정답 및 풀이

I. 다항식

01 다항식의 연산

유제

본책 13~29쪽

001-❶ (1) $A-B+C$

$=(x^3-3x+2)-(-x^3+x^2+x+1)$
$\quad+(2x^3-2x-5)$
$=x^3-3x+2+x^3-x^2-x-1$
$\quad+2x^3-2x-5$
$=4x^3-x^2-6x-4$

(2) $2A-(B+C)$
$=2(x^3-3x+2)-(-x^3+x^2+x+1+2x^3-2x-5)$
$=2x^3-6x+4-(x^3+x^2-x-4)$
$=2x^3-6x+4-x^3-x^2+x+4$
$=x^3-x^2-5x+8$

(3) $-A+B-2(C-2A)$
$=-A+B-2C+4A=3A+B-2C$
$=3(x^3-3x+2)+(-x^3+x^2+x+1)$
$\quad-2(2x^3-2x-5)$
$=3x^3-9x+6-x^3+x^2+x+1-4x^3+4x+10$
$=-2x^3+x^2-4x+17$

(4) $3(2B-C)+2(A-4B)$
$=6B-3C+2A-8B=2A-2B-3C$
$=2(x^3-3x+2)-2(-x^3+x^2+x+1)$
$\quad-3(2x^3-2x-5)$
$=2x^3-6x+4+2x^3-2x^2-2x-2-6x^3+6x+15$
$=-2x^3-2x^2-2x+17$

답 풀이 참조

001-❷ $2X+B=A-3B$에서 $\quad 2X=A-4B$

$\therefore X=\frac{1}{2}A-2B$
$=\frac{1}{2}(-2x^2+8xy+y^2)$
$\quad-2\left(\frac{1}{2}x^2-6xy-\frac{1}{4}y^2\right)$
$=-x^2+4xy+\frac{1}{2}y^2-x^2+12xy+\frac{1}{2}y^2$
$=-2x^2+16xy+y^2$

답 $-2x^2+16xy+y^2$

001-❸ $A+B=4x^3-2x^2-12x+6$ ...... ㉠
$A-B=-2x^3-2x^2-2x+18$ ...... ㉡
㉠+㉡을 하면 $\quad 2A=2x^3-4x^2-14x+24$
$\therefore A=x^3-2x^2-7x+12$ ...... ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면
$x^3-2x^2-7x+12+B=4x^3-2x^2-12x+6$
$\therefore B=4x^3-2x^2-12x+6-(x^3-2x^2-7x+12)$
$=4x^3-2x^2-12x+6-x^3+2x^2+7x-12$
$=3x^3-5x-6$
$\therefore 2A-3B=2(x^3-2x^2-7x+12)$
$\quad-3(3x^3-5x-6)$
$=2x^3-4x^2-14x+24$
$\quad-9x^3+15x+18$
$=-7x^3-4x^2+x+42$

답 $-7x^3-4x^2+x+42$

002-❶ 다항식 $(x^2+x)(2x^3-x^2+3)$의 전개식에서 x^4항은
$x^2\cdot(-x^2)+x\cdot2x^3=-x^4+2x^4=x^4$
이므로 $\quad a=1$
다항식 $(3x^4+2x^2-6)(x^2-x+5)$의 전개식에서 x^4항은
$3x^4\cdot5+2x^2\cdot x^2=15x^4+2x^4=17x^4$
이므로 $\quad b=17$
$\therefore a+b=18$

답 18

002-❷ 다항식 $(x^2+8x+a)(x^2-3x+4)$의 전개식에서 x^2항은
$x^2\cdot4+8x\cdot(-3x)+a\cdot x^2=(-20+a)x^2$
이때 x^2의 계수가 -15이므로
$-20+a=-15 \quad \therefore a=5$

답 5

002-❸ $(1+x+x^2+\cdots+x^{100})^2$
$=(1+x+x^2+\cdots+x^{100})$
$\quad\times(1+x+x^2+\cdots+x^{100})$
이 다항식의 전개식에서 x^4항은
$1\cdot x^4+x\cdot x^3+x^2\cdot x^2+x^3\cdot x+x^4\cdot1=5x^4$
따라서 x^4의 계수는 5이다.

답 5

003-❶ $A+B=x^2+x$ ...... ㉠
$2A-B=2x^2-x+3$ ...... ㉡
㉠+㉡을 하면 $\quad 3A=3x^2+3$
$\therefore A=x^2+1$ ...... ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면 $\quad x^2+1+B=x^2+x$
$\therefore B=x^2+x-(x^2+1)=x-1$
$\therefore AB=(x^2+1)(x-1)=x^3-x^2+x-1$

답 x^3-x^2+x-1

003-❷ $x\triangle y=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$
$=x(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$
$\quad -y(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$
$=x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4$
$\quad -x^4y-x^3y^2-x^2y^3-xy^4-y^5$
$=x^5-y^5$
$\therefore (a\triangle b)+(b\triangle c)=(a^5-b^5)+(b^5-c^5)$
$=a^5-c^5$
$=a\triangle c$

답 풀이 참조

004-❶ (1) $(x+2y)^3$
$=x^3+3\cdot x^2\cdot 2y+3\cdot x\cdot (2y)^2+(2y)^3$
$=x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$
(2) $(3x-2y)^3$
$=(3x)^3-3\cdot (3x)^2\cdot 2y+3\cdot 3x\cdot (2y)^2-(2y)^3$
$=27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$
(3) $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$
$=(2x-y)\{(2x)^2+2x\cdot y+y^2\}$
$=(2x)^3-y^3=8x^3-y^3$
(4) $(x-1)(x-2)(x-4)$
$=x^3+\{(-1)+(-2)+(-4)\}x^2$
$\quad +\{(-1)\cdot(-2)+(-2)\cdot(-4)+(-4)\cdot(-1)\}x$
$\quad +(-1)\cdot(-2)\cdot(-4)$
$=x^3-7x^2+14x-8$
(5) $(x-3y+2z)^2$
$=x^2+(-3y)^2+(2z)^2+2\cdot x\cdot (-3y)$
$\quad +2\cdot(-3y)\cdot 2z+2\cdot 2z\cdot x$
$=x^2+9y^2+4z^2-6xy-12yz+4zx$
(6) $(x^2+3xy+9y^2)(x^2-3xy+9y^2)$
$=\{x^2+x\cdot 3y+(3y)^2\}\{x^2-x\cdot 3y+(3y)^2\}$
$=x^4+x^2\cdot (3y)^2+(3y)^4$
$=x^4+9x^2y^2+81y^4$
(7) $(x-y+1)(x^2+y^2+xy-x+y+1)$
$=\{x+(-y)+1\}$
$\quad \times\{x^2+(-y)^2+1^2-x\cdot(-y)-(-y)\cdot 1-1\cdot x\}$
$=x^3+(-y)^3+1^3-3\cdot x\cdot(-y)\cdot 1$
$=x^3-y^3+3xy+1$

답 풀이 참조

005-❶ (1) $(a-1)^3(a^2+a+1)^3$
$=\{(a-1)(a^2+a+1)\}^3=(a^3-1)^3$
$=(a^3)^3-3\cdot(a^3)^2\cdot 1+3\cdot a^3\cdot 1^2-1^3$
$=a^9-3a^6+3a^3-1$

(2) $(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$
$=\{(x-y)(x^2+xy+y^2)\}\{(x+y)(x^2-xy+y^2)\}$
$=(x^3-y^3)(x^3+y^3)$
$=x^6-y^6$
(3) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$
$=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$
$=x^8+x^4+1$
(4) $(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)$
$=\{(x+1)(x-3)\}\{(x+2)(x-4)\}$
$=(x^2-2x-3)(x^2-2x-8)$
$x^2-2x=X$로 놓으면
(주어진 식)
$=(X-3)(X-8)$
$=X^2-11X+24$
$=(x^2-2x)^2-11(x^2-2x)+24$
$=x^4-4x^3+4x^2-11x^2+22x+24$
$=x^4-4x^3-7x^2+22x+24$
(5) $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$
$=\{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\}$
$\quad \times\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}$
$=\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$
$=-\{a^2-(b+c)^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$
$=-a^4+\{(b+c)^2+(b-c)^2\}a^2-\{(b+c)(b-c)\}^2$
$=-a^4+(b^2+2bc+c^2+b^2-2bc+c^2)a^2-(b^2-c^2)^2$
$=-a^4+2(b^2+c^2)a^2-(b^4-2b^2c^2+c^4)$
$=-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$

답 풀이 참조

006-❶ $\dfrac{55^3}{53\times 57+4}=\dfrac{55^3}{(55-2)(55+2)+4}$
$=\dfrac{55^3}{(55^2-4)+4}$
$=\dfrac{55^3}{55^2}=55$

답 55

006-❷ $(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$
$=\dfrac{1}{2}(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$
$=\dfrac{1}{2}(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$
$=\dfrac{1}{2}(3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)$
$=\dfrac{1}{2}(3^8-1)(3^8+1)$
$=\dfrac{1}{2}(3^{16}-1)$

답 ③

006-❸ 0.998^3

$=(1-0.002)^3$

$=1^3-3\times1^2\times0.002+3\times1\times0.002^2-0.002^3$

$=1-0.006+\cdots$

$=0.994\cdots$

따라서 $x=9$, $y=9$, $z=4$이므로

$x+y+z=22$

답 22

007-❶ (1) $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$

$=14-2\cdot5=4$

이므로 $x-y=2\,(\because x>y)$

$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=2^3+3\cdot5\cdot2=38$

(2) $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

$=(-9)^2-2\cdot(-33)$

$=147$

$\therefore \dfrac{x}{yz}+\dfrac{y}{zx}+\dfrac{z}{xy}=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xyz}$

$=\dfrac{147}{-3}=-49$

(3) $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$에서

$6^2=52+2(xy+yz+zx)$

$\therefore xy+yz+zx=-8$

이때

$x^3+y^3+z^3$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$+3xyz$

이므로

$324=6\cdot(52+8)+3xyz$

$3xyz=-36 \quad \therefore xyz=-12$

답 (1) 38 (2) -49 (3) -12

007-❷ $x-y=2+\sqrt{7}$ …… ㉠

$y-z=2-\sqrt{7}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $x-z=4$

$\therefore z-x=-4$

$\therefore x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$

$=\dfrac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx)$

$=\dfrac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

$=\dfrac{1}{2}\{(2+\sqrt{7})^2+(2-\sqrt{7})^2+(-4)^2\}$

$=\dfrac{1}{2}(4+4\sqrt{7}+7+4-4\sqrt{7}+7+16)$

$=\dfrac{1}{2}\cdot38=19$

답 19

008-❶

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-2x-1 \\
\hline
2x+1 & 2x^3-3x^2-4x-4 \\
 & 2x^3+\ \ x^2 \\
\hline
 & -4x^2-4x \\
 & -4x^2-2x \\
\hline
 & -2x-4 \\
 & -2x-1 \\
\hline
 & -3
\end{array}$$

따라서 $Q(x)=x^2-2x-1$이므로

$Q(-1)=(-1)^2-2\cdot(-1)-1$

$=2$

또 $R=-3$이므로

$Q(-1)+R=-1$

답 -1

008-❷ 다항식 x^3-4x^2+5x+1을 다항식 A로 나누었을 때의 몫이 $x+1$, 나머지가 $10x+1$이므로

$x^3-4x^2+5x+1=A(x+1)+10x+1$

$A(x+1)=x^3-4x^2+5x+1-(10x+1)$

$=x^3-4x^2-5x$

$\therefore A=(x^3-4x^2-5x)\div(x+1)$

다항식 x^3-4x^2-5x를 $x+1$로 나누면

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-5x \\
\hline
x+1 & x^3-4x^2-5x \\
 & x^3+\ \ x^2 \\
\hline
 & -5x^2-5x \\
 & -5x^2-5x \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

$\therefore A=x^2-5x$

답 x^2-5x

008-❸ 다항식 A를 x^2+2로 나누었을 때의 몫이 $5x-2$, 나머지가 $-6x+5$이므로

$A=(x^2+2)(5x-2)-6x+5$

$=5x^3-2x^2+10x-4-6x+5$

$=5x^3-2x^2+4x+1$

다항식 A, 즉 $5x^3-2x^2+4x+1$을 x^2-2로 나누면

$$\begin{array}{r|l}
 & 5x-2 \\
\hline
x^2-2 & 5x^3-2x^2+4x+1 \\
 & 5x^3\qquad-10x \\
\hline
 & -2x^2+14x+1 \\
 & -2x^2\qquad+4 \\
\hline
 & 14x-3
\end{array}$$

따라서 구하는 몫은 $5x-2$, 나머지는 $14x-3$이다.

답 몫: $5x-2$, 나머지: $14x-3$

중단원 연습 문제

본책 30~33쪽

01 $7x^2-8xy+5y^2$	**02** 46	**03** ①	**04** ③	
05 ④	**06** 52	**07** 86	**08** ③	**09** 5
10 ③	**11** 48	**12** ④	**13** 24	**14** 400
15 -3	**16** 6	**17** 129	**18** ①	**19** 16
20 ④				

01 전략 주어진 두 식을 연립하여 A, B를 구한다.

풀이 $A+B=2x^2-2xy+y^2$ ······ ㉠

$A-2B=-x^2+4xy-5y^2$ ······ ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$3B=3x^2-6xy+6y^2$

$\therefore B=x^2-2xy+2y^2$ ······ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$A+x^2-2xy+2y^2=2x^2-2xy+y^2$

$\therefore A=2x^2-2xy+y^2-(x^2-2xy+2y^2)$

$=x^2-y^2$

$\therefore 3A+4B=3(x^2-y^2)+4(x^2-2xy+2y^2)$

$=3x^2-3y^2+4x^2-8xy+8y^2$

$=7x^2-8xy+5y^2$

답 $7x^2-8xy+5y^2$

02 전략 먼저 x항이 나오는 항만 전개하여 상수 k의 값을 구한다.

풀이 다항식 $(3x^2+x-4)(x^2+2x+k)$의 전개식에서 x항은

$x\cdot k+(-4)\cdot 2x=(k-8)x$

이때 x의 계수가 8이므로

$k-8=8$

$\therefore k=16$ ··· ❶

따라서 다항식 $(3x^2+x-4)(x^2+2x+16)$의 전개식에서 x^2항은

$3x^2\cdot 16+x\cdot 2x+(-4)\cdot x^2=46x^2$

이므로 x^2의 계수는 46이다. ··· ❷

답 46

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ x^2의 계수를 구할 수 있다.	50 %

03 전략 $(2-1)(2^9+2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1)$을 분배법칙을 이용하여 전개한다.

풀이 $2^9+2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1$

$=(2-1)(2^9+2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1)$

$=2(2^9+2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1)$

$\quad-(2^9+2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1)$

$=(2^{10}+2^9+2^8+\cdots+2^3+2^2+2)$

$\quad-(2^9+2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1)$

$=2^{10}-1$

$=1023$

답 ①

Remark ▶

2 이상의 자연수 n에 대하여

$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

$=a^n-b^n$

04 전략 공통부분이 생기도록 2개씩 짝지어 전개한다.

풀이 $(x+1)(x+2)(x+4)(x+8)$

$=\{(x+1)(x+8)\}\{(x+2)(x+4)\}$

$=(x^2+9x+8)(x^2+6x+8)$

$x^2+8=X$로 놓으면

(주어진 식)

$=(X+9x)(X+6x)$

$=X^2+15xX+54x^2$

$=(x^2+8)^2+15x(x^2+8)+54x^2$

$=x^4+16x^2+64+15x^3+120x+54x^2$

$=x^4+15x^3+70x^2+120x+64$

따라서 $a=70$, $b=120$이므로

$3a-b=90$

답 ③

05 전략 곱셈 공식 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $99^2+101^2=(100-1)^2+(100+1)^2$

$=10000-200+1+10000+200+1$

$=20002$

답 ④

06 전략 $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$임을 이용한다.

풀이 $x^2-4x+1=0$에서 $x\neq 0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-4+\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore x+\dfrac{1}{x}=4$

$\therefore x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=4^3-3\cdot 4$

$=52$

답 52

07 전략 곱셈 공식의 변형을 이용하여 $ab+bc+ca$의 값을 구한다.

풀이 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

에서 $45=7^2-2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=2$ ··· ❶

$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

$=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2$

$=2\{a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\}$

$=2\cdot(45-2)=86$ ··· ❷

답 86

채점 기준	비율
❶ $ab+bc+ca$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	50 %

08 전략 나머지의 차수가 나누는 식의 차수보다 작을 때까지 나누어 몫과 나머지를 구한다.

풀이 다항식 $3x^3+4x^2-x-2$를 x^2+x-1로 나누면

$$\begin{array}{r}
3x+1 \\
x^2+x-1\,\overline{)\,3x^3+4x^2-x-2} \\
\underline{3x^3+3x^2-3x} \\
x^2+2x-2 \\
\underline{x^2+x-1} \\
x-1
\end{array}$$

따라서 $Q(x)=3x+1$, $R(x)=x-1$이므로

$Q(1)+R(2)=4+1=5$

답 ③

09 전략 다항식 B를 다항식 $C(C\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 $B=CQ+R$이다.

(단, R는 상수 또는 (R의 차수)<(C의 차수))

풀이 다항식 $12x^3+47x^2+10x-60$을 A로 나누었을 때의 몫이 $4x+9$, 나머지가 $-3x+12$이므로

$12x^3+47x^2+10x-60=A(4x+9)-3x+12$

$A(4x+9)=12x^3+47x^2+13x-72$

$\therefore A=(12x^3+47x^2+13x-72)\div(4x+9)$

다항식 $12x^3+47x^2+13x-72$를 $4x+9$로 나누면

$$\begin{array}{r}
3x^2+5x-8 \\
4x+9\,\overline{)\,12x^3+47x^2+13x-72} \\
\underline{12x^3+27x^2} \\
20x^2+13x \\
\underline{20x^2+45x} \\
-32x-72 \\
\underline{-32x-72} \\
0
\end{array}$$

따라서 $A=3x^2+5x-8$이므로 x의 계수는 5이다.

답 5

10 전략 곱셈 공식 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$을 이용할 수 있도록 주어진 등식의 좌변을 변형한다.

풀이 $(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$

$=\frac{1}{8}(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$

$=\frac{1}{8}(3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)$

$=\frac{1}{8}(3^8-1)(3^8+1)$

$=\frac{3^{16}-1}{8}$

따라서 $\frac{3^{16}-1}{8}=\frac{3^n-1}{m}$이므로

$m=8$, $n=16$ ($\because 1\le m\le9$)

$\therefore m+n=24$

답 ③

Remark▶

$m=8(3^{16}+1)$, $n=32$일 때에도 $\frac{3^{16}-1}{8}=\frac{3^n-1}{m}$이 성립하지만 $1\le m\le9$인 조건을 만족시키지 않는다.

11 전략 $x+y+z=6$에서 $x+y=6-z$, $y+z=6-x$, $z+x=6-y$임을 이용한다.

풀이 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

에서 $6^2=12+2(xy+yz+zx)$

$\therefore xy+yz+zx=12$ ··· ❶

또 $x+y+z=6$에서

$x+y=6-z$, $y+z=6-x$, $z+x=6-y$

이므로

$(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)$

$=(6-z)(6-x)+(6-x)(6-y)+(6-y)(6-z)$

$=36-6x-6z+zx+36-6y-6x+xy+36-6z-6y+yz$

$=108-12(x+y+z)+(xy+yz+zx)$

$=108-12\cdot6+12=48$ ··· ❷

답 48

채점 기준	비율
❶ $xy+yz+zx$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	60%

12 전략 곱셈 공식의 변형을 이용하여 xy의 값을 구한다.

풀이 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서

$19=1^3-3xy$, $3xy=-18$

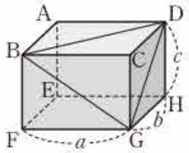
$\therefore xy=-6$

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$
$$=1^2-2\cdot(-6)=13$$
$$\therefore x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$$
$$=13^2-2\cdot(-6)^2=97$$

답 ④

13 전략 $\overline{FG}=a$, $\overline{GH}=b$, $\overline{DH}=c$라 하고 a, b, c에 대한 식을 세운다.

풀이



위의 그림과 같이 $\overline{FG}=a$, $\overline{GH}=b$, $\overline{DH}=c$라 하면 주어진 직육면체의 겉넓이가 22이므로

$$2(ab+bc+ca)=22$$
$$\therefore ab+bc+ca=11 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$ ⋯ ❶

한편 △BFG, △DGH, △DBC에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{BG}^2=\overline{BF}^2+\overline{FG}^2=c^2+a^2$$
$$\overline{GD}^2=\overline{GH}^2+\overline{DH}^2=b^2+c^2$$
$$\overline{DB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2=a^2+b^2$$

△BGD의 세 변의 길이의 제곱의 합이 28이므로

$$(c^2+a^2)+(b^2+c^2)+(a^2+b^2)=28$$
$$\therefore a^2+b^2+c^2=14 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$ ⋯ ❷

㉠, ㉡에 의하여

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$
$$=14+2\cdot11$$
$$=36$$
$$\therefore a+b+c=6\ (\because a+b+c>0)$$

따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$$4(a+b+c)=4\cdot6=24$$ ⋯ ❸

답 24

채점 기준	비율
❶ $ab+bc+ca$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $a^2+b^2+c^2$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합을 구할 수 있다.	20 %

14 전략 주어진 조건에서 $x+y$, xy의 값을 구하여 두 건물의 부피의 합 x^3+y^3의 값을 구한다.

풀이 평면도에서 건물 C의 둘레의 길이가 20이므로

$$2(x+y)=20$$
$$\therefore x+y=10$$

평면도에서 세 건물의 넓이의 합이 80이므로

$$x^2+y^2+xy=80, \qquad (x+y)^2-xy=80$$
$$10^2-xy=80 \qquad \therefore xy=20$$

따라서 정육면체 모양의 두 건물 A, B의 부피의 합은

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$
$$=10^3-3\cdot20\cdot10$$
$$=400$$

답 400

15 전략 다항식의 나눗셈을 이용한다.

풀이 다항식 $4x^4+2x^3-8x^2-8x-5$를 다항식 x^2-x-1로 나누면

$$\begin{array}{r} 4x^2+6x+2 \\ x^2-x-1\,\big)\,4x^4+2x^3-8x^2-8x-5 \\ \underline{4x^4-4x^3-4x^2} \\ 6x^3-4x^2-8x \\ \underline{6x^3-6x^2-6x} \\ 2x^2-2x-5 \\ \underline{2x^2-2x-2} \\ -3 \end{array}$$

$$\therefore 4x^4+2x^3-8x^2-8x-5$$
$$=(x^2-x-1)(4x^2+6x+2)-3 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때 $x^2-x-1=0$이므로 ㉠에서 구하는 값은

$$0\cdot(4x^2+6x+2)-3=-3$$

답 -3

16 전략 네 다항식 A, B, C, D를 x^2+1로 나누어 나머지를 각각 구한다.

풀이 $A=x^2-x+1=(x^2+1)-x$이므로 A를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는 $-x$이다.

$$\therefore \mathrm{P}(-1,\ 0)$$

$B=x^2+2x+1=(x^2+1)+2x$이므로 B를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는 $2x$이다.

$$\therefore \mathrm{Q}(2,\ 0)$$

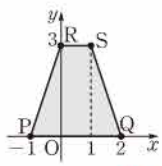
$C=x^3+x+3=x(x^2+1)+3$이므로 C를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는 3이다.

$$\therefore \mathrm{R}(0,\ 3)$$

$D=x^3+2x+3=x(x^2+1)+x+3$이므로 D를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는 $x+3$이다.

$$\therefore \mathrm{S}(1,\ 3)$$

따라서 네 점 P, Q, R, S를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 □PQSR의 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot(3+1)\cdot3=6$$

답 6

17 전략 먼저 대각선으로 배열된 세 다항식의 합이 $6x^2+12x$임을 이용한다.

풀이

(나)		
$2x-2$	$2x^2+4x$	
(가)		$-x^2+x-3$

(나)의 위치에 알맞은 다항식을 $g(x)$라 하면 대각선으로 배열된 세 다항식의 합은

$$g(x)+(2x^2+4x)+(-x^2+x-3)=6x^2+12x$$
$$\therefore g(x)=6x^2+12x-(2x^2+4x-x^2+x-3)$$
$$=5x^2+7x+3$$

또

$$f(x)+(2x-2)+(5x^2+7x+3)=6x^2+12x$$

이므로

$$f(x)=6x^2+12x-(2x-2+5x^2+7x+3)$$
$$=x^2+3x-1$$
$$\therefore f(10)=100+30-1=129$$

답 129

18 전략 x항이 나오는 항만 전개한다.

풀이 $\langle x^2+x+1,\ x^2+x\rangle$

$$=(x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)(x^2+x)+(x^2+x)^2$$
$$=(x^2+x+1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)(x^2+x)+(x^2+x)(x^2+x)$$

에서 x항은

$$x\cdot1+1\cdot x+1\cdot x=3x$$

따라서 x의 계수는 3이다.

답 ①

다른 풀이 $\langle x^2+x+1,\ x^2+x\rangle$의 전개식에서 x의 계수를 구할 때, 이차항인 x^2은 어떤 항과 곱해도 일차항이 되지 않는다.
즉 $\langle x^2+x+1,\ x^2+x\rangle$의 전개식에서 x의 계수는 $\langle x+1,\ x\rangle$의 전개식에서 x의 계수와 같으므로

$$\langle x+1,\ x\rangle=(x+1)^2+(x+1)x+x^2$$
$$=x^2+2x+1+x^2+x+x^2$$
$$=3x^2+3x+1$$

따라서 x의 계수는 3이다.

19 전략 S_1, S_2를 각각 $\overline{AQ}$, $\overline{QB}$의 길이에 대한 식으로 나타낸다.

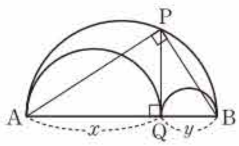
풀이 $\overline{AQ}=x$, $\overline{QB}=y$라 하면 $\overline{AQ}-\overline{QB}=8\sqrt{3}$에서

$$x-y=8\sqrt{3} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AQ}$ 및 $\overset{\frown}{QB}$로 둘러싸인 도형의 넓이 S_1은

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{y}{2}\right)^2$$
$$=\frac{\pi}{8}\{(x^2+2xy+y^2)-x^2-y^2\}=\frac{\pi}{4}xy$$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$를 그으면 $\angle APB=90°$이고 $\triangle PAQ\backsim\triangle BPQ$ (AA 닮음)이므로



$$\overline{AQ}:\overline{PQ}=\overline{PQ}:\overline{BQ}$$
$$\therefore \overline{PQ}^2=\overline{AQ}\cdot\overline{BQ}=xy$$

따라서 $\overline{PQ}$를 지름으로 하는 반원의 넓이 S_2는

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{\overline{PQ}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{xy}{4}=\frac{\pi}{8}xy$$

이때 $S_1-S_2=2\pi$에서

$$\frac{\pi}{4}xy-\frac{\pi}{8}xy=2\pi, \qquad \frac{\pi}{8}xy=2\pi$$
$$\therefore xy=16 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$\overline{AB}=x+y$이므로

$$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$$
$$=(8\sqrt{3})^2+4\cdot16\ (\because ㉠, ㉡)$$
$$=256$$

$\overline{AB}>0$이므로

$$\overline{AB}=16$$

답 16

20 전략 다항식 $P(x)+4x$를 구한 후 다항식 $Q(x)$로 나누어 나머지를 구한다.

풀이 $P(x)+4x=(3x^3+x+11)+4x$
$$=3x^3+5x+11$$

이므로

$$\begin{array}{r}
3x+3 \\
x^2-x+1\,\overline{\big)\,3x^3+5x+11} \\
3x^3-3x^2+3x \\
\hline
3x^2+2x+11 \\
3x^2-3x+\ \ 3 \\
\hline
5x+\ \ 8
\end{array}$$

따라서 나머지가 $5x+8$이므로

$$a=8$$

답 ④

I. 다항식

02 항등식과 나머지 정리

유제 본책 38~50쪽

009-❶ 주어진 등식의 좌변을 x에 대하여 정리하면

$(a+b)x-a+b=2x$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=2,\ -a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=1$ 답 $a=1,\ b=1$

009-❷ 주어진 등식의 좌변을 x, y에 대하여 정리하면

$(a-2b)x+(-2a+3b)y+a-b-c$
$=3x-5y+4$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a-2b=3,\ -2a+3b=-5,\ a-b-c=4$

세 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-1,\ c=-2$

답 $a=1,\ b=-1,\ c=-2$

010-❶ 주어진 등식의 우변을 전개한 후 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

ax^3+bx^2-x+4
$=cx^3+(4+c)x^2+(4+c)x+4$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=c,\ b=4+c,\ -1=4+c$

$\therefore a=-5,\ b=-1,\ c=-5$

답 $a=-5,\ b=-1,\ c=-5$

010-❷ $x=-1$을 양변에 대입하면

$0=-1+a-3+b$

$\therefore a+b=4$ ······ ㉠

$x=3$을 양변에 대입하면

$0=27+9a+9+b$

$\therefore 9a+b=-36$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5,\ b=9$ 답 $a=-5,\ b=9$

011-❶ x^3+ax^2+bx+6을 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 0이므로

$x^3+ax^2+bx+6=(x+1)(x-2)Q(x)$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$x=-1$을 양변에 대입하면

$-1+a-b+6=0$

$\therefore a-b=-5$ ······ ㉠

$x=2$를 양변에 대입하면

$8+4a+2b+6=0$

$\therefore 2a+b=-7$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4,\ b=1$

$\therefore a+b=-3$ 답 -3

011-❷ x^3+ax^2-x+1을 x^2+1로 나누었을 때의 몫이 $x-1$이므로 나머지를 $px+q$ (p, q는 상수)라 하면

$x^3+ax^2-x+1=(x^2+1)(x-1)+px+q$

우변을 전개한 후 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^3+ax^2-x+1=x^3-x^2+(p+1)x+q-1$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=-1,\ -1=p+1,\ 1=q-1$

$\therefore a=-1,\ p=-2,\ q=2$

따라서 $a=-1$이고 나머지는 $-2x+2$이다.

답 $a=-1$, 나머지: $-2x+2$

Remark ▶ 다항식의 나눗셈에서의 나머지

다항식의 나눗셈에서의 나머지는 상수이거나 나머지의 차수가 나누는 식의 차수보다 항상 작다. 따라서 나누는 식이 이차식이면 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)로 놓는다.

012-❶ $f(x)=x^4-2ax^3+ax^2-3x-7$이라 하면 나머지 정리에 의하여 $f(2)=15$이므로

$16-16a+4a-6-7=15$

$\therefore a=-1$

따라서 $f(x)=x^4+2x^3-x^2-3x-7$이므로 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(1)=1+2-1-3-7$
$=-8$ 답 -8

012-❷ $f(x)=x^3+ax^2+bx-5$라 하면 나머지 정리에 의하여 $f(-1)=-1$, $f(-2)=1$이므로

$-1+a-b-5=-1,\ -8+4a-2b-5=1$

$\therefore a-b=5,\ 2a-b=7$

두 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-3$

$\therefore ab=-6$ 답 -6

013-❶ $f(x)$를 $(x+1)(x-4)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$f(x)=(x+1)(x-4)Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누면 나머지가 12이고, $x-4$로 나누면 나머지가 -3이므로 나머지 정리에 의하여

$$f(-1)=12,\ f(4)=-3$$

$x=-1$, $x=4$를 ㉠의 양변에 각각 대입하면

$$f(-1)=-a+b,\ f(4)=4a+b$$

$$\therefore -a+b=12,\ 4a+b=-3$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-3,\ b=9$$

따라서 구하는 나머지는 $-3x+9$이다.

답 $-3x+9$

013-❷ $f(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$f(x)=(x^2+x-2)(x^2+2x-5)+ax+b$$
$$=(x-1)(x+2)(x^2+2x-5)+ax+b \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누면 나머지가 -8이고, $x+2$로 나누면 나머지가 4이므로 나머지 정리에 의하여

$$f(1)=-8,\ f(-2)=4$$

$x=1$, $x=-2$를 ㉠의 양변에 각각 대입하면

$$f(1)=a+b,\ f(-2)=-2a+b$$

$$\therefore a+b=-8,\ -2a+b=4$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-4,\ b=-4$$

따라서 $f(x)=(x-1)(x+2)(x^2+2x-5)-4x-4$이므로 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$$f(-1)=-2\cdot1\cdot(-6)-4\cdot(-1)-4=12$$

답 12

014-❶ $f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 -3이므로 나머지 정리에 의하여

$$f(-3)=-3$$

한편 $f(x+3)$을 $x+6$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$f(x+3)=(x+6)Q(x)+R$$

$x=-6$을 양변에 대입하면

$$R=f(-3)=-3$$

따라서 구하는 나머지는 -3이다.

답 -3

014-❷ $f(x)$, $g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 각각 -2, 3이므로 나머지 정리에 의하여

$$f(-2)=-2,\ g(-2)=3$$

한편 $3f(x)-2g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$3f(x)-2g(x)=(x+2)Q(x)+R$$

$x=-2$를 양변에 대입하면

$$R=3f(-2)-2g(-2)$$
$$=3\cdot(-2)-2\cdot3=-12$$

따라서 구하는 나머지는 -12이다.

답 -12

014-❸ $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -3이므로

$$f(x)=(x+1)Q(x)-3 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

또 $Q(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 1이므로 나머지 정리에 의하여

$$Q(-3)=1$$

$f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여 $f(-3)$과 같으므로 $x=-3$을 ㉠의 양변에 대입하면

$$f(-3)=-2Q(-3)-3$$
$$=-2\cdot1-3=-5$$

답 -5

다른 풀이 $Q(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 1이므로

$$Q(x)=(x+3)Q'(x)+1 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=(x+1)\{(x+3)Q'(x)+1\}-3$$
$$=(x+1)(x+3)Q'(x)+x-2$$

따라서 구하는 나머지는

$$f(-3)=-3-2=-5$$

015-❶ $f(x)=3x^3+ax^2+bx+6$이라 하면 $f(x)$는 $x+2$, $x-3$으로 각각 나누어떨어지므로 인수 정리에 의하여

$$f(-2)=0,\ f(3)=0$$

$f(-2)=0$에서

$$-24+4a-2b+6=0$$

$$\therefore 2a-b=9 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$f(3)=0$에서

$$81+9a+3b+6=0$$

$$\therefore 3a+b=-29 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-4,\ b=-17$$

$$\therefore ab=68$$

답 68

015-② $f(x-1)$이 $x+2$로 나누어떨어지므로 인수 정리에 의하여

$$f(-2-1)=f(-3)=0$$

$f(x)=x^3-x^2+ax+3$에서

$$f(-3)=-27-9-3a+3=-3a-33$$

즉 $-3a-33=0$이므로

$a=-11$ 　　답 -11

016-①

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -3 & -4 & 1 \\ & & 2 & -2 & -12 \\ \hline 2 & 1 & -1 & -6 & \boxed{-11} \\ & & 2 & 2 & \\ \hline 2 & 1 & 1 & \boxed{-4} & \\ & & 2 & & \\ \hline & 1 & \boxed{3} & & \end{array}$$

$\therefore x^3-3x^2-4x+1$

$=(x-2)(x^2-x-6)-11$

$=(x-2)\{(x-2)(x+1)-4\}-11$

$=(x-2)^2(x+1)-4(x-2)-11$

$=(x-2)^2\{(x-2)\cdot 1+3\}-4(x-2)-11$

$=(x-2)^3+3(x-2)^2-4(x-2)-11$

$\therefore a=1,\ b=3,\ c=-4,\ d=-11$

답 $a=1,\ b=3,\ c=-4,\ d=-11$

중단원 연습 문제

본책 51~55쪽

01 ⑤	**02** ①	**03** -4	**04** 11	
05 1023	**06** ①	**07** 6	**08** -1	**09** ③
10 ②	**11** -10	**12** -12	**13** $f(x)=x-1$	
14 -6	**15** 100	**16** ④	**17** x^2-3x+5	
18 $-x$	**19** 4	**20** ③	**21** 24	**22** ③
23 ④	**24** 54	**25** ③		

01 전략 주어진 등식은 k에 대한 항등식이므로 항등식의 성질을 이용한다.

풀이 주어진 등식의 좌변을 k에 대하여 정리하면

$$(x+3)k+2x+a=0$$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$$x+3=0,\ 2x+a=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$x=-3,\ a=6$ 　　답 ⑤

02 전략 x, y 사이의 관계식을 한 문자에 대하여 정리한 후 $x^2+ax-y^2+b=0$에 대입한다.

풀이 $x+y=2$에서 　$y=2-x$

이것을 $x^2+ax-y^2+b=0$에 대입하면

$$x^2+ax-(2-x)^2+b=0$$

등식의 좌변을 x에 대하여 정리하면

$$(a+4)x+b-4=0$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+4=0,\ b-4=0$

$\therefore a=-4,\ b=4$

$\therefore ab=-16$ 　　답 ①

03 전략 $x=1$을 주어진 이차방정식에 대입한 등식은 k에 대한 항등식임을 이용한다.

풀이 $x=1$이 이차방정식

$x^2+(k+2)x+(k-1)p+q-1=0$의 근이므로

$$1+k+2+(k-1)p+q-1=0$$

등식의 좌변을 k에 대하여 정리하면

$(p+1)k-p+q+2=0$ 　　⋯ ❶

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$$p+1=0,\ -p+q+2=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$p=-1,\ q=-3$ 　　⋯ ❷

$\therefore p+q=-4$ 　　⋯ ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ k에 대한 항등식을 세울 수 있다.	50 %
❷ p, q의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	10 %

Remark▶ 방정식의 근과 항등식

방정식 $f(x)=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 $x=\alpha$를 근으로 가지면 $x=\alpha$를 방정식에 대입한 등식 $f(\alpha)=0$은 k에 대한 항등식이다.

04 전략 주어진 등식은 x에 대한 항등식이므로 미정계수법을 이용한다.

풀이 주어진 등식의 우변을 전개한 후 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^3+ax^2-24=x^3+(b+c)x^2+(bc-6)x-6b$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$$a=b+c,\ 0=bc-6,\ -24=-6b$$

세 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{11}{2}$, $b=4$, $c=\frac{3}{2}$

$\therefore a+b+c=11$ 답 11

05 전략 $x=0$, $x=1$을 주어진 등식의 양변에 각각 대입한다.

풀이 $x=0$을 주어진 등식의 양변에 대입하면

$1=a_0$

$x=1$을 주어진 등식의 양변에 대입하면

$2^{10}=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{10}=2^{10}-a_0=1024-1$

$=1023$

답 1023

06 전략 다항식의 나눗셈에 대한 등식을 세우고 이 등식이 항등식임을 이용한다.

풀이 $x^{100}+ax^{10}+bx$를 $(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $x+2$이므로

$x^{100}+ax^{10}+bx=(x+1)(x-1)Q(x)+x+2$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$x=-1$을 양변에 대입하면 $1+a-b=1$

$\therefore a-b=0$ …… ㉠

$x=1$을 양변에 대입하면 $1+a+b=3$

$\therefore a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

$\therefore ab=1$ 답 ①

07 전략 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $f(-1)$이고, $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 $f(2)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-ax^2+3x-2$라 하면 나머지 정리에 의하여

$f(-1)=f(2)$

즉 $-1-a-3-2=8-4a+6-2$이므로

$3a=18$ $\therefore a=6$ 답 6

08 전략 다항식을 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 $ax+b$로 놓는다.

풀이 $f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$

$=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$

…… ㉠ ··· ❶

다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-1$로 나누면 나머지가 3이므로 나머지 정리에 의하여

$f(-1)=5$, $f(1)=3$ ··· ❷

$x=-1$, $x=1$을 ㉠의 양변에 각각 대입하면

$f(-1)=-a+b$, $f(1)=a+b$

$\therefore -a+b=5$, $a+b=3$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=4$ ··· ❸

따라서 $R(x)=-x+4$이므로

$R(5)=-1$ ··· ❹

답 -1

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $f(-1)$, $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $R(5)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

09 전략 다항식 $f(ax+b)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(a\alpha+b)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $4x+3$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+4x+3$

따라서 $f(2x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2\cdot1)=f(2)=4\cdot2+3=11$ 답 ③

다른 풀이 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $4x+3$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+4x+3$

$\therefore f(2x)=(2x-1)(2x-2)Q(2x)+4\cdot2x+3$

$=2(x-1)(2x-1)Q(2x)$

$+8(x-1)+11$

$=(x-1)\{2(2x-1)Q(2x)+8\}+11$

따라서 $f(2x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 11이다.

10 전략 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(\alpha)$임을 이용한다.

풀이 $x^{10}-2x^9+3x^8$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$x^{10}-2x^9+3x^8=(x-1)Q(x)+R$

$x=1$을 양변에 대입하면

$R=1-2+3=2$

$\therefore x^{10}-2x^9+3x^8=(x-1)Q(x)+2$

…… ㉠

$Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(-1)$이므로 $x=-1$을 ㉠의 양변에 대입하면

$$1+2+3=-2Q(-1)+2, \qquad 2Q(-1)=-4$$

$$\therefore Q(-1)=-2$$

따라서 구하는 나머지는 -2이다. 답 ②

11 전략 $f(a)=0$, $f(b)=0$이면 $f(x)$가 $x-a$, $x-b$를 인수로 갖는다.

풀이 $f(a)=0$, $f(b)=0$이므로 인수 정리에 의하여 $f(x)$는 $x-a$, $x-b$를 인수로 갖는다.

이때 $f(x)$는 x^2의 계수가 1인 이차식이므로

$$f(x)=(x-a)(x-b)$$
$$=x^2-(a+b)x+ab$$

이때 $f(x)=x^2-6x-10$이므로

$$a+b=6,\ ab=-10$$

$$\therefore f(a+b)=f(6)$$
$$=36-36-10$$
$$=-10$$

답 -10

12 전략 주어진 다항식을 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구한다.

풀이 다항식 $2x^3+ax^2+x+b$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & a & 1 & b \\ & & -2 & -a+2 & a-3 \\ \hline & 2 & a-2 & -a+3 & \boxed{a+b-3} \end{array}$$

따라서 $-1=k$, $-2=c$, $a-2=3$, $-a+2=d$, $-a+3=-2$, $a-3=2$, $a+b-3=-9$이므로

$$k=-1,\ c=-2,\ a=5,\ d=-3,\ b=-11$$

$$\therefore k+a+b+c+d=-12$$

답 -12

13 전략 $f(x)=ax+b$로 놓고 주어진 등식을 만족시키는 상수 a, b의 값을 구한다.

풀이 $f(x)$가 일차식이므로

$$f(x)=ax+b\ (a\neq0,\ a,\ b\text{는 상수})$$

라 하면 주어진 식은

$$(ax+b)^2=ax^2+b-2(ax+b)$$

$$\therefore a^2x^2+2abx+b^2=ax^2-2ax-b$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$$a^2=a,\ 2ab=-2a,\ b^2=-b$$

세 식을 연립하여 풀면

$$a=1,\ b=-1\ (\because a\neq0)$$

$$\therefore f(x)=x-1$$

답 $f(x)=x-1$

14 전략 $\dfrac{a+4x}{3-2x}=k$라 하면 이 식은 x에 대한 항등식임을 이용한다.

풀이 $\dfrac{a+4x}{3-2x}=k$ (k는 상수)라 하면 등식

$a+4x=k(3-2x)$는 x에 대한 항등식이다. ⋯ ❶

등식의 우변을 전개하면

$$a+4x=3k-2kx$$

이므로

$$a=3k,\ 4=-2k$$

따라서 $k=-2$이므로

$$a=3\cdot(-2)=-6$$ ⋯ ❷

답 -6

채점 기준	비율
❶ x에 대한 항등식을 세울 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %

15 전략 $2^{100}+2^{200}=2\cdot8^{33}+4\cdot8^{66}=f(8)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=2x^{33}+4x^{66}$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$R=f(1)=2+4=\boxed{6}$$

$$\therefore f(x)=(x-1)Q(x)+6$$

이 식이 x에 대한 항등식이므로 $x=\boxed{8}$을 양변에 대입하면

$$f(8)=7Q(8)+6$$

그런데

$$f(8)=2\cdot8^{33}+4\cdot8^{66}=2\cdot2^{99}+2^2\cdot2^{198}=2^{100}+2^{200}$$

이므로

$$2^{100}+2^{200}=7Q(8)+6$$

따라서 $2^{100}+2^{200}$을 7로 나누었을 때의 나머지는 6이다.

