m\le 23$이어야 하므로 m의 최댓값은 23이다. $\cdots$ ❸

답 23

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식의 좌변을 변형할 수 있다.	30 %
❷ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있다.	40 %
❸ m의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

참고 등호는 $5(x-3)=\frac{5}{x-3}$일 때 성립하므로 $(x-3)^2=1$

$x-3=1$ ($\because x-3>0$) $\quad \therefore x=4$

082 $\sqrt{x^2}=x$, $x\ne 0$에서 $x>0$, $x^2+4>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} x+\frac{4}{x}+\frac{16x}{x^2+4} &= \frac{x^2+4}{x}+\frac{16x}{x^2+4} \\ &\ge 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}\cdot\frac{16x}{x^2+4}} \\ &= 2\cdot 4=8 \text{ (단, 등호는 } x=2\text{일 때 성립)} \end{aligned}$$

따라서 $x+\frac{4}{x}+\frac{16x}{x^2+4}$의 최솟값은 8이다. 답 ②

참고 등호는 $\frac{x^2+4}{x}=\frac{16x}{x^2+4}$일 때 성립하므로

$(x^2+4)^2=16x^2$, $\quad x^4-8x^2+16=0$

$(x^2-4)^2=0$, $\quad x^2=4$

$\therefore x=2$ ($\because x>0$)

083 $x=2a+\frac{1}{b}$, $y=2b+\frac{1}{a}$이므로

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \left(2a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(2b+\frac{1}{a}\right)^2 \\ &= \left(4a^2+\frac{4a}{b}+\frac{1}{b^2}\right)+\left(4b^2+\frac{4b}{a}+\frac{1}{a^2}\right) \\ &= \left(4a^2+\frac{1}{a^2}\right)+\left(\frac{4a}{b}+\frac{4b}{a}\right)+\left(4b^2+\frac{1}{b^2}\right) \end{aligned}$$

$a>0$, $b>0$에서 $a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4a^2+\frac{1}{a^2}\ge 2\sqrt{4a^2\cdot\frac{1}{a^2}}=2\cdot 2=4$$

$$\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{일 때 성립}\right)$$

$$\frac{4a}{b}+\frac{4b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{4a}{b}\cdot\frac{4b}{a}}=2\cdot 4=8$$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$$4b^2+\frac{1}{b^2}\ge 2\sqrt{4b^2\cdot\frac{1}{b^2}}=2\cdot 2=4$$

$$\left(\text{단, 등호는 } b=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{일 때 성립}\right)$$

$$\therefore x^2+y^2\ge 4+8+4=16 \left(\text{단, 등호는 } a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 x^2+y^2은 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 최솟값 16을 가지므로

$\alpha=16$, $\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \alpha+\beta^2+\gamma^2=16+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=17$ 답 ⑤

참고 등호는 $4a^2=\frac{1}{a^2}$, $\frac{4a}{b}=\frac{4b}{a}$, $4b^2=\frac{1}{b^2}$일 때 성립하므로

$a^4=\frac{1}{4}$, $a^2=b^2$, $b^4=\frac{1}{4}$

$\therefore a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because a>0$, $b>0$)

다른 풀이 $x^2>0$, $y^2>0$이고, $a>0$, $b>0$에서 $ab>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+y^2\ge 2\sqrt{x^2\cdot y^2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\begin{aligned} &= 2xy \\ &= 2\left(2a+\frac{1}{b}\right)\left(2b+\frac{1}{a}\right) \\ &= 2\left(4ab+2+2+\frac{1}{ab}\right) \\ &= 2\left(4ab+\frac{1}{ab}+4\right) \\ &\ge 2\left(2\sqrt{4ab\cdot\frac{1}{ab}}+4\right) \quad \cdots\cdots ㉡ \\ &= 2(2\cdot 2+4)=16 \end{aligned}$$

$a>0$, $b>0$이므로

$x>0$, $y>0$

따라서 ㉠에서 등호는 $x^2=y^2$, 즉 $x=y$일 때, ㉡에서 등호는

$4ab=\frac{1}{ab}$, 즉 $ab=\frac{1}{2}$일 때 성립한다.

$x=y$에서 $\quad 2a+\frac{1}{b}=2b+\frac{1}{a}$

$$\frac{2ab+1}{b}=\frac{2ab+1}{a} \qquad \therefore a=b$$

또 $ab=\frac{1}{2}$이므로 등호는 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 성립한다.

084 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$5x+2y\ge 2\sqrt{5x\cdot 2y}=2\sqrt{10xy}$$

그런데 $5x+2y=20$이므로

$$20\ge 2\sqrt{10xy}, \qquad 10\ge\sqrt{10xy}$$

양변을 제곱하면 $\quad 100\ge 10xy$

$$\therefore xy\le 10$$

이때 등호는 $5x=2y$일 때 성립하고 $5x+2y=20$이므로

$$5x=10,\ 2y=10 \qquad \therefore x=2,\ y=5$$

따라서 xy는 $x=2$, $y=5$일 때 최댓값 10을 가지므로

$$\alpha=10,\ \beta=2,\ \gamma=5$$

$$\therefore \alpha+\beta+\gamma=17$$

답 ④

085 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3a+4b\ge 2\sqrt{3a\cdot 4b}=2\sqrt{12ab}$$

그런데 $ab=3$이므로

$$3a+4b\ge 2\sqrt{12\cdot 3}$$

$$=12 \text{ (단, 등호는 } 3a=4b\text{일 때 성립)}$$

따라서 $3a+4b$의 최솟값은 12이다.

답 12

다른 풀이 $ab=3$에서 $a>0$이므로 $\quad b=\frac{3}{a}$

$$\therefore 3a+4b=3a+4\cdot\frac{3}{a}=3a+\frac{12}{a}$$

$$\ge 2\sqrt{3a\cdot\frac{12}{a}}$$

$$=2\cdot 6$$

$$=12 \text{ (단, 등호는 } a=2\text{일 때 성립)}$$

참고 등호는 $3a=\frac{12}{a}$일 때 성립하므로

$a^2=4 \quad \therefore a=2\ (\because a>0)$

086 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{12}{ab}$ ...... ㉠

한편 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+b\ge 2\sqrt{ab}$$

그런데 $a+b=12$이므로

$$12\ge 2\sqrt{ab} \text{ (단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립)}$$

$6\ge\sqrt{ab}$이므로 양변을 제곱하면

$$36\ge ab \qquad \therefore \frac{12}{ab}\ge\frac{1}{3}$$

따라서 ㉠에서 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$의 최솟값은 $\frac{1}{3}$이다.

답 ②

087 $x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$25x^2+4y^2\ge 2\sqrt{25x^2\cdot 4y^2}=20|xy|$$

그런데 $25x^2+4y^2=30$이므로

$$30\ge 20|xy|, \qquad |xy|\le\frac{3}{2}$$

$$\therefore \underbrace{-\frac{3}{2}\le xy<0 \text{ 또는 } 0<xy\le\frac{3}{2}}_{x\ne 0,\ y\ne 0}$$

(단, 등호는 $5|x|=2|y|$일 때 성립)

따라서 $M=\frac{3}{2}$, $m=-\frac{3}{2}$이므로

$$M-m=3$$

답 ②

참고 등호는 $25x^2=4y^2$일 때 성립하므로

$(5x)^2=(2y)^2 \quad \therefore 5|x|=2|y|$

088 $a>0$, $b>0$이므로

$$(\sqrt{2a}+\sqrt{7b})^2=2a+7b+2\sqrt{2a}\sqrt{7b}$$

$$=16+2\sqrt{14ab} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이고, 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2a+7b\ge 2\sqrt{2a\cdot 7b}$$

$$=2\sqrt{14ab}$$

그런데 $2a+7b=16$이므로

$$16\ge 2\sqrt{14ab} \text{ (단, 등호는 } 2a=7b\text{일 때 성립)} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$$(\sqrt{2a}+\sqrt{7b})^2=16+2\sqrt{14ab}\le 16+16=32$$

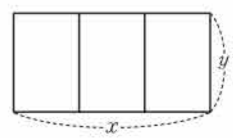
이때 $a>0$, $b>0$에서 $\sqrt{2a}+\sqrt{7b}>0$이므로

$$0<\sqrt{2a}+\sqrt{7b}\le 4\sqrt{2}$$

따라서 $\sqrt{2a}+\sqrt{7b}$의 최댓값은 $4\sqrt{2}$이다.

답 $4\sqrt{2}$

089 오른쪽 그림과 같이 바깥쪽 직사각형의 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y라 하면 구역의 전체 넓이는



$$xy$$

줄의 전체 길이가 32이므로

$$2x+4y=32 \qquad \therefore x+2y=16$$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+2y\ge 2\sqrt{x\cdot 2y}=2\sqrt{2xy}$$

그런데 $x+2y=16$이므로

$$16\ge 2\sqrt{2xy} \text{ (단, 등호는 } x=2y\text{일 때 성립)}$$

$8\ge\sqrt{2xy}$이므로 양변을 제곱하면

$$64\ge 2xy \qquad \therefore xy\le 32$$

따라서 구역의 전체 넓이의 최댓값은 32이다.

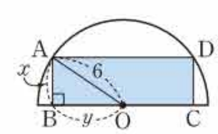
답 32

다른 풀이 $x+2y=16$에서 $y=8-\frac{1}{2}x$이므로 구역의 전체 넓이를 S라 할 때,

$$S=x\left(8-\frac{1}{2}x\right)=-\frac{1}{2}(x-8)^2+32\ (0<x<16)$$

따라서 구역의 전체 넓이의 최댓값은 32이다.

090 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=x$, $\overline{BO}=y$라 하면 직사각형의 넓이는



$$\overline{AB}\cdot\overline{BC}=x\cdot 2y=2xy$$

또 직각삼각형 ABO에서

$$x^2+y^2=36 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $x>0$, $y>0$, $x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+y^2\ge 2\sqrt{x^2\cdot y^2}=2xy \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에서 등호는 $x^2=y^2$, 즉 $x=y$일 때 성립하고 이때 직사각형의 넓이가 최대가 되므로 ㉠에서

$$x^2=y^2=18 \qquad \therefore x=y=3\sqrt{2}$$

따라서 직사각형의 넓이가 최대일 때 둘레의 길이는

$$2(x+2y)=2\cdot(3\sqrt{2}+2\cdot 3\sqrt{2})$$
$$=18\sqrt{2}$$

답 ①

091 상자의 세로의 길이와 높이를 각각 x m, y m라 하면 상자를 만드는 비용은

$$2\cdot 1\cdot x+\frac{1}{2}\cdot 2(1+x)y=2x+y+xy$$

에 비례한다.

또 상자의 부피가 8 m^3이므로

$$xy=8 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2x+y+xy\ge 2\sqrt{2x\cdot y}+xy$$
$$=2\sqrt{2\cdot 8}+8=16$$

등호는 $2x=y$일 때 성립하고 이때 비용이 최소가 되므로 ㉠에 $y=2x$를 대입하면

$$x\cdot 2x=8, \qquad x^2=4$$
$$\therefore x=2\ (\because x>0)$$

따라서 비용이 최소일 때 상자의 높이는

$$2\cdot 2=4\ (\text{m})$$

답 4 m

092 두 점 B, C의 좌표는 각각 $(-a,\ 0)$, $(0,\ b)$이므로 삼각형 BOC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}ab \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 점 A$(-4,\ 2)$가 직선 $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=-1$ 위의 점이므로

$$-\frac{4}{a}-\frac{2}{b}=-1 \qquad \therefore \frac{4}{a}+\frac{2}{b}=1$$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{4}{a}+\frac{2}{b}\ge 2\sqrt{\frac{4}{a}\cdot\frac{2}{b}}=4\sqrt{\frac{2}{ab}}$$

그런데 $\frac{4}{a}+\frac{2}{b}=1$이므로

$$1\ge 4\sqrt{\frac{2}{ab}}\ (\text{단, 등호는 } \underline{a=2b}\text{일 때 성립})$$

$\frac{4}{a}=\frac{2}{b}$에서 $a=2b$

양변을 제곱하면 $\quad 1\ge 16\cdot\frac{2}{ab}$

$$\therefore ab\ge 32 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$S=\frac{1}{2}ab\ge\frac{1}{2}\cdot 32=16$$

따라서 삼각형 BOC의 넓이의 최솟값은 16이다.

답 16

093 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(3^2+4^2)(x^2+y^2)\ge(3x+4y)^2$$

그런데 $x^2+y^2=100$이므로

$$25\cdot 100\ge(3x+4y)^2, \qquad 2500\ge(3x+4y)^2$$
$$\therefore -50\le 3x+4y\le 50$$

한편 등호는 $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}$, 즉 $y=\frac{4}{3}x$일 때 성립하므로 $y=\frac{4}{3}x$를 $x^2+y^2=100$에 대입하면

$$x^2+\left(\frac{4}{3}x\right)^2=100, \qquad x^2=36$$
$$\therefore x=\pm 6,\ y=\pm 8\ (\text{복호동순})$$

따라서 $3x+4y$는 $x=6$, $y=8$일 때 최댓값 50을 가지므로

$$\alpha=50,\ \beta=6,\ \gamma=8$$
$$\therefore \alpha+\beta+\gamma=64$$

답 64

094 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(2^2+3^2)(x^2+y^2)\ge(2x+3y)^2$$

그런데 $x^2+y^2=26$이므로

$$13\cdot 26\ge(2x+3y)^2$$
$$\therefore -13\sqrt{2}\le 2x+3y\le 13\sqrt{2}\ \left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{2}=\frac{y}{3}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $M=13\sqrt{2}$, $m=-13\sqrt{2}$이므로

$$M-m=26\sqrt{2}$$

답 ④

095 $x^2+y^2=8$이므로

$$x^2+x+y^2+7y=x+7y+8$$

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2+7^2)(x^2+y^2)\ge(x+7y)^2$$

그런데 $x^2+y^2=8$이므로

$$50\cdot 8\ge(x+7y)^2, \qquad 400\ge(x+7y)^2$$
$$\therefore -20\le x+7y\le 20\ \left(\text{단, 등호는 } x=\frac{y}{7}\text{일 때 성립}\right)$$
$$\therefore -12\le x+7y+8\le 28$$

따라서 x^2+x+y^2+7y의 최솟값은 -12이다.

답 -12

096 x, y, z가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$\{1^2+(-1)^2+2^2\}(x^2+y^2+z^2)\ge(x-y+2z)^2$$

그런데 $x^2+y^2+z^2=4$이므로

$$6\cdot 4\ge(x-y+2z)^2, \qquad 24\ge(x-y+2z)^2$$
$$\therefore -2\sqrt{6}\le x-y+2z\le 2\sqrt{6}$$
$$\left(\text{단, 등호는 } x=-y=\frac{z}{2}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $x-y+2z$의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

097 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(2^2+1^2)(x^2+y^2)\ge(2x+y)^2$$

그런데 $x^2+y^2=a$이므로

$$5a\ge(2x+y)^2$$
$$\therefore -\sqrt{5a}\le 2x+y\le\sqrt{5a}\ \left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{2}=y\text{일 때 성립}\right)$$

⋯→ ❶

따라서 $2x+y$의 최댓값은 $\sqrt{5a}$, 최솟값은 $-\sqrt{5a}$이고 그 곱이 -20이므로

$-5a=-20 \qquad \therefore a=4$ ⋯ ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ $2x+y$의 값의 범위를 a를 사용하여 나타낼 수 있다.	60 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

098 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(5^2+2^2)(x^2+y^2)\ge(5x+2y)^2$

그런데 $5x+2y=29$이므로

$29(x^2+y^2)\ge 29^2$

$\therefore x^2+y^2\ge 29$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{5}=\frac{y}{2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 29이다.

답 ④

099 a, b가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}(a^2+b^2)\ge\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{4}\right)^2$

그런데 $\frac{a}{3}+\frac{b}{4}=\frac{5}{3}$이므로

$\frac{25}{9\cdot16}(a^2+b^2)\ge\frac{25}{9}$

$\therefore a^2+b^2\ge16$ (단, 등호는 $3a=4b$일 때 성립)

따라서 a^2+b^2의 최솟값은 16이다.

답 ③

100 (가) $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+4y\ge2\sqrt{x\cdot4y}=4\sqrt{xy}$

그런데 $x+4y=\sqrt{17}$이므로

$\sqrt{17}\ge4\sqrt{xy}$

$\therefore \sqrt{xy}\le\frac{\sqrt{17}}{4}$ (단, 등호는 $x=4y$일 때 성립)

$\therefore a=\frac{\sqrt{17}}{4}$

(나) x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+4^2)(x^2+y^2)\ge(x+4y)^2$

$17(x^2+y^2)\ge(x+4y)^2$

그런데 $x+4y=\sqrt{17}$이므로

$17(x^2+y^2)\ge17$

$\therefore x^2+y^2\ge1$ $\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{y}{4}\text{일 때 성립}\right)$

$\therefore b=1$

(다) $\sqrt{x}$, $2\sqrt{y}$가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)\{(\sqrt{x})^2+(2\sqrt{y})^2\}\ge(\sqrt{x}+2\sqrt{y})^2$

$2(x+4y)\ge(\sqrt{x}+2\sqrt{y})^2$

그런데 $x+4y=\sqrt{17}$이므로

$(\sqrt{x}+2\sqrt{y})^2\le2\sqrt{17}$ (단, 등호는 $\sqrt{x}=2\sqrt{y}$일 때 성립)

$\therefore c=2\sqrt{17}$

$\therefore ac+b=\frac{\sqrt{17}}{4}\cdot2\sqrt{17}+1=\frac{19}{2}$

답 ②

101 $\overline{BC}=x$, $\overline{AC}=y$라 하면 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로

$\angle ACB=90° \qquad \therefore x^2+y^2=16$

한편 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(x^2+y^2)\ge(x+y)^2$

$2\cdot16\ge(x+y)^2, \qquad 32\ge(x+y)^2$

이때 $x>0$, $y>0$에서 $x+y>0$이므로

$0<x+y\le4\sqrt{2}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

삼각형 ABC의 둘레의 길이는 $x+y+4$이므로

$4<x+y+4\le4\sqrt{2}+4$

따라서 구하는 최댓값은 $4(\sqrt{2}+1)$이다.

답 ③

102 직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하면 직육면체의 대각선의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=6$

$\therefore a^2+b^2+c^2=36$ ⋯ ❶

한편 a, b, c는 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2$

$3\cdot36\ge(a+b+c)^2$

이때 $a>0$, $b>0$, $c>0$에서 $a+b+c>0$이므로

$0<a+b+c\le6\sqrt{3}$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립) ⋯ ❷

직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은 $4(a+b+c)$이므로

$0<4(a+b+c)\le24\sqrt{3}$

따라서 구하는 최댓값은 $24\sqrt{3}$이다. ⋯ ❸

답 $24\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ $a^2+b^2+c^2$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 코시-슈바르츠 부등식을 이용할 수 있다.	40 %
❸ 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

103 세 구 O_1, O_2, O_3의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2, r_3이라 하면 $\overline{PQ}=18$이므로

$r_1+2r_2+r_3=18$ ⋯⋯ ㉠

한편 r_1, r_2, r_3이 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+2^2+1^2)(r_1^2+r_2^2+r_3^2)\ge(r_1+2r_2+r_3)^2$

$6(r_1^2+r_2^2+r_3^2)\ge18^2$

$\therefore r_1^2+r_2^2+r_3^2\ge54$ $\left(\text{단, 등호는 } r_1=\frac{r_2}{2}=r_3\text{일 때 성립}\right)$

세 구의 겉넓이의 합은 $4\pi(r_1^2+r_2^2+r_3^2)$이므로

$4\pi(r_1^2+r_2^2+r_3^2)\ge216\pi$

$\therefore a=216$

㉠에 $r_1=\frac{r_2}{2}$, $r_3=\frac{r_2}{2}$를 대입하면

$\frac{r_2}{2}+2r_2+\frac{r_2}{2}=18, \qquad 3r_2=18$

$\therefore r_2=6$

따라서 $r_1=3$, $r_2=6$, $r_3=3$일 때 세 구의 겉넓이의 합이 최소이므로

$b=3+6+3=12$

$\therefore a+b=228$

답 228

04 함수

개념 정리

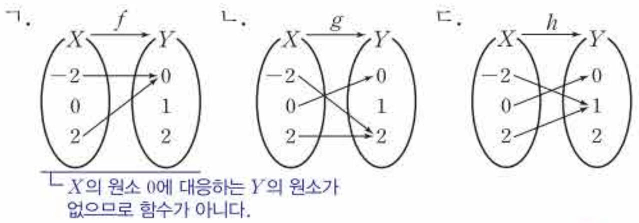
본책 52쪽

❶ $f(x)$ ❷ $(x,\ f(x))$ ❸ $f(x_1)\neq f(x_2)$
❹ 공역 ❺ x ❻ c ❼ $g(f(x))$
❽ f ❾ $y=f^{-1}(x)$ ❿ f^{-1} ⓫ $(b,\ a)$
⓬ y축 ⓭ x축

쎈B 유형 뽀개기

본책 54쪽

01 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



이상에서 함수인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

02 ㄱ, ㄴ. 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.

ㄷ. 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 그래프가 무수히 많은 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

ㄹ. 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 그래프가 만나지 않거나 두 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

이상에서 함수의 그래프인 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

03 ① $-1\le x\le 4$에서 $\quad \frac{1}{2}\le x+\frac{3}{2}\le\frac{11}{2}$

$\therefore\ \frac{1}{2}\le f(x)\le\frac{11}{2}$

② $-1\le x\le 4$에서 $\quad -4\le -x\le 1$

$1\le 5-x\le 6$

$\therefore\ 1\le f(x)\le 6$

③ $-1\le x\le 4$에서 $\quad -4\le x-3\le 1$

$0\le|x-3|\le 4,\quad -2\le|x-3|-2\le 2$

$\therefore\ \underline{-2\le f(x)\le 2}$ $\{f(x)\,|\,-2\le f(x)\le 2\}\not\subset Y$

④ $-1\le x\le 4$에서 $\quad 0\le x^2\le 16$

$0\le\frac{1}{4}x^2\le 4,\quad 1\le\frac{1}{4}x^2+1\le 5$

$\therefore\ 1\le f(x)\le 5$

⑤ $-1\le x\le 4$에서 $\quad -2\le x-1\le 3$

$0\le(x-1)^2\le 9,\quad 0\le\frac{1}{3}(x-1)^2\le 3$

$\therefore\ 0\le f(x)\le 3$

따라서 X에서 Y로의 함수가 아닌 것은 ③이다. 답 ③

04 $f(2)=2\cdot2-1=3$

$f(19)=f(19-3)=f(16-3)=\cdots=f(4-3)$

$=f(1)=2\cdot1-1=1$

$\therefore\ f(2)-f(19)=3-1=2$ 답 2

05 $\frac{x-5}{2}=-4$에서 $\quad x-5=-8 \quad \therefore\ x=-3$

$f\left(\frac{x-5}{2}\right)=2x^2-10$의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$f(-4)=2\cdot(-3)^2-10=8$ 답 ⑤

06 이차방정식 $x^2-8x-2=0$을 풀면 $\quad x=4\pm3\sqrt{2}$

$\alpha,\ \beta$는 무리수이고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=8,\ \alpha\beta=-2$

$\therefore\ f(\underbrace{\alpha\beta}_{\text{유리수}})-f(\alpha)-f(\beta)=(\alpha\beta-2)+2\alpha+2\beta$

$=(\alpha\beta-2)+2(\alpha+\beta)$

$=(-2-2)+2\cdot8=12$ 답 ④

쎈B 특강

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ ($a,\ b,\ c$는 상수)의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$

07 (i) $a>0$일 때,

$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 같으므로

$f(-5)=-5,\ f(1)=1$

$-5a+b=-5,\ a+b=1$

$\therefore\ a=1,\ b=0$

그런데 $ab=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때,

$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 같으므로

$f(-5)=1,\ f(1)=-5$

$-5a+b=1,\ a+b=-5$

$\therefore\ a=-1,\ b=-4$

(i), (ii)에서 $a=-1,\ b=-4$이므로

$a-b=3$ 답 3

08 $x^2+4x-2=-5$에서 $\quad x^2+4x+3=0$

$(x+3)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=-1$

$x^2+4x-2=10$에서 $\quad x^2+4x-12=0$

$(x+6)(x-2)=0 \quad \therefore\ x=-6$ 또는 $x=2$

따라서 정의역은 $\{-6,\ -3,\ -1,\ 2\}$이므로

$a=-6,\ b=-1$

$\therefore\ ab=6$ 답 ①

09 $f(-2)=k\cdot(-2)^2-5=4k-5$

$f(-1)=k\cdot(-1)^2-5=k-5$

$f(0)=k\cdot0^2-5=-5$

$f(1)=k\cdot1^2-5=k-5$

따라서 치역은 $\{4k-5,\ k-5,\ -5\}$이고, 치역의 모든 원소의 합이 5이므로

$$(4k-5)+(k-5)+(-5)=5$$

$5k=20 \qquad \therefore k=4$ 　　답 4

참고 $4k-5$, $k-5$, -5 중에서 같은 원소가 있으면 $k=0$이므로 치역은 $\{-5\}$이다. 즉 치역의 모든 원소의 합은 -5이므로 주어진 조건에 모순이다. 따라서 $4k-5$, $k-5$, -5는 모두 다른 원소이다.

10 (i) $a>0$일 때, 치역은 $\{y|2a-1\le y\le 4a-1\}$이므로

$2a-1\ge1,\ 4a-1\le7$

$\therefore 1\le a\le2$ 　　⋯ ➊

(ii) $a<0$일 때, 치역은 $\{y|4a-1\le y\le 2a-1\}$이므로

$4a-1\ge1,\ 2a-1\le7$

$\therefore \frac{1}{2}\le a\le4$

그런데 $a<0$이어야 하므로 성립하지 않는다. 　　⋯ ➋

(i), (ii)에서 a의 값의 범위는

$1\le a\le2$

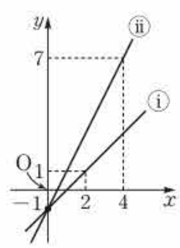
이므로 a의 최댓값은 2이다. 　　⋯ ➌

답 2

채점 기준	비율
➊ $a>0$일 때, a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
➋ $a<0$일 때, a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
➌ a의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

참고 $y=ax-1$은 일차함수이므로 　$a\neq0$

다른 풀이 일차함수 $y=ax-1$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ -1)$을 지나는 직선이므로 정의역이 $\{x|2\le x\le4\}$, 공역이 $\{y|1\le y\le7\}$이려면 직선 $y=ax-1$의 기울기가 오른쪽 그림과 같이 직선 ⓘ의 기울기보다 크거나 같고 직선 ⓘⓘ의 기울기보다 작거나 같아야 한다.



직선 ⓘ의 방정식은 $y=x-1$, 직선 ⓘⓘ의 방정식은 $y=2x-1$이므로 a의 값의 범위는

$1\le a\le2$

따라서 a의 최댓값은 2이다.

11 음이 아닌 정수 k에 대하여

(i) $x=3k$일 때,

$x^2=(3k)^2=9k^2$

이므로 　$f(x)=0$

(ii) $x=3k+1$일 때,

$x^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$

이므로 　$f(x)=1$

(iii) $x=3k+2$일 때,

$x^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$

이므로 　$f(x)=1$

이상에서 함수 $f(x)$의 치역은 $\{0,\ 1\}$이다. 　　답 ③

12 주어진 식의 양변에 $x=2$, $y=2$를 대입하면

$f(2+2)=f(2)+f(2)=1+1=2 \qquad \therefore f(4)=2$

주어진 식의 양변에 $x=4$, $y=4$를 대입하면

$f(4+4)=f(4)+f(4)=2+2=4 \qquad \therefore f(8)=4$

주어진 식의 양변에 $x=8$, $y=8$을 대입하면

$f(8+8)=f(8)+f(8)=4+4=8 \qquad \therefore f(16)=8$

주어진 식의 양변에 $x=8$, $y=16$을 대입하면

$f(24)=f(8)+f(16)=4+8=12$ 　　답 12

다른 풀이 $f(24)=f(2)+f(22)=f(2)+f(2)+f(20)$

$=\cdots=\underbrace{f(2)+f(2)+\cdots+f(2)}_{12개}$

$=12f(2)=12\cdot1=12$

13 $f(600)=f(2^3\cdot3\cdot5^2)=f(2^3\cdot3)+f(5^2)$

$=f(2^3)+f(3)+f(5^2)$

$=3f(2)+f(3)+2f(5)$ 　$f(2^3)=f(2\cdot2\cdot2)=f(2\cdot2)+f(2)$ $=f(2)+f(2)+f(2)$ $=3f(2)$

$=3\cdot2+3+2\cdot5=19$ 　　답 19

14 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 　　⋯⋯ ㉠

ㄱ. ㉠의 양변에 $x=1$, $y=0$을 대입하면

$f(1)=f(1)f(0), \qquad 3=3f(0)$

$\therefore f(0)=1$

ㄴ. ㉠의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(2)=f(1)f(1)=3\cdot3=9$

㉠의 양변에 $x=-2$, $y=2$를 대입하면

$f(0)=f(-2)f(2)$

$1=f(-2)\cdot9 \qquad \therefore f(-2)=\frac{1}{9}$

ㄷ. $f(2x)=f(x+x)=f(x)f(x)=\{f(x)\}^2$

$f(3x)=f(x+2x)=f(x)f(2x)=f(x)\{f(x)\}^2=\{f(x)\}^3$

$f(4x)=f(x+3x)=f(x)f(3x)=f(x)\{f(x)\}^3=\{f(x)\}^4$

⋮

$\therefore f(nx)=f(x+(n-1)x)=f(x)f((n-1)x)$

$=f(x)\{f(x)\}^{n-1}=\{f(x)\}^n$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 　　답 ④

다른 풀이 ㄴ. $f(0)=1$이므로 ㉠의 양변에 $x=-1$, $y=1$을 대입하면

$f(0)=f(-1)f(1)$

$1=f(-1)\cdot3 \qquad \therefore f(-1)=\frac{1}{3}$

㉠의 양변에 $x=-1$, $y=-1$을 대입하면

$f(-2)=f(-1)f(-1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

15 $f(-1)=g(-1)$에서 　$-a+b=8$ 　　⋯⋯ ㉠

$f(2)=g(2)$에서 　$2a+b=-1$ 　　⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 　$a=-3,\ b=5$

$\therefore a+b=2$ 　　답 ④

16 ㄱ. $f(-1)=g(-1)=0$, $f(0)=g(0)=1$, $f(1)=g(1)=2$

이므로 　$f=g$

ㄴ. $f(-1)=0$, $g(-1)=2$이므로 $\quad f(-1)\neq g(-1)$

$\therefore f\neq g$

ㄷ. $f(-1)=g(-1)=2$, $f(0)=g(0)=1$, $f(1)=g(1)=2$이므로 $\quad f=g$

이상에서 $f=g$인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

17 $f(-2)=g(-2)$에서 $\quad 8-6a-4b=-2b-a$

$\therefore 5a+2b=8$ ······ ㉠

$f(3)=g(3)$에서 $\quad -27+9a-4b=3b-a$

$\therefore 10a-7b=27$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=2$, $b=-1$

$\therefore f(-2)=g(-2)=0$, $f(3)=g(3)=-5$

따라서 함수 f의 치역은

$\{-5, 0\}$ 답 $\{-5, 0\}$

18 $-x^2=3x-10$에서 $\quad x^2+3x-10=0$

$(x+5)(x-2)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=2$ ··· ❶

따라서 집합 X는 집합 $\{-5, 2\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 구하는 집합 X의 개수는

$2^2-1=3$ ··· ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ $f=g$를 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	50 %

쎈B특강

부분집합의 개수

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여

① 집합 A의 부분집합의 개수: 2^n

② 집합 A의 진부분집합의 개수: 2^n-1

19 ① [반례] $f(x)=1$이라 하면 $x_1=1$, $x_2=2$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=1$, $f(x_2)=1 \quad \therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=1$은 일대일대응이 아니다.

