# 정답 및 풀이

## Ⅰ 수열의 극한



## Ⅱ 여러 가지 함수의 미분



## Ⅲ 미분법



## Ⅳ 적분법

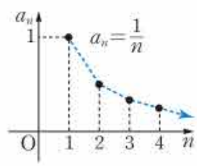
# 01 수열의 극한

## 01 수열의 극한

**확인** 본책 6쪽

**1** (1) 주어진 수열의 일반항을 $a_n$이라 하면 $a_n=\frac{1}{n}$

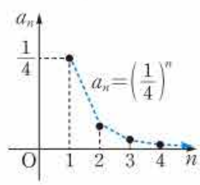
오른쪽 그래프에서 $n$의 값이 한없이 커질 때, $a_n$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 0에 수렴한다.




$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

(2) 주어진 수열의 일반항을 $a_n$이라 하면 $a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$

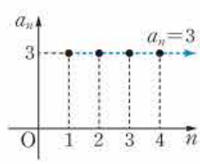
오른쪽 그래프에서 $n$의 값이 한없이 커질 때, $a_n$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 0에 수렴한다.




$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$

(3) 주어진 수열의 일반항을 $a_n$이라 하면 $a_n=3$

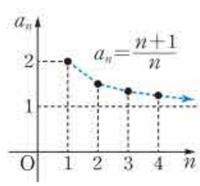
오른쪽 그래프에서 $n$의 값이 한없이 커질 때, $a_n$의 값은 3이므로 이 수열은 3에 수렴한다.




$\therefore \lim_{n\to\infty}3=3$

(4) 주어진 수열의 일반항을 $a_n$이라 하면 $a_n=\frac{n+1}{n}$

오른쪽 그래프에서 $n$의 값이 한없이 커질 때, $a_n$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 이 수열은 1에 수렴한다.



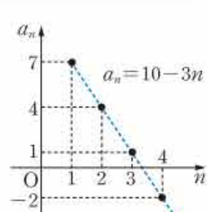

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$

답 (1) 0 (2) 0 (3) 3 (4) 1

**유제** 본책 8쪽

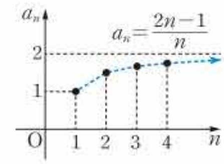
**1** (1) 주어진 수열의 일반항을 $a_n$이라 하면 $a_n=10-3n$

오른쪽 그래프에서 $n$의 값이 한없이 커질 때, $a_n$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 이 수열은 음의 무한대로 발산한다.




(2) 주어진 수열의 일반항을 $a_n$이라 하면 $a_n=\frac{2n-1}{n}$

오른쪽 그래프에서 $n$의 값이 한없이 커질 때, $a_n$의 값은 2에 한없이 가까워지므로 이 수열은 2에 수렴한다.

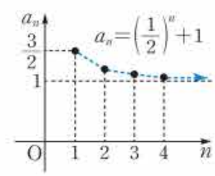



$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=2$

답 (1) 발산 (2) 수렴, 2

**2** (1) 주어진 수열의 일반항을 $a_n$이라 하면 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+1$

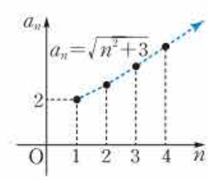
오른쪽 그래프에서 $n$의 값이 한없이 커질 때, $a_n$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 이 수열은 1에 수렴한다.




$\therefore \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1\right\}=1$

(2) 주어진 수열의 일반항을 $a_n$이라 하면 $a_n=\sqrt{n^2+3}$

오른쪽 그래프에서 $n$의 값이 한없이 커질 때, $a_n$의 값도 한없이 커지므로 이 수열은 양의 무한대로 발산한다.




답 (1) 수렴, 1 (2) 발산

## 02 수열의 극한값의 계산

**확인** 본책 9~11쪽

**1** (1) $\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}3+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=3+0=3$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^2}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}-\lim_{n\to\infty}1=0-1=-1$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$

$=\left(\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)$

$=(1+0)(1-0)=1$

(4) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{2}{n^2}+5}{1-\frac{4}{n}}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}+5\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n}\right)}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\lim_{n\to\infty}5}{\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}}$

$=\frac{0+5}{1-0}=5$

답 (1) 3 (2) $-1$ (3) 1 (4) 5

**2** (1) $\lim_{n\to\infty}(7-a_n)=\lim_{n\to\infty}7-\lim_{n\to\infty}a_n=7-4=3$

(2) $\lim_{n\to\infty}(3a_n+b_n)=3\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=3\cdot4+(-1)=11$

(3) $\lim_{n\to\infty}2a_nb_n=2\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n=2\cdot4\cdot(-1)=-8$

(4) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n+4}{b_n^2}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}(a_n+4)}{\lim_{n\to\infty}b_n^2}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}4}{\lim_{n\to\infty}b_n\lim_{n\to\infty}b_n}$

$=\dfrac{4+4}{(-1)^2}=8$

답 (1) 3 (2) 11 (3) $-8$ (4) 8

**3** (1) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{5-n}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{5}{n}-1}{3+\frac{1}{n}}=-\dfrac{1}{3}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=0$

(3) $\lim_{n\to\infty}(n-4n^2)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\dfrac{1}{n}-4\right)=-\infty$

(4) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}+n}{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}+n}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{1}$

$=2$

답 (1) 수렴, $-\dfrac{1}{3}$ (2) 수렴, 0 (3) 발산 (4) 수렴, 2

**4** $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{2+\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{2}$,

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{2}$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{2}$

답 $\dfrac{1}{2}$

**5** $3n^2+1\le a_n\le 3n^2+2$의 각 변을 $n^2$으로 나누면

$\dfrac{3n^2+1}{n^2}\le\dfrac{a_n}{n^2}\le\dfrac{3n^2+2}{n^2}$

이때

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3+\frac{1}{n^2}}{1}=3$,

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3+\frac{2}{n^2}}{1}=3$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}=3$

답 3

유제 본책 12~16쪽

**1** (1) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n+1}{n^3-n^2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{1}{n}}=0$

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n(n-1)^2}{(n+1)(2n-1)}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^3-2n^2+n}{2n^2+n-1}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n-2+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}=\infty$

(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n(2-n)}{3n^2-5n+1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{-n^2+2n}{3n^2-5n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{-1+\frac{2}{n}}{3-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}$

$=-\dfrac{1}{3}$

(4) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

답 (1) 수렴, 0 (2) 발산 (3) 수렴, $-\dfrac{1}{3}$ (4) 수렴, $\sqrt{2}$

**2** (1) $2+4+6+\cdots+2n=2(1+2+3+\cdots+n)$

$=2\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$

$=n^2+n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+\cdots+2n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n}{n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n}}{1}=1$

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{1}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n+1}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n}}{1}=1$

답 (1) 1 (2) 1

**라이트 UP**

① $1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

② $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

**3** (1) $\lim_{n\to\infty}(n+4n^2-n^3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n}-1\right)=-\infty$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\{n+2-(n+1)\}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$

$=\frac{1}{2}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n+1}-n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n+1}+n}{(\sqrt{n^2+3n+1}-n)(\sqrt{n^2+3n+1}+n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n+1}+n}{n^2+3n+1-n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n+1}+n}{3n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}{3+\frac{1}{n}}$

$=\frac{2}{3}$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{n+3-(n+1)\}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(n+1-n)(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$

$=2$

답 (1) 발산 (2) 수렴, $\frac{1}{2}$ (3) 수렴, $\frac{2}{3}$ (4) 수렴, 2

**4** $\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{1+2+3+\cdots+n}-\sqrt{1+2+3+\cdots+(n-1)}\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}}{\sqrt{2}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n})}{\sqrt{2}(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-(n^2-n)}{\sqrt{2}(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{2}(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**5** (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{an^2+n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{a+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{3}{a}$

따라서 $\frac{3}{a}=5$이므로 $a=\frac{3}{5}$

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2+2n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2+2n})(\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2+2n})}{\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2+2n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+an-(n^2+2n)}{\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2+2n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)n}{\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2+2n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{a-2}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}$

$=\frac{a-2}{2}$

따라서 $\frac{a-2}{2}=3$이므로 $a-2=6$

$\therefore a=8$

답 (1) $\frac{3}{5}$ (2) 8

**6** (1) 극한값이 0이 아니므로 $a=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{bn-1}{an^2+2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn-1}{2n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{b-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}$

$=\frac{b}{2}$

따라서 $\frac{b}{2}=1$이므로 $b=2$

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+3n+1}-\sqrt{n^2-bn})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{an^2+3n+1}-\sqrt{n^2-bn})(\sqrt{an^2+3n+1}+\sqrt{n^2-bn})}{\sqrt{an^2+3n+1}+\sqrt{n^2-bn}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+3n+1-(n^2-bn)}{\sqrt{an^2+3n+1}+\sqrt{n^2-bn}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-1)n^2+(3+b)n+1}{\sqrt{an^2+3n+1}+\sqrt{n^2-bn}}$

이때 극한값이 존재하므로

$a-1=0 \qquad \therefore a=1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(a-1)n^2+(3+b)n+1}{\sqrt{an^2+3n+1}+\sqrt{n^2-bn}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3+b)n+1}{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2-bn}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+b+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{b}{n}}}$

$=\frac{3+b}{2}$

따라서 $\frac{3+b}{2}=-2$이므로 $\qquad 3+b=-4$

$\therefore b=-7$

답 (1) $a=0,\ b=2$ (2) $a=1,\ b=-7$

**7** $\frac{3-a_n}{2a_n+1}=b_n$으로 놓으면

$3-a_n=b_n(2a_n+1), \qquad (-2b_n-1)a_n=b_n-3$

$\therefore a_n=\frac{3-b_n}{2b_n+1}$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{5}$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3-b_n}{2b_n+1}=\frac{3-\frac{1}{5}}{2\cdot\frac{1}{5}+1}=2$

답 2

다른 풀이 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ ($\alpha$는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}\frac{3-a_n}{2a_n+1}=\frac{3-\alpha}{2\alpha+1}$

즉 $\frac{3-\alpha}{2\alpha+1}=\frac{1}{5}$이므로

$15-5\alpha=2\alpha+1, \qquad 7\alpha=14$

$\therefore \alpha=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=2$

**8** $(3n-1)a_n=b_n$으로 놓으면

$a_n=\frac{b_n}{3n-1}$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=6$이므로

$\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{(2n+1)\cdot\frac{b_n}{3n-1}\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-1}\lim_{n\to\infty}b_n$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}}\lim_{n\to\infty}b_n$

$=\frac{2}{3}\cdot 6=4$

답 4

**9** $a_n-b_n=c_n$으로 놓으면

$b_n=a_n-c_n$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}c_n=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3b_n}{a_n+4b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3(a_n-c_n)}{a_n+4(a_n-c_n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n-3c_n}{5a_n-4c_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{5-3\cdot\frac{c_n}{a_n}}{5-4\cdot\frac{c_n}{a_n}}$

$=1$

답 1

**10** $\frac{1}{\sqrt{4n^2+3n}}<\frac{a_n}{n}<\frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}$의 각 변에 $n$을 곱하면

$\frac{n}{\sqrt{4n^2+3n}}<a_n<\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}}$

이때

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4n^2+3n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}}=\frac{1}{2}$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

**11** (1) $-1\le\cos\frac{n}{2}\pi\le 1$이므로 각 변을 $n$으로 나누면

$-\frac{1}{n}\le\frac{1}{n}\cos\frac{n}{2}\pi\le\frac{1}{n}$

이때

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n}{2}\pi=0$

(2) $-1\le\sin n\theta\le 1$이므로 각 변을 $n^2+1$로 나누면

$$-\frac{1}{n^2+1}\le\frac{\sin n\theta}{n^2+1}\le\frac{1}{n^2+1}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^2+1}\right)=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n^2+1}=0$$

답 (1) 0 (2) 0

## 03 등비수열의 극한

**확인** 본책 18쪽

**1** (1) 공비가 $-3$이고, $-3<-1$이므로 수열 $\{(-3)^n\}$은 발산한다.

(2) 공비가 $\frac{1}{4}$이고, $-1<\frac{1}{4}<1$이므로 수열 $\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$은 수렴한다.

(3) 공비가 $\sqrt{5}$이고, $\sqrt{5}>1$이므로 수열 $\{(\sqrt{5})^n\}$은 발산한다.

(4) 공비가 $-\frac{2}{3}$이고, $-1<-\frac{2}{3}<1$이므로 수열 $\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}$은 수렴한다.

답 (1) 발산 (2) 수렴 (3) 발산 (4) 수렴

**2** (1) 등비수열 $\{(3x-1)^n\}$은 첫째항과 공비가 모두 $3x-1$이므로 이 수열이 수렴하려면

$$-1<3x-1\le 1,\qquad 0<3x\le 2$$

$$\therefore\ 0<x\le\frac{2}{3}$$

(2) 등비수열 $\left\{(x+1)\left(\frac{x}{2}\right)^n\right\}$은 첫째항이 $\frac{x(x+1)}{2}$, 공비가 $\frac{x}{2}$이므로 이 수열이 수렴하려면

$$\frac{x(x+1)}{2}=0 \text{ 또는 } -1<\frac{x}{2}\le 1$$

$$\therefore\ -2<x\le 2$$

답 (1) $0<x\le\frac{2}{3}$ (2) $-2<x\le 2$

**유제** 본책 19~21쪽

**1** (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+2^{-n}}{2^n-2^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}=1$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{5})^n+3^{n+1}}{(\sqrt{5})^n-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n+3}{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n-1}=-3$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2^n-3^{n-1})=\lim_{n\to\infty}\left(2^n-\frac{1}{3}\cdot 3^n\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}3^n\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{1}{3}\right\}=-\infty$$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(6^{n+1}-2^{2n})=\lim_{n\to\infty}(6\cdot 6^n-4^n)$

$$=\lim_{n\to\infty}6^n\left\{6-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}=\infty$$

답 (1) 수렴, 1 (2) 수렴, $-3$ (3) 발산 (4) 발산

**2** $1+2+2^2+\cdots+2^n=\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=2^{n+1}-1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+2^2+\cdots+2^n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1}=2$$

답 2

**라이트 UP**

**등비수열의 합**

첫째항이 $a$, 공비가 $r$ $(r\ne 1)$인 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$의 첫째항부터 제 $n$ 항까지의 합은

$$\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

**3** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ ($\alpha$는 실수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^na_n}{3^{n+1}a_n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^na_n}{3a_n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{1}{3\alpha}$$

즉 $\frac{1}{3\alpha}=6$이므로 $\alpha=\frac{1}{18}$

답 $\frac{1}{18}$

**4** (1) 등비수열 $\left\{\left(\frac{2x-5}{3}\right)^n\right\}$은 첫째항과 공비가 모두 $\frac{2x-5}{3}$이므로 이 수열이 수렴하려면

$$-1<\frac{2x-5}{3}\le 1,\qquad -3<2x-5\le 3$$

$$2<2x\le 8\qquad \therefore\ 1<x\le 4$$

(2) 등비수열 $\{(x^2+x-1)^n\}$은 첫째항과 공비가 모두 $x^2+x-1$이므로 이 수열이 수렴하려면

$$-1<x^2+x-1\le 1$$

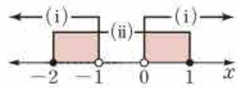
(i) $x^2+x-1>-1$에서 $\quad x^2+x>0$

$x(x+1)>0\qquad\therefore\ x<-1$ 또는 $x>0$

(ii) $x^2+x-1\le 1$에서 $\quad x^2+x-2\le 0$

$(x+2)(x-1)\le 0\qquad\therefore\ -2\le x\le 1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 실수 $x$의 값의 범위는




$-2\le x<-1$ 또는 $0<x\le 1$

답 (1) $1<x\le 4$

(2) $-2\le x<-1$ 또는 $0<x\le 1$

**5** (1) 등비수열 $\{(x+1)(x-2)^n\}$은 첫째항이 $(x+1)(x-2)$, 공비가 $x-2$이므로 이 수열이 수렴하려면

(ⅰ) $(x+1)(x-2)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=2$

(ⅱ) $-1<x-2\le 1$에서 $\quad 1<x\le 3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\quad x=-1$ 또는 $1<x\le 3$

따라서 정수 $x$는 $-1$, 2, 3의 3개이다.

(2) 등비수열 $\left\{(x-4)\left(\dfrac{x+2}{5}\right)^n\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{(x-4)(x+2)}{5}$, 공비가 $\dfrac{x+2}{5}$이므로 이 수열이 수렴하려면

$$\frac{(x-4)(x+2)}{5}=0 \text{ 또는 } -1<\frac{x+2}{5}\le 1$$

(ⅰ) $\dfrac{(x-4)(x+2)}{5}=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=4$

(ⅱ) $-1<\dfrac{x+2}{5}\le 1$에서 $\quad -5<x+2\le 5$

$\therefore -7<x\le 3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\quad x=4$ 또는 $-7<x\le 3$

따라서 정수 $x$는 $-6$, $-5$, $\cdots$, 3, 4의 11개이다.

답 (1) 3 (2) 11

**6** (1) 등비수열 $\{(\log_2 x+1)^n\}$은 첫째항과 공비가 모두 $\log_2 x+1$이므로 이 수열이 수렴하려면

$-1<\log_2 x+1\le 1,\quad -2<\log_2 x\le 0$

$\therefore \dfrac{1}{4}<x\le 1$

(2) 등비수열 $\{(2\cos x)^n\}$은 첫째항과 공비가 모두 $2\cos x$이므로 이 수열이 수렴하려면

$-1<2\cos x\le 1 \quad \therefore -\dfrac{1}{2}<\cos x\le \dfrac{1}{2}$

이때 $0<x<2\pi$이므로

$\dfrac{\pi}{3}\le x<\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $\dfrac{4}{3}\pi<x\le \dfrac{5}{3}\pi$

답 (1) $\dfrac{1}{4}<x\le 1$

(2) $\dfrac{\pi}{3}\le x<\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $\dfrac{4}{3}\pi<x\le \dfrac{5}{3}\pi$

**7** (ⅰ) $|r|>1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}|r^n|=\lim\limits_{n\to\infty}|r^{2n}|=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^{2n}}=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{r^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{r\cdot\frac{1}{r^n}}{1+\frac{1}{r^{2n}}}=0$$

(ⅱ) $r=1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}r^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}r^{2n}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{r^{2n}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(ⅲ) $|r|<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}r^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}r^{2n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{r^{2n}+1}=0$$

이상에서 $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^{n+1}}{r^{2n}+1}=\begin{cases}0 & (|r|\ne 1)\\ \dfrac{1}{2} & (r=1)\end{cases}$

답 풀이 참조

**8** (ⅰ) $|r|>3$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{r}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+3^n}{r^n-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{3}{r}\right)^n}{1-\left(\frac{3}{r}\right)^n}=1$$

(ⅱ) $|r|<3$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{r}{3}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+3^n}{r^n-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{r}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{r}{3}\right)^n-1}=-1$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 실수 $r$의 값의 범위는

$|r|<3$, 즉 $-3<r<3$

답 $-3<r<3$

**9** $f(-2)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^{2n+1}-(-2)}{(-2)^{2n}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2\cdot 4^n+2}{4^n+1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2+\frac{2}{4^n}}{1+\frac{1}{4^n}}=-2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}+1}=-\frac{1}{2}$$

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-1}{1+1}=0$$

$$\therefore f(-2)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)=-2-\frac{1}{2}+0=-\frac{5}{2}$$

답 $-\dfrac{5}{2}$

참고 $f(x)=\begin{cases}x & (|x|>1)\\ 0 & (|x|=1)\\ -x & (|x|<1)\end{cases}$

## 중단원 연습 문제

본책 22~25쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 01 ③ | 02 28 | 03 96 | 04 ④ | 05 ② |
| 06 3 | 07 ③ | 08 $\frac{3}{4}$ | 09 2 | 10 ② |
| 11 9 | 12 ① | 13 ⑤ | 14 ① | 15 ⑤ |
| 16 ① | 17 $\frac{5}{4}$ | 18 7 | 19 4 | 20 ② |
| 21 8 | 22 ② | 23 15 | 24 8 | 25 33 |

**01** 전략 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $n \to \infty$일 때 $a_n$의 값의 변화를 알아본다.

풀이 ㄱ. $\lim_{n\to\infty}(3-5n)=-\infty$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} n^3=\infty$이므로 $\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2-\frac{1}{n}}=\infty$

ㄹ. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$이므로 $\quad \lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}=1$

이상에서 수렴하는 수열인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ③

**02** 전략 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하므로 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용한다.

풀이 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=4$에서 $\quad \lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=4$

$\therefore \alpha+\beta=4$

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=3$에서 $\quad \lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n=3$

$\therefore \alpha\beta=3$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n^3+b_n^3)&=\lim_{n\to\infty}a_n^3+\lim_{n\to\infty}b_n^3=\alpha^3+\beta^3\\&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\&=4^3-3\cdot3\cdot4=28\end{aligned}$$

답 28

**03** 전략 $\lim_{n\to\infty}a_n$, $\lim_{n\to\infty}b_n$의 값을 구한 후 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용한다.

풀이 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-4n^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}-4\right)=-4$

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left\{2-\frac{3}{(n+1)(n+2)}\right\}=2$ ···❶

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}2a_n(a_n-4b_n)&=2\lim_{n\to\infty}a_n\left(\lim_{n\to\infty}a_n-4\lim_{n\to\infty}b_n\right)\\&=2\cdot(-4)\cdot(-4-4\cdot2)\\&=96\end{aligned}$$ ···❷

답 96

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\lim_{n\to\infty}a_n$, $\lim_{n\to\infty}b_n$의 값을 구할 수 있다. | 50 % |
| ❷ $\lim_{n\to\infty}2a_n(a_n-4b_n)$의 값을 구할 수 있다. | 50 % |

**04** 전략 $1-\frac{1}{(n+2)^2}=\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)$로 인수분해한 후 극한값을 구한다.

풀이
$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left\{1-\frac{1}{(n+2)^2}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n+3}{n+2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+3)}{3(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+6}{3n+6}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{6}{n}}{3+\frac{6}{n}}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

답 ④

**05** 전략 먼저 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$을 간단히 한 후 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값을 구한다.

풀이
$$\begin{aligned}a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n&=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n\\&=n^2+2n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{2n^2+3}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{2n^2+3}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{2+\frac{3}{n^2}}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ②

**06** 전략 $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\ge2)$임을 이용하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구한다.

풀이 $n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=3n^2-n-\{3(n-1)^2-(n-1)\}\\&=6n-4\end{aligned}$$

따라서 $a_{2n}=6\cdot2n-4=12n-4$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n-2n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{12n-4}{4n-4}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{12-\frac{4}{n}}{4-\frac{4}{n}}=3\end{aligned}$$

답 3

**07** 전략 수열 $\{a_n\}$이 공차가 $d$인 등차수열임을 이용하여 $a_n$, $a_{n+1}$, $S_n$을 $d$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$라 하면

$a_n=a+(n-1)d=dn+a-d$, $a_{n+1}=dn+a$,

$S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\dfrac{dn^2+(2a-d)n}{2}$

ㄱ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{dn+a}{dn+a-d}=\lim_{n\to\infty}\frac{d+\frac{a}{n}}{d+\frac{a-d}{n}}=1$

ㄴ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{dn^2+(2a-d)n}{2dn+2a-2d}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{dn+2a-d}{2d+\frac{2a}{n}-\frac{2d}{n}}=\infty$

ㄷ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}d=d$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

**08** 전략 자연수 $n$에 대하여 $n\le\sqrt{f(n)}<n+1$일 때 $\sqrt{f(n)}$의 소수 부분은 $\sqrt{f(n)}-n$임을 이용한다.

풀이 $\sqrt{4n^2}<\sqrt{4n^2+3n}<\sqrt{4n^2+4n+1}$, 즉

$\sqrt{(2n)^2}<\sqrt{4n^2+3n}<\sqrt{(2n+1)^2}$이므로

$2n<\sqrt{4n^2+3n}<2n+1$

따라서 $\sqrt{4n^2+3n}$의 정수 부분이 $2n$이므로

$a_n=\sqrt{4n^2+3n}-2n$ ··· ❶

$\displaystyle\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+3n}-2n)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+3n}-2n)(\sqrt{4n^2+3n}+2n)}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+2}=\frac{3}{4}$ ··· ❷

답 $\frac{3}{4}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $a_n$을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❷ $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구할 수 있다. | 60 % |

**09** 전략 이차방정식의 근의 공식을 이용하여 $a_n$을 구한다.

풀이 $x^2+2nx-4n=0$에서

$x=-n\pm\sqrt{n^2+4n}$

이때 $a_n>0$이므로 $a_n=\sqrt{n^2+4n}-n$

$\displaystyle\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n}-n)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+4n}-n)(\sqrt{n^2+4n}+n)}{\sqrt{n^2+4n}+n}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1}=2$ 답 2

**10** 전략 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

풀이 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$a=0$, $b\ne0$

$\displaystyle\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{an^3+bn^2+4}{2n^2+3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn^2+4}{2n^2+3n-1}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{4}{n^2}}{2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}=\frac{b}{2}$

즉 $\frac{b}{2}=c$이므로 $\frac{b}{c}=2$

$\therefore a+\frac{b}{c}=2$ 답 ②

**11** 전략 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d$라 할 때, $a_n=a_1+(n-1)d$임을 이용한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d$라 하면

$a_n=a_1+(n-1)d=dn+(a_1-d)$

$\displaystyle\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+5n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\{dn+(a_1-d)\}+5n}{2n-1}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(3d+5)n+3(a_1-d)}{2n-1}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(3d+5)+\frac{3(a_1-d)}{n}}{2-\frac{1}{n}}$

$=\dfrac{3d+5}{2}$

즉 $\frac{3d+5}{2}=16$이므로 $3d+5=32$

$3d=27$ $\therefore d=9$

답 9

**12** 전략 분자를 유리화한다.

풀이 $a\le0$이면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+5}-(an+b)\}=\infty$이므로

$a>0$

$\displaystyle\therefore \lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+5}-(an+b)\}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{n^2+5}-(an+b)\}\{\sqrt{n^2+5}+(an+b)\}}{\sqrt{n^2+5}+(an+b)}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)n^2-2abn+5-b^2}{\sqrt{n^2+5}+an+b}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)n-2ab+\frac{5-b^2}{n}}{\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}+a+\frac{b}{n}}$

이때 극한값이 3이므로

$1-a^2=0$, $\dfrac{-2ab}{1+a}=3$

$a>0$이므로 $a=1$, $b=-3$

$\therefore a+b=-2$ 답 ①

**13** 전략 $\frac{5a_n-3}{2a_n+1}=b_n$으로 놓고 $a_n$을 $b_n$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\frac{5a_n-3}{2a_n+1}=b_n$으로 놓으면

$5a_n-3=b_n(2a_n+1), \quad (5-2b_n)a_n=b_n+3$

$\therefore a_n=\frac{b_n+3}{5-2b_n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+3}{5-2b_n}=\frac{2+3}{5-2\cdot2}=5$$

답 ⑤

다른 풀이 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ ($\alpha$는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n-3}{2a_n+1}=\frac{5\alpha-3}{2\alpha+1}$

즉 $\frac{5\alpha-3}{2\alpha+1}=2$이므로 $\quad 5\alpha-3=4\alpha+2 \quad \therefore \alpha=5$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=5$

**14** 전략 수열의 극한의 대소 관계를 이용한다.

풀이 $\frac{n^2+1}{n+2}<\frac{a_n}{n+1}<\frac{n^2+3}{n+2}$의 각 변에 $\frac{n+1}{n^2+2}$을 곱하면

$\frac{(n^2+1)(n+1)}{(n^2+2)(n+2)}<\frac{a_n}{n^2+2}<\frac{(n^2+3)(n+1)}{(n^2+2)(n+2)}$

$\therefore \frac{n^3+n^2+n+1}{n^3+2n^2+2n+4}<\frac{a_n}{n^2+2}<\frac{n^3+n^2+3n+3}{n^3+2n^2+2n+4}$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2+n+1}{n^3+2n^2+2n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2+3n+3}{n^3+2n^2+2n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{3}{n^3}}{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}}=1$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2+2}=1$

답 ①

**15** 전략 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 곡선 $y=x^2-(n+1)x+a_n$은 $x$축과 만나므로 이차방정식

$x^2-(n+1)x+a_n=0$ ...... ㉠

의 실근이 존재한다.

따라서 ㉠의 판별식을 $D_1$이라 하면

$D_1=\{-(n+1)\}^2-4a_n\ge0$

$\therefore a_n\le\frac{(n+1)^2}{4}$

또 곡선 $y=x^2-nx+a_n$은 $x$축과 만나지 않으므로 이차방정식

$x^2-nx+a_n=0$ ...... ㉡

의 실근이 존재하지 않는다.

따라서 ㉡의 판별식을 $D_2$라 하면

$D_2=(-n)^2-4a_n<0$

$\therefore a_n>\frac{n^2}{4}$

즉 $\frac{n^2}{4}<a_n\le\frac{(n+1)^2}{4}$이므로

$\frac{1}{4}<\frac{a_n}{n^2}\le\frac{n^2+2n+1}{4n^2}$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}=\frac{1}{4},\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4}=\frac{1}{4}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{4}$

답 ⑤

**16** 전략 분모, 분자를 각각 $4^n$으로 나눈다.

풀이 
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+2^{2n-2}}{\sqrt{4^{2n+1}+9^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot3^n+\frac{1}{4}\cdot4^n}{\sqrt{4\cdot16^n+9^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{4}}{\sqrt{4+\left(\frac{9}{16}\right)^n}}=\frac{1}{8}$$

답 ①

**17** 전략 $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\ge2)$임을 이용하여 $a_n$을 구한다.

풀이 $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=5^n-1-(5^{n-1}-1)$

$=5^{n-1}(5-1)=4\cdot5^{n-1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-1}{4\cdot5^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{1}{5^{n-1}}}{4}=\frac{5}{4}$$

답 $\frac{5}{4}$

**18** 전략 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하려면 $-1<r\le1$이어야 함을 이용한다.

풀이 등비수열 $\left\{\left(\frac{x^2-7x+3}{3}\right)^n\right\}$은 첫째항과 공비가 모두 $\frac{x^2-7x+3}{3}$이므로 이 수열이 수렴하려면

$-1<\frac{x^2-7x+3}{3}\le1$ ⋯ ❶

(i) $\frac{x^2-7x+3}{3}>-1$에서 $\quad x^2-7x+3>-3$

$x^2-7x+6>0, \quad (x-1)(x-6)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>6$

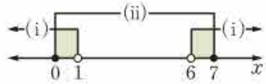
(ii) $\dfrac{x^2-7x+3}{3}\le 1$에서 $\quad x^2-7x+3\le 3$

$x^2-7x\le 0,\quad x(x-7)\le 0$

$\therefore 0\le x\le 7$

(i), (ii)에서

$0\le x<1$ 또는 $6<x\le 7$




⋯ ❷

따라서 주어진 등비수열이 수렴하도록 하는 정수 $x$는 0, 7이므로 구하는 합은

$0+7=7$ ⋯ ❸

답 7

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 주어진 등비수열이 수렴할 조건을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $x$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 60 % |
| ❸ 모든 정수 $x$의 값의 합을 구할 수 있다. | 10 % |

**19** 전략 먼저 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 $a_n$과 합 $S_n$을 구한다.

풀이 $a_n=r^{n-1}$, $S_n=\dfrac{r^n-1}{r-1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}}{\frac{r^n-1}{r-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-r^{n-1}}{r^n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{r}}{1-\frac{1}{r^n}}=1-\frac{1}{r}$$

즉 $1-\dfrac{1}{r}=\dfrac{3}{4}$이므로 $\quad\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore r=4$

답 4

**20** 전략 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 명제의 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ㄱ. [반례] $a_n=n$, $b_n=\dfrac{1}{n}$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$이지만 $\quad\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$

ㄴ. $a_n-b_n=c_n$으로 놓으면

$b_n=a_n-c_n$

즉 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\alpha$이므로 $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_n}{a_n}=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-c_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{c_n}{a_n}\right)$$

$=1$

ㄷ. [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, ⋯

$\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, ⋯

이면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$이지만 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ne 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\ne 0$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

**21** 전략 두 점 $\mathrm{P}_n$과 $\mathrm{P}_{n+1}$ 사이의 거리를 $n$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $f(x)=4x^2-1$에서

$\mathrm{P}_n(n,\ 4n^2-1)$, $\mathrm{P}_{n+1}(n+1,\ 4(n+1)^2-1)$

$$\therefore a_n=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\sqrt{1^2+\{4(n+1)^2-4n^2\}^2}$$

$$=\sqrt{1+(8n+4)^2}$$

$$=\sqrt{64n^2+64n+17}$$ ⋯ ❶

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{64n^2+64n+17}}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{64+\frac{64}{n}+\frac{17}{n^2}}=8$$ ⋯ ❷

답 8

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $a_n$을 $n$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 40 % |
| ❷ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$의 값을 구할 수 있다. | 60 % |

**22** 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $a_n+b_n$, $a_nb_n$을 $n$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $x^2-4n^2x+n^4-3=0$의 두 근이 $a_n$, $b_n$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_n+b_n=4n^2$, $a_nb_n=n^4-3$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n}+\frac{a_n}{b_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{a_nb_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+b_n)^2-2a_nb_n}{a_nb_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n^2)^2-2(n^4-3)}{n^4-3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{14n^4+6}{n^4-3}$$

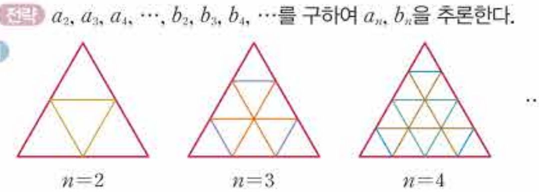
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{14+\frac{6}{n^4}}{1-\frac{3}{n^4}}$$

$=14$

답 ②

**23** 전략 $a_2, a_3, a_4, \cdots, b_2, b_3, b_4, \cdots$를 구하여 $a_n$, $b_n$을 추론한다.

풀이




위의 그림에서

$a_2=3\left(\dfrac{1}{2}+1\right)$

$a_3=3\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}+1\right)$

$a_4=3\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{4}+1\right)$

⋮

$\therefore a_n=3\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\right)=\frac{3}{n}(1+2+3+\cdots+n)$

$=\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{3}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{3(n+1)}{2}\ (n\ge 2)$

또

$b_2=1+2+3$

$b_3=1+2+3+4$

$b_4=1+2+3+4+5$

$\vdots$

$\therefore b_n=1+2+3+\cdots+(n+1)=\sum_{k=1}^{n+1}k$

$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\ (n\ge 2)$

따라서

$a_nb_n=\frac{3(n+1)}{2}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$=\frac{3(n^3+4n^2+5n+2)}{4}\ (n\ge 2)$

이므로

$20\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^3}=20\lim_{n\to\infty}\frac{3(n^3+4n^2+5n+2)}{4n^3}$

$=20\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4}\left(1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)$

$=20\cdot\frac{3}{4}=15$

답 15

**24** 전략 나머지정리를 이용하여 $a_n$, $b_n$을 구한다.

풀이 $f(x)=2x^{n+1}-3x$라 하면

$a_n=f(2)=2\cdot 2^{n+1}-3\cdot 2$

$=4\cdot 2^n-6$

$b_n=f(4)=2\cdot 4^{n+1}-3\cdot 4$

$=8\cdot 4^n-12$ ··· ❶

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{2^{2n}+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4\cdot 2^n-6)+(8\cdot 4^n-12)}{4^n+3^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{8\cdot 4^n+4\cdot 2^n-18}{4^n+3^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{8+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n-18\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}$

$=8$ ··· ❷

답 8

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $a_n$, $b_n$을 $n$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 40 % |
| ❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{2^{2n}+3^n}$의 값을 구할 수 있다. | 60 % |

**25** 전략 $\frac{6}{k}$의 값의 범위를 나누어 계산한다.

풀이 (i) $\frac{6}{k}<1$, 즉 $k>6$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{k}\right)^n=0$이므로

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^n+1}=0$$

(ii) $\frac{6}{k}=1$, 즉 $k=6$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{k}\right)^n=1$이므로

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^n+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(iii) $\frac{6}{k}>1$, 즉 $0<k<6$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{k}\right)^n=\infty$이므로

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6}{k}}{1+\frac{1}{\left(\frac{6}{k}\right)^n}}=\frac{6}{k}$$

이상에서 $a_k=\begin{cases}0 & (k>6)\\ \frac{1}{2} & (k=6)\\ \frac{6}{k} & (0<k<6)\end{cases}$ 이므로

$\sum_{k=1}^{10}ka_k=\sum_{k=1}^{5}\left(k\cdot\frac{6}{k}\right)+6\cdot\frac{1}{2}$

$=5\cdot 6+3=33$

답 33

Ⅰ. 수열의 극한

# 02 급수

## 01 급수의 수렴과 발산

**확인** 본책 29~31쪽

**1** (1) 수열 1, 3, 5, ⋯는 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로 주어진 급수의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

$$S_n=\frac{n\{2\cdot1+(n-1)\cdot2\}}{2}=n^2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}n^2=\infty$$

따라서 주어진 급수는 양의 무한대로 발산한다.

(2) 수열 1, $\frac{1}{5}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^2$, ⋯은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{5}$인 등비수열이므로 주어진 급수의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

$$S_n=\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}=\frac{5}{4}$$

답 (1) 발산 (2) 수렴, $\frac{5}{4}$

**라이트 UP**

**등차수열의 합**

등차수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하면

① 첫째항이 $a$, 제$n$항이 $l$일 때, $S_n=\frac{n(a+l)}{2}$

② 첫째항이 $a$, 공차가 $d$일 때, $S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

**2** 주어진 급수의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하자.

(ⅰ) 홀수 번째 항까지의 부분합을 차례대로 구하면

$$S_1=1,\ S_3=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

$$S_5=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1,\ \cdots$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=1$

(ⅱ) 짝수 번째 항까지의 부분합을 차례대로 구하면

$$S_2=1-\frac{1}{2},\ S_4=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3},$$

$$S_6=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4},\ \cdots$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=1$

따라서 주어진 급수는 1에 수렴한다.

답 수렴, 1

**3** 주어진 급수의 제$n$항을 $a_n$이라 하면

$$a_n=\frac{n}{n+2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

답 풀이 참조

**4** (1) $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=2\cdot4-3=5$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(5a_n-2b_n)=5\sum_{n=1}^{\infty}a_n-2\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=5\cdot4-2\cdot(-3)=26$

답 (1) 5 (2) 26

**유제** 본책 32~34쪽

**1** (1) 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})\\&=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})\\&\quad+\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\\&=\sqrt{2n+1}-1\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+1}-1)=\infty$$

따라서 주어진 급수는 양의 무한대로 발산한다.

(2) 주어진 급수의 제$n$항을 $a_n$, 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\\&=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right.\\&\quad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

답 (1) 발산 (2) 수렴, 2

02 급수

**2** $S_n=\dfrac{n\{2\cdot3+(n-1)\cdot2\}}{2}=n(n+2)$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{3}{4}$

**3** (1) 주어진 급수가 수렴하므로

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-2)=0$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}3a_n=3\cdot2=6$

(2) 주어진 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{n}{2n+1}\right)=0$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}a_n&=-\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}\\&=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}(2a_n-1)&=2\lim_{n\to\infty}a_n-1\\&=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-1\\&=-2\end{aligned}$$

답 (1) 6 (2) $-2$

**4** 주어진 급수가 수렴하므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{n}+1\right)=0$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=-1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{na_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{\frac{a_n}{n}}=-2$$

답 $-2$

**5** 주어진 급수의 제$n$항을 $a_n$이라 하면

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}\\&=\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})}\\&=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})=\infty$$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

답 풀이 참조

**6** 두 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)라 하자.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=-2$에서 $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=-2$

$\therefore 2\alpha+\beta=-2$ …… ㉠

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+3b_n)=9$에서 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n+3\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=9$

$\therefore \alpha+3\beta=9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=-3$, $\beta=4$

따라서 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=-3$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=4$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3b_n)&=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-3\sum_{n=1}^{\infty}b_n\\&=-3-3\cdot4=-15\end{aligned}$$

답 $-15$

**7** $2a_n-b_n=c_n$이라 하면

$b_n=2a_n-c_n$

이때 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=5$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=3$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}b_n&=\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-c_n)=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}c_n\\&=2\cdot5-3=7\end{aligned}$$

답 7

**8** (1) 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(a_n+1)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}1=1$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+1)\neq0$이므로 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+1)$은 발산한다.

(2) $a_n+b_n=c_n$이라 하면

$b_n=c_n-a_n$

이때 두 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$이 모두 수렴하므로 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)라 하면

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}b_n&=\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\\&=\beta-\alpha\end{aligned}$$

따라서 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$도 수렴한다.

답 풀이 참조

## 02 등비급수의 수렴과 발산

**확인** 본책 35쪽

**1** (1) 주어진 등비급수는 첫째항이 1, 공비가 $-\frac{1}{2}$이다.

이때 $\left|-\frac{1}{2}\right|<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴하고, 그 합은

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$$

(2) 주어진 등비급수는 첫째항이 $\sqrt{3}$, 공비가 $\sqrt{3}$이다.

이때 $|\sqrt{3}|>1$이므로 주어진 등비급수는 발산한다.

답 (1) 수렴, $\frac{2}{3}$ (2) 발산

**유제** 본책 36~38쪽

**1** (1) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n5^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{2}{3}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}6^n\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n=\frac{\frac{3}{8}}{1-\frac{3}{8}}=\frac{3}{5}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\sqrt{3})^n}{\sqrt{3}}=\frac{\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{1-(1-\sqrt{3})}=\frac{\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}=\frac{1-\sqrt{3}}{3}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1+(-1)^n}{3}\right\}^n=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots$

$$=\frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{4}{5}$$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(4\cdot5^{-n}+8\cdot5^{-2n})=4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n+8\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{25}\right)^n$

$$=4\cdot\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}+8\cdot\frac{\frac{1}{25}}{1-\frac{1}{25}}$$

$$=4\cdot\frac{1}{4}+8\cdot\frac{1}{24}=\frac{4}{3}$$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}4^{-n}\{2^n+(-3)^n\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{-\frac{3}{4}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}$$

$$=1+\left(-\frac{3}{7}\right)=\frac{4}{7}$$

답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{3}{5}$ (3) $\frac{1-\sqrt{3}}{3}$
(4) $\frac{4}{5}$ (5) $\frac{4}{3}$ (6) $\frac{4}{7}$

**2** $\frac{3}{5}-\frac{1}{5^2}+\frac{3}{5^3}-\frac{1}{5^4}+\frac{3}{5^5}-\frac{1}{5^6}+\cdots$

$$=\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{5^3}+\frac{3}{5^5}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^6}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{25}}-\frac{\frac{1}{25}}{1-\frac{1}{25}}$$

$$=\frac{5}{8}-\frac{1}{24}=\frac{7}{12}$$

답 $\frac{7}{12}$

**참고** 주어진 급수를 $\Sigma$를 이용하여 나타내면

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5^{2n-1}}-\frac{1}{5^{2n}}\right)$$

**3** (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$$=\frac{1}{2}\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^3\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\cdots$$

$$=-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots$$

$$=\frac{-\frac{1}{4}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{6}$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2}$

$$=-\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)^2\sin\pi+\left(-\frac{1}{4}\right)^3\sin\frac{3}{2}\pi+\cdots$$

$$=-\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)^3+\left(-\frac{1}{4}\right)^5-\cdots$$

$$=\frac{-\frac{1}{4}}{1-\left(-\frac{1}{16}\right)}=-\frac{4}{17}$$

답 (1) $-\frac{1}{6}$ (2) $-\frac{4}{17}$

**4** 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r$라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$에서

$$\frac{\frac{1}{3}}{1-r}=1,\qquad 1-r=\frac{1}{3}$$

$$\therefore r=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

**5** 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$라 하자.

$a_2=-\frac{10}{3}$에서 $\quad ar=-\frac{10}{3}$ ...... ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3$에서 $\quad \frac{a}{1-r}=3$

$\therefore a=3(1-r)$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면　$3r(1-r)=-\frac{10}{3}$

$9r^2-9r-10=0,\quad (3r+2)(3r-5)=0$

$\therefore r=-\frac{2}{3}\ (\because -1<r<1)$

$\therefore a_3=a_2\cdot r=\left(-\frac{10}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$

$=\frac{20}{9}$

답 $\frac{20}{9}$

**6** 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r$라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=4$에서

$\frac{2}{1-r}=4\qquad \therefore r=\frac{1}{2}$

따라서 수열 $\{a_n^2\}$은 첫째항이 $2^2=4$, 공비가 $r^2=\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{4}{1-\frac{1}{4}}=\frac{16}{3}$

답 $\frac{16}{3}$

**라이트 UP**

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$라 하면 수열 $\{a_n\}$은

$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \cdots$

이므로 수열 $\{a_n^2\}$은

$a^2,\ a^2r^2,\ a^2r^4,\ a^2r^6,\ \cdots$

따라서 수열 $\{a_n^2\}$은 첫째항이 $a^2$, 공비가 $r^2$인 등비수열이다.

**7** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2}\right)^n$의 첫째항과 공비가 모두 $\frac{x^2+2x-1}{2}$이므로 이 급수가 수렴하려면

$-1<\frac{x^2+2x-1}{2}<1$

(i) $\frac{x^2+2x-1}{2}>-1$에서　$x^2+2x-1>-2$

$x^2+2x+1>0,\quad (x+1)^2>0$

$\therefore x\neq-1$인 모든 실수

(ii) $\frac{x^2+2x-1}{2}<1$에서　$x^2+2x-1<2$

$x^2+2x-3<0,\quad (x+3)(x-1)<0$

$\therefore -3<x<1$

(i), (ii)에서

$-3<x<-1$ 또는 $-1<x<1$

답 $-3<x<-1$ 또는 $-1<x<1$

**8** 주어진 등비급수의 첫째항이 $x+1$, 공비가 $x^2-4$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$x+1=0$ 또는 $-1<x^2-4<1$

(i) $x+1=0$에서　$x=-1$

(ii) $-1<x^2-4<1$에서　$3<x^2<5$

$x^2>3$에서

$x<-\sqrt{3}$ 또는 $x>\sqrt{3}$　$\cdots\cdots$ ㉠

$x^2<5$에서

$-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$　$\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-\sqrt{5}<x<-\sqrt{3}$ 또는 $\sqrt{3}<x<\sqrt{5}$

(i), (ii)에서

$-\sqrt{5}<x<-\sqrt{3}$ 또는 $x=-1$ 또는 $\sqrt{3}<x<\sqrt{5}$

따라서 구하는 정수 $x$는

$-2,\ -1,\ 2$의 3개

답 3

참고 ① $x=-2$이면 주어진 등비급수는

$-1+(-1)\cdot0+(-1)\cdot0^2+\cdots=-1$

② $x=-1$이면 주어진 등비급수는

$0+0\cdot(-3)+0\cdot(-3)^2+\cdots=0$

③ $x=2$이면 주어진 등비급수는

$3+3\cdot0+3\cdot0^2+\cdots=3$

**9** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n$의 첫째항과 공비가 모두 $\frac{x}{5}$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$-1<\frac{x}{5}<1\qquad \therefore -5<x<5$　$\cdots\cdots$ ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{x}\right)^n$의 첫째항과 공비가 모두 $\frac{3}{x}$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$-1<\frac{3}{x}<1,\quad \frac{x}{3}<-1$ 또는 $\frac{x}{3}>1$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>3$　$\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-5<x<-3$ 또는 $3<x<5$

답 $-5<x<-3$ 또는 $3<x<5$

## 03 등비급수의 활용

**확인**

본책 39쪽

**1** (1) $0.\dot{2}3\dot{4}=0.234+0.000234+0.000000234+\cdots$

$=\frac{234}{1000}+\frac{234}{1000^2}+\frac{234}{1000^3}+\cdots$

이 급수는 첫째항이 $\frac{234}{1000}$이고 공비가 $\frac{1}{1000}$인 등비급수이므로

$$0.\dot{2}3\dot{4}=\frac{\frac{234}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{26}{111}$$

(2) $0.0\dot{1}3\dot{6}=0.01+0.0036+0.000036+0.00000036+\cdots$

$$=\frac{1}{100}+\left(\frac{36}{100^2}+\frac{36}{100^3}+\frac{36}{100^4}+\cdots\right)$$

이때 급수 $\frac{36}{100^2}+\frac{36}{100^3}+\frac{36}{100^4}+\cdots$은 첫째항이 $\frac{36}{100^2}$이고 공비가 $\frac{1}{100}$인 등비급수이므로

$$0.0\dot{1}3\dot{6}=\frac{1}{100}+\frac{\frac{36}{100^2}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{3}{220}$$

답 (1) $\frac{26}{111}$ (2) $\frac{3}{220}$

**유제** 본책 40~42쪽

**1** $x=\overline{P_1P_2}+\overline{P_3P_4}+\overline{P_5P_6}+\overline{P_7P_8}+\cdots$

$$=\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{3}{4}\right)^5+\left(\frac{3}{4}\right)^7+\cdots$$

$$=\frac{\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{12}{7}$$

$y=\overline{OP_1}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}+\overline{P_6P_7}+\cdots$

$$=1+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^4+\left(\frac{3}{4}\right)^6+\cdots$$

$$=\frac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{16}{7}$$

$\therefore x+y=4$

답 4

**2** 점 $P_n$이 점 $(a,\ b)$에 가까워진다고 하면

$a=\overline{OP_1}\cos 30^\circ-\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}\cos 30^\circ-\overline{P_3P_4}$
$\quad+\overline{P_4P_5}\cos 30^\circ-\overline{P_5P_6}+\cdots$

$$=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cdots\right\}$$
$$-\left\{\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^5+\cdots\right\}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}-\frac{\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{9\sqrt{3}-12}{10}$$

$b=\overline{OP_1}\sin 30^\circ+\overline{P_2P_3}\sin 30^\circ+\overline{P_4P_5}\sin 30^\circ+\cdots$

$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\frac{1}{2}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{9}{10}$$

따라서 점 $P_n$은 점 $\left(\frac{9\sqrt{3}-12}{10},\ \frac{9}{10}\right)$에 가까워진다.

