정답을 확인하려 할 때에는 「**빠른 정답 찾기**」를 이용하면 편리합니다.

쎈 정답 및 풀이

01 다항식의 연산

0001 답 $5x^3-3x^2+x-12$

0002 답 $-12+x-3x^2+5x^3$

0003 답 $2x^2+(3y+1)x-y^2-10y+1$

0004 답 $2x^2+x+1+(3x-10)y-y^2$

0005 답 x^3+x^2+x-4

0006 $(x^2+2xy-3y^2)-(2x^2-5xy-y^2)$
$=x^2+2xy-3y^2-2x^2+5xy+y^2$
$=-x^2+7xy-2y^2$ 답 $-x^2+7xy-2y^2$

0007 $(4x^2+y^2)-(2xy-5y^2)+(x^2-3xy)$
$=4x^2+y^2-2xy+5y^2+x^2-3xy$
$=5x^2-5xy+6y^2$ 답 $5x^2-5xy+6y^2$

0008 $A+B-C$
$=(x^3-3x^2+x-1)+(2x^3+x^2-5)-(-x^2-4x+6)$
$=x^3-3x^2+x-1+2x^3+x^2-5+x^2+4x-6$
$=3x^3-x^2+5x-12$ 답 $3x^3-x^2+5x-12$

0009 $3A-(2B+C)$
$=3A-2B-C$
$=3(x^3-3x^2+x-1)-2(2x^3+x^2-5)-(-x^2-4x+6)$
$=3x^3-9x^2+3x-3-4x^3-2x^2+10+x^2+4x-6$
$=-x^3-10x^2+7x+1$ 답 $-x^3-10x^2+7x+1$

0010 $(A+2B)-(2A-C)$ 주어진 식을 간단히 정리한 후 대입한다.
$=A+2B-2A+C$
$=-A+2B+C$
$=-(x^3-3x^2+x-1)+2(2x^3+x^2-5)+(-x^2-4x+6)$
$=-x^3+3x^2-x+1+4x^3+2x^2-10-x^2-4x+6$
$=3x^3+4x^2-5x-3$ 답 $3x^3+4x^2-5x-3$

0011 $A+B=x^2-4x+3$ ...... ㉠
$A-B=x^2+2x-1$ ...... ㉡
㉠+㉡을 하면 $2A=2x^2-2x+2$
$\therefore A=x^2-x+1$
이것을 ㉠에 대입하면 $(x^2-x+1)+B=x^2-4x+3$
$\therefore B=(x^2-4x+3)-(x^2-x+1)$
$=x^2-4x+3-x^2+x-1=-3x+2$
답 $A=x^2-x+1$, $B=-3x+2$

0012 $A+B=x^2+2x+5$ ...... ㉠
$2A-B=5x^2-11x-2$ ...... ㉡
㉠+㉡을 하면 $3A=6x^2-9x+3$
$\therefore A=2x^2-3x+1$
이것을 ㉠에 대입하면 $(2x^2-3x+1)+B=x^2+2x+5$
$\therefore B=(x^2+2x+5)-(2x^2-3x+1)$
$=x^2+2x+5-2x^2+3x-1$
$=-x^2+5x+4$
답 $A=2x^2-3x+1$, $B=-x^2+5x+4$

0013 답 $ab^4-3a^3b^2+2ab^3$

0014 $(x^2-2xy+3y)(x-y)$
$=x^3-x^2y-2x^2y+2xy^2+3xy-3y^2$
$=x^3-3x^2y+2xy^2+3xy-3y^2$
답 $x^3-3x^2y+2xy^2+3xy-3y^2$

0015 $(a+2b-c)^2$
$=a^2+(2b)^2+(-c)^2+2\cdot a\cdot 2b+2\cdot 2b\cdot(-c)+2\cdot(-c)\cdot a$
$=a^2+4b^2+c^2+4ab-4bc-2ca$
답 $a^2+4b^2+c^2+4ab-4bc-2ca$

0016 $(x+2)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3$
$=x^3+6x^2+12x+8$ 답 $x^3+6x^2+12x+8$

0017 $(3a-1)\underbrace{(9a^2+3a+1)}_{(3a)^2+3a\cdot 1+1^2}=(3a)^3-1^3$
$=27a^3-1$ 답 $27a^3-1$

0018 $\underbrace{(4x^2+2xy+y^2)}_{(2x)^2+2x\cdot y+y^2}(4x^2-2xy+y^2)$
$=(2x)^4+(2x)^2y^2+y^4$
$=16x^4+4x^2y^2+y^4$ 답 $16x^4+4x^2y^2+y^4$

0019 $(2a+b-c)(4a^2+b^2+c^2-2ab+bc+2ca)$
$=(2a)^3+b^3+(-c)^3-3\cdot 2a\cdot b\cdot(-c)$
$=8a^3+b^3-c^3+6abc$ 답 $8a^3+b^3-c^3+6abc$

0020 $(x-3)^3+(x+4)(x^2-4x+16)$
$=x^3-9x^2+27x-27+x^3+64$
$=2x^3-9x^2+27x+37$ 답 $2x^3-9x^2+27x+37$

0021 $(x-3y+1)^2-(x+1)(x-2)(x-3)$
$=x^2+9y^2+1-6xy-6y+2x-(x^3-4x^2+x+6)$
$=x^2+9y^2+1-6xy-6y+2x-x^3+4x^2-x-6$
$=-x^3+5x^2-6xy+9y^2+x-6y-5$
답 $-x^3+5x^2-6xy+9y^2+x-6y-5$

0022 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2\cdot(-10)=29$ 답 29

0023 $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=(-4)^2+2\cdot3=22$ 답 22

0024 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=2^2-4\cdot(-7)=32$ 답 32

0025 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=3^3-3\cdot(-2)\cdot3=45$ 답 45

0026 $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=1^3+3\cdot4\cdot1=13$ 답 13

0027 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=2^2-2\cdot(-1)=6$ 답 6

0028 **0027**에서 $a^2+b^2+c^2=6$이므로
$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=2\cdot\{6-(-1)\}+3\cdot(-2)$
$=8$ 답 8

0029 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=5^2-2=23$ 답 23

0030 $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=5^3-3\cdot5=110$
답 110

0031 $x+y=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$,
$xy=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$이므로
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=2^3-3\cdot(-1)\cdot2=14$ 답 14

0032 $x-y=(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$,
$xy=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$이므로
$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$=(2\sqrt{2})^3+3\cdot(-1)\cdot2\sqrt{2}=10\sqrt{2}$ 답 $10\sqrt{2}$

0033

$$\begin{array}{r} x^2+x+3 \\ x-3\,\overline{)\,x^3-2x^2\qquad+5} \\ \underline{x^3-3x^2\qquad\qquad} \\ x^2\qquad\quad \\ \underline{x^2-3x\qquad} \\ 3x+5 \\ \underline{3x-9} \\ 14 \end{array}$$

$\therefore$ 몫: x^2+x+3, 나머지: 14

답 몫: x^2+x+3, 나머지: 14

0034

$$\begin{array}{r} 4x-3\qquad \\ x^2+2x-3\,\overline{)\,4x^3+5x^2-3x-1} \\ \underline{4x^3+8x^2-12x\quad} \\ -3x^2+9x-1 \\ \underline{-3x^2-6x+9} \\ 15x-10 \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $4x-3$, 나머지: $15x-10$

답 몫: $4x-3$, 나머지: $15x-10$

0035

$$\begin{array}{r} x^2-3x-4\qquad\qquad \\ x^2-x-6\,\overline{)\,x^4-4x^3-7x^2+22x+24} \\ \underline{x^4-x^3-6x^2\qquad\qquad\quad} \\ -3x^3-x^2+22x\qquad \\ \underline{-3x^3+3x^2+18x\qquad} \\ -4x^2+4x+24 \\ \underline{-4x^2+4x+24} \\ 0 \end{array}$$

$\therefore$ 몫: x^2-3x-4, 나머지: 0

답 몫: x^2-3x-4, 나머지: 0

0036

$$\begin{array}{r} x^2+x-3\quad \\ 2x-1\,\overline{)\,2x^3+x^2-7x+7} \\ \underline{2x^3-x^2\qquad\qquad} \\ 2x^2-7x\qquad \\ \underline{2x^2-x\qquad} \\ -6x+7 \\ \underline{-6x+3} \\ 4 \end{array}$$

$\therefore 2x^3+x^2-7x+7=(2x-1)(x^2+x-3)+4$

답 풀이 참조

0037

$$\begin{array}{r} 3x-1\qquad\quad \\ x^2+2\,\overline{)\,3x^3-x^2+4x+3} \\ \underline{3x^3\qquad+6x\qquad} \\ -x^2-2x+3 \\ \underline{-x^2\qquad-2} \\ -2x+5 \end{array}$$

$\therefore 3x^3-x^2+4x+3=(x^2+2)(3x-1)-2x+5$

답 풀이 참조

0038 $P(x)=(x^2-5)(x+2)-3$
$=x^3+2x^2-5x-10-3$
$=x^3+2x^2-5x-13$ 답 $x^3+2x^2-5x-13$

0039 $P(x)=(x^2-x+1)(x-1)-2x+4$
$=x^3-x^2-x^2+x+x-1-2x+4$
$=x^3-2x^2+3$ 답 x^3-2x^2+3

유형 01 다항식의 덧셈과 뺄셈 본책 12쪽

다항식의 덧셈과 뺄셈은 괄호를 풀고 동류항끼리 모아서 간단히 한다. 이때 다음을 이용한다.
① 두 다항식 A, B에 대한 식을 계산하는 경우
⇒ 먼저 구하는 식을 간단히 한 후 A, B를 대입한다.
② 세 다항식 A, B, X에 대한 등식이 주어진 경우
⇒ $X=(A, B$에 대한 식$)$ 꼴로 변형한 후 A, B를 대입한다.
③ $A+B$, $A-B$와 같이 A, B에 대한 식이 주어진 경우
⇒ 연립일차방정식의 해를 구하는 것과 같은 방법으로 A, B를 구한다.

0040 $2X-B=A-5B$에서
$2X=A-4B$
$\therefore X=\frac{1}{2}A-2B$
$=\frac{1}{2}(2x^2-4xy+6y^2)-2(-x^2+2xy+4y^2)$
$=x^2-2xy+3y^2+2x^2-4xy-8y^2$
$=3x^2-6xy-5y^2$ 답 ③

0041 $A-2(A-B)+C$
$=-A+2B+C$
$=-(2x^3-x^2+3x+4)+2(x^3+x-2)$
$+(-x^3+3x^2+5x-1)$
$=-2x^3+x^2-3x-4+2x^3+2x-4-x^3+3x^2+5x-1$
$=-x^3+4x^2+4x-9$ 답 ③

0042 $(x^2+2x-y+1)*(2x-y-5)$
$=3(x^2+2x-y+1)-(2x-y-5)$
$=3x^2+6x-3y+3-2x+y+5$
$=3x^2+4x-2y+8$ 답 ④

0043 $A+B=-x^2+5xy+y^2$ …… ㉠
$B+C=2x^2-3xy$ …… ㉡
$C+A=x^2+6xy-7y^2$ …… ㉢
㉠+㉡+㉢을 하면
$2(A+B+C)=2x^2+8xy-6y^2$
$\therefore A+B+C=x^2+4xy-3y^2$ 답 ④

0044 $A-B=-3x^2+2xy-2y^2$ …… ㉠
$2A+B=xy-4y^2$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면
$3A=-3x^2+3xy-6y^2$
$\therefore A=-x^2+xy-2y^2$ … ❶
이것을 ㉠에 대입하면
$(-x^2+xy-2y^2)-B=-3x^2+2xy-2y^2$
$\therefore B=(-x^2+xy-2y^2)-(-3x^2+2xy-2y^2)$
$=-x^2+xy-2y^2+3x^2-2xy+2y^2$
$=2x^2-xy$ … ❷
$\therefore A-5B=(-x^2+xy-2y^2)-5(2x^2-xy)$
$=-x^2+xy-2y^2-10x^2+5xy$
$=-11x^2+6xy-2y^2$ … ❸
답 $-11x^2+6xy-2y^2$

채점 기준	비율
❶ 다항식 A를 구할 수 있다.	40 %
❷ 다항식 B를 구할 수 있다.	40 %
❸ $A-5B$를 계산할 수 있다.	20 %

0045 (다): $3x^2-6x+9-(-3x+2)-(-2x^2-5x)$
$=3x^2-6x+9+3x-2+2x^2+5x$
$=5x^2+2x+7$
(라): $3x^2-6x+9-(5x^2+2x+7)-(-3x^2-6x-1)$
$=3x^2-6x+9-5x^2-2x-7+3x^2+6x+1$
$=x^2-2x+3$
(나): $3x^2-6x+9-(-2x^2-5x)-(x^2-2x+3)$
$=3x^2-6x+9+2x^2+5x-x^2+2x-3$
$=4x^2+x+6$
따라서 구하는 합은
$(4x^2+x+6)+(5x^2+2x+7)=9x^2+3x+13$
답 $9x^2+3x+13$

유형 02 다항식의 전개식에서 계수 구하기 집중공략 본책 13쪽

다항식의 곱으로 주어진 다항식의 전개식에서 특정한 항의 계수를 구할 때에는 분배법칙을 이용하여 특정한 항이 나오도록 각 다항식에서 하나씩 선택하여 곱한다.
예 $(1-x+x^2)(3-x)$의 전개식에서 x항은
$1\cdot(-x)+(-x)\cdot 3=-4x$
따라서 x의 계수는 -4이다.

0046 $(2x^3+6x^2-8x-1)(x^2+5x+10)$의 전개식에서 x^2항은
$6x^2\cdot 10+(-8x)\cdot 5x+(-1)\cdot x^2=19x^2$
따라서 x^2의 계수는 19이다. 답 ④

0047 $(a-b+6)(4a+b-1)$의 전개식에서 ab항은
$a\cdot b+(-b)\cdot 4a=-3ab$
따라서 ab의 계수는 -3이다. 답 ②

0048 $(2x^2+x-3)(x^2+2x+k)$의 전개식에서 x항은
$x\cdot k+(-3)\cdot 2x=(k-6)x$ … ❶
이때 x의 계수가 5이므로
$k-6=5 \qquad \therefore k=11$ … ❷
답 11

채점 기준	비율
❶ 주어진 다항식의 전개식에서 x항을 구할 수 있다.	70 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	30 %

0049 $(x+a)(3x^2+bx-5)$의 전개식에서 x^2항은

$x\cdot bx+a\cdot 3x^2=(3a+b)x^2$

이때 x^2의 계수가 10이므로

$3a+b=10 \qquad \therefore b=10-3a \qquad \cdots\cdots ㉠$

x항은

$x\cdot(-5)+a\cdot bx=(ab-5)x$

이때 x의 계수가 -13이므로

$ab-5=-13 \qquad \therefore ab=-8$

㉠을 위의 식에 대입하면

$a(10-3a)=-8, \qquad 3a^2-10a-8=0$

$(3a+2)(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because$ a는 정수)

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $\qquad b=-2$

$\therefore a+b=2$ 답 2

0050 $(1+x+2x^2+\cdots+100x^{100})^2$

$=(1+x+2x^2+\cdots+100x^{100})(1+x+2x^2+\cdots+100x^{100})$

이 식의 전개식에서 x^3항은

$1\cdot 3x^3+x\cdot 2x^2+2x^2\cdot x+3x^3\cdot 1=10x^3$

따라서 x^3의 계수는 10이다. 답 10

SSEN 특강

$(1+x+2x^2+\cdots+100x^{100})^2$을 전개할 때, $4x^4$, $5x^5$, $\cdots$, $100x^{100}$항은 x^3의 계수에 영향을 주지 않으므로 $(1+x+2x^2+3x^3)^2$의 전개식에서 x^3의 계수를 구해도 된다.

0051 $(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+10)$에서 임의의 9개의 일차식에서는 x항을, 나머지 1개의 일차식에서는 상수항을 선택하여 곱하면 x^9항이 되므로 이 식의 전개식에서 x^9항은

$x^9\cdot 10+x^9\cdot 9+x^9\cdot 8+\cdots+x^9\cdot 2+x^9\cdot 1$

$=(1+2+\cdots+8+9+10)x^9$

$=55x^9$

따라서 x^9의 계수는 55이다. 답 ③

유형 03 곱셈 공식을 이용한 다항식의 전개 (집중 공략) 본책 13쪽

다항식의 곱셈은 다음과 같은 곱셈 공식을 이용하면 빠르게 전개할 수 있다.

① $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

② $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

③ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

④ $(x+a)(x+b)(x+c)$

$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

0052 ⑤ $(x-3y)^3=x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3$ 답 ⑤

0053 $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$

$=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$

$=(x^4-1)(x^4+1)=x^8-1$

$=30-1=29$ 답 ①

0054 $(5x+ay)^3=125x^3+75ax^2y+15a^2xy^2+a^3y^3$ ⋯ ❶

즉 $15a^2=60$이므로 $\qquad a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$) ⋯ ❷

따라서 x^2y의 계수는

$75a=75\times 2=150$ ⋯ ❸

답 150

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 전개할 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ x^2y의 계수를 구할 수 있다.	20 %

0055 $(x-\sqrt{2})^3(x+\sqrt{2})^3=\{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\}^3$

$=(x^2-2)^3$

$=x^6-6x^4+12x^2-8$

따라서 x^2의 계수는 12이다. 답 ②

0056 $\overbrace{(x^2-9)}^{(x+3)(x-3)}(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$

$=\{(x+3)(x^2-3x+9)\}\{(x-3)(x^2+3x+9)\}$

$=(x^3+27)(x^3-27)$

$=x^6-729$ 답 x^6-729

다른 풀이 $(x^2-9)(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$

$=(x^2-9)\{(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)\}$

$=(x^2-9)(x^4+9x^2+81)$

$=x^6-729$

0057 $a+b+c=2$에서

$a+b=2-c$, $b+c=2-a$, $c+a=2-b$

이므로

$(a+b)(b+c)(c+a)$

$=(2-c)(2-a)(2-b)$

$=8-4(a+b+c)+2(ab+bc+ca)-abc$

$=8-4\cdot 2+2\cdot(-7)-(-2)$

$=-12$ 답 ①

유형 04 공통부분이 있는 다항식의 전개 본책 14쪽

공통부분이 있는 다항식의 곱셈은 다음과 같은 순서로 한다.

(i) 공통부분을 t로 치환한다.

(ii) (i)의 식을 곱셈 공식을 이용하여 전개한다.

(iii) (ii)의 식에 t 대신 공통부분을 대입한다.

참고 ( )( )( )( ) 꼴은 공통부분이 생기도록 짝을 지어 곱한다.

0058 $3a-b=t$로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(t-2c)(t+2c)\\&=t^2-4c^2\\&=(3a-b)^2-4c^2\\&=9a^2-6ab+b^2-4c^2\end{aligned}$$

답 $9a^2-6ab+b^2-4c^2$

0059 $(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)$

$=\{(x-3)(x+2)\}\{(x-2)(x+1)\}$

$=(x^2-x-6)(x^2-x-2)$ 상수항끼리의 합이 같아지도록 두 개씩 짝을 지어 곱한다. ⋯ ❶

$x^2-x=t$로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(t-6)(t-2)\\&=t^2-8t+12\\&=(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12\\&=x^4-2x^3+x^2-8x^2+8x+12\\&=x^4-2x^3-7x^2+8x+12\end{aligned}$$ ⋯ ❷

따라서 $a=-2$, $b=-7$, $c=8$이므로

$a-b-c=-3$ ⋯ ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ 공통부분이 생기도록 식을 변형할 수 있다.	30 %
❷ 공통부분을 t로 치환하여 식을 전개할 수 있다.	50 %
❸ $a-b-c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0060 $3+2k=a$, $3-2k=b$로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(a^3+b^3)^2-(a^3-b^3)^2\\&=a^6+2a^3b^3+b^6-(a^6-2a^3b^3+b^6)\\&=4a^3b^3\\&=4(3+2k)^3(3-2k)^3\\&=4\{(3+2k)(3-2k)\}^3\\&=4(9-4k^2)^3\\&=4\cdot\{9-4\cdot(\sqrt{2})^2\}^3=4\end{aligned}$$

답 ④

유형 05 곱셈 공식의 변형 ; x^2+y^2, x^3+y^3의 값

집중공략 본책 14쪽

x^2+y^2, x^3+y^3, x^4+y^4의 값을 구할 때에는 $x\pm y$, xy의 값을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

① $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(x-y)^2+2xy$

② $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

③ $x^4+y^4=(x^2)^2+(y^2)^2=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$
$=\{(x+y)^2-2xy\}^2-2x^2y^2$

0061 $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$에서

$3=2^2+2xy \qquad \therefore xy=-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore x^3-y^3&=(x-y)^3+3xy(x-y)\\&=2^3+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2\\&=5\end{aligned}$$

답 ⑤

0062 $x+y=4$, $xy=-2$이므로

$$\begin{aligned}\frac{y}{x}+\frac{x}{y}&=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}\\&=\frac{4^2-2\cdot(-2)}{-2}=-10\end{aligned}$$

답 -10

0063 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=3$에서 $\qquad \frac{a+b}{ab}=3$

$\frac{a+b}{2}=3 \qquad \therefore a+b=6$

따라서 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=6^2-4\cdot 2=28$이므로

$a-b=2\sqrt{7}$ ($\because a>b$) $a>b$이므로 $a-b>0$

답 ②

0064 $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$
$=\{(x+y)^2-2xy\}^2-2x^2y^2$ ⋯⋯ ㉠

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서

$10=2^3-3\cdot xy\cdot 2 \qquad \therefore xy=-\frac{1}{3}$

㉠에서

$x^4+y^4=\left\{2^2-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}^2-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{194}{9}$

따라서 $p=9$, $q=194$이므로 $\qquad p+q=203$

답 203

0065 $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{x^3+y^3}{xy}$
$=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

$x^2y^2=(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})=49-48=1$이므로

$xy=1$ ($\because x>0$, $y>0$)

$x^2+y^2=(7+4\sqrt{3})+(7-4\sqrt{3})=14$이므로

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=14+2\cdot 1=16$

$\therefore x+y=4$ ($\because x>0$, $y>0$) ⋯ ❷

따라서 ㉠에서 $\qquad \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{4^3-3\cdot 1\cdot 4}{1}=52$ ⋯ ❸

답 52

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	30 %
❷ xy, $x+y$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0066 $(x^2+y^2)(x^3+y^3)=x^5+x^2y^3+x^3y^2+y^5$
$=x^5+y^5+x^2y^2(x+y)$

이므로

$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)$ ⋯⋯ ㉠

이때

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=(x+y)^2-2xy\\&=(-1)^2-2\cdot(-3)=7,\\x^3+y^3&=(x+y)^3-3xy(x+y)\\&=(-1)^3-3\cdot(-3)\cdot(-1)=-10\end{aligned}$$

이므로 ㉠에서

$x^5+y^5=7\cdot(-10)-(-3)^2\cdot(-1)=-61$

한편

$$x^6+y^6=(x^3)^2+(y^3)^2=(x^3+y^3)^2-2x^3y^3$$
$$=(-10)^2-2\cdot(-3)^3=154$$

이므로 $x^5+y^5+x^6+y^6=93$ 답 ②

유형 06 곱셈 공식의 변형; $x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$의 값 본책 15쪽

$x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$, $x^3-\frac{1}{x^3}$의 값을 구할 때에는 $x\pm\frac{1}{x}$의 값을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

① $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$

② $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

③ $x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

0067 $x\neq0$이므로 $x^2-2x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$$x-2-\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x-\frac{1}{x}=2$$

$$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)=2^3+3\cdot2=14$$ 답 14

참고 $x=0$을 $x^2-2x-1=0$에 대입하면 $-1\neq0$이므로 $x\neq0$이다.

SSEN 특강

$x^2-px\pm1=0$ (p는 상수) 꼴의 등식이 주어지면 주어진 등식의 양변을 x로 나누어 $x\pm\frac{1}{x}=p$ 꼴로 변형한다.

0068 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=4+2=6$

그런데 $x>0$이므로 $x+\frac{1}{x}=\sqrt{6}$

$$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=(\sqrt{6})^3-3\cdot\sqrt{6}=3\sqrt{6}$$ 답 ①

0069 $x\neq0$이므로 $x^2-3x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$$x-3+\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x+\frac{1}{x}=3$$ ··· ❶

따라서

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7,$$
$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=3^3-3\cdot3=18$$ ··· ❷

이므로

$$x^3+3x^2-7+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}=x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7$$
$$=18+3\cdot7-7=32$$ ··· ❸

답 32

채점 기준	비율
❶ $x+\frac{1}{x}$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	30 %

0070 $\frac{x^6+2x^4+2x^2+1}{x^3}=x^3+2x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}$

$$=x^3+\frac{1}{x^3}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-\left(x+\frac{1}{x}\right) \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+4=(-4\sqrt{2})^2+4=36$이고 $x^2>0$이므로 $x^2+\frac{1}{x^2}=6$

$$\therefore \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=6+2=8$$

그런데 $x>0$이므로 $x+\frac{1}{x}=2\sqrt{2}$

따라서 ㉠에서

(주어진 식)$=(2\sqrt{2})^3-2\sqrt{2}=14\sqrt{2}$ 답 $14\sqrt{2}$

유형 07 곱셈 공식의 변형 ; $a^2+b^2+c^2$, $a^3+b^3+c^3$의 값 본책 16쪽

① $a^2+b^2+c^2$, $a+b+c$, $ab+bc+ca$ 중 어느 두 값을 알면 곱셈 공식

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

를 이용하여 나머지 한 값을 구할 수 있다.

② $a^3+b^3+c^3$의 값을 구할 때에는 곱셈 공식

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$=a^3+b^3+c^3-3abc$$

를 이용한다.

