수학 100점을 위한 탄탄한 도약!

중학수학 뜀틀 개념편

중3(상)

정답과 해설

마더텅

www.toptutor.co.kr

01 제곱근의 뜻과 성질

Step 1. 개념 다지기

01-1 제곱근의 정의

기본연습 1

(1) 49의 제곱근은 7과 -7이다.
(2) -9의 제곱근은 존재하지 않는다.
(3) 0.09의 제곱근은 0.3과 -0.3이다.
(4) $\frac{1}{64}$의 제곱근은 $\frac{1}{8}$과 $-\frac{1}{8}$이다.

답 (1) $7,\ -7$ (2) 존재하지 않는다. (3) $0.3,\ -0.3$ (4) $\frac{1}{8},\ -\frac{1}{8}$

연습 1

양수 x의 제곱근이 $10,\ -10$이므로
$x=10^2=(-10)^2=100$

답 100

01-2 제곱근의 표현

기본연습 2

(1) 17의 제곱근은 $\pm\sqrt{17}$이다.
(2) 5의 양의 제곱근은 $\sqrt{5}$이다.
(3) $\frac{11}{2}$의 음의 제곱근은 $-\sqrt{\frac{11}{2}}$이다.
(4) 제곱근 25는 $\sqrt{25}=5$이다.

답 (1) $\pm\sqrt{17}$ (2) $\sqrt{5}$ (3) $-\sqrt{\frac{11}{2}}$ (4) 5

연습 2

400의 양의 제곱근이 a이므로
$a=\sqrt{400}=\sqrt{20^2}=20$
따라서 a의 음의 제곱근은
$-\sqrt{a}=-\sqrt{20}$

답 $-\sqrt{20}$

01-3 제곱근의 성질

기본연습 3

(1) $(\sqrt{10})^2=10$
(2) $\sqrt{\left(-\frac{11}{4}\right)^2}=\left|-\frac{11}{4}\right|=\frac{11}{4}$
(3) $(-\sqrt{1.3})^2=1.3$
(4) $\sqrt{15^2}=|15|=15$

답 (1) 10 (2) $\frac{11}{4}$ (3) 1.3 (4) 15

연습 3

$\sqrt{12^2}+\sqrt{(-7)^2}=12+7=19$

답 19

01-4 제곱근의 대소 관계

기본연습 4

(1) $5<7$이므로 $\sqrt{5}<\sqrt{7}$이다.
(2) $4=\sqrt{16}$에서 $16>15$이므로 $4>\sqrt{15}$이다.
(3) $2=\sqrt{4},\ 3=\sqrt{9}$이므로 2와 3 사이의 수는 $\sqrt{5},\ \sqrt{8}$이다.

답 (1) $\sqrt{7}$ (2) $\sqrt{15}$ (3) $\sqrt{5},\ \sqrt{8}$

연습 4

$3\le\sqrt{2x}<5$의 각 변을 제곱하면
$9\le 2x<25$ $\quad\therefore \frac{9}{2}\le x<\frac{25}{2}$
따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x는 $5,\ 6,\ 7,\ \cdots,\ 11,\ 12$의 8개이다.

답 8

Step 2. 대표 문제로 접근하기

01	⑤	02	③, ⑤	03	④	04	⑤	05	④
06	②	07	②	08	⑤	09	⑤	10	②
11	4	12	④	13	2	14	⑤	15	④
16	③	17	②	18	110	19	3	20	③
21	③	22	$\sqrt{\frac{9}{4}},\ \sqrt{0.7^2},\ \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2,\ 0.\dot{4}\dot{9},\ \sqrt{\frac{1}{49}}$						
23	6	24	③	25	176, 275			26	②

유제 01 x는 5의 제곱근이므로 $x^2=5$, 즉 $x=\pm\sqrt{5}$
따라서 바르게 나타낸 것은 ⑤이다.

답 ⑤

유제 02 제곱하여 0이 되는 수는 0이고 양수나 음수의 제곱은 항상 양수이므로 음수의 제곱근은 생각하지 않는다.
따라서 제곱근을 구할 수 없는 수는 음수인 $-2,\ -\frac{1}{4}$이다.

답 ③, ⑤

유제 03 ① $\sqrt{36}=\sqrt{6^2}=6$
② $\sqrt{(-2)^2}=|-2|=-(-2)=2$
③ 10의 제곱근은 $\pm\sqrt{10}$이다.
④ $\sqrt{81}=9$이므로 9의 양의 제곱근은 3이다.
⑤ 제곱근 7은 $\sqrt{7}$이다.
따라서 옳은 것은 ④이다.

답 ④

유제 04 ① $\sqrt{49}=\sqrt{7^2}=7$
② $\sqrt{(-3)^2}=|-3|=-(-3)=3$이므로 제곱근 3은 $\sqrt{3}$이다.
③ 양수의 제곱근은 2개, 0의 제곱근은 1개, 음수의 제곱근은 0개이다. 따라서 모든 수의 제곱근이 2개인 것은 아니다.
④ 제곱근 125는 $\sqrt{125}$이다.
$15^2=225$이므로 제곱근 125는 15가 아니다.
⑤ 9의 제곱근은 $\pm\sqrt{9}=\pm3$이다.
따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

유제 05 $\sqrt{256}=\sqrt{16^2}=16$이므로 16의 음의 제곱근은
$A=-\sqrt{16}=-\sqrt{4^2}=-4$
$(-9)^2=81$이므로 81의 양의 제곱근은
$B=\sqrt{81}=\sqrt{9^2}=9$
$\therefore A+B=(-4)+9=5$

답 ④

유제 06 $5.\dot{4}=x$라 하면

$$\begin{array}{rl} 10x= & 54.444\cdots \\ -)\quad x= & 5.444\cdots \\ \hline 9x= & 49 \end{array}\qquad \therefore x=\frac{49}{9}$$

따라서 $5.\dot{4}=\frac{49}{9}$이므로 $\frac{49}{9}$의 음의 제곱근은
$-\sqrt{\frac{49}{9}}=-\sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2}=-\frac{7}{3}$

답 ②

유제 07 주어진 수의 제곱근을 각각 구하면

$24 \to \pm\sqrt{24}$

$0.9=\dfrac{9}{10} \to \pm\sqrt{\dfrac{9}{10}}=\pm\sqrt{0.9}$

$\dfrac{1}{49} \to \pm\sqrt{\dfrac{1}{49}}=\pm\dfrac{1}{7}$

$0.\dot{4}=\dfrac{4}{9} \to \pm\sqrt{\dfrac{4}{9}}=\pm\dfrac{2}{3}$

$\sqrt{9}=3 \to \pm\sqrt{3}$

따라서 근호를 사용하지 않고 제곱근을 나타낼 수 있는 수는 $\dfrac{1}{49}$, $0.\dot{4}$의 2개이다. 답 ②

유제 08 주어진 수의 제곱근을 각각 구하면

ㄱ. $100 \to \pm\sqrt{100}=\pm\sqrt{10^2}=\pm10$

ㄴ. $\dfrac{25}{121} \to \pm\sqrt{\dfrac{25}{121}}=\pm\sqrt{\left(\dfrac{5}{11}\right)^2}=\pm\dfrac{5}{11}$

ㄷ. $1.\dot{7}=1+0.\dot{7}=1+\dfrac{7}{9}=\dfrac{16}{9}$

$\to \pm\sqrt{\dfrac{16}{9}}=\pm\sqrt{\left(\dfrac{4}{3}\right)^2}=\pm\dfrac{4}{3}$

따라서 근호를 사용하지 않고 제곱근을 나타낼 수 있는 수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

유제 09 ① $(\sqrt{5})^2=5$

② $\sqrt{5^2}=5$

③ $\sqrt{(-5)^2}=|-5|=-(-5)=5$

④ $(-\sqrt{5})^2=5$

⑤ ③에서 $\sqrt{(-5)^2}=5$이므로 $-\sqrt{(-5)^2}=-5$

따라서 그 값이 나머지 넷과 다른 것은 ⑤이다. 답 ⑤

유제 10 ① $\sqrt{\dfrac{1}{25}}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{5}\right)^2}=\dfrac{1}{5}$

② $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$

③ $\sqrt{\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\left|-\dfrac{1}{4}\right|=-\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$

④ $\sqrt{\left(\dfrac{1}{6}\right)^2}=\dfrac{1}{6}$

⑤ $\left(-\sqrt{\dfrac{1}{4}}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

따라서 가장 작은 수는 ②이다. 답 ②

유제 11 $A=\sqrt{(-7)^2}+(-\sqrt{3})^2+\sqrt{121}-\sqrt{(-5)^2}$

$=\sqrt{(-7)^2}+(-\sqrt{3})^2+\sqrt{11^2}-\sqrt{(-5)^2}$

$=7+3+11-5$

$=16$

$\therefore \sqrt{A}=\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=4$ 답 4

유제 12 $\sqrt{4^2}\times\sqrt{(-7)^2}=4\times7=28$ 답 ④

다른풀이

$4^2=16$, $(-7)^2=49$이므로

$\sqrt{4^2}\times\sqrt{(-7)^2}=\sqrt{16}\times\sqrt{49}=4\times7=28$

유제 13 $\sqrt{\left(-\dfrac{1}{9}\right)^2}=\dfrac{1}{9}$이므로 $\sqrt{\left(-\dfrac{1}{9}\right)^2}$의 양의 제곱근 A를 구하면

$A=\sqrt{\dfrac{1}{9}}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{1}{3}$

$(\sqrt{6})^2=6$이므로 $(\sqrt{6})^2$의 음의 제곱근 B를 구하면

$B=-\sqrt{6}$

$\therefore AB^2=\dfrac{1}{3}\times(-\sqrt{6})^2=\dfrac{1}{3}\times6=2$ 답 2

유제 14 $(-\sqrt{0.81})^2=0.81$이므로 $(-\sqrt{0.81})^2$의 제곱근을 구하면

$\pm\sqrt{0.81}=\pm\sqrt{0.9^2}=\pm0.9$ 답 ⑤

유제 15 ㄱ. $-\sqrt{a^2}=-(-a)=a$

ㄴ. $2a<0$이므로 $\sqrt{(2a)^2}=-2a$

ㄷ. $-3a>0$이므로 $\sqrt{(-3a)^2}=-3a$

ㄹ. $-\sqrt{81a^2}=-\sqrt{(9a)^2}$이고 $9a<0$이므로

$-\sqrt{(9a)^2}=-(-9a)=9a$ $\quad\therefore -\sqrt{81a^2}=9a$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

유제 16 $a<3$에서 $3-a>0$, $a-3<0$이므로

$\sqrt{(3-a)^2}-\sqrt{(a-3)^2}=(3-a)-\{-(a-3)\}$

$=3-a+a-3=0$ 답 ③

유제 17 $\sqrt{2^2\times7^3\times x}$가 자연수가 되려면 $2^2\times7^3\times x$의 값이 (자연수)^2 꼴이어야 하므로 $x=7\times$(자연수)^2

① $7=7\times1^2$ ② $14=7\times2$ ③ $28=7\times2^2$

④ $63=7\times3^2$ ⑤ $112=7\times4^2$

따라서 자연수 x가 될 수 없는 것은 14이다. 답 ②

유제 18 440을 소인수분해하면 $440=2^3\times5\times11$이므로

$\sqrt{\dfrac{440}{x}}=\sqrt{\dfrac{2^3\times5\times11}{x}}$이 자연수가 되려면

$\dfrac{2^3\times5\times11}{x}$의 값이 (자연수)^2 꼴이어야 한다.

$\therefore x=2\times5\times11$ 또는 $x=2^3\times5\times11$

따라서 가장 작은 자연수 x는 $2\times5\times11=110$ 답 110

유제 19 $\sqrt{55+x}$가 자연수가 되려면 $55+x$는 자연수의 제곱인 수이어야 한다.

55보다 큰 자연수의 제곱인 수는 64, 81, 100, 121, ⋯이므로

$55+x=64$일 때 $x=9$, $55+x=81$일 때 $x=26$,

$55+x=100$일 때 $x=45$, $55+x=121$일 때 $x=66$, ⋯

따라서 조건을 만족시키는 50 이하의 자연수 x의 개수는 3이다.

답 3

유제 20 $\sqrt{32-x}$가 정수가 되려면 $32-x$는 정수의 제곱인 수이어야 한다.

32보다 작은 정수의 제곱인 수는 0, 1, 4, 9, 16, 25이므로

$32-x=0$에서 $x=32$, $32-x=1$에서 $x=31$

$32-x=4$에서 $x=28$, $32-x=9$에서 $x=23$

$32-x=16$에서 $x=16$, $32-x=25$에서 $x=7$

따라서 구하는 자연수 x의 개수는 6이다. 답 ③

유제 21 ① $5=\sqrt{25}$에서 $\sqrt{24}<\sqrt{25}$ $\quad\therefore \sqrt{24}<5$

② $7>5$이므로 $\sqrt{7}>\sqrt{5}$ $\quad\therefore -\sqrt{7}<-\sqrt{5}$

③ $0.4=\sqrt{0.4^2}=\sqrt{0.16}$에서 $\sqrt{0.16}<\sqrt{0.2}$ $\quad\therefore 0.4<\sqrt{0.2}$

④ $\dfrac{1}{2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}$에서 $\sqrt{\dfrac{1}{3}}>\sqrt{\dfrac{1}{4}}$ $\quad\therefore \sqrt{\dfrac{1}{3}}>\dfrac{1}{2}$

⑤ $3=\sqrt{9}$에서 $\sqrt{8}<\sqrt{9}$

위 식의 양변에 -1을 곱하면 $-\sqrt{8}>-\sqrt{9}$

$\therefore -\sqrt{8}>-3$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다. 답 ③

유제 22 (i) $\sqrt{0.7^2}=0.7$

(ii) $0.\dot{4}\dot{9}=0.4949\cdots$

따라서 $0.\dot{4}\dot{9}=\frac{49}{99}$

(iii) $\sqrt{\frac{1}{49}}=\sqrt{\left(\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{1}{7}=0.142\cdots$

(iv) $\sqrt{\frac{9}{4}}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}=1.5$

(v) $\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2=\frac{3}{5}=0.6$

(i)~(v)에서 주어진 수들의 대소 관계를 부등호를 이용하여 나타내면

$\frac{3}{2}>0.7>\frac{3}{5}>0.\dot{4}\dot{9}>\frac{1}{7}$

따라서 큰 것부터 차례로 나열하면

$\sqrt{\frac{9}{4}}, \sqrt{0.7^2}, \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2, 0.\dot{4}\dot{9}, \sqrt{\frac{1}{49}}$

답 $\sqrt{\frac{9}{4}}, \sqrt{0.7^2}, \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2, 0.\dot{4}\dot{9}, \sqrt{\frac{1}{49}}$

유제 23 $5\le\sqrt{x+3}<\frac{13}{2}$에서 각 변을 제곱하면

$5^2\le(\sqrt{x+3})^2<\left(\frac{13}{2}\right)^2$

$25\le x+3<\frac{169}{4}$

$\therefore 22\le x<\frac{157}{4}$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x 중에서 3의 배수는 24, 27, 30, 33, 36, 39이므로 구하는 개수는 6이다. 답 6

유제 24 $4\le\sqrt{\frac{x}{3}}<7$에서 각 변을 제곱하면 $4^2\le\left(\sqrt{\frac{x}{3}}\right)^2<7^2$

$16\le\frac{x}{3}<49$

$\therefore 48\le x<147$

따라서 $48\le x<147$을 만족시키는 자연수 x의 개수는

$147-48=99$(개) 답 ③

유제 25 양의 정수 x에 대하여 $\sqrt{11}\times\sqrt{x}=\sqrt{11x}$이므로 $\sqrt{11x}$가 양의 정수가 되려면 $11x$는 자연수의 제곱인 수이어야 한다.

$\therefore x=11\times k^2$ (단, k는 자연수)

k에 1부터 차례로 자연수를 대입하면

$x=11\times1^2, 11\times2^2, 11\times3^2, 11\times4^2, 11\times5^2, 11\times6^2, \cdots$

즉, $x=11, 44, 99, 176, 275, 396, \cdots$

그런데 $100\le x<300$이므로 구하는 정수 x는 176, 275이다.

답 176, 275

유제 26 $f(x)$는 $\sqrt{x}$ 이하의 자연수의 개수를 의미하므로

$f(x)=5$인 x는 $5\le\sqrt{x}<6$을 만족해야 한다.

$5\le\sqrt{x}<6$에서 각 변을 제곱하면 $5^2\le(\sqrt{x})^2<6^2$

$\therefore 25\le x<36$

따라서 $25\le x<36$을 만족시키는 자연수 x의 개수는

$36-25=11$(개) 답 ②

Step 3. 단원 마무리하기

01	③	02	3	03	③	04	①	05	⑤
06	④	07	$3a$	08	④	09	②	10	①
11	④	12	④	13	②	14	③	15	③
16	③	17	$4a$	18	④	19	4	20	256

01 8의 제곱근은 $\pm\sqrt{8}$이다. 답 ③

02 제곱근 $\frac{25}{64}$는 $\sqrt{\frac{25}{64}}$이고, $\sqrt{\frac{25}{64}}=\sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2}=\frac{5}{8}=\frac{b}{a}$이므로

$a=8, b=5$ $\therefore a-b=8-5=3$ 답 3

03 $\sqrt{a^2}=|a|=25$이므로 $a=\pm25$ 답 ③

다른풀이

$\sqrt{a^2}=25$에서 양변을 제곱하면

$a^2=25^2$ $\therefore a=\pm25$

04 $\sqrt{\frac{25}{81}}\times\sqrt{0.36}=\sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^2}\times\sqrt{0.6^2}$

$=\frac{5}{9}\times0.6=\frac{5}{9}\times\frac{6}{10}$

$=\frac{1}{3}$ 답 ①

05 $\sqrt{2^2}\div(-\sqrt{6})^2+\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}\times\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2$

$=2\div6+\frac{2}{3}\times\frac{5}{2}=2\times\frac{1}{6}+\frac{5}{3}$

$=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}=2$ 답 ⑤

06 ① $-a>0$이므로 $\sqrt{(-a)^2}=-a$

② $\sqrt{a^2}=-a$이므로 $-\sqrt{a^2}=-(-a)=a$

③ $-2a>0$이므로 $(-\sqrt{-2a})^2=-2a$

④ $\sqrt{(3a)^2}$에서 $3a<0$이므로 $\sqrt{(3a)^2}=-3a$

⑤ $-5a>0$이므로 $(\sqrt{-5a})^2=-5a$

$\therefore -(\sqrt{-5a})^2=-(-5a)=5a$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

07 $a<0$에서 $3a<0$, $-5a>0$이므로

$\sqrt{(3a)^2}-\sqrt{a^2}-\sqrt{(-5)^2a^2}=\sqrt{(3a)^2}-\sqrt{a^2}-\sqrt{(-5a)^2}$

$=-(3a)-(-a)-(-5a)$

$=-3a+a+5a=3a$ 답 $3a$

08 $\sqrt{6a}<9$에서 양변을 제곱하면 $(\sqrt{6a})^2<9^2$, $6a<81$

$\therefore a<\frac{81}{6}=\frac{27}{2}=13.5$

따라서 자연수 a의 값 중에서 가장 큰 수는 13이다. 답 ④

09 $\frac{1}{2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{16}}$,

$\sqrt{\frac{1}{2}}$, $(\sqrt{2})^2=2=\sqrt{2^2}=\sqrt{4}$

에서 $\frac{1}{16}<\frac{1}{4}<\frac{1}{2}<2<4$이므로 주어진 수들의 대소 관계를 부등호를 이용하여 나타내면 $\sqrt{\frac{1}{16}}<\sqrt{\frac{1}{4}}<\sqrt{\frac{1}{2}}<\sqrt{2}<\sqrt{4}$이다.

따라서 작은 수부터 순서대로 나열할 때 네 번째에 오는 수는 $\sqrt{2}$이다.

답 ②

10 ① $\sqrt{a^2}=a$이므로 $4\sqrt{a^2}=4a$

② $\sqrt{\frac{9}{4}a^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^2}$에서 $\frac{3}{2}a>0$이므로 $\sqrt{\frac{9}{4}a^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^2}=\frac{3}{2}a$

③ $\sqrt{16a^2}=\sqrt{(4a)^2}$에서 $4a>0$이므로 $\sqrt{16a^2}=\sqrt{(4a)^2}=4a$

$\therefore \frac{\sqrt{16a^2}}{2}=\frac{4a}{2}=2a$

④ $\sqrt{\left(-\frac{5}{2}a\right)^2}$에서 $-\frac{5}{2}a<0$이므로 $\sqrt{\left(-\frac{5}{2}a\right)^2}=-\left(-\frac{5}{2}a\right)=\frac{5}{2}a$

$\therefore -\sqrt{\left(-\frac{5}{2}a\right)^2}=-\frac{5}{2}a$

⑤ $\sqrt{(-3a)^2}$에서 $-3a<0$이므로 $\sqrt{(-3a)^2}=-(-3a)=3a$

$\therefore -\sqrt{(-3a)^2}=-3a$

따라서 값이 가장 큰 것은 ①이다.

답 ①

11 180을 소인수분해하면 $180=2^2\times3^2\times5$이므로

$\sqrt{\frac{180}{n}}=\sqrt{\frac{2^2\times3^2\times5}{n}}$

따라서 $\sqrt{\frac{180}{n}}$이 자연수가 되려면 자연수 n은 180의 약수이면서

$n=5k^2$ (k는 자연수)꼴이어야 한다.

180의 약수이고 $5k^2$ 꼴로 나타내어지는 두 자리의 자연수 n은

5×2^2, 5×3^2이므로 구하는 가장 작은 두 자리의 자연수 n은

$5\times2^2=20$

답 ④

12 $\sqrt{25-x}$가 정수가 되려면 $25-x$가 정수의 제곱인 수이어야 한다.
자연수 x에 대하여 $25-x$의 값은 25보다 작으므로 25보다 작은 정수의 제곱인 수 0, 1, 4, 9, 16이 되어야 한다.

$25-x$의 값이 최대일 때 x의 값은 최소이므로

$25-x=16$에서 $x=25-16=9$

$\therefore$ (x의 최솟값)$=9$

$25-x$의 값이 최소일 때 x의 값은 최대이므로

$25-x=0$에서 $x=25$

$\therefore$ (x의 최댓값)$=25$

따라서 x의 최솟값과 최댓값의 합은 $9+25=34$

답 ④

13 (i) $2x-1\geq0$, 즉 $x\geq\frac{1}{2}$일 때

$\sqrt{(2x-1)^2}=2x-1=5$, $2x=6$ $\quad\therefore x=3$

(ii) $2x-1<0$, 즉 $x<\frac{1}{2}$일 때

$\sqrt{(2x-1)^2}=-(2x-1)=5$, $-2x+1=5$

$-2x=4$ $\quad\therefore x=-2$

따라서 조건을 만족시키는 x의 값은 3, -2이므로 구하는 곱은

$3\times(-2)=-6$

답 ②

14 (i) $1.6<\sqrt{x}<2.4$에서 각 변을 제곱하면 $1.6^2<(\sqrt{x})^2<2.4^2$

$\therefore 2.56<x<5.76$

따라서 이를 만족시키는 자연수 x의 값은 3, 4, 5이다.

(ii) $\sqrt{15}<x<3\sqrt{7}$에서 각 변을 제곱하면 $(\sqrt{15})^2<x^2<(3\sqrt{7})^2$

$\therefore 15<x^2<63$

따라서 이를 만족시키는 자연수 x의 값은 4, 5, 6, 7이다.

(i), (ii)에 의해 두 부등식을 동시에 만족시키는 자연수 x는 4, 5이므로

구하는 합은 $4+5=9$

답 ③

15 $\sqrt{3n}$이 유리수가 되려면 $3n$이 유리수의 제곱인 수이어야 한다.
자연수 n에 대하여 $3n$이 유리수의 제곱인 수이려면

$n=3\times p^2$ (단, p는 자연수)

이때 n은 50 이하의 자연수이므로 n이 될 수 있는 수는

3×1^2, 3×2^2, 3×3^2, 3×4^2 ⋯⋯ ㉠

또, $\sqrt{7n}$이 유리수가 되려면 $7n$이 유리수의 제곱인 수이어야 한다.
자연수 n에 대하여 $7n$이 유리수의 제곱인 수이려면

$n=7\times q^2$ (단, q는 자연수)

이때, n은 50 이하의 자연수이므로 n이 될 수 있는 수는

7×1^2, 7×2^2 ⋯⋯ ㉡

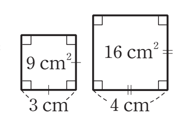
㉠, ㉡에서 $\sqrt{3n}$ 또는 $\sqrt{7n}$이 유리수가 되도록 하는 자연수 n의 개수는

$4+2=6$(개)

따라서 $\sqrt{3n}$, $\sqrt{7n}$이 모두 무리수가 되도록 하는 50 이하의 자연수 n의 개수는 $50-6=44$(개)

답 ③

16 한 변의 길이가 3 cm인 정사각형의 넓이는 9 cm^2,
한 변의 길이가 4 cm인 정사각형의 넓이는 16 cm^2
이므로 두 정사각형의 넓이의 합은



$9+16=25$(cm^2)

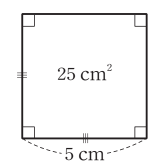
구하는 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면

$x^2=25$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{25}=\pm5$

$x>0$이므로 $x=5$

따라서 구하는 정사각형의 한 변의 길이는

5 cm이다.



답 ③

17 $a-b>0$에서 $a>b$이고, $ab<0$에서 a, b의 부호는 서로 다르다.

$\therefore a>0>b$

$a>0$, $b<0$에서 $2a>0$, $2a-b>0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{4a^2}-\sqrt{b^2}+\sqrt{(2a-b)^2}&=\sqrt{(2a)^2}-\sqrt{b^2}+\sqrt{(2a-b)^2}\\&=2a-(-b)+(2a-b)\\&=2a+b+2a-b\\&=4a\end{aligned}$$

답 $4a$

18 440을 소인수분해하면 $440=2^3\times5\times11$이므로

$\sqrt{440xy}=\sqrt{2^3\times5\times11\times xy}$가 자연수가 되려면 $2^3\times5\times11\times xy$가 자연수의 제곱인 수이어야 한다.

$\therefore xy=2\times5\times11\times$(자연수)^2 ⋯⋯ ㉠

$\sqrt{440xy}$가 가장 작은 자연수가 되려면 xy의 값은 ㉠을 만족하는 수 중에서 최소이어야 한다.

$\therefore xy=2\times5\times11\times1^2=110$

① 순서쌍 $(2, 55)$에서 $2\times55=110$

② 순서쌍 $(5, 22)$에서 $5\times22=110$

③ 순서쌍 $(10, 11)$에서 $10\times11=110$

④ 순서쌍 $(4, 25)$에서 $4\times25=100$

⑤ 순서쌍 $(110, 1)$에서 $110\times1=110$

따라서 x, y의 순서쌍 (x, y)가 아닌 것은 ④이다.

답 ④

19 $2x+1=123$에서 $2x=122$ $\quad\therefore x=61$

$f(123)$은 $\sqrt{61}$ 이하의 자연수 중 가장 큰 수이고

$\sqrt{49}<\sqrt{61}<\sqrt{64}$, 즉 $7<\sqrt{61}<8$이므로 $f(123)=7$

$2x+1=27$에서 $2x=26$ $\quad\therefore x=13$

$f(27)$은 $\sqrt{13}$ 이하의 자연수 중 가장 큰 수이고

$\sqrt{9}<\sqrt{13}<\sqrt{16}$, 즉 $3<\sqrt{13}<4$이므로 $f(27)=3$

$\therefore f(123)-f(27)=7-3=4$

답 4

20 $\sqrt{x}+\sqrt{x+33}$의 값이 자연수가 되려면 $\sqrt{x}$와 $\sqrt{x+33}$이 모두 자연수이어야 한다.
즉 $\sqrt{x}$, $\sqrt{x+33}$의 근호 안의 수가 모두 자연수의 제곱인 수이어야 하므로 $x=a^2$, $x+33=b^2$(a, b는 자연수)으로 놓으면
$a^2+33=b^2$, $b^2-a^2=33$
$\therefore (b+a)(b-a)=33$
(ⅰ) $b+a=11$, $b-a=3$일 때
$b=7$, $a=4$이므로 $x=16$
(ⅱ) $b+a=33$, $b-a=1$일 때
$b=17$, $a=16$이므로 $x=256$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=16$ 또는 $x=256$이므로 세 자리의 자연수 x는 256이다.
답 256

02 무리수와 실수

Step 1. 개념 다지기

02-1 무리수와 실수

기본연습 1

(1) $-\sqrt{\frac{4}{9}}=-\frac{2}{3}$이므로 $-\sqrt{\frac{4}{9}}$는 유리수이다.
(2) $\sqrt{0.25}=0.5$이므로 $\sqrt{0.25}$는 유리수이다.
(3) $\frac{\pi}{2}=1.57\cdots$이므로 순환하지 않는 무한소수이다.
답 (1) × (2) ○ (3) ○

연습 1

$\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$, $\sqrt{4}-1=2-1=1$이므로 무리수인 것은 $2+\sqrt{8}$, $-\sqrt{0.1}$, $\sqrt{84}$이다.
답 $2+\sqrt{8}$, $-\sqrt{0.1}$, $\sqrt{84}$

02-2 제곱근표를 이용하여 제곱근의 값 구하기

기본연습 2

(1) 3.2의 가로줄과 2의 세로줄이 만나는 칸에 적혀 있는 수는 1.794이므로
$\sqrt{3.22}=1.794$
(2) 3.3의 가로줄과 1의 세로줄이 만나는 칸에 적혀 있는 수는 1.819이므로
$\sqrt{3.31}=1.819$
답 (1) 1.794 (2) 1.819

연습 2

3.3의 가로줄과 3의 세로줄이 만나는 칸에 적혀 있는 수는 1.825이고, 3.1의 가로줄과 0의 세로줄이 만나는 칸에 적혀 있는 수는 1.761이므로
$\sqrt{3.33}-\sqrt{3.1}=1.825-1.761=0.064$
답 0.064

02-3 무리수와 실수를 수직선 위에 나타내기

기본연습 3

정사각형 ABCD의 넓이는 $4\times\left(\frac{1}{2}\times2\times1\right)+1=5$
(1) 넓이가 5인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 $\overline{AB}=\sqrt{5}$
따라서 점 P에 대응하는 수는 $\sqrt{5}$이다.
(2) 넓이가 5인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 $\overline{AD}=\sqrt{5}$
따라서 점 Q에 대응하는 수는 $-\sqrt{5}$이다.
답 (1) $\sqrt{5}$ (2) $-\sqrt{5}$

연습 3

(1) $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$ 사이에는 무수히 많은 무리수가 존재한다.
(2) 수직선은 유리수와 무리수에 대응하는 점으로 완전히 메울 수 있다.
답 (1) × (2) ○

02-4 실수의 대소 관계

기본연습 4

(1) $(\sqrt{2}-1)-2=\sqrt{2}-3<0$이므로 $\sqrt{2}-1<2$
(2) $(6-\sqrt{3})-4=2-\sqrt{3}>0$이므로 $6-\sqrt{3}>4$
(3) $(\sqrt{7}-1)-(\sqrt{7}-3)=2>0$이므로 $\sqrt{7}-1>\sqrt{7}-3$
(4) $(-\sqrt{2}+\sqrt{5})-(-\sqrt{2}+\sqrt{6})=\sqrt{5}-\sqrt{6}<0$이므로
$-\sqrt{2}+\sqrt{5}<-\sqrt{2}+\sqrt{6}$
답 (1) < (2) > (3) > (4) <

연습 4

$A-B=(-\sqrt{14}+5)-(-\sqrt{14}+\sqrt{23})=5-\sqrt{23}>0$이므로 $A>B$
답 $A>B$

Step 2. 대표 문제로 접근하기

01	③	02	③	03	①	04	④	05	-1
06	③, ④	07	$P(4-\sqrt{2})$, $Q(4+\sqrt{2})$	08	2	09	③		
10	③	11	④	12	$A>B>C$			13	②
14	31								

유제 01 $\frac{\pi}{2}$, $\sqrt{0.4}$, $\sqrt{2}-1$은 $\frac{(\text{정수})}{(0\text{이 아닌 정수})}$ 꼴로 나타낼 수 없으므로 유리수가 아니다.
0은 정수이므로 유리수이다.
$-\sqrt{0.64}=-\sqrt{0.8^2}=-0.8=-\frac{8}{10}=-\frac{4}{5}$이므로 $-\sqrt{0.64}$는 유리수이다.
$\frac{3}{\sqrt{225}}=\frac{3}{\sqrt{15^2}}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$이므로 $\frac{3}{\sqrt{225}}$은 유리수이다.
따라서 유리수가 아닌 것은 $\frac{\pi}{2}$, $\sqrt{0.4}$, $\sqrt{2}-1$의 3개이다. 답 ③

유제 02 $0.5\dot{1}=\frac{51-5}{90}=\frac{46}{90}=\frac{23}{45}$이므로 $0.5\dot{1}$은 유리수이다.
$-\sqrt{\frac{225}{9}}=-\sqrt{25}=-\sqrt{5^2}=-5$이므로 $-\sqrt{\frac{225}{9}}$는 유리수이다.
$\sqrt{64}-\sqrt{36}=\sqrt{8^2}-\sqrt{6^2}=8-6=2$이므로 $\sqrt{64}-\sqrt{36}$은 유리수이다.
$\sqrt{0.2}$, $-\sqrt{15}$, $\sqrt{6.4}$는 무리수이다.
따라서 유리수는 $0.5\dot{1}$, $-\sqrt{\frac{225}{9}}$, $\sqrt{64}-\sqrt{36}$의 3개이다. 답 ③

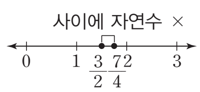
유제 03 소수의 분류는 다음과 같다.

$$\text{소수}\begin{cases}\text{유한소수}\\ \text{무한소수}\begin{cases}\text{순환소수}\\ \text{순환하지 않는 무한소수}\end{cases}\end{cases}$$

①, ② 순환소수는 모두 유리수이다.

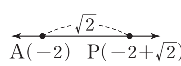
③, ④ 무한소수는 순환소수와 순환하지 않는 무한소수로 나누어진다. 이 중 순환소수는 유리수이고 순환하지 않는 무한소수는 무리수이다.
⑤ 소수는 유한소수와 무한소수로 이루어져 있다.
따라서 옳은 것은 ①이다. 답 ①

유제 04 ① 음수의 제곱근은 존재하지 않는다.
② 양수의 제곱근은 실수이다.
③ $\sqrt{2}$와 $-\sqrt{2}$는 모두 무리수이지만
두 수의 합은 $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$으로 유리수이다.
④ $10^2=(-10)^2=100$이므로 10^2의 제곱근과 $(-10)^2$의 제곱근은 -10, 10으로 같다.
⑤ 두 유리수 $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{4}$ 사이에는 자연수가 존재하지 않는다.

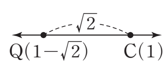


따라서 옳은 것은 ④이다. 답 ④

유제 05 두 선분 AB, CD는 각각 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선이므로 $\overline{AB}=\overline{CD}=\sqrt{2}$
$\therefore \overline{AP}=\overline{AB}=\sqrt{2}$, $\overline{CQ}=\overline{CD}=\sqrt{2}$
점 P에 대응하는 수는 점 A에 대응하는 수에 선분 AP의 길이를 더한 값과 같으므로 $-2+\sqrt{2}$

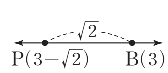


점 Q에 대응하는 수는 점 C에 대응하는 수에서 선분 CQ의 길이를 뺀 값과 같으므로 $1-\sqrt{2}$

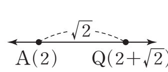


따라서 $p=-2+\sqrt{2}$, $q=1-\sqrt{2}$이므로
$p+q=(-2+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=-1$ 답 -1

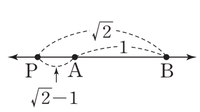
유제 06 두 선분 AC, BD는 정사각형 ABCD의 대각선이므로
$\overline{AC}=\overline{BD}=\sqrt{2}$
$\therefore \overline{AQ}=\overline{AC}=\sqrt{2}$, $\overline{BP}=\overline{BD}=\sqrt{2}$
① 점 P에 대응하는 수는 점 B에 대응하는 수에 선분 BP의 길이만큼 뺀 값과 같으므로 $3-\sqrt{2}$이다.



② 점 Q에 대응하는 수는 점 A에 대응하는 수에서 선분 AQ의 길이만큼 더한 값과 같으므로 $2+\sqrt{2}$이다.



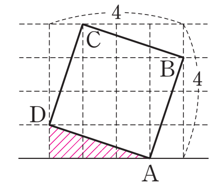
③ 점 P와 점 Q에 대응하는 수의 합은
$(3-\sqrt{2})+(2+\sqrt{2})=5$
④ $\overline{AQ}=\sqrt{2}$
⑤ $\overline{PA}=\overline{BP}-\overline{AB}=\sqrt{2}-1$



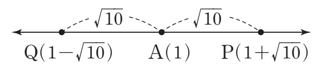
따라서 옳지 않은 것은 ③, ④이다.
답 ③, ④

유제 07 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 x라 하자.
정사각형 ABCD의 넓이는 $4\times\left(\frac{1}{2}\times1\times1\right)=2$이므로
$x^2=2$, $x=\sqrt{2}$ ($\because x>0$)
$\therefore \overline{BC}=\overline{CD}=\sqrt{2}$
따라서 두 점 P, Q에 대응하는 수는 각각 $4-\sqrt{2}$, $4+\sqrt{2}$이므로
두 점 P, Q의 좌표는 P$(4-\sqrt{2})$, Q$(4+\sqrt{2})$이다.
답 P$(4-\sqrt{2})$, Q$(4+\sqrt{2})$

유제 08 정사각형 ABCD의 넓이는
$4\times4-4\times\left(\frac{1}{2}\times3\times1\right)=16-6=10$
이므로 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 $\sqrt{10}$이다.



이때 $\overline{AB}=\overline{AP}$, $\overline{AD}=\overline{AQ}$이므로
$\overline{AP}=\overline{AQ}=\sqrt{10}$
점 P에 대응하는 수는 점 A에 대응하는 수에 선분 AP의 길이를 더한 값과 같으므로 $1+\sqrt{10}$이다.
점 Q에 대응하는 수는 점 A에 대응하는 수에서 선분 AQ의 길이를 뺀 값과 같으므로 $1-\sqrt{10}$이다.
따라서 두 점 P, Q에 대응하는 수의 합은
$(1+\sqrt{10})+(1-\sqrt{10})=2$



답 2

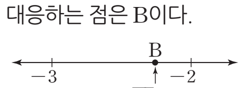
유제 09 두 수 $\sqrt{3}-3$과 $3-\sqrt{3}$ 사이에 있는 정수를 x라 하면
$\sqrt{3}-3<x<3-\sqrt{3}$
$1<\sqrt{3}<2$이므로 $1-3<\sqrt{3}-3<2-3$
$\therefore -2<\sqrt{3}-3<-1$ ...... ㉠
$-2<-\sqrt{3}<-1$이므로 $3-2<3-\sqrt{3}<3-1$
$\therefore 1<3-\sqrt{3}<2$ ...... ㉡
㉠, ㉡에 의하여
$-1.\times\times\times<x<1.\times\times\times$
따라서 조건을 만족시키는 정수 x의 값은 -1, 0, 1이므로
구하는 합은 $(-1)+0+1=0$ 답 ③

유제 10 $3=\sqrt{9}$, $4=\sqrt{16}$이므로 3과 4 사이의 수가 되려면
근호 안의 값이 9보다는 크고, 16보다는 작아야 한다.
따라서 주어진 수 중 근호 안의 값이 9보다 크고 16보다 작은 수는
$\sqrt{10}$, $\sqrt{14.2}$, $\sqrt{\frac{21}{2}}$이므로 구하는 수의 개수는 3이다. 답 ③

유제 11 ① $\sqrt{10}-\sqrt{13}<0$이므로 $\sqrt{10}<\sqrt{13}$
② $3-(5-\sqrt{3})=\sqrt{3}-2<0$이므로 $3<5-\sqrt{3}$
③ $(3+\sqrt{7})-(\sqrt{10}+\sqrt{7})=3-\sqrt{10}=\sqrt{9}-\sqrt{10}<0$이므로
$3+\sqrt{7}<\sqrt{10}+\sqrt{7}$
④ $(\sqrt{8}+\sqrt{3})-(3+\sqrt{3})=\sqrt{8}-3=\sqrt{8}-\sqrt{9}<0$이므로
$\sqrt{8}+\sqrt{3}<3+\sqrt{3}$
⑤ $(-\sqrt{7})-(-\sqrt{11})=\sqrt{11}-\sqrt{7}>0$이므로 $-\sqrt{7}>-\sqrt{11}$
따라서 옳은 것은 ④이다. 답 ④

유제 12 $A-B=(4-\sqrt{8})-(4-\sqrt{11})=\sqrt{11}-\sqrt{8}>0$이므로
$A>B$
$B-C=(4-\sqrt{11})-(-1)=5-\sqrt{11}=\sqrt{25}-\sqrt{11}>0$이므로
$B>C$
$\therefore A>B>C$ 답 $A>B>C$

유제 13 $\sqrt{9}<\sqrt{14}<\sqrt{16}$이므로 $3<\sqrt{14}<4$
각 변에서 6을 빼면
$3-6<\sqrt{14}-6<4-6$
$\therefore -3<\sqrt{14}-6<-2$
따라서 $\sqrt{14}-6$은 -3과 -2 사이의 값이므로 수직선 위에서
$\sqrt{14}-6$에 대응하는 점은 B이다.



답 ②

I - 02. 무리수와 실수

유제 14 한 자리의 자연수는 $1, 2, 3, \cdots, 9$이므로 한 자리의 자연수 x에 대하여 $\sqrt{x}$는 $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots, \sqrt{9}$이다.
이때 $\sqrt{1}=\sqrt{1^2}=1$, $\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$, $\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$이므로
$\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}$는 유리수이다.
$\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}$를 제외한 나머지 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$은 무리수이므로 $\sqrt{x}$가 무리수가 되도록 하는 x는 $2, 3, 5, 6, 7, 8$이다.
따라서 모든 x의 값의 합은 $2+3+5+6+7+8=31$ 답 31

Step 3. 단원 마무리하기

01	④	02	⑤	03	②	04	점 B	05	③
06	3	07	4	08	⑤	09	$5+\sqrt{5}+\sqrt{2}$		
10	②, ③	11	F, B	12	①, ④	13	④	14	C
15	③	16	④	17	④	18	②	19	$4-\sqrt{2}$
20	11								

01 (가)는 유리수, (나)는 무리수이다.
④ 순환소수는 유리수이므로 (가)에 해당된다.
따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

02 ㄱ. $\frac{7}{2}$은 $\frac{(\text{정수})}{(0\text{이 아닌 정수})}$ 꼴이므로 유리수이다.
ㄴ. $(-\sqrt{3})^2=3$이므로 $(-\sqrt{3})^2$은 유리수이다.
ㄷ. $\sqrt{400}=\sqrt{20^2}=20$이므로 $\sqrt{400}$은 유리수이다.
따라서 유리수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

03 ㄱ. 무리수는 $\frac{(\text{정수})}{(0\text{이 아닌 정수})}$ 꼴로 나타낼 수 없다.
ㄴ. π는 무리수이므로 수직선 위의 점에 대응시킬 수 있다.
ㄷ. 서로 다른 두 실수 사이에는 무수히 많은 실수가 있다.
ㄹ. 수직선은 유리수에 대응하는 점들로 완전히 메울 수 없다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

04 $\sqrt{49}<\sqrt{60}<\sqrt{64}$에서 $7<\sqrt{60}<8$
따라서 $\sqrt{60}$에 대응하는 점은 B이다. 답 점 B

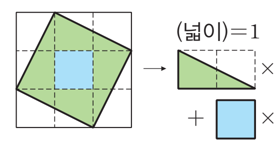
05 $x-y=(\sqrt{5}+2)-(1+\sqrt{5})=2-1=1>0$이므로 $x>y$
$x-z=(\sqrt{5}+2)-(\sqrt{6}+2)=\sqrt{5}-\sqrt{6}<0$이므로 $x<z$
$\therefore y<x<z$ 답 ③

06 $\sqrt{27}$은 무리수이다.
$(-\sqrt{3})^2=3$이므로 $(-\sqrt{3})^2$은 유리수이다.
$\sqrt{4.3}$은 무리수이다.
$-\sqrt{\frac{49}{100}}=-\sqrt{\frac{7^2}{10^2}}=-\frac{7}{10}$이므로 $-\sqrt{\frac{49}{100}}$는 유리수이다.
$1.\dot{2}\dot{3}=\frac{123-1}{99}=\frac{122}{99}$이므로 $1.\dot{2}\dot{3}$은 유리수이다.
$\sqrt{7}-1$은 무리수이다.
따라서 무리수는 $\sqrt{27}, \sqrt{4.3}, \sqrt{7}-1$의 3개이다. 답 3

07 $\sqrt{7}=2.646$이므로
$2-\sqrt{7}=2-2.646=-0.646$ $\quad\therefore a=-1$
$\sqrt{25}<\sqrt{28}<\sqrt{36}$이므로 $5<\sqrt{28}<6$이다.
$5<\sqrt{28}<6$에서 $-6<-\sqrt{28}<-5$이므로
$-\sqrt{28}$보다 큰 정수 중 가장 작은 정수는 -5이다.
$\therefore b=-5$
$\therefore a-b=-1-(-5)=-1+5=4$ 답 4

08 ① $(\sqrt{17}+3)-7=\sqrt{17}-4=\sqrt{17}-\sqrt{16}>0$
$\therefore \sqrt{17}+3>7$
② $(2+\sqrt{7})-(\sqrt{5}+2)=\sqrt{7}-\sqrt{5}>0$
$\therefore 2+\sqrt{7}>\sqrt{5}+2$
③ $(6-\sqrt{11})-2=4-\sqrt{11}=\sqrt{16}-\sqrt{11}>0$
$\therefore 6-\sqrt{11}>2$
④ $(-4-\sqrt{7})-(-\sqrt{19}-\sqrt{7})=\sqrt{19}-4=\sqrt{19}-\sqrt{16}>0$
$\therefore -4-\sqrt{7}>-\sqrt{19}-\sqrt{7}$
⑤ $(\sqrt{14}-5)-(\sqrt{18}-\sqrt{25})=(\sqrt{14}-5)-(\sqrt{18}-5)=\sqrt{14}-\sqrt{18}<0$
$\therefore \sqrt{14}-5<\sqrt{18}-\sqrt{25}$
따라서 부등호가 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다. 답 ⑤

09 정사각형 ABCD의 넓이는
$4\times\left(\frac{1}{2}\times2\times1\right)+1^2=4+1=5$
이므로 정사각형 ABCD의
한 변의 길이는 $\sqrt{5}$이다.



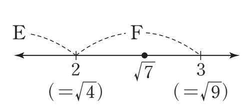
따라서 $\overline{AB}=\overline{AP}=\sqrt{5}$이므로 점 P에 대응하는 수는 $5+\sqrt{5}$이다.
정사각형 PQRS는 한 변의 길이가 1인 정사각형이므로
$\frac{1}{2}\times\overline{PR}^2=1$
$\therefore \overline{PR}=\sqrt{2}$ ($\because \overline{PR}>0$)
따라서 $\overline{PR}=\overline{PE}=\sqrt{2}$이므로 점 E에 대응하는 수는 $5+\sqrt{5}+\sqrt{2}$이다.
답 $5+\sqrt{5}+\sqrt{2}$

10 실수를 분류해 보면 다음과 같다.

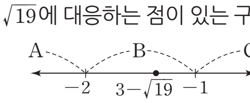
- 실수
  - 유리수
    - 정수
      - 양의 정수(자연수)
      - 0
      - 음의 정수
    - 정수가 아닌 유리수
  - 무리수

① 0은 유리수이지만, 무리수는 아니다.
② 순환하는 무한소수는 분수로 나타낼 수 있으므로 유리수이다.
③ 자연수는 정수이고, 정수는 유리수이므로 모든 자연수는 유리수이다.
④ 실수는 유리수와 무리수로 이루어져 있다.
⑤ 자연수가 아닌 정수는 0 또는 음의 정수이다.
따라서 옳은 것은 ②, ③이다. 답 ②, ③

11 $\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$에서 $2<\sqrt{7}<3$이므로 $\sqrt{7}$에 대응하는 점이 있는 구간은 F이다.



같은 방법으로 $\sqrt{16}<\sqrt{19}<\sqrt{25}$에서 $4<\sqrt{19}<5$
$\therefore -5<-\sqrt{19}<-4$
각 변에 3을 더하면 $3-5<3-\sqrt{19}<3-4$
$\therefore -2<3-\sqrt{19}<-1$
따라서 $3-\sqrt{19}$에 대응하는 점이 있는 구간은 B이다.



답 F, B

12 ① (0이 아닌 유리수)×(무리수)=(무리수)
② $a=\sqrt{3}$이면 $\sqrt{3a}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$
③ $a=\sqrt{3}$이면 $a^2-1=(\sqrt{3})^2-1=2$
④ (무리수)−(유리수)=(무리수)
⑤ $a=\sqrt{5}$이면 $a-\sqrt{5}=\sqrt{5}-\sqrt{5}=0$
따라서 항상 무리수인 것은 ①, ④이다. 답 ①, ④

13 $\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$에서 $2<\sqrt{7}<3$이므로
$-3<-\sqrt{7}<-2$
각 변에 5를 더하면 $-3+5<-\sqrt{7}+5<-2+5$
$\therefore 2<5-\sqrt{7}<3$ …… ㉠
$\sqrt{9}<\sqrt{11}<\sqrt{16}$에서 $3<\sqrt{11}<4$이므로 각 변에서 4를 빼면
$3-4<\sqrt{11}-4<4-4$
$\therefore -1<\sqrt{11}-4<0$ …… ㉡
따라서 ㉠, ㉡에서 두 수 사이의 정수는 0, 1, 2이므로 모든 정수의 합은
$0+1+2=3$ 답 ④

14 두 정사각형 A, B의 한 변의 길이의 대소 관계를 구하면
$(5-\sqrt{5})-3=2-\sqrt{5}=\sqrt{4}-\sqrt{5}<0$이므로
$5-\sqrt{5}<3$
두 정사각형 B, C의 한 변의 길이의 대소 관계를 구하면
$3-(5-\sqrt{3})=\sqrt{3}-2=\sqrt{3}-\sqrt{4}<0$이므로
$3<5-\sqrt{3}$
따라서 세 수의 대소 관계를 나타내면 $5-\sqrt{5}<3<5-\sqrt{3}$이므로 넓이가 가장 큰 정사각형은 한 변의 길이가 $5-\sqrt{3}$인 정사각형 C이다.
답 C

15 ① 144의 제곱근은 −12 또는 12이므로 12는 144의 제곱근이다.
② −15를 제곱하면 225이므로 −15는 225의 음의 제곱근이다.
③ 0의 제곱근은 0으로 1개이다.
④ 서로 다른 유리수의 곱은 항상 유리수이다.
⑤ 무리수와 유리수, 즉 실수에 대응되는 점으로 수직선이 메워지므로 무리수에 대응되는 점만으로는 수직선을 완전히 메울 수 없다.
따라서 옳지 않은 것은 ③이다. 답 ③

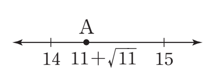
> ★ 참고
> * 양수의 제곱근의 개수는 2
> ($a>0$일 때 $\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$)
> * 0의 제곱근의 개수는 1
> * 음수는 제곱근이 존재하지 않는다.

