일품

수학 ❸ (상)

정답 및 풀이

● 정답을 확인할 때에는 〈빠른 정답 찾기〉를 이용하면 편리합니다.

빠른 정답 찾기

Ⅰ 제곱근과 실수

01 제곱근과 실수

▸개념 & 기출유형 ∗ 본책 8~11쪽

001 ②, ④	002 -4	003 6	004 ⑤	005 ②
006 ④	007 ③	008 ③	009 13	010 ④
011 50	012 3	013 ⑤	014 ②, ④	015 2.835
016 2.3	017 -3667	018 $-1-\sqrt{2}$, $-2+\sqrt{2}$	019 $\sqrt{5}+2$	
020 ④	021 ③	022 ⑤	023 $\sqrt{24}-3$	

▸내신 만점 도전하기 ∗ 본책 12~14쪽

024 ②	025 $\pm\sqrt{7}$	026 $\sqrt{35}$	027 ②	028 ④
029 $-3ab$	030 21	031 3	032 ②	033 ④
034 60	035 ⑤	036 ②	037 -9	038 43
039 ②	040 3	041 1371	042 ②, ⑤	043 $\mathrm{A}(-2)$
044 ②	045 ④	046 6	047 ⑤	

▸내신 만점 굳히기 ∗ 본책 15쪽

048 18	049 ⑤	050 $2a+\frac{2}{a}$	051 ②	052 $\frac{1}{6}$
053 39				

02 근호를 포함한 식의 계산 (1)

▸개념 & 기출유형 ∗ 본책 16~17쪽

054 ④	055 2	056 ③	057 ⑤	058 $\frac{5}{6}$
059 ③	060 ①	061 2	062 $2\sqrt{10}\,\mathrm{cm}$	
063 ⑤	064 0.4806	065 ②		

▸내신 만점 도전하기 ∗ 본책 18~19쪽

066 $\frac{1}{2}$	067 ③	068 ③	069 $\frac{16}{3}$	070 $\frac{1}{2}$
071 ①	072 ②	073 7	074 9번	075 23
076 ②	077 ⑤	078 ①		

▸내신 만점 굳히기 ∗ 본책 20쪽

079 ②	080 $\sqrt{5}$	081 $\frac{1}{2}$	082 5	083 ②
084 ④				

03 근호를 포함한 식의 계산 (2)

▸개념 & 기출유형 ∗ 본책 21~23쪽

085 ⑤	086 ②, ⑤	087 3	088 ①	089 ⑤
090 3	091 -6	092 ③	093 ④	094 ③
095 $5\sqrt{14}$	096 10	097 ⑤	098 ④	099 ①
100 30	101 ③	102 ③		

▸내신 만점 도전하기 ∗ 본책 24~26쪽

103 ①	104 4	105 $2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$	106 ③	107 13
108 ①	109 ②	110 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$	111 ①	112 $\sqrt{2}-1$
113 ①	114 $3+3\sqrt{2}$	115 ⑤	116 183	
117 $-4-2\sqrt{6}$		118 ④	119 $9-4\sqrt{5}$	120 ④
121 $11-4\sqrt{7}$		122 ①	123 $\sqrt{6}$	124 ②
125 ②	126 $\sqrt{5}$			

▸내신 만점 굳히기 ∗ 본책 27쪽

127 ⑤	128 0	129 -16	130 ①	131 2
132 -3	133 ⑤	134 33		

▸내신 만점 정복하기 ∗ 본책 28~34쪽

135 ④	136 ⑤	137 -1	138 ①, ④	139 $-10m$
140 ②	141 0	142 ①	143 2	144 ②
145 ④	146 2.498	147 ⑤	148 $1+2\pi$	149 0
150 165	151 5	152 15	153 $-\sqrt{5}$, $\sqrt{3}+\sqrt{6}$	
154 $2\sqrt{15}$	155 ④	156 $\frac{2}{7}$	157 $\frac{3}{10}$	
158 $60\sqrt{2}\pi\,\mathrm{cm}^3$		159 ③	160 ②, ⑤	161 1
162 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$	163 9.222	164 ②	165 ③	166 ①

167 ② 168 ③ 169 ② 170 $3\sqrt{5}-6$
171 $-6+2\sqrt{15}$ 172 ① 173 $30-12\sqrt{5}$
174 1 175 ④ 176 ② 177 -18 178 $1-\sqrt{7}$
179 3 180 $2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$ 181 $-5+4\sqrt{3}$
182 -6

▸**교과서 속 창의유형** ＊본책 35~36쪽

183 50, 51 184 풀이 25쪽
185 $(16+8\sqrt{2})$ cm

Ⅱ 인수분해

04 인수분해

▸**개념 & 기출유형** ＊본책 38~41쪽

186 ⑤ 187 ② 188 ③ 189 5 190 -35
191 ④ 192 -4 193 ⑤ 194 -6 195 ③, ④
196 $(x+y)(x-y)(x+2y)(x-2y)$ 197 ① 198 ②
199 4 200 ④ 201 ③ 202 $2a+2b$ 203 ①
204 ③ 205 $A=12$, $B=4$ 206 ① 207 ②
208 $-\frac{4}{3}$ 209 ③

▸**내신 만점 도전하기** ＊본책 42~44쪽

210 4 211 ④ 212 $-2x$ 213 6 214 ②
215 $(3x+4)(x-3)$ 216 $2x+8$ 217 7, 17 218 ③
219 26 220 $6x$ 221 $(xy-x+1)(xy-y+1)$
222 4 223 ① 224 ⑤ 225 -2 226 2015
227 ③ 228 -200 229 ⑤ 230 81 231 ③
232 ⑤ 233 $\sqrt{2}-2$

▸**내신 만점 굳히기** ＊본책 45쪽

234 5 235 ③ 236 ⑤ 237 $(x-1)(x^2-2)$
238 461 239 $3xyz(x-y)(y-z)(z-x)$

▸**내신 만점 정복하기** ＊본책 46~48쪽

240 ④ 241 $-2x+5$ 242 -16 243 6
244 ③ 245 ① 246 ④ 247 ⑤ 248 -3
249 ④ 250 ④ 251 $(x-y)(y-z)(x-z)$ 252 ④
253 ⑤ 254 ④ 255 117 256 $x+3$
257 $(x-1)(3x-5)$ 258 1 259 4 260 62500
261 $17-4\sqrt{5}$

▸**교과서 속 창의유형** ＊본책 49쪽

262 풀이 33쪽 263 $(337, -312)$

Ⅲ 이차방정식

05 이차방정식과 그 풀이 (1)

▸**개념 & 기출유형** ＊본책 52~53쪽

264 ④ 265 $x=2$ 266 ⑤ 267 ④ 268 1
269 ③ 270 -12 271 ① 272 $\frac{8}{3}$ 273 -11
274 1

▸**내신 만점 도전하기** ＊본책 54~55쪽

275 $x=2$ 276 10 277 -1 278 6 279 -3
280 4 281 ⑤ 282 3 283 ③
284 $x=-2$, $a=-4$ 285 ② 286 ③ 287 -1
288 ⑤ 289 ③

▸**내신 만점 굳히기** ＊본책 56쪽

290 0 291 1 292 ③ 293 ③ 294 $p+q=1$
295 ④ 296 $-13\le b<9$

06 이차방정식과 그 풀이 (2)

▸개념 & 기출유형 * 본책 57~60쪽

297 ⑤ 298 ③ 299 -3 300 11
301 $x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$ 302 ② 303 ①, ④ 304 ④
305 4 306 ③ 307 $-\frac{4}{3}$ 308 2 309 ④
310 ③ 311 ② 312 ① 313 $x^2-2x-6=0$
314 ④ 315 ② 316 4년 317 3 318 6초
319 3 320 2 m

▸내신 만점 도전하기 * 본책 61~64쪽

321 -1 322 ③ 323 $3+2\sqrt{2}$ 324 63
325 $x=-4\pm\sqrt{5}$ 326 $x=\frac{-15\pm\sqrt{129}}{6}$ 또는 $x=\frac{-5\pm\sqrt{37}}{2}$
327 ① 328 $x=\pm5$ 329 ⑤ 330 2 331 10
332 ⑤ 333 ④ 334 ④ 335 $x=-\frac{5}{3}$ 또는 $x=2$
336 2 337 ⑤ 338 1 339 -4 340 ⑤
341 ④ 342 $12+5\sqrt{29}$ 343 6 344 ④
345 143 346 1초 347 7 cm 348 ③

▸내신 만점 굳히기 * 본책 65쪽

349 ④ 350 $x^2+4x-15=0$ 351 50 352 80분
353 ② 354 $\frac{6}{7}$

▸내신 만점 정복하기 * 본책 66~70쪽

355 $a\neq6$ 356 ① 357 -1, $\frac{1}{5}$ 358 ③ 359 ②
360 ③ 361 $x=-1$ 또는 $x=\frac{2}{3}$ 362 ③
363 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$ 364 $-\frac{7}{2}$ 365 -1 366 ④
367 ⑤ 368 정삼각형 369 ③ 370 ② 371 ②
372 -4, 0, 12, 16 373 ④ 374 $4x^2-7x+1=0$
375 ① 376 $1-\sqrt{5}$ 377 ① 378 ③ 379 2 m
380 ② 381 0, 5 382 0 383 2 384 0
385 28 cm^2 386 $2+2\sqrt{7}$ 387 (15, 4)

▸교과서 속 창의유형 * 본책 71~72쪽

388 풀이 50쪽 389 5 cm
390 (1) $n(n+2)$ (2) [10단계] 391 250보

Ⅳ 이차함수

07 이차함수와 그 그래프

▸개념 & 기출유형 * 본책 74~77쪽

392 ② 393 (ㄱ), (ㄷ) 394 3 395 -9 396 ④
397 ⑤ 398 4 399 ③ 400 ② 401 ③
402 ① 403 -3 404 13 405 $y=-x^2+2x+1$
406 15 407 4 : 3 408 5 409 ⑤ 410 ④
411 12

▸내신 만점 도전하기 * 본책 78~81쪽

412 ④ 413 ① 414 3 415 ① 416 8
417 ① 418 4 419 8 420 ②, ④ 421 ⑤
422 0 423 ② 424 $(-1, -1)$ 425 ②
426 ④ 427 1 428 $n>23$ 429 $\left(-2, -\frac{4}{3}\right)$, $(3, -3)$
430 12 431 $y=8x+8$ 432 4 433 ⑤
434 ③ 435 ①

▸내신 만점 굳히기 * 본책 82쪽

436 108 437 ⑤ 438 10301 439 15 440 ②
441 2

08 이차함수의 활용

▸개념 & 기출유형 * 본책 83~86쪽

442 ① 443 2 444 ② 445 ⑤ 446 $-\frac{5}{2}$
447 -9 448 2 449 ② 450 10 451 ④
452 -144 453 $y=-5x^2+10x+2$
454 (1) $m=-\frac{1}{2}a^2-2a+3$ (2) 5 455 ② 456 ③
457 ④ 458 -4, 4 459 150명 460 $\frac{144}{5}$ m 461 ①
462 5초 463 450 m^2 464 1 465 8

▸내신 만점 도전하기 ∗본책 87~90쪽

466 ② 467 $y=x^2-2x-2$ 468 ⑤

469 $y=(x-2)^2$ 또는 $y=\frac{1}{9}(x+2)^2$ 470 $\left(\frac{5}{4},\ \frac{15}{8}\right)$

471 $y=x^2+4x-1$ 또는 $y=-x^2+4x+1$ 472 ⑤

473 ③ 474 3 475 ① 476 $\frac{3}{4}$ 477 ②

478 ① 479 $y=-3x^2-30x-65$ 480 0 481 ①

482 ① 483 -6 484 ② 485 $x=3,\ y=6$

486 $x=2,\ y=-2$ 487 ③ 488 5 489 ③

490 $72\,\text{cm}^2$ 491 $\frac{18}{\pi}\,\text{cm}^2$ 492 16 493 52

▸내신 만점 굳히기 ∗본책 91쪽

494 $y=\frac{1}{9}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{25}{9}$ 또는 $y=x^2+1$ 495 ③

496 ④ 497 141 498 ④ 499 -3

▸내신 만점 정복하기 ∗본책 92~98쪽

500 ② 501 ③ 502 $\left(5,\ \frac{25}{2}\right)$ 503 ② 504 ⑤

505 -2 506 ② 507 -3 508 ② 509 $2pq$

510 $k<0$ 511 ② 512 ③ 513 ⑤ 514 24

515 $\frac{25}{27}$ 516 $\frac{1}{9}$ 517 $-4<k<-1$ 518 -26

519 6 520 2 521 ③ 522 ⑤ 523 ③

524 ③ 525 ① 526 $y=-\frac{3}{2}x^2-15x-\frac{75}{2}$

527 ① 528 $a\ge\frac{4}{9}$ 529 최댓값: 7, $a=-\frac{1}{2}$ 530 ①

531 10초 532 1 533 $(4,\ -4)$ 534 ② 535 $y=2x$

536 $y=3x^2-11x+9$ 537 6 538 3 539 -10

540 $8\,\text{cm}^2$ 541 $\frac{27}{8}$

▸교과서 속 창의유형 ∗본책 99쪽

542 (1) $y=\frac{1}{128}x^2$ (2) 112.5 m 543 1750원

Ⅰ 제곱근과 실수

01 | 제곱근과 실수

개념&기출유형

본책 8~11쪽

001 ② -9의 제곱근은 없다.
④ 제곱근 15는 $\sqrt{15}$이다. 답 ②, ④

수	제곱근의 개수
양수	2
0	1
음수	0

002 $(-6)^2=36$의 양의 제곱근은 6이므로
$a=6$
$\sqrt{\frac{16}{81}}=\frac{4}{9}$의 음의 제곱근은 $-\frac{2}{3}$이므로
$b=-\frac{2}{3}$
$\therefore ab=-4$ 답 -4

003 $\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2}\times\sqrt{6^2}+(-\sqrt{12})^2\div\{-\sqrt{(-4)^2}\}$
$=\frac{3}{2}\times6+12\div(-4)$
$=9+(-3)=6$ 답 6

$\sqrt{(-4)^2}=4$이므로
$-\sqrt{(-4)^2}=-4$

004 (ㄱ) $\sqrt{(-a)^2}=a$ (ㄴ) $-\sqrt{a^2}=-a$
(ㄷ) $(-\sqrt{a})^2=a$ (ㄹ) $(\sqrt{a})^2=a$
이상에서 그 값이 a인 것은 (ㄱ), (ㄷ), (ㄹ)이다.
답 ⑤

005 $1-x>0$, $-x-2<0$이므로
$\sqrt{(1-x)^2}-\sqrt{(-x-2)^2}$
$=(1-x)-\{-(-x-2)\}$
$=1-x-x-2$
$=-2x-1$ 답 ②

$-2<x$이므로
$-x-2<0$

006 ① $\sqrt{6}>\sqrt{4}$이므로 $-\sqrt{6}<-\sqrt{4}$
$\therefore -\sqrt{6}<-2$
② $\sqrt{26}>\sqrt{25}$이므로 $\sqrt{26}>5$
③ $\sqrt{0.01}<\sqrt{0.1}$이므로 $0.1<\sqrt{0.1}$
④ $\sqrt{\frac{1}{4}}<\sqrt{\frac{1}{3}}$이므로 $\frac{1}{2}<\sqrt{\frac{1}{3}}$
⑤ $\sqrt{48}<\sqrt{49}$이므로 $-\sqrt{48}>-\sqrt{49}$
$\therefore -\sqrt{48}>-7$ 답 ④

007 $\sqrt{16}>\sqrt{15}$이므로 $4>\sqrt{15}$
즉 $4-\sqrt{15}>0$, $\sqrt{15}-4<0$이므로
$\sqrt{(4-\sqrt{15})^2}-\sqrt{(\sqrt{15}-4)^2}$
$=(4-\sqrt{15})-\{-(\sqrt{15}-4)\}$
$=4-\sqrt{15}+\sqrt{15}-4=0$ 답 ③

근호 안이 어떤 수의 제곱이므로 근호를 없앨 수 있다.

만점비법
$\sqrt{(A-B)^2}$ 꼴을 간단히 할 때는 먼저 두 수 A, B의 대소를 비교한다.
① $A\ge B$이면 $\sqrt{(A-B)^2}=A-B$
② $A<B$이면 $\sqrt{(A-B)^2}=-(A-B)$

008 $4<\sqrt{2a}<5$에서 $4^2<(\sqrt{2a})^2<5^2$
$16<2a<25$ $\therefore 8<a<\frac{25}{2}$
따라서 자연수 a는 9, 10, 11, 12의 4개이다. 답 ③

009 $252a=2^2\times3^2\times7\times a$이므로 $a=7$
$\frac{216}{b}=\frac{2^3\times3^3}{b}$이므로 $b=2\times3=6$
$\therefore a+b=13$ 답 13

010 $24+x$가 24보다 큰 제곱수이어야 하므로
$24+x=25,\ 36,\ 49,\ 64,\ \cdots$
$\therefore x=1,\ 12,\ 25,\ 40,\ \cdots$
따라서 자연수 x의 값이 아닌 것은 ④이다. 답 ④

011 $16-x$가 0 또는 16보다 작은 제곱수이어야 하므로
$16-x=0,\ 1,\ 4,\ 9$
$\therefore x=16,\ 15,\ 12,\ 7$
따라서 모든 자연수 x의 값의 합은
$16+15+12+7=50$ 답 50

$16-x=16$이면 $x=0$이므로 x는 자연수가 아니다.

012 $-0.\dot{5}=-\frac{5}{9}$, 3.14, $\sqrt{0.\dot{1}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$은 유리수이다.
따라서 무리수는
$-\pi$, $0.1223334444\cdots$, $-\sqrt{1000}$
의 3개이다. 답 3

013 ② $\sqrt{(-2)^2}=2$의 양의 제곱근이다.
⑤ 무리수는 순환하지 않는 무한소수이다.
답 ⑤

014 ① 실수 중 무리수가 아닌 수는 유리수이다.
③ 유리수이면서 무리수인 수는 없다.
⑤ 자연수는 유리수이다.
답 ②, ④

015 $a=1.386$, $b=1.449$이므로
$a+b=2.835$ 답 2.835

016 $a=90.1$, $b=92.4$이므로
$b-a=2.3$ 답 2.3

017 $x=11.5$, $y=3.782$이므로
$10x-1000y=115-3782=-3667$
답 -3667

018 정사각형 ABCD의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$이므로
$\overline{CP}=\overline{CA}=\sqrt{2}$, $\overline{BQ}=\overline{BD}=\sqrt{2}$
따라서 점 P에 대응하는 수는 $-1-\sqrt{2}$이고 점 Q에 대응하는 수는 $-2+\sqrt{2}$이다.

답 $-1-\sqrt{2}$, $-2+\sqrt{2}$

019 $\square ABCD=3\times3-4\times\left(\frac{1}{2}\times2\times1\right)$
$=9-4=5$
이므로 $\square$ABCD는 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$인 정사각형이다.
$\therefore \overline{PQ}=\overline{AP}+\overline{AQ}=\sqrt{5}+2$

답 $\sqrt{5}+2$

넓이가 a인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{a}$이다.

020 ④ 2와 3 사이에는 정수가 없다. 답 ④

021 (ㄱ) $3-(\sqrt{3}+1)=2-\sqrt{3}=\sqrt{4}-\sqrt{3}>0$
$\therefore 3>\sqrt{3}+1$
(ㄴ) $(2-\sqrt{8})-(-1)=3-\sqrt{8}=\sqrt{9}-\sqrt{8}>0$
$\therefore 2-\sqrt{8}>-1$
(ㄷ) $(4-\sqrt{2})-(4-\sqrt{3})=-\sqrt{2}+\sqrt{3}>0$
$\therefore 4-\sqrt{2}>4-\sqrt{3}$
(ㄹ) $(\sqrt{10}-\sqrt{5})-(\sqrt{10}-2)=-\sqrt{5}+2$
$=-\sqrt{5}+\sqrt{4}<0$
$\therefore \sqrt{10}-\sqrt{5}<\sqrt{10}-2$
(ㅁ) $(\sqrt{6}-\sqrt{12})-(\sqrt{6}-\sqrt{11})=-\sqrt{12}+\sqrt{11}<0$
$\therefore \sqrt{6}-\sqrt{12}<\sqrt{6}-\sqrt{11}$
이상에서 옳은 것은 (ㄴ), (ㄹ)이다. 답 ③

다른풀이 (ㄷ) $\sqrt{2}<\sqrt{3}$이므로 $-\sqrt{2}>-\sqrt{3}$
$\therefore 4-\sqrt{2}>4-\sqrt{3}$
(ㄹ) $\sqrt{5}>\sqrt{4}$이므로 $\sqrt{5}>2$, $-\sqrt{5}<-2$
$\therefore \sqrt{10}-\sqrt{5}<\sqrt{10}-2$
(ㅁ) $\sqrt{12}>\sqrt{11}$이므로 $-\sqrt{12}<-\sqrt{11}$
$\therefore \sqrt{6}-\sqrt{12}<\sqrt{6}-\sqrt{11}$

두 실수 a, b에 대하여
① $a-b>0$이면 $a>b$
② $a-b=0$이면 $a=b$
③ $a-b<0$이면 $a<b$

022 $a-b=(3+\sqrt{2})-4=-1+\sqrt{2}>0$이므로
$a>b$
$b-c=4-(\sqrt{35}-2)=6-\sqrt{35}=\sqrt{36}-\sqrt{35}>0$이므로
$b>c$
$\therefore c<b<a$ 답 ⑤

023 $-\sqrt{16}<0$, $-\sqrt{5}-2<0$이고
$-\sqrt{16}-(-\sqrt{5}-2)=-2+\sqrt{5}=-\sqrt{4}+\sqrt{5}>0$이므로
$-\sqrt{5}-2<-\sqrt{16}<0$
$(\sqrt{10}-1)-2=\sqrt{10}-3=\sqrt{10}-\sqrt{9}>0$이므로
$\sqrt{10}-1>2$
$(\sqrt{24}-3)-2=\sqrt{24}-5=\sqrt{24}-\sqrt{25}<0$이므로
$\sqrt{24}-3<2$
따라서 작은 것부터 차례대로 나열하면
$-\sqrt{5}-2$, $-\sqrt{16}$, $\sqrt{24}-3$, 2, $\sqrt{10}-1$
이므로 세 번째에 오는 수는 $\sqrt{24}-3$이다.

답 $\sqrt{24}-3$

$-\sqrt{16}=-4$

참고 $-\sqrt{16}<0$, $-\sqrt{5}-2<0$이고, 세 번째로 작은 수를 찾아야 하므로 $-\sqrt{16}$과 $-\sqrt{5}-2$의 대소는 비교하지 않아도 된다. 즉 양수 $\sqrt{10}-1$, 2, $\sqrt{24}-3$ 중에서 가장 작은 수를 찾으면 된다.

내신 만점 도전하기

본책 12~14쪽

024 전략 제곱근 a ◎ $\sqrt{a}$
풀이 제곱근 a^2이 9이므로 $\sqrt{a^2}=9$
$a^2=9^2=81$
$\therefore a=\pm\sqrt{81}=\pm9$ 답 ②

025 전략 양수 a의 제곱근 ◎ $\pm\sqrt{a}$
풀이 $a>b$이므로 $a=12$, $b=-12$
$\therefore \sqrt{a-3b+1}=\sqrt{12-3\times(-12)+1}$
$=\sqrt{49}=7$
따라서 7의 제곱근은 $\pm\sqrt{7}$이다. 답 $\pm\sqrt{7}$

026 해결 과정 주어진 삼각형의 넓이는
$\frac{1}{2}\times10\times7=35$ • 70% 배점
답 구하기 따라서 이 삼각형과 넓이가 같은 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{35}$이다. • 30% 배점

답 $\sqrt{35}$

027 전략 $2a+1\geq0$인 경우와 $2a+1<0$인 경우로 나누어 생각한다.
풀이 $\sqrt{(2a+1)^2}=5$에서
(i) $2a+1\geq0$일 때,
$2a+1=5$이므로 $2a=4$ $\therefore a=2$
(ii) $2a+1<0$일 때,
$-(2a+1)=5$이므로 $-2a=6$ $\therefore a=-3$
(i), (ii)에서 모든 a의 값의 합은
$2+(-3)=-1$ 답 ②

028 전략 $\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & (a\geq0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$
풀이 $A=6-3-10+11=4$
따라서 A의 음의 제곱근은 -2이다. 답 ④

029 전략 $\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & (a\geq0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$
풀이 $a>0$, $b<0$이므로
$-a<0$, $4b<0$, $-ab>0$
$\therefore \sqrt{(-a)^2}\times\sqrt{(4b)^2}-\sqrt{(-ab)^2}$
$=\{-(-a)\}\times(-4b)-(-ab)$
$=-4ab+ab$
$=-3ab$ 답 $-3ab$

030 전략 음수끼리, 양수끼리 각각 비교한다.

풀이 (i) 음수: $2=\sqrt{4}$이고, $\sqrt{1.2}<\sqrt{4}<\sqrt{6}$이므로

$-\sqrt{1.2}>-2>-\sqrt{6}$

$\therefore a=-\sqrt{6}$

(ii) 양수: $\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}$이고, $\sqrt{\frac{7}{2}}<\sqrt{9}<\sqrt{15}$이므로

$\sqrt{\frac{7}{2}}<\sqrt{(-3)^2}<\sqrt{15}$

$\therefore b=\sqrt{15}$

(i), (ii)에서

$a^2+b^2=(-\sqrt{6})^2+(\sqrt{15})^2=21$ 답 21

031 해결 과정 ① 주어진 조건을 만족시키는 기약분수를 $\frac{x}{15}$ (x는 자연수)라 하면

$\frac{\sqrt{27}}{15}<\frac{x}{15}<\frac{\sqrt{125}}{15}$

$\therefore \sqrt{27}<x<\sqrt{125}$ • 40% 배점

해결 과정 ② $5<\sqrt{27}<6$, $11<\sqrt{125}<12$이므로 위의 부등식을 만족시키는 자연수 x는

6, 7, 8, 9, 10, 11 • 30% 배점

답 구하기 이때 $\frac{x}{15}$가 기약분수이므로 x가 될 수 있는 수는

7, 8, 11

따라서 구하는 기약분수의 개수는 3이다. • 30% 배점

답 3

032 전략 $a>0$, $b>0$일 때, $a<\sqrt{x}<b$이면 ➡ $a^2<x<b^2$

풀이 $n+\frac{1}{2}<\sqrt{x}<n+2$에서

$\left(n+\frac{1}{2}\right)^2<x<(n+2)^2$

$\therefore n^2+n+\frac{1}{4}<x<n^2+4n+4$

따라서 자연수 x는 n^2+n+1, n^2+n+2, $\cdots$, n^2+4n+3의 18개이므로

$n^2+4n+3-(n^2+n+1)+1=18$

$3n+3=18$ $\quad\therefore n=5$ 답 ②

만점비법

a, b가 정수일 때, 각 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 다음과 같다.

① $a\le x\le b$ → $b-a+1$
② $a\le x<b$ → $b-a$
③ $a<x\le b$ → $b-a$
④ $a<x<b$ → $b-a-1$

033 전략 $n\le\sqrt{x}<n+1$ (n은 자연수)이면 $f(x)=n$임을 이용한다.

풀이 $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{16}=4$, $\sqrt{25}=5$, $\sqrt{36}=6$이므로

$f(9)=f(10)=\cdots=f(15)=3$

$f(16)=f(17)=\cdots=f(24)=4$

$f(25)=f(26)=\cdots=f(30)=5$

$\therefore f(9)+f(10)+f(11)+\cdots+f(30)$

$=3\times7+4\times9+5\times6=87$ 답 ④

034 문제 이해 $135a=3^3\times5\times a$이므로

$a=3\times5\times$(자연수)^2 꼴이어야 한다. • 30% 배점

해결 과정 a의 값이 가장 작을 때 b의 값도 가장 작으므로 $a+b$의 값도 가장 작다.

이때 a의 가장 작은 값은 $3\times5=15$이므로 b의 가장 작은 값은

$\sqrt{3^4\times5^2}=45$ • 50% 배점

답 구하기 따라서 $a+b$의 값 중 가장 작은 값은

$15+45=60$ • 20% 배점

답 60

035 전략 5400을 소인수분해하여 지수가 모두 짝수가 되도록 하는 자연수 n의 값을 구한다.

풀이 $\frac{5400}{n}=\frac{2^3\times3^3\times5^2}{n}=\frac{6\times30^2}{n}$이므로 $n=6\times a^2$ (a는 30의 약수) 꼴이어야 한다.

$30=2\times3\times5$에서 30의 약수의 개수는

$(1+1)\times(1+1)\times(1+1)=8$

이므로 자연수 n의 개수는 8이다.

답 ⑤

자연수 A가 $a^m\times b^n$ (a, b는 서로 다른 소수, m, n은 자연수)으로 소인수분해될 때, A의 약수의 개수 → $(m+1)(n+1)$

참고 자연수 n의 값은 다음과 같다.

$6\times1^2=6$, $6\times2^2=24$, $6\times3^2=54$,

$6\times5^2=150$, $6\times6^2=216$, $6\times10^2=600$,

$6\times15^2=1350$, $6\times30^2=5400$

036 전략 $\sqrt{A-x}$가 자연수 ➡ A보다 작은 제곱수를 찾는다.

풀이 $52-3x$가 52보다 작은 제곱수이어야 하므로

$52-3x=1$, 4, 9, 16, 25, 36, 49

$\therefore x=17$, 16, $\frac{43}{3}$, 12, 9, $\frac{16}{3}$, 1

이때 x는 자연수이므로

$x=17$, 16, 12, 9, 1

따라서 구하는 합은

$17+16+12+9+1=55$ 답 ②

037 문제 이해 $\sqrt{500-x}-\sqrt{200+y}$가 가장 큰 정수가 되려면 $\sqrt{500-x}$는 가장 큰 정수, $\sqrt{200+y}$는 가장 작은 정수이어야 한다. • 50% 배점

해결 과정 $500-x=484$에서 $\quad x=16$

$200+y=225$에서 $\quad y=25$ • 40% 배점

답 구하기 $\therefore x-y=-9$ • 10% 배점

답 -9

$22^2=484$, $23^2=529$이므로 500보다 작은 제곱수 중 가장 큰 수는 484이다.

$14^2=196$, $15^2=225$이므로 200보다 큰 제곱수 중 가장 작은 수는 225이다.

038 전략 $\sqrt{x}$가 유리수가 되려면 자연수 x는 제곱수이어야 한다.

풀이 $\sqrt{x}$가 유리수가 되도록 하는 x는

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49의 7개

따라서 구하는 x의 개수는

$50-7=43$ 답 43

039 전략 유리수가 되는 경우를 찾는다.

풀이 (ㄱ) (무리수)+(유리수)=(무리수)이므로 $a+3$은 무리수이다.

(ㄴ) $a=-\sqrt{2}$이면 $a+\sqrt{2}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$

(ㄷ) (유리수)×(무리수)=(무리수)((유리수)≠0)이므로 $-2a$는 무리수이다.

(ㄹ) $a=\sqrt{3}$이면 $\sqrt{3}a=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$

(ㅁ) $a=\sqrt{2}$이면 $a^2=(\sqrt{2})^2=2$

이상에서 항상 무리수인 것은 (ㄱ), (ㄷ)이다. 답 ②

040 전략 유리수가 아닌 수 ⇨ 무리수

풀이 $-\sqrt{0.5^2}=-0.5$, $\dfrac{22}{\sqrt{121}}=\dfrac{22}{11}=2$,

$-\sqrt{0.\dot{3}}=-\sqrt{\dfrac{3}{9}}=-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

따라서 유리수가 아닌 수, 즉 무리수는 $2-\pi$, $-\sqrt{0.\dot{3}}$, $1-\sqrt{5}$의 3개이고, 정수가 아닌 유리수는 $-\sqrt{0.5^2}$의 1개이다.

따라서 $a=3$, $b=1$이므로

$ab=3$ 답 3

041 전략 제곱근표에서 a, b의 값을 구한다.

풀이 $a=8.081$, $b=67.1$이므로

$1000a-100b=8081-6710=1371$ 답 1371

042 전략 넓이가 a인 정사각형의 한 변의 길이 ⇨ $\sqrt{a}$

풀이 ① $\square ABCD=3\times3-4\times\left(\dfrac{1}{2}\times2\times1\right)$

$=9-4=5$

이므로 □ABCD는 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$인 정사각형이다.

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{5}$

② $\overline{CP}=\overline{CB}=\sqrt{5}$이므로 $P(1-\sqrt{5})$

③ $\overline{CQ}=\overline{CD}=\sqrt{5}$이므로 $Q(1+\sqrt{5})$

④ $\overline{PR}=\overline{PC}+\overline{CR}=\sqrt{5}+1$

⑤ $\overline{QR}=\overline{CQ}-\overline{CR}=\sqrt{5}-1$

답 ②, ⑤

043 해결 과정 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$이므로

$\overline{AP}=\overline{AB}=\sqrt{2}$ • 50% 배점

답 구하기 이때 $P(-2-\sqrt{2})$이므로

$(-2-\sqrt{2})+\sqrt{2}=-2$

$\therefore A(-2)$ • 50% 배점

답 $A(-2)$

044 전략 서로 다른 두 실수 사이에는 무수히 많은 실수가 있다.

풀이 (ㄱ) $3<\sqrt{11}<4<\sqrt{19}<5$이므로 $\sqrt{11}$과 $\sqrt{19}$ 사이에는 1개의 정수가 있다.

(ㄴ) 1과 3 사이에는 무수히 많은 유리수가 있다.

(ㄹ) 수직선은 유리수와 무리수, 즉 실수에 대응하는 점으로 완전히 메워진다.

따라서 수직선은 유리수에 대응하는 점으로 완전히 메울 수 없다.

이상에서 옳은 것은 (ㄱ), (ㄷ)이다. 답 ②

045 전략 두 실수 a, b의 대소 관계는 $a-b$의 부호로 판단한다.

풀이 ① $(\sqrt{12}-2)-2=\sqrt{12}-4=\sqrt{12}-\sqrt{16}<0$

$\therefore \sqrt{12}-2<2$

② $(\sqrt{8}-1)-\dfrac{7}{4}=\sqrt{8}-\dfrac{11}{4}=\sqrt{8}-\sqrt{\dfrac{121}{16}}>0$

$8=\dfrac{128}{16}$이므로

$\sqrt{\dfrac{128}{16}}>\sqrt{\dfrac{121}{16}}$

$\sqrt{8}>\sqrt{\dfrac{121}{16}}$

$\therefore \sqrt{8}-\sqrt{\dfrac{121}{16}}>0$

$\therefore \sqrt{8}-1>\dfrac{7}{4}$

③ $(-4-\sqrt{7})-(-\sqrt{17}-\sqrt{7})$

$=-4-\sqrt{7}+\sqrt{17}+\sqrt{7}$

$=-4+\sqrt{17}$

$=-\sqrt{16}+\sqrt{17}>0$

$\therefore -4-\sqrt{7}>-\sqrt{17}-\sqrt{7}$

④ $(\sqrt{3}-2)-(\sqrt{3}-\sqrt{5})=\sqrt{3}-2-\sqrt{3}+\sqrt{5}$

$=-2+\sqrt{5}$

$=-\sqrt{4}+\sqrt{5}>0$

$\therefore \sqrt{3}-2>\sqrt{3}-\sqrt{5}$

⑤ $\left(\dfrac{2}{5}-\sqrt{10}\right)-\left(\sqrt{\dfrac{3}{25}}-\sqrt{10}\right)$

$=\dfrac{2}{5}-\sqrt{10}-\sqrt{\dfrac{3}{25}}+\sqrt{10}$

$=\dfrac{2}{5}-\sqrt{\dfrac{3}{25}}$

$=\sqrt{\dfrac{4}{25}}-\sqrt{\dfrac{3}{25}}>0$

$\therefore \dfrac{2}{5}-\sqrt{10}>\sqrt{\dfrac{3}{25}}-\sqrt{10}$ 답 ④

다른풀이 ③ $\sqrt{16}<\sqrt{17}$이므로 $4<\sqrt{17}$

$-4>-\sqrt{17}$ $\therefore -4-\sqrt{7}>-\sqrt{17}-\sqrt{7}$

④ $\sqrt{4}<\sqrt{5}$이므로 $2<\sqrt{5}$, $-2>-\sqrt{5}$

$\therefore \sqrt{3}-2>\sqrt{3}-\sqrt{5}$

⑤ $\sqrt{\dfrac{4}{25}}>\sqrt{\dfrac{3}{25}}$이므로 $\dfrac{2}{5}>\sqrt{\dfrac{3}{25}}$

$\therefore \dfrac{2}{5}-\sqrt{10}>\sqrt{\dfrac{3}{25}}-\sqrt{10}$

046 해결 과정 ① $a+b=(\sqrt{17}-1)+3$

$=\sqrt{17}+2>0$

$b-a=3-(\sqrt{17}-1)=4-\sqrt{17}$

$=\sqrt{16}-\sqrt{17}<0$ • 40% 배점

해결 과정 ② $\therefore \sqrt{(a+b)^2}-\sqrt{(b-a)^2}$

$=a+b-\{-(b-a)\}$

$\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & (a\ge0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

$=a+b+b-a$

$=2b$ • 40% 배점

답 구하기 이때 $b=3$이므로 $2b=6$ • 20% 배점

답 6

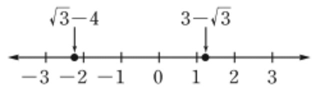
047 전략 $1<\sqrt{3}<2$임을 이용하여 두 실수 $\sqrt{3}-4$, $3-\sqrt{3}$을 수직선 위에 나타내어 본다.

풀이 $1<\sqrt{3}<2$이므로

$-3<\sqrt{3}-4<-2$

또 $-2<-\sqrt{3}<-1$이므로

$1<3-\sqrt{3}<2$



따라서 위의 수직선에서 두 수 $\sqrt{3}-4$와 $3-\sqrt{3}$ 사이에 있는 정수는 -2, -1, 0, 1의 4개이다. 답 ⑤

내신 만점 굳히기 본책 15쪽

048 전략 $\sqrt{a}$가 자연수이면 a는 제곱수임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에 의하여 a, b, c, d는 제곱수이어야 한다. 이때 조건 (다)에서 $a+d=45$이고, 조건 (나)에서 $a>d$이므로

$a=36$, $d=9$

$36>25>16>9$이고, 조건 (나)에서 $a>b>c>d$이므로

$b=25$, $c=16$

$\therefore a-b+c-d=18$ 답 18

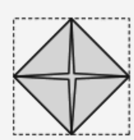
049 전략 넓이가 a인 정사각형의 한 변의 길이 ◎ $\sqrt{a}$

풀이 처음 정사각형의 넓이는 $8^2=64\ (\text{cm}^2)$

[1단계], [2단계], [3단계]에서 만들어지는 정사각형의 넓이는 각각

$64\div2=32\ (\text{cm}^2)$, $32\div2=16\ (\text{cm}^2)$,

$16\div2=8\ (\text{cm}^2)$



이전 단계 정사각형 넓이의 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 [3단계]에서 만들어지는 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{8}$ cm이다. 답 ⑤

050 해결 과정 $0<a<1$이므로 $\frac{1}{a}>1$

즉 $0<a<1<\frac{1}{a}$이므로

$-a-\frac{1}{a}<0$, $-a+\frac{1}{a}>0$, $-2a<0$ • 50% 배점

답 구하기 $\therefore \sqrt{\left(-a-\frac{1}{a}\right)^2}+\sqrt{\left(-a+\frac{1}{a}\right)^2}+\sqrt{(-2a)^2}$

$=-\left(-a-\frac{1}{a}\right)+\left(-a+\frac{1}{a}\right)-(-2a)$

$=a+\frac{1}{a}-a+\frac{1}{a}+2a$

$=2a+\frac{2}{a}$ • 50% 배점

답 $2a+\frac{2}{a}$

051 전략 $\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & (a\geq0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

근호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 생각한다.

풀이 $\sqrt{(x-5)^2}+\sqrt{(x+5)^2}=10$에서

(i) $x<-5$일 때,

$x-5<0$, $x+5<0$이므로

$-(x-5)-(x+5)=10$

$-2x=10$ $\therefore x=-5$

이것은 $x<-5$를 만족시키지 않는다.

(ii) $-5\leq x<5$일 때,

$x-5<0$, $x+5\geq0$이므로

$-(x-5)+(x+5)=10$

이것은 $-5\leq x<5$인 모든 x에 대하여 성립하므로

$-5\leq x<5$

(iii) $x\geq5$일 때,

$x-5\geq0$, $x+5>0$이므로

$(x-5)+(x+5)=10$

$2x=10$ $\therefore x=5$

이상에서 $-5\leq x\leq5$이므로

$a=-5$, $b=5$

$\therefore ab=-25$ 답 ②

052 해결 과정 ① $200ab=2^3\times5^2\times ab$이므로 $ab=2\times(\text{자연수})^2$ 꼴이어야 한다.

a, b는 주사위의 눈의 수이므로 ab가 될 수 있는 수는

$2\times1^2=2$, $2\times2^2=8$, $2\times3^2=18$ • 40% 배점

해결 과정 ② a, b의 순서쌍 (a, b)는

(i) $ab=2$일 때,

$(1, 2)$, $(2, 1)$의 2개

(ii) $ab=8$일 때,

$(2, 4)$, $(4, 2)$의 2개

(iii) $ab=18$일 때,

$(3, 6)$, $(6, 3)$의 2개 • 40% 배점

답 구하기 이상에서 순서쌍 (a, b)의 개수는 6이므로

구하는 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ • 20% 배점

답 $\frac{1}{6}$

서로 다른 두 개의 주사위를 던질 때, 일어나는 모든 경우의 수는 36이다.

보충학습

사건 A가 일어날 확률은

$\frac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{일어나는 모든 경우의 수})}$

053 [문제 해결 길잡이]

❶ 주어진 등식을 만족시키는 조건을 찾는다.

❷ 자연수 x의 값을 구한다.

❸ 각각의 x의 값에 대하여 y의 값을 찾아 $x+y$의 값을 구한다.

❹ $x+y$의 값 중 가장 큰 값을 구한다.

풀이 주어진 등식을 만족시키려면 $\sqrt{12-x}$는 0 또는 자연수, $\sqrt{28-y}$는 자연수이어야 한다. ❶

따라서 $12-x$가 0 또는 12보다 작은 제곱수이어야 하므로

$12-x=0$, 1, 4, 9

$\therefore x=12$, 11, 8, 3 ❷

$\sqrt{12-x}+1=\sqrt{28-y}$에서

(i) $x=12$일 때,

$1=\sqrt{28-y}$, $1=28-y$

$\therefore y=27$

$\therefore x+y=39$

(ii) $x=11$일 때,

$1+1=\sqrt{28-y}$, $2=\sqrt{28-y}$

$4=28-y$ $\therefore y=24$

$\therefore x+y=35$

(iii) $x=8$일 때,

$2+1=\sqrt{28-y}$, $3=\sqrt{28-y}$

$9=28-y$ $\therefore y=19$

$\therefore x+y=27$

(iv) $x=3$일 때,

$3+1=\sqrt{28-y}$, $4=\sqrt{28-y}$

$16=28-y$ $\therefore y=12$

$\therefore x+y=15$ ❸

이상에서 $x+y$의 값 중 가장 큰 값은 39이다. ❹

답 39

참고 $28-y$의 값이 1, 4, 9, 16, 25일 때, 즉 y의 값이 27, 24, 19, 12, 3인 경우로 나누어서 x의 값을 구해도 같은 결과를 얻는다.

만점비법

자연수 a, b, c가 등식 $\sqrt{a}+b=\sqrt{c}$를 만족시키면

$(\sqrt{a}+b)^2=(\sqrt{c})^2$, $a+2b\sqrt{a}+b^2=c$

$\therefore 2b\sqrt{a}=c-a-b^2$

위의 등식이 성립하려면 $\sqrt{a}$는 0 또는 자연수이어야 한다.
이때 $\sqrt{a}+b$도 자연수이므로 $\sqrt{c}$도 자연수이어야 한다.

$2=\sqrt{4}$이므로 $\sqrt{4}=\sqrt{28-y}$ $\therefore 4=28-y$

$3=\sqrt{9}$이므로 $\sqrt{9}=\sqrt{28-y}$ $\therefore 9=28-y$

$4=\sqrt{16}$이므로 $\sqrt{16}=\sqrt{28-y}$ $\therefore 16=28-y$

나눗셈은 역수의 곱셈으로 고쳐서 계산한다.