0071 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$$3^2=15+2(ab+bc+ca) \qquad \therefore ab+bc+ca=-3$$

$$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}$$
$$=\frac{-3}{-1}=3$$ 답 ⑤

0072 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$$(\sqrt{2})^2=a^2+b^2+c^2+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad \therefore a^2+b^2+c^2=3$$

$$\therefore a^3+b^3+c^3$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$$
$$=\sqrt{2}\cdot\left\{3-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}+3\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=\frac{7\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$ 답 ④

0073 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

$$=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}$$
$$=\frac{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}{(abc)^2}$$
$$=\frac{(ab+bc+ca)^2-2ab^2c-2bc^2a-2ca^2b}{(abc)^2}$$
$$=\frac{(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)}{(abc)^2} \quad \cdots\cdots ㉠$$ ··· ❶

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$4^2=6+2(ab+bc+ca) \qquad \therefore ab+bc+ca=5$

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{ab+bc+ca}{abc}$이므로

$\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{abc} \qquad \therefore abc=2$ ⋯ ❷

따라서 ㉠에서

$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{5^2-2\cdot2\cdot4}{2^2}=\dfrac{9}{4}$ ⋯ ❸

답 $\dfrac{9}{4}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	30 %
❷ $ab+bc+ca$, abc의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0074 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\dfrac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\dfrac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$ ⋯⋯ ㉠

$a-b=4$, $b-c=-1$을 변끼리 더하면

$a-c=3 \qquad \therefore c-a=-3$

따라서 ㉠에서

$(\text{주어진 식})=\dfrac{1}{2}\{4^2+(-1)^2+(-3)^2\}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot26=13$

답 13

유형 08 곱셈 공식을 이용한 수의 계산

본책 16쪽

곱셈 공식을 이용할 수 있도록 식을 변형하거나 하나의 수를 두 수의 합 또는 차로 나타낸다. 이때 반복되는 수는 같은 문자로 생각한다.

0075 $9\times11\times101\times10001$

$=(10-1)(10+1)(100+1)(10000+1)$

$=(10^2-1)(10^2+1)(10^4+1)$

$=(10^4-1)(10^4+1)$

$=10^8-1$

답 ②

0076 $a=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^4}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^8}\right)$

$=2\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^4}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^8}\right)$ $1=2\cdot\dfrac{1}{2}$

$=2\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^4}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^8}\right)$ $=2\left(1-\dfrac{1}{2}\right)$

$=2\left(1-\dfrac{1}{2^4}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^4}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^8}\right)$

$=2\left(1-\dfrac{1}{2^8}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^8}\right)$

$=2\left(1-\dfrac{1}{2^{16}}\right)$

따라서 $\dfrac{a}{2}=1-\dfrac{1}{2^{16}}$이므로

$\dfrac{1}{2^{16}}=\dfrac{2-a}{2} \qquad \therefore 2^{16}=\dfrac{2}{2-a}$

답 ②

0077 $198^2+299\times301=(200-2)^2+(300-1)(300+1)$

$=40000-800+4+90000-1$

$=129203$

이므로 여섯 자리 자연수이다. $\quad \therefore n=6$

답 ②

0078 $\sqrt{5051}=a$, $5050=b$로 놓으면 주어진 수는

$\dfrac{(a+b)^3-(a-b)^3}{b}$

$=\dfrac{(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)-(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)}{b}$

$=\dfrac{6a^2b+2b^3}{b}=6a^2+2b^2$

$=6\cdot5051+2\cdot5050^2$ ⋯ ❶

$6\cdot5051$의 일의 자리의 숫자는 6, $2\cdot5050^2$의 일의 자리의 숫자는 0이므로 구하는 일의 자리의 숫자는 $\quad 6+0=6$ ⋯ ❷

답 6

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	60 %
❷ 일의 자리의 숫자를 구할 수 있다.	40 %

참고 일의 자리의 숫자를 구하는 문제이므로 수를 모두 계산할 필요는 없다.

유형 09 다항식의 나눗셈; 몫과 나머지

본책 17쪽

다항식의 나눗셈은 각 다항식을 내림차순으로 정리한 후 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다.

0079

$$\begin{array}{r@{}l} & 2x-1 \\ x^2-x-1 \,\big) & 2x^3-3x^2+x-3 \\ & 2x^3-2x^2-2x \\ \hline & -x^2+3x-3 \\ & -x^2+x+1 \\ \hline & 2x-4 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=2x-1$, $R(x)=2x-4$이므로

$Q(2)+R(1)=3+(-2)=1$

답 1

0080 $a=2$, $b=2$, $c=5$, $d=-3$이므로

$a+b+c+d=6$

답 6

0081 ④

$$\begin{array}{r@{}l} & 2x+1 \\ 2x^2+2x-1 \,\big) & 4x^3+6x^2-x+1 \\ & 4x^3+4x^2-2x \\ \hline & 2x^2+x+1 \\ & 2x^2+2x-1 \\ \hline & -x+2 \end{array}$$

➡ 몫: $2x+1$, 나머지: $-x+2$

답 ④

0082

$$\begin{array}{r} x-1 \\ x^2+2x-1\overline{\smash{)}x^3+x^2-5x+4} \\ \underline{x^3+2x^2-x} \\ -x^2-4x+4 \\ \underline{-x^2-2x+1} \\ -2x+3 \end{array}$$

따라서 몫은 $x-1$, 나머지는 $-2x+3$이므로

$a=1,\ b=-1,\ c=-2,\ d=3$

$\therefore\ ab-cd=5$ 답 5

유형 10 다항식의 나눗셈; $A=BQ+R$ 집중공략 본책 17쪽

다항식 A를 다항식 $B(B\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$A=BQ+R$ (R는 상수 또는 (R의 차수)$<$(B의 차수))

0083 $x^4-3x^2+x-5=A(x^2-x+3)-7x+10$이므로

$$\begin{aligned} A(x^2-x+3)&=x^4-3x^2+x-5-(-7x+10) \\ &=x^4-3x^2+8x-15 \end{aligned}$$

$\therefore\ A=(x^4-3x^2+8x-15)\div(x^2-x+3)$

$$\begin{array}{r} x^2+x-5 \\ x^2-x+3\overline{\smash{)}x^4-3x^2+8x-15} \\ \underline{x^4-x^3+3x^2} \\ x^3-6x^2+8x \\ \underline{x^3-x^2+3x} \\ -5x^2+5x-15 \\ \underline{-5x^2+5x-15} \\ 0 \end{array}$$

$\therefore\ A=x^2+x-5$ 답 ③

0084 $P(x)=(x-2)(2x+3)+3=2x^2-x-3$ ⋯ ❶

$$\begin{array}{r} 2x-5 \\ x+2\overline{\smash{)}2x^2-x-3} \\ \underline{2x^2+4x} \\ -5x-3 \\ \underline{-5x-10} \\ 7 \end{array}$$

따라서 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫은 $2x-5$, 나머지는 7이다. ⋯ ❷

답 몫: $2x-5$, 나머지: 7

채점 기준	비율
❶ $P(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구할 수 있다.	60 %

0085

$$\begin{array}{r} x-1 \\ x^2-x+b\overline{\smash{)}x^3-2x^2+ax-3} \\ \underline{x^3-x^2+bx} \\ -x^2+(a-b)x-3 \\ \underline{-x^2+x-b} \\ (a-b-1)x-3+b \end{array}$$

이때 나머지가 0이어야 하므로 $a-b-1=0,\ -3+b=0$

따라서 $a=4,\ b=3$이므로 $ab=12$ 답 12

0086

$$\begin{array}{r} 2x^2+x-3 \\ x^2-x-1\overline{\smash{)}2x^4-x^3-6x^2+2x+5} \\ \underline{2x^4-2x^3-2x^2} \\ x^3-4x^2+2x \\ \underline{x^3-x^2-x} \\ -3x^2+3x+5 \\ \underline{-3x^2+3x+3} \\ 2 \end{array}$$

$\therefore\ 2x^4-x^3-6x^2+2x+5=(x^2-x-1)(2x^2+x-3)+2$

이때 $x^2-x-1=0$이므로 구하는 식의 값은 2이다. 답 ④

유형 11 몫과 나머지의 변형 본책 18쪽

다항식 $P(x)$를 $x-\frac{1}{a}$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$\begin{aligned} P(x)&=\left(x-\frac{1}{a}\right)Q(x)+R \\ &=\frac{1}{a}(ax-1)Q(x)+R \\ &=(ax-1)\cdot\frac{1}{a}Q(x)+R \end{aligned}$$

➡ $P(x)$를 $ax-1$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{a}Q(x)$, 나머지는 R이다.

0087 $P(x)$를 $x-\frac{1}{3}$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$$\begin{aligned} P(x)&=\left(x-\frac{1}{3}\right)Q(x)+R \\ &=\frac{1}{3}(3x-1)Q(x)+R \\ &=(3x-1)\cdot\frac{1}{3}Q(x)+R \end{aligned}$$

따라서 $P(x)$를 $3x-1$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{3}Q(x)$, 나머지는 R이다. 답 ②

0088 $P(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$$\begin{aligned} P(x)&=(ax+b)Q(x)+R \quad \cdots ❶ \\ &=a\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R \\ &=\left(x+\frac{b}{a}\right)\cdot aQ(x)+R \quad \cdots ❷ \end{aligned}$$

따라서 $P(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫은 $aQ(x)$, 나머지는 R이다. ⋯ ❸

답 몫: $aQ(x)$, 나머지: R

채점 기준	비율
❶ $P(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 식을 세울 수 있다.	30 %
❷ 식을 변형할 수 있다.	50 %
❸ $P(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구할 수 있다.	20 %

0089 $P(x)$를 $(x+1)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$\begin{aligned}P(x)&=(x+1)^3Q(x)+2x^2+ax+1\\&=(x+1)^3Q(x)+2(x^2+2x+1)+(a-4)x-1\\&=(x+1)^3Q(x)+2(x+1)^2+(a-4)x-1\\&=(x+1)^2\{(x+1)Q(x)+2\}+(a-4)x-1\end{aligned}$$

이때 $P(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+b$이므로

$a-4=1,\ -1=b \quad \therefore a=5,\ b=-1$

$\therefore a+b=4$ 답 ④

다른 풀이 $P(x)$를 $(x+1)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(x+1)^3Q(x)+2x^2+ax+1$

$(x+1)^3Q(x)$는 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로 $P(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 다항식 $2x^2+ax+1$을 $\underbrace{(x+1)^2}_{x^2+2x+1}$으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

$$\begin{array}{r|l} & 2\\ x^2+2x+1 & 2x^2+ax+1\\ & 2x^2+4x+2\\ \hline & (a-4)x-1\end{array}$$

이때 $P(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+b$이므로

$a-4=1,\ -1=b \quad \therefore a=5,\ b=-1$

0090 $P(x)$를 $2x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로 $\quad P(x)=(2x+1)Q(x)+R$

$$\begin{aligned}\therefore xP(x)&=x(2x+1)Q(x)+Rx\\&=2x\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+R\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}R\\&=\left(x+\frac{1}{2}\right)\{2xQ(x)+R\}-\frac{1}{2}R\end{aligned}$$

따라서 $xP(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $2xQ(x)+R$, 나머지는 $-\frac{1}{2}R$이다. 답 ③

유형 12 다항식의 연산의 도형에의 활용

집중공략 본책 19쪽

주어진 길이, 넓이, 부피 등을 문자로 나타내어 본다.
특히 직육면체가 주어진 경우 세 모서리의 길이를 각각 a, b, c라 하고 다음을 이용한다.
① 모든 모서리의 길이의 합: $4(a+b+c)$
② 대각선의 길이: $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
③ 겉넓이: $2(ab+bc+ca)$
④ 부피: abc

0091 직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 48이므로

$4(a+b+c)=48 \quad \therefore a+b+c=12$

또 대각선의 길이가 $3\sqrt{6}$이므로

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=3\sqrt{6} \quad \therefore a^2+b^2+c^2=54$

직육면체의 겉넓이는 $2(ab+bc+ca)$이고

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$12^2=54+2(ab+bc+ca) \quad \therefore 2(ab+bc+ca)=90$

따라서 구하는 겉넓이는 90이다. 답 90

0092 직사각형의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면 직사각형의 대각선의 길이가 17이므로

$\sqrt{a^2+b^2}=17 \quad \therefore a^2+b^2=289$ ⋯ ❶

또 둘레의 길이가 46이므로

$2(a+b)=46 \quad \therefore a+b=23$ ⋯ ❷

직사각형의 넓이는 ab이고 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$에서

$23^2=289+2ab, \quad 2ab=240$

$\therefore ab=120$

따라서 구하는 넓이는 120이다. ⋯ ❸

답 120

채점 기준	비율
❶ 대각선의 길이를 이용하여 식을 세울 수 있다.	30 %
❷ 둘레의 길이를 이용하여 식을 세울 수 있다.	30 %
❸ 직사각형의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

0093 주어진 등식에서

$\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}=\{c+(a-b)\}\{c-(a-b)\}$

$(a+b)^2-c^2=c^2-(a-b)^2$

$a^2+2ab+b^2-c^2=c^2-a^2+2ab-b^2$

$2(a^2+b^2)=2c^2 \quad \therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 △ABC는 ∠C=90°인 직각삼각형이다. 답 ⑤

0094 직육면체의 높이를 A라 하면

$(a-2)(a+3)A=a^3+5a^2-2a-24$

$(a^2+a-6)A=a^3+5a^2-2a-24$

$\therefore A=(a^3+5a^2-2a-24)\div(a^2+a-6)$

$$\begin{array}{r|l} & a\ +4\\ a^2+a-6 & a^3+5a^2-2a-24\\ & a^3+\ a^2-6a\\ \hline & 4a^2+4a-24\\ & 4a^2+4a-24\\ \hline & 0\end{array}$$

$\therefore A=a+4$

따라서 구하는 높이는 $a+4$이다. 답 $a+4$

다른 풀이 $a^3+5a^2-2a-24$에서 a^3의 계수가 1이므로 직육면체의 높이를 $a+k$ (k는 상수)라 하면

$(a-2)(a+3)(a+k)=a^3+5a^2-2a-24$

좌변의 전개식의 상수항이 -24이어야 하므로

$-6k=-24 \quad \therefore k=4$

따라서 구하는 높이는 $a+4$이다.

0095 구하는 입체도형의 부피는

$(x+2)^3\underline{-3\cdot x^2(x+2)+2\cdot x^3}$ 직육면체가 겹치는 부분을 3번 뺐으므로 2번을 더한다.

$=x^3+6x^2+12x+8-3x^3-6x^2+2x^3$

$=12x+8$ 답 ①

0096 $\overline{PR}=a$, $\overline{RC}=b$라 하면 △PRC의 넓이가 80이므로

$\frac{1}{2}ab=80 \quad \therefore ab=160$

$\overline{PC}=\overline{BC}=20$이므로 직각삼각형 PRC에서

$a^2+b^2=400$

$\overline{PS}=20-a$, $\overline{PQ}=\overline{RB}=20-b$이므로

$\square AQPS=(20-a)(20-b)=400-20(a+b)+ab$

이때 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=400+2\cdot160=720$이므로

$a+b=12\sqrt{5}$ ($\because a>0,\ b>0$)

$\therefore \square AQPS=400-20\cdot12\sqrt{5}+160$

$=560-240\sqrt{5}$

답 $560-240\sqrt{5}$

0097 1st $\overline{OC}=P$, $\overline{CD}=Q$라 하고 주어진 조건을 P, Q로 나타낸다.

$\overline{OC}=P$, $\overline{CD}=Q$라 하면 조건 (가)에서

$P+Q=x+y+3$ …… ㉠

$\overline{DA}=\overline{BC}=2\overline{OC}=2P$, $\overline{AB}=\overline{CD}=Q$, $\overline{BO}=\overline{OC}=P$이므로 조건 (나)에서

$2P+Q+P=3x+y+5$

$\therefore 3P+Q=3x+y+5$ …… ㉡

2nd P, Q를 x, y의 식으로 나타낸다.

㉡−㉠을 하면

$2P=2x+2$ $\quad\therefore P=x+1$

이것을 ㉠에 대입하면

$x+1+Q=x+y+3$ $\quad\therefore Q=y+2$

3rd 직사각형 ABCD의 넓이를 x, y의 식으로 나타낸다.

□ABCD의 넓이는

$2P\cdot Q=2(x+1)(y+2)$

답 ⑤

0098 1st $A+2B$, $B+C$, $C-A$를 구한다.

$A+2B=(x^2+1)+2(x^2-3x+4)=3x^2-6x+9$,

$B+C=(x^2-3x+4)+(2x^2-x+2)=3x^2-4x+6$,

$C-A=(2x^2-x+2)-(x^2+1)=x^2-x+1$ ⋯ ❶

2nd $a_0+a_1+\cdots+a_5+a_6$의 값을 구한다.

$P(x)=(A+2B)(B+C)(C-A)$

$=(3x^2-6x+9)(3x^2-4x+6)(x^2-x+1)$

이라 하면 다항식 $P(x)$의 전개식이 $a_6x^6+a_5x^5+\cdots+a_1x+a_0$이고 $a_0+a_1+\cdots+a_5+a_6$의 값은 $P(1)$의 값과 같으므로

$a_0+a_1+\cdots+a_5+a_6=P(1)=6\cdot5\cdot1=30$ ⋯ ❷

답 30

채점 기준	비율
❶ $A+2B$, $B+C$, $C-A$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $a_0+a_1+\cdots+a_5+a_6$의 값을 구할 수 있다.	60 %

0099 1st 조건 (가)를 이용하여 식을 세운 후 전개한다.

조건 (가)에 의하여 $x-3$, $y-3$, $2z-3$ 중 적어도 하나는 0이므로

$(x-3)(y-3)(2z-3)=0$,

즉 $(-3+x)(-3+y)(-3+2z)=0$

$(-3)^3+(x+y+2z)\cdot(-3)^2$

$+(xy+y\cdot2z+2z\cdot x)\cdot(-3)+xy\cdot2z=0$

$-27+9(x+y+2z)-3(xy+2yz+2zx)+2xyz=0$

2nd $10xyz$의 값을 구한다.

조건 (나)에서 $xy+2yz+2zx=3(x+y+2z)$이므로

$-27+9(x+y+2z)-3\cdot3(x+y+2z)+2xyz=0$

$-27+2xyz=0$ $\quad\therefore xyz=\dfrac{27}{2}$

$\therefore 10xyz=135$

답 135

0100 1st 조건 (나)의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하여 다항식 $f_6(x)$를 구한다.

$f_1(x)=x^3-6x^2+10$이므로

$f_2(x)=f_1(x+1)=(x+1)^3-6(x+1)^2+10$

$f_3(x)=f_2(x+2)=(x+3)^3-6(x+3)^2+10$

$f_4(x)=f_3(x+3)=(x+6)^3-6(x+6)^2+10$

$f_5(x)=f_4(x+4)=(x+10)^3-6(x+10)^2+10$

$f_6(x)=f_5(x+5)=\underbrace{(x+15)^3}_{x^3+3x^2\cdot15+3x\cdot15^2+15^3}-6(x+15)^2+10$

2nd $f_6(x)$의 x의 계수를 구한다.

$f_6(x)$의 x항은

$3x\cdot15^2-6\cdot2x\cdot15=675x-180x=495x$

이므로 x의 계수는 495이다.

답 ②

0101 1st 조건 (가), (나)를 이용하여 a, b를 각각 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

조건 (가)에서 $x^2+y^2=a$이므로

$a=(x+y)^2-2xy$ …… ㉠ ⋯ ❶

조건 (나)에서 $x^3+y^3=b(x+y)$이므로

$b(x+y)=(x+y)^3-3xy(x+y)$

그런데 x, y는 자연수이므로 $\quad x+y\neq0$

$\therefore b=(x+y)^2-3xy$ …… ㉡ ⋯ ❷

2nd xy의 값을 구한다.

㉠, ㉡을 조건 (다)의 식에 대입하면

$(x+y)^2-2xy-\{(x+y)^2-3xy\}=20$

$\therefore xy=20$ ⋯ ❸

3rd 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구한다.

자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(1, 20)$, $(2, 10)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(10, 2)$, $(20, 1)$

의 6개이다. ⋯ ❹

답 6

채점 기준	비율
❶ a를 x, y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ b를 x, y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ xy의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ 순서쌍 (x, y)의 개수를 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 조건 (나)에서 $x^3+y^3=b(x+y)$이므로

$b(x+y)=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$\therefore b=x^2-xy+y^2$ ($\because x+y\neq0$)

조건 (가)에서 $x^2+y^2=a$이므로 이를 위의 식에 대입하면

$b=a-xy$, $\quad xy=a-b$

$\therefore xy=20$ ($\because$ 조건 (다))

0102 1st xy의 값을 구한다.

주어진 두 식을 변끼리 곱하면

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{x}\right)=(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})$$

$$xy+\frac{1}{xy}+2=4 \qquad \therefore xy+\frac{1}{xy}=2$$

이때 $xy=t$로 놓으면 $\quad t+\frac{1}{t}=2, \quad t^2-2t+1=0$

$$(t-1)^2=0 \qquad \therefore t=1 \qquad \therefore xy=1$$

2nd $x+y$의 값을 구한다.

주어진 두 식을 변끼리 더하면

$$x+\frac{1}{y}+y+\frac{1}{x}=(4+2\sqrt{3})+(4-2\sqrt{3})$$

$$x+y+\frac{x+y}{xy}=8, \qquad 2(x+y)=8 \qquad \therefore x+y=4$$

3rd x^3+y^3의 값을 구한다.

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$
$$=4^3-3\cdot1\cdot4=52$$

답 52

0103

두 다항식 $A=x^3+\underbrace{2x^2+4x+6}_{2(x^2+2x+3)=2B}$, $B=x^2+2x+3$에 대하여 ❶A^3-8B^3을 계산한 식에서 ❷x^5의 계수를 p, ❸x^4의 계수를 q라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.

$A-2B$를 구한 후 ❶을 곱셈 공식을 이용하여 변형한 식에 대입하여 계산한다. 이 식에서 ❷, ❸의 항을 찾아 그 계수를 구한다.

1st A^3-8B^3을 x와 B에 대한 식으로 나타낸다.

$A=x^3+2(x^2+2x+3)=x^3+2B$이므로

$$A-2B=x^3$$

$$\therefore A^3-8B^3=(A-2B)^3+3A\cdot2B(A-2B)$$
$$=(x^3)^3+6ABx^3$$
$$=x^9+6(x^3+2B)Bx^3$$
$$=x^9+6x^6B+12x^3B^2$$

2nd p, q의 값을 구한다.

x^5항, x^4항은 $12x^3B^2$에서만 존재하므로

$$12x^3B^2=12x^3(x^2+2x+3)^2$$
$$=12x^3(x^2+2x+3)(x^2+2x+3)$$

의 전개식에서 x^5항은

$$12x^3(x^2\cdot3+2x\cdot2x+3\cdot x^2)=120x^5 \qquad \therefore p=120$$

또 x^4항은

$$12x^3(2x\cdot3+3\cdot2x)=144x^4 \qquad \therefore q=144$$

3rd $p+q$의 값을 구한다.

$p+q=264$

답 264

0104 1st $ab+bc+ca$의 값을 구한다.

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}$에서

$$\frac{11}{6}=\frac{ab+bc+ca}{6} \qquad \therefore ab+bc+ca=11$$

2nd $a+b+c$의 값을 구한다.

$$(a+b)(b+c)(c+a)$$
$$=(ab+ac+b^2+bc)(c+a)$$
$$=abc+a^2b+ac^2+a^2c+b^2c+ab^2+bc^2+abc$$
$$=a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc$$
$$=ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ca(a+b+c)-abc$$
$$=(ab+bc+ca)(a+b+c)-abc$$

이므로

$$60=11(a+b+c)-6 \qquad \therefore a+b+c=6$$

3rd $a^2+b^2+c^2$의 값을 구한다.

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$
$$=6^2-2\cdot11=14$$

답 ①

다른 풀이 $a+b+c=t$ (t는 상수)라 하면

$(a+b)(b+c)(c+a)=60$에서 $\quad (t-c)(t-a)(t-b)=60$

$$t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ca)t-abc=60$$

$$t^3-t^3+11t-6=60, \qquad 11t=66 \qquad \therefore t=6$$

0105 1st $x^2+1=A$, $x+1=B$로 놓고 주어진 식을 A, B로 나타낸다.

$x^2+x+2=(x^2+1)+(x+1)$에서 $x^2+1=A$, $x+1=B$로 놓으면

$$(x^2+x+2)^3=(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$
$$=A(A^2+3AB+3B^2)+B^3$$

2nd $R(5)$의 값을 구한다.

$(x^2+x+2)^3$을 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는 B^3, 즉 $(x+1)^3$을 x^2+1로 나누었을 때의 나머지와 같다.

이때 $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$이므로

$$\begin{array}{r} x+3 \\ x^2+1 \,\big)\, \overline{x^3+3x^2+3x+1} \\ \underline{x^3 +\ x } \\ 3x^2+2x+1 \\ \underline{3x^2 +3} \\ 2x-2 \end{array}$$

따라서 $R(x)=2x-2$이므로 $\quad R(5)=8$

답 ④

0106 1st $x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$을 (x에 대한 이차식)$=0$ 꼴로 변형한다.

$x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$에서 $\quad 2x-1=\sqrt{3}$

양변을 제곱하면 $\quad 4x^2-4x+1=3$

$$4x^2-4x-2=0 \qquad \therefore 2x^2-2x-1=0$$

2nd $4x^4-2x^3-5x+3$의 값을 구한다.

$4x^4-2x^3-5x+3$을 $2x^2-2x-1$로 나누면

$$\begin{array}{r} 2x^2+\ x+2 \\ 2x^2-2x-1 \,\big)\, \overline{4x^4-2x^3 -5x+3} \\ \underline{4x^4-4x^3-2x^2 } \\ 2x^3+2x^2-5x \\ \underline{2x^3-2x^2-\ x } \\ 4x^2-4x+3 \\ \underline{4x^2-4x-2} \\ 5 \end{array}$$

$\therefore 4x^4-2x^3-5x+3=(2x^2-2x-1)(2x^2+x+2)+5$

이때 $2x^2-2x-1=0$이므로 구하는 식의 값은 5이다. 답 5

0107 (1st) 다항식의 나눗셈에 대한 등식을 세운다.