이상에서 $p=6$, $q=8$이므로

$$p^2+q^2=36+64=100$$

답 100

16 전략 $x^{10}-1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$로 놓고 양변에 $x=1$을 대입하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $x^{10}-1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$x^{10}-1=(x-1)^2Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x=1$을 양변에 대입하면

$$a+b=0 \qquad \therefore b=-a \quad \cdots\cdots ㉡$$

$x^{10}-1=(x-1)(x^9+x^8+x^7+\cdots+1)$이므로 ㉠, ㉡에 의하여

$(x-1)(x^9+x^8+x^7+\cdots+1)$
$=(x-1)^2Q(x)+a(x-1)$
$=(x-1)\{(x-1)Q(x)+a\}$
$\therefore x^9+x^8+x^7+\cdots+1=(x-1)Q(x)+a$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 $x=1$을 양변에 대입하면

$a=1+1+1+\cdots+1=10$

따라서 $b=-10$이므로

$R(x)=10x-10$

$\therefore R(10)=90$

답 ④

Remark▶

$P(x)=x^{10}-1$이라 하면 $P(1)=0$이므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해할 수 있다.

$$\begin{array}{c|cccccc} & & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{9\text{개}}} & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ & & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore x^{10}-1=(x-1)(x^9+x^8+x^7+\cdots+1)$

17 전략 $f(x)$를 $(x-2)^2(x+2)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$로 놓고 나머지 정리를 이용한다.

풀이 $f(x)$를 $(x-2)^2(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를

$R(x)$($R(x)$는 상수 또는 이차 이하의 다항식)

라 하면

$f(x)=(x-2)^2(x+2)Q(x)+R(x)$ ...... ㉠

이때 $(x-2)^2(x+2)Q(x)$는 $(x-2)^2$으로 나누어떨어지므로 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $R(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지와 같다.
즉 $R(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+1$이므로

$R(x)=a(x-2)^2+x+1$ (a는 상수) ...... ㉡

이라 하고, ㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x-2)^2(x+2)Q(x)+a(x-2)^2+x+1$

$x=-2$를 양변에 대입하면

$f(-2)=16a-1$

이때 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 15이므로 나머지 정리에 의하여

$f(-2)=15$

즉 $16a-1=15$이므로 $a=1$

$\therefore R(x)=(x-2)^2+x+1=x^2-3x+5$

답 x^2-3x+5

18 전략 다항식 $f(x)+x$가 $x-a$로 나누어떨어지면 $f(a)+a=0$이다.

풀이 $f(x)+x$가 $x+1$과 $x-2$로 각각 나누어떨어지므로 인수 정리에 의하여

$f(-1)-1=0$, $f(2)+2=0$

$\therefore f(-1)=1$, $f(2)=-2$ ··· ❶

한편 $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$ ··· ❷

$x=-1$, $x=2$를 양변에 각각 대입하면

$f(-1)=-a+b$, $f(2)=2a+b$

$\therefore -a+b=1$, $2a+b=-2$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=0$ ··· ❸

따라서 구하는 나머지는 $-x$이다. ··· ❹

답 $-x$

채점 기준	비율
❶ $f(-1)$, $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	10 %

다른 풀이 $f(x)+x$가 $x+1$과 $x-2$로 각각 나누어떨어지므로 $f(x)+x$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)+x=(x+1)(x-2)Q(x)$

$\therefore f(x)=(x+1)(x-2)Q(x)-x$

따라서 구하는 나머지는 $-x$이다.

19 전략 다항식 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어지면 $f(x)$는 $x-a$로 나누어떨어지고, $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 몫도 $x-a$로 나누어떨어진다.

풀이 $f(x)=x^3+3x^2+ax+b$라 하자. $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하고 조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & 3 & a & b \\ & & -1 & -2 & 2-a \\ \hline & 1 & 2 & a-2 & \boxed{-a+b+2} \end{array}$$

$\therefore Q(x)=x^2+2x+a-2$, $R=-a+b+2$

이때 $f(x)$가 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로 $f(x)$는 $x+1$로도 나누어떨어진다.
즉 $R=-a+b+2=0$이므로

$a-b=2$ ...... ㉠

한편 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면

$f(x)=(x+1)^2Q'(x)$

$=(x+1)(x+1)Q'(x)$

즉 $Q(x)=(x+1)Q'(x)$이므로 $Q(x)$는 $x+1$로 나누어떨어진다.

따라서 인수 정리에 의하여 $Q(-1)=0$이므로

$1-2+a-2=0$ $\therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore a+b=4$ 답 4

다른 풀이 x^3+3x^2+ax+b가 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로 몫을 $x+c$(c는 상수)라 하면

$x^3+3x^2+ax+b=(x+1)^2(x+c)$

우변을 전개한 후 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

x^3+3x^2+ax+b

$=x^3+(c+2)x^2+(2c+1)x+c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$3=c+2$, $a=2c+1$, $b=c$

세 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=1$, $c=1$

$\therefore a+b=4$

20 전략 주어진 등식의 양변에 적당한 수를 대입하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 $x=2$를 양변에 대입하면

$b=4+6+2=12$

$x=0$을 양변에 대입하면

$2=4-2a+b$, $2a=14$

$\therefore a=7$

$\therefore a+b=19$ 답 ③

다른 풀이 $x=3$을 양변에 대입하면

$9+9+2=1+a+b$ $\therefore a+b=19$

21 전략 삼차식을 이차식으로 나누었을 때의 몫은 일차식임을 이용한다.

풀이 삼차다항식 $f(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫은 일차식이므로 이 몫을 $ax+b$($a\neq0$, a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2+x+1)(ax+b)$

이때 $f(0)=4$이므로

$b=4$

$\therefore f(x)=(x^2+x+1)(ax+4)$ ...... ㉠

또 $f(x)+12$를 x^2+2로 나누었을 때의 몫도 일차식이므로 이 몫을 $ax+c$(c는 상수)라 하면

$f(x)+12=(x^2+2)(ax+c)$

이때 $f(0)=4$이므로

$4+12=2c$ $\therefore c=8$

$\therefore f(x)+12=(x^2+2)(ax+8)$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$(x^2+x+1)(ax+4)=(x^2+2)(ax+8)-12$

$\therefore ax^3+(a+4)x^2+(a+4)x+4$

$=ax^3+8x^2+2ax+4$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+4=8$, $a+4=2a$

$\therefore a=4$

따라서 $f(x)=(x^2+x+1)(4x+4)$이므로

$f(1)=3\cdot8=24$ 답 24

22 전략 주어진 등식을 이용하여 $f(x)$의 차수와 최고차항의 계수를 구한다.

풀이 ㄱ. $f(x)$를 x로 나눈 나머지는 $f(0)$이므로 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$\{f(0)\}^3=1$ $\therefore f(0)=1$

따라서 $f(x)$를 x로 나눈 나머지는 1이다.

ㄴ. $f(x)$의 차수를 n이라 하면 주어진 등식의 좌변의 차수는 $3n$, 우변의 차수는 $n+2$이므로

$3n=n+2$ $\therefore n=1$

즉 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 일차식이고 $f(0)=1$이므로 $f(x)=ax+1$ $(a>0)$이라 하자.

주어진 등식의 좌변의 최고차항의 계수는 a^3, 우변의 최고차항의 계수는 $4a$이므로

$a^3=4a$, $a(a+2)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

따라서 $f(x)$의 최고차항의 계수는 2이다.

ㄷ. ㄴ에서 $f(x)=2x+1$이므로 $\{f(x)\}^3$을 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를

$bx+c$ (b, c는 상수)

라 하면

$(2x+1)^3=(x^2-1)Q(x)+bx+c$

$=(x+1)(x-1)Q(x)+bx+c$ ...... ㉠

$x=-1$을 ㉠의 양변에 대입하면

$-1=-b+c$ ...... ㉡

$x=1$을 ㉠의 양변에 대입하면

$27=b+c$ ...... ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $b=14$, $c=13$

따라서 $\{f(x)\}^3$을 x^2-1로 나눈 나머지는 $14x+13$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

23 전략 다항식 $f(x)-g(x)$가 $x+2$를 인수로 가지면 $f(-2)-g(-2)=0$임을 이용한다.

풀이 $f(x)-g(x)$가 $x+2$를 인수로 가지므로 인수정리에 의하여

$$f(-2)-g(-2)=0$$

$$\therefore f(-2)=g(-2)$$

즉 $8-10+2=-2a+2+b$이므로

$$2a-b-2=0$$

답 ④

24 전략 먼저 주어진 등식이 항등식임을 이용하여 $Q(x)$를 구한다.

풀이 주어진 등식에서

$$\{Q(x+1)\}^2+\{Q(x)\}^2=x(x-1)P(x) \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x=0$을 ㉠의 양변에 대입하면

$$\{Q(1)\}^2+\{Q(0)\}^2=0$$

$$\therefore Q(0)=0,\ Q(1)=0$$

$x=1$을 ㉠의 양변에 대입하면

$$\{Q(2)\}^2+\{Q(1)\}^2=0$$

$$\therefore Q(1)=0,\ Q(2)=0$$

따라서 $Q(x)$는 x, $x-1$, $x-2$를 인수로 갖고 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식이므로

$$Q(x)=x(x-1)(x-2)$$

$$\begin{aligned}\therefore \{Q(x+1)\}^2+\{Q(x)\}^2 &=\{(x+1)x(x-1)\}^2+\{x(x-1)(x-2)\}^2\\ &=x^2(x-1)^2\{(x+1)^2+(x-2)^2\}\\ &=x^2(x-1)^2(2x^2-2x+5)\end{aligned}$$

즉 ㉠에서

$$x^2(x-1)^2(2x^2-2x+5)=x(x-1)P(x)$$

따라서 $P(x)=x(x-1)(2x^2-2x+5)$이므로 $P(x)$를 $Q(x)$로 나누었을 때의 몫을 $T(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$$x(x-1)(2x^2-2x+5)$$
$$=x(x-1)(x-2)T(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots\cdots ㉡$$

$x=0$을 ㉡의 양변에 대입하면

$$0=c$$

$x=1$을 ㉡의 양변에 대입하면

$$0=a+b+c \qquad \therefore a+b=0 \quad \cdots\cdots ㉢$$

$x=2$를 ㉡의 양변에 대입하면

$$2\cdot1\cdot9=4a+2b+c$$

$$\therefore 2a+b=9 \quad \cdots\cdots ㉣$$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$$a=9,\ b=-9$$

따라서 $R(x)=9x^2-9x$이므로

$$R(3)=81-27=54$$

답 54

25 전략 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지를 R라 하고 조건 (가)를 이용하여 $f(x)-R$의 식을 세운다.

풀이 조건 (가)에 의하여 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$, 나머지를 R라 하면

$$f(x)=(x+1)Q_1(x)+R$$

$$\therefore f(x)-R=(x+1)Q_1(x) \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 $f(x)$를 x^2-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면 나머지는 R이므로

$$f(x)=(x^2-3)Q_2(x)+R$$

$$\therefore f(x)-R=(x^2-3)Q_2(x) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$(x+1)Q_1(x)=(x^2-3)Q_2(x)$$

즉 $Q_1(x)$는 x^2-3을, $Q_2(x)$는 $x+1$을 각각 인수로 가져야 한다.

이때 $f(x)-R$는 최고차항의 계수가 1인 사차다항식이므로

$$f(x)-R=(x+1)(x^2-3)(x+a)\ (a\text{는 상수}) \quad \cdots\cdots ㉢$$

라 하면 조건 (나)에 의하여 $f(x+1)-5$는 x^2+x, 즉 $x(x+1)$로 나누어떨어지므로

$$f(0+1)-5=0,\ f(-1+1)-5=0$$

$$\therefore f(1)=5,\ f(0)=5$$

$x=1$을 ㉢의 양변에 대입하면

$$5-R=2\cdot(-2)\cdot(1+a)$$

$$\therefore 4a-R=-9 \quad \cdots\cdots ㉣$$

$x=0$을 ㉢의 양변에 대입하면

$$5-R=1\cdot(-3)\cdot a$$

$$\therefore 3a-R=-5 \quad \cdots\cdots ㉤$$

㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $a=-4$, $R=-7$

따라서 $f(x)=(x+1)(x^2-3)(x-4)-7$이므로

$$f(4)=-7$$

답 ③

I. 다항식

03 인수분해

유제

본책 61~70쪽

017-① (1) $x^2+4y^2-z^2+4xy$

$=(x^2+4xy+4y^2)-z^2$

$=(x+2y)^2-z^2$

$=(x+2y+z)(x+2y-z)$

(2) $x^3y-xy^3+x^2y+xy^2$

$=xy(x^2-y^2+x+y)$

$=xy\{(x+y)(x-y)+(x+y)\}$

$=xy(x+y)(x-y+1)$

(3) $x^2y+x^2-xy^2-y^2=x^2y-xy^2+x^2-y^2$

$=xy(x-y)+(x+y)(x-y)$

$=(x-y)(xy+x+y)$

(4) $x^2(x-y)+y^2(y-x)=x^2(x-y)-y^2(x-y)$

$=(x-y)(x^2-y^2)$

$=(x-y)(x+y)(x-y)$

$=(x-y)^2(x+y)$

(5) $x^8-y^8=(x^4)^2-(y^4)^2$

$=(x^4+y^4)(x^4-y^4)$

$=(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x^2-y^2)$

$=(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$

(6) $(x+y)^4-(x-y)^4$

$=\{(x+y)^2\}^2-\{(x-y)^2\}^2$

$=\{(x+y)^2+(x-y)^2\}\{(x+y)^2-(x-y)^2\}$

$=(2x^2+2y^2)\cdot 4xy=8xy(x^2+y^2)$

답 풀이 참조

018-① (1) $x^2+4=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(X+2x)(X-3x)+4x^2$

$=X^2-xX-2x^2$

$=(X+x)(X-2x)$

$=(x^2+x+4)(x^2-2x+4)$

(2) $(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)+9$

$=\{(x-1)(x+4)\}\{(x+1)(x+2)\}+9$

$=(x^2+3x-4)(x^2+3x+2)+9$

$x^2+3x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(X-4)(X+2)+9$

$=X^2-2X+1=(X-1)^2$

$=(x^2+3x-1)^2$

답 풀이 참조

019-① (1) $x^2=X$로 놓으면

$x^4-18x^2+32=X^2-18X+32$

$=(X-2)(X-16)$

$=(x^2-2)(x^2-16)$

$=(x^2-2)(x+4)(x-4)$

(2) $x^2=X$로 놓으면

$4x^4-15x^2-4=4X^2-15X-4$

$=(X-4)(4X+1)$

$=(x^2-4)(4x^2+1)$

$=(x+2)(x-2)(4x^2+1)$

(3) $x^4-6x^2+1=x^4-2x^2+1-4x^2$

$=(x^2-1)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)$

(4) $x^4+64=x^4+16x^2+64-16x^2$

$=(x^2+8)^2-(4x)^2$

$=(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$

(5) $x^4-7x^2y^2+y^4$

$=x^4+2x^2y^2+y^4-9x^2y^2$

$=(x^2+y^2)^2-(3xy)^2$

$=(x^2+3xy+y^2)(x^2-3xy+y^2)$

답 풀이 참조

020-① (1) 주어진 다항식을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2b-b^2c-b^3+ca^2=(a^2-b^2)c+a^2b-b^3$

$=(a^2-b^2)c+b(a^2-b^2)$

$=(a^2-b^2)(c+b)$

$=(a+b)(a-b)(b+c)$

(2) 주어진 다항식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$3a^2-2b^2+5ab-2a+3b-1$

$=3a^2+(5b-2)a-(2b^2-3b+1)$

$=3a^2+(5b-2)a-(2b-1)(b-1)$

$=\{3a-(b-1)\}\{a+(2b-1)\}$

$=(3a-b+1)(a+2b-1)$

(3) 주어진 다항식을 전개한 다음 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

$=a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2$

$=(a-b)c^2-(a^2-b^2)c+a^2b-ab^2$

$=(a-b)c^2-(a+b)(a-b)c+ab(a-b)$

$=(a-b)\{c^2-(a+b)c+ab\}$

$=(a-b)(c-a)(c-b)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

(4) 주어진 다항식을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$a^3+a^2c+ac^2-b^3-b^2c-bc^2$$
$$=(a-b)c^2+(a^2-b^2)c+a^3-b^3$$
$$=(a-b)c^2+(a+b)(a-b)c$$
$$+(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$=(a-b)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$

답 풀이 참조

021-❶ (1) $f(x)=x^3-6x^2+13x-10$이라 하면

$$f(2)=8-24+26-10=0$$

이므로 $x-2$는 $f(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -6 & 13 & -10 \\ & & 2 & -8 & 10 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 구하면 x^2-4x+5이므로

$$x^3-6x^2+13x-10$$
$$=(x-2)(x^2-4x+5)$$

(2) $f(x)=3x^3-4x^2-17x+6$이라 하면

$$f(-2)=-24-16+34+6=0$$

이므로 $x+2$는 $f(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 3 & -4 & -17 & 6 \\ & & -6 & 20 & -6 \\ \hline & 3 & -10 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 구하면 $3x^2-10x+3$이므로

$$3x^3-4x^2-17x+6$$
$$=(x+2)(3x^2-10x+3)$$
$$=(x+2)(3x-1)(x-3)$$

(3) $f(x)=2x^4+3x^3-3x^2+4$라 하면

$$f(-1)=2-3-3+4=0,$$
$$f(-2)=32-24-12+4=0$$

이므로 $x+1$, $x+2$는 $f(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 2 & 3 & -3 & 0 & 4 \\ & & -2 & -1 & 4 & -4 \\ \hline -2 & 2 & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \\ & & -4 & 6 & -4 & \\ \hline & 2 & -3 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $(x+1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 구하면 $2x^2-3x+2$이므로

$$2x^4+3x^3-3x^2+4$$
$$=(x+1)(x+2)(2x^2-3x+2)$$

(4) $f(x)=6x^4-13x^3-2x^2+7x+2$라 하면

$$f(1)=6-13-2+7+2=0,$$
$$f(2)=96-104-8+14+2=0$$

이므로 $x-1$, $x-2$는 $f(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 6 & -13 & -2 & 7 & 2 \\ & & 6 & -7 & -9 & -2 \\ \hline 2 & 6 & -7 & -9 & -2 & \boxed{0} \\ & & 12 & 10 & 2 & \\ \hline & 6 & 5 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 구하면 $6x^2+5x+1$이므로

$$6x^4-13x^3-2x^2+7x+2$$
$$=(x-1)(x-2)(6x^2+5x+1)$$
$$=(x-1)(x-2)(2x+1)(3x+1)$$

답 풀이 참조

021-❷ $f(x)=x^3-(a-3)x^2-(2a+1)x+3a-3$이라 하면

$$f(1)=1-(a-3)-(2a+1)+3a-3=0$$

이므로 $x-1$은 $f(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -(a-3) & -(2a+1) & 3a-3 \\ & & 1 & -a+4 & -3a+3 \\ \hline & 1 & -a+4 & -3a+3 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 구하면 $x^2+(-a+4)x-3a+3$이므로

$$x^3-(a-3)x^2-(2a+1)x+3a-3$$
$$=(x-1)\{x^2+(-a+4)x-3a+3\}$$
$$=(x-1)\{x^2+(-a+4)x-3(a-1)\}$$
$$=(x-1)(x+3)\{x-(a-1)\}$$
$$=(x-1)(x+3)(x-a+1)$$

답 $(x-1)(x+3)(x-a+1)$

022-❶ (1) 주어진 식을 인수분해하면

$$a^3+a^2b-ab^2-b^3=a^2(a+b)-b^2(a+b)$$
$$=(a+b)(a^2-b^2)$$
$$=(a+b)(a+b)(a-b)$$
$$=(a+b)^2(a-b)$$

이때

$$a+b=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}=1,$$
$$a-b=\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1-\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

이므로 (주어진 식)$=1^2\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}$

(2) $18=x$로 놓으면

$$\begin{aligned}\frac{18^4+18^2+1}{18\cdot17+1}&=\frac{x^4+x^2+1}{x(x-1)+1}\\&=\frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}\\&=x^2+x+1\\&=18^2+18+1\\&=343\end{aligned}$$

답 (1) $\sqrt{3}$ (2) 343

중단원 연습 문제

본책 72~75쪽

01 ④	02 1	03 ③	04 4	05 6
06 −3	07 ⑤	08 −56	09 −6	
10 869	11 −4	12 ⑤	13 8	14 32
15 ④	16 32	17 10101		18 11
19 ①	20 ③	21 ③	22 ①	

01 전략 주어진 식에서 인수분해 공식을 이용할 수 있도록 항끼리 짝을 짓는다.

풀이 $x^3-2x^2y+2xy^2-y^3$

$=(x^3-y^3)-2xy(x-y)$

$=(x-y)(x^2+xy+y^2)-2xy(x-y)$

$=(x-y)(x^2-xy+y^2)$

답 ④

02 전략 주어진 식의 우변을 이항한 후 인수분해한다.

풀이 $a^3+b^3+c^3=3abc$, 즉 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$의 좌변을 인수분해하면

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$\therefore \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

이때 a, b, c가 양의 실수이므로

$a+b+c>0$

따라서 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$이므로

$a=b=c$

$\therefore \frac{b}{a}+\frac{c}{b}-\frac{a}{c}=1+1-1=1$

답 1

Remark▶ 실수의 성질

두 실수 x, y에 대하여

$x^2+y^2=0 \Longleftrightarrow x=y=0$

03 전략 공통부분인 x^2+2를 X로 치환하여 인수분해한다.

풀이 $x^2+2=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(X+x)(X+2x)-6x^2\\&=X^2+3xX-4x^2\\&=(X+4x)(X-x)\\&=(x^2+4x+2)(x^2-x+2)\end{aligned}$$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ③이다.

답 ③

04 전략 $x^2=X$로 놓고 X에 대한 이차식을 인수분해한다.

풀이 $x^2=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}x^4-6x^2+5&=X^2-6X+5\\&=(X-1)(X-5)\\&=(x^2-1)(x^2-5)\\&=(x+1)(x-1)(x^2-5)\end{aligned}$$

따라서 $a=-1$, $b=-5$이므로

$a-b=4$

답 4

05 전략 $4x^4+3x^2+1$의 이차항 $3x^2$을 적당히 분리하여 A^2-B^2 꼴로 변형한다.

풀이 $f(x)g(x)=4x^4+3x^2+1$

$=4x^4+4x^2+1-x^2$

$=(2x^2+1)^2-x^2$

$=(2x^2+x+1)(2x^2-x+1)$ ··· ❶

$\therefore f(x)+g(x)=(2x^2+x+1)+(2x^2-x+1)$

$=4x^2+2$ ··· ❷

따라서 $f(x)+g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(1)+g(1)=4+2=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $f(x)g(x)$를 인수분해할 수 있다.	40 %
❷ $f(x)+g(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(x)+g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	20 %

Remark▶ 나머지 정리

x에 대한 다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면 $R=f(a)$

06 전략 주어진 다항식을 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

풀이 주어진 다항식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&x^2-xy-6y^2-x+8y-2\\&=x^2-(y+1)x-2(3y^2-4y+1)\\&=x^2-(y+1)x-2(y-1)(3y-1)\\&=\{x+2(y-1)\}\{x-(3y-1)\}\\&=(x+2y-2)(x-3y+1)\end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=-2$, $c=-3$이므로

$a+b+c=-3$ **답** -3

07 **전략** 주어진 다항식을 c에 대하여 내림차순으로 정리한다.

풀이 주어진 다항식을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(a^2+b^2)c^2+a^4-b^4=0$$
$$(a^2+b^2)c^2+(a^2+b^2)(a^2-b^2)=0$$
$$(a^2+b^2)(a^2-b^2+c^2)=0$$

이때 $a^2+b^2>0$이므로 $a^2-b^2+c^2=0$

$\therefore b^2=a^2+c^2$

따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다. **답** ⑤

Remark▶ 삼각형의 모양 판단하기

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c일 때
① $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ ➡ 이등변삼각형
② $a=b=c$ ➡ 정삼각형
③ $c^2=a^2+b^2$ ➡ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

08 **전략** 주어진 다항식을 $f(x)$라 하고 $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=x^3+6x^2+x-14$라 하면

$f(-2)=-8+24-2-14=0$

이므로 $x+2$는 $f(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 6 & 1 & -14 \\ & & -2 & -8 & 14 \\ \hline & 1 & 4 & -7 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 구하면 x^2+4x-7이므로

$x^3+6x^2+x-14=(x+2)(x^2+4x-7)$

즉 $a=2$, $b=4$, $c=-7$이므로

$abc=-56$ **답** -56

09 **전략** $f(x)$가 $x-a$를 인수로 가지면 $f(a)=0$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3+ax^2+x+6$이라 하면 $x-2$가 $f(x)$의 인수이므로 인수 정리에 의하여

$f(2)=0$

즉 $8+4a+2+6=0$이므로

$4a=-16$ $\therefore a=-4$ ··· ❶

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & 2 & -4 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 구하면 x^2-2x-3이므로

$$\begin{aligned}x^3-4x^2+x+6&=(x-2)(x^2-2x-3)\\&=(x-2)(x+1)(x-3)\end{aligned}$$ ··· ❷

즉 $b=1$, $c=-3$ 또는 $b=-3$, $c=1$이므로

$a+b+c=-6$ ··· ❸

답 -6

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ x^3-4x^2+x+6을 인수분해할 수 있다.	40 %
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

10 **전략** $30=x$로 놓고 근호 안의 식을 x에 대한 식으로 나타낸 후 공통부분이 생기도록 전개한다.

풀이 $30=x$로 놓으면

$$\begin{aligned}&28\cdot29\cdot30\cdot31+1\\&=(x-2)(x-1)x(x+1)+1\\&=\{x(x-1)\}\{(x-2)(x+1)\}+1\\&=(x^2-x)(x^2-x-2)+1\end{aligned}$$

$x^2-x=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}X(X-2)+1=X^2-2X+1&=(X-1)^2\\&=(x^2-x-1)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{28\cdot29\cdot30\cdot31+1}&=\sqrt{(x^2-x-1)^2}\\&=\sqrt{(30^2-30-1)^2}\\&=\sqrt{869^2}\\&=869\end{aligned}$$

답 869

11 **전략** 주어진 식을 인수분해한 후, $x+y$, xy의 값을 대입한다.

풀이 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&x^2+y^2-6x^2y^2+x^2y+xy^2+2xy\\&=(1+y-6y^2)x^2+(y^2+2y)x+y^2\\&=(1+3y)(1-2y)x^2+(y^2+2y)x+y^2\\&=\{(1+3y)x+y\}\{(1-2y)x+y\}\\&=(x+y+3xy)(x+y-2xy)\end{aligned}$$ ··· ❶

이때

$x+y=(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})=2,$

$xy=(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=-1$ ⋯ ❷

이므로

(주어진 식)$=\{2+3\cdot(-1)\}\{2-2\cdot(-1)\}$

$=-4$ ⋯ ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	50 %
❷ $x+y$, xy의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $x^2+y^2-6x^2y^2+x^2y+xy^2+2xy$

$=(x^2+y^2+2xy)+xy(x+y)-6(xy)^2$

$=(x+y)^2+xy(x+y)-6(xy)^2$

$=\{(x+y)+3xy\}\{(x+y)-2xy\}$

$=(x+y+3xy)(x+y-2xy)$

12 전략 먼저 주어진 다항식을 인수분해한 후 $a+2b=1$을 이용하여 간단히 한다.

풀이 $1-a^2+4ab-4b^2=1-(a^2-4ab+4b^2)$

$=1-(a-2b)^2$

$=(1-a+2b)(1+a-2b)$

이때 $a+2b=1$이므로

$(1-a+2b)(1+a-2b)$

$=(a+2b-a+2b)(a+2b+a-2b)$

$=4b\cdot 2a=8ab$

답 ⑤

13 전략 주어진 사차식을 A^2-B^2 꼴로 만들어 인수분해한다.

풀이 x^4-nx^2+16

$=x^4-8x^2+16-(n-8)x^2$

$=(x^2-4)^2-(\sqrt{n-8}x)^2$

$=(x^2+\sqrt{n-8}x-4)(x^2-\sqrt{n-8}x-4)$

$\therefore m=\sqrt{n-8}$ ($\because m>0$)

m이 자연수가 되려면

$n-8=1^2, 2^2, 3^2, \cdots$

$\therefore n=8+1^2, 8+2^2, 8+3^2, \cdots$

따라서 구하는 두 자리 자연수 n은

$8+2^2, 8+3^2, \cdots, 8+9^2$

의 8개이다.

답 8

14 전략 $x^4+8x^3+5x^2-50x$를 조립제법을 이용하여 인수분해한다.

풀이 $f(x)g(x)=x^4+8x^3+5x^2-50x$

$=x(x^3+8x^2+5x-50)$

$h(x)=x^3+8x^2+5x-50$이라 하면

$h(2)=8+32+10-50=0$

이므로 $x-2$는 $h(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 8 & 5 & -50 \\ & & 2 & 20 & 50 \\ \hline & 1 & 10 & 25 & 0 \end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $h(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 구하면 $x^2+10x+25$이므로

$x^3+8x^2+5x-50=(x-2)(x^2+10x+25)$

$=(x-2)(x+5)^2$

$\therefore f(x)g(x)=x(x-2)(x+5)^2$ ⋯ ❶

이때 $xf(x)=(x-2)g(x)$에서 $g(x)$는 x를 인수로 갖고, $f(x)$는 $x-2$를 인수로 가지므로

$f(x)=(x-2)(x+5)$, $g(x)=x(x+5)$ ⋯ ❷

$\therefore f(3)+g(3)=8+24=32$ ⋯ ❸

답 32

채점 기준	비율
❶ $f(x)g(x)$를 인수분해할 수 있다.	50 %
❷ $f(x)$, $g(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(3)+g(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

15 전략 연속한 두 자연수의 곱은 2의 배수이다.

풀이 ㄱ. n이 짝수일 때, $n^2-1=(n-1)(n+1)$에서 $n-1$, $n+1$은 모두 홀수이므로 n^2-1도 홀수이다.

ㄴ. $n^2+n=n(n+1)$에서 $n(n+1)$은 연속한 두 자연수의 곱이므로 2의 배수, 즉 짝수이다.

ㄷ. n이 짝수일 때, $n+1$, $2n+1$은 모두 홀수이므로 $(n+1)(2n+1)$도 홀수이다.

ㄹ. $n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$에서 $(n+1)(n+2)$는 연속한 두 자연수의 곱이므로 2의 배수, 즉 짝수이다.

이상에서 항상 짝수인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

16 전략 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$임을 이용하여 $2^{16}-1$을 인수분해한다.

풀이 $2^{16}-1=(2^8+1)(2^8-1)$

$=(2^8+1)(2^4+1)(2^4-1)$

$=(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2^2-1)$

$=(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2+1)(2-1)$

$=257\cdot 17\cdot 5\cdot 3$

따라서 10과 20 사이의 두 자연수는 15, 17이므로 구하는 합은

$15+17=32$ 답 32

17 전략 $99=10^2-1$이므로 10^2을 한 문자로 놓고 10^6-1을 인수분해한다.

풀이 $99=10^2-1$이므로 $10^2=x$로 놓으면

$$\begin{aligned}\frac{10^6-1}{99}&=\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}\\&=x^2+x+1\\&=10^4+10^2+1\\&=10101\end{aligned}$$

답 10101

18 전략 나머지 정리를 이용하여 R_1, R_2를 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $ax^3+b=(ax+b)Q_1(x)+R_1$ ······ ㉠

$ax^4+b=(ax+b)Q_2(x)+R_2$ ······ ㉡

$x=-\dfrac{b}{a}$를 ㉠, ㉡의 양변에 각각 대입하면

$$R_1=-\frac{b^3}{a^2}+b,\ R_2=\frac{b^4}{a^3}+b$$

이때 $R_1=R_2$이므로

$$-\frac{b^3}{a^2}+b=\frac{b^4}{a^3}+b \qquad \therefore b=-a\ (\because ab\neq0)$$

$$\therefore R_1=R_2=0$$

$ax^3+b=ax^3-a=a(x^3-1)=a(x-1)(x^2+x+1)$

이므로 ㉠에서

$$a(x-1)(x^2+x+1)=a(x-1)Q_1(x)$$

$$\therefore Q_1(x)=x^2+x+1$$

$ax^4+b=ax^4-a=a(x^4-1)=a(x-1)(x+1)(x^2+1)$

이므로 ㉡에서

$$a(x-1)(x+1)(x^2+1)=a(x-1)Q_2(x)$$

$$\therefore Q_2(x)=(x+1)(x^2+1)$$

$$\therefore Q_1(2)+Q_2(1)=7+4=11$$

답 11

19 전략 두 정육면체의 한 모서리의 길이를 각각 x, y라 하고 주어진 조건을 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 두 정육면체의 한 모서리의 길이를 각각 x, y라 하면 두 정육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 60이므로

$$12(x+y)=60 \qquad \therefore x+y=5$$

또 두 정육면체의 겉넓이의 합이 126이므로

$$6(x^2+y^2)=126 \qquad \therefore x^2+y^2=21$$

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$에서

$$25=21+2xy \qquad \therefore xy=2$$

따라서 두 정육면체의 부피의 합은

$$\begin{aligned}x^3+y^3&=(x+y)(x^2-xy+y^2)\\&=5\cdot(21-2)=95\end{aligned}$$

답 ①

20 전략 공통부분인 $2x+y$를 X로 치환하여 인수분해한다.

풀이 $2x+y=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}&(2x+y)^2-2(2x+y)-3\\&=X^2-2X-3\\&=(X+1)(X-3)\\&=(2x+y+1)(2x+y-3)\end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=1$, $c=-3$이므로

$a+b+c=0$ 답 ③

21 전략 주어진 다항식을 $f(x)$라 하고 $f(a)=0\,(a\neq-1)$인 a의 값을 찾는다.

풀이 $f(x)=x^4-2x^3+2x^2-x-6$이라 하면 $x+1$이 $f(x)$의 인수이므로 $f(-1)=0$이고

$$f(2)=16-16+8-2-6=0$$

이므로 $x-2$는 $f(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -2 & 2 & -1 & -6 \\ & & -1 & 3 & -5 & 6 \\ \hline 2 & 1 & -3 & 5 & -6 & \boxed{0} \\ & & 2 & -2 & 6 & \\ \hline & 1 & -1 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 구하면 x^2-x+3이므로

$$\begin{aligned}&x^4-2x^3+2x^2-x-6\\&=(x+1)(x-2)(x^2-x+3)\end{aligned}$$

즉 $a=-2$, $b=-1$, $c=3$이므로

$a+b+c=0$ 답 ③

22 전략 $2018=x$, $3=y$로 놓고 2018^3-27을 인수분해한다.

풀이 $2018=x$, $3=y$로 놓으면

$$\begin{aligned}2018^3-27&=x^3-y^3\\&=(x-y)(x^2+xy+y^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2018\times2021+9&=x(x+y)+y^2\\&=x^2+xy+y^2\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}2018^3-27&=(x-y)(x^2+xy+y^2)\\&=2015\times(2018\times2021+9)\end{aligned}$$

이므로 구하는 몫은 2015이다. 답 ①

Ⅱ. 방정식

04 복소수

유제 본책 86~101쪽

023-① ㄱ. $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\neq 1$이므로 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$는 z가 될 수 없다.

ㄴ. $\bar{z}=c+di$ (c, d는 실수)이면 $z=c-di$이므로

$c^2+(-d)^2=1 \qquad \therefore c^2+d^2=1$

ㄷ. $z=bi$ ($b\neq 0$인 실수)라 하면

$b^2=1 \qquad \therefore b=\pm 1$

$\therefore z=\pm i$

따라서 순허수인 z는 i, $-i$의 2개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

024-① (1) $z_1=(2+3i)x^2-4x+5-i$

$=(2x^2-4x+5)+(3x^2-1)i$

$z_2=(1+2i)x^2+x+3=(x^2+x+3)+2x^2i$

$\therefore z_1-z_2=(x^2-5x+2)+(x^2-1)i$

z_1-z_2가 실수이므로 $\quad x^2-1=0$

$\therefore x=1\ (\because x>0)$

(2) $z=(1-i)(1+i)a^2+(4-3i)a-6i$

$=(2a^2+4a)-(3a+6)i$

z가 실수이면

$3a+6=0 \qquad \therefore a=-2$

$\therefore x=-2$

z가 순허수이면 $\quad 2a^2+4a=0,\ 3a+6\neq 0$

(i) $2a^2+4a=0$에서 $\quad 2a(a+2)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=-2$

(ii) $3a+6\neq 0$에서 $\quad a\neq -2$

(i), (ii)에서 $\quad a=0 \qquad \therefore y=0$

$\therefore x^2+y^2=4$

답 (1) 1 (2) 4

025-① (1) 주어진 등식의 좌변을 전개하면

$x(4+4i+i^2)+y(1-2i+i^2)=6+2i$

$x(3+4i)-2yi=6+2i$

$3x+(4x-2y)i=6+2i$

$3x$, $4x-2y$가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3x=6,\ 4x-2y=2$

$\therefore x=2,\ y=3$

(2) 주어진 등식의 좌변에서

$$\frac{x}{1-i}+\frac{y}{1+i}=\frac{x(1+i)+y(1-i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$=\frac{(x+y)+(x-y)i}{2}$$
$$=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}i$$

이므로 주어진 등식은

$$\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}i=2+i$$

$\frac{x+y}{2}$, $\frac{x-y}{2}$가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\frac{x+y}{2}=2,\ \frac{x-y}{2}=1$

$x+y=4,\ x-y=2$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=3,\ y=1$

답 (1) $x=2$, $y=3$ (2) $x=3$, $y=1$

025-② 주어진 등식의 좌변을 전개하면

$x^2(1+i)^2-2xy(1+i)(1-i)+y^2(1-i)^2=-4$

$x^2(1+2i+i^2)-2xy(1-i^2)+y^2(1-2i+i^2)$
$=-4$

$x^2\cdot 2i-2xy\cdot 2+y^2\cdot(-2i)=-4$

$-4xy+(2x^2-2y^2)i=-4$

$-4xy$, $2x^2-2y^2$이 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$-4xy=-4,\ 2x^2-2y^2=0$

$2x^2-2y^2=0$에서 $\quad x^2-y^2=0$ 답 0

Remark▶

$-4xy=-4$, $2x^2-2y^2=0$에서

$xy=1,\ x^2=y^2 \qquad \therefore xy=1,\ x=\pm y$

(i) $x=y$일 때, $xy=1$에서

$x^2=1 \qquad \therefore x=\pm 1,\ y=\pm 1$(복호동순)

(ii) $x=-y$일 때, $xy=1$에서

$x^2=-1$

그런데 $x^2=-1$인 실수 x는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $\quad x=1,\ y=1$ 또는 $x=-1,\ y=-1$

026-① (1) $x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $\quad 2x-1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면

$4x^2-4x+1=-3 \qquad \therefore x^2-x+1=0$

$\therefore 2x^3-2x^2+1=2x(x^2-x+1)-2x+1$

$=-2x+1$

$=-2\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+1$

$=-1-\sqrt{3}i+1=-\sqrt{3}i$

(2) $x=\frac{10}{2+i}=\frac{10(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{10(2-i)}{5}=4-2i$

에서 $\quad x-4=-2i$

양변을 제곱하면

$x^2-8x+16=-4$

$\therefore x^2-8x+20=0$

$\therefore x^3-8x^2+19x+1$

$=x(x^2-8x+20)-x+1$

$=-x+1=-(4-2i)+1$

$=-3+2i$

답 (1) $-\sqrt{3}i$ (2) $-3+2i$

027-❶ (1) $i^2=i^6=-1$, $i^3=i^7=-i$, $i^4=i^8=1$, $i^5=i$이므로

$i+2i^2+3i^3+\cdots+8i^8$

$=i+2\cdot(-1)+3\cdot(-i)+4\cdot1+5\cdot i$

$\quad+6\cdot(-1)+7\cdot(-i)+8\cdot1$

$=i-2-3i+4+5i-6-7i+8$

$=4-4i$

(2) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{-2i}{2}=-i$,

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$\therefore \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{50}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50}$

$=\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{25}+i^{50}$

$=(-i)^{25}+i^{50}$

$=-(i^4)^6\cdot i+(i^4)^{12}\cdot i^2$

$=-i-1$

답 (1) $4-4i$ (2) $-i-1$

028-❶ $\alpha\overline{\alpha}\beta+\alpha\beta\overline{\beta}=\alpha\beta(\overline{\alpha}+\overline{\beta})=\alpha\beta(\overline{\alpha+\beta})$

$=(3-i)(\overline{2-i})$

$=(3-i)(2+i)$

$=6+i+1=7+i$ 답 $7+i$

028-❷ $\alpha\overline{\alpha}=1$, $\beta\overline{\beta}=1$이므로

$\frac{1}{\alpha}=\overline{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}=\overline{\beta}$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\overline{\alpha+\beta}=\overline{-i}=i$ 답 i

029-❶ $z^3\overline{z}+z\overline{z}^3$

$=z\overline{z}(z^2+\overline{z}^2)$

$=z\overline{z}\{(z+\overline{z})^2-2z\overline{z}\}$ …… ㉠

$\overline{z}=3-2i$이므로

$z+\overline{z}=(3+2i)+(3-2i)=6$

$z\overline{z}=(3+2i)(3-2i)=9+4=13$

㉠에서

$z^3\overline{z}+z\overline{z}^3=13(6^2-2\cdot13)=130$ 답 130

029-❷ $\alpha+\beta=\frac{1+i}{2}+\frac{1-i}{2}=1$

$\alpha\beta=\frac{1+i}{2}\cdot\frac{1-i}{2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

① $(\alpha+\beta)^2=1$

② $\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

③ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1-2\cdot\frac{1}{2}=0$

④ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=1\div\frac{1}{2}=1\cdot2=2$

⑤ $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$

답 ④

030-❶ (1) $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$\overline{z}=a-bi$이므로

$z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$

$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

즉 $2a=6$, $a^2+b^2=13$이므로

$a=3$, $b=\pm2$

$\therefore z=3\pm2i$

(2) $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$z^2=(a+bi)^2$

$=a^2+2abi+(bi)^2$

$=a^2-b^2+2abi$

따라서 $a^2-b^2+2abi=2i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=0$, $2ab=2$

$\therefore b=\pm a$, $ab=1$

(i) $b=a$일 때, $ab=1$에서

$a^2=1$

$\therefore a=\pm1$, $b=\pm1$ (복호동순)

(ii) $b=-a$일 때, $ab=1$에서

$a^2=-1$

그런데 $a^2=-1$인 실수 a는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=\pm1$, $b=\pm1$ (복호동순)이므로

$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)$

$=a^2+b^2=2$

답 (1) $3\pm2i$ (2) 2

030-❷ $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ (a, b, c, d는 실수)라 하면

(1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{(a+bi)+(c+di)}$
$=\overline{(a+c)+(b+d)i}$
$=(a+c)-(b+d)i$
$=(a-bi)+(c-di)$
$=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

(2) $\overline{z_1-z_2}=\overline{(a+bi)-(c+di)}$
$=\overline{(a-c)+(b-d)i}$
$=(a-c)-(b-d)i$
$=(a-bi)-(c-di)$
$=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

(3) $\overline{z_1z_2}=\overline{(a+bi)(c+di)}$
$=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}$
$=(ac-bd)-(ad+bc)i$
$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(\overline{a+bi})(\overline{c+di})$
$=(a-bi)(c-di)$
$=(ac-bd)-(ad+bc)i$
$\therefore\ \overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

(4) $\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}=\overline{\left(\frac{c+di}{a+bi}\right)}=\overline{\left\{\frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}\right\}}$
$=\overline{\left\{\frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{a^2+b^2}\right\}}$
$=\frac{(ac+bd)-(ad-bc)i}{a^2+b^2}$
$\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}=\frac{\overline{c+di}}{\overline{a+bi}}=\frac{c-di}{a-bi}=\frac{(c-di)(a+bi)}{(a-bi)(a+bi)}$
$=\frac{(ac+bd)-(ad-bc)i}{a^2+b^2}$
$\therefore\ \overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}=\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}$

답 풀이 참조

031-❶ (1) $\sqrt{3}\sqrt{-4}=\sqrt{3}\sqrt{4}i=2\sqrt{3}i$

(2) $\sqrt{-2}\sqrt{-3}\sqrt{-5}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{3}i\cdot\sqrt{5}i$
$=\sqrt{30}i^3=-\sqrt{30}i$

(3) $10>0$, $-5<0$이므로
$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{-5}}=-\sqrt{\frac{10}{-5}}=-\sqrt{-2}=-\sqrt{2}i$

(4) $-4<0$, $-8<0$이므로
$\sqrt{-4}\sqrt{-8}=-\sqrt{(-4)\cdot(-8)}=-4\sqrt{2}$
$\therefore\ \sqrt{-4}\sqrt{-8}+\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-4}}=-4\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{2}i}{2i}$
$=-4\sqrt{2}+\sqrt{2}$
$=-3\sqrt{2}$

답 (1) $2\sqrt{3}i$ (2) $-\sqrt{30}i$ (3) $-\sqrt{2}i$ (4) $-3\sqrt{2}$

중단원 연습 문제

본책 102~105쪽

01 $\frac{1}{2}$	**02** -1	**03** 3	**04** 2	**05** $-i$
06 -2	**07** 290	**08** 5	**09** ④	**10** 1
11 ③	**12** 3	**13** $\frac{3}{16}$	**14** ②	
15 -10	**16** ③	**17** ⑤	**18** 38	**19** 16
20 24	**21** ⑤			

01 전략 복소수 $x+yi$ (x, y는 실수)가 실수이면 $y=0$이다.