$a>0$일 때, $\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2$

$\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=3\sqrt{2}$

$\frac{18}{\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{18}\times\sqrt{18}}{\sqrt{18}}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{12}}=\frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=3$

분모의 근호 안의 수를 소인수분해하였을 때, 제곱인 인수가 포함되어 있으면 $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$임을 이용하여 제곱인 인수를 근호 밖으로 꺼낸 다음 분모를 유리화한다.

02 | 근호를 포함한 식의 계산 (1)

개념&기출유형

본책 16~17쪽

054 ① $\sqrt{3}\times\sqrt{12}=\sqrt{3\times12}=\sqrt{36}=6$

② $\sqrt{27}\div(-3)=-\frac{\sqrt{27}}{3}=-\sqrt{\frac{27}{9}}=-\sqrt{3}$

③ $4\sqrt{5}\times3\sqrt{2}\times2\sqrt{3}=4\times3\times2\times\sqrt{5\times2\times3}$
$=24\sqrt{30}$

④ $\frac{1}{\sqrt{7}}\div\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}\div\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{7}}\times\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}\times\sqrt{10}$
$=\sqrt{\frac{1}{7}\times\frac{14}{5}\times10}$
$=\sqrt{4}=2$

⑤ $\sqrt{18}\div\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\div\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}}=\sqrt{18}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\times\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}$
$=-\sqrt{18\times\frac{2}{3}\times\frac{11}{6}}$
$=-\sqrt{22}$

답 ④

055 $\sqrt{80}=\sqrt{4^2\times5}=4\sqrt{5}$이므로 $a=4$

$\sqrt{\frac{14}{128}}=\sqrt{\frac{7}{64}}=\sqrt{\frac{7}{8^2}}=\frac{\sqrt{7}}{8}$이므로 $b=8$

$\therefore \frac{b}{a}=2$

답 2

056 $\sqrt{300}=\sqrt{2^2\times3\times5^2}$
$=(\sqrt{2})^2\times\sqrt{3}\times(\sqrt{5})^2=2xy^2$

답 ③

057 ② $\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$

③ $\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{6}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{18}}{3}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

④ $\frac{18}{\sqrt{18}}=\frac{18\times\sqrt{18}}{\sqrt{18}\times\sqrt{18}}=\frac{18\sqrt{18}}{18}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

⑤ $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{12}}=\frac{6\sqrt{3}\times\sqrt{12}}{\sqrt{12}\times\sqrt{12}}=\frac{6\sqrt{36}}{12}=\frac{6}{2}=3$

답 ⑤

058 $\frac{4}{\sqrt{12}}=\frac{4}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$이므로

$a=\frac{2}{3}$

$\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$이므로

$b=\frac{1}{6}$

$\therefore a+b=\frac{5}{6}$

답 $\frac{5}{6}$

059 (ㄱ) $\frac{1}{\sqrt{p}}=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}\times\sqrt{p}}=\frac{\sqrt{p}}{p}$

(ㄴ) $\frac{q}{\sqrt{p}}=\frac{q\times\sqrt{p}}{\sqrt{p}\times\sqrt{p}}=\frac{q\sqrt{p}}{p}$

(ㄷ) $\sqrt{\frac{q}{p}}=\frac{\sqrt{q}\times\sqrt{p}}{\sqrt{p}\times\sqrt{p}}=\frac{\sqrt{pq}}{p}$

(ㄹ) $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{pq}}=\frac{\sqrt{q}\times\sqrt{pq}}{\sqrt{pq}\times\sqrt{pq}}=\frac{q\sqrt{p}}{pq}=\frac{\sqrt{p}}{p}$

이상에서 옳은 것은 (ㄱ), (ㄹ)이다. 답 ③

$\sqrt{q}\times\sqrt{pq}$
$=\sqrt{q}\times\sqrt{p}\times\sqrt{q}$
$=q\sqrt{p}$

060 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\div\frac{\sqrt{10}}{5}\times(-2\sqrt{5})$

$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{5}{\sqrt{10}}\times(-2\sqrt{5})$

$=-\frac{10}{\sqrt{3}}=-\frac{10\sqrt{3}}{3}$ 답 ①

061 $\sqrt{108}\times\sqrt{18}\div\sqrt{162}=6\sqrt{3}\times3\sqrt{2}\times\frac{1}{9\sqrt{2}}=2\sqrt{3}$

$\therefore a=2$ 답 2

062 원뿔의 높이를 x cm라 하면

$\frac{1}{3}\times\pi\times(\sqrt{21})^2\times x=14\sqrt{10}\pi$

$7x=14\sqrt{10}$ $\quad\therefore x=2\sqrt{10}$

따라서 원뿔의 높이는 $2\sqrt{10}$ cm이다. 답 $2\sqrt{10}$ cm

보충학습

밑면의 반지름의 길이가 r, 높이가 h인 원뿔의 부피 V는
$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$

063 ① $\sqrt{0.015}=\sqrt{1.5\times\frac{1}{100}}=\frac{\sqrt{1.5}}{10}=0.1225$

② $\sqrt{0.15}=\sqrt{15\times\frac{1}{100}}=\frac{\sqrt{15}}{10}=0.3873$

③ $\sqrt{150}=\sqrt{1.5\times100}=10\sqrt{1.5}=12.25$

④ $\sqrt{1500}=\sqrt{15\times100}=10\sqrt{15}=38.73$

⑤ $\sqrt{15000}=\sqrt{1.5\times10000}=100\sqrt{1.5}=122.5$

답 ⑤

064 $\sqrt{0.231}=\sqrt{\frac{23.1}{100}}=\frac{\sqrt{23.1}}{10}=0.4806$

답 0.4806

065 $17.61=10\times1.761=10\times\sqrt{3.1}$

$=\sqrt{3.1\times100}=\sqrt{310}$

$\therefore a=310$ 답 ②

내신 만점 도전하기

본책 18~19쪽

066 해결 과정 $\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{a}\times\sqrt{50}\times\sqrt{5a}$

$=\sqrt{2\times5\times a\times50\times5a}$

$=\sqrt{(50a)^2}=50a\ (\because a>0)$ • 70% 배점

$m>0,\ n>0$일 때, $\sqrt{m}\times\sqrt{n}=\sqrt{mn}$

답 구하기 따라서 $50a=25$이므로

$a=\frac{1}{2}$ • 30% 배점 답 $\frac{1}{2}$

067 전략 $a>0$일 때, $\sqrt{a^2}=a$

풀이 ① $\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{b}=a\sqrt{b}$

② $-a\sqrt{b}=-\sqrt{a^2}\times\sqrt{b}=-\sqrt{a^2b}$

③ $-\sqrt{ab^2}=-\sqrt{a}\times\sqrt{b^2}=-b\sqrt{a}$

④ $\frac{\sqrt{ab}}{a^2}=\sqrt{\frac{ab}{a^4}}=\sqrt{\frac{b}{a^3}}$

⑤ $\sqrt{\frac{b^2}{ab}}=\frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{ab}}=\frac{b}{\sqrt{ab}}$ 답 ③

주의 근호 밖의 음수는 근호 안으로 넣을 수 없다.
즉 $a>0$이므로 ②에서
$-a\sqrt{b}\neq\sqrt{(-a)^2b}=\sqrt{a^2b}$

068 전략 $\sqrt{0.12}$를 변형하여 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$의 곱으로 나타낸다.

풀이 $\sqrt{0.12}=\sqrt{\frac{2^2\times3}{100}}=\frac{2\sqrt{3}}{10}=\frac{a^2b}{10}$ 답 ③

069 전략 $a>0,\ b>0$일 때, $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

풀이 $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{243}}=\frac{4\sqrt{5}}{9\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{15}}{27}$이므로

$x=9,\ y=4,\ z=\frac{4}{27}$

$\therefore xyz=\frac{16}{3}$ 답 $\frac{16}{3}$

070 해결 과정 ① $\frac{3}{4\sqrt{18}}=\frac{3}{4\times3\sqrt{2}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$

$\therefore a=\frac{1}{8}$ • 40% 배점

해결 과정 ② $\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{15}}=\frac{10\sqrt{45}}{15}=\frac{2\times3\sqrt{5}}{3}=2\sqrt{5}$

$\therefore b=2$ • 40% 배점

답 구하기 $\therefore\sqrt{ab}=\sqrt{\frac{1}{8}\times2}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ • 20% 배점

답 $\frac{1}{2}$

071 전략 $a>0$일 때, $\frac{b}{\sqrt{a}}=\frac{b\times\sqrt{a}}{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}=\frac{b\sqrt{a}}{a}$

풀이 $\sqrt{0.5}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{a}{2}$ 답 ①

072 전략 $a\div b\times c=a\times\frac{1}{b}\times c$

풀이 $\sqrt{2\sqrt{5}\div(-\sqrt{30})\times(-3\sqrt{24})}$

$=\sqrt{2\sqrt{5}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{30}}\right)\times(-6\sqrt{6})}$

$=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ 답 ②

$\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

073 전략 나눗셈을 역수의 곱셈으로 고친 후 앞에서부터 차례대로 계산한다.

풀이 $\frac{21}{\sqrt{15}}\times\sqrt{\frac{5}{12}}\div\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$=\frac{21}{\sqrt{15}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}\times\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{7}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$=\frac{21}{\sqrt{7}}=3\sqrt{7}$

$\therefore a=7$

답 7

074 해결 과정 ① 컵의 부피는

$\pi\times5^2\times3\sqrt{2}=75\sqrt{2}\pi\ (\text{cm}^3)$ • 30% 배점

해결 과정 ② 물통의 부피는

$\pi\times(3\sqrt{10})^2\times4\sqrt{6}=360\sqrt{6}\pi\ (\text{cm}^3)$ • 30% 배점

답 구하기 이때 $\frac{360\sqrt{6}\pi}{75\sqrt{2}\pi}=\frac{24\sqrt{3}}{5}$이고

$8<\frac{24\sqrt{3}}{5}<9$이므로 최소 9번 부어야 한다. • 40% 배점

답 9번

보충학습

밑면의 반지름의 길이가 r, 높이가 h인 원기둥의 부피 V는
$V=\pi r^2h$

075 해결 과정 $\sqrt{520}=\sqrt{130\times2^2}=2\sqrt{130}$

$=2\sqrt{1.3\times10^2}=20\sqrt{1.3}$

$=20\times1.140$

$=22.8$ • 70% 배점

답 구하기 따라서 $\sqrt{520}$과 가장 가까운 정수는 23이다. • 30% 배점

답 23

076 전략 $a>0$, $b>0$일 때, $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

풀이 ① $\sqrt{0.0713}=\sqrt{\frac{7.13}{100}}=\frac{\sqrt{7.13}}{10}=\frac{x}{10}$

② $\sqrt{0.713}=\sqrt{\frac{71.3}{100}}=\frac{\sqrt{71.3}}{10}=\frac{y}{10}$

③ $\sqrt{713}=\sqrt{7.13\times100}=10\sqrt{7.13}=10x$

④ $\sqrt{2852}=\sqrt{400\times7.13}=20\sqrt{7.13}=20x$

⑤ $\sqrt{7130}=\sqrt{71.3\times100}=10\sqrt{71.3}=10y$

답 ②

077 전략 근호 안의 수를 10^2, 10^4, $\cdots$ 또는 $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^4}$, $\cdots$과의 곱으로 나타낸다.

풀이 ① $\sqrt{301}=\sqrt{3.01\times100}=10\sqrt{3.01}=17.35$

② $\sqrt{0.0102}=\sqrt{\frac{1.02}{100}}=\frac{\sqrt{1.02}}{10}=0.1010$

③ $\sqrt{40400}=\sqrt{4.04\times10000}=100\sqrt{4.04}=201.0$

④ $\sqrt{1827}=\sqrt{900\times2.03}=30\sqrt{2.03}=42.75$

답 ⑤

다른풀이 ③ $\sqrt{40400}=\sqrt{1.01\times40000}=200\sqrt{1.01}$
$=201.0$

지수법칙

m, n이 자연수일 때

① $a^m\times a^n=a^{m+n}$

② $(a^m)^n=a^{mn}$

③ $a\neq0$일 때,

$m>n$이면 $a^m\div a^n=a^{m-n}$

$m=n$이면 $a^m\div a^n=1$

$m<n$이면 $a^m\div a^n=\frac{1}{a^{n-m}}$

$\frac{24\sqrt{3}}{5}=4.8\sqrt{3}$
$=\sqrt{4.8^2\times3}$
$=\sqrt{69.12}$
이므로
$8<\frac{24\sqrt{3}}{5}<9$

$a>0$, $b>0$일 때,
$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$\frac{\frac{d}{c}}{\frac{b}{a}}=\frac{ad}{bc}$

078 전략 1917을 소인수분해한 후 제곱근표를 이용할 수 있도록 변형한다.

풀이 $1917=3^2\times213$이므로

$\sqrt{19.17}=\sqrt{3^2\times2.13}=3\sqrt{2.13}$

따라서 $\sqrt{2.13}$의 값을 이용해야 한다.

답 ①

내신 만점 굳히기

본책 20쪽

079 전략 $a>0$, $b>0$일 때, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

풀이 $\frac{\sqrt{49^{17}+7^{24}}}{\sqrt{343^{12}+49^{13}}}=\sqrt{\frac{(7^2)^{17}+7^{24}}{(7^3)^{12}+(7^2)^{13}}}$

$=\sqrt{\frac{7^{34}+7^{24}}{7^{36}+7^{26}}}$

$=\sqrt{\frac{7^{24}(7^{10}+1)}{7^{26}(7^{10}+1)}}$

$=\sqrt{\frac{1}{7^2}}$

$=\frac{1}{7}$

답 ②

080 문제 이해 $a=\frac{1}{\sqrt{5}}$이므로

$1-a>0$, $1+a>0$ • 10% 배점

해결 과정 $\therefore \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$

$=\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}+\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}}$

$=\frac{1-a+1+a}{\sqrt{1+a}\sqrt{1-a}}$

$=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}$ • 60% 배점

답 구하기 위의 식에 $a=\frac{1}{\sqrt{5}}$을 대입하면

$\frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}}=\frac{2}{\frac{2}{\sqrt{5}}}=\sqrt{5}$ • 30% 배점

답 $\sqrt{5}$

081 전략 $a>0$, $b>0$일 때, $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

풀이 $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{3}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{\frac{1}{a^2}\times\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{9}{b^2}\times\frac{b}{a}}$

$=\sqrt{\frac{1}{ab}}+\sqrt{\frac{9}{ab}}$

$=\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{3}{\sqrt{ab}}$

$=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}$

$=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

다른풀이 $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{3}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$

$=\frac{1}{(\sqrt{a})^2}\times\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{3}{(\sqrt{b})^2}\times\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$

$=\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{3}{\sqrt{ab}}$

$=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}$

$=\frac{1}{2}$

082 **해결 과정** $\frac{\sqrt{192}}{4\sqrt{n}}=\frac{8\sqrt{3}}{4\sqrt{n}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{n}}=\frac{2\sqrt{3n}}{n}$

• 70% 배점

답 구하기 따라서 $\frac{2\sqrt{3n}}{n}=\frac{2\sqrt{15}}{5}$이므로

$n=5$

• 30% 배점

답 5

083 **전략** 제곱근의 곱셈과 나눗셈의 혼합 계산은 나눗셈을 역수의 곱셈으로 고친 후 앞에서부터 차례대로 계산한다.

풀이 $\sqrt{6}-1<\sqrt{5}$, $\sqrt{40}>\sqrt{5}+\sqrt{3}$, $-\frac{\sqrt{5}}{2}<-\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$6<\sqrt{40}<7$이고, $2<\sqrt{5}<3$, $1<\sqrt{3}<2$에서 $3<\sqrt{5}+\sqrt{3}<5$이므로 $\sqrt{40}>\sqrt{5}+\sqrt{3}$

$\langle\sqrt{6}-1,\ \sqrt{5}\rangle=\sqrt{5}$, $\langle\sqrt{40},\ \sqrt{5}+\sqrt{3}\rangle=\sqrt{40}$,

$\left\langle-\frac{\sqrt{5}}{2},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ (주어진 식) $=\sqrt{5}\times\sqrt{40}\div\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=\sqrt{5}\times2\sqrt{10}\times(-\sqrt{2})$

$=-20$

답 ②

084 [문제 해결 길잡이]

❶ $\sqrt{0.5}=\sqrt{\frac{5}{10}}$를 변형한 후 a, b를 이용하여 나타낸다.

❷ $\sqrt{0.6}=\sqrt{\frac{6}{10}}$을 변형한 후 c, d를 이용하여 나타낸다.

❸ $\sqrt{0.5}+\sqrt{0.6}$을 a, b, c, d를 이용하여 나타낸다.

풀이 $\sqrt{0.5}=\sqrt{\frac{5}{10}}=\sqrt{\frac{5^2}{50}}=\frac{5}{\sqrt{50}}=\frac{a^2}{b}$ ❶

$\sqrt{0.6}=\sqrt{\frac{6}{10}}=\sqrt{\frac{6^2}{60}}=\frac{6}{\sqrt{60}}=\frac{c^2}{d}$ ❷

$\therefore\sqrt{0.5}+\sqrt{0.6}=\frac{a^2}{b}+\frac{c^2}{d}$ ❸

답 ④

03 | 근호를 포함한 식의 계산 (2)

개념&기출유형

본책 21~23쪽

제곱근의 덧셈과 뺄셈은 $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$를 이용하여 근호 안의 수를 가장 작은 자연수로 만든 후 근호 안의 수가 같은 수끼리 덧셈, 뺄셈을 한다.

085 $\sqrt{32}+\sqrt{12}-\sqrt{18}+\sqrt{27}$

$=4\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+3\sqrt{3}$

$=\sqrt{2}+5\sqrt{3}$

답 ⑤

086 ① $4\sqrt{5}-2\sqrt{2}-\sqrt{5}=3\sqrt{5}-2\sqrt{2}$

② $\sqrt{50}-3\sqrt{2}-\sqrt{8}=5\sqrt{2}-3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=0$

③ $\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

④ $\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{5}{3\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{5\sqrt{2}}{6}=\sqrt{2}$

⑤ $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{3}+\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{10\sqrt{21}}{21}$

답 ②, ⑤

087 $\frac{15}{\sqrt{3}}-\sqrt{96}-\frac{12}{\sqrt{3}}+\sqrt{24}$

$=5\sqrt{3}-4\sqrt{6}-4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$

$=\sqrt{3}-2\sqrt{6}$

따라서 $a=1$, $b=-2$이므로

$a-b=3$

답 3

088 $\sqrt{2}(\sqrt{12}-3\sqrt{2})-\sqrt{3}(2\sqrt{2}+\sqrt{75})$

$=\sqrt{2}(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})-\sqrt{3}(2\sqrt{2}+5\sqrt{3})$

$=2\sqrt{6}-6-2\sqrt{6}-15=-21$

답 ①

089 $\sqrt{2}(\sqrt{5}+5\sqrt{2})+(3\sqrt{2}-2\sqrt{5})\sqrt{5}$

$=\sqrt{10}+10+3\sqrt{10}-10=4\sqrt{10}$

$=4\sqrt{2\times5}=4\times\sqrt{2}\times\sqrt{5}=4ab$

답 ⑤

090 $(8-\sqrt{3})(2\sqrt{3}-1)=16\sqrt{3}-8-6+\sqrt{3}$

$=17\sqrt{3}-14$

따라서 $a=17$, $b=-14$이므로

$a+b=3$

답 3

091 $\frac{4-\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\frac{4-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{(4-3\sqrt{2})\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$=\frac{4\sqrt{2}-6}{2}=2\sqrt{2}-3$

따라서 $x=-3$, $y=2$이므로

$xy=-6$

답 -6

092 $\frac{\sqrt{63}-\sqrt{14}}{\sqrt{7}}=\frac{(3\sqrt{7}-\sqrt{14})\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}$

$=\frac{21-7\sqrt{2}}{7}=3-\sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{40}-\sqrt{45}}{\sqrt{5}}=\frac{(2\sqrt{10}-3\sqrt{5})\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$

$=\frac{10\sqrt{2}-15}{5}=2\sqrt{2}-3$

$\therefore$ (주어진 식)$=(3-\sqrt{2})+(2\sqrt{2}-3)=\sqrt{2}$

답 ③

다른풀이 $\dfrac{\sqrt{63}-\sqrt{14}}{\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{7}}{\sqrt{7}}-\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}}=3-\sqrt{2}$

$\dfrac{\sqrt{40}-\sqrt{45}}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{\sqrt{5}}-\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=2\sqrt{2}-3$

$\therefore$ (주어진 식)$=(3-\sqrt{2})+(2\sqrt{2}-3)=\sqrt{2}$

093 $\dfrac{\sqrt{2}}{5-2\sqrt{6}}-\dfrac{\sqrt{2}}{5+2\sqrt{6}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}(5+2\sqrt{6})}{(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})}-\dfrac{\sqrt{2}(5-2\sqrt{6})}{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}$

$=5\sqrt{2}+4\sqrt{3}-(5\sqrt{2}-4\sqrt{3})$

$=5\sqrt{2}+4\sqrt{3}-5\sqrt{2}+4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

$\therefore k=8$

답 ④

$(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})$
$=5^2-(2\sqrt{6})^2$
$=25-24$
$=1$

094 ① $(\sqrt{96}+\sqrt{24})\div\sqrt{2}=(4\sqrt{6}+2\sqrt{6})\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$=6\sqrt{6}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=6\sqrt{3}$

② $\dfrac{4}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-\sqrt{3})-\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{3})-\sqrt{\dfrac{27}{3}}$

$=4-2\sqrt{6}-3=1-2\sqrt{6}$

③ $\sqrt{48}-\dfrac{15}{\sqrt{3}}-\dfrac{4}{\sqrt{8}}+\sqrt{50}=4\sqrt{3}-5\sqrt{3}-\sqrt{2}+5\sqrt{2}$

$=4\sqrt{2}-\sqrt{3}$

④ $3\sqrt{8}+\dfrac{6}{\sqrt{3}}+\sqrt{2}(\sqrt{6}-3)=6\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

$=3\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

⑤ $\sqrt{3}(2+5\sqrt{2})-3(2\sqrt{3}+\sqrt{6})$

$=2\sqrt{3}+5\sqrt{6}-6\sqrt{3}-3\sqrt{6}=-4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$

답 ③

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$\dfrac{4}{\sqrt{8}}=\dfrac{4}{2\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}$
$=\sqrt{2}$

095 $3\sqrt{2}A-\sqrt{7}B$

$=3\sqrt{2}\left(\sqrt{7}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)-\sqrt{7}\left(\dfrac{3}{\sqrt{7}}-2\sqrt{2}\right)$

$=3\sqrt{14}+3-3+2\sqrt{14}$

$=5\sqrt{14}$

답 $5\sqrt{14}$

분모의 $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$은 약분되므로 분모를 유리화하지 않아도 된다.

096 $\dfrac{12}{\sqrt{2}}+\dfrac{15}{\sqrt{5}}-\sqrt{2}(3-\sqrt{40})$

$=6\sqrt{2}+3\sqrt{5}-3\sqrt{2}+4\sqrt{5}$

$=3\sqrt{2}+7\sqrt{5}$

따라서 $a=3$, $b=7$이므로

$a+b=10$

답 10

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

097 $2<\sqrt{7}<3$이므로 $a=2$, $b=\sqrt{7}-2$

$\therefore \dfrac{3a}{b}=\dfrac{6}{\sqrt{7}-2}=\dfrac{6(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}$

$=\dfrac{6(\sqrt{7}+2)}{3}=2(\sqrt{7}+2)$

답 ⑤

$\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$

098 $4\sqrt{3}=\sqrt{48}$이고 $6<\sqrt{48}<7$이므로

$x=6$, $y=4\sqrt{3}-6$

$\sqrt{36}<\sqrt{48}<\sqrt{49}$

$\therefore \dfrac{x-y}{4}=\dfrac{6-(4\sqrt{3}-6)}{4}=\dfrac{12-4\sqrt{3}}{4}$

$=3-\sqrt{3}$

답 ④

099 $3<\sqrt{10}<4$이므로

$\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}$

$-4<-\sqrt{10}<-3$ $\quad\therefore 1<5-\sqrt{10}<2$

즉 $5-\sqrt{10}$의 정수 부분이 1이므로

$k=(5-\sqrt{10})-1=4-\sqrt{10}$

$\therefore (4-k)^2=\{4-(4-\sqrt{10})\}^2$

$=(\sqrt{10})^2=10$

답 ①

보충학습

$a<b<c$이면
① $-c<-b<-a$
② $a+k<b+k<c+k$ (k는 상수)

100 $x+y=(3+\sqrt{10})+(3-\sqrt{10})=6$

$xy=(3+\sqrt{10})(3-\sqrt{10})=9-10=-1$

$\therefore x^2+y^2-8=(x+y)^2-2xy-8$

$=36+2-8=30$

답 30

만점비법

x, y의 값을 주어진 식에 바로 대입하여 식의 값을 구할 수도 있다. 그러나 곱셈 공식의 변형을 이용하여 식을 간단히 한 후 x, y의 값을 대입하는 것이 더 간편하다.

101 $(a+b)^2-(a+b)(a-b)+(a-b)^2$

$=a^2+2ab+b^2-(a^2-b^2)+a^2-2ab+b^2$

$=a^2+3b^2$

$=(\sqrt{5}-2)^2+3\times(2\sqrt{3})^2$

$=5-4\sqrt{5}+4+36$

$=45-4\sqrt{5}$

답 ③

102 $a=3-2\sqrt{2}$에서 $a-3=-2\sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $(a-3)^2=(-2\sqrt{2})^2$

$\therefore a^2-6a+9=8$

답 ③

다른풀이 $a^2-6a+9=(3-2\sqrt{2})^2-6(3-2\sqrt{2})+9$

$=9-12\sqrt{2}+8-18+12\sqrt{2}+9$

$=8$

내신 만점 도전하기

본책 24~26쪽

103 **전략** 분모를 유리화하고 근호 안의 수는 $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$임을 이용하여 간단히 한 다음 계산한다.

풀이 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{6}\div\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\sqrt{8}}{4}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{6}\times\dfrac{3}{2\sqrt{3}}-\dfrac{2\sqrt{2}}{4}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

답 ①

104 전략 $f(x)$에 $x=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 49$를 각각 대입하여 $f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(49)$의 값을 구한다.

풀이 $f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(49)$
$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})$
$+\cdots+(\sqrt{50}-\sqrt{49})$
$=-\sqrt{2}+\sqrt{50}=-\sqrt{2}+5\sqrt{2}=4\sqrt{2}$
$\therefore a=4$

답 4

105 해결 과정 넓이가 $1\,\text{cm}^2$, $4\,\text{cm}^2$, $9\,\text{cm}^2$인 직각삼각형의 빗변이 아닌 한 변의 길이를 각각 $a\,\text{cm}$, $b\,\text{cm}$, $c\,\text{cm}$라 하면

$\frac{1}{2}a^2=1,\ \frac{1}{2}b^2=4,\ \frac{1}{2}c^2=9$
$a^2=2,\ b^2=8,\ c^2=18$
$\therefore a=\sqrt{2},\ b=2\sqrt{2},\ c=3\sqrt{2}$ • 70% 배점

답 구하기 $\therefore \overline{BC}-\overline{AB}=(2\sqrt{2}+3\sqrt{2})-(\sqrt{2}+2\sqrt{2})$
$=2\sqrt{2}\,(\text{cm})$ • 30% 배점

답 $2\sqrt{2}\,\text{cm}$

$a,\ b,\ c$는 변의 길이이므로 $a>0,\ b>0,\ c>0$

106 전략 $a=2\sqrt{2}-1,\ b=\sqrt{2}$를 $a*b=ab-a$에 대입한 후 분배법칙을 이용한다.

풀이 $(2\sqrt{2}-1)*\sqrt{2}=(2\sqrt{2}-1)\sqrt{2}-(2\sqrt{2}-1)$
$=4-\sqrt{2}-2\sqrt{2}+1$
$=5-3\sqrt{2}$

답 ③

107 전략 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$임을 이용한다.

풀이 $(2\sqrt{3}+5)(2\sqrt{3}-5)(\sqrt{15}-4)(\sqrt{15}+4)$
$=\{(2\sqrt{3}+5)(2\sqrt{3}-5)\}\{(\sqrt{15}-4)(\sqrt{15}+4)\}$
$=(12-25)(15-16)$
$=-13\times(-1)=13$

답 13

108 전략 $a,\ b$가 유리수이고 $\sqrt{m}$이 무리수일 때, $a+b\sqrt{m}$이 유리수 ➡ $b=0$

풀이 $(3-\sqrt{10})^2-k(5-2\sqrt{10})$
$=9-6\sqrt{10}+10-5k+2k\sqrt{10}$
$=19-5k+(2k-6)\sqrt{10}$

이것이 유리수가 되려면 $2k-6=0$이어야 하므로
$2k=6\qquad \therefore k=3$

답 ①

109 전략 지수법칙과 곱셈 공식을 이용한다.

풀이 $(2+\sqrt{3})^8(2-\sqrt{3})^7$
$=(2+\sqrt{3})\{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\}^7$
$=2+\sqrt{3}$

따라서 $a=2,\ b=1$이므로 $ab=2$

답 ②

m이 자연수일 때, $(ab)^m=a^mb^m$

110 해결 과정 ① $a=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$
$=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}$

$b=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3}$ • 40% 배점

$a>0,\ b>0,\ c>0$일 때, $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{ac}+\sqrt{bc}}{c}$

해결 과정 ② $a+b=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}+\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3}=2\sqrt{2}$

$a-b=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}-\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3}=-\frac{2\sqrt{6}}{3}$ • 30% 배점

답 구하기 $\therefore \frac{a-b}{a+b}=(a-b)\times\frac{1}{a+b}$
$=-\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{2\sqrt{2}}$
$=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ • 30% 배점

답 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

다른풀이 $a+b=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{2}$

$a-b=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$\therefore \frac{a-b}{a+b}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

111 전략 넓이가 k인 정사각형의 한 변의 길이 ➡ $\sqrt{k}$

풀이 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}$이므로
$\overline{BC}=\sqrt{2},\ \overline{BP}=\overline{BA}=\sqrt{2},\ \overline{CQ}=\overline{CD}=\sqrt{2}$
$\therefore \text{P}(3-2\sqrt{2}),\ \text{Q}(3+\sqrt{2})$

이때 점 B는 $\text{B}(3-\sqrt{2})$

즉 $a=3-2\sqrt{2},\ b=3+\sqrt{2}$이므로
$\frac{a+b}{\sqrt{2}}=\frac{(3-2\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=\frac{6-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$
$=\frac{(6-\sqrt{2})\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}-2}{2}$
$=3\sqrt{2}-1$

답 ①

112 전략 곱셈 공식을 이용하여 분모를 유리화한 후 $x=\sqrt{2}$를 대입한다.

풀이 $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$
$=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}$
$=\frac{x+1-2\sqrt{(x+1)(x-1)}+x-1}{x+1-(x-1)}$
$=x-\sqrt{x^2-1}$
$=\sqrt{2}-\sqrt{(\sqrt{2})^2-1}$
$=\sqrt{2}-1$

답 $\sqrt{2}-1$

113 전략 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$임을 이용하여 분모를 유리화한다.

풀이 $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}{\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}}$
$=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-3}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$
$=\frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$
$=\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}$

따라서 $a=2,\ b=1,\ c=-1$이므로
$a+b+c=2$

답 ①

참고 $\dfrac{1}{(1+\sqrt{3})+\sqrt{2}}$과 같이 분모를 변형하여 유리화를 해도 된다.

이때 $\dfrac{1}{1+(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$과 같이 변형하여 유리화하면 계산이 복잡해지므로 주의한다.

114 전략 윗변의 길이가 a, 아랫변의 길이가 b, 높이가 h인 사다리꼴의 넓이 ◎ $\frac{1}{2}(a+b)h$

풀이 주어진 사다리꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\{(\sqrt{6}-\sqrt{2})+(\sqrt{2}+\sqrt{3})\}\times2\sqrt{3}$$
$$=\frac{1}{2}\times(\sqrt{3}+\sqrt{6})\times2\sqrt{3}$$
$$=3+3\sqrt{2}$$

답 $3+3\sqrt{2}$

115 전략 $a>0,\ b>0,\ c>0$일 때, $\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}}{\sqrt{a}}=\sqrt{b}+\sqrt{c}$

풀이 $\sqrt{48}+\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\div\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

$$=4\sqrt{3}+\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$
$$=4\sqrt{3}+3-\sqrt{3}-\frac{5-3}{2}$$
$$=3\sqrt{3}+2$$

답 ⑤

116 해결 과정 ① $\sqrt{27}-\dfrac{\sqrt{18}}{2\sqrt{6}}=3\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

$$\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{8}}-\frac{5}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{5\sqrt{2}}{2}$$
$$=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{5\sqrt{2}}{2}$$
$$=-\frac{5\sqrt{2}}{4}$$

• 40% 배점

해결 과정 ② $\therefore\left(\sqrt{27}-\dfrac{\sqrt{18}}{2\sqrt{6}}\right)^2+\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{8}}-\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)^2$

$$=\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2$$
$$=\frac{75}{4}+\frac{25}{8}$$
$$=\frac{175}{8}$$

• 40% 배점

답 구하기 따라서 $p=8,\ q=175$이므로

$p+q=183$

• 20% 배점

답 183

117 해결 과정 ① $A=\sqrt{12}-\dfrac{7}{\sqrt{2}}=2\sqrt{3}-\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

• 20% 배점

해결 과정 ② $2A-5B$

$$=2\left(2\sqrt{3}-\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)-5\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$$
$$=4\sqrt{3}-7\sqrt{2}-5\sqrt{2}-\sqrt{3}$$
$$=-12\sqrt{2}+3\sqrt{3}$$

• 40% 배점

답 구하기 $\therefore\ \sqrt{2}A+\dfrac{1}{\sqrt{3}}(2A-5B)$

$$=\sqrt{2}\left(2\sqrt{3}-\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}(-12\sqrt{2}+3\sqrt{3})$$
$$=2\sqrt{6}-7-4\sqrt{6}+3$$
$$=-4-2\sqrt{6}$$

• 40% 배점

답 $-4-2\sqrt{6}$

118 전략 분모를 유리화하여 주어진 수의 정수 부분을 먼저 구한다.

풀이 $4+\dfrac{6}{\sqrt{3}}=4+\dfrac{6\sqrt{3}}{3}=4+2\sqrt{3}$

$2\sqrt{3}=\sqrt{12}$이고 $3<\sqrt{12}<4$이므로

$7<4+2\sqrt{3}<8$

$\therefore\ a=7,\ b=(4+2\sqrt{3})-7=-3+2\sqrt{3}$

$\therefore\ 2a+b=2\times7+(-3+2\sqrt{3})$

$=14-3+2\sqrt{3}=11+2\sqrt{3}$

답 ④

119 해결 과정 $3\sqrt{5}=\sqrt{45}$이고 $6<\sqrt{45}<7$이므로

$\sqrt{45}$의 정수 부분은 6이다.

$a=3\sqrt{5}-6$

$2<\sqrt{5}<3$에서 $-3<-\sqrt{5}<-2$이므로

$1<4-\sqrt{5}<2$

$4-\sqrt{5}$의 정수 부분은 1이다.

$\therefore\ b=(4-\sqrt{5})-1=3-\sqrt{5}$

• 50% 배점

답 구하기 $\therefore\ \sqrt{(1-a)^2}-\sqrt{(b-1)^2}$

$$=\sqrt{\{1-(3\sqrt{5}-6)\}^2}-\sqrt{\{(3-\sqrt{5})-1\}^2}$$
$$=\sqrt{(7-3\sqrt{5})^2}-\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$$

$7-3\sqrt{5}=\sqrt{49}-\sqrt{45}>0$
$2-\sqrt{5}=\sqrt{4}-\sqrt{5}<0$

$$=7-3\sqrt{5}-\{-(2-\sqrt{5})\}$$
$$=7-3\sqrt{5}+2-\sqrt{5}$$
$$=9-4\sqrt{5}$$

• 50% 배점

답 $9-4\sqrt{5}$

120 전략 $n\le a<n+1$ (n은 정수) ◎ $[a]=n$

풀이 $2<\sqrt{5}<3$에서 $3<\sqrt{5}+1<4$

$\therefore\ [a]=[\sqrt{5}+1]=3$

$a=\sqrt{5}+1,\ [a]=3$을 주어진 식에 대입하면

$$\left[\frac{a-[a]}{[a]}+\frac{a+[a]+1}{a-1}\right]$$
$$=\left[\frac{(\sqrt{5}+1)-3}{3}+\frac{(\sqrt{5}+1)+3+1}{(\sqrt{5}+1)-1}\right]$$
$$=\left[\frac{\sqrt{5}-2}{3}+\frac{\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}}\right]=\left[\frac{\sqrt{5}-2}{3}+1+\sqrt{5}\right]$$
$$=\left[\frac{4\sqrt{5}+1}{3}\right]$$

이때 $4\sqrt{5}=\sqrt{80}$이고 $8<\sqrt{80}<9$이므로

$9<4\sqrt{5}+1<10\qquad\therefore\ 3<\dfrac{4\sqrt{5}+1}{3}<\dfrac{10}{3}$

$\therefore\ \left[\dfrac{4\sqrt{5}+1}{3}\right]=3$

답 ④

121 문제 이해 $\sqrt{n}$의 정수 부분이 x, 소수 부분이 y이므로 $y=\sqrt{n}-x$

• 10% 배점

해결 과정 ① 이것을 $x^2-y^2=1+4y$에 대입하면

$x^2-(\sqrt{n}-x)^2=1+4(\sqrt{n}-x)$

$x^2-(n-2x\sqrt{n}+x^2)=1+4\sqrt{n}-4x$
$-n+2x\sqrt{n}=1+4\sqrt{n}-4x$
$\therefore 4x-n-1+(2x-4)\sqrt{n}=0$ • 30% 배점

해결 과정 ② 따라서 $4x-n-1=0,\ 2x-4=0$이므로
$x=2,\ n=7 \quad \therefore y=\sqrt{7}-2$ • 40% 배점

답 구하기 $\therefore y^x=(\sqrt{7}-2)^2=11-4\sqrt{7}$ • 20% 배점

답 $11-4\sqrt{7}$

a, b가 유리수이고 $\sqrt{m}$이 무리수일 때, $a+b\sqrt{m}=0$이면 → $a=b=0$

122 전략 주어진 식을 간단히 한 다음 x, y의 값을 대입한다.

풀이 $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2$
$=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{xy}+\frac{1}{y^2}-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{xy}+\frac{1}{y^2}\right)$
$=-\frac{4}{xy}$

이때 $xy=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{9}$이므로 구하는 식의 값은

$-\frac{4}{xy}=-4\times 9=-36$ 답 ①

다른풀이 1 $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2$
$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$
$=\frac{2}{x}\times\left(-\frac{2}{y}\right)=-\frac{4}{xy}$

이때 $xy=\frac{1}{9}$이므로 구하는 식의 값은
$-4\times 9=-36$

다른풀이 2 $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2=\left(\frac{y-x}{xy}\right)^2-\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2$

이때
$y-x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$,
$x+y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,
$xy=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{9}$

이므로 구하는 식의 값은
$\left\{\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times 9\right\}^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\times 9\right)^2$
$=(-6\sqrt{2})^2-(6\sqrt{3})^2=72-108=-36$

123 전략 $x+1=\sqrt{6}$의 양변을 제곱하여 얻은 식으로 주어진 식을 간단히 정리한다.

풀이 $x=\sqrt{6}-1$에서 $x+1=\sqrt{6}$
양변을 제곱하면 $(x+1)^2=6$
$x^2+2x+1=6 \quad \therefore x^2+2x=5$
$\therefore x^3+2x^2-4x+1=x(x^2+2x)-4x+1$
$=5x-4x+1=x+1$
$=(\sqrt{6}-1)+1$
$=\sqrt{6}$ 답 $\sqrt{6}$

124 전략 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$임을 이용하여 주어진 식을 전개한다.

풀이 $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2=\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{y}$
$=\frac{x+y}{xy}-\frac{2}{\sqrt{xy}}$

$x^2=2+\sqrt{3},\ y^2=2-\sqrt{3}$에서
$x^2y^2=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$
이때 $xy>0$이므로 $xy=1$

$x>0$, $y>0$이므로 $xy>0$

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=(2+\sqrt{3})+2+(2-\sqrt{3})=6$
이므로
$x+y=\sqrt{6}$ ($\because x+y>0$)

$x>0$, $y>0$이므로 $x+y>0$

따라서 구하는 식의 값은
$\frac{\sqrt{6}}{1}-\frac{2}{\sqrt{1}}=\sqrt{6}-2$ 답 ②

125 전략 분모의 유리화를 이용하여 식을 간단히 한 후 곱셈 공식의 변형을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

풀이 $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$
$=\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=8^2-4\times 4=48$이므로
$x-y=4\sqrt{3}$ ($\because x>y$)
따라서 구하는 식의 값은
$\frac{8+2\sqrt{4}}{4\sqrt{3}}=\frac{12}{4\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ 답 ②

126 해결 과정 ① $x^2-3x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x=0$이면 $0^2-3\times 0+1\neq 0$이므로 $x\neq 0$

$x-3+\frac{1}{x}=0$
$\therefore x+\frac{1}{x}=3$ • 40% 배점

해결 과정 ② $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x+\frac{1}{x}+2$
$=3+2=5$ • 40% 배점

답 구하기 $\therefore \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{5}$ • 20% 배점

$\sqrt{x}>0$, $\frac{1}{\sqrt{x}}>0$이므로 $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}>0$

답 $\sqrt{5}$

내신 만점 굳히기

본책 27쪽

127 전략 두 유리수 m, n과 무리수 $\sqrt{l}$에 대하여 $m\sqrt{l}+n\sqrt{l}=(m+n)\sqrt{l}$임을 이용한다.

풀이 $\sqrt{\frac{2a}{b}}+\sqrt{\frac{2b}{a}}=\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{2b}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{2ab}}{b}+\frac{\sqrt{2ab}}{a}$
$=\frac{a\sqrt{2ab}+b\sqrt{2ab}}{ab}$
$=\frac{(a+b)\sqrt{2ab}}{ab}$
$=\frac{10\times\sqrt{2\times 6}}{6}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ 답 ⑤

128 전략 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$임을 이용하여 분모를 유리화한다.

풀이 $\dfrac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}-1}$

$=\dfrac{2\{(\sqrt{2}-\sqrt{3})-(\sqrt{6}-1)\}}{\{(\sqrt{2}-\sqrt{3})+(\sqrt{6}-1)\}\{(\sqrt{2}-\sqrt{3})-(\sqrt{6}-1)\}}$

$=\dfrac{2(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}+1)}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-(\sqrt{6}-1)^2}$

$=\dfrac{2(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}+1)}{5-2\sqrt{6}-(7-2\sqrt{6})}$

$=\dfrac{2(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}+1)}{-2}$

$=-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}-1$

따라서 $a=-1$, $b=1$, $c=1$, $d=-1$이므로

$a+b+c+d=0$ 답 0

129 전략 a, b가 유리수이고 $\sqrt{m}$이 무리수일 때, $a+b\sqrt{m}$이 유리수 ➡ $b=0$

풀이 $\dfrac{x+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3}+\dfrac{y+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3}$

$=\dfrac{(x+\sqrt{3})(2\sqrt{3}-3)+(y+\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3)}{(2\sqrt{3}+3)(2\sqrt{3}-3)}$

$=\dfrac{2x\sqrt{3}-3x+6-3\sqrt{3}+2y\sqrt{3}+3y+6+3\sqrt{3}}{12-9}$

$=\dfrac{(2x+2y)\sqrt{3}-3x+3y+12}{3}$

이것이 유리수가 되려면 $2x+2y=0$

$\therefore y=-x$

$y=-x$, $3x+y=8$을 연립하여 풀면

$x=4$, $y=-4$

$\therefore xy=-16$ 답 -16

$\begin{cases} y=-x & \cdots ㉠ \\ 3x+y=8 & \cdots ㉡ \end{cases}$
㉠을 ㉡에 대입하면
$3x-x=8$
$2x=8$ $\therefore x=4$
$x=4$를 ㉠에 대입하면
$y=-4$

130 전략 x_1, x_2, x_3, $\cdots$을 차례대로 구하여 규칙을 찾는다.

