정답 및 풀이

수학 Ⅰ

- 정답을 확인하려고 할 때에는 〈빠른 정답 찾기〉를 이용하면 편리합니다.

01 지수

I. 지수함수와 로그함수

0001 $a^3\times a^2=a^{3+2}=a^5$ 답 a^5

0002 $(a^5)^2=a^{5\times2}=a^{10}$ 답 a^{10}

0003 $a^4\div a^2=a^{4-2}=a^2$ 답 a^2

0004 $a^5\div a^5=1$ 답 1

0005 $a^3\div a^7=\dfrac{1}{a^{7-3}}=\dfrac{1}{a^4}$ 답 $\dfrac{1}{a^4}$

0006 $(ab)^4=a^4b^4$ 답 a^4b^4

0007 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3=\dfrac{a^3}{b^3}$ 답 $\dfrac{a^3}{b^3}$

0008 $a^2b^3\times ab^4=a^{2+1}b^{3+4}=a^3b^7$ 답 a^3b^7

0009 $ab^4\times a^2b^3\times a^5b=a^{1+2+5}b^{4+3+1}$
$=a^8b^8$ 답 a^8b^8

0010 $(a^3b^2)^3=a^{3\times3}b^{2\times3}=a^9b^6$ 답 a^9b^6

0011 $(ab^4)^2\times ab^2=a^2b^{4\times2}\times ab^2$
$=a^{2+1}b^{8+2}=a^3b^{10}$ 답 a^3b^{10}

0012 $a^3b^7\div(ab^2)^2=a^3b^7\div a^2b^{2\times2}$
$=a^{3-2}b^{7-4}=ab^3$ 답 ab^3

0013 $a^5b^9\div(a^2b)^3\div\dfrac{b^3}{a}=a^5b^9\div a^{2\times3}b^3\div\dfrac{b^3}{a}$
$=\dfrac{b^{9-3}}{a^{6-5}}\times\dfrac{a}{b^3}$
$=b^{6-3}=b^3$ 답 b^3

0014 $2a^4b^3\div\left(\dfrac{3b}{a^2}\right)^2=2a^4b^3\div\dfrac{9b^2}{a^{2\times2}}$
$=2a^4b^3\times\dfrac{a^4}{9b^2}$
$=\dfrac{2}{9}a^{4+4}b^{3-2}$
$=\dfrac{2}{9}a^8b$ 답 $\dfrac{2}{9}a^8b$

0015 $3a^8b^3\div\left(\dfrac{2a^2}{b}\right)^3\times4ab^2=3a^8b^3\div\dfrac{8a^{2\times3}}{b^3}\times4ab^2$
$=3a^8b^3\times\dfrac{b^3}{8a^6}\times4ab^2$
$=\dfrac{3}{2}a^{8-6+1}b^{3+3+2}$
$=\dfrac{3}{2}a^3b^8$ 답 $\dfrac{3}{2}a^3b^8$

0016 3의 여섯제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[6]{3}$, $-\sqrt[6]{3}$의 2개이다.
답 ○

0017 0의 네제곱근 중 실수인 것은 0의 1개이다. 답 ×

0018 -2의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-2}$의 1개이다. 답 ○

0019 4의 다섯제곱근은 5개이다. 답 ×

0020 -3의 네제곱근은 4개이다. 답 ○

0021 1의 제곱근은 $x^2=1$의 근이므로
$x^2-1=0,\quad (x+1)(x-1)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$
따라서 실수인 x는 -1, 1이다. 답 -1, 1

0022 8의 세제곱근은 $x^3=8$의 근이므로
$x^3-2^3=0,\quad (x-2)(x^2+2x+4)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$
따라서 실수인 x는 2이다. 답 2

0023 -27의 세제곱근은 $x^3=-27$의 근이므로
$x^3+3^3=0,\quad (x+3)(x^2-3x+9)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$
따라서 실수인 x는 -3이다. 답 -3

0024 -16의 네제곱근은 $x^4=-16$의 근이다. 이때 실수 x에 대하여 $x^4\ge0$이므로 $x^4=-16$의 실근은 없다.
따라서 -16의 네제곱근 중 실수인 것은 없다. 답 없다.

0025 $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$ 답 4

0026 $\sqrt[3]{(-5)^3}=-5$ 답 -5

0027 $\sqrt[4]{(-2)^4}=\sqrt[4]{2^4}=2$ 답 2

0028 $\sqrt[4]{0.0016}=\sqrt[4]{0.2^4}=0.2$ 답 0.2

0029 $\sqrt[5]{-1}=\sqrt[5]{(-1)^5}=-1$ 답 -1

0030 $\sqrt[6]{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^6}=\sqrt[6]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^6}=\dfrac{2}{3}$ 답 $\dfrac{2}{3}$

0031 $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2\cdot8}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$ 답 2

0032 $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\dfrac{54}{2}}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$ 답 3

0033 $(\sqrt[4]{9})^2=\sqrt[4]{9^2}=\sqrt[4]{(3^2)^2}=\sqrt[4]{3^4}=3$ 답 3

0034 $\sqrt{\sqrt[5]{1024}}=\sqrt[2\times5]{2^{10}}=2$ 답 2

0035 답 1

0036 $3^{-3}=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}$ 답 $\frac{1}{27}$

0037 $(-5)^{-2}=\frac{1}{(-5)^2}=\frac{1}{25}$ 답 $\frac{1}{25}$

0038 $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}=\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{5^3}{2^3}=\frac{125}{8}$ 답 $\frac{125}{8}$

0039 답 $a^{\frac{1}{3}}$

0040 답 $a^{\frac{2}{5}}$

0041 답 $a^{-\frac{3}{4}}$

0042 $\frac{1}{\sqrt[5]{a^{-4}}}=\frac{1}{a^{-\frac{4}{5}}}=a^{\frac{4}{5}}$ 답 $a^{\frac{4}{5}}$

0043 $a^{\sqrt{2}}\times a^{\sqrt{8}}=a^{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}=a^{3\sqrt{2}}$ 답 $a^{3\sqrt{2}}$

0044 $a^{\frac{1}{6}}\div a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}}=a^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ 답 $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

0045 $(a^{\frac{2}{3}})^6=a^{\frac{2}{3}\times 6}=a^4$ 답 a^4

0046 $(a^{\sqrt{3}}b^{\sqrt{6}})^{\sqrt{3}}=(a^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}\times(b^{\sqrt{6}})^{\sqrt{3}}=a^3b^{3\sqrt{2}}$ 답 $a^3b^{3\sqrt{2}}$

0047 $5^{\frac{1}{6}}\times 25^{-\frac{2}{3}}=5^{\frac{1}{6}}\times(5^2)^{-\frac{2}{3}}=5^{\frac{1}{6}}\times 5^{-\frac{4}{3}}$

$=5^{\frac{1}{6}-\frac{4}{3}}=5^{-\frac{7}{6}}$ 답 $5^{-\frac{7}{6}}$

0048 $\sqrt{27}\div\sqrt[3]{9}=\sqrt{3^3}\div\sqrt[3]{3^2}=3^{\frac{3}{2}}\div 3^{\frac{2}{3}}$

$=3^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}=3^{\frac{5}{6}}$ 답 $3^{\frac{5}{6}}$

0049 $16^{\frac{3}{4}}=(2^4)^{\frac{3}{4}}=2^3=8$ 답 8

0050 $27^{-\frac{1}{3}}=(3^3)^{-\frac{1}{3}}=3^{-1}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0051 $(\sqrt[3]{2}\times\sqrt[4]{2^3})^6=(2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{3}{4}})^6=(2^{\frac{13}{12}})^6$

$=2^{\frac{13}{2}}$ 답 $2^{\frac{13}{2}}$

참고 $2^{\frac{13}{2}}=2^6\cdot 2^{\frac{1}{2}}=64\sqrt{2}$

0052 $\left(\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[4]{7^3}}\right)^6=\left(\frac{7^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{3}{4}}}\right)^6=(7^{-\frac{5}{12}})^6=7^{-\frac{5}{2}}$ 답 $7^{-\frac{5}{2}}$

참고 $7^{-\frac{5}{2}}=\frac{1}{7^{\frac{5}{2}}}=\frac{1}{7^2\cdot 7^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{49\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{343}$

0053 $5^{\sqrt{27}}\div 5^{\sqrt{3}}\times 5^{\sqrt{12}}=5^{3\sqrt{3}-\sqrt{3}+2\sqrt{3}}=5^{4\sqrt{3}}$ 답 $5^{4\sqrt{3}}$

0054 $(7^{\sqrt{2}}\div 7^{-\sqrt{8}}\times 7^3)^{\frac{1}{3}}=\{7^{\sqrt{2}-(-2\sqrt{2})+3}\}^{\frac{1}{3}}$

$=7^{(3\sqrt{2}+3)\times\frac{1}{3}}=7^{\sqrt{2}+1}$ 답 $7^{\sqrt{2}+1}$

0055 ① 15의 세제곱근은 3개이다.
② -1의 세제곱근 중 실수인 것은 1개이다.
③ 4의 네제곱근은 $x^4=4$의 근이므로

$x^4-4=0,\quad (x^2+2)(x^2-2)=0$

$(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$

$\therefore x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$

따라서 4의 네제곱근은 $-\sqrt{2}i$, $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$이다.
⑤ n이 짝수일 때, -4의 n제곱근 중 실수인 것은 없다.

답 ④

0056 ㄴ. -32의 네제곱근 중 실수인 것은 없다.
ㄷ. 81의 네제곱근은 $x^4=81$의 근이므로

$x^4-81=0,\quad (x^2+9)(x^2-9)=0$

$(x+3i)(x-3i)(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=\pm 3i$ 또는 $x=\pm 3$

따라서 81의 네제곱근은 $-3i$, $3i$, -3, 3이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0057 -5의 세제곱근 중 실수인 것은 1개이고, 3의 네제곱근 중 실수인 것은 2개이므로

$m=1,\ n=2$

$\therefore m+n=3$ 답 3

0058 (i) n이 홀수일 때,

$R(x, n)=1$ ··· ❶

(ii) n이 짝수일 때,

$x>0$이면 $R(x, n)=2$

$x=0$이면 $R(x, n)=1$

$x<0$이면 $R(x, n)=0$ ··· ❷

(i), (ii)에서

$R(-6, 3)+R(6, 3)+R(-6, 6)+R(6, 6)$

$=1+1+0+2=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ n이 홀수일 때 $R(x, n)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ n이 짝수일 때 $R(x, n)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 답을 구할 수 있다.	20 %

0059 ① $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^3}\times\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{3^5}$
② $\sqrt[3]{-\sqrt{64}}=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$
③ $\sqrt{\sqrt[5]{16}}=\sqrt[10]{2^4}=\sqrt[5]{2^2}=\sqrt[5]{4}$
④ $\frac{\sqrt[3]{256}}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{\frac{256}{4}}=\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$
⑤ $\left(\sqrt{5}\times\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^6=(\sqrt{5})^6\times\frac{1}{(\sqrt[3]{5})^6}=\sqrt{5^6}\times\frac{1}{\sqrt[3]{5^6}}$

$=\sqrt{(5^3)^2}\times\frac{1}{\sqrt[3]{(5^2)^3}}$

$=5^3\times\frac{1}{5^2}=5$ 답 ⑤

0060 $\sqrt{\frac{9^{10}+27^{10}}{9^7+27^8}}=\sqrt{\frac{(3^2)^{10}+(3^3)^{10}}{(3^2)^7+(3^3)^8}}=\sqrt{\frac{3^{20}+3^{30}}{3^{14}+3^{24}}}$

$=\sqrt{\frac{3^{20}(1+3^{10})}{3^{14}(1+3^{10})}}=\sqrt{\frac{3^{20}}{3^{14}}}$

$=\sqrt{3^6}=3^3=27$ 답 27

0061 $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{16}}{\sqrt[6]{16}}}\times\sqrt{\frac{\sqrt[3]{16}}{16}}=\frac{\sqrt[4]{\sqrt{16}}}{\sqrt[4]{\sqrt[6]{16}}}\times\frac{\sqrt{\sqrt[3]{16}}}{\sqrt{16}}$

$=\frac{\sqrt[8]{2^4}}{\sqrt[24]{2^4}}\times\frac{\sqrt[6]{2^4}}{\sqrt{2^4}}=\frac{\sqrt[24]{2^{12}}}{\sqrt[24]{2^4}}\times\frac{\sqrt[24]{2^{16}}}{2^2}$

$=\frac{1}{2^2}\times\sqrt[24]{\frac{2^{12}\times2^{16}}{2^4}}=\frac{1}{4}\times\sqrt[24]{2^{24}}$

$=\frac{1}{4}\times2$

$=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

다른풀이 $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{16}}{\sqrt[6]{16}}}\times\sqrt{\frac{\sqrt[3]{16}}{16}}=\frac{\sqrt[8]{16}}{\sqrt[24]{16}}\times\frac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt{16}}$

$=\frac{16^{\frac{1}{8}}}{16^{\frac{1}{24}}}\times\frac{16^{\frac{1}{6}}}{16^{\frac{1}{2}}}$

$=16^{\frac{1}{8}+\frac{1}{6}-\frac{1}{24}-\frac{1}{2}}=(2^4)^{-\frac{1}{4}}$

$=2^{-1}=\frac{1}{2}$

0062 $\sqrt{ab^2}\div\sqrt[6]{a^4b^5}\times\sqrt[12]{a^8b^5}=\sqrt[12]{a^6b^{12}}\div\sqrt[12]{a^8b^{10}}\times\sqrt[12]{a^8b^5}$

$=\sqrt[12]{a^6b^7}$

따라서 $n=12$, $p=6$, $q=7$이므로

$n+p+q=25$ 답 ⑤

0063 $\sqrt[3]{8a^2b}\times\sqrt[9]{a^3b^6}=\sqrt[3]{8a^2b}\times\sqrt[3]{ab^2}$

$=\sqrt[3]{2^3a^3b^3}=2ab$ 답 $2ab$

0064 $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}}\times\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}}\times\sqrt[4]{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}}=\frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{\sqrt[4]{x}}}\times\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}}{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}\times\frac{\sqrt[4]{\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}}$

$=\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[8]{x}}\times\frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[6]{x}}\times\frac{\sqrt[8]{x}}{\sqrt[12]{x}}$

$=1$ 답 1

0065 $3^{-2}\div(9^{-4}\div3^{-5})^{-3}=3^{-2}\div\{(3^2)^{-4}\div3^{-5}\}^{-3}$

$=3^{-2}\div(3^{-8}\div3^{-5})^{-3}$

$=3^{-2}\div(3^{-3})^{-3}$

$=3^{-2}\div3^9$

$=3^{-11}$ 답 ②

0066 ① $-2^{-1}=-\frac{1}{2}$ ② $2^{-2}=\frac{1}{4}$

③ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=2^3=8$ ④ $(-3)^{-2}=\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

⑤ $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}=(-3)^3=-27$

따라서 두 번째로 큰 것은 ②이다. 답 ②

0067 $\frac{7^{10}+7^{20}}{7^{-10}+7^{-20}}=\frac{7^{10}(1+7^{10})}{7^{-20}(7^{10}+1)}=\frac{7^{10}}{7^{-20}}=7^{10-(-20)}=7^{30}$

$\therefore k=30$ 답 30

라쎈 특강

밑이 같은 두 수의 합 또는 차는 지수가 작은 수로 묶어서 계산한다.

예 $2^5-2^3=2^3(2^2-1)=3\times2^3$

$3^{-10}+3^{-9}=3^{-10}(1+3)=4\times3^{-10}$

0068 $\frac{5^{-5}+25^{-2}}{6}\times\frac{4}{3^5+9^3}=\frac{5^{-5}+(5^2)^{-2}}{6}\times\frac{4}{3^5+(3^2)^3}$

$=\frac{5^{-5}+5^{-4}}{6}\times\frac{4}{3^5+3^6}$

$=\frac{5^{-5}(1+5)}{6}\times\frac{4}{3^5(1+3)}$

$=5^{-5}\times3^{-5}=(5\times3)^{-5}$

$=15^{-5}$ 답 ①

0069 $\frac{1}{3^{-3}+1}+\frac{1}{3^{-1}+1}+\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^3+1}$

$=\frac{3^3}{3^3(3^{-3}+1)}+\frac{3}{3(3^{-1}+1)}+\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^3+1}$

$=\frac{3^3}{1+3^3}+\frac{3}{1+3}+\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^3+1}$

$=\frac{3^3+1}{3^3+1}+\frac{3+1}{3+1}=2$ 답 ②

0070 $3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}=3\times\sqrt{3}\times\sqrt[4]{3}\times\sqrt[8]{3}$

$=3\times3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{4}}\times3^{\frac{1}{8}}=3^{\frac{15}{8}}$

$\therefore k=\frac{15}{8}$ 답 ④

0071 $\sqrt{a\sqrt[6]{a^k}}=\sqrt{a}\times\sqrt[12]{a^k}=a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{k}{12}}=a^{\frac{6+k}{12}}$

$a^{\frac{6+k}{12}}=a^3$에서 $\frac{6+k}{12}=3$

$6+k=36$ $\therefore k=30$ 답 ⑤

0072 $\sqrt[4]{a\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt[4]{a}\times\sqrt[8]{a}\times\sqrt[12]{a^2}=a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{8}}\times a^{\frac{1}{6}}$

$=a^{\frac{13}{24}}$ …… ㉠ ⋯ ❶

$\sqrt[12]{a^m\sqrt{a}}=\sqrt[12]{a^m}\times\sqrt[24]{a}=a^{\frac{m}{12}}\times a^{\frac{1}{24}}=a^{\frac{2m+1}{24}}$ …… ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡에서 $\frac{13}{24}=\frac{2m+1}{24}$이므로 $13=2m+1$

$\therefore m=6$ ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 좌변을 지수가 유리수인 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 우변을 지수가 유리수인 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ m의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른풀이 $\sqrt[4]{a\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt[12]{a^m\sqrt{a}}$의 양변을 12제곱하면

$(a\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2})^3=a^m\sqrt{a}$, $a^3\times(\sqrt{a})^3\times a^2=a^m\sqrt{a}$

$a^3\times a\sqrt{a}\times a^2=a^m\sqrt{a}$, $a^6\sqrt{a}=a^m\sqrt{a}$

$\therefore m=6$

0073 이차방정식 $2x^2-4x-9=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-\frac{9}{2}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3^\alpha}\times\sqrt{3^\beta}}{(9^\alpha)^\beta}=\frac{3^{\frac{\alpha}{2}}\times 3^{\frac{\beta}{2}}}{9^{\alpha\beta}}=\frac{3^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}{3^{2\alpha\beta}}=3^{\frac{\alpha+\beta}{2}-2\alpha\beta}=3^{\frac{2}{2}-2\times\left(-\frac{9}{2}\right)}$$

$$=3^{10}$$

답 3^{10}

0074 $2^5=a$에서 $\quad 2=a^{\frac{1}{5}}$

$3^2=b$에서 $\quad 3=b^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore 6^{10}=(2\times3)^{10}=2^{10}\times3^{10}$$

$$=(a^{\frac{1}{5}})^{10}\times(b^{\frac{1}{2}})^{10}=a^2b^5$$

답 ②

0075 $a=\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$에서 $\quad a^3=2$

$b=\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$에서 $\quad b^2=3$ ⋯ ❶

$$\therefore \sqrt[6]{12}=(2^2\times3)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{6}}$$

$$=(a^3)^{\frac{1}{3}}\times(b^2)^{\frac{1}{6}}=ab^{\frac{1}{3}}$$ ⋯ ❷

따라서 $m=1$, $n=\frac{1}{3}$이므로 $\quad m+n=\frac{4}{3}$ ⋯ ❸

답 $\frac{4}{3}$

채점 기준	비율
❶ 2, 3을 각각 a, b의 거듭제곱으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $\sqrt[6]{12}$를 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0076 $a^3=2$, $b^4=5$, $c^5=7$에서

$$a=2^{\frac{1}{3}},\ b=5^{\frac{1}{4}},\ c=7^{\frac{1}{5}}$$

이므로 $\quad (abc)^n=(2^{\frac{1}{3}}\times5^{\frac{1}{4}}\times7^{\frac{1}{5}})^n=2^{\frac{n}{3}}\times5^{\frac{n}{4}}\times7^{\frac{n}{5}}$

이때 $(abc)^n$이 자연수가 되려면 자연수 n은 3, 4, 5의 공배수이어야 한다.

따라서 자연수 n의 최솟값은 3, 4, 5의 최소공배수인 60이다.

답 60

0077 $$\left\{\left(\frac{4}{49}\right)^{\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}}\times\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{5}{2}}\right\}^{-\frac{4}{5}}=\left(\frac{4}{49}\right)^{\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{5}{2}\times\left(-\frac{4}{5}\right)}$$

$$=\left(\frac{4}{49}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$$

$$=\left\{\left(\frac{2}{7}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\times(2^{-2})^{-2}$$

$$=\frac{2}{7}\times2^4=\frac{32}{7}$$

답 $\frac{32}{7}$

0078 $$(2^{\frac{1}{2}}\times5^{-\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{2}}\times2^{-\frac{3}{4}}\times5^{\frac{4}{3}}=2^{-\frac{1}{4}}\times5^{\frac{1}{6}}\times2^{-\frac{3}{4}}\times5^{\frac{4}{3}}$$

$$=2^{-1}\times5^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{5\sqrt{5}}{2}$$

답 ⑤

0079 ㄱ. $2^{\frac{1}{4}}\times2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{11}{12}}=\sqrt[12]{2^{11}}$

ㄴ. $(4^{-2})^{\frac{1}{4}}=4^{-\frac{1}{2}}=(2^2)^{-\frac{1}{2}}=2^{-1}=\frac{1}{2}$

ㄷ. $\{(-3)^2\}^{\frac{3}{2}}=(3^2)^{\frac{3}{2}}=3^3=27$

ㄹ. $(\sqrt{3})^{6\sqrt{2}}=(3^{\frac{1}{2}})^{6\sqrt{2}}=3^{3\sqrt{2}}$, $(3\sqrt{3})^{2\sqrt{2}}=(3^{\frac{3}{2}})^{2\sqrt{2}}=3^{3\sqrt{2}}$이므로

$(\sqrt{3})^{6\sqrt{2}}=(3\sqrt{3})^{2\sqrt{2}}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

주의 ㄷ. $\{(-3)^2\}^{\frac{3}{2}}$에서 밑이 음수이므로 지수법칙을 이용할 수 없다. 따라서 $\{(-3)^2\}^{\frac{3}{2}}=(-3)^{2\times\frac{3}{2}}=(-3)^3=-27$

과 같이 계산하지 않도록 유의한다.

0080 $$(\sqrt{a})^{\frac{3}{2}}\div(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{4}}\times(a^{\frac{1}{6}})^k$$

$$=(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}\div(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{4}}\times(a^{\frac{1}{6}})^k$$

$$=a^{\frac{3}{4}}\div a^{\frac{5}{6}}\times a^{\frac{k}{6}}=a^{\frac{2k-1}{12}}$$ ⋯ ❶

$a^{\frac{2k-1}{12}}=a^{\frac{1}{24}}$에서 $\quad \frac{2k-1}{12}=\frac{1}{24}$, $\quad 2k-1=\frac{1}{2}$

$2k=\frac{3}{2}$ $\quad \therefore k=\frac{3}{4}$ ⋯ ❷

답 $\frac{3}{4}$

채점 기준	비율
❶ 등식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	60 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40 %

0081 $$\left(\frac{1}{3^{15}}\right)^{\frac{1}{n}}=(3^{-15})^{\frac{1}{n}}=3^{-\frac{15}{n}}$$

이때 $3^{-\frac{15}{n}}$이 자연수가 되려면 $-\frac{15}{n}$가 음이 아닌 정수이어야 한다.

따라서 정수 n은 -1, -3, -5, -15의 4개이다.

답 ③

0082 $$(a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})^3+(a^{\frac{2}{3}}-a^{-\frac{1}{3}})^3$$

$$=(a^{\frac{2}{3}})^3+3\times(a^{\frac{2}{3}})^2\times a^{-\frac{1}{3}}+3\times a^{\frac{2}{3}}\times(a^{-\frac{1}{3}})^2+(a^{-\frac{1}{3}})^3$$

$$+(a^{\frac{2}{3}})^3-3\times(a^{\frac{2}{3}})^2\times a^{-\frac{1}{3}}+3\times a^{\frac{2}{3}}\times(a^{-\frac{1}{3}})^2-(a^{-\frac{1}{3}})^3$$

$$=a^2+3a+3+a^{-1}+a^2-3a+3-a^{-1}$$

$$=2(a^2+3)$$

답 $2(a^2+3)$

0083 $$(3^{\frac{1}{2}}-3^{-\frac{1}{2}})^2+(3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}})(3^{\frac{1}{2}}-3^{-\frac{1}{2}})$$

$$=(3^{\frac{1}{2}})^2-2\times3^{\frac{1}{2}}\times3^{-\frac{1}{2}}+(3^{-\frac{1}{2}})^2+(3^{\frac{1}{2}})^2-(3^{-\frac{1}{2}})^2$$

$$=3-2+3^{-1}+3-3^{-1}$$

$$=4$$

답 ④

0084 $$\frac{1}{1-5^{\frac{1}{8}}}+\frac{1}{1+5^{\frac{1}{8}}}+\frac{2}{1+5^{\frac{1}{4}}}+\frac{4}{1+5^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{1+5^{\frac{1}{8}}+1-5^{\frac{1}{8}}}{(1-5^{\frac{1}{8}})(1+5^{\frac{1}{8}})}+\frac{2}{1+5^{\frac{1}{4}}}+\frac{4}{1+5^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{2}{1-5^{\frac{1}{4}}}+\frac{2}{1+5^{\frac{1}{4}}}+\frac{4}{1+5^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{2(1+5^{\frac{1}{4}})+2(1-5^{\frac{1}{4}})}{(1-5^{\frac{1}{4}})(1+5^{\frac{1}{4}})}+\frac{4}{1+5^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{4}{1-5^{\frac{1}{2}}}+\frac{4}{1+5^{\frac{1}{2}}}=\frac{4(1+5^{\frac{1}{2}})+4(1-5^{\frac{1}{2}})}{(1-5^{\frac{1}{2}})(1+5^{\frac{1}{2}})}$$

$$=\frac{8}{1-5}=-2$$

답 ①

0085 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로

$13=15+2(ab+bc+ca)$ $\quad\therefore ab+bc+ca=-1$

$\therefore (3^a)^{b+c}\times(3^b)^{c+a}\times(3^c)^{a+b}=3^{ab+ac}\times3^{bc+ba}\times3^{ca+cb}$

$=3^{2(ab+bc+ca)}$

$=3^{-2}=\dfrac{1}{9}$ 답 $\dfrac{1}{9}$

0086 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$의 양변을 제곱하면

$x+x^{-1}+2=5$ $\quad\therefore x+x^{-1}=3$

위의 식의 양변을 제곱하면

$x^2+x^{-2}+2=9$ $\quad\therefore x^2+x^{-2}=7$ 답 7

0087 $2^x-2^{-x}=3$의 양변을 제곱하면

$2^{2x}+2^{-2x}-2=9$ $\quad\therefore 4^x+4^{-x}=11$ 답 ③

0088 $(x+x^{-1})^2=x^2+x^{-2}+2=14+2=16$이므로

$x+x^{-1}=4$ $(\because x+x^{-1}>0)$ ⋯ ❶

또 $(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+x^{-1}+2=4+2=6$이므로

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$ $(\because x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}>0)$ ⋯ ❷

$\therefore \dfrac{x+x^{-1}}{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}}=\dfrac{4}{\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ ⋯ ❸

답 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

채점 기준	비율
❶ $x+x^{-1}$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\dfrac{x+x^{-1}}{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0089 $x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}=1+\sqrt{2}$의 양변을 세제곱하면

$x-x^{-1}-3(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}})=(1+\sqrt{2})^3$

$\therefore x-x^{-1}=(1+\sqrt{2})^3+3(1+\sqrt{2})$

$=7+5\sqrt{2}+3+3\sqrt{2}=10+8\sqrt{2}$

따라서 $a=10$, $b=8$이므로 $\quad a-b=2$ 답 2

0090 $\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$의 분모, 분자에 2^x을 곱하면

$\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\dfrac{2^x(2^x-2^{-x})}{2^x(2^x+2^{-x})}=\dfrac{2^{2x}-1}{2^{2x}+1}=\dfrac{4^x-1}{4^x+1}$

$=\dfrac{5-1}{5+1}=\dfrac{2}{3}$ 답 ②

다른풀이 $\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\dfrac{2^{-x}(2^{2x}-1)}{2^{-x}(2^{2x}+1)}=\dfrac{4^x-1}{4^x+1}=\dfrac{5-1}{5+1}=\dfrac{2}{3}$

0091 $\dfrac{5^x+5^{-x}}{5^x-5^{-x}}$의 분모, 분자에 5^x을 곱하면

$\dfrac{5^x+5^{-x}}{5^x-5^{-x}}=\dfrac{5^x(5^x+5^{-x})}{5^x(5^x-5^{-x})}=\dfrac{5^{2x}+1}{5^{2x}-1}=\dfrac{25^x+1}{25^x-1}$ ⋯ ❶

$\dfrac{25^x+1}{25^x-1}=5$이므로 $\quad 25^x+1=5(25^x-1)$

$25^x+1=5\times25^x-5$, $\quad 4\times25^x=6$

$\therefore 25^x=\dfrac{3}{2}$ ⋯ ❷

$\therefore 25^x-25^{-x}=25^x-\dfrac{1}{25^x}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{6}$ ⋯ ❸

답 $\dfrac{5}{6}$

채점 기준	비율
❶ 등식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	30 %
❷ 25^x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 25^x-25^{-x}의 값을 구할 수 있다.	30 %

0092 $2^{\frac{1}{x}}=a$에서 $\quad a^x=2$

$\dfrac{a^{2x}+a^{-2x}}{a^{2x}-a^{-2x}}$의 분모, 분자에 a^{2x}을 곱하면

$\dfrac{a^{2x}+a^{-2x}}{a^{2x}-a^{-2x}}=\dfrac{a^{2x}(a^{2x}+a^{-2x})}{a^{2x}(a^{2x}-a^{-2x})}=\dfrac{a^{4x}+1}{a^{4x}-1}$

$=\dfrac{(a^x)^4+1}{(a^x)^4-1}=\dfrac{2^4+1}{2^4-1}=\dfrac{17}{15}$ 답 $\dfrac{17}{15}$

0093 $4^x=3$에서 $\quad 2^{2x}=3$

$\dfrac{8^x+8^{-x}}{2^x+2^{-x}}$의 분모, 분자에 $8^x=2^{3x}$을 곱하면

$\dfrac{8^x+8^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\dfrac{2^{3x}(2^{3x}+2^{-3x})}{2^{3x}(2^x+2^{-x})}=\dfrac{2^{6x}+1}{2^{4x}+2^{2x}}$

$=\dfrac{(2^{2x})^3+1}{(2^{2x})^2+2^{2x}}=\dfrac{3^3+1}{3^2+3}=\dfrac{7}{3}$

따라서 $a=3$, $b=7$이므로 $\quad a+b=10$ 답 ④

다른풀이 $\dfrac{8^x+8^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\dfrac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}=\dfrac{(2^x+2^{-x})(2^{2x}+2^{-2x}-1)}{2^x+2^{-x}}$

$=2^{2x}+2^{-2x}-1=3+\dfrac{1}{3}-1=\dfrac{7}{3}$

따라서 $a=3$, $b=7$이므로 $\quad a+b=10$

0094 $3^x=6$에서 $\quad 3=6^{\frac{1}{x}}$ ⋯⋯ ㉠

$2^y=6$에서 $\quad 2=6^{\frac{1}{y}}$ ⋯⋯ ㉡

㉠×㉡을 하면 $\quad 6=6^{\frac{1}{x}}\times6^{\frac{1}{y}}=6^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$ 답 1

0095 $17^m=8$에서 $\quad 17=8^{\frac{1}{m}}=(2^3)^{\frac{1}{m}}=2^{\frac{3}{m}}$ ⋯⋯ ㉠

$136^n=16$에서 $\quad 136=16^{\frac{1}{n}}=(2^4)^{\frac{1}{n}}=2^{\frac{4}{n}}$ ⋯⋯ ㉡

㉠÷㉡을 하면

$\dfrac{17}{136}=2^{\frac{3}{m}}\div2^{\frac{4}{n}}$ $\quad\therefore 2^{\frac{3}{m}-\frac{4}{n}}=\dfrac{1}{8}=2^{-3}$

$\therefore \dfrac{3}{m}-\dfrac{4}{n}=-3$ 답 ①

0096 $3^x=a$에서 $\quad 3=a^{\frac{1}{x}}$ ⋯⋯ ㉠

$5^y=a$에서 $\quad 5=a^{\frac{1}{y}}$ ⋯⋯ ㉡

$15^z=a$에서 $\quad 15=a^{\frac{1}{z}}$ ⋯⋯ ㉢ ⋯ ❶

㉠×㉡×㉢을 하면

$3\times5\times15=a^{\frac{1}{x}}\times a^{\frac{1}{y}}\times a^{\frac{1}{z}}$ ⋯ ❷

$a^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=15^2$, $\quad a^2=15^2$

$\therefore\ a=15\ (\because\ a>0)$ ⋯ ❸

답 15

채점 기준	비율
❶ 3, 5, 15를 각각 a, x, y, z에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $3\times5\times15$를 a, x, y, z에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

0097 $2^x=k^z$에서 $\quad 2=k^{\frac{z}{x}}$ ⋯⋯ ㉠

$7^y=k^z$에서 $\quad 7=k^{\frac{z}{y}}$ ⋯⋯ ㉡

㉠×㉡을 하면 $\quad 14=k^{\frac{z}{x}}\times k^{\frac{z}{y}}$

이때 $2xy=yz+zx$이므로

$$k^{\frac{z}{x}}\times k^{\frac{z}{y}}=k^{\frac{z}{x}+\frac{z}{y}}=k^{\frac{yz+zx}{xy}}=k^{\frac{2xy}{xy}}=k^2$$

따라서 $k^2=14$이므로 $\quad k=\sqrt{14}\ (\because\ k>0)$ 답 ③

0098 $a^x=7$에서 $\quad a=7^{\frac{1}{x}}$

$(ab)^y=7^2$에서 $\quad ab=7^{\frac{2}{y}}$

$(abc)^z=7^3$에서 $\quad abc=7^{\frac{3}{z}}$

$$\therefore\ 7^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{6}{z}}=7^{\frac{1}{x}}\times7^{\frac{2}{y}}\div(7^{\frac{3}{z}})^2=a\times ab\div(abc)^2$$

$$=\frac{a\times ab}{a^2b^2c^2}=\frac{1}{bc^2}$$

답 $\frac{1}{bc^2}$

0099 $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[6]{6}=6^{\frac{1}{6}}$이므로 각 수를 여섯제곱하면

$(2^{\frac{1}{2}})^6=2^3=8$, $(3^{\frac{1}{3}})^6=3^2=9$, $(6^{\frac{1}{6}})^6=6$

즉 $(6^{\frac{1}{6}})^6<(2^{\frac{1}{2}})^6<(3^{\frac{1}{3}})^6$이므로 $\quad \sqrt[6]{6}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$ 답 ④

다른풀이 2, 3, 6의 최소공배수가 6이므로

$\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{9}$

$\sqrt[6]{6}<\sqrt[6]{8}<\sqrt[6]{9}$이므로 $\quad \sqrt[6]{6}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

0100 $\sqrt{\sqrt[3]{30}}=\sqrt[6]{30}$, $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}=\sqrt{\sqrt[3]{2^3\times3}}=\sqrt[6]{24}$,

$\sqrt[3]{4\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\sqrt{4^2\times5}}=\sqrt[6]{80}$에서 $\quad \sqrt[6]{24}<\sqrt[6]{30}<\sqrt[6]{80}$

따라서 가장 작은 수는 $\sqrt[6]{24}$, 즉 $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$이다. 답 $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$

0101 (i) $A-B=(\sqrt[3]{3}-2\sqrt{2})-(2\sqrt[3]{3}-3\sqrt{2})$

$\qquad=\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{8}-\sqrt[6]{9}<0$

$\quad\therefore\ A<B$

(ii) $C-A=(2\sqrt{2}-3\sqrt[3]{3})-(\sqrt[3]{3}-2\sqrt{2})$

$\qquad=4\sqrt{2}-4\sqrt[3]{3}=4(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3})<0$

$\quad\therefore\ C<A$

(i), (ii)에서 $\quad C<A<B$ ⋯ ❶

따라서 가장 작은 수는 $2\sqrt{2}-3\sqrt[3]{3}$, 가장 큰 수는 $2\sqrt[3]{3}-3\sqrt{2}$이므로

$(2\sqrt{2}-3\sqrt[3]{3})+(2\sqrt[3]{3}-3\sqrt{2})=-\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}$ ⋯ ❷

즉 $a=-1$, $b=-1$이므로 $\quad ab=1$ ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ A, B, C의 대소를 비교할 수 있다.	60 %
❷ 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합을 구할 수 있다.	30 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0102 A지역에서

$H_1=6$, $H_2=24$, $V_1=3$, $V_2=9$

이므로 $\quad 9=3\times\left(\frac{24}{6}\right)^{\frac{2}{2-k}}$

$\therefore\ 4^{\frac{2}{2-k}}=3$ ⋯⋯ ㉠

B지역에서

$H_1=5$, $H_2=80$, $V_1=a$, $V_2=b$

이므로 $\quad b=a\times\left(\frac{80}{5}\right)^{\frac{2}{2-k}}$

$\therefore\ \frac{b}{a}=16^{\frac{2}{2-k}}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad \frac{b}{a}=(4^2)^{\frac{2}{2-k}}=(4^{\frac{2}{2-k}})^2=3^2=9$ 답 ④

0103 $t=10$, $w=5$일 때,

$Q_A=0.01\times10^{1.25}\times5^{0.25}$

$Q_B=0.05\times10^{0.75}\times5^{0.30}$

$$\therefore\ \frac{Q_A}{Q_B}=\frac{0.01\times10^{1.25}\times5^{0.25}}{0.05\times10^{0.75}\times5^{0.30}}=\frac{10^{0.5}}{5\times5^{0.05}}$$

$$=\frac{(2\times5)^{0.5}}{5^{1.05}}=2^{0.5}\times5^{0.5-1.05}$$

$$=2^{0.5}\times5^{-0.55}$$

따라서 $a=0.5$, $b=-0.55$이므로

$a+b=-0.05$ 답 -0.05

0104 전략 n이 짝수일 때, 양수 a의 n제곱근 중 양수인 것은 $\sqrt[n]{a}$이다.

풀이 4의 제곱근 중 양수인 것은 $\quad \sqrt{4}=2 \quad \therefore\ a=2$

세제곱근 27은 $\quad \sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3 \quad \therefore\ b=3$

$\therefore\ a+b=5$ 답 5

0105 전략 $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 $\sqrt{\sqrt[3]{a}}\times\sqrt[6]{a^7}=\sqrt[6]{a}\times\sqrt[6]{a^7}=\sqrt[6]{a^8}=\sqrt[3]{a^4}$

$\therefore\ n=4$ 답 ②

0106 전략 a를 2의 거듭제곱으로 나타낸 후 $p^x=q$이면 $p=q^{\frac{1}{x}}$임을 이용한다.

풀이 $a=16^3=(2^4)^3=2^{12}$이므로 $\quad 2=a^{\frac{1}{12}}$

$\therefore\ 32^9=(2^5)^9=2^{45}=(a^{\frac{1}{12}})^{45}=a^{\frac{15}{4}}$

$\therefore\ k=\frac{15}{4}$ 답 ④

0107 전략 지수가 유리수일 때, 밑이 양수이어야 지수법칙이 성립함을 이용한다.

풀이 ③ $\{(-5)^2\}^{\frac{1}{2}}$에서 밑이 음수이므로 지수법칙을 이용할 수 없다. 답 ③

0108 전략 $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$임을 이용한다.

풀이 $3^x+3^{-x}=3$의 양변을 세제곱하면

$3^{3x}+3^{-3x}+3(3^x+3^{-x})=27$

$27^x+27^{-x}+3\times3=27$

$\therefore\ 27^x+27^{-x}=27-9=18$ 답 18

0109 전략 $a^x=k$이면 $a=k^{\frac{1}{x}}$임을 이용하여 밑을 통일한다.

풀이 $\left(\frac{1}{5}\right)^x=16$에서

$$\frac{1}{5}=16^{\frac{1}{x}}=(2^4)^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{4}{x}} \quad \cdots ❶$$

$15^y=64$에서

$$15=64^{\frac{1}{y}}=(2^6)^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{6}{y}} \quad \cdots ❷$$

$$\therefore 4^{\frac{2}{x}+\frac{3}{y}}=(2^2)^{\frac{2}{x}+\frac{3}{y}}=2^{\frac{4}{x}+\frac{6}{y}}$$
$$=2^{\frac{4}{x}}\times 2^{\frac{6}{y}}$$
$$=\frac{1}{5}\times 15=3 \quad \cdots ❸$$

답 3

채점 기준	비율
❶ $\frac{1}{5}$을 2^r(r는 유리수) 꼴로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 15를 2^r(r는 유리수) 꼴로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ $4^{\frac{2}{x}+\frac{3}{y}}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0110 전략 2 이상의 자연수 n에 대하여 n이 짝수일 때 양수 a의 제곱근은 2개, 음수 a의 제곱근은 0개이고, n이 홀수일 때 양수 a의 제곱근은 1개, 음수 a의 제곱근은 1개이다.

풀이 -3의 제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않으므로

$f_2(-3)=0$

-2의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-2}$의 1개이므로

$f_3(-2)=1$

5의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt[4]{5}$의 2개이므로

$f_4(5)=2$

$\therefore f_2(-3)+f_3(-2)+f_4(5)=3$

답 ③

0111 전략 거듭제곱근의 성질을 이용한다.

풀이 ① $\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3}=\sqrt[6]{2^2}\times\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{2^2\times 3^3}=\sqrt[6]{108}$

② $\sqrt[4]{\sqrt[3]{(-2)^{12}}}=\sqrt[12]{2^{12}}=2$

③ $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\sqrt{27}}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt{3}$

④ $\dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\dfrac{81}{9\times 3}}=\sqrt[3]{3}$

⑤ $\sqrt{\dfrac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[4]{7}}}\times\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt[3]{5}}}=\dfrac{\sqrt[12]{5}}{\sqrt[8]{7}}\times\dfrac{\sqrt[8]{7}}{\sqrt[12]{5}}=1$

답 ⑤

0112 전략 분모, 분자에 적당한 식을 곱한다.

풀이 $\dfrac{1}{a^{-4}-1}+\dfrac{1}{a^{-2}-1}+\dfrac{1}{a^2-1}+\dfrac{1}{a^4-1}$

$=\dfrac{a^4}{a^4(a^{-4}-1)}+\dfrac{a^2}{a^2(a^{-2}-1)}+\dfrac{1}{a^2-1}+\dfrac{1}{a^4-1}$

$=\dfrac{a^4}{1-a^4}+\dfrac{a^2}{1-a^2}+\dfrac{1}{a^2-1}+\dfrac{1}{a^4-1}$

$=\dfrac{1-a^4}{a^4-1}+\dfrac{1-a^2}{a^2-1}$

$=\dfrac{-(a^4-1)}{a^4-1}+\dfrac{-(a^2-1)}{a^2-1}$

$=-1-1=-2$

답 -2

0113 전략 $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$임을 이용하여 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\sqrt[4]{\sqrt{2}}\times\sqrt{2\sqrt{2\sqrt[4]{2}}}=\sqrt[8]{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt[16]{2}$

$=2^{\frac{1}{8}}\times 2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{1}{16}}$

$=2^{\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}$

$=2^{\frac{15}{16}}$

답 ⑤

0114 전략 거듭제곱근을 지수가 유리수인 꼴로 나타낸 후 정수가 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구한다.

풀이 $\sqrt[3]{4^n}=4^{\frac{n}{3}}=2^{\frac{2n}{3}}$이 정수가 되려면 $\dfrac{2n}{3}$이 음이 아닌 정수이어야 한다.

따라서 n은 100 이하의 3의 배수이어야 하므로 n은 3, 6, 9, $\cdots$, 99의 33개이다.

답 33

0115 전략 $a>0$, $b>0$이고 r, s가 유리수일 때, $(a^r+b^s)(a^r-b^s)=a^{2r}-b^{2s}$임을 이용한다.

풀이 $\left(\sqrt[4]{3}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)\left(\sqrt[4]{3}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)\left(\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(3+\dfrac{1}{3}\right)$

$=(3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}})(3^{\frac{1}{4}}+3^{-\frac{1}{4}})(3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}})(3+3^{-1})$

$=(3^{\frac{1}{2}}-3^{-\frac{1}{2}})(3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}})(3+3^{-1})$

$=(3-3^{-1})(3+3^{-1})$

$=3^2-3^{-2}=9-\dfrac{1}{9}$

$=\dfrac{80}{9}$

답 $\dfrac{80}{9}$

0116 전략 먼저 주어진 등식의 양변을 세제곱하여 $x+x^{-1}$의 값을 구한다.

풀이 $x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}=3$의 양변을 세제곱하면

$x+x^{-1}+3(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})=27$

$x+x^{-1}+3\times 3=27$

$\therefore x+x^{-1}=18 \quad \cdots ❶$

$x+x^{-1}=18$의 양변을 제곱하면

$x^2+x^{-2}+2=324$

$\therefore x^2+x^{-2}=322 \quad \cdots ❷$

답 322

채점 기준	비율
❶ $x+x^{-1}$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ x^2+x^{-2}의 값을 구할 수 있다.	50 %

0117 전략 주어진 식의 분모, 분자에 a^{3x}을 곱한다.

풀이 $\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$의 분모, 분자에 a^{3x}을 곱하면

$$\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{a^{3x}(a^{3x}-a^{-3x})}{a^{3x}(a^x+a^{-x})}=\frac{a^{6x}-1}{a^{4x}+a^{2x}}$$
$$=\frac{(a^{2x})^3-1}{(a^{2x})^2+a^{2x}}$$
$$=\frac{5^3-1}{5^2+5}=\frac{62}{15}$$

답 ③

0118 전략 $a^x=b^y=3^z=k\ (k>0)$로 놓고 문자 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $a^x=b^y=3^z=k\ (k>0)$로 놓으면

$a^x=k$에서 $\quad a=k^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$b^y=k$에서 $\quad b=k^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

$3^z=k$에서 $\quad 3=k^{\frac{1}{z}}$ …… ㉢ ⋯ ❶

㉠×㉡을 하면 $\quad ab=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

㉢의 양변을 제곱하면 $\quad 9=(k^{\frac{1}{z}})^2=k^{\frac{2}{z}}$ ⋯ ❷

이때 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{z}$이므로 $\quad k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=k^{\frac{2}{z}}$

$\therefore ab=9$ ⋯ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ a, b, 3을 k^r(r는 유리수) 꼴로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ ab, 9를 k^r(r는 유리수) 꼴로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0119 전략 B, C를 a^r(r는 유리수) 꼴로 변형하여 지수 또는 밑을 통일한다.

풀이 $A=2^{\sqrt{3}}$, $B=\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{3^4}=3^{\frac{4}{3}}$, $C=\sqrt[4]{256}=\sqrt[4]{2^8}=2^2$

A, C에서 $\sqrt{3}<2$이므로 $\quad 2^{\sqrt{3}}<2^2$

$\therefore A<C$

B, C에서

$B^3=(3^{\frac{4}{3}})^3=3^4=81$, $C^3=(2^2)^3=2^6=64$

이므로

$C^3<B^3 \quad \therefore C<B$

$\therefore A<C<B$

답 ②

0120 전략 주어진 식에 값을 대입하여 I_{20}, I_{12}를 구한다.

풀이 $I_{20}=I_0\times 2^{-\frac{20}{4}}=I_0\times 2^{-5}$,

$I_{12}=I_0\times 2^{-\frac{12}{4}}=I_0\times 2^{-3}$이므로

$$\frac{I_{20}}{I_{12}}=\frac{I_0\times 2^{-5}}{I_0\times 2^{-3}}=2^{-2}=\frac{1}{4}$$

따라서 수심이 20 m인 곳에서의 빛의 세기는 수심이 12 m인 곳에서의 빛의 세기의 $\dfrac{1}{4}$배이다.

답 $\dfrac{1}{4}$배

0121 전략 정육면체의 한 모서리의 길이를 x로 놓고 x를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 정육면체의 한 모서리의 길이를 x라 하면 대각선의 길이가 $\sqrt[6]{27a^4}$이므로

$\sqrt{3}x=\sqrt[6]{27a^4}=\sqrt[6]{3^3}\ \sqrt[6]{a^4}=\sqrt{3}\ \sqrt[3]{a^2}$

$\therefore x=\sqrt[3]{a^2}$ …… ㉠

또 부피가 $8a$이므로

$x^3=8a$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(\sqrt[3]{a^2})^3=8a, \quad a^2=8a$

$a(a-8)=0 \quad \therefore a=8\ (\because a>0)$

답 8

0122 전략 기호 $*$의 정의를 이용하여 연산의 결과를 식으로 나타낸 후 지수법칙을 이용한다.

풀이 ㄱ. $a^2 * \dfrac{b}{2}=(a^2)^{\frac{b}{2}}=a^b$

$=a*b$

ㄴ. $a*(-b)=a^{-b}=(a^{-1})^b=\left(\dfrac{1}{a}\right)^b$

$=\dfrac{1}{a}*b$

ㄷ. $a*(b+c)=a^{b+c}=a^b\times a^c$

$=(a*b)\times(a*c)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

0123 전략 밑을 통일한 후 지수법칙을 이용한다.

풀이 $x^y=y^x$에서 $\quad x=y^{\frac{x}{y}}=y^{\frac{3}{4}}$

이때 $\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{4}$에서 $x=\dfrac{3}{4}y$이므로 $\quad \dfrac{3}{4}y=y^{\frac{3}{4}}$

양변을 y로 나누면 $\quad y^{-\frac{1}{4}}=\dfrac{3}{4}$

$\therefore y=(y^{-\frac{1}{4}})^{-4}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-4}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^4=\dfrac{256}{81}$

답 ⑤

0124 전략 조건 ㈏를 이용하여 a, $2b$를 6의 거듭제곱으로 나타낸다.

풀이 조건 ㈏의 $a^{2x}=6$에서 $\quad a=6^{\frac{1}{2x}}$

$\therefore a^3=6^{\frac{3}{2x}}$ …… ㉠

$\dfrac{1}{(2b)^{3y}}=6$에서 $\quad 2b=6^{-\frac{1}{3y}}$

$\therefore (2b)^2=6^{-\frac{2}{3y}}$ …… ㉡

㉠×㉡을 하면

$a^3\times(2b)^2=6^{\frac{3}{2x}}\times 6^{-\frac{2}{3y}}, \quad 6^{\frac{3}{2x}-\frac{2}{3y}}=4a^3b^2$

이때 조건 ㈎에서 $a^3b^2=9$이므로

$6^{\frac{3}{2x}-\frac{2}{3y}}=4\times 9=6^2$

$\therefore \dfrac{3}{2x}-\dfrac{2}{3y}=2$

답 ②

0125 전략 Q, H의 값을 각각 대입하여 S_1, S_2의 값을 구한 후 지수법칙을 이용한다.

풀이 $Q=28$, $H=4$일 때,

$S_1=N\times 28^{\frac{1}{2}}\times 4^{-\frac{3}{4}}$ ⋯ ❶

$Q=14$, $H=8$일 때,

$S_2=N\times 14^{\frac{1}{2}}\times 8^{-\frac{3}{4}}$ ⋯ ❷

$$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{N\times 28^{\frac{1}{2}}\times 4^{-\frac{3}{4}}}{N\times 14^{\frac{1}{2}}\times 8^{-\frac{3}{4}}}=\left(\frac{28}{14}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{4}{8}\right)^{-\frac{3}{4}}$$

$$=2^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}=2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{3}{4}}$$

$$=2^{\frac{5}{4}}$$ ⋯ ❸

답 $2^{\frac{5}{4}}$

채점 기준	비율
❶ S_1의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ S_2의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\dfrac{S_1}{S_2}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

02 로그

Ⅰ. 지수함수와 로그함수

0126 답 밑: 10, 진수: 2

0127 답 밑: 25, 진수: 3

0128 답 밑: $\frac{1}{2}$, 진수: 3

0129 답 밑: $\sqrt{2}$, 진수: $\frac{1}{100}$

0130 답 $5=\log_2 32$

0131 답 $-2=\log_3 \frac{1}{9}$

0132 답 $\frac{1}{2}=\log_{100} 10$

0133 답 $0=\log_7 1$

0134 답 $3^3=27$

0135 답 $9^{\frac{1}{2}}=3$

0136 답 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16$

0137 답 $(\sqrt{5})^2=5$

0138 진수의 조건에서 $x-3>0$
$\therefore x>3$ 답 $x>3$

0139 진수의 조건에서 $x^2-2x>0$
$x(x-2)>0$ $\therefore x<0$ 또는 $x>2$
답 $x<0$ 또는 $x>2$

0140 밑의 조건에서 $x+1>0$, $x+1\neq1$
$x>-1$, $x\neq0$
$\therefore -1<x<0$ 또는 $x>0$ 답 $-1<x<0$ 또는 $x>0$

0141 진수의 조건에서 $5-x>0$ $\therefore x<5$ …… ㉠
밑의 조건에서 $2x-1>0$, $2x-1\neq1$
$x>\frac{1}{2}$, $x\neq1$
$\therefore \frac{1}{2}<x<1$ 또는 $x>1$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
$\frac{1}{2}<x<1$ 또는 $1<x<5$ 답 $\frac{1}{2}<x<1$ 또는 $1<x<5$

0142 $\log_2 4=x$로 놓으면 로그의 정의에 의하여
$2^x=4=2^2$ $\therefore x=2$
$\therefore \log_2 4=2$ 답 2

0143 $\log_3 \frac{1}{3}=x$로 놓으면 로그의 정의에 의하여
$3^x=\frac{1}{3}=3^{-1}$ $\therefore x=-1$
$\therefore \log_3 \frac{1}{3}=-1$ 답 -1

0144 $\log_{\frac{1}{2}} 8=x$로 놓으면 로그의 정의에 의하여
$\left(\frac{1}{2}\right)^x=8$, $2^{-x}=2^3$ $\therefore x=-3$
$\therefore \log_{\frac{1}{2}} 8=-3$ 답 -3

0145 $\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{3}=x$로 놓으면 로그의 정의에 의하여
$\left(\frac{1}{9}\right)^x=\frac{1}{3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}=\frac{1}{3}$
$2x=1$ $\therefore x=\frac{1}{2}$
$\therefore \log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{3}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0146 $\log_3 x=4$에서 $3^4=x$
$\therefore x=81$ 답 81

0147 $\log_{\frac{1}{5}} x=-2$에서 $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}=x$
$\therefore x=25$ 답 25

0148 $\log_{11} x=0$에서 $11^0=x$
$\therefore x=1$ 답 1

0149 $\log_x 9=2$에서 $x^2=9$
$\therefore x=3$ ($\because x>0$) 답 3

0150 $\log_x \frac{1}{8}=3$에서 $x^3=\frac{1}{8}$
$\therefore x=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0151 $\log_x \sqrt{5}=\frac{1}{2}$에서 $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$
$\therefore x=5$ 답 5

0152 답 0

0153 답 1

0154 $\log_2 \frac{2}{3}+\log_2 6=\log_2\left(\frac{2}{3}\cdot6\right)=\log_2 2^2=2$ 답 2

0155 $\log_3 54-\log_3 2=\log_3 \frac{54}{2}=\log_3 3^3=3$ 답 3

0156 $\log_{10} 12=\log_{10}(2^2\cdot3)=2\log_{10} 2+\log_{10} 3$
$=2a+b$ 답 $2a+b$

0157 $\log_{10} 20=\log_{10}(2\cdot10)=\log_{10} 2+\log_{10} 10$
$=a+1$ 답 $a+1$

0158 $\log_{10}\frac{27}{16}=\log_{10}\frac{3^3}{2^4}=3\log_{10}3-4\log_{10}2$
$=3b-4a$ 답 $3b-4a$

0159 $\log_{10}5=\log_{10}\frac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2$
$=1-a$ 답 $1-a$

0160 $\log_2 3=\frac{\log_5 3}{\log_5 2}=\frac{b}{a}$ 답 $\frac{b}{a}$

0161 $\log_3 5=\frac{1}{\log_5 3}=\frac{1}{b}$ 답 $\frac{1}{b}$

0162 $\log_3 36=\frac{\log_5 36}{\log_5 3}=\frac{\log_5(2^2\cdot3^2)}{\log_5 3}$
$=\frac{2\log_5 2+2\log_5 3}{\log_5 3}$
$=\frac{2a+2b}{b}=\frac{2a}{b}+2$ 답 $\frac{2a}{b}+2$

다른풀이 $\log_3 36=\log_3 6^2=2\log_3 6=2\cdot\frac{\log_5 6}{\log_5 3}$
$=2\cdot\frac{\log_5(2\cdot3)}{\log_5 3}=2\cdot\frac{\log_5 2+\log_5 3}{\log_5 3}$
$=\frac{2(a+b)}{b}=\frac{2a}{b}+2$

0163 $\log_6 10=\frac{\log_5 10}{\log_5 6}=\frac{\log_5(2\cdot5)}{\log_5(2\cdot3)}$
$=\frac{\log_5 2+\log_5 5}{\log_5 2+\log_5 3}=\frac{a+1}{a+b}$ 답 $\frac{a+1}{a+b}$

0164 $\log_4 8=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}\log_2 2=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

0165 $\log_{27}9=\log_{3^3}3^2=\frac{2}{3}\log_3 3=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

0166 $\log_{100}\frac{1}{10}=\log_{10^2}10^{-1}=-\frac{1}{2}\log_{10}10=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

0167 $\log_{0.1}10=\log_{10^{-1}}10^1=\frac{1}{-1}\log_{10}10=-1$ 답 -1

0168 $2^{\log_2 5}-3^{\log_3 2}=5^{\log_2 2}-2^{\log_3 3}=5-2=3$ 답 3

0169 $4^{\log_2 3}\cdot3^{\log_3 4}=3^{\log_2 4}\cdot4^{\log_3 3}=3^{\log_2 2^2}\cdot4^{\log_3 3}$
$=3^2\cdot4=36$ 답 36

0170 $\log 1000=\log 10^3=3$ 답 3

0171 $\log\sqrt[3]{10000}=\log 10^{\frac{4}{3}}=\frac{4}{3}$ 답 $\frac{4}{3}$

0172 $\log 10\sqrt{10}=\log 10^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

0173 $\log\frac{1}{100}=\log 10^{-2}=-2$ 답 -2

0174 $\log\frac{1}{\sqrt[3]{10}}=\log 10^{-\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3}$ 답 $-\frac{1}{3}$

0175 답 0.3096

0176 답 0.5453

0177 답 0.6599

0178 답 0.9484

0179 $\log 26.1=\log(10\times2.61)$
$=\log 10+\log 2.61$
$=1+0.4166=1.4166$ 답 1.4166

0180 $\log 2610=\log(10^3\times2.61)$
$=\log 10^3+\log 2.61$
$=3+0.4166=3.4166$ 답 3.4166

0181 $\log 0.0261=\log(10^{-2}\times2.61)$
$=\log 10^{-2}+\log 2.61$
$=-2+0.4166=-1.5834$ 답 -1.5834

0182 $\log 0.00261=\log(10^{-3}\times2.61)$
$=\log 10^{-3}+\log 2.61$
$=-3+0.4166=-2.5834$ 답 -2.5834

0183 $\log 185=\log(10^2\times1.85)$
$=\log 10^2+\log 1.85$
$=2+0.2672=2.2672$ 답 2.2672

0184 $\log 18500=\log(10^4\times1.85)$
$=\log 10^4+\log 1.85$
$=4+0.2672=4.2672$ 답 4.2672

0185 $\log 0.185=\log(10^{-1}\times1.85)$
$=\log 10^{-1}+\log 1.85$
$=-1+0.2672=-0.7328$ 답 -0.7328

0186 $\log 0.000185=\log(10^{-4}\times1.85)$
$=\log 10^{-4}+\log 1.85$
$=-4+0.2672=-3.7328$ 답 -3.7328

0187 $\log_a 2=3$에서 $a^3=2$ $\therefore a=\sqrt[3]{2}$
$\log_b 5=3$에서 $b^3=5$ $\therefore b=\sqrt[3]{5}$
$\therefore ab=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{10}$ 답 ②

라쎈 특강 거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

0188 $\log_a 3=\dfrac{5}{2}$에서 $a^{\frac{5}{2}}=3$
$a^{\frac{5}{2}}=3$의 양변을 네제곱하면
$(a^{\frac{5}{2}})^4=3^4$ $\therefore a^{10}=81$ 답 ④

0189 $x=\log_3 2$에서 $3^x=2$
$\therefore 3^x+3^{-x}=3^x+\dfrac{1}{3^x}=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$ 답 $\dfrac{5}{2}$

다른 풀이 $3^x+3^{-x}=3^{\log_3 2}+3^{-\log_3 2}=2^{\log_3 3}+2^{-\log_3 3}$
$=2+2^{-1}=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

0190 $\log_6\{\log_3(\log_2 n)\}=0$에서
$\log_3(\log_2 n)=6^0=1$, $\log_2 n=3^1=3$
$\therefore n=2^3=8$ 답 8

0191 밑의 조건에서 $x-1>0$, $x-1\neq1$
$x>1$, $x\neq2$
$\therefore 1<x<2$ 또는 $x>2$ …… ㉠
진수의 조건에서 $-x^2+8x-12>0$
$x^2-8x+12<0$, $(x-2)(x-6)<0$
$\therefore 2<x<6$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2<x<6$
따라서 정수 x는 3, 4, 5이다. 답 3, 4, 5

0192 (i) $\log_{x-2}(x-3)^2$이 정의되려면
밑의 조건에서 $x-2>0$, $x-2\neq1$, $x>2$, $x\neq3$
$\therefore 2<x<3$ 또는 $x>3$ …… ㉠
진수의 조건에서 $(x-3)^2>0$이어야 하므로
$x\neq3$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2<x<3$ 또는 $x>3$
(ii) $\log_{7-x}|7-x|$가 정의되려면
밑의 조건에서 $7-x>0$, $7-x\neq1$, $x<7$, $x\neq6$
$\therefore x<6$ 또는 $6<x<7$ …… ㉢
진수의 조건에서 $|7-x|>0$이어야 하므로
$x\neq7$ …… ㉣
㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $x<6$ 또는 $6<x<7$
(i), (ii)에서
$2<x<3$ 또는 $3<x<6$ 또는 $6<x<7$
따라서 정수 x는 4, 5이므로 구하는 합은 $4+5=9$ 답 9

0193 밑의 조건에서 $a>0$, $a\neq1$
$\therefore 0<a<1$ 또는 $a>1$ …… ㉠ ··· ❶
진수의 조건에서 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+2ax+5>0$이어야 하므로 이차방정식 $ax^2+2ax+5=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=a^2-a\cdot5<0$, $a(a-5)<0$
$\therefore 0<a<5$ …… ㉡ ··· ❷
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
$0<a<1$ 또는 $1<a<5$
따라서 정수 a는 2, 3, 4의 3개이다. ··· ❸
답 3

채점 기준	비율
❶ 밑의 조건을 만족시키는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ 진수의 조건을 만족시키는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	20 %

라쎈 특강 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립할 조건

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 성립하려면
$a>0$, $b^2-4ac<0$

0194 $\log_2 12+\log_2 2\sqrt{3}-\dfrac{3}{2}\log_2 3$
$=\log_2 12+\log_2 2\sqrt{3}-\log_2 3^{\frac{3}{2}}$
$=\log_2 12+\log_2 2\sqrt{3}-\log_2 3\sqrt{3}$
$=\log_2\dfrac{12\cdot2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=\log_2 8$
$=\log_2 2^3=3$ 답 ①

0195 $\log_2(\log_3 81)=\log_2(\log_3 3^4)=\log_2 4$
$=\log_2 2^2=2$ 답 ②

0196 $\log_3 2+\log_3\dfrac{3}{2}+\log_3\dfrac{4}{3}+\cdots+\log_3\dfrac{27}{26}$
$=\log_3\left(2\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{27}{26}\right)$
$=\log_3 27=\log_3 3^3=3$ 답 3

0197 $\log_a x=\dfrac{1}{2}$에서 $\dfrac{1}{\log_x a}=\dfrac{1}{2}$ $\therefore \log_x a=2$
$\log_b x=\dfrac{1}{3}$에서 $\dfrac{1}{\log_x b}=\dfrac{1}{3}$ $\therefore \log_x b=3$
$\therefore \dfrac{1}{\log_{ab} x}=\log_x ab=\log_x a+\log_x b=5$ 답 ④

0198 $\dfrac{1}{\log_3 x}+\dfrac{1}{\log_4 x}+\dfrac{1}{\log_5 x}=\log_x 3+\log_x 4+\log_x 5$
$=\log_x(3\cdot4\cdot5)$
$=\log_x 60=\dfrac{1}{\log_{60} x}$
즉 $\dfrac{1}{\log_{60} x}=\dfrac{1}{\log_a x}$이므로 $a=60$ 답 60

0199 $\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 8=\frac{\log_{10}3}{\log_{10}2}\cdot\frac{\log_{10}5}{\log_{10}3}\cdot\frac{\log_{10}2^3}{\log_{10}5}$

$=\frac{\log_{10}3}{\log_{10}2}\cdot\frac{\log_{10}5}{\log_{10}3}\cdot\frac{3\log_{10}2}{\log_{10}5}$

$=3$ 답 ③

0200 $\log_2(\log_3 25)+\log_2(\log_5 49)+\log_2(\log_7 81)$

$=\log_2(\log_3 25\cdot\log_5 49\cdot\log_7 81)$

$=\log_2\left(\frac{\log_{10}5^2}{\log_{10}3}\cdot\frac{\log_{10}7^2}{\log_{10}5}\cdot\frac{\log_{10}3^4}{\log_{10}7}\right)$

$=\log_2\left(\frac{2\log_{10}5}{\log_{10}3}\cdot\frac{2\log_{10}7}{\log_{10}5}\cdot\frac{4\log_{10}3}{\log_{10}7}\right)$

$=\log_2 2^4=4$ 답 4

0201 $(2\log_2\sqrt{3}+6\log_4 3)\cdot\log_9 2\sqrt{2}$

$=(2\log_2 3^{\frac{1}{2}}+6\log_{2^2}3)\cdot\log_{3^2}2^{\frac{3}{2}}$

$=(\log_2 3+3\log_2 3)\cdot\frac{3}{4}\log_3 2$

$=4\log_2 3\cdot\frac{3}{4}\log_3 2=3$ 답 ⑤

0202 $(\log_2 5+\log_8 25)(\log_5 4-\log_{25}8)$

$=(\log_2 5+\log_{2^3}5^2)(\log_5 2^2-\log_{5^2}2^3)$

$=\left(\log_2 5+\frac{2}{3}\log_2 5\right)\left(2\log_5 2-\frac{3}{2}\log_5 2\right)$

$=\frac{5}{3}\log_2 5\cdot\frac{1}{2}\log_5 2=\frac{5}{6}$ 답 $\frac{5}{6}$

0203 $\log_5 4-\log_5 3=\log_5\frac{4}{3}$이므로 $A=5^{\log_5\frac{4}{3}}=\frac{4}{3}$

$B=\log_3\frac{1}{\sqrt{3}}+\log_{\sqrt{2}}2=\log_3 3^{-\frac{1}{2}}+\log_{2^{\frac{1}{2}}}2=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$

$C=\log_4(\log_2 16)=\log_4(\log_2 2^4)=\log_4 4=1$

이때 $1<\frac{4}{3}<\frac{3}{2}$이므로 $C<A<B$ 답 ④

0204 $3\log_2 3-2\log_2 15-2\log_{\frac{1}{2}}5$

$=3\log_2 3-2\log_2 15-2\log_{2^{-1}}5$

$=3\log_2 3-2\log_2 15+2\log_2 5$

$=\log_2 3^3-\log_2 15^2+\log_2 5^2$

$=\log_2\frac{3^3\cdot5^2}{15^2}=\log_2 3$ ⋯ ❶

$\therefore$ (주어진 식)$=4^{\log_2 3}=3^{\log_2 4}=3^{\log_2 2^2}$

$=3^2=9$ ⋯ ❷

답 9

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 지수를 간단히 할 수 있다.	60 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

0205 $\log_a b=x$, $\log_c a=y$로 놓으면 로그의 정의에 의하여 $a^x=b$, $c^y=a$이므로

$b=a^x=(c^y)^x=\boxed{c^{xy}}$

따라서 로그의 정의에 의하여 $\log_c b=xy$이므로

$\log_c b=\log_a b\cdot\log_c a$

이때 $\boxed{a\neq1}$에서 $\log_c a\neq0$이므로 $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

$\therefore$ (가) c^{xy} (나) $a\neq1$ 답 ②

0206 $\log_a M=m$, $\log_a N=n$으로 놓으면 로그의 정의에 의하여 $a^m=\boxed{M}$, $a^n=\boxed{N}$이므로

$a^{m+n}=a^m\cdot a^n=\boxed{MN}$

따라서 로그의 정의에 의하여 $\log_a MN=m+n$이므로

$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

$\therefore$ (가) M (나) N (다) MN

답 (가) M (나) N (다) MN

0207 $\log_{\frac{1}{7}}18=\log_{7^{-1}}(2\cdot3^2)=-\log_7(2\cdot3^2)$

$=-(\log_7 2+\log_7 3^2)$

$=-(\log_7 2+2\log_7 3)$

$=-(a+2b)$

$=-a-2b$ 답 ①

0208 $\log_3 10=a$에서 $\log_3 2+\log_3 5=a$ ⋯⋯ ㉠

$\log_3\frac{2}{5}=b$에서 $\log_3 2-\log_3 5=b$ ⋯⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면 $2\log_3 2=a+b$

$\therefore \log_3 2=\frac{a+b}{2}$

㉠−㉡을 하면 $2\log_3 5=a-b$

$\therefore \log_3 5=\frac{a-b}{2}$ ⋯ ❶

$\therefore \log_3 50=\log_3(2\cdot5^2)=\log_3 2+2\log_3 5$

$=\frac{a+b}{2}+2\cdot\frac{a-b}{2}=\frac{3a-b}{2}$ ⋯ ❷

따라서 $p=\frac{3}{2}$, $q=-\frac{1}{2}$이므로

$p+q=1$ ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ $\log_3 2$, $\log_3 5$를 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $\log_3 50$을 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0209 $\log_3 2=\frac{1}{a}$, $\log_3 5=b$이므로

$\log_{60}90=\frac{\log_3 90}{\log_3 60}=\frac{\log_3(2\cdot3^2\cdot5)}{\log_3(2^2\cdot3\cdot5)}$

$=\frac{\log_3 2+2\log_3 3+\log_3 5}{2\log_3 2+\log_3 3+\log_3 5}$

$=\frac{\frac{1}{a}+2+b}{\frac{2}{a}+1+b}$

$=\frac{ab+2a+1}{ab+a+2}$ 답 $\frac{ab+2a+1}{ab+a+2}$

02 로그

0210 $\log_3 2=a$, $\log_3 5=\frac{1}{b}$, $\log_7 5=c$이고, $\log_7 5=\frac{\log_3 5}{\log_3 7}$에서

$$\log_3 7=\frac{\log_3 5}{\log_7 5}=\frac{\frac{1}{b}}{c}=\frac{1}{bc}$$

$$\therefore \log_{14} 70=\frac{\log_3 70}{\log_3 14}=\frac{\log_3(2\cdot5\cdot7)}{\log_3(2\cdot7)}$$
$$=\frac{\log_3 2+\log_3 5+\log_3 7}{\log_3 2+\log_3 7}$$
$$=\frac{a+\frac{1}{b}+\frac{1}{bc}}{a+\frac{1}{bc}}$$
$$=\frac{abc+c+1}{abc+1}$$

답 $\frac{abc+c+1}{abc+1}$

0211 $2^a=x$, $2^b=y$에서 $\log_2 x=a$, $\log_2 y=b$

$$\therefore \log_{xy} xy^3=\frac{\log_2 xy^3}{\log_2 xy}=\frac{\log_2 x+3\log_2 y}{\log_2 x+\log_2 y}$$
$$=\frac{a+3b}{a+b}$$