풀이 $z=i(2a-i)^2$
$=i(4a^2-4ai-1)=4a+(4a^2-1)i$
따라서 z가 실수가 되려면
$4a^2-1=0,\qquad a^2=\frac{1}{4}$
$\therefore\ a=\frac{1}{2}$ ($\because\ a>0$)

답 $\frac{1}{2}$

02 전략 z를 $a+bi$ 꼴로 정리한 후 $\overline{z}$를 구하여 $z=\overline{z}$에 대입한다.

풀이 $z=(3+i)x^2+(1+2i)x-4+i$
$=(3x^2+x-4)+(x^2+2x+1)i$
$z=\overline{z}$에서
$(3x^2+x-4)+(x^2+2x+1)i$
$=(3x^2+x-4)-(x^2+2x+1)i$
$2(x^2+2x+1)i=0,\qquad (x+1)^2=0$
$\therefore\ x=-1$

답 -1

다른 풀이 $z=\overline{z}$이면 복소수 z는 실수이므로
$z=(3x^2+x-4)+(x^2+2x+1)i$에서
$x^2+2x+1=0,\qquad (x+1)^2=0\qquad \therefore\ x=-1$

03 전략 주어진 등식의 좌변을 $a+bi$ 꼴로 정리한 후 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

풀이 주어진 등식의 좌변을 전개하면
$x^2+xyi+y^2+xyi-5-4i=0$
$(x^2+y^2-5)+(2xy-4)i=0$ ⋯ ❶
x^2+y^2-5, $2xy-4$가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x^2+y^2-5=0$, $2xy-4=0$
$\therefore\ x^2+y^2=5$, $xy=2$ ⋯ ❷
따라서
$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=5+2\cdot2=9$

이므로

$x+y=3$ ($\because$ $x+y>0$) ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 좌변을 $a+bi$ 꼴로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ x^2+y^2, xy의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $x+y$의 값을 구할 수 있다.	20 %

04 전략 복소수 x의 분모를 실수화하여 주어진 등식을 우변에 순허수만 남도록 변형한 후, 양변을 제곱하여 x에 대한 이차방정식을 만든다.

풀이 $x=\dfrac{3}{1+i}=\dfrac{3(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{3-3i}{2}$이므로

$2x=3-3i,\quad 2x-3=-3i$

양변을 제곱하면

$4x^2-12x+9=-9$

$\therefore 4x^2-12x+18=0$

$\therefore 4x^2-12x+20=(4x^2-12x+18)+2$

$=2$

답 2

05 전략 먼저 괄호 안의 식을 간단히 한 후 복소수의 거듭제곱을 계산한다.

풀이 $\dfrac{-1+i}{1+i}=\dfrac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2i}{2}=i$ ⋯ ❶

$\therefore \left(\dfrac{-1+i}{1+i}\right)^{2n+1}=i^{2n+1}=(i^2)^n\cdot i$

$=(-1)^n\cdot i$

그런데 n이 홀수인 자연수이므로

$(-1)^n=-1$

$\therefore \left(\dfrac{-1+i}{1+i}\right)^{2n+1}=-i$ ⋯ ❷

답 $-i$

채점 기준	비율
❶ $\dfrac{-1+i}{1+i}$를 간단히 할 수 있다.	30 %
❷ $\left(\dfrac{-1+i}{1+i}\right)^{2n+1}$을 간단히 할 수 있다.	70 %

06 전략 자연수 k에 대하여 $i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$임을 이용한다.

풀이 $i=i^5=i^9=\cdots=i^{29}$,

$i^2=i^6=i^{10}=\cdots=i^{30}=-1$, $i^3=i^7=\cdots=i^{27}=-i$,

$i^4=i^8=\cdots=i^{28}=1$이므로

$\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\cdots+\dfrac{1}{i^{30}}$

$=\left(\dfrac{1}{i}-1-\dfrac{1}{i}+1\right)+\left(\dfrac{1}{i}-1-\dfrac{1}{i}+1\right)$

$+\cdots+\left(\dfrac{1}{i}-1-\dfrac{1}{i}+1\right)+\dfrac{1}{i}-1$

$=\dfrac{1}{i}-1=\dfrac{i}{i^2}-1$

$=-1-i$

따라서 주어진 등식은

$-1-i=a+bi$

a, b가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-1$, $b=-1$

$\therefore a+b=-2$

답 -2

07 전략 $a+\overline{a}$, $a\overline{a}$의 값을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $a^2\overline{a}+a\overline{a}^2=a\overline{a}(a+\overline{a})$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{a}=5-2i$이므로

$a+\overline{a}=(5+2i)+(5-2i)=10$

$a\overline{a}=(5+2i)(5-2i)=29$

㉠에서

$a^2\overline{a}+a\overline{a}^2=29\cdot 10=290$

답 290

08 전략 $\overline{z_1}-\overline{z_2}=\overline{z_1-z_2}$, $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=\overline{z_1z_2}$임을 이용한다.

풀이 $\overline{z_1}-\overline{z_2}=\overline{z_1-z_2}=2+i$이므로

$z_1-z_2=\overline{2+i}=2-i$ ⋯ ❶

또 $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=\overline{z_1z_2}=5-2i$이므로

$z_1z_2=\overline{5-2i}=5+2i$ ⋯ ❷

$\therefore (z_1-2)(z_2+2)$

$=z_1z_2+2(z_1-z_2)-4$

$=(5+2i)+2(2-i)-4$

$=5$ ⋯ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ z_1-z_2를 구할 수 있다.	40 %
❷ z_1z_2를 구할 수 있다.	40 %
❸ $(z_1-2)(z_2+2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

09 전략 음수의 제곱근의 성질을 이용한다.

풀이 ① $\sqrt{-3}\sqrt{5}=\sqrt{(-3)\cdot 5}=\sqrt{-15}$

② $\sqrt{-3}\sqrt{-5}=-\sqrt{(-3)\cdot(-5)}=-\sqrt{15}$

③ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{-3}{5}}=\sqrt{-\dfrac{3}{5}}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}}=-\sqrt{\frac{3}{-5}}=-\sqrt{-\frac{3}{5}}$

⑤ $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-5}}=\sqrt{\frac{-3}{-5}}=\sqrt{\frac{3}{5}}$ 답 ④

다른 풀이 ① $\sqrt{-3}\sqrt{5}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{5}=\sqrt{15}i=\sqrt{-15}$

② $\sqrt{-3}\sqrt{-5}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{5}i=\sqrt{15}i^2=-\sqrt{15}$

③ $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{3}{5}}i=\sqrt{-\frac{3}{5}}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}i}=\frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{5}i^2}=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}i$

$=-\sqrt{\frac{3}{5}}i=-\sqrt{-\frac{3}{5}}$

⑤ $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-5}}=\frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{5}i}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{3}{5}}$

10 **전략** $a<3$이면 $a-3<0$, $3-a>0$임을 이용한다.

풀이 $a-3<0$, $3-a>0$이므로

$\frac{\sqrt{3-a}}{\sqrt{a-3}}=-\sqrt{\frac{3-a}{a-3}}=-\sqrt{-1}=-i$

$\sqrt{\frac{3-a}{a-3}}=\sqrt{-1}=i$

따라서 구하는 값은 $-i\cdot i=1$ 답 1

11 **전략** $\alpha=a+bi$라 하고 보기가 옳은지 확인하거나 보기가 성립하지 않는 예를 찾는다.

풀이 ① $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\alpha=\overline{\alpha}$에서

$a+bi=a-bi$, $2bi=0$ $\therefore b=0$

따라서 α는 실수이다.

② $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\alpha=\overline{\beta}$에서

$\beta=\overline{\alpha}=a-bi$

$\therefore \alpha+\beta=2a$, $\alpha\beta=a^2+b^2$

따라서 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$는 실수이다.

③ $\alpha=1$, $\beta=i$이면 $\alpha^2+\beta^2=0$이지만 $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$이다.

④ $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\alpha=\overline{\beta}$에서

$\beta=\overline{\alpha}=a-bi$ $\therefore \alpha\beta=a^2+b^2$

$\alpha\beta=0$이면 $a^2+b^2=0$이므로 $a=0$, $b=0$

$\therefore \alpha=0$, $\beta=0$

⑤ $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$\beta=\overline{\alpha}=a-bi$ $\therefore \alpha+\beta=2a$

$\alpha+\beta=0$이면 $2a=0$이므로 $a=0$

그런데 $\alpha\neq0$이므로 $b\neq0$

$\therefore \alpha=bi$, $\beta=-bi$ $(b\neq0)$

따라서 α, β는 순허수이다.

답 ③

12 **전략** z^2이 음의 실수가 되려면 z는 순허수이어야 함을 이용한다.

풀이 $z=(n-1+2i)^2$

$=n^2+1-4-2n-4i+4ni$

$=(n^2-2n-3)+(4n-4)i$ ⋯ ❶

z^2이 음의 실수가 되려면 z는 순허수이어야 하므로

$n^2-2n-3=0$, $4n-4\neq0$ ⋯ ❷

$(n+1)(n-3)=0$, $n\neq1$

$\therefore n=3$ ($\because n>0$) ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ z를 $a+bi$ 꼴로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ z^2이 음의 실수가 되도록 하는 조건을 구할 수 있다.	50 %
❸ 자연수 n의 값을 구할 수 있다.	20 %

13 **전략** $\alpha=1+2i$, $\beta=a+bi$를 대입하여 계산한다.

풀이 $(1+2i)◎(a+bi)=0$에서

$(1+2i)+(a+bi)+(1+2i)(a+bi)=0$

$(1+2a-2b)+(2+2a+2b)i=0$

$1+2a-2b$, $2+2a+2b$가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$1+2a-2b=0$, $2+2a+2b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{3}{4}$, $b=-\frac{1}{4}$

$\therefore ab=\frac{3}{16}$ 답 $\frac{3}{16}$

14 **전략** $i^n=i^{n+4k}$ (n, k는 자연수)임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $f(1)f(2)=\frac{i}{1+i}\cdot\frac{i^2}{1+i}=\frac{-i}{2i}=-\frac{1}{2}$

ㄴ. $i^n=i^{n+4k}$ (k는 자연수)이므로

$f(n)=f(n+4k)$

$\therefore f(100-2k)=f(100+2k)$

ㄷ. $f(n)f(n+1)=\frac{i^n}{1+i}\cdot\frac{i^{n+1}}{1+i}=\frac{i^{2n+1}}{2i}$

$=\frac{(i^2)^n\cdot i}{2i}=\frac{(-1)^n}{2}$

$\therefore f(1)f(2)+f(2)f(3)+f(3)f(4)$

$+\cdots+f(99)f(100)$

$=\frac{-1}{2}+\frac{(-1)^2}{2}+\frac{(-1)^3}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{99}}{2}$

$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\cdots-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

15 전략 $a>0$, $b>0$일 때, $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$, $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$임을 이용한다.

풀이 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{10}은 모두 양수이므로

$$\begin{aligned}&\sqrt{-a_1}\sqrt{-a_2}\sqrt{-a_3}\cdots\sqrt{-a_{10}}\\&=\sqrt{a_1}i\cdot\sqrt{a_2}i\cdot\sqrt{a_3}i\cdot\cdots\cdot\sqrt{a_{10}}i\\&=(\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\sqrt{a_3}\cdots\sqrt{a_{10}})i^{10}\\&=\sqrt{a_1a_2a_3\cdots a_{10}}(i^4)^2\cdot i^2\\&=\sqrt{100}\cdot(-1)\\&=-10\end{aligned}$$

답 -10

16 전략 근호 안의 식의 부호를 조사하여 음수의 제곱근의 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. $xy<0$이면

$x>0$, $y<0$ 또는 $x<0$, $y>0$

$\therefore \sqrt{x}\sqrt{y}=\sqrt{xy}$

ㄴ. $x<y<0$이므로

$x<0$, $-x>0$, $x-y<0$, $y-x>0$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\sqrt{y-x}}{\sqrt{x-y}}+\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{x}}&=-\sqrt{\frac{y-x}{x-y}}-\sqrt{\frac{-x}{x}}\\&=-\sqrt{-1}-\sqrt{-1}\\&=-i-i=-2i\end{aligned}$$

ㄷ. $\sqrt{x}\sqrt{y}=-\sqrt{xy}$이므로 $\quad x<0$, $y<0$

$\therefore \sqrt{x}\sqrt{x}+\sqrt{y}=-\sqrt{x^2}+\sqrt{-y}i=x+\sqrt{-y}i$

따라서 $\sqrt{x}\sqrt{x}+\sqrt{y}$의 켤레복소수는

$x-\sqrt{-y}i=x-\sqrt{y}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

17 전략 $\bar{z}=a-bi$임을 이용하여 $\frac{z}{\bar{z}}$를 구한 후 실수부분이 0이 되기 위한 a, b의 조건을 찾는다.

풀이 $$\begin{aligned}\frac{z}{\bar{z}}&=\frac{a+bi}{a-bi}=\frac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)}\\&=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}i\end{aligned}$$

이므로 $\frac{z}{\bar{z}}$의 실수부분이 0이 되려면

$a^2-b^2=0$, $\quad (a+b)(a-b)=0$

$\therefore a=b$ ($\because$ a, b는 자연수)

따라서 조건을 만족시키는 복소수 z는

$1+i$, $2+2i$, $3+3i$, $4+4i$, $5+5i$

의 5개이다.

답 ⑤

18 전략 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리한 후 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

풀이 주어진 등식의 좌변을 전개하면

$a^2-2abi-b^2=8i$, $\quad (a^2-b^2)-2abi=8i$

a^2-b^2, $-2ab$가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=0$, $-2ab=8$

$\therefore b=\pm a$, $ab=-4$

(i) $b=a$일 때, $ab=-4$에서

$a^2=-4$

그런데 $a^2=-4$인 실수 a는 존재하지 않는다.

(ii) $b=-a$일 때, $ab=-4$에서

$a^2=4$

$\therefore a=2$, $b=-2$ ($\because$ $a>0$)

(i), (ii)에서 $\quad a=2$, $b=-2$

$\therefore 20a+b=38$

답 38

19 전략 자연수 k에 대하여 $i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$임을 이용한다.

풀이 $i=i^5=\cdots=i^{17}$, $i^2=i^6=\cdots=i^{18}=-1$, $i^3=i^7=\cdots=i^{19}=-i$, $i^4=i^8=\cdots=i^{16}=1$이므로

$$\begin{aligned}&(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{19})\\&=2(i+i^2+i^3+\cdots+i^{18})-i+i^{19}\\&=2\{(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)+i-1\}\\&\quad -i-i\\&=2(i-1)-2i=-2\end{aligned}$$

따라서 주어진 등식은 $\quad -2=a+bi$

a, b가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-2$, $b=0$

$\therefore 4(a+b)^2=16$

답 16

다른 풀이 $i+i^{19}=i-i=0$이므로

$$\begin{aligned}&(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{19})\\&=i+\{(i+i^2)+(i^2+i^3)+\cdots+(i^{18}+i^{19})\}+i^{19}\\&=(i+i)+(i^2+i^2)+\cdots+(i^{19}+i^{19})\\&=2(i+i^2+i^3+\cdots+i^{19})\\&=2\{(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)+i-1-i\}\\&=2\cdot(-1)=-2\end{aligned}$$

따라서 주어진 등식은 $-2=a+bi$이므로

$a=-2$, $b=0$

$\therefore 4(a+b)^2=16$

20 전략 자연수 n에 대하여 $\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^n$, $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n$의 규칙성을 각각 찾는다.

풀이 $z_1=\frac{\sqrt{2}}{1+i}$라 하면

$$z_1^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2=\frac{2}{2i}=-i$$

$$z_1^3=z_1^2\cdot z_1=-\frac{\sqrt{2}i}{1+i}$$

$$z_1^4=(z_1^2)^2=(-i)^2=-1$$

이때 $z_1^{k+4}=z_1^k\cdot z_1^4=-z_1^k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$이므로 z_1^n은

$$z_1,\ z_1^2,\ z_1^3,\ -1,\ -z_1,\ -z_1^2,\ -z_1^3,\ 1$$

이 이 순서로 반복된다.

$z_2=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$라 하면

$$z_2^2=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2=\frac{2+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$z_2^3=z_2^2\cdot z_2=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\frac{4i}{4}=i$$

$$z_2^4=z_2^3\cdot z_2=\frac{i(\sqrt{3}+i)}{2}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$z_2^5=z_2^3\cdot z_2^2=\frac{i(1+\sqrt{3}i)}{2}=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$$

$$z_2^6=(z_2^3)^2=i^2=-1$$

이때 $z_2^{k+6}=z_2^k\cdot z_2^6=-z_2^k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$이므로 z_2^n은

$$z_2,\ z_2^2,\ z_2^3,\ z_2^4,\ z_2^5,\ -1,$$
$$-z_2,\ -z_2^2,\ -z_2^3,\ -z_2^4,\ -z_2^5,\ 1$$

이 이 순서로 반복된다.

따라서 $z_1^n+z_2^n=2$를 만족시키려면 $z_1^n=z_2^n=1$이어야 하므로 구하는 자연수 n의 최솟값은 8, 12의 최소공배수인 24이다.

답 24

21 전략 복소수가 실수이면 그 켤레복소수도 실수임을 이용한다.

풀이 ㄱ. z^2-z가 실수이므로 $\overline{z^2-z}$도 실수이다.

ㄴ. $z^2-z=(a+bi)^2-(a+bi)$
$=a^2+2abi-b^2-a-bi$
$=(a^2-a-b^2)+(2a-1)bi$

이때 z^2-z가 실수이고 $b\neq0$이므로

$$2a-1=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$$

$$\therefore z+\bar{z}=\frac{1}{2}+bi+\frac{1}{2}-bi=1$$

ㄷ. $z\bar{z}=\left(\dfrac{1}{2}+bi\right)\left(\dfrac{1}{2}-bi\right)=\dfrac{1}{4}+b^2$

이때 b는 0이 아닌 실수이므로

$$\frac{1}{4}+b^2>\frac{1}{4} \qquad \therefore z\bar{z}>\frac{1}{4}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

Ⅱ. 방정식

05 이차방정식

유제

본책 111~136쪽

032-❶ $a^2x+1=x+a$에서

$(a^2-1)x=a-1$

$(a+1)(a-1)x=a-1$

이 방정식의 해가 무수히 많으려면

$(a+1)(a-1)=0,\ a-1=0$

$\therefore a=1$

답 1

032-❷ $4k(x-1)=x+2$에서

$(4k-1)x=4k+2$

이 방정식의 해가 없으려면

$4k-1=0,\ 4k+2\neq0$

$\therefore k=\dfrac{1}{4}$

답 $\dfrac{1}{4}$

033-❶ (1) $x-1=0,\ x-5=0$에서

$x=1,\ x=5$

(i) $x<1$일 때,

$x-1<0,\ x-5<0$이므로

$-(x-1)-(x-5)=x$

$-3x=-6 \qquad \therefore x=2$

그런데 $x<1$이므로 $x=2$는 해가 아니다.

(ii) $1\leq x<5$일 때,

$x-1\geq0,\ x-5<0$이므로

$(x-1)-(x-5)=x$

$\therefore x=4$

(iii) $x\geq5$일 때,

$x-1>0,\ x-5\geq0$이므로

$(x-1)+(x-5)=x$

$\therefore x=6$

이상에서 주어진 방정식의 해는

$x=4$ 또는 $x=6$

(2) $x+3=0,\ x-3=0$에서

$x=-3,\ x=3$

(i) $x<-3$일 때,

$x+3<0,\ x-3<0$이므로

$-(x+3)+2(x-3)=-1$

$\therefore x=8$

그런데 $x<-3$이므로 $x=8$은 해가 아니다.

(ii) $-3\le x<3$일 때,

$x+3\ge0$, $x-3<0$이므로

$(x+3)+2(x-3)=-1$

$3x=2 \quad \therefore x=\frac{2}{3}$

(iii) $x\ge3$일 때,

$x+3>0$, $x-3\ge0$이므로

$(x+3)-2(x-3)=-1$

$\therefore x=10$

이상에서 주어진 방정식의 해는

$x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=10$

답 풀이 참조

033-❷ $\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$이므로 주어진 방정식은

$|x-2|=3-|x-3|$

$x-2=0$, $x-3=0$에서

$x=2$, $x=3$

(i) $x<2$일 때,

$x-2<0$, $x-3<0$이므로

$-(x-2)=3+(x-3)$

$-2x=-2 \quad \therefore x=1$

(ii) $2\le x<3$일 때,

$x-2\ge0$, $x-3<0$이므로

$x-2=3+(x-3)$

따라서 $0\cdot x=2$이므로 해가 없다.

(iii) $x\ge3$일 때,

$x-2>0$, $x-3\ge0$이므로

$x-2=3-(x-3)$

$2x=8 \quad \therefore x=4$

이상에서 주어진 방정식의 해는

$x=1$ 또는 $x=4$

따라서 모든 근의 합은 5이다. 답 5

034-❶ $x=-3$을 $x^2-mx-10m=2$에 대입하면

$9+3m-10m=2$

$7m=7 \quad \therefore m=1$

$m=1$을 $x^2-mx-10m=2$에 대입하면

$x^2-x-12=0, \quad (x+3)(x-4)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=4$

따라서 다른 한 근은 4이다. 답 4

034-❷ $x=-1$을 $(a-3)x^2+x-(a^2-10)=0$에 대입하면

$(a-3)-1-(a^2-10)=0$

$a^2-a-6=0, \quad (a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=3$

그런데 $a-3\ne0$, 즉 $a\ne3$이므로

$a=-2$

$a=-2$를 $(a-3)x^2+x-(a^2-10)=0$에 대입하면

$-5x^2+x+6=0, \quad 5x^2-x-6=0$

$(x+1)(5x-6)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{6}{5}$

따라서 다른 한 근은 $\frac{6}{5}$이므로

$b=\frac{6}{5}$

$\therefore a+b=-\frac{4}{5}$ 답 $-\frac{4}{5}$

035-❶ (1) 주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{3}$을 곱하면

$3x^2+\sqrt{3}(6-\sqrt{3})x+\sqrt{3}(3\sqrt{3}-3)=0$

$3x^2+(6\sqrt{3}-3)x+9-3\sqrt{3}=0$

$\therefore x^2+(2\sqrt{3}-1)x+3-\sqrt{3}=0$

따라서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-(2\sqrt{3}-1)\pm\sqrt{(2\sqrt{3}-1)^2-4\cdot1\cdot(3-\sqrt{3})}}{2}$$

$$=\frac{-2\sqrt{3}+1\pm1}{2}$$

$\therefore x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=1-\sqrt{3}$

(2) 주어진 방정식의 양변에 i를 곱하면

$i^2x^2+2ix+3i^2=0, \quad -x^2+2ix-3=0$

$\therefore x^2-2ix+3=0$

따라서 근의 공식에 의하여

$x=-(-i)\pm\sqrt{(-i)^2-1\cdot3}=i\pm2i$

$\therefore x=3i$ 또는 $x=-i$

답 풀이 참조

036-❶ (1) (i) $x<0$일 때,

$x^2-3x-10=0$이므로 $\quad (x+2)(x-5)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=5$

그런데 $x<0$이므로 $\quad x=-2$

(ii) $x\ge0$일 때,

$x^2+3x-10=0$이므로 $\quad (x+5)(x-2)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=2$

그런데 $x\ge0$이므로 $\quad x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=-2$ 또는 $x=2$

(2) (i) $x<1$일 때,

$x^2+(x-1)+x-3=0$이므로

$x^2+2x-4=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-4)}=-1\pm\sqrt{5}$

그런데 $x<1$이므로 $x=-1-\sqrt{5}$

(ii) $x\ge1$일 때,

$x^2-(x-1)+x-3=0$이므로

$x^2-2=0$

$\therefore x=\pm\sqrt{2}$

그런데 $x\ge1$이므로 $x=\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=-1-\sqrt{5}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

답 풀이 참조

037-❶ 수영장 바닥의 세로의 길이를 x m라 하면 가로의 길이는 $(x-10)$m이므로

$x(x-10)=264,\quad x^2-10x-264=0$

$(x+12)(x-22)=0$

$\therefore x=-12$ 또는 $x=22$

그런데 $x>10$이므로 $x=22$

따라서 수영장 바닥의 세로의 길이는 22 m이고, 가로의 길이는 12 m이므로 수영장 바닥의 둘레의 길이는

$2\cdot(12+22)=68(\text{m})$

답 68 m

037-❷ 현재 아들의 나이를 x살이라 하면 아버지의 나이는 $(x+30)$살이다.

5년 후 아들과 아버지의 나이는 각각 $(x+5)$살, $(x+35)$살이므로

$(x+5)^2=2(x+35)+20$

$x^2+8x-65=0,\quad (x+13)(x-5)=0$

$\therefore x=-13$ 또는 $x=5$

그런데 $x>0$이므로 $x=5$

따라서 5년 후 아들의 나이는 10살이다.

답 10살

038-❶ $ax^2-2x-1=0$이 이차방정식이므로

$a\neq0$

이차방정식 $ax^2-2x-1=0$이 실근을 가지려면 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-1)^2-a\cdot(-1)\ge0$

$\therefore a\ge-1$

그런데 $a\neq0$이므로

$-1\le a<0$ 또는 $a>0$

답 $-1\le a<0$ 또는 $a>0$

038-❷ x에 대한 이차방정식

$x^2+2(k+a)x+k^2+a^2+b-2=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+a)^2-1\cdot(k^2+a^2+b-2)=0$

$\therefore 2ak-b+2=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2a=0,\ -b+2=0$

$\therefore a=0,\ b=2$

답 $a=0,\ b=2$

Remark▶ 항등식의 성질

$ax+b=0$이 x에 대한 항등식이면

$a=b=0$

039-❶ 이차방정식 $x^2-4x+6=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=6$

(1) $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta$

$=4^2-3\cdot6=-2$

(2) $(\alpha-2)(\beta-2)=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4$

$=6-2\cdot4+4=2$

(3) $\frac{\alpha}{\alpha-1}+\frac{\beta}{\beta-1}=\frac{\alpha(\beta-1)+\beta(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}$

$=\frac{2\alpha\beta-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$

$=\frac{2\cdot6-4}{6-4+1}=\frac{8}{3}$

(4) $\frac{\beta}{\alpha^2}+\frac{\alpha}{\beta^2}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^2}$

$=\frac{4^3-3\cdot6\cdot4}{6^2}=-\frac{2}{9}$

답 풀이 참조

039-❷ 이차방정식 $2x^2-4x-1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-\frac{1}{2}$

$\therefore (\alpha^2-\alpha+1)(\beta^2-\beta+1)$

$=(\alpha\beta)^2-\alpha^2\beta+\alpha^2-\alpha\beta^2+\alpha\beta-\alpha+\beta^2-\beta+1$

$=(\alpha\beta)^2-\alpha\beta(\alpha+\beta-1)+(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha+\beta)$
$+1$

$=(\alpha\beta)^2-\alpha\beta(\alpha+\beta-1)+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$-(\alpha+\beta)+1$

$=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot1+2^2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-2+1$

$=\frac{19}{4}$

답 $\frac{19}{4}$

040-❶ 이차방정식 $x^2-ax-b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=-b$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-(a+2)x+10=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=a+2$, $\alpha\beta(\alpha+\beta)=10$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$b=-2$, $ab=-10$

이므로

$-2a=-10$ $\quad\therefore a=5$

$\therefore a-b=7$

답 7

041-❶ 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+5$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+5)=m$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+5)=m-5$ …… ㉡

㉠에서 $\alpha=\dfrac{m-5}{2}$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{m-5}{2}\cdot\dfrac{m+5}{2}=m-5$

$m^2-4m-5=0$, $\quad(m+1)(m-5)=0$

$\therefore m=-1$ ($\because m<0$)

답 -1

041-❷ 주어진 이차방정식의 두 근을 α, 3α ($\alpha\neq0$)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+3\alpha=2k$ …… ㉠

$\alpha\cdot3\alpha=k^2-k$ …… ㉡

㉠에서 $\alpha=\dfrac{1}{2}k$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{1}{2}k\cdot\dfrac{3}{2}k=k^2-k$, $\quad k^2-4k=0$

$k(k-4)=0$ $\quad\therefore k=4$ ($\because k\neq0$)

답 4

042-❶ 이차방정식 $x^2-6x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=1$

두 근 $\alpha-\dfrac{1}{\alpha}$, $\beta-\dfrac{1}{\beta}$의 합과 곱을 구하면

$$\begin{aligned}\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)&=\alpha+\beta-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\\&=\alpha+\beta-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\\&=6-6\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)&=\alpha\beta-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\beta}\\&=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\\&=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}\\&=1+1-(6^2-2\cdot1)\\&=-32\end{aligned}$$

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2-32=0$

답 $x^2-32=0$

043-❶ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 a, b가 유리수이고 한 근이 $2-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=-a$

$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=b$

$\therefore a=-4$, $b=1$

$\therefore a-b=-5$

답 -5

043-❷ $\dfrac{2}{1+i}=\dfrac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$

즉 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 a, b가 실수이고 한 근이 $1-i$이므로 다른 한 근은 $1+i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-i)+(1+i)=-a$, $(1-i)(1+i)=b$

$\therefore a=-2$, $b=2$

따라서 이차방정식 $x^2+bx+a=0$, 즉 $x^2+2x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-2$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=(-2)^2-2\cdot(-2)\\&=8\end{aligned}$$

답 8

중단원 연습 문제

본책 137~141쪽

01 $a=-3$, $b=-1$ **02** ③
03 $1+\sqrt{7}$ **04** ② **05** -5 **06** ②
07 11 **08** $\dfrac{1}{3}$, 3 **09** $x^2+8x+7=0$ **10** 2
11 $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=-1$ **12** ④
13 $1\le x<2$ 또는 $5\le x<6$ **14** ③ **15** ①
16 62 **17** 9 **18** 1 **19** $2\pm\sqrt{5}$
20 ③ **21** ⑤ **22** 6 **23** ④

01 (전략) $x=1$을 주어진 방정식에 각각 대입한다.

(풀이) $x=1$을 주어진 방정식에 각각 대입하면

$1+2+a=0,\ 2-b+a=0$

$1+2+a=0$에서 $\quad a=-3$

$a=-3$을 $2-b+a=0$에 대입하면

$-b-1=0 \qquad \therefore b=-1$

답 $a=-3,\ b=-1$

02 (전략) x^2의 계수를 실수화한 후 근의 공식을 이용하여 주어진 이차방정식을 푼다.

(풀이) 주어진 방정식의 양변에 i를 곱하면

$i^2x^2-4ix+4i^2=0, \qquad -x^2-4ix-4=0$

$\therefore x^2+4ix+4=0$

따라서 근의 공식에 의하여

$x=-2i\pm\sqrt{(2i)^2-1\cdot4}=(-2\pm2\sqrt{2})i$

$a,\ b$가 유리수이므로 $\quad a=-2,\ b=\pm2$

$\therefore a^2+b^2=8$

답 ③

03 (전략) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 미지수의 값을 경계로 범위를 나눈다.

(풀이) (i) $x<1$일 때,

$x^2+3(x-1)=3x+1, \qquad x^2=4$

$\therefore x=\pm2$

그런데 $x<1$이므로 $\quad x=-2$ ··· ❶

(ii) $x\geq1$일 때,

$x^2-3(x-1)=3x+1, \qquad x^2-6x+2=0$

$\therefore x=-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\cdot2}=3\pm\sqrt{7}$

그런데 $x\geq1$이므로 $\quad x=3+\sqrt{7}$ ··· ❷

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-2$ 또는 $x=3+\sqrt{7}$

따라서 모든 근의 합은

$1+\sqrt{7}$ ··· ❸

답 $1+\sqrt{7}$

채점 기준	비율
❶ $x<1$일 때, 방정식의 근을 구할 수 있다.	40 %
❷ $x\geq1$일 때, 방정식의 근을 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 근의 합을 구할 수 있다.	20 %

04 (전략) 아랫변의 길이를 x cm라 하고 x에 대한 이차방정식을 세운다.

(풀이) 아랫변의 길이를 x cm라 하면 윗변의 길이는 $\frac{1}{2}x$ cm, 높이는 $(x-2)$cm이므로

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+x\right)(x-2)=18, \qquad \frac{3}{4}x(x-2)=18$

$x(x-2)=24, \qquad x^2-2x-24=0$

$(x+4)(x-6)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=6$

그런데 $x>2$이므로 $\quad x=6$

따라서 아랫변의 길이는 6 cm이다.

답 ②

05 (전략) 이차방정식이 중근을 가지면 (판별식)$=0$임을 이용한다.

(풀이) $(k^2-9)x^2-4(k+3)x+1=0$이 x에 대한 이차방정식이므로

$k^2-9\neq0, \qquad k^2\neq9 \qquad \therefore k\neq\pm3$

주어진 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-2(k+3)\}^2-(k^2-9)\cdot1=0$

$k^2+8k+15=0, \qquad (k+5)(k+3)=0$

$\therefore k=-5$ 또는 $k=-3$

그런데 $k\neq-3$이므로 $\quad k=-5$

답 -5

06 (전략) 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$의 값을 구한다.

(풀이) 이차방정식 $x^2+x-1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-1$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\beta}{\alpha+1}+\frac{\alpha}{\beta+1}&=\frac{\beta(\beta+1)+\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}\\&=\frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}\\&=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}\\&=\frac{(-1)^2-2\cdot(-1)+(-1)}{-1-1+1}\\&=-2\end{aligned}$$

답 ②

07 (전략) 근과 계수의 관계를 이용하여 b의 값을 먼저 구한다.

(풀이) 이차방정식 $x^2+ax-21=0$의 두 근이 $3,\ b$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$3+b=-a,\ 3b=-21$

$3b=-21$에서 $\quad b=-7$ ··· ❶

$b=-7$을 $3+b=-a$에 대입하면

$3-7=-a \qquad \therefore a=4$ ··· ❷

$\therefore a-b=11$ ··· ❸

답 11

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $x=3$을 $x^2+ax-21=0$에 대입하면

$9+3a-21=0 \qquad \therefore a=4$

$a=4$를 $x^2+ax-21=0$에 대입하면

$x^2+4x-21=0, \qquad (x+7)(x-3)=0$

$\therefore x=-7$ 또는 $x=3$

따라서 $b=-7$이므로 $\quad a-b=11$

08 **전략** 두 근의 비가 $m:n$이면 두 근을 $m\alpha$, $n\alpha$ $(\alpha\neq0)$로 놓고 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 주어진 방정식의 두 근을 3α, $\alpha\,(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$3\alpha+\alpha=2(m-1) \qquad \cdots\cdots ㉠$

$3\alpha\cdot\alpha=m \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠에서 $\alpha=\dfrac{m-1}{2}$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$3\left(\dfrac{m-1}{2}\right)^2=m, \qquad 3m^2-10m+3=0$

$(3m-1)(m-3)=0$

$\therefore m=\dfrac{1}{3}$ 또는 $m=3$

답 $\dfrac{1}{3}$, 3

09 **전략** 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$임을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 1, 3이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$1+3=-a$, $1\cdot3=b$

$\therefore a=-4$, $b=3$

$a+b=-1$, $a-b=-7$이므로 -1과 -7을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(-1-7)x+(-1)\cdot(-7)=0$

$\therefore x^2+8x+7=0$

답 $x^2+8x+7=0$

10 **전략** 계수가 유리수인 이차방정식의 한 근이 무리수이면 다른 한 근은 켤레근임을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 a, b가 유리수이고 한 근이 $\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}$, 즉 $3+2\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $3-2\sqrt{2}$이다. ⋯ ❶

이때 근과 계수의 관계에 의하여

$(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=-a$

$(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=b$

$\therefore a=-6$, $b=1$ ⋯ ❷

이차방정식 $x^2+bx+a=0$, 즉 $x^2+x-6=0$에서

$(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 양의 근은 2이다. ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $x^2+ax+b=0$의 다른 한 근을 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $x^2+bx+a=0$의 양의 근을 구할 수 있다.	20 %

11 **전략** 계수가 실수인 이차방정식의 한 근이 허수이면 다른 한 근은 켤레근임을 이용한다.

풀이 이차방정식 $ax^2+x+b=0$에서 a, b가 실수이고 한 근이 $1-i$이므로 다른 한 근은 $1+i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-i)+(1+i)=-\dfrac{1}{a}$, $(1-i)(1+i)=\dfrac{b}{a}$

$\therefore a=-\dfrac{1}{2}$, $b=-1$

답 $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=-1$

12 **전략** $(x*x)+(x*1)=0$을 x에 대한 이차방정식으로 나타낸다.

풀이 $(x*x)+(x*1)$

$=x\cdot x-2x+x+x\cdot1-2x+1$

$=x^2-2x+1$

따라서 $x^2-2x+1=0$이므로

$(x-1)^2=0 \qquad \therefore x=1$

답 ④

13 **전략** $[x]=n$이면 $n\le x<n+1$임을 이용한다.

풀이 $[x]=t$라 하면 주어진 방정식은

$t^2-6t+5=0, \qquad (t-1)(t-5)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=5$

(i) $t=1$, 즉 $[x]=1$일 때,

$1\le x<2$

(ii) $t=5$, 즉 $[x]=5$일 때,

$5\le x<6$

(i), (ii)에서

$1\le x<2$ 또는 $5\le x<6$

답 $1\le x<2$ 또는 $5\le x<6$

14 (전략) 음수의 제곱근의 성질을 이용하여 a, b의 부호를 구한다.

(풀이) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}$ $(a\neq0,\ b\neq0)$이므로

$a<0,\ b>0$

ㄱ. 이차방정식 $ax^2+bx+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=b^2-4a>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. 이차방정식 $x^2-2ax+b=0$이 허근을 가지므로 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=(-a)^2-b<0 \qquad \therefore a^2-b<0$$

따라서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D_3이라 하면

$$D_3=a^2-4b<a^2-b<0\ (\because b>0)$$

이므로 허근을 갖는다.

ㄷ. 이차방정식 $ax^2+bx+ab^2=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D_4라 하면

$$D_4=b^2-4a^2b^2=0, \qquad b^2(1-4a^2)=0$$

이때 $b\neq0$이므로

$$1-4a^2=0, \qquad a^2=\frac{1}{4}$$

$$\therefore a=-\frac{1}{2}\ (\because a<0)$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

15 (전략) 이차식 $f(x)$가 완전제곱식이면 이차방정식 $f(x)=0$에서 (판별식)$=0$임을 이용한다.

(풀이) $2ax-b(x^2-1)+c(x^2+1)$

$=(c-b)x^2+2ax+b+c$

이 식이 완전제곱식이므로 이차방정식 $(c-b)x^2+2ax+b+c=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-(c-b)(b+c)=0$$

$$a^2-c^2+b^2=0 \qquad \therefore c^2=a^2+b^2$$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이므로 그 넓이는

$$\frac{1}{2}ab$$

답 ①

16 (전략) 근과 계수의 관계를 이용하여 $\frac{1}{\alpha_n+1}+\frac{1}{\beta_n+1}$을 n에 대한 식으로 나타낸다.

(풀이) 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n+\beta_n=4n+6,\ \alpha_n\beta_n=n^2-3$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha_n+1}+\frac{1}{\beta_n+1}$$

$$=\frac{\beta_n+1+\alpha_n+1}{(\alpha_n+1)(\beta_n+1)}$$

$$=\frac{\alpha_n+\beta_n+2}{\alpha_n\beta_n+(\alpha_n+\beta_n)+1}$$

$$=\frac{4n+6+2}{(n^2-3)+(4n+6)+1}$$

$$=\frac{4(n+2)}{(n+2)^2}=\frac{4}{n+2}\ (\because n+2\neq0)$$

$\therefore$ (주어진 식)

$$=\left(\frac{1}{\alpha_1+1}+\frac{1}{\beta_1+1}\right)+\left(\frac{1}{\alpha_2+1}+\frac{1}{\beta_2+1}\right)+\left(\frac{1}{\alpha_3+1}+\frac{1}{\beta_3+1}\right)$$

$$=\frac{4}{3}+1+\frac{4}{5}=\frac{47}{15}$$

따라서 $p=15$, $q=47$이므로

$$p+q=62$$

답 62

17 (전략) 각각의 이차방정식에서 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값을 구한다.

(풀이) 이차방정식 $x^2-ax-b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=-b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이차방정식 $x^2-(2a+3)x+4b-4=0$의 두 근이 α^2, β^2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha^2+\beta^2=2a+3,\ \alpha^2\beta^2=4b-4$$

$$\therefore (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2a+3,\ (\alpha\beta)^2=4b-4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$a^2+2b=2a+3,\ b^2=4b-4 \qquad \cdots ❶$$

$b^2=4b-4$에서

$$b^2-4b+4=0, \qquad (b-2)^2=0$$

$$\therefore b=2 \qquad \cdots ❷$$

$b=2$를 $a^2+2b=2a+3$에 대입하여 정리하면

$$a^2-2a+1=0, \qquad (a-1)^2=0$$

$$\therefore a=1 \qquad \cdots ❸$$

$$\therefore a^3+b^3=9 \qquad \cdots ❹$$

답 9

채점 기준	비율
❶ a, b에 대한 식을 구할 수 있다.	30 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ a^3+b^3의 값을 구할 수 있다.	10 %

18 전략 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 m에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 이차방정식 $x^2-(m-3)x+m-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m-3$, $\alpha\beta=m-2$

그런데 $\alpha\beta<0$이므로

$m-2<0 \quad \therefore m<2 \quad \cdots\cdots ㉠$

한편 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$이므로

$6=(m-3)^2-2(m-2), \quad m^2-8m+7=0$

$(m-1)(m-7)=0$

$\therefore m=1$ 또는 $m=7$

그런데 ㉠에서 $m<2$이므로 $\quad m=1$

답 1

19 전략 한 근을 α라 하면 다른 한 근은 α^2임을 이용한다.