풀이 $\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

이때 $1<\sqrt{3}<2$이므로

$2<\sqrt{3}+1<3$ $\therefore 1<\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}<\dfrac{3}{2}$

$\therefore x_2=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}-1=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

$\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\sqrt{3}+1$

이때 $1<\sqrt{3}<2$이므로 $2<\sqrt{3}+1<3$

$\therefore x_3=(\sqrt{3}+1)-2=\sqrt{3}-1$

따라서 $x_1=x_3=x_5=\cdots=\sqrt{3}-1$,

$x_2=x_4=x_6=\cdots=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$이므로

$x_{100}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ 답 ①

131 해결 과정 ① $\dfrac{2x-3y}{5x-4y}=3$에서

$2x-3y=3(5x-4y)$, $9y=13x$

$\therefore y=\dfrac{13}{9}x$ • 30% 배점

해결 과정 ② $y=\dfrac{13}{9}x$를 주어진 식에 대입하면

$\sqrt{\dfrac{2x+y}{2x-y}}=\sqrt{\dfrac{2x+\frac{13}{9}x}{2x-\frac{13}{9}x}}=\sqrt{\dfrac{18x+13x}{18x-13x}}$

$=\sqrt{\dfrac{31x}{5x}}=\sqrt{6.2}$ • 30% 배점

답 구하기 이때 $2<\sqrt{6.2}<3$이므로 $\sqrt{\dfrac{2x+y}{2x-y}}$의 정수 부분은 2이다. • 40% 배점

답 2

132 해결 과정 ① $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

$=2-\sqrt{2}$

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=2+\sqrt{2}$ • 40% 배점

해결 과정 ② 이때 $1<\sqrt{2}<2$이므로

$3<2+\sqrt{2}<4$

또 $-2<-\sqrt{2}<-1$이므로

$0<2-\sqrt{2}<1$ • 40% 배점

답 구하기 $\therefore \left\{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\right\}-\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right\}$

$=1-4=-3$ • 20% 배점

답 -3

133 전략 분모를 유리화하여 y의 값을 구한다.

풀이 $y=x-\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x}}}=\sqrt{2}-\cfrac{1}{\sqrt{2}+\cfrac{1}{\sqrt{2}+\cfrac{1}{\sqrt{2}}}}$

$\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$=\sqrt{2}-\cfrac{1}{\sqrt{2}+\cfrac{1}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}}=\sqrt{2}-\cfrac{1}{\sqrt{2}+\cfrac{2}{3\sqrt{2}}}$

$\sqrt{2}+\dfrac{2}{3\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}$
$=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

$=\sqrt{2}-\cfrac{1}{\frac{4\sqrt{2}}{3}}=\sqrt{2}-\dfrac{3}{4\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{8}=\dfrac{5}{8}x$

$\sqrt{2}-\dfrac{3}{4\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$
$=\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$

따라서 y의 값은 x의 값의 $\dfrac{5}{8}$배이다. 답 ⑤

134 [문제 해결 길잡이]

❶ 두 무리수의 합을 계산하기 위한 조건을 생각한다.
❷ 자연수 y의 가장 작은 값을 구한다.
❸ 자연수 x의 가장 작은 값을 구한다.
❹ $x+y$의 값 중 가장 작은 값을 구한다.

풀이 $\sqrt{2y}$와 $\sqrt{3}$의 합을 계산할 수 있어야 하므로 $\sqrt{2y}=a\sqrt{3}$ (a는 자연수) 꼴이어야 한다. ❶

즉 $\sqrt{2y}=a\sqrt{3}=\sqrt{3a^2}$이므로

$2y=3a^2$

이때 자연수 y의 가장 작은 값은

$a=1$이면 $2y=3$에서 $y=\dfrac{3}{2}$이므로 자연수가 아니다.

$2y=3\times 2^2$

$\therefore y=6$ ❷

y의 값이 가장 작을 때 x의 값도 가장 작으므로 $x+y$의 값도 가장 작다. x의 가장 작은 값은 $y=6$을 $\sqrt{x}=\sqrt{2y}+\sqrt{3}$에 대입하면

$$\sqrt{x}=\sqrt{12}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}=\sqrt{27}$$

$\therefore x=27$ ❸

따라서 $x+y$의 값 중 가장 작은 값은 $6+27=33$이다. ❹

답 33

내신 만점 정복하기

본책 28~34쪽

135 전략 양수 a의 제곱근 ➔ $\pm\sqrt{a}$

풀이 (ㄱ) $\sqrt{25}=5$

(ㄴ) $\sqrt{0.\dot{4}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$이므로 유리수이다.

(ㄷ) 0의 제곱근은 1개이고, 음수의 제곱근은 없다.

(ㄹ) $\sqrt{(-3)^2}=3$의 제곱근은 $\pm\sqrt{3}$이다.

이상에서 옳은 것은 (ㄴ), (ㄹ)이다. 답 ④

136 전략 넓이가 a인 정사각형의 한 변의 길이 ➔ $\sqrt{a}$

풀이 정사각형의 각 변의 중점을 연결한 정사각형의 넓이는 처음 정사각형의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로 색칠한 정사각형을 □PQRS라 하면

□ABCD$=2^5\times$□PQRS$=2^5\times 2=64$

따라서 □ABCD의 한 변의 길이는

$\sqrt{64}=8$ 답 ⑤

137 전략 먼저 주어진 수의 근호를 없앤 다음 제곱근을 구한다.

$a>0$일 때, a의 양의 제곱근은 $\sqrt{a}$, a의 음의 제곱근은 $-\sqrt{a}$이다.

풀이 $(-\sqrt{16})^2=16$의 양의 제곱근은 4이므로

$a=4$

$(-\sqrt{25})^2=25$의 음의 제곱근은 -5이므로

$b=-5$ $\quad\therefore a+b=-1$ 답 -1

138 전략 $\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & (a\ge 0) \\ -a & (a<0)\end{cases}$

풀이 $a<0$이므로 $\quad -a>0$

① $-\sqrt{(-a)^2}=-(-a)=a$

② $(-\sqrt{-a})^2=-a$

③ $-\sqrt{a^2}=-(-a)=a$

④ $(\sqrt{-a})^2=-a$

⑤ $\sqrt{(-a)^2}=-a$ 답 ①, ④

139 전략 근호 안의 수를 제곱수로 나타낸 다음 근호를 없앤다.

풀이 $\sqrt{81m^2}-\sqrt{4m^2}+\sqrt{(-3m)^2}$

$=\sqrt{(9m)^2}-\sqrt{(2m)^2}+\sqrt{(-3m)^2}$

$=-9m-(-2m)+(-3m)$

$=-10m$ 답 $-10m$

$m<0$이므로 $9m<0$, $2m<0$, $-3m>0$

140 전략 a에 적당한 수를 대입하여 그 값을 구해 본다.

풀이 $0<a<1$이므로 $a=\frac{1}{4}$이라 하면

$a^2=\frac{1}{16}$, $\sqrt{a}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{a}=4$, $\frac{1}{\sqrt{a}}=2$

$\therefore a^2<a<\sqrt{a}<\frac{1}{\sqrt{a}}<\frac{1}{a}$ 답 ②

141 전략 $\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & (a\ge 0) \\ -a & (a<0)\end{cases}$

풀이 $0<a<1$에서 $\frac{1}{a}>1$이므로

$1-\frac{1}{a}<0$, $\frac{1}{a}-1>0$

$\therefore \sqrt{\left(1-\frac{1}{a}\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{1}{a}-1\right)^2}$

$=-\left(1-\frac{1}{a}\right)-\left(\frac{1}{a}-1\right)$

$=-1+\frac{1}{a}-\frac{1}{a}+1=0$ 답 0

142 전략 $\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & (a\ge 0) \\ -a & (a<0)\end{cases}$

풀이 ① $-2<x<0$이므로 $\quad 0<-x<2$

$\therefore 2<2-x<4$

$\therefore \sqrt{(2-x)^2}=2-x$

② $-2<x<0$이므로 $\quad -4<x-2<-2$

$\therefore -\sqrt{(x-2)^2}=-\{-(x-2)\}$

$=x-2$

③ $-2<y<0$이므로 $\quad 0<2+y<2$

$\therefore \sqrt{(2+y)^2}=2+y$

④ $-2<y<0$이므로 $\quad 0<-y<2$

$\therefore -\sqrt{(-y)^2}=-(-y)=y$

⑤ $-2<y<0$이므로 $\quad -4<y-2<-2$

$\therefore -\sqrt{(y-2)^2}=-\{-(y-2)\}$

$=y-2$

이때 $2<2-x<4$, $-4<x-2<-2$, $0<2+y<2$, $-2<y<0$, $-4<y-2<-2$이므로 값이 가장 큰 것은 $2-x$이다. 답 ①

$-4<x-2<y-2$
$<-2<y<0$
$<2+y<2$
$<2-x<4$

143 전략 $a<\sqrt{x}<b$ ➔ $a^2<x<b^2$ (단, $a>0$)

풀이 $1.3<\sqrt{x}<3.1$에서 $\quad 1.3^2<(\sqrt{x})^2<3.1^2$

$\therefore 1.69<x<9.61$

x가 자연수이므로 $\quad x=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 9$

따라서 $a=9$, $b=2$이므로 $\sqrt{\frac{a}{b}\times n}=\sqrt{\frac{9}{2}\times n}=3\sqrt{\frac{n}{2}}$이 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 n은 2이다.

답 2

$n=2\times m^2$ (m은 자연수) 꼴이어야 한다.

144 전략 $\sqrt{A}$가 자연수 ➔ A가 제곱수

풀이 $80x=2^4\times 5\times x$이므로 $x=5\times n^2$ (n은 자연수) 꼴이어야 한다.

따라서 가장 작은 두 자리 자연수 x는

$5\times2^2=20$ 답 ②

145 전략 $\sqrt{A}$가 유리수 ○ $A=(\text{유리수})^2$ 꼴

풀이 길이를 각각 구하면 다음과 같다.

① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{20}$ ④ $\sqrt{81}=9$ ⑤ $\sqrt{2}$

답 ④

보충학습

① 한 변의 길이가 a인 정사각형의 넓이 → a^2
② 반지름의 길이가 r인 원의 넓이 → πr^2
③ 밑면의 반지름의 길이가 r, 높이가 h인 원뿔의 부피 → $\frac{1}{3}\pi r^2h$

146 전략 제곱근표에서 처음 두 자리 수의 가로줄과 끝자리 수의 세로줄이 만나는 곳에 있는 수를 찾는다.

풀이 $a=2.452$, $b=2.490$, $c=2.536$이므로

$a-b+c=2.498$ 답 2.498

147 전략 점 B를 나타내는 점에서 오른쪽으로 $1+\sqrt{5}$만큼 떨어진 점을 찾는다.

풀이 $B(2)$이므로 점 C를 나타내는 점은 점 B에서 오른쪽으로 $1+\sqrt{5}$만큼 떨어진 점 ⑤이다. 답 ⑤

색칠한 정사각형 한 개의 넓이는 $3\times3-4\times\left(\frac{1}{2}\times2\times1\right)=5$이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{5}$이다.

148 전략 반지름의 길이가 r인 원의 둘레의 길이 ○ $2\pi r$

풀이 원의 둘레의 길이는 $2\pi\times2=4\pi$

따라서 원을 오른쪽으로 반 바퀴 굴렸을 때, 점 A에 대응하는 수는 $1+\frac{4\pi}{2}=1+2\pi$ 답 $1+2\pi$

1에 대응하는 점에서 오른쪽으로 $\frac{4\pi}{2}=2\pi$만큼 떨어진 점

149 해결 과정 $5x-4>2(x+1)$에서

$5x-4>2x+2$, $3x>6$

$\therefore x>2$ • 30% 배점

답 구하기 따라서 $x+1>0$, $3x>0$, $2-x<0$이므로

$\sqrt{4(x+1)^2}-\sqrt{9x^2}+\sqrt{(2-x)^2}$
$=\sqrt{\{2(x+1)\}^2}-\sqrt{(3x)^2}+\sqrt{(2-x)^2}$
$=2(x+1)-3x-(2-x)$
$=2x+2-3x-2+x$
$=0$ • 70% 배점

답 0

150 해결 과정 $1\le x<4$일 때, $S(x)=1$ ($1\le\sqrt{x}<2$)

$4\le x<9$일 때, $S(x)=1+2=3$ ($2\le\sqrt{x}<3$)

$9\le x<16$일 때, $S(x)=1+2+3=6$ ($3\le\sqrt{x}<4$)

$16\le x<25$일 때, $S(x)=1+2+3+4=10$ ($4\le\sqrt{x}<5$)

$x=25$일 때, $S(x)=1+2+3+4+5=15$

• 70% 배점

답 구하기 $\therefore S(1)+S(2)+S(3)+\cdots+S(25)$
$=1\times3+3\times5+6\times7+10\times9+15\times1$
$=3+15+42+90+15=165$ • 30% 배점

답 165

151 해결 과정 ① $18-x$가 0 또는 18보다 작은 제곱수이어야 하므로

$18-x=0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16$ • 50% 배점

해결 과정 ② $\therefore x=18,\ 17,\ 14,\ 9,\ 2$ • 30% 배점

답 구하기 따라서 자연수 x는 5개이다. • 20% 배점

답 5

152 해결 과정 ① $1<\sqrt{0.\dot{3}x-1}<\frac{4}{3}$에서

$0.\dot{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

$1<\sqrt{\frac{1}{3}x-1}<\frac{4}{3}$ • 30% 배점

해결 과정 ② 각 변을 제곱하면

$1<\frac{1}{3}x-1<\frac{16}{9}$, $2<\frac{1}{3}x<\frac{25}{9}$

$\therefore 6<x<\frac{25}{3}$ • 40% 배점

답 구하기 따라서 정수 x는 7, 8이므로 구하는 합은

$7+8=15$ • 30% 배점

답 15

153 해결 과정 ① (i) 음수: $-\sqrt{6}-\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$

$\sqrt{6}>\sqrt{5}$이므로 $-\sqrt{6}<-\sqrt{5}$

$\therefore -\sqrt{6}-\sqrt{3}<-\sqrt{5}$ • 30% 배점

해결 과정 ② (ii) 양수: $\sqrt{3}+3$, $\sqrt{3}+\sqrt{6}$, $2+\sqrt{3}$

$\sqrt{4}<\sqrt{6}<\sqrt{9}$이므로

$2<\sqrt{6}<3$

$\therefore 2+\sqrt{3}<\sqrt{3}+\sqrt{6}<\sqrt{3}+3$ • 40% 배점

답 구하기 (i), (ii)에서

$-\sqrt{6}-\sqrt{3}<-\sqrt{5}<2+\sqrt{3}<\sqrt{3}+\sqrt{6}<\sqrt{3}+3$

이므로 왼쪽에서 두 번째에 오는 수는 $-\sqrt{5}$이고, 오른쪽에서 두 번째에 오는 수는 $\sqrt{3}+\sqrt{6}$이다. • 30% 배점

답 $-\sqrt{5}$, $\sqrt{3}+\sqrt{6}$

154 전략 $a>0$, $b>0$일 때, $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

풀이 $\sqrt{108}=\sqrt{2^2\times3^3}=6\sqrt{3}$이므로 $x=6$

$\sqrt{500}=\sqrt{2^2\times5^3}=10\sqrt{5}$이므로 $y=10$

$\therefore \sqrt{xy}=\sqrt{6\times10}=\sqrt{2^2\times3\times5}=2\sqrt{15}$

답 $2\sqrt{15}$

155 전략 $a>0$, $b>0$일 때, $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

풀이 $\sqrt{12}\times\frac{1}{\sqrt{10}}\times\sqrt{8}\times\sqrt{30}$
$=2\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{10}}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{30}$
$=12\sqrt{2}$

이때 $12\sqrt{2}=6\sqrt{8}=4\sqrt{18}=3\sqrt{32}=2\sqrt{72}=\sqrt{288}$이므로 $a+b$의 값은

14, 22, 35, 74, 289

$12+2=14$, $6+8=14$, $4+18=22$, $3+32=35$, $2+72=74$, $1+288=289$

따라서 $a+b$의 값이 될 수 없는 것은 ④이다.

답 ④

156 전략 분모를 유리화하여 분모가 7인 분수로 변형한다.

풀이 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{14}}{7}$, $\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{\sqrt{28}}{7}$, $\frac{2}{7}=\frac{\sqrt{4}}{7}$,

$\sqrt{7}=\frac{7\sqrt{7}}{7}=\frac{\sqrt{343}}{7}$이므로

$\sqrt{7}>\frac{2}{\sqrt{7}}>\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}>\frac{2}{7}>\frac{\sqrt{2}}{7}$

따라서 네 번째에 오는 수는 $\frac{2}{7}$이다. 답 $\frac{2}{7}$

157 전략 $a>0$일 때, $\frac{b}{\sqrt{a}}=\frac{b\times\sqrt{a}}{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}=\frac{b\sqrt{a}}{a}$

풀이 $\frac{3}{\sqrt{50}}=\frac{3}{5\sqrt{2}}=\frac{3\times\sqrt{2}}{5\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{3}{10}\sqrt{2}$

$\therefore k=\frac{3}{10}$ 답 $\frac{3}{10}$

158 전략 밑면의 둘레의 길이를 이용하여 밑면의 반지름의 길이를 구한다.

풀이 밑면의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$2\pi r=4\sqrt{3}\pi \qquad \therefore r=2\sqrt{3}$

따라서 구하는 원기둥의 부피는

$\pi\times(2\sqrt{3})^2\times5\sqrt{2}=60\sqrt{2}\pi(\text{cm}^3)$

답 $60\sqrt{2}\pi$ cm^3

159 전략 $a:b=c:d$ ➡ $ad=bc$

풀이 An용지와 Bn용지의 긴 변의 길이를 각각 a_n, b_n이라 하면 A4용지와 A5용지의 닮음비는 $\sqrt{2}:1$이므로

$a_4:a_5=\sqrt{2}:1, \qquad a_4=\sqrt{2}a_5$

$\therefore a_5=\frac{1}{\sqrt{2}}a_4=\frac{\sqrt{2}}{2}a_4$

또 B5용지와 A5용지의 닮음비는 $\sqrt{1.5}:1$이므로

$b_5:a_5=\sqrt{1.5}:1, \qquad b_5:\frac{\sqrt{2}}{2}a_4=\sqrt{1.5}:1$

$\therefore b_5=\frac{\sqrt{2}}{2}a_4\times\sqrt{1.5}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{\frac{3}{2}}\times a_4=\frac{\sqrt{3}}{2}a_4$

따라서 B5용지의 긴 변의 길이는 A4용지의 긴 변의 길이의 $\frac{\sqrt{3}}{2}$배이다. 답 ③

닮은 두 도형의 닮음비는 대응변의 길이의 비이다.

160 전략 근호 안의 수를 10^2, 10^4, $\cdots$ 또는 $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^4}$, $\cdots$과의 곱으로 나타낸다.

풀이 ① $\sqrt{200}=\sqrt{2\times100}=10\sqrt{2}=14.1$

② $\sqrt{800}=\sqrt{2^3\times100}=20\sqrt{2}=28.2$

③ $\sqrt{2000}=\sqrt{20\times100}=10\sqrt{20}=44.7$

④ $\sqrt{0.02}=\sqrt{\frac{2}{100}}=\frac{\sqrt{2}}{10}=0.141$

⑤ $\sqrt{0.2}=\sqrt{\frac{20}{100}}=\frac{\sqrt{20}}{10}=0.447$ 답 ②, ⑤

두 실수 x, y에 대하여
① $x-y>0$이면 $x>y$
② $x-y=0$이면 $x=y$
③ $x-y<0$이면 $x<y$

161 해결 과정 $\frac{4\sqrt{a}}{3\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{a}\times\sqrt{6}}{3\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{6a}}{18}=\frac{2\sqrt{6a}}{9}$

• 50% 배점

답 구하기 즉 $\frac{2\sqrt{6a}}{9}=\frac{\sqrt{24}}{9}=\frac{2\sqrt{6}}{9}$이므로

$6a=6 \qquad \therefore a=1$ • 50% 배점

답 1

162 해결 과정 ① $S_4=\frac{1}{2}S_3=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}S_2$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}S_1$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}$

$=\frac{\sqrt{3}}{8}$ • 40% 배점

해결 과정 ② $\triangle$GHI의 한 변의 길이를 k라 하면

$\frac{\sqrt{3}}{4}k^2=\frac{\sqrt{3}}{8}, \qquad k^2=\frac{1}{2}$

$\therefore k=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ (\because k>0)$ • 40% 배점

답 구하기 따라서 $\triangle$GHI의 둘레의 길이는

$3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ • 20% 배점

답 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

163 전략 분모를 유리화하여 주어진 식을 간단히 한 후 무리수의 값을 대입한다.

풀이 $\frac{6}{\sqrt{48}}+\sqrt{120}-\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{6}{4\sqrt{3}}+2\sqrt{30}-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sqrt{30}-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

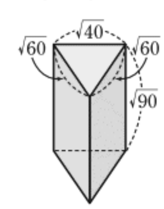
$=-\sqrt{3}+2\sqrt{30}$

$=-1.732+2\times5.477$

$=9.222$ 답 9.222

164 전략 전개도를 접어서 만든 삼각기둥에서 길이가 같은 모서리를 찾아 모든 모서리의 길이의 합을 구한다.

풀이 주어진 전개도를 접어서 만든 삼각기둥은 오른쪽 그림과 같으므로 모든 모서리의 길이의 합은



$2\sqrt{40}+4\sqrt{60}+3\sqrt{90}$

$=4\sqrt{10}+8\sqrt{15}+9\sqrt{10}$

$=13\sqrt{10}+8\sqrt{15}$

답 ②

165 전략 두 실수 a, b에 대하여 $a-b>0$ ➡ $a>b$

풀이 $a-b=(6\sqrt{2}-2)-(3\sqrt{2}+2)$

$=3\sqrt{2}-4=\sqrt{18}-\sqrt{16}>0$

이므로 $a>b$

$a-c=(6\sqrt{2}-2)-(4\sqrt{2}+1)$

$=2\sqrt{2}-3=\sqrt{8}-\sqrt{9}<0$

이므로 $a<c$

$\therefore b<a<c$ 답 ③

166 전략 분배법칙을 이용하여 괄호를 풀고 분모를 유리화하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 $\sqrt{3}(\sqrt{24}-\sqrt{3})-\dfrac{3\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}$

$=\sqrt{3}(2\sqrt{6}-\sqrt{3})-\dfrac{(3\sqrt{2}+2)\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$=6\sqrt{2}-3-3-\sqrt{2}$

$=-6+5\sqrt{2}$

$\dfrac{6+2\sqrt{2}}{2}=3+\sqrt{2}$

따라서 $a=-6$, $b=5$이므로

$a-b=-11$ 답 ①

167 전략 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$임을 이용한다.

풀이 $a=3-\sqrt{2}$, $b=4+\sqrt{2}$이므로

$ab=(3-\sqrt{2})(4+\sqrt{2})$

$=12+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}-2$

$=10-\sqrt{2}$ 답 ②

168 전략 a, b가 유리수이고 $\sqrt{m}$이 무리수일 때, $a+b\sqrt{m}$이 유리수 ➡ $b=0$

풀이 $\sqrt{3}(5\sqrt{3}-6)-a(1-\sqrt{3})$

$=15-6\sqrt{3}-a+a\sqrt{3}$

$=15-a+(a-6)\sqrt{3}$

이것이 유리수가 되려면 $a-6=0$이어야 하므로

$a=6$ 답 ③

169 전략 a, b, c, d가 유리수이고 $\sqrt{m}$이 무리수일 때, $a+b\sqrt{m}=c+d\sqrt{m}$ ➡ $a=c$, $b=d$

풀이 $(2,\ 5)\times(a,\ b)=(2+5\sqrt{2})\times(a+b\sqrt{2})$

$=2a+2b\sqrt{2}+5a\sqrt{2}+10b$

$=2a+10b+(5a+2b)\sqrt{2}$

이때 $(22,\ -14)=22-14\sqrt{2}$이므로

$2a+10b+(5a+2b)\sqrt{2}=22-14\sqrt{2}$

$\therefore 2a+10b=22,\ 5a+2b=-14$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=3$

$\therefore a+b=-1$ 답 ②

$\begin{cases}2a+10b=22 & \cdots ㉠\\ 5a+2b=-14 & \cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서

$a+5b=11$ $\cdots$ ㉢

㉢×5−㉡을 하면

$23b=69$ $\therefore b=3$

$b=3$을 ㉢에 대입하면

$a+15=11$

$\therefore a=-4$

170 전략 나눗셈은 역수의 곱셈으로 고쳐서 계산한다.

풀이 $\dfrac{8}{\sqrt{5}}+\sqrt{\dfrac{21}{2}}\div\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}}-\sqrt{(-2)^2}\times(-\sqrt{3})^2$

$=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}+\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{15}}-2\times3$

$=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}+\dfrac{7}{\sqrt{5}}-6$

$=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}+\dfrac{7\sqrt{5}}{5}-6$

$=3\sqrt{5}-6$ 답 $3\sqrt{5}-6$

$a>0$일 때,

$\dfrac{b}{\sqrt{a}}=\dfrac{b\times\sqrt{a}}{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}$

$=\dfrac{b\sqrt{a}}{a}$

171 전략 $\sqrt{3}-\sqrt{5}$를 하나의 문자로 생각하고 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용한다.

풀이 $(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$

$=\{\sqrt{2}-(\sqrt{3}-\sqrt{5})\}\{\sqrt{2}+(\sqrt{3}-\sqrt{5})\}$

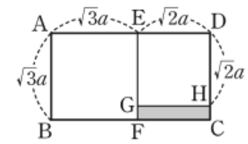
$=(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$

$=2-(8-2\sqrt{15})$

$=-6+2\sqrt{15}$ 답 $-6+2\sqrt{15}$

172 전략 닮은 두 도형의 넓이의 비가 $m^2:n^2$ ➡ 닮음비는 $m:n$ (단, $m>0$, $n>0$)

풀이 두 정사각형 ABFE와 EGHD의 넓이의 비가 $3:2$이므로 닮음비는 $\sqrt{3}:\sqrt{2}$이다.



오른쪽 그림과 같이 $\overline{AE}=\sqrt{3}a$, $\overline{DE}=\sqrt{2}a$라 하면 □ABCD의 둘레의 길이가 20이므로

$2(\sqrt{3}a+\sqrt{3}a+\sqrt{2}a)=20$

$(2\sqrt{3}+\sqrt{2})a=10$

$\therefore a=\dfrac{10}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{10(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

$=\dfrac{10(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{10}=2\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$\overline{GH}=\sqrt{2}a$, $\overline{GF}=\sqrt{3}a-\sqrt{2}a$이므로 □GFCH의 둘레의 길이는

$2(\sqrt{2}a+\sqrt{3}a-\sqrt{2}a)=2\sqrt{3}a$

$=2\sqrt{3}(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$=12-2\sqrt{6}$ 답 ①

173 전략 각 정사각형의 한 변의 길이를 구하여 직각이등변삼각형 A, B, C, D의 넓이를 각각 구한다.

풀이 네 정사각형의 한 변의 길이는 각각

2, $(1+\sqrt{5})-2=\sqrt{5}-1$, $2-(\sqrt{5}-1)=3-\sqrt{5}$,

$(\sqrt{5}-1)-(3-\sqrt{5})=2\sqrt{5}-4$

A의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times2^2=2$

B의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{5}-1)^2=3-\sqrt{5}$

C의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times(3-\sqrt{5})^2=7-3\sqrt{5}$

D의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{5}-4)^2=18-8\sqrt{5}$

따라서 구하는 넓이의 합은

$2+(3-\sqrt{5})+(7-3\sqrt{5})+(18-8\sqrt{5})$

$=30-12\sqrt{5}$ 답 $30-12\sqrt{5}$

174 전략 $0<x<1$ ➡ $0<x^n<1$ (단, n은 자연수)

풀이 $3<\sqrt{10}<4$이므로 $0<\sqrt{10}-3<1$

$\therefore 0<(\sqrt{10}-3)^{100}<1$

$(\sqrt{10}-3)^{100}$의 정수 부분은 0이다.

따라서 $k=(\sqrt{10}-3)^{100}$이므로

$(\sqrt{10}+3)^{100}k=(\sqrt{10}+3)^{100}(\sqrt{10}-3)^{100}$

$=\{(\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3)\}^{100}$

$=(10-9)^{100}$

$=1^{100}=1$ 답 1

n이 자연수일 때,

$a^nb^n=(ab)^n$

I 제곱근과 실수

175 전략 x, y의 값을 대입하여 정리한 후 분모를 유리화한다.

풀이 $\frac{y}{x-2}+\frac{x}{y-2}$

$=\frac{4-\sqrt{2}}{(4+\sqrt{2})-2}+\frac{4+\sqrt{2}}{(4-\sqrt{2})-2}$

$=\frac{4-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}+\frac{4+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

$=\frac{(4-\sqrt{2})(2-\sqrt{2})+(4+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$

$=\frac{8-4\sqrt{2}-2\sqrt{2}+2+8+4\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2}{4-2}$

$=\frac{20}{2}=10$ 답 ④

다른풀이 $\frac{y}{x-2}+\frac{x}{y-2}$

$=\frac{y(y-2)+x(x-2)}{(x-2)(y-2)}$

$=\frac{y^2-2y+x^2-2x}{xy-2x-2y+4}$

$=\frac{(x+y)^2-2xy-2(x+y)}{xy-2(x+y)+4}$

이때 $x+y=(4+\sqrt{2})+(4-\sqrt{2})=8$,

$xy=(4+\sqrt{2})(4-\sqrt{2})=14$이므로 주어진 식의 값은

$\frac{8^2-2\times14-2\times8}{14-2\times8+4}=\frac{20}{2}=10$

176 전략 먼저 x의 분모를 유리화하여 $x=a+\sqrt{b}$ 꼴로 변형한다.

풀이 $x=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=7-4\sqrt{3}$이므로

$x-7=-4\sqrt{3}$

양변을 제곱하면

$(x-7)^2=(-4\sqrt{3})^2$

$x^2-14x+49=48$

$\therefore x^2-14x=-1$

$\therefore x^2-13x+9=x^2-14x+x+9$

$=-1+7-4\sqrt{3}+9$

$=15-4\sqrt{3}$ 답 ②

177 해결 과정 ① $A=(a+2+a\sqrt{3})\times3\sqrt{3}$

$=3a\sqrt{3}+6\sqrt{3}+9a$

$=9a+(3a+6)\sqrt{3}$ • 40% 배점

해결 과정 ② A가 유리수이므로

$3a+6=0$

$\therefore a=-2$ • 40% 배점

답 구하기 $\therefore A=9a=9\times(-2)$

$=-18$ • 20% 배점

답 -18

> a, b가 유리수이고 $\sqrt{m}$이 무리수일 때, $a+b\sqrt{m}$이 유리수이면 $\rightarrow b=0$

178 해결 과정 $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$이므로

$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

$=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$

$=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ • 40% 배점

답 구하기 $\therefore$ (주어진 식)

$=(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{4}+\sqrt{3})$

$-(\sqrt{5}+\sqrt{4})+(\sqrt{6}+\sqrt{5})-(\sqrt{7}+\sqrt{6})$

$=1-\sqrt{7}$ • 60% 배점

답 $1-\sqrt{7}$

> $n<\sqrt{a}<n+1$을 만족시키는 자연수 n, $n+1$을 찾는다.

179 해결 과정 ① $-2\sqrt{2}=-\sqrt{8}$이고 $2<\sqrt{8}<3$이므로

$-3<-2\sqrt{2}<-2$

$\therefore A=-3$ • 40% 배점

> $-\sqrt{9}<-\sqrt{8}<-\sqrt{4}$로 8은 4보다는 9에 더 가까우므로 $-\sqrt{8}$에 가장 가까운 정수는 -3이다.

해결 과정 ② $5<\sqrt{35}<6$이므로

$B=6$ • 40% 배점

> 35는 25보다는 36에 더 가까우므로 $\sqrt{35}$에 가장 가까운 정수는 6이다.

답 구하기 $\therefore A+B=3$ • 20% 배점

답 3

180 해결 과정 ① $a=\sqrt{3}-\sqrt{2}>0$이므로

$a+\frac{1}{a}>0$ • 20% 배점

해결 과정 ② $a=\sqrt{3}-\sqrt{2}$에서

$\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

이므로 $a<\frac{1}{a}$ $\therefore a-\frac{1}{a}<0$ • 30% 배점

답 구하기 $\therefore \sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}$

$=a+\frac{1}{a}-\left(a-\frac{1}{a}\right)=\frac{2}{a}$

$=2(\sqrt{3}+\sqrt{2})=2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$ • 50% 배점

답 $2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

181 해결 과정 ① $3<2\sqrt{3}<4$이므로

> $\sqrt{9}<\sqrt{12}<\sqrt{16}$

$-4<-2\sqrt{3}<-3$

$\therefore 1<5-2\sqrt{3}<2$ • 40% 배점

해결 과정 ② 따라서 $a=1$이므로

$b=(5-2\sqrt{3})-1=4-2\sqrt{3}$ • 30% 배점

답 구하기 $\therefore a+\sqrt{3}b=1+\sqrt{3}(4-2\sqrt{3})$

$=1+4\sqrt{3}-6$

$=-5+4\sqrt{3}$ • 30% 배점

답 $-5+4\sqrt{3}$

182 해결 과정 ① $x=2-\sqrt{3}$에서

$x-2=-\sqrt{3}$ • 30% 배점

해결 과정 ② 양변을 제곱하면

$(x-2)^2=(-\sqrt{3})^2$, $x^2-4x+4=3$

$\therefore x^2-4x=-1$ • 40% 배점

답 구하기 $\therefore x^2-4x-5=-1-5=-6$ • 30% 배점

답 -6

교과서 속 창의유형

본책 35~36쪽

183 [문제 해결 길잡이]

❶ 연속인 두 자연수를 n, $n+1$로 놓고 자연수 x의 양의 제곱근이 n과 $n+1$ 사이에 있을 때의 부등식을 세운다.
❷ ❶의 부등식을 만족시키는 자연수 x의 개수가 100임을 이용하여 방정식을 세운다.
❸ ❷의 방정식을 풀어 연속인 두 자연수를 구한다.

풀이 연속인 두 자연수를 n, $n+1$이라 하고 자연수 x의 양의 제곱근이 n과 $n+1$ 사이에 있다고 하면

$n<\sqrt{x}<n+1$ ❶

이 부등식의 각 변을 제곱하면

$n^2<x<(n+1)^2$

이 부등식을 만족시키는 자연수 x의 개수가 100이므로

$(n+1)^2-n^2-1=100$ ❷

$n^2+2n+1-n^2-1=100$

$2n=100$

$\therefore n=50$

따라서 구하는 연속인 두 자연수는 50, 51이다. ❸

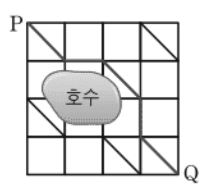
답 50, 51

참고 연속인 두 자연수가 50, 51이고 $50=\sqrt{2500}$, $51=\sqrt{2601}$이므로 자연수 x는 2501, 2502, 2503, $\cdots$, 2600의 100개이다.

184 [문제 해결 길잡이]

❶ P에서 Q까지 최단 거리로 가는 길을 찾는다.
❷ 한 변의 길이가 a인 정사각형의 대각선의 길이가 $a\sqrt{2}$임을 이용하여 최단 거리로 가는 길의 길이를 구한다.

풀이 P에서 Q까지 최단 거리로 가는 길은 오른쪽 그림에서 색칠한 선과 같다. ❶



따라서 구하는 길이는

$a\sqrt{2}+a+a\sqrt{2}+a+a\sqrt{2}$

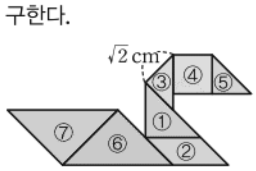
$=(2+3\sqrt{2})a$ ❷

답 풀이 참조

185 [문제 해결 길잡이]

❶ 주어진 모양을 이루는 각 칠교 조각이 어떤 조각인지 그림에 나타내고 한 칠교 조각의 한 변을 기준으로 시곗바늘이 도는 반대 방향으로 변의 길이를 더한다.
❷ 주어진 모양의 둘레의 길이를 구한다.

풀이 오른쪽 그림에서 길이가 $\sqrt{2}$cm인 변부터 시곗바늘이 도는 반대 방향으로 변의 길이를 더하면 구하는 둘레의 길이는 ❶



$\sqrt{2}+2+(2\sqrt{2}-\sqrt{2})+4+2\sqrt{2}+4+2+\sqrt{2}$
$+(2\sqrt{2}-\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})+\sqrt{2}+\sqrt{2}+2+\sqrt{2}$

$=16+8\sqrt{2}$ (cm) ❷

답 $(16+8\sqrt{2})$ cm

Ⅱ 인수분해

04 | 인수분해

개념&기출유형

본책 38~41쪽

186 ⑤ $15xy^2+10x^2y^3$의 인수는 여러 개이다. 답 ⑤

5, x, y, $3+2xy$, $5x$, $5y$, $5(3+2xy)$, xy, $x(3+2xy)$, y^2, $y(3+2xy)$, $5xy$, $5x(3+2xy)$, $\cdots$

187 $2xy(x-2y)-xy(x-y)$

$=xy(2x-4y-x+y)$

$=xy(x-3y)$ 답 ②

188 $12x^2+12xy+3y^2=3(4x^2+4xy+y^2)$

$=3(2x+y)^2$ 답 ③

인수가 될 수 있는 것은 3, $2x+y$, $3(2x+y)$, $(2x+y)^2$, $3(2x+y)^2$ 등이다.

189 $4x^2-ax+1$이 완전제곱식이 되려면

$(-a)^2=4\times4\times1$, $a^2=16$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

x^2-6x+b가 완전제곱식이 되려면

$b=\left(\dfrac{-6}{2}\right)^2=9$

$\therefore b-a=5$ 답 5

다른풀이 $4x^2-ax+1=(2x\pm1)^2$이므로

$-ax=\pm2\times2x\times1=\pm4x$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

190 $-25x^2+49y^2=-(25x^2-49y^2)$

$=-\{(5x)^2-(7y)^2\}$

$=-(5x+7y)(5x-7y)$

따라서 $a=-1$, $b=5$, $c=7$이므로

$abc=-35$ 답 -35

191 ④ $10x^2+9x-9=(2x+3)(5x-3)$

⑤ $(x+1)(x+2)-6=x^2+3x+2-6$

$=x^2+3x-4$

$=(x+4)(x-1)$ 답 ④

192 $5x^2+kx-1=(x-1)(5x-m)$으로 놓으면

x^2의 계수가 5이므로 곱해서 5가 되는 정수를 찾는다.

$5x^2+kx-1=5x^2-(m+5)x+m$

양변의 계수를 비교하면

$k=-m-5$, $-1=m$

$\therefore m=-1$, $k=-4$ 답 -4

참고 $5x^2-4x-1=(5x+1)(x-1)$에서 $5x^2-4x-1$이 $x-1$을 인수로 가짐을 확인할 수 있다.

193 $x^3-2x^2-4(x-2)=x^2(x-2)-4(x-2)$

$=(x-2)(x^2-4)$

$=(x-2)(x+2)(x-2)$

$=(x+2)(x-2)^2$

답 ⑤

194 $2x-1=A$로 치환하면

$$(\text{좌변})=6A^2-A-2=(2A+1)(3A-2)$$
$$=(4x-2+1)(6x-3-2)$$
$$=(4x-1)(6x-5)$$

따라서 $a=-1$, $b=-5$이므로

$a+b=-6$ 답 -6

195 $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)+24$

$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$

이때 $x^2+x=A$로 치환하면

$$(\text{주어진 식})=(A-2)(A-12)+24$$
$$=A^2-14A+48$$
$$=(A-6)(A-8)$$
$$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$$
$$=(x+3)(x-2)(x^2+x-8)$$

답 ③, ④

$-1+2=1$, $-3+4=1$과 같이 상수항의 합이 같도록 2개씩 묶는다.

196 $x^2=X$, $y^2=Y$로 치환하면

$x^4-5x^2y^2+4y^4$

$=X^2-5XY+4Y^2$

$=(X-Y)(X-4Y)$

$=(x^2-y^2)(x^2-4y^2)$

$=(x+y)(x-y)(x+2y)(x-2y)$

답 $(x+y)(x-y)(x+2y)(x-2y)$

197 $ab+a+b+1=a(b+1)+(b+1)$

$=(a+1)(b+1)$

$a^3-a^2b-a+b=a^2(a-b)-(a-b)$

$=(a^2-1)(a-b)$

$=(a+1)(a-1)(a-b)$

따라서 두 다항식의 공통인수는 $a+1$이다. 답 ①

198 $36-x^2-9y^2+6xy=36-(x^2-6xy+9y^2)$

$=6^2-(x-3y)^2$

$=(6+x-3y)(6-x+3y)$

답 ②

199 $4x^2+4xy+y^2-9z^2$

$=(4x^2+4xy+y^2)-9z^2$

$=(2x+y)^2-(3z)^2$

$=(2x+y+3z)(2x+y-3z)$

이므로

$a=2$, $b=3$, $c=2$, $d=-3$

또는 $a=2$, $b=-3$, $c=2$, $d=3$

$\therefore a+b+c+d=4$ 답 4

200 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

(주어진 식)

$=-4y(2x+1)+(2x^2+7x+3)$

$=-4y(2x+1)+(2x+1)(x+3)$

$=(2x+1)(x-4y+3)$ 답 ④

문자가 여러 개인 다항식은 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

차수가 가장 낮은 문자는 z이다.

201 주어진 식을 z에 대하여 내림차순으로 정리하면

(주어진 식)

$=-z(x+y)+(x^2-xy-2y^2)$

$=-z(x+y)+(x+y)(x-2y)$

$=(x+y)(x-2y-z)$ 답 ③

202 $a^2+b^2-c^2+2ab-2c-1$

$=(a^2+2ab+b^2)-(c^2+2c+1)$

$=(a+b)^2-(c+1)^2$

$=(a+b+c+1)(a+b-c-1)$

따라서 구하는 두 일차식의 합은

$(a+b+c+1)+(a+b-c-1)=2a+2b$

답 $2a+2b$

203 $47^2+6\times47+3^2=47^2+2\times47\times3+3^2$

$=(47+3)^2$

따라서 가장 알맞은 인수분해 공식은 ①이다. 답 ①

인수분해 공식 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용한다.

204 $52.5^2-47.5^2=(52.5+47.5)(52.5-47.5)$

$=100\times5=500$ 답 ③

205 $A=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{(13+5)(13-5)}$

$=\sqrt{18\times8}=\sqrt{144}=12$

$B=2.25^2-0.5\times2.25+0.25^2$

$=2.25^2-2\times2.25\times0.25+0.25^2$

$=(2.25-0.25)^2=2^2=4$ 답 $A=12$, $B=4$

인수분해 공식 $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$을 이용한다.

206 $x=1+\sqrt{3}$, $y=1-\sqrt{3}$이므로

$x+y=2$, $x-y=2\sqrt{3}$, $xy=-2$

$\therefore x^3y-xy^3=xy(x^2-y^2)=xy(x+y)(x-y)$

$=-2\times2\times2\sqrt{3}=-8\sqrt{3}$ 답 ①

207 $(\text{주어진 식})=\dfrac{x^2(x-3)-(x-3)}{(x-3)(x+1)}$

$=\dfrac{(x-3)(x^2-1)}{(x-3)(x+1)}$

$=\dfrac{(x-3)(x+1)(x-1)}{(x-3)(x+1)}$

$=x-1=(2-\sqrt{3})-1$

$=1-\sqrt{3}$ 답 ②

$x=2-\sqrt{3}$을 대입한다.

208 $4a^2-b^2-6a-3b$

$=(4a^2-b^2)-3(2a+b)$

$=(2a+b)(2a-b)-3(2a+b)$

$=(2a+b)(2a-b-3)$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{3}-3\right)=\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{8}{3}\right)$

$=-\dfrac{4}{3}$ 답 $-\dfrac{4}{3}$

$2a+b=\dfrac{1}{2}$, $2a-b=\dfrac{1}{3}$을 대입한다.

참고 $2a+b=\dfrac{1}{2}$, $2a-b=\dfrac{1}{3}$을 연립하여 a, b의 값을 구한 후 주어진 식에 대입해도 되지만 계산이 복잡해진다.

209 $x^2-y^2-x+7y-12$
$=x^2-x-(y^2-7y+12)$
$=x^2-x-(y-3)(y-4)$
$=\{x-(y-3)\}\{x+(y-4)\}$
$=(x-y+3)(x+y-4)$
$=(-1-\sqrt{3}+3)(6+\sqrt{3}-4)$
$=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$ 답 ③

$x+y=6+\sqrt{3}$, $y-x=1+\sqrt{3}$을 대입한다.