답 ⑤

다른풀이 $2^a=x$, $2^b=y$에서

$xy=2^a\cdot2^b=2^{a+b}$, $xy^3=2^a\cdot(2^b)^3=2^{a+3b}$

$$\therefore \log_{xy} xy^3=\log_{2^{a+b}} 2^{a+3b}$$
$$=\frac{a+3b}{a+b}\log_2 2=\frac{a+3b}{a+b}$$

0212 $5^a=3$에서 $\log_5 3=a$

$$\therefore \log_{125} 9=\log_{5^3} 3^2=\frac{2}{3}\log_5 3=\frac{2}{3}a$$

$$\therefore p=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

0213 $9^x=a$, $9^y=b$에서 $\log_9 a=x$, $\log_9 b=y$

$\log_{3^2} a=x$, $\log_{3^2} b=y$

$\frac{1}{2}\log_3 a=x$, $\frac{1}{2}\log_3 b=y$

$\therefore \log_3 a=2x$, $\log_3 b=2y$

$$\therefore \log_3\frac{a^3}{\sqrt{b}}=3\log_3 a-\frac{1}{2}\log_3 b=3\cdot2x-\frac{1}{2}\cdot2y$$
$$=6x-y$$

따라서 $p=6$, $q=-1$이므로 $pq=-6$

답 ③

0214 $16^x=81^y=36$에서 $x=\log_{16} 36$, $y=\log_{81} 36$

$$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\log_{16} 36}+\frac{1}{\log_{81} 36}$$
$$=\log_{36} 16+\log_{36} 81$$
$$=\log_{6^2}(2^4\cdot3^4)$$
$$=\log_{6^2} 6^4$$
$$=2$$

답 ④

다른풀이 $16^x=36$에서 $16=36^{\frac{1}{x}}$

$2^4=6^{\frac{2}{x}}$ $\quad\therefore 2=6^{\frac{1}{2x}}$ …… ㉠

$81^y=36$에서 $81=36^{\frac{1}{y}}$

$3^4=6^{\frac{2}{y}}$ $\quad\therefore 3=6^{\frac{1}{2y}}$ …… ㉡

㉠×㉡을 하면 $6=6^{\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}}$

따라서 $1=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}$이므로 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$

0215 $15^a=25$에서 $a=\log_{15} 25=\log_{15} 5^2=2\log_{15} 5$

$\therefore \frac{2}{a}=\frac{1}{\log_{15} 5}=\log_5 15$ ··· ❶

$3^b=125$에서 $b=\log_3 125=\log_3 5^3=3\log_3 5$

$\therefore \frac{3}{b}=\frac{1}{\log_3 5}=\log_5 3$ ··· ❷

$\therefore \frac{2}{a}-\frac{3}{b}=\log_5 15-\log_5 3=\log_5 5=1$ ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ $\frac{2}{a}$를 로그로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\frac{3}{b}$을 로그로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ $\frac{2}{a}-\frac{3}{b}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0216 $a^p=b^q=c^r=165^s=k$ $(k>0,\ k\neq1)$로 놓으면

$p=\log_a k$, $q=\log_b k$, $r=\log_c k$, $s=\log_{165} k$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{1}{s}$에서

$$\frac{1}{\log_a k}+\frac{1}{\log_b k}+\frac{1}{\log_c k}=\frac{1}{\log_{165} k}$$

$\log_k a+\log_k b+\log_k c=\log_k 165$

$\log_k abc=\log_k 165$ $\quad\therefore abc=165=3\cdot5\cdot11$

이때 a, b, c는 자연수이고 $p\neq0$, $q\neq0$, $r\neq0$, $s\neq0$이므로

$a=11$, $b=5$, $c=3$ $(\because a>b>c)$

$\therefore a+b+c=19$

답 ④

0217 $\log_9 x^2+\log_3 y=1$에서 $\log_{3^2} x^2+\log_3 y=1$

$\therefore \log_3 x+\log_3 y=1$

$$\therefore 3^{\log_{\sqrt{3}} x}\cdot9^{\log_3 y}=3^{\log_{3^{\frac{1}{2}}} x}\cdot(3^2)^{\log_3 y}=3^{2\log_3 x}\cdot3^{2\log_3 y}$$
$$=3^{2(\log_3 x+\log_3 y)}$$
$$=3^2=9$$

답 9

0218 $\log_b a:\log_b c=1:2$에서 $2\log_b a=\log_b c$

$\log_b a^2=\log_b c$ $\quad\therefore c=a^2$ ··· ❶

$\therefore \log_a c+\log_c a=\log_a a^2+\log_{a^2} a$

$$=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$ ··· ❷

답 $\frac{5}{2}$

채점 기준	비율
❶ a와 c 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\log_a c+\log_c a$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0219 $a^4b=1$의 양변에 a를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_a a^4b=\log_a 1$, $\quad\log_a a^4+\log_a b=0$

$4+\log_a b=0$ $\quad\therefore \log_a b=-4$

$\therefore \log_a a^2b^3=\log_a a^2+\log_a b^3=2+3\log_a b$
$=2+3\cdot(-4)$
$=-10$ 답 ①

다른풀이 $a^4b=1$에서 $b=\frac{1}{a^4}=a^{-4}$
$\therefore \log_a a^2b^3=\log_a\{a^2\cdot(a^{-4})^3\}=\log_a a^{-10}$
$=-10$

0220 $\log_2 a+\log_2 c=\log_{\sqrt{2}} b$에서
$\log_2 ac=\log_2 b^2 \quad \therefore b^2=ac$ …… ㉠
$\therefore \log_2(a+b)+\log_2(b-c)-\log_2(a-b)-\log_2(b+c)$
$=\log_2\frac{(a+b)(b-c)}{(a-b)(b+c)}$
$=\log_2\frac{ab-ac+b^2-bc}{ab+ac-b^2-bc}$
$=\log_2\frac{ab-bc}{ab-bc}$ ($\because$ ㉠)
$=\log_2 1=0$ 답 0

0221 $a^4=b^3$에서 $b=(a^4)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{4}{3}}$
$\therefore A=\log_a a^{\frac{4}{3}}=\frac{4}{3}$
$b^3=c^7$에서 $c=(b^3)^{\frac{1}{7}}=b^{\frac{3}{7}}$
$\therefore B=\log_b b^{\frac{3}{7}}=\frac{3}{7}$
$a^4=c^7$에서 $a=(c^7)^{\frac{1}{4}}=c^{\frac{7}{4}}$
$\therefore C=\log_c c^{\frac{7}{4}}=\frac{7}{4}$
이때 $\frac{3}{7}<\frac{4}{3}<\frac{7}{4}$이므로
$B<A<C$ 답 ③

0222 $\log_3 9<\log_3 15<\log_3 27$에서 $2<\log_3 15<3$이므로
$a=\log_3 15-2=\log_3 15-\log_3 9=\log_3\frac{5}{3}$
$\therefore 3^a=3^{\log_3\frac{5}{3}}=\frac{5}{3}$ 답 ⑤

0223 $\log_2 16<\log_2 30<\log_2 32$에서 $4<\log_2 30<5$이므로
$a=4$,
$b=\log_2 30-4=\log_2 30-\log_2 16=\log_2\frac{15}{8}$
$\therefore 8(3^a+2^b)=8(3^4+2^{\log_2\frac{15}{8}})$
$=8\left(81+\frac{15}{8}\right)=663$ 답 ④

0224 $\log_5 5<\log_5 10<\log_5 25$에서 $1<\log_5 10<2$이므로
$x=1$,
$y=\log_5 10-1=\log_5 10-\log_5 5=\log_5 2$ ··· ❶

$\therefore \frac{5^y-5^{-y}}{5^x+5^{-x}}=\frac{5^{\log_5 2}-5^{-\log_5 2}}{5+5^{-1}}=\frac{2-2^{-1}}{5+5^{-1}}$
$=\frac{2-\frac{1}{2}}{5+\frac{1}{5}}=\frac{15}{52}$ ··· ❷

답 $\frac{15}{52}$

채점 기준	비율
❶ x, y의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\frac{5^y-5^{-y}}{5^x+5^{-x}}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0225 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=3$
$\therefore \log_{\alpha+\beta}2\alpha+\log_{\alpha+\beta}\beta=\log_{\alpha+\beta}2\alpha\beta$
$=\log_6(2\cdot3)=1$ 답 1

0226 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=2$
$\therefore \log_{\alpha+\beta}\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\log_{\alpha+\beta}\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$
$=\log_{\alpha+\beta}\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$
$=\log_{\alpha+\beta}\left(\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2\right)$
$=\log_5\left(2+\frac{1}{2}+2\right)=\log_5\frac{9}{2}$ 답 ②

0227 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2\log_2 3,\ \alpha\beta=2$
$\therefore 2^{(\alpha+1)(\beta+1)}=2^{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}=2^{2+2\log_2 3+1}$
$=2^{\log_2 9}\cdot2^3$
$=9\cdot8=72$ 답 72

0228 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\log_3 a+\log_3 b=4,\ \log_3 a\cdot\log_3 b=1$
$\therefore \log_a b+\log_b a=\frac{\log_3 b}{\log_3 a}+\frac{\log_3 a}{\log_3 b}$
$=\frac{(\log_3 a)^2+(\log_3 b)^2}{\log_3 a\cdot\log_3 b}$
$=\frac{(\log_3 a+\log_3 b)^2-2\log_3 a\cdot\log_3 b}{\log_3 a\cdot\log_3 b}$
$=\frac{4^2-2\cdot1}{1}=14$ 답 14

0229 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$1+\log_3 4=-a,\ 1\cdot\log_3 4=b$
$\therefore a=-(1+\log_3 4)=-(\log_3 3+\log_3 4)=-\log_3 12$,
$b=\log_3 4$
$\therefore \frac{a}{b}=\frac{-\log_3 12}{\log_3 4}=-\log_4 12$ 답 ①

0230 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 a+\log_2 b=3$, $\log_2 a\cdot\log_2 b=k$

$\log_2 a+\log_2 b=3$에서 $\log_2 ab=3$

$\therefore ab=2^3=8$

이때 $a+b=6$에서 $b=6-a$이므로

$a(6-a)=8$, $a^2-6a+8=0$

$(a-2)(a-4)=0$ $\therefore a=2$ 또는 $a=4$

즉 $a=2$, $b=4$ 또는 $a=4$, $b=2$이므로

$k=\log_2 2\cdot\log_2 4=1\cdot 2=2$ 답 2

0231 ① $\log 4=\log 2^2=2\log 2=2\times 0.3010=0.6020$

② $\log\frac{1}{16}=\log 2^{-4}=-4\log 2=-4\times 0.3010=-1.2040$

③ $\log 8=\log 2^3=3\log 2=3\times 0.3010=0.9030$

④ $\log 20=\log(10\times 2)=\log 10+\log 2=1+0.3010=1.3010$

⑤ $\log 0.2=\log\frac{2}{10}=\log 2-1=0.3010-1=-0.6990$

답 ⑤

0232 상용로그표에서 $\log 6.91=0.8395$이므로

$$\log\sqrt[5]{69.1}=\frac{1}{5}\log(10\times 6.91)$$
$$=\frac{1}{5}(\log 10+\log 6.91)$$
$$=\frac{1}{5}(1+0.8395)=0.3679$$ 답 0.3679

0233 $a=\log 3430=\log(10^3\times 3.43)=\log 10^3+\log 3.43$

$=3+0.5353=3.5353$ ➊

한편 $\log b=-0.4647$에서

$\log b=-1+0.5353=\log 10^{-1}+\log 3.43$

$=\log(10^{-1}\times 3.43)=\log 0.343$

$\therefore b=0.343$ ➋

$\therefore a+b=3.8783$ ➌

답 3.8783

채점 기준	비율
➊ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
➋ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
➌ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0234 $\log 27.9=1.4456$에서

$\log(10\times 2.79)=1.4456$, $1+\log 2.79=1.4456$

$\therefore \log 2.79=0.4456$

한편 $\log x=-1.5544$에서

$\log x=-2+0.4456=\log 10^{-2}+\log 2.79$

$=\log(10^{-2}\times 2.79)=\log 0.0279$

$\therefore x=0.0279$ 답 0.0279

0235 3등급인 별의 밝기를 I_1이라 하면

$3=-\frac{5}{2}\log I_1+C$ …… ㉠

8등급인 별의 밝기를 I_2라 하면

$8=-\frac{5}{2}\log I_2+C$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$-5=-\frac{5}{2}(\log I_1-\log I_2)$, $-5=-\frac{5}{2}\log\frac{I_1}{I_2}$

$\log\frac{I_1}{I_2}=2$ $\therefore \frac{I_1}{I_2}=10^2=100$

따라서 3등급인 별의 밝기는 8등급인 별의 밝기의 100배이다.

답 ④

0236 급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 $R^{\frac{26}{23}}$만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력이 $\frac{1}{2}v_c$이므로

$\frac{v_c}{\frac{1}{2}v_c}=1-k\log\frac{R^{\frac{26}{23}}}{R}$, $2=1-k\log R^{\frac{3}{23}}$

$\frac{3}{23}k\log R=-1$ $\therefore k\log R=-\frac{23}{3}$ …… ㉠

급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 R^a만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력이 $\frac{1}{4}v_c$이므로

$\frac{v_c}{\frac{1}{4}v_c}=1-k\log\frac{R^a}{R}$, $4=1-k\log R^{a-1}$

$(a-1)k\log R=-3$, $-\frac{23}{3}(a-1)=-3$ ($\because$ ㉠)

$a-1=\frac{9}{23}$ $\therefore a=1+\frac{9}{23}=\frac{32}{23}$ 답 ⑤

0237 페로몬을 분비한 후 1초가 지났을 때 분비한 곳으로부터 거리가 3인 곳에서 측정한 페로몬의 농도가 a이므로

$\log a=A-\frac{1}{2}\log 1-3^2K$

$=A-9K$ …… ㉠ ➊

페로몬을 분비한 후 9초가 지났을 때 분비한 곳으로부터 거리가 d인 곳에서 측정한 페로몬의 농도가 $\frac{a}{3}$이므로

$\log\frac{a}{3}=A-\frac{1}{2}\log 9-\frac{Kd^2}{9}$

$\log a-\log 3=A-\log 3-\frac{Kd^2}{9}$

$\therefore \log a=A-\frac{Kd^2}{9}$ …… ㉡ ➋

㉠, ㉡에서

$A-9K=A-\frac{Kd^2}{9}$

$9K=\frac{Kd^2}{9}$, $d^2=9^2$

$\therefore d=9$ ($\because d\geq 0$) ➌

답 9

채점 기준	비율
➊ 페로몬을 분비한 후 1초가 지났을 때의 식을 간단히 할 수 있다.	40 %
➋ 페로몬을 분비한 후 9초가 지났을 때의 식을 간단히 할 수 있다.	40 %
➌ d의 값을 구할 수 있다.	20 %

0238 올해 생산량을 A, 생산량의 증가율을 a %라 하면

$$A\left(1+\frac{a}{100}\right)^{10}=2A \qquad \therefore \left(1+\frac{a}{100}\right)^{10}=2$$

양변에 상용로그를 취하면

$$10\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\log 2$$

$$\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\frac{1}{10}\log 2=\frac{1}{10}\times 0.3=0.03$$

이때 $\log 1.07=0.03$이므로

$$1+\frac{a}{100}=1.07 \qquad \therefore a=7$$

따라서 생산량을 매년 7 %씩 증가시켜야 한다. 답 ⑤

0239 처음 빛의 밝기를 A, 통과시킨 유리판의 장수를 n이라 하면

$$A\left(1-\frac{1}{3}\right)^{n}=\frac{1}{8}A \qquad \therefore \left(\frac{2}{3}\right)^{n}=\frac{1}{8}$$

양변에 상용로그를 취하면 $\quad n\log\frac{2}{3}=\log\frac{1}{8}$

$$n(\log 2-\log 3)=-3\log 2$$

$$n(0.3-0.48)=-3\times 0.3$$

$$\therefore n=\frac{-0.9}{-0.18}=5$$

따라서 5장의 유리판을 통과시켜야 한다. 답 ④

0240 $\log 2.3^9=9\log 2.3=9\times 0.3617=\boxed{3.2553}$

$\log 1.8=0.2553$이므로

$$\log 2.3^9=3+0.2553=3+\log 1.8$$

$$=\log(10^3\times 1.8)=\log\boxed{1800}$$

따라서 $2.3^9=1800$이다.

$\therefore$ (가) 3.2553 (나) 1800 답 (가) 3.2553 (나) 1800

0241 10마리의 세균을 5시간, 즉 300분 동안 배양하면 전체 세균은 10×2^{30}마리이다.

이때

$$\log(10\times 2^{30})=1+30\log 2=1+30\times 0.3=10$$

이므로 $\quad 10\times 2^{30}=10^{10}$

따라서 5시간 후의 세균은 10^{10}마리이므로

$k=10$ 답 10

라쎈 특강 일정한 비율로 증가하는 개체의 수

처음 수가 a인 세균이 10분마다 2배로 증가할 때

- 10분 후 세균의 수는 $\quad 2a$
- 20분 후 세균의 수는 $\quad 2\cdot 2a=2^2a$
- 30분 후 세균의 수는 $\quad 2\cdot 2^2a=2^3a$
- ⋮ ⋮
- $10n$분 후 세균의 수는 $\quad 2\cdot 2^{n-1}a=2^na$

0242 전략 (밑)>0, (밑)$\neq 1$, (진수)>0임을 이용한다.

풀이 밑의 조건에서 $\quad x+1>0,\ x+1\neq 1$

$x>-1,\ x\neq 0$

$\therefore -1<x<0$ 또는 $x>0$ …… ㉠ ⋯ ❶

진수의 조건에서 $\quad -x^2+4x+5>0$

$x^2-4x-5<0, \quad (x+1)(x-5)<0$

$\therefore -1<x<5$ …… ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1<x<0$ 또는 $0<x<5$

따라서 정수 x는 1, 2, 3, 4의 4개이다. ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 밑의 조건을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ 진수의 조건을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 x의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0243 전략 로그의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 ① $\log_6 12+\log_6 3=\log_6(12\cdot 3)=\log_6 36$

$=\log_6 6^2=2$

② $\log_2 1+\log_2 2+\log_2 4=0+1+2=3$

③ $\log_2 24-\dfrac{1}{\log_3 2}=\log_2 24-\log_2 3=\log_2\dfrac{24}{3}$

$=\log_2 8=\log_2 2^3=3$

④ $\log_{\sqrt{5}}5+\log_9 3=\log_{5^{\frac{1}{2}}}5+\log_{3^2}3=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

⑤ $\log_4(\log_5 3)+\log_4(\log_9 5)=\log_4(\log_5 3\cdot\log_{3^2}5)$

$=\log_4\left(\dfrac{1}{2}\log_5 3\cdot\log_3 5\right)$

$=\log_4\dfrac{1}{2}=\log_{2^2}2^{-1}$

$=-\dfrac{1}{2}$ 답 ③

0244 전략 로그의 밑의 변환 공식을 이용한다.

풀이 $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-a}{ab}=\dfrac{\log_2 5}{\log_3 5}$

$=\dfrac{\log_5 3}{\log_5 2}$

$=\log_2 3$ 답 ④

0245 전략 $\log_9 150$을 밑이 5인 로그를 사용하여 변형한다.

풀이 $\log_9 150=\dfrac{\log_5 150}{\log_5 9}=\dfrac{\log_5(2\cdot 3\cdot 5^2)}{\log_5 3^2}$

$=\dfrac{\log_5 2+\log_5 3+2\log_5 5}{2\log_5 3}$

$=\dfrac{a+b+2}{2b}$ 답 $\dfrac{a+b+2}{2b}$

0246 전략 로그의 성질을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $\log_{\sqrt{3}}a=\log_9 ab$에서

$2\log_3 a=\dfrac{1}{2}\log_3 ab, \quad 2\log_3 a=\dfrac{1}{2}(\log_3 a+\log_3 b)$

$4\log_3 a=\log_3 a+\log_3 b, \quad 3\log_3 a=\log_3 b$

$\log_3 a^3=\log_3 b \qquad \therefore a^3=b$

$\therefore \log_a b=\log_a a^3=3$ 답 ③

0247 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=1 \qquad \therefore \beta=\dfrac{1}{\alpha}$

$\therefore \log_{\alpha}\beta=\log_{\alpha}\dfrac{1}{\alpha}=\log_{\alpha}\alpha^{-1}=-1$

답 ②

0248 전략 로그의 정의를 이용하여 10^a을 구한 후 $10^{-a}=\dfrac{1}{10^a}$임을 이용한다.

풀이 $a=\log(1+\sqrt{2})$에서

$10^a=1+\sqrt{2}$

이므로

$$10^{-a}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=\sqrt{2}-1$$

$$\therefore \frac{10^a+10^{-a}}{10^a-10^{-a}}=\frac{1+\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)}{1+\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

답 ③

0249 전략 (진수)>0임을 이용한다.

풀이 $\log_2(x-2)+\log_2(4-x)$가 정의되려면

$x-2>0,\ 4-x>0$

$\therefore 2<x<4$ ⋯ ❶

따라서 $x-1>0,\ x-5<0$이므로

$|x-1|+|x-5|=x-1-(x-5)$

$=4$ ⋯ ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
❷ $\lvert x-1\rvert+\lvert x-5\rvert$를 간단히 할 수 있다.	40 %

0250 전략 로그의 성질을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $\log_5(a^2+b^2)-\log_5(a-b)=\log_5(a+2b)$에서

$\log_5\dfrac{a^2+b^2}{a-b}=\log_5(a+2b)$이므로

$\dfrac{a^2+b^2}{a-b}=a+2b, \qquad a^2+b^2=(a-b)(a+2b)$

$a^2+b^2=a^2+ab-2b^2, \qquad 3b^2-ab=0$

$b>0$이므로 $\qquad 3b-a=0$

$\therefore a=3b$

$\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{3b}{b}=3$

답 3

0251 전략 $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$임을 이용한다.

풀이 $\log_9 2+\log_9 3=\log_{3^2}6=\dfrac{1}{2}\log_3 6$,

$\log_2 3+\log_2 5=\log_2 15$이므로

$(\text{주어진 식})=(3^{\frac{1}{2}\log_3 6})^2+(2^{\log_2 15})^{\log_{15}4}$

$=3^{\log_3 6}+2^{2\log_2 15\cdot\log_{15}2}$

$=6+2^2=10$

답 ①

0252 전략 로그의 정의와 성질을 이용한다.

풀이 $a^{\log_b c}=x$로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$\boxed{\log_a x}=\log_b c$

이때 $\log_a x=\dfrac{\log_c x}{\boxed{\log_c a}}$, $\log_b c=\dfrac{1}{\boxed{\log_c b}}$이므로

$\dfrac{\log_c x}{\log_c a}=\dfrac{1}{\log_c b}$

$\therefore \log_c x=\dfrac{\log_c a}{\log_c b}=\log_b a$

따라서 로그의 정의에 의하여 $x=c^{\log_b a}$이므로

$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$

$\therefore$ (가) $\log_a x$ (나) $\log_c a$ (다) $\log_c b$

답 풀이 참조

0253 전략 $a^m=k$이면 $\log_a k=m$이므로 $\log_k a=\dfrac{1}{m}$임을 이용한다.

풀이 $a^m=7,\ b^n=7$에서 $\qquad \log_a 7=m,\ \log_b 7=n$

$\therefore \log_7 a=\dfrac{1}{m},\ \log_7 b=\dfrac{1}{n}$

$$\therefore \log_{ab}a^3=\frac{\log_7 a^3}{\log_7 ab}=\frac{3\log_7 a}{\log_7 a+\log_7 b}$$

$$=\frac{\frac{3}{m}}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=\frac{3n}{m+n}$$

답 ④

다른풀이 $a^m=7,\ b^n=7$에서 $\qquad a=7^{\frac{1}{m}},\ b=7^{\frac{1}{n}}$

$$\therefore \log_{ab}a^3=\log_{7^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}7^{\frac{3}{m}}=\frac{\frac{3}{m}}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\log_7 7=\frac{3n}{m+n}$$

0254 전략 x, y를 로그를 이용하여 나타낸 후 주어진 식에 대입한다.

풀이 $2^x=24$에서

$x=\log_2 24=\log_2(2^3\cdot 3)=3+\log_2 3$

$\therefore x-3=\log_2 3$

$3^y=24$에서

$y=\log_3 24=\log_3(2^3\cdot 3)=3\log_3 2+1$

$\therefore y-1=3\log_3 2$

$\therefore (x-3)(y-1)=\log_2 3\cdot 3\log_3 2$

$=3$

답 ③

0255 전략 로그의 정의를 이용하여 a, b를 각각 c에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\log_a c=\dfrac{1}{2}$에서 $\qquad a^{\frac{1}{2}}=c$

$\therefore a=c^2$ ⋯ ❶

$\log_b c=\dfrac{1}{5}$에서 $\qquad b^{\frac{1}{5}}=c$

$\therefore b=c^5$ ⋯ ❷

$\therefore 2\log_a b+5\log_b c+\log_c a$

$=2\log_{c^2}c^5+5\log_{c^5}c+\log_c c^2$

$=2\cdot\dfrac{5}{2}+5\cdot\dfrac{1}{5}+2=8$ ⋯ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ a를 c에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ b를 c에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

0256 전략 정수 m에 대하여 $m<\log_a b<m+1$이면 $\log_a b$의 정수 부분은 m임을 이용한다.

풀이 $\log_4 16<\log_4 18<\log_4 64$이므로

$\log_4 4^2<\log_4 18<\log_4 4^3$

$\therefore 2<\log_4 18<3$

따라서 $\log_4 18$의 정수 부분이 2이므로 $y=2$

$\therefore 2^{2x}+2^y=4^x+2^y=4^{\log_4 18}+2^2$

$=18+4=22$

답 ②

0257 전략 $\log x^2-\log\sqrt{x}$를 간단히 한 후 그 값이 정수임을 이용한다.

풀이 $\log x^2-\log\sqrt{x}=2\log x-\frac{1}{2}\log x=\frac{3}{2}\log x$ ⋯ ❶

$100<x<1000$에서 $2<\log x<3$

$\therefore 3<\frac{3}{2}\log x<\frac{9}{2}$ ⋯ ❷

이때 $\frac{3}{2}\log x$가 정수이므로

$\frac{3}{2}\log x=4$ $\therefore \log x=\frac{8}{3}$ ⋯ ❸

답 $\frac{8}{3}$

채점 기준	비율
❶ $\log\sqrt{x}$와 $\log x^2$의 차를 간단히 할 수 있다.	30 %
❷ $\frac{3}{2}\log x$의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\log x$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0258 전략 A가 매년 a %씩 증가할 때 n년 후에는 $A\left(1+\frac{a}{100}\right)^n$이 된다.

풀이 올해 판매량을 A라 하고, n년 후의 판매량이 올해 판매량의 3배가 된다고 하면

$A(1+0.05)^n=3A$, $1.05^n=3$

양변에 상용로그를 취하면 $n\log 1.05=\log 3$

$\therefore n=\frac{\log 3}{\log 1.05}=\frac{0.48}{0.02}=24$

따라서 판매량이 올해 판매량의 3배가 되는 것은 24년 후이다.

답 24년

0259 전략 로그의 성질을 이용하여 a, b, c 사이의 관계식을 세운다.

풀이 $\log_a(b+c)+\log_a(b-c)=2$에서

$\log_a(b+c)(b-c)=2$, $\log_a(b^2-c^2)=2$

이므로 $a^2=b^2-c^2$

$\therefore b^2=a^2+c^2$

따라서 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다.

답 ⑤

0260 전략 n의 값의 범위를 나누어 $[\log n]$의 값을 구한다.

풀이 (i) $1\le n<10$일 때,

$\log 1\le\log n<\log 10$이므로

$0\le\log n<1$ $\therefore [\log n]=0$

(ii) $10\le n\le 50$일 때,

$\log 10\le\log n\le\log 50<\log 100$이므로

$1\le\log n<2$ $\therefore [\log n]=1$

(i), (ii)에서

$[\log 1]+[\log 2]+[\log 3]+\cdots+[\log 50]$

$=0\cdot 9+1\cdot 41=41$

답 ②

0261 전략 로그의 정의를 이용하여 x의 값을 구한다.

풀이 $2.72^x=20100$이므로 로그의 정의에 의하여

$x=\log_{2.72}20100$ ⋯ ❶

$=\frac{\log 20100}{\log 2.72}$

$=\frac{\log(10^4\times 2.01)}{\log 2.72}$

$=\frac{4+\log 2.01}{\log 2.72}=\frac{4+0.3}{0.43}$

$=\frac{4.3}{0.43}=10$ ⋯ ❷

따라서 바르게 계산하면

$2.72x=2.72\times 10=27.2$ ⋯ ❸

답 27.2

채점 기준	비율
❶ $x=\log_{2.72}20100$임을 알 수 있다.	20 %
❷ x의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ 바르게 계산한 답을 구할 수 있다.	20 %

0262 전략 H_A, H_B에 대한 식을 세운 후, $\sqrt{3}H_A=2H_B$, $L_A=2L_B$임을 이용하여 S_A와 S_B 사이의 관계식을 구한다.

풀이 A지역의 헤이즈계수가 H_A, 여과지 이동거리가 L_A, 빛전달률이 S_A이므로

$H_A=\frac{k}{L_A}\log\frac{1}{S_A}$

B지역의 헤이즈계수가 H_B, 여과지 이동거리가 L_B, 빛전달률이 S_B이므로

$H_B=\frac{k}{L_B}\log\frac{1}{S_B}$

$\sqrt{3}H_A=2H_B$에서 $\frac{\sqrt{3}k}{L_A}\log\frac{1}{S_A}=\frac{2k}{L_B}\log\frac{1}{S_B}$

$\frac{\sqrt{3}}{L_A}\log\frac{1}{S_A}=\frac{2}{L_B}\log\frac{1}{S_B}$

이때 $L_A=2L_B$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{2L_B}\log\frac{1}{S_A}=\frac{2}{L_B}\log\frac{1}{S_B}$, $-\sqrt{3}\log S_A=-4\log S_B$

$\frac{\log S_A}{\log S_B}=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, $\log_{S_B}S_A=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\therefore S_A=(S_B)^{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$

$\therefore p=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

답 ②

03 지수함수

I. 지수함수와 로그함수

0263 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

0264 $f(0)=5^0=1$ 답 1

0265 $f(2)=5^2=25$ 답 25

0266 $f(-1)=5^{-1}=\frac{1}{5}$ 답 $\frac{1}{5}$

0267 $\frac{f(1)}{f(-2)}=\frac{5^1}{5^{-2}}=5^{1-(-2)}=5^3=125$ 답 125

0268 $f(0)=\left(\frac{1}{3}\right)^0=1$ 답 1

0269 $f(4)=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$ 답 $\frac{1}{81}$

0270 $f(-2)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=(3^{-1})^{-2}=3^2=9$ 답 9

0271 $f(-1)f(3)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1+3}$

$=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$ 답 $\frac{1}{9}$

0272 답 ○

0273 치역은 $\{y\,|\,y$는 양의 실수$\}$이다. 답 ×

0274 답 ○

0275 답 ○

0276 그래프의 점근선은 x축이다. 답 ×

0277 $-2<-1$이고, 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ 답 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

0278 $\sqrt[3]{3^2}=3^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$이고, $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$이다.

이때 함수 $y=3^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$3^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{2}{3}}$ $\therefore \sqrt{3}<\sqrt[3]{3^2}$ 답 $\sqrt{3}<\sqrt[3]{3^2}$

0279 $\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}$이고, $0.3<\frac{1}{3}$이다.

이때 함수 $y=5^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$5^{0.3}<5^{\frac{1}{3}}$ $\therefore 5^{0.3}<\sqrt[3]{5}$ 답 $5^{0.3}<\sqrt[3]{5}$

0280 $\sqrt{\frac{1}{7}}=\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$이고, $-1<\frac{1}{2}$이다.

이때 함수 $y=\left(\frac{1}{7}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$ $\therefore \sqrt{\frac{1}{7}}<\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$ 답 $\sqrt{\frac{1}{7}}<\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$

0281 답 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}-1$

0282 $-y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$에서 $y=-\left(\frac{1}{5}\right)^x$ 답 $y=-\left(\frac{1}{5}\right)^x$

0283 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$에서 $y=(5^{-1})^{-x}$ $\therefore y=5^x$

답 $y=5^x$

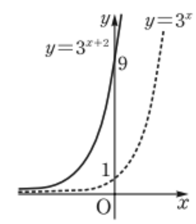
0284 $-y=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$에서 $y=-(5^{-1})^{-x}$ $\therefore y=-5^x$

답 $y=-5^x$

0285 $y=3^{x+2}$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 치역은 $\{y\,|\,y>0\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=0$이다.

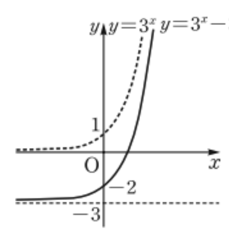
답 풀이 참조



0286 $y=3^x-3$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 치역은 $\{y\,|\,y>-3\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=-3$이다.

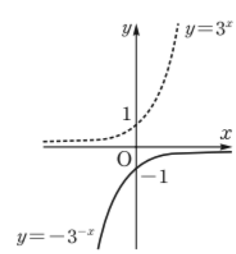
답 풀이 참조



0287 $y=-3^{-x}$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 치역은 $\{y\,|\,y<0\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=0$이다.

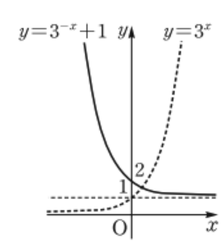
답 풀이 참조



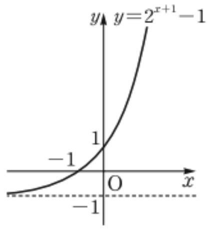
0288 $y=3^{-x}+1$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 치역은 $\{y\,|\,y>1\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=1$이다.

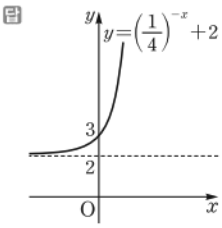
답 풀이 참조



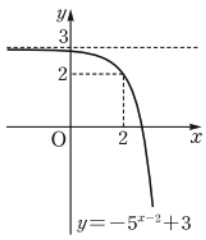
0289 답



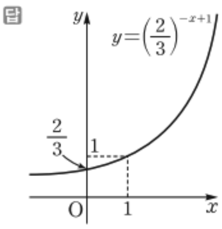
0290 답



0291 답



0292 답



0293 함수 $y=10^x$에서

$x=-2$일 때, $\quad y=10^{-2}=\dfrac{1}{100}$

$x=1$일 때, $\quad y=10^1=10$

따라서 최댓값은 10, 최솟값은 $\dfrac{1}{100}$이다.

답 최댓값: 10, 최솟값: $\dfrac{1}{100}$

0294 함수 $y=5^{-x}$에서

$x=-4$일 때, $\quad y=5^4=625$

$x=-1$일 때, $\quad y=5^1=5$

따라서 최댓값은 625, 최솟값은 5이다.

답 최댓값: 625, 최솟값: 5

0295 함수 $y=6^{x+2}-2$에서

$x=-3$일 때, $\quad y=6^{-3+2}-2=-\dfrac{11}{6}$

$x=0$일 때, $\quad y=6^{0+2}-2=34$

따라서 최댓값은 34, 최솟값은 $-\dfrac{11}{6}$이다.

답 최댓값: 34, 최솟값: $-\dfrac{11}{6}$

0296 $3^x=27$에서 $3^x=3^3$이므로

$x=3$ 답 $x=3$

0297 $\left(\dfrac{1}{10}\right)^x=100$에서 $10^{-x}=10^2$이므로

$-x=2 \quad \therefore x=-2$ 답 $x=-2$

0298 $25^x=5\cdot5^{3x}$에서 $5^{2x}=5^{3x+1}$이므로

$2x=3x+1 \quad \therefore x=-1$ 답 $x=-1$

0299 $\sqrt{3^x}=3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$에서 $3^{\frac{1}{2}x}=3^{1-x}$이므로

$\dfrac{1}{2}x=1-x, \quad \dfrac{3}{2}x=1 \quad \therefore x=\dfrac{2}{3}$ 답 $x=\dfrac{2}{3}$

0300 $3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^{\boxed{2}}-2t+1=0, \quad (t-1)^2=0$

$\therefore t=\boxed{1}$

즉 $3^x=1$이므로 $\quad x=\boxed{0}$

$\therefore$ (가) 2 (나) 1 (다) 0 답 (가) 2 (나) 1 (다) 0

0301 $5^{2x}-6\cdot5^x+5=0$에서 $\quad (5^x)^2-6\cdot5^x+5=0$

$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-6t+5=0, \quad (t-1)(t-5)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=5$

즉 $5^x=1$ 또는 $5^x=5$이므로

$x=0$ 또는 $x=1$ 답 $x=0$ 또는 $x=1$

0302 $4^x-3\cdot2^x-4=0$에서 $\quad 2^{2x}-3\cdot2^x-4=0$

$(2^x)^2-3\cdot2^x-4=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-3t-4=0, \quad (t+1)(t-4)=0$

$\therefore t=4\ (\because t>0)$

즉 $2^x=2^2$이므로 $\quad x=2$ 답 $x=2$

0303 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x}-2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-8=0$에서

$\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right\}^2-2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-8=0$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-2t-8=0, \quad (t+2)(t-4)=0$

$\therefore t=4\ (\because t>0)$

즉 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=4$이므로 $\quad \left(\dfrac{1}{2}\right)^x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$

$\therefore x=-2$ 답 $x=-2$

0304 $\dfrac{1}{25^x}-5^{-x}-20=0$에서 $\quad \left\{\left(\dfrac{1}{5}\right)^x\right\}^2-\left(\dfrac{1}{5}\right)^x-20=0$

$\left(\dfrac{1}{5}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-t-20=0, \quad (t+4)(t-5)=0$

$\therefore t=5\ (\because t>0)$

즉 $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x=5$이므로 $\quad \left(\dfrac{1}{5}\right)^x=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}$

$\therefore x=-1$ 답 $x=-1$

0305 $4^{2x+1}=5^{2x+1}$에서 $\quad 2x+1=0$

$\therefore x=-\dfrac{1}{2}$ 답 $x=-\dfrac{1}{2}$

0306 $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{x-3}=3^{-x+3}$에서 $\quad 7^{-x+3}=3^{-x+3}$

$-x+3=0 \quad \therefore x=3$ 답 $x=3$

0307 $3^{x-1}<81$에서 $\quad 3^{x-1}<3^4$

밑이 1보다 크므로 $\quad x-1<4 \quad \therefore x<5$ 답 $x<5$

0308 $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x}\ge 64$에서 $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x}\ge\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$

밑이 1보다 작으므로 $2x\le -3$ $\therefore x\le -\frac{3}{2}$ 답 $x\le -\frac{3}{2}$

0309 $5\sqrt{5}\le\frac{1}{25}\cdot 5^{x-1}$에서 $5^{\frac{3}{2}}\le 5^{x-3}$

밑이 1보다 크므로 $\frac{3}{2}\le x-3$ $\therefore x\ge\frac{9}{2}$ 답 $x\ge\frac{9}{2}$

0310 $2^{1-3x}>8\cdot(\sqrt{2})^x$에서 $2^{1-3x}>2^{\frac{1}{2}x+3}$

밑이 1보다 크므로 $1-3x>\frac{1}{2}x+3$

$-\frac{7}{2}x>2$ $\therefore x<-\frac{4}{7}$ 답 $x<-\frac{4}{7}$

0311 $\frac{1}{2}<2^{2x}<4\sqrt{2}$에서 $2^{-1}<2^{2x}<2^{\frac{5}{2}}$

밑이 1보다 크므로 $-1<2x<\frac{5}{2}$

$\therefore -\frac{1}{2}<x<\frac{5}{4}$ 답 $-\frac{1}{2}<x<\frac{5}{4}$

0312 $\frac{1}{81}\le\left(\frac{1}{9}\right)^x\le 81$에서 $\left(\frac{1}{9}\right)^2\le\left(\frac{1}{9}\right)^x\le\left(\frac{1}{9}\right)^{-2}$

밑이 1보다 작으므로 $-2\le x\le 2$ 답 $-2\le x\le 2$

0313 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^{\boxed{2}}-3t+2<0$, $(t-1)(t-2)<0$

$\therefore \boxed{1}<t<\boxed{2}$

즉 $1<\left(\frac{1}{2}\right)^x<2$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^0<\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

밑이 1보다 작으므로 $\boxed{-1}<x<\boxed{0}$

$\therefore$ (가) 2 (나) 1 (다) 2 (라) -1 (마) 0 답 풀이 참조

0314 $3^{2x+3}-12\cdot 3^x+1\le 0$에서 $27\cdot(3^x)^2-12\cdot 3^x+1\le 0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$27t^2-12t+1\le 0$, $(9t-1)(3t-1)\le 0$

$\therefore \frac{1}{9}\le t\le\frac{1}{3}$

즉 $3^{-2}\le 3^x\le 3^{-1}$에서 밑이 1보다 크므로

$-2\le x\le -1$ 답 $-2\le x\le -1$

0315 $25^x-20\cdot 5^x-125>0$에서 $(5^x)^2-20\cdot 5^x-125>0$

$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-20t-125>0$, $(t+5)(t-25)>0$

$\therefore t<-5$ 또는 $t>25$

그런데 $t>0$이므로 $t>25$

즉 $5^x>5^2$에서 밑이 1보다 크므로 $x>2$ 답 $x>2$

0316 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}-30\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+81<0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-30\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+81<0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-30t+81<0$, $(t-3)(t-27)<0$

$\therefore 3<t<27$

즉 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}<\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$에서 밑이 1보다 작으므로

$-3<x<-1$ 답 $-3<x<-1$

0317 $\left(\frac{1}{4}\right)^x-14\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-32\le 0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-14\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-32\le 0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-14t-32\le 0$, $(t+2)(t-16)\le 0$

$\therefore -2\le t\le 16$

그런데 $t>0$이므로 $0<t\le 16$

즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$에서 밑이 1보다 작으므로

$x\ge -4$ 답 $x\ge -4$

0318 ④ $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x=3^{-x}$이므로 $y=3^x$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이다. 답 ④

0319 주어진 조건을 만족시키는 함수는 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가하는 함수이다. 이때

$f(x)=4^{-x}=\left(\frac{1}{4}\right)^x$, $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=2^x$

이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ②이다. 답 ②

0320 $y=(a^2-3a+3)^x$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하려면 $a^2-3a+3>1$이어야 하므로 ··· ❶

$a^2-3a+2>0$, $(a-1)(a-2)>0$

$\therefore a<1$ 또는 $a>2$ ··· ❷

답 $a<1$ 또는 $a>2$

채점 기준	비율
❶ a^2-3a+3의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %

0321 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=3^{x+2}$

이 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=3^{-x+2}$

$y=3^{-x+2}$의 그래프가 점 $(3, k)$를 지나므로

$k=3^{-3+2}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0322 $y=\frac{1}{4}\cdot 2^x-8=2^{x-2}-8$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -8만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=2$, $n=-8$이므로 $m+n=-6$ 답 -6

0323 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-n=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-m}$ $\quad \therefore y=3^{-x+m}+n$

이 함수의 그래프가 점 $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$를 지나므로

$3^{m+1}+n=\frac{2}{3}$ ...... ㉠

또 점 $(0, 0)$을 지나므로 $\quad 3^m+n=0$ ...... ㉡

㉠－㉡을 하면 $\quad 3^{m+1}-3^m=\frac{2}{3}, \quad 2\cdot 3^m=\frac{2}{3}$

$3^m=3^{-1} \quad \therefore m=-1$

$m=-1$을 ㉡에 대입하면 $\quad 3^{-1}+n=0 \quad \therefore n=-\frac{1}{3}$

$\therefore mn=\frac{1}{3}$

답 ④

0324 ㄱ. $y=\frac{2^x}{2}=2^{x-1}$이므로 $y=\frac{2^x}{2}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\sqrt{2}\cdot 2^x=2^{x+\frac{1}{2}}$이므로 $y=\sqrt{2}\cdot 2^x$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\frac{1}{4^x}=2^{-2x}$

ㄹ. $y=\sqrt{2^x}=2^{\frac{x}{2}}$

ㅁ. $y=3\cdot 2^x=2^{\log_2 3}\cdot 2^x=2^{x+\log_2 3}$이므로 $y=3\cdot 2^x$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\log_2 3$만큼 평행이동한 것이다.

ㅂ. $y=-8\cdot 2^x=-2^{x+3}$이므로 $y=-8\cdot 2^x$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 $y=2^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㅂ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㅂ

0325 주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $y=-2$이므로

$b=-2$ ⋯❶

그래프가 원점을 지나므로

$0=\left(\frac{1}{2}\right)^{0-a}-2, \quad 2^a=2$

$\therefore a=1$ ⋯❷

$\therefore a+b=-1$ ⋯❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0326 $f(2)=m$에서 $\quad a^2=m$ ...... ㉠

$f(5)=n$에서 $\quad a^5=n$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\quad \frac{n}{m}=a^{5-2}=a^3$

$\therefore f(6)=a^6=(a^3)^2=\left(\frac{n}{m}\right)^2$

답 ⑤

0327 $f(p)=3$이므로 $\quad \frac{1}{2}(a^p+a^{-p})=3$

$\therefore a^p+a^{-p}=6$

$\therefore f(2p)=\frac{1}{2}(a^{2p}+a^{-2p})$

$=\frac{1}{2}\{(a^p+a^{-p})^2-2\}$

$=\frac{1}{2}(6^2-2)=17$

답 17

0328 $f(0)=3^n=4$이므로 $f(2)=3^{2m+n}=16$에서

$4\cdot 3^{2m}=16, \quad 3^{2m}=4 \quad \therefore 3^m=2\ (\because 3^m>0)$

$\therefore f(-1)=3^{-m+n}=\frac{3^n}{3^m}=\frac{4}{2}=2$

답 2

0329 $f(-a)f(2b)=25$에서

$5^a\cdot 5^{-2b}=25, \quad 5^{a-2b}=5^2$

$\therefore a-2b=2$ ...... ㉠ ⋯❶

$f(b-a)=5$에서 $\quad 5^{-(b-a)}=5$

$5^{a-b}=5 \quad \therefore a-b=1$ ...... ㉡ ⋯❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=0, b=-1$ ⋯❸

$\therefore a^2+b^2=1$ ⋯❹

답 1

채점 기준	비율
❶ ㉠의 식을 구할 수 있다.	30 %
❷ ㉡의 식을 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	10 %

0330 $y=2^x$의 그래프는 점 $(0, 1)$을 지나므로 $\quad a=1$

$2^a=b$이므로 $\quad b=2$

$2^b=c$이므로 $\quad c=2^2=4$

$\therefore a-b+c=1-2+4=3$

답 ①

0331 그래프가 점 $(-1, a)$를 지나므로

$a=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$

또 점 $(b, 32)$를 지나므로 $32=\left(\frac{1}{2}\right)^b$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^b=\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \quad \therefore b=-5$

$\therefore a+b=-3$

답 ③

0332 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 a, b라 하면 점 $\mathrm{P}(a, 9)$가 $y=3^x$의 그래프 위의 점이므로

$3^a=9, \quad 3^a=3^2 \quad \therefore a=2$

$\therefore \mathrm{P}(2, 9)$

또 점 $\mathrm{Q}(b, 9)$가 $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x$의 그래프 위의 점이므로

$\left(\frac{1}{9}\right)^b=9, \quad \left(\frac{1}{9}\right)^b=\left(\frac{1}{9}\right)^{-1} \quad \therefore b=-1$

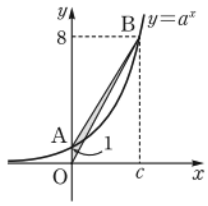
$\therefore \mathrm{Q}(-1, 9)$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=2-(-1)=3$

답 3

0333 함수 $y=a^x\,(a>1)$의 그래프는 점 $(0,\,1)$을 지나므로 $\quad b=1$

오른쪽 그림에서



$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot c=\frac{3}{2}$

$\therefore c=3$

따라서 점 B의 좌표는 $(3,\,8)$이고, 점 B는 $y=a^x$의 그래프 위의 점이므로 $\quad 8=a^3 \quad \therefore a=2$

$\therefore a+b+c=6$

답 6

0334 $A=27^{\frac{1}{4}}=(3^3)^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{3}{4}}$

$B=\left(\frac{1}{243}\right)^{-3}=(3^{-5})^{-3}=3^{15}$

$C=\sqrt[5]{81}=\sqrt[5]{3^4}=3^{\frac{4}{5}}$

이때 $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}<15$이고 밑이 1보다 크므로 $\quad 3^{\frac{3}{4}}<3^{\frac{4}{5}}<3^{15}$

$\therefore A<C<B$

답 ②

0335 $\sqrt[5]{0.5}=\sqrt[5]{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}}$

$\sqrt[4]{\frac{1}{32}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^5}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{4}}$

$\sqrt[3]{0.25}=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

이때 $\frac{1}{5}<\frac{2}{3}<\frac{5}{4}$이고 밑이 1보다 작으므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{4}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}}$

$\therefore \sqrt[4]{\frac{1}{32}}<\sqrt[3]{0.25}<\sqrt[5]{0.5}$

답 $\sqrt[4]{\frac{1}{32}}<\sqrt[3]{0.25}<\sqrt[5]{0.5}$

0336 $x=\frac{1}{2}$일 때, $\quad x^3=\frac{1}{8},\ x^2=\frac{1}{4},\ x=\frac{1}{2}$

이때 $\frac{1}{8}<\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$이고 밑이 1보다 크므로

$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{8}}<\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}}<\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

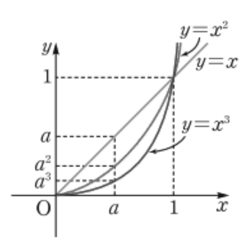
$\therefore \left(\frac{3}{2}\right)^{x^3}<\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2}<\left(\frac{3}{2}\right)^{x}$

따라서 가장 큰 수는 $\left(\frac{3}{2}\right)^x$, 가장 작은 수는 $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^3}$이다.

답 $\left(\frac{3}{2}\right)^x,\ \left(\frac{3}{2}\right)^{x^3}$

참고 $x>0$에서 세 함수 $y=x^3,\ y=x^2,\ y=x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $0<a<1$이면

$a^3<a^2<a$



0337 $y=4^{x+1}-1$에서

$x=-2$일 때, $\quad y=4^{-2+1}-1=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$

$x=1$일 때, $\quad y=4^{1+1}-1=16-1=15$

따라서 $M=15,\ m=-\frac{3}{4}$이므로

$M+m=\frac{57}{4}$

답 ③

0338 $y=3^{-x}\cdot2^x=\left(\frac{2}{3}\right)^x$에서

$x=-1$일 때, $\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{2}$

$x=3$일 때, $\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

따라서 치역은 $\left\{y\,\middle|\,\frac{8}{27}\le y\le\frac{3}{2}\right\}$이므로

$a=\frac{8}{27},\ b=\frac{3}{2}$

$\therefore ab=\frac{4}{9}$

답 ②

0339 $f(x)=5^{-a-x}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x+a}$에서 밑이 1보다 작으므로 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값을 갖는다. ··· ❶

즉 $f(2)=\frac{1}{125}$이므로 $\quad \left(\frac{1}{5}\right)^{2+a}=\left(\frac{1}{5}\right)^3$

$2+a=3 \quad \therefore a=1$ ··· ❷

따라서 $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}$이므로 구하는 최댓값은

$f(-2)=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2+1}=5$ ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $f(x)$가 $x=2$일 때 최솟값을 가짐을 알 수 있다.	20 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

0340 $f(x)=x^2-2x$로 놓으면 $\quad f(x)=(x-1)^2-1$

$y=\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x}$에서 밑이 1보다 작으므로 $f(x)$가 최소일 때 y는 최댓값을 갖는다.

따라서 y는 $f(x)=-1$, 즉 $x=1$일 때 최댓값 7을 가지므로

$a=1,\ b=7$

$\therefore a+b=8$

답 ①

0341 $f(x)=x^2-6x+5$로 놓으면 $\quad f(x)=(x-3)^2-4$

$0\le x\le4$에서 $f(0)=5,\ f(3)=-4,\ f(4)=-3$이므로

$-4\le f(x)\le5$

$y=3^{x^2-6x+5}$에서 밑이 1보다 크므로 y는

$f(x)=5$일 때 최대이고 최댓값은 $\quad 3^5$

$f(x)=-4$일 때 최소이고 최솟값은 $\quad 3^{-4}$

따라서 구하는 곱은 $\quad 3^5\cdot3^{-4}=3$

답 ④

0342 $f(x)=x^2-x+\frac{9}{4}$로 놓으면 $\quad f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2$

$f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 최솟값 2를 갖는다. ··· ❶

그런데 함수 $y=a^{f(x)}$도 최솟값을 가지므로 $\quad a>1$ ··· ❷

$y=a^{f(x)}$의 최솟값이 16이므로

$a^2=16$ $\quad\therefore a=4\ (\because a>1)$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

참고 $f(x)\geq 2$이므로 $0<a<1$이면 $\quad a^{f(x)}\leq a^2$
즉 $y=a^{f(x)}$의 최솟값은 없다.

0343 $f(x)=-x^2+2x+1$로 놓으면

$f(x)=-(x-1)^2+2$

$-1\leq x\leq 2$에서 $f(-1)=-2$, $f(1)=2$, $f(2)=1$이므로

$-2\leq f(x)\leq 2$

$y=a^{-x^2+2x+1}$에서 밑이 1보다 작으므로 $f(x)$가 최소일 때 y는 최댓값을 갖는다.

즉 y는 $f(x)=-2$일 때 최댓값 9를 가지므로

$a^{-2}=9,\quad a^2=\frac{1}{9}\quad\therefore a=\frac{1}{3}\ (\because 0<a<1)$

따라서 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2+2x+1}$이고 $f(x)=2$일 때 최솟값을 가지므로 구하는 최솟값은 $\quad\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

답 $\frac{1}{9}$

0344 $y=9^x-6\cdot 3^x+10=(3^x)^2-6\cdot 3^x+10$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$y=t^2-6t+10=(t-3)^2+1$

따라서 y는 $t=3$, 즉 $x=1$일 때 최솟값 1을 가지므로

$a=1,\ b=1$

$\therefore b-a=0$

답 ③

0345 $y=2^{x+2}-4^x+1=-(2^x)^2+4\cdot 2^x+1$

$2^x=t$로 놓으면 $0\leq x\leq 2$에서 $1\leq t\leq 4$이고

$y=-t^2+4t+1=-(t-2)^2+5$

따라서 y는 $t=2$일 때 최댓값 5, $t=4$일 때 최솟값 1을 가지므로

$M=5,\ m=1$

$\therefore M+m=6$

답 6

0346 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x-k\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+3=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-2k\left(\frac{1}{2}\right)^x+3$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$y=t^2-2kt+3=(t-k)^2-k^2+3$

(i) $k\leq 0$이면 $t>0$에서 최솟값을 갖지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k>0$이면 y는 $t=k$일 때 최솟값 $-k^2+3$을 가지므로

$-k^2+3=-1,\quad k^2=4$

$\therefore k=2\ (\because k>0)$

(i), (ii)에서 $\quad k=2$

답 2

0347 $f(x)=4\cdot 3^x+3^{-x+2}=4\cdot 3^x+\frac{9}{3^x}$

이때 $3^x>0$, $\frac{1}{3^x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$f(x)=4\cdot 3^x+\frac{9}{3^x}\geq 2\sqrt{4\cdot 3^x\cdot\frac{9}{3^x}}=12$

$\left(\text{단, 등호는 } 3^x=\frac{3}{2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 12이다.

답 12

라쎈 특강 산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때, $\quad\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

0348 $\left(\frac{1}{2}\right)^x>0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+4}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+4}\geq 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+4}}$

$=2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^4}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ (단, 등호는 $x=2$일 때 성립)

따라서 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 $\frac{1}{2}$을 가지므로

$a=2,\ b=\frac{1}{2}\quad\therefore ab=1$

답 ②

0349 $x+y+2=0$에서 $y=-x-2$이므로

$6^x+6^y=6^x+6^{-x-2}$

이때 $6^x>0$, $6^{-x-2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$6^x+6^{-x-2}\geq 2\sqrt{6^x\cdot 6^{-x-2}}=2\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{1}{3}$

(단, 등호는 $x=-1$일 때 성립)

따라서 6^x+6^y의 최솟값은 $\frac{1}{3}$이다.

답 $\frac{1}{3}$

0350 $5^x+5^{-x}=t$로 놓으면 $5^x>0$, $5^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=5^x+5^{-x}\geq 2\sqrt{5^x\cdot 5^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

이때

$25^x+25^{-x}=5^{2x}+5^{-2x}=(5^x+5^{-x})^2-2=t^2-2$

이므로 주어진 함수는

$y=-(t^2-2)+4t$

$=-t^2+4t+2$

$=-(t-2)^2+6\ (t\geq 2)$

따라서 $t=2$일 때 y의 최댓값은 6이다.

답 ②

0351 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}\cdot(\sqrt{3})^x=\frac{1}{27}$에서

$3^{-x^2}\cdot 3^{\frac{1}{2}x}=3^{-3},\quad 3^{-x^2+\frac{1}{2}x}=3^{-3}$

즉 $-x^2+\frac{1}{2}x=-3$이므로 $\quad 2x^2-x-6=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 주어진 방정식의 모든 실근의 합은 $\frac{1}{2}$이다.

답 $\frac{1}{2}$

0352 $4^{x^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3x+a}$에서 $2^{2x^2}=2^{3x-a}$이므로

$2x^2=3x-a$ $\quad\therefore 2x^2-3x+a=0$ …… ㉠

이때 주어진 방정식의 한 근이 3이므로 ㉠에 $x=3$을 대입하면

$18-9+a=0$ $\quad\therefore a=-9$ 답 ①

0353 $\frac{3^{-x^2+2}}{3^{x-1}}=\frac{1}{81}$에서 $3^{-x^2+2-(x-1)}=3^{-4}$

$\therefore 3^{-x^2-x+3}=3^{-4}$ ⋯ ❶

즉 $-x^2-x+3=-4$이므로 $x^2+x-7=0$ ⋯ ❷

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-7$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-1)^2-2\cdot(-7)=15$ ⋯ ❸

답 15

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 $3^{f(x)}=3^k$(k는 상수) 꼴로 정리할 수 있다.	40 %
❷ x에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	30 %
❸ $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0354 $3^{x+1}+3^{-x}=4$의 양변에 3^x을 곱하면

$3\cdot(3^x)^2+1=4\cdot3^x$ $\quad\therefore 3\cdot(3^x)^2-4\cdot3^x+1=0$

$3^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 $3t^2-4t+1=0$

$(3t-1)(t-1)=0$ $\quad\therefore t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=1$

즉 $3^x=\frac{1}{3}$ 또는 $3^x=1$이므로 $x=-1$ 또는 $x=0$

$\therefore \alpha=-1,\ \beta=0$ 또는 $\alpha=0,\ \beta=-1$

$\therefore \alpha+\beta=-1$ 답 -1

0355 $64^x+16^x=3\cdot4^{x+1}$에서 $(4^x)^3+(4^x)^2=12\cdot4^x$

$4^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^3+t^2-12t=0,$ $\quad t(t^2+t-12)=0$

$t(t+4)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=3$ $(\because t>0)$

즉 $4^\alpha=3$이므로 $2^\alpha=\sqrt{3}$ $(\because 2^\alpha>0)$ 답 ③

참고 $4^x=3$에서 $x=\log_4 3$이므로 $\alpha=\log_4 3$

0356 $\frac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}=3$에서 $2^x+2^{-x}=3(2^x-2^{-x})$

$2\cdot2^x-4\cdot2^{-x}=0$

양변에 2^x을 곱하면 $2\cdot(2^x)^2-4=0$

$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$2t^2-4=0,$ $\quad t^2=2$ $\quad\therefore t=\sqrt{2}$ $(\because t>0)$

즉 $2^x=\sqrt{2}$이므로 주어진 방정식의 해는 $x=\frac{1}{2}$ 답 $x=\frac{1}{2}$

0357 $a^{2x}+a^x-20=0$에서 $(a^x)^2+a^x-20=0$

$a^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 $t^2+t-20=0$ ⋯ ❶

$(t+5)(t-4)=0$ $\quad\therefore t=4$ $(\because t>0)$ ⋯ ❷

즉 $a^x=4$에서 방정식의 근이 $x=\frac{1}{2}$이므로 $a^{\frac{1}{2}}=4$

$\therefore a=4^2=16$ ⋯ ❸

답 16

채점 기준	비율
❶ t에 대한 방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ t의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

0358 (i) $x+3=0$, 즉 $x=-3$일 때, $2^0=7^0=1$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x+3\neq0$일 때, $x+5=7$에서 $x=2$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은 $-3+2=-1$ 답 ③

0359 (i) $5x=0$, 즉 $x=0$일 때, $2^0=4^0=1$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $5x\neq0$일 때, $3x+2=x+4$에서 $x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은 $x=0$ 또는 $x=1$

답 $x=0$ 또는 $x=1$

0360 (i) $x=1$일 때, $1^5=1^1$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x\neq1$일 때, $2x+3=x^2$에서 $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=3$ $(\because x>0)$

(i), (ii)에서 모든 근의 곱은 $1\cdot3=3$ 답 ①

0361 (i) $x+1=1$, 즉 $x=0$일 때, $1^0=1^3$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x+1\neq1$일 때, $4x=x+3$에서 $x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은 $x=0$ 또는 $x=1$

답 $x=0$ 또는 $x=1$

0362 $\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^y=12\\ \left(\frac{1}{3}\right)^{x+y}=27\end{cases}$에서 $\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^y=12\\ \left(\frac{1}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^y=27\end{cases}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=X,\ \left(\frac{1}{3}\right)^y=Y$ $(X>0,\ Y>0)$로 놓으면

$\begin{cases}X+Y=12\\ XY=27\end{cases}$

이 연립방정식을 풀면 $X=3,\ Y=9$ 또는 $X=9,\ Y=3$

즉 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=3,\ \left(\frac{1}{3}\right)^y=9$ 또는 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=9,\ \left(\frac{1}{3}\right)^y=3$이므로

$x=-1,\ y=-2$ 또는 $x=-2,\ y=-1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=5$ 답 ⑤

0363 $\begin{cases}3^x+2\cdot2^y=25\\ 3\cdot3^x-2^y=19\end{cases}$에서 $3^x=X,\ 2^y=Y$ $(X>0,\ Y>0)$로 놓으면 $\begin{cases}X+2Y=25\\ 3X-Y=19\end{cases}$

이 연립방정식을 풀면 $X=9,\ Y=8$

즉 $3^x=9,\ 2^y=8$이므로 $x=2,\ y=3$

$\therefore \alpha\beta=6$ 답 ③

0364 $\begin{cases} 2^x+2^y=7 \\ 4^x+4^y=29 \end{cases}$에서 $\begin{cases} 2^x+2^y=7 \\ (2^x)^2+(2^y)^2=29 \end{cases}$

$2^x=X$, $2^y=Y$ $(X>0, Y>0)$로 놓으면

$$\begin{cases} X+Y=7 \\ X^2+Y^2=29 \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면

$X=2$, $Y=5$ 또는 $X=5$, $Y=2$

$\therefore$ $2^x=2$, $2^y=5$ 또는 $2^x=5$, $2^y=2$

그런데 $\alpha>\beta$이므로 $\quad 2^\alpha=5$, $2^\beta=2$

$\therefore$ $2^\alpha-2^\beta=3$ 답 3

0365 $25^x-2\cdot5^{x+1}+5=0$에서 $\quad (5^x)^2-10\cdot5^x+5=0$

$5^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-10t+5=0$

이 이차방정식의 두 근은 5^α, 5^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\quad 5^\alpha\cdot5^\beta=5$, $\quad 5^{\alpha+\beta}=5$

$\therefore$ $\alpha+\beta=1$ 답 ①

0366 $9^x-7\cdot3^x+9=0$에서 $\quad (3^x)^2-7\cdot3^x+9=0$

$3^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-7t+9=0$ ⋯ ❶

이 이차방정식의 두 근은 3^α, 3^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\quad 3^\alpha+3^\beta=7$, $3^\alpha\cdot3^\beta=9$ ⋯ ❷

$\therefore$ $9^\alpha+9^\beta=(3^\alpha)^2+(3^\beta)^2=(3^\alpha+3^\beta)^2-2\cdot3^\alpha\cdot3^\beta$

$=7^2-2\cdot9=31$ ⋯ ❸

답 31

채점 기준	비율
❶ t에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ $3^\alpha+3^\beta$, $3^\alpha\cdot3^\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $9^\alpha+9^\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0367 $4^x-4\cdot2^x+k=0$에서 $\quad (2^x)^2-4\cdot2^x+k=0$

$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-4t+k=0$ ⋯⋯ ㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 t에 대한 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-k>0 \qquad \therefore k<4$$

(ii) (두 근의 합)$=4>0$

(iii) (두 근의 곱)$=k>0$

이상에서 $\quad 0<k<4$ 답 $0<k<4$

라쎈 특강 이차방정식의 실근의 부호

계수가 실수인 이차방정식의 판별식을 D, 두 실근을 α, β라 하면

① 두 근이 모두 양 $\Longleftrightarrow D\ge0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

② 두 근이 모두 음 $\Longleftrightarrow D\ge0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

③ 두 근이 서로 다른 부호 $\Longleftrightarrow \alpha\beta<0$

0368 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-x+2}<\left(\frac{1}{16}\right)^{2-3x}$에서 $\quad \left(\frac{1}{4}\right)^{-x+2}<\left(\frac{1}{4}\right)^{4-6x}$

밑이 1보다 작으므로

$-x+2>4-6x$, $\quad 5x>2 \quad \therefore x>\frac{2}{5}$ 답 ②

0369 $\left(\frac{1}{36}\right)^{x^2+x-4}\ge\left(\frac{1}{6}\right)^{x^2}$에서 $\quad \left(\frac{1}{6}\right)^{2x^2+2x-8}\ge\left(\frac{1}{6}\right)^{x^2}$

밑이 1보다 작으므로

$2x^2+2x-8\le x^2$, $\quad x^2+2x-8\le0$

$(x+4)(x-2)\le0 \quad \therefore -4\le x\le2$

따라서 $\alpha=-4$, $\beta=2$이므로 $\quad \alpha+\beta=-2$ 답 -2

0370 $3^{2x}<\frac{\sqrt{3}}{9}<27\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$에서 $\quad 3^{2x}<3^{-\frac{3}{2}}<3^{x+3}$

밑이 1보다 크므로 $\quad 2x<-\frac{3}{2}<x+3$

(i) $2x<-\frac{3}{2}$에서 $\quad x<-\frac{3}{4}$

(ii) $-\frac{3}{2}<x+3$에서 $\quad x>-\frac{9}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-\frac{9}{2}<x<-\frac{3}{4}$이므로 정수 x는 -4, -3, -2, -1의 4개이다. 답 ③

0371 $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}\ge\left(\frac{1}{2}\right)^{g(x)}$에서 밑이 1보다 작으므로

$f(x)\le g(x)$

따라서 주어진 부등식의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 아래쪽에 있거나 만날 때의 x의 값의 범위이므로

$x\le b$ 또는 $x\ge c$ 답 ⑤

0372 (i) $x=1$일 때, $1^5=1^2$이므로 부등식이 성립한다.

(ii) $0<x<1$일 때, $-x+6\le2x$에서 $\quad x\ge2$

그런데 $0<x<1$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x>1$일 때, $-x+6\ge2x$에서 $\quad x\le2$

그런데 $x>1$이므로 $\quad 1<x\le2$

이상에서 주어진 부등식의 해는 $\quad 1\le x\le2$ 답 $1\le x\le2$

0373 $x>1$이므로 $\quad 4x+4>x^2-1$, $\quad x^2-4x-5<0$

$(x+1)(x-5)<0 \quad \therefore -1<x<5$

그런데 $x>1$이므로 $\quad 1<x<5$ 답 ②

0374 (i) $x=1$일 때, $1^{-17}=1^3$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(ii) $0<x<1$일 때, $x^2-18>3x$에서 $\quad x^2-3x-18>0$

$(x+3)(x-6)>0 \quad \therefore x<-3$ 또는 $x>6$

그런데 $0<x<1$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x>1$일 때, $x^2-18<3x$에서 $\quad x^2-3x-18<0$

$(x+3)(x-6)<0 \quad \therefore -3<x<6$

그런데 $x>1$이므로 $\quad 1<x<6$

이상에서 주어진 부등식의 해는 $1<x<6$이므로 정수 x는 2, 3, 4, 5의 4개이다. 답 ③

0375 $3^{2x}-5\cdot3^{x+1}+14<0$에서 $\quad (3^x)^2-15\cdot3^x+14<0$

$3^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-15t+14<0$

$(t-1)(t-14)<0 \quad \therefore 1<t<14$

즉 $1<3^x<14$이고 밑이 1보다 크므로

$3^\alpha=1$, $3^\beta=14 \quad \therefore 3^\alpha+3^\beta=15$ 답 15

0376 $2^x-2^{1-x}\geq 1$의 양변에 2^x을 곱하면

$(2^x)^2-2\geq 2^x$, $\quad (2^x)^2-2^x-2\geq 0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-t-2\geq 0$

$(t+1)(t-2)\geq 0 \quad \therefore t\leq -1$ 또는 $t\geq 2$

그런데 $t>0$이므로 $\quad t\geq 2$

즉 $2^x\geq 2$에서 밑이 1보다 크므로 $\quad x\geq 1$ 　　　　답 $x\geq 1$

0377 $5^x>5^{-2x+1}$에서 밑이 1보다 크므로

$x>-2x+1$, $\quad 3x>1$

$\therefore x>\frac{1}{3}$ …… ㉠ ⋯➊

$\left(\frac{1}{4}\right)^x-6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-16<0$에서 $\quad \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-16<0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-6t-16<0$

$(t+2)(t-8)<0 \quad \therefore -2<t<8$

그런데 $t>0$이므로 $\quad 0<t<8$

즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$에서 밑이 1보다 작으므로

$x>-3$ …… ㉡ ⋯➋

㉠, ㉡에서 주어진 연립부등식의 해는 $\quad x>\frac{1}{3}$ ⋯➌

답 $x>\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
➊ 부등식 $5^x>5^{-2x+1}$의 해를 구할 수 있다.	30 %
➋ 부등식 $\left(\frac{1}{4}\right)^x-6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-16<0$의 해를 구할 수 있다.	50 %
➌ 주어진 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %

0378 $\left(\frac{1}{9}\right)^x-p\left(\frac{1}{3}\right)^x+q<0$에서 $\quad \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-p\left(\frac{1}{3}\right)^x+q<0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-pt+q<0$ …… ㉠

이때 $-1<x<2$에서

$\left(\frac{1}{3}\right)^2<\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \quad \therefore \frac{1}{9}<t<3$

해가 $\frac{1}{9}<t<3$이고 t^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(t-\frac{1}{9}\right)(t-3)<0 \quad \therefore t^2-\frac{28}{9}t+\frac{1}{3}<0$

이것이 ㉠과 일치하므로 $\quad p=\frac{28}{9}$, $q=\frac{1}{3}$

$\therefore 9(p+q)=31$ 　　　　답 ②

0379 $16^x-4^{x+1}+2k\geq 0$에서 $\quad (4^x)^2-4\cdot 4^x+2k\geq 0$

$4^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-4t+2k\geq 0$

$\therefore (t-2)^2+2k-4\geq 0$

위의 부등식이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면

$2k-4\geq 0 \quad \therefore k\geq 2$ 　　　　답 $k\geq 2$

0380 $49^x-2\cdot 7^{x+1}-k>0$에서 $\quad (7^x)^2-14\cdot 7^x-k>0$

$7^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-14t-k>0$ ⋯➊

$\therefore (t-7)^2-k-49>0$

앞의 부등식이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면

$-k-49>0 \quad \therefore k<-49$ ⋯➋

따라서 정수 k의 최댓값은 -50이다. ⋯➌

답 -50

채점 기준	비율
➊ t에 대한 부등식을 세울 수 있다.	40 %
➋ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
➌ 정수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

0381 $4^x+2^{x+1}+k\geq 0$에서 $\quad (2^x)^2+2\cdot 2^x+k\geq 0$

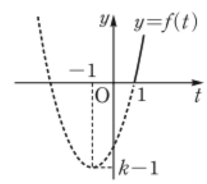
$2^x=t$로 놓으면 $x\geq 0$일 때 $t\geq 1$이고

$t^2+2t+k\geq 0$

위의 부등식이 $t\geq 1$인 모든 실수 t에 대하여 성립해야 하므로

$f(t)=t^2+2t+k=(t+1)^2+k-1$

로 놓으면 오른쪽 그림에서 $f(1)\geq 0$이어야 한다. 즉



$f(1)=k+3\geq 0$

$\therefore k\geq -3$

따라서 실수 k의 최솟값은 -3이다.