풀이 $x^2-px+p=0$의 두 근을 α, α^2 $(\alpha\neq0)$이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\alpha^2=p \quad \cdots\cdots ㉠$

$\alpha\cdot\alpha^2=p \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서

$\alpha+\alpha^2=\alpha^3, \quad \alpha^3-\alpha^2-\alpha=0$

$\alpha(\alpha^2-\alpha-1)=0$

이때 $\alpha\neq0$이므로

$\alpha^2-\alpha-1=0 \quad \cdots\cdots ㉢$ ··· ❶

$\therefore \alpha=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2}$

$=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ ··· ❷

이때 ㉢에서 $\alpha^2=\alpha+1$이므로

$p=\alpha+\alpha^2=\alpha+(\alpha+1)=2\alpha+1$

$=2\cdot\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}+1=2\pm\sqrt{5}$ ··· ❸

답 $2\pm\sqrt{5}$

채점 기준	비율
❶ α에 대한 이차방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ α의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ p의 값을 구할 수 있다.	40 %

20 전략 방정식의 한 근이 주어지면 주어진 근을 방정식에 대입한다.

풀이 $x=2+\sqrt{3}$을 주어진 이차방정식에 대입하면

$a(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{3}b(2+\sqrt{3})+c=0$

$(7a+3b+c)+(4a+2b)\sqrt{3}=0$

이때 a, b, c가 유리수이므로

$7a+3b+c=0$, $4a+2b=0$

$4a+2b=0$에서 $\quad b=-2a$

$b=-2a$를 $7a+3b+c=0$에 대입하면

$a+c=0 \quad \therefore c=-a$

따라서 주어진 방정식은 $a(x^2-2\sqrt{3}x-1)=0$이고 $a\neq0$이므로

$x^2-2\sqrt{3}x-1=0$

$\therefore x=-(-\sqrt{3})\pm\sqrt{(-\sqrt{3})^2-1\cdot(-1)}$

$=\sqrt{3}\pm2$

즉 $\beta=\sqrt{3}-2$이므로

$\alpha+\dfrac{1}{\beta}=2+\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}$

$=2+\sqrt{3}-(\sqrt{3}+2)=0$

답 ③

Remark▶

$\sqrt{3}b$가 무리수이므로 주어진 이차방정식의 계수는 모두 유리수가 아니다. 따라서 켤레근을 이용하여 $\beta=2-\sqrt{3}$이라 하면 안 된다.

21 전략 $\overline{FD}=x$ $(x>0)$라 하고 x에 대한 이차방정식을 세운다.

풀이 $\overline{FD}=x$ $(x>0)$라 하면 조건 (가)에 의하여

$\overline{EB}=2x$

정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 2이므로

$\overline{AE}=2-2x$, $\overline{AF}=2-x$

이때 $\overline{AE}>0$, $\overline{AF}>0$이므로 $\quad 0<x<1$

$\therefore \triangle AEF=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AF}\cdot\overline{AE}$

$=\dfrac{1}{2}(2-x)(2-2x)$

$=x^2-3x+2$

즉 조건 (나)에 의하여 $x^2-3x+2=\dfrac{10}{9}$이므로

$9x^2-27x+8=0, \quad (3x-1)(3x-8)=0$

$\therefore x=\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=\dfrac{8}{3}$

그런데 $0<x<1$이므로

$x=\dfrac{1}{3}$

따라서 $\overline{AF}$의 길이는 $\quad 2-\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}$

답 ⑤

22 전략 $\alpha^2-3\alpha+k=0$, $\beta^2-3\beta+k=0$임을 이용하여 $\dfrac{1}{\alpha^2-\alpha+k}+\dfrac{1}{\beta^2-\beta+k}$을 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 이차방정식 $x^2-3x+k=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=k$

이때 $\alpha^2-3\alpha+k=0$, $\beta^2-3\beta+k=0$이므로

$\alpha^2-\alpha+k=2\alpha$, $\beta^2-\beta+k=2\beta$

$$\therefore \frac{1}{\alpha^2-\alpha+k}+\frac{1}{\beta^2-\beta+k}=\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2\beta}=\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}=\frac{3}{2k}$$

따라서 $\frac{3}{2k}=\frac{1}{4}$이므로

$k=6$

답 6

23 전략 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$임을 이용한다.

풀이 $z+\overline{z}=-1$, $z\overline{z}=1$이므로 z, $\overline{z}$는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이다.

$x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x^3-1=0 \quad \therefore x^3=1$

즉 $z^3=1$, $(\overline{z})^3=1$이므로

$$\frac{\overline{z}}{z^5}+\frac{(\overline{z})^2}{z^4}+\frac{(\overline{z})^3}{z^3}+\frac{(\overline{z})^4}{z^2}+\frac{(\overline{z})^5}{z}$$
$$=\frac{\overline{z}}{z^2\cdot z^3}+\frac{(\overline{z})^2}{z\cdot z^3}+\frac{(\overline{z})^3}{z^3}+\frac{\overline{z}\cdot(\overline{z})^3}{z^2}+\frac{(\overline{z})^2\cdot(\overline{z})^3}{z}$$
$$=\frac{\overline{z}}{z^2}+\frac{(\overline{z})^2}{z}+1+\frac{\overline{z}}{z^2}+\frac{(\overline{z})^2}{z}$$
$$=2\left(\frac{\overline{z}}{z^2}+\frac{(\overline{z})^2}{z}\right)+1$$
$$=2\cdot\frac{z\overline{z}+(z\overline{z})^2}{z^3}+1$$
$$=2\cdot(1+1^2)+1=5$$

답 ④

다른 풀이 $z\overline{z}=1$에서 $\quad \overline{z}=\frac{1}{z}$

이때 $(\overline{z})^3=1$이므로

$$\frac{\overline{z}}{z^5}+\frac{(\overline{z})^2}{z^4}+\frac{(\overline{z})^3}{z^3}+\frac{(\overline{z})^4}{z^2}+\frac{(\overline{z})^5}{z}$$
$$=(\overline{z})^6+(\overline{z})^6+(\overline{z})^6+(\overline{z})^6+(\overline{z})^6$$
$$=5(\overline{z})^6=5\{(\overline{z})^3\}^2$$
$$=5\cdot1^2=5$$

Ⅱ. 방정식

06 이차방정식과 이차함수

유제

본책 147~168쪽

044-① $y=x^2+2ax+a^2+b^2-4b$

$=(x+a)^2+b^2-4b$

이므로 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(-a,\ b^2-4b)$

이 점이 점 $(2,\ -4)$와 일치하므로

$-a=2$, $b^2-4b=-4$

$-a=2$에서 $\quad a=-2$

$b^2-4b=-4$에서 $\quad b^2-4b+4=0$

$(b-2)^2=0 \quad \therefore b=2$

$\therefore a+b=0$

답 0

다른 풀이 주어진 이차함수는 x^2의 계수가 1이고, 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -4)$이므로

$y=(x-2)^2-4$, 즉 $y=x^2-4x$

따라서 $2a=-4$, $a^2+b^2-4b=0$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=2$

$\therefore a+b=0$

044-② $y=2x^2-4kx+k^2-5k-7$

$=2(x-k)^2-k^2-5k-7$

이므로 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(k,\ -k^2-5k-7)$

이 점이 직선 $y=x+2$ 위에 있으므로

$-k^2-5k-7=k+2$

$k^2+6k+9=0, \quad (k+3)^2=0$

$\therefore k=-3$

답 -3

045-① $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

(i) 그래프가 아래로 볼록하므로 $\quad a>0$

(ii) 축이 y축의 오른쪽에 있으므로

$-\frac{b}{2a}>0 \quad \therefore b<0$

(iii) y축과의 교점이 원점의 아래쪽에 있으므로

$c<0$

ㄱ. $a>0$, $b<0$이므로 $\quad ab<0$

ㄴ. $a>0$, $b^2>0$이므로 $\quad a+b^2>0$

ㄷ. $a>0$, $c<0$이므로 $\quad a-c>0$

ㄹ. $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}a-\frac{1}{3}b+c=\frac{1}{9}(a-3b+9c)$이고

그래프에서 $x=-\frac{1}{3}$일 때 $y<0$, 즉 $f\left(-\frac{1}{3}\right)<0$
이므로

$$\frac{1}{9}(a-3b+9c)<0$$

$$\therefore a-3b+9c<0$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

046-① 이차함수의 식을 $y=a(x-3)^2-2$라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나므로

$$2=4a-2 \qquad \therefore a=1$$

따라서 이차함수의 식은 $y=(x-3)^2-2$
$x=0$을 이 식에 대입하면

$$y=9-2=7$$

이므로 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표는

$(0, 7)$ 답 $(0, 7)$

046-② $f(x)=a(x+1)(x-3)$이라 하면

$$f(x)=a(x^2-2x-3)=a(x-1)^2-4a$$

따라서 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1, -4a)$이므로

$$-4a=8 \qquad \therefore a=-2$$

따라서 $f(x)=-2(x+1)(x-3)$이므로

$f(2)=-2\cdot3\cdot(-1)=6$ 답 6

047-① 이차방정식 $x^2+4x-4a=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=2^2-(-4a)=4a+4$$

(1) $\frac{D}{4}=4a+4>0$이어야 하므로

$$4a>-4 \qquad \therefore a>-1$$

(2) $\frac{D}{4}=4a+4=0$이어야 하므로

$$4a=-4 \qquad \therefore a=-1$$

(3) $\frac{D}{4}=4a+4<0$이어야 하므로

$$4a<-4 \qquad \therefore a<-1$$

답 (1) $a>-1$ (2) -1 (3) $a<-1$

047-② 이차함수 $y=x^2-2kx+k+2$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2-2kx+k+2=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k+2)=0$$

$$k^2-k-2=0, \qquad (k+1)(k-2)=0$$

$\therefore k=2$ ($\because k>0$) 답 2

048-① 이차함수 $y=-2x^2+ax+b$의 그래프와 직선 $y=2x+3$의 교점의 x좌표는 이차방정식

$$-2x^2+ax+b=2x+3,$$

즉 $2x^2-(a-2)x-b+3=0$ ...... ㉠

의 실근과 같으므로 -1, 3은 이차방정식 ㉠의 두 근이다. 따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1+3=\frac{a-2}{2}, \quad -1\cdot3=\frac{-b+3}{2}$$

$\therefore a=6, b=9$ 답 $a=6$, $b=9$

048-② 이차함수 $y=x^2-2x+2$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표는 이차방정식

$$x^2-2x+2=mx+n,$$

즉 $x^2-(m+2)x-n+2=0$ ...... ㉠

의 실근과 같다.
이때 m, n이 유리수이므로 이차방정식 ㉠의 한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=m+2$$

$$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-n+2$$

$$\therefore m=0, n=3$$

답 $m=0$, $n=3$

Remark▶ 이차방정식의 켤레근

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서
① a, b, c가 유리수일 때, $p+q\sqrt{m}$이 근이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다. (단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)
② a, b, c가 실수일 때, $p+qi$가 근이면 $p-qi$도 근이다. (단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

049-① 이차함수 $y=x^2+x-a$의 그래프와 직선 $y=5x-1$이 만나지 않으려면 이차방정식

$$x^2+x-a=5x-1, \text{ 즉 } x^2-4x-a+1=0$$

의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-(-a+1)<0$$

$a+3<0 \qquad \therefore a<-3$ 답 $a<-3$

049-② 직선 $y=mx$가 이차함수 $y=x^2+x+1$의 그래프와 한 점에서 만나려면 이차방정식

$$mx=x^2+x+1, \text{ 즉 } x^2+(1-m)x+1=0$$

의 판별식을 D라 할 때,

$$D=(1-m)^2-4=0, \qquad m^2-2m-3=0$$

$$(m+1)(m-3)=0$$

$\therefore m=3$ ($\because m>0$) 답 3

050-❶ $f(x)=x^2-2ax+2a+4$

$=(x-a)^2-a^2+2a+4$

$f(x)$는 $x=a$에서 최솟값 $-a^2+2a+4$를 가지므로

$-a^2+2a+4=1$, $\quad a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$ **답** -1, 3

050-❷ 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(3, -1)$이고 $f(x)$의 x^2의 계수가 a이므로

$f(x)=a(x-3)^2-1$ $(a<0)$

이때 $f(-3)=-13$이므로

$36a-1=-13 \qquad \therefore a=-\frac{1}{3}$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{3}(x-3)^2-1$

$=-\frac{1}{3}x^2+2x-4$

따라서 $b=2$, $c=-4$이므로

$3a+b+c=-3$ **답** -3

051-❶ $y=x^2-8x+k=(x-4)^2-16+k$이고, 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 4가 $-1\le x\le 5$에 속하므로 $x=4$에서 최솟값 $-16+k$를 갖는다.

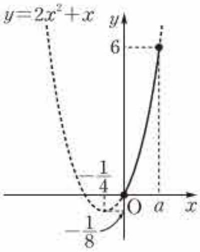
즉 $-16+k=4$이므로

$k=20$ **답** 20

051-❷ $y=2x^2+x$

$=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$

이므로 $0\le x\le a$에서 함수 $y=2x^2+x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=a$에서 최댓값 6을 가지므로

$2a^2+a=6$, $\quad 2a^2+a-6=0$

$(a+2)(2a-3)=0$

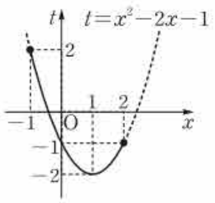
$\therefore a=\frac{3}{2}$ $(\because a>0)$ **답** $\frac{3}{2}$

052-❶ $x^2-2x-1=t$로 놓으면

$t=(x-1)^2-2$

$-1\le x\le 2$이므로 [그림 1]에서

$-2\le t\le 2$



[그림 1]

이때 주어진 함수는

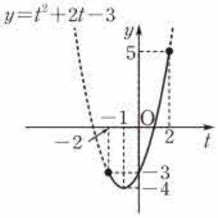
$y=t^2+2t-3=(t+1)^2-4$ $(-2\le t\le 2)$

이므로 [그림 2]에서

$t=-2$일 때, $y=-3$

$t=-1$일 때, $y=-4$

$t=2$일 때, $\quad y=5$



[그림 2]

따라서 주어진 함수의 최댓값은 5, 최솟값은 -4이므로

$M=5$, $m=-4$

$\therefore M+m=1$ **답** 1

052-❷ $x^2-6x+12=t$로 놓으면

$t=(x-3)^2+3$

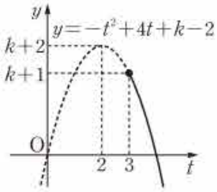
이므로 $\quad t\ge 3$

이때 주어진 함수는

$y=-t^2+4t+k-2=-(t-2)^2+k+2$ $(t\ge 3)$

이므로 오른쪽 그림에서

$t=3$일 때, $\quad y=k+1$



따라서 주어진 함수의 최댓값이 $k+1$이므로

$k+1=3 \qquad \therefore k=2$ **답** 2

053-❶ $y=30x-5x^2=-5(x-3)^2+45$

따라서 y는 $x=3$에서 최댓값 45를 가지므로 구하는 높이는 45m이다. **답** 45m

054-❶ $x^2+5y^2-4xy-4y+5$

$=(x-2y)^2+(y-2)^2+1$

이때 x, y가 실수이므로

$(x-2y)^2\ge 0$, $(y-2)^2\ge 0$

$\therefore x^2+5y^2-4xy-4y+5\ge 1$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $x=4$, $y=2$일 때 1이다. **답** 1

054-❷ $2x+6z-x^2-y^2-z^2+12$

$=-(x-1)^2-y^2-(z-3)^2+22$

이때 x, y, z가 실수이므로

$(x-1)^2\ge 0$, $y^2\ge 0$, $(z-3)^2\ge 0$

$\therefore 2x+6z-x^2-y^2-z^2+12\le 22$

따라서 주어진 식의 최댓값은 $x=1$, $y=0$, $z=3$일 때 22이다. **답** 22

055-❶ (1) 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$y^2+2xy+x^2-4x-8=0$$

이 식을 y에 대한 이차방정식으로 보면 y가 실수이므로 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=x^2-(x^2-4x-8)\ge 0$$

$$4x+8\ge 0 \qquad \therefore x\ge -2$$

따라서 x의 최솟값은 -2이다.

(2) 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2+2(y-2)x+y^2-8=0$$

이 식을 x에 대한 이차방정식으로 보면 x가 실수이므로 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(y-2)^2-(y^2-8)\ge 0$$

$$-4y+12\ge 0 \qquad \therefore y\le 3$$

따라서 y의 최댓값은 3이다.

답 (1) -2 (2) 3

056-❶ $2x+y^2=1$에서

$$y^2=1-2x \qquad \cdots\cdots ㉠$$

y가 실수이므로

$$y^2\ge 0,\ 즉\ 1-2x\ge 0$$

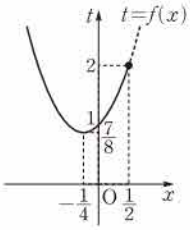
$$\therefore x\le\frac{1}{2}$$

㉠을 $2x^2+y^2+3x$에 대입하면

$$2x^2+1-2x+3x=2x^2+x+1$$

$$=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\ \left(x\le\frac{1}{2}\right)$$

$f(x)=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$이라 하면 $x\le\frac{1}{2}$에서 함수 $t=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{4}$에서 최솟값 $\frac{7}{8}$을 갖는다.



즉 $2x^2+y^2+3x$의 최솟값은 $\frac{7}{8}$이다.

답 $\frac{7}{8}$

056-❷ $x+3y^2=1$에서

$$3y^2=1-x \qquad \cdots\cdots ㉠$$

y가 실수이므로

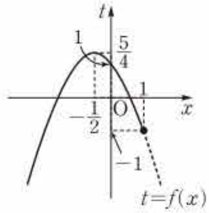
$$3y^2\ge 0,\ 즉\ 1-x\ge 0$$

$$\therefore x\le 1$$

㉠을 $-x^2+3y^2$에 대입하면

$$-x^2+1-x=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\ (x\le 1)$$

$f(x)=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$라 하면 $x\le 1$에서 함수 $t=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 최댓값 $\frac{5}{4}$를 갖는다.



즉 $-x^2+3y^2$의 최댓값은 $\frac{5}{4}$이다.

답 $\frac{5}{4}$

중단원 연습 문제

본책 169~173쪽

01 $-\frac{1}{4}$, 1		02 3	03 2	
04 $m\ge-\frac{3}{2}$		05 ⑤	06 ④	07 11
08 ①	09 ④	10 $\frac{1}{2}$	11 12	12 3
13 8	14 ④	15 2	16 ⑤	
17 72 m^2	18 3	19 18	20 4	21 ②
22 54	23 ④			

01 전략 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구하여 $y=x-1$에 대입한다.

풀이 $y=2x^2+8kx+4k+1$

$$=2(x+2k)^2-8k^2+4k+1$$

이므로 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$$(-2k,\ -8k^2+4k+1)$$

이 점이 직선 $y=x-1$ 위에 있으므로

$$-8k^2+4k+1=-2k-1$$

$$8k^2-6k-2=0, \qquad 4k^2-3k-1=0$$

$$(4k+1)(k-1)=0$$

$$\therefore k=-\frac{1}{4}\ 또는\ k=1$$

답 $-\frac{1}{4}$, 1

02 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 위치 관계는 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 이용한다.

풀이 이차함수 $y=x^2-4x+a^2-5$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2-4x+a^2-5=0$의 판별식을 D_1이라 할 때,

$$\frac{D_1}{4}=(-2)^2-(a^2-5)=0$$

$a^2=9 \quad \therefore a=\pm 3$ ...... ㉠

또 이차함수 $y=x^2+x+a$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2+x+a=0$의 판별식을 D_2라 할 때,

$D_2=1^2-4\cdot a<0$

$1-4a<0 \quad \therefore a>\frac{1}{4}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad a=3$

답 3

03

전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같음을 이용한다.

풀이 이차함수 $y=-x^2+3x$의 그래프와 직선 $y=6x+k$의 교점의 x좌표는 이차방정식

$-x^2+3x=6x+k$,

즉 $x^2+3x+k=0$ ...... ㉠

의 실근과 같으므로 -4는 이차방정식 ㉠의 근이다.

$x=-4$를 ㉠에 대입하면

$16-12+k=0$

$\therefore k=-4$ ··· ❶

이차방정식 ㉠은 $x^2+3x-4=0$이므로

$(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

즉 점 Q의 x좌표는 1이다. ··· ❷

따라서 점 Q의 y좌표는

$y=6-4=2$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 점 Q의 x좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ 점 Q의 y좌표를 구할 수 있다.	20 %

04

전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 만나려면 이차방정식 $f(x)=g(x)$가 실근을 가져야 함을 이용한다.

풀이 이차함수 $y=2x^2+x-1$의 그래프와 직선 $y=-x+m$이 만나려면 이차방정식

$2x^2+x-1=-x+m$,

즉 $2x^2+2x-1-m=0$

의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=1^2-2(-1-m)\geq 0, \quad 2m+3\geq 0$

$\therefore m\geq -\frac{3}{2}$

답 $m\geq -\frac{3}{2}$

05

전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접하면 그 접점의 x좌표가 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 중근임을 이용한다.

풀이 이차함수 $y=x^2+(m-1)x-n$의 그래프가 직선 $y=-x-6$과 점 $(-2,\ -4)$에서 접하므로 -2는 이차방정식

$x^2+(m-1)x-n=-x-6$,

즉 $x^2+mx-n+6=0$ ...... ㉠

의 중근이다.

$x=-2$를 ㉠에 대입하면

$4-2m-n+6=0$

$\therefore n=10-2m$ ...... ㉡

또 이차방정식 ㉠이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$D=m^2-4(-n+6)=0$

$m^2+4(10-2m)-24=0$ ($\because$ ㉡)

$m^2-8m+16=0, \quad (m-4)^2=0$

$\therefore m=4$

따라서 ㉡에서 $n=10-8=2$이므로

$m+n=6$

답 ⑤

다른 풀이 이차방정식 ㉠이 중근 -2를 가지므로

$x^2+mx-n+6=(x+2)^2$,

즉 $x^2+mx-n+6=x^2+4x+4$

따라서 $m=4$, $-n+6=4$이므로

$m=4,\ n=2$

$\therefore m+n=6$

06

전략 주어진 두 이차함수를 각각 $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한다.

풀이 $y=x^2-2x+4=(x-1)^2+3$이므로 이차함수 $y=x^2-2x+4$는 $x=1$에서 최솟값 3을 갖는다.

$\therefore m=3$

$y=-x^2-2x-1=-(x+1)^2$이므로 이차함수 $y=-x^2-2x-1$은 $x=-1$에서 최댓값 0을 갖는다.

$\therefore M=0$

$\therefore M+m=3$

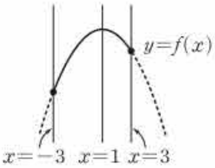
답 ④

07

전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속하는지 확인한다.

풀이 $f(x)=-x^2+2x+k=-(x-1)^2+k+1$이고, 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 1이 $-3\leq x\leq 3$에 속하므로 $x=1$에서 최댓값 $k+1$을 갖는다. ··· ❶

06 이차방정식과 이차함수



또 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $x=-3$에서 최솟값

$f(-3)=-9-6+k$
$=k-15$

를 갖는다. ⋯ ❷

따라서 $k+1+k-15=8$이므로

$2k-14=8$

$\therefore k=11$ ⋯ ❸

답 11

채점 기준	비율
❶ $-3\le x\le 3$일 때 $f(x)$의 최댓값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $-3\le x\le 3$일 때 $f(x)$의 최솟값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

Remark▶

$f(-3)=k-15$, $f(1)=k+1$, $f(3)=k-3$이므로

$f(-3)<f(3)<f(1)$

따라서 $-3\le x\le 3$일 때 $f(x)$의 최댓값은 $k+1$, 최솟값은 $k-15$임을 알 수 있다.

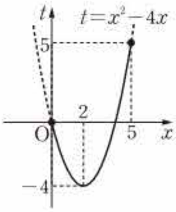
08 전략 $x^2-4x=t$로 치환하여 t의 값의 범위를 구하고, 주어진 식을 t에 대한 식으로 정리한다.

풀이 $x^2-4x=t$로 놓으면

$t=x^2-4x=(x-2)^2-4$

$0\le x\le 5$이므로 [그림 1]에서

$-4\le t\le 5$



[그림 1]

이때 주어진 함수는

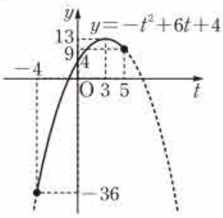
$y=(t+1)^2-2(t-1)^2+5$
$=-t^2+6t+4$
$=-(t-3)^2+13$
$(-4\le t\le 5)$

이므로 [그림 2]에서

$t=-4$일 때, $y=-36$

$t=3$일 때, $y=13$

$t=5$일 때, $y=9$



[그림 2]

따라서 주어진 함수의 최댓값은 13, 최솟값은 -36이므로 구하는 합은

$13+(-36)=-23$

답 ①

09 전략 x에 대한 이차함수의 식을 완전제곱식을 포함한 꼴로 변형하여 주어진 범위에서의 최댓값을 구한다.

풀이 $y=-10x^2+80x=-10(x-4)^2+160$이므로 $3\le x\le 6$일 때 y는 $x=4$에서 최댓값 160을 갖는다.

따라서 구하는 최댓값은 160만 원이다.

답 ④

10 전략 주어진 식을 x, y에 대한 완전제곱식을 포함한 꼴로 변형하여 $(\text{실수})^2\ge 0$임을 이용한다.

풀이 $-4x+6y+4x^2+y^2+13$

$=(2x-1)^2+(y+3)^2+3$

이때 x, y가 실수이므로

$(2x-1)^2\ge 0$, $(y+3)^2\ge 0$

$\therefore -4x+6y+4x^2+y^2+13\ge 3$

따라서 주어진 식은 $x=\frac{1}{2}$, $y=-3$에서 최솟값 3을 가지므로

$\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=-3$, $m=3$

$\therefore \alpha+\beta+m=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

11 전략 $y=3-x$를 $2x^2+y^2$에 대입한 식의 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 $x+y=3$에서 $y=3-x$ ⋯⋯ ㉠

$x\ge 0$, $y\ge 0$이므로 $0\le x\le 3$ ⋯ ❶

㉠을 $2x^2+y^2$에 대입하면

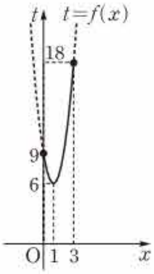
$2x^2+(3-x)^2=3x^2-6x+9$

$=3(x-1)^2+6\ (0\le x\le 3)$ ⋯ ❷

$f(x)=3(x-1)^2+6$이라 하면 $0\le x\le 3$에서 함수 $t=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 18, $x=1$에서 최솟값 6을 갖는다.

따라서 $M=18$, $m=6$이므로

$M-m=12$ ⋯ ❸



답 12

채점 기준	비율
❶ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ $2x^2+y^2$을 $a(x-p)^2+q$ 꼴로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ $M-m$의 값을 구할 수 있다.	40 %

12 전략 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)\,(a>0)$로 놓는다.

풀이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 x절편이 α, β이므로 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(a>0)$라 하면 방정식

$f(3x+4)=0$에서

$a(3x+4-\alpha)(3x+4-\beta)=0$

$\therefore x=\frac{\alpha-4}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta-4}{3}$ ··· ❶

따라서 구하는 모든 실근의 합은

$\frac{\alpha-4}{3}+\frac{\beta-4}{3}=\frac{\alpha+\beta-8}{3}=\frac{17-8}{3}=3$ ··· ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ $f(3x+4)=0$의 근을 α, β에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ $f(3x+4)=0$의 모든 실근의 합을 구할 수 있다.	40 %

다른 풀이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 x절편이 α, β이므로 α, β는 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이다.
즉 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(3x+4)=0$에서

$3x+4=\alpha$ 또는 $3x+4=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha-4}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta-4}{3}$

따라서 구하는 모든 실근의 합은

$\frac{\alpha-4}{3}+\frac{\beta-4}{3}=\frac{\alpha+\beta-8}{3}=\frac{17-8}{3}=3$

13

전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에 의하여 x축이 잘리는 부분의 길이는 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표의 차와 같음을 이용한다.

풀이 이차함수 $y=x^2-3x-m-2$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2-3x-m-2=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-m-2$ ······ ㉠

이때 $|\alpha-\beta|=7$이므로 양변을 제곱하면

$(\alpha-\beta)^2=49$ ······ ㉡

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로 ㉠, ㉡에 의하여

$49=9+4(m+2)$, $\quad m+2=10$

$\therefore m=8$

답 8

14

전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접하면 이차방정식 $f(x)=g(x)$는 중근을 가짐을 이용한다.

풀이 점 $(-1, 1)$을 지나는 직선의 방정식을

$y=m(x+1)+1$

이라 하면 이 직선이 $y=x^2+4x+4$의 그래프와 접하므로 이차방정식

$x^2+4x+4=m(x+1)+1$,

즉 $x^2+(4-m)x-m+3=0$

의 판별식을 D라 할 때,

$D=(4-m)^2-4(-m+3)=0$

$m^2-4m+4=0$, $\quad (m-2)^2=0 \quad \therefore m=2$

따라서 구하는 기울기는 2이다.

답 ④

15

전략 이차함수 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$에서 y의 값이 항상 양수이려면 y의 최솟값이 양수이어야 함을 이용한다.

풀이 $y=2x^2-4x+3k-1$의 값이 항상 양수이려면 y의 최솟값이 양수이어야 한다.
이때 $y=2x^2-4x+3k-1=2(x-1)^2+3k-3$이므로 y는 $x=1$에서 최솟값 $3k-3$을 갖는다. ··· ❶
즉 $3k-3>0$이어야 하므로

$k>1$ ··· ❷

따라서 구하는 정수 k의 최솟값은 2이다. ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ y의 최솟값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ 정수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

16

전략 $f(t)$를 $g(t)$에 대한 함수로 나타낸다.

풀이 $y=x^2-2xg(t)+2g(t)+1$

$=\{x-g(t)\}^2-\{g(t)\}^2+2g(t)+1$

이므로 주어진 이차함수는 $x=g(t)$에서 최솟값 $-\{g(t)\}^2+2g(t)+1$을 갖는다.

$\therefore f(t)=-\{g(t)\}^2+2g(t)+1$

$=-\{g(t)-1\}^2+2$

ㄱ. $g(1)=g(3)$이므로

$f(1)=f(3)$

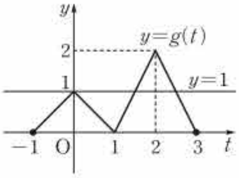
ㄴ. 주어진 그림에서 $0\le g(t)\le 2$이므로 $f(t)$는 $g(t)=1$에서 최댓값 2를 갖는다.

ㄷ. $f(t)=2$이면

$-\{g(t)-1\}^2+2=2$

$\{g(t)-1\}^2=0 \quad \therefore g(t)=1$

오른쪽 그림에서 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=1$은 세 점에서 만나므로 $g(t)=1$, 즉 $f(t)=2$를 만족시키는 t의 개수는 3이다.

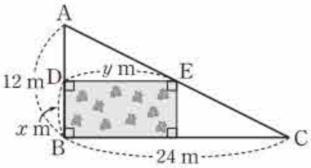


이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

17 전략 꽃밭의 세로의 길이를 x m로 놓고 삼각형의 닮음을 이용하여 꽃밭의 넓이를 x에 대한 이차식으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서



$\overline{\mathrm{BD}}=x$ m,

$\overline{\mathrm{DE}}=y$ m라 하면

$\triangle\mathrm{ADE}\backsim\triangle\mathrm{ABC}$ (AA 닮음)이므로

$\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{DE}}:\overline{\mathrm{BC}}$

$(12-x):12=y:24$

$\therefore y=24-2x$

이때 변의 길이는 양수이므로

$0<x<12$

꽃밭의 넓이를 S m^{2}라 하면

$S=xy=x(24-2x)=-2(x^2-12x)$

$=-2(x-6)^2+72\ (0<x<12)$

따라서 S는 $x=6$에서 최댓값 72를 가지므로 꽃밭의 최대 넓이는 72 m^{2}이다.

답 72 m^2

18 전략 먼저 두 점 A, C의 x좌표를 구하여 x의 값의 범위를 구한다.

풀이 $2x^2-8x+6=0$에서

$x^2-4x+3=0, \qquad (x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

$\therefore \mathrm{A}(0,\ 6),\ \mathrm{B}(1,\ 0),\ \mathrm{C}(3,\ 0)$

이때 점 P$(x,\ y)$가 점 A에서 점 C까지 주어진 그래프 위를 움직이므로

$0\le x\le 3$

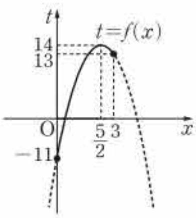
점 P$(x,\ y)$가 이차함수 $y=2x^2-8x+6$의 그래프 위의 점이므로 $y=2x^2-8x+6$을 $4x-2y+1$에 대입하면

$4x-2(2x^2-8x+6)+1$

$=-4x^2+20x-11$

$=-4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+14\ (0\le x\le 3)$

$f(x)=-4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+14$라 하면 $0\le x\le 3$에서 함수 $t=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=\frac{5}{2}$에서 최댓값 14, $x=0$에서 최솟값 -11을 갖는다.



따라서 구하는 합은

$14+(-11)=3$

답 3

19 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=0$의 실근과 같음을 이용한다.

풀이 이차함수 $y=-x^2-2x-7=-(x+1)^2-6$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ -6)$이므로 조건 (가)에 의하여

A$(-1,\ -6)$

두 점 B, C의 x좌표를 각각 α, β라 하면

$\overline{\mathrm{BC}}=|\alpha-\beta|$

$\triangle$ABC에서 밑변을 $\overline{\mathrm{BC}}$라 하면 높이는 6이므로

$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot|\alpha-\beta|\cdot 6=3|\alpha-\beta|$

조건 (나)에 의하여

$3|\alpha-\beta|=12, \qquad |\alpha-\beta|=4$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=16$ ...... ㉠

이때 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점이 A$(-1,\ -6)$이므로

$f(x)=a(x+1)^2-6$

$=ax^2+2ax+a-6\ (a\neq 0)$

이라 하면 α, β는 이차방정식 $f(x)=0$, 즉 $ax^2+2ax+a-6=0$의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=\frac{a-6}{a}$ ...... ㉡

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로 ㉠, ㉡에 의하여

$16=4-4\cdot\frac{a-6}{a}, \qquad a-6=-3a$

$4a=6 \qquad \therefore a=\frac{3}{2}$

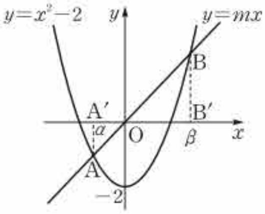
따라서 $f(x)=\frac{3}{2}(x+1)^2-6$이므로

$f(3)=18$

답 18

20 전략 두 점 A′, B′의 x좌표를 각각 α, β로 놓고 두 점 A, B의 좌표를 α, β를 이용하여 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 두 점 A′, B′의 x좌표를 각각 α, $\beta\ (\alpha<\beta)$라 하면



A$(\alpha,\ m\alpha)$,

B$(\beta,\ m\beta)$

이므로

$\overline{\mathrm{AA'}}=-m\alpha\ (\because m\alpha<0),\ \overline{\mathrm{BB'}}=m\beta$

$\overline{\mathrm{AA'}}$과 $\overline{\mathrm{BB'}}$의 길이의 차가 16이므로

$|m\beta-(-m\alpha)|=16$

$\therefore |m(\alpha+\beta)|=16$ ...... ㉠

이때 이차방정식 $x^2-2=mx$, 즉 $x^2-mx-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m$

㉠에서 $|m\cdot m|=16$이므로

$m^2=16 \qquad \therefore m=\pm4$

그런데 $m>0$이므로 $\quad m=4$ 답 4

21 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접하면 이차방정식 $f(x)=g(x)$는 중근을 가짐을 이용한다.

풀이 이차함수 $y=x^2-4kx+4k^2+k$의 그래프와 직선 $y=2ax+b$가 접하므로 이차방정식

$x^2-4kx+4k^2+k=2ax+b$,

즉 $x^2-2(2k+a)x+4k^2+k-b=0$

의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=\{-(2k+a)\}^2-(4k^2+k-b)=0$

$\therefore (4a-1)k+a^2+b=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$4a-1=0,\ a^2+b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{1}{4},\ b=-\frac{1}{16}$

$\therefore a+b=\frac{3}{16}$ 답 ②

22 전략 이차함수 $f(x)$의 x^2의 계수가 양수일 때와 음수일 때로 나누어 생각한다.

풀이 조건 (가)에 의하여 $f(x)=a(x+2)(x-4)$ $(a\neq0)$라 하면

$f(x)=a(x^2-2x-8)=a(x-1)^2-9a$

(i) $a>0$일 때,

$5\le x\le8$에서 $f(x)$는 $x=8$에서 최댓값 $f(8)=40a$를 갖는다.

조건 (나)에 의하여 $40a=80$이므로

$a=2$

(ii) $a<0$일 때,

$5\le x\le8$에서 $f(x)$는 $x=5$에서 최댓값 $f(5)=7a$를 갖는다.

조건 (나)에 의하여 $7a=80$이므로

$a=\frac{80}{7}$

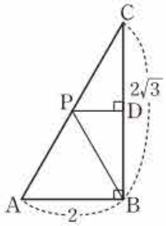
그런데 $a<0$이므로 이를 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $f(x)=2(x+2)(x-4)$이므로

$f(-5)=2\cdot(-3)\cdot(-9)=54$ 답 54

23 전략 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$을 이차함수로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자. $\overline{PD}=x$ $(0<x<2)$라 하면 $\triangle PDC\backsim\triangle ABC$ (AA 닮음)이므로



$\overline{PD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{BC}$

$x:\overline{DC}=2:2\sqrt{3}$

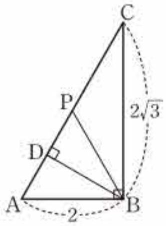
$\therefore \overline{DC}=\sqrt{3}x$

이때 $\overline{BD}=\overline{BC}-\overline{DC}=2\sqrt{3}-\sqrt{3}x$이므로

$$\begin{aligned}\overline{PB}^2+\overline{PC}^2&=(\overline{PD}^2+\overline{BD}^2)+(\overline{PD}^2+\overline{DC}^2)\\&=x^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{3}x)^2+x^2+(\sqrt{3}x)^2\\&=8x^2-12x+12\\&=8\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{2}\end{aligned}$$

따라서 $0<x<2$에서 $\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$은 $x=\frac{3}{4}$에서 최솟값 $\frac{15}{2}$를 갖는다. 답 ④

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 D라 하자. 직각삼각형 ABC에서



$\overline{AC}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$

$\tan A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\sqrt{3}$이므로

$\angle A=60^\circ$

또 직각삼각형 ABD에서 $\angle A=60^\circ$이므로

$\overline{AD}:\overline{BD}:\overline{AB}=1:\sqrt{3}:2$

이때 $\overline{AB}=2$이므로

$\overline{AD}=1,\ \overline{BD}=\sqrt{3}$

따라서 $\overline{PC}=x$ $(0<x<4)$라 하면

$\overline{PD}=\overline{AC}-\overline{AD}-\overline{PC}=4-1-x=3-x$

이므로

$$\begin{aligned}\overline{PB}^2+\overline{PC}^2&=(\overline{PD}^2+\overline{BD}^2)+\overline{PC}^2\\&=(3-x)^2+(\sqrt{3})^2+x^2\\&=2x^2-6x+12\\&=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{2}\end{aligned}$$

따라서 $0<x<4$에서 $\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$은 $x=\frac{3}{2}$에서 최솟값 $\frac{15}{2}$를 갖는다.

Ⅱ. 방정식

07 고차방정식

유제

본책 178~192쪽

057-❶ (1) $f(x)=x^3+x^2-3x+1$이라 하면

$f(1)=1+1-3+1=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ & & 1 & 2 & -1 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2+2x-1)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2+2x-1)=0$

이므로

$x=1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{2}$

(2) $f(x)=x^3-3x^2+4$라 하면

$f(-1)=-1-3+4=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(x^2-4x+4)$

$=(x+1)(x-2)^2$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)^2=0$

이므로

$x=-1$ 또는 $x=2$

(3) $f(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$라 하면

$f(-1)=1+1-1+1-2=0$,

$f(2)=16-8-4-2-2=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ & & -1 & 2 & -1 & 2 \\ \hline 2 & 1 & -2 & 1 & -2 & \boxed{0} \\ & & 2 & 0 & 2 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+1)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(x^2+1)=0$

이므로

$x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\pm i$

(4) $f(x)=x^4-4x^3-4x^2+4x+3$이라 하면

$f(-1)=1+4-4-4+3=0$,

$f(1)=1-4-4+4+3=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -4 & -4 & 4 & 3 \\ & & -1 & 5 & -1 & -3 \\ \hline 1 & 1 & -5 & 1 & 3 & \boxed{0} \\ & & 1 & -4 & -3 & \\ \hline & 1 & -4 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(x-1)(x^2-4x-3)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x-1)(x^2-4x-3)=0$

이므로

$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2\pm\sqrt{7}$

답 풀이 참조

058-❶ (1) $x^2-2x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X-1)(X+2)-10=0$

$X^2+X-12=0$, $\quad (X+4)(X-3)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=3$

(ⅰ) $X=-4$, 즉 $x^2-2x=-4$일 때,

$x^2-2x+4=0 \quad \therefore x=1\pm\sqrt{3}i$

(ⅱ) $X=3$, 즉 $x^2-2x=3$일 때,

$x^2-2x-3=0$, $\quad (x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$x=1\pm\sqrt{3}i$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$

(2) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=24$에서

$\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}=24$

$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=24$

$x^2-5x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X+4)(X+6)=24$

$X^2+10X=0$, $\quad X(X+10)=0$

$\therefore X=-10$ 또는 $X=0$

(ⅰ) $X=-10$, 즉 $x^2-5x=-10$일 때,

$x^2-5x+10=0 \quad \therefore x=\dfrac{5\pm\sqrt{15}i}{2}$

(ⅱ) $X=0$, 즉 $x^2-5x=0$일 때,

$x(x-5)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=5$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$x=\dfrac{5\pm\sqrt{15}i}{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=5$

답 풀이 참조

059-❶ (1) $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+2X-3=0$, $\quad (X+3)(X-1)=0$

$\therefore X=-3$ 또는 $X=1$

따라서 $x^2=-3$ 또는 $x^2=1$이므로

$x=\pm\sqrt{3}i$ 또는 $x=\pm1$

(2) $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$2X^2-7X-4=0$, $\quad (2X+1)(X-4)=0$

$\therefore X=-\frac{1}{2}$ 또는 $X=4$

따라서 $x^2=-\frac{1}{2}$ 또는 $x^2=4$이므로

$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$ 또는 $x=\pm2$

(3) 주어진 방정식에서

$(x^4-10x^2+25)-4x^2=0$

$(x^2-5)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x-5)(x^2-2x-5)=0$

$\therefore x^2+2x-5=0$ 또는 $x^2-2x-5=0$

(i) $x^2+2x-5=0$에서 $\quad x=-1\pm\sqrt{6}$

(ii) $x^2-2x-5=0$에서 $\quad x=1\pm\sqrt{6}$

(i), (ii)에서

$x=-1\pm\sqrt{6}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{6}$

(4) 주어진 방정식에서

$(x^4+6x^2+9)-4x^2=0$

$(x^2+3)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)=0$

$\therefore x^2+2x+3=0$ 또는 $x^2-2x+3=0$

(i) $x^2+2x+3=0$에서 $\quad x=-1\pm\sqrt{2}i$

(ii) $x^2-2x+3=0$에서 $\quad x=1\pm\sqrt{2}i$

(i), (ii)에서

$x=-1\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}i$

답 풀이 참조

060-❶ 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 $x\,(x>2)$라 하면

$(x-1)(x-2)\cdot2x=\frac{3}{4}x^3$

$5x^3-24x^2+16x=0$, $\quad x(5x-4)(x-4)=0$

$\therefore x=4\ (\because x>2)$

따라서 구하는 정육면체의 한 모서리의 길이는 4이다.