내신 만점 도전하기 본책 42~44쪽

210 전략 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
풀이 $x^2+Ax+\frac{16}{9}=(x+B)^2$에서
$\frac{16}{9}=B^2$ $\therefore B=\frac{4}{3}$ ($\because B>0$)
$Ax=2\times x\times B$이므로 $A=2B=\frac{8}{3}$
$\therefore A+B=4$ 답 4
다른풀이 $\frac{16}{9}=\left(\frac{A}{2}\right)^2$이므로 $A^2=\frac{64}{9}$
$\therefore A=\frac{8}{3}$ ($\because A>0$)

211 전략 이차식 ax^2+bx+c가 완전제곱식이 되기 위한 조건 ➡ $b^2=4ac$
풀이 $9x^2-(m-2)x+4$가 완전제곱식이 되려면
$\{-(m-2)\}^2=4\times9\times4$
$(m-2)^2=144=12^2$, $m-2=\pm12$
$\therefore m=14$ ($\because m>0$) 답 ④

$m-2=12$이면 $m=14$
$m-2=-12$이면 $m=-10$

다른풀이 $9x^2-(m-2)x+4=(3x\pm2)^2$이므로
$-(m-2)x=\pm2\times3x\times2=\pm12x$
$m-2=\pm12$ $\therefore m=14$ ($\because m>0$)

근호 안의 식을 인수분해한 후 부호에 주의하여 근호를 없앤다.

212 해결 과정 ① $0<x<1$이므로
$-x<0$, $x-\frac{1}{x}<0$, $x+\frac{1}{x}>0$ • 20% 배점

$0<x<1$이므로 $\frac{1}{x}>1$ $\therefore x-\frac{1}{x}<0$

해결 과정 ② 이때
$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=x^2+\frac{1}{x^2}-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$,
$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4=x^2+\frac{1}{x^2}+2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$
이므로 • 30% 배점
답 구하기 (주어진 식)
$=2\sqrt{(-x)^2}+2\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}-2\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}$
$=2x+2\left\{-\left(x-\frac{1}{x}\right)\right\}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=2x-2x+\frac{2}{x}-2x-\frac{2}{x}$
$=-2x$ • 50% 배점
답 $-2x$

$\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & (a\ge0) \\ -a & (a<0)\end{cases}$

213 전략 n^3-n을 인수분해한 후 각 인수가 어떤 수의 배수인지 알아본다.
풀이 $n^3-n=n(n^2-1)=n(n+1)(n-1)$
$=(n-1)n(n+1)$
n이 2 이상의 자연수이므로 $(n-1)n(n+1)$은 연속하는 세 자연수의 곱이다.
그런데 연속하는 세 자연수에는 2의 배수와 3의 배수가 적어도 하나씩 존재하므로 n^3-n은 항상 2의 배수이면서 3의 배수, 즉 6의 배수이다.
따라서 k의 값 중 가장 큰 값은 6이다. 답 6

예를 들면 (1, 2, 3), (2, 3, 4), ⋯, (10, 11, 12)와 같이 2의 배수와 3의 배수가 적어도 하나씩 존재한다.

214 전략 $mx+n(m\neq0)$이 이차식 ax^2+bx+c의 인수이면 $ax^2+bx+c=(mx+n)\left(\frac{a}{m}x+l\right)$로 놓고 양변의 계수를 비교한다.
풀이 $x^2+x+a=(x-4)(x+m)$으로 놓으면
$m-4=1$, $-4m=a$
$\therefore m=5$, $a=-20$
$3x^2+bx-4=(x-4)(3x+n)$으로 놓으면
$n-12=b$, $-4n=-4$
$\therefore n=1$, $b=-11$
$\therefore a-b=-9$ 답 ②

$(x-4)(x+m)$
$=x^2+(m-4)x-4m$

$(x-4)(3x+n)$
$=3x^2+(n-12)x-4n$

215 해결 과정 ① 유리가 잘못 본 식은
$(2x+3)(x-4)=2x^2-5x-12$
이므로 처음 이차식의 x의 계수는 -5, 상수항은 -12이다. • 40% 배점
해결 과정 ② 또 윤아가 잘못 본 식은
$(x+6)(3x-2)=3x^2+16x-12$
이므로 처음 이차식의 x^2의 계수는 3, 상수항은 -12이다. • 40% 배점
답 구하기 따라서 처음 이차식은 $3x^2-5x-12$이므로 이 식을 인수분해하면
$3x^2-5x-12=(3x+4)(x-3)$ • 20% 배점
답 $(3x+4)(x-3)$

216 해결 과정 ① 윗변의 길이를 X라 하면 아랫변의 길이는 $X+6$이므로 사다리꼴의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\{X+(X+6)\}\times(x-2)=(X+3)(x-2)$ • 50% 배점

(아랫변의 길이) $-$(윗변의 길이)$=6$이므로 (아랫변의 길이) $=X+6$

해결 과정 ② 이때 주어진 사다리꼴의 넓이가 $2x^2+7x-22$이므로
$2x^2+7x-22=(2x+11)(x-2)$ • 30% 배점
답 구하기 즉 $X+3=2x+11$이므로
$X=2x+8$
따라서 윗변의 길이는 $2x+8$이다. • 20% 배점
답 $2x+8$

217 전략 $x+y=A$로 치환하여 인수분해한 후 식의 값이 소수가 되기 위한 조건을 생각한다.
풀이 $x+y=A$로 치환하면

Ⅱ 인수분해

$(\text{주어진 식})=A^2+2A-63$
$=(A+9)(A-7)$
$=(x+y+9)(x+y-7)$

이때 $x+y$는 자연수이므로 위의 식의 값이 소수가 되려면

x, y가 자연수이므로 $x+y$도 자연수이다.

$x+y-7=1$ $\quad\therefore x+y=8$

$x\ge1, y\ge1$에서 $x+y\ge2$이므로 $x+y+9\ge11$

$x+y=8$을 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3),$
$(6, 2), (7, 1)$의 7개

또 주어진 식의 값은 $x+y+9=8+9=17$이므로 구하는 소수는 17이다. 답 7, 17

218 전략 공통부분이 생기도록 적당히 묶어 전개한 후 공통부분을 치환하여 인수분해한다.

풀이 $(x^2+5x+6)(x^2-3x+2)-60$
$=(x+2)(x+3)(x-1)(x-2)-60$
$=\{(x+2)(x-1)\}\{(x+3)(x-2)\}-60$
$=(x^2+x-2)(x^2+x-6)-60$

$x^2+x=A$로 치환하면

$(\text{주어진 식})=(A-2)(A-6)-60$
$=A^2-8A-48$
$=(A-12)(A+4)$
$=(x^2+x-12)(x^2+x+4)$
$=(x+4)(x-3)(x^2+x+4)$ 답 ③

219 해결 과정 ① $x(x+2)(x+4)(x+6)+a$
$=\{x(x+6)\}\{(x+2)(x+4)\}+a$
$=(x^2+6x)(x^2+6x+8)+a$

주어진 식이 완전제곱식이 되려면 공통부분을 치환한 식도 완전제곱식이어야 한다.

$x^2+6x=A$로 치환하면

$(\text{주어진 식})=A(A+8)+a$
$=A^2+8A+a$ • 40% 배점

해결 과정 ② 이 식이 완전제곱식이어야 하므로

x^2+ax+b가 완전제곱식이 되기 위한 조건 $\rightarrow b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$

$a=\left(\frac{8}{2}\right)^2=16$ • 20% 배점

해결 과정 ③ $\therefore (\text{주어진 식})=A^2+8A+16$
$=(A+4)^2$
$=(x^2+6x+4)^2$ • 20% 배점

답 구하기 따라서 $a=16$, $b=6$, $c=4$이므로

$a+b+c=26$ • 20% 배점

답 26

220 전략 $x^2=X$로 치환하여 인수분해한다.

풀이 $x^2=X$로 치환하면

$4x^4-5x^2+1=4X^2-5X+1$
$=(X-1)(4X-1)$
$=(x^2-1)(4x^2-1)$
$=(x+1)(x-1)(2x+1)(2x-1)$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

따라서 구하는 네 개의 일차식의 합은

$(x+1)+(x-1)+(2x+1)+(2x-1)=6x$

답 $6x$

보충학습

ax^4+bx^2+c와 같이 짝수 차수의 항으로만 이루어진 다항식은 $x^2=X$로 치환하여 인수분해한다.

221 전략 공통부분이 생기도록 적당히 묶어 전개한 후 공통부분을 치환하여 인수분해한다.

풀이 $(xy+1)(x-1)(y-1)+xy$
$=(xy+1)(xy-x-y+1)+xy$

$xy+1=A$로 치환하면

$(\text{주어진 식})=A(A-x-y)+xy$
$=A^2-(x+y)A+xy$
$=(A-x)(A-y)$
$=(xy-x+1)(xy-y+1)$

답 $(xy-x+1)(xy-y+1)$

222 해결 과정 ① $xy-3x-3y+2=0$에서

등식의 양변에 7을 더한다.

$x(y-3)-3(y-3)=7$
$\therefore (x-3)(y-3)=7$ • 40% 배점

해결 과정 ② x, y가 정수이면 $x-3$, $y-3$도 정수이므로 정수 x, y를 구하면 다음 표와 같다.

$x-3$	1	7	-1	-7
$y-3$	7	1	-7	-1

→

x	4	10	2	-4
y	10	4	-4	2

• 40% 배점

답 구하기 따라서 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(4, 10), (10, 4), (2, -4), (-4, 2)$의 4개이다. • 20% 배점

답 4

만점비법

위와 같이 등식의 좌변이 인수분해가 되지 않는 경우에는 양변에 적당한 상수를 더하거나 빼서 좌변이 인수분해되도록 식을 변형한다.

223 전략 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

풀이 $a^2+ab+a-b-2=b(a-1)+(a^2+a-2)$
$=b(a-1)+(a+2)(a-1)$
$=(a-1)(a+b+2)$

$a^2-2ab+2b-a=-2b(a-1)+(a^2-a)$
$=-2b(a-1)+a(a-1)$
$=(a-1)(a-2b)$

따라서 공통인수는 $a-1$이다. 답 ①

224 전략 문자가 여러 개이고 차수가 같은 식 ➡ 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

풀이 $abc-ab-ac+a-bc+b+c-1$
$=a(bc-b-c+1)-(bc-b-c+1)$
$=(a-1)(bc-b-c+1)$
$=(a-1)\{b(c-1)-(c-1)\}$
$=(a-1)(b-1)(c-1)$ 답 ⑤

225 전략 문자가 여러 개이고 차수가 같은 식 ➡ 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

풀이 $2x^2+3xy+y^2-5x-4y+3$
$=2x^2+(3y-5)x+(y^2-4y+3)$
$=2x^2+(3y-5)x+(y-1)(y-3)$
$=(2x+y-3)(x+y-1)$
따라서 $a=1,\ b=-3,\ c=1,\ d=-1$이므로
$a+b+c+d=-2$ 답 -2

226 전략 $2013=A$로 놓고 주어진 식을 인수분해한다.

풀이 $2013=A$로 놓으면
$2013\times2017+4=A(A+4)+4$
$=A^2+4A+4$
$=(A+2)^2$
$=(2013+2)^2$
$=2015^2$
따라서 어떤 자연수는 2015이다. 답 2015

227 전략 $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$를 이용하여 수를 계산한다.

풀이 $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{8^2}\right)\left(1-\frac{1}{9^2}\right)$
$=\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\right\}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\right\}$
$\cdots\left\{\left(1-\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\right\}\left\{\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\right\}$
$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{7}{8}\times\frac{9}{8}\times\frac{8}{9}\times\frac{10}{9}$
$=\frac{1}{2}\times\frac{10}{9}=\frac{5}{9}$ 답 ③

228 전략 $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$를 이용하여 주어진 식을 변형한다.

풀이 $1^2-3^2+5^2-7^2+9^2-11^2+13^2-15^2+17^2-19^2$
$=(1^2-3^2)+(5^2-7^2)+(9^2-11^2)$
$+(13^2-15^2)+(17^2-19^2)$
$=(1-3)(1+3)+(5-7)(5+7)$
$+\cdots+(17-19)(17+19)$
$=-2(1+3)+(-2)(5+7)+\cdots+(-2)(17+19)$
$=-2(1+3+5+7+9+11+13+15+17+19)$
$=-2\times(20\times5)$
$=-200$ 답 -200

계산이 편리하도록 적당한 항을 2개씩 묶어 계산한다.

$1+19=3+17=5+15$
$=7+13=9+11$
$=20$

229 전략 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용하여 주어진 수를 소인수분해한다.

풀이 $3^8-1=(3^4)^2-1^2$
$=(3^4+1)(3^4-1)$
$=(3^4+1)(3^2+1)(3^2-1)$
$=(3^4+1)(3^2+1)(3+1)(3-1)$
$=82\times10\times4\times2$
$=2\times41\times2\times5\times2^2\times2$
$=2^5\times5\times41$

$3^4-1=(3^2)^2-1^2$

따라서 3^8-1의 약수의 개수는
$(5+1)\times(1+1)\times(1+1)=24$ 답 ⑤

보충학습
자연수 N이 $N=a^m\times b^n$ (a, b는 서로 다른 소수, m, n은 자연수)으로 소인수분해될 때, N의 약수의 개수는
→ $(m+1)(n+1)$

230 해결 과정 ① $x^2-49+14y-y^2$
$=x^2-(y^2-14y+49)$
$=x^2-(y-7)^2$
$=(x+y-7)(x-y+7)$ • 30% 배점

해결 과정 ② 이때
$x=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1,$
$y=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1$
이므로
$x+y=2\sqrt{2},\ x-y=2$ • 30% 배점

해결 과정 ③ $\therefore$ (주어진 식)$=(2\sqrt{2}-7)(2+7)$
$=9(2\sqrt{2}-7)$
$=18\sqrt{2}-63$ • 30% 배점

답 구하기 따라서 $a=18,\ b=-63$이므로
$a-b=81$ • 10% 배점
답 81

보충학습
분모의 유리화
$a>0,\ b>0$일 때
① $\frac{b}{\sqrt{a}}=\frac{b\times\sqrt{a}}{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}=\frac{b\sqrt{a}}{a}$
② $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$
(단, $a\neq b$)

$a>0,\ b>0$일 때
① $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
② $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

231 전략 x^2+y^2 또는 xy가 인수가 되도록 식을 변형한다.

풀이 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=10+2\times4=18$
이므로
$x+y=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ ($\because$ $x>0,\ y>0$)
$\therefore x^3+x^2y+xy^2+y^3=x^2(x+y)+y^2(x+y)$
$=(x+y)(x^2+y^2)$
$=3\sqrt{2}\times10$
$=30\sqrt{2}$ 답 ③

$x>0,\ y>0$이면
$x+y>0$

232 전략 주어진 등식을 변형하여 $x+y$의 값을 구한다.

풀이 $x^2y+xy^2+2(x+y)=xy(x+y)+2(x+y)$
$=(x+y)(xy+2)$
$=7(x+y)$
따라서 $7(x+y)=35$이므로 $x+y=5$
$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=5^2-2\times5=15$ 답 ⑤

$xy=5$를 대입한다.

233 해결 과정 ① $1<\sqrt{2}<2$이므로

$x=\sqrt{2}-1$ • 30% 배점

(소수 부분) $=\sqrt{2}-$(정수 부분)

해결 과정 ② $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2+1}$

$=\dfrac{x^2(x-1)+(x-1)}{x^2+1}$

$=\dfrac{(x-1)(x^2+1)}{x^2+1}$

$=x-1$ • 40% 배점

답 구하기 위의 식에 $x=\sqrt{2}-1$을 대입하면 구하는 식의 값은

$(\sqrt{2}-1)-1=\sqrt{2}-2$ • 30% 배점

답 $\sqrt{2}-2$

내신 만점 굳히기 본책 45쪽

234 해결 과정 ① $\sqrt{x}=a-1$이므로

$x=(a-1)^2=a^2-2a+1$ • 20% 배점

해결 과정 ② $\sqrt{x+6a+3}=\sqrt{a^2-2a+1+6a+3}$

$=\sqrt{a^2+4a+4}$

$=\sqrt{(a+2)^2}$

$\sqrt{x-4a+8}=\sqrt{a^2-2a+1-4a+8}$

$=\sqrt{a^2-6a+9}$

$=\sqrt{(a-3)^2}$ • 50% 배점

답 구하기 $1<a<3$이므로 $a+2>0,\ a-3<0$

$\therefore$ (주어진 식)$=\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(a-3)^2}$

$=a+2-(a-3)=5$ • 30% 배점

답 5

235 전략 문자가 여러 개이고 차수가 같은 식 ➡ 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

풀이 $\dfrac{a^2}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{b^2}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{c^2}{(b-c)(c-a)}$

$=\dfrac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

이때

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=a^2b-a^2c+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b-c)(b+c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

이므로

(주어진 식)$=\dfrac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=-1$

답 ③

236 전략 주어진 다항식의 항이 5개 이상일 때 ➡ 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

풀이 ① $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7$

$=(1+x)+x^2(1+x)+x^4(1+x)+x^6(1+x)$

$=(1+x)(1+x^2+x^4+x^6)$

$=(1+x)\{(1+x^2)+x^4(1+x^2)\}$

$=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)$

② $x^3+(1-z)x^2-y^2x+y^2z-y^2$

$=x^3+x^2-x^2z-y^2x+y^2z-y^2$

$=-(x^2-y^2)z+(x^3+x^2-y^2x-y^2)$

$=-(x^2-y^2)z+\{x^2(x+1)-y^2(x+1)\}$

$=-(x^2-y^2)z+(x+1)(x^2-y^2)$

$=(x^2-y^2)(x-z+1)$

$=(x+y)(x-y)(x-z+1)$

③ $x^2y^2-x^2y-xy^2+xy=xy(xy-x-y+1)$

$=xy\{x(y-1)-(y-1)\}$

$=xy(x-1)(y-1)$

적당한 두 항끼리 묶어 인수분해한다.

④ $x^2+y^2-z^2-2xy-\dfrac{1}{z^2}-2$

$=(x^2-2xy+y^2)-\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}+2\right)$

$=(x-y)^2-\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2$

$=\left(x-y+z+\dfrac{1}{z}\right)\left(x-y-z-\dfrac{1}{z}\right)$

⑤ $x+y=A$로 치환하면

$(x+y)(x+y-3)+2$

$=A(A-3)+2$

$=A^2-3A+2$

$=(A-1)(A-2)$

$=(x+y-1)(x+y-2)$

답 ⑤

237 전략 $x^3+Ax^2+Bx+2=(x-1)(x-2)(x+m)$으로 놓고 $A,\ B,\ m$의 값을 구한다.

풀이 $x^3+Ax^2+Bx+2=(x-1)(x-2)(x+m)$으로 놓으면

x^3+Ax^2+Bx+2

$=(x-1)(x-2)(x+m)$

$=(x^2-3x+2)(x+m)$

$=x^3+(m-3)x^2+(2-3m)x+2m$

이므로 $m-3=A,\ 2-3m=B,\ 2m=2$

$\therefore m=1,\ A=-2,\ B=-1$

$2m=2$에서 $m=1$이므로
$A=m-3$
$=1-3=-2$
$B=2-3m$
$=2-3=-1$

따라서 $x^3+Bx^2+Ax+2=x^3-x^2-2x+2$이므로 이것을 인수분해하면

$x^3-x^2-2x+2=x^2(x-1)-2(x-1)$

$=(x-1)(x^2-2)$

답 $(x-1)(x^2-2)$

238 해결 과정 ① $20=x$로 놓으면

$20\times21\times22\times23+1$

$=x(x+1)(x+2)(x+3)+1$

$=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+1$

$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$ • 40% 배점

해결 과정 ② $x^2+3x=A$로 치환하면 주어진 식은

$A(A+2)+1=A^2+2A+1=(A+1)^2$
$=(x^2+3x+1)^2$
$=(20^2+3\times 20+1)^2$
$=461^2$ • 50% 배점

답 구하기 $\therefore N=461$ • 10% 배점

답 461

239 [문제 해결 길잡이]

❶ $a+b+c=0$일 때 주어진 등식을 정리한다.
❷ ❶에서 정리한 식을 이용할 수 있는지 확인한다.
❸ ❶의 조건을 이용하여 주어진 식을 인수분해한다.

풀이 $a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
에서 $a+b+c=0$이면
$a^3+b^3+c^3-3abc=0$
$\therefore a^3+b^3+c^3=3abc$ ❶
이때
$x^3(y-z)^3+y^3(z-x)^3+z^3(x-y)^3$
$=\{x(y-z)\}^3+\{y(z-x)\}^3+\{z(x-y)\}^3$
이고
$x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)$
$=xy-xz+yz-xy+xz-yz$
$=0$ ❷
이므로
$x^3(y-z)^3+y^3(z-x)^3+z^3(x-y)^3$
$=3\{x(y-z)\}\{y(z-x)\}\{z(x-y)\}$
$=3xyz(x-y)(y-z)(z-x)$ ❸

답 $3xyz(x-y)(y-z)(z-x)$

$a=x(y-z)$, $b=y(z-x)$, $c=z(x-y)$라 하면 $a+b+c=0$이므로 $a^3+b^3+c^3=3abc$임을 이용할 수 있다.

내신 만점 정복하기

본책 46~48쪽

240 전략 이차식 ax^2+bx+c가 완전제곱식이 되기 위한 조건 ➲ $b^2=4ac$

풀이 $25x^2-kx+\frac{1}{4}$이 완전제곱식이 되려면
$(-k)^2=4\times 25\times\frac{1}{4}$, $\quad k^2=25$
$\therefore k=\pm 5$

답 ④

241 전략 근호 안의 식을 인수분해한 후 부호에 주의하여 근호를 없앤다.

풀이 $\sqrt{9-6x+x^2}-\sqrt{4-4x+x^2}$
$=\sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{(x-2)^2}$
$=-(x-3)-(x-2)$
$=-2x+5$

답 $-2x+5$

$2<x<3$일 때, $x-3<0$, $x-2>0$

242 전략 색칠한 부분의 넓이는 큰 정사각형의 넓이에서 작은 정사각형의 넓이를 뺀 것과 같음을 이용한다.

풀이 작은 정사각형의 한 변의 길이는 $\quad 12-2x$
색칠한 부분의 넓이는 큰 정사각형의 넓이에서 작은 정사각형의 넓이를 뺀 것과 같으므로
$12^2-(12-2x)^2=(12+12-2x)(12-12+2x)$
$=2x(24-2x)=-4x(x-12)$
따라서 $a=-4$, $b=-12$이므로
$a+b=-16$

답 -16

243 전략 $x^2-x-k=(x+a)(x+b)$로 놓고 양변을 비교한다.

풀이 $x^2-x-k=(x+a)(x+b)(a>b)$라 하면
$a+b=-1$, $ab=-k$
이때 $1<k<50$이므로 $\quad -50<ab<-1$
즉 $a>0$, $b<0$이므로 $a+b=-1$, $-50<ab<-1$을 만족시키는 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는
$(1, -2)$, $(2, -3)$, $(3, -4)$,
$(4, -5)$, $(5, -6)$, $(6, -7)$
따라서 k는 2, 6, 12, 20, 30, 42의 6개이다.

답 6

$a>b$, $ab<0$

ab의 값은 -2, -6, -12, -20, -30, -42

244 전략 넓이를 인수분해하여 가로의 길이와 세로의 길이를 구한다.

풀이 $6a^2+11ab+4b^2=(2a+b)(3a+4b)$
이므로 둘레의 길이는
$2\{(2a+b)+(3a+4b)\}=10a+10b$

답 ③

(직사각형의 둘레의 길이) $=2\{$(가로의 길이) $+$(세로의 길이)$\}$

245 전략 잘못 본 수를 제외한 나머지 값을 이용하여 처음 이차식을 구한다.

풀이 윤하가 잘못 본 식은
$(x-3)(x+2)=x^2-x-6$
이므로 처음 이차식의 상수항은 -6이다.
승준이가 잘못 본 식은
$(x+2)(x-1)=x^2+x-2$
이므로 처음 이차식의 x의 계수는 1이다.
따라서 처음 이차식은 x^2+x-6이므로 이 식을 인수분해하면
$x^2+x-6=(x+3)(x-2)$

답 ①

246 전략 $x^2+kx+28=(x+a)(x+b)$
➲ $a+b=k$, $ab=28$

풀이 $x^2+kx+28=(x+a)(x+b)$에서
$a+b=k$, $ab=28$
$ab=28$을 만족시키는 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는
$(1, 28)$, $(2, 14)$, $(4, 7)$, $(7, 4)$, $(14, 2)$,
$(28, 1)$, $(-1, -28)$, $(-2, -14)$, $(-4, -7)$,
$(-7, -4)$, $(-14, -2)$, $(-28, -1)$
이므로 k의 값 중 가장 큰 값은
$1+28=29$

답 ④

$a+b$의 값은 29, 16, 11, -29, -16, -11

247 전략 공통인수가 생기도록 식을 변형한다.

풀이 $(y-z)(z-x)-(x-z)(x-y)$
$=(y-z)(z-x)+(z-x)(x-y)$
$=(z-x)(y-z+x-y)$
$=(z-x)(-z+x)$
$=-(x-z)^2$

답 ⑤

인수가 될 수 있는 것은 1, -1, $x-z$, $-x+z$, $(x-z)^2$, $-(x-z)^2$ 등이다.

만점 공략 BOX

248 전략 $x+1=A$, $2x-3=B$로 치환한다.

풀이 $x+1=A$, $2x-3=B$로 치환하면

$$(x+1)^2+7(x+1)(2x-3)+12(2x-3)^2$$
$$=A^2+7AB+12B^2$$
$$=(A+4B)(A+3B)$$
$$=\{(x+1)+4(2x-3)\}\{(x+1)+3(2x-3)\}$$
$$=(9x-11)(7x-8)$$
$$\therefore a+b+c+d=9+(-11)+7+(-8)$$
$$=-3$$

답 -3

249 전략 항이 4개일 때 ➡ 공통부분이 생기도록 두 항씩 묶어 인수분해한다.

풀이 $x^3+2x^2-9x-18$

$$=x^2(x+2)-9(x+2)$$
$$=(x+2)(x^2-9)$$
$$=(x+2)(x-3)(x+3)$$

답 ④

250 전략 x에 대한 이차식으로 생각하고 상수항부터 인수분해한다.

풀이 $x^2-2(a-b)x-3a^2+6ab-3b^2$

$$=x^2-2(a-b)x-3(a-b)^2$$
$$=\{x+(a-b)\}\{x-3(a-b)\}$$
$$=(x+a-b)(x-3a+3b)$$

답 ④

251 전략 문자가 여러 개이고 차수가 같은 식 ➡ 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

풀이 $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$

$$=x^2y-x^2z+y^2z-xy^2+xz^2-yz^2$$
$$=(y-z)x^2-(y^2-z^2)x+y^2z-yz^2$$
$$=(y-z)x^2-(y-z)(y+z)x+yz(y-z)$$
$$=(y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$$
$$=(y-z)(x-y)(x-z)$$
$$=(x-y)(y-z)(x-z)$$

답 $(x-y)(y-z)(x-z)$

252 전략 x에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

풀이 $y^2-xy-2y+3x-3$

$$=(3-y)x+(y^2-2y-3)$$
$$=(3-y)x+(y-3)(y+1)$$
$$=(y-3)(-x+y+1)$$

답 ④

253 전략 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용한다.

풀이 $\dfrac{125\times99^2+250\times99+125}{63^2-62^2}$

$$=\frac{125\times(99^2+2\times99+1)}{(63+62)(63-62)}$$
$$=\frac{125\times(99+1)^2}{125}$$
$$=100^2=10000$$

답 ⑤

254 전략 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용하여 식의 값을 구한다.

풀이 $(x^{5n}+y^{5n})^2-(x^{5n}-y^{5n})^2$

$$=(x^{5n}+y^{5n}+x^{5n}-y^{5n})(x^{5n}+y^{5n}-x^{5n}+y^{5n})$$
$$=2x^{5n}\times2y^{5n}=4x^{5n}y^{5n}=4(xy)^{5n}$$
$$=4\{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})\}^{5n}$$
$$=4(-1)^{5n}$$
$$=4$$

답 ④

n이 짝수일 때, $(-1)^n=1$
n이 홀수일 때, $(-1)^n=-1$

n이 짝수이므로 $5n$도 짝수이다.

보충학습

지수법칙

m, n이 자연수일 때

① $a^m\times a^n=a^{m+n}$ ② $(a^m)^n=a^{mn}$

③ $(ab)^n=a^nb^n$ ④ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$ (단, $b\neq0$)

⑤ $a^m\div a^n=\begin{cases}a^{m-n} & (m>n)\\ 1 & (m=n)\\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n)\end{cases}$ (단, $a\neq0$)

255 해결 과정 ① x^2-5x+a가 완전제곱식이 되려면

$a=\left(\dfrac{-5}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$ • 30% 배점

해결 과정 ② $16x^2+(b-2)xy+9y^2$이 완전제곱식이 되려면

$(b-2)^2=4\times16\times9=24^2$

$b-2=\pm24$ $\therefore b=26$ ($\because b>0$) • 30% 배점

해결 과정 ③ $cx^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{25}$이 완전제곱식이 되려면

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=4\times c\times\dfrac{1}{25}$, $\dfrac{4}{9}=\dfrac{4c}{25}$

$\therefore c=\dfrac{25}{9}$ • 30% 배점

답 구하기 $\therefore \dfrac{2ab}{c}=2\times\dfrac{25}{4}\times26\times\dfrac{9}{25}$

$=117$ • 10% 배점

답 117

256 해결 과정 도형 (가)의 넓이는

$(x+1)^2-2^2=(x+1+2)(x+1-2)$

$=(x+3)(x-1)$ • 50% 배점

답 구하기 이것이 도형 (나)의 넓이와 같으므로 도형 (나)의 가로의 길이는 $x+3$이다. • 50% 배점

답 $x+3$

257 해결 과정 $2\langle x,\ 1,\ 3\rangle+\langle x,\ 1,\ -1\rangle$

$=2(x-1)(x-3)+(x-1)(x+1)$ • 50% 배점

답 구하기 $=(x-1)(2x-6+x+1)$

$=(x-1)(3x-5)$ • 50% 배점

답 $(x-1)(3x-5)$

주어진 식이 완전제곱식이 되려면 공통부분을 치환한 식도 완전제곱식이어야 한다.

258 해결 과정 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+k$

$=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}+k$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+k$

$x^2+5x=A$로 치환하면

(주어진 식)$=(A+4)(A+6)+k$

$=A^2+10A+24+k$ • 50% 배점

답 구하기 이 식이 완전제곱식이 되어야 하므로

$24+k=\left(\frac{10}{2}\right)^2=25$

$\therefore k=1$ • 50% 배점

답 1

259 해결 과정 $15x^2-18xy+3y^2-14x+10y+3$

$=15x^2+(-18y-14)x+(3y^2+10y+3)$

$=15x^2+(-18y-14)x+(3y+1)(y+3)$

$=(5x-y-3)(3x-3y-1)$ • 60% 배점

답 구하기 따라서 $a=5,\ b=-1,\ c=3,\ d=-3$이므로

$a+b+c+d=4$ • 40% 배점

답 4

260 해결 과정 $2^{16}-1$

$=(2^8)^2-1^2$

$=(2^8+1)(2^8-1)$

$=(2^8+1)(2^4+1)(2^4-1)$

$=(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2^2-1)$

$=(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2+1)(2-1)$

$=257\times17\times5\times3$ • 60% 배점

답 구하기 따라서 $x=257$이므로

$x^2-14x+49=(x-7)^2=(257-7)^2$

$=250^2=62500$ • 40% 배점

답 62500

이 식에 $x=257$을 바로 대입하여 식의 값을 구할 수도 있으나 257^2을 계산해야 하므로 복잡하다.

261 해결 과정 ① $x^2-2x-3+y^2+2xy-2y$

$=x^2+(2y-2)x+(y^2-2y-3)$

$=x^2+(2y-2)x+(y+1)(y-3)$

$=(x+y+1)(x+y-3)$ • 50% 배점

해결 과정 ② 이때

$x=\frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=\sqrt{5}-2,$

$y=\frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\sqrt{5}+2$

이므로 $x+y=2\sqrt{5}$ • 30% 배점

답 구하기 $\therefore$ (주어진 식)$=(2\sqrt{5}+1)(2\sqrt{5}-3)$

$=17-4\sqrt{5}$ • 20% 배점

답 $17-4\sqrt{5}$

교과서 속 창의유형

본책 49쪽

262 [문제 해결 길잡이]

❶ 두 도형의 넓이를 각각 구한다.

❷ 두 도형의 넓이가 서로 같음을 이용하여 다항식 n^2-1을 인수분해한다.

풀이 위쪽 도형의 넓이는 한 변의 길이가 n인 정사각형의 넓이보다 1만큼 작으므로 n^2-1이고, 아래쪽 도형의 넓이는 가로의 길이가 $n+1$, 세로의 길이가 $n-1$인 직사각형의 넓이와 같으므로 $(n+1)(n-1)$이다. ❶

이 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$n^2-1=(n+1)(n-1)$ ❷

답 풀이 참조

263 [문제 해결 길잡이]

❶ 25일 후 개미의 위치의 x좌표를 구한다.

❷ 25일 후 개미의 위치의 y좌표를 구한다.

❸ 25일 후 개미의 위치를 좌표로 나타낸다.

풀이 25일 후 개미의 위치의 x좌표는

$1^2-3^2+5^2-7^2+\cdots+21^2-23^2+25^2$

$=(1-3)(1+3)+(5-7)(5+7)+\cdots+(21-23)(21+23)+25^2$

$=-2(1+3+5+7+\cdots+21+23)+25^2$

$=-2\times(24\times6)+25^2$

$=-288+625=337$ ❶

$1+23=3+21=5+19=7+17=9+15=11+13=24$

25일 후 개미의 위치의 y좌표는

$2^2-4^2+6^2-8^2+\cdots+22^2-24^2$

$=(2-4)(2+4)+(6-8)(6+8)+\cdots+(22-24)(22+24)$

$=-2(2+4+6+8+\cdots+22+24)$

$=-2\times(26\times6)$

$=-312$ ❷

$2+24=4+22=6+20=8+18=10+16=12+14=26$

따라서 출발한 지 25일 후 개미의 위치를 좌표로 나타내면

$(337,\ -312)$ ❸

답 $(337,\ -312)$

다른풀이 25일 후 개미의 위치의 x좌표는

$1^2-3^2+5^2-7^2+\cdots+21^2-23^2+25^2$

$=1^2+(5^2-3^2)+(9^2-7^2)+\cdots+(25^2-23^2)$

$=1+(5-3)(5+3)+(9-7)(9+7)+\cdots+(25-23)(25+23)$

$=1+2(3+5+7+9+\cdots+23+25)$

$=1+2\times(28\times6)$

$=1+336=337$

$3+25=5+23=7+21=9+19=11+17=13+15=28$

Ⅲ 이차방정식

05 | 이차방정식과 그 풀이 (1)

개념&기출유형

본책 52~53쪽

264 ② $-3x^2+5x+2=0$ (이차방정식)
③ $x^3-4x^2=x^3+x^2+1$
$\therefore -5x^2-1=0$ (이차방정식)
④ $4x^2-1=4x^2-x$
$\therefore x-1=0$ (일차방정식)
답 ④

265 $x=0$일 때, $2\times0^2-0-6\neq0$
$x=1$일 때, $2\times1^2-1-6\neq0$
$x=2$일 때, $2\times2^2-2-6=0$
따라서 구하는 해는 $x=2$이다.
답 $x=2$

266 ①, ②, ③, ④ $x=-\frac{1}{4}$ 또는 $x=2$
⑤ $x=-2$ 또는 $x=-\frac{1}{4}$
답 ⑤

267 우변에 있는 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하면
$x^2-5x-24=0$, $(x+3)(x-8)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=8$
답 ④

268 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하면
$(2x-1)(2x-3)=0$ $\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$
따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이므로
$a-b=1$
답 1

269 ① $3(x+1)^2=0$ $\therefore x=-1$ (중근)
② $\left(x+\frac{1}{5}\right)^2=0$ $\therefore x=-\frac{1}{5}$ (중근)
③ $2(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})=0$
$\therefore x=-\sqrt{5}$ 또는 $x=\sqrt{5}$
④ $(x-3)^2=0$ $\therefore x=3$ (중근)
⑤ $\frac{1}{4}(x-2)^2=0$ $\therefore x=2$ (중근)
답 ③

270 x^2의 계수가 2이고 $x=3$을 중근으로 갖는 이차방정식은
$2(x-3)^2=0$ $\therefore 2x^2-12x+18=0$
이차방정식 $2x(x-a)=b$에서
$2x^2-2ax-b=0$
이므로 $a=6$, $b=-18$
$\therefore a+b=-12$
답 -12

> x^2의 계수가 a이고 $x=m$을 중근으로 갖는 이차방정식은
> $a(x-m)^2=0$

271 우변에 있는 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하면
$x^2+6x-k=0$
이 이차방정식이 중근을 가지므로
$-k=\left(\frac{6}{2}\right)^2=9$ $\therefore k=-9$
답 ①

> 이차방정식
> $x^2+px+q=0$이 중근을 가질 조건
> $\rightarrow q=\left(\frac{p}{2}\right)^2$

272 $3x^2+6x-8=0$의 양변을 3으로 나누면
$x^2+2x-\frac{8}{3}=0$, $x^2+2x=\frac{8}{3}$
$x^2+2x+1=\frac{8}{3}+1$ $\therefore (x+1)^2=\frac{11}{3}$
따라서 $p=-1$, $q=\frac{11}{3}$이므로
$p+q=\frac{8}{3}$
답 $\frac{8}{3}$

> $\left(\frac{2}{2}\right)^2=1$

273 $3x^2+18x-6=0$의 양변을 3으로 나누면
$x^2+6x-2=0$, $x^2+6x=2$
$x^2+6x+9=2+9$, $(x+3)^2=11$
$x+3=\pm\sqrt{11}$ $\therefore x=-3\pm\sqrt{11}$
따라서 $A=6$, $B=9$, $C=3$, $D=11$이므로
$A-B+C-D=-11$
답 -11

> $\left(\frac{6}{2}\right)^2=9$

274 $x^2+6x+3k=0$에서 $x^2+6x=-3k$
$x^2+6x+9=-3k+9$, $(x+3)^2=-3k+9$
$x+3=\pm\sqrt{-3k+9}$
$\therefore x=-3\pm\sqrt{-3k+9}$
따라서 $-3k+9=6$이므로 $k=1$
답 1

> $k<3$이므로
> $-3k>-9$
> $\therefore -3k+9>0$

내신 만점 도전하기

본책 54~55쪽

275 전략 부등식의 해를 구하여 이차방정식에 각각 대입해 본다.
풀이 $4x-2\leq-2(x-8)$에서
$4x-2\leq-2x+16$, $6x\leq18$
$\therefore x\leq3$
그런데 x는 자연수이므로 $x=1, 2, 3$
이것을 $2x^2-3x-2=0$에 각각 대입하면
$x=1$일 때, $2\times1^2-3\times1-2\neq0$
$x=2$일 때, $2\times2^2-3\times2-2=0$
$x=3$일 때, $2\times3^2-3\times3-2\neq0$
따라서 구하는 해는 $x=2$이다.
답 $x=2$

276 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 $x=\alpha$
→ $a\alpha^2+b\alpha+c=0$
풀이 $x=1$이 $x^2+ax=-3x+b$의 한 근이므로
$1+a=-3+b$ $\therefore a-b=-4$
$x=-2$가 $2x^2-abx-2=0$의 한 근이므로
$2\times(-2)^2-ab\times(-2)-2=0$
$8+2ab-2=0$ $\therefore ab=-3$

$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$
$=(-4)^2+2\times(-3)$
$=10$ 답 10

277 문제 이해 주어진 이차방정식에 $x=-1$을 대입하면 m에 대한 항등식이 된다. • 20% 배점

해결 과정 ① $x=-1$을 대입하면
$m\times(-1)^2-(a+1)\times(-1)-mb=0$
$(1-b)m+a+1=0$ • 30% 배점

해결 과정 ② 이 식이 m에 대한 항등식이므로
$1-b=0,\ a+1=0$
$\therefore b=1,\ a=-1$ • 40% 배점

답 구하기 $\therefore ab=-1$ • 10% 배점

답 -1

보충학습

① 항등식: 미지수의 모든 값에 대하여 항상 참인 등식
② $ax+b=0$이 x에 대한 항등식이면
$a=0,\ b=0$

278 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 $x=\alpha$ ⊙ $a\alpha^2+b\alpha+c=0$

풀이 $x=\alpha$가 $x^2+x-7=0$의 한 근이므로
$\alpha^2+\alpha-7=0$ ⋯⋯ ㉠
$\therefore \alpha^2+\alpha=7$
㉠의 양변을 $\alpha\ (\alpha\neq 0)$로 나누면
$\alpha+1-\dfrac{7}{\alpha}=0 \qquad \therefore \alpha-\dfrac{7}{\alpha}=-1$
$\therefore \alpha^2+2\alpha-\dfrac{7}{\alpha}=(\alpha^2+\alpha)+\left(\alpha-\dfrac{7}{\alpha}\right)$
$=7+(-1)=6$ 답 6

$\alpha=0$을 ㉠에 대입하면 $0+0-7\neq 0$이므로 $\alpha\neq 0$

279 해결 과정 ① $3x^2+5x-2=0$에서
$(x+2)(3x-1)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=\dfrac{1}{3}$ • 40% 배점

해결 과정 ② 따라서 $x=-2$가 $x^2+kx+3k-1=0$의 한 근이므로
$4-2k+3k-1=0$ • 40% 배점

답 구하기 $\therefore k=-3$ • 20% 배점

답 -3

280 전략 $XY=0$이면 $X=0$ 또는 $Y=0$이어야 하고, $XY\neq 0$이면 $X\neq 0$이고 $Y\neq 0$이어야 한다.

풀이 $A+B=0$에서
$(x^2-x-6)+(x^2-3x-10)=0$
$x^2-2x-8=0, \qquad (x+2)(x-4)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$
$AB\neq 0$에서 $A\neq 0$이고 $B\neq 0$이어야 하므로
(i) $A\neq 0$일 때,
$x^2-x-6\neq 0, \qquad (x+2)(x-3)\neq 0$
$\therefore x\neq -2$이고 $x\neq 3$
(ii) $B\neq 0$일 때,
$x^2-3x-10\neq 0, \qquad (x+2)(x-5)\neq 0$
$\therefore x\neq -2$이고 $x\neq 5$
(i), (ii)에서 $x\neq -2$이고 $x\neq 3$이고 $x\neq 5$
따라서 조건을 만족시키는 x의 값은 4이다. 답 4

281 전략 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이면 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)\ (a\neq 0)$로 놓을 수 있다.

풀이 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)\ (a\neq 0)$로 놓으면
$f(2x-3)=a(2x-3-\alpha)(2x-3-\beta)$
이므로 $f(2x-3)=0$에서
$4a\left(x-\dfrac{\alpha+3}{2}\right)\left(x-\dfrac{\beta+3}{2}\right)=0$
$\therefore x=\dfrac{\alpha+3}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+3}{2}$
따라서 이차방정식 $f(2x-3)=0$의 두 근의 합은
$\dfrac{\alpha+3}{2}+\dfrac{\beta+3}{2}=\dfrac{\alpha+\beta+6}{2}=5\ (\because \alpha+\beta=4)$

답 ⑤

$f(2x-3)$은 $f(x)$에 x 대신 $2x-3$을 대입한 것이다.

282 해결 과정 ① 주어진 이차방정식에서
$x^2+(4-2a)x+a(a-4)=3b$
좌변을 인수분해하면
$(x-a)(x-a+4)=3b$ • 30% 배점

해결 과정 ② $x-a=b-2$를 위의 식에 대입하면
$(b-2)(b-2+4)=3b$
$b^2-3b-4=0, \qquad (b+1)(b-4)=0$
$\therefore b=-1$ 또는 $b=4$ • 50% 배점

답 구하기 따라서 모든 b의 값의 합은
$-1+4=3$ • 20% 배점

답 3

다른풀이 $x-a=b-2$에서 $b=x-a+2$이므로 이것을 주어진 이차방정식에 대입하면
$x^2-2ax+4x+a^2-4a=3(x-a+2)$
$x^2+(1-2a)x+a^2-a-6=0$
$x^2+(1-2a)x+(a+2)(a-3)=0$
$(x-a+3)(x-a-2)=0$
$\therefore x=a-3$ 또는 $x=a+2$
이것을 $b=x-a+2$에 대입하면
$b=-1$ 또는 $b=4$
따라서 모든 b의 값의 합은 $-1+4=3$

283 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 가질 조건 ⊙ $b^2=4ac$

풀이 주어진 이차방정식이 중근을 가지려면
$(k-1)^2=4\times 25\times 4, \qquad k^2-2k-399=0$
$(k+19)(k-21)=0$
$\therefore k=-19\ (\because k<0)$ 답 ③

284 문제 이해 주어진 이차방정식이 중근을 가지려면
$-a=\left(\dfrac{-a}{2}\right)^2$ • 20% 배점

해결 과정 ① $a^2+4a=0,\quad a(a+4)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=-4$ • 20% 배점

해결 과정 ② (i) $a=0$일 때,

$x^2=0\quad \therefore x=0$ (중근)

(ii) $a=-4$일 때,

$x^2+4x+4=0,\quad (x+2)^2=0$

$\therefore x=-2$ (중근) • 40% 배점

답 구하기 이때 주어진 이차방정식이 0이 아닌 중근을 가지므로 중근은 $x=-2$이고 $a=-4$이다. • 20% 배점

답 $x=-2,\ a=-4$

285 전략 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 중근을 가질 조건 ➡ $b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$

풀이 주어진 이차방정식이 중근을 가지려면

$-q=\left(\frac{p}{2}\right)^2\quad \therefore p^2=-4q$

$p^2=-4q$를 만족시키는 정수 p, q의 순서쌍 $(p,\ q)$는

$(0,\ 0),\ (2,\ -1),\ (-2,\ -1),\ (4,\ -4),$
$(-4,\ -4),\ (6,\ -9),\ (-6,\ -9),\ (8,\ -16),$
$(-8,\ -16),\ (10,\ -25),\ (-10,\ -25)$

의 11개이다. 답 ②

p가 정수이므로 $-4q$는 0 또는 제곱수가 되어야 한다.