답 ②

0382 10마리의 박테리아가 4시간 후 160마리가 되므로

$10a^4=160$, $\quad a^4=16$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

따라서 10마리의 박테리아가 x시간 후 $10\cdot 2^x$마리가 되므로

$10\cdot 2^x=1280$, $\quad 2^x=128=2^7$

$\therefore x=7$

즉 박테리아는 처음으로부터 7시간 후에 1280마리가 된다.

답 7시간

0383 15년 후에 방사성 물질의 양이 처음의 양의 $\frac{1}{2}$이 되므로 $15n$년 후의 방사성 물질의 양은 처음의 양의 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$이 된다.

이때 $\frac{1}{64}=\left(\frac{1}{2}\right)^6$이므로 $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^6 \quad \therefore n\geq 6$

따라서 방사성 물질의 양이 처음의 양의 $\frac{1}{64}$ 이하로 줄어드는 데 최소 $15\cdot 6=90$(년)이 걸린다. 　　　　답 ④

0384 x시간 후 두 세균배양기에 있는 세균 A, B의 수는 각각

2^x, $2\cdot 4^x$

이때 세균의 수의 합이 136 이상이 되려면

$2^x+2\cdot 4^x\geq 136$, $\quad 2^x+2\cdot(2^x)^2\geq 136$

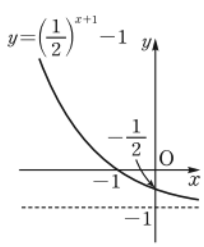
$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad 2t^2+t-136\geq 0$

$(2t+17)(t-8)\geq 0 \quad \therefore t\geq 8\ (\because t>0)$

즉 $2^x\geq 8$에서 $x\geq 3$이므로 최소 3시간이 지나야 한다. 　　　　답 3시간

0385 전략 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y-b=f(x-a)$이고, 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=f(-x)$임을 이용한다.

풀이 ㄱ, ㄴ, ㄹ. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-1$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-1$의 그래프는 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면을 지나고, 점근선의 방정식은 $y=-1$이다.

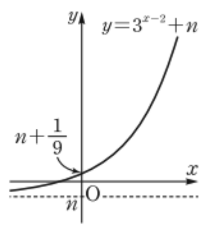
ㄷ. $y=2^{x-1}+1$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하면

$$-y=2^{-x-1}+1 \qquad \therefore y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-1$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

0386 전략 주어진 함수의 그래프의 개형을 그린 후 그래프가 제4사분면을 지나지 않을 조건을 찾는다.

풀이 함수 $y=3^{x-2}+n$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 그래프가 제4사분면을 지나지 않으려면 $x=0$일 때



$$y=3^{-2}+n=n+\frac{1}{9}$$

에서 $n+\frac{1}{9}\geq 0$, 즉 $n\geq -\frac{1}{9}$이어야 한다.

따라서 n의 최솟값은 $-\frac{1}{9}$이다. 답 $-\frac{1}{9}$

0387 전략 함수 $y=a^x(0<a<1)$에서 x가 최소일 때 y는 최대, x가 최대일 때 y는 최소가 됨을 이용한다.

풀이 $0<a<1$이므로 함수 $f(x)=a^x$은 $x=-1$일 때 최댓값 $f(-1)$, $x=2$일 때 최솟값 $f(2)$를 갖는다.

즉 $f(-1)=a^{-1}=\frac{5}{4}$에서 $\quad a=\frac{4}{5}$

따라서 $m=f(2)=\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$이므로

$$am=\frac{4}{5}\cdot\frac{16}{25}=\frac{64}{125}$$

답 ③

0388 전략 지수법칙을 이용하여 밑을 2로 같게 한 후 지수에 대한 방정식을 세운다.

풀이 $4^{x+3}=2^{x^2-2}$에서 $2^{2x+6}=2^{x^2-2}$이므로

$2x+6=x^2-2, \quad x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 모든 근의 곱은 $\quad -8$ 답 -8

0389 전략 지수법칙을 이용하여 각 방정식을 간단히 한 후 지수에 대한 방정식을 세운다.

풀이 $32^x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^y=16$에서 $\quad 2^{5x}\cdot 2^{-y}=2^4, \quad 2^{5x-y}=2^4$

$\therefore 5x-y=4$ …… ㉠ ⋯ ❶

$4^{x-2}\cdot 8^y=2$에서 $\quad 2^{2(x-2)}\cdot 2^{3y}=2, \quad 2^{2x+3y-4}=2$

즉 $2x+3y-4=1$이므로

$2x+3y=5$ …… ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad x=1,\ y=1$ ⋯ ❸

답 $x=1,\ y=1$

채점 기준	비율
❶ $32^x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^y=16$에서 지수에 대한 방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ $4^{x-2}\cdot 8^y=2$에서 지수에 대한 방정식을 세울 수 있다.	40 %
❸ 연립방정식의 해를 구할 수 있다.	20 %

0390 전략 함수 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=a^{x-m}+n$임을 이용한다.

풀이 $y=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 그래프의 식은

$y=a^{-x}$

이 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동시킨 그래프의 식은

$y-2=a^{-(x-3)} \quad \therefore y=a^{3-x}+2$

$y=a^{3-x}+2$의 그래프가 점 $(1, 4)$를 지나므로 $\quad 4=a^2+2$

$a^2=2 \quad \therefore a=\sqrt{2}\ (\because a>0)$ 답 ①

0391 전략 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이면 $g(a)=b$일 때, $f(b)=a$이다.

풀이 $g(x)$가 $f(x)=5^x$의 역함수이므로

$g\left(\frac{1}{25}\right)=a$라 하면 $\quad f(a)=\frac{1}{25}$

$5^a=5^{-2} \quad \therefore a=-2$

$g(25)=b$라 하면 $\quad f(b)=25$

$5^b=5^2 \quad \therefore b=2$

$\therefore g\left(\frac{1}{25}\right)g(25)=-2\cdot 2=-4$ 답 ②

0392 전략 두 점 C, D의 x좌표를 a로 나타낸다.

풀이 두 점 C, D의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하자.

두 점 $\mathrm{A}(a, 4^a)$, $\mathrm{C}(x_1, 2^{x_1})$의 y좌표가 같으므로 $\quad 2^{x_1}=4^a=2^{2a}$

$\therefore x_1=2a$

또 두 점 $\mathrm{B}(a, 2^a)$, $\mathrm{D}(x_2, 4^{x_2})$의 y좌표가 같으므로 $\quad 4^{x_2}=2^a$

$2^{2x_2}=2^a \quad \therefore x_2=\frac{a}{2}$

$$\therefore \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\frac{a-\frac{a}{2}}{2a-a}=\frac{\frac{a}{2}}{a}=\frac{1}{2}\ (\because a>0)$$

답 $\frac{1}{2}$

0393 전략 밑을 2로 같게 한 후 지수함수의 성질을 이용한다.

풀이 $A=\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2^3}=2^{\frac{3}{4}}$, $B=0.5^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}$,

$C=\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^4}=2^{\frac{4}{3}}$

이때 $\frac{1}{2}<\frac{3}{4}<\frac{4}{3}$이고 밑이 1보다 크므로 $\quad 2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{3}{4}}<2^{\frac{4}{3}}$

$\therefore B<A<C$ 답 ③

0394 전략 $g(x)=t$로 치환하여 함수 $(f\circ g)(x)$를 t에 대한 함수로 나타낸다.

풀이 $g(x)=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$

이므로 $g(x)=t$라 하면 $\quad t\leq 1$ ⋯ ❶

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=5^t$에서 밑이 1보다 크므로

$(f\circ g)(x)$는 $t=1$, 즉 $x=2$일 때 최댓값 5를 갖는다.

따라서 $a=2$, $M=5$이므로 ⋯ ❷

$aM=10$ ⋯ ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ $g(x)=t$로 놓고 t의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ a, M의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ aM의 값을 구할 수 있다.	10 %

0395 전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 $f(x)=5^{x+a}+\frac{1}{5^{x-a}}+3=5^a\left(5^x+\frac{1}{5^x}\right)+3$

이때 $5^x>0$, $\frac{1}{5^x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$f(x)=5^a\left(5^x+\frac{1}{5^x}\right)+3$$
$$\geq 5^a\cdot 2\sqrt{5^x\cdot\frac{1}{5^x}}+3=2\cdot 5^a+3$$

(단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

따라서 $2\cdot 5^a+3=53$이므로 $2\cdot 5^a=50$

$5^a=25=5^2$ $\therefore a=2$

답 2

0396 전략 $2^x=t$로 치환하여 주어진 방정식을 t에 대한 이차방정식으로 나타낸 후 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 $2^{2x}-5\cdot 2^x+2k=0$에서 $(2^x)^2-5\cdot 2^x+2k=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-5t+2k=0$

이 이차방정식의 두 근이 2^α, 2^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $2^\alpha\cdot 2^\beta=2k$, $2^{\alpha+\beta}=2k$

이때 $\alpha+\beta=2$이므로

$2^2=2k$ $\therefore k=2$

답 ⑤

0397 전략 밑을 5로 같게 한 후 지수에 대한 부등식을 세운다.

풀이 $25^{-x-2}<5^{4-x^2}<\left(\frac{1}{5}\right)^{x+2}$에서

$5^{2(-x-2)}<5^{4-x^2}<5^{-(x+2)}$

$5^{-2x-4}<5^{4-x^2}<5^{-x-2}$

밑이 1보다 크므로 $-2x-4<4-x^2<-x-2$

(i) $-2x-4<4-x^2$에서

$x^2-2x-8<0$, $(x+2)(x-4)<0$

$\therefore -2<x<4$

(ii) $4-x^2<-x-2$에서

$x^2-x-6>0$, $(x+2)(x-3)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>3$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $3<x<4$

따라서 $a=3$, $b=4$이므로 $ab=12$

답 ④

0398 전략 해가 $p\leq x\leq q$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-p)(x-q)\leq 0$임을 이용한다.

풀이 $49^x+a\cdot 7^{x+1}+b\leq 0$에서 $(7^x)^2+7a\cdot 7^x+b\leq 0$

$7^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2+7at+b\leq 0$ …… ㉠

이때 $1\leq x\leq 2$에서 $7^1\leq 7^x\leq 7^2$ $\therefore 7\leq t\leq 49$

해가 $7\leq t\leq 49$이고 t^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(t-7)(t-49)\leq 0$ $\therefore t^2-56t+343\leq 0$

이것이 ㉠과 일치하므로

$7a=-56$, $b=343$ $\therefore a=-8$, $b=343$

$\therefore a+b=335$

답 335

0399 전략 a^x 꼴이 반복되는 지수방정식 또는 지수부등식을 풀 때에는 $a^x=t$로 치환하여 t에 대한 방정식 또는 부등식을 푼다.

풀이 $4^x-10\cdot 2^x+16=0$에서 $(2^x)^2-10\cdot 2^x+16=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-10t+16=0$

$(t-2)(t-8)=0$ $\therefore t=2$ 또는 $t=8$

즉 $2^x=2$ 또는 $2^x=8$이므로

$x=1$ 또는 $x=3$ $\therefore A=\{1, 3\}$ ··· ❶

$\left(\frac{1}{9}\right)^{x-1}<2-17\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$에서 $9\left(\frac{1}{9}\right)^x+17\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-2<0$

$9\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2+17\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-2<0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=s\ (s>0)$로 놓으면 $9s^2+17s-2<0$

$(s+2)(9s-1)<0$ $\therefore -2<s<\frac{1}{9}$

그런데 $s>0$이므로 $0<s<\frac{1}{9}$

즉 $\left(\frac{1}{3}\right)^x<\frac{1}{9}$에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^2$

밑이 1보다 작으므로 $x>2$ $\therefore B=\{x\,|\,x>2\}$ ··· ❷

$\therefore A\cap B=\{3\}$ ··· ❸

답 $\{3\}$

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 구할 수 있다.	40 %
❷ 집합 B를 구할 수 있다.	50 %
❸ $A\cap B$를 구할 수 있다.	10 %

0400 전략 먼저 주어진 식에 $t=15$, $W_0=w_0$, $W=3w_0$을 대입하여 지수방정식을 푼다.

풀이 $t=15$일 때, $W_0=w_0$, $W=3w_0$이므로

$3w_0=\frac{w_0}{2}10^{15a}(1+10^{15a})$, $10^{30a}+10^{15a}=6$

$\therefore (10^{15a})^2+10^{15a}-6=0$

$10^{15a}=X\ (X>0)$로 놓으면 $X^2+X-6=0$

$(X+3)(X-2)=0$ $\therefore X=2\ (\because X>0)$

$\therefore 10^{15a}=2$

$t=30$일 때, 기대자산은

$$\frac{w_0}{2}10^{30a}(1+10^{30a})=\frac{w_0}{2}(10^{15a})^2\{1+(10^{15a})^2\}$$
$$=\frac{w_0}{2}\cdot 2^2(1+2^2)$$
$$=10w_0$$

$\therefore k=10$

답 ②

0401 전략 (a, b)가 집합 A의 원소이므로 $b=3^a$임을 이용하여 보기의 순서쌍들이 집합 A의 원소인지 확인한다.

풀이 (a, b)가 집합 A의 원소이므로

$b=3^a$ …… ㉠

ㄱ. $y=3^x$의 x에 $-a$를 대입하면

$y=3^{-a}=\frac{1}{3^a}=\frac{1}{b}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \left(-a, \frac{1}{b}\right)\in A$

ㄴ. $y=3^x$의 x에 $3a$를 대입하면

$y=3^{3a}=(3^a)^3=b^3$ ($\because$ ㉠)

$\therefore (3a,\ b^3)\in A$

ㄷ. $y=3^x$의 x에 $\dfrac{a}{3}$를 대입하면

$y=3^{\frac{a}{3}}=(3^a)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3^a}=\sqrt[3]{b}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \left(\dfrac{a}{3},\ \dfrac{b}{27}\right)\notin A$

ㄹ. $y=3^x$의 x에 $a-1$을 대입하면

$y=3^{a-1}=3^a\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{b}{3}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \left(a-1,\ \dfrac{b}{3}\right)\in A$

이상에서 집합 A의 원소인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

참고 $(a,\ b)$가 집합 A의 원소라는 것은 좌표평면에서 점 $(a,\ b)$가 함수 $y=3^x$의 그래프 위의 점임을 나타낸다.

0402 전략 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 이은 선분을 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$임을 이용한다.

풀이 점 A는 함수 $y=3^x$의 그래프 위의 점이고 y좌표가 $\dfrac{1}{3}$이므로

$\dfrac{1}{3}=3^x$에서 $x=-1$ $\therefore$ A$\left(-1,\ \dfrac{1}{3}\right)$

점 B의 좌표를 $(a,\ 3^a)$이라 하면 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot a+2\cdot(-1)}{1+2},\ \frac{1\cdot 3^a+2\cdot\frac{1}{3}}{1+2}\right),\ \text{즉}\ \left(\frac{a-2}{3},\ \frac{3^a+\frac{2}{3}}{3}\right)$$

이때 점 C는 y축 위에 있으므로

$\dfrac{a-2}{3}=0$ $\therefore a=2$

따라서 점 B의 y좌표는 $3^2=9$ 답 ⑤

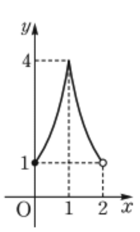
다른풀이 $3^x=\dfrac{1}{3}$에서 $x=-1$ $\therefore$ A$\left(-1,\ \dfrac{1}{3}\right)$

점 A와 y축 사이의 거리가 1이므로 점 B와 y축 사이의 거리는 2이다.

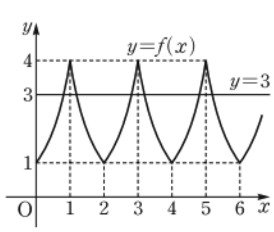
따라서 점 B의 x좌표가 2이므로 y좌표는 $3^2=9$

0403 전략 방정식 $f(x)-3=0$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=3$의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 조건 (가)에 의하여 $0\le x<2$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같고, 조건 (나)에 의하여 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

방정식 $f(x)-3=0$, 즉 $f(x)=3$의 실근의 개수는 위의 그림에서 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=3$의 교점의 개수와 같다.

이때 $0\le x<2$에서 방정식 $f(x)=3$의 실근의 개수는 2이므로 구하는 실근의 개수는 $2\cdot 10=20$ 답 20

0404 전략 $3^x+3^{-x}=t$로 놓고 주어진 함수를 t에 대한 이차함수로 나타낸다.

풀이 $3^x+3^{-x}=t$로 놓으면 $3^x>0$, $3^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=3^x+3^{-x}\ge 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립) ⋯ ❶

이때

$9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2=t^2-2$

이므로 주어진 함수는

$y=t^2-2-6t+k=(t-3)^2-11+k\ (t\ge 2)$ ⋯ ❷

따라서 $t=3$일 때 y는 최솟값 $-11+k$를 가지므로

$-11+k=1$ $\therefore k=12$ ⋯ ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ t의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 함수를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0405 전략 $5^x=t\ (t>0)$로 놓고 주어진 방정식을 t에 대한 이차방정식으로 나타낸다.

풀이 $5^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-5t+k=0$ …… ㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가져야 하므로

$x>0$에서 $t>1$

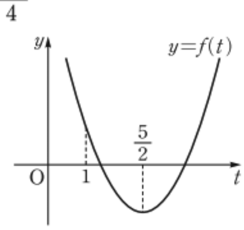
즉 이차방정식 ㉠은 $t>1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4k>0$ $\therefore k<\dfrac{25}{4}$

(ii) $f(t)=t^2-5t+k$라 하면 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로 $f(1)>0$에서

$1-5+k>0$ $\therefore k>4$



(i), (ii)에서 $4<k<\dfrac{25}{4}$

따라서 정수 k는 5, 6의 2개이다. 답 ②

라쎈 특강 이차방정식의 근의 분리

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라 하고, $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 상수 p, $q\ (p<q)$에 대하여 다음이 성립한다.

① 두 근이 모두 p보다 크다.

$\iff D\ge 0,\ f(p)>0,\ -\dfrac{b}{2a}>p$

② 두 근이 모두 p보다 작다.

$\iff D\ge 0,\ f(p)>0,\ -\dfrac{b}{2a}<p$

③ 두 근 사이에 p가 있다.

$\iff f(p)<0$

④ 두 근이 모두 p, q 사이에 있다.

$\iff D\ge 0,\ f(p)>0,\ f(q)>0,\ p<-\dfrac{b}{2a}<q$

04 로그함수

Ⅰ. 지수함수와 로그함수

0406 답 ㄱ, ㄴ

0407 주어진 함수는 $\{x|x$는 실수$\}$에서 $\{y|y>0\}$으로의 일대일 대응이다.
$y=7^x$에서 $\quad x=\log_7 y$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$\quad y=\log_7 x$ 답 $y=\log_7 x$

참고 $y=\log_7 x$에서 정의역 $\{x|x>0\}$은 생략할 수 있다.

0408 주어진 함수는 $\{x|x>0\}$에서 $\{y|y$는 실수$\}$로의 일대일대응이다.
$y=\log_{\frac{1}{2}} x$에서 $\quad x=\left(\frac{1}{2}\right)^y$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$\quad y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 답 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

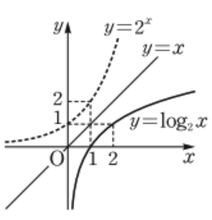
0409 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\log_3 \frac{1}{3}=\log_3 3^{-1}=-1$ 답 -1

0410 $f(\sqrt{3})=\log_3\sqrt{3}=\log_3 3^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$,
$f(9)=\log_3 9=\log_3 3^2=2\log_3 3=2$
$\quad \therefore f(\sqrt{3})f(9)=1$ 답 1

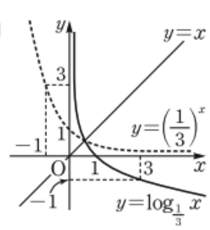
0411 $f(2)=\log_{\frac{1}{2}} 2=\log_{2^{-1}} 2=-1$ 답 -1

0412 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2=2$,
$f(8)=\log_{\frac{1}{2}} 8=\log_{2^{-1}} 2^3=-3$
$\quad \therefore f\left(\frac{1}{4}\right)f(8)=-6$ 답 -6

0413 답



0414 답



0415 답 ○

0416 답 ○

0417 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. 답 ×

0418 그래프가 점 $(1, 0)$을 지난다. 답 ×

0419 답 ○

0420 $2\log_3 2=\log_3 2^2=\log_3 4$이고 $4<5$이다.
이때 함수 $y=\log_3 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로
$\quad \log_3 4<\log_3 5 \quad \therefore 2\log_3 2<\log_3 5$
답 $2\log_3 2<\log_3 5$

0421 $6<8$이고 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}} x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로
$\quad \log_{\frac{1}{4}} 8<\log_{\frac{1}{4}} 6$ 답 $\log_{\frac{1}{4}} 8<\log_{\frac{1}{4}} 6$

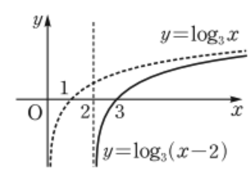
0422 답 $y=\log_{\frac{1}{5}}(x+2)+1$

0423 $-y=\log_{\frac{1}{5}} x$에서 $\quad y=-\log_{\frac{1}{5}} x$ 답 $y=-\log_{\frac{1}{5}} x$

0424 답 $y=\log_{\frac{1}{5}}(-x)$

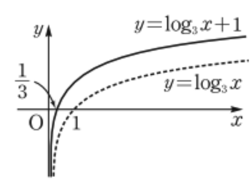
0425 $-y=\log_{\frac{1}{5}}(-x)$에서 $\quad y=-\log_{\frac{1}{5}}(-x)$
답 $y=-\log_{\frac{1}{5}}(-x)$

0426 $y=\log_3(x-2)$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 정의역은 $\{x|x>2\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=2$이다.



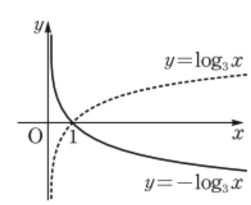
답 풀이 참조

0427 $y=\log_3 x+1$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 정의역은 $\{x|x>0\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=0$이다.



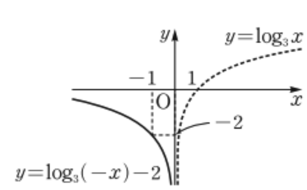
답 풀이 참조

0428 $y=-\log_3 x$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 정의역은 $\{x|x>0\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=0$이다.



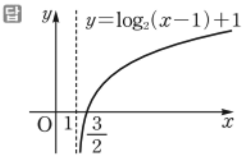
답 풀이 참조

0429 $y=\log_3(-x)-2$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 정의역은 $\{x|x<0\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=0$이다.

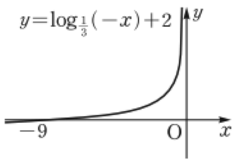


답 풀이 참조

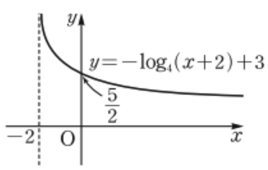
0430 답



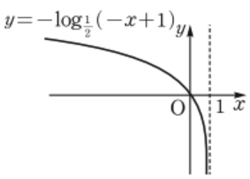
0431 답



0432 답



0433 답



0434 함수 $y=\log_4 x$에서

$x=\frac{1}{4}$일 때, $y=\log_4 \frac{1}{4}=\log_4 4^{-1}=-1$

$x=64$일 때, $y=\log_4 64=\log_4 4^3=3$

따라서 최댓값은 3, 최솟값은 -1이다.

답 최댓값: 3, 최솟값: -1

0435 함수 $y=\log_{\frac{1}{8}} x$에서

$x=\frac{1}{64}$일 때, $y=\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{64}=\log_{\frac{1}{8}} \left(\frac{1}{8}\right)^2=2$

$x=8$일 때, $y=\log_{\frac{1}{8}} 8=\log_{\frac{1}{8}} \left(\frac{1}{8}\right)^{-1}=-1$

따라서 최댓값은 2, 최솟값은 -1이다.

답 최댓값: 2, 최솟값: -1

0436 함수 $y=\log_3(x+1)-3$에서

$x=2$일 때, $y=\log_3 3-3=1-3=-2$

$x=8$일 때, $y=\log_3 9-3=\log_3 3^2-3=-1$

따라서 최댓값은 -1, 최솟값은 -2이다.

답 최댓값: -1, 최솟값: -2

0437 진수의 조건에서 $2x+1>0$이므로

$x>-\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\log_2(2x+1)=1$에서 $2x+1=2$

$2x=1$ $\therefore x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{2}$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다. 답 $x=\frac{1}{2}$

0438 밑의 조건에서 $x>0$, $x\neq1$ …… ㉠

$\log_x 7=-2$에서 $x^{-2}=7$, $x^2=\frac{1}{7}$

$\therefore x=\pm\frac{\sqrt{7}}{7}$

㉠에 의하여 구하는 해는 $x=\frac{\sqrt{7}}{7}$이다. 답 $x=\frac{\sqrt{7}}{7}$

0439 진수의 조건에서 $2x-7>0$, $x>0$이므로

$x>\frac{7}{2}$, $x>0$ $\therefore x>\frac{7}{2}$ …… ㉠

$\log_3(2x-7)=\log_3 x$에서 $2x-7=x$

$\therefore x=7$

$x=7$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다. 답 $x=7$

0440 진수의 조건에서 $5x+6>0$, $x>0$이므로

$x>-\frac{6}{5}$, $x>0$ $\therefore x>0$ …… ㉠

$\log_4(5x+6)=\log_2 x$에서 $\log_4(5x+6)=\log_4 x^2$이므로

$5x+6=x^2$, $x^2-5x-6=0$

$(x+1)(x-6)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=6$

㉠에 의하여 구하는 해는 $x=6$이다. 답 $x=6$

0441 진수의 조건에서 $x+2>0$, $5x+24>0$이므로

$x>-2$, $x>-\frac{24}{5}$ $\therefore x>-2$ …… ㉠

$\log_{\sqrt{7}}(x+2)=\log_7(5x+24)$에서 $\log_7(x+2)^2=\log_7(5x+24)$이므로

$(x+2)^2=5x+24$, $x^2-x-20=0$

$(x+4)(x-5)=0$ $\therefore x=-4$ 또는 $x=5$

㉠에 의하여 구하는 해는 $x=5$이다. 답 $x=5$

0442 진수의 조건에서 $x+1>0$, $x-1>0$이므로

$x>-1$, $x>1$ $\therefore x>1$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{5}}(x+1)=\log_5(x-1)$에서 $\log_{\frac{1}{5}}(x+1)=-\log_{\frac{1}{5}}(x-1)$이므로

$x+1=\frac{1}{x-1}$, $(x+1)(x-1)=1$

$x^2=2$ $\therefore x=\pm\sqrt{2}$

㉠에 의하여 구하는 해는 $x=\sqrt{2}$이다. 답 $x=\sqrt{2}$

0443 $\log_{\frac{1}{3}} x=t$로 놓으면 $t^2-t-2=0$

$(t+1)(t-2)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=2$

즉 $\log_{\frac{1}{3}} x=-1$ 또는 $\log_{\frac{1}{3}} x=2$이므로

$x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$ 또는 $x=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

답 $x=\frac{1}{9}$ 또는 $x=3$

참고 $\log_{\frac{1}{3}} x=t$에서 $x=\left(\frac{1}{3}\right)^t$이므로 $x>0$이다. 즉 진수의 조건을 항상 만족시킨다.

04 로그함수

0444 $(\log_5 x)^2-\log_5 x^3=0$에서 $(\log_5 x)^2-3\log_5 x=0$

$\log_5 x=t$로 놓으면

$t^2-3t=0,\quad t(t-3)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=3$

즉 $\log_5 x=0$ 또는 $\log_5 x=3$이므로

$x=1$ 또는 $x=5^3=125$ 답 $x=1$ 또는 $x=125$

0445 $x^{\log x}=10$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}=\log 10,\quad \log x\cdot\log x=1$

$(\boxed{\log x})^2=1$

$\therefore\ \log x=-1$ 또는 $\log x=\boxed{1}$

즉 $\log x=\log 10^{-1}$ 또는 $\log x=\log 10^1$이므로

$x=\boxed{\frac{1}{10}}$ 또는 $x=10$

$\therefore$ (가) $\log x$ (나) 1 (다) $\frac{1}{10}$ 답 (가) $\log x$ (나) 1 (다) $\frac{1}{10}$

0446 진수의 조건에서 $5x+2>0$이므로

$x>-\frac{2}{5}$ …… ㉠

$\log_7(5x+2)\ge 1$에서 $\log_7(5x+2)\ge\log_7 7$

밑이 1보다 크므로

$5x+2\ge 7,\quad 5x\ge 5$

$\therefore\ x\ge 1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x\ge 1$ 답 $x\ge 1$

0447 진수의 조건에서 $x^2>0$이므로 x는 $x\ne 0$인 실수이다. …… ㉠

$\log_3 x^2<2$에서 $\log_3 x^2<\log_3 9$

밑이 1보다 크므로

$x^2<9,\quad (x+3)(x-3)<0$

$\therefore\ -3<x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-3<x<0$ 또는 $0<x<3$

답 $-3<x<0$ 또는 $0<x<3$

0448 진수의 조건에서 $7x+5>0$이므로

$x>-\frac{5}{7}$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(7x+5)\le 1$에서 $\log_{\frac{1}{3}}(7x+5)\le\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$

밑이 1보다 작으므로

$7x+5\ge\frac{1}{3},\quad 7x\ge-\frac{14}{3}\quad \therefore\ x\ge-\frac{2}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x\ge-\frac{2}{3}$ 답 $x\ge-\frac{2}{3}$

0449 진수의 조건에서 $x-5>0$이므로

$x>5$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{4}}(x-5)>\frac{1}{2}$에서 $\log_{\frac{1}{4}}(x-5)>\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}$

밑이 1보다 작으므로

$x-5<\frac{1}{2}\quad \therefore\ x<\frac{11}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $5<x<\frac{11}{2}$ 답 $5<x<\frac{11}{2}$

0450 진수의 조건에서 $x+1>0,\ 2x-1>0$이므로

$x>-1,\ x>\frac{1}{2}\quad \therefore\ x>\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\log_2(x+1)\ge\log_2(2x-1)$에서 밑이 1보다 크므로

$x+1\ge 2x-1,\quad -x\ge-2\quad \therefore\ x\le 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{2}<x\le 2$ 답 $\frac{1}{2}<x\le 2$

0451 진수의 조건에서 $9-x>0,\ x-8>0$이므로

$x<9,\ x>8\quad \therefore\ 8<x<9$ …… ㉠

$\log_3(9-x)<\log_3(x-8)$에서 밑이 1보다 크므로

$9-x<x-8,\quad -2x<-17\quad \therefore\ x>\frac{17}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{17}{2}<x<9$ 답 $\frac{17}{2}<x<9$

0452 진수의 조건에서 $3x+1>0,\ 3-2x>0$이므로

$x>-\frac{1}{3},\ x<\frac{3}{2}\quad \therefore\ -\frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{7}}(3x+1)>-\log_7(3-2x)$에서

$\log_{\frac{1}{7}}(3x+1)>\log_{\frac{1}{7}}(3-2x)$

밑이 1보다 작으므로

$3x+1<3-2x,\quad 5x<2\quad \therefore\ x<\frac{2}{5}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-\frac{1}{3}<x<\frac{2}{5}$

답 $-\frac{1}{3}<x<\frac{2}{5}$

0453 진수의 조건에서 $x+2>0,\ x+14>0$이므로

$x>-2,\ x>-14\quad \therefore\ x>-2$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{5}}(x+2)\le\log_{\frac{1}{25}}(x+14)$에서

$\log_{\frac{1}{5}}(x+2)\le\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{5}}(x+14)$

$2\log_{\frac{1}{5}}(x+2)\le\log_{\frac{1}{5}}(x+14)$

$\log_{\frac{1}{5}}(x+2)^2\le\log_{\frac{1}{5}}(x+14)$

밑이 1보다 작으므로 $(x+2)^2\ge x+14$

$x^2+3x-10\ge 0,\quad (x+5)(x-2)\ge 0$

$\therefore\ x\le-5$ 또는 $x\ge 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x\ge 2$ 답 $x\ge 2$

0454 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$\log_3 x=t$로 놓으면 $t^2-4t+3\le 0$

$(t-1)(t-3)\le 0\quad \therefore\ 1\le t\le 3$

즉 $1\le\log_3 x\le 3$이므로 $\log_3 3\le\log_3 x\le\log_3 27$

밑이 1보다 크므로 $3\le x\le 27$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$3\le x\le 27$ 답 $3\le x\le 27$

0455 진수의 조건에서

$x>0,\ x^2>0 \qquad \therefore\ x>0$ …… ㉠

$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2-\log_{\frac{1}{2}} x^2>0$에서 $\quad (\log_{\frac{1}{2}} x)^2-2\log_{\frac{1}{2}} x>0$

$\log_{\frac{1}{2}} x=t$로 놓으면 $\quad t^2-2t>0$

$t(t-2)>0 \qquad \therefore\ t<0$ 또는 $t>2$

즉 $\log_{\frac{1}{2}} x<0$ 또는 $\log_{\frac{1}{2}} x>2$이므로

$\log_{\frac{1}{2}} x<\log_{\frac{1}{2}} 1$ 또는 $\log_{\frac{1}{2}} x>\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$

밑이 1보다 작으므로 $\quad x>1$ 또는 $x<\frac{1}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<\frac{1}{4}$ 또는 $x>1$ 　　답 $0<x<\frac{1}{4}$ 또는 $x>1$

0456 진수의 조건에서 $\quad x>\boxed{0}$ …… ㉠

$x^{\log_2 x}\geq 2$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}\geq \log_2 2, \qquad (\boxed{\log_2 x})^2\geq 1$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $\quad t^2\geq 1$

$\therefore\ t\leq -1$ 또는 $t\geq\boxed{1}$

즉 $\log_2 x\leq -1$ 또는 $\log_2 x\geq 1$이므로

$\log_2 x\leq \log_2 \boxed{\frac{1}{2}}$ 또는 $\log_2 x\geq \log_2 \boxed{2}$

밑이 1보다 크므로 $\quad x\leq\frac{1}{2}$ 또는 $x\geq 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\quad 0<x\leq\frac{1}{2}$ 또는 $x\geq 2$

$\therefore$ (가) 0 (나) $\log_2 x$ (다) 1 (라) $\frac{1}{2}$ (마) 2 　　답 풀이 참조

0457 $a>1$이면 $0<\frac{1}{a}<1$이다.

⑤ $y=\log_a x=-\log_{\frac{1}{a}} x$이므로 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$의 그래프와 $y=\log_a x$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이다. 　　답 ⑤

0458 $y=\log_5(-x^2-3x+10)$에서

$-x^2-3x+10>0, \qquad x^2+3x-10<0$

$(x+5)(x-2)<0 \qquad \therefore\ -5<x<2$

따라서 구하는 정의역은

$\{x\,|\,-5<x<2\}$ 　　답 $\{x\,|\,-5<x<2\}$

0459 ㄱ. $y=-\log_3\frac{1}{x}=-\log_3 x^{-1}=\log_3 x$

ㄴ. $y=\log_{\frac{1}{3}}(-x)=-\log_3(-x)$

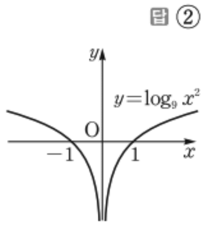
ㄷ. $y=\frac{1}{3}\log_3 x^3=\frac{1}{3}\cdot 3\log_3 x=\log_3 x$

ㄹ. $y=\log_9 x^2=\log_{3^2} x^2=\log_3|x|$

이상에서 함수 $y=\log_3 x$와 같은 함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

참고 ㄹ. 함수 $y=\log_9 x^2$의 정의역은 $x^2>0$에서 $\{x\,|\,x\neq 0$인 실수$\}$이고, 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



0460 주어진 그래프의 함수식을 $y=\log_3(x-m)+n$이라 하자.

점근선의 방정식이 $x=2$이므로 $\quad m=2$

또 그래프가 점 $(3,\ -1)$을 지나므로

$-1=\log_3(3-2)+n \qquad \therefore\ n=-1$

따라서 그래프의 식은 $\quad y=\log_3(x-2)-1$ 　　답 ②

0461 함수 $y=\log_4 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $\quad y=-\log_4(-x)$ …… ㉠ ⋯➊

㉠의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\log_4\{-(x-k)\}=-\log_4(-x+k)$ …… ㉡ ⋯➋

㉡의 그래프가 점 $(4,\ -1)$을 지나므로

$-1=-\log_4(-4+k), \qquad \log_4(-4+k)=1$

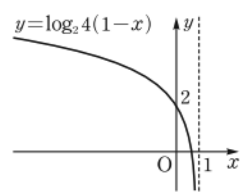
$-4+k=4 \qquad \therefore\ k=8$ ⋯➌

답 8

채점 기준	비율
➊ 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
➋ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
➌ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0462 $y=\log_2 4(1-x)=\log_2\{-(x-1)\}+2$의 그래프는 $y=\log_2(-x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y=\log_2(-x)$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 $y=\log_2 4(1-x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지난다.

② 정의역은 $\{x\,|\,x<1\}$이다.

③ 그래프의 점근선의 방정식은 $x=1$이다.

④ x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소한다.

⑤ 그래프가 제3사분면을 지나지 않는다. 　　답 ⑤

참고 $y=\log_2 4(1-x)=\log_2(-x+1)+2$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 것과도 같다.

0463 ㄱ. $y=\log_5\frac{1}{x}=\log_5 x^{-1}=-\log_5 x$의 그래프는 $y=\log_5 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

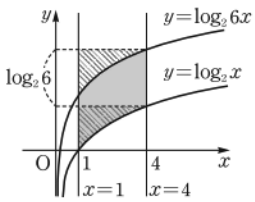
ㄴ. $y=\log_{25} x=\log_{5^2} x=\frac{1}{2}\log_5 x$의 그래프는 $y=\log_5 x$의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여도 겹쳐지지 않는다.

ㄷ. $y=\log_5(-5x)=\log_5 5(-x)=\log_5(-x)+1$의 그래프는 $y=\log_5 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=\log_{\frac{1}{5}}(x+1)=-\log_5(x+1)$의 그래프는 $y=\log_5 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

이상에서 $y=\log_5 x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 　　답 ④

0464 $y=\log_2 6x=\log_2 x+\log_2 6$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\log_2 6$만큼 평행이동한 것이다.



즉 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 넓이는

$(4-1)\cdot\log_2 6=3\log_2 6$ 답 ④

0465 $f(1)=\log_a 3+5=4$이므로 $\log_a 3=-1$

$a^{-1}=3$ $\therefore a=\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x+2)+5$이므로

$f(7)=\log_{\frac{1}{3}}9+5=\log_{3^{-1}}3^2+5=-2+5=3$ 답 3

0466 $f(2)=\log_{\frac{1}{2}}2=-1$이므로 $f(2)+f(a)=f(6)$에서

$-1+\log_{\frac{1}{2}}a=\log_{\frac{1}{2}}6$

$\log_{\frac{1}{2}}a=\log_{\frac{1}{2}}6+1=\log_{\frac{1}{2}}\left(6\cdot\frac{1}{2}\right)=\log_{\frac{1}{2}}3$

$\therefore a=3$ 답 3

0467 $f\left(\frac{1}{25}\right)=2\log_5\frac{1}{25}=2\log_5 5^{-2}$

$=2\cdot(-2)=-4$ ··· ❶

$\therefore (f\circ f)\left(\frac{1}{25}\right)=f\left(f\left(\frac{1}{25}\right)\right)=f(-4)=3^{-4}=\frac{1}{81}$ ··· ❷

답 $\frac{1}{81}$

채점 기준	비율
❶ $f\left(\frac{1}{25}\right)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $(f\circ f)\left(\frac{1}{25}\right)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0468 $f(x)=\log_{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\log_{\sqrt{2}}\frac{x-1}{x}$

$\therefore f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(16)$

$=\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2}+\log_{\sqrt{2}}\frac{2}{3}+\log_{\sqrt{2}}\frac{3}{4}+\cdots+\log_{\sqrt{2}}\frac{15}{16}$

$=\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{15}{16}\right)=\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{16}$

$=\log_{2^{\frac{1}{2}}}2^{-4}=(-4)\cdot 2=-8$ 답 ①

0469 $\log_2 M=0.2$, $\log_2 N=0.4$에서

$\log_2 M+\log_2 N=0.2+0.4=0.6$

즉 $\log_2 MN=0.6$이고 주어진 그래프에서 $\log_2 a=0.6$이므로

$MN=a$ 답 ①

0470 점 A의 좌표를 (a, b)라 하면 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 2이므로 $b=2$

즉 $2=\log_4 a$에서 $a=4^2=16$

따라서 A$(16, 2)$이므로 B$(14, 2)$ 답 B$(14, 2)$

0471 함수 $y=2^x$의 그래프에서

$2^a=e$, $2^b=f$ $\therefore \log_2 e=a$, $\log_2 f=b$

함수 $y=\log_2 x$의 그래프에서 $\log_2 c=e$, $\log_2 d=f$

$\therefore \log_2 cdef=\log_2 c+\log_2 d+\log_2 e+\log_2 f$

$=e+f+a+b=a+b+e+f$ 답 ③

0472 $y=\log_4(x+a)-3$에서 $\log_4(x+a)=y+3$

$x+a=4^{y+3}$ $\therefore x=4^{y+3}-a$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=4^{x+3}-a$

따라서 함수 $y=\log_4(x+a)-3$의 역함수는 $y=4^{x+3}-a$이고, 이것이 $y=4^{x+b}-1$과 일치해야 하므로 $a=1$, $b=3$

$\therefore a+b=4$ 답 ④

라쎈 특강 역함수 구하기

함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 주어진 함수 $y=f(x)$가 일대일대응인지 확인한다.

(ii) $y=f(x)$에서 x를 y에 대한 식으로 나타낸다. 즉 $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 나타낸다.

(iii) $x=f^{-1}(y)$의 x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$ 꼴로 나타낸다.

0473 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-3)+1$에서 $\log_{\frac{1}{3}}(x-3)=y-1$

$x-3=\left(\frac{1}{3}\right)^{y-1}$ $\therefore x=\left(\frac{1}{3}\right)^{y-1}+3$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+3$ 답 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+3$

0474 함수 $y=\log_5(x+m)+1$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점을 직선 $y=x$가 지나므로 함수 $y=\log_5(x+m)+1$의 그래프는 점 $(2, 2)$를 지난다. ··· ❶

즉 $2=\log_5(2+m)+1$에서 $\log_5(2+m)=1$

$2+m=5$ $\therefore m=3$ ··· ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ $y=\log_5(x+m)+1$의 그래프가 점 $(2, 2)$를 지남을 알 수 있다.	50 %
❷ m의 값을 구할 수 있다.	50 %

0475 $f(a)=p$에서 $\log_{\sqrt{3}}a=p$

$\therefore a=(\sqrt{3})^p=3^{\frac{p}{2}}$

$g(3p)=q$라 하면 $f(q)=3p$이므로 $\log_{\sqrt{3}}q=3p$

$\therefore q=(\sqrt{3})^{3p}=3^{\frac{3}{2}p}=(3^{\frac{p}{2}})^3=a^3$ 답 ⑤

0476 $(f\circ g)(x)=x$이므로 함수 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$y=3^x+1$로 놓으면 $3^x=y-1$

$\therefore x=\log_3(y-1)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\log_3(x-1)$

$\therefore g(x)=\log_3(x-1)$

$\therefore (g\circ g)(82)=g(g(82))=g(\log_3 81)=g(4)$

$=\log_3 3=1$ 답 ④

다른풀이 $g(82)=a$라 하면 $f(a)=82$이므로

$3^a+1=82$, $3^a=81=3^4$ $\therefore a=4$

$g(4)=b$라 하면 $f(b)=4$이므로

$3^b+1=4$, $3^b=3$ $\therefore b=1$

$\therefore (g \circ g)(82)=g(g(82))=g(4)=1$

0477 $A=4\log_5 2=\log_5 2^4=\log_5 16$

$B=2=\log_5 5^2=\log_5 25$

$C=\dfrac{3}{\log_3 5}=3\log_5 3=\log_5 3^3=\log_5 27$

이때 $16<25<27$이고 밑이 1보다 크므로

$\log_5 16<\log_5 25<\log_5 27$

$\therefore A<B<C$ 답 ①

0478 $-2=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}=\log_{\frac{1}{2}} 4$

이때 $4<\sqrt{20}<5$이고 밑이 1보다 작으므로

$\log_{\frac{1}{2}} 5<\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{20}<\log_{\frac{1}{2}} 4$

$\therefore \log_{\frac{1}{2}} 5<\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{20}<-2$ 답 $\log_{\frac{1}{2}} 5<\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{20}<-2$

0479 $1<a<3$의 각 변에 밑이 3인 로그를 취하면

$0<\log_3 a<1$ $\therefore 0<A<1$

$B=\log_3 \dfrac{1}{a}=\log_3 a^{-1}=-\log_3 a$이므로

$-1<-\log_3 a<0$ $\therefore -1<B<0$

$C=\log_a 3=\dfrac{1}{\log_3 a}$이므로 $\dfrac{1}{\log_3 a}>1$ $\therefore C>1$

따라서 가장 큰 수는 C이다. 답 C

0480 함수 $y=\log_2(x-a)+2$에서 밑이 1보다 크므로 이 함수는 $x=3$일 때 최솟값 4를 갖는다.

즉 $\log_2(3-a)+2=4$이므로 $\log_2(3-a)=2$

$3-a=4$ $\therefore a=-1$ 답 -1

0481 $y=\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)-1$에서 밑이 1보다 작으므로 y는 $2x+1$이 최대이면 최소, 최소이면 최대가 된다. ⋯ ❶

$x=1$일 때, $y=\log_{\frac{1}{3}} 3-1=-2$

$x=4$일 때, $y=\log_{\frac{1}{3}} 9-1=-3$

따라서 $M=-2$, $m=-3$이므로 ⋯ ❷

$2M+m=-7$ ⋯ ❸

답 -7

채점 기준	비율
❶ $y=\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)-1$이 최대, 최소가 되는 경우를 알 수 있다.	40 %
❷ M, m의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $2M+m$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0482 $f(x)=x^2-4x+6$으로 놓으면

$f(x)=(x-2)^2+2$

$-3\le x\le 3$에서 $f(-3)=27$, $f(2)=2$, $f(3)=3$이므로

$2\le f(x)\le 27$

$y=\log_3 f(x)$에서

$f(x)=2$일 때, $y=\log_3 2$

$f(x)=27$일 때, $y=\log_3 27=\log_3 3^3=3$

따라서 y의 최댓값은 3, 최솟값은 $\log_3 2$이므로 구하는 곱은

$3\log_3 2$ 답 $3\log_3 2$

0483 $f(x)=-x^2+2x+3$으로 놓으면

$f(x)=-(x-1)^2+4$

$-1<x<2$에서 진수의 최댓값은 4이고 최솟값은 없다.

그런데 주어진 함수가 최솟값을 가지므로 $0<a<1$이다. ⋯ ❶

즉 $\log_a 4=-2$이므로 $a^{-2}=4$, $\dfrac{1}{a^2}=4$

$\therefore a=\dfrac{1}{2}$ ($\because 0<a<1$) ⋯ ❷

답 $\dfrac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

0484 $f(x)=|2x+1|+1$로 놓으면

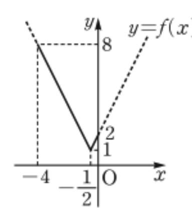
(i) $x\ge -\dfrac{1}{2}$일 때,

$f(x)=2x+1+1=2x+2$

(ii) $x<-\dfrac{1}{2}$일 때,

$f(x)=-(2x+1)+1=-2x$

(i), (ii)에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$-4\le x\le 0$에서 $f(-4)=8$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$,

$f(0)=2$이므로 $1\le f(x)\le 8$

따라서 $y=\log_2 f(x)$는 $f(x)=8$일 때 최댓값 $\log_2 8=3$을 갖는다. 답 ③

0485 $\log_3 x=t$로 놓으면 $1\le x\le 27$에서

$\log_3 1\le \log_3 x\le \log_3 27$ $\therefore 0\le t\le 3$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t+2=(t-1)^2+1$

따라서 y는 $t=3$일 때 최댓값 5, $t=1$일 때 최솟값 1을 갖는다.

답 최댓값: 5, 최솟값: 1

0486 $y=(\log_2 x)^2+\log_{\frac{1}{2}} x^4+3=(\log_2 x)^2-4\log_2 x+3$

$\log_2 x=t$로 놓으면 주어진 함수는

$y=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$

y는 $t=2$일 때 최솟값 -1을 가지므로 $\log_2 x=2$에서

$x=2^2=4$

따라서 $a=4$, $b=-1$이므로 $a+b=3$ 답 ③

0487 $y=\log_5 \dfrac{x}{25}\cdot\log_5 5x$

$=(\log_5 x-\log_5 25)(\log_5 x+\log_5 5)$

$=(\log_5 x-2)(\log_5 x+1)$

$=(\log_5 x)^2-\log_5 x-2$

$\log_5 x=t$로 놓으면 $\frac{1}{25}\le x\le 5$에서

$\log_5 \frac{1}{25}\le \log_5 x\le \log_5 5 \quad \therefore -2\le t\le 1$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-t-2=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

따라서 y는 $t=-2$일 때 최댓값 4, $t=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{9}{4}$를 가지므로 최댓값과 최솟값의 곱은

$4\cdot\left(-\frac{9}{4}\right)=-9$ 　답 -9

0488 $x^{\log 4}=4^{\log x}$이므로

$y=-4^{\log x}\cdot x^{\log 4}+2(4^{\log x}+x^{\log 4})$

$=-4^{\log x}\cdot 4^{\log x}+2(4^{\log x}+4^{\log x})$

$=-(4^{\log x})^2+4\cdot 4^{\log x}$

$4^{\log x}=t$로 놓으면 $x>1$에서 $\quad t>1$

이때 주어진 함수는

$y=-t^2+4t=-(t-2)^2+4$ ⋯ ❶

y는 $t=2$일 때 최댓값 4를 가지므로 $4^{\log x}=2$에서

$4^{\log x}=4^{\frac{1}{2}}, \quad \log x=\frac{1}{2} \quad \therefore x=\sqrt{10}$

따라서 $a=\sqrt{10}$, $b=4$이므로 ⋯ ❷

$a^2+b^2=26$ ⋯ ❸

답 26

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수를 t에 대한 이차함수로 변형할 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	10 %

0489 $y=x^{2+\log_3 x}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 y=\log_3 x^{2+\log_3 x}=(2+\log_3 x)\log_3 x$

$=(\log_3 x)^2+2\log_3 x$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $\quad \log_3 y=t^2+2t=(t+1)^2-1$

$\log_3 y$는 $t=-1$일 때 최솟값 -1을 가지므로

$\log_3 x=-1$에서 $\quad x=3^{-1}=\frac{1}{3}$

$\log_3 y=-1$에서 $\quad y=3^{-1}=\frac{1}{3}$

따라서 y는 $x=\frac{1}{3}$일 때 최솟값 $\frac{1}{3}$을 갖는다. 　답 $\frac{1}{3}$

0490 $y=10x^{2-\log x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log y=\log 10x^{2-\log x}$

$=\log 10+\log x^{2-\log x}$

$=1+(2-\log x)\log x$

$=-(\log x)^2+2\log x+1$

$\log x=t$로 놓으면 $\quad \log y=-t^2+2t+1=-(t-1)^2+2$

$\log y$는 $t=1$일 때 최댓값 2를 가지므로

$\log x=1$에서 $\quad x=10 \quad \therefore a=10$

$\log y=2$에서 $\quad y=10^2=100 \quad \therefore b=100$

$\therefore \frac{b}{a}=10$ 　답 ④

0491 $y=\log_x 100+\log x=\frac{2}{\log x}+\log x$

이때 $x>1$에서 $\log x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{2}{\log x}+\log x\ge 2\sqrt{\frac{2}{\log x}\cdot\log x}=2\sqrt{2}$

(단, 등호는 $\log x=\sqrt{2}$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{2}$이다. 　답 ②

0492 $\log_2\left(x+\frac{1}{y}\right)+\log_2\left(\frac{1}{x}+y\right)=\log_2\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+y\right)$

$=\log_2\left(xy+\frac{1}{xy}+2\right)$

이때 $x>0$, $y>0$에서 $xy>0$, $\frac{1}{xy}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$xy+\frac{1}{xy}+2\ge 2\sqrt{xy\cdot\frac{1}{xy}}+2=2\cdot 1+2=4$

(단, 등호는 $xy=1$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 $\log_2 4=2$이다. 　답 2

0493 $\log_x y^2+\log_{\sqrt{y}} x=2\log_x y+2\log_y x$

이때 $x>1$, $y>1$에서 $\log_x y>0$, $\log_y x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2\log_x y+2\log_y x\ge 2\sqrt{2\log_x y\cdot 2\log_y x}$

$=2\sqrt{4}=4$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 4이다. 　답 ①

0494 $1<x<25$에서 $\log_5 x>0$, $\log_5 \frac{25}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log_5 x+\log_5 \frac{25}{x}\ge 2\sqrt{\log_5 x\cdot\log_5 \frac{25}{x}}$

이때 $\log_5 x+\log_5\frac{25}{x}=\log_5\left(x\cdot\frac{25}{x}\right)=\log_5 25=2$이므로

$2\ge 2\sqrt{\log_5 x\cdot\log_5\frac{25}{x}}, \quad \sqrt{\log_5 x\cdot\log_5\frac{25}{x}}\le 1$

$\therefore 0<\log_5 x\cdot\log_5\frac{25}{x}\le 1$ ⋯ ❶

즉 $y=\log_5 x\cdot\log_5\frac{25}{x}$의 최댓값은 1이므로 $\quad b=1$ ⋯ ❷

한편 등호는 $\log_5 x=\log_5\frac{25}{x}$, 즉 $x=\frac{25}{x}$일 때 성립하므로

$x^2=25 \quad \therefore x=5$ ($\because 1<x<25$)

따라서 $a=5$이므로 ⋯ ❸

$a+b=6$ ⋯ ❹

답 6

채점 기준	비율
❶ $\log_5 x\cdot\log_5\frac{25}{x}$의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	10 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

다른풀이 $y=\log_5 x\cdot\log_5\frac{25}{x}=\log_5 x(\log_5 25-\log_5 x)$

$=-(\log_5 x)^2+2\log_5 x$

$\log_5 x=t$로 놓으면 $1<x<25$에서

$0<t<2$

이때 주어진 함수는

$y=-t^2+2t=-(t-1)^2+1$

y는 $t=1$일 때 최댓값 1을 가지므로 $\log_5 x=1$에서

$x=5$

따라서 $a=5$, $b=1$이므로 $a+b=6$

0495 진수의 조건에서 $x-1>0$, $x>0$이므로

$x>1$, $x>0$ ∴ $x>1$ …… ㉠

$\log_{\sqrt{2}}(x-1)+\log_2 x=1$에서

$2\log_2(x-1)+\log_2 x=1$

$\log_2(x-1)^2+\log_2 x=1$

$\log_2 x(x-1)^2=\log_2 2$

$x(x-1)^2=2$, $x^3-2x^2+x-2=0$

$(x^2+1)(x-2)=0$ ∴ $x=2$ (∵ ㉠)

따라서 $\alpha=2$이므로

$10^{\alpha}=10^2=100$

답 100

0496 진수의 조건에서 $x>0$, $(x+1)^2>0$이므로

$x>0$, $x\neq-1$ ∴ $x>0$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{4}}(x+1)^2=-1$에서

$\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=-1$

$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+x)=\log_{\frac{1}{2}}2$, $x^2+x=2$

$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$

∴ $x=1$ (∵ ㉠)

답 ③

0497 $(\log_2 2x)^2-2\log_2 8x^3=0$에서

$(\log_2 2+\log_2 x)^2-2(\log_2 8+\log_2 x^3)=0$

$(1+\log_2 x)^2-2(3+3\log_2 x)=0$

$(\log_2 x)^2-4\log_2 x-5=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-4t-5=0$

$(t+1)(t-5)=0$ ∴ $t=-1$ 또는 $t=5$

즉 $\log_2 x=-1$ 또는 $\log_2 x=5$이므로

$x=2^{-1}=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2^5=32$

답 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=32$

0498 $\log_5 x\cdot\log_5 25x=3$에서

$\log_5 x(\log_5 25+\log_5 x)=3$, $\log_5 x(2+\log_5 x)=3$

$(\log_5 x)^2+2\log_5 x-3=0$

$\log_5 x=t$로 놓으면 $t^2+2t-3=0$

$(t+3)(t-1)=0$ ∴ $t=-3$ 또는 $t=1$

즉 $\log_5 x=-3$ 또는 $\log_5 x=1$이므로

$x=5^{-3}=\frac{1}{125}$ 또는 $x=5$

따라서 모든 근의 곱은

$\frac{1}{125}\cdot 5=\frac{1}{25}$

답 $\frac{1}{25}$

0499 밑과 진수의 조건에서 $x>0$, $x\neq1$

$\log_3 x+\log_x 27=4$에서

$\log_3 x+3\log_x 3=4$, $\log_3 x+\frac{3}{\log_3 x}=4$

$\log_3 x=t$ $(t\neq0)$로 놓으면 $t+\frac{3}{t}=4$

$t^2-4t+3=0$, $(t-1)(t-3)=0$

∴ $t=1$ 또는 $t=3$

즉 $\log_3 x=1$ 또는 $\log_3 x=3$이므로

$x=3$ 또는 $x=3^3=27$

따라서 $\alpha=27$, $\beta=3$이므로 $\alpha-\beta=24$

답 ②

0500 $x^{\log 2}=2^{\log x}$이므로 $2^{\log x}\cdot x^{\log 2}-3(2^{\log x}+x^{\log 2})-16=0$에서

$2^{\log x}\cdot 2^{\log x}-3(2^{\log x}+2^{\log x})-16=0$

$(2^{\log x})^2-6\cdot 2^{\log x}-16=0$

$2^{\log x}=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-6t-16=0$, $(t+2)(t-8)=0$

∴ $t=8$ (∵ $t>0$)

즉 $2^{\log x}=8$이므로 $\log x=3$

∴ $x=10^3=1000$

답 $x=1000$

0501 밑과 진수의 조건에서

$x^2>0$, $x^2\neq1$, $x+12>0$, $x+12\neq1$, $x-2>0$

∴ $x>2$ …… ㉠

(i) $x^2=x+12$일 때,

$x^2-x-12=0$, $(x+3)(x-4)=0$

∴ $x=-3$ 또는 $x=4$

이때 ㉠에 의하여 $x=4$

(ii) $x-2=1$일 때, $x=3$

$x=3$은 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

(i), (ii)에서 $x=3$ 또는 $x=4$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=4$이므로 $\beta-\alpha=1$

답 1

0502 밑과 진수의 조건에서

$2x>0$, $2x\neq1$, $x^2+1>0$, $x^2+1\neq1$, $3x+1>0$

∴ $0<x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>\frac{1}{2}$ …… ㉠ … ❶

(i) $2x=x^2+1$일 때,

$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$ ∴ $x=1$

$x=1$은 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다. … ❷

(ii) $3x+1=1$일 때,

$3x=0$ ∴ $x=0$

$x=0$은 ㉠을 만족시키지 않으므로 주어진 방정식의 해가 아니다. … ❸

(i), (ii)에서 구하는 해는 $x=1$ … ❹

답 $x=1$

채점 기준	비율
❶ 밑과 진수의 조건을 이용하여 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ $x=1$이 주어진 방정식의 해임을 알 수 있다.	30 %
❸ $x=0$이 주어진 방정식의 해가 아님을 알 수 있다.	30 %
❹ 주어진 방정식의 해를 구할 수 있다.	10 %

0503 $1000x^{\log x}=x^4$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 1000x^{\log x}=\log x^4$

$\log 1000+\log x^{\log x}=4\log x$

$3+(\log x)^2=4\log x,\quad (\log x)^2-4\log x+3=0$

$\log x=t$로 놓으면 $\quad t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0 \quad \therefore t=1$ 또는 $t=3$

즉 $\log x=1$ 또는 $\log x=3$이므로 $\quad x=10$ 또는 $x=10^3$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 곱은

$10\cdot 10^3=10^4$ 답 ④

0504 $x^{\log_3 x}-27x^2=0$, 즉 $x^{\log_3 x}=27x^2$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3 27x^2,\quad (\log_3 x)^2=\log_3 27+\log_3 x^2$

$(\log_3 x)^2-2\log_3 x-3=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $\quad t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0 \quad \therefore t=-1$ 또는 $t=3$

즉 $\log_3 x=-1$ 또는 $\log_3 x=3$이므로

$x=3^{-1}=\frac{1}{3}$ 또는 $x=3^3=27$

주어진 방정식의 모든 근의 합은 $\quad \frac{1}{3}+27=\frac{82}{3}$

따라서 $p=3$, $q=82$이므로 $\quad p+q=85$ 답 ③

0505 진수의 조건에서 $\quad x>0,\ y>0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}} x+\log_{\frac{1}{2}} y=-4\\ \log_{\sqrt{2}}(x+y)=6\end{cases}$에서

$\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}} xy=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\\ \log_{\sqrt{2}}(x+y)=\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^6\end{cases}$, 즉 $\begin{cases}xy=16\\ x+y=8\end{cases}$

이 연립방정식을 풀면 $\quad x=4,\ y=4$

이때 $x=4$, $y=4$는 ㉠을 만족시키므로 $\quad x+2y=12$ 답 ⑤

0506 진수의 조건에서 $\quad x>0,\ y>0$ $\cdots\cdots$ ㉠ $\cdots$ ❶

주어진 연립방정식은 $\begin{cases}\log_3\{\log_5(x^2+y^2)\}=0 & \cdots\cdots ㉡\\ \log_4 x+\log_2\sqrt{y}=\frac{1}{2} & \cdots\cdots ㉢\end{cases}$이므로

㉡에서 $\quad \log_5(x^2+y^2)=1 \quad \therefore x^2+y^2=5$

㉢에서 $\quad \log_4 x+\log_4 y=\frac{1}{2} \quad \therefore xy=4^{\frac{1}{2}}=2$

즉 주어진 연립방정식은 $\quad \begin{cases}x^2+y^2=5\\ xy=2\end{cases}$ $\cdots$ ❷

이 연립방정식을 풀면

$x=1,\ y=2$ 또는 $x=-2,\ y=-1\ (\because \alpha<\beta)$

이때 $x=-2$, $y=-1$은 ㉠을 만족시키지 않으므로 주어진 연립방정식의 해는 $\quad x=1,\ y=2$ $\cdots$ ❸

따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로 $\quad 2\alpha+\beta=2\cdot 1+2=4$ $\cdots$ ❹

답 4

채점 기준	비율
❶ 진수의 조건을 구할 수 있다.	20 %
❷ x, y에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	40 %
❸ 연립방정식의 해를 구할 수 있다.	30 %
❹ $2\alpha+\beta$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0507 진수의 조건에서 $\quad x>0,\ y>0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\begin{cases}\log_4 x-\log_3 y=1\\ \log_{16} x+\log_{27} y=\frac{4}{3}\end{cases}$에서 $\begin{cases}\log_4 x-\log_3 y=1\\ \frac{1}{2}\log_4 x+\frac{1}{3}\log_3 y=\frac{4}{3}\end{cases}$

$\log_4 x=X$, $\log_3 y=Y$로 놓으면

$\begin{cases}X-Y=1\\ \frac{1}{2}X+\frac{1}{3}Y=\frac{4}{3}\end{cases}$

이 연립방정식을 풀면 $\quad X=2,\ Y=1$

즉 $\log_4 x=2$, $\log_3 y=1$이므로

$x=4^2=16,\ y=3$

이때 $x=16$, $y=3$은 ㉠을 만족시키므로 주어진 연립방정식의 해이다.

$\therefore xy=16\cdot 3=48$ 답 48

0508 $\log_2 x=X$, $\log_3 y=Y$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases}X+Y=6\\ XY=8\end{cases}$

이 연립방정식을 풀면 $\quad X=2,\ Y=4$ 또는 $X=4,\ Y=2$

(i) $X=2$, $Y=4$일 때,

$\log_2 x=2$, $\log_3 y=4$이므로 $\quad x=4,\ y=81$

그런데 이것은 $\alpha>\beta$를 만족시키지 않는다.

(ii) $X=4$, $Y=2$일 때,

$\log_2 x=4$, $\log_3 y=2$이므로 $\quad x=16,\ y=9$

(i), (ii)에서 $\quad \alpha=16,\ \beta=9$

$\therefore \alpha-\beta=7$ 답 7

0509 $\log_{\sqrt{3}} x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2+kt-5=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

주어진 방정식의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha\beta=9$이고 방정식 ㉠의 근은 $\log_{\sqrt{3}}\alpha$, $\log_{\sqrt{3}}\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_{\sqrt{3}}\alpha+\log_{\sqrt{3}}\beta=-k,\quad \log_{\sqrt{3}}\alpha\beta=-k$

$\log_{\sqrt{3}} 9=4=-k \quad \therefore k=-4$ 답 ③

0510 $\log_2 x-\log_4 x=2\log_2 x\cdot\log_4 x-2$에서

$\log_2 x-\frac{1}{2}\log_2 x=2\log_2 x\cdot\frac{1}{2}\log_2 x-2$

$\frac{1}{2}\log_2 x=(\log_2 x)^2-2,\quad 2(\log_2 x)^2-\log_2 x-4=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $\quad 2t^2-t-4=0$ $\cdots$ ❶

이 방정식의 근은 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta=\frac{1}{2}$ $\cdots$ ❷

$\log_2\alpha\beta=\frac{1}{2} \quad \therefore \alpha\beta=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ $\cdots$ ❸

답 $\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ t에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	50 %
❷ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.	30 %
❸ $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0511 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(\log_5 a+1)^2-(\log_5 a+3)=0$

$(\log_5 a)^2+\log_5 a-2=0$

$\log_5 a=t$로 놓으면 $t^2+t-2=0$

$(t+2)(t-1)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=1$

즉 $\log_5 a=-2$ 또는 $\log_5 a=1$이므로

$a=5^{-2}=\frac{1}{25}$ 또는 $a=5$ 답 $\frac{1}{25}$, 5

0512 진수의 조건에서 $x-3>0$, $x-1>0$이므로

$x>3$, $x>1$ $\therefore x>3$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(x-3)<\log_{\frac{1}{4}}(x-1)$에서

$\log_{\frac{1}{4}}(x-3)^2<\log_{\frac{1}{4}}(x-1)$

밑이 1보다 작으므로 $(x-3)^2>x-1$

$x^2-7x+10>0$, $(x-2)(x-5)>0$

$\therefore x<2$ 또는 $x>5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x>5$

따라서 자연수 x의 최솟값은 6이다. 답 6

0513 진수의 조건에서 $x^2+x-2>0$이므로

$(x+2)(x-1)>0$ $\therefore x<-2$ 또는 $x>1$ …… ㉠

$\log_2(x^2+x-2)\le 2$에서 $\log_2(x^2+x-2)\le\log_2 4$

밑이 1보다 크므로 $x^2+x-2\le 4$

$x^2+x-6\le 0$, $(x+3)(x-2)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-3\le x<-2$ 또는 $1<x\le 2$

따라서 정수 x는 -3, 2의 2개이다. 답 ②

0514 진수의 조건에서 $x-1>0$, $2x-3>0$이므로

$x>1$, $x>\frac{3}{2}$ $\therefore x>\frac{3}{2}$ …… ㉠

$\log_3(x-1)+\log_3(2x-3)<1$에서

$\log_3(x-1)(2x-3)<\log_3 3$

밑이 1보다 크므로 $(x-1)(2x-3)<3$

$2x^2-5x<0$, $x(2x-5)<0$

$\therefore 0<x<\frac{5}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$

해가 $\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)<0$ $\therefore x^2-4x+\frac{15}{4}<0$

양변에 양수 a를 곱하면 $ax^2-4ax+\frac{15}{4}a<0$

이 부등식이 $ax^2+bx+15<0$과 같으므로

$-4a=b$, $\frac{15}{4}a=15$ $\therefore a=4$, $b=-16$

$\therefore a+b=-12$ 답 ①

0515 진수의 조건에서 $\log_{\frac{1}{2}}x>0$이므로

$0<x<1$ …… ㉠

$\log_3(\log_{\frac{1}{2}}x)\le 1$에서 $\log_3(\log_{\frac{1}{2}}x)\le\log_3 3$

밑이 1보다 크므로 $\log_{\frac{1}{2}}x\le 3$

$\therefore \log_{\frac{1}{2}}x\le\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}$

밑이 1보다 작으므로 $x\ge\frac{1}{8}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{8}\le x<1$ 답 $\frac{1}{8}\le x<1$

0516 진수의 조건에서 $\log_2(\log_5 x)>0$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}\{\log_2(\log_5 x)\}>0$에서

$\log_{\frac{1}{3}}\{\log_2(\log_5 x)\}>\log_{\frac{1}{3}}1$

밑이 1보다 작으므로 $\log_2(\log_5 x)<1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<\log_2(\log_5 x)<1$

즉 $\log_2 1<\log_2(\log_5 x)<\log_2 2$에서 밑이 1보다 크므로

$1<\log_5 x<2$, $\log_5 5<\log_5 x<\log_5 5^2$

밑이 1보다 크므로 $5<x<25$

따라서 $a=5$, $b=25$이므로 $a+b=30$ 답 30

0517 부등식 $\log_3(\log_2 x)<1$을 풀면 진수의 조건에서

$\log_2 x>0$ $\therefore x>1$ …… ㉠

$\log_3(\log_2 x)<1$에서 $\log_3(\log_2 x)<\log_3 3$

밑이 1보다 크므로 $\log_2 x<3$ $\therefore x<8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x<8$

$\therefore A=\{x|1<x<8\}$

부등식 $\log_2(\log_4 x)<1$을 풀면 진수의 조건에서

$\log_4 x>0$ $\therefore x>1$ …… ㉢

$\log_2(\log_4 x)<1$에서 $\log_2(\log_4 x)<\log_2 2$

밑이 1보다 크므로 $\log_4 x<2$ $\therefore x<16$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면 $1<x<16$

$\therefore B=\{x|1<x<16\}$

따라서 $A\cap B=\{x|1<x<8\}$이므로 집합 $A\cap B$의 원소가 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0518 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$(\log_5 x)^2-\log_5 125x^2\le 0$에서

$(\log_5 x)^2-(\log_5 125+\log_5 x^2)\le 0$

$(\log_5 x)^2-2\log_5 x-3\le 0$

$\log_5 x=t$로 놓으면 $t^2-2t-3\le 0$

$(t+1)(t-3)\le 0$ $\therefore -1\le t\le 3$

즉 $-1\le\log_5 x\le 3$이므로 $\log_5 5^{-1}\le\log_5 x\le\log_5 5^3$

$\therefore \frac{1}{5}\le x\le 125$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{5}\le x\le 125$

따라서 $\alpha=\frac{1}{5}$, $\beta=125$이므로

$\alpha\beta=25$ 답 25

0519 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$(2+\log_{\frac{1}{2}}x)\log_2 x<-3$에서

$(2-\log_2 x)\log_2 x<-3$

$-(\log_2 x)^2+2\log_2 x+3<0$

$(\log_2 x)^2-2\log_2 x-3>0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-2t-3>0$ ⋯ ❶

$(t+1)(t-3)>0$ $\therefore t<-1$ 또는 $t>3$

즉 $\log_2 x<-1$ 또는 $\log_2 x>3$이므로

$x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>8$ ⋯ ❷

따라서 정수 x의 최솟값은 9이다. ⋯ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ t에 대한 이차부등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 x의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0520 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}27x\cdot\log_3\frac{x}{9}\ge 0$에서

$(\log_{\frac{1}{3}}27+\log_{\frac{1}{3}}x)(\log_3 x-\log_3 9)\ge 0$

$(-3-\log_3 x)(\log_3 x-2)\ge 0$

$(\log_3 x+3)(\log_3 x-2)\le 0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $(t+3)(t-2)\le 0$

$\therefore -3\le t\le 2$

즉 $-3\le\log_3 x\le 2$이므로 $\log_3 3^{-3}\le\log_3 x\le\log_3 3^2$

$\therefore \frac{1}{27}\le x\le 9$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{27}\le x\le 9$

따라서 $\alpha=\frac{1}{27}$, $\beta=9$이므로 $\frac{1}{\alpha\beta}=3$ 답 ②

0521 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log_2 x}<4x$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}<\log_2 4x$, $(\log_2 x)^2<2+\log_2 x$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2<2+t$

$t^2-t-2<0$, $(t+1)(t-2)<0$

$\therefore -1<t<2$

즉 $-1<\log_2 x<2$이므로 $\log_2 2^{-1}<\log_2 x<\log_2 2^2$

$\therefore \frac{1}{2}<x<4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{2}<x<4$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 1, 2, 3이므로 구하는 합은 $1+2+3=6$ 답 ②

0522 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log x-2}<1000$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x-2}<\log 1000$, $(\log x-2)\log x<3$

$(\log x)^2-2\log x-3<0$

$\log x=t$로 놓으면 $t^2-2t-3<0$

$(t+1)(t-3)<0$ $\therefore -1<t<3$

즉 $-1<\log x<3$이므로 $\log 10^{-1}<\log x<\log 10^3$

$\therefore \frac{1}{10}<x<1000$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{10}<x<1000$

따라서 자연수 x는 1, 2, 3, ⋯, 999의 999개이다. 답 ④

0523 $2^{3x}\le 5^{2x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 2^{3x}\le\log 5^{2x}$, $3x\log 2\le 2x\log 5$

$x(3\log 2-2\log 5)\le 0$, $x\log\frac{8}{25}\le 0$

$\therefore x\ge 0\left(\because \log\frac{8}{25}<0\right)$ 답 $x\ge 0$

0524 $3^x<10^{x-1}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 3^x<\log 10^{x-1}$, $x\log 3<x-1$

$x(\log 3-1)<-1$

$\log 3-1<0$이므로 $x>-\frac{1}{\log 3-1}$ $\therefore x>\frac{1}{1-\log 3}$

$\therefore \alpha=\frac{1}{1-\log 3}$ 답 ①

0525 $(\log_9 x)^2-\log_9 ax^2\ge 0$에서

$(\log_9 x)^2-2\log_9 x-\log_9 a\ge 0$

$\log_9 x=t$로 놓으면 $t^2-2t-\log_9 a\ge 0$

모든 실수 t에 대하여 위의 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2-2t-\log_9 a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2+\log_9 a\le 0$, $\log_9 a\le -1$

$\therefore a\le\frac{1}{9}$

이때 $a>0$이므로 $0<a\le\frac{1}{9}$

따라서 a의 최댓값은 $\frac{1}{9}$이다. 답 $\frac{1}{9}$

0526 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(\log a)^2-4(3+\log a)<0$

$(\log a)^2-4\log a-12<0$ ⋯ ❶

$\log a=t$로 놓으면 $t^2-4t-12<0$

$(t+2)(t-6)<0$ $\therefore -2<t<6$

즉 $-2<\log a<6$이므로 $\log 10^{-2}<\log a<\log 10^6$

밑이 1보다 크므로 $10^{-2}<a<10^6$ ⋯ ❷

따라서 $\alpha=10^{-2}$, $\beta=10^6$이므로

$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{10^6}{10^{-2}}=10^8$ ⋯ ❸

답 10^8

채점 기준	비율
❶ $D<0$임을 이용하여 부등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\frac{\beta}{\alpha}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0527 n년 후 관광객 수가 처음으로 3배 이상이 된다고 하면

$a\times1.07^n\ge3a,\quad 1.07^n\ge3$

양변에 상용로그를 취하면 $n\log1.07\ge\log3$

$\therefore n\ge\dfrac{\log3}{\log1.07}=\dfrac{0.48}{0.03}=16$

따라서 관광객 수가 처음으로 3배 이상이 되는 것은 지금으로부터 16년 후이다.