답 4

061-❶ 삼차방정식 $x^3+5x^2+4x+2=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-5$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=-2$

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=(-5)^2-2\cdot4=17$

(2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$

$=(-5)\cdot(17-4)+3\cdot(-2)$

$=-71$

(3) $\frac{\alpha}{\beta\gamma}+\frac{\beta}{\gamma\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{17}{2}$

(4) $\alpha+\beta+\gamma=-5$에서

$\alpha+\beta=-5-\gamma$, $\beta+\gamma=-5-\alpha$,

$\gamma+\alpha=-5-\beta$

$\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(-5-\gamma)(-5-\alpha)(-5-\beta)$

$=-(\alpha+5)(\beta+5)(\gamma+5)$

$=-\{\alpha\beta\gamma+5(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$+25(\alpha+\beta+\gamma)+125\}$

$=-\{-2+5\cdot4+25\cdot(-5)+125\}$

$=-18$

답 (1) 17 (2) -71 (3) $-\frac{17}{2}$ (4) -18

062-❶ 삼차방정식 $x^3-2x^2+3x+1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=-1$

구하는 삼차방정식의 세 근이 $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$이므로

(i) 세 근의 합은

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$

(ii) 두 근끼리의 곱의 합은

$\alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta$

$=\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2+\alpha^2\beta\gamma$

$=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

$=-1\cdot2=-2$

(iii) 세 근의 곱은

$\alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha=\alpha^2\beta^2\gamma^2=(\alpha\beta\gamma)^2=(-1)^2=1$

이상에서 구하는 삼차방정식은

$x^3-3x^2-2x-1=0$

답 $x^3-3x^2-2x-1=0$

063-❶ 주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이고 한 근이 $2+\sqrt{3}$이므로 $2-\sqrt{3}$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})+\alpha=0$ ...... ㉠
$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+\alpha(2-\sqrt{3})+\alpha(2+\sqrt{3})$
$=a$ ...... ㉡
$\alpha(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=-b$ ...... ㉢

㉠에서 $\alpha=-4$

$\alpha=-4$를 ㉡, ㉢에 각각 대입하면

$a=-15,\ b=4$

$\therefore a-b=-19$

답 -19

063-② 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이고 한 근이 $1+i$이므로 $1-i$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+i)+(1-i)+\alpha=-a$ ...... ㉠
$(1+i)(1-i)+\alpha(1-i)+\alpha(1+i)=b$ ...... ㉡
$\alpha(1+i)(1-i)=-6$ ...... ㉢

㉢에서 $2\alpha=-6$ $\therefore \alpha=-3$

$\alpha=-3$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$a=1,\ b=-4$

답 $a=1,\ b=-4$, 나머지 두 근: $1-i,\ -3$

064-① 방정식 $x^3=-1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^3=-1$

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0$

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

따라서 ω는 $x^2-x+1=0$의 근이므로

$\omega^2-\omega+1=0$ ...... ㉠

(1) $\omega^{99}=(\omega^3)^{33}=-1,\ \omega^{100}=(\omega^3)^{33}\cdot\omega=-\omega,$
$\omega^{101}=(\omega^3)^{33}\cdot\omega^2=-\omega^2,\ \omega^{199}=(\omega^3)^{66}\cdot\omega=\omega,$
$\omega^{200}=(\omega^3)^{66}\cdot\omega^2=\omega^2,\ \omega^{201}=(\omega^3)^{67}=-1$
이고 ㉠에서 $-1-\omega^2=-\omega,\ \omega-1=\omega^2$이므로

$$\frac{\omega^{99}+\omega^{101}}{\omega^{100}}+\frac{\omega^{199}+\omega^{201}}{\omega^{200}}$$
$$=\frac{-1-\omega^2}{-\omega}+\frac{\omega-1}{\omega^2}$$
$$=\frac{-\omega}{-\omega}+\frac{\omega^2}{\omega^2}=2$$

(2) 방정식 $x^2-x+1=0$의 계수가 실수이고 한 허근이 ω이므로 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$
이고 $\omega\overline{\omega}=1$에서 $\frac{1}{\omega}=\overline{\omega},\ \frac{1}{\overline{\omega}}=\omega$이므로

$$\omega+\frac{1}{\omega}+\overline{\omega}+\frac{1}{\overline{\omega}}=\omega+\overline{\omega}+\overline{\omega}+\omega$$
$$=2(\omega+\overline{\omega})$$
$$=2$$

답 (1) 2 (2) 2

다른 풀이 (1) ㉠에서 $1+\omega^2=\omega$이므로

$$\frac{\omega^{99}+\omega^{101}}{\omega^{100}}+\frac{\omega^{199}+\omega^{201}}{\omega^{200}}$$
$$=\frac{\omega^{99}(1+\omega^2)}{\omega^{99}\cdot\omega}+\frac{\omega^{199}(1+\omega^2)}{\omega^{199}\cdot\omega}$$
$$=\frac{1+\omega^2}{\omega}+\frac{1+\omega^2}{\omega}$$
$$=\frac{\omega}{\omega}+\frac{\omega}{\omega}=2$$

중단원 연습 문제

본책 193~196쪽

01 ①	**02** $2\pm\sqrt{2}$		**03** 풀이 참조	
04 -4	**05** $x=1$	**06** 62		
07 $f(x)=x^3+3x^2-x-2$			**08** ②	**09** 1
10 5	**11** ③	**12** 4	**13** 8	**14** ④
15 ①	**16** ⑤	**17** ①	**18** ③	**19** 14

01 전략 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $f(x)=x^3-2x^2+7x+10$이라 하면

$f(-1)=-1-2-7+10=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -2 & 7 & 10 \\ & & -1 & 3 & -10 \\ \hline & 1 & -3 & 10 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(x^2-3x+10)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x^2-3x+10)=0$

이므로 두 허근 $\alpha,\ \beta$는 $x^2-3x+10=0$의 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=10$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=3^2-2\cdot10$
$=-11$

답 ①

02 전략 $x=2$를 주어진 방정식에 대입하여 k의 값을 구한 후, 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $x=2$를 주어진 방정식에 대입하면

$$8-4(k-4)+2k-4=0 \qquad \therefore k=10$$

$f(x)=x^3-6x^2+10x-4$라 하면

$$f(2)=8-24+20-4=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -6 & 10 & -4 \\ & & 2 & -8 & 4 \\ \hline & 1 & -4 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x-2)(x^2-4x+2)$$

따라서 주어진 방정식은

$$(x-2)(x^2-4x+2)=0$$

이므로

$$x=2 \text{ 또는 } x=2\pm\sqrt{2}$$

즉 나머지 두 근은 $2\pm\sqrt{2}$이다.

답 $2\pm\sqrt{2}$

03 전략 $x^2+2x-3=X$로 치환한 후 X에 대한 이차방정식을 푼다.

풀이 $x^2+2x-3=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$$X^2+2X-3=0, \qquad (X+3)(X-1)=0$$

$$\therefore X=-3 \text{ 또는 } X=1 \quad \cdots ❶$$

(i) $X=-3$, 즉 $x^2+2x-3=-3$일 때,

$$x^2+2x=0, \qquad x(x+2)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=0 \quad \cdots ❷$$

(ii) $X=1$, 즉 $x^2+2x-3=1$일 때,

$$x^2+2x-4=0$$

$$\therefore x=-1\pm\sqrt{5} \quad \cdots ❸$$

(i), (ii)에서

$$x=-2 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=-1\pm\sqrt{5} \quad \cdots ❹$$

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ $x^2+2x-3=X$로 치환하여 X에 대한 이차방정식을 풀 수 있다.	30 %
❷ $X=-3$일 때 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $X=1$일 때 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 주어진 방정식의 근을 구할 수 있다.	10 %

04 전략 $x^2=X$로 치환한 후 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$$X^2-2X-8=0, \qquad (X+2)(X-4)=0$$

$$\therefore X=-2 \text{ 또는 } X=4$$

따라서 $x^2=-2$ 또는 $x^2=4$이므로

$$x=\pm\sqrt{2}i \text{ 또는 } x=\pm2$$

주어진 방정식의 모든 실근의 곱은

$$2\cdot(-2)=-4$$

답 -4

05 전략 양변을 x^2으로 나누고 $x+\frac{1}{x}=X$로 치환하여 주어진 방정식을 X에 대한 이차방정식으로 나타낸다.

풀이 $x\neq0$이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2-4x+6-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$$

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$이므로

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면 $\qquad X^2-4X+4=0$

$$(X-2)^2=0 \qquad \therefore X=2$$

따라서 $x+\frac{1}{x}=2$이므로

$$x^2-2x+1=0, \qquad (x-1)^2=0$$

$$\therefore x=1$$

답 $x=1$

06 전략 세 근을 한 문자로 나타내어 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 세 근을 α, 3α, 4α $(\alpha\neq0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+3\alpha+4\alpha=\frac{16}{2}$$

$$8\alpha=8 \qquad \therefore \alpha=1$$

따라서 주어진 방정식의 세 근은

$$1,\ 3,\ 4 \quad \cdots ❶$$

$1\cdot3+3\cdot4+4\cdot1=\frac{a}{2}$이므로 $\qquad \frac{a}{2}=19$

$$\therefore a=38 \quad \cdots ❷$$

$1\cdot3\cdot4=-\frac{b}{2}$이므로 $\qquad b=-24 \quad \cdots ❸$

$$\therefore a-b=62 \quad \cdots ❹$$

답 62

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식의 세 근을 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

07 전략 $x^3-3x^2-x+2=0$에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$의 값을 구한다.

풀이 삼차방정식 $x^3-3x^2-x+2=0$의 세 근이 $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\alpha-\beta-\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$,
$-\alpha\beta\gamma=-2$
$\therefore \alpha+\beta+\gamma=-3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$,
$\alpha\beta\gamma=2$

따라서 α, β, γ를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3+3x^2-x-2=0$

이므로

$f(x)=x^3+3x^2-x-2$

답 $f(x)=x^3+3x^2-x-2$

08 전략 켤레근의 성질과 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 나머지 두 근을 구한다.

풀이 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이고 한 근이 $1+\sqrt{2}i$이므로 $1-\sqrt{2}i$도 근이다.
나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)+\alpha=-a$ …… ㉠
$(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)+\alpha(1-\sqrt{2}i)+\alpha(1+\sqrt{2}i)$
$=b$ …… ㉡
$\alpha(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=3$ …… ㉢

㉢에서 $3\alpha=3$ $\therefore \alpha=1$
$\alpha=1$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$a=-3$, $b=5$
$\therefore ab=-15$

답 ②

09 전략 $x^3=-1$의 한 허근이 ω이면 $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$임을 이용한다.

풀이 방정식 $x^3+1=0$의 한 허근이 α이므로

$\alpha^3+1=0$ $\therefore \alpha^3=-1$ ⋯ ❶

$x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$
따라서 α는 $x^2-x+1=0$의 근이므로

$\alpha^2-\alpha+1=0$ ⋯ ❷

$\therefore 1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4-\alpha^5+\alpha^6$
$=(1-\alpha+\alpha^2)-\alpha^3(1-\alpha+\alpha^2)+(\alpha^3)^2$
$=0+(-1)^2=1$ ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ α^3의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\alpha^2-\alpha+1$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

10 전략 주어진 삼차방정식을 $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)=0$ (α는 실수) 꼴로 변형한 후 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-6x^2+(k+8)x-2k$라 하면

$f(2)=8-24+2k+16-2k=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -6 & k+8 & -2k \\ & & 2 & -8 & 2k \\ \hline & 1 & -4 & k & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-2)(x^2-4x+k)$

즉 주어진 방정식은

$(x-2)(x^2-4x+k)=0$ ⋯ ❶

이때 주어진 삼차방정식이 한 실근과 두 허근을 가지므로 이차방정식 $x^2-4x+k=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-k<0$
$\therefore k>4$ ⋯ ❷

따라서 정수 k의 최솟값은 5이다. ⋯ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	40 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

11 전략 주어진 방정식을 $(x^2+A)^2-(Bx)^2=0$ 꼴로 변형한 후 좌변을 인수분해한다.

풀이 $x^4+8x^2+36=0$에서

$(x^4+12x^2+36)-4x^2=0$
$(x^2+6)^2-(2x)^2=0$
$(x^2+2x+6)(x^2-2x+6)=0$
$\therefore x^2+2x+6=0$ 또는 $x^2-2x+6=0$

이때 방정식 $x^2+2x+6=0$의 두 근을 α, β, 방정식 $x^2-2x+6=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=6$, $\gamma+\delta=2$, $\gamma\delta=6$

$$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}$$
$$=\frac{-2}{6}+\frac{2}{6}$$
$$=0$$

답 ③

12 전략 정육면체 A, B, C, D의 한 모서리의 길이를 각각 x, $x+2$, $x+4$, $x+6$이라 하고 방정식을 세운다.

풀이 정육면체 A의 한 모서리의 길이를 $x\,(x>0)$라 하면 B, C, D의 한 모서리의 길이는 각각 $x+2$, $x+4$, $x+6$이므로

$$(x+2)^3+(x+6)^3=3x^3+2(x+4)^3$$
$$3x^3-24x-96=0, \quad x^3-8x-32=0$$

$f(x)=x^3-8x-32$라 하면

$$f(4)=64-32-32=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & 0 & -8 & -32 \\ & & 4 & 16 & 32 \\ \hline & 1 & 4 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x-4)(x^2+4x+8)$$

따라서 방정식 $f(x)=0$은

$$(x-4)(x^2+4x+8)=0$$
$$\therefore x=4 \text{ 또는 } x=-2\pm 2i$$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x=4$

즉 정육면체 A의 한 모서리의 길이는 4이다.

답 4

13 전략 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 사이에 $g(x)=f(x)+x+2$인 관계가 있음을 이용한다.

풀이 방정식 $f(x)=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

$$f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=0 \quad \cdots ❶$$

또 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1,\ \alpha\beta\gamma=-2 \quad \cdots ❷$$

이때 $g(x)=f(x)+x+2$이므로

$$g(\alpha)=f(\alpha)+\alpha+2=\alpha+2$$
$$g(\beta)=f(\beta)+\beta+2=\beta+2$$
$$g(\gamma)=f(\gamma)+\gamma+2=\gamma+2 \quad \cdots ❸$$
$$\therefore g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$$
$$=(\alpha+2)(\beta+2)(\gamma+2)$$
$$=\alpha\beta\gamma+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+4(\alpha+\beta+\gamma)+8$$
$$=-2+2\cdot 1+4\cdot 0+8$$
$$=8 \quad \cdots ❹$$

답 8

채점 기준	비율
❶ $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $g(\alpha)$, $g(\beta)$, $g(\gamma)$를 α, β, γ에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❹ $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

14 전략 $2x-1=t$로 놓고 $f(t)$를 구한 후, 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 $2x-1=t$로 놓으면 $x=\dfrac{t+1}{2}$이므로

$$f(t)=8\left(\frac{t+1}{2}\right)^3-4\cdot\frac{t+1}{2}$$
$$=(t+1)^3-2(t+1)$$
$$=t^3+3t^2+t-1$$

방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^3+3x^2+x-1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=-3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1,\ \alpha\beta\gamma=1$$
$$\therefore \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$$
$$=\frac{\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$
$$=\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2(\alpha\beta^2\gamma+\beta\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2\beta)}{(\alpha\beta\gamma)^2}$$
$$=\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha\beta\gamma)^2}$$
$$=\frac{1^2-2\cdot 1\cdot(-3)}{1^2}$$
$$=7$$

답 ④

15 전략 $x^3=1$의 한 허근이 ω이면 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$임을 이용한다.

풀이 $x^3=1$에서 $\quad x^3-1=0$

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

따라서 ω는 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$$\omega^2+\omega+1=0$$
$$\therefore \omega^2=-\omega-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

ㄱ. 방정식 $x^2+x+1=0$의 계수가 실수이고 한 허근이 ω이므로 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega+\overline{\omega}=-1$$
$$\therefore \overline{\omega}=-\omega-1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\quad \omega^2=\overline{\omega}$

ㄴ. 이차방정식 $x^2+x+1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$\therefore\ \omega^2+\overline{\omega}^2=(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\overline{\omega}$

$=(-1)^2-2\cdot 1$

$=-1$

한편 $\omega,\ \overline{\omega}$가 $x^3=1$의 근이므로

$\omega^3=\overline{\omega}^3=1 \qquad \therefore\ \omega^3+\overline{\omega}^3=2$

$\therefore\ \omega^2+\overline{\omega}^2\neq\omega^3+\overline{\omega}^3$

ㄷ. $\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega+1=-\omega^2,\ \omega^2+1=-\omega$이므로

$$\frac{1}{\omega+1}+\frac{1}{\omega^2+1}+\frac{1}{\omega^3+1}$$

$$=\frac{1}{-\omega^2}+\frac{1}{-\omega}+\frac{1}{1+1}$$

$$=\frac{-1-\omega}{\omega^2}+\frac{1}{2}=\frac{\omega^2}{\omega^2}+\frac{1}{2}\ (\because ㉠)$$

$$=\frac{3}{2}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. **답** ①

16

전략 먼저 주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해하여 실근을 구한다.

풀이 $x^3-x^2-kx+k=0$에서

$x^2(x-1)-k(x-1)=0$

$(x-1)(x^2-k)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x^2=k$

0이 아닌 실수 k에 대하여 $k>0$이면 방정식 $x^2=k$는 서로 다른 두 실근을 가지므로 $\alpha,\ \beta$ 중 실수는 하나뿐이라는 조건을 만족시키지 않는다.

즉 $k<0$이고 주어진 방정식의 실근은 1뿐이므로

$\alpha=1$ 또는 $\beta=1$

(i) $\alpha=1$일 때,

$\alpha^2=-2\beta$에서 $1=-2\beta$이므로

$\beta=-\frac{1}{2}$

그런데 β가 실수이므로 $\alpha,\ \beta$ 중 실수는 하나뿐이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\beta=1$일 때,

$\alpha^2=-2\beta$에서 $\qquad \alpha^2=-2$

이때 $\alpha,\ \gamma$는 방정식 $x^2=k$의 근이므로

$\alpha^2=k,\ \gamma^2=k$

$\therefore\ \gamma^2=\alpha^2=-2$

(i), (ii)에서 $\beta=1,\ \gamma^2=-2$이므로

$\beta^2+\gamma^2=-1$ **답** ⑤

17

전략 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하고 공통부분이 나오도록 전개한 후 치환한다.

풀이 $(x^2-4x+3)(x^2-6x+8)=120$에서

$(x-1)(x-3)(x-2)(x-4)=120$

$\{(x-1)(x-4)\}\{(x-3)(x-2)\}=120$

$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=120$

$x^2-5x=X$로 놓으면

$(X+4)(X+6)=120, \qquad X^2+10X-96=0$

$(X+16)(X-6)=0$

$\therefore\ X=-16$ 또는 $X=6$

즉 $x^2-5x=-16$ 또는 $x^2-5x=6$이므로

$x^2-5x+16=0$ 또는 $x^2-5x-6=0$

이때 이차방정식 $x^2-5x-6=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로 허근 ω는 $x^2-5x+16=0$의 근이다.

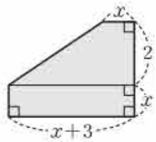
따라서 $\omega^2-5\omega+16=0$이므로

$\omega^2-5\omega=-16$ **답** ①

18

전략 오각기둥의 부피를 이용하여 x에 대한 삼차방정식을 세운다.

풀이 밑면인 오각형은 오른쪽 그림과 같이 직사각형과 사다리꼴로 나눌 수 있으므로



(밑넓이)

$=x(x+3)+\frac{1}{2}\{x+(x+3)\}\cdot 2$

$=x^2+3x+2x+3$

$=x^2+5x+3$

이때 오각기둥의 높이는 $x+1$이고, 부피가 108이므로

$(x^2+5x+3)(x+1)=108$

$x^3+6x^2+8x-105=0$

$f(x)=x^3+6x^2+8x-105$라 하면

$f(3)=27+54+24-105=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 6 & 8 & -105 \\ & & 3 & 27 & 105 \\ \hline & 1 & 9 & 35 & 0 \end{array}$$

$\therefore\ f(x)=(x-3)(x^2+9x+35)$

따라서 방정식 $f(x)=0$은

$(x-3)(x^2+9x+35)=0$

$\therefore\ x=3$ 또는 $x=\frac{-9\pm\sqrt{59}i}{2}$

그런데 $x>0$이므로

$x=3$ **답** ③

19 (전략) 켤레근의 성질과 나머지 정리를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 $P(x)$를 구한다.

(풀이) 방정식 $P(x)=0$의 계수가 실수이고 조건 (가)에서 한 근이 $2+i$이므로 $2-i$도 근이다.
나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(2+i)+(2-i)+\alpha=a$$
$$(2+i)(2-i)+\alpha(2+i)+\alpha(2-i)=b$$
$$\alpha(2+i)(2-i)=c$$
$$\therefore a=\alpha+4,\ b=4\alpha+5,\ c=5\alpha \quad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (나)에 의하여 $P(1)=1$이므로

$$1-a+b-c=1$$
$$\therefore a-b+c=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$(\alpha+4)-(4\alpha+5)+5\alpha=0$$
$$2\alpha-1=0 \qquad \therefore \alpha=\frac{1}{2}$$
$$\therefore a+b+c=(\alpha+4)+(4\alpha+5)+5\alpha\ (\because ㉠)$$
$$=10\alpha+9$$
$$=5+9=14$$

답 14

Remark▶ 나머지 정리
x에 대한 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(\alpha)$이다.

Ⅱ. 방정식

08 연립방정식

유제

본책 202~218쪽

065-❶ (1) $\begin{cases} 2x-y+z=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+2y-z=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ 3x+y+z=2 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $3x+y=-1 \quad \cdots\cdots ㉣$

㉡+㉢을 하면 $4x+3y=2 \quad \cdots\cdots ㉤$

㉣×3−㉤을 하면

$5x=-5 \qquad \therefore x=-1$

$x=-1$을 ㉣에 대입하면

$-3+y=-1 \qquad \therefore y=2$

$x=-1,\ y=2$를 ㉠에 대입하면

$-2-2+z=-1 \qquad \therefore z=3$

$\therefore x=-1,\ y=2,\ z=3$

(2) $\begin{cases} x+y+3z=9 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+2y+z=3 & \cdots\cdots ㉡ \\ 3x-y-2z=2 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠×2−㉡을 하면

$5z=15 \qquad \therefore z=3$

㉠+㉢을 하면 $4x+z=11 \quad \cdots\cdots ㉣$

$z=3$을 ㉣에 대입하면

$4x+3=11 \qquad \therefore x=2$

$x=2,\ z=3$을 ㉠에 대입하면

$2+y+9=9 \qquad \therefore y=-2$

$\therefore x=2,\ y=-2,\ z=3$

답 풀이 참조

066-❶ $\begin{cases} 4x+y-z=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+y-3z=7 & \cdots\cdots ㉡ \\ x-y+6z=-1 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면 $2x+2z=-2$

$\therefore x+z=-1 \quad \cdots\cdots ㉣$

㉡+㉢을 하면 $3x+3z=6$

$\therefore x+z=2 \quad \cdots\cdots ㉤$

㉣−㉤을 하면 $0\cdot x+0\cdot z=-3$

따라서 주어진 연립방정식의 해가 없다.

답 해가 없다.

066-❷ $\begin{cases} (a^2-3)x+6y=a & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+2y=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

08 연립방정식

㉠ $-$ ㉡ $\times 3$을 하면

$(a^2-9)x=a+3$, 즉 $(a+3)(a-3)x=a+3$

(i) $a\neq-3$, $a\neq3$일 때,

$x=\dfrac{1}{a-3}$

(ii) $a=3$일 때, $\quad 0\cdot x=6$

따라서 주어진 연립방정식의 해가 없다.

(iii) $a=-3$일 때, $\quad 0\cdot x=0$

따라서 주어진 연립방정식의 해가 무수히 많다.

이상에서 $\quad a=-3$ **답** -3

067-❶ (1) $\begin{cases} x+2y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-3y^2=-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad x=-2y+1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(-2y+1)^2-3y^2=-2$

$y^2-4y+3=0, \quad (y-1)(y-3)=0$

$\therefore y=1$ 또는 $y=3$

(i) $y=1$을 ㉢에 대입하면 $\quad x=-1$

(ii) $y=3$을 ㉢에 대입하면 $\quad x=-5$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x-y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+4xy+y^2=-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad x=y+2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(y+2)^2+4(y+2)y+y^2=-2$

$y^2+2y+1=0, \quad (y+1)^2=0$

$\therefore y=-1$

$y=-1$을 ㉢에 대입하면 $\quad x=1$

$\therefore x=1,\ y=-1$

답 풀이 참조

067-❷ $\begin{cases} x+y=a & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+y^2=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad y=-x+a$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$2x^2+(-x+a)^2=6$

$3x^2-2ax+a^2-6=0$ $\cdots\cdots$ ㉣

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 x에 대한 이차방정식 ㉣이 중근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉣의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-a)^2-3(a^2-6)=0$

$-2a^2+18=0, \quad a^2=9$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$ **답** 3

068-❶ (1) $\begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2y^2=18 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad (x-y)(x-4y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=4y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+2y^2=18, \quad y^2=6 \quad \therefore y=\pm\sqrt{6}$

$x=y$이므로

$x=\pm\sqrt{6},\ y=\pm\sqrt{6}$ (복호동순)

(ii) $x=4y$를 ㉡에 대입하면

$(4y)^2+2y^2=18$

$y^2=1 \quad \therefore y=\pm1$

$x=4y$이므로

$x=\pm4,\ y=\pm1$ (복호동순)

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=\sqrt{6} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{6} \\ y=-\sqrt{6} \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2-2xy+2y^2=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x^2+3xy-y^2=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $\quad (x+y)(4x-y)=0$

$\therefore y=-x$ 또는 $y=4x$

(i) $y=-x$를 ㉠에 대입하면

$x^2-2x\cdot(-x)+2\cdot(-x)^2=5$

$x^2=1 \quad \therefore x=\pm1$

$y=-x$이므로

$x=\pm1,\ y=\mp1$ (복호동순)

(ii) $y=4x$를 ㉠에 대입하면

$x^2-2x\cdot4x+2\cdot(4x)^2=5$

$x^2=\dfrac{1}{5} \quad \therefore x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$y=4x$이므로

$x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5},\ y=\pm\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{5}}{5} \\ y=\dfrac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\dfrac{\sqrt{5}}{5} \\ y=-\dfrac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases}$

답 풀이 참조

069-❶ (1) $\begin{cases} x^2-y^2+2x-y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-2y^2+3x-y=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×2－㉡을 하면

$x-y=2 \quad \therefore x=y+2 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$(y+2)^2-y^2+2(y+2)-y=3$

$5y=-5 \quad \therefore y=-1$

$y=-1$을 ㉢에 대입하면 $\quad x=1$

$\therefore x=1,\ y=-1$

(2) $\begin{cases} x^2+2y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ y^2+2x=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠－㉡을 하면

$x^2-y^2+2y-2x=0$

$(x+y)(x-y)-2(x-y)=0$

$(x-y)(x+y-2)=0$

$\therefore y=x$ 또는 $y=-x+2$

(i) $y=x$를 ㉠에 대입하면

$x^2+2x=3, \quad x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

$y=x$이므로

$\begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

(ii) $y=-x+2$를 ㉠에 대입하면

$x^2+2(-x+2)=3$

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0 \quad \therefore x=1$

$y=-x+2$이므로

$y=1$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

답 풀이 참조

070-❶ (1) $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ xy=-8 \end{cases}$에서

$\begin{cases} (x+y)^2-2xy=20 \\ xy=-8 \end{cases}$

$x+y=u,\ xy=v$로 놓으면

$\begin{cases} u^2-2v=20 & \cdots\cdots ㉠ \\ v=-8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면

$u^2+16=20, \quad u^2=4$

$\therefore u=\pm 2$

(i) $u=2,\ v=-8$, 즉 $x+y=2,\ xy=-8$일 때,
x, y는 이차방정식 $t^2-2t-8=0$의 두 근이므로
$(t+2)(t-4)=0$에서

$t=-2$ 또는 $t=4$

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$

(ii) $u=-2,\ v=-8$, 즉 $x+y=-2,\ xy=-8$일 때, x, y는 이차방정식 $t^2+2t-8=0$의 두 근이므로 $(t+4)(t-2)=0$에서

$t=-4$ 또는 $t=2$

$\therefore \begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=2 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$에서

$\begin{cases} (x+y)^2-2xy+x+y=2 \\ (x+y)^2-xy=1 \end{cases}$

$x+y=u,\ xy=v$로 놓으면

$\begin{cases} u^2+u-2v=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-v=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $\quad v=u^2-1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하여 정리하면

$u^2-u=0, \quad u(u-1)=0$

$\therefore u=0$ 또는 $u=1$

$u=0$을 ㉢에 대입하면

$v=-1$

$u=1$을 ㉢에 대입하면

$v=0$

(i) $u=0,\ v=-1$, 즉 $x+y=0,\ xy=-1$일 때,
x, y는 이차방정식 $t^2-1=0$의 두 근이므로
$(t+1)(t-1)=0$에서

$t=-1$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

(ii) $u=1,\ v=0$, 즉 $x+y=1,\ xy=0$일 때,
x, y는 이차방정식 $t^2-t=0$의 두 근이므로
$t(t-1)=0$에서

$t=0$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \text{또는} \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

$$\text{또는} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \text{또는} \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

답 풀이 참조

071-❶ 두 이차방정식의 공통근을 α라 하면

$\alpha^2+a\alpha-a=0$ …… ㉠

$\alpha^2-a\alpha+1=0$ …… ㉡

㉠－㉡을 하면

$(a+1)\alpha-a-1=0$

$(a+1)(\alpha-1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $\alpha=1$

(i) $a=-1$일 때,

두 이차방정식이 모두 $x^2+x+1=0$이 되어 일치하므로 공통근은 2개가 되어 문제의 뜻에 어긋난다.

(ii) $\alpha=1$일 때,

$\alpha=1$을 ㉠에 대입하면

$1+1-a=0 \qquad \therefore a=2$

(i), (ii)에서 $\quad a=2$

답 2

071-❷ 두 이차방정식의 공통근을 α $(\alpha\neq0)$라 하면

$\alpha^2+(k-3)\alpha-7k=0$ …… ㉠

$\alpha^2+(k-1)\alpha-9k=0$ …… ㉡

㉠－㉡을 하면

$-2\alpha+2k=0 \qquad \therefore \alpha=k$

$\alpha=k$를 ㉠에 대입하면

$k^2+(k-3)k-7k=0$

$k^2-5k=0, \qquad k(k-5)=0$

그런데 $\alpha\neq0$에서 $k\neq0$이므로

$k=5$

답 5

072-❶ $mn-4m+5n=27$에서

$m(n-4)+5(n-4)=7$

$\therefore (m+5)(n-4)=7$

이때 m, n이 정수이므로 $m+5$, $n-4$도 정수이고 7의 약수이다.

따라서 $m+5$, $n-4$의 값은 다음과 같다.

$m+5$	-7	-1	1	7
$n-4$	-1	-7	7	1

(i) $m+5=-7$, $n-4=-1$일 때,

$m=-12, n=3 \qquad \therefore m+n=-9$

(ii) $m+5=-1$, $n-4=-7$일 때,

$m=-6, n=-3 \qquad \therefore m+n=-9$

(iii) $m+5=1$, $n-4=7$일 때,

$m=-4, n=11 \qquad \therefore m+n=7$

(iv) $m+5=7$, $n-4=1$일 때,

$m=2, n=5 \qquad \therefore m+n=7$

이상에서 $m+n$의 최댓값은 7이다.

답 7

072-❷ $x^2-3xy+2y^2+6=0$에서

$x^2-3xy+2y^2=-6$

$\therefore (x-y)(x-2y)=-6$

이때 x, y가 자연수이므로 $x-y$, $x-2y$는 $x-y>x-2y$인 정수이고 -6의 약수이다.

따라서 $x-y$, $x-2y$의 값은 다음과 같다.

$x-y$	1	2	3	6
$x-2y$	-6	-3	-2	-1

(i) $x-y=1$, $x-2y=-6$일 때,

두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=8, y=7$

(ii) $x-y=2$, $x-2y=-3$일 때,

두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=7, y=5$

(iii) $x-y=3$, $x-2y=-2$일 때,

두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=8, y=5$

(iv) $x-y=6$, $x-2y=-1$일 때,

두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=13, y=7$

이상에서 구하는 x, y의 값은

$$\begin{cases} x=8 \\ y=7 \end{cases} \text{또는} \begin{cases} x=7 \\ y=5 \end{cases} \text{또는} \begin{cases} x=8 \\ y=5 \end{cases} \text{또는} \begin{cases} x=13 \\ y=7 \end{cases}$$

답 풀이 참조

073-❶ $17a^2-8ab+b^2-2a+1=0$에서

$(16a^2-8ab+b^2)+(a^2-2a+1)=0$

$\therefore (4a-b)^2+(a-1)^2=0$

이때 a, b가 실수이므로 $4a-b$, $a-1$도 실수이다.

따라서 $4a-b=0$, $a-1=0$이므로

$a=1, b=4$

$\therefore ab=4$

답 4

073-❷ $10x^2-12xy+5y^2-4x-6y+13=0$에서

$(9x^2-12xy+4y^2)+(x^2-4x+4)+(y^2-6y+9)=0$

$\therefore (3x-2y)^2+(x-2)^2+(y-3)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로 $3x-2y$, $x-2$, $y-3$도 실수이다.

따라서 $3x-2y=0$, $x-2=0$, $y-3=0$이므로

$x=2$, $y=3$

$\therefore x-y=-1$ 답 -1

중단원 연습 문제 본책 220~223쪽

01 ②	**02** 2	**03** $(-9, -4)$, $(6, 1)$		
04 1	**05** 8	**06** 3	**07** ①	
08 -2	**09** ③	**10** -1	**11** ④	**12** $\frac{7}{4}$
13 4	**14** -4	**15** ⑤	**16** 39	**17** 60
18 105	**19** 20			

01 전략 한 미지수를 소거하여 미지수가 2개인 연립일차방정식을 만들어 푼다.

풀이 $\begin{cases} x+y+z=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-y+2z=-8 & \cdots\cdots ㉡ \\ x+2y+5z=-15 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $3x+3z=-9$

$\therefore x+z=-3$ ······ ㉣

㉠×2−㉢을 하면 $x-3z=13$ ······ ㉤

㉣−㉤을 하면 $4z=-16$

$\therefore z=-4$

$z=-4$를 ㉣에 대입하면 $x-4=-3$

$\therefore x=1$

$x=1$, $z=-4$를 ㉠에 대입하면

$1+y-4=-1$ $\therefore y=2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=-4$이므로

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=21$ 답 ②

02 전략 y, z를 소거하여 $0\cdot x=(0$이 아닌 상수$)$ 꼴이 되도록 하는 상수 k의 값을 구한다.

풀이 $\begin{cases} x+2y-z=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ kx+y+z=k & \cdots\cdots ㉡ \\ 3x+y+2z=-2 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면

$(k+1)x+3y=k+1$ ······ ㉣

㉠×2+㉢을 하면 $5x+5y=0$

$\therefore x+y=0$ ······ ㉤

㉣−㉤×3을 하면

$(k-2)x=k+1$

이므로 주어진 방정식의 해가 존재하지 않으려면

$k-2=0$, $k+1\neq0$

$\therefore k=2$ 답 2

Remark▶
방정식 $ax=b$의 해는
① $a\neq0$일 때, $x=\frac{b}{a}$
② $a=0$, $b\neq0$일 때, 해가 없다.
③ $a=0$, $b=0$일 때, 해가 무수히 많다.

03 전략 일차방정식의 한 미지수를 다른 미지수에 대한 식으로 정리한 후 이차방정식에 대입하여 푼다.

풀이 $\begin{cases} x-3y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy-2y^2=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=3y+3$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $(3y+3)y-2y^2=4$

$y^2+3y-4=0$, $(y+4)(y-1)=0$

$\therefore y=-4$ 또는 $y=1$ ··· ❶

(i) $y=-4$를 ㉢에 대입하면 $x=-9$

(ii) $y=1$을 ㉢에 대입하면 $x=6$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)는

$(-9, -4)$, $(6, 1)$ ··· ❷

답 $(-9, -4)$, $(6, 1)$

채점 기준	비율
❶ y의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 순서쌍 (x, y)를 구할 수 있다.	50 %

04 전략 미정계수가 없는 두 방정식을 연립하여 풀어 두 연립방정식의 일치하는 해를 구한다.

풀이 주어진 두 연립방정식의 일치하는 해는 연립방정식

$\begin{cases} 2x+2y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 해와 같다.

㉡에서 $(x+y)(x-y)=-2$

$(2x+2y)(x-y)=-4$

$\therefore x-y=-4$ ······ ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$x=-\frac{7}{4}$, $y=\frac{9}{4}$

$x=-\frac{7}{4}$, $y=\frac{9}{4}$를 $x+3y=a$에 대입하면

$a=5$

또 $x-y=b$에 대입하면 $b=-4$

$\therefore a+b=1$ 답 1

05 전략 인수분해되는 식을 인수분해하여 일차방정식과 이차방정식을 연립하는 꼴로 변형하여 푼다.

풀이 $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(2x-y)(x-y)=0$

$\therefore y=2x$ 또는 $y=x$

(i) $y=2x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+(2x)^2=20$

$x^2=4 \qquad \therefore x=\pm 2$

$y=2x$이므로

$x=\pm 2,\ y=\pm 4$ (복호동순)

(ii) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2=20$

$x^2=10 \qquad \therefore x=\pm\sqrt{10}$

$y=x$이므로

$x=\pm\sqrt{10},\ y=\pm\sqrt{10}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 x, y는 정수이므로

$x=\pm 2,\ y=\pm 4$ (복호동순)

$\therefore xy=8$

답 8

06 전략 주어진 연립방정식의 두 이차방정식에서 상수항을 소거하여 인수분해되는 식을 얻는다.

풀이 $\begin{cases} x^2+3y^2=12 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy+3y^2=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡$\times 2$를 하면

$x^2-2xy-3y^2=0, \qquad (x+y)(x-3y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=3y$ ··· ❶

(i) $x=-y$를 ㉠에 대입하면

$(-y)^2+3y^2=12 \qquad \therefore y^2=3$

$\therefore xy=(-y)\cdot y=-y^2=-3$ ··· ❷

(ii) $x=3y$를 ㉠에 대입하면

$(3y)^2+3y^2=12 \qquad \therefore y^2=1$

$\therefore xy=3y\cdot y=3y^2=3$ ··· ❸

(i), (ii)에서 xy의 최댓값은 3이다. ··· ❹

답 3

채점 기준	비율
❶ x와 y 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❷ $x=-y$일 때 xy의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $x=3y$일 때 xy의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ xy의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

07 전략 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 x, y는 k에 대한 이차방정식 $k^2-uk+v=0$의 두 근임을 이용한다.

풀이 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u+v=-1 \\ uv=-20 \end{cases}$

u, v는 이차방정식 $t^2+t-20=0$의 두 근이므로

$(t+5)(t-4)=0$에서

$t=-5$ 또는 $t=4$

$\therefore u=-5,\ v=4$ 또는 $u=4,\ v=-5$

(i) $u=-5$, $v=4$, 즉 $x+y=-5$, $xy=4$일 때,

x, y는 이차방정식 $k^2+5k+4=0$의 두 근이므로

$(k+4)(k+1)=0$에서

$k=-4$ 또는 $k=-1$

$\therefore \begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-4 \end{cases}$

$\therefore x-y=-3$ 또는 $x-y=3$

(ii) $u=4$, $v=-5$, 즉 $x+y=4$, $xy=-5$일 때,

x, y는 이차방정식 $k^2-4k-5=0$의 두 근이므로

$(k+1)(k-5)=0$에서

$k=-1$ 또는 $k=5$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$

$\therefore x-y=-6$ 또는 $x-y=6$

(i), (ii)에서 $x-y$의 최솟값은 -6이다.

답 ①

08 전략 두 이차방정식에 $x=\alpha$를 대입한 두 식을 연립한다.

풀이 두 이차방정식의 공통근이 α이므로

$\alpha^2+a\alpha+2b=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\alpha^2+b\alpha+2a=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠$-$㉡을 하면

$(a-b)\alpha-2(a-b)=0$

$(a-b)(\alpha-2)=0$

이때 $a\neq b$이므로 $\qquad \alpha=2$ ··· ❶

즉 2가 공통근이므로 $x=2$를 $x^2+ax+2b=0$에 대입하면

$4+2a+2b=0 \qquad \therefore a+b=-2$ ··· ❷

한편 주어진 두 이차방정식에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha+\gamma=-b$

$\therefore \beta=-a-\alpha=-a-2,$

$\gamma=-b-\alpha=-b-2$ ··· ❸

$\therefore \beta+\gamma=-(a+b)-4$

$=-(-2)-4=-2$ ··· ❹

답 -2

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ β, γ를 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❹ $\beta+\gamma$의 값을 구할 수 있다.	10 %

09 전략 주어진 방정식을 (일차식)×(일차식)=(정수) 꼴로 변형한다.

풀이 $xy-3x+5y-24=0$에서

$x(y-3)+5(y-3)=9$

$\therefore (x+5)(y-3)=9$

이때 x, y가 정수이므로 $x+5$, $y-3$도 정수이고 9의 약수이다.

따라서 $x+5$, $y-3$의 값은 다음과 같다.

$x+5$	-9	-3	-1	1	3	9
$y-3$	-1	-3	-9	9	3	1

따라서 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

(i) $x+5=-9$, $y-3=-1$일 때, $(-14, 2)$

(ii) $x+5=-3$, $y-3=-3$일 때, $(-8, 0)$

(iii) $x+5=-1$, $y-3=-9$일 때, $(-6, -6)$

(iv) $x+5=1$, $y-3=9$일 때, $(-4, 12)$

(v) $x+5=3$, $y-3=3$일 때, $(-2, 6)$

(vi) $x+5=9$, $y-3=1$일 때, $(4, 4)$

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는 6이다. 답 ③

Remark▶

$x+5$, $y-3$의 순서쌍 $(x+5, y-3)$이 6개이므로 x, y의 순서쌍 (x, y)도 6개이다.

10 전략 주어진 방정식을 $A^2+B^2=0$ 꼴로 변형하여 $A=B=0$임을 이용한다.

풀이 $5x^2+y^2+4x-2xy+1=0$에서

$(4x^2+4x+1)+(x^2-2xy+y^2)=0$

$(2x+1)^2+(x-y)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로 $2x+1$, $x-y$도 실수이다.

따라서 $2x+1=0$, $x-y=0$이므로

$x=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$

$\therefore x+y=-1$ 답 -1

11 전략 한 문자를 소거하여 만든 이차방정식이 중근을 가져야 함을 이용한다.

풀이 $\begin{cases} 2x-y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-ky=-12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=2x-1$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2-k(2x-1)=-12$

$\therefore x^2-2kx+k+12=0$ ······ ㉣

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 이차방정식 ㉣이 중근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉣의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k+12)=0$

$k^2-k-12=0$, $(k+3)(k-4)=0$

$\therefore k=4$ ($\because k>0$) 답 ④

12 전략 x, y를 두 근으로 하는 이차방정식의 판별식을 이용한다.