286 전략 이차방정식의 두 근이 같으면 ➡ 중근을 갖는다.

풀이 이차방정식 $x^2+ax+9b=0$이 중근을 가지므로

$9b=\left(\frac{a}{2}\right)^2\quad \therefore a^2=36b=6^2b$

따라서 b는 제곱수이어야 하고, b의 값이 가장 클 때 a의 값도 가장 크다.

두 자리 자연수 중 가장 큰 제곱수는 81이므로 $b=81$일 때 가장 큰 자연수 a의 값은

$a^2=6^2\times9^2=(6\times9)^2=54^2$

$\therefore a=54$ 답 ③

287 해결 과정 ① $2x^2+4mx-m^2=n^2+3n$에서

$x^2+2mx-\frac{m^2}{2}=\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{2}$

$x^2+2mx=\frac{m^2}{2}+\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{2}$

$x^2+2mx+m^2=\frac{m^2}{2}+\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{2}+m^2$

$\therefore (x+m)^2=\frac{3m^2}{2}+\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{2}$ • 30% 배점

해결 과정 ② 이 식이 $(x-2n)^2=n+7$과 같으므로

$m=-2n,\quad \frac{3m^2}{2}+\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{2}=n+7$

$m=-2n$을 $\frac{3m^2}{2}+\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{2}=n+7$에 대입하여 정리하면

$13n^2+n-14=0,\quad (13n+14)(n-1)=0$

$\therefore n=1$ ($\because n$은 정수) • 50% 배점

답 구하기 따라서 $m=-2\times1=-2$이므로

$m+n=-1$ • 20% 배점

답 -1

288 전략 이차방정식 $(x+p)^2=q\ (q\geq0)$의 해 ➡ $x=-p\pm\sqrt{q}$

풀이 $4x^2-2kx+1=0$이 중근을 가지므로

$(-2k)^2=4\times4\times1,\quad 4k^2=16$

$k^2=4\quad \therefore k=\pm2$

(i) $k=2$일 때, $(k-1)x^2-kx-1=0$에서

$x^2-2x-1=0,\quad x^2-2x+1=2$

$(x-1)^2=2,\quad x-1=\pm\sqrt{2}$

$\therefore x=1\pm\sqrt{2}$

(ii) $k=-2$일 때, $(k-1)x^2-kx-1=0$에서

$-3x^2+2x-1=0,\quad x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}=0$

$x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=-\frac{2}{9},\quad \left(x-\frac{1}{3}\right)^2=-\frac{2}{9}$

이때 $-\frac{2}{9}<0$이므로 해가 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 구하는 해는 $x=1\pm\sqrt{2}$이다. 답 ⑤

289 전략 이차방정식 $(x-p)^2=q^2$의 해 ➡ $x=p\pm q$

풀이 $4(x-1)^2=a^2$에서 $\quad (x-1)^2=\frac{a^2}{4}$

$x-1=\pm\frac{a}{2}\quad \therefore x=1\pm\frac{a}{2}$

주어진 이차방정식의 근이 $x=-1$ 또는 $x=m$이므로

$1-\frac{a}{2}=-1,\ 1+\frac{a}{2}=m\ (\because a>0)$

따라서 $a=4,\ m=3$이므로

$am=12$ 답 ③

$a>0$에서 $1+\frac{a}{2}\neq-1$이므로
$1+\frac{a}{2}=m,$
$1-\frac{a}{2}=-1$

$1-\frac{a}{2}=-1$에서
$\frac{a}{2}=2\quad \therefore a=4$
$a=4$를 $1+\frac{a}{2}=m$에 대입하면
$m=1+\frac{4}{2}=3$

다른풀이 $x=-1$이 $4(x-1)^2=a^2$의 근이므로

$4(-1-1)^2=a^2,\quad 16=a^2$

$\therefore a=4\ (\because a>0)$

즉 $4(x-1)^2=16$에서

$(x-1)^2=4,\quad x-1=\pm2$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 $m=3$이므로 $\quad am=12$

내신 만점 굳히기

본책 56쪽

290 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이면 ➡ $a\alpha^2+b\alpha+c=0,\ a\beta^2+b\beta+c=0$

풀이 $3f(n+2)+2f(n+1)-f(n)$

$=3(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2})+2(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-(\alpha^n+\beta^n)$

$=3\alpha^{n+2}+3\beta^{n+2}+2\alpha^{n+1}+2\beta^{n+1}-\alpha^n-\beta^n$

$=(3\alpha^2+2\alpha-1)\alpha^n+(3\beta^2+2\beta-1)\beta^n$

α, β가 이차방정식 $3x^2+2x-1=0$의 두 근이므로

$3\alpha^2+2\alpha-1=0,\ 3\beta^2+2\beta-1=0$

$\therefore 3f(n+2)+2f(n+1)-f(n)=0$ 답 0

291 해결 과정 ① 직선 $mx+4y=4$가 점 $(m-1, m^2)$을 지나므로 $x=m-1$, $y=m^2$을 $mx+4y=4$에 대입하면

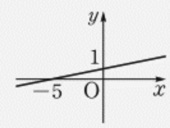
$m(m-1)+4m^2=4$

$5m^2-m-4=0$, $(5m+4)(m-1)=0$

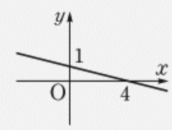
$\therefore m=-\frac{4}{5}$ 또는 $m=1$ • 50% 배점

> 직선 $ax+by+c=0$이 점 (p, q)를 지나면 $ap+bq+c=0$

해결 과정 ② (i) $m=-\frac{4}{5}$일 때, 직선 $-\frac{4}{5}x+4y=4$, 즉 $y=\frac{1}{5}x+1$은 제3사분면을 지난다.



(ii) $m=1$일 때, 직선 $x+4y=4$, 즉 $y=-\frac{1}{4}x+1$은 제3사분면을 지나지 않는다. • 30% 배점

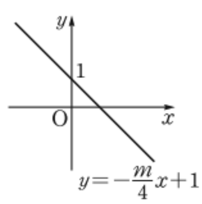


답 구하기 (i), (ii)에서 $m=1$ • 20% 배점

답 1

참고 직선 $mx+4y=4$, 즉 $y=-\frac{m}{4}x+1$이 제3사분면을 지나지 않으려면

$-\frac{m}{4}\le 0$ $\therefore m\ge 0$



292 전략 약수의 개수가 2인 자연수 ➡ 소수

풀이 $\langle x\rangle^2-\langle x\rangle-2=0$에서

$(\langle x\rangle+1)(\langle x\rangle-2)=0$

$\therefore \langle x\rangle=-1$ 또는 $\langle x\rangle=2$

그런데 $\langle x\rangle>0$이므로 $\langle x\rangle=2$

> $\langle x\rangle$는 약수의 개수이므로 항상 양수이다.

이때 약수의 개수가 2인 자연수는 소수이므로 x는 2, 3, 5, 7의 4개이다. 답 ③

293 전략 이차방정식 $x^2+px+q=0$이 중근을 가질 조건 ➡ $q=\left(\frac{p}{2}\right)^2$

풀이 이차방정식 $x^2+2ax+2a+3=0$이 중근을 가지므로

$2a+3=\left(\frac{2a}{2}\right)^2$, $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

(i) $a=-1$일 때, $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$ $\therefore x=1$ (중근)

따라서 $b=1$이므로 $b-a=2$

(ii) $a=3$일 때, $x^2+6x+9=0$

$(x+3)^2=0$ $\therefore x=-3$ (중근)

따라서 $b=-3$이므로 $b-a=-6$

(i), (ii)에서 $b-a$의 값 중 가장 큰 값은 2이다. 답 ③

다른풀이 x^2의 계수가 1이고 $x=b$를 중근으로 갖는 이차방정식은

$(x-b)^2=0$ $\therefore x^2-2bx+b^2=0$

이것이 $x^2+2ax+2a+3=0$과 일치하므로

$2a=-2b$, $2a+3=b^2$

$a=-b$를 $2a+3=b^2$에 대입하면 $-2b+3=b^2$

$b^2+2b-3=0$, $(b+3)(b-1)=0$

$\therefore b=-3$ 또는 $b=1$

따라서 $a=3$, $b=-3$ 또는 $a=-1$, $b=1$이므로 $b-a$의 값 중 가장 큰 값은

$1-(-1)=2$

294 해결 과정 ① 공통인 근을 $x=\alpha$라 하고 $x=\alpha$를 두 이차방정식에 각각 대입하면

$\alpha^2-p\alpha-q=0$ ······ ㉠

$\alpha^2-q\alpha-p=0$ ······ ㉡

㉠−㉡을 하면 $(-p+q)\alpha-(-p+q)=0$

$\therefore (-p+q)(\alpha-1)=0$ • 50% 배점

해결 과정 ② 이때 $p\ne q$이므로

$\alpha-1=0$ $\therefore \alpha=1$ • 30% 배점

답 구하기 $\alpha=1$을 ㉠에 대입하면

$1-p-q=0$ $\therefore p+q=1$ • 20% 배점

답 $p+q=1$

만점비법

> 두 이차방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$이 공통인 근을 가질 때, 공통인 근을 $x=\alpha$로 놓고 연립방정식 $\begin{cases} f(\alpha)=0 \\ g(\alpha)=0 \end{cases}$을 푼다.

295 전략 $a=2x-1$, $b=x+3$을 $a◎b=a^2+b-ab$에 대입한다.

풀이 $(2x-1)◎(x+3)=5$에서

$(2x-1)^2+(x+3)-(2x-1)(x+3)=5$

$x^2-4x+1=0$, $x^2-4x+4=3$

$(x-2)^2=3$, $x-2=\pm\sqrt{3}$

$\therefore x=2\pm\sqrt{3}$

따라서 $p=2$, $q=3$이므로 $p+q=5$ 답 ④

296 [문제 해결 길잡이]

❶ 공통인 근을 이용하여 a의 값을 구한다.

❷ a의 값을 이차방정식에 대입하여 다른 한 근을 구한다.

❸ 부등식의 해가 이차방정식의 두 근 중 $x=-3$만을 포함하도록 하는 b의 값의 범위를 구한다.

풀이 $x=-3$이 $a(x-2)(x+4)=2x^2+11x$의 한 근이므로

$a(-3-2)(-3+4)=2\times(-3)^2+11\times(-3)$

$-5a=-15$ $\therefore a=3$ ❶

따라서 주어진 이차방정식은

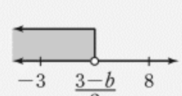
$3(x-2)(x+4)=2x^2+11x$

$x^2-5x-24=0$, $(x+3)(x-8)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=8$ ❷

부등식 $3-2x>b$에서 $x<\frac{3-b}{2}$

위의 부등식과 주어진 이차방정식의 공통인 근이 $x=-3$뿐이므로 $x<\frac{3-b}{2}$는 $x=-3$은 포함하고 $x=8$은 포함하지 않아야 한다.



즉 $-3<\frac{3-b}{2}\le 8$이므로 $-6<3-b\le 16$

$-9<-b\le 13$

$\therefore -13\le b<9$ ❸ 답 $-13\le b<9$

06 | 이차방정식과 그 풀이 (2)

개념&기출유형 본책 57~60쪽

297 $x^2-6x-2=0$이므로
$x=-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\times(-2)}$
$=3\pm\sqrt{11}$
따라서 $A=3,\ B=11$이므로
$A+B=14$ 답 ⑤

이차방정식
$ax^2+2b'x+c=0$
의 해는
$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$
(단, $b'^2-ac\geq0$)

298 $x^2-3x+1=0$에서
$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times1}}{2\times1}$
$=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$
따라서 $m=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$이므로
$2m-\sqrt{5}=2\times\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}-\sqrt{5}$
$=3+\sqrt{5}-\sqrt{5}=3$ 답 ③

299 $5x^2+2x+a=0$에서
$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-5a}}{5}$
이므로 $b=-1,\ 1-5a=11$
$\therefore a=-2,\ b=-1$
$\therefore a+b=-3$ 답 -3

300 주어진 방정식의 양변에 10을 곱하면
$3x+8(x^2+1)=10x^2+5$
$2x^2-3x-3=0$
$\therefore x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times(-3)}}{2\times2}$
$=\dfrac{3\pm\sqrt{33}}{4}$
따라서 $a=3,\ b=33$이므로
$\dfrac{b}{a}=11$ 답 11

301 주어진 방정식의 양변에 3을 곱하면
$(5x+4)(x-1)+2-6x(x-1)=0$
$x^2-5x+2=0$
$\therefore x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times2}}{2}$
$=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$ 답 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$

302 $x+2=A$로 치환하면
$A^2-5A-14=0,\quad (A+2)(A-7)=0$
$\therefore A=-2$ 또는 $A=7$
즉 $x+2=-2$ 또는 $x+2=7$이므로
$x=-4$ 또는 $x=5$ 답 ②

303 ① $x^2+2x-7=0$에서
$2^2-4\times1\times(-7)=32>0$
이므로 서로 다른 두 근을 갖는다.
② $(-3)^2-4\times2\times2=-7<0$이므로 근이 없다.
③ $3x^2-4x+7=0$에서
$(-4)^2-4\times3\times7=-68<0$
이므로 근이 없다.
④ $x=\pm4$의 두 근을 갖는다.
⑤ $9x^2-6x+1=0$에서
$(-6)^2-4\times9\times1=0$
이므로 중근을 갖는다. 답 ①, ④

서로 다른 근의 개수는 1이다.

304 $2x^2-x-1=0$에서
$(-1)^2-4\times2\times(-1)=9>0$
이므로 서로 다른 두 근을 갖는다.
$\therefore a=2$
$\dfrac{1}{2}x^2-x+3=0$에서
$(-1)^2-4\times\dfrac{1}{2}\times3=-5<0$
이므로 근이 없다.
$\therefore b=0$
$4x^2-20x+25=0$에서
$(-20)^2-4\times4\times25=0$
이므로 중근을 갖는다.
$\therefore c=1$
$\therefore a+b+c=3$ 답 ④

305 주어진 이차방정식이 중근을 가지려면
$(k+4)^2-4\times4k\times1=0$
$k^2+8k+16-16k=0,\quad k^2-8k+16=0$
$(k-4)^2=0\quad \therefore k=4$ 답 4

306 주어진 방정식의 양변에 10을 곱하면
$2x^2-5x-10=0$
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$A=\dfrac{5}{2},\ B=-5$
$\therefore 2A+B=2\times\dfrac{5}{2}-5=0$ 답 ③

307 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-\dfrac{3}{2}$
$\therefore \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=2\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{4}{3}$
답 $-\dfrac{4}{3}$

308 두 근을 $\alpha,\ \alpha+1$로 놓으면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+(\alpha+1)=-3,\quad 2\alpha=-4$
$\therefore \alpha=-2$

따라서 두 근이 -2, -1이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2\times(-1)=2k-2$, $\quad 2k=4$

$\therefore k=2$ 답 2

두 근이 α, $\alpha+1$이고 $\alpha=-2$이므로 두 근은 -2, -1

309 $x=6$을 주어진 이차방정식에 대입하면

$6^2-6a-6=0$, $\quad 30-6a=0$

$\therefore a=5$

즉 $x^2-5x-6=0$이므로

$(x+1)(x-6)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=6$

따라서 $b=-1$이므로

$a+b=4$ 답 ④

다른풀이 두 근이 6, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$6\times b=-6$ $\quad \therefore b=-1$

따라서 두 근이 6, -1이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$6+(-1)=a$ $\quad \therefore a=5$

$\therefore a+b=4$

310 한 근이 $-1+2\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $-1-2\sqrt{2}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$k-5=(-1+2\sqrt{2})(-1-2\sqrt{2})=-7$

$\therefore k=-2$ 답 ③

311 $1<\sqrt{3}<2$이므로 $\quad 2<4-\sqrt{3}<3$

즉 $4-\sqrt{3}$의 정수 부분이 2이므로 소수 부분은

$(4-\sqrt{3})-2=2-\sqrt{3}$

따라서 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 한 근이 $2-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-p=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$

$q=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$

$\therefore p=-4$, $q=1$

$\therefore p+2q=-4+2\times1=-2$ 답 ②

$1<\sqrt{3}<2$에서
$-2<-\sqrt{3}<-1$
$\therefore 2<4-\sqrt{3}<3$

312 두 근이 $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$이고 x^2의 계수가 12인 이차방정식은

$12\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=0$ $\quad \therefore 12x^2-x-1=0$

따라서 $a=-1$, $b=-1$이므로

$a+b=-2$ 답 ①

두 근이 α, β이고 x^2의 계수가 a인 이차방정식
$\rightarrow a(x-\alpha)(x-\beta)=0$

313 다른 한 근은 $1-\sqrt{7}$이므로

(두 근의 합)$=(1+\sqrt{7})+(1-\sqrt{7})=2$

(두 근의 곱)$=(1+\sqrt{7})(1-\sqrt{7})=-6$

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2-2x-6=0$ 답 $x^2-2x-6=0$

두 근의 합과 곱이 각각 m, n이고 x^2의 계수가 a인 이차방정식
$\rightarrow a(x^2-mx+n)=0$

314 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{3}{2}$, $\alpha\beta=4$

이므로 구하는 이차방정식은

$2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-4)=0$, $\quad (2x+3)(x-4)=0$

$\therefore 2x^2-5x-12=0$ 답 ④

315 $\frac{k(k+1)}{2}=210$이므로

$k^2+k-420=0$, $\quad (k+21)(k-20)=0$

$\therefore k=20$ ($\because$ k는 자연수) 답 ②

316 x년 후에 양규의 나이는 $(x+8)$살이고 동생의 나이는 $(x+5)$살이므로

$(x+8)(x+5)=8\times5+68$

$x^2+13x-68=0$, $\quad (x+17)(x-4)=0$

$\therefore x=4$ ($\because x>0$) 답 4년

x년 후에 양규의 나이와 동생의 나이의 곱

올해 양규의 나이와 동생의 나이의 곱

317 연속하는 세 자연수를 $x-1$, x, $x+1$로 놓으면

$(x+1)^2=x^2+(x-1)^2+4$

$x^2-4x+4=0$, $\quad (x-2)^2=0$

$\therefore x=2$

따라서 가장 큰 수는 3이다. 답 3

참고 연속하는 세 자연수를 $x-2$, $x-1$, x로 놓고 풀어도 같은 결과를 얻는다.

318 $30t-5t^2=0$이므로 $\quad t^2-6t=0$

$t(t-6)=0$ $\quad \therefore t=6$ ($\because t>0$)

따라서 6초 후에 지면에 떨어진다. 답 6초

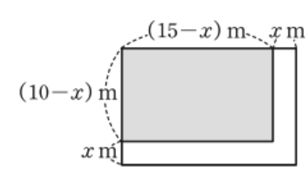
지면에 떨어졌을 때의 높이는 0 m이다.

319 $\pi\times(8+x)^2-\pi\times8^2=57\pi$이므로

$x^2+16x-57=0$, $\quad (x+19)(x-3)=0$

$\therefore x=3$ ($\because x>0$) 답 3

320 도로의 폭을 xm라 하면 도로를 제외한 나머지 부분의 넓이는 가로의 길이가 $(15-x)$m, 세로의 길이가 $(10-x)$m인 직사각형의 넓이와 같으므로



$(15-x)(10-x)=104$

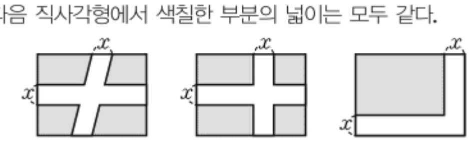
$x^2-25x+46=0$, $\quad (x-2)(x-23)=0$

$\therefore x=2$ ($\because 0<x<10$)

따라서 도로의 폭은 2 m이다. 답 2 m

만점비법

다음 직사각형에서 색칠한 부분의 넓이는 모두 같다.



이차방정식 Ⅲ

내신 만점 도전하기 본책 61~64쪽

321 전략 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 근

$\Rightarrow x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ (단, $b'^2-ac\ge0$)

풀이 $3x^2-4x+p=0$에서

$x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-3p}}{3}$

이므로 $q=2,\ 4-3p=13$

$\therefore p=-3,\ q=2$

$\therefore p+q=-1$ 답 -1

322 전략 이차방정식의 근의 공식을 이용하여 p, q의 값을 구한다.

풀이 $x^2+3x-1=0$에서

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

$\therefore p=\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$

$x^2-5x+3=0$에서

$x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times3}}{2\times1}=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}$

$\therefore q=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$

$\therefore p+q=\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}+\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}=1$

답 ③

323 전략 $f(x)$에 x 대신 $a-1$을 대입하여 $f(a-1)$을 구한다.

풀이 $f(a-1)=(a-1)^2-4(a-1)+2$

$=a^2-6a+7$

이므로 $f(a-1)=6$에서

$a^2-6a+7=6,\qquad a^2-6a+1=0$

$\therefore a=3\pm2\sqrt{2}$

그런데 $a>3$이므로

$a=3+2\sqrt{2}$ 답 $3+2\sqrt{2}$

다른풀이 $f(x)=6$에서

$x^2-4x+2=6,\qquad x^2-4x-4=0$

$\therefore x=2\pm2\sqrt{2}$

따라서 $a-1=2\pm2\sqrt{2}$이므로

$a=3+2\sqrt{2}$ ($\because a>3$)

324 해결 과정 주어진 방정식의 양변에 6을 곱하면

$2x(x+2)-(2x+1)=3x(x-2)$

$x^2-8x+1=0$

$\therefore x=4\pm\sqrt{15}$ • 60% 배점

답 구하기 따라서 $\alpha=4+\sqrt{15},\ \beta=4-\sqrt{15}$이므로

$\alpha^2+8\beta=(4+\sqrt{15})^2+8(4-\sqrt{15})$

$=16+8\sqrt{15}+15+32-8\sqrt{15}$

$=63$ • 40% 배점

답 63

만점 공략 BOX

공통부분이 생기도록 2개씩 묶어 전개한다.

325 해결 과정 ① 주어진 방정식에서

$\{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\}+16=0$

$(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+16=0$ • 40% 배점

해결 과정 ② $x^2+8x=A$로 치환하면

$(A+7)(A+15)+16=0$

$A^2+22A+121=0,\qquad (A+11)^2=0$

$\therefore A=-11$ • 30% 배점

답 구하기 즉 $x^2+8x=-11$이므로

$x^2+8x+11=0$

$\therefore x=-4\pm\sqrt{5}$ • 30% 배점

답 $x=-4\pm\sqrt{5}$

326 전략 $x^2+5x=A$로 치환하여 A에 대한 이차방정식을 푼다.

풀이 주어진 방정식에서

$3(x^2+5x)^2-(x^2+5x)-24=0$

$x^2+5x=A$로 치환하면

$3A^2-A-24=0,\qquad (3A+8)(A-3)=0$

$\therefore A=-\dfrac{8}{3}$ 또는 $A=3$

(i) $x^2+5x=-\dfrac{8}{3}$일 때,

$3x^2+15x+8=0$

$\therefore x=\dfrac{-15\pm\sqrt{129}}{6}$

(ii) $x^2+5x=3$일 때,

$x^2+5x-3=0$

$\therefore x=\dfrac{-5\pm\sqrt{37}}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=\dfrac{-15\pm\sqrt{129}}{6}$ 또는 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{37}}{2}$

답 $x=\dfrac{-15\pm\sqrt{129}}{6}$ 또는 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{37}}{2}$

327 전략 $x+2y=A$로 치환할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 주어진 방정식에서

$(x+2y)^2+3(x+2y)-10=0$

$x+2y=A$로 치환하면

$A^2+3A-10=0$

$(A+5)(A-2)=0$

$\therefore A=-5$ 또는 $A=2$

x, y가 양수이므로

$A=x+2y>0$

$\therefore x+2y=2$ 답 ①

다른풀이 주어진 이차방정식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+(4y+3)x+4y^2+6y-10=0$

$x^2+(4y+3)x+2(2y+5)(y-1)=0$

$(x+2y+5)(x+2y-2)=0$

$x+2y=-5$ 또는 $x+2y=2$

x, y가 양수이므로

$x+2y=2$

328 전략 $|x|=\begin{cases} x & (x\ge 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$

풀이 (i) $x\ge 0$일 때,

$x^2-4x-5=0, \quad (x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=5$ ($\because x\ge 0$)

(ii) $x<0$일 때,

$x^2+4x-5=0, \quad (x+5)(x-1)=0$

$\therefore x=-5$ ($\because x<0$)

(i), (ii)에서 $x=\pm 5$ 답 $x=\pm 5$

다른풀이 $|x|^2=x^2$이므로 주어진 방정식은

$|x|^2-4|x|-5=0, \quad (|x|+1)(|x|-5)=0$

$|x|\ge 0$이므로 $|x|=5$

$\therefore x=\pm 5$

329 전략 $x=\alpha$를 주어진 방정식에 대입한 후 양변을 α^2으로 나눈다.

풀이 주어진 방정식에 $x=\alpha$를 대입한 후 양변을 $\alpha^2(\alpha\ne 0)$으로 나누면

$\alpha^2-5\alpha-4-\dfrac{5}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^2}=0$

$\left(\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}\right)-5\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)-4=0$

$\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2-2$이므로

$\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2-5\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)-6=0$

$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=t$로 치환하면 $t^2-5t-6=0$

$(t+1)(t-6)=0 \quad \therefore t=-1$ 또는 $t=6$

$\therefore \alpha+\dfrac{1}{\alpha}=-1$ 또는 $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=6$ 답 ⑤

> $x=0$을 주어진 방정식에 대입하면
> $0-0-0-0+1\ne 0$이므로 $x\ne 0$
> $\therefore \alpha\ne 0$

만점비법

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ ($a\ne 0$) 꼴의 방정식의 풀이

(i) 양변을 x^2으로 나눈다.

(ii) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$임을 이용하여 좌변을 정리한 후 $x+\dfrac{1}{x}=t$로 치환하여 t에 대한 이차방정식을 푼다.

330 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 개수 ▶ b^2-4ac의 값의 부호에 따라 결정

풀이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서

$b^2-4ac=(a+c)^2-4ac$

$=a^2+2ac+c^2-4ac$

$=a^2-2ac+c^2$

$=(a-c)^2$

이때 $a\ne c$이므로 $b^2-4ac>0$

따라서 서로 다른 두 근을 갖는다. 답 2

> 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서
> ① $b^2-4ac>0$ → 서로 다른 두 근
> ② $b^2-4ac=0$ → 중근
> ③ $b^2-4ac<0$ → 근이 없다.

331 해결 과정 ① 이차방정식 $x^2-2x+2k-3=0$이 근을 갖지 않으므로

$(-2)^2-4\times 1\times(2k-3)<0, \quad -8k+16<0$

$\therefore k>2$ …… ㉠ • 40% 배점

해결 과정 ② 이차방정식 $3x^2-2(k-4)x+k+2=0$이 중근을 가지므로

$\{-2(k-4)\}^2-4\times 3\times(k+2)=0$

$k^2-11k+10=0, \quad (k-1)(k-10)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=10$ …… ㉡ • 40% 배점

답 구하기 ㉠, ㉡에서 $k=10$ • 20% 배점

답 10

332 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 가질 조건 ▶ $b^2-4ac=0$

풀이 $a(x^2-4)+b(1-9x^2)-10\sqrt{ab}x=0$, 즉

$(a-9b)x^2-10\sqrt{ab}x-4a+b=0$이 중근을 가지므로

$(-10\sqrt{ab})^2-4(a-9b)(-4a+b)=0$

$4a^2-12ab+9b^2=0, \quad (2a-3b)^2=0$

$2a-3b=0 \quad \therefore a=\dfrac{3}{2}b$

$\therefore a:b=\dfrac{3}{2}b:b=3:2$ 답 ⑤

> $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

333 전략 먼저 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한다.

풀이 주어진 방정식에서

$3x^2+3x=2x^2+5 \quad \therefore x^2+3x-5=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3, \ \alpha\beta=-5$

② $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-3)^2-2\times(-5)=19$

③ $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(-3)^2-4\times(-5)=29$

이므로

$\alpha-\beta=\sqrt{29}$ ($\because \alpha>\beta$)

$\therefore \alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

$=-3\sqrt{29}$

④ $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{-3}{-5}=\dfrac{3}{5}$

⑤ $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=-\dfrac{19}{5}$ 답 ④

> 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 할 때,
> $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$
> $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

334 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a, \ \alpha\beta=-2$

이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-a)^2-2\times(-2)$

$=a^2+4$

즉 $a^2+4=13$이므로 $a^2=9$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$) 답 ④

335 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 m, n의 값을 구한다.

풀이 이차방정식 $2x^2+mx+n=0$의 두 근이 -1, $\dfrac{3}{2}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

Ⅲ 이차방정식

$-1+\frac{3}{2}=-\frac{m}{2},\ -1\times\frac{3}{2}=\frac{n}{2}$

$\therefore m=-1,\ n=-3$

따라서 이차방정식 $-3x^2+x+10=0$에서

$3x^2-x-10=0$

$(3x+5)(x-2)=0$

$\therefore x=-\frac{5}{3}$ 또는 $x=2$

답 $x=-\frac{5}{3}$ 또는 $x=2$

336 문제 이해 두 근을 $\alpha,\ -\alpha\ (\alpha>0)$로 놓자. • 20% 배점

해결 과정 ① 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-\alpha)=-\frac{k^2+k-6}{2}$

$k^2+k-6=0,\qquad (k+3)(k-2)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=2$ • 30% 배점

해결 과정 ② 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\times(-\alpha)=-\frac{k}{2}$이므로

$k=2\alpha^2>0$ • 30% 배점

답 구하기 $\therefore k=2$ • 20% 배점

답 2

337 전략 두 근을 $m,\ m+1$로 놓는다.

풀이 두 근을 $m,\ m+1$로 놓으면 두 근의 제곱의 차가 5이므로

$(m+1)^2-m^2=5,\qquad 2m+1=5$

$\therefore m=2$

따라서 이차방정식 $ax^2-bx+c=0$의 두 근이 2, 3이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2+3=\frac{b}{a},\ 2\times3=\frac{c}{a}$

$\therefore b=5a,\ c=6a$

이것을 만족시키는 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)는

$(1,\ 5,\ 6),\ (2,\ 10,\ 12),\ (3,\ 15,\ 18),\ \cdots$

따라서 $a+b+c$의 값 중 두 번째로 작은 값은

$2+10+12=24$ 답 ⑤

다른풀이 $b=5a,\ c=6a$에서

$a+b+c=a+5a+6a=12a$

이때 a는 자연수이므로

$12a=12,\ 24,\ 36,\ \cdots$

따라서 $a+b+c$의 값 중 두 번째로 작은 값은 24이다.

순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는 $(a,\ 5a,\ 6a)$이므로
$a=1$이면 $(1,\ 5,\ 6)$
$a=2$이면 $(2,\ 10,\ 12)$
$a=3$이면 $(3,\ 15,\ 18)$
$\vdots\qquad\vdots$

338 해결 과정 ① 이차방정식 $x^2+2x-4=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

-2 • 30% 배점

해결 과정 ② $x=-2$가 이차방정식 $2x^2+5x+k=0$의 근이므로

$2\times(-2)^2+5\times(-2)+k=0$

$-2+k=0$

$\therefore k=2$ • 40% 배점

답 구하기 따라서 이차방정식 $2x^2+5x+2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 1이다. • 30% 배점

답 1

a, b, c가 유리수일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$이다. (단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)

339 해결 과정 ① 한 근이 $-4+3\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $-4-3\sqrt{2}$이다. • 30% 배점

해결 과정 ② $\frac{1}{2}x^2+ax+b=0$에서

$x^2+2ax+2b=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-4+3\sqrt{2})+(-4-3\sqrt{2})=-2a$

$(-4+3\sqrt{2})(-4-3\sqrt{2})=2b$

$\therefore a=4,\ b=-1$ • 60% 배점

답 구하기 $\therefore ab=-4$ • 10% 배점

답 -4

340 전략 $\alpha,\ \beta$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 a인 이차방정식 ⇨ $a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0$

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{1}{2},\ \alpha\beta=-\frac{5}{2}$

$$\therefore \frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}=\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}=\frac{-\frac{1}{2}+2}{-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}+1}=-\frac{3}{4},$$

$$\frac{1}{\alpha+1}\times\frac{1}{\beta+1}=\frac{1}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}=\frac{1}{-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}+1}=-\frac{1}{2}$$

따라서 $\frac{1}{\alpha+1},\ \frac{1}{\beta+1}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 4인 이차방정식은

$4\left\{x^2-\left(-\frac{3}{4}\right)x+\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=0$

$\therefore 4x^2+3x-2=0$

답 ⑤

341 전략 $\alpha,\ \beta$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 a인 이차방정식 ⇨ $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$

풀이 이차방정식 $2x^2-4x+m=0$이 중근을 가지므로

$(-4)^2-4\times2\times m=0$

$16-8m=0$

$\therefore m=2$

2, 3을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 -2인 이차방정식은

$-2(x-2)(x-3)=0$

$\therefore -2x^2+10x-12=0$

따라서 x의 계수는 10이다.

답 ④

342 해결 과정 ① $(2x+1)*(x-3)=3$에서

$(2x+1)(x-3)-(2x+1)+(x-3)=3$

$2x^2-6x-10=0$

$\therefore x^2-3x-5=0$ • 30% 배점

해결 과정 ② 이 이차방정식의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-3\alpha-5=0$, $\beta^2-3\beta-5=0$

$\therefore \alpha^2-3\alpha=5$, $\beta^2-3\beta=5$

또 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-5$

이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=3^2-4\times(-5)=29$

$\therefore \alpha-\beta=-\sqrt{29}$ ($\because \alpha<\beta$) • 40% 배점

답 구하기 $\therefore \alpha^2\beta-\alpha\beta^2+(\alpha^2-3\alpha+1)(\beta^2-3\beta-3)$

$=\alpha\beta(\alpha-\beta)+(5+1)(5-3)$

$=-5\times(-\sqrt{29})+12$

$=12+5\sqrt{29}$ • 30% 배점

답 $12+5\sqrt{29}$

343 해결 과정 ① 바구니의 개수를 x라 하면 한 바구니에 담는 망고의 개수는 $x+3$이므로

$x(x+3)=54$ • 50% 배점

해결 과정 ② $x^2+3x-54=0$, $(x+9)(x-6)=0$

$\therefore x=6$ ($\because x$는 자연수) • 40% 배점

답 구하기 따라서 바구니는 6개이다. • 10% 배점

답 6

344 전략 A원을 $x\%$ 할인 ➡ $A\left(1-\frac{x}{100}\right)$원

A원을 $x\%$ 인상 ➡ $A\left(1+\frac{x}{100}\right)$원

풀이 티셔츠의 정가를 A원이라 하면

$A\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)=A\left(1-\frac{4}{100}\right)$

$(100-x)(100+x)=9600$

$10000-x^2=9600$, $x^2=400$

$\therefore x=20$ ($\because x>0$)

답 ④

양변에 $\frac{10000}{A}$을 곱한다.

345 전략 큰 홀수를 x라 하면 이 홀수와 연속한 수 ➡ $x-1$ 또는 $x+1$

풀이 큰 홀수를 x라 하면 이 홀수와 연속한 수는 $x-1$ 또는 $x+1$이다.

(i) 연속한 수가 $x-1$일 때,

$x(x-1)=182$, $x^2-x-182=0$

$(x+13)(x-14)=0$

$\therefore x=14$ ($\because x>0$)

그런데 x가 홀수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 연속한 수가 $x+1$일 때,

$x(x+1)=182$, $x^2+x-182=0$

$(x+14)(x-13)=0$

$\therefore x=13$ ($\because x>0$)

(i), (ii)에서 큰 홀수는 13이고 작은 홀수는 11이므로 구하는 곱은

$13\times11=143$

답 143

346 전략 위로 던져 올린 공이 지면으로부터의 높이가 30 m가 되는 때는 두 번이다.

풀이 $-5x^2+20x+15=30$에서

$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 공이 높이가 30 m인 지점을 처음으로 지나는 것은 던져 올린 지 1초 후이다.

답 1초

347 해결 과정 ① 처음 직사각형의 세로의 길이를 x cm라 하면 가로의 길이는 $(x+4)$ cm이므로 직육면체 모양의 상자의 가로의 길이는 $(x+4)-4=x$(cm), 세로의 길이는 $(x-4)$cm, 높이는 2 cm이다. • 40% 배점

해결 과정 ② 상자의 부피가 42 cm^3이므로

$2x(x-4)=42$, $x^2-4x-21=0$

$(x+3)(x-7)=0$

$\therefore x=7$ ($\because x>0$) • 50% 배점

답 구하기 따라서 처음 직사각형의 세로의 길이는 7 cm이다. • 10% 배점

답 7 cm

가로의 길이가 a, 세로의 길이가 b, 높이가 c인 직육면체의 부피는 abc

348 전략 매초 a씩 변하는 선분의 길이는 t초 후에 at만큼 변한다.

풀이 처음 직사각형의 넓이는

$12\times8=96\,(cm^2)$

넓이가 처음과 같아지는 데 걸리는 시간을 x초라 하면 x초 후의 직사각형의 가로의 길이는 $(12-x)$ cm, 세로의 길이는 $(8+2x)$ cm이므로

$(12-x)(8+2x)=96$, $x^2-8x=0$

$x(x-8)=0$

$\therefore x=8$ ($\because x>0$)

따라서 처음 직사각형의 넓이와 같아지는 데 걸리는 시간은 8초이다.

답 ③

내신 만점 굳히기

본책 65쪽

349 전략 α, β를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 a인 이차방정식 ➡ $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$

풀이 $x=2$가 $ax^2+bx+c=0$의 근이므로

$4a+2b+c=0$ …… ㉠

$x=3$이 $bx^2+cx+a=0$의 근이므로

$9b+3c+a=0$ …… ㉡

㉠$\times3-$㉡을 하면

$11a-3b=0$ $\therefore 11a=3b$

이때 a, b는 서로소인 자연수이므로

$a=3$, $b=11$

이것을 ㉠에 대입하면 $c=-34$

즉 이차방정식 $3x^2+11x-34=0$의 두 근이 2, α이고 이차방정식 $11x^2-34x+3=0$의 두 근이 3, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$2+\alpha=-\frac{11}{3} \qquad \therefore \alpha=-\frac{17}{3}$$

$$3+\beta=\frac{34}{11} \qquad \therefore \beta=\frac{1}{11}$$

따라서 α, β를 두 근으로 하는 이차방정식은

$$\left(x+\frac{17}{3}\right)\left(x-\frac{1}{11}\right)=0$$

$$\therefore 33x^2+184x-17=0$$

답 ④

350 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 상수항과 x의 계수를 구한다.

풀이 -3과 5를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$(x+3)(x-5)=0$$

$$\therefore x^2-2x-15=0$$

즉 처음 이차방정식의 상수항은 -15이다.

$(-2+\sqrt{3})+(-2-\sqrt{3})=-4$,

$(-2+\sqrt{3})(-2-\sqrt{3})=1$이므로 $-2\pm\sqrt{3}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2+4x+1=0$$

즉 처음 이차방정식의 x의 계수는 4이다.

따라서 처음에 주어진 이차방정식은 $x^2+4x-15=0$이다.

답 $x^2+4x-15=0$

351 해결 과정 ① 10 %의 소금물 100 g에 들어 있는 소금의 양은

$$\frac{10}{100}\times100=10\ (\text{g})$$

㈎의 시행 후 소금물에 들어 있는 소금의 양은

$$10-\frac{1}{10}x\ (\text{g})$$

이므로 소금물의 농도는

$$10-\frac{1}{10}x\ (\%)$$

• 30% 배점

해결 과정 ② ㈏의 시행 후 소금물에 들어 있는 소금의 양은

$$\left(10-\frac{1}{10}x\right)-\frac{x(100-x)}{1000}\ (\text{g})$$

이므로 소금물의 농도는

$$\left(10-\frac{1}{10}x\right)-\frac{x(100-x)}{1000}\ (\%)$$

• 30% 배점

답 구하기 이 농도가 2.5 %이므로

$$\left(10-\frac{1}{10}x\right)-\frac{x(100-x)}{1000}=2.5$$

$$x^2-200x+7500=0$$

$$(x-50)(x-150)=0$$

$$\therefore x=50\ (\because 0<x<100)$$

• 40% 배점

답 50

만점 공략 BOX

(일반버스가 달린 거리)+6
=(투어버스가 달린 거리)

㉠×3−㉡×2를 하면
$-600a+6=0$
$\therefore a=\frac{1}{100}$
$a=\frac{1}{100}$을 ㉠에 대입하면
$4+6=20b$
$\therefore b=\frac{1}{2}$

$\triangle BCD-\square PCDO$
$=\frac{1}{2}\square ABCD$
$-\square PCDO$

10 %의 소금물 x g에 들어 있는 소금의 양은
$\frac{10}{100}\times x=\frac{1}{10}x$(g)

소금물의 양은 100 g으로 일정하므로 농도는
$\dfrac{10-\frac{1}{10}x}{100}\times100$
$=10-\frac{1}{10}x$ (%)

$\left(10-\frac{1}{10}x\right)$%의 소금물 x g에 들어 있는 소금의 양은
$\dfrac{10-\frac{1}{10}x}{100}\times x$
$=\dfrac{x(100-x)}{1000}$ (g)

x g은 100 g의 소금물에서 덜어 내는 양이므로 100 g보다 적어야 한다.

보충학습

① (소금의 양)$=\dfrac{(\text{소금물의 농도})}{100}\times$(소금물의 양)

② (소금물의 농도)$=\dfrac{(\text{소금의 양})}{(\text{소금물의 양})}\times100$ (%)

352 문제 이해 t분 동안 일반버스가 달린 거리를 at^2 km ($a\neq0$)라 하고 투어버스의 속도를 b km/min이라 하면 t분 동안 투어버스가 달린 거리는 bt km이다.

• 20% 배점

해결 과정 ① 20분 후에 두 버스는 같은 위치에 있으므로 $20^2a+6=20b$

$\therefore 400a+6=20b$ …… ㉠

또 30분 후에 두 버스는 같은 위치에 있으므로

$30^2a+6=30b$

$\therefore 900a+6=30b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=\frac{1}{100},\ b=\frac{1}{2}$$

• 40% 배점

해결 과정 ② 투어버스의 처음 위치를 0이라 하면 출발한 지 t분 후 일반버스의 위치는 $\left(\frac{1}{100}t^2+6\right)$ km, 투어버스의 위치는 $\frac{1}{2}t$ km이다.

이때 일반버스가 30 km 앞서 있으려면

$$\frac{1}{100}t^2+6=\frac{1}{2}t+30, \qquad t^2-50t-2400=0$$

$$(t+30)(t-80)=0$$

$$\therefore t=80\ (\because t>0)$$

• 30% 배점

답 구하기 따라서 출발한 지 80분 후에 일반버스가 투어버스보다 30 km 앞서 달리게 된다.

• 10% 배점

답 80분

353 전략 $\triangle AOD \backsim \triangle POB$임을 이용하여 $\triangle POB$의 넓이를 x에 대한 이차방정식으로 나타낸다.

풀이 평행사변형 ABCD의 넓이가 60 cm^2이므로 높이는 6 cm이다.