③ [반례] $f(x)=|x+5|$라 하면 $x_1=-6$, $x_2=-4$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=|-6+5|=1$, $f(x_2)=|-4+5|=1$

$\therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=|x+5|$는 일대일대응이 아니다.

④ [반례] $f(x)=2(x-2)^2$이라 하면 $x_1=1$, $x_2=3$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=2\cdot(1-2)^2=2$, $f(x_2)=2\cdot(3-2)^2=2$

$\therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=2(x-2)^2$은 일대일대응이 아니다.

⑤ [반례] $f(x)=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -2x & (x<0) \end{cases}$라 하면 $x_1=2$, $x_2=-1$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=2$, $f(x_2)=-2\cdot(-1)=2$

$\therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -2x & (x<0) \end{cases}$는 일대일대응이 아니다.

답 ②

20 ㄱ, ㄷ, ㅁ. 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일대응의 그래프이다.

ㄴ. 음수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수의 그래프이다. 그런데 치역이 $\{y|\, y<0\}$이므로 일대일대응의 그래프는 아니다.

ㄹ. 음수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 두 점에서 만나므로 일대일함수의 그래프가 아니다.

ㅂ. 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 2개 이상의 점에서 만나기도 하므로 일대일함수의 그래프가 아니다.

이상에서 일대일함수의 그래프인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ의 4개, 일대일대응의 그래프인 것은 ㄱ, ㄷ, ㅁ의 3개이다.

따라서 $a=4$, $b=3$이므로

$a+b=7$ 답 7

쎈B특강

일대일대응이면 일대일함수이지만 일대일함수라고 해서 모두 일대일대응인 것은 아니다.

21 $a<0$이므로 함수 f가 일대일대응이면

$f(-1)=4$, $f(2)=-5$

$-a+b=4$, $2a+b=-5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-3$, $b=1$

$\therefore a+b=-2$ 답 ②

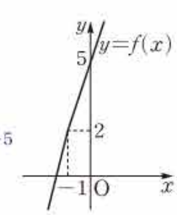
22 함수 f가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

직선 $y=4x+a$가 점 $(-1, 2)$를 지나야 하므로

$f(-1)=3\cdot(-1)+5=2$

$4\cdot(-1)+a=2$

$\therefore a=6$ 답 ④



23 $f(x)=x^2+4x+a=(x+2)^2+a-4$이므로 $x\geq 1$일 때 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.

따라서 함수 f가 일대일대응이면 $\quad f(1)=9$

$1+4+a=9 \quad \therefore a=4$ ··· ❶

즉 $f(x)=x^2+4x+4$이므로

$f(2)=2^2+4\cdot 2+4=16$ ··· ❷

답 16

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	70 %
❷ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

24 (ⅰ) $x \geq -\frac{1}{2}$일 때,

$$f(x)=a(2x+1)-6x+3=2(a-3)x+a+3$$

(ⅱ) $x < -\frac{1}{2}$일 때,

$$f(x)=-a(2x+1)-6x+3=-2(a+3)x-a+3$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 f가 일대일대응이 되려면 $x \geq -\frac{1}{2}$일 때와 $x < -\frac{1}{2}$일 때의 직선 $y=f(x)$의 기울기의 부호가 같아야 한다.

즉 $2(a-3)\cdot\{-2(a+3)\}>0$이어야 하므로

$(a+3)(a-3)<0 \qquad \therefore -3<a<3$

따라서 정수 a는 $-2, -1, 0, 1, 2$의 5개이다. 답 5

25 함수 f는 항등함수이므로 $\quad f(-3)=-3,\ f(2)=2$

$f(-3)-g(3)=1$에서

$-3-g(3)=1 \qquad \therefore g(3)=-4$

함수 g는 상수함수이므로 $\quad g(-2)=g(3)=-4$

$\therefore f(2)-g(-2)=2-(-4)=6$ 답 6

26 함수 f가 항등함수이려면 $f(x)=x$이어야 하므로

$x^2+6x-14=x, \qquad x^2+5x-14=0$

$(x+7)(x-2)=0 \qquad \therefore x=-7$ 또는 $x=2$

따라서 집합 X는 집합 $\{-7, 2\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 $\quad \{-7\}, \{2\}, \{-7, 2\}$ 답 $\{-7\}, \{2\}, \{-7, 2\}$

27 함수 h는 항등함수이므로

$h(2)=2,\ h(3)=3$ ··· ❶

$f(3)=g(6)=h(2)$에서 $\quad f(3)=g(6)=2$

$g(2)g(6)=g(3)$에서 $\quad 2g(2)=g(3)$

함수 g는 일대일대응이므로

$g(2)=3,\ g(3)=6$ 또는 $g(2)=6,\ g(3)=3$

그런데 $g(2)=6,\ g(3)=3$이면 $2g(2)\neq g(3)$이므로

$g(2)=3,\ g(3)=6$ ··· ❷

함수 f는 상수함수이므로

$f(6)=f(3)=2$ ··· ❸

$\therefore f(6)+g(3)+h(3)=2+6+3=11$ ··· ❹

답 11

채점 기준	비율
❶ $h(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $g(3)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(6)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $f(6)+g(3)+h(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

28 함수 f가 항등함수이므로 $f(x)=x$

(ⅰ) $x<-2$일 때, $\quad x=-3$

(ⅱ) $-2 \leq x < 3$일 때,

$-2x+6=x, \qquad 3x=6 \qquad \therefore x=2$

(ⅲ) $x \geq 3$일 때,

$x^2-2x-4=x, \qquad x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0 \qquad \therefore x=4\ (\because x \geq 3)$

이상에서 $X=\{-3, 2, 4\}$이므로

$a+b+c=-3+2+4=3$ 답 3

29 일대일대응을 $f: X \longrightarrow X$라 하면

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 4개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값을 제외한 3개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 2개

$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 제외한 1개

따라서 일대일대응의 개수는 $\quad 4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

또 항등함수는 1개, 상수함수는 4개이므로

$p=24,\ q=1,\ r=4$

$\therefore p+q+r=29$ 답 29

30 구하는 함수의 개수는 집합 X에서 집합 Y로의 함수의 개수에서 상수함수의 개수를 뺀 것과 같으므로

$2^5-2=30$ 답 30

31 조건 (가)에서 함수 f는 일대일함수이고, 조건 (나)에서 $f(x)$의 값이 될 수 있는 것은 $-4, -2, 0, 2, 4$이다.

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $-4, -2, 0, 2, 4$ 중 하나이므로 5개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값을 제외한 4개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 3개

따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수 f의 개수는

$5\cdot4\cdot3=60$ 답 ①

32 (ⅰ) x가 짝수일 때,

$x+f(x)$가 짝수이려면 $f(x)$가 짝수이어야 한다.

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 4 중 하나이므로 2개

$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(2)$의 값을 제외한 1개

(ⅱ) x가 홀수일 때,

$x+f(x)$가 짝수이려면 $f(x)$가 홀수이어야 한다.

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 3, 5 중 하나이므로 3개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값을 제외한 2개

$f(5)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(3)$의 값을 제외한 1개

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 f의 개수는

$(2\cdot1)\cdot(3\cdot2\cdot1)=12$ 답 ④

33 $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=1$에서 $\qquad f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $-1, \frac{1}{2}, 1, 2$ 중 하나이므로 4개

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{f(2)}$에서 $f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(2)$의 값의 역수이므로 1개

$f(1)f(1)=1$에서 $\qquad \{f(1)\}^2=1 \qquad \therefore f(1)=\pm1$

즉 $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 -1, 1 중 하나이므로 2개

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$4\cdot1\cdot2=8$ 답 8

참고 주어진 조건을 만족시키는 $f(2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$의 값을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

$f(2)$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$f(1)$
-1	-1	-1, 1
$\frac{1}{2}$	2	-1, 1
1	1	-1, 1
2	$\frac{1}{2}$	-1, 1

34 $g(-3)=-(-3)^2+5=-4$이므로

$(f\circ g)(-3)=f(g(-3))=f(-4)=-1$

$f(4)=2\cdot 4-3=5$이므로

$(g\circ f)(4)=g(f(4))=g(5)$

$=-5^2+5=-20$

$\therefore (f\circ g)(-3)-(g\circ f)(4)=-1-(-20)$

$=19$

답 ⑤

쎈B특강

두 함수 f, g에 대하여 $(f\circ g)(a)$의 값은 합성함수 $(f\circ g)(x)$를 직접 구하여 x 대신 a를 대입하여 구할 수도 있지만 $(f\circ g)(a)=f(g(a))$이므로 $g(a)$의 값을 구한 후 $f(x)$에 x 대신 $g(a)$의 값을 대입하여 구하는 것이 더 편리하다.

35 $f(1)=2$이고

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=4$,

$(f\circ f\circ f)(1)=f((f\circ f)(1))=f(4)=1$

이므로 (주어진 식)$=2+4+1=7$

답 ①

36 $((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ (g\circ h))(x)$

$=f((g\circ h)(x))$

$=f(x-4)$

$=-2(x-4)+5$

$=-2x+13$

즉 $-2a+13=7$이므로

$-2a=-6 \qquad \therefore a=3$

답 3

37 $f(3)=g(1)=2$이므로

$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(2) \qquad \therefore g(2)=3$

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(2) \qquad \therefore f(2)=1$

이때 두 함수 f, g는 각각 일대일대응이므로

$f(1)=3$, $g(3)=1$

$\therefore f(1)-g(3)=3-1=2$

답 ⑤

38 $f(x)=ax-2$, $g(x)=3x+1$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=a(3x+1)-2=3ax+a-2$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=3(ax-2)+1=3ax-5$

$f\circ g=g\circ f$이므로 $\quad 3ax+a-2=3ax-5$

$a-2=-5 \qquad \therefore a=-3$

따라서 $f(x)=-3x-2$이므로

$f(-1)=3-2=1$

답 ④

39 주어진 그림에서

$f(1)=3$, $f(2)=1$, $f(3)=4$, $f(4)=2$

$f\circ g=g\circ f$에서 $\quad f(g(x))=g(f(x)) \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $\quad f(g(2))=g(f(2))$

$f(4)=g(1) \qquad \therefore g(1)=2$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $\quad f(g(1))=g(f(1))$

$f(2)=g(3) \qquad \therefore g(3)=1$

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면 $\quad f(g(3))=g(f(3))$

$f(1)=g(4) \qquad \therefore g(4)=3$

$\therefore g(1)-g(4)=2-3=-1$

답 ②

40 $f(x)=-2x+6$, $g(x)=ax+b$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=-2(ax+b)+6$

$=-2ax-2b+6$ ⋯➊

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=a(-2x+6)+b$

$=-2ax+6a+b$ ⋯➋

$f\circ g=g\circ f$이므로 $\quad -2ax-2b+6=-2ax+6a+b$

$-2b+6=6a+b, \qquad 3b=-6a+6$

$\therefore b=-2a+2$

$g(x)=ax+b$에 $b=-2a+2$를 대입하면

$g(x)=ax-2a+2=a(x-2)+2$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(2, 2)$를 지난다. ⋯➌

답 $(2, 2)$

채점 기준	비율
➊ $(f\circ g)(x)$를 구할 수 있다.	30 %
➋ $(g\circ f)(x)$를 구할 수 있다.	30 %
➌ 점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %

41 $f(3)=-1$이므로 $\quad -3+a=-1 \qquad \therefore a=2$

$\therefore f(x)=-x+2$

또 $(f\circ g)(x)=3x+5$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(bx+c)$

$=-bx-c+2$

따라서 $-bx-c+2=3x+5$이므로

$-b=3$, $-c+2=5$

$\therefore b=-3$, $c=-3$

$\therefore a+b+c=-4$

답 -4

42 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x^2+a)=(x^2+a)^2+a$

$=x^4+2ax^2+a^2+a$

$(f\circ f)(x)$가 $x-3$으로 나누어떨어지므로

$(f\circ f)(3)=81+18a+a^2+a=0$

$\therefore \underline{a^2+19a+81=0}$ (판별식)>0이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 곱은 81이다. 답 ④

43 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=-\{f(x)\}^2+6f(x)+a$
$\qquad =-\{f(x)-3\}^2+9+a$

에서 $\underbrace{f(x)=3,\text{ 즉 } x=-\frac{2}{5}}$일 때 함수 $(g\circ f)(x)$가 최댓값 $9+a$를 가지므로 $(g\circ f)(x)\le 0$이 되려면

$-5x+1=3$에서
$-5x=2$
$\therefore x=-\frac{2}{5}$

$9+a\le 0$

이어야 한다.

$\therefore a\le -9$

따라서 a의 최댓값은 -9이다. 답 ①

다른 풀이 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-5x+1)$
$\qquad =-(-5x+1)^2+6(-5x+1)+a$
$\qquad =-25x^2-20x+5+a$

$(g\circ f)(x)\le 0$이 되려면 이차방정식 $-25x^2-20x+5+a=0$, 즉 $25x^2+20x-5-a=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=10^2-25(-5-a)\le 0$

$25a+225\le 0 \qquad \therefore a\le -9$

따라서 a의 최댓값은 -9이다.

44 $g(x)=(f\circ f\circ f)(x)=f(f(f(x)))$
$\qquad =f(f(3x+a))=f(3(3x+a)+a)$
$\qquad =f(9x+4a)=3(9x+4a)+a$
$\qquad =27x+13a$ ⋯ ❶

함수 $g(x)$는 x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값도 증가하므로 $x=-1$에서 최솟값 -1을 갖는다.

즉 $g(-1)=-1$이므로

$-27+13a=-1, \qquad 13a=26$

$\therefore a=2$ ⋯ ❷

따라서 $g(x)=27x+26$이고 함수 $g(x)$는 $x=b$에서 최댓값 53을 가지므로 $g(b)=53$에서

$27b+26=53, \qquad 27b=27$

$\therefore b=1$ ⋯ ❸

$\therefore a-b=1$ ⋯ ❹

답 1

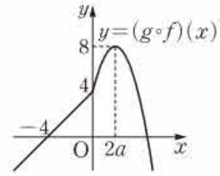
채점 기준	비율
❶ $g(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

45 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases} x+4 & (x<0) \\ -x^2+4ax+4 & (x\ge 0)\end{cases}$

$a<0$이면 함수 $y=-x^2+4ax+4=-(x-2a)^2+4a^2+4$의 그래프의 $\underbrace{\text{꼭짓점의 }x\text{좌표}}_{2a}$가 음수이므로 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역이 $\{y|y\le 4\}$가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore a>0$

$a>0$이면 함수 $y=-x^2+4ax+4$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 양수이므로 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역이 $\{y|y\le 8\}$이려면 오른쪽 그림과 같이 $\underbrace{\text{꼭짓점의 }y\text{좌표}}_{4a^2+4}$가 8이어야 한다.



즉 $4a^2+4=8$이므로

$4a^2=4, \qquad a^2=1$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$ 답 1

46 $(g\circ h)(x)=f(x)$이므로 $\qquad g(h(x))=f(x)$

$-2h(x)+5=4x^2-3, \qquad -2h(x)=4x^2-8$

$\therefore h(x)=-2x^2+4$ 답 ②

47 $(h\circ g\circ f)(x)=((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))$

이므로

$6x-3=-3f(x)+9, \qquad 3f(x)=-6x+12$

$\therefore f(x)=-2x+4$

$\therefore f(6)=-2\cdot 6+4=-8$ 답 -8

다른 풀이 $(h\circ g\circ f)(6)=(h\circ g)(f(6))$에서

$6\cdot 6-3=-3f(6)+9 \qquad \therefore f(6)=-8$

48 (1) $(f\circ h)(x)=g(x)$이므로 $\qquad f(h(x))=g(x)$

$-2h(x)+1=4x-5, \qquad -2h(x)=4x-6$

$\therefore h(x)=-2x+3$ ⋯ ❶

(2) $(k\circ f)(x)=g(x)$이므로 $\qquad k(f(x))=g(x)$

$k(-2x+1)=4x-5$

$-2x+1=t$로 놓으면

$2x=-t+1 \qquad \therefore x=-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$

따라서 $k(t)=4\left(-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)-5=-2t-3$이므로

$k(x)=-2x-3$ ⋯ ❷

답 (1) $h(x)=-2x+3$ (2) $k(x)=-2x-3$

채점 기준	비율
❶ $h(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $k(x)$를 구할 수 있다.	60 %

49 $(g\circ f)(x)=6x-8$에서 $\qquad g(f(x))=6x-8$

$g\left(\frac{3x-1}{4}\right)=6x-8$

$\frac{3x-1}{4}=t$로 놓으면 $\qquad 3x-1=4t \qquad \therefore x=\frac{4}{3}t+\frac{1}{3}$

따라서 $g(t)=6\left(\frac{4}{3}t+\frac{1}{3}\right)-8=8t-6$이므로

$g\left(\frac{1}{2}\right)=8\cdot\frac{1}{2}-6=-2$ 답 -2

다른 풀이 $g\left(\frac{3x-1}{4}\right)=6x-8$ ⋯⋯ ㉠

$\frac{3x-1}{4}=\frac{1}{2}$에서 $\qquad 3x-1=2 \qquad \therefore x=1$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $\qquad g\left(\frac{1}{2}\right)=-2$

50 $f^1(7)=f(7)=9$이므로

$f^2(7)=f(f(7))=f(9)=1$

$f^3(7)=f(f^2(7))=f(1)=3$

$f^4(7)=f(f^3(7))=f(3)=5$

$f^5(7)=f(f^4(7))=f(5)=7$

$f^6(7)=f(f^5(7))=f(7)=9$

$\vdots$

즉 $f^n(7)$의 값은 9, 1, 3, 5, 7이 이 순서대로 반복된다.

이때 $100=5\cdot 20$이므로

$f^{100}(7)=f^5(7)=7$ 답 7

51 $f^1(1)=f(1)=2$이므로

$f^2(1)=(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=3$

$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(3)=4$

$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(4)=1$

$f^5(1)=(f\circ f^4)(1)=f(f^4(1))=f(1)=2$

$\vdots$

즉 $f^n(1)$의 값은 2, 3, 4, 1이 이 순서대로 반복된다.

이때 $30=4\cdot 7+2$이므로

$f^{30}(1)=f^2(1)=3$

또 $f^1(3)=f(3)=4$이므로

$f^2(3)=(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(4)=1$

$f^3(3)=(f\circ f^2)(3)=f(f^2(3))=f(1)=2$

$f^4(3)=(f\circ f^3)(3)=f(f^3(3))=f(2)=3$

$f^5(3)=(f\circ f^4)(3)=f(f^4(3))=f(3)=4$

$\vdots$

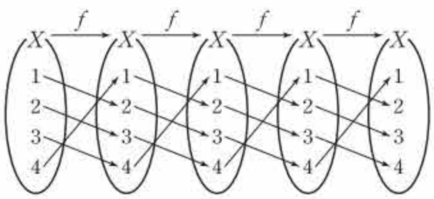
즉 $f^n(3)$의 값은 4, 1, 2, 3이 이 순서대로 반복된다.

이때 $45=4\cdot 11+1$이므로

$f^{45}(3)=f^1(3)=4$

$\therefore f^{30}(1)-f^{45}(3)=-1$ 답 ②

다른 풀이 f^1, f^2, f^3, f^4의 대응 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



즉 $f^4(x)=x$이므로

$f^{30}(1)=f^{4\cdot 7+2}(1)=f^2(1)=3$

$f^{45}(3)=f^{4\cdot 11+1}(3)=f^1(3)=4$

$\therefore f^{30}(1)-f^{45}(3)=-1$

52 (1) $f(x)=-x+3$에서

$f_1(x)=f(x)=-x+3$

$f_2(x)=(f\circ f)(x)=-(-x+3)+3=x$ ⋯ ❶

따라서 $f_3(x)=f(x)$, $f_4(x)=f_2(x)$, ⋯이므로

$f_n(x)=\begin{cases}-x+3 & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$ ⋯ ❷

(2) $f_{11}(11)+f_{22}(22)=(-11+3)+22=14$ ⋯ ❸

답 (1) $f_n(x)=\begin{cases}-x+3 & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$ (2) 14

채점 기준	비율
❶ $f_1(x)$, $f_2(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f_n(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $f_{11}(11)+f_{22}(22)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

53 $f^{n+1}=\underbrace{f^n\circ f=f\circ f^n}$이고

$f^n\circ f=(f\circ f\circ\cdots\circ f)\circ f$
$=f\circ(f\circ f\circ\cdots\circ f)$
$=f\circ f^n$

$f^1(99)=f(\underbrace{99}_{99=3\cdot 33})=\dfrac{99}{3}=33$이므로

$f^2(99)=(f\circ f)(99)=f(f(99))$

$=f(\underbrace{33}_{33=3\cdot 11})=\dfrac{33}{3}=11$

$f^3(99)=(f\circ f^2)(99)=f(f^2(99))$

$=f(\underbrace{11}_{11=3\cdot 4-1})=\dfrac{11+1}{3}=4$

$f^4(99)=(f\circ f^3)(99)=f(f^3(99))$

$=f(\underbrace{4}_{4=3\cdot 2-2})=\dfrac{4+2}{3}=2$

$f^5(99)=(f\circ f^4)(99)=f(f^4(99))$

$=f(\underbrace{2}_{2=3\cdot 1-1})=\dfrac{2+1}{3}=1$

따라서 자연수 n의 최솟값은 5이다. 답 ③

참고 $f^5(99)=1$이므로

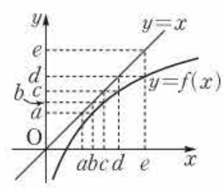
$f^6(99)=(f\circ f^5)(99)=f(f^5(99))=f(1)=\dfrac{1+2}{3}=1$

$f^7(99)=(f\circ f^6)(99)=f(f^6(99))=f(1)=\dfrac{1+2}{3}=1$

$\vdots$

따라서 $n\ge 5$일 때, $f^n(99)=1$이므로 자연수 n의 최솟값은 5이다.

54 오른쪽 그림에서



$(f\circ f\circ f)(d)=f(f(f(d)))$

$=f(f(c))$

$=f(b)$

$=a$

답 ①

55 $f(x)=\begin{cases}x+2 & (-2\le x<0)\\ -x+2 & (0\le x\le 2)\end{cases}$,

$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+1 & (-2\le x<0)\\ 1 & (0\le x\le 2)\end{cases}$이므로

$(f\circ g)(-1)=f(g(-1))=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{3}{2}$

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(1)=1$

$\therefore (f\circ g)(-1)-(g\circ f)(1)=\dfrac{1}{2}$ 답 ④

56 $f(a)=b$라 하면 $(f\circ f)(a)=3$에서

$f(f(a))=f(b)=3$

주어진 그래프에서 $f(b)=3$을 만족시키는 b의 값은

$b=3$ 또는 $b=5$, 즉 $f(a)=3$ 또는 $f(a)=5$

(ⅰ) $f(a)=3$일 때, $\quad a=3$ 또는 $a=5$

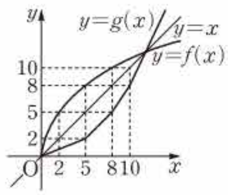
(ⅱ) $f(a)=5$일 때, $\quad a=6$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 a의 값의 합은

$3+5+6=14$

답 14

57 $f(a)=t$라 하면 $(g\circ f)(a)=5$에서



$g(f(a))=g(t)=5$

주어진 그래프에서 $g(t)=5$를 만족시키는 t의 값은

$t=8$

즉 $f(a)=8$이므로 $\quad a=5$

또 $(f\circ g\circ f)(8)=b$에서

$$(f\circ g\circ f)(8)=f(g(f(8)))=f(g(10))$$
$$=f(8)=10$$

$\therefore b=10$

$\therefore a+b=15$

답 15

58 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (-1\le x<0) \\ -x & (0\le x\le 1)\end{cases}$에서

$$(f\circ f)(x)=\begin{cases} \{f(x)\}^2 & (-1\le f(x)<0) \\ -f(x) & (0\le f(x)\le 1)\end{cases}$$

(ⅰ) $-1\le x<0$일 때, $0<f(x)\le 1$이므로

$(f\circ f)(x)=-x^2$

(ⅱ) $x=0$일 때, $f(0)=0$이므로

$(f\circ f)(0)=-f(0)=0$

(ⅲ) $0<x\le 1$일 때, $-1\le f(x)<0$이므로

$(f\circ f)(x)=(-x)^2=x^2$

이상에서

$$(f\circ f)(x)=\begin{cases} -x^2 & (-1\le x<0) \\ x^2 & (0\le x\le 1)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프의 개형은 ②와 같다.

답 ②

59 $f(x)=\begin{cases} -2x+2 & (0\le x<1) \\ 2x-2 & (1\le x\le 2)\end{cases}$이므로

$$f(f(x))=\begin{cases} -2f(x)+2 & (0\le f(x)<1) \\ 2f(x)-2 & (1\le f(x)\le 2)\end{cases}$$

(ⅰ) $0\le x\le \frac{1}{2}$일 때, $1\le f(x)\le 2$이므로

$f(f(x))=2(-2x+2)-2=-4x+2$

(ⅱ) $\frac{1}{2}<x<1$일 때, $0<f(x)<1$이므로

$f(f(x))=-2(-2x+2)+2=4x-2$

(ⅲ) $1\le x<\frac{3}{2}$일 때, $0\le f(x)<1$이므로

$f(f(x))=-2(2x-2)+2=-4x+6$

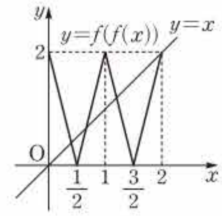
(ⅳ) $\frac{3}{2}\le x\le 2$일 때, $1\le f(x)\le 2$이므로

$f(f(x))=2(2x-2)-2=4x-6$

이상에서

$$f(f(x))=\begin{cases} -4x+2 & \left(0\le x\le \frac{1}{2}\right) \\ 4x-2 & \left(\frac{1}{2}<x<1\right) \\ -4x+6 & \left(1\le x<\frac{3}{2}\right) \\ 4x-6 & \left(\frac{3}{2}\le x\le 2\right)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(f(x))$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $f(f(x))=x$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(f(x))$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 개수와 같고, 직선 $y=x$는 점 $(2, 2)$를 지나므로 구하는 실근의 개수는 4이다.