답 ③

0528 초기 온도가 25 °C인 화재실에서 화재가 발생한 지 $\dfrac{9}{8}$분 후의 온도가 375 °C이므로

$25+k\log\left(8\cdot\dfrac{9}{8}+1\right)=375,\quad 25+k\log10=375$

$\therefore k=375-25=350$

또 화재가 발생한 지 a분 후의 온도가 725 °C이므로

$25+350\log(8a+1)=725,\quad 350\log(8a+1)=700$

$\log(8a+1)=2,\quad 8a+1=10^2$

$\therefore a=\dfrac{99}{8}$

답 $\dfrac{99}{8}$

0529 n년 후 물질 A가 처음으로 10 kg 이하가 된다고 하면

$100\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{60}}\le10,\quad \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{60}}\le\dfrac{1}{10}$

양변에 상용로그를 취하면 $\dfrac{n}{60}\log\dfrac{1}{2}\le\log\dfrac{1}{10}$

$-\dfrac{n}{60}\log2\le-1\quad\therefore n\ge\dfrac{60}{\log2}=\dfrac{60}{0.3}=200$

따라서 대기 중에 남아 있는 물질 A의 양이 처음으로 10 kg 이하가 되는 것은 현재로부터 200년 후이다.

답 200년

0530 전략 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$임을 이용하여 함숫값을 구한다.

풀이 $f(-2)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}=9$이므로

$(g\circ f)(-2)=g(f(-2))=g(9)=\log_9 9=1$

답 1

0531 전략 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y-b=f(x-a)$이고, 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=f(-x)$임을 이용한다.

풀이 ③ $y=\log_2(x+1)-3$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\log_2(-x+1)-3$

$\therefore y=-\log_2(-x+1)+3=\log_{\frac{1}{2}}(-x+1)+3$

따라서 두 함수 $y=\log_2(x+1)-3$, $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x+1)+3$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

④ $y=\log_2(x+1)-3$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

답 ④

0532 전략 로그의 성질을 이용하여 등식이 성립하는지 확인한다.

풀이 ㄱ. $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\log_a\dfrac{1}{3}=\log_a 3^{-1}=-\log_a 3=-f(3)$

ㄴ. $f(2^3)=\log_a 2^3=3\log_a 2=3f(2)\ne\{f(2)\}^3$

ㄷ. $f(\sqrt{2})=\log_a\sqrt{2}=\log_a 2^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\log_a 2=\dfrac{1}{2}f(2)$

ㄹ. $f(8)=\log_a 8=\log_a 2^3=3\log_a 2$,

$f(4)=\log_a 4=\log_a 2^2=2\log_a 2$이므로

$\dfrac{f(8)}{f(4)}=\dfrac{3\log_a 2}{2\log_a 2}=\dfrac{3}{2}\ne f(2)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

0533 전략 주어진 세 수의 밑을 π로 통일한 후 진수를 비교한다.

풀이 $\log_{\sqrt{\pi}}3=\log_{\pi^{\frac{1}{2}}}3=2\log_\pi 3=\log_\pi 3^2=\log_\pi 9$,

$\log_{\frac{1}{\pi}}\dfrac{1}{3}=\log_{\pi^{-1}}3^{-1}=\log_\pi 3$

이때 $3<9<3\pi$이고 밑이 1보다 크므로

$\log_\pi 3<\log_\pi 9<\log_\pi 3\pi$

$\therefore \log_{\frac{1}{\pi}}\dfrac{1}{3}<\log_{\sqrt{\pi}}3<\log_\pi 3\pi$

답 $\log_{\frac{1}{\pi}}\dfrac{1}{3}<\log_{\sqrt{\pi}}3<\log_\pi 3\pi$

0534 전략 함수 $y=\log_a f(x)$에서 $0<a<1$이면 $f(x)$가 최대일 때 y는 최소가 됨을 이용한다.

풀이 진수의 조건에서 $x+2>0$, $4-x>0$이므로

$x>-2$, $x<4\quad\therefore -2<x<4$ ··· ❶

주어진 함수의 식을 정리하면

$y=\log_{\frac{1}{3}}(x+2)+\log_{\frac{1}{3}}(4-x)$

$=\log_{\frac{1}{3}}(x+2)(4-x)$

$=\log_{\frac{1}{3}}(-x^2+2x+8)$

밑이 1보다 작으므로 $-x^2+2x+8$의 값이 최대일 때 y는 최솟값을 갖는다.

$f(x)=-x^2+2x+8$로 놓으면 $f(x)=-(x-1)^2+9$

$x=1$일 때 최댓값 9를 가지므로 주어진 함수의 최솟값은

$y=\log_{\frac{1}{3}}9=-2$

즉 $a=1$, $m=-2$이므로 ··· ❷

$a+m=-1$ ··· ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ a, m의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $a+m$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0535 전략 점 $\mathrm{M}(x,\ y)$가 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(c,\ d)$를 이은 선분 PQ의 중점이면 $x=\dfrac{a+c}{2}$, $y=\dfrac{b+d}{2}$임을 이용한다.

풀이 세 점 P, M, Q의 y좌표는 각각 $\log_3 5$, $\log_3 a$, $\log_3 20$이고 점 M이 선분 PQ의 중점이므로

$\log_3 a=\dfrac{\log_3 5+\log_3 20}{2}=\dfrac{\log_3 100}{2}$

$=\dfrac{\log_3 10^2}{2}=\dfrac{2\log_3 10}{2}$

$=\log_3 10$

$\therefore a=10$

답 ②

0536 전략 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 이은 선분을 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$임을 이용한다.

풀이 두 점 A, B가 함수 $f(x)=\log_3 x$의 그래프 위에 있으므로

$A(a, \log_3 a)$, $B(b, \log_3 b)$

선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot b+3\cdot a}{2+3}, \frac{2\cdot\log_3 b+3\cdot\log_3 a}{2+3}\right),$$

즉 $\left(\frac{3a+2b}{5}, \frac{3\log_3 a+2\log_3 b}{5}\right)$

이 점이 x축 위에 있으므로 $\frac{3\log_3 a+2\log_3 b}{5}=0$

$3\log_3 a+2\log_3 b=0$, $\log_3 a^3b^2=0$

$\therefore a^3b^2=1$

답 1

0537 전략 점 A의 y좌표가 3임을 이용한다.

풀이 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 3이므로 점 A의 y좌표는 3이다.

점 A가 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 점이므로 점 D의 x좌표를 a라 하면 $\log_3 a=3$에서 $a=3^3=27$

$\therefore A(27, 3)$

정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 3이므로 점 C의 x좌표는

$27-3=24$ $\therefore C(24, 0)$

$\therefore G(24, \log_3 24)$

따라서 정사각형 EFCG의 한 변의 길이는

$\overline{CG}=\log_3 24=\log_3(2^3\cdot 3)$

$=\log_3 2^3+\log_3 3=3\log_3 2+1$

답 ⑤

0538 전략 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 $y=2^x-1$에서 $2^x=y+1$

양변에 밑이 2인 로그를 취하면 $x=\log_2(y+1)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\log_2(x+1)$

따라서 두 함수 $y=2^x-1$과 $y=\log_2(x+1)$은 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

또 직선 AB의 기울기가 -1이므로 직선 AB는 직선 $y=x$와 수직이다.

즉 점 B는 점 $A(2, 3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 $B(3, 2)$

따라서 $C(2, 0)$, $D(3, 0)$이므로 사각형 ACDB의 넓이는

$\frac{1}{2}(3+2)\cdot 1=\frac{5}{2}$

답 ①

0539 전략 함수 $y=f(x)$의 역함수는 $y=f(x)$에서 x를 y로 나타낸 후 x와 y를 서로 바꾸어 구한다.

풀이 $y=\log_3(x-1)-2$에서 $\log_3(x-1)=y+2$

$x-1=3^{y+2}$ $\therefore x=3^{y+2}+1$

x와 y를 서로 바꾸면 함수 $y=\log_3(x-1)-2$의 역함수는

$y=3^{x+2}+1$

따라서 $a=3$, $b=2$, $c=1$이므로

$a^2+b^2+c^2=14$

답 ③

참고 함수 $y=\log_3(x-1)-2$는 집합 $\{x|x>1\}$에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이다.

0540 전략 주어진 방정식의 각 항의 밑을 5로 통일한 후 $\log_5 x=t$로 치환한다.

풀이 $\log_5 x-2\log_{\frac{1}{5}} x=3\log_5 x\cdot\log_{\frac{1}{5}} x$에서

$\log_5 x+2\log_5 x=-3\log_5 x\cdot\log_5 x$

$(\log_5 x)^2+\log_5 x=0$

$\log_5 x=t$로 놓으면 $t^2+t=0$ ··· ❶

$t(t+1)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=0$

즉 $\log_5 x=-1$ 또는 $\log_5 x=0$이므로

$x=\frac{1}{5}$ 또는 $x=1$ ··· ❷

이때 $\alpha<\beta$이므로 $\alpha=\frac{1}{5}$, $\beta=1$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\beta=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ t에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 주어진 방정식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\frac{1}{\alpha}+\beta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0541 전략 주어진 방정식의 양변에 상용로그를 취한 후 로그의 성질을 이용하여 식을 정리한다.

풀이 $5^{x+2}=2^{5-x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$(x+2)\log 5=(5-x)\log 2$

$x\log 5+2\log 5=5\log 2-x\log 2$

$x(\log 5+\log 2)=5\log 2-2\log 5$

$x\log 10=\log 2^5-\log 5^2=\log\frac{32}{25}$

$\therefore x=\log\frac{32}{25}$

따라서 $a=\frac{32}{25}$이므로 $25a=32$

답 32

0542 전략 $\log_2 x=t$로 치환하여 주어진 방정식을 t에 대한 이차방정식으로 나타낸 후 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 $(\log_2 x)^2+\log_{\frac{1}{2}} x^2-8=0$에서

$(\log_2 x)^2-2\log_2 x-8=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-2t-8=0$ ··· ❶

이 방정식의 두 근은 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta=2$ ··· ❷

$\log_2\alpha\beta=2$

$\therefore \alpha\beta=2^2=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ t에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.	40 %
❸ $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0543 **전략** 로그부등식 $\log_a f(x) \le \log_a g(x)$에서 $a>1$이면 $f(x)>0$, $g(x)>0$, $f(x) \le g(x)$의 공통 범위를 구한다.

풀이 진수의 조건에서 $x-1>0$, $\frac{1}{2}x+k>0$이므로

$x>1$ ...... ㉠

$\log_5(x-1) \le \log_5\left(\frac{1}{2}x+k\right)$에서 밑이 1보다 크므로

$x-1 \le \frac{1}{2}x+k$, $\frac{1}{2}x \le k+1$

$\therefore x \le 2k+2$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x \le 2k+2$

이 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 3이므로

$2k+2-1=3$ $\therefore k=1$

답 ①

0544 **전략** 밑을 3으로 통일한 후 진수에 대한 부등식을 세운다.

풀이 진수의 조건에서 $3-x>0$, $9+x>0$이므로

$x<3$, $x>-9$ $\therefore -9<x<3$ ...... ㉠

$\log_3(3-x)+\log_3(9+x)>2$에서

$\log_3(3-x)(9+x)>\log_3 3^2$

밑이 1보다 크므로

$(3-x)(9+x)>9$, $x^2+6x-18<0$

$\therefore -3-3\sqrt{3}<x<-3+3\sqrt{3}$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-3-3\sqrt{3}<x<-3+3\sqrt{3}$

따라서 $\alpha=-3-3\sqrt{3}$, $\beta=-3+3\sqrt{3}$이므로

$\alpha+\beta=(-3-3\sqrt{3})+(-3+3\sqrt{3})=-6$

답 ③

0545 **전략** $\log_a x$ 꼴이 반복되는 로그부등식을 풀 때에는 $\log_a x=t$로 치환하여 t에 대한 부등식을 푼다.

풀이 진수의 조건에서 $x>0$ ...... ㉠

$\log_{\frac{1}{5}}\frac{x}{25}\cdot\log_{\frac{1}{5}}\frac{5}{x} \ge -2$에서

$(\log_{\frac{1}{5}}x-\log_{\frac{1}{5}}25)(\log_{\frac{1}{5}}5-\log_{\frac{1}{5}}x) \ge -2$

$(\log_{\frac{1}{5}}x+2)(-1-\log_{\frac{1}{5}}x) \ge -2$

$\log_{\frac{1}{5}}x=t$로 놓으면 $(t+2)(-1-t) \ge -2$ ··· ❶

$t^2+3t \le 0$, $t(t+3) \le 0$ $\therefore -3 \le t \le 0$

즉 $-3 \le \log_{\frac{1}{5}}x \le 0$이므로 $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \le \log_{\frac{1}{5}}x \le \log_{\frac{1}{5}}1$

밑이 1보다 작으므로 $1 \le x \le \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$

$\therefore 1 \le x \le 125$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1 \le x \le 125$ ··· ❷

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는 125개이다. ··· ❸

답 125

채점 기준	비율
❶ t에 대한 이차부등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 자연수 x의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0546 **전략** 양변에 밑이 2인 로그를 취하여 로그부등식을 푼다.

풀이 $x^{\log_2 x} \ge (32x)^{2k}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x} \ge \log_2(32x)^{2k}$, $(\log_2 x)^2 \ge 2k\log_2 32x$

$(\log_2 x)^2 \ge 2k(5+\log_2 x)$

$(\log_2 x)^2-2k\log_2 x-10k \ge 0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-2kt-10k \ge 0$

모든 실수 t에 대하여 위의 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2-2kt-10k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(-10k) \le 0$, $k^2+10k \le 0$

$k(k+10) \le 0$ $\therefore -10 \le k \le 0$

답 $-10 \le k \le 0$

0547 **전략** 로그부등식 $\log_a f(x) \le \log_a g(x)$에서 $a>1$이면 $f(x)>0$, $g(x)>0$, $f(x) \le g(x)$의 공통 범위를 구한다.

풀이 진수의 조건에서 $f(x)>0$, $g(x)>0$ ...... ㉠

$\log_2 f(x) \le \log_2 g(x)$에서 밑이 1보다 크므로

$f(x) \le g(x)$ ...... ㉡

즉 주어진 부등식의 해는 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프가 x축의 위쪽에 있으면서 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프와 만나거나 그 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로 ㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2 \le x<3$ 또는 $7<x \le 10$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 2, 8, 9, 10의 4개이다.

답 ④

0548 **전략** 10개의 메뉴에서 항목을 1개씩 선택하는 데 걸리는 전체 시간은 $10T$초임을 이용한다.

풀이 메뉴가 10개이고 각 메뉴 안에 항목이 n개씩 있으므로 모든 메뉴에서 항목을 1개씩 선택하는 데 걸리는 전체 시간은

$10\left\{2+\frac{1}{3}\log_2(n+1)\right\}$(초)

이때 $10\left\{2+\frac{1}{3}\log_2(n+1)\right\} \le 30$에서

$2+\frac{1}{3}\log_2(n+1) \le 3$

$\frac{1}{3}\log_2(n+1) \le 1$, $\log_2(n+1) \le 3$

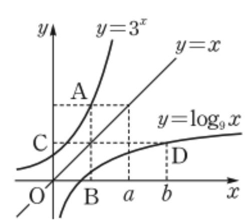
밑이 1보다 크므로 $n+1 \le 2^3$ $\therefore n \le 7$

따라서 n의 최댓값은 7이다.

답 ①

0549 **전략** 점 (a, b)가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이면 $b=f(a)$임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡자.



점 A는 $y=3^x$의 그래프 위에 있고 y좌표가 a이므로 x좌표를 구하면

$3^x=a$ $\therefore x=\log_3 a$

따라서 $B(\log_3 a, 0)$, $C(0, \log_3 a)$이므로 점 D의 y좌표는 $\log_3 a$이다.

점 D는 $y=\log_9 x$의 그래프 위에 있고 x좌표가 b이므로

$\log_9 b=\log_3 a$, $\frac{1}{2}\log_3 b=\log_3 a$

$\log_3 b=2\log_3 a$, $\log_3 b=\log_3 a^2$

$\therefore b=a^2$ ...... ㉠

한편 $ab=64$이므로 이 식에 ㉠을 대입하면

$a^3=64$ $\therefore a=4$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=16$

답 16

04 로그함수

0550 전략 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 해임을 이용한다.

풀이 $f(x)=-2^x+m$이므로 $f(x)=0$에서

$-2^x+m=0$, $2^x=m$ $\therefore x=\log_2 m$

$\therefore A(\log_2 m, 0)$

$2^x=f(x)$에서 $2^x=-2^x+m$

$2\cdot 2^x=m$ …… ㉠

$2^{x+1}=m$, $x+1=\log_2 m$

$\therefore x=\log_2 m-1$

이때 ㉠에서 $2\cdot 2^x=m$이므로

$2^x=\dfrac{m}{2}$

$\therefore B\left(\log_2 m-1, \dfrac{m}{2}\right)$, $C\left(0, \dfrac{m}{2}\right)$

$\overline{OA}=2\overline{BC}$이므로

$\log_2 m=2(\log_2 m-1)$, $\log_2 m=2$

$\therefore m=4$ 답 ②

0551 전략 선분 PQ의 중점이 원의 중심과 일치함을 이용한다.

풀이 $\overline{PQ}$가 원 C의 지름이므로 $\overline{PQ}$의 중점은 원의 중심 $\left(\dfrac{5}{4}, 0\right)$이다.

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, $\beta(\beta<\alpha)$라 하면

$P(\alpha, \log_a \alpha)$, $Q(\beta, \log_a \beta)$

이므로 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{5}{4}$에서

$\alpha+\beta=\dfrac{5}{2}$ …… ㉠

$\log_a \alpha+\log_a \beta=0$에서 $\log_a \alpha\beta=0$

$\alpha\beta=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=2$, $\beta=\dfrac{1}{2}$ ($\because \beta<\alpha$)

한편 $x=2$를 원의 방정식 $\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2+y^2=\dfrac{13}{16}$에 대입하면

$\dfrac{9}{16}+y^2=\dfrac{13}{16}$ $\therefore y=\pm\dfrac{1}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$이고 이때 점 P는 곡선 $y=\log_a x$ 위에 있으므로

$\dfrac{1}{2}=\log_a 2$, $2=a^{\frac{1}{2}}$

$\therefore a=4$ 답 ③

0552 전략 양변에 밑이 3인 로그를 취하여 $\log_3 y$의 최댓값, 최솟값을 구한다.

풀이 $y=x^{4-\log_3 x}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 y=\log_3 x^{4-\log_3 x}=(4-\log_3 x)\log_3 x$

$=-(\log_3 x)^2+4\log_3 x$ ⋯ ❶

$\log_3 x=t$로 놓으면 $1\le x\le 27$에서

$\log_3 1\le \log_3 x\le \log_3 27$ $\therefore 0\le t\le 3$

이때 주어진 함수는

$\log_3 y=-t^2+4t=-(t-2)^2+4$

따라서 $\log_3 y$는 $t=2$일 때 최댓값 4, $t=0$일 때 최솟값 0을 갖는다.

즉 $0\le \log_3 y\le 4$이므로

$\log_3 1\le \log_3 y\le \log_3 3^4$ $\therefore 1\le y\le 81$ ⋯ ❷

따라서 $M=81$, $m=1$이므로

$M-m=80$ ⋯ ❸

답 80

채점 기준	비율
❶ $y=x^{4-\log_3 x}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하여 정리할 수 있다.	30 %
❷ y의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ $M-m$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0553 전략 $\log_2 x=t$로 놓고 t에 대한 삼차방정식을 푼다.

풀이 $\log_2 x^3+(\log_2 x)^3=6(\log_2 x)^2-\log_2 x^4+2$에서

$3\log_2 x+(\log_2 x)^3=6(\log_2 x)^2-4\log_2 x+2$

$(\log_2 x)^3-6(\log_2 x)^2+7\log_2 x-2=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^3-6t^2+7t-2=0$, $(t-1)(t^2-5t+2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t^2-5t+2=0$

$t=1$에서 $\log_2 x=1$ $\therefore x=2$

이때 주어진 방정식의 세 실근을 2, α, β라 하면 방정식 $t^2-5t+2=0$의 두 실근은 $\log_2 \alpha$, $\log_2 \beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 \alpha+\log_2 \beta=5$, $\log_2 \alpha\beta=5$

$\therefore \alpha\beta=2^5=32$

따라서 주어진 방정식의 모든 실근의 곱은

$2\alpha\beta=64$ 답 ⑤

참고 이차방정식 $t^2-5t+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-4\cdot 1\cdot 2=17>0$

이므로 방정식 $t^2-5t+2=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

0554 전략 처음 투자액이 a원이고 매년 b%씩 투자액을 늘려나갈 때, n년 후의 투자액은 $a\left(1+\dfrac{b}{100}\right)^n$원이다.

풀이 n년 후 제품 A의 투자액이 제품 B의 투자액을 초과한다고 하면 $1000\left(1+\dfrac{25}{100}\right)^n>2000\left(1+\dfrac{20}{100}\right)^n$

$1000\times 1.25^n>2000\times 1.2^n$, $1.25^n>2\times 1.2^n$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 1.25^n>\log(2\times 1.2^n)$

$n\log 1.25>\log 2+n\log 1.2$

$n(\log 1.25-\log 1.2)>\log 2$, $n\log\dfrac{1.25}{1.2}>\log 2$

$n\log\dfrac{25}{24}>\log 2$, $n\{\log 5^2-\log(2^3\times 3)\}>\log 2$

$n\{2(1-\log 2)-(3\log 2+\log 3)\}>\log 2$

$n(2-5\log 2-\log 3)>\log 2$

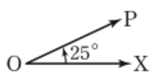
이때 $2-5\log 2-\log 3>0$이므로

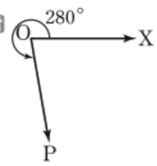
$n>\dfrac{\log 2}{2-5\log 2-\log 3}=\dfrac{0.3010}{0.0179}=16.81\cdots$

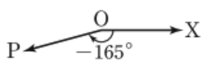
따라서 지금으로부터 17년 후에 제품 A의 투자액이 제품 B의 투자액을 처음으로 초과한다. 답 ③

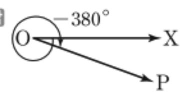
05 삼각함수

Ⅱ. 삼각함수

0555 답 

0556 답 

0557 답 

0558 답 

0559 답 $360°\times n+115°$

0560 답 $360°\times n+330°$

0561 $780°=360°\times2+60°$이므로
$360°\times n+60°$ 답 $360°\times n+60°$

0562 $1190°=360°\times3+110°$이므로
$360°\times n+110°$ 답 $360°\times n+110°$

0563 $-415°=360°\times(-2)+305°$이므로
$360°\times n+305°$ 답 $360°\times n+305°$

0564 $-820°=360°\times(-3)+260°$이므로
$360°\times n+260°$ 답 $360°\times n+260°$

0565 답 제4사분면

0566 $850°=360°\times2+130°$
따라서 $850°$는 제2사분면의 각이다. 답 제2사분면

0567 $-170°=360°\times(-1)+190°$
따라서 $-170°$는 제3사분면의 각이다. 답 제3사분면

0568 $-1070°=360°\times(-3)+10°$
따라서 $-1070°$는 제1사분면의 각이다. 답 제1사분면

0569 $120°=120\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{2}{3}\pi$ 답 $\frac{2}{3}\pi$

0570 $330°=330\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{11}{6}\pi$ 답 $\frac{11}{6}\pi$

0571 $-144°=(-144)\cdot\frac{\pi}{180}=-\frac{4}{5}\pi$ 답 $-\frac{4}{5}\pi$

0572 $-225°=(-225)\cdot\frac{\pi}{180}=-\frac{5}{4}\pi$ 답 $-\frac{5}{4}\pi$

0573 $\frac{2}{5}\pi=\frac{2}{5}\pi\cdot\frac{180°}{\pi}=72°$ 답 $72°$

0574 $\frac{7}{3}\pi=\frac{7}{3}\pi\cdot\frac{180°}{\pi}=420°$ 답 $420°$

0575 $-\frac{5}{6}\pi=\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\cdot\frac{180°}{\pi}=-150°$ 답 $-150°$

0576 $-\frac{7}{4}\pi=\left(-\frac{7}{4}\pi\right)\cdot\frac{180°}{\pi}=-315°$ 답 $-315°$

0577 답

도(°)	$0°$	$30°$	$45°$	$240°$	$270°$	$360°$
라디안	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	2π

0578 답 $2n\pi+\frac{\pi}{2}$

0579 $\frac{16}{5}\pi=2\pi\times1+\frac{6}{5}\pi$이므로
$2n\pi+\frac{6}{5}\pi$ 답 $2n\pi+\frac{6}{5}\pi$

0580 $-\frac{4}{3}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{2}{3}\pi$이므로
$2n\pi+\frac{2}{3}\pi$ 답 $2n\pi+\frac{2}{3}\pi$

0581 $-\frac{9}{4}\pi=2\pi\times(-2)+\frac{7}{4}\pi$이므로
$2n\pi+\frac{7}{4}\pi$ 답 $2n\pi+\frac{7}{4}\pi$

0582 $l=5\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi$, $S=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\frac{5}{4}\pi=\frac{25}{8}\pi$
답 $l=\frac{5}{4}\pi$, $S=\frac{25}{8}\pi$

0583 $r\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi$이므로 $r=4$
$\therefore S=\frac{1}{2}\cdot4\cdot2\pi=4\pi$ 답 $r=4$, $S=4\pi$

0584 $\overline{OP}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$이므로
(1) $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ (2) $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$
(3) $\tan\theta=\frac{1}{2}$ 답 (1) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (2) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (3) $\frac{1}{2}$

0585 $\overline{OP}=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$이므로
(1) $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\cos\theta=-\frac{1}{2}$
(3) $\tan\theta=\sqrt{3}$ 답 (1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\sqrt{3}$

0586 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{12^2+(-5)^2}=13$이므로

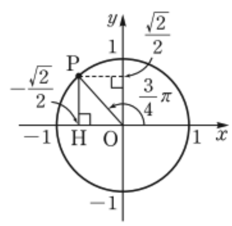
(1) $\sin\theta=-\dfrac{5}{13}$ (2) $\cos\theta=\dfrac{12}{13}$

(3) $\tan\theta=-\dfrac{5}{12}$

답 (1) $-\dfrac{5}{13}$ (2) $\dfrac{12}{13}$ (3) $-\dfrac{5}{12}$

0587 답 (가) 1 (나) $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (다) $-\dfrac{1}{2}$ (라) $\sqrt{3}$

0588 오른쪽 그림과 같이 각 $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

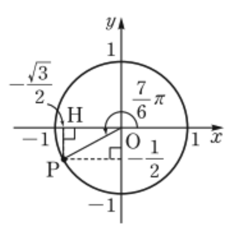


$\overline{\mathrm{OP}}=1$이고, $\angle\mathrm{POH}=\dfrac{\pi}{4}$이므로

$\mathrm{P}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \tan\theta=-1$ 답 풀이 참조

0589 오른쪽 그림과 같이 각 $\theta=\dfrac{7}{6}\pi$를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

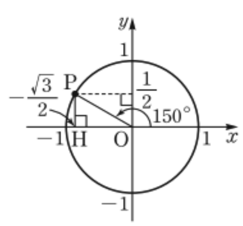


$\overline{\mathrm{OP}}=1$이고, $\angle\mathrm{POH}=\dfrac{\pi}{6}$이므로

$\mathrm{P}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

$\therefore \sin\theta=-\dfrac{1}{2}, \cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 답 풀이 참조

0590 오른쪽 그림과 같이 각 $\theta=150^\circ$를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

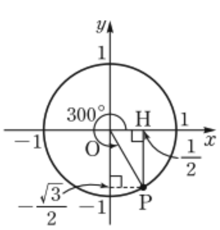


$\overline{\mathrm{OP}}=1$이고, $\angle\mathrm{POH}=30^\circ$이므로

$\mathrm{P}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{1}{2}, \cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \tan\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 답 풀이 참조

0591 오른쪽 그림과 같이 각 $\theta=-60^\circ$를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{\mathrm{OP}}=1$이고, $\angle\mathrm{POH}=60^\circ$이므로

$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\therefore \sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \cos\theta=\dfrac{1}{2}, \tan\theta=-\sqrt{3}$ 답 풀이 참조

0592 $\theta=\dfrac{13}{6}\pi=2\pi\times1+\dfrac{\pi}{6}$에서 θ는 제1사분면의 각이므로

$\sin\theta>0, \cos\theta>0, \tan\theta>0$

답 $\sin\theta>0, \cos\theta>0, \tan\theta>0$

0593 $\theta=670^\circ=360^\circ\times1+310^\circ$에서 θ는 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0, \cos\theta>0, \tan\theta<0$

답 $\sin\theta<0, \cos\theta>0, \tan\theta<0$

0594 $\theta=-\dfrac{10}{3}\pi=2\pi\times(-2)+\dfrac{2}{3}\pi$에서 θ는 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0, \cos\theta<0, \tan\theta<0$

답 $\sin\theta>0, \cos\theta<0, \tan\theta<0$

0595 $\theta=-460^\circ=360^\circ\times(-2)+260^\circ$에서 θ는 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0, \cos\theta<0, \tan\theta>0$

답 $\sin\theta<0, \cos\theta<0, \tan\theta>0$

0596 $\sin\theta>0$이므로 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이고, $\cos\theta<0$이므로 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.
따라서 θ는 제2사분면의 각이다. 답 제2사분면

0597 $\sin\theta<0$이므로 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이고, $\tan\theta<0$이므로 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.
따라서 θ는 제4사분면의 각이다. 답 제4사분면

0598 $\sin\theta\cos\theta>0$에서

$\sin\theta>0, \cos\theta>0$ 또는 $\sin\theta<0, \cos\theta<0$

이므로 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

답 제1사분면 또는 제3사분면

0599 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta+\left(\dfrac{5}{13}\right)^2=1 \qquad \therefore \sin^2\theta=\dfrac{144}{169}$

이때 θ가 제4사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta=-\dfrac{12}{13}$ 답 $-\dfrac{12}{13}$

0600 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2+\cos^2\theta=1 \qquad \therefore \cos^2\theta=\dfrac{8}{9}$

이때 θ가 제3사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

$\therefore \cos\theta=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ 답 $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

0601 $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2$ 답 2

0602 $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

$=\dfrac{\sin\theta(1-\cos\theta)+\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$

$=\dfrac{\sin\theta-\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\sin\theta\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2\sin\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}$ 답 $\dfrac{2}{\sin\theta}$

0603 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$, $2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$ 답 $-\dfrac{3}{8}$

0604 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9}$, $-2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{8}{9}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{4}{9}$ 답 $\dfrac{4}{9}$

0605 ① $-670^\circ=360^\circ\times(-2)+50^\circ$
② $-330^\circ=360^\circ\times(-1)+30^\circ$
③ $-310^\circ=360^\circ\times(-1)+50^\circ$
④ $410^\circ=360^\circ\times1+50^\circ$
⑤ $770^\circ=360^\circ\times2+50^\circ$ 답 ②

0606 ① $-550^\circ=360^\circ\times(-2)+170^\circ$
② $-280^\circ=360^\circ\times(-1)+80^\circ$
③ $450^\circ=360^\circ\times1+90^\circ$
④ $660^\circ=360^\circ\times1+300^\circ$
⑤ $810^\circ=360^\circ\times2+90^\circ$ 답 ②

0607 ㄱ. $-1050^\circ=360^\circ\times(-3)+30^\circ$
ㄴ. $-650^\circ=360^\circ\times(-2)+70^\circ$
ㄷ. $500^\circ=360^\circ\times1+140^\circ$
ㄹ. $790^\circ=360^\circ\times2+70^\circ$
ㅁ. $1010^\circ=360^\circ\times2+290^\circ$
이상에서 70°를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ㄴ, ㄹ이다.
답 ㄴ, ㄹ

0608 ① $-620^\circ=360^\circ\times(-2)+100^\circ$ ∴ 제2사분면
② $-335^\circ=360^\circ\times(-1)+25^\circ$ ∴ 제1사분면
③ $490^\circ=360^\circ\times1+130^\circ$ ∴ 제2사분면
④ $510^\circ=360^\circ\times1+150^\circ$ ∴ 제2사분면
⑤ $860^\circ=360^\circ\times2+140^\circ$ ∴ 제2사분면 답 ②

0609 동경 OP가 원점 O를 중심으로 시초선에서 음의 방향으로 230°만큼 회전하면 그 각의 크기는 -230°이고, 양의 방향으로 110°만큼 회전하면 동경 OP가 나타내는 각의 크기는

$-230^\circ+110^\circ=-120^\circ$ ⋯ ❶

이때 $-120^\circ=360^\circ\times(-1)+240^\circ$이므로 동경 OP는 제3사분면에 있다. ⋯ ❷

답 제3사분면

채점 기준	비율
❶ 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 구할 수 있다.	50 %
❷ 동경 OP가 제몇 사분면에 있는지 구할 수 있다.	50 %

0610 θ가 제1사분면의 각이므로

$360^\circ\times n<\theta<360^\circ\times n+90^\circ$ (n은 정수)

$\therefore 180^\circ\times n<\dfrac{\theta}{2}<180^\circ\times n+45^\circ$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때,

$180^\circ\times2k<\dfrac{\theta}{2}<180^\circ\times2k+45^\circ$

$\therefore 360^\circ\times k<\dfrac{\theta}{2}<360^\circ\times k+45^\circ$

따라서 $\dfrac{\theta}{2}$는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$180^\circ\times(2k+1)<\dfrac{\theta}{2}<180^\circ\times(2k+1)+45^\circ$

$\therefore 360^\circ\times k+180^\circ<\dfrac{\theta}{2}<360^\circ\times k+225^\circ$

따라서 $\dfrac{\theta}{2}$는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 $\dfrac{\theta}{2}$는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

답 제1사분면 또는 제3사분면

0611 2θ가 제3사분면의 각이므로

$360^\circ\times n+180^\circ<2\theta<360^\circ\times n+270^\circ$ (n은 정수)

$\therefore 180^\circ\times n+90^\circ<\theta<180^\circ\times n+135^\circ$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때,

$180^\circ\times2k+90^\circ<\theta<180^\circ\times2k+135^\circ$

$\therefore 360^\circ\times k+90^\circ<\theta<360^\circ\times k+135^\circ$

따라서 θ는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$180^\circ\times(2k+1)+90^\circ<\theta<180^\circ\times(2k+1)+135^\circ$

$\therefore 360^\circ\times k+270^\circ<\theta<360^\circ\times k+315^\circ$

따라서 θ는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다. 답 ⑤

0612 ③ $\dfrac{5}{12}\pi=\dfrac{5}{12}\pi\cdot\dfrac{180^\circ}{\pi}=75^\circ$ 답 ③

0613 ㄱ. $20^\circ=20\cdot\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{9}$

ㄴ. $165^\circ=165\cdot\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{11}{12}\pi$

ㄷ. $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{180°}{\pi}=\frac{90°}{\pi}$

ㄹ. $2=2\cdot\frac{180°}{\pi}=\frac{360°}{\pi}$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

0614 각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$4\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$3\theta=2n\pi \quad \therefore \theta=\frac{2n}{3}\pi$ …… ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{2n}{3}\pi<\pi$이므로 $\quad 0<n<\frac{3}{2}$

$\therefore n=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad \theta=\frac{2}{3}\pi$ 답 ④

0615 각 θ를 나타내는 동경과 각 3θ를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$3\theta-\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$2\theta=(2n+1)\pi \quad \therefore \theta=\frac{2n+1}{2}\pi$ …… ㉠ ··· ❶

$\pi<\theta<2\pi$에서 $\pi<\frac{2n+1}{2}\pi<2\pi$이므로

$2<2n+1<4, \quad \frac{1}{2}<n<\frac{3}{2} \quad \therefore n=1$ ··· ❷

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad \theta=\frac{3}{2}\pi$ ··· ❸

답 $\frac{3}{2}\pi$

채점 기준	비율
❶ θ를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ θ의 값을 구할 수 있다.	20 %

0616 각 θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$6\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$5\theta=2n\pi \quad \therefore \theta=\frac{2n}{5}\pi$ …… ㉠

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\frac{2n}{5}\pi<\frac{\pi}{2}$이므로

$0<n<\frac{5}{4} \quad \therefore n=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{2}{5}\pi$이므로

$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{15}\right)=\sin\left(\frac{2}{5}\pi-\frac{\pi}{15}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 ④

0617 각 θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$7\theta-\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$6\theta=(2n+1)\pi \quad \therefore \theta=\frac{2n+1}{6}\pi$ …… ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{2n+1}{6}\pi<\pi$이므로

$0<2n+1<6, \quad -\frac{1}{2}<n<\frac{5}{2}$

$\therefore n=0$ 또는 $n=1$ 또는 $n=2$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 또는 $\theta=\frac{5}{6}\pi$

따라서 구하는 모든 θ의 값의 합은

$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\frac{5}{6}\pi=\frac{3}{2}\pi$ 답 $\frac{3}{2}\pi$

0618 각 θ를 나타내는 동경과 각 3θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$\theta+3\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$4\theta=2n\pi \quad \therefore \theta=\frac{n}{2}\pi$ …… ㉠

$\pi<\theta<2\pi$에서 $\pi<\frac{n}{2}\pi<2\pi$이므로 $\quad 2<n<4$

$\therefore n=3$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad \theta=\frac{3}{2}\pi$ 답 ④

0619 각 α를 나타내는 동경과 각 β를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $\alpha+\beta$는 $360°\times n+90°$ (n은 정수) 꼴이어야 한다.

① $405°=360°\times1+45°$ ② $420°=360°\times1+60°$

③ $450°=360°\times1+90°$ ④ $750°=360°\times2+30°$

⑤ $765°=360°\times2+45°$ 답 ③

0620 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$\theta+5\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$6\theta=(2n+1)\pi$

$\therefore \theta=\frac{2n+1}{6}\pi$ …… ㉠ ··· ❶

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{2n+1}{6}\pi<\pi$이므로

$3<2n+1<6, \quad 1<n<\frac{5}{2}$

$\therefore n=2$ ··· ❷

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad \theta=\frac{5}{6}\pi$ ··· ❸

답 $\frac{5}{6}\pi$

채점 기준	비율
❶ θ를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ θ의 값을 구할 수 있다.	20 %

0621 각 θ를 나타내는 동경과 각 2θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+2\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

$3\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2} \quad \therefore \theta=\frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{6}$ …… ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{6}<\pi$이므로

$-\frac{1}{6}<\frac{2n}{3}<\frac{5}{6}$, $-\frac{1}{4}<n<\frac{5}{4}$

$\therefore n=0$ 또는 $n=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\frac{5}{6}\pi$

따라서 구하는 모든 θ의 값의 합은

$\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi=\pi$ 답 π

0622 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ라 하면

$\frac{1}{2}\cdot r\cdot 2\pi=8\pi$ $\therefore r=8$

따라서 $8\theta=2\pi$이므로 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 답 ②

0623 반지름의 길이가 a, 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴의 호의 길이가 4π이므로

$a\cdot\frac{2}{3}\pi=4\pi$ $\therefore a=6$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\pi=12\pi$ $\therefore b=12$

$\therefore b-a=6$ 답 ⑤

0624 반지름의 길이가 r인 원의 넓이는 πr^2 ··· ❶

반지름의 길이가 $4r$이고 호의 길이가 6π인 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 4r\cdot 6\pi=12\pi r$ ··· ❷

두 넓이가 서로 같으므로 $\pi r^2=12\pi r$

$r^2-12r=0$, $r(r-12)=0$

$\therefore r=12$ ($\because r>0$) ··· ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ 원의 넓이를 구할 수 있다.	20 %
❷ 부채꼴의 넓이를 구할 수 있다.	40 %
❸ r의 값을 구할 수 있다.	40 %

0625 원의 둘레의 길이는 $2\pi\cdot 4=8\pi$

부채꼴의 호의 길이를 l이라 하면 부채꼴의 둘레의 길이는

$2\cdot 4+l=8+l$

즉 $8\pi=2(8+l)$이므로 $l=4\pi-8$

부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면 $l=4\theta$이므로

$4\pi-8=4\theta$ $\therefore \theta=\pi-2$ 답 $\pi-2$

0626 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 둘레의 길이가 12이므로

$2r+l=12$ $\therefore l=12-2r$

이때 $12-2r>0$, $r>0$이므로 $0<r<6$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(12-2r)$

$=-r^2+6r=-(r-3)^2+9$ $(0<r<6)$

따라서 $r=3$일 때 S는 최대이므로 넓이가 최대인 부채꼴의 반지름의 길이는 3이다. 답 ①

라쎈 특강 제한된 범위에서 이차함수의 최대·최소

$\alpha\le x\le\beta$에서 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은

① $\alpha\le p\le\beta$일 때

➡ $f(p)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

② $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$일 때

➡ $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

0627 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 둘레의 길이가 8이므로

$2r+l=8$ $\therefore l=8-2r$

이때 $8-2r>0$, $r>0$이므로 $0<r<4$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(8-2r)$

$=-r^2+4r=-(r-2)^2+4$ $(0<r<4)$

따라서 $r=2$일 때 S는 최댓값 4를 갖는다.

이때 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면 $S=\frac{1}{2}r^2\theta$이므로

$4=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\theta$ $\therefore \theta=2$

답 반지름의 길이: 2, 중심각의 크기: 2

0628 부채꼴의 반지름의 길이를 r m, 호의 길이를 l m라 하면 둘레의 길이가 100 m이므로

$2r+l=100$ $\therefore l=100-2r$ ··· ❶

이때 $100-2r>0$, $r>0$이므로 $0<r<50$

부채꼴의 넓이를 S m^2라 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(100-2r)$ ··· ❷

$=-r^2+50r=-(r-25)^2+625$ $(0<r<50)$

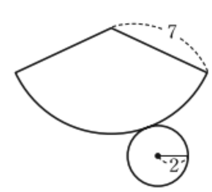
즉 $r=25$일 때 S는 최댓값 625를 갖는다.

따라서 화단의 넓이의 최댓값은 625 m^2이다. ··· ❸

답 625 m^2

채점 기준	비율
❶ l을 r에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ S를 r에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ 화단의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

0629 원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 부채꼴의 호의 길이는 원의 둘레의 길이와 같으므로



$2\pi\cdot 2=4\pi$

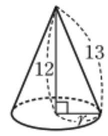
따라서 옆면인 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 4\pi=14\pi$

$\therefore$ (원뿔의 겉넓이)$=14\pi+\pi\cdot 2^2=18\pi$ 답 ②

0630 [그림1]과 같이 모선의 길이가 13이고 높이가 12인 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r라 하면

$$r=\sqrt{13^2-12^2}=5$$



[그림1]

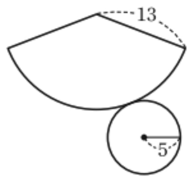
원뿔의 전개도는 [그림2]와 같고 이때 부채꼴의 호의 길이는 원의 둘레의 길이와 같으므로

$$2\pi\cdot5=10\pi$$

따라서 옆면인 부채꼴의 넓이는

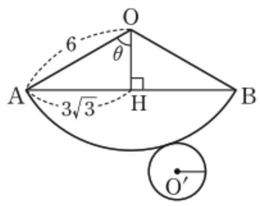
$$\frac{1}{2}\cdot13\cdot10\pi=65\pi$$

답 65π



[그림2]

0631 오른쪽 그림과 같이 점 O에서 현 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=3\sqrt{3}$ ⋯ ❶

$\angle AOH=\theta$라 하면

$$\sin\theta=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이므로 $\theta=\frac{\pi}{3}\ \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \angle AOB=\frac{2}{3}\pi$ ⋯ ❷

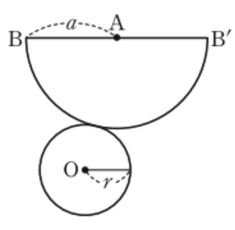
원뿔의 밑면인 원 O'의 둘레의 길이는 부채꼴의 호의 길이와 같으므로

$6\cdot\frac{2}{3}\pi=4\pi$ ⋯ ❸

답 4π

채점 기준	비율
❶ $\overline{AH}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\angle AOB$의 크기를 구할 수 있다.	40 %
❸ 원 O'의 둘레의 길이를 구할 수 있다.	30 %

0632 오른쪽 그림과 같이 주어진 원뿔의 전개도에서 부채꼴 ABB'의 반지름의 길이를 a, 밑면인 원의 반지름의 길이를 r라 하자. 이때 호 BB'의 길이는 원의 둘레의 길이 $2\pi r$와 같으므로 부채꼴 ABB'의 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot2\pi r=\pi ar$$

원뿔의 옆넓이는 밑넓이의 2배이므로

$\pi ar=2\cdot\pi r^2 \qquad \therefore a=2r$

주어진 원뿔에서 $\triangle ABO$는 직각삼각형이므로

$$\cos(\angle ABO)=\frac{\overline{BO}}{\overline{AB}}=\frac{r}{2r}=\frac{1}{2}$$

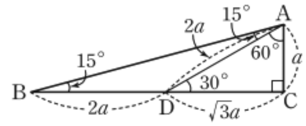
$\therefore \angle ABO=\frac{\pi}{3}\ \left(\because 0<\angle ABO<\frac{\pi}{2}\right)$

답 ①

0633 $\angle ABD+\angle BAD=\angle ADC$이므로

$15^\circ+\angle BAD=30^\circ \qquad \therefore \angle BAD=15^\circ$

즉 $\triangle ABD$는 이등변삼각형이므로 오른쪽 그림에서 $\overline{AD}=\overline{BD}=2a$라 하면 $\triangle ADC$에서



$\overline{AC}=a$, $\overline{CD}=\sqrt{3}a$

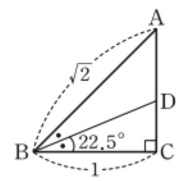
$$\therefore \tan15^\circ=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{a}{(2+\sqrt{3})a}$$

$$=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$

$$=2-\sqrt{3}$$

답 ④

0634 오른쪽 그림에서 $\angle B=45^\circ$이므로



$\angle ABD=\angle DBC=22.5^\circ$

또 $\overline{BC}:\overline{BA}=\overline{CD}:\overline{AD}$이므로

$1:\sqrt{2}=\overline{CD}:\overline{AD}$

$\therefore \overline{AD}=\sqrt{2}\,\overline{CD}$

$\overline{AD}+\overline{CD}=1$이므로 $(\sqrt{2}+1)\overline{CD}=1$

$$\therefore \overline{CD}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

$$=\sqrt{2}-1$$

$\triangle BCD$에서

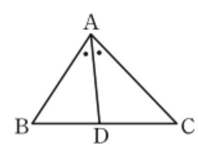
$$\tan22.5^\circ=\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{\sqrt{2}-1}{1}=\sqrt{2}-1$$

답 ①

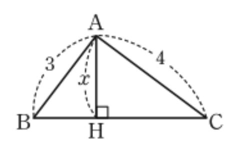
라쎈특강 삼각형의 내각의 이등분선

$\triangle ABC$에서 $\overline{AD}$가 $\angle A$의 이등분선일 때

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$



0635 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{AH}=x$라 하면



$$\sin B=\frac{x}{3},\ \sin C=\frac{x}{4}$$

$$\therefore \frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\frac{x}{4}}{\frac{x}{3}}=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

0636 $\overline{OP}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$이므로

$$\sin\theta=-\frac{4}{5},\ \cos\theta=\frac{3}{5}$$

$$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{5}$$

답 ③

0637 점 $P\left(-\frac{1}{2},\ a\right)$에서 $\tan\theta=\frac{a}{-\frac{1}{2}}=-2a$이므로

$-2a=-3 \qquad \therefore a=\frac{3}{2}$

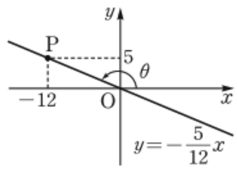
$$\therefore r=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

답 ④

0638 $5x+12y=0$에서 $y=-\frac{5}{12}x$이므로

$\tan\theta=-\frac{5}{12}$ ··· ❶

$0<\theta<\pi$이므로 오른쪽 그림에서 직선 $y=-\frac{5}{12}x$ 위의 점 $\mathrm{P}(-12,\ 5)$에 대하여



$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-12)^2+5^2}=13$

이므로

$\sin\theta=\frac{5}{13}$, $\cos\theta=-\frac{12}{13}$ ··· ❷

$\therefore 13(\sin\theta+\cos\theta)=13\left\{\frac{5}{13}+\left(-\frac{12}{13}\right)\right\}$

$=-7$ ··· ❸

답 -7

채점 기준	비율
❶ $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $13(\sin\theta+\cos\theta)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0639 점 D의 좌표는 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$

점 A는 점 D와 y축에 대하여 대칭이므로 점 A의 좌표는

$(-\cos\theta,\ \sin\theta)$

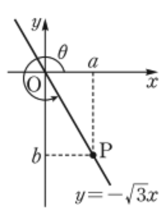
따라서 점 A의 x좌표는 $-\cos\theta$

답 ⑤

0640 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 직선 $y=-\sqrt{3}x$ 위의 점이므로

$b=-\sqrt{3}a$

이때 $a>0$이므로 오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 제4사분면 위에 있고



$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+(-\sqrt{3}a)^2}$

$=\sqrt{4a^2}=2a\ (\because a>0)$

따라서

$\sin\theta=\frac{b}{2a}=\frac{-\sqrt{3}a}{2a}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos\theta=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$

이므로

$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{2}$

$=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=-1$

답 -1

0641 (i) $\sin\theta\tan\theta>0$일 때,

$\sin\theta$와 $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 같으므로 θ는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\cos\theta\tan\theta<0$일 때,

$\cos\theta$와 $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제4사분면의 각이다.

답 ④

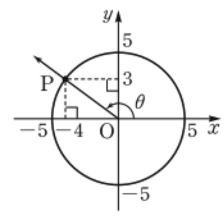
0642 θ가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$

$\therefore \sqrt{\cos^2\theta}-|\sin\theta|+\cos\theta=-\cos\theta-(-\sin\theta)+\cos\theta$

$=\sin\theta$

답 $\sin\theta$

0643 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$에서 θ가 제2사분면의 각이고 $\sin\theta=\frac{3}{5}$이므로 오른쪽 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원을 그리면 각 θ를 나타내는 동경과 만나는 점 P는 $\mathrm{P}(-4,\ 3)$



따라서 삼각함수의 정의에 의하여

$\cos\theta=-\frac{4}{5}$, $\tan\theta=-\frac{3}{4}$

$\therefore \cos\theta-\tan\theta=-\frac{4}{5}-\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{20}$

답 $-\frac{1}{20}$

0644 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$에서 θ는 제2사분면의 각이므로

$2n\pi+\frac{\pi}{2}<\theta<2n\pi+\pi$ (n은 정수)

$\therefore n\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<n\pi+\frac{\pi}{2}$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때,

$2k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{\pi}{2}$

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore 2k\pi+\frac{5}{4}\pi<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{3}{2}\pi$

(i), (ii)에서

$2k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{\pi}{2}$

또는 $2k\pi+\frac{5}{4}\pi<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{3}{2}\pi$

이때 $\frac{5}{4}\pi<\frac{4}{3}\pi<\frac{3}{2}\pi$이므로 각 $\frac{\theta}{2}$가 될 수 있는 것은 ③이다.

답 ③

0645 $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta+\sin\theta+\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$

$=\frac{1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$

$=\frac{1}{\cos\theta}$

답 $\frac{1}{\cos\theta}$

0646 $\cos^2\theta(1-\tan\theta)^2+\cos^2\theta(1+\tan\theta)^2$

$=\cos^2\theta\{(1-\tan\theta)^2+(1+\tan\theta)^2\}$

$=\cos^2\theta(1-2\tan\theta+\tan^2\theta+1+2\tan\theta+\tan^2\theta)$

$=\cos^2\theta(2+2\tan^2\theta)=2\cos^2\theta\left(1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$

$=2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=2$

답 2

0647 ① $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta-\cos\theta(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta-\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}$

$=\frac{1-\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta}$

② $(1-\sin^2\theta)(1+\tan^2\theta)=\cos^2\theta\left(1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

③ $\sin^4\theta-\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)$

$=\sin^2\theta-\cos^2\theta$

$=1-\cos^2\theta-\cos^2\theta$

$=1-2\cos^2\theta$

④ $\left(\frac{1}{\sin\theta}+1\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}+1\right)\left(\frac{1}{\sin\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)$

$=\left(\frac{1}{\sin\theta}+1\right)\left(\frac{1}{\sin\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}+1\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)$

$=\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)=\frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}\cdot\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=1$

⑤ $\frac{2\tan\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta+\tan^2\theta}=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$

$=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$=2\sin\theta\cos\theta$

답 ④

0648 $\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}+\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}$

$=\sqrt{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}$

$+\sqrt{\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}$

$=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}+\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}$

$=|\sin\theta+\cos\theta|+|\sin\theta-\cos\theta|$

$=\sin\theta+\cos\theta+\{-(\sin\theta-\cos\theta)\}$ ($\because 0<\sin\theta<\cos\theta$)

$=2\cos\theta$

답 ⑤

0649 $\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{1}{5}$에서

$5(1-\sin\theta)=1+\sin\theta,\quad 5-5\sin\theta=1+\sin\theta$

$-6\sin\theta=-4\quad \therefore \sin\theta=\frac{2}{3}$

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$이므로

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}\left(\because \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$

답 ⑤

0650 $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta+(1+\sin\theta)^2}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\frac{\cos^2\theta+1+2\sin\theta+\sin^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\frac{2(1+\sin\theta)}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\frac{2}{\cos\theta}$ ··· ❶

$\frac{2}{\cos\theta}=4$이므로 $\quad\cos\theta=\frac{1}{2}$ ··· ❷

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$이므로

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\because \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi\right)$ ··· ❸

답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	60 %
❷ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	10 %
❸ $\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0651 $\frac{1}{1+\cos\theta}+\frac{1}{1-\cos\theta}=\frac{(1-\cos\theta)+(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$

$=\frac{2}{\sin^2\theta}$

$\frac{2}{\sin^2\theta}=3$이므로 $\quad\sin^2\theta=\frac{2}{3}$

$\therefore \cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

이때 $\tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$이므로 $\quad\tan^2\theta=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}=2$

$\therefore \tan\theta=\sqrt{2}\left(\because \pi<\theta<\frac{3}{2}\pi\right)$

답 ④

0652 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\quad\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$

따라서 $\sin\theta-\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{2}$

답 ③

0653 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{25}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25}\quad \therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{12}{25}$

답 $-\frac{12}{25}$

0654 $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=2$

$1-2\sin\theta\cos\theta=2\quad \therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$에서

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=0$

답 ③

0655 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=2$에서

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=2,\quad \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2$

$\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=2\quad \therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$ ··· ❶

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$에서

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\cdot\frac{1}{2}=2$$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$ ··· ❷

$\therefore \sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\sqrt{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ··· ❸

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sin\theta+\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\sin^3\theta+\cos^3\theta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0656 이차방정식 $2x^2+x+k=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\sin\theta\cos\theta=\frac{k}{2}$ ······ ㉠

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{k}{2}=-\frac{3}{8}$ $\therefore k=-\frac{3}{4}$ 답 ①

0657 주어진 이차방정식의 계수가 유리수이므로 이차방정식의 한 근이 $3+2\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $3-2\sqrt{2}$이다. ··· ❶

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=6$ ··· ❷

이때

$$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

에서 $\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=6$이므로 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{6}$

$\therefore 6\sin\theta\cos\theta=1$ ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ $3-2\sqrt{2}$가 주어진 이차방정식의 근임을 알 수 있다.	20 %
❷ $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $6\sin\theta\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0658 $2x^2-\sqrt{6}x+k=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $\sin\theta\cos\theta=\frac{k}{2}$

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{2}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{3}{2}$$

$1+k=\frac{3}{2}$ $\therefore k=\frac{1}{2}$

이때

$$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=4,$$

$$\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}=1$$

이므로 x^2의 계수가 1이고 $\tan\theta$, $\frac{1}{\tan\theta}$을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2-4x+1=0$ 답 $x^2-4x+1=0$

0659 전략 어떤 각의 동경의 위치를 구할 때에는 그 각을 $360^\circ\times(\text{정수})+\alpha^\circ$ $(0^\circ\le\alpha^\circ<360^\circ)$ 꼴로 나타낸다.

풀이 ㄱ. $105^\circ=105\times\frac{\pi}{180}=\frac{7}{12}\pi$

ㄴ. $1560^\circ=360^\circ\times4+120^\circ$이므로 1560°는 제2사분면의 각이다.

ㄷ. $-\frac{\pi}{6}=2\pi\times(-1)+\frac{11}{6}\pi$

$330^\circ=330\times\frac{\pi}{180}=\frac{11}{6}\pi$

$-750^\circ=-750\times\frac{\pi}{180}=-\frac{25}{6}\pi$

$=2\pi\times(-3)+\frac{11}{6}\pi$

따라서 $-\frac{\pi}{6}$, 330°, -750°를 나타내는 동경은 모두 일치한다.

ㄹ. $\frac{\pi}{3}+\frac{11}{3}\pi=4\pi$이므로 $\frac{\pi}{3}$와 $\frac{11}{3}\pi$를 나타내는 동경은 x축에 대하여 대칭이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

0660 전략 중심각의 크기가 θ(라디안)이고, 반지름의 길이가 r인 부채꼴의 호의 길이와 넓이는 각각 $r\theta$, $\frac{1}{2}r^2\theta$이다.

풀이 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 중심각의 크기가 $\frac{3}{4}$이고 둘레의 길이가 11이므로

$2r+\frac{3}{4}r=11$, $\frac{11}{4}r=11$ $\therefore r=4$ ··· ❶

따라서 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot4^2\cdot\frac{3}{4}=6$ ··· ❷

답 6

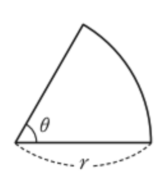
채점 기준	비율
❶ r의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 부채꼴의 넓이를 구할 수 있다.	50 %

라쎈 특강 부채꼴의 둘레의 길이

중심각의 크기가 θ(라디안)이고 반지름의 길이가 r인 부채꼴의 둘레의 길이를 l이라 하면

$l=2\times(\text{반지름의 길이})+(\text{호의 길이})$

$=2r+r\theta$



0661 전략 중심각의 크기가 θ(라디안)이고 반지름의 길이가 r인 부채꼴의 호의 길이는 $r\theta$이다.

풀이 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ라 하면 둘레의 길이는 $2r+r\theta$

원의 둘레의 길이는 $2\pi r$

즉 $2r+r\theta=2\pi r\cdot\frac{1}{2}$이므로 $r(2+\theta)=\pi r$

$\therefore\ \theta=\pi-2\ (\because\ r>0)$ 답 ④

0662 전략 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}\ (ab\neq0)$이면 $a>0,\ b<0$임을 이용한다.

풀이 $\sin\theta\cos\theta\neq0$이고 $\frac{\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\cos\theta}}=-\sqrt{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$이므로

$\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$

즉 θ는 제2사분면의 각이다. 답 ②

0663 전략 먼저 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$임을 이용하여 주어진 식을 통분한 후 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$을 이용하여 식을 간단히 한다.

풀이 $\left(1+\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(1+\frac{1}{\tan\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\right)$

$=\frac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}$

$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2$ 답 ①

0664 전략 θ가 제3사분면의 각이면 $2n\pi+\pi<\theta<2n\pi+\frac{3}{2}\pi$ (n은 정수)임을 이용한다.

풀이 θ가 제3사분면의 각이므로

$2n\pi+\pi<\theta<2n\pi+\frac{3}{2}\pi$ (n은 정수)

$\therefore\ \frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{\theta}{3}<\frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{2}$

(i) $n=3k$ (k는 정수)일 때,

$\frac{2\cdot3k}{3}\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{\theta}{3}<\frac{2\cdot3k}{3}\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ 2k\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{\pi}{2}$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k는 정수)일 때,

$\frac{2(3k+1)}{3}\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{\theta}{3}<\frac{2(3k+1)}{3}\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ 2k\pi+\pi<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{7}{6}\pi$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제3사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k는 정수)일 때,

$\frac{2(3k+2)}{3}\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{\theta}{3}<\frac{2(3k+2)}{3}\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ 2k\pi+\frac{5}{3}\pi<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{11}{6}\pi$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제4사분면의 각이다.

이상에서 $\frac{\theta}{3}$는 제1사분면 또는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

따라서 각 $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제2사분면이다. 답 제2사분면

0665 전략 두 각 α, β를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이면 $\alpha-\beta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)임을 이용한다.

풀이 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$5\theta-\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$4\theta=(2n+1)\pi\qquad\therefore\ \theta=\frac{2n+1}{4}\pi$ ...... ㉠

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\pi<\frac{2n+1}{4}\pi<\frac{3}{2}\pi$이므로

$4<2n+1<6,\qquad\frac{3}{2}<n<\frac{5}{2}\qquad\therefore\ n=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{5}{4}\pi$ 답 $\frac{5}{4}\pi$

0666 전략 두 각 α, β를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이면 $\alpha+\beta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)임을 이용한다.

풀이 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+5\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

$6\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}\qquad\therefore\ \theta=\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{12}$ ...... ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{12}<\pi$이므로

$-\frac{\pi}{12}<\frac{n}{3}\pi<\frac{11}{12}\pi,\qquad-\frac{1}{4}<n<\frac{11}{4}$

$\therefore\ n=0$ 또는 $n=1$ 또는 $n=2$

각 θ 중에서 크기가 가장 큰 것은 $n=2$일 때이므로 이것을 ㉠에 대입하면 $\alpha=\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{12}=\frac{3}{4}\pi$

각 θ 중에서 크기가 가장 작은 것은 $n=0$일 때이므로 이것을 ㉠에 대입하면 $\beta=0+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{12}$

$\therefore\ \alpha-\beta=\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{12}=\frac{2}{3}\pi$ 답 ④

0667 전략 중심각의 크기가 θ(라디안), 반지름의 길이가 r인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면 $l=r\theta$, $S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r^2\theta$이다.

풀이 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 둘레의 길이가 20이므로

$2r+l=20\qquad\therefore\ l=20-2r$ ··· ❶

이때 $20-2r>0$, $r>0$이므로 $0<r<10$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(20-2r)$ ··· ❷

$=-r^2+10r=-(r-5)^2+25\ (0<r<10)$

즉 $r=5$일 때 S는 최댓값 25를 갖는다. $\therefore a=5$

이때 중심각의 크기가 b이므로 $\frac{1}{2}\cdot 5^2\cdot b=25$ $\therefore b=2$

$\therefore a+b=7$ ⋯ ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ l을 r에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ S를 r에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0668 전략 먼저 원의 넓이를 이용하여 원의 반지름의 길이를 구한다.

풀이 원의 반지름의 길이를 r라 하면

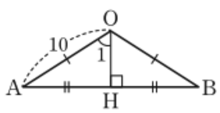
$\pi r^2=100\pi$, $r^2=100$

$\therefore r=10$ ($\because r>0$)

호 AB의 길이가 반지름의 길이의 2배이므로

$10\theta=2\cdot 10$ $\therefore \theta=2$

$\triangle$OAB는 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$인 이등변삼각형이므로 오른쪽 그림과 같이 점 O에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle$OAH에서 $\angle$AOH$=1$이고



$\sin 1=\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{10}$ $\therefore \overline{\mathrm{AH}}=10\sin 1$

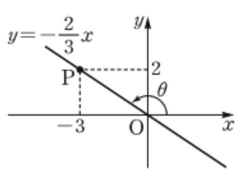
$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=20\sin 1$

답 ②

0669 전략 직선 $y=mx+n$이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기가 θ일 때, $m=\tan\theta$임을 이용한다.

풀이 $y=-\frac{2}{3}x$에서 $\tan\theta=-\frac{2}{3}$

$0<\theta<\pi$이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-\frac{2}{3}x$ 위의 점 P$(-3, 2)$에 대하여



$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$

이므로

$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\theta=-\frac{3}{\sqrt{13}}$

$$\therefore \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}-\tan\theta=\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right)}-\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$=-\frac{13}{6}+\frac{2}{3}=-\frac{3}{2}$$

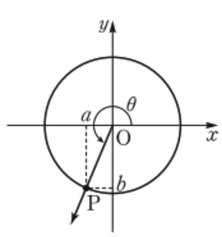
답 $-\frac{3}{2}$

0670 전략 좌표평면 위에 각 θ를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하는 원을 그려 본다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 원점 O를 중심으로 하는 원을 그리고 각 θ를 나타내는 동경과 원이 만나는 점 P를

P(a, b) $(a<0, b<0)$

라 하자.



이때 $\tan\theta=\frac{b}{a}$이므로 $\frac{b}{a}=2$

$\therefore b=2a$

$\therefore \overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+(2a)^2}$

$=-\sqrt{5}a$ ($\because a<0$)

따라서

$\sin\theta=\frac{b}{-\sqrt{5}a}=\frac{2a}{-\sqrt{5}a}=-\frac{2}{\sqrt{5}}$,

$\cos\theta=\frac{a}{-\sqrt{5}a}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

이므로

$\sin\theta\cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{2}{5}$

답 ④

0671 전략 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 각 삼각함수의 값의 부호를 조사한다.

풀이 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

이므로

$\sin\theta-\cos\theta>0$, $\sin\theta\cos\theta<0$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

0672 전략 먼저 $\cos\theta$의 값을 구한 후 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$를 이용한다.

풀이 $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{3}{4}$에서 $4-4\cos\theta=3+3\cos\theta$

$7\cos\theta=1$ $\therefore \cos\theta=\frac{1}{7}$ ⋯ ❶

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{1}{7}\right)^2=\frac{48}{49}$이므로

$\sin\theta=-\frac{4\sqrt{3}}{7}$ $\left(\because \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi\right)$ ⋯ ❷

$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{4\sqrt{3}}{7}}{\frac{1}{7}}=-4\sqrt{3}$ ⋯ ❸

답 $-4\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0673 전략 주어진 등식의 양변을 제곱하여 $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구한다.

풀이 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{4}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$, $2\sin\theta\cos\theta=-\frac{5}{9}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{5}{18}$

$\therefore \sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\frac{2}{3}\cdot\left\{1-\left(-\frac{5}{18}\right)\right\}$

$=\frac{2}{3}\cdot\frac{23}{18}=\frac{23}{27}$

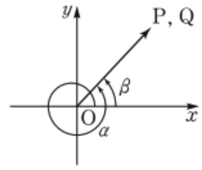
답 ⑤

0674 전략 조건에 맞도록 두 동경 OP, OQ의 위치를 좌표평면 위에 나타내어 본다.

풀이 ㄱ. $\alpha-\beta=2n\pi$이면

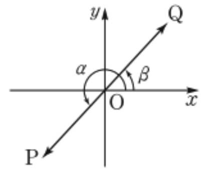
$\alpha=\beta+2n\pi$

두 동경 OP, OQ를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 두 동경 OP, OQ는 일치한다.

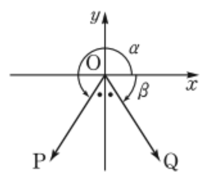
ㄴ. 두 동경 OP, OQ가 원점에 대하여 대칭이므로 두 동경을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore \alpha-\beta=(2n+1)\pi$

$=2n\pi+\pi$

ㄷ. $\alpha=\frac{4}{3}\pi$, $\beta=-\frac{\pi}{3}$를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같이 두 동경 OP, OQ는 y축에 대하여 대칭이다.

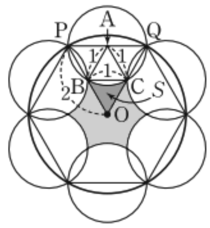


이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

0675 전략 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림에서 삼각형 OPQ는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이고, 삼각형 APB와 삼각형 ACQ는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이므로



S

$=$(삼각형 OPQ의 넓이)

$-${(삼각형 APB의 넓이)

$+$(부채꼴 ABC의 넓이)

$+$(삼각형 ACQ의 넓이)}

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 1^2+\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 1^2\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$$

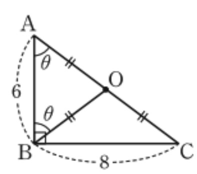
따라서 색칠한 부분의 넓이는

$$6S=6\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-\pi$$

답 ①

0676 전략 직각삼각형의 외심의 성질과 이등변삼각형의 성질을 이용하여 θ와 크기가 같은 각을 찾는다.

풀이 점 O가 삼각형 ABC의 외심이므로



$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$

$\therefore \angle OAB=\angle OBA=\theta$

$\overline{AC}=\sqrt{6^2+8^2}=10$이므로

$$\sin\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5},$$

$$\cos\theta=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5},$$

$$\tan\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

$$\therefore 15(\sin\theta+\cos\theta)\tan\theta=15\cdot\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{4}{3}$$

$$=28$$

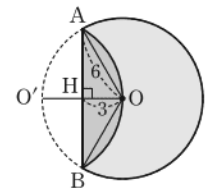
답 ⑤

라쎈 특강 삼각형의 외심

① 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점(외심)에서 만난다.
② 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.
③ 직각삼각형의 외심은 빗변의 중점에 있다.