$P(x)$를 x^2+9로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$P(x)=(x^2+9)Q(x)+x+3$$

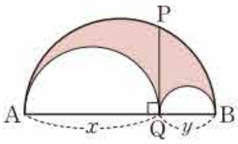
(2nd) $R(-1)$의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}&\{P(x)\}^2\\&=\{(x^2+9)Q(x)+(x+3)\}^2\\&=\{(x^2+9)Q(x)\}^2+2(x^2+9)(x+3)Q(x)+(x+3)^2\\&=\{(x^2+9)Q(x)\}^2+2(x^2+9)(x+3)Q(x)+x^2+6x+9\\&=(x^2+9)[(x^2+9)\{Q(x)\}^2+2(x+3)Q(x)+1]+6x\end{aligned}$$

따라서 $R(x)=6x$이므로 $\quad R(-1)=-6$ 답 -6

0108 (1st) $\overline{AQ}=x$, $\overline{QB}=y$라 하고 S_1을 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

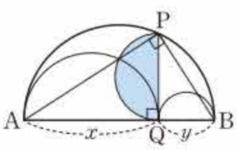
오른쪽 그림과 같이 $\overline{AQ}=x$, $\overline{QB}=y$라 하면



$$\begin{aligned}&S_1\\&=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\\&\quad-\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{y}{2}\right)^2\\&=\frac{\pi}{8}\{(x^2+2xy+y^2)-x^2-y^2\}\\&=\frac{\pi}{4}xy\end{aligned}$$

(2nd) S_2를 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$를 그으면 $\angle APB=90°$이므로



$\triangle PAQ \backsim \triangle BPQ$ (AA 닮음)

$\overline{AQ}:\overline{PQ}=\overline{PQ}:\overline{BQ}$이므로

$$\overline{PQ}^2=\overline{AQ}\times\overline{BQ}=xy$$

$$\therefore S_2=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{\overline{PQ}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{xy}{4}=\frac{\pi}{8}xy$$

(3rd) $\overline{AB}$의 길이를 구한다.

$\overline{AQ}-\overline{QB}=8\sqrt{3}$에서 $\quad x-y=8\sqrt{3}$

$S_1-S_2=2\pi$에서

$$\frac{\pi}{4}xy-\frac{\pi}{8}xy=2\pi \qquad \therefore xy=16$$

$\overline{AB}=x+y$이므로

$$\begin{aligned}(x+y)^2&=(x-y)^2+4xy\\&=(8\sqrt{3})^2+4\cdot16=256\end{aligned}$$

$\therefore x+y=16 \ (\because x>0,\ y>0)$

따라서 $\overline{AB}$의 길이는 16이다. 답 16

0109 (1st) 큰 정육면체와 작은 정육면체의 한 모서리의 길이를 각각 x, y라 하고 식을 세운다.

큰 정육면체와 작은 정육면체의 한 모서리의 길이를 각각 x, y라 하면 한 모서리의 길이의 차가 4이므로 $\quad x-y=4$ ($x>y$)

두 정육면체의 부피의 차가 100이므로 $\quad x^3-y^3=100$

이때 $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$이므로

$$100=4^3+3xy\cdot4 \qquad \therefore xy=3$$

(2nd) 두 정육면체의 겉넓이의 합을 구한다.

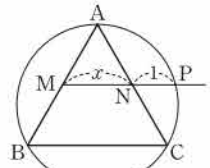
두 정육면체의 겉넓이의 합은

$$\begin{aligned}6x^2+6y^2&=6(x^2+y^2)=6\{(x-y)^2+2xy\}\\&=6\cdot(4^2+2\cdot3)=132\end{aligned}$$

답 ③

0110

❶ 정삼각형 ABC에서 두 변 AB와 AC의 중점을 각각 M, N이라 하자. 그림과 같이 ❷ 점 P는 반직선 MN이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점이고 ❸ $\overline{NP}=1$이다.

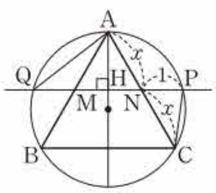


❹ $\overline{MN}=x$라 할 때, $10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$의 값을 구하시오.

❶, ❷를 이용하여 ❸, ❹와 길이가 같은 선분을 찾는다. 닮음인 두 삼각형을 찾아 대응변의 길이의 비가 일정함을 이용하여 식을 세운다.

(1st) 길이가 1인 선분과 길이가 x인 선분을 찾는다.

오른쪽 그림과 같이 반직선 NM이 $\triangle ABC$의 외접원과 만나는 점을 Q라 하자.



$\overline{AM}=\overline{AN}$, $\angle MAN=60°$이므로

$\triangle AMN$은 정삼각형이다.

AB=AC이므로
2AM=2AN
∴ AM=AN

$\therefore \overline{CN}=\overline{AN}=\overline{MN}=x$

점 A에서 $\overline{MN}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle AMH\equiv\triangle ANH$ (RHS 합동)이므로 $\quad \overline{MH}=\overline{NH}$

또 직선 AH는 원의 중심을 지나므로 $\quad \overline{QH}=\overline{PH}$

$\therefore \overline{QM}=\overline{QH}-\overline{MH}=\overline{PH}-\overline{NH}=\overline{NP}=1$

(2nd) 닮음인 두 삼각형을 찾는다.

$\triangle AQN$과 $\triangle PCN$에서

$\angle ANQ=\angle PNC$ (맞꼭지각),

$\angle AQN=\angle PCN$ ($\widehat{AP}$에 대한 원주각)

이므로 $\quad \triangle AQN\backsim\triangle PCN$ (AA 닮음)

(3rd) 닮음비를 이용하여 x에 대한 식을 구한다.

$\overline{QN}:\overline{CN}=\overline{AN}:\overline{PN}$이므로

$$(1+x):x=x:1$$

$$1+x=x^2 \qquad \therefore x^2-x-1=0$$

(4th) $10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$의 값을 구한다.

$x\neq0$이므로 $x^2-x-1=0$의 양변을 x로 나누면

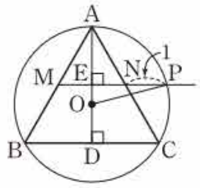
$$x-1-\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x-\frac{1}{x}=1$$

따라서 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=1^2+2=3$이므로

$$10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=30$$

답 30

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 외접원의 중심을 O라 하고 직선 AO와 $\overline{BC}$, $\overline{MN}$의 교점을 각각 D, E라 하면 $\triangle ABC$는 정삼각형이므로



$\overline{AE}\perp\overline{MN}$, $\overline{AD}\perp\overline{BC}$

이때 $\triangle ABC$의 한 변의 길이가 $\underbrace{2x}_{\overline{AN}+\overline{CN}=x+x=2x}$이므로

$$\overline{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2x=\sqrt{3}x$$

따라서 $\overline{OP}=\overline{AO}=\frac{2}{3}\overline{AD}=\frac{2\sqrt{3}}{3}x$,

$\overline{OE}=\overline{DE}-\overline{DO}=\frac{1}{2}\overline{AD}-\frac{1}{3}\overline{AD}=\frac{1}{6}\overline{AD}=\frac{\sqrt{3}}{6}x$이고

$\overline{PE}=\overline{NP}+\underbrace{\overline{NE}}_{\overline{NE}=\frac{1}{2}\overline{MN}}=1+\frac{x}{2}$이므로 직각삼각형 OPE에서

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)^2+\left(1+\frac{x}{2}\right)^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x\right)^2$$

$$\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{4}x^2+x+1=\frac{4}{3}x^2 \qquad \therefore\ x^2-x-1=0$$

0111 **1st** 직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하고 식을 세운다.

[그림 1]의 직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하면 [그림 1]의 직육면체와 [그림 2]의 입체도형의 겉넓이는 같으므로

$$2(ab+bc+ca)=236 \qquad \therefore\ ab+bc+ca=118$$

[그림 2]의 입체도형의 모든 모서리의 길이의 합이 82이므로

$$4(a+b+c)+6=82 \qquad \therefore\ a+b+c=19$$

2nd 직육면체의 대각선의 길이를 구한다.

구하는 대각선의 길이는

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}$$
$$=\sqrt{19^2-2\cdot 118}=5\sqrt{5}$$

답 ②

0112 **1st** 세 구의 반지름의 길이를 각각 a, b, c라 하고 식을 세운다.

세 구의 반지름의 길이를 각각 a, b, c라 하면

$$a+b+c=9$$

세 구의 겉넓이의 합이 116π이므로

$$4\pi(a^2+b^2+c^2)=116\pi$$
$$\therefore\ a^2+b^2+c^2=29$$

세 구의 부피의 합이 132π이므로

$$\frac{4}{3}\pi(a^3+b^3+c^3)=132\pi$$
$$\therefore\ a^3+b^3+c^3=99$$

2nd 세 구의 반지름의 길이의 곱을 구한다.

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$$9^2=29+2(ab+bc+ca)$$
$$\therefore\ ab+bc+ca=26$$

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$에서

$$9\cdot(29-26)=99-3abc$$
$$\therefore\ abc=24$$

따라서 세 구의 반지름의 길이의 곱은 24이다.

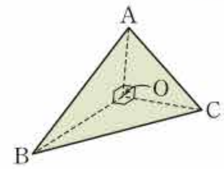
답 24

0113 **1st** $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$의 길이에 대한 식을 세운다.

$\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$라 하면 조건 (나)에서

$$a+b+c=13 \qquad \cdots ❶$$

조건 (가)에서 사면체 OABC는 오른쪽 그림과 같으므로 조건 (다)에서



$$\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}ca=27$$

$$\therefore\ ab+bc+ca=54 \qquad \cdots ❷$$

2nd $\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2$의 값을 구한다.

$$\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2=a^2+b^2+c^2$$
$$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$
$$=13^2-2\cdot 54=61 \qquad \cdots ❸$$

답 61

채점 기준	비율
❶ $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$라 하고 $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $ab+bc+ca$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0114 **1st** $\overline{CD}$의 길이를 구한다.

$2\overline{CD}+2(2x+5)=6x+12$이므로

$$\overline{CD}+2x+5=3x+6 \qquad \therefore\ \overline{CD}=x+1 \qquad \cdots ❶$$

2nd 색칠한 부분의 넓이를 식으로 나타낸다.

$\overline{PD}=P(x)$라 하면 색칠한 부분의 넓이가 $-x^3+14x+13$이고 $\triangle PCD\equiv\triangle PCD'$이므로

$$(2x+5)(x+1)-2\cdot\frac{1}{2}(x+1)P(x)=-x^3+14x+13$$

$\cdots ❷$

3rd $\overline{PD}$의 길이를 구한다.

$2x^2+7x+5-(x+1)P(x)=-x^3+14x+13$이므로

$$(x+1)P(x)=x^3+2x^2-7x-8$$
$$\therefore\ P(x)=(x^3+2x^2-7x-8)\div(x+1)$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+x-8 \\ \hline
x+1 & x^3+2x^2-7x-8 \\
 & x^3+x^2 \\ \hline
 & x^2-7x \\
 & x^2+x \\ \hline
 & -8x-8 \\
 & -8x-8 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

$$\therefore\ P(x)=x^2+x-8$$

따라서 $\overline{PD}$의 길이는 x^2+x-8이다. $\cdots ❸$

답 x^2+x-8

채점 기준	비율
❶ $\overline{CD}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❷ 색칠한 부분의 넓이에 대한 식을 세울 수 있다.	30 %
❸ $\overline{PD}$의 길이를 구할 수 있다.	40 %

I. 다항식

02 나머지 정리와 인수분해

0115 ㄷ. (우변)$=x(x-4)+5=x^2-4x+5=$(좌변)

ㄹ. (좌변)$=(x+1)^2-(x+1)=x^2+2x+1-(x+1)$

$=x^2+x=$(우변)

이상에서 x에 대한 항등식인 것은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ㄷ, ㄹ

0116 $a=0$, $b-7=0$, $c+3=0$이므로

$a=0$, $b=7$, $c=-3$ 답 $a=0$, $b=7$, $c=-3$

0117 $a-1=0$, $b+1=0$, $2+c=0$이므로

$a=1$, $b=-1$, $c=-2$ 답 $a=1$, $b=-1$, $c=-2$

0118 답 $a=1$, $b=0$, $c=5$

0119 $a+b=1$, $b+2=0$, $c-5=1$이므로

$a=3$, $b=-2$, $c=6$ 답 $a=3$, $b=-2$, $c=6$

0120 주어진 등식의 양변에 $x=-2$, $x=0$, $x=3$을 각각 대입하면

간단한 식을 얻을 수 있는 수를 미정계수의 개수만큼 대입한다.

$10c=20$, $-6b=-6$, $15a=-15$

$\therefore a=-1$, $b=1$, $c=2$ 답 $a=-1$, $b=1$, $c=2$

0121 주어진 등식의 양변에 $x=0$, $x=1$, $x=2$를 각각 대입하면

$-c=-3$, $b=-2$, $2a+2b+c=1$

$\therefore a=1$, $b=-2$, $c=3$ 답 $a=1$, $b=-2$, $c=3$

다른 풀이 $ax(x-1)+bx+c(x-1)=ax^2+(-a+b+c)x-c$이므로

$ax^2+(-a+b+c)x-c=x^2-3$

이 등식이 x에 대한 항등식이 되어야 하므로

$a=1$, $-a+b+c=0$, $-c=-3$

$\therefore a=1$, $b=-2$, $c=3$

0122 $a-2=-1$, $b+4=1$, $c+1=7$이므로

$a=1$, $b=-3$, $c=6$ 답 $a=1$, $b=-3$, $c=6$

0123 $a(x+y)-b(x-y)+1=(a-b)x+(a+b)y+1$이므로

$(a-b)x+(a+b)y+1=3x-5y+c$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이 되어야 하므로

$a-b=3$, $a+b=-5$, $1=c$

$\therefore a=-1$, $b=-4$, $c=1$ 답 $a=-1$, $b=-4$, $c=1$

0124 답 (가) $-\dfrac{b}{a}$ (나) $\dfrac{b}{a}$

0125 $P(1)=4-2-1=1$ 답 1

0126 $P(-2)=16+4-1=19$ 답 19

0127 $P\left(-\frac{1}{2}\right)=1+1-1=1$ 답 1

0128 $P\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1=-\frac{5}{4}$ 답 $-\frac{5}{4}$

0129 $P(-3)=11$이므로 $-27+54+3k-1=11$

$3k=-15$ $\therefore k=-5$ 답 -5

0130 $P(-1)=0$이므로 $-3+k+6-4=0$

$\therefore k=1$ 답 1

0131 $P(2)=0$이므로 $24+4k-12-4=0$

$4k=-8$ $\therefore k=-2$ 답 -2

0132 $P(1)=0$, $P(-2)=0$이므로

$2+a+b-6=0$, $-16+4a-2b-6=0$

$\therefore a+b=4$, $2a-b=11$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=5$, $b=-1$ 답 $a=5$, $b=-1$

0133 $P(-1)=0$, $P(3)=0$이므로

$-2+a-b-6=0$, $54+9a+3b-6=0$

$\therefore a-b=8$, $3a+b=-16$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=-10$ 답 $a=-2$, $b=-10$

0134

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -2 & -5 & 3 \\ & & -2 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & \boxed{-3} \end{array}$$

$\therefore$ 몫: x^2-4x+3, 나머지: -3

답 몫: x^2-4x+3, 나머지: -3

0135

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 3 & -8 & 0 & -5 \\ & & 9 & 3 & 9 \\ \hline & 3 & 1 & 3 & \boxed{4} \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $3x^2+x+3$, 나머지: 4

답 몫: $3x^2+x+3$, 나머지: 4

0136 $2x-1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $2x^3+3x^2-6x+1$을 $x-\frac{1}{2}$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & 3 & -6 & 1 \\ & & 1 & 2 & -2 \\ \hline & 2 & 4 & -4 & \boxed{-1} \end{array}$$

$$2x^3+3x^2-6x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+4x-4)-1$$
$$=(2x-1)(x^2+2x-2)-1$$
따라서 몫은 x^2+2x-2이고 나머지는 -1이다.

답 몫: x^2+2x-2, 나머지: -1

0137 $a(x-y)-b(y-x)=a(x-y)+b(x-y)$
$=(a+b)(x-y)$

답 $(a+b)(x-y)$

0138 $(2x+y)^2-6x-3y=(2x+y)^2-3(2x+y)$
$=(2x+y)(2x+y-3)$

답 $(2x+y)(2x+y-3)$

0139 $1-m-n+mn=1-m-n(1-m)$
$=(1-m)(1-n)$ 답 $(1-m)(1-n)$

0140 $16a^2-24ab+9b^2=(4a)^2-2\cdot4a\cdot3b+(3b)^2$
$=(4a-3b)^2$ 답 $(4a-3b)^2$

0141 $27a^2-12b^2=3(9a^2-4b^2)=3\{(3a)^2-(2b)^2\}$
$=3(3a+2b)(3a-2b)$

답 $3(3a+2b)(3a-2b)$

0142 답 $(3a+7b)(a-b)$

0143 $a^2+b^2+4c^2+2ab+4bc+4ca$
$=a^2+b^2+(2c)^2+2ab+2\cdot b\cdot 2c+2\cdot 2c\cdot a$
$=(a+b+2c)^2$ 답 $(a+b+2c)^2$

0144 $x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2zx$
$=x^2+(-y)^2+z^2+2\cdot x\cdot(-y)+2\cdot(-y)\cdot z+2zx$
$=(x-y+z)^2$ 답 $(x-y+z)^2$

0145 $x^3+9x^2+27x+27=x^3+3\cdot x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 3^2+3^3$
$=(x+3)^3$ 답 $(x+3)^3$

0146 $-8a^3+36a^2b-54ab^2+27b^3$
$=(-2a)^3+3\cdot(-2a)^2\cdot 3b+3\cdot(-2a)\cdot(3b)^2+(3b)^3$
$=(-2a+3b)^3$ 답 $(-2a+3b)^3$

0147 $a^3+8=a^3+2^3=(a+2)(a^2-2a+4)$

답 $(a+2)(a^2-2a+4)$

0148 $27a^3-64b^3=(3a)^3-(4b)^3$
$=(3a-4b)(9a^2+12ab+16b^2)$

답 $(3a-4b)(9a^2+12ab+16b^2)$

0149 $x^4+4x^2y^2+16y^4$
$=x^4+x^2\cdot(2y)^2+(2y)^4$
$=(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

답 $(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

0150 $a^3+b^3+27c^3-9abc$
$=a^3+b^3+(3c)^3-3\cdot a\cdot b\cdot 3c$
$=(a+b+3c)(a^2+b^2+9c^2-ab-3bc-3ca)$

답 $(a+b+3c)(a^2+b^2+9c^2-ab-3bc-3ca)$

0151 $x+1=t$로 놓으면
$(x+1)^2-(x+1)-12=t^2-t-12$
$=(t+3)(t-4)$
$=(x+1+3)(x+1-4)$ 원래의 식을 반드시 대입한다.
$=(x+4)(x-3)$

답 $(x+4)(x-3)$

0152 $x^2-3x=t$로 놓으면
$(x^2-3x)(x^2-3x+5)+6=t(t+5)+6$
$=t^2+5t+6$
$=(t+2)(t+3)$
$=(x^2-3x+2)(x^2-3x+3)$
원래의 식을 대입한 후 인수분해가 가능하면 다시 인수분해한다.
$=(x-1)(x-2)(x^2-3x+3)$

답 $(x-1)(x-2)(x^2-3x+3)$

0153 $x^2=X$로 놓으면
$x^4-10x^2+9=X^2-10X+9$
$=(X-1)(X-9)$
$=(x^2-1)(x^2-9)$
$=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$

답 $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$

다른 풀이 $x^4-10x^2+9=(x^4-6x^2+9)-4x^2$
$=(x^2-3)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x-3)(x^2-2x-3)$
$=(x+3)(x-1)(x+1)(x-3)$
$=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$

0154 $x^4+6x^2+25=(x^4+10x^2+25)-4x^2$
$=(x^2+5)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x+5)(x^2-2x+5)$

답 $(x^2+2x+5)(x^2-2x+5)$

0155 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2+4xy+2x-4y-3$
$=4(x-1)y+x^2+2x-3$
$=4(x-1)y+(x+3)(x-1)$
$=(x-1)(x+4y+3)$ 답 $(x-1)(x+4y+3)$

0156 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&x^2-xy-2y^2+x+4y-2\\&=x^2-(y-1)x-2(y^2-2y+1)\\&=x^2-(y-1)x-2(y-1)^2\\&=\{x-2(y-1)\}\{x+(y-1)\}\\&=(x-2y+2)(x+y-1)\end{aligned}$$

답 $(x-2y+2)(x+y-1)$

참고 y에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해해도 그 결과는 같다.

0157 $P(x)=x^3-4x^2+x+6$이라 하면

$P(-1)=-1-4-1+6=0$

이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned}P(x)&=(x+1)(x^2-5x+6)\\&=(x+1)(x-2)(x-3)\end{aligned}$$

답 $(x+1)(x-2)(x-3)$

0158 $P(x)=x^4+5x^3+5x^2-5x-6$이라 하면

$P(1)=1+5+5-5-6=0$,

$P(-1)=1-5+5+5-6=0$

이므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 5 & 5 & -5 & -6 \\ & & 1 & 6 & 11 & 6 \\ \hline -1 & 1 & 6 & 11 & 6 & \boxed{0} \\ & & -1 & -5 & -6 & \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$\begin{aligned}\therefore P(x)&=(x-1)(x+1)(x^2+5x+6)\\&=(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)\end{aligned}$$

답 $(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$

유형 01 계수 비교법 본책 28쪽

계수 비교법은 다음과 같은 경우에 이용한다.
① 양변을 내림차순으로 정리하기 쉬운 경우
② 식이 간단하여 전개하기 쉬운 경우

0159 $x^3+ax^2-36=(x+c)(x^2+bx-12)$에서

$x^3+ax^2-36=x^3+(b+c)x^2+(bc-12)x-12c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=b+c$, $0=bc-12$, $-36=-12c$

$\therefore a=7$, $b=4$, $c=3$

$\therefore a+b+c=14$

답 ③

0160 $a(x-2y)+b(x+y)-1=5x-y+c$에서

$(a+b)x+(-2a+b)y-1=5x-y+c$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a+b=5$, $-2a+b=-1$, $-1=c$

$\therefore a=2$, $b=3$, $c=-1$

$\therefore abc=-6$

답 -6

0161 $f(x)=x^3+2x^2-4x+1$에서

$$\begin{aligned}&f(x+a)\\&=(x+a)^3+2(x+a)^2-4(x+a)+1\\&=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3+2x^2+4ax+2a^2-4x-4a+1\\&=x^3+(3a+2)x^2+(3a^2+4a-4)x+a^3+2a^2-4a+1\end{aligned}$$ ···➊

이므로

$$\begin{aligned}&x^3+(3a+2)x^2+(3a^2+4a-4)x+a^3+2a^2-4a+1\\&=x^3-x^2+bx+6\end{aligned}$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$3a+2=-1$, $3a^2+4a-4=b$, $a^3+2a^2-4a+1=6$

$\therefore a=-1$, $b=-5$ ···➋

$\therefore a-b=4$ ···➌

답 4

채점 기준	비율
➊ $f(x)$를 $f(x+a)$로 변형할 수 있다.	40 %
➋ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
➌ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 02 수치 대입법 집중공략 본책 28쪽

수치 대입법은 다음과 같은 경우에 이용한다.
① 적당한 값을 대입하면 식이 간단해지는 경우
② 식이 길고 복잡하여 전개하기 어려운 경우

0162 주어진 등식의 양변에 $x=0$, $x=1$, $x=2$를 각각 대입하면

$4=2b$, $-1=-c$, $-2=2a$

$\therefore a=-1$, $b=2$, $c=1$

$\therefore a-b+c=-2$

답 ①

0163 주어진 등식의 양변에 $x=-2$, $x=-1$을 각각 대입하면

└ $x+2$의 값이 1이 되는 값을 대입하면 식이 간단해진다.

$-8+4a-2(a-1)+10=0$,

$-1+a-(a-1)+10=1+b+5$

이므로

$2a+4=0$, $10=b+6$

$\therefore a=-2$, $b=4$

$\therefore ab=-8$

답 ⑤

다른 풀이 $x^3+ax^2+(a-1)x+10=(x+2)(x^2-bx+5)$에서

$$\begin{aligned}&x^3+ax^2+(a-1)x+10\\&=x^3+(2-b)x^2+(5-2b)x+10\end{aligned}$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=2-b$, $a-1=5-2b$

$\therefore a+b=2$, $a+2b=6$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=4$

$\therefore ab=-8$

0164 주어진 등식의 좌변의 x^3의 계수는 1이고, 우변의 전개식에서 x^3의 계수는 c이므로

$c=1$

즉 주어진 등식은

$x^3+ax^2-9x+b=(x-3)(x+3)(x+2)$

이 등식의 양변에 $x=0$, $x=3$을 각각 대입하면

$b=-18$, $27+9a-27+b=0$

$\therefore a=2, b=-18$

$\therefore a+b+c=-15$ 답 -15

0165 주어진 등식의 양변에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면

$16=1+4+a-b+1$, $0=1-4+a+b+1$

$\therefore a-b=10, a+b=2$

$\therefore a^2-b^2=(a+b)(a-b)=2\cdot 10=20$ 답 20

0166 주어진 등식의 양변에 $x=-2$, $x=\sqrt{2}$를 각각 대입하면

$0=16-4a+b$, $0=4-2a+b$

$\therefore 4a-b=16, 2a-b=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=6, b=8$ ➊

즉 주어진 등식은

$(x+2)(x^2-2)P(x)=x^4-6x^2+8$

양변에 $x=3$을 대입하면 $5\cdot 7\cdot P(3)=81-54+8$

$35P(3)=35 \quad \therefore P(3)=1$ ➋

답 1

채점 기준	비율
➊ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
➋ $P(3)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

유형 03 항등식의 성질

집중 공략 본책 29쪽

- 모든 x에 대하여 성립하는 등식
- 임의의 x에 대하여 성립하는 등식
- x의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식

➡ x에 대한 항등식을 나타내므로

$Ax+B=0$ (A, B는 다항식)

꼴로 정리하여 $A=0$, $B=0$임을 이용한다.

0167 $kx^2+x+ky^2+y-13k+1=0$을 k에 대하여 정리하면

$(x^2+y^2-13)k+x+y+1=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x^2+y^2-13=0$, $x+y+1=0$

$\therefore x^2+y^2=13, x+y=-1$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로

$13=1-2xy \quad \therefore xy=-6$ 답 ①

0168 주어진 이차방정식이 1을 근으로 가지므로

$1+(k-2)+(k+3)m+n+1=0$

$\therefore (1+m)k+3m+n=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$1+m=0$, $3m+n=0 \quad \therefore m=-1, n=3$

$\therefore m-n=-4$ 답 ②

0169 $x-y=1$에서 $y=x-1$

이것을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$px^2+qx+(x-1)^2-2x(x-1)+r(x-1)+2=0$

$\therefore (p-1)x^2+(q+r)x+3-r=0$ ➊

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$p-1=0$, $q+r=0$, $3-r=0$

$\therefore p=1, q=-3, r=3$ ➋

$\therefore pqr=-9$ ➌

답 -9

채점 기준	비율
➊ 주어진 등식의 좌변을 x에 대하여 정리할 수 있다.	40 %
➋ p, q, r의 값을 구할 수 있다.	40 %
➌ pqr의 값을 구할 수 있다.	20 %

0170 $\dfrac{ax+by+1}{x+2y-3}=k$ (k는 상수)라 하면

$ax+by+1=k(x+2y-3)$

$\therefore (a-k)x+(b-2k)y+1+3k=0$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a-k=0$, $b-2k=0$, $1+3k=0$

$\therefore k=-\dfrac{1}{3}, a=-\dfrac{1}{3}, b=-\dfrac{2}{3}$

$\therefore a+b=-1$ 답 -1

유형 04 항등식에서 계수의 합 구하기

본책 29쪽

주어진 등식의 양변에 적당한 수를 대입하여 계수에 대한 식으로 나타낸다.