답 4

다른 풀이 $f(f(x))=x$에서

$-2f(x)+2=x$ 또는 $2f(x)-2=x$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}x+1$ 또는 $f(x)=\frac{1}{2}x+1$

(ⅰ) $f(x)=-\frac{1}{2}x+1$일 때,

$0\le x<1$에서

$-2x+2=-\frac{1}{2}x+1 \qquad \therefore x=\frac{2}{3}$

$1\le x\le 2$에서

$2x-2=-\frac{1}{2}x+1 \qquad \therefore x=\frac{6}{5}$

(ⅱ) $f(x)=\frac{1}{2}x+1$일 때,

$0\le x<1$에서

$-2x+2=\frac{1}{2}x+1 \qquad \therefore x=\frac{2}{5}$

$1\le x\le 2$에서

$2x-2=\frac{1}{2}x+1 \qquad \therefore x=2$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$x=\frac{2}{5}$ 또는 $x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=\frac{6}{5}$ 또는 $x=2$

따라서 방정식 $f(f(x))=x$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

60 $f(x)=\begin{cases} -x+3 & (0\le x<3) \\ 2x-6 & (3\le x\le 4)\end{cases}$,

$g(x)=\begin{cases} -x+2 & (0\le x<1) \\ 1 & (1\le x<2) \\ x-1 & (2\le x<3) \\ 2x-4 & (3\le x\le 4)\end{cases}$이므로

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases} -g(x)+3 & (0\le g(x)<3) \\ 2g(x)-6 & (3\le g(x)\le 4)\end{cases}$$

(ⅰ) $0\le x<1$일 때, $1<g(x)\le 2$이므로

$(f\circ g)(x)=-(-x+2)+3=x+1$

(ⅱ) $1\le x<2$일 때, $g(x)=1$이므로

$(f\circ g)(x)=-1+3=2$

(ⅲ) $2\le x<3$일 때, $1\le g(x)<2$이므로

$(f\circ g)(x)=-(x-1)+3=-x+4$

(iv) $3 \le x < \frac{7}{2}$일 때, $2 \le g(x) < 3$이므로

$$(f \circ g)(x) = -(2x-4)+3 = -2x+7$$

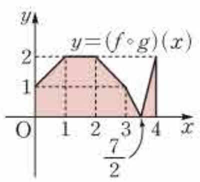
(v) $\frac{7}{2} \le x \le 4$일 때, $3 \le g(x) \le 4$이므로

$$(f \circ g)(x) = 2(2x-4)-6 = 4x-14$$

이상에서

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} x+1 & (0 \le x < 1) \\ 2 & (1 \le x < 2) \\ -x+4 & (2 \le x < 3) \\ -2x+7 & \left(3 \le x < \frac{7}{2}\right) \\ 4x-14 & \left(\frac{7}{2} \le x \le 4\right) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=(f \circ g)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot (1+3) \cdot 1 + 3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2$$

$$= \frac{23}{4}$$

답 $\frac{23}{4}$

61 $f^{-1}(-1)=2$이므로 $f(2)=-1$

$\therefore 2a+b=-1$ ······ ㉠

$f^{-1}(9)=-\frac{1}{2}$이므로 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=9$

$-\frac{1}{2}a+b=9$ $\therefore a-2b=-18$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=7$

$\therefore a+b=3$

답 3

62 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a \ne 0$, a, b, c는 상수)라 하면

$f(0)=0$이므로 $c=0$ $\therefore f(x)=ax^2+bx$

$f^{-1}(-12)=-4$이므로 $f(-4)=-12$

$16a-4b=-12$ $\therefore 4a-b=-3$ ······ ㉠

$f^{-1}(3)=2$이므로 $f(2)=3$

$\therefore 4a+2b=3$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{4}$, $b=2$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+2x$이므로

$f(-6)=-\frac{1}{4} \cdot (-6)^2+2 \cdot (-6)=-21$

답 ①

63 $\frac{1-2x}{3}=t$로 놓으면 $1-2x=3t$ $\therefore x=\frac{1-3t}{2}$

따라서 $f(t)=4 \cdot \frac{1-3t}{2}+8=-6t+10$이므로

$f(x)=-6x+10$ ··· ❶

$f^{-1}(-2)=k$라 하면 $f(k)=-2$이므로

$-6k+10=-2$ $\therefore k=2$

$\therefore f^{-1}(-2)=2$ ··· ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $f^{-1}(-2)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

다른 풀이 $f^{-1}(-2)=k$라 하면 $f(k)=-2$

$4x+8=-2$에서 $4x=-10$ $\therefore x=-\frac{5}{2}$

$x=-\frac{5}{2}$를 $f\left(\frac{1-2x}{3}\right)=4x+8$의 양변에 대입하면

$f(2)=-2$ $\therefore k=2$, 즉 $f^{-1}(-2)=2$

64 $x<-1$일 때, $f(x)=-x+4>5$

$x \ge -1$일 때, $f(x)=-3x+2 \le 5$

$f^{-1}(-4)=m$이라 하면 $\underline{f(m)=-4}$이므로

$-3m+2=-4$ $\therefore m=2$

$-4 \le 5$이므로 $f(x)=-3x+2$에 대입한다.

$f^{-1}(8)=n$이라 하면 $\underline{f(n)=8}$이므로

$-n+4=8$ $\therefore n=-4$

$8>5$이므로 $f(x)=-x+4$에 대입한다.

$\therefore f^{-1}(-4)+f^{-1}(8)=2+(-4)=-2$

답 ②

65 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이다.

$\underline{y=f(x)\text{의 그래프의 기울기가 음수}}$이므로

x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

$f(-3)=b$, $f(4)=a$

이때 $f(-3)=-2 \cdot (-3)+5=11$, $f(4)=-2 \cdot 4+5=-3$이므로 $a=-3$, $b=11$

$\therefore a+b=8$

답 ②

66 $f(x)=x^2-10x+28=(x-5)^2+3$이고, 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이므로

$a \ge 5$, $f(a)=a$

$f(a)=a$에서 $a^2-10a+28=a$

$a^2-11a+28=0$, $(a-4)(a-7)=0$

$\therefore a=7$ ($\because a \ge 5$)

답 7

67 $f(x)=3x+k|x-2|-1$에서

(i) $x \ge 2$일 때,

$f(x)=3x+k(x-2)-1=(3+k)x-2k-1$ ··· ❶

(ii) $x<2$일 때,

$f(x)=3x-k(x-2)-1=(3-k)x+2k-1$ ··· ❷

(i), (ii)에서 함수 f의 역함수가 존재하려면 f가 일대일대응이어야 하므로 $x \ge 2$일 때와 $x<2$일 때의 직선 $y=f(x)$의 기울기의 부호가 같아야 한다.

즉 $(3+k)(3-k)>0$이어야 하므로 $(k+3)(k-3)<0$

$\therefore -3<k<3$

따라서 정수 k의 최댓값은 2이다. ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $x \ge 2$일 때, $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $x<2$일 때, $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 정수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

68 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이므로

$-1+a=-2\cdot1+8 \qquad \therefore a=7$

$x<1$일 때, $\quad f(x)=-x+7>6$

$x\ge1$일 때, $\quad f(x)=-2x+8\le6$

$f^{-1}(-10)=m$이라 하면 $f(m)=-10$이므로

$-2m+8=-10 \qquad \therefore m=9$

$-10\le6$이므로 $f(x)=-2x+8$에 대입한다.

$f^{-1}(9)=n$이라 하면 $f(n)=9$이므로

$-n+7=9 \qquad \therefore n=-2$

$9>6$이므로 $f(x)=-x+7$에 대입한다.

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(-10)=f^{-1}(f^{-1}(-10))$

$=f^{-1}(9)=-2$

답 ③

69 $y=ax+2$라 하면 $\quad ax=y-2$

$\therefore x=\frac{1}{a}y-\frac{2}{a}$ ($\because a\ne0$)

$f(x)$는 일차함수이므로 $a\ne0$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{1}{a}x-\frac{2}{a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{2}{a}$

따라서 $\frac{1}{a}x-\frac{2}{a}=-\frac{1}{3}x+b$이므로

$\frac{1}{a}=-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{a}=b \qquad \therefore a=-3,\ b=\frac{2}{3}$

$\therefore b-a=\frac{11}{3}$

답 ④

70 $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(3x-2)$

$=-2(3x-2)+1=-6x+5$ ⋯ ❶

$y=-6x+5$라 하면 $\quad 6x=-y+5$

$\therefore x=-\frac{1}{6}y+\frac{5}{6}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=-\frac{1}{6}x+\frac{5}{6}$

$\therefore h^{-1}(x)=-\frac{1}{6}x+\frac{5}{6}$ ⋯ ❷

답 $h^{-1}(x)=-\frac{1}{6}x+\frac{5}{6}$

채점 기준	비율
❶ $h(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $h^{-1}(x)$를 구할 수 있다.	50 %

71 $(f\circ f)(x)=x$에서 $\quad f=f^{-1}$

$y=ax-3$이라 하면 $\quad ax=y+3$

$\therefore x=\frac{1}{a}y+\frac{3}{a}$ ($\because a\ne0$)

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{1}{a}x+\frac{3}{a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x+\frac{3}{a}$

$f=f^{-1}$에서 $ax-3=\frac{1}{a}x+\frac{3}{a}$이므로

$a=\frac{1}{a},\ -3=\frac{3}{a} \qquad \therefore a=-1$

따라서 $f(x)=-x-3$이므로

$f(a)=f(-1)=-(-1)-3=-2$

답 ②

다른 풀이 $f(x)=ax-3$에서

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax-3)$

$=a(ax-3)-3=a^2x-3a-3$

따라서 $a^2x-3a-3=x$이므로 $\quad a^2=1,\ -3a-3=0$

$\therefore a=-1$

즉 $f(x)=-x-3$이므로 $\quad f(a)=f(-1)=-2$

72 $1-3x=t$로 놓으면 $\quad 3x=-t+1$

$\therefore x=-\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}$

따라서 $f(t)=6\left(-\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}\right)+2=-2t+4$이므로

$f(x)=-2x+4$

$y=-2x+4$라 하면 $\quad 2x=-y+4 \qquad \therefore x=-\frac{1}{2}y+2$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=-\frac{1}{2}x+2$

$\therefore f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+2$

따라서 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 x절편은 4, y절편은 2이므로 구하는 합은 $\quad 4+2=6$

답 6

다른 풀이 $f(x)=-2x+4$에서 $y=f(x)$의 그래프의 x절편은 2, y절편은 4이므로 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 x절편은 4, y절편은 2이다.

따라서 구하는 합은 $\quad 4+2=6$

73 $(f^{-1}\circ g)(a)=f^{-1}(g(a))=-1$에서

$f(-1)=g(a)$

$-4\cdot(-1)+5=\frac{1}{2}a+3, \quad \frac{1}{2}a=6$

$\therefore a=12$

답 ③

74 $(f\circ g^{-1})(0)=f(g^{-1}(0))$

이때 $g(1)=0$이므로 $\quad g^{-1}(0)=1$

$\therefore (f\circ g^{-1})(0)=f(1)=2$

답 ⑤

75 $x\ge0$일 때, $\quad f(x)=-x^2+1\le1$

$x<0$일 때, $\quad f(x)=-3x+1>1$

$g(5)=-2\cdot5+7=-3$이므로

$(f^{-1}\circ g)(5)=f^{-1}(g(5))=f^{-1}(-3)$

$f^{-1}(-3)=k$라 하면 $f(k)=-3$이므로

$-k^2+1=-3, \quad k^2=4$

$-3\le1$이므로 $f(x)=-x^2+1$에 대입한다.

$\therefore k=-2$ 또는 $k=2$

그런데 $k\ge0$이므로 $\quad k=2$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(5)=2$

답 2

76 (1) $g^{-1}(-1)=4$이므로 $\quad g(4)=-1$

$-\frac{1}{2}\cdot4+b=-1 \qquad \therefore b=1$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=-3x+c$이므로

$a\left(-\frac{1}{2}x+1\right)-5=-3x+c$

$-\frac{a}{2}x+a-5=-3x+c$

따라서 $-\frac{a}{2}=-3$, $a-5=c$이므로 $\quad a=6,\ c=1$

$\therefore\ a+b+c=8$ ⋯ ❶

(2) $g^{-1}(f(2))=k$라 하면 $\quad g(k)=f(2)$

이때 $f(x)=6x-5$, $g(x)=-\frac{1}{2}x+1$이므로

$-\frac{1}{2}k+1=6\cdot 2-5, \quad -\frac{1}{2}k=6$

$\therefore\ k=-12$

$\therefore\ g^{-1}(f(2))=-12$ ⋯ ❷

답 (1) 8 (2) -12

채점 기준	비율
❶ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $g^{-1}(f(2))$의 값을 구할 수 있다.	50 %

77 $(f\circ(f\circ g)^{-1}\circ f)(4)=(f\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ f)(4)$

$=(f\circ g^{-1})(4)=f(g^{-1}(4))$

$g^{-1}(4)=k$라 하면 $\quad g(k)=4$

$-2k+10=4 \quad \therefore\ k=3$

$\therefore\ (f\circ(f\circ g)^{-1}\circ f)(4)=f(g^{-1}(4))=f(3)$

$=5\cdot 3-2=13$

답 13

78 $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$이므로

$(f\circ g)^{-1}(10)+(g^{-1}\circ f^{-1})(10)$

$=(g^{-1}\circ f^{-1})(10)+(g^{-1}\circ f^{-1})(10)$

$=2(g^{-1}\circ f^{-1})(10)$

$=2g^{-1}(f^{-1}(10))$

$f^{-1}(10)=a$라 하면 $\quad f(a)=10$

$2a^2-8=10, \quad a^2=9 \quad \therefore\ a=3\ (\because\ a\ge 0)$

$g^{-1}(3)=b$라 하면 $\quad g(b)=3$

$-b+4=3 \quad \therefore\ b=1$

$\therefore$ (주어진 식) $=2g^{-1}(f^{-1}(10))=2g^{-1}(3)$

$=2\cdot 1=2$

답 ③

79 $f(1)=-1$, $g(0)=1$이고, 두 함수 f, g의 역함수가 모두 존재하므로

$f^{-1}(-1)=1,\ g^{-1}(1)=0$

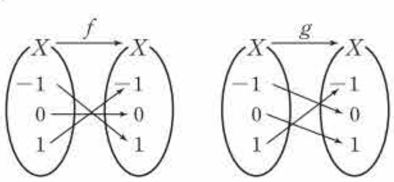
$(g\circ f^{-1})(-1)=-1$이므로 $\quad g(f^{-1}(-1))=-1$

$\therefore\ g(1)=-1$

$(g\circ f^{-1})^{-1}(1)=0$에서 $(f\circ g^{-1})(1)=0$이므로

$f(g^{-1}(1))=0 \quad \therefore\ f(0)=0$

두 함수 f, g의 역함수가 모두 존재하므로 두 함수 f, g는 일대일대응이다. 즉 두 함수 f, g의 대응 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



$\therefore\ f(-1)+g^{-1}(0)=1+(-1)=0$

답 0

80 $f^{-1}\circ g^{-1}=(g\circ f)^{-1}$이고

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-x+1)$

$=2(-x+1)-3=-2x-1$

$y=-2x-1$이라 하면

$2x=-y-1 \quad \therefore\ x=-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

$\therefore\ (g\circ f)^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

$\therefore\ (f^{-1}\circ g^{-1}\circ h)(x)=(g\circ f)^{-1}(h(x))$

$=-\frac{1}{2}h(x)-\frac{1}{2}$

즉 $-\frac{1}{2}h(x)-\frac{1}{2}=f(x)$이므로

$-\frac{1}{2}h(-6)-\frac{1}{2}=f(-6)$

$-\frac{1}{2}h(-6)-\frac{1}{2}=7$

$\therefore\ h(-6)=-15$

답 ①

다른 풀이 $((g\circ f)^{-1}\circ h)(x)=f(x)$에서

$((g\circ f)\circ(g\circ f)^{-1}\circ h)(x)=(g\circ f\circ f)(x)$

$\therefore\ h(x)=(g\circ f\circ f)(x)$

$\therefore\ h(-6)=g(f(f(-6)))$

$=g(f(7))$

$=g(-6)=-15$

81 $f^{-1}(c)=k$라 하면

$f(k)=c \quad \therefore\ k=b$

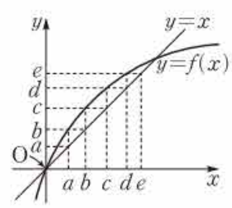
$f^{-1}(b)=l$이라 하면

$f(l)=b \quad \therefore\ l=a$

$\therefore\ (f^{-1}\circ f^{-1})(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))$

$=f^{-1}(b)$

$=a$



답 ①

82 $f^{-1}(2)=a,\ f^{-1}(5)=b$라 하면

$f(a)=2,\ f(b)=5$

함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이므로

$a=1,\ b=4$ 또는 $a=4,\ b=1$

$\therefore\ |f^{-1}(2)-f^{-1}(5)|=|a-b|=3$

답 3

83 $f^{-1}(c)=s$이므로

$f(s)=c$

$\therefore\ (f\circ f)(s)=f(f(s))=f(c)=r$

또 $f(a)=q$이므로

$f^{-1}(q)=a$

$\therefore\ (f\circ f)^{-1}(q)=(f^{-1}\circ f^{-1})(q)$

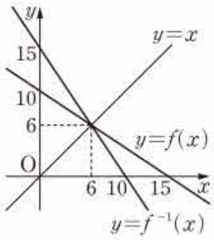
$=f^{-1}(f^{-1}(q))$

$=f^{-1}(a)=0$

$\therefore\ (f\circ f)(s)+(f\circ f)^{-1}(q)=r$

답 ④

84 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같으므로



$-\frac{2}{3}x+10=x$에서 $\quad -\frac{5}{3}x=-10 \quad \therefore x=6$

따라서 교점의 좌표는 $(6,\ 6)$이므로 $\quad a=6,\ b=6$

$\therefore a+b=12$

답 ⑤

85 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근은 방정식 $f(x)=x$의 근과 같으므로 $x^2-6x+12=x$에서

$x^2-7x+12=0, \quad (x-3)(x-4)=0$

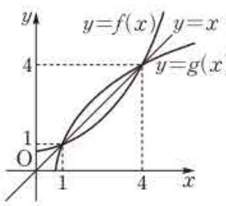
$\therefore x=3$ 또는 $x=4$

따라서 모든 근의 합은 $\quad 3+4=7$

답 ③

참고 $X=\{x|x\geq 3\}$에서 정의되므로 3, 4 모두 근이 된다.

86 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같으므로



$\frac{1}{5}(x^2+4)=x$에서 $\quad x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=4$ ⋯ ❶

따라서 두 교점의 좌표는 $(1,\ 1)$, $(4,\ 4)$이므로 구하는 거리는

$\sqrt{(4-1)^2+(4-1)^2}=3\sqrt{2}$ ⋯ ❷

답 $3\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 두 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	70 %
❷ 두 교점 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %

쎈B특강

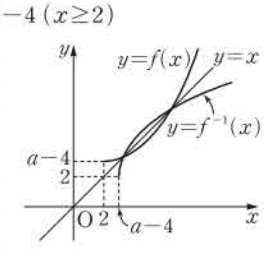
좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

87 $f(x)=x^2-4x+a=(x-2)^2+a-4\ (x\geq 2)$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



따라서 이차방정식 $x^2-4x+a=x$, 즉 $x^2-5x+a=0$이 2보다 크거나 같은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4a>0$

$-4a>-25 \quad \therefore a<\frac{25}{4}$

(ii) $2^2-5\cdot 2+a\geq 0$이므로 $\quad a\geq 6$

$g(x)=x^2-5x+a$라 하면 $g(2)\geq 0$이어야 한다.

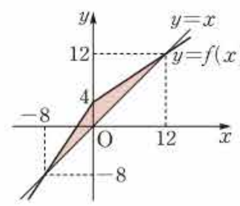
(iii) $\frac{5}{2}>2$

$y=x^2-5x+a=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+a$의 그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{5}{2}$이다.

이상에서 $6\leq a<\frac{25}{4}$이므로 구하는 최솟값은 6이다.

답 6

88 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

(i) $x\geq 0$일 때,

$\frac{2}{3}x+4=x$에서 $\quad x=12$

(ii) $x<0$일 때,

$\frac{3}{2}x+4=x$에서 $\quad x=-8$

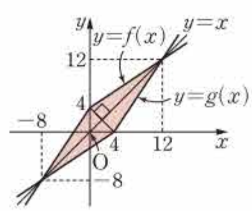
이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

따라서 구하는 넓이는

$2\left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 8+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 12\right)=80$

답 ④

다른 풀이 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형은 마름모이므로 구하는 넓이는

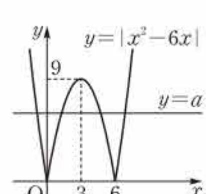
$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(4-0)^2+(0-4)^2}\cdot\sqrt{(12+8)^2+(12+8)^2}$

$=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 20\sqrt{2}=80$

89 $y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그 개형은 ③과 같다.

답 ③

90 $y=|x^2-6x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=a$와 서로 다른 네 점에서 만나려면



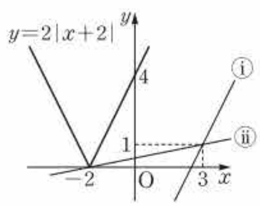
$0<a<9$

답 $0<a<9$

91 $y=f(|x|)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\ge0$인 부분만 남기고, $x<0$인 부분은 $x\ge0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그 개형은 ㄱ과 같다.
또 $|y|=f(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\ge0$인 부분만 남기고, $y<0$인 부분은 $y\ge0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그 개형은 ㄹ과 같다.
따라서 구하는 그래프의 개형은 차례대로 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

92 $y=2|x+2|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값이 -2이므로
(i) $x<-2$일 때, $y=-2(x+2)=-2x-4$
(ii) $x\ge-2$일 때, $y=2(x+2)=2x+4$
(i), (ii)에서 $y=2|x+2|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

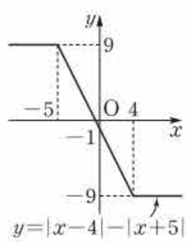


한편 직선
$y=m(x-3)+1$ ······ ㉠
은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(3,\ 1)$을 지난다.
ⓘ 직선 ㉠이 직선 $y=2x+4$와 평행할 때,
$m=2$
ⓘⓘ 직선 ㉠이 점 $(-2,\ 0)$을 지날 때,
$0=-5m+1 \quad \therefore m=\frac{1}{5}$
ⓘ, ⓘⓘ에서 두 그래프가 만나려면
$m\le\frac{1}{5}$ 또는 $m>2$
따라서 m의 값이 아닌 것은 ③이다.

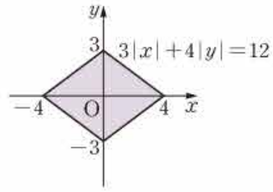
답 ③

93 $y=|x-4|-|x+5|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값이 -5, 4이므로
(i) $x<-5$일 때, $y=-(x-4)+x+5=9$
(ii) $-5\le x<4$일 때, $y=-(x-4)-(x+5)=-2x-1$
(iii) $x\ge4$일 때, $y=x-4-(x+5)=-9$
이상에서 $y=|x-4|-|x+5|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
$M=9,\ m=-9$
$\therefore M-m=18$

답 18



94 (i) $x\ge0,\ y\ge0$일 때, $3x+4y=12$, 즉 $y=-\frac{3}{4}x+3$
(ii) $x\ge0,\ y<0$일 때, $3x-4y=12$, 즉 $y=\frac{3}{4}x-3$
(iii) $x<0,\ y\ge0$일 때, $-3x+4y=12$, 즉 $y=\frac{3}{4}x+3$
(iv) $x<0,\ y<0$일 때, $-3x-4y=12$, 즉 $y=-\frac{3}{4}x-3$
이상에서 $3|x|+4|y|=12$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 그래프가 나타내는 도형은 마름모이다.
따라서 구하는 도형의 넓이는

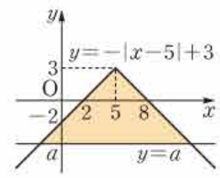


$\frac{1}{2}\cdot8\cdot6=24$

답 ②

참고 $3|x|+4|y|=12$의 그래프는 $3x+4y=12$, 즉 $y=-\frac{3}{4}x+3\ (x\ge0,\ y\ge0)$의 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동하여 그릴 수도 있다.

95 $y=-|x-5|+3$에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값이 5이므로
(i) $x<5$일 때, $y=x-5+3=x-2$
(ii) $x\ge5$일 때, $y=-(x-5)+3=-x+8$
(i), (ii)에서 $y=-|x-5|+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이 그래프와 직선 $y=a\ (a<0)$의 교점의 x좌표는 $-|x-5|+3=a$에서
$|x-5|=-a+3$
$x-5=-a+3$ 또는 $x-5=a-3$
$\therefore x=-a+8$ 또는 $x=a+2$
이때 색칠한 부분의 넓이가 49이므로
$\frac{1}{2}\{\underbrace{-a+8-(a+2)}_{a<0\text{이므로 } -a+8>a+2}\}(3-a)=49$
$(a-3)^2=49, \quad a-3=\pm7$
$\therefore a=-4\ (\because a<0)$

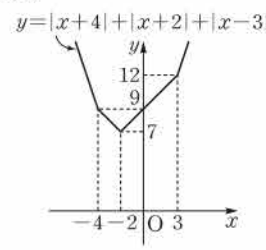
답 -4

쎈B특강

함수 $y=-|x-5|+3$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{1}{2}\cdot6\cdot3=9$이므로 함수 $y=-|x-5|+3$의 그래프와 직선 $y=a$로 둘러싸인 도형의 넓이가 49이려면 $a<0$이어야 한다.

96 $y=|x+4|+|x+2|+|x-3|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값이 -4, -2, 3이므로
(i) $x<-4$일 때,
$y=-(x+4)-(x+2)-(x-3)=-3x-3$
(ii) $-4\le x<-2$일 때,
$y=x+4-(x+2)-(x-3)=-x+5$
(iii) $-2\le x<3$일 때,
$y=x+4+x+2-(x-3)=x+9$
(iv) $x\ge3$일 때,
$y=x+4+x+2+x-3=3x+3$
이상에서
$y=|x+4|+|x+2|+|x-3|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
$x=-2$일 때 최솟값 7을 갖는다.
따라서 $a=-2$, $b=7$이므로
$a+b=5$

답 ⑤



05 유리식과 유리함수

Ⅱ. 함수

개념 정리

본책 70쪽

❶ $\frac{A}{B}$ ❷ $B-A$ ❸ 역수 ❹ $\frac{c}{d}$ ❺ $\frac{c}{f}$
❻ 다항식 ❼ 제2사분면 ❽ $y=-x$ ❾ q
❿ $x=p$

쎈B 유형 뽀개기

본책 71쪽

01 $\frac{3}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}+\frac{x+3}{x^2+x+1}$ $\quad x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$=\frac{3-(x^2+x+1)+(x+3)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\frac{3-(x^2+x+1)+(x^2+2x-3)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\frac{1}{x^2+x+1}$

답 $\frac{1}{x^2+x+1}$

02 $\frac{a}{(a+b)(a-c)}-\frac{b}{(a+b)(b+c)}+\frac{c}{(c-a)(b+c)}$

$=\frac{-a(b+c)-b(c-a)+c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c-a)}$

$=\frac{-ab-ca-bc+ab+ca+bc}{(a+b)(b+c)(c-a)}$

$=0$

답 ③

03 $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}$

$=\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$ 간단한 식이 되도록 적당히 두 개씩 묶어서 계산한다.