16 ① $\sqrt{5}=2.236$이므로 $\sqrt{5}-0.1=2.236-0.1=2.136$
따라서 $2<\sqrt{5}-0.1<\sqrt{5}$이므로
$\sqrt{5}-0.1$은 2와 $\sqrt{5}$ 사이에 있는 무리수이다.
② $4<4.1<5$이므로 $\sqrt{4}<\sqrt{4.1}<\sqrt{5}$
$\therefore 2<\sqrt{4.1}<\sqrt{5}$
따라서 $\sqrt{4.1}$은 2와 $\sqrt{5}$ 사이에 있는 무리수이다.
③ $4<\frac{21}{5}<5$이므로 $\sqrt{4}<\sqrt{\frac{21}{5}}<\sqrt{5}$
$\therefore 2<\sqrt{\frac{21}{5}}<\sqrt{5}$
따라서 $\sqrt{\frac{21}{5}}$은 2와 $\sqrt{5}$ 사이에 있는 무리수이다.
④ $\sqrt{2}=1.414$이므로
$\sqrt{2}+1=1.414+1=2.414$
이때 $\sqrt{5}=2.236$이므로 $\sqrt{2}+1>\sqrt{5}$
따라서 $\sqrt{2}+1$은 2와 $\sqrt{5}$ 사이에 있는 무리수가 아니다.
⑤ $4<\frac{19}{4}<5$이므로 $\sqrt{4}<\sqrt{\frac{19}{4}}<\sqrt{5}$
$\therefore 2<\sqrt{\frac{19}{4}}<\sqrt{5}$
따라서 $\sqrt{\frac{19}{4}}$는 2와 $\sqrt{5}$ 사이에 있는 무리수이다.
그러므로 2와 $\sqrt{5}$ 사이에 있는 무리수가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

17 $\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$이므로 $2<\sqrt{5}<3$
$1<\sqrt{3}<2$이므로 $-2<-\sqrt{3}<-1$
$1<\sqrt{2}<2$이므로 각 변에 1을 더하면 $2<1+\sqrt{2}<3$
$\sqrt{4}<\sqrt{8}<\sqrt{9}$이므로 $2<\sqrt{8}<3$
$2<\sqrt{5}<3$이고 $1<\sqrt{2}<2$에서 $-2<-\sqrt{2}<-1$이므로
$2-2<\sqrt{5}-\sqrt{2}<3-1$
$\therefore 0<\sqrt{5}-\sqrt{2}<2$
$-2<-\sqrt{3}<-1$이므로 각 변에 1을 더하면 $-1<1-\sqrt{3}<0$
$1<\sqrt{2}<2$이므로 각 변에 2를 더하면 $3<2+\sqrt{2}<4$
$\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}$에서 $3<\sqrt{10}<4$이므로 $-4<-\sqrt{10}<-3$
각 변에 4를 더하면 $0<4-\sqrt{10}<1$
따라서 −2보다 크고 2보다 작은 실수는
$-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{5}-\sqrt{2}$, $1-\sqrt{3}$, $4-\sqrt{10}$의 5개이다. 답 ④

18 ① 넓이가 4인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$이다.
② 넓이가 6인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{6}$ 이다.
③ 넓이가 9인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$이다.
④ 넓이가 25인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$이다.
⑤ 둘레의 길이가 12인 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{12}{4}=3$이다.
따라서 한 변의 길이가 무리수인 정사각형은 ②이다. 답 ②

19 두 선분 AC, BD는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선이므로
$\overline{AC}=\overline{BD}=\sqrt{2}$
$\therefore \overline{BP}=\overline{BD}=\sqrt{2}$, $\overline{AQ}=\overline{AC}=\sqrt{2}$
점 A에 대응하는 수는 점 Q에 대응하는 수에서 선분 AQ의 길이를 뺀 값과 같으므로 $(3+\sqrt{2})-\sqrt{2}=3$
정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 1이므로 점 B에 대응하는 수는
$3+1=4$
따라서 점 P에 대응하는 수는 점 B에 대응하는 수에서 선분 BP의 길이를 뺀 값과 같으므로 $4-\sqrt{2}$ 답 $4-\sqrt{2}$

20 점 A는 수직선 위의 14와 15 사이에 있으므로 점 A에 대응하는 수는 14와 15 사이의 값이어야 한다.
$\therefore 14<a+\sqrt{a}<15$
$a=9$일 때, $a+\sqrt{a}=9+\sqrt{9}=9+3=12$이므로
$a\le 9$일 때에는 $14<a+\sqrt{a}<15$를 만족시키지 않는다.
$a=10$일 때, $a+\sqrt{a}=10+\sqrt{10}$
$\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}$에서 $3<\sqrt{10}<4$이므로
$13<10+\sqrt{10}<14$가 되어 조건을 만족시키지 않는다.
$a=11$일 때, $a+\sqrt{a}=11+\sqrt{11}$
$\sqrt{9}<\sqrt{11}<\sqrt{16}$에서 $3<\sqrt{11}<4$이므로


$14<11+\sqrt{11}<15$가 되어 조건을 만족시킨다.
$a\ge 12$일 때, $\sqrt{a}>\sqrt{9}=3$이므로
$a+\sqrt{a}>12+3=15$가 되어 조건을 만족시키지 않는다.
$\therefore a=11$ 답 11

03 근호를 포함한 식의 계산 (1)

Step 1. 개념 다지기

03-1 제곱근의 곱셈

기본연습 1

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{3\times5}=\sqrt{15}$

(2) $2\sqrt{2}\times4\sqrt{3}=2\times4\times\sqrt{2}\sqrt{3}=8\sqrt{2\times3}=8\sqrt{6}$ 답 (1) $\sqrt{15}$ (2) $8\sqrt{6}$

연습 1

(1) $\sqrt{\frac{7}{2}}\times\sqrt{\frac{8}{7}}=\sqrt{\frac{7}{2}\times\frac{8}{7}}=\sqrt{4}=2$

(2) $4\times\sqrt{\frac{6}{15}}\times\sqrt{5}=4\times\sqrt{\frac{6}{15}\times5}=4\sqrt{2}$ 답 (1) 2 (2) $4\sqrt{2}$

03-2 근호가 있는 식의 변형

기본연습 2

(1) $\sqrt{45}=\sqrt{3^2\times5}=3\sqrt{5}$

(2) $\sqrt{\frac{7}{9}}=\sqrt{\frac{7}{3^2}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$ 답 (1) $3\sqrt{5}$ (2) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

연습 2

(1) $\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times3}=2\sqrt{3}$ $\therefore \square=2$

(2) $\sqrt{\frac{2}{25}}=\sqrt{\frac{2}{5^2}}=\frac{\sqrt{2}}{5}$ $\therefore \square=5$ 답 (1) 2 (2) 5

03-3 제곱근의 나눗셈

기본연습 3

(1) $\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{42}{6}}=\sqrt{7}$

(2) $\sqrt{40}\div\sqrt{8}=\sqrt{\frac{40}{8}}=\sqrt{5}$ 답 (1) $\sqrt{7}$ (2) $\sqrt{5}$

연습 3

(1) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\div\sqrt{\frac{6}{5}}=\sqrt{\frac{3}{2}\div\frac{6}{5}}=\sqrt{\frac{3}{2}\times\frac{5}{6}}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

(2) $\sqrt{3}\div\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\times7=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\times7=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\times7\sqrt{7}=7\sqrt{7}$ 답 (1) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (2) $7\sqrt{7}$

03-4 분모의 유리화 (1)

기본연습 4

(1) $\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

(2) $\frac{8}{3\sqrt{2}}=\frac{8\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{6}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 답 (1) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (2) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

연습 4

(1) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}}=\sqrt{\frac{3}{2}\times\frac{8}{9}}=\sqrt{\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{2^2}{3}}$

$=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(2) $\sqrt{72}\div\sqrt{27}=\sqrt{\frac{72}{27}}=\sqrt{\frac{8}{3}}=\sqrt{\frac{2^2\times2}{3}}$

$=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 답 (1) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (2) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

Step 2. 대표 문제로 접근하기

01	12	02	46	03	10	04	28	05	72
06	20배	07	$\frac{1}{8}$	08	$\frac{\sqrt{5}}{4}$, $\sqrt{0.2}$, $\sqrt{\frac{15}{108}}$			09	②
10	③	11	④	12	6	13	②, ⑤	14	③
15	2	16	$\frac{\sqrt{30}}{10}$	17	②	18	⑤	19	④
20	④								

유제 01 $2\times3\sqrt{6}\times\sqrt{k}=6\sqrt{6k}$

$2\sqrt{6}\times6\sqrt{3}=12\sqrt{18}=12\times3\sqrt{2}=36\sqrt{2}$이므로

$6\sqrt{6k}=36\sqrt{2}$, $\sqrt{6k}=6\sqrt{2}=\sqrt{6^2\times2}=\sqrt{72}$

$6k=72$ $\therefore k=12$ 답 12

유제 02 $a=5\sqrt{\frac{12}{5}}\times\sqrt{\frac{15}{9}}=5\times\sqrt{\frac{12}{5}\times\frac{15}{9}}$

$=5\times\sqrt{4}=5\times2=10$

$b=3\sqrt{3}\times2\sqrt{6}\times\sqrt{2}=3\times2\times\sqrt{3\times6\times2}$

$=6\times\sqrt{36}=6\times6=36$

$\therefore a+b=10+36=46$ 답 46

유제 03 $4\sqrt{5}=\sqrt{4^2\times5}=\sqrt{80}$

따라서 $\sqrt{40+4x}=\sqrt{80}$이므로 $40+4x=80$

$4x=40$ $\therefore x=10$ 답 10

유제 04 $\sqrt{12}\times\sqrt{28}\times\sqrt{35}=\sqrt{2^2\times3}\times\sqrt{2^2\times7}\times\sqrt{5\times7}$

$=\sqrt{2^2\times3\times2^2\times7\times5\times7}$

$=\sqrt{2^4\times3\times5\times7^2}$

$=28\sqrt{15}$

$\therefore k=28$ 답 28

유제 05 $4\sqrt{3}\div\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{27}}\div\frac{1}{\sqrt{60}}=4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{5}}\times\sqrt{60}$

$=4\sqrt{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\times2\sqrt{15}$

$=4\sqrt{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\times2\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}$

$=4\times3\times3\times2\times\sqrt{3}$

$=72\sqrt{3}$

따라서 $72\sqrt{3}=k\sqrt{3}$이므로 $k=72$ 답 72

유제 06 $\sqrt{50}$이 $\frac{\sqrt{2}}{4}$의 k배라 하면 $\sqrt{50}=k\times\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로

$k=\sqrt{50}\div\frac{\sqrt{2}}{4}=\sqrt{50}\times\frac{4}{\sqrt{2}}$

$=5\sqrt{2}\times\frac{4}{\sqrt{2}}=5\times4=20$

따라서 $\sqrt{50}$은 $\frac{\sqrt{2}}{4}$의 20배이다. 답 20배

유제 07 $a\sqrt{2}=\sqrt{\frac{300}{24}}=\sqrt{\frac{50}{4}}=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{5^2\times2}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$\therefore a=\frac{5}{2}$

$b\sqrt{3}=\sqrt{0.0075}=\sqrt{\frac{75}{10000}}=\frac{\sqrt{75}}{100}=\frac{5\sqrt{3}}{100}=\frac{\sqrt{3}}{20}$

$\therefore b=\frac{1}{20}$

$\therefore ab=\frac{5}{2}\times\frac{1}{20}=\frac{1}{8}$ 답 $\frac{1}{8}$

유제 08 $\sqrt{\frac{15}{108}}=\sqrt{\frac{5}{36}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{36}}=\frac{\sqrt{5}}{6}$,

$\sqrt{0.2}=\sqrt{\frac{20}{100}}=\sqrt{\frac{5}{25}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$이므로

$\frac{\sqrt{5}}{4}>\frac{\sqrt{5}}{5}>\frac{\sqrt{5}}{6}$에서 $\frac{\sqrt{5}}{4}>\sqrt{0.2}>\sqrt{\frac{15}{108}}$이다.

따라서 큰 수부터 차례대로 나열하면

$\frac{\sqrt{5}}{4}$, $\sqrt{0.2}$, $\sqrt{\frac{15}{108}}$ 답 $\frac{\sqrt{5}}{4}$, $\sqrt{0.2}$, $\sqrt{\frac{15}{108}}$

유제 09 ① $\sqrt{600}=\sqrt{6\times100}=\sqrt{6\times10^2}=10\sqrt{6}$

$=10\times2.449=24.49$

② $\sqrt{6000}=\sqrt{60\times100}=\sqrt{60\times10^2}=10\sqrt{60}$

$=10\times7.746=77.46$

③ $\sqrt{0.6}=\sqrt{\frac{6}{10}}=\sqrt{\frac{60}{100}}=\sqrt{\frac{60}{10^2}}$

$=\frac{\sqrt{60}}{10}=\frac{7.746}{10}=0.7746$

④ $\sqrt{0.06}=\sqrt{\frac{6}{100}}=\sqrt{\frac{6}{10^2}}=\frac{\sqrt{6}}{10}$

$=\frac{2.449}{10}=0.2449$

⑤ $\sqrt{0.006}=\sqrt{\frac{6}{1000}}=\sqrt{\frac{60}{10000}}=\sqrt{\frac{60}{100^2}}$

$=\frac{\sqrt{60}}{100}=\frac{7.746}{100}=0.07746$

따라서 옳은 것은 ②이다. 답 ②

유제 10 ① $\sqrt{0.0055}=\sqrt{\frac{55}{10000}}=\frac{\sqrt{55}}{\sqrt{10000}}=\frac{\sqrt{55}}{100}=\frac{7.416}{100}=0.07416$

② $\sqrt{4.95}=\sqrt{0.55\times9}=\sqrt{55\times\frac{9}{100}}=\sqrt{55}\times\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{100}}$

$=\frac{3}{10}\times\sqrt{55}=\frac{3}{10}\times7.416=2.2248$

③ $\sqrt{550}=\sqrt{5.5\times100}=10\sqrt{5.5}$이므로 $\sqrt{5.5}$의 값이 주어져야 한다.

④ $\sqrt{5500}=\sqrt{55\times100}=10\sqrt{55}=10\times7.416=74.16$

⑤ $\sqrt{550000}=\sqrt{55\times10000}=100\sqrt{55}=100\times7.416=741.6$

따라서 제곱근의 값을 구할 수 없는 것은 ③이다. 답 ③

유제 11 $\sqrt{50}-\sqrt{63}=\sqrt{5^2\times2}-\sqrt{3^2\times7}$

$=5\sqrt{2}-3\sqrt{7}$

이때 $\sqrt{2}=A$, $\sqrt{7}=B$이므로

$\sqrt{50}-\sqrt{63}=5A-3B$ 답 ④

유제 12 $\sqrt{5}=x$, $\sqrt{11}=y$임을 이용하여 주어진 식을 변형하면

$\sqrt{2000}+\sqrt{0.99}=\sqrt{5\times2^2\times10^2}+\sqrt{\frac{3^2\times11}{10^2}}$

$=20\sqrt{5}+\frac{3}{10}\sqrt{11}=20x+\frac{3}{10}y$

따라서 $20x+\frac{3}{10}y=ax+by$이므로 $a=20$, $b=\frac{3}{10}$

$\therefore ab=20\times\frac{3}{10}=6$ 답 6

유제 13 ① $\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

② $\frac{4}{\sqrt{12}}=\frac{4}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

③ $\frac{3}{\sqrt{15}}=\frac{3\times\sqrt{15}}{\sqrt{15}\times\sqrt{15}}=\frac{3\sqrt{15}}{15}=\frac{\sqrt{15}}{5}$

④ $\frac{3}{2\sqrt{7}}=\frac{3\times\sqrt{7}}{2\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{14}$

⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{18}}=\frac{3\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

따라서 옳지 않은 것은 ②, ⑤이다. 답 ②, ⑤

유제 14 주어진 식의 분모를 유리화하면

$\frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{15}}=\frac{5\sqrt{x}\times\sqrt{15}}{2\sqrt{15}\times\sqrt{15}}=\frac{5\sqrt{15x}}{30}=\frac{\sqrt{15x}}{6}$

따라서 $\frac{\sqrt{15x}}{6}=\frac{\sqrt{35}}{2}=\frac{3\sqrt{35}}{6}$이므로

$\sqrt{15x}=3\sqrt{35}=\sqrt{315}$에서

$15x=315$

$\therefore x=21$ 답 ③

유제 15 $63=3^2\times7$, $48=4^2\times3$, $252=6^2\times7$이므로

$\sqrt{63}\times\sqrt{48}\div\sqrt{252}=\sqrt{3^2\times7}\times\sqrt{4^2\times3}\times\frac{1}{\sqrt{6^2\times7}}$

$=3\sqrt{7}\times4\sqrt{3}\times\frac{1}{6\sqrt{7}}$

$=2\sqrt{3}$

따라서 유리수 a에 대하여 $a\sqrt{3}=2\sqrt{3}$이므로 $a=2$이다. 답 2

유제 16 두 양의 유리수 a, b에 대하여

$\frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{2b}}\times\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{9a}}\div\sqrt{\frac{5b}{6a}}\div\sqrt{\frac{2a}{3b}}=\frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{2b}}\times\frac{\sqrt{b}}{3\sqrt{a}}\times\frac{\sqrt{6a}}{\sqrt{5b}}\times\frac{\sqrt{3b}}{\sqrt{2a}}$

$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$

$=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{10}}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}$

$=\frac{\sqrt{30}}{10}$ 답 $\frac{\sqrt{30}}{10}$

유제 17 직육면체의 밑면의 가로의 길이와 세로의 길이가 각각 $\sqrt{32}$, $\sqrt{27}$이므로 직육면체의 높이를 x라 하면

(직육면체의 부피)$=\sqrt{32}\times\sqrt{27}\times x$

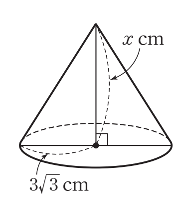
$=4\sqrt{2}\times3\sqrt{3}\times x$

$=12\sqrt{6}x=72\sqrt{2}$

$\therefore x=72\sqrt{2}\times\frac{1}{12\sqrt{6}}=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{6\sqrt{2}\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{6\sqrt{12}}{6}$

$=\frac{6\times2\sqrt{3}}{6}=2\sqrt{3}$ 답 ②

유제 18 원뿔의 높이를 x cm라 하면 주어진 원뿔의 부피는 $\frac{1}{3}\times(3\sqrt{3})^2\pi\times x=9\pi x(\mathrm{cm}^3)$



주어진 원뿔의 부피가 $27\sqrt{10}\pi\ \mathrm{cm}^3$이므로

$9\pi x=27\sqrt{10}\pi$

$\therefore x=\frac{27\sqrt{10}\pi}{9\pi}=3\sqrt{10}$

따라서 원뿔의 높이는 $3\sqrt{10}$ cm이다. 답 ⑤

유제 19 $\sqrt{3}=x$, $\sqrt{7}=y$이고, $4=\sqrt{16}$에서

$16=9+7=3^2+7$

$=\{(\sqrt{3})^2\}^2+(\sqrt{7})^2$

$=(\sqrt{3})^4+(\sqrt{7})^2=x^4+y^2$

$\therefore 4=\sqrt{16}=\sqrt{x^4+y^2}$ 답 ④

Ⅰ-03. 근호를 포함한 식의 계산 (1)

유제 20 800을 소인수분해하면 $2^5\times5^2$이므로 $\sqrt{800}=\sqrt{2^5\times5^2}$이다.

① $a^5b^2=(\sqrt{2})^5\times(\sqrt{5})^2=\sqrt{2^5}\times\sqrt{5^2}=\sqrt{2^5\times5^2}$

② $2a^3b^2=2\times(\sqrt{2})^3\times(\sqrt{5})^2=2\times\sqrt{2^3}\times\sqrt{5^2}$
$=\sqrt{2^2\times2^3\times5^2}=\sqrt{2^5\times5^2}$

③ $4ab^2=4\times\sqrt{2}\times(\sqrt{5})^2=4\times\sqrt{2}\times\sqrt{5^2}=\sqrt{4^2\times2\times5^2}$
$=\sqrt{2^4\times2\times5^2}=\sqrt{2^5\times5^2}$

④ $5a^5b=5\times(\sqrt{2})^5\times\sqrt{5}=5\times\sqrt{2^5}\times\sqrt{5}=\sqrt{5^2\times2^5\times5}=\sqrt{2^5\times5^3}$

⑤ $10a^3=10\times(\sqrt{2})^3=10\times\sqrt{2^3}=\sqrt{10^2\times2^3}$
$=\sqrt{(2\times5)^2\times2^3}=\sqrt{2^2\times5^2\times2^3}$
$=\sqrt{2^5\times5^2}$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

다른풀이

$\sqrt{800}=\sqrt{2^5\times5^2}=\sqrt{2^5}\times\sqrt{5^2}=(\sqrt{2})^5\times(\sqrt{5})^2$이므로
$(\sqrt{2})^5\times(\sqrt{5})^2=a^5b^2$, $2\times(\sqrt{2})^3\times(\sqrt{5})^2=2a^3b^2$, $4\times\sqrt{2}\times(\sqrt{5})^2=4ab^2$
$(\sqrt{2})^5\times5=a^5\times5=5a^5$, $10\times(\sqrt{2})^3=10a^3$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

Step 3. 단원 마무리하기

01	④	02	③	03	10배	04	(1) $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{3}{8}$ (2) 7		
05	$\frac{2}{5}$	06	②, ④	07	②	08	②	09	④
10	③	11	②	12	②	13	④	14	③
15	③	16	②	17	④	18	$4\sqrt{6}$ cm		
19	(1) 98 (2) $28\sqrt{2}$			20	②				

01 $\sqrt{0.4}\times\sqrt{2.5}=\sqrt{0.4\times2.5}=\sqrt{1}=1$ 답 ④

02 $\sqrt{450}=\sqrt{2\times225}=\sqrt{2\times15\times15}=15\sqrt{2}$이므로 $a=15$
$\frac{30}{\sqrt{3}}=b\sqrt{3}$에서 $30=b\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3b$
$\therefore b=10$
$\therefore a+b=15+10=25$ 답 ③

03 $\sqrt{60}\div\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\sqrt{60}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\sqrt{60\times\frac{5}{3}}=\sqrt{100}=\sqrt{10^2}=10$
따라서 $\sqrt{60}$은 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$의 10배이다. 답 10배

04 (1) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3^2\times2}}=\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{6}$
$\therefore a=\frac{1}{6}$
$\frac{3}{4\sqrt{2}}=\frac{3\times\sqrt{2}}{4\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$
$\therefore b=\frac{3}{8}$
(2) $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{3}{8}$이므로
$24b-12a=24\times\frac{3}{8}-12\times\frac{1}{6}$
$=9-2=7$ 답 (1) $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{3}{8}$ (2) 7

05 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$, $\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{3}}{5}=\frac{\sqrt{5^2\times3}}{5}=\frac{\sqrt{75}}{5}$
$\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{2^2\times5}}{5}=\frac{\sqrt{20}}{5}$
$\frac{2}{5}=\frac{\sqrt{2^2}}{5}=\frac{\sqrt{4}}{5}$
이므로 $\frac{\sqrt{3}}{5}<\frac{\sqrt{4}}{5}<\frac{\sqrt{15}}{5}<\frac{\sqrt{20}}{5}<\frac{\sqrt{75}}{5}$이다.
즉, $\frac{\sqrt{3}}{5}<\frac{2}{5}<\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}<\frac{2}{\sqrt{5}}<\sqrt{3}$이므로
주어진 수를 작은 것부터 차례로 나열할 때, 두 번째에 오는 수는 $\frac{2}{5}$이다.
답 $\frac{2}{5}$

06 ① $\sqrt{\frac{5}{144}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{144}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12^2}}=\frac{\sqrt{5}}{12}$
② $\sqrt{\frac{27}{49}}=\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{49}}=\frac{\sqrt{3^2\times3}}{\sqrt{7^2}}=\frac{3\sqrt{3}}{7}$
③ $-\sqrt{\frac{12}{75}}=-\sqrt{\frac{4}{25}}=-\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}=-\frac{\sqrt{2^2}}{\sqrt{5^2}}=-\frac{2}{5}$
④ $\sqrt{0.18}=\sqrt{\frac{18}{100}}=\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{100}}=\frac{\sqrt{3^2\times2}}{\sqrt{10^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{10}$
⑤ $\sqrt{\frac{4}{64}}=\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{1^2}}{\sqrt{4^2}}=\frac{1}{4}$
따라서 옳지 않은 것은 ②, ④이다. 답 ②, ④

07 $a=\frac{1}{10}x$, $b=1000x$임을 이용하여 주어진 식을 변형하면
$\sqrt{ab}=\sqrt{\frac{1}{10}x\times1000x}=\sqrt{100x^2}$
$=\sqrt{10^2\times x^2}=10x$ 답 ②

08 $0.0096=\frac{96}{10000}=\frac{16\times6}{16\times625}=\frac{6}{625}$
$\sqrt{0.0096}=\sqrt{\frac{6}{625}}=\sqrt{\frac{6}{25^2}}$
$=\frac{\sqrt{6}}{25}$
따라서 $\frac{\sqrt{6}}{25}=k\sqrt{6}$이므로 $k=\frac{1}{25}$이다. 답 ②

09 화살표 위에 쓰여진 계산을 식으로 나타내면
$a\times5\sqrt{6}\div\sqrt{50}=6$ ⋯⋯ ㉠
㉠에서 등식의 양변에 $\sqrt{50}$을 곱하고 $5\sqrt{6}$으로 나누면
$a=6\times\sqrt{50}\div5\sqrt{6}$
$=6\times\sqrt{5^2\times2}\times\frac{1}{5\sqrt{6}}$
$=6\times5\sqrt{2}\times\frac{1}{5\sqrt{6}}$
$=\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{6\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$
$=\frac{6\sqrt{3}}{3}$
$=2\sqrt{3}$ 답 ④

10 ① $\sqrt{7}\times\sqrt{3}=\sqrt{7\times3}=\sqrt{21}$
② $\sqrt{8}\times\sqrt{5}=\sqrt{8\times5}=\sqrt{40}$
③ $2\sqrt{2}\times\sqrt{6}=2\sqrt{2\times6}=2\sqrt{2^2\times3}=4\sqrt{3}$
④ $\sqrt{\frac{3}{5}}\times\sqrt{\frac{25}{3}}=\sqrt{\frac{3}{5}\times\frac{25}{3}}=\sqrt{5}$
⑤ $-3\sqrt{\frac{5}{8}}\times7\sqrt{\frac{3}{2}}=-3\times7\times\sqrt{\frac{5}{8}\times\frac{3}{2}}=-21\sqrt{\frac{15}{4^2}}=-\frac{21\sqrt{15}}{4}$
따라서 옳은 것은 ③이다. 답 ③

11 $a=\sqrt{5}$, $b=\sqrt{50}$을 이용하여 주어진 식을 나타내면

$$\sqrt{0.8}+\sqrt{5000}=\sqrt{\frac{80}{100}}+\sqrt{50\times100}$$
$$=\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{100}}+\sqrt{50}\times\sqrt{100}$$
$$=\frac{4\sqrt{5}}{10}+10\sqrt{50}$$
$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}+10\sqrt{50}$$
$$=\frac{2}{5}a+10b$$

답 ②

12 ㄱ. 순환하지 않는 무한소수는 모두 무리수이다.

ㄴ. $(-5)^2=25$이고 25의 제곱근은 $\pm\sqrt{25}=\pm5$이다.

ㄷ. 음이 아닌 정수는 양의 정수와 0이다.

양의 정수의 제곱근은 2개, 0의 제곱근은 1개이다.

ㄹ. $a>0$일 때, $\sqrt{3}\div\sqrt{a}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{3}{a}}$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ②

13 ① $\sqrt{2^2\times3^4\times7}=2\times3^2\times\sqrt{7}=18\sqrt{7}$

② $\sqrt{18}\times4\sqrt{6}=3\sqrt{2}\times4\sqrt{6}=12\sqrt{12}=12\times2\sqrt{3}=24\sqrt{3}$

③ $4\sqrt{5}\div(-\sqrt{3})=-\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=-\frac{4\sqrt{15}}{3}$

④ $\sqrt{\frac{3}{7}}\sqrt{\frac{35}{9}}=\sqrt{\frac{3}{7}\times\frac{35}{9}}=\sqrt{\frac{5}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$

⑤ $2\sqrt{3}\div\sqrt{6}\times3\sqrt{12}=2\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{6}}\times3\sqrt{12}$

$$=2\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{6}}\times3\times2\sqrt{3}$$
$$=\frac{36}{\sqrt{6}}=\frac{36\sqrt{6}}{6}=6\sqrt{6}$$

따라서 옳은 것은 ④이다.

답 ④

14 ① $\sqrt{125}\div\sqrt{10}\times\sqrt{2}=\sqrt{5^2\times5}\times\frac{1}{\sqrt{10}}\times\sqrt{2}$

$$=5\sqrt{5}\times\frac{1}{\sqrt{10}}\times\sqrt{2}$$
$$=5$$

② $\frac{6}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{8}}\div\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}}=\frac{6}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3\times7}}{\sqrt{2^2\times2}}\times\frac{\sqrt{2\times3}}{\sqrt{7}}$

$$=\frac{6}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$
$$=3\sqrt{3}$$

③ $4\sqrt{10}\div2\sqrt{28}\times2\sqrt{7}=4\sqrt{10}\div2\sqrt{2^2\times7}\times2\sqrt{7}$

$$=4\sqrt{10}\times\frac{1}{4\sqrt{7}}\times2\sqrt{7}$$
$$=2\sqrt{10}$$

④ $\sqrt{\frac{3}{8}}\times\frac{\sqrt{15}}{2}\div\sqrt{\frac{10}{16}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2^2\times2}}\times\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{4^2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{2}\times\frac{4}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}$$
$$=\frac{3}{2}$$

⑤ $\frac{3\sqrt{7}}{2}\times\sqrt{\frac{3}{28}}\div\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\times\frac{4}{\sqrt{3}}$

$$=3$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

15 $0.028=\frac{28}{1000}=\frac{7}{250}$이므로

$$\sqrt{0.028}=\sqrt{\frac{7}{250}}$$
$$\sqrt{\frac{7}{250}}=\sqrt{\frac{7}{5^2\times10}}=\frac{\sqrt{7}}{5\sqrt{10}}$$

분모와 분자에 각각 $\sqrt{10}$을 곱해 주면

$$\frac{\sqrt{7}\times\sqrt{10}}{5\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{70}}{50}$$

$\sqrt{70}=\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{7}$이므로 $\frac{\sqrt{70}}{50}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{7}}{50}$이다.

$\therefore \sqrt{0.028}=\frac{abc}{50}=\frac{1}{50}abc$

답 ③

16 $a=\sqrt{\frac{1}{8}}\div\sqrt{\frac{1}{200}}=\sqrt{\frac{1}{8}}\times\sqrt{200}$

$$=\sqrt{\frac{1}{8}\times200}=\sqrt{25}=5$$

$\therefore \sqrt{a}=\sqrt{5}$

답 ②

17 $\overline{AB}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이가 12이므로

$\overline{AB}^2=12$ $\quad\therefore \overline{AB}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\ (\because \overline{AB}>0)$

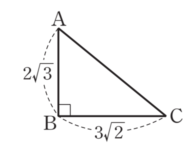
$\overline{BC}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이가 18이므로

$\overline{BC}^2=18$ $\quad\therefore \overline{BC}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\ (\because \overline{BC}>0)$

따라서 직각삼각형 ABC의 넓이를 구하면

(직각삼각형 ABC의 넓이) $=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}$

$$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times3\sqrt{2}$$
$$=3\sqrt{6}$$



답 ④

18 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 비율이 $\sqrt{3}:\sqrt{2}$이고, 가로의 길이가 12 cm이므로 세로의 길이를 x cm라 하면

$\sqrt{3}:\sqrt{2}=12:x$

$\sqrt{3}\times x=\sqrt{2}\times12$

$\sqrt{3}x=12\sqrt{2}$

$x=\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{12\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{12\sqrt{6}}{3}=4\sqrt{6}$

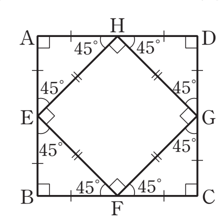
따라서 세로의 길이는 $4\sqrt{6}$ cm이다.

답 $4\sqrt{6}$ cm

19 (1) $\square$EFGH$=\frac{1}{2}\times\square$ABCD$=\frac{1}{2}\times196=98$

따라서 $\square$EFGH의 넓이는 98이다.

(2) 사각형 ABCD는 정사각형이고 사각형 EFGH는 정사각형의 각 변의 중점을 연결하여 만들었으므로 사각형 EFGH도 정사각형이다.



이때 정사각형 EFGH의 넓이는 98이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{98}=\sqrt{7^2\times2}=7\sqrt{2}$이다.

따라서 정사각형 EFGH의 둘레의 길이는 $4\times7\sqrt{2}=28\sqrt{2}$이다.

답 (1) 98 (2) $28\sqrt{2}$

20 정삼각형과 정사각형의 둘레의 길이가 l로 서로 같으므로

정삼각형과 정사각형의 한 변의 길이는 각각 $\frac{l}{3}$, $\frac{l}{4}$이다.

$\therefore$ (정삼각형의 넓이) $=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{l}{3}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{l^2}{9}=\frac{\sqrt{3}}{36}l^2$

(정사각형의 넓이)$=\left(\frac{l}{4}\right)^2=\frac{1}{16}l^2$

정사각형의 넓이가 정삼각형의 넓이의 k배라 하면

$\frac{1}{16}l^2=\frac{\sqrt{3}}{36}l^2\times k$

$\therefore k=\frac{1}{16}l^2\times\frac{36}{\sqrt{3}l^2}=\frac{9}{4\sqrt{3}}$

$=\frac{9\times\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{9\sqrt{3}}{12}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

따라서 정사각형의 넓이는 정삼각형의 넓이의 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$배이다. 답 ②

04 근호를 포함한 식의 계산 (2)

Step 1. 개념 다지기

04-1 제곱근의 덧셈과 뺄셈

기본연습 1

(1) $3\sqrt{3}+4\sqrt{3}=7\sqrt{3}$

(2) $2\sqrt{2}+5\sqrt{2}-4\sqrt{2}=(2+5-4)\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

답 (1) $7\sqrt{3}$ (2) $3\sqrt{2}$

연습 1

(1) $\sqrt{12}+\sqrt{27}=\sqrt{2^2\times3}+\sqrt{3^2\times3}=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{48}-\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{12}$

$=\sqrt{4^2\times3}-\sqrt{3^2\times2}+\sqrt{5^2\times2}-\sqrt{2^2\times3}$

$=4\sqrt{3}-3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

답 (1) $5\sqrt{3}$ (2) $2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

04-2 근호를 포함한 식의 분배법칙

기본연습 2

(1) $\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5})=\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{5}=\sqrt{6}+\sqrt{10}$

(2) $(\sqrt{30}-\sqrt{12})\sqrt{3}=\sqrt{30}\sqrt{3}-\sqrt{12}\sqrt{3}$

$=\sqrt{90}-\sqrt{36}=3\sqrt{10}-6$

답 (1) $\sqrt{6}+\sqrt{10}$ (2) $3\sqrt{10}-6$

연습 2

$\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{40}{a}}-\sqrt{\frac{24}{a}}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$

에서 $\frac{40}{a}=5$, $\frac{24}{a}=3$이므로

$a=8$

답 8

04-3 근호를 포함한 복잡한 식의 계산

기본연습 3

(1) $\sqrt{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+3\right)-\sqrt{6}=\sqrt{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}+3\sqrt{2}-\sqrt{6}$

$=\frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}+3\sqrt{2}-\sqrt{6}$

$=\frac{2\sqrt{6}}{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{6}=3\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{3}$

(2) $\sqrt{12}+3\sqrt{2}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}-1\right)=2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\times\frac{2}{\sqrt{6}}-3\sqrt{2}$

$=2\sqrt{3}+\frac{6}{\sqrt{3}}-3\sqrt{2}$

$=2\sqrt{3}+\frac{6\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}-3\sqrt{2}$

$=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

$=4\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

답 (1) $3\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{3}$ (2) $4\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

연습 3

$\sqrt{3}(2-\sqrt{15})+\frac{10}{\sqrt{5}}-\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=2\sqrt{3}-\sqrt{45}+\frac{10\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}-\frac{9\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$=2\sqrt{3}-3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-3\sqrt{3}$

$=-\sqrt{3}-\sqrt{5}$

$\therefore a=-1, b=-1$

답 $a=-1, b=-1$

04-4 분모의 유리화 (2)

기본연습 4

(1) $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}+2)\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{3}}{3}$

(2) $\frac{1}{3-\sqrt{2}}=\frac{1\times(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})\times(3+\sqrt{2})}$

$=\frac{3+\sqrt{2}}{3^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{3+\sqrt{2}}{9-2}$

$=\frac{3+\sqrt{2}}{7}$

답 (1) $\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{3}}{3}$ (2) $\frac{3+\sqrt{2}}{7}$

연습 4

(1) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{5})\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{18}+\sqrt{30}}{6}=\frac{6\sqrt{2}+\sqrt{30}}{6}$

$=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{30}}{6}$

(2) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$

$=\frac{5+2\sqrt{15}+3}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{8+2\sqrt{15}}{5-3}$

$=\frac{8+2\sqrt{15}}{2}=4+\sqrt{15}$

답 (1) $\sqrt{2}+\frac{\sqrt{30}}{6}$ (2) $4+\sqrt{15}$

Step 2. 대표 문제로 접근하기

01	③	02	④	03	⑤	04	15	05	$4\sqrt{6}$
06	$\frac{7-\sqrt{15}}{2}$			07	-4	08	①	09	③
10	⑤	11	1	12	③	13	③	14	③
15	④	16	③	17	⑤	18	$24-8\sqrt{6}$		
19	8	20	10	21	④	22	$\sqrt{5}+2>\sqrt{7}+\sqrt{2}$		
23	$(14\sqrt{6}+12\sqrt{3})\pi$ cm			24	$16\sqrt{2}+16\sqrt{5}$				
25	$(4\sqrt{5}-4)$ cm			26	③				

유제 01 $72=6^2\times2$이므로 $\sqrt{72}=\sqrt{6^2\times2}=6\sqrt{2}$

$54=3^2\times6$이므로 $\sqrt{54}=\sqrt{3^2\times6}=3\sqrt{6}$

$24=2^2\times6$이므로 $\sqrt{24}=\sqrt{2^2\times6}=2\sqrt{6}$

$18=3^2\times2$이므로 $\sqrt{18}=\sqrt{3^2\times2}=3\sqrt{2}$

따라서 주어진 식을 계산하면

$\sqrt{72}-\sqrt{54}+\sqrt{24}-\sqrt{18}=6\sqrt{2}-3\sqrt{6}+2\sqrt{6}-3\sqrt{2}$
$=6\sqrt{2}-3\sqrt{2}-3\sqrt{6}+2\sqrt{6}$
$=(6-3)\sqrt{2}+(-3+2)\sqrt{6}$
$=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$

답 ③

유제 02 ① $32=4^2\times2$이므로 $\sqrt{32}=\sqrt{4^2\times2}=4\sqrt{2}$

$18=3^2\times2$이므로 $\sqrt{18}=\sqrt{3^2\times2}=3\sqrt{2}$

따라서 주어진 식을 간단히 하면

$\sqrt{32}-\sqrt{18}=4\sqrt{2}-3\sqrt{2}=(4-3)\sqrt{2}=\sqrt{2}$

② $48=4^2\times3$이므로 $\sqrt{48}=\sqrt{4^2\times3}=4\sqrt{3}$

$12=2^2\times3$이므로 $\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times3}=2\sqrt{3}$

따라서 주어진 식을 간단히 하면

$\sqrt{48}+\sqrt{12}=4\sqrt{3}+2\sqrt{3}=(4+2)\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

③ $\frac{75}{4}=\frac{5^2\times3}{2^2}=\left(\frac{5}{2}\right)^2\times3$이므로

$\sqrt{\frac{75}{4}}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2\times3}=\frac{5}{2}\sqrt{3}$

$27=3^2\times3$이므로

$\sqrt{27}=\sqrt{3^2\times3}=3\sqrt{3}$

따라서 주어진 식을 간단히 하면

$2\sqrt{3}+\sqrt{\frac{75}{4}}-\sqrt{27}=2\sqrt{3}+\frac{5}{2}\sqrt{3}-3\sqrt{3}$
$=\left(2+\frac{5}{2}-3\right)\sqrt{3}$
$=\left(\frac{4}{2}+\frac{5}{2}-\frac{6}{2}\right)\sqrt{3}$
$=\frac{3}{2}\sqrt{3}$

④ $\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{1\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

또한 $54=3^2\times6$이므로

$\sqrt{54}=\sqrt{3^2\times6}=3\sqrt{6}$

따라서 주어진 식을 간단히 하면

$\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{54}}{12}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{6}-\frac{3\sqrt{6}}{12}+\frac{\sqrt{6}}{3}$
$=\left(\frac{1}{6}-\frac{3}{12}+\frac{1}{3}\right)\sqrt{6}$
$=\left(\frac{2}{12}-\frac{3}{12}+\frac{4}{12}\right)\sqrt{6}$
$=\frac{3}{12}\sqrt{6}$
$=\frac{1}{4}\sqrt{6}$

⑤ $\frac{5}{\sqrt{7}}=\frac{5\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{7}$

이므로 주어진 식을 간단히 하면

$\sqrt{7}-\frac{5}{\sqrt{7}}=\sqrt{7}-\frac{5}{7}\sqrt{7}=\left(1-\frac{5}{7}\right)\sqrt{7}=\left(\frac{7}{7}-\frac{5}{7}\right)\sqrt{7}=\frac{2}{7}\sqrt{7}$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

유제 03 $\sqrt{18}-\sqrt{5}(2\sqrt{10}-\sqrt{90})=\sqrt{18}-2\sqrt{5\times10}+\sqrt{5\times90}$
$=\sqrt{18}-2\sqrt{50}+\sqrt{450}$
$=\sqrt{3^2\times2}-2\sqrt{5^2\times2}+\sqrt{15^2\times2}$
$=3\sqrt{2}-10\sqrt{2}+15\sqrt{2}$
$=(3-10+15)\sqrt{2}$
$=8\sqrt{2}$

답 ⑤

유제 04 $\sqrt{14}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}-1\right)+\sqrt{56}+\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}$
$=\sqrt{14}\times\frac{2}{\sqrt{7}}-\sqrt{14}\times1+\sqrt{2^2\times14}+\sqrt{\frac{24}{3}}$
$=\sqrt{\frac{14}{7}}\times2-\sqrt{14}+2\sqrt{14}+\sqrt{8}$
$=2\sqrt{2}-\sqrt{14}+2\sqrt{14}+2\sqrt{2}$
$=(2+2)\sqrt{2}+(-1+2)\sqrt{14}$
$=4\sqrt{2}+\sqrt{14}$

유리수 a, b에 대하여

$4\sqrt{2}+\sqrt{14}=a\sqrt{2}+b\sqrt{14}$이므로 $a=4$, $b=1$

$\therefore a^2-b^2=4^2-1^2=16-1=15$

답 15

유제 05 $x+y=\frac{6+\sqrt{6}}{\sqrt{3}}+\frac{6-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$
$=\frac{12}{\sqrt{3}}=\frac{12\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$
$=\frac{12\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}$

$\therefore \sqrt{2}(x+y)=\sqrt{2}\times4\sqrt{3}=4\sqrt{6}$

답 $4\sqrt{6}$

유제 06 $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{10}-3\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{5})\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}-\frac{(\sqrt{10}-3\sqrt{6})\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}$
$=\frac{3-\sqrt{15}}{6}-\frac{\sqrt{60}-18}{6}$
$=\frac{3-\sqrt{15}-2\sqrt{15}+18}{6}$
$=\frac{21-3\sqrt{15}}{6}$
$=\frac{7-\sqrt{15}}{2}$

답 $\frac{7-\sqrt{15}}{2}$

유제 07 주어진 등식의 좌변의 분모를 유리화하면

$\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$
$=\frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}-\frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}$
$=\frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{2}-\frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{2}$
$=\sqrt{7}-\sqrt{5}-2(\sqrt{7}+\sqrt{5})$
$=-\sqrt{7}-3\sqrt{5}$

$-3\sqrt{5}-\sqrt{7}=a\sqrt{5}+b\sqrt{7}$이므로

$a=-3$, $b=-1$

$\therefore a+b=(-3)+(-1)=-4$

답 -4

유제 08 분모를 유리화하여 주어진 식을 정리하면

$\frac{\sqrt{15}-\sqrt{12}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+2}$
$=\frac{(\sqrt{15}-\sqrt{12})\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}-\frac{(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}$
$=\sqrt{5}-2-(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-2)$
$=\sqrt{5}-2-(5-2\sqrt{5}+3\sqrt{5}-6)$
$=\sqrt{5}-2-(\sqrt{5}-1)$
$=-1$

답 ①

유제 09 $\frac{3}{\sqrt{7}}(\sqrt{3}-\sqrt{7})=\frac{3}{\sqrt{7}}\times\sqrt{3}-\frac{3}{\sqrt{7}}\times\sqrt{7}$
$=\frac{3\sqrt{7}}{(\sqrt{7})^2}\times\sqrt{3}-3$
$=\frac{3}{7}\times\sqrt{7\times3}-3$
$=\frac{3}{7}\sqrt{21}-3$

$$\left(\sqrt{24}+\frac{4}{7}\sqrt{42}\right)\div\sqrt{2}=\left(\sqrt{24}+\frac{4}{7}\sqrt{42}\right)\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=\sqrt{24}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{4}{7}\sqrt{42}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{24}{2}}+\frac{4}{7}\times\sqrt{\frac{42}{2}}$$
$$=\sqrt{12}+\frac{4}{7}\sqrt{21}$$
$$=\sqrt{2^2\times3}+\frac{4}{7}\sqrt{21}$$
$$=2\sqrt{3}+\frac{4}{7}\sqrt{21}$$

$$\frac{\sqrt{27}-6}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}-\frac{6}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{27}{3}}-\frac{6\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}$$
$$=\sqrt{9}-\frac{6\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3^2}-2\sqrt{3}=3-2\sqrt{3}$$

$$\therefore\ \frac{3}{\sqrt{7}}(\sqrt{3}-\sqrt{7})+\left(\sqrt{24}+\frac{4}{7}\sqrt{42}\right)\div\sqrt{2}+\frac{\sqrt{27}-6}{\sqrt{3}}$$
$$=\left(\frac{3}{7}\sqrt{21}-3\right)+\left(2\sqrt{3}+\frac{4}{7}\sqrt{21}\right)+(3-2\sqrt{3})$$
$$=\frac{3}{7}\sqrt{21}-3+2\sqrt{3}+\frac{4}{7}\sqrt{21}+3-2\sqrt{3}$$
$$=\left(\frac{3}{7}+\frac{4}{7}\right)\sqrt{21}$$
$$=\sqrt{21}$$

답 ③

유제 10 $\frac{12-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{(12-3\sqrt{3})\times\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}$

$$=\frac{12\times\sqrt{3}-3\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{3}$$
$$=\frac{12\sqrt{3}-3\times3}{3}$$
$$=4\sqrt{3}-3$$

$$3\sqrt{21}\div\frac{14}{5\sqrt{7}}=3\sqrt{21}\times\frac{5\sqrt{7}}{14}$$
$$=\frac{15}{14}\times\sqrt{21\times7}=\frac{15}{14}\times\sqrt{7^2\times3}$$
$$=\frac{15}{14}\times7\sqrt{3}=\frac{15}{2}\sqrt{3}$$

$(\sqrt{7})^2=7$이므로 주어진 식의 값은

$$\frac{12-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-(\sqrt{7})^2+2\left(3\sqrt{21}\div\frac{14}{5\sqrt{7}}\right)$$
$$=(4\sqrt{3}-3)-7+2\times\frac{15}{2}\sqrt{3}$$
$$=4\sqrt{3}-3-7+15\sqrt{3}$$
$$=-10+4\sqrt{3}+15\sqrt{3}$$
$$=-10+(4+15)\sqrt{3}$$
$$=-10+19\sqrt{3}$$

따라서 $a=-10$, $b=19$이므로

$a+b=-10+19=9$

답 ⑤

유제 11 $(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})(\sqrt{10}-3)(\sqrt{10}+3)$

$$=\{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})\}\{(\sqrt{10}-3)(\sqrt{10}+3)\}$$
$$=\{5^2-(2\sqrt{6})^2\}\{(\sqrt{10})^2-3^2\}$$
$$=\{25-4\times(\sqrt{6})^2\}(10-9)$$
$$=(25-4\times6)\times1$$
$$=25-24=1$$

답 1

유제 12 $(2\sqrt{6}+3\sqrt{2})(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})$

$$=2\times2\times(\sqrt{6})^2+\{2\times(-2)+3\times2\}\times\sqrt{12}-3\times2\times(\sqrt{2})^2$$
$$=24+(-4+6)\sqrt{12}-12$$
$$=24+2\sqrt{2^2\times3}-12$$
$$=12+4\sqrt{3}$$

답 ③

유제 13 주어진 식을 정리하면

$$\sqrt{48}\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)+\frac{a}{\sqrt{3}}(\sqrt{27}-4)$$
$$=4\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)+\frac{a}{\sqrt{3}}(3\sqrt{3}-4)$$
$$=12+2\sqrt{3}+3a-\frac{4a}{\sqrt{3}}$$
$$=12+2\sqrt{3}+3a-\frac{4\sqrt{3}}{3}a$$
$$=(12+3a)+\left(2-\frac{4}{3}a\right)\sqrt{3}$$

주어진 식의 값이 유리수이어야 하므로

$2-\frac{4}{3}a=0$, $\frac{4}{3}a=2$

$\therefore\ a=\frac{3}{2}$

답 ③

유제 14 주어진 식을 정리하면

$$(4+3\sqrt{2})(a-6\sqrt{2})=4a-24\sqrt{2}+3a\sqrt{2}-36$$
$$=4a-36+(3a-24)\sqrt{2}$$

주어진 식의 값이 유리수이어야 하므로

$3a-24=0$

$\therefore\ a=8$

답 ③

유제 15 $2<\sqrt{5}<3$에서 $-3<-\sqrt{5}<-2$이므로

$4<7-\sqrt{5}<5$

$\therefore\ a=4$, $b=(7-\sqrt{5})-4=3-\sqrt{5}$

$3\sqrt{5}a+2b^2$에 $a=4$, $b=3-\sqrt{5}$를 대입하면

$$3\sqrt{5}a+2b^2=3\sqrt{5}\times4+2(3-\sqrt{5})^2$$
$$=12\sqrt{5}+2(9-6\sqrt{5}+5)$$
$$=12\sqrt{5}+28-12\sqrt{5}=28$$

답 ④

유제 16 $\frac{13}{4+\sqrt{3}}=\frac{13(4-\sqrt{3})}{(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}=4-\sqrt{3}$

$1^2=1$, $2^2=4$에서 $1<\sqrt{3}<2$이므로 $2<4-\sqrt{3}<3$

따라서 $4-\sqrt{3}$의 소수 부분 k는

$k=(4-\sqrt{3})-2=2-\sqrt{3}$

답 ③

유제 17 먼저 x의 값의 분모를 유리화하면

$$x=\frac{1}{\sqrt{10}-3}=\frac{\sqrt{10}+3}{(\sqrt{10}-3)(\sqrt{10}+3)}=\sqrt{10}+3$$

$\therefore\ x+y=(\sqrt{10}+3)+(\sqrt{10}-3)=2\sqrt{10}$,

$x-y=(\sqrt{10}+3)-(\sqrt{10}-3)=6$,

$xy=(\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3)=1$

따라서 주어진 식의 값은

$$\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{x^2-y^2}{xy}=\frac{(x+y)(x-y)}{xy}=\frac{2\sqrt{10}\times6}{1}=12\sqrt{10}$$

답 ⑤

유제 18 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$

$$=(4-\sqrt{6})^2+2$$
$$=4^2-2\times4\times\sqrt{6}+(\sqrt{6})^2+2$$
$$=16-8\sqrt{6}+6+2$$
$$=24-8\sqrt{6}$$

답 $24-8\sqrt{6}$

유제 19 $x=6\sqrt{2}-3$에서 $x+3=6\sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $(x+3)^2=72$

$x^2+6x+9=72$

$$\therefore\ \sqrt{x^2+6x+1}=\sqrt{(x^2+6x+9)-8}$$
$$=\sqrt{72-8}=\sqrt{64}=8$$

답 8

유제 20 $x=\dfrac{1}{3-2\sqrt{3}}=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{(3-2\sqrt{3})(3+2\sqrt{3})}$

$=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{9-12}=-1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

에서 $x+1=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$이므로 양변을 제곱하여 정리하면

$(x+1)^2=\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$, $x^2+2x+1=\dfrac{4}{3}$

$x^2+2x=\dfrac{1}{3}$

$\therefore 3x^2+6x+9=3(x^2+2x)+9=3\times\dfrac{1}{3}+9=10$ 답 10

유제 21 $a=\sqrt{98}=\sqrt{7^2\times2}=7\sqrt{2}$,

$b=\sqrt{72}+2\sqrt{6}=\sqrt{6^2\times2}+2\sqrt{6}=6\sqrt{2}+2\sqrt{6}$,

$c=\sqrt{150}-\sqrt{8}=\sqrt{5^2\times6}-\sqrt{2^2\times2}=5\sqrt{6}-2\sqrt{2}$

$a-b=7\sqrt{2}-(6\sqrt{2}+2\sqrt{6})$

$=7\sqrt{2}-6\sqrt{2}-2\sqrt{6}$

$=\sqrt{2}-2\sqrt{6}<0$

$\therefore a<b$

$a-c=7\sqrt{2}-(5\sqrt{6}-2\sqrt{2})$

$=7\sqrt{2}-5\sqrt{6}+2\sqrt{2}$

$=9\sqrt{2}-5\sqrt{6}$

$=\sqrt{162}-\sqrt{150}>0$

$\therefore a>c$

따라서 $c<a<b$이다. 답 ④

유제 22 $\sqrt{5}+2>0$, $\sqrt{7}+\sqrt{2}>0$이므로

$x=\sqrt{5}+2$, $y=\sqrt{7}+\sqrt{2}$라 하면

$x^2-y^2=(\sqrt{5}+2)^2-(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2$

$=5+4\sqrt{5}+4-(7+2\sqrt{14}+2)$

$=9+4\sqrt{5}-9-2\sqrt{14}$

$=4\sqrt{5}-2\sqrt{14}$

이때 $4\sqrt{5}=\sqrt{80}$, $2\sqrt{14}=\sqrt{56}$이므로

$4\sqrt{5}-2\sqrt{14}>0$ $\quad\therefore x^2-y^2>0$

이때 $x^2-y^2>0$이면 $x>y$이므로

$\sqrt{5}+2>\sqrt{7}+\sqrt{2}$ 답 $\sqrt{5}+2>\sqrt{7}+\sqrt{2}$

유제 23 세 원 O_1, O_2, O_3의 반지름의 길이를 각각 r_1 cm, r_2 cm, r_3 cm라 하면

$\pi r_1^2=54\pi$ $\quad\therefore r_1=\sqrt{54}$ ($\because r_1>0$)

$\pi r_2^2=96\pi$ $\quad\therefore r_2=\sqrt{96}$ ($\because r_2>0$)

$\pi r_3^2=108\pi$ $\quad\therefore r_3=\sqrt{108}$ ($\because r_3>0$)

따라서 세 원 O_1, O_2, O_3의 둘레의 길이의 합은

$2\pi r_1+2\pi r_2+2\pi r_3=2\pi(\sqrt{54}+\sqrt{96}+\sqrt{108})$

$=2\pi(3\sqrt{6}+4\sqrt{6}+6\sqrt{3})$

$=2\pi(7\sqrt{6}+6\sqrt{3})$

$=(14\sqrt{6}+12\sqrt{3})\pi$ (cm)

답 $(14\sqrt{6}+12\sqrt{3})\pi$ cm

유제 24 직육면체의 높이를 h라 하면

$\sqrt{18}\times\sqrt{2}\times h=24\sqrt{5}$

$3\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times h=24\sqrt{5}$, $6h=24\sqrt{5}$ $\quad\therefore h=4\sqrt{5}$

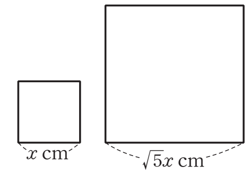
따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$4\times(\sqrt{18}+\sqrt{2}+4\sqrt{5})=4(3\sqrt{2}+\sqrt{2}+4\sqrt{5})$

$=4(4\sqrt{2}+4\sqrt{5})$

$=16\sqrt{2}+16\sqrt{5}$ 답 $16\sqrt{2}+16\sqrt{5}$

유제 25 만들려는 두 정사각형의 넓이의 비가 1 : 5이므로 두 정사각형의 한 변의 길이의 비는 1 : $\sqrt{5}$이다.