답 $\left(\frac{9\sqrt{3}-12}{10},\ \frac{9}{10}\right)$

**3** $\overline{AB_2}:\overline{B_1B_2}=5:2$이므로

$\overline{AB_1}:\overline{B_1B_2}=3:2$

$\therefore \overline{B_1B_2}=\frac{2}{3}\overline{AB_1}=\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}$

같은 방법으로

$$\overline{B_2B_3}=\frac{2}{3}\overline{B_1B_2}=\left(\frac{2}{3}\right)^2,\ \overline{B_3B_4}=\frac{2}{3}\overline{B_2B_3}=\left(\frac{2}{3}\right)^3,\ \cdots$$

$$\therefore \overline{B_1B_2}+\overline{B_2B_3}+\overline{B_3B_4}+\cdots=\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots$$

$$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2$$

답 2

**4** $\triangle AB_nC_n \backsim \triangle AB_{n+1}C_{n+1}$이고 닮음비는

$\overline{AB_n}:\overline{AB_{n+1}}=2:\sqrt{3}$

따라서 $l_n:l_{n+1}=2:\sqrt{3}$이므로 $\quad l_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}l_n$

이때 $l_1=3\cdot 2=6$이므로 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 6, 공비가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$인 등비수열이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n=\frac{6}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=12(2+\sqrt{3})$$

답 $12(2+\sqrt{3})$

**라이트 UP**

① $a_{n+1}=a_n+d$ ➡ 수열 $\{a_n\}$은 공차가 $d$인 등차수열
② $a_{n+1}=ra_n$ ➡ 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $r$인 등비수열

**5** 삼각형 ABC의 넓이를 $S$라 하면

$S=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4=10$

$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$이고 닮음비가 $\overline{AB}:\overline{A_1B_1}=2:1$이므로

$S:S_1=2^2:1 \qquad \therefore S_1=\frac{1}{4}S=\frac{5}{2}$

같은 방법으로 $\triangle A_nB_nC_n \backsim \triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$이고 닮음비가 $2:1$이므로

$S_n:S_{n+1}=2^2:1 \qquad \therefore S_{n+1}=\frac{1}{4}S_n$

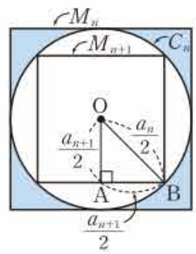
따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{5}{2}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k=\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{10}{3}$$

답 $\frac{10}{3}$

**6** $S_1=2^2-\pi\cdot1^2=4-\pi$

정사각형 $M_n$의 한 변의 길이를 $a_n$이라 하면 오른쪽 그림에서 원 $C_n$의 중심 O에 대하여 △OAB는 ∠A=90°인 직각이등변삼각형이므로




$$\frac{a_n}{2}:\frac{a_{n+1}}{2}=\sqrt{2}:1$$

$$\therefore a_n:a_{n+1}=\sqrt{2}:1$$

이때

$$S_n=a_n^2-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2\pi=a_n^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$S_{n+1}=a_{n+1}^2-\left(\frac{a_{n+1}}{2}\right)^2\pi=a_{n+1}^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

이므로 $S_n:S_{n+1}=a_n^2:a_{n+1}^2=2:1$

$$\therefore S_{n+1}=\frac{1}{2}S_n$$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $4-\pi$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{4-\pi}{1-\frac{1}{2}}=8-2\pi$$

답 $8-2\pi$

## 중단원 연습 문제

본책 43~46쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **01** ③ | **02** ① | **03** $\frac{1}{2}$ | **04** 6 | **05** 7 |
| **06** ① | **07** ③ | **08** 12 | **09** ③ | **10** ① |
| **11** $\frac{1}{3}$ | **12** ② | **13** $\frac{512}{7}$ | **14** ⑤ | **15** 3 |
| **16** 5 | **17** $40(2+\sqrt{2})$ | **18** 25 | **19** ④ | |
| **20** 11 | **21** 5 | **22** ② | **23** ② | |

**01** 전략 주어진 급수의 부분합 $S_n$을 구한 후 $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값이 존재하는지 조사한다.

풀이 주어진 급수의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하자.

ㄱ. $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}k-1\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n$

$$=\frac{n(n-3)}{4}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-3)}{4}=\infty$$

따라서 주어진 급수는 양의 무한대로 발산한다.

ㄴ. $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$

$$=\frac{-\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$=-\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=-\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}=-\frac{1}{4}$$

ㄷ. $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{10}{k(k+1)}$

$$=\sum_{k=1}^{n}10\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=10\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=10\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=10\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=10$$

ㄹ. $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$=\sqrt{n+1}-1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$$

따라서 주어진 급수는 양의 무한대로 발산한다.

이상에서 수렴하는 급수는 ㄴ, ㄷ이다. 답 ③

다른 풀이 ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}n-1\right)=\infty$

즉 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}n-1\right)\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}n-1\right)$은 발산한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$의 공비가 $-\frac{1}{3}$이고 $-1<-\frac{1}{3}<1$이므로 이 등비급수는 수렴한다.

**02** 전략 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d$라 하면 $a_4-a_2=4$에서

$2d=4$ $\therefore d=2$

따라서 $a_n=4+2(n-1)=2n+2$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{na_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

답 ①

**03** 전략 $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\ge2)$임을 이용하여 $a_n$을 구한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하면

$\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2$에서 $S_n=n^2$

$n=1$일 때, $a_1=S_1=1$

$n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2$

$=2n-1$ ...... ㉠

이때 $a_1=1$은 $n=1$을 ㉠에 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-1$ ··· ❶

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$ ··· ❷

답 $\frac{1}{2}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $a_n$을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❷ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}$의 값을 구할 수 있다. | 60 % |

**04** 전략 주어진 급수의 제$n$항을 구한 후 부분분수로 변형한다.

풀이 주어진 급수의 제$n$항을 $a_n$, 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

$$a_n=\frac{2n+1}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}=\frac{2n+1}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$
$$=\frac{6}{n(n+1)}=6\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}6\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=6\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=6\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}6\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=6$$

답 6

**05** 전략 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$임을 이용한다.

풀이 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-7}{2a_n+3}$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-7}{2a_n+3}=0$$ ··· ❶

$\frac{a_n-7}{2a_n+3}=b_n$으로 놓으면

$a_n-7=b_n(2a_n+3)$, $\quad a_n(1-2b_n)=3b_n+7$

$$\therefore a_n=\frac{3b_n+7}{1-2b_n}$$ ··· ❷

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3b_n+7}{1-2b_n}=\frac{3\cdot0+7}{1-2\cdot0}=7$$ ··· ❸

답 7

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-7}{2a_n+3}=0$임을 알 수 있다. | 40 % |
| ❷ $a_n$을 $b_n$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 30 % |
| ❸ $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |

**06** 전략 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$임을 이용한다.

풀이 주어진 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n^2}-5\right)=0 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=5$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+3a_n}{n^2+2n-2a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}+3\cdot\frac{a_n}{n^2}}{1+\frac{2}{n}-2\cdot\frac{a_n}{n^2}}$$
$$=\frac{3-0+3\cdot5}{1+0-2\cdot5}=-2$$

답 ①

**07** 전략 급수의 성질을 이용하여 명제의 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ㄱ. 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n=0$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)\}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$$
$$=\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$도 수렴한다.

ㄷ. [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, ⋯

$\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, ⋯

이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n=0$으로 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이지만 $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ 이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

**08** 전략 급수의 성질을 이용한다.

풀이 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-b_n)=3$에서 $\quad 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty} b_n=3$

$\therefore 2\alpha-\beta=3$ ⋯⋯ ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n)=19$에서 $\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n+2\sum_{n=1}^{\infty} b_n=19$

$\therefore \alpha+2\beta=19$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad \alpha=5,\ \beta=7$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=5$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=7$이므로 ⋯➊

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n=12$$ ⋯➋

답 12

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값을 구할 수 있다. | 70 % |
| ➋ $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |

**09** 전략 첫째항이 $a$, 공비가 $r$인 등비급수의 합은 $\frac{a}{1-r}$임을 이용한다.

풀이
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{3^n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$
$$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

답 ③

다른 풀이 $\{a_n\}$: 1, 3, 1, 3, ⋯이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{3}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{3}{3^6}+\cdots$$
$$=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^5}+\cdots\right)$$
$$=2\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}$$

**10** 전략 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비를 이용하여 수열 $\{a_n^2\}$의 첫째항과 공비를 구한다.

풀이 $a_1=3$, $a_2=1$이므로 수열 $\{a_n\}$의 공비는

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{3}$$

따라서 수열 $\{a_n^2\}$의 첫째항은 $a_1^2=3^2=9$, 공비는 $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{9}{1-\frac{1}{9}}=\frac{81}{8}$$

답 ①

**11** 전략 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례대로 대입하여 첫째항과 공비를 찾는다.

풀이
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n\pi}{4}\right)^n=\frac{1+\cos\pi}{4}+\left(\frac{1+\cos 2\pi}{4}\right)^2$$
$$+\left(\frac{1+\cos 3\pi}{4}\right)^3+\left(\frac{1+\cos 4\pi}{4}\right)^4+\cdots$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots$$

따라서 주어진 등비급수의 첫째항은 $\frac{1}{4}$, 공비는 $\frac{1}{4}$이므로 구하는 값은

$$\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

**12** 전략 주어진 수열을 지수의 꼴로 나타내고 $\log_5 a_n$을 간단히 한 후 등비급수의 합을 구한다.

풀이 주어진 수열은 $5^{\frac{1}{2}}$, $5^{\frac{1}{4}}$, $5^{\frac{1}{8}}$, ⋯이므로

$$a_n=5^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\log_5 a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\log_5 5^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

답 ②

**13** 전략 첫째항이 $a$, 공비가 $r$인 등비급수의 합은 $\frac{a}{1-r}$임을 이용한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=8$에서

$\frac{a}{1-r}=8$ ⋯⋯ ㉠

수열 $\{a_n^2\}$은 첫째항이 $a^2$, 공비가 $r^2$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{64}{3}$에서 $\quad \frac{a^2}{1-r^2}=\frac{64}{3}$

$\therefore \frac{a^2}{(1+r)(1-r)}=\frac{64}{3}$ ⋯⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad \dfrac{a}{1+r}\cdot 8=\dfrac{64}{3}$

$\therefore \dfrac{a}{1+r}=\dfrac{8}{3}$ $\quad$ …… ㉢

㉠÷㉢을 하면 $\quad \dfrac{1+r}{1-r}=3$

$1+r=3(1-r), \quad 4r=2 \quad \therefore r=\dfrac{1}{2}$

$r=\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\quad \dfrac{a}{1-\dfrac{1}{2}}=8 \quad \therefore a=4$

따라서 수열 $\{a_n^{\,3}\}$은 첫째항이 $a^3=64$, 공비가 $r^3=\dfrac{1}{8}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\,3}=\frac{64}{1-\dfrac{1}{8}}=\frac{512}{7}$$

답 $\dfrac{512}{7}$

**14** 전략 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하면 $-1<r<1$임을 이용한다.

풀이 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하므로

$-1<r<1$ $\quad$ …… ㉠

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$은 공비가 $r^2$인 등비급수이고 ㉠에서

$0\le r^2<1$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{r}{2}\right)^n$은 공비가 $1-\dfrac{r}{2}$인 등비급수이고 ㉠에서

$-\dfrac{1}{2}<-\dfrac{r}{2}<\dfrac{1}{2} \quad \therefore \dfrac{1}{2}<1-\dfrac{r}{2}<\dfrac{3}{2}$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다고 할 수 없다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{r+2}{3}\right)^n$은 공비가 $\dfrac{r+2}{3}$인 등비급수이고 ㉠에서

$1<r+2<3 \quad \therefore \dfrac{1}{3}<\dfrac{r+2}{3}<1$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$은 공비가 $-r$인 등비급수이고 ㉠에서

$-1<-r<1$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$은 수렴한다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n+(-r)^n}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} r^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta$$

이므로 주어진 급수는 항상 수렴한다.

이상에서 항상 수렴하는 급수는 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. $\quad$ 답 ⑤

다른 풀이 ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{r^n+(-r)^n}{2}=r^2+r^4+r^6+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$

이때 ㄱ에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$이 수렴하므로 주어진 급수는 항상 수렴한다.

**15** 전략 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$의 수렴 조건은 $-1<r<1$임을 이용한다.

풀이 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}\cos x)^n$의 첫째항과 공비가 모두 $\sqrt{2}\cos x$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$-1<\sqrt{2}\cos x<1, \quad -\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3}{4}\pi$ ($\because 0\le x<\pi$)

따라서 $a=\dfrac{\pi}{4}$, $b=\dfrac{3}{4}\pi$이므로 $\quad \dfrac{b}{a}=\dfrac{3\pi}{4}\cdot\dfrac{4}{\pi}=3$ $\quad$ 답 3

**16** 전략 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴 조건은 $-1<r\le 1$이고, 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$의 수렴 조건은 $-1<r<1$임을 이용한다.

풀이 등비수열 $\left\{\left(\dfrac{x-3}{2}\right)^n\right\}$의 첫째항과 공비가 모두 $\dfrac{x-3}{2}$이므로 이 수열이 수렴하려면

$-1<\dfrac{x-3}{2}\le 1, \quad -2<x-3\le 2$

$\therefore 1<x\le 5$ $\quad$ …… ㉠ ⋯ ❶

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x}{4}\right)^n$의 첫째항과 공비가 모두 $\dfrac{x}{4}$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$-1<\dfrac{x}{4}<1 \quad \therefore -4<x<4$ $\quad$ …… ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<x<4$

따라서 조건을 만족시키는 정수 $x$는 2, 3이므로 구하는 합은

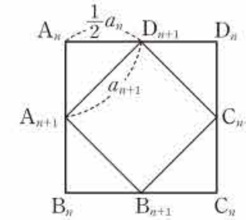
$2+3=5$ ⋯ ❸

답 5

| 채점 기준 | 비율 |
| --- | --- |
| ❶ $\left\{\left(\dfrac{x-3}{2}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 $x$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 40 % |
| ❷ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x}{4}\right)^n$이 수렴하도록 하는 $x$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 40 % |
| ❸ 조건을 만족시키는 모든 정수 $x$의 값의 합을 구할 수 있다. | 20 % |

**17** 전략 정사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$과 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 한 변의 길이의 비를 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 한 변의 길이를 $a_n$이라 하면




$\dfrac{1}{2}a_n : a_{n+1}=1:\sqrt{2}$

이므로 $\quad a_{n+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a_n$

$\therefore a_n = a_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} = 10 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 둘레의 길이를 $l_n$이라 하면

$l_n = 4a_n = 40 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

따라서 모든 정사각형의 둘레의 길이의 합은

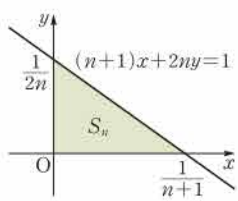
$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{40 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\right\} = \frac{40}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= 40(2+\sqrt{2})$$

답 $40(2+\sqrt{2})$

**18** 전략 주어진 직선의 $x$절편, $y$절편을 이용하여 $S_n$을 $n$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 직선 $(n+1)x+2ny=1$의 $x$절편은 $\frac{1}{n+1}$, $y$절편은 $\frac{1}{2n}$이므로




$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{4n(n+1)} \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} 100S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{4n(n+1)}$$

$$= 25\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 25\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= 25\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$= 25\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 25 \quad \cdots ❷$$

답 25

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $S_n$을 $n$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 40 % |
| ❷ $\sum_{n=1}^{\infty} 100S_n$의 값을 구할 수 있다. | 60 % |

**19** 전략 먼저 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 구한다.

풀이 $0.0\dot{1}\dot{3} = 0.0131313\cdots$이므로

$\{a_n\}$: 0, 1, 3, 1, 3, 1, 3, ⋯

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{3}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{3}{2^7} + \cdots$$

$$= \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \cdots\right) + \left(\frac{3}{2^3} + \frac{3}{2^5} + \frac{3}{2^7} + \cdots\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} + \frac{\frac{3}{8}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

답 ④

**20** 전략 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$임을 이용한다.

풀이 주어진 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n} - \frac{2n-1}{n}\right) = 0 \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{1} = 2 \quad \cdots ❷$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+3n}{a_n-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot\frac{a_n}{n}+3}{\frac{a_n}{n}-1}$$

$$= \frac{4\cdot 2+3}{2-1} = 11 \quad \cdots ❸$$

답 11

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n} - \frac{2n-1}{n}\right) = 0$임을 알 수 있다. | 40 % |
| ❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❸ $\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+3n}{a_n-n}$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |

**21** 전략 $\alpha$, $\beta$의 값의 범위를 구한 후 이차방정식의 근과 계수의 관계와 등비급수의 합을 이용한다.

풀이 $f(x) = 2x^2+x-4$라 하면

$f(-1) = -3$, $f(1) = -1$

이므로 $\alpha < -1$, $\beta > 1$

$$\therefore -1 < \frac{1}{\alpha} < 0, \ 0 < \frac{1}{\beta} < 1$$

따라서 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\beta^n}$은 모두 수렴한다.

한편 $\alpha$, $\beta$는 이차방정식 $2x^2+x-4=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta = -\frac{1}{2}, \ \alpha\beta = -2$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{\beta^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\beta^n}$$

$$= \frac{\frac{1}{\alpha}}{1-\frac{1}{\alpha}} + \frac{\frac{1}{\beta}}{1-\frac{1}{\beta}}$$

$$= \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{\beta-1} = \frac{\alpha+\beta-2}{(\alpha-1)(\beta-1)}$$

$$= \frac{\alpha+\beta-2}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}-2}{-2+\frac{1}{2}+1} = 5$$

답 5

**22** 전략 $\overline{P_nH_n}$의 길이를 $n$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 점 $P_n$의 좌표를 $(a_n,\ b_n)\ (a_n \neq 1)$이라 하자.

점 $P_n$은 직선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)$과 이차함수 $y=3x(x-1)$의 그래프의 교점이므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_n-1)=3a_n(a_n-1)$$

$$\left\{3a_n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}(a_n-1)=0$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ (\because a_n \neq 1)$$

$0<a_n<1$이므로

$$\begin{aligned}\overline{P_nH_n}&=|b_n|=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(1-a_n)\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left\{1-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\overline{P_nH_n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\\&=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\\&=2-\frac{4}{9}=\frac{14}{9}\end{aligned}$$

답 ②

**23** 전략 두 변의 길이가 $a$, $b$이고 그 끼인각의 크기가 $\theta$인 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$임을 이용하여 $S_n$을 구한다.

풀이 $\angle B_1C_1D_1=30°$, $\angle C_1D_1B_1=90°$이므로 직각삼각형 $C_1D_1B_1$에서

$$\overline{C_1D_1}=\overline{B_1C_1}\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

한편 두 선분 $B_1B_2$, $B_1D_1$과 호 $D_1B_2$로 둘러싸인 영역의 넓이는

(삼각형 $C_1D_1B_1$의 넓이)$-$(부채꼴 $C_1D_1B_2$의 넓이)

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\overline{C_1D_1}\cdot\overline{D_1B_1}-\pi\cdot\overline{C_1D_1}^2\cdot\frac{30°}{360°}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{12}\\&=\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{16}=\frac{2\sqrt{3}-\pi}{16} \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

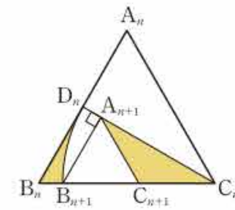
또 삼각형 $C_1A_2C_2$의 넓이는

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\overline{C_2C_1}\cdot\overline{C_1A_2}\cdot\sin 30°\\&=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\overline{B_2C_1}\right)\cdot\left(\overline{B_2C_1}\cos 30°\right)\cdot\sin 30°\\&=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{3\sqrt{3}}{64} \qquad \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

㉠과 ㉡에 의하여

$$S_1=\frac{2\sqrt{3}-\pi}{16}+\frac{3\sqrt{3}}{64}=\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{64}$$

한편 정삼각형 $A_nB_nC_n$의 한 변의 길이를 $a_n$이라 하면 오른쪽 그림의 직각삼각형 $C_nA_{n+1}B_{n+1}$에서




$\overline{C_nB_{n+1}}=\overline{C_nD_n}=\frac{\sqrt{3}}{2}a_n$이므로

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\frac{1}{2}\overline{C_nB_{n+1}}\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}a_n\end{aligned}$$

$$\therefore a_n : a_{n+1}=1:\frac{\sqrt{3}}{4}$$

즉 $R_n$에서 새로 칠해진 부분과 $R_{n+1}$에서 새로 칠해진 부분의 넓이의 비가

$$1^2:\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2,\ 즉\ 1:\frac{3}{16}$$

이므로

$$S_2=S_1+\frac{3}{16}S_1$$

$$S_3=S_2+\left(\frac{3}{16}\right)^2S_1=S_1+\frac{3}{16}S_1+\left(\frac{3}{16}\right)^2S_1$$

$$\vdots$$

$$S_n=S_1+\frac{3}{16}S_1+\left(\frac{3}{16}\right)^2S_1+\cdots+\left(\frac{3}{16}\right)^{n-1}S_1$$

따라서 $S_n$은 첫째항이 $\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{64}$이고 공비가 $\frac{3}{16}$인 등비수열의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{64}}{1-\frac{3}{16}}=\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{52}$$

답 ②

# 03 지수함수와 로그함수의 미분

## 01 지수함수와 로그함수의 극한

### 확인

본책 48~51쪽

**1** 답 (1) $\infty$ (2) $0$ (3) $0$ (4) $\infty$

**2** 답 (1) $-\infty$ (2) $\infty$ (3) $\infty$ (4) $-\infty$

**3** (1) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{3}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\}^3=e^3$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right\}^2=e^2$

답 (1) $e^3$ (2) $e^2$

**4** (1) $\ln\sqrt{e}=\ln e^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\ln e=\dfrac{1}{2}$

(2) $\ln\dfrac{1}{e^3}=\ln e^{-3}=-3\ln e=-3$

답 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $-3$

**5** (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+5x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+5x)}{5x}\cdot5=1\cdot5=5$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_2(1+x)}{4x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_2(1+x)}{x}\cdot\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{1}{\ln2}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4\ln2}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^x-1}{x}\cdot\dfrac{1}{2}=\ln3\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\ln3=\ln\sqrt{3}$

답 (1) $5$ (2) $-\dfrac{1}{2}$ (3) $\dfrac{1}{4\ln2}$ (4) $\ln\sqrt{3}$

### 유제

본책 52~56쪽

**1** (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4^x}{5^x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\frac{4}{5}\right)^x}{1-2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x}=0$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x+4^x}{3^x-4^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^x+1}{\left(\frac{3}{4}\right)^x-1}=-1$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(5^{x+1}-7^{x+2})=\lim\limits_{x\to\infty}7^x\left\{5\cdot\left(\dfrac{5}{7}\right)^x-49\right\}=-\infty$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(3^{2x-1}-4^x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\cdot9^x-4^x\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}9^x\left\{\dfrac{1}{3}-\left(\dfrac{4}{9}\right)^x\right\}=\infty$

답 (1) $0$ (2) $-1$ (3) $-\infty$ (4) $\infty$

**2** (1) $-x=t$로 놓으면 $x=-t$이고 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x-2}{2^x-3}=\lim_{t\to\infty}\frac{5^{-t}-2}{2^{-t}-3}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^t-2}{\left(\frac{1}{2}\right)^t-3}=\frac{2}{3}$$

(2) $-x=t$로 놓으면 $x=-t$이고 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{3^{-t}+3^t}{3^{-t}-3^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^t+3^t}{\left(\frac{1}{3}\right)^t-3^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^t+1}{\left(\frac{1}{9}\right)^t-1}=-1$$

답 (1) $\dfrac{2}{3}$ (2) $-1$

**3** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a\cdot6^{x-1}+3^{x+1}}{6^x+3^{x-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{a}{6}+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x}{1+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x}=\dfrac{a}{6}$

따라서 $\dfrac{a}{6}=2$이므로 $a=12$

답 12

**4** (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\{\log_2(2x+8)-\log_2(x+1)\}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\dfrac{2x+8}{x+1}$

$=\log_2\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+8}{x+1}\right)$

$=\log_2\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{8}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)$

$=\log_2 2=1$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\log_5(25x-1)+\log_5\dfrac{5}{x}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\log_5\dfrac{5(25x-1)}{x}$

$=\log_5\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5(25x-1)}{x}\right\}$

$=\log_5\left\{\lim\limits_{x\to\infty}5\left(25-\dfrac{1}{x}\right)\right\}$

$=\log_5125=3$

답 (1) $1$ (2) $3$

**5** (1) $\lim\limits_{x\to1+}\{\log_2(x^2-1)-\log_2(x-1)\}$

$=\lim\limits_{x\to1+}\log_2\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}\log_2(x+1)$

$=\log_2\left\{\lim\limits_{x\to1+}(x+1)\right\}$

$=\log_2 2=1$

(2) $\lim_{x\to4}(\log|x^2-16|-\log|x^3-64|)$

$=\lim_{x\to4}\log\left|\frac{x^2-16}{x^3-64}\right|=\lim_{x\to4}\log\left|\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x^2+4x+16)}\right|$

$=\lim_{x\to4}\log\left|\frac{x+4}{x^2+4x+16}\right|$

$=\log\left(\lim_{x\to4}\left|\frac{x+4}{x^2+4x+16}\right|\right)$

$=\log\frac{1}{6}=-\log 6$

답 (1) 1 (2) $-\log 6$

**6** $\lim_{x\to\infty}\{\log_3(ax+4)-\log_3(2x+3)\}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{ax+4}{2x+3}=\log_3\left(\lim_{x\to\infty}\frac{ax+4}{2x+3}\right)$

$=\log_3\left(\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{4}{x}}{2+\frac{3}{x}}\right)=\log_3\frac{a}{2}$

따라서 $\log_3\frac{a}{2}=4$이므로 $\frac{a}{2}=81$

$\therefore a=162$

답 162

**7** (1) $\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{4}{x}}=\lim_{x\to0}\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^8=e^8$

(2) $\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{5}\right)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{\left(1+\frac{x}{5}\right)^{\frac{5}{x}}\right\}^{\frac{2}{5}}=e^{\frac{2}{5}}$

답 (1) $e^8$ (2) $e^{\frac{2}{5}}$

**8** (1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right\}^6=e^6$

(2) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{4x+3}\right)^{-12x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{4x}\right)^{12x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{4x}\right)^{12x}$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{3}{4x}\right)^{\frac{4x}{3}}\right\}^9=e^9$

답 (1) $e^6$ (2) $e^9$

**9** (1) $-x=t$로 놓으면 $x=-t$이고 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-2x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{2}{t}\right)^{2t}$

$=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{2}{t}\right)^{\frac{t}{2}}\right\}^4=e^4$

(2) $x-1=t$로 놓으면 $x=1+t$이고 $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{2-2x}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{-\frac{1}{2t}}=\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-\frac{1}{2}}$

$=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

답 (1) $e^4$ (2) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

**10** (1) $\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}$

$=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x+1}-e}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{e(e^{2x}-1)}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{e}{2}$

$=1\cdot\frac{e}{2}=\frac{e}{2}$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}\cdot3\right\}$

$=1\cdot1\cdot3=3$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-e^x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x(e^{3x}-1)}{2x}$

$=\lim_{x\to0}\left(e^x\cdot\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\frac{3}{2}\right)$

$=1\cdot1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{e}{2}$ (3) 3 (4) $\frac{3}{2}$

**11** (1) $\lim_{x\to0}\frac{\log(1+3x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\log(1+3x)}{3x}\cdot3$

$=\frac{1}{\ln10}\cdot3=\frac{3}{\ln10}$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{2^x-5^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2^x-1-5^x+1}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{5^x-1}{x}$

$=\ln2-\ln5=\ln\frac{2}{5}$

답 (1) $\frac{3}{\ln10}$ (2) $\ln\frac{2}{5}$

**12** $x-2=t$로 놓으면 $x=2+t$이고 $x\longrightarrow2$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{\log_2(x-1)}{x-2}=\lim_{t\to0}\frac{\log_2(1+t)}{t}$

$=\frac{1}{\ln2}$

답 $\frac{1}{\ln2}$

**13** (1) $x\longrightarrow0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(ax+b)=0$이므로 $b=0$

$b=0$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{ax}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{e^{2x}-1}\cdot\frac{a}{2}=1\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$

따라서 $\frac{a}{2}=\frac{1}{5}$이므로 $a=\frac{2}{5}$

(2) $x\longrightarrow0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x \to 0} \ln(a+3x)=0$이므로

$\ln a=0 \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 주어진 식에 대입하면

$$b=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{e^{4x}-1}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot\frac{4x}{e^{4x}-1}\cdot\frac{3}{4}\right\}$$
$$=1\cdot 1\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

답 (1) $a=\frac{2}{5}$, $b=0$ (2) $a=1$, $b=\frac{3}{4}$

**14** (1) $x \to 0$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to 0$이므로 (분모) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}\ln(a+5x)=0$이므로

$\ln a=0 \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 주어진 식에 대입하면

$$b=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\ln(1+5x)}\cdot\frac{1}{5}$$
$$=1\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$$

(2) $x \to 0$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to 0$이므로 (분모) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(2^x-b)=0$이므로

$1-b=0 \qquad \therefore b=1$

$b=1$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{2^x-1}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+ax)}{ax}\cdot\frac{x}{2^x-1}\cdot a\right\}$$
$$=1\cdot\frac{1}{\ln 2}\cdot a=\frac{a}{\ln 2}$$

따라서 $\frac{a}{\ln 2}=\frac{4}{\ln 2}$이므로 $\qquad a=4$

답 (1) $a=1$, $b=\frac{1}{5}$ (2) $a=4$, $b=1$

**15** $x \to 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2}\{a\ln(x-1)+b\}=0$이므로 $\qquad b=0$

$b=0$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{a\ln(x-1)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{a}{x+2}\cdot\frac{\ln(x-1)}{x-2}\right\}$$

이때 $x-2=t$로 놓으면 $x=2+t$이고 $x \to 2$일 때 $t \to 0$이므로

$$\lim_{x\to 2}\left\{\frac{a}{x+2}\cdot\frac{\ln(x-1)}{x-2}\right\}=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{a}{t+4}\cdot\frac{\ln(1+t)}{t}\right\}$$
$$=\frac{a}{4}\cdot 1=\frac{a}{4}$$

따라서 $\frac{a}{4}=3$이므로 $\qquad a=12$

답 $a=12$, $b=0$

## 02 지수함수와 로그함수의 미분

**확인** 본책 57~58쪽

**1** (1) $y'=(2e^x)'=2(e^x)'=2e^x$

(2) $y=e^{x-1}=e^{-1}\cdot e^x$이므로

$y'=(e^{-1}\cdot e^x)'=e^{-1}(e^x)'=e^{-1}\cdot e^x=e^{x-1}$

(3) $y=5^{-x}=\left(\frac{1}{5}\right)^x$이므로

$y'=\left(\frac{1}{5}\right)^x\ln\frac{1}{5}=-5^{-x}\ln 5$

(4) $y=3^{x+1}=3\cdot 3^x$이므로

$y'=(3\cdot 3^x)'=3(3^x)'=3\cdot 3^x\ln 3$
$=3^{x+1}\ln 3$

답 (1) $y'=2e^x$ (2) $y'=e^{x-1}$ (3) $y'=-5^{-x}\ln 5$ (4) $y'=3^{x+1}\ln 3$

**2** (1) $y=\ln 4x=\ln 4+\ln x$이므로

$y'=(\ln 4)'+(\ln x)'=\frac{1}{x}$

(2) $y=\ln x^3=3\ln x$이므로

$y'=(3\ln x)'=3(\ln x)'=3\cdot\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$

(3) $y=\frac{1}{\log_x 3}=\log_3 x$이므로

$y'=\frac{1}{x\ln 3}$

(4) $y=\log_5 x^3=3\log_5 x$이므로

$y'=(3\log_5 x)'=3(\log_5 x)'=\frac{3}{x\ln 5}$

답 (1) $y'=\frac{1}{x}$ (2) $y'=\frac{3}{x}$ (3) $y'=\frac{1}{x\ln 3}$ (4) $y'=\frac{3}{x\ln 5}$

**유제** 본책 59~60쪽

**1** (1) $y'=(2x-1)'e^x+(2x-1)(e^x)'$
$=2e^x+(2x-1)e^x$
$=(2x+1)e^x$

(2) $y=e^{3x}=e^x\cdot e^x\cdot e^x$이므로

$y'=(e^x)'e^x\cdot e^x+e^x(e^x)'e^x+e^x\cdot e^x(e^x)'$
$=e^x\cdot e^x\cdot e^x+e^x\cdot e^x\cdot e^x+e^x\cdot e^x\cdot e^x=3e^{3x}$

(3) $y'=(3^x)'(x^2+1)+3^x(x^2+1)'$
$=3^x\ln 3\cdot(x^2+1)+3^x\cdot 2x$
$=3^x(x^2\ln 3+2x+\ln 3)$

답 (1) $y'=(2x+1)e^x$ (2) $y'=3e^{3x}$ (3) $y'=3^x(x^2\ln 3+2x+\ln 3)$

**2** $f(x)=(x^2+2x)e^{x-1}=e^{-1}(x^2+2x)e^x$이므로

$$f'(x)=e^{-1}\{(x^2+2x)'e^x+(x^2+2x)(e^x)'\}$$
$$=e^{-1}\{(2x+2)e^x+(x^2+2x)e^x\}$$
$$=(x^2+4x+2)e^{x-1}$$

$\therefore f'(2)=(2^2+4\cdot2+2)e^{2-1}=14e$

답 $14e$

**3** $f(x)=(ax-1)3^{x+b}=3^b(ax-1)3^x$이므로

$$f'(x)=3^b\{(ax-1)'3^x+(ax-1)(3^x)'\}$$
$$=3^b\{a\cdot3^x+(ax-1)3^x\ln3\}$$
$$=3^{x+b}(a+ax\ln3-\ln3)$$

이때 $f'(0)=0$이므로 $\quad 3^b(a-\ln3)=0$

$\therefore a=\ln3 \ (\because 3^b>0)$

$$\therefore f'(x)=3^{x+b}\{\ln3+x(\ln3)^2-\ln3\}$$
$$=x\cdot3^{x+b}(\ln3)^2$$

또 $f'(1)=(\ln3)^2$이므로

$3^{1+b}(\ln3)^2=(\ln3)^2 \qquad \therefore 3^{1+b}=1$

따라서 $1+b=0$이므로 $\quad b=-1$

답 $a=\ln3,\ b=-1$

**4** (1) $y=(2x+3)\ln2x=(2x+3)(\ln2+\ln x)$이므로

$$y'=(2x+3)'(\ln2+\ln x)+(2x+3)(\ln2+\ln x)'$$
$$=2(\ln2+\ln x)+(2x+3)\cdot\frac{1}{x}$$
$$=2\ln2x+2+\frac{3}{x}$$

(2) $y=(x^2-1)\log_3x^3=3(x^2-1)\log_3x$이므로

$$y'=3\{(x^2-1)'\log_3x+(x^2-1)(\log_3x)'\}$$
$$=3\left\{2x\log_3x+(x^2-1)\cdot\frac{1}{x\ln3}\right\}$$
$$=6x\log_3x+\frac{3(x^2-1)}{x\ln3}$$

(3) $y=2^x\ln3x=2^x(\ln3+\ln x)$이므로

$$y'=(2^x)'(\ln3+\ln x)+2^x(\ln3+\ln x)'$$
$$=2^x\ln2\cdot(\ln3+\ln x)+2^x\cdot\frac{1}{x}$$
$$=2^x\left(\ln2\cdot\ln3x+\frac{1}{x}\right)$$

(4) $y'=(\ln x+e^x)'\ln x+(\ln x+e^x)(\ln x)'$

$$=\left(\frac{1}{x}+e^x\right)\ln x+(\ln x+e^x)\cdot\frac{1}{x}$$
$$=e^x\ln x+\frac{2\ln x}{x}+\frac{e^x}{x}$$

답 (1) $y'=2\ln2x+2+\dfrac{3}{x}$ (2) $y'=6x\log_3x+\dfrac{3(x^2-1)}{x\ln3}$

(3) $y'=2^x\left(\ln2\cdot\ln3x+\dfrac{1}{x}\right)$ (4) $y'=e^x\ln x+\dfrac{2\ln x}{x}+\dfrac{e^x}{x}$

**5** $f(x)=x\ln x+5x$에서

$$f'(x)=(x)'\ln x+x(\ln x)'+(5x)'$$
$$=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+5=\ln x+6$$

$\therefore f'(e)=\ln e+6=7$

답 7

**6** $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+4h)-f(1+3h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+4h)-f(1)-f(1+3h)+f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1+4h)-f(1)}{4h}\cdot4\right\}-\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\cdot3\right\}$$
$$=4f'(1)-3f'(1)=f'(1)$$

이때 $f(x)=e^x\ln x-1$에서

$$f'(x)=(e^x)'\ln x+e^x(\ln x)'-(1)'$$
$$=e^x\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}$$
$$=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$$

$\therefore f'(1)=e$

답 $e$

## 중단원 연습 문제

본책 61~63쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **01** 4 | **02** ④ | **03** $B<A<C$ | | **04** ⑤ |
| **05** ⑤ | **06** ② | **07** ④ | **08** $\frac{2}{3}$ | **09** ① |
| **10** $\frac{1}{4}$ | **11** 9 | **12** 12 | **13** $-\frac{3}{2}$ | **14** $5e$ |
| **15** 4 | **16** ② | **17** 2 | **18** $\frac{7}{20}$ | **19** 8 |
| **20** ① | **21** $\frac{1}{2\ln2}-1$ | | **22** 50 | |

**01** 전략 $-x=t$로 놓고 식을 변형한 후 $0<a<1$일 때 $\lim_{t\to\infty}a^t=0$임을 이용한다.

풀이 $-x=t$로 놓으면 $x=-t$이고 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7^{x+1}-2^{x+2}}{7^x-2^x}=\lim_{t\to\infty}\frac{7^{-t+1}-2^{-t+2}}{7^{-t}-2^{-t}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{7\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^t-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t}{\left(\frac{1}{7}\right)^t-\left(\frac{1}{2}\right)^t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{7\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^t-4}{\left(\frac{2}{7}\right)^t-1}=4$$

답 4

**02** 전략 $\lim_{x\to k}\{\log_a f(x)\}=\log_a\left\{\lim_{x\to k} f(x)\right\}$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to1}(\log_3|x^3-1|-\log_3|x^2-1|)$

$=\lim_{x\to1}\log_3\left|\frac{x^3-1}{x^2-1}\right|=\lim_{x\to1}\log_3\left|\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}\right|$

$=\lim_{x\to1}\log_3\left|\frac{x^2+x+1}{x+1}\right|$

$=\log_3\left(\lim_{x\to1}\left|\frac{x^2+x+1}{x+1}\right|\right)$

$=\log_3\frac{3}{2}=1-\log_3 2$

답 ④

**03** 전략 $\lim_{●\to0}(1+●)^{\frac{1}{●}}=e$임을 이용한다.

풀이 $A=\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x+1}}{2^x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^x}=2$ ···➊

$B=\lim_{x\to\infty}\{\log_4(4x-5)-\log_4(x+1)\}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_4\frac{4x-5}{x+1}=\log_4\left(\lim_{x\to\infty}\frac{4x-5}{x+1}\right)$

$=\log_4 4=1$ ···➋

$C=\lim_{x\to0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}}=e$ ···➌

$\therefore B<A<C$ ···➍

답 $B<A<C$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ $A$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ➋ $B$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ➌ $C$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ➍ $A$, $B$, $C$의 대소 관계를 구할 수 있다. | 10 % |

**04** 전략 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}=e$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-3}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x}\right)^{-2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{-2x}$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{3}{x}\right)^{-\frac{x}{3}}\right\}^6=e^6$

답 ⑤

**05** 전략 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}=e$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{10}{x}\right)\right\}^x$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{2}{x}\right)^x\left(1+\frac{3}{x}\right)^x\cdots\left(1+\frac{10}{x}\right)^x\right\}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}^2\cdot\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right\}^3$

$\cdots\cdot\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{10}{x}\right)^{\frac{x}{10}}\right\}^{10}$

$=e\cdot e^2\cdot e^3\cdot\cdots\cdot e^{10}=e^{1+2+3+\cdots+10}$

$=e^{\frac{10\cdot11}{2}}=e^{55}$

답 ⑤

**06** 전략 $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$임을 이용한다.

풀이 $f(e^2)=\lim_{h\to0}\frac{(\ln e^2)^h-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2^h-1}{h}=\ln 2$

답 ②

**07** 전략 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$임을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+5x)}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+5x)}{5x}\cdot\frac{2x}{e^{2x}-1}\cdot\frac{5}{2}\right\}$

$=1\cdot1\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$

답 ④

**08** 전략 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$임을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}[x\{\ln(3x+1)-\ln(3x-1)\}]$

$=\lim_{x\to\infty}\left(x\ln\frac{3x+1}{3x-1}\right)$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{x\ln\left(1+\frac{2}{3x-1}\right)\right\}$

$\frac{2}{3x-1}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{t}\right)$이고 $x\to\infty$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to\infty}\left\{x\ln\left(1+\frac{2}{3x-1}\right)\right\}$

$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{t}\right)\ln(1+t)\right\}$

$=\frac{1}{3}\lim_{t\to0}\left\{\ln(1+t)+\frac{2\ln(1+t)}{t}\right\}$

$=\frac{1}{3}(0+2\cdot1)=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

**09** 전략 $\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$임을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to0}\frac{\log_2(7+x)-\log_2 7}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\log_2\frac{x+7}{7}}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\log_2\left(1+\frac{x}{7}\right)}{\frac{x}{7}}\cdot\frac{1}{7}$

$=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{7\ln 2}$

답 ①

**10** 전략 함수 $g(x)$를 구한 후 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$임을 이용한다.

풀이 $y=e^{4x}-1$이라 하면 $e^{4x}=y+1$

로그의 정의에 의하여 $4x=\ln(y+1)$

$\therefore x=\frac{1}{4}\ln(y+1)$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{4}\ln(x+1)$

따라서 $g(x)=\frac{1}{4}\ln(x+1)$이므로 ➊

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{4x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot1=\frac{1}{4}$$ ➋

답 $\frac{1}{4}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ $g(x)$를 구할 수 있다. | 50 % |
| ➋ $\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x}$의 값을 구할 수 있다. | 50 % |

**11** 전략 $S_1(t)$, $S_2(t)$를 $t$에 대한 식으로 나타낸 후 로그함수의 극한을 이용한다.

풀이 점 P의 좌표가 $(t, \ln(1+3t))$이고, 두 삼각형 PAC, PBD는 모두 직각이등변삼각형이므로

$\overline{DB}=\overline{BP}=t$,

$\overline{AC}=\overline{PA}=\ln(1+3t)$

따라서 $S_1(t)=\frac{1}{2}\{\ln(1+3t)\}^2$, $S_2(t)=\frac{1}{2}t^2$이므로

$$\lim_{t\to0+}\frac{S_1(t)}{S_2(t)}=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{2}\{\ln(1+3t)\}^2}{\frac{1}{2}t^2}=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{\ln(1+3t)}{t}\right\}^2$$

$$=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{\ln(1+3t)}{3t}\cdot3\right\}^2$$

$$=(1\cdot3)^2=9$$

답 9

**12** 전략 $x\to0$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to0$이면 (분모) $\to0$임을 이용한다.

풀이 $x\to0$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to0$이므로 (분모) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(x^2+b)=0$이므로 $b=0$ ➊

$b=0$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)\ln(1+ax)}{x^2}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{\ln(1+ax)}{ax}\cdot a\right\}$$

$$=1\cdot1\cdot a=a$$

$\therefore a=12$ ➋

$\therefore a+b=12$ ➌

답 12

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ $b$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ➋ $a$의 값을 구할 수 있다. | 50 % |
| ➌ $a+b$의 값을 구할 수 있다. | 10 % |

**13** 전략 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{e^x-3x+a}{4x}=b \quad\cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(e^x-3x+a)=0$이므로

$1+a=0 \quad \therefore a=-1$ ➊

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to0}\frac{e^x-3x-1}{4x}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-3x}{x}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}-3\right)$$

$$=\frac{1}{4}(1-3)=-\frac{1}{2}$$ ➋

$\therefore a+b=-\frac{3}{2}$ ➌

답 $-\frac{3}{2}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ $a$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ➋ $b$의 값을 구할 수 있다. | 50 % |
| ➌ $a+b$의 값을 구할 수 있다. | 10 % |

**라이트 UP**

함수 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\neq a) \\ k & (x=a)\end{cases}$가 $x=a$에서 연속이면

$\lim_{x\to a}g(x)=k$ (단, $k$는 상수)

**14** 전략 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)-f(1-2h)+f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\cdot3\right\}+\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\cdot2\right\}$$

$$=3f'(1)+2f'(1)$$

$$=5f'(1)$$

이때 $f(x)=(x-1)e^x$에서

$f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$

이므로 $f'(1)=e$

$\therefore 5f'(1)=5e$

답 $5e$

**15** 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=2\ln x+2x\cdot\frac{1}{x}=2\ln x+2$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(e, 2e)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(e)=2\ln e+2=4$$

답 4

**16** 전략 미분계수의 정의를 이용하여 $a$의 값을 구한다.

풀이 $\lim_{x\to0}\frac{f(3+x)-f(3-x)}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(3+x)-f(3)-f(3-x)+f(3)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(3+x)-f(3)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{f(3-x)-f(3)}{-x}$$

$$=f'(3)+f'(3)=2f'(3)$$

즉 $2f'(3)=6$이므로

$$f'(3)=3$$

이때 $f(x)=x\ln x+ax$에서

$$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+a=\ln x+a+1$$

이므로 $f'(3)=\ln 3+a+1$

따라서 $\ln 3+a+1=3$이므로

$$a=2-\ln 3$$

답 ②

**17** 전략 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$임을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to0}\frac{\ln\{1+f(2x)\}}{x}=4$에서 $x\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}\ln\{1+f(2x)\}=0$이므로

$$\lim_{x\to0}f(2x)=0$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{\ln\{1+f(2x)\}}{x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln\{1+f(2x)\}}{f(2x)}\cdot\frac{f(2x)}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(2x)}{x}$$

$\lim_{x\to0}\frac{f(2x)}{x}$에서 $2x=t$로 놓으면 $x=\frac{t}{2}$이고 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(2x)}{x}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{\frac{t}{2}}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}\cdot2$$

따라서 $\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}\cdot2=4$이므로 $\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=2$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$$

답 2

**18** 전략 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$임을 이용한다.

풀이 $x\neq0$일 때, $f(x)\ln(5x+1)=2^x-1$에서

$$f(x)=\frac{2^x-1}{\ln(5x+1)}$$

$$\therefore f(3)=\frac{2^3-1}{\ln 16}=\frac{7}{4\ln 2} \quad \cdots ❶$$

한편 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{\ln(5x+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{2^x-1}{x}\cdot\frac{5x}{\ln(5x+1)}\cdot\frac{1}{5}\right\}$$

$$=\ln 2\cdot1\cdot\frac{1}{5}=\frac{\ln 2}{5} \quad \cdots ❷$$

$$\therefore f(0)f(3)=\frac{\ln 2}{5}\cdot\frac{7}{4\ln 2}=\frac{7}{20} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{7}{20}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f(3)$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $f(0)$의 값을 구할 수 있다. | 60 % |
| ❸ $f(0)f(3)$의 값을 구할 수 있다. | 10 % |

**19** 전략 $\ln x=t$로 놓고 식을 변형한 후 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 $\ln x=t$로 놓으면 $x=e^t$이고 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(\ln x)-f(0)}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)-f(0)}{e^t-1}$$

$$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{f(t)-f(0)}{t}\cdot\frac{t}{e^t-1}\right\}$$

$$=f'(0)\cdot1=f'(0)$$

$$=8$$

답 8

**20** 전략 점 P가 곡선 $y=\ln x$와 직선 $x+y=t$의 교점임을 이용하여 $S(t)$를 구한다.

풀이 점 P의 좌표를 $(a, \ln a)$라 하면

$$\mathrm{H}(a, 0), \mathrm{Q}(a, e^a)$$

$$\therefore S(t)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OH}}\cdot\overline{\mathrm{QH}}=\frac{1}{2}ae^a \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 점 $\mathrm{P}(a, \ln a)$가 직선 $x+y=t$ 위의 점이므로

$$a+\ln a=t, \quad \ln e^a+\ln a=\ln e^t$$

$$\ln ae^a=\ln e^t \quad \therefore ae^a=e^t$$

$ae^a=e^t$을 ㉠에 대입하면

$$S(t)=\frac{1}{2}e^t$$

$$\therefore \lim_{t\to0+}\frac{2S(t)-1}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{e^t-1}{t}=1$$

답 ①

**21** 전략 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이고 $\lim_{x\to2+}f'(x)=\lim_{x\to2-}f'(x)$임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하면 $x=2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$$

$$\lim_{x\to2+}(\log_2 x+b)=\lim_{x\to2-}(x^2-ax)=\log_2 2+b$$

$$1+b=4-2a \qquad \therefore 2a+b=3$$

또 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\ln 2} & (x>2)\\ 2x-a & (x<2)\end{cases}$에서 함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수가 존재하므로

$$\lim_{x\to2+}f'(x)=\lim_{x\to2-}f'(x)$$

$$\lim_{x\to2+}\frac{1}{x\ln 2}=\lim_{x\to2-}(2x-a)$$

$$\frac{1}{2\ln 2}=4-a \qquad \therefore a=4-\frac{1}{2\ln 2}$$

$$\therefore a+b=(2a+b)-a=3-\left(4-\frac{1}{2\ln 2}\right)$$

$$=\frac{1}{2\ln 2}-1$$

답 $\dfrac{1}{2\ln 2}-1$

**22** 전략 곱의 미분법을 이용하여 $g'(x)$를 구한 후 $f'(e)g'(e)=-1$임을 이용한다.

풀이 $g(x)=f(x)\ln x^4=4f(x)\ln x$이므로

$$g'(x)=4f'(x)\ln x+4f(x)\cdot\frac{1}{x}$$

$$\therefore g'(e)=4f'(e)+\frac{4f(e)}{e}=4f'(e)+\frac{4\cdot(-e)}{e}$$

$$=4f'(e)-4$$

이때 $f'(e)g'(e)=-1$이므로

$$f'(e)\{4f'(e)-4\}=-1, \qquad 4\{f'(e)\}^2-4f'(e)+1=0$$

$$\{2f'(e)-1\}^2=0 \qquad \therefore f'(e)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore 100f'(e)=50$$

답 50

Ⅱ. 여러 가지 함수의 미분

# 04 삼각함수의 미분

## 01 삼각함수

### 확인

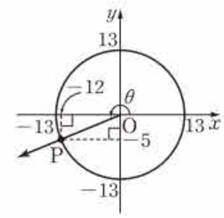
본책 67쪽

**1** 오른쪽 그림에서

$\overline{OP}=\sqrt{(-12)^2+(-5)^2}=13$이므로

$$\csc\theta=-\frac{13}{5},\ \sec\theta=-\frac{13}{12},$$

$$\cot\theta=\frac{12}{5}$$




답 풀이 참조

**2** (1) $\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=-\sin\frac{3}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$$\csc\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{1}{\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)}=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

(2) $\cos\frac{11}{6}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$$\sec\frac{11}{6}\pi=\frac{1}{\cos\frac{11}{6}\pi}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(3) $\tan(-240°)=-\tan 240°=-\sqrt{3}$이므로

$$\cot(-240°)=\frac{1}{\tan(-240°)}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 (1) $-\sqrt{2}$ (2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

**3** $\tan\theta=\frac{2}{3}$이므로

$$\sec^2\theta=\tan^2\theta+1=\left(\frac{2}{3}\right)^2+1=\frac{13}{9}$$

또 $\cot\theta=\frac{3}{2}$이므로

$$\csc^2\theta=1+\cot^2\theta=1+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$$

답 $\sec^2\theta=\frac{13}{9},\ \csc^2\theta=\frac{13}{4}$

### 유제

본책 68~69쪽

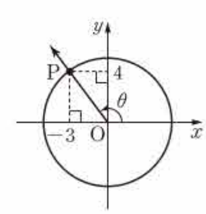
**1** 오른쪽 그림에서

$\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$이므로

$$\sec\theta=-\frac{5}{3},\ \cot\theta=-\frac{3}{4}$$

$$\therefore \sec\theta\cot\theta=\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$=\frac{5}{4}$$