0677 전략 접힌 부분에서 직각삼각형을 찾고 삼각비를 이용하여 호에 대한 중심각의 크기를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 접힌 선분의 양 끝 점을 A, B라 하고 원의 중심 O에서 현 AB에 내린 수선의 발을 H, $\overline{OH}$의 연장선과 접기 전의 원주와의 교점을 O′이라 하자.



$\overline{OA}=6$, $\overline{OH}=\overline{O'H}=3$

이므로 직각삼각형 OAH에서

$$\cos(\angle AOH)=\frac{\overline{OH}}{\overline{OA}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle AOH=\frac{\pi}{3}\ \left(\because 0<\angle AOH<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \angle AOB=2\angle AOH=\frac{2}{3}\pi$$ ⋯ ❶

따라서 접힌 활꼴 부분의 넓이는

(부채꼴 AOB의 넓이)$-$(삼각형 OAB의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\sin\left(\pi-\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$=12\pi-9\sqrt{3}$$ ⋯ ❷

답 $12\pi-9\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ ∠AOB의 크기를 구할 수 있다.	50 %
❷ 접힌 활꼴 부분의 넓이를 구할 수 있다.	50 %

0678 전략 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하여 $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 구한다.

풀이 $4\sin\theta=3\cos\theta$에서 $\sin\theta=\frac{3}{4}\cos\theta$ ⋯⋯ ㉠

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 이 식에 ㉠을 대입하면

$$\left(\frac{3}{4}\cos\theta\right)^2+\cos^2\theta=1,\quad \frac{25}{16}\cos^2\theta=1$$

$$\cos^2\theta=\frac{16}{25}\quad \therefore \cos\theta=\frac{4}{5}\ \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

이것을 ㉠에 대입하면 $\sin\theta=\frac{3}{5}$

$$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{4},\ \frac{1}{\cos\theta}=\frac{5}{4}$$

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 $\tan\theta$, $\frac{1}{\cos\theta}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a=\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}=2,\ b=\tan\theta\cdot\frac{1}{\cos\theta}=\frac{15}{16}$$

$\therefore 8ab=15$

답 ③

06 삼각함수의 그래프

Ⅱ. 삼각함수

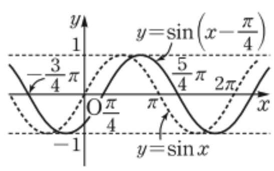
0679 함수 $f(x)$의 주기가 4이므로
$f(x+4)=f(x)$
$\therefore f(14)=f(10)=f(6)=f(2)=1$ 답 1

0680 함수 $f(x)$의 주기가 3이므로
$f(x+3)=f(x)$
$\therefore f(8)=f(5)=f(2)$
$0\le x<3$에서 $f(x)=2x$이므로
$f(8)=f(2)=4$ 답 4

0681 답 (가) -2 (나) 2 (다) 2π

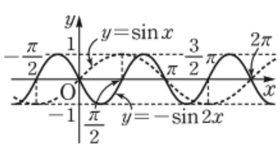
0682 답 (가) -1 (나) 1 (다) π

0683 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것과 같다.



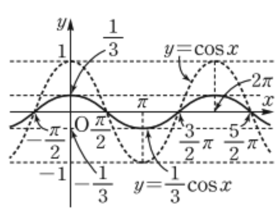
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$, 주기는 2π이다. 답 풀이 참조

0684 $y=-\sin 2x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것과 같다.



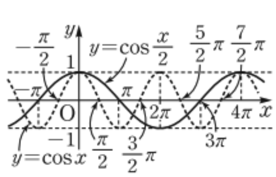
따라서 그래프는 위의 그림과 같고, 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$, 주기는 π이다. 답 풀이 참조

0685 $y=\frac{1}{3}\cos x$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{1}{3}$배 한 것과 같다.



따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 치역은 $\left\{y\,\middle|\,-\frac{1}{3}\le y\le \frac{1}{3}\right\}$, 주기는 2π이다. 답 풀이 참조

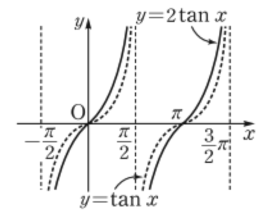
0686 $y=\cos\frac{x}{2}$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 2배 한 것과 같다.



따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$, 주기는 4π이다. 답 풀이 참조

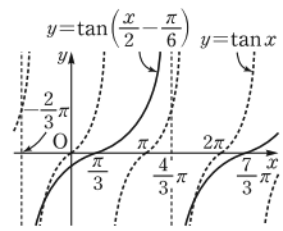
0687 답 (가) π (나) $\frac{\pi}{2}$ (다) $\frac{\pi}{4}$

0688 $y=2\tan x$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 것과 같다.



따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 치역은 실수 전체의 집합, 주기는 π, 점근선의 방정식은
$x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다. 답 풀이 참조

0689 $y=\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 2배 한 후 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 평행이동한 것과 같다.



따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 치역은 실수 전체의 집합, 주기는 2π, 점근선의 방정식은
$x=2n\pi+\frac{4}{3}\pi$ (n은 정수)이다. 답 풀이 참조

0690 $y=\frac{1}{3}\sin 2x$에서 최댓값은 $\frac{1}{3}$, 최솟값은 $-\frac{1}{3}$이고 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.
답 최댓값: $\frac{1}{3}$, 최솟값: $-\frac{1}{3}$, 주기: π

0691 $y=2\cos 3x$에서 최댓값은 2, 최솟값은 -2이고 주기는 $\frac{2\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$이다.
답 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: $\frac{2}{3}\pi$

0692 $y=-\tan 2x$에서 최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.
답 최댓값, 최솟값은 없다, 주기: $\frac{\pi}{2}$

0693 $y=-\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$에서 $y=-\sin\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$
따라서 최댓값은 1, 최솟값은 -1이고 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$이다.
답 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: 4π

0694 $y=3\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1$에서 $y=3\cos 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1$
따라서 최댓값은 2, 최솟값은 -4이고 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.
답 최댓값: 2, 최솟값: -4, 주기: π

0695 $y=\tan 2\pi x+4$에서 최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 $\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$이다.

답 최댓값, 최솟값은 없다, 주기: $\frac{1}{2}$

0696 $\sin\frac{13}{6}\pi=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0697 $\cos\frac{17}{4}\pi=\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0698 $\tan\frac{13}{3}\pi=\tan\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ 답 $\sqrt{3}$

0699 $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

0700 $\cos\left(-\frac{7}{3}\pi\right)=\cos\frac{7}{3}\pi=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

0701 $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$ 답 -1

0702 $\sin\frac{4}{3}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

0703 $\cos\frac{5}{4}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

0704 $\tan\frac{7}{6}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

0705 $\sin\frac{3}{4}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0706 $\cos\frac{5}{6}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

0707 $\tan\frac{2}{3}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}=-\sqrt{3}$ 답 $-\sqrt{3}$

0708 $\sin 105^\circ=\sin(90^\circ+15^\circ)$
$=\cos 15^\circ$

삼각함수표에서 $\cos 15^\circ=0.9659$이므로

$\sin 105^\circ=0.9659$ 답 0.9659

0709 $\cos 343^\circ=\cos(360^\circ-17^\circ)$
$=\cos 17^\circ$

삼각함수표에서 $\cos 17^\circ=0.9563$이므로

$\cos 343^\circ=0.9563$ 답 0.9563

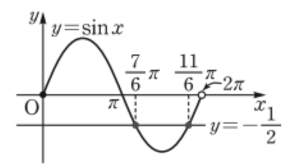
0710 $\tan 164^\circ=\tan(180^\circ-16^\circ)$
$=-\tan 16^\circ$

삼각함수표에서 $\tan 16^\circ=0.2867$이므로

$\tan 164^\circ=-0.2867$ 답 -0.2867

0711 답 (가) $\frac{1}{2}$ (나) $\frac{\pi}{6}$ (다) $\frac{5}{6}\pi$

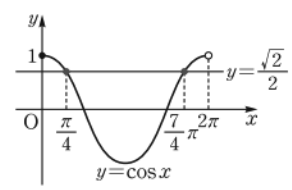
0712 오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$이므로



$x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$ 답 $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

0713 $\sqrt{2}\cos x=1$에서 $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7}{4}\pi$이므로

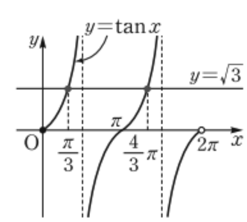


$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

답 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

0714 $\tan x-\sqrt{3}=0$에서 $\tan x=\sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4}{3}\pi$이므로

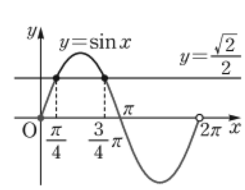


$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

답 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

0715 답 (가) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (나) $\frac{3}{4}\pi$ (다) $\frac{5}{4}\pi$

0716 부등식 $\sin x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$와 만나는 부분 또는 직선보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서

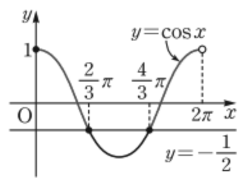


$0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi\le x<2\pi$

답 $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi\le x<2\pi$

0717 $2\cos x+1\geq 0$에서 $\quad \cos x\geq -\frac{1}{2}$

부등식 $\cos x\geq -\frac{1}{2}$의 해는 $0\leq x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{2}$과 만나는 부분 또는 직선보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서

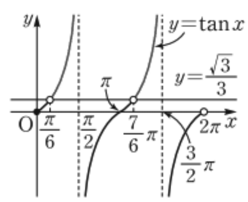


$$0\leq x\leq \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{4}{3}\pi\leq x<2\pi$$

답 $0\leq x\leq \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi\leq x<2\pi$

0718 $\sqrt{3}\tan x>1$에서 $\quad \tan x>\frac{\sqrt{3}}{3}$

부등식 $\tan x>\frac{\sqrt{3}}{3}$의 해는 $0\leq x<2\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서



$$\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{7}{6}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$$

답 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{7}{6}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$

0719 ④ 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 답 ④

0720 ㄱ. 치역은 실수 전체의 집합이다.
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0721 $y=\sin x$의 그래프에서

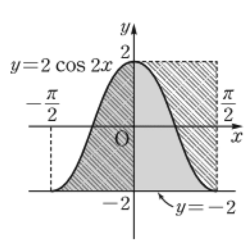
$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\pi}{2} \quad \therefore x_1+x_2=\pi$

$\frac{x_3+x_4}{2}=\frac{5}{2}\pi \quad \therefore x_3+x_4=5\pi$

$\frac{x_5+x_6}{2}=\frac{9}{2}\pi \quad \therefore x_5+x_6=9\pi$

$\frac{x_7+x_8}{2}=\frac{13}{2}\pi \quad \therefore x_7+x_8=13\pi$ 답 13π

0722 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 넓이는



$$\frac{\pi}{2}\cdot\{2-(-2)\}=2\pi$$

답 ③

0723 $y=\sin x$의 그래프가 $0\leq x\leq\pi$에서 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로 $\quad \frac{p+r}{2}=\frac{\pi}{2} \quad \therefore p+r=\pi$ ➊

또 $y=\cos x$의 그래프가 $0\leq x\leq 2\pi$에서 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로 $\quad \frac{q+s}{2}=\pi \quad \therefore q+s=2\pi$ ➋

$\therefore p+q+r+s=(p+r)+(q+s)=3\pi$ ➌

답 3π

채점 기준	비율
➊ $p+r$의 값을 구할 수 있다.	40 %
➋ $q+s$의 값을 구할 수 있다.	40 %
➌ $p+q+r+s$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0724 두 점 A, B는 직선 $x=\frac{\pi}{4}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{4} \quad \therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ …… ㉠

두 점 C, D는 직선 $x=\frac{3}{4}\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{3}{4}\pi \quad \therefore \gamma+\delta=\frac{3}{2}\pi$ …… ㉡

두 점 B, C는 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2} \quad \therefore \beta+\gamma=\pi$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$\alpha+2\beta+2\gamma+\delta=(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\delta)$

$=\frac{\pi}{2}+\pi+\frac{3}{2}\pi=3\pi$ 답 ③

다른풀이 두 점 A, D는 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\delta}{2}=\frac{\pi}{2} \quad \therefore \alpha+\delta=\pi$ …… ㉣

두 점 B, C는 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2} \quad \therefore \beta+\gamma=\pi$ …… ㉤

㉣, ㉤에서

$\alpha+2\beta+2\gamma+\delta=(\alpha+\delta)+2(\beta+\gamma)=\pi+2\pi=3\pi$

0725 $y=2\sin(\pi x-\pi)+1=2\sin\pi(x-1)+1$의 그래프는 $y=2\sin\pi x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $m=1$, $n=1$이므로 $\quad m+n=2$ 답 ⑤

0726 $y=\sin\frac{\pi}{3}x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sin\frac{\pi}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ ➊

이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{5}{4},\ a\right)$를 지나므로

$a=\sin\frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ➋

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

채점 기준	비율
➊ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	50 %
➋ a의 값을 구할 수 있다.	50 %

0727 ㄱ. $y=\cos(2x-\pi)+\frac{1}{2}=\cos 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}$의 그래프는 $y=\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄴ. $y=2\cos 2x-1$의 그래프는 $y=\cos 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 후 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄷ. $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 후 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄹ. $y=\cos(2x+3\pi)=\cos 2\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)$의 그래프는 $y=\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{3}{2}\pi$만큼 평행이동한 것과 같다.

이상에서 $y=\cos 2x$의 그래프를 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ③

0728 $y=\sin 3x-1$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\sin 3x-1 \qquad \therefore y=-\sin 3x+1$

따라서 $a=-1$, $b=1$이므로

$a+b=0$

답 0

0729 $y=\cos x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\cos(-x)=\cos x$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1$, 즉 $f(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1$

$$\begin{aligned}\therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right)&=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)+1\\&=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+1\\&=\cos\frac{\pi}{3}+1\\&=\frac{1}{2}+1\\&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

답 ⑤

0730 $y=\sin\frac{x}{2}$의 그래프를 x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sin\frac{1}{2}(x-\pi)$

이 함수의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\sin\frac{1}{2}(-x-\pi), \qquad -y=-\sin\frac{1}{2}(x+\pi)$

$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right) \qquad \therefore y=\cos\frac{x}{2}$

답 ③

참고 함수 $y=\cos\frac{x}{2}$의 그래프는 함수 $y=\sin\frac{x}{2}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\pi$만큼 평행이동한 것과 같다.

0731 ① 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

② 최댓값은 $2-1=1$이다.

③ 최솟값은 $-2-1=-3$이다.

④ $x=0$을 대입하면

$y=2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)-1=-2\sin\frac{\pi}{3}-1=-\sqrt{3}-1$

따라서 그래프는 원점을 지나지 않는다.

⑤ $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-1=2\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1$의 그래프는 $y=2\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것과 같다.

답 ④

0732 $y=3\sin(2x-\pi)+1$에서

$a=3+1=4$, $b=-3+1=-2$, $c=\frac{2\pi}{2}=\pi$

$\therefore abc=-8\pi$

답 -8π

0733 ① $y=\sin\pi x-2$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$

② $y=\cos\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$

③ $y=\tan\frac{\pi}{2}x+2$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$

④ $y=2\tan\frac{x}{2}-1$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$

⑤ $y=3\sin\pi(x-1)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$

따라서 주기가 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다.

답 ④

0734 $y=3\cos\frac{1}{2}x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=3\cos\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-3$ ··· ❶

이 함수의 최댓값은 $3-3=0$, 최솟값은 $-3-3=-6$이므로

$M=0$, $m=-6$ ··· ❷

$\therefore M+m=-6$ ··· ❸

답 -6

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❷ M, m의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $M+m$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0735 ㄱ. 주기가 $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$인 주기함수이다.

ㄴ. $f(-x)=\tan\left(\frac{-x}{2}\right)+1=-\tan\frac{x}{2}+1$,

$-f(x)=-\tan\frac{x}{2}-1$이므로 $\qquad f(-x)\neq -f(x)$

ㄷ. 최댓값은 없다.

ㄹ. 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2n\pi+\pi$ (n은 정수)이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

0736 $f(x)=a\cos\pi x+b$의 최댓값이 3이고 $a>0$이므로

$a+b=3$ ······ ㉠

$f\left(\frac{1}{3}\right)=2$이므로 $\quad a\cos\frac{\pi}{3}+b=2$

$\therefore \frac{1}{2}a+b=2$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ b=1$

$\therefore a-b=1$ 답 ④

0737 $f(x)=a\tan bx+2$의 주기가 2π이고 $b>0$이므로

$\frac{\pi}{b}=2\pi \qquad \therefore b=\frac{1}{2}$

또 함수 $f(x)=a\tan\frac{1}{2}x+2$에서 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이므로

$a\tan\frac{\pi}{4}+2=0 \qquad \therefore a=-2$

$\therefore ab=-1$ 답 ③

0738 $f(x)=a\sin\left(\frac{\pi}{2}-bx\right)+c$에서 최댓값이 5이고 $a>0$이므로

$a+c=5$ ······ ㉠

주기가 2π이고 $b>0$이므로 $\quad \frac{2\pi}{b}=2\pi$

$\therefore b=1$

또 함수 $f(x)=a\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+c$에서 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3$이므로

$a\sin\frac{\pi}{6}+c=3 \qquad \therefore \frac{1}{2}a+c=3$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=4,\ c=1$

$\therefore a+b-c=4$ 답 4

0739 주어진 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -2이고 $a>0$이므로

$a=2$

또 주기가 $\frac{2}{3}\pi-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi \qquad \therefore b=2$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=2\sin(2x-c)$이고, 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{6},\ 0\right)$을 지나므로

$0=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-c\right), \qquad \sin\left(\frac{\pi}{3}-c\right)=0$

$0<c<\pi$이므로 $\quad c=\frac{\pi}{3}$

$\therefore abc=\frac{4}{3}\pi$ 답 $\frac{4}{3}\pi$

0740 주어진 함수의 최댓값이 3, 최솟값이 -1이고 $a>0$이므로

$a+c=3,\ -a+c=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ c=1$ ··· ❶

또 주기가 $3\pi-(-\pi)=4\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=4\pi \qquad \therefore b=\frac{1}{2}$ ··· ❷

$\therefore abc=1$ ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ a, c의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ abc의 값을 구할 수 있다.	20 %

0741 주어진 함수의 주기가 2π이고 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{a}=2\pi \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=\tan\left(\frac{1}{2}x-b\right)$이고, 그래프가 점 $(\pi,\ 0)$을 지나므로

$0=\tan\left(\frac{\pi}{2}-b\right)$

$0<b<\pi$이므로 $\quad b=\frac{\pi}{2}$

$\therefore ab=\frac{\pi}{4}$ 답 $\frac{\pi}{4}$

0742 주어진 함수의 최댓값이 3, 최솟값이 -5이고 $a>0$이므로

$a+b=3,\ -a+b=-5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=4,\ b=-1$

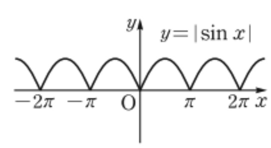
$\therefore y=4\cos\frac{\pi}{4}(2x-1)-1=4\cos\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)-1$

따라서 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이고, 그래프에서 주기는 $2\left(c-\frac{1}{2}\right)$이므로

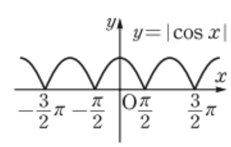
$2\left(c-\frac{1}{2}\right)=4 \qquad \therefore c=\frac{5}{2}$

$\therefore a+2b+2c=7$ 답 ①

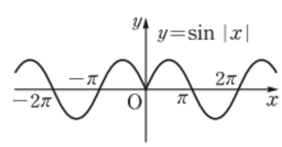
0743 $y=|\sin x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



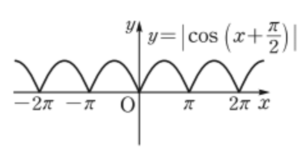
ㄱ. $y=|\cos x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄴ. $y=\sin|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄷ. $y=\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이상에서 $y=|\sin x|$의 그래프와 일치하는 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

0744 $y=|\tan ax|$의 주기는 $\frac{\pi}{|a|}$이고, $y=4\cos 3x$의 주기는 $\frac{2}{3}\pi$이므로 ··· ❶

$\frac{\pi}{|a|}=\frac{2}{3}\pi, \qquad |a|=\frac{3}{2}$

$\therefore a=\frac{3}{2}$ ($\because a>0$) ⋯ ❷

답 $\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
❶ 두 함수의 주기를 구할 수 있다.	80 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

0745 $\sin\frac{7}{6}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

$\cos\frac{2}{3}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$\cos\frac{13}{6}\pi=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=-\tan\frac{5}{6}\pi=-\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ (주어진 식) $=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

답 $\frac{3}{4}$

0746 $\sin 260°=\sin(90°\times 3-10°)=-\cos 10°=-0.9848$

$\cos 110°=\cos(90°\times 1+20°)=-\sin 20°=-0.3420$

$\therefore \sin 260°-\cos 110°=-0.9848-(-0.3420)$

$=-0.6428$

답 ②

0747 $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta$

ㄱ. $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

ㄴ. $\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$

ㄷ. $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\sin\theta$

ㄹ. $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

이상에서 $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)$의 값과 같은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

0748 $\tan 100°=\tan(90°\times 1+10°)=-\frac{1}{\tan 10°}$

$\cos 130°=\cos(90°\times 1+40°)=-\sin 40°$

$\tan 260°=\tan(90°\times 3-10°)=\frac{1}{\tan 10°}$

$\therefore$ (주어진 식) $=\sin 40°-\frac{1}{\tan 10°}-\sin 40°+\frac{1}{\tan 10°}$

$=0$

답 0

0749 $\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$,

$\cos(3\pi+\theta)=-\cos\theta$, $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$,

$\sin(3\pi-\theta)=\sin\theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

$\therefore$ (주어진 식) $=\left\{\frac{\cos\theta\cdot(-\cos\theta)}{\cos\theta}\right\}^2+\left\{\frac{\sin\theta\cdot(-\sin\theta)}{\sin\theta}\right\}^2$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

답 ③

0750 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right\}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$이므로

$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

$=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=1$

답 1

0751 $\cos(90°-\alpha°)=\sin\alpha°$이므로

$\cos^2(90°-\alpha°)+\cos^2\alpha°=\sin^2\alpha°+\cos^2\alpha°=\boxed{1}$

$\therefore \cos^2 5°+\cos^2 10°+\cos^2 15°+\cdots+\cos^2 85°$

$=(\cos^2 5°+\cos^2 85°)+(\cos^2 10°+\cos^2 80°)$

$+(\cos^2 15°+\cos^2 75°)+\cdots+(\cos^2 40°+\cos^2 50°)$

$+\cos^2 45°$

$=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{8개}+\frac{1}{2}=8+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{17}{2}}$

따라서 $a=1$, $b=\frac{17}{2}$이므로 $a+b=\frac{19}{2}$

답 ⑤

0752 $\tan 89°=\tan(90°-1°)=\frac{1}{\tan 1°}$

$\tan 88°=\tan(90°-2°)=\frac{1}{\tan 2°}$

$\vdots$

$\tan 46°=\tan(90°-44°)=\frac{1}{\tan 44°}$ ⋯ ❶

$\therefore \tan 1°\times\tan 2°\times\cdots\times\tan 88°\times\tan 89°$

$=\tan 1°\times\tan 2°\times\cdots\times\tan 44°\times\tan 45°$

$\times\frac{1}{\tan 44°}\times\cdots\times\frac{1}{\tan 2°}\times\frac{1}{\tan 1°}$

$=\tan 45°=1$ ⋯ ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ 주어진 삼각함수의 각을 변형할 수 있다.	70 %
❷ 식의 값을 구할 수 있다.	30 %

0753 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

또 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}=\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}=3$

$\therefore \sin(\alpha+2\beta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\cos\beta$

$=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

답 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

0754 삼각형의 세 내각의 크기 A, B, C에 대하여

$A+B+C=\pi$ $\therefore B+C=\pi-A$

$\therefore \cos\left(\frac{B+C-2\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi-A-2\pi}{2}\right)$

$=\cos\left(-\frac{\pi+A}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\right)$

$=-\sin\frac{A}{2}=-\frac{1}{3}$

답 ②

0755 $5\theta=\pi$이므로

$\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cos 5\theta+\cos 7\theta+\cos 9\theta$

$=\cos 2\theta+\cos(5\theta-\theta)+\cos 5\theta+\cos(5\theta+2\theta)+\cos(10\theta-\theta)$

$=\cos 2\theta+\cos(\pi-\theta)+\cos\pi+\cos(\pi+2\theta)+\cos(2\pi-\theta)$

$=\cos 2\theta-\cos\theta-1-\cos 2\theta+\cos\theta$

$=-1$

답 ②

0756 $-1\le\cos 3x\le 1$이므로

$-4\le\cos 3x-3\le -2,\quad 2\le|\cos 3x-3|\le 4$

$4\le 2|\cos 3x-3|\le 8$

$\therefore\ 5\le 2|\cos 3x-3|+1\le 9$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 9, 최솟값은 5이므로

$M=9,\ m=5$

$\therefore\ M+m=14$

답 ④

0757 $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x$이므로

$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+3\cos x-1$

$=-\cos x+3\cos x-1=2\cos x-1$

$-1\le\cos x\le 1$이므로

$-3\le 2\cos x-1\le 1$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 1, 최솟값은 -3이므로

$M=1,\ m=-3$

$\therefore\ M-m=4$

답 4

0758 $-1\le\sin 3x\le 1$이므로

$-3\le\sin 3x-2\le -1,\quad 1\le|\sin 3x-2|\le 3$

$\therefore\ a+b\le a|\sin 3x-2|+b\le 3a+b\ (\because\ a>0)$ ··· ❶

따라서 주어진 함수의 최댓값이 $3a+b$, 최솟값이 $a+b$이므로

$3a+b=5,\ a+b=1$ ··· ❷

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-1$

$\therefore\ a-b=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수의 함숫값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❷ 최댓값과 최솟값을 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0759 $y=-|3\sin x-a|+4$에서 $-1\le\sin x\le 1$이고 $a>0$이므로 주어진 함수는 $\sin x=-1$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

즉 $-|-3-a|+4=-1$이므로

$-(3+a)+4=-1,\quad -3-a=-5$

$\therefore\ a=2$

$\therefore\ y=-|3\sin x-2|+4$

따라서 주어진 함수는 $\sin x=\frac{2}{3}$일 때 최댓값 4를 가지므로

$b=4$

$\therefore\ a+b=6$

답 6

0760 $y=\dfrac{\cos x}{\cos x-3}$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=\dfrac{t}{t-3}=\dfrac{t-3+3}{t-3}=\dfrac{3}{t-3}+1$

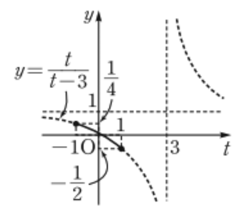
오른쪽 그림에서

$t=-1$일 때 최댓값은 $\frac{1}{4}$,

$t=1$일 때 최솟값은 $-\frac{1}{2}$

이므로 $M=\frac{1}{4},\ m=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ M-m=\frac{3}{4}$



답 ①

라쎈 특강 함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\ne 0)$의 그래프

함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\,(k\ne 0)$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

0761 $y=\dfrac{2\tan x+1}{\tan x+1}$에서 $\tan x=t$로 놓으면 $0\le x\le\frac{\pi}{4}$에서 $0\le t\le 1$이고

$y=\dfrac{2t+1}{t+1}=\dfrac{2(t+1)-1}{t+1}=-\dfrac{1}{t+1}+2$ ··· ❶

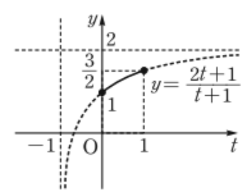
오른쪽 그림에서

$t=1$일 때 최댓값은 $\frac{3}{2}$,

$t=0$일 때 최솟값은 1

이므로 주어진 함수의 치역은

$\left\{y\,\middle|\,1\le y\le\frac{3}{2}\right\}$ ··· ❷



따라서 $a=1,\ b=\frac{3}{2}$이므로 $a+b=\frac{5}{2}$ ··· ❸

답 $\frac{5}{2}$

채점 기준	비율
❶ t에 대한 유리함수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 주어진 함수의 치역을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0762 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$이므로 주어진 함수의 식은

$y=\dfrac{-2\sin x-1}{\sin x-2}$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=\dfrac{-2t-1}{t-2}=\dfrac{-2(t-2)-5}{t-2}=-\dfrac{5}{t-2}-2$

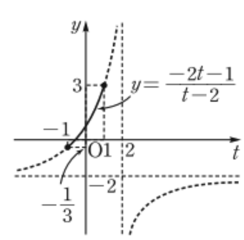
오른쪽 그림에서

$t=1$일 때 최댓값은 3,

$t=-1$일 때 최솟값은 $-\frac{1}{3}$

이므로 $M=3,\ m=-\frac{1}{3}$

$\therefore\ Mm=-1$



답 -1

0763 $y=\sin^2 x-2\cos x+1$

$=(1-\cos^2 x)-2\cos x+1$

$=-\cos^2 x-2\cos x+2$

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-t^2-2t+2=-(t+1)^2+3$

오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최댓값은 3이므로

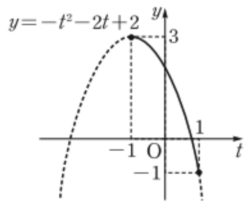
$b=3$

또 $t=-1$, 즉 $\cos x=-1$에서

$x=\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

$\therefore a=\pi$

$\therefore ab=3\pi$



답 ⑤

0764 $y=\cos^2 x+4\sin x+a$

$=(1-\sin^2 x)+4\sin x+a$

$=-\sin^2 x+4\sin x+a+1$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

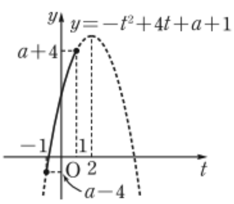
$y=-t^2+4t+a+1$

$=-(t-2)^2+a+5$

오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최솟값은 $a-4$이므로

$a-4=-1$

$\therefore a=3$



답 3

0765 $\sin\left(\frac{5}{2}\pi+x\right)=\cos x$, $\cos(2\pi-x)=\cos x$이므로 주어진 함수의 식은

$y=\sin^2\left(\frac{5}{2}\pi+x\right)+\cos(2\pi-x)+1$

$=\cos^2 x+\cos x+1$

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=t^2+t+1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

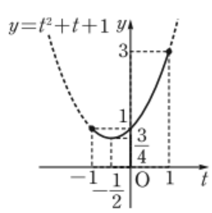
오른쪽 그림에서

$t=1$일 때 　최댓값은 3,

$t=-\frac{1}{2}$일 때 　최솟값은 $\frac{3}{4}$

이므로 　$M=3$, $m=\frac{3}{4}$

$\therefore Mm=\frac{9}{4}$



답 ⑤

0766 이차방정식 $2x^2-4x\sin\theta-\cos^2\theta=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{4\sin\theta}{2}=2\sin\theta$, $\alpha\beta=-\frac{\cos^2\theta}{2}$ ⋯ ❶

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(2\sin\theta)^2-2\cdot\left(-\frac{\cos^2\theta}{2}\right)$

$=4\sin^2\theta+\cos^2\theta$

$=4\sin^2\theta+(1-\sin^2\theta)$

$=3\sin^2\theta+1$

$\alpha^2+\beta^2=y$라 하고 $\sin\theta=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=3t^2+1$ ⋯ ❷

따라서 y, 즉 $\alpha^2+\beta^2$은 $t=0$일 때 최솟값 1을 갖는다. ⋯ ❸

답 1

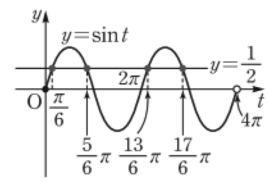
채점 기준	비율
❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.	30 %
❷ t에 대한 이차함수를 구할 수 있다.	50 %
❸ $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0767 $2x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $0\le t<4\pi$이고 주어진 방정식은 　$\sin t=\frac{1}{2}$

오른쪽 그림과 같이 $0\le t<4\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 t좌표가

$\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{13}{6}\pi$, $\frac{17}{6}\pi$

이므로



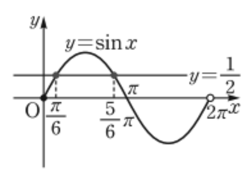
$x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{5}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{13}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{17}{12}\pi$

따라서 방정식 $\sin 2x=\frac{1}{2}$의 근이 아닌 것은 ③이다. 　답 ③

0768 $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=-\sin x$이므로 주어진 방정식은

$3\sin x-\sin x=1$ 　$\therefore \sin x=\frac{1}{2}$

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$이므로



$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

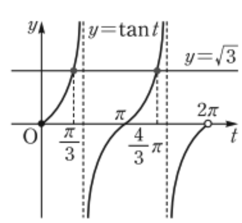
따라서 모든 실근의 합은 　$\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi=\pi$ 　답 π

0769 $\tan\frac{x}{2}-\sqrt{3}=0$에서 　$\tan\frac{x}{2}=\sqrt{3}$

$\frac{x}{2}=t$로 놓으면 $0\le x<4\pi$에서 $0\le t<2\pi$이고 주어진 방정식은

$\tan t=\sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 $0\le t<2\pi$에서 함수 $y=\tan t$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$의 교점의 t좌표가 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4}{3}\pi$이므로



$x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{8}{3}\pi$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{2}{3}\pi+\frac{8}{3}\pi=\frac{10}{3}\pi$

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos\frac{10}{3}\pi$

$=\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$ 　답 ②

0770 $\sin x=-\sqrt{3}\cos x$에서 $\cos x=0$인 경우 $\sin x\neq0$이므로

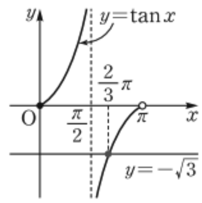
$\sin x+\sqrt{3}\cos x\neq0$

$\therefore \cos x\neq0$

$\sin x=-\sqrt{3}\cos x$에서 양변을 $\cos x$로 나누면

$\dfrac{\sin x}{\cos x}=-\sqrt{3}\qquad\therefore \tan x=-\sqrt{3}$

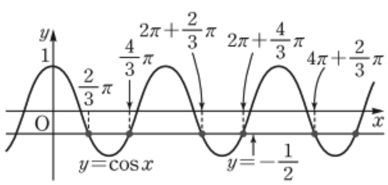
오른쪽 그림과 같이 $0\le x<\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=-\sqrt{3}$의 교점의 x좌표가 $\dfrac{2}{3}\pi$이므로



$x=\dfrac{2}{3}\pi$

답 $x=\dfrac{2}{3}\pi$

0771 방정식 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$을 만족시키는 x는 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=-\dfrac{1}{2}$의 교점의 x좌표와 같다.



즉 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$을 만족시키는 양수 x를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ 2\pi+\dfrac{2}{3}\pi,\ 2\pi+\dfrac{4}{3}\pi,\ 4\pi+\dfrac{2}{3}\pi,\ \cdots$

이므로 5번째 수는

$4\pi+\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{14}{3}\pi$

답 $\dfrac{14}{3}\pi$

0772 $6\cos^2 x+\sin x-1=0$에서

$6(1-\sin^2 x)+\sin x-1=0\qquad\therefore 6\sin^2 x-\sin x-5=0$

$\sin x=t$로 놓으면 $0\le x<\pi$에서 $0\le t\le1$이고

$6t^2-t-5=0,\qquad (6t+5)(t-1)=0$

$\therefore t=1\ (\because 0\le t\le1)$

따라서 $\sin x=1$이므로

$x=\dfrac{\pi}{2}\ (\because 0\le x<\pi)$

답 $x=\dfrac{\pi}{2}$

0773 $2\cos^2 x-\sin(\pi-x)-1=0$에서

$2(1-\sin^2 x)-\sin x-1=0$

$2\sin^2 x+\sin x-1=0,\qquad (\sin x+1)(2\sin x-1)=0$

$\therefore \sin x=-1$ 또는 $\sin x=\dfrac{1}{2}$ ··· ❶

$0\le x<2\pi$이므로

$\sin x=-1$에서 $\quad x=\dfrac{3}{2}\pi$

$\sin x=\dfrac{1}{2}$에서 $\quad x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$ ··· ❷

따라서 $M=\dfrac{3}{2}\pi,\ m=\dfrac{\pi}{6}$이므로

$M+m=\dfrac{5}{3}\pi$ ··· ❸

답 $\dfrac{5}{3}\pi$

채점 기준	비율
❶ 방정식을 만족시키는 $\sin x$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 방정식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ $M+m$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0774 $\tan x+\dfrac{1}{\tan x}=2$에서 $\tan x\neq0$이므로 양변에 $\tan x$를 곱하면

$\tan^2 x+1=2\tan x,\qquad \tan^2 x-2\tan x+1=0$

$(\tan x-1)^2=0\qquad\therefore \tan x=1$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{5}{4}\pi\ (\because 0\le x<2\pi)$

따라서 모든 실근의 합은

$\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{5}{4}\pi=\dfrac{3}{2}\pi$

답 ⑤

0775 방정식 $\cos^2 x+\sin x-a=0$, 즉 $\cos^2 x+\sin x=a$가 실근을 가지려면 함수 $y=\cos^2 x+\sin x$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점이 존재해야 한다.

$y=\cos^2 x+\sin x$에서

$y=(1-\sin^2 x)+\sin x$

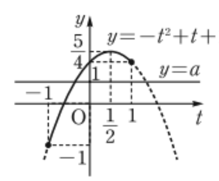
$\quad=-\sin^2 x+\sin x+1$

이때 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고

$y=-t^2+t+1$

$\quad=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$

따라서 오른쪽 그림에서 함수 $y=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위는



$-1\le a\le\dfrac{5}{4}$

답 ③

0776 방정식 $2\sin^2(\pi+x)+2\cos x+k=0$, 즉 $-2\sin^2(\pi+x)-2\cos x=k$가 실근을 가지려면 함수 $y=-2\sin^2(\pi+x)-2\cos x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 존재해야 한다.

$y=-2\sin^2(\pi+x)-2\cos x$에서

$y=-2\sin^2 x-2\cos x$

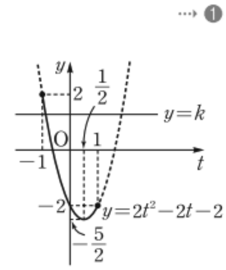
$\quad=-2(1-\cos^2 x)-2\cos x$

$\quad=2\cos^2 x-2\cos x-2$

이때 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고

$y=2t^2-2t-2=2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{2}$ ··· ❶

오른쪽 그림에서 함수 $y=2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{2}$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는



$-\dfrac{5}{2}\le k\le2$ ··· ❷

따라서 $M=2,\ m=-\dfrac{5}{2}$이므로

$Mm=-5$ ··· ❸

답 -5

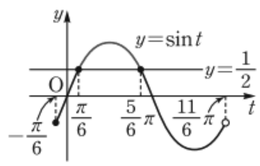
채점 기준	비율
❶ t에 대한 이차함수를 구할 수 있다.	50 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ Mm의 값을 구할 수 있다.	20 %

0777 $x-\frac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{6}\le t<\frac{11}{6}\pi$이고

주어진 부등식은 $\quad \sin t\ge\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 부등식 $\sin t\ge\frac{1}{2}$의

해는 $\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{5}{6}\pi$이므로



$$\frac{\pi}{6}\le x-\frac{\pi}{6}\le\frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore\ \frac{\pi}{3}\le x\le\pi$$

따라서 $a=\frac{\pi}{3}$, $b=\pi$이므로

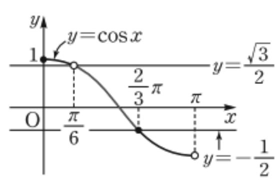
$$a+b=\frac{4}{3}\pi$$

답 $\frac{4}{3}\pi$

0778 오른쪽 그림에서 부등식

$-\frac{1}{2}\le\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는

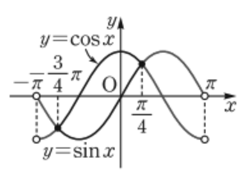
$$\frac{\pi}{6}<x\le\frac{2}{3}\pi$$



답 ①

0779 부등식 $\sin x\ge\cos x$의 해는 $y=\sin x$의 그래프가 $y=\cos x$의 그래프와 만나는 부분 또는 $y=\sin x$의 그래프가 $y=\cos x$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서 부등식 $\sin x\ge\cos x$의 해는

$$-\pi<x\le-\frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } \frac{\pi}{4}\le x<\pi$$



따라서 주어진 부등식의 해가 될 수 없는 것은 ②이다.

답 ②

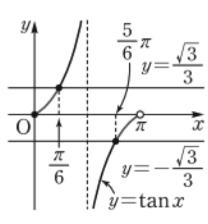
0780 $|3\tan x|\le\sqrt{3}$에서 $\quad -\sqrt{3}\le3\tan x\le\sqrt{3}$

$$\therefore\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\le\tan x\le\frac{\sqrt{3}}{3}$$

오른쪽 그림에서 부등식

$-\frac{\sqrt{3}}{3}\le\tan x\le\frac{\sqrt{3}}{3}$의 해는

$$0\le x\le\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{5}{6}\pi\le x<\pi$$



답 ④

0781 $2\cos^2x<3\sin x$에서 $\quad 2\cos^2x-3\sin x<0$

$$2(1-\sin^2x)-3\sin x<0$$

$$2\sin^2x+3\sin x-2>0$$

$$(2\sin x-1)(\sin x+2)>0$$

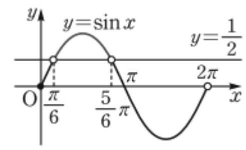
$0\le x<2\pi$에서 $\sin x+2>0$이므로

$$2\sin x-1>0 \qquad \therefore\ \sin x>\frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 부등식 $\sin x>\frac{1}{2}$의

해는

$$\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$$



답 ②

0782 $2\cos^2x-\sin x-1\ge0$에서

$$2(1-\sin^2x)-\sin x-1\ge0$$

$$2\sin^2x+\sin x-1\le0$$

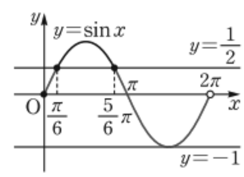
$$(2\sin x-1)(\sin x+1)\le0$$

$$\therefore\ -1\le\sin x\le\frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 부등식

$-1\le\sin x\le\frac{1}{2}$의 해는

$$0\le x\le\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{5}{6}\pi\le x<2\pi$$



답 $0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi\le x<2\pi$

0783 $2\sin^2x-5\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)>4$에서

$$2(1-\cos^2x)-5\cos x-4>0$$

$$2\cos^2x+5\cos x+2<0$$

$$(2\cos x+1)(\cos x+2)<0$$

$0\le x<2\pi$에서 $\cos x+2>0$이므로

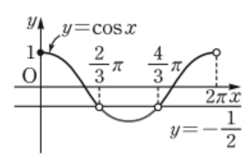
$$2\cos x+1<0$$

$$\therefore\ \cos x<-\frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 부등식 $\cos x<-\frac{1}{2}$

의 해는

$$\frac{2}{3}\pi<x<\frac{4}{3}\pi$$



따라서 $\alpha=\frac{2}{3}\pi$, $\beta=\frac{4}{3}\pi$이므로

$$\beta-\alpha=\frac{2}{3}\pi$$

답 ③

0784 이차방정식 $x^2+2\sqrt{2}x\sin\theta+3\cos\theta=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(\sqrt{2}\sin\theta)^2-3\cos\theta\ge0$$

$$2\sin^2\theta-3\cos\theta\ge0$$

$$2(1-\cos^2\theta)-3\cos\theta\ge0$$

$$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2\le0$$

$$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+2)\le0$$

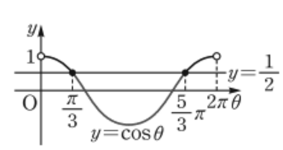
$0<\theta<2\pi$에서 $\cos\theta+2>0$이므로

$$2\cos\theta-1\le0$$

$$\therefore\ \cos\theta\le\frac{1}{2}$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 θ의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{5}{3}\pi$$



답 $\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{5}{3}\pi$

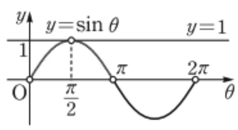
0785 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+4x\sin\theta+4\sin\theta=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=4\sin^2\theta-4\sin\theta<0$$

$$4\sin\theta(\sin\theta-1)<0$$

$$\therefore\ 0<\sin\theta<1$$

오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는



$$0<\theta<\frac{\pi}{2}\ \text{또는}\ \frac{\pi}{2}<\theta<\pi$$

따라서 조건을 만족시키지 않는 θ의 값은 ②이다. 답 ②

0786 $y=x^2-2x\sin\theta-\cos^2\theta$

$$=(x-\sin\theta)^2-\sin^2\theta-\cos^2\theta$$

$$=(x-\sin\theta)^2-1$$

이므로 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(\sin\theta,\ -1)$ ··· ❶

이 꼭짓점이 직선 $y=\sqrt{2}x$ 위에 있으므로

$-1=\sqrt{2}\sin\theta \qquad \therefore\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ··· ❷

$0\le\theta<2\pi$이므로 $\quad \theta=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $\theta=\frac{7}{4}\pi$

따라서 θ의 최댓값은 $\frac{7}{4}\pi$이다. ··· ❸

답 $\frac{7}{4}\pi$

채점 기준	비율
❶ 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ θ의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

0787 전략 두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$는 주기가 2π인 주기함수이다.

풀이 ㄷ. $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동하면 $y=\sin x$의 그래프와 일치하므로

$$f(x)=g\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

다른풀이 ㄷ. $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$이므로

$$g\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=f(x)$$

0788 전략 세 함수 $y=a\sin bx$, $y=a\cos bx$, $y=a\tan bx$의 주기는 각각 $\frac{2\pi}{|b|}$, $\frac{2\pi}{|b|}$, $\frac{\pi}{|b|}$이다.

풀이 $y=\frac{1}{2}\sin 3x$, $y=2\cos\frac{1}{2}x$, $y=\tan 2x$의 주기는 각각

$$a=\frac{2}{3}\pi,\ b=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi,\ c=\frac{\pi}{2}$$

이므로 $\quad c<a<b$ 답 ⑤

0789 전략 $y=a\sin bx$에서 a는 최댓값, 최솟값을 결정하고, b는 주기를 결정함을 이용한다.

풀이 주어진 그래프에서 최댓값은 5, 최솟값은 -5이고 $a>0$이므로 $\quad a=5$

주어진 그래프에서 주기가 π이고 $b>0$이므로

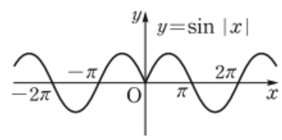
$$\frac{2\pi}{b}=\pi \qquad \therefore\ b=2$$

$$\therefore\ a-b=3$$

답 3

0790 전략 $y=f(|x|)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\ge0$인 부분만 그린 후 y축에 대하여 대칭이동한다.

풀이 ④ $y=\sin|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주기함수가 아니다. 답 ④



0791 전략 보기의 관계식을 주어진 등식에 대입하여 성립하는지 확인한다.

풀이 ① $\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$에서 $\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha$이므로

$$\tan\beta=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{1}{\tan\alpha}\ne\tan\alpha$$

② $\beta-\alpha=\pi$에서 $\beta=\pi+\alpha$이므로

$$\tan\beta=\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

③ $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$에서 $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$이므로

$$\tan\beta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\tan\alpha}\ne\tan\alpha$$

④ $\alpha+\beta=\pi$에서 $\beta=\pi-\alpha$이므로

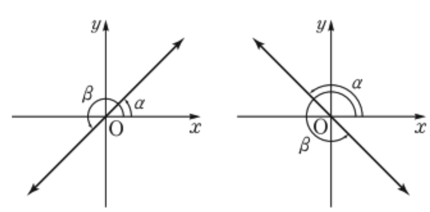
$$\tan\beta=\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha\ne\tan\alpha$$

⑤ $\alpha+\beta=2\pi$에서 $\beta=2\pi-\alpha$이므로

$$\tan\beta=\tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha\ne\tan\alpha$$

답 ②

다른풀이 $\tan\alpha=\tan\beta$이고 $0<\alpha<\beta<2\pi$이므로 두 각 α, β를 좌표평면 위에 나타내면 다음의 두 가지 경우가 있다.



두 경우 모두 두 각 α, β를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로 $\quad \beta=\alpha+\pi \qquad \therefore\ \beta-\alpha=\pi$

0792 전략 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하여 $\sin^2\theta$를 $\cos\theta$에 대한 식으로 변형한다.

풀이 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$$

$\cos\theta\ge\frac{1}{2}$에서 $\cos^2\theta\ge\frac{1}{4}$이므로

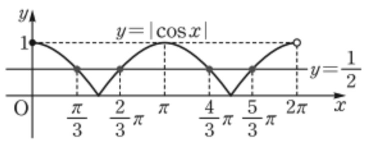
$$-\cos^2\theta\le-\frac{1}{4}, \qquad 1-\cos^2\theta\le\frac{3}{4}$$

$$\therefore\ \sin^2\theta\le\frac{3}{4}$$

따라서 $\sin^2\theta$의 최댓값은 $\frac{3}{4}$이다. 답 ②

0793 전략 삼각함수의 그래프를 이용하여 주어진 방정식의 근을 구한다.

풀이 방정식 $|\cos x|=\frac{1}{2}$의 근은 함수 $y=|\cos x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표이다. ··· ❶



오른쪽 그림에서 구하는 근은

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ 또는

$x=\frac{5}{3}\pi$ ··· ❷

따라서 모든 실근의 합은 $\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi=4\pi$ ··· ❸

답 4π

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식의 근의 의미를 이해할 수 있다.	20 %
❷ 주어진 방정식의 근을 구할 수 있다.	60 %
❸ 모든 실근의 합을 구할 수 있다.	20 %

다른풀이 $|\cos x|=\frac{1}{2}$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=-\frac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$이므로

$\cos x=\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

$\cos x=-\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

따라서 모든 실근의 합은 $\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi=4\pi$

라쎈 특강 $y=|f(x)|$의 그래프

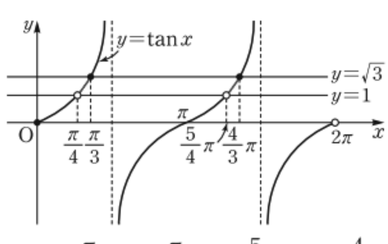
$y=|f(x)|$의 그래프는 다음과 같은 순서로 그린다.
(i) $y=f(x)$의 그래프를 그린다.
(ii) $y\ge0$인 부분은 그대로 둔다.
(iii) $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한다.

0794 전략 삼각함수의 그래프를 이용하여 주어진 부등식의 해를 구한다.

풀이 오른쪽 그림에서 부등식 $1<\tan x\le\sqrt{3}$의 해는

$\frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{3}$ 또는

$\frac{5}{4}\pi<x\le\frac{4}{3}\pi$



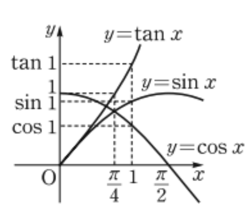
답 $\frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi<x\le\frac{4}{3}\pi$

0795 전략 삼각함수의 그래프를 그린 후 대소를 비교한다.

풀이 $\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{2}$이므로 오른쪽 그림에서

$\cos 1<\sin 1<\tan 1$

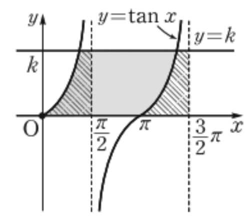
$\therefore B<A<C$



답 ③

0796 전략 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 넓이가 같은 부분을 찾는다.

풀이 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 $y=\tan x$의 그래프와 x축 및 직선 $y=k$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$k\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}\right)=k\pi$

즉 $k\pi=5\pi$이므로 $k=5$ 답 5

0797 전략 $y=a\cos(bx+c)+d$에서 a, d는 최댓값, 최솟값을 결정하고, b는 주기를 결정함을 이용한다.

풀이 ㄱ. 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2}{3}\pi$이므로 모든 실수 x에 대하여

$$f\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)=f(x)$$

$$\therefore f(x+2\pi)=f\left(x+\frac{4}{3}\pi\right)=f\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)=f(x)$$

ㄴ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 $4-1=3$, 최솟값은 $-4-1=-5$이다.

ㄷ. $f(x)=4\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)-1=4\cos 3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=4\cos 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

참고 $f(x)=4\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)-1=4\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)-1$
$=4\sin 3x-1$
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=4\sin 3x-1$의 그래프와 일치한다.

0798 전략 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 양수 p의 최솟값은 함수 $f(x)$의 주기임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 주기가 3π이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=3\pi$ $\therefore b=\frac{2}{3}$ ··· ❶

조건 (나)에서 최댓값이 4, 최솟값이 -2이고 $a>0$이므로

$a+c=4$, $-a+c=-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $c=1$ ··· ❷

$\therefore \frac{3a-c}{b}=\frac{3}{2}\cdot(3\cdot3-1)=12$ ··· ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ a, c의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\frac{3a-c}{b}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0799 전략 함수 $y=|\sin bx|$의 주기는 함수 $y=\sin bx$의 주기의 $\frac{1}{2}$임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)=a|\sin bx|+c$의 주기는 $y=|\sin bx|$의 주기와 같으므로

$\frac{\pi}{|b|}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore b=2$ ($\because b>0$)

함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 $a>0$이므로

$a+c=1$ …… ㉠

$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{1}{2}$이므로 $a\left|\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)\right|+c=-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}a+c=-\frac{1}{2}$ $\therefore a+2c=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ c=-2$

따라서 $f(x)=3|\sin 2x|-2$이므로 구하는 최솟값은 -2이다.

답 -2

참고 $-1\le\sin 2x\le 1$이므로 $0\le|\sin 2x|\le 1$

$\therefore -2\le 3|\sin 2x|-2\le 1$

0800 전략 주어진 삼각함수의 주기를 구한 후 그래프의 대칭성을 이용하여 $\alpha+\beta$의 값을 구한다.

풀이 함수 $f(x)=\sin kx$에서 $k>0$이므로 주기는 $\frac{2\pi}{k}$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{k}$

$\therefore f(\alpha+\beta+\gamma)=f\left(\frac{\pi}{k}+\gamma\right)$

$=\sin k\left(\frac{\pi}{k}+\gamma\right)$

$=\sin(\pi+k\gamma)$

$=-\sin k\gamma$

$=-f(\gamma)=-\frac{3}{4}$

답 ③

0801 전략 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x-p)=f(x+p)$이면 $f(x)=f(x+2p)$임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $f(x-2)=f(x+2)$이므로 x 대신 $x+2$를 대입하면 $f(x)=f(x+4)$

$\therefore f\left(\frac{61}{4}\right)=f\left(\frac{45}{4}\right)=f\left(\frac{29}{4}\right)=f\left(\frac{13}{4}\right)=f\left(-\frac{3}{4}\right)$

$-2\le x\le 2$에서 $f(x)=\sin\pi x$이므로

$f\left(\frac{61}{4}\right)=f\left(-\frac{3}{4}\right)=\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$

$=-\sin\frac{3}{4}\pi=-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

0802 전략 각이 $\frac{\pi}{2}\times n\pm\theta$ (n은 정수) 꼴일 때, 각 삼각함수는 n이 짝수이면 그대로, n이 홀수이면 $\sin\to\cos$, $\cos\to\sin$으로 바뀜을 이용한다.

풀이 $\sin^2\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sin^2\frac{\pi}{4}$, $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$,

$\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos^2\frac{\pi}{4}$, $\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ (주어진 식)$=\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{4}-\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2$

답 2

0803 전략 $\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$임을 이용하여 $\cos\alpha$와 같은 것을 찾는다.

풀이 $\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$이므로 $\alpha=\beta-\frac{\pi}{2}$

$\therefore \cos\alpha=\cos\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$

$=\sin\beta$

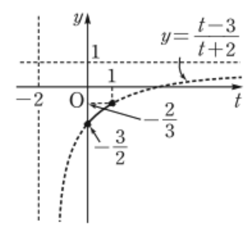
답 ②

0804 전략 $|\cos x|=t$로 놓고 $y=\frac{t-3}{t+2}$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 $y=\frac{|\cos x|-3}{|\cos x|+2}$에서 $|\cos x|=t$로 놓으면 $-1\le\cos x\le 1$에서 $0\le t\le 1$이고

$y=\frac{t-3}{t+2}=\frac{(t+2)-5}{t+2}=-\frac{5}{t+2}+1$

오른쪽 그림에서



$t=1$일 때 최댓값은 $-\frac{2}{3}$,

$t=0$일 때 최솟값은 $-\frac{3}{2}$

이므로 주어진 함수의 치역은

$\left\{y\,\middle|\,-\frac{3}{2}\le y\le -\frac{2}{3}\right\}$

따라서 $a=-\frac{3}{2}$, $b=-\frac{2}{3}$이므로

$ab=1$

답 ④

0805 전략 주어진 방정식을 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입한다.

풀이 $\sin\theta+1=2\cos\theta$에서 $\sin\theta=2\cos\theta-1$

이것을 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면

$(2\cos\theta-1)^2+\cos^2\theta=1$

$5\cos^2\theta-4\cos\theta=0$

$\cos\theta(5\cos\theta-4)=0$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\cos\theta<1$이므로

$5\cos\theta-4=0$

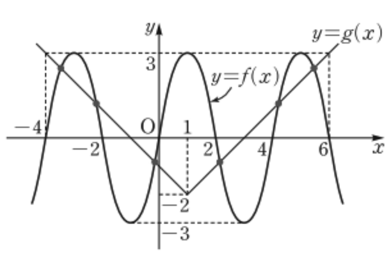
$\therefore \cos\theta=\frac{4}{5}$

답 ⑤

0806 전략 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같음을 이용한다.

풀이 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같으므로 구하는 실근의 개수는 6이다.



답 ③

06 삼각함수의 그래프

0807 **전략** 주어진 포물선의 꼭짓점의 좌표를 구한 후 $y=2x$에 대입한다.

풀이 $y=x^2-2x\cos\theta-\sin^2\theta$

$=(x-\cos\theta)^2-\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$=(x-\cos\theta)^2-1$

이므로 포물선의 꼭짓점의 좌표는

$(\cos\theta,\ -1)$

이 꼭짓점이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$-1=2\cos\theta$, $\quad\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \theta=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta=\dfrac{4}{3}\pi$ $(\because\ 0\le\theta<2\pi)$

따라서 구하는 합은

$\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{4}{3}\pi=2\pi$

답 ③

0808 **전략** 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 $a>0$, $b^2-4ac<0$이어야 함을 이용한다.

풀이 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2-2x\sin\theta-\cos\theta+1>0$이 성립하므로 이차방정식 $x^2-2x\sin\theta-\cos\theta+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\sin^2\theta+\cos\theta-1<0$

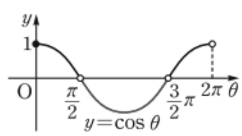
$(1-\cos^2\theta)+\cos\theta-1<0$, $\quad\cos^2\theta-\cos\theta>0$

$\cos\theta(\cos\theta-1)>0$ $\quad\therefore\ \cos\theta<0$ 또는 $\cos\theta>1$

이때 $-1\le\cos\theta\le1$이므로 $\quad\cos\theta<0$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 θ의 값의 범위는

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$



답 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$

라쎈 특강 **이차부등식이 항상 성립할 조건**

이차부등식이 항상 성립할 조건은 다음과 같다. (단, $D=b^2-4ac$)

(1) $ax^2+bx+c>0 \Longleftrightarrow a>0,\ D<0$

(2) $ax^2+bx+c<0 \Longleftrightarrow a<0,\ D<0$

0809 **전략** 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x-p)=f(x+p)$이면 $f(x)=f(x+2p)$임을 이용한다.

풀이 모든 실수 x에 대하여 $f(x-p)=f(x+p)$를 만족시키는 최소의 양수 p가 2이므로

$f(x-2)=f(x+2)$ $\quad\therefore\ f(x)=f(x+4)$

따라서 함수 $f(x)$의 주기는 4이다.

주어진 각 함수의 주기를 구하면

① $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$ $\quad$ ② $\dfrac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi}=3$ $\quad$ ③ $\dfrac{2\pi}{\pi}=2$

④ $\dfrac{2\pi}{\pi}=2$ $\quad$ ⑤ $\dfrac{\pi}{2\pi}=\dfrac{1}{2}$

답 ①

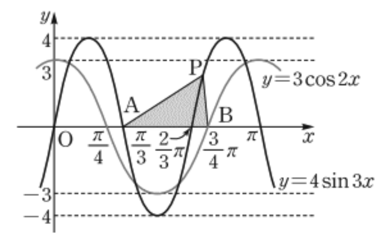
0810 **전략** $\overline{\mathrm{AB}}$를 $\triangle\mathrm{ABP}$의 밑변으로 생각할 때 높이가 최대가 되도록 하는 점 P의 위치를 잡아본다.

풀이 $y=4\sin3x$의 주기는 $\quad\dfrac{2\pi}{3}$

$y=3\cos2x$의 주기는 $\quad\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

이때 $0<a<\dfrac{\pi}{2}<b<\pi$이므로 $\quad a=\dfrac{\pi}{3}$, $b=\dfrac{3}{4}\pi$

$\therefore\ \mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{3},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{3}{4}\pi,\ 0\right)$



위의 그림에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5}{12}\pi$이고 함수 $y=4\sin3x$의 최댓값은 4이므로

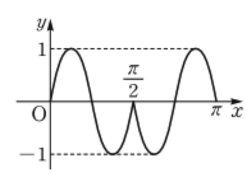
$\triangle\mathrm{ABP}\le\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{12}\pi\cdot4=\dfrac{5}{6}\pi$

따라서 $\triangle\mathrm{ABP}$의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{5}{6}\pi$이다.

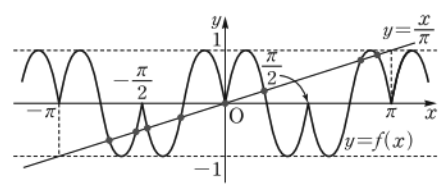
답 ④

0811 **전략** 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

풀이 $y=\sin4x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$이고, $y=-\sin4x$의 그래프는 $y=\sin4x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 조건 (나), (다)에 의하여 $0\le x\le\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



또 조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 주기는 π이므로 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{x}{\pi}$는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{x}{\pi}$가 만나는 점의 개수는 8이다.

답 ⑤

0812 **전략** $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$이면 $\sin\beta=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$임을 이용하여 주어진 식을 정리한다.

풀이 $\dfrac{1}{\sin^2 89°}=\dfrac{1}{\sin^2(90°-1°)}=\dfrac{1}{\cos^2 1°}$

$\dfrac{1}{\sin^2 88°}=\dfrac{1}{\sin^2(90°-2°)}=\dfrac{1}{\cos^2 2°}$

$\dfrac{1}{\sin^2 87°}=\dfrac{1}{\sin^2(90°-3°)}=\dfrac{1}{\cos^2 3°}$

$\vdots$

$\dfrac{1}{\sin^2 1°}=\dfrac{1}{\sin^2(90°-89°)}=\dfrac{1}{\cos^2 89°}$

$\therefore A-B$

$=\frac{1}{\cos^2 1°}+\frac{1}{\cos^2 2°}+\frac{1}{\cos^2 3°}+\cdots+\frac{1}{\cos^2 89°}$

$\quad-(\tan^2 1°+\tan^2 2°+\tan^2 3°+\cdots+\tan^2 89°)$

$=\frac{1}{\cos^2 1°}+\frac{1}{\cos^2 2°}+\frac{1}{\cos^2 3°}+\cdots+\frac{1}{\cos^2 89°}$

$\quad-\left(\frac{\sin^2 1°}{\cos^2 1°}+\frac{\sin^2 2°}{\cos^2 2°}+\frac{\sin^2 3°}{\cos^2 3°}+\cdots+\frac{\sin^2 89°}{\cos^2 89°}\right)$

$=\frac{1-\sin^2 1°}{\cos^2 1°}+\frac{1-\sin^2 2°}{\cos^2 2°}+\frac{1-\sin^2 3°}{\cos^2 3°}$

$\quad+\cdots+\frac{1-\sin^2 89°}{\cos^2 89°}$

$=\frac{\cos^2 1°}{\cos^2 1°}+\frac{\cos^2 2°}{\cos^2 2°}+\frac{\cos^2 3°}{\cos^2 3°}+\cdots+\frac{\cos^2 89°}{\cos^2 89°}$

$=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{89\text{개}}$

$=89$ 답 89

0813 전략 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 π임을 이용한다.

풀이 $A+B+C=\pi$이므로

ㄱ. $\sin A=\sin\{\pi-(B+C)\}=\sin(B+C)$

ㄴ. $\cos(A+B+C)=\cos\pi=-1$

ㄷ. $\sin\frac{A+B}{2}=\sin\frac{\pi-C}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}$

ㄹ. $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{A+C}{2}=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{\pi-B}{2}$

$=\tan\frac{B}{2}\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)$

$=\tan\frac{B}{2}\cdot\frac{1}{\tan\frac{B}{2}}=1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

0814 전략 주어진 방정식의 좌변을 공통부분이 있는 항끼리 묶은 후 인수분해한다.

풀이 $4\cos^3 x+2\sqrt{3}\cos^2 x-6\sin x\cos x-3\sqrt{3}\sin x=0$에서

$2\cos^2 x(2\cos x+\sqrt{3})-3\sin x(2\cos x+\sqrt{3})=0$

$(2\cos x+\sqrt{3})(2\cos^2 x-3\sin x)=0$

$\therefore \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $2\cos^2 x-3\sin x=0$

(i) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때,

$x=-\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ ($\because -\pi<x<\pi$)

(ii) $2\cos^2 x-3\sin x=0$일 때,

$2(1-\sin^2 x)-3\sin x=0,\quad 2\sin^2 x+3\sin x-2=0$

$(\sin x+2)(2\sin x-1)=0$

$\therefore \sin x=\frac{1}{2}$ ($\because \sin x+2>0$)

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ ($\because -\pi<x<\pi$)

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근은 $-\frac{5}{6}\pi$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$의 3개이다. 답 3

0815 전략 이차방정식의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 할 때, 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면 $D>0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$이어야 함을 이용한다.

풀이 주어진 이차방정식의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 이 방정식이 서로 다른 두 양의 실근을 가지므로

(i) $\frac{D}{4}>0$에서

$\frac{D}{4}=4\cos^2\theta-2\{(\sqrt{3}-2)\sin\theta-\sqrt{3}+2\}>0$

$2\cos^2\theta-\{(\sqrt{3}-2)\sin\theta-\sqrt{3}+2\}>0$

$2(1-\sin^2\theta)-(\sqrt{3}-2)\sin\theta+\sqrt{3}-2>0$

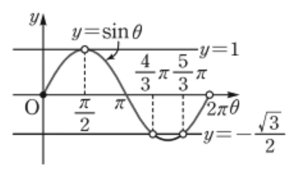
$2\sin^2\theta+(\sqrt{3}-2)\sin\theta-\sqrt{3}<0$

$(2\sin\theta+\sqrt{3})(\sin\theta-1)<0$

$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\theta<1$

오른쪽 그림에서 부등식 $-\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\theta<1$의 해는

$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$



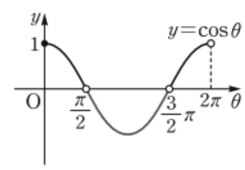
또는 $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{4}{3}\pi$ 또는 $\frac{5}{3}\pi<\theta<2\pi$ ⋯ ❶

(ii) $\alpha+\beta>0$에서

$\alpha+\beta=-\frac{4\cos\theta}{2}>0\qquad\therefore \cos\theta<0$

오른쪽 그림에서 부등식 $\cos\theta<0$의 해는

$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$ ⋯ ❷



(iii) $\alpha\beta>0$에서

$\alpha\beta=\frac{(\sqrt{3}-2)\sin\theta-\sqrt{3}+2}{2}>0$

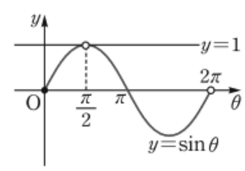
$(\sqrt{3}-2)\sin\theta-\sqrt{3}+2>0$

$(2-\sqrt{3})\sin\theta<2-\sqrt{3}\qquad\therefore \sin\theta<1$

오른쪽 그림에서 부등식 $\sin\theta<1$의 해는

$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{\pi}{2}<\theta<2\pi$

⋯ ❸



이상에서 구하는 θ의 값의 범위는 $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{4}{3}\pi$ ⋯ ❹

따라서 $A=\frac{\pi}{2}$, $B=\frac{4}{3}\pi$이므로

$\sin A+\cos B=\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{4}{3}\pi$

$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ⋯ ❺

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ 판별식을 이용하여 θ의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❷ 두 근의 합이 양수임을 이용하여 θ의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❸ 두 근의 곱이 양수임을 이용하여 θ의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❹ θ의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❺ $\sin A+\cos B$의 값을 구할 수 있다.	20 %

07 삼각함수의 활용

Ⅱ. 삼각함수

0816 사인법칙에 의하여 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$이므로

$\dfrac{\boxed{2}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{c}{\sin\boxed{60^\circ}}$, $\quad 2\sin 60^\circ=c\sin 45^\circ$

$\therefore c=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\boxed{\sqrt{6}}$

$\therefore$ (가) 2 (나) 60° (다) $\sqrt{6}$ 답 (가) 2 (나) 60° (다) $\sqrt{6}$

0817 사인법칙에 의하여 $\dfrac{3}{\sin 30^\circ}=\dfrac{c}{\sin 45^\circ}$

$3\sin 45^\circ=c\sin 30^\circ$

$\therefore c=3\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2=3\sqrt{2}$ 답 $3\sqrt{2}$

0818 사인법칙에 의하여 $\dfrac{a}{\sin 30^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}$

$a\sin 135^\circ=\sqrt{2}\sin 30^\circ$

$\therefore a=\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{2}}=1$ 답 1

0819 사인법칙에 의하여 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$

$\sqrt{2}\sin 60^\circ=\sqrt{3}\sin A$

$\therefore \sin A=\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

0820 사인법칙에 의하여 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$이므로

$\dfrac{\boxed{2}}{\sin A}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin\boxed{45^\circ}}$, $\quad 2\sin 45^\circ=2\sqrt{2}\sin A$

$\therefore \sin A=2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\boxed{\dfrac{1}{2}}$

$0^\circ<A<180^\circ$이므로 $\quad A=\boxed{30^\circ}$ 또는 $A=\boxed{150^\circ}$

그런데 $A+C<180^\circ$이므로 $\quad A=30^\circ$

$\therefore$ (가) 2 (나) 45° (다) $\dfrac{1}{2}$ (라) 30° (마) 150° 답 풀이 참조

0821 사인법칙에 의하여 $\dfrac{4}{\sin 30^\circ}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sin C}$

$4\sin C=4\sqrt{2}\sin 30^\circ$

$\therefore \sin C=4\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$0^\circ<C<180^\circ$이므로 $\quad C=45^\circ$ 또는 $C=135^\circ$

답 45° 또는 135°

0822 사인법칙에 의하여 $\dfrac{3}{\sin 60^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin B}$

$3\sin B=\sqrt{3}\sin 60^\circ$

$\therefore \sin B=\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ<B<180^\circ$이므로 $\quad B=30^\circ$ 또는 $B=150^\circ$

그런데 $A+B<180^\circ$이므로 $\quad B=30^\circ$ 답 30°

0823 사인법칙에 의하여 $\dfrac{6}{\sin 45^\circ}=2R$

$\therefore R=\dfrac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=3\sqrt{2}$ 답 $3\sqrt{2}$

0824 $A+B+C=180^\circ$이므로

$C=180^\circ-(120^\circ+30^\circ)=30^\circ$

사인법칙에 의하여 $\dfrac{5}{\sin 30^\circ}=2R$

$\therefore R=\dfrac{5}{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=5$ 답 5

0825 코사인법칙에 의하여 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$이므로

$c^2=3^2+\boxed{4}^2-2\cdot3\cdot4\cdot\cos\boxed{60^\circ}=9+16-2\cdot3\cdot4\cdot\dfrac{1}{2}=\boxed{13}$

$c>0$이므로 $\quad c=\boxed{\sqrt{13}}$

$\therefore$ (가) 4 (나) 60° (다) 13 (라) $\sqrt{13}$ 답 풀이 참조

0826 코사인법칙에 의하여

$b^2=(4\sqrt{2})^2+5^2-2\cdot4\sqrt{2}\cdot5\cdot\cos 45^\circ$

$=32+25-2\cdot4\sqrt{2}\cdot5\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=17$

$b>0$이므로 $\quad b=\sqrt{17}$ 답 $\sqrt{17}$

0827 코사인법칙에 의하여

$a^2=(\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}\cdot\cos 120^\circ$

$=3+12-2\cdot\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=21$

$a>0$이므로 $\quad a=\sqrt{21}$ 답 $\sqrt{21}$

0828 코사인법칙에 의하여

$a^2=2^2+(3\sqrt{3})^2-2\cdot2\cdot3\sqrt{3}\cdot\cos 30^\circ$

$=4+27-2\cdot2\cdot3\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=13$

$a>0$이므로 $\quad a=\sqrt{13}$ 답 $\sqrt{13}$

0829 코사인법칙에 의하여

$b^2=(\sqrt{3})^2+3^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot3\cdot\cos 150^\circ$

$=3+9-2\cdot\sqrt{3}\cdot3\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=21$

$b>0$이므로 $\quad b=\sqrt{21}$ 답 $\sqrt{21}$

0830 코사인법칙 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$를 변형하면

$\cos B=\boxed{\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}$이므로

$\cos B=\dfrac{\boxed{1}^2+(\sqrt{3})^2-1^2}{2\cdot1\cdot\boxed{\sqrt{3}}}=\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

$\therefore B=\boxed{30^\circ}$

$\therefore$ (가) $\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ (나) 1 (다) $\sqrt{3}$ (라) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (마) 30° 답 풀이 참조

0831 코사인법칙에 의하여

(1) $\cos A=\dfrac{4^2+(2\sqrt{7})^2-6^2}{2\cdot4\cdot2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$

(2) $\cos B=\dfrac{(2\sqrt{7})^2+6^2-4^2}{2\cdot2\sqrt{7}\cdot6}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

(3) $\cos C=\dfrac{6^2+4^2-(2\sqrt{7})^2}{2\cdot6\cdot4}=\dfrac{1}{2}$

답 (1) $\dfrac{\sqrt{7}}{14}$ (2) $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ (3) $\dfrac{1}{2}$

0832 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+1)^2-2^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{2(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore A=45^\circ$ 답 45°

0833 $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\sin30^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{15}{4}$ 답 $\dfrac{15}{4}$

0834 $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot7\cdot8\cdot\sin120^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\cdot7\cdot8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=14\sqrt{3}$ 답 $14\sqrt{3}$

0835 $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot7\cdot\sin135^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot7\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=7\sqrt{2}$ 답 $7\sqrt{2}$

0836 $\triangle ABC=\dfrac{13\cdot14\cdot15}{4\cdot\dfrac{65}{8}}=84$ 답 84

0837 $\square ABCD=3\sqrt{2}\cdot6\cdot\sin45^\circ=3\sqrt{2}\cdot6\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=18$ 답 18

0838 $\square ABCD=6\cdot10\cdot\sin150^\circ=6\cdot10\cdot\dfrac{1}{2}=30$ 답 30

0839 $\square ABCD=\dfrac{1}{2}\cdot9\cdot4\sqrt{3}\cdot\sin60^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\cdot9\cdot4\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=27$ 답 27

0840 $\square ABCD=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot7\cdot\sin90^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot7\cdot1=\dfrac{21}{2}$

답 $\dfrac{21}{2}$

0841 사인법칙에 의하여 $\dfrac{3}{\sin45^\circ}=\dfrac{4}{\sin B}$

$3\sin B=4\sin45^\circ$ $\therefore \sin B=4\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \cos^2B=1-\sin^2B=1-\dfrac{8}{9}=\dfrac{1}{9}$ 답 ①

0842 $A+B+C=180^\circ$이므로

$A=180^\circ-(75^\circ+60^\circ)=45^\circ$

사인법칙에 의하여 $\dfrac{a}{\sin45^\circ}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sin60^\circ}$

$a\sin60^\circ=\sqrt{6}\sin45^\circ$ $\therefore a=\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=2$ 답 ④

0843 $\overset{\frown}{BC}$에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$\angle BAC=\angle BDC=45^\circ$ ··· ❶

$\triangle ABC$에서 사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{AB}}{\sin30^\circ}=\dfrac{12}{\sin45^\circ}$ ··· ❷

$\overline{AB}\sin45^\circ=12\sin30^\circ$

$\therefore \overline{AB}=12\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$ ··· ❸

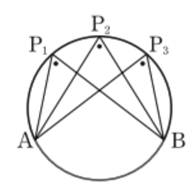
답 $6\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $\angle BAC$의 크기를 구할 수 있다.	20 %
❷ 사인법칙을 이용하여 식을 세울 수 있다.	40 %
❸ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	40 %

라쎈 특강

한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.