➡ 등식 $(x+a)^n=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_0$에서

① 양변에 $x=0$을 대입하면 $a^n=a_0$

② 양변에 $x=1$을 대입하면

$(1+a)^n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_0$

0171 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$4^3=a_6+a_5+\cdots+a_1+a_0$ ...... ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$8^3=a_6-a_5+\cdots-a_1+a_0$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면

$64+512=2(a_6+a_4+a_2+a_0)$

$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6=288$ 답 ⑤

0172 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$a_0-a_1+a_2-\cdots+a_8=2^4=16$ 답 16

0173 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$3^5=a_0$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$4^5=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{10}=4^5-a_0=1024-243=781$ 답 781

0174 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^{10}+1=a_{10}+a_9+\cdots+a_1+a_0$ …… ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$(-3)^{10}+1=a_{10}-a_9+\cdots-a_1+a_0$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$3^{10}+3=2(a_{10}+a_8+a_6+a_4+a_2+a_0)$

$\therefore a_{10}+a_8+a_6+a_4+a_2+a_0=\dfrac{3^{10}+3}{2}=\dfrac{3(3^9+1)}{2}$ 답 ⑤

유형 05 다항식의 나눗셈과 항등식 본책 30쪽

다항식 $A(x)$를 다항식 $B(x)$ $(B(x)\neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하면

$A(x)=B(x)Q(x)+R(x)$

가 성립하고, 이 등식은 x에 대한 항등식이다.

0175 x^3+ax^2+b를 x^2-x+2로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면

$x^3+ax^2+b=(x^2-x+2)(x+c)$

$=x^3+(c-1)x^2+(-c+2)x+2c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=c-1,\ 0=-c+2,\ b=2c$

$\therefore a=1,\ b=4,\ c=2$

$\therefore ab=4$ 답 4

참고 x^3+ax^2+b의 최고차항의 계수가 1, x^2-x+2의 최고차항의 계수가 1이므로 몫은 $x+c$ (c는 상수) 꼴이다.

0176 x^3+ax+b를 x^2+3x-2로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면

$x^3+ax+b=(x^2+3x-2)(x+c)+2$

$=x^3+(c+3)x^2+(3c-2)x-2c+2$ ⋯ ❶

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$0=c+3,\ a=3c-2,\ b=-2c+2$

$\therefore a=-11,\ b=8,\ c=-3$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=-3$ ⋯ ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ 나눗셈에 대한 등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0177 $3x^3+a$를 x^2+x+b로 나누었을 때의 몫을 $3x+c$ (c는 상수)라 하면

$3x^3+a=(x^2+x+b)(3x+c)$

$=3x^3+(c+3)x^2+(c+3b)x+bc$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$0=c+3,\ 0=c+3b,\ a=bc$

$\therefore a=-3,\ b=1,\ c=-3$

$\therefore a^2+b^2=10$ 답 10

0178 $x^4+ax^3+bx-11$을 x^2-2x+4로 나누었을 때의 몫을 x^2+cx+d (c, d는 상수)라 하면

$x^4+ax^3+bx-11=(x^2-2x+4)(x^2+cx+d)+x-3$

$=x^4+(c-2)x^3+(d-2c+4)x^2$

$+(-2d+4c+1)x+4d-3$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=c-2,\ 0=d-2c+4,\ b=-2d+4c+1,\ -11=4d-3$

$\therefore a=-1,\ b=9,\ c=1,\ d=-2$

$\therefore a-b=-10$ 답 ②

유형 06~07 일차식으로 나누었을 때의 나머지 집중 공략 본책 30쪽

다항식 $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지 ➡ $P(a)$

0179 나머지 정리에 의하여 $P(2)=3,\ Q(2)=-1$

따라서 구하는 나머지는

$3P(2)-4Q(2)=3\cdot 3-4\cdot(-1)=13$ 답 13

0180 나머지 정리에 의하여 $P(3)=7$

따라서 구하는 나머지는 $4P(3)=4\cdot 7=28$ 답 ④

0181 나머지 정리에 의하여

$P(5)+3Q(5)=-4,\ 2P(5)-Q(5)=6$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $P(5)=2,\ Q(5)=-2$

따라서 구하는 나머지는

$P(5)Q(5)=2\cdot(-2)=-4$ 답 -4

0182 $P(x)=x^4+ax^3+bx^2-3$이라 하면 나머지 정리에 의하여 $P(1)=4,\ P(-1)=-4$이므로

$1+a+b-3=4,\ 1-a+b-3=-4$

$\therefore a+b=6,\ -a+b=-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=2$

$\therefore ab=8$ 답 ④

0183 $P(x)=x^3+ax^2-3x+2$라 하면 나머지 정리에 의하여 $P(-1)=P(3)$이므로

$-1+a+3+2=27+9a-9+2$

$-8a=16$ $\therefore a=-2$ 답 ②

0184 $P(x)=ax^7+bx^5+cx^3+dx+2$라 하면 나머지 정리에 의하여 $P(1)=7$이므로

$a+b+c+d+2=7$ $\therefore a+b+c+d=5$ ⋯ ❶

따라서 구하는 나머지는

$P(-1)=-a-b-c-d+2$

$=-(a+b+c+d)+2$

$=-5+2=-3$ ⋯ ❷

답 -3

02 나머지 정리와 인수분해

채점 기준	비율
❶ $a+b+c+d$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 다항식을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	50 %

0185 $P(x)=2x^2+kx-5$라 하면 나머지 정리에 의하여

$R_1=P(3)=3k+13$, $R_2=P(-3)=-3k+13$

$R_1R_2=25$이므로 $(3k+13)(-3k+13)=25$

$169-9k^2=25$, $k^2=16$

$\therefore k=4\ (\because k>0)$ 답 4

0186 $Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여 $Q(3)$이고 조건 ㈎에서

$Q(3)=18P(3)$ ...... ㉠

조건 ㈎, ㈏에 의하여

$2x^2P(x)+(4x^2-6x)P(x)=x^3+ax^2-5x+b$

$6x(x-1)P(x)=x^3+ax^2-5x+b$

양변에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면

$0=b$, $0=1+a-5+b$

$\therefore a=4$, $b=0$

즉 $6x(x-1)P(x)=x^3+4x^2-5x$이므로 양변에 $x=3$을 대입하면

$36P(3)=48$ $\therefore P(3)=\frac{4}{3}$

따라서 ㉠에서 구하는 나머지는

$Q(3)=18\cdot\frac{4}{3}=24$ 답 24

유형 08 이차식으로 나누었을 때의 나머지 집중공략 본책 31쪽

다항식 $P(x)$를 이차식 $(x-\alpha)(x-\beta)$로 나누었을 때의 나머지
➡ 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하고 $P(\alpha)$, $P(\beta)$의 값을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

0187 나머지 정리에 의하여 $P(1)=-1$, $P(-2)=-7$

$P(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2+x-2)Q(x)+ax+b$

$=(x+2)(x-1)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=1$, $x=-2$를 각각 대입하면

$P(1)=a+b$, $P(-2)=-2a+b$

$\therefore a+b=-1$, $-2a+b=-7$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

따라서 $R(x)=2x-3$이므로 $R(2)=1$ 답 1

0188 나머지 정리에 의하여 $P(1)=2$, $P(-1)=4$

$(x^2+x+1)P(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$(x^2+x+1)P(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$

$=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=1$, $x=-1$을 각각 대입하면

$3P(1)=a+b$, $P(-1)=-a+b$

$\therefore a+b=6$, $-a+b=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=5$

따라서 구하는 나머지는 $x+5$이다. 답 $x+5$

0189 $P(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$P(x)=(x^2-4)Q_1(x)+x+1$

$=(x+2)(x-2)Q_1(x)+x+1$ ...... ㉠

$P(x)$를 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$P(x)=(x^2+2x-3)Q_2(x)-x+2$

$=(x+3)(x-1)Q_2(x)-x+2$ ...... ㉡

$P(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$

$=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$ ...... ㉢

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $P(2)=3$

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면 $P(1)=1$

㉢의 양변에 $x=1$, $x=2$를 각각 대입하면

$P(1)=a+b$, $P(2)=2a+b$

$\therefore a+b=1$, $2a+b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-1$

따라서 구하는 나머지는 $2x-1$이다. 답 ③

0190 $P(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-4x+3)Q(x)+ax+b$

$=(x-1)(x-3)Q(x)+ax+b$ ...... ㉠ ⋯ ❶

조건 ㈏의 양변에 $x=1$을 대입하면

$P(1)+P(1)=6$ $\therefore P(1)=3$ ⋯ ❷

조건 ㈏의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$P(-1)+P(3)=6$, $-7+P(3)=6\ (\because$ 조건 ㈎$)$

$\therefore P(3)=13$ ⋯ ❸

㉠의 양변에 $x=1$, $x=3$을 각각 대입하면

$P(1)=a+b$, $P(3)=3a+b$

$\therefore a+b=3$, $3a+b=13$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=5$, $b=-2$

따라서 $R(x)=5x-2$이므로

$R(5)=23$ ⋯ ❹

답 23

채점 기준	비율
❶ 나눗셈에 대한 등식을 세울 수 있다.	30 %
❷ $P(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $P(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $R(5)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 09 삼차식으로 나누었을 때의 나머지 본책 32쪽

다항식 $P(x)$를 삼차식 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$로 나누었을 때의 나머지
➡ 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하고 $P(\alpha)$, $P(\beta)$, $P(\gamma)$의 값을 이용하여 a, b, c의 값을 구한다.

0191 $x^{15}-x^{10}+x^5-1$을 x^3-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$x^{15}-x^{10}+x^5-1$
$=(x^3-x)Q(x)+ax^2+bx+c$
$=x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면
$-1=c$
㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$-4=a-b+c$ $\quad\therefore a-b=-3$ ...... ㉡
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$0=a+b+c$ $\quad\therefore a+b=1$ ...... ㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$a=-1$, $b=2$
따라서 $R(x)=-x^2+2x-1$이므로
$R(-2)=-9$ 답 ③

SSEN 특강 다항식의 나눗셈에서의 나머지

다항식 $P(x)$를 $A(x)$로 나누었을 때의 나머지 $R(x)$는
① $A(x)$가 일차식 ➡ $R(x)$는 상수
➡ $R(x)=a$ (단, a는 상수)
② $A(x)$가 이차식 ➡ $R(x)$는 상수이거나 일차식
➡ $R(x)=ax+b$ (단, a, b는 상수)
③ $A(x)$가 삼차식 ➡ $R(x)$는 상수이거나 이차 이하의 다항식
➡ $R(x)=ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 상수)

0192 $P(x)$를 $x(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면
$P(x)=x(x-1)Q_1(x)+2x-1$ ...... ㉠
$P(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면
$P(x)=(x-1)(x-2)Q_2(x)+4x-3$ ...... ㉡
$P(x)$를 $x(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면
$P(x)=x(x-1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$ ...... ㉢
㉠의 양변에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면
$P(0)=-1$, $P(1)=1$
㉡의 양변에 $x=2$를 대입하면
$P(2)=5$
㉢의 양변에 $x=0$, $x=1$, $x=2$를 각각 대입하면
$P(0)=c$, $P(1)=a+b+c$, $P(2)=4a+2b+c$
$-1=c$, $1=a+b+c$, $5=4a+2b+c$
$\therefore a=1$, $b=1$, $c=-1$
따라서 구하는 나머지는 x^2+x-1이다. 답 x^2+x-1

0193 $P(x)$를 $(x-1)^2(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면
$P(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$ ...... ㉠
$P(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+2$이므로 ㉠에서 ax^2+bx+c를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+2$이다.
$\therefore ax^2+bx+c=a(x-1)^2+x+2$
이것을 ㉠에 대입하면
$P(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+a(x-1)^2+x+2$
한편 나머지 정리에 의하여 $P(2)=3$이므로
$a+4=3$ $\quad\therefore a=-1$
따라서 구하는 나머지는
$-(x-1)^2+x+2=-x^2+3x+1$ 답 ③

유형 10 $P(ax+b)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지 본책 32쪽

다항식 $P(ax+b)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지
➡ $P(a\alpha+b)$

0194 $P(x)$를 $2x^2+x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면
$P(x)=(2x^2+x-3)Q(x)+x+6$
$=(2x+3)(x-1)Q(x)+x+6$ ...... ㉠
$P(x+4)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는
$P(-3+4)=P(1)$
이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$P(1)=7$ 답 ②

다른 풀이 $P(x)$를 $2x^2+x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면
$P(x)=(2x^2+x-3)Q(x)+x+6$
$=(2x+3)(x-1)Q(x)+x+6$
양변에 x 대신 $x+4$를 대입하면
$P(x+4)=(2x+11)(x+3)Q(x+4)+x+10$
이때 $(2x+11)(x+3)Q(x+4)$는 $x+3$으로 나누어떨어지므로 $P(x+4)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는 $x+10$을 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지와 같다.
따라서 구하는 나머지는 7이다.

0195 $P(x)$를 x^2-8x+7로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면
$P(x)=(x^2-8x+7)Q(x)+3x+1$
$=(x-1)(x-7)Q(x)+3x+1$ ...... ㉠
$(6x+1)P(4x+9)$를 $2x+1$로 나누었을 때의 나머지는
$\left\{6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right\}P\left(4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+9\right)=-2P(7)$ $2x+1=0$을 만족시키는 x의 값을 대입한다.
이때 ㉠의 양변에 $x=7$을 대입하면
$P(7)=22$
이므로 구하는 나머지는
$-2P(7)=-2\cdot22=-44$ 답 -44

0196 $P(x+1004)$를 $x+1005$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로

$P(-1005+1004)=P(-1)=4$

$-1-a+b=4 \quad \therefore -a+b=5$ ...... ㉠

$P(x+1005)$를 $x+1004$로 나누었을 때의 나머지가 2이므로

$P(-1004+1005)=P(1)=2$

$1+a+b=2 \quad \therefore a+b=1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-2,\ b=3$

$\therefore ab=-6$

답 -6

0197 $P(3x+1)$을 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$P(3x+1)=(x^2-1)Q(x)+15$$
$$=(x+1)(x-1)Q(x)+15$$

양변에 $x=-1,\ x=1$을 각각 대입하면

$P(-2)=15,\ P(4)=15$

$-(-2a+b)-8=15,\ 23(4a+b)-8=15$

$\therefore 2a-b=23,\ 4a+b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=4,\ b=-15$

$\therefore a-b=19$

답 19

유형 11 몫 $Q(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지 본책 33쪽

다항식 $P(x)$를 $x-p$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이면

$P(x)=(x-p)Q(x)+R$

이때 $Q(x)$를 $x-\alpha\ (\alpha\neq p)$로 나누었을 때의 나머지는

$Q(\alpha)$

0198 $x^{30}+x^{29}+x$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$x^{30}+x^{29}+x=(x-1)Q(x)+R$

양변에 $x=1$을 대입하면 $\quad R=3$

$\therefore x^{30}+x^{29}+x=(x-1)Q(x)+3$

$Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(-1)$이므로 위의 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1=-2Q(-1)+3$

$2Q(-1)=4 \quad \therefore Q(-1)=2$

답 ①

0199 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 2이므로

$P(x)=(x+1)Q(x)+2$ ...... ㉠ ⋯ ❶

$Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 1이므로

$Q(3)=1$ ⋯ ❷

$P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 $P(3)$이므로 ㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$P(3)=4Q(3)+2=4\cdot1+2=6$ ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 나눗셈에 대한 등식을 세울 수 있다.	30 %
❷ $Q(3)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	40 %

0200 $P(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $x-12$이므로

$P(x)=(x^2+x+1)Q(x)+x-12$ ...... ㉠

$Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 1이므로

$Q(x)=(x-1)Q'(x)+1$

이것을 ㉠에 대입하면

$$P(x)=(x^2+x+1)\{(x-1)Q'(x)+1\}+x-12$$
$$=(x^3-1)Q'(x)+x^2+2x-11$$

따라서 $R(x)=x^2+2x-11$이므로 $\quad R(1)=-8$

답 -8

유형 12 나머지 정리를 활용한 수의 나눗셈 본책 33쪽

자연수 A를 자연수 B로 나누었을 때의 나머지를 구할 때에는 A를 x에 대한 다항식으로, B를 x에 대한 일차식으로 나타낸 후 나머지 정리를 이용한다.

0201 $99^{100}=(98+1)^{100}$

$(x+1)^{100}$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$(x+1)^{100}=xQ(x)+R$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $\quad R=1$

㉠의 양변에 $x=98$을 대입하면 $\quad 99^{100}=98Q(98)+1$

따라서 99^{100}을 98로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

답 ①

0202 (1) $(x-1)^9$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$(x-1)^9=xQ(x)+R$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $\quad R=-1$

따라서 구하는 나머지는 -1이다. ⋯ ❶

(2) ㉠의 양변에 $x=75$를 대입하면

$$74^9=75Q(75)-1$$
$$=75\{Q(75)-1\}+75-1$$
$$=75\{Q(75)-1\}+74$$

나머지를 양수로 만든다.

따라서 구하는 나머지는 74이다. ⋯ ❷

답 (1) -1 (2) 74

채점 기준	비율
❶ $(x-1)^9$을 x로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	40 %
❷ 74^9을 75로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	60 %

참고 다항식의 나눗셈에서는 나머지가 음수일 수 있지만 자연수의 나눗셈에서는 나머지가 0 또는 자연수이어야 한다.

0203 $x^{21}+x^{22}+x^{23}$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$x^{21}+x^{22}+x^{23}=(x-1)Q(x)+R$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $\quad R=3$

㉠의 양변에 $x=8$을 대입하면 $\quad 8^{21}+8^{22}+8^{23}=7Q(8)+3$

따라서 $8^{21}+8^{22}+8^{23}$을 7로 나누었을 때의 나머지는 3이다.

답 3

0204 $2^{1111}=(2^4)^{277}\cdot 2^3=8\cdot 16^{277}$

$8x^{277}$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$8x^{277}=(x+1)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $R=-8$

㉠의 양변에 $x=16$을 대입하면

$8\cdot 16^{277}=17Q(16)-8$

$=17\{Q(16)-1\}+17-8$

$=17\{Q(16)-1\}+9$

따라서 2^{1111}을 17로 나누었을 때의 나머지는 9이다.

답 ⑤

유형 13~14 일차식 또는 이차식으로 나누어떨어지는 다항식

집중 공략 본책 34쪽

다항식 $P(x)$가
① $x-\alpha$로 나누어떨어지면 ➡ $P(\alpha)=0$
② $(x-\alpha)(x-\beta)$로 나누어떨어지면 ➡ $P(\alpha)=0$, $P(\beta)=0$

0205 $P(x)=x^4+mx^3+nx+4$라 하면 인수 정리에 의하여 $P(-2)=0$, $P(1)=0$이므로

$16-8m-2n+4=0$, $1+m+n+4=0$

$\therefore 4m+n=10$, $m+n=-5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $m=5$, $n=-10$

$\therefore m-n=15$

답 ③

0206 $P(x)=2x^3+kx^2-k^2x+10$이라 하면 인수 정리에 의하여 $P(1)=0$이어야 하므로

$2+k-k^2+10=0$ ··· ❶

$k^2-k-12=0$, $(k+3)(k-4)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=4$ ··· ❷

따라서 모든 k의 값의 합은 $-3+4=1$ ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 인수 정리를 이용하여 식을 세울 수 있다.	40 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 k의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0207 $P(x+2)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로

$P(-1+2)=P(1)=0$

$1-2+a-3=0$ $\therefore a=4$

답 ④

0208 $P(1)=1$, $P(2)=2$, $P(3)=3$에서

$P(1)-1=0$, $P(2)-2=0$, $P(3)-3=0$

이므로 인수 정리에 의하여 $P(x)-x$는 $x-1$, $x-2$, $x-3$으로 각각 나누어떨어진다.

이때 $P(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로

$P(x)-x=(x-1)(x-2)(x-3)$

$\therefore P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+x$

따라서 구하는 나머지는

$P(4)=(4-1)\cdot(4-2)\cdot(4-3)+4=10$

답 10

0209 $P(x)=x^3+x^2+ax+b$라 하면 인수 정리에 의하여 $P(1)=0$, $P(-3)=0$이므로

$1+1+a+b=0$, $-27+9-3a+b=0$

$\therefore a+b=-2$, $-3a+b=18$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-5$, $b=3$

$\therefore P(x)=x^3+x^2-5x+3$

따라서 구하는 나머지는

$P(-2)=9$

답 9

0210 $P(x)=x^3-3x^2+ax+b$라 하면 $P(x)$가 x^2+x-2, 즉 $(x+2)(x-1)$로 나누어떨어지므로

$P(-2)=0$, $P(1)=0$

$-8-12-2a+b=0$, $1-3+a+b=0$

$\therefore -2a+b=20$, $a+b=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-6$, $b=8$

$\therefore a-b=-14$

답 ①

0211 $P(x)-3$이 x^2-2x-8, 즉 $(x+2)(x-4)$로 나누어떨어지므로

$P(-2)-3=0$, $P(4)-3=0$

$\therefore P(-2)=3$, $P(4)=3$ ··· ❶

$P(3x+7)$을 x^2+4x+3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(3x+7)=(x^2+4x+3)Q(x)+ax+b$

$=(x+1)(x+3)Q(x)+ax+b$ ··· ❷

양변에 $x=-1$, $x=-3$을 각각 대입하면

$P(4)=-a+b$, $P(-2)=-3a+b$

$\therefore -a+b=3$, $-3a+b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=3$

따라서 구하는 나머지는 3이다. ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $P(-2)$, $P(4)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 나눗셈에 대한 등식을 세울 수 있다.	20 %
❸ $P(3x+7)$을 x^2+4x+3으로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	40 %

0212 $P(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)라 하면 $P(1-x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 -4이므로

$P(1-1)=P(0)=-4$ $\therefore c=-4$

$xP(x)+x^2$이 x^2-4, 즉 $(x+2)(x-2)$로 나누어떨어지므로

$-2P(-2)+4=0$, $2P(2)+4=0$

$P(-2)=2$, $P(2)=-2$

$4a-2b-4=2$, $4a+2b-4=-2$

$\therefore 2a-b=3$, $2a+b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-1$

따라서 $P(x)=x^2-x-4$이므로 $P(1)=-4$

답 ②

유형 15 조립제법 본책 35쪽

조립제법은 다항식을 일차식으로 나눌 때 계수만을 사용하여 몫과 나머지를 구하는 방법으로 조립제법을 이용하면 직접 나눗셈을 하는 것보다 편리하다.
조립제법에서 항의 계수를 나열할 때에는 계수가 0인 것도 반드시 적어야 한다.

0213 x^3+ax^2-x+b를 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & a & -1 & b \\ & & 2 & 2a+4 & 4a+6 \\ \hline & 1 & a+2 & 2a+3 & \boxed{4a+b+6} \end{array}$$

따라서

$k=2,\ c=2,\ a+2=5,\ 2a+4=d,\ 4a+b+6=20$

이므로

$a=3,\ b=2,\ c=2,\ d=10,\ k=2$ 답 ⑤

다른 풀이 x^3+ax^2-x+b를 $x-2$로 나누었을 때, 주어진 조립제법에서

$k=2$

즉 $c=k\cdot 1=2\cdot 1=2$이므로

$a+2=5 \quad \therefore a=3$

$-1+d=9$이므로

$d=10$

$b+18=20$이므로

$b=2$

0214 조립제법을 완성하면 오른쪽과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & 3 & -4 & -5 \\ & & -4 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 2 & -1 & -2 & \boxed{-1} \\ & & 2 & 1 & \\ \hline & 2 & 1 & \boxed{-1} & \end{array}$$

$2x^3+3x^2-4x-5$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫은 $2x^2-x-2$이므로

$Q(x)=2x^2-x-2$

$Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫은 $2x+1$이므로

$Q'(x)=2x+1$ 답 $2x+1$

0215 (1) 주어진 조립제법에서 $2a=1$이므로

$a=\frac{1}{2}$

따라서 조립제법을 완성하면 오른쪽과 같으므로

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & -3 & 3 & 1 \\ & & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 2 & -2 & 2 & \boxed{2} \end{array}$$

$b=-2,\ c=-1,\ d=2$

$\therefore a+b+c+d=-\frac{1}{2}$

(2) $2x^3-3x^2+3x+1$을 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $2x^2-2x+2$, 나머지는 2이므로

$$2x^3-3x^2+3x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-2x+2)+2$$
$$=(2x-1)(x^2-x+1)+2$$

따라서 주어진 다항식을 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 x^2-x+1, 나머지는 2이다.

답 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) 몫: x^2-x+1, 나머지: 2

유형 16 조립제법을 이용하여 항등식의 미정계수 구하기 본책 35쪽

내림차순으로 정리한 식에서 조립제법을 연속으로 이용하면 미정계수를 구하기 편리하다.