답 $\frac{5}{4}$

04 삼각함수의 미분

다른 풀이 $\sec\theta\cot\theta=\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta}$
$=\csc\theta=\frac{5}{4}$

**2** $\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$
$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

한편 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

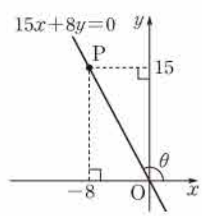
$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$ $\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$

따라서 주어진 식의 값은

$\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{-\frac{4}{9}}=-\frac{9}{4}$ 답 $-\frac{9}{4}$

**3** 직선 $15x+8y=0$을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




이때 직선 $15x+8y=0$ 위의 점 $\mathrm{P}(-8,\ 15)$에 대하여

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-8)^2+15^2}=17$

이므로

$\sin\theta=\frac{15}{17},\ \sec\theta=-\frac{17}{8}$

$\therefore 17\sin\theta+8\sec\theta=17\cdot\frac{15}{17}+8\cdot\left(-\frac{17}{8}\right)$
$=-2$ 답 $-2$

**4** (1) $\frac{\cos\theta}{\sec\theta-\tan\theta}-\frac{\cos\theta}{\sec\theta+\tan\theta}$
$=\frac{\cos\theta(\sec\theta+\tan\theta)-\cos\theta(\sec\theta-\tan\theta)}{(\sec\theta-\tan\theta)(\sec\theta+\tan\theta)}$
$=\frac{2\cos\theta\tan\theta}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}$
$=2\sin\theta$

(2) $\frac{\cot\theta}{1-\csc\theta}-\frac{1-\csc\theta}{\cot\theta}=\frac{\cot^2\theta-(1-\csc\theta)^2}{\cot\theta(1-\csc\theta)}$
$=\frac{-2+2\csc\theta}{\cot\theta(1-\csc\theta)}$
$=\frac{-2(1-\csc\theta)}{\cot\theta(1-\csc\theta)}$
$=-\frac{2}{\cot\theta}=-2\tan\theta$

답 (1) $2\sin\theta$ (2) $-2\tan\theta$

**5** $\frac{1}{1-\cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}=\frac{18}{5}$에서

$\frac{(1+\cos\theta)+(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}=\frac{18}{5},\quad \frac{2}{1-\cos^2\theta}=\frac{18}{5}$

$\frac{1}{\sin^2\theta}=\frac{9}{5}\quad\therefore \csc^2\theta=\frac{9}{5}$

$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$이므로

$\cot^2\theta=\csc^2\theta-1=\frac{9}{5}-1=\frac{4}{5}$

$\therefore \cot\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\ \left(\because \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi\right)$

$\therefore \tan\theta-\cot\theta=\frac{1}{\cot\theta}-\cot\theta=-\frac{\sqrt{5}}{2}-\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$
$=-\frac{\sqrt{5}}{10}$ 답 $-\frac{\sqrt{5}}{10}$

## 02 삼각함수의 덧셈정리

확인 본책 71~73쪽

**1** (1) $\sin\frac{5}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$
$=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$
$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(2) $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$
$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(3) $\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}$
$=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$
$=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$

답 (1) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (3) $2-\sqrt{3}$

**2** (1) $\sin 20^\circ\cos 40^\circ+\cos 20^\circ\sin 40^\circ=\sin(20^\circ+40^\circ)$
$=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos 10^\circ\cos 35^\circ-\sin 10^\circ\sin 35^\circ=\cos(10^\circ+35^\circ)$
$=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\frac{\tan 70^\circ-\tan 40^\circ}{1+\tan 70^\circ\tan 40^\circ}=\tan(70^\circ-40^\circ)=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**3** $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$에서 $\cos\alpha<0$이므로

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$$

$$\therefore\ \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$$

(1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{24}{25}$

(2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\left(-\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2=-\frac{7}{25}$

(3) $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{24}{7}$

답 (1) $-\frac{24}{25}$ (2) $-\frac{7}{25}$ (3) $\frac{24}{7}$

**4** $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$$

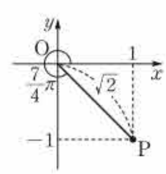
$$\therefore\ \sin 2\theta+\cos 2\theta=2\sin\theta\cos\theta+(1-2\sin^2\theta)$$

$$=2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)+\left\{1-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{4\sqrt{5}+1}{9}$$

답 $\frac{4\sqrt{5}+1}{9}$

**5** (1) 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $P(1,\ -1)$을 잡으면




$$\overline{OP}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

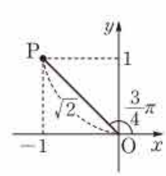
$\therefore\ \sin\theta-\cos\theta$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi\sin\theta+\sin\frac{7}{4}\pi\cos\theta\right)$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{7}{4}\pi\right)$$

(2) 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $P(-1,\ 1)$을 잡으면




$$\overline{OP}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$\therefore\ \sin\theta-\cos\theta$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\sin\frac{3}{4}\pi\sin\theta+\cos\frac{3}{4}\pi\cos\theta\right)$$

$$=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{3}{4}\pi\right)$$

답 (1) $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{7}{4}\pi\right)$ (2) $\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{3}{4}\pi\right)$

**유제** 본책 74~76쪽

**1** $0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<\beta<\pi$이므로 $\cos\alpha>0,\ \sin\beta>0$

$$\therefore\ \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore\ \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=-2$$

(1) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$=\frac{-\sqrt{5}-4\sqrt{10}}{15}$$

(2) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{10}}{15}$$

(3) $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}+(-2)}{1-\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot(-2)}$

$$=\frac{\sqrt{2}-8}{4+2\sqrt{2}}=\frac{-9+5\sqrt{2}}{2}$$

답 (1) $\frac{-\sqrt{5}-4\sqrt{10}}{15}$ (2) $\frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{10}}{15}$ (3) $\frac{-9+5\sqrt{2}}{2}$

**2** 이차방정식 $x^2-3x-1=0$의 두 근이 $\tan\alpha,\ \tan\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan\alpha+\tan\beta=3,\ \tan\alpha\tan\beta=-1$$

$$\therefore\ \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{3}{1-(-1)}=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

**3** $\cos A=\frac{3}{5},\ \cos B=\frac{12}{13}$이므로

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5},$$

$$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$$

$$\therefore\ \cos C=\cos\{\pi-(A+B)\}=-\cos(A+B)$$

$$=-\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

$$=-\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}$$

$$=-\frac{16}{65}$$

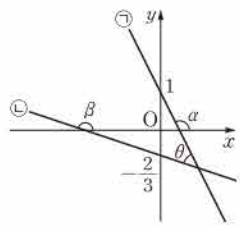
답 $-\frac{16}{65}$

**4** $2x+y-1=0$에서

$y=-2x+1$ ...... ㉠

$x+3y+2=0$에서

$y=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$ ...... ㉡




오른쪽 그림과 같이 두 직선 ㉠, ㉡이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면

$\tan\alpha=-2$, $\tan\beta=-\frac{1}{3}$

두 직선 ㉠, ㉡이 이루는 예각의 크기를 $\theta$라 하면 $\theta=\beta-\alpha$이므로

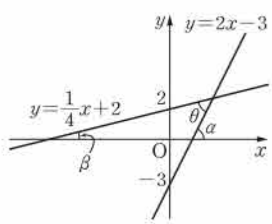
$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

$$=\frac{-\frac{1}{3}-(-2)}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(-2)}=1$$

이때 $\theta$는 예각이므로 $\theta=\frac{\pi}{4}$

답 $\frac{\pi}{4}$

**5** 오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y=2x-3$, $y=\frac{1}{4}x+2$가 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면




$\tan\alpha=2$, $\tan\beta=\frac{1}{4}$

$\theta=\alpha-\beta$이므로

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{2-\frac{1}{4}}{1+2\cdot\frac{1}{4}}=\frac{7}{6}$$

이때 $\sec^2\theta=\tan^2\theta+1$이므로

$$36\sec^2\theta=36\left\{\left(\frac{7}{6}\right)^2+1\right\}=36\cdot\frac{85}{36}=85$$

답 85

**6** $ax-y-1=0$에서

$y=ax-1$ ...... ㉠

$2x+3y-1=0$에서

$y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$ ...... ㉡

두 직선 ㉠, ㉡이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면

$\tan\alpha=a$, $\tan\beta=-\frac{2}{3}$

두 직선 ㉠, ㉡이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$$|\tan(\alpha-\beta)|=\tan\frac{\pi}{4}$$

$$\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=1,\qquad \frac{a+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}a}=\pm1$$

$a+\frac{2}{3}=1-\frac{2}{3}a$ 또는 $a+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}a-1$

$\frac{5}{3}a=\frac{1}{3}$ 또는 $\frac{1}{3}a=-\frac{5}{3}$

$\therefore a=\frac{1}{5}$ 또는 $a=-5$

이때 $a$는 양수이므로 $a=\frac{1}{5}$

답 $\frac{1}{5}$

**7** $y=3\cos x+\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$=3\cos x+\sqrt{3}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=3\cos x+\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{3}{2}\cos x$

$=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$

$=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)$

$=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

이때 $-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le1$이므로

$-\sqrt{3}\le\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le\sqrt{3}$

따라서 최댓값은 $\sqrt{3}$, 최솟값은 $-\sqrt{3}$이다.

답 최댓값: $\sqrt{3}$, 최솟값: $-\sqrt{3}$

**8** $y=a\sin x+b\cos x+1$

$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)+1$

$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)+1$

$\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

이때 $-1\le\sin(x+\alpha)\le1$이므로

$-\sqrt{a^2+b^2}\le\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)\le\sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore -\sqrt{a^2+b^2}+1\le\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)+1\le\sqrt{a^2+b^2}+1$

따라서 최댓값은 $\sqrt{a^2+b^2}+1$, 최솟값은 $-\sqrt{a^2+b^2}+1$이므로

$(1+\sqrt{a^2+b^2})(1-\sqrt{a^2+b^2})=-11$

$1-(a^2+b^2)=-11$

$\therefore a^2+b^2=12$

답 12

## 03 삼각함수의 극한

**확인** 본책 77~78쪽

**1** (1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin x=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

(2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\tan x=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\sqrt{3}$

**2** (1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot3\right)$

$=1\cdot3=3$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{\tan 5x}{2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan 5x}{5x}\cdot\frac{5}{2}\right)$

$=1\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$

답 (1) 3 (2) $\frac{5}{2}$

**유제** 본책 79~82쪽

**1** (1) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1$

(2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cot x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\frac{\cos x}{\sin x}}{\sin x-\cos x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\sin x(\sin x-\cos x)}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin x}=\sqrt{2}$

(3) $\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}\frac{\sin 2x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x}$

$=\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}2\sin x=-2$

(4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{1-\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{\cos x-\sin x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x(\cos x+\sin x)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1$

답 (1) 1 (2) $\sqrt{2}$ (3) $-2$ (4) 1

다른 풀이 (1) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right)$

$=1\cdot1=1$

**2** $x\neq0$일 때, $-1\le\cos\frac{1}{x}\le1$이므로

$0\le\left|\cos\frac{1}{x}\right|\le1$

$\therefore\ 0\le\left|\tan x\cos\frac{1}{x}\right|\le|\tan x|$

이때 $\lim_{x\to0}|\tan x|=0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to0}\left|\tan x\cos\frac{1}{x}\right|=0$

$\therefore\ \lim_{x\to0}\tan x\cos\frac{1}{x}=0$

답 0

**라이트 UP**

**함수의 극한의 대소 관계**

세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$와 $a$에 가까운 모든 실수 $x$에 대하여

① $f(x)\le g(x)$이고 $\lim_{x\to a}f(x)$와 $\lim_{x\to a}g(x)$가 존재하면

$\lim_{x\to a}f(x)\le\lim_{x\to a}g(x)$

② $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=L$이면

$\lim_{x\to a}h(x)=L$

**3** (1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x+\sin 5x}{\sin 4x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot3+\frac{\sin 5x}{5x}\cdot5}{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot4}$

$=\frac{1\cdot3+1\cdot5}{1\cdot4}=2$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right\}$

$=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(3) $3x^\circ=\frac{\pi}{180}\cdot3x=\frac{\pi}{60}x$(라디안)이므로

$\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x^\circ}{\tan x+\tan 2x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan\frac{\pi}{60}x}{\tan x+\tan 2x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\tan\frac{\pi}{60}x}{\frac{\pi}{60}x}\cdot\frac{\pi}{60}}{\frac{\tan x}{x}+\frac{\tan 2x}{2x}\cdot2}$

$=\frac{1\cdot\frac{\pi}{60}}{1+1\cdot2}=\frac{\pi}{180}$

(4) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan(\sin 2x)} = \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{\sin 2x}{\tan(\sin 2x)} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{2} \right\}$

$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

답 (1) 2 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{\pi}{180}$ (4) $\frac{1}{2}$

**4** (1) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \left( \frac{\tan 3x}{3x} \cdot \frac{x}{e^x - 1} \cdot 3 \right)$

$= 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin 5x} = \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{\ln(1+2x)}{2x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{2}{5} \right\}$

$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$

답 (1) 3 (2) $\frac{2}{5}$

라이트 UP

**무리수 $e$의 정의를 이용한 지수함수와 로그함수의 극한**

① $\lim_{\blacktriangle \to 0} \frac{\ln(1+\blacktriangle)}{\blacktriangle} = 1$ ② $\lim_{\bullet \to 0} \frac{e^{\bullet} - 1}{\bullet} = 1$

**5** (1) $x - \pi = t$로 놓으면 $x = \pi + t$이고 $x \longrightarrow \pi$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$\lim_{x \to \pi} \frac{\pi - x}{\sin x} = \lim_{t \to 0} \frac{-t}{\sin(\pi + t)} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\sin t} = 1$

(2) $x - 3 = t$로 놓으면 $x = 3 + t$이고 $x \longrightarrow 3$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$\lim_{x \to 3} \frac{\sin \pi x}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{\sin \pi x}{(x+3)(x-3)}$

$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin(3\pi + \pi t)}{t(t+6)} = \lim_{t \to 0} \frac{-\sin \pi t}{t(t+6)}$

$= -\lim_{t \to 0} \left( \frac{\sin \pi t}{\pi t} \cdot \frac{\pi}{t+6} \right)$

$= -1 \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$

(3) $\frac{1}{x} = t$로 놓으면 $x = \frac{1}{t}$이고 $x \longrightarrow \infty$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

(4) $x - \frac{\pi}{3} = t$로 놓으면 $x = \frac{\pi}{3} + t$이고 $x \longrightarrow \frac{\pi}{3}$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(\sin 6x)}{3x - \pi} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin\{\sin(2\pi + 6t)\}}{(\pi + 3t) - \pi}$

$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin(\sin 6t)}{3t}$

$= \lim_{t \to 0} \left\{ \frac{\sin(\sin 6t)}{\sin 6t} \cdot \frac{\sin 6t}{6t} \cdot 2 \right\}$

$= 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$

답 (1) 1 (2) $-\frac{\pi}{6}$ (3) 1 (4) 2

**6** $\frac{1}{3x+1} = t$로 놓으면

$3x + 1 = \frac{1}{t}$

$\therefore x = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t} - 1\right) = \frac{1-t}{3t}$

$x \longrightarrow \infty$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$\lim_{x \to \infty} x \tan \frac{1}{3x+1} = \lim_{t \to 0} \frac{(1-t)\tan t}{3t}$

$= \lim_{t \to 0} \left( \frac{1-t}{3} \cdot \frac{\tan t}{t} \right)$

$= \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

**7** (1) $x \longrightarrow -\pi$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x \to -\pi} (a \tan x + b) = 0$이므로

$a \tan(-\pi) + b = 0 \qquad \therefore b = 0$

$\therefore \lim_{x \to -\pi} \frac{a \tan x}{x + \pi} = 3$

이때 $x + \pi = t$로 놓으면 $x = -\pi + t$이고 $x \longrightarrow -\pi$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$\lim_{x \to -\pi} \frac{a \tan x}{x + \pi} = \lim_{t \to 0} \frac{a \tan(-\pi + t)}{t}$

$= \lim_{t \to 0} \frac{a \tan t}{t}$

$= a \cdot 1 = a$

$\therefore a = 3$

(2) $x \longrightarrow 3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x \to 3} \left( a \cos \frac{\pi}{2} x + b \right) = 0$이므로

$a \cos \frac{3}{2}\pi + b = 0 \qquad \therefore b = 0$

$\therefore \lim_{x \to 3} \frac{a \cos \frac{\pi}{2} x}{3 - x} = 2$

이때 $x - 3 = t$로 놓으면 $x = 3 + t$이고 $x \longrightarrow 3$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$\lim_{x \to 3} \frac{a \cos \frac{\pi}{2} x}{3 - x} = \lim_{t \to 0} \frac{a \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{2} t\right)}{-t}$

$= -a \lim_{t \to 0} \frac{\sin \frac{\pi}{2} t}{t}$

$= -a \lim_{t \to 0} \frac{\sin \frac{\pi}{2} t}{\frac{\pi}{2} t} \cdot \frac{\pi}{2}$

$= -a \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2}$

$= -\frac{\pi}{2} a$

따라서 $-\frac{\pi}{2}a=2$이므로 $\quad a=-\frac{4}{\pi}$

답 (1) $a=3$, $b=0$ (2) $a=-\frac{4}{\pi}$, $b=0$

**8** (1) $x \longrightarrow 0$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow 0$이므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(\sqrt{ax+b}-2)=0$이므로

$\sqrt{b}-2=0 \qquad \therefore b=4$

$b=4$를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{ax+4}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot(\sqrt{ax+4}+2)}{(\sqrt{ax+4}-2)(\sqrt{ax+4}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot(\sqrt{ax+4}+2)}{ax}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{a}\cdot(\sqrt{ax+4}+2)\right\}$$
$$=1\cdot\frac{2}{a}\cdot 4=\frac{8}{a}$$

따라서 $\frac{8}{a}=1$이므로 $\quad a=8$

(2) $x \longrightarrow \pi$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow 0$이므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to \pi}(2ax-b)=0$이므로

$2a\pi-b=0 \qquad \therefore b=2a\pi \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\cos\frac{x}{2}}{2ax-2a\pi}=\lim_{x\to \pi}\frac{\cos\frac{x}{2}}{2a(x-\pi)}$$

이때 $x-\pi=t$로 놓으면 $x=\pi+t$이고 $x \longrightarrow \pi$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\cos\frac{x}{2}}{2a(x-\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2}\right)}{2at}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin\frac{t}{2}}{2at}$$
$$=-\frac{1}{2a}\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}t}{\frac{1}{2}t}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{1}{2a}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{4a}$$

따라서 $-\frac{1}{4a}=5$이므로 $\quad a=-\frac{1}{20}$

$a=-\frac{1}{20}$을 ㉠에 대입하면

$b=-\frac{\pi}{10}$

답 (1) $a=8$, $b=4$ (2) $a=-\frac{1}{20}$, $b=-\frac{\pi}{10}$

**9** (1) $x \longrightarrow 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(e^{3x}+a)=0$이므로

$1+a=0 \qquad \therefore a=-1$

$a=-1$을 주어진 식에 대입하면

$$b=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\tan 2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\frac{2x}{\tan 2x}\cdot\frac{3}{2}\right)$$
$$=1\cdot 1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

(2) $x \longrightarrow 0$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow 0$이므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}\ln(x+a)=0$이므로

$\ln a=0 \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin bx}{bx}\cdot\frac{x}{\ln(x+1)}\cdot b\right\}$$
$$=1\cdot 1\cdot b=b$$

$\therefore b=4$

답 (1) $a=-1$, $b=\frac{3}{2}$ (2) $a=1$, $b=4$

## 04 사인함수와 코사인함수의 미분

확인 본책 83쪽

**1** (1) $y'=(2\sin x)'=2\cos x$

(2) $y'=(-3\cos x)'=-3(-\sin x)=3\sin x$

(3) $y'=(4\sin x)'+(\cos x)'=4\cos x-\sin x$

답 (1) $y'=2\cos x$ (2) $y'=3\sin x$ (3) $y'=4\cos x-\sin x$

유제 본책 84쪽

**1** (1) $y'=(2x^2-1)'\sin x+(2x^2-1)(\sin x)'$
$=4x\sin x+(2x^2-1)\cos x$

(2) $y'=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'$
$=\cos x\cos x+\sin x(-\sin x)$
$=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$

(3) $y'=(x)'\cos x+x(\cos x)'-(\ln x)'$

$=\cos x+x(-\sin x)-\frac{1}{x}$

$=\cos x-x\sin x-\frac{1}{x}$

답 (1) $y'=4x\sin x+(2x^2-1)\cos x$

(2) $y'=\cos 2x$

(3) $y'=\cos x-x\sin x-\frac{1}{x}$

**2** $f(x)=e^x(\sin x+\cos x)$에서

$f'(x)=(e^x)'(\sin x+\cos x)+e^x(\sin x+\cos x)'$

$=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)$

$=2e^x\cos x$

$\therefore f'(0)=2\cdot 1\cdot 1=2$

답 2

**3** $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left\{f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-h}$

$=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)+f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

이때 $f(x)=3\ln x\sin x$에서

$f'(x)=(3\ln x)'\sin x+3\ln x(\sin x)'$

$=\frac{3}{x}\sin x+3\ln x\cos x$

$\therefore 2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\left(\frac{6}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}+3\ln\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\right)$

$=2\cdot\frac{6}{\pi}=\frac{12}{\pi}$

답 $\frac{12}{\pi}$

## 중단원 연습 문제

본책 85~88쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **01** ⑤ | **02** ② | **03** $\frac{1}{3}$ | **04** ④ | **05** $-\csc\theta$ |
| **06** ① | **07** 0 | **08** $\frac{9}{13}$ | **09** ④ | **10** $\frac{1}{5}$ |
| **11** $-\frac{7}{16}$ | **12** ③ | **13** ③ | **14** ④ | **15** 24 |
| **16** 20 | **17** $\frac{1}{2}$ | **18** ① | **19** $3\pi$ | **20** 4 |
| **21** $\frac{8}{3}$ | **22** ⑤ | **23** $\frac{20}{3}\pi$ | **24** 14 | **25** 8 |
| **26** ③ | | | | |

**01** 전략 두 직각삼각형 OCE, DOB에서 삼각함수의 정의를 이용한다.

풀이 $\angle CEO=\angle DOB=\theta$

ㄱ. 직각삼각형 OCE에서 $\csc\theta=\frac{\overline{OE}}{\overline{OC}}=\overline{OE}$

ㄴ. 직각삼각형 DOB에서 $\sec\theta=\frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}=\overline{OD}$

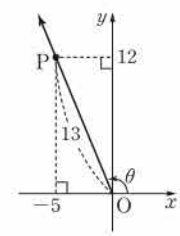
ㄷ. 직각삼각형 OCE에서 $\cot\theta=\frac{\overline{CE}}{\overline{OC}}=\overline{CE}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

**02** 전략 동경을 좌표평면 위에 나타낸 후 삼각함수의 정의를 이용한다.

풀이 오른쪽 그림에서




$\overline{OP}=\sqrt{(-5)^2+12^2}=13$이므로

$\sin\theta=\frac{12}{13}$, $\cos\theta=-\frac{5}{13}$,

$\tan\theta=-\frac{12}{5}$, $\sec\theta=-\frac{13}{5}$

$\therefore \frac{13\sin\theta+5\sec\theta}{5\tan\theta-13\cos\theta}$

$=\frac{13\cdot\frac{12}{13}+5\cdot\left(-\frac{13}{5}\right)}{5\cdot\left(-\frac{12}{5}\right)-13\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)}$

$=\frac{1}{7}$

답 ②

다른 풀이 $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로

$\frac{13\sin\theta+5\sec\theta}{5\tan\theta-13\cos\theta}=\frac{13\sin\theta+5\cdot\frac{1}{\cos\theta}}{5\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-13\cos\theta}$

$=\frac{13\sin\theta\cos\theta+5}{5\sin\theta-13\cos^2\theta}$

이때 $\sin\theta=\frac{12}{13}$, $\cos\theta=-\frac{5}{13}$이므로

$\frac{13\sin\theta\cos\theta+5}{5\sin\theta-13\cos^2\theta}=\frac{13\cdot\frac{12}{13}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)+5}{5\cdot\frac{12}{13}-13\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)^2}$

$=\frac{1}{7}$

**03** 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+kx-3k=0$의 두 근이 $\csc\theta$, $\sec\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\csc\theta+\sec\theta=-k$, $\csc\theta\sec\theta=-3k$

이때 $\csc\theta+\sec\theta=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$이므로

$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=-k$ ...... ㉠

또 $\csc\theta\sec\theta=\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$이므로

$\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-3k$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $(\sin\theta+\cos\theta)\cdot(-3k)=-k$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

**04** 전략 삼각함수 사이의 관계를 이용한다.

풀이 ① $\cos\theta\sec\theta-\sin\theta\csc\theta$

$=\cos\theta\cdot\frac{1}{\cos\theta}-\sin\theta\cdot\frac{1}{\sin\theta}$

$=1-1=0$

② $\cos^4\theta-\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$=\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta$

③ $\tan^2\theta\cos^2\theta+\cot^2\theta\sin^2\theta$

$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\cos^2\theta+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\cdot\sin^2\theta$

$=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

④ $\csc\theta(\tan\theta-\sin\theta)=\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\sin\theta\right)$

$=\frac{1}{\cos\theta}-1=\sec\theta-1$

⑤ $\frac{1-\tan^2\theta}{\sec^2\theta+2\tan\theta}=\frac{(1-\tan\theta)(1+\tan\theta)}{\tan^2\theta+1+2\tan\theta}$

$=\frac{(1-\tan\theta)(1+\tan\theta)}{(1+\tan\theta)^2}$

$=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

답 ④

**05** 전략 각 사분면에서의 삼각함수의 값의 부호를 이용한다.

풀이 $\csc\theta\sec\theta>0$에서

$\csc\theta>0$, $\sec\theta>0$ 또는 $\csc\theta<0$, $\sec\theta<0$

이므로 $\theta$는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

또 $\cos\theta\cot\theta<0$에서

$\cos\theta<0$, $\cot\theta>0$ 또는 $\cos\theta>0$, $\cot\theta<0$

이므로 $\theta$는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

따라서 $\theta$는 제3사분면의 각이므로 ··· ❶

$\sqrt{\tan^2\theta+1}\sqrt{\csc^2\theta-1}=\sqrt{\sec^2\theta}\sqrt{\cot^2\theta}$

$=|\sec\theta||\cot\theta|$

$=-\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=-\csc\theta$ ··· ❷

답 $-\csc\theta$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\theta$가 제3사분면의 각임을 알 수 있다. | 40 % |
| ❷ 주어진 식을 간단히 할 수 있다. | 60 % |

**06** 전략 $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$임을 이용한다.

풀이 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$에서 $\cos\alpha<0$이므로

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$

$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}$

$=\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$

답 ①

**07** 전략 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$임을 이용하여 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\tan\alpha\tan\beta=1$에서 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=1$

$\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta$

$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=0$

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=0$

답 0

**08** 전략 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$임을 이용한다.

풀이 $\angle ABC=\alpha$, $\angle DBC=\beta$라 하면

$\tan\alpha=\frac{4}{3}$, $\tan\beta=\frac{1}{3}$

$\theta=\alpha-\beta$이므로

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{9}{13}$

답 $\frac{9}{13}$

**09** 전략 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$임을 이용하여 $\tan\theta$를 $a$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $x-y-1=0$에서 $y=x-1$ ······ ㉠

$ax-y+1=0$에서 $y=ax+1$ ······ ㉡

두 직선 ㉠, ㉡이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면

$\tan\alpha=1$, $\tan\beta=a$

$\therefore \tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\frac{1-a}{1+a}\right|$

즉 $\left|\frac{1-a}{1+a}\right|=\frac{1}{6}$이므로 $\frac{1-a}{1+a}=-\frac{1}{6}$ 또는 $\frac{1-a}{1+a}=\frac{1}{6}$

$6a-6=1+a$ 또는 $6-6a=1+a$

$5a=7$ 또는 $7a=5$

$\therefore a=\frac{7}{5}$ 또는 $a=\frac{5}{7}$

이때 $a>1$이므로 $\quad a=\frac{7}{5}$

답 ④

**10** 전략 직선 $l$이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta$라 하면 $\tan\theta=$(기울기)임을 이용한다.

풀이 $2x^2-5x+3=0$에서 $\quad (x-1)(2x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

두 직선 $l_1$, $l_2$가 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha$, $\beta$ $(\alpha>\beta)$라 하면

$\tan\alpha=\frac{3}{2}$, $\tan\beta=1$ ···❶

$$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}-1}{1+\frac{3}{2}\cdot1}=\frac{1}{5}$$ ···❷

답 $\frac{1}{5}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\tan\alpha$, $\tan\beta$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❷ $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다. | 60 % |

다른 풀이 두 직선 $l_1$, $l_2$가 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면 두 직선의 기울기는 각각 $\tan\alpha$, $\tan\beta$이다.
즉 이차방정식 $2x^2-5x+3=0$의 두 근이 $\tan\alpha$, $\tan\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{5}{2}$, $\tan\alpha\tan\beta=\frac{3}{2}$

이때

$$(\tan\alpha-\tan\beta)^2=(\tan\alpha+\tan\beta)^2-4\tan\alpha\tan\beta$$

$$=\left(\frac{5}{2}\right)^2-4\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{4}$$

이므로 $\quad \tan\alpha-\tan\beta=\pm\frac{1}{2}$

$$\therefore \tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$=\left|\frac{\pm\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}}\right|=\frac{1}{5}$$

**11** 전략 주어진 식의 양변을 제곱한 후 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$임을 이용한다.

풀이 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{3}{4}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{9}{16}$$

$$1+\sin 2\theta=\frac{9}{16} \qquad \therefore \sin 2\theta=-\frac{7}{16}$$

답 $-\frac{7}{16}$

**12** 전략 주어진 함수를 $y=r\sin(x+\alpha)+c$ 꼴로 변형한다.

풀이 $f(x)=-2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+4\sin x+1$

$$=-2\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)+4\sin x+1$$

$$=-2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)+4\sin x+1$$

$$=2\sin x-2\cos x+1$$

$$=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)+1$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi\sin x+\sin\frac{7}{4}\pi\cos x\right)+1$$

$$=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{7}{4}\pi\right)+1$$

ㄱ. 주기는 $\quad \frac{2\pi}{1}=2\pi$

ㄴ. $-1\le\sin\left(x+\frac{7}{4}\pi\right)\le1$이므로

$$-2\sqrt{2}\le2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{7}{4}\pi\right)\le2\sqrt{2}$$

$$\therefore -2\sqrt{2}+1\le2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{7}{4}\pi\right)+1\le2\sqrt{2}+1$$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $2\sqrt{2}+1$이다.

ㄷ. ㄴ에서 $f(x)$의 최솟값은 $-2\sqrt{2}+1$이고

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{7}{4}\pi\right)+1$$

$$=1$$

따라서 $x=\frac{\pi}{4}$일 때 최솟값을 갖지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

참고 ㄷ. $f(x)$는 $x=2n\pi-\frac{\pi}{4}$($n$은 정수)일 때 최솟값 $-2\sqrt{2}+1$을 갖는다.

라이트 UP

**삼각함수의 주기**

① $y=a\sin(bx+c)+d$ ➡ 주기: $\frac{2\pi}{|b|}$

② $y=a\cos(bx+c)+d$ ➡ 주기: $\frac{2\pi}{|b|}$

③ $y=a\tan(bx+c)+d$ ➡ 주기: $\frac{\pi}{|b|}$

**13** 전략 $\lim_{● \to 0}\frac{\sin ●}{●}=1$, $\lim_{▲ \to 0}\frac{\tan ▲}{▲}=1$, $\lim_{■ \to 0}\frac{e^{■}-1}{■}=1$을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x^2}-1}{\tan x\sin 2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2}\cdot\frac{x}{\tan x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\right)$$

$$=1\cdot1\cdot1=1$$

답 ③

**14** 전략 $x-\frac{\pi}{4}=t$로 놓고 주어진 식을 변형한 후 $\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$임을 이용한다.

풀이 $x-\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면 $x=\frac{\pi}{4}+t$이고 $x\to\frac{\pi}{4}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos t+\cos\frac{\pi}{4}\sin t\right)-\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos t-\sin\frac{\pi}{4}\sin t\right)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\right)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{2}\sin t}{t}$$
$$=\sqrt{2}\cdot1=\sqrt{2}$$

답 ④

**15** 전략 $x+1=t$로 놓고 주어진 식을 변형한 후 $\lim_{t\to0}\frac{\tan t}{t}=1$임을 이용한다.

풀이 $$\lim_{x\to-1}\frac{a\tan(x+1)}{x^3+1}=\lim_{x\to-1}\frac{a\tan(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\left\{\frac{\tan(x+1)}{x+1}\cdot\frac{a}{x^2-x+1}\right\}$$
$$=\frac{a}{3}\lim_{x\to-1}\frac{\tan(x+1)}{x+1}$$

이때 $x+1=t$로 놓으면 $x\to-1$일 때 $t\to0$이므로

$$\frac{a}{3}\lim_{x\to-1}\frac{\tan(x+1)}{x+1}=\frac{a}{3}\lim_{t\to0}\frac{\tan t}{t}$$
$$=\frac{a}{3}\cdot1$$
$$=\frac{a}{3}$$

따라서 $\frac{a}{3}=8$이므로

$a=24$

답 24

**16** 전략 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자)$\to$0이면 (분모)$\to$0임을 이용한다.

풀이 $x\to0$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자)$\to0$이므로 (분모)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}\sin(ax+b)=0$이므로 $\sin b=0$

$\therefore b=0\ \left(\because 0\le b<\frac{\pi}{2}\right)$ ⋯ ❶

$b=0$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{\sin ax}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{ax}{\sin ax}\cdot\frac{1}{a}\right)$$
$$=1\cdot1\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$$

따라서 $\frac{1}{a}=5$이므로 $a=\frac{1}{5}$ ⋯ ❷

$\therefore 100(a+b)=100\cdot\frac{1}{5}=20$ ⋯ ❸

답 20

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $b$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $a$의 값을 구할 수 있다. | 60 % |
| ❸ $100(a+b)$의 값을 구할 수 있다. | 10 % |

**17** 전략 $\angle QAB=\theta$라 하고 $\overline{PB}$의 길이와 $\overline{QB}$의 길이를 각각 $\theta$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\angle AQB=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle QAB=\theta$라 하면 $\triangle QAB$에서

$\overline{QB}=\overline{AB}\sin\theta$

또 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$, $\angle PAB=2\theta$이므로 $\triangle PAB$에서

$\overline{PB}=\overline{AB}\sin2\theta$ ⋯ ❶

따라서 점 P가 점 B에 한없이 가까워지면 $\theta\to0+$이므로 구하는 값은

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{QB}}{\overline{PB}}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{AB}\sin\theta}{\overline{AB}\sin2\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2\cos\theta}=\frac{1}{2}$$ ⋯ ❷

답 $\frac{1}{2}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\overline{QB}$, $\overline{PB}$의 길이를 $\theta$로 나타낼 수 있다. | 40 % |
| ❷ 극한값을 구할 수 있다. | 60 % |

다른 풀이 $$\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{QB}}{\overline{PB}}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{AB}\sin\theta}{\overline{AB}\sin2\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\sin2\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{2\theta}{\sin2\theta}\cdot\frac{1}{2}\right)$$
$$=1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

**18** 전략 $\overline{AH}$의 길이를 $\theta$에 대한 식으로 나타내어 $S(\theta)$를 구한다.

풀이 $\triangle OPH$에서 $\overline{OH}=\cos\theta$

$\therefore \overline{AH}=1-\cos\theta$

$\triangle AHQ$는 직각이등변삼각형이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)^2$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^4}=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)^2}{2\theta^4}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{2\theta^4(1+\cos\theta)^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos^2\theta)^2}{2\theta^4(1+\cos\theta)^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^4\theta}{2\theta^4(1+\cos\theta)^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^4\cdot\frac{1}{2(1+\cos\theta)^2}\right\}$$
$$=1^4\cdot\frac{1}{2\cdot2^2}=\frac{1}{8}$$

답 ①

**19** 전략 곱의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\sin^2x+\cos x=\sin x\sin x+\cos x$이므로

$$f'(x)=\cos x\sin x+\sin x\cos x-\sin x$$
$$=\sin x(2\cos x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sin x(2\cos x-1)=0$

$\sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

따라서 구하는 $x$의 값의 합은

$$\frac{\pi}{3}+\pi+\frac{5}{3}\pi=3\pi$$

답 $3\pi$

**20** 전략 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이고, $f'(0)$이 존재함을 이용하여 $a$, $b$의 값을 구한다.

풀이 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0-}2e^x\cos x=\lim_{x\to0+}(5x^2+ax+b)=f(0)$$

$\therefore b=2$

또 $f'(x)=\begin{cases}10x+a & (x>0)\\ 2e^x(\cos x-\sin x) & (x<0)\end{cases}$에서 $f'(0)$이 존재하므로 $\quad \lim_{x\to0+}(10x+a)=\lim_{x\to0-}2e^x(\cos x-\sin x)$

$\therefore a=2$

$\therefore a+b=4$

답 4

**21** 전략 주어진 식을 이용하여 $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구한다.

풀이 $\cot\theta-\tan\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$$=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$=\frac{\sqrt{10}(\cos\theta+\sin\theta)}{5\sin\theta\cos\theta}$$

한편 $\sin\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{10}}{5}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{2}{5}$$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{2}{5},\quad 2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{5}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{3}{10}$

$$\therefore (\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=1+2\sin\theta\cos\theta$$
$$=1+2\cdot\frac{3}{10}=\frac{8}{5}$$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$이므로 $\quad \sin\theta+\cos\theta>0$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

$$\therefore \frac{\sqrt{10}(\cos\theta+\sin\theta)}{5\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sqrt{10}\cdot\frac{2\sqrt{10}}{5}}{5\cdot\frac{3}{10}}=\frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

**22** 전략 $\triangle$ADC와 $\triangle$EDC에서 피타고라스 정리를 이용한다.

풀이 $\overline{ED}=h$라 하면 $\quad \overline{AD}=4h$

$\triangle$ADC와 $\triangle$EDC에서

$(2\sqrt{5})^2-(4h)^2=(\sqrt{5})^2-h^2,\quad 20-16h^2=5-h^2$

$15h^2=15 \quad \therefore h=1$

따라서 $\overline{AD}=4$이므로

$\overline{BD}=\sqrt{5^2-4^2}=3$, $\overline{CD}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$

$\therefore \sin\alpha=\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\frac{3}{5}$,

$\sin\beta=\frac{\overline{ED}}{\overline{EC}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\beta=\frac{\overline{CD}}{\overline{EC}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$=\frac{10\sqrt{5}}{25}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

답 ⑤

**23** 전략 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$의 길이를 $\theta$를 이용한 식으로 나타낸 후 삼각함수의 합성을 이용하여 간단히 한다.

풀이 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$이므로 삼각형 APB에서

$\overline{PA}=10\sin\theta$, $\overline{PB}=10\cos\theta$

$$\therefore \sqrt{3}\,\overline{PA}+\overline{PB}=10\sqrt{3}\sin\theta+10\cos\theta$$
$$=20\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)$$
$$=20\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin\theta+\sin\frac{\pi}{6}\cos\theta\right)$$
$$=20\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\pi}{6}<\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{2}{3}\pi$이므로

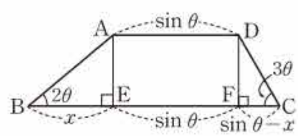
$\frac{1}{2}<\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\le1 \quad \therefore 10<20\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\le20$

따라서 $\sqrt{3}\,\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$는 $\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$, 즉 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 최댓값 20을 가지므로 $a=\frac{\pi}{3}$, $b=20$

$\therefore ab=\frac{20}{3}\pi$ 답 $\frac{20}{3}\pi$

**24** 전략 $\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{x}=a$, $\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{x}=a$임을 이용하여 극한값을 구한다.

풀이 두 점 A, D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하고 $\overline{\mathrm{BE}}=x$라 하면 $\overline{\mathrm{CF}}=\sin\theta-x$이므로




$\overline{\mathrm{AE}}=x\tan2\theta$,

$\overline{\mathrm{DF}}=(\sin\theta-x)\tan3\theta$

이때 $\overline{\mathrm{AD}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{DF}}$이므로

$x\tan2\theta=(\sin\theta-x)\tan3\theta$

$(\tan2\theta+\tan3\theta)x=\sin\theta\tan3\theta$

$\therefore x=\frac{\sin\theta\tan3\theta}{\tan2\theta+\tan3\theta}$

$\overline{\mathrm{AE}}=\frac{\sin\theta\tan2\theta\tan3\theta}{\tan2\theta+\tan3\theta}$이므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}(\sin\theta+2\sin\theta)\cdot\frac{\sin\theta\tan2\theta\tan3\theta}{\tan2\theta+\tan3\theta}$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin^2\theta\tan2\theta\tan3\theta}{\tan2\theta+\tan3\theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$$
$$=\frac{3}{2}\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta\tan2\theta\tan3\theta}{\theta^3(\tan2\theta+\tan3\theta)}$$
$$=\frac{3}{2}\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin^2\theta\tan2\theta\tan3\theta}{\theta^4}\cdot\frac{\theta}{\tan2\theta+\tan3\theta}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{\tan2\theta}{\theta}\cdot\frac{\tan3\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{\frac{\tan2\theta}{\theta}+\frac{\tan3\theta}{\theta}}\right\}$$
$$=\frac{3}{2}\left(1^2\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{2+3}\right)=\frac{9}{5}$$

따라서 $p=5$, $q=9$이므로

$p+q=14$ 답 14

**25** 전략 미분계수의 정의를 이용하여 식의 값을 구한다.

풀이 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)-\{f(-h)-f(0)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(-h)-f(0)}{-h}$$
$$=f'(0)+f'(0)=2f'(0)$$ ⋯ ❶

이때

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2\sin2x}{1-\cos x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x\sin2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x\sin2x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x\sin2x(1+\cos x)}{\sin^2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\frac{\sin2x}{2x}\cdot2(1+\cos x)\right\}$$
$$=1^2\cdot1\cdot2\cdot2=4$$ ⋯ ❷

이므로 구하는 값은

$2f'(0)=2\cdot4=8$ ⋯ ❸

답 8

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(-h)}{h}=2f'(0)$임을 알 수 있다. | 30 % |
| ❷ $f'(0)$의 값을 구할 수 있다. | 60 % |
| ❸ $2f'(0)$의 값을 구할 수 있다. | 10 % |

**26** 전략 함수 $f(x)$의 도함수를 구한 후 삼각함수의 합성을 이용한다.

풀이 $f(x)=x-(\sin x+\sqrt{3}\cos x)$에서

$$f'(x)=1-(\cos x-\sqrt{3}\sin x)$$
$$=\sqrt{3}\sin x-\cos x+1$$
$$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)+1$$
$$=2\left(\cos\frac{11}{6}\pi\sin x+\sin\frac{11}{6}\pi\cos x\right)+1$$
$$=2\sin\left(x+\frac{11}{6}\pi\right)+1$$

$f'(x)=0$에서

$2\sin\left(x+\frac{11}{6}\pi\right)=-1$ $\therefore \sin\left(x+\frac{11}{6}\pi\right)=-\frac{1}{2}$

$x+\frac{11}{6}\pi=t$로 놓으면 $\sin t=-\frac{1}{2}$

$x>0$에서 $t>\frac{11}{6}\pi$이므로

$t=\frac{19}{6}\pi,\ \frac{23}{6}\pi,\ \frac{31}{6}\pi,\ \cdots$

$\therefore x=\frac{4}{3}\pi,\ 2\pi,\ \frac{10}{3}\pi,\ \cdots$

따라서 $a_1=\frac{4}{3}\pi$, $a_2=2\pi$, $a_3=\frac{10}{3}\pi$이므로

$a_1+a_2+a_3=\frac{20}{3}\pi$ 답 ③

# 05 여러 가지 미분법

## 01 함수의 몫의 미분법

확인

본책 91~92쪽

**1** (1) $y'=-\dfrac{(x+4)'}{(x+4)^2}=-\dfrac{1}{(x+4)^2}$

(2) $y'=-\dfrac{(\sin x+1)'}{(\sin x+1)^2}=-\dfrac{\cos x}{(\sin x+1)^2}$

(3) $y'=\dfrac{(e^x)'(2x+1)-e^x(2x+1)'}{(2x+1)^2}$

$=\dfrac{e^x(2x+1)-e^x\cdot 2}{(2x+1)^2}=\dfrac{e^x(2x-1)}{(2x+1)^2}$

(4) $y'=\dfrac{(\ln x)'\cdot x^2-\ln x\cdot(x^2)'}{(x^2)^2}=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\ln x\cdot 2x}{x^4}$

$=\dfrac{x-2x\ln x}{x^4}=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

답 (1) $y'=-\dfrac{1}{(x+4)^2}$ (2) $y'=-\dfrac{\cos x}{(\sin x+1)^2}$

(3) $y'=\dfrac{e^x(2x-1)}{(2x+1)^2}$ (4) $y'=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

**2** (1) $y'=(x^{-3})'=-3x^{-4}$

(2) $y'=(-5x^{-2})'=10x^{-3}$

(3) $y'=(x^{-4})'e^x+x^{-4}(e^x)'=-4x^{-5}e^x+x^{-4}e^x$

$=(x-4)x^{-5}e^x$

(4) $y=\dfrac{x^5+x^4}{x^7}=x^{-2}+x^{-3}$이므로

$y'=(x^{-2})'+(x^{-3})'=-2x^{-3}-3x^{-4}$

$=-\dfrac{2x+3}{x^4}$

답 (1) $y'=-3x^{-4}$ (2) $y'=10x^{-3}$

(3) $y'=(x-4)x^{-5}e^x$ (4) $y'=-\dfrac{2x+3}{x^4}$

**3** (1) $y'=3\sec^2 x-\sec x\tan x$

$=\sec x(3\sec x-\tan x)$

(2) $y'=-\csc x\cot x+2(-\csc^2 x)$

$=-\csc x(\cot x+2\csc x)$

(3) $y'=(x)'\tan x+x(\tan x)'=\tan x+x\sec^2 x$

(4) $y'=(\cos x)'\cot x+\cos x(\cot x)'$

$=-\sin x\cot x+\cos x(-\csc^2 x)$

$=-\cos x-\cos x\csc^2 x$

$=-\cos x(1+\csc^2 x)$

답 풀이 참조

유제

본책 93~94쪽

**1** (1) $y'=\dfrac{(2e^x)'(x^2+3)-2e^x(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}$

$=\dfrac{2e^x(x^2+3)-2e^x\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$

$=\dfrac{2e^x(x^2-2x+3)}{(x^2+3)^2}$

(2) $y'=\dfrac{(1+\cos x)'(1-\cos x)-(1+\cos x)(1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2}$

$=\dfrac{-\sin x(1-\cos x)-(1+\cos x)\cdot\sin x}{(1-\cos x)^2}$

$=-\dfrac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}$

답 (1) $y'=\dfrac{2e^x(x^2-2x+3)}{(x^2+3)^2}$ (2) $y'=-\dfrac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}$

**2** $f(x)=\dfrac{x^2+3}{2x+1}$에서

$f'(x)=\dfrac{(x^2+3)'(2x+1)-(x^2+3)(2x+1)'}{(2x+1)^2}$

$=\dfrac{2x(2x+1)-(x^2+3)\cdot 2}{(2x+1)^2}$

$=\dfrac{2x^2+2x-6}{(2x+1)^2}$

$\therefore f'(-1)=\dfrac{2-2-6}{(-1)^2}=-6$ 답 $-6$

**3** $f(x)=\dfrac{1}{x^2+a\ln x-2}$에서

$f'(x)=-\dfrac{(x^2+a\ln x-2)'}{(x^2+a\ln x-2)^2}=-\dfrac{2x+a\cdot\frac{1}{x}}{(x^2+a\ln x-2)^2}$

$=-\dfrac{2x^2+a}{x(x^2+a\ln x-2)^2}$

이때 $f'(1)=2$이므로

$-(2+a)=2$ $\therefore a=-4$ 답 $-4$

**4** (1) $y'=(\csc x)'\cot x+\csc x(\cot x)'$

$=-\csc x\cot x\cdot\cot x+\csc x\cdot(-\csc^2 x)$

$=-\csc x(\cot^2 x+\csc^2 x)$

(2) $y'=(x^2)'\sec x+x^2(\sec x)'$

$=2x\sec x+x^2\sec x\tan x$

$=x\sec x(2+x\tan x)$

(3) $y'=\dfrac{(\cos x)'(\tan x-1)-\cos x(\tan x-1)'}{(\tan x-1)^2}$

$=\dfrac{-\sin x(\tan x-1)-\cos x\sec^2 x}{(\tan x-1)^2}$

$=\dfrac{-\sin x\tan x+\sin x-\sec x}{(\tan x-1)^2}$

(4) $y'=\dfrac{(\cot x)'(x^2+3)-\cot x(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}$

$=\dfrac{-\csc^2 x(x^2+3)-\cot x\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$

$=\dfrac{-x^2\csc^2 x-3\csc^2 x-2x\cot x}{(x^2+3)^2}$

답 풀이 참조

**5** $f(x)=\dfrac{\sec x}{1+\tan x}$에서

$f'(x)=\dfrac{(\sec x)'(1+\tan x)-\sec x(1+\tan x)'}{(1+\tan x)^2}$

$=\dfrac{\sec x\tan x\cdot(1+\tan x)-\sec x\cdot\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$

$=\dfrac{\sec x(\tan x+\tan^2 x-\sec^2 x)}{(1+\tan x)^2}$

$=\dfrac{\sec x(\tan x-1)}{(1+\tan x)^2}$

$\therefore f'(\pi)=\dfrac{\sec\pi(\tan\pi-1)}{(1+\tan\pi)^2}$

$=\dfrac{-1\cdot(-1)}{1^2}=1$

답 1

**6** $f(x)=\csc x+a\tan x$에서

$f'(x)=-\csc x\cot x+a\sec^2 x$

이때 $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=1$이므로

$-\csc\dfrac{\pi}{3}\cot\dfrac{\pi}{3}+a\sec^2\dfrac{\pi}{3}=1$

$-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}+a\cdot 2^2=1,\qquad 4a=\dfrac{5}{3}$

$\therefore a=\dfrac{5}{12}$

답 $\dfrac{5}{12}$

## 02 합성함수의 미분법

### 확인

본책 96~97쪽

**1** (1) $y'=4(2x+3)^3(2x+3)'=8(2x+3)^3$

(2) $y'=3e^{2x+1}(2x+1)'=6e^{2x+1}$

(3) $y'=\dfrac{(x^2+5)'}{x^2+5}=\dfrac{2x}{x^2+5}$

(4) $y'=\cos(3x-1)\cdot(3x-1)'=3\cos(3x-1)$

답 (1) $y'=8(2x+3)^3$ (2) $y'=6e^{2x+1}$

(3) $y'=\dfrac{2x}{x^2+5}$ (4) $y'=3\cos(3x-1)$

다른 풀이 (1) $u=2x+3$으로 놓으면 $y=u^4$이므로

$\dfrac{dy}{du}=4u^3,\ \dfrac{du}{dx}=2$

$\therefore y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=4u^3\cdot 2=8(2x+3)^3$