풀이 $\begin{cases} x+y=2a-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy-x-y=a^2-4a+3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$xy-(2a-1)=a^2-4a+3$

$\therefore xy=a^2-2a+2$ ······ ㉢

㉠, ㉢을 만족시키는 실수 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-(2a-1)t+a^2-2a+2=0$의 두 실근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2a-1)\}^2-4(a^2-2a+2)\ge0$

$4a-7\ge0$ $\therefore a\ge\frac{7}{4}$

따라서 a의 최솟값은 $\frac{7}{4}$이다. 답 $\frac{7}{4}$

13 전략 $x=2$는 두 방정식 $f(x)+g(x)=0$, $f(x)g(x)=0$의 공통근임을 이용한다.

풀이 두 방정식 $f(x)+g(x)=0$, $f(x)g(x)=0$이 $x=2$를 근으로 가지므로

$f(2)+g(2)=0$, $f(2)g(2)=0$

$f(2)=-g(2)$이므로 이것을 $f(2)g(2)=0$에 대입하면

$-\{g(2)\}^2=0$ $\therefore g(2)=0$

$\therefore f(2)=g(2)=0$

따라서 두 이차방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$은 모두 $x=2$를 근으로 갖는다.

$f(x)=(x-2)(x-m)$, $g(x)=(x-2)(x-n)$이라 하면 $f(x)g(x)=0$에서

$(x-2)^2(x-m)(x-n)=0$

이므로

$x=2$ 또는 $x=m$ 또는 $x=n$

이때 방정식 $f(x)g(x)=0$의 근이 2, 3, 5이므로

$m=3$, $n=5$ 또는 $m=5$, $n=3$

$f(x)+g(x)=0$에서

$(x-2)(x-m)+(x-2)(x-n)=0$,

즉 $(x-2)(2x-m-n)=0$

이므로

$$x=2 \text{ 또는 } x=\frac{m+n}{2}$$

이때 방정식 $f(x)+g(x)=0$의 근이 2, α이므로

$$\alpha=\frac{m+n}{2}=\frac{8}{2}=4$$

답 4

14 전략 실수 A, B에 대하여 $A^2+B^2=0$이면 $A=B=0$임을 이용한다.

풀이 $(x^2-x-6)^2+(y^2+2y-8)^2=0$에서 x, y가 실수이므로 x^2-x-6, y^2+2y-8도 실수이다.

$\therefore x^2-x-6=0,\ y^2+2y-8=0$ ⋯ ❶

(i) $x^2-x-6=0$에서

$(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

(ii) $y^2+2y-8=0$에서

$(y+4)(y-2)=0$

$\therefore y=-4$ 또는 $y=2$

(i), (ii)에서

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\text{또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=-4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$ ⋯ ❷

한편 $(xy-z)^2=0$에서 x, y, z가 실수이므로 $xy-z$도 실수이다.

따라서 $xy-z=0$, 즉 $z=xy$이므로

$z=8,\ -4,\ -12,\ 6$ ⋯ ❸

즉 z의 최댓값은 8, 최솟값은 -12이므로 그 합은 -4이다. ⋯ ❹

답 -4

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식을 만족시키는 실수 x, y에 대한 이차방정식을 구할 수 있다.	20 %
❷ x, y의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ z의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ z의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	10 %

15 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근에 대한 식을 세운 후, 이 식을 이용하여 두 근에 대한 부정방정식을 만든다.

풀이 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β $(\alpha\ge\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k$ ⋯⋯ ㉠

$\alpha\beta=8k-12$ ⋯⋯ ㉡

㉡$-$㉠$\times4$를 하면

$\alpha\beta-4\alpha-4\beta=-12$

$\alpha(\beta-4)-4(\beta-4)=4$

$\therefore (\alpha-4)(\beta-4)=4$

이때 α, β가 $\alpha\ge\beta$인 정수이므로 $\alpha-4$, $\beta-4$는 $\alpha-4\ge\beta-4$인 정수이고 4의 약수이다.

따라서 $\alpha-4$, $\beta-4$의 값은 다음과 같다.

$\alpha-4$	-2	-1	2	4
$\beta-4$	-2	-4	2	1

(i) $\alpha-4=-2$, $\beta-4=-2$일 때,

$\alpha=2$, $\beta=2$

$\alpha=2$, $\beta=2$를 ㉠에 대입하면

$4=2k \quad \therefore k=2$

(ii) $\alpha-4=-1$, $\beta-4=-4$일 때,

$\alpha=3$, $\beta=0$

$\alpha=3$, $\beta=0$을 ㉠에 대입하면

$3=2k \quad \therefore k=\frac{3}{2}$

(iii) $\alpha-4=2$, $\beta-4=2$일 때,

$\alpha=6$, $\beta=6$

$\alpha=6$, $\beta=6$을 ㉠에 대입하면

$12=2k \quad \therefore k=6$

(iv) $\alpha-4=4$, $\beta-4=1$일 때,

$\alpha=8$, $\beta=5$

$\alpha=8$, $\beta=5$를 ㉠에 대입하면

$13=2k \quad \therefore k=\frac{13}{2}$

이상에서 모든 상수 k의 값의 합은

$$2+\frac{3}{2}+6+\frac{13}{2}=16$$

답 ⑤

16 전략 $\overline{CD}=x$, $\overline{AB}=y$라 하고, 닮음인 두 삼각형을 찾아 닮음비를 이용하여 방정식을 세운다.

풀이 △ABC와 △DBA에서

∠BCA=∠BAD, ∠B는 공통

이므로 △ABC∽△DBA (AA 닮음)

$\overline{CD}=x$, $\overline{AC}=x-1$, $\overline{AB}=y$라 하면

$\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{AC}:\overline{DA}$이므로

$y:8=(x-1):6, \quad 6y=8(x-1)$

$\therefore x=\frac{3}{4}y+1$ ⋯⋯ ㉠

또 $\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{BC}:\overline{BA}$이므로

$y:8=(8+x):y$

$\therefore y^2=8x+64$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$y^2=8\left(\frac{3}{4}y+1\right)+64$

$y^2-6y-72=0$, $(y+6)(y-12)=0$

$\therefore y=12$ ($\because y>0$)

$y=12$를 ㉠에 대입하면 $x=10$

따라서 $\overline{AB}=12$, $\overline{BC}=8+10=18$, $\overline{CA}=9$이므로

△ABC의 둘레의 길이는

$12+18+9=39$ **답** 39

17 **전략** 남아 있는 입체도형의 겉넓이는 정육면체의 겉넓이에서 원기둥의 두 밑넓이를 빼고 원기둥의 옆넓이를 더한 것과 같다.

풀이 남아 있는 입체도형의 겉넓이는

$6a^2-2\pi b^2+2\pi ab=6a^2+2\pi(ab-b^2)$

즉 $6a^2+2\pi(ab-b^2)=216+16\pi$이고, a, b는 유리수이므로

$6a^2=216$, $ab-b^2=8$

$6a^2=216$에서 $a^2=36$

$\therefore a=6$ ($\because a>0$)

$a=6$을 $ab-b^2=8$에 대입하면

$6b-b^2=8$, $b^2-6b+8=0$

$(b-2)(b-4)=0$ $\therefore b=2$ 또는 $b=4$

이때 $a>2b$이므로 $b=2$

$\therefore 15(a-b)=15(6-2)=60$ **답** 60

18 **전략** $x\geq y$, $x<y$인 경우로 나누어 주어진 연립방정식의 해를 구한다.

풀이 (i) $x\geq y$일 때,

$\langle x, y\rangle=x$이므로

$\begin{cases} 2x-4y^2=x & \cdots\cdots ㉠ \\ x-y+5=x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $y=5$

$y=5$를 ㉠에 대입하면 $2x-100=x$

$\therefore x=100$

이때 $x=100$, $y=5$는 $x\geq y$를 만족시킨다.

(ii) $x<y$일 때,

$\langle x, y\rangle=-y$이므로

$\begin{cases} 2x-4y^2=-y & \cdots\cdots ㉢ \\ x-y+5=-y & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉣에서 $x=-5$

$x=-5$를 ㉢에 대입하면

$-10-4y^2=-y$

$\therefore 4y^2-y+10=0$ …… ㉤

이때 이차방정식 ㉤의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\cdot4\cdot10=-159<0$

이므로 ㉤은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 $\alpha=100$, $\beta=5$

$\therefore \alpha+\beta=105$ **답** 105

19 **전략** $x^2-8x+1=(\text{자연수})^2$으로 놓고 부정방정식을 만든다.

풀이 자연수 n에 대하여 $x^2-8x+1=n^2$이라 하면

$x^2-8x+16-15=n^2$

$(x-4)^2-n^2=15$

$(x-4+n)(x-4-n)=15$

이때 x, n이 자연수이므로 $x+n\geq2$에서

$x-4+n\geq-2$

또 $x-4+n>x-4-n$이므로 $x-4+n$, $x-4-n$이 될 수 있는 값은 다음과 같다.

$x-4+n$	-1	5	15
$x-4-n$	-15	3	1

(i) $\begin{cases} x-4+n=-1 \\ x-4-n=-15 \end{cases}$일 때,

두 식을 변끼리 더하면

$2x-8=-16$ $\therefore x=-4$

(ii) $\begin{cases} x-4+n=5 \\ x-4-n=3 \end{cases}$일 때,

두 식을 변끼리 더하면

$2x-8=8$ $\therefore x=8$

(iii) $\begin{cases} x-4+n=15 \\ x-4-n=1 \end{cases}$일 때,

두 식을 변끼리 더하면

$2x-8=16$ $\therefore x=12$

이상에서 x는 자연수이므로

$x=8$ 또는 $x=12$

따라서 구하는 x의 값의 합은

$8+12=20$ **답** 20

Ⅲ. 부등식

09 일차부등식

유제

본책 229~242쪽

074-❶ a와 b의 부호가 같으므로 $ab>0$
$a>b$의 양변을 ab로 나누면

$\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$, 즉 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

답 풀이 참조

075-❶ (1) $ax+b>x+1$에서
$(a-1)x>-b+1$

(ⅰ) $a-1>0$, 즉 $a>1$일 때, $x>\frac{-b+1}{a-1}$

(ⅱ) $a-1=0$, 즉 $a=1$일 때, $0\cdot x>-b+1$이므로
$-b+1\ge0$, 즉 $b\le1$이면 해는 없다.
$-b+1<0$, 즉 $b>1$이면 해는 모든 실수이다.

(ⅲ) $a-1<0$, 즉 $a<1$일 때, $x<\frac{-b+1}{a-1}$

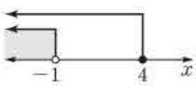
이상에서 주어진 부등식의 해는

$$\begin{cases} a>1\text{일 때}, & x>\frac{-b+1}{a-1} \\ a=1\text{일 때}, & \begin{cases} b\le1\text{이면 해는 없다.} \\ b>1\text{이면 모든 실수} \end{cases} \\ a<1\text{일 때}, & x<\frac{-b+1}{a-1} \end{cases}$$

(2) $a(x+a)\le b(x+b)$에서
$ax+a^2\le bx+b^2$, $(a-b)x\le-(a^2-b^2)$
$\therefore (a-b)x\le-(a+b)(a-b)$ …… ㉠
이 부등식의 해가 $x\ge2$이므로 $a-b<0$
㉠의 양변을 $a-b$로 나누면 $x\ge-(a+b)$
따라서 $-(a+b)=2$이므로
$a+b=-2$

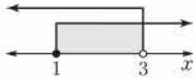
답 (1) 풀이 참조 (2) -2

076-❶ (1) $-x-2>4x+3$에서 $-5x>5$
$\therefore x<-1$
$7x-1\le5x+7$에서 $2x\le8$ $\therefore x\le4$
두 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 $x<-1$



(2) $0.1x+0.6\ge1.2-0.5x$의 양변에 10을 곱하면
$x+6\ge12-5x$, $6x\ge6$ $\therefore x\ge1$

$\frac{x}{3}-1<\frac{x-3}{4}$의 양변에 12를 곱하면
$4x-12<3(x-3)$, $4x-12<3x-9$
$\therefore x<3$
두 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 $1\le x<3$

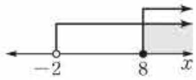


답 (1) $x<-1$ (2) $1\le x<3$

077-❶ 주어진 부등식의 해는 연립부등식

$$\begin{cases} 2x-1<4x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+3\le5(x-1) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

의 해와 같다.
㉠에서 $-2x<4$ $\therefore x>-2$
㉡에서 $4x+3\le5x-5$ $\therefore x\ge8$
두 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는
$x\ge8$



따라서 구하는 가장 작은 정수는 8이다.

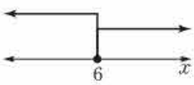
답 8

078-❶ (1) $0.4x-0.3\le0.1x+1.2$의 양변에 10을 곱하면
$4x-3\le x+12$, $3x\le15$
$\therefore x\le5$
$\frac{x}{2}+1>3+\frac{x}{6}$의 양변에 6을 곱하면
$3x+6>18+x$, $2x>12$ $\therefore x>6$
두 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.

(2) 주어진 부등식의 해는 연립부등식

$$\begin{cases} x+7\le3x-5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-5\le2x+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

의 해와 같다.
㉠에서 $-2x\le-12$ $\therefore x\ge6$
㉡에서 $x\le6$
두 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는 $x=6$



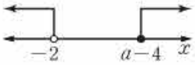
답 (1) 해는 없다. (2) $x=6$

079-❶ $3x-5<x-9$에서

$2x<-4 \qquad \therefore x<-2$

$2x+4\ge x+a$에서 $\qquad x\ge a-4$

주어진 연립부등식의 해가 없으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

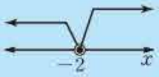


$-2\le a-4 \qquad \therefore a\ge 2$

답 $a\ge 2$

Remark ▶

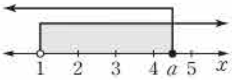
$a-4=-2$일 때에도 공통부분이 없으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



079-❷ $3x+2>5$에서

$3x>3 \qquad \therefore x>1$

주어진 연립부등식을 만족시키는 자연수 x가 3개이므로 오른쪽 그림에서



$4\le a<5$

답 $4\le a<5$

080-❶ 사탕을 x개 산다고 하면 초콜릿은 $(10-x)$개 사야 하므로

$$\begin{cases} x<10-x & \cdots\cdots ㉠ \\ 1500x+2000(10-x)\le 18000 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\quad 2x<10 \qquad \therefore x<5$

㉡에서 $\quad -500x\le -2000 \qquad \therefore x\ge 4$

$\therefore 4\le x<5$

따라서 사탕은 4개 살 수 있다.

답 4개

080-❷ 민성이가 시속 4 km로 걸어간 거리를 x km라 하면 시속 6 km로 뛰어간 거리는 $(4-x)$km이므로

$$\frac{3}{4}\le\frac{x}{4}+\frac{4-x}{6}\le\frac{11}{12}$$

각 변에 12를 곱하면

$9\le 3x+2(4-x)\le 11$

$\therefore 1\le x\le 3$

따라서 민성이가 시속 4 km로 걸어간 거리는 최대 3 km이다.

답 3 km

081-❶ 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은 $x-4=0$, $x-2=0$에서

$x=2,\ x=4$

(i) $x<2$일 때,

$-2(x-4)+(x-2)<4$

$-x<-2 \qquad \therefore x>2$

그런데 $x<2$이므로 해는 없다.

(ii) $2\le x<4$일 때,

$-2(x-4)-(x-2)<4$

$-3x<-6 \qquad \therefore x>2$

그런데 $2\le x<4$이므로 $\qquad 2<x<4$

(iii) $x\ge 4$일 때,

$2(x-4)-(x-2)<4 \qquad \therefore x<10$

그런데 $x\ge 4$이므로 $\qquad 4\le x<10$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$2<x<10$

따라서 정수 x는 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9의 7개이다.

답 7

081-❷ $|ax+1|\le b$에서

$-b\le ax+1\le b \qquad \therefore -b-1\le ax\le b-1$

(i) $a>0$일 때,

$$\frac{-b-1}{a}\le x\le\frac{b-1}{a}$$

부등식의 해가 $-1\le x\le 5$이므로

$$\frac{-b-1}{a}=-1,\ \frac{b-1}{a}=5$$

$a-b=1,\ 5a-b=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $\qquad a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{3}{2}$

그런데 $a>0$이므로 이를 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a<0$일 때,

$$\frac{b-1}{a}\le x\le\frac{-b-1}{a}$$

부등식의 해가 $-1\le x\le 5$이므로

$$\frac{b-1}{a}=-1,\ \frac{-b-1}{a}=5$$

$a+b=1,\ 5a+b=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $\qquad a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{2}$

(i), (ii)에서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$이므로

$ab=-\frac{3}{4}$

답 $-\frac{3}{4}$

Remark ▶

① $a=0$이면 $|ax+1|\le b$의 해가 $-1\le x\le 5$일 수 없으므로 $\qquad a\ne 0$

② $b<0$이면 부등식의 해는 없고, $b=0$이면 부등식의 해는 $x=-\frac{1}{a}$이므로 $\qquad b>0$

중단원 연습 문제

본책 243~246쪽

01 $x<\frac{3}{2}$ **02** ③ **03** 5 **04** 6

05 -3 **06** $a<-1$ **07** 1

08 3, 4 **09** ⑤ **10** 200 g 이상 600 g 미만

11 $-\frac{7}{5}<x<1$ **12** -1 **13** ④ **14** ②

15 $-4\leq x<4$ **16** ②

17 20 g 이상 50 g 이하 **18** ⑤ **19** ⑤

20 ② **21** ③

01 전략 부등식 $ax-(a+b)<0$의 해가 $x>3$임을 이용하여 a의 부호를 구한 후 b를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $ax-(a+b)<0$에서

$ax<a+b$ …… ㉠

이 부등식의 해가 $x>3$이므로 $a<0$ ⋯ ❶

㉠의 양변을 a로 나누면 $x>\frac{a+b}{a}$

따라서 $\frac{a+b}{a}=3$이므로 $a+b=3a$

$\therefore b=2a$ …… ㉡ ⋯ ❷

㉡을 부등식 $bx-(a+b)>0$에 대입하면

$2ax-(a+2a)>0$, $2ax>3a$

$\therefore x<\frac{3}{2}$ ($\because 2a<0$) ⋯ ❸

답 $x<\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
❶ a의 부호를 구할 수 있다.	20 %
❷ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ 부등식 $bx-(a+b)>0$의 해를 구할 수 있다.	40 %

02 전략 x에 대한 부등식 $ax>b$의 해가 존재하지 않으면 $a=0$, $b\geq 0$임을 이용한다.

풀이 $a(x-1)-b(x-2)>1$에서

$(a-b)x>a-2b+1$

이 부등식의 해가 존재하지 않으므로

$a-b=0$, $a-2b+1\geq 0$

$a-b=0$에서 $b=a$

$b=a$를 $a-2b+1\geq 0$에 대입하면

$a-2a+1\geq 0$, $-a\geq -1$ $\therefore a\leq 1$

따라서 a의 최댓값은 1이다. 답 ③

03 전략 먼저 분배법칙을 이용하여 괄호를 푼 후 부등식을 푼다.

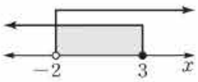
풀이 $8x-7\leq 3(x+3)-1$에서 $8x-7\leq 3x+8$

$5x\leq 15$ $\therefore x\leq 3$

$5(x+2)>-x-2$에서 $5x+10>-x-2$

$6x>-12$ $\therefore x>-2$

두 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 $-2<x\leq 3$



따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$(-1)+0+1+2+3=5$ 답 5

04 전략 계수가 분수이면 분모의 최소공배수를, 소수이면 10의 거듭제곱을 부등식의 양변에 곱한다.

풀이 $\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}<\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$의 양변에 6을 곱하면

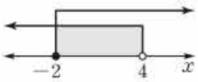
$3x-1<2x+3$ $\therefore x<4$

$0.2x+0.4\leq 0.4(x+2)$의 양변에 10을 곱하면

$2x+4\leq 4(x+2)$, $2x+4\leq 4x+8$

$-2x\leq 4$ $\therefore x\geq -2$

두 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 $-2\leq x<4$



따라서 $a=-2$, $b=4$이므로

$b-a=6$ 답 6

05 전략 연립부등식의 정수인 해를 일차방정식에 대입하면 등식이 성립함을 이용한다.

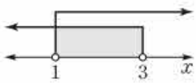
풀이 $4x-5<x+4$에서

$3x<9$ $\therefore x<3$

$5x-7>2(x-2)$에서 $5x-7>2x-4$

$3x>3$ $\therefore x>1$

두 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 $1<x<3$ ⋯ ❶



이때 x는 정수이므로

$x=2$ ⋯ ❷

$x=2$를 $ax+8=2$에 대입하면

$2a+8=2$

$\therefore a=-3$ ⋯ ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❷ 정수 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

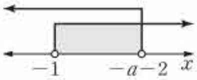
06 전략 연립부등식이 해를 가지려면 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내었을 때 공통부분이 있어야 한다.

풀이 $\frac{x+3}{2}>1$에서

$x+3>2 \quad \therefore x>-1$

$5x+2<4x-a$에서 $\quad x<-a-2$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$-1<-a-2 \quad \therefore a<-1$

답 $a<-1$

07 전략 연립부등식 $\begin{cases} x\le m \\ x\ge n \end{cases}$의 해가 $x=k$이면 $m=n=k$이다.

풀이 $5x-3\le 3x+5$에서

$2x\le 8 \quad \therefore x\le 4$

$3(x-1)\ge 2x+a$에서 $\quad 3x-3\ge 2x+a$

$\therefore x\ge a+3$

연립부등식의 해가 $x=4$이므로

$a+3=4 \quad \therefore a=1$

답 1

08 전략 $A<B<C$ 꼴의 부등식은 연립부등식 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ 꼴로 고쳐서 푼다.

풀이 $3x-2\le 2x+3<4x-a$의 해는 연립부등식

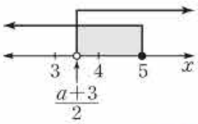
$$\begin{cases} 3x-2\le 2x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+3<4x-a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

의 해와 같다.

㉠에서 $\quad x\le 5$

㉡에서 $\quad -2x<-a-3 \quad \therefore x>\frac{a+3}{2}$ ··· ❶

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이므로 오른쪽 그림에서



$3\le \frac{a+3}{2}<4$ ··· ❷

$6\le a+3<8 \quad \therefore 3\le a<5$ ··· ❸

따라서 자연수 a의 값은 3, 4이다. ··· ❹

답 3, 4

채점 기준	비율
❶ 각 부등식을 풀 수 있다.	30 %
❷ $\frac{a+3}{2}$의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❹ 자연수 a의 값을 구할 수 있다.	10 %

09 전략 삼각형의 세 변의 길이에 대하여
$\begin{cases} (\text{가장 긴 변의 길이})<(\text{나머지 두 변의 길이의 합}) \\ (\text{가장 짧은 변의 길이})>0 \end{cases}$

풀이 $\begin{cases} x+3<(x-5)+(x-2) & \cdots\cdots ㉠ \\ x-5>0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad x+3<2x-7 \quad \therefore x>10$

㉡에서 $\quad x>5$

$\therefore x>10$

답 ⑤

10 전략 (소금의 양)
$=\frac{(\text{소금물의 농도})}{100}\times(\text{소금물의 양})$

풀이 10 %의 소금물을 x g 섞는다고 하면

$$\frac{8}{100}(200+x)\le \frac{6}{100}\cdot 200+\frac{10}{100}x$$
$$<\frac{9}{100}(200+x)$$

$\therefore 8(200+x)\le 1200+10x<9(200+x)$

이 부등식의 해는 연립부등식

$$\begin{cases} 8(200+x)\le 1200+10x & \cdots\cdots ㉠ \\ 1200+10x<9(200+x) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

의 해와 같다.

㉠에서 $\quad 1600+8x\le 1200+10x$

$2x\ge 400 \quad \therefore x\ge 200$

㉡에서 $\quad 1200+10x<1800+9x \quad \therefore x<600$

$\therefore 200\le x<600$

따라서 섞어야 하는 10 %의 소금물의 양은 200 g 이상 600 g 미만이다.

답 200 g 이상 600 g 미만

11 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 경계로 범위를 나눈다.

풀이 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은 $x-1=0$, $x+1=0$에서

$x=-1$, $x=1$ ··· ❶

(i) $x<-1$일 때, $\quad -2(x-1)-3(x+1)<6$

$-5x<7 \quad \therefore x>-\frac{7}{5}$

그런데 $x<-1$이므로

$-\frac{7}{5}<x<-1$ ⋯ ❷

(ii) $-1\le x<1$일 때, $-2(x-1)+3(x+1)<6$

$\therefore x<1$

그런데 $-1\le x<1$이므로

$-1\le x<1$ ⋯ ❸

(iii) $x\ge 1$일 때, $2(x-1)+3(x+1)<6$

$5x<5$ $\therefore x<1$

그런데 $x\ge 1$이므로 해는 없다. ⋯ ❹

이상에서 주어진 부등식의 해는

$-\frac{7}{5}<x<1$ ⋯ ❺

답 $-\frac{7}{5}<x<1$

채점 기준	비율
❶ 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $x<-1$일 때, 부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %
❸ $-1\le x<1$일 때, 부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %
❹ $x\ge 1$일 때, 부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %
❺ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %

12 전략 x에 대한 부등식 $ax>b$의 해가 모든 실수이려면 $a=0$, $b<0$임을 이용한다.

풀이 $a^2x+1>x+a$에서

$a^2x-x>a-1$, $(a^2-1)x>a-1$

$\therefore (a+1)(a-1)x>a-1$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로, 즉 이 부등식의 해가 모든 실수이므로

$(a+1)(a-1)=0$, $a-1<0$

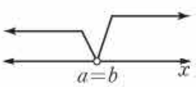
$(a+1)(a-1)=0$에서 $a=\pm1$

$a-1<0$에서 $a<1$

따라서 구하는 a의 값은 -1이다. 답 -1

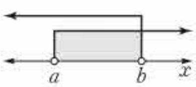
13 전략 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 본다.

풀이 ㄱ. $a=b$이면 오른쪽 그림과 같으므로 해는 없다.



ㄴ. $a>b$이면 오른쪽 그림과 같으므로 해는 없다.

ㄷ. $a<b$이면 오른쪽 그림과 같으므로 해는



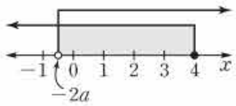
$a<x<b$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

14 전략 조건을 만족시키도록 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 실수 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 $2x-3\le x+1$에서 $x\le 4$

$x+2a>0$에서 $x>-2a$



주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 5이므로 위의 그림에서

$-1\le -2a<0$ $\therefore 0<a\le\frac{1}{2}$ 답 ②

15 전략 주어진 해를 이용하여 a, b의 값을 구한 다음 처음 부등식에 대입하여 바른 해를 구한다.

풀이 $2x-3a\le 3x-a$에서

$x\ge -2a$ ⋯⋯ ㉠

$2x-3a<x+b$에서 $x<3a+b$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 $-4\le x<12$이므로

$-2a=-4$, $3a+b=12$

$\therefore a=2$, $b=6$ ⋯ ❶

따라서 처음 부등식은

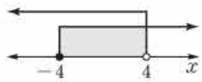
$2x-6\le 3x-2<x+6$,

즉 $\begin{cases} 2x-6\le 3x-2 & \cdots\cdots ㉢ \\ 3x-2<x+6 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢에서 $x\ge -4$

㉣에서 $2x<8$ $\therefore x<4$

두 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 처음 부등식의 해는



$-4\le x<4$ ⋯ ❷

답 $-4\le x<4$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 처음 부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %

16 전략 의자의 개수를 x로 놓고 조건을 만족시키는 부등식을 세운다.

풀이 의자의 개수를 x라 하면 학생 수는 $(4x+3)$명이고 한 의자에 6명씩 앉으면 마지막 의자에는 최소 1명, 최대 6명이 앉을 수 있으므로

$6(x-2)+1\le 4x+3\le 6(x-2)+6$,

즉 $\begin{cases} 6(x-2)+1\le 4x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+3\le 6(x-2)+6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $6x-11\le 4x+3,\quad 2x\le 14$

$\therefore x\le 7$

㉡에서 $4x+3\le 6x-6$

$-2x\le -9\quad \therefore x\ge \frac{9}{2}$

$\therefore \frac{9}{2}\le x\le 7$

따라서 가능한 의자의 개수는 5, 6, 7이다. 답 ②

17 전략 섭취해야 하는 B 식품의 양을 x g으로 놓고 조건을 만족시키는 연립부등식을 세운다.

풀이 두 식품 A, B의 1 g 당 열량과 단백질의 양은 오른쪽 표와 같다. B 식품을 x g 섭취한다고 하면 A 식품은 $(300-x)$g 섭취해야 하므로

식품	열량 (kcal)	단백질 (g)
A	1.5	0.12
B	2	0.16

$\begin{cases} 1.5(300-x)+2x\ge 460 \\ 0.12(300-x)+0.16x\le 38 \end{cases}$,

즉 $\begin{cases} 4500-15x+20x\ge 4600 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3600-12x+16x\le 3800 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $5x\ge 100\quad \therefore x\ge 20$

㉡에서 $4x\le 200\quad \therefore x\le 50$

$\therefore 20\le x\le 50$

따라서 B 식품은 20 g 이상 50 g 이하로 섭취해야 한다.

답 20 g 이상 50 g 이하

18 전략 $A-B>0$이면 $A>B$임을 이용하여 두 수의 대소 관계를 확인한다.

풀이 ㄱ. $a>b$에서 $a+c>b+c$

이때 $a+c>0$, $b+c>0$이므로

$\frac{1}{a+c}<\frac{1}{b+c}$

ㄴ. $(ab+1)-(a+b)=ab-a-b+1$

$=a(b-1)-(b-1)$

$=(a-1)(b-1)$

이때 $a-1>0$, $b-1>0$이므로

$(ab+1)-(a+b)>0$

$\therefore ab+1>a+b$

ㄷ. $\frac{a}{b}-\frac{a-1}{b-1}=\frac{a(b-1)-b(a-1)}{b(b-1)}=\frac{-(a-b)}{b(b-1)}$

이때 $a-b>0$, $b>0$, $b-1>0$이므로

$\frac{a}{b}-\frac{a-1}{b-1}<0\quad \therefore \frac{a}{b}<\frac{a-1}{b-1}$

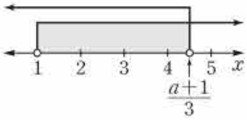
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

19 전략 조건을 만족시키도록 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 본다.

풀이 $x+2>3$에서 $x>1$

$3x<a+1$에서 $x<\frac{a+1}{3}$

오른쪽 그림에서 주어진 연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 9인 경우는



$2+3+4=9$

이므로

$4<\frac{a+1}{3}\le 5,\quad 12<a+1\le 15$

$\therefore 11<a\le 14$

따라서 자연수 a의 최댓값은 14이다. 답 ⑤

20 전략 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분이 $2<x<3$이 되도록 한다.

풀이 $2x-a>3$에서 $x>\frac{a+3}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$-2x+4>b$에서 $-2x>b-4$

$\therefore x<\frac{4-b}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 $2<x<3$이 되려면

$\frac{a+3}{2}=2,\ \frac{4-b}{2}=3$

$a+3=4,\ 4-b=6$

$\therefore a=1,\ b=-2$

$\therefore a+b=-1$ 답 ②

21 전략 부등식 $|x-k|\le l\ (l>0)$의 해는 $k-l\le x\le k+l$임을 이용한다.

풀이 $|x-3|\le a$에서 $-a\le x-3\le a$

$\therefore 3-a\le x\le 3+a$

이 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는

$(3+a)-(3-a)+1=2a+1$

따라서 $2a+1=15$이므로 $2a=14$

$\therefore a=7$ 답 ③

Remark▶

$m<n$인 정수 m, n에 대하여 부등식 $m\le x\le n$을 만족시키는 정수 x의 개수

➡ $n-m+1$

Ⅲ. 부등식

10 이차부등식

유제 본책 252~274쪽

082-❶ (1) 부등식 $f(x)\le g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로 구하는 해는

$-\frac{1}{2}\le x\le 3$

(2) $f(x)g(x)>0$이면

$f(x)>0,\ g(x)>0$ 또는 $f(x)<0,\ g(x)<0$

(i) $f(x)>0,\ g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$f(x)>0$일 때,

$x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>2$ …… ㉠

$g(x)>0$일 때,

$x>-\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$x>2$

(ii) $f(x)<0,\ g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$f(x)<0$일 때,

$-\frac{1}{2}<x<2$ …… ㉢

$g(x)<0$일 때,

$x<-\frac{1}{2}$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 공통부분은 없다.

(i), (ii)에서 구하는 부등식의 해는

$x>2$

답 (1) $-\frac{1}{2}\le x\le 3$ (2) $x>2$

083-❶ (1) 주어진 이차부등식의 양변에 6을 곱하면

$2x^2-6x>x-6,\quad 2x^2-7x+6>0$

$(2x-3)(x-2)>0$

$\therefore x<\frac{3}{2}$ 또는 $x>2$

(2) $4x^2+28x+49<0$에서

$(2x+7)^2<0$

이때 $(2x+7)^2\ge 0$이므로 주어진 이차부등식의 해는 없다.

(3) $-x^2+3x\le 4$에서 $\quad -x^2+3x-4\le 0$

$x^2-3x+4\ge 0\quad \therefore \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\ge 0$

이때 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$이므로 주어진 이차부등식의 해는 모든 실수이다.

답 (1) $x<\frac{3}{2}$ 또는 $x>2$ (2) 해는 없다. (3) 모든 실수

083-❷ (1) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은 $\quad x=0$

(i) $x<0$일 때, $x^2+x-2<0$이므로

$(x+2)(x-1)<0$

$\therefore -2<x<1$

그런데 $x<0$이므로 $\quad -2<x<0$

(ii) $x\ge 0$일 때, $x^2-x-2<0$이므로

$(x+1)(x-2)<0$

$\therefore -1<x<2$

그런데 $x\ge 0$이므로 $\quad 0\le x<2$

(i), (ii)에서 부등식의 해는 $\quad -2<x<2$

(2) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은

$x-3=0$, 즉 $x=3$

(i) $x<3$일 때, $x^2-3x\le -(x-3)$이므로

$x^2-2x-3\le 0,\quad (x+1)(x-3)\le 0$

$\therefore -1\le x\le 3$

그런데 $x<3$이므로 $\quad -1\le x<3$

(ii) $x\ge 3$일 때, $x^2-3x\le x-3$이므로

$x^2-4x+3\le 0,\quad (x-1)(x-3)\le 0$

$\therefore 1\le x\le 3$

그런데 $x\ge 3$이므로 $\quad x=3$

(i), (ii)에서 부등식의 해는 $\quad -1\le x\le 3$

답 (1) $-2<x<2$ (2) $-1\le x\le 3$

다른 풀이 (1) $x^2=|x|^2$이므로 $|x|^2-|x|-2<0$에서

$(|x|+1)(|x|-2)<0$

그런데 $|x|+1>0$이므로

$|x|-2<0,\quad |x|<2$

$\therefore -2<x<2$

084-❶ (1) $-x^2+(a+b)x-ab\le 0$에서

$x^2-(a+b)x+ab\ge 0$

$(x-a)(x-b)\ge 0$

(i) $a>b$일 때, $\quad x\le b$ 또는 $x\ge a$

(ii) $a=b$일 때, 주어진 부등식은 $(x-a)^2\ge 0$이므로 해는 모든 실수이다.

(iii) $a<b$일 때, $\quad x\le a$ 또는 $x\ge b$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$$\begin{cases} a>b\text{일 때,} & x\le b \text{ 또는 } x\ge a \\ a=b\text{일 때,} & \text{모든 실수} \\ a<b\text{일 때,} & x\le a \text{ 또는 } x\ge b \end{cases}$$

(2) $ax^2-8ax+12a\le0$에서

$a(x^2-8x+12)\le0$

$a(x-2)(x-6)\le0$ ...... ㉠

(i) $a>0$일 때, ㉠의 양변을 a로 나누면

$(x-2)(x-6)\le0$

$\therefore 2\le x\le6$

(ii) $a=0$일 때, $a=0$을 ㉠에 대입하면

$0\cdot(x-2)(x-6)\le0$

이므로 해는 모든 실수이다.

(iii) $a<0$일 때, ㉠의 양변을 a로 나누면

$(x-2)(x-6)\ge0$

$\therefore x\le2$ 또는 $x\ge6$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$$\begin{cases} a>0\text{일 때,} & 2\le x\le 6 \\ a=0\text{일 때,} & \text{모든 실수} \\ a<0\text{일 때,} & x\le 2 \text{ 또는 } x\ge 6 \end{cases}$$

답 풀이 참조

085-❶ 테니스공의 높이가 0.78 m 이상이면

$-5t^2+3t+2.13\ge0.78$

$-5t^2+3t+1.35\ge0,\quad 100t^2-60t-27\le0$

$(10t+3)(10t-9)\le0$

$\therefore -0.3\le t\le0.9$

그런데 $t\ge0$이므로

$0\le t\le0.9$

따라서 테니스공의 높이가 0.78 m 이상인 시간은 0.9초까지이다.

답 0.9초

085-❷ 휴대전화 한 대의 가격을 x만 원 인하하였을 때의 가격은 $(50-x)$만 원, 하루 판매량은 $(20+2x)$대이므로 하루 총 판매액이 1750만 원 이상이 되려면

$(50-x)(20+2x)\ge1750$

$-2x^2+80x-750\ge0$

$x^2-40x+375\le0,\quad (x-15)(x-25)\le0$

$\therefore 15\le x\le25$

따라서 휴대전화 한 대의 가격의

최댓값은 $50-15=35$(만 원)

최솟값은 $50-25=25$(만 원)

답 최댓값: 35만 원, 최솟값: 25만 원

086-❶ 해가 $x\le-2$ 또는 $x\ge5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-5)\ge0$

$\therefore x^2-3x-10\ge0$

이 이차부등식이 $x^2+ax+b\ge0$과 같으므로

$a=-3,\ b=-10$

답 $a=-3,\ b=-10$

086-❷ 해가 $-1<x<\frac{3}{2}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)<0$

$\therefore x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}<0$ ...... ㉠

주어진 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$과 ㉠의 부등호의 방향이 다르므로 $a<0$

㉠의 양변에 a를 곱하면

$ax^2-\frac{1}{2}ax-\frac{3}{2}a>0$

이 이차부등식이 $ax^2+bx+c>0$과 같으므로

$b=-\frac{1}{2}a,\ c=-\frac{3}{2}a$ ...... ㉡

㉡을 $bx^2-ax-c<0$에 대입하면

$-\frac{1}{2}ax^2-ax+\frac{3}{2}a<0$

양변을 $-a$로 나누면

$\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}<0\ (\because -a>0)$

$x^2+2x-3<0,\quad (x+3)(x-1)<0$

$\therefore -3<x<1$

답 $-3<x<1$

087-❶ (i) $a-1=0$, 즉 $a=1$일 때,

$-5\le0$이므로 주어진 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $a-1\ne0$, 즉 $a\ne1$일 때,

이차함수 $y=(a-1)x^2+2(a-1)x-5$의 그래프가 위로 볼록해야 하므로

$a-1<0\quad \therefore a<1$ ...... ㉠

또 이차방정식 $(a-1)x^2+2(a-1)x-5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-1)^2+5(a-1)\le0$

$a^2+3a-4\le0,\quad (a+4)(a-1)\le0$

$\therefore -4\le a\le1$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면 $-4\le a<1$

(i), (ii)에서 $-4\le a\le1$

답 $-4\le a\le1$

087-❷ 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$-x^2+(m+3)x-m<3$,

즉 $x^2-(m+3)x+m+3>0$

이 성립해야 하므로 이차방정식

$x^2-(m+3)x+m+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(m+3)\}^2-4(m+3)<0$

$m^2+2m-3<0,\quad (m+3)(m-1)<0$

$\therefore -3<m<1$ 답 $-3<m<1$

088-❶ 이차함수 $y=-x^2+2x$의 그래프가 직선 $y=2kx+k-1$보다 항상 아래쪽에 있으므로 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$-x^2+2x<2kx+k-1$,

즉 $x^2+2(k-1)x+k-1>0$

이 성립한다.

따라서 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k-1)<0$

$k^2-3k+2<0,\quad (k-1)(k-2)<0$

$\therefore 1<k<2$ 답 $1<k<2$

088-❷ 이차함수 $y=x^2+x-5$의 그래프가 직선 $y=ax+7$보다 위쪽에 있을 때의 x의 값의 범위는 이차부등식

$x^2+x-5>ax+7$,

즉 $x^2-(a-1)x-12>0$ ······ ㉠

의 해와 같다.

즉 ㉠의 해가 $x<b$ 또는 $x>4$이므로 이차방정식 $x^2-(a-1)x-12=0$의 두 근이 $x=b$ 또는 $x=4$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$b+4=a-1,\ 4b=-12$

$\therefore a=2,\ b=-3$ 답 $a=2,\ b=-3$

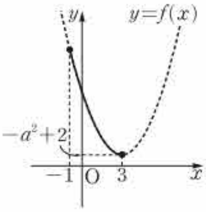
089-❶ $x^2-6x>a^2-11$에서

$x^2-6x-a^2+11>0$

$f(x)=x^2-6x-a^2+11$이라 하면

$f(x)=(x-3)^2-a^2+2$

$-1\le x\le 3$에서 $f(x)>0$이 항상 성립하려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $f(x)$의 최솟값이 $f(3)$이고 $f(3)>0$이어야 하므로

$-a^2+2>0,\quad a^2-2<0$

$(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})<0\quad \therefore -\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$

따라서 정수 a는 $-1,\ 0,\ 1$의 3개이다. 답 3

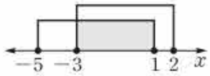
090-❶ (1) $x^2+4x-5\le 0$에서

$(x+5)(x-1)\le 0\quad \therefore -5\le x\le 1$

$x^2+x-6\le 0$에서 $\quad (x+3)(x-2)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 2$

각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는



$-3\le x\le 1$

(2) $5x-6\le x^2<-2x+15$에서

$$\begin{cases} 5x-6\le x^2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2<-2x+15 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\quad x^2-5x+6\ge 0$

$(x-2)(x-3)\ge 0$

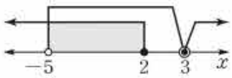
$\therefore x\le 2$ 또는 $x\ge 3$

㉡에서 $\quad x^2+2x-15<0$

$(x+5)(x-3)<0$

$\therefore -5<x<3$

각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는



$-5<x\le 2$

답 (1) $-3\le x\le 1$ (2) $-5<x\le 2$

091-❶ $\begin{cases} x^2-3x+2<0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-4ax+3a^2<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad (x-1)(x-2)<0$

$\therefore 1<x<2$

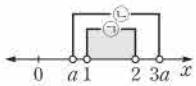
㉡에서 $\quad (x-a)(x-3a)<0$

(i) $a<3a$, 즉 $a>0$일 때, $\quad a<x<3a$

(ii) $a=3a$, 즉 $a=0$일 때, $\quad$ 해는 없다.