$=\frac{-2}{x(x+2)}+\frac{2}{(x-1)(x+1)}$

$=\frac{-2(x^2-1)+2(x^2+2x)}{x(x+2)(x-1)(x+1)}$

$=\frac{2(2x+1)}{x(x+2)(x+1)(x-1)}$

답 $\frac{2(2x+1)}{x(x+2)(x+1)(x-1)}$

04 $\frac{a^2+3a-10}{a^2-2a-3}\div\frac{a-2}{a^2+a}\times\frac{a-3}{a^2+4a}$

$=\frac{(a+5)(a-2)}{(a+1)(a-3)}\times\frac{a(a+1)}{a-2}\times\frac{a-3}{a(a+4)}$

$=\frac{a+5}{a+4}$

답 $\frac{a+5}{a+4}$

05 $\frac{a-b}{a+b}-\frac{a+b}{a-b}=\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{-4ab}{(a+b)(a-b)}$

$\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{2(a^2+b^2)}{(a-b)(a+b)}$

$\therefore \left(\frac{a-b}{a+b}-\frac{a+b}{a-b}\right)\div\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right)$

$=\frac{-4ab}{(a+b)(a-b)}\times\frac{(a-b)(a+b)}{2(a^2+b^2)}$

$=\frac{-2ab}{a^2+b^2}$

$=\frac{-4}{10}=-\frac{2}{5}$

답 $-\frac{2}{5}$

06 $\{x^2\triangle(-2x)\}\div\{(x^2-7)\triangle(3x+3)\}$

$=\frac{x^2-2x}{x^2+2x}\div\frac{x^2+3x-4}{x^2-3x-10}$

$=\frac{x(x-2)}{x(x+2)}\times\frac{(x+2)(x-5)}{(x+4)(x-1)}$

$=\frac{(x-2)(x-5)}{(x+4)(x-1)}$

답 ②

07 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$이므로 주어진 식의 양변에 x^3+1을 곱하면

$2x^2-5=a(x^2-x+1)+(3x+b)(x+1)$

$\therefore 2x^2-5=(a+3)x^2+(-a+b+3)x+a+b$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a+3=2,\ -a+b+3=0,\ a+b=-5$

$a+3=2$에서 $\quad a=-1$

$a+b=-5$에서 $\quad -1+b=-5 \quad \therefore b=-4$

$\therefore ab=4$

답 ③

쎈B 특강

항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식
$\iff a=b=c=0$

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식
$\iff a=a',\ b=b',\ c=c'$

③ $ax+by+c=0$이 $x,\ y$에 대한 항등식
$\iff a=b=c=0$

④ $ax+by+c=a'x+b'y+c'$이 $x,\ y$에 대한 항등식
$\iff a=a',\ b=b',\ c=c'$

08 주어진 식의 양변에 $x(x-2)^2$을 곱하면

$4=a(x-2)^2+bx(x-2)+cx$

$\therefore 4=(a+b)x^2-(4a+2b-c)x+4a$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$4a+2b-c=0$

답 0

참고 $4=(a+b)x^2-(4a+2b-c)x+4a$가 x에 대한 항등식이므로
$a+b=0,\ 4a+2b-c=0,\ 4a=4$
$\therefore a=1,\ b=-1,\ c=2$

09 $\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}-\frac{2}{x^4+1}-\frac{4}{x^8+1}$

$=\frac{2}{x^4-1}-\frac{2}{x^4+1}-\frac{4}{x^8+1}$

$=\frac{4}{x^8-1}-\frac{4}{x^8+1}=\frac{8}{x^{16}-1}$ ⋯ ❶

따라서 $\frac{8}{x^{16}-1}=\frac{a}{x^b-1}$이고, 이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a=8,\ b=16$ ⋯ ❷

$\therefore \frac{b}{a}=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	60 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\frac{b}{a}$의 값을 구할 수 있다.	10 %

10 주어진 식의 양변에 $(x-3)^6$을 곱하면

$x^5+3=a_1(x-3)^5+a_2(x-3)^4+\cdots+a_5(x-3)+a_6$

이 식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=4$를 대입하면

$4^5+3=a_1+a_2+\cdots+a_6$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_6=1027$

답 ④

11 $\frac{x-2}{x-3}+\frac{3x+10}{x+3}-\frac{3x-2}{x-1}-\frac{x+2}{x+1}$

$=\frac{(x-3)+1}{x-3}+\frac{3(x+3)+1}{x+3}-\frac{3(x-1)+1}{x-1}-\frac{(x+1)+1}{x+1}$

$=\left(1+\frac{1}{x-3}\right)+\left(3+\frac{1}{x+3}\right)-\left(3+\frac{1}{x-1}\right)-\left(1+\frac{1}{x+1}\right)$

$=\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-1}\right)$

$=\frac{4}{(x-3)(x+1)}+\frac{-4}{(x+3)(x-1)}$

$=\frac{4(x^2+2x-3)-4(x^2-2x-3)}{(x-3)(x+1)(x+3)(x-1)}$

$=\frac{\boxed{16x}}{(x+3)(x+1)(x-1)(x-3)}$

답 ⑤

12 $\frac{4x^2-2}{x^2-1}-\frac{8x^2+4x-1}{2x^2+x-1}$

$=\frac{4(x^2-1)+2}{x^2-1}-\frac{4(2x^2+x-1)+3}{2x^2+x-1}$

$=4+\frac{2}{x^2-1}-\left(4+\frac{3}{2x^2+x-1}\right)=\frac{2}{x^2-1}-\frac{3}{2x^2+x-1}$

$=\frac{2}{(x+1)(x-1)}-\frac{3}{(x+1)(2x-1)}$

$=\frac{2(2x-1)-3(x-1)}{(x+1)(x-1)(2x-1)}$

$=\frac{x+1}{(x+1)(x-1)(2x-1)}$

$=\frac{1}{(x-1)(2x-1)}$

답 $\frac{1}{(x-1)(2x-1)}$

13 $x^3=x(x^2+2x+4)-2(x^2+2x+4)+8$

$=(x^2+2x+4)(x-2)+8$

이므로

$\frac{x^3}{x^2+2x+4}=x-2+\frac{8}{x^2+2x+4}$

$x^3=x(x^2-2x+4)+2(x^2-2x+4)-8$

$=(x^2-2x+4)(x+2)-8$

이므로

$\frac{x^3}{x^2-2x+4}=x+2-\frac{8}{x^2-2x+4}$

$\therefore \frac{x^3}{x^2+2x+4}+\frac{x^3}{x^2-2x+4}-2x$

$=\left(x-2+\frac{8}{x^2+2x+4}\right)+\left(x+2-\frac{8}{x^2-2x+4}\right)-2x$

$=\frac{8}{x^2+2x+4}-\frac{8}{x^2-2x+4}$

$=\frac{8(x^2-2x+4)-8(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)}$

$=\frac{-32x}{x^4+4x^2+16}$

따라서 $a=4,\ b=16$이므로

$b-a=12$

답 12

14 $\frac{3}{x(x+3)}+\frac{2}{(x+3)(x+5)}+\frac{1}{(x+5)(x+6)}$

$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+5}\right)+\left(\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}\right)$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+6}$

$=\frac{6}{x(x+6)}$

따라서 $\frac{6}{x(x+6)}=\frac{a}{x(x+b)}$이고, 이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a=6,\ b=6$

$\therefore ab=36$

답 36

15 $f(n)=\frac{1}{(x+n)(x+n-1)}=\frac{1}{x+n-1}-\frac{1}{x+n}$

이므로

$f(5)+f(6)+f(7)+\cdots+f(20)$

$=\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}\right)+\left(\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}\right)+\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}\right)$

$+\cdots+\left(\frac{1}{x+19}-\frac{1}{x+20}\right)$

$=\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+20}$

$=\frac{16}{(x+4)(x+20)}$

따라서 $\frac{16}{(x+4)(x+20)}=\frac{c}{(x+a)(x+b)}$이고, 이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a=4,\ b=20,\ c=16$ 또는 $a=20,\ b=4,\ c=16$

$\therefore a+b-c=8$

답 8

16 $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots+\frac{1}{675}$

$=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{25\cdot27}$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{27}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{27}\right)=\frac{13}{27}$

따라서 $p=27$, $q=13$이므로

$p-q=14$

답 ①

17 $f(x)=4x^2+8x+3=(2x+1)(2x+3)$이므로

$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{(2x+1)(2x+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{2x+3}\right)$ ··· ❶

$\therefore \frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(100)}$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{201}-\frac{1}{203}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{203}\right)=\frac{100}{609}$ ··· ❷

답 $\frac{100}{609}$

채점 기준	비율
❶ $\frac{1}{f(x)}$을 부분분수로 변형할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	60 %

18 $1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}=1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\cfrac{x+1}{x}}}}$

$=1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{x+1}}}$

$=1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{x+1}}}$

$=1-\frac{1}{1+x+1}$

$=1-\frac{1}{x+2}$

$=\frac{x+1}{x+2}$

답 $\frac{x+1}{x+2}$

19 $f(x)=1-\cfrac{1-\cfrac{1}{x+1}}{1+\cfrac{1}{x+1}}=1-\cfrac{\cfrac{x}{x+1}}{\cfrac{x+2}{x+1}}$

$=1-\frac{x}{x+2}=\frac{2}{x+2}$

따라서 $\frac{2}{k+2}=\frac{1}{10}$에서 $k+2=20$

$\therefore k=18$

답 ⑤

20 $\cfrac{\cfrac{1}{n+1}-\cfrac{1}{n+6}}{\cfrac{1}{n+6}-\cfrac{1}{n+11}}=\cfrac{\cfrac{5}{(n+1)(n+6)}}{\cfrac{5}{(n+6)(n+11)}}$

$=\frac{n+11}{n+1}$

$=\frac{(n+1)+10}{n+1}$

$=1+\frac{10}{n+1}$

이것이 자연수가 되려면 $n+1$이 10의 양의 약수이어야 하므로

$n+1=1,\ 2,\ 5,\ 10$

따라서 정수 n은 0, 1, 4, 9이므로 구하는 합은

$0+1+4+9=14$

답 14

다른 풀이 (주어진 식)$=\frac{n+11}{n+1}=k$ (k는 자연수)로 놓으면

$n+11=k(n+1)$, $(k-1)n=-k+11$

$k=1$이면 $0\cdot n=10$이므로 $k\neq1$

$\therefore n=\frac{-k+11}{k-1}=\frac{-(k-1)+10}{k-1}$

$=-1+\frac{10}{k-1}$

n이 정수이려면 $k-1$이 10의 약수이어야 하고 $k-1>0$이므로

k는 자연수이고 $k\neq1$이므로 $k>1$ $\therefore k-1>0$

$k-1=1,\ 2,\ 5,\ 10$

따라서 정수 n은 9, 4, 1, 0이므로 구하는 합은

$9+4+1+0=14$

21 $\frac{59}{11}=5+\frac{4}{11}=5+\cfrac{1}{\cfrac{11}{4}}=5+\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{4}}$

$=5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{4}{3}}}=5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}$

따라서 $a=5$, $b=2$, $c=1$, $d=3$이므로

$abcd=30$

답 ③

22 $x^2-4x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x^2-4x+1=0$의 좌변에 $x=0$을 대입하면 $0^2-4\cdot0+1=1\neq0$이므로 $x\neq0$

$x-4+\frac{1}{x}=0$ $\quad\therefore x+\frac{1}{x}=4$

$\therefore 2x^2-x+3-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$

$=2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)+3$

$=2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}-\left(x+\frac{1}{x}\right)+3$

$=2\cdot(4^2-2)-4+3$

$=27$

답 ⑤

23 $ab\neq0$이므로 $a^2-5ab-b^2=0$의 양변을 ab로 나누면

$\frac{a}{b}-5-\frac{b}{a}=0$ $\quad\therefore \frac{a}{b}-\frac{b}{a}=5$

$\therefore \frac{a^3}{b^3}-\frac{b^3}{a^3}=\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^3+3\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$

$=5^3+3\cdot5$

$=140$

답 ⑤

24 $-1<x<0$에서 $x\neq0$이므로 $x^2-2x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$$x-2-\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x-\frac{1}{x}=2 \quad \cdots ❶$$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4$이므로

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=2^2+4=8$$

이때 $x<0$이고, $x^2+1>0$이므로

$$x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}<0$$

$$\therefore x+\frac{1}{x}=-2\sqrt{2} \quad \cdots ❷$$

또 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$이므로

$$x^2+\frac{1}{x^2}=(-2\sqrt{2})^2-2=6 \quad \cdots ❸$$

$$\begin{aligned}\therefore x^4-\frac{1}{x^4}&=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)\\&=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)\\&=6\cdot(-2\sqrt{2})\cdot2\\&=-24\sqrt{2}\end{aligned} \quad \cdots ❹$$

답 $-24\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $x-\frac{1}{x}$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $x+\frac{1}{x}$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $x^2+\frac{1}{x^2}$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $x^4-\frac{1}{x^4}$의 값을 구할 수 있다.	10 %

25 $a+b+c=0$에서

$a+b=-c,\ b+c=-a,\ c+a=-b$

$$\begin{aligned}&\therefore \left(\frac{a-b}{c}-1\right)\left(\frac{b-c}{a}-1\right)\left(\frac{c-a}{b}-1\right)\\&=\frac{a-(b+c)}{c}\cdot\frac{b-(c+a)}{a}\cdot\frac{c-(a+b)}{b}\\&=\frac{a-(-a)}{c}\cdot\frac{b-(-b)}{a}\cdot\frac{c-(-c)}{b}\\&=\frac{2a}{c}\cdot\frac{2b}{a}\cdot\frac{2c}{b}=8\end{aligned}$$

답 8

26 $(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2$에서

$a^2+b^2+c^2-2(ab+bc-ca)=a^2+b^2+c^2$

$-2(ab+bc-ca)=0$

$\therefore ab+bc-ca=0$

$$\begin{aligned}&\therefore \frac{a}{(a-b)(a+c)}-\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c+a)(c-b)}\\&=\frac{a(b-c)+b(c+a)-c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c+a)}\\&=\frac{2(ab+bc-ca)}{(a-b)(b-c)(c+a)}=0\end{aligned}$$

답 ③

27 $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=0$에서 $\qquad \frac{a+b+c}{abc}=0$

└0이 아닌 세 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $abc\neq0$

$\therefore a+b+c=0 \quad \cdots ❶$

$$\begin{aligned}&\therefore \frac{a^2+1}{bc}+\frac{b^2+1}{ca}+\frac{c^2+1}{ab}\\&=\frac{a(a^2+1)+b(b^2+1)+c(c^2+1)}{abc}\\&=\frac{a^3+b^3+c^3+(a+b+c)}{abc}\\&=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\end{aligned} \quad \cdots ❷$$

이때

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

에서 $a+b+c=0$이므로

$a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$\therefore a^3+b^3+c^3=3abc$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{3abc}{abc}=3 \quad \cdots ❸$

답 3

채점 기준	비율
❶ $a+b+c=0$임을 알 수 있다.	30 %
❷ 주어진 식을 변형할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

28 $\frac{x+y}{4}=\frac{y+z}{5}=\frac{z+x}{7}=k\ (k\neq0)$로 놓으면

$x+y=4k,\ y+z=5k,\ z+x=7k \quad \cdots\cdots ㉠$

세 식을 변끼리 더하면 $\qquad 2(x+y+z)=16k$

$\therefore x+y+z=8k \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $\qquad x=3k,\ y=k,\ z=4k$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{x^2+y^2+z^2}{xy-yz-zx}&=\frac{9k^2+k^2+16k^2}{3k^2-4k^2-12k^2}\\&=\frac{26k^2}{-13k^2}=-2\end{aligned}$$

답 -2

쎈B특강

$\frac{x+y}{4}=\frac{y+z}{5}=\frac{z+x}{7}=k$로 놓을 때 $k=0$이면

$x+y=0,\ y+z=0,\ z+x=0$

$\therefore x=y=z=0$

그런데 $xyz\neq0$에서 $x\neq0,\ y\neq0,\ z\neq0$이므로 $\qquad k\neq0$

29 $x=4k,\ y=k,\ z=3k\ (k\neq0)$로 놓으면

$$\begin{aligned}\frac{x-2y-4z}{3x+y-z}&=\frac{4k-2k-12k}{12k+k-3k}\\&=\frac{-10k}{10k}=-1\end{aligned}$$

답 ①

30 $x:y=5:6$에서 $\qquad 6x=5y \qquad \therefore x=\frac{5}{6}y$

$y:z=3:2$에서 $\qquad 2y=3z \qquad \therefore z=\frac{2}{3}y$

$\therefore x:y:z=\frac{5}{6}y:y:\frac{2}{3}y=5:6:4 \quad \cdots ❶$

$x=5k$, $y=6k$, $z=4k$ $(k\neq0)$로 놓으면

$$\frac{x-y+4z}{2x+y-z}=\frac{5k-6k+16k}{10k+6k-4k}=\frac{15k}{12k}=\frac{5}{4}$$ ⋯ ❷

답 $\frac{5}{4}$

채점 기준	비율
❶ $x:y:z$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $\frac{x-y+4z}{2x+y-z}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

다른 풀이 $x=\frac{5}{6}y$, $z=\frac{2}{3}y$이므로

$$\frac{x-y+4z}{2x+y-z}=\frac{\frac{5}{6}y-y+\frac{8}{3}y}{\frac{5}{3}y+y-\frac{2}{3}y}=\frac{\frac{5}{2}y}{2y}=\frac{5}{4}$$

31 $\begin{cases} x+5y-3z=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-7y+z=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면 $12y-4z=0$ $\therefore z=3y$

㉡에 $z=3y$를 대입하면 $x-7y+3y=0$

$\therefore x=4y$

$$\therefore \frac{xyz}{x^3+y^3+z^3}=\frac{4y\cdot y\cdot 3y}{64y^3+y^3+27y^3}=\frac{12y^3}{92y^3}=\frac{3}{23}$$

답 $\frac{3}{23}$

32 $x+\frac{1}{y}=1$에서 $x=1-\frac{1}{y}=\frac{y-1}{y}$

$y+\frac{1}{3z}=1$에서

$\frac{1}{3z}=1-y$ $\therefore 3z=\frac{1}{1-y}$

$$\therefore \frac{1}{x}+3z=\frac{y}{y-1}+\frac{1}{1-y}=\frac{y-1}{y-1}=1$$

답 ①

33 $\begin{cases} 3x+y-3z=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-y-z=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $5x-4z=0$ $\therefore z=\frac{5}{4}x$ ⋯ ❶

㉡에 $z=\frac{5}{4}x$를 대입하면

$2x-y-\frac{5}{4}x=0$ $\therefore y=\frac{3}{4}x$ ⋯ ❷

$$\therefore \frac{y+2z}{2y-z}=\frac{\frac{3}{4}x+2\cdot\frac{5}{4}x}{2\cdot\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}x}=\frac{\frac{13}{4}x}{\frac{1}{4}x}=13$$ ⋯ ❸

답 13

채점 기준	비율
❶ z를 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ y를 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ $\frac{y+2z}{2y-z}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

34 A, B 두 학교의 합격자 수를 각각 $5k$, $6k$ $(k\neq0)$로 놓고, 불합격자 수를 각각 $3l$, $5l$ $(l\neq0)$로 놓으면 지원자 수는 각각 $5k+3l$, $6k+5l$이다.

이때 $(5k+3l):(6k+5l)=2:3$이므로

$3(5k+3l)=2(6k+5l)$, $15k+9l=12k+10l$

$\therefore l=3k$

따라서 A 학교의 지원자 수는 $5k+3l=5k+9k=14k$, 합격자 수는 $5k$이므로 A 학교의 합격률은

$\frac{5k}{14k}=\frac{5}{14}$

답 ②

35 넓이가 A, B, C, D, E인 정사각형의 한 변의 길이를 각각 a, b, c, d, e라 하면

$d=2e$, $c=d+e$, $b=c+d$, $a=b+c$

$\therefore a=b+c=(c+d)+c=2c+d$
$=2(d+e)+d=3d+2e$
$=3\cdot2e+2e=8e$

따라서 $a:e=8:1$이므로

$A:E=8^2:1^2=64:1$

답 ⑤

쎈B특강

닮은 도형의 성질

(1) 닮은 두 평면도형의 닮음비가 $m:n$일 때
① 둘레의 길이의 비 ➡ $m:n$
② 넓이의 비 ➡ $m^2:n^2$

(2) 닮은 두 입체도형의 닮음비가 $m:n$일 때
① 겉넓이의 비 ➡ $m^2:n^2$
② 부피의 비 ➡ $m^3:n^3$

36 기계 A에서 생산한 두 제품 P, Q의 개수를 각각 $3k$, $2k$ $(k\neq0)$로 놓고, 기계 B에서 생산한 두 제품 P, Q의 개수를 각각 $2l$, $5l$ $(l\neq0)$로 놓으면 이 공장에서 생산한 두 제품 P, Q의 총개수는 각각 $3k+2l$, $2k+5l$이다.

이때 $(3k+2l):(2k+5l)=8:9$이므로

$9(3k+2l)=8(2k+5l)$

$27k+18l=16k+40l$

$\therefore k=2l$

따라서 이 공장에서 생산한 제품의 총개수는

$a=(3k+2l)+(2k+5l)=5k+7l$
$=5\cdot2l+7l=17l$

기계 B에서 생산한 제품의 총개수는

$b=2l+5l=7l$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{7l}{17l}=\frac{7}{17}$

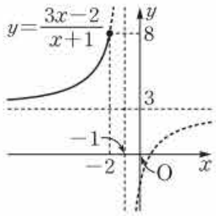
답 $\frac{7}{17}$

37 $y=\frac{3x-2}{x+1}=\frac{3(x+1)-5}{x+1}=-\frac{5}{x+1}+3$

이므로 함수 $y=\frac{3x-2}{x+1}$의 그래프는 $y=-\frac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$\frac{3x-2}{x+1}=8$에서　　$3x-2=8x+8$　　$\therefore x=-2$

따라서 $3<y\le 8$에서 $y=\frac{3x-2}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역은



$\{x|x\le -2\}$　　답 ①

38 $y=\frac{bx-5}{x+2a}=\frac{b(x+2a)-2ab-5}{x+2a}=-\frac{2ab+5}{x+2a}+b$

이므로

정의역: $\{x|x\neq -2a$인 실수$\}$

치역: $\{y|y\neq b$인 실수$\}$

따라서 $-2a=4$, $b=-3$이므로　　$a=-2$, $b=-3$

$\therefore ab=6$　　답 6

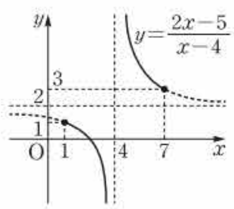
39 $y=\frac{2x-5}{x-4}=\frac{2(x-4)+3}{x-4}=\frac{3}{x-4}+2$

이므로 함수 $y=\frac{2x-5}{x-4}$의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$\frac{2x-5}{x-4}=1$에서　　$2x-5=x-4$　　$\therefore x=1$

$\frac{2x-5}{x-4}=3$에서　　$2x-5=3x-12$　　$\therefore x=7$

$y\le 1$ 또는 $y\ge 3$에서 $y=\frac{2x-5}{x-4}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역은



$\{x|1\le x<4$ 또는 $4<x\le 7\}$

따라서 정의역에 속하는 모든 정수의 합은　　$1+2+3+5+6+7=24$　　답 ④

40 $y=\frac{bx-4}{x+a}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\frac{b(x+2)-4}{(x+2)+a}-3=\frac{b(x+2+a)-4-ab}{x+2+a}-3$$
$$=\frac{-4-ab}{x+2+a}+b-3$$

이 함수의 그래프가 $y=\frac{2}{x}$의 그래프와 일치하므로

$2+a=0$, $b-3=0$, $-4-ab=2$

$\therefore a=-2$, $b=3$

$\therefore a+b=1$　　답 ④

다른 풀이 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\frac{2}{x-2}+3=\frac{2+3(x-2)}{x-2}=\frac{3x-4}{x-2}$$

이 함수의 그래프가 $y=\frac{bx-4}{x+a}$의 그래프와 일치하므로

$a=-2$, $b=3$

41 $y=-\frac{8}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{8}{x-4}-1$　　⋯ ❶

이 함수의 그래프가 점 $(2, k)$를 지나므로

$k=-\frac{8}{2-4}-1=3$　　⋯ ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	60 %

42 $y=\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\frac{4}{x-a}+b=\frac{4+b(x-a)}{x-a}=\frac{bx-ab+4}{x-a}$$

이 함수의 그래프가 $y=\frac{3x-8}{x-4}$의 그래프와 일치하므로

$a=4$, $b=3$, $-ab+4=-8$

$\therefore a-b=1$　　답 1

43 ㄱ. $y=\frac{1}{3x-1}=\frac{1}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}$

따라서 $y=\frac{1}{3x-1}$의 그래프는 $y=\frac{1}{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{3}$만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\frac{9x+2}{3x}=\frac{3\cdot 3x+2}{3x}=\frac{2}{3x}+3$

따라서 $y=\frac{9x+2}{3x}$의 그래프는 $y=\frac{2}{3x}$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\frac{6x-7}{3x-3}=\frac{2(3x-3)-1}{3x-3}=-\frac{1}{3(x-1)}+2$

따라서 $y=\frac{6x-7}{3x-3}$의 그래프는 $y=-\frac{1}{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=\frac{7-3x}{3x-6}=\frac{-(3x-6)+1}{3x-6}=\frac{1}{3(x-2)}-1$

따라서 $y=\frac{7-3x}{3x-6}$의 그래프는 $y=\frac{1}{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 평행이동에 의하여 $y=\frac{1}{3x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄹ이다.　　답 ③

44 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=-1$이므로 주어진 함수의 식을

$y=\frac{k}{x-3}-1$ $(k\neq 0)$

이라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(4, 4)$를 지나므로

$4=\frac{k}{4-3}-1$　　$\therefore k=5$

$\therefore y=\frac{5}{x-3}-1=\frac{5-(x-3)}{x-3}=\frac{-x+8}{x-3}$

따라서 $a=-1$, $b=8$, $c=-3$이므로

$abc=24$ 답 ④

다른 풀이 $y=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{a(x+c)-ac+b}{x+c}$

$=\frac{-ac+b}{x+c}+a$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-c$, $y=a$ $\quad\therefore c=-3$, $a=-1$

또 $y=\frac{-x+b}{x-3}$의 그래프가 점 $(4, 4)$를 지나므로

$4=\frac{-4+b}{4-3}$ $\quad\therefore b=8$

45 $y=\frac{13-2x}{x-5}=\frac{-2(x-5)+3}{x-5}=\frac{3}{x-5}-2$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은 $\quad x=5$, $y=-2$

따라서 두 점근선의 교점의 좌표는 $(5, -2)$이므로

$a=5$, $b=-2$

$\therefore ab=-10$ 답 ②

46 $y=\frac{-2x+1}{x+1}=\frac{-2(x+1)+3}{x+1}=\frac{3}{x+1}-2$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-1$, $y=-2$ ··· ❶

$y=\frac{bx-7}{2x+a}=\frac{\frac{b}{2}(2x+a)-\frac{ab}{2}-7}{2x+a}=\frac{-\frac{ab}{2}-7}{2x+a}+\frac{b}{2}$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\frac{a}{2}$, $y=\frac{b}{2}$ ··· ❷

따라서 $-\frac{a}{2}=-1$, $\frac{b}{2}=-2$이므로

$a=2$, $b=-4$

$\therefore a-b=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $y=\frac{-2x+1}{x+1}$의 그래프의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ $y=\frac{bx-7}{2x+a}$의 그래프의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

47 $y=\frac{3x+2}{x+a}=\frac{3(x+a)-3a+2}{x+a}=\frac{-3a+2}{x+a}+3$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

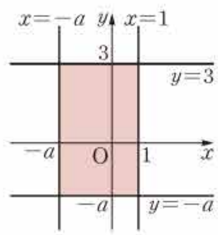
$x=-a$, $y=3$

$y=\frac{5-ax}{x-1}=\frac{-a(x-1)-a+5}{x-1}=\frac{-a+5}{x-1}-a$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=1$, $y=-a$

따라서 두 함수의 그래프의 점근선은 오른쪽 그림과 같고, 색칠한 부분의 넓이가 15이므로



$(a+1)(a+3)=15$

$a^2+4a-12=0$

$(a+6)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$ 답 2

48 주어진 함수의 그래프가 점 $\left(1, \frac{5}{3}\right)$에 대하여 대칭이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=1$, $y=\frac{5}{3}$

주어진 함수의 식을

$y=\frac{k}{x-1}+\frac{5}{3}\ (k\neq0)$

라 하면 이 함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표가 $\frac{1}{3}$이므로

$x=0$에서의 y의 값

$\frac{1}{3}=-k+\frac{5}{3}$ $\quad\therefore k=\frac{4}{3}$

$\therefore y=\frac{\frac{4}{3}}{x-1}+\frac{5}{3}=\frac{4+5(x-1)}{3(x-1)}=\frac{5x-1}{3x-3}$

따라서 $a=5$, $b=-1$, $c=-3$이므로

$a+b+c=1$ 답 ④

다른 풀이 주어진 함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표가 $\frac{1}{3}$이므로

$\frac{1}{3}=\frac{b}{c}$ $\quad\therefore c=3b$

$y=\frac{ax+b}{3x+c}$에 $c=3b$를 대입하면

$y=\frac{ax+b}{3x+3b}$

$=\frac{\frac{a}{3}x+\frac{b}{3}}{x+b}$

$=\frac{\frac{a}{3}(x+b)-\frac{ab}{3}+\frac{b}{3}}{x+b}$

$=\frac{-\frac{ab}{3}+\frac{b}{3}}{x+b}+\frac{a}{3}$

이 함수의 그래프가 점 $\left(1, \frac{5}{3}\right)$에 대하여 대칭이므로

$-b=1$, $\frac{a}{3}=\frac{5}{3}$

$\therefore a=5$, $b=-1$, $c=-3$

49 $y=-\frac{3}{x+5}+k$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-5$, $y=k$

이때 $y=-\frac{3}{x+5}+k$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 $(-5, k)$는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

두 점근선의 교점

$\therefore k=-5$ 답 ①

05 유리식과 유리함수

50 $y=\dfrac{-6x+1}{3x+4}=\dfrac{-2(3x+4)+9}{3x+4}=\dfrac{9}{3x+4}-2$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\dfrac{4}{3}$, $y=-2$ ⋯ ❶

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $\left(-\dfrac{4}{3},\ -2\right)$에 대하여 대칭이므로

$a=-\dfrac{4}{3}$, $b=-2$ ⋯ ❷

또 점 $\left(-\dfrac{4}{3},\ -2\right)$는 직선 $y=x+c$ 위의 점이므로

$-2=-\dfrac{4}{3}+c \qquad \therefore c=-\dfrac{2}{3}$ ⋯ ❸

$\therefore a+b+c=-4$ ⋯ ❹

답 -4

채점 기준	비율
❶ 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ c의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

51 $y=\dfrac{bx+1}{x+a}=\dfrac{b(x+a)-ab+1}{x+a}=\dfrac{-ab+1}{x+a}+b$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a$, $y=b$

이때 점 $(-a,\ b)$가 두 직선 $y=x-2$, $y=-x-1$의 교점이므로

$b=-a-2$, $b=a-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore ab=\dfrac{3}{4}$

답 $\dfrac{3}{4}$

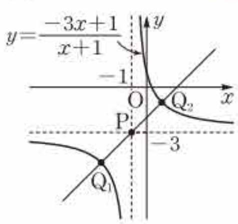
52 $y=\dfrac{-3x+1}{x+1}=\dfrac{-3(x+1)+4}{x+1}=\dfrac{4}{x+1}-3$

이므로 곡선의 점근선의 방정식은

$x=-1$, $y=-3$

즉 점 P$(-1,\ -3)$은 두 점근선의 교점이다. ⋯ ❶

$\overline{\text{PQ}}$의 길이가 최소일 때의 점 Q는 오른쪽 그림과 같이 Q_1, Q_2로 두 개가 존재한다.



한편 곡선 $y=\dfrac{-3x+1}{x+1}$은 점 P$(-1,\ -3)$에 대하여 대칭이므로 직선 $y+3=x+1$, 즉 $y=x-2$에 대하여 대칭이다.

점 $(-1,\ -3)$을 지나고 기울기가 1인 직선

$\dfrac{-3x+1}{x+1}=x-2$에서

$-3x+1=(x+1)(x-2)$

두 점 Q_1, Q_2는 곡선 $y=\dfrac{-3x+1}{x+1}$과 직선 $y=x-2$의 교점이다.

$x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 두 점 Q_1, Q_2의 좌표는 각각

$(-3,\ -5)$, $(1,\ -1)$ ⋯ ❷

$\overline{\text{PQ}}$의 길이의 최솟값은 $\overline{\text{PQ}_1}$ 또는 $\overline{\text{PQ}_2}$의 길이와 같다.

$\overline{\text{PQ}_1}=\sqrt{(-3+1)^2+(-5+3)^2}$

$=2\sqrt{2}$ ⋯ ❸

답 $2\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 점 P가 두 점근선의 교점임을 알 수 있다.	30 %
❷ 두 점 Q_1, Q_2의 좌표를 구할 수 있다.	50 %
❸ 선분 PQ의 길이의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

쎈B특강

유리함수의 그래프의 대칭성

함수 $y=\dfrac{k}{x}\ (k\neq0)$의 그래프는 두 직선 $y=x$, $y=-x$에 대하여 각각 대칭이므로 이 함수의 그래프를 평행이동한 함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프는 두 점근선 $x=p$, $y=q$의 교점 $(p,\ q)$를 지나고 기울기가 ±1인 두 직선에 대하여 각각 대칭이다.

즉 함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프는 두 직선

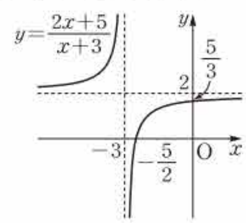
$y-q=x-p$, $y-q=-(x-p)$

에 대하여 각각 대칭임을 알 수 있다.

53 $y=\dfrac{2x+5}{x+3}=\dfrac{2(x+3)-1}{x+3}=-\dfrac{1}{x+3}+2$

이므로 함수 $y=\dfrac{2x+5}{x+3}$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

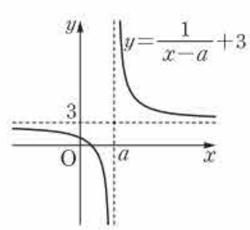
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 그래프가 지나지 않는 사분면은 제4사분면이다.