따라서 작은 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면

$4x+4\times\sqrt{5}x=64$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변을 4로 나누면 $x+\sqrt{5}x=16$

$(\sqrt{5}+1)x=16$

$\therefore x=\dfrac{16}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{16(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$

$=\dfrac{16(\sqrt{5}-1)}{4}$

$=4(\sqrt{5}-1)$

$=4\sqrt{5}-4$

따라서 작은 정사각형의 한 변의 길이는 $(4\sqrt{5}-4)$cm이다.

답 $(4\sqrt{5}-4)$cm

유제 26 $\dfrac{\sqrt{5}-2}{2+\sqrt{5}}=\dfrac{(\sqrt{5}-2)(2-\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}=\dfrac{2\sqrt{5}-5-4+2\sqrt{5}}{-1}$

$=\dfrac{-9+4\sqrt{5}}{-1}=9-4\sqrt{5}$

$\sqrt{20}-5=\sqrt{20}-\sqrt{25}<0$이므로

$\sqrt{(\sqrt{20}-5)^2}=5-\sqrt{20}$

$=5-2\sqrt{5}$

$\therefore 4+\sqrt{5}-\dfrac{\sqrt{5}-2}{2+\sqrt{5}}+\sqrt{(\sqrt{20}-5)^2}$

$=4+\sqrt{5}-(9-4\sqrt{5})+(5-2\sqrt{5})$

$=4-9+5+\sqrt{5}+4\sqrt{5}-2\sqrt{5}$

$=3\sqrt{5}$ 답 ③

Step 3. 단원 마무리하기

01	④	02	②	03	②	04	②		
05	$30\sqrt{3}+9$			06	$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$	07	①	08	①
09	-1	10	②	11	⑤	12	6	13	15
14	②	15	③	16	①	17	①	18	9
19	$24\sqrt{7}$ cm			20	②				

01 ① $4\sqrt{6}-3\sqrt{6}+\sqrt{3}+2\sqrt{3}=(4-3)\sqrt{6}+(1+2)\sqrt{3}=\sqrt{6}+3\sqrt{3}$

② $\sqrt{10}(2\sqrt{2}-3\sqrt{5})=\sqrt{10}\times2\sqrt{2}-\sqrt{10}\times3\sqrt{5}$

$=2\sqrt{10\times2}-3\sqrt{10\times5}$

$=2\sqrt{2^2\times5}-3\sqrt{5^2\times2}$

$=2\times2\sqrt{5}-3\times5\sqrt{2}$

$=4\sqrt{5}-15\sqrt{2}$

③ $(2\sqrt{3}-3\sqrt{5})^2=(2\sqrt{3})^2-2\times2\sqrt{3}\times3\sqrt{5}+(3\sqrt{5})^2$

$=4\times(\sqrt{3})^2-12\sqrt{3\times5}+9\times(\sqrt{5})^2$

$=4\times3-12\sqrt{15}+9\times5$

$=12-12\sqrt{15}+45$

$=57-12\sqrt{15}$

④ $\sqrt{7}+\sqrt{28}+\sqrt{63}=\sqrt{7}+\sqrt{2^2\times7}+\sqrt{3^2\times7}$

$=\sqrt{7}+2\sqrt{7}+3\sqrt{7}$

$=(1+2+3)\sqrt{7}$

$=6\sqrt{7}$

⑤ $\sqrt{15}\times\sqrt{5}-4\sqrt{15}\div2\sqrt{5}=\sqrt{15\times5}-\dfrac{4\sqrt{15}}{2\sqrt{5}}$

$=\sqrt{5^2\times3}-\dfrac{2\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$

$=\sqrt{5^2\times3}-2\times\sqrt{\dfrac{15}{5}}$

$=5\sqrt{3}-2\sqrt{3}$

$=(5-2)\sqrt{3}$

$=3\sqrt{3}$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

02 $A=3\sqrt{2}-7\sqrt{2}+10\sqrt{2}=(3-7+10)\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

$B=5\sqrt{5}-3\sqrt{5}-3\sqrt{5}=(5-3-3)\sqrt{5}=-\sqrt{5}$

$\therefore A-B=6\sqrt{2}-(-\sqrt{5})=6\sqrt{2}+\sqrt{5}$ 답 ②

03 $\sqrt{75}-6\sqrt{2}+\dfrac{6}{\sqrt{2}}-\dfrac{9}{\sqrt{3}}$

$=\sqrt{5^2\times3}-6\sqrt{2}+\dfrac{6\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}-\dfrac{9\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$=5\sqrt{3}-6\sqrt{2}+\dfrac{6\sqrt{2}}{2}-\dfrac{9\sqrt{3}}{3}$

$=5\sqrt{3}-6\sqrt{2}+3\sqrt{2}-3\sqrt{3}$

$=(-6+3)\sqrt{2}+(5-3)\sqrt{3}$

$=-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

$-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}=a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ 이므로

$a=-3$, $b=2$

$\therefore a+b=(-3)+2=-1$ 답 ②

04 $\sqrt{0.08}+\dfrac{4}{5\sqrt{2}}+\sqrt{0.5}=\sqrt{\dfrac{8}{100}}+\dfrac{4\times\sqrt{2}}{5\sqrt{2}\times\sqrt{2}}+\sqrt{\dfrac{50}{100}}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}}{10}+\dfrac{4\sqrt{2}}{10}+\dfrac{5\sqrt{2}}{10}$

$=\dfrac{11}{10}\sqrt{2}=\dfrac{11}{10}\times1.414$

$=1.5554$ 답 ②

05 $\sqrt{6}x+3\sqrt{2}y=\sqrt{6}\left(\dfrac{6}{\sqrt{2}}+2\sqrt{6}\right)+3\sqrt{2}\left(4\sqrt{6}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=\dfrac{6\sqrt{6}}{\sqrt{2}}+12+12\sqrt{12}-3$

$=6\sqrt{3}+12+12\times2\sqrt{3}-3$

$=6\sqrt{3}+9+24\sqrt{3}$

$=30\sqrt{3}+9$ 답 $30\sqrt{3}+9$

06 $x=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}$

$y=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{3}$

따라서 $x+y=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}+\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{3}=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$,

$x-y=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}-\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{3}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

$\therefore \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{\frac{2\sqrt{15}}{3}}{\frac{2\sqrt{6}}{3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ 답 $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

07 $A-B=(\sqrt{5}+\sqrt{2})-3\sqrt{2}$

$=\sqrt{5}+\sqrt{2}-3\sqrt{2}$

$=\sqrt{5}+(1-3)\sqrt{2}$

$=\sqrt{5}-2\sqrt{2}$

$=\sqrt{5}-\sqrt{2^2\times2}$

$=\sqrt{5}-\sqrt{8}<0$

$\therefore A<B$

$B-C=3\sqrt{2}-(6\sqrt{2}-2\sqrt{3})$

$=3\sqrt{2}-6\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

$=(3-6)\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

$=-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

$=-\sqrt{3^2\times2}+\sqrt{2^2\times3}$

$=-\sqrt{18}+\sqrt{12}<0$

$\therefore B<C$

따라서 $A<B$, $B<C$이므로 $A<B<C$이다. 답 ①

08 $(a+6\sqrt{3})(1+2\sqrt{3})=a\times1+a\times2\sqrt{3}+6\sqrt{3}\times1+6\sqrt{3}\times2\sqrt{3}$

$=a+2a\sqrt{3}+6\sqrt{3}+12(\sqrt{3})^2$

$=a+2a\sqrt{3}+6\sqrt{3}+12\times3$

$=a+2a\sqrt{3}+6\sqrt{3}+36$

$(\sqrt{6}a-5\sqrt{2})\div\sqrt{2}=(\sqrt{6}a-5\sqrt{2})\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$=\sqrt{6}a\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}-5\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$=a\times\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}-5$

$=a\sqrt{3}-5$

따라서 주어진 식은

$(a+6\sqrt{3})(1+2\sqrt{3})+(\sqrt{6}a-5\sqrt{2})\div\sqrt{2}$

$=a+2a\sqrt{3}+6\sqrt{3}+36+a\sqrt{3}-5$

$=2a\sqrt{3}+6\sqrt{3}+a\sqrt{3}+a+31$

$=(2a+6+a)\sqrt{3}+a+31$

$=(3a+6)\sqrt{3}+a+31$

$(3a+6)\sqrt{3}+a+31$의 값이 유리수이려면 $3a+6=0$이어야 한다.

$3a=-6$

$\therefore a=-2$ 답 ①

09 $(3\sqrt{7}+8)^{51}(3\sqrt{7}-8)^{51}=\{(3\sqrt{7}+8)(3\sqrt{7}-8)\}^{51}$

$=\{(3\sqrt{7})^2-8^2\}^{51}$

$=(63-64)^{51}$

$=(-1)^{51}$

$=-1$ 답 -1

10 $63=3^2\times7$이므로 $\sqrt{63}=\sqrt{3^2\times7}=3\sqrt{7}$

$32=4^2\times2$이므로 $\sqrt{32}=\sqrt{4^2\times2}=4\sqrt{2}$

$(3\sqrt{7})^2=3^2\times(\sqrt{7})^2=9\times7=63$,

$(8\sqrt{2})^2=8^2\times(\sqrt{2})^2=64\times2=128$

이므로 $(3\sqrt{7})^2<(8\sqrt{2})^2$이다.

즉, $3\sqrt{7}<8\sqrt{2}$이므로 $3\sqrt{7}-8\sqrt{2}<0$

$\therefore \sqrt{(3\sqrt{7}-8\sqrt{2})^2}=-(3\sqrt{7}-8\sqrt{2})=-3\sqrt{7}+8\sqrt{2}$

$\dfrac{4}{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}=\dfrac{4(2\sqrt{2}-\sqrt{7})}{(2\sqrt{2}+\sqrt{7})(2\sqrt{2}-\sqrt{7})}$

$=\dfrac{4\times2\sqrt{2}-4\times\sqrt{7}}{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{7})^2}$

$=\dfrac{8\sqrt{2}-4\sqrt{7}}{4\times2-7}$

$=8\sqrt{2}-4\sqrt{7}$

$\therefore \sqrt{63}-\sqrt{(3\sqrt{7}-8\sqrt{2})^2}-\sqrt{32}+\dfrac{4}{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}$

$=3\sqrt{7}-(-3\sqrt{7}+8\sqrt{2})-4\sqrt{2}+(8\sqrt{2}-4\sqrt{7})$

$=3\sqrt{7}+3\sqrt{7}-8\sqrt{2}-4\sqrt{2}+8\sqrt{2}-4\sqrt{7}$

$=-8\sqrt{2}-4\sqrt{2}+8\sqrt{2}+3\sqrt{7}+3\sqrt{7}-4\sqrt{7}$

$=(-8-4+8)\sqrt{2}+(3+3-4)\sqrt{7}$

$=-4\sqrt{2}+2\sqrt{7}$ 답 ②

11 $a+b=(4+\sqrt{15})+(4-\sqrt{15})=8$

$ab=(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})=1$

$$\therefore \left(a+\frac{1}{b}\right)+\left(b+\frac{1}{a}\right)=a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$
$$=a+b+\frac{a+b}{ab}$$
$$=8+\frac{8}{1}$$
$$=16$$

답 ⑤

12
$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}$$
$$=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$$
$$=\frac{(2\sqrt{10})^2-2\times5}{5}$$
$$=\frac{40-10}{5}$$
$$=\frac{30}{5}=6$$

답 6

13
$$x=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}$$
$$y=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$$

$x+y=(7-4\sqrt{3})+(7+4\sqrt{3})=14$

$xy=(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})=1$

따라서 주어진 식의 값은
$$\frac{x^2+y^2+xy}{x+y-1}=\frac{(x+y)^2-xy}{x+y-1}=\frac{14^2-1}{14-1}$$
$$=\frac{(14+1)(14-1)}{14-1}=15$$

답 15

14
$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}=x^2-2+\frac{1}{x^2}+4=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4=2^2+4=8$$

$x>0$이므로 $x+\dfrac{1}{x}>0$

$$\therefore x+\frac{1}{x}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

답 ②

15 $4^2=16$, $5^2=25$에서 $4<\sqrt{17}<5$이므로 $1<6-\sqrt{17}<2$

$\therefore a=1,\ b=5-\sqrt{17}$

$$\frac{a}{1-b}=\frac{1}{1-(5-\sqrt{17})}=\frac{1}{\sqrt{17}-4}=\frac{\sqrt{17}+4}{(\sqrt{17}-4)(\sqrt{17}+4)}$$
$$=\frac{\sqrt{17}+4}{17-16}=\sqrt{17}+4$$

$8<4+\sqrt{17}<9$이므로 $\dfrac{a}{1-b}$의 정수 부분은 8이다.

답 ③

16 $1^2=1$, $2^2=4$에서 $1<\sqrt{3}<2$이므로 $4<6-\sqrt{3}<5$

$\therefore x=(6-\sqrt{3})-4=2-\sqrt{3}$

$x=2-\sqrt{3}$에서 $x-2=-\sqrt{3}$

양변을 제곱하면

$(x-2)^2=3$, $x^2-4x+4=3$

$\therefore x^2-4x+2=(x^2-4x+4)-2=3-2=1$

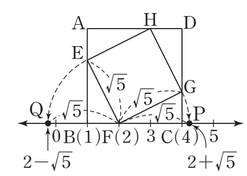
답 ①

17
$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}}$$
$$=\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2})}$$
$$=\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x-1})^2-(\sqrt{x+2})^2}$$
$$=\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}}{x-1-(x+2)}$$
$$=\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}}{-3}$$

$$\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(5)}+\frac{1}{f(8)}+\frac{1}{f(11)}+\frac{1}{f(14)}$$
$$=\frac{\sqrt{2-1}-\sqrt{2+2}}{-3}+\frac{\sqrt{5-1}-\sqrt{5+2}}{-3}+\frac{\sqrt{8-1}-\sqrt{8+2}}{-3}+\frac{\sqrt{11-1}-\sqrt{11+2}}{-3}+\frac{\sqrt{14-1}-\sqrt{14+2}}{-3}$$
$$=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{4}}{-3}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{7}}{-3}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{10}}{-3}+\frac{\sqrt{10}-\sqrt{13}}{-3}+\frac{\sqrt{13}-\sqrt{16}}{-3}$$
$$=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{4}+\sqrt{4}-\sqrt{7}+\sqrt{7}-\sqrt{10}+\sqrt{10}-\sqrt{13}+\sqrt{13}-\sqrt{16}}{-3}$$
$$=\frac{1-4}{-3}=\frac{-3}{-3}=1$$

답 ①

18 $\overline{EF}=\overline{FG}=x$라 하면 정사각형 EFGH의 넓이는 x^2이다.



$x^2=5$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{5}$

이때 $x>0$이므로 $x=\sqrt{5}$이다.

$\therefore \overline{EF}=\overline{FG}=\sqrt{5}$

$\overline{FP}=\overline{FG}=\sqrt{5}$이므로 점 P에 대응하는 수 p의 값은

$p=2+\sqrt{5}$

$\overline{FQ}=\overline{FE}=\sqrt{5}$이므로 점 Q에 대응하는 수 q의 값은

$q=2-\sqrt{5}$

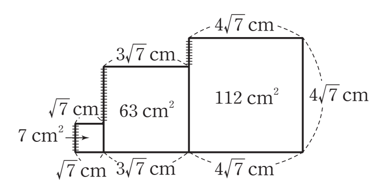
$\therefore 2p-\sqrt{5}q=2(2+\sqrt{5})-\sqrt{5}(2-\sqrt{5})=4+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}+5=9$

답 9

19 넓이가 7 cm^2인 정사각형 모양의 종이의 한 변의 길이는 $\sqrt{7}$ cm,

넓이가 63 cm^2인 정사각형 모양의 종이의 한 변의 길이는 $3\sqrt{7}$ cm,

넓이가 112 cm^2인 정사각형 모양의 종이의 한 변의 길이는 $4\sqrt{7}$ cm이다.



빗금친 부분의 길이의 합은 $4\sqrt{7}$ cm이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는

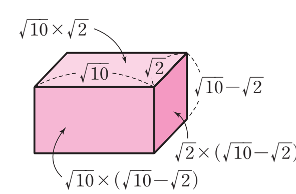
$(\sqrt{7}+3\sqrt{7}+4\sqrt{7})\times2+4\sqrt{7}+4\sqrt{7}$

$=16\sqrt{7}+4\sqrt{7}+4\sqrt{7}$

$=24\sqrt{7}(\text{cm})$

답 $24\sqrt{7}$ cm

20 주어진 직육면체의 겉넓이는



$2\times\sqrt{10}\times\sqrt{2}$

$+2\times\sqrt{10}\times(\sqrt{10}-\sqrt{2})$

$+2\times\sqrt{2}\times(\sqrt{10}-\sqrt{2})$

$=2\times\sqrt{20}+2\times(10-\sqrt{20})$

$\quad+2\times(\sqrt{20}-2)$

$=2\times2\sqrt{5}+2\times(10-2\sqrt{5})+2\times(2\sqrt{5}-2)$

$=4\sqrt{5}+20-4\sqrt{5}+4\sqrt{5}-4$

$=16+4\sqrt{5}$

답 ②

05 인수분해 공식

Step 1. 개념 다지기

05-1 인수분해

기본연습 1

(1) $(x+2)(x-1)$의 인수는 $1, x+2, x-1, (x+2)(x-1)$

(2) $3(y-2)$의 인수는 $1, 3, y-2, 3(y-2)$

답 (1) $1, x+2, x-1, (x+2)(x-1)$ (2) $1, 3, y-2, 3(y-2)$

연습 1

$x^2(x+1)(x-1)$의 인수가 아닌 것은 ㄷ. x^4이다. 답 ㄷ

05-2 공통인수를 이용한 인수분해

기본연습 2

(1) $3a^2b-6a=3a(ab-2)$

(2) $-7xy^2+14x^2y^3=-7xy^2(1-2xy)$

답 (1) $3a, 3a(ab-2)$ (2) $-7xy^2, -7xy^2(1-2xy)$

연습 2

$(x-2)(a-b)-(2-x)(2a+b)$

$=(x-2)(a-b)-\{-(x-2)\}(2a+b)$

$=(x-2)\{(a-b)+(2a+b)\}$

$=3a(x-2)$ 답 $3a(x-2)$

05-3 인수분해 공식 (1) ; $a^2\pm2ab+b^2$ 꼴의 인수분해

기본연습 3

(1) $a^2-2a+1=(a-1)^2$

(2) $16x^2+8x+1=(4x+1)^2$ 답 (1) $(a-1)^2$ (2) $(4x+1)^2$

연습 3

x^2+4x+a에서 $a=\left(\frac{4}{2}\right)^2=2^2=4$

$x^2+bx+25$에서 $b=\pm2\sqrt{25}=\pm10$ 답 $a=4, b=\pm10$

05-4 인수분해 공식 (2) ; a^2-b^2 꼴의 인수분해

기본연습 4

(1) $x^2-4y^2=(x+2y)(x-2y)$

(2) $a^2-36b^2=(a+6b)(a-6b)$

답 (1) $(x+2y)(x-2y)$ (2) $(a+6b)(a-6b)$

연습 4

$xy^8-256x=x(y^8-256)$

$=x(y^4+16)(y^4-16)$

$=x(y^4+16)(y^2+4)(y^2-4)$

$=x(y^4+16)(y^2+4)(y+2)(y-2)$

답 $x(y^4+16)(y^2+4)(y+2)(y-2)$

05-5 인수분해 공식 (3) ; $x^2+(a+b)x+ab$ 꼴의 인수분해

기본연습 5

(1) $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

(2) $x^2-12x+32=(x-4)(x-8)$

답 (1) $(x+2)(x+3)$ (2) $(x-4)(x-8)$

연습 5

$(x-3)(x-4)-x=(x^2-7x+12)-x$

$=x^2-8x+12$

$=(x-2)(x-6)$ 답 $(x-2)(x-6)$

05-6 인수분해 공식 (4) ; $acx^2+(ad+bc)x+bd$의 인수분해

기본연습 6

(1) $6x^2+11x+4=(2x+1)(3x+4)$

(2) $-3x^2-5x+2=-(3x^2+5x-2)=-(3x-1)(x+2)$

답 (1) $(2x+1)(3x+4)$ (2) $-(3x-1)(x+2)$

연습 6

$10x^2+13x-3=(5x-1)(2x+3)$이므로

$a=5, b=2, c=3$

$\therefore a+b-c=5+2-3=4$ 답 4

Step 2. 대표 문제로 접근하기

01	(1) x^2-4 (2) a^2+a-12 (3) $2x^2-9x+10$ (4) a^2-2a+1								
02	(1) $x(x+5)$ (2) $2x(x-3y)$					03	④	04	②
05	③	06	④	07	$A=4, B=\pm3$			08	①
09	$2x$	10	③	11	③	12	④	13	④
14	$(x+4)(x-1)$			15	②	16	5	17	③
18	⑤	19	②	20	$9x^2+9x-10, (3x-2)(3x+5)$				
21	③	22	②						

유제 01 문제에 주어진 다항식의 곱을 전개하면

(1) $(x+2)(x-2)=x^2+2x-2x-4=x^2-4$

(2) $(a-3)(a+4)=a^2-3a+4a-12$

$=a^2+a-12$

(3) $(2x-5)(x-2)=2x^2-5x-4x+10$

$=2x^2-9x+10$

(4) $(a-1)^2=(a-1)(a-1)$

$=a^2-a-a+1$

$=a^2-2a+1$

답 (1) x^2-4 (2) a^2+a-12 (3) $2x^2-9x+10$ (4) a^2-2a+1

유제 02 (1) 두 항 x^2과 $5x$의 공통인수 x로 묶어 인수분해하면

$x^2+5x=x(x+5)$

(2) 두 항 $2x^2$과 $-6xy$의 공통인수 $2x$로 묶어 인수분해하면

$2x^2-6xy=2x(x-3y)$ 답 (1) $x(x+5)$ (2) $2x(x-3y)$

유제 03 주어진 식을 인수분해하면

$3x^2-9xy+12xz=3x\times x-3x\times 3y+3x\times 4z$

$=3x(x-3y+4z)$ 답 ④

유제 04 $xy(3x-2y)-xy(x+y)$에서 $xy(3x-2y)$와 $-xy(x+y)$의 공통인수는 xy이므로 주어진 다항식을 인수분해하면

$xy(3x-2y)-xy(x+y)=xy\{(3x-2y)-(x+y)\}$

$=xy(3x-2y-x-y)$

$=xy(2x-3y)$

주어진 다항식의 인수는 ㄱ. xy, ㄴ. $2x-3y$, ㅁ. $2x^2-3xy$이다.

답 ②

유제 05 $25x^2-40xy+16y^2=(5x)^2-2\times 5x\times 4y+(4y)^2$

$=(5x-4y)^2$ 답 ③

유제 06 $\frac{9}{16}a^2+\frac{3}{5}ab+\frac{4}{25}b^2=\left(\frac{3}{4}a\right)^2+2\times\frac{3}{4}a\times\frac{2}{5}b+\left(\frac{2}{5}b\right)^2$

$=\left(\frac{3}{4}a+\frac{2}{5}b\right)^2$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ④ $\frac{3}{4}a+\frac{2}{5}b$이다. 답 ④

유제 07 $9x^2+12xy+Ay^2$이 완전제곱식으로 인수분해되므로

$(3x)^2+2\times 3x\times 2y+(2y)^2=9x^2+12xy+Ay^2$

$\therefore A=2^2=4$

$\frac{1}{4}x^2+Bx+9$가 완전제곱식으로 인수분해되므로

$\left(\frac{1}{2}x\right)^2+Bx+3^2=\left(\frac{1}{2}x\pm 3\right)^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2\pm 2\times\frac{1}{2}x\times 3+3^2$

$\therefore B=\pm 2\times\frac{1}{2}\times 3=\pm 3$

따라서 $A=4$, $B=\pm 3$이다. 답 $A=4$, $B=\pm 3$

유제 08 $4x^2-(k-4)xy+25y^2$이 완전제곱식이므로

$4x^2-(k-4)xy+25y^2=(2x)^2\pm 2\times 2x\times 5y+(5y)^2$

$=4x^2\pm 20xy+25y^2$

$-(k-4)=20$에서 $k-4=-20$, $k=-20+4=-16$

$-(k-4)=-20$에서 $k-4=20$, $k=20+4=24$

따라서 구하는 k의 값은 -16 또는 24이다. 답 ①

유제 09 $\sqrt{x^2+8x+16}-\sqrt{x^2-8x+16}=\sqrt{(x+4)^2}-\sqrt{(x-4)^2}$

$|x|<4$에서 $-4<x<4$이므로

$0<x+4$, $x-4<0$

$\therefore \sqrt{(x+4)^2}-\sqrt{(x-4)^2}=x+4-\{-(x-4)\}$

$=x+4+x-4=2x$ 답 $2x$

유제 10 $\sqrt{a^2-10a+25}+\sqrt{a^2+2a+1}$에서 근호 안의 식을 인수분해하면

$\sqrt{a^2-10a+25}+\sqrt{a^2+2a+1}=\sqrt{(a-5)^2}+\sqrt{(a+1)^2}$

$-1<a<5$이므로

$-1-5<a-5<5-5$ $\quad\therefore -6<a-5<0$

$-1+1<a+1<5+1$ $\quad\therefore 0<a+1<6$

$\therefore \sqrt{(a-5)^2}+\sqrt{(a+1)^2}=-(a-5)+a+1$

$=-a+5+a+1$

$=(-1+1)a+5+1$

$=6$ 답 ③

유제 11 $x^{16}-1=(x^8)^2-1^2$

$=(x^8+1)(x^8-1)$

$=(x^8+1)(x^4+1)(x^4-1)$

$=(x^8+1)(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)$

$=(x^8+1)(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$

따라서 $x^{16}-1$의 인수가 아닌 것은 ③ x^3+1이다. 답 ③

유제 12 x^3-25x에서 x^3과 $-25x$의 공통인수가 x이므로

$x^3-25x=x(x^2-25)=x(x+5)(x-5)$

$x(x+5)=x^2+5x$, $x(x-5)=x^2-5x$,

$(x+5)(x-5)=x^2-25$이므로

주어진 보기에서 x^3-25x의 인수가 아닌 것은 ④ x^2이다. 답 ④

유제 13 $x^2-2xy-8y^2$에서

$x^2-4xy+2xy+(-4y)\times 2y=(x+2y)(x-4y)$ 답 ④

유제 14 $(x-2)(x+5)+6=x^2+5x-2x-10+6$

$=x^2+3x-4$

$\therefore x^2+3x-4=x^2+(4-1)x+4\times(-1)$

$=(x+4)(x-1)$ 답 $(x+4)(x-1)$

유제 15 $12x^2-11x+2$를 인수분해하면 $(4x-1)(3x-2)$

즉, $(4x-1)(3x-2)=(4x+A)(Bx+C)$이므로

$A=-1$, $B=3$, $C=-2$

$\therefore A+2B+C=-1+2\times 3+(-2)$

$=-1+6-2$

$=3$ 답 ②

유제 16 $10x^2-13xy-3y^2$을 인수분해하면 $(2x-3y)(5x+y)$

즉, $(2x-3y)(5x+y)=(ax+by)(cx+dy)$이므로

$a=2$, $b=-3$, $c=5$, $d=1$ 또는 $a=5$, $b=1$, $c=2$, $d=-3$

따라서 구하는 합은

$a+b+c+d=2+(-3)+5+1$

$=5$ 답 5

유제 17 다항식 $ax^2+12x-9$가 $2x+3$을 인수로 가지므로

$ax^2+12x-9=(2x+3)(mx+n)$ …… ㉠

과 같이 인수분해할 수 있다.

㉠의 우변을 전개하면

$(2x+3)(mx+n)=2mx^2+(2n+3m)x+3n$

이 식이 $ax^2+12x-9$와 같아야 하므로

상수항끼리 비교해보면 $3n=-9$ $\quad\therefore n=-3$

x의 계수끼리 비교해보면 $2n+3m=12$

$2n+3m=2\times(-3)+3m=12$

$-6+3m=12$, $3m=18$ $\quad\therefore m=6$

따라서 x^2의 계수끼리 비교해보면

$a=2m=2\times 6=12$ 답 ③

유제 18 다항식 $6x^2-8x+a$가 $2x-6$을 인수로 가지므로

$6x^2-8x+a=(2x-6)(mx+n)$ …… ㉠

과 같이 인수분해할 수 있다.

이때 ㉠의 우변을 전개하면

$(2x-6)(mx+n)=2mx^2+(2n-6m)x-6n$

이 식이 $6x^2-8x+a$와 같아야 하므로

x^2의 계수끼리 비교해 보면

$2m=6$ $\quad\therefore m=3$

x의 계수끼리 비교해 보면

$2n-6m=-8$

$2n-6m=2n-18=-8$ $\quad\therefore n=5$

따라서 다항식 $6x^2-8x+a$의 다른 한 인수는 $3x+5$이다. 답 ⑤

유제 19 영훈이는 이차식의 x의 계수를 잘못 보아 $(x-8)(x-3)$으로 인수분해하였으므로 $(x-8)(x-3)=x^2-11x+24$에서 원래 이차식의 상수항은 24임을 알 수 있다.

민영이는 이차식의 상수항을 잘못 보아 $(x-4)(x-10)$으로 인수분해하였으므로 $(x-4)(x-10)=x^2-14x+40$에서 원래 이차식의 x의 계수는 -14임을 알 수 있다.
따라서 구하는 이차식은 $x^2-14x+24$이므로
바르게 인수분해하면
$x^2-14x+24=(x-2)(x-12)$ 답 ②

유제 20 지희는 이차식의 일차항의 계수만 잘못 보아 $(3x+1)(3x-10)$으로 인수분해하였으므로 $(3x+1)(3x-10)=9x^2-27x-10$에서 처음 이차식의 x^2의 계수는 9, 상수항은 -10임을 알 수 있다.
상진이는 이차식의 상수항만 잘못 보아 $(3x-1)(3x+4)$로 인수분해하였으므로 $(3x-1)(3x+4)=9x^2+9x-4$에서 처음 이차식의 x^2의 계수는 9, x의 계수는 9임을 알 수 있다.
따라서 구하는 이차식은 $9x^2+9x-10$이다.
이차식 $9x^2+9x-10$을 인수분해하면
$9x^2+9x-10=(3x-2)(3x+5)$
답 $9x^2+9x-10$, $(3x-2)(3x+5)$

유제 21 직사각형의 넓이가 $3x^2+11x+6=(x+3)(3x+2)$이고, 가로의 길이가 $3x+2$이므로 세로의 길이는 $x+3$이다.
직사각형의 둘레의 길이는
$2\{(3x+2)+(x+3)\}=2(4x+5)=8x+10$이므로
$m=8$, $n=10$
$\therefore m+n=8+10=18$ 답 ③

유제 22 $x+3$이 두 다항식 $x^2+ax+12$, $x^2+12x+b$의 공통인수이므로
두 다항식을 각각
$x^2+ax+12=(x+3)(x+m)$ ······ ㉠
$x^2+12x+b=(x+3)(x+n)$ ······ ㉡
과 같이 인수분해할 수 있다.
㉠의 우변을 전개하면
$(x+3)(x+m)=x^2+(3+m)x+3m$
이 식이 $x^2+ax+12$와 같아야 하므로
상수항끼리 비교하면 $3m=12$ $\quad\therefore m=4$
따라서 두 식의 x의 계수끼리 비교해보면
$a=3+m=3+4=7$
마찬가지로 ㉡의 우변을 전개하면
$(x+3)(x+n)=x^2+(3+n)x+3n$
이 식이 $x^2+12x+b$와 같아야 하므로
x의 계수끼리 비교해보면 $3+n=12$ $\quad\therefore n=9$
따라서 두 식의 상수항끼리 비교해보면 $b=3n=3\times9=27$
$\therefore a+b=7+27=34$ 답 ②

Step 3. 단원 마무리하기

01	⑤	02	⑤	03	②, ④	04	⑤	05	④
06	④	07	②	08	④	09	③	10	16
11	$3x$	12	$a=16$, $b=\pm24$			13	⑤	14	④
15	③	16	$24x$	17	2	18	$(5x+13y)(5x-13y)$		
19	⑤	20	$2x+3$						

01 주어진 다항식 $2(x+1)(x-3)$에서
$2\times(x+1)(x-3)=2\times(x^2-2x-3)$
$2(x+1)\times(x-3)=(2x+2)\times(x-3)$
$(x+1)\times2(x-3)=(x+1)\times(2x-6)$
이므로 보기에서 $2(x+1)(x-3)$의 인수가 아닌 것은
⑤ x^2+2x-3이다. 답 ⑤

02 $8x^2-32=8(x^2-4)=8(x^2-2^2)=8(x+2)(x-2)$ 답 ⑤

03 $y-2x=-(2x-y)$이므로
$(2x-y)(x-1)-2y(y-2x)=(2x-y)(x-1)-2y\times\{-(2x-y)\}$
$=(2x-y)(x-1)+2y(2x-y)$
$=(2x-y)\{(x-1)+2y\}$
$=(2x-y)(x-1+2y)$
$=(2x-y)(x+2y-1)$
따라서 보기에서 주어진 다항식의 인수는 $2x-y$, $x+2y-1$이다.
답 ②, ④

04 x^3-5x^2+4x에서 x^3, $-5x^2$, $4x$의 공통인수는 x이므로
$x^3-5x^2+4x=x(x^2-5x+4)$
x^2-5x+4에서 합이 -5, 곱이 4인 두 수는 -1, -4이므로
$x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$
따라서 주어진 다항식을 인수분해하면
$x^3-5x^2+4x=x(x-1)(x-4)$
보기에서 x^3-5x^2+4x의 인수인 것은
x, $x-4$, $x-1$, $x(x-1)=x^2-x$이다.
따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ⑤ x^2+4x이다. 답 ⑤

05 두 다항식을 각각 인수분해하면
$-x+2x^2$에서 $-x$, $2x^2$의 공통인수는 x이므로
$-x+2x^2=x(-1+2x)=x(2x-1)$
$10x^2y-5xy$에서 $10x^2y$, $-5xy$의 공통인수는 $5xy$이므로
$10x^2y-5xy=5xy(2x-1)$
따라서 보기에서 두 다항식의 공통인수는 $x(2x-1)$이다. 답 ④

06 ① $x^2-9x-22=x^2+\{2+(-11)\}x+2\times(-11)$
$=(x+2)(x-11)$
② $12x^2-27=3(4x^2-9)$
$=3\{(2x)^2-3^2\}$
$=3(2x+3)(2x-3)$
③ $5x^2-13x-6=(5x+2)(x-3)$
④ $-4x^2+4x-1=-(4x^2-4x+1)$
$=-\{(2x)^2-2\times2x\times1+1^2\}=-(2x-1)^2$
⑤ $\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{9}y^2=\left(\frac{1}{4}x\right)^2-\left(\frac{1}{3}y\right)^2$
$=\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}y\right)$
따라서 인수분해한 것이 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

07 $\frac{1}{9}x^2+axy+\frac{1}{4}y^2=\left(\frac{1}{3}x\right)^2+axy+\left(\frac{1}{2}y\right)^2$
$=\left(\frac{1}{3}x\pm\frac{1}{2}y\right)^2$
이므로 $a=\pm2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$
$\therefore a=\pm\frac{1}{3}$ 답 ②

08 ① $-a^2+b^2=b^2-a^2$
$=(b+a)(b-a)$
$=(-a+b)(a+b)$

② $3xy^2-3x^2y=3xy\times y-3xy\times x$
$=3xy(y-x)$
③ $x^2-6xy+9y^2=x^2-2\times x\times 3y+(3y)^2$
$=(x-3y)^2$
④ $a^2-2a-24=a^2+\{4+(-6)\}a+4\times(-6)$
$=(a+4)(a-6)$
⑤ $3x^2-10xy+3y^2=(x-3y)(3x-y)$
따라서 인수분해가 바르게 된 것은 ④이다. 답 ④

09 ① $a^2-14a+49=a^2-2\times a\times 7+7^2$
$=(a-7)^2$
② $\frac{4}{9}x^2+2xy+\frac{9}{4}y^2=\left(\frac{2}{3}x\right)^2+2\times\frac{2}{3}x\times\frac{3}{2}y+\left(\frac{3}{2}y\right)^2$
$=\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}y\right)^2$
③ $\frac{1}{4}x^2+2xy+y^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2+2xy+y^2$에서
$2xy\neq 2\times\frac{1}{2}x\times y$이므로 위 식은 완전제곱식으로 인수분해되지 않는다.
④ $9x^2-24xy+16y^2=(3x)^2-2\times 3x\times 4y+(4y)^2$
$=(3x-4y)^2$
⑤ $50x^2+60xy+18y^2=2(25x^2+30xy+9y^2)$
$=2\{(5x)^2+2\times 5x\times 3y+(3y)^2\}$
$=2(5x+3y)^2$
따라서 완전제곱식으로 인수분해되지 않는 것은 ③이다. 답 ③

10 양수 k에 대하여 $(2x+3)(2x-5)+k$가 완전제곱식이므로
$(2x+3)(2x-5)+k=4x^2-4x-15+k$
$=(2x)^2-2\times 2x\times 1+1^2$
에서 $-15+k=1$
$\therefore k=16$ 답 16

11 $y^2-2xy+x^2$을 인수분해하면 $y^2-2xy+x^2=(y-x)^2$
$x>0$, $y<0$이므로 $y-x<0$
$\therefore$ (주어진 식)$=\sqrt{4x^2}-\sqrt{y^2}+\sqrt{(y-x)^2}$
$=\sqrt{(2x)^2}-\sqrt{y^2}+\sqrt{(y-x)^2}$
$=2x-(-y)+\{-(y-x)\}$
$=2x+y-y+x$
$=3x$ 답 $3x$

12 $x^2-ax+64$가 완전제곱식이므로
$-a=\pm 2\sqrt{64}=\pm 2\times 8=\pm 16$
$\therefore a=-16$ 또는 $a=16$
$9x^2+bx+a$가 완전제곱식이므로 $a=16$
$9x^2+bx+16=(3x)^2+bx+4^2=(3x\pm 4)^2$
이므로 $b=\pm 24$
$\therefore a=16$, $b=\pm 24$ 답 $a=16$, $b=\pm 24$

13 $10x^2+ax-15$가 $2x+5$를 인수로 가지므로
$10x^2+ax-15=(2x+5)(mx+n)$ ⋯⋯ ㉠
과 같이 인수분해할 수 있다.
이때 ㉠의 우변을 전개하면
$2mx^2+(2n+5m)x+5n$
이 식이 $10x^2+ax-15$와 같아야 하므로
$2m=10$ $\therefore m=5$
$5n=-15$ $\therefore n=-3$
따라서 두 식의 x의 계수끼리 비교해 보면
$a=5m+2n=5\times 5+2\times(-3)=25-6=19$ 답 ⑤

14 $4x^2-7x+k$가 $x-3$을 인수로 가지므로
$4x^2-7x+k=(x-3)(mx+n)$ ⋯⋯ ㉠
과 같이 인수분해할 수 있다.
이때 ㉠의 우변을 전개하면
$(x-3)(mx+n)=mx^2+(n-3m)x-3n$
이 식이 $4x^2-7x+k$와 같아야 하므로
x^2의 계수를 비교해 보면 $m=4$
x의 계수를 비교해 보면
$n-3m=-7$ $\therefore n=5$
따라서 구하는 이차식의 다른 인수는 $4x+5$이다. 답 ④

15 성준이는 이차식의 x의 계수를 잘못 보고 $(x-2)(x-20)$으로 인수분해하였으므로 $(x-2)(x-20)=x^2-22x+40$에서 원래 이차식의 상수항은 40임을 알 수 있다.
민희는 이차식의 상수항을 잘못 보고 $(x-4)(x-9)$로 인수분해하였으므로 $(x-4)(x-9)=x^2-13x+36$에서 원래 이차식의 x의 계수는 -13임을 알 수 있다.
따라서 구하는 이차식은 $x^2-13x+40$이므로 바르게 인수분해하면
$x^2-13x+40=(x-5)(x-8)$ 답 ③

16 액자의 넓이가 $36x^2-9=(6x-3)(6x+3)$이고, 세로의 길이가 $6x-3$이므로 가로의 길이는 $6x+3$이다.
따라서 액자의 둘레의 길이는
$2\{(6x-3)+(6x+3)\}=2\times 12x=24x$ 답 $24x$

17 $x-3$이 두 다항식 $2x^2+ax-15$, $3x^2-10x+b$의 공통인수이므로
두 다항식을 각각
$2x^2+ax-15=(x-3)(2x+m)$ ⋯⋯ ㉠
$3x^2-10x+b=(x-3)(3x+n)$ ⋯⋯ ㉡
과 같이 인수분해할 수 있다.
㉠의 우변을 전개하면
$(x-3)(2x+m)=2x^2+(m-6)x-3m$
이 식이 $2x^2+ax-15$와 같아야 하므로
상수항끼리 비교해 보면 $-3m=-15$
$\therefore m=5$
따라서 두 식의 x의 계수끼리 비교해 보면
$a=m-6=5-6=-1$
마찬가지로 ㉡의 우변을 전개하면
$(x-3)(3x+n)=3x^2+(n-9)x-3n$
이 식이 $3x^2-10x+b$와 같아야 하므로
x의 계수끼리 비교해 보면 $n-9=-10$
$\therefore n=-1$
따라서 두 식의 상수항끼리 비교해 보면
$b=-3n=-3\times(-1)=3$
$\therefore a+b=-1+3=2$ 답 2

18 $a*b=(a+b)(a-b)=a^2-b^2$이므로
$(3x*5y)+(4x*12y)=\{(3x)^2-(5y)^2\}+\{(4x)^2-(12y)^2\}$
$=9x^2-25y^2+16x^2-144y^2$
$=25x^2-169y^2$
$=(5x)^2-(13y)^2$
$=(5x+13y)(5x-13y)$
따라서 주어진 식을 인수분해하면 $(5x+13y)(5x-13y)$이다.
답 $(5x+13y)(5x-13y)$

19 $x^2+Ax-36=(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
에서 곱이 -36인 두 정수 a, b는
-36, 1 또는 -18, 2 또는 -12, 3 또는 -9, 4 또는 -6, 6 또는
-4, 9 또는 -3, 12 또는 -2, 18 또는 -1, 36
$A=a+b$이므로 곱이 -36인 두 정수 a, b의 합은 -35, -16, -9, -5, 0, 5, 9, 16, 35이다.
따라서 상수 A의 값이 될 수 없는 것은 ⑤ 12이다. 답 ⑤

20 넓이가 x^2인 정사각형이 4개, 넓이가 x인 직사각형이 8개,
넓이가 1인 정사각형이 3개 있으므로 모든 사각형들의 넓이의 합은
$x^2\times4+x\times8+1\times3=4x^2+8x+3$
따라서 큰 직사각형의 넓이가 $4x^2+8x+3=(2x+1)(2x+3)$이고
이 직사각형의 가로의 길이가 $2x+1$이므로 세로의 길이는 $2x+3$이다.
답 $2x+3$

06 인수분해 공식의 활용

Step 1. 개념 다지기

06-1 복잡한 식의 인수분해

기본연습 1-1

(1) $xy^3-xy^2-2xy=xy(y^2-y-2)$
$=xy(y+1)(y-2)$

(2) $x+y=X$로 치환하면
$(x+y)^2+6(x+y)+9=X^2+6X+9$
$=(X+3)^2=(x+y+3)^2$

(3) $x^2-y^2+4y-4=x^2-(y^2-4y+4)$
$=x^2-(y-2)^2$
$=\{x+(y-2)\}\{x-(y-2)\}$
$=(x+y-2)(x-y+2)$

(4) y에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2-x+xy-2y-2=(x-2)y+x^2-x-2$
$=(x-2)y+(x+1)(x-2)$
$=(x-2)(x+y+1)$

답 (1) $xy(y+1)(y-2)$ (2) $(x+y+3)^2$
(3) $(x+y-2)(x-y+2)$ (4) $(x-2)(x+y+1)$

연습 1-1

x^2+2x-y^2-2y
$=x^2-y^2+2x-2y$
$=(x+y)(x-y)+2(x-y)$
$=(x-y)(x+y+2)$ 답 $(x-y)(x+y+2)$

기본연습 1-2

(1) $3ax^2-12ax-15a=3a(x^2-4x-5)$
$=3a(x+1)(x-5)$

(2) $2a-1=X$로 치환하면
$(2a-1)^2-8(2a-1)+12=X^2-8X+12$
$=(X-2)(X-6)$
$=(2a-1-2)(2a-1-6)$
$=(2a-3)(2a-7)$

(3) $-(-a^2+2a-1)-9b^2=(a^2-2a+1)-9b^2$
$=(a-1)^2-(3b)^2$
$=(a-1+3b)(a-1-3b)$
$=(a+3b-1)(a-3b-1)$

(4) a에 대하여 내림차순으로 정리하면
$b^2+ab-a+3b-4=(b-1)a+b^2+3b-4$
$=(b-1)a+(b-1)(b+4)$
$=(b-1)(a+b+4)$

답 (1) $3a(x+1)(x-5)$ (2) $(2a-3)(2a-7)$
(3) $(a+3b-1)(a-3b-1)$ (4) $(b-1)(a+b+4)$

연습 1-2

$a^2+a-ab-2b-2$
$=a^2+a-2-ab-2b$
$=(a-1)(a+2)-b(a+2)$
$=(a+2)(a-b-1)$ 답 $(a+2)(a-b-1)$

06-2 인수분해의 활용

기본연습 2-1

(1) $39^2-31^2=(39+31)(39-31)=70\times8=560$
(2) $x^2+4x+4=(x+2)^2=(28+2)^2=30^2=900$ 답 (1) 560 (2) 900

연습 2-1

$74^2+6\times74+3^2=74^2+2\times74\times3+3^2$
$=(74+3)^2=77^2$
이때 a는 자연수이므로 $a=77$
$\therefore a^2+6a+9=(a+3)^2=(77+3)^2=80^2=6400$ 답 6400

기본연습 2-2

(1) $15\times52^2-15\times48^2=15(52^2-48^2)$
$=15(52+48)(52-48)$
$=15\times100\times4$
$=6000$

(2) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
$=(2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5})^2$
$=4^2=16$ 답 (1) 6000 (2) 16

연습 2-2

$\sqrt{20^2-16^2}=\sqrt{(20+16)(20-16)}$
$=\sqrt{36\times4}$
$=\sqrt{144}$
$=\sqrt{12^2}=12$
$\therefore a=12$
$36\times8+36\times2=36\times(8+2)$
$=36\times10$
$=360$
$\therefore b=360$
따라서 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{360}{12}=30$ 답 30

Step 2. 대표 문제로 접근하기

01	②	02	④	03	④	04	①		
05	$(a-4)(b-5)$			06	②, ③	07	$2x$	08	④
09	$x-2y+1$			10	④	11	③	12	②
13	⑤	14	⑤	15	③	16	$4x+2y-10$		
17	⑤	18	③						

유제 01 $x+2=X$로 치환하여 주어진 식을 인수분해하면

$$\begin{aligned}6(x+2)^2+13(x+2)-15&=6X^2+13X-15\\&=(6X-5)(X+3)\\&=\{6(x+2)-5\}\{(x+2)+3\}\\&=(6x+7)(x+5)\end{aligned}$$

따라서 $(6x+7)(x+5)=(x+a)(6x+b)$이므로

$a=5,\ b=7$

$\therefore\ ab=5\times7=35$

답 ②

유제 02 $x-y=X$로 치환하여 주어진 식을 인수분해하면

$$\begin{aligned}&(x-y+6)(x-y-2)-48\\&=(X+6)(X-2)-48\\&=X^2+4X-12-48\\&=X^2+4X-60\\&=(X-6)(X+10)\\&=(x-y-6)(x-y+10)\end{aligned}$$

답 ④

유제 03 $x(x-2)(x-1)(x+1)-8$

$$\begin{aligned}&=\{x(x-1)\}\{(x-2)(x+1)\}-8\\&=(x^2-x)[x^2+\{(-2)+1\}x+(-2)\times1]-8\\&=(x^2-x)(x^2-x-2)-8\quad\cdots\cdots\ ㉠\end{aligned}$$

㉠에서 x^2-x를 t로 치환하면

$$\begin{aligned}t(t-2)-8&=t^2-2t-8\\&=t^2+\{(-4)+2\}t+(-4)\times2\\&=(t-4)(t+2)\quad\cdots\cdots\ ㉡\end{aligned}$$

㉡에서 t에 x^2-x를 대입하면

$(x^2-x-4)(x^2-x+2)$이다.