(2) $u=2x+1$로 놓으면 $y=3e^u$이므로

$\dfrac{dy}{du}=3e^u,\ \dfrac{du}{dx}=2$

$\therefore y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=3e^u\cdot 2=6e^{2x+1}$

(3) $u=x^2+5$로 놓으면 $y=\ln u$이므로

$\dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{u},\ \dfrac{du}{dx}=2x$

$\therefore y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{u}\cdot 2x=\dfrac{2x}{x^2+5}$

(4) $u=3x-1$로 놓으면 $y=\sin u$이므로

$\dfrac{dy}{du}=\cos u,\ \dfrac{du}{dx}=3$

$\therefore y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=\cos u\cdot 3=3\cos(3x-1)$

**2** (1) $y'=\dfrac{(2x+5)'}{2x+5}=\dfrac{2}{2x+5}$

(2) $y'=\dfrac{(x+1)'}{(x+1)\ln 6}=\dfrac{1}{(x+1)\ln 6}$

답 (1) $y'=\dfrac{2}{2x+5}$ (2) $y'=\dfrac{1}{(x+1)\ln 6}$

**3** (1) $y=2\sqrt{x}=2x^{\frac{1}{2}}$이므로 $\quad y'=2\cdot\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(2) $y=\sqrt{3x+2}=(3x+2)^{\frac{1}{2}}$이므로

$y'=\dfrac{1}{2}(3x+2)^{\frac{1}{2}-1}(3x+2)'$

$=\dfrac{1}{2}(3x+2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3=\dfrac{3}{2\sqrt{3x+2}}$

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3}}=(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}$이므로

$y'=-\dfrac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}-1}(x^2-3)'$

$=-\dfrac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-\dfrac{x}{(x^2-3)\sqrt{x^2-3}}$

답 (1) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (2) $y'=\dfrac{3}{2\sqrt{3x+2}}$

(3) $y'=-\dfrac{x}{(x^2-3)\sqrt{x^2-3}}$

### 유제

본책 98~100쪽

**1** (1) $y'=\{(x^3-4)^3\}'(x^2+2)+(x^3-4)^3(x^2+2)'$

$=3(x^3-4)^2(x^3-4)'\cdot(x^2+2)+(x^3-4)^3\cdot 2x$

$=3(x^3-4)^2\cdot 3x^2\cdot(x^2+2)+2x(x^3-4)^3$

$=x(x^3-4)^2\{9x(x^2+2)+2(x^3-4)\}$

$=x(x^3-4)^2(11x^3+18x-8)$

(2) $y'=2^{\sin x}\cdot\ln 2\cdot(\sin x)'=\ln 2\cdot 2^{\sin x}\cos x$

(3) $y'=-\dfrac{3(e^{2x}+1)'}{(e^{2x}+1)^2}=-\dfrac{3\cdot e^{2x}\cdot(2x)'}{(e^{2x}+1)^2}=-\dfrac{6e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

(4) $y'=3\sin^2(3x-1)\cdot\{\sin(3x-1)\}'$

$=3\sin^2(3x-1)\cdot\cos(3x-1)\cdot(3x-1)'$

$=9\sin^2(3x-1)\cos(3x-1)$

답 풀이 참조

**2** $f(x)=4\sin^2 x-\cos^2 2x$에서

$f'(x)=4\cdot 2\sin x\cdot(\sin x)'-2\cos 2x\cdot(\cos 2x)'$

$=8\sin x\cos x-2\cos 2x\cdot(-\sin 2x)\cdot(2x)'$

$=8\sin x\cos x+4\cos 2x\sin 2x$

$=4\sin 2x+4\cos 2x\sin 2x$

$=4\sin 2x(1+\cos 2x)$

$=4\sin 2x(1+2\cos^2 x-1)$

$=8\sin 2x\cos^2 x$

$\therefore a=8$

답 8

**3** $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서 $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이므로

$h'(1)=g'(f(1))f'(1)$

$f(x)=x^2-x+2$에서 $f'(x)=2x-1$이므로

$f(1)=2,\ f'(1)=1$

$g(x)=\dfrac{x}{x^2-2}$에서

$g'(x)=\dfrac{(x)'(x^2-2)-x(x^2-2)'}{(x^2-2)^2}$

$=\dfrac{x^2-2-x\cdot 2x}{(x^2-2)^2}=\dfrac{-x^2-2}{(x^2-2)^2}$

이므로

$g'(f(1))=g'(2)=\dfrac{-4-2}{2^2}=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore h'(1)=g'(f(1))f'(1)=-\dfrac{3}{2}\cdot 1=-\dfrac{3}{2}$

답 $-\dfrac{3}{2}$

**4** (1) $y'=\dfrac{(\cos 3x)'}{\cos 3x\cdot\ln 2}=\dfrac{-\sin 3x\cdot(3x)'}{\cos 3x\cdot\ln 2}=-\dfrac{3\tan 3x}{\ln 2}$

(2) $y=\dfrac{\ln x^2}{2x}=\dfrac{\ln|x|}{x}$이므로

$y'=\dfrac{(\ln|x|)'\cdot x-\ln|x|\cdot(x)'}{x^2}=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln|x|}{x^2}$

$=\dfrac{1-\ln|x|}{x^2}$

답 (1) $y'=-\dfrac{3\tan 3x}{\ln 2}$ (2) $y'=\dfrac{1-\ln|x|}{x^2}$

**5** (1) 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln y=\ln x^{\ln x}$ $\quad\therefore \ln y=(\ln x)^2$

위의 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\dfrac{y'}{y}=2\ln x\cdot(\ln x)',\quad \dfrac{y'}{y}=\dfrac{2\ln x}{x}$

$\therefore y'=y\cdot\dfrac{2\ln x}{x}=x^{\ln x}\cdot\dfrac{2\ln x}{x}=2x^{\ln x-1}\ln x$

(2) 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|y|=\ln\left|\dfrac{(x+1)^2(x+2)^3}{(x+3)^5}\right|$

$\ln|y|=\ln|(x+1)^2|+\ln|(x+2)^3|-\ln|(x+3)^5|$

$\therefore \ln|y|=2\ln|x+1|+3\ln|x+2|-5\ln|x+3|$

위의 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{5}{x+3}$

$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{7x+11}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

$\therefore y'=y\cdot\dfrac{7x+11}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

$=\dfrac{(x+1)^2(x+2)^3}{(x+3)^5}\cdot\dfrac{7x+11}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

$=\dfrac{(x+1)(x+2)^2(7x+11)}{(x+3)^6}$

답 (1) $y'=2x^{\ln x-1}\ln x$ (2) $y'=\dfrac{(x+1)(x+2)^2(7x+11)}{(x+3)^6}$

**6** (1) $y'=e(2x+3)^{e-1}(2x+3)'$

$=2e(2x+3)^{e-1}$

(2) $y=\sqrt[4]{x^2+2x+5}=(x^2+2x+5)^{\frac{1}{4}}$이므로

$y'=\dfrac{1}{4}(x^2+2x+5)^{-\frac{3}{4}}(x^2+2x+5)'$

$=\dfrac{2x+2}{4\sqrt[4]{(x^2+2x+5)^3}}=\dfrac{x+1}{2\sqrt[4]{(x^2+2x+5)^3}}$

(3) $y=\dfrac{1}{x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}}=x^{-2}\cdot x^{-\frac{2}{3}}=x^{-\frac{8}{3}}$이므로

$y'=-\dfrac{8}{3}x^{-\frac{11}{3}}=-\dfrac{8}{3x^3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$

(4) $y'=(x^\pi)'\sin x+x^\pi(\sin x)'=\pi x^{\pi-1}\sin x+x^\pi\cos x$

$=x^{\pi-1}(\pi\sin x+x\cos x)$

답 풀이 참조

**7** $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+2x-4}}=(x-1)(x^2+2x-4)^{-\frac{1}{2}}$이므로

$f'(x)$

$=(x-1)'(x^2+2x-4)^{-\frac{1}{2}}+(x-1)\{(x^2+2x-4)^{-\frac{1}{2}}\}'$

$=(x^2+2x-4)^{-\frac{1}{2}}+(x-1)\left\{-\dfrac{1}{2}(x^2+2x-4)^{-\frac{3}{2}}(2x+2)\right\}$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-4}}-\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{(x^2+2x-4)^3}}$$

$$\therefore f'(2)=\frac{1}{\sqrt{4+4-4}}-\frac{1\cdot 3}{\sqrt{(4+4-4)^3}}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$$

답 $\frac{1}{8}$

**8** $f(x)=\ln(\sqrt{4x^2+1}-2x)$에서

$$f'(x)=\frac{(\sqrt{4x^2+1}-2x)'}{\sqrt{4x^2+1}-2x}=\frac{\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}-2}{\sqrt{4x^2+1}-2x}$$

$$=\frac{\frac{4x-2\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}}}{\sqrt{4x^2+1}-2x}=\frac{-2(\sqrt{4x^2+1}-2x)}{\sqrt{4x^2+1}(\sqrt{4x^2+1}-2x)}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$$

이때 $f'(a)=-\frac{2}{3}$에서 $-\frac{2}{\sqrt{4a^2+1}}=-\frac{2}{3}$이므로

$\sqrt{4a^2+1}=3,\quad 4a^2+1=9$

$a^2=2\quad \therefore a=\sqrt{2}\ (\because a>0)$

답 $\sqrt{2}$

## 03 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

### 확인

본책 101쪽

**1** (1) $\frac{dx}{dt}=-6t$, $\frac{dy}{dt}=1$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{1}{6t}\ (t\neq 0)$$

(2) $\frac{dx}{dt}=-\sin t$, $\frac{dy}{dt}=\cos t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t}{-\sin t}=-\cot t$$

답 (1) $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{6t}\ (t\neq 0)$ (2) $\frac{dy}{dx}=-\cot t$

### 유제

본책 102쪽

**1** (1) $\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{2(t-1)-2t}{(t-1)^2}=-\frac{2}{(t-1)^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{2}{(t-1)^2}}{-\frac{1}{t^2}}=\frac{2t^2}{(t-1)^2}$$

(2) $\frac{dx}{dt}=\frac{t}{3}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t+3}}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{t+3}}}{\frac{t}{3}}=\frac{3}{2t\sqrt{t+3}}\ (t\neq 0)$$

답 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{2t^2}{(t-1)^2}$ (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2t\sqrt{t+3}}\ (t\neq 0)$

**2** $\frac{dx}{dt}=-\frac{-2t}{(1-t^2)^2}=\frac{2t}{(1-t^2)^2}$,

$\frac{dy}{dt}=\frac{1-t^2-t\cdot(-2t)}{(1-t^2)^2}=\frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}}{\frac{2t}{(1-t^2)^2}}=\frac{1+t^2}{2t}\ (t\neq 0)$$

따라서 $t=3$일 때

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+3^2}{2\cdot 3}=\frac{5}{3}$$

답 $\frac{5}{3}$

**3** $\frac{dx}{dt}=t^2+t-2$, $\frac{dy}{dt}=t^3+t^2-t-1$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t^3+t^2-t-1}{t^2+t-2}\ (t^2+t-2\neq 0)$$

$$\therefore \lim_{t\to 1}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to 1}\frac{t^3+t^2-t-1}{t^2+t-2}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t+1)^2(t-1)}{(t+2)(t-1)}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t+1)^2}{t+2}=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

**라이트 UP**

**$\frac{0}{0}$ 꼴의 극한**

① 분모, 분자가 다항식인 경우 ➡ 인수분해하여 약분한다.

② 분모 또는 분자가 근호를 포함한 식인 경우
➡ 근호를 포함한 식을 유리화한다.

## 04 음함수의 미분법

### 확인

본책 103쪽

**1** (1) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$$\frac{x}{2}-\frac{2y}{9}\cdot\frac{dy}{dx}=0\qquad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{9x}{4y}\ (y\neq 0)$$

(2) $(x-2)^2+(y+1)^2=9$의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$$2(x-2)+2(y+1)\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2-x}{y+1}\ (y\neq-1)$$

답 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{9x}{4y}\ (y\neq0)$ (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{2-x}{y+1}\ (y\neq-1)$

유제 본책 104쪽

**1** (1) $x^2-5y^2=1$의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$$2x-10y\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x}{5y}\ (y\neq0)$$

(2) $x^2-xy+y^2=2$의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$$2x-y-x\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$(x-2y)\frac{dy}{dx}=2x-y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x-2y}\ (x\neq2y)$$

(3) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}},\ 즉\ \frac{dy}{dx}=-\sqrt{\frac{y}{x}}$$

(4) $x^2=\sqrt{y^3+2y}$의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$$2x=\frac{3y^2+2}{2\sqrt{y^3+2y}}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{4x\sqrt{y^3+2y}}{3y^2+2},\ 즉\ \frac{dy}{dx}=\frac{4x^3}{3y^2+2}$$

(5) $\ln|x|=y^2$의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{x}=2y\frac{dy}{dx} \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2xy}\ (y\neq0)$$

(6) $e^{x+y}+e^{x-y}=5$에서 $e^x(e^y+e^{-y})=5$

위의 식의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$$e^x(e^y+e^{-y})+e^x(e^y-e^{-y})\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{e^y+e^{-y}}{e^{-y}-e^y}\ (y\neq0)$$

답 풀이 참조

참고 (6) $e^{x+y}+e^{x-y}=5$의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$$e^{x+y}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)+e^{x-y}\left(1-\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$(e^{x-y}-e^{x+y})\frac{dy}{dx}=e^{x+y}+e^{x-y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{e^{x+y}+e^{x-y}}{e^{x-y}-e^{x+y}}=\frac{5}{e^{x-y}-e^{x+y}}\ (y\neq0)$$

## 05 역함수의 미분법

확인 본책 105쪽

**1** (1) 양변을 $y$에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=6y^2 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{6y^2}$$

(2) 양변을 $y$에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2y}{2\sqrt{y^2+1}}=\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{\sqrt{y^2+1}}{y}$$

답 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{6y^2}$ (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{y^2+1}}{y}$

유제 본책 106쪽

**1** $x=\frac{2y}{y+1}$의 양변을 $y$에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2(y+1)-2y}{(y+1)^2}=\frac{2}{(y+1)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{2}{(y+1)^2}}=\frac{(y+1)^2}{2}$$

답 $\frac{dy}{dx}=\frac{(y+1)^2}{2}$

**2** $g(3)=a$라 하면 $f(a)=3$이므로

$a^3-4a^2+4a=3$, $a^3-4a^2+4a-3=0$

$(a-3)(a^2-a+1)=0$

$\therefore a=3\ (\because a^2-a+1>0)$

따라서 $g(3)=3$이고 $f'(x)=3x^2-8x+4$이므로

$$g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(3)}=\frac{1}{7}$$

답 $\frac{1}{7}$

**3** $g(\pi)=a$라 하면 $f(a)=\pi$이므로

$a-\sin a=\pi$ $\therefore a=\pi$

따라서 $g(\pi)=\pi$이고 $f'(x)=1-\cos x$이므로

$$g'(\pi)=\frac{1}{f'(g(\pi))}=\frac{1}{f'(\pi)}=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

## 06 이계도함수

**확인** 본책 107쪽

**1** (1) $y'=4x^3+10x$이므로 $\quad y''=12x^2+10$

(2) $y'=-e^{-x}$이므로 $\quad y''=-(-e^{-x})=e^{-x}$

(3) $y'=\dfrac{1}{x}$이므로 $\quad y''=-\dfrac{1}{x^2}$

(4) $y'=\cos x+\sin x$이므로 $\quad y''=-\sin x+\cos x$

답 (1) $y''=12x^2+10$ (2) $y''=e^{-x}$ (3) $y''=-\dfrac{1}{x^2}$ (4) $y''=-\sin x+\cos x$

**유제** 본책 108쪽

**1** (1) $y'=\dfrac{(3x-2)'}{3x-2}=\dfrac{3}{3x-2}$이므로

$$y''=-\frac{3(3x-2)'}{(3x-2)^2}=-\frac{9}{(3x-2)^2}$$

(2) $y'=\dfrac{(x^2-1)'}{2\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$이므로

$$y''=\frac{(x)'\sqrt{x^2-1}-x(\sqrt{x^2-1})'}{(\sqrt{x^2-1})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-1}-x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\frac{\dfrac{(x^2-1)-x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}$$

$$=-\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

(3) $y'=(x)'e^x+x(e^x)'=e^x+xe^x=e^x(x+1)$이므로

$$y''=(e^x)'(x+1)+e^x(x+1)'$$
$$=e^x(x+1)+e^x=e^x(x+2)$$

(4) $y'=\cos(e^x+1)\cdot(e^x+1)'=e^x\cos(e^x+1)$이므로

$$y''=(e^x)'\cos(e^x+1)+e^x\{\cos(e^x+1)\}'$$
$$=e^x\cos(e^x+1)+e^x\cdot\{-\sin(e^x+1)\}\cdot(e^x+1)'$$
$$=e^x\cos(e^x+1)-e^{2x}\sin(e^x+1)$$

답 풀이 참조

**2** $f(x)=(x+a)e^{bx}$에서

$$f'(x)=(x+a)'e^{bx}+(x+a)(e^{bx})'$$
$$=e^{bx}+(x+a)\cdot be^{bx}=e^{bx}(bx+ab+1)$$

이때 $f'(0)=-3$이므로

$ab+1=-3 \quad \therefore ab=-4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

따라서 $f'(x)=e^{bx}(bx-3)$이므로

$$f''(x)=(e^{bx})'(bx-3)+e^{bx}(bx-3)'$$
$$=be^{bx}(bx-3)+be^{bx}$$
$$=be^{bx}(bx-2)$$

이때 $f''(0)=-4$이므로

$-2b=-4 \quad \therefore b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad a=-2$

답 $a=-2,\ b=2$

**3** $y=e^{-x}\cos 2x$에서

$$y'=(e^{-x})'\cos 2x+e^{-x}(\cos 2x)'$$
$$=-e^{-x}\cos 2x-2e^{-x}\sin 2x$$
$$=-e^{-x}(\cos 2x+2\sin 2x)$$
$$y''=(-e^{-x})'(\cos 2x+2\sin 2x)-e^{-x}(\cos 2x+2\sin 2x)'$$
$$=e^{-x}(\cos 2x+2\sin 2x)-e^{-x}(-2\sin 2x+4\cos 2x)$$
$$=e^{-x}(4\sin 2x-3\cos 2x)$$

$y''+ay'+5y=0$에서

$$e^{-x}(4\sin 2x-3\cos 2x)-ae^{-x}(\cos 2x+2\sin 2x)$$
$$+5e^{-x}\cos 2x=0$$
$$e^{-x}\{2(2-a)\sin 2x+(2-a)\cos 2x\}=0$$
$$\therefore e^{-x}(2-a)(2\sin 2x+\cos 2x)=0$$

위의 등식이 $x$의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$a=2$

답 2

## 중단원 연습 문제

본책 109~112쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **01** $\dfrac{3}{50}$ | **02** ④ | **03** ⑤ | **04** ③ | **05** ② |
| **06** $-\pi$ | **07** 5 | **08** 2 | **09** $\dfrac{3}{8}$ | **10** 4 |
| **11** 19 | **12** ③ | **13** ⑤ | **14** ② | **15** ④ |
| **16** ③ | **17** $-7$ | **18** ⑤ | **19** ⑤ | **20** ④ |
| **21** 19 | **22** ① | **23** 4 | | |

**01** 전략 미분계수의 정의와 함수의 몫의 미분법을 이용한다.

풀이 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{ax}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{a}{x^2+1}=a$

즉 $a=-2$이므로

$$f(x)=\frac{-2x}{x^2+1} \quad \cdots❶$$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}f'(2)$$

이때 $f(x)=\dfrac{-2x}{x^2+1}$에서

$$f'(x)=\frac{-2(x^2+1)-(-2x)\cdot2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2} \quad \cdots❷$$

이므로 구하는 값은

$$\frac{1}{4}f'(2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2\cdot 2^2-2}{(2^2+1)^2}=\frac{3}{50}$$ ⋯➌

답 $\frac{3}{50}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f(x)$를 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 30 % |
| ❸ $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |

**02** 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $f'(2x+1)$을 구한다.

풀이 $f(2x+1)=(x^2+1)^2$에서

$f'(2x+1)\cdot(2x+1)'=2(x^2+1)\cdot(x^2+1)'$

$2f'(2x+1)=2(x^2+1)\cdot 2x$

$\therefore f'(2x+1)=2x(x^2+1)$ ⋯⋯ ㉠

이때 $2x+1=3$에서 $x=1$

따라서 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(3)=2\cdot 1\cdot 2=4$

답 ④

**03** 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $y'$을 구한 후 $x=1$을 대입한다.

풀이 $g(x)=\{f(3x-4)\}^5$이라 하면

$g'(x)=5\{f(3x-4)\}^4\cdot\{f(3x-4)\}'$

$=5\{f(3x-4)\}^4\cdot 3f'(3x-4)$

$=15\{f(3x-4)\}^4f'(3x-4)$

따라서 $x=1$에서의 미분계수는

$g'(1)=15\{f(-1)\}^4f'(-1)$

$=15\cdot(-1)^4\cdot 2=30$

답 ⑤

**04** 전략 합성함수의 미분법과 삼각함수의 도함수를 이용하여 미분계수를 구한다.

풀이 $f(\cos 2x)=\sin 2x+\cot x$에서

$f'(\cos 2x)\cdot(\cos 2x)'=2\cos 2x-\csc^2 x$

$\therefore -2\sin 2x\cdot f'(\cos 2x)=2\cos 2x-\csc^2 x$ ⋯⋯ ㉠

이때 $\cos 2x=\frac{1}{2}$이고 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $0<2x<\pi$이므로

$2x=\frac{\pi}{3}$ $\quad\therefore x=\frac{\pi}{6}$

따라서 ㉠의 양변에 $x=\frac{\pi}{6}$를 대입하면

$$-2\sin\frac{\pi}{3}f'\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}-\csc^2\frac{\pi}{6}$$

$$-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\frac{1}{2}-2^2,\quad -\sqrt{3}f'\left(\frac{1}{2}\right)=-3$$

$$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}$$

답 ③

**05** 전략 극한값이 존재함을 이용하여 $f(2)$, $f'(2)$의 값을 구한 후 함수 $g(x)$를 $x$에 대하여 미분한다.

풀이 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$에서 $x\to 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉 $\lim_{x\to 2}\{f(x)-3\}=0$에서 $f(2)=3$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$$

$\therefore f'(2)=5$

$g(x)=\frac{f(x)}{e^{x-2}}=f(x)e^{2-x}$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$g'(x)=f'(x)e^{2-x}-f(x)e^{2-x}$

$\therefore g'(2)=f'(2)-f(2)=5-3=2$

답 ②

**06** 전략 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$임을 이용한다.

풀이 $x\neq 1$일 때, $f(x)=\frac{e^{\sin\pi x}-1}{x-1}$

$f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{e^{\sin\pi x}-1}{x-1}$$

$g(x)=e^{\sin\pi x}$으로 놓으면 $g(1)=1$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{\sin\pi x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$$ ⋯➊

이때

$g'(x)=e^{\sin\pi x}\cdot(\sin\pi x)'=\pi\cos\pi x\cdot e^{\sin\pi x}$ ⋯➋

이므로 $f(1)=g'(1)=\pi\cdot(-1)\cdot 1=-\pi$ ⋯➌

답 $-\pi$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f(1)=g'(1)$임을 알 수 있다. | 50 % |
| ❷ $g'(x)$를 구할 수 있다. | 30 % |
| ❸ $f(1)$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

**07** 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\ln|ax+5|$에서

$$f'(x)=\frac{(ax+5)'}{ax+5}=\frac{a}{ax+5}$$

점 $(3, f(3))$에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{4}$, 즉 $f'(3)=\frac{1}{4}$이므로

$\frac{a}{3a+5}=\frac{1}{4}$, $\quad 4a=3a+5$

$\therefore a=5$

답 5

**08** 전략 로그함수의 도함수를 이용하여 $g'(x)$를 구한다.

풀이 $g(x)=\ln[1+\{f(x)\}^2]$에서

$$g'(x)=\frac{[1+\{f(x)\}^2]'}{1+\{f(x)\}^2}=\frac{2f(x)f'(x)}{1+\{f(x)\}^2}$$

이때 $f'(x)=1+\{f(x)\}^2$이므로

$$\frac{2f(x)f'(x)}{1+\{f(x)\}^2}=\frac{2f(x)f'(x)}{f'(x)}=2f(x)$$

따라서 함수 $g(x)$의 $x=\frac{\pi}{4}$에서의 미분계수는

$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot1=2$$

답 2

**09** 전략 로그미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\frac{(x+1)^2(x-1)^2}{x^4}$의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x)=\ln\frac{(x+1)^2(x-1)^2}{x^4}$$

$$\ln f(x)=\ln(x+1)^2+\ln(x-1)^2-\ln x^4$$

$$\therefore \ln f(x)=2\ln|x+1|+2\ln|x-1|-4\ln|x|$$

위의 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{4}{x}$$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$\frac{f'(2)}{f(2)}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore f'(2)=\frac{2}{3}f(2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3^2\cdot1^2}{2^4}=\frac{3}{8}$$

답 $\frac{3}{8}$

**10** 전략 $y=\{f(x)\}^n$에서 $y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$임을 이용한다.

풀이 $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서

$$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$h'(0)=g'(f(0))f'(0) \quad \cdots\cdots ㉠ \quad ❶$$

이때 $f(x)=(ax+1)^{\frac{5}{2}}$에서

$$f'(x)=\frac{5}{2}(ax+1)^{\frac{3}{2}}\cdot a$$

$$\therefore f(0)=1,\ f'(0)=\frac{5}{2}a$$

이를 ㉠에 대입하면 $\quad h'(0)=g'(1)\cdot\frac{5}{2}a$

이때 $g'(1)=3$, $h'(0)=30$이므로

$$\frac{15}{2}a=30 \qquad \therefore a=4 \quad ❷$$

답 4

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $h'(0)=g'(f(0))f'(0)$임을 알 수 있다. | 40 % |
| ❷ $a$의 값을 구할 수 있다. | 60 % |

**11** 전략 두 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$에 대하여 $\frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$임을 이용한다.

풀이 $\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=6t+5$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6t+5}{2t}\ (t\neq0)$$

이때 $\frac{6t+5}{2t}=\frac{17}{4}$에서

$$24t+20=34t$$

$$10t=20 \qquad \therefore t=2$$

따라서 $a=2^2-1=3$, $b=3\cdot2^2+5\cdot2=22$이므로

$$b-a=19$$

답 19

**12** 전략 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한 후 주어진 점의 좌표를 대입한다.

풀이 $x+y\cos x=\frac{\pi}{2}$의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$$1+\frac{dy}{dx}\cdot\cos x-y\sin x=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y\sin x-1}{\cos x}\ (\cos x\neq0)$$

따라서 점 $\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}-1}{\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-2$$

답 ③

**13** 전략 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

풀이 $axy+y^2=b$의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$$ay+ax\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{ay}{ax+2y}\ (ax+2y\neq0)$$

곡선 $axy+y^2=b$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값이 $-3$이므로

$$-\frac{a}{a+2}=-3, \qquad a=3a+6$$

$$2a=-6 \qquad \therefore a=-3$$

또 점 (1, 1)이 곡선 $-3xy+y^2=b$ 위의 점이므로

$b=-3+1=-2$

$\therefore a+b=-5$

답 ⑤

**14** 전략 역함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

풀이 $x=\frac{ay}{y^2-2}$의 양변을 $y$에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=\frac{a(y^2-2)-ay\cdot 2y}{(y^2-2)^2}=\frac{-a(y^2+2)}{(y^2-2)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{(y^2-2)^2}{a(y^2+2)}$$

곡선 $x=\frac{ay}{y^2-2}$ 위의 점 (0, 0)에서의 접선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로

$-\frac{4}{2a}=-\frac{1}{2}$ $\quad\therefore a=4$

답 ②

**15** 전략 역함수의 미분법을 이용하여 $g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$의 값을 구한다.

풀이 $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=a$라 하면 $\quad f(a)=\sin 3a=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\frac{\pi}{6}<a<\frac{\pi}{6}$에서 $-\frac{\pi}{2}<3a<\frac{\pi}{2}$이므로

$3a=\frac{\pi}{4}$ $\quad\therefore a=\frac{\pi}{12}$

$\therefore g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{12}$

$f(x)=\sin 3x$에서 $f'(x)=3\cos 3x$이므로

$$g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{f'\left(g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

$$=\frac{1}{3\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{\pi+4\sqrt{2}}{12}$$

답 ④

**16** 전략 $f(a)=b$이면 $g(b)=a$, $g'(b)=\frac{1}{f'(a)}$임을 이용한다.

풀이 $h(x)=xg(x)$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$h'(x)=g(x)+xg'(x)$

$\therefore h'(2)=g(2)+2g'(2)$

이때 $f(1)=2$에서 $\quad g(2)=1$

또 $f'(1)=3$에서 $\quad g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3}$

$\therefore h'(2)=1+2\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

답 ③

**17** 전략 곱의 미분법을 이용하여 $f(x)$의 도함수와 이계도함수를 구한다.

풀이 $f(x)=x^2e^{ax+b}$에서

$f'(x)=2xe^{ax+b}+ax^2e^{ax+b}=e^{ax+b}(ax^2+2x)$

이때 $f'(1)=0$이므로

$e^{a+b}(a+2)=0$ $\quad\therefore a=-2$ ($\because e^{a+b}>0$) ⋯ ❶

$f'(x)=e^{-2x+b}(-2x^2+2x)$에서

$f''(x)=-2e^{-2x+b}(-2x^2+2x)+e^{-2x+b}(-4x+2)$

$=e^{-2x+b}(4x^2-8x+2)$

이때 $f''(1)=-2e^3$이므로

$e^{-2+b}(4-8+2)=-2e^3$, $\quad e^{-2+b}=e^3$

$-2+b=3$ $\quad\therefore b=5$ ⋯ ❷

$\therefore a-b=-7$ ⋯ ❸

답 $-7$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $a$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❷ $b$의 값을 구할 수 있다. | 50 % |
| ❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다. | 10 % |

**18** 전략 함수 $f(x)$의 이계도함수를 구한 후 $f''(\alpha)=0$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=e^{2x}\sin 3x$에서

$f'(x)=2e^{2x}\sin 3x+3e^{2x}\cos 3x$

$=e^{2x}(2\sin 3x+3\cos 3x)$

이므로

$f''(x)=2e^{2x}(2\sin 3x+3\cos 3x)+e^{2x}(6\cos 3x-9\sin 3x)$

$=e^{2x}(-5\sin 3x+12\cos 3x)$

방정식 $f''(x)=0$, 즉 $e^{2x}(-5\sin 3x+12\cos 3x)=0$의 해가 $x=\alpha$이므로

$-5\sin 3\alpha+12\cos 3\alpha=0$ ($\because e^{2\alpha}>0$)

$5\sin 3\alpha=12\cos 3\alpha$

$\therefore \tan 3\alpha=\frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}=\frac{12}{5}$

답 ⑤

**19** 전략 미분계수의 정의와 합성함수의 미분법을 이용한다.

풀이 $h(x)=f(g(x))$라 하면

$h(2)=f(g(2))=f(2)=4$

이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(g(x))-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=h'(2)$$

이때 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로

$h'(2)=f'(g(2))g'(2)=f'(2)g'(2)$

$=3\cdot 5=15$

답 ⑤

**20** 전략 $F(x)=x^3+2x^2-15x+5$로 놓고 $F(f(t))=t$, $F(g(t))=t$임을 이용한다.

풀이 $h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$에서

$$h'(t)=f(t)-g(t)+t\{f'(t)-g'(t)\}$$

$$\therefore h'(5)=f(5)-g(5)+5\{f'(5)-g'(5)\} \quad \cdots\cdots ㉠$$

곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$와 직선 $y=5$가 만나는 점의 $x$좌표는 $x^3+2x^2-15x+5=5$에서

$$x^3+2x^2-15x=0, \quad x(x+5)(x-3)=0$$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

$$\therefore f(5)=3,\ g(5)=-5 \quad \cdots\cdots ㉡$$

한편 $F(x)=x^3+2x^2-15x+5$라 하면

$$F'(x)=3x^2+4x-15$$

이때 $F(f(t))=t$이므로 양변을 $t$에 대하여 미분하면

$$F'(f(t))f'(t)=1 \quad \therefore f'(t)=\frac{1}{F'(f(t))}$$

$$\therefore f'(5)=\frac{1}{F'(f(5))}=\frac{1}{F'(3)}=\frac{1}{24} \quad \cdots\cdots ㉢$$

또 같은 방법으로 $F(g(t))=t$이므로

$$g'(5)=\frac{1}{F'(g(5))}=\frac{1}{F'(-5)}=\frac{1}{40} \quad \cdots\cdots ㉣$$

㉡, ㉢, ㉣을 ㉠에 대입하면

$$h'(5)=3-(-5)+5\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{40}\right)=\frac{97}{12}$$

답 ④

**21** 전략 함수 $f(x)$가 $x=t$에서 미분가능하면 $x=t$에서 연속이고 $f'(t)$가 존재함을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to 2-}(e^{x^2-4}+a)=\lim_{x\to 2+}\{b\ln(3x-5)+6\}=f(2)$이므로

$$1+a=6 \quad \therefore a=5 \quad \cdots ❶$$

또 $f'(x)=\begin{cases} 2xe^{x^2-4} & (x<2) \\ \dfrac{3b}{3x-5} & (x>2) \end{cases}$에서 $x=2$에서의 미분계수가 존재하므로

$$\lim_{x\to 2-}2xe^{x^2-4}=\lim_{x\to 2+}\frac{3b}{3x-5}$$

$$4=3b \quad \therefore b=\frac{4}{3} \quad \cdots ❷$$

$$\therefore 3(a+b)=3\left(5+\frac{4}{3}\right)=19 \quad \cdots ❸$$

답 19

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $a$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $b$의 값을 구할 수 있다. | 60 % |
| ❸ $3(a+b)$의 값을 구할 수 있다. | 10 % |

**22** 전략 몫의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한 후 역함수의 미분법을 이용하여 $g'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구한다.

풀이 $g\left(3f(x)-\dfrac{2}{e^x+e^{2x}}\right)=x$에서

$$3f(x)-\frac{2}{e^x+e^{2x}}=g^{-1}(x)$$

즉 $3f(x)-\dfrac{2}{e^x+e^{2x}}=f(x)$이므로 $\quad 2f(x)=\dfrac{2}{e^x+e^{2x}}$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{\boxed{e^x+e^{2x}}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$f(x)$의 도함수를 구하면

$$f'(x)=-\frac{e^x+2e^{2x}}{(e^x+e^{2x})^2}$$

이때 ㉠에서 $f(0)=\frac{1}{2}$이므로 $\quad g\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$$\therefore g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{f'\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)}=\frac{1}{f'(0)}$$

$$=\frac{1}{-\frac{3}{4}}=\boxed{-\frac{4}{3}}$$

따라서 $h(x)=e^x+e^{2x}$, $p=-\frac{4}{3}$이므로

$$p\times h(\ln 2)=\left(-\frac{4}{3}\right)\times(e^{\ln 2}+e^{2\ln 2})$$

$$=\left(-\frac{4}{3}\right)\times(2+4)=-8$$

답 ①

**23** 전략 미분계수의 정의를 이용하여 $f''(4)$의 값을 구한다.

풀이 조건 (나)에서 $x\to 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}\{f'(f(x))-2\}=0$이므로

$$f'(f(1))=2$$

이때 $h(x)=f'(f(x))$로 놓으면 $h(1)=2$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(f(x))-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)$$

$$\therefore h'(1)=8$$

$h'(x)=f''(f(x))f'(x)$이므로

$$h'(1)=f''(f(1))f'(1)$$

조건 (가)에서 $f(1)=4$, $f'(1)=2$이므로

$$8=f''(4)\cdot 2 \quad \therefore f''(4)=4$$

답 4

# 06 도함수의 활용 (1)

## 01 접선의 방정식

### 확인

본책 115~116쪽

**1** (1) $f(x)=\sin x$라 하면 $f'(x)=\cos x$

점 $(\pi,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(\pi)=\cos\pi=-1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=-(x-\pi)$ $\quad\therefore y=-x+\pi$

(2) $f(x)=2\ln x$라 하면 $f'(x)=\dfrac{2}{x}$

점 $(e,\ 2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(e)=\dfrac{2}{e}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-2=\dfrac{2}{e}(x-e)$ $\quad\therefore y=\dfrac{2}{e}x$

답 (1) $y=-x+\pi$ (2) $y=\dfrac{2}{e}x$

**2** (1) $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{(t+1)^2}$, $\dfrac{dy}{dt}=1$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-(t+1)^2$$

(2) $t=1$일 때

$x=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$, $y=1-2=-1$

(3) $t=1$일 때 $\dfrac{dy}{dx}=-2^2=-4$이므로 접선의 방정식은

$y+1=-4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ $\quad\therefore y=-4x+1$

답 (1) $\dfrac{dy}{dx}=-(t+1)^2$ (2) $x=\dfrac{1}{2}$, $y=-1$

(3) $y=-4x+1$

**3** (1) $(x-2)^2+y^2=4$에서

$2(x-2)+2y\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2-x}{y}$ $(y\neq0)$

점 $(1,\ \sqrt{3})$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$ $\quad\therefore y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(2) $x^2-2xy-y^2=4$에서

$2x-2y-2x\dfrac{dy}{dx}-2y\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y}{x+y}$ $(x\neq-y)$

점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{dy}{dx}=1$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=x-2$

답 (1) $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (2) $y=x-2$

### 유제

본책 117~123쪽

**1** (1) $f(x)=\sqrt{4x-3}$이라 하면

$f'(x)=\dfrac{4}{2\sqrt{4x-3}}=\dfrac{2}{\sqrt{4x-3}}$

점 $(3,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(3)=\dfrac{2}{\sqrt{12-3}}=\dfrac{2}{3}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-3=\dfrac{2}{3}(x-3)$ $\quad\therefore y=\dfrac{2}{3}x+1$

(2) $f(x)=e^{2x}+1$이라 하면 $f'(x)=2e^{2x}$

점 $(0,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=2x+2$

(3) $f(x)=2x-\ln x$라 하면 $f'(x)=2-\dfrac{1}{x}$

점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2-1=1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-2=x-1$ $\quad\therefore y=x+1$

(4) $f(x)=\cos\dfrac{\pi}{4}x$라 하면 $f'(x)=-\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{4}x$

점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=-\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{2}=-\dfrac{\pi}{4}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=-\dfrac{\pi}{4}(x-2)$ $\quad\therefore y=-\dfrac{\pi}{4}x+\dfrac{\pi}{2}$

답 (1) $y=\dfrac{2}{3}x+1$ (2) $y=2x+2$

(3) $y=x+1$ (4) $y=-\dfrac{\pi}{4}x+\dfrac{\pi}{2}$

**2** $f(x)=\tan\dfrac{x}{2}$라 하면 $f'(x)=\dfrac{1}{2}\sec^2\dfrac{x}{2}$

점 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 1\right)$에서의 접선의 기울기는

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\sec^2\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2=1$

따라서 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-1$이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y-1=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \qquad \therefore y=-x+\frac{\pi}{2}+1$$

답 $y=-x+\frac{\pi}{2}+1$

**3** $f(x)=\frac{x+2}{x+3}$라 하면

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+3)-(x+2)\cdot 1}{(x+3)^2}=\frac{1}{(x+3)^2}$$

접점의 좌표를 $\left(a,\ \frac{a+2}{a+3}\right)$라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$$f'(a)=\frac{1}{(a+3)^2}=1, \qquad (a+3)^2=1$$

$a+3=-1$ 또는 $a+3=1$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=-2$

따라서 접점의 좌표가 $(-4,\ 2)$, $(-2,\ 0)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-2=x+4,\ y=x+2$

$\therefore y=x+6,\ y=x+2$

답 $y=x+6,\ y=x+2$

**4** $f(x)=\ln(x-1)$이라 하면 $\quad f'(x)=\frac{1}{x-1}$

접점의 좌표를 $(a,\ \ln(a-1))$이라 하면 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$인 직선의 기울기는 $\tan 45°=1$이므로

$$f'(a)=\frac{1}{a-1}=1, \qquad a-1=1$$

$\therefore a=2$

따라서 접점의 좌표가 $(2,\ 0)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=x-2$

답 $y=x-2$

**라이트 UP**

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0\le\theta<\pi)$라 하면

$f'(a)=\tan\theta$

**5** $f(x)=\cos 2x$라 하면 $\quad f'(x)=-2\sin 2x$

직선 $x-2y+1=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$과 수직인 직선의 기울기는 $-2$이므로 접점의 좌표를 $(a,\ \cos 2a)$라 하면

$f'(a)=-2\sin 2a=-2 \qquad \therefore \sin 2a=1$

이때 $0\le a\le\pi$에서 $0\le 2a\le 2\pi$이므로

$$2a=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore a=\frac{\pi}{4}$$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\frac{\pi}{4},\ 0\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y=-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \qquad \therefore y=-2x+\frac{\pi}{2}$$

답 $y=-2x+\frac{\pi}{2}$

**6** $f(x)=\sqrt{x^2+1}$이라 하면

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

접점의 좌표를 $(a,\ \sqrt{a^2+1})$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\sqrt{a^2+1}=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}(x-a) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이 접선이 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$$-\sqrt{a^2+1}=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}(-1-a)$$

$a^2+1=a(1+a) \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y-\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) \qquad \therefore y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}$

**7** $f(x)=x\ln x$라 하면

$$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$$

접점의 좌표를 $(a,\ a\ln a)$라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=\ln a+1$이므로 접선의 방정식은

$$y-a\ln a=(\ln a+1)(x-a) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이 직선이 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1-a\ln a=(\ln a+1)\cdot(-a)$

$1+a\ln a=a\ln a+a \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $\qquad y=x-1$

따라서 이 직선의 $x$절편은 1이다.

답 1

**8** $f(x)=e^{2-x}$이라 하면 $\quad f'(x)=-e^{2-x}$

접점의 좌표를 $(a,\ e^{2-a})$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=-e^{2-a}$이므로 접선의 방정식은

$$y-e^{2-a}=-e^{2-a}(x-a) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이 직선이 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$-e^{2-a}=-e^{2-a}(2-a)$

$e^{2-a}(a-1)=0 \qquad \therefore a=1\ (\because e^{2-a}>0)$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$y-e=-e(x-1) \qquad \therefore y=-ex+2e$

따라서 이 직선이 점 $(-1,\ k)$를 지나므로

$k=e+2e=3e$ 답 $3e$

**9** $f(x)=x+\frac{1}{x}$이라 하면 $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(a,\ a+\frac{1}{a}\right)$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=1-\frac{1}{a^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\left(a+\frac{1}{a}\right)=\left(1-\frac{1}{a^2}\right)(x-a)$

이 직선이 점 $(4,\ 2)$를 지나므로

$2-\left(a+\frac{1}{a}\right)=\left(1-\frac{1}{a^2}\right)(4-a)$

$a^2+a-2=0$, $(a+2)(a-1)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=1$

따라서 점 $(4,\ 2)$에서 그을 수 있는 접선의 개수는 2이다.

답 2

**10** $f(x)=e^{-x^2}$이라 하면 $f'(x)=-2xe^{-x^2}$

접점의 좌표를 $(t,\ e^{-t^2})$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=-2te^{-t^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-e^{-t^2}=-2te^{-t^2}(x-t)$

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$-e^{-t^2}=-2te^{-t^2}(a-t)$

$e^{-t^2}(2t^2-2at+1)=0$

$\therefore 2t^2-2at+1=0$ ($\because e^{-t^2}>0$) ⋯⋯ ㉠

이때 점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=e^{-x^2}$에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 한 개의 접점이 존재해야 하므로 ㉠이 중근을 가져야 한다.

따라서 ㉠의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-2\cdot1=0$, $a^2=2$

$\therefore a=-\sqrt{2}$ 또는 $a=\sqrt{2}$ 답 $-\sqrt{2},\ \sqrt{2}$

**11** $f(x)=2\ln x$, $g(x)=ax+\frac{b}{x}$라 하면

$f'(x)=\frac{2}{x}$, $g'(x)=a-\frac{b}{x^2}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(e^2,\ 4)$에서 공통인 접선을 가지므로

$f(e^2)=g(e^2)$에서 $4=ae^2+\frac{b}{e^2}$ ⋯⋯ ㉠

$f'(e^2)=g'(e^2)$에서 $\frac{2}{e^2}=a-\frac{b}{e^4}$

$\therefore a=\frac{2}{e^2}+\frac{b}{e^4}$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $4=\left(\frac{2}{e^2}+\frac{b}{e^4}\right)\cdot e^2+\frac{b}{e^2}$

$\frac{2b}{e^2}=2$ $\therefore b=e^2$

$b=e^2$을 ㉡에 대입하면 $a=\frac{2}{e^2}+\frac{1}{e^2}=\frac{3}{e^2}$

$\therefore ab=\frac{3}{e^2}\cdot e^2=3$ 답 3

**12** $f(x)=\cos^2 x+a$, $g(x)=\cos x$라 하면

$f'(x)=-2\sin x\cos x$, $g'(x)=-\sin x$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$ $(0<t<\pi)$인 점에서 접한다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\cos^2 t+a=\cos t$ ⋯⋯ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $-2\sin t\cos t=-\sin t$

$\sin t(2\cos t-1)=0$

$\therefore \cos t=\frac{1}{2}$ ($\because 0<t<\pi$)

$\cos t=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{4}+a=\frac{1}{2}$

$\therefore a=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

참고 $\cos t=\frac{1}{2}$에서 $t=\frac{\pi}{3}$ ($\because 0<t<\pi$)이므로 두 곡선 $y=\cos^2 x+\frac{1}{4}$, $y=\cos x$는 점 $\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{1}{2}\right)$에서 접한다.

**13** $f(x)=ax^3$, $g(x)=\ln x$라 하면

$f'(x)=3ax^2$, $g'(x)=\frac{1}{x}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $at^3=\ln t$ ⋯⋯ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $3at^2=\frac{1}{t}$ $\therefore at^3=\frac{1}{3}$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{3}=\ln t$ $\therefore t=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$

따라서 주어진 곡선의 접점의 좌표가 $\left(\sqrt[3]{e},\ \frac{1}{3}\right)$이고 접선의 기울기가 $g'(\sqrt[3]{e})=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{3}=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}(x-\sqrt[3]{e})$ $\therefore y=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}x-\frac{2}{3}$

답 $y=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}x-\frac{2}{3}$

**14** $\frac{dx}{dt}=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}\ (t\neq0)$$

$t=\ln 2$일 때

$$x=\frac{e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}}{2}=\frac{2+\frac{1}{2}}{2}=\frac{5}{4},$$

$$y=\frac{e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}}{2}=\frac{2-\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}}{e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}}=\frac{2+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\frac{5}{3}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-\frac{3}{4}=\frac{5}{3}\left(x-\frac{5}{4}\right) \qquad \therefore y=\frac{5}{3}x-\frac{4}{3}$$

답 $y=\frac{5}{3}x-\frac{4}{3}$

**15** $\frac{dx}{dt}=2t-1$, $\frac{dy}{dt}=3t^2+2at$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+2at}{2t-1}\ \left(t\neq\frac{1}{2}\right)$$

$t=1$에 대응하는 점에서 $\frac{dy}{dx}=-1$이므로

$$3+2a=-1 \qquad \therefore a=-2$$

따라서 $t=1$일 때

$$x=1^2-1+1=1,\ y=1^3-2\cdot1^2-2=-3$$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y+3=-(x-1) \qquad \therefore y=-x-2$$

답 $y=-x-2$

**16** $\frac{dx}{d\theta}=-8\sin 2\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=4\cos 2\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{4\cos 2\theta}{-8\sin 2\theta}=-\frac{\cos 2\theta}{2\sin 2\theta}$$

이때 $4\cos 2\theta=2\sqrt{2}$, $2\sin 2\theta=\sqrt{2}$에서

$$\cos 2\theta=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin 2\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-\sqrt{2}=-\frac{1}{2}(x-2\sqrt{2}) \qquad \therefore y=-\frac{1}{2}x+2\sqrt{2}$$

답 $y=-\frac{1}{2}x+2\sqrt{2}$

참고 $4\cos 2\theta=2\sqrt{2}$, $2\sin 2\theta=\sqrt{2}$에서

$\cos 2\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 2\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<2\theta<\pi$이므로

$$2\theta=\frac{\pi}{4} \qquad \therefore \theta=\frac{\pi}{8}$$

**17** (1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3$의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

따라서 점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{dy}{dx}=-2$이므로 접선의 방정식은

$$y-4=-2(x-1) \qquad \therefore y=-2x+6$$

(2) $x\cos y+y\cos x=\frac{\pi}{3}$의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$$\cos y-x\sin y\cdot\frac{dy}{dx}+\cos x\cdot\frac{dy}{dx}-y\sin x=0$$

$$(\cos x-x\sin y)\frac{dy}{dx}=y\sin x-\cos y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y\sin x-\cos y}{\cos x-x\sin y}\ (\cos x\neq x\sin y)$$

따라서 점 $\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}}=-1$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{\pi}{3}=-\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \qquad \therefore y=-x+\frac{2}{3}\pi$$

답 (1) $y=-2x+6$ (2) $y=-x+\frac{2}{3}\pi$

**18** $x^3-2xy+y^3=2$의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$$3x^2-2y-2x\cdot\frac{dy}{dx}+3y^2\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$(3y^2-2x)\frac{dy}{dx}=2y-3x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2y-3x^2}{3y^2-2x}\ (3y^2\neq 2x)$$

따라서 점 $(-1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{5}$이므로 접선의 방정식은

$$y-1=-\frac{1}{5}(x+1) \qquad \therefore y=-\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}$$

따라서 이 직선의 $x$절편은 4이다.

답 4

**19** $x^3y^2=4$의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$$3x^2y^2+2x^3y\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{3y}{2x}\ (xy\neq 0)$$

점 (1, 2)에서의 접선의 기울기는 $\frac{dy}{dx}=-3$이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y-2=\frac{1}{3}(x-1) \qquad \therefore y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$$

답 $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

## 02 함수의 증가와 감소

유제 본책 125쪽

**1** (1) $f(x)=x+\frac{4}{x}$에서 $x\neq 0$이고 $f'(x)=1-\frac{4}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\frac{4}{x^2}=1$, $x^2=4$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -2]$, $[2, \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-2, 0)$, $(0, 2]$에서 감소한다.

(2) $f(x)=x-2\sin x$에서 $f'(x)=1-2\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\cdots$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right]$에서 증가하고, 구간 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{5}{3}\pi, 2\pi\right)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

**2** $f(x)=ax+\ln(x^2+1)$에서

$$f'(x)=a+\frac{2x}{x^2+1}=\frac{ax^2+2x+a}{x^2+1}$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\leq 0$, 즉 $ax^2+2x+a\leq 0$이어야 한다.

(i) $a=0$일 때,

$ax^2+2x+a\leq 0$에서 $2x\leq 0$ $\therefore x\leq 0$

따라서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소하지 않는다.