0216

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ & & -1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 1 & \boxed{3} \\ & & -1 & 1 & \\ \hline -1 & 1 & -1 & \boxed{2} & \\ & & -1 & & \\ \hline & 1 & \boxed{-2} & & \end{array}$$

위의 조립제법에서

$$x^3+x^2+x+4=(x+1)(x^2+1)+3$$
$$=(x+1)\{(x+1)(x-1)+2\}+3$$
$$=(x+1)[(x+1)\{(x+1)-2\}+2]+3$$
$$=(x+1)\{(x+1)^2-2(x+1)+2\}+3$$
$$=(x+1)^3-2(x+1)^2+2(x+1)+3$$

따라서 $a=1,\ b=-2,\ c=2,\ d=3$이므로

$abcd=-12$ 답 -12

다른 풀이 $a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

$=a(x^3+3x^2+3x+1)+b(x^2+2x+1)+c(x+1)+d$

$=ax^3+(3a+b)x^2+(3a+2b+c)x+a+b+c+d$

이므로

$a=1,\ 3a+b=1,\ 3a+2b+c=1,\ a+b+c+d=4$

$\therefore a=1,\ b=-2,\ c=2,\ d=3$

0217 (1)

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & 7 & -2 \\ & & 2 & -4 & 6 \\ \hline 2 & 1 & -2 & 3 & \boxed{4} \\ & & 2 & 0 & \\ \hline 2 & 1 & 0 & \boxed{3} & \\ & & 2 & & \\ \hline & 1 & \boxed{2} & & \end{array}$$

위의 조립제법에서

x^3-4x^2+7x-2

$=(x-2)(x^2-2x+3)+4$

$=(x-2)\{(x-2)x+3\}+4$

$=(x-2)[(x-2)\{(x-2)+2\}+3]+4$

$=(x-2)\{(x-2)^2+2(x-2)+3\}+4$

$=(x-2)^3+2(x-2)^2+3(x-2)+4$

$\therefore a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4$ ⋯ ❶

(2) (1)에서 $P(x)=(x-2)^3+2(x-2)^2+3(x-2)+4$이므로

$P(2.1)=0.1^3+2\times0.1^2+3\times0.1+4=4.321$ ⋯ ❷

답 (1) $a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4$ (2) 4.321

채점 기준	비율
❶ $a,\ b,\ c,\ d$의 값을 구할 수 있다.	70 %
❷ $P(2.1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0218

$$\begin{array}{c|cccc}
\frac{1}{2} & 8 & -8 & -4 & 6 \\
 & & 4 & -2 & -3 \\
\hline
\frac{1}{2} & 8 & -4 & -6 & \boxed{3} \\
 & & 4 & 0 & \\
\hline
\frac{1}{2} & 8 & 0 & \boxed{-6} & \\
 & & 4 & & \\
\hline
 & 8 & \boxed{4} & &
\end{array}$$

위의 조립제법에서

$8x^3-8x^2-4x+6$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)(8x^2-4x-6)+3$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot 8x-6\right\}+3$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\left\{8\left(x-\frac{1}{2}\right)+4\right\}-6\right]+3$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left\{8\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4\left(x-\frac{1}{2}\right)-6\right\}+3$

$=8\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-6\left(x-\frac{1}{2}\right)+3$

$=(2x-1)^3+(2x-1)^2-3(2x-1)+3$

따라서 $a=1,\ b=1,\ c=-3,\ d=3$이므로

$ab-cd=10$

답 ④

유형 17 인수분해 공식을 이용한 다항식의 인수분해 본책 36쪽

다항식의 인수분해는 다음과 같은 인수분해 공식을 이용한다. 이때 공식을 바로 이용할 수 없는 경우에는 공식을 이용할 수 있도록 식을 적당히 변형한다.

① $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

② $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

③ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

④ $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

⑤ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

0219 ③ $x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9)$ 답 ③

0220 $a^6-a^4+2a^3-2a^2=a^2(a^4-a^2+2a-2)$

$=a^2\{a^2(a^2-1)+2(a-1)\}$

$=a^2\{a^2(a+1)(a-1)+2(a-1)\}$

$=a^2(a-1)\{a^2(a+1)+2\}$

$=a^2(a-1)(a^3+a^2+2)$

따라서 인수인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

다른 풀이 $a^6-a^4+2a^3-2a^2=(a^6+2a^3+1)-(a^4+2a^2+1)$

$=(a^3+1)^2-(a^2+1)^2$

$=(a^3+1-a^2-1)(a^3+1+a^2+1)$

$=(a^3-a^2)(a^3+a^2+2)$

$=a^2(a-1)(a^3+a^2+2)$

0221 ① $a^2-(b-c)^2=(a+b-c)(a-b+c)$

② $x^3+125=(x+5)(x^2-5x+25)$

③ $x^6-y^6=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$=(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

④ $(a-2b)^3-27b^3$

$=(a-2b)^3-(3b)^3$

$=(a-2b-3b)\{(a-2b)^2+(a-2b)\cdot 3b+(3b)^2\}$

$=(a-5b)(a^2-ab+7b^2)$

⑤ $x^3-8y^3+z^3+6xyz$

$=x^3+(-2y)^3+z^3-3\cdot x\cdot(-2y)\cdot z$

$=(x-2y+z)(x^2+4y^2+z^2+2xy+2yz-zx)$

답 ③

유형 18 공통부분이 있는 다항식의 인수분해 집중공략 본책 36쪽

공통부분이 있는 다항식의 인수분해는 다음과 같은 순서로 한다.

(i) 공통부분을 t로 치환한다.

(ii) (i)의 식을 인수분해 공식을 이용하여 인수분해한다.

(iii) (ii)의 식에 t 대신 공통부분을 대입한다.

참고 ( )( )( )( )$+k$ 꼴은 공통부분이 생기도록 짝을 지어 전개한 후 공통부분을 t로 치환하여 인수분해한다.

0222 $(x-4)(x-3)(x+1)(x+2)-24$

$=\{(x-4)(x+2)\}\{(x-3)(x+1)\}-24$

$=(x^2-2x-8)(x^2-2x-3)-24$

상수항끼리의 합이 같아지도록 두 개씩 짝을 지어 전개한다.

$x^2-2x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t-8)(t-3)-24$

$=t^2-11t$

$=t(t-11)$

$=(x^2-2x)(x^2-2x-11)$

$=x(x-2)(x^2-2x-11)$

따라서 인수인 것은 ④이다. 답 ④

0223 $x^2-x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t+1)(t-7)+15$

$=t^2-6t+8$

$=(t-2)(t-4)$

$=(x^2-x-2)(x^2-x-4)$

$=(x+1)(x-2)(x^2-x-4)$

따라서 $a=-2,\ b=-1,\ c=-4$이므로

$a+b+c=-7$ 답 -7

0224 $(x^2-4x)^2+9x^2-36x+18$

$=(x^2-4x)^2+9(x^2-4x)+18$

$x^2-4x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=t^2+9t+18$

$=(t+3)(t+6)$

$=(x^2-4x+3)(x^2-4x+6)$

$=(x-1)(x-3)(x^2-4x+6)$

$\therefore abcd=-1\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot6=-72$ 답 -72

0225 $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+k$

$=\{(x-1)(x-7)\}\{(x-3)(x-5)\}+k$

$=(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+k$ ⋯➊

$x^2-8x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t+7)(t+15)+k$

$=t^2+22t+105+k$ ⋯⋯ ㉠ ⋯➋

주어진 식이 x에 대한 이차식의 완전제곱식으로 인수분해되려면 ㉠이 t에 대한 완전제곱식으로 인수분해되어야 하므로

$105+k=\left(\frac{22}{2}\right)^2$

$\therefore k=16$ ⋯➌

답 16

채점 기준	비율
➊ 공통부분이 생기도록 식을 변형할 수 있다.	30 %
➋ 공통부분을 t로 치환하여 식을 전개할 수 있다.	30 %
➌ k의 값을 구할 수 있다.	40 %

참고 $k=16$일 때, 주어진 식은 다음과 같이 인수분해된다.
(주어진 식)$=t^2+22t+121=(t+11)^2=(x^2-8x+11)^2$

유형 19 x^4+ax^2+b 꼴의 다항식의 인수분해 본책 37쪽

① $x^2=X$로 치환하여 인수분해한다.
② 이차항을 적당히 분리하여 $(x^2+A)^2-(Bx)^2$ 꼴로 변형한 후 인수분해한다.

0226 $x^2=X$로 놓으면

$x^4-26x^2+25=X^2-26X+25$

$=(X-1)(X-25)$

$=(x^2-1)(x^2-25)$

$=(x+1)(x-1)(x+5)(x-5)$

이때 $a<b<c<d$이므로

$a=-5,\ b=-1,\ c=1,\ d=5$

$\therefore bc-ad=24$ 답 24

0227 $x^2=X$로 놓으면

$x^4-32x^2+256=X^2-32X+256$

$=(X-16)^2$

$=(x^2-16)^2$

$=\{(x+4)(x-4)\}^2$

$=(x+4)^2(x-4)^2$ ⋯➊

이때 $a>b$이므로 $a=4,\ b=-4$ ⋯➋

$\therefore a-b=8$ ⋯➌

답 8

채점 기준	비율
➊ 주어진 등식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	50 %
➋ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
➌ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0228 $x^4-11x^2y^2+25y^4=(x^4-10x^2y^2+25y^4)-x^2y^2$

$=(x^2-5y^2)^2-(xy)^2$

$=(x^2+xy-5y^2)(x^2-xy-5y^2)$

따라서 $a=1,\ b=-5$ 또는 $a=-1,\ b=-5$이므로

$a^2+b^2=26$ 답 ⑤

0229 $x^4+3x^2+4=(x^4+4x^2+4)-x^2$

$=(x^2+2)^2-x^2$

$=(x^2+x+2)(x^2-x+2)$

(i) $f(x)=x^2+x+2,\ f(x+1)=x^2-x+2$인 경우

$f(x)$에 x 대신 $x+1$을 대입하면

$f(x+1)=(x+1)^2+(x+1)+2$

$=x^2+3x+4$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

마찬가지로 $f(x)=-(x^2+x+2)$,

$f(x+1)=-(x^2-x+2)$인 경우도 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x)=x^2-x+2,\ f(x+1)=x^2+x+2$인 경우

$f(x)$에 x 대신 $x+1$을 대입하면

$f(x+1)=(x+1)^2-(x+1)+2$

$=x^2+x+2$

이므로 조건을 만족시킨다.

마찬가지로 $f(x)=-(x^2-x+2)$,

$f(x+1)=-(x^2+x+2)$인 경우도 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $f(x)=x^2-x+2$ 또는 $f(x)=-(x^2-x+2)$이므로

$f(1)=2$ 또는 $f(1)=-2$

$\therefore |f(1)|=2$ 답 ②

참고 두 다항식 $f(x)$, $f(x+1)$은 차수가 같으므로 $f(x)$와 $f(x+1)$은 모두 이차식이어야 한다.

유형 20 여러 개의 문자를 포함한 다항식의 인수분해 본책 37쪽

① 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.
② 차수가 모두 같을 때에는 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

0230 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2+5xy-3y^2+3x-5y-2$

$=2x^2+(5y+3)x-(3y^2+5y+2)$

$=2x^2+(5y+3)x-(y+1)(3y+2)$

$=\{2x-(y+1)\}\{x+(3y+2)\}$

$=(2x-y-1)(x+3y+2)$

따라서 $a=2$, $b=-1$, $c=3$이므로
$a-b+c=6$ 답 6

0231 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면
$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$
$=a^2(b+c)+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2+2abc$
$=(b+c)a^2+(b^2+c^2+2bc)a+b^2c+bc^2$
$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$
$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$
$=(b+c)(a+b)(a+c)$
$=(a+b)(b+c)(c+a)$ 답 ⑤

0232 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2+2xy-3y^2+ax+4y+4$
$=x^2+(2y+a)x-(3y^2-4y-4)$
$=x^2+(2y+a)x-(y-2)(3y+2)$ ··· ❶
주어진 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면
$-(y-2)+(3y+2)=2y+a$
$\therefore a=4$ ··· ❷
답 4

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리할 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %

0233 주어진 식의 분자를 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$xy(x-y)+zx(z-x)+yz(y-z)$
$=x^2y-xy^2+z^2x-zx^2+y^2z-yz^2$
$=(y-z)x^2-(y^2-z^2)x+yz(y-z)$
$=(y-z)x^2-(y+z)(y-z)x+yz(y-z)$
$=(y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$
$=(y-z)(x-y)(x-z)$
$=(x-y)(y-z)(x-z)$
$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{(x-y)(y-z)(x-z)}{(x-y)(y-z)(x-z)}=1$ 답 1

유형 21 인수 정리를 이용한 다항식의 인수분해 집중공략 본책 38쪽

삼차 이상의 다항식 $P(x)$를 인수분해할 때에는 다음과 같은 순서로 인수분해한다.
(i) $P(\alpha)=0$을 만족시키는 상수 α의 값을 찾는다.
(ii) $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$ 꼴로 인수분해한다.
(iii) $Q(x)$가 더 이상 인수분해되지 않을 때까지 인수분해한다.

0234 $P(x)=x^3-10x^2+19x+30$이라 하면
$P(-1)=-1-10-19+30=0$
이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -10 & 19 & 30 \\ & & -1 & 11 & -30 \\ \hline & 1 & -11 & 30 & 0 \end{array}$$

$x^3-10x^2+19x+30=(x+1)(x^2-11x+30)$
$=(x+1)(x-5)(x-6)$
$\therefore a^2+b^2+c^2=1^2+(-5)^2+(-6)^2$
$=62$ 답 ⑤

0235 $P(x)$가 $x-2$를 인수로 가지므로
$P(2)=8+8+2a-6=0$
$2a=-10$ $\therefore a=-5$
따라서 $P(x)=x^3+2x^2-5x-6$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 2 & -5 & -6 \\ & & 2 & 8 & 6 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}$$

x^3+2x^2-5x-6
$=(x-2)(x^2+4x+3)$
$=(x-2)(x+1)(x+3)$ 답 $(x-2)(x+1)(x+3)$

0236 주어진 등식의 양변에 $x=-3$을 대입하면
$-18=-3a$ $\therefore a=6$
즉 $x^3+x^2-4x-12=(x+3)P(x)+6x$이므로
$x^3+x^2-10x-12=(x+3)P(x)$
$x^3+x^2-10x-12$가 $x+3$을 인수로 가지므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 1 & -10 & -12 \\ & & -3 & 6 & 12 \\ \hline & 1 & -2 & -4 & 0 \end{array}$$

$x^3+x^2-10x-12=(x+3)(x^2-2x-4)$
따라서 $(x+3)(x^2-2x-4)=(x+3)P(x)$이므로
$P(x)=x^2-2x-4$ 답 x^2-2x-4

0237 $P(x)=x^3+(2a-1)x^2-2(a+1)x-4a$라 하면
$P(-1)=-1+(2a-1)+2(a+1)-4a=0$
이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2a-1 & -2(a+1) & -4a \\ & & -1 & -2a+2 & 4a \\ \hline & 1 & 2a-2 & -4a & 0 \end{array}$$

$\therefore x^3+(2a-1)x^2-2(a+1)x-4a$
$=(x+1)\{x^2+(2a-2)x-4a\}$
$=(x+1)(x-2)(x+2a)$
따라서 인수인 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

다른 풀이 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^3+(2a-1)x^2-2(a+1)x-4a$
$=a(2x^2-2x-4)+x^3-x^2-2x$
$=2a(x^2-x-2)+x(x^2-x-2)$
$=(x^2-x-2)(x+2a)$
$=(x+1)(x-2)(x+2a)$

0238 $x^4+5x^3+3x^2-9x=x(x^3+5x^2+3x-9)$
$H(x)=x^3+5x^2+3x-9$라 하면
$H(1)=1+5+3-9=0$

이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $H(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 5 & 3 & -9 \\ & & 1 & 6 & 9 \\ \hline & 1 & 6 & 9 & \boxed{0} \end{array}$$

x^3+5x^2+3x-9
$=(x-1)(x^2+6x+9)$
$=(x-1)(x+3)^2$

$\therefore\ x^4+5x^3+3x^2-9x=x(x-1)(x+3)^2$ ··· ❶

$P(x)$, $Q(x)$는 각각 최고차항의 계수가 1인 이차식이고 $P(1)\neq0$, $Q(0)\neq0$이므로

$P(x)$는 $x-1$을 인수로 갖지 않고 $Q(x)$는 x를 인수로 갖지 않는다.

$P(x)=x(x+3)$,
$Q(x)=(x+3)(x-1)$ ··· ❷

$\therefore\ P(2)+Q(-1)=10+(-4)=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	40 %
❷ $P(x)$, $Q(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $P(2)+Q(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0239

$$\begin{array}{r|rrrr|r} 1 & a & 0 & 0 & b & 3 \\ & & a & a & a & a+b \\ \hline 1 & a & a & a & a+b & \boxed{a+b+3} \\ & & a & 2a & 3a & \\ \hline & a & 2a & 3a & \boxed{4a+b} & \end{array}$$

이때 ax^4+bx+3이 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로 위의 조립제법에서

$a+b+3=0,\ 4a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-4$

$\therefore\ x^4-4x+3=(x-1)^2(x^2+2x+3)$

따라서 $Q(x)=x^2+2x+3$이므로 $Q(2)=11$

답 11

유형 22 계수가 대칭인 사차식의 인수분해

본책 38쪽

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$ 꼴의 사차식은 다음과 같은 순서로 인수분해한다.

(i) 가운데 항이 상수가 되도록 x^2으로 묶어 낸다.

(ii) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$임을 이용하여 $x+\frac{1}{x}$ 또는 $x-\frac{1}{x}$에 대한 이차식으로 정리하여 인수분해한다.

(iii) 각 인수에 x를 곱하여 다항식이 되도록 한다.

0240 $x^4-4x^3+5x^2-4x+1$

$=x^2\left(x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5\right\}$

$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\right\}$

$=x^2\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)$

$=(x^2-x+1)(x^2-3x+1)$

따라서 인수인 것은 ①이다.

답 ①

0241 $x^4+3x^3-8x^2+3x+1$

$=x^2\left(x^2+3x-8+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-8\right\}$

$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-10\right\}$

$=x^2\left(x+\frac{1}{x}+5\right)\left(x+\frac{1}{x}-2\right)$

$=(x^2+5x+1)(x^2-2x+1)$

$=(x-1)^2(x^2+5x+1)$ ··· ❶

따라서 $a=-1,\ b=5,\ c=1$이므로

$abc=-5$ ··· ❷

답 -5

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	70 %
❷ abc의 값을 구할 수 있다.	30 %

0242 $x^4-x^3-4x^2+x+1$

$=x^2\left(x^2-x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}-\left(x-\frac{1}{x}\right)-4\right\}$

$=x^2\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)-2\right\}$

$=x^2\left(x-\frac{1}{x}+1\right)\left(x-\frac{1}{x}-2\right)$

$=(x^2+x-1)(x^2-2x-1)$

답 $(x^2+x-1)(x^2-2x-1)$

유형 23 조건이 주어진 다항식의 인수분해

본책 39쪽

① 주어진 조건을 다항식에 대입하여 간단히 한 후 인수분해한다.
② 다항식을 먼저 인수분해한 후 주어진 조건을 대입하여 식을 정리한다.

0243 $x+2y-z=0$에서 $z=x+2y$

$\therefore\ x^2+2xy+z^2=x^2+2xy+(x+2y)^2$
$=x(x+2y)+(x+2y)^2$
$=(x+2y)(2x+2y)$
$=2z(x+y)$

답 ③

참고 주어진 식에 $x=z-2y$를 대입하면

$(z-2y)^2+2y(z-2y)+z^2=2z^2-2yz=2z(z-y)=2z(x+y)$

주어진 식에 $y=\frac{z-x}{2}$를 대입하면

$x^2+2x\cdot\frac{z-x}{2}+z^2=z^2+xz=z(z+x)=z(2x+2y)=2z(x+y)$

0244 $1-4a^2+4ab-b^2=1-(4a^2-4ab+b^2)$

$=1^2-(2a-b)^2$
$=\{1+(2a-b)\}\{1-(2a-b)\}$
$=(1+2a-b)(1-2a+b)$

이때 $2a+b+1=0$에서 $1+2a=-b$, $1+b=-2a$이므로

$$(\text{주어진 식})=(-b-b)(-2a-2a)$$
$$=(-2b)(-4a)=8ab$$

답 ③

다른 풀이 $2a+b+1=0$에서 $\quad b=-2a-1$

$$\therefore 1-4a^2+4ab-b^2$$
$$=1-4a^2+4a(-2a-1)-(-2a-1)^2$$
$$=1-4a^2-8a^2-4a-4a^2-4a-1$$
$$=-16a^2-8a=8a(-2a-1)=8ab$$

유형 24 인수분해와 삼각형의 모양

본책 39쪽

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c일 때
① $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ ➡ 이등변삼각형
② $a=b=c$ ➡ 정삼각형
③ $a^2+b^2=c^2$ ➡ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

0245 주어진 등식의 좌변을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$a^3-a^2b+ac^2+ab^2-b^3-bc^2$$
$$=(a-b)c^2+a^3-a^2b+ab^2-b^3$$
$$=(a-b)c^2+a^2(a-b)+b^2(a-b)$$
$$=(a-b)(a^2+b^2+c^2)$$

즉 $(a-b)(a^2+b^2+c^2)=0$이고 $a^2+b^2+c^2\neq0$이므로

a, b, c는 모두 양수이므로 $a^2+b^2+c^2\neq0$

$$a-b=0 \qquad \therefore a=b$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 $a=b$인 이등변삼각형이다.

답 ①

0246 주어진 등식의 좌변을 인수분해하면

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \qquad \cdots ❶$$

즉 $(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$이고 $a+b+c\neq0$이므로

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$
$$a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0 \qquad \therefore a=b=c$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 정삼각형이다. ⋯ ❷

답 정삼각형

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	50 %
❷ 어떤 삼각형인지 말할 수 있다.	50 %

0247 주어진 식을 $P(x)$라 하면 다항식 $P(x)$가 $x-a$로 나누어떨어지므로 $\quad P(a)=0$

$$\therefore a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^3+b^2c+bc^2+c^3=0$$

이 등식의 좌변을 인수분해하면

$$a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^3+b^2c+bc^2+c^3$$
$$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^2(b+c)+c^2(b+c)$$
$$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+(b^2+c^2)(b+c)$$
$$=a^2(a-b-c)-(b^2+c^2)(a-b-c)$$
$$=(a^2-b^2-c^2)(a-b-c)$$

삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크므로 $a\neq b+c$

즉 $(a^2-b^2-c^2)(a-b-c)=0$이고 $a-b-c\neq0$이므로

$$a^2-b^2-c^2=0 \qquad \therefore a^2=b^2+c^2$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이므로 그 넓이는 $\quad \frac{1}{2}bc$

답 ②

유형 25 인수분해를 이용하여 식의 값 구하기

본책 40쪽

인수분해 공식을 이용하여 식을 변형한 후 주어진 조건을 식에 대입한다.

0248 $x^4+y^4-x^3y-xy^3=x^3(x-y)-y^3(x-y)$

$$=(x-y)(x^3-y^3)$$
$$=(x-y)^2(x^2+xy+y^2)$$
$$=(x-y)^2\{(x-y)^2+3xy\}$$

$x-y=(1+\sqrt{3})-(1-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$, $xy=(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=-2$이므로 구하는 식의 값은

$$(2\sqrt{3})^2\cdot\{(2\sqrt{3})^2+3\cdot(-2)\}=72$$

답 72

0249 $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

에서 $a+b+c=0$이므로

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0 \qquad \therefore a^3+b^3+c^3=3abc$$
$$\therefore \frac{a^3+b^3+c^3}{2abc}=\frac{3abc}{2abc}=\frac{3}{2}$$

답 ④

0250 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$
$$=a^2(b-c)+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$$
$$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$$
$$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$$
$$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$$
$$=(b-c)(a-b)(a-c)$$
$$=(b-c)(b-a)(c-a) \qquad \cdots ❶$$

$b-c=2+\sqrt{2}$, $c-a=2-\sqrt{2}$를 변끼리 더하면

$$b-a=4 \qquad \cdots ❷$$

따라서 구하는 식의 값은

$$(2+\sqrt{2})\cdot4\cdot(2-\sqrt{2})=8 \qquad \cdots ❸$$

답 8

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	60 %
❷ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

0251 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$-a^2b+a^2c+ab^2-ac^2-b^2c+bc^2$$
$$=(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc(c-b)$$
$$=(c-b)a^2-(c+b)(c-b)a+bc(c-b)$$
$$=(c-b)\{a^2-(c+b)a+bc\}$$
$$=(c-b)(a-b)(a-c)$$

이때 a, b, c는 연속하는 세 자연수이고 $a<b<c$이므로

$b=a+1$, $c=a+2$

따라서 구하는 식의 값은

$\{a+2-(a+1)\}\{a-(a+1)\}\{a-(a+2)\}$

$=1\cdot(-1)\cdot(-2)=2$ 답 2

유형 26 인수분해를 이용한 복잡한 수의 계산 본책 40쪽

수를 문자로 바꾸고 인수분해 공식을 이용한다.

0252 $99999=a$로 놓으면

$$(\text{주어진 식})=\frac{a^3+1}{(a-1)a+1}=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$

$=a+1=100000$ 답 ④

0253 $30=x$로 놓으면

$$\begin{aligned}29\cdot31\cdot32\cdot34+9&=(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)+9\\&=\{(x-1)(x+4)\}\{(x+1)(x+2)\}+9\\&=(x^2+3x-4)(x^2+3x+2)+9\end{aligned}$$

$x^2+3x=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}(x^2+3x-4)(x^2+3x+2)+9&=(X-4)(X+2)+9\\&=X^2-2X+1\\&=(X-1)^2\\&=(x^2+3x-1)^2\\&=(30^2+3\cdot30-1)^2\\&=(900+90-1)^2\\&=989^2\end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{29\cdot31\cdot32\cdot34+9}=\sqrt{989^2}=989$ 답 989

0254 $P(1)=1-1-3+5-2=0$,

$P(-2)=16+8-12-10-2=0$

이므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}1 & 1 & -1 & -3 & 5 & -2\\ & & 1 & 0 & -3 & 2\\\hline -2 & 1 & 0 & -3 & 2 & \boxed{0}\\ & & -2 & 4 & -2 & \\\hline & 1 & -2 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x+2)(x^2-2x+1)$

$=(x-1)^3(x+2)$

$\therefore P(11)=(11-1)^3\cdot(11+2)=13000$ 답 ③

0255 6^6-1이 n으로 나누어떨어지므로 n은 6^6-1의 약수이다.

$$\begin{aligned}6^6-1&=(6^3)^2-1^2=(6^3-1)(6^3+1)\\&=(6-1)(6^2+6+1)(6+1)(6^2-6+1)\\&=5\cdot7\cdot31\cdot43\end{aligned}$$ ··· ❶

따라서 구하는 두 자리 자연수 n의 값은 31, $\underbrace{35}_{5\cdot7=35}$, 43이다. ··· ❷

답 31, 35, 43

채점 기준	비율
❶ 주어진 수를 소인수분해할 수 있다.	70 %
❷ n의 값을 모두 구할 수 있다.	30 %

0256 1st $P(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하고 주어진 등식에 대입한 후 계수 비교법을 이용한다.