→ $\angle AP_1B=\angle AP_2B=\angle AP_3B$



0844 $\angle ADB=\theta$라 하면 $\triangle ABD$에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{2}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{BD}}{\sin45^\circ}$, $2\sin45^\circ=\overline{BD}\sin\theta$

$\therefore \overline{BD}=2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin\theta}$ ...... ㉠

$\angle ADC=180^\circ-\theta$이므로 $\triangle ADC$에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{3}{\sin(180^\circ-\theta)}=\dfrac{\overline{DC}}{\sin60^\circ}$, $\dfrac{3}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{DC}}{\sin60^\circ}$

$3\sin60^\circ=\overline{DC}\sin\theta$

$\therefore \overline{DC}=3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sin\theta}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{BD}:\overline{DC}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin\theta}:\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sin\theta}=2\sqrt{2}:3\sqrt{3}=4:3\sqrt{6}$

$\therefore k=4$ 답 4

0845 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

$\therefore \sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{a}{2R}+\dfrac{b}{2R}+\dfrac{c}{2R}=\dfrac{a+b+c}{2R}$

$=\dfrac{18}{2\cdot2\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ 답 ④

07 삼각함수의 활용

0846 △ABC는 $B=C$인 이등변삼각형이므로

$B=\frac{1}{2}(180°-A)=\frac{1}{2}(180°-120°)=30°$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{8}{\sin 30°}=2R \quad \therefore R=\frac{8}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}=8$ 답 8

0847 $A+B=180°-C$이므로

$\sin(A+B)=\sin(180°-C)=\sin C$

즉 $3\sin(A+B)\sin C=1$에서

$3\sin C\cdot\sin C=1 \quad \therefore \sin^2 C=\frac{1}{3}$

$0°<C<180°$에서 $\sin C>0$이므로 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 $\frac{c}{\sin C}=2R$

$\therefore R=\frac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{15}}{2}$

0848 $A+B+C=180°$이고, $A:B:C=1:1:2$이므로

$A=B=180°\times\frac{1}{4}=45°,\ C=180°\times\frac{2}{4}=90°$

따라서 사인법칙에 의하여

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

$=\sin 45°:\sin 45°:\sin 90°$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{\sqrt{2}}{2}:1=1:1:\sqrt{2}$ 답 ①

0849 사인법칙에 의하여

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=3:4:5$

이므로 $a=3k,\ b=4k,\ c=5k\ (k>0)$로 놓으면

$ab=3k\cdot 4k=12k^2,\ bc=4k\cdot 5k=20k^2,\ ca=5k\cdot 3k=15k^2$

$\therefore ab:bc:ca=12k^2:20k^2:15k^2$

$=12:20:15$ 답 12 : 20 : 15

0850 $A+B+C=180°$이고, $A:B:C=1:2:3$이므로

$A=180°\times\frac{1}{6}=30°,\ B=180°\times\frac{2}{6}=60°,$

$C=180°\times\frac{3}{6}=90°$ ⋯ ❶

사인법칙에 의하여

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

$=\sin 30°:\sin 60°:\sin 90°$

$=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}:1$

$=1:\sqrt{3}:2$ ⋯ ❷

따라서 $a=k,\ b=\sqrt{3}k,\ c=2k\ (k>0)$로 놓으면

$\frac{a^2+b^2}{ac}=\frac{k^2+(\sqrt{3}k)^2}{k\cdot 2k}=\frac{4k^2}{2k^2}=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ A, B, C를 구할 수 있다.	30 %
❷ $a:b:c$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\frac{a^2+b^2}{ac}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0851 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$

이것을 주어진 식에 대입하면

$a\cdot\frac{a}{2R}=b\cdot\frac{b}{2R}+c\cdot\frac{c}{2R} \quad \therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 △ABC는 $A=90°$인 직각삼각형이다.

답 $A=90°$인 직각삼각형

0852 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$

이것을 주어진 식에 대입하면

$b\cdot\frac{b}{2R}=c\cdot\frac{c}{2R} \quad \therefore b^2=c^2$

b, c는 양수이므로 $b=c$

따라서 △ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다. 답 ②

0853 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$

이것을 주어진 식에 대입하면

$(a-b)\cdot\frac{c}{2R}=a\cdot\frac{a}{2R}-b\cdot\frac{b}{2R}, \quad a^2-b^2-ac+bc=0$

$(a+b)(a-b)-(a-b)c=0, \quad (a-b)(a+b-c)=0$

$a+b\neq c$이므로 $a-b=0$, 즉 $a=b$

따라서 △ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다. 답 ②

0854 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-\sin B)^2-(\cos A+\cos C)(\cos A-\cos C)$

$=\sin^2 B-\cos^2 A+\cos^2 C$

$=\sin^2 B-(1-\sin^2 A)+(1-\sin^2 C)$

$=\sin^2 B+\sin^2 A-\sin^2 C$

이므로

$\sin^2 B+\sin^2 A-\sin^2 C=0$ ⋯⋯ ㉠

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$

이므로 ㉠에서

$\left(\frac{b}{2R}\right)^2+\left(\frac{a}{2R}\right)^2-\left(\frac{c}{2R}\right)^2=0$

$\therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 △ABC는 $C=90°$인 직각삼각형이다.

답 $C=90°$인 직각삼각형

0855 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=5^2+4^2-2\cdot5\cdot4\cdot\cos60°$$
$$=25+16-2\cdot5\cdot4\cdot\frac{1}{2}=21$$
$$\therefore \overline{AC}=\sqrt{21}\ (\because \overline{AC}>0)$$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{21}}{\sin60°}=2R \qquad \therefore R=\frac{\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{7}$$

답 $\sqrt{7}$

0856 $\overline{AC}=x$라 하면 코사인법칙에 의하여

$$7^2=3^2+x^2-2\cdot3\cdot x\cdot\cos120° \quad \cdots ❶$$
$$49=9+x^2-2\cdot3\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$x^2+3x-40=0, \qquad (x+8)(x-5)=0$$
$$\therefore x=5\ (\because x>0)$$

따라서 $\overline{AC}$의 길이는 5이다. ⋯ ❷

답 5

채점 기준	비율
❶ 코사인법칙을 이용하여 방정식을 세울 수 있다.	50 %
❷ $\overline{AC}$의 길이를 구할 수 있다.	50 %

0857 △ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin45°}=\frac{\sqrt{6}}{\sin60°}, \qquad \overline{AC}\sin60°=\sqrt{6}\sin45°$$
$$\therefore \overline{AC}=\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=2$$

△ACD는 $\overline{AC}=\overline{CD}=2$인 이등변삼각형이고,

$$\angle ACD=180°-\angle ACB=180°-60°=120°$$

이므로 △ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2=2^2+2^2-2\cdot2\cdot2\cdot\cos120°$$
$$=4+4-2\cdot2\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=12$$
$$\therefore \overline{AD}=2\sqrt{3}\ (\because \overline{AD}>0)$$

답 ④

0858 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=(2\sqrt{3})^2+5^2-2\cdot2\sqrt{3}\cdot5\cdot\cos30°$$
$$=12+25-2\cdot2\sqrt{3}\cdot5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=7$$
$$\therefore \overline{AC}=\sqrt{7}\ (\because \overline{AC}>0)$$
$$\therefore \cos A=\frac{(\sqrt{7})^2+(2\sqrt{3})^2-5^2}{2\cdot\sqrt{7}\cdot2\sqrt{3}}$$
$$=-\frac{6}{4\sqrt{21}}=-\frac{\sqrt{21}}{14}$$

답 $-\frac{\sqrt{21}}{14}$

0859 사인법칙에 의하여

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=1:\sqrt{2}:2$$

따라서 $a=k$, $b=\sqrt{2}k$, $c=2k$ $(k>0)$로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{(2k)^2+k^2-(\sqrt{2}k)^2}{2\cdot2k\cdot k}=\frac{3k^2}{4k^2}=\frac{3}{4}$$

답 ⑤

0860 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{x^2+6^2-4^2}{2\cdot x\cdot6}=\frac{x^2+20}{12x}=\frac{x}{12}+\frac{5}{3x}$$

$x>0$이므로 $\frac{x}{12}>0$, $\frac{5}{3x}>0$이고 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $\frac{x}{12}+\frac{5}{3x}\geq2\sqrt{\frac{x}{12}\cdot\frac{5}{3x}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

위의 식에서 $\frac{x}{12}=\frac{5}{3x}$일 때 등호가 성립하므로

$$x^2=20 \qquad \therefore x=2\sqrt{5}\ (\because x>0)$$

따라서 $x=2\sqrt{5}$일 때 $\cos A$는 최솟값 $\frac{\sqrt{5}}{3}$를 갖는다.

답 최솟값: $\frac{\sqrt{5}}{3}$, $x=2\sqrt{5}$

0861 △ABC에서 $\quad C=180°-(75°+45°)=60°$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R m라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{100\sqrt{3}}{\sin60°}=2R \qquad \therefore R=\frac{100\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{1}{2}=100$$

따라서 잔디밭의 넓이는

$$\pi R^2=\pi\cdot100^2=10000\pi\,(\text{m}^2)$$

답 ③

0862 △ACB에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2=150^2+150^2-2\cdot150\cdot150\cdot\cos120°$$
$$=2\cdot150^2-2\cdot150^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=3\cdot150^2$$
$$\therefore \overline{AB}=150\sqrt{3}\,(\text{m})\ (\because \overline{AB}>0)$$

따라서 두 나무 A, B 사이의 거리는 $150\sqrt{3}$ m이다.

답 ③

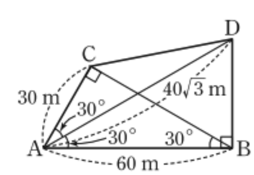
0863 $\angle ACB=180°-(60°+30°)=90°$이므로 직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AC}=\overline{AB}\sin30°=60\cdot\frac{1}{2}=30\,(\text{m})$$

직각삼각형 ABD에서

$$\overline{AD}=\frac{\overline{AB}}{\cos30°}=\frac{60}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=40\sqrt{3}\,(\text{m})$$

따라서 오른쪽 그림의 △ADC에서 코사인법칙에 의하여



$$\overline{CD}^2=30^2+(40\sqrt{3})^2-2\cdot30\cdot40\sqrt{3}\cdot\cos30°$$
$$=2100$$
$$\therefore \overline{CD}=10\sqrt{21}\,(\text{m})\ (\because \overline{CD}>0)$$

따라서 두 지점 C, D 사이의 거리는 $10\sqrt{21}$ m이다.

답 ①

0864 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{3^2+2^2-4^2}{2\cdot3\cdot2}=-\frac{1}{4} \quad \cdots ❶$$

이므로 $\quad \sin^2 C=1-\cos^2 C=1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$

$$\therefore \sin C=\frac{\sqrt{15}}{4}\ (\because 0°<C<180°) \quad \cdots ❷$$

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{4}{\sin C}=2R \qquad \therefore R=\dfrac{4}{\frac{\sqrt{15}}{4}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{8\sqrt{15}}{15}$

따라서 거울의 반지름의 길이는 $\dfrac{8\sqrt{15}}{15}$이다. ⋯ ❸

답 $\dfrac{8\sqrt{15}}{15}$

채점 기준	비율
❶ $\cos C$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sin C$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ 거울의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40 %

0865 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$이므로 이것을 주어진 식에 대입하면

$c\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=a\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$b^2+c^2-a^2=a^2+b^2-c^2, \qquad a^2=c^2$

a, c는 양수이므로 $\quad a=c$

따라서 $\triangle$ABC는 $a=c$인 이등변삼각형이다. 답 ③

0866 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$이므로 이것을 주어진 식에 대입하면

$b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-a\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=c$

$b^2+c^2-a^2-(c^2+a^2-b^2)=2c^2 \qquad \therefore b^2=a^2+c^2$

따라서 $\triangle$ABC는 $B=90°$인 직각삼각형이다.

답 $B=90°$인 직각삼각형

0867 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+B\right)=\cos B$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-C\right)=\sin C$이므로 주어진 식은 $\quad \cos B\sin C=\sin A$ ⋯⋯ ㉠

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\cdot\dfrac{c}{2R}=\dfrac{a}{2R}, \qquad c^2+a^2-b^2=2a^2$

$\therefore c^2=a^2+b^2$

따라서 $\triangle$ABC는 $C=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

답 $C=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형

0868 $A+B+C=180°$이므로 $\quad A+B=180°-C$

따라서 $\sin(A+B)=\sin(180°-C)=\sin C$이므로

$\sin C=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \triangle\text{ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot8\cdot\dfrac{1}{3}=8$ 답 8

0869 $\triangle$ABC의 넓이가 18이므로 $\quad \dfrac{1}{2}\cdot4\sqrt{3}\cdot6\cdot\sin A=18$

$\therefore \sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0°<A<90°$이므로 $\quad A=60°$ 답 $60°$

0870 $\angle\text{AOB}:\angle\text{BOC}:\angle\text{COA}=\widehat{\text{AB}}:\widehat{\text{BC}}:\widehat{\text{CA}}=4:3:5$ 이므로

$\angle\text{AOB}=360°\times\dfrac{4}{12}=120°$, $\angle\text{BOC}=360°\times\dfrac{3}{12}=90°$,

$\angle\text{COA}=360°\times\dfrac{5}{12}=150°$ ⋯ ❶

$\therefore \triangle\text{ABC}=\triangle\text{AOB}+\triangle\text{BOC}+\triangle\text{COA}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot4\cdot\sin120°+\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot4\cdot\sin90°+\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot4\cdot\sin150°$

$=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot4\cdot1+\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot4\cdot\dfrac{1}{2}$

$=4(3+\sqrt{3})$ ⋯ ❷

답 $4(3+\sqrt{3})$

채점 기준	비율
❶ $\angle$AOB, $\angle$BOC, $\angle$COA의 크기를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\triangle$ABC의 넓이를 구할 수 있다.	70 %

0871 $\triangle\text{ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B=25$

늘어난 부분의 넓이는

$\triangle\text{APQ}=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\text{AP}}\cdot\overline{\text{AQ}}\cdot\sin(180°-A)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{5}b\cdot\dfrac{6}{5}c\cdot\sin A$

$=\dfrac{6}{25}\cdot\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{6}{25}\triangle\text{ABC}=\dfrac{6}{25}\cdot25=6$

$\triangle\text{BQR}=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\text{BQ}}\cdot\overline{\text{BR}}\cdot\sin(180°-B)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{5}c\cdot\dfrac{6}{5}a\cdot\sin B$

$=\dfrac{6}{25}\cdot\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{6}{25}\triangle\text{ABC}=\dfrac{6}{25}\cdot25=6$

$\triangle\text{CRP}=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\text{CR}}\cdot\overline{\text{CP}}\cdot\sin(180°-C)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{5}a\cdot\dfrac{6}{5}b\cdot\sin C$

$=\dfrac{6}{25}\cdot\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{6}{25}\triangle\text{ABC}=\dfrac{6}{25}\cdot25=6$

$\therefore \triangle\text{PQR}=\triangle\text{ABC}+\triangle\text{APQ}+\triangle\text{BQR}+\triangle\text{CRP}$

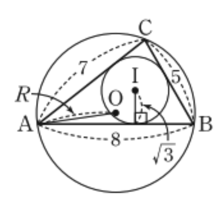
$=25+6+6+6=43$ 답 ⑤

0872 $\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 $\triangle$ABC의 넓이가 $12\sqrt{5}$이므로

$12\sqrt{5}=\dfrac{7\cdot8\cdot9}{4R}, \qquad 12\sqrt{5}=\dfrac{126}{R}$

$\therefore R=\dfrac{21\sqrt{5}}{10}$ 답 $\dfrac{21\sqrt{5}}{10}$

0873 오른쪽 그림에서 $\triangle$ABC의 외접원 O의 반지름의 길이를 R라 하면



$\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot(5+7+8)=\dfrac{5\cdot7\cdot8}{4R}$

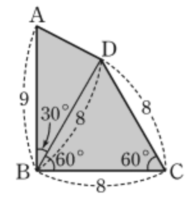
$10\sqrt{3}=\dfrac{70}{R} \qquad \therefore R=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$ 답 $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

라센 특강 삼각형의 내접원의 반지름의 길이와 삼각형의 넓이

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이가 r일 때,

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

0874 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 그으면 $\triangle BCD$는 $\overline{BC}=\overline{CD}$인 이등변삼각형이므로



$$\angle DBC=\frac{1}{2}(180°-60°)=60°$$

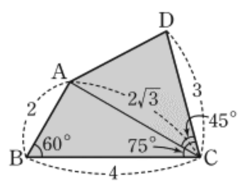
따라서 $\triangle BCD$는 정삼각형이고

$\angle ABD=90°-60°=30°$이므로

$$\square ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 8\cdot \sin 30°+\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot \sin 60°$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 8\cdot \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=18+16\sqrt{3}$$

답 ②

0875 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$를 그으면 $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여



$$\overline{AC}^2=2^2+4^2-2\cdot 2\cdot 4\cdot \cos 60°$$
$$=4+16-2\cdot 2\cdot 4\cdot \frac{1}{2}=12$$

$\therefore \overline{AC}=2\sqrt{3}$ ($\because \overline{AC}>0$)

$\triangle ABC$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60°}=\frac{2}{\sin(\angle ACB)},\quad 2\sqrt{3}\sin(\angle ACB)=2\sin 60°$$

$$\therefore \sin(\angle ACB)=2\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$

$0°<\angle ACB<75°$이므로 $\quad \angle ACB=30°$

따라서 $\triangle ACD$에서 $\angle ACD=75°-30°=45°$이므로

$$\square ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot \sin 60°+\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 3\cdot \sin 45°$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{2}$$

답 ③

0876 $\overline{AD}=\overline{BC}=8$, $\overline{DC}=\overline{AB}=6$이고 $\square ABCD$의 넓이가 $24\sqrt{3}$이므로

$$8\cdot 6\cdot \sin D=24\sqrt{3}\qquad \therefore \sin D=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0°<D<90°$이므로 $\quad D=60°$

답 $60°$

0877 평행사변형 ABCD에서

$$B=180°-C=180°-135°=45°$$

$$\therefore \square ABCD=4\cdot 5\cdot \sin 45°=4\cdot 5\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}=10\sqrt{2}$$

답 ①

0878 $\triangle ACD$에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos D=\frac{8^2+7^2-13^2}{2\cdot 8\cdot 7}=-\frac{1}{2}$$

이때 $90°<D<180°$이므로 $\quad D=120°$ ⋯ ❶

$$\therefore \square ABCD=8\cdot 7\cdot \sin 120°$$
$$=8\cdot 7\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=28\sqrt{3}$$ ⋯ ❷

답 $28\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ D를 구할 수 있다.	50 %
❷ $\square ABCD$의 넓이를 구할 수 있다.	50 %

0879 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$이므로

$$\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}\ (\because 0°<\theta<180°)$$

$$\therefore \square ABCD=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 12\cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}=20\sqrt{2}$$

답 ⑤

0880 등변사다리꼴의 한 대각선의 길이를 x라 하면 넓이가 9이므로

$$\frac{1}{2}\cdot x\cdot x\cdot \sin 150°=9,\qquad \frac{1}{2}\cdot x\cdot x\cdot \frac{1}{2}=9$$

$$x^2=36\qquad \therefore x=6\ (\because x>0)$$

답 6

0881 $\triangle ABD$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2=2^2+4^2-2\cdot 2\cdot 4\cdot \cos 120°$$
$$=4+16-2\cdot 2\cdot 4\cdot \left(-\frac{1}{2}\right)=28$$

$\therefore \overline{BD}=2\sqrt{7}$ ($\because \overline{BD}>0$)

평행사변형 ABCD에서 $B=180°-A=60°$이고 $\overline{BC}=\overline{AD}=4$이므로 $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=2^2+4^2-2\cdot 2\cdot 4\cdot \cos 60°$$
$$=4+16-2\cdot 2\cdot 4\cdot \frac{1}{2}=12$$

$\therefore \overline{AC}=2\sqrt{3}$ ($\because \overline{AC}>0$)

이때

$$\square ABCD=2\cdot 4\cdot \sin 120°=2\cdot 4\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$$

이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{7}\cdot \sin\theta=4\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{21}\sin\theta=4\sqrt{3}\qquad \therefore \sin\theta=\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

답 ⑤

0882 전략 사인법칙을 이용하여 $\sin C$의 값을 구한다.

풀이 사인법칙에 의하여 $\quad \dfrac{2}{\sin 30°}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin C}$

$$2\sin C=2\sqrt{3}\sin 30°\qquad \therefore \sin C=2\sqrt{3}\cdot \frac{1}{2}\cdot \frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0°<C<90°$이므로 $\quad C=60°$

답 $60°$

0883 전략 $\angle ADB=\angle ACB$임을 알고 $\triangle ABD$에서 사인법칙을 이용한다.

풀이 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$$\angle ADB=\angle ACB=30°$$

07 삼각함수의 활용

따라서 $\triangle$ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin 45^\circ}=\frac{16\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$$

$$\overline{AD}\sin 30^\circ=16\sqrt{2}\sin 45^\circ$$

$$\therefore \overline{AD}=16\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2=32$$

답 32

0884 전략 먼저 A를 구하고, 사인법칙을 이용하여 외접원의 반지름의 길이를 구한다.

풀이 $A+B+C=180^\circ$이므로

$$A=180^\circ-(70^\circ+80^\circ)=30^\circ$$

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{5}{\sin 30^\circ}=2R \qquad \therefore R=\frac{5}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}=5$$

따라서 $\triangle$ABC의 외접원의 넓이는 $\pi\cdot 5^2=25\pi$

답 ②

0885 전략 원에 내접하는 사각형의 두 대각의 크기의 합은 180°임을 이용하여 먼저 D를 구한 후 코사인법칙을 이용한다.

풀이 □ABCD가 원에 내접하므로 $B+D=180^\circ$

$$\therefore D=180^\circ-60^\circ=120^\circ$$ ❶

$\triangle$ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=3^2+4^2-2\cdot 3\cdot 4\cdot\cos 120^\circ=37$$

$$\therefore \overline{AC}=\sqrt{37}\ (\because \overline{AC}>0)$$ ❷

답 $\sqrt{37}$

채점 기준	비율
❶ D를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\overline{AC}$의 길이를 구할 수 있다.	70 %

0886 전략 두 대각선의 길이가 p, q이고 두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ인 사각형의 넓이는 $\frac{1}{2}pq\sin\theta$임을 이용한다.

풀이 □ABCD의 두 대각선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 □ABCD의 넓이가 14이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 7\sqrt{2}\cdot\sin\theta=14 \qquad \therefore \sin\theta=\frac{1}{2}$$

θ는 예각이므로 $\theta=30^\circ$

답 ②

0887 전략 한 원에서 원주각의 크기는 호의 길이에 비례함을 이용하여 삼각형의 세 각의 크기를 구한다.

풀이 $A+B+C=180^\circ$이고 $\widehat{AB}:\widehat{BC}:\widehat{CA}=3:4:5$이므로

$$A=180^\circ\times\frac{4}{12}=60^\circ,\ B=180^\circ\times\frac{5}{12}=75^\circ,$$

$$C=180^\circ\times\frac{3}{12}=45^\circ$$

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ}=\frac{6\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$

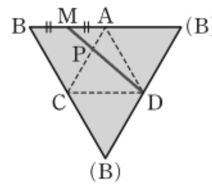
$$\overline{BC}\sin 45^\circ=6\sqrt{2}\sin 60^\circ$$

$$\therefore \overline{BC}=6\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}=6\sqrt{3}$$

답 ⑤

0888 전략 정사면체의 전개도에 $\overline{MP}+\overline{PD}$가 최소가 되는 경우를 그려 본다.

풀이 정사면체의 전개도는 오른쪽 그림과 같으므로



$$\overline{MP}+\overline{PD}\geq\overline{DM}$$ ❶

$\triangle$AMD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{DM}^2=3^2+6^2-2\cdot 3\cdot 6\cdot\cos 120^\circ=63$$

$$\therefore \overline{DM}=3\sqrt{7}\ (\because \overline{DM}>0)$$

따라서 $\overline{MP}+\overline{PD}$의 최솟값은 $3\sqrt{7}$이다. ❷

답 $3\sqrt{7}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{MP}+\overline{PD}\geq\overline{DM}$임을 알 수 있다.	40 %
❷ $\overline{MP}+\overline{PD}$의 최솟값을 구할 수 있다.	60 %

0889 전략 먼저 코사인법칙을 이용하여 $\overline{BC}$의 길이를 구한 후 사인법칙을 이용한다.

풀이 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=5^2+6^2-2\cdot 5\cdot 6\cdot\frac{3}{5}=25$$

$$\therefore \overline{BC}=5\ (\because \overline{BC}>0)$$

이때

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}\ (\because 0^\circ<A<180^\circ)$$

이므로 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin A}=2R$

$$\therefore R=\frac{5}{\frac{4}{5}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{25}{8}$$

$$\therefore 16R=16\cdot\frac{25}{8}=50$$

답 50

0890 전략 삼각형의 세 변 중 길이가 가장 긴 변의 대각이 삼각형의 세 각 중 가장 큰 각이다.

풀이 사인법칙에 의하여

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=7:13:8$$

이때 가장 긴 변의 대각이 크기가 가장 큰 각이므로 구하는 각의 크기는 B이다.

$a=7k$, $b=13k$, $c=8k\ (k>0)$로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{(8k)^2+(7k)^2-(13k)^2}{2\cdot 8k\cdot 7k}=-\frac{1}{2}$$

$0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=120^\circ$

따라서 구하는 각의 크기는 120°이다.

답 120°

0891 전략 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$임을 이용한다.

풀이 $6\sin A=2\sqrt{3}\sin B=3\sin C$에서

$$\sin A=\frac{\sin B}{\sqrt{3}}=\frac{\sin C}{2}$$

이므로 $\sin A:\sin B:\sin C=1:\sqrt{3}:2$

사인법칙에 의하여 $a:b:c=1:\sqrt{3}:2$이므로

$$a=k,\ b=\sqrt{3}k,\ c=2k\ (k>0)$$

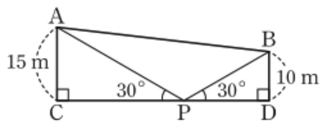
로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{(\sqrt{3}k)^2+(2k)^2-k^2}{2\cdot\sqrt{3}k\cdot 2k}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0°<A<180°$이므로 $\quad A=30°$ 답 ⑤

0892 전략 삼각함수의 정의를 이용하여 $\overline{AP}$, $\overline{BP}$의 길이를 구한 후 △APB에서 코사인법칙을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림의 직각삼각형 ACP에서



$$\overline{AP}=\frac{\overline{AC}}{\sin 30°}=\frac{15}{\frac{1}{2}}=30\,(\mathrm{m})$$ ··· ❶

직각삼각형 BPD에서 $\quad \overline{BP}=\frac{\overline{BD}}{\sin 30°}=\frac{10}{\frac{1}{2}}=20\,(\mathrm{m})$ ··· ❷

이때 △APB에서

$\angle APB=180°-(30°+30°)=120°$

이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=30^2+20^2-2\cdot30\cdot20\cdot\cos 120°=1900$

$\therefore \overline{AB}=10\sqrt{19}\,(\mathrm{m})\ (\because \overline{AB}>0)$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 $10\sqrt{19}$ m이다. ··· ❸

답 $10\sqrt{19}$ m

채점 기준	비율
❶ $\overline{AP}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\overline{BP}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❸ 두 지점 A, B 사이의 거리를 구할 수 있다.	40 %

0893 전략 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 주어진 관계식을 a, b, c에 대한 식으로 변형한다.

풀이 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\sin A$, $\sin(\pi-B)=\sin B$이므로 주어진 식은 $\quad \sin A=2\sin B\cos C$ ······ ㉠

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$$\frac{a}{2R}=2\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$a^2=a^2+b^2-c^2,\quad b^2=c^2$

b, c는 양수이므로 $\quad b=c$

따라서 △ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다. 답 ③

0894 전략 △ABC의 두 변의 길이 a, b와 그 끼인각의 크기 C에 대하여 $\triangle ABC=\frac{1}{2}ab\sin C$임을 이용한다.

풀이 $\overline{AD}=x$라 하면 △ABC=△ABD+△ADC이므로

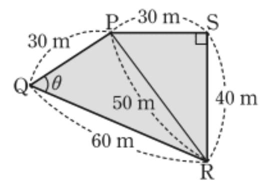
$$\frac{1}{2}\cdot8\cdot10\cdot\sin 60°=\frac{1}{2}\cdot8\cdot x\cdot\sin 30°+\frac{1}{2}\cdot x\cdot10\cdot\sin 30°$$

$$20\sqrt{3}=2x+\frac{5}{2}x,\quad \frac{9}{2}x=20\sqrt{3}\quad \therefore x=\frac{40\sqrt{3}}{9}$$

따라서 $\overline{AD}$의 길이는 $\frac{40\sqrt{3}}{9}$이다. 답 ④

0895 전략 사각형 모양의 잔디 광장을 두 개의 삼각형으로 나누어 넓이를 구한다.

풀이 잔디 광장을 오른쪽 그림과 같이 사각형 PQRS라 하고 $\overline{PR}$를 그으면 직각삼각형 PRS에서



$\overline{PR}=\sqrt{30^2+40^2}=50\,(\mathrm{m})$

△PQR에서 ∠PQR$=\theta$라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{30^2+60^2-50^2}{2\cdot30\cdot60}=\frac{5}{9}$$

$$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{5}{9}\right)^2}=\frac{2\sqrt{14}}{9}\ (\because 0°<\theta<180°)$$

$\therefore$ □PQRS=△PQR+△PRS

$$=\frac{1}{2}\cdot30\cdot60\cdot\frac{2\sqrt{14}}{9}+\frac{1}{2}\cdot30\cdot40$$

$$=200(3+\sqrt{14})\,(\mathrm{m}^2)$$

따라서 잔디 광장의 넓이는 $200(3+\sqrt{14})\,\mathrm{m}^2$이다. 답 ⑤

0896 전략 먼저 △ACD에서 코사인법칙을 이용하여 $\overline{CD}$의 길이를 구한다.

풀이 $\overline{CD}=x$라 하면 △ACD에서 코사인법칙에 의하여

$(3\sqrt{3})^2=6^2+x^2-2\cdot6\cdot x\cdot\cos 60°$

$27=36+x^2-6x,\quad x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2=0\quad \therefore x=3$

따라서 $\overline{CD}=3$이므로

$\square ABCD=6\cdot3\cdot\sin 60°=6\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$ 답 ②

다른풀이 △ACD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sin 60°}=\frac{6}{\sin(\angle ACD)},\quad 3\sqrt{3}\sin(\angle ACD)=6\sin 60°$$

$$\therefore \sin(\angle ACD)=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{3\sqrt{3}}=1$$

$\therefore \angle ACD=90°$

따라서 직각삼각형 ACD에서 $\quad \overline{CD}=\sqrt{6^2-(3\sqrt{3})^2}=3$

$\therefore \square ABCD=6\cdot3\cdot\sin 60°=9\sqrt{3}$

0897 전략 △ABP에서 코사인법칙을 이용하여 □ABCD의 두 대각선이 이루는 각의 크기를 구한다.

풀이 ∠APB$=\theta$라 하면 △ABP에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{2^2+4^2-4^2}{2\cdot2\cdot4}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}\ (\because 0°<\theta<180°)$$

$$\therefore \square ABCD=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BD}\cdot\sin\theta$$

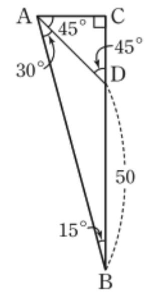
$$=\frac{1}{2}\cdot7\cdot7\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{49\sqrt{15}}{8}$$ 답 ⑤

0898 전략 먼저 ∠BAD의 크기를 구하여 △ABD에서 사인법칙을 이용한다.

풀이 △ADC에서 $\quad \angle ADC=90°-45°=45°$

△ABD에서 $\quad \angle BAD=45°-15°=30°$

오른쪽 그림의 △ABD에서 사인법칙에 의하여



$$\frac{\overline{AD}}{\sin 15°}=\frac{50}{\sin 30°}$$

$$\overline{AD}\sin 30°=50\sin 15°$$

$$\therefore \overline{AD}=50\times 0.25\times 2=25$$

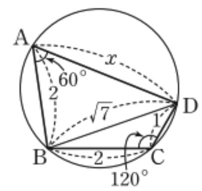
따라서 직각삼각형 ADC에서

$$\overline{AC}=\overline{AD}\sin 45°=25\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{25\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{25\sqrt{2}}{2}$

0899 전략 $\overline{BD}$를 긋고 두 삼각형 BCD, ABD에서 코사인법칙을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 그으면



△BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2=2^2+1^2-2\cdot 2\cdot 1\cdot\cos 120°=7$$

$$\therefore \overline{BD}=\sqrt{7}\ (\because \overline{BD}>0) \quad \cdots ❶$$

□ABCD가 원에 내접하므로

$$A=180°-C=60° \quad \cdots ❷$$

이때 $\overline{AD}=x$라 하면 △ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{7})^2=2^2+x^2-2\cdot 2\cdot x\cdot\cos 60°$$

$$7=4+x^2-2x, \qquad x^2-2x-3=0$$

$$(x+1)(x-3)=0 \qquad \therefore x=3\ (\because x>0)$$

따라서 $\overline{AD}$의 길이는 3이다. ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $\overline{BD}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❷ A를 구할 수 있다.	10 %
❸ $\overline{AD}$의 길이를 구할 수 있다.	60 %

0900 전략 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 이용하여 $\cos B$를 구한다.

풀이 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{5^2+9^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 9}=\frac{19}{30}$$

이므로 △ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2=5^2+5^2-2\cdot 5\cdot 5\cdot\frac{19}{30}=\frac{55}{3}$$

$$\therefore \overline{AD}=\frac{\sqrt{165}}{3}\ (\because \overline{AD}>0)$$

답 $\frac{\sqrt{165}}{3}$

0901 전략 먼저 코사인법칙을 이용하여 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$에 대한 관계식을 구한다.

풀이 $\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=y$라 하면 코사인법칙에 의하여

$$13^2=x^2+y^2-2xy\cos 120°$$

$$\therefore 169=x^2+y^2+xy \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때

$$x^2+y^2+xy=(x+y)^2-xy$$

이고 $x+y=15$이므로 ㉠에서

$$15^2-xy=169 \qquad \therefore xy=56$$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot\sin 120°$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 56\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=14\sqrt{3}$$

답 ④

08 등차수열

Ⅲ. 수열

0902 답 1111

0903 답 6

0904 답 27

0905 답 16

0906 답 $\frac{1}{6}$

0907 $a_1=1-1=0$, $a_2=2-1=1$, $a_3=3-1=2$

답 $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=2$

0908 $a_1=3^1=3$, $a_2=3^2=9$, $a_3=3^3=27$

답 $a_1=3$, $a_2=9$, $a_3=27$

0909 $a_1=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, $a_2=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$, $a_3=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

답 $a_1=\frac{1}{4}$, $a_2=\frac{1}{8}$, $a_3=\frac{1}{16}$

0910 $a_1=10^1-1=9$, $a_2=10^2-1=99$, $a_3=10^3-1=999$

답 $a_1=9$, $a_2=99$, $a_3=999$

0911 $a_1=\frac{1+1}{1+2}=\frac{2}{3}$, $a_2=\frac{2+1}{2+2}=\frac{3}{4}$, $a_3=\frac{3+1}{3+2}=\frac{4}{5}$

답 $a_1=\frac{2}{3}$, $a_2=\frac{3}{4}$, $a_3=\frac{4}{5}$

0912 답 $a_n=n^2$

0913 답 $a_n=n(n+1)$

0914 $a_1=10=10^1$, $a_2=100=10^2$, $a_3=1000=10^3$, $a_4=10000=10^4$, ⋯이므로

$$a_n=10^n$$

답 $a_n=10^n$

0915 $a_1=-1=(-1)^1$, $a_2=1=(-1)^2$, $a_3=-1=(-1)^3$, $a_4=1=(-1)^4$, ⋯이므로

$$a_n=(-1)^n$$

답 $a_n=(-1)^n$

0916 $a_1=\frac{1}{1}=\frac{1}{2\cdot 1-1}$, $a_2=\frac{1}{3}=\frac{1}{2\cdot 2-1}$, $a_3=\frac{1}{5}=\frac{1}{2\cdot 3-1}$, $a_4=\frac{1}{7}=\frac{1}{2\cdot 4-1}$, ⋯이므로

$$a_n=\frac{1}{2n-1}$$

답 $a_n=\frac{1}{2n-1}$

0917 $2-1=3-2=4-3=\cdots=1$ 답 1

0918 $12-14=10-12=8-10=\cdots=-2$ 답 -2

0919 $3-1=2$에서 공차가 2이므로 주어진 수열은
$1,\ 3,\ \boxed{5},\ 7,\ 9,\ \cdots$ 답 5

0920 $7-10=-3$에서 공차가 -3이므로 주어진 수열은
$10,\ 7,\ 4,\ \boxed{1},\ -2,\ \cdots$ 답 1

0921 $2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$에서 공차가 $\frac{1}{2}$이므로 주어진 수열은
$\frac{1}{2},\ \boxed{1},\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ \cdots$ 답 1

0922 $\frac{7}{3}-3=-\frac{2}{3}$에서 공차가 $-\frac{2}{3}$이므로 주어진 수열은
$3,\ \frac{7}{3},\ \boxed{\frac{5}{3}},\ 1,\ \frac{1}{3},\ \cdots$ 답 $\frac{5}{3}$

0923 $a_n=2+(n-1)\cdot3=3n-1$ 답 $a_n=3n-1$

0924 $a_n=5+(n-1)\cdot(-2)=-2n+7$ 답 $a_n=-2n+7$

0925 첫째항이 -3, 공차가 $1-(-3)=4$이므로
$a_n=-3+(n-1)\cdot4=4n-7$ 답 $a_n=4n-7$

0926 첫째항이 7, 공차가 $6-7=-1$이므로
$a_n=7+(n-1)\cdot(-1)=-n+8$ 답 $a_n=-n+8$

0927 x는 7과 17의 등차중항이므로
$x=\frac{7+17}{2}=12$ 답 12

0928 x는 6과 -2의 등차중항이므로
$x=\frac{6+(-2)}{2}=2$ 답 2

0929 $\log x$는 $\log 3$과 $\log 243$의 등차중항이므로
$\log x=\frac{\log 3+\log 243}{2}=\frac{\log 3+5\log 3}{2}=3\log 3=\log 27$
$\therefore x=27$ 답 27

0930 $\frac{15(1+5)}{2}=45$ 답 45

0931 $\frac{15\{2\cdot3+(15-1)\cdot(-1)\}}{2}=-60$ 답 -60

0932 첫째항이 -5, 공차가 $-1-(-5)=4$이므로
$\frac{15\{2\cdot(-5)+(15-1)\cdot4\}}{2}=345$ 답 345

0933 첫째항이 4, 공차가 $2-4=-2$이므로
$\frac{15\{2\cdot4+(15-1)\cdot(-2)\}}{2}=-150$ 답 -150

0934 (1) 첫째항이 40, 공차가 $34-40=-6$이므로
$a_n=40+(n-1)\cdot(-6)=-6n+46$
(2) $a_n=-6n+46$이므로
$a_k=-6k+46=-14,\quad -6k=-60$
$\therefore k=10$
(3) 첫째항이 40, 제10항이 -14인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로
$\frac{10(40-14)}{2}=130$
답 (1) $a_n=-6n+46$ (2) 10 (3) 130

다른풀이 (3) 첫째항이 40, 공차가 -6인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로
$\frac{10\{2\cdot40+(10-1)\cdot(-6)\}}{2}=130$

0935 등차수열 3, 8, 13, …의 첫째항이 3, 공차가 $8-3=5$이므로 이 수열의 제k항을 38이라 하면
$3+(k-1)\cdot5=38,\quad 5k=40$
$\therefore k=8$
따라서 구하는 합은 첫째항이 3, 제8항이 38인 등차수열의 첫째항부터 제8항까지의 합이므로
$3+8+13+\cdots+38=\frac{8(3+38)}{2}=164$ 답 164

0936 등차수열 17, 13, 9, …의 첫째항이 17, 공차가 $13-17=-4$이므로 이 수열의 제k항을 -27이라 하면
$17+(k-1)\cdot(-4)=-27,\quad -4k=-48$
$\therefore k=12$
따라서 구하는 합은 첫째항이 17, 제12항이 -27인 등차수열의 첫째항부터 제12항까지의 합이므로
$17+13+9+\cdots+(-27)=\frac{12\{17+(-27)\}}{2}=-60$
답 -60

0937 (1) $a_1=S_1=1^2+3\cdot1=4$
(2) $a_{10}=S_{10}-S_9=(10^2+3\cdot10)-(9^2+3\cdot9)=22$
(3) $n\geq2$일 때,
$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+3n-\{(n-1)^2+3(n-1)\}$
$=2n+2$ …… ㉠
이때 $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로
$a_n=2n+2$
답 (1) 4 (2) 22 (3) $a_n=2n+2$

0938 (i) $n=1$일 때,
$a_1=S_1=1^2-2\cdot1=-1$
(ii) $n\geq2$일 때,
$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-2n-\{(n-1)^2-2(n-1)\}$
$=2n-3$ …… ㉠

이때 $a_1=-1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-3$ 답 $a_n=2n-3$

0939 (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2\cdot1^2+1=3$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2+n-\{2(n-1)^2+(n-1)\}$

$=4n-1$ …… ㉠

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4n-1$ 답 $a_n=4n-1$

0940 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_{15}=a+14d=25$ …… ㉠

$a_{23}=a+22d=41$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $d=2$

$\therefore a_n=-3+(n-1)\cdot2=2n-5$ 답 $a_n=2n-5$

0941 주어진 등차수열의 공차를 d라 하면 제40항이 28이므로

$15+39d=28$ $\therefore d=\frac{1}{3}$ 답 ①

0942 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 제10항이 5이므로

$a+9\cdot(-2)=5$ $\therefore a=23$

따라서 $a_n=23+(n-1)\cdot(-2)=-2n+25$이므로

$b_n=a_{2n}=-2\cdot2n+25$

$=-4n+25$ 답 $b_n=-4n+25$

0943 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2+a_6=0$이므로 $(a+d)+(a+5d)=0$

$\therefore a+3d=0$ …… ㉠

또 $a_8=12$이므로 $a+7d=12$ …… ㉡ ⋯➊

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-9$, $d=3$ ⋯➋

$\therefore a_n=-9+(n-1)\cdot3=3n-12$ ⋯➌

답 $a_n=3n-12$

채점 기준	비율
➊ a, d에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	40 %
➋ a, d의 값을 구할 수 있다.	30 %
➌ a_n을 구할 수 있다.	30 %

0944 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5=2$에서 $a+4d=2$ …… ㉠

$a_3+a_8=1$에서 $(a+2d)+(a+7d)=1$

$\therefore 2a+9d=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=14$, $d=-3$

$\therefore a_n=14+(n-1)\cdot(-3)$

$=-3n+17$

-46을 제k항이라 하면

$-3k+17=-46$, $3k=63$

$\therefore k=21$

따라서 -46은 제21항이다. 답 ⑤

0945 첫째항이 23, 공차가 $20-23=-3$이므로 주어진 등차수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=23+(n-1)\cdot(-3)=-3n+26$

-28을 제k항이라 하면

$-3k+26=-28$, $3k=54$ $\therefore k=18$

따라서 -28은 제18항이다. 답 ③

0946 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5=\log2$에서 $a+4d=\log2$ …… ㉠

$a_8=\log16$에서 $a+7d=\log16$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\log8$, $d=\log2$

$\therefore a_n=-\log8+(n-1)\cdot\log2$

$=n\log2-(\log2+\log8)$

$=n\log2-\log16$

$\therefore a_{13}=13\log2-\log16$

$=13\log2-4\log2$

$=9\log2=\log512$ 답 ④

0947 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_4=3$에서 $a+3d=3$ …… ㉠

$a_5:a_{10}=1:3$에서 $3a_5=a_{10}$이므로 $3(a+4d)=a+9d$

$\therefore 2a+3d=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $d=2$

$\therefore a_n=-3+(n-1)\cdot2=2n-5$

$\therefore a_{20}=2\cdot20-5=35$ 답 35

0948 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공차가 $3-4=-1$인 등차수열이므로

$a_n=4+(n-1)\cdot(-1)=-n+5$

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 -25, 공차가 $-21-(-25)=4$인 등차수열이므로

$b_n=-25+(n-1)\cdot4=4n-29$

$a_k+b_k=0$에서 $(-k+5)+(4k-29)=0$

$3k-24=0$ $\therefore k=8$ 답 ②

다른풀이 $a_1+b_1=4-25=-21$, $a_2+b_2=3-21=-18$, $a_3+b_3=2-17=-15$, ⋯이므로 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 -21, 공차가 $-18-(-21)=3$인 등차수열이다.

$\therefore a_n+b_n=-21+(n-1)\cdot3=3n-24$

$a_k+b_k=0$에서 $3k-24=0$ $\therefore k=8$

0949 주어진 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라 하고, 일반항을 a_n이라 하면

$a_5=-17$에서 $a+4d=-17$ …… ㉠

$a_{17}=7$에서 $a+16d=7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-25$, $d=2$

$\therefore a_n=-25+(n-1)\cdot2=2n-27$

$2n-27>0$에서 $2n>27$

$\therefore n>13.5$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제14항이다. 답 ④

0950 $a_n=50+(n-1)\cdot(-4)=-4n+54$ ⋯➊

$-4n+54<10$에서 $4n>44$

$\therefore n>11$ ⋯ ❷

따라서 처음으로 10보다 작아지는 항은 제12항이다. ⋯ ❸

답 제12항

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ n의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 처음으로 10보다 작아지는 항이 제몇 항인지 구할 수 있다.	20 %

0951 $a_n=-16+(n-1)\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{2}n-\frac{37}{2}$

$\frac{5}{2}n-\frac{37}{2}<0$에서 $5n<37$

$\therefore n<\frac{37}{5}=7.4$

이때 $a_7=\frac{5}{2}\cdot7-\frac{37}{2}=-1$, $a_8=\frac{5}{2}\cdot8-\frac{37}{2}=\frac{3}{2}$이므로

$|a_7|=1$, $|a_8|=\frac{3}{2}$

따라서 $|a_n|$의 최솟값은 1이다. 답 ③

0952 주어진 등차수열의 공차를 d라 하면 첫째항이 1, 제19항이 55이므로

$1+18d=55$ $\therefore d=3$

이때 a_5는 주어진 수열의 제6항이므로

$a_5=1+(6-1)\cdot3=16$ 답 16

0953 첫째항이 -5, 공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열의 제$(n+2)$항이 27이므로 $-5+(n+1)\cdot\frac{1}{2}=27$

$\frac{1}{2}(n+1)=32$, $n+1=64$

$\therefore n=63$ 답 63

0954 주어진 등차수열의 공차를 d라 하면 첫째항이 17, 제$(n+2)$항이 53이므로

$17+(n+1)d=53$, $(n+1)d=36$

$\therefore n+1=\frac{36}{d}$

이때 n은 자연수이므로 d는 36을 제외한 36의 양의 약수이어야 한다.

따라서 공차가 될 수 없는 것은 ④이다. 답 ④

0955 세 수 6, a^2+4a, $4a$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(a^2+4a)=6+4a$, $2a^2+4a-6=0$

$a^2+2a-3=0$, $(a+3)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$) 답 ③

0956 세 수 8, a, 16이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a=\frac{8+16}{2}=12$

세 수 12, 9, b도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$9=\frac{12+b}{2}$ $\therefore b=6$

$\therefore a-b=6$ 답 6

0957 세 수 $3-2\sqrt{3}$, b, 1이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$b=\frac{3-2\sqrt{3}+1}{2}=2-\sqrt{3}$ ⋯ ❶

세 수 a, $3-2\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(3-2\sqrt{3})=a+2-\sqrt{3}$

$\therefore a=6-4\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})$

$=4-3\sqrt{3}$ ⋯ ❷

$\therefore ab=(4-3\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=17-10\sqrt{3}$ ⋯ ❸

답 $17-10\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0958 다섯 개의 수 2, a, b, c, 18이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 세 수 2, b, 18도 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

$\therefore b=\frac{2+18}{2}=10$

또 a, 10, c가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a+c=2\cdot10=20$

$\therefore a+b+c=30$ 답 ③

0959 α, β가 이차방정식 $x^2-6x-5=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=-5$

이때 a는 α, β의 등차중항이므로

$a=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{6}{2}=3$

또 b는 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$의 등차중항이므로

$b=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}=\frac{6}{2\cdot(-5)}=-\frac{3}{5}$

$\therefore a+b=\frac{12}{5}$ 답 $\frac{12}{5}$

0960 (1) $f(1)=a\cdot1^2-2\cdot1+1=a-1$,

$f(2)=a\cdot2^2-2\cdot2+1=4a-3$,

$f(4)=a\cdot4^2-2\cdot4+1=16a-7$ ⋯ ❶

(2) 세 수 $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, 즉 $a-1$, $4a-3$, $16a-7$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(4a-3)=(a-1)+(16a-7)$ ⋯ ❷

$8a-6=17a-8$, $9a=2$ $\therefore a=\frac{2}{9}$ ⋯ ❸

답 (1) $f(1)=a-1$, $f(2)=4a-3$, $f(4)=16a-7$ (2) $\frac{2}{9}$

채점 기준	비율
❶ $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ a에 대한 방정식을 세울 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

라쎈 특강 **나머지정리**

다항식 $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$R=P(a)$

0961 세 수를 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면

$(a-d)+a+(a+d)=12$ …… ㉠

$(a-d)\cdot a\cdot(a+d)=28$ …… ㉡

㉠에서 $3a=12$ $\therefore a=4$

$a=4$를 ㉡에 대입하면

$(4-d)\cdot 4\cdot(4+d)=28$, $16-d^2=7$

$d^2=9$ $\therefore d=\pm3$

따라서 세 수는 1, 4, 7이므로 세 수의 제곱의 합은

$1^2+4^2+7^2=66$ 답 ④

0962 네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$로 놓으면

$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=32$ … ㉠

$(a-3d)(a+3d)=55$ … ㉡ ··· ❶

㉠에서 $4a=32$ $\therefore a=8$

$a=8$을 ㉡에 대입하면

$(8-3d)(8+3d)=55$, $64-9d^2=55$

$d^2=1$ $\therefore d=\pm1$ ··· ❷

따라서 네 수는 5, 7, 9, 11이므로 네 수 중에서 가장 작은 수는 5이다. ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 네 수를 a, d로 나타내고 a, d에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a, d의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 가장 작은 수를 구할 수 있다.	20 %

0963 삼차방정식의 세 실근을 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 합은

$(a-d)+a+(a+d)=3$

$3a=3$ $\therefore a=1$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 1이므로 방정식에 $x=1$을 대입하면

$1^3-3\cdot1^2+k\cdot1+8=0$

$\therefore k=-6$ 답 ②

참고 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 곱은

$a(a-d)(a+d)=-8$

이므로 이 식에 $a=1$을 대입하면 $d=\pm3$

따라서 세 근은 -2, 1, 4이다.

라쎈 특강 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

0964 조건 (가)에서 직각삼각형의 세 변의 길이를 $a-d$, a, $a+d\,(a>d>0)$로 놓으면 삼각형의 가장 긴 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하므로

$(a-d)+a>a+d$ $\therefore a>2d$

피타고라스 정리에 의하여

$(a+d)^2=(a-d)^2+a^2$, $a(a-4d)=0$

$\therefore a=4d$ ($\because a\neq0$) …… ㉠

조건 (나)에서 $\frac{1}{2}a(a-d)=96$

$\therefore a^2-ad=192$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$16d^2-4d^2=192$, $d^2=16$

$\therefore d=4$ ($\because d>0$)

따라서 $d=4$를 ㉠에 대입하면 $a=16$이므로 직각삼각형의 빗변의 길이는

$a+d=16+4=20$ 답 ③

0965 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=5$에서 $a+d=5$ …… ㉠

$a_6=29$에서 $a+5d=29$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $d=6$

$\therefore S_{10}=\dfrac{10\{2\cdot(-1)+(10-1)\cdot6\}}{2}=260$ 답 260

0966 첫째항이 42, 제m항이 -15인 등차수열의 첫째항부터 제m항까지의 합이 270이므로

$\dfrac{m\{42+(-15)\}}{2}=270$ $\therefore m=20$

따라서 $a_{20}=-15$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$42+19d=-15$ $\therefore d=-3$ 답 ④

0967 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 19, 공차가 -4이므로

$S_n=\dfrac{n\{2\cdot19+(n-1)\cdot(-4)\}}{2}=-2n^2+21n$ ··· ❶

$S_n<0$에서 $-2n^2+21n<0$, $n(2n-21)>0$

$\therefore n>\dfrac{21}{2}=10.5$ ($\because n$은 자연수) ··· ❷

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 11이다. ··· ❸

답 11

채점 기준	비율
❶ S_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ n의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 자연수 n의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0968 연속하는 20개의 자연수 중에서 가장 작은 수를 a라 하면

a, $a+1$, $a+2$, $\cdots$, $a+19$

이 20개의 자연수의 합이 430이므로

$\dfrac{20(a+a+19)}{2}=430$, $2a+19=43$

$2a=24$ $\therefore a=12$

따라서 구하는 가장 큰 수는 $12+19=31$ 답 31

0969 첫째항이 3, 끝항이 42, 항수가 $n+2$인 등차수열의 합이 540이므로

$\dfrac{(n+2)(3+42)}{2}=540$, $n+2=24$

$\therefore n=22$ 답 ③

0970 첫째항이 -7, 끝항이 37, 항수가 20인 등차수열의 합은

$$\frac{20(-7+37)}{2}=300$$

따라서 $-7+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{18}+37=300$이므로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{18}=300-(-7+37)$$
$$=270$$

답 270

0971 $12+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+(-28)=12-136-28=-152$
즉 첫째항이 12, 끝항이 -28, 항수가 $n+2$인 등차수열의 합이 -152이므로

$$\frac{(n+2)(12-28)}{2}=-152, \qquad n+2=19$$

$\therefore n=17$

답 ④

0972 주어진 등차수열의 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_5=55$에서 $\frac{5(2\cdot3+4d)}{2}=55$

$3+2d=11 \qquad \therefore d=4$

$\therefore S_{15}=\frac{15(2\cdot3+14\cdot4)}{2}=465$

답 465

0973 (1) 주어진 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_{10}=25$에서 $\frac{10(2a+9d)}{2}=25$

$\therefore 2a+9d=5$ …… ㉠

$S_{20}=150$에서 $\frac{20(2a+19d)}{2}=150$

$\therefore 2a+19d=15$ …… ㉡ ··· ❶

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2,\ d=1$ ··· ❷

(2) $S_{30}=\frac{30\{2\cdot(-2)+29\cdot1\}}{2}=375$ ··· ❸

답 (1) 첫째항: -2, 공차: 1 (2) 375

채점 기준	비율
❶ a, d에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a, d의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ S_{30}을 구할 수 있다.	30 %

0974 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_4=32,\ S_8=32+128=160$

$S_4=32$에서 $\frac{4(2a+3d)}{2}=32$

$\therefore 2a+3d=16$ …… ㉠

$S_8=160$에서 $\frac{8(2a+7d)}{2}=160$

$\therefore 2a+7d=40$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ d=6$

$\therefore S_{20}=\frac{20\{2\cdot(-1)+19\cdot6\}}{2}=1120$

답 1120

0975 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_4=8$에서 $\frac{4(2a+3d)}{2}=8$

$\therefore 2a+3d=4$ …… ㉠

$S_{20}=-280$에서 $\frac{20(2a+19d)}{2}=-280$

$\therefore 2a+19d=-28$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5,\ d=-2$

$$\therefore a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}=S_{20}-S_{10}$$
$$=-280-\frac{10\{2\cdot5+9\cdot(-2)\}}{2}$$
$$=-240$$

답 ②

0976 주어진 등차수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=-30+(n-1)\cdot4=4n-34$

$4n-34>0$에서 $n>\frac{34}{4}=8.5$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제9항부터 양수이므로 첫째항부터 제8항까지의 합이 최소이다.
이때 $a_8=4\cdot8-34=-2$이므로 구하는 최솟값은

$S_8=\frac{8\{-30+(-2)\}}{2}=-128$

답 -128

다른풀이 $S_n=\frac{n\{2\cdot(-30)+(n-1)\cdot4\}}{2}$

$=2n^2-32n=2(n-8)^2-128$

따라서 S_n은 $n=8$일 때 최솟값 -128을 갖는다.

0977 주어진 등차수열의 공차를 d라 하고 일반항을 a_n이라 하면 첫째항이 -17, 제3항이 -11이므로

$-17+2d=-11 \qquad \therefore d=3$

$\therefore a_n=-17+(n-1)\cdot3=3n-20$

$3n-20>0$에서 $n>\frac{20}{3}=6.66\cdots$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제7항부터 양수이므로 첫째항부터 제6항까지의 합이 최소이다.

$\therefore n=6$

답 6

0978 주어진 등차수열의 공차를 d라 하고 일반항을 a_n이라 하면 첫째항부터 제5항까지의 합이 75이므로

$\frac{5(2\cdot19+4d)}{2}=75, \qquad 19+2d=15$

$\therefore d=-2$

$\therefore a_n=19+(n-1)\cdot(-2)=-2n+21$ ··· ❶

$-2n+21<0$에서 $-2n<-21 \qquad \therefore n>10.5$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제11항부터 음수이므로 첫째항부터 제10항까지의 합이 최대이다.
따라서 최댓값은

$\frac{10\{2\cdot19+9\cdot(-2)\}}{2}=100$

이므로 $p=10,\ q=100$ ··· ❷

$\therefore p+q=110$ ··· ❸

답 110

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ p, q의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0979 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_2 : a_6=5 : 2$에서 $2a_2=5a_6$이므로 $2(a+d)=5(a+5d)$

$3a=-23d \quad \therefore a=-\frac{23}{3}d$

$\therefore a_n=-\frac{23}{3}d+(n-1)d$

$=nd-\frac{26}{3}d$

이때 $a>0$이므로 $d<0$

$nd-\frac{26}{3}d<0$에서 $nd<\frac{26}{3}d$

$\therefore n>\frac{26}{3}=8.66\cdots$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제9항부터 음수이므로 첫째항부터 제8항까지의 합이 최대이다.

$\therefore n=8$

답 ②

0980 30 이하의 자연수 중에서 2로 나누었을 때의 나머지가 1인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

1, 3, 5, …, 29

이때 $29=1+2\cdot14$에서 구하는 값은 첫째항이 1, 끝항이 29, 항수가 15인 등차수열의 합이므로

$\frac{15(1+29)}{2}=225$

답 ⑤

0981 20보다 크고 80보다 작은 자연수 중에서 3의 배수는

21, 24, 27, …, 78 …… ㉠

이때 $78=21+3\cdot19$이므로 ㉠은 첫째항이 21, 끝항이 78, 항수가 20인 등차수열이다.

즉 그 합은 $\frac{20(21+78)}{2}=990$

20보다 크고 80보다 작은 자연수 중에서 5의 배수는

25, 30, 35, …, 75 …… ㉡

이때 $75=25+5\cdot10$이므로 ㉡은 첫째항이 25, 끝항이 75, 항수가 11인 등차수열이다.

즉 그 합은 $\frac{11(25+75)}{2}=550$

한편 20보다 크고 80보다 작은 자연수 중에서 15의 배수는

30, 45, 60, 75

이므로 이 네 수의 합은

$30+45+60+75=210$

따라서 20보다 크고 80보다 작은 자연수 중에서 3 또는 5로 나누어 떨어지는 수의 총합은

$990+550-210=1330$

답 ④

0982 4로 나누었을 때의 나머지가 3인 자연수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

3, 7, 11, 15, 19, 23, … …… ㉠

6으로 나누었을 때의 나머지가 5인 자연수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

5, 11, 17, 23, 29, 35, … …… ㉡

㉠, ㉡에서 공통인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

11, 23, 35, …

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 11, 공차가 $\underbrace{12}_{\text{4와 6의 최소공배수}}$인 등차수열이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\frac{10(2\cdot11+9\cdot12)}{2}$

$=650$

답 650

0983 $S_n=2n^2+5n$에서

$a_1=S_1=2\cdot1^2+5\cdot1=7$

$a_7=S_7-S_6=(2\cdot7^2+5\cdot7)-(2\cdot6^2+5\cdot6)=31$

$\therefore a_1+a_7=7+31=38$

답 ①

다른풀이 $S_n=2n^2+5n$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2\cdot1^2+5\cdot1=7$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2+5n-\{2(n-1)^2+5(n-1)\}$

$=4n+3$ …… ㉠

이때 $a_1=7$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4n+3$

$\therefore a_1+a_7=7+(4\cdot7+3)=38$

0984 $S_n=-n^2+7n$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=-1^2+7\cdot1=6$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=-n^2+7n-\{-(n-1)^2+7(n-1)\}$

$=-2n+8$ …… ㉠

이때 $a_1=6$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=-2n+8$ ⋯ ❶

$-2n+8>0$에서 $2n<8 \quad \therefore n<4$

즉 $a_n>0$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값이 3이므로 첫째항부터 제3항까지 양수이다. ⋯ ❷

따라서 구하는 합은

$S_3=-3^2+7\cdot3=12$ ⋯ ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ 양수인 항을 알 수 있다.	40 %
❸ 양수인 항의 총합을 구할 수 있다.	20 %

0985 $S_n=3n^2-n$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=3\cdot1^2-1=2$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=3n^2-n-\{3(n-1)^2-(n-1)\}$

$=6n-4$ …… ㉠

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=6n-4$

$5 \le a_n \le 30$에서 $\quad 5 \le 6n-4 \le 30, \quad 9 \le 6n \le 34$

$\therefore \frac{3}{2} \le n \le \frac{17}{3}$

따라서 자연수 n은 2, 3, 4, 5의 4개이다. 답 ②

0986 $S_n=n^2-4n$, $T_n=n^2+kn+3$이라 하면

$a_5=S_5-S_4=(5^2-4\cdot5)-(4^2-4\cdot4)=5$

$b_5=T_5-T_4=(5^2+5k+3)-(4^2+4k+3)=9+k$

이때 $a_5=b_5$이므로 $\quad 5=9+k$

$\therefore k=-4$ 답 ①

0987 $S_5=110$에서 $\quad a\cdot5^2+2\cdot5=110$

$25a=100 \quad \therefore a=4$ ➊

따라서 $S_n=4n^2+2n$에서

(ⅰ) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=4\cdot1^2+2\cdot1=6$

(ⅱ) $n \ge 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=4n^2+2n-\{4(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=8n-2$ ······ ㉠

이때 $a_1=6$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=8n-2$ ➋

답 $a_n=8n-2$

채점 기준	비율
➊ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
➋ a_n을 구할 수 있다.	70 %

0988 $S_n=n^2-2n+k$에서

(ⅰ) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2-2\cdot1+k=k-1$

(ⅱ) $n \ge 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-2n+k-\{(n-1)^2-2(n-1)+k\}$

$=2n-3$ ······ ㉠

이때 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등차수열을 이루려면 $a_1=k-1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같아야 하므로

$k-1=-1 \quad \therefore k=0$ 답 0

0989 $S_n=an^2-5n+b$에서

$a_1=S_1=a\cdot1^2-5\cdot1+b=1$

$\therefore a+b=6$ ······ ㉠

또 $a_6=S_6-S_5=17$에서

$(a\cdot6^2-5\cdot6+b)-(a\cdot5^2-5\cdot5+b)=17$

$11a-5=17 \quad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=4$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{4}{2}=2$ 답 2

참고 $a_1=1$이고 $S_n=2n^2-5n+4$에서 $n \ge 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2-5n+4-\{2(n-1)^2-5(n-1)+4\}$

$=4n-7$

이므로 수열 $\{a_n\}$은

1, 1, 5, 9, 13, ⋯

즉 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 등차수열을 이룬다.

0990 전략 주어진 항을 이용하여 등차수열의 첫째항과 공차에 대한 연립방정식을 세운다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=18$에서 $\quad a+d=18$ ······ ㉠

$a_6=10$에서 $\quad a+5d=10$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=20,\ d=-2$

$\therefore a_n=20+(n-1)\cdot(-2)=-2n+22$

따라서 $p=-2$, $q=22$이므로

$pq=-44$ 답 -44

0991 전략 첫째항과 공차를 모두 a로 놓고 주어진 식을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 모두 a라 하면

$a_n=a+(n-1)a=an$

$a_2+a_4=24$에서 $\quad 2a+4a=24$

$6a=24 \quad \therefore a=4$

따라서 $a_n=4n$이므로 $\quad a_5=4\cdot5=20$ 답 20

0992 전략 세 수 p, q, r가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $q=\frac{p+r}{2}$임을 이용한다.

풀이 세 수 -3, a, 7이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a=\frac{-3+7}{2}=2$

세 수 4, 10, b^2도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$10=\frac{4+b^2}{2}, \quad b^2=16$

$\therefore b=4\ (\because b>0)$ 답 ①

0993 전략 주어진 합을 이용하여 일반항을 구한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_{10}=110$에서 $\quad \frac{10(2\cdot2+9d)}{2}=110$

$4+9d=22 \quad \therefore d=2$

따라서 $a_n=2+(n-1)\cdot2=2n$이므로

$a_{20}=2\cdot20=40$ 답 ③

0994 전략 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}\ (n \ge 2)$임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

풀이 $S_n=2n^2-n$에서

(ⅰ) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2\cdot1^2-1=1$

(ⅱ) $n \ge 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-n-\{2(n-1)^2-(n-1)\}$

$=4n-3$ ······ ㉠

이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4n-3$

따라서 $a_k=17$에서 $\quad 4k-3=17$

$\therefore k=5$ 답 5

0995 전략 일반항에 n 대신 $3n$ 또는 $n-1$을 대입하거나 반례를 찾아 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ㄱ. $a_n=3n$에 n 대신 $3n$을 대입하면

$a_{3n}=3\cdot3n=9n$

ㄴ. $n+1=k$로 놓으면 $n=k-1$이므로 $a_{n+1}=3n-2$에서

$a_k=3(k-1)-2=3k-5$

$\therefore a_n=3n-5\ (n\ge2)$

ㄷ. [반례] 수열 $\{a_n\}$이 0, 4, 0, 16, 0, 36, …이면 $a_{2n}=4n^2$이지만 $a_n\ne n^2$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0996 전략 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항을 각각 구한 후 수열 $\{-2a_n+4b_n\}$의 일반항을 구한다.

풀이 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항을 각각 a, b라 하면

$a_n=a+(n-1)\cdot1=n+a-1$

$b_n=b+(n-1)\cdot(-3)=-3n+b+3$ ··· ❶

$\therefore -2a_n+4b_n=-2(n+a-1)+4(-3n+b+3)$

$=-14n-2a+4b+14$

$=-2a+4b+(n-1)\cdot(-14)$ ··· ❷

따라서 구하는 수열의 공차는 -14이다. ··· ❸

답 -14

채점 기준	비율
❶ a_n, b_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ $-2a_n+4b_n$을 구할 수 있다.	40 %
❸ 공차를 구할 수 있다.	20 %

0997 전략 a_1, a_2, a_3, a_4를 각각 구한 후 지수법칙을 이용한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_1=a,\ a_2=a+2,\ a_3=a+2\cdot2=a+4,\ a_4=a+3\cdot2=a+6$

$\therefore k=\dfrac{3^{a_2}+3^{a_4}}{3^{a_1}+3^{a_3}}$

$=\dfrac{3^{a+2}+3^{a+6}}{3^a+3^{a+4}}=\dfrac{3^{a+2}(1+3^4)}{3^a(1+3^4)}$

$=3^2=9$

$\therefore \log_3 k=\log_3 9=2$ 답 2

0998 전략 주어진 항을 이용하여 등차수열의 첫째항과 공차를 구한 후 일반항 a_n을 구한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5=26$에서 $a+4d=26$ …… ㉠

$a_{10}=16$에서 $a+9d=16$ …… ㉡ ··· ❶

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=34$, $d=-2$

$\therefore a_n=34+(n-1)\cdot(-2)=-2n+36$ ··· ❷

$-2n+36<0$에서 $2n>36$

$\therefore n>18$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제19항이다. ··· ❸

답 제19항

채점 기준	비율
❶ a, d에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a_n을 구할 수 있다.	30 %
❸ 처음으로 음수가 되는 항이 제몇 항인지 구할 수 있다.	30 %

0999 전략 b가 a와 -10의 등차중항임을 이용한다.