답 제4사분면

54 $y=\dfrac{1}{x-a}+3$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=\dfrac{1}{x-a}+3$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $a>0$이고 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 크거나 같아야 하므로



$-\dfrac{1}{a}+3\geq0, \qquad \dfrac{1}{a}\leq3$

$\therefore a\geq\dfrac{1}{3}$

따라서 실수 a의 최솟값은 $\dfrac{1}{3}$이다.

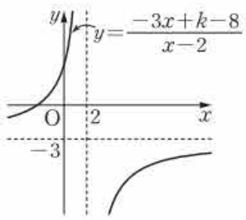
답 $\dfrac{1}{3}$

55 $y=\dfrac{-3x+k-8}{x-2}=\dfrac{-3(x-2)+k-14}{x-2}=\dfrac{k-14}{x-2}-3$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=2,\ y=-3$

함수 $y=\dfrac{-3x+k-8}{x-2}$의 그래프가 모든 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $k-14<0$이어야 하므로



$k<14$ ...... ㉠

또 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 커야 하므로

$\dfrac{k-8}{-2}>0,\quad k-8<0$

$\therefore k<8$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $k<8$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, ⋯, 7의 7개이다. 답 ④

참고 $k-14\geq0$이면 주어진 함수의 그래프는 제2사분면을 지날 수 없다.

56 그래프의 점근선의 방정식이 $x=4$, $y=-3$이므로 주어진 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x-4}-3\ (k<0)$

이라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=\dfrac{k}{-4}-3\quad \therefore k=-8$

$\therefore y=-\dfrac{8}{x-4}-3=\dfrac{-8-3(x-4)}{x-4}=\dfrac{-3x+4}{x-4}$

따라서 $a=-3$, $b=4$, $c=-4$이므로

$abc=48$ 답 48

57 $y=\dfrac{k}{x+a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=-2$이므로

$a=-1,\ b=-2$

따라서 함수 $y=\dfrac{k}{x-1}-2$의 그래프가 점 $(3,\ 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{k}{3-1}-2\quad \therefore k=4$

$\therefore a+b+k=1$ 답 ③

58 $y=\dfrac{b}{x+a}+c$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a,\ y=c$

이므로 주어진 그래프에서

$-a<0,\ c<0\quad \therefore a>0,\ c<0$

또 $y=\dfrac{b}{x}$의 그래프가 제1사분면과 제3사분면을 지나므로

$b>0$

ㄱ. $a>0,\ b>0,\ c<0$이므로 $abc<0$

ㄴ. $b>0,\ c<0$이므로 $b-c>0$

ㄷ. 함수 $y=\dfrac{b}{x+a}+c$의 그래프가 원점을 지나므로

$\dfrac{b}{a}+c=0,\quad \dfrac{b}{a}=-c\quad \therefore b=-ac$

ㄹ. $\dfrac{a}{c}<0,\ \dfrac{b}{c}<0$이므로 $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}<0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

59 $y=\dfrac{2x-3}{x-4}=\dfrac{2(x-4)+5}{x-4}=\dfrac{5}{x-4}+2$

① 그래프는 $y=\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

② $x-4=0$에서 $x=4$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\neq4$인 실수$\}$이다.

③ 그래프의 점근선의 방정식이 $x=4$, $y=2$이므로 그래프는 점 $(4,\ 2)$에 대하여 대칭이다.

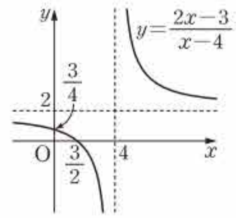
④ $y=\dfrac{2x-3}{x-4}$에 $y=0$을 대입하면

$0=\dfrac{2x-3}{x-4},\quad 2x-3=0$

$\therefore x=\dfrac{3}{2}$

따라서 그래프와 x축의 교점의 좌표는 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$이다.

⑤ 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2, 4사분면을 지난다.



답 ④

60 ㄱ. $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=-2$이므로 치역은 $\{y|y\neq-2$인 실수$\}$이다.

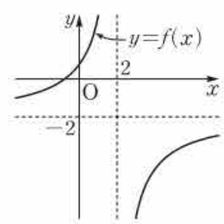
ㄴ. $y=f(x)$의 그래프는 점 $(2,\ -2)$를 지나고 기울기가 -1인 직선, 즉 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이다.

ㄷ. $f(0)=-\dfrac{k}{2}-2$이고 $k<-4$이면

$-\dfrac{k}{2}>2$

$\therefore -\dfrac{k}{2}-2>0$

즉 $f(0)>0$이므로 오른쪽 그림과 같이 그래프는 모든 사분면을 지난다.



이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

61 $y=\dfrac{a}{x}$, $y=\dfrac{b}{x}$의 그래프는 제3사분면을 지나므로

$a>0,\ b>0$

이때 $y=\dfrac{b}{x}$의 그래프가 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프보다 원점으로부터 멀리 떨어져 있으므로

$|b|>|a|\quad \therefore 0<a<b$ ⋯ ❶

양수끼리는 절댓값이 클수록 크다.

$y=\dfrac{c}{x}$, $y=\dfrac{d}{x}$의 그래프는 제4사분면을 지나므로

$c<0,\ d<0$

이때 $y=\dfrac{c}{x}$의 그래프가 $y=\dfrac{d}{x}$의 그래프보다 원점으로부터 멀리 떨어져 있으므로

05 유리식과 유리함수

$|c|>|d|$　　$\therefore c<d<0$ ⋯ ❷

음수끼리는 절댓값이 클수록 작다.

$\therefore c<d<a<b$ ⋯ ❸

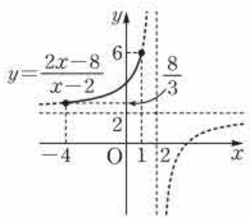
답 $c<d<a<b$

채점 기준	비율
❶ $0<a<b$임을 알 수 있다.	40 %
❷ $c<d<0$임을 알 수 있다.	40 %
❸ a, b, c, d의 대소를 비교할 수 있다.	20 %

62 $y=\dfrac{2x-8}{x-2}=\dfrac{2(x-2)-4}{x-2}=-\dfrac{4}{x-2}+2$

이므로 함수 $y=\dfrac{2x-8}{x-2}$의 그래프는 $y=-\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-4\le x\le 1$에서 $y=\dfrac{2x-8}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 함수는



$x=1$일 때 최댓값 6,

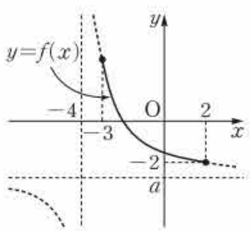
$x=-4$일 때 최솟값 $\dfrac{8}{3}$

을 갖는다.

즉 $a=6$, $b=\dfrac{8}{3}$이므로　　$ab=16$　　답 16

63 $f(x)=\dfrac{6}{x+4}+a$의 그래프는 $y=\dfrac{6}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

이때 $-3\le x\le 2$에서 $f(x)=\dfrac{6}{x+4}+a$의 최솟값이 -2이려면 그 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 -2를 가지므로　　$f(2)=-2$

$1+a=-2$　　$\therefore a=-3$

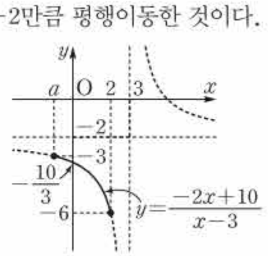
따라서 $f(x)=\dfrac{6}{x+4}-3$이므로

$f(-2)=\dfrac{6}{-2+4}-3=0$　　답 ③

64 $y=\dfrac{-2x+10}{x-3}=\dfrac{-2(x-3)+4}{x-3}=\dfrac{4}{x-3}-2$

이므로 함수 $y=\dfrac{-2x+10}{x-3}$의 그래프는 $y=\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a\le x\le 2$에서 $y=\dfrac{-2x+10}{x-3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 함수는



$x=a$일 때 최댓값 -3,

$x=2$일 때 최솟값 -6

을 갖는다.

즉 $\dfrac{-2a+10}{a-3}=-3$이므로

$-2a+10=-3a+9$　　$\therefore a=-1$

이때 $m=-6$이므로　　$am=6$　　답 ①

65 조건 (가)에서 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=2$이므로 $f(x)=\dfrac{k}{x+2}+2\,(k\ne 0)$라 하자.

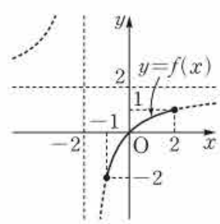
이때 조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\dfrac{k}{2}+2$　　$\therefore k=-4$

$\therefore f(x)=-\dfrac{4}{x+2}+2$ ⋯ ❶

함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=-\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는



$x=2$일 때 최댓값 1,

$x=-1$일 때 최솟값 -2

를 갖는다.

즉 구하는 합은

$1+(-2)=-1$ ⋯ ❷

답 -1

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	40 %

66 함수 $y=\dfrac{4x-5}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=kx+4$가 한 점에서 만나므로 $\dfrac{4x-5}{x-1}=kx+4$에서

$4x-5=(kx+4)(x-1)$

$4x-5=kx^2+(4-k)x-4$

$\therefore kx^2-kx+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4k=0$

$k(k-4)=0$

$\therefore k=4\ (\because k>0)$　　답 4

67 함수 $y=\dfrac{x}{x+3}$의 그래프와 직선 $y=mx+3m$이 만나므로

$\dfrac{x}{x+3}=mx+3m$에서

$x=m(x+3)^2$

$\therefore mx^2+(6m-1)x+9m=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

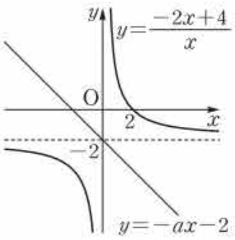
$D=(6m-1)^2-36m^2\ge 0$

$-12m+1\ge 0$　　$\therefore m\le\dfrac{1}{12}$

따라서 m의 최댓값은 $\dfrac{1}{12}$이다.　　답 ①

68 $A\cap B=\varnothing$이므로 함수 $y=\dfrac{-2x+4}{x}$의 그래프와 직선 $y=-ax-2$는 만나지 않는다.

$y=\dfrac{-2x+4}{x}$, 즉 $y=\dfrac{4}{x}-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=-ax-2$는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ -2)$를 지나므로



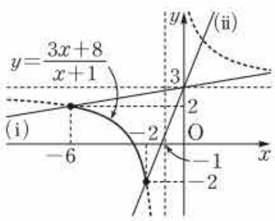
$-a\le 0$

$\therefore\ a\ge 0$

답 $a\ge 0$

69 $y=\dfrac{3x+8}{x+1}=\dfrac{3(x+1)+5}{x+1}=\dfrac{5}{x+1}+3$

이므로 $-6\le x\le -2$에서 $y=\dfrac{3x+8}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=ax+3$은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 3)$을 지난다.



(i) 직선 $y=ax+3$이 점 $(-6,\ 2)$를 지날 때,

$2=-6a+3\qquad \therefore\ a=\dfrac{1}{6}$

(ii) 직선 $y=ax+3$이 점 $(-2,\ -2)$를 지날 때,

$-2=-2a+3\qquad \therefore\ a=\dfrac{5}{2}$

(i), (ii)에서 $-6\le x\le -2$일 때, 함수 $y=\dfrac{3x+8}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=ax+3$이 한 점에서 만나려면

$\dfrac{1}{6}\le a\le \dfrac{5}{2}$

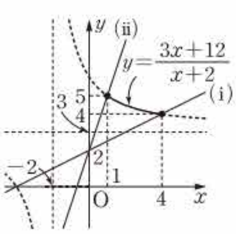
따라서 정수 a는 1, 2의 2개이다.

답 ②

70 $y=\dfrac{3x+12}{x+2}$라 하면

$y=\dfrac{3x+12}{x+2}=\dfrac{3(x+2)+6}{x+2}=\dfrac{6}{x+2}+3$

이므로 $1\le x\le 4$에서 $y=\dfrac{3x+12}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ⋯ ❶



이때 두 직선 $y=ax+2$, $y=bx+2$는 a, b의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 2)$를 지난다.

(i) 직선 $y=ax+2$가 점 $(4,\ 4)$를 지날 때,

$4=4a+2\qquad \therefore\ a=\dfrac{1}{2}$

따라서 $ax+2\le \dfrac{3x+12}{x+2}$이려면 $\quad a\le \dfrac{1}{2}$ ⋯ ❷

(ii) 직선 $y=bx+2$가 점 $(1,\ 5)$를 지날 때,

$5=b+2\qquad \therefore\ b=3$

따라서 $\dfrac{3x+12}{x+2}\le bx+2$이려면 $\quad b\ge 3$ ⋯ ❸

(i), (ii)에서 $a-b$의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}-3=-\dfrac{5}{2}$ ⋯ ❹

답 $-\dfrac{5}{2}$

채점 기준	비율
❶ $1\le x\le 4$에서 $y=\dfrac{3x+12}{x+2}$의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ b의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ $a-b$의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

71 점 P의 좌표를 $\left(k,\ \dfrac{4}{k+3}+2\right)(k>-3)$라 하면

$Q(k,\ 2)$, $R\left(-3,\ \dfrac{4}{k+3}+2\right)$

$\overline{PQ}=\left(\dfrac{4}{k+3}+2\right)-2=\dfrac{4}{k+3}$, $\overline{PR}=k+3$이고 $k>-3$에서 $k+3>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{PQ}+\overline{PR}&=\frac{4}{k+3}+k+3\\&\ge 2\sqrt{\frac{4}{k+3}\cdot(k+3)}\\&=2\cdot 2\\&=4\ (\text{단, 등호는 } k=-1\text{일 때 성립})\end{aligned}$$

$\dfrac{4}{k+3}=k+3$에서 $(k+3)^2=4$
$\therefore\ k=-1\ (\because\ k>-3)$

따라서 $\overline{PQ}+\overline{PR}$의 최솟값은 4이다.

답 ④

72 점 P의 좌표를 $\left(k,\ \dfrac{9}{k}\right)(k>0)$라 하면

$Q(k,\ 0)$, $R\left(0,\ \dfrac{9}{k}\right)$

사각형 OQPR의 둘레의 길이는

$2\overline{PR}+2\overline{PQ}=2k+\dfrac{18}{k}$

이때 $k>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}2k+\frac{18}{k}&\ge 2\sqrt{2k\cdot\frac{18}{k}}\\&=2\cdot 6\\&=12\ (\text{단, 등호는 } k=3\text{일 때 성립})\end{aligned}$$

$2k=\dfrac{18}{k}$에서 $k^2=9$
$\therefore\ k=3\ (\because\ k>0)$

따라서 사각형 OQPR의 둘레의 길이의 최솟값은 12이다.

답 12

73 두 점 P, Q의 좌표를

$P\left(a,\ \dfrac{10}{a}\right)$, $Q\left(-b,\ -\dfrac{10}{b}\right)\ (a>0,\ b>0)$

이라 하면

$A(a,\ 0)$, $B\left(0,\ \dfrac{10}{a}\right)$, $C(-b,\ 0)$, $D\left(0,\ -\dfrac{10}{b}\right)$

육각형 APBCQD의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}S&=\square OAPB+\square OCQD+\triangle OBC+\triangle ODA\\&=a\cdot\frac{10}{a}+b\cdot\frac{10}{b}+\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{10}{a}+\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{10}{b}\\&=20+5\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\end{aligned}$$

이때 $a>0$, $b>0$에서 $\frac{b}{a}>0$, $\frac{a}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$S=20+5\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$$
$$\geq 20+5\cdot 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}$$
$$=20+5\cdot 2$$
$$=30 \text{ (단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립)}$$

$\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$에서 $a^2=b^2$
$\therefore a=b$ ($\because a>0$, $b>0$)

따라서 육각형 APBCQD의 넓이의 최솟값은 30이다. 답 ③

74 점 A의 좌표를 $\left(a, \frac{2}{a}\right)$ $(a>0)$라 하면 점 B의 y좌표는 $\frac{2}{a}$이므로 $\frac{2}{a}=\frac{k}{x}$에서

$x=\frac{ak}{2}$ $\qquad \therefore B\left(\frac{ak}{2}, \frac{2}{a}\right)$

또 점 C의 x좌표가 a이므로 점 C의 좌표는 $\left(a, \frac{k}{a}\right)$

$$\therefore \overline{AB}=\frac{ak}{2}-a=\frac{a}{2}(k-2),$$
$$\overline{AC}=\frac{k}{a}-\frac{2}{a}=\frac{1}{a}(k-2)$$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 49이므로

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}=49$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}(k-2)\cdot\frac{1}{a}(k-2)=49$$
$$(k-2)^2=196, \qquad k-2=\pm 14$$
$$\therefore k=16 \ (\because k>2)$$

답 ⑤

75 $f(x)=\frac{2x-4}{x}$에서

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{2\cdot\frac{2x-4}{x}-4}{\frac{2x-4}{x}}=\frac{-4}{x-2}$$
$$f^3(x)=(f^2\circ f)(x)=f^2(f(x))=\frac{-4}{\frac{2x-4}{x}-2}=x$$

따라서 함수 $f^3(x)=f^6(x)=f^9(x)=\cdots=f^{3n}(x)$ (n은 자연수)는 항등함수이므로

$$f^{500}(x)=f^{3\times 166+2}(x)=f^2(x)$$
$$\therefore f^{500}(4)=f^2(4)=\frac{-4}{4-2}=-2$$

답 -2

참고 $f^1(4)=1$, $f^2(4)=-2$, $f^3(4)=4$, $f^4(4)=1$, $\cdots$이므로 $f^n(4)$의 값은 1, -2, 4가 이 순서대로 반복된다.

76 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=\dfrac{\frac{x+3}{x-1}+3}{\frac{x+3}{x-1}-1}=x$

즉 $(f\circ f)(k)=2-k^2$에서

$$k=2-k^2, \qquad k^2+k-2=0$$
$$(k+2)(k-1)=0$$
$$\therefore k=-2 \ (\because k\neq 1)$$

함수 $y=f(x)$의 정의역이 $\{x|x\neq 1$인 실수$\}$이므로 $k\neq 1$

답 ①

77 $f(x)=\frac{x}{x+1}$에서

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$$
$$=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}=\frac{x}{2x+1} \qquad \cdots ❶$$
$$f^3(x)=(f\circ f\circ f)(x)=f((f\circ f)(x))$$
$$=\frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1}=\frac{x}{3x+1} \qquad \cdots ❷$$

같은 방법으로 하면

$$f^{99}(x)=\frac{x}{99x+1} \qquad \cdots ❸$$

따라서 $a=1$, $b=0$, $c=99$이므로

$$a+b+c=100 \qquad \cdots ❹$$

답 100

채점 기준	비율
❶ $f^2(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f^3(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $f^{99}(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

참고 $f^n(x)=\frac{x}{nx+1}$ (단, n은 자연수)

78 주어진 그래프에서

$$f^1(0)=f(0)=-2, \ f^1(-2)=f(-2)=0$$

이므로

$$f^2(-2)=(f\circ f^1)(-2)=f(f^1(-2))=f(0)=-2$$
$$f^3(-2)=(f\circ f^2)(-2)=f(f^2(-2))=f(-2)=0$$
$$f^4(-2)=(f\circ f^3)(-2)=f(f^3(-2))=f(0)=-2$$
$$f^5(-2)=(f\circ f^4)(-2)=f(f^4(-2))=f(-2)=0$$
$$\vdots$$
$$\therefore f^n(-2)=\begin{cases} 0 & (n\text{은 홀수}) \\ -2 & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$$
$$\therefore f^{1024}(-2)=-2$$

답 -2

다른 풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-3$, $y=-3$이고 두 점 $(-2, 0)$, $(0, -2)$를 지나므로

$$f(x)=\frac{3}{x+3}-3$$
$$\therefore f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$$
$$=\frac{3}{\frac{3}{x+3}-3+3}-3$$
$$=x$$

따라서 함수 $f^2(x)=f^4(x)=f^6(x)=\cdots=f^{2n}(x)$ (n은 자연수)는 항등함수이므로

$$f^{1024}(x)=f^{2\times 512}(x)=x$$
$$\therefore f^{1024}(-2)=-2$$

79 $y=\frac{ax}{3x-1}$라 하면 $\qquad y(3x-1)=ax$

$$(3y-a)x=y \qquad \therefore x=\frac{y}{3y-a}$$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{x}{3x-a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{x}{3x-a}$

$(f\circ f)(x)=x$에서 $f=f^{-1}$이므로

$\dfrac{ax}{3x-1}=\dfrac{x}{3x-a}$

$\therefore a=1$ 답 ④

다른 풀이 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=\dfrac{a\cdot\dfrac{ax}{3x-1}}{3\cdot\dfrac{ax}{3x-1}-1}$

$=\dfrac{a^2x}{3(a-1)x+1}$

따라서 $\dfrac{a^2x}{3(a-1)x+1}=x$이므로

$3(a-1)x^2+x=a^2x$

$\therefore 3(a-1)x^2+(1-a^2)x=0$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a-1=0,\ 1-a^2=0$

$\therefore a=1$

80 $y=\dfrac{2x-5}{x+a}$라 하면 $\quad y(x+a)=2x-5$

$(y-2)x=-ay-5 \qquad \therefore x=\dfrac{-ay-5}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{-ax-5}{x-2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-ax-5}{x-2}$

따라서 $\dfrac{-ax-5}{x-2}=\dfrac{-3x+b}{x+c}$이므로

$-a=-3,\ b=-5,\ c=-2$

$\therefore a=3,\ b=-5,\ c=-2$

$\therefore abc=30$ 답 ⑤

81 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+3}$의 그래프가 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$2=\dfrac{-a+b}{-1+3} \qquad \therefore a-b=-4$ …… ㉠

또 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+3}$의 역함수의 그래프가 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x+3}$의 그래프는 점 $(2,\ -1)$을 지난다. 즉

$-1=\dfrac{2a+b}{2+3} \qquad \therefore 2a+b=-5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=1$

$\therefore a+b=-2$ 답 ③

82 두 직선 $y=x-4$, $y=-x+2$의 교점의 x좌표는

$x-4=-x+2 \qquad \therefore x=3$

$\therefore y=-1$

즉 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(3,\ -1)$에 대하여 대칭이므로 그 역함수의 그래프는 점 $(-1,\ 3)$에 대하여 대칭이다.

따라서 점 $(-1,\ 3)$은 두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$의 교점이므로

$-a+b=3,\ -c+d=3$

$\therefore a-b=-3,\ c-d=-3$

$\therefore a-b+c-d=-6$ 답 -6

83 $f^{-1}\circ f=I$(항등함수)이므로

$(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f)(3)=(f^{-1}\circ I)(3)$

$=f^{-1}(3)$

$f^{-1}(3)=k$라 하면 $\quad f(k)=3$

$\dfrac{k-7}{2k+1}=3, \qquad k-7=6k+3$

$\therefore k=-2$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1}\circ f)(3)=-2$ 답 -2

84 $(f\circ g)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$g(2)=k$라 하면 $\quad f(k)=2$

$\dfrac{3k-6}{k-1}=2, \qquad 3k-6=2k-2$

$\therefore k=4$, 즉 $g(2)=4$ … ❶

$g(4)=t$라 하면 $\quad f(t)=4$

$\dfrac{3t-6}{t-1}=4, \qquad 3t-6=4t-4$

$\therefore t=-2$, 즉 $g(4)=-2$ … ❷

$\therefore (g\circ g)(2)=g(g(2))=g(4)=-2$ … ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ $g(2)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $g(4)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $(g\circ g)(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 $y=\dfrac{3x-6}{x-1}$이라 하면

$y(x-1)=3x-6, \qquad (y-3)x=y-6$

$\therefore x=\dfrac{y-6}{y-3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{x-6}{x-3}$

$\therefore g(x)=\dfrac{x-6}{x-3}$

따라서 $g(2)=\dfrac{2-6}{2-3}=4$, $g(4)=\dfrac{4-6}{4-3}=-2$이므로

$(g\circ g)(2)=g(g(2))=g(4)=-2$

85 $(g^{-1}\circ f)^{-1}(-1)=(f^{-1}\circ g)(-1)$

$=f^{-1}(g(-1))$

$=f^{-1}(3)$ $\quad g(-1)=\dfrac{-1-2}{-1}=3$

$f^{-1}(3)=k$라 하면 $\quad f(k)=3$

$\dfrac{k+3}{k-1}=3, \qquad k+3=3k-3$

$\therefore k=3$

$\therefore (g^{-1}\circ f)^{-1}(-1)=3$ 답 ②

06 무리식과 무리함수

개념 정리 본책 86쪽

❶ 유리식 ❷ 양수 ❸ 분모의 유리화 ❹ $\sqrt{ab}$
❺ 무리식 ❻ x축 ❼ p ❽ q

쎈B 유형 뽀개기 본책 87쪽

01 $8x^2-10x-3\ge0$이므로 $(4x+1)(2x-3)\ge0$

$\therefore x\le-\frac{1}{4}$ 또는 $x\ge\frac{3}{2}$

답 $x\le-\frac{1}{4}$ 또는 $x\ge\frac{3}{2}$

02 $x+2\ge0$이므로 $x\ge-2$ …… ㉠

$5-2x>0$이므로 $x<\frac{5}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\sqrt{x+2}+\frac{1}{\sqrt{5-2x}}$의 값이 실수가 되도록 하는 x의 값의 범위는 $-2\le x<\frac{5}{2}$

따라서 정수 x는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다. 답 ⑤

03 $x+1\ge0$이므로 $x\ge-1$ …… ㉠

$2-x\ge0$이므로 $x\le2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\sqrt{x+1}-\sqrt{2-x}$의 값이 실수가 되도록 하는 x의 값의 범위는 $-1\le x\le2$ ··· ❶

$-1\le x\le2$일 때, $3x+8>0$, $x-3<0$이므로

$$\begin{aligned}|3x+8|-\sqrt{x^2-6x+9}&=|3x+8|-\sqrt{(x-3)^2}\\&=|3x+8|-|x-3|\\&=3x+8+(x-3)\\&=4x+5\end{aligned}$$ ··· ❷

답 $4x+5$

채점 기준	비율
❶ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	60 %

04 $2n+x\ge0$이므로 $x\ge-2n$ …… ㉠

$2n-x\ge0$이므로 $x\le2n$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\sqrt{2n+x}-\sqrt{2n-x}$의 값이 실수가 되도록 하는 x의 값의 범위는

$-2n\le x\le2n$

$n=5$일 때 x의 값의 범위는 $-10\le x\le10$이므로

$f(5)=21$

$n=3$일 때 x의 값의 범위는 $-6\le x\le6$이므로

$f(3)=13$

$\therefore f(5)-f(3)=8$ 답 ④

참고 $-2n\le x\le2n$을 만족시키는 정수 x는

$\underbrace{-2n,\ -(2n-1),\ \cdots,\ -1}_{2n개},\ 0,\ \underbrace{1,\ \cdots,\ 2n-1,\ 2n}_{2n개}$의 $(4n+1)$개이므로

$f(n)=4n+1$

05
$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\\&=\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\\&=\frac{2\sqrt{x}}{x+1-x}\\&=2\sqrt{x}\end{aligned}$$

답 ⑤

06 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$에서 $a>0$, $b<0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2}-3|b|-\sqrt{a^2-4ab+4b^2}&=\sqrt{a^2}-3|b|-\sqrt{(a-2b)^2}\\&=|a|-3|b|-|\underbrace{a-2b}_{a-2b>0}|\\&=a+3b-(a-2b)\\&=5b\end{aligned}$$

답 $5b$

07
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}&=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}\\&=\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}\end{aligned}$$ …… ㉠

이때

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(5\sqrt{2})^2-4\cdot8=18$

이므로 $x-y=-3\sqrt{2}$ ($\because x<y$)

따라서 ㉠에서

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{5\sqrt{2}-\overbrace{4\sqrt{2}}^{2\sqrt{xy}=2\sqrt{8}=4\sqrt{2}}}{-3\sqrt{2}}=-\frac{1}{3}$$

답 ④

08 $\sqrt{10}-3=\frac{1}{6+a_1}$에서

$6+a_1=\frac{1}{\sqrt{10}-3}=\frac{\sqrt{10}+3}{(\sqrt{10}-3)(\sqrt{10}+3)}=\sqrt{10}+3$

$\therefore a_1=\sqrt{10}+3-6=\sqrt{10}-3$

$a_1=\frac{1}{6+a_2}$, 즉 $\sqrt{10}-3=\frac{1}{6+a_2}$에서

$6+a_2=\frac{1}{\sqrt{10}-3}=\sqrt{10}+3$

$\therefore a_2=\sqrt{10}-3$

$a_2=\frac{1}{6+a_3}$, 즉 $\sqrt{10}-3=\frac{1}{6+a_3}$에서

$6+a_3=\frac{1}{\sqrt{10}-3}=\sqrt{10}+3$

$\therefore a_3=\sqrt{10}-3$

⋮

따라서 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=\sqrt{10}-3$

$$\begin{aligned}\therefore a_{10}+a_{20}&=(\sqrt{10}-3)+(\sqrt{10}-3)\\&=2\sqrt{10}-6\end{aligned}$$

답 ⑤

09 $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{x}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$ — 통분한다.

$=\dfrac{x+2\sqrt{3x}+3+x-2\sqrt{3x}+3}{x-3}$

$=\dfrac{2(x+3)}{x-3}$ ······ ㉠

이때 $x=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=3-2\sqrt{2}$이므로 ㉠에서

$\dfrac{2(x+3)}{x-3}=\dfrac{2(3-2\sqrt{2}+3)}{3-2\sqrt{2}-3}=\dfrac{2(6-2\sqrt{2})}{-2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}-6}{\sqrt{2}}$

$=2-3\sqrt{2}$

답 ①

10 $\dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}}+\dfrac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}}=\dfrac{(\sqrt{2-x})^2+(\sqrt{2+x})^2}{\sqrt{2+x}\sqrt{2-x}}$

$=\dfrac{(2-x)+(2+x)}{\sqrt{4-x^2}}$

$=\dfrac{4}{\sqrt{4-x^2}}$ — $x=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$를 대입한다.