$P(x)$가 이차 이하의 다항식이므로 $P(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면 주어진 등식은

$(ax^2+bx+c)^2=2(ax^4+bx^2+c)+8x^2$

$\therefore a^2x^4+2abx^3+(2ac+b^2)x^2+2bcx+c^2$

$=2ax^4+(2b+8)x^2+2c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a^2=2a$, $2ab=0$, $2ac+b^2=2b+8$, $2bc=0$, $c^2=2c$

2nd a의 값을 구하고 그 값에 따라 경우를 나누어 $P(x)$를 구한다.

$a^2=2a$에서 $a(a-2)=0$ $\therefore a=0$ 또는 $a=2$

(i) $a=0$일 때,

$2ab=0$이고, $2ac+b^2=2b+8$에서 $b^2-2b-8=0$

$(b+2)(b-4)=0$ $\therefore b=-2$ 또는 $b=4$

$b=-2$ 또는 $b=4$일 때 $2bc=0$이려면 $c=0$

$c=0$은 $c^2=2c$를 만족시키므로

$P(x)=-2x$ 또는 $P(x)=4x$

(ii) $a=2$일 때,

$2ab=0$에서 $b=0$

$2ac+b^2=2b+8$에서 $4c=8$ $\therefore c=2$

$b=0$, $c=2$는 $2bc=0$, $c^2=2c$를 모두 만족시키므로

$P(x)=2x^2+2$

3rd $P(x)$의 개수를 구한다.

(i), (ii)에서 다항식 $P(x)$는 3개이다. 답 3

0257 1st a_0, a_1, a_2, a_3, a_4의 값을 구한다.

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $a_0=-10$이므로

$(x^2+3x)^5=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$

$\therefore x^5(x+3)^5=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$

이 식의 좌변에서 사차 이하의 항의 계수는 모두 0이므로

$a_1=a_2=a_3=a_4=0$

2nd a_5의 값과 $a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}$의 값을 구한다.

$x^5(x+3)^5=a_5x^5+a_6x^6+\cdots+a_{10}x^{10}$이므로

$(x+3)^5=a_5+a_6x+\cdots+a_{10}x^5$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $a_5=3^5$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$4^5=a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}$

$\therefore a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=4^5-a_5=4^5-3^5$

3rd $4a_5-(a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10})$의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}4a_5-(a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10})&=4\cdot3^5-(4^5-3^5)\\&=5\cdot3^5-4^5\\&=1215-1024=191\end{aligned}$$

답 ②

0258 1st $P(x)$가 x^2-2x+3으로 나누어떨어짐을 이용하여 $P(x)$의 식을 세운다.

$P(x)$를 x^2-2x+3으로 나누었을 때의 몫을 $\underbrace{p}_{P(x)\text{의 삼차항의 계수}}x+q$ (p, q는 상수, $p\neq0$)라 하면

$P(x)=(x^2-2x+3)(px+q)$

이때 $P(0)=-9$이므로

$-9=3q \quad \therefore q=-3$

$\therefore P(x)=(x^2-2x+3)(px-3)$ …… ㉠

2nd $P(x)-36$이 x^2+5로 나누어떨어짐을 이용하여 $P(x)$의 식을 세운다.

$P(x)-36$을 x^2+5로 나누었을 때의 몫을 $px+r$ (r는 상수)라 하면

$P(x)-36=(x^2+5)(px+r)$

이때 $P(0)=-9$이므로

$-45=5r \quad \therefore r=-9$

$\therefore P(x)=(x^2+5)(px-9)+36$ …… ㉡

3rd $P(2)$의 값을 구한다.

㉠, ㉡에서

$(x^2-2x+3)(px-3)=(x^2+5)(px-9)+36$

$px^3-(2p+3)x^2+(3p+6)x-9=px^3-9x^2+5px-9$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$2p+3=9,\ 3p+6=5p$

$\therefore p=3$

따라서 $P(x)=(x^2-2x+3)(3x-3)$이므로

$P(x)=(x^2+5)(3x-9)+36$

$P(2)=9$

답 ⑤

0259

1st $P(1)+Q(1)$, $\{P(1)\}^3+\{Q(1)\}^3$의 값을 구한다.

나머지 정리에 의하여

$P(1)+Q(1)=5,\ \{P(1)\}^3+\{Q(1)\}^3=35$ ⋯ ❶

2nd $P(x)Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구한다.

$\{P(1)\}^3+\{Q(1)\}^3$

$=\{P(1)+Q(1)\}^3-3P(1)Q(1)\{P(1)+Q(1)\}$

이므로

$35=5^3-3\cdot5\cdot P(1)Q(1), \quad 15P(1)Q(1)=90$

$\therefore P(1)Q(1)=6$

따라서 구하는 나머지는 6이다. ⋯ ❷

답 6

채점 기준	비율
❶ $P(1)+Q(1)$, $\{P(1)\}^3+\{Q(1)\}^3$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $P(x)Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	60 %

0260

1st b를 a에 대한 식으로 나타낸다.

$x^n(x^2+ax+b)$를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^n(x^2+ax+b)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$3^n(9+3a+b)=0, \quad 9+3a+b=0\ (\because 3^n\neq0)$

$\therefore b=-3a-9$ …… ㉡

2nd ab의 값을 구한다.

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^n(x^2+ax-3a-9)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)$

$x^n(x-3)(x+a+3)=(x-3)\{(x-3)Q(x)+3^n\}$

$\therefore x^n(x+a+3)=(x-3)Q(x)+3^n$

양변에 $x=3$을 대입하면

$3^n(3+a+3)=3^n, \quad a+6=1\ (\because 3^n\neq0)$

$\therefore a=-5$

$a=-5$를 ㉡에 대입하면 $\quad b=6$

$\therefore ab=-30$

답 -30

0261

1st $f(x)$를 x로 나누었을 때의 나머지를 구한다.

ㄱ. $f(x)$를 x로 나누었을 때의 나머지는 $f(0)$이므로 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$\{f(0)\}^3=1 \quad \therefore f(0)=1$

2nd $f(x)$의 최고차항의 계수를 구한다.

ㄴ. $f(x)$를 n차식이라 하면 $\{f(x)\}^3$은 $3n$차식, $4x^2f(x)+8x^2+6x+1$은 $(n+2)$차식이므로

$3n=n+2 \quad \therefore n=1$

또 $f(0)=1$이므로 $f(x)=ax+1\ (a>0)$이라 하자.

$\{f(x)\}^3$의 최고차항의 계수는 a^3, $4x^2f(x)+8x^2+6x+1$의 최고차항의 계수는 $4a$이므로

$a^3=4a, \quad a^3-4a=0$

$a(a+2)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

따라서 $f(x)$의 최고차항의 계수는 2이다.

3rd $\{f(x)\}^3$을 x^2-1로 나누었을 때의 나머지를 구한다.

ㄷ. $f(x)=2x+1$이므로 $\{f(x)\}^3$을 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $cx+d$ (c, d는 상수)라 하면

$(2x+1)^3=(x^2-1)Q(x)+cx+d$

$=(x+1)(x-1)Q(x)+cx+d$

양변에 $x=1$, $x=-1$을 각각 대입하면

$27=c+d,\ -1=-c+d$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$c=14,\ d=13$

따라서 $\{f(x)\}^3$을 x^2-1로 나누었을 때의 나머지는 $14x+13$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0262

1st 나눗셈에 대한 등식을 세운다.

조건 (나)에 의하여 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 각각 $ax+b$(a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f(x)=(x-1)^2(ax+b)+ax+b$ …… ㉠

2nd $R(x)$를 a에 대한 식으로 나타낸다.

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=a+b, \quad 2=a+b\ (\because$ 조건 (가)$)$

$\therefore b=2-a$

이것을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x-1)^2(ax+2-a)+ax+2-a$

$=(x-1)^2\{a(x-1)+2\}+a(x-1)+2$

$=a(x-1)^3+2(x-1)^2+a(x-1)+2$

이므로

$R(x)=2(x-1)^2+a(x-1)+2$

3rd $R(5)$의 값을 구한다.

$R(0)=R(3)$이므로

$2-a+2=8+2a+2 \quad \therefore a=-2$

따라서 $R(x)=2(x-1)^2-2(x-1)+2$이므로

$R(5)=26$ 답 26

0263 1st $P(x+1)$을 구한다.

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\{P(x+1)\}^2&=(x-2)(x+2)(x^2+10)+49\\&=(x^2-4)(x^2+10)+49\\&=x^4+6x^2+9\\&=(x^2+3)^2\end{aligned}$$

$\therefore P(x+1)=-(x^2+3)$ 또는 $P(x+1)=x^2+3$

이때 조건 (가)에서 $P(x)<0$이므로

$P(x+1)=-(\underbrace{x^2+3}_{x^2+3>0})=-x^2-3$

2nd 모든 a의 값의 합을 구한다.

$P(x+a)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 -4이어야 하므로

$P(3+a)=-4, \quad -(2+a)^2-3=-4$

$(2+a)^2=1, \quad a+2=\pm1$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=-1$

따라서 모든 a의 값의 합은

$-3-1=-4$ 답 ②

0264 1st 주어진 조건을 만족시키는 다항식을 구한다.

$P(1)=\frac{1}{2}$, $P(2)=\frac{2}{3}$, $P(3)=\frac{3}{4}$, $P(4)=\frac{4}{5}$에서

$2P(1)-1=0$, $3P(2)-2=0$,

$4P(3)-3=0$, $5P(4)-4=0$

이므로 인수 정리에 의하여 $(x+1)P(x)-x$는 $x-1$, $x-2$, $x-3$, $x-4$로 각각 나누어떨어진다.

이때 $P(x)$는 삼차식이므로 $(x+1)P(x)-x$는 사차식이다. 즉 $(x+1)P(x)-x=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ $(a\neq0)$라 하고 양변에 $x=-1$을 대입하면

$1=120a \quad \therefore a=\frac{1}{120}$

$\therefore (x+1)P(x)-x=\frac{1}{120}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

⋯ ❶

2nd $P(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지를 구한다.

$P(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는 $P(5)$이므로 위의 등식의 양변에 $x=5$를 대입하면

$6P(5)-5=\frac{1}{5} \quad \therefore P(5)=\frac{13}{15}$

따라서 구하는 나머지는 $\frac{13}{15}$이다. ⋯ ❷

답 $\frac{13}{15}$

채점 기준	비율
❶ $(x+1)P(x)-x$를 구할 수 있다.	60 %
❷ $P(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	40 %

0265 1st $f(x)$의 식을 세운다.

조건 (가)에서 인수 정리에 의하여

$f(4)-f(1)=0$, $f(1)-f(-2)=0$

$\therefore f(-2)=f(1)=f(4)$

$f(-2)=f(1)=f(4)=k$ (k는 상수)라 하면

$f(-2)-k=0$, $f(1)-k=0$, $f(4)-k=0$

이므로 인수 정리에 의하여 $f(x)-k$는 $x+2$, $x-1$, $x-4$로 각각 나누어떨어진다.

이때 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로

$f(x)-k=(x+2)(x-1)(x-4)$

$\therefore f(x)=(x+2)(x-1)(x-4)+k$

2nd $f(0)$의 값을 구한다.

조건 (나)에 의하여 $f(2)=-3$이므로

$-3=-8+k \quad \therefore k=5$

따라서 $f(x)=(x+2)(x-1)(x-4)+5$이므로

$f(0)=13$ 답 ①

0266

❷삼차다항식 $P(x)$와 일차다항식 $Q(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) ❶$P(x)Q(x)$는 $(x^2-3x+3)(x-1)$로 나누어떨어진다.
> └ $P(x)Q(x)$가 사차식이므로 $(x^2-3x+3)(x-1)$로 나누었을 때의 몫은 일차식이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여
> ❸$x^3-10x+13-P(x)=\{Q(x)\}^2$이다.
> └ $\{Q(x)\}^2$은 이차식이므로 $P(x)$의 x^3의 계수는 1이다.

❹$Q(0)<0$일 때, ❺$P(2)+Q(8)$의 값을 구하시오.

❶을 등식으로 나타낸 후 ❷를 이용하여 $P(x)$와 $Q(x)$의 인수를 파악한다.

❸, ❹를 모두 만족시키는 $P(x)$, $Q(x)$를 찾아 ❺를 구한다.

1st $P(x)$ 또는 $Q(x)$의 인수가 될 수 있는 다항식을 찾는다.

$P(x)Q(x)$를 $(x^2-3x+3)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $H(x)$라 하면 조건 (가)에 의하여

$P(x)Q(x)=(x^2-3x+3)(x-1)H(x)$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$P(1)Q(1)=0$

$\therefore P(1)=0$ 또는 $Q(1)=0$

이때 $Q(x)$가 일차식이므로 $x-1$은 $P(x)$ 또는 $Q(x)$의 인수이다.

2nd $x-1$이 $P(x)$의 인수일 때 $P(x)$, $Q(x)$를 구한다.

(i) $x-1$이 $P(x)$의 인수일 때,

㉠에서 $P(x)$는 $(x^2-3x+3)(x-1)$을 인수로 갖고, 조건 (나)에서 우변이 이차식이므로 $P(x)$의 x^3의 계수는 1이어야 한다.

$$\begin{aligned}\therefore P(x)&=(x^2-3x+3)(x-1)\\&=x^3-4x^2+6x-3\end{aligned}$$

이것을 조건 (나)에 대입하면

$$\{Q(x)\}^2=x^3-10x+13-(x^3-4x^2+6x-3)$$
$$=4x^2-16x+16$$
$$=4(x-2)^2$$

이므로

$$Q(x)=-2(x-2) \text{ 또는 } Q(x)=2(x-2)$$

이때 $Q(0)<0$이므로

$$Q(x)=2(x-2)$$

3rd **$x-1$이 $Q(x)$의 인수일 때 $P(x)$, $Q(x)$를 구한다.**

(ii) $x-1$이 $Q(x)$의 인수일 때,

$Q(x)=a(x-1)$ $(a\neq0)$이라 하고 조건 (나)에 대입하면

$$x^3-10x+13-P(x)=\{a(x-1)\}^2$$
$$\therefore P(x)=x^3-a^2x^2+(2a^2-10)x+13-a^2$$

㉠에서 $P(x)$는 x^2-3x+3으로 나누어떨어지므로

$$\begin{array}{r}
x+(-a^2+3) \qquad\qquad\qquad\qquad \\
x^2-3x+3\,\overline{\big)\,x^3-\quad a^2x^2+(2a^2-10)x+13-a^2} \\
x^3-\quad 3x^2+\qquad\quad 3x \qquad\qquad\quad \\
\hline
(-a^2+3)x^2+(2a^2-13)x+13-a^2 \\
(-a^2+3)x^2+\ (3a^2-9)x-3a^2+9 \\
\hline
(-a^2-4)x+4+2a^2
\end{array}$$

에서 x의 값에 관계없이 $(-a^2-4)x+4+2a^2=0$이어야 한다. 즉

$$-a^2-4=0,\ 4+2a^2=0$$

이를 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

4th **$P(2)+Q(8)$의 값을 구한다.**

(i), (ii)에서 $P(x)=x^3-4x^2+6x-3$, $Q(x)=2(x-2)$이므로

$$P(2)+Q(8)=1+12=13$$

답 13

0267 **1st** **a, b, c, p, q, r의 값을 구한다.**

주어진 조립제법에서

$$p=1,\ a-1=q,\ -q=-1,$$
$$b-1=r,\ -r=5,\ c+5=13$$
$$\therefore a=2,\ b=-4,\ c=8,\ p=1,\ q=1,\ r=-5$$

2nd **$(ax^2+bx+c)+(px^2+qx+r)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지를 구한다.**

$P(x)=(ax^2+bx+c)+(px^2+qx+r)$라 하면

$$P(x)=(2x^2-4x+8)+(x^2+x-5)$$
$$=3x^2-3x+3$$

따라서 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$$P(-2)=21$$

답 21

다른 풀이 주어진 다항식은 조립제법에 의하여

$$x^3+ax^2+bx+c=(x+1)(px^2+qx+r)+13$$

으로 나타낼 수 있으므로

$$ax^2+bx+c=(x+1)(px^2+qx+r)+13-x^3$$

이때 $P(x)=(ax^2+bx+c)+(px^2+qx+r)$라 하면

$$P(x)=(x+1)(px^2+qx+r)+13-x^3+(px^2+qx+r)$$
$$=(x+2)(px^2+qx+r)+13-x^3$$

따라서 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$$P(-2)=21$$

0268 **1st** **n을 β에 대한 식으로 나타낸다.**

$f(x)=x^2+2x-n$이 $(x+\alpha)(x-\beta)$로 인수분해되므로

$$x^2+2x-n=(x+\alpha)(x-\beta)$$
$$=x^2+(\alpha-\beta)x-\alpha\beta$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$$\alpha-\beta=2,\ \alpha\beta=n$$

$\alpha-\beta=2$에서 $\alpha=\beta+2$이므로

$$n=\alpha\beta=\beta(\beta+2)$$ ··· ❶

2nd **$f(x)$의 개수를 구한다.**

n은 1000 이하의 자연수이므로

$\beta=30$이면 $\quad n=30\cdot32=960<1000$

$\beta=31$이면 $\quad n=31\cdot33=1023>1000$

따라서 자연수 β는 1, 2, ⋯, 30이므로 조건을 만족시키는 다항식 $f(x)$의 개수는 30이다. ··· ❷

답 30

채점 기준	비율
❶ n을 β에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $f(x)$의 개수를 구할 수 있다.	50 %

참고 α, β의 순서쌍 (α, β)는

$$(3, 1), (4, 2), \cdots, (32, 30)$$

이므로 다항식 $f(x)$는

$$(x+3)(x-1), (x+4)(x-2), \cdots, (x+32)(x-30)$$

0269 **1st** **n^4-16n^2+100을 인수분해한다.**

$$n^4-16n^2+100=(n^4+20n^2+100)-36n^2$$
$$=(n^2+10)^2-(6n)^2$$
$$=(n^2+6n+10)(n^2-6n+10)$$

2nd **n^4-16n^2+100이 소수가 되도록 하는 자연수 n의 값을 구한다.**

주어진 자연수가 소수가 되려면 1과 자기 자신만을 약수로 가져야 하므로

$$n^2+6n+10=1 \text{ 또는 } n^2-6n+10=1$$

(i) $n^2+6n+10=1$일 때,

$n^2+6n+9=0$에서

$$(n+3)^2=0 \qquad \therefore n=-3$$

(ii) $n^2-6n+10=1$일 때,

$n^2-6n+9=0$에서

$$(n-3)^2=0 \qquad \therefore n=3$$

(i), (ii)에서 n은 자연수이므로 $\quad n=3$

답 3

참고 $n=3$이면

$$n^4-16n^2+100=(n^2+6n+10)(n^2-6n+10)$$
$$=(9+18+10)\cdot(9-18+10)=37$$

0270 **1st** **$N(0, 1)$의 값을 구한다.**

ㄱ. $a=0$, $b=1$일 때,

$$P(x)=x^4+1$$
$$\therefore N(0, 1)=0$$

2nd **$N(n, -20)=2$를 만족시키는 정수 n의 개수를 구한다.**

ㄴ. $a=n$, $b=-20$일 때,

$$P(x)=x^4+nx^2-20$$

02 나머지 정리와 인수분해

$20=1\cdot20=2\cdot10=4\cdot5$이므로 x^4+nx^2-20은

$(x^2-1)(x^2+20)$, $(x^2+1)(x^2-20)$, $(x^2-2)(x^2+10)$,
$(x^2+2)(x^2-10)$, $(x^2-4)(x^2+5)$, $(x^2+4)(x^2-5)$

와 같이 인수분해할 수 있다. 이 중에서

$(x^2-1)(x^2+20)=(x+1)(x-1)(x^2+20)$,
$(x^2-4)(x^2+5)=(x+2)(x-2)(x^2+5)$

인 경우에만 $N(n,\ -20)=2$이므로 $\underbrace{\text{정수 } n}_{19,\ 1}$의 개수는 2이다.

3rd $N(m,\ 4)=4$를 만족시키는 정수 m의 개수를 구한다.

ㄷ. $a=m$, $b=4$일 때,

$P(x)=x^4+mx^2+4$

$4=1\cdot4=2\cdot2$이므로 x^4+mx^2+4는

$(x^2-1)(x^2-4)$, $(x^2+1)(x^2+4)$,
$(x^2-2)(x^2-2)$, $(x^2+2)(x^2+2)$

와 같이 인수분해할 수 있다. 이 중에서

$(x^2-1)(x^2-4)=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

인 경우에만 $N(m,\ 4)=4$이므로 $\underbrace{\text{정수 } m}_{-5}$의 개수는 1이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0271 **1st** x^{15}을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 구한다.

x^{15}을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$x^{15}=(x-1)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$R=1$

즉 $x^{15}=(x-1)Q(x)+1$에서

$x^{15}-1=(x-1)Q(x)$
$(x-1)(x^{14}+x^{13}+\cdots+1)=(x-1)Q(x)$
$\therefore Q(x)=x^{14}+x^{13}+\cdots+1$ ⋯→ ❶

2nd Q를 구한다.

㉠의 양변에 $x=201$을 대입하면

$201^{15}=200Q(201)+1$

이므로 201^{15}을 200으로 나누었을 때의 몫은 $Q(201)$이다.

$\therefore Q=Q(201)$

3rd Q를 200으로 나누었을 때의 나머지를 구한다.

$Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$, 나머지를 R'이라 하면

$Q(x)=(x-1)Q'(x)+R'$ …… ㉡

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$Q(1)=R'$ $\quad\therefore R'=15$

㉡의 양변에 $x=201$을 대입하면

$Q(201)=200Q'(201)+15$

따라서 Q를 200으로 나누었을 때의 나머지는 15이다. ⋯→ ❷

답 15

채점 기준	비율
❶ x^{15}을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 구할 수 있다.	60 %
❷ Q를 200으로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	40 %

참고 $P(x)=x^{15}-1$이라 하면 $P(1)=0$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}^{14\text{개}}} & -1 \\ & & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^{14}+x^{13}+\cdots+1)$

0272 **1st** n^4+n^2-2를 $(n-1)(n-2)$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 변형한다.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ & & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & \boxed{0} \\ & & 2 & 6 & 16 & \\ \hline & 1 & 3 & 8 & \boxed{18} & \end{array}$$

위의 조립제법에서

$n^4+n^2-2=(n-1)(n^3+n^2+2n+2)$
$=(n-1)\{(n-2)(n^2+3n+8)+18\}$
$=(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)+18(n-1)$

2nd n^4+n^2-2가 $(n-1)(n-2)$의 배수가 되도록 하는 자연수 n의 최댓값을 구한다.

$(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)$은 $(n-1)(n-2)$로 나누어떨어지므로 n^4+n^2-2가 $(n-1)(n-2)$의 배수이려면 $18(n-1)$이 $(n-1)(n-2)$의 배수이어야 한다.

즉 $18(n-1)=(n-1)(n-2)k$ (k는 자연수)이므로

$18=(n-2)k$ ($\because$ $n\neq1$) $n=1$이면 $n^4+n^2-2=0$이므로 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

k의 값이 최소일 때 n의 값이 최대이므로 $k=1$일 때 n의 최댓값은

$18=n-2$ $\quad\therefore n=20$ 답 20

0273 **1st** 두 이차식 $A(x)$, $B(x)$는 어떤 다항식의 인수인지 구한다.

x^3-3x^2+2x+5를 서로 다른 두 이차식 $A(x)$, $B(x)$로 나누었을 때의 나머지가 모두 $2x+1$이므로 $A(x)$, $B(x)$는

$x^3-3x^2+2x+5-(2x+1)=x^3-3x^2+4$

의 인수이다.

2nd $A(x)$, $B(x)$를 구한다.

$P(x)=x^3-3x^2+4$라 하면

$P(-1)=-1-3+4=0$

이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x+1)(x^2-4x+4)$
$=(x+1)(x-2)^2$

최고차항의 계수가 1인 두 이차식 $A(x)$, $B(x)$는 $P(x)$의 서로 다른 인수이므로

$A(x)=(x+1)(x-2)$, $B(x)=(x-2)^2$
또는 $A(x)=(x-2)^2$, $B(x)=(x+1)(x-2)$

3rd $A(x)+B(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지를 구한다.

따라서 $A(x)+B(x)=(x+1)(x-2)+(x-2)^2$이므로 $A(x)+B(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는

$A(5)+B(5)=27$ 답 ④

0274 **1st** 주어진 5개의 정육면체와 13개의 직육면체의 부피의 합을 a, b에 대한 식으로 나타낸 후 인수분해한다.

주어진 5개의 정육면체와 13개의 직육면체의 부피의 합은

$4a^3+b^3+8a^2b+5ab^2$

$P(a)=4a^3+8ba^2+5b^2a+b^3$이라 하면

$P(-b)=-4b^3+8b^3-5b^3+b^3=0$

이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(a)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -b & 4 & 8b & 5b^2 & b^3 \\ & & -4b & -4b^2 & -b^3 \\ \hline & 4 & 4b & b^2 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(a)=(a+b)(4a^2+4ab+b^2)$

$=(a+b)(2a+b)^2$

2nd ab의 값을 구한다.

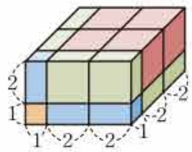
$(a+b)(2a+b)^2=75$이고 $75=3\cdot5^2$이므로

$a+b=3,\ 2a+b=5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=1$

$\therefore\ ab=2$ 답 ①

참고 주어진 5개의 정육면체와 13개의 직육면체로 만든 부피가 75인 직육면체는 오른쪽 그림과 같다.



0275 1st 주어진 등식의 좌변을 인수분해한다.

$a^3-b^3-a^2b+ab^2-ac^2+bc^2$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2)-ab(a-b)-c^2(a-b)$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2-ab-c^2)$

$=(a-b)(a^2+b^2-c^2)$

이므로

$(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$ …… ㉠

2nd $a>b$일 때 a, c의 대소를 비교한다.

ㄱ. $a>b$이면 $a-b\neq0$이므로 ㉠에서 $a^2+b^2-c^2=0$

$\therefore\ a^2+b^2=c^2$

따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이므로 $c>a$

3rd $b>c$일 때 a, b의 대소를 비교한다.

ㄴ. $b>c$이면 $b^2>c^2$, 즉 $b^2-c^2>0$이므로

$a^2+b^2-c^2\neq0$

따라서 ㉠에서 $a-b=0$ $\therefore\ a=b$

4th $b\geq c$일 때 a, c의 대소를 비교한다.