(ii) $a\neq 0$일 때,

이차부등식 $ax^2+2x+a\leq 0$이 항상 성립하려면

$a<0$ …… ㉠

또 이차방정식 $ax^2+2x+a=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-a^2\leq 0$, $(a+1)(a-1)\geq 0$

$\therefore a\leq -1$ 또는 $a\geq 1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a\leq -1$

(i), (ii)에서 $a\leq -1$

답 $a\leq -1$

## 03 함수의 극대와 극소

유제 본책 128~130쪽

**1** (1) $f(x)=x+\frac{1}{x}-1$에서 $x\neq 0$이고 $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\frac{1}{x^2}=1$, $x^2=1$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $-3$ | $\searrow$ | | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고 극댓값은 $f(-1)=-3$, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=1$이다.

(2) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$에서 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$

$f'(x)=0$에서 $\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$

$\sqrt{1-x}=\sqrt{x}$, $1-x=x$

$\therefore x=\frac{1}{2}$

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $\sqrt{2}$ | $\searrow$ | |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극대이고 극댓값은 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$이다.

답 (1) 극댓값: $-3$, 극솟값: $1$ (2) 극댓값: $\sqrt{2}$

**2** (1) $f(x)=e^x(\sin x-\cos x)$에서

$f'(x)=e^x(\sin x-\cos x)+e^x(\cos x+\sin x)$
$=2e^x\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=0$ ($\because e^x>0$)

$\therefore x=0$ ($\because -\pi<x<\pi$)

| $x$ | $-\pi$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | $-1$ | ↗ | |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=-1$이다.

(2) $f(x)=x+x\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=1+\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+2$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-2$

$\therefore x=\dfrac{1}{e^2}$

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{e^2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | $-\frac{1}{e^2}$ | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{e^2}$에서 극소이고 극솟값은 $f\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=-\dfrac{1}{e^2}$이다.

답 (1) 극솟값: $-1$ (2) 극솟값: $-\dfrac{1}{e^2}$

**3** (1) $f(x)=x^2e^x$에서

$f'(x)=2xe^x+x^2e^x=x(x+2)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ ($\because e^x>0$)

$f''(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x)e^x=(x^2+4x+2)e^x$이므로

$f''(-2)=-\dfrac{2}{e^2}<0$, $f''(0)=2>0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고 극댓값은 $f(-2)=\dfrac{4}{e^2}$, $x=0$에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=0$이다.

(2) $f(x)=x(\ln x)^2$에서

$f'(x)=(\ln x)^2+x\cdot 2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x(\ln x+2)$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-2$ 또는 $\ln x=0$

$\therefore x=\dfrac{1}{e^2}$ 또는 $x=1$

$f''(x)=\dfrac{\ln x+2}{x}+\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{2(\ln x+1)}{x}$이므로

$f''\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=-2e^2<0$, $f''(1)=2>0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{e^2}$에서 극대이고 극댓값은 $f\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=\dfrac{4}{e^2}$, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=0$이다.

답 (1) 극댓값: $\dfrac{4}{e^2}$, 극솟값: $0$

(2) 극댓값: $\dfrac{4}{e^2}$, 극솟값: $0$

**4** (1) $f(x)=2\cos x-x$에서

$f'(x)=-2\sin x-1$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=-\dfrac{5}{6}\pi$ 또는 $x=-\dfrac{\pi}{6}$ ($\because -\pi<x<\pi$)

$f''(x)=-2\cos x$이므로

$f''\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right)=\sqrt{3}>0$, $f''\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}<0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{\pi}{6}$에서 극대이고 극댓값은 $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{6}$, $x=-\dfrac{5}{6}\pi$에서 극소이고 극솟값은 $f\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right)=-\sqrt{3}+\dfrac{5}{6}\pi$이다.

(2) $f(x)=\sqrt{2}x+\sin 2x$에서

$f'(x)=\sqrt{2}+2\cos 2x$

$f'(x)=0$에서 $\cos 2x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0<x<\pi$에서 $0<2x<2\pi$이므로

$2x=\dfrac{3}{4}\pi$ 또는 $2x=\dfrac{5}{4}\pi$

$\therefore x=\dfrac{3}{8}\pi$ 또는 $x=\dfrac{5}{8}\pi$

$f''(x)=-4\sin 2x$이므로

$f''\left(\dfrac{3}{8}\pi\right)=-2\sqrt{2}<0$, $f''\left(\dfrac{5}{8}\pi\right)=2\sqrt{2}>0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{3}{8}\pi$에서 극대이고 극댓값은 $f\left(\dfrac{3}{8}\pi\right)=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}\pi+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\dfrac{5}{8}\pi$에서 극소이고 극솟값은 $f\left(\dfrac{5}{8}\pi\right)=\dfrac{5\sqrt{2}}{8}\pi-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

답 (1) 극댓값: $\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{6}$, 극솟값: $-\sqrt{3}+\dfrac{5}{6}\pi$

(2) 극댓값: $\dfrac{3\sqrt{2}}{8}\pi+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 극솟값: $\dfrac{5\sqrt{2}}{8}\pi-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**5** $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+3}$에서

$f'(x)=\dfrac{a(x^2+3)-(ax+b)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\dfrac{-ax^2-2bx+3a}{(x^2+3)^2}$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극댓값 1을 가지므로

$f(2)=1,\ f'(2)=0$

$\frac{2a+b}{7}=1,\ \frac{-a-4b}{49}=0$

$\therefore 2a+b=7,\ a+4b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=-1$

답 $a=4,\ b=-1$

**6** $f(x)=\frac{5x^2-2x+a}{e^x}$에서

$$f'(x)=\frac{(10x-2)e^x-(5x^2-2x+a)e^x}{(e^x)^2}$$
$$=\frac{-5x^2+12x-2-a}{e^x}$$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\ge 0$ 또는 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

그런데 $e^x>0$이므로 이차방정식 $-5x^2+12x-2-a=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=6^2-5(2+a)\le 0 \qquad \therefore a\ge\frac{26}{5}$

답 $a\ge\frac{26}{5}$

## 중단원 연습 문제

본책 131~134쪽

**01** 11 **02** $\frac{9}{16}$ **03** ② **04** ② **05** ⑤

**06** $-\frac{1}{2}$ **07** ④ **08** ③ **09** ① **10** 6

**11** $-52$ **12** ④ **13** ⑤ **14** $\pi$ **15** ②

**16** 2 **17** 21 **18** $0<a<4$ **19** ③

**20** ④ **21** ③ **22** $\frac{185}{2}\pi$ **23** $-4$

**01** 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=a$인 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{f'(a)}$임을 이용한다.

풀이 점 $(4,\ a)$는 곡선 $y=\frac{x}{x-3}$ 위의 점이므로

$a=4$

$f(x)=\frac{x}{x-3}$라 하면

$$f'(x)=\frac{x-3-x}{(x-3)^2}=-\frac{3}{(x-3)^2}$$

이므로 점 $(4,\ 4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(4)=-3$

따라서 점 $(4,\ 4)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이므로 직선의 방정식은

$y-4=\frac{1}{3}(x-4) \qquad \therefore y=\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$

이 직선이 점 $(b,\ 5)$를 지나므로

$5=\frac{b}{3}+\frac{8}{3},\qquad \frac{b}{3}=\frac{7}{3} \qquad \therefore b=7$

$\therefore a+b=11$

답 11

**02** 전략 접선의 방정식을 구한 후 접선의 $x$절편, $y$절편을 이용한다.

풀이 $f(x)=\sin 2x+3e^{2x}$이라 하면

$f'(x)=2\cos 2x+6e^{2x}$ ➊

점 $(0,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=2+6=8$이므로 접선의 방정식은 $\quad y=8x+3$ ➋

따라서 직선 $y=8x+3$의 $x$절편과 $y$절편이 각각 $-\frac{3}{8}$, 3이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\left|-\frac{3}{8}\right|\cdot|3|=\frac{9}{16}$ ➌

답 $\frac{9}{16}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 30% |
| ➋ 접선의 방정식을 구할 수 있다. | 40% |
| ➌ 도형의 넓이를 구할 수 있다. | 30% |

**03** 전략 곡선 $y=2\ln x$의 접선의 방정식을 구한 후 이 직선이 곡선 $y=x^2+k$와 접할 조건을 구한다.

풀이 $f(x)=2\ln x$라 하면 $\qquad f'(x)=\frac{2}{x}$

점 $(e,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(e)=\frac{2}{e}$이므로 접선의 방정식은

$y-2=\frac{2}{e}(x-e) \qquad \therefore y=\frac{2}{e}x \qquad \cdots\cdots ㉠$

$g(x)=x^2+k$라 하면 $\qquad g'(x)=2x$

㉠과 곡선 $y=g(x)$의 접점의 좌표를 $(a,\ a^2+k)$라 하면 접선의 기울기는 $g'(a)=2a$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2+k)=2a(x-a) \qquad \therefore y=2ax-a^2+k$

이 직선이 ㉠과 일치해야 하므로

$2a=\frac{2}{e},\ -a^2+k=0$

$\therefore a=\frac{1}{e},\ k=a^2=\frac{1}{e^2}$

답 ②

다른 풀이 곡선 $y=2\ln x$ 위의 점 $(e,\ 2)$에서의 접선의 방정식은 $y=\frac{2}{e}x$

직선 $y=\frac{2}{e}x$가 곡선 $y=x^2+k$와 접하려면 $\frac{2}{e}x=x^2+k$에서

$$x^2-\frac{2}{e}x+k=0$$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=\left(-\frac{1}{e}\right)^2-k=0 \qquad \therefore k=\frac{1}{e^2}$$

**04** 전략 두 직선이 평행하면 기울기가 같음을 이용한다.

풀이 $f(x)=\sin 3x$라 하면

$$f'(x)=3\cos 3x$$

접점의 좌표를 $(t,\ \sin 3t)$라 하면 직선 $3x+y+4=0$, 즉 $y=-3x-4$에 평행한 직선의 기울기는 $-3$이므로

$$f'(t)=3\cos 3t=-3 \qquad \therefore \cos 3t=-1$$

이때 $0<t<\pi$에서 $0<3t<3\pi$이므로

$$3t=\pi \qquad \therefore t=\frac{\pi}{3}$$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\frac{\pi}{3},\ 0\right)$이므로 접선의 방정식은

$$y=-3\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \qquad \therefore y=-3x+\pi$$

이 직선이 점 $\left(a,\ \frac{\pi}{2}\right)$를 지나므로

$$\frac{\pi}{2}=-3a+\pi, \qquad 3a=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore a=\frac{\pi}{6}$$

답 ②

**05** 전략 $\mathrm{A}(t,\ 3e^{t-1})$이라 하고 점 A에서의 접선의 방정식을 구한다.

풀이 $f(x)=3e^{x-1}$이라 하면 $\quad f'(x)=3e^{x-1}$

$\mathrm{A}(t,\ 3e^{t-1})$이라 하면 점 A에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3e^{t-1}$이므로 접선의 방정식은

$$y-3e^{t-1}=3e^{t-1}(x-t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-3e^{t-1}=3e^{t-1}\cdot(-t), \qquad 3e^{t-1}(-t+1)=0$$

$$\therefore t=1\ (\because e^{t-1}>0)$$

따라서 $\mathrm{A}(1,\ 3)$이므로 선분 OA의 길이는

$$\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$$

답 ⑤

**06** 전략 접점의 좌표를 각각 $\left(a,\ \frac{\ln a}{a}\right)$, $(b,\ e^{-b})$이라 하고 이 점에서의 접선이 원점을 지남을 이용한다.

풀이 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$라 하면

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

접점의 좌표를 $\left(a,\ \frac{\ln a}{a}\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=\frac{1-\ln a}{a^2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{\ln a}{a}=\frac{1-\ln a}{a^2}(x-a)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-\frac{\ln a}{a}=-\frac{1-\ln a}{a}$$

$$\ln a=1-\ln a, \qquad \ln a=\frac{1}{2}$$

$$\therefore a=\sqrt{e}$$

$$\therefore m=f'(\sqrt{e})=\frac{1}{2e} \quad \cdots❶$$

$g(x)=e^{-x}$이라 하면

$$g'(x)=-e^{-x}$$

접점의 좌표를 $(b,\ e^{-b})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $g'(b)=-e^{-b}$이므로 접선의 방정식은

$$y-e^{-b}=-e^{-b}(x-b)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-e^{-b}=-e^{-b}\cdot(-b)$$

$$(b+1)e^{-b}=0 \qquad \therefore b=-1\ (\because e^{-b}>0)$$

$$\therefore n=g'(-1)=-e \quad \cdots❷$$

$$\therefore mn=\frac{1}{2e}\cdot(-e)=-\frac{1}{2} \quad \cdots❸$$

답 $-\frac{1}{2}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $m$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❷ $n$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❸ $mn$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

**07** 전략 접점의 좌표를 $(a,\ (a+k)e^{-a})$이라 하고 접선의 방정식을 구한다.

풀이 $f(x)=(x+k)e^{-x}$이라 하면

$$f'(x)=e^{-x}-(x+k)e^{-x}=-e^{-x}(x+k-1)$$

접점의 좌표를 $(a,\ (a+k)e^{-a})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=-e^{-a}(a+k-1)$이므로 접선의 방정식은

$$y-(a+k)e^{-a}=-e^{-a}(a+k-1)(x-a)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$(a+k)e^{-a}=e^{-a}(a+k-1)\cdot(-a)$$

$$e^{-a}(a^2+ka+k)=0$$

$$\therefore a^2+ka+k=0\ (\because e^{-a}>0) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 원점에서 곡선 $y=(x+k)e^{-x}$에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 한 개의 접점이 존재해야 하므로 ㉠이 중근을 가져야 한다.

따라서 ㉠의 판별식을 $D$라 하면

$D=k^2-4k=0,\quad k(k-4)=0$

$\therefore k=4\ (\because k\neq 0)$ 답 ④

**08** 전략 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가지면 $f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\sin^2 x$, $g(x)=-\cos x+a$라 하면

$f'(x)=2\sin x\cos x,\ g'(x)=\sin x$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(t)=g(t)$에서 $\quad \sin^2 t=-\cos t+a$

$\therefore a=\sin^2 t+\cos t$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad 2\sin t\cos t=\sin t$

$\sin t(2\cos t-1)=0 \quad \therefore \cos t=\frac{1}{2}\ \left(\because 0<t<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore t=\frac{\pi}{3}$

$t=\frac{\pi}{3}$를 ㉠에 대입하면

$a=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$ 답 ③

**09** 전략 매개변수로 나타낸 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$에 대하여 $t=a$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 $\frac{g'(a)}{f'(a)}$임을 이용한다.

풀이 $\frac{dx}{dt}=e^t+e^{-t}$, $\frac{dy}{dt}=e^t-e^{-t}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$$

$t=\ln 3$일 때

$x=e^{\ln 3}-e^{-\ln 3}=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$,

$y=e^{\ln 3}+e^{-\ln 3}=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{\ln 3}-e^{-\ln 3}}{e^{\ln 3}+e^{-\ln 3}}=\frac{3-\frac{1}{3}}{3+\frac{1}{3}}=\frac{4}{5}$$

따라서 접선의 방정식은

$y-\frac{10}{3}=\frac{4}{5}\left(x-\frac{8}{3}\right) \quad \therefore y=\frac{4}{5}x+\frac{6}{5}$

이 직선이 점 $(6,\ k)$를 지나므로

$k=\frac{4}{5}\cdot 6+\frac{6}{5}=6$ 답 ①

**10** 전략 매개변수로 나타낸 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$ 위의 점 $(f(a),\ g(a))$에서의 접선의 기울기는 $\frac{g'(a)}{f'(a)}$임을 이용한다.

풀이 $\frac{dx}{dt}=2\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-3\sin t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{3\sin t}{2\cos t}$$ ⋯❶

이때 $2\sin t=\sqrt{3}$, $3\cos t=\frac{3}{2}$에서 $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos t=\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\cdot\frac{1}{2}}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

따라서 접선의 방정식은 $\quad y-\frac{3}{2}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}(x-\sqrt{3})$

$\therefore y=-\frac{3\sqrt{3}}{2}x+6$ ⋯❷

따라서 구하는 $y$절편은 6이다. ⋯❸

답 6

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\frac{dy}{dx}$를 구할 수 있다. | 40 % |
| ❷ 접선의 방정식을 구할 수 있다. | 50 % |
| ❸ $y$절편을 구할 수 있다. | 10 % |

**11** 전략 $\frac{dy}{dx}$에 주어진 점의 좌표를 대입하여 접선의 기울기를 구한다.

풀이 $3x^2+\sqrt{y}=5$의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$6x+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \quad \therefore \frac{dy}{dx}=-12x\sqrt{y}$ ⋯❶

점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기는

$-12\cdot 1\cdot\sqrt{4}=-24$

이므로 접선의 방정식은 $\quad y-4=-24(x-1)$

$\therefore y=-24x+28$ ⋯❷

따라서 $a=-24$, $b=28$이므로

$a-b=-52$ ⋯❸

답 $-52$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\frac{dy}{dx}$를 구할 수 있다. | 40 % |
| ❷ 접선의 방정식을 구할 수 있다. | 50 % |
| ❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다. | 10 % |

**12** 전략 함수 $f(x)$가 열린구간 $(a,\ b)$에서 $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 감소함을 이용한다.

풀이 $f(x)=\frac{e^x}{x^2}$에서 $x\neq 0$이고

$f'(x)=\dfrac{e^x\cdot x^2-e^x\cdot 2x}{(x^2)^2}=\dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2$ ($\because e^x>0$)

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | | ↘ | | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ 2]$에서 감소하므로

$a=2$

답 ④

**13** 전략 함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=(x^2+ax+5)e^{-x}$에서

$f'(x)=(2x+a)e^{-x}-(x^2+ax+5)e^{-x}$

$=\{-x^2+(2-a)x+a-5\}e^{-x}$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\le 0$, 즉 $-x^2+(2-a)x+a-5\le 0$이어야 한다.

이차방정식 $-x^2+(2-a)x+a-5=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=(2-a)^2+4(a-5)\le 0$

$a^2-16\le 0,\quad (a+4)(a-4)\le 0$

$\therefore -4\le a\le 4$

따라서 정수 $a$는

$-4,\ -3,\ -2,\ \cdots,\ 4$

의 9개이다.

답 ⑤

**14** 전략 $f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값을 구한 후 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타낸다.

풀이 $f(x)=e^x(\sin x+\cos x)$에서

$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)$

$=2e^x\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=0$ ($\because e^x>0$)

$\therefore x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$) ⋯ ❶

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $e^{\frac{\pi}{2}}$ | ↘ | $-e^{\frac{3}{2}\pi}$ | ↗ | |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{2}$에서 극댓값 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}$, $x=\dfrac{3}{2}\pi$에서 극솟값 $f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=-e^{\frac{3}{2}\pi}$을 가지므로

$a=e^{\frac{\pi}{2}},\ b=-e^{\frac{3}{2}\pi}$ ⋯ ❷

$\therefore \ln\left|\dfrac{b}{a}\right|=\ln|-e^{\pi}|=\pi$ ⋯ ❸

답 $\pi$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $a$, $b$의 값을 구할 수 있다. | 50 % |
| ❸ $\ln\left|\dfrac{b}{a}\right|$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

다른 풀이 $f'(x)=0$에서

$x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

$f''(x)=2e^x\cos x-2e^x\sin x=2e^x(\cos x-\sin x)$에서

$f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-2e^{\frac{\pi}{2}}<0,\ f''\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=2e^{\frac{3}{2}\pi}>0$

따라서 $a=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}},\ b=f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=-e^{\frac{3}{2}\pi}$이므로

$\ln\left|\dfrac{b}{a}\right|=\ln|-e^{\pi}|=\pi$

**15** 전략 $f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값을 구한 후 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타낸다.

풀이 $f(x)=(x^2-8)e^{-x+1}$에서

$f'(x)=2xe^{-x+1}-(x^2-8)e^{-x+1}$

$=(-x^2+2x+8)e^{-x+1}$

$f'(x)=0$에서 $\quad -x^2+2x+8=0$ ($\because e^{-x+1}>0$)

$(x+2)(x-4)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=4$

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | 4 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-4e^3$ | ↗ | $8e^{-3}$ | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극댓값 $f(4)=8e^{-3}$, $x=-2$에서 극솟값 $f(-2)=-4e^3$을 가지므로

$a=-4e^3,\ b=8e^{-3}$

$\therefore ab=-32$

답 ②

**16** 전략 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=p$에서 극값 $q$를 가지면 $f(p)=q$, $f'(p)=0$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\dfrac{ax^2+2x+b}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\dfrac{(2ax+2)(x^2+1)-(ax^2+2x+b)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{-2x^2+2(a-b)x+2}{(x^2+1)^2}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 4를 가지므로

$f(1)=4,\ f'(1)=0$

$\dfrac{a+2+b}{2}=4,\ \dfrac{-2+2(a-b)+2}{4}=0$

$\therefore a+b=6,\ a-b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=3$

따라서 $f(x)=\frac{3x^2+2x+3}{x^2+1}$, $f'(x)=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$이므로

$f'(x)=0$에서 $-2x^2+2=0$, $x^2=1$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $2$ | ↗ | $4$ | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 $f(-1)=2$를 갖는다.

답 2

**17** 전략 $f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값을 구한 후 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타낸다.

풀이 $f(x)=3^{3x}-4\cdot3^{x+1}+a$에서

$f'(x)=3^{3x}\cdot\ln3\cdot3-4\cdot3^{x+1}\cdot\ln3$

$=3^{x+1}(9^x-4)\ln3$

$f'(x)=0$에서 $9^x=4$ ($\because 3^{x+1}>0$)

$\therefore x=\log_3 2$

| $x$ | $\cdots$ | $\log_3 2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\log_3 2$에서 극솟값 5를 가지므로

$3^{3\log_3 2}-4\cdot3^{\log_3 2+1}+a=5$

$8-4\cdot2\cdot3+a=5$ $\therefore a=21$

답 21

**18** 전략 함수 $f(x)$가 $x>0$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=4\ln x+\frac{a}{x}-x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=\frac{4}{x}-\frac{a}{x^2}-1=-\frac{x^2-4x+a}{x^2}$

함수 $f(x)$가 $x>0$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다. ···➊

즉 $g(x)=x^2-4x+a$라 하면 $g(x)=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $g(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-a>0$ $\therefore a<4$

(ii) (두 근의 합)$=4>0$

(iii) (두 근의 곱)$=a>0$

이상에서 $a$의 값의 범위는 $0<a<4$ ···➋

답 $0<a<4$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ $f'(x)=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 함을 알 수 있다. | 60 % |
| ➋ $a$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 40 % |

**라이트 UP**

계수와 상수항이 모두 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근을 $\alpha$, $\beta$, 판별식을 $D$라 하면 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$이므로

① 두 근이 모두 양수 $\Longleftrightarrow D\geq0$, $-\frac{b}{a}>0$, $\frac{c}{a}>0$

② 두 근이 모두 음수 $\Longleftrightarrow D\geq0$, $-\frac{b}{a}<0$, $\frac{c}{a}>0$

③ 두 근이 서로 다른 부호 $\Longleftrightarrow \frac{c}{a}<0$

**19** 전략 접선의 방정식을 이용하여 두 점 Q, R의 좌표를 구한다.

풀이 $f(x)=2x\sqrt{x}=2x^{\frac{3}{2}}$이라 하면

$f'(x)=3x^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{x}$

점 $\mathrm{P}(t,\ 2t\sqrt{t})$에서의 접선의 기울기가 $f'(t)=3\sqrt{t}$이므로 접선의 방정식은

$y-2t\sqrt{t}=3\sqrt{t}(x-t)$ $\therefore y=3\sqrt{t}x-t\sqrt{t}$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$0=3\sqrt{t}x-t\sqrt{t}$ $\therefore x=\frac{t}{3}$

따라서 $\mathrm{Q}\left(\frac{t}{3},\ 0\right)$, $\mathrm{R}(0,\ -t\sqrt{t})$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\left(t-\frac{t}{3}\right)^2+(2t\sqrt{t})^2}=\sqrt{4t^3+\frac{4}{9}t^2}$,

$\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{t^2+(3t\sqrt{t})^2}$

$=\sqrt{9t^3+t^2}$

$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{PR}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{4t^3+\frac{4}{9}t^2}}{\sqrt{9t^3+t^2}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{4}{9t}}}{\sqrt{9+\frac{1}{t}}}=\frac{2}{3}$

답 ③

**20** 전략 접선의 방정식을 이용하여 $\overline{\mathrm{AH}}$, $\overline{\mathrm{BH}}$의 길이를 구한다.

풀이 $f(x)=3^x$이라 하면 $f'(x)=3^x\ln3$

점 $\mathrm{P}(k,\ 3^k)$에서의 접선의 기울기가 $f'(k)=3^k\ln3$이므로 접선의 방정식은

$y-3^k=3^k\ln3\cdot(x-k)$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$-3^k=3^k\ln3\cdot(x-k)$

$-\frac{1}{\ln3}=x-k$ $\therefore x=k-\frac{1}{\ln3}$

따라서 $\mathrm{A}\left(k-\frac{1}{\ln3},\ 0\right)$이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{\ln3}$

한편 $g(x)=a^{x-1}$이라 하면

$g'(x)=a^{x-1}\ln a$

점 $\mathrm{P}(k,\ a^{k-1})$에서의 접선의 기울기는 $g'(k)=a^{k-1}\ln a$이므로 접선의 방정식은

$$y-a^{k-1}=a^{k-1}\ln a\cdot(x-k)$$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$$-a^{k-1}=a^{k-1}\ln a\cdot(x-k)$$

$$-\frac{1}{\ln a}=x-k \qquad \therefore x=k-\frac{1}{\ln a}$$

따라서 $\mathrm{B}\left(k-\frac{1}{\ln a},\ 0\right)$이므로 $\overline{\mathrm{BH}}=\frac{1}{\ln a}$

이때 $\overline{\mathrm{AH}}=2\overline{\mathrm{BH}}$이므로

$$\frac{1}{\ln 3}=\frac{2}{\ln a}, \qquad \ln a=2\ln 3$$

$$\therefore a=9$$

답 ④

**21** 전략 먼저 곡선 $y=\ln x$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(t,\ \ln t)$, $\mathrm{Q}(2t,\ \ln 2t)$에서의 접선의 방정식을 각각 구한다.

풀이 $g(x)=\ln x$라 하면 $g'(x)=\frac{1}{x}$

점 $\mathrm{P}(t,\ \ln t)$에서의 접선의 기울기가 $g'(t)=\frac{1}{t}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t) \qquad \therefore y=\frac{1}{t}x-1+\ln t$$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$$\frac{1}{t}x-1+\ln t=0, \qquad \frac{1}{t}x=1-\ln t$$

$$\therefore x=t-t\ln t$$

또 점 $\mathrm{Q}(2t,\ \ln 2t)$에서의 접선의 기울기가 $g'(2t)=\frac{1}{2t}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\ln 2t=\frac{1}{2t}(x-2t) \qquad \therefore y=\frac{1}{2t}x-1+\ln 2t$$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$$\frac{1}{2t}x-1+\ln 2t=0, \qquad \frac{1}{2t}x=1-\ln 2t$$

$$\therefore x=2t-2t\ln 2t$$

따라서 $r(t)=t-t\ln t$, $s(t)=2t-2t\ln 2t$이므로

$$\begin{aligned}f(t)&=r(t)-s(t)\\&=(t-t\ln t)-(2t-2t\ln 2t)\\&=t(\ln t+2\ln 2-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(t)&=\ln t+2\ln 2-1+t\cdot\frac{1}{t}\\&=\ln t+2\ln 2\end{aligned}$$

$f'(t)=0$에서 $\ln t=-2\ln 2$

$$\therefore t=\frac{1}{4}$$

| $t$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{1}{4}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(t)$ | | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(t)$는 $t=\frac{1}{4}$에서 극소이므로 극솟값은

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1}{4}+2\ln 2-1\right)=-\frac{1}{4}$$

답 ③

**22** 전략 $f'(a)=0$일 때 $f''(a)<0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대, $f''(a)>0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소임을 이용한다.

풀이 $f(x)=e^x\cos x$에서

$$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)$$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\sin x\ (\because e^x>0)$

$$\therefore x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi,\ \frac{13}{4}\pi,\ \cdots$$

$f''(x)=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)=-2e^x\sin x$ 에서

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}<0,$$

$$f''\left(\frac{5}{4}\pi\right)=\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi}>0,$$

$$f''\left(\frac{9}{4}\pi\right)=-\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}<0,$$

$$f''\left(\frac{13}{4}\pi\right)=\sqrt{2}e^{\frac{13}{4}\pi}>0,\ \cdots$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{9}{4}\pi$, $\cdots$에서 극대이므로

$$x_n=\frac{\pi}{4}+2(n-1)\pi=2n\pi-\frac{7}{4}\pi\ (n\text{은 자연수})$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10}x_k&=\sum_{k=1}^{10}\left(2k\pi-\frac{7}{4}\pi\right)\\&=2\pi\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-\frac{7}{4}\pi\cdot 10\\&=\frac{185}{2}\pi\end{aligned}$$

답 $\frac{185}{2}\pi$

**23** 전략 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\le 0$ 또는 $f'(x)\ge 0$이어야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=kx+2\cos x$에서 $f'(x)=k-2\sin x$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\le 0$ 또는 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

$-1\le\sin x\le 1$에서 $-2\le -2\sin x\le 2$

$$\therefore k-2\le k-2\sin x\le k+2$$

이때 $k+2\le 0$ 또는 $k-2\ge 0$이어야 하므로

$$k\le -2 \text{ 또는 } k\ge 2$$

따라서 $a=-2$, $b=2$이므로

$$ab=-4$$

답 $-4$

06 도함수의 활용 (1)

# 07 도함수의 활용 (2)

## 01 곡선의 오목과 볼록

유제 본책 138~139쪽

**1** (1) $f(x)=x^3+3x^2-9x-5$라 하면

$f'(x)=3x^2+6x-9$

$f''(x)=6x+6=6(x+1)$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=-1$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-1, \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하고, 구간 $(-\infty, -1)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

이때 변곡점의 좌표는 $(-1, 6)$이다.

(2) $f(x)=\dfrac{2}{x^2+3}$라 하면

$f'(x)=-\dfrac{4x}{(x^2+3)^2}$

$f''(x)=\dfrac{-4(x^2+3)^2+4x\cdot2(x^2+3)\cdot2x}{(x^2+3)^4}$

$=\dfrac{12(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하고, 구간 $(-1, 1)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

이때 변곡점의 좌표는 $\left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$이다.

(3) $f(x)=8x^2+\ln x$라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=16x+\dfrac{1}{x}$

$f''(x)=16-\dfrac{1}{x^2}$

$f''(x)=0$에서 $\quad \dfrac{1}{x^2}=16$

$\therefore x=\dfrac{1}{4}$ ($\because x>0$)

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(\dfrac{1}{4}, \infty\right)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하고, 구간 $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

이때 변곡점의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}-\ln 4\right)$이다.

(4) $f(x)=x-\cos x$라 하면

$f'(x)=1+\sin x$

$f''(x)=\cos x$

$f''(x)=0$에서 $\quad \cos x=0$

$\therefore x=-\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\pi}{2}$ ($\because -\pi<x<\pi$)

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하고, 구간 $\left(-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

이때 변곡점의 좌표는 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$이다.

답 풀이 참조

**2** $f(x)=(x^2+1)e^{-x}$이라 하면

$f'(x)=2xe^{-x}-(x^2+1)e^{-x}=(-x^2+2x-1)e^{-x}$

$f''(x)=(-2x+2)e^{-x}+(x^2-2x+1)e^{-x}$

$=(x^2-4x+3)e^{-x}$

$=(x-1)(x-3)e^{-x}$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=3$

$x<1$ 또는 $x>3$일 때 $f''(x)>0$,

$1<x<3$일 때 $f''(x)<0$

따라서 $x=1$, $x=3$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 개수는 2이다.

답 2

**3** $f(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}=ax^{-1}+bx^{-2}$이라 하면

$f'(x)=-ax^{-2}-2bx^{-3}$

$f''(x)=2ax^{-3}+6bx^{-4}=\dfrac{2a}{x^3}+\dfrac{6b}{x^4}$

곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표가 $\left(6, \dfrac{1}{9}\right)$이므로

$f(6)=\dfrac{1}{9}$에서 $\quad \dfrac{a}{6}+\dfrac{b}{36}=\dfrac{1}{9}$

$\therefore 6a+b=4$ $\quad$ …… ㉠

$f''(6)=0$에서 $\quad \dfrac{a}{108}+\dfrac{b}{216}=0$

$\therefore 2a+b=0$ $\quad$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=1$, $b=-2$

답 $a=1$, $b=-2$

**4** $f(x)=ax^4-2x^3+bx$에서

$f'(x)=4ax^3-6x^2+b$

$f''(x)=12ax^2-12x$

점 $(3, -13)$이 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이므로

$f(3)=-13$에서 $\quad 81a-54+3b=-13$

$\therefore 81a+3b=41$ $\quad$ …… ㉠

$f''(3)=0$에서 $\quad 108a-36=0 \quad \therefore a=\dfrac{1}{3}$

$a=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$27+3b=41, \quad 3b=14$

$\therefore b=\frac{14}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^4-2x^3+\frac{14}{3}x$이므로

$f(1)=\frac{1}{3}-2+\frac{14}{3}=3$ 답 3

**5** $f(x)=ax^2+bx+\ln x$에서

$f'(x)=2ax+b+\frac{1}{x}$

$f''(x)=2a-\frac{1}{x^2}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로 $f'(1)=0$에서

$2a+b+1=0$ …… ㉠

또 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 $x$좌표가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$에서

$2a-2=0 \quad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$2+b+1=0 \quad \therefore b=-3$

$\therefore f(x)=x^2-3x+\ln x,$

$f'(x)=2x-3+\frac{1}{x}=\frac{2x^2-3x+1}{x}$

$=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극대이므로 극댓값은

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4}-\ln 2$

답 $-\frac{5}{4}-\ln 2$

## 02 함수의 그래프

유제 본책 141~143쪽

**1** (1) (i) 정의역은 $x\neq0$인 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(-x)=-\frac{x^2+4}{x}=-f(x)$이므로 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

(iii) $f'(x)=\frac{2x\cdot x-(x^2+4)}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}$

$=\frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$

$f''(x)=\frac{2x\cdot x^2-(x^2-4)\cdot 2x}{x^4}=\frac{8}{x^3}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=2$

$f''(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 존재하지 않는다.

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $-4$ | ↘ | | ↘ | 4 | ↗ |

(iv) $f(x)=\frac{x^2+4}{x}=x+\frac{4}{x}$에서

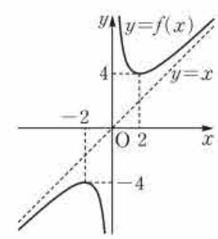
$\lim_{x\to0+}f(x)=\infty,$

$\lim_{x\to0-}f(x)=-\infty,$

$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-x\}=0,$

$\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-x\}=0$

이므로 점근선은 $y$축과 직선 $y=x$이다.




이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

(2) (i) $x^2+1\neq0$이므로 정의역은 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(0)=3$이므로 그래프는 점 $(0, 3)$을 지난다.

(iii) $f(-x)=\frac{3}{x^2+1}=f(x)$이므로 그래프는 $y$축에 대하여 대칭이다.

(iv) $f'(x)=-\frac{3\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=-\frac{6x}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=\frac{-6(x^2+1)^2+6x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$

$=\frac{6(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$

$=\frac{6(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)}{(x^2+1)^3}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $\frac{9}{4}$ | ↗ | 3 | ↘ | $\frac{9}{4}$ | ↘ |

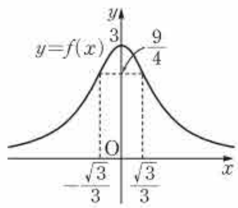


07 도함수의 활용 (2)

(v) $\lim_{x\to\infty} f(x)=0,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

이므로 점근선은 $x$축이다.

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




답 풀이 참조

**2** (1) (i) 정의역은 $x\geq 0$인 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(0)=0$이므로 그래프는 원점을 지나고, $x$축과의 교점의 $x$좌표는 $x-2\sqrt{x}=0$에서

$x=2\sqrt{x},\quad x^2=4x$

$x(x-4)=0\quad \therefore x=0$ 또는 $x=4$

따라서 두 점 $(0,\ 0)$, $(4,\ 0)$을 지난다.

(iii) $f'(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{x}},\ f''(x)=\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

$f'(x)=0$에서 $\quad \dfrac{1}{\sqrt{x}}=1$

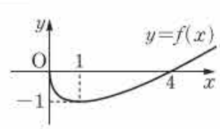
$\therefore x=1$

$x\geq 0$에서 $f''(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 존재하지 않는다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f''(x)$ | | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | 0 | ↘ | $-1$ | ↗ |

(iv) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




(2) (i) 정의역은 $x\geq -3$인 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(0)=0$이므로 그래프는 원점을 지나고, $x$축과의 교점의 $x$좌표는 $x\sqrt{x+3}=0$에서

$x=-3$ 또는 $x=0$

따라서 두 점 $(-3,\ 0)$, $(0,\ 0)$을 지난다.

(iii) $f'(x)=\sqrt{x+3}+x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}=\dfrac{2(x+3)+x}{2\sqrt{x+3}}$

$=\dfrac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$

$f''(x)=\dfrac{6\sqrt{x+3}-3(x+2)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}}{4(x+3)}$

$=\dfrac{3(x+4)}{4(x+3)\sqrt{x+3}}$

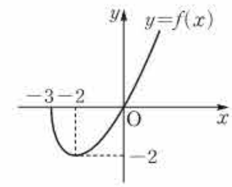
$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$

$x\geq -3$에서 $f''(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 존재하지 않는다.

| $x$ | $-3$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f''(x)$ | | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | 0 | ↘ | $-2$ | ↗ |

(iv) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




답 풀이 참조

**3** (1) (i) 정의역은 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(0)=1,\ f(-1)=0$이므로 그래프는 두 점 $(0,\ 1)$, $(-1,\ 0)$을 지난다.

(iii) $f'(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$

$f''(x)=e^x+(x+2)e^x=(x+3)e^x$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$

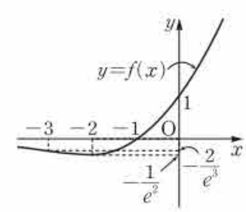
$f''(x)=0$에서 $\quad x=-3$

| $x$ | $\cdots$ | $-3$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-\dfrac{2}{e^3}$ | ↘ | $-\dfrac{1}{e^2}$ | ↗ |

(iv) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 점근선은 $x$축이다.

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




(2) (i) 정의역은 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(0)=1$이므로 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

(iii) $f(-x)=e^{-\frac{x^2}{2}}=f(x)$이므로 그래프는 $y$축에 대하여 대칭이다.

(iv) $f'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$

$f''(x)=-e^{-\frac{x^2}{2}}+x^2e^{-\frac{x^2}{2}}=(x+1)(x-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0\ (\because e^{-\frac{x^2}{2}}>0)$

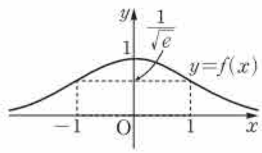
$f''(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ | ↗ | 1 | ↘ | $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ | ↘ |

(v) $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 점근선은 $x$축이다.

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




(3) (i) 정의역은 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(0)=0$이므로 그래프는 원점을 지난다.

(iii) $f(-x)=\ln(x^2+1)=f(x)$이므로 그래프는 $y$축에 대하여 대칭이다.

(iv) $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

$f''(x)=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

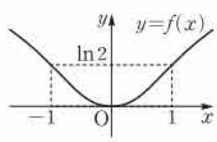
$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $\ln 2$ | ↘ | $0$ | ↗ | $\ln 2$ | ↗ |

(v) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




(4) (i) 정의역은 $x>0$인 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(1)=0$이므로 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지난다.

(iii) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$f''(x)=\dfrac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=1 \quad \therefore x=e$

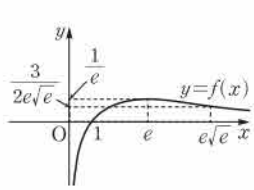
$f''(x)=0$에서 $\quad \ln x=\dfrac{3}{2} \quad \therefore x=e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ | $e\sqrt{e}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | ↗ | $\frac{1}{e}$ | ↘ | $\frac{3}{2e\sqrt{e}}$ | ↘ |

(iv) $\lim_{x\to0+} f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$이므로 점근선은 $x$축, $y$축이다.

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




답 풀이 참조

**참고** (1) $\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^x$에서 $-x=t$라 하면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^x=\lim_{t\to\infty}(1-t)e^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1-t}{e^t}=0$$

**4** $f(x)=(\sin x+1)^2$에서

$f'(x)=2(\sin x+1)\cos x$

$f''(x)=2\cos x\cdot\cos x+2(\sin x+1)\cdot(-\sin x)$

$=2\cos^2 x-2\sin^2 x-2\sin x$

$=2(1-\sin^2 x)-2\sin^2 x-2\sin x$

$=-4\sin^2 x-2\sin x+2$

$=-2(\sin x+1)(2\sin x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sin x=-1$ 또는 $\cos x=0$

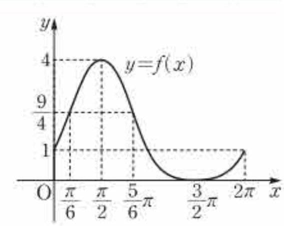
$\therefore x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

$f''(x)=0$에서 $\quad \sin x=-1$ 또는 $\sin x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\cdots$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | ↗ | $\frac{9}{4}$ | ↗ | $4$ | ↘ | $\frac{9}{4}$ | ↘ | $0$ | ↗ | $1$ |

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




답 풀이 참조

**5** $f(x)=e^{-x}\cos x$에서

$f'(x)=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x$

$=-e^{-x}(\cos x+\sin x)$

$f''(x)=e^{-x}(\cos x+\sin x)-e^{-x}(-\sin x+\cos x)$

$=2e^{-x}\sin x$

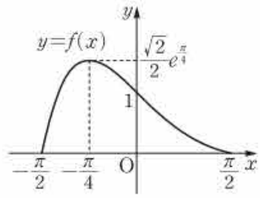
$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=-\sin x$

$\therefore x=-\dfrac{\pi}{4}$ $\left(\because -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$

$f''(x)=0$에서 $\quad \sin x=0 \quad \therefore x=0$ $\left(\because -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | |
| $f''(x)$ | | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$ | ↘ | $1$ | ↘ | $0$ |

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




답 풀이 참조

## 03 함수의 최대와 최소

유제 본책 145~149쪽

**1** (1) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-6}{x+3}$에서

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x+3)-(x^2-2x-6)}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}=\frac{x(x+6)}{(x+3)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because -2\le x\le 2$)

| $x$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $2$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $-\frac{6}{5}$ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 2, $x=0$에서 최솟값 $-2$를 갖는다.

(2) $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$에서

$$f'(x)=\sqrt{1-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-2x^2+1}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f'(x)=0$에서

$x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $-\frac{1}{2}$ | ↗ | $\frac{1}{2}$ | ↘ | $0$ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$에서 최댓값 $\dfrac{1}{2}$, $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$에서 최솟값 $-\dfrac{1}{2}$을 갖는다.

답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: $-2$
(2) 최댓값: $\dfrac{1}{2}$, 최솟값: $-\dfrac{1}{2}$

**2** $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3}$에서

$$f'(x)=\frac{x^2+3-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}=-\frac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-\frac{1}{2}$ | ↗ | $\frac{1}{6}$ | ↘ |

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $\dfrac{1}{6}$, $x=-1$에서 최솟값 $-\dfrac{1}{2}$을 갖는다.

따라서 $M=\dfrac{1}{6}$, $m=-\dfrac{1}{2}$이므로

$$M+m=-\frac{1}{3}$$

답 $-\dfrac{1}{3}$

**3** (1) $f(x)=\dfrac{e^x}{2x+1}$에서

$$f'(x)=\frac{e^x(2x+1)-e^x\cdot 2}{(2x+1)^2}=\frac{e^x(2x-1)}{(2x+1)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{1}{2}$

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | ↘ | $\frac{\sqrt{e}}{2}$ | ↗ | $\frac{e^2}{5}$ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $\dfrac{e^2}{5}$, $x=\dfrac{1}{2}$에서 최솟값 $\dfrac{\sqrt{e}}{2}$를 갖는다.

(2) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$에서

$$f'(x)=\frac{\ln x-x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=1$ $\therefore x=e$

| $x$ | $2$ | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\frac{2}{\ln 2}$ | ↘ | $e$ | ↗ | $\frac{2}{\ln 2}$ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$, $x=4$에서 최댓값 $\dfrac{2}{\ln 2}$, $x=e$에서 최솟값 $e$를 갖는다.

답 (1) 최댓값: $\dfrac{e^2}{5}$, 최솟값: $\dfrac{\sqrt{e}}{2}$
(2) 최댓값: $\dfrac{2}{\ln 2}$, 최솟값: $e$

**4** $f(x)=\frac{\ln 2x}{x^2}$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\ln 2x\cdot 2x}{x^4}=\frac{1-2\ln 2x}{x^3}$$

$f'(x)=0$에서 $\ln 2x=\frac{1}{2}$

$2x=\sqrt{e}$ $\therefore x=\frac{\sqrt{e}}{2}$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\sqrt{e}}{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $\frac{2}{e}$ | $\searrow$ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\sqrt{e}}{2}$에서 최댓값 $\frac{2}{e}$를 가지므로

$a=\frac{\sqrt{e}}{2}$, $b=\frac{2}{e}$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{\sqrt{e}}{2}\cdot\frac{e}{2}=\frac{e\sqrt{e}}{4}$

답 $\frac{e\sqrt{e}}{4}$

**5** (1) $f(x)=2\sin x-\cos 2x$에서

$f'(x)=2\cos x+2\sin 2x=2\cos x+4\sin x\cos x$
$=2\cos x(1+2\sin x)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$ ($\because 0\le x\le \pi$)

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | 3 | $\searrow$ | $-1$ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 최댓값 3, $x=0$, $x=\pi$에서 최솟값 $-1$을 갖는다.

(2) $f(x)=(1+\sin x)\cos x$에서

$f'(x)=\cos x\cdot\cos x+(1+\sin x)\cdot(-\sin x)$
$=\cos^2 x-\sin x-\sin^2 x$
$=(1-\sin^2 x)-\sin x-\sin^2 x$
$=-2\sin^2 x-\sin x+1$
$=-(\sin x+1)(2\sin x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$ ($\because 0\le x\le\pi$)

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\cdots$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | 1 | $\nearrow$ | $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ | $\searrow$ | $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ | $\nearrow$ | $-1$ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$에서 최댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $x=\frac{5}{6}\pi$에서 최솟값 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$을 갖는다.

답 (1) 최댓값: 3, 최솟값: $-1$
(2) 최댓값: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, 최솟값: $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

**6** $f(x)=e^x(\sin x+\cos x)$에서

$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)$
$=2e^x\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$

$\therefore x=-\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ ($\because -\pi\le x\le\pi$)

| $x$ | $-\pi$ | $\cdots$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | $-e^{-\pi}$ | $\searrow$ | $-e^{-\frac{\pi}{2}}$ | $\nearrow$ | $e^{\frac{\pi}{2}}$ | $\searrow$ | $-e^{\pi}$ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 최댓값 $e^{\frac{\pi}{2}}$, $x=\pi$에서 최솟값 $-e^{\pi}$을 가지므로

$M=e^{\frac{\pi}{2}}$, $m=-e^{\pi}$

$\therefore Mm=-e^{\frac{3}{2}\pi}$ 답 $-e^{\frac{3}{2}\pi}$

**7** $f(x)=axe^{-\frac{x}{2}}$에서

$f'(x)=ae^{-\frac{x}{2}}+ax\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)=-\frac{a}{2}(x-2)e^{-\frac{x}{2}}$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

| $x$ | $-2$ | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | $-2ae$ | $\nearrow$ | $\frac{2a}{e}$ | $\searrow$ | $\frac{3a}{e\sqrt{e}}$ |

이때 $a>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $\frac{2a}{e}$, $x=-2$에서 최솟값 $-2ae$를 갖는다.

따라서 $\frac{2a}{e}\cdot(-2ae)=-36$이므로

$-4a^2=-36$, $a^2=9$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$) 답 3

**8** $f(x)=a(x+2\cos x)$에서

$f'(x)=a(1-2\sin x)$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$ $\therefore x=\frac{\pi}{6}$ $\left(\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | $2a$ | $\nearrow$ | $a\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)$ | $\searrow$ | $\frac{\pi}{2}a$ |

함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$에서 최댓값 $a\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)$을 가지므로

$$a\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}+2\sqrt{3} \qquad \therefore a=2$$

따라서 $f(0)=2\cdot 2=4$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot 2=\pi$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 $\pi$이다.

답 $\pi$

**9** $f(0)=-1$이므로

$$\frac{b}{3}=-1 \qquad \therefore b=-3$$

$f(x)=\frac{ax-3}{x^2-x+3}$에서

$$f'(x)=\frac{a(x^2-x+3)-(ax-3)(2x-1)}{(x^2-x+3)^2}$$
$$=\frac{-ax^2+6x+3a-3}{(x^2-x+3)^2}$$

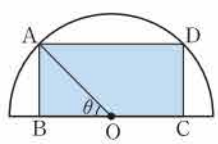
함수 $f(x)$는 모든 실수 $x$에서 연속이며 미분가능하고 $f(x)$가 $x=0$에서 최솟값 $-1$을 가지므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이다.

즉 $f'(0)=0$이므로

$$\frac{3a-3}{9}=0 \qquad \therefore a=1$$

답 $a=1,\ b=-3$

**10** 오른쪽 그림과 같이 반원의 중심을 O, $\angle AOB=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면




$\overline{AO}=2$이므로

$\overline{AB}=2\sin\theta$,

$\overline{BC}=2\overline{BO}=2\cdot 2\cos\theta=4\cos\theta$

직사각형 ABCD의 넓이를 $S(\theta)$라 하면

$$S(\theta)=\overline{AB}\cdot\overline{BC}=2\sin\theta\cdot 4\cos\theta$$
$$=8\sin\theta\cos\theta=4\sin 2\theta$$
$$\therefore S'(\theta)=8\cos 2\theta$$

$S'(\theta)=0$에서 $\quad \cos 2\theta=0$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<2\theta<\pi$이므로

$$2\theta=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore \theta=\frac{\pi}{4}$$

| $\theta$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(\theta)$ | | + | 0 | − | |
| $S(\theta)$ | | ↗ | 4 | ↘ | |

따라서 $S(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{4}$에서 최댓값 4를 가지므로 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 4이다.

답 4

다른 풀이 위의 그림에서 $\overline{AB}=a$, $\overline{BO}=b$라 하면 직각삼각형 ABO에서

$$a^2+b^2=2^2=4$$

또 직사각형 ABCD의 넓이는 $\quad a\cdot 2b=2ab$

이때 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2+b^2\geq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab \text{ (단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립)}$$
$$\therefore 4\geq 2ab$$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 4이다.

참고 $\overline{BO}=x\ (0<x<2)$라 하면 $\overline{AO}=2$이므로

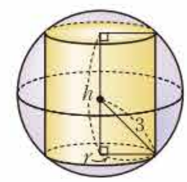
$\overline{AB}=\sqrt{4-x^2}$

직사각형 ABCD의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=2x\sqrt{4-x^2}$

임을 이용하여 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값을 구할 수도 있다.