풀이 세 수 a, b, -10이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$b=\dfrac{a-10}{2}\quad \therefore a-2b=10$ …… ㉠

$x=2$가 이차방정식 $ax^2+bx-10=0$의 한 근이므로

$4a+2b-10=0\quad \therefore 2a+b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-3$

즉 주어진 이차방정식이 $4x^2-3x-10=0$이므로

$(4x+5)(x-2)=0$

$\therefore x=-\dfrac{5}{4}$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 다른 한 근은 $-\dfrac{5}{4}$이다. 답 $-\dfrac{5}{4}$

다른풀이 주어진 이차방정식이 $4x^2-3x-10=0$이고 다른 한 근을 α라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+\alpha=\dfrac{3}{4}\quad \therefore \alpha=-\dfrac{5}{4}$

1000 전략 a_7이 a_6과 a_8의 등차중항임을 이용한다.

풀이 a_7은 a_6과 a_8의 등차중항이므로 조건 (가)에서

$a_6+a_8=2a_7=0\quad \therefore a_7=0$

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $d>0$이므로 7보다 작은 자연수 n에 대하여 $a_n<0$이다.

따라서 조건 (나)에서

$-a_6=0+3\quad \therefore a_6=-3$

즉 $d=a_7-a_6=3$이므로

$a_2=a_7-5d=0-5\cdot3=-15$ 답 ①

다른풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 $d\ (d>0)$라 하면 조건 (가)에서

$(a+5d)+(a+7d)=0$

$2a+12d=0\quad \therefore a=-6d$ …… ㉠

조건 (나)에서

$|a+5d|=|a+6d|+3$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$|-d|=3\quad \therefore d=3\ (\because d>0)$

이것을 ㉠에 대입하면 $a=-18$

$\therefore a_2=-18+3=-15$

1001 전략 등차수열을 이루는 세 모서리의 길이를 $a-d$, a, $a+d$로 놓고 식을 세운다.

풀이 직육면체의 세 모서리의 길이를 $a-d$, a, $a+d\ (a>d\ge0)$로 놓으면 모든 모서리의 길이의 합이 36이므로

$4\{(a-d)+a+(a+d)\}=36$

$12a=36\quad \therefore a=3$

또 직육면체의 부피가 15이므로

$(3-d)\cdot3\cdot(3+d)=15$

$9-d^2=5,\quad d^2=4$

$\therefore d=2\ (\because d\ge0)$

따라서 직육면체의 세 모서리의 길이는 1, 3, 5이므로 구하는 겉넓이는

$2(1\cdot3+1\cdot5+3\cdot5)=46$ 답 ④

1002 전략 주어진 식을 d에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $a_8-a_6=2d$,
$S_8-S_6=a_8+a_7=(6+7d)+(6+6d)=12+13d$이므로
$\frac{a_8-a_6}{S_8-S_6}=2$에서 $\frac{2d}{12+13d}=2$
$d=12+13d$ $\therefore d=-1$

답 ①

1003 전략 두 수 사이에 n개의 수를 넣어서 만든 수열의 항수는 $n+2$임을 이용한다.

풀이 첫째항이 10, 끝항이 30, 항수가 $n+2$인 등차수열의 합이 420이므로
$\frac{(n+2)(10+30)}{2}=420$, $n+2=21$
$\therefore n=19$ ··· ❶
이 수열의 공차를 d라 하면 제21항이 30이므로
$10+20d=30$, $20d=20$ $\therefore d=1$ ··· ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ n의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ 공차를 구할 수 있다.	40 %

1004 전략 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은 $\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$임을 이용한다.

풀이 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d, d'이라 하면
$a_1+b_1=-7$, $d+d'=3$
$\therefore (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15})+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{15})$
$=\frac{15(2a_1+14d)}{2}+\frac{15(2b_1+14d')}{2}$
$=\frac{15\{2(a_1+b_1)+14(d+d')\}}{2}$
$=\frac{15\{2\cdot(-7)+14\cdot3\}}{2}=210$

답 ④

다른풀이 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 -7, 공차가 3인 등차수열이므로
(주어진 식)$=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_{15}+b_{15})$
$=\frac{15\{2\cdot(-7)+14\cdot3\}}{2}=210$

1005 전략 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때 $a_k>0$, $a_{k+1}<0$이면 S_n의 최댓값은 S_k임을 이용한다.

풀이 주어진 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 일반항을 a_n이라 하면
$S_5=130$에서 $\frac{5(2a+4d)}{2}=130$
$\therefore a+2d=26$ ······ ㉠
$S_{15}=165$에서 $\frac{15(2a+14d)}{2}=165$
$\therefore a+7d=11$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=32$, $d=-3$
$\therefore a_n=32+(n-1)\cdot(-3)=-3n+35$
$3n+35<0$에서 $3n>35$ $\therefore n>\frac{35}{3}=11.66\cdots$
따라서 수열 $\{a_n\}$은 제12항부터 음수이므로 첫째항부터 제11항까지의 합이 최대이다.
$\therefore n=11$

답 11

1006 전략 12와 52 사이에 있는 5의 배수를 작은 것부터 차례대로 나열한 수열의 항수를 구한다.

풀이 12와 52 사이에 있는 5의 배수를 작은 것부터 차례대로 나열하면
15, 20, 25, ⋯, 50
이때 $50=15+5\cdot7$에서 구하는 값은 첫째항이 15, 끝항이 50, 항수가 8인 등차수열의 합이므로
$\frac{8(15+50)}{2}=260$

답 ②

1007 전략 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\ge2)$임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

풀이 $S_n=n^2-2n$에서
(i) $n=1$일 때,
$a_1=S_1=1^2-2\cdot1=-1$
(ii) $n\ge2$일 때,
$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-2n-\{(n-1)^2-2(n-1)\}$
$=2n-3$ ······ ㉠
이때 $a_1=-1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로
$a_n=2n-3$ ··· ❶
따라서 $a_1=-1$, $a_3=3$, $a_5=7$, ⋯, $a_{19}=35$이므로
$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}$는 첫째항이 -1, 끝항이 35, 항수가 10인 등차수열의 합과 같다.
$\therefore a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}=\frac{10(-1+35)}{2}$
$=170$ ··· ❷

답 170

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	60 %
❷ $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

1008 전략 주어진 조건을 이용하여 등차수열의 첫째항에 대한 식을 세운다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면
$a_n=a+(n-1)\cdot4$
$|a_3-2|=|a_4-2|$에서
$|a+2\cdot4-2|=|a+3\cdot4-2|$
$|a+6|=|a+10|$
이때 $a+6\neq a+10$이므로
$a+6=-(a+10)$, $2a=-16$
$\therefore a=-8$
따라서 $a_n=-8+(n-1)\cdot4=4n-12$이므로
$a_6=4\cdot6-12=12$

답 12

1009 전략 주어진 수열을 $\{a_n\}$이라 하면 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$이 등차수열임을 이용한다.

풀이 수열 10, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, 2가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d라 하면

$10+4d=2, \quad 4d=-8$

$\therefore d=-2$ ⋯ ❶

따라서 $\frac{1}{x}=10-2=8$, $\frac{1}{y}=8-2=6$, $\frac{1}{z}=6-2=4$이므로

$x=\frac{1}{8}, y=\frac{1}{6}, z=\frac{1}{4}$ ⋯ ❷

$\therefore \frac{yz}{x}=\frac{1}{x}\cdot y\cdot z=8\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$ ⋯ ❸

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ 공차를 구할 수 있다.	50 %
❷ x, y, z의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\frac{yz}{x}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른풀이 수열 10, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, 2가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 수열 10, $\frac{1}{y}$, 2도 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

즉 $\frac{1}{y}=\frac{10+2}{2}=6$이므로 $\quad y=\frac{1}{6}$

수열 10, $\frac{1}{x}$, 6이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\frac{1}{x}=\frac{10+6}{2}=8 \quad \therefore x=\frac{1}{8}$

또 수열 6, $\frac{1}{z}$, 2가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\frac{1}{z}=\frac{6+2}{2}=4 \quad \therefore z=\frac{1}{4}$

$\therefore \frac{yz}{x}=\frac{1}{3}$

1010 전략 n각형의 내각의 크기의 합은 $180°(n-2)$임을 이용한다.

풀이 n각형의 내각의 크기의 합은

$180°(n-2)=180°n-360°$

첫째항이 30, 공차가 40, 항수가 n인 등차수열의 합은

$\frac{n\{2\cdot30+(n-1)\cdot40\}}{2}=20n^2+10n$

따라서 $20n^2+10n=180n-360$이므로

$2n^2-17n+36=0, \quad (n-4)(2n-9)=0$

$\therefore n=4$ 또는 $n=\frac{9}{2}$

이때 n은 자연수이므로 $\quad n=4$

답 4

1011 전략 먼저 a_m, a_{m+k}를 구한 후 등차수열의 합의 공식을 이용한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=30-(n-1)d$

이므로

$a_m=30-(m-1)d$, $a_{m+k}=30-(m+k-1)d$

즉 $a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{m+k}$는 첫째항이 $30-(m-1)d$, 끝항이 $30-(m+k-1)d$, 항수가 $k+1$인 등차수열의 합이므로

$\frac{(k+1)\{30-(m-1)d+30-(m+k-1)d\}}{2}=0$

$\frac{(k+1)\{60-(2m+k-2)d\}}{2}=0$

이때 $k+1>0$이므로 $\quad 60-(2m+k-2)d=0$

$(2m+k-2)d=60$

$\therefore 2m+k=2+\frac{60}{d}$

따라서 위의 식을 만족시키는 두 자연수 m, k가 존재하려면 d가 60의 양의 약수이어야 한다.

$60=2^2\cdot3\cdot5$이므로 자연수 d의 개수는

$3\cdot2\cdot2=12$

답 ②

라쎈 특강 **자연수의 약수의 개수**

자연수 $N=a^\alpha b^\beta c^\gamma$의 양의 약수의 개수는

$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$ (단, a, b, c는 서로 다른 소수)

1012 전략 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구한 후 처음으로 음수가 되는 항을 구한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_9=25+8d=9, \quad 8d=-16 \quad \therefore d=-2$

$\therefore a_n=25+(n-1)\cdot(-2)=-2n+27$

$-2n+27<0$에서 $\quad n>\frac{27}{2}=13.5$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제13항까지 양수이고, 제14항부터 음수이다.

이때 $a_{13}=1$, $a_{14}=-1$, $a_{20}=-13$이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}|$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{13})-(a_{14}+a_{15}+a_{16}+\cdots+a_{20})$

$=\frac{13(25+1)}{2}-\frac{7\{-1+(-13)\}}{2}$

$=169+49=218$

답 218

1013 전략 등차수열의 합의 공식을 이용하여 일반항을 구한 후 처음으로 양수가 되는 항을 구한다.

풀이 주어진 등차수열의 공차를 d, 일반항을 a_n이라 하면

$S_2=\frac{2\{2\cdot(-1)+d\}}{2}=d-2$

$S_7=\frac{7\{2\cdot(-1)+6d\}}{2}=21d-7$

이때 $S_2=S_7$에서 $\quad d-2=21d-7$

$20d=5 \quad \therefore d=\frac{1}{4}$

$\therefore a_n=-1+(n-1)\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}n-\frac{5}{4}$

$\frac{1}{4}n-\frac{5}{4}>0$에서 $\quad n>5$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제6항부터 양수이므로 첫째항부터 제5항까지의 합이 최소이다.

이때 $a_5=\frac{1}{4}\cdot5-\frac{5}{4}=0$이므로 구하는 최솟값은

$S_5=\frac{5(-1+0)}{2}=-\frac{5}{2}$

답 ②

참고 $a_5=0$이므로 $S_4=S_5$이다. 따라서 S_4를 구해도 된다.

09 등비수열

Ⅲ. 수열

1014 $\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=\cdots=2$ 답 2

1015 $\frac{3}{6}=\frac{\frac{3}{2}}{3}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}}=\cdots=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

1016 $\frac{3}{1}=3$에서 공비가 3이므로 주어진 수열은
$1, 3, \boxed{9}, 27, 81, \cdots$ 답 9

1017 $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$에서 공비가 $\frac{1}{5}$이므로 주어진 수열은
$10, 2, \boxed{\frac{2}{5}}, \frac{2}{25}, \frac{2}{125}, \cdots$ 답 $\frac{2}{5}$

1018 $\frac{-54}{18}=-3$에서 공비가 -3이므로 주어진 수열은
$2, \boxed{-6}, 18, -54, 162, \cdots$ 답 -6

1019 $\frac{-1}{6}=-\frac{1}{6}$에서 공비가 $-\frac{1}{6}$이므로 주어진 수열은
$6, -1, \boxed{\frac{1}{6}}, -\frac{1}{36}, \frac{1}{216}, \cdots$ 답 $\frac{1}{6}$

1020 답 $a_n=-6\cdot 4^{n-1}$

1021 답 $a_n=4\cdot(-5)^{n-1}$

1022 첫째항이 1, 공비가 $\frac{-4}{1}=-4$이므로
$a_n=1\cdot(-4)^{n-1}=(-4)^{n-1}$ 답 $a_n=(-4)^{n-1}$

1023 첫째항이 1000, 공비가 $\frac{100}{1000}=\frac{1}{10}$이므로
$a_n=1000\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{10}\right)^{n-4}$ 답 $a_n=\left(\frac{1}{10}\right)^{n-4}$

1024 x는 1과 25의 등비중항이므로
$x^2=1\cdot 25=25 \quad \therefore x=\pm 5$ 답 -5 또는 5

1025 x는 7과 2의 등비중항이므로
$x^2=7\cdot 2=14 \quad \therefore x=\pm\sqrt{14}$
답 $-\sqrt{14}$ 또는 $\sqrt{14}$

1026 $\frac{3(2^8-1)}{2-1}=765$ 답 765

1027 $8\cdot(-1)=-8$ 답 -8

1028 첫째항이 8, 공비가 $\frac{16}{8}=2$이므로
$\frac{8(2^8-1)}{2-1}=2040$ 답 2040

1029 첫째항이 2, 공비가 $\frac{-2\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$이므로
$\frac{2\{1-(-\sqrt{2})^8\}}{1-(-\sqrt{2})}=\frac{-30}{1+\sqrt{2}}=30(1-\sqrt{2})$ 답 $30(1-\sqrt{2})$

1030 첫째항이 1, 공비가 $\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$이므로
$\frac{1\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{1}{256}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{255}{256}}{\frac{1}{2}}=\frac{255}{128}$ 답 $\frac{255}{128}$

1031 (1) 첫째항이 $\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}$, 공비가 $\frac{\frac{1}{3^3}}{\frac{1}{3^4}}=3$이므로
$a_n=\frac{1}{81}\cdot 3^{n-1}$
(2) $a_n=\frac{1}{81}\cdot 3^{n-1}$이므로
$a_k=\frac{1}{81}\cdot 3^{k-1}=3, \quad 3^{k-1}=3^5$
$k-1=5 \quad \therefore k=6$
(3) 첫째항이 $\frac{1}{81}$, 공비가 3인 등비수열의 첫째항부터 제6항까지의 합이므로
$\frac{\frac{1}{81}(3^6-1)}{3-1}=\frac{364}{81}$
답 (1) $a_n=\frac{1}{81}\cdot 3^{n-1}$ (2) 6 (3) $\frac{364}{81}$

1032 등비수열 2, 4, 8, …의 첫째항이 2, 공비가 $\frac{4}{2}=2$이므로 이 수열의 제k항을 256이라 하면
$2\cdot 2^{k-1}=256, \quad 2^k=2^8 \quad \therefore k=8$
따라서 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제8항까지의 합이므로
$2+4+8+\cdots+256=\frac{2(2^8-1)}{2-1}=510$ 답 510

1033 등비수열 12, -6, 3, …의 첫째항이 12, 공비가 $\frac{-6}{12}=-\frac{1}{2}$이므로 이 수열의 제$k$항을 $\frac{3}{16}$이라 하면
$12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{3}{16}, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{64}=\left(-\frac{1}{2}\right)^6$
$k-1=6 \quad \therefore k=7$
따라서 첫째항이 12, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제7항까지의 합이므로
$12-6+3-\cdots+\frac{3}{16}=\frac{12\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^7\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$
$=\frac{129}{16}$ 답 $\frac{129}{16}$

1034 (1) $a_1=S_1=2^2-2=2$
(2) $a_{10}=S_{10}-S_9=(2^{11}-2)-(2^{10}-2)=2^{10}(2-1)=1024$

(3) $n\ge2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^{n+1}-2)-(2^n-2)$$
$$=2^n(2-1)=2^n \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=2^n$$

답 (1) 2 (2) 1024 (3) $a_n=2^n$

1035 (i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=3^1-1=2$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^n-1)-(3^{n-1}-1)$$
$$=3^{n-1}(3-1)=2\cdot3^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=2\cdot3^{n-1}$$

답 $a_n=2\cdot3^{n-1}$

1036 (i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=5^1-1=4$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(5^n-1)-(5^{n-1}-1)$$
$$=5^{n-1}(5-1)=4\cdot5^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=4\cdot5^{n-1}$$

답 $a_n=4\cdot5^{n-1}$

1037 (1) a원을 연이율 3 %의 복리로 n년 동안 예금하면 n년 후의 원리합계는 $a\times(1+0.03)^n=a\times1.03^n$(원)

$\therefore$ (가) $a\times1.03^4$ (나) $a\times1.03$

(2) $$a\times1.03+a\times1.03^2+\cdots+a\times1.03^5=\frac{a\times1.03(1.03^5-1)}{1.03-1}$$
$$=\frac{a\times1.03(1.2-1)}{0.03}$$
$$=\frac{103}{15}a\text{(원)}$$

답 (1) (가) $a\times1.03^4$ (나) $a\times1.03$ (2) $\frac{103}{15}a$원

1038 a원을 연이율 5 %의 복리로 n년 동안 예금하면 n년 후의 원리합계는 $a\times(1+0.05)^n=a\times1.05^n$(원)

따라서 구하는 적립금의 원리합계는

$$a\times1.05+a\times1.05^2+\cdots+a\times1.05^5$$
$$=\frac{a\times1.05(1.05^5-1)}{1.05-1}=\frac{a\times1.05(1.3-1)}{0.05}$$
$$=6.3a\text{(원)}$$

답 $6.3a$원

1039 (1) a원을 연이율 3 %의 복리로 n년 동안 예금하면 n년 후의 원리합계는 $a\times(1+0.03)^n=a\times1.03^n$(원)

$\therefore$ (가) $a\times1.03^3$ (나) a

(2) $$a+a\times1.03+\cdots+a\times1.03^4=\frac{a(1.03^5-1)}{1.03-1}$$
$$=\frac{a(1.2-1)}{0.03}=\frac{20}{3}a\text{(원)}$$

답 (1) (가) $a\times1.03^3$ (나) a (2) $\frac{20}{3}a$원

1040 a원을 연이율 5 %의 복리로 n년 동안 예금하면 n년 후의 원리합계는 $a\times(1+0.05)^n=a\times1.05^n$(원)

따라서 구하는 적립금의 원리합계는

$$a+a\times1.05+\cdots+a\times1.05^4=\frac{a(1.05^5-1)}{1.05-1}$$
$$=\frac{a(1.3-1)}{0.05}$$
$$=6a\text{(원)}$$

답 $6a$원

1041 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_4=-8$에서 $ar^3=-8$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a_7=64$에서 $ar^6=64$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=-8$ $\quad\therefore r=-2$

$r=-2$를 ㉠에 대입하면 $-8a=-8$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore a_n=1\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^{n-1}$

답 $a_n=(-2)^{n-1}$

1042 주어진 등비수열의 공비를 r라 하면 제8항이 162이므로

$2\sqrt{3}\cdot r^7=162,\quad r^7=27\sqrt{3}=(\sqrt{3})^7$

$\therefore r=\sqrt{3}$

답 ①

1043 $a_n=\frac{2}{5^{2n-1}}$에서

$$a_1=\frac{2}{5^1}=\frac{2}{5},\ a_2=\frac{2}{5^3}=\frac{2}{125}$$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 $\frac{2}{5}$, 공비는 $\dfrac{\frac{2}{125}}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{25}$이다.

답 첫째항: $\frac{2}{5}$, 공비: $\frac{1}{25}$

다른풀이 $a_n=\frac{2}{5^{2n-1}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5^{2n-2}}$

$$=\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{5^2}\right)^{n-1}=\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{n-1}$$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 $\frac{2}{5}$, 공비는 $\frac{1}{25}$이다.

1044 $a_n=1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$이므로

$$a_n^2=\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}^2=\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}^{n-1}=\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}$$

따라서 수열 $\{a_n^2\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{16}$인 등비수열이므로

$a=1,\ r=\frac{1}{16}\quad\therefore \frac{a}{r}=16$

답 16

1045 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=8$에서 $ar^2=8$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a_7=\frac{1}{2}$에서 $ar^6=\frac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^4=\frac{1}{16}$ $\quad\therefore r=\frac{1}{2}$ ($\because r>0$)

$r=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{4}a=8$ $\quad\therefore a=32$

$\therefore a_n=32\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\frac{1}{16}$을 제k항이라 하면 $32\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{16}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^9,\quad k-1=9\quad\therefore k=10$

따라서 $\frac{1}{16}$은 제10항이다.

답 제10항

1046 주어진 수열은 첫째항이 $\frac{1}{12}$, 공비가 $\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{12}}=2$인 등비수열이므로 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=\frac{1}{12}\cdot 2^{n-1}$

$\frac{512}{3}$를 제k항이라 하면 $\frac{1}{12}\cdot 2^{k-1}=\frac{512}{3}$

$2^{k-1}=2^{11}$, $k-1=11$ $\therefore k=12$

따라서 $\frac{512}{3}$는 제12항이다. 답 ④

1047 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=-3$에서 $ar=-3$ ...... ㉠

$a_5:a_7=1:4$에서 $4a_5=a_7$, $4ar^4=ar^6$

$r^2=4$ $\therefore r=-2$ ($\because r<0$)

$r=-2$를 ㉠에 대입하면 $-2a=-3$ $\therefore a=\frac{3}{2}$ ⋯ ❶

따라서 $a_n=\frac{3}{2}\cdot(-2)^{n-1}$이므로 ⋯ ❷

$a_6=\frac{3}{2}\cdot(-2)^5=-48$ ⋯ ❸

답 -48

채점 기준	비율
❶ a, r의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ a_n을 구할 수 있다.	20 %
❸ a_6을 구할 수 있다.	20 %

1048 $\log_2 a_4=2$에서 $a_4=2^2=4$

이때 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $a_4=1\cdot r^3=r^3$이므로

$r^3=4$

따라서 $a_{13}=1\cdot r^{12}=(r^3)^4=4^4=2^8$이므로

$\log_2 a_{13}=\log_2 2^8=8$ 답 ④

1049 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 $a_n=a\cdot 3^{n-1}$이므로

$a_2+a_4+a_6=3a+3^3a+3^5a=3a(1+3^2+3^4)$

$a_5+a_7+a_9=3^4a+3^6a+3^8a=3^4a(1+3^2+3^4)$

$\therefore \frac{a_5+a_7+a_9}{a_2+a_4+a_6}=\frac{3^4a(1+3^2+3^4)}{3a(1+3^2+3^4)}=3^3=27$ 답 27

1050 주어진 등비수열의 공비를 r, 일반항을 a_n이라 하면

$a_4=3$에서 $81\cdot r^3=3$, $r^3=\frac{1}{27}$ $\therefore r=\frac{1}{3}$

따라서 $a_n=81\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$이므로 $81\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}<\frac{1}{2}$에서

$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}<\frac{1}{162}$, $3^{n-1}>162$

이때 $3^4=81$, $3^5=243$이므로

$n-1\ge 5$ $\therefore n\ge 6$

따라서 처음으로 $\frac{1}{2}$보다 작아지는 항은 제6항이다. 답 제6항

1051 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=2$에서 $ar^2=2$ ...... ㉠

$a_5=4$에서 $ar^4=4$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=2$ $\therefore r=\sqrt{2}$ ($\because r>0$)

$r=\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면 $2a=2$ $\therefore a=1$ ⋯ ❶

따라서 $a_n=1\cdot(\sqrt{2})^{n-1}=(\sqrt{2})^{n-1}$이므로

$a_n^{\ 2}=\{(\sqrt{2})^{n-1}\}^2=\{(\sqrt{2})^2\}^{n-1}=2^{n-1}$ ⋯ ❷

$a_n^{\ 2}>500$에서 $2^{n-1}>500$

이때 $2^8=256$, $2^9=512$이므로

$n-1\ge 9$ $\therefore n\ge 10$

따라서 자연수 n의 최솟값은 10이다. ⋯ ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ a, r의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $a_n^{\ 2}$을 구할 수 있다.	30 %
❸ 자연수 n의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

1052 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3+a_6=9$에서 $ar^2+ar^5=9$

$\therefore ar^2(1+r^3)=9$ ...... ㉠

$a_4+a_7=18$에서 $ar^3+ar^6=18$

$\therefore ar^3(1+r^3)=18$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $a\cdot 4\cdot 9=9$ $\therefore a=\frac{1}{4}$

따라서 $a_n=\frac{1}{4}\cdot 2^{n-1}$이므로 $\frac{1}{4}\cdot 2^{n-1}>1000$에서

$2^{n-1}>4000$

이때 $2^{11}=2048$, $2^{12}=4096$이므로

$n-1\ge 12$ $\therefore n\ge 13$

따라서 처음으로 1000보다 커지는 항은 제13항이다. 답 ②

1053 주어진 등비수열의 공비를 r라 하면 첫째항이 2, 제6항이 2048이므로

$2r^5=2048$, $r^5=1024$ $\therefore r=4$

이때 a_1과 a_3은 각각 주어진 수열의 제2항과 제4항이므로

$a_1=2\cdot 4=8$, $a_3=2\cdot 4^3=128$

$\therefore a_1+a_3=136$ 답 ④

1054 주어진 등비수열의 공비를 r라 하면 첫째항이 8, 제5항이 $\frac{1}{2}$이므로

$8r^4=\frac{1}{2}$, $r^4=\frac{1}{16}$ $\therefore r=\frac{1}{2}$ ($\because r>0$)

이때 a_3은 주어진 수열의 제4항이므로

$a_3=8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=1$ 답 1

1055 첫째항이 18, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열의 제$(n+2)$항이 $\frac{2}{243}$이므로 $18\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=\frac{2}{243}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^7$

$n+1=7$ $\therefore n=6$ 답 ②

1056 세 양수 x, $x+3$, $4x$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(x+3)^2=x\cdot 4x$, $x^2+6x+9=4x^2$

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=3$ ($\because x>0$) 답 3

1057 세 수 2, a, 18이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2=2\cdot18=36$ $\therefore a=6\ (\because a>0)$

또 세 수 6, 18, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$18^2=6b$ $\therefore b=54$

$\therefore a+b=60$ 답 60

1058 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$b^2=ac$

$b^3=8ac$에서 $b^3=8b^2$ $\therefore b=8\ (\because b\neq0)$

따라서 세 수 1, a, 8이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2=8$ $\therefore a=-2\sqrt{2}$ 또는 $a=2\sqrt{2}$

이때 주어진 등비수열의 공비가 1보다 크므로

$a=2\sqrt{2}$ 답 ②

1059 세 수 $\sin\theta$, $\frac{1}{4}$, $\cos\theta$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\sin\theta\cos\theta=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$

$\therefore \tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{1}{\frac{1}{16}}=16$ 답 ⑤

1060 세 수 -2, a, b가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2a=-2+b$ $\therefore b=2a+2$ …… ㉠

세 수 a, b, 18이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$b^2=18a$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(2a+2)^2=18a$, $4a^2+8a+4=18a$

$2a^2-5a+2=0$, $(2a-1)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>1)$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=6$

$\therefore a+b=8$ 답 8

1061 다항식 $f(x)=2x^2-x+a$를 일차식 x, $x-1$, $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 각각

$R_1=f(0)=a$, $R_2=f(1)=a+1$, $R_3=f(2)=a+6$ ··· ❶

이때 a, $a+1$, $a+6$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(a+1)^2=a(a+6)$, $a^2+2a+1=a^2+6a$

$4a=1$ $\therefore a=\frac{1}{4}$ ··· ❷

답 $\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ R_1, R_2, R_3을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	60 %

라쎈 특강 나머지정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$R=f(\alpha)$

1062 세 실수를 a, ar, ar^2으로 놓으면

$a+ar+ar^2=3$에서 $a(1+r+r^2)=3$ …… ㉠

$a\cdot ar\cdot ar^2=-8$에서 $(ar)^3=-8$ …… ㉡

㉡에서 $ar=-2$ $\therefore a=-\frac{2}{r}$ …… ㉢

$a=-\frac{2}{r}$를 ㉠에 대입하면

$-\frac{2}{r}(1+r+r^2)=3$

양변에 r를 곱하여 정리하면

$2r^2+5r+2=0$, $(r+2)(2r+1)=0$

$\therefore r=-2$ 또는 $r=-\frac{1}{2}$

㉢에서 $r=-2$일 때 $a=1$, $r=-\frac{1}{2}$일 때 $a=4$이므로 세 실수는

1, -2, 4

따라서 가장 큰 수는 4이다. 답 ⑤

1063 주어진 삼차방정식의 세 실근을 a, ar, ar^2으로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=p$

$a\cdot ar+ar\cdot ar^2+ar^2\cdot a=-24$ …… ㉠

$a\cdot ar\cdot ar^2=-64$ …… ㉡ ··· ❶

㉡에서 $(ar)^3=-64$ $\therefore ar=-4$ ··· ❷

㉠에서 $ar(a+ar+ar^2)=-24$이므로

$-4p=-24$ $\therefore p=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.	50 %
❷ ar의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ p의 값을 구할 수 있다.	20 %

1064 세 실수를 a, ar, ar^2으로 놓으면

$a+ar+ar^2=13$에서 $a(1+r+r^2)=13$ …… ㉠

$a^2+(ar)^2+(ar^2)^2=91$에서 $a^2+a^2r^2+a^2r^4=91$

$\therefore a^2(1+r^2+r^4)=91$

㉠을 제곱하면 $a^2(1+r+r^2)^2=13^2$

$a^2(1+r^2+r^4+2r+2r^2+2r^3)=169$

$a^2(1+r^2+r^4)+2ar\cdot a(1+r+r^2)=169$

$91+2ar\cdot13=169$ $\therefore ar=3$

따라서 세 수의 곱은

$a\cdot ar\cdot ar^2=(ar)^3=27$ 답 27

1065 1회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는 $256\cdot\frac{3}{4}$

2회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는 $256\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=256\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2$

⋮

n회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는 $256\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$

따라서 5회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$256\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^5=2^8\cdot\frac{3^5}{2^{10}}=\frac{243}{4}$ 답 $\frac{243}{4}$

1066 1번째 튀어 오른 공의 높이는 $2\cdot\frac{5}{8}$(m)

2번째 튀어 오른 공의 높이는 $2\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}=2\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^2$(m)

⋮

n번째 튀어 오른 공의 높이는 $2\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^n$(m)

따라서 8번째 튀어 오른 공의 높이는

$2\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^8=2\cdot\frac{5^8}{2^{24}}=\frac{5^8}{2^{23}}$(m) 답 ③

1067 한 변의 길이가 9인 정사각형의 넓이는 $9^2=81$

첫 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는 $81\cdot\frac{8}{9}$

두 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는 $81\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9}=81\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2$

⋮

n번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는 $81\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^n$

따라서 10번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$81\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^{10}=3^4\cdot\frac{2^{30}}{3^{20}}=\frac{2^{30}}{3^{16}}$

즉 $p=30$, $q=16$이므로 $p+q=46$ 답 ④

1068 처음 빵의 단위 무게당 가격을 A원이라 하면 1번 시행 후 A원으로 살 수 있는 빵의 무게는 처음 무게의 $1\cdot\left(1-\frac{20}{100}\right)=\frac{4}{5}$이다.

1번 시행 후 빵의 단위 무게당 가격은 $\frac{5}{4}A$(원)

2번 시행 후 빵의 단위 무게당 가격은 $\frac{5}{4}A\cdot\frac{5}{4}=\left(\frac{5}{4}\right)^2A$(원)

3번 시행 후 빵의 단위 무게당 가격은

$\frac{5}{4}A\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{4}=\left(\frac{5}{4}\right)^3A=\frac{125}{64}A$(원)

따라서 빵의 단위 무게당 가격은 처음의 $\frac{125}{64}$배이다.

답 $\frac{125}{64}$배

1069 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=10$에서 $ar=10$ …… ㉠

$a_4=40$에서 $ar^3=40$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=4$ $\therefore r=2\ (\because r>0)$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $2a=10$ $\therefore a=5$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\frac{5(2^{10}-1)}{2-1}=5115$ 답 5115

1070 주어진 등비수열의 공비를 r라 하면 제5항이 81이므로

$1\cdot r^4=81$ $\therefore r=-3\ (\because r<0)$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항부터 제5항까지의 합은

$\frac{1\{1-(-3)^5\}}{1-(-3)}=\frac{244}{4}=61$ 답 ③

1071 $\log_2 4=\log_2 2^2=2$, $\log_2 4^3=\log_2 2^6=6$, $\log_2 4^9=\log_2 2^{18}=18$, $\log_2 4^{27}=\log_2 2^{54}=54$이므로 주어진 수열은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{6}{2}=3$인 등비수열이다.

따라서 주어진 등비수열의 첫째항부터 제8항까지의 합은

$\frac{2(3^8-1)}{3-1}=3^8-1$ 답 ④

1072 주어진 등비수열은 첫째항이 3, 공비가 $\frac{12}{3}=4$이므로

$S_n=\frac{3(4^n-1)}{4-1}=4^n-1$ ··· ❶

$S_k=1023$에서 $4^k-1=1023$

$4^k=1024=4^5$ $\therefore k=5$ ··· ❷

답 5

채점 기준	비율
❶ S_n을 구할 수 있다.	60 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40 %

1073 $a_n=1+(n-1)\cdot 2=2n-1$이므로

$3^{a_n}=3^{2n-1}=3^{2(n-1)+1}=3\cdot 3^{2(n-1)}=3\cdot 9^{n-1}$

따라서 수열 $\{3^{a_n}\}$은 첫째항이 3, 공비가 9인 등비수열이므로 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\frac{3(9^{10}-1)}{9-1}=\frac{3}{8}(9^{10}-1)=\frac{3}{8}(3^{20}-1)$ 답 ③

1074 주어진 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 첫째항부터 제3항까지의 합이 14이므로

$\frac{a(r^3-1)}{r-1}=14$ …… ㉠

첫째항부터 제6항까지의 합이 126이므로

$\frac{a(r^6-1)}{r-1}=126$

$\therefore \frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=126$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3+1=9$, $r^3=8$

$\therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$7a=14$ $\therefore a=2$

따라서 주어진 등비수열의 제5항은 $2\cdot 2^4=32$ 답 32

1075 주어진 등비수열의 첫째항을 a라 하면

$\frac{a\{1-(-2)^5\}}{1-(-2)}=55$, $11a=55$

$\therefore a=5$ ··· ❶

따라서 주어진 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\frac{5\{1-(-2)^{10}\}}{1-(-2)}=-1705$ ··· ❷

답 -1705

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ 첫째항부터 제10항까지의 합을 구할 수 있다.	40 %

1076 주어진 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$S_n=20$에서 $\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}=20$ …… ㉠

$S_{2n}=30$에서 $\dfrac{a(r^{2n}-1)}{r-1}=30$

$\therefore \dfrac{a(r^n-1)(r^n+1)}{r-1}=30$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^n+1=\dfrac{3}{2}$ $\therefore r^n=\dfrac{1}{2}$

$\therefore S_{3n}=\dfrac{a(r^{3n}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)}{r-1}$

$=20\cdot\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}+1\right\}=35$ 답 35

1077 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

수열 a_1, a_3, a_5, …의 공비는 r^2이므로

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=\dfrac{a_1\{(r^2)^5-1\}}{r^2-1}=\dfrac{a_1(r^{10}-1)}{r^2-1}$

$\therefore \dfrac{a_1(r^{10}-1)}{r^2-1}=4$ …… ㉠

수열 a_2, a_4, a_6, …의 공비도 r^2이므로

$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=\dfrac{a_1r\{(r^2)^5-1\}}{r^2-1}=\dfrac{a_1r(r^{10}-1)}{r^2-1}$

$\therefore \dfrac{a_1r(r^{10}-1)}{r^2-1}=8$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r=2$ 답 ②

다른풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=4$에서

$a+ar^2+ar^4+ar^6+ar^8=4$ …… ㉢

$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=8$에서

$ar+ar^3+ar^5+ar^7+ar^9=8$

$\therefore r(a+ar^2+ar^4+ar^6+ar^8)=8$ …… ㉣

㉢을 ㉣에 대입하면

$4r=8$ $\therefore r=2$

1078 $S_n=4^{n+1}-4$에서

$a_1=S_1=4^2-4=12$

$a_4=S_4-S_3=(4^5-4)-(4^4-4)=768$

$\therefore a_1+a_4=780$ 답 ⑤

1079 $S_n=2^n-1$에서

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=2^1-1=1$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)$

$=2^{n-1}(2-1)=2^{n-1}$ …… ㉠

이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2^{n-1}$ … ❶

$a_n>1000$에서 $2^{n-1}>1000$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

$n-1\ge10$ $\therefore n\ge11$ … ❷

따라서 자연수 n의 최솟값은 11이다. … ❸

답 11

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ n의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 자연수 n의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

1080 $S_n=3^{n+1}-3$에서

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=3^2-3=6$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^{n+1}-3)-(3^n-3)$

$=3^n(3-1)=2\cdot3^n$ …… ㉠

이때 $a_1=6$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2\cdot3^n$

$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=2\cdot3+2\cdot3^3+2\cdot3^5+2\cdot3^7+2\cdot3^9$

$=\dfrac{2\cdot3\{(3^2)^5-1\}}{3^2-1}$

$=\dfrac{3}{4}(3^{10}-1)$ 답 ⑤

1081 $S_n=3\cdot4^{n+1}+k$에서

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=3\cdot4^2+k=48+k$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(3\cdot4^{n+1}+k)-(3\cdot4^n+k)$

$=3\cdot4^n(4-1)=9\cdot4^n$ …… ㉠

이때 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 $a_1=48+k$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같아야 하므로

$48+k=9\cdot4$ $\therefore k=-12$ 답 -12

1082 매년 말에 200만 원씩 적립하면 10년째 말의 적립금의 원리합계는

$200+200(1+0.04)+200(1+0.04)^2+\cdots+200(1+0.04)^9$

$=200+200\times1.04+200\times1.04^2+\cdots+200\times1.04^9$

$=\dfrac{200(1.04^{10}-1)}{1.04-1}=\dfrac{200(1.48-1)}{0.04}$

$=2400$(만 원) 답 2400만 원

1083 매월 초에 5000원씩 적립하면 1년째, 즉 12개월째 말의 적립금의 원리합계는

$5000(1+0.01)+5000(1+0.01)^2+\cdots+5000(1+0.01)^{12}$

$=5000\times1.01+5000\times1.01^2+\cdots+5000\times1.01^{12}$

$=\dfrac{5000\times1.01(1.01^{12}-1)}{1.01-1}=\dfrac{5000\times1.01(1.13-1)}{0.01}$

$=65650$(원) 답 65650원

1084 매년 말에 a만 원씩 적립하면 10년째 연말까지 적립금의 원리합계는

$a+a(1+0.05)+a(1+0.05)^2+\cdots+a(1+0.05)^9$

$=a+a\times1.05+a\times1.05^2+\cdots+a\times1.05^9$

$=\dfrac{a(1.05^{10}-1)}{1.05-1}=\dfrac{a(1.6-1)}{0.05}$

$=12a$(만 원)

이때 $12a=300$이어야 하므로 $a=25$ 답 ④

1085 전략 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=a\cdot r^{n-1}$임을 이용하여 주어진 수열의 일반항을 구한다.

풀이 $a_n=\frac{5}{4}\cdot 4^{n-1}$이므로 $a_k=1280$에서

$\frac{5}{4}\cdot 4^{k-1}=1280, \quad 4^{k-1}=256\cdot 4=4^5$

$k-1=5 \quad \therefore k=6$

답 ②

1086 전략 64는 주어진 수열의 제6항임을 이용한다.

풀이 주어진 등비수열의 공비를 r라 하면 첫째항이 -2, 제6항이 64이므로

$-2\cdot r^5=64, \quad r^5=-32 \quad \therefore r=-2$

답 -2

1087 전략 주어진 식의 밑을 통일시킨 후 로그의 성질을 이용한다.

풀이 세 수 a, 9, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$ab=9^2=81$

$\therefore \frac{1}{\log_a 3}+\frac{1}{\log_b 3}=\log_3 a+\log_3 b=\log_3 ab$

$=\log_3 81=\log_3 3^4=4$

답 ③

1088 전략 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 제n항은 ar^{n-1}임을 이용하여 공비를 구한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_7=2a_5$에서 $\quad 2r^6=2\cdot 2r^4$

$r^2=2 \quad \therefore r=\sqrt{2}\ (\because r>0)$ ⋯ ❶

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제8항까지의 합은

$\frac{2\{(\sqrt{2})^8-1\}}{\sqrt{2}-1}=30(\sqrt{2}+1)$ ⋯ ❷

답 $30(\sqrt{2}+1)$

채점 기준	비율
❶ r의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 첫째항부터 제8항까지의 합을 구할 수 있다.	50 %

1089 전략 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 S_n이면 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}(n\ge 2)$임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

풀이 $S_n=6^{n+1}-6$에서

(i) $n=1$일 때, $\quad a_1=S_1=6^2-6=30$

(ii) $n\ge 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(6^{n+1}-6)-(6^n-6)$

$=6^n(6-1)=5\cdot 6^n$ ⋯⋯ ㉠

이때 $a_1=30$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=5\cdot 6^n$

따라서 $p=5$, $q=6$이므로

$p-q=-1$

답 ③

1090 전략 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 제n항은 ar^{n-1}임을 이용하여 a, r의 값을 구한다.

풀이 $a_3=12$에서 $\quad ar^2=12$ ⋯⋯ ㉠

$a_6=324$에서 $\quad ar^5=324$ ⋯⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\quad r^3=27 \quad \therefore r=3$

$r=3$을 ㉠에 대입하면 $\quad 9a=12 \quad \therefore a=\frac{4}{3}$

$\therefore \frac{a}{r}=\frac{4}{9}$

답 ②

1091 전략 등비수열 $\{a_n\}$에서 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=$(공비)임을 이용한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $\frac{a_3}{a_2}-\frac{a_6}{a_4}=\frac{1}{4}$에서

$r-r^2=\frac{1}{4}, \quad 4r^2-4r+1=0$

$(2r-1)^2=0 \quad \therefore r=\frac{1}{2}$

따라서 $a_5=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{16}$이므로

$p=16,\ q=3 \quad \therefore p+q=19$

답 19

1092 전략 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $2b=a+c$, 등비수열을 이루면 $b^2=ac$임을 이용한다.

풀이 세 수 $2y$, x, 16이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$x=\frac{2y+16}{2}=y+8$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

세 수 2, y, $4x-8$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$y^2=2(4x-8)=8x-16$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

㉠을 ㉡에 대입하면

$y^2=8(y+8)-16, \quad y^2-8y-48=0$

$(y+4)(y-12)=0 \quad \therefore y=12\ (\because y>0)$

$y=12$를 ㉠에 대입하면 $\quad x=20$ ⋯ ❸

따라서 등차수열 24, 20, 16의 공차는 -4, 등비수열 2, 12, 72의 공비는 6이므로 $\quad d=-4,\ r=6$

$\therefore d+r=2$ ⋯ ❹

답 2

채점 기준	비율
❶ 등차중항을 이용하여 식을 세울 수 있다.	30 %
❷ 등비중항을 이용하여 식을 세울 수 있다.	30 %
❸ x, y의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $d+r$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1093 전략 세 점 P, Q, R의 좌표를 구한 후 세 선분 AP, AQ, AR의 길이를 구한다.

풀이 $P(3,\ a^3)$, $Q(3,\ 2^3)$, $R(3,\ \log_3 3)$, 즉 $P(3,\ a^3)$, $Q(3,\ 8)$, $R(3,\ 1)$이므로 $\quad \overline{AP}=a^3,\ \overline{AQ}=8,\ \overline{AR}=1$ ⋯ ❶

세 수 a^3, 8, 1이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$8^2=a^3\cdot 1, \quad a^3=64 \quad \therefore a=4$ ⋯ ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ 세 선분 AP, AQ, AR의 길이를 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %

1094 전략 A노래의 다운로드 건수가 등비수열을 이룸을 이용한다.

풀이 1월부터 5월까지 감소하는 일정한 비율을 $r\,(r>0)$, A노래의 'n월 다운로드 건수'를 $a_n(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$이라 하자.

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 480이고 공비가 r인 등비수열이므로

$a_5=480\cdot r^4=30$

$r^4=\frac{1}{16} \quad \therefore r=\frac{1}{2}\ (\because r>0)$

따라서 구하는 A노래의 '3월 다운로드 건수'는

$a_3=480\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=120$

답 120

09 등비수열

다른풀이 A노래의 '3월 다운로드 건수'를 x라 하면 480, x, 30은 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$x^2=480\cdot30=14400 \qquad \therefore x=120\ (\because x>0)$

1095 전략 첫째항이 a, 공비가 $r(r\neq1)$인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합은 $\frac{a(r^n-1)}{r-1}$임을 이용한다.

풀이 $f(11)=11^{10}+11^9+\cdots+11+1=1+11+11^2+\cdots+11^{10}$

$=\frac{1(11^{11}-1)}{11-1}=\frac{1}{10}(11^{11}-1)$ 답 ③

1096 전략 첫째항이 a, 공비가 $r(r\neq1)$인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합은 $\frac{a(r^n-1)}{r-1}$임을 이용한다.

풀이 $S_n=\frac{\frac{1}{2}(2^n-1)}{2-1}=\frac{1}{2}(2^n-1)$이므로 $S_k>2018$에서

$\frac{1}{2}(2^k-1)>2018, \qquad 2^k-1>4036 \qquad \therefore 2^k>4037$

이때 $2^{11}=2048$, $2^{12}=4096$이므로 $\qquad k\geq12$

따라서 자연수 k의 최솟값은 12이다. 답 12

1097 전략 주어진 조건을 이용하여 수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비를 구한 후 등비수열의 합의 공식을 이용한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r>0)$라 하면

$a_1a_2=a_{10}$에서 $\quad a_1^2r=a_1r^9 \quad \therefore a_1=r^8$ ...... ㉠

$a_1+a_9=20$에서 $\quad a_1+a_1r^8=20$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a_1+a_1^2=20, \qquad a_1^2+a_1-20=0$

$(a_1+5)(a_1-4)=0 \qquad \therefore a_1=4\ (\because a_n>0)$

$a_1=4$를 ㉠에 대입하면 $\quad r^8=4$

$\therefore r^4=2$

이때 a_1, a_3, a_5, a_7, a_9는 공비가 r^2인 등비수열을 이루고, a_1, $-a_3$, a_5, $-a_7$, a_9는 공비가 $-r^2$인 등비수열을 이루므로

$(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)(a_1-a_3+a_5-a_7+a_9)$

$=\frac{a_1\{1-(r^2)^5\}}{1-r^2}\cdot\frac{a_1\{1-(-r^2)^5\}}{1-(-r^2)}$

$=\frac{a_1(1-r^{10})}{1-r^2}\cdot\frac{a_1(1+r^{10})}{1+r^2}=\frac{a_1^2(1-r^{20})}{1-r^4}$

$=\frac{a_1^2\{1-(r^4)^5\}}{1-r^4}=\frac{4^2(1-2^5)}{1-2}$

$=496$ 답 ②

1098 전략 등비수열의 합의 공식과 주어진 조건을 이용하여 공비를 구한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r\neq1)$라 하면

$S_2=\frac{a_1(r^2-1)}{r-1}$, $S_4=\frac{a_1(r^4-1)}{r-1}$

$\frac{S_4}{S_2}=\frac{\frac{a_1(r^4-1)}{r-1}}{\frac{a_1(r^2-1)}{r-1}}=\frac{r^4-1}{r^2-1}=9$에서

$\frac{(r^2+1)(r^2-1)}{r^2-1}=9$

$r^2+1=9 \qquad \therefore r^2=8$

$\therefore \frac{a_4}{a_2}=\frac{a_1r^3}{a_1r}=r^2=8$ 답 ④

참고 등비수열 $\{a_n\}$에서 $r=1$이면 $S_2=a_1+a_1=2a_1$, $S_4=a_1+a_1+a_1+a_1=4a_1$이므로

$\frac{S_4}{S_2}=\frac{4a_1}{2a_1}=2\neq9 \qquad \therefore r\neq1$

1099 전략 공비를 r라 하고 등비수열의 합의 공식을 이용한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3+a_4=15$에서 $\qquad \frac{a_1(r^4-1)}{r-1}=15$ ...... ㉠

$a_5+a_6+a_7+a_8=240$에서

$(a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7+a_8)=15+240=255$

이므로 $\qquad \frac{a_1(r^8-1)}{r-1}=255$

$\therefore \frac{a_1(r^4-1)(r^4+1)}{r-1}=255$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\qquad r^4+1=17, \qquad r^4=16$

$\therefore r=2\ (\because r>0)$ 답 2

다른풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3+a_4=15$에서

$a+ar+ar^2+ar^3=15$ ...... ㉢

$a_5+a_6+a_7+a_8=240$에서

$ar^4+ar^5+ar^6+ar^7=240$

$\therefore r^4(a+ar+ar^2+ar^3)=240$ ...... ㉣

㉣÷㉢을 하면 $\qquad r^4=16 \qquad \therefore r=2\ (\because r>0)$

1100 전략 등비수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용한다.

풀이 ㄱ. $a_1=S_1=3^1-1=2$

ㄴ. $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^n-1)-(3^{n-1}-1)$

$=3^{n-1}(3-1)=2\cdot3^{n-1}$ ...... ㉠

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2\cdot3^{n-1}$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다.

ㄷ. $\frac{2}{3}a_n+1=\frac{2}{3}\cdot2\cdot3^{n-1}+1=4\cdot3^{n-2}+1$이므로

$S_n\neq\frac{2}{3}a_n+1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

1101 전략 로그의 정의를 이용하여 S_n을 구한다.

풀이 $\log_5(S_n+1)=n$에서 $\qquad S_n+1=5^n$

$\therefore S_n=5^n-1$

$S_n=5^n-1$에서

(i) $n=1$일 때, $\qquad a_1=S_1=5^1-1=4$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=5^n-1-(5^{n-1}-1)$

$=5^{n-1}(5-1)=4\cdot5^{n-1}$ ...... ㉠

이때 $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4\cdot5^{n-1}$

$\therefore a_2a_4=4\cdot5\cdot4\cdot5^3=2^4\cdot5^4$

$=10^4=10000$ 답 10000

1102 전략 주어진 항을 이용하여 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_4=14$에서 $a+3d=14$ …… ㉠

$a_{10}=38$에서 $a+9d=38$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=4$

$\therefore a_n=2+(n-1)\cdot 4=4n-2$ ⋯➊

$\therefore b_n=2^{a_n}=2^{4n-2}=2^{4(n-1)+2}$

$=2^{4(n-1)}\cdot 2^2=4\cdot 16^{n-1}$ ⋯➋

따라서 수열 $\{b_n\}$의 첫째항은 4, 공비는 16이므로 구하는 합은 20이다. ⋯➌

답 20

채점 기준	비율
➊ a_n을 구할 수 있다.	40 %
➋ b_n을 구할 수 있다.	40 %
➌ 수열 $\{b_n\}$의 첫째항과 공비의 합을 구할 수 있다.	20 %

1103 전략 등비수열을 이루는 세 수를 a, ar, ar^2으로 놓고 식을 세운다.

풀이 곡선 $y=x^3+3x^2-6x+k$와 x축의 교점의 x좌표는 삼차방정식 $x^3+3x^2-6x+k=0$의 세 실근과 같다.

즉 $x^3+3x^2-6x+k=0$은 서로 다른 세 실근을 가지므로 세 실근을 a, ar, ar^2으로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=-3$

$a\cdot ar+ar\cdot ar^2+ar^2\cdot a=-6$ …… ㉠

$a\cdot ar\cdot ar^2=-k$ …… ㉡

㉠에서 $ar(a+ar+ar^2)=-6$이므로

$-3ar=-6$ $\therefore ar=2$

$ar=2$를 ㉡에 대입하면

$-k=(ar)^3=2^3=8$ $\therefore k=-8$

답 ①

1104 전략 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비를 구하여 $a_n{}^2$을 구한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=6$에서 $ar^2=6$ …… ㉠

$a_6=48$에서 $ar^5=48$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$ $\therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $4a=6$ $\therefore a=\frac{3}{2}$ ⋯➊

따라서 $a_n=\frac{3}{2}\cdot 2^{n-1}$이므로

$a_n{}^2=\left(\frac{3}{2}\cdot 2^{n-1}\right)^2=\frac{9}{4}\cdot 4^{n-1}$ ⋯➋

$\therefore a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\cdots+a_{10}{}^2$

$=\frac{9}{4}+\frac{9}{4}\cdot 4+\frac{9}{4}\cdot 4^2+\cdots+\frac{9}{4}\cdot 4^9$

$=\frac{\frac{9}{4}(4^{10}-1)}{4-1}=\frac{3}{4}(2^{20}-1)$ ⋯➌

답 $\frac{3}{4}(2^{20}-1)$

채점 기준	비율
➊ a, r의 값을 구할 수 있다.	40 %
➋ $a_n{}^2$을 구할 수 있다.	20 %
➌ $a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\cdots+a_{10}{}^2$의 값을 구할 수 있다.	40 %

1105 전략 매년 생산하는 석유의 양이 등비수열을 이룸을 이용한다.

풀이 2018년의 석유 생산량을 a톤이라 하고 석유 생산량이 지난해의 r배가 된다고 하면 n년 후의 석유 생산량은

ar^n(톤)

2018년부터 2023년까지 생산하는 석유가 3000톤이므로

$a+ar+ar^2+\cdots+ar^5=3000$

$\therefore \frac{a(r^6-1)}{r-1}=3000$ …… ㉠

2024년부터 2029년까지 생산하는 석유가 2000톤이므로

$ar^6+ar^7+ar^8+\cdots+ar^{11}=2000$

$\therefore \frac{ar^6(r^6-1)}{r-1}=2000$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^6=\frac{2}{3}$

따라서 2030년의 석유 생산량은

$ar^{12}=a(r^6)^2=\frac{4}{9}a$(톤)

이므로 2018년의 석유 생산량의 $\frac{4}{9}$배이다. 답 $\frac{4}{9}$배

1106 전략 등비수열을 이루는 네 수를 a, ar, ar^2, ar^3으로 놓고 조건을 만족시키는 a, r의 값을 찾는다.

풀이 서로 다른 네 개의 수를 a, ar, ar^2, ar^3 (a, r는 자연수, $a\geq 100$, $r>1$)으로 놓으면

$ar^3<1000$ …… ㉠

(i) $r=2$일 때,

㉠에서 $8a<1000$이므로 $a<125$

$\therefore a=100, 101, 102, \cdots, 124$

(ii) $r\geq 3$일 때,

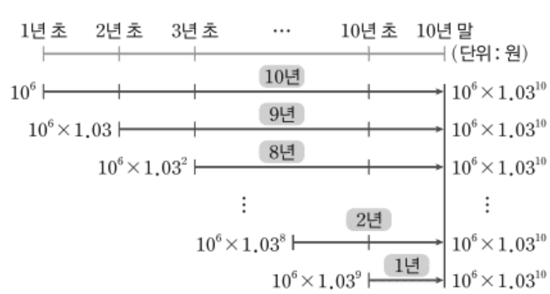
$a\geq 100$, $ar^3<1000$을 만족시키는 자연수 a는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=124$, $r=2$일 때 네 수의 합이 가장 크므로 구하는 합은

$\frac{124(2^4-1)}{2-1}=1860$ 답 ②

1107 전략 매년 초에 적립하는 금액의 원리합계를 그림으로 나타낸다.

풀이 매년 초에 적립하는 금액의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 10년째 말의 적립금의 원리합계는

$10^6\times 1.03^{10}\times 10=1.34\times 10^7$

$=1340$(만 원) 답 1340만 원

10 수열의 합

Ⅲ. 수열

1108 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=\sum_{k=1}^{\boxed{20}} a_{\boxed{k}}$ 답 20, k

1109 $b_{11}+b_{12}+b_{13}+\cdots+b_{\boxed{25}}=\sum_{k=\boxed{11}}^{25} b_k$ 답 25, 11

1110 답 $\sum_{k=1}^{n} 2k$

1111 답 $\sum_{k=10}^{21} 5^k$

1112 $1+4+9+\cdots+64=1^2+2^2+3^2+\cdots+8^2$

$=\sum_{k=1}^{8} k^2$ 답 $\sum_{k=1}^{8} k^2$

1113 답 $\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{k(k+1)}$

1114 답 $7+14+21+\cdots+70$

1115 $\sum_{i=1}^{10} i^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3$

$=1+8+27+\cdots+1000$

답 $1+8+27+\cdots+1000$

1116 $\sum_{j=2}^{5} 2^j=2^2+2^3+2^4+2^5$

$=4+8+16+32$ 답 $4+8+16+32$

1117 답 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{7}$

1118 $\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)=\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1=2+1\cdot 10=12$ 답 12

1119 $\sum_{k=1}^{10}(5a_k+b_k)=5\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k=5\cdot 2+3=13$ 답 13

1120 $\sum_{k=1}^{10}2(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{10}(2a_k+2b_k)=2\sum_{k=1}^{10}a_k+2\sum_{k=1}^{10}b_k$

$=2\cdot 2+2\cdot 3=10$ 답 10

1121 $\sum_{k=1}^{10}(a_k-3b_k+1)=\sum_{k=1}^{10}a_k-3\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}1$

$=2-3\cdot 3+1\cdot 10=3$ 답 3

1122 $1+2+3+\cdots+8=\sum_{k=1}^{8}k=\frac{8\cdot 9}{2}=36$ 답 36

1123 $1^2+2^2+3^2+\cdots+8^2=\sum_{k=1}^{8}k^2=\frac{8\cdot 9\cdot 17}{6}=204$ 답 204

1124 $1^3+2^3+3^3+\cdots+8^3=\sum_{k=1}^{8}k^3=\left(\frac{8\cdot 9}{2}\right)^2$

$=36^2=1296$ 답 1296

1125 $\sum_{k=1}^{5}(2k+5)=2\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}5=2\cdot\frac{5\cdot 6}{2}+5\cdot 5$

$=30+25=55$ 답 55

1126 $\sum_{k=1}^{6}(k^2-3k)=\sum_{k=1}^{6}k^2-3\sum_{k=1}^{6}k=\frac{6\cdot 7\cdot 13}{6}-3\cdot\frac{6\cdot 7}{2}$

$=91-63=28$ 답 28

1127 $\sum_{k=1}^{7}(k^3-k+1)=\sum_{k=1}^{7}k^3-\sum_{k=1}^{7}k+\sum_{k=1}^{7}1$

$=\left(\frac{7\cdot 8}{2}\right)^2-\frac{7\cdot 8}{2}+1\cdot 7$

$=784-28+7$

$=763$ 답 763

1128 $\sum_{k=1}^{5}(k+1)(k-1)=\sum_{k=1}^{5}(k^2-1)=\sum_{k=1}^{5}k^2-\sum_{k=1}^{5}1$

$=\frac{5\cdot 6\cdot 11}{6}-1\cdot 5$

$=55-5=50$ 답 50

1129 $\sum_{k=1}^{6}k^2(k-1)=\sum_{k=1}^{6}(k^3-k^2)=\sum_{k=1}^{6}k^3-\sum_{k=1}^{6}k^2$

$=\left(\frac{6\cdot 7}{2}\right)^2-\frac{6\cdot 7\cdot 13}{6}$

$=441-91=350$ 답 350

1130 (1) $a_n=n(n+1)$

(2) $a_k=110$에서 $k(k+1)=110=10\cdot 11$

$\therefore k=10$

(3) $2+6+12+\cdots+110=\sum_{k=1}^{10}k(k+1)=\sum_{k=1}^{10}(k^2+k)$

$=\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k$

$=\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+\frac{10\cdot 11}{2}$

$=385+55=440$

답 (1) $a_n=n(n+1)$ (2) 10 (3) 440

1131 수열 2, 4, 6, …의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=2n$

$a_k=20$에서 $2k=20$ $\therefore k=10$

$\therefore 2+4+6+\cdots+20=\sum_{k=1}^{10}2k=2\sum_{k=1}^{10}k$

$=2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}=110$ 답 110

1132 수열 3, 5, 7, …의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=2n+1$

$a_k=41$에서 $2k+1=41$

$2k=40$ $\therefore k=20$

$\therefore 3+5+7+\cdots+41=\sum_{k=1}^{20}(2k+1)=2\sum_{k=1}^{20}k+\sum_{k=1}^{20}1$

$=2\cdot\frac{20\cdot21}{2}+1\cdot20$

$=420+20$

$=440$ 답 440

1133 수열 1^2, 3^2, 5^2, $\cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=(2n-1)^2$

$a_k=17^2$에서 $(2k-1)^2=17^2$

$2k-1=17$, $2k=18$ $\therefore k=9$

$\therefore 1^2+3^2+5^2+\cdots+17^2=\sum_{k=1}^{9}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{9}(4k^2-4k+1)$

$=4\sum_{k=1}^{9}k^2-4\sum_{k=1}^{9}k+\sum_{k=1}^{9}1$

$=4\cdot\frac{9\cdot10\cdot19}{6}-4\cdot\frac{9\cdot10}{2}+1\cdot9$

$=1140-180+9$

$=969$ 답 969

1134 $5^2+6^2+7^2+\cdots+12^2=\sum_{k=5}^{12}k^2=\sum_{k=1}^{12}k^2-\sum_{k=1}^{4}k^2$

$=\frac{12\cdot13\cdot25}{6}-\frac{4\cdot5\cdot9}{6}$

$=650-30=620$ 답 620

다른풀이 수열 5^2, 6^2, 7^2, $\cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=(n+4)^2$

$a_k=12^2$에서 $(k+4)^2=12^2$

$k+4=12$ $\therefore k=8$

$\therefore 5^2+6^2+7^2+\cdots+12^2=\sum_{k=1}^{8}(k+4)^2=\sum_{k=1}^{8}(k^2+8k+16)$

$=\sum_{k=1}^{8}k^2+8\sum_{k=1}^{8}k+\sum_{k=1}^{8}16$

$=\frac{8\cdot9\cdot17}{6}+8\cdot\frac{8\cdot9}{2}+16\cdot8$

$=204+288+128=620$

1135 $3^3+4^3+5^3+\cdots+8^3=\sum_{k=3}^{8}k^3=\sum_{k=1}^{8}k^3-\sum_{k=1}^{2}k^3$

$=\left(\frac{8\cdot9}{2}\right)^2-\left(\frac{2\cdot3}{2}\right)^2$

$=1296-9=1287$ 답 1287

다른풀이 수열 3^3, 4^3, 5^3, $\cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=(n+2)^3$

$a_k=8^3$에서 $(k+2)^3=8^3$, $k+2=8$

$\therefore k=6$

$\therefore 3^3+4^3+5^3+\cdots+8^3$

$=\sum_{k=1}^{6}(k+2)^3=\sum_{k=1}^{6}(k^3+6k^2+12k+8)$

$=\sum_{k=1}^{6}k^3+6\sum_{k=1}^{6}k^2+12\sum_{k=1}^{6}k+\sum_{k=1}^{6}8$

$=\left(\frac{6\cdot7}{2}\right)^2+6\cdot\frac{6\cdot7\cdot13}{6}+12\cdot\frac{6\cdot7}{2}+8\cdot6$

$=441+546+252+48=1287$

1136 수열 $1\cdot6$, $2\cdot7$, $3\cdot8$, $\cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=n(n+5)$

$a_k=10\cdot15$에서 $k(k+5)=10\cdot15$ $\therefore k=10$

$\therefore 1\cdot6+2\cdot7+3\cdot8+\cdots+10\cdot15$

$=\sum_{k=1}^{10}k(k+5)=\sum_{k=1}^{10}(k^2+5k)=\sum_{k=1}^{10}k^2+5\sum_{k=1}^{10}k$

$=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+5\cdot\frac{10\cdot11}{2}=385+275=660$ 답 660

1137 $\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$ 답 $\frac{5}{12}$

1138 $\sum_{k=1}^{5}\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}$

$=\sum_{k=1}^{5}\frac{2}{(2k+3)-(2k+1)}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$

$=\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$

$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{13}\right)$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{13}=\frac{10}{39}$ 답 $\frac{10}{39}$

1139 $\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{(k+2)-k}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{58}{45}$

$=\frac{29}{45}$ 답 $\frac{29}{45}$

1140 수열 $\frac{1}{1\cdot2}$, $\frac{1}{2\cdot3}$, $\frac{1}{3\cdot4}$, $\cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$

$a_k=\frac{1}{9\cdot10}$에서 $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{9\cdot10}$ $\therefore k=9$

$\therefore$ (주어진 식)$=\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$

$+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$

$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$ 답 $\frac{9}{10}$

1141 수열 $\frac{1}{1\cdot3}$, $\frac{1}{3\cdot5}$, $\frac{1}{5\cdot7}$, $\cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$a_k=\frac{1}{19\cdot21}$에서 $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{19\cdot21}$

$2k-1=19 \qquad \therefore k=10$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(2k+1)-(2k-1)}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{10}{21}$ 답 $\frac{10}{21}$

1142 $\sum_{k=3}^{14}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$

$=(\sqrt{5}-\sqrt{4})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+(\sqrt{7}-\sqrt{6})+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})$

$=\sqrt{16}-\sqrt{4}=4-2=2$ 답 2

1143 $\sum_{k=1}^{21}\frac{1}{\sqrt{k+3}+\sqrt{k+4}}$

$=\sum_{k=1}^{21}\frac{\sqrt{k+4}-\sqrt{k+3}}{(\sqrt{k+4}+\sqrt{k+3})(\sqrt{k+4}-\sqrt{k+3})}$

$=\sum_{k=1}^{21}(\sqrt{k+4}-\sqrt{k+3})$

$=(\sqrt{5}-\sqrt{4})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+(\sqrt{7}-\sqrt{6})+\cdots+(\sqrt{25}-\sqrt{24})$

$=\sqrt{25}-\sqrt{4}=5-2=3$ 답 3

1144 $\sum_{k=1}^{7}\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}$

$=\sum_{k=1}^{7}\frac{2(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})}$

$=\sum_{k=1}^{7}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

$\quad+\cdots+(\sqrt{8}-\sqrt{6})+(\sqrt{9}-\sqrt{7})$

$=\sqrt{8}+\sqrt{9}-1-\sqrt{2}=2\sqrt{2}+3-1-\sqrt{2}$

$=2+\sqrt{2}$ 답 $2+\sqrt{2}$

1145 수열 $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$, $\cdots$의 일반항을 a_n이라 하면 $\quad a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$a_k=\frac{1}{\sqrt{16}+\sqrt{15}}$에서 $\quad \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{16}+\sqrt{15}}$

$\therefore k=15$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

$=\sum_{k=1}^{15}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$

$=\sum_{k=1}^{15}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})$

$=\sqrt{16}-1=4-1=3$ 답 3

1146 수열 $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$, $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$, $\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$, $\cdots$의 일반항을 a_n이라 하면 $\quad a_n=\frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$

$a_k=\frac{2}{\sqrt{25}+\sqrt{23}}$에서

$\frac{2}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}=\frac{2}{\sqrt{25}+\sqrt{23}}$

$2k+1=25, \qquad 2k=24 \qquad \therefore k=12$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\sum_{k=1}^{12}\frac{2}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}$

$=\sum_{k=1}^{12}\frac{2(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})}{(\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1})(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})}$

$=\sum_{k=1}^{12}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$

$=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{25}-\sqrt{23})$

$=\sqrt{25}-1=5-1=4$ 답 4

1147 $\sum_{k=2}^{100}a_k=5$에서

$a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{100}=5$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\sum_{k=1}^{99}a_k=3$에서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{99}=3$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $\quad a_{100}-a_1=2$ 답 ④

1148 ① $\sum_{k=1}^{3n}3k=3\cdot1+3\cdot2+3\cdot3+\cdots+3\cdot3n$

$=3+6+9+\cdots+9n$

② $\sum_{k=1}^{10}(2k-1)$

$=(2\cdot1-1)+(2\cdot2-1)+(2\cdot3-1)+\cdots+(2\cdot10-1)$

$=1+3+5+\cdots+19$

③ $\sum_{k=1}^{n}2^k=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n$

$=2+4+8+\cdots+2^n$

④ $\sum_{k=1}^{6}(-1)^{k+1}$

$=(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4+(-1)^5+(-1)^6+(-1)^7$

$=1-1+1-1+1-1$

⑤ $\sum_{k=1}^{10}(k+1)^2=(1+1)^2+(2+1)^2+(3+1)^2+\cdots+(10+1)^2$

$=2^2+3^2+4^2+\cdots+11^2$

$=4+9+16+\cdots+121$

따라서 옳은 것은 ④이다. 답 ④

참고 ① $3+6+9+\cdots+3n=\sum_{k=1}^{n}3k$ ② $1+3+5+\cdots+21=\sum_{k=1}^{11}(2k-1)$

③ $4+8+16+\cdots+2^n=\sum_{k=1}^{n-1}2^{k+1}$ ⑤ $4+9+16+\cdots+100=\sum_{k=1}^{9}(k+1)^2$

1149 $\sum_{k=1}^{9}f(k+1)-\sum_{k=2}^{10}f(k-1)$

$=\{f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(10)\}$

$\quad-\{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(9)\}$

$=f(10)-f(1)=80-4=76$ 답 76

1150 $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$

$=\sum_{k=1}^{2n}a_k$ ⋯ ❶

이므로 $\sum_{k=1}^{2n}a_k=3n^2-2n$

위의 식의 양변에 $n=10$을 대입하면

$\sum_{k=1}^{20}a_k=3\cdot10^2-2\cdot10=280$ ⋯ ❷

답 280

채점 기준	비율
❶ $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})$를 변형할 수 있다.	60 %
❷ $\sum_{k=1}^{20}a_k$의 값을 구할 수 있다.	40 %

1151 $\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)^2=\sum_{k=1}^{10}(a_k^2+4a_k+4)$

$=\sum_{k=1}^{10}a_k^2+4\sum_{k=1}^{10}a_k+4\cdot10$

$=8+4\cdot4+40=64$

답 ③

1152 $\sum_{k=1}^{20}a_k=\alpha$, $\sum_{k=1}^{20}b_k=\beta$라 하자.