답 ④

유제 04 $x(x-2)(x-3)(x-5)+9$

$$\begin{aligned}&=\{x(x-5)\}\{(x-2)(x-3)\}+9\\&=(x^2-5x)[x^2+\{(-2)+(-3)\}x+(-2)\times(-3)]+9\\&=(x^2-5x)(x^2-5x+6)+9\quad\cdots\cdots\ ㉠\end{aligned}$$

㉠에서 x^2-5x를 t로 치환하면

$$\begin{aligned}t(t+6)+9&=t^2+6t+9\\&=t^2+2\times t\times3+3^2\\&=(t+3)^2\quad\cdots\cdots\ ㉡\end{aligned}$$

㉡에서 t에 x^2-5x를 대입하면

$(x^2-5x+3)^2$

따라서 $a=-5,\ b=3$이므로

$a+b=(-5)+3=-2$

답 ①

유제 05 $$\begin{aligned}ab-4b-5a+20&=b(a-4)-5(a-4)\\&=(a-4)(b-5)\end{aligned}$$

답 $(a-4)(b-5)$

유제 06 $$\begin{aligned}x^2-x+3y-9y^2&=x^2-9y^2-x+3y\\&=(x^2-9y^2)-(x-3y)\\&=x^2-(3y)^2-(x-3y)\\&=(x+3y)(x-3y)-(x-3y)\\&=\{(x+3y)-1\}(x-3y)\\&=(x+3y-1)(x-3y)\end{aligned}$$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ② $x-3y$와 ③ $x+3y-1$이다.

답 ②, ③

유제 07 $$\begin{aligned}x^2-36+12y-y^2&=x^2-(y^2-12y+36)\\&=x^2-(y^2-2\times y\times6+6^2)\\&=x^2-(y-6)^2\\&=\{x+(y-6)\}\{x-(y-6)\}\\&=(x+y-6)(x-y+6)\end{aligned}$$

따라서 두 일차식은 $x+y-6$과 $x-y+6$이므로 구하는 합은

$(x+y-6)+(x-y+6)=2x$

답 $2x$

유제 08 $$\begin{aligned}a^2-10ab+25b^2-16c^2&=(a^2-10ab+25b^2)-16c^2\\&=\{a^2-2\times a\times5b+(5b)^2\}-16c^2\\&=(a-5b)^2-(4c)^2\\&=\{(a-5b)+4c\}\{(a-5b)-4c\}\\&=(a-5b+4c)(a-5b-4c)\end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ④ $a-5b-4c$이다.

답 ④

유제 09 주어진 식의 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$$\begin{aligned}&x^2-4y^2+3x-2y+2\\&=x^2+3x-4y^2-2y+2\\&=x^2+3x-2(2y^2+y-1)\\&=x^2+3x-2(2y-1)(y+1)\\&=x^2+3x+(-2y+1)(2y+2)\\&=x^2+\{(-2y+1)+(2y+2)\}x+(-2y+1)(2y+2)\\&=\{x+(-2y+1)\}\{x+(2y+2)\}\\&=(x-2y+1)(x+2y+2)\end{aligned}$$

따라서 $A=x-2y+1$이다.

답 $x-2y+1$

유제 10 주어진 식의 좌변을 z에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$$\begin{aligned}&x^2+2xy+xz-3y^2-yz\\&=xz-yz+x^2+2xy-3y^2\\&=(x-y)z+(x^2+2yx-3y^2)\\&=(x-y)z+[x^2+\{3y+(-y)\}x+3y\times(-y)]\\&=(x-y)z+(x+3y)(x-y)\\&=(x-y)\{z+(x+3y)\}\\&=(x-y)(x+3y+z)\end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ④ $x+3y+z$이다.

답 ④

유제 11 $$\begin{aligned}2.53^2+2\times2.53\times1.47+1.47^2&=(2.53+1.47)^2\\&=4^2\\&=16\end{aligned}$$

답 ③

유제 12 $$\begin{aligned}38^2+61^2-1-22^2&=(38^2-1)+(61^2-22^2)\\&=(38^2-1^2)+(61^2-22^2)\\&=(38+1)(38-1)+(61+22)(61-22)\\&=39\times37+83\times39\\&=39\times(37+83)\\&=39\times120\end{aligned}$$

$$\therefore\ \frac{38^2+61^2-1-22^2}{60}=\frac{39\times120}{60}=78$$

답 ②

유제 13 $x^2+2x-y^2+2y=x^2-y^2+2x+2y$

$=(x+y)(x-y)+2(x+y)$

$=(x+y)(x-y+2)$ ······ ㉠

㉠에 $x+y=4+\sqrt{7}$, $x-y=2-\sqrt{7}$을 대입하면

$(x+y)(x-y+2)=(4+\sqrt{7})(2-\sqrt{7}+2)$

$=(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})$

$=4^2-(\sqrt{7})^2$

$=16-7$

$=9$

답 ⑤

유제 14 $x^2-4xy+4y^2=x^2-2\times x\times 2y+(2y)^2$

$=(x-2y)^2$

이때

$x-2y=(2\sqrt{3}+\sqrt{5})-2(\sqrt{3}-\sqrt{5})$

$=2\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{3}+2\sqrt{5}$

$=3\sqrt{5}$

이므로

$(x-2y)^2=(3\sqrt{5})^2=45$

따라서 구하는 값은 45이다.

답 ⑤

유제 15 주어진 삼각형의 넓이 $a^2+3ab-10b^2$을 인수분해하면

$a^2+3ab-10b^2=(a+5b)(a-2b)$

따라서 $\frac{1}{2}\times(a+5b)\times$(밑변의 길이)$=(a+5b)(a-2b)$이므로

삼각형의 밑변의 길이는

$2\times(a-2b)=2a-4b$

답 ③

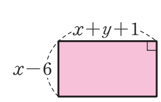
유제 16 주어진 직사각형의 넓이 $x^2+xy-5x-6y-6$을 차수가 낮은 y에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$(x-6)y+x^2-5x-6=(x-6)y+(x+1)(x-6)$

$=(x-6)(x+y+1)$

이때 직사각형의 세로의 길이가 $x-6$이므로

가로의 길이는 $x+y+1$이다.



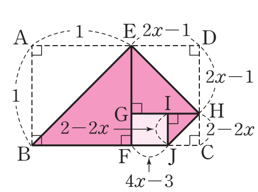
따라서 주어진 직사각형의 둘레의 길이는

$2\times\{(x-6)+(x+y+1)\}=2\times(2x+y-5)$

$=4x+2y-10$

답 $4x+2y-10$

유제 17 사각형 ABFE는 한 변의 길이가 1인 정사각형이므로



$\overline{AB}=\overline{AE}=1$

$\overline{ED}=\overline{AD}-\overline{AE}=2x-1$

사각형 EGHD는 한 변의 길이가 $2x-1$인 정사각형이므로

$\overline{DH}=\overline{ED}=2x-1$

$\overline{CH}=\overline{DC}-\overline{DH}=1-(2x-1)=1-2x+1=2-2x$

사각형 IJCH는 한 변의 길이가 $2-2x$인 정사각형이므로

$\overline{JC}=\overline{JI}=\overline{CH}=2-2x$ ······ ㉠

$\overline{FJ}=\overline{FC}-\overline{JC}=(2x-1)-(2-2x)$

$=2x-1-2+2x$

$=4x-3$ ······ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\overline{FJ}^2-\overline{JI}^2=(4x-3)^2-(2-2x)^2$

$=\{(4x-3)+(2-2x)\}\{(4x-3)-(2-2x)\}$

$=(4x-3+2-2x)(4x-3-2+2x)$

$=(2x-1)(6x-5)$

따라서 $a=2$, $b=-1$, $c=6$, $d=-5$ 또는 $a=6$, $b=-5$, $c=2$, $d=-1$이므로 $a+b+c+d$의 값은

$2+(-1)+6+(-5)=2$

답 ⑤

유제 18 $4^8-1=4^{4\times2}-1^2$

$=(4^4)^2-1^2$

$=(4^4+1)(4^4-1)$

$=(4^4+1)(4^{2\times2}-1^2)$

$=(4^4+1)\{(4^2)^2-1^2\}$

$=(4^4+1)(4^2+1)(4^2-1)$

$=(4^4+1)(4^2+1)(4+1)(4-1)$

$=257\times17\times5\times3$

따라서 4^8-1은 3, 5, 17, 257로 나누어떨어지고 9로는 나누어떨어지지 않는다.

답 ③

Step 3. 단원 마무리하기

01	③	02	②, ⑤	03	$(xy-5+z)(xy-5-z)$				
04	②, ④	05	②	06	9	07	⑤	08	⑤
09	③	10	①	11	②	12	①	13	④
14	②	15	③	16	⑤	17	⑤	18	⑤
19	②	20	②						

01 주어진 식을 인수분해하면

$x^3y+2x^2y^2+xy^3=xy(x^2+2xy+y^2)=xy(x+y)^2$

답 ③

02 주어진 식을 인수분해하면

$(x-3)y^2-6(3-x)y-8(3-x)=(x-3)y^2+6y(x-3)+8(x-3)$

$=(x-3)(y^2+6y+8)$

$=(x-3)(y+2)(y+4)$

따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ② $x+3$, ⑤ $y+6$이다.

답 ②, ⑤

03 $x^2y^2-z^2-10xy+25=(x^2y^2-10xy+25)-z^2$

$=\{(xy)^2-2\times xy\times5+5^2\}-z^2$

$=(xy-5)^2-z^2$

$=(xy-5+z)(xy-5-z)$

답 $(xy-5+z)(xy-5-z)$

04 $x+1=X$, $y+1=Y$로 치환하여 주어진 식을 인수분해하면

$(x+1)^2-4(y+1)^2=X^2-4Y^2$

$=(X+2Y)(X-2Y)$

$=\{(x+1)+2(y+1)\}\{(x+1)-2(y+1)\}$

$=(x+2y+3)(x-2y-1)$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ② $x-2y-1$, ④ $x+2y+3$이다.

답 ②, ④

05 $12x^2-8xy-4y^2=4(3x^2-2xy-y^2)$

$=4(3x+y)(x-y)$ ······ ㉠

㉠에 $x=1.25$, $y=0.25$를 대입하면

$4\times(3\times1.25+0.25)\times(1.25-0.25)=4\times(3.75+0.25)\times1$

$=4\times4\times1$

$=16$

따라서 구하는 값은 16이다.

답 ②

06 주어진 식을 인수분해하면

$$\begin{aligned} x^2(y-1)-9y+9 &= x^2(y-1)-9(y-1) \\ &= (x^2-9)(y-1) \\ &= (x+3)(x-3)(y-1) \end{aligned}$$

$(x+3)(x-3)(y-1)=(x+\alpha)(x+\beta)(y+\gamma)$이므로

$\alpha\beta\gamma$의 값은

$3\times(-3)\times(-1)=9$ 답 9

07 $2x-5=X$로 치환하여 주어진 식을 인수분해하면

$$\begin{aligned} 2(2x-5)^2+7(2x-5)-4 &= 2X^2+7X-4 \\ &= (2X-1)(X+4) \\ &= \{2(2x-5)-1\}\{(2x-5)+4\} \\ &= (4x-11)(2x-1) \end{aligned}$$

답 ⑤

08 $157^2+203^2-197^2-143^2$

$=(157^2-143^2)+(203^2-197^2)$

$=(157+143)(157-143)+(203+197)(203-197)$

$=300\times14+400\times6=4200+2400=6600$ 답 ⑤

09 ① $-4a^2-12ab$에서 $-4a^2$과 $-12ab$의 공통인수가 $-4a$이므로 인수분해하면 $-4a^2-12ab=-4a(a+3b)$

② $-9x^2+144=-9(x^2-16)=-9(x+4)(x-4)$

③ $$\begin{aligned} (a+b)x-(a+b)(z-y) &= (a+b)\{x-(z-y)\} \\ &= (a+b)(x-z+y) \\ &= (a+b)(x+y-z) \end{aligned}$$

④ $(x+y)^2-6(x+y)+8$에서 합이 -6, 곱이 8이 되는 두 수는 -2, -4이므로

$$\begin{aligned} (x+y)^2-6(x+y)+8 &= \{(x+y)-2\}\{(x+y)-4\} \\ &= (x+y-2)(x+y-4) \end{aligned}$$

⑤ $(3x+2)^2-(3-x)^2$

$=\{(3x+2)+(3-x)\}\{(3x+2)-(3-x)\}$

$=(3x+2+3-x)(3x+2-3+x)$

$=(2x+5)(4x-1)$

따라서 인수분해가 바르게 된 것은 ③이다. 답 ③

10 $$\begin{aligned} x^2+16y^2-4-4x^2y^2 &= x^2-4-4x^2y^2+16y^2 \\ &= (x^2-4)-4y^2(x^2-4) \\ &= (1-4y^2)(x^2-4) \\ &= \{1^2-(2y)^2\}(x^2-2^2) \\ &= (1+2y)(1-2y)(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ① $x+2y$이다. 답 ①

11 2018을 x라 하면

$$\begin{aligned} &\frac{2018^2-2020\times2016}{2017^2-2021\times2013} \\ &= \frac{x^2-(x+2)(x-2)}{(x-1)^2-(x+3)(x-5)} \\ &= \frac{x^2-(x^2-2^2)}{(x^2-2\times x\times1+1^2)-[x^2+\{3+(-5)\}x+3\times(-5)]} \\ &= \frac{x^2-x^2+2^2}{(x^2-2x+1)-(x^2-2x-15)} \\ &= \frac{4}{x^2-2x+1-x^2+2x+15} \\ &= \frac{4}{16} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 ②

12 주어진 식에서 $3x+7=X$로 치환하여 인수분해하면

$$\begin{aligned} (3x+7)^2-2(3x+7)-15 &= X^2-2X-15 \\ &= (X+3)(X-5) \\ &= (3x+7+3)(3x+7-5) \\ &= (3x+10)(3x+2) \end{aligned}$$

따라서 $(3x+10)(3x+2)=(3x+a)(3x+b)$이므로

$a+b=10+2=12$ 답 ①

13 주어진 식을 인수분해하면

$$\begin{aligned} x^2-4y^2+3x+6y &= (x^2-4y^2)+(3x+6y) \\ &= (x+2y)(x-2y)+3(x+2y) \\ &= (x+2y)(x-2y+3) \end{aligned}$$

따라서 구하는 두 일차식은 $x+2y$, $x-2y+3$이므로

두 일차식의 합은 $(x+2y)+(x-2y+3)=2x+3$ 답 ④

14 $$\begin{aligned} 9x^2-12x+4-y^2 &= (9x^2-12x+4)-y^2 \\ &= \{(3x)^2-2\times3x\times2+2^2\}-y^2 \\ &= (3x-2)^2-y^2 \\ &= \{(3x-2)+y\}\{(3x-2)-y\} \\ &= (3x+y-2)(3x-y-2) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식은 두 일차식 $3x+y-2$와 $3x-y-2$의 곱으로 인수분해되므로 두 일차식의 합은

$(3x+y-2)+(3x-y-2)=6x-4$ 답 ②

15 $3a-2b=X$로 치환하여 주어진 식을 인수분해하면

$$\begin{aligned} (3a-2b)^2-7(3a-2b+1)+19 &= X^2-7(X+1)+19 \\ &= X^2-7X-7+19 \\ &= X^2-7X+12 \\ &= (X-3)(X-4) \\ &= (3a-2b-3)(3a-2b-4) \end{aligned}$$

답 ③

16 $x+y=X$로 치환하여 주어진 식을 인수분해하면

$$\begin{aligned} (x+y-3)(x+y+5)-20 &= (X-3)(X+5)-20 \\ &= X^2+2X-15-20 \\ &= X^2+2X-35 \\ &= (X+7)(X-5) \\ &= (x+y+7)(x+y-5) \end{aligned}$$

답 ⑤

17 $$\begin{aligned} x &= \frac{2}{\sqrt{13}+\sqrt{11}} \\ &= \frac{2(\sqrt{13}-\sqrt{11})}{(\sqrt{13}+\sqrt{11})(\sqrt{13}-\sqrt{11})} \\ &= \frac{2(\sqrt{13}-\sqrt{11})}{(\sqrt{13})^2-(\sqrt{11})^2} \\ &= \frac{2(\sqrt{13}-\sqrt{11})}{13-11} \\ &= \frac{2(\sqrt{13}-\sqrt{11})}{2} \\ &= \sqrt{13}-\sqrt{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{\sqrt{13}-\sqrt{11}} \\ &= \frac{2(\sqrt{13}+\sqrt{11})}{(\sqrt{13}-\sqrt{11})(\sqrt{13}+\sqrt{11})} \\ &= \frac{2(\sqrt{13}+\sqrt{11})}{(\sqrt{13})^2-(\sqrt{11})^2} \\ &= \frac{2(\sqrt{13}+\sqrt{11})}{13-11} \\ &= \frac{2(\sqrt{13}+\sqrt{11})}{2} \\ &= \sqrt{13}+\sqrt{11} \end{aligned}$$

$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$
이때
$x+y=(\sqrt{13}-\sqrt{11})+(\sqrt{13}+\sqrt{11})$
$=2\sqrt{13}$
이므로 구하는 값은
$(x+y)^2=(2\sqrt{13})^2=4\times13=52$ 답 ⑤

18 $x^2-6y^2+xy+10y-4$
$=x^2+yx-6y^2+10y-4$
$=x^2+yx-2(3y^2-5y+2)$
$=x^2+yx-2(3y-2)(y-1)$
$=x^2+yx+(3y-2)(-2y+2)$
$=x^2+\{(3y-2)+(-2y+2)\}x+(3y-2)(-2y+2)$
$=\{x+(3y-2)\}\{x+(-2y+2)\}$
$=(x+3y-2)(x-2y+2)$
따라서 주어진 식은 두 일차식 $x+3y-2$와 $x-2y+2$의 곱으로 인수분해되므로 구하는 두 일차식의 합은
$(x+3y-2)+(x-2y+2)=2x+y$ 답 ⑤

19 $x^2-6xy+9y^2-6x+18y+9$
$=x^2-6yx-6x+9y^2+18y+9$
$=x^2+(-6y-6)x+9y^2+18y+9$
$=x^2+(-6y-6)x+(3y)^2+2\times3y\times3+3^2$
$=x^2+(-6y-6)x+(3y+3)^2$
$=x^2-2(3y+3)x+(3y+3)^2$
$=x^2-2\times x\times(3y+3)+(3y+3)^2$
$=\{x-(3y+3)\}^2$
$=(x-3y-3)^2$ 답 ②

20 $(a-3)(a-4)(a+4)(a+5)-84$
$=\{(a-3)(a+4)\}\{(a-4)(a+5)\}-84$
$=(a^2+a-12)(a^2+a-20)-84$
위 식에서 a^2+a를 t로 치환하면
$(t-12)(t-20)-84$
$=t^2+\{(-12)+(-20)\}t+(-12)\times(-20)-84$
$=t^2-32t+240-84$
$=t^2-32t+156$
$=t^2+\{(-26)+(-6)\}t+(-26)\times(-6)$
$=(t-26)(t-6)$ ⋯⋯ ㉠
㉠에서 t에 a^2+a를 대입하면
$(a^2+a-26)(a^2+a-6)$
$=(a^2+a-26)[a^2+\{(-2)+3\}a+(-2)\times3]$
$=(a^2+a-26)(a-2)(a+3)$ 답 ②

07 이차방정식의 풀이 (1)

Step 1. 개념 다지기

07-1 이차방정식의 정의

기본연습 1

주어진 등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하면
(1) $-3x^2+5x+12=0$이므로 이차방정식이다.
(2) $4x^2-5x+3=0$이므로 이차방정식이다.
(3) $5x-7=0$이므로 일차방정식이다.
(4) $6x^2+13x=0$이므로 이차방정식이다.
답 (1) ○ (2) ○ (3) × (4) ○

연습 1

주어진 식을 정리하면 $(5-a)x^2+3x+7=0$
이차방정식이 되려면 x^2의 계수가 0이 아니어야 하므로
$5-a\neq0$ $\therefore a\neq5$ 답 $a\neq5$

07-2 이차방정식의 해(근)

기본연습 2

(1) $x=-3$을 $x^2-9=0$에 대입하면
(좌변)$=(-3)^2-9=9-9=0$
(2) $x=-1$을 $x(x-5)=8$에 대입하면
(좌변)$=(-1)\times(-1-5)=6\neq8$
(3) $x=7$을 $x^2-10x+21=0$에 대입하면
(좌변)$=7^2-10\times7+21=49-70+21=0$
답 (1) 이차방정식의 해이다.
(2) 이차방정식의 해가 아니다.
(3) 이차방정식의 해이다.

연습 2

주어진 이차방정식의 한 근이 $x=3$이므로
$x^2+2x-a=0$에 $x=3$을 대입하면
$3^2+2\times3-a=0$, $15-a=0$ $\therefore a=15$ 답 15

07-3 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이

기본연습 3

(1) $(x-4)(x-7)=0$에서 $x-4=0$ 또는 $x-7=0$이므로
$x=4$ 또는 $x=7$
(2) $2(x+3)(x-5)=0$에서 $x+3=0$ 또는 $x-5=0$이므로
$x=-3$ 또는 $x=5$
(3) $x^2-8x+15=0$의 좌변을 인수분해하면 $(x-3)(x-5)=0$이므로
$x-3=0$ 또는 $x-5=0$
$\therefore x=3$ 또는 $x=5$

(4) $3x^2-4x+1=0$의 좌변을 인수분해하면 $(3x-1)(x-1)=0$이므로
$3x-1=0$ 또는 $x-1=0$
$\therefore x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

답 (1) $x=4$ 또는 $x=7$ (2) $x=-3$ 또는 $x=5$
(3) $x=3$ 또는 $x=5$ (4) $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

연습 3

주어진 이차방정식 $3x^2-13x+4=0$의 좌변을 인수분해하면
$(3x-1)(x-4)=0$, $3x-1=0$ 또는 $x-4=0$
$\therefore x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=4$ 답 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=4$

07-4 중근을 갖는 이차방정식

기본연습 4

(1) $(3x-1)^2=0$에서 $3x-1=0$ $\therefore x=\frac{1}{3}$ (중근)
(2) $x^2+10x+25=0$에서 $(x+5)^2=0$이므로 $x+5=0$
$\therefore x=-5$ (중근)

답 (1) $x=\frac{1}{3}$ (중근) (2) $x=-5$ (중근)

연습 4

이차방정식 $x^2-12x+k=0$이 중근을 가지므로
$k=\left(\frac{-12}{2}\right)^2=(-6)^2=36$
$x^2-12x+36=0$에서 $(x-6)^2=0$이므로 $x-6=0$ $\therefore x=6$ (중근)
따라서 k의 값과 중근의 합은 $36+6=42$ 답 42

07-5 제곱근을 이용한 이차방정식의 풀이

기본연습 5

(1) $x^2-7=0$에서 $x^2=7$이므로 $x=\pm\sqrt{7}$
(2) $20-5x^2=0$에서 $5x^2=20$이므로 $x^2=4$
$\therefore x=\pm2$
(3) $(x-2)^2-5=0$에서 $(x-2)^2=5$이므로 $x-2=\pm\sqrt{5}$
$\therefore x=2\pm\sqrt{5}$
(4) $7(x+3)^2=63$에서 양변을 7로 나누면 $(x+3)^2=9$
$x+3=\pm3$ $\therefore x=-6$ 또는 $x=0$

답 (1) $x=\pm\sqrt{7}$ (2) $x=\pm2$
(3) $x=2\pm\sqrt{5}$ (4) $x=-6$ 또는 $x=0$

연습 5

$2(x-4)^2=10$에서 양변을 2로 나누면 $(x-4)^2=5$
$x-4=\pm\sqrt{5}$ 이므로 $x=4\pm\sqrt{5}$
이를 $x=a\pm\sqrt{b}$ 와 비교하면 $a=4$, $b=5$
$\therefore a+b=4+5=9$ 답 9

07-6 완전제곱식을 이용한 이차방정식의 풀이

기본연습 6

(1) $2x^2-6x-3=0$에 대하여

(ⅰ) x^2의 계수로 양변을 나누어 x^2의 계수를 1로 만든다.	$x^2-3x-\frac{3}{2}=0$
(ⅱ) 상수항을 우변으로 이항한다.	$x^2-3x=\frac{3}{2}$
(ⅲ) 양변에 $\frac{(x\text{의 계수})}{2}$를 제곱한 값을 더한다.	$x^2-3x+\left(\frac{-3}{2}\right)^2=\frac{3}{2}+\left(\frac{-3}{2}\right)^2$
(ⅳ) 좌변을 완전제곱식으로 나타내고 우변을 정리한다.	$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{15}{4}$
(ⅴ) 제곱근을 구한다.	$x-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$
(ⅵ) 이차방정식의 해를 구한다.	$x=\frac{3\pm\sqrt{15}}{2}$

(2) $-3x^2+12x+6=0$에 대하여

(ⅰ) x^2의 계수로 양변을 나누어 x^2의 계수를 1로 만든다.	$x^2-4x-2=0$
(ⅱ) 상수항을 우변으로 이항한다.	$x^2-4x=2$
(ⅲ) 양변에 $\frac{(x\text{의 계수})}{2}$를 제곱한 값을 더한다.	$x^2-4x+\left(\frac{-4}{2}\right)^2=2+\left(\frac{-4}{2}\right)^2$
(ⅳ) 좌변을 완전제곱식으로 나타내고 우변을 정리한다.	$(x-2)^2=6$
(ⅴ) 제곱근을 구한다.	$x-2=\pm\sqrt{6}$
(ⅵ) 이차방정식의 해를 구한다.	$x=2\pm\sqrt{6}$

답 풀이 참조

연습 6

이차방정식 $5x^2+5x-1=0$의 양변을 5로 나누면
$x^2+x-\frac{1}{5}=0$, $x^2+x=\frac{1}{5}$
$x^2+x+\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{4}$, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{5}+\frac{1}{4}$
$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{20}$, $x+\frac{1}{2}=\pm\sqrt{\frac{9}{20}}$, $x+\frac{1}{2}=\pm\frac{3\sqrt{5}}{10}$
$\therefore x=-\frac{1}{2}\pm\frac{3\sqrt{5}}{10}$ 답 $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{3\sqrt{5}}{10}$

Step 2. 대표 문제로 접근하기

01	②, ③	02	⑤	03	③	04	②	05	②
06	②	07	③	08	5	09	①	10	2
11	③	12	③	13	$x=2$	14	③	15	③, ④
16	②	17	②	18	③	19	풀이참조	20	③
21	④	22	②	23	②	24	③	25	④
26	5								

유제 01 ① 등호가 없으므로 이차방정식이 아니다.
ax^2+bx+c $(a\neq0)$의 꼴은 이차식이다.
② $x^3+x^2-2x=x^3-x+2$에서 우변의 식을 좌변으로 이항하면
$x^3+x^2-2x-x^3+x-2=0$, $x^2-x-2=0$
따라서 주어진 식은 이차방정식이다.

③ $3x-2=x^2+5$에서 우변의 식을 좌변으로 이항하면
$3x-2-x^2-5=0$, $-x^2+3x-7=0$
따라서 주어진 식은 이차방정식이다.
④ $x^2+1=(x-2)^2+5x$에서 우변의 식을 전개하면
$(x-2)^2+5x=x^2-4x+4+5x=x^2+x+4$이므로
$x^2+1=x^2+x+4$에서 우변의 식을 좌변으로 이항하면
$x^2+1-x^2-x-4=0$, $-x-3=0$
따라서 주어진 식은 이차방정식이 아니다.
⑤ $x^3+2x^2+3=(x-2)(x-3)$에서 우변의 식을 전개하면
$(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$이므로
$x^3+2x^2+3=x^2-5x+6$에서 우변의 식을 좌변으로 이항하면
$x^3+2x^2+3-x^2+5x-6=0$, $x^3+x^2+5x-3=0$
따라서 이차방정식이 아니다.
그러므로 이차방정식인 것은 ②, ③이다. 답 ②, ③

유제 02 $-3(x-1)(x+3)=-ax^2+12x-4$에서
$-3\{x^2+(-1+3)x+(-1)\times3\}=-ax^2+12x-4$
$-3(x^2+2x-3)=-ax^2+12x-4$
$-3x^2-6x+9=-ax^2+12x-4$
$-3x^2-6x+9+ax^2-12x+4=0$
$(-3+a)x^2-18x+13=0$
이 식이 x에 대한 이차방정식이므로 $-3+a\neq0$
$\therefore a\neq3$ 답 ⑤

다른풀이
$-3(x-1)(x+3)=-ax^2+12x-4$의 좌변에서 x^2의 항을 구하면
$-3\times x\times x=-3x^2$이므로 x^2의 계수는 -3이다.
우변에서 x^2의 계수는 $-a$이고, 양변의 x^2의 계수가 같으면 이항했을 때 소거되므로 이차방정식이 될 수 없다.
따라서 $-3\neq-a$이므로 $a\neq3$

유제 03 ① 이차방정식 $x^2-3x=0$에 $x=-3$을 대입하면
(좌변)$=(-3)^2+(-3)\times(-3)=9+9=18\neq0=$(우변)
따라서 -3은 이차방정식 $x^2-3x=0$의 해가 아니다.
② 이차방정식 $x^2-7=0$에 $x=0$을 대입하면
(좌변)$=0-7=-7\neq0=$(우변)
따라서 0은 이차방정식 $x^2-7=0$의 해가 아니다.
③ 이차방정식 $(x-3)^2-9=0$에 $x=6$을 대입하면
(좌변)$=(6-3)^2-9=0=$(우변)
따라서 6은 이차방정식 $(x-3)^2-9=0$의 해이다.
④ 이차방정식 $(x-5)(x+7)=0$에 $x=7$을 대입하면
(좌변)$=(7-5)(7+7)=28\neq0=$(우변)
따라서 7은 이차방정식 $(x-5)(x+7)=0$의 해가 아니다.
⑤ 이차방정식 $3x^2-10x+3=0$에 $x=-3$을 대입하면
(좌변)$=3\times(-3)^2+(-10)\times(-3)+3=60\neq0=$(우변)
따라서 -3은 이차방정식 $3x^2-10x+3=0$의 해가 아니다.
그러므로 [ ] 안의 수를 해로 갖는 것은 ③이다. 답 ③

유제 04 ① $x^2+2x+2=0$에 $x=-1$을 대입하면
(좌변)$=(-1)^2+2\times(-1)+2=1\neq0=$(우변)
따라서 주어진 이차방정식은 $x=-1$을 근으로 갖지 않는다.
② $x(x-1)=2$에 $x=-1$을 대입하면
(좌변)$=(-1)\times(-1-1)=2=$(우변)
따라서 주어진 이차방정식은 $x=-1$을 근으로 갖는다.
③ $(x+1)^2=1$에 $x=-1$을 대입하면
(좌변)$=(-1+1)^2=0\neq1=$(우변)
따라서 주어진 이차방정식은 $x=-1$을 근으로 갖지 않는다.
④ $2x^2-x-2=0$에 $x=-1$을 대입하면
(좌변)$=2\times(-1)^2-(-1)-2=1\neq0=$(우변)
따라서 주어진 이차방정식은 $x=-1$을 근으로 갖지 않는다.
⑤ $x^2-4x+3=0$에 $x=-1$을 대입하면
(좌변)$=(-1)^2+(-4)\times(-1)+3=8\neq0=$(우변)
따라서 주어진 이차방정식은 $x=-1$을 근으로 갖지 않는다.
그러므로 $x=-1$을 근으로 갖는 이차방정식은 ②이다. 답 ②

유제 05 $x=\frac{2}{3}$가 이차방정식 $3x^2+(a-1)x-a=0$의 근이므로
이 식에 $x=\frac{2}{3}$를 대입했을 때 등식이 성립해야 한다.
$3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+(a-1)\times\frac{2}{3}-a=0$이므로
$3\times\frac{4}{9}+\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}-a=0$, $\frac{4}{3}+\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}-a=0$
$-\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}=0$, $\frac{1}{3}a=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore a=2$ 답 ②

유제 06 이차방정식 $(x+2)(3x+a)=b$의 해가 $x=-5$ 또는 $x=1$이므로
이차방정식에 $x=-5$를 대입하면
$(-5+2)(-15+a)=b$, $(-3)\times(-15+a)=b$
$\therefore 45-3a=b$ …… ㉠
이차방정식에 $x=1$을 대입하면
$(1+2)(3\times1+a)=b$, $3(3+a)=b$
$\therefore 9+3a=b$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면 $2b=54$ $\quad\therefore b=27$
$b=27$을 ㉡에 대입하면
$9+3a=27$, $3a=18$ $\quad\therefore a=6$
$\therefore a+b=6+27=33$ 답 ②

유제 07 이차방정식 $2x^2+5x-2=0$의 한 근이 $x=\alpha$이므로
$2x^2+5x-2=0$에 $x=\alpha$를 대입하면 등식이 성립한다.
$\therefore 2\alpha^2+5\alpha-2=0$
이때 $\alpha=0$이면 위의 식이 성립하지 않으므로 $\alpha\neq0$
$2\alpha^2+5\alpha-2=0$의 양변을 α로 나누면 $2\alpha+5-\frac{2}{\alpha}=0$
$2\alpha-\frac{2}{\alpha}=-5$ $\quad\therefore \alpha-\frac{1}{\alpha}=-\frac{5}{2}$ 답 ③

유제 08 이차방정식 $x^2+3x+2=0$의 한 근이 $x=a$이므로
$x^2+3x+2=0$에 $x=a$를 대입하면 등식이 성립한다.
$\therefore a^2+3a+2=0$
이때 $a=0$이면 위의 식이 성립하지 않으므로 $a\neq0$
$a^2+3a+2=0$의 양변을 a로 나누면
$a+3+\frac{2}{a}=0$ $\quad\therefore a+\frac{2}{a}=-3$
$a+\frac{2}{a}=-3$의 양변을 제곱하면 $\left(a+\frac{2}{a}\right)^2=(-3)^2$
$a^2+2\times a\times\frac{2}{a}+\frac{4}{a^2}=9$, $a^2+4+\frac{4}{a^2}=9$
$\therefore a^2+\frac{4}{a^2}=5$ 답 5

유제 09 $3(x+2)(3x-1)=4-x^2$에서 $3(3x^2+5x-2)=4-x^2$
$9x^2+15x-6=4-x^2$, $9x^2+15x-6-4+x^2=0$
$10x^2+15x-10=0$

양변을 5로 나누면 $2x^2+3x-2=0$
좌변을 인수분해하면
$(x+2)(2x-1)=0$, $x+2=0$ 또는 $2x-1=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 답 ①

유제 10 $2x^2-x-10=0$에서 좌변을 인수분해하면
$(x+2)(2x-5)=0$, $x+2=0$ 또는 $2x-5=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{5}{2}$
따라서 $\alpha=-2$, $\beta=\frac{5}{2}$이고
$-2<x<\frac{5}{2}$인 정수 x는 $-1, 0, 1, 2$이므로
구하는 합은 $-1+0+1+2=2$ 답 2

유제 11 이차방정식 $x^2+3ax+4a=0$의 한 근이 $x=2$이므로
$x=2$를 대입하면 $2^2+3a\times2+4a=0$
$4+10a=0$, $10a=-4$ $\therefore a=-\frac{2}{5}$
이차방정식 $x^2+3ax+4a=0$에 $a=-\frac{2}{5}$를 대입하면
$x^2+3\times\left(-\frac{2}{5}\right)\times x+4\times\left(-\frac{2}{5}\right)=0$, $x^2-\frac{6}{5}x-\frac{8}{5}=0$
양변에 5를 곱하면 $5x^2-6x-8=0$
좌변을 인수분해하면 $(5x+4)(x-2)=0$
$5x+4=0$ 또는 $x-2=0$ $\therefore x=-\frac{4}{5}$ 또는 $x=2$
따라서 주어진 이차방정식의 다른 한 근은 $x=-\frac{4}{5}$이므로
a의 값과 다른 한 근의 곱은 $\left(-\frac{2}{5}\right)\times\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{8}{25}$ 답 ③

유제 12 이차방정식 $2x^2-ax+3=0$의 한 근이 $x=3$이므로 $x=3$을 대입하면 $2\times3^2-3a+3=0$, $21-3a=0$ $\therefore a=7$
이차방정식 $2x^2-ax+3=0$에 $a=7$을 대입하면
$2x^2-7x+3=0$
좌변을 인수분해하면 $(2x-1)(x-3)=0$
$2x-1=0$ 또는 $x-3=0$ $\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$
따라서 $b=\frac{1}{2}$이므로 $10ab=10\times7\times\frac{1}{2}=35$ 답 ③

유제 13 이차방정식 $x^2-7x+10=0$의 좌변을 인수분해하면
$(x-2)(x-5)=0$ $\therefore x=2$ 또는 $x=5$
이차방정식 $x^2-5x+6=0$의 좌변을 인수분해하면
$(x-2)(x-3)=0$ $\therefore x=2$ 또는 $x=3$
따라서 두 이차방정식의 공통인 근은 $x=2$이다. 답 $x=2$

유제 14 $x^2+x-6=0$의 좌변을 인수분해하면
$(x+3)(x-2)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=2$
(i) 공통인 근이 $x=-3$일 때
$x=-3$을 $x^2+ax+6=0$에 대입하면
$(-3)^2+a\times(-3)+6=0$, $9-3a+6=0$
$15-3a=0$ $\therefore a=5$
(ii) 공통인 근이 $x=2$일 때
$x=2$를 $x^2+ax+6=0$에 대입하면
$2^2+a\times2+6=0$, $4+2a+6=0$
$2a+10=0$ $\therefore a=-5$
(i), (ii)에서 $a=5$ 또는 $a=-5$
그런데 a의 값은 양수이므로 $a=5$이다. 답 ③

유제 15 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 중근을 가지려면 $b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$이어야 한다.
① $x^2-2x-15=0$에서 $-15\neq\left(\frac{-2}{2}\right)^2=1$
따라서 이차방정식 $x^2-2x-15=0$은 중근을 갖지 않는다.
② $x^2-16=0$에서 $-16\neq\left(\frac{0}{2}\right)^2=0$
따라서 이차방정식 $x^2-16=0$은 중근을 갖지 않는다.
③ $x^2+10x+25=0$에서 $25=\left(\frac{10}{2}\right)^2$
따라서 이차방정식 $x^2+10x+25=0$은 중근을 갖는다.
④ $4x^2+4x+1=0$의 양변을 4로 나누면 $x^2+x+\frac{1}{4}=0$
$\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$이므로 이차방정식 $4x^2+4x+1=0$은 중근을 갖는다.
⑤ $x^2+5x=0$에서 $0\neq\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$
따라서 이차방정식 $x^2+5x=0$은 중근을 갖지 않는다.
그러므로 중근을 갖는 이차방정식은 ③, ④이다. 답 ③, ④

유제 16 ① $3-x^2=6(x+2)$에서 $3-x^2=6x+12$, $x^2+6x+9=0$
$9=\left(\frac{6}{2}\right)^2$이므로 이 이차방정식은 중근을 갖는다.
② $3(x+4)^2=12$의 양변을 3으로 나누면 $(x+4)^2=4$
$x^2+8x+16=4$, $x^2+8x+12=0$
$12\neq\left(\frac{8}{2}\right)^2=16$이므로 이 이차방정식은 중근을 갖지 않는다.
③ $x(x-2)=-1$에서 $x^2-2x+1=0$
$1=\left(\frac{-2}{2}\right)^2$이므로 이 이차방정식은 중근을 갖는다.
④ $9-6x=(x-3)^2$에서 $9-6x=x^2-6x+9$
$x^2=0$ $\therefore x=0$ (중근)
⑤ $-5(x-5)^2=0$에서 $(x-5)^2=0$
(완전제곱식)$=0$의 꼴이므로 이 이차방정식은 중근을 갖는다.
따라서 중근을 갖지 않는 이차방정식은 ②이다. 답 ②

유제 17 $3x^2+12x+3k-6=0$의 양변을 3으로 나누면
$x^2+4x+k-2=0$
$x^2+4x+k-2=0$이 중근 a를 가지므로
$\left(\frac{4}{2}\right)^2=k-2$에서 $4=k-2$ $\therefore k=6$
$k=6$을 $x^2+4x+k-2=0$에 대입하면
$x^2+4x+4=0$, $(x+2)^2=0$, $x+2=0$
$\therefore x=-2$ (중근)
따라서 $a=-2$이다. 답 ②

유제 18 $x^2+ax+4=0$이 중근을 가지려면
$\left(\frac{a}{2}\right)^2=4$에서 $\frac{a^2}{4}=4$, $a^2=4\times4=16$
$\therefore a=-4$ 또는 $a=4$
따라서 모든 상수 a의 값의 합은 $(-4)+4=0$ 답 ③

유제 19 (1) $x^2=10$이므로 $x=\pm\sqrt{10}$
(2) $4x^2=81$에서 $x^2=\frac{81}{4}$이므로 $x=\pm\sqrt{\frac{81}{4}}$ $\therefore x=\pm\frac{9}{2}$
(3) $7x^2=35$에서 $x^2=5$ $\therefore x=\pm\sqrt{5}$
(4) $3x^2=27$에서 $x^2=9$이므로 $x=\pm\sqrt{9}$ $\therefore x=\pm3$
답 (1) $x=\pm\sqrt{10}$ (2) $x=\pm\frac{9}{2}$ (3) $x=\pm\sqrt{5}$ (4) $x=\pm3$

유제 20 이차방정식 $3x^2-k=0$에서 $3x^2=k$

$x^2=\frac{k}{3}$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{\frac{k}{3}}$

이때 이차방정식 $3x^2-k=0$의 해가 $x=\pm\sqrt{5}$ 이므로

$\frac{k}{3}=5$ $\quad\therefore k=15$

따라서 $kx^2-60=0$에 $k=15$를 대입하면 $15x^2-60=0$

$15x^2=60,\ x^2=4$ $\quad\therefore x=\pm2$ 답 ③

유제 21 이차방정식 $(x+a)^2=b^2$에서 $b\geq0$이므로

$x+a=\pm b$ $\quad\therefore x=-a\pm b$

이때 이차방정식의 두 근이 $x=-6$ 또는 $x=2$이므로

두 근의 합은 $(-a+b)+(-a-b)=(-6)+2$에서

$-2a=-4$ $\quad\therefore a=2$

두 근의 차는 $(-a+b)-(-a-b)=2-(-6)$에서

$2b=8$ $\quad\therefore b=4$

$\therefore 3a-b=3\times2-4=2$ 답 ④

유제 22 이차방정식 $3(x-2)^2=k\ (k>0)$에서 양변을 3으로 나누면

$(x-2)^2=\frac{k}{3},\ x-2=\pm\sqrt{\frac{k}{3}}$ $\quad\therefore x=2\pm\sqrt{\frac{k}{3}}$

이때 이차방정식 $3(x-2)^2=k$의 해가 $x=2\pm\sqrt{5}$ 이므로

$2\pm\sqrt{\frac{k}{3}}=2\pm\sqrt{5}$ 에서 $\frac{k}{3}=5$ $\quad\therefore k=15$ 답 ②

유제 23 이차방정식 $x^2-8x+k=0$에서 $x^2-8x=-k$

$x^2-8x+\left(\frac{-8}{2}\right)^2=-k+\left(\frac{-8}{2}\right)^2,\ (x-4)^2=-k+16$

$x-4=\pm\sqrt{-k+16}$ $\quad\therefore x=4\pm\sqrt{-k+16}$

이때 주어진 이차방정식의 해가 $x=4\pm\sqrt{11}$이므로

$4\pm\sqrt{11}=4\pm\sqrt{-k+16}$ 에서 $11=-k+16$

$\therefore k=5$ 답 ②

유제 24 $x^2-8x+10=0$에서 $x^2-8x=-10$

양변에 $\left(\frac{-8}{2}\right)^2$, 즉 16을 더하면

$x^2-8x+16=-10+16$

$(x-4)^2=6$

$x-4=\pm\sqrt{6}$ $\quad\therefore x=4\pm\sqrt{6}$

따라서 $A=-8,\ B=-10,\ C=16,\ D=-4,\ E=6$이므로

$A+B+C+D+E=(-8)+(-10)+16+(-4)+6$

$=0$ 답 ③

유제 25 이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 한 근이 $x=a$이므로 $x^2-2x-2=0$에 $x=a$를 대입하면

$a^2-2a-2=0,\ a^2=2a+2$ $\quad\therefore a^2=2(a+1)$

따라서 주어진 식에 $a^2=2(a+1)$을 대입하면

$\frac{2a^2}{1+a}+\frac{4a}{2-a^2}=\frac{2\times2(a+1)}{a+1}+\frac{4a}{2-2(a+1)}$

$=\frac{4(a+1)}{a+1}+\frac{4a}{-2a}=4+(-2)=2$ 답 ④

유제 26 이차방정식 $x^2-2x-8=0$에서 좌변을 인수분해하면

$(x+2)(x-4)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 이차방정식의 두 근 중 음수인 근은 -2이다.