$\overline{BP}=x$ cm라 하면 $\triangle AOD \backsim \triangle POB$이고 닮음비가 $10 : x$이므로 $\triangle POB$의 높이는

$$6\times\frac{x}{10+x}=\frac{6x}{10+x}\ (\text{cm})$$

이때 $\triangle POB=30-18=12\ (\text{cm}^2)$이므로

$$\frac{1}{2}\times x\times\frac{6x}{10+x}=12$$

$$3x^2=12(10+x), \qquad x^2-4x-40=0$$

$$\therefore x=2+2\sqrt{11}\ (\because x>0)$$

따라서 $\overline{BP}$의 길이는 $(2+2\sqrt{11})$ cm이다.

답 ②

354 [문제 해결 길잡이]

❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha_n+\beta_n$, $\alpha_n\beta_n$을 n에 대한 식으로 나타낸다.

❷ $\dfrac{1}{\alpha_n}+\dfrac{1}{\beta_n}$을 n에 대한 식으로 나타낸다.

❸ 주어진 식의 값을 구한다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=-\frac{1}{n}$, $\alpha_n\beta_n=-(n+1)$ ❶

이므로

$$\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}=\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=-\frac{1}{n}\times\left(-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \text{ ❷}$$
$$\therefore \left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\cdots+\frac{1}{\alpha_6}\right)+\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}+\frac{1}{\beta_3}+\cdots+\frac{1}{\beta_6}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\beta_1}\right)+\left(\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\beta_2}\right)+\left(\frac{1}{\alpha_3}+\frac{1}{\beta_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\alpha_6}+\frac{1}{\beta_6}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)$$
$$=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7} \text{ ❸}$$

답 $\frac{6}{7}$

참고 이차방정식 $nx^2+x-n(n+1)=0$에서

$1^2-4n\{-n(n+1)\}=1+4n^2(n+1)>0$

이므로 서로 다른 두 근을 갖는다.

내신 만점 정복하기

본책 66~70쪽

355 **전략** (x에 대한 이차식)$=0$ 꼴로 나타내어지는 방정식을 x에 대한 이차방정식이라 한다.

풀이 $(x-1)(4x-2)=(a-2)x^2+x$에서

$4x^2-6x+2=(a-2)x^2+x$

$(a-6)x^2+7x-2=0$

이것이 x에 대한 이차방정식이 되려면

$a-6\neq0$ $\quad\therefore a\neq6$

답 $a\neq6$

356 **전략** $x=\alpha$가 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근 ➡ $a\alpha^2+b\alpha+c=0$

풀이 $x=\alpha$가 이차방정식 $x^2-\sqrt{3}x+1=0$의 근이므로

$\alpha^2-\sqrt{3}\alpha+1=0$

양변을 $\alpha(\alpha\neq0)$로 나누면 $\quad \alpha+\frac{1}{\alpha}=\sqrt{3}$

$\alpha=0$을 $\alpha^2-\sqrt{3}\alpha+1=0$에 대입하면 $0-0+1\neq0$이므로 $\alpha\neq0$

$\therefore \alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2=3-2=1$

답 ①

357 **전략** $x=\alpha$가 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근 ➡ $a\alpha^2+b\alpha+c=0$

풀이 $x=ka$가 이차방정식 $5x^2+4ax-a^2=0$의 근이므로 $\quad 5(ka)^2+4a\times ka-a^2=0$

$\therefore 5k^2a^2+4ka^2-a^2=0$

$a\neq0$이므로 양변을 a^2으로 나누면

$5k^2+4k-1=0$, $\quad (k+1)(5k-1)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=\frac{1}{5}$

답 -1, $\frac{1}{5}$

358 **전략** 점 (p, q)가 제2사분면 위의 점 ➡ $p<0$, $q>0$

풀이 점 $(a-1, a+6)$이 제2사분면 위의 점이므로

$a-1<0$, $a+6>0$

$\therefore -6<a<1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

일차함수 $y=ax+a$의 그래프가 점 $(a-1, a+6)$을 지나므로

$a+6=a(a-1)+a$, $\quad a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad a=-2$

답 ③

359 **전략** b가 소수임을 이용하여 주어진 이차방정식의 좌변이 인수분해되는 경우를 생각해 본다.

풀이 b가 소수이므로 $x^2-2ax-b=0$의 좌변을 인수분해할 수 있는 경우는

b의 약수는 1, b뿐이다.

$(x+1)(x-b)=0$ 또는 $(x+b)(x-1)=0$

의 두 가지뿐이다.

(i) $(x+1)(x-b)=0$일 때,

$x^2+(1-b)x-b=0$

이므로 $\quad -2a=1-b$ $\quad\therefore 2a-b=-1$

(ii) $(x+b)(x-1)=0$일 때,

$x^2+(b-1)x-b=0$

이므로 $\quad -2a=b-1$ $\quad\therefore 2a+b=1$

그런데 이것을 만족시키는 소수 a, b는 존재하지 않는다.

a, b가 소수이면 $a\geq2$, $b\geq2$이므로 $2a+b\geq6$

(i), (ii)에서 $\quad 2a-b=-1$

답 ②

참고 $2a-b=-1$을 만족시키는 소수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(2, 5)$, $(3, 7)$, $(5, 11)$, $(11, 23)$, $\cdots$

이고, 예를 들어 $a=2$, $b=5$일 때, 주어진 이차방정식은 $x^2-4x-5=0$이므로

$(x+1)(x-5)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

즉 정수인 두 근을 가짐을 확인할 수 있다.

360 **전략** 주어진 방정식에 $x=-2$를 대입하여 a의 값을 구한다.

풀이 $x=-2$가 $(a+1)x^2-(a^2+2)x+3(a-1)=0$의 근이므로

$4(a+1)+2(a^2+2)+3(a-1)=0$

$2a^2+7a+5=0$, $\quad (2a+5)(a+1)=0$

$\therefore a=-\frac{5}{2}$ 또는 $a=-1$

그런데 $a+1\neq0$, 즉 $a\neq-1$이어야 하므로

주어진 방정식이 이차방정식이므로 x^2의 계수가 0이 아니어야 한다. $\therefore a+1\neq0$

$a=-\frac{5}{2}$

즉 $-\frac{3}{2}x^2-\frac{33}{4}x-\frac{21}{2}=0$이므로

$2x^2+11x+14=0$, $\quad (2x+7)(x+2)=0$

$\therefore x=-\frac{7}{2}$ 또는 $x=-2$

따라서 $b=-\frac{7}{2}$이므로

$ab=-\frac{5}{2}\times\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{35}{4}$

답 ③

361 전략 이차방정식 $x^2+px+q=0$이 중근을 가질 조건 ◯ $q=\left(\frac{p}{2}\right)^2$

풀이 이차방정식 $x^2-2ax-a+2=0$이 중근을 가지므로

$$-a+2=\left(\frac{-2a}{2}\right)^2$$

$a^2+a-2=0$, $(a+2)(a-1)=0$

$\therefore a=-2\ (\because a<0)$

즉 이차방정식 $3x^2+x-2=0$에서

$(x+1)(3x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{2}{3}$ 답 $x=-1$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

362 전략 이차방정식 $a(x-p)^2=q$의 해$(aq>0)$ ◯ $x=p\pm\sqrt{\frac{q}{a}}$

풀이 $9(x-1)^2=30-n$에서

$(x-1)^2=\frac{30-n}{9}$, $x-1=\pm\sqrt{\frac{30-n}{9}}$

$\therefore x=1\pm\frac{\sqrt{30-n}}{3}$

이때 해가 모두 정수이려면 $\frac{\sqrt{30-n}}{3}$이 정수이어야 하므로

$\sqrt{30-n}=0$ 또는 $\sqrt{30-n}=3$

$30-n=0$ 또는 $30-n=9$

$\therefore n=30$ 또는 $n=21$

따라서 구하는 자연수 n의 값의 합은 51이다. 답 ③

$\sqrt{30-n}$이 0 또는 3의 배수이어야 한다.

n이 자연수이므로 $0\le\sqrt{30-n}<\sqrt{30}<6$ $\therefore \sqrt{30-n}=0$ 또는 $\sqrt{30-n}=3$

363 문제 이해 $f(x)$가 x에 대한 이차식이므로 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$로 놓자. • 10% 배점

해결 과정 ① $f(0)=1$이므로

$c=1$ • 20% 배점

해결 과정 ② $f(x+1)-f(x)$

$=a(x+1)^2+b(x+1)+1-(ax^2+bx+1)$

$=2ax+a+b$

즉 $2ax+a+b=4x$이므로

$2a=4,\ a+b=0$ $\therefore a=2,\ b=-2$

$\therefore f(x)=2x^2-2x+1$ • 40% 배점

답 구하기 $f(x)=x$에서

$2x^2-2x+1=x$, $2x^2-3x+1=0$

$(2x-1)(x-1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$ • 30% 배점

답 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

364 해결 과정 ① $x^2+ax+a-1=0$에서

$(x+1)(x-1+a)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1-a$

$x^2-(a+4)x+4a=0$에서

$(x-4)(x-a)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=a$ • 40% 배점

해결 과정 ② (ⅰ) 공통인 근이 $x=-1$일 때,

$a=-1$

(ⅱ) 공통인 근이 $x=4$일 때,

$1-a=4$ $\therefore a=-3$

(ⅲ) 공통인 근이 $x=1-a$ 또는 $x=a$일 때,

$1-a=a$ $\therefore a=\frac{1}{2}$ • 40% 배점

답 구하기 이상에서 모든 a의 값의 합은

$-1+(-3)+\frac{1}{2}=-\frac{7}{2}$ • 20% 배점

답 $-\frac{7}{2}$

365 해결 과정 ① $x^2+2ax+3a+4=0$이 중근을 가지려면

$(x+a)^2=0$

으로 좌변이 인수분해되어야 한다.

이때 중근 $x=-a$가 양수이므로 $a<0$ • 40% 배점

해결 과정 ② 또 $3a+4=\left(\frac{2a}{2}\right)^2$이어야 하므로

$a^2-3a-4=0$, $(a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=-1\ (\because a<0)$ • 40% 배점

답 구하기 따라서 $a=-1$이고 중근은 $x=1$이므로 구하는 곱은 $-1\times1=-1$ • 20% 배점

답 -1

366 전략 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 근 ◯ $x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ (단, $b'^2-ac\ge0$)

풀이 $3x^2-6\sqrt{2}x+k-3=0$에서

$$x=\frac{-(-3\sqrt{2})\pm\sqrt{(-3\sqrt{2})^2-3(k-3)}}{3}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{27-3k}}{3}$$

즉 $\sqrt{27-3k}=2\sqrt{3}$이므로

$27-3k=12$, $3k=15$

$\therefore k=5$ 답 ④

$2\sqrt{3}=\sqrt{12}$

367 전략 계수가 분수인 이차방정식 ◯ 양변에 분모의 최소공배수를 곱한다.

풀이 주어진 방정식의 양변에 6을 곱하면

$2(x^2+1)+3(x-3)=x$

$2x^2+2x-7=0$

$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{15}}{2}$

따라서 $A=-1$, $B=15$이므로

$A+B=14$ 답 ⑤

3, 2, 6의 최소공배수

368 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 가질 조건 ◯ $b^2-4ac=0$

풀이 주어진 방정식은

$3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)=0$

이 방정식이 중근을 가지므로

$\{-2(a+b+c)\}^2-4\times3\times(ab+bc+ca)=0$

$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=0$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$\therefore a=b=c$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 정삼각형이다.

답 정삼각형

$(a+b+c)^2$
$=a^2+b^2+c^2$
$+2ab+2bc+2ca$

$2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2$
$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

$a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$
$\rightarrow a=b$, $b=c$, $c=a$

369 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 가질 조건 ➡ $b^2-4ac=0$

풀이 $4x^2+4x-k=0$이 중근을 가지므로

$4^2-4\times4\times(-k)=0$

$\therefore k=-1$

$k=-1$을 $(k-1)x^2+3x-1=0$에 대입하면

$-2x^2+3x-1=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$-\frac{3}{-2}=\frac{3}{2}$

답 ③

370 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β ➡ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

풀이 $x^2-ax+2=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 차의 제곱이 1이므로

$(\alpha-\beta)^2=1$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=2$

이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=a^2-4\times2=a^2-8$

따라서 $a^2-8=1$이므로 $a^2=9$

이차방정식 $2x^2+ax+1-p=0$이 중근을 가지려면

$a^2-4\times2\times(1-p)=0$, $9=8-8p$

$8p=-1$

$\therefore p=-\frac{1}{8}$

답 ②

371 전략 $\sqrt{M}$의 정수 부분이 a이면 소수 부분은 $\sqrt{M}-a$이다.

풀이 $1<\sqrt{2}<2$에서 $\sqrt{2}$의 정수 부분은 1이므로 소수 부분은 $\sqrt{2}-1$

$5<\sqrt{32}<6$에서 $\sqrt{32}$의 정수 부분은 5

즉 이차방정식 $2x^2+2px+q=0$의 두 근이 $\sqrt{2}-1$, 5이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\sqrt{2}-1)+5=-p$, $5(\sqrt{2}-1)=\frac{q}{2}$

$\therefore p=-4-\sqrt{2}$, $q=-10+10\sqrt{2}$

$\therefore p+q=(-4-\sqrt{2})+(-10+10\sqrt{2})$

$=-14+9\sqrt{2}$

답 ②

372 전략 정수 조건이 있는 방정식
➡ (일차식)×(일차식)=(정수) 꼴로 고쳐서 정수 조건을 이용한다.

풀이 $x^2+px+3p=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=3p$

이므로 $\alpha\beta=-3(\alpha+\beta)$

$\alpha\beta+3\alpha+3\beta=0$

$\therefore (\alpha+3)(\beta+3)=9$

α, β가 정수이면 $\alpha+3$, $\beta+3$도 정수이므로

$\alpha+3$	1	-1	3	-3	9	-9
$\beta+3$	9	-9	3	-3	1	-1

따라서 정수 α, β의 순서쌍 (α, β)는

$(-2, 6)$, $(-4, -12)$, $(0, 0)$, $(-6, -6)$, $(6, -2)$, $(-12, -4)$

이므로 $\alpha+\beta$의 값은

-16, -12, 0, 4

$\therefore p=-4$, 0, 12, 16

답 -4, 0, 12, 16

$\alpha(\beta+3)+3(\beta+3)=9$
이므로
$(\alpha+3)(\beta+3)=9$

$-2+6=4$,
$-4+(-12)=-16$,
$0+0=0$,
$-6+(-6)=-12$,
$6+(-2)=4$,
$-12+(-4)=-16$

373 전략 이차방정식의 계수가 모두 유리수일 때, 이차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$ (p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)이면 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$이다.

풀이 다른 한 근은 $1+\sqrt{2}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=a$, $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=b$

$\therefore a=2$, $b=-1$

$\therefore a+b=1$

답 ④

374 전략 α, β를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 a인 이차방정식 ➡ $a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0$

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{1}{2}$, $\alpha\beta=-2$이므로

$$\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)+\left(1-\frac{1}{\beta}\right)=2-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$$

$$\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)=1-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+\frac{1}{\alpha\beta}$$

$$=1-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\beta}$$

$$=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

따라서 $1-\frac{1}{\alpha}$, $1-\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 4인 이차방정식은

$4\left(x^2-\frac{7}{4}x+\frac{1}{4}\right)=0$ $\therefore 4x^2-7x+1=0$

답 $4x^2-7x+1=0$

375 전략 α, β를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식 ➡ $(x-\alpha)(x-\beta)=0$

풀이 이차방정식 $(x-999)^2=2x-999$의 두 근이 α, β이므로

$(x-999)^2-2x+999=(x-\alpha)(x-\beta)$

이 식에 $x=999$를 대입하면

$-999=(999-\alpha)(999-\beta)$

$\therefore (\alpha-999)(\beta-999)=-999$

답 ①

다른풀이 $x-999=t$로 놓으면 주어진 이차방정식은

$t^2=2t+999$, 즉 $t^2-2t-999=0$

이 이차방정식의 두 근을 t_1, t_2라 하면

$t_1=\alpha-999$, $t_2=\beta-999$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha-999)(\beta-999)=t_1t_2=-999$

이차방정식 $t^2-2t-999=0$의 두 근 t_1, t_2의 곱은 $t_1t_2=\frac{-999}{1}$ $=-999$

376 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 생각한다.

$|a|=\begin{cases} a & (a\geq0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

풀이 $x◎x=|1◎x|+2$에서

$2x^2-2x-x+1=|2x-2-x+1|+2$

$\therefore 2x^2-3x-1=|x-1|$

(i) $x\geq1$일 때,

$2x^2-3x-1=x-1$

$x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

그런데 $x\geq1$이므로 $x=2$

(ii) $x<1$일 때,

$2x^2-3x-1=-x+1$

$x^2-x-1=0$

$\therefore x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$2<\sqrt{5}<3$이므로 $3<1+\sqrt{5}<4$ $\therefore \frac{3}{2}<\frac{1+\sqrt{5}}{2}<2$

$2<\sqrt{5}<3$이므로 $-3<-\sqrt{5}<-2$ $-2<1-\sqrt{5}<-1$ $\therefore -1<\frac{1-\sqrt{5}}{2}<-\frac{1}{2}$

그런데 $x<1$이므로 $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(i), (ii)에서 $x=2$ 또는 $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$이므로 구하는 곱은

$2\times\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1-\sqrt{5}$ 답 $1-\sqrt{5}$

377 전략 십의 자리의 숫자가 a이고 일의 자리의 숫자가 b인 수 ⊙ $10a+b$

풀이 십의 자리의 숫자를 x라 하면 일의 자리의 숫자는 $2x$이므로 처음 수는

$10x+2x=12x$

이때 $x\times2x=12x-16$이므로

$x^2-6x+8=0$, $(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

따라서 처음 수는 24 또는 48이므로 구하는 합은

$24+48=72$ 답 ①

주의 십의 자리의 숫자가 a, 일의 자리의 숫자가 b인 수는 ab가 아니라 $10a+b$이다.

378 전략 어떤 자연수를 x로 놓고 x에 대한 이차방정식을 세운다.

풀이 어떤 자연수를 x라 하면

$x(x-3)=180$, $x^2-3x-180=0$

$(x+12)(x-15)=0$

$\therefore x=15$ ($\because$ x는 자연수)

따라서 원래의 두 수의 곱은

$15\times18=270$ 답 ③

379 전략 길의 폭을 xm로 놓고 x에 대한 이차방정식을 세운다.

풀이 길의 폭을 xm라 하면 길을 제외한 공원의 넓이는 가로의 길이가 $(14-x)$ m, 세로의 길이가 $(9-2x)$ m인 직사각형의 넓이와 같으므로

$(14-x)(9-2x)=60$, $2x^2-37x+66=0$

$(x-2)(2x-33)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=\frac{33}{2}$

그런데 $0<x<\frac{9}{2}$이어야 하므로 $x=2$

$9-2x>0$이어야 하므로 $x<\frac{9}{2}$

따라서 길의 폭은 2m이어야 한다. 답 2m

380 전략 $\overline{AB}=x$로 놓고 닮은 두 도형에서 닮음비를 이용하여 x에 대한 이차방정식을 세운다.

풀이 □ABCD∽□DEFC이므로

$\overline{AD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{DE}$

닮은 도형에서 대응변의 길이의 비는 같다.

$\overline{AB}=\overline{AE}=x$라 하면 $\overline{DE}=12-x$이므로

$12:x=x:(12-x)$

$12(12-x)=x^2$, $x^2+12x-144=0$

$\therefore x=-6\pm6\sqrt{5}$

그런데 $x>0$이므로 $x=-6+6\sqrt{5}$

$\therefore \overline{AB}=-6+6\sqrt{5}$ 답 ②

381 문제 이해 x에 대한 이차방정식이 중근을 가지려면 $3x+1=A$로 치환한 A에 대한 이차방정식도 중근을 가져야 한다. • 20% 배점

해결 과정 ① $3x+1=A$로 치환하면

$\frac{1}{5}A^2+0.4aA+a=0$

$A^2+2aA+5a=0$ • 30% 배점

해결 과정 ② 이 이차방정식이 중근을 가지려면

$(2a)^2-4\times5a=0$ • 30% 배점

답 구하기 $a^2-5a=0$, $a(a-5)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=5$ • 20% 배점

답 0, 5

382 해결 과정 ① $x=\alpha$가 두 이차방정식의 공통인 근이므로

$\alpha^2+a\alpha+b+1=0$ …… ㉠

$\alpha^2+b\alpha+a+1=0$ …… ㉡ • 20% 배점

해결 과정 ② ㉠−㉡을 하면

$(a-b)\alpha-(a-b)=0$, $(a-b)(\alpha-1)=0$

$\therefore \alpha=1$ ($\because a\neq b$) • 20% 배점

해결 과정 ③ 두 이차방정식에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha+\gamma=-b$

이때 $\alpha=1$이므로

$1+\beta=-a$, $1+\gamma=-b$

$\therefore \beta+\gamma=(-a-1)+(-b-1)$

$=-a-b-2$ …… ㉢

또한 $\alpha\beta=b+1$, $\alpha\gamma=a+1$이므로

$\beta=b+1,\ \gamma=a+1$

$\therefore\ \beta+\gamma=a+b+2$ ...... ㉣ • 40% 배점

답 구하기 ㉢+㉣을 하면

$2(\beta+\gamma)=0$

$\therefore\ \beta+\gamma=0$ • 20% 배점

답 0

다른풀이 $\alpha=1$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$1+a+b+1=0 \quad \therefore\ a+b=-2$

따라서 ㉢에서

$\beta+\gamma=-(a+b)-2$

$=-(-2)-2=0$

383 해결 과정 ① 두 근을 $2\alpha,\ 3\alpha\ (\alpha\neq0)$로 놓으면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+3\alpha=-\dfrac{-(2k+1)}{6}$

$2\alpha\times3\alpha=\dfrac{k-1}{6}$

$\therefore\ k=15\alpha-\dfrac{1}{2},\ k=36\alpha^2+1$ • 40% 배점

해결 과정 ② 즉 $15\alpha-\dfrac{1}{2}=36\alpha^2+1$이므로

$24\alpha^2-10\alpha+1=0, \quad (6\alpha-1)(4\alpha-1)=0$

$\therefore\ \alpha=\dfrac{1}{6}$ 또는 $\alpha=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ k=2$ 또는 $k=\dfrac{13}{4}$ • 40% 배점

$\alpha=\dfrac{1}{6}$이면

$k=15\times\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{2}=2$

$\alpha=\dfrac{1}{4}$이면

$k=15\times\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{13}{4}$

답 구하기 그런데 k는 정수이므로

$k=2$ • 20% 배점

답 2

384 해결 과정 ① 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$ ...... ㉠

이차방정식 $x^2-8x+4=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha^2+\beta^2=8,\ \alpha^2\beta^2=4$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha\beta=b=\pm2$ • 30% 배점

해결 과정 ② (i) $b=2$일 때,

$a^2=(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$

$=8+2\times2=12$

$\therefore\ a=\pm2\sqrt{3}$

이것은 a가 정수라는 조건을 만족시키지 않는다. • 30% 배점

해결 과정 ③ (ii) $b=-2$일 때,

$a^2=(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$

$=8+2\times(-2)=4$

$\therefore\ a=\pm2$

그런데 $a>b$이므로 $a=2$ • 30% 배점

답 구하기 (i), (ii)에서 $a=2,\ b=-2$이므로

$a+b=0$ • 10% 배점

답 0

385 문제 이해 각 정사각형의 한 변의 길이는 2 cm씩 차이가 난다. • 10% 배점

해결 과정 ① 가장 작은 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 가운데 정사각형과 가장 큰 정사각형의 한 변의 길이는 각각 $(x+2)$ cm, $(x+4)$ cm이다. • 20% 배점

해결 과정 ② 가장 큰 정사각형의 넓이가 나머지 두 정사각형의 넓이의 합과 같으므로

$(x+4)^2=x^2+(x+2)^2$

$x^2+8x+16=x^2+x^2+4x+4$

$x^2-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0$

$\therefore\ x=6\ (\because\ x>0)$ • 50% 배점

답 구하기 따라서 세 정사각형의 한 변의 길이는 각각 6 cm, 8 cm, 10 cm이므로 구하는 넓이는

$8^2-6^2=28(\mathrm{cm}^2)$ • 20% 배점

답 $28\,\mathrm{cm}^2$

386 해결 과정 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 x라 하면 색칠한 부분의 넓이는 $\dfrac{3}{4}x^2$이므로

윗변의 길이가 x, 아랫변의 길이가 $x+4$, 높이가 $x-3$인 사다리꼴

$\dfrac{1}{2}(2x+4)(x-3)=\dfrac{3}{4}x^2$

$4x^2-4x-24=3x^2, \quad x^2-4x-24=0$

$\therefore\ x=2\pm2\sqrt{7}$ • 80% 배점

답 구하기 그런데 $x>3$이어야 하므로 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 $2+2\sqrt{7}$이다. • 20% 배점

답 $2+2\sqrt{7}$

387 해결 과정 ① 두 점 $(0,\ -1)$, $(3,\ 0)$을 지나는 직선 l의 기울기는

$\dfrac{0-(-1)}{3-0}=\dfrac{1}{3}$

이므로 직선 l의 방정식은

$y=\dfrac{1}{3}x-1$ • 40% 배점

해결 과정 ② 점 P의 좌표를 $\left(a,\ \dfrac{1}{3}a-1\right)(a>3)$이라 하면 x축과 두 직선 l, m으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 24이므로

$\dfrac{1}{2}(a-3)\left(\dfrac{1}{3}a-1\right)=24$

$a^2-6a-135=0$

$(a+9)(a-15)=0$

$\therefore\ a=15\ (\because\ a>3)$ • 40% 배점

답 구하기 따라서 점 P의 좌표는 $(15,\ 4)$이다. • 20% 배점

답 $(15,\ 4)$

다른풀이 $\dfrac{1}{2}(a-3)\left(\dfrac{1}{3}a-1\right)=24$에서

양변에 6을 곱한다.

$(a-3)^2=144, \quad a-3=\pm12$

$\therefore\ a=15\ (\because\ a>3)$

보충학습

일차함수의 그래프를 이용하여 일차함수의 식 구하기

① 기울기 a와 y절편 b를 알 때
 → $y=ax+b$

② 기울기 a와 한 점 $(x_1,\ y_1)$을 알 때
 → $y=ax+b$로 놓고 $x=x_1,\ y=y_1$을 대입하여 b의 값을 구한다.

③ 두 점 $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)(x_1 \neq x_2)$를 알 때
 → 기울기 $a=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$을 구한 후 $y=ax+b$로 놓고 두 점 중 한 점의 좌표를 대입하여 b의 값을 구한다.

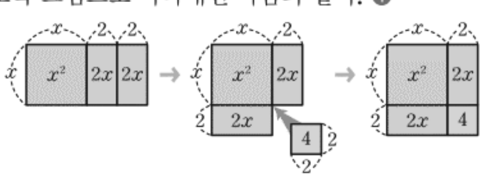
교과서 속 창의유형

본책 71~72쪽

388 [문제 해결 길잡이]

❶ 알콰리즈미가 이용한 방법과 같이 주어진 이차방정식의 양수인 해를 구할 수 있도록 그림으로 나타낸다.
❷ ❶의 그림을 식으로 나타내어 $x^2+4x=12$의 양수인 해를 구한다.

풀이 이차방정식 $x^2+4x=12$의 양수인 해를 구할 수 있도록 그림으로 나타내면 다음과 같다. ❶



위의 그림과 같이 $x^2+4x=12$의 양변에 4를 더하면

$x^2+4x+4=12+4$

$(x+2)^2=16, \quad x+2=4$

$\therefore x=2$ ❷

답 풀이 참조

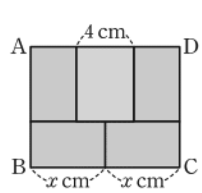
389 [문제 해결 길잡이]

❶ 타일 Q의 긴 변의 길이를 x cm라 하고 짧은 변의 길이를 x에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 문제의 조건를 이용하여 x에 대한 이차방정식을 세우고 해를 구한다.
❸ 타일 Q의 긴 변의 길이를 구한다.

풀이 타일 Q의 긴 변의 길이를 x cm라 하면 오른쪽 그림에서

$\overline{AD}=\overline{BC}=2x$ (cm)

이므로 타일 Q의 짧은 변의 길이는



$\dfrac{2x-4}{2}=x-2$ (cm) ❶

직사각형 ABCD의 넓이가 80 cm^2이므로

$2x(2x-2)=80, \quad x^2-x-20=0$

$\overline{AB}=x+(x-2)=2x-2$ (cm)

$(x+4)(x-5)=0$

$\therefore x=5\ (\because x>0)$ ❷

따라서 타일 Q의 긴 변의 길이는 5 cm이다. ❸

답 5 cm

390 [문제 해결 길잡이]

❶ 바둑돌이 나열되는 규칙을 찾아 [n단계]에 나열되는 바둑돌의 개수를 구한다.
❷ n에 대한 이차방정식을 세우고 해를 구한다.
❸ 120개의 바둑돌이 나열되는 단계를 구한다.

풀이 (1) [n단계]에서 바둑돌은 가로에 $(n+2)$개, 세로에 n개를 직사각형 모양으로 나열한 것이므로 바둑돌의 개수는

$n(n+2)$ ❶

(2) $n(n+2)=120$에서 $\quad n^2+2n-120=0$

$(n+12)(n-10)=0$

$\therefore n=10\ (\because n$은 자연수$)$ ❷

따라서 120개의 바둑돌이 나열되는 것은 [10단계]이다. ❸

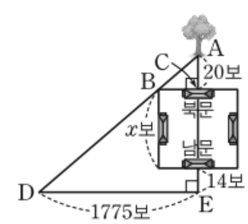
답 (1) $n(n+2)$ (2) [10단계]

391 [문제 해결 길잡이]

❶ 주어진 문제 상황을 그림으로 나타낸다.
❷ 성벽의 한 변의 길이를 x보라 하고 x에 대한 이차방정식을 세운다.
❸ 이차방정식을 풀어 성벽의 한 변의 길이를 구한다.

풀이 문제 상황을 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다. ❶

성벽의 한 변의 길이를 x보라 하면 오른쪽 그림에서



$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$이므로

△ABC와 △ADE에서
∠A는 공통,
∠ACB=∠AED=90°
이므로
△ABC∽△ADE
(AA 닮음)

$\overline{AC} : \overline{AE}=\overline{BC} : \overline{DE}$

$20 : (34+x)=\dfrac{x}{2} : 1775$

$\dfrac{x}{2}(34+x)=1775\times 20$ ❷

$x^2+34x-71000=0$

$(x+284)(x-250)=0$

$\therefore x=250\ (\because x>0)$

따라서 성벽의 한 변의 길이는 250보이다. ❸

답 250보

Ⅳ 이차함수

07 | 이차함수와 그 그래프

개념&기출유형 본책 74~77쪽

392 ② $y=-x(x-5)=-x^2+5x$
④ $y=(x-2)^2-x^2=x^2-4x+4-x^2=-4x+4$
⑤ $y=2x^2-x(2x+1)=2x^2-2x^2-x=-x$

답 ②

393 (ㄴ) $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.
(ㄹ) $x>0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
이상에서 옳은 것은 (ㄱ), (ㄷ)이다. 답 (ㄱ), (ㄷ)

보충학습
이차함수 $y=ax^2$의 그래프는
① $a>0$ → $x>0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
② $a<0$ → $x>0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

394 $y=ax^2$의 그래프를 y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=ax^2-5$
이 함수의 그래프가 점 $(-2,\ 7)$을 지나므로
$7=a\times(-2)^2-5,\quad 4a=12$
$\therefore a=3$ 답 3

395 주어진 그래프는 $y=-x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로
$y=-\{x-(-2)\}^2$, 즉 $y=-(x+2)^2$
따라서 $f(x)=-(x+2)^2$이므로
$f(-5)=-(-5+2)^2=-9$ 답 -9

396 ① $y=-(x-10)^2$의 그래프는 제3, 4사분면을 지난다.
② $y=x^2+10$의 그래프의 축의 방정식은 $x=0$이다.
③ $y=x^2+10$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 10)$이다.
④ $y=x^2$, $y=x^2+10$, $y=-(x-10)^2$에서 x^2의 계수의 절댓값이 1로 모두 같으므로 세 함수의 그래프의 폭은 모두 같다.
⑤ $y=-(x-10)^2$의 그래프는 $x<0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. 답 ④

$y=-x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 10만큼 평행이동한 것이다.

$y=x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 10만큼 평행이동한 것이다.

397 $y=-(x+3)^2-2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-(x-m+3)^2-2+n$

x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입한다.

이 함수의 그래프가 $y=-x^2$의 그래프와 일치하므로
$-m+3=0,\ -2+n=0$
$\therefore m=3,\ n=2$
$\therefore m+n=5$ 답 ⑤

398 $y=2(x+1)^2-5$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=2(x+3+1)^2-5+m$
$\therefore y=2(x+4)^2-5+m$
이 함수의 그래프의 꼭짓점 $(-4,\ -5+m)$이 직선 $y=-x-5$ 위에 있으므로
$-5+m=-(-4)-5$
$\therefore m=4$ 답 4

399 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$
꼭짓점 $(p,\ -q)$가 제3사분면에 있으므로
$p<0,\ -q<0\quad \therefore p<0,\ q>0$ 답 ③

보충학습
각 사분면 위의 점의 좌표의 부호

	제1사분면	제2사분면	제3사분면	제4사분면
x좌표	+	−	−	+
y좌표	+	+	−	−

400 $y=-2x^2+4x+3$
$=-2(x^2-2x+1-1)+3$
$=-2(x-1)^2+5$

$\left(\frac{-2}{2}\right)^2=1$

따라서 $a=-2,\ p=1,\ q=5$이므로
$a+p+q=4$ 답 ②

보충학습
이차식 x^2+ax+b가 완전제곱식이면
$b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$

401 ① $y=x^2-4x+7=(x-2)^2+3$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2,3)$이므로 제1사분면에 있다.
② $y=2x^2+8x+5=2(x+2)^2-3$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ -3)$이므로 제3사분면에 있다.
③ $y=3x^2+6x+4=3(x+1)^2+1$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-1,1)$이므로 제2사분면에 있다.
④ $y=-x^2+6x-10=-(x-3)^2-1$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ -1)$이므로 제4사분면에 있다.
⑤ $y=-2x^2-4x-3=-2(x+1)^2-1$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ -1)$이므로 제3사분면에 있다.
답 ③

402 $y=3x^2-3kx+k+1$
$=3\left(x^2-kx+\frac{k^2}{4}-\frac{k^2}{4}\right)+k+1$
$=3\left(x-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{3}{4}k^2+k+1$

$\left(\frac{-k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{4}$

이 함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$\left(\frac{k}{2},\ -\frac{3}{4}k^2+k+1\right)$이므로

$\frac{k}{2}=2,\ -\frac{3}{4}k^2+k+1=-7$

$\therefore k=4$

> $-\frac{3}{4}k^2+k+8=0$이므로
> $3k^2-4k-32=0$
> $(3k+8)(k-4)=0$
> $\therefore k=-\frac{8}{3}$ 또는 $k=4$

주어진 함수의 식에 $x=0$을 대입하면

$y=k+1=4+1=5$

따라서 주어진 함수의 그래프와 y축과의 교점의 좌표는

$(0,\ 5)$ 답 ①

403 $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-5$

$=-\frac{1}{2}(x^2-8x+16-16)-5$

$=-\frac{1}{2}(x-4)^2+3$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{1}{2}(x+1-4)^2+3+2$

$\therefore y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+5$

이 함수의 그래프가 점 $(-1,\ a)$를 지나므로

$a=-\frac{1}{2}\times(-1-3)^2+5=-3$ 답 -3

주의 $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-5$에 x 대신 $x+1$, y 대신 $y-2$를 대입하여 구할 수도 있지만 계산이 복잡해진다.

404 $y=2x^2+12x+7$

$=2(x^2+6x+9-9)+7$

$=2(x+3)^2-11$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2(x-m+3)^2-11+n$ …… ㉠

이때

$y=2x^2-4x=2(x^2-2x+1-1)$

$=2(x-1)^2-2$

이고, 이 식이 ㉠과 일치하므로

$-m+3=-1,\ -11+n=-2$

$\therefore m=4,\ n=9$

$\therefore m+n=13$ 답 13

405 $y=-x^2+4x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

> x 대신 $-x$를 대입한다.

$y=-x^2-4x=-(x^2+4x+4-4)$

$=-(x+2)^2+4$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-(x-3+2)^2+4-2=-(x-1)^2+2$

$\therefore y=-x^2+2x+1$ 답 $y=-x^2+2x+1$

406 B$(0,\ -6)$이므로 $k=-6$

$y=x^2+x-6$이므로 $x^2+x-6=0$에서

$(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

따라서 A$(-3,\ 0)$, C$(2,\ 0)$이므로

$\overline{AC}=2-(-3)=5$

> 수직선 위의 두 점 P(a), Q(b) 사이의 거리는
> $\overline{PQ}=|a-b|$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times5\times6=15$ 답 15

407 $-x^2+2x+3=0$에서 $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 A$(-1,\ 0)$, B$(3,\ 0)$이므로

$\overline{AB}=3-(-1)=4$

이때 $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$에서 C$(1,\ 4)$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times4\times4=8$

또 D$(0,\ 3)$이므로

$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times4\times3=6$

$\therefore \triangle ABC : \triangle ABD=8:6=4:3$

답 $4:3$

만점비법

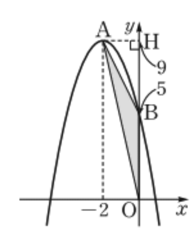
두 삼각형 ABC, ABD에서 밑변이 $\overline{AB}$로 같으므로 두 삼각형의 넓이의 비는 높이의 비와 같다.
이때 C$(1,\ 4)$, D$(0,\ 3)$이므로
$\triangle ABC : \triangle ABD=4:3$

408 $y=-x^2-4x+5$

$=-(x+2)^2+9$

이므로 A$(-2,\ 9)$

또 B$(0,\ 5)$이므로 점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle AOB=\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{AH}$

$=\frac{1}{2}\times5\times2=5$ 답 5

409 ①, ②, ③ 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

축이 y축의 오른쪽에 위치하므로 $b<0$

> a, b는 다른 부호이다.

y축과의 교점이 원점의 아래쪽에 위치하므로 $c<0$

$\therefore ab<0,\ \frac{a}{c}<0,\ abc>0$

④ $x=-1$일 때, $y>0$이므로 $a-b+c>0$

⑤ $x=1$일 때, $y<0$이므로 $a+b+c<0$

답 ⑤

보충학습

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 축의 방정식은

> $y=ax^2+bx+c$
> $=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$

$x=-\frac{b}{2a}$

① 축이 y축의 왼쪽에 위치하는 경우

$-\frac{b}{2a}<0$이므로 $\frac{b}{2a}>0$ $\therefore ab>0$

② 축이 y축의 오른쪽에 위치하는 경우

$-\frac{b}{2a}>0$이므로 $\frac{b}{2a}<0$ $\therefore ab<0$

410 $a>0$, $b<0$이므로 $y=ax^2-bx-a+b$의 그래프에서

(i) $a>0$이므로 아래로 볼록

(ii) $a\times(-b)=-ab>0$이므로 축이 y축의 왼쪽에 위치

(iii) $\underline{-a+b<0}$이므로 y축과의 교점이 원점의 아래쪽에 위치

$-a<0$, $b<0$이므로 $-a+b<0$

이상에서 $y=ax^2-bx-a+b$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ④이다. 답 ④

보충학습

일차함수 $y=ax+b$의 그래프에서
(1) a의 부호: 그래프의 모양에 따라 결정
① 오른쪽 위를 향하는 직선 ➜ $a>0$
② 오른쪽 아래를 향하는 직선 ➜ $a<0$
(2) b의 부호: y축과의 교점의 위치에 따라 결정
① y축과의 교점이 원점의 위쪽에 위치 ➜ $b>0$
② y축과의 교점이 원점과 일치 ➜ $b=0$
③ y축과의 교점이 원점의 아래쪽에 위치 ➜ $b<0$

411 $-\frac{1}{2}x^2+x+4=0$에서

$x^2-2x-8=0$, $(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 $A(-2,\ 0)$, $B(4,\ 0)$이므로

$\overline{AB}=4-(-2)=6$

또 $-\frac{1}{2}x^2+x+4=x+2$에서

$x^2-4=0$, $(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

$x=2$일 때, $\underline{y=2+2=4}$

$x=2$를 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+4$에 대입하면 $y=-2+2+4=4$

즉 $C(2,\ 4)$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times6\times4=12$ 답 12

내신 만점 도전하기

본책 78~81쪽

412 전략 y가 x에 대한 이차함수이다.
➜ $y=ax^2+bx+c\,(a\neq0)$

풀이 ① $y=2\pi\times2x=4\pi x$이므로 일차함수이다.

② $y=\frac{1}{2}\times(4x+6x)\times2=10x$이므로 일차함수이다.

③ $y=(3x)^3=27x^3$이므로 이차함수가 아니다.

④ $y=\frac{1}{2}\times\pi\times(4x)^2=8\pi x^2$이므로 이차함수이다.

⑤ $y=\pi\times2^2\times x=4\pi x$이므로 일차함수이다.

답 ④

① 반지름의 길이가 r인 원의 (둘레의 길이) $=2\pi r$
② (사다리꼴의 넓이) $=\frac{1}{2}\times\{$(윗변의 길이) $+$(아랫변의 길이)$\}\times$(높이)

413 전략 이차함수 $y=ax^2$에서 a의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 좁아진다.

풀이 구하는 이차함수의 식은 조건 ㈎에서 $y=ax^2$ 꼴이고, 조건 ㈏에서 $a<0$임을 알 수 있다.

또 조건 ㈐에 의하여 a의 절댓값이 $\frac{5}{2}$보다 크므로 주어진 조건을 모두 만족시키는 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식은 ①이다. 답 ①

414 문제 이해 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선을 나타내는 이차함수의 식을 $y=ax^2$으로 놓자. • 20% 배점

해결 과정 $y=ax^2$의 그래프가 점 $(-2,\ 8)$을 지나므로

$8=a\times(-2)^2$ $\therefore a=2$ • 40% 배점

답 구하기 따라서 $y=2x^2$의 그래프가 점 $(m,\ 18)$을 지나므로

$18=2m^2$, $m^2=9$

$\therefore m=3\ (\because m>0)$ • 40% 배점

답 3

이차함수 $y=ax^2$의 그래프에서
① $a>0$이면 아래로 볼록하다.
② $a<0$이면 위로 볼록하다.

415 전략 이차함수 $y=ax^2$에서 a의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 좁아진다.

풀이 포물선 ㉠은 아래로 볼록한 포물선 $y=\frac{1}{3}x^2$, $y=2x^2$ 중 폭이 넓은 것이므로 포물선 ㉠을 나타내는 이차함수의 식은

$y=\frac{1}{3}x^2$

이 함수의 그래프가 점 $(2,\ p)$를 지나므로

$p=\frac{1}{3}\times2^2=\frac{4}{3}$

포물선 ㉡은 위로 볼록한 포물선 $y=-x^2$, $y=-\frac{1}{3}x^2$ 중 폭이 좁은 것이므로 포물선 ㉡을 나타내는 이차함수의 식은

$y=-x^2$

이 함수의 그래프가 점 $(1,\ q)$를 지나므로

$q=-1^2=-1$

$\therefore p+q=\frac{1}{3}$ 답 ①

416 해결 과정 ① $y=-x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-(x-p)^2$ • 20% 배점

해결 과정 ② 즉 $f(x)=-(x-p)^2$이고 $f(2)=-16$이므로

$-(2-p)^2=-16$, $p^2-4p-12=0$

$(p+2)(p-6)=0$

$\therefore p=-2$ 또는 $p=6$

$\therefore f(x)=-(x+2)^2$ 또는 $f(x)=-(x-6)^2$ • 50% 배점

답 구하기 따라서 두 꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ 0)$, $(6,\ 0)$이므로 두 꼭짓점을 연결한 선분의 길이는

$6-(-2)=8$ • 30% 배점

답 8

417 전략 $y=a(x+p)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-p,\ 0)$이다.

풀이 $y=a(x+p)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(3,\ 0)$이므로 $-p=3$ $\therefore p=-3$

즉 $y=a(x-3)^2$의 그래프가 점 $(1,\ 4)$를 지나므로

$$4=a(1-3)^2, \quad 4=4a \quad \therefore a=1$$

$$\therefore ap=-3$$

답 ①

418 전략 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동 ➡ $y=a(x-m-p)^2$

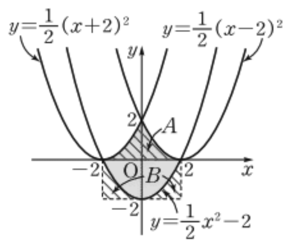
풀이 $y=\frac{1}{2}(x-3)^2$의 그래프는 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로

$$\overline{PQ}=4$$

답 4

419 전략 세 이차함수의 그래프를 좌표평면에 나타내어 넓이가 같은 부분을 찾는다.