(iii) $a>3a$, 즉 $a<0$일 때, $\quad 3a<x<a$

㉠, ㉡의 해의 공통부분이 $1<x<2$가 되려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로 부등식 ㉡의 해는 $a<x<3a$이고 실수 a의 값의 범위는



$0<a\le 1,\ 3a\ge 2$

$\therefore \frac{2}{3}\le a\le 1$ 답 $\frac{2}{3}\le a\le 1$

092-❶ $kx^2-(k+3)x+k=0$이 이차방정식이므로

$k\neq 0$ ...... ㉠

이 이차방정식이 실근을 가지므로 판별식을 D라 할 때,

$D=\{-(k+3)\}^2-4k^2\geq 0$

$-3k^2+6k+9\geq 0$

$k^2-2k-3\leq 0,\quad (k+1)(k-3)\leq 0$

$\therefore -1\leq k\leq 3$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$-1\leq k<0$ 또는 $0<k\leq 3$

답 $-1\leq k<0$ 또는 $0<k\leq 3$

092-❷ 이차방정식 $x^2-kx+1=0$이 실근을 가지려면 판별식을 D_1이라 할 때,

$D_1=(-k)^2-4\geq 0,\quad (k+2)(k-2)\geq 0$

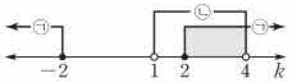
$\therefore k\leq -2$ 또는 $k\geq 2$ ...... ㉠

또 이차방정식 $x^2-2kx+5k-4=0$이 허근을 가지려면 판별식을 D_2라 할 때,

$\frac{D_2}{4}=(-k)^2-(5k-4)<0$

$k^2-5k+4<0,\quad (k-1)(k-4)<0$

$\therefore 1<k<4$ ...... ㉡



㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$2\leq k<4$

답 $2\leq k<4$

093-❶ 이차방정식 $x^2-(3m+5)x+2m-8=0$의 두 근을 α, β라 하면 α, β의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=2m-8<0\quad \therefore m<4$ ...... ㉠

또 양수인 근의 절댓값이 음수인 근의 절댓값보다 크므로

$\alpha+\beta=3m+5>0\quad \therefore m>-\frac{5}{3}$ ... ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$-\frac{5}{3}<m<4$

따라서 구하는 정수 m의 최댓값은 3이다.

답 3

093-❷ 이차방정식 $x^2-4kx+3k+1=0$의 두 근을 α, β, 판별식을 D라 하면

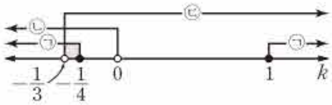
(i) $\frac{D}{4}=(-2k)^2-(3k+1)\geq 0$

$4k^2-3k-1\geq 0,\quad (4k+1)(k-1)\geq 0$

$\therefore k\leq -\frac{1}{4}$ 또는 $k\geq 1$ ...... ㉠

(ii) $\alpha+\beta=4k<0\quad \therefore k<0$ ...... ㉡

(iii) $\alpha\beta=3k+1>0\quad \therefore k>-\frac{1}{3}$ ...... ㉢

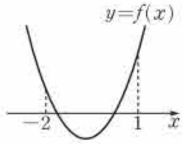


㉠, ㉡, ㉢에서 공통부분을 구하면

$-\frac{1}{3}<k\leq -\frac{1}{4}$

답 $-\frac{1}{3}<k\leq -\frac{1}{4}$

094-❶ $f(x)=2x^2-mx+2$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -2와 1 사이에 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-m)^2-4\cdot 2\cdot 2\geq 0$

$m^2-16\geq 0,\quad (m+4)(m-4)\geq 0$

$\therefore m\leq -4$ 또는 $m\geq 4$ ...... ㉠

(ii) $f(-2)=8+2m+2>0$에서

$m>-5$ ...... ㉡

$f(1)=2-m+2>0$에서

$m<4$ ...... ㉢

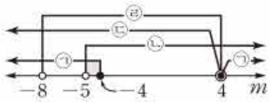
(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이

$x=\frac{m}{4}$이므로 $\quad -2<\frac{m}{4}<1$

$\therefore -8<m<4$ ...... ㉣

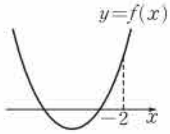
㉠~㉣에서 공통부분을 구하면

$-5<m\leq -4$



답 $-5<m\leq -4$

094-❷ $f(x)=x^2+mx+2m-3$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -2보다 작으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=m^2-4(2m-3)\geq 0$

$m^2-8m+12\geq 0,\quad (m-2)(m-6)\geq 0$

$\therefore m\leq 2$ 또는 $m\geq 6$ ...... ㉠

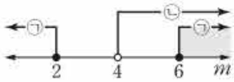
(ii) $f(-2)=4-2m+2m-3=1>0$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이

$x=-\frac{m}{2}$이므로 $\quad -\frac{m}{2}<-2$

$\therefore m>4$ ...... ㉡

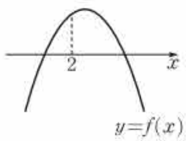
㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면



$m \geq 6$

답 $m \geq 6$

095-❶ $f(x)=-x^2+(k+1)x+k^2-1$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 2가 있으므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



따라서 $f(2)>0$이어야 하므로

$-4+2(k+1)+k^2-1>0$

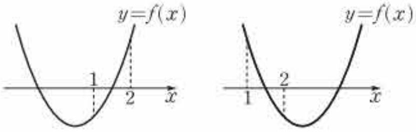
$k^2+2k-3>0,\quad (k+3)(k-1)>0$

$\therefore k<-3$ 또는 $k>1$ 답 $k<-3$ 또는 $k>1$

Remark ▶

이차방정식 $-x^2+(k+1)x+k^2-1=0$의 두 근은 이차방정식 $x^2-(k+1)x-k^2+1=0$의 두 근과 같으므로 $f(x)=x^2-(k+1)x-k^2+1$로 놓고 $f(2)<0$임을 이용하여 풀어도 된다.

095-❷ $f(x)=x^2-mx-4$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 중에서 한 근만이 1과 2 사이에 있으므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 $f(1)f(2)<0$이어야 하므로

$(1-m-4)(4-2m-4)<0$

$-2m(-m-3)<0,\quad m(m+3)<0$

$\therefore -3<m<0$ 답 $-3<m<0$

중단원 연습 문제

본책 275~278쪽

01 $-2\leq x\leq 1$ **02** ⑤ **03** -1

04 $2a<x<-a$ **05** 10 **06** ③

07 -12 **08** $a<-\sqrt{5}$ 또는 $a>\sqrt{5}$

09 1 **10** ③ **11** 5 **12** $\frac{5}{2}<a\leq 3$

13 ③ **14** ⑤ **15** ② **16** $x>6$

17 $1<m<3$ **18** ⑤ **19** ④ **20** ②

21 ⑤ **22** ④

01 전략 부등식 $f(x)-g(x)\leq 0$, 즉 $f(x)\leq g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위와 같다.

풀이 부등식 $ax^2+(b-m)x+c-n\leq 0$에서

$ax^2+bx+c\leq mx+n$ ...... ㉠

㉠의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 아래쪽에 있거나 직선 $y=mx+n$과 만나는 부분의 x의 값의 범위와 같으므로 주어진 그림에서 $-2\leq x\leq 1$이다.

따라서 구하는 부등식의 해는

$-2\leq x\leq 1$ 답 $-2\leq x\leq 1$

02 전략 부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 이차부등식의 해를 구한다.

풀이 $(x+1)(x-3)<5$에서

$x^2-2x-3<5,\quad x^2-2x-8<0$

$(x+2)(x-4)<0$

$\therefore -2<x<4$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다. 답 ⑤

03 전략 $|x|=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$임을 이용한다.

풀이 (i) $x<0$일 때, $(x+1)(-x-2)<0$

$(x+1)(x+2)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>-1$

그런데 $x<0$이므로

$x<-2$ 또는 $-1<x<0$ ··· ❶

(ii) $x\geq 0$일 때, $(x+1)(x-2)<0$

$\therefore -1<x<2$

그런데 $x\geq 0$이므로 $0\leq x<2$ ··· ❷

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x<-2$ 또는 $-1<x<2$ ··· ❸

따라서 $a=-2$, $b=-1$, $c=2$이므로

$a+b+c=-1$ ··· ❹

답 -1

채점 기준	비율
❶ $x<0$일 때, 부등식의 해를 구할 수 있다.	30 %
❷ $x\geq 0$일 때, 부등식의 해를 구할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %
❹ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

04 전략 부등식의 양변을 음수로 나누면 부등호의 방향이 바뀜을 이용한다.

풀이 $a<0$이므로 $ax^2-a^2x-2a^3>0$의 양변을 a로

나누면

$x^2-ax-2a^2<0$, $\quad (x+a)(x-2a)<0$

이때 $2a<-a$이므로 주어진 이차부등식의 해는

$2a<x<-a$ 답 $2a<x<-a$

05

전략 주어진 조건을 이용하여 이차부등식을 세운다.

풀이 물체의 높이가 120 m 이상이어야 하므로

$70t-5t^2 \geq 120$ ⋯ ❶

$t^2-14t+24 \leq 0$, $\quad (t-2)(t-12) \leq 0$

$\therefore 2 \leq t \leq 12$ ⋯ ❷

따라서 물체의 높이가 120 m 이상인 시간은 2초부터 12초까지이므로 10초 동안이다.

$\therefore a=10$ ⋯ ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ 조건을 만족시키는 부등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ t의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

06

전략 x^2의 계수가 a이므로 $a=0$인 경우와 $a \neq 0$인 경우로 나누어 푼다.

풀이 (i) $a=0$일 때,

$-1 \leq 0$이므로 주어진 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $a \neq 0$일 때,

이차함수 $y=ax^2+ax+a-1$의 그래프가 위로 볼록해야 하므로

$a<0$ ⋯⋯ ㉠

또 이차방정식 $ax^2+ax+a-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4a(a-1) \leq 0$

$-3a^2+4a \leq 0$, $\quad a(3a-4) \geq 0$

$\therefore a \leq 0$ 또는 $a \geq \frac{4}{3}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면 $\quad a<0$

(i), (ii)에서 $\quad a \leq 0$

따라서 구하는 a의 최댓값은 0이다. 답 ③

Remark▶

문제에서 이차부등식이라는 조건이 없으므로 x^2의 계수인 a를 $a=0$인 경우와 $a \neq 0$인 경우로 나누어 풀어야 한다.

07

전략 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)<g(x)$가 성립해야 한다.

풀이 이차함수 $y=-x^2-4x-7$의 그래프가 직선 $y=mx+m$보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$-x^2-4x-7<mx+m$,

즉 $x^2+(m+4)x+m+7>0$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+(m+4)x+m+7=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(m+4)^2-4(m+7)<0$

$m^2+4m-12<0$, $\quad (m+6)(m-2)<0$

$\therefore -6<m<2$

따라서 $\alpha=-6$, $\beta=2$이므로

$\alpha\beta=-12$ 답 -12

08

전략 제한된 범위에서 부등식 $f(x)>0$이 항상 성립할 때 조건에 맞도록 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $0 \leq x \leq 3$에서 이차함수 $y=x^2-x$의 그래프가 직선 $y=-3x-a^2+5$보다 항상 위쪽에 있으려면 $0 \leq x \leq 3$에서 이차부등식

$x^2-x>-3x-a^2+5$,

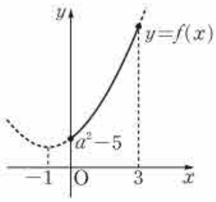
즉 $x^2+2x+a^2-5>0$

이 항상 성립해야 한다.

$f(x)=x^2+2x+a^2-5$라 하면

$f(x)=(x+1)^2+a^2-6$

$0 \leq x \leq 3$에서 $f(x)>0$이 항상 성립하려면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $f(x)$의 최솟값이 $f(0)$이고 $f(0)>0$이어야 하므로

$a^2-5>0$, $\quad (a+\sqrt{5})(a-\sqrt{5})>0$

$\therefore a<-\sqrt{5}$ 또는 $a>\sqrt{5}$

답 $a<-\sqrt{5}$ 또는 $a>\sqrt{5}$

09

전략 $a \leq f(x)<b$의 해는 연립부등식 $\begin{cases} a \leq f(x) \\ f(x)<b \end{cases}$의 해와 같다.

풀이 (i) $2 \leq x^2-x$에서 $\quad x^2-x-2 \geq 0$

$(x+1)(x-2) \geq 0$

$\therefore x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

(ii) $x^2-x<6$에서 $\quad x^2-x-6<0$

$(x+2)(x-3)<0$

$\therefore -2<x<3$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$-2<x\le-1$ 또는 $2\le x<3$ ⋯ ❸

따라서 정수 x는 -1, 2이므로 구하는 합은

$-1+2=1$ ⋯ ❹

답 1

채점 기준	비율
❶ $2\le x^2-x$의 해를 구할 수 있다.	30 %
❷ $x^2-x<6$의 해를 구할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %
❹ 정수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

10

전략 $f(x)>0$과 $f(x)\le g(x)$를 만족시키는 x의 값의 범위를 수직선 위에 나타낸다.

풀이 $0<f(x)\le g(x)$에서 $\begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)\le g(x) \end{cases}$

주어진 그림에서 부등식 $f(x)>0$의 해는

$x<-3$ 또는 $x>5$ …… ㉠

또 주어진 그림에서 $f(x)\le g(x)$의 해는

$-4\le x\le5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 위의 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는

$-4\le x<-3$

답 ③

11

전략 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 (판별식)>0이어야 함을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+ax-2a+5=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식을 D_1이라 할 때,

$D_1=a^2-4(-2a+5)>0$

$a^2+8a-20>0$, $(a+10)(a-2)>0$

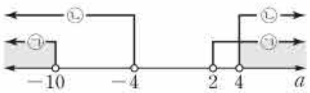
$\therefore a<-10$ 또는 $a>2$ …… ㉠ ⋯ ❶

또 이차방정식 $x^2-(a-4)x-2a+8=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식을 D_2라 할 때,

$D_2=\{-(a-4)\}^2-4(-2a+8)>0$

$a^2-16>0$, $(a+4)(a-4)>0$

$\therefore a<-4$ 또는 $a>4$ …… ㉡ ⋯ ❷



㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$a<-10$ 또는 $a>4$ ⋯ ❸

따라서 자연수 a의 최솟값은 5이다. ⋯ ❹

답 5

채점 기준	비율
❶ $x^2+ax-2a+5=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ $x^2-(a-4)x-2a+8=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❹ 자연수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

12

전략 부등식의 좌변을 인수분해한 후, a의 값의 범위를 나누어 부등식을 푼다.

풀이 $x^2-2ax+2a-1<0$에서

$(x-1)(x-2a+1)<0$

(i) $2a-1>1$, 즉 $a>1$일 때,

$1<x<2a-1$

(ii) $2a-1=1$, 즉 $a=1$일 때,

주어진 부등식은 $(x-1)^2<0$이므로 해는 없다.

(iii) $2a-1<1$, 즉 $a<1$일 때,

$2a-1<x<1$

그런데 $x=4$가 주어진 부등식의 해이므로

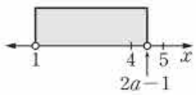
$1<x<2a-1$ …… ㉠ ⋯ ❶

이때 ㉠을 만족시키는 가장 큰 정수 x는 4이므로

$4<2a-1\le5$ ⋯ ❷

$5<2a\le6$

$\therefore \frac{5}{2}<a\le3$ ⋯ ❸



답 $\frac{5}{2}<a\le3$

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❷ $2a-1$의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

13

전략 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2+bx+c>0$이 성립하려면 $a=0$, $b=0$, $c>0$ 또는 $a>0$, $b^2-4ac<0$이어야 한다.

풀이 주어진 부등식의 해가 없으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식

$(m-2)x^2-2(m-2)x+3>0$ …… ㉠

이 성립해야 한다.

(i) $m-2=0$, 즉 $m=2$일 때,

$3>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립한다.

(ii) $m-2\neq0$, 즉 $m\neq2$일 때,

이차함수 $y=(m-2)x^2-2(m-2)x+3$의 그래프가 아래로 볼록해야 하므로

$m-2>0 \quad \therefore m>2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

또 이차방정식 $(m-2)x^2-2(m-2)x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(m-2)\}^2-3(m-2)<0$

$m^2-7m+10<0, \quad (m-2)(m-5)<0$

$\therefore 2<m<5 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서 공통부분을 구하면 $\quad 2<m<5$

(i), (ii)에서 $\quad 2\le m<5$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 m은 2, 3, 4의 3개이다.

답 ③

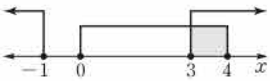
14 전략 해가 $\alpha\le x\le\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta)\le0$임을 이용한다.

풀이 $x^2\le4x$에서 $\quad x^2-4x\le0$

$x(x-4)\le0 \quad \therefore 0\le x\le4$

$x^2-3\ge2x$에서 $\quad x^2-2x-3\ge0$

$(x+1)(x-3)\ge0 \quad \therefore x\le-1$ 또는 $x\ge3$



두 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 위의 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는

$3\le x\le4$

해가 $3\le x\le4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-3)(x-4)\le0 \quad \therefore x^2-7x+12\le0$

양변에 -2를 곱하면

$-2x^2+14x-24\ge0$

이 부등식이 $ax^2+bx-24\ge0$과 같으므로

$a=-2, b=14$

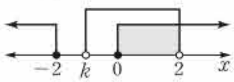
$\therefore a+b=12$

답 ⑤

15 전략 부등식 $x^2+2x\ge0$과 주어진 해를 이용하여 부등식 $x^2+px+q<0$의 해를 유추한다.

풀이 $x^2+2x\ge0$에서 $\quad x(x+2)\ge0$

$\therefore x\le-2$ 또는 $x\ge0$



주어진 연립부등식의 해가 $0\le x<2$이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로 부등식 $x^2+px+q<0$의 해가 $k<x<2$이어야 한다. (단, $-2\le k<0$)

즉 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근이 k, 2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$k+2=-p, 2k=q$

$\therefore p=-k-2, q=2k$

이것을 $|p|+|q|=3$에 대입하면

$|-k-2|+|2k|=3, \quad |k+2|+|2k|=3$

$-2\le k<0$이므로

$k+2-2k=3 \quad \therefore k=-1$

따라서 $p=-1, q=-2$이므로

$pq=2$

답 ②

16 전략 삼각형이 되려면 가장 긴 변의 길이가 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하고, 세 내각이 모두 예각이려면 가장 긴 변의 대각이 예각이어야 함을 이용하여 식을 세운다.

풀이 세 실수 x, $x+2$, $x+4$가 삼각형의 세 변의 길이가 되려면 $x>0$이고

$x+(x+2)>x+4$

$\therefore x>2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이 삼각형이 예각삼각형이 되려면

$x^2+(x+2)^2>(x+4)^2$

$x^2-4x-12>0, \quad (x+2)(x-6)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>6 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면 $\quad x>6$

답 $x>6$

Remark ▶ 삼각형의 변과 각 사이의 관계

삼각형 ABC의 세 변의 길이가 a, b, c $(a\le b\le c)$일 때

① $a^2+b^2>c^2$ ➡ △ABC는 예각삼각형

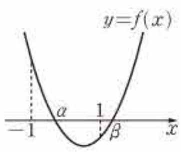
② $a^2+b^2=c^2$ ➡ △ABC는 ∠C=90°인 직각삼각형

③ $a^2+b^2<c^2$ ➡ △ABC는 ∠C>90°인 둔각삼각형

17 전략 $f(x)=x^2-mx+2m-4$라 하고, 조건을 만족시키도록 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

풀이 $f(x)=x^2-mx+2m-4$

라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 α, β에 대하여 $-1<\alpha<1<\beta$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $f(-1)=1+m+2m-4>0$에서

$3m-3>0 \quad \therefore m>1$

(ii) $f(1)=1-m+2m-4<0$에서

$m-3<0 \quad \therefore m<3$

(i), (ii)에서 $\quad 1<m<3$

답 $1<m<3$

18 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+1$의 교점의 y좌표를 이용하여 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려 본다.

풀이 $y=x+1$에서

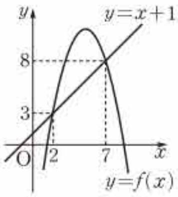
$y=3$일 때, $\quad x=2$

$y=8$일 때, $\quad x=7$

이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+1$의 교점의 좌표는

$(2, 3)$, $(7, 8)$

따라서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+1$은 오른쪽 그림과 같다.



$f(x)-x-1>0$에서

$f(x)>x+1$

이므로 주어진 부등식의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x+1$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이다.

$\therefore 2<x<7$

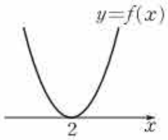
따라서 정수 x는 $3, 4, 5, 6$이므로 구하는 합은

$3+4+5+6=18$

답 ⑤

19 전략 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 조건 (나)에서 이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $x\neq2$인 모든 실수이려면 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하고 x축과 $x=2$에서 접해야 한다.



따라서 $f(x)=a(x-2)^2$ $(a>0)$이라 하면 조건 (가)에서 $f(0)=8$이므로

$a\cdot(-2)^2=8 \qquad \therefore a=2$

따라서 $f(x)=2(x-2)^2$이므로

$f(5)=2\cdot9=18$

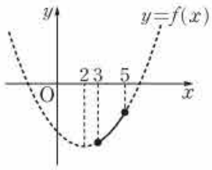
답 ④

20 전략 주어진 부등식의 좌변을 $f(x)$로 놓고 주어진 범위에서 조건을 만족시키도록 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $f(x)=x^2-4x-4k+3$이라 하면

$f(x)=(x-2)^2-4k-1$

$3\le x\le5$에서 $f(x)\le0$이 항상 성립하려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $f(x)$의 최댓값이 $f(5)$이고 $f(5)\le0$이어야 하므로

$f(5)=8-4k\le0$

$\therefore k\ge2$

따라서 k의 최솟값은 2이다.

답 ②

21 전략 먼저 주어진 연립부등식의 해를 구한 후 이 해가 주어진 해와 같도록 하는 미정계수의 값을 구한다.

풀이 $(x-a)^2<a^2$에서

$x^2-2ax+a^2<a^2, \qquad x(x-2a)<0$

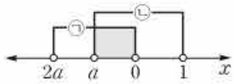
$\therefore 2a<x<0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x^2+a<(a+1)x$에서

$x^2-(a+1)x+a<0, \qquad (x-a)(x-1)<0$

$\therefore a<x<1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$a<x<0$

이때 주어진 연립부등식의 해가 $b<x<b+1$이므로

$a=b$, $b+1=0 \qquad \therefore a=-1$, $b=-1$

$\therefore a+b=-2$

답 ⑤

22 전략 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 5가 되도록 수직선 위에 나타내어 본다.

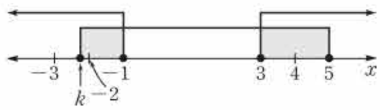
풀이 $x^2-2x-3\ge0$에서 $\qquad (x+1)(x-3)\ge0$

$\therefore x\le-1$ 또는 $x\ge3$

$x^2-(5+k)x+5k\le0$에서

$(x-5)(x-k)\le0$

(i) $k<5$일 때,

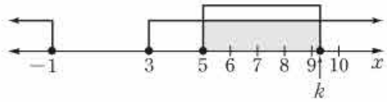


정수 x의 개수가 5가 되려면 위의 그림과 같아야 하므로

$-3<k\le-2$

따라서 정수 k의 값은 -2이다.

(ii) $k\ge5$일 때,



정수 x의 개수가 5가 되려면 위의 그림과 같아야 하므로

$9\le k<10$

따라서 정수 k의 값은 9이다.

(i), (ii)에서 모든 정수 k의 값의 곱은

$-2\cdot9=-18$

답 ④

Ⅳ. 순열과 조합

11 순열과 조합

유제

본책 283~306쪽

096-❶ (i) 꺼낸 공에 적힌 수의 차가 3인 경우

$(1, 4), (2, 5), (4, 1), (5, 2)$의 4가지

(ii) 꺼낸 공에 적힌 수의 차가 4인 경우

$(1, 5), (5, 1)$의 2가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$4+2=6$

답 6

096-❷ x, y, z가 자연수이므로

$x\geq1$, $y\geq1$, $z\geq1$

$x+6y+10z=40$에서 $10z<40$, 즉 $z<4$이므로

$z=1$ 또는 $z=2$ 또는 $z=3$

(i) $z=1$일 때,

$x+6y+10=40$, 즉 $x+6y=30$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(24, 1), (18, 2), (12, 3), (6, 4)$의 4개

(ii) $z=2$일 때,

$x+6y+20=40$, 즉 $x+6y=20$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(14, 1), (8, 2), (2, 3)$의 3개

(iii) $z=3$일 때,

$x+6y+30=40$, 즉 $x+6y=10$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(4, 1)$의 1개

(i)~(iii)은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 합의 법칙에 의하여

$4+3+1=8$

답 8

Remark▶

x, y, z 중에서 계수가 가장 큰 z를 기준으로 경우를 나누는 것이 편리하다.

097-❶ 주어진 다항식에서 a, b, c 중 어느 하나를 택하면 그 각각에 대하여 p, q의 2가지의 선택이 가능하고, 이들 각각에 대하여 x, y의 2가지의 선택이 가능하므로 구하는 항의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$3\cdot2\cdot2=12$

답 12

097-❷ 120과 300의 양의 공약수의 개수는 120과 300의 최대공약수의 양의 약수의 개수와 같다.

이때 120과 300의 최대공약수는 60이고 $60=2^2\cdot3\cdot5$이다.

2^2의 양의 약수는 $1, 2, 2^2$의 3개

3의 양의 약수는 $1, 3$의 2개

5의 양의 약수는 $1, 5$의 2개

따라서 구하는 양의 공약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$3\cdot2\cdot2=12$

답 12

다른 풀이 120과 300의 최대공약수는 60이므로 120과 300의 양의 공약수의 개수는 60의 양의 약수의 개수와 같다.

이때 $60=2^2\cdot3\cdot5$이므로 구하는 양의 공약수의 개수는

$(2+1)(1+1)(1+1)=12$

098-❶ A 지점에서 출발하여 다른 지점을 모두 한 번씩 지난 후 다시 A 지점으로 돌아오는 방법은

$A\to B\to C\to A$, $A\to C\to B\to A$

의 2가지가 있다.

(i) $A\to B\to C\to A$로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여 $4\cdot3\cdot2=24$

(ii) $A\to C\to B\to A$로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여 $2\cdot3\cdot4=24$

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 방법의 수는 합의 법칙에 의하여

$24+24=48$

답 48

098-❷ A 지점에서 D 지점으로 가는 방법은

$A\to B\to D$, $A\to C\to D$,

$A\to B\to C\to D$, $A\to C\to B\to D$

의 4가지가 있다.

(i) $A\to B\to D$로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여 $3\cdot2=6$

(ii) $A\to C\to D$로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여 $2\cdot2=4$

(iii) $A\to B\to C\to D$로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여 $3\cdot2\cdot2=12$

(iv) $A\to C\to B\to D$로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여 $2\cdot2\cdot2=8$

(i)~(iv)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 방법의 수는 합의 법칙에 의하여

$6+4+12+8=30$

답 30

099-❶ 10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 10원, 20원, ⋯, 60원의 7가지

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 100원, 200원, 300원, 400원의 5가지

1000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 금액은

0원, 1000원의 2가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는

$7\cdot5\cdot2-1=69$ 답 69

099-❷ (1) 1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장, 4장, 5장의 6가지

5000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장의 3가지

10000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장의 2가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는 $6\cdot3\cdot2-1=35$

(2) 5000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액과 1000원짜리 지폐 5장으로 지불할 수 있는 금액이 같고, 10000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액과 1000원짜리 지폐 10장으로 지불할 수 있는 금액이 같다.

따라서 10000원짜리 지폐 1장을 1000원짜리 지폐 10장, 5000원짜리 지폐 2장을 1000원짜리 지폐 10장으로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 1000원짜리 지폐 25장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같으므로 구하는 금액의 수는 25

답 (1) 35 (2) 25

100-❶ A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$4\cdot3\cdot2\cdot2=48$ 답 48

100-❷ A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지, E에 칠할 수 있는 색은 B, D에 칠한 색을 제외한 2가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$4\cdot3\cdot2\cdot2\cdot2=96$ 답 96

101-❶ (1) ${}_n\mathrm{P}_2=n(n-1)$이므로 ${}_n\mathrm{P}_2=9n$에서

$n(n-1)=9n$

$n\ge2$이므로 양변을 n으로 나누면

$n-1=9$ $\quad\therefore n=10$

(2) ${}_6\mathrm{P}_r\cdot3!=720$에서 $\quad {}_6\mathrm{P}_r\cdot6=720$

$\therefore {}_6\mathrm{P}_r=120$

$120=6\cdot5\cdot4$이므로 $\quad r=3$

(3) ${}_n\mathrm{P}_3+3{}_n\mathrm{P}_2=n(n-1)(n-2)+3n(n-1)$

$=(n+1)n(n-1)$

이때 $60=5\cdot4\cdot3$이므로 $\quad n=4$

(4) ${}_n\mathrm{P}_4:{}_{n+1}\mathrm{P}_3=10:3$에서 $3{}_n\mathrm{P}_4=10{}_{n+1}\mathrm{P}_3$이므로

$3n(n-1)(n-2)(n-3)=10(n+1)n(n-1)$

$n\ge4$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$3(n-2)(n-3)=10(n+1)$

$3n^2-25n+8=0,\quad (3n-1)(n-8)=0$

$\therefore n=8$

답 (1) 10 (2) 3 (3) 4 (4) 8

101-❷ ${}_{n-1}\mathrm{P}_r+r{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-1-r)!}+r\cdot\frac{(n-1)!}{\{n-1-(r-1)\}!}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-r-1)!}+\frac{r\cdot(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$=\frac{(n-r)\cdot(n-1)!}{(n-r)!}+\frac{r\cdot(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$=\frac{\{(n-r)+r\}\cdot(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}={}_n\mathrm{P}_r$$

$\therefore {}_n\mathrm{P}_r={}_{n-1}\mathrm{P}_r+r{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$ ⋯ 증명 끝

답 풀이 참조

102-❶ (1) 서로 다른 10개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_{10}\mathrm{P}_3=10\cdot9\cdot8=720$

(2) 1번을 제외한 9명에서 회장과 부회장을 각각 한 사람씩 뽑으면 된다. 따라서 서로 다른 9개에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_9\mathrm{P}_2=9\cdot8=72$

답 (1) 720 (2) 72

102-❷ 타순이 정해져 있지 않은 선수를 m명이라 하면 $\quad n+m=9$

이때 n명의 선수의 타순이 이미 정해져 있으므로 9명의 선수의 타순을 정하는 방법의 수는

${}_mP_m=m!$

이때 $120=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5!$이므로 $m=5$

$\therefore n=4$

답 4

103-❶ (1) 축구 선수 3명을 한 사람으로 생각하여 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$5!=120$

그 각각에 대하여 축구 선수 3명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는 $120\cdot6=720$

(2) 야구 선수 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$4!=24$

야구 선수 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중에서 3개의 자리에 축구 선수 3명을 세우는 방법의 수는

${}_5P_3=60$

따라서 구하는 방법의 수는 $24\cdot60=1440$

(3) 축구 선수 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$3!=6$

축구 선수 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 야구 선수 4명을 세우는 방법의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는 $6\cdot24=144$

답 (1) 720 (2) 1440 (3) 144

104-❶ (1) h를 맨 처음에, y를 맨 마지막에 고정시키고, 나머지 o, l, i, d, a의 5개의 문자를 나열하는 방법의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

$5!=120$

(2) h ○○ y를 한 묶음으로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$4!=24$

h와 y 사이에 h와 y를 제외한 5개의 문자 중에서 2개를 택하여 나열하는 방법의 수는

${}_5P_2=20$

이때 h와 y의 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot20\cdot2=960$

답 (1) 120 (2) 960

105-❶ 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$5!=120$

양 끝에 남학생 3명 중에서 2명을 택하여 세우는 방법의 수는 ${}_3P_2=6$

가운데에 나머지 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-6\cdot6=84$

답 84

105-❷ 7개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$7!=5040$

양 끝에 모음인 o, a, e의 3개의 문자 중에서 2개를 택하여 나열하는 방법의 수는

${}_3P_2=6$

가운데에 나머지 5개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$5040-6\cdot120=4320$

답 4320

106-❶ (1) 백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지이다. 각각에 대하여 십의 자리, 일의 자리에는 백의 자리에 온 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로 구하는 세 자리 자연수의 개수는 $5\cdot{}_5P_2=100$

(2) 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

백의 자리, 십의 자리에는 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로

${}_5P_2=20$

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지이고, 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리, 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4가지이므로

$4\cdot4=16$

(i), (ii)에서 구하는 5의 배수의 개수는

$20+16=36$

답 (1) 100 (2) 36

106-❷ (1) 3의 배수이려면 각 자리의 수의 합이 3의 배수이어야 한다.

6개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 서로 다른 4개를 택하였을 때, 그 합이 3의 배수가 되는 경우는

1, 2, 3, 6 또는 1, 2, 4, 5 또는 1, 3, 5, 6
또는 2, 3, 4, 6 또는 3, 4, 5, 6
의 5가지이고, 각각에 대하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는
$4!=24$
이므로 구하는 3의 배수의 개수는
$5\cdot24=120$

(2) 천의 자리의 숫자가 1 또는 2 또는 3 또는 4인 자연수의 개수는
$4\cdot{}_5P_3=240$
51□□ 꼴의 자연수의 개수는
${}_4P_2=12$
따라서 5200보다 작은 자연수의 개수는
$240+12=252$

답 (1) 120 (2) 252

다른 풀이 (2) 모든 네 자리 자연수의 개수는
${}_6P_4=360$
52□□, 53□□, 54□□, 56□□ 꼴의 자연수의 개수는 각각 ${}_4P_2=12$
6□□□ 꼴의 자연수의 개수는 ${}_5P_3=60$
따라서 5200보다 작은 자연수의 개수는
$360-4\cdot12-60=252$

Remark▶ 배수 여부 확인 방법
① 2의 배수: 일의 자리의 수가 0 또는 2의 배수인 수
② 3의 배수: 각 자리의 수의 합이 3의 배수인 수
③ 4의 배수: 끝의 두 자리 수가 4의 배수인 수
④ 5의 배수: 일의 자리의 수가 0 또는 5인 수
⑤ 9의 배수: 각 자리의 수의 합이 9의 배수인 수

107-❶ 'ㄱ□□□□□' 꼴인 문자열의 개수는
$5!=120$
'ㄴ□□□□□' 꼴인 문자열의 개수는
$5!=120$
'ㄷㄱ□□□□' 꼴인 문자열의 개수는
$4!=24$
'ㄷㄴ□□□□' 꼴인 문자열의 개수는
$4!=24$
'ㄷㄹㄱ□□□' 꼴인 문자열을 순서대로 나열하면
'ㄷㄹㄱㄴㅁㅂ', 'ㄷㄹㄱㄴㅂㅁ', 'ㄷㄹㄱㅁㄴㅂ', 'ㄷㄹㄱㅁㅂㄴ', …
즉 'ㄷㄹㄱㅁㅂㄴ'은 'ㄷㄹㄱ□□□' 꼴에서 네 번째에 오는 문자열이므로
$120+120+24+24+4=292$(번째)
에 오는 문자열이다.

답 292번째

108-❶ (1) ${}_nC_2+{}_nC_3$
$$=\frac{n(n-1)}{2\cdot1}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}$$
$$=\frac{1}{6}n(n-1)\{3+(n-2)\}$$
$$=\frac{1}{6}(n+1)n(n-1)$$
이므로 $\frac{1}{6}(n+1)n(n-1)=56$
$(n+1)n(n-1)=8\cdot7\cdot6$
$\therefore n=7$

(2) ${}_nP_3+5{}_nC_3$
$$=n(n-1)(n-2)+5\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}$$
$$=n(n-1)(n-2)\left(1+\frac{5}{6}\right)$$
$$=\frac{11}{6}n(n-1)(n-2)$$
이므로 $\frac{11}{6}n(n-1)(n-2)=44$
$n(n-1)(n-2)=4\cdot3\cdot2$
$\therefore n=4$

(3) ${}_{16}C_{n+7}={}_{16}C_{2n}$에서
(i) $n+7=2n$일 때,
$n=7$
(ii) $n+7=16-2n$일 때,
$3n=9 \quad \therefore n=3$
(i), (ii)에서
$n=3$ 또는 $n=7$

답 (1) 7 (2) 4 (3) 3, 7

108-❷ $n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}$
$$=n\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$$
$$=n\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$$
$$=r\cdot\frac{n!}{r!(n-r)!}=r\cdot{}_nC_r$$
$\therefore r\cdot{}_nC_r=n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}$ … 증명 끝

답 풀이 참조

109-❶ (1) 볼펜 6자루 중에서 2자루를 꺼내는 방법의 수는 ${}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$
연필 5자루 중에서 2자루를 꺼내는 방법의 수는
${}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$
따라서 구하는 방법의 수는 $15\cdot10=150$

(2) (ⅰ) 볼펜 6자루 중에서 3자루를 꺼내는 방법의 수는

$${}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$$

연필 5자루 중에서 1자루를 꺼내는 방법의 수는

$${}_5C_1=5$$

따라서 방법의 수는 $20\cdot5=100$

(ⅱ) 볼펜 6자루 중에서 4자루를 꺼내는 방법의 수는

$${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는

$100+15=115$

(3) 11자루 중에서 4자루를 꺼내는 방법의 수는

$${}_{11}C_4=\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=330$$

볼펜만 4자루를 꺼내는 방법의 수는

$${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$$

연필만 4자루를 꺼내는 방법의 수는

$${}_5C_4={}_5C_1=5$$

따라서 구하는 방법의 수는

$330-(15+5)=310$

답 (1) 150 (2) 115 (3) 310

110-❶ 어른 6명 중에서 2명, 어린이 5명 중에서 1명을 뽑는 방법의 수는

$${}_6C_2\cdot{}_5C_1=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\cdot5=75$$

(1) 뽑힌 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$75\cdot6=450$

(2) 어른 2명을 한 사람으로 생각하여 2명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $2!$이고, 그 각각의 경우에 대하여 어른 2명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!$이므로 $2!\cdot2!=4$

따라서 구하는 방법의 수는

$75\cdot4=300$

답 (1) 450 (2) 300

110-❷ 7을 제외한 6개의 숫자 중에서 2개를 뽑는 방법의 수는

$${}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$$

7을 포함한 숫자 3개를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$15\cdot6=90$ 답 90

다른 풀이 7이 올 수 있는 자리는 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 3가지이고, 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개의 숫자 중에서 2개를 뽑아 나머지 자리에 나열하면 되므로 구하는 자연수의 개수는

$3\cdot{}_6P_2=3\cdot6\cdot5=90$

111-❶ (1) 8개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는 ${}_8C_2=\frac{8\cdot7}{2\cdot1}=28$

직선 l_1 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_3C_2={}_3C_1=3$$

직선 l_2 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$$

이때 일직선 위에 있는 점으로 만들 수 있는 직선은 1개이므로 구하는 직선의 개수는

$28-3+1-10+1=17$

(2) 8개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$${}_8C_3=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$$

직선 l_1 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$${}_3C_3=1$$

직선 l_2 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$$

이때 일직선 위에 있는 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$56-1-10=45$

답 (1) 17 (2) 45

다른 풀이 (1) 직선 l_1 위의 한 점과 직선 l_2 위의 한 점을 택하는 방법의 수는

$${}_3C_1\cdot{}_5C_1=3\cdot5=15$$

직선 l_1 위의 점으로 만들 수 있는 직선이 1개, 직선 l_2 위의 점으로 만들 수 있는 직선이 1개이므로 구하는 직선의 개수는

$15+1+1=17$

112-❶ (1) 가로선 5개 중에서 2개, 세로선 4개 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 만들어지므로 구하는 직사각형의 개수는

$$_5C_2 \cdot {}_4C_2 = \frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\frac{4\cdot3}{2\cdot1} = 10\cdot6 = 60$$

(2) 가장 작은 정사각형 1개, 4개, 9개로 이루어진 정사각형의 개수는 각각

$$3\cdot4=12,\ 2\cdot3=6,\ 1\cdot2=2$$

이므로 정사각형의 개수는

$$12+6+2=20$$

따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$$60-20=40$$

답 (1) 60 (2) 40

112-❷ 지름에 대한 원주각의 크기는 $90°$이므로 오른쪽 그림과 같이 원의 서로 다른 지름 2개가 직사각형의 대각선이 되도록 하는 원 위의 4개의 점을 연결하면 직사각형을 만들 수 있다.

따라서 원의 지름 5개 중에서 2개를 택하면 이들을 대각선으로 하는 직사각형이 만들어지므로 구하는 직사각형의 개수는

$$_5C_2 = \frac{5\cdot4}{2\cdot1} = 10$$

답 10

113-❶ 서로 다른 종류의 꽃 9송이를 4송이, 4송이, 1송이씩 세 묶음으로 나누는 방법의 수는

$$_9C_4\cdot{}_5C_4\cdot{}_1C_1\cdot\frac{1}{2!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot5\cdot1\cdot\frac{1}{2}$$
$$=126\cdot5\cdot\frac{1}{2}=315$$

이때 세 묶음으로 나누어진 꽃을 3명에게 나누어 주는 방법의 수는 $3!$이므로 구하는 방법의 수는

$$315\cdot3! = 315\cdot6 = 1890$$

답 1890

113-❷ 먼저 6개의 팀을 2개, 4개의 팀으로 나눈 후 4개의 팀을 다시 2개, 2개의 팀으로 나누는 방법의 수와 같으므로

$$({}_6C_2\cdot{}_4C_4)\cdot\left({}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}\right)$$
$$=\left(\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\cdot1\right)\cdot\left(\frac{4\cdot3}{2\cdot1}\cdot1\cdot\frac{1}{2}\right)$$
$$=15\cdot3=45$$

답 45

다른 풀이 6개의 팀을 2개, 2개, 2개씩 세 묶음으로 나누는 방법의 수는

$$_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!} = \frac{6\cdot5}{2\cdot1}\cdot\frac{4\cdot3}{2\cdot1}\cdot1\cdot\frac{1}{3\cdot2\cdot1}$$
$$=15\cdot6\cdot\frac{1}{6}=15$$

이때 세 묶음 중 부전승으로 올라갈 한 묶음을 선택하는 방법의 수는 3이므로 구하는 방법의 수는

$$15\cdot3=45$$

중단원 연습 문제

본책 307~312쪽

01 ⑤	**02** 8	**03** 240	**04** ④	**05** ②
06 9	**07** 72	**08** ③	**09** ③	**10** 21
11 180	**12** ②	**13** 420	**14** 84	**15** 84
16 3송이	**17** ④	**18** 1	**19** 198번	
20 756	**21** 63	**22** 235	**23** 130	**24** ⑤
25 576	**26** ④	**27** ④		

01 전략 x, y가 자연수임을 이용하여 x, y의 값의 범위를 구하고, x의 값에 따라 y의 개수를 구한다.

풀이 x, y가 자연수이므로 $x\geq1$, $y\geq1$

$5x+y\leq12$에서 $5x<12$ $\therefore x<\frac{12}{5}$

즉 $1\leq x<\frac{12}{5}$이므로 $x=1$ 또는 $x=2$

(i) $x=1$일 때,

$5+y\leq12$, 즉 $y\leq7$이므로 y는

$1, 2, 3, \cdots, 7$의 7개

(ii) $x=2$일 때,

$10+y\leq12$, 즉 $y\leq2$이므로 y는

$1, 2$의 2개

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$$7+2=9$$

답 ⑤

02 전략 270을 소인수분해한 후 홀수가 되는 조건을 생각한다.

풀이 270을 소인수분해하면 $270=2\cdot3^3\cdot5$

2의 양의 약수 중 홀수는 1의 1개

3^3의 양의 약수 중 홀수는

$1, 3, 3^2, 3^3$의 4개

5의 양의 약수 중 홀수는

$1, 5$의 2개

따라서 구하는 홀수의 개수는

$1\cdot4\cdot2=8$ 답 8

03 전략 돌아올 때에는 A 지점에서 C 지점으로 갈 때 지나간 길을 제외한다.

풀이 A → B → C로 가는 방법의 수는

$5\cdot4=20$ ··· ❶

C → B → A로 가는 방법의 수는 A → B, B → C로 갔던 길을 제외해야 하므로

$(4-1)\cdot(5-1)=12$ ··· ❷

따라서 구하는 방법의 수는

$20\cdot12=240$ ··· ❸

답 240

채점 기준	비율
❶ A → B → C로 가는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ C → B → A로 가는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ A → C → A로 가는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

04 전략 곱의 법칙을 이용하여 지불하는 방법의 수를 구한다.