$x=-2$가 이차방정식 $x^2+ax+a^2-19=0$의 근이므로

주어진 이차방정식에 $x=-2$를 대입하면

$(-2)^2+a\times(-2)+a^2-19=0,\ 4-2a+a^2-19=0$

$a^2-2a-15=0$에서 $(a+3)(a-5)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=5$

이때 a는 양수이므로 $a=5$ 답 5

Step 3. 단원 마무리하기

01	①	02	④	03	⑤	04	⑤	05	⑤
06	-135	07	④	08	④	09	①	10	①
11	12	12	풀이참조	13	②	14	16	15	⑤
16	④	17	③	18	②	19	③	20	12

01 ① $7x^2=0$은 (이차식)$=0$의 꼴이므로 이차방정식이다.

② $4(x-1)^2=(2x-3)^2$ 에서 $4(x^2-2x+1)=4x^2-12x+9$

$4x^2-8x+4-4x^2+12x-9=0,\ 4x-5=0$

따라서 일차방정식이므로 이차방정식이 아니다.

③ 등호가 없으므로 방정식이 아니다.

④ $x^2+2x+10=x^2$ 에서 $2x+10=0$

따라서 일차방정식이므로 이차방정식이 아니다.

⑤ $(x+2)(x-4)=1-2x^2+x^3$에서

$x^2-2x-8=1-2x^2+x^3$

$x^3-3x^2+2x+9=0$

따라서 최고차항이 삼차항이므로 이차방정식이 아니다.

그러므로 이차방정식인 것은 ①이다. 답 ①

02 ① $(x+1)(x-3)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

② $(x+1)(x+3)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=-3$

③ $(x-1)(x-3)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

④ $(x-1)(x+3)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=-3$

⑤ $(2x-1)(x-3)=0$에서 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$

따라서 해가 $x=1$ 또는 $x=-3$인 이차방정식은 ④이다. 답 ④

03 ① $x^2-10=0$에 $x=3$을 대입하면

(좌변)$=3^2-10=-1\neq0=$(우변)

따라서 $x=3$은 주어진 이차방정식의 해가 아니다.

② $(x+3)(x+4)=0$에 $x=3$을 대입하면

(좌변)$=(3+3)\times(3+4)=42\neq0=$(우변)

따라서 $x=3$은 주어진 이차방정식의 해가 아니다.

③ $(x-2)^2=0$에 $x=3$을 대입하면

(좌변)$=(3-2)^2=1\neq0=$(우변)

따라서 $x=3$은 주어진 이차방정식의 해가 아니다.

④ $x^2-x=-x^2+4x+4$에 $x=3$을 대입하면

(좌변)$=3^2-3=6$, (우변)$=-3^2+4\times3+4=7$

따라서 $x=3$은 주어진 이차방정식의 해가 아니다.

⑤ $2x^2-5x-3=0$에 $x=3$을 대입하면

(좌변)$=2\times3^2-5\times3-3=18-15-3=0=$(우변)

따라서 $x=3$은 주어진 이차방정식의 해이다.

그러므로 $x=3$을 해로 갖는 이차방정식은 ⑤이다. 답 ⑤

04 이차방정식 $(k-2)x^2+6x-2k+1=0$에 $x=-3$을 대입하면

$(k-2)\times(-3)^2+6\times(-3)-2k+1=0$

$9(k-2)-18-2k+1=0,\ 9k-18-18-2k+1=0$

$7k-35=0,\ 7k=35$

$\therefore k=5$ 답 ⑤

05 ① $x^2+2x=0$에 $x=0$을 대입하면 $0^2+2\times0=0$이므로 등식이 성립한다.

따라서 $x=0$은 이 이차방정식의 해이다.

② $x^2=4$에 $x=-2$를 대입하면 $(-2)^2=4$이므로 등식이 성립한다.

따라서 $x=-2$는 이 이차방정식의 해이다.

③ $x^2-x-6=0$에 $x=-2$를 대입하면
$(-2)^2-(-2)-6=4+2-6=0$이므로 등식이 성립한다.
따라서 $x=-2$는 이 이차방정식의 해이다.
④ $x^2+4x=-3x-6$에 $x=-6$을 대입하면
(좌변)$=(-6)^2+4\times(-6)=36-24=12$,
(우변)$=(-3)\times(-6)-6=12$이므로 등식이 성립한다.
따라서 $x=-6$은 이 이차방정식의 해이다.
⑤ $3x^2+5x-2=0$에서 $x=2$를 대입하면
$3\times2^2+5\times2-2=12+10-2\neq0$이므로 등식이 성립하지 않는다.
따라서 $x=2$는 이 이차방정식의 해가 아니다.
그러므로 [ ] 안의 수를 해로 갖지 않는 이차방정식은 ⑤이다.

답 ⑤

06 이차방정식 $(x+3)(x-b)=0$의 좌변을 전개하면
$x^2+(3-b)x-3b=0$이므로 $x^2+ax+5a=0$과 계수를 비교하면
$\begin{cases} a=3-b & \cdots\cdots ㉠ \\ 5a=-3b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉡에 ㉠을 대입하면 $5(3-b)=-3b$, $15-5b=-3b$
$15=2b \quad \therefore b=\frac{15}{2}$
$b=\frac{15}{2}$를 ㉠에 대입하면 $a=3-\frac{15}{2}=-\frac{9}{2}$
$\therefore 4ab=4\times\left(-\frac{9}{2}\right)\times\frac{15}{2}=-135$

답 -135

07 이차방정식 $ax^2+(a+3)x+6=0$의 한 근이 $x=2$이므로
이 이차방정식에 $x=2$를 대입하면
$a\times2^2+(a+3)\times2+6=0$, $4a+2a+6+6=0$
$6a+12=0$, $6a=-12 \quad \therefore a=-2$

답 ④

08 이차방정식 $3x^2-7x-6=0$의 좌변을 인수분해하면
$(3x+2)(x-3)=0$이므로 $3x+2=0$ 또는 $x-3=0$
$\therefore x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=3$
따라서 두 근 중 큰 근은 $x=3$이므로
$x^2+2a(x-a)+11=0$에 $x=3$을 대입하면
$3^2+2a(3-a)+11=0$, $9+6a-2a^2+11=0$
$-2a^2+6a+20=0$, $a^2-3a-10=0$
$(a+2)(a-5)=0 \quad \therefore a=-2$ 또는 $a=5$
따라서 음수 a의 값은 -2이다.

답 ④

09 x에 대한 이차방정식 $x^2-(a-1)x-(a-4)=0$이 중근을 가지려면
$\left(\frac{a-1}{2}\right)^2=-(a-4)$이어야 하므로
$\frac{a^2-2a+1}{4}=-a+4$, $a^2-2a+1=-4a+16$
$a^2-2a+1+4a-16=0$, $a^2+2a-15=0$
$(a+5)(a-3)=0 \quad \therefore a=-5$ 또는 $a=3$

답 ①

10 이차방정식 $x^2-5x+1=0$에서 $x^2-5x=-1$
$x^2-5x+\left(\frac{-5}{2}\right)^2=-1+\left(\frac{-5}{2}\right)^2$
$\therefore \left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{21}{4}$
위의 식을 $(x+p)^2=q$와 비교하면
$p=-\frac{5}{2}$, $q=\frac{21}{4}$
$\therefore p+q=-\frac{5}{2}+\frac{21}{4}=\frac{11}{4}$

답 ①

11 이차방정식 $4(x+a)^2=b$에서 양변을 4로 나누면
$(x+a)^2=\frac{b}{4}$이므로 $x+a=\pm\sqrt{\frac{b}{4}}$
$\therefore x=-a\pm\sqrt{\frac{b}{4}}$
이차방정식의 해가 $x=-2\pm\sqrt{3}$ 이므로
$-a=-2$, $\frac{b}{4}=3$에서 $a=2$, $b=12$
$\therefore \frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times2\times12=12$

답 12

12 이차방정식 $x^2+10x+4=0$에서 4를 우변으로 이항하면
$x^2+10x=-4$
이때 좌변을 완전제곱식으로 만들기 위해 양변에 $\left(\frac{10}{2}\right)^2=25$를 더하면
$x^2+10x+25=-4+25$
$(x+5)^2=21$, $x+5=\pm\sqrt{21}$
$\therefore x=-5\pm\sqrt{21}$
그러므로 $a=-4$, $b=25$, $c=5$, $d=21$이다.

답 $a=-4$, $b=25$, $c=5$, $d=21$

13 이차방정식 $3x^2+9x+1=4x+3$에서 $3x^2+9x+1-4x-3=0$
$3x^2+5x-2=0$, $(x+2)(3x-1)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

답 ②

14 두 이차방정식 $4x^2+ax-10=0$, $2x^2+9x+b=0$의 공통인 근이
$x=-\frac{5}{2}$이므로 두 이차방정식에 $x=-\frac{5}{2}$를 대입하면 등식이 성립한다.
이차방정식 $4x^2+ax-10=0$에 $x=-\frac{5}{2}$를 대입하면
$4\times\left(-\frac{5}{2}\right)^2+a\times\left(-\frac{5}{2}\right)-10=0$, $4\times\frac{25}{4}-\frac{5}{2}a-10=0$
$15-\frac{5}{2}a=0$, $\frac{5}{2}a=15 \quad \therefore a=6$
이차방정식 $2x^2+9x+b=0$에 $x=-\frac{5}{2}$를 대입하면
$2\times\left(-\frac{5}{2}\right)^2+9\times\left(-\frac{5}{2}\right)+b=0$, $2\times\frac{25}{4}-\frac{45}{2}+b=0$
$\frac{25}{2}-\frac{45}{2}+b=0 \quad \therefore b=10$
$\therefore a+b=6+10=16$

답 16

15 이차방정식 $3x^2-10x+a=0$에 $x=2$를 대입하면
$3\times2^2-10\times2+a=0$, $12-20+a=0$, $-8+a=0$
$\therefore a=8$
$3x^2-10x+a=0$에 $a=8$을 대입하면 $3x^2-10x+8=0$
$(x-2)(3x-4)=0 \quad \therefore x=2$ 또는 $x=\frac{4}{3}$
따라서 다른 한 근 b의 값은 $\frac{4}{3}$이다.
$\therefore 3ab=3\times8\times\frac{4}{3}=32$

답 ⑤

16 이차방정식 $5(x+a)^2=b$에서 $(x+a)^2=\frac{b}{5}$
$x+a=\pm\sqrt{\frac{b}{5}} \quad \therefore x=-a\pm\sqrt{\frac{b}{5}}$
① $a=1$, $b=1$이면 $x=-1\pm\sqrt{\frac{1}{5}}$이므로 주어진 이차방정식은
서로 다른 두 근을 갖는다.
② $a=0$, $b=1$이면 $x=\pm\sqrt{\frac{1}{5}}$이므로 주어진 이차방정식은 서로 다른
두 근을 갖는다.

③ $a=1$, $b=0$이면 $x=-1$이므로 주어진 이차방정식은 -1을 중근으로 갖는다.

④ $b>0$이면 a의 값에 관계없이 주어진 이차방정식의 해는

$x=-a+\sqrt{\frac{b}{5}}$ 또는 $x=-a-\sqrt{\frac{b}{5}}$이므로 서로 다른 두 근을 갖는다.

⑤ $a=1$, $b=-1$이면 $x=-1\pm\sqrt{\frac{-1}{5}}$이므로 실수 범위에서 x는 정의되지 않는다.

이 경우 주어진 이차방정식은 근을 갖지 않는다.

따라서 옳은 것은 ④이다. 답 ④

17 이차방정식 $5x^2+ax+b=0$이 $x=-2$를 중근으로 가지므로

$5x^2+ax+b=5(x+2)^2$ 으로 나타낼 수 있다.

우변의 식을 전개하면

$5(x+2)^2=5(x^2+4x+4)=5x^2+20x+20$이므로

$5x^2+ax+b=5x^2+20x+20$에서 $a=20$, $b=20$

$\therefore a+b=20+20=40$ 답 ③

18 이차방정식 $2x^2+7x+2=0$에 $x=a$를 대입하면

$2a^2+7a+2=0$

이때 $a=0$이면 $2\times0^2+7\times0+2=2\neq0$이므로 $a\neq0$

$2a^2+7a+2=0$의 양변을 a로 나누면 $2a+7+\frac{2}{a}=0$

$2\left(a+\frac{1}{a}\right)=-7$

$\therefore a+\frac{1}{a}=-\frac{7}{2}$ 답 ②

19 $2x^2-5x-a=3x-5$에서 모든 항을 좌변으로 이항하면

$2x^2-8x-a+5=0$

양변을 2로 나누면 $x^2-4x-\frac{a}{2}+\frac{5}{2}=0$

이 이차방정식이 중근을 가지려면

$\left(\frac{-4}{2}\right)^2=-\frac{a}{2}+\frac{5}{2}$이어야 하므로 $4=-\frac{a}{2}+\frac{5}{2}$

$\frac{a}{2}=\frac{5}{2}-4$ $\quad\therefore a=5-8=-3$

$2x^2-8x-a+5=0$에 $a=-3$을 대입하면

$2x^2-8x-(-3)+5=0$, $2x^2-8x+8=0$

양변을 2로 나누면

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$ $\quad\therefore x=2$ (중근)

따라서 $a=-3$, $b=2$이므로 $ab=(-3)\times2=-6$ 답 ③

20 이차방정식 $x^2+4x+1=0$의 한 근이 $x=m$이므로

이 이차방정식에 $x=m$을 대입하면

$m^2+4m+1=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $x^2-5x-9=0$의 한 근이 $x=n$이므로

이 이차방정식에 $x=n$을 대입하면

$n^2-5n-9=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

따라서 ㉠과 ㉡을 이용하여 주어진 식의 값을 구하면

$(m^2+4m-3)(3n^2-15n-30)$

$=\{(m^2+4m+1)-4\}\{3(n^2-5n-9)-3\}$

$=(0-4)(3\times0-3)$

$=(-4)\times(-3)=12$ 답 12

08 이차방정식의 풀이 (2)

Step 1. 개념 다지기

08-1 이차방정식의 근의 공식

기본연습 1

(1) $x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-5)}}{2\times1}=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

(2) 방법 1) 근의 공식

$x=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\times(-2)\times7}}{2\times(-2)}=\frac{-10\pm\sqrt{156}}{-4}$

$=\frac{5\mp\sqrt{39}}{2}$

따라서 주어진 이차방정식의 두 근은

$x=\frac{5-\sqrt{39}}{2}$ 또는 $x=\frac{5+\sqrt{39}}{2}$이다.

방법 2) x의 계수가 짝수일 때의 근의 공식

$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-(-2)\times7}}{-2}$

$=\frac{5\mp\sqrt{39}}{2}$

따라서 주어진 이차방정식의 두 근은

$x=\frac{5-\sqrt{39}}{2}$ 또는 $x=\frac{5+\sqrt{39}}{2}$이다.

답 (1) $x=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$ (2) $x=\frac{5\pm\sqrt{39}}{2}$

연습 1

$2x(x+3)=1$에서 $2x^2+6x-1=0$

근의 공식을 이용하면

$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-2\times(-1)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{11}}{2}$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=11$이므로

$\alpha+\beta=8$ 답 8

08-2 복잡한 이차방정식의 풀이

기본연습 2

(1) 계수에 소수가 있으므로 양변에 10을 곱하면

$x^2-5x-66=0$

$(x-11)(x+6)=0$

$\therefore x=11$ 또는 $x=-6$

(2) $x+1$을 A로 치환하여 나타내면

$2A^2+3A-20=0$

$(2A-5)(A+4)=0$

$A=\frac{5}{2}$ 또는 $A=-4$를 해로 갖는다.

이때 A는 $x+1$이므로

$x+1=\frac{5}{2}$ 또는 $x+1=-4$

$\therefore x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=-5$

답 (1) $x=11$ 또는 $x=-6$ (2) $x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=-5$

연습 2

계수가 분수이므로 양변에 분모의 최소공배수인 12를 곱하면

$4(x^2-2)-3(x-1)^2=-12$

$4x^2-8-3(x^2-2x+1)+12=0$

$4x^2-8-3x^2+6x-3+12=0$

$\therefore x^2+6x+1=0$

근의 공식을 이용하여 해를 구하면

$x=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-4\times1\times1}}{2\times1}=\dfrac{-6\pm\sqrt{32}}{2}=\dfrac{-6\pm4\sqrt{2}}{2}$

$=-3\pm2\sqrt{2}$

따라서 주어진 이차방정식은

$x=-3+2\sqrt{2}$ 또는 $x=-3-2\sqrt{2}$를 해로 갖는다.

답 $x=-3+2\sqrt{2}$ 또는 $x=-3-2\sqrt{2}$

08-3 이차방정식의 근의 개수

기본연습 3

(1) $x^2+3x+1=0$에서

$3^2-4\times1\times1=9-4=5>0$

따라서 서로 다른 두 근을 갖는다.

(2) $x^2+5x+10=0$에서

$5^2-4\times1\times10=25-40=-15<0$

따라서 근을 갖지 않는다.

답 (1) 2　(2) 0

연습 3

이차방정식 $x^2+14x+k=0$이 중근을 가지므로

$14^2-4\times1\times k=196-4k=0$, $4k=196$

$\therefore k=49$

답 49

08-4 이차방정식의 근과 계수의 관계

기본연습 4

(1) $3x^2+6x-1=0$에서

(두 근의 합)$=-\dfrac{6}{3}=-2$, (두 근의 곱)$=\dfrac{-1}{3}=-\dfrac{1}{3}$

(2) $-4x^2+x+6=0$에서

(두 근의 합)$=-\dfrac{1}{-4}=\dfrac{1}{4}$, (두 근의 곱)$=\dfrac{6}{-4}=-\dfrac{3}{2}$

답 (1) 두 근의 합 : -2, 두 근의 곱 : $-\dfrac{1}{3}$

(2) 두 근의 합 : $\dfrac{1}{4}$, 두 근의 곱 : $-\dfrac{3}{2}$

연습 4

이차방정식 $x^2+ax+20=0$의 두 근의 합이 12이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$-a=12$　　$\therefore a=-12$

이차방정식 $x^2-12x+20=0$을 인수분해하면

$(x-2)(x-10)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=10$

따라서 두 근의 차는 8이므로 $m=8$

$\therefore a+m=-12+8=-4$

답 -4

Step 2. 대표 문제로 접근하기

01	③	02	32	03	③	04	31	05	20
06	7	07	③	08	2	09	⑤	10	④
11	②	12	⑤	13	⑤	14	3	15	$-\frac{5}{2}$
16	(1) 6　(2) 2								

유제 01 이차방정식 $2x^2-x-8=0$의 근을 근의 공식을 이용하여 구하면

$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times2\times(-8)}}{2\times2}$

$=\dfrac{1\pm\sqrt{1+64}}{4}=\dfrac{1\pm\sqrt{65}}{4}$

이때 주어진 이차방정식의 근이 $x=\dfrac{a\pm\sqrt{b}}{4}$이므로

$\dfrac{1\pm\sqrt{65}}{4}=\dfrac{a\pm\sqrt{b}}{4}$

$\therefore a=1, b=65$

$\therefore ab=1\times65=65$

답 ③

유제 02 이차방정식 $ax^2-5x+1=0$에서 근의 공식을 이용하면

$x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times a\times1}}{2a}$

$=\dfrac{5\pm\sqrt{25-4a}}{2a}$

주어진 이차방정식의 근이 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{b}}{4}$이므로

$\dfrac{5\pm\sqrt{25-4a}}{2a}=\dfrac{5\pm\sqrt{b}}{4}$

먼저 $2a=4$이므로 $a=2$

또한 $\sqrt{25-4a}=\sqrt{b}$이므로

$b=25-4a=25-4\times2=25-8=17$

$\therefore 2b-a=2\times17-2=32$

답 32

유제 03 이차방정식 $6x^2-2x-1=0$의 해를 구하기 위해 근의 공식을 이용하면

$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-6\times(-1)}}{6}$

$=\dfrac{1\pm\sqrt{1+6}}{6}=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{6}$ …… ㉠

이차방정식 $6x^2-2x-1=0$의 해가 $x=\dfrac{m\pm\sqrt{n}}{6}$이라 하였으므로

㉠과 비교해 보면 $m=1$, $n=7$

$\therefore m+n=1+7=8$

답 ③

유제 04 이차방정식 $ax^2+4x-10=0$의 해를 구하기 위해 근의 공식을 이용하면

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-a\times(-10)}}{a}$

$=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+10a}}{a}$

주어진 이차방정식의 해가 $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{b}}{3}$이므로

$\dfrac{-2\pm\sqrt{4+10a}}{a}=\dfrac{-2\pm\sqrt{b}}{3}$

먼저 분모를 비교해 보면 $a=3$

또한 $\sqrt{4+10a}=\sqrt{b}$이므로

$b=4+10a=4+10\times3=4+30=34$

$\therefore b-a=34-3=31$

답 31

유제 05 이차방정식 $2(x-3)^2=x^2-2$에서
$2(x^2-6x+9)=x^2-2$
$2x^2-12x+18=x^2-2$
$\therefore x^2-12x+20=0$
$x^2-12x+20=0$에서
$(x-2)(x-10)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=10$
이때 $\alpha<\beta$이므로 $\alpha=2$, $\beta=10$
$\therefore 5\alpha+\beta=5\times2+10=10+10=20$ 답 20

유제 06 $3(x-1)^2+4(x-1)-4=0$에서
$x-1=X$로 치환하면
$3X^2+4X-4=0$
$(3X-2)(X+2)=0$
$\therefore X=\frac{2}{3}$ 또는 $X=-2$
$x-1=\frac{2}{3}$ 또는 $x-1=-2$에서
$x=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$ 또는 $x=-2+1=-1$
이때 $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=\frac{5}{3}$, $\beta=-1$
$\therefore 3\alpha-2\beta=3\times\frac{5}{3}-2\times(-1)=5+2=7$ 답 7

유제 07 이차방정식 $2x^2+5x+k=0$이 서로 다른 두 근을 가지므로
$5^2-4\times2\times k=25-8k>0$
$25-8k>0$에서 $25>8k$
$\therefore k<\frac{25}{8}$
따라서 조건을 만족시키는 자연수 k는 1, 2, 3으로 3개이다. 답 ③

유제 08 주어진 이차방정식 $2x^2+3x-k+4=0$이 근을 갖지 않아야 한다.
$3^2-4\times2\times(-k+4)$
$=9-8(-k+4)$
$=9+8k-32$
$=8k-23<0$
즉, $8k<23$이므로 $k<\frac{23}{8}$
따라서 가장 큰 정수 k의 값은 2이다. 답 2

유제 09 이차방정식 $x^2+8x+3k-2=0$이 중근을 가져야 하므로
$8^2-4\times1\times(3k-2)$
$=64-12k+8$
$=72-12k=0$
즉, $12k=72$이므로 $k=6$이다.
이차방정식 $x^2+8x+3k-2=0$에서 $k=6$이므로
$x^2+8x+3\times6-2=0$
$x^2+8x+18-2=0$
$x^2+8x+16=0$
$(x+4)^2=0$
$x+4=0$이고, $x=-4$(중근)이다.
$\therefore \alpha=-4$
$\therefore k-\alpha=6-(-4)=6+4=10$ 답 ⑤

다른풀이
이차방정식 $x^2+8x+3k-2=0$이 중근을 가져야 하므로
$(b')^2-ac=0$임을 이용하면
$4^2-1\times(3k-2)$
$=16-3k+2$
$=18-3k=0$
$\therefore k=6$
이차방정식 $x^2+8x+3k-2=0$에서 $k=6$이므로
$x^2+8x+16=0$
$(x+4)^2=0$ $\quad\therefore x=-4$
$\therefore \alpha=-4$
따라서 $k-\alpha=6-(-4)=10$이다.

유제 10 $8x^2+13x=5x-m$에서 $8x^2+8x+m=0$
이차방정식 $8x^2+8x+m=0$이 중근을 가지므로
$8^2-4\times8\times m$
$=64-32m=0$
에서 $-32m=-64$ $\quad\therefore m=2$
$3x^2+(7+m)x+3=0$에 $m=2$를 대입하면
$3x^2+(7+2)x+3=0$
$3x^2+9x+3=0$, $x^2+3x+1=0$
이차방정식의 근의 공식에 의하여
이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 근은
$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times1}}{2\times1}$
$=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 답 ④

유제 11 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
(두 근의 합)$=m=-\frac{5}{1}=-5$
(두 근의 곱)$=n=\frac{-7}{1}=-7$
$\therefore m^2+n^2=(-5)^2+(-7)^2=25+49=74$ 답 ②

유제 12 이차방정식 $2x^2+5x-11=0$의 두 근이 α, β이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
① (두 근의 합)$=\alpha+\beta=-\frac{5}{2}$
② (두 근의 곱)$=\alpha\beta=-\frac{11}{2}$
③ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(-\frac{5}{2}\right)^2-2\times\left(-\frac{11}{2}\right)$
$=\frac{25}{4}+11=\frac{25+44}{4}=\frac{69}{4}$
④ $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=\frac{69}{4}-2\times\left(-\frac{11}{2}\right)$
$=\frac{69}{4}+11=\frac{69+44}{4}=\frac{113}{4}$
⑤ $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{\frac{69}{4}}{-\frac{11}{2}}=-\frac{69\times2}{11\times4}=-\frac{69}{22}$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

유제 13 이차방정식 $x^2-6x+k=0$의 두 근을 α, 2α라 하자.
근과 계수의 관계에 의하여
(두 근의 합)$=\alpha+2\alpha=-\frac{-6}{1}=6$ $\quad\therefore \alpha=2$

(두 근의 곱)$=\alpha\times 2\alpha=\dfrac{k}{1}=k$

$2\alpha^2=k$에서 $\alpha=2$이므로

$k=2\alpha^2=2\times 2^2=8$ 답 ⑤

유제 14 이차방정식 $2x^2-5x+k=0$의 한 근을 2α, 다른 한 근을 3α라 하자.

근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=2\alpha+3\alpha=-\dfrac{-5}{2}$, $5\alpha=\dfrac{5}{2}$ $\quad\therefore \alpha=\dfrac{1}{2}$

(두 근의 곱)$=2\alpha\times 3\alpha=\dfrac{k}{2}$, $6\alpha^2=\dfrac{k}{2}$

$\alpha=\dfrac{1}{2}$이므로 $k=12\alpha^2=12\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=12\times\dfrac{1}{4}=3$ 답 3

유제 15 $a\bullet b=ab-a+b-1=a(b-1)+b-1$

$=(a+1)(b-1)$

$(2x-1)\bullet(x+2)=(2x-1+1)(x+2-1)$

$=2x(x+1)$

$=2x^2+2x=4$ …… ㉠

㉠의 양변을 2로 나누어 정리하면

$x^2+x-2=0$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{1}{1}=-1$, $\alpha\beta=\dfrac{-2}{1}=-2$이므로

$\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{(-1)^2-2\times(-2)}{-2}=-\dfrac{5}{2}$ 답 $-\dfrac{5}{2}$

유제 16 (1) $a+b=X$라 하면 주어진 식은

$X^2-4X-12=0$

좌변을 인수분해하면

$(X+2)(X-6)=0$이므로

$X+2=0$ 또는 $X-6=0$

$\therefore X=-2$ 또는 $X=6$

두 자연수 a, b에 대하여 $a+b=X\geq 2$이므로 $X=6$

$\therefore a+b=6$

(2) $a+b=6$, $ab=8$을 만족하는 두 자연수 a, b는

$a=4$, $b=2$ ($\because a>b$)

$\therefore a-b=4-2=2$ 답 (1) 6 (2) 2

Step 3. 단원 마무리하기

01	④	02	③	03	④	04	④	05	②
06	③	07	①	08	③	09	⑤	10	②
11	①	12	④	13	②	14	⑤	15	②
16	④	17	③	18	0	19	⑤	20	②

01 $x^2-6x+3=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times1\times3}}{2\times1}$

$=\dfrac{6\pm\sqrt{36-12}}{2}=\dfrac{6\pm\sqrt{24}}{2}=\dfrac{6\pm2\sqrt{6}}{2}=3\pm\sqrt{6}$

따라서 $p=3$, $q=6$이므로

$p+q=3+6=9$ 답 ④

02 이차방정식 $6x^2-6x=1$에서 $6x^2-6x-1=0$

이차방정식의 근의 공식을 이용하여 해를 구하면

$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-6\times(-1)}}{6}$

$=\dfrac{3\pm\sqrt{9+6}}{6}=\dfrac{3\pm\sqrt{15}}{6}$ 답 ③

03 이차방정식 $2x^2-3x-A=0$의 근을 이차방정식의 근의 공식을 이용하여 구하면

$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times(-A)}}{2\times2}$

$=\dfrac{3\pm\sqrt{9+8A}}{4}$

이때 $x=\dfrac{B\pm\sqrt{41}}{4}$이므로 $B=3$

$9+8A=41$에서

$8A=32$ $\quad\therefore A=4$

$\therefore A+B=4+3=7$ 답 ④

04 ㄱ. $x^2+6x+8=0$에서

$6^2-4\times1\times8=4>0$

이므로 서로 다른 두 근을 갖는다.

ㄴ. $x^2-x+5=0$에서

$(-1)^2-4\times1\times5=-19<0$

이므로 근이 없다.

ㄷ. $3x^2+x+5=0$에서

$1^2-4\times3\times5=-59<0$

이므로 근이 없다.

ㄹ. $2x^2-4x+2=0$에서

$(-4)^2-4\times2\times2=0$

이므로 중근을 갖는다.

따라서 근이 없는 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

05 이차방정식 $2(x+1)^2-24=(x-3)(x+4)$를 정리하면

$2(x^2+2x+1)-24=x^2+x-12$

$2x^2+4x+2-24=x^2+x-12$

$2x^2+4x-22=x^2+x-12$

$\therefore x^2+3x-10=0$

$x^2+3x-10=0$에서 $(x+5)(x-2)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=2$ 답 ②

06 이차방정식 $\dfrac{(x+2)^2}{3}=\dfrac{x^2-4}{2}$에서 양변에 6을 곱하면

$6\times\dfrac{(x+2)^2}{3}=6\times\dfrac{(x^2-4)}{2}$

$2(x+2)^2=3(x^2-4)$

$2(x^2+4x+4)=3x^2-12$

$2x^2+8x+8=3x^2-12$

$3x^2-12-(2x^2+8x+8)=0$

$3x^2-12-2x^2-8x-8=0$

$x^2-8x-20=0$

$(x+2)(x-10)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=10$ 답 ③

07 이차방정식 $x^2-7x-15=0$에서 (두 근의 합)$=-\dfrac{-7}{1}=7$

$x=7$이 이차방정식 $x^2+kx-7=0$의 근이므로

$7^2+k\times7-7=0$

$42+7k=0$, $7k=-42$

$\therefore k=-6$ 답 ①

08 이차방정식 $5x^2-13x-10=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 $\frac{-10}{5}=-2$

따라서 $x=-2$가 이차방정식 $x^2+5x+k=0$의 한 근이므로

$x=-2$를 $x^2+5x+k=0$에 대입하면

$(-2)^2+5\times(-2)+k=0$, $4-10+k=0$

$\therefore k=6$

답 ③

09 주어진 이차방정식 $x^2+2x+k-5=0$이 해를 가져야 하므로

$2^2-4\times1\times(k-5)=4-4(k-5)=4-4k+20=24-4k\geq0$

$24\geq4k$

$\therefore k\leq6$

$k\leq6$을 만족하는 정수 중 최댓값은 6이다.

답 ⑤

10 이차방정식 $3x-\frac{x^2+3}{2}=4(x-2)$의 양변에 2를 곱하면

$2\times\left(3x-\frac{x^2+3}{2}\right)=2\times4(x-2)$

$6x-(x^2+3)=8(x-2)$

$6x-x^2-3=8x-16$

$8x-16-(-x^2+6x-3)=0$

$8x-16+x^2-6x+3=0$

$x^2+2x-13=0$

$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-1\times(-13)}}{1}$

$=-1\pm\sqrt{1+13}=-1\pm\sqrt{14}$

답 ②

11 이차방정식 $\frac{1}{2}x^2-0.8x-0.1=0$의 양변에 10을 곱하면

$10\times\frac{1}{2}x^2-10\times0.8x-10\times0.1=0$

$5x^2-8x-1=0$

이때 이차방정식의 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-5\times(-1)}}{5}$

$=\frac{4\pm\sqrt{16+5}}{5}=\frac{4\pm\sqrt{21}}{5}$

따라서 $a=4$, $b=21$이므로

$a+b=4+21=25$

답 ①

12 이차방정식 $2x^2-4x+1=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하면

① $\alpha+\beta=-\frac{-4}{2}=2$

② $\alpha\beta=\frac{1}{2}$

③ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$

④ $\alpha^2+\beta^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha\beta$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=2^2-2\times\frac{1}{2}=4-1=3$

⑤ $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}=\frac{3}{\frac{1}{2}}=6$

따라서 보기에 주어진 식의 값이 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

13 이차방정식 $3x^2-10x=2x-m$에서 $3x^2-12x+m=0$

따라서 이차방정식 $3x^2-12x+m=0$이 중근을 가지므로

$(b')^2-ac=0$에서

$(-6)^2-3\times m=36-3m=0$

$3m=36$ $\therefore m=12$

이차방정식 $x^2-4x+(m-9)=0$에 $m=12$를 대입하면

$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

답 ②

14 이차방정식 $2x^2-6x+\frac{k}{2}=0$이 중근을 가지므로

$(b')^2-ac=0$에서

$(-3)^2-2\times\frac{k}{2}=9-k=0$

$\therefore k=9$

이차방정식 $x^2+(k-5)x-k=0$에 $k=9$를 대입하면

$x^2+(9-5)x-9=0$

$\therefore x^2+4x-9=0$

이 이차방정식의 해를 이차방정식의 근의 공식을 이용하여 구해 보면

$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-1\times(-9)}}{1}=-2\pm\sqrt{4+9}$

$=-2\pm\sqrt{13}$

답 ⑤

15 이차방정식 $-0.3x^2+\frac{(x+1)(x-1)}{4}-\frac{(x+2)(x+3)}{10}+\frac{3}{4}=0$의 양변에 20을 곱하면

$20\times\left\{-0.3x^2+\frac{(x+1)(x-1)}{4}-\frac{(x+2)(x+3)}{10}+\frac{3}{4}\right\}=0$

$-6x^2+5(x+1)(x-1)-2(x+2)(x+3)+15=0$

$-6x^2+5(x^2-1)-2(x^2+5x+6)+15=0$

$-6x^2+5x^2-5-2x^2-10x-12+15=0$

$-3x^2-10x-2=0$

$3x^2+10x+2=0$

이차방정식의 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-3\times2}}{3}$

$=\frac{-5\pm\sqrt{25-6}}{3}=\frac{-5\pm\sqrt{19}}{3}$

답 ②

16 이차방정식 $\frac{(x-1)(x-2)}{3}-\frac{(x+1)(x+2)}{9}=2$의 양변에 9를 곱하여 전개하면

$3(x-1)(x-2)-(x+1)(x+2)=18$

$3x^2-9x+6-x^2-3x-2=18$

$2x^2-12x-14=0$, $2(x^2-6x-7)=0$

$2(x+1)(x-7)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=7$

따라서 $a=-1$, $b=7$ 또는 $a=7$, $b=-1$이므로

$a^2+b^2=(-1)^2+7^2=7^2+(-1)^2=50$

답 ④

17 이차방정식 $x^2-kx+36=0$의 두 근의 비가 $1:4$이므로 두 근을 각각 α, $4\alpha(\alpha>0)$라 하자.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 곱)$=\frac{36}{1}=36$에서 $\alpha\times4\alpha=36$

$4\alpha^2=36$, $\alpha^2=9$

$\therefore \alpha=3$ ($\because$ α는 양수)

따라서 주어진 이차방정식의 두 근은 3, 12이다.

두 근의 합은 15이므로

(두 근의 합)$=-\frac{-k}{1}=k=15$

답 ③

18 이차방정식 $\frac{2}{3}x^2+2x+1.5=0$의 양변에 6을 곱하면

$6\times\left(\frac{2}{3}x^2+2x+1.5\right)=0$

$6\times\frac{2}{3}x^2+6\times2x+6\times1.5=0$

$4x^2+12x+9=0$

이때 $4x^2+12x+9=0$에서 b^2-4ac의 값이

$12^2-4\times4\times9=144-144=0$

따라서 중근을 갖는다.

즉, 근이 1개이므로 $a=1$이다. …… ㉠

이차방정식 $\frac{1}{2}x^2+x-4=0$에서 b^2-4ac의 값이

$1^2-4\times\frac{1}{2}\times(-4)=1+8=9>0$

따라서 서로 다른 두 근을 갖는다.

즉, $b=2$이다. …… ㉡

이차방정식 $-3(x+1)^2=2$에서 좌변의 식을 전개하면

$-3(x^2+2x+1)=2$, $-3x^2-6x-3=2$

$3x^2+6x+5=0$

이때 $3x^2+6x+5=0$에서 b^2-4ac의 값이

$6^2-4\times3\times5=36-60=-24<0$

따라서 근이 없다.

즉, $c=0$이다. …… ㉢

따라서 ㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $2a-b+c=2\times1-2+0=0$ 답 0

19 이차방정식 $4x^2-4ax+a+2=0$이 중근을 가져야 하므로

$(-2a)^2-4\times(a+2)=4a^2-4a-8=0$

즉, $a^2-a-2=0$이므로 $(a+1)(a-2)=0$이다.

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

$a=-1$ 또는 $a=2$이므로 a의 값에 대한 이차방정식의 근을 각각 구하면 다음과 같다.

(i) $a=-1$일 때

주어진 이차방정식 $4x^2-4ax+a+2=0$에 $a=-1$을 대입하면

$4x^2-4\times(-1)\times x-1+2=0$

$4x^2+4x+1=0$

즉, $(2x+1)^2=0$이므로 $x=-\frac{1}{2}$ (중근)

(ii) $a=2$일 때

주어진 이차방정식 $4x^2-4ax+a+2=0$에 $a=2$를 대입하면

$4x^2-4\times2\times x+2+2=0$

$4x^2-8x+4=0$

$x^2-2x+1=0$

즉, $(x-1)^2=0$이므로 $x=1$ (중근)

따라서 (i), (ii)에서 주어진 이차방정식이 양수인 중근을 갖도록 하는 상수 a의 값은 2이다. 답 ⑤

20 이차방정식의 근의 공식을 이용하여 $x^2-5x+a-3=0$의 근을 구하면

$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(a-3)}}{2\times1}=\frac{5\pm\sqrt{37-4a}}{2}$

따라서 이차방정식의 근이 유리수가 되려면

자연수 a에 대하여 $37-4a$는 정수의 제곱인 수이어야 한다.

이 조건을 만족하는 a의 값을 찾아 보면

(i) $37-4a=1$일 때

$a=\frac{37-1}{4}=9$

(ii) $37-4a=9$일 때

$a=\frac{37-9}{4}=\frac{28}{4}=7$

(iii) $37-4a=25$일 때

$a=\frac{37-25}{4}=\frac{12}{4}=3$

따라서 (i)~(iii)에서 주어진 이차방정식이 유리수 근을 갖도록 하는 자연수 a의 개수는 3이다. 답 ②

09 이차방정식의 활용

Step 1. 개념 다지기

09-1 계수와 상수항이 유리수인 이차방정식의 근

기본연습 1

(1) 다른 한 근은 무리수 부분의 부호가 반대인 $1-\sqrt{2}$이다.

(2) $\sqrt{3}-1=-1+\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 무리수 부분의 부호가 반대인 $-1-\sqrt{3}$이다. 답 (1) $1-\sqrt{2}$ (2) $-1-\sqrt{3}$

연습 1

이차방정식의 계수, 상수항이 모두 유리수이고 한 근이 $3-\sqrt{10}$이므로

다른 한 근은 $3+\sqrt{10}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$k=(3+\sqrt{10})(3-\sqrt{10})=9-10=-1$ 답 -1

09-2 조건을 만족시키는 이차방정식

기본연습 2

(1) $(x+1)(x-4)=0$에서 $x^2-3x-4=0$

(2) $-(x^2-5x-7)=0$에서 $-x^2+5x+7=0$

답 (1) $x^2-3x-4=0$ (2) $-x^2+5x+7=0$

연습 2

x^2의 계수가 3이고 두 근이 2, 5인 이차방정식을 세우면

$3(x-2)(x-5)=0$, $3x^2-21x+30=0$

따라서 $a=-21$, $b=30$이므로 $a+b=9$ 답 9

09-3 이차방정식의 활용 (1) - 수에 대한 문제

기본연습 3

(ⅰ) 연속하는 두 자연수를 x, $x+1$이라 하자.
(ⅱ) 두 자연수의 곱이 156이므로 $x(x+1)=156$
(ⅲ) $x(x+1)=156$에서 $x^2+x-156=0$
$(x-12)(x+13)=0$
$\therefore x=12$ 또는 $x=-13$
구하는 두 수는 자연수이므로 $x=12$
따라서 두 자연수는 12, 13이다.
(ⅳ) $12\times13=156$이므로 문제의 뜻을 만족한다. 답 12, 13

연습 3

어떤 자연수를 x라 하자.
x에 대한 이차방정식을 세우면
$(x+4)^2=20x-20$
$x^2+8x+16=20x-20$
$x^2-12x+36=0$
$(x-6)^2=0$
$\therefore x=6$
따라서 어떤 자연수는 6이다. 답 6

09-4 이차방정식의 활용 (2) - 도형에 대한 문제

기본연습 4

(ⅰ) 높이를 $x$cm(단, $x>0$)라 하자.
(ⅱ) 높이가 밑변의 길이보다 3cm 짧으므로
(밑변의 길이)$=x+3$
이때 삼각형의 넓이가 20cm^{2}이므로
$\frac{1}{2}x(x+3)=20$
(ⅲ) $\frac{1}{2}x(x+3)=20$에서 $x^2+3x=40$
$x^2+3x-40=0$, $(x+8)(x-5)=0$
$\therefore x=-8$ 또는 $x=5$
$x>0$이므로 $x=5$
따라서 삼각형의 높이는 5cm이다.
(ⅳ) (밑변의 길이)$=8$cm, (높이)$=5$cm이므로
(삼각형의 넓이)$=\frac{1}{2}\times8\times5=20$(cm^2) 답 5cm

연습 4

늘인 길이를 $x$cm(단, $x>0$)라 하자.
늘인 후 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이는 각각 $(x+5)$ cm, $(x+7)$ cm이므로 $(x+5)(x+7)=63$
$(x+5)(x+7)=63$에서 $x^2+12x+35=63$
$x^2+12x-28=0$, $(x+14)(x-2)=0$
$\therefore x=-14$ 또는 $x=2$
$x>0$이므로 $x=2$
따라서 늘인 길이는 2cm이다.
가로, 세로의 길이를 각각 2cm만큼 늘이면 가로의 길이는 7cm, 세로의 길이는 9cm이므로 직사각형의 넓이는 $7\times9=63$(cm^2)이다. 답 2cm

Step 2. 대표 문제로 접근하기

01	45	02	20	03	④	04	②	05	18명
06	⑤	07	24	08	②	09	②	10	④
11	②	12	4초 동안			13	②	14	32cm^2
15	②, ③	16	20m	17	(3, 3), (6, 12)				
18	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$								

유제 01 계수와 상수항이 모두 유리수인 이차방정식 $3x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{2}$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$-\frac{a}{3}=(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})=2$
$\therefore a=-6$
$\frac{b}{3}=(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=1-2=-1$
$\therefore b=-3$
$\therefore a^2+b^2=(-6)^2+(-3)^2=36+9=45$ 답 45

유제 02 이차방정식 $5x^2-10x-k=0$의 한 근이 $1+\sqrt{5}$이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{5}$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$-\frac{k}{5}=(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})=1-5=-4$
$\therefore k=20$ 답 20

유제 03 이차방정식 $10x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$이므로 주어진 이차방정식은 두 근이 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$이고 x^2의 계수가 10인 이차방정식이다.
조건에 맞는 이차방정식은
$10\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)=0$
이 이차방정식은 $10x^2+ax+b=0$이므로
$10\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)=10x^2+ax+b$
$10\left(x^2-\frac{7}{10}x+\frac{1}{10}\right)=10x^2+ax+b$
$10x^2-7x+1=10x^2+ax+b$
$\therefore a=-7, b=1$
따라서 구하는 이차방정식은 $a=-7$, $b=1$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식이므로
$(x+7)(x-1)=0$
$\therefore x^2+6x-7=0$ 답 ④

유제 04 이차방정식 $x^2-3x-5=0$에서 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-3}{1}=3$
$\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-5}{1}=-5$
구하는 이차방정식은 두 근이 3, -5이고 x^2의 계수가 1이므로
$(x-3)(x+5)=0$
$x^2+\{(-3)+5\}x+(-3)\times5=0$
$\therefore x^2+2x-15=0$
따라서 구하는 이차방정식은 ②이다. 답 ②

유제 05 학급의 학생 수를 a라 하면 2 이상의 자연수 a에 대하여

$\frac{a(a-1)}{2}=153$

$a(a-1)=306$

$a^2-a-306=0$

$a^2-a-306=(a+17)(a-18)$이므로

$(a+17)(a-18)=0$

$a+17=0$ 또는 $a-18=0$

$\therefore a=-17$ 또는 $a=18$

a는 2 이상의 자연수이므로 $a=18$

따라서 학급의 학생은 모두 18명이다. 답 18명

유제 06 3 이상의 자연수 n에 대하여 n각형의 대각선의 총 개수가 54일 때

$\frac{n(n-3)}{2}=54$

$n(n-3)=108$

$n^2-3n=108$

$n^2-3n-108=0$

$n^2-3n-108=(n+9)(n-12)$이므로

$(n+9)(n-12)=0$

따라서 $n+9=0$ 또는 $n-12=0$

$\therefore n=-9$ 또는 $n=12$

n은 3 이상의 자연수이므로 $n=12$

따라서 대각선의 총 개수가 54인 다각형은 십이각형이다. 답 ⑤

유제 07 연속하는 세 자연수를 $x-1$, x, $x+1$이라 하면

$(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=194$

$3x^2+2=194$

$3x^2=192$

$x^2=64 \qquad \therefore x=\pm 8$

이때 x는 $x>1$인 자연수이므로 $x=8$

따라서 연속하는 세 자연수는 7, 8, 9이므로 그 합은

$7+8+9=24$ 답 24

유제 08 연속하는 짝수인 두 자연수 중 작은 수를 x라 하면 두 짝수는

x, $x+2$ (단, x는 짝수인 자연수)

두 자연수의 제곱의 합이 340이므로

$x^2+(x+2)^2=340$, $x^2+x^2+4x+4=340$

$2x^2+4x+4=340$, $2x^2+4x-336=0$

$x^2+2x-168=0$

$x^2+2x-168=(x+14)(x-12)$이므로

$(x+14)(x-12)=0$

$x+14=0$ 또는 $x-12=0$

$\therefore x=-14$ 또는 $x=12$

x는 짝수인 자연수이므로 $x=12$

따라서 작은 수는 12이다. 답 ②

유제 09 학생 수를 x명 (x는 자연수)라 하면 학생 한 명은 $(x+4)$개의 볼펜을 받는다. 따라서

$x\times(x+4)=320$

$x^2+4x=320$

$x^2+4x-320=0$

$x^2+4x-320=(x+20)(x-16)$이므로

$(x+20)(x-16)=0$

$x+20=0$ 또는 $x-16=0$

$\therefore x=-20$ 또는 $x=16$

그런데 x는 자연수이므로 $x=16$

따라서 학생은 모두 16명이다. 답 ②

유제 10 자연수 x에 대하여 겨울캠프의 날짜를 $(x-1)$일, x일, $(x+1)$일이라 하자.

12월은 1일부터 31일까지 있으므로

부등식 $x-1\ge 1$, $x+1\le 31$을 모두 만족하여야 한다.

$\therefore 2\le x\le 30$, x는 자연수 …… ㉠

둘째 날의 날짜의 제곱은 첫째 날과 셋째 날의 날짜를 더한 수의 6배와 같으므로

$x^2=6\{(x-1)+(x+1)\}$

$x^2=12x$

$x=12$ ($\because$ ㉠)

따라서 진아가 겨울캠프에서 돌아오는 날짜는 12월 13일이다.

답 ④

유제 11 폭죽이 130m인 지점에서 터져야 하므로

t초 후의 폭죽의 높이가 130m라 하면

$-5t^2+30t+90=130$, $-5t^2+30t+90-130=0$

$t^2-6t+8=0$

이 식의 좌변을 인수분해하면

$(t-2)(t-4)=0$

$t-2=0$ 또는 $t-4=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=4$

폭죽의 높이가 처음으로 130m가 되는 순간은 2초 후이다.

따라서 쏘아 올린 지 2초 후에 터지도록 해야 한다. 답 ②

유제 12 공을 던진 지 t초 후의 공의 높이를 160m라 하면

$60t-5t^2=160$, $-5t^2+60t-160=0$

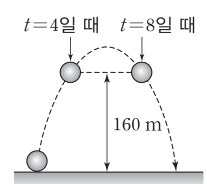
$t^2-12t+32=0$

이 식의 좌변을 인수분해하면

$(t-4)(t-8)=0$

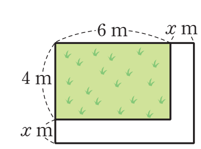
$t-4=0$ 또는 $t-8=0$

$\therefore t=4$ 또는 $t=8$



따라서 높이가 160m 이상인 지점을 지나는 시간은 공을 던진 지 4초부터 8초까지이므로 4초 동안이다. 답 4초 동안

유제 13 오른쪽 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 6m, 4m인 직사각형 모양의 정원에서 가로, 세로의 길이를 똑같이 xm$(x>0)$만큼 늘였다고 하자.



늘어난 후의 정원은 가로의 길이가 $(x+6)$m, 세로의 길이가 $(x+4)$m인 직사각형 모양이므로 그 넓이는

$(x+6)(x+4)$ m^2 …… ㉠

길이가 늘어난 후의 정원의 넓이는 처음 정원의 넓이보다 56m^{2}만큼 늘어났으므로

$(6\times 4+56)$m^2, 즉 80m^2 …… ㉡

㉠, ㉡에서

$(x+6)(x+4)=80$ …… ㉢

㉢에서 $x^2+(6+4)x+6\times 4=80$

$x^2+10x-56=0$에서 좌변을 인수분해하면

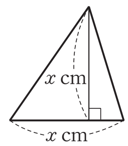
$(x+14)(x-4)=0$, $x+14=0$ 또는 $x-4=0$

$\therefore x=-14$ 또는 $x=4$

그런데 $x>0$이므로 $x=4$

따라서 가로의 길이는 처음보다 4m만큼 늘어났다. 답 ②

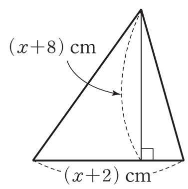
유제 14 오른쪽 그림과 같이 처음 삼각형의 밑변의 길이와 높이를 $x$cm$(x>0)$라 하자.