ㄷ. $b\geq c$이면 $b^2\geq c^2$, 즉 $b^2-c^2\geq0$이므로

$a^2+b^2-c^2\neq0$

따라서 ㉠에서 $a-b=0$ $\therefore\ a=b$

$\therefore\ a\geq c$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0276 1st a, b, c에 대한 등식의 좌변을 인수분해한다.

$a^2b-a^2c-ab^2+b^2c+ac^2-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

이므로

$(b-c)(a-b)(a-c)=0$ ⋯ ❶

2nd a, b, c의 값을 구한다.

$a=2b$를 앞의 식에 대입하면

$b(b-c)(2b-c)=0$

$\therefore\ b=c$ 또는 $c=2b$ ($\because\ b>0$)

그런데 $b=c$이면

$a=2b=b+c$

이므로 삼각형이 만들어지지 않는다.

(한 변의 길이) < (나머지 두 변의 길이의 합)을 만족시켜야 한다.

$\therefore\ c=2b$

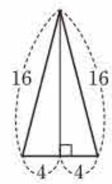
주어진 삼각형의 둘레의 길이가 40이므로 $a+b+c=40$에서

$2b+b+2b=40,\quad 5b=40\quad \therefore\ b=8$

$\therefore\ a=16,\ b=8,\ c=16$ ⋯ ❷

3rd 삼각형의 넓이를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 삼각형의 밑변의 길이를 8이라 하면 높이는



$\sqrt{16^2-4^2}=4\sqrt{15}$

이므로 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot8\cdot4\sqrt{15}=16\sqrt{15}$ ⋯ ❸

답 $16\sqrt{15}$

채점 기준	비율
❶ a, b, c에 대한 등식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	40 %
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

0277

❸ $a>b>c\geq2$인 세 자연수 a, b, c에 대하여

❶ $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=$ ❷ 280

일 때, abc의 값은?

① 25 ② 30 ③ 35 ④ 40 ⑤ 45

❶을 인수분해하면 자연수의 곱으로 나타낼 수 있다.
따라서 ❷를 소인수분해한 후 ❸을 이용하여 a, b, c의 값을 구한다.

1st 주어진 등식의 좌변을 인수분해하고 우변을 소인수분해한다.

$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

$=\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}-abc$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+abc+(b+c)bc-abc$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+(b+c)bc$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

이고 $280=2^3\cdot5\cdot7$이므로

$(a+b)(b+c)(a+c)=2^3\cdot5\cdot7$

2nd abc의 값을 구한다.

$a>b>c\geq2$에서 $a+b>a+c>b+c\geq5$이므로

$a+b=8,\ a+c=7,\ b+c=5$

$\therefore\ a=5,\ b=3,\ c=2$

$b>c\geq2$이고 $b+c=5$이므로 $b=3,\ c=2$

$\therefore\ abc=30$ 답 ②

참고 $b>c$에서 $\quad a+b>a+c$
$a>b$에서 $\quad a+c>b+c$
b, c는 자연수이므로 $b>c\geq 2$에서 $\quad b+c\geq 5$
$\therefore a+b>a+c>b+c\geq 5$

0278 **1st** $16=x$로 놓고 근호 안의 식의 분자를 인수분해한다.
$16=x$로 놓으면

$$(\text{주어진 식})=\sqrt{\frac{x^4-9x^2-4x+12}{n}}$$

$P(x)=x^4-9x^2-4x+12$라 하면

$$P(1)=1-9-4+12=0,$$
$$P(-2)=16-36+8+12=0$$

이므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & 0 & -9 & -4 & 12 \\
 & & 1 & 1 & -8 & -12 \\
\hline
-2 & 1 & 1 & -8 & -12 & \boxed{0} \\
 & & -2 & 2 & 12 & \\
\hline
 & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$$\therefore P(x)=(x-1)(x+2)(x^2-x-6)$$
$$=(x+2)^2(x-1)(x-3)$$

2nd 자연수 n의 개수를 구한다.
$P(16)=18^2\cdot 15\cdot 13=2^2\cdot 3^5\cdot 5\cdot 13$이므로

$$(\text{주어진 식})=\sqrt{\frac{2^2\cdot 3^5\cdot 5\cdot 13}{n}}$$

따라서 위의 식이 자연수가 되려면 근호 안의 식이 $(\text{자연수})^2$ 꼴이어야 하므로 자연수 n은

$2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 13$, $2^2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 13$, $2^2\cdot 3^5\cdot 5\cdot 13$,
$3\cdot 5\cdot 13$, $3^3\cdot 5\cdot 13$, $3^5\cdot 5\cdot 13$

의 6개이다. 답 ③

03 복소수

0279 답 실수부분: 3, 허수부분: -1

0280 답 실수부분: -1, 허수부분: $\sqrt{2}$

0281 답 실수부분: $\frac{3}{2}$, 허수부분: $-\frac{5}{2}$

0282 답 실수부분: 0, 허수부분: -4

0283 답 실수부분: 6, 허수부분: 0

0284 답 실수부분: $2+\sqrt{5}$, 허수부분: 0

0285 답 ㄱ, ㄷ, ㅂ

0286 답 ㄴ, ㄹ, ㅁ

0287 답 $a=1$, $b=-2$

0288 답 $a=0$, $b=-5$

0289 $2a+1=-2$, $3=b-1$이므로
$a=-\frac{3}{2}$, $b=4$ 답 $a=-\frac{3}{2}$, $b=4$

0290 $5a-2=0$, $9-3b=0$이므로
$a=\frac{2}{5}$, $b=3$ 답 $a=\frac{2}{5}$, $b=3$

0291 $a+b=-2$, $4=2b$이므로
$a=-4$, $b=2$ 답 $a=-4$, $b=2$

0292 $3a+b=5$, $a-b=-1$이므로 두 식을 연립하여 풀면
$a=1$, $b=2$ 답 $a=1$, $b=2$

0293 $a+2b-5=2$, $4=6a-b+1$이므로
$a+2b=7$, $6a-b=3$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=1$, $b=3$ 답 $a=1$, $b=3$

0294 답 $3-2i$

0295 답 $4i+\sqrt{2}$

0296 답 -8

참고 실수 a의 켤레복소수는 a이다.

0297 답 $-\sqrt{15}i$

참고 순허수 bi의 켤레복소수는 $-bi$이다.

0298 $\overline{3+8i}=3-8i$이므로

$a=3,\ b=-8$ 답 $a=3,\ b=-8$

0299 $\overline{-\sqrt{5}-7i}=-\sqrt{5}+7i$이므로

$a=-\sqrt{5},\ b=7$ 답 $a=-\sqrt{5},\ b=7$

0300 $\overline{2i-9}=\overline{-9+2i}=-9-2i$이므로

$a=-9,\ b=-2$ 답 $a=-9,\ b=-2$

0301 $\overline{\sqrt{11}}=\sqrt{11}$이므로

$a=\sqrt{11},\ b=0$ 답 $a=\sqrt{11},\ b=0$

0302 $(4-i)+(-8+2i)=(4-8)+(-1+2)i$

$=-4+i$ 답 $-4+i$

0303 $(7-2i)-(i-5)=(7+5)+(-2-1)i$

$=12-3i$ 답 $12-3i$

0304 $(11+3i)-(7-4i)+2i=(11-7)+(3+4+2)i$

$=4+9i$ 답 $4+9i$

0305 $(2-i)(4+3i)=8+6i-4i-3i^2$

$=8+2i+3$

$=11+2i$ 답 $11+2i$

0306 $(3+i)^2=9+6i+i^2$

$=9+6i-1$

$=8+6i$ 답 $8+6i$

0307 $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-2i+i^2}{1-i^2}$

$=\dfrac{1-2i-1}{1+1}=\dfrac{-2i}{2}=-i$ 답 $-i$

0308 $\dfrac{3+2i}{2-i}=\dfrac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{6+3i+4i+2i^2}{4-i^2}$

$=\dfrac{6+7i-2}{4+1}=\dfrac{4+7i}{5}$

$=\dfrac{4}{5}+\dfrac{7}{5}i$ 답 $\dfrac{4}{5}+\dfrac{7}{5}i$

0309 $\overline{(\overline{z})}=z=6-4i$ 답 $6-4i$

0310 $z+\overline{z}=(6-4i)+(6+4i)=12$ 답 12

0311 $z\overline{z}=(6-4i)(6+4i)=36-16i^2$

$=36+16=52$ 답 52

0312 $\dfrac{z}{\overline{z}}=\dfrac{6-4i}{6+4i}=\dfrac{(6-4i)^2}{(6+4i)(6-4i)}$

$=\dfrac{36-48i+16i^2}{36-16i^2}=\dfrac{36-48i-16}{36+16}$

$=\dfrac{20-48i}{52}$

$=\dfrac{5}{13}-\dfrac{12}{13}i$ 답 $\dfrac{5}{13}-\dfrac{12}{13}i$

0313 $i^{50}=(i^4)^{12}\cdot i^2=-1$ 답 -1

0314 $(-i)^{65}=-i^{65}=-(i^4)^{16}\cdot i=-i$ 답 $-i$

0315 $1-i+i^2-i^3=1-i-1-(-i)=0$ 답 0

0316 $i^{100}+i^{101}=(i^4)^{25}+(i^4)^{25}\cdot i=1+i$ 답 $1+i$

0317 $(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$이므로

$(1+i)^4=\{(1+i)^2\}^2=(2i)^2=4i^2=-4$ 답 -4

0318 $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{1-2i+i^2}{2}=\dfrac{-2i}{2}=-i$이므로

$\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^6=\left\{\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^3=(-i)^3=-i^3$

$=-(-i)=i$ 답 i

0319 $\sqrt{-9}=\sqrt{9}i=3i$ 답 $3i$

0320 $\sqrt{-12}=\sqrt{12}i=2\sqrt{3}i$ 답 $2\sqrt{3}i$

0321 $-\sqrt{-8}=-\sqrt{8}i=-2\sqrt{2}i$ 답 $-2\sqrt{2}i$

0322 $-\sqrt{-\dfrac{9}{4}}=-\sqrt{\dfrac{9}{4}}i=-\dfrac{3}{2}i$ 답 $-\dfrac{3}{2}i$

0323 $\pm\sqrt{-3}=\pm\sqrt{3}i$ 답 $\pm\sqrt{3}i$

SSEN 특강 a의 제곱근

실수 a에 대하여 제곱하여 a가 되는 수를 a의 제곱근이라 한다.
즉 $x^2=a$일 때 x를 a의 제곱근이라 한다.

0324 $\pm\sqrt{-25}=\pm\sqrt{25}i=\pm5i$ 답 $\pm5i$

0325 $\pm\sqrt{-18}=\pm\sqrt{18}i=\pm3\sqrt{2}i$ 답 $\pm3\sqrt{2}i$

0326 $\pm\sqrt{-\frac{1}{16}}=\pm\sqrt{\frac{1}{16}}i=\pm\frac{1}{4}i$ 답 $\pm\frac{1}{4}i$

0327 $\sqrt{-2}\sqrt{-8}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{8}i=\sqrt{16}i^2=-4$ 답 -4

0328 $\sqrt{3}\sqrt{-27}=\sqrt{3}\sqrt{27}i=\sqrt{81}i=9i$ 답 $9i$

0329 $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{-4}}=\frac{4}{\sqrt{4}i}=\frac{2}{i}=\frac{2i}{i^2}=-2i$ 답 $-2i$

0330 $\frac{\sqrt{-30}}{\sqrt{-6}}=\frac{\sqrt{30}i}{\sqrt{6}i}=\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{5}$

유형 01 복소수의 뜻과 분류 본책 50쪽

a, b가 실수일 때,

복소수 $a+bi\begin{cases}\text{실수 } a & (b=0)\\ \text{허수 } a+bi & (b\neq0)\end{cases}$

0331 ① 0은 복소수이다.
② $1-6i$의 허수부분은 -6이다.
③ $2+\sqrt{5}i$의 실수부분은 2, 허수부분은 $\sqrt{5}$이다.
⑤ $a=3i$, $b=0$이면 $a+bi=3i$는 허수이다.
a가 실수라는 조건이 없으므로 허수일 수도 있다.

답 ④

0332 허수는 $\sqrt{5}-i$, $11i$, $\sqrt{3}i$, $9i-2$의 4개이다. 답 4

유형 02 복소수의 사칙연산 본책 50쪽

복소수의 사칙연산은 허수단위 i를 문자로 생각하여 계산한다.
특히 복소수의 나눗셈은 분모의 켤레복소수를 분자, 분모에 곱하여 계산한다.

0333 ① $(7+3i)+(4-6i)=11-3i$
② $(i-5)-(2i-9)=4-i$
③ $(1-i^2)(1+i^2)=(1+1)(1-1)=0$
④ $(2-3i)^2=4-12i-9=-5-12i$
⑤ $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1+i)^2+(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i-2i}{2}=0$

답 ⑤

0334 $(2-i)(3+2i)+\frac{1+\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-i}$

$=6+4i-3i+2+\frac{(1+\sqrt{2}i)(\sqrt{2}+i)}{(\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}+i)}$

$=8+i+\frac{\sqrt{2}+i+2i-\sqrt{2}}{3}$

$=8+i+\frac{3i}{3}$

$=8+2i$ 답 $8+2i$

0335 $z_1=(1-i)^2=-2i$

$z_2=\frac{3-\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}$

$=\frac{(3-\sqrt{3}i)^2}{(3+\sqrt{3}i)(3-\sqrt{3}i)}$

$=\frac{6-6\sqrt{3}i}{12}$

$=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore z_1z_2=-2i\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=-\sqrt{3}-i$

따라서 $a=-\sqrt{3}$, $b=-1$이므로

$a^2-b^2=3-1=2$ 답 ⑤

0336 $(5+3i)◎(1-2i)$

$=(5+3i)+(1-2i)-(5+3i)(1-2i)$

$=6+i-(5-10i+3i+6)$

$=6+i-11+7i$

$=-5+8i$ ··· ❶

따라서 구하는 실수부분은 -5이다. ··· ❷

답 -5

채점 기준	비율
❶ $(5+3i)◎(1-2i)$를 계산할 수 있다.	80 %
❷ $(5+3i)◎(1-2i)$의 실수부분을 구할 수 있다.	20 %

유형 03 복소수가 주어질 때의 식의 값 구하기 본책 50쪽

복소수 x에 대한 이차 이상의 식의 값
➡ $x=a+bi$ (a, b는 실수)에서 $x-a=bi$ 꼴로 변형한 후 양변을 제곱하여 x에 대한 이차식의 값을 구하고 이것을 주어진 식에 대입한다.

0337 $x=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$에서 $2x-1=-\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면 $4x^2-4x+1=-3$

$4x^2-4x=-4$ $\therefore x^2-x=-1$

$\therefore 3x^2-3x-2=3(x^2-x)-2$

$=3\cdot(-1)-2$

$=-5$ 답 ①

다른 풀이 $3x^2-3x-2=3\cdot\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2-3\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{2}-2$

$=3\cdot\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}-\frac{3-3\sqrt{3}i}{2}-2$

$=\frac{-3-3\sqrt{3}i}{2}-\frac{3-3\sqrt{3}i}{2}-2$

$=\frac{-6}{2}-2=-5$

0338 $x=-1+\sqrt{5}i$에서 $x+1=\sqrt{5}i$

양변을 제곱하면 $x^2+2x+1=-5$

$\therefore x^2+2x=-6$

$\therefore x^2+2x+4=-6+4=-2$ 답 -2

0339 $x=\frac{5-i}{1+i}=\frac{(5-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$=\frac{5-5i-i-1}{2}=2-3i$ ⋯ ❶

에서 $x-2=-3i$

양변을 제곱하면 $x^2-4x+4=-9$

$\therefore x^2-4x=-13$ ⋯ ❷

$\therefore -x^3+4x^2-15x+5=-x(x^2-4x)-15x+5$

$=-x\cdot(-13)-15x+5$

$=-2x+5$

$=-2(2-3i)+5$

$=1+6i$ ⋯ ❸

답 $1+6i$

채점 기준	비율
❶ x를 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ x^2-4x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $-x^3+4x^2-15x+5$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0340 $x^2=-1+3i$에서 $x^2+1=3i$

양변을 제곱하면 $x^4+2x^2+1=-9$

$\therefore x^4+2x^2+10=0$

$x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면 $x^3+2x+\frac{10}{x}=0$

$\therefore x^4+x^3+4x^2+2x+\frac{10}{x}=x^4+4x^2+\left(x^3+2x+\frac{10}{x}\right)$

$=x^4+4x^2$

$=(x^4+2x^2)+2x^2$

$x^4+2x^2+10=0$에서 $x^4+2x^2=-10$

$=2x^2-10$

$=2(-1+3i)-10$

$=-12+6i$

답 ②

유형 04 복소수 z 또는 z^2이 실수가 되기 위한 조건 본책 51쪽

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여
① z가 실수 ➡ $b=0$
② z^2이 실수 ➡ z가 실수 또는 순허수 ➡ $a=0$ 또는 $b=0$
③ z^2이 음의 실수 ➡ z가 순허수 ➡ $a=0$, $b\neq0$
④ z^2이 양의 실수 ➡ z가 0이 아닌 실수 ➡ $a\neq0$, $b=0$

0341 $z=x(1-i)+2(-2+i)=(x-4)+(-x+2)i$

z^2이 음의 실수가 되려면 z는 순허수이어야 하므로

$x-4=0$, $-x+2\neq0$

$\therefore x=4$

답 4

0342 $z=i(a+2i)^2=i(a^2+4ai-4)$

$=-4a+(a^2-4)i$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

이 복소수가 실수가 되려면

$a^2-4=0$, $a^2=4$ $\therefore a=2$ ($\because a>0$)

$\therefore a=2$ ⋯ ❷

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$z=-8$ $\therefore \beta=-8$ ⋯ ❸

$\therefore \alpha-\beta=10$ ⋯ ❹

답 10

채점 기준	비율
❶ z를 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ α의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ β의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $\alpha-\beta$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0343 z^2이 실수가 되려면 z는 실수 또는 순허수이어야 하므로

$a^2-6a+8=0$ 또는 $a-2=0$

$(a-2)(a-4)=0$ 또는 $a-2=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=4$

따라서 구하는 모든 a의 값의 합은

$2+4=6$

답 ③

0344 $z=(a+3i)(1+4i)+a(-5+ai)$

$=a+4ai+3i-12-5a+a^2i$

$=(-4a-12)+(a^2+4a+3)i$

z^2이 양의 실수가 되려면 z는 0이 아닌 실수이어야 하므로

$-4a-12\neq0$, $a^2+4a+3=0$

$-4a-12\neq0$에서 $a\neq-3$ ⋯⋯ ㉠

$a^2+4a+3=0$에서 $(a+3)(a+1)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=-1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-1$

답 -1

0345 $z=a^2(1+i)+a(-3+2i)+(2-3i)$

$=(a^2-3a+2)+(a^2+2a-3)i$

(i) z^2이 실수가 되려면 z는 실수 또는 순허수이어야 하므로

$a^2-3a+2=0$ 또는 $a^2+2a-3=0$

$(a-1)(a-2)=0$ 또는 $(a+3)(a-1)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=1$ 또는 $a=2$

(ii) $z-5i=(a^2-3a+2)+(a^2+2a-3)i-5i$

$=(a^2-3a+2)+(a^2+2a-8)i$

이 복소수가 실수가 되려면

$a^2+2a-8=0$, $(a+4)(a-2)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=2$

(i), (ii)에서 $a=2$

답 ⑤

유형 05 복소수가 서로 같을 조건 집중공략 본책 52쪽

복소수를 포함한 등식에서 실수인 미지수의 값을 구할 때에는 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 정리하여 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.
① $a+bi=c+di$ (a, b, c, d는 실수) ➡ $a=c$, $b=d$
② $a+bi=0$ (a, b는 실수) ➡ $a=0$, $b=0$

0346 $2x(2-i)-y(1+3i)=7+7i$에서

$4x-2xi-y-3yi=7+7i$

$(4x-y)+(-2x-3y)i=7+7i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$4x-y=7,\ -2x-3y=7$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=1,\ y=-3$

$\therefore\ x+y=-2$ 답 ①

0347 $\dfrac{x}{1+2i}+\dfrac{y}{1-2i}=\dfrac{8}{3-i}$에서

$\dfrac{x(1-2i)+y(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{8(3+i)}{(3-i)(3+i)}$

$\dfrac{(x+y)-2(x-y)i}{5}=\dfrac{24+8i}{10}$

$(x+y)-2(x-y)i=12+4i$ ··· ❶

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=12,\ x-y=-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=5,\ y=7$ ··· ❷

$\therefore\ xy=35$ ··· ❸

답 35

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 양변을 각각 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 나타낼 수 있다.	50%
❷ x, y의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ xy의 값을 구할 수 있다.	10%

0348 $x^2+y^2i-x+2yi-6-3i=0$에서

$(x^2-x-6)+(y^2+2y-3)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2-x-6=0,\ y^2+2y-3=0$

$x^2-x-6=0$에서 $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=3$

$y^2+2y-3=0$에서 $(y+3)(y-1)=0$

$\therefore\ y=-3$ 또는 $y=1$

$\therefore\ xy=-9$ 또는 $xy=-2$ 또는 $xy=3$ 또는 $xy=6$

따라서 xy의 값이 될 수 없는 것은 ②이다. 답 ②

0349 $\dfrac{a}{1+ai}=\dfrac{a(1-ai)}{(1+ai)(1-ai)}=\dfrac{a-a^2i}{1+a^2}$

$=\dfrac{a}{1+a^2}-\dfrac{a^2}{1+a^2}i$

이므로 $x+yi=\dfrac{a}{1+a^2}-\dfrac{a^2}{1+a^2}i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x=\dfrac{a}{1+a^2},\ y=-\dfrac{a^2}{1+a^2}$

이때 $2x-y=1$이므로

$2\cdot\dfrac{a}{1+a^2}+\dfrac{a^2}{1+a^2}=1,\quad \dfrac{2a+a^2}{1+a^2}=1$

$2a+a^2=1+a^2,\quad 2a=1\quad \therefore\ a=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{1}{2}$

0350 $a(1+i)-b(1-i)=(a-b)+(a+b)i$

-1의 제곱근은 $\pm i$이므로

(i) $(a-b)+(a+b)i=i$일 때,

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a-b=0,\ a+b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ a^2+b^2=\dfrac{1}{2}$

(ii) $(a-b)+(a+b)i=-i$일 때,

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a-b=0,\ a+b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-\dfrac{1}{2},\ b=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ a^2+b^2=\dfrac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $a^2+b^2=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{1}{2}$

다른 풀이 $\{a(1+i)-b(1-i)\}^2$

$=a^2(1+i)^2-2ab(1+i)(1-i)+b^2(1-i)^2$

$=2a^2i-4ab-2b^2i$

$=-4ab+2(a^2-b^2)i$

이므로 $-4ab+2(a^2-b^2)i=-1$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$-4ab=-1,\ 2(a^2-b^2)=0$

$\therefore\ ab=\dfrac{1}{4},\ a^2=b^2$

$ab>0$이므로 $a^2=b^2$에서 $a=b$

따라서 $ab=\dfrac{1}{4}$에서 $a^2=b^2=\dfrac{1}{4}$이므로

$a^2+b^2=\dfrac{1}{2}$

유형 06 켤레복소수의 계산

본책 52쪽

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)의 켤레복소수를 $\bar{z}$라 하면

$\bar{z}=a-bi$

➡ $z+\bar{z}=2a,\ z\bar{z}=a^2+b^2$

0351 $z^3+\bar{z}^3=(z+\bar{z})^3-3z\bar{z}(z+\bar{z})$ ······ ㉠

이때 $\bar{z}=\dfrac{3+i}{2}$이므로

$z+\bar{z}=\dfrac{3-i}{2}+\dfrac{3+i}{2}=3,\ z\bar{z}=\dfrac{3-i}{2}\cdot\dfrac{3+i}{2}=\dfrac{5}{2}$

따라서 ㉠에서

$z^3+\bar{z}^3=3^3-3\cdot\dfrac{5}{2}\cdot 3=\dfrac{9}{2}$ 답 $\dfrac{9}{2}$

0352 $z=\dfrac{4}{1+i}=\dfrac{4(1-i)}{(1+i)(1-i)}=2-2i$이므로

$\bar{z}=2+2i$

$\therefore 10-\bar{z}-z\bar{z}=10-(2+2i)-(2-2i)(2+2i)$
$=10-2-2i-8$
$=-2i$

답 $-2i$

0353 $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}$ ······ ㉠

이때

$x+y=(2+i)+(2-i)=4,$
$xy=(2+i)(2-i)=5$

이므로 ㉠에서

$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{4^2-2\cdot 5}{5}=\dfrac{6}{5}$

답 ⑤

다른 풀이 $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{2-i}{2+i}+\dfrac{2+i}{2-i}$
$=\dfrac{(2-i)^2+(2+i)^2}{(2+i)(2-i)}$
$=\dfrac{3-4i+3+4i}{5}=\dfrac{6}{5}$

0354 $a(2-3i)-b(-1+4i)=\overline{-1-14i}$에서

$(2a+b)+(-3a-4b)i=-1+14i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2a+b=-1,\ -3a-4b=14$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-5$

따라서 $z=-5+2i$이므로 $\bar{z}=-5-2i$

$\therefore z^2\bar{z}+z\bar{z}^2=z\bar{z}(z+\bar{z})$
$=(-5+2i)(-5-2i)(-5+2i-5-2i)$
$=29\cdot(-10)$
$=-290$

답 ①

0355 $x^3-x^2y-xy^2+y^3=x^2(x-y)-y^2(x-y)$
$=(x^2-y^2)(x-y)$
$=(x+y)(x-y)^2$ ······ ㉠ ··· ❶

이때

$x=\dfrac{10}{1+3i}=\dfrac{10(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=1-3i,$

$y=\dfrac{10}{1-3i}=\dfrac{10(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=1+3i$

이므로

$x+y=(1-3i)+(1+3i)=2,$
$x-y=(1-3i)-(1+3i)=-6i$ ··· ❷

따라서 ㉠에서

$x^3-x^2y-xy^2+y^3=2\cdot(-6i)^2$
$=-72$ ··· ❸

답 -72

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	40 %
❷ $x+y,\ x-y$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 07 켤레복소수의 성질

집중공략 본책 53쪽

복소수 z의 켤레복소수를 $\bar{z}$라 할 때
① $z+\bar{z}=$(실수) ② $z\bar{z}=$(실수)
③ $z=\bar{z}$ ➡ z는 실수 ④ $z=-\bar{z}$ ➡ z는 0 또는 순허수

0356 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하자.