풀이 세 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2-2$, $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$, $y=\frac{1}{2}(x+2)^2$의 그래프를 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 A의 넓이와 B의 넓이가 같으므로 구하는 넓이는

$$4\times2=8$$

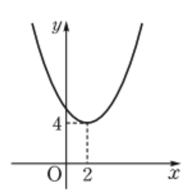
답 8

420 전략 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프
➡ $a>0$이면 아래로 볼록, $a<0$이면 위로 볼록하고, 꼭짓점의 좌표는 $(p,\ q)$이다.

풀이 ① $\frac{1}{3}>0$이므로 아래로 볼록한 포물선이다.

③ 주어진 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2사분면을 지난다.

⑤ 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 4)$이다.



답 ②, ④

421 전략 이차함수의 그래프는 축을 기준으로 증가·감소하는 범위가 나뉜다.

풀이 $y=-\frac{1}{3}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=-\frac{1}{3}(x-5)^2-4$$

따라서 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하는 x의 값의 범위는 $\quad x>5$

답 ⑤

만점비법

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는 축, 즉 직선 $x=p$를 기준으로 증가·감소하는 범위가 나뉜다.
① $a>0$이면 아래로 볼록한 포물선이므로
$x<p$일 때 ➡ x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
$x>p$일 때 ➡ x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
② $a<0$이면 위로 볼록한 포물선이므로
$x<p$일 때 ➡ x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$x>p$일 때 ➡ x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

만점 공략 BOX

422 해결 과정 ① $y=-2(x-1)^2$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=-2(x-a-1)^2+b$$ • 30% 배점

해결 과정 ② 이 함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(a+1,\ b)$이므로

$$a+1=-1,\ b=2$$

$$\therefore a=-2,\ b=2$$ • 30% 배점

해결 과정 ③ $y=-2(x+1)^2+2$의 그래프가 점 $(0,\ c)$를 지나므로

$$c=0$$ • 20% 배점

답 구하기 $\therefore a+b+c=0$ • 20% 배점

답 0

423 전략 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표 ➡ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해

풀이 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 두 점 $(1,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서 만나므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 1, 3이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$$-\frac{b}{a}=4,\ \frac{c}{a}=3$$

$$\therefore \frac{b+c}{a}=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=-4+3=-1$$

답 ②

다른풀이 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 두 점 $(1,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서 만나므로

$$y=a(x-1)(x-3)$$
$$=ax^2-4ax+3a\ (a>0)$$

그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

로 놓을 수 있다.

이 식이 $y=ax^2+bx+c$와 같으므로

$$b=-4a,\ c=3a$$

$$\therefore \frac{b+c}{a}=\frac{-4a+3a}{a}=\frac{-a}{a}=-1$$

보충학습

이차함수의 그래프와 x축과의 교점의 좌표가 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$일 때, 이차함수의 식을
$y=a(x-\alpha)(x-\beta)\ (a\neq0)$
로 놓을 수 있다.

x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (단, $a\neq0$, $b\neq0$)

424 해결 과정 ① 두 점 $(-2,\ 0)$, $(0,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{-1}=1 \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x-1$$

$$\therefore a=-\frac{1}{2},\ b=-1$$ • 40% 배점

해결 과정 ② $a=-\frac{1}{2}$, $b=-1$을 $y=bx^2+4ax-2b^2$에 대입하여 정리하면

$$y=-x^2-2x-2=-(x+1)^2-1$$ • 40% 배점

답 구하기 따라서 구하는 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ -1)$이다. • 20% 배점

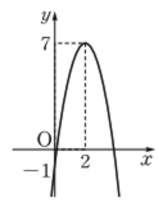
답 $(-1,\ -1)$

425 전략 그래프의 꼭짓점의 좌표와 y축과의 교점의 좌표를 구하여 이차함수의 그래프를 그린다.

풀이 $y=-2x^2+8x-1$

$=-2(x-2)^2+7$

이 함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 7)$이고, y축과의 교점의 좌표는 $(0,\ -1)$이므로 오른쪽 그림과 같이 제2사분면을 지나지 않는다.



답 ②

426 전략 x축에 대하여 대칭이동 ➡ y 대신 $-y$를 대입

풀이 $y=-3x^2+2$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=-3x^2+2 \qquad \therefore y=3x^2-2$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=3(x-2)^2-2+3=3(x-2)^2+1$

따라서 구하는 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 1)$이다. 답 ④

427 전략 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식 ➡ $y=a(x-m-p)^2+q+n$

풀이 $y=x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\left(x+1+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b+2 \qquad \cdots\cdots ㉠$

이때

$y=x^2+5x+4=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

이고, 이 식이 ㉠과 일치하므로

$1+\frac{a}{2}=\frac{5}{2},\ -\frac{a^2}{4}+b+2=-\frac{9}{4}$

$\therefore a=3,\ b=-2$

$\therefore a+b=1$ 답 1

$1+\frac{a}{2}=\frac{5}{2}$에서
$2+a=5 \quad \therefore a=3$
$a=3$을
$-\frac{a^2}{4}+b+2=-\frac{9}{4}$
에 대입하면
$-\frac{9}{4}+b+2=-\frac{9}{4}$
$\therefore b=-2$

다른풀이 $y=x^2+5x+4=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\left(x-1+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-2$

$=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}$

$=x^2+3x-2$

따라서 $a=3,\ b=-2$이므로

$a+b=1$

428 전략 주어진 이차함수의 식을 $y=(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한 후 x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입한다.

풀이 $y=x^2+12x+13=(x+6)^2-23$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=(x-m+6)^2-23+n$

이 함수의 그래프는 아래로 볼록하고 꼭짓점의 좌표가 $(m-6,\ -23+n)$이므로 이 그래프가 x축과 만나지 않으려면

$-23+n>0 \qquad \therefore n>23$ 답 $n>23$

다른풀이 $y=x^2+12x+13$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-n=(x-m)^2+12(x-m)+13$

$\therefore y=x^2+(-2m+12)x+m^2-12m+13+n$

이 함수의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 $y=0$일 때 x의 값이 존재하지 않는다.

즉 이차방정식

$x^2+(-2m+12)x+m^2-12m+13+n=0$의 해가 없으므로

이차방정식
$ax^2+bx+c=0$에서
① $b^2-4ac>0$
→ 서로 다른 두 근
② $b^2-4ac=0$
→ 중근
③ $b^2-4ac<0$
→ 근이 없다.

$(-2m+12)^2-4(m^2-12m+13+n)<0$

$4m^2-48m+144-4m^2+48m-52-4n<0$

$4n>92 \qquad \therefore n>23$

참고 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 만나지 않는다는 것은 $ax^2+bx+c=0$인 x가 존재하지 않는다는 것과 같다. 즉 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해가 없다는 것이다.

429 해결 과정 ① $y=-\frac{1}{3}x^2-2x-2$

$=-\frac{1}{3}(x+3)^2+1$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{1}{3}(x-3+3)^2+1-1=-\frac{1}{3}x^2$ • 30% 배점

해결 과정 ② 두 점 $(-6,\ 0)$, $(0,\ -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x}{-6}+\frac{y}{-2}=1 \qquad \therefore y=-\frac{1}{3}x-2$ • 20% 배점

해결 과정 ③ 이차함수 $y=-\frac{1}{3}x^2$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{3}x-2$의 교점의 x좌표는 $-\frac{1}{3}x^2=-\frac{1}{3}x-2$에서

$x^2-x-6=0, \qquad (x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$ • 30% 배점

답 구하기 $x=-2$일 때,

$y=-\frac{1}{3}\times(-2)-2=-\frac{4}{3}$

$x=3$일 때, $\quad y=-\frac{1}{3}\times3-2=-3$

$x=-2$일 때,
$y=-\frac{1}{3}\times(-2)^2$
$=-\frac{4}{3}$

$x=3$일 때,
$y=-\frac{1}{3}\times3^2=-3$

따라서 구하는 두 교점의 좌표는 $\left(-2,\ -\frac{4}{3}\right)$, $(3,\ -3)$이다. • 20% 배점

답 $\left(-2,\ -\frac{4}{3}\right)$, $(3,\ -3)$

430 해결 과정 ① 두 이차함수의 그래프가 모두 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$0=-\frac{1}{2}\times 2^2+m \qquad \therefore m=2$

$0=2^2+n \qquad \therefore n=-4$ • 30% 배점

해결 과정 ② 따라서 주어진 두 이차함수는

$y=-\frac{1}{2}x^2+2,\ y=x^2-4$이므로

$A(0,\ 2),\ C(0,\ -4)$

이때 두 점 B, D는 y축에 대하여 대칭이므로

$B(-2,\ 0)$ • 40% 배점

답 구하기 $\therefore \square ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD$

$=\frac{1}{2}\times 4\times 2+\frac{1}{2}\times 4\times 4$

$=12$ • 30% 배점

답 12

보충학습

점 $(a,\ b)$와
① x축에 대하여 대칭인 점의 좌표 ➜ $(a,\ -b)$
② y축에 대하여 대칭인 점의 좌표 ➜ $(-a,\ b)$
③ 원점에 대하여 대칭인 점의 좌표 ➜ $(-a,\ -b)$

431 문제 이해 직선 l이 $\triangle ABC$의 한 꼭짓점 A를 지나므로 직선 l이 $\overline{BC}$의 중점을 지날 때 $\triangle ABC$의 넓이가 이등분된다. • 20% 배점

해결 과정 ① $y=-x^2-2x+8$에서 $x=0$일 때 $y=8$이므로 $A(0,\ 8)$

$-x^2-2x+8=0$에서 $(x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

$\therefore B(-4,\ 0),\ C(2,\ 0)$ • 30% 배점

해결 과정 ② $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면

$M\left(\frac{-4+2}{2},\ 0\right)$, 즉 $M(-1,\ 0)$ • 30% 배점

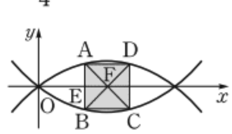
답 구하기 따라서 직선 l은 두 점 $A(0,\ 8),\ M(-1,\ 0)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$\frac{x}{-1}+\frac{y}{8}=1 \qquad \therefore y=8x+8$ • 20% 배점

답 $y=8x+8$

432 전략 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점은 주어진 이차함수의 그래프의 축 위에 있다.

풀이 $y=\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{4}x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=-\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{4}x$



오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$와 x축과의 교점을 $E(a,\ 0)$이라 하면

$A\left(a,\ -\frac{1}{8}a^2+\frac{3}{4}a\right)$

또 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 F라 하면 $y=\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{4}x=\frac{1}{8}(x-3)^2-\frac{9}{8}$의 그래프의 축의 방정식이 $x=3$이므로

$F(3,\ 0)$

$\overline{EF}=\overline{OF}-\overline{OE}$
$=3-a$

$\overline{AB}=-\frac{1}{8}a^2+\frac{3}{4}a$
$-\left(\frac{1}{8}a^2-\frac{3}{4}a\right)$
$=-\frac{1}{4}a^2+\frac{3}{2}a$

$y=-\frac{1}{2}x^2+2$ 또는 $y=x^2-4$에 $y=0$을 대입하면
$x^2-4=0$
$(x+2)(x-2)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$
$\therefore B(-2,\ 0)$

$\overline{AB}=\overline{BC}$이므로
$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{BC}$

$-\frac{a^2}{4b}<0$에서 $a^2>0$이므로 $b>0$
즉 $-\frac{a}{2b}>0$에서
$a<0$

이때 $\overline{EF}=\overline{AE}$이므로 $3-a=-\frac{1}{8}a^2+\frac{3}{4}a$

$a^2-14a+24=0, \qquad (a-2)(a-12)=0$

$\therefore a=2\ (\because 0<a<3)$

따라서 $\overline{EF}=\overline{AE}=3-2=1$이므로 $\overline{AB}=2$

$\therefore \square ABCD=2\times 2=4$

답 4

다른풀이 $A\left(a,\ -\frac{1}{8}a^2+\frac{3}{4}a\right),\ B\left(a,\ \frac{1}{8}a^2-\frac{3}{4}a\right)$라 하면 $\frac{1}{2}\overline{AB}=-\frac{1}{8}a^2+\frac{3}{4}a$

$y=\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{4}x=\frac{1}{8}(x-3)^2-\frac{9}{8}$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $\left(3,\ -\frac{9}{8}\right)$이므로 $\frac{1}{2}\overline{BC}=3-a$

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{BC}$이므로 $-\frac{1}{8}a^2+\frac{3}{4}a=3-a$

$a^2-14a+24=0, \qquad (a-2)(a-12)=0$

$\therefore a=2\ (\because 0<a<3)$

따라서 $\overline{AB}=\overline{BC}=2$이므로 정사각형 ABCD의 넓이는 4이다.

433 전략 그래프의 모양, 축의 위치, y축과의 교점의 위치를 알아본다.

풀이 ①, ② 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

축이 y축의 오른쪽에 위치하므로 $b>0$

y축과의 교점이 원점의 위쪽에 위치하므로 $c>0$

$\therefore ab<0,\ abc<0$

③ $-2a>0$이므로 $c-2a>0$

④ $-b<0,\ -c<0$이므로 $a-b-c<0$

⑤ $x=1$일 때, $y=a+b+c$의 부호를 알 수 없다.

답 ⑤

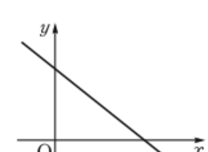
434 전략 제4사분면 위의 점 $(m,\ n)$ ➜ $m>0,\ n<0$

풀이 $y=bx^2+ax=b\left(x+\frac{a}{2b}\right)^2-\frac{a^2}{4b}$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{a}{2b},\ -\frac{a^2}{4b}\right)$이므로

$-\frac{a}{2b}>0,\ -\frac{a^2}{4b}<0$

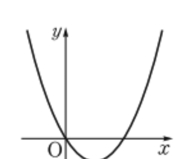
$\therefore a<0,\ b>0$

따라서 $y=ax+b$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제1, 2, 4 사분면을 지난다.



답 ③

다른풀이 $y=bx^2+ax$의 그래프는 원점을 지나고 꼭짓점이 제4사분면에 있으므로 그 개형은 오른쪽 그림과 같다. 즉 그래프가 아래로 볼록하므로 $b>0$



축이 y축의 오른쪽에 위치하므로 $a<0$

435 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 b, c의 부호를 구한다.

풀이 이차방정식 $x^2-bx+c=0$의 두 근이 모두 양수이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$b>0,\ c>0$

즉 $y=bx^2+cx-1$의 그래프에서

(i) $b>0$이므로 아래로 볼록

(ii) $bc>0$이므로 축이 y축의 왼쪽에 위치

(iii) $-1<0$이므로 y축과의 교점이 원점의 아래쪽에 위치

이상에서 $y=bx^2+cx-1$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ①이다.

답 ①

내신 만점 굳히기

본책 82쪽

436 **해결 과정 ①** 이차함수 $y=ax^2+bx-c$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-\dfrac{b}{2a}$이므로

$-\dfrac{b}{2a}=-1$

$\therefore b=2a$ …… ㉠ • 20% 배점

해결 과정 ② $y=ax^2+bx-c$의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$1=a+b-c$

㉠을 위의 식에 대입하면 $3a-c=1$

$\therefore c=3a-1$ • 30% 배점

해결 과정 ③ (i) $a=1$이면 $b=2,\ c=2$

(ii) $a=2$이면 $b=4,\ c=5$

(iii) $a\geq 3$이면 $c\geq 8$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 주어진 조건을 만족시키는 $a,\ b,\ c$의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는 $(1,\ 2,\ 2)$, $(2,\ 4,\ 5)$의 2개이므로 구하는 확률은 $\dfrac{2}{6^3}=\dfrac{1}{108}$ • 40% 배점

답 구하기 따라서 $p=108,\ q=1$이므로

$pq=108$ • 10% 배점

답 108

437 **전략** 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표 ◎ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해

풀이 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 조건 ㈎, ㈏에서

$f(-1)=a-b+c=0,\ f(2)=4a+2b+c=0$

이므로 주어진 함수의 그래프는 x축과 두 점 $(-1,\ 0)$, $(2,\ 0)$에서 만난다. 즉 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 $-1,\ 2$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-\dfrac{b}{a}=1,\ \dfrac{c}{a}=-2$

$\therefore b=-a,\ c=-2a$

또 조건 ㈐에서

$abc=a\times(-a)\times(-2a)=2a^3<0$

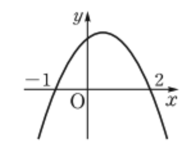
$a>0$이면 $2a^3>0$
$a<0$이면 $2a^3<0$

$\therefore a<0,\ b>0,\ c>0$

① $a=-b$

② $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 $x<-1$일 때 $f(x)<0$이다.

$a<0$이므로 그래프는 위로 볼록하고, $ab<0$이므로 축이 y축의 오른쪽에 위치한다. 또 $c>0$이므로 y축과의 교점이 원점의 위쪽에 위치한다.



$\therefore f(-2)=4a-2b+c<0$

③ $a<0$이므로 위로 볼록한 포물선이다.

④ 모든 사분면을 지난다.

⑤ $f(x)=a(x^2-x-2)=a\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}a$이므로

$x<\dfrac{1}{2}$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 $x<0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

답 ⑤

438 **전략** $f(x)$, $g(x)$를 $a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 사이의 관계를 알아본다.

풀이 $f(x)=x^2+3x+1=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$

$g(x)=x^2+x-1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$f(x)=g(x+1)$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{f(1)f(2)f(3)\cdots f(100)}{g(1)g(2)g(3)\cdots g(100)}&=\frac{g(2)g(3)g(4)\cdots g(101)}{g(1)g(2)g(3)\cdots g(100)}\\&=\frac{g(101)}{g(1)}=\frac{101^2+101-1}{1^2+1-1}\\&=10301\end{aligned}$$

답 10301

439 **해결 과정** $y=x^2-4x-5$에서 $x=0$일 때, $y=-5$이므로

$\mathrm{A}(0,\ -5)$

$y=x^2-4x-5=(x-2)^2-9$이므로

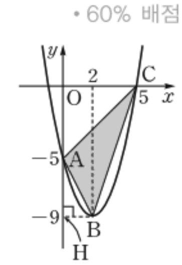
$\mathrm{B}(2,\ -9)$

$x^2-4x-5=0$에서 $(x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

$\therefore \mathrm{C}(5,\ 0)$ • 60% 배점

답 구하기 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면



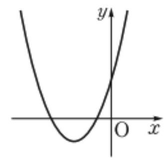
$$\begin{aligned}&\triangle\mathrm{ABC}\\&=\square\mathrm{OHBC}-\triangle\mathrm{OAC}\\&\quad-\triangle\mathrm{AHB}\\&=\frac{1}{2}\times(5+2)\times 9-\frac{1}{2}\times 5\times 5\\&\quad-\frac{1}{2}\times 2\times 4\\&=15\end{aligned}$$

• 40% 배점

답 15

440 **전략** 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 제4사분면만을 지나지 않도록 좌표평면에 나타내어 본다.

풀이 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 제4사분면만을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 아래로 볼록하므로 $a>0$

(ii) 축이 y축의 왼쪽에 위치하므로 $b>0$

(iii) y축과의 교점이 원점과 일치하거나 원점의 위쪽에 위치하므로 $c\geq 0$

(iv) x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로

$b^2-4ac>0$

이상에서 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)는

$(1, 1, 0), (1, 2, 0), (2, 1, 0), (2, 2, 0)$

의 4가지이므로 구하는 경우는 모두 4가지이다.

답 ②

제1, 2, 3사분면을 모두 지난다.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 근을 가져야 한다.

$c=0$일 때와 $c>0$일 때로 나누어 생각한다.
(i) $c=0$일 때, $a>0$, $b>0$이면 된다.
(ii) $c>0$일 때, $b^2=1$ 또는 $b^2=4$이고, $4ac=4$ 또는 $4ac=8$ 또는 $4ac=16$이므로 $b^2-4ac>0$을 만족시키지 않는다.

441 [문제 해결 길잡이]

❶ 포물선 $y=x^2-4x+3$과 직선 $mx-4y-13=0$이 한 점에서 만나므로 두 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식이 중근을 가짐을 이용하여 m의 값을 구한다.

❷ 점 A의 좌표를 구한다.

❸ 평행이동한 직선의 방정식을 구하여 직선 $y=-x-\frac{1}{4}$과의 교점 B의 좌표를 구한다.

❹ $\overline{AB}$의 길이를 구한다.

풀이 $mx-4y-13=0$에서

$y=\frac{m}{4}x-\frac{13}{4}$

이 직선이 포물선 $y=x^2-4x+3$과 한 점에서 만나므로 이차방정식 $\frac{m}{4}x-\frac{13}{4}=x^2-4x+3$이 중근을 갖는다.

이 이차방정식의 양변에 4를 곱하여 정리하면

$4x^2-(m+16)x+25=0$ …… ㉠

이 이차방정식이 중근을 가지므로

$\{-(m+16)\}^2-4\times4\times25=0$

$m^2+32m-144=0,\quad (m+36)(m-4)=0$

$\therefore m=4\ (\because m>0)$ ❶

$m=4$를 ㉠에 대입하면

$4x^2-20x+25=0$

$(2x-5)^2=0 \quad \therefore x=\frac{5}{2}$

$\therefore A\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ ❷

$x=\frac{5}{2}$를 $y=x-\frac{13}{4}$에 대입하면 $y=\frac{5}{2}-\frac{13}{4}=-\frac{3}{4}$

한편 직선 $4x-4y-13=0$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$4(x-1)-4(y+1)-13=0$

$\therefore y=x-\frac{21}{4}$

즉 두 직선 $y=x-\frac{21}{4}$과 $y=-x-\frac{1}{4}$의 교점의 x좌표는 $x-\frac{21}{4}=-x-\frac{1}{4}$에서 $x=\frac{5}{2}$

$\therefore B\left(\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}\right)$ ❸

$x=\frac{5}{2}$를 $y=x-\frac{21}{4}$에 대입하면 $y=\frac{5}{2}-\frac{21}{4}=-\frac{11}{4}$

따라서 $\overline{AB}$의 길이는

$-\frac{3}{4}-\left(-\frac{11}{4}\right)=2$ ❹

답 2

08 | 이차함수의 활용

개념&기출유형 본책 83~86쪽

442 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-2, 3)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x+2)^2+3$으로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(0, -1)$을 지나므로

$-1=4a+3,\quad -4a=4$

$\therefore a=-1$

따라서 $y=-(x+2)^2+3=-x^2-4x-1$이므로

$b=-4, c=-1$

$\therefore a+b+c=-6$

답 ①

443 꼭짓점의 좌표가 $(4, -1)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x-4)^2-1$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지나므로

$3=4a-1,\quad -4a=-4$

$\therefore a=1$

즉 $y=(x-4)^2-1=x^2-8x+15$이므로

$x^2-8x+15=0$에서

$(x-3)(x-5)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=5$

따라서 주어진 이차함수의 그래프는 x축과 두 점 $(3, 0), (5, 0)$에서 만나므로 구하는 거리는

$5-3=2$

답 2

444 축의 방정식이 $x=-3$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x+3)^2+q$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 두 점 $(1, -8), (-2, 7)$을 지나므로

$-8=16a+q,\ 7=a+q$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-1,\ q=8$

$\begin{cases}16a+q=-8 & \cdots ㉠\\ a+q=7 & \cdots ㉡\end{cases}$
㉠−㉡을 하면 $15a=-15$ $\therefore a=-1$
$a=-1$을 ㉡에 대입하면 $-1+q=7$ $\therefore q=8$

따라서 $y=-(x+3)^2+8=-x^2-6x-1$이므로 구하는 y절편은 -1이다.

답 ②

445 주어진 세 점을 지나는 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$로 놓고

$x=0,\ y=2$를 대입하면

$2=c$ …… ㉠

$x=1,\ y=-1$을 대입하면

$-1=a+b+c$ …… ㉡

$x=2,\ y=-2$를 대입하면

$-2=4a+2b+c$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-4,\ c=2$

$c=2$를 ㉡, ㉢에 각각 대입하여 정리하면
$a+b=-3$ … ㉣
$2a+b=-2$ … ㉤
㉤−㉣을 하면 $a=1$
$a=1$을 ㉣에 대입하면 $1+b=-3$ $\therefore b=-4$

따라서 $y=x^2-4x+2$의 그래프가 점 $(-1, k)$를 지나므로

$k=1+4+2=7$

답 ⑤

446 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 두 점 $(1,\ 0)$, $(4,\ 0)$에서 만나므로 이차함수의 식을
$y=a(x-1)(x-4)$로 놓을 수 있다.
이 함수의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=4a \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 $y=\frac{1}{2}(x-1)(x-4)=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+2$이므로

$b=-\frac{5}{2},\ c=2$

$\therefore abc=-\frac{5}{2}$ 답 $-\frac{5}{2}$

447 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 y축을 축으로 하고 점 $(-3,\ 0)$을 지나므로 점 $(3,\ 0)$도 지난다.
이차함수의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 점 $(m,\ n)$을 지나면 점 $(-m,\ n)$도 지난다.
따라서 $y=(x+3)(x-3)=x^2-9$이므로

$a=0,\ b=-9$

$\therefore a+b=-9$ 답 -9

448 $y=-x^2+6x-10=-(x-3)^2-1$이므로

$M=-1$

$y=2x^2-4x+5=2(x-1)^2+3$이므로

$m=3$

$\therefore M+m=2$ 답 2

449 ① $y=-4(x+1)^2-2$의 최댓값은 -2이다.
② $y=-2x^2-4x+3=-2(x+1)^2+5$의 최댓값은 5이다.
③ $y=-x^2+4x+\frac{1}{2}=-(x-2)^2+\frac{9}{2}$의 최댓값은 $\frac{9}{2}$이다.
④ $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-1=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{7}{2}$의 최댓값은 $\frac{7}{2}$이다.
⑤ $y=-\frac{1}{4}x^2-x=-\frac{1}{4}(x+2)^2+1$의 최댓값은 1이다.
따라서 최댓값이 가장 큰 것은 ②이다. 답 ②

450 $y=-\frac{1}{2}x^2-4x+k$의 그래프가 점 $(2,\ -8)$을 지나므로

$-8=-2-8+k \qquad \therefore k=2$

따라서 $y=-\frac{1}{2}x^2-4x+2=-\frac{1}{2}(x+4)^2+10$의 최댓값은 10이다. 답 10

451 $y=-4x^2+8x+2k-3=-4(x-1)^2+2k+1$
이 함수의 최댓값이 5이므로

$2k+1=5, \qquad 2k=4 \qquad \therefore k=2$ 답 ④

452 $y=2x^2+ax+6$이 $x=-3$에서 최솟값 b를 가지므로

$y=2(x+3)^2+b=2x^2+12x+18+b$

따라서 $a=12,\ 6=18+b$이므로

$a=12,\ b=-12$

$\therefore ab=-144$ 답 -144

453 $x=1$에서 최댓값 7을 가지므로 이차함수의 식을 $y=a(x-1)^2+7$로 놓을 수 있다.
꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 7)$이다.
이 함수의 그래프가 점 $(3,\ -13)$을 지나므로

$-13=4a+7, \qquad -4a=20$

$\therefore a=-5$

따라서 구하는 이차함수의 식은

$y=-5(x-1)^2+7=-5x^2+10x+2$

답 $y=-5x^2+10x+2$

454 (1) $y=\frac{1}{2}x^2+ax-2a+3$

$=\frac{1}{2}(x^2+2ax+a^2-a^2)-2a+3$

$=\frac{1}{2}(x+a)^2-\frac{1}{2}a^2-2a+3$

$\therefore m=-\frac{1}{2}a^2-2a+3$

(2) $m=-\frac{1}{2}a^2-2a+3=-\frac{1}{2}(a+2)^2+5$의 최댓값은 5이다.

답 (1) $m=-\frac{1}{2}a^2-2a+3$ (2) 5

455 $y=-x^2+2kx+k$

$=-(x^2-2kx+k^2-k^2)+k$

$=-(x-k)^2+k^2+k$

$\therefore f(k)=k^2+k=\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

따라서 $f(k)$의 최솟값은 $-\frac{1}{4}$이다. 답 ②

456 $y=2x^2+4ax-2a+1$

$=2(x^2+2ax+a^2-a^2)-2a+1$

$=2(x+a)^2-2a^2-2a+1$

$\therefore m=-2a^2-2a+1$

$=-2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$

따라서 m의 값이 최대가 되도록 하는 a의 값은 $-\frac{1}{2}$이다.

답 ③

457 두 수를 x, $26-x$라 하고, 두 수의 곱을 y라 하면

$y=x(26-x)$

$=-x^2+26x$

$=-(x-13)^2+169$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 169이다. 답 ④

참고 $x=13$일 때 두 수의 곱이 최대이므로 곱이 최대가 되는 두 수는 13, 13이다.
$26-x=26-13=13$

458 두 수를 x, $x+8$이라 하고, 두 수의 제곱의 합을 y라 하면

IV 이차함수

$y=x^2+(x+8)^2=2x^2+16x+64$
$=2(x+4)^2+32$
따라서 두 수의 제곱의 합이 최소가 될 때의 두 수는 -4, 4이다. 답 -4, 4

459 이익을 y만 원이라 하면
$y=-\frac{1}{10}x^2+30x-750$
$=-\frac{1}{10}(x-150)^2+1500$
따라서 y는 $x=150$일 때 최대이므로 최대 이익을 내려면 하루에 150명이 입장해야 한다. 답 150명

미술관의 최대 이익은 1500만 원이다.

460 $y=-5x^2+24x=-5\left(x-\frac{12}{5}\right)^2+\frac{144}{5}$
따라서 공이 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 $\frac{144}{5}$ m이다. 답 $\frac{144}{5}$ m
참고 y는 $x=\frac{12}{5}$일 때 최대이므로 공이 가장 높이 올라갈 때까지 걸린 시간은 $\frac{12}{5}$초이다.

461 $y=20x-5x^2=-5(x-2)^2+20$
따라서 물 로켓은 쏘아 올린 지 2초 후에 가장 높이 올라간다. 답 ①
참고 y는 $x=2$일 때 최댓값 20을 가지므로 물 로켓이 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 20 m이다.

462 $h=-5t^2+50t+15=-5(t-5)^2+140$
따라서 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸리는 시간은 5초이다. 답 5초
참고 h는 $t=5$일 때 최댓값 140을 가지므로 물체의 최고 높이는 140 m이다.

463 가축우리의 세로의 길이를 x m, 넓이를 y m^{2}라 하면 가축우리의 가로의 길이는 $(60-2x)$ m이므로
$y=x(60-2x)=-2x^2+60x$
$=-2(x-15)^2+450$
따라서 가축우리의 최대 넓이는 450 m^{2}이다. 답 450 m^2
참고 가축우리의 넓이가 최대일 때의 가로, 세로의 길이는 각각 30 m, 15 m이다.

$60-2\times15=30$(m)

464 새로운 직사각형의 넓이를 y cm^{2}라 하면 이 직사각형의 가로의 길이는 $(6-x)$ cm, 세로의 길이는 $(8+2x)$ cm이므로
$y=(6-x)(8+2x)=-2x^2+4x+48$
$=-2(x-1)^2+50$
따라서 $x=1$일 때 직사각형의 넓이가 최대이다. 답 1
참고 새로운 직사각형의 넓이의 최댓값은 50 cm^{2}이고, 이때 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각 5 cm, 10 cm이다.

465 $-x^2+4x=0$에서 $x(x-4)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=4$
따라서 A(4, 0)이므로 $\overline{OA}=4$
점 B의 좌표를 $(a, -a^2+4a)$라 하면 △OAB의 넓이는
$\frac{1}{2}\times4\times(-a^2+4a)=-2(a^2-4a)$
$=-2(a-2)^2+8$
이므로 구하는 최댓값은 8이다. 답 8
참고 △OAB에서 $\overline{OA}=4$로 일정하므로 △OAB의 넓이는 점 B의 y좌표가 최대일 때, 즉 점 B가 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점일 때 최댓값을 갖는다.

내신 만점 도전하기

본책 87~90쪽

466 전략 그래프의 꼭짓점의 좌표가 (p, q)인 이차함수의 식 ◯ $y=a(x-p)^2+q$
풀이 꼭짓점의 좌표가 $(-2, 1)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x+2)^2+1$로 놓을 수 있다.
이 함수의 그래프가 점 $(-3, -1)$을 지나므로
$-1=a+1$ $\therefore a=-2$
따라서 $y=-2(x+2)^2+1=-2x^2-8x-7$이므로 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표는
$(0, -7)$ 답 ②

467 전략 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표 ◯ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해
풀이 조건 (가)에 의하여 이차함수의 식을 $y=a(x-1)^2-3$으로 놓을 수 있다.
이 함수의 그래프와 x축과의 두 교점의 좌표를 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$이라 하면 조건 (나)에 의하여
$|\alpha-\beta|=2\sqrt{3}$
이때 이차방정식 $a(x-1)^2-3=0$, 즉 $ax^2-2ax+a-3=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=\frac{a-3}{a}$
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로
$(2\sqrt{3})^2=2^2-4\times\frac{a-3}{a}$
$\frac{a-3}{a}=-2$, $a-3=-2a$
$\therefore a=1$
따라서 구하는 이차함수의 식은
$y=x^2-2x-2$ 답 $y=x^2-2x-2$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β일 때,
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$,
$\alpha\beta=\frac{c}{a}$

다른풀이 조건 (가)에 의하여 이차함수의 식을 $y=a(x-1)^2-3$으로 놓을 수 있다.
꼭짓점의 좌표가 $(1, -3)$이고 x축과 두 점에서 만나므로 그래프가 아래로 볼록하다.
$\therefore a>0$

한편 이차방정식 $a(x-1)^2-3=0$에서

$(x-1)^2=\frac{3}{a}$,　　$x-1=\pm\frac{\sqrt{3a}}{a}$

$\therefore x=1\pm\frac{\sqrt{3a}}{a}$

즉 그래프와 x축과의 두 교점의 좌표는

$\left(1-\frac{\sqrt{3a}}{a},\ 0\right)$, $\left(1+\frac{\sqrt{3a}}{a},\ 0\right)$

이고, 이 두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{3}$이므로

$\left(1+\frac{\sqrt{3a}}{a}\right)-\left(1-\frac{\sqrt{3a}}{a}\right)=2\sqrt{3}$

$\frac{2\sqrt{3a}}{a}=2\sqrt{3}$,　　$\sqrt{a}=a$,　　$a=a^2$

$a(a-1)=0$　　$\therefore a=1\ (\because a>0)$

따라서 구하는 이차함수의 식은

$y=x^2-2x-2$

468 전략 그래프의 축의 방정식이 $x=p$인 이차함수의 식

➡ $y=a(x-p)^2+q$

풀이 축의 방정식이 $x=2$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x-2)^2+q$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프의 y절편이 5이고 점 $(3,\ -4)$를 지나므로

$5=4a+q$, $-4=a+q$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $q=-7$

$\begin{cases} 4a+q=5 & \cdots ㉠ \\ a+q=-4 & \cdots ㉡ \end{cases}$
㉠−㉡을 하면
$3a=9$　$\therefore a=3$
$a=3$을 ㉡에 대입하면
$3+q=-4$
$\therefore q=-7$

따라서 $y=3(x-2)^2-7$의 그래프가 점 $(-2,\ k)$를 지나므로

$k=3\times(-4)^2-7=41$　　답 ⑤

469 전략 그래프가 x축에 접하는 이차함수의 식

➡ $y=a(x-p)^2$

풀이 그래프가 x축에 접하므로 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2$으로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 두 점 $(1,\ 1)$, $(4,\ 4)$를 지나므로

$1=a(1-p)^2$　　…… ㉠

$4=a(4-p)^2$　　…… ㉡

㉡÷㉠을 하면　$4=\frac{(4-p)^2}{(1-p)^2}$

$4(1-p)^2=(4-p)^2$,　　$3p^2=12$

$p^2=4$　　$\therefore p=\pm2$

$p=2$일 때,　$a=1$

$p=-2$일 때,　$1=9a$　　$\therefore a=\frac{1}{9}$

$p=2$, $p=-2$를 각각 ㉠에 대입한다.

따라서 구하는 이차함수의 식은

$y=(x-2)^2$ 또는 $y=\frac{1}{9}(x+2)^2$

답 $y=(x-2)^2$ 또는 $y=\frac{1}{9}(x+2)^2$

만점비법

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하려면 이차방정식 $f(x)=0$이 중근을 가져야 하므로 $f(x)=a(x-p)^2$과 같이 완전제곱식 꼴이어야 한다.

470 해결 과정 ① 세 점 $(1,\ 4)$, $(-1,\ 6)$, $(2,\ 9)$를 지나는 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$로 놓으면

$4=a+b+c$　　…… ㉠

$6=a-b+c$　　…… ㉡

$9=4a+2b+c$　　…… ㉢

㉠−㉡을 하면　$-2=2b$　　$\therefore b=-1$

$b=-1$을 ㉠, ㉢에 각각 대입하면

$a+c=5$, $4a+c=11$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $c=3$　　• 50% 배점

$\begin{cases} a+c=5 & \cdots ㉣ \\ 4a+c=11 & \cdots ㉤ \end{cases}$
㉤−㉣을 하면
$3a=6$　$\therefore a=2$
$a=2$를 ㉣에 대입하면
$2+c=5$　$\therefore c=3$

해결 과정 ② $y=2x^2-x+3=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{8}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2\left(x-1-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{8}-1$

$=2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{15}{8}$　　• 40% 배점

답 구하기 따라서 구하는 꼭짓점의 좌표는

$\left(\frac{5}{4},\ \frac{15}{8}\right)$　　• 10% 배점

답 $\left(\frac{5}{4},\ \frac{15}{8}\right)$

471 해결 과정 ① 구하는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$로 놓으면 이 함수의 그래프가 두 점 $(1,\ 4)$, $(-1,\ -4)$를 지나므로

$4=a+b+c$　　…… ㉠

$-4=a-b+c$　　…… ㉡

㉠−㉡을 하면　$8=2b$　　$\therefore b=4$

$b=4$를 ㉠에 대입하면

$a+c=0$　　$\therefore c=-a$

$\therefore y=ax^2+4x-a$　　• 40% 배점

해결 과정 ② 이 함수의 그래프가 x축과 두 점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$에서 만나므로 이차방정식 $ax^2+4x-a=0$의 두 근이 α, β이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{4}{a}$, $\alpha\beta=-1$

이때 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$이므로

$18=\frac{16}{a^2}+2$,　　$a^2=1$

$\therefore a=\pm1$　　• 40% 배점

답 구하기 따라서 구하는 이차함수의 식은

$y=x^2+4x-1$ 또는 $y=-x^2+4x+1$　• 20% 배점

답 $y=x^2+4x-1$ 또는 $y=-x^2+4x+1$

472 전략 y축을 축으로 하는 이차함수의 그래프

➡ y축에 대하여 대칭이다.

풀이 $y=x^2+ax+b$의 그래프는 y축을 축으로 하고 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8이므로 x축과 두 점 $(-4,\ 0)$, $(4,\ 0)$에서 만난다.

$\therefore y=(x+4)(x-4)=x^2-16$

따라서 $a=0$, $b=-16$이므로

$a-b=16$ 답 ⑤

473 전략 $x=a-2$, $y=a^2$을 주어진 이차함수의 식에 대입하여 a의 값을 구한다.

풀이 $y=x^2-2ax+4$의 그래프가 점 $(a-2,\ a^2)$을 지나므로

$a^2=(a-2)^2-2a(a-2)+4$

$a^2=-a^2+8,\qquad a^2=4$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

따라서 $y=x^2-4x+4=(x-2)^2$의 최솟값은 0이다.

답 ③

474 전략 $y=m(x-p)^2+q$ 꼴로 변형하여 꼭짓점의 좌표를 구한다.

풀이 $y=x^2+2ax+b=(x+a)^2-a^2+b$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(-a,\ -a^2+b)$

$y=2x^2+4x=2(x+1)^2-2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(-1,\ -2)$

두 함수의 그래프의 꼭짓점이 일치하므로

$-a=-1,\ -a^2+b=-2$

$\therefore a=1,\ b=-1$

따라서 $y=x^2+2x+4=(x+1)^2+3$의 최솟값은 3이다. 답 3

$a=1$을 $-a^2+b=-2$에 대입하면

$-1+b=-2$

$\therefore b=-1$

475 전략 이차함수의 그래프는 축을 기준으로 증가, 감소하는 범위가 나뉜다.

풀이 $y=-3x^2+ax-18$의 그래프에서 x의 값이 증가할 때 y의 값이 감소하는 x의 값의 범위가 $x>-2$이므로 주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식은 $x=-2$이다.

즉 $-\dfrac{a}{2\times(-3)}=\dfrac{a}{6}=-2$이므로

$a=-12$

따라서 $y=-3x^2-12x-18=-3(x+2)^2-6$의 최댓값은 -6이므로

$b=-6$

$\therefore a+b=-18$ 답 ①

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 축의 방정식 $\rightarrow x=-\dfrac{b}{2a}$

476 전략 $a+b$를 a에 대한 이차함수로 나타낸 후 $a+b=m(a-p)^2+q$ 꼴로 변형한다.

풀이 $y=x^2-2x+1$의 그래프가 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$를 지나므로

$b=a^2-2a+1$

$\therefore a+b=a+a^2-2a+1=a^2-a+1$

$=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

따라서 $a+b$의 최솟값은 $\dfrac{3}{4}$이다. 답 $\dfrac{3}{4}$

477 전략 $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 $y=x^2+2x+2k+5=(x+1)^2+2k+4$의 최솟값은 $2k+4$이다.

$y=-x^2+2x-3k-2=-(x-1)^2-3k-1$의 최댓값은 $-3k-1$이다.

따라서 $2k+4=-3k-1$이므로

$5k=-5\qquad \therefore k=-1$ 답 ②

$|a|=\begin{cases} a & (a\ge 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

478 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 생각한다.

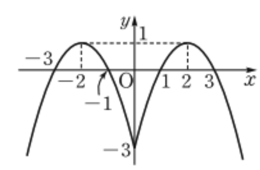
풀이 (i) $x\ge 0$일 때,

$y=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$

(ii) $x<0$일 때,

$y=-x^2-4x-3=-(x+2)^2+1$

(i), (ii)에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 이 함수의 최댓값은 1이다. 답 ①



축의 방정식이 $x=-5$이고 최댓값이 10이면 꼭짓점의 좌표는 $(-5,\ 10)$

479 문제 이해 축의 방정식이 $x=-5$이고 최댓값이 10이므로 이차함수의 식을 $y=a(x+5)^2+10$으로 놓을 수 있다. • 30% 배점

해결 과정 이 함수의 그래프가 점 $(-4,\ 7)$을 지나므로

$7=a+10\qquad \therefore a=-3$ • 50% 배점

답 구하기 따라서 구하는 이차함수의 식은

$y=-3(x+5)^2+10$

$=-3x^2-30x-65$ • 20% 배점

답 $y=-3x^2-30x-65$

480 해결 과정 ① $y=-x^2+2kx-3$

$=-(x-k)^2+k^2-3$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-(x+1-k)^2+k^2-1$ • 40% 배점

해결 과정 ② 이 함수의 최댓값이 5이므로

$k^2-1=5,\qquad k^2=6$

$\therefore k=\pm\sqrt{6}$ • 40% 배점

답 구하기 따라서 모든 상수 k의 값의 합은

$\sqrt{6}+(-\sqrt{6})=0$ • 20% 배점

답 0

481 전략 $y=m(x-p)^2+q$ 꼴로 변형하여 최댓값을 구한다.

풀이 $y=-2x^2+7x+3a=-2\left(x-\dfrac{7}{4}\right)^2+3a+\dfrac{49}{8}$의 최댓값이 $\dfrac{1}{8}$ 이하가 되려면

$3a+\dfrac{49}{8}\le\dfrac{1}{8},\qquad 3a\le-6\qquad \therefore a\le-2$

따라서 a의 최댓값은 -2이다. 답 ①

482 전략 주어진 이차함수의 식을 $y=(x-p)^2+q$ 꼴로 변형하면 ⊙ $f(t)=q$

풀이 $y=x^2-tx+t-3=\left(x-\frac{t}{2}\right)^2-\frac{1}{4}t^2+t-3$

$\therefore f(t)=-\frac{1}{4}t^2+t-3$

$=-\frac{1}{4}(t-2)^2-2$

따라서 $f(t)$의 최댓값은 -2이다. 답 ①

483 해결 과정 ① $y=-x^2+2mx+m^2+6m$

$=-(x-m)^2+2m^2+6m$ • 30% 배점

해결 과정 ② $\therefore M=2m^2+6m$

$=2\left(m+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}$ • 30% 배점

답 구하기 따라서 M은 $m=-\frac{3}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{9}{2}$를 가지므로 구하는 합은

$-\frac{9}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)=-6$ • 40% 배점

답 -6

484 전략 $y=m(x-p)^2+q$ 꼴로 변형하여 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구한다.