$=\dfrac{4}{\sqrt{4-\dfrac{20}{9}}}$

$=\dfrac{4}{\dfrac{4}{3}}=3$

답 ②

11 $\dfrac{\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}$ — 분모를 유리화하여 식을 간단히 한다.

$=\dfrac{(\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x})^2}{(\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x})(\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x})}$

$=\dfrac{5+x+2\sqrt{25-x^2}+5-x}{5+x-(5-x)}$

$=\dfrac{10+2\sqrt{25-x^2}}{2x}$

$=\dfrac{5+\sqrt{25-x^2}}{x}$ — $x=2\sqrt{6}$을 대입한다.

$=\dfrac{5+\sqrt{25-24}}{2\sqrt{6}}$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

답 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

12 $\sqrt{2x+3}=3$의 양변을 제곱하면

$2x+3=9$ $\quad\therefore x=3$

$\therefore \dfrac{1}{\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{3}-(\sqrt{3}+2)}$

$=-\dfrac{1}{2}$

답 ②

13 $f(n)=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$

$=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ ··· ❶

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\sqrt{n+1}-1$ ··· ❷

이때 $\sqrt{n+1}-1<6$이므로 $\quad\sqrt{n+1}<7$

$n+1<49$ $\quad\therefore n<48$

따라서 자연수 n의 최댓값은 47이다. ··· ❸

답 47

채점 기준	비율
❶ $f(n)$을 간단히 할 수 있다.	40 %
❷ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$을 간단히 할 수 있다.	30 %
❸ 자연수 n의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

14 $x+y=2\sqrt{10}$, $x-y=2\sqrt{5}$, $xy=5$이므로

$\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$

$=\dfrac{x-2\sqrt{xy}+y}{x-y}=\dfrac{2\sqrt{10}-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

$=\sqrt{2}-1$

답 ⑤

15 $x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=2+\sqrt{3}$,

$y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=2-\sqrt{3}$

따라서 $x+y=4$, $xy=1$이므로

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4^2-2\cdot1=14$ ··· ❶

$\therefore x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$=(14+1)(14-1)$

$=195$ ··· ❷

답 195

채점 기준	비율
❶ xy, x^2+y^2의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $x^4+x^2y^2+y^4$의 값을 구할 수 있다.	50 %

16 $x=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{7}}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{7}}{\sqrt{7}\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{7}}{7}$,

$y=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{7}}=\dfrac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{7}}{\sqrt{7}\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{7}$이므로

$x+y=\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$, $x-y=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

$\therefore \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})+\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$

$=\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{\dfrac{2\sqrt{14}}{7}}{\dfrac{2\sqrt{7}}{7}}$

$=\sqrt{2}$

답 $\sqrt{2}$

17 $-3x-6\geq 0$이므로 $\quad 3x\leq -6$

$\therefore x\leq -2$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\{x|x\leq -2\}$이므로

$a=-2$

또 함수 $y=\sqrt{-3x-6}-b$의 치역은 $\{y|y\geq -b\}$이므로

$-b=-4 \quad \therefore b=4$

$\therefore ab=-8$

답 ①

18 $ax+3a\geq 0$이므로 $\quad ax\geq -3a$

이때 주어진 함수의 정의역이 $\{x|x\geq -3\}$이므로

$a>0$

또 함수 $y=\sqrt{ax+3a}+2b$의 치역은 $\{y|y\geq 2b\}$이므로

$2b=6 \quad \therefore b=3$

즉 $y=\sqrt{ax+3a}+6$의 그래프의 y절편은 $\sqrt{3a}+6$이므로

$\sqrt{3a}+6=9, \quad \sqrt{3a}=3$

$3a=9 \quad \therefore a=3$

$\therefore a+b=6$

답 ⑤

19 $y=-\dfrac{2x+7}{x+4}=-\dfrac{2(x+4)-1}{x+4}=\dfrac{1}{x+4}-2$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-4,\ y=-2$

$\therefore a=-4,\ b=-2$ ⋯ ❶

$f(x)=\sqrt{-4x-2}+c$에서 $f\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-1$이므로

$\sqrt{-4\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)-2}+c=-1 \quad \therefore c=-2$ ⋯ ❷

$\therefore f(x)=\sqrt{-4x-2}-2$

따라서 함수 $y=f(x)$의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\leq -\dfrac{1}{2}\right\}$이고, 치역은

$\{y|y\geq -2\}$이다. ⋯ ❸

답 정의역: $\left\{x\,\middle|\,x\leq -\dfrac{1}{2}\right\}$, 치역: $\{y|y\geq -2\}$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ c의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ 함수 $y=f(x)$의 정의역과 치역을 구할 수 있다.	40 %

20 $y=\dfrac{ax-4}{x+b}=\dfrac{a(x+b)-4-ab}{x+b}=\dfrac{-4-ab}{x+b}+a$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은 $\quad x=-b,\ y=a$

즉 $-b=-5,\ a=-2$이므로 $\quad a=-2,\ b=5$

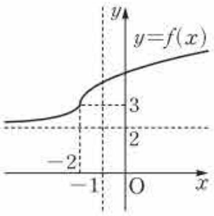
따라서 함수 $y=\sqrt{5x-2}$의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\geq \dfrac{2}{5}\right\}$이므로 구하는 정수의 최솟값은 1이다.

답 1

21 $x<-2$일 때,

$f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-1}{x+1}=-\dfrac{1}{x+1}+2$

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 치역이 $\{y|y>2\}$이고, 조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 일대일함수이므로 함수 $f(x)=\sqrt{x+2}+a\ (x\geq -2)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 $(-2,\ 3)$을 지나야 한다.



즉 $3=\sqrt{-2+2}+a$이므로 $\quad a=3$

$\therefore f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+1}{x+1} & (x<-2) \\ \sqrt{x+2}+3 & (x\geq -2) \end{cases}$

$f(-3)=\dfrac{-6+1}{-3+1}=\dfrac{5}{2}$이므로 $f(-3)f(k)=20$에서

$\dfrac{5}{2}f(k)=20 \quad \therefore f(k)=8$

$x\geq -2$일 때 $f(x)\geq 3$이고, $8\geq 3$이므로 $f(x)=\sqrt{x+2}+3$에 대입한다.

즉 $\sqrt{k+2}+3=8$이므로 $\quad \sqrt{k+2}=5$

$k+2=25 \quad \therefore k=23$

답 23

22 $y=\sqrt{a(x-3)}-5$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x-b-3)}-5+c$

이 함수의 그래프가

$y=\sqrt{4-2x}=\sqrt{-2(x-2)}$

의 그래프와 일치하므로

$a=-2,\ -b-3=-2,\ -5+c=0$

따라서 $a=-2,\ b=-1,\ c=5$이므로

$abc=10$

답 10

23 ㄱ. $y=-\sqrt{-x}$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄹ. $y=3\sqrt{\dfrac{1}{9}x-1}=\sqrt{9\left(\dfrac{1}{9}x-1\right)}=\sqrt{x-9}$

따라서 $y=3\sqrt{\dfrac{1}{9}x-1}$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 9만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ②

24 $y=\sqrt{-ax+6}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{-a(x-1)+6}-2$ ⋯ ❶

이 함수의 그래프를 다시 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x+1)+6}-2$ ⋯ ❷

이 그래프가 점 $(-2,\ -1)$을 지나므로

$-1=\sqrt{-a+6}-2$

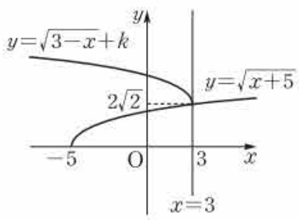
$\sqrt{-a+6}=1, \quad -a+6=1$

$\therefore a=5$ ⋯ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

25 함수 $y=\sqrt{x+5}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이고, 함수 $y=\sqrt{3-x}+k=\sqrt{-(x-3)}+k$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.



오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\sqrt{x+5}$의 그래프와 직선 $x=3$의 교점의 좌표는 $(3,\ 2\sqrt{2})$이므로 함수 $y=\sqrt{x+5}$의 그래프와 함수 $y=\sqrt{3-x}+k$의 그래프가 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은 함수 $y=\sqrt{3-x}+k$의 그래프가 점 $(3,\ 2\sqrt{2})$를 지날 때이다.

즉 $2\sqrt{2}=\sqrt{3-3}+k$이므로 $\quad k=2\sqrt{2}$

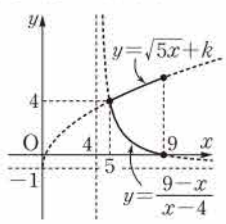
따라서 k의 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다. 답 $2\sqrt{2}$

참고 함수 $y=\sqrt{3-x}+k$의 그래프가 점 $(-5,\ 0)$을 지날 때 $k=-2\sqrt{2}$이므로 두 함수의 그래프가 만나도록 하는 k의 값의 범위는

$$-2\sqrt{2}\le k\le 2\sqrt{2}$$

26 $y=\dfrac{9-x}{x-4}=\dfrac{-(x-4)+5}{x-4}=\dfrac{5}{x-4}-1$

이므로 함수 $y=\dfrac{9-x}{x-4}$의 그래프는 $y=\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.



따라서 $5\le x\le 9$에서 정의된 함수 $y=\dfrac{9-x}{x-4}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=\sqrt{5x}+k$의 그래프가 점 $(5,\ 4)$를 지날 때 k의 값이 최대이다.

즉 $4=\sqrt{5\cdot 5}+k$이므로

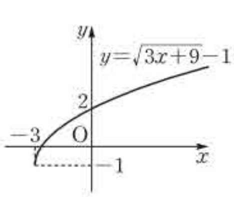
$$k=-1$$

따라서 k의 최댓값은 -1이다. 답 -1

참고 함수 $y=\sqrt{5x}+k$의 그래프가 점 $(9,\ 0)$을 지날 때 $k=-3\sqrt{5}$이므로 두 함수의 그래프가 한 점에서 만나도록 하는 k의 값의 범위는

$$-3\sqrt{5}\le k\le -1$$

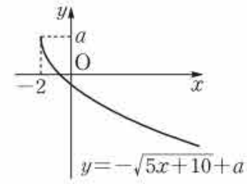
27 $y=\sqrt{3x+9}-1=\sqrt{3(x+3)}-1$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.



따라서 $y=\sqrt{3x+9}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2, 3사분면을 지난다.

답 ④

28 $y=-\sqrt{5x+10}+a=-\sqrt{5(x+2)}+a$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.



함수 $y=-\sqrt{5x+10}+a$의 그래프가 제2, 3, 4사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $a>0$이고, $x=0$일 때 $y<0$이어야 하므로

$a>0,\ -\sqrt{10}+a<0$

$\therefore\ 0<a<\sqrt{10}$

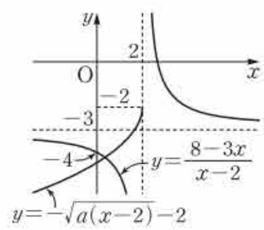
따라서 정수 a의 최댓값은 3이다. 답 3

29 $y=-\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\sqrt{a(x-2)}-2$

$y=\dfrac{8-3x}{x-2}=\dfrac{-3(x-2)+2}{x-2}=\dfrac{2}{x-2}-3$

이므로 함수 $y=\dfrac{8-3x}{x-2}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.



따라서 $y=\dfrac{8-3x}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $y=-\sqrt{a(x-2)}-2$의 그래프가 $y=\dfrac{8-3x}{x-2}$의 그래프와 제4사분면에서 만나려면 $x=0$일 때 $y<-4$이어야 한다.

즉 $-\sqrt{-2a}-2<-4$이므로

$\sqrt{-2a}>2,\qquad -2a>4$

$\therefore\ a<-2$

답 ④

30 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x+5)}-6$ …… ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=\sqrt{5a}-6,\qquad \sqrt{5a}=5$

$5a=25\qquad \therefore\ a=5$

㉠에 $a=5$를 대입하면

$y=\sqrt{5(x+5)}-6=\sqrt{5x+25}-6$

$\therefore\ b=25,\ c=-6$

$\therefore\ a+b+c=24$

답 24

31 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이므로

$y=-\sqrt{a(x-p)}+q$ ⋯→ ❶

이 함수가 $y=-\sqrt{a(x-b)}-c$와 같으므로

$b=p,\ c=-q$ ⋯→ ❷

이때 $p>0,\ q>0$이므로

$a<0,\ b>0,\ c<0$ ⋯→ ❸

답 $a<0,\ b>0,\ c<0$

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수의 그래프의 식을 $y=-\sqrt{a(x-p)}+q$로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ b, c를 p, q에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ a, b, c의 부호를 구할 수 있다.	30 %

참고 주어진 함수의 정의역이 $\{x|x\le p\}$이므로 $a<0$임을 알 수 있다.

32 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=2$이므로 함수의 식을 $y=\dfrac{k}{x-1}+2\ (k<0)$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(0,\ 4)$를 지나므로

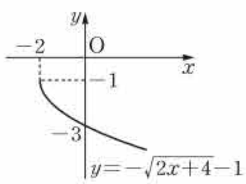
$4=-k+2 \quad \therefore k=-2$

즉 $y=-\dfrac{2}{x-1}+2=\dfrac{2x-4}{x-1}$이므로

$a=2,\ b=-4,\ c=-1$

$y=-\sqrt{2x+4}-1=-\sqrt{2(x+2)}-1$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=-\sqrt{2x+4}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제3, 4사분면을 지난다.



답 ③

33 주어진 그래프의 모양에서

$-b>0 \quad \therefore b<0$

$y=-\dfrac{b}{x+a}-c$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=-c$이므로

$-a>0,\ -c>0 \quad \therefore a<0,\ c<0$

$y=\sqrt{ax-b}+c=\sqrt{a\left(x-\dfrac{b}{a}\right)}+c$이므로 $y=\sqrt{ax-b}+c$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a<0$, $\dfrac{b}{a}>0$, $c<0$이므로 함수 $y=\sqrt{ax-b}+c$의 그래프의 개형은 ②와 같다.

$a<0$, $b<0$이므로 $\dfrac{b}{a}>0$

답 ②

34 ① $3x+12\ge0$이므로

$3x\ge-12 \quad \therefore x\ge-4$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\ge-4\}$이다.

② $\sqrt{3x+12}\ge0$이므로 $\quad \sqrt{3x+12}-2\ge-2$

따라서 주어진 함수의 치역은 $\{y|y\ge-2\}$이다.

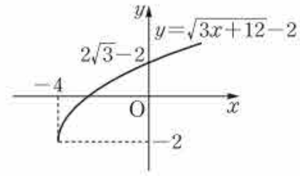
③ $y=\sqrt{3x+12}-2$에 $x=-1$을 대입하면

$y=1$

따라서 그래프는 점 $(-1,\ 1)$을 지난다.

④ $y=\sqrt{3x+12}-2=\sqrt{3(x+4)}-2$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=\sqrt{3x+12}-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.



답 ⑤

35 ① $5-2x\ge0$이므로 $\quad -2x\ge-5 \quad \therefore x\le\dfrac{5}{2}$

또 $\sqrt{5-2x}\ge0$이므로 $\quad -\sqrt{5-2x}\le0$

$\therefore -\sqrt{5-2x}+1\le1$

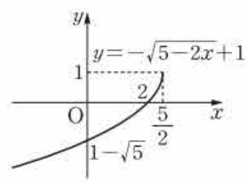
따라서 주어진 함수의 정의역은 $\left\{x\middle|x\le\dfrac{5}{2}\right\}$이고, 치역은 $\{y|y\le1\}$이다.

② $y=-\sqrt{5-2x}+1$에 $x=2$를 대입하면 $\quad y=0$

따라서 그래프는 점 $(2,\ 0)$을 지난다.

③ $y=-\sqrt{5-2x}+1=-\sqrt{-2\left(x-\dfrac{5}{2}\right)}+1$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{5}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

④, ⑤ $y=-\sqrt{5-2x}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지나지 않고, y축과 음의 부분에서 만난다.



답 ③

36 ㄱ. $a<0$, $b>0$이면 정의역이 $\{x|x\ge0\}$, 치역이 $\{y|y\le0\}$이므로 그래프는 제3사분면을 지나지 않는다.

ㄷ. 그래프는 $y=a\sqrt{-bx}$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

참고 ㄷ. 그래프는 $y=-a\sqrt{-bx}$의 그래프와 원점에 대하여 대칭이다.

37 $y=-\sqrt{6x+k}-2=-\sqrt{6\left(x+\dfrac{k}{6}\right)}-2$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{6x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{k}{6}$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

즉 주어진 함수는 $x=-1$일 때 최댓값 -3을 가지므로

$-3=-\sqrt{6\cdot(-1)+k}-2, \quad \sqrt{-6+k}=1$

$-6+k=1 \quad \therefore k=7$

따라서 함수 $y=-\sqrt{6x+7}-2$는 $x=3$일 때 최솟값 -7을 갖는다.

$-\sqrt{6\cdot3+7}-2=-5-2=-7$

답 ②

38 $y=\sqrt{4x+5}+a=\sqrt{4\left(x+\dfrac{5}{4}\right)}+a$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{5}{4}$만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

즉 주어진 함수는 $x=-\dfrac{5}{4}$일 때 최솟값 -6을 가지므로

$a=-6$

따라서 $y=\sqrt{4x+5}-6$의 그래프가 점 $(b,\ -1)$을 지나므로

$-1=\sqrt{4b+5}-6, \quad \sqrt{4b+5}=5$

$4b+5=25 \qquad \therefore b=5$

$\therefore a+b=-1$

답 ③

39 $y=\sqrt{2x+a}+1=\sqrt{2\left(x+\frac{a}{2}\right)}+1$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{a}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

즉 주어진 함수는 $x=10$일 때 최댓값 5를 가지므로

$5=\sqrt{2\cdot10+a}+1, \qquad \sqrt{20+a}=4$

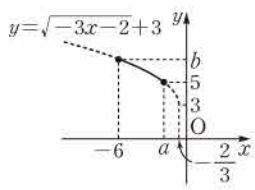
$20+a=16 \qquad \therefore a=-4$

따라서 함수 $y=\sqrt{2x-4}+1$은 $\underbrace{x=4}_{\sqrt{2\cdot4-4}+1=2+1=3}$일 때 최솟값 3을 갖는다.

답 3

40 $y=\sqrt{-3x-2}+3=\sqrt{-3\left(x+\frac{2}{3}\right)}+3$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{2}{3}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$-6\le x\le a$에서 $y=\sqrt{-3x-2}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-6$일 때 최댓값 b,

$x=a$일 때 최솟값 5

를 갖는다. 즉

$b=\sqrt{-3\cdot(-6)-2}+3=7$

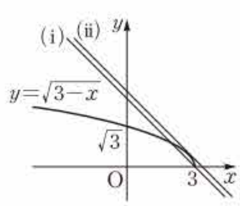
또 $5=\sqrt{-3a-2}+3$이므로 $\qquad \sqrt{-3a-2}=2$

$-3a-2=4 \qquad \therefore a=-2$

$\therefore ab=-14$

답 -14

41 $y=\sqrt{3-x}=\sqrt{-(x-3)}$이므로 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k인 직선이다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(3, 0)$을 지날 때,

$0=-3+k \qquad \therefore k=3$

(ii) 함수 $y=\sqrt{3-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 접할 때,

$\sqrt{3-x}=-x+k$의 양변을 제곱하면

$3-x=x^2-2kx+k^2$

$\therefore x^2-(2k-1)x+k^2-3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2k-1)\}^2-4(k^2-3)=0$

$-4k+13=0 \qquad \therefore k=\frac{13}{4}$

(i), (ii)에서 $\qquad 3\le k<\frac{13}{4}$

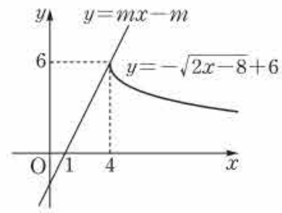
답 ④

쎈B특강

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

42 $y=-\sqrt{2x-8}+6=-\sqrt{2(x-4)}+6$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=mx-m$, 즉 $y=m(x-1)$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 0)$을 지난다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=mx-m$이 점 $(4, 6)$을 지날 때 m의 값이 최대이므로



$6=4m-m, \qquad 3m=6$

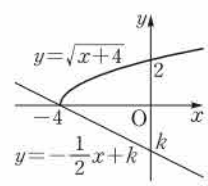
$\therefore m=2$

즉 m의 최댓값은 2이다. 답 2

43 함수 $y=\sqrt{x+4}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이고, $y=-\frac{1}{2}x+k$는 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 y절편이 k인 직선이다.

이때 $A\cap B\neq\varnothing$이므로 함수 $y=\sqrt{x+4}$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$가 만나야 한다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$가 점 $(-4, 0)$을 지날 때 k의 값이 최소이므로



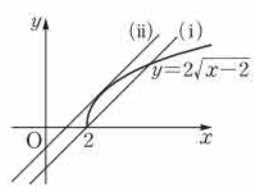
$0=-\frac{1}{2}\cdot(-4)+k \qquad \therefore k=-2$

즉 k의 최솟값은 -2이다.

답 -2

참고 함수 $y=\sqrt{x+4}$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$가 만나도록 하는 k의 값의 범위는 $k\ge-2$이다.

44 함수 $y=2\sqrt{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k인 직선이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(2, 0)$을 지날 때,

$0=2+k \qquad \therefore k=-2$ ··· ❶

(ii) 함수 $y=2\sqrt{x-2}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때,

$2\sqrt{x-2}=x+k$의 양변을 제곱하면

$4(x-2)=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+2(k-2)x+k^2+8=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-(k^2+8)=0$

$-4k-4=0 \qquad \therefore k=-1$ ··· ❷

(i), (ii)에서

$$f(k)=\begin{cases} 0 & (k>-1) \\ 1 & (k=-1 \text{ 또는 } k<-2) \\ 2 & (-2\le k<-1) \end{cases}$$ ··· ❸

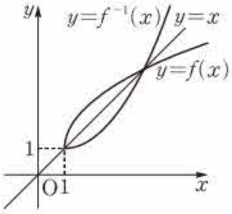
$\therefore f(-2)-f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(-1)-f(1)=2-0+1-0$

$=3$ ··· ❹

답 3

채점 기준	비율
❶ 직선 $y=x+k$가 점 $(2,\ 0)$을 지날 때 k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 두 함수의 그래프가 접할 때 k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(k)$를 구할 수 있다.	20 %
❹ $f(-2)-f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(-1)-f(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

45 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 함수 $y=\sqrt{3x-3}+1$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같다.



$\sqrt{3x-3}+1=x$에서

$\sqrt{3x-3}=x-1$

위의 식의 양변을 제곱하면

$3x-3=x^2-2x+1,\qquad x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=4$

따라서 두 교점 A, B의 좌표는 $(1,\ 1)$, $(4,\ 4)$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+4}{2},\ \frac{1+4}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ 답 ③

46 $y=\sqrt{2-x}+5\ (y\ge 5)$라 하면

$y-5=\sqrt{2-x}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$(y-5)^2=2-x\qquad \therefore\ x=-(y-5)^2+2$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=-(x-5)^2+2\ (x\ge 5)$

$\therefore\ g(x)=-(x-5)^2+2\ (x\ge 5)$

이때 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 $y=-x^2$의 그래프의 일부와 겹쳐진다.

따라서 $a=-1$, $p=-5$, $q=-2$이므로

$apq=-10$ 답 -10

47 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 점 $(-6,\ 5)$를 지나므로

$5=\sqrt{-6a+b}\qquad \therefore\ -6a+b=25$ …… ㉠

역함수의 그래프가 점 $(3,\ -2)$를 지나므로 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프는 점 $(-2,\ 3)$을 지난다. 즉

$3=\sqrt{-2a+b}\qquad \therefore\ -2a+b=9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

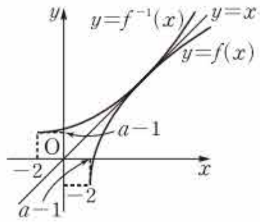
$a=-4,\ b=1$

$\therefore\ a+b=-3$ 답 ②

48 $y=4\sqrt{x+1}-2$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=4\sqrt{x-a+1}-2\qquad \therefore\ f(x)=4\sqrt{x-a+1}-2$ ⋯ ❶

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 접하면 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 접한다. ⋯ ❷



$4\sqrt{x-a+1}-2=x$에서

$4\sqrt{x-a+1}=x+2$

위의 식의 양변을 제곱하면

$16(x-a+1)=x^2+4x+4$

$\therefore\ x^2-12x+16a-12=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-6)^2-(16a-12)=0$

$-16a+48=0$

$\therefore\ a=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 접함을 알 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	50 %

49 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 두 점 $(1,\ -2)$, $(-1,\ 0)$을 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(-2,\ 1)$, $(0,\ -1)$을 지난다.

또 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 정의역이 $\{x\,|\,x\le 1\}$, 치역이 $\{y\,|\,y\ge -2\}$이므로 함수 $y=f(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge -2\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\le 1\}$이다.

즉 $y=-\sqrt{ax-b}+c=-\sqrt{a\left(x-\frac{b}{a}\right)}+c$는 $y=-\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 그래프의 식이므로

$\frac{b}{a}=-2,\ c=1$

또 $y=-\sqrt{ax-b}+1$의 그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=-\sqrt{-b}+1,\qquad \sqrt{-b}=2$

$-b=4\qquad \therefore\ b=-4$

$\frac{b}{a}=-2$에 $b=-4$를 대입하면

$-\frac{4}{a}=-2\qquad \therefore\ a=2$

$\therefore\ a+b+c=-1$ 답 ②

다른 풀이 $f^{-1}(x)=k(x-1)^2-2\ (k>0,\ x\le 1)$라 하면

꼭짓점의 좌표가 $(1,\ -2)$이고 아래로 볼록한 이차함수의 그래프 중 $x\le 1$인 부분이다.

$y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$0=k(-1-1)^2-2,\qquad 4k=2$

$\therefore\ k=\frac{1}{2}$

$\therefore\ f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2-2\ (x\le 1)$

$y=\frac{1}{2}(x-1)^2-2$라 하면 $\qquad (x-1)^2=2y+4$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x-1=\pm\sqrt{2y+4}$

$\quad x-1=-\sqrt{2y+4}\ (\because x\le 1)$

$\quad \therefore x=-\sqrt{2y+4}+1$

x와 y를 서로 바꾸면

$\quad y=-\sqrt{2x+4}+1$

$\quad \therefore f(x)=-\sqrt{2x+4}+1$

따라서 $a=2,\ b=-4,\ c=1$이므로

$\quad a+b+c=-1$

쎈B특강

> $y=-\sqrt{ax-b}+c\ (a\ne 0,\ y\le c)$라 하면
>
> $\quad y-c=-\sqrt{ax-b}, \qquad (y-c)^2=ax-b$
>
> $\quad \therefore x=\frac{1}{a}\{(y-c)^2+b\}$
>
> x와 y를 서로 바꾸면 $\qquad y=\frac{1}{a}\{(x-c)^2+b\}$
>
> 즉 $y=-\sqrt{ax-b}+c$의 역함수는
>
> $\quad y=\frac{1}{a}(x-c)^2+\frac{b}{a}\ (x\le c)$
>
> 따라서 주어진 함수 $f(x)=-\sqrt{ax-b}+c$의 역함수를
>
> $f^{-1}(x)=k(x-1)^2-2\ (k>0,\ x\le 1)$로 놓을 수 있다.