**11** 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 $r\,(0<r<3)$, 높이를 $h$라 하면




$$h=2\sqrt{9-r^2}$$

원기둥의 부피를 $V(r)$라 하면

$$V(r)=\pi r^2h=2\pi r^2\sqrt{9-r^2}$$
$$\therefore V'(r)=4\pi r\sqrt{9-r^2}+2\pi r^2\cdot\frac{-2r}{2\sqrt{9-r^2}}$$
$$=\frac{4\pi r(9-r^2)-2\pi r^3}{\sqrt{9-r^2}}$$
$$=\frac{6\pi r(6-r^2)}{\sqrt{9-r^2}}$$
$$=\frac{6\pi r(\sqrt{6}-r)(\sqrt{6}+r)}{\sqrt{9-r^2}}$$

$V'(r)=0$에서 $\quad r=\sqrt{6}\ (\because 0<r<3)$

| $r$ | 0 | $\cdots$ | $\sqrt{6}$ | $\cdots$ | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'(r)$ | | + | 0 | − | |
| $V(r)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | |

따라서 $V(r)$는 $r=\sqrt{6}$에서 최댓값을 가지므로 구하는 반지름의 길이는 $\sqrt{6}$이다.

답 $\sqrt{6}$

## 04 방정식과 부등식에의 활용

유제 본책 151~152쪽

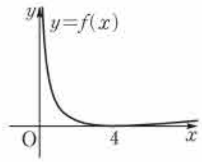
**1** $f(x)=\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}-4$라 하면 $x>0$이고

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{x\sqrt{x}}=\frac{x-4}{2x\sqrt{x}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=4$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 4 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | 0 | ↗ |

이때 $\lim_{x\to 0+} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x$축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 1이다.

답 1

**2** 닫힌구간 $[-\pi,\ \pi]$에서 방정식 $2\cos x=x+k$, 즉 $2\cos x-x=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=2\cos x-x$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f(x)=2\cos x-x$라 하면 $\quad f'(x)=-2\sin x-1$

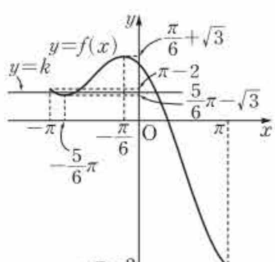
$f'(x)=0$에서 $\quad \sin x=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=-\dfrac{5}{6}\pi$ 또는 $x=-\dfrac{\pi}{6}$ $(\because -\pi\le x\le\pi)$

| $x$ | $-\pi$ | $\cdots$ | $-\frac{5}{6}\pi$ | $\cdots$ | $-\frac{\pi}{6}$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | $\pi-2$ | ↘ | $\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$ | ↗ | $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$ | ↘ | $-\pi-2$ |

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면

$\dfrac{5}{6}\pi-\sqrt{3}<k\le\pi-2$




답 $\dfrac{5}{6}\pi-\sqrt{3}<k\le\pi-2$

**3** $e^{2x}\ge 2x+1$에서 $\quad e^{2x}-2x-1\ge 0$

$f(x)=e^{2x}-2x-1$이라 하면 $\quad f'(x)=2e^{2x}-2=2(e^{2x}-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad e^{2x}=1 \quad \therefore x=0$

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | 0 | ↗ |

따라서 모든 실수 $x$에 대하여 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이므로

$f(x)\ge 0$, 즉 $e^{2x}-2x-1\ge 0$

$\therefore e^{2x}\ge 2x+1$

답 풀이 참조

**4** $x\ln x\ge 3x+k$에서 $\quad x\ln x-3x-k\ge 0$

$f(x)=x\ln x-3x-k$라 하면

$$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-3=\ln x-2$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=2 \quad \therefore x=e^2$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $e^2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | $-e^2-k$ | ↗ |

$x>0$일 때 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-e^2-k$이므로 $f(x)\ge 0$이 성립하려면

$-e^2-k\ge 0 \quad \therefore k\le -e^2$

따라서 실수 $k$의 최댓값은 $-e^2$이다.

답 $-e^2$

**5** $2e^x>x^2+2x+k$에서 $\quad 2e^x-x^2-2x-k>0$

$f(x)=2e^x-x^2-2x-k$라 하면

$f'(x)=2e^x-2x-2$

$f''(x)=2e^x-2=2(e^x-1)$

$x>0$일 때 $e^x>1$이므로 $\quad f''(x)>0$

$x>0$일 때 함수 $f'(x)$는 증가하고 $f'(0)=0$이므로

$f'(x)>0$

따라서 $x>0$일 때 함수 $f(x)$는 증가하므로 $f(x)>0$이 성립하려면 $f(0)\ge 0$이어야 한다.

즉 $2-k\ge 0$이므로 $\quad k\le 2$

답 $k\le 2$

## 05 속도와 가속도

**확인** 본책 153~154쪽

**1** 점 P의 시각 $t$에서의 속도를 $v$, 가속도를 $a$라 하자.

(1) $v=f'(t)=2e^{2t}-1$, $a=f''(t)=4e^{2t}$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=2e^4-1$, $a=4e^4$

(2) $v=f'(t)=\pi\cos\pi t+\pi\sin\pi t$

$a=f''(t)=-\pi^2\sin\pi t+\pi^2\cos\pi t$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=\pi\cos 2\pi+\pi\sin 2\pi=\pi$,

$a=-\pi^2\sin 2\pi+\pi^2\cos 2\pi=\pi^2$

답 (1) 속도: $2e^4-1$, 가속도: $4e^4$
(2) 속도: $\pi$, 가속도: $\pi^2$

**2** (1) $\dfrac{dx}{dt}=8t+6$, $\dfrac{dy}{dt}=-2t^3+3t^2-3$이므로 점 P의 속도는

$(8t+6,\ -2t^3+3t^2-3)$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=8$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-6t^2+6t$이므로 점 P의 가속도는

$(8,\ -6t^2+6t)$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도는

$(14,\ -2)$

가속도는 $(8,\ 0)$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{t}$이므로 점 P의 속도는

$\left(\dfrac{1}{2\sqrt{t}},\ \dfrac{1}{t}\right)$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{1}{4t\sqrt{t}}$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\dfrac{1}{t^2}$이므로 점 P의 가속도는

$\left(-\dfrac{1}{4t\sqrt{t}},\ -\dfrac{1}{t^2}\right)$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도는

$\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$

가속도는 $\left(-\dfrac{1}{4},\ -1\right)$

답 (1) 속도: $(14,\ -2)$, 가속도: $(8,\ 0)$
(2) 속도: $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$, 가속도: $\left(-\dfrac{1}{4},\ -1\right)$

**유제** 본책 155~156쪽

**1** 점 P의 시각 $t$에서의 속도를 $v$, 가속도를 $a$라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=2\pi\cos\dfrac{\pi}{2}t-\dfrac{3}{2}\pi\sin\dfrac{\pi}{2}t$,

$a=\dfrac{dv}{dt}=-\pi^2\sin\dfrac{\pi}{2}t-\dfrac{3}{4}\pi^2\cos\dfrac{\pi}{2}t$

따라서 $t=6$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=2\pi\cos 3\pi-\dfrac{3}{2}\pi\sin 3\pi=-2\pi$,

$a=-\pi^2\sin 3\pi-\dfrac{3}{4}\pi^2\cos 3\pi=\dfrac{3}{4}\pi^2$

답 속도: $-2\pi$, 가속도: $\dfrac{3}{4}\pi^2$

**2** 점 P의 시각 $t$에서의 속도는

$\dfrac{dx}{dt}=6-2\cdot\dfrac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}=6-3\sqrt{t}$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $6-3\sqrt{t}=0$에서

$\sqrt{t}=2$ $\quad\therefore t=4$

따라서 $t=4$에서의 점 P의 위치는

$x=6\cdot 4-2\cdot 4\sqrt{4}=8$

답 8

**3** 점 P의 시각 $t$에서의 속도는

$\dfrac{dx}{dt}=(2t-7)e^t+(t^2-7t+13)e^t$

$=(t^2-5t+6)e^t$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$(t^2-5t+6)e^t=0$에서 $\quad t^2-5t+6=0\ (\because e^t>0)$

$(t-2)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=2$ 또는 $t=3$

따라서 점 P는 $t=2$, $t=3$에서 운동 방향을 2번 바꾼다.

답 2번

**4** $\dfrac{dx}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t)$,

$\dfrac{dy}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t)$

이므로 시각 $t$에서의 점 P의 속도는

$(e^t(\sin t+\cos t),\ e^t(\cos t-\sin t))$

따라서 점 P의 속력은

$\sqrt{\{e^t(\sin t+\cos t)\}^2+\{e^t(\cos t-\sin t)\}^2}=\sqrt{2}e^t$

$t=a$에서의 점 P의 속력을 $2\sqrt{2}$라 하면

$\sqrt{2}e^a=2\sqrt{2}$, $\quad e^a=2$

$\therefore a=\ln 2$

따라서 구하는 시각은 $\ln 2$이다.

답 $\ln 2$

**5** $\dfrac{dx}{dt}=-2t$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{a}{t}$이므로

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-2$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\dfrac{a}{t^2}$

따라서 시각 $t$에서의 점 P의 가속도는

$\left(-2,\ -\dfrac{a}{t^2}\right)$

이므로 $t=2$에서의 점 P의 가속도는

$\left(-2,\ -\dfrac{a}{4}\right)$

이때 $t=2$에서의 점 P의 가속도의 크기가 $5\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{(-2)^2+\left(-\dfrac{a}{4}\right)^2}=5\sqrt{5}$

$4+\dfrac{a^2}{16}=125$, $\quad\dfrac{a^2}{16}=121$

$a^2=4^2\cdot 11^2$ $\quad\therefore a=44\ (\because a>0)$

답 44

**6** $\dfrac{dx}{dt}=2t-3$, $\dfrac{dy}{dt}=2t+1$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 속도는

$(2t-3,\ 2t+1)$

따라서 점 P의 속력은

$$\sqrt{(2t-3)^2+(2t+1)^2}=\sqrt{8t^2-8t+10}$$
$$=\sqrt{8\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+8}$$

이므로 $t=\frac{1}{2}$일 때 속력이 최소이다.

$t=\frac{1}{2}$일 때

$$x=\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\frac{1}{2}=-\frac{5}{4},\ y=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+5=\frac{23}{4}$$

이므로 점 P의 $t=\frac{1}{2}$에서의 위치는 $\left(-\frac{5}{4},\ \frac{23}{4}\right)$

답 $\left(-\frac{5}{4},\ \frac{23}{4}\right)$

## 중단원 연습 문제

본책 157~160쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 01 ③ | 02 $\frac{3}{2}$ | 03 ③ | 04 8 | 05 ② |
| 06 ③ | 07 ② | 08 8 | 09 $\ln 2+1$ | 10 ④ |
| 11 ④ | 12 8 | 13 ① | 14 $-5$ | 15 ⑤ |
| 16 $-8$ | 17 3 | 18 ② | 19 ① | 20 3 |
| 21 2 | 22 $k<-e$ | | 23 ⑤ | 24 ④ |

**01** 전략 함수 $y=f(x)$가 어떤 구간에서 $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록함을 이용한다.

풀이 $f(x)=(2x-11)e^x$이라 하면

$$f'(x)=2e^x+(2x-11)e^x=(2x-9)e^x$$
$$f''(x)=2e^x+(2x-9)e^x=(2x-7)e^x$$

곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로

$$2x-7<0\ (\because e^x>0)\qquad \therefore x<\frac{7}{2}$$

즉 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(-\infty,\ \frac{7}{2}\right)$에서 위로 볼록하므로 주어진 조건을 만족시키는 자연수 $n$의 값은 1, 2, 3이다.

따라서 구하는 합은

$$1+2+3=6$$

답 ③

**02** 전략 곡선 $y=f(x)$가 실수 전체의 집합에서 아래로 볼록하려면 $f''(x)\geq 0$이어야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=(ax^2+3)e^x$이라 하면

$$f'(x)=2axe^x+(ax^2+3)e^x=(ax^2+2ax+3)e^x$$
$$f''(x)=(2ax+2a)e^x+(ax^2+2ax+3)e^x$$
$$=(ax^2+4ax+2a+3)e^x \quad \cdots ❶$$

곡선 $y=f(x)$가 실수 전체의 집합에서 아래로 볼록하려면 모든 실수 $x$에 대하여 $f''(x)\geq 0$이어야 하므로 부등식

$$ax^2+4ax+2a+3\geq 0\ (\because e^x>0) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 항상 성립해야 한다.

(i) $a=0$일 때,

3>0이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $a\neq 0$일 때,

㉠이 항상 성립하려면 $a>0$이어야 하고, $x$에 대한 이차방정식 $ax^2+4ax+2a+3=0$의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=(2a)^2-a(2a+3)\leq 0$$
$$2a^2-3a\leq 0,\qquad a(2a-3)\leq 0$$
$$\therefore 0\leq a\leq\frac{3}{2}$$

그런데 $a>0$이므로

$$0<a\leq\frac{3}{2}$$

(i), (ii)에서 $0\leq a\leq\frac{3}{2}$ ❷

따라서 $a$의 최댓값은 $\frac{3}{2}$이다. ❸

답 $\frac{3}{2}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f''(x)$를 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $a$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 60 % |
| ❸ $a$의 최댓값을 구할 수 있다. | 10 % |

**03** 전략 함수 $f(x)$에서 $f''(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a,\ f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\sqrt{3}x^2+4\sin x$라 하면

$$f'(x)=2\sqrt{3}x+4\cos x$$
$$f''(x)=2\sqrt{3}-4\sin x$$

$f''(x)=0$에서 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore x=\frac{\pi}{3}\ \text{또는}\ x=\frac{2}{3}\pi\ (\because 0<x<2\pi)$$

$0<x<\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{2}{3}\pi<x<2\pi$일 때 $f''(x)>0$,

$\frac{\pi}{3}<x<\frac{2}{3}\pi$일 때 $f''(x)<0$

즉 $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{2}{3}\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 $x$좌표는 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$이다.

따라서 구하는 합은

$$\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi=\pi$$

답 ③

07 도함수의 활용 (2)

**04** 전략 함수 $f(x)$에서 $f''(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a, f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\ln(x^2+16)$에서

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+16}$$

$$f''(x)=\frac{2(x^2+16)-2x\cdot 2x}{(x^2+16)^2}=\frac{-2(x^2-16)}{(x^2+16)^2}$$

$$=-\frac{2(x+4)(x-4)}{(x^2+16)^2} \quad \cdots ❶$$

$f''(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=4$

$-4<x<4$일 때 $f''(x)>0$,

$x<-4$ 또는 $x>4$일 때 $f''(x)<0$

즉 $x=-4$, $x=4$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$(-4, \ln 32)$, $(4, \ln 32)$ $\cdots ❷$

따라서 두 변곡점 사이의 거리는

$4-(-4)=8$ $\cdots ❸$

답 8

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f''(x)$를 구할 수 있다. | 40 % |
| ❷ 두 변곡점의 좌표를 구할 수 있다. | 40 % |
| ❸ 두 변곡점 사이의 거리를 구할 수 있다. | 20 % |

**05** 전략 변곡점의 좌표를 구한 후 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=(\ln x)^2-x+1$이라 하면

$$f'(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x}-1=\frac{2\ln x}{x}-1$$

$$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x-2\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

$f''(x)=0$에서 $\ln x=1$ $\therefore x=e$

$x<e$일 때 $f''(x)>0$,

$x>e$일 때 $f''(x)<0$

즉 $x=e$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$(e, 2-e)$

따라서 점 $(e, 2-e)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(e)=\frac{2\ln e}{e}-1=\frac{2}{e}-1$$

답 ②

**06** 전략 $f'(n)$, $f''(0)$의 값이 0이고, 좌우에서 $f'(x)$, $f''(x)$의 부호가 바뀌는지 확인한다.

풀이 $f(x)=x^ne^{-x}$에서

$$f'(x)=nx^{n-1}e^{-x}-x^ne^{-x}=(n-x)x^{n-1}e^{-x}$$

ㄱ. $f\left(\frac{n}{2}\right)=\left(\frac{n}{2}\right)^ne^{-\frac{n}{2}}$,

$$f'\left(\frac{n}{2}\right)=\left(n-\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}e^{-\frac{n}{2}}=\left(\frac{n}{2}\right)^ne^{-\frac{n}{2}}$$

이므로 $f\left(\frac{n}{2}\right)=f'\left(\frac{n}{2}\right)$

ㄴ. $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=n$

$0<x<n$일 때 $f'(x)>0$이고 $x>n$일 때 $f'(x)<0$이다.

즉 $x=n$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다.

ㄷ. $f'(x)=(nx^{n-1}-x^n)e^{-x}$에서

$$f''(x)=\{n(n-1)x^{n-2}-nx^{n-1}\}e^{-x}-(nx^{n-1}-x^n)e^{-x}$$

$$=(x^2-2nx+n^2-n)x^{n-2}e^{-x}$$

(ⅰ) $n-2$가 홀수, 즉 $n$이 홀수일 때,

$f''(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 점 $(0, 0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

(ⅱ) $n-2$가 짝수, 즉 $n$이 짝수일 때,

$f''(0)=0$이지만 $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 점 $(0, 0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 아니다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 점 $(0, 0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이라 할 수 없다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

라이트 UP

**도함수를 이용한 함수의 극대와 극소의 판정**

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

① 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값은 $f(a)$이다.

② 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값은 $f(a)$이다.

**07** 전략 함수의 증가와 감소, 곡선의 오목과 볼록을 조사하여 주어진 함수의 그래프를 그린다.

풀이 $f(x)=e^{-x}\sin x$에서

$$f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=e^{-x}(\cos x-\sin x)$$

$$f''(x)=-e^{-x}(\cos x-\sin x)+e^{-x}(-\sin x-\cos x)$$

$$=-2e^{-x}\cos x$$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\sin x$ $(\because e^{-x}>0)$

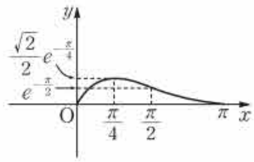
$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ $(\because 0\le x\le\pi)$

$f''(x)=0$에서 $\cos x=0$ $(\because e^{-x}>0)$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ $(\because 0\le x\le\pi)$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | − | − | |
| $f''(x)$ | | − | − | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$ | ↘ | $e^{-\frac{\pi}{2}}$ | ↘ | 0 |

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 그래프의 개형으로 옳은 것은 ②이다.




답 ②

**08** 전략 함수 $f(x)$의 극값과 $f(-3)$, $f(1)$의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=2x\sqrt{x+3}$에서

$$f'(x)=2\sqrt{x+3}+2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+3}}=\frac{2(x+3)+x}{\sqrt{x+3}}=\frac{3(x+2)}{\sqrt{x+3}}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$

| $x$ | $-3$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $-4$ | ↗ | $4$ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 4, $x=-2$에서 최솟값 $-4$를 가지므로

$M=4$, $m=-4$

$\therefore M-m=8$

답 8

**09** 전략 함수 $f(x)$의 극값과 $f(1)$, $f(e^2)$의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=2\ln x+\frac{4}{x}$에서

$$f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}=\frac{2(x-2)}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

| $x$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ | $e^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $4$ | ↘ | $2\ln2+2$ | ↗ | $4+\frac{4}{e^2}$ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $2\ln2+2$를 가지므로

$k=2$, $m=2\ln2+2$

$\therefore \frac{m}{k}=\ln2+1$

답 $\ln2+1$

**10** 전략 최솟값을 $a$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $f(x)=27^x-9^x-3^x+a$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=27^x\ln27-9^x\ln9-3^x\ln3\\&=3^{3x}\cdot3\ln3-3^{2x}\cdot2\ln3-3^x\ln3\\&=3^x\ln3\cdot(3\cdot3^{2x}-2\cdot3^x-1)\\&=3^x\ln3\cdot(3\cdot3^x+1)(3^x-1)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $3^x-1=0$ $\therefore x=0$

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $a-1$ | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 $a-1$을 가지므로

$a-1=14$ $\therefore a=15$

답 ④

다른 풀이 $f(x)=27^x-9^x-3^x+a=3^{3x}-3^{2x}-3^x+a$

에서 $3^x=t$ $(t>0)$로 놓고 주어진 함수를 $t$에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3-t^2-t+a$

$\therefore g'(t)=3t^2-2t-1=(3t+1)(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=1$ ($\because t>0$)

| $t$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(t)$ | | ↘ | $a-1$ | ↗ |

따라서 함수 $g(t)$는 $t=1$에서 최솟값 $a-1$을 가지므로

$a-1=14$ $\therefore a=15$

**11** 전략 접선의 방정식을 이용하여 두 점 A, B의 좌표를 $t$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $f(x)=2e^{-x}$이라 하면 $f'(x)=-2e^{-x}$

이므로 점 $\mathrm{P}(t,\ 2e^{-t})$에서의 접선의 방정식은

$y-2e^{-t}=-2e^{-t}(x-t)$

$\therefore y=-2e^{-t}x+2te^{-t}+2e^{-t}$

따라서 $\mathrm{A}(0,\ 2e^{-t})$, $\mathrm{B}(0,\ 2te^{-t}+2e^{-t})$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=2te^{-t}+2e^{-t}-2e^{-t}=2te^{-t}$

삼각형 APB의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\cdot2te^{-t}\cdot t=t^2e^{-t}$$

이므로

$S'(t)=2te^{-t}-t^2e^{-t}=t(2-t)e^{-t}$

$S'(t)=0$에서 $t=2$ ($\because t>0$)

| $t$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $S'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $S(t)$ | | ↗ | | ↘ |

따라서 $S(t)$는 $t=2$에서 최댓값을 갖는다.

답 ④

**12** 전략 점 P의 좌표를 $(t,\ \sqrt{8-t^2})$이라 하고 직사각형의 넓이를 $t$에 대한 함수로 나타낸다.

풀이 점 P의 좌표를 $(t,\ \sqrt{8-t^2})$ $(0<t<2\sqrt{2})$이라 하면

$\overline{\mathrm{OQ}}=t$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{8-t^2}$

07 도함수의 활용 (2)

직사각형 PROQ의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\overline{\mathrm{OQ}}\cdot\overline{\mathrm{PQ}}=t\sqrt{8-t^2}$$

$$\therefore S'(t)=\sqrt{8-t^2}+t\cdot\frac{-2t}{2\sqrt{8-t^2}}=\frac{-2(t^2-4)}{\sqrt{8-t^2}}$$

$$=-\frac{2(t+2)(t-2)}{\sqrt{8-t^2}}$$

$S'(t)=0$에서 $\quad t=2\ (\because 0<t<2\sqrt{2})$

| $t$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ | $2\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(t)$ | | + | 0 | − | |
| $S(t)$ | | ↗ | | ↘ | |

따라서 함수 $S(t)$는 $t=2$에서 최댓값을 가지므로 이때의 직사각형 PROQ의 둘레의 길이는

$2(\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{PQ}})=2(2+\sqrt{8-2^2})=8$ 답 8

**13** 전략 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 방정식 $2\sin x-x=k$의 실근이 적어도 한 개 존재하려면 함수 $y=2\sin x-x$의 그래프와 직선 $y=k$가 적어도 한 점에서 만나야 한다.

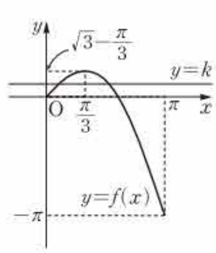
$f(x)=2\sin x-x$라 하면

$$f'(x)=2\cos x-1$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=\frac{1}{2} \qquad \therefore x=\frac{\pi}{3}\ (\because 0\le x\le\pi)$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ | ↘ | $-\pi$ |

$0\le x\le\pi$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 적어도 한 점에서 만나려면




$$-\pi\le k\le\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

따라서 $\alpha=-\pi$, $\beta=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$이므로

$$\alpha-3\beta=-\pi-3\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)=-3\sqrt{3}$$

답 ①

**14** 전략 $x>a$에서 부등식 $f(x)>0$이 성립함을 보이려면 그 구간에서 ($f(x)$의 최솟값)$>0$임을 보인다.

풀이 $f(x)=-5\cos 2x+12x-k$라 하면

$f'(x)=10\sin 2x+12$ ⋯➊

이때 $-1\le\sin 2x\le 1$에서 $\quad -10\le 10\sin 2x\le 10$

$$\therefore 2\le 10\sin 2x+12\le 22$$

즉 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다. ⋯➋

따라서 $x>0$일 때 $f(x)>0$이 성립하려면 $f(0)\ge 0$이어야 하므로

$-5-k\ge 0 \qquad \therefore k\le -5$

따라서 실수 $k$의 최댓값은 $-5$이다. ⋯➌

답 $-5$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 20 % |
| ➋ 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가함을 알 수 있다. | 40 % |
| ➌ $k$의 최댓값을 구할 수 있다. | 40 % |

**15** 전략 점 P의 시각 $t$에서의 위치가 $x$일 때, 속도는 $\frac{dx}{dt}$, 가속도는 $\frac{d^2x}{dt^2}$임을 이용한다.

풀이 점 P의 시각 $t$에서의 속도를 $v$, 가속도를 $a$라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=ke^t+kte^t=k(t+1)e^t,$$

$$a=\frac{dv}{dt}=ke^t+k(t+1)e^t=k(t+2)e^t$$

$t=\ln 2$에서의 점 P의 속도가 $1+\ln 2$이므로

$2k(\ln 2+1)=1+\ln 2, \qquad 2k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{2}(t+2)e^t$이므로 $t=2$에서의 점 P의 가속도는

$\frac{1}{2}\cdot(2+2)e^2=2e^2$ 답 ⑤

**16** 전략 점 P의 시각 $t$에서의 위치가 $x$일 때, 속도는 $\frac{dx}{dt}$, 가속도는 $\frac{d^2x}{dt^2}$임을 이용한다.

풀이 점 P의 시각 $t$에서의 속도를 $v$, 가속도를 $a$라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{m\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}t-\frac{n\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}t,$$

$a=\frac{dv}{dt}=-\frac{m\pi^2}{36}\sin\frac{\pi}{6}t-\frac{n\pi^2}{36}\cos\frac{\pi}{6}t$ ⋯➊

$t=3$에서의 점 P의 속도가 $2\pi$이므로

$$\frac{m\pi}{6}\cos\frac{\pi}{2}-\frac{n\pi}{6}\sin\frac{\pi}{2}=2\pi$$

$-\frac{n\pi}{6}=2\pi \qquad \therefore n=-12$ ⋯➋

또 $t=3$에서의 점 P의 가속도가 $-\frac{\pi^2}{9}$이므로

$$-\frac{m\pi^2}{36}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{3}\cos\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi^2}{9}$$

$-\frac{m\pi^2}{36}=-\frac{\pi^2}{9} \qquad \therefore m=4$ ⋯➌

$\therefore m+n=-8$ ⋯➍

답 $-8$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $v$와 $a$를 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $n$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❸ $m$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❹ $m+n$의 값을 구할 수 있다. | 10 % |

**17** 전략 점 $\mathrm{P}(x, y)$의 속력은 $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$임을 이용한다.

풀이 $\dfrac{dx}{dt}=1-2\sin 2t$, $\dfrac{dy}{dt}=2\cos 2t$

이므로 시각 $t$에서의 점 P의 속도는

$(1-2\sin 2t,\ 2\cos 2t)$ ··· ❶

따라서 점 P의 속력은

$\sqrt{(1-2\sin 2t)^2+(2\cos 2t)^2}$

$=\sqrt{1-4\sin 2t+4\sin^2 2t+4\cos^2 2t}$

$=\sqrt{5-4\sin 2t}$ ··· ❷

이때 $-1\le\sin 2t\le 1$이므로 $\quad -4\le -4\sin 2t\le 4$

$1\le 5-4\sin 2t\le 9 \quad \therefore 1\le\sqrt{5-4\sin 2t}\le 3$

따라서 점 P의 속력의 최댓값은 3이다. ··· ❸

답 3

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 시각 $t$에서의 점 P의 속도를 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ 시각 $t$에서의 점 P의 속력을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❸ 점 P의 속력의 최댓값을 구할 수 있다. | 40 % |

**18** 전략 점 $\mathrm{P}(x, y)$의 속력은 $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$임을 이용한다.

풀이 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}$, $\dfrac{dy}{dt}=2t$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 속도는

$\left(\dfrac{1}{t},\ 2t\right)$

$t=a$에서의 점 P의 속력이 $\sqrt{5}$라 하면

$\sqrt{\left(\dfrac{1}{a}\right)^2+(2a)^2}=\sqrt{5}$

$\dfrac{1}{a^2}+4a^2=5, \quad 4a^4-5a^2+1=0$

$(4a^2-1)(a^2-1)=0, \quad a^2=\dfrac{1}{4}$ 또는 $a^2=1$

$\therefore a=\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=1$ ($\because a>0$)

따라서 처음으로 점 P의 속력이 $\sqrt{5}$가 되는 시각은 $\dfrac{1}{2}$이다.

답 ②

**19** 전략 함수 $f(x)$가 기함수임을 이용한다.

풀이 ㄱ. 조건 (나)에서 $f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $f(x)$는 기함수이다.

이때 조건 (가)에서 $f(x)\neq 1$이므로 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)\neq -1$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이때 조건 (나)에서 $f(0)=0$이고, ㄱ에서 $f(x)\neq 1$, $f(x)\neq -1$이므로

$-1<f(x)<1$

따라서 조건 (다)에서

$f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}$

$=\{1+f(x)\}\{1-f(x)\}>0$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

ㄷ. $f'(x)=\{1+f(x)\}\{1-f(x)\}=1-\{f(x)\}^2$에서

$f''(x)=-2f(x)f'(x)$

$f''(x)=0$에서 $\quad f(x)=0$ ($\because f'(x)>0$)

이때 $f(0)=0$이고

$x<0$일 때 $f(x)<0$이므로 $\quad f''(x)>0$

$x>0$일 때 $f(x)>0$이므로 $\quad f''(x)<0$

따라서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 점 $(0, 0)$의 1개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

**20** 전략 $f'(x)$, $f''(x)$를 구하고 변곡점을 가질 조건을 이용한다.

풀이 $f(x)=\sin 2x+ax^2-x$라 하면

$f'(x)=2\cos 2x+2ax-1$

$f''(x)=-4\sin 2x+2a$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖고, 그 근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$f''(x)=0$에서 $\quad -4\sin 2x+2a=0$

$\therefore a=2\sin 2x$

$-1\le\sin 2x\le 1$에서 $-2\le 2\sin 2x\le 2$이므로

$-2\le a\le 2$

이때 $a=-2$이면 $\quad f''(x)=-4\sin 2x-4\le 0$

$a=2$이면 $\quad f''(x)=-4\sin 2x+4\ge 0$

즉 $a=-2$ 또는 $a=2$이면 $f''(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 주어진 곡선은 변곡점을 갖지 않는다.

따라서 $a$의 값의 범위는 $-2<a<2$이므로 정수 $a$는 $-1, 0, 1$의 3개이다.

답 3

**21** 전략 페인트 통의 밑면의 반지름의 길이를 $r$, 높이를 $h$라 하고 필요한 철판의 넓이를 $r$에 대한 식으로 나타낸다.

**풀이** 원기둥 모양의 페인트 통의 밑면의 반지름의 길이를 $r$ cm, 높이를 $h$ cm라 하면

$$\pi r^2h=250 \qquad \therefore h=\frac{250}{\pi r^2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편 이 페인트 통을 만드는 데 필요한 철판의 넓이를 $S(r)$ $\text{cm}^2$라 하면 $S(r)$ $\text{cm}^2$는 페인트 통의 겉넓이와 같으므로

$$S(r)=2\pi r^2+2\pi rh$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$$S(r)=2\pi r^2+2\pi r\cdot\frac{250}{\pi r^2}=2\pi r^2+\frac{500}{r}$$

$$\therefore S'(r)=4\pi r-\frac{500}{r^2}$$

$S'(r)=0$에서 $\qquad 4\pi r=\dfrac{500}{r^2}$

$$r^3=\frac{125}{\pi} \qquad \therefore r=\frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$$

| $r$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $S'(r)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $S(r)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

따라서 함수 $S(r)$는 $r=\dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$에서 최솟값을 가지므로 $r=\dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$를 ㉠에 대입하면

$$h=\frac{250}{\pi\cdot\left(\frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2}=\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$$

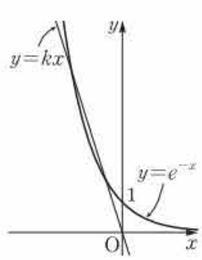
따라서 $a=\dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$, $b=\dfrac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$이므로

$$\frac{b}{a}=\frac{\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}}{\frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}}=2$$

답 2

**22** **전략** 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

**풀이** 방정식 $e^{-x}=kx$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 두 함수 $y=e^{-x}$, $y=kx$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.




$f(x)=e^{-x}$, $g(x)=kx$라 하면

$$f'(x)=-e^{-x},\ g'(x)=k$$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 $x$좌표를 $t$라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\qquad e^{-t}=kt \qquad \cdots\cdots ㉠$

$f'(t)=g'(t)$에서 $\qquad -e^{-t}=k \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면 $\qquad e^{-t}=-e^{-t}t$

$$e^{-t}(t+1)=0 \qquad \therefore t=-1$$

$t=-1$을 ㉡에 대입하면

$$k=-e$$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$k<-e$$

답 $k<-e$

**23** **전략** 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\le k$가 성립하려면 그 구간에서 ($f(x)$의 최댓값)$\le k$이어야 함을 이용한다.

**풀이** $ax-4\ge\ln x^2$에서 $\qquad ax\ge 2\ln x+4$

$$\therefore a\ge\frac{2\ln x+4}{x}\ (\because x>0)$$

$f(x)=\dfrac{2\ln x+4}{x}$라 하면

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x-(2\ln x+4)}{x^2}=\frac{-2(\ln x+1)}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\qquad \ln x=-1 \qquad \therefore x=\dfrac{1}{e}$

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{e}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $2e$ | $\searrow$ |

함수 $f(x)$는 $x>0$일 때 $x=\dfrac{1}{e}$에서 최댓값 $2e$를 가지므로 주어진 부등식이 항상 성립하려면

$$a\ge 2e$$

따라서 양수 $a$의 최솟값은 $2e$이다.

답 ⑤

**다른 풀이** $ax-4\ge\ln x^2$에서 $\qquad ax-2\ln x-4\ge 0$

$f(x)=ax-2\ln x-4$라 하면

$$f'(x)=a-\frac{2}{x}$$

$f'(x)=0$에서 $\qquad \dfrac{2}{x}=a \qquad \therefore x=\dfrac{2}{a}$

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{2}{a}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $-2\ln\frac{2}{a}-2$ | $\nearrow$ |

함수 $f(x)$는 $x>0$일 때 $x=\dfrac{2}{a}$에서 최솟값 $-2\ln\dfrac{2}{a}-2$를 가지므로 $f(x)\ge 0$이 성립하려면

$$-2\ln\frac{2}{a}-2\ge 0, \qquad -2\ln\frac{2}{a}\ge 2$$

$$\ln\frac{2}{a}\le -1, \qquad \frac{2}{a}\le\frac{1}{e}$$

$$\therefore a\ge 2e$$

따라서 양수 $a$의 최솟값은 $2e$이다.

**24** 전략 점 P$(x,\ y)$의 속력은 $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$, 가속도의 크기는 $\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$임을 이용한다.

풀이 $\frac{dx}{dt}=\frac{3}{2}\sqrt{t},\ \frac{dy}{dt}=\frac{a}{t+1}$

이므로 시각 $t$에서의 점 P의 속도는

$$\left(\frac{3}{2}\sqrt{t},\ \frac{a}{t+1}\right)$$

$t=1$에서의 점 P의 속도는

$$\left(\frac{3}{2},\ \frac{a}{2}\right)$$

이때 $t=1$에서의 점 P의 속력이 $\frac{5}{2}$이므로

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$$

$$\frac{a^2+9}{4}=\frac{25}{4},\qquad a^2=16$$

$$\therefore a=4\ (\because a>0)$$

$\frac{dx}{dt}=\frac{3}{2}\sqrt{t},\ \frac{dy}{dt}=\frac{4}{t+1}$에서

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{3}{4\sqrt{t}},\ \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{4}{(t+1)^2}$$

이므로 시각 $t$에서의 점 P의 가속도는

$$\left(\frac{3}{4\sqrt{t}},\ -\frac{4}{(t+1)^2}\right)$$

$t=3$에서의 점 P의 가속도는

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\ -\frac{1}{4}\right)$$

따라서 구하는 가속도의 크기는

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

답 ④

Ⅳ. 적분법

# 08 여러 가지 적분법

## 01 여러 가지 함수의 부정적분

### 확인

본책 162~163쪽

**1** (1) $\int\frac{2}{x^3}dx=2\int x^{-3}dx=2\cdot\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}+C$

$=-\frac{1}{x^2}+C$

(2) $\int x\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}+C$

$=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$

답 (1) $-\frac{1}{x^2}+C$ (2) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$

**2** (1) $\int 3e^{x-1}dx=3\int e^x\cdot e^{-1}dx=3e^{-1}\int e^x dx$

$=3e^{-1}\cdot e^x+C=3e^{x-1}+C$

(2) $\int 5^{x+3}dx=\int 5^x\cdot 5^3dx=5^3\int 5^x dx$

$=5^3\cdot\frac{5^x}{\ln 5}+C$

$=\frac{5^{x+3}}{\ln 5}+C$

답 (1) $3e^{x-1}+C$ (2) $\frac{5^{x+3}}{\ln 5}+C$

**3** (1) $\int(2\sin x-5\cos x)\,dx=2\int\sin x\,dx-5\int\cos x\,dx$

$=-2\cos x-5\sin x+C$

(2) $\int(\sec^2 x+4)\,dx=\int\sec^2 x\,dx+\int 4\,dx$

$=\tan x+4x+C$

답 (1) $-2\cos x-5\sin x+C$ (2) $\tan x+4x+C$

### 유제

본책 164~166쪽

**1** (1) $\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^2dx=\int\left(x-\frac{2\sqrt{x}}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=\int(x-2x^{-\frac{1}{2}}+x^{-2})\,dx$

$=\frac{1}{2}x^2-4x^{\frac{1}{2}}-x^{-1}+C$

$=\frac{1}{2}x^2-4\sqrt{x}-\frac{1}{x}+C$

(2) $\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}dx=\int(x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$

$=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$

(3) $\int \frac{x^3+1}{x^2+x}dx=\int \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)}dx$

$=\int \frac{x^2-x+1}{x}dx=\int\left(x-1+\frac{1}{x}\right)dx$

$=\frac{1}{2}x^2-x+\ln|x|+C$

(4) $\int\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\int\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int(x^2-x^{-2})\,dx$

$=\frac{1}{3}x^3+x^{-1}+C$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{x}+C$

답 (1) $\frac{1}{2}x^2-4\sqrt{x}-\frac{1}{x}+C$ (2) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$

(3) $\frac{1}{2}x^2-x+\ln|x|+C$ (4) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{x}+C$

**2** $f(x)=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx=\int(x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{2}})\,dx$

$=2x^{\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$

이때 $f(1)=5$이므로

$2-2+C=5$ $\therefore C=5$

따라서 $f(x)=2\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+5$이므로

$f(4)=4-1+5=8$

답 8

**3** (1) $\int\frac{x^2e^x+7}{x^2}dx=\int(e^x+7x^{-2})\,dx=e^x-7x^{-1}+C$

$=e^x-\frac{7}{x}+C$

(2) $\int\frac{e^{3x}+x^3}{e^{2x}-xe^x+x^2}dx=\int\frac{(e^x+x)(e^{2x}-xe^x+x^2)}{e^{2x}-xe^x+x^2}dx$

$=\int(e^x+x)\,dx$

$=e^x+\frac{1}{2}x^2+C$

(3) $\int(2^x-1)(4^x+2^x+1)\,dx=\int(2^x-1)(2^{2x}+2^x+1)\,dx$

$=\int(2^{3x}-1)\,dx=\int(8^x-1)\,dx$

$=\frac{8^x}{\ln 8}-x+C$

(4) $\int\frac{9^x-4^x}{3^x-2^x}dx=\int\frac{3^{2x}-2^{2x}}{3^x-2^x}dx$

$=\int\frac{(3^x+2^x)(3^x-2^x)}{3^x-2^x}dx=\int(3^x+2^x)\,dx$

$=\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{2^x}{\ln 2}+C$

답 (1) $e^x-\frac{7}{x}+C$ (2) $e^x+\frac{1}{2}x^2+C$

(3) $\frac{8^x}{\ln 8}-x+C$ (4) $\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{2^x}{\ln 2}+C$

**4** $f'(x)=e^x-x^2$이므로

$f(x)=\int(e^x-x^2)\,dx=e^x-\frac{1}{3}x^3+C$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 2)$를 지나므로 $f(0)=2$

$1+C=2$ $\therefore C=1$

$\therefore f(x)=e^x-\frac{1}{3}x^3+1$

답 $f(x)=e^x-\frac{1}{3}x^3+1$

**5** (1) $\int(\sin x+\sec^2 x)dx=-\cos x+\tan x+C$

(2) $\int\tan x\cos x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos x\,dx=\int\sin x\,dx$

$=-\cos x+C$

(3) $\int\frac{2\sin^2 x+1}{\sin^2 x}dx=\int\left(2+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=\int(2+\csc^2 x)\,dx$

$=2x-\cot x+C$

(4) $\int\frac{1}{1+\sin x}dx=\int\frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx$

$=\int\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$

$=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$

$=\int(\sec^2 x-\sec x\tan x)\,dx$

$=\tan x-\sec x+C$

답 (1) $-\cos x+\tan x+C$ (2) $-\cos x+C$

(3) $2x-\cot x+C$ (4) $\tan x-\sec x+C$

**6** $f(x)=\int 2\cot^2 x\,dx=\int 2(\csc^2 x-1)\,dx$

$=-2\cot x-2x+C$

이때 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}$이므로

$-2-\frac{\pi}{2}+C=-\frac{\pi}{2}$ $\therefore C=2$

$\therefore f(x)=-2\cot x-2x+2$

답 $f(x)=-2\cot x-2x+2$

**7** $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{1}{\cos 2x+1}dx$

$=\int\frac{1}{2\cos^2 x}dx=\int\frac{1}{2}\sec^2 x\,dx$

$=\frac{1}{2}\tan x+C$

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\tan x$이므로 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

라이트 UP

**배각의 공식**

① $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

② $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

③ $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

## 02 치환적분법

확인 본책 167~169쪽

**1** (1) $x-2=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=1$이므로

$$\int (x-2)^5\,dx = \int t^5\,dt = \frac{1}{6}t^6 + C$$
$$= \frac{1}{6}(x-2)^6 + C$$

(2) $x+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=1$이므로

$$\int \sqrt{x+1}\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{3}t\sqrt{t} + C = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + C$$

(3) $5x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=5$이므로

$$\int e^{5x}\,dx = \int e^t \cdot \frac{1}{5}\,dt = \frac{1}{5}e^t + C$$
$$= \frac{1}{5}e^{5x} + C$$

(4) $2x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2$이므로

$$\int \sin 2x\,dx = \int \sin t \cdot \frac{1}{2}\,dt = -\frac{1}{2}\cos t + C$$
$$= -\frac{1}{2}\cos 2x + C$$

답 (1) $\dfrac{1}{6}(x-2)^6+C$ (2) $\dfrac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+C$ (3) $\dfrac{1}{5}e^{5x}+C$ (4) $-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$

**2** (1) $x^3+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=3x^2$이므로

$$\int 3x^2(x^3+1)^4\,dx = \int t^4\,dt = \frac{1}{5}t^5 + C$$
$$= \frac{1}{5}(x^3+1)^5 + C$$

(2) $(x^4+3)' = 4x^3$이므로

$$\int \frac{4x^3}{x^4+3}\,dx = \int \frac{(x^4+3)'}{x^4+3}\,dx = \ln(x^4+3) + C$$

답 (1) $\dfrac{1}{5}(x^3+1)^5+C$ (2) $\ln(x^4+3)+C$

**3** (1) $\dfrac{x+3}{x+1} = 1 + \dfrac{2}{x+1}$이므로

$$\int \frac{x+3}{x+1}\,dx = \int \left(1 + \frac{2}{x+1}\right)dx$$
$$= x + 2\ln|x+1| + C$$

(2) $\dfrac{1}{(x+1)(x+3)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+3}\right)$이므로

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+3)}\,dx = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}(\ln|x+1| - \ln|x+3|) + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + C$$

답 (1) $x+2\ln|x+1|+C$ (2) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x+1}{x+3}\right|+C$

유제 본책 170~174쪽

**1** (1) $x^4-1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=4x^3$이므로

$$\int x^3(x^4-1)^5\,dx = \int t^5 \cdot \frac{1}{4}\,dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}t^6 + C$$
$$= \frac{1}{24}(x^4-1)^6 + C$$

(2) $x^3+3x-2=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=3x^2+3=3(x^2+1)$이므로

$$\int (x^2+1)(x^3+3x-2)^3\,dx = \int t^3 \cdot \frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}t^4 + C$$
$$= \frac{1}{12}(x^3+3x-2)^4 + C$$

(3) $x^2-3=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x$이므로

$$\int x\sqrt{x^2-3}\,dx = \int \sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}t\sqrt{t} + C$$
$$= \frac{1}{3}(x^2-3)\sqrt{x^2-3} + C$$

(4) $x^3-3x^2=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=3x^2-6x=3(x^2-2x)$이므로

$$\int \frac{x^2-2x}{\sqrt{x^3-3x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{t} + C$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3-3x^2} + C$$

답 (1) $\dfrac{1}{24}(x^4-1)^6+C$ (2) $\dfrac{1}{12}(x^3+3x-2)^4+C$ (3) $\dfrac{1}{3}(x^2-3)\sqrt{x^2-3}+C$ (4) $\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3-3x^2}+C$

**2** (1) $x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$\int 5^{x^2+1}\cdot x\,dx=\int 5^t\cdot\frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{5^t}{\ln 5}+C$$
$$=\frac{5^{x^2+1}}{2\ln 5}+C$$

(2) $e^x-2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$\int\frac{e^x}{\sqrt{e^x-2}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt=\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$
$$=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{t}+C$$
$$=2\sqrt{e^x-2}+C$$

(3) $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$\int\frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx=\int\frac{1}{t^3}\,dt=\int t^{-3}\,dt$$
$$=-\frac{1}{2}t^{-2}+C=-\frac{1}{2t^2}+C$$
$$=-\frac{1}{2(\ln x)^2}+C$$

(4) $\ln(x^2+1)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{2x}{x^2+1}$이므로

$$\int\frac{x\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,dx=\int t\cdot\frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}t^2+C$$
$$=\frac{1}{4}\{\ln(x^2+1)\}^2+C$$

답 (1) $\frac{5^{x^2+1}}{2\ln 5}+C$ (2) $2\sqrt{e^x-2}+C$

(3) $-\frac{1}{2(\ln x)^2}+C$ (4) $\frac{1}{4}\{\ln(x^2+1)\}^2+C$

**3** (1) $1+2\tan x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2\sec^2 x$이므로

$$\int(1+2\tan x)^3\sec^2 x\,dx=\int t^3\cdot\frac{1}{2}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}t^4+C$$
$$=\frac{1}{8}(1+2\tan x)^4+C$$

(2) $\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$$\int(\cos^2 x+\cos x-1)\sin x\,dx$$
$$=\int(t^2+t-1)\cdot(-1)\,dt$$
$$=-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t+C$$
$$=-\frac{1}{3}\cos^3 x-\frac{1}{2}\cos^2 x+\cos x+C$$

(3) $\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$$\int 4\cos x\,e^{\sin x}\,dx=\int 4e^t\,dt=4e^t+C$$
$$=4e^{\sin x}+C$$

(4) $1+\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$$\int 2\sqrt{1+\cos x}\sin x\,dx=\int 2\sqrt{t}\cdot(-1)\,dt$$
$$=-2\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$$
$$=-\frac{4}{3}t\sqrt{t}+C$$
$$=-\frac{4}{3}(1+\cos x)\sqrt{1+\cos x}+C$$

답 (1) $\frac{1}{8}(1+2\tan x)^4+C$

(2) $-\frac{1}{3}\cos^3 x-\frac{1}{2}\cos^2 x+\cos x+C$

(3) $4e^{\sin x}+C$ (4) $-\frac{4}{3}(1+\cos x)\sqrt{1+\cos x}+C$

**4** (1) $$\int\frac{\cos^3 x}{1+\sin x}\,dx=\int\frac{\cos^2 x\cos x}{1+\sin x}\,dx$$
$$=\int\frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{1+\sin x}\,dx$$
$$=\int\frac{(1+\sin x)(1-\sin x)\cos x}{1+\sin x}\,dx$$
$$=\int(1-\sin x)\cos x\,dx$$

$1-\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\cos x$이므로

$$\int(1-\sin x)\cos x\,dx=\int t\cdot(-1)\,dt=-\frac{1}{2}t^2+C$$
$$=-\frac{1}{2}(1-\sin x)^2+C$$

(2) $$\int\sin 2x\sin x\,dx=\int 2\sin^2 x\cos x\,dx$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$$\int 2\sin^2 x\cos x\,dx=\int 2t^2\,dt=\frac{2}{3}t^3+C$$
$$=\frac{2}{3}\sin^3 x+C$$

답 (1) $-\frac{1}{2}(1-\sin x)^2+C$ (2) $\frac{2}{3}\sin^3 x+C$

**5** (1) $(x^2+5x-1)'=2x+5$이므로

$$\int\frac{2x+5}{x^2+5x-1}\,dx=\int\frac{(x^2+5x-1)'}{x^2+5x-1}\,dx$$
$$=\ln|x^2+5x-1|+C$$

(2) $(e^x+e^{-x})'=e^x-e^{-x}$이므로

$$\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx=\int\frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}\,dx$$
$$=\ln(e^x+e^{-x})+C\ (\because e^x+e^{-x}>0)$$

(3) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$이므로

$$\int\frac{1}{x\ln x}\,dx=\int\frac{(\ln x)'}{\ln x}\,dx=\ln|\ln x|+C$$

(4) $(\sin x+2)'=\cos x$이므로

$$\int\frac{\cos x}{\sin x+2}dx=\int\frac{(\sin x+2)'}{\sin x+2}dx$$
$$=\ln(\sin x+2)+C\ (\because \sin x+2>0)$$

답 (1) $\ln|x^2+5x-1|+C$ (2) $\ln(e^x+e^{-x})+C$
(3) $\ln|\ln x|+C$ (4) $\ln(\sin x+2)+C$

**6** $(x+\cos x)'=1-\sin x$이므로

$$f(x)=\int\frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx=\int\frac{(x+\cos x)'}{x+\cos x}dx$$
$$=\ln|x+\cos x|+C$$

이때 $f(0)=\ln 2$이므로 $C=\ln 2$

따라서 $f(x)=\ln|x+\cos x|+\ln 2$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln\frac{\pi}{2}+\ln 2=\ln\pi$$

답 $\ln\pi$

**7** (1) $\dfrac{x^2+x-3}{x+1}=\dfrac{x(x+1)-3}{x+1}=x-\dfrac{3}{x+1}$이므로

$$\int\frac{x^2+x-3}{x+1}dx=\int\left(x-\frac{3}{x+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2-3\ln|x+1|+C$$

(2) $\dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}=\dfrac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}=1-\dfrac{4x}{4x^2+1}$이므로

$$\int\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}dx=\int\left(1-\frac{4x}{4x^2+1}\right)dx$$
$$=x-\frac{1}{2}\ln(4x^2+1)+C$$
$$(\because 4x^2+1>0)$$