풀이 100원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

500원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개의 3가지

1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장의 4가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는

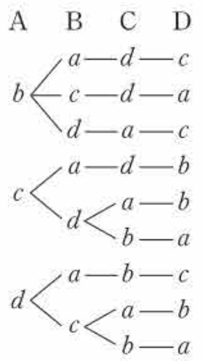
$4\cdot3\cdot4-1=47$ 답 ④

05 전략 규칙성을 찾기 어려운 경우의 수는 수형도를 이용하여 중복되지 않고 빠짐없이 모든 경우를 나열하여 구한다.

풀이 4명의 학생 A, B, C, D의 보고서를 각각 a, b, c, d라 할 때, 자신의 것이 아닌 다른 학생의 보고서를 읽는 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 9이다.

답 ②



06 전략 먼저 ${}_nP_r$를 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 ${}_nP_4-6{}_nP_3+20{}_{n-1}P_2=0$에서

$n(n-1)(n-2)(n-3)-6n(n-1)(n-2)$
$+20(n-1)(n-2)=0$ ··· ❶

$n\geq4$이므로 양변을 $(n-1)(n-2)$로 나누면

$n(n-3)-6n+20=0$

$n^2-9n+20=0$, $(n-4)(n-5)=0$

$\therefore n=4$ 또는 $n=5$ ··· ❷

따라서 구하는 자연수 n의 값의 합은

$4+5=9$ ··· ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ n의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

07 전략 '짝홀짝홀짝홀' 또는 '홀짝홀짝홀짝'으로 나열하는 방법의 수를 구한다.

풀이 홀수 1, 3, 5를 나열하는 방법의 수는

$3!=6$ ··· ❶

짝수 2, 4, 6을 나열하는 방법의 수는

$3!=6$ ··· ❷

각 경우에 대하여 홀수부터 나열하는 경우와 짝수부터 나열하는 경우의 2가지가 있다.

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot6\cdot2=72$ ··· ❸

답 72

채점 기준	비율
❶ 홀수를 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 짝수를 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 교대로 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %

08 전략 f, g 사이에 적어도 1개의 문자가 들어가는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 f, g가 이웃하는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

풀이 7개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$7!=5040$

f, g를 한 묶음으로 생각하여 6개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $6!=720$

그 각각에 대하여 f와 g가 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2!=2$

이므로 f, g가 서로 이웃하도록 나열하는 방법의 수는

$720\cdot2=1440$

따라서 구하는 경우의 수는

$5040-1440=3600$ 답 ③

09

전략 만의 자리에 작은 수부터 차례로 대입하여 각 경우의 자연수의 개수를 구한다.

풀이 1□□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

2□□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

31□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

이때 32145는 32□□□ 꼴인 자연수 중에서 가장 작은 자연수이므로

$24+24+6+1=55$(번째)

로 나타난다. 답 ③

10

전략 n개 중에서 특정한 m개를 반드시 포함하여 r개를 뽑는 방법의 수는 ${}_{n-m}C_{r-m}$이고, 특정한 m개를 포함하지 않고 r개를 뽑는 방법의 수는 ${}_{n-m}C_r$이다.

풀이 7개의 공 중에서 특정한 1개를 포함하여 5개를 뽑는 방법의 수는 특정한 1개를 제외한 6개의 공 중에서 4개를 뽑는 방법의 수와 같으므로

$$a={}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$$

또 7개의 공 중에서 특정한 1개를 포함하지 않는 방법의 수는 특정한 1개를 제외한 6개의 공 중에서 5개를 뽑는 방법의 수와 같으므로

$b={}_6C_5={}_6C_1=6$

$\therefore a+b=21$ 답 21

11

전략 B와 G를 제외한 나머지 6개의 문자 중에서 2개를 뽑는 조합의 수를 구한 후 B와 G를 포함한 4개의 문자를 B, G가 이웃하지 않게 나열하는 방법의 수를 구한다.

풀이 8개의 문자 중에서 B, G를 포함하여 4개를 뽑는 방법의 수는 B와 G를 제외한 6개의 문자 중에서 2개를 뽑는 방법의 수와 같으므로

$${}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$$

B, G를 포함하여 뽑은 4개의 문자 중에서 B, G를 제외한 2개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $2!$이고, 그 사이와 양 끝의 3개의 자리 중에서 2개의 자리에 B, G를 나열하는 방법의 수는 ${}_3P_2$이므로 B, G가 이웃하지 않게 나열하는 방법의 수는

$2!\cdot{}_3P_2=2\cdot6=12$

따라서 구하는 방법의 수는

$15\cdot12=180$ 답 180

다른 풀이 B, G가 이웃하지 않게 나열하는 방법의 수는 뽑은 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수에서 B와 G를 서로 이웃하게 나열하는 방법의 수를 뺀 것과 같다.

뽑힌 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$4!=24$

B, G를 한 묶음으로 생각하여 3개를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!$이고, 그 각각의 경우에 대하여 B, G가 자리를 바꾸는 방법의 수가 $2!$이므로 B와 G를 서로 이웃하게 나열하는 방법의 수는

$3!\cdot2!=6\cdot2=12$

따라서 B, G가 이웃하지 않게 나열하는 방법의 수는

$24-12=12$

12

전략 원에서 지름에 대한 원주각의 크기는 90°임을 이용하여 직각삼각형의 개수를 구한다.

풀이 6개의 점으로 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$${}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$$

주어진 점들을 연결하여 만들 수 있는 원의 지름은 3개이고, 오른쪽 그림과 같이 원의 지름 한 개에 대하여 4개의 직각삼각형을 만들 수 있으므로 만들 수 있는 직각삼각형의 개수는

$3\cdot4=12$

따라서 직각삼각형이 아닌 삼각형의 개수는

$20-12=8$ 답 ②

13

전략 과일을 3개, 3개, 1개씩 세 묶음으로 나눈 후 세 사람에게 분배하는 경우의 수이다.

풀이 과일 7개를 3개, 3개, 1개씩 세 묶음으로 나누는 방법의 수는

$${}_7C_3\cdot{}_4C_3\cdot{}_1C_1\cdot\frac{1}{2!}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}\cdot4\cdot1\cdot\frac{1}{2}=70$$

이때 세 묶음으로 나누어진 과일을 A, B, C 세 사람에게 나누어 주는 방법의 수는 $3!$이므로 구하는 방법의 수는

$70\cdot3!=70\cdot6=420$ 답 420

14

전략 A와 C에 같은 색을 칠하는 경우와 다른 색을 칠하는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) A와 C에 같은 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, D에

칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 3가지이므로

$4\cdot3\cdot1\cdot3=36$

(ii) A와 C에 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지이므로

$4\cdot3\cdot2\cdot2=48$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$36+48=84$ 답 84

15 전략 a, c가 서로 이웃하는 경우와 c, e가 서로 이웃하는 경우를 구한 후 중복되는 경우를 제외한다.

풀이 (i) a, c가 서로 이웃하는 경우

a, c를 한 묶음으로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!$이고, a와 c가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!$이므로

$4!\cdot2!=48$

(ii) c, e가 서로 이웃하는 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 $4!\cdot2!=48$

(iii) a와 c, c와 e가 동시에 이웃하는 경우

a, c, e를 한 묶음으로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!$이고, a와 c, c와 e가 동시에 이웃하는 경우는 ace, eca의 2가지이므로

$3!\cdot2=12$

이상에서 구하는 경우의 수는

$48+48-12=84$ 답 84

Remark▶

a, c가 서로 이웃하는 경우의 수와 c, e가 서로 이웃하는 경우의 수에는 각각 a와 c, c와 e가 동시에 이웃하는 경우의 수가 포함되어 있으므로 a와 c, c와 e가 동시에 이웃하는 경우의 수를 빼야 한다.
이때 a와 c, c와 e가 동시에 이웃하려면 c는 a와 e 사이에 있어야 하므로 그 경우의 수는 ace, eca의 2가지임에 주의한다.

16 전략 적어도 한쪽 끝에 노란색 꽃이 오도록 꽃을 심는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 양 끝에 흰색 꽃을 심는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

풀이 6송이의 꽃을 일렬로 심는 경우의 수는

$6!=720$

흰색 꽃을 n송이라 하면 양 끝에 흰색 꽃을 심는 경우의 수는

${}_nP_2\cdot4!=24n(n-1)$

이때 적어도 한쪽 끝에 노란색 꽃이 오도록 꽃을 심는 경우의 수가 576이므로

$720-24n(n-1)=576$

$n(n-1)=6=3\cdot2$ $\quad\therefore n=3$

따라서 흰색 꽃은 3송이이다. 답 3송이

17 전략 끝의 두 자리 수가 4의 배수인 수의 개수를 구한다.

풀이 4의 배수인 네 자리 자연수는

□□04, □□12, □□20, □□24,
□□32, □□40

꼴이다.

(i) □□04, □□20, □□40 꼴의 자연수

천의 자리, 백의 자리에는 끝의 두 자리의 숫자를 제외한 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로

$3\cdot{}_3P_2=18$

(ii) □□12, □□24, □□32 꼴의 자연수

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 끝의 두 자리의 숫자를 제외한 2가지, 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리와 끝의 두 자리의 숫자를 제외한 2가지이므로

$3\cdot2\cdot2=12$

(i), (ii)에서 구하는 4의 배수의 개수는

$18+12=30$ 답 ④

18 전략 먼저 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 n의 값을 구한다.

풀이 $\alpha+\beta=\dfrac{6}{5}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{{}_nC_5}{{}_nC_6}=\frac{6}{5} \quad \cdots ❶$$

즉

$$\frac{\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}=\frac{6}{5}$$

이고, $n\geq6$이므로

$$\frac{6}{n-5}=\frac{6}{5} \qquad \therefore n=10 \quad \cdots ❷$$

따라서 주어진 이차방정식은

$${}_{10}C_6x^2-{}_{10}C_5x+{}_{10}C_4=0$$

이므로

$$\alpha\beta=\frac{{}_{10}C_4}{{}_{10}C_6}=\frac{{}_{10}C_4}{{}_{10}C_4}=1$$ ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ $\frac{{}_nC_5}{{}_nC_6}=\frac{6}{5}$임을 알 수 있다.	30 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

19 전략 악수를 하려면 2명이 있어야 하므로 n명이 모두 서로 악수를 하였을 때, 악수를 한 총횟수는 ${}_nC_2$이다.

풀이 24명 중에서 악수할 2명을 택하는 방법의 수는

$${}_{24}C_2=\frac{24\cdot23}{2\cdot1}=276$$

부인 12명 중에서 2명을 택하는 방법의 수는

$${}_{12}C_2=\frac{12\cdot11}{2\cdot1}=66$$

24명 중에서 부부 2명을 택하는 방법의 수는 12

따라서 악수한 총횟수는

$$276-(66+12)=198\text{(번)}$$

답 198번

20 전략 공통으로 신청하는 선택과목이 1개 이하이므로 0개인 경우와 1개인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) 공통으로 신청하는 선택과목이 0개일 때,

연지가 8개의 선택과목 중에서 2개를 택하고, 혁재가 남은 6개의 선택과목 중에서 2개를 택하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_8C_2\cdot{}_6C_2=28\cdot15=420$$

(ii) 공통으로 신청하는 선택과목이 1개일 때,

연지가 8개의 선택과목 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_8C_2=28$$

혁재가 연지가 택한 2개의 선택과목 중에서 1개를 택하고, 연지가 택하지 않은 6개의 선택과목 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

$${}_2C_1\cdot{}_6C_1=2\cdot6=12$$

따라서 연지와 혁재가 공통으로 신청하는 선택과목이 1개인 경우의 수는

$$28\cdot12=336$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$420+336=756$$

답 756

21 전략 1부터 40까지의 홀수를 3으로 나눈 나머지에 따라 분류한다.

풀이 1부터 40까지의 홀수 중에서 3으로 나눈 나머지가

0인 수는 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39의 7개

1인 수는 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37의 7개

2인 수는 5, 11, 17, 23, 29, 35의 6개

두 수의 합이 3의 배수가 되려면 나머지가 0인 수에서 2개를 뽑거나 나머지가 1과 2인 수를 각각 1개씩 뽑아야 한다.

(i) 나머지가 0인 수 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는

$${}_7C_2=\frac{7\cdot6}{2\cdot1}=21$$

(ii) 나머지가 1과 2인 수를 각각 1개씩 뽑는 경우의 수는

$${}_7C_1\cdot{}_6C_1=42$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$21+42=63$$

답 63

22 전략 일직선 위에 있지 않은 서로 다른 n개의 점으로 만들 수 있는 직선의 개수는 ${}_nC_2$, 삼각형의 개수는 ${}_nC_3$이다.

풀이 (i) 12개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_{12}C_2=\frac{12\cdot11}{2\cdot1}=66$$

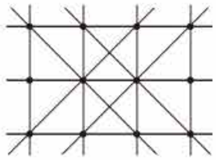
일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_3C_2={}_3C_1=3$$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_4C_2=6$$

이때 오른쪽 그림과 같이 일직선 위에 3개의 점이 있는 경우는 8가지이고, 일직선 위에 4개의 점이 있는 경우는 3가지이므로 서로 다른 직선의 개수는



$$a=66-8\cdot3-3\cdot6+8+3=35$$ ··· ❶

(ii) 12개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$${}_{12}C_3=\frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}=220$$

이때 일직선 위에 있는 3개의 점을 택하는 방법의 수는

$$8\cdot{}_3C_3+3\cdot{}_4C_3=8\cdot1+3\cdot4=20$$

$$\therefore b=220-20=200$$ ··· ❷

(i), (ii)에서

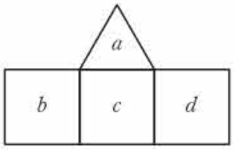
$a+b=235$ ⋯ ❸

답 235

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

23 전략 정삼각형에 적힌 수를 기준으로 경우를 나누어 생각한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 정삼각형에 적힌 수를 a, 정사각형에 적힌 수를 왼쪽부터 차례로 b, c, d라 하자.



조건 ㈎, ㈏에서 a보다 작은 수가 적어도 2개 존재해야 하므로 $a \geq 3$

(i) $a=3$일 때,

c는 1, 2 중 하나이고, 이 각각에 대하여 b, d는 1, 2 중 c가 아닌 수이므로 $a=3$인 경우의 수는

$2 \cdot 1 \cdot 1=2$

(ii) $a=4$일 때,

c는 1, 2, 3 중 하나이고, 이 각각에 대하여 b, d는 1, 2, 3 중 c가 아닌 수이므로 $a=4$인 경우의 수는

$3 \cdot 2 \cdot 2=12$

(iii) $a=5$일 때,

c는 1, 2, 3, 4 중 하나이고, 이 각각에 대하여 b, d는 1, 2, 3, 4 중 c가 아닌 수이므로 $a=5$인 경우의 수는

$4 \cdot 3 \cdot 3=36$

(iv) $a=6$일 때,

c는 1, 2, 3, 4, 5 중 하나이고, 이 각각에 대하여 b, d는 1, 2, 3, 4, 5 중 c가 아닌 수이므로 $a=6$인 경우의 수는

$5 \cdot 4 \cdot 4=80$

이상에서 구하는 경우의 수는

$2+12+36+80=130$

답 130

다른 풀이 조건 ㈎에서 $a>b$, $a>c$, $a>d$이고, 조건 ㈏에서 $b \neq c$, $c \neq d$이다.

(i) $b \neq d$일 때,

a, b, c, d는 모두 다르므로 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 서로 다른 4개의 수를 택하는 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$

이 각각에 대하여 4개의 수 중에서 가장 큰 수를 a, 나머지 3개의 수를 b, c, d로 정하면 되므로 그 경우의 수는

$1 \cdot 3!=6$

따라서 $b \neq d$인 경우의 수는

$15 \cdot 6=90$

(ii) $b=d$일 때,

a, b, c, d 중 서로 다른 수는 3개이므로 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 서로 다른 3개의 수를 택하는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

이 각각에 대하여 3개의 수 중에서 가장 큰 수를 a, 나머지 2개의 수를 $b(=d)$, c로 정하면 되므로 그 경우의 수는

$1 \cdot 2!=2$

따라서 $b=d$인 경우의 수는

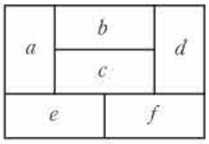
$20 \cdot 2=40$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$90+40=130$

24 전략 1명의 조사원이 담당해야 할 이웃한 2개 지역을 먼저 정한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 6개 지역을 각각 a, b, c, d, e, f라 하면 서로 이웃한 2개 지역을 택하는 경우의 수는



a와 b, a와 c, a와 e,
b와 c, b와 d, c와 d, c와 e, c와 f,
d와 f, e와 f의 10

서로 이웃한 2개 지역을 조사하는 조사원을 정하는 경우의 수는 5

나머지 4명의 조사원이 남은 4개 지역을 조사하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$10 \cdot 5 \cdot 24=1200$

답 ⑤

25 전략 A와 B, C와 D가 앉는 경우의 수를 먼저 구한다.

풀이 조건 ㈎에서 A와 B가 같이 앉을 수 있는 2인용 의자는 마부가 앉는 의자를 제외한 3개이고, A, B 두 사람이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!이므로 A와 B가 이웃하여 앉는 경우의 수는

$3 \cdot 2!=6$

남은 5개의 좌석에 C와 D가 앉는 경우의 수는

$_5P_2=20$

이때 C와 D가 이웃하여 앉을 수 있는 2인용 의자는 A와 B가 앉는 의자, 마부가 앉는 의자를 제외한 2개이고, C, D 두 사람이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$이므로 C와 D가 이웃하여 앉는 경우의 수는

$2\cdot 2!=4$

조건 (나)에서 C와 D가 이웃하여 앉지 않아야 하므로 그 경우의 수는

$20-4=16$

남은 3개의 좌석에 E, F, G가 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot 16\cdot 6=576$ 답 576

26 전략 요가를 하는 3일을 선택한 후 수영, 줄넘기 중 한 가지를 하는 하루를 선택하면 남은 하루는 농구, 축구 중 한 가지를 하는 날이다.

풀이 5일 중에서 요가를 하는 3일을 선택하는 경우의 수는

$$_5C_3={}_5C_2=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=10$$

요가를 하지 않는 2일 중 하루를 선택하여 수영, 줄넘기 중 한 가지를 하는 경우의 수는

$_2C_1\cdot {}_2C_1=2\cdot 2=4$

남은 하루에 농구, 축구 중 한 가지를 하는 경우의 수는

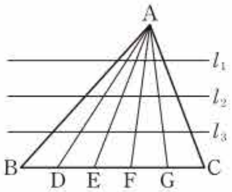
$_2C_1=2$

따라서 구하는 계획의 가짓수는

$10\cdot 4\cdot 2=80$ 답 ④

27 전략 삼각형을 만들기 위해 필요한 직선을 택하는 경우의 수를 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 6개의 직선 AB, AD, AE, AF, AG, AC 중 서로 다른 2개의 직선을 택하고, 4개의 직선 l_1, l_2, l_3, BC 중 1개의 직선을 택하면 삼각형이 1개 만들어진다.



따라서 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$_6C_2\cdot {}_4C_1=15\cdot 4=60$ 답 ④

12 행렬

V. 행렬

유제 본책 318~343쪽

114-① (1) $i=1,\ 2,\ j=1,\ 2$이므로 행렬 A는 2×2 행렬, 즉 이차 정사각행렬이다.

$i=j$이면 $a_{ij}=1$, $i\neq j$이면 $a_{ij}=-1$이므로

$a_{11}=1,\ a_{12}=-1,\ a_{21}=-1,\ a_{22}=1$

$$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $i=1,\ 2,\ j=1,\ 2,\ 3$이므로 행렬 A는 2×3 행렬이고, $a_{ij}=(-1)^{i+j-1}$이므로

$a_{11}=(-1)^{1+1-1}=-1,\ a_{12}=(-1)^{1+2-1}=1,$

$a_{13}=(-1)^{1+3-1}=-1,\ a_{21}=(-1)^{2+1-1}=1,$

$a_{22}=(-1)^{2+2-1}=-1,\ a_{23}=(-1)^{2+3-1}=1$

$$\therefore A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

답 (1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

115-① 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2x+y=3$ ⋯ ㉠ $x-y=3$ ⋯ ㉡

$x-2y=z$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=2,\ y=-1$

이것을 ㉢에 대입하면 $z=4$

$\therefore x+y+z=5$ 답 5

115-② 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$\alpha=4-\beta,\ \beta=-\frac{2}{\alpha}$$

이므로 $\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=-2$

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{4^2-2\cdot(-2)}{-2}=-10$$ 답 -10

116-① $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}+X$

$=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

에서

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}+X=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$\therefore X=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

116-❷ $A-B=B-X$에서

$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}-X$

$\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}-X$

$\therefore X=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

117-❶ $6X-2A=3(X-B)+A$에서

$6X-2A=3X-3B+A$

$6X-3X=-3B+A+2A$

$3X=-3B+3A$

$\therefore X=A-B$

$=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

117-❷ $\begin{cases} 2X+Y=A & \cdots\cdots ㉠ \\ X-Y=B & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $3X=A+B$

$\therefore X=\frac{1}{3}(A+B)$

$=\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

㉠$-2\times$㉡을 하면 $3Y=A-2B$

$\therefore Y=\frac{1}{3}(A-2B)$

$=\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

$=\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

답 $X=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

다른 풀이 $X=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$을 ㉡에 대입하면

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-Y=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore Y=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

118-❶ $a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2b \\ -b \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a+2b \\ -b \\ -a+b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a+2b=-1$, $-b=2$, $-a+b=c$

세 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-2$, $c=-5$

$\therefore a+b+c=-4$ 답 -4

118-❷ $xA+yB=C$에서

$x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & -x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2y & -y \\ y & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2y & x-y \\ x+y & -x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2y=-4 \cdots ㉠$ $x-y=5 \cdots ㉡$

$x+y=1 \cdots ㉢$ $-x=-3 \cdots ㉣$

㉠, ㉣에서 $x=3$, $y=-2$이고, 이것은 ㉡, ㉢을 만족시키므로

$x=3$, $y=-2$ 답 $x=3$, $y=-2$

119-❶ $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2b & -b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$에서

좌변을 간단히 하면

$\begin{pmatrix} a+2b & 3a+b \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a+2b=4$, $3a+b=7$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

$\therefore a+b=3$ 답 3

119-❷ $AB=O$이므로

$$\begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & y \\ y & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4x+2y & xy+2 \\ 12-6y & 3y-6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$4x+2y=0 \quad \cdots$ ㉠ $\qquad xy+2=0 \quad \cdots$ ㉡

$12-6y=0 \quad \cdots$ ㉢ $\qquad 3y-6=0 \quad \cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서 $y=2$이므로 이것을 ㉠에 대입하여 풀면

$x=-1$

$x=-1$, $y=2$는 ㉡을 만족시키므로

$x=-1$, $y=2$ 　　　　　　 **답** $x=-1$, $y=2$

120-❶ $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

자연수 n에 대하여 A^n을 추정하면

$$A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5n & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{350}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5\cdot 350 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1750 & 1 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A^{350}의 $(2,\ 1)$ 성분은 1750이다.

답 1750

120-❷ $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$이므로

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

자연수 n에 대하여 A^n을 추정하면

$$A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{10}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{10} \end{pmatrix}$$

또 $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$$B^2=BB=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3=B^2B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

자연수 n에 대하여 B^n을 추정하면

$$B^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B^{30}=\begin{pmatrix} 2^{30} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{10}+B^{30}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{10} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2^{30} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^{30}+1 & 0 \\ 0 & 3^{10}+1 \end{pmatrix}$$

답 $\begin{pmatrix} 2^{30}+1 & 0 \\ 0 & 3^{10}+1 \end{pmatrix}$

121-❶ $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$에서

$A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$

$AB+BA=2AB \qquad \therefore AB=BA$

따라서 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 2+3x & 6+4x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 2+3x \\ 11 & 6+4x \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2+3x=11, \quad 3x=9 \quad \therefore x=3$ 　　　　 **답** 3

121-❷ ① $(A+B)(A-B)$

$=A^2-AB+BA-B^2$

$\neq A^2-B^2$

② $(AB)^2=(AB)(AB)=ABAB\neq A^2B^2$

③ $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$일 때,

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

이지만 $A\neq O$이다.

④ $A^2=O$이면 $A^2A=OA$, 즉 $A^3=O$이다.

⑤ $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$일 때,

$$AB=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

이지만 $A\neq O$이고 $B\neq O$이다.

답 ④

122-❶ $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$이므로

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$
$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$A^3=-E$이므로

$$A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$$

따라서 $A^n=E$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 6이다. **답** 6

다른 풀이 $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$이므로 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$$A^2-A+E=O$$

위의 식의 양변에 $A+E$를 곱하면

$$(A+E)(A^2-A+E)=O$$
$$A^3+E=O \qquad \therefore A^3=-E$$
$$\therefore A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$$

따라서 $A^n=E$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 6이다.

122-❷ $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$이므로

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$A^2=2E$이므로

$$A^{500}=(A^2)^{250}=(2E)^{250}=2^{250}E^{250}=2^{250}E$$
$$=2^{250}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^{250} & 0 \\ 0 & 2^{250} \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A^{500}의 모든 성분의 합은

$$2^{250}+2^{250}=2\cdot 2^{250}=2^{251}$$
$$\therefore k=251$$ **답** 251

다른 풀이 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$이므로 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$$A^2-2E=O \qquad \therefore A^2=2E$$

따라서 $A^{500}=(A^2)^{250}=2^{250}E=\begin{pmatrix} 2^{250} & 0 \\ 0 & 2^{250} \end{pmatrix}$이므로

행렬 A^{500}의 모든 성분의 합은

$$2^{250}+2^{250}=2\cdot 2^{250}=2^{251}$$
$$\therefore k=251$$

중단원 연습 문제

본책 344~348쪽

01 ③ **02** 2 **03** $\begin{pmatrix} -16 & -2 \\ -12 & 24 \end{pmatrix}$

04 $X=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ **05** 4

06 ① **07** -4 **08** $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **09** ④

10 $x=1$, $y=\frac{1}{2}$ **11** $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ **12** ③

13 ⑤ **14** 10 **15** ② **16** -2

17 251 **18** ③ **19** 37 **20** ⑤ **21** ④

01 **전략** $a_{ij}=i^2-j$에 $i=1, 2$, $j=1, 2, 3$을 각각 대입하여 a_{ij}의 값을 구한다.

풀이 $a_{ij}=i^2-j$이므로

$$a_{12}=1^2-2=-1,\ a_{21}=2^2-1=3,$$
$$a_{23}=2^2-3=1$$
$$\therefore a_{12}+a_{21}+a_{23}=3$$ **답** ③

02 **전략** 두 행렬 A, B의 대응하는 성분이 각각 같아야 함을 이용하여 a, b에 대한 연립방정식을 세운다.

풀이 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=2,\ ab=1$ ⋯ ❶

두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=1$ ⋯ ❷

$\therefore a^2+b^2=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ a, b에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a+b=2,\ ab=1$$
$$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=2^2-2\cdot 1=2$$

Remark▶ 곱셈 공식의 변형

① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$
② $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$,
$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

03 전략 행렬 X가 포함된 항은 좌변으로, 나머지 항은 우변으로 이항한 후 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 이용하여 행렬 X를 구한다.

풀이 $X-2(2A+X)+3B=B$에서

$X-4A-2X+3B=B,\qquad -X=4A-2B$

$\therefore X=-4A+2B$

$$=-4\begin{pmatrix}2&3\\4&-6\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-4&5\\2&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-8&-12\\-16&24\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-8&10\\4&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-16&-2\\-12&24\end{pmatrix}$$

답 $\begin{pmatrix}-16&-2\\-12&24\end{pmatrix}$

04 전략 주어진 등식을 연립하여 X, Y를 각각 A, B로 나타낸다.

풀이 $\begin{cases}X+2Y=A & \cdots\cdots ㉠\\ X-Y=2B & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠$+2\times$㉡을 하면 $\quad 3X=A+4B$

$\therefore X=\frac{1}{3}(A+4B)$

$$=\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix}1&5\\-2&-1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}-1&1\\2&1\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix}1&5\\-2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4&4\\8&4\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3&9\\6&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3\\2&1\end{pmatrix}$$

㉠$-$㉡을 하면 $\quad 3Y=A-2B$

$\therefore Y=\frac{1}{3}(A-2B)$

$$=\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix}1&5\\-2&-1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1&1\\2&1\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix}1&5\\-2&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&2\\4&2\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&3\\-6&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-1\end{pmatrix}$$

답 $X=\begin{pmatrix}-1&3\\2&1\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-1\end{pmatrix}$

05 전략 두 행렬이 서로 같을 조건을 이용하여 x, y의 값을 구한다.

풀이 $\begin{pmatrix}-1&3\\10&5\end{pmatrix}=xA+yB$에서

$$\begin{pmatrix}-1&3\\10&5\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}-1&2\\3&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2&-3\\1&2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-x&2x\\3x&x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2y&-3y\\y&2y\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-x+2y&2x-3y\\3x+y&x+2y\end{pmatrix}\quad\cdots ❶$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-x+2y=-1 \quad \cdots\cdots ㉠$
$2x-3y=3 \quad \cdots\cdots ㉡$
$3x+y=10 \quad \cdots\cdots ㉢$
$x+2y=5 \quad \cdots\cdots ㉣ \quad \cdots ❷$

㉠, ㉣을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=1$이고, 이것은 ㉡, ㉢을 만족시키므로

$x=3,\ y=1 \qquad \therefore x+y=4 \quad \cdots ❸$

답 4

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식에 A, B를 대입하여 정리할 수 있다.	40 %
❷ x, y에 대한 방정식을 세울 수 있다.	30 %
❸ $x+y$의 값을 구할 수 있다.	30 %

06 전략 행렬 X만 좌변에 남기고 나머지 항은 우변으로 이항한 후 계산한다.

풀이 $X+B=AB$에서

$X=AB-B$

$$=\begin{pmatrix}1&2\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\1&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0\\1&-2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}5&-4\\4&-8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-4\\3&-6\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은

$2+(-4)+3+(-6)=-5$

답 ①

07 전략 A^2을 구한 후 두 행렬이 서로 같을 조건을 이용한다.

풀이 $A^2=O$이므로

$$\begin{pmatrix}a&1\\-4&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&1\\-4&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}a^2-4&a+b\\-4a-4b&-4+b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-4=0,\ a+b=0,\ -4a-4b=0,\ -4+b^2=0$

네 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-2$ 또는 $a=-2,\ b=2$

$\therefore\ ab=-4$ 답 -4

08 전략 주어진 두 식을 연립하여 행렬 X, Y를 구한다.

풀이 $X+2Y=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}$ ...... ㉠

$X-2Y=\begin{pmatrix}-3&1\\2&1\end{pmatrix}$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면 $2X=\begin{pmatrix}-2&0\\4&4\end{pmatrix}$

$\therefore\ X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&0\\4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\2&2\end{pmatrix}$

㉠−㉡을 하면 $4Y=\begin{pmatrix}4&-2\\0&2\end{pmatrix}$

$\therefore\ 2Y=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}$

$\therefore\ X^2-4Y^2=X^2-(2Y)^2$

$=\begin{pmatrix}-1&0\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\2&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&0\\2&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&-3\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-3&3\\2&3\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}-3&3\\2&3\end{pmatrix}$

Remark▶

행렬의 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하지 않으므로

$(X+2Y)(X-2Y)\neq X^2-4Y^2$

09 전략 $A^2,\ A^3,\ A^4,\ \cdots$을 차례로 구하여 규칙성을 찾아 A^n (n은 자연수)을 구한다.

풀이 $A=\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}$이므로

$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2a\\0&1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&2a\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3a\\0&1\end{pmatrix}$

⋮

자연수 n에 대하여 A^n을 추정하면

$A^n=\begin{pmatrix}1&na\\0&1\end{pmatrix}$

이때 $A^n=\begin{pmatrix}1&100a\\0&1\end{pmatrix}$이므로 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$na=100a\qquad\therefore\ n=100$ 답 ④

10 전략 주어진 등식을 간단히 한 후 두 행렬이 서로 같을 조건을 이용한다.

풀이 $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$에서

$A^2-AB-BA+B^2=A^2-2AB+B^2$

$-AB-BA=-2AB\qquad\therefore\ AB=BA$

따라서 $\begin{pmatrix}3&2\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&1\\y&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&1\\y&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\1&5\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}3x+2y&7\\x+5y&11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+1&2x+5\\3y+2&2y+10\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$3x+2y=3x+1$ ...... ㉠

$7=2x+5$ ...... ㉡

$x+5y=3y+2$ ...... ㉢

$11=2y+10$ ...... ㉣

㉡, ㉣에서 $x=1,\ y=\frac{1}{2}$이고, 이것은 ㉠, ㉢을 만족시키므로

$x=1,\ y=\frac{1}{2}$ 답 $x=1,\ y=\frac{1}{2}$

11 전략 $A^n=kE$ (k는 실수)가 되는 자연수 n의 값을 구한다.

풀이 $A=\begin{pmatrix}-2&5\\-1&2\end{pmatrix}$이므로

$A^2=\begin{pmatrix}-2&5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&5\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ ··· ❶

$A^2=-E$이므로

$A^{50}=(A^2)^{25}=(-E)^{25}=-E$ ··· ❷

$X=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$라 하면 $A^{50}X=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-a\\-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-a=-2,\ -b=5\qquad\therefore\ a=2,\ b=-5$

$\therefore\ X=\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ ··· ❸

답 $\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$

채점 기준	비율
❶ A^2을 구할 수 있다.	30 %
❷ $A^{50}=-E$임을 알 수 있다.	30 %
❸ X를 구할 수 있다.	40 %

다른 풀이 $A=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$이므로 케일리-해밀턴 정리에 의하여

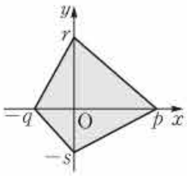
$$A^2+E=O \qquad \therefore A^2=-E$$

$$\therefore A^{50}=(A^2)^{25}=(-E)^{25}=-E$$

12

전략 $S(A)$와 $S(B)$를 각각 a, b, c, d에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 행렬 $X=\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$의 모든 성분이 양수이므로 네 점 $(p,\ 0)$, $(-q,\ 0)$, $(0,\ r)$, $(0,\ -s)$를 꼭짓점으로 하는 사각형은 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다.



$$\therefore S(X)=\frac{1}{2}(pr+ps+qr+qs)$$
$$=\frac{1}{2}\{p(r+s)+q(r+s)\}$$
$$=\frac{1}{2}(p+q)(r+s)$$

ㄱ. $S(A)=\frac{1}{2}(a+b)(c+d)$,

$S(B)=\frac{1}{2}(b+a)(d+c)$이므로

$$S(A)=S(B)$$

ㄴ. $2A=\begin{pmatrix}2a & 2b\\ 2c & 2d\end{pmatrix}$이므로

$$S(2A)=\frac{1}{2}(2a+2b)(2c+2d)$$
$$=2(a+b)(c+d)$$
$$2S(A)=2\cdot\frac{1}{2}(a+b)(c+d)$$
$$=(a+b)(c+d)$$
$$\therefore S(2A)\neq 2S(A)$$

ㄷ. $A+B=\begin{pmatrix}a+b & b+a\\ c+d & d+c\end{pmatrix}$이므로

$$S(A+B)$$
$$=\frac{1}{2}\{(a+b)+(b+a)\}\{(c+d)+(d+c)\}$$
$$=\frac{1}{2}(2a+2b)(2c+2d)$$
$$=2(a+b)(c+d)$$

ㄱ에서 $S(A)=S(B)$이므로

$$5S(A)-S(B)=5S(A)-S(A)=4S(A)$$
$$=4\cdot\frac{1}{2}(a+b)(c+d)$$
$$=2(a+b)(c+d)$$
$$\therefore S(A+B)=5S(A)-S(B)$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답** ③

13

전략 행렬의 곱셈에서 결합법칙이 성립함을 이용한다.

풀이 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$라 하면 $A\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$에서

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}2a-b\\ 2c-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2a-b=0,\ 2c-d=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $A^2\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}=A\left\{A\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}\right\}=A\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 3\end{pmatrix}$에서

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 3\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 3\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$b=4,\ d=3 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=2$, $c=2$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 곱은

$$abcd=2\cdot4\cdot2\cdot3=48$$

답 ⑤

14

전략 A^2, A^3, A^4, $\cdots$을 차례로 구하여 규칙성을 찾아 A^n, A^{n+1} (n은 자연수)을 구한다.

풀이 $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$이므로

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^2 & 2^2-2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}2^2 & 2^2-2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2^3 & 2^3-2^2+2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}2^3 & 2^3-2^2+2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2^4 & 2^4-2^3+2^2-2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$\vdots$$

자연수 n에 대하여 A^n, A^{n+1}을 추정하면

$$A^n=\begin{pmatrix}2^n & 2^n-2^{n-1}+2^{n-2}-\cdots+(-1)^{n+1}\cdot2\\ 0 & (-1)^n\end{pmatrix},$$

$$A^{n+1}=\begin{pmatrix}2^{n+1} & 2^{n+1}-2^n+2^{n-1}-\cdots+(-1)^{n+2}\cdot2\\ 0 & (-1)^{n+1}\end{pmatrix}$$

이므로

$$S_n=2^n+2^n-2^{n-1}+2^{n-2}-\cdots+(-1)^{n+1}\cdot2$$
$$+(-1)^n$$

$S_{n+1}=2^{n+1}+2^{n+1}-2^n+2^{n-1}-\cdots+(-1)^{n+2}\cdot 2$
$+(-1)^{n+1}$

$\therefore S_n+S_{n+1}=2^n+2^{n+1}+2^{n+1}=5\cdot 2^n$

$5\cdot 2^n>5000$에서 $\quad 2^n>1000$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로 n의 최솟값은 10이다.

답 10

15 전략 $AB=-BA$임을 이용하여 보기의 각 등식의 좌변을 변형한다.

풀이 ㄱ. $AB=-BA$이므로 $\quad BA=-AB$

$\therefore (AB)^2=(AB)(AB)=A(BA)B$
$=A(-AB)B=-A^2B^2$

ㄴ. $(A+B)^2=(A+B)(A+B)$
$=A^2+AB+BA+B^2$

이때 $AB=-BA$이므로

$(A+B)^2=A^2+B^2$

ㄷ. $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$

이때 $BA=-AB$이므로

$(A+B)(A-B)=A^2-2AB-B^2$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

16 전략 $(A-E)^2$, $(A-E)^3$, $(A-E)^4$, $\cdots$을 차례로 전개하여 규칙성을 찾는다.

풀이 $(A-E)^2=A^2-2A+E=A-2A+E$
$=-A+E$

$(A-E)^3=(A-E)^2(A-E)$
$=(-A+E)(A-E)=-(A-E)^2$
$=A-E$

$(A-E)^4=(A-E)^3(A-E)$
$=(A-E)(A-E)=(A-E)^2$
$=-A+E$

$\vdots$

$\therefore (A-E)^{2025}=A-E$ ⋯ ❶

$\therefore (A-E)+(A-E)^2+(A-E)^3$
$+(A-E)^4+\cdots+(A-E)^{2025}$
$=\{(A-E)+(-A+E)\}$
$+\{(A-E)+(-A+E)\}+\cdots+(A-E)$
$=A-E$ ⋯ ❷

행렬 A의 모든 성분의 합은 0, 행렬 E의 모든 성분의 합은 2이므로 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$0-2=-2$ ⋯ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ $(A-E)^{2025}=A-E$임을 알 수 있다.	40 %
❷ 주어진 행렬을 간단히 할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 행렬의 모든 성분의 합을 구할 수 있다.	30 %

17 전략 $A\neq kE$ (k는 실수)이므로 먼저 케일리-해밀턴 정리를 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & a \end{pmatrix}$이므로 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2-aA+2E=O$

$A\neq kE$ (k는 실수)이고 $A^2-2A+2E=O$이므로

$-a=-2 \quad \therefore a=2$

즉 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$이므로

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$A^4=-4E$이므로

$A^{500}=(A^4)^{125}=(-4E)^{125}=-4^{125}E^{125}$
$=-4^{125}E=\begin{pmatrix} -4^{125} & 0 \\ 0 & -4^{125} \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^{500}의 모든 성분의 합은

$-4^{125}+(-4^{125})=-2\cdot 4^{125}=-2\cdot 2^{250}=-2^{251}$

$\therefore k=251$

답 251

다른 풀이 $A^2-2A+2E=O$이므로

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & a \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & a \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -a+2 \\ 2a-4 & a^2-2a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-a+2=0$, $2a-4=0$, $a^2-2a=0$

$\therefore a=2$

18 전략 $B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$라 하고 주어진 조건을 이용하여 p, q, r, s 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$라 하면 조건 (가)에 의하여

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p-q \\ r-s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$p-q=0$, $r-s=0$ $\qquad \therefore p=q$, $r=s$

$$\therefore B=\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}$$

이때 조건 (나)에서 $AB=2A$이므로

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p+r & p+r \\ a(p+r) & a(p+r) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2a & 2a \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$p+r=2$

또 $BA=4B$이므로

$$\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}=4\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p(1+a) & p(1+a) \\ r(1+a) & r(1+a) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4p & 4p \\ 4r & 4r \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$1+a=4$ $\qquad \therefore a=3$

즉 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$이므로

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+p & 1+p \\ 3+r & 3+r \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A+B$의 (1, 2) 성분과 (2, 1) 성분의 합은

$$(1+p)+(3+r)=p+r+4=2+4=6$$

답 ③

19 전략 행렬 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$의 거듭제곱을 차례로 구하여 조건을 만족시키는 n의 값을 구한다.

풀이 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 2^2 & 2-2^2 \\ 0 & (-4)^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 2^2 & 2-2^2 \\ 0 & (-4)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2^3 & 2^2-2^3+2^4 \\ 0 & (-4)^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix} 2^3 & 2^2-2^3+2^4 \\ 0 & (-4)^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2^4 & 2^3-2^4+2^5-2^6 \\ 0 & (-4)^4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^5=\begin{pmatrix} 2^4 & 2^3-2^4+2^5-2^6 \\ 0 & (-4)^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2^5 & 2^4-2^5+2^6-2^7+2^8 \\ 0 & (-4)^5 \end{pmatrix}$$

따라서 (1, 2) 성분이 $2^4-2^5+2^6-2^7+2^8$인 행렬이 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^5$이고, 이때 (1, 1) 성분은 $2^5=32$이므로

$n=5$, $a=32$

$\therefore a+n=37$

답 37

20 전략 주어진 조건을 이용하여 B^3+2BA^3을 변형한다.

풀이 조건 (나)에서 $(E-B)^2=E-B$이므로

$E-2B+B^2=E-B$ $\qquad \therefore B^2=B$

조건 (가), (다)에 의하여

$$BA=AB=-B$$

$$\begin{aligned}\therefore B^3+2BA^3&=B^2B+2(BA)A^2\\&=BB+2(-B)A^2\\&=B^2-2(BA)A=B-2(-B)A\\&=B+2BA=B+2(-B)\\&=B-2B=-B\end{aligned}$$

답 ⑤

21 전략 먼저 행렬 A를 구한 후 A^2, A^3, $\cdots$을 차례로 구하여 규칙성을 찾는다.

풀이 $a_{11}=1-1=0$, $a_{12}=1-2=-1$, $a_{21}=2-1=1$, $a_{22}=2-2=0$이므로

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$$

$A^3=A^2A=-EA=-A$

$A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E$

$A^5=A^4A=EA=A$

따라서 A^n (n은 자연수)은 A, $-E$, $-A$, E가 이 순서로 반복되므로

$$A+A^2+A^3+A^4+\cdots+A^{2009}+A^{2010}$$
$$=(A-E-A+E)+(A-E-A+E)+\cdots+A-E$$
$$=A-E=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

즉 구하는 행렬의 (2, 1) 성분은 1이다.

답 ④