50 $(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(6)=(g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(6)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =(f^{-1}\circ g)(6)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =f^{-1}(g(6))$

이때 $g(6)=\sqrt{5\cdot 6+6}=6$이므로

$\quad f^{-1}(g(6))=f^{-1}(6)$

$f^{-1}(6)=k$라 하면 $\qquad f(k)=6$

$\quad \frac{4k}{k-2}=6, \qquad 4k=6k-12$

$\quad \therefore k=6$

$\quad \therefore (g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(6)=6$

답 ④

51 $(f\circ g)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$g(5)=k$라 하면 $\qquad f(k)=5$

$\quad \sqrt{3k+1}=5, \qquad 3k+1=25$

$\quad \therefore k=8$

$g(8)=m$이라 하면 $\qquad f(m)=8$

$\quad \sqrt{3m+1}=8, \qquad 3m+1=64$

$\quad \therefore m=21$

$\quad \therefore (g\circ g)(5)=g(g(5))$

$\qquad\qquad\qquad =g(8)=21$

답 ⑤

52 $f^{-1}(g(x))=6x$에서

$\quad f(f^{-1}(g(x)))=f(6x)$

$\quad \therefore g(x)=f(6x)$

$\quad \therefore g(3)=f(18)=\sqrt{2\cdot 18-12}=2\sqrt{6}$

답 ②

다른 풀이 $y=\sqrt{2x-12}$라 하고 이 식의 양변을 제곱하면

$\quad y^2=2x-12 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}y^2+6$

x와 y를 서로 바꾸면

$\quad y=\frac{1}{2}x^2+6\ (x\ge 0)$

$\quad \therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x^2+6\ (x\ge 0)$

$f^{-1}(g(x))=6x$에서 $\qquad \frac{1}{2}\{g(x)\}^2+6=6x$

$\quad \{g(x)\}^2=12x-12$

이때 $x\ge 1$에서 $g(x)\ge 0$이므로

$\quad g(x)=\sqrt{12x-12}$

$\quad \therefore g(3)=\sqrt{12\cdot 3-12}=2\sqrt{6}$

53 $(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=12$에서

$\quad (f\circ f)^{-1}(a)=12$

$\quad \therefore (f\circ f)(12)=a$ ⋯ ❶

이때 $f(12)=2-\sqrt{3\cdot 12}=-4$이고, $f(-4)=\sqrt{4-3\cdot(-4)}=4$

이므로

$\quad a=(f\circ f)(12)=f(f(12))$

$\qquad =f(-4)=4$ ⋯ ❷

답 4

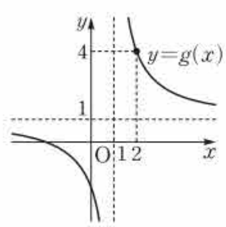
채점 기준	비율
❶ $(f\circ f)(12)=a$임을 알 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	60 %

54 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=f(x)$의 정의역과 치역은 각각

$\quad \{x\mid x\ge 3\},\ \{y\mid y\ge 2\}$

$g(x)=\frac{x+2}{x-1}=\frac{(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}+1$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x\ge 2$에서 $1<g(x)\le g(2)$이고

$g(2)=4$이므로

$\quad 1<g(x)\le 4$

따라서 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 치역은

$\quad \{y\mid 1<y\le 4\}$

이므로 $\qquad a=1,\ b=4$

$\quad \therefore b-a=3$

답 3

06 무리식과 무리함수

07 순열과 조합

개념 정리 본책 98쪽

❶ $m+n$ ❷ $m\times n$ ❸ 1 ❹ $n!$ ❺ $n-r$
❻ ${}_n\mathrm{C}_r$ ❼ $3!$ ❽ $n!$

쎈B 유형 뽀개기 본책 99쪽

001 서로 다른 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 눈의 수의 차가 2가 되는 경우는
$(1, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 5), (4, 2), (4, 6),$
$(5, 3), (6, 4)$의 8가지
(ii) 눈의 수의 차가 4가 되는 경우는
$(1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)$의 4가지
두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$8+4=12$

답 12

002 꺼낸 카드에 적힌 세 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 세 수의 곱이 2가 되는 경우는
$(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)$의 3가지 ··· ❶
(ii) 세 수의 곱이 8이 되는 경우는
$(1, 2, 4), (1, 4, 2), (2, 1, 4), (2, 2, 2)$
$(2, 4, 1), (4, 1, 2), (4, 2, 1)$의 7가지 ··· ❷
두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$3+7=10$ ··· ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ 세 수의 곱이 2가 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 세 수의 곱이 8이 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 세 수의 곱이 2 또는 8이 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

003 1부터 105까지의 자연수 중에서
(i) 3으로 나누어떨어지는 수, 즉 3의 배수는
$3, 6, 9, \cdots, 105$의 35개
(ii) 7로 나누어떨어지는 수, 즉 7의 배수는
$7, 14, 21, \cdots, 105$의 15개
(iii) 3과 7로 나누어떨어지는 수, 즉 21의 배수는
$21, 42, 63, 84, 105$의 5개
이상에서 3 또는 7로 나누어떨어지는 자연수의 개수는
$35+15-5=45$
이므로 3과 7로 모두 나누어떨어지지 않는 자연수의 개수는
$105-45=60$

답 ④

004 (i) $x=1$일 때, $2y+z=19$이므로 순서쌍 (y, z)는
$(1, 17), (2, 15), (3, 13), (4, 11), (5, 9),$
$(6, 7), (7, 5), (8, 3), (9, 1)$의 9개
(ii) $x=2$일 때, $2y+z=15$이므로 순서쌍 (y, z)는
$(1, 13), (2, 11), (3, 9), (4, 7),$
$(5, 5), (6, 3), (7, 1)$의 7개
(iii) $x=3$일 때, $2y+z=11$이므로 순서쌍 (y, z)는
$(1, 9), (2, 7), (3, 5), (4, 3), (5, 1)$의 5개
(iv) $x=4$일 때, $2y+z=7$이므로 순서쌍 (y, z)는
$(1, 5), (2, 3), (3, 1)$의 3개
(v) $x=5$일 때, $2y+z=3$이므로 순서쌍 (y, z)는
$(1, 1)$의 1개
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
$9+7+5+3+1=25$

답 25

005 x, y가 자연수이므로 $x+3y\le7$을 만족시키는 경우는
$x+3y=4, x+3y=5, x+3y=6, x+3y=7$
(i) $x+3y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(1, 1)$의 1개
(ii) $x+3y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(2, 1)$의 1개
(iii) $x+3y=6$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(3, 1)$의 1개
(iv) $x+3y=7$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(1, 2), (4, 1)$의 2개
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
$1+1+1+2=5$

답 ③

쎈B 특강

부등식 $ax+by\le c$ (a, b, c는 상수)를 만족시키는 경우는 x, y의 조건에 따라 다음과 같이 구한다.
① x, y가 자연수일 때 $ax+by$의 최솟값은 $x=1, y=1$을 대입한 값, 즉 $a+b$이므로
$a+b\le ax+by\le c$
② x, y가 음이 아닌 정수일 때 $ax+by$의 최솟값은 $x=0, y=0$을 대입한 값, 즉 0이므로
$0\le ax+by\le c$

다른 풀이 (i) $y=1$일 때, $x+3\le7$, 즉 $x\le4$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)$의 4개
(ii) $y=2$일 때, $x+6\le7$, 즉 $x\le1$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(1, 2)$의 1개
(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는
$4+1=5$

006 x, y가 음이 아닌 정수이므로 $2x+y<5$를 만족시키는 경우는
$2x+y=0, 2x+y=1, 2x+y=2,$
$2x+y=3, 2x+y=4$
(i) $2x+y=0$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(0, 0)$의 1개
(ii) $2x+y=1$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(0, 1)$의 1개

(iii) $2x+y=2$일 때, 순서쌍 (x, y)는

$(0, 2)$, $(1, 0)$의 2개

(iv) $2x+y=3$일 때, 순서쌍 (x, y)는

$(0, 3)$, $(1, 1)$의 2개

(v) $2x+y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는

$(0, 4)$, $(1, 2)$, $(2, 0)$의 3개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$1+1+2+2+3=9$

답 9

007 원 $(x-a)^2+y^2=b^2$의 중심 $(a, 0)$과 직선 $x=6$ 사이의 거리는 $\underline{6-a}$이고, 원의 반지름의 길이가 b이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$a=1, 2, 3, 4, 5, 6$이므로 $|6-a|=6-a$

$6-a>b \quad \therefore a+b<6$

이때 a, b가 1부터 6까지의 자연수이므로 $a+b<6$을 만족시키는 경우는

$a+b=2$, $a+b=3$, $a+b=4$, $a+b=5$

(i) $a+b=2$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$의 1개

(ii) $a+b=3$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(1, 2)$, $(2, 1)$의 2개

(iii) $a+b=4$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 3개

(iv) $a+b=5$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$의 4개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$1+2+3+4=10$

답 ⑤

쎈B특강

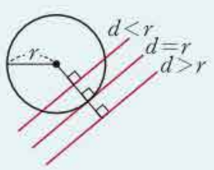
원과 직선의 위치 관계

반지름의 길이가 r인 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d라 하면 원과 직선의 위치 관계는

① $d<r$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $d=r$ ➡ 한 점에서 만난다. (접한다.)

③ $d>r$ ➡ 만나지 않는다.



008 백의 자리의 숫자는 소수이므로 백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

2, 3, 5, 7의 4개

십의 자리의 숫자는 9의 약수이므로 십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 3, 9의 3개

짝수이므로 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

0, 2, 4, 6, 8의 5개

따라서 구하는 자연수의 개수는

$4\cdot3\cdot5=60$

답 ④

009 a가 될 수 있는 것은 1, 3, 5, 7, 9의 5개

b가 될 수 있는 것은 2, 9의 2개

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 $5\cdot2=10$이므로

$n(C)=10$

답 10

010 $(x+y+z)(p+q+r)$에서 x, y, z에 곱해지는 항이 각각 p, q, r의 3개이므로 항의 개수는

$3\cdot3=9$

답 ③

쎈B특강

항의 개수

두 다항식 A, B의 각 항의 문자가 모두 다르면 AB의 전개식에서 항의 개수는

$(A$의 항의 개수$)\times(B$의 항의 개수$)$

011 54를 소인수분해하면 $54=2\cdot3^3$

54의 양의 약수의 개수는

$(1+1)(3+1)=8 \quad \therefore a=8$

180을 소인수분해하면 $180=2^2\cdot3^2\cdot5$

180의 양의 약수의 개수는

$(2+1)(2+1)(1+1)=18 \quad \therefore b=18$

$\therefore a+b=26$

답 26

012 360을 소인수분해하면

$360=2^3\cdot3^2\cdot5$

630을 소인수분해하면

$630=2\cdot3^2\cdot5\cdot7$

즉 360과 630의 최대공약수는 $2\cdot3^2\cdot5$이다.

따라서 360과 630의 양의 공약수의 개수는 $2\cdot3^2\cdot5$의 양의 약수의 개수와 같으므로 구하는 개수는

$(1+1)(2+1)(1+1)=12$

답 ⑤

013 75를 소인수분해하면 $75=3\cdot5^2$

$75^n=(3\cdot5^2)^n=3^n\cdot5^{2n}$의 양의 약수의 개수는

$(n+1)(2n+1)$

따라서 $(n+1)(2n+1)=66$이므로

$2n^2+3n-65=0$

$(2n+13)(n-5)=0$

$\therefore n=5$ ($\because n$은 자연수)

답 5

014 1080을 소인수분해하면

$1080=2^3\cdot3^3\cdot5$ ··· ❶

3의 배수는 3을 소인수로 가지므로 1080의 양의 약수 중 3의 배수의 개수는 $2^3\cdot3^2\cdot5$의 양의 약수의 개수와 같다.

$\therefore p=(3+1)(2+1)(1+1)=24$ ··· ❷

5의 배수는 5를 소인수로 가지므로 1080의 양의 약수 중 5의 배수의 개수는 $2^3\cdot3^3$의 양의 약수의 개수와 같다.

$\therefore q=(3+1)(3+1)=16$ ··· ❸

$\therefore p+q=40$ ··· ❹

답 40

채점 기준	비율
❶ 1080을 소인수분해할 수 있다.	10 %
❷ p의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ q의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	10 %

참고 1080의 양의 약수 중 3의 배수는 $2^3\cdot3^2\cdot5$의 양의 약수에 각각 3을 곱한 것이고, 1080의 양의 약수 중 5의 배수는 $2^3\cdot3^3$의 양의 약수에 각각 5를 곱한 것이다.

015 (i) 지불할 수 있는 방법의 수

1000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법은

0장, 1장, 2장의 3가지

500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는

$3\cdot4\cdot4-1=47$ $\quad\therefore a=47$

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수

500원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 1000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 1000원짜리 지폐 2장을 500원짜리 동전 4개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 7개, 100원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 500원, 1000원, ⋯, 3500원의 8가지

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 100원, 200원, 300원의 4가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는

$8\cdot4-1=31$ $\quad\therefore b=31$

(i), (ii)에서 $\quad a-b=16$

답 ②

016 10000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법은

0장, 1장의 2가지 ⋯ ❶

5000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장, 4장의 5가지 ⋯ ❷

1000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법은

0장, 1장, 2장의 3가지 ⋯ ❸

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는

$2\cdot5\cdot3-1=29$ ⋯ ❹

답 29

채점 기준	비율
❶ 10000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 5000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
❸ 1000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
❹ 지폐의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %

017 50원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 100원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 100원짜리 동전 3개를 50원짜리 동전 6개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 2개, 50원짜리 동전 9개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 500원, 1000원의 3가지

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 50원, 100원, ⋯, 450원의 10가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는

$3\cdot10-1=29$

답 ②

018 (i) A → B → C로 가는 방법의 수는 $\quad 2\cdot3=6$

(ii) A → D → C로 가는 방법의 수는 $\quad 4\cdot3=12$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$6+12=18$

답 18

019 (i) 입구 → 쉼터 → 정상으로 가는 방법의 수는

$3\cdot2=6$

(ii) 입구 → 약수터 → 정상으로 가는 방법의 수는

$2\cdot1=2$

(iii) 입구 → 쉼터 → 약수터 → 정상으로 가는 방법의 수는

$3\cdot2\cdot1=6$

(iv) 입구 → 약수터 → 쉼터 → 정상으로 가는 방법의 수는

$2\cdot2\cdot2=8$

이상에서 구하는 방법의 수는

$6+2+6+8=22$

답 22

020 A 지점과 B 지점을 연결하는 x개의 도로를 추가한다고 하면

(i) 집 → A → 학교로 가는 방법의 수는

$3\cdot4=12$

(ii) 집 → B → 학교로 가는 방법의 수는

$2\cdot2=4$

(iii) 집 → A → B → 학교로 가는 방법의 수는

$3\cdot x\cdot2=6x$

(iv) 집 → B → A → 학교로 가는 방법의 수는

$2\cdot x\cdot4=8x$

이상에서 집에서 학교로 가는 방법의 수는

$12+4+6x+8x=16+14x$

$16+14x=72$에서 $\quad 14x=56$ $\quad\therefore x=4$

따라서 추가해야 하는 도로의 개수는 4이다.

답 ③

021 B에 칠할 수 있는 색은 5가지, D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 4가지, E에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한 색을 제외한 3가지, A에 칠할 수 있는 색은 B와 E에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot3\cdot3=540$ 답 540

022 B에 칠할 수 있는 색은 4가지, A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.
따라서 구하는 방법의 수는

$4\cdot3\cdot3=36$ 답 ⑤

023 (i) A와 D에 같은 색을 칠하는 경우
A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, C에 칠할 수 있는 색은 A(D)에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 방법의 수는

$4\cdot3\cdot1\cdot3=36$ ··· ❶

(ii) A와 D에 다른 색을 칠하는 경우
A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 2가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 D에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 방법의 수는

$4\cdot3\cdot2\cdot2=48$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$36+48=84$ ··· ❸

답 84

채점 기준	비율
❶ A와 D에 같은 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ A와 D에 다른 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

024 (i) C와 E에 같은 색을 칠하는 경우
A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지, E에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C(E)에 칠한 색을 제외한 3가지, F에 칠할 수 있는 색은 B와 C(E)에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 방법의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot1\cdot3\cdot3=540$

(ii) C와 E에 다른 색을 칠하는 경우
A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지, E에 칠할 수 있는 색은 A, B, C에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A, C, E에 칠한 색을 제외한 2가지, F에 칠할 수 있는 색은 B, C, E에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 방법의 수는

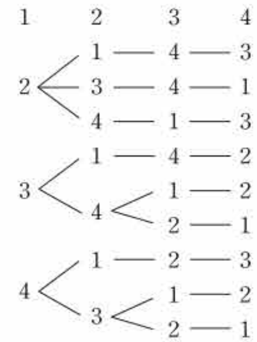
$5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot2\cdot2=480$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$540+480=1020$ 답 ③

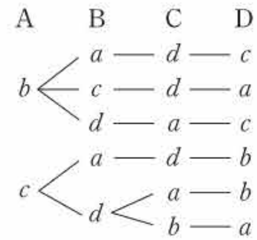
025 1, 2, 3, 4가 적힌 봉투에 주어진 조건을 만족시키도록 카드를 넣는 방법을 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.
따라서 구하는 방법의 수는 9이다.

답 ③



026 A, B, C, D의 공책을 각각 a, b, c, d라 하고 주어진 조건을 만족시키도록 공책을 받는 방법을 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.
따라서 구하는 방법의 수는 6이다.

답 6



027 6개의 문자 중에서 4개를 뽑아 일렬로 나열하는 방법의 수는 $_6P_4=6\cdot5\cdot4\cdot3=360$ 답 ⑤

028 8개의 액자 중에서 3개를 뽑아 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로 $_8P_3=8\cdot7\cdot6=336$ 답 ④

029 $_nP_2=132$이므로

$n(n-1)=132=12\cdot11 \quad \therefore n=12$ 답 12

030 여학생 3명을 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4!=24$
여학생 3명의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 방법의 수는

$24\cdot6=144$ 답 ⑤

031 A와 B를 한 묶음으로 생각하여 5대의 자동차를 일렬로 주차하는 방법의 수는 $5!=120$
A와 B의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 방법의 수는

$120\cdot2=240$ 답 240

032 1학년 학생 3명을 한 사람, 2학년 학생 2명을 한 사람으로 생각하여 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$5!=120$

1학년 학생 3명의 자리를 바꾸는 방법의 수는

$3!=6$

2학년 학생 2명의 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$120\cdot6\cdot2=1440$ 답 ①

033 도넛 2개를 한 묶음으로 생각하여 $(n+1)$개를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $(n+1)!$
도넛 2개의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$
따라서 $(n+1)!\cdot 2=48$이므로
$(n+1)!=24=4!$
$n+1=4 \quad \therefore n=3$

답 3

034 (i) a, b를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!=24$
a, b의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$
즉 a, b를 이웃하게 나열하는 방법의 수는
$24\cdot 2=48$
(ii) b, c, d를 한 문자로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!=6$
b, c, d의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$
즉 b, c, d를 이웃하게 나열하는 방법의 수는
$6\cdot 6=36$
(iii) a, b와 b, c, d가 동시에 이웃하는 경우는
$abcd$, $abdc$, $cdba$, $dcba$의 4가지
a, b, c, d를 한 문자로 생각하여 2개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $2!=2$
즉 a, b와 b, c, d가 동시에 이웃하게 나열하는 방법의 수는
$4\cdot 2=8$
이상에서 구하는 방법의 수는
$48+36-8=76$

답 ④

035 바이올린 연주자 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는
$4!=24$
바이올린 연주자들 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 첼로 연주자 2명을 세우는 방법의 수는 ${}_5P_2=20$
따라서 구하는 방법의 수는
$24\cdot 20=480$

답 480

036 5개의 자음 p, r, d, c, t를 일렬로 나열하는 방법의 수는
$5!=120$
자음의 사이사이 및 양 끝의 6개의 자리에 2개의 모음 e, i를 나열하는 방법의 수는 ${}_6P_2=30$
따라서 구하는 방법의 수는
$120\cdot 30=3600$

답 ⑤

037 접시 4개에만 케이크를 올려 놓으므로 빈 접시는 4개이다.
빈 접시들 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 케이크를 올려 놓을 접시 4개를 놓으면 되므로 구하는 방법의 수는
${}_5P_4=120$

답 120

038 A, B, C를 한 명으로 생각하여 E, F를 제외한 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!=6$
A, B, C의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$
A, B, C를 묶은 한 명과 D, G를 세운 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 E, F를 세우는 방법의 수는 ${}_4P_2=12$
따라서 구하는 방법의 수는
$6\cdot 6\cdot 12=432$

답 ⑤

039 어른은 5명이므로 양 끝에 어른 2명을 세우는 방법의 수는 ${}_5P_2=20$
양 끝의 어른 2명을 제외한 나머지 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $5!=120$
따라서 구하는 방법의 수는
$20\cdot 120=2400$

답 ④

040 홀수는 1, 3, 5, 7의 4개, 짝수는 2, 4, 6의 3개이므로 홀수와 짝수가 번갈아 오도록 나열하려면 홀수 4개를 일렬로 나열하고 그 사이사이에 짝수 3개를 나열하면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는
$4!\cdot 3!=24\cdot 6=144$

답 ②

041 3개의 모음 o, a, e를 4개의 짝수 번째 자리 중 3개의 자리에 나열하는 방법의 수는
${}_4P_3=24$ ··· ❶
나머지 빈 5개의 자리에 5개의 자음을 나열하는 방법의 수는
$5!=120$ ··· ❷
따라서 구하는 방법의 수는
$24\cdot 120=2880$ ··· ❸

답 2880

채점 기준	비율
❶ 모음을 짝수 번째 자리에 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 자음을 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 문자를 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

042 사과와 귤을 제외한 3개의 과일 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수는 ${}_3P_2=6$
사과와 귤과 그 사이의 2개의 과일을 한 묶음으로 생각하여 2개의 과일을 일렬로 나열하는 방법의 수는 $2!=2$
사과와 귤의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 방법의 수는
$6\cdot 2\cdot 2=24$

답 24

쎈B 특강

특정한 두 개 사이에 일부가 들어가는 순열의 수
특정한 A, B 사이에 일부가 들어가도록 일렬로 나열하는 방법의 수는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) A, B 사이에 일부를 일렬로 나열하는 방법의 수를 구한다.
(ii) A, B와 그 사이의 일부를 한 묶음으로 생각하여 이 묶음과 나머지를 일렬로 나열하는 방법의 수를 구한다.
(iii) (i)과 (ii)의 결과를 곱한다.

043 6개의 숫자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$6!=720$

짝수는 2, 4, 6의 3개이므로 양 끝에 모두 짝수가 오도록 나열하는 방법의 수는

$\underbrace{{}_3P_2}_{\text{짝수 3개에서 2개를 택하여 양 끝에 나열하는 방법의 수}}\cdot\underbrace{4!}_{\text{양 끝의 짝수를 제외한 4개의 숫자를 일렬로 나열하는 방법의 수}}=144$

따라서 구하는 방법의 수는

$720-144=576$

답 ④

044 (1) 9명의 학생 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수와 같으므로

${}_9P_2=72$ ···· ❶

(2) 1학년 학생 5명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수와 같으므로

${}_5P_2=20$ ···· ❷

(3) 모든 방법의 수에서 회장, 부회장 모두 1학년 학생을 뽑는 방법의 수를 뺀 것과 같으므로

$72-20=52$ ···· ❸

답 (1) 72 (2) 20 (3) 52

채점 기준	비율
❶ 모든 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 회장, 부회장 모두 1학년 학생을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 회장, 부회장 중에서 적어도 한 명은 2학년 학생을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %

045 6명의 학생을 일렬로 세우는 방법의 수는

$6!=720$

A, B, C 중에서 어느 2명도 이웃하지 않도록 세우는 방법의 수는 A, B, C를 제외한 3명을 일렬로 세우고 그 3명의 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 A, B, C를 세우는 방법의 수와 같으므로

$3!\cdot{}_4P_3=144$

따라서 구하는 방법의 수는

$720-144=576$

답 ①

046 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

5개의 숫자 0, 1, 3, 5, 7에서 서로 다른 3개를 택하여 그 합이 3의 배수가 되는 경우는 다음과 같다.

0, 1, 5 또는 0, 5, 7 또는 1, 3, 5 또는 3, 5, 7

(i) 0, 1, 5로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$\underline{2\cdot2!}=4$ 백의 자리에는 0이 올 수 없다.

(ii) 0, 5, 7로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$2\cdot2!=4$

(iii) 1, 3, 5로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$3!=6$

(iv) 3, 5, 7로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$3!=6$

이상에서 구하는 3의 배수의 개수는

$4+4+6+6=20$

답 ④

047 천의 자리와 백의 자리에는 2, 3, 5, 7의 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로

${}_4P_2=12$

십의 자리와 일의 자리에는 천의 자리와 백의 자리에 오는 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로

${}_5P_2=20$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$12\cdot20=240$

답 ③

048 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 4의 3개

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 4개

백의 자리와 십의 자리에는 천의 자리와 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로

${}_4P_2=12$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$3\cdot4\cdot12=144$

답 ⑤

049 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다. ···· ❶

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

일의 자리의 숫자가 0인 5의 배수의 개수는 0을 제외한 6개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

${}_6P_3=120$ ···· ❷

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 5를 제외한 5개

백의 자리와 십의 자리에는 천의 자리와 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로 ${}_5P_2=20$

따라서 일의 자리의 숫자가 5인 5의 배수의 개수는

$5\cdot20=100$ ···· ❸

(i), (ii)에서 구하는 5의 배수의 개수는

$120+100=220$ ···· ❹

답 220

채점 기준	비율
❶ 5의 배수가 되는 경우를 알 수 있다.	20 %
❷ 일의 자리의 숫자가 0인 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 일의 자리의 숫자가 5인 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❹ 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	10 %

050 a로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$

ba로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

bc로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

bd로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

bea로 시작하는 것의 개수는 $2!=2$

bec로 시작하는 것의 개수는 $2!=2$

bed로 시작하는 것은 순서대로

$bedac$, $bedca$의 2개

따라서 $bedca$까지의 개수는

$24+6+6+6+2+2+2=48$

이므로 $bedca$는 48번째에 온다. 답 48번째

051 3600보다 작은 자연수는 1○○○, 2○○○, 31○○, 32○○, 34○○, 35○○ 꼴이다. ⋯ ❶

1○○○ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_3=60$

2○○○ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_3=60$

31○○ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$

32○○ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$

34○○ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$

35○○ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$ ⋯ ❷

따라서 구하는 자연수의 개수는

$60+60+12+12+12+12=168$ ⋯ ❸

답 168

채점 기준	비율
❶ 3600보다 작은 자연수의 꼴을 구할 수 있다.	30 %
❷ 각 꼴인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	50 %
❸ 3600보다 작은 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

052 e로 시작하는 것의 개수는 $5!=120$

m으로 시작하는 것의 개수는 $5!=120$

ne로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$

nm으로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$

no로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$

nre로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

따라서 e로 시작하는 것부터 nre로 시작하는 것까지의 개수는

$120+120+24+24+24+6=318$

이므로 319번째에 오는 것은 nrmeot 답 ③

053 97○○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

95○○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

93○○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

917○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

915○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

9137○○ 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$

따라서 975310부터 913705까지의 자연수의 개수는

$24+24+24+6+6+2=86$

이므로 구하는 수는 913570, 913507, ⋯에서 913507이다.

답 ②

054 ${}_nC_r=\dfrac{{}_nP_r}{r!}$이므로 $35=\dfrac{210}{r!}$

$r!=6=3\cdot2\cdot1 \qquad \therefore r=3$

또 ${}_nP_3=210=7\cdot6\cdot5$에서 $n=7$

$\therefore n-r=4$

답 ④

쎈B특강

서로 다른 n개에서 $r\,(0<r\le n)$개를 택하는 조합의 수는 ${}_nC_r$이고, 그 각각에 대하여 r개를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $r!$이다. 이는 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수 ${}_nP_r$와 같으므로

${}_nC_r\cdot r!={}_nP_r \qquad \therefore {}_nC_r=\dfrac{{}_nP_r}{r!}$

055 ${}_nP_5=42\cdot{}_nP_3$에서

$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)=42n(n-1)(n-2)$

${}_nP_3$에서 $n\ge3$이므로 등식의 양변을 $n(n-1)(n-2)$로 나누면

$(n-3)(n-4)=42, \qquad n^2-7n-30=0$

$(n+3)(n-10)=0$

$\therefore n=10\ (\because n\ge3)$ 답 10

056 ${}_{11}C_{2r-2}={}_{11}C_{r^2-2}$에서

$2r-2=r^2-2$ 또는 $11-(2r-2)=r^2-2$

(i) $2r-2=r^2-2$일 때,

$r^2-2r=0, \qquad r(r-2)=0$

$\therefore r=2\ (\because r\ge2)$

(ii) $11-(2r-2)=r^2-2$일 때,

$-2r+13=r^2-2, \qquad r^2+2r-15=0$

$(r+5)(r-3)=0$

$\therefore r=3\ (\because r\ge2)$

(i), (ii)에서 구하는 자연수 r의 값의 곱은

$2\cdot3=6$ 답 ①

057 $2\cdot{}_{n+1}C_3-{}_nP_2-6\cdot{}_{n-1}C_2=0$에서

$2\cdot\dfrac{(n+1)n(n-1)}{3\cdot2\cdot1}-n(n-1)-6\cdot\dfrac{(n-1)(n-2)}{2\cdot1}=0$

$n(n+1)(n-1)-3n(n-1)-9(n-1)(n-2)=0$

${}_{n-1}C_2$에서 $n-1\ge2$, 즉 $n\ge3$이므로 등식의 양변을 $n-1$로 나누면

$n(n+1)-3n-9(n-2)=0, \qquad n^2-11n+18=0$

$(n-2)(n-9)=0$

$\therefore n=9\ (\because n\ge3)$ 답 ④

058 이차방정식 ${}_nC_4x^2+2\cdot{}_nC_5x-7\cdot{}_nC_2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{2\cdot{}_nC_5}{{}_nC_4}, \ \alpha\beta=\dfrac{-7\cdot{}_nC_2}{{}_nC_4}$

이때 $\alpha+\beta=-2$이므로

$-\dfrac{2\cdot{}_nC_5}{{}_nC_4}=-2, \qquad {}_nC_5={}_nC_4$

$n-5=4 \qquad \therefore n=9$ ⋯ ❶

$\therefore \alpha\beta=\dfrac{-7\cdot {}_9C_2}{{}_9C_4}=\dfrac{-7\cdot\dfrac{9\cdot8}{2\cdot1}}{\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}=-2$ ⋯ ❷

답 -2

채점 기준	비율
❶ n의 값을 구할 수 있다.	70 %
❷ $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

059 ${}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$

$=\dfrac{(n-1)!}{r!\{(n-1)-r\}!}+\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$=\dfrac{(n-1)!}{r!\boxed{(n-r-1)!}}+\dfrac{(n-1)!}{\boxed{(r-1)!}(n-r)!}$

$=\dfrac{(n-r)\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}+\dfrac{r\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\dfrac{\{(n-r)+r\}\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\dfrac{\boxed{n}(n-1)!}{r!(n-r)!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}={}_nC_r$

$\therefore$ (가) $(n-r-1)!$ (나) $(r-1)!$ (다) n

답 (가) $(n-r-1)!$ (나) $(r-1)!$ (다) n

060 ${}_nC_{n-r}=\dfrac{n!}{(n-r)!\{n-(\boxed{n-r})\}!}$

$=\dfrac{n!}{(n-r)!\boxed{r!}}={}_nC_r$

$\therefore$ (가) $n-r$ (나) $r!$

답 ②

061 ${}_{n-1}P_r+r\cdot{}_{n-1}P_{r-1}$

$=\dfrac{(n-1)!}{\{(n-1)-r\}!}+r\cdot\dfrac{(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$=\dfrac{(n-1)!}{(n-r-1)!}+r\cdot\dfrac{(n-1)!}{(n-r)!}$

$=\dfrac{(\boxed{n-r})\cdot(n-1)!}{(n-r)!}+\dfrac{r(n-1)!}{(n-r)!}$

$=\dfrac{\{(n-r)+r\}\cdot(n-1)!}{(n-r)!}=\dfrac{n(n-1)!}{(n-r)!}$

$=\boxed{\dfrac{n!}{(n-r)!}}={}_nP_r$

$\therefore$ (가) $n-r$ (나) $\dfrac{n!}{(n-r)!}$

답 ②

062 $n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{\boxed{(r-1)!}(n-r)!}$

$=\dfrac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$

$=\dfrac{r\cdot n!}{\boxed{r!}(n-r)!}=r\cdot{}_nC_r$

따라서 $f(r)=(r-1)!$, $g(r)=r!$이므로

$\dfrac{g(10)}{f(10)}=\dfrac{10!}{9!}=10$

답 10

063 배구 선수 6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$

농구 선수 5명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_4={}_5C_1=5$

따라서 구하는 경우의 수는

$15+5=20$

답 20

064 남학생 n명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는 ${}_nC_2$

여학생 7명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는 ${}_7C_2=21$

따라서 ${}_nC_2\cdot21=126$이므로 ${}_nC_2=6$

$\dfrac{n(n-1)}{2\cdot1}=6,\quad n(n-1)=4\cdot3$

$\therefore n=4$

답 4

065 4개의 상표 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

택한 3개의 상표의 모자 중에서 각각 1개씩 뽑는 방법의 수는

${}_3C_1\cdot{}_3C_1\cdot{}_3C_1=3\cdot3\cdot3=27$

따라서 구하는 방법의 수는

$4\cdot27=108$

답 ③

066 세 수의 총합이 홀수가 되려면 세 수 모두 홀수이거나 하나는 홀수, 두 수는 짝수이어야 한다.