① $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$이므로 실수이다.

② $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\bar{z}}=\dfrac{1}{a+bi}+\dfrac{1}{a-bi}$
$=\dfrac{a-bi+a+bi}{(a+bi)(a-bi)}$
$=\dfrac{2a}{a^2+b^2}$

이므로 실수이다.

③ $z=\bar{z}$, 즉 $a+bi=a-bi$이면

$2bi=0 \quad \therefore b=0$

따라서 $z=a$이므로 실수이다.

④ $z\bar{z}=a^2+b^2$이므로 $z\bar{z}=0$, 즉 $a^2+b^2=0$이면

$a=0,\ b=0 \quad \therefore z=0$

⑤ $\bar{z}=a-bi$가 순허수이면 $a=0,\ b\neq 0$

따라서 $z=bi\ (b\neq 0)$이므로 순허수이다.

답 ②

0357 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하자.

$\bar{z}=-z$, 즉 $z+\bar{z}=0$이므로

$(a+bi)+(a-bi)=0$

$2a=0 \quad \therefore a=0$

즉 $z=bi$이므로 z는 0 또는 순허수이다. ⌐ $b=0$이면 $z=0$, $b\neq 0$이면 z는 순허수이다.

따라서 z가 될 수 있는 것은 $-2i,\ (1+\sqrt{3})i,\ 0,\ i$의 4개이다.

답 4

0358 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a,$
$z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi,$
$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

ㄱ. $(z+2)(\bar{z}+2)=z\bar{z}+2(z+\bar{z})+4$
$=a^2+b^2+2\cdot 2a+4$
$=a^2+b^2+4a+4$

이므로 항상 실수이다.

ㄴ. $(z+\bar{z})(z-\bar{z})=2a\cdot 2bi=4abi$

이므로 0 또는 순허수이다.

ㄷ. $z^3+\bar{z}^3=(z+\bar{z})^3-3z\bar{z}(z+\bar{z})$
$=(2a)^3-3(a^2+b^2)\cdot 2a$
$=8a^3-6a^3-6ab^2$
$=2a^3-6ab^2$

이므로 항상 실수이다.

ㄹ. $\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{\bar{z}}=\dfrac{\bar{z}-z}{z\bar{z}}=-\dfrac{z-\bar{z}}{z\bar{z}}=-\dfrac{2bi}{a^2+b^2}$

이므로 0 또는 순허수이다.

이상에서 항상 실수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

0359 $z=\overline{z}$이고 $z\neq0$이므로 z는 0이 아닌 실수이다.

$z=(2x^2-5x-3)+(x^2-9)i$에서

$2x^2-5x-3\neq0,\ x^2-9=0$ ⋯ ❶

$2x^2-5x-3\neq0$에서 $(2x+1)(x-3)\neq0$

$\therefore\ x\neq-\frac{1}{2},\ x\neq3$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❷

$x^2-9=0$에서 $x^2=9$

$\therefore\ x=\pm3$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❸

㉠, ㉡에서 $x=-3$ ⋯ ❹

답 -3

채점 기준	비율
❶ $z=\overline{z}$가 성립할 조건을 구할 수 있다.	40 %
❷ $2x^2-5x-3\neq0$을 만족시키는 x의 값의 조건을 구할 수 있다.	20 %
❸ $x^2-9=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ x의 값을 구할 수 있다.	20 %

0360 $\frac{1}{1+z^2}$이 실수이므로

$\frac{1}{1+z^2}=\overline{\left(\frac{1}{1+z^2}\right)}$, $\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{\overline{1+z^2}}$

$1+z^2=\overline{1+z^2}$, $1+z^2=1+\overline{z}^2$

$z^2-\overline{z}^2=0$, $(z+\overline{z})(z-\overline{z})=0$

이때 z는 허수이므로 $z\neq\overline{z}$

$\therefore\ z+\overline{z}=0$

답 ①

SSEN 특강

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$\overline{z^2}=\overline{(a+bi)^2}=\overline{(a^2-b^2)+2abi}=(a^2-b^2)-2abi$,

$\overline{z}^2=\overline{a+bi}^2=(a-bi)^2=(a^2-b^2)-2abi$

이므로 $\overline{z^2}=\overline{z}^2$이 성립한다.

참고 $z=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면

④, ⑤ $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2>0$ z가 허수이므로 $b\neq0$

유형 08 켤레복소수의 성질을 이용한 계산

본책 54쪽

두 복소수 z_1, z_2의 켤레복소수를 각각 $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$라 할 때

① $\overline{(\overline{z_1})}=z_1$

② $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

③ $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2\neq0$)

0361 $\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=\overline{\alpha}(\alpha+\beta)+\overline{\beta}(\alpha+\beta)$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$ ⋯⋯ ㉠

이때

$\alpha+\beta=(3+2i)+(1-i)=4+i$,

$\overline{\alpha+\beta}=4-i$

이므로 ㉠에서

$\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=(4+i)(4-i)$

$=17$

답 ②

0362 $(z_1-3)(z_2+3)=z_1z_2+3(z_1-z_2)-9$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{z_1}-\overline{z_2}=3+2i$에서 $\overline{z_1-z_2}=3+2i$

$\therefore\ z_1-z_2=3-2i$

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=5+5i$에서 $\overline{z_1z_2}=5+5i$

$\therefore\ z_1z_2=5-5i$

따라서 ㉠에서

$(z_1-3)(z_2+3)=5-5i+3(3-2i)-9$

$=5-11i$

답 $5-11i$

0363 $\frac{1}{\overline{\alpha}}+\frac{1}{\beta}=\frac{\overline{\alpha}+\beta}{\overline{\alpha}\beta}$ ⋯⋯ ㉠

$\alpha+\overline{\beta}=-i$이므로 $\overline{\alpha}+\beta=\overline{(\alpha+\overline{\beta})}=\overline{-i}=i$

$\alpha\overline{\beta}=1$이므로 $\overline{\alpha}\beta=\overline{(\alpha\overline{\beta})}=\overline{1}=1$

따라서 ㉠에서

$\frac{1}{\overline{\alpha}}+\frac{1}{\beta}=\frac{i}{1}=i$

답 ④

0364 $z=\frac{w+2}{2w-1}=\frac{2-i+2}{2(2-i)-1}=\frac{4-i}{3-2i}$ ⋯ ❶

$\therefore\ z\overline{z}=\frac{4-i}{3-2i}\cdot\overline{\left(\frac{4-i}{3-2i}\right)}=\frac{4-i}{3-2i}\cdot\frac{\overline{4-i}}{\overline{3-2i}}$

$=\frac{4-i}{3-2i}\cdot\frac{4+i}{3+2i}$

$=\frac{17}{13}$ ⋯ ❷

답 $\frac{17}{13}$

채점 기준	비율
❶ z를 구할 수 있다.	30 %
❷ $z\overline{z}$의 값을 구할 수 있다.	70 %

다른 풀이 $z=\frac{4-i}{3-2i}=\frac{(4-i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{14+5i}{13}$

이므로 $\overline{z}=\frac{14-5i}{13}$

$\therefore\ z\overline{z}=\frac{14+5i}{13}\cdot\frac{14-5i}{13}=\frac{196+25}{169}=\frac{17}{13}$

0365 $\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}=3$에서 $\alpha=\frac{3}{\overline{\alpha}}$, $\beta=\frac{3}{\overline{\beta}}$

$\alpha+\beta=i$에서 $\frac{3}{\overline{\alpha}}+\frac{3}{\overline{\beta}}=i$

$\frac{3(\overline{\alpha}+\overline{\beta})}{\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}}=i$, $3(\overline{\alpha+\beta})=i\overline{\alpha\beta}$

$3\overline{i}=i\overline{\alpha\beta}$, $-3i=i\overline{\alpha\beta}$

$\overline{\alpha\beta}=-3$ $\therefore\ \alpha\beta=-3$

답 -3

유형 09 조건을 만족시키는 복소수 구하기

본책 54쪽

복소수 z를 포함한 등식이 주어질 때, z는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하고 등식에 대입한다.

(ii) 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

0366 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로
$(2-i)z+4i\bar{z}=1-4i$에서

$$(2-i)(a+bi)+4i(a-bi)=1-4i$$
$$2a+2bi-ai+b+4ai+4b=1-4i$$
$$(2a+5b)+(3a+2b)i=1-4i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$2a+5b=1,\ 3a+2b=-4$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=-2,\ b=1$$
$$\therefore z=-2+i$$

답 ②

0367 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로
$z+\bar{z}=4$에서

$$(a+bi)+(a-bi)=4$$
$$2a=4 \qquad \therefore a=2$$

$z\bar{z}=20$에서

$$(2+bi)(2-bi)=20$$
$$4+b^2=20, \qquad b^2=16$$
$$\therefore b=\pm4$$

따라서 복소수 z는 $2+4i$, $2-4i$이다.

답 $2+4i$, $2-4i$

0368 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로
$(1+i)z+(1-i)\bar{z}=2$에서

$$(1+i)(a+bi)+(1-i)(a-bi)=2$$
$$a+bi+ai-b+a-bi-ai-b=2$$
$$2(a-b)=2 \qquad \therefore a-b=1$$

ㄱ. $a=2$, $b=-1$이므로 $\quad a-b=3$
ㄴ. $a=3$, $b=2$이므로 $\quad a-b=1$
ㄷ. $a=-2$, $b=1$이므로 $\quad a-b=-3$
이상에서 복소수 z가 될 수 있는 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

0369 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로
$(1-2i)z+(2+3i)\bar{z}=-2+2i$에서

$$(1-2i)(a+bi)+(2+3i)(a-bi)=-2+2i$$
$$a+bi-2ai+2b+2a-2bi+3ai+3b=-2+2i$$
$$(3a+5b)+(a-b)i=-2+2i \quad \cdots ❶$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$3a+5b=-2,\ a-b=2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=1,\ b=-1 \quad \cdots ❷$$

따라서 $z=1-i$, $\bar{z}=1+i$이므로

$$z\bar{z}=(1-i)(1+i)=2 \quad \cdots ❸$$

답 2

채점 기준	비율
❶ $z=a+bi$라 하고 주어진 등식에 대입하여 식을 정리할 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $z\bar{z}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0370 $z=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로
$z\bar{z}+\dfrac{\bar{z}}{z}=3$에서

$$(a+bi)(a-bi)+\frac{a-bi}{a+bi}=3$$
$$a^2+b^2+\frac{(a-bi)^2}{(a+bi)(a-bi)}=3$$
$$a^2+b^2+\frac{a^2-b^2-2abi}{a^2+b^2}=3$$
$$a^2+b^2+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-\frac{2ab}{a^2+b^2}i=3$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a^2+b^2+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=3,\ -\frac{2ab}{a^2+b^2}=0$$

$-\dfrac{2ab}{a^2+b^2}=0$에서 $\qquad ab=0$

$$\therefore a=0\ (\because b\neq0)$$

$a=0$을 $a^2+b^2+\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=3$에 대입하면

$$b^2-1=3 \qquad \therefore b^2=4$$
$$\therefore (z-\bar{z})^2=\{(a+bi)-(a-bi)\}^2=(2bi)^2$$
$$=-4b^2=-16$$

답 -16

유형 10 허수단위 i의 거듭제곱

집중공략 본책 55쪽

i^n (n은 자연수)의 값은 4개의 값 i, -1, $-i$, 1이 이 순서대로 반복되어 나타나므로 n을 4로 나누었을 때의 나머지가 같으면 그 값이 서로 같다.
➡ $i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=i^2=-1$, $i^{4k+3}=i^3=-i$
(단, k는 자연수)

0371 $i=i^5=i^9=\cdots=i^{2021}=i^{2025}$,
$i^2=i^6=i^{10}=\cdots=i^{2022}=-1$,
$i^3=i^7=i^{11}=\cdots=i^{2023}=-i$,
$i^4=i^8=i^{12}=\cdots=i^{2024}=1$
이므로

$$i+i^2+i^3+\cdots+i^{2025}$$
$$=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)+i$$
$$=i$$

답 ①

0372 $i=i^5=i^9=\cdots=i^{49}$, $i^2=i^6=i^{10}=\cdots=i^{50}=-1$,
$i^3=i^7=i^{11}=\cdots=i^{47}=-i$, $i^4=i^8=i^{12}=\cdots=i^{48}=1$이므로

$$i+2i^2+3i^3+\cdots+49i^{49}+50i^{50}$$
$$=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)+\cdots+(49i-50)$$
$$=\underbrace{(2-2i)+(2-2i)+\cdots+(2-2i)}_{\frac{48}{4}=12(\text{개})}+(49i-50)$$
$$=12(2-2i)+(49i-50)$$
$$=-26+25i \quad \cdots ❶$$

따라서 $-26+25i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a=-26,\ b=25 \quad \cdots ❷$$
$$\therefore a+b=-1 \quad \cdots ❸$$

답 -1

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	60 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0373 $i=i^5=i^9=\cdots$, $i^2=i^6=i^{10}=\cdots=-1$,
$i^3=i^7=i^{11}=\cdots=-i$, $i^4=i^8=i^{12}=\cdots=1$이므로

$$\begin{aligned}&i-2i^2+3i^3-4i^4+5i^5-6i^6+7i^7-8i^8+\cdots\\&=i+2-3i-4+5i+6-7i-8+\cdots\\&=(2-4+6-8+\cdots)+(1-3+5-7+\cdots)i\end{aligned}$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여 실수부분이 8, 허수부분이 7이어야 한다.

이때

$$(2-4)+(6-8)+(10-12)+14=8,$$
$$(1-3)+(5-7)+(9-11)+13=7$$

이므로

$$n=14$$

답 ③

0374 $$\begin{aligned}(3+2i)i^{30}&=(3+2i)\cdot(i^4)^7\cdot i^2\\&=(3+2i)\cdot 1\cdot(-1)\\&=-3-2i,\end{aligned}$$

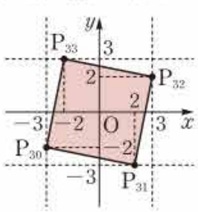
$$\begin{aligned}(3+2i)i^{31}&=(3+2i)\cdot(i^4)^7\cdot i^3\\&=(3+2i)\cdot 1\cdot(-i)\\&=2-3i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3+2i)i^{32}&=(3+2i)\cdot(i^4)^8\\&=(3+2i)\cdot 1\\&=3+2i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3+2i)i^{33}&=(3+2i)\cdot(i^4)^8\cdot i\\&=(3+2i)\cdot 1\cdot i\\&=-2+3i\end{aligned}$$

$\therefore$ $P_{30}(-3, -2)$, $P_{31}(2, -3)$, $P_{32}(3, 2)$, $P_{33}(-2, 3)$

네 점 P_{30}, P_{31}, P_{32}, P_{33}을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는



$$6^2-4\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot5\right)=26$$

답 26

0375 자연수 k에 대하여

(i) $m=4k-3$일 때,

$i^{4k-3}=i$, $\underline{(-i)^{4k-3}}=-i$이므로 $(-i)^{4k-3}=-i^{4k-3}=-i$

$$z_m=\frac{i}{2}+\frac{-i}{2}=0$$

(ii) $m=4k-2$일 때,

$i^{4k-2}=-1$, $\underline{(-i)^{4k-2}}=-1$이므로 $(-i)^{4k-2}=i^{4k-2}=-1$

$$z_m=\frac{-1}{2}+\frac{-1}{2}=-1$$

(iii) $m=4k-1$일 때,

$i^{4k-1}=-i$, $(-i)^{4k-1}=i$이므로

$$z_m=\frac{-i}{2}+\frac{i}{2}=0$$

(iv) $m=4k$일 때,

$i^{4k}=1$, $(-i)^{4k}=1$이므로

$$z_m=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

ㄱ. $m=4k$ (k는 자연수)이면 $z_m=1$이다.

ㄴ. $100=4\cdot25$, $102=4\cdot26-2$이므로

$z_{100}=1$, $z_{102}=-1$

$\therefore$ $z_{100}\neq z_{102}$

ㄷ. 임의의 자연수 m에 대하여 z_m은 실수이므로 $z_m=\overline{z_m}$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

유형 11 복소수의 거듭제곱

집중 공략 본책 56쪽

복소수 z에 대하여 z^n (n은 자연수)의 값을 구할 때에는 다음을 이용한다.

① $(1\pm i)^n$ 꼴 ➡ $(1\pm i)^2=\pm2i$ (복호동순)

② $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$ 꼴 ➡ $\frac{1+i}{1-i}=i$, $\frac{1-i}{1+i}=-i$

0376 $$\begin{aligned}(1+i)^{100}&=\{(1+i)^2\}^{50}\\&=(2i)^{50}\\&=2^{50}\cdot(i^4)^{12}\cdot i^2\\&=-2^{50}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-i)^{100}&=\{(1-i)^2\}^{50}\\&=(-2i)^{50}=(2i)^{50}\\&=-2^{50}\end{aligned}$$

$\therefore$ $(1+i)^{100}-(1-i)^{100}=-2^{50}-(-2^{50})=0$

답 ③

0377 $$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$$

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{30}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{30}&=(-i)^{30}+i^{30}=i^{30}+i^{30}\\&=2i^{30}\\&=2\cdot(i^4)^7\cdot i^2\\&=-2\end{aligned}$$

답 ①

0378 $z^2=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2i}{2}=i$이므로

$$z^4=(z^2)^2=i^2=-1$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &z^2-z^3+z^4-z^5+\cdots+z^{10}\\&=(z^2-z^3+z^4-z^5)+z^4(z^2-z^3+z^4-z^5)+z^{10}\\&=(z^2-z^3+z^4-z^5)-(z^2-z^3+z^4-z^5)+z^{10}\\&=z^{10}=(z^2)^5=i^5=i\end{aligned}$$

답 i

다른 풀이 $z^2=i$이므로

$$z^2+z^4+z^6+z^8=i-1-i+1=0$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &z^2-z^3+z^4-z^5+\cdots+z^{10}\\&=(z^2+z^4+z^6+z^8)-z(z^2+z^4+z^6+z^8)+z^{10}\\&=z^{10}=i\end{aligned}$$

0379 $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

$$\begin{aligned}\therefore f(n)&=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n}-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{4n}\\&=i^{2n}-(-i)^{4n}\\&=(i^2)^n-(i^4)^n\\&=(-1)^n-1\\&=\begin{cases}-2 & (n\text{은 홀수})\\ 0 & (n\text{은 짝수})\end{cases}\end{aligned}$$ ···➊

$$\begin{aligned}&\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(200)\\&=-2+0-2+\cdots+0\\&=-2\cdot 100\\&=-200\end{aligned}$$ ···➋

답 -200

채점 기준	비율
➊ $f(n)$을 간단히 할 수 있다.	70 %
➋ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(200)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0380 $z=\frac{1-i}{\sqrt{2i}}$에서

$z^2=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2i}}\right)^2=\frac{-2i}{-2}=i$

$z^3=z^2\cdot z=i\cdot\frac{1-i}{\sqrt{2i}}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

$z^4=(z^2)^2=i^2=-1$

$z^5=z^4\cdot z=-z=\frac{-1+i}{\sqrt{2i}}$

$z^6=z^4\cdot z^2=-i$

$z^7=z^4\cdot z^3=-z^3=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$

$z^8=(z^4)^2=(-1)^2=1$

⋮

$w=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$에서

$w^2=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$w^3=w^2\cdot w=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\frac{-4}{4}=-1$

$w^4=w^3\cdot w=-w=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$w^5=w^3\cdot w^2=-w^2=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

$w^6=(w^3)^2=(-1)^2=1$

⋮

n이 8의 배수일 때 $z^n=1$이고, n이 6의 배수일 때 $w^n=1$이므로 $z^n=w^n$을 만족시키는 가장 작은 자연수 n의 값은 8과 6의 최소공배수인 24이다. 답 ⑤

참고 $n=8k-4$ (k는 자연수)일 때 $z^n=-1$이고, $n=6l-3$ (l은 자연수)일 때 $w^n=-1$이므로 $z^n=w^n=-1$을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

유형 12 음수의 제곱근의 계산

본책 56쪽

(1) $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$ $(a>0)$임을 이용하여 음수의 제곱근을 허수단위 i를 사용하여 나타낸다.

(2) 음수의 제곱근의 성질을 이용하여 계산한다.

① $a<0$, $b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

그 외의 경우에는 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

② $a>0$, $b<0$이면 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$

그 외의 경우에는 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ (단, $b\neq 0$)

0381 ① $\sqrt{-3}\sqrt{7}=\sqrt{-21}$

③ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-7}}=-\sqrt{-\frac{3}{7}}$

④ $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-7}}=\sqrt{\frac{3}{7}}$

⑤ $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{7}}=\sqrt{-\frac{3}{7}}$

답 ②

SSEN 특강

$x>0$일 때, $\sqrt{-x}=\sqrt{x}i$ 임을 이용하여 다음을 알 수 있다.

① $\sqrt{-3}\sqrt{-7}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{7}i=-\sqrt{21}$

➡ $a<0$, $b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

$\sqrt{-3}\sqrt{7}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{7}=\sqrt{21}\,i=\sqrt{-21}$,

$\sqrt{3}\sqrt{-7}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}i=\sqrt{21}\,i=\sqrt{-21}$

➡ $a<0$, $b>0$ 또는 $a>0$, $b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

② $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-7}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}i}=-\frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{7}}=-\sqrt{\frac{3}{7}}\,i=-\sqrt{\frac{3}{-7}}$

➡ $a>0$, $b<0$이면 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$

$\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{3}{7}}\,i=\sqrt{\frac{-3}{7}}$,

$\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-7}}=\frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{7}i}=\sqrt{\frac{3}{7}}=\sqrt{\frac{-3}{-7}}$

➡ $a<0$, $b>0$ 또는 $a<0$, $b<0$이면 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

0382 $\sqrt{-3}\sqrt{-12}+\sqrt{-4}\sqrt{9}+\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}+\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{-4}}$

$=-\sqrt{36}+\sqrt{-36}+\sqrt{4}-\sqrt{-16}$

$=-6+6i+2-4i=-4+2i$ ···➊

따라서 $-4+2i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-4$, $b=2$ ···➋

$\therefore a+b=-2$ ···➌

답 -2

채점 기준	비율
➊ 주어진 등식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	60 %
➋ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
➌ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0383 $xy>0$이므로

$x>0,\ y>0$ 또는 $x<0,\ y<0$

이때 $5x+y<0$이므로 $\quad x<0,\ y<0$

따라서 $5x<0,\ y<0$이므로

$$\sqrt{\frac{5x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{5x}}=\frac{\sqrt{5x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{5x}}$$
$$=\frac{(\sqrt{5x})^2+(\sqrt{y})^2}{\sqrt{5x}\sqrt{y}}$$
$$=\frac{5x+y}{-\sqrt{5xy}}$$
$$=\frac{-15}{-5}=3$$

답 ②

0384 $0<a<1$이므로 $\quad a-1<0,\ 1-a>0,\ -a<0$

$$\therefore \sqrt{a-1}\sqrt{1-a}-\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{a-1}}\sqrt{\frac{a-1}{1-a}}+\sqrt{a}\sqrt{-a}$$
$$=\sqrt{(a-1)(1-a)}-\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{a-1}}\cdot\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{1-a}}+\sqrt{-a^2}$$
$$=\sqrt{-(1-a)^2}-1+\sqrt{-a^2}$$
$$=\sqrt{(1-a)^2}i-1+\sqrt{a^2}i$$
$$=(1-a)i-1+ai$$
$$=i-1$$

답 $i-1$

다른 풀이 $0<a<1$이므로 $\quad a-1<0,\ 1-a>0$

$$\therefore \sqrt{a-1}\sqrt{1-a}-\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{a-1}}\sqrt{\frac{a-1}{1-a}}+\sqrt{a}\sqrt{-a}$$
$$=\sqrt{1-a}\,i\cdot\sqrt{1-a}-\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1-a}\,i}\cdot\sqrt{-1}+\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\,i$$
$$=(1-a)i-\frac{1}{i}\cdot i+ai$$
$$=i-1$$

유형 13 음수의 제곱근의 성질

집중 공략 본책 57쪽

두 실수 a, b에 대하여

① $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab} \Rightarrow a<0,\ b<0$ 또는 $a=0$ 또는 $b=0$

② $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}} \Rightarrow a>0,\ b<0$ 또는 $a=0,\ b\neq0$

0385 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 $\quad a<0,\ b<0$

따라서 $-a>0$이므로

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{-\frac{a}{b}}$$

답 ④

0386 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이므로 $\quad a>0,\ b<0$

① $\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b}=a\sqrt{b}$

② $\sqrt{ab^2}=\sqrt{a}\cdot\underbrace{\sqrt{b^2}}_{\sqrt{b^2}=|b|=-b}=-b\sqrt{a}$

③ $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

④ $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

⑤ $\underbrace{\sqrt{-a}}_{-a<0}\sqrt{b}=-\sqrt{-ab}$

답 ②

0387 $\sqrt{b-a}\sqrt{c-b}=-\sqrt{\underbrace{(b-a)(c-b)}_{a\neq b,\ b\neq c\text{이므로 } b-a\neq0,\ c-b\neq0}}$이므로

$b-a<0,\ c-b<0$

$\therefore c<b<a$ ⋯ ❶

$a-b>0,\ b-c>0,\ c-a<0$이므로

$$|a-b|+|b-c|+|c-a|=a-b+b-c-(c-a)$$
$$=2a-2c$$ ⋯ ❷

답 $2a-2c$

채점 기준	비율
❶ a, b, c의 대소를 비교할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	50 %

0388 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서 $\quad a<0,\ b<0$

$\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{c}{b}}$에서 $\quad b<0,\ c>0$

$$\therefore \sqrt{a^2}+\sqrt{c^2}-\underbrace{|b-c|}_{b<0,\ c>0\text{이므로 } b-c<0}=-a+c+(b-c)$$
$$=-a+b$$

답 ①

0389 1st x를 연산 장치 A에 두 번 넣은 후 출력된 값을 구한다.

x를 연산 장치 A에 두 번 넣은 후 출력된 값은

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2x=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{4}x=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}x$$

2nd 연산 장치 B에 넣은 후 출력된 값을 구한다.

연산 장치 B에 넣은 후 출력된 값은

$$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}x\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=\frac{-1+\sqrt{3}