(3) $\dfrac{6}{x^2-9}=\dfrac{6}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+3}$이므로

$$\int\frac{6}{x^2-9}dx=\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)dx$$
$$=\ln|x-3|-\ln|x+3|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$$

(4) $\dfrac{4x+1}{x^2+3x-4}=\dfrac{4x+1}{(x+4)(x-1)}=\dfrac{a}{x+4}+\dfrac{b}{x-1}$ ($a$, $b$는 상수)라 하면

$$\frac{4x+1}{x^2+3x-4}=\frac{(a+b)x-a+4b}{(x+4)(x-1)}$$

이므로 $a+b=4$, $-a+4b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=1$

$$\therefore \int\frac{4x+1}{x^2+3x-4}dx=\int\left(\frac{3}{x+4}+\frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$=3\ln|x+4|+\ln|x-1|+C$$
$$=\ln|(x+4)^3(x-1)|+C$$

답 (1) $\frac{1}{2}x^2-3\ln|x+1|+C$ (2) $x-\frac{1}{2}\ln(4x^2+1)+C$
(3) $\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$ (4) $\ln|(x+4)^3(x-1)|+C$

**8** $\dfrac{1}{x^2-5x+6}=\dfrac{1}{(x-3)(x-2)}=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-2}$이므로

$$f(x)=\int\frac{1}{x^2-5x+6}dx=\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)dx$$
$$=\ln|x-3|-\ln|x-2|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$$

이때 $f(1)=\ln 2$이므로

$\ln 2+C=\ln 2$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\ln\left|\dfrac{x-3}{x-2}\right|$이므로

$$f(4)=\ln\frac{1}{2}$$

답 $\ln\frac{1}{2}$

## 03 부분적분법

**유제** 본책 176~177쪽

**1** (1) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=4x$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=2x^2$$
$$\therefore \int 4x\ln x\,dx=\ln x\cdot 2x^2-\int\frac{1}{x}\cdot 2x^2\,dx$$
$$=2x^2\ln x-2\int x\,dx$$
$$=2x^2\ln x-x^2+C$$

(2) $f(x)=3x-2$, $g'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$$f'(x)=3,\ g(x)=-e^{-x}$$
$$\therefore \int(3x-2)e^{-x}dx=-(3x-2)e^{-x}-\int 3\cdot(-e^{-x})dx$$
$$=-(3x-2)e^{-x}-3e^{-x}+C$$
$$=-(3x+1)e^{-x}+C$$

(3) $f(x)=x$, $g'(x)=\sin 2x$로 놓으면

$$f'(x)=1,\ g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$$
$$\therefore \int x\sin 2x\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}x\cos 2x-\int 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$
$$=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

답 (1) $2x^2\ln x-x^2+C$ (2) $-(3x+1)e^{-x}+C$
(3) $-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

**2** $u(x)=x$, $v'(x)=1-\sin x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=x+\cos x$

$\therefore f(x)=\int x(1-\sin x)\,dx$

$=x(x+\cos x)-\int 1\cdot(x+\cos x)\,dx$

$=x^2+x\cos x-\frac{1}{2}x^2-\sin x+C$

$=\frac{1}{2}x^2+x\cos x-\sin x+C$

이때 $f(0)=-\frac{1}{2}$이므로 $\quad C=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x\cos x-\sin x-\frac{1}{2}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1-\frac{1}{2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{3}{2}$ 답 $\frac{\pi^2}{8}-\frac{3}{2}$

**3** (1) $f(x)=x^2$, $g'(x)=e^{2x}$으로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

$\therefore \int x^2e^{2x}\,dx=x^2\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int 2x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx$

$=\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\int xe^{2x}\,dx$ ······ ㉠

$\int xe^{2x}\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^{2x}$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

$\therefore \int xe^{2x}\,dx=x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int 1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx$

$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C_1$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int x^2e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\left(\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C_1\right)$

$=\frac{1}{4}(2x^2-2x+1)e^{2x}+C$

(2) $f(x)=(\ln x)^2$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}$, $g(x)=x$

$\therefore \int(\ln x)^2\,dx=(\ln x)^2\cdot x-\int\frac{2\ln x}{x}\cdot x\,dx$

$=x(\ln x)^2-2\int\ln x\,dx$ ······ ㉠

$\int\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$

$\therefore \int\ln x\,dx=\ln x\cdot x-\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx$

$=x\ln x-x+C_1$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int(\ln x)^2\,dx=x(\ln x)^2-2(x\ln x-x+C_1)$

$=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$

답 (1) $\frac{1}{4}(2x^2-2x+1)e^{2x}+C$

(2) $x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$

**4** $h(x)=\cos 2x$, $k'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$h'(x)=-2\sin 2x$, $k(x)=-e^{-x}$

$\therefore f(x)=\int e^{-x}\cos 2x\,dx$

$=\cos 2x\cdot(-e^{-x})-\int(-2\sin 2x)\cdot(-e^{-x})\,dx$

$=-e^{-x}\cos 2x-2\int e^{-x}\sin 2x\,dx$ ······ ㉠

$\int e^{-x}\sin 2x\,dx$에서 $u(x)=\sin 2x$, $v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=2\cos 2x$, $v(x)=-e^{-x}$

$\therefore \int e^{-x}\sin 2x\,dx$

$=\sin 2x\cdot(-e^{-x})-\int 2\cos 2x\cdot(-e^{-x})\,dx$

$=-e^{-x}\sin 2x+2\int e^{-x}\cos 2x\,dx$

$=-e^{-x}\sin 2x+2f(x)+C_1$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=-e^{-x}\cos 2x-2\{-e^{-x}\sin 2x+2f(x)+C_1\}$

$5f(x)=-e^{-x}(\cos 2x-2\sin 2x)-2C_1$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{5}e^{-x}(\cos 2x-2\sin 2x)+C$

이때 $f(0)=-\frac{1}{5}$이므로

$-\frac{1}{5}\cdot 1+C=-\frac{1}{5}\qquad\therefore C=0$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{5}e^{-x}(\cos 2x-2\sin 2x)$

답 $f(x)=-\frac{1}{5}e^{-x}(\cos 2x-2\sin 2x)$

## 중단원 연습 문제

본책 178~180쪽

**01** ② **02** $-8\sqrt{x}+7x+C$ **03** ④ **04** ⑤

**05** ⑤ **06** 0 **07** ② **08** $3\sqrt{6}$

**09** $f(x)=\frac{3}{2}\{\ln(x^2-4)\}^2-2$ **10** ④

**11** $h(x)=\frac{1}{2}\ln|e^{2x}-2x|$ **12** ② **13** ⑤

**14** ① **15** $x=-1$ **16** $6+\ln 2$

**17** 16 **18** ④ **19** ② **20** $e^2$

**01** 전략 $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$임을 이용한다. (단, $n\neq-1$)

풀이 $\left(x+\frac{2}{x}\right)^2=x^2+4+\frac{4}{x^2}=x^2+4+4x^{-2}$이므로

$$f(x)=\int\left(x+\frac{2}{x}\right)^2dx=\int(x^2+4+4x^{-2})dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3+4x-4x^{-1}+C$$
$$=\frac{1}{3}x^3+4x-\frac{4}{x}+C$$

이때 $f(1)=2$이므로 $\frac{1}{3}+4-4+C=2$

$\therefore C=\frac{5}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+4x-\frac{4}{x}+\frac{5}{3}$이므로

$f(-2)=-\frac{8}{3}-8+2+\frac{5}{3}=-7$

답 ②

**02** 전략 $f(x)=\int f'(x)dx$임을 이용하여 $f(x)$를 먼저 구한다.

풀이 $f'(x)=\frac{2}{x\sqrt{x}}=2x^{-\frac{3}{2}}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int 2x^{-\frac{3}{2}}dx$$
$$=-4x^{-\frac{1}{2}}+C_1$$

이때 $f(1)=3$이므로 $-4+C_1=3$ $\therefore C_1=7$

$\therefore f(x)=-4x^{-\frac{1}{2}}+7$ ⋯ ❶

따라서 함수 $f(x)$의 부정적분은

$$\int(-4x^{-\frac{1}{2}}+7)dx=-8x^{\frac{1}{2}}+7x+C$$
$$=-8\sqrt{x}+7x+C$$ ⋯ ❷

답 $-8\sqrt{x}+7x+C$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f(x)$를 구할 수 있다. | 60 % |
| ❷ $f(x)$의 부정적분을 구할 수 있다. | 40 % |

**03** 전략 피적분함수를 간단히 한 후 $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$임을 이용한다.

풀이 $$\int\frac{27^x-1}{3^x-1}dx=\int\frac{(3^x-1)(9^x+3^x+1)}{3^x-1}dx$$
$$=\int(9^x+3^x+1)dx$$
$$=\frac{9^x}{\ln 9}+\frac{3^x}{\ln 3}+x+C$$

따라서 $a=\frac{1}{\ln 9}$, $b=\frac{1}{\ln 3}$이므로

$$\frac{b}{a}=\frac{\frac{1}{\ln 3}}{\frac{1}{\ln 9}}=\frac{2\ln 3}{\ln 3}=2$$

답 ④

**04** 전략 $\int\{f'(x)+g'(x)\}dx=f(x)+g(x)+C$임을 이용한다.

풀이 $f'(x)+g'(x)=2e^{2x}$에서

$$\int\{f'(x)+g'(x)\}dx=\int 2e^{2x}dx$$

$\therefore f(x)+g(x)=e^{2x}+C$

이때 $f(0)=1$, $g(0)=0$이므로 $x=0$을 위의 식의 양변에 대입하면

$1=1+C$ $\therefore C=0$

$\therefore f(x)+g(x)=e^{2x}$

따라서 $f(x)+g(x)=e^{2x}$, $f(x)-g(x)=e^{-2x}$이므로

$$f(x)=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2},\ g(x)=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$$

$$\therefore f(1)-g(-1)=\frac{e^2+e^{-2}}{2}-\frac{e^{-2}-e^2}{2}$$
$$=e^2$$

답 ⑤

**05** 전략 부정적분을 이용하여 $f(x)$를 구한 후 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=\begin{cases}e^{x-1} & (x\le 1)\\ \frac{1}{x} & (x>1)\end{cases}$에서

$$f(x)=\int f'(x)dx=\begin{cases}e^{x-1}+C_1 & (x\le 1)\\ \ln x+C_2 & (x>1)\end{cases}$$

이때 $f(-1)=e+\frac{1}{e^2}$이므로

$\frac{1}{e^2}+C_1=e+\frac{1}{e^2}$ $\therefore C_1=e$

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이면 $x=1$에서도 연속이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to1+}(\ln x+C_2)=e+1$ $\therefore C_2=e+1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}e^{x-1}+e & (x\le 1)\\ \ln x+e+1 & (x>1)\end{cases}$이므로

$f(e)=e+2$

답 ⑤

**06** 전략 $f(x)=\int f'(x)dx$임을 이용하여 $f(x)$를 적분상수를 포함한 식으로 나타낸다.

풀이 $f'(x)=0$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$이므로

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\cdots$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ | |

즉 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$에서 극댓값을 갖고, $x=\frac{5}{3}\pi$에서 극솟값을 갖는다.

한편

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(4\cos x-2)dx$$
$$=4\sin x-2x+C$$

이고 모든 극값의 합이 0이므로 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{5}{3}\pi\right)=0$에서

$$\left(2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi+C\right)+\left(-2\sqrt{3}-\frac{10}{3}\pi+C\right)=0$$

$$-4\pi+2C=0 \qquad \therefore C=2\pi$$

따라서 $f(x)=4\sin x-2x+2\pi$이므로

$$f(\pi)=-2\pi+2\pi=0$$

답 0

**07** 전략 $f(x)$를 $x-k$로 나누었을 때의 나머지는 $f(k)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x-2)^3dx$

$3x-2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3$이므로

$$f(x)=\int(3x-2)^3dx=\int t^3\cdot\frac{1}{3}dt$$
$$=\frac{1}{12}t^4+C=\frac{1}{12}(3x-2)^4+C$$

이때 $f(0)=1$이므로

$$\frac{4}{3}+C=1 \qquad \therefore C=-\frac{1}{3}$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{12}(3x-2)^4-\frac{1}{3}$이므로 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$$f(2)=\frac{1}{12}\cdot 4^4-\frac{1}{3}=21$$

답 ②

**라이트 UP**

① $\int(ax+b)^n dx=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}+C$ (단, $n\neq-1$)

② $\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$

③ $\int e^{ax+b}dx=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$

$\int m^{ax+b}dx=\frac{1}{a\ln m}m^{ax+b}+C$ (단, $m>0$, $m\neq1$)

④ $\int\sin(ax+b)dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$

$\int\cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$

**08** 전략 $2x^2-2=t$로 놓고 치환적분법을 적용한다.

풀이 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{2x}{\sqrt{2x^2-2}}dx$

$2x^2-2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=4x$이므로

$$f(x)=\int\frac{2x}{\sqrt{2x^2-2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=t^{\frac{1}{2}}+C$$
$$=\sqrt{2x^2-2}+C \quad \cdots ❶$$
$$\therefore f(7)-f(2)=(4\sqrt{6}+C)-(\sqrt{6}+C)$$
$$=3\sqrt{6} \quad \cdots ❷$$

답 $3\sqrt{6}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다. | 70 % |
| ❷ $f(7)-f(2)$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |

**09** 전략 $\ln(x^2-4)=t$로 놓고 치환적분법을 적용한다.

풀이 $(x^2-4)f'(x)=6x\ln(x^2-4)$에서

$$f'(x)=\frac{6x\ln(x^2-4)}{x^2-4}$$
$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{6x\ln(x^2-4)}{x^2-4}dx$$

$\ln(x^2-4)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{2x}{x^2-4}$이므로

$$f(x)=\int\frac{6x\ln(x^2-4)}{x^2-4}dx=\int t\cdot 3\,dt$$
$$=\frac{3}{2}t^2+C=\frac{3}{2}\{\ln(x^2-4)\}^2+C$$

이때 $f(\sqrt{5})=-2$이므로 $\quad C=-2$

$$\therefore f(x)=\frac{3}{2}\{\ln(x^2-4)\}^2-2$$

답 $f(x)=\frac{3}{2}\{\ln(x^2-4)\}^2-2$

**10** 전략 피적분함수를 치환할 수 있도록 변형한다.

풀이 $\sin^2x+\cos^2x=1$이므로

$$\frac{\sin x}{1-\sin^2x}=\frac{\sin x}{\cos^2x}$$
$$\therefore f(x)=\int\frac{\sin x}{1-\sin^2x}dx=\int\frac{\sin x}{\cos^2x}dx$$

$\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$$f(x)=\int\frac{\sin x}{\cos^2x}dx=\int\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$
$$=\frac{1}{t}+C=\frac{1}{\cos x}+C$$

이때 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3$이므로

$$2+C=3 \qquad \therefore C=1$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{\cos x}+1$이므로

$$k=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}+1=\sqrt{2}+1$$

답 ④

**11** 전략 $\int f(x)dx-\int g(x)dx=\int\{f(x)-g(x)\}dx$임을 이용한다.

풀이 $h(x)=f(x)-g(x)$

$$=\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}-2x}dx-\int\frac{1}{e^{2x}-2x}dx$$

$$=\int\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}-2x}dx$$

$(e^{2x}-2x)'=2e^{2x}-2=2(e^{2x}-1)$이므로

$$h(x)=\int\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}-2x}dx=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{(e^{2x}-2x)'}{e^{2x}-2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln|e^{2x}-2x|+C$$

이때 $h(0)=0$이므로 $C=0$

$$\therefore h(x)=\frac{1}{2}\ln|e^{2x}-2x|$$

답 $h(x)=\frac{1}{2}\ln|e^{2x}-2x|$

**12** 전략 $\{f(x)\}^2f'(x)=\left[\frac{1}{3}\{f(x)\}^3\right]'$임을 이용한다.

풀이 $\{f(x)\}^2f'(x)=\left[\frac{1}{3}\{f(x)\}^3\right]'$이므로 조건 (가)에서

$$\left[\frac{1}{3}\{f(x)\}^3\right]'=\frac{2x}{x^2+1}$$

$$\therefore \{f(x)\}^3=3\int\frac{2x}{x^2+1}dx$$

이때 $(x^2+1)'=2x$이므로

$$\{f(x)\}^3=3\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=3\ln(x^2+1)+C$$

조건 (나)에서 $f(0)=0$이므로

$C=0$

따라서 $\{f(x)\}^3=3\ln(x^2+1)$이므로

$\{f(1)\}^3=3\ln 2$

답 ②

**13** 전략 $\frac{5}{x^2-3x-4}$를 부분분수로 변형한 후 적분한다.

풀이 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{5}{x^2-3x-4}dx$

$$=\int\frac{5}{(x-4)(x+1)}dx$$

$$=\int\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\ln|x-4|-\ln|x+1|+C$$

이때 $f(3)=2$이므로 $-\ln 4+C=2$

$\therefore C=2+\ln 4$

따라서 $f(x)=\ln|x-4|-\ln|x+1|+2+\ln 4$이므로

$$f(0)=\ln 4+2+\ln 4=2+2\ln 4$$
$$=2+4\ln 2$$

답 ⑤

**14** 전략 부분적분법을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=2x+1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x^2+x$

$$\therefore f(x)=\int(2x+1)\ln x\,dx$$

$$=\ln x\cdot(x^2+x)-\int\frac{1}{x}\cdot(x^2+x)dx$$

$$=(x^2+x)\ln x-\int(x+1)dx$$

$$=(x^2+x)\ln x-\frac{1}{2}x^2-x+C$$

이때 $f(e)=\frac{1}{2}e^2$이므로

$$e^2+e-\frac{1}{2}e^2-e+C=\frac{1}{2}e^2$$

$\therefore C=0$

따라서 $f(x)=(x^2+x)\ln x-\frac{1}{2}x^2-x$이므로

$$f(1)=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$$

답 ①

**15** 전략 주어진 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한 후 부분적분법을 적용한다.

풀이 $F(x)$는 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$F'(x)=f(x)$

$F(x)=xf(x)-x^2e^x$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-2xe^x-x^2e^x$

$xf'(x)=2xe^x+x^2e^x$

$\therefore f'(x)=2e^x+xe^x$ ($\because x<0$) ⋯❶

즉 $f'(x)=(x+2)e^x$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x+2)e^x dx$$

$u(x)=x+2$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$

$$\therefore f(x)=\int(x+2)e^x dx=(x+2)\cdot e^x-\int e^x dx$$

$$=(x+2)e^x-e^x+C$$

$$=(x+1)e^x+C$$

이때 $f(-2)=-\frac{1}{e^2}$이므로

$-\frac{1}{e^2}+C=-\frac{1}{e^2}$ $\therefore C=0$

$\therefore f(x)=(x+1)e^x$ ⋯❷

따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $(x+1)e^x=0$의 해는

$x=-1$ ($\because e^x>0$) ⋯ ❸

답 $x=-1$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $f(x)$를 구할 수 있다. | 50 % |
| ❸ 방정식 $f(x)=0$의 해를 구할 수 있다. | 20 % |

**16** 전략 $f'(x)=\int f''(x)dx$, $f(x)=\int f'(x)dx$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=3$에서 $x\to1$일 때 극한값이 존재하고

(분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$$ ⋯ ❶

$f''(x)=\frac{6x^3-1}{x^2}$에서

$$f'(x)=\int f''(x)\,dx=\int\frac{6x^3-1}{x^2}dx=\int(6x-x^{-2})\,dx=3x^2+\frac{1}{x}+C_1$$

이때 $f'(1)=3$이므로

$4+C_1=3$ $\therefore C_1=-1$

즉 $f'(x)=3x^2+\frac{1}{x}-1$이므로 ⋯ ❷

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(3x^2+\frac{1}{x}-1\right)dx=x^3+\ln|x|-x+C$$

이때 $f(1)=0$이므로

$1-1+C=0$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=x^3+\ln|x|-x$이므로 ⋯ ❸

$f(2)=8+\ln2-2=6+\ln2$ ⋯ ❹

답 $6+\ln2$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f(1)$, $f'(1)$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 30 % |
| ❸ $f(x)$를 구할 수 있다. | 30 % |
| ❹ $f(2)$의 값을 구할 수 있다. | 10 % |

**17** 전략 $0<x<\ln2$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가함수임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int f'(x)dx=\int 3e^x\sqrt{e^x+2}\,dx$

$e^x+2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$f(x)=\int 3e^x\sqrt{e^x+2}\,dx=\int 3\sqrt{t}\,dt=3\int t^{\frac{1}{2}}\,dt=3\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=2t\sqrt{t}+C=2(e^x+2)\sqrt{e^x+2}+C$$

이때 $f(0)=6\sqrt{3}$이므로

$6\sqrt{3}+C=6\sqrt{3}$ $\therefore C=0$

$\therefore f(x)=2(e^x+2)\sqrt{e^x+2}$

한편 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

따라서 $0\le x\le\ln2$에서 $f(x)$의 최댓값은

$f(\ln2)=2\cdot4\sqrt{4}=16$

답 16

**18** 전략 $F(x)+xF'(x)=\{xF(x)\}'$임을 이용한다.

풀이 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로 조건 (가)에서

$F(x)+xf(x)=F(x)+xF'(x)=\{xF(x)\}'$

즉 $\{xF(x)\}'=(2x+2)e^x$이므로

$$xF(x)=\int(2x+2)e^x\,dx$$

$u(x)=2x+2$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=2$, $v(x)=e^x$

$$\therefore xF(x)=(2x+2)e^x-\int 2e^x\,dx=(2x+2)e^x-2e^x+C=2xe^x+C$$

이때 조건 (나)에서 $F(1)=2e$이므로

$2e=2e+C$ $\therefore C=0$

$\therefore xF(x)=2xe^x$

따라서 $F(x)=2e^x$ ($\because x>0$)이므로

$F(3)=2e^3$

답 ④

**19** 전략 치환적분법과 부분적분법을 차례대로 적용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\cos\sqrt{x}\,dx$

$\sqrt{x}=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$이므로

$$\int\cos\sqrt{x}\,dx=\int 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\int 2t\cos t\,dt$$

$u(t)=2t$, $v'(t)=\cos t$로 놓으면

$u'(t)=2$, $v(t)=\sin t$

$\therefore \int 2t\cos t\,dt = 2t\sin t - 2\int \sin t\,dt$

$= 2t\sin t + 2\cos t + C$

$= 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$

이때 $f\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = \pi$이므로

$\pi + C = \pi \qquad \therefore C = 0$

따라서 $f(x) = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x}$이므로

$f(0) = 2$

답 ②

**20** 전략 부분적분법을 두 번 적용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 $h(x) = x^2 - 1$, $k'(x) = e^x$으로 놓으면

$h'(x) = 2x$, $k(x) = e^x$

$\therefore f(x) = \int (x^2-1)e^x\,dx$

$= (x^2-1)e^x - \int 2x\cdot e^x\,dx$

$= (x^2-1)e^x - 2\int xe^x\,dx \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\int xe^x\,dx$에서 $u(x) = x$, $v'(x) = e^x$으로 놓으면

$u'(x) = 1$, $v(x) = e^x$

$\therefore \int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx$

$= xe^x - e^x + C_1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x) = (x^2-1)e^x - 2(xe^x - e^x + C_1)$

$= (x^2 - 2x + 1)e^x + C$

$= (x-1)^2 e^x + C$

이때 $f(0) = 1$이므로 $\quad C = 0$

따라서 $f(x) = (x-1)^2 e^x$이므로

$f(2) = e^2$

답 $e^2$

Ⅳ. 적분법

# 09 정적분

## 01 여러 가지 함수의 정적분

확인 본책 182쪽

**1** (1) $\int_0^4 x\sqrt{x}\,dx = \int_0^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = \frac{64}{5}$

(2) $\int_0^1 e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}$

(3) $\int_2^{e+1} \frac{1}{x-1}\,dx = \Big[\ln|x-1|\Big]_2^{e+1} = 1$

(4) $f(x) = \cos x$로 놓으면

$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$

따라서 함수 $f(x)$는 우함수이므로

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= 2$

답 (1) $\frac{64}{5}$ (2) $\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}$ (3) 1 (4) 2

유제 본책 183~186쪽

**1** (1) $\int_1^3 \frac{1}{x^2+4x+3}\,dx = \int_1^3 \frac{1}{(x+1)(x+3)}\,dx$

$= \int_1^3 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right)dx$

$= \frac{1}{2}\Big[\ln|x+1| - \ln|x+3|\Big]_1^3$

$= \frac{1}{2}\{(\ln 4 - \ln 6) - (\ln 2 - \ln 4)\}$

$= \frac{1}{2}(2\ln 2 - \ln 3) = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3$

(2) $\int_1^9 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^9 (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^9$

$= (18+6) - \left(\frac{2}{3} + 2\right) = \frac{64}{3}$

(3) $\int_0^2 \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,dx = \int_0^2 \frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^x+1}\,dx$

$= \int_0^2 (e^{2x} - e^x + 1)dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x\right]_0^2$

$= \left(\frac{1}{2}e^4 - e^2 + 2\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}e^4 - e^2 + \frac{5}{2}$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + \sin 2x)dx = \left[\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$

답 (1) $\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3$ (2) $\frac{64}{3}$ (3) $\frac{1}{2}e^4 - e^2 + \frac{5}{2}$ (4) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

**2** $\int_0^a \frac{4^x-1}{2^x+1}dx=\int_0^a \frac{(2^x+1)(2^x-1)}{2^x+1}dx$

$=\int_0^a (2^x-1)dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}-x\right]_0^a$

$=\left(\frac{2^a}{\ln 2}-a\right)-\frac{1}{\ln 2}$

$=\frac{2^a-1}{\ln 2}-a$

따라서 $\frac{2^a-1}{\ln 2}-a=\frac{3}{\ln 2}-2$이므로

$a=2$

답 2

**3** (1) $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{2x}}{e^x-1}dx-\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{1}{e^x-1}dx$

$=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{2x}-1}{e^x-1}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x-1}dx$

$=\int_{\ln 2}^{\ln 3}(e^x+1)dx=\left[e^x+x\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$

$=(3+\ln 3)-(2+\ln 2)=1+\ln\frac{3}{2}$

(2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)^2dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)^2dx$

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\{(\sin x+\cos x)^2-(\sin x-\cos x)^2\}dx$

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}4\sin x\cos x\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}2\sin 2x\,dx$

$=\left[-\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=1$

(3) $\int_1^3(x-\sqrt{x})^2dx-\int_4^3(x-\sqrt{x})^2dx$

$=\int_1^3(x-\sqrt{x})^2dx+\int_3^4(x-\sqrt{x})^2dx=\int_1^4(x-\sqrt{x})^2dx$

$=\int_1^4(x^2-2x\sqrt{x}+x)dx=\int_1^4(x^2-2x^{\frac{3}{2}}+x)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right]_1^4$

$=\left(\frac{64}{3}-\frac{128}{5}+8\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\right)=\frac{37}{10}$

답 (1) $1+\ln\frac{3}{2}$ (2) 1 (3) $\frac{37}{10}$

**4** $\int_2^3\frac{x}{x^2-1}dx-\int_2^3\frac{1}{x^2-1}dx+\int_3^5\frac{1}{x+1}dx$

$=\int_2^3\frac{x-1}{x^2-1}dx+\int_3^5\frac{1}{x+1}dx$

$=\int_2^3\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}dx+\int_3^5\frac{1}{x+1}dx$

$=\int_2^3\frac{1}{x+1}dx+\int_3^5\frac{1}{x+1}dx=\int_2^5\frac{1}{x+1}dx$

$=\left[\ln|x+1|\right]_2^5$

$=\ln 6-\ln 3=\ln 2$

답 $\ln 2$

**5** $\int_0^{3\pi}f(x)dx=\int_0^{\pi}f(x)dx+\int_{\pi}^{3\pi}f(x)dx$

$=\int_0^{\pi}(-\cos x)dx+\int_{\pi}^{3\pi}(\sin x+1)dx$

$=\left[-\sin x\right]_0^{\pi}+\left[-\cos x+x\right]_{\pi}^{3\pi}$

$=(1+3\pi)-(1+\pi)=2\pi$

답 $2\pi$

**6** (1) $\sqrt{x}-2=0$에서 $\sqrt{x}=2$ $\quad\therefore x=4$

따라서 $|\sqrt{x}-2|=\begin{cases}2-\sqrt{x} & (1\le x\le 4)\\ \sqrt{x}-2 & (4\le x\le 9)\end{cases}$이므로

$\int_1^9|\sqrt{x}-2|dx=\int_1^4(2-\sqrt{x})dx+\int_4^9(\sqrt{x}-2)dx$

$=\int_1^4(2-x^{\frac{1}{2}})dx+\int_4^9(x^{\frac{1}{2}}-2)dx$

$=\left[2x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4+\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x\right]_4^9$

$=\frac{4}{3}+\frac{8}{3}=4$

(2) $2\cos x-1=0$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ ($\because 0\le x\le\pi$)

따라서 $|2\cos x-1|=\begin{cases}2\cos x-1 & \left(0\le x\le\frac{\pi}{3}\right)\\ 1-2\cos x & \left(\frac{\pi}{3}\le x\le\pi\right)\end{cases}$이므로

$\int_0^{\pi}|2\cos x-1|dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\cos x-1)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(1-2\cos x)dx$

$=\left[2\sin x-x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[x-2\sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$

$=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}\right)$

$=2\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$

답 (1) 4 (2) $2\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$

**7** $\int_{-2}^{1}\frac{2x}{x^2+2}dx+\int_1^2\frac{2x}{x^2+2}dx=\int_{-2}^{2}\frac{2x}{x^2+2}dx$

이때 $f(x)=\frac{2x}{x^2+2}$라 하면

$f(-x)=\frac{2\cdot(-x)}{(-x)^2+2}=\frac{-2x}{x^2+2}=-f(x)$

따라서 $f(x)$는 기함수이므로

$\int_{-2}^{2}\frac{2x}{x^2+2}dx=0$

답 0

**8** 함수 $f(x)$는 주기가 $\frac{\pi}{2}$인 주기함수이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} f(x)dx=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} f(x)dx=\int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} f(x)dx$$

이때 $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$에서

$$f(-x)=\sec^2(-x)=\sec^2 x=f(x)$$

따라서 $f(x)$는 우함수이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7}{4}\pi} f(x)dx=4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=8\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx=8\Big[\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=8$$

답 8

## 02 정적분의 치환적분법과 부분적분법

**확인** 본책 187~189쪽

**1** (1) $x+2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$

$x=-2$일 때 $t=0$, $x=0$일 때 $t=2$이므로

$$\int_{-2}^{0}\sqrt{x+2}\,dx=\int_0^2\sqrt{t}\,dt=\Big[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big]_0^2=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

(2) $2x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$

$x=1$일 때 $t=3$, $x=3$일 때 $t=7$이므로

$$\int_1^3 e^{2x+1}dx=\int_3^7 e^t\cdot\frac{1}{2}dt=\Big[\frac{1}{2}e^t\Big]_3^7=\frac{1}{2}(e^7-e^3)$$

답 (1) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (2) $\frac{1}{2}(e^7-e^3)$

**2** $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^1 xe^x\,dx=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 1\cdot e^x\,dx$$

$$=e-\Big[e^x\Big]_0^1=e-(e-1)=1$$

답 1

**유제** 본책 190~192쪽

**1** (1) $x^3+x=t$로 놓으면

$\frac{dt}{dx}=3x^2+1$

$x=-2$일 때 $t=-10$, $x=-1$일 때 $t=-2$이므로

$$\int_{-2}^{-1}\frac{3x^2+1}{x^3+x}dx=\int_{-10}^{-2}\frac{1}{t}dt=\Big[\ln|t|\Big]_{-10}^{-2}$$

$$=\ln 2-\ln 10=\ln\frac{1}{5}$$

(2) $3-x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$

$x=-1$일 때 $t=4$, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{-1}^{2}x\sqrt{3-x}\,dx=\int_4^1(3-t)\sqrt{t}\cdot(-1)dt$$

$$=\int_1^4(3\sqrt{t}-t\sqrt{t})dt=\int_1^4(3t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{3}{2}})dt$$

$$=\Big[2t^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\Big]_1^4=\frac{8}{5}$$

(3) $e^x+2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$

$x=0$일 때 $t=3$, $x=1$일 때 $t=e+2$이므로

$$\int_0^1\frac{e^x}{(e^x+2)^2}dx=\int_3^{e+2}\frac{1}{t^2}dt=\int_3^{e+2}t^{-2}\,dt$$

$$=\Big[-\frac{1}{t}\Big]_3^{e+2}=-\frac{1}{e+2}+\frac{1}{3}$$

(4) $x^2+x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x+1$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^1(2x+1)e^{x^2+x}\,dx=\int_0^2 e^t\,dt=\Big[e^t\Big]_0^2$$

$$=e^2-1$$

(5) $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

$x=e$일 때 $t=1$, $x=e^2$일 때 $t=2$이므로

$$\int_e^{e^2}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx=\int_1^2\frac{1}{t^2}dt=\int_1^2 t^{-2}\,dt$$

$$=\Big[-\frac{1}{t}\Big]_1^2=\frac{1}{2}$$

(6) $\ln x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

$x=1$일 때 $t=1$, $x=e^3$일 때 $t=4$이므로

$$\int_1^{e^3}\frac{\sqrt{\ln x+1}}{x}dx=\int_1^4\sqrt{t}\,dt=\int_1^4 t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$=\Big[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big]_1^4=\frac{14}{3}$$

(7) $1+\tan x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\sec^2 x$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 x}{1+\tan x}dx=\int_1^2\frac{1}{t}dt$$

$$=\Big[\ln|t|\Big]_1^2=\ln 2$$

(8) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x\sin x\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$

09 정적분

$\cos x=t$로 놓으면 $\quad \dfrac{dt}{dx}=-\sin x$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\dfrac{\pi}{3}$일 때 $t=\dfrac{1}{2}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos^2 x)\sin x\,dx=\int_1^{\frac{1}{2}}(1-t^2)\cdot(-1)dt$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t^2)dt$$
$$=\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_{\frac{1}{2}}^1=\frac{5}{24}$$

답 풀이 참조

다른 풀이 (1) $(x^3+x)'=3x^2+1$이므로

$$\int_{-2}^{-1}\frac{3x^2+1}{x^3+x}dx=\int_{-2}^{-1}\frac{(x^3+x)'}{x^3+x}dx$$
$$=\Big[\ln|x^3+x|\Big]_{-2}^{-1}$$
$$=\ln 2-\ln 10=\ln\frac{1}{5}$$

(7) $(1+\tan x)'=\sec^2 x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 x}{1+\tan x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\tan x)'}{1+\tan x}dx$$
$$=\Big[\ln|1+\tan x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln 2$$

**2** (1) $x=2\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\quad \dfrac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$이므로

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos\theta}{\sqrt{4\cos^2\theta}}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}1\,d\theta$$
$$=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$$

(2) $x=2\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\dfrac{dx}{d\theta}=2\sec^2\theta$

$x=-2$일 때 $\theta=-\dfrac{\pi}{4}$, $x=2$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$이므로

$$\int_{-2}^2\frac{1}{x^2+4}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4\tan^2\theta+4}\cdot 2\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sec^2\theta}{4\sec^2\theta}d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}d\theta$$
$$=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

답 (1) $\dfrac{\pi}{6}$ (2) $\dfrac{\pi}{4}$

**3** $x=a\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\dfrac{dx}{d\theta}=a\sec^2\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=a$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^a\frac{1}{x^2+a^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a^2\tan^2\theta+a^2}\cdot a\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a\sec^2\theta}{a^2\sec^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a}d\theta$$
$$=\left[\frac{1}{a}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4a}$$

따라서 $\dfrac{\pi}{4a}=\dfrac{\pi}{20}$이므로 $\quad a=5$

답 5

**4** (1) $f(x)=x+1$, $g'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-e^{-x}$

$$\therefore \int_{-1}^0(x+1)e^{-x}dx$$
$$=\Big[-(x+1)e^{-x}\Big]_{-1}^0-\int_{-1}^0 1\cdot(-e^{-x})dx$$
$$=-1-\Big[e^{-x}\Big]_{-1}^0=e-2$$

(2) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=\dfrac{1}{x^2}$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=-\dfrac{1}{x}$

$$\therefore \int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_e^{e^2}-\int_e^{e^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$=-\frac{2}{e^2}+\frac{1}{e}-\left[\frac{1}{x}\right]_e^{e^2}$$
$$=-\frac{2}{e^2}+\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e}\right)$$
$$=-\frac{3}{e^2}+\frac{2}{e}$$

(3) $f(x)=x$, $g'(x)=\cos 2x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}}x\cos 2x\,dx=\left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$$
$$=\frac{\pi}{8}-\left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$$

(4) $f(x)=x$, $g'(x)=\cos x+\sin x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\sin x-\cos x$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\cos x+\sin x)dx$$
$$=\Big[x(\sin x-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\cdot(\sin x-\cos x)dx$$
$$=\frac{\pi}{2}-\Big[-\cos x-\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{2}$$

답 (1) $e-2$ (2) $-\dfrac{3}{e^2}+\dfrac{2}{e}$ (3) $\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}$ (4) $\dfrac{\pi}{2}$

**5** $f(x)=x^2$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^3 x^2e^x\,dx=\Big[x^2e^x\Big]_0^3-\int_0^3 2xe^x\,dx$$
$$=9e^3-2\int_0^3 xe^x\,dx \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$\int_0^3 xe^x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^3 xe^x\,dx=\Big[xe^x\Big]_0^3-\int_0^3 1\cdot e^x\,dx$$
$$=3e^3-\Big[e^x\Big]_0^3=3e^3-(e^3-1)$$
$$=2e^3+1 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^3 x^2e^x\,dx=9e^3-2(2e^3+1)=5e^3-2$$

$\therefore a=5,\ b=-2$

답 $a=5$, $b=-2$

## 03 정적분으로 정의된 함수

**확인** 본책 193쪽

**1** (1) $f(x)=x\sin x$로 놓고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\frac{d}{dx}\int_2^x t\sin t\,dt=\frac{d}{dx}\int_2^x f(t)\,dt$$
$$=\frac{d}{dx}\Big[F(t)\Big]_2^x$$
$$=\frac{d}{dx}\{F(x)-F(2)\}$$
$$=F'(x)=f(x)$$
$$=x\sin x$$

(2) $f(x)=e^x$으로 놓고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x+2} e^t\,dt=\frac{d}{dx}\int_x^{x+2} f(t)\,dt$$
$$=\frac{d}{dx}\Big[F(t)\Big]_x^{x+2}$$
$$=\frac{d}{dx}\{F(x+2)-F(x)\}$$
$$=F'(x+2)-F'(x)$$
$$=f(x+2)-f(x)$$
$$=e^{x+2}-e^x$$

답 (1) $x\sin x$ (2) $e^{x+2}-e^x$

**2** (1) $f(x)=\sqrt{x+4}$로 놓고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^x \sqrt{t+4}\,dt=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^x f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\Big[F(t)\Big]_{-1}^x$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{F(x)-F(-1)}{x-(-1)}$$
$$=F'(-1)=f(-1)$$
$$=\sqrt{3}$$

(2) $f(x)=e^x+1$로 놓고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_1^{x+1}(e^t+1)\,dt=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_1^{x+1}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_1^{x+1}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(x+1)-F(1)}{x}$$
$$=F'(1)=f(1)$$
$$=e+1$$

답 (1) $\sqrt{3}$ (2) $e+1$

**유제** 본책 194~198쪽

**1** $\int_0^1 e^{-t}f(t)\,dt=k$ ($k$는 상수) $\cdots\cdots$ ㉠

로 놓으면 $f(x)=e^x-k$

$f(t)=e^t-k$를 ㉠에 대입하면

$$\int_0^1 e^{-t}(e^t-k)\,dt=k$$
$$\int_0^1 (1-ke^{-t})\,dt=k,\qquad \Big[t+ke^{-t}\Big]_0^1=k$$
$$1+\frac{k}{e}-k=k,\qquad \frac{2e-1}{e}k=1$$
$$\therefore k=\frac{e}{2e-1}$$
$$\therefore f(x)=e^x-\frac{e}{2e-1}$$

답 $f(x)=e^x-\dfrac{e}{2e-1}$

**2** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(t)\cos t\,dt=k$ ($k$는 상수) $\cdots\cdots$ ㉠

로 놓으면 $f(x)=\sin x+k$

$f(t)=\sin t+k$를 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin t+k)\cos t\,dt=k$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin t\cos t+k\cos t)\,dt=k$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2}\sin 2t+k\cos t\right)dt=k$$

$$\left[-\frac{1}{4}\cos 2t+k\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=k$$

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{2}k=k,\qquad \frac{1}{2}k=\frac{1}{8}$$

$$\therefore k=\frac{1}{4}$$

따라서 $f(x)=\sin x+\frac{1}{4}$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

답 $\frac{5}{4}$

**3** $\int_1^x f(t)dt=x\ln x-2x+a$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$f(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-2$$
$$=\ln x-1$$

$\int_1^x f(t)dt=x\ln x-2x+a$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$0=-2+a\qquad \therefore a=2$$

$$\therefore a+f(1)=2+(-1)=1$$

답 1

**4** $\int_0^x f(t)dt=\sin x+a\cos x+3$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면 $f(x)=\cos x-a\sin x$

$\int_0^x f(t)dt=\sin x+a\cos x+3$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$0=a+3\qquad \therefore a=-3$$

따라서 $f(x)=\cos x+3\sin x$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

답 $2\sqrt{2}$

**5** $\int_0^x tf(t)dt=xe^x-e^x+1$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$xf(x)=e^x+xe^x-e^x,\qquad xf(x)=xe^x$$

$$\therefore f(x)=e^x$$

$$\therefore f(2)=e^2$$

답 $e^2$

**6** $\int_1^x (x-t)f(t)dt=e^{2x}-2e^2x+e^2$에서

$$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=e^{2x}-2e^2x+e^2$$

위의 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=2e^{2x}-2e^2$$

$$\therefore \int_1^x f(t)dt=2e^{2x}-2e^2$$

위의 등식의 양변을 다시 $x$에 대하여 미분하면

$$f(x)=4e^{2x}$$

$$\therefore f(0)=4$$

답 4

**7** $\int_0^x (x-t)f'(t)dt=\sin 2x-2x$에서

$$x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt=\sin 2x-2x$$

위의 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=2\cos 2x-2$$

$$\int_0^x f'(t)dt=2\cos 2x-2$$

$$\Big[f(t)\Big]_0^x=2\cos 2x-2$$

$$f(x)-f(0)=2\cos 2x-2$$

$$\therefore f(x)=2\cos 2x-2+f(0)$$

이때 $f(0)=3$이므로

$$f(x)=2\cos 2x+1$$

답 $f(x)=2\cos 2x+1$

**8** $f(x)=\int_1^x (\ln t-1)dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\ln x-1$$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=1\qquad \therefore x=e$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 $f(x)$는 $x=e$에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$$f(e)=\int_1^e (\ln t-1)dt$$

이때 $u(t)=\ln t-1$, $v'(t)=1$로 놓으면

$$u'(t)=\frac{1}{t},\ v(t)=t$$

$$\therefore \int_1^e (\ln t-1)dt=\Big[t\ln t-t\Big]_1^e-\int_1^e \frac{1}{t}\cdot t\,dt$$
$$=1-\Big[t\Big]_1^e=1-(e-1)$$
$$=2-e$$

답 $2-e$

**9** $f(x)=\int_0^x t(\sqrt{t}-2)dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$f'(x)=x(\sqrt{x}-2)$$

$f'(x)=0$에서 $x=4\ (\because 1\le x\le 9)$

| $x$ | 1 | $\cdots$ | 4 | $\cdots$ | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | 극소 | ↗ | |

한편

$$f(x)=\int_0^x t(\sqrt{t}-2)dt=\int_0^x (t^{\frac{3}{2}}-2t)dt$$
$$=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-t^2\right]_0^x=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-x^2$$

이므로

$$f(1)=\frac{2}{5}-1=-\frac{3}{5},$$

$$f(4)=\frac{2}{5}\cdot 4^2\cdot 2-4^2=-\frac{16}{5},$$

$$f(9)=\frac{2}{5}\cdot 9^2\cdot 3-9^2=\frac{81}{5}$$

따라서 $M=\frac{81}{5}$, $m=-\frac{16}{5}$이므로

$M+m=13$ 답 13

**10** $f(t)=t^2e^t$으로 놓고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x t^2e^t\,dt=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)(x-2)}\Big[F(t)\Big]_2^x$$
$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{1}{x+2}\cdot\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}F'(2)=\frac{1}{4}f(2)$$
$$=\frac{1}{4}\cdot 4e^2=e^2$$

답 $e^2$

**11** $f(t)=(\ln t+1)^2$으로 놓고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+2x}\int_e^{x+e}(\ln t+1)^2dt$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+2x}\int_e^{x+e}f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x(x+2)}\Big[F(t)\Big]_e^{x+e}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x+2}\cdot\frac{F(x+e)-F(e)}{x}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}F'(e)=\frac{1}{2}f(e)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 4=2$$

답 2

**12** $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\pi-h}^{\pi+2h}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[F(t)\Big]_{\pi-h}^{\pi+2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(\pi+2h)-F(\pi-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(\pi+2h)-F(\pi)-\{F(\pi-h)-F(\pi)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{F(\pi+2h)-F(\pi)}{2h}\cdot 2\right\}+\lim_{h\to 0}\frac{F(\pi-h)-F(\pi)}{-h}$$
$$=2F'(\pi)+F'(\pi)=3F'(\pi)$$
$$=3f(\pi)=-3$$

답 $-3$

## 중단원 연습 문제

본책 199~201쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **01** $\ln\frac{4}{3}$ | **02** ① | **03** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | **04** 30 | **05** ③ |
| **06** ② | **07** ① | **08** $\frac{\pi}{4}$ | **09** $2e-3$ | **10** ② |
| **11** $2\pi$ | **12** $e^2-3$ | **13** ④ | **14** ③ | **15** $\frac{1}{4}$ |
| **16** ③ | **17** ④ | **18** $e$ | **19** 8 | |

**01** 전략 $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 $\int_1^3 f(x)dx+\int_3^5 f(y)dy-\int_7^5 f(z)dz$

$$=\int_1^3 f(x)dx+\int_3^5 f(x)dx+\int_5^7 f(x)dx$$
$$=\int_1^7 f(x)dx=\int_1^7\frac{1}{x^2+3x+2}dx$$
$$=\int_1^7\frac{1}{(x+1)(x+2)}dx=\int_1^7\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=\Big[\ln|x+1|-\ln|x+2|\Big]_1^7$$
$$=(\ln 8-\ln 9)-(\ln 2-\ln 3)$$
$$=\ln\frac{4}{3}$$

답 $\ln\frac{4}{3}$

**02** 전략 $f(x-e)$를 구한 후 구간을 나누어 적분한다.

풀이 $f(x)=\begin{cases}-\frac{2}{x} & (x\ge 1)\\ -2 & (x\le 1)\end{cases}$에서

$$f(x-e)=\begin{cases}-\frac{2}{x-e} & (x-e\ge 1)\\ -2 & (x-e\le 1)\end{cases},\ 즉$$

$$f(x-e)=\begin{cases}-\frac{2}{x-e} & (x\ge e+1)\\ -2 & (x\le e+1)\end{cases}$$

$$\therefore \int_e^{2e}f(x-e)dx=\int_e^{e+1}(-2)dx+\int_{e+1}^{2e}\left(-\frac{2}{x-e}\right)dx$$
$$=\Big[-2x\Big]_e^{e+1}+\Big[-2\ln|x-e|\Big]_{e+1}^{2e}$$
$$=-2-2=-4$$

답 ①

**03** 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 $x$의 값을 경계로 구간을 나누어 적분한다.

풀이 $\cos 2x-\cos x=0$에서

$2\cos^2 x-\cos x-1=0,\quad (2\cos x+1)(\cos x-1)=0$

$\cos x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=1$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ ($\because 0\le x\le\pi$) ···➊

따라서 $|\cos 2x-\cos x|=\begin{cases} -\cos 2x+\cos x & \left(0\le x\le \frac{2}{3}\pi\right) \\ \cos 2x-\cos x & \left(\frac{2}{3}\pi\le x\le\pi\right)\end{cases}$이므로

$$\int_0^{\pi}|\cos 2x-\cos x|dx$$
$$=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(-\cos 2x+\cos x)dx+\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}(\cos 2x-\cos x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\sin 2x+\sin x\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}+\left[\frac{1}{2}\sin 2x-\sin x\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$ ···➋

답 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 $x$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ➋ $\int_0^{\pi}\|\cos 2x-\cos x\|dx$의 값을 구할 수 있다. | 60 % |

**04** 전략 $f(x)$가 우함수이면 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$, $f(x)$가 기함수이면 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$임을 이용한다.