(i) 세 수 모두 홀수인 경우

1, 3, 5, 7, 9가 적힌 5장의 카드 중에서 3장을 꺼내는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$ ⋯ ❶

(ii) 하나는 홀수, 두 수는 짝수인 경우

1, 3, 5, 7, 9가 적힌 5장의 카드 중에서 1장을 꺼내고, 2, 4, 6, 8이 적힌 4장의 카드 중에서 2장을 꺼내는 경우의 수는

${}_5C_1\cdot{}_4C_2=5\cdot6=30$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$10+30=40$ ⋯ ❸

답 40

채점 기준	비율
❶ 홀수가 적힌 카드 3장을 꺼내는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 홀수가 적힌 카드 1장, 짝수가 적힌 카드 2장을 꺼내는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 카드에 적힌 수의 총합이 홀수가 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

067 1부터 20까지의 짝수 중 4로 나누었을 때, 나누어떨어지는 수의 집합을 A, 나머지가 2인 수의 집합을 B라 하면

$A=\{4, 8, 12, 16, 20\}$, $B=\{2, 6, 10, 14, 18\}$

두 수의 합이 4의 배수가 되려면 집합 A에서 2개를 택하거나 집합 B에서 2개를 택하면 되므로 구하는 경우의 수는

$_5C_2+{}_5C_2=10+10=20$ 답 20

쎈B특강

짝수인 자연수를 4로 나누면 나누어떨어지거나 나머지가 2이다.
이때 두 수의 합이 4의 배수가 되는 경우는 다음과 같다.
① 나누어떨어지는 두 수를 더하는 경우
$4p+4q=4(p+q)$ (p, q는 자연수)
② 나머지가 2인 두 수를 더하는 경우
$(4r+2)+(4s+2)=4(r+s+1)$ (r, s는 음이 아닌 정수)

068 치즈 떡과 어묵을 제외한 8개의 재료 중에서 4개를 택하는 방법의 수와 같으므로

$_8C_4=70$ 답 ③

069 1, 2와 5가 적힌 공을 제외한 5개의 공 중에서 2개를 꺼내는 방법의 수와 같으므로

$_5C_2=10$ 답 10

070 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

(1) 홀수 1, 3을 제외한 6개의 자연수 중에서 3개를 택하는 방법의 수와 같으므로

$_6C_3=20$ ··· ❶

(2) 한 자리 자연수로만 이루어져야 하므로 두 자리 자연수 12, 24를 제외한 6개의 자연수 중에서 3개 이상을 택하는 방법의 수와 같다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$$\begin{aligned}{}_6C_3+{}_6C_4+{}_6C_5+{}_6C_6&={}_6C_3+{}_6C_2+{}_6C_1+{}_6C_0\\&=20+15+6+1\\&=42\end{aligned}$$ ··· ❷

답 (1) 20 (2) 42

채점 기준	비율
❶ 홀수를 원소로 갖고 원소의 개수가 5인 집합의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 한 자리 자연수로만 이루어지고 원소의 개수가 3 이상인 집합의 개수를 구할 수 있다.	60 %

071 (i) 송이와 미주가 공통으로 참여하는 체험 활동이 없을 때

송이가 7개의 체험 활동 중에서 3개를 택하고, 미주가 나머지 4개의 체험 활동 중에서 3개를 택하면 되므로 방법의 수는

$_7C_3\cdot{}_4C_3=35\cdot4=140$

(ii) 송이와 미주가 공통으로 참여하는 체험 활동이 2개일 때

송이가 7개의 체험 활동 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_7C_3=35$

미주가 송이가 택한 3개의 체험 활동 중에서 2개를 택하고, 송이가 택하지 않은 4개의 체험 활동 중에서 하나를 택하는 방법의 수는 $_3C_2\cdot{}_4C_1=3\cdot4=12$

따라서 송이와 미주가 공통으로 참여하는 체험 활동이 2개인 방법의 수는 $35\cdot12=420$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$140+420=560$ 답 ⑤

다른 풀이 (ii) 송이와 미주가 공통으로 참여하는 체험 활동이 2개일 때

7개의 체험 활동 중에서 송이와 미주가 공통으로 참여할 체험 활동을 택하는 방법의 수는 $_7C_2=21$

나머지 5개의 체험 활동 중에서 송이와 미주가 각각 하나씩 참여할 체험 활동을 택하는 방법의 수는 $_5P_2=20$

따라서 송이와 미주가 공통으로 참여하는 체험 활동이 2개인 방법의 수는 $21\cdot20=420$

072 짝이 맞는 구두 두 켤레를 택하는 방법의 수는

$_6C_2=15$

두 켤레를 제외한 구두 8짝 중에서 2짝을 택하는 방법의 수는

$_8C_2=28$

이때 구두 8짝 중에서 짝이 맞는 2짝, 즉 구두 4켤레 중에서 한 켤레를 택하는 방법의 수는

$_4C_1=4$

이므로 구두 8짝 중에서 짝이 맞지 않는 2짝을 택하는 방법의 수는 $28-4=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$15\cdot24=360$ 답 360

다른 풀이 짝이 맞는 구두 두 켤레를 택하는 방법의 수는

$_6C_2=15$

나머지 4켤레 중에서 짝이 맞지 않는 구두 한 짝씩을 택하는 방법의 수는 $_4C_2\cdot{}_2C_1\cdot{}_2C_1=6\cdot2\cdot2=24$

따라서 구하는 방법의 수는 $15\cdot24=360$

073 11명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

$_{11}C_3=165$

1반 학생만 3명을 뽑는 방법의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$

2반 학생만 3명을 뽑는 방법의 수는

$_6C_3=20$

따라서 구하는 방법의 수는

$165-(10+20)=135$ 답 ①

074 (1) 9권 중에서 4권을 고르는 방법의 수는

$_9C_4=126$

소설책과 만화책 중에서 4권을 고르는 방법의 수는

$_6C_4={}_6C_2=15$

따라서 구하는 방법의 수는

$126-15=111$ ··· ❶

(2) 9권 중에서 4권을 고르는 방법의 수는

$_9C_4=126$

(i) 소설책이 포함되지 않도록 고르는 방법의 수는 만화책과 잡지책 중에서 4권을 고르는 방법의 수와 같으므로

$_5C_4={}_5C_1=5$

(ii) 소설책이 1권 포함되도록 고르는 방법의 수는 만화책과 잡지책 중에서 3권을 고르고, 소설책 중에서 1권을 고르는 방법의 수와 같으므로

$_5C_3 \cdot {_4C_1} = {_5C_2} \cdot 4 = 10 \cdot 4 = 40$

(i), (ii)에서 소설책이 포함되지 않거나 1권 포함되도록 고르는 방법의 수는

$5+40=45$

따라서 구하는 방법의 수는

$126-45=81$ ⋯ ❷

답 (1) 111 (2) 81

채점 기준	비율
❶ 잡지책이 적어도 1권 포함되도록 고르는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 소설책이 적어도 2권 포함되도록 고르는 방법의 수를 구할 수 있다.	60 %

다른 풀이 (2) (i) 소설책이 2권 포함되도록 고르는 방법의 수는

$_4C_2 \cdot {_5C_2} = 6 \cdot 10 = 60$

(ii) 소설책이 3권 포함되도록 고르는 방법의 수는

$_4C_3 \cdot {_5C_1} = {_4C_1} \cdot 5 = 4 \cdot 5 = 20$

(iii) 소설책만 4권을 고르는 방법의 수는

$_4C_4 = 1$

이상에서 구하는 방법의 수는

$60+20+1=81$

075 2보다 크고 13보다 작은 10개의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 자연수를 뽑는 방법의 수는

$_{10}C_4 = 210$

주어진 수 중에서 소수는 3, 5, 7, 11의 4개, 합성수는 4, 6, 8, 9, 10, 12의 6개이므로

(i) 소수만 4개를 뽑는 방법의 수는 $_4C_4 = 1$

(ii) 합성수만 4개를 뽑는 방법의 수는 $_6C_4 = {_6C_2} = 15$

(i), (ii)에서 소수만 뽑거나 합성수만 뽑는 방법의 수는

$1+15=16$

따라서 구하는 방법의 수는

$210-16=194$

답 194

076 12개 중에서 4개를 택하는 방법의 수는

$_{12}C_4 = 495$

실내에 있는 놀이 기구의 수를 $n(n \geq 4)$이라 하면 실내에 있는 놀이 기구만 4개를 택하는 방법의 수는 $_nC_4$

이때 실외에 있는 놀이 기구가 적어도 한 개 포함되도록 택하는 방법의 수가 460이므로

$495 - {_nC_4} = 460$, $_nC_4 = 35$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

$n(n-1)(n-2)(n-3) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

$\therefore n=7$

따라서 실내에 있는 놀이 기구가 7개이므로 실외에 있는 놀이 기구의 수는

$12-7=5$

답 5

쎈B 특강

12개의 놀이 기구 중 실내에 있는 놀이 기구가 4개 미만이면 4개를 택할 때 항상 실외에 있는 놀이 기구가 적어도 한 개 포함되므로 실외에 있는 놀이 기구를 적어도 한 개 포함되도록 4개를 택하는 방법의 수는 $_{12}C_4 = 495$

즉 주어진 조건에 맞지 않으므로 $n \geq 4$

077 남학생 4명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

$_4C_3 = {_4C_1} = 4$

여학생 5명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

$_5C_2 = 10$

5명의 학생을 일렬로 세우는 방법의 수는

$5! = 120$

따라서 구하는 방법의 수는

$4 \cdot 10 \cdot 120 = 4800$

답 ⑤

078 홀수는 1, 3, 5, 7의 4개, 짝수는 2, 4, 6의 3개이므로 홀수 2개를 택하는 방법의 수는

$_4C_2 = 6$

짝수 2개를 택하는 방법의 수는

$_3C_2 = {_3C_1} = 3$

4개의 자연수를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$4! = 24$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$6 \cdot 3 \cdot 24 = 432$

답 ③

079 A, B, C를 제외한 6명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

$_6C_2 = 15$ ⋯ ❶

A, B, C를 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3! = 6$이고, 이때 A, B, C의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3! = 6$이므로 A, B, C가 이웃하도록 세우는 방법의 수는

$6 \cdot 6 = 36$ ⋯ ❷

따라서 구하는 방법의 수는

$15 \cdot 36 = 540$ ⋯ ❸

답 540

채점 기준	비율
❶ A, B, C를 제외한 6명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ A, B, C가 이웃하도록 세우는 방법의 수를 구할 수 있다.	50 %
❸ A, B, C가 모두 포함되고 이들이 이웃하도록 세우는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

080 주어진 조건을 만족시키려면 공역의 6개의 원소 중에서 서로 다른 4개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 된다. 정의역의 원소의 개수

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$_6C_4 = {_6C_2} = 15$

답 ②

07 순열과 조합

081 (1) 일대일함수 f의 개수는 공역의 9개의 원소 중에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$_9P_3=504$ ⋯ ❶

(2) $f(1)<f(2)<f(3)$을 만족시키려면 공역의 9개의 원소 중에서 서로 다른 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.

따라서 $f(1)<f(2)<f(3)$을 만족시키는 함수 f의 개수는

$_9C_3=84$ ⋯ ❷

답 (1) 504 (2) 84

채점 기준	비율
❶ 일대일함수 f의 개수를 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(1)<f(2)<f(3)$을 만족시키는 함수 f의 개수를 구할 수 있다.	50 %

082 주어진 조건을 만족시키려면 공역의 5개의 원소 중에서 서로 다른 2개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 -2, 2에 대응시키면 된다.

즉 $f(-2)$, $f(2)$의 값을 정하는 방법의 수는

$_5C_2=10$

정의역의 원소 -1, 0, 1에 대응하는 공역의 원소를 택하는 방법의 수는 각각 $_5C_1=5$이므로 구하는 함수 f의 개수는

$10\cdot5\cdot5\cdot5=1250$

답 ④

083 조건 (가), (나)에서 함수 f는 집합 $\{2, 3, 4, 5, 6\}$에서 집합 $\{3, 4, 5, 7, 8\}$로의 일대일대응으로 생각할 수 있다.

조건 (다)에서 $f(2)\le4$이므로 $f(2)$의 값을 정하는 방법의 수는

$_2C_1=2$

$f(3)\le5$, $f(3)\ne f(2)$이므로 $f(3)$의 값을 정하는 방법의 수는

$_2C_1=2$

$f(4)\le6$, $f(4)\ne f(2)$, $f(4)\ne f(3)$이므로 $f(4)$의 값을 정하는 방법의 수는

1

마찬가지로 $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 방법의 수는 각각 1이다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$2\cdot2\cdot1\cdot1\cdot1=4$

답 4

084 $f(1)<f(2)<f(3)$을 만족시키려면 공역의 7개의 원소 중에서 서로 다른 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 되므로

$_7C_3=35$

이때 $f(4)<f(5)\le f(6)<f(7)$을 만족시키려면

$f(4)<f(5)<f(6)<f(7)$

또는 $f(4)<f(5)=f(6)<f(7)$

(i) $f(4)<f(5)<f(6)<f(7)$인 경우

공역의 7개의 원소 중에서 서로 다른 4개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 4, 5, 6, 7에 대응시키면 되므로

$_7C_4={}_7C_3=35$

(ii) $f(4)<f(5)=f(6)<f(7)$인 경우

공역의 7개의 원소 중에서 서로 다른 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 4, 5(6), 7에 대응시키면 되므로

$_7C_3=35$

(i), (ii)에서 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$, $f(7)$의 값을 정하는 방법의 수는 $35+35=70$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$35\cdot70=2450$

답 ⑤

085 6개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 구하는 직선의 개수는

$_6C_2=15$

답 ④

086 구하는 대각선의 개수는 7개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 방법의 수에서 변의 개수인 7을 뺀 것과 같으므로

$_7C_2-7=21-7=14$

답 14

참고 (n각형의 대각선의 개수)$=\dfrac{n(n-3)}{2}$임을 이용하여 다음과 같이 칠각형의 대각선의 개수를 구할 수도 있다.

➡ $\dfrac{7\cdot4}{2}=14$

087 두 직선 위의 점을 각각 하나씩 택하여 연결하면 한 개의 직선을 만들 수 있으므로

$_4C_1\cdot{}_4C_1=4\cdot4=16$

한 직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하여 연결한 직선의 개수는 └주어진 두 직선

2

따라서 구하는 직선의 개수는

$16+2=18$

답 18

다른 풀이 8개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_8C_2=28$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_4C_2=6$

이때 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 주어진 두 직선이므로 구하는 직선의 개수는

$28-6\cdot2+2=18$

088 12개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_{12}C_2=66$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_4C_2=6$

이때 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 6개이므로 구하는 직선의 개수는

$66-6\cdot6+6=36$

답 ②

089 20개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

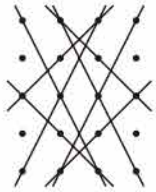
$_{20}C_2=190$

(ⅰ) 한 직선 위에 3개의 점이 있는 경우

3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_3C_2={}_3C_1=3$

이고, 한 직선 위에 3개의 점이 있는 직선은 8개이므로 $3\cdot8=24$ ⋯ ❶

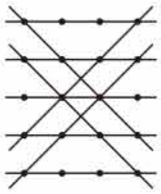


(ⅱ) 한 직선 위에 4개의 점이 있는 경우

4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_4C_2=6$

이고, 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 9개이므로 $6\cdot9=54$ ⋯ ❷



(ⅲ) 한 직선 위에 5개의 점이 있는 경우

5개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_5C_2=10$

이고, 한 직선 위에 5개의 점이 있는 직선은 4개이므로

$10\cdot4=40$ ⋯ ❸

이상에서 한 직선 위에 있는 2개의 점을 택하는 방법의 수는

$24+54+40=118$

따라서 구하는 직선의 개수는

$190-118+8+9+4=93$ ⋯ ❹

답 93

채점 기준	비율
❶ 한 직선 위에 3개의 점이 있을 때, 2개의 점을 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 한 직선 위에 4개의 점이 있을 때, 2개의 점을 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 한 직선 위에 5개의 점이 있을 때, 2개의 점을 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 두 점 이상을 지나는 서로 다른 직선의 개수를 구할 수 있다.	10 %

090 8개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_8C_3=56$

한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_3C_3=1$

이고, 한 직선 위에 3개의 점이 있는 직선은 4개이다.

그런데 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$56-1\cdot4=52$

답 52

091 직선 l 위의 3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_3C_2={}_3C_1=3$

직선 m 위의 5개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_5C_2=10$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$3\cdot10=30$

답 30

다른 풀이 8개의 점 중에서 4개를 택하는 방법의 수는

$_8C_4=70$

직선 l 위의 점 중에서 3개를 택하고, 직선 m 위의 점 중에서 1개를 택하는 방법의 수는

$_3C_3\cdot{}_5C_1=1\cdot5=5$

직선 m 위의 점 중에서 3개를 택하고, 직선 l 위의 점 중에서 1개를 택하는 방법의 수는

$_5C_3\cdot{}_3C_1={}_5C_2\cdot3=10\cdot3=30$

직선 m 위의 점 중에서 4개를 택하는 방법의 수는

$_5C_4={}_5C_1=5$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$70-(5+30+5)=30$

092 9개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_9C_3=84$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

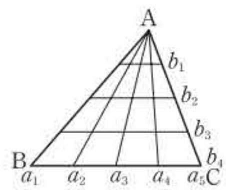
$_5C_3={}_5C_2=10$

그런데 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$84-10=74$

답 ⑤

093 오른쪽 그림과 같이 각각의 선을 a_i, b_j($i=1$, 2, 3, 4, 5, $j=1$, 2, 3, 4)라 하자.



삼각형을 만들려면 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중 두 개, b_1, b_2, b_3, b_4 중 한 개를 택해야 하므로 구하는 삼각형의 개수는

$_5C_2\cdot{}_4C_1=10\cdot4=40$

답 40

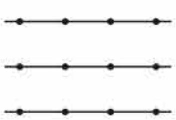
094 12개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_{12}C_3=220$

(ⅰ) 한 직선 위에 4개의 점이 있는 경우

4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_4C_3={}_4C_1=4$



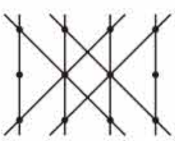
이고, 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 3개이므로

$4\cdot3=12$

(ⅱ) 한 직선 위에 3개의 점이 있는 경우

3개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_3C_3=1$



이고, 한 직선 위에 3개의 점이 있는 직선은 8개이므로

$1\cdot8=8$

(ⅰ), (ⅱ)에서 한 직선 위에 있는 3개의 점을 택하는 방법의 수는

$12+8=20$

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$220-20=200$

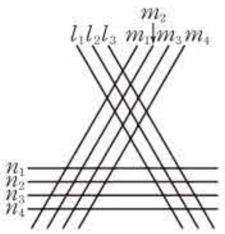
답 ④

095 가로 방향의 평행한 직선 중에서 2개, 세로 방향의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 만들어지므로 구하는 평행사변형의 개수는

$_3C_2\cdot{}_5C_2={}_3C_1\cdot10=3\cdot10=30$

답 ③

096 오른쪽 그림과 같이 평행한 직선을 l_i, m_j, n_k ($i=1, 2, 3$, $j=1, 2, 3, 4$, $k=1, 2, 3, 4$)라 하자.



(i) l_1, l_2, l_3 중에서 2개를 택하고, m_1, m_2, m_3, m_4 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_3C_2 \cdot {}_4C_2 = {}_3C_1 \cdot 6$$
$$= 3 \cdot 6 = 18$$

(ii) m_1, m_2, m_3, m_4 중에서 2개를 택하고, n_1, n_2, n_3, n_4 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_4C_2 \cdot {}_4C_2 = 6 \cdot 6 = 36$$

(iii) n_1, n_2, n_3, n_4 중에서 2개를 택하고, l_1, l_2, l_3 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_4C_2 \cdot {}_3C_2 = 6 \cdot {}_3C_1$$
$$= 6 \cdot 3 = 18$$

이상에서 구하는 평행사변형의 개수는

$18+36+18=72$

답 72

097 가로 방향의 평행한 직선 중에서 2개, 세로 방향의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 만들어지므로 직사각형의 개수는

${}_4C_2 \cdot {}_5C_2 = 6 \cdot 10 = 60$ ⋯ ❶

한 변의 길이가 1, 2, 3인 정사각형의 개수는 각각 12, 6, 2이므로 정사각형의 개수는

$12+6+2=20$ ⋯ ❷

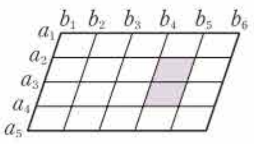
따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$60-20=40$ ⋯ ❸

답 40

채점 기준	비율
❶ 직사각형의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 정사각형의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정사각형이 아닌 직사각형의 개수를 구할 수 있다.	20 %

098 오른쪽 그림과 같이 각각의 평행한 선을 a_i, b_j ($i=1, 2, 3, 4, 5$, $j=1, 2, 3, 4, 5, 6$)라 하자.



색칠한 부분을 포함하는 평행사변형을 만들려면 가로 방향의 평행선 2개는 a_1, a_2 중 한 개, a_4, a_5 중 한 개를 택해야 하므로 가로 방향의 평행선을 택하는 방법의 수는

${}_2C_1 \cdot {}_2C_1 = 2 \cdot 2 = 4$

마찬가지로 세로 방향의 평행선 2개는 b_1, b_2, b_3, b_4 중 한 개, b_5, b_6 중 한 개를 택해야 하므로 세로 방향의 평행선을 택하는 방법의 수는

${}_4C_1 \cdot {}_2C_1 = 4 \cdot 2 = 8$

따라서 구하는 평행사변형의 개수는

$4 \cdot 8 = 32$

답 ⑤

099 $(n+1)$개의 평행한 직선 중에서 2개, $(n+4)$개의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 만들어지므로

$${}_{n+1}C_2 \cdot {}_{n+4}C_2 = 126$$
$$\frac{(n+1)n}{2\cdot 1} \cdot \frac{(n+4)(n+3)}{2\cdot 1} = 126$$
$$(n+4)(n+3)(n+1)n = 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3$$
$$\therefore n=3$$

답 3

100 6자루의 색연필을 똑같은 필통 2개에 빈 필통이 없도록 나누어 담을 때, 각 필통에 담을 수 있는 색연필의 자루 수는

1, 5 또는 2, 4 또는 3, 3

(i) 1자루, 5자루로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_5 = 6 \cdot 1 = 6$$

(ii) 2자루, 4자루로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_4 = 15 \cdot 1 = 15$$

(iii) 3자루, 3자루로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 10$$

이상에서 구하는 방법의 수는

$6+15+10=31$

답 31

101 윤호와 민주를 제외한 6명 중 2명이 윤호, 민주와 한 조를 이루면 되므로 이 6명을 2명, 4명으로 나누면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

${}_6C_2 \cdot {}_4C_4 = 15 \cdot 1 = 15$

답 15

102 10명을 5명, 5명으로 나누는 방법의 수는

${}_{10}C_5 \cdot {}_5C_5 \cdot \frac{1}{2!} = 252 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 126$ ⋯ ❶

어린이 6명을 1명, 5명으로 나누는 방법의 수는 (어린이만 포함된 조가 있도록 나누는 방법)

${}_6C_1 \cdot {}_5C_5 = 6 \cdot 1 = 6$ ⋯ ❷

따라서 구하는 방법의 수는

$126-6=120$ ⋯ ❸

답 120

채점 기준	비율
❶ 10명을 5명, 5명으로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 어린이 6명을 1명, 5명으로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 각 조에 적어도 한 명의 선생님이 포함되도록 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

103 8개의 아이스크림을 2개, 2개, 4개의 3개의 묶음으로 나누는 방법의 수는

$${}_8C_2 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_4 \cdot \frac{1}{2!} = 28 \cdot 15 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 210$$

3개의 묶음을 3명의 학생에게 나누어 주는 방법의 수는

$3! = 6$

따라서 구하는 방법의 수는

$210 \cdot 6 = 1260$

답 ⑤

104 9명의 선수를 3명, 3명, 3명의 3개의 팀으로 나누는 방법의 수는

$${}_9C_3 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{3!} = 84 \cdot 20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = 280$$ ···· ❶

3개의 팀의 출전 순서를 정하는 방법의 수는

$3! = 6$ ···· ❷

따라서 구하는 방법의 수는

$280 \cdot 6 = 1680$ ···· ❸

답 1680

채점 기준	비율
❶ 9명의 선수를 3명씩 3개의 팀으로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	50 %
❷ 3개의 팀의 출전 순서를 정하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 3명씩 팀을 이루어 출전 순서를 정하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

105 2층부터 7층까지 6개의 층 중에서 사람들이 내리는 4개의 층을 택하는 방법의 수는

${}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$

6명을 1명, 1명, 1명, 3명의 4개의 조로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = 20$$

4개의 조를 4개의 층에 분배하는 방법의 수는

$4! = 24$

따라서 구하는 방법의 수는

$15 \cdot 20 \cdot 24 = 7200$

답 ③

다른 풀이 6명을 1명, 1명, 1명, 3명의 4개의 조로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = 20$$

4개의 조가 2층부터 7층까지 6개의 층 중에서 4개의 층에 각각 내리면 되므로 구하는 방법의 수는

$20 \cdot {}_6P_4 = 20 \cdot 360 = 7200$

106 운전자를 제외한 나머지 5명을 3개의 조로 나눌 때, 각 승용차에 탑승하는 인원수는

1, 1, 3 또는 1, 2, 2

(i) 1명, 1명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$${}_5C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 10$$

(ii) 1명, 2명, 2명으로 나누는 방법의 수는

$${}_5C_1 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} = 5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 15$$

(i), (ii)에서 3개의 조로 나누는 방법의 수는

$10 + 15 = 25$

3개의 조를 3대의 승용차에 배정하는 방법의 수는

$3! = 6$

따라서 구하는 방법의 수는

$25 \cdot 6 = 150$

답 150

107 7개를 3개의 묶음으로 나눌 때, 각 학생에게 줄 수 있는 사탕의 개수는

1, 1, 5 또는 1, 2, 4 또는 1, 3, 3 또는 2, 2, 3

(i) 1개, 1개, 5개로 나누는 방법의 수는

$${}_7C_1 \cdot {}_6C_1 \cdot {}_5C_5 \cdot \frac{1}{2!} = 7 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 21$$

(ii) 1개, 2개, 4개로 나누는 방법의 수는

$${}_7C_1 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_4 = 7 \cdot 15 \cdot 1 = 105$$

(iii) 1개, 3개, 3개로 나누는 방법의 수는

$${}_7C_1 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 7 \cdot 20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 70$$

(iv) 2개, 2개, 3개로 나누는 방법의 수는

$${}_7C_2 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 21 \cdot 10 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 105$$

이상에서 3개의 묶음으로 나누는 방법의 수는

$21 + 105 + 70 + 105 = 301$

3개의 묶음을 3명의 학생에게 나누어 주는 방법의 수는

$3! = 6$

따라서 구하는 방법의 수는

$301 \cdot 6 = 1806$

답 1806

108 구하는 방법의 수는 먼저 5개의 학급을 2개, 3개의 학급으로 나눈 후 3개의 학급 중에서 부전승으로 올라가는 1개의 학급을 택하는 방법의 수와 같으므로

$({}_5C_2 \cdot {}_3C_3) \cdot {}_3C_1 = (10 \cdot 1) \cdot 3 = 30$

답 ①

109 구하는 방법의 수는 8개의 팀을 2개, 2개, 2개, 2개의 4개의 조로 나눈 후, 4개의 조를 다시 2개, 2개의 두 조로 나누는 방법의 수와 같으므로

$$\left({}_8C_2 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{4!}\right) \cdot \left({}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!}\right)$$
$$= \left(28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{24}\right) \cdot \left(6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\right)$$
$$= 105 \cdot 3 = 315$$

답 315

다른 풀이 8개의 팀을 4개, 4개로 나누는 방법의 수는

$${}_8C_4 \cdot {}_4C_4 \cdot \frac{1}{2!} = 70 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 35$$

4개의 팀을 다시 2개, 2개로 나누는 방법의 수는

$${}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} = 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

나머지 4개의 팀을 2개, 2개로 나누는 방법의 수도 3이므로 구하는 방법의 수는

$35 \cdot 3 \cdot 3 = 315$

110 7명을 3명, 4명으로 나누는 방법의 수는

${}_7C_3 \cdot {}_4C_4 = 35 \cdot 1 = 35$

3명 중에서 부전승으로 올라가는 1명을 택하는 방법의 수는

${}_3C_1 = 3$

4명을 다시 2명, 2명으로 나누는 방법의 수는

$${}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} = 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

따라서 구하는 방법의 수는

$35 \cdot 3 \cdot 3 = 315$

답 ②

MEMO

MEMO

MEMO