풀이 $y=-x^2+4ax+2b=-(x-2a)^2+4a^2+2b$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(2a,\ 4a^2+2b)$

이 점이 직선 $y=2x+6$ 위에 있으므로

$4a^2+2b=4a+6$

$\therefore b=-2a^2+2a+3=-2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{2}$

따라서 b의 최댓값은 $\frac{7}{2}$이다. 답 ②

485 전략 $2x+y=12$이므로 $y=-2x+12$임을 이용한다.

풀이 $2x+y=12$에서 $y=-2x+12$이므로

$xy=x(-2x+12)=-2x^2+12x$

$=-2(x-3)^2+18$

따라서 xy는 $x=3$, $y=6$일 때 최대이다.

답 $x=3$, $y=6$

$x=3$을 $y=-2x+12$에 대입하면
$y=-2\times3+12=6$

486 해결 과정 ① 두 수의 차의 제곱이 16이므로

$(x-y)^2=16$

$\therefore x-y=4$ ($\because x>y$) • 40% 배점

해결 과정 ② 즉 $y=x-4$이므로

$xy=x(x-4)=x^2-4x$

$=(x-2)^2-4$ • 40% 배점

답 구하기 따라서 xy는 $x=2$, $y=-2$일 때 최소이다. • 20% 배점

답 $x=2$, $y=-2$

$x=2$를 $y=x-4$에 대입하면
$y=2-4=-2$

487 전략 (이익금)=(매출액)−(원가)×(판매량)

풀이 제품의 판매 가격을 $10x$원 올리면 판매량은 $200x$개 줄어들므로 이익을 y원이라 하면

$y=(1000+10x)(10000-200x)$

$-800(10000-200x)$

$=(10000-200x)(200+10x)$

$=-2000(x-50)(x+20)$

$=-2000(x^2-30x-1000)$

$=-2000(x-15)^2+2450000$

$ac-bc=c(a-b)$

따라서 y는 $x=15$일 때 최대이므로 판매 가격을 1150원으로 할 때 이익이 최대가 된다. 답 ③

$1000+10\times15$
$=1150$(원)

488 문제 이해 $h=-2t^2+4t+2$

$=-2(t-1)^2+4$ • 30% 배점

해결 과정 따라서 농구공이 최고 높이에 도달할 때까지 걸리는 시간은 1초이고 이때의 높이는 4 m이므로

$a=1,\ b=4$ • 60% 배점

답 구하기 $\therefore a+b=5$ • 10% 배점

답 5

489 전략 던져 올린 물체의 x초 후의 높이를 y m라 하면 ⊙ $y=40x-5x^2$

풀이 던져 올린 물체의 x초 후의 높이를 y m라 하면

$y=40x-5x^2=-5(x-4)^2+80$

① 던져 올린 지 4초 후에 물체의 높이가 최대이다.

② 물체가 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 80 m이다.

③ $40x-5x^2=0$에서 $5x(x-8)=0$

$\therefore x=8$

따라서 물체가 지면에 떨어질 때까지 걸리는 시간은 8초이다.

④ $x=2$일 때, $y=40\times2-5\times2^2=60$

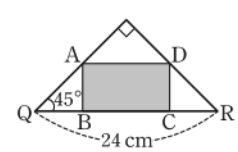
따라서 2초 후의 물체의 높이는 60 m이다.

⑤ $40x-5x^2=35$에서 $x^2-8x+7=0$

$(x-1)(x-7)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=7$

따라서 물체의 높이가 35 m가 되는 때는 던져 올린 지 1초 후와 7초 후이다. 답 ③

490 문제 이해 오른쪽 그림에서 △ABQ, △DCR는 직각이등변삼각형이므로



$\overline{AB}=\overline{QB}=\overline{CD}=\overline{CR}$

• 20% 배점

해결 과정 ① $\overline{AB}=x$ cm라 하면

$\overline{BC}=(24-2x)$ cm • 20% 배점

해결 과정 ② $\therefore \square ABCD=x(24-2x)$

$=-2x^2+24x$

$=-2(x-6)^2+72$

• 40% 배점

답 구하기 따라서 직사각형의 최대 넓이는 72 cm²이다.

• 20% 배점

답 72 cm²

491 전략 12 cm의 줄을 둘로 나누었을 때 하나의 길이가 x cm이면 다른 하나의 길이는 $(12-x)$ cm이다.

풀이 둘로 나눈 한 줄의 길이를 $x$cm라 하면 다른 한 줄의 길이는 $(12-x)$cm이므로 만들어지는 두 원의 둘레의 길이는 각각

$x$cm, $(12-x)$cm

두 원의 반지름의 길이는 각각

$\frac{x}{2\pi}$cm, $\frac{12-x}{2\pi}$cm

반지름의 길이가 r인 원의 둘레의 길이가 l이면 $l=2\pi r$에서 $r=\frac{l}{2\pi}$

이므로 두 원의 넓이의 합을 $y$cm^{2}라 하면

$$y=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\pi\left(\frac{12-x}{2\pi}\right)^2$$

반지름의 길이가 r인 원의 넓이 → πr^2

$$=\frac{1}{4\pi}(2x^2-24x+144)$$
$$=\frac{1}{2\pi}(x^2-12x+72)$$
$$=\frac{1}{2\pi}(x-6)^2+\frac{18}{\pi}$$

따라서 넓이의 합의 최솟값은 $\frac{18}{\pi}$cm^{2}이다.

답 $\frac{18}{\pi}$cm^2

492 해결 과정 ① 새로운 삼각형의 밑변의 길이는 $6-x$, 높이는 $4+2x$이다. • 30% 배점

해결 과정 ② 새로운 삼각형의 넓이를 y라 하면

$$y=\frac{1}{2}(6-x)(4+2x)=-x^2+4x+12$$
$$=-(x-2)^2+16$$ • 50% 배점

답 구하기 따라서 삼각형의 최대 넓이는 16이다. • 20% 배점

답 16

493 전략 두 점 B, C는 주어진 함수의 그래프의 축에 대하여 대칭이다.

풀이 $-x^2+10x=0$에서 $x(x-10)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=10$

점 B의 좌표를 $(a,\ 0)(0<a<5)$이라 하면

$A(a,\ -a^2+10a)$, $C(10-a,\ 0)$

두 점 B, C가 주어진 함수의 그래프의 축에 대하여 대칭이므로 점 C의 x좌표는 $10-a$이다.

이므로

$\overline{AB}=\overline{DC}=-a^2+10a$, $\overline{BC}=\overline{AD}=10-2a$

이때 □ABCD의 둘레의 길이는

$$2(\overline{AB}+\overline{BC})=2(-a^2+10a+10-2a)$$
$$=-2a^2+16a+20$$
$$=-2(a-4)^2+52$$

따라서 □ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 52이다.

답 52

내신 만점 굳히기

본책 91쪽

494 해결 과정 ① 구하는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$로 놓으면

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

이 함수의 그래프의 꼭짓점의 y좌표는 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$이므로 $-\frac{b^2-4ac}{4a}=1$

$\therefore b^2-4ac+4a=0$ …… ㉠ • 20% 배점

해결 과정 ② $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 두 점 $(-1,\ 2)$, $(2,\ 5)$를 지나므로

$2=a-b+c$ …… ㉡

$5=4a+2b+c$ …… ㉢ • 20% 배점

해결 과정 ③ ㉢−㉡을 하면 $3=3a+3b$

$\therefore b=1-a$ …… ㉣

㉡×2+㉢을 하면 $9=6a+3c$

$\therefore c=3-2a$ …… ㉤

㉣, ㉤을 ㉠에 대입하면

$(1-a)^2-4a(3-2a)+4a=0$

$9a^2-10a+1=0$, $(9a-1)(a-1)=0$

$\therefore a=\frac{1}{9}$ 또는 $a=1$

$a=\frac{1}{9}$을 ㉣, ㉤에 각각 대입하면 $b=\frac{8}{9}$, $c=\frac{25}{9}$

$a=1$을 ㉣, ㉤에 각각 대입하면 $b=0$, $c=1$

• 50% 배점

답 구하기 따라서 구하는 이차함수의 식은

$y=\frac{1}{9}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{25}{9}$ 또는 $y=x^2+1$ • 10% 배점

답 $y=\frac{1}{9}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{25}{9}$ 또는 $y=x^2+1$

495 전략 $f(x)=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형하여 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구한다.

풀이 $f(x)=2x^2+4kx-6k+1$

$=2(x+k)^2-2k^2-6k+1$

이므로 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(-k,\ -2k^2-6k+1)$

이 점이 $y=-x^2+3x-3$의 그래프 위에 있으므로

$-2k^2-6k+1=-k^2-3k-3$

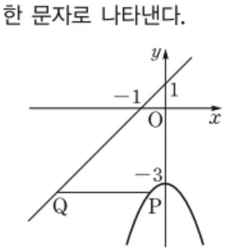
$k^2+3k-4=0$, $(k+4)(k-1)=0$

$\therefore k=1$ ($\because k>0$)

따라서 $f(x)=2(x+1)^2-7$의 최솟값은 -7이므로 구하는 합은 $1+(-7)=-6$

답 ③

496 전략 두 점 P, Q의 좌표를 한 문자로 나타낸다.



풀이 $P(a,\ -a^2-3)$이라 하면 점 Q의 y좌표는 $-a^2-3$이고 점 Q는 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로 점 Q의 x좌표는

$\overline{PQ}$와 x축이 평행하므로 두 점 P, Q의 y좌표는 같다.

$-a^2-3=x+1$

$\therefore x=-a^2-4$

즉 $Q(-a^2-4,\ -a^2-3)$이므로

$\overline{PQ}=a-(-a^2-4)=a^2+a+4$

$=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$

따라서 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 $\frac{15}{4}$이다.

답 ④

497 해결 과정 ① $x^2+2x+4=t$로 놓으면

$t=(x+1)^2+3$　　$\therefore t\geq 3$

$g(t)=at^2+3at+b$로 놓으면

$g(t)=a\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}a+b$

이므로 $t\geq 3$에서 $g(t)$가 최솟값을 가지려면

$a>0$

이어야 한다.

이때 $g(t)$는 $t=3$일 때 최솟값 37을 가지므로

$g(3)=37$,　　$37=9a+9a+b$

$\therefore 18a+b=37$　　$\cdots\cdots$ ㉠　　• 40% 배점

해결 과정 ② $x=-2$일 때,　　$t=4-4+4=4$

즉 $f(-2)=g(4)=57$이므로

$57=16a+12a+b$

$\therefore 28a+b=57$　　$\cdots\cdots$ ㉡　　• 30% 배점

해결 과정 ③ ㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$

$\therefore g(t)=2t^2+6t+1$　　• 20% 배점

답 구하기 $x=1$일 때,　　$t=1+2+4=7$

$\therefore f(1)=g(7)=98+42+1=141$　　• 10% 배점

답 141

주의 이차함수 $y=f(x)$에서 x의 값의 범위가 주어진 경우에는 그래프의 꼭짓점이 아닌 점에서 최댓값 또는 최솟값을 가질 수 있다.

t의 최솟값이 3이므로 $t\geq 3$

$t=-\frac{3}{2}$이 $t\geq 3$의 범위에 속하지 않으므로 $t=3$일 때 최솟값을 갖는다.

㉡－㉠을 하면
$10a=20$　$\therefore a=2$
$a=2$를 ㉠에 대입하면
$36+b=37$
$\therefore b=1$

498 전략 $\overline{AE}=x$ cm로 놓고 □EFCD의 넓이를 x에 대한 이차식으로 나타낸다.

풀이 $\overline{AE}=x$ cm라 하면 두 직사각형 ABFE, EFCD의 넓이의 비가 1 : 2이므로　　$\overline{ED}=2x$ (cm)

$\therefore \overline{AD}=3x$ (cm)

이때 철사의 길이가 100 cm이므로

$\overline{AB}=\frac{1}{3}(100-6x)=-2x+\frac{100}{3}$ (cm)

□EFCD의 넓이를 y cm^{2}라 하면

$y=2x\left(-2x+\frac{100}{3}\right)=-4x^2+\frac{200}{3}x$

$=-4\left(x-\frac{25}{3}\right)^2+\frac{2500}{9}$

따라서 □EFCD의 넓이는 $x=\frac{25}{3}$일 때 최대이고 이때의 $\overline{AB}$의 길이는

$\overline{AB}=-2\times\frac{25}{3}+\frac{100}{3}=\frac{50}{3}$ (cm)　　답 ④

499 [문제 해결 길잡이]

❶ 이차함수의 그래프가 x축과 만나는 두 점 A, B의 좌표를 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$이라 하고 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한다.

❷ 곱셈 공식의 변형을 이용하여 $\overline{AB}$의 길이인 $|\alpha-\beta|$를 k에 대한 식으로 나타낸다.

❸ $\overline{AB}$의 길이가 최소가 되도록 하는 k의 값을 구한다.

풀이 $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$이라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2-(k+3)x-4=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k+3$, $\alpha\beta=-4$ ❶

이때 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(k+3)^2+16$이므로

$\overline{AB}=|\alpha-\beta|=\sqrt{(k+3)^2+16}$ ❷

따라서 $\overline{AB}$의 길이가 최소가 되도록 하는 실수 k의 값은 -3이다. ❸　　답 -3

$(k+3)^2\geq 0$이므로 $k+3=0$일 때 $\overline{AB}$의 길이가 최소이다.

내신 만점 정복하기

본책 92~98쪽

500 전략 $y=ax^2+bx+c$가 x에 대한 이차함수 ➡ $a\neq 0$

풀이 $y=-4x^2-3-k^2x(1-x)$

$=-4x^2-3-k^2x+k^2x^2$

$=(k^2-4)x^2-k^2x-3$

이것이 이차함수가 되려면

$k^2-4\neq 0$　　$\therefore k\neq\pm 2$

따라서 k의 값이 될 수 없는 것은 ②이다.　　답 ②

501 전략 이차함수 $y=ax^2$의 그래프에서 a의 절댓값이 작을수록 그래프의 폭이 넓다.

풀이 ③ x^2의 계수의 절댓값이 작을수록 그래프의 폭이 넓으므로 그래프의 폭이 가장 넓은 것은 ㈃이다.

답 ③

502 전략 점 P의 좌표를 $\left(a, \frac{1}{2}a^2\right)(a>0)$이라 하고 △POA의 넓이를 이용한다.

풀이 $P\left(a, \frac{1}{2}a^2\right)(a>0)$이라 하면 △POA의 넓이가 25이므로

$\frac{1}{2}\times 4\times\frac{1}{2}a^2=25$,　　$a^2=25$

$\therefore a=5\ (\because a>0)$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(5, \frac{25}{2}\right)$　　답 $\left(5, \frac{25}{2}\right)$

503 전략 $y=a(x-p)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표 ➡ $(p, 0)$

풀이 $y=x^2-1$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(0, -1)$

$y=a(x-p)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(p, 0)$

이때 $y=x^2-1$의 그래프가 점 $(p, 0)$을 지나므로

$0=p^2-1$,　　$p^2=1$　　$\therefore p=1\ (\because p>0)$

또 $y=a(x-p)^2=a(x-1)^2$의 그래프가 점 $(0, -1)$을 지나므로

$a=-1$

$\therefore a+p=0$　　답 ②

504 전략 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식 ➡ $y=a(x-m-p)^2+q+n$

Ⅳ 이차함수

풀이 ⑤ $y=-x^2+1$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

답 ⑤

505 **전략** 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표 ➡ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해

풀이 $x=\frac{1}{3}$이 이차방정식 $3x^2+5x+a=0$의 한 해이므로

$$3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+5\times\frac{1}{3}+a=0 \qquad \therefore a=-2$$

따라서 $y=3x^2+5x-2$의 그래프의 y절편은 -2이다.

답 -2

506 **전략** $y=ax^2+q$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식
➡ $y=a(x-m)^2+q+n$

풀이 $y=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$의 그래프는 $y=x^2+1$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 $-\frac{5}{4}$만큼 평행이동한 것이므로

$$a=-\frac{3}{2},\ b=-\frac{5}{4}$$
$$\therefore a+b=-\frac{11}{4}$$

답 ②

$y=x^2+1$에 x 대신 $x+\frac{3}{2}$, y 대신 $y+\frac{5}{4}$를 대입하면
$$y+\frac{5}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+1$$
$$\therefore y=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

507 **전략** x축의 방향으로 m만큼 평행이동
➡ x 대신 $x-m$을 대입한다.

풀이 $y=-x^2+2x-2=-(x-1)^2-1$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=-(x-m-1)^2-1$$

이 함수는 $x>m+1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$$m+1=-2 \qquad \therefore m=-3$$

답 -3

508 **전략** x축의 방향으로 p만큼 평행이동
➡ x 대신 $x-p$를 대입한다.

풀이 $y=-x^2+4x+3$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 그래프의 식은

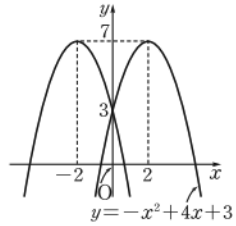
$$y=-(x-p)^2+4(x-p)+3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

처음 그래프와 y축과의 교점의 좌표가 $(0,\ 3)$이므로 $x=0$, $y=3$을 ㉠에 대입하면

$$3=-p^2-4p+3, \qquad p^2+4p=0$$
$$p(p+4)=0 \qquad \therefore p=-4\ (\because p\neq 0)$$

답 ②

다른풀이 $y=-x^2+4x+3$
$=-(x-2)^2+7$



이 함수의 그래프와 이것을 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 그래프가 y축에서 만나려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로 평행이동한 그래프의 축의 방정식은 $x=-2$이다.

두 그래프의 모양과 폭이 같고 꼭짓점의 y좌표가 같으므로 평행이동한 그래프의 식은

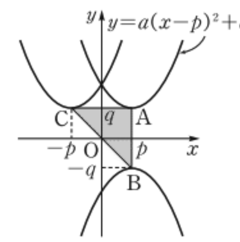
$$y=-(x+2)^2+7$$

따라서 이 그래프는 $y=-x^2+4x+3$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이므로

$$p=-4$$

509 **전략** 세 꼭짓점으로 이루어진 삼각형을 그려 본다.

풀이 오른쪽 그림에서



$\mathrm{A}(p,\ q)$,
$\mathrm{B}(p,\ -q)$,
$\mathrm{C}(-p,\ q)$

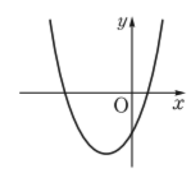
이므로

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times 2p\times 2q$$
$$=2pq$$

답 $2pq$

510 **전략** 이차함수의 그래프와 y축과의 교점의 위치를 생각한다.

풀이 $y=x^2+x+k$의 그래프는 아래로 볼록하고, 축이 y축의 왼쪽에 위치하므로 이 그래프가 모든 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 그래프와 y축과의 교점이 원점의 아래쪽에 위치해야 한다.



$y=ax^2+bx+c$에서 a, b의 부호가 같으면 축이 y축의 왼쪽에 위치한다.

$$\therefore k<0$$

답 $k<0$

511 **전략** 주어진 그래프가 나타내는 이차함수의 식
➡ $y=a(x-p)^2$

풀이 ② 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 것이다.

답 ②

512 **전략** 일차함수 $y=ax+b$의 그래프에서 a, b의 부호를 구한다.

풀이 일차함수 $y=ax+b$의 그래프에서

$$a<0,\ b>0$$

따라서 이차함수 $y=ax^2+b$의 그래프에서
(i) $a<0$이므로 위로 볼록
(ii) 축은 y축과 일치
(iii) $b>0$이므로 y축과의 교점이 원점의 위쪽에 위치
이상에서 $y=ax^2+b$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ③이다.

답 ③

513 **전략** $4a-2b+c$의 값은 $y=ax^2+bx+c$에 $x=-2$를 대입하여 나온 y의 값과 같다.

풀이 ① 그래프가 아래로 볼록하므로 $\quad a>0$
② 축이 y축의 왼쪽에 위치하므로 $\quad b>0$
③ y축과의 교점이 원점의 위쪽에 위치하므로 $\quad c>0$
④ 그래프가 x축과 두 점에서 만나므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서
$$b^2-4ac>0$$

a, b의 부호가 같다.

⑤ $x=-2$일 때, $y<0$이므로

$4a-2b+c<0$ 답 ⑤

514 전략 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표

⊙ 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$의 해

풀이 $y=x^2-6x+10$의 그래프와 직선 $y=2x-2$의 교점의 x좌표는 $x^2-6x+10=2x-2$에서

$x^2-8x+12=0,\quad (x-2)(x-6)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=6$

따라서 A(2, 2), B(6, 10), C(2, 0), D(6, 0)이므로

$\square\mathrm{ACDB}=\frac{1}{2}\times(2+10)\times4=24$ 답 24

515 해결 과정 ① 점 C의 y좌표가 3이므로 $y=3$을 $y=\frac{1}{3}x^2$에 대입하면 점 C의 x좌표는

$3=\frac{1}{3}x^2,\quad x^2=9\quad \therefore x=3\,(\because x>0)$

즉 C(3, 3)이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=3$ • 30% 배점

해결 과정 ② 이때 $2\overline{\mathrm{AB}}=3\overline{\mathrm{BC}}$이므로

$2\overline{\mathrm{AB}}=3(3-\overline{\mathrm{AB}})$

$5\overline{\mathrm{AB}}=9\quad \therefore \overline{\mathrm{AB}}=\frac{9}{5}$ • 30% 배점

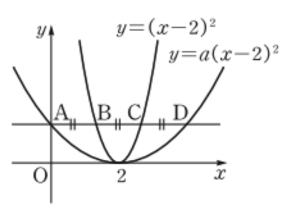
답 구하기 따라서 $\mathrm{B}\left(\frac{9}{5},\ 3\right)$이고 이 점이 $y=ax^2$의 그래프 위에 있으므로

$3=a\times\left(\frac{9}{5}\right)^2\quad \therefore a=\frac{25}{27}$ • 40% 배점

답 $\frac{25}{27}$

516 해결 과정 ① 오른쪽 그림에서 점 A는 $y=a(x-2)^2$의 그래프와 y축과의 교점이므로

$\mathrm{A}(0,\ 4a)$ • 20% 배점



해결 과정 ② $\mathrm{B}(m,\ 4a)\ (0<m<2)$라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}$이므로

$\mathrm{C}(2m,\ 4a),\ \mathrm{D}(3m,\ 4a)$ • 20% 배점

해결 과정 ③ 두 점 B, C가 $y=(x-2)^2$의 그래프 위에 있으므로

$4a=(m-2)^2,\ 4a=(2m-2)^2$

즉 $(m-2)^2=(2m-2)^2$이므로

$3m^2-4m=0,\quad m(3m-4)=0$

$\therefore m=\frac{4}{3}\ (\because 0<m<2)$ • 40% 배점

답 구하기 따라서 $4a=\left(\frac{4}{3}-2\right)^2=\frac{4}{9}$이므로

$a=\frac{1}{9}$ • 20% 배점

답 $\frac{1}{9}$

$x=2$를 $y=2x-2$에 대입하면
$y=4-2=2$
$x=6$을 $y=2x-2$에 대입하면
$y=12-2=10$

$\overline{\mathrm{CD}}=6-2=4$

$a=-3$을 $b-4a=2$에 대입하면
$b+12=2$
$\therefore b=-10$
$a=-3,\ b=-10$을 $4a-2b+c+5=0$에 대입하면
$-12+20+c+5=0$
$\therefore c=-13$

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AC}}-\overline{\mathrm{AB}}$

평행이동하기 전의 그래프의 식을 구하는 것이므로 부호를 바꾸어 생각한다.

517 해결 과정 $y=x^2-2(k+1)x+k^2-7$

$=\{x-(k+1)\}^2-(k+1)^2+k^2-7$

$=\{x-(k+1)\}^2-2k-8$

이 함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(k+1,\ -2k-8)$ • 60% 배점

답 구하기 이 점이 제3사분면에 있으려면

$k+1<0,\ -2k-8<0$

$\therefore -4<k<-1$ • 40% 배점

답 $-4<k<-1$

518 해결 과정 ① $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-5=a(x-2)^2+b(x-2)+c$

$\therefore y=ax^2+(b-4a)x+4a-2b+c+5$

• 40% 배점

해결 과정 ② 이것이 $y=-3x^2+2x$와 일치하므로

$a=-3,\ b-4a=2,\ 4a-2b+c+5=0$

$\therefore a=-3,\ b=-10,\ c=-13$ • 40% 배점

답 구하기 $\therefore a+b+c=-26$ • 20% 배점

답 -26

다른풀이 $y=-3x^2+2x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y+5=-3(x+2)^2+2(x+2)$

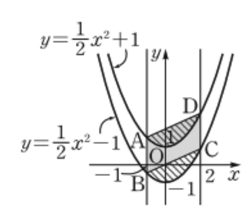
$\therefore y=-3x^2-10x-13$

이것이 $y=ax^2+bx+c$와 같아야 하므로

$a=-3,\ b=-10,\ c=-13$

$\therefore a+b+c=-26$

519 해결 과정 $y=\frac{1}{2}x^2-1$의 그래프는 $y=\frac{1}{2}x^2+1$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림에서 □ABCD는 평행사변형이고 빗금친 두 부분의 넓이는 같다. • 50% 배점



답 구하기 이때 $\overline{\mathrm{AB}}=2$이고 두 직선 $x=-1,\ x=2$ 사이의 거리는

$2-(-1)=3$

이므로 □ABCD의 넓이는

$2\times3=6$ • 50% 배점

답 6

520 해결 과정 ① 점 A(4, 2)를 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y-2=1\cdot(x-4)$

$\therefore y=x-2$ • 30% 배점

Ⅳ 이차함수

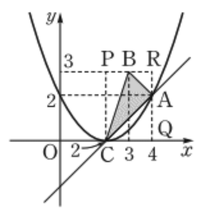
해결 과정 ② $\frac{1}{2}(x-2)^2=x-2$에서

$x^2-6x+8=0,\quad (x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

$\therefore \mathrm{C}(2,\ 0)$ • 40% 배점

답 구하기 따라서 오른쪽 그림에서



$\triangle\mathrm{ABC}$

$=\square\mathrm{PCQR}-\triangle\mathrm{PCB}$

$-\triangle\mathrm{ACQ}-\triangle\mathrm{BAR}$

$=6-\frac{3}{2}-2-\frac{1}{2}$

$=2$ • 30% 배점

답 2

521 **전략** y축에 대하여 대칭이동 ➲ x 대신 $-x$를 대입한다.

풀이 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 0)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x-1)^2$으로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)$을 지나므로

$a=-\frac{1}{2}$

따라서 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$의 그래프와 y축에 대하여 대칭인 그래프의 식은

$y=-\frac{1}{2}(-x-1)^2=-\frac{1}{2}(x+1)^2$ 답 ③

다른풀이 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$의 그래프와 y축에 대하여 대칭인 그래프는 그래프의 모양은 같고 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 0)$이므로 그 그래프의 식은

$y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$

보충학습

① x축에 대하여 대칭이동 ➔ y 대신 $-y$를 대입
② y축에 대하여 대칭이동 ➔ x 대신 $-x$를 대입
③ 원점에 대하여 대칭이동
➔ x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입

522 **전략** 축의 방정식이 $x=p$인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식 ➲ $y=a(x-p)^2+q$

풀이 축의 방정식이 $x=-1$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x+1)^2+q$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 두 점 $(0,\ -3)$, $(1,\ 3)$을 지나므로

$-3=a+q,\ 3=4a+q$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ q=-5$

$\begin{cases} a+q=-3 & \cdots ㉠ \\ 4a+q=3 & \cdots ㉡ \end{cases}$
㉡$-$㉠을 하면
$3a=6\quad \therefore a=2$
$a=2$를 ㉠에 대입하면
$2+q=-3$
$\therefore q=-5$

따라서 $y=2(x+1)^2-5=2x^2+4x-3$이므로

$b=4,\ c=-3$

$\therefore a+b-c=9$ 답 ⑤

523 **전략** $f(x)=ax^2+bx+c$로 놓고 세 점의 좌표를 각각 대입하여 a, b, c의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=ax^2+bx+c$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프가 세 점 $(0,\ -2)$, $(-2,\ -4)$, $(-3,\ 1)$을 지나므로

$-2=c,\ -4=4a-2b+c,\ 1=9a-3b+c$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=5,\ c=-2$

$c=-2$이므로
$-4=4a-2b-2,$
$1=9a-3b-2$
$\therefore 2a-b=-1 \cdots ㉠$
$3a-b=1 \cdots ㉡$
㉡$-$㉠을 하면
$a=2$
$a=2$를 ㉠에 대입하면
$4-b=-1$
$\therefore b=5$

$\therefore f(x)=2x^2+5x-2$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ k)$를 지나므로

$k=2+5-2=5$ 답 ③

524 **전략** 이차함수의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표를 α, β라 하면 ➲ $|\alpha-\beta|=4$

풀이 $y=x^2+2ax+8$의 그래프와 x축과의 두 교점의 좌표를 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$이라 하면

$|\alpha-\beta|=4$

이때 이차방정식 $x^2+2ax+8=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2a,\ \alpha\beta=8$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$4^2=(-2a)^2-4\times8,\quad 4a^2=48$

$a^2=12\quad \therefore a=2\sqrt{3}\ (\because a>0)$

따라서 $y=x^2+4\sqrt{3}x+8=(x+2\sqrt{3})^2-4$의 최솟값은 -4이다. 답 ③

525 **전략** 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=f(\beta)=0$이면 ➲ $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$

풀이 $f(-2)=f(1)=0$이므로

$x=-2$, $x=1$은 이차방정식 $f(x)=0$의 근이다.

$f(x)=a(x+2)(x-1)$로 놓으면

$f(x)=a(x+2)(x-1)=a(x^2+x-2)$

$=a\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}a$

의 최댓값이 9이므로

$-\frac{9}{4}a=9\quad \therefore a=-4$

따라서 $f(x)=-4(x+2)(x-1)$이므로

$f(3)=-4\times5\times2=-40$

답 ①

다른풀이 x축과 두 점 $(-2,\ 0)$, $(1,\ 0)$에서 만나는 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표는

$\frac{-2+1}{2}=-\frac{1}{2}$

x축과 만나는 두 점을 잇는 선분의 중점의 x좌표

또 최댓값이 9이므로 꼭짓점의 y좌표는 9이다.

따라서 $y=a(x+2)(x-1)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $\left(-\frac{1}{2},\ 9\right)$이므로

$9=a\times\frac{3}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right)\quad \therefore a=-4$

526 **전략** $x=p$에서 최댓값을 갖는다. ➲ 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 p이다.

풀이 조건 (가), (나)에 의하여 이차함수가 $x=-5$에서 최댓값 0을 가지므로 이차함수의 식을 $y=a(x+5)^2$으로 놓을 수 있다.

조건 (다)에서 이 함수의 그래프가 점 $(-3,\ -6)$을 지나므로

$-6=4a \qquad \therefore a=-\frac{3}{2}$

$\therefore y=-\frac{3}{2}(x+5)^2=-\frac{3}{2}x^2-15x-\frac{75}{2}$

답 $y=-\frac{3}{2}x^2-15x-\frac{75}{2}$

527 전략 $y=ax^2$의 그래프는 $y=-ax^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

풀이 $x=1$에서 최댓값 -3을 가지므로 이차함수의 식을 $y=a(x-1)^2-3$으로 놓을 수 있다.
이 함수의 그래프를 평행이동하면 $y=3x^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이므로

$a=-3$

$\therefore y=-3(x-1)^2-3$

답 ①

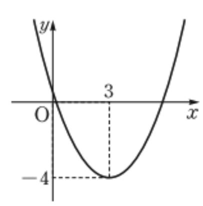
$y=3x^2$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면
$y=-3x^2$

528 전략 이차함수 $y=ax^2+bx+c$가 $x=p$에서 최솟값 q를 갖는다. ➡ $y=a(x-p)^2+q\ (a>0)$

풀이 주어진 이차함수가 $x=3$에서 최솟값 -4를 가지므로

$y=a(x-3)^2-4\ (a>0)$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.
$y=a(x-3)^2-4$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 그래프의 y절편이 0보다 크거나 같아야 한다.



$x=0$을 ㉠에 대입하면

$y=9a-4$

따라서 $9a-4\geq 0$이어야 하므로

$a\geq\frac{4}{9}$

답 $a\geq\frac{4}{9}$

529 전략 y의 최솟값을 a에 대한 식으로 나타내고 그 식의 최댓값을 구한다.

풀이 $y=2x^2+8ax-8a+5$

$=2(x+2a)^2-8a^2-8a+5$

$\therefore m=-8a^2-8a+5$

$=-8\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+7$

따라서 m은 $a=-\frac{1}{2}$일 때 최댓값 7을 갖는다.

답 최댓값: 7, $a=-\frac{1}{2}$

530 전략 이익을 y만 원이라 하고 y의 최댓값을 구한다.

풀이 이익을 y만 원이라 하면

$y=-\frac{1}{5}x^2+40x-300$

$=-\frac{1}{5}(x-100)^2+1700$

따라서 y는 $x=100$일 때 최대이므로 100대를 생산해야 한다.

답 ①

최대 이익은 1700만 원이다.

531 전략 x초 후에 $\overline{PB}=(20-x)$cm, $\overline{BQ}=2x$cm임을 이용한다.

풀이 x초 후에 $\overline{AP}=x$cm, $\overline{BQ}=2x$cm이므로

$\overline{PB}=(20-x)$cm

△PBQ의 넓이를 $y\,\text{cm}^2$라 하면

$y=\frac{1}{2}\times(20-x)\times 2x$

$=-x^2+20x$

$=-(x-10)^2+100$

따라서 y는 $x=10$일 때 최대이므로 10초 후에 △PBQ의 넓이는 최대가 된다.

답 10초

△PBQ의 최대 넓이는 $100\,\text{cm}^2$이다.

532 전략 새로운 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 새로운 직사각형의 가로의 길이는 $(7-x)$cm, 세로의 길이는 $(5+x)$cm이므로

$y=(7-x)(5+x)=-x^2+2x+35$

$=-(x-1)^2+36$

따라서 $x=1$일 때 직사각형의 넓이가 최대이다.

답 1

533 전략 점 P의 좌표를 $(x,\ x-8)$이라 하면 □OBPA의 가로, 세로의 길이는 각각 x, $8-x$이다.

풀이 점 P의 좌표를 $(x,\ x-8)$이라 하면 $\overline{BP}=x$, $\overline{AP}=8-x$이므로 □OBPA의 넓이는

$x(8-x)=-x^2+8x$

$=-(x-4)^2+16$

따라서 $x=4$일 때 □OBPA의 넓이는 최대이고, 이때의 점 P의 좌표는

$(4,\ -4)$

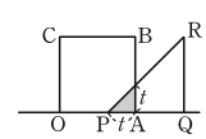
답 $(4,\ -4)$

점 P가 제4사분면 위의 점이므로
$x-8<0$
$\therefore \overline{AP}=8-x$

534 전략 t의 값의 범위를 나누어 $S(t)$를 구한다.

풀이 (i) $0\leq t<2$일 때,
오른쪽 그림에서

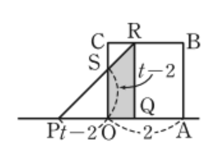
$S(t)=\frac{1}{2}t^2$



(ii) $2\leq t<4$일 때,
오른쪽 그림에서

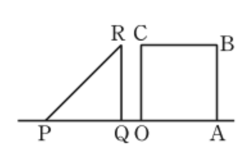
$S(t)=\triangle PQR-\triangle POS$

$=2-\frac{1}{2}(t-2)^2$



(iii) $t\geq 4$일 때,
오른쪽 그림에서

$S(t)=0$



이상에서 t와 $S(t)$ 사이의 관계를 나타낸 그래프는 ②이다.

답 ②

535 해결 과정 ① 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 6)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x-1)^2+6$으로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 (0, 4)를 지나므로

$4=a+6 \quad \therefore a=-2$

$\therefore y=-2(x-1)^2+6 \quad \cdots\cdots ㉠$ • 30% 배점

해결 과정 ② $x=2$를 ㉠에 대입하면

$y=-2+6=4$

$\therefore A(2,\ 4)$

$y=-2$를 ㉠에 대입하면

$-2=-2(x-1)^2+6, \quad x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=-1\ (\because x<0)$

$\therefore B(-1,\ -2)$ • 40% 배점

답 구하기 두 점 A(2, 4), B(−1, −2)를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-2-4}{-1-2}=2$

따라서 직선 l은 기울기가 2이고 점 (2, 4)를 지나므로 직선 l의 방정식은

$y-4=2(x-2)$

$\therefore y=2x$ • 30% 배점

답 $y=2x$

536 해결 과정 ① 구하는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$로 놓으면 이 함수의 그래프가 두 점 (1, 1), (2, −1)을 지나므로

$1=a+b+c \quad \cdots\cdots ㉠$

$-1=4a+2b+c \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡−㉠을 하면 $-2=3a+b$

$\therefore b=-3a-2 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$1=a-3a-2+c \quad \therefore c=2a+3 \quad \cdots\cdots ㉣$

$\therefore y=ax^2-(3a+2)x+2a+3$ • 40% 배점

해결 과정 ② 이 함수의 그래프가 직선 $y=x-3$에 접하므로 이차방정식 $ax^2-(3a+2)x+2a+3=x-3$, 즉 $ax^2-3(a+1)x+2(a+3)=0$이 중근을 갖는다.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 가질 조건 → $b^2-4ac=0$

$9(a+1)^2-8a(a+3)=0$

$a^2-6a+9=0, \quad (a-3)^2=0$

$\therefore a=3$

$a=3$을 ㉢, ㉣에 각각 대입하면

$b=-11,\ c=9$ • 40% 배점

답 구하기 $\therefore y=3x^2-11x+9$ • 20% 배점

답 $y=3x^2-11x+9$

537 해결 과정 ① $y=2x-5$이므로

$x^2+y^2=x^2+(2x-5)^2=5x^2-20x+25$

$=5(x-2)^2+5$

따라서 x^2+y^2은 $x=2$에서 최솟값 5를 갖는다.

• 50% 배점

해결 과정 ② 이때 $x=2$를 $y=2x-5$에 대입하면

$y=2\times2-5=-1$ • 30% 배점

답 구하기 따라서 $a=2,\ b=-1,\ m=5$이므로

$a+b+m=6$ • 20% 배점

답 6

538 문제 이해 $y=f(x)$가 $x=1$에서 최솟값 −2를 가지므로 $y=a(x-1)^2-2$로 놓을 수 있다. • 20% 배점

해결 과정 ① 이 함수의 그래프가 점 (5, 6)을 지나므로

$6=16a-2 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2-2=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$

• 20% 배점

해결 과정 ② $f(x)=0$에서 $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=3$

$\therefore A(-1,\ 0),\ B(3,\ 0)$

또 $f(0)=-\frac{3}{2}$이므로

$C\left(0,\ -\frac{3}{2}\right)$ • 40% 배점

$\overline{AB}=3-(-1)=4$

답 구하기 $\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times4\times\frac{3}{2}=3$ • 20% 배점

답 3

539 해결 과정 ① $y=3x^2-6mx+m^2+4m+5$

$=3(x-m)^2-2m^2+4m+5$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 −2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=3(x+2-m)^2-2m^2+4m+8$ • 40% 배점

해결 과정 ② 이 함수의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

y 대신 $-y$를 대입한다.

$y=-3(x+2-m)^2+2m^2-4m-8$ • 30% 배점

답 구하기 $\therefore g(m)=2m^2-4m-8$

$=2(m-1)^2-10$

따라서 $g(m)$의 최솟값은 −10이다. • 30% 배점

답 −10

540 해결 과정 ① $\overline{AP}=x$ cm라 하면

$\overline{AQ}=2x$ cm, $\overline{QB}=(8-2x)$ cm,

$\overline{BR}=(4-x)$ cm • 30% 배점

해결 과정 ② △PQR의 넓이를 y cm²라 하면

$y=\square ABRP-\triangle AQP-\triangle QBR$

$=\frac{1}{2}\times\{x+(4-x)\}\times8-\frac{1}{2}\times x\times2x$

$-\frac{1}{2}\times(8-2x)\times(4-x)$

$=-2x^2+8x$

$=-2(x-2)^2+8$ • 50% 배점

답 구하기 따라서 △PQR의 넓이의 최댓값은 8 cm²이다. • 20% 배점

답 8 cm²

541 해결 과정 ① 두 점 A(−1, 1), B(2, 4)를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{4-1}{2-(-1)}=1$

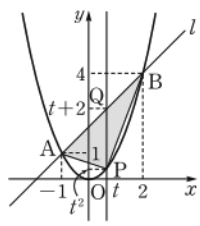
직선 l은 기울기가 1이고 점 (−1, 1)을 지나므로 직선 l의 방정식은

$y-1=1\cdot(x+1) \quad \therefore y=x+2$

점 P의 좌표를 $(t,\ t^2)\ (-1<t<2)$이라 하고 직선 $y=x+2$와 직선 $x=t$의 교점을 Q라 하면

$Q(t,\ t+2)$ • 40% 배점

해결 과정 ② 오른쪽 그림에서



$$\begin{aligned}&\triangle APB\\&=\triangle APQ+\triangle BQP\\&=\frac{1}{2}(t+2-t^2)(t+1)\\&\quad+\frac{1}{2}(t+2-t^2)(2-t)\\&=-\frac{3}{2}(t^2-t-2)\\&=-\frac{3}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{8}\end{aligned}$$

• 40% 배점

답 구하기 따라서 $\triangle APB$의 넓이의 최댓값은 $\frac{27}{8}$이다. • 20% 배점

답 $\frac{27}{8}$

다른풀이 $\triangle APB$의 넓이가 최대일 때의 점 P는 직선 l과 평행한 직선이 $y=x^2$의 그래프와 접할 때의 접점이다.

직선 l과 평행한 직선의 방정식을 $y=x+k$라 하면 $x^2=x+k$에서

$$x^2-x-k=0$$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로

$$(-1)^2-4\times(-k)=0 \qquad \therefore k=-\frac{1}{4}$$

즉 $x^2-x+\frac{1}{4}=0$에서

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}$$

$$\therefore P\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$$

또 $Q\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)$이므로 $\overline{PQ}=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$

$x=\frac{1}{2}$을 $y=x+2$에 대입하면 $y=\frac{5}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle APB&=\triangle APQ+\triangle BQP\\&=\frac{1}{2}\times\frac{9}{4}\times\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{9}{4}\times\frac{3}{2}\\&=\frac{27}{8}\end{aligned}$$

$\frac{1}{2}-(-1)=\frac{3}{2}$

$2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

교과서 속 창의유형

본책 99쪽

542 [문제 해결 길잡이]

❶ x와 y 사이의 관계식을 구한다.

❷ $x=120$일 때 y의 값을 구하여 제동 거리를 구한다.

풀이 (1) $y=ax^2$ (a는 상수)이라 하면 $x=40$일 때 $y=12.5$이므로

$$12.5=a\times40^2 \qquad \therefore a=\frac{1}{128}$$

$$\therefore y=\frac{1}{128}x^2$$ ❶

(2) $x=120$일 때 $y=\frac{1}{128}\times120^2=112.5$이므로 제동 거리는 112.5 m이다. ❷

답 (1) $y=\frac{1}{128}x^2$ (2) 112.5 m

543 [문제 해결 길잡이]

❶ 두 점 (3000, 100), (3100, 80)을 지나는 직선의 방정식을 이용하여 x, y 사이의 관계식을 구한다.

❷ y의 값이 최대가 되도록 하는 x의 값을 구한다.

풀이 두 점 (3000, 100), (3100, 80)을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{80-100}{3100-3000}=-\frac{1}{5}$$

기울기가 $-\frac{1}{5}$이고 점 (3000, 100)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-100=-\frac{1}{5}(x-3000)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{5}x+700$$ ❶

이때 떡의 하루 판매 수입은

(판매 수입) =(떡의 가격) ×(판매량)

$$\begin{aligned}xy&=x\left(-\frac{1}{5}x+700\right)=-\frac{1}{5}x^2+700x\\&=-\frac{1}{5}(x-1750)^2+\frac{1750^2}{5}\end{aligned}$$

따라서 떡의 하루 판매 수입이 최대가 되도록 하려면 떡의 가격을 1750원으로 정해야 한다. ❷

답 1750원

Ⅳ 이차함수