이때 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times x\times x=\frac{1}{2}x^2$

이 삼각형의 밑변의 길이를 2cm, 높이를 8cm 늘이면 이때의 삼각형의 넓이는



$\frac{1}{2}\times(x+2)\times(x+8)$

$=\frac{1}{2}(x+2)(x+8)$

이때 이 넓이가 처음 삼각형의 넓이의 $\frac{5}{2}$배이므로

$\frac{1}{2}x^2\times\frac{5}{2}=\frac{1}{2}(x+2)(x+8)$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 4를 곱하면

$5x^2=2(x+2)(x+8)$

$\quad=2(x^2+10x+16)$

$\quad=2x^2+20x+32$

$3x^2-20x-32=0$

$(3x+4)(x-8)=0$

$3x+4=0$ 또는 $x-8=0$

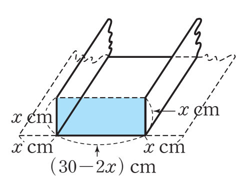
$\therefore x=-\frac{4}{3}$ 또는 $x=8$

이때 $x>0$이므로 $x=8$

따라서 처음 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times8\times8=32(\text{cm}^2)$ 답 32cm^2

유제 15 오른쪽 그림과 같이 만들어지는 물받이의 높이를 $x$cm$(x>0)$라 하자.



이때 색칠된 부분의 넓이는

$x(30-2x)(\text{cm}^2)$이다.

문제에서 색칠된 부분의 넓이가 112 cm^{2}라고 하였으므로

$x(30-2x)=112$ ⋯⋯ ㉠

㉠에서 $30x-2x^2=112$

$-2x^2+30x-112=0$

$x^2-15x+56=0$

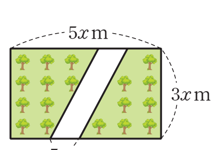
$(x-7)(x-8)=0$

$x-7=0$ 또는 $x-8=0$

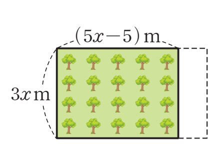
$\therefore x=7$ 또는 $x=8$

따라서 물받이의 높이는 7cm 또는 8cm이다. 답 ②, ③

유제 16 공원의 가로와 세로의 길이의 비가 5 : 3이므로 가로와 세로의 길이를 각각 $5x$m, $3x$m로 놓을 수 있다.



이때 이 공원에 폭이 5m인 길을 내면 길을 제외한 부분의 넓이는 가로의 길이가 $(5x-5)$m, 세로의 길이가 $3x$m인 직사각형의 넓이와 같아진다.



문제에서 길을 제외한 부분의 넓이가 180m^{2}라 하였으므로

$(5x-5)\times3x=180$ ⋯⋯ ㉠

㉠에서 $x(5x-5)=60$

$5x^2-5x-60=0$

$x^2-x-12=0$

$(x+3)(x-4)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=4$

이때 $x=-3$이면 공원의 가로와 세로의 길이가 음수가 되어 모순이다.

$\therefore x=4$

따라서 공원의 가로의 길이는 $5\times4=20$(m)이다. 답 20m

유제 17 이차방정식 $x^2-2mx+2n=0$에서 x의 계수가 짝수인 경우의 근의 공식을 이용하면

$x=-(-m)\pm\sqrt{(-m)^2-1\times2n}$

$\quad=m\pm\sqrt{m^2-2n}$ ⋯⋯ ㉠

문제에서 주어진 이차방정식의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $x=m-\sqrt{n}$이므로 다른 한 근은 $x=m+\sqrt{n}$이다.

따라서 두 근은 $x=m\pm\sqrt{n}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 비교하면

$\sqrt{m^2-2n}=\sqrt{n}$

양변을 제곱하면

$m^2-2n=n$ $\therefore m^2=3n$

m, n은 자연수이므로 $n=3k^2$(단, k는 자연수)

$m^2=3n$에 $n=3k^2$을 대입하면 $m^2=3\times3k^2=(3k)^2$

$\therefore m=3k$($\because$ m은 자연수)

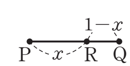
$0<m<20$, $0<n<20$, $n\neq1, 4, 9, 16$이므로

$0<3k<20$, $0<3k^2<20$, $3k^2\neq1, 4, 9, 16$

$\therefore k=1$ 또는 $k=2$($\because$ k는 자연수)

따라서 순서쌍 (m, n), 즉 $(3k, 3k^2)$에 $k=1$, $k=2$를 각각 대입하면 구하는 순서쌍은 $(3, 3)$, $(6, 12)$이다. 답 $(3, 3)$, $(6, 12)$

유제 18 오른쪽 그림과 같이 선분 PR의 길이를 x라 하면 선분 QR의 길이는 $1-x$이다.



이를 주어진 식 $\frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}}=\frac{\overline{PR}}{\overline{QR}}$에 대입하면

$\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$

$\therefore 1-x=x^2$

$1-x=x^2$에서 $x^2+x-1=0$

근의 공식을 이용하여 x의 값을 구하면

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$

$\quad=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}$

$\quad=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

이때 x는 선분 PR의 길이이므로 $x>0$

$\therefore x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

따라서 선분 PR의 길이는 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$이다. 답 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Step 3. 단원 마무리하기

01	②	02	2	03	②	04	0	05	③
06	$2x^2+7x-3=0$			07	10, 11	08	①	09	③
10	②	11	④	12	180	13	$a=-2$, $x=0$ 또는 $x=4$		
14	④	15	⑤	16	2	17	15 cm	18	④
19	②, ⑤	20	$\frac{50}{3}$						

01 이차방정식 $x^2+4x+A=0$에 대하여 계수와 상수항의 값이 모두 유리수이므로 한 근이 $-2+\sqrt{7}$일 때 다른 한 근은 $-2-\sqrt{7}$이다.
근과 계수의 관계에 의하여
(두 근의 곱)$=(-2+\sqrt{7})(-2-\sqrt{7})$
$=(-2)^2-(\sqrt{7})^2$
$=4-7$
$=-3=A$
$\therefore A=-3$ 답 ②

02 이차방정식 $x^2+px+q=0$에서 p, q가 유리수이므로 이 이차방정식의 계수는 모두 유리수이다.
이때 이차방정식의 한 근이 $4-\sqrt{6}$이므로
다른 한 근은 $4+\sqrt{6}$이다.
따라서 근과 계수의 관계를 이용하면
$(4-\sqrt{6})+(4+\sqrt{6})=-\frac{p}{1}$ $\quad\therefore p=-8$
$(4-\sqrt{6})(4+\sqrt{6})=\frac{q}{1}$ $\quad\therefore q=10$
$\therefore p+q=-8+10=2$ 답 2

03 이차방정식 $3x^2+ax+b=0$에 대하여 계수와 상수항의 값이 모두 유리수이므로 한 근이 $5-2\sqrt{2}$일 때 다른 한 근은 $5+2\sqrt{2}$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의해
(두 근의 합)$=-\frac{a}{3}=(5-2\sqrt{2})+(5+2\sqrt{2})=10$
$\therefore a=(-3)\times10=-30$
(두 근의 곱)$=\frac{b}{3}=(5-2\sqrt{2})(5+2\sqrt{2})$
$=5^2-(2\sqrt{2})^2=25-8=17$
$\therefore b=3\times17=51$
$\therefore a+b=-30+51=21$ 답 ②

04 주어진 이차방정식 $2x^2+\alpha x+\beta=0$은
최고차항의 계수가 2이고 중근 -4를 가지므로
$2x^2+\alpha x+\beta=2(x+4)^2$
$=2(x^2+8x+16)$
$=2x^2+16x+32$
따라서 $2x^2+\alpha x+\beta=2x^2+16x+32$이므로
$\alpha=16, \beta=32$
$\therefore 2\alpha-\beta=2\times16-32=0$ 답 0

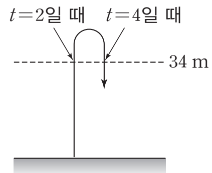
05 이차방정식 $x^2-5x+2=0$의 두 근이 α, β이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-\frac{-5}{1}=5, \alpha\beta=\frac{2}{1}=2$
이를 이용하면
$\alpha^2+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=5^2-2\times2=25-4=21$
$\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta}$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식을
$2x^2+ax+b=0$이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{21}{2}=-\frac{a}{2}$ $\quad\therefore a=-21$
$\frac{\beta}{\alpha}\times\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta}=1=\frac{b}{2}$ $\quad\therefore b=2$
따라서 구하는 이차방정식은 $2x^2-21x+2=0$ 답 ③

06 어떤 이차방정식의 두 근이 α, β이면
이차방정식은 $a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0\,(a\neq0)$이다.
새로운 이차방정식의 두 근이 $\alpha-1, \beta-1$이고 x^2의 계수가 2이므로
$2\{x^2-(\alpha-1+\beta-1)x+(\alpha-1)(\beta-1)\}=0$
$2\{x^2-(\alpha+\beta-2)x+(\alpha\beta-\alpha-\beta+1)\}=0$
$2x^2-2(\alpha+\beta-2)x+2\{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1\}=0$ …… ㉠
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$2x^2+3x-8=0$에서
$\alpha+\beta=-\frac{3}{2}, \alpha\beta=\frac{-8}{2}=-4$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$2x^2-2\left(-\frac{3}{2}-2\right)x+2\left\{-4-\left(-\frac{3}{2}\right)+1\right\}=0$
$2x^2-2\times\left(-\frac{7}{2}\right)x+2\left(-4+\frac{3}{2}+1\right)=0$
$2x^2+7x+2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=0$
$2x^2+7x-3=0$ 답 $2x^2+7x-3=0$

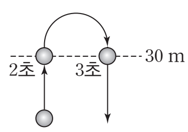
07 자연수 x에 대하여 연속하는 두 자연수를 $x, x+1$이라고 하자.
두 수의 곱은 $x\times(x+1)$, 즉 x^2+x
두 수의 합은 $x+(x+1)$, 즉 $2x+1$
두 수의 곱은 두 수의 합의 5배보다 5만큼 크므로
$x^2+x=5\times(2x+1)+5$, $x^2+x=10x+5+5$
$\therefore x^2-9x-10=0$
$x^2-9x-10=0$의 좌변을 인수분해하면
$(x+1)(x-10)=0$
$x+1=0$ 또는 $x-10=0$
$x=-1$ 또는 $x=10$
$\therefore x=10$ ($\because x$는 자연수)
따라서 연속하는 두 자연수는 10, 11이다. 답 10, 11

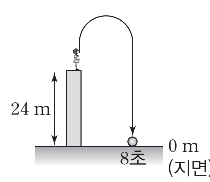
08 연속하는 세 짝수를 $a-2, a, a+2$라 하자.
이때 가장 큰 수의 제곱이 나머지 두 수의 제곱의 합보다 12만큼 크므로
$(a+2)^2=(a-2)^2+a^2+12$
$a^2+4a+4=a^2-4a+4+a^2+12$
$a^2-8a+12=0$
$(a-2)(a-6)=0$
$\therefore a=2$ 또는 $a=6$
그런데 문제에서 연속하는 세 짝수가 자연수라고 하였으므로
$a=6$
따라서 가운데 수는 6이다. 답 ①

09 B의 나이를 x살이라 하면
A는 B보다 4살이 많으므로 A의 나이는 $(x+4)$살,
B는 C보다 5살이 많으므로 C의 나이는 $(x-5)$살이다.
이때 A, B, C의 나이를 각각 제곱하여 더한 값이 382이므로
$(x+4)^2+x^2+(x-5)^2=382$
위 이차방정식을 정리하면
$x^2+8x+16+x^2+x^2-10x+25=382$
$3x^2-2x+41=382$
$3x^2-2x-341=0$
$(3x+31)(x-11)=0$
$\therefore x=-\frac{31}{3}$ 또는 $x=11$
이때 $x>5$인 자연수이므로 $x=11$
따라서 B는 11살, A는 15살, C는 6살이므로
세 사람의 나이의 합은 $11+15+6=32$ 답 ③

10 발사한 물로켓의 t초 후의 높이가 $(-3t^2+18t+10)$m이므로
물로켓의 높이가 34m일 때
$-3t^2+18t+10=34$
위 이차방정식을 정리하면


$-3t^2+18t-24=0$
$t^2-6t+8=0$
$(t-2)(t-4)=0$
$\therefore t=2$ 또는 $t=4$
따라서 물로켓을 발사한 후 2초부터 4초 사이에 발사한 물로켓의 높이가 34m 이상이 되므로 구하는 시간은 2초이다. 답 ②

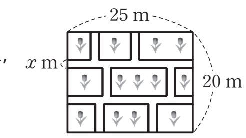
11 공의 t초 후의 높이가 $(-t^2+5t+24)$m이므로
공의 높이가 30m일 때의 시간을 구하면
$-t^2+5t+24=30$, $-t^2+5t-6=0$
$t^2-5t+6=0$
$(t-2)(t-3)=0$
$\therefore t=2$ 또는 $t=3$


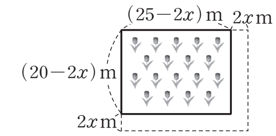
따라서 공의 높이가 처음으로 30m가 될 때는
공을 던지고 나서 2초 후이다.
공이 지면에 떨어진다는 것은 공의 높이가 0m가 된다는 뜻이므로
$-t^2+5t+24=0$
$t^2-5t-24=0$
$(t+3)(t-8)=0$
$\therefore t=-3$ 또는 $t=8$


이때 t는 시간이므로 $t\geq 0$ $\quad\therefore t=8$
따라서 공이 지면에 떨어질 때는 공을 던지고 나서 8초 후이다.
그러므로 공이 처음으로 30m의 높이에 도달하는 때부터
공이 지면에 떨어질 때까지 걸리는 시간은 $8-2=6$(초) 답 ④

12 어떤 양수를 $x(x>0)$라 하면
$x\times(x-3)=108$, $x(x-3)=108$
$x^2-3x=108$
$x^2-3x-108=0$
$(x-12)(x+9)=0$
$\therefore x=12$ 또는 $x=-9$
x는 양수이므로 $x=12$
원래의 두 수의 곱을 구하기 위해 $x(x+3)$에 $x=12$를 대입하면
$12\times15=180$ 답 180

13 이차방정식 $ax^2-(3a-2)x-2(a+2)=0$의 x의 계수와 상수항을 바꾸어 쓰면
$ax^2-2(a+2)x-(3a-2)=0$
이때 이 이차방정식의 한 근이 -2이므로
$a\times(-2)^2-2(a+2)\times(-2)-(3a-2)=0$
$4a+4a+8-3a+2=0$
$5a=-10$ $\quad\therefore a=-2$
처음 이차방정식 $ax^2-(3a-2)x-2(a+2)=0$에
$a=-2$를 대입하면
$(-2)x^2-\{3\times(-2)-2\}x-2\{(-2)+2\}=0$
$-2x^2+8x=0$
$x^2-4x=0$
$x(x-4)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=4$ 답 $a=-2$, $x=0$ 또는 $x=4$

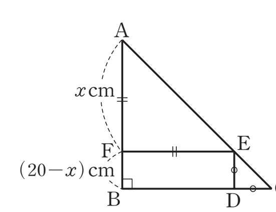
14 오른쪽 그림과 같이 길의 폭을 xm라 하면


꽃밭의 넓이는 가로의 길이가 $(25-2x)$m,
세로의 길이가 $(20-2x)$m인 직사각형의
넓이와 같아진다.
이때 꽃밭의 넓이가 204m^2이므로


$(25-2x)(20-2x)=204$ …… ㉠
㉠을 정리하면
$500-50x-40x+4x^2=204$
$4x^2-90x+296=0$
$2x^2-45x+148=0$
$(x-4)(2x-37)=0$
$\therefore x=4$ 또는 $x=\frac{37}{2}$
이때 $0<x<10$이므로 $x=4$
따라서 길의 폭은 4m이다. 답 ④

15 자연수 n에 대하여 $\frac{n(n+1)}{2}=66$
$n(n+1)=132$
$n^2+n=132$
$n^2+n-132=0$
$n^2+n-132=(n+12)(n-11)$이므로
$(n+12)(n-11)=0$
$\therefore n=-12$ 또는 $n=11$
이때 n은 자연수이므로 $n=11$
따라서 바둑돌의 개수가 66인 삼각형은 11단계 삼각형이다. 답 ⑤

16 처음 원의 반지름의 길이는 5m이므로
이 원의 넓이는 $\pi\times5^2=25\pi(\text{m}^2)$
이때 이 원의 반지름의 길이를 xm만큼 늘이면
원의 반지름의 길이는 $(x+5)$m가 되므로
원의 넓이는 $\pi(x+5)^2\text{m}^2$이다.
이때 원의 넓이가 $24\pi\text{m}^2$만큼 넓어졌으므로
두 원의 넓이의 차는 $24\pi\text{m}^2$이다.
이를 이용하여 식을 세우면
$\pi(x+5)^2-25\pi=24\pi$ …… ㉠
㉠에서 $\pi(x^2+10x+25)-25\pi=24\pi$
$x^2+10x+25-25=24$
$x^2+10x-24=0$
$(x+12)(x-2)=0$
$\therefore x=-12$ 또는 $x=2$
이때 x는 늘인 원의 반지름의 길이이므로 $x>0$
$\therefore x=2$ 답 2

17 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\text{AF}}=x$cm라


하면 $\overline{\text{FB}}=(20-x)$cm이다.
이때 $\angle\text{A}=\angle\text{C}=45°$이므로
두 삼각형 AEF, ECD는
직각이등변삼각형이다.
따라서 $\overline{\text{AF}}=\overline{\text{EF}}=x$cm이고
$\overline{\text{FB}}=\overline{\text{ED}}=\overline{\text{CD}}=(20-x)$cm이다.
이를 이용하여 두 직각삼각형 AEF, ECD의 넓이의 합을 x에 대한 식으로 나타내면
$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(20-x)^2$

문제에서 두 직각삼각형의 넓이의 합이 125 cm^2라 하였으므로

$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(20-x)^2=125$

$x^2+(20-x)^2=250$

$x^2+(400-40x+x^2)=250$

$2x^2-40x+150=0$

$x^2-20x+75=0$

$(x-5)(x-15)=0$

$\therefore x=5$ 또는 $x=15$

이때 $\overline{AF}>\overline{FB}$이므로 $x=15$

따라서 선분 AF의 길이는 15cm이다. 답 15cm

18 두 실수 a, b에 대하여 $a*b=a+b+ab$이므로

연산 $*$의 정의에 의하여

$(x+2)*(2x-1)=(x+2)+(2x-1)+(x+2)(2x-1)$

$=2x^2+6x-1$

따라서 주어진 방정식은

$2x^2+6x-1=-2$, $2x^2+6x+1=0$

따라서 이차방정식의 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-2}}{2}$

$=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$

즉, $(x+2)*(2x-1)=-2$를 만족시키는 두 실수 x의 값의 차는

$\frac{-3+\sqrt{7}}{2}-\frac{-3-\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$ 답 ④

19 $(x-3, 5)\bullet(-x+2, 2x+1)=-5$에서

$(x-3)(2x+1)-5(-x+2)=-5$

$2x^2-5x-3+5x-10=-5$

$2x^2-5x+5x-3-10+5=0$

$2x^2-8=0$, $x^2-4=0$

$x^2-4=(x+2)(x-2)$이므로

$(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$ 답 ②, ⑤

다른풀이

$(x-3, 5)\bullet(-x+2, 2x+1)=-5$에서

$(x-3)(2x+1)-5(-x+2)=-5$

$x^2-4=0$

$x^2-4=0$에서 좌변의 -4를 우변으로 이항하면

$x^2=4$ $\quad\therefore x=\pm2$

20 가격 인상 전의 상품의 가격을 a원, 판매량을 b개라 하자.

$6x\%$만큼 인상된 상품의 가격은

$a\times\left(1+\frac{6x}{100}\right)$원, 즉 $a\left(1+\frac{6x}{100}\right)$원

$3x\%$만큼 감소된 판매량은

$b\times\left(1-\frac{3x}{100}\right)$개, 즉 $b\left(1-\frac{3x}{100}\right)$개

가격 인상 전후의 수입은 같으므로

$a\times b=a\left(1+\frac{6x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{3x}{100}\right)$, $ab=ab\left(1+\frac{6x}{100}\right)\left(1-\frac{3x}{100}\right)$

$1=\left(1+\frac{6x}{100}\right)\left(1-\frac{3x}{100}\right)$ …… ㉠

㉠의 양변에 100^2을 곱하면

$100^2=100^2\left(1+\frac{6x}{100}\right)\left(1-\frac{3x}{100}\right)$

$100^2=(100+6x)(100-3x)$, $100^2=100^2-300x+600x-18x^2$

$18x^2-300x=0$, $3x^2-50x=0$

$x(3x-50)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{50}{3}$

따라서 $x>0$이므로 $x=\frac{50}{3}$ 답 $\frac{50}{3}$

10 이차함수의 그래프 (1)

Step 1. 개념 다지기

10-1 이차함수의 뜻

기본연습 1

(1) $y=2(x-1)^2$에서 $y=2(x^2-2x+1)$, $y=2x^2-4x+2$

따라서 이차함수이다.

(2) $y=2x^2-x(2x+5)+1$에서 $y=2x^2-2x^2-5x+1$, $y=-5x+1$

따라서 이차함수가 아니다.

(3) $y=-\frac{1}{2x^2}$에서 분모에 x^2이 있는 식은 이차함수가 아니다.

(4) $y=(x-3)(2x+5)$에서 $y=2x^2-x-15$

따라서 이차함수이다. 답 (1) ○ (2) × (3) × (4) ○

연습 1

$y=2x(2x+2)$, $y=4x^2+4x$

따라서 이차함수이다. 답 $y=4x^2+4x$, 이차함수이다.

10-2 이차함수 $y=x^2$, $y=-x^2$의 그래프

기본연습 2

(1) ② $x<0$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하고, $x>0$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가한다.

④ $y=-x^2$의 그래프와 x축에 대하여 서로 대칭이다.

(2) ② 축의 방정식은 $x=0$이다.

④ 그래프를 좌표평면에 나타내면 원점 이외의 부분이 x축보다 아래쪽에 있다. 답 (1) ① T ② F ③ T ④ F

(2) ① T ② F ③ T ④ F

연습 2

x	…	-3	-1	0	1	3	…
y	…	9	1	0	1	9	…

이차함수 $y=x^2$의 그래프는 $x<0$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소한다.

$-3<-\frac{1}{2}<0$이므로 주어진 범위에서 y의 값은 감소한다.

답 풀이 참조, 감소

10-3 이차함수 $y=ax^2$의 그래프

기본연습 3

답 (1) ① $(0, 0)$ ② $x=0$ ③ $y=-4x^2$

(2) ① $(0, 0)$ ② $x=0$ ③ $y=\frac{10}{3}x^2$

연습 3

(1) 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 $a>0$일 때 아래로 볼록한 포물선이다. 따라서 그래프가 아래로 볼록한 이차함수는

$y=2x^2$, $y=4x^2$, $y=\frac{1}{3}x^2$이다.

(2) 두 이차함수 $y=ax^2$, $y=-ax^2$의 그래프는 x축에 대하여 서로 대칭이므로 $y=2x^2$, $y=-2x^2$과 $y=\frac{1}{3}x^2$, $y=-\frac{1}{3}x^2$은 각각 x축에 대하여 서로 대칭이다.

(3) $y=ax^2$에서 a의 절댓값이 클수록 이차함수의 그래프의 폭은 좁아진다. 따라서 그래프의 폭이 가장 좁은 이차함수는 $y=4x^2$이다.

답 (1) ㄱ, ㄴ, ㅁ (2) ㄱ과 ㅂ, ㄷ과 ㅁ (3) ㄴ

10-4 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프

기본연습 4

(1) $y=\frac{4}{7}x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\frac{4}{7}x^2-1$이고, 꼭짓점의 좌표는 $(0, -1)$, 축의 방정식은 $x=0$이다.

(2) $y=-3x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-3x^2+\frac{1}{2}$이고, 꼭짓점의 좌표는 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, 축의 방정식은 $x=0$이다.

답 (1) ① $y=\frac{4}{7}x^2-1$ ② $(0, -1)$ ③ $x=0$

(2) ① $y=-3x^2+\frac{1}{2}$ ② $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ③ $x=0$

연습 4

이차함수 $y=\frac{2}{3}x^2-1$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0, -1)$이고, 축의 방정식은 $x=0$이다.

따라서 $a=0$, $b=-1$, $c=0$이므로

$a-3b+2c=0-3\times(-1)+2\times0=3$

답 3

10-5 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프

기본연습 5

(1) $y=4x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=4(x+2)^2$이고, 꼭짓점의 좌표는 $(-2, 0)$, 축의 방정식은 $x=-2$이다.

(2) $y=-\frac{1}{5}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-\frac{1}{5}(x-2)^2$이고, 꼭짓점의 좌표는 $(2, 0)$, 축의 방정식은 $x=2$이다.

답 (1) ① $y=4(x+2)^2$ ② $(-2, 0)$ ③ $x=-2$

(2) ① $y=-\frac{1}{5}(x-2)^2$ ② $(2, 0)$ ③ $x=2$

연습 5

이차함수 $y=3(x+5)^2$의 그래프는 이차함수 $y=3x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이고, 이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-5, 0)$이다. 따라서 $a=-5$, $b=-5$, $c=0$이므로

$2a-b+3c=2\times(-5)-(-5)+3\times0=-5$

답 -5

10-6 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프

기본연습 6

답 (1) ① $y=\frac{7}{3}(x+1)^2-1$ ② $(-1, -1)$ ③ $x=-1$

(2) ① $y=-6\left(x+\frac{2}{5}\right)^2+3$ ② $\left(-\frac{2}{5}, 3\right)$ ③ $x=-\frac{2}{5}$

연습 6

이차함수 $y=-3(x-1)^2+2$의 그래프는 이차함수 $y=-3x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=1$, $b=2$이므로

$2a-b=2\times1-2=0$

답 0

Step 2. 대표 문제로 접근하기

01	④	02	③	03	①, ④	04	ㅁ	05	②
06	11	07	②	08	ㄱ, ㄴ	09	①	10	8
11	⑤	12	③	13	④	14	6	15	-2
16	②	17	①	18	$(0, 4)$	19	⑤	20	②, ④
21	③	22	-2	23	$y=2x^2-1$			24	②
25	③	26	-6	27	③	28	③	29	16
30	6	31	$y=\frac{9}{2}\left(x+\frac{2}{3}\right)^2$			32	④	33	④
34	$x>2$	35	②	36	④				
37	꼭짓점의 좌표 : $(-5, -5)$, 축의 방정식 : $x=-5$							38	6
39	-5	40	2	41	4	42	54		
43	제3사분면			44	④	45	⑤	46	4

유제 01 ① $4x^2+3x-1=0$은 이차방정식이다.

② $y=-3(x+1)^2+3x^2$에서 우변의 식을 정리하면

$y=-3x^2-6x-3+3x^2$, $y=-6x-3$

따라서 일차함수이다.

③ $y=2x^2-x^3$은 x^3항이 있으므로 이차함수가 아니다.

④ $y=x(2x-1)-5+x^2$에서 우변의 식을 정리하면

$y=2x^2-x-5+x^2$, $y=3x^2-x-5$

따라서 이차함수이다.

⑤ $y=3x^2-x(3x+1)$에서 우변의 식을 정리하면

$y=3x^2-3x^2-x$, $y=-x$

따라서 일차함수이다.

그러므로 이차함수인 것은 ④이다.

답 ④

유제 02 ㄱ. $y=-(x-2)^2=-x^2+4x-4$ → 이차함수

ㄴ. $y=-\frac{4}{x^2}$ → 분모에 x^2이 있으므로 이차함수가 아니다.

ㄷ. $y=-2x(x+3)+2x^2=-2x^2-6x+2x^2=-6x$ → 일차함수

ㄹ. $y=2-3x$ → 일차함수

ㅁ. $y=\frac{x^2-2}{3}$ → 이차함수

ㅂ. $y=(2-x)(x+3)=-x^2-x+6$ → 이차함수

따라서 이차함수인 것은 ㄱ, ㅁ, ㅂ의 3개이다.

답 ③

유제 03 ① $y=x\times x\times x=x^3$ → 이차함수가 아니다.

② $y=\pi\times\left(\frac{1}{2}x\right)^2=\frac{1}{4}\pi x^2$ → 이차함수

③ $y=6\times x\times x=6x^2$ → 이차함수

④ $y=(2x+2)^2-(2x)^2=8x+4$ ($\because 2x+2>2x$) → 일차함수

⑤ $y=\pi\times x^2\times\frac{270}{360}=\frac{3}{4}\pi x^2$ → 이차함수

따라서 y가 x에 관한 이차함수가 아닌 것은 ①, ④이다.

답 ①, ④

유제 04 ㄱ. $y=3x$ → 일차함수

ㄴ. (시간)$=\frac{(거리)}{(속력)}$이므로

$y=\frac{100}{x}$ → 이차함수가 아니다.

ㄷ. $y=2\pi x\times 11=22\pi x$ → 일차함수

ㄹ. $xy=28$에서 $y=\frac{28}{x}$ → 이차함수가 아니다.

ㅁ. $y=x^2+(x+3)^2=2x^2+6x+9$ → 이차함수

따라서 y가 x에 관한 이차함수인 것은 ㅁ뿐이다.

답 ㅁ

유제 05 $f(x)=ax^2-3x-4$에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=a\times 2^2-3\times 2-4=4a-6-4=4a-10$

이때, $f(2)=2$이므로 $4a-10=2$, $4a=12$

$\therefore a=3$

답 ②

유제 06 $f(x)=ax^2-2x+3$에서

$f(1)=a\times 1^2-2\times 1+3=a+1$

$f(1)=4$이므로 $a+1=4$ $\quad\therefore a=3$

$f(x)=3x^2-2x+3$에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=3\times(-1)^2-2\times(-1)+3=3+2+3=8$

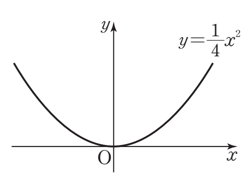
$f(-1)=b$에서 $b=8$

따라서 $a=3$, $b=8$이므로 $a+b=3+8=11$

답 11

유제 07 ① $y=\frac{1}{4}x^2$에 $x=4$, $y=4$를 대입하면 $4=\frac{1}{4}\times 4^2=4$에서 등식이 성립하므로 점 $(4, 4)$는 이차함수 $y=\frac{1}{4}x^2$의 그래프 위의 점이다.

② $y=\frac{1}{4}x^2$의 그래프는 직선 $x=0$을 축으로 하는 포물선이다.



③ $y=\frac{1}{4}x^2$의 그래프는 제1사분면, 제2사분면을 지난다.

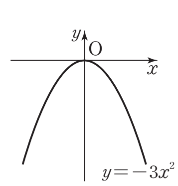
④ $x<0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

⑤ $y=\frac{1}{4}x^2$의 그래프는 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

답 ②

유제08 이차함수 $y=-3x^2$의 그래프에 대하여



ㄱ. 제2사분면을 지나지 않는다.

ㄴ. 원점을 지난다.

ㄷ. $y=-3x^2$에 $x=-2$, $y=12$를 대입하면

$12\neq -3\times(-2)^2=-12$

따라서 점 $(-2, 12)$를 지나지 않는다.

ㄹ. $x<0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

유제 09 $y=ax^2$의 그래프에서 a의 절댓값이 클수록 폭이 좁아진다.

$\left|-\frac{3}{2}\right|>\left|\frac{7}{6}\right|>\left|-\frac{2}{3}\right|>\left|\frac{1}{4}\right|$

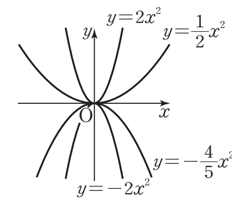
이므로 이차함수의 그래프의 폭이 좁은 것부터 순서대로 나열하면

$y=-\frac{3}{2}x^2$, $y=\frac{7}{6}x^2$, $y=-\frac{2}{3}x^2$, $y=\frac{1}{4}x^2$

즉, ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ①

유제 10 포물선 ㉠은 아래로 볼록하면서 폭이 가장 넓으므로 이차함수의 식은



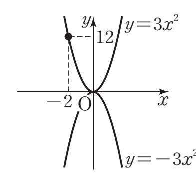
$y=\frac{1}{2}x^2$

$y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프가 점 $(4, k)$를 지나므로

$k=\frac{1}{2}\times 4^2=\frac{1}{2}\times 16=8$

답 8

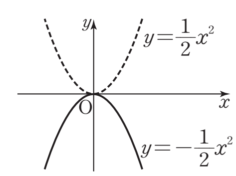
유제 11 이차함수 $y=-3x^2$의 그래프와 x축에 대하여 서로 대칭인 그래프의 이차함수의 식은 $y=-(-3x^2)$이고, 이 그래프가 점 $(-2, a)$를 지나므로 $y=3x^2$에 $x=-2$, $y=a$를 대입하면



$a=3\times(-2)^2$ $\quad\therefore a=12$

답 ⑤

유제 12



ㄱ. $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프는 원점을 꼭짓점으로 하고, y축을 축으로 하므로 y축에 대하여 대칭이다.

ㄴ. $y=-\frac{1}{2}x^2$에 $x=-4$를 대입하면

$y=-\frac{1}{2}\times(-4)^2=-\frac{1}{2}\times 16=-8$

그러므로 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프는 점 $(-4, -8)$을 지난다.

ㄷ. $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프는 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프와 x축에 대하여 서로 대칭이다.

ㄹ. $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프는 $x<0$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, $x>0$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 옳은 것을 모두 고른 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ③

유제 13 이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 점 $(-2, 12)$를 지나므로 $y=ax^2$에 $x=-2$, $y=12$를 대입하면 $12=a\times(-2)^2$ $\quad\therefore a=3$

따라서 $y=3x^2$의 그래프가 점 $\left(\frac{1}{3}, k\right)$를 지나므로 $y=3x^2$에

$x=\frac{1}{3}$, $y=k$를 대입하면 $k=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$

답 ④

유제 14 점 $(2, 8)$이 함수 $y=ax^2$의 그래프 위의 점이므로

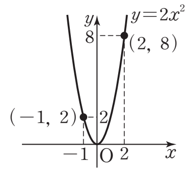
$8=a\times 2^2=4a$ $\quad\therefore a=2$

따라서 주어진 함수는 $y=2x^2$이고 점 $(b, 32)$가 이 함수의 그래프 위의 점이므로 $32=2\times b^2$, $b^2=16$ $\quad\therefore b=4$ ($\because b>0$)

$\therefore a+b=2+4=6$

답 6

유제 15 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점이 원점이므로 $f(x)=ax^2(a\neq 0)$으로 놓을 수 있다.
이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 점 $(2, 8)$을 지나므로
$8=a\times 2^2$, $4a=8$ $\quad\therefore a=2$
따라서 이차함수 $y=f(x)$의 이차항의 계수는 2이다.
이차함수 $y=2x^2$의 그래프가 점 $(k, 2)$를 지나므로
$2\times k^2=2$, $k^2=1$ $\quad\therefore k=-1\ (\because k<0)$
따라서 이차항의 계수와 k의 값의 곱은 $2\times(-1)=-2$



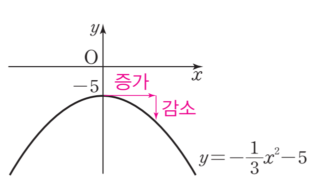
답 -2

유제 16 꼭짓점이 원점이고 축이 y축인 이차함수를 $y=ax^2(a\neq 0)$이라 하자.
이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 점 $(-10, 75)$를 지나므로
$75=a\times(-10)^2$, $75=100a$ $\quad\therefore a=\frac{3}{4}$
따라서 이차함수의 식은 $y=\frac{3}{4}x^2$이고, 이 그래프와 x축에 대하여 서로 대칭인 그래프의 이차함수의 식은 $y=-\frac{3}{4}x^2$이다.
이차함수 $y=-\frac{3}{4}x^2$의 그래프가 점 $(m, -12)$를 지나므로
$-12=-\frac{3}{4}m^2$, $m^2=-12\times\left(-\frac{4}{3}\right)=16$
$\therefore m=4\ (\because m>0)$ 답 ②

유제 17 이차함수 $y=-5x^2+2$의 그래프를 y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 이차함수의 식은
$y=-5x^2+2+q$ $\cdots\cdots$ ㉠
㉠이 $y=-5x^2-3$과 일치해야 하므로 $2+q=-3$에서 $q=-5$
따라서 이차함수 $y=-5x^2-3$의 그래프는 $y=-5x^2+2$의 그래프를 y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다. 답 ①

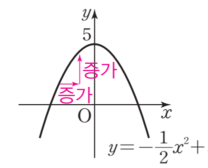
유제 18 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=ax^2+4$이고, 이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0, 4)$이다. 답 $(0, 4)$

유제 19 이차함수 $y=-\frac{1}{3}x^2-5$의 그래프를 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



① 꼭짓점의 좌표는 $(0, -5)$이다.
② 제3, 4사분면을 지난다.
③ 위로 볼록한 포물선이다.
④ $y=-\frac{1}{3}x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.
⑤ $x>0$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

유제 20 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2+5$의 그래프를 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

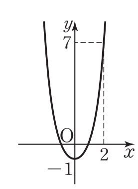


① 꼭짓점의 좌표는 $(0, 5)$이다.
② 축이 y축이므로 축의 방정식은 $x=0$이다.
③ 위의 그림과 같이 $x<0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
④ 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 5만큼 평행이동한것이다.
⑤ 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프는 a의 절댓값이 클수록 폭이 좁은 포물선이다. 따라서 $\left|\frac{1}{3}\right|<\left|-\frac{1}{2}\right|$이므로 $y=\frac{1}{3}x^2+7$의 그래프보다 $y=-\frac{1}{2}x^2+5$의 그래프의 폭이 좁다.
따라서 옳지 않은 것은 ②, ④이다. 답 ②, ④

유제 21 두 점 $(1, -2)$, $(2, 7)$이
이차함수 $y=ax^2+b$의 그래프 위의 점이므로
$-2=a+b$ $\cdots\cdots$ ㉠
$7=4a+b$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉡−㉠을 하면 $3a=9$ $\quad\therefore a=3$
$a=3$을 ㉠에 대입하면
$-2=3+b$ $\quad\therefore b=-5$
$\therefore a-b=3-(-5)=8$ 답 ③

유제 22 이차함수 $y=2x^2+q$의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=2x^2+q-3$이고, 이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0, q-3)$이므로 $q-3=-5$
$\therefore q=-5+3=-2$ 답 -2

유제 23 주어진 포물선은 축이 y축이고 꼭짓점의 좌표가 $(0, -1)$이므로 이차함수의 식은
$y=ax^2-1(a\neq 0)$로 놓을 수 있다.
이차함수 $y=ax^2-1$의 그래프가 점 $(2, 7)$을 지나므로 $7=a\times 2^2-1$, $7=4a-1$
$4a=8$ $\quad\therefore a=2$



따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=2x^2-1$이다. 답 $y=2x^2-1$

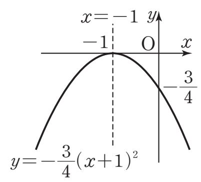
유제 24 주어진 그래프는 y축이 축이고, 꼭짓점의 좌표가 $(0, 0)$이므로 $y=ax^2(a\neq 0)$으로 놓을 수 있다.
이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 점 $(3, 6)$을 지나므로
$6=a\times 3^2$, $6=9a$ $\quad\therefore a=\frac{2}{3}$
따라서 주어진 그래프를 나타내는 함수의 식은 $y=\frac{2}{3}x^2$이고,
이 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은 $y=\frac{2}{3}x^2-2$이다.
이차함수 $y=\frac{2}{3}x^2-2$의 그래프가 점 $(-2, k)$를 지나므로
$k=\frac{2}{3}\times(-2)^2-2=\frac{2}{3}\times 4-2=\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3}$ 답 ②

유제 25 이차함수 $y=-\frac{2}{5}(x+3)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-3, 0)$이고, 축의 방정식은 $x=-3$이다. 답 ③

본문 224쪽

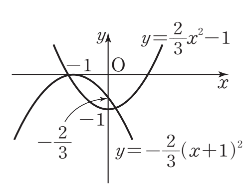
유제 26 이차함수 $y=\sqrt{3}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은 $y=\sqrt{3}(x-p)^2$
이차함수 $y=\sqrt{3}(x-p)^2$의 그래프의 축의 방정식은 $x=p$이므로
$p=-6$ 답 -6

유제 27 이차함수 $y=-\frac{3}{4}(x+1)^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① 축의 방정식은 $x=-1$이다.
② $y=\frac{3}{4}(x+1)^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭인 그래프를 나타내는 이차함수의 식은 $-y=\frac{3}{4}(x+1)^2$, 즉 $y=-\frac{3}{4}(x+1)^2$
③ $y=\frac{3}{4}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은 $y=\frac{3}{4}(x+1)^2$
④ 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 0)$
⑤ 축의 방정식이 $x=-1$이고 위로 볼록한 포물선이므로 $x<-1$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가한다.
따라서 옳지 않은 것은 ③이다. 답 ③

유제 28 두 이차함수 $y=\frac{2}{3}x^2-1$, $y=-\frac{2}{3}(x+1)^2$의 그래프에 대하여
① $y=\frac{2}{3}x^2-1$의 그래프의 축의 방정식은 $x=0$이고, $y=-\frac{2}{3}(x+1)^2$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-1$이다.
② $y=\frac{2}{3}x^2-1$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0, -1)$이고, $y=-\frac{2}{3}(x+1)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 0)$이다.
③ 이차함수의 그래프의 폭은 x^2의 계수의 절댓값에 따라 결정되고 $\left|\frac{2}{3}\right|=\left|-\frac{2}{3}\right|$이므로 두 이차함수의 그래프의 폭은 같다.
④ 이차함수 $y=\frac{2}{3}x^2-1$의 그래프는 $y=\frac{2}{3}x^2$의 그래프를 $y=-\frac{2}{3}(x+1)^2$의 그래프는 $y=-\frac{2}{3}x^2$의 그래프를 평행이동한 것이다.
⑤ 두 이차함수의 그래프를 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

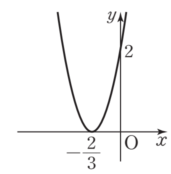


$y=\frac{2}{3}x^2-1$의 그래프는 모든 사분면을 지나고, $y=-\frac{2}{3}(x+1)^2$의 그래프는 제3, 4사분면을 지난다.
따라서 옳은 것은 ③이다. 답 ③

유제 29 이차함수 $y=2(x-p)^2$의 그래프의 축의 방정식은 $x=p$이므로
$p=-2$ $\therefore y=2(x+2)^2$
이 그래프가 점 $(-5, k)$를 지나므로
$k=2\times(-5+2)^2=2\times(-3)^2=2\times9=18$
$\therefore p+k=-2+18=16$ 답 16

유제 30 이차함수 $y=\frac{3}{2}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은 $y=\frac{3}{2}(x-3)^2$
이 그래프가 두 점 $(2, a)$, $(7, b)$를 지나므로
$a=\frac{3}{2}\times(2-3)^2=\frac{3}{2}\times(-1)^2=\frac{3}{2}$
$b=\frac{3}{2}\times(7-3)^2=\frac{3}{2}\times4^2=24$
$\therefore \sqrt{ab}=\sqrt{\frac{3}{2}\times24}=\sqrt{36}=6$ 답 6

유제 31 주어진 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$이고, 축의 방정식이 $x=-\frac{2}{3}$인 아래로 볼록한 포물선이므로 $y=a\left(x+\frac{2}{3}\right)^2$ $(a\neq0)$으로 놓을 수 있다. 주어진 그래프와 y축과의 교점의 좌표가 $(0, 2)$이므로 $y=a\left(x+\frac{2}{3}\right)^2$에 $x=0$, $y=2$를 대입하면

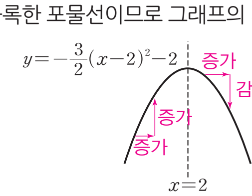


$2=a\times\left(0+\frac{2}{3}\right)^2$, $\frac{4}{9}a=2$ $\therefore a=2\times\frac{9}{4}=\frac{9}{2}$
따라서 주어진 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식은
$y=\frac{9}{2}\left(x+\frac{2}{3}\right)^2$ 답 $y=\frac{9}{2}\left(x+\frac{2}{3}\right)^2$

유제 32 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{1}{2}$이고 x축과 접하므로 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$이다. 따라서 구하는 이차함수의 식을 $y=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ $(a\neq0)$으로 놓을 수 있다.
이차함수 $y=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$의 그래프가 점 $(0, -1)$을 지나므로
$-1=a\times\left(0-\frac{1}{2}\right)^2$, $\frac{1}{4}a=-1$ $\therefore a=-4$
따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ 답 ④

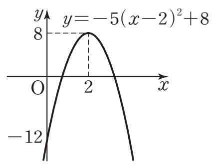
유제 33 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은 $y=-\frac{1}{2}x^2$
이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은
$y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+3$
이 함수의 식이 $y=a(x-p)^2+q$와 일치하므로
$a=-\frac{1}{2}$, $p=-2$, $q=3$
$\therefore apq=\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-2)\times3=3$ 답 ④

유제 34 이차함수 $y=-\frac{3}{2}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은
$y=-\frac{3}{2}(x-2)^2-2$
이차함수 $y=-\frac{3}{2}(x-2)^2-2$의 그래프는 축의 방정식이 $x=2$이고 위로 볼록한 포물선이므로 그래프의 개형은 다음과 같다.



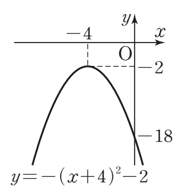
따라서 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하는 x의 값의 범위는 $x>2$이다. 답 $x>2$

유제 35 이차함수 $y=-5(x-2)^2+8$의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(2, 8)$이고, 축의 방정식이 $x=2$인 위로 볼록한 포물선이다.
이때 $y=-5(x-2)^2+8$에 $x=0$을 대입하면
$y=-5\times(0-2)^2+8=-12$이므로 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0, -12)$이다.
따라서 이차함수 $y=-5(x-2)^2+8$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같으므로 그래프가 지나지 않는 사분면은 제2사분면이다.



답 ②

유제 36 이차함수 $y=-(x+4)^2-2$의 그래프에 대하여
ㄱ. 직선 $x=-4$를 축으로 한다.
ㄴ. 꼭짓점의 좌표는 $(-4, -2)$이다.
ㄷ. y축과의 교점의 좌표를 $(0, a)$라 하면
$a=-(0+4)^2-2$에서 $a=-16-2=-18$
따라서 y축과 점 $(0, -18)$에서 만난다.
ㄹ. 이차함수 $y=-(x+4)^2-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2사분면을 지나지 않는다.



ㅁ. 이차함수 $y=-x^2-2$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-\{x-(-4)\}^2-2$ $\quad\therefore y=-(x+4)^2-2$
따라서 옳은 것을 모두 고른 것은 ㄹ, ㅁ이다.

답 ④

유제 37 이차함수 $y=-5(x+2)^2-7$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은 $y=-5\{x-(-3)+2\}^2-7+2$
$\therefore y=-5(x+5)^2-5$
따라서 이차함수 $y=-5(x+5)^2-5$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-5, -5)$이고, 축의 방정식은 $x=-5$이다.

답 꼭짓점의 좌표 : $(-5, -5)$, 축의 방정식 : $x=-5$

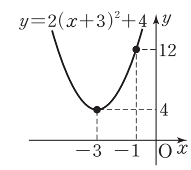
유제 38 이차함수 $y=2(x+3)^2-4$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은
$y=2(x+3)^2-4+a$
이 그래프가 점 $(-1, 2)$를 지나므로
$2=2\times(-1+3)^2-4+a$, $2\times2^2-4+a=2$
$4+a=2$ $\quad\therefore a=-2$
이차함수 $y=2(x+3)^2-4$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은
$y=2(x-b+3)^2-4$
이 그래프가 점 $(-2, 28)$을 지나므로
$28=2(-2-b+3)^2-4$, $2(1-b)^2-4=28$
$2(1-b)^2=32$, $(1-b)^2=16$, $1-b=\pm4$
$b=-3$ 또는 $b=5$ $\quad\therefore b=-3\ (\because b<0)$
$\therefore ab=(-2)\times(-3)=6$

답 6

유제 39 이차함수 $y=k(x+3)^2$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은
$y=k(-x+3)^2$ $\quad\therefore y=k(x-3)^2$
이 그래프를 다시 x축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은
$-y=k(x-3)^2$ $\quad\therefore y=-k(x-3)^2$
이차함수 $y=-k(x-3)^2$의 그래프가 점 $(5, 20)$을 지나므로
$20=-k(5-3)^2$, $-4k=20$ $\quad\therefore k=-5$

답 -5

유제 40 이차함수 $y=a(x-3)^2$의 그래프와 y축에 대하여 대칭인 그래프를 나타내는 이차함수의 식은 $y=a(x+3)^2$
이 그래프를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은
$y-4=a(x+3)^2$ $\quad\therefore y=a(x+3)^2+4$
이차함수 $y=a(x+3)^2+4$의 그래프가 점 $(-1, 12)$를 지나므로
$12=a(-1+3)^2+4$
$4a+4=12$, $4a=8$
$\therefore a=2$

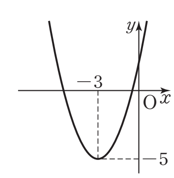


답 2

유제 41 꼭짓점의 좌표가 $(-4, 6)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x+4)^2+6$으로 놓자. 이 그래프가 점 $(0, -2)$를 지나므로
$-2=a(0+4)^2+6$, $-2=16a+6$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2}$
따라서 이차함수의 식은 $y=-\frac{1}{2}(x+4)^2+6$이고,
$a=-\frac{1}{2}$, $p=-4$, $q=6$이므로
$q-ap=6-\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-4)=4$

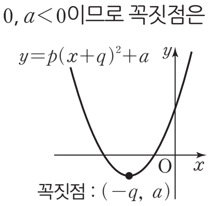
답 4

유제 42 이차함수 $y=\frac{3}{4}(x-3)^2+4$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은
$y=\frac{3}{4}(x-p-3)^2+4+q$
이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(p+3, 4+q)$이고, 주어진 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-3, -5)$이므로
$p+3=-3$, $4+q=-5$에서
$p=-3-3=-6$, $q=-5-4=-9$
$\therefore pq=(-6)\times(-9)=54$



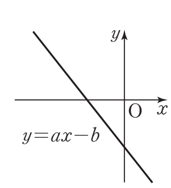
답 54

유제 43 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$
또한 이차함수의 그래프의 꼭짓점이 제1사분면에 있으므로
$p>0$, $q>0$
이차함수 $y=p(x+q)^2+a$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-q, a)$이고 $-q<0$, $a<0$이므로 꼭짓점은 제3사분면 위에 있다.