풀이 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\tan x+3)f(x)dx$
$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\tan x\,dx+3\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx$$

이때 $f(-x)=f(x)$, 즉 $f(x)$는 우함수이므로
$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx=10$$

한편 $g(x)=f(x)\tan x$라 하면
$$g(-x)=f(-x)\tan(-x)$$
$$=-f(x)\tan x=-g(x)$$

즉 $g(x)$는 기함수이므로
$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\tan x\,dx=0$$
$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\tan x+3)f(x)dx=3\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx$$
$$=3\cdot 10=30$$

답 30

라이트 UP
① (우함수)×(우함수)=(우함수)
② (우함수)×(기함수)=(기함수)
③ (기함수)×(기함수)=(우함수)

**05** 전략 함수 $f(x)$의 주기가 $p$이면 $\int_a^{a+p}f(x)dx=\int_b^{b+p}f(x)dx$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\sin\frac{1}{2}x$라 하면 함수 $f(x)$는 주기가 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$인 주기함수이므로
$$\int_k^{k+4\pi}\sin\frac{1}{2}x\,dx=\int_0^{4\pi}\sin\frac{1}{2}x\,dx$$
$$=\left[-2\cos\frac{1}{2}x\right]_0^{4\pi}=0$$

답 ③

**06** 전략 $a+\ln x=t$로 놓고 치환적분법을 적용한다.

풀이 $a+\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

$x=1$일 때 $t=a$, $x=e^2$일 때 $t=a+2$이므로
$$\int_1^{e^2}\frac{(a+\ln x)^2}{x}dx=\int_a^{a+2}t^2\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_a^{a+2}$$
$$=\frac{1}{3}(a+2)^3-\frac{1}{3}a^3$$
$$=\frac{6a^2+12a+8}{3}$$

따라서 $\frac{6a^2+12a+8}{3}=\frac{26}{3}$이므로

$6a^2+12a+8=26$, $a^2+2a-3=0$

$(a+3)(a-1)=0$ $\therefore a=1$ ($\because a>0$)

답 ②

**07** 전략 $f(\theta)$를 구한 후 $\sin\theta=t$로 치환하여 적분한다.

풀이 $\overline{OH}=\overline{OP}\cos\theta$, $\overline{PH}=\overline{OP}\sin\theta$이므로
$$f(\theta)=\frac{\overline{OH}}{\overline{PH}}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$\therefore \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}f(\theta)d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta$$

$\sin\theta=t$로 놓으면 $\frac{dt}{d\theta}=\cos\theta$

$\theta=\frac{\pi}{6}$일 때 $t=\frac{1}{2}$, $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{t}dt=\Big[\ln|t|\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$=\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln 3$$

답 ①

**08** 전략 먼저 $\sin x=t$로 치환하여 주어진 식을 변형한 후 삼각함수를 이용한 치환적분법을 이용한다.

풀이 $\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt$$

$t=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$\frac{dt}{d\theta}=\sec^2\theta$$

$t=0$일 때 $\theta=0$, $t=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,d\theta$$
$$=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

답 $\frac{\pi}{4}$

**09** 전략 $\int_0^1 f'(t)dt=k$로 놓고 $k$의 값을 구한다.

풀이 $\int_0^1 f'(t)dt=k$ ($k$는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=e^x-x+k$

$\therefore f'(x)=e^x-1$ ➊

$f'(t)=e^t-1$을 ㉠에 대입하면

$$k=\int_0^1(e^t-1)dt=\Big[e^t-t\Big]_0^1=e-2$$ ➋

따라서 $f(x)=e^x-x+e-2$이므로

$f(1)=e-1+e-2=2e-3$ ➌

답 $2e-3$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 30 % |
| ➋ $k$의 값을 구할 수 있다. | 50 % |
| ➌ $f(1)$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

**10** 전략 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분한다.

풀이 $\int_1^x f(t)dt=x^2-a\sqrt{x}$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$f(x)=2x-\frac{a}{2\sqrt{x}}$$

$\int_1^x f(t)dt=x^2-a\sqrt{x}$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1-a$ $\therefore a=1$

따라서 $f(x)=2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$이므로

$$f(1)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

답 ②

**11** 전략 $g(x)=x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt$로 변형한 후 양변을 $x$에 대하여 미분한다.

풀이 $g(x)=\int_0^x(x-t)f'(t)dt$에서

$$g(x)=x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt$$

앞의 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$g'(x)=\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)$$
$$\therefore g'(x)=\int_0^x f'(t)dt=\Big[f(t)\Big]_0^x$$
$$=f(x)-f(0)$$

이때 $f(0)=-1+2=1$이므로

$g'(x)=x-\cos x+1$

$\therefore g'(2\pi)=2\pi-1+1=2\pi$

답 $2\pi$

**12** 전략 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\int_0^x(2-t)e^t dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=(2-x)e^x$ ➊

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because e^x>0$)

| $x$ | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이므로 구하는 극댓값은

$$f(2)=\int_0^2(2-t)e^t dt$$ ➋

이때 $u(t)=2-t$, $v'(t)=e^t$으로 놓으면

$u'(t)=-1$, $v(t)=e^t$

$$\therefore \int_0^2(2-t)e^t dt=\Big[(2-t)e^t\Big]_0^2-\int_0^2(-e^t)dt$$
$$=-2+\Big[e^t\Big]_0^2=-2+(e^2-1)$$
$$=e^2-3$$ ➌

답 $e^2-3$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 20 % |
| ➋ 함수 $f(x)$의 극댓값이 $f(2)$의 값임을 알 수 있다. | 30 % |
| ➌ 극댓값을 구할 수 있다. | 50 % |

**13** 전략 $\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)$임을 이용한다.

풀이 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+1)(x-1)}\Big[F(t)\Big]_1^x$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x+1}\cdot\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)$$
$$=\frac{1}{2}a$$

따라서 $\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}$이므로

$a=1$

답 ④

**14** 전략 $2-x=2\sin\theta$로 놓고 삼각함수를 이용한 치환적분법을 이용한다.

풀이 $\sqrt{4x-x^2}=\sqrt{4-(2-x)^2}$에서 $2-x=2\sin\theta$, 즉

$x=2-2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta}=-2\cos\theta$$

$x=0$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$, $x=2$일 때 $\theta=0$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2\sqrt{4x-x^2}\,dx&=\int_0^2\sqrt{4-(2-x)^2}\,dx\\&=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot(-2\cos\theta)d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|2\cos\theta|\cdot2\cos\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2\theta\,d\theta\end{aligned}$$

이때 $\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$에서 $\cos^2\theta=\frac{\cos2\theta+1}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2\theta\,d\theta&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos2\theta+2)\,d\theta\\&=\Big[\sin2\theta+2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\pi\end{aligned}$$

답 ③

**15** 전략 부분적분법과 치환적분법을 이용한다.

풀이 $\int_0^1 f(x)g'(x)dx$

$$\begin{aligned}&=\Big[f(x)g(x)\Big]_0^1-\int_0^1 f'(x)g(x)dx\\&=f(1)g(1)-f(0)g(0)-\int_0^1 f'(x)g(x)dx\\&=f(1)-\int_0^1 f'(x)g(x)dx\end{aligned}$$

즉 $\frac{1}{16}=f(1)-\int_0^1 f'(x)g(x)dx$이므로

$$f(1)=\frac{1}{16}+\int_0^1 f'(x)g(x)dx \quad\cdots\cdots\text{㉠}$$ ⋯➊

$\int_0^1 f'(x)g(x)dx=\int_0^1\frac{x}{(1+x^2)^3}dx$에서 $1+x^2=t$로 놓으면

$$\frac{dt}{dx}=2x$$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x}{(1+x^2)^3}dx&=\int_1^2\frac{1}{t^3}\cdot\frac{1}{2}dt=\left[-\frac{1}{4t^2}\right]_1^2\\&=\frac{3}{16}\end{aligned}$$ ⋯➋

이를 ㉠에 대입하면

$$f(1)=\frac{1}{16}+\frac{3}{16}=\frac{1}{4}$$ ⋯➌

답 $\frac{1}{4}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ $f(1)$을 $\int_0^1 f'(x)g(x)dx$를 이용하여 나타낼 수 있다. | 40 % |
| ➋ $\int_0^1 f'(x)g(x)dx$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ➌ $f(1)$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

**16** 전략 $f(x)=\int_a^x g(t)dt$이면 $f'(x)=g(x)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^4}dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^4}$$

$f(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^4}dt$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$f(0)=0$$

$\int_0^a\frac{e^{f(x)}}{1+x^4}dx$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{dt}{dx}$$

이때 $f'(x)=\frac{1}{1+x^4}$이므로

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{1+x^4}$$

$x=0$일 때 $t=f(0)=0$, $x=a$일 때 $t=f(a)=1$이므로

$$\int_0^a\frac{e^{f(x)}}{1+x^4}dx=\int_0^1 e^t\,dt=\Big[e^t\Big]_0^1=e-1$$

답 ③

**17** 전략 부분적분법을 이용하여 $\int_{-1}^1 F(x)dx$의 값을 구한다.

풀이 $\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^{-1}xf(x)dx$에서

$$\int_0^1 xf(x)dx-\int_0^{-1}xf(x)dx=0$$

$$\int_0^1 xf(x)dx+\int_{-1}^0 xf(x)dx=0$$

$$\therefore \int_{-1}^1 xf(x)dx=0$$

$\int_{-1}^x f(t)dt=F(x)$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$F'(x)=f(x)$$

$\int_{-1}^x f(t)dt=F(x)$의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$F(-1)=0$$

$\int_{-1}^1 F(x)dx$에서 $u(x)=F(x)$, $v'(x)=1$로 놓으면

$$u'(x)=F'(x)=f(x),\ v(x)=x$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-1}^1 F(x)dx&=\Big[xF(x)\Big]_{-1}^1-\int_{-1}^1 xf(x)dx\\&=F(1)+F(-1)\\&=F(1)=\int_{-1}^1 f(x)dx\\&=12\end{aligned}$$

답 ④

**18** 전략 주어진 식의 양변을 $x$에 대하여 미분한다.

풀이 $\int_0^x f(t)dt=x+\int_0^x 2(x-t)f(t)dt$에서

$$\int_0^x f(t)dt=x+2x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt$$

위의 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$f(x)=1+2\int_0^x f(t)dt+2xf(x)-2xf(x)$$

$$\therefore f(x)=1+2\int_0^x f(t)dt \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 다시 $x$에 대하여 미분하면

$$f'(x)=2f(x) \qquad \therefore \frac{f'(x)}{f(x)}=2$$

따라서 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int 2\,dx$이므로

$$\ln f(x)=2x+C \ (\because f(x)>0)$$

$$\therefore f(x)=e^{2x+C}$$

이때 ㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=1$이므로

$$e^C=1 \qquad \therefore C=0$$

따라서 $f(x)=e^{2x}$이므로 $\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=e$

답 $e$

**19** 전략 $\lim_{x \to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)$임을 이용한다.

풀이 $g(t)=te^t$으로 놓고, $g(t)$의 한 부정적분을 $G(t)$라 하면

$$\lim_{x \to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_{f(1)}^{f(x)} te^t\,dt$$

$$=\lim_{x \to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_{f(1)}^{f(x)} g(t)dt$$

$$=\lim_{x \to 1}\frac{1}{x^2-1}\Big[G(t)\Big]_{f(1)}^{f(x)}$$

$$=\lim_{x \to 1}\frac{G(f(x))-G(f(1))}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x \to 1}\left\{\frac{1}{x+1}\cdot\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{G(f(x))-G(f(1))}{f(x)-f(1)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)G'(f(1))$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)G'(2) \ (\because f(1)=2)$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)g(2)=\frac{1}{2}f'(1)\cdot 2e^2$$

$$=e^2f'(1)$$

따라서 $e^2f'(1)=8e^2$이므로 $\quad f'(1)=8$

답 8

Ⅳ. 적분법

# 10 정적분의 활용

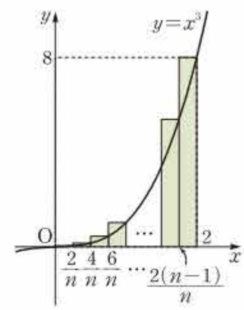
## 01 정적분과 급수의 관계

유제 본책 206~207쪽

**1** 오른쪽 그림과 같이 구간 $[0,\ 2]$를 $n$ 등분 하면 양 끝 점과 각 분점의 $x$좌표는 차례대로

$$0,\ \frac{2}{n},\ \frac{4}{n},\ \cdots,\ \frac{2(n-1)}{n},$$

$$\frac{2n}{n}=2$$




이때 $n$ 등분 한 각 구간을 가로의 길이로, 각 구간의 오른쪽 끝에서의 함숫값을 세로의 길이로 하는 직사각형을 만들면 그 넓이의 합 $S_n$은

$$S_n=\frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^3+\frac{2}{n}\left(\frac{4}{n}\right)^3+\cdots+\frac{2}{n}\left(\frac{2n}{n}\right)^3$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{2\cdot(2k)^3}{n^4}=\frac{16}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3$$

$$=\frac{16}{n^4}\cdot\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=4\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\lim_{n \to \infty}S_n=4\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=4$$

답 4

참고 $\int_0^2 x^3dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2=4$

**2** (1) $\lim_{n \to \infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2k}{n}}=\lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$

이때 $f(x)=e^{2x}$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n},\ x_k=a+k\Delta x=\frac{k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\int_0^1 e^{2x}dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e^2-1)$$

(2) $\lim_{n \to \infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)=\lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$

이때 $f(x)=\ln x$, $a=1$, $b=2$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n},\ x_k=a+k\Delta x=1+\frac{k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}=\lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

$$=\int_1^2 \ln x\,dx$$

이때 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$$u'(x)=\frac{1}{x},\ v(x)=x$$

$$\therefore \int_1^2 \ln x\,dx=\Big[x\ln x\Big]_1^2-\int_1^2 \frac{1}{x}\cdot x\,dx$$

$$=2\ln 2-\Big[x\Big]_1^2=2\ln 2-1$$

답 (1) $\frac{1}{2}(e^2-1)$ (2) $2\ln 2-1$

**3** (1) (주어진 식)$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$

이때 $f(x)=x^2$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n},\ x_k=a+k\Delta x=\frac{k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\int_0^1 x^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

(2) (주어진 식)$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{n+k}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{n}$$

이때 $f(x)=\sqrt{x}$, $a=1$, $b=2$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n},\ x_k=a+k\Delta x=1+\frac{k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\int_1^2\sqrt{x}\,dx$$

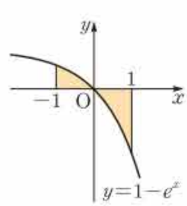
$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2=\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$$

답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$

## 02 넓이

유제 본책 209~213쪽

**1** (1) 곡선 $y=1-e^x$은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는



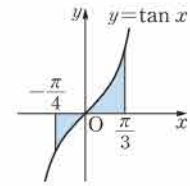

$$\int_{-1}^{1}|1-e^x|dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(1-e^x)dx+\int_0^1(-1+e^x)dx$$

$$=\Big[x-e^x\Big]_{-1}^{0}+\Big[-x+e^x\Big]_0^1$$

$$=e+\frac{1}{e}-2$$

(2) 곡선 $y=\tan x$는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는




$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}|\tan x|dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(-\tan x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{-\sin x}{\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$=\Big[\ln|\cos x|\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{0}-\Big[\ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\ln\frac{1}{2}=\ln 2\sqrt{2}$$

답 (1) $e+\frac{1}{e}-2$ (2) $\ln 2\sqrt{2}$

**2** 곡선 $y=\sqrt{2x}$와 $x$축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_1$이라 하면

$$S_1=\int_0^2\sqrt{2x}\,dx=\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

곡선 $y=\sqrt{2x}$와 $x$축 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_2$라 하면

$$S_2=\int_0^k\sqrt{2x}\,dx=\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^k=\frac{2\sqrt{2}}{3}k^{\frac{3}{2}}$$

이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로 $\frac{2\sqrt{2}}{3}k^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}$

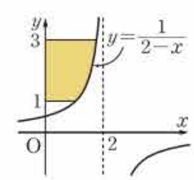
$k^{\frac{3}{2}}=\sqrt{2}$ $\therefore k=\sqrt[3]{2}$

답 $\sqrt[3]{2}$

**3** (1) $y=\frac{1}{2-x}$에서 $2-x=\frac{1}{y}$

$\therefore x=2-\frac{1}{y}$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



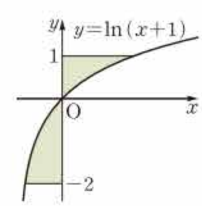

$$\int_1^3\left(2-\frac{1}{y}\right)dy=\Big[2y-\ln|y|\Big]_1^3$$

$$=4-\ln 3$$

(2) $y=\ln(x+1)$에서 $x+1=e^y$

$\therefore x=e^y-1$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는




$$\int_{-2}^{1}|e^y-1|dy$$

$$=\int_{-2}^{0}(-e^y+1)dy+\int_0^1(e^y-1)dy$$

$$=\Big[-e^y+y\Big]_{-2}^{0}+\Big[e^y-y\Big]_0^1$$

$$=\left(1+\frac{1}{e^2}\right)+(e-2)$$

$$=e+\frac{1}{e^2}-1$$

답 (1) $4-\ln 3$ (2) $e+\frac{1}{e^2}-1$

**4** $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$에서 $\quad \sqrt{x}=2-\sqrt{y} \quad \therefore x=4-4\sqrt{y}+y$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^4 (4-4\sqrt{y}+y)dy=\left[4y-\frac{8}{3}y^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}y^2\right]_1^4$$

$$=\frac{5}{6}$$

답 $\frac{5}{6}$

**5** (1) 두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=x^3$의 교점의 $x$좌표는 $\sqrt{x}=x^3$에서

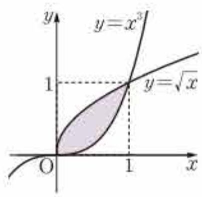
$x=x^6, \quad x(x^5-1)=0$

$\therefore x(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$

이때 $x\geq 0$에서 $x^4+x^3+x^2+x+1>0$이므로

$x=0$ 또는 $x=1$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



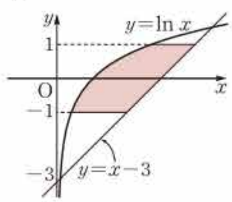

$$\int_0^1 (\sqrt{x}-x^3)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$

$$=\frac{5}{12}$$

(2) $y=\ln x$, $y=x-3$에서 $\quad x=e^y$, $x=y+3$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는




$$\int_{-1}^1 (y+3-e^y)\,dy$$

$$=\left[\frac{1}{2}y^2+3y-e^y\right]_{-1}^1$$

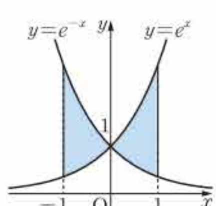
$$=-e+\frac{1}{e}+6$$

답 (1) $\frac{5}{12}$ (2) $-e+\frac{1}{e}+6$

**6** (1) 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{-x}$의 교점의 $x$좌표는 $e^x=e^{-x}$에서

$e^{2x}=1 \quad \therefore x=0$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는




$$\int_{-1}^1 |e^x-e^{-x}|dx$$

$$=\int_{-1}^0 (e^{-x}-e^x)dx$$

$$+\int_0^1 (e^x-e^{-x})dx$$

$$=\left[-e^{-x}-e^x\right]_{-1}^0+\left[e^x+e^{-x}\right]_0^1$$

$$=\left(-2+e+\frac{1}{e}\right)+\left(e+\frac{1}{e}-2\right)=2e+\frac{2}{e}-4$$

(2) $y=x^2$, $y=\frac{1}{x}$에서

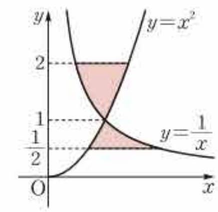
$x=\sqrt{y}\ (\because x\geq 0)$, $x=\frac{1}{y}$

두 곡선 $x=\sqrt{y}$, $x=\frac{1}{y}$의 교점의 $y$좌표는 $\sqrt{y}=\frac{1}{y}$에서

$y\sqrt{y}=1, \quad y^3=1, \quad (y-1)(y^2+y+1)=0$

$\therefore y=1\ (\because y^2+y+1>0)$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는




$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \left|\sqrt{y}-\frac{1}{y}\right|dy$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{y}-\sqrt{y}\right)dy$$

$$+\int_1^2 \left(\sqrt{y}-\frac{1}{y}\right)dy$$

$$=\left[\ln|y|-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^1+\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-\ln|y|\right]_1^2$$

$$=\left(-\frac{2}{3}+\ln 2+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)+\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}-\ln 2-\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{4}{3}$$

답 (1) $2e+\frac{2}{e}-4$ (2) $\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{4}{3}$

**7** $y=\ln x+1$에서 $\quad y'=\frac{1}{x}$

곡선 위의 점 $(e, 2)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{e}$이므로 접선의 방정식은

$y-2=\frac{1}{e}(x-e) \quad \therefore y=\frac{1}{e}x+1$

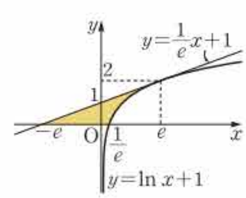
곡선 $y=\ln x+1$과 $x$축의 교점의 $x$좌표는 $\ln x+1=0$에서

$\ln x=-1 \quad \therefore x=\frac{1}{e}$

또 직선 $y=\frac{1}{e}x+1$과 $x$축의 교점의 $x$좌표는 $\frac{1}{e}x+1=0$에서

$\frac{1}{e}x=-1 \quad \therefore x=-e$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는




$$\frac{1}{2}(e+e)\cdot 2-\int_{\frac{1}{e}}^e (\ln x+1)dx$$

$$=2e-\left[x(\ln x+1)\right]_{\frac{1}{e}}^e+\int_{\frac{1}{e}}^e 1\,dx$$

$$=2e-2e+\left[x\right]_{\frac{1}{e}}^e$$

$$=e-\frac{1}{e}$$

답 $e-\frac{1}{e}$

**8** $y=\sqrt{x}$에서 $\quad y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

접점의 좌표를 $(a, \sqrt{a})$ $(a>0)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2\sqrt{a}}$이므로 접선의 방정식은

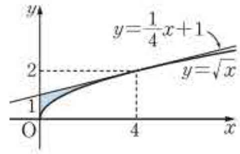
$y-\sqrt{a}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}(x-a) \qquad \therefore\ y=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}x+\dfrac{\sqrt{a}}{2}$

이 직선이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=\dfrac{\sqrt{a}}{2} \qquad \therefore\ a=4$

$\therefore\ y=\dfrac{1}{4}x+1$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는




$\displaystyle\int_0^4\left(\frac{1}{4}x+1-\sqrt{x}\right)dx$

$=\left[\dfrac{1}{8}x^2+x-\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$

$=\dfrac{2}{3}$

답 $\dfrac{2}{3}$

**9** $f(x)=ke^{-\frac{1}{2}x}$, $g(x)=-\dfrac{1}{2}ex$라 하면

$f'(x)=-\dfrac{k}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$, $g'(x)=-\dfrac{1}{2}e$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$의 접점의 $x$좌표를 $t$라 하면

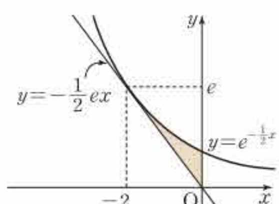
$f(t)=g(t)$에서 $\quad ke^{-\frac{1}{2}t}=-\dfrac{1}{2}et \quad$ ······ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad -\dfrac{k}{2}e^{-\frac{1}{2}t}=-\dfrac{1}{2}e \quad$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$t=-2,\ k=1$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는




$\displaystyle\int_{-2}^0\left\{e^{-\frac{1}{2}x}-\left(-\frac{1}{2}ex\right)\right\}dx$

$=\left[-2e^{-\frac{1}{2}x}+\dfrac{1}{4}ex^2\right]_{-2}^0$

$=e-2$

답 $e-2$

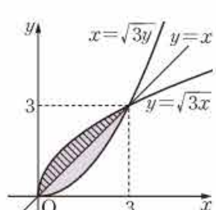
**10** 두 함수 $y=\sqrt{3x}$, $x=\sqrt{3y}$는 서로 역함수 관계이므로 두 곡선은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

두 곡선 $y=\sqrt{3x}$, $x=\sqrt{3y}$의 교점의 $x$좌표는 곡선 $y=\sqrt{3x}$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표와 같으므로 $\sqrt{3x}=x$에서

$3x=x^2, \quad x^2-3x=0, \quad x(x-3)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=3$

이때 오른쪽 그림에서 두 곡선 $y=\sqrt{3x}$, $x=\sqrt{3y}$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=\sqrt{3x}$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는



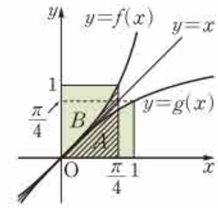

$2\displaystyle\int_0^3(\sqrt{3x}-x)dx=2\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^3$

$=2\cdot\dfrac{3}{2}=3$

답 3

**11** 함수 $f(x)=\tan x$의 역함수가 $g(x)$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$의 값은 곡선 $y=f(x)$와 $y$축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이, 즉 $B$와 같으므로




$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx+\int_0^1 g(x)dx$

$=A+B$

$=\dfrac{\pi}{4}$

답 $\dfrac{\pi}{4}$

## 03 부피

**확인** 본책 214쪽

**1** 구하는 부피는

$\displaystyle\int_0^2 S(x)dx=\int_0^2(4x+5)dx=\left[2x^2+5x\right]_0^2$

$=18$

답 18

**유제** 본책 215~216쪽

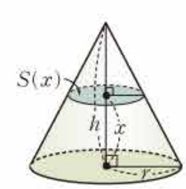
**1** 높이가 $x$ cm일 때의 단면의 넓이가 $(e^{-x}+x)\ \mathrm{cm}^2$이므로 구하는 부피는

$\displaystyle\int_0^4(e^{-x}+x)dx=\left[-e^{-x}+\frac{1}{2}x^2\right]_0^4$

$=-\dfrac{1}{e^4}+9\ (\mathrm{cm}^3)$

답 $\left(-\dfrac{1}{e^4}+9\right)\mathrm{cm}^3$

**2** 오른쪽 그림과 같이 밑면으로부터 높이가 $x$인 지점에서 밑면에 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하자.




이때 단면과 밑면은 닮은 도형이고 닮음비가 $(h-x):h$이므로 넓이의 비는

$(h-x)^2:h^2$

즉 $S(x) : \pi r^2 = (h-x)^2 : h^2$이므로

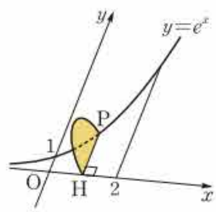
$$S(x) = \frac{\pi r^2}{h^2}(h-x)^2$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2}(h-x)^2 dx$$
$$= \frac{\pi r^2}{h^2}\left[-\frac{1}{3}(h-x)^3\right]_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

답 $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

**3** 오른쪽 그림과 같이 $x$축 위의 점 $\mathrm{H}(x,\ 0)\ (0 \le x \le 2)$을 지나고 $x$축에 수직인 직선이 곡선 $y=e^x$과 만나는 점을 P라 하면 $\mathrm{P}(x,\ e^x)$




점 P를 지나고 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면은 $\overline{\mathrm{PH}}$가 지름인 반원이므로 그 넓이를 $S(x)$라 하면

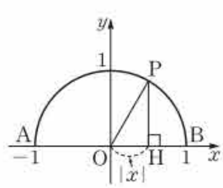
$$S(x) = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{\overline{\mathrm{PH}}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{e^x}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}e^{2x}$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^2 S(x)dx = \int_0^2 \frac{\pi}{8}e^{2x}dx$$
$$= \frac{\pi}{8}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2 = \frac{\pi}{16}(e^4-1)$$

답 $\frac{\pi}{16}(e^4-1)$

**4** 오른쪽 그림과 같이 지름 AB의 중점을 원점, 지름 AB를 $x$축 위에 놓고, $x$축 위의 점 $\mathrm{H}(x,\ 0)\ (-1 \le x \le 1)$을 지나고 $x$축에 수직인 직선이 호 AB와 만나는 점을 P라 하면




$$\overline{\mathrm{PH}} = \sqrt{\overline{\mathrm{OP}}^2 - \overline{\mathrm{OH}}^2} = \sqrt{1-x^2}$$

점 P를 지나고 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면은 $\overline{\mathrm{PH}}$를 한 변으로 하는 정삼각형이므로 그 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x^2)$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_{-1}^1 S(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x^2)dx$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1 (1-x^2)dx$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

## 04 속도와 거리

**확인** 본책 218쪽

**1** $\frac{dx}{dt} = 2\cos t,\ \frac{dy}{dt} = -2\sin t$이므로 시각 $t=1$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^5 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_1^5 \sqrt{(2\cos t)^2 + (-2\sin t)^2}\,dt$$
$$= \int_1^5 2\,dt = \Big[2t\Big]_1^5$$
$$= 8$$

답 8

**2** (1) $\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{3}t,\ \frac{dy}{dt} = t^2-3$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_1^4 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_1^4 \sqrt{(2\sqrt{3}t)^2 + (t^2-3)^2}\,dt$$
$$= \int_1^4 \sqrt{t^4+6t^2+9}\,dt$$
$$= \int_1^4 \sqrt{(t^2+3)^2}\,dt$$
$$= \int_1^4 (t^2+3)dt$$
$$= \left[\frac{1}{3}t^3 + 3t\right]_1^4$$
$$= 30$$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)^{\frac{1}{2}}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_3^9 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_3^9 \sqrt{1+\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)^{\frac{1}{2}}\right\}^2}\,dx$$
$$= \int_3^9 \sqrt{1+\frac{1}{3}(x-3)}\,dx$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\int_3^9 \sqrt{x}\,dx$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_3^9$$
$$= 6\sqrt{3} - 2$$

답 (1) 30 (2) $6\sqrt{3}-2$

**유제** 본책 219~220쪽

**1** 점 P가 움직인 거리는 $\int_0^1 2te^{t^2}dt$

이때 $t^2 = s$라 하면 $\frac{ds}{dt} = 2t$

$t=0$일 때 $s=0$, $t=1$일 때 $s=1$이므로

$$\int_0^1 2te^{t^2}dt = \int_0^1 e^s ds = \Big[e^s\Big]_0^1 = e-1$$

답 $e-1$

**2** $\dfrac{dx}{dt}=-t\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=t\cos t$이므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^2\sqrt{(-t\sin t)^2+(t\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^2\sqrt{t^2}\,dt=\int_0^2|t|\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^2=2$$

답 2

**3** (1) $\dfrac{dx}{dt}=e^t(\cos t-\sin t)$, $\dfrac{dy}{dt}=e^t(\sin t+\cos t)$이므로

구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^\pi\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^\pi\sqrt{\{e^t(\cos t-\sin t)\}^2+\{e^t(\sin t+\cos t)\}^2}\,dt$$
$$=\int_0^\pi\sqrt{2}e^t\,dt$$
$$=\left[\sqrt{2}e^t\right]_0^\pi=\sqrt{2}(e^\pi-1)$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2x}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_1^3\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_1^3\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^3\sqrt{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}}\,dx$$
$$=\int_1^3\sqrt{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^3\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln x\right]_1^3$$
$$=2+\frac{1}{2}\ln 3$$

답 (1) $\sqrt{2}(e^\pi-1)$ (2) $2+\dfrac{1}{2}\ln 3$

**4** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{3}{2}(4x-1)^{\frac{1}{2}}\cdot 4=\sqrt{4x-1}$이므로 $1\le x\le a$에서 곡선의 길이는

$$\int_1^a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_1^a\sqrt{1+(\sqrt{4x-1})^2}\,dx$$
$$=\int_1^a 2\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^a$$
$$=\frac{4}{3}a^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{3}$$

즉 $\dfrac{4}{3}a^{\frac{3}{2}}-\dfrac{4}{3}=\dfrac{28}{3}$이므로 $\dfrac{4}{3}a^{\frac{3}{2}}=\dfrac{32}{3}$

$a^{\frac{3}{2}}=8$ $\quad\therefore a=4$

답 4

## 중단원 연습 문제

본책 221~224쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 01 ③ | 02 ② | 03 $\frac{9}{20}$ | 04 $\frac{e-1}{2}$ | 05 ② |
| 06 ① | 07 ① | 08 $\sqrt{3}$ | 09 ⑤ | 10 $\frac{16}{3}$ |
| 11 ① | 12 ④ | 13 $8\ln 2-3$ | 14 5 | |
| 15 ④ | 16 16 | 17 4 | 18 $\frac{3}{2}$ | 19 $\frac{2}{\pi}$ |
| 20 $4e^2-2$ | 21 $\frac{e}{2}-\frac{3}{2e}$ | | 22 18 | 23 $\sqrt{2}$ |
| 24 ⑤ | | | | |

**01** 전략 주어진 식을 정적분으로 나타낸다.

풀이 (주어진 식) $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[n]{e^k}=e\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{k}{n}}\cdot\dfrac{1}{n}\right)$

이때 $f(x)=e^x$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n},\ x_k=a+k\Delta x=\frac{k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$e\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}\right)=e\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=e\int_0^1 e^x\,dx$$
$$=e\left[e^x\right]_0^1=e^2-e$$

답 ③

**02** 전략 먼저 주어진 곡선이 $x$축과 만나는 점의 $x$좌표를 구한다.

풀이 $\sin^2 x\cos x=0$에서

$\sin x=0$ 또는 $\cos x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\dfrac{\pi}{2}$ $\left(\because 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin^2 x\cos x|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\,dx$$

이때 $\sin x=t$로 놓으면

$$\frac{dt}{dx}=\cos x$$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\,dx=\int_0^1 t^2\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}$$

답 ②

**03** 전략 정적분을 이용하여 $a_k$를 구한다.

풀이 $a_k=\displaystyle\int_0^2|\sin\pi x+k|\,dx$

$$=\int_0^2(\sin\pi x+k)\,dx\ (\because \sin\pi x+k\ge 0)$$
$$=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x+kx\right]_0^2=2k$$ ⋯ ❶

$$\therefore \sum_{k=1}^{9} \frac{1}{(k+1)a_k} = \sum_{k=1}^{9} \frac{1}{2k(k+1)}$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{9} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{10}\right)$$
$$= \frac{9}{20}$$ ⋯ ❷

답 $\frac{9}{20}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $a_k$를 구할 수 있다. | 60 % |
| ❷ $\sum_{k=1}^{9} \frac{1}{(k+1)a_k}$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |

**04** 전략 정적분을 이용하여 조건을 만족시키는 $a$의 값을 구한다.

풀이 함수 $y=e^{\frac{x}{2}}$의 그래프와 $x$축, $y$축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_1$이라 하면

$$S_1 = \int_0^2 e^{\frac{x}{2}} dx = \left[2e^{\frac{x}{2}}\right]_0^2 = 2(e-1)$$

직선 $y=ax$와 $x$축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_2$라 하면

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2a = 2a$$

이때 $S_2 = \frac{1}{2}S_1$이므로 $\quad 2a = e-1$

$$\therefore a = \frac{e-1}{2}$$

답 $\frac{e-1}{2}$

**05** 전략 곡선 $x=g(y)$와 $y$축 및 두 직선 $y=a$, $y=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_a^b |g(y)|\,dy$임을 이용한다.

풀이 $y=(x+1)^3$에서 $\quad x+1 = y^{\frac{1}{3}}$

$$\therefore x = y^{\frac{1}{3}} - 1$$

곡선 $x=y^{\frac{1}{3}}-1$과 $y$축의 교점의 $y$좌표는 $y^{\frac{1}{3}}-1=0$에서

$$y=1$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^8 |y^{\frac{1}{3}}-1|\,dy = \int_0^1 (-y^{\frac{1}{3}}+1)\,dy + \int_1^8 (y^{\frac{1}{3}}-1)\,dy$$
$$= \left[-\frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}}+y\right]_0^1 + \left[\frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}}-y\right]_1^8$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{17}{4} = \frac{9}{2}$$

답 ②

**06** 전략 $g(x)$의 식을 구한 후 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$의 교점의 $x$좌표를 구한다.

풀이 직선 $y=g(x)$가 점 A$(1,\ 2)$를 지나고 $x$축에 평행하므로

$$g(x)=2$$

$f(x)=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x$와 $g(x)=2$의 그래프의 교점의 $x$좌표는

$2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x=2$에서 $\quad \sin\frac{\pi}{4}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0 \le x \le 4$에서 $0 \le \frac{\pi}{4}x \le \pi$이므로

$$\frac{\pi}{4}x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{\pi}{4}x = \frac{3}{4}\pi$$
$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^3 \left(2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x - 2\right)dx = \left[-\frac{8\sqrt{2}}{\pi}\cos\frac{\pi}{4}x - 2x\right]_1^3$$
$$= \frac{16}{\pi} - 4$$

답 ①

**07** 전략 먼저 두 곡선의 교점의 $x$좌표를 구한다.

풀이 두 곡선 $y=\sqrt{3}\cos x$, $y=\sin x$의 교점의 $x$좌표는

$\sqrt{3}\cos x = \sin x$에서 $\quad \tan x = \sqrt{3}$

$$\therefore x = \frac{\pi}{3} \left(\because 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$$

$0 \le x \le \frac{\pi}{3}$에서 $\sqrt{3}\cos x \ge \sin x$이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt{3}\cos x - \sin x)\,dx = \left[\sqrt{3}\sin x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=1$$

답 ①

**08** 전략 $S_1$, $S_2$를 각각 정적분으로 나타낸 후 $\int_l^m f(x)\,dx + \int_m^n f(x)\,dx = \int_l^n f(x)\,dx$임을 이용한다.

풀이 두 곡선 $y=\sin x$, $y=a\cos x$의 교점의 $x$좌표를 $k$라 하면

$$S_1 = \int_0^k (a\cos x - \sin x)\,dx,$$
$$S_2 = \int_k^{\frac{2}{3}\pi} (\sin x - a\cos x)\,dx$$

이때 $S_1 = S_2$에서 $S_1 - S_2 = 0$이므로

$$\int_0^k (a\cos x - \sin x)\,dx - \int_k^{\frac{2}{3}\pi} (\sin x - a\cos x)\,dx = 0$$
$$\int_0^k (a\cos x - \sin x)\,dx + \int_k^{\frac{2}{3}\pi} (a\cos x - \sin x)\,dx = 0$$
$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi} (a\cos x - \sin x)\,dx = 0$$
$$\left[a\sin x + \cos x\right]_0^{\frac{2}{3}\pi} = 0, \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{3}{2} = 0$$
$$\therefore a = \sqrt{3}$$

답 $\sqrt{3}$

**09** 전략 {(오른쪽 그래프의 식)−(왼쪽 그래프의 식)}을 적분하여 두 곡선 사이의 넓이를 구한다.

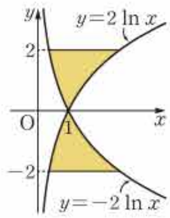
풀이 $y=2\ln x$에서 $\quad x=e^{\frac{y}{2}}$

$y=-2\ln x$에서 $\quad x=e^{-\frac{y}{2}}$

두 곡선 $x=e^{\frac{y}{2}}$, $x=e^{-\frac{y}{2}}$의 교점의 $y$좌표는 $e^{\frac{y}{2}}=e^{-\frac{y}{2}}$에서

$y=0$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는




$$\int_{-2}^{2}|e^{\frac{y}{2}}-e^{-\frac{y}{2}}|dy$$
$$=\int_{-2}^{0}(e^{-\frac{y}{2}}-e^{\frac{y}{2}})dy$$
$$+\int_{0}^{2}(e^{\frac{y}{2}}-e^{-\frac{y}{2}})dy$$
$$=\left[-2e^{-\frac{y}{2}}-2e^{\frac{y}{2}}\right]_{-2}^{0}+\left[2e^{\frac{y}{2}}+2e^{-\frac{y}{2}}\right]_{0}^{2}$$
$$=2\left(e+\frac{1}{e}-2\right)+2\left(e+\frac{1}{e}-2\right)$$
$$=4\left(e+\frac{1}{e}-2\right)$$

답 ⑤

**10** 전략 접선의 방정식을 구한 후 곡선과 접선의 위치 관계를 파악한다.

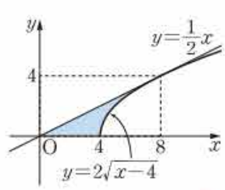
풀이 $y=2\sqrt{x-4}$에서

$$y'=\frac{2}{2\sqrt{x-4}}=\frac{1}{\sqrt{x-4}}$$

곡선 위의 점 (8, 4)에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{\sqrt{8-4}}=\frac{1}{2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-4=\frac{1}{2}(x-8) \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x$$ ···➊

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는




$$\frac{1}{2}\cdot8\cdot4-\int_{4}^{8}2\sqrt{x-4}\,dx$$
$$=16-\left[\frac{4}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}}\right]_{4}^{8}$$
$$=16-\frac{32}{3}=\frac{16}{3}$$ ···➋

답 $\frac{16}{3}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ 접선의 방정식을 구할 수 있다. | 40 % |
| ➋ 도형의 넓이를 구할 수 있다. | 60 % |

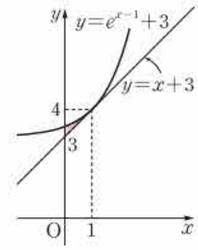
**11** 전략 접선의 방정식을 구한 후 곡선과 접선의 위치 관계를 파악한다.

풀이 $y=e^{x-1}+3$에서 $\quad y'=e^{x-1}$

곡선 위의 점 (1, 4)에서의 접선의 기울기는 1이므로 접선의 방정식은

$$y-4=x-1 \qquad \therefore y=x+3$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



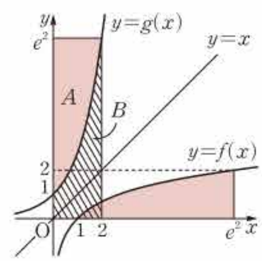

$$\int_{0}^{1}\{(e^{x-1}+3)-(x+3)\}dx$$
$$=\int_{0}^{1}(e^{x-1}-x)dx$$
$$=\left[e^{x-1}-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$$

답 ①

**12** 전략 함수와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)=\ln x$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 $\int_{1}^{e^2}f(x)dx$의 값은 곡선 $y=g(x)$와 $y$축 및 직선 $y=e^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이, 즉 $A$와 같으므로




$$\int_{1}^{e^2}f(x)dx+\int_{0}^{2}g(x)dx$$
$$=A+B$$
$$=2e^2$$

답 ④

다른 풀이 $g(x)=e^x$이므로

$$\int_{1}^{e^2}f(x)dx+\int_{0}^{2}g(x)dx=\int_{1}^{e^2}\ln x\,dx+\int_{0}^{2}e^x dx$$
$$=\left[x\ln x\right]_{1}^{e^2}-\int_{1}^{e^2}1dx+\left[e^x\right]_{0}^{2}$$
$$=2e^2-\left[x\right]_{1}^{e^2}+e^2-1$$
$$=2e^2$$

**13** 전략 깊이가 $x$일 때의 수면의 넓이를 $S(x)$라 하면 물의 부피는 $\int_{0}^{x}S(x)dx$임을 이용한다.

풀이 물의 깊이가 $x$일 때의 수면의 넓이가 $\ln(x+1)$이므로 구하는 부피는

$$\int_{0}^{3}\ln(x+1)\,dx=\left[x\ln(x+1)\right]_{0}^{3}-\int_{0}^{3}\frac{x}{x+1}dx$$
$$=3\ln4-\int_{0}^{3}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=3\ln4-\left[x-\ln(x+1)\right]_{0}^{3}$$
$$=3\ln4-(3-\ln4)=4\ln4-3$$
$$=8\ln2-3$$

답 $8\ln2-3$

**14** 전략 입체도형의 부피는 $\int_0^a \frac{4x}{x^2+1}dx$임을 이용한다.

풀이 입체도형의 높이를 $a$라 하면 입체도형의 부피는

$$\int_0^a \frac{4x}{x^2+1}dx = 2\int_0^a \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx$$

$$= 2\Big[\ln(x^2+1)\Big]_0^a = 2\ln(a^2+1) \quad \cdots ❶$$

따라서 $2\ln(a^2+1) = 2\ln 26$이므로

$a^2+1=26,\quad a^2=25$

$\therefore a=5\ (\because a>0) \quad \cdots ❷$

답 5

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 부피를 $a$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 70 % |
| ❷ $a$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |

**15** 전략 주어진 구간에서 단면의 넓이를 적분한다.

풀이 점 $(x,\ 0)\ (0 \le x \le 1)$을 지나고 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x) = (\sqrt{x}+1)^2 = x+2\sqrt{x}+1$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^1 S(x)dx = \int_0^1 (x+2\sqrt{x}+1)dx$$

$$= \Big[\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x\Big]_0^1$$

$$= \frac{17}{6}$$

답 ④

**16** 전략 속도를 적분하여 $t=4$에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 구한다.

풀이 시각 $t=4$에서의 점 P의 위치는

$$\int_0^4 \sqrt{t}\,dt = \Big[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big]_0^4 = \frac{16}{3}$$

시각 $t=4$에서의 점 Q의 위치는

$$\int_0^4 t^2 dt = \Big[\frac{1}{3}t^3\Big]_0^4 = \frac{64}{3}$$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$\frac{64}{3} - \frac{16}{3} = 16$$

답 16

**17** 전략 시각 $t=\alpha$에서 $t=\beta$까지 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 움직인 거리는 $\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$임을 이용한다.

풀이 $\frac{dx}{dt} = t-1,\ \frac{dy}{dt} = 2\sqrt{t}$이므로 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^a \sqrt{(t-1)^2 + (2\sqrt{t})^2}\,dt = \int_0^a \sqrt{t^2+2t+1}\,dt = \int_0^a \sqrt{(t+1)^2}\,dt$$

$$= \int_0^a (t+1)dt = \Big[\frac{1}{2}t^2 + t\Big]_0^a$$

$$= \frac{1}{2}a^2 + a$$

따라서 $\frac{1}{2}a^2 + a = 12$이므로

$a^2+2a-24=0,\qquad (a+6)(a-4)=0$

$\therefore a=4\ (\because a>0)$

답 4

**18** 전략 곡선 $x=f(t),\ y=g(t)\ (a \le t \le b)$의 길이는 $\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\,dt$임을 이용한다.

풀이 $\frac{dx}{d\theta} = -3\cos^2\theta\sin\theta,\ \frac{dy}{d\theta} = 3\sin^2\theta\cos\theta$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3\cos^2\theta\sin\theta)^2 + (3\sin^2\theta\cos\theta)^2}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^4\theta\sin^2\theta + 9\sin^4\theta\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}\,d\theta$$

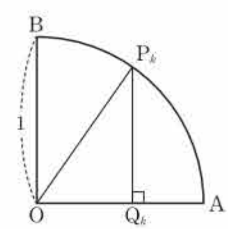
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |3\cos\theta\sin\theta|\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{3}{2}\sin 2\theta\right| d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}\sin 2\theta\,d\theta = \Big[-\frac{3}{4}\cos 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

**19** 전략 $\overline{\mathrm{OQ}_k}$의 길이를 $k$에 대한 식으로 나타낸다.




풀이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴의 호의 길이를 $n$ 등분 하면 중심각의 크기도 $n$ 등분되므로 오른쪽 그림의 직각삼각형 $\mathrm{P}_k\mathrm{OQ}_k$에서

$$\angle \mathrm{P}_k\mathrm{OQ}_k = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n} = \frac{k\pi}{2n}$$

따라서 $\overline{\mathrm{OQ}_k} = \cos\frac{k\pi}{2n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{\mathrm{OQ}_k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\cos\frac{k\pi}{2n}\right)\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{k\pi}{2n}\right)\frac{1}{n}\ \left(\because \cos\frac{\pi}{2}=0\right)$$

이때 $f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x,\ a=0,\ b=1$로 놓으면

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n},\ x_k = a+k\Delta x = \frac{k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{k\pi}{2n}\right)\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

$$= \int_0^1 \cos\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$$= \Big[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\Big]_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

답 $\frac{2}{\pi}$

**20** 전략 {(위쪽 그래프의 식)−(아래쪽 그래프의 식)}을 적분하여 $S(t)$를 구한다.

풀이 $S(t)=\int_1^t\{(3+3\ln x)-2\ln x\}dx$

$=\int_1^t(3+\ln x)dx$

위의 식의 양변을 $t$에 대하여 미분하면

$S'(t)=3+\ln t$ ⋯ ❶

이때 $S'(a)=5$이므로 $3+\ln a=5$

$\ln a=2 \quad \therefore a=e^2$ ⋯ ❷

$\therefore S(e^2)=\int_1^{e^2}(3+\ln x)dx=\Big[x(3+\ln x)\Big]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}1\,dx$

$=5e^2-3-\Big[x\Big]_1^{e^2}=4e^2-2$ ⋯ ❸

답 $4e^2-2$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $S'(t)$를 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $a$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |
| ❸ $S(a)$의 값을 구할 수 있다. | 50 % |

**21** 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$, 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{f'(a)}$임을 이용하여 두 직선의 방정식을 구한다.

풀이 $y=e^{x+1}$에서 $y'=e^{x+1}$

곡선 위의 점 $(0, e)$에서의 접선의 기울기가 $e$이므로 접선의 방정식은

$y=ex+e$

한편 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{e}$이므로 기울기가 $-\frac{1}{e}$이고 점 $\left(-2, \frac{1}{e}\right)$을 지나는 직선의 방정식은

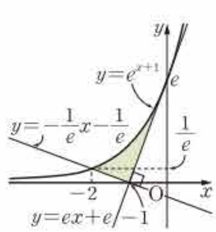
$y-\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}(x+2) \quad \therefore y=-\frac{1}{e}x-\frac{1}{e}$

두 직선 $y=ex+e$, $y=-\frac{1}{e}x-\frac{1}{e}$의 교점의 $x$좌표는

$ex+e=-\frac{1}{e}x-\frac{1}{e}$에서

$\left(e+\frac{1}{e}\right)x=-\left(e+\frac{1}{e}\right) \quad \therefore x=-1$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는




$\int_{-2}^{0}e^{x+1}dx-\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{e}+\frac{1}{2}\cdot1\cdot e\right)$

$=\Big[e^{x+1}\Big]_{-2}^{0}-\left(\frac{1}{2e}+\frac{e}{2}\right)$

$=e-\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{2e}+\frac{e}{2}\right)$

$=\frac{e}{2}-\frac{3}{2e}$

답 $\frac{e}{2}-\frac{3}{2e}$

다른 풀이 구하는 넓이는

$\int_{-2}^{-1}\left\{e^{x+1}-\left(-\frac{1}{e}x-\frac{1}{e}\right)\right\}dx+\int_{-1}^{0}\{e^{x+1}-(ex+e)\}dx$

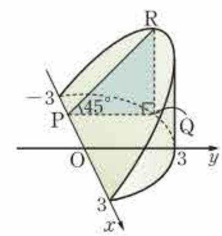
$=\Big[e^{x+1}+\frac{1}{2e}x^2+\frac{1}{e}x\Big]_{-2}^{-1}+\Big[e^{x+1}-\frac{e}{2}x^2-ex\Big]_{-1}^{0}$

$=\left(1-\frac{3}{2e}\right)+\left(\frac{e}{2}-1\right)$

$=\frac{e}{2}-\frac{3}{2e}$

**22** 전략 단면의 넓이를 주어진 구간에서 적분한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 밑면의 중심을 원점, 잘린 단면과 밑면의 교선을 $x$축 위에 놓으면 $x$축 위의 점 $\mathrm{P}(x, 0)$ $(-3\le x\le 3)$을 지나고 $x$축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면을 $\triangle$PQR라 할 때




$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}=\sqrt{9-x^2}$,

$\overline{\mathrm{RQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{9-x^2}$

$\triangle$PQR의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{RQ}}=\frac{1}{2}(9-x^2)$

이므로 구하는 부피는

$\int_{-3}^{3}S(x)dx=\int_{-3}^{3}\frac{1}{2}(9-x^2)dx=\int_0^3(9-x^2)dx$

$=\Big[9x-\frac{1}{3}x^3\Big]_0^3=18$

답 18

**23** 전략 점 $\mathrm{P}(x, y)$의 시각 $t$에서의 속력은 $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$임을 이용한다.

풀이 $\frac{dx}{dt}=4\sin 2t\cos 2t=2\sin 4t$,

$\frac{dy}{dt}=-4\cos 2t\sin 2t=-2\sin 4t$이므로 점 P의 시각 $t$에서의 속력은

$\sqrt{(2\sin 4t)^2+(-2\sin 4t)^2}=2\sqrt{2}\,|\sin 4t|$ ⋯ ❶

$t=a$에서 처음으로 점 P의 속력이 0이므로

$2\sqrt{2}\,|\sin 4a|=0$에서 $\sin 4a=0$

$\therefore a=\frac{\pi}{4}$ ⋯ ❷

따라서 시각 $t=0$에서 $t=\frac{\pi}{4}$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\sqrt{2}\,|\sin 4t|\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\sqrt{2}\sin 4t\,dt=\Big[-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 4t\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\sqrt{2}$ ⋯ ❸

답 $\sqrt{2}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 점 P의 시각 $t$에서의 속력을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $a$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |
| ❸ 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리를 구할 수 있다. | 50 % |

**24** 전략 곡선 $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$의 길이는 $\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$임을 이용한다.

풀이 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x}{1-x^2}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx&=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(-\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}\,dx\\
&=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{(1-x^2)^2}}\,dx\\
&=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2}\,dx\\
&=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx\\
&=-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{x^2-1}+1\right)dx\\
&=-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{2}{(x+1)(x-1)}+1\right\}dx\\
&=-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+1\right)dx\\
&=-\Big[\ln|x-1|-\ln|x+1|+x\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\\
&=-1+2\ln 3
\end{aligned}$$

답 ⑤

10 정적분의 활용

MEMO