$\sum_{k=1}^{20}(a_k+b_k)=12$에서 $\sum_{k=1}^{20}a_k+\sum_{k=1}^{20}b_k=12$

$\therefore \alpha+\beta=12$ ⋯⋯ ㉠

$\sum_{k=1}^{20}(a_k-b_k)=-4$에서 $\sum_{k=1}^{20}a_k-\sum_{k=1}^{20}b_k=-4$

$\therefore \alpha-\beta=-4$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=4$, $\beta=8$

따라서 $\sum_{k=1}^{20}a_k=4$, $\sum_{k=1}^{20}b_k=8$이므로

$\sum_{k=1}^{20}(2a_k-4b_k+3)=2\sum_{k=1}^{20}a_k-4\sum_{k=1}^{20}b_k+3\cdot20$

$=2\cdot4-4\cdot8+60=36$

답 36

1153 $\sum_{k=1}^{15}(a_k-b_k)^2=\sum_{k=1}^{15}(a_k^2-2a_kb_k+b_k^2)$

$=\sum_{k=1}^{15}(a_k^2+b_k^2)-2\sum_{k=1}^{15}a_kb_k$

$\therefore \sum_{k=1}^{15}(a_k^2+b_k^2)=\sum_{k=1}^{15}(a_k-b_k)^2+2\sum_{k=1}^{15}a_kb_k$

$=10+2\cdot20=50$

답 50

1154 $\sum_{k=1}^{100}\frac{3^k-4^k}{2^k}=\sum_{k=1}^{100}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^k-2^k\right\}=\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{3}{2}\right)^k-\sum_{k=1}^{100}2^k$

$=\frac{\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{100}-1\right\}}{\frac{3}{2}-1}-\frac{2(2^{100}-1)}{2-1}$

$=3\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{100}-1\right\}-2(2^{100}-1)$

$=-1+3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{100}-2\cdot2^{100}$

따라서 $a=3$, $b=-2$이므로 $a+b=1$

답 ③

1155 $\sum_{k=1}^{20}2^{-k}\cos k\pi$

$=\frac{1}{2}\cos\pi+\frac{1}{2^2}\cos2\pi+\frac{1}{2^3}\cos3\pi+\cdots+\frac{1}{2^{20}}\cos20\pi$

$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{20}}$

$=\frac{-\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{20}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right\}$

답 ①

1156 $1+3+3^2+\cdots+3^{k-1}=\frac{1\cdot(3^k-1)}{3-1}=\frac{1}{2}(3^k-1)$ ⋯ ❶

$\therefore \sum_{k=1}^{n}(1+3+3^2+\cdots+3^{k-1})$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(3^k-1)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}3^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3(3^n-1)}{3-1}-\frac{1}{2}\cdot n$

$=\frac{3}{4}\cdot3^n-\frac{1}{2}n-\frac{3}{4}$ ⋯ ❷

따라서 $a=\frac{3}{4}$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=-\frac{3}{4}$이므로

$a+b+c=-\frac{1}{2}$ ⋯ ❸

답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $1+3+3^2+\cdots+3^{k-1}$을 간단히 할 수 있다.	30 %
❷ $\sum_{k=1}^{n}(1+3+3^2+\cdots+3^{k-1})$을 $a\cdot3^n+bn+c$ 꼴로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1157 $\sum_{k=1}^{10}(2k-3)^2-\sum_{k=1}^{10}(2k)^2=\sum_{k=1}^{10}(4k^2-12k+9)-\sum_{k=1}^{10}4k^2$

$=-12\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}9$

$=-12\cdot\frac{10\cdot11}{2}+9\cdot10$

$=-660+90$

$=-570$

답 -570

1158 $\sum_{k=1}^{n}(4k-1)=4\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1=4\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n$

$=2n^2+n$

따라서 $2n^2+n=36$이므로 $2n^2+n-36=0$

$(2n+9)(n-4)=0$ $\therefore n=-\frac{9}{2}$ 또는 $n=4$

그런데 n은 자연수이므로 $n=4$

답 4

1159 $a_n=3n-2$에서

$a_{2k-1}=3(2k-1)-2=6k-5$

$\therefore \sum_{k=1}^{n-1}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{n-1}(6k-5)=6\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}5$

$=6\cdot\frac{(n-1)n}{2}-5(n-1)$

$=3n^2-8n+5$

답 ②

1160 $\dfrac{1+2+3+\cdots+k}{k+1}=\dfrac{1}{k+1}(1+2+3+\cdots+k)$

$$=\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k} i$$

$$=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{k(k+1)}{2}$$

$$=\frac{k}{2} \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{1+2+3+\cdots+k}{k+1}=\sum_{k=1}^{10}\frac{k}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}k$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{10\cdot 11}{2}=\frac{55}{2} \quad \cdots ❷$$

답 $\dfrac{55}{2}$

채점 기준	비율
❶ 수열의 일반항을 간단히 할 수 있다.	50 %
❷ 식의 값을 구할 수 있다.	50 %

1161 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_k+\beta_k=k,\ \alpha_k\beta_k=-k$

이므로

$$\alpha_k{}^2+\beta_k{}^2=(\alpha_k+\beta_k)^2-2\alpha_k\beta_k$$
$$=k^2-2\cdot(-k)=k^2+2k$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{5}(\alpha_k{}^2+\beta_k{}^2)=\sum_{k=1}^{5}(k^2+2k)$$
$$=\sum_{k=1}^{5}k^2+2\sum_{k=1}^{5}k$$
$$=\frac{5\cdot 6\cdot 11}{6}+2\cdot\frac{5\cdot 6}{2}$$
$$=55+30=85$$

답 ②

1162 $\displaystyle\sum_{n=1}^{7}\left(\sum_{m=1}^{n}mn\right)=\sum_{n=1}^{7}\left(n\sum_{m=1}^{n}m\right)=\sum_{n=1}^{7}\left\{n\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{7}(n^3+n^2)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{7}n^3+\sum_{n=1}^{7}n^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{7\cdot 8}{2}\right)^2+\frac{7\cdot 8\cdot 15}{6}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}(784+140)=462$$

답 ⑤

1163 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{m=1}^{k}(2m-k)\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{k}2m-\sum_{m=1}^{k}k\right)$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{2\cdot\frac{k(k+1)}{2}-k^2\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}$$

즉 $\dfrac{n(n+1)}{2}=66$이므로

$n(n+1)=132=11\cdot 12 \qquad \therefore n=11$

답 11

1164 $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{n}(i+j)\right\}=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}i+\sum_{j=1}^{n}j\right)$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left\{in+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$=\sum_{i=1}^{m}in+\sum_{i=1}^{m}\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=n\sum_{i=1}^{m}i+\frac{n(n+1)}{2}\cdot m$$
$$=n\cdot\frac{m(m+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\cdot m$$
$$=\frac{mn(m+n+2)}{2}$$
$$=\frac{30(11+2)}{2}=195$$

답 ⑤

1165 수열 $1\cdot 3,\ 2\cdot 5,\ 3\cdot 7,\ \cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=n(2n+1)=2n^2+n$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제8항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{8}a_k=\sum_{k=1}^{8}(2k^2+k)=2\sum_{k=1}^{8}k^2+\sum_{k=1}^{8}k$$
$$=2\cdot\frac{8\cdot 9\cdot 17}{6}+\frac{8\cdot 9}{2}$$
$$=408+36=444$$

답 444

1166 수열 $1\cdot 2^2,\ 2\cdot 3^2,\ 3\cdot 4^2,\ \cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=n(n+1)^2=n^3+2n^2+n$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(k^3+2k^2+k)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}k^3+2\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k$$
$$=\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2+2\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+\frac{10\cdot 11}{2}$$
$$=3025+770+55$$
$$=3850$$

답 ④

1167 (1) $a_1=9=10-1,\ a_2=99=100-1=10^2-1,$

$a_3=999=1000-1=10^3-1,\ \cdots$이므로

$a_n=10^n-1 \quad \cdots ❶$

(2) $\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(10^k-1)=\sum_{k=1}^{n}10^k-\sum_{k=1}^{n}1$

$$=\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n=\frac{10}{9}(10^n-1)-n \quad \cdots ❷$$

답 (1) $a_n=10^n-1$ (2) $S_n=\dfrac{10}{9}(10^n-1)-n$

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	50 %
❷ S_n을 구할 수 있다.	50 %

1168 수열 $1,\ 1+3,\ 1+3+5,\ \cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2$$

한편 $2n-1=13$에서 $\quad n=7$

따라서 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제7항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{7} a_k=\sum_{k=1}^{7} k^2=\frac{7\cdot 8\cdot 15}{6}=140$$ 답 ②

1169 수열 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$, $\left(1+\frac{2}{n}\right)^2$, $\left(1+\frac{3}{n}\right)^2$, …의 일반항을 a_k라 하면

$$a_k=\left(1+\frac{k}{n}\right)^2=1+\frac{2k}{n}+\frac{k^2}{n^2}$$

따라서 주어진 식은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k&=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}1+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2\\&=n+\frac{2}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\&=\frac{6n^2+6n(n+1)+(n+1)(2n+1)}{6n}\\&=\frac{6n(2n+1)+(n+1)(2n+1)}{6n}\\&=\frac{(2n+1)(7n+1)}{6n}\end{aligned}$$

답 $\frac{(2n+1)(7n+1)}{6n}$

1170 수열 $1\cdot(n-1)$, $2\cdot(n-2)$, $3\cdot(n-3)$, …의 일반항을 a_k라 하면

$$a_k=k(n-k)=nk-k^2$$

따라서 주어진 식은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} a_k&=\sum_{k=1}^{n-1}(nk-k^2)=n\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}k^2\\&=n\cdot\frac{(n-1)n}{2}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\\&=\frac{n(n-1)\{3n-(2n-1)\}}{6}\\&=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}\end{aligned}$$ 답 $\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$

1171 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=n^2-2n$$

(i) $n=1$일 때, $\quad a_1=S_1=1^2-2=-1$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}=n^2-2n-\{(n-1)^2-2(n-1)\}\\&=2n-3 \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $a_1=-1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=2n-3$$

따라서 $a_{2k-1}=2(2k-1)-3=4k-5$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1}&=\sum_{k=1}^{10}(4k-5)=4\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}5\\&=4\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-5\cdot 10\\&=220-50=170\end{aligned}$$ 답 170

1172 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=n^2+3$$

이므로 $\quad a_1=S_1=1^2+3=4$

$$a_{30}=S_{30}-S_{29}=(30^2+3)-(29^2+3)=59$$

$$\therefore a_1+a_{30}=63$$ 답 ④

다른풀이 $S_n=n^2+3$에서

(i) $n=1$일 때, $\quad a_1=S_1=4$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}=n^2+3-\{(n-1)^2+3\}\\&=2n-1\end{aligned}$$

$$\therefore a_1+a_{30}=4+(2\cdot 30-1)=63$$

1173 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=n^2+n$$

(i) $n=1$일 때, $\quad a_1=S_1=1^2+1=2$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}=n^2+n-\{(n-1)^2+(n-1)\}\\&=2n \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=2n$$

따라서 $ka_k=k\cdot 2k=2k^2$이므로

$$\sum_{k=1}^{8} ka_k=\sum_{k=1}^{8} 2k^2=2\sum_{k=1}^{8} k^2=2\cdot\frac{8\cdot 9\cdot 17}{6}=408$$ 답 ④

1174 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=2^{n+1}-2$$

(i) $n=1$일 때, $\quad a_1=S_1=2^2-2=2$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}=2^{n+1}-2-(2^n-2)\\&=2^n(2-1)=2^n \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=2^n \qquad \cdots ❶$$

$$\therefore a_{2k}=2^{2k}=4^k$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{7} a_{2k}=\sum_{k=1}^{7} 4^k=\frac{4(4^7-1)}{4-1}=\frac{2^{16}-4}{3} \qquad \cdots ❷$$

따라서 $p=3$, $q=16$이므로 $\quad p+q=19$ $\cdots$ ❸

답 19

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sum_{k=1}^{7} a_{2k}$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1175 수열 2, 5, 8, …은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이므로 일반항은

$$2+(n-1)\cdot 3=3n-1$$

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제14항까지의 합은

10 수열의 합

$\sum_{k=1}^{14} a_k = \sum_{k=1}^{14} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2}\right)$

$= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{41}-\frac{1}{44}\right)\right\}$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{44}\right) = \frac{7}{44}$ 답 ④

1176 수열 $1, \frac{1}{1+2}, \frac{1}{1+2+3}, \cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n = \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)}$

$= 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ ⋯ ❶

한편 $a_k = \frac{1}{1+2+3+\cdots+10}$에서

$\frac{1}{1+2+3+\cdots+k} = \frac{1}{1+2+3+\cdots+10}$ $\therefore k=10$

∴ (주어진 식)

$= \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} 2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= 2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$

$= 2\left(1-\frac{1}{11}\right) = \frac{20}{11}$ ⋯ ❷

답 $\frac{20}{11}$

채점 기준	비율
❶ 수열의 일반항을 구할 수 있다.	50 %
❷ 식의 값을 구할 수 있다.	50 %

1177 수열 $\frac{1}{2^2-1}, \frac{1}{4^2-1}, \frac{1}{6^2-1}, \cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n = \frac{1}{(2n)^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

한편 $a_k = \frac{1}{100^2-1}$에서 $\frac{1}{(2k)^2-1} = \frac{1}{100^2-1}$

$2k=100$ $\therefore k=50$

$\therefore \frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\cdots+\frac{1}{100^2-1}$

$= \sum_{k=1}^{50} a_k = \sum_{k=1}^{50} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$

$= \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)\right\}$

$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{101}\right) = \frac{50}{101}$

따라서 $p=101$, $q=50$이므로 $p-q=51$ 답 51

1178 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=-4$, $\alpha_n\beta_n=-(4n^2-1)$

이므로

$\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n} = \frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n} = \frac{4}{4n^2-1} = \frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$

$= 2\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

$\therefore \sum_{n=1}^{30}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$

$= \sum_{n=1}^{30} 2\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

$= 2\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{59}-\frac{1}{61}\right)\right\}$

$= 2\left(1-\frac{1}{61}\right) = \frac{120}{61}$ 답 $\frac{120}{61}$

1179 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$

$= \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})}$

$= \sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제23항까지의 합은

$\sum_{k=1}^{23} a_k$

$= \sum_{k=1}^{23} (\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$

$= (\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{25}-\sqrt{24})$

$= \sqrt{25}-\sqrt{2} = 5-\sqrt{2}$ 답 ②

1180 $\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}} = \frac{2(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})}$

$= \sqrt{k+2}-\sqrt{k}$

$\therefore \sum_{k=1}^{79} \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}$

$= \sum_{k=1}^{79} (\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$

$= (\sqrt{3}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{6}-\sqrt{4})$

$+\cdots+(\sqrt{80}-\sqrt{78})+(\sqrt{81}-\sqrt{79})$

$= \sqrt{80}+\sqrt{81}-1-\sqrt{2} = 4\sqrt{5}-\sqrt{2}+8$

따라서 $a=4$, $b=8$이므로 $a+b=12$ 답 ②

1181 수열 $\{a_n\}$은 첫째항과 공차가 모두 3인 등차수열이므로

$a_n = 3+(n-1)\cdot 3 = 3n$ ⋯ ❶

$\therefore \frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}} = \frac{1}{\sqrt{3k}+\sqrt{3(k+1)}}$

$= \frac{\sqrt{3k+3}-\sqrt{3k}}{(\sqrt{3k+3}+\sqrt{3k})(\sqrt{3k+3}-\sqrt{3k})}$

$= \frac{1}{3}(\sqrt{3k+3}-\sqrt{3k})$ ⋯ ❷

$\therefore \sum_{k=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$

$= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{24} (\sqrt{3k+3}-\sqrt{3k})$

$= \frac{1}{3}\{(\sqrt{6}-\sqrt{3})+(\sqrt{9}-\sqrt{6})+(\sqrt{12}-\sqrt{9})$

$+\cdots+(\sqrt{75}-\sqrt{72})\}$

$= \frac{1}{3}(\sqrt{75}-\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ⋯ ❸

답 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	20 %
❷ $\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$을 간단히 할 수 있다.	40 %
❸ 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

1182 $\sum_{k=1}^{63}\log_2\left(1+\frac{1}{k}\right)$

$=\sum_{k=1}^{63}\log_2\frac{k+1}{k}$

$=\log_2\frac{2}{1}+\log_2\frac{3}{2}+\log_2\frac{4}{3}+\cdots+\log_2\frac{64}{63}$

$=\log_2\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{64}{63}\right)$

$=\log_2 64$

$=\log_2 2^6=6$ 답 ③

1183 수열 $\{a_n\}$은 첫째항과 공비가 모두 3인 등비수열이므로

$a_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$ ··· ❶

$\therefore \sum_{k=1}^{n}\log_{27}a_k=\sum_{k=1}^{n}\log_{3^3}3^k$

$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}k$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{n(n+1)}{6}$ ··· ❷

즉 $\frac{n(n+1)}{6}=155$이므로

$n(n+1)=155\cdot 6=30\cdot 31$

$\therefore n=30$ ··· ❸

답 30

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	20 %
❷ $\sum_{k=1}^{n}\log_{27}a_k$를 간단히 할 수 있다.	50 %
❸ n의 값을 구할 수 있다.	30 %

1184 $a_n=1+\frac{1}{n^2-1}=\frac{n^2}{n^2-1}$이므로

$\sum_{k=2}^{19}\log a_k$

$=\sum_{k=2}^{19}\log\frac{k^2}{k^2-1}$

$=\sum_{k=2}^{19}\log\left(\frac{k}{k-1}\cdot\frac{k}{k+1}\right)$

$=\log\left(\frac{2}{2-1}\cdot\frac{2}{2+1}\right)+\log\left(\frac{3}{3-1}\cdot\frac{3}{3+1}\right)$

$+\log\left(\frac{4}{4-1}\cdot\frac{4}{4+1}\right)+\cdots+\log\left(\frac{19}{19-1}\cdot\frac{19}{19+1}\right)$

$=\log\left\{\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdot\cdots\cdot\left(\frac{19}{18}\cdot\frac{19}{20}\right)\right\}$

$=\log\left(2\cdot\frac{19}{20}\right)=\log\frac{19}{10}$

따라서 $p=10$, $q=19$이므로

$p+q=29$ 답 ③

1185 위에서 n번째 줄에는 n개의 자연수가 있으므로 첫 번째 줄부터 n번째 줄까지의 자연수의 개수는

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

$n=13$일 때 $\frac{13\cdot 14}{2}=91$, $n=14$일 때 $\frac{14\cdot 15}{2}=105$이므로 100은 위에서 14번째 줄의 왼쪽에서 9번째에 있다.

따라서 $a=14$, $b=9$이므로 $a+b=23$ 답 ③

1186 각 줄의 첫 번째 수는 차례대로

$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ \cdots$

이므로 8번째 줄의 첫 번째 수는

$8^2=64$

이때 8번째 줄은 왼쪽에서 4번째에 있는 수까지 1씩 줄어들므로 구하는 수는 61이다. 답 ②

1187 n번째 줄에는 n개의 자연수가 있으므로 첫 번째 줄부터 9번째 줄까지의 자연수의 개수는

$\sum_{k=1}^{9}k=\frac{9\cdot 10}{2}=45$

이때 $45+3=48$이므로 10번째 줄의 왼쪽에서 3번째에 있는 수는 수열

$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots$

의 제48항과 같다.

수열 $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots$은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로 등차수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=1+(n-1)\cdot 2=2n-1$

따라서 $a_{48}=2\cdot 48-1=95$이므로 구하는 수는 95이다. 답 95

1188 전략 $\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$임을 이용한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{14}a_{k+1}-\sum_{k=2}^{15}a_{k-1}=(a_2+a_3+\cdots+a_{15})-(a_1+a_2+\cdots+a_{14})$

$=a_{15}-a_1$

$=30-3=27$ 답 27

1189 전략 $(a_k+1)(a_k-1)$을 전개한 후 Σ의 성질을 이용한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)(a_k-1)=\sum_{k=1}^{10}(a_k{}^2-1)=\sum_{k=1}^{10}a_k{}^2-\sum_{k=1}^{10}1$

$=22-10=12$ 답 ①

1190 전략 주어진 조건을 이용하여 a_k+2b_k를 b_k에 대한 식으로 변형한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k+b_k)$

$=\sum_{k=1}^{10}(10+b_k)$

$=\sum_{k=1}^{10}10+\sum_{k=1}^{10}b_k$

$=100+\sum_{k=1}^{10}b_k$

따라서 $100+\sum_{k=1}^{10}b_k=160$이므로

$\sum_{k=1}^{10}b_k=60$ 답 ①

10 수열의 합

1191 전략 주어진 식을 간단히 한 후 자연수의 거듭제곱의 합을 이용한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{5}(k+3)^2-\sum_{k=1}^{5}(k^2+5)=\sum_{k=1}^{5}(k^2+6k+9)-\sum_{k=1}^{5}(k^2+5)$

$$=\sum_{k=1}^{5}(6k+4)$$
$$=6\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}4$$
$$=6\cdot\frac{5\cdot6}{2}+4\cdot5$$
$$=90+20=110$$

답 110

1192 전략 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$로 놓고 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq2)$임을 이용하여 a_{40}을 구한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n(n-1)$

$\therefore a_{40}=S_{40}-S_{39}=40\cdot39-39\cdot38$

$=39(40-38)=78$

답 ②

1193 전략 $\sum_{k=1}^{99}(a_{k+1}-a_k)$를 합의 꼴로 나타내어 간단히 한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{99}(a_{k+1}-a_k)=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{100}-a_{99})$

$=a_{100}-a_1=a_{100}-1$ ⋯ ❶

따라서 $a_{100}-1=300$이므로 $a_{100}=301$ ⋯ ❷

답 301

채점 기준	비율
❶ $\sum_{k=1}^{99}(a_{k+1}-a_k)$를 간단히 할 수 있다.	80 %
❷ a_{100}을 구할 수 있다.	20 %

1194 전략 주어진 두 등식에 $n=10$을 대입한 값을 이용한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{n}a_k=3n$, $\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{1}{2}n^2$에 $n=10$을 각각 대입하면

$\sum_{k=1}^{10}a_k=3\cdot10=30$, $\sum_{k=1}^{10}b_k=\frac{1}{2}\cdot10^2=50$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}(a_k+4b_k-3)=\sum_{k=1}^{10}a_k+4\sum_{k=1}^{10}b_k-\sum_{k=1}^{10}3$

$=30+4\cdot50-3\cdot10$

$=200$

답 ③

1195 전략 주어진 두 등식을 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $a_8a_{10}=100$에서

$a_1r^7\cdot a_1r^9=100$, $a_1{}^2r^{16}=100$

$(a_1r^8)^2=10^2$

이때 모든 항이 양수이므로 $a_1r^8=10$ ⋯⋯ ㉠

$a_9+a_{11}=30$에서 $a_1r^8+a_1r^{10}=30$

$\therefore a_1r^8(1+r^2)=30$ ⋯⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$10(1+r^2)=30$, $r^2+1=3$, $r^2=2$

$\therefore r=\sqrt{2}\ (\because r>0)$

$r=\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면

$a_1\cdot(\sqrt{2})^8=10$ $\therefore a_1=\frac{5}{8}$

따라서 $a_n=\frac{5}{8}(\sqrt{2})^{n-1}$이므로

$a_{2k-1}=\frac{5}{8}(\sqrt{2})^{2k-1-1}=\frac{5}{8}\{(\sqrt{2})^2\}^{k-1}$

$=\frac{5}{8}\cdot2^{k-1}$

$\therefore \sum_{k=5}^{10}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{10}a_{2k-1}-\sum_{k=1}^{4}a_{2k-1}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{5}{8}\cdot2^{k-1}-\sum_{k=1}^{4}\frac{5}{8}\cdot2^{k-1}$

$=\frac{5}{8}\cdot\frac{2^{10}-1}{2-1}-\frac{5}{8}\cdot\frac{2^4-1}{2-1}$

$=\frac{5}{8}(1023-15)=630$

답 630

다른풀이 a_9는 a_8과 a_{10}의 등비중항이므로

$a_9{}^2=a_8a_{10}=100$ $\therefore a_9=10\ (\because a_9>0)$

$a_9+a_{11}=30$에서 $10+a_{11}=30$ $\therefore a_{11}=20$

따라서 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 공비가 2인 등비수열이므로

$\sum_{k=5}^{10}a_{2k-1}=a_9+a_{11}+a_{13}+\cdots+a_{19}$

$=\frac{10(2^6-1)}{2-1}=630$

1196 전략 주어진 등식을 이용하여 a_k-a_{k+1}을 구한 후 자연수의 거듭제곱의 합을 계산한다.

풀이 $a_{n+1}-a_n=2n-5$에서 $a_k-a_{k+1}=-2k+5$이므로

$k(a_k-a_{k+1})=k(-2k+5)=-2k^2+5k$ ⋯ ❶

$\therefore \sum_{k=1}^{10}k(a_k-a_{k+1})=\sum_{k=1}^{10}(-2k^2+5k)=-2\sum_{k=1}^{10}k^2+5\sum_{k=1}^{10}k$

$=-2\cdot\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+5\cdot\frac{10\cdot11}{2}$

$=-770+275$

$=-495$ ⋯ ❷

답 -495

채점 기준	비율
❶ $k(a_k-a_{k+1})$을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\sum_{k=1}^{10}k(a_k-a_{k+1})$의 값을 구할 수 있다.	60 %

1197 전략 $\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)$임을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\sum_{k=0}^{n}(x-k)^2=\sum_{k=1}^{n}(x+k)^2$에서

$x^2+\sum_{k=1}^{n}(x-k)^2=\sum_{k=1}^{n}(x+k)^2$

$x^2+\sum_{k=1}^{n}\{(x-k)^2-(x+k)^2\}=0$

$x^2-\sum_{k=1}^{n}4kx=0$, $x^2-4x\sum_{k=1}^{n}k=0$

$x^2-4x\cdot\frac{n(n+1)}{2}=0$, $x^2-2xn(n+1)=0$

$x\{x-2n(n+1)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2n(n+1)$

따라서 $a_n=2n(n+1)$이므로

$a_{10}=2\cdot10\cdot11=220$

답 ③

1198 전략 원을 이등분하는 직선은 원의 중심을 지남을 이용한다.

풀이 직선 $y=3x+a_n$이 원 $(x-n)^2+(y-6n^2-3n)^2=4n$을 이등분하므로 직선 $y=3x+a_n$은 원의 중심 $(n,\ 6n^2+3n)$을 지난다.

$6n^2+3n=3n+a_n$에서 $\quad a_n=6n^2$

따라서 $ka_k=k\cdot6k^2=6k^3$이므로

$$\sum_{k=1}^{5}ka_k=\sum_{k=1}^{5}6k^3=6\sum_{k=1}^{5}k^3$$
$$=6\cdot\left(\frac{5\cdot6}{2}\right)^2$$
$$=1350$$

답 1350

1199 전략 일반항에서 상수인 것과 상수가 아닌 것을 구별하여 괄호 안부터 계산한다.

풀이
$$\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{l}1\right)\right\}=\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}l\right)=\sum_{m=1}^{n}\frac{m(m+1)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}(m^2+m)=\frac{1}{2}\left(\sum_{m=1}^{n}m^2+\sum_{m=1}^{n}m\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$=\frac{n(n+1)}{4}\left(\frac{2n+1}{3}+1\right)$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{n+2}{3}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

답 ①

1200 전략 먼저 주어진 수열의 일반항을 구한다.

풀이 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=2^{n+1}-2n$ ··· ❶

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제7항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{7}a_k=\sum_{k=1}^{7}(2^{k+1}-2k)=\sum_{k=1}^{7}2^{k+1}-2\sum_{k=1}^{7}k$$
$$=\frac{4(2^7-1)}{2-1}-2\cdot\frac{7\cdot8}{2}$$
$$=508-56=452$$ ··· ❷

답 452

채점 기준	비율
❶ 수열의 일반항을 구할 수 있다.	40 %
❷ 첫째항부터 제7항까지의 합을 구할 수 있다.	60 %

1201 전략 일반항의 분모를 유리화한다.

풀이 수열 $\frac{1}{1+\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}},\ \cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$$
$$=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$
$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$=\sqrt{n+1}-1$$

따라서 $\sqrt{n+1}-1=10$이므로 $\quad\sqrt{n+1}=11$

$n+1=121\quad\therefore\ n=120$

답 ④

1202 전략 일반항의 k에 1, 2, 3, …, 126을 차례대로 대입한 후 로그의 성질을 이용한다.

풀이
$$\sum_{k=1}^{126}\log_7\{\log_{k+1}(k+2)\}$$
$$=\log_7(\log_2 3)+\log_7(\log_3 4)+\log_7(\log_4 5)+\cdots+\log_7(\log_{127}128)$$
$$=\log_7(\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\cdots\cdot\log_{127}128)$$
$$=\log_7\left(\frac{\log 3}{\log 2}\cdot\frac{\log 4}{\log 3}\cdot\frac{\log 5}{\log 4}\cdot\cdots\cdot\frac{\log 128}{\log 127}\right)$$
$$=\log_7\left(\frac{\log 128}{\log 2}\right)=\log_7(\log_2 128)$$
$$=\log_7(\log_2 2^7)=\log_7 7=1$$

답 ②

라쎈 특강 **로그의 밑의 변환**

$a>0,\ a\neq1,\ b>0,\ b\neq1,\ N>0$일 때,

① $\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$ ② $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$

1203 전략 위에서 m번째 줄, 왼쪽에서 n번째에 있는 수의 규칙을 찾아본다.

풀이 위에서 m번째 줄의 왼쪽에서 n번째에 있는 수는 $\quad mn$

대각선 위의 수는 m번째 줄의 왼쪽에서 m번째에 있는 수이므로 그 수는 $\quad m^2$

100은 대각선 위의 수이므로 $100=10^2$에서 100은 10번째 줄의 왼쪽에서 10번째에 있다. ··· ❶

따라서 a는 9번째 줄의 왼쪽에서 9번째에 있는 수, b는 9번째 줄의 왼쪽에서 10번째에 있는 수, c는 10번째 줄의 왼쪽에서 9번째에 있는 수이므로

$a=9^2=81,\ b=9\cdot10=90,\ c=10\cdot9=90$ ··· ❷

$\therefore\ a+b+c=261$ ··· ❸

답 261

채점 기준	비율
❶ 100이 몇 번째 줄의 왼쪽에서 몇 번째에 있는지 알 수 있다.	30 %
❷ $a,\ b,\ c$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1204 전략 나머지정리를 이용하여 a_n을 구한다.

풀이 $f(x)=x^{n-1}(x-2)$라 하면 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 $f(3)$이므로

$f(3)=3^{n-1}\cdot(3-2)=3^{n-1}$

따라서 $a_n=3^{n-1}$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}=\frac{3^n-1}{3-1}=\frac{3^n-1}{2}$$

답 ③

1205 전략 삼각형의 넓이 a_n을 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $a_n=\frac{1}{2}\cdot\{(n+1)-(n-1)\}\cdot\frac{3}{n}=\frac{3}{n}$이므로

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{9}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{10}\frac{9}{\frac{3}{n}\cdot\frac{3}{n+1}}=\sum_{n=1}^{10}(n^2+n)$$
$$=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+\frac{10\cdot11}{2}$$
$$=385+55=440$$

답 ④

10 수열의 합

1206 전략 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$로 놓고 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}\,(n\ge2)$임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=(n-1)^2$$

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=0$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(n-1)^2-(n-2)^2=2n-3$$

(i), (ii)에서 $a_1=0$, $a_n=2n-3\ (n\ge2)$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{5}{a_k}^2&={a_1}^2+\sum_{k=2}^{5}{a_k}^2=\sum_{k=1}^{5}(2k-3)^2-(2\cdot1-3)^2\\&=\sum_{k=1}^{5}(4k^2-12k+9)-1\\&=4\sum_{k=1}^{5}k^2-12\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}9-1\\&=4\cdot\frac{5\cdot6\cdot11}{6}-12\cdot\frac{5\cdot6}{2}+9\cdot5-1\\&=220-180+45-1\\&=84\end{aligned}$$

답 ③

1207 전략 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구한다.

풀이 $a_n=1+(n-1)\cdot2=2n-1$이므로

$a_k=2k-1$, $a_{k+1}=2(k+1)-1=2k+1$

$$\begin{aligned}\therefore &\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{a_ka_{k+1}}\\&=\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{17}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{17}\right)=\frac{8}{17}\end{aligned}$$

답 $\frac{8}{17}$

1208 전략 n번째 줄에 나열된 수들의 규칙을 파악한 후 그 합을 식으로 나타낸다.

풀이 n번째 줄에 나열된 수의 합은 첫째항이 n, 공차가 n인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

n번째 줄에 나열된 수의 합을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{n\{2n+(n-1)\cdot n\}}{2}=\frac{n^3+n^2}{2}$$ ··· ❶

따라서 첫 번째 줄부터 8번째 줄까지 나열된 수의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{8}a_k&=\sum_{k=1}^{8}\frac{k^3+k^2}{2}\\&=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{8}k^3+\sum_{k=1}^{8}k^2\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{8\cdot9}{2}\right)^2+\frac{8\cdot9\cdot17}{6}\right\}\\&=\frac{1}{2}(1296+204)=750\end{aligned}$$ ··· ❷

답 750

채점 기준	비율
❶ n번째 줄에 나열된 수의 합을 구할 수 있다.	50 %
❷ 첫 번째 줄부터 8번째 줄까지 나열된 수의 합을 구할 수 있다.	50 %

11 수학적 귀납법

Ⅲ. 수열

1209 $a_{n+1}=a_n+n+1$에서 $a_1=1$이므로

$a_2=a_1+1+1=1+1+1=3$

$a_3=a_2+2+1=3+2+1=6$

$\therefore a_4=a_3+3+1=6+3+1=10$ 답 10

1210 $a_{n+1}=na_n+1$에서 $a_1=2$이므로

$a_2=a_1+1=2+1=3$

$a_3=2a_2+1=2\cdot3+1=7$

$\therefore a_4=3a_3+1=3\cdot7+1=22$ 답 22

1211 답 $a_1=-1$, $a_{n+1}=a_n+3\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

1212 답 $a_1=4$, $a_{n+1}=a_n-\frac{1}{2}\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

1213 답 -2

1214 $a_{n+1}-a_n=7$에서 $a_{n+1}=a_n+7$

따라서 구하는 공차는 7이다. 답 7

1215 주어진 수열은 첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n=3+(n-1)\cdot2=2n+1$ 답 $a_n=2n+1$

1216 주어진 수열은 첫째항이 7, 공차가 -1인 등차수열이므로

$a_n=7+(n-1)\cdot(-1)=-n+8$ 답 $a_n=-n+8$

1217 $a_{n+1}-a_n=5$에서 주어진 수열은 공차가 5인 등차수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=-2$이므로

$a_n=-2+(n-1)\cdot5=5n-7$ 답 $a_n=5n-7$

1218 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$에서 주어진 수열은 등차수열이고

$a_1=12$, $a_2-a_1=8-12=-4$

이므로 첫째항이 12, 공차가 -4이다.

$\therefore a_n=12+(n-1)\cdot(-4)$

$=-4n+16$ 답 $a_n=-4n+16$

1219 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 주어진 수열은 등차수열이고

$a_1=-5$, $a_2-a_1=-3-(-5)=2$

이므로 첫째항이 -5, 공차가 2이다.

$\therefore a_n=-5+(n-1)\cdot2=2n-7$ 답 $a_n=2n-7$

1220 주어진 수열은 첫째항이 2, 공차가 4인 등차수열이므로

$a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+4\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

답 $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+4\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

참고 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로

$a_1=2$, $a_2=6$, $a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

또는 $a_1=2$, $a_2=6$, $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

와 같이 정의할 수도 있다.

1221 주어진 수열은 첫째항이 4, 공차가 -3인 등차수열이므로
$a_1=4,\ a_{n+1}=a_n-3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
답 $a_1=4,\ a_{n+1}=a_n-3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

1222 답 $a_1=2,\ a_{n+1}=-2a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

1223 답 $a_1=8,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

1224 답 3

1225 $a_{n+1}\div a_n=-5$에서 $\quad a_{n+1}=-5a_n$
따라서 구하는 공비는 -5이다. 답 -5

1226 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=-2$에서 $\quad a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n$
따라서 구하는 공비는 $-\frac{1}{2}$이다. 답 $-\frac{1}{2}$

1227 주어진 수열은 첫째항이 1, 공비가 4인 등비수열이므로
$a_n=1\cdot 4^{n-1}=4^{n-1}$ 답 $a_n=4^{n-1}$

1228 주어진 수열은 첫째항이 -5, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로
$a_n=-5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 답 $a_n=-5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

1229 $a_{n+1}\div a_n=2$에서 주어진 수열은 공비가 2인 등비수열이다.
이때 첫째항이 $a_1=2$이므로
$a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$ 답 $a_n=2^n$

1230 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$에서 주어진 수열은 등비수열이고
$a_1=-48,\ a_2\div a_1=12\div(-48)=-\frac{1}{4}$
이므로 첫째항이 -48, 공비가 $-\frac{1}{4}$이다.
$\therefore\ a_n=-48\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ 답 $a_n=-48\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

1231 ${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$에서 주어진 수열은 등비수열이고
$a_1=\frac{1}{2},\ a_2\div a_1=4\div\frac{1}{2}=8$
이므로 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 8이다.
$\therefore\ a_n=\frac{1}{2}\cdot 8^{n-1}$ 답 $a_n=\frac{1}{2}\cdot 8^{n-1}$

1232 주어진 수열은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이므로
$a_1=3,\ a_{n+1}=2a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
답 $a_1=3,\ a_{n+1}=2a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

참고 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로
$a_1=3,\ a_2=6,\ a_{n+1}\div a_n=a_{n+2}\div a_{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
또는 $a_1=3,\ a_2=6,\ {a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
와 같이 정의할 수도 있다.

1233 주어진 수열은 첫째항이 1, 공비가 -3인 등비수열이므로
$a_1=1,\ a_{n+1}=-3a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
답 $a_1=1,\ a_{n+1}=-3a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

1234 주어진 수열은 첫째항이 100, 공비가 $\frac{1}{10}$인 등비수열이므로
$a_1=100,\ a_{n+1}=\frac{1}{10}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
답 $a_1=100,\ a_{n+1}=\frac{1}{10}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

1235 답 (가) 0 (나) n

1236 답 (가) $n=1$ (나) $k+1$

1237 답 (가) $n=5$ (나) $k+1$

1238 (i) $n=1$일 때,
(좌변)$=1$, (우변)$=\frac{1\cdot 2}{2}=\boxed{1}$
따라서 주어진 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$
위의 식의 양변에 $k+1$을 더하면
$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+k+(k+1)&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\&=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\&=\frac{(k+1)(\boxed{k+2})}{2}\end{aligned}$$
따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.
$\therefore$ (가) 1 (나) $k+2$ 답 (가) 1 (나) $k+2$

1239 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 65, 공차가 3인 등차수열이므로
$a_n=65+(n-1)\cdot 3=3n+62$
$\therefore\ a_{10}=3\cdot 10+62=92$ 답 ②

1240 $a_{n+1}-a_n=5$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 5인 등차수열이다.
이때 첫째항이 $a_1=-1$이므로
$a_n=-1+(n-1)\cdot 5=5n-6$ ··· ❶
$a_k=89$에서 $\quad 5k-6=89,\quad 5k=95$
$\therefore\ k=19$ ··· ❷
답 19

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	60 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40 %

1241 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.
수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_{10}=6$에서 $\quad a+9d=6$ ······ ㉠
$a_{20}=11$에서 $\quad a+19d=11$ ······ ㉡

11 수학적 귀납법

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{2}$, $d=\frac{1}{2}$

따라서 $a_n=\frac{3}{2}+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n+1$이므로

$a_{30}=\frac{1}{2}\cdot30+1=16$ 답 ④

1242 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$, 즉 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고

$a_1=15$, $a_2-a_1=11-15=-4$

이므로 첫째항이 15, 공차가 -4이다.

따라서 $a_n=15+(n-1)\cdot(-4)=-4n+19$이므로

$$\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(-4n+19)=-4\cdot\frac{10\cdot11}{2}+19\cdot10$$
$$=-220+190=-30$$ 답 -30

다른풀이 $\sum_{n=1}^{10}a_n$은 첫째항이 15, 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$\sum_{n=1}^{10}a_n=\frac{10\{2\cdot15+(10-1)\cdot(-4)\}}{2}=-30$$

1243 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 3인 등비수열이므로

$a_n=1\cdot3^{n-1}=3^{n-1}$

따라서 $a_{15}=3^{15-1}=3^{14}$이므로 $k=14$ 답 14

1244 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$에서 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=4^8$이므로

$$a_n=4^8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(2^2)^8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2^{16}}{2^{n-1}}$$

$a_k=\frac{1}{4^{10}}=\frac{1}{(2^2)^{10}}=\frac{1}{2^{20}}$에서 $\frac{2^{16}}{2^{k-1}}=\frac{1}{2^{20}}$, $2^{k-1}=2^{36}$

$k-1=36$ $\therefore k=37$ 답 ⑤

1245 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\sqrt{2}$, 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열이므로

$a_n=\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2})^{n-1}=(\sqrt{2})^n$

이때 $a_{19}=512\sqrt{2}$, $a_{20}=1024$이므로 수열 $\{a_n\}$이 처음으로 1000 이상이 되는 항은 제20항이다. 답 제20항

1246 ${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고

$$a_1=1,\ \frac{a_2}{a_1}=\frac{-\frac{1}{2}}{1}=-\frac{1}{2}$$

이므로 첫째항이 1, 공비가 $-\frac{1}{2}$이다.

$$\therefore a_n=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$ ··· ❶

$$\therefore \sum_{n=1}^{8}a_n=\frac{1\cdot\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}$$
$$=\frac{85}{128}$$ ··· ❷

답 $\frac{85}{128}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	60 %
❷ $\sum_{n=1}^{8}a_n$의 값을 구할 수 있다.	40 %

1247 $a_{n+1}=a_n+2n-3$에서 $a_1=-3$이므로

$a_2=a_1+2\cdot1-3=-3+(-1)=-4$
$a_3=a_2+2\cdot2-3=-4+1=-3$
$a_4=a_3+2\cdot3-3=-3+3=0$
$a_5=a_4+2\cdot4-3=0+5=5$
$a_6=a_5+2\cdot5-3=5+7=12$

$$\therefore \sum_{k=1}^{6}a_k=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$$
$$=-3+(-4)+(-3)+0+5+12$$
$$=7$$ 답 ③

1248 $a_{n+1}=n-a_n$에서 $a_1=1$이므로

$a_2=1-a_1=1-1=0$
$a_3=2-a_2=2-0=2$
$\therefore a_4=3-a_3=3-2=1$ 답 1

1249 $a_{n+1}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}a_n$에서 $a_1=1$이므로

$$a_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}}a_1=\sqrt{2}$$
$$a_3=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a_2=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{3}$$
$$a_4=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}a_3=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{4}$$
$\vdots$
$a_{16}=\sqrt{16}$
$\therefore \log_2a_{16}=\log_2\sqrt{16}=\log_22^2$
$=2$ 답 ④

1250 $a_{n+1}=\begin{cases}a_n+2 & (n\text{은 짝수})\\ 2a_n & (n\text{은 홀수})\end{cases}$에서 $a_1=2$이므로

$a_2=2a_1=2\cdot2=4$, $a_3=a_2+2=4+2=6$,
$a_4=2a_3=2\cdot6=12$, $a_5=a_4+2=12+2=14$,
$a_6=2a_5=2\cdot14=28$, $a_7=a_6+2=28+2=30$,
$a_8=2a_7=2\cdot30=60$, $a_9=a_8+2=60+2=62$
$\therefore a_{10}=2a_9=2\cdot62=124$ 답 ②

1251 $a_{n+1}=a_n+2^n$에서 $a_1=a$이므로

$a_2=a_1+2^1=a+2$
$a_3=a_2+2^2=a+2+2^2$
$a_4=a_3+2^3=a+2+2^2+2^3$
$\vdots$
$a_9=a+2+2^2+2^3+\cdots+2^8$ ··· ❶

이때 $a_9=550$이므로

$a+2+2^2+2^3+\cdots+2^8=550$ ··· ❷

$$a+\frac{2(2^8-1)}{2-1}=550$$

$a+510=550$ $\therefore a=40$ ··· ❸

답 40

채점 기준	비율
❶ $a_2, a_3, a_4, \cdots, a_9$를 구할 수 있다.	40 %
❷ a에 대한 방정식을 세울 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

1252 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$에서 $a_1=4$, $a_2=3$이므로

$a_3=a_2-a_1=3-4=-1$
$a_4=a_3-a_2=-1-3=-4$
$a_5=a_4-a_3=-4-(-1)=-3$
$a_6=a_5-a_4=-3-(-4)=1$
$a_7=a_6-a_5=1-(-3)=4$
$a_8=a_7-a_6=4-1=3$
⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 4, 3, -1, -4, -3, 1이 이 순서대로 반복되므로 $a_{n+p}=a_n$을 만족시키는 가장 작은 자연수 p는 6이다. 답 6

1253 $a_{n+2}=\dfrac{a_{n-1}a_{n+1}}{a_n}$에서 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$이므로

$a_4=\dfrac{a_1a_3}{a_2}=\dfrac{1\cdot4}{2}=2,\quad a_5=\dfrac{a_2a_4}{a_3}=\dfrac{2\cdot2}{4}=1,$

$a_6=\dfrac{a_3a_5}{a_4}=\dfrac{4\cdot1}{2}=2,\quad a_7=\dfrac{a_4a_6}{a_5}=\dfrac{2\cdot2}{1}=4,$

$a_8=\dfrac{a_5a_7}{a_6}=\dfrac{1\cdot4}{2}=2,\ \cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 1, 2, 4, 2가 이 순서대로 반복된다.
이때 $99=4\cdot24+3$이므로

$a_{99}=a_3=4$ 답 ⑤

1254 $a_1=1$에서

$a_2=(3\cdot1$을 5로 나누었을 때의 나머지$)=3$
$a_3=(3\cdot3$을 5로 나누었을 때의 나머지$)=4$
$a_4=(3\cdot4$를 5로 나누었을 때의 나머지$)=2$
$a_5=(3\cdot2$를 5로 나누었을 때의 나머지$)=1$
$a_6=(3\cdot1$을 5로 나누었을 때의 나머지$)=3$
⋮ ··· ❶

따라서 수열 $\{a_n\}$은 1, 3, 4, 2가 이 순서대로 반복된다. ··· ❷
이때 $2018=4\cdot504+2$, $2019=4\cdot504+3$, $2020=4\cdot505$이므로

$a_{2018}+a_{2019}+a_{2020}=a_2+a_3+a_4$
$=3+4+2=9$ ··· ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \cdots$을 구할 수 있다.	40 %
❷ 수열 $\{a_n\}$의 규칙을 찾을 수 있다.	40 %
❸ $a_{2018}+a_{2019}+a_{2020}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1255 $(n+1)$일 후 수족관에 남아 있는 물의 양 a_{n+1} L는 n일 후 수족관에 남아 있는 물의 양 a_n L의 $\dfrac{3}{4}$배에 20 L를 더한 것이므로

$a_{n+1}=\dfrac{3}{4}a_n+20\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

답 $a_{n+1}=\dfrac{3}{4}a_n+20\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

1256 (1) 용기에 5마리의 박테리아를 넣고 1시간이 지난 후 용기 안에 들어 있는 박테리아의 수 a_1은

$a_1=(5-3)\cdot4=8$

(2) $(n+1)$시간 후 용기 안에 들어 있는 박테리아의 수 a_{n+1}은 n시간 후 용기 안에 들어 있는 박테리아의 수 a_n에서 3마리는 죽고 나머지는 각각 4마리로 분열하므로

$a_{n+1}=(a_n-3)\cdot4$
$=4a_n-12\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

답 (1) 8 (2) $a_{n+1}=4a_n-12\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

1257 [1단계]의 도형을 만드는 데 필요한 정사각형의 개수는

$a_1=1$

[2단계]의 도형을 만드는 데 필요한 정사각형의 개수는

$a_2=a_1+4$

[3단계]의 도형을 만드는 데 필요한 정사각형의 개수는

$a_3=a_2+8$

[4단계]의 도형을 만드는 데 필요한 정사각형의 개수는

$a_4=a_3+12$
⋮

따라서 [$(n+1)$단계]의 도형을 만드는 데 필요한 정사각형의 개수는

$a_{n+1}=a_n+4n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

답 $a_{n+1}=a_n+4n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

1258 $S_{n+1}=3S_n-4$에서 $S_1=3$이므로

$S_2=3S_1-4=3\cdot3-4=5$
$S_3=3S_2-4=3\cdot5-4=11$
$S_4=3S_3-4=3\cdot11-4=29$
$S_5=3S_4-4=3\cdot29-4=83$
$\therefore a_5=S_5-S_4=83-29=54$ 답 ②

1259 $S_n=2a_n-5n$ ······ ㉠
에서

$S_{n+1}=2a_{n+1}-5(n+1)=2a_{n+1}-5n-5$

이므로

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=2a_{n+1}-5n-5-(2a_n-5n)$
$=2a_{n+1}-2a_n-5$
$\therefore a_{n+1}=2a_n+5\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

이때 ㉠에서 $S_1=a_1=2a_1-5$이므로

$a_1=5$

따라서 $a_{n+1}=2a_n+5$에서

$a_2=2a_1+5=2\cdot5+5=15$
$a_3=2a_2+5=2\cdot15+5=35$
$a_4=2a_3+5=2\cdot35+5=75$ 답 75

1260 ㄱ. $p(1)$이 참이면 주어진 조건에 의하여
$p(3),\ p(5),\ p(7),\ \cdots,\ p(2n+1)$
이 모두 참이지만 $p(2n)$이 참인지는 알 수 없다.

ㄴ. $p(2)$가 참이면 주어진 조건에 의하여
$p(4),\ p(6),\ p(8),\ \cdots,\ p(2n+2)$
가 모두 참이다.

ㄷ. ㄱ에서 $p(1)$이 참이면 $p(2n+1)$이 참이고, ㄴ에서 $p(2)$가 참이면 $p(2n+2)$가 참이다.

따라서 $p(1)$, $p(2)$가 참이면 $p(n)$이 참이다.
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

1261 조건 ㈎에서 $p(1)$이 참이므로 조건 ㈏에서 $p(2)$가 참이다.
$p(2)$가 참이므로 조건 ㈏에서 $p(4)$, 즉 $p(2^2)$이 참이다.
$p(4)$가 참이므로 조건 ㈏에서 $p(8)$, 즉 $p(2^3)$이 참이다.
⋮
따라서 $p(2^n)$이 모두 참이므로 반드시 참인 명제는 $p(64)$이다.
답 ③

1262 ㄱ. $p(1)$이 참이면
$p(3)$, $p(5)$, $p(7)$, $\cdots$, $p(2n+1)$
도 참이다.
이때 $63=2\cdot31+1$이므로 $p(63)$은 참이다.
ㄴ. $p(1)$이 참이면
$p(5)$, $p(9)$, $p(13)$, $\cdots$, $p(4n+1)$
도 참이다.
그런데 $63=4\cdot15+3$이므로 $p(63)$이 참인지는 알 수 없다.
ㄷ. $p(1)$이 참이면
$p(2\cdot1+1)=p(3)$, $p(2\cdot3+1)=p(7)$,
$p(2\cdot7+1)=p(15)$, $p(2\cdot15+1)=p(31)$,
$p(2\cdot31+1)=p(63)$, $\cdots$
도 참이다.
이상에서 조건 ㈏가 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

1263 명제 $p(n)$이 $n=3, 5, 7, 9, \cdots$일 때 참임을 보이려면
(i) $n=\boxed{3}$일 때, $p(n)$이 참임을 보인다.
(ii) $5=3+2$, $7=5+2$, $9=7+2$, $\cdots$이므로 $n=k(k\ge3)$일 때 $p(n)$이 참이라고 가정하면 $n=\boxed{k+2}$일 때도 $p(n)$이 참임을 보인다.
$\therefore$ ㈎ 3 ㈏ $k+2$ ⋯ ❶
따라서 $a=3$, $f(k)=k+2$이므로
$f(a)=f(3)=3+2=5$ ⋯ ❷
답 5

채점 기준	비율
❶ ㈎, ㈏에 알맞은 것을 구할 수 있다.	70 %
❷ $f(a)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

1264 (i) $n=1$일 때,
(좌변)$=2\cdot1-1=1$, (우변)$=1^2=\boxed{1}$
따라서 주어진 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$
위의 식의 양변에 $\boxed{2k+1}$을 더하면
$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1$$
$$=(k+1)^2$$
따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.
$\therefore$ ㈎ 1 ㈏ $2k+1$ 답 ㈎ 1 ㈏ $2k+1$

1265 (ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$2+2^2+2^3+\cdots+2^k=2^{k+1}-2$
위의 식의 양변에 $\boxed{2^{k+1}}$을 더하면
$$2+2^2+2^3+\cdots+2^k+2^{k+1}=2^{k+1}-2+2^{k+1}=2\cdot2^{k+1}-2$$
$$=\boxed{2^{k+2}-2}$$
따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.
$\therefore$ ㈎ 2^{k+1} ㈏ $2^{k+2}-2$ 답 ③

1266 (1) $n=1$일 때,
(좌변)$=1^2=1$, (우변)$=\dfrac{1\cdot2\cdot3}{6}=1$
따라서 주어진 등식이 성립한다. ⋯ ❶
(2) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$
위의 식의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$$
$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$
$$=\frac{(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}}{6}$$
$$=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$
따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다. ⋯ ❷
답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ $n=1$일 때 주어진 등식이 성립함을 보일 수 있다.	30 %
❷ $n=k+1$일 때 주어진 등식이 성립함을 보일 수 있다.	70 %

1267 (1) $n=1$일 때,
(좌변)$=\dfrac{1}{1\cdot3}=\dfrac{1}{3}$, (우변)$=\dfrac{1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$
따라서 주어진 등식이 성립한다. ⋯ ❶
(2) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$
위의 식의 양변에 $\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$을 더하면
$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{k+1}{2k+3}$$
따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다. ⋯ ❷
답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ $n=1$일 때 주어진 등식이 성립함을 보일 수 있다.	30 %
❷ $n=k+1$일 때 주어진 등식이 성립함을 보일 수 있다.	70 %

1268 (ⅱ) $n=k$일 때 $3^{2n}-1$이 8의 배수라 가정하면

$3^{2k}-1=8N$ (N은 자연수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$$\begin{aligned}3^{2(k+1)}-1&=3^2\cdot 3^{2k}-1=\boxed{9}\cdot 3^{2k}-1\\&=9(8N+1)-1\\&=9\cdot 8N+8=8(\boxed{9N+1})\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 $3^{2n}-1$은 8의 배수이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 자연수 n에 대하여 $3^{2n}-1$은 8의 배수이다.

∴ (가) 9 (나) $9N+1$

따라서 $a=9$, $f(N)=9N+1$이므로

$f(a)=f(9)=9\cdot 9+1=82$ 답 82

1269 (ⅱ) $n=k$일 때 16^n-1이 5의 배수라 가정하면

$16^k-1=5N$ (N은 자연수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$$\begin{aligned}16^{k+1}-1&=16\cdot 16^k-1=16(5N+\boxed{1})-1\\&=16\cdot 5N+\boxed{15}\\&=5(\boxed{16N+3})\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 16^n-1은 5의 배수이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 자연수 n에 대하여 16^n-1은 5의 배수이다.

∴ (가) 1 (나) 15 (다) $16N+3$ 답 풀이 참조

1270 (ⅱ) $n=k$일 때 $2^{n+1}+3^{2n-1}$이 7의 배수라 가정하면

$2^{k+1}+3^{2k-1}=7N$ (N은 자연수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$$\begin{aligned}2^{k+2}+3^{2k+1}&=\boxed{2}\cdot 2^{k+1}+\boxed{9}\cdot 3^{2k-1}\\&=2\cdot 2^{k+1}+2\cdot 3^{2k-1}+7\cdot 3^{2k-1}\\&=2(2^{k+1}+3^{2k-1})+7\cdot 3^{2k-1}\\&=2\cdot 7N+7\cdot\boxed{3^{2k-1}}\\&=7(2N+3^{2k-1})\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 $2^{n+1}+3^{2n-1}$은 7의 배수이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 자연수 n에 대하여 $2^{n+1}+3^{2n-1}$은 7의 배수이다.

∴ (가) 2 (나) 9 (다) 3^{2k-1}

따라서 $a=2$, $b=9$, $f(k)=3^{2k-1}$이므로

$f(a+b)=f(2+9)=f(11)=3^{2\cdot 11-1}=3^{21}$ 답 3^{21}

1271 (ⅱ) $n=k\,(k\ge 2)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{k+1}$을 더하면

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}&>\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}\\&=\boxed{\frac{2k+1}{k+1}}\end{aligned}\quad\cdots\cdots ㉠$$

이때

$$\begin{aligned}\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2k+2}{k+2}&=\frac{(2k+1)(k+2)-(2k+2)(k+1)}{(k+1)(k+2)}\\&=\frac{\boxed{k}}{(k+1)(k+2)}>0\end{aligned}$$

이므로 $\frac{2k+1}{k+1}>\frac{2k+2}{k+2}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k+1}>\frac{2k+2}{k+2}=\frac{2(k+1)}{k+2}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $n\ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

∴ (가) $\frac{2k+1}{k+1}$ (나) k

따라서 $f(k)=\frac{2k+1}{k+1}$, $g(k)=k$이므로

$f(3)g(8)=\frac{7}{4}\cdot 8=14$ 답 ②

1272 (ⅱ) $n=k\ (k\ge 2)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$(1+h)^k>1+kh$

위의 식의 양변에 $\boxed{1+h}$를 곱하면

$$\begin{aligned}(1+h)^{k+1}&>(1+kh)(1+h)\\&=1+\boxed{(k+1)h}+kh^2\end{aligned}\quad\cdots\cdots ㉠$$

이때 $kh^2>0$이므로

$1+(k+1)h+kh^2>1+(k+1)h$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$(1+h)^{k+1}>1+(k+1)h$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $n\ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

∴ (가) $1+h$ (나) $(k+1)h$ 답 ⑤

1273 (1) $n=3$일 때,

(좌변)$=2^4=16$, (우변)$=3\cdot 2=6$

따라서 주어진 부등식이 성립한다. ⋯ ❶

(2) $n=k\ (k\ge 3)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$2^{k+1}>k(k-1)$

위의 식의 양변에 2를 곱하면

$2^{k+2}>2k(k-1)=k^2+k(k-2)$

이때 $k^2+k(k-2)\ge k^2+k$이므로

$2^{k+2}>k^2+k=k(k+1)$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다. ⋯ ❷

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ $n=3$일 때 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있다.	30 %
❷ $n=k+1$일 때 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있다.	70 %

1274 전략 주어진 식의 양변을 제곱하여 수열 $\{a_n\}$이 어떤 수열인지 찾는다.

풀이 $a_{n+1}=\sqrt{a_n a_{n+2}}$, 즉 $a_{n+1}{}^2=a_n a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고 첫째항이 1이므로 공비를 r라 하면

$a_n=1\cdot r^{n-1}=r^{n-1}$

$\dfrac{a_6}{a_2}=\dfrac{r^5}{r}=r^4$이므로 $\quad r^4=16$

$\therefore \dfrac{a_{30}}{a_{10}}=\dfrac{r^{29}}{r^9}=r^{20}=(r^4)^5=16^5=(2^4)^5=2^{20}$ 답 ④

1275 전략 주어진 식의 n에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하여 수열의 각 항을 구한다.

풀이 $a_1=5$이므로

$a_2=a_1=5,\quad a_3=a_1+a_2=5+5=10,$

$a_4=a_1+a_2+a_3=5+5+10=20$

$\therefore a_5=a_1+a_2+a_3+a_4=5+5+10+20=40$ 답 40

1276 전략 주어진 식의 n에 1, 2, 3, 4, …를 차례대로 대입하여 규칙을 찾는다.

풀이 $a_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}a_n$에서 $a_1=1$이므로

$a_2=\dfrac{1}{2}a_1=\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{1}{2}$

$a_3=\dfrac{2}{3}a_2=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$

$a_4=\dfrac{3}{4}a_3=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}$

$a_5=\dfrac{4}{5}a_4=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{5}$

⋮

$a_k=\dfrac{1}{k}$

따라서 $a_k=\dfrac{1}{50}$에서 $\quad \dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{50}$

$\therefore k=50$ 답 50

1277 전략 주어진 식의 n에 1, 2를 차례대로 대입하여 a_3을 k에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $a_{n+1}=\dfrac{k}{a_n+2}$에서 $a_1=1$이므로

$a_2=\dfrac{k}{a_1+2}=\dfrac{k}{1+2}=\dfrac{k}{3}$

$a_3=\dfrac{k}{a_2+2}=\dfrac{k}{\frac{k}{3}+2}=\dfrac{3k}{k+6}$

$a_3=\dfrac{3}{2}$이어야 하므로

$\dfrac{3k}{k+6}=\dfrac{3}{2},\quad 6k=3k+18$

$3k=18\quad \therefore k=6$ 답 ③

1278 전략 수직선 위의 두 점 $A(a)$, $B(b)$를 이은 선분 AB의 중점의 좌표는 $\dfrac{a+b}{2}$임을 이용한다.

풀이 점 P_{n+1}은 선분 P_nP_{n+2}의 중점이므로

$a_{n+1}=\dfrac{a_n+a_{n+2}}{2}$ ⋯ ❶

즉 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고

$a_1=0,\ a_2-a_1=4-0=4$

이므로 첫째항이 0, 공차가 4이다.

$\therefore a_n=0+(n-1)\cdot 4=4n-4$ ⋯ ❷

따라서 $a_6=4\cdot 6-4=20$이므로 점 P_6이 나타내는 수는 20이다. ⋯ ❸

답 20

채점 기준	비율
❶ a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 일반항 a_n을 구할 수 있다.	50 %
❸ 점 P_6이 나타내는 수를 구할 수 있다.	20 %

1279 전략 수열 $\{a_n\}$이 등차수열임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

풀이 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$, 즉 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고

$a_1=31,\ a_2-a_1=28-31=-3$

이므로 첫째항이 31, 공차가 -3이다.

$\therefore a_n=31+(n-1)\cdot(-3)=-3n+34$

$-3n+34<0$에서 $\quad n>\dfrac{34}{3}=11.33\cdots$

따라서 제12항부터 음수이므로 첫째항부터 제11항까지의 합이 최대가 된다.

즉 S_n이 최대가 되도록 하는 자연수 n의 값은 11이다. 답 ①

1280 전략 주어진 관계식을 간단히 하여 a_{n+1}과 a_n 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $(a_{n+1}+a_n)^2=4a_na_{n+1}+25$에서

$a_{n+1}{}^2+2a_{n+1}a_n+a_n{}^2=4a_na_{n+1}+25$

$a_{n+1}{}^2-2a_na_{n+1}+a_n{}^2=25$

$(a_{n+1}-a_n)^2=25$

$\therefore a_{n+1}-a_n=-5\ (\because a_n>a_{n+1})$ ⋯ ❶

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 100, 공차가 -5인 등차수열이므로

$a_n=100+(n-1)\cdot(-5)=-5n+105$ ⋯ ❷

$\therefore a_{25}=-5\cdot 25+105=-20$ ⋯ ❸

답 -20

채점 기준	비율
❶ 주어진 관계식을 정리할 수 있다.	30 %
❷ 일반항 a_n을 구할 수 있다.	50 %
❸ a_{25}를 구할 수 있다.	20 %

1281 전략 주어진 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하여 규칙을 찾는다.

풀이 $a_{n+1}=3a_n+1$에서 $a_1=1$이므로

$a_2=3a_1+1=3+1$

$a_3=3a_2+1=3(3+1)+1=3^2+3+1$

$a_4=3a_3+1=3(3^2+3+1)+1=3^3+3^2+3+1$

⋮

$a_{10}=3a_9+1=3^9+3^8+3^7+\cdots+3+1$

$=\dfrac{3^{10}-1}{3-1}=\dfrac{1}{2}(3^{10}-1)$ 답 ①

1282 전략 a_2, a_3, a_4, …를 구하여 최초로 1이 되는 항이 제몇 항인지 구한다.

풀이 $a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n & (a_n\text{은 짝수})\\ a_n+1 & (a_n\text{은 홀수})\end{cases}$에서 $a_1=20$이므로

$a_2=\frac{1}{2}a_1=10,\quad a_3=\frac{1}{2}a_2=5,\quad a_4=a_3+1=6,$

$a_5=\frac{1}{2}a_4=3,\quad a_6=a_5+1=4,\quad a_7=\frac{1}{2}a_6=2,$

$a_8=\frac{1}{2}a_7=1,\quad a_9=a_8+1=2,\quad a_{10}=\frac{1}{2}a_9=1,\ \cdots$

따라서 $a_k=1$을 만족시키는 k의 최솟값은 8이다. 답 8

1283 전략 a_2, a_3, a_4, …를 구한 후 a_3, a_6, a_9, …의 수열의 각 항의 규칙을 찾는다.

풀이 $a_{n+1}=\begin{cases}a_n+(-1)^n\cdot 2 & (n\text{이 3의 배수가 아닌 경우})\\ a_n+1 & (n\text{이 3의 배수인 경우})\end{cases}$에서

$a_1=a$이므로

$a_2=a_1+(-1)^1\cdot 2=a-2$
$a_3=a_2+(-1)^2\cdot 2=a$
$a_4=a_3+1=a+1$
$a_5=a_4+(-1)^4\cdot 2=a+3$
$a_6=a_5+(-1)^5\cdot 2=a+1$
$a_7=a_6+1=a+2$
$a_8=a_7+(-1)^7\cdot 2=a$
$a_9=a_8+(-1)^8\cdot 2=a+2$
⋮
$\therefore a_{3n}=a+(n-1)\ (n\ge 1)$

따라서 $a_{15}=a+4=43$이므로 $a=39$ 답 ⑤

1284 전략 a_n을 이용하여 a_{n+1}을 나타낼 수 있도록 규칙을 찾는다.

풀이 (i) n명의 학생을 두 조로 나누는 방법의 수는 a_n이고 각각의 방법에서 추가된 1명을 두 조 중 어느 한 조에 넣는 방법의 수는 $\boxed{2a_n}$

(ii) n명과 추가된 1명으로 두 조를 나누는 방법의 수는 $\boxed{1}$

(i), (ii)에서 구하는 관계식은

$a_{n+1}=2a_n+1\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

$\therefore$ (가) $2a_n$ (나) 1 답 (가) $2a_n$ (나) 1

1285 전략 [1단계], [2단계], [3단계]에 사용된 성냥개비의 개수를 각각 구하여 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

풀이 (1) $a_1=4$, $a_2=a_1+6$, $a_3=a_2+8$, …이므로

$a_{n+1}=a_n+2n+4\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ ··· ❶

(2) $a_{n+1}=a_n+2n+4$이고 $a_1=4$이므로

$a_2=a_1+6=4+6$
$a_3=a_2+8=4+6+8$
$a_4=a_3+10=4+6+8+10$
⋮
$a_{10}=a_9+22=4+6+8+10+\cdots+22$
$=\frac{10(4+22)}{2}=130$ ··· ❷

답 (1) $a_{n+1}=a_n+2n+4\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ (2) 130

채점 기준	비율
❶ a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❷ a_{10}을 구할 수 있다.	60 %

1286 전략 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$임을 이용하여 주어진 등식을 변형한다.

풀이 $2S_n=a_{n+1}-3$ …… ㉠

에서

$2S_{n+1}=a_{n+2}-3$ …… ㉡

이므로 ㉡−㉠을 하면

$2(S_{n+1}-S_n)=a_{n+2}-a_{n+1}$

이때 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$이므로 $2a_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}$

$\therefore a_{n+2}=3a_{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ …… ㉢

㉠에서 $2S_1=2a_1=a_2-3$이고, $a_1=2$이므로

$a_2-3=2\cdot 2\quad \therefore a_2=7$

따라서 ㉢에서

$a_3=3a_2=3\cdot 7,\ a_4=3a_3=3^2\cdot 7,\ a_5=3a_4=3^3\cdot 7$

$\therefore a_6=3a_5=3^4\cdot 7=567$ 답 567

1287 전략 $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립하도록 하는 식을 등식의 양변에 더해 준다.

풀이 (ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

위의 식의 양변에 $\boxed{(k+1)(k+2)}$를 더하면

$$\begin{aligned}&1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)\\&=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)\\&=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}\\&=\frac{\boxed{(k+1)(k+2)(k+3)}}{3}\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

$\therefore$ (가) $(k+1)(k+2)$ (나) $(k+1)(k+2)(k+3)$

따라서 $f(k)=(k+1)(k+2)$, $g(k)=(k+1)(k+2)(k+3)$이므로

$f(3)+g(3)=4\cdot 5+4\cdot 5\cdot 6=140$ 답 140

1288 전략 n개의 직선에 1개의 직선을 추가했을 때 증가하는 교점의 개수를 이용하여 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

풀이 (1) n개의 직선에 1개의 직선을 추가하면 이 직선은 기존의 n개의 직선과 각각 한 번씩 만나므로 n개의 새로운 교점이 생긴다. 즉 $(n+1)$번째 직선을 추가하면 교점이 n개 증가하므로

$a_{n+1}=a_n+n$

$\therefore f(n)=n$

(2) 1개의 직선을 그을 때 생기는 교점은 없으므로 $a_1=0$

$a_{n+1}=a_n+n$에서

$a_2=a_1+1=1$
$a_3=a_2+2=1+2$

$a_4=a_3+3=1+2+3$

$\vdots$

$a_{10}=a_9+9=1+2+3+\cdots+8+9$

$=\sum_{k=1}^{9}k=\frac{9(9+1)}{2}$

$=45$

답 (1) $f(n)=n$ (2) 45

1289 전략 수열 $\{a_n\}$이 등비수열임을 알고 일반항 a_n을 구한다.

풀이 $\log a_n-2\log a_{n+1}+\log a_{n+2}=0$에서

$\log a_n+\log a_{n+2}=2\log a_{n+1}$

$\log a_n a_{n+2}=\log a_{n+1}{}^2$

$\therefore a_n a_{n+2}=a_{n+1}{}^2\ (a_n>0)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=3a_1$에서

$ar=3a \qquad \therefore r=3\ (\because a>0)$

또 $a_4=27$에서

$ar^3=27, \qquad 27a=27$

$\therefore a=1$

$\therefore a_n=1\cdot 3^{n-1}=3^{n-1}$

$\therefore \sum_{k=1}^{5}a_k=\sum_{k=1}^{5}3^{k-1}$

$=\frac{3^5-1}{3-1}$

$=121$

답 ②

1290 전략 a_2, a_3, a_4, …를 차례대로 구하여 20의 배수인 항을 찾는다.

풀이 $a_{n+1}=(n+1)a_n$에서 $a_1=1$이므로

$a_2=2a_1=2\cdot1$

$a_3=3a_2=3\cdot2\cdot1$

$a_4=4a_3=4\cdot3\cdot2\cdot1$

$\vdots$

$a_{30}=30a_{29}=30\cdot29\cdot28\cdot\cdots\cdot1$

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{30}$

$=1+(2\cdot1)+(3\cdot2\cdot1)+\cdots+(30\cdot29\cdot28\cdot\cdots\cdot1)$ ⋯ ❶

이때 $a_5=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$이므로 $a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{30}$은 20으로 나누어떨어진다. ⋯ ❷

따라서 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{30}$을 20으로 나누었을 때의 나머지는 $a_1+a_2+a_3+a_4$를 20으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

이때

$a_1+a_2+a_3+a_4=1+2+6+24=33$

이므로 구하는 나머지는 13이다. ⋯ ❸

답 13

채점 기준	비율
❶ $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{30}$을 구할 수 있다.	40 %
❷ $a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{30}$이 20으로 나누어떨어짐을 알 수 있다.	30 %
❸ 나머지를 구할 수 있다.	30 %

1291 전략 먼저 a_3, a_4, a_5, …를 구하여 a_n의 규칙을 찾은 후 b_n+b_{n+1}을 구한다.

풀이 $a_{n+2}=(a_{n+1})^2-(a_n)^2$에서 $a_1=a_2=1$이므로

$a_3=(a_2)^2-(a_1)^2=1^2-1^2=0$

$a_4=(a_3)^2-(a_2)^2=0^2-1^2=-1$

$a_5=(a_4)^2-(a_3)^2=(-1)^2-0^2=1$

$a_6=(a_5)^2-(a_4)^2=1^2-(-1)^2=0$

$a_7=(a_6)^2-(a_5)^2=0^2-1^2=-1$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 $n\geq2$일 때, 1, 0, -1이 이 순서대로 반복된다.

$b_{n+1}=a_n-b_n+n$에서 $b_n+b_{n+1}=a_n+n$이므로

$b_1+b_2=a_1+1$

$-(b_2+b_3)=-(a_2+2)$

$b_3+b_4=a_3+3$

$-(b_4+b_5)=-(a_4+4)$

$\vdots$

$-(b_{18}+b_{19})=-(a_{18}+18)$

$b_{19}+b_{20}=a_{19}+19$

변끼리 더하면

b_1+b_{20}

$=a_1-a_2+\cdots-a_{18}+a_{19}+(1-2+\cdots-18+19)$

$=a_1+\{(-a_2+a_3-a_4)+(a_5-a_6+a_7)+\cdots$

$+(a_{17}-a_{18}+a_{19})\}+\{1+(-2+3)+(-4+5)+\cdots$

$+(-18+19)\}$

$k+14=1+10$

$\therefore k=-3$

답 ①

1292 전략 $A>B>C$이면 $A>C$임을 이용한다.

풀이 (1) $n=2$일 때,

(좌변)$=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}$, (우변)$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

따라서 주어진 부등식이 성립한다.

(2) $n=k\ (k\geq2)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$을 더하면

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$ ⋯⋯ ㉠

이때 $k\geq2$에서

$\left\{2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}-\left(2-\frac{1}{k+1}\right)=-\frac{1}{k(k+1)^2}<0$

이므로

$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

답 풀이 참조