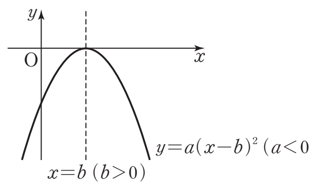


답 제3사분면

유제 44 일차함수 $y=ax-b$의 그래프가 오른쪽 아래로 향하는 직선이므로 기울기 a의 부호는
$a<0$
y절편은 x축보다 아래에 있으므로
$-b<0$ $\quad\therefore b>0$



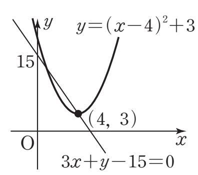
이차함수 $y=a(x-b)^2$에서 $a<0$, $b>0$이므로 $y=a(x-b)^2$의 그래프는 축의 방정식 $x=b$가 y축보다 오른쪽에 있고, x축에 접하는 위로 볼록한 포물선이다.
따라서 이차함수 $y=a(x-b)^2$의 그래프가 될 수 있는 그래프는 ④이다.



답 ④

유제 45 이차함수 $y=-3(x+2p)^2+6p^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-2p,\ 6p^2)$이고, 꼭짓점이 제2사분면에 있으므로
$-2p<0,\ 6p^2>0$ $\quad\therefore p>0$ …… ㉠
이차함수 $y=-3(x+2p)^2+6p^2$의 그래프가 점 $(-2,\ -42)$를 지나므로 $y=-3(x+2p)^2+6p^2$에 $x=-2,\ y=-42$를 대입하면
$-42=-3\times(-2+2p)^2+6p^2,\ (2p-2)^2-2p^2=14$
$4p^2-8p+4-2p^2=14,\ 2p^2-8p-10=0$
$p^2-4p-5=0, (p+1)(p-5)=0$
$\therefore p=-1$ 또는 $p=5$
따라서 ㉠에서 $p>0$이므로 $p=5$이다. 답 ⑤

유제 46 이차함수 $y=(x+k)^2$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은
$y=(-x+k)^2$ $\quad\therefore y=(x-k)^2$
이차함수 $y=(x-k)^2$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은
$y-3=(x-k)^2$ $\quad\therefore y=(x-k)^2+3$
$y=(x-k)^2+3$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(k,\ 3)$이고, 이 점이 직선 $3x+y-15=0$ 위의 점이므로
$3k+3-15=0,\ 3k=12$
$\therefore k=4$



답 4

Step 3. 단원 마무리하기

01	4개	02	3	03	2	04	③	05	13
06	①	07	⑤	08	0	09	⑤	10	②
11	$-2,\ -4$			12	③	13	④	14	8
15	⑤	16	②	17	②	18	②	19	②
20	④								

01 ㄱ. $y=-3x^2+9x$ (이차함수)
ㄴ. $y=(2x-1)^2-x^2=3x^2-4x+1$ (이차함수)
ㄷ. $y=-x(x+1)+x^2=-x$ (일차함수)
ㄹ. $y=-3x^2(2+x)-5=-3x^3-6x^2-5$ (이차함수가 아니다.)
ㅁ. $y=(2x-1)(3x+1)=6x^2-x-1$ (이차함수)
ㅂ. $y=2(x+1)^2-2x^2=4x+2$ (일차함수)
ㅅ. $y=-\dfrac{3}{x^2}$ (이차함수가 아니다.)
ㅇ. $y=6x(x^2-1)-6x^3+2x^2=2x^2-6x$ (이차함수)
따라서 이차함수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㅇ의 4개이다. 답 4개

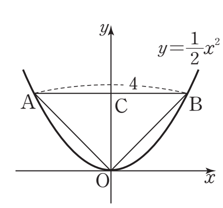
02 $y=a(3+x^2)-3x^2+3x=3a+ax^2-3x^2+3x$
$=(a-3)x^2+3x+3a$
주어진 식이 이차함수 식이 되지 않으려면 $(a-3)x^2+3x+3a$가 x에 대한 이차식이 아니어야 하므로
$a-3=0$ $\quad\therefore a=3$ 답 3

03 $f(x)=x^2-ax+b$에서 $f(-1)=4, f(2)=4$이므로
$f(-1)=(-1)^2-a\times(-1)+b=1+a+b=4$에서
$a+b=3$ …… ㉠
$f(2)=2^2-a\times2+b=4-2a+b=4$에서
$2a=b$ …… ㉡
㉠에 ㉡을 대입하면 $a+2a=3,\ 3a=3$ $\quad\therefore a=1$
$a=1$을 ㉡에 대입하면 $b=2$
따라서 $f(x)=x^2-x+2$이므로
$f(1)=1^2-1+2=2$ 답 2

04 조건 (다)에 의하여 이차함수는 $y=ax^2$의 꼴이다.
조건 (가)에 의하여 이차함수의 그래프는 아래로 볼록하므로 $a>0$
조건 (나)에서 $y=\dfrac{5}{6}x^2$의 그래프보다 폭이 넓으므로 $|a|<\left|\dfrac{5}{6}\right|$
$\therefore 0<a<\dfrac{5}{6}$
따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 이차함수의 식은 ③ $y=\dfrac{1}{2}x^2$이다.
답 ③

05 이차함수 $y=-\dfrac{1}{3}x^2$의 그래프와 x축에 대하여 서로 대칭인 그래프의 이차함수의 식은 $y=\dfrac{1}{3}x^2$이고, 이 그래프가 점 $(a-5,\ a+2)$를 지나므로 $y=\dfrac{1}{3}x^2$에 $x=a-5,\ y=a+2$를 대입하면
$a+2=\dfrac{1}{3}(a-5)^2,\ (a-5)^2=3(a+2)$
$a^2-10a+25=3a+6,\ a^2-13a+19=0$
a에 대한 이차방정식 $a^2-13a+19=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
(두 근의 합)$=-\dfrac{-13}{1}=13$
따라서 모든 a의 값의 합은 13이다. 답 13

06 이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 점 $(4,\ 8)$을 지나므로
$8=a\times4^2=16a$ $\quad\therefore a=\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2}$



선분 AB와 y축의 교점을 C라 할 때, 이차함수 $y=\dfrac{1}{2}x^2$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 $\overline{AC}=\overline{CB}$
또, $\overline{AB}=4$이므로 $\overline{AC}=\overline{CB}=2$
선분 AB가 y축에 대하여 대칭이므로 점 B의 x좌표는 2, 점 A의 x좌표는 -2이다.
$y=\dfrac{1}{2}x^2$에 $x=2,\ x=-2$를 각각 대입하면
$y=\dfrac{1}{2}\times2^2=\dfrac{1}{2}\times4=2,\ y=\dfrac{1}{2}\times(-2)^2=\dfrac{1}{2}\times4=2$
이므로 $A(-2,\ 2),\ B(2,\ 2)$이다.

따라서 삼각형 OAB의 밑변을 선분 AB라 하면 $\overline{CO}=2$이므로

(삼각형 OAB의 넓이)$=\frac{1}{2}\times4\times2=4$ 답 ①

07 이차함수 $y=x^2+2$의 그래프가 점 $(a, 6)$을 지나므로

$6=a^2+2$, $a^2=4$ $\quad\therefore a=-2\ (\because a<0)$

이차함수 $y=x^2+2$의 그래프가 점 $(-3, b)$를 지나므로

$y=x^2+2$에 $x=-3$, $y=b$를 대입하면

$b=(-3)^2+2=9+2=11$

$\therefore b-a=11-(-2)=11+2=13$ 답 ⑤

08 이차함수 $y=-2x^2$의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(0, 8)$이 되도록 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은 $y=-2x^2+8$

이차함수 $y=-2x^2+8$의 그래프가 점 $(a, 0)$을 지나므로

$0=-2a^2+8$, $a^2=4$ $\quad\therefore a=\pm2$

따라서 모든 a의 값의 합은 $2+(-2)=0$ 답 0

다른풀이

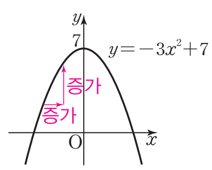
이차함수 $y=kx^2+q$의 그래프는 y축을 축으로 하므로 y의 값이 같을 때 서로 다른 두 수 x는 절댓값이 같고 부호는 반대이다. 절댓값은 같고 부호가 반대인 두 수의 합은 0이다. 따라서 모든 a의 값의 합은 0이다.

09 이차함수 $y=-3x^2+7$의 그래프에 대하여

① 꼭짓점의 좌표는 $(0, 7)$이다.

② 모든 사분면을 지난다.

③ $x<0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.



④ $|-3|>|2|$이므로 $y=2x^2$의 그래프보다 폭이 좁다.

⑤ 이차함수 $y=-3x^2+7$의 그래프와 x축에 대하여 서로 대칭인 그래프를 나타내는 이차함수의 식은

$-y=-3x^2+7$ $\quad\therefore y=3x^2-7$

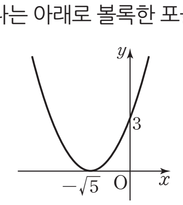
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

10 이차함수 $y=\frac{3}{5}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\sqrt{5}$만큼 평행이동한 그래프가 나타내는 이차함수의 식은 $y=\frac{3}{5}(x+\sqrt{5})^2$

이차함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는 $y=\frac{3}{5}(x+\sqrt{5})^2$에 $x=0$을 대입하면

$y=\frac{3}{5}\times(0+\sqrt{5})^2=\frac{3}{5}\times5=3$

따라서 $y=\frac{3}{5}(x+\sqrt{5})^2$의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(-\sqrt{5}, 0)$이고, y축과 점 $(0, 3)$에서 만나는 아래로 볼록한 포물선인 ②이다.



답 ②

11 이차함수 $y=2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은 $y=2(x-p)^2$

이차함수 $y=2(x-p)^2$의 그래프가 점 $(-3, 2)$를 지나므로

$2=2\times(-3-p)^2$, $2=2\times(p+3)^2$, $(p+3)^2=1$

$p+3=\pm1$ $\quad\therefore p=-2$ 또는 $p=-4$

따라서 모든 p의 값은 -2, -4이다. 답 -2, -4

12 이차함수 $y=ax^2+b$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0, b)$이고,

이차함수 $y=-\frac{2}{5}(x-3)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(3, 0)$이다.

두 이차함수의 그래프가 서로의 꼭짓점을 지나므로

$y=ax^2+b$에 $x=3$, $y=0$을 대입하면

$0=a\times3^2+b$ $\quad\therefore 9a+b=0$ …… ㉠

$y=-\frac{2}{5}(x-3)^2$에 $x=0$, $y=b$를 대입하면

$b=-\frac{2}{5}\times(0-3)^2$ $\quad\therefore b=-\frac{18}{5}$

㉠에 $b=-\frac{18}{5}$을 대입하면

$9a+\left(-\frac{18}{5}\right)=0$, $9a=\frac{18}{5}$ $\quad\therefore a=\frac{2}{5}$

$\therefore 4a+b=4\times\frac{2}{5}+\left(-\frac{18}{5}\right)=\frac{8}{5}-\frac{18}{5}=-2$ 답 ③

13 이차함수 $y=\frac{3}{2}x^2$의 그래프를 평행이동하여 완전히 포갤 수 있는 그래프를 나타내는 이차함수의 식은 $y=\frac{3}{2}(x-p)^2+q$ (p, q는 상수)의 꼴이다. 따라서 주어진 이차함수의 식에서 x^2의 계수가 $\frac{3}{2}$인 것을 찾으면 되므로 이차함수 $y=\frac{3}{2}x^2$의 그래프를 평행이동하여 완전히 포갤 수 있는 것은 ④ $y=\frac{3}{2}(x-2)^2+5$이다. 답 ④

14 이차함수 $y=-3(x+1)^2$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은

$y-b=-3(x-a+1)^2$ $\quad\therefore y=-3(x-a+1)^2+b$

이차함수 $y=-3(x-a+1)^2+b$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(c, 5)$이므로

$a-1=c$, $b=5$

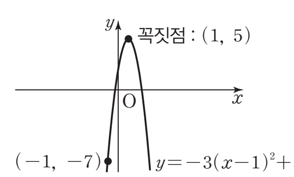
이차함수 $y=-3(x-a+1)^2+5$의 그래프가 점 $(-1, -7)$을 지나므로

$-7=-3(-1-a+1)^2+5$

$-3a^2=-12$

$a^2=4$ $\quad\therefore a=2\ (\because a>0)$

$c=a-1=2-1=1$



$\therefore a+b+c=2+5+1=8$ 답 8

15 ① ㄱ. $y=\frac{2}{3}x^2$의 그래프의 축의 방정식은 $x=0$

ㄹ. $y=\frac{5}{3}(x+2)^2$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-2$

따라서 ㄱ, ㄹ의 그래프의 대칭축은 다르다.

② 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는 a의 절댓값이 작을수록 폭이 넓다. 주어진 이차함수의 식에서 x^2의 계수의 절댓값이 가장 작은 것은 $y=-\frac{1}{4}(x+2)^2-3$이므로 그래프의 폭이 가장 넓은 이차함수는 ㅂ이다.

③ 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는 $a<0$일 때 위로 볼록하다. 따라서 주어진 이차함수에서 그래프가 위로 볼록한 것은 ㄷ, ㅁ, ㅂ이다.

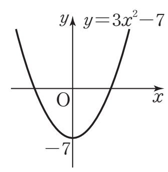
④ ㄱ. $y=\frac{2}{3}x^2$의 그래프와 x축에 대하여 서로 대칭인 그래프를 나타내는 이차함수의 식은 $y=-\frac{2}{3}x^2$이다. 따라서 ㄱ, ㄴ은 x축에 대하여 서로 대칭이 아니다.

⑤ 이차함수의 그래프를 평행이동하여도 x^2의 계수는 변하지 않는다.

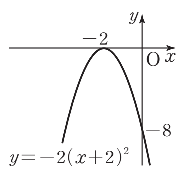
따라서 주어진 이차함수에서 평행이동하여 포갤 수 있는 이차함수는 ㄷ, ㅁ이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

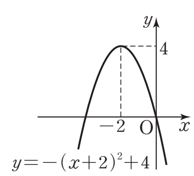
16 ㄱ. 이차함수 $y=3x^2-7$의 그래프는 축의 방정식이 $x=0$, 꼭짓점의 좌표가 $(0,\ -7)$인 아래로 볼록한 포물선이므로 오른쪽 그림과 같다. 따라서 이 그래프는 모든 사분면을 지난다.



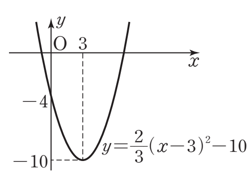
ㄴ. 이차함수 $y=-2(x+2)^2$의 그래프는 축의 방정식이 $x=-2$, 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ 0)$인 위로 볼록한 포물선이므로 오른쪽 그림과 같다. 따라서 이 그래프는 제3, 4사분면을 지난다.



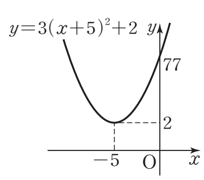
ㄷ. 이차함수 $y=-(x+2)^2+4$의 그래프는 축의 방정식이 $x=-2$, 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ 4)$이고 y절편이 0인 위로 볼록한 포물선이므로 오른쪽 그림과 같다. 따라서 이 그래프는 제2, 3, 4사분면을 지난다.



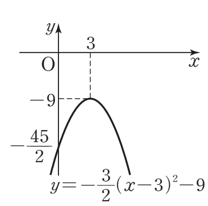
ㄹ. 이차함수 $y=\frac{2}{3}(x-3)^2-10$의 그래프는 축의 방정식이 $x=3$, 꼭짓점의 좌표가 $(3,\ -10)$이고 y축과의 교점의 y좌표가 -4인 아래로 볼록한 포물선이므로 오른쪽 그림과 같다. 따라서 이 그래프는 모든 사분면을 지난다.



ㅁ. 이차함수 $y=3(x+5)^2+2$의 그래프는 축의 방정식이 $x=-5$, 꼭짓점의 좌표가 $(-5,\ 2)$인 아래로 볼록한 포물선이므로 오른쪽 그림과 같다. 따라서 이 그래프는 제1, 2사분면을 지난다.



ㅂ. 이차함수 $y=-\frac{3}{2}(x-3)^2-9$의 그래프는 축의 방정식이 $x=3$, 꼭짓점의 좌표가 $(3,\ -9)$인 위로 볼록한 포물선이므로 오른쪽 그림과 같다. 따라서 이 그래프는 제3, 4사분면을 지난다.



따라서 그래프가 모든 사분면을 지나는 것은 ㄱ, ㄹ의 2개이다. 답 ②

17 이차함수 $y=4x^2+5$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 $k+3$만큼 평행이동한 그래프의 식은

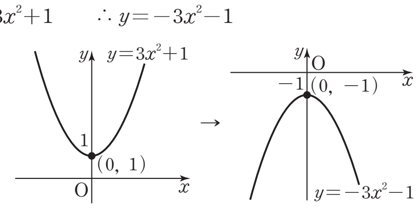
$y=4(x-k)^2+5+k+3$에서 $y=4(x-k)^2+k+8$

이차함수 $y=4(x-k)^2+k+8$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(k,\ k+8)$이고, 이 꼭짓점이 직선 $y=3x+12$ 위에 있으므로

$k+8=3k+12,\ -2k=4 \qquad \therefore k=-2$ 답 ②

18 이차함수 $y=3x^2+1$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식은

$-y=3x^2+1 \qquad \therefore y=-3x^2-1$



이차함수 $y=-3x^2-1$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동하면

$y-a=-3x^2-1 \qquad \therefore y=-3x^2-1+a$

이 그래프가 이차함수 $y=bx^2+5$의 그래프와 일치하므로

$-3=b,\ -1+a=5$에서 $a=6,\ b=-3$

$\therefore a+b=6+(-3)=3$ 답 ②

19 이차함수 $y=4(x+p)^2+q$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-p$이므로

$-p=-\frac{3}{2} \qquad \therefore p=\frac{3}{2}$

이차함수 $y=4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+q$의 그래프가 점 $(-4,\ 20)$을 지나므로

$20=4\times\left(-4+\frac{3}{2}\right)^2+q,\ 20=4\times\left(-\frac{5}{2}\right)^2+q$

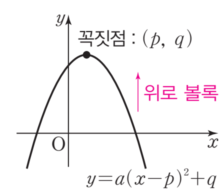
$20=4\times\frac{25}{4}+q,\ q+25=20 \qquad \therefore q=-5$

$\therefore pq=\frac{3}{2}\times(-5)=-\frac{15}{2}$ 답 ②

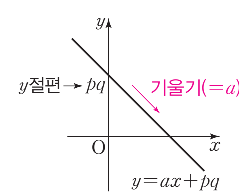
20 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

이차함수의 그래프의 꼭짓점이 제1사분면 위에 있으므로 $p>0,\ q>0$

따라서 $a<0,\ pq>0$이므로 일차함수 $y=ax+pq$의 그래프는 기울기가 음수이고, y절편이 양수인 직선이다.



그러므로 일차함수 $y=ax+pq$의 그래프로 알맞은 것은 ④이다.



답 ④

11 이차함수의 그래프 (2)

Step 1. 개념 다지기

11-1 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

기본연습 1

(1) ① $y=2x^2-8x-10=2(x^2-4x)-10=2(x^2-4x+4)-10-8$
$=2(x-2)^2-18$

② 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ -18)$이다.

③ 축의 방정식은 $x=2$이다.

④ $y=2x^2-8x-10$에 $y=0$을 대입하면

$0=2x^2-8x-10,\ 2(x^2-4x-5)=0$

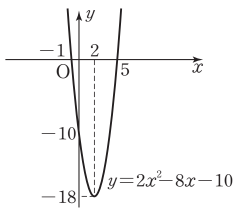
$2(x+1)(x-5)=0$이므로 $x=-1$ 또는 $x=5$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축과의 교점의 좌표는 $(-1,\ 0)$, $(5,\ 0)$이다.

⑤ $y=2x^2-8x-10$에 $x=0$을 대입하면 $y=-10$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 y축과의 교점의 좌표는 $(0,\ -10)$이다.

⑥



(2) ① $y=-4x^2+2x+6=-4\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)+6$

$=-4\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{4}+6$

$=-4\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{25}{4}$

② 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{1}{4}, \frac{25}{4}\right)$이다.

③ 축의 방정식은 $x=\frac{1}{4}$이다.

④ $y=-4x^2+2x+6$에 $y=0$을 대입하면

$0=-4x^2+2x+6$, $-2(2x^2-x-3)=0$

$-2(x+1)(2x-3)=0$이므로

$x=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

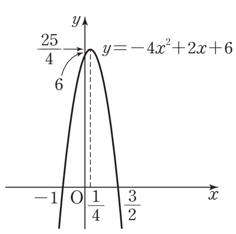
따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축과의 교점의 좌표는

$(-1, 0)$, $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$이다.

⑤ $y=-4x^2+2x+6$에 $x=0$을 대입하면 $y=6$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 y축과의 교점의 좌표는 $(0, 6)$이다.

⑥



답 (1) ① $y=2(x-2)^2-18$　② $(2, -18)$　③ $x=2$

④ $(-1, 0)$, $(5, 0)$　⑤ $(0, -10)$　⑥ 풀이 참조

(2) ① $y=-4\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{25}{4}$　② $\left(\frac{1}{4}, \frac{25}{4}\right)$　③ $x=\frac{1}{4}$

④ $(-1, 0)$, $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$　⑤ $(0, 6)$　⑥ 풀이 참조

연습 1

$y=\frac{2}{3}x^2-4x=\frac{2}{3}(x^2-6x)$

$=\frac{2}{3}(x^2-6x+9)-6$

$=\frac{2}{3}(x-3)^2-6$

이차함수 $y=\frac{2}{3}(x-3)^2-6$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(3, -6)$이므로

$a=3$, $b=-6$

이차함수 $y=\frac{2}{3}x^2-4x$의 그래프와 x축과의 교점의 y좌표는 0이므로

$\frac{2}{3}x^2-4x=0$, $2x^2-12x=0$, $2x(x-6)=0$이므로 $x=0$ 또는 $x=6$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축과의 교점의 좌표는

$(0, 0)$, $(6, 0)$이므로

$c=0$, $d=6$ ($\because c<d$)

$a=3$, $b=-6$, $c=0$, $d=6$이므로

$a+b+c+d=3+(-6)+0+6=3$　답 3

11-2 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서 a, b, c의 부호

기본연습 2-1

(1) 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $ab>0$에서 $b<0$

y축과의 교점이 원점의 아래쪽에 있으므로 $c<0$

$\therefore a<0$, $b<0$, $c<0$

(2) 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $ab<0$에서 $b<0$

y축과의 교점이 원점의 위쪽에 있으므로 $c>0$

$\therefore a>0$, $b<0$, $c>0$　답 (1) $a<0$, $b<0$, $c<0$　(2) $a>0$, $b<0$, $c>0$

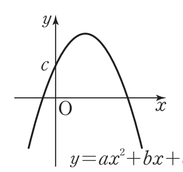
연습 2-1

$a<0$이므로 그래프는 위로 볼록($\cap$)하다.

$ab<0$이므로 이차함수의 그래프의 축이 y축의 오른쪽에 있다.

$c>0$이므로 y절편은 양수이다.

그러므로 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 이차함수의 그래프의 꼭짓점은 제1사분면 위에 있다.　답 제1사분면

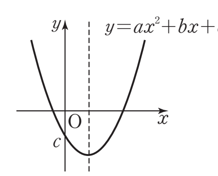
기본연습 2-2

$a>0$이므로 그래프는 아래로 볼록($\cup$)하다.

$ab<0$이므로 이차함수의 그래프의 축이 y축의 오른쪽에 있다.

$c<0$이므로 y절편은 음수이다.

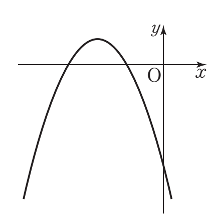
따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



답 풀이 참조

연습 2-2

$c\neq0$이고 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면만을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $ab>0$에서 $b<0$

y축과의 교점이 원점의 아래쪽에 있으므로 $c<0$

$\therefore a<0$, $b<0$, $c<0$　답 $a<0$, $b<0$, $c<0$

Step 2. 대표 문제로 접근하기

01	⑤	02	③	03	①	04	⑤	05	-3
06	$\frac{13}{3}$	07	$k>-6$	08	③	09	-1	10	④
11	ㄴ, ㄷ	12	2	13	3	14	9	15	⑤
16	제4사분면			17	①	18	④		

유제 01 $y=x^2+3x+4=\left\{x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}+4$

$=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+4=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

따라서 이차함수 $y=x^2+3x+4$의 그래프의 축의 방정식은

$x=-\frac{3}{2}$이다. 답 ⑤

유제 02 이차함수 $y=-2x^2+kx+4$의 그래프가 점 $(1, -2)$를 지나므로

$-2=-2\times1^2+k\times1+4=-2+k+4=k+2$

$\therefore k=-4$

주어진 이차함수의 식에 $k=-4$를 대입하여 정리하면

$y=-2x^2-4x+4=-2(x^2+2x)+4$

$=-2(x^2+2x+1-1)+4=-2(x^2+2x+1)+2+4$

$=-2(x+1)^2+6$

따라서 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 6)$이다. 답 ③

유제 03 이차함수 $y=2x^2-ax-8$의 그래프가 x축과 점 $(4, 0)$에서 만나므로 $y=2x^2-ax-8$에 $x=4$, $y=0$을 대입하면

$0=2\times4^2-a\times4-8$, $32-4a-8=0$

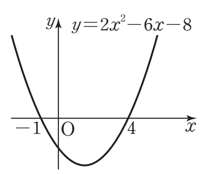
$4a=24 \qquad \therefore a=6$

즉, $y=2x^2-6x-8$에 $y=0$을 대입하면

$0=2x^2-6x-8$

$x^2-3x-4=(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$



따라서 이차함수의 그래프가 x축과 만나는 다른 한 점의 좌표는 $(-1, 0)$이다. 답 ①

유제 04 이차함수 $y=2x^2-5x+a$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 $-\frac{1}{2}$이므로 이 이차함수의 그래프는 점 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$을 지난다.

$y=2x^2-5x+a$에 $x=-\frac{1}{2}$, $y=0$을 대입하면

$0=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2-5\times\left(-\frac{1}{2}\right)+a$, $2\times\frac{1}{4}+\frac{5}{2}+a=0$

$3+a=0 \qquad \therefore a=-3$

이차함수 $y=2x^2-5x-3$에 $x=0$을 대입하면 $y=-3$

따라서 이 이차함수의 그래프는 y축과 점 $(0, -3)$에서 만난다.

답 ⑤

유제 05 $y=-2x^2+4x+k+1=-2(x^2-2x+1-1)+k+1$

$=-2(x^2-2x+1)+2+k+1$

$=-2(x-1)^2+k+3$

이므로 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1, k+3)$이다.

이때 이차함수의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로

꼭짓점의 y좌표는 0이어야 한다.

따라서 $k+3=0$이므로 $k=-3$ 답 -3

유제 06 $y=3x^2-2x+a-4=3\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\right)+a-4$

$=3\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{3}+a-4$

$=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+a-\frac{13}{3}$

이므로 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{1}{3}, a-\frac{13}{3}\right)$이다.

이때 이차함수의 그래프가 x축에 접하므로

꼭짓점의 y좌표는 0이어야 한다.

따라서 $a-\frac{13}{3}=0$이므로 $a=\frac{13}{3}$ 답 $\frac{13}{3}$

유제 07 $y=-x^2-4x+k+2=-\{(x^2+4x+4)-4\}+k+2$

$=-(x^2+4x+4)+k+6$

$=-(x+2)^2+k+6$

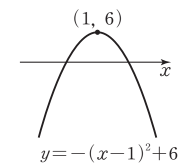
이므로 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-2, k+6)$이다.

이때 이차함수의 그래프가 위로 볼록하고 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 꼭짓점의 y좌표는 0보다 커야 한다.

$k+6>0 \qquad \therefore k>-6$ 답 $k>-6$

유제 08 ① $y=-(x-1)^2+6$의 x^2의 계수가 음수이므로 그래프는 위로 볼록(⋂)하고, 꼭짓점의 좌표는 $(1, 6)$이다.

따라서 꼭짓점의 y좌표가 양수이므로 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.



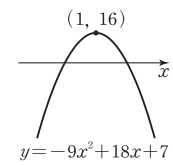
② $y=-9x^2+18x+7$의 x^2의 계수가 음수이므로 그래프는 위로 볼록(⋂)하다.

$y=-9x^2+18x+7=-9(x^2-2x)+7$

$=-9(x^2-2x+1-1)+7$

$=-9(x^2-2x+1)-9\times(-1)+7$

$=-9(x-1)^2+16$

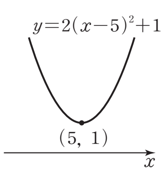


이므로 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1, 16)$이다.

따라서 꼭짓점의 y좌표가 양수이므로 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

③ $y=2(x-5)^2+1$의 x^2의 계수가 양수이므로 그래프는 아래로 볼록(⋃)하고, 꼭짓점의 좌표는 $(5, 1)$이다.

따라서 그래프의 꼭짓점의 y좌표가 양수이므로 그래프는 x축과 만나지 않는다.



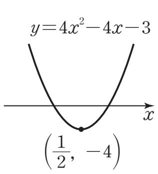
④ $y=4x^2-4x-3$의 x^2의 계수가 양수이므로 그래프는 아래로 볼록(⋃)하다.

$y=4x^2-4x-3=4(x^2-x)-3$

$=4\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)-3$

$=4\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+4\times\left(-\frac{1}{4}\right)-3$

$=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-4$

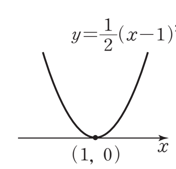


이므로 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, -4\right)$이다.

따라서 그래프의 꼭짓점의 y좌표가 음수이므로 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

⑤ $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1, 0)$이다.

꼭짓점이 x축 위에 있으므로 그래프는 x축과 한 점에서 만난다.



따라서 그래프가 x축과 만나지 않는 것은 ③이다.

답 ③

유제 09 $y=2x^2-12x+13=2(x^2-6x)+13$

$=2(x^2-6x+9-9)+13$

$=2(x^2-6x+9)+2\times(-9)+13$

$=2(x-3)^2-5$

의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2(x-a-3)^2-5+6$

$=2(x-a-3)^2+1$

$=2\{x-(a+3)\}^2+1$

이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(a+3,\ 1)$이고, 이는 $(1,\ b)$이므로

$a+3=1,\ 1=b$

따라서 $a=-2,\ b=1$이므로 $a+b=-2+1=-1$ 답 -1

유제 10 $y=\frac{1}{2}x^2-2x+3=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\times(-4x)+3$

$=\frac{1}{2}(x^2-4x)+3=\frac{1}{2}(x^2-4x+4-4)+3$

$=\frac{1}{2}(x^2-4x+4)+\frac{1}{2}\times(-4)+3$

$=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$

$y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=a(x-b)^2+c$

이 식은 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$과 같으므로

$a=\frac{1}{2},\ b=2,\ c=1$

$\therefore abc=\frac{1}{2}\times2\times1=1$ 답 ④

유제 11 ㄱ. $y=-x^2+2x+1$

$=-(x^2-2x)+1$

$=-(x^2-2x+1-1)+1$

$=-(x^2-2x+1)+1+1$

$=-(x-1)^2+2$

따라서 $y=-x^2+2x+1$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-(x-1-1)^2+2-2$

$=-(x-2)^2$

이므로 이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.

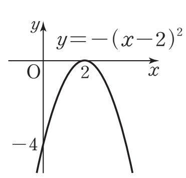
ㄴ. $y=-(x-2)^2$에 $x=0$을 대입하면

$y=-(0-2)^2=-4$

따라서 그래프와 y축과의 교점의 좌표는 $(0,\ -4)$이다.

ㄷ. $y=-(x-2)^2$의 x^2의 계수가 음수이므로 그래프는 위로 볼록($\cap$)하다.

꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 0)$, y축과의 교점의 좌표는 $(0,\ -4)$이므로 그래프를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



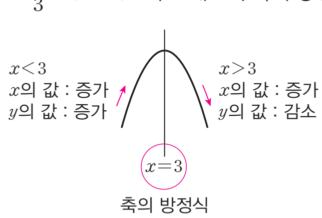
따라서 그래프는 제1사분면을 지나지 않는다.

ㄹ. 그래프는 점 $(2,\ 0)$을 지나므로 $x=2$일 때 $y=0$이다.

따라서 모든 x의 값에 대하여 y의 값이 항상 음수인 것은 아니다.

그러므로 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

유제 12 $x=3$을 기준으로 x의 값이 증가할 때 y의 값의 증가, 감소가 바뀌므로 $y=-\frac{1}{3}x^2+ax+2$의 그래프의 축의 방정식은 $x=3$이다.



$y=-\frac{1}{3}x^2+ax+2$

$=-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}\times(-3ax)+2$

$=-\frac{1}{3}(x^2-3ax)+2$

$=-\frac{1}{3}\left\{x^2-3ax+\left(\frac{-3a}{2}\right)^2-\left(\frac{-3a}{2}\right)^2\right\}+2$

$=-\frac{1}{3}\left(x^2-3ax+\frac{9a^2}{4}-\frac{9a^2}{4}\right)+2$

$=-\frac{1}{3}\left(x^2-3ax+\frac{9a^2}{4}\right)-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{9a^2}{4}\right)+2$

$=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{3a}{2}\right)^2+\frac{3a^2}{4}+2$

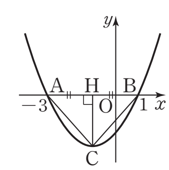
이므로 그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{3a}{2}$이다.

따라서 $\frac{3a}{2}=3$이므로

$3a=6$ $\therefore a=2$ 답 2

유제 13 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 AB의 중점이다.

따라서 점 H의 x좌표는 $\frac{-3+1}{2}=-1$



이므로 점 C의 x좌표도 -1이다.

이때 삼각형 ABC의 넓이는 4이고

$\overline{AB}=\overline{OA}+\overline{OB}=4$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CH}=4,\ \frac{1}{2}\times4\times\overline{CH}=4$

$2\overline{CH}=4$ $\therefore \overline{CH}=2$

따라서 점 C의 y좌표는 -2이므로

$C(-1,\ -2)$

즉, 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점 C의 좌표는 $(-1,\ -2)$이므로 이 이차함수의 식을 $y=a(x+1)^2-2$로 놓을 수 있다.

위 식에 $x=1,\ y=0$을 대입하면

$0=4a-2,\ 4a=2$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

주어진 이차함수의 그래프의 식은 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2-2$이고,

우변을 전개하여 정리하면

$y=\frac{1}{2}(x^2+2x+1)-2$

$=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$

이 식은 $y=ax^2+bx+c$와 같으므로

$a=\frac{1}{2},\ b=1,\ c=-\frac{3}{2}$

$\therefore a+b-c=\frac{1}{2}+1-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=3$ 답 3

유제 14 $y=x^2-6x+8$에 $y=0$을 대입하면

$0=x^2-6x+8,\ (x-2)(x-4)=0$

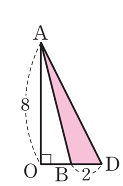
$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

따라서 $B(2,\ 0),\ D(4,\ 0)$이므로

$\overline{BD}=\overline{OD}-\overline{OB}$

$=4-2=2$

$y=x^2-6x+8$에 $x=0$을 대입하면



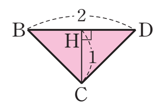
$y=0^2-6\times0+8=8$

이므로 점 A의 좌표는 $A(0,\ 8)$이다.

따라서 $\overline{AO}=8$이므로 삼각형 ABD의 넓이는

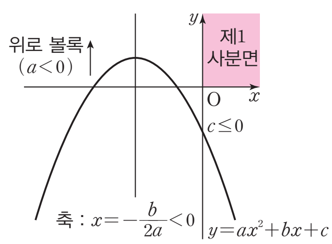
$\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{AO}=\frac{1}{2}\times2\times8=8$

$y=x^2-6x+8$
$\quad=x^2-6x+9-1$
$\quad=(x-3)^2-1$
이므로 점 C의 좌표는 $C(3, -1)$이다.
점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{CH}=1$이므로
삼각형 BCD의 넓이는

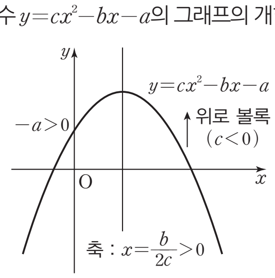


$\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{CH}=\frac{1}{2}\times2\times1=1$
따라서 사각형 ABCD의 넓이는
$\square ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD$
$\qquad=8+1$
$\qquad=9$ 답 9

유제 15 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 제2, 3, 4사분면을 지나도록 그래프를 그려 보면 다음과 같다.

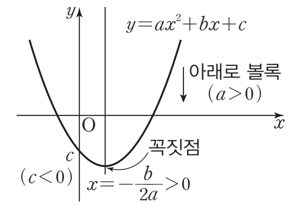


이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$
이차함수의 그래프의 축이 직선 $x=-\frac{b}{2a}$이고,
축이 y축의 왼쪽에 위치하므로 $-\frac{b}{2a}<0$에서 $b<0$
이차함수의 그래프가 y축과 $y\le0$인 부분에서 만나야 하므로
$c\le0$
이때 $y=cx^2-bx-a$가 이차함수이므로 $c\ne0$
$\therefore c<0$
이차함수 $y=cx^2-bx-a$에서 $c<0$이므로 이차함수의 그래프는 위로 볼록하다.
이차함수 $y=cx^2-bx-a$의 그래프의 축은 $x=-\frac{-b}{2c}=\frac{b}{2c}$이고,
$c<0$, $b<0$일 때 $\frac{b}{2c}>0$이므로 그래프의 축은 y축보다 오른쪽에 있다.
또한 이차함수 $y=cx^2-bx-a$의 그래프는 y축과 점 $(0, -a)$에서 만나고, $-a>0$이므로 y축과 $y>0$인 부분에서 만난다.
그러므로 이차함수 $y=cx^2-bx-a$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 이차함수 $y=cx^2-bx-a$의 그래프가 지나는
사분면은 제1, 2, 3, 4사분면이다. 답 ⑤

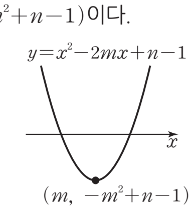
유제 16 $a>0$이므로 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 아래로 볼록하다.
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 축은
직선 $x=-\frac{b}{2a}$이고, $a>0$, $b<0$일 때 $-\frac{b}{2a}>0$이므로
축은 y축의 오른쪽에 있다.
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 y축이 만나는 점의 좌표는 $(0, c)$이고, $c<0$이므로 이차함수의 그래프와 y축은 $y<0$인 부분에서 만난다.
그러므로 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점은
제4사분면 위에 있다. 답 제4사분면

유제 17 $y=x^2-2x-3$에 $y=0$을 대입하면
$0=x^2-2x-3$, $(x+1)(x-3)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$
따라서 $y=x^2-2x-3$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 좌표는 $(-1, 0)$, $(3, 0)$이고, 이 두 점 사이의 거리는
$3-(-1)=4$
$y=x^2-2x-3=x^2-2x+1-1-3$
$\quad=(x-1)^2-4$
의 그래프를 y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=(x-1)^2-4+q$
$y=(x-1)^2-4+q$에 $y=0$을 대입하면
$0=(x-1)^2-4+q$, $(x-1)^2=4-q$
$x-1=\pm\sqrt{4-q}$
$\therefore x=1\pm\sqrt{4-q}$
따라서 $y=(x-1)^2-4+q$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 좌표는 $(1-\sqrt{4-q}, 0)$, $(1+\sqrt{4-q}, 0)$이고, 이 두 점 사이의 거리는
$(1+\sqrt{4-q})-(1-\sqrt{4-q})=1+\sqrt{4-q}-1+\sqrt{4-q}$
$\qquad=2\sqrt{4-q}$
$2\sqrt{4-q}=2\times4$이므로 $\sqrt{4-q}=4$
$4-q=4^2$, $4-q=16$
$-q=12 \qquad \therefore q=-12$ 답 ①

유제 18 $y=x^2-2mx+n-1$
$\quad=(x^2-2mx+m^2-m^2)+n-1$
$\quad=(x-m)^2-m^2+n-1$
이므로 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(m, -m^2+n-1)$이다.
$y=x^2-2mx+n-1$의 x^2의 계수가 양수이므로 그래프는 아래로 볼록($\cup$)하다.
따라서 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는 꼭짓점이 x축의 아랫부분에 위치해야 한다.



즉, 꼭짓점의 y좌표가 0보다 작아야 하므로
$-m^2+n-1<0 \qquad \therefore n<m^2+1$
$n<m^2+1$을 만족하는 m, n의 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하면
(i) $m=1$일 때
$m^2+1=1^2+1=2$
이므로 $n<m^2+1$을 만족하는 n의 값은 1의 1개이다.
따라서 m, n의 순서쌍 (m, n)의 개수는 1이다.
(ii) $m=2$일 때
$m^2+1=2^2+1=5$
이므로 $n<m^2+1$을 만족하는 n의 값은 1, 2, 3, 4의 4개이다.
따라서 m, n의 순서쌍 (m, n)의 개수는 4이다.

(iii) $m\geq3$일 때

$m=3,\ 4,\ 5,\ 6$일 때 $m^2+1\geq3^2+1=10$이므로

$n<m^2+1$을 만족하는 n의 값은 각각 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$의 6개

이다.

따라서 $m,\ n$의 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $4\times6=24$이다.

(i)~(iii)에 의하여 $m,\ n$의 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

$1+4+24=29$

$m,\ n$이 될 수 있는 값은 각각 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$의 6개이므로 $m,\ n$의 순서쌍 $(m,\ n)$의 전체 개수는

$6\times6=36$

따라서 $y=x^2-2mx+n-1$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 29이므로 구하는 확률은

$\frac{29}{36}$ 답 ④

Step 3. 단원 마무리하기

01	④	02	③	03	15	04	④	05	①
06	③	07	④	08	③	09	②	10	-2
11	①	12	④	13	②, ⑤	14	③	15	$k>1$
16	③	17	$y=x^2-6x+14$			18	②	19	①
20	③, ⑤								

01 ① $y=2x^2-4x=2(x^2-2x)$

$=2(x^2-2x+1-1)$

$=2(x-1)^2-2$

즉, 축의 방정식은 $x=1$이다.

② $y=\frac{1}{2}x^2-x+2=\frac{1}{2}(x^2-2x)+2$

$=\frac{1}{2}(x^2-2x+1-1)+2=\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{2}+2$

$=\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{3}{2}$

즉, 축의 방정식은 $x=1$이다.

③ $y=x^2-2x+3=(x^2-2x+1-1)+3$

$=(x-1)^2+2$

즉, 축의 방정식은 $x=1$이다.

④ $y=-4x^2-8x+4$

$=-4(x^2+2x)+4$

$=-4(x^2+2x+1-1)+4$

$=-4(x+1)^2+8$

즉, 축의 방정식은 $x=-1$이다.

⑤ $y=-x^2+2x=-(x^2-2x)$

$=-(x^2-2x+1-1)$

$=-(x-1)^2+1$

즉, 축의 방정식은 $x=1$이다.

따라서 축의 방정식이 다른 하나는 ④이다. 답 ④

02 $y=x^2-4x+3$에 $y=0$을 대입하면

$x^2-4x+3=0,\ (x-1)(x-3)=0$

$x=1$ 또는 $x=3$ $\quad\therefore p=1,\ q=3$ 또는 $p=3,\ q=1$

$y=x^2-4x+3$에 $x=0$을 대입하면

$y=3$ $\quad\therefore r=3$

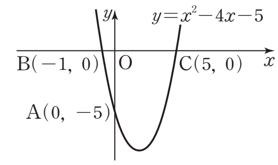
$\therefore p+q+r=1+3+3=7$ 답 ③

03 점 A는 $y=x^2-4x-5$의 그래프와 y축과의 교점이므로

$y=x^2-4x-5$에 $x=0$을 대입하면

$y=0^2-4\times0-5=-5$

$\therefore \mathrm{A}(0,\ -5)$



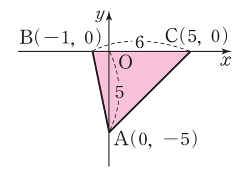
두 점 B, C는 각각 $y=x^2-4x-5$의 그래프와 x축과의 교점이므로

$y=x^2-4x-5$에 $y=0$을 대입하면

$x^2-4x-5=0,\ (x+1)(x-5)=0$

$x=-1$ 또는 $x=5$

$\therefore \mathrm{B}(-1,\ 0),\ \mathrm{C}(5,\ 0)$



따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}\times6\times5=15$ 답 15

04 $y=\frac{1}{2}x^2+x+k=\frac{1}{2}(x^2+2x)+k$

$=\frac{1}{2}(x^2+2x+1-1)+k$

$=\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{1}{2}+k$

이므로 이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(-1,\ k-\frac{1}{2}\right)$이다.

꼭짓점 $\left(-1,\ k-\frac{1}{2}\right)$이 직선 $y=\frac{1}{2}x+4$ 위에 있으므로

$k-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times(-1)+4,\ k-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

$\therefore k=4$ 답 ④

05 $y=2x^2-4x+4=2(x^2-2x)+4$

$=2(x^2-2x+1-1)+4=2(x^2-2x+1)-2+4$

$=2(x-1)^2+2$

이므로 이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 2)$이다.

$y=x^2+2mx+n$

$=(x^2+2mx+m^2-m^2)+n$

$=(x+m)^2-m^2+n$

이므로 이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-m,\ -m^2+n)$이다.

주어진 두 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표 $(1,\ 2)$와 $(-m,\ -m^2+n)$이 일치하므로

$-m=1$에서 $m=-1$

$-m^2+n=-(-1)^2+n=-1+n=2$에서 $n=3$

$\therefore m+n=-1+3=2$ 답 ①

06 ① $y=2x^2+2$의 그래프의 축의 방정식은 $x=0$

② $y=(x+1)^2$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-1$

③ $y=2(x+5)^2-5$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-5$

④ $y=2x^2-x-1=2\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)-1$

$=2\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)-1$

$=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}-1$

$=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$

따라서 $y=2x^2-x-1$의 그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{1}{4}$

⑤ $y=2x^2+6x-3=2(x^2+3x)-3$

$=2\left(x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)-3=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}-3$

$=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{15}{2}$

따라서 $y=2x^2+6x-3$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-\frac{3}{2}$

그러므로 그래프의 축이 가장 왼쪽에 있는 것은 ③이다. 답 ③

07 $y=x^2-2x+a=(x^2-2x+1-1)+a$

$=(x-1)^2-1+a$

이므로 이차함수 $y=x^2-2x+a$의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이다.

이차함수의 그래프는 축에 대하여 대칭이므로 직선 $x=1$과 x축과의 교점을 $\mathrm{C}(1, 0)$이라 할 때, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{CB}}=\frac{4}{2}=2$

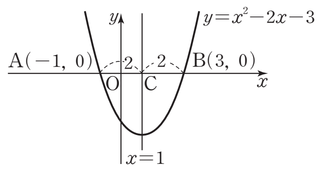
따라서 (점 A의 x좌표)$<$(점 B의 x좌표)라 할 때,

(점 A의 x좌표)$=1-2=-1$, (점 B의 x좌표)$=1+2=3$이므로

$\mathrm{A}(-1, 0)$, $\mathrm{B}(3, 0)$

즉, 점 $\mathrm{A}(-1, 0)$이 $y=x^2-2x+a$의 그래프 위의 점이므로

$0=(-1)^2-2\times(-1)+a$, $3+a=0$ $\quad\therefore a=-3$



답 ④

08 $y=-\frac{1}{4}x^2+x+2a-1=-\frac{1}{4}(x^2-4x)+2a-1$

$=-\frac{1}{4}(x^2-4x+4-4)+2a-1$

$=-\frac{1}{4}(x^2-4x+4)-\frac{1}{4}\times(-4)+2a-1$

$=-\frac{1}{4}(x-2)^2+2a$

이므로 이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2, 2a)$이다.

이때 이차함수의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로

꼭짓점의 y좌표는 0이어야 한다.

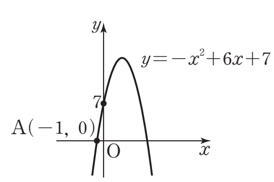
따라서 $2a=0$이므로 $a=0$ 답 ③

09 주어진 이차함수 $y=-x^2+ax+7$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(-1, 0)$을 지나므로

$0=-(-1)^2+a\times(-1)+7$

$0=-a+6$

$\therefore a=6$



그러므로 $y=-x^2+6x+7$에

$y=0$을 대입하면

$0=-x^2+6x+7$, $x^2-6x-7=0$

$(x+1)(x-7)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=7$

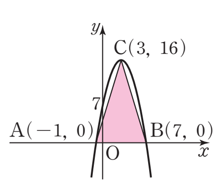
따라서 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(7, 0)$이다.

구한 이차함수의 식을 변형하면

$y=-x^2+6x+7$

$=-(x^2-6x+9-9)+7$

$=-(x-3)^2+16$



이므로 이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\mathrm{C}(3, 16)$이다.

$\therefore \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times$(점 C의 y좌표)

$=\frac{1}{2}\times8\times16=64$ 답 ②

10 이차함수 $y=-3x^2+6x+k-1$에서

$y=-3x^2+6x+k-1=-3(x^2-2x)+k-1$

$=-3(x^2-2x+1-1)+k-1=-3(x^2-2x+1)+3+k-1$

$=-3(x-1)^2+k+2$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(1, k+2)$이다.

이때 그래프가 x축에 접해야 하므로 꼭짓점의 y좌표는 0이어야 한다.

따라서 $k+2=0$이므로 $k=-2$ 답 -2

11 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}(x^2-2x)+\frac{5}{2}$

$=-\frac{1}{2}(x^2-2x+1-1)+\frac{5}{2}$

$=-\frac{1}{2}(x^2-2x+1)-\frac{1}{2}\times(-1)+\frac{5}{2}$

$=-\frac{1}{2}(x-1)^2+3$

이때 이 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{1}{2}(x-2-1)^2+3-5=-\frac{1}{2}(x-3)^2-2$

$=-\frac{1}{2}(x^2-6x+9)-2=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{9}{2}-2$

$=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{13}{2}$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=3$, $c=-\frac{13}{2}$이므로

$a+b+c=-\frac{1}{2}+3-\frac{13}{2}=-4$ 답 ①

12 $ab<0$에서 $a<0$이므로 $b>0$

$abc<0$에서 $ab<0$이므로 $c>0$

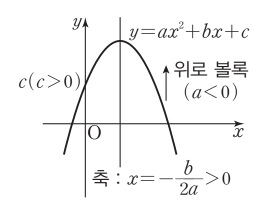
이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서 $a<0$이므로 이차함수의 그래프는 위로 볼록하다.

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 축은 직선 $x=-\frac{b}{2a}$이고,

$a<0$, $b>0$일 때 $-\frac{b}{2a}>0$이므로 이차함수의 그래프의 축은 y축의 오른쪽에 있다.

또한 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 y축과 점 $(0, c)$에서 만나고, $c>0$이므로 y축과 $y>0$인 부분에서 만나야 한다.

따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ④이다.



답 ④

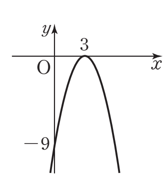
13 ① $y=-x^2+6x-9$

$=-(x^2-6x+9-9)-9$

$=-(x^2-6x+9)+9-9$

$=-(x-3)^2$

이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

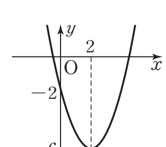


② $y=x^2-4x-2$

$=(x^2-4x+4-4)-2$

$=(x-2)^2-6$

이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



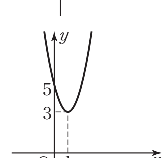
③ $y=2x^2-4x+5$

$=2(x^2-2x+1-1)+5$

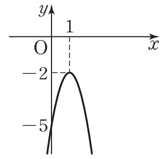
$=2(x^2-2x+1)-2+5$

$=2(x-1)^2+3$

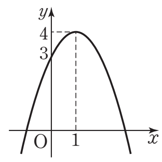
이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



④ $y=-3x^2+6x-5$
$=-3(x^2-2x+1-1)-5$
$=-3(x^2-2x+1)+3-5$
$=-3(x-1)^2-2$
이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

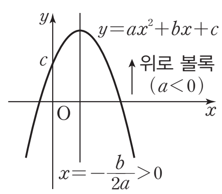


⑤ $y=-x^2+2x+3$
$=-(x^2-2x+1-1)+3$
$=-(x^2-2x+1)+1+3$
$=-(x-1)^2+4$
이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

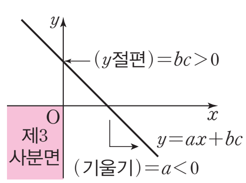


따라서 이차함수의 그래프 중 x축과 서로 다른 두 점에서 만나는 것은 ②, ⑤이다. 답 ②, ⑤

14 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$
이차함수의 그래프의 축은 직선 $x=-\dfrac{b}{2a}$이고, 축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $-\dfrac{b}{2a}>0$ $\quad\therefore b>0$



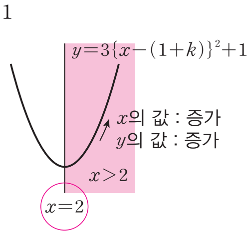
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 y축과 $y>0$인 부분에서 만나므로 $c>0$
따라서 $a<0$, $bc>0$이므로 일차함수 $y=ax+bc$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 일차함수의 그래프가 지나지 않는 사분면은 제3사분면이다.
답 ③

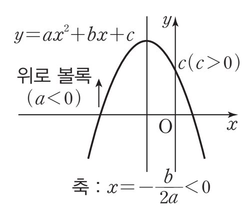
15 $y=-x^2+2x+k-2=-(x^2-2x+1-1)+k-2$
$=-(x-1)^2+k-1$
이므로 $y=-x^2+2x+k-2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ k-1)$이다.
이때 $y=-x^2+2x+k-2$에서 x^2의 계수가 음수이므로
이차함수의 그래프는 위로 볼록하다.
따라서 이차함수의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로
꼭짓점의 y좌표가 0보다 커야 한다.
$k-1>0$ $\quad\therefore k>1$ 답 $k>1$

16 $y=3x^2-6x+4=3(x^2-2x)+4$
$=3(x^2-2x+1-1)+4$
$=3(x^2-2x+1)-3+4$
$=3(x-1)^2+1$
이므로 이 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=3(x-1-k)^2+1=3\{x-(1+k)\}^2+1$
이차함수의 그래프의 증가, 감소는 축을 기준으로 변하므로
$y=3\{x-(1+k)\}^2+1$의 그래프의 축의 방정식은 $x=2$이다.
이때 $y=3\{x-(1+k)\}^2+1$의 그래프의 축의 방정식은 $x=1+k$이므로
$1+k=2$
$\therefore k=1$ 답 ③

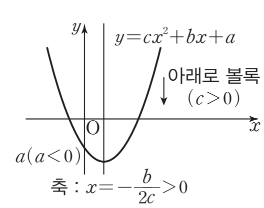


17 $y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 $2k-1$만큼, y축의 방향으로 k^2+1만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\{x-(2k-1)\}^2+k^2+1=(x-2k+1)^2+k^2+1$
$y=(x-2k+1)^2+k^2+1$의 그래프는 점 $(4,6)$을 지나므로
$6=(4-2k+1)^2+k^2+1$, $6=(5-2k)^2+k^2+1$
$6=5^2-2\times5\times2k+(2k)^2+k^2+1$
$6=25-20k+4k^2+k^2+1$, $6=5k^2-20k+26$
$5k^2-20k+20=0$, $k^2-4k+4=0$
$(k-2)^2=0$ $\quad\therefore k=2$
따라서 구하는 식은
$y=(x-2k+1)^2+k^2+1=(x-2\times2+1)^2+2^2+1$
$=(x-3)^2+5=x^2-2\times x\times3+3^2+5$
$=x^2-6x+14$ 답 $y=x^2-6x+14$

18 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$
이차함수의 그래프의 축이 직선 $x=-\dfrac{b}{2a}$이고,
축이 y축의 왼쪽에 위치하므로
$-\dfrac{b}{2a}<0$ $\quad\therefore b<0$
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 y축과 $y>0$인 부분에서 만나므로 $c>0$

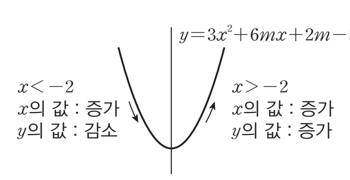


이차함수 $y=cx^2+bx+a$에서 $c>0$이므로 이차함수의 그래프는 아래로 볼록하다.
이차함수 $y=cx^2+bx+a$의 그래프의 축은 $x=-\dfrac{b}{2c}$이고,
$b<0$, $c>0$일 때 $-\dfrac{b}{2c}>0$이므로 이차함수의 그래프의 축은 y축의 오른쪽에 있다.
또한 이차함수 $y=cx^2+bx+a$의 그래프는 y축과 점 $(0,\ a)$에서 만나고, $a<0$이므로 y축과 $y<0$인 부분에서 만난다.
따라서 이차함수 $y=cx^2+bx+a$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ②이다.



답 ②

19 $x=-2$를 기준으로 x의 값의 증가에 따라 y의 값의 증가, 감소가 변하므로
$x=-2$는
$y=3x^2+6mx+2m-3$의 그래프의 축의 방정식이다.



$y=3x^2+6mx+2m-3=3(x^2+2mx)+2m-3$
$=3(x^2+2mx+m^2-m^2)+2m-3$
$=3(x+m)^2-3m^2+2m-3$
이므로 그래프의 축의 방정식은 $x=-m$이다.

따라서 $-m=-2$이므로 $m=2$
그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-m, -3m^2+2m-3)$이므로
$m=2$를 대입하면 $(-2, -3\times2^2+2\times2-3)$
$\therefore (-2, -11)$ 답 ①

20 구하는 포물선은 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선이므로

$y=\frac{1}{2}(x-m)^2+n$

$y=\frac{1}{2}(x-m)^2+n$에 $y=0$을 대입하면

$0=\frac{1}{2}(x-m)^2+n$, $\frac{1}{2}(x-m)^2=-n$

$(x-m)^2=-2n$, $x-m=\pm\sqrt{-2n}$

$x=m\pm\sqrt{-2n}$

따라서 포물선 $y=\frac{1}{2}(x-m)^2+n$과 x축과의 교점의 좌표는

$(m-\sqrt{-2n}, 0)$, $(m+\sqrt{-2n}, 0)$이므로

두 교점 사이의 거리는

$$(m+\sqrt{-2n})-(m-\sqrt{-2n})=m+\sqrt{-2n}-m+\sqrt{-2n}$$
$$=2\sqrt{-2n}$$

이때 두 교점 사이의 거리는 4이므로

$2\sqrt{-2n}=4$, $\sqrt{-2n}=2$

$-2n=4$ $\quad\therefore n=-2$

포물선 $y=\frac{1}{2}(x-m)^2-2$는 점 $(-2, 6)$을 지나므로

$6=\frac{1}{2}(-2-m)^2-2$, $\frac{1}{2}(-2-m)^2=8$

$(-2-m)^2=16$, $(2+m)^2=16$

$2+m=\pm\sqrt{16}$, $2+m=\pm4$

$m=-2\pm4$ $\quad\therefore m=-6$ 또는 $m=2$

따라서 구하는 포물선의 식은

$$y=\frac{1}{2}(x+6)^2-2=\frac{1}{2}(x^2+12x+36)-2$$
$$=\frac{1}{2}x^2+6x+18-2=\frac{1}{2}x^2+6x+16$$

또는

$$y=\frac{1}{2}(x-2)^2-2=\frac{1}{2}(x^2-4x+4)-2$$
$$=\frac{1}{2}x^2-2x+2-2=\frac{1}{2}x^2-2x$$

답 ③, ⑤

12 이차함수의 활용

Step 1. 개념 다지기

12-1 이차함수의 식 구하기 (1) – 꼭짓점의 좌표와 다른 한 점을 아는 경우

기본연습 1

(1) $y=a(x-4)^2+6$으로 놓고 $x=2$, $y=-2$를 대입하면

$-2=4a+6$, $4a=-8$ $\quad\therefore a=-2$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=-2(x-4)^2+6$이다.

(2) $y=a(x+2)^2+3$으로 놓고 $x=2$, $y=7$을 대입하면

$7=16a+3$, $16a=4$ $\quad\therefore a=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=\frac{1}{4}(x+2)^2+3$이다.

답 (1) $y=-2(x-4)^2+6$ (2) $y=\frac{1}{4}(x+2)^2+3$

연습 1

주어진 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2, -3)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x-2)^2-3$으로 놓자.

주어진 그래프가 점 $(0, -2)$를 지나므로

$y=a(x-2)^2-3$에 $x=0$, $y=-2$를 대입하면

$-2=4a-3$, $4a=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=\frac{1}{4}(x-2)^2-3$이다.

답 $y=\frac{1}{4}(x-2)^2-3$

12-2 이차함수의 식 구하기 (2) – 축의 방정식과 두 점을 아는 경우

기본연습 2

(1) $y=a(x+5)^2+q$로 놓고

$x=-4$, $y=4$를 대입하면 $4=a+q$ ...... ㉠

$x=-7$, $y=13$을 대입하면 $13=4a+q$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $q=1$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=3(x+5)^2+1$이다.

(2) $y=a(x-1)^2+q$로 놓고

$x=-2$, $y=3$을 대입하면 $3=9a+q$ ...... ㉠

$x=7$, $y=-15$를 대입하면 $-15=36a+q$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{2}{3}$, $q=9$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=-\frac{2}{3}(x-1)^2+9$이다.

답 (1) $y=3(x+5)^2+1$ (2) $y=-\frac{2}{3}(x-1)^2+9$

연습 2

주어진 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x-1)^2+q$로 놓자.

주어진 그래프가 두 점 $(0, 2)$, $(-1, -4)$를 지나므로

$2=a+q$ ...... ㉠

$-4=4a+q$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $q=4$이므로 구하는 이차함수의 식은 $y=-2(x-1)^2+4$, 즉 $y=-2x^2+4x+2$이다.

따라서 $a=-2$, $b=4$, $c=2$이므로 $a+b+c=4$ 답 4

12-3 이차함수의 식 구하기 (3) – 서로 다른 세 점을 아는 경우

기본연습 3

(1) 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$로 놓으면 이차함수의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로 $y=ax^2+bx+1$

$x=-1,\ y=8$을 대입하면 $8=a-b+1,\ a-b=7$ …… ㉠
$x=3,\ y=16$을 대입하면 $16=9a+3b+1,\ 9a+3b=15$
$3a+b=5$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=-4$
따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=3x^2-4x+1$이다.

(2) 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$로 놓으면 이차함수의 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로 $y=ax^2+bx+3$
$x=2,\ y=5$를 대입하면 $5=4a+2b+3,\ 4a+2b=2$
$2a+b=1$ …… ㉠
$x=-1,\ y=-4$를 대입하면 $-4=a-b+3,\ a-b=-7$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=5$
따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=-2x^2+5x+3$이다.

답 (1) $y=3x^2-4x+1$ (2) $y=-2x^2+5x+3$

연습 3

이차함수의 식 $y=ax^2+bx+c$에
$x=0,\ y=-1$을 대입하면 $-1=c$ …… ㉠
$x=-2,\ y=21$을 대입하면 $21=4a-2b+c$ …… ㉡
$x=\frac{1}{2},\ y=1$을 대입하면 $1=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c$ …… ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=6,\ b=1,\ c=-1$이므로
$\frac{b}{a}-c=\frac{1}{6}-(-1)=\frac{7}{6}$

답 $\frac{7}{6}$

12-4 이차함수의 식 구하기 (4) - x축과의 교점과 다른 한 점을 아는 경우

기본연습 4

(1) 이차함수의 식을 $y=a(x+5)(x+1)$로 놓고
$x=-2,\ y=6$을 대입하면
$6=a\times3\times(-1),\ -3a=6 \quad \therefore a=-2$
따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=-2(x+5)(x+1)$
즉 $y=-2x^2-12x-10$이다.

(2) 이차함수의 식을 $y=a(x+3)(x-5)$로 놓고
$x=1,\ y=-8$을 대입하면
$-8=a\times4\times(-4),\ -16a=-8 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$
따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=\frac{1}{2}(x+3)(x-5)$
즉 $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{15}{2}$이다.

답 (1) $y=-2x^2-12x-10$ (2) $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{15}{2}$

연습 4

이차함수의 그래프가 두 점 $(-2,\ 0),\ (6,\ 0)$을 지나므로 이차함수의 식을 $y=a(x+2)(x-6)$이라 하자.
이차함수 $y=a(x+2)(x-6)$의 그래프가 점 $(0,\ -4)$를 지나므로
$y=a(x+2)(x-6)$에 $x=0,\ y=-4$를 대입하면
$-4=a\times2\times(-6),\ -12a=-4 \quad \therefore a=\frac{1}{3}$
따라서 이차함수의 식은 $y=\frac{1}{3}(x+2)(x-6)$이므로
$f(3)=\frac{1}{3}\times5\times(-3)=-5$

답 -5

12-5 이차함수의 최댓값과 최솟값

기본연습 5-1

(1) $y=3x^2-12x+8=3(x^2-4x)+8$
$=3(x^2-4x+4)-12+8$
$=3(x-2)^2-4$
이므로 $x=2$일 때 최솟값 -4를 갖고, 최댓값은 없다.

(2) $y=-2x^2+2x+6=-2(x^2-x)+6$
$=-2\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}+6$
$=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{2}$
이므로 $x=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{13}{2}$을 갖고, 최솟값은 없다.

답 (1) 최댓값 : 없다, 최솟값 : -4
(2) 최댓값 : $\frac{13}{2}$, 최솟값 : 없다.

연습 5-1

$y=-x^2+6x+4a-8=-(x^2-6x)+4a-8$
$=-(x^2-6x+9)+9+4a-8$
$=-(x-3)^2+4a+1$
이므로 $x=3$일 때, 최댓값 $4a+1$을 갖는다.
따라서 $m=3,\ 5=4a+1$이므로 $a=1,\ m=3$
$\therefore 2a+m=5$

답 5

기본연습 5-2

(1) $y=x^2-4x+a=(x^2-4x+4)-4+a$
$=(x-2)^2-4+a$
이므로 최솟값 $-4+a$를 갖는다.
따라서 $-4+a=2$이므로 $a=6$

(2) $y=-3x^2+6x+a=-3(x^2-2x)+a$
$=-3(x^2-2x+1)+3+a=-3(x-1)^2+3+a$
이므로 최댓값 $3+a$를 갖는다.
따라서 $3+a=-4$이므로 $a=-7$

답 (1) 6 (2) -7

연습 5-2

조건에 맞는 이차함수의 식은
$y=2(x-3)^2=2(x^2-6x+9)$
$=2x^2-12x+18$
따라서 $a=-12,\ b=18$이므로
$a+b=-12+18=6$

답 6

12-6 이차함수의 활용

기본연습 6

(1) 둘레의 길이가 $32\,\text{cm}$인 직사각형의 가로의 길이가 $x\,\text{cm}$이면 세로의 길이는 $(16-x)\,\text{cm}$이므로 $y=x(16-x)$ (단, $0<x<16$)
$y=x(16-x)=-(x-8)^2+64$
즉, $x=8$일 때, 최댓값 $64\,\text{cm}^2$를 갖는다.
따라서 직사각형의 넓이의 최댓값은 $64\,\text{cm}^2$이다.

(2) 작은 수가 x이면 큰 수는 $x+8$이므로 $y=x(x+8)$
$y=x(x+8)=(x+4)^2-16$
즉, $x=-4$일 때, 최솟값 -16을 갖는다.
따라서 두 수의 곱의 최솟값은 -16이다.

답 (1) $y=-(x-8)^2+64,\ 64\,\text{cm}^2$ (2) $y=(x+4)^2-16,\ -16$

연습 6

직사각형의 가로의 길이를 x cm라 하면 세로의 길이는 $(22-x)$ cm이다.
직사각형의 넓이를 $y\text{ cm}^2$라 하면 $y=x(22-x)$ (단, $0<x<22$)

$y=x(22-x)=-x^2+22x$
$\quad=-(x-11)^2+121$

즉, $x=11$일 때, 최댓값 121을 갖는다.
따라서 직사각형의 최대 넓이는 121 cm^2이고, 그때의 가로의 길이는 11 cm, 세로의 길이는 11 cm이다.

답 최대 넓이 : 121 cm^2, 가로의 길이 : 11 cm, 세로의 길이 : 11 cm

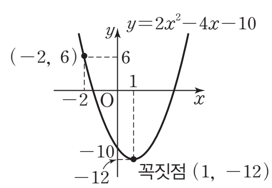
Step 2. 대표 문제로 접근하기

01	80	02	$a=-3, b=-18, c=-22$						
03	$a=\frac{1}{2}, b=1, c=-\frac{9}{2}$					04	160	05	35
06	$(3, -9)$			07	④	08	⑤	09	12
10	②	11	8	12	4	13	①	14	20
15	풀이참조	16	③	17	③	18	④	19	5초 후
20	④	21	③	22	②				

유제 01 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(1, -12)$이므로 주어진 이차함수의 식을 $y=a(x-1)^2-12$로 놓을 수 있다. 이때 이차함수의 그래프가 점 $(-2, 6)$을 지나므로

$6=a(-2-1)^2-12$
$\quad=9a-12$

$9a=18 \qquad \therefore a=2$



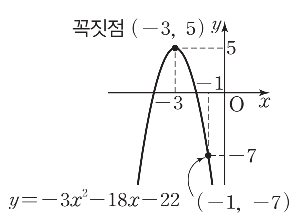
따라서 주어진 이차함수의 식은
$y=2(x-1)^2-12=2(x^2-2x+1)-12=2x^2-4x-10$ …… ㉠
㉠과 $y=ax^2+bx+c$를 비교하면 $b=-4$, $c=-10$
$\therefore abc=2\times(-4)\times(-10)=80$

답 80

유제 02 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-3, 5)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x+3)^2+5$로 놓을 수 있다.
이때 이차함수의 그래프가 점 $(-1, -7)$을 지나므로

$-7=a(-1+3)^2+5$
$\quad=4a+5$

$4a=-12 \qquad \therefore a=-3$



따라서 주어진 이차함수의 식은
$y=-3(x+3)^2+5=-3(x^2+6x+9)+5=-3x^2-18x-22$
$\therefore a=-3, b=-18, c=-22$

답 $a=-3, b=-18, c=-22$

유제 03 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)의 그래프의 축의 방정식이 $x=-1$이므로 $y=a(x+1)^2+q$로 놓을 수 있다.
이때 이 이차함수의 그래프가 두 점 $(-5, 3)$, $(1, -3)$을 지나므로

$$\begin{cases} 3=16a+q & \cdots\cdots ㉠ \\ -3=4a+q & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠$-$㉡을 하면 $6=12a$에서 $a=\frac{1}{2}$

이를 ㉡에 대입하면
$-3=2+q$이므로 $q=-5$

따라서 주어진 이차함수의 식은

$y=\frac{1}{2}(x+1)^2-5$
$\quad=\frac{1}{2}(x^2+2x+1)-5$
$\quad=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{9}{2}$

$\therefore a=\frac{1}{2}, b=1, c=-\frac{9}{2}$

답 $a=\frac{1}{2}, b=1, c=-\frac{9}{2}$

유제 04 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-2$이므로 $y=a(x+2)^2+q$로 놓을 수 있다.
이 그래프가 두 점 $(1, 0)$, $(0, 10)$을 지나므로

$$\begin{cases} 9a+q=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4a+q=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠$-$㉡을 하면
$5a=-10$에서 $a=-2$
이를 ㉠에 대입하면 $-18+q=0$이므로 $q=18$
따라서 주어진 이차함수의 식은
$y=-2(x+2)^2+18$
$\quad=-2x^2-8x+10$
$\therefore b=-8, c=10$
$\therefore abc=(-2)\times(-8)\times10=160$

답 160

유제 05 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 세 점 $(0, -1)$, $(1, 5)$, $(-2, c)$를 지나므로

(i) $x=0$, $y=-1$을 대입하면 $b=-1$ …… ㉠
(ii) $x=1$, $y=5$를 대입하면 $1+a+b=5$ …… ㉡
(iii) $x=-2$, $y=c$를 대입하면 $4-2a+b=c$ …… ㉢

㉠에서 $b=-1$이므로 이를 ㉡에 대입하면
$1+a-1=5$에서 $a=5$
이를 ㉢에 대입하면 $4-2\times5-1=c$에서 $c=-7$
$\therefore abc=5\times(-1)\times(-7)=35$

답 35

유제 06 주어진 세 점을 지나는 이차함수의 그래프의 식을 $y=ax^2+bx+c$라 하고

(i) $x=-3$, $y=-11$을 대입하면 $-11=9a-3b+c$ …… ㉠
(ii) $x=0$, $y=4$를 대입하면 $4=c$ …… ㉡
(iii) $x=6$, $y=4$를 대입하면 $4=36a+6b+c$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-\frac{5}{9}$, $b=\frac{10}{3}$, $c=4$

즉, $y=-\frac{5}{9}x^2+\frac{10}{3}x+4$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 이차함수의 그래프의 식은 $-y=-\frac{5}{9}x^2+\frac{10}{3}x+4$

$\therefore y=\frac{5}{9}x^2-\frac{10}{3}x-4=\frac{5}{9}(x-3)^2-9$

따라서 구하는 꼭짓점의 좌표는 $(3, -9)$이다.

답 $(3, -9)$

유제 07 주어진 이차함수의 그래프가 x축과 만나는 두 점이 $(-1, 0)$, $(3, 0)$이므로 이 이차함수의 식을 $y=a(x+1)(x-3)$이라 놓을 수 있다.

$y=a(x+1)(x-3)=a(x^2-2x-3)$
$\quad=a(x^2-2x)-3a$
$\quad=a(x^2-2x+1-1)-3a$
$\quad=a(x^2-2x+1)-a-3a$
$\quad=a(x-1)^2-4a$

즉, 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ -4a)$이므로

$-4a=8 \qquad \therefore a=-2$

따라서 구하는 이차함수의 그래프의 식은 $y=-2(x-1)^2+8$

답 ④

유제 08 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 x축과 두 점 $(-1,\ 0)$, $(4,\ 0)$에서 만나므로

$y=(x+1)(x-4)=x^2-3x-4=x^2+ax+b$

에서 $a=-3,\ b=-4$

$\therefore ab=(-3)\times(-4)=12$

답 ⑤

유제 09 $y=2x^2-20x+57=2(x^2-10x)+57$

$=2(x^2-10x+25-25)+57$

$=2(x^2-10x+25)-50+57$

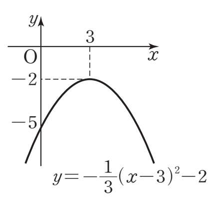
$=2(x-5)^2+7$

따라서 이 함수는 $x=5$일 때 최솟값 7을 가지므로 $a=5,\ b=7$

$\therefore a+b=5+7=12$

답 12

유제 10 이차함수 $y=-\frac{1}{3}(x-3)^2-2$는 $x=3$일 때 최댓값 -2를 갖는다.



따라서 옳은 것은 ②이다.

답 ②

유제 11 이차함수 $y=\frac{1}{3}x^2+2ax+8$이 $x=b$에서 최솟값 5를 가지므로

$y=\frac{1}{3}(x-b)^2+5=\frac{1}{3}(x^2-2bx+b^2)+5$

$=\frac{1}{3}x^2-\frac{2b}{3}x+\frac{b^2}{3}+5=\frac{1}{3}x^2+2ax+8$

$-\frac{2b}{3}=2a$에서 $b=-3a$ …… ㉠

$\frac{b^2}{3}+5=8$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$9a^2=9 \qquad \therefore a=-1\ (\because a<0)$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=(-3)\times(-1)=3$

$\therefore y=\frac{1}{3}x^2-2x+8$

위 식에 $x=k,\ y=8$을 대입하면

$8=\frac{1}{3}k^2-2k+8,\ \frac{1}{3}k^2-2k=0$

$k^2-6k=k(k-6)=0 \qquad \therefore k=6\ (\because k>0)$

$\therefore a+b+k=-1+3+6=8$

답 8

유제 12 $y=-x^2+2ax=-(x^2-2ax)$

$=-(x^2-2ax+a^2-a^2)$

$=-(x^2-2ax+a^2)+a^2$

$=-(x-a)^2+a^2$

따라서 이 이차함수는 $x=a$일 때 최댓값 a^2을 가지므로

$a^2=4 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$

즉, 주어진 이차함수의 식은 $y=-x^2+2ax=-x^2+4x$이고, 점 $(2,\ k)$가 이 이차함수의 그래프 위의 점이므로

$y=-x^2+4x$에 $x=2,\ y=k$를 대입하면

$k=-2^2+4\times2=-4+8=4$

답 4

유제 13 차가 18인 두 수를 $x,\ x+18$이라 하고 두 수의 곱을 y라 하면

$y=x(x+18)=x^2+18x$

$=x^2+18x+81-81=(x+9)^2-81$

따라서 두 수의 곱 y는 $x=-9$일 때 최솟값 -81을 갖는다. 답 ①

유제 14 합이 k인 두 수를 $x,\ k-x$라 하고 두 수의 곱을 y라 하면

$y=x(k-x)=-x^2+kx$

$=-x^2+kx-\left(\frac{k}{2}\right)^2+\left(\frac{k}{2}\right)^2$

$=-\left(x^2-kx+\frac{k^2}{4}\right)+\frac{k^2}{4}$

$=-\left(x-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{k^2}{4}$

두 수의 곱 y는 $x=\frac{k}{2}$일 때 최댓값 $\frac{k^2}{4}$을 가지므로

$\frac{k^2}{4}=100,\ k^2=400$

$\therefore k=20\ (\because k>0)$

답 20

유제 15 (1) 직사각형의 가로의 길이는 13 cm에서 매초 1 cm씩 감소하므로 x초 후의 가로의 길이는 $(13-x)$ cm이고, 세로의 길이는 8 cm에서 매초 2 cm씩 증가하므로 x초 후의 세로의 길이는 $(8+2x)$ cm이다.

(2) x초 후의 직사각형의 넓이가 $y\,\text{cm}^2$이므로

$y=(13-x)(8+2x)=104+26x-8x-2x^2$

$=-2x^2+18x+104=-2(x^2-9x)+104$

$=-2\left(x^2-9x+\frac{81}{4}\right)+104+2\times\frac{81}{4}$

$=-2\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{208+81}{2}$

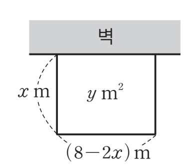
$=-2\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{289}{2}$

따라서 $x=\frac{9}{2}$일 때 최댓값은 $\frac{289}{2}$이므로

직사각형의 넓이는 $\frac{9}{2}$초 후에 최대가 되고, 그때의 넓이는 $\frac{289}{2}\,\text{cm}^2$이다.

답 (1) 가로의 길이 : $(13-x)$ cm
세로의 길이 : $(8+2x)$ cm
(2) $\frac{9}{2}$초 후, $\frac{289}{2}\,\text{cm}^2$

유제 16 철망으로 만든 직사각형 모양의 우리의 세로의 길이를 x m, 넓이를 $y\,\text{m}^2$라고 하자. 철망의 총 길이는 8 m이므로 우리의 가로의 길이는 $(8-2x)$ m이다.



$\therefore y=x(8-2x)$

식을 정리하면

$y=8x-2x^2=-2(x^2-4x)$

$=-2(x^2-4x+4)+8$

$=-2(x-2)^2+8$

따라서 $x=2$일 때 최댓값 8을 가지므로

강아지 우리의 최대 넓이는 $8\,\text{m}^2$이다.

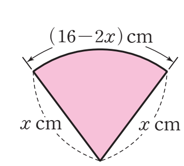
답 ③

유제 17 부채꼴의 반지름의 길이를 x cm, 넓이를 $y\,\text{cm}^2$라 하면

$y=\frac{1}{2}x(16-2x)=8x-x^2$

$=-x^2+8x-16+16$

$=-(x-4)^2+16$

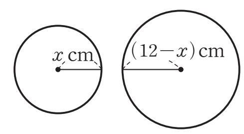


이므로 $x=4$일 때 최댓값 16을 가진다.

따라서 부채꼴의 넓이가 최대일 때 반지름의 길이는 $4\,\text{cm}$이다.

답 ③

유제 18 한 원의 반지름의 길이를 $x\,\text{cm}$라 하면 다른 한 원의 반지름의 길이는 $(12-x)\,\text{cm}$이다.



이때 두 원의 넓이의 합을 $y\,\text{cm}^2$라 하면

$y=\pi x^2+\pi(12-x)^2$
$=\pi(x^2+144-24x+x^2)$
$=\pi(2x^2-24x+144)$
$=\pi(2x^2-24x+72)+72\pi$
$=2\pi(x^2-12x+36)+72\pi$
$=2\pi(x-6)^2+72\pi$

이므로 $x=6$일 때 최솟값 72π를 가진다.

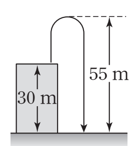
따라서 두 원의 넓이의 합의 최솟값은 $72\pi\,\text{cm}^2$이다. 답 ④

유제 19 주어진 식을 정리하면

$y=30x-3x^2=-3x^2+30x$
$=-3(x^2-10x+25)+75=-3(x-5)^2+75$

따라서 $x=5$일 때 최댓값 75를 가지므로 물체는 쏘아 올린 지 5초 후에 최고 높이에 도달한다. 답 5초 후

유제 20 주어진 식을 정리하면



$h=-t^2+10t+30$
$=-(t^2-10t+25)+55$
$=-(t-5)^2+55$

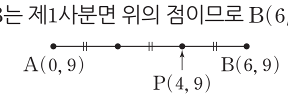
따라서 5초 후에 물체는 최고 높이 $55\,\text{m}$에 도달한다. 답 ④

유제 21 점 A는 직선 $y=9$가 y축과 만나서 생기는 점이므로 $\text{A}(0, 9)$

이차함수 $y=(x-3)^2$의 그래프와 직선 $y=9$가 만나는 점의 좌표를 구하기 위해 식을 세우면

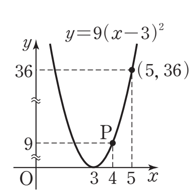
$9=(x-3)^2$
$x^2-6x+9=9,\ x^2-6x=0$
$x(x-6)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=6$

이때 점 B는 제1사분면 위의 점이므로 $\text{B}(6, 9)$이다.



$\overline{\text{AB}}$를 3등분하는 점은 $(2, 9)$, $(4, 9)$이고, 이 중 점 B와 가장 가까운 점은 $(4, 9)$이므로 $\text{P}(4, 9)$

이차함수 $y=(x-3)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(3, 0)$이므로 구하는 이차함수의 식을 $y=a(x-3)^2$으로 놓을 수 있다.

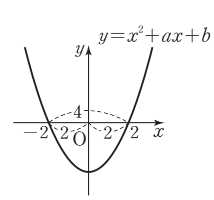


이때 이차함수의 그래프가 점 $\text{P}(4, 9)$를 지나므로 $9=a(4-3)^2=a$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=9(x-3)^2$이다.

그러므로 이 이차함수의 그래프 위에 있는 점의 좌표는 $(5, 36)$이다. 답 ③

유제 22



위 그림과 같이 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프는 y축을 축으로 하므로 y축에 대하여 대칭이다.

x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 4이므로, 각 점과 원점 사이의 거리는 2이다.

따라서 이 그래프와 x축이 만나는 두 점의 좌표는 $(-2, 0)$, $(2, 0)$이므로

$y=(x+2)(x-2)=x^2-4=x^2+ax+b$

따라서 $a=0$, $b=-4$이므로

$a+b=0+(-4)=-4$ 답 ②

Step 3. 단원 마무리하기

01	①	02	⑤	03	③	04	-25		
05	$(0, -25)$			06	③	07	14	08	⑤
09	-1	10	②	11	$y=\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{3}{2}$, $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$				
12	④	13	③	14	④	15	④	16	②
17	$162\,\text{cm}^2$			18	③	19	②	20	26

01 이차함수 $y=3x^2+2px+q$가 $x=1$일 때 최솟값 -5를 가지므로

$y=3(x-1)^2-5=3(x^2-2x+1)-5$
$=3x^2-6x+3-5$
$=3x^2-6x-2$
$=3x^2+2px+q$

따라서 $-6=2p$에서 $p=-3$, $q=-2$이므로

$pq=(-3)\times(-2)=6$ 답 ①

02 $y=3x^2-6x+1=3(x^2-2x)+1$
$=3(x^2-2x+1-1)+1=3(x^2-2x+1)-3+1$
$=3(x-1)^2-2$

따라서 $x=1$일 때 최솟값 -2를 갖고, 축의 방정식은 $x=1$이다.

답 ⑤

03 이차함수 $y=ax^2+bx+c$가 $x=2$일 때 최솟값 $-2a$를 가지므로 $y=a(x-2)^2-2a$로 놓을 수 있다.

$y=a(x-2)^2-2a=a(x^2-4x+4)-2a=ax^2-4ax+2a$
$=ax^2+bx+c$

이므로 $b=-4a$, $c=2a$

이차함수 $y=ax^2+bx+c=ax^2-4ax+2a$의 그래프가 점 $(1, -2)$를 지나므로

$-2=a-4a+2a=-a$ $\quad\therefore a=2,\ b=-8,\ c=4$

$\therefore 2a+b+c=4+(-8)+4=0$ 답 ③

04 차가 10인 두 수를 x, $x+10$이라 하고 두 수의 곱을 y라 하면

$y=x(x+10)=x^2+10x$
$=x^2+10x+25-25$
$=(x+5)^2-25$

따라서 두 수의 곱의 최솟값은 $x=-5$일 때 -25이다. 답 -25

05 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(3, 20)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x-3)^2+20$으로 놓을 수 있다.

이때 이차함수의 그래프가 점 $(1, 0)$을 지나므로

$0=a(1-3)^2+20$
$=4a+20$
$\therefore a=-5$

따라서 구하는 이차함수의 식은

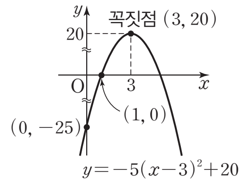
$y=-5(x-3)^2+20$이다.

이차함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 x좌표는 0이므로

이차함수의 식에 $x=0$을 대입하면

$y=-5(0-3)^2+20=-45+20$

$=-25$



따라서 구하는 점의 좌표는 $(0,\ -25)$이다. 답 $(0,\ -25)$

06 ① $y=-2x^2-4x+1$에서 x^2의 계수가 -2이므로 그래프는 위로 볼록하다.

② $y=-2x^2-4x+1=-2(x^2+2x)+1$

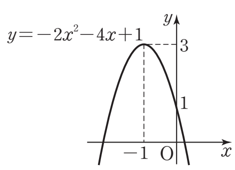
$=-2(x^2+2x+1-1)+1$

$=-2(x^2+2x+1)+2+1$

$=-2(x+1)^2+3$

즉, 축의 방정식은 $x=-1$이다.

③ $y=-2x^2-4x+1=-2(x+1)^2+3$에서 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 3)$이고, 위로 볼록하며 $x=0$일 때 $y=1$이므로 점 $(0,\ 1)$에서 y축과 만난다. 이를 이용하여 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



따라서 그래프는 제1사분면을 지난다.

④ 그래프가 위로 볼록하고 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 3)$이므로 $x=-1$일 때 최댓값 3을 갖는다.

⑤ $y=-2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 $y=-2(x+1)^2+3$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다. 답 ③

07 주어진 그림에서 이차함수의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 축의 방정식은 $x=2$이고, x^2의 계수가 3이므로 이차함수의 식을 $y=3(x-2)^2+q$로 놓을 수 있다.

이 이차함수의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=12+q \qquad \therefore q=-10$

따라서 주어진 이차함수의 식은

$y=3(x-2)^2-10$

$=3x^2-12x+2$

이므로 $a=-12,\ b=2$에서

$b-a=2-(-12)=14$ 답 14

08 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ 3)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x+2)^2+3$으로 놓을 수 있다.

이때 이차함수의 그래프가 y축과 직선 $y=9$ 위의 점에서 만나므로 이차함수의 식에 $x=0$을 대입하면

$y=a(0+2)^2+3=4a+3=9$

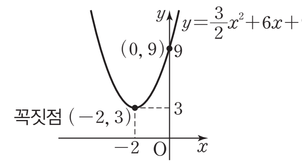
$4a=6 \qquad \therefore a=\dfrac{3}{2}$

따라서 구하는 이차함수의 식은

$y=\dfrac{3}{2}(x+2)^2+3=\dfrac{3}{2}(x^2+4x+4)+3=\dfrac{3}{2}x^2+6x+9$ …… ㉠

㉠과 $y=ax^2+bx+c$를 비교하면 $b=6,\ c=9$

$\therefore abc=\dfrac{3}{2}\times6\times9=81$



답 ⑤

09 주어진 이차함수의 그래프가 x축과 두 점 $(-2,\ 0),\ (1,\ 0)$에서 만나므로 이차함수의 식을 $y=a(x+2)(x-1)$로 놓을 수 있다.

이차함수의 그래프가 점 $(2,\ 2)$를 지나므로

$y=a(x+2)(x-1)$에 $x=2,\ y=2$를 대입하면

$2=a(2+2)(2-1)=a\times4\times1=4a \qquad \therefore a=\dfrac{1}{2}$

따라서 주어진 이차함수는 $y=\dfrac{1}{2}(x+2)(x-1)$

$y=\dfrac{1}{2}(x+2)(x-1)$에 $x=0$을 대입하면

$y=\dfrac{1}{2}(0+2)(0-1)=\dfrac{1}{2}\times2\times(-1)=-1$

따라서 이차함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는 -1이다.

답 -1

10 주어진 이차함수의 그래프가 x축과 두 점 $(-2,\ 0),\ (3,\ 0)$에서 만나므로 그 식을 $y=a(x+2)(x-3)$으로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(2,\ -8)$을 지나므로

$y=a(x+2)(x-3)$에 $x=2,\ y=-8$을 대입하면

$-8=a(2+2)(2-3)=a\times4\times(-1)=-4a \qquad \therefore a=2$

따라서 주어진 이차함수는 $y=2(x+2)(x-3)$이다.

이차함수 $y=2(x+2)(x-3)$의 그래프가 점 $(1,\ k)$를 지나므로

$x=1,\ y=k$를 대입하면

$k=2(1+2)(1-3)=2\times3\times(-2)=-12$ 답 ②

11 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-3$이므로 $y=a(x+3)^2+q$로 놓을 수 있다.

이때 이 이차함수의 그래프가 두 점 $(1,\ 2),\ (-1,\ -4)$를 지나므로

$$\begin{cases} 2=16a+q & \cdots\cdots ㉠ \\ -4=4a+q & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠−㉡을 하면 $6=12a$에서 $a=\dfrac{1}{2}$

이를 ㉡에 대입하면 $-4=2+q$이므로 $q=-6$

따라서 주어진 이차함수의 식은

$y=\dfrac{1}{2}(x+3)^2-6=\dfrac{1}{2}x^2+3x-\dfrac{3}{2}$

이고 y축과의 교점의 좌표는 $\left(0,\ -\dfrac{3}{2}\right)$이다.

답 $y=\dfrac{1}{2}x^2+3x-\dfrac{3}{2},\ \left(0,\ -\dfrac{3}{2}\right)$

12 세 점 $(0,\ 14),\ (2,\ 6),\ (-2,\ 18)$을 지나는 이차함수의 그래프의 식을 $y=ax^2+bx+c$로 놓고

(i) $x=0,\ y=14$를 대입하면 $14=c$ …… ㉠

(ii) $x=2,\ y=6$을 대입하면 $6=4a+2b+c$ …… ㉡

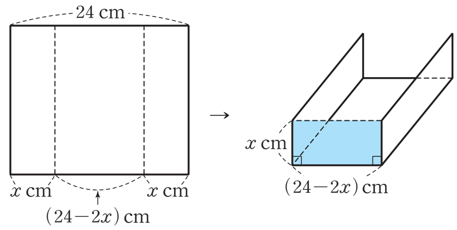
(iii) $x=-2,\ y=18$을 대입하면 $18=4a-2b+c$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-\dfrac{1}{2},\ b=-3,\ c=14$

$\therefore y=-\dfrac{1}{2}x^2-3x+14$ 답 ④

13 수납대의 높이를 $x$cm, 색칠된 부분의 넓이를 $y\,\text{cm}^2$라 하면



$y=x(24-2x)=24x-2x^2$

$=-2(x^2-12x)$

$=-2(x^2-12x+36)+2\times36$

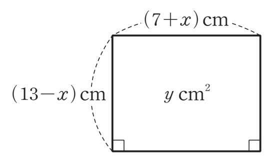
$=-2(x-6)^2+72$ …… ㉠

㉠에서 $x=6$일 때 최댓값은 72이다.

따라서 색칠된 부분의 넓이가 최대이려면 수납대의 높이는 6 cm이어야 한다.

답 ③

14 새로운 직사각형의 가로의 길이는 $(7+x)$cm, 세로의 길이는 $(13-x)$cm이다.



새로운 직사각형의 넓이를 $y\,\text{cm}^2$라 하면

$y=(7+x)(13-x)$

위 식의 우변을 전개한 후 변형하면

$y=91-7x+13x-x^2$

$=-x^2+6x+91$

$=-(x^2-6x)+91$

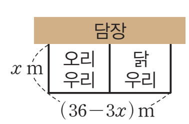
$=-(x^2-6x+9)+91+9$

$=-(x-3)^2+100$

따라서 $x=3$일 때 최댓값은 100이므로

새로운 직사각형의 넓이가 최대가 되도록 하는 x의 값은 3이다. 답 ④

15 오른쪽 그림과 같이 직사각형의 세로의 길이를 xm라 하면



두 직사각형의 가로의 길이의 합은 $(36-3x)$m이다.

두 개의 우리의 넓이의 합을 $y\,\text{m}^2$라 하면

$y=x\times(36-3x)$

$y=x(36-3x)=-3x^2+36x$

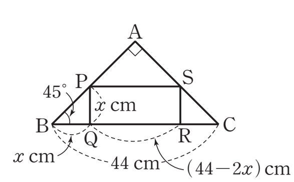
$=-3(x^2-12x)=-3(x^2-12x+36)+3\times36$

$=-3(x-6)^2+108$

따라서 $x=6$일 때 최댓값은 108이므로

두 개의 우리의 넓이의 합의 최댓값은 $108\,\text{m}^2$이다. 답 ④

16 직사각형 PQRS의 세로의 길이를 $x$cm라 하자.



삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이므로 $\angle\text{ABC}=45^\circ$

$\angle\text{PQB}=90^\circ$이므로 $\angle\text{BPQ}=45^\circ$

삼각형 PBQ는 $\overline{\text{PQ}}=\overline{\text{BQ}}$, $\angle\text{PQB}=90^\circ$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{\text{BQ}}=x$cm

따라서 직사각형 PQRS의 가로의 길이는 $(44-2x)$cm이므로

직사각형 PQRS의 넓이를 $y\,\text{cm}^2$라 하면

$y=x\times(44-2x)=-2x^2+44x$

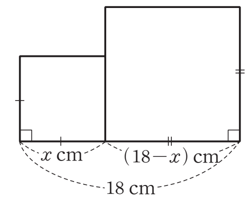
$=-2(x^2-22x)=-2(x^2-22x+121)+2\times121$

$=-2(x-11)^2+242$

따라서 $x=11$일 때 최댓값은 242이므로

직사각형 PQRS의 최대 넓이는 $242\,\text{cm}^2$이다. 답 ②

17 두 정사각형의 한 변의 길이를 각각 $x$cm, $(18-x)$cm라 하고



두 정사각형의 넓이의 합을 $y\,\text{cm}^2$라 하면

$y=x^2+(18-x)^2$

$y=x^2+(18-x)^2=x^2+x^2-36x+324$

$=2x^2-36x+324=2(x^2-18x)+324$

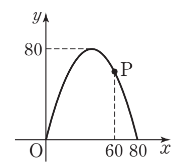
$=2(x^2-18x+81)+324-2\times81$

$=2(x-9)^2+162$

따라서 $x=9$일 때 최솟값은 162이므로

두 정사각형의 넓이의 합의 최솟값은 $162\,\text{cm}^2$이다. 답 $162\,\text{cm}^2$

18 공을 쏘아 올린 지점을 원점 O, 지면을 x축, 나무의 꼭대기를 점 P라 하고 공이 그리는 포물선을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



그래프가 x축과 만나는 점의 좌표가 $(0,\ 0)$, $(80,\ 0)$이므로 이 그래프를 나타내는 이차함수의 식을 $y=ax(x-80)$으로 놓을 수 있다.

$y=ax(x-80)$의 그래프의 꼭짓점의 y좌표가 80이므로

$y=a(x^2-80x)=a(x^2-80x+1600)-1600a$

$=a(x-40)^2-1600a$

에서 $-1600a=80$

$\therefore a=-\frac{1}{20}$

따라서 이차함수의 식은 $y=-\frac{1}{20}x(x-80)$

점 P의 좌표를 $(60,\ b)$라 하면 나무의 높이는 b의 값이므로

$b=-\frac{1}{20}\times60\times(60-80)=60$

따라서 나무의 높이는 60 m이다. 답 ③

19 원래 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$라 하자.

이 이차함수의 그래프가 y축과 점 $(0,\ 3)$에서 만나므로

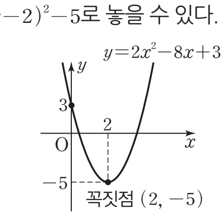
$3=a\times0^2+b\times0+c \qquad \therefore c=3$

이때 서준이는 이차함수의 식의 x^2의 계수와 x의 계수를 바꾸어 놓고 꼭짓점의 좌표를 구한 것이므로

이차함수 $y=bx^2+ax+3$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -5)$임을 알 수 있다.

따라서 서준이가 본 이차함수의 식을 $y=b(x-2)^2-5$로 놓을 수 있다.

이때 이 이차함수의 그래프도 점 $(0,\ 3)$을 지나므로



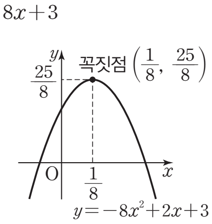
$3=b(0-2)^2-5=4b-5$

$4b=8 \qquad \therefore b=2$

그러므로 서준이가 잘못 본 이차함수의 식은

$y=2(x-2)^2-5=2(x^2-4x+4)-5=2x^2-8x+3$

원래 이차함수의 식은 $y=-8x^2+2x+3$이므로 꼭짓점의 좌표를 구하기 위해 식을 변형하면



$y=-8x^2+2x+3$

$=-8\left(x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{64}-\frac{1}{64}\right)+3$

$=-8\left(x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{64}\right)+3+\frac{1}{8}=-8\left(x-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{25}{8}$

따라서 원래 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{1}{8}, \frac{25}{8}\right)$이므로

$\alpha=\frac{1}{8}$, $\beta=\frac{25}{8}$

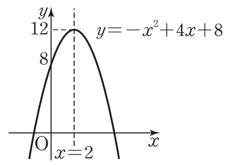
$\therefore\ \alpha+\beta=\frac{1}{8}+\frac{25}{8}=\frac{26}{8}=\frac{13}{4}$ 답 ②

20 이차함수 $y=-x^2+4x+8$에서

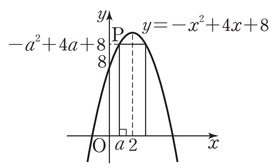
$y=-(x^2-4x)+8$

$=-(x^2-4x+4)+8+4$

$=-(x-2)^2+12$

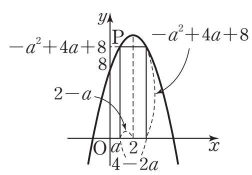


오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=-x^2+4x+8$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형에 내접하는 직사각형과 이차함수 $y=-x^2+4x+8$의 그래프의 교점 중 x좌표가 2보다 작은 점을 P라 하자. 점 P의 x좌표를 a라 하면 $\mathrm{P}(a, -a^2+4a+8)$이다.



내접하는 직사각형의 세로의 길이는 $-a^2+4a+8$이고 가로의 길이는 $(2-a)\times2$, 즉 $4-2a$이다.

직사각형의 둘레의 길이를 b라 하면



$b=2\times\{(-a^2+4a+8)+(4-2a)\}$

$=2(-a^2+2a+12)$

$=-2(a^2-2a)+24$

$=-2(a^2-2a+1)+24+2\times1$

$=-2(a-1)^2+26$

따라서 $a=1$일 때 최댓값은 26이므로 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은 26이다. 답 26

memo

memo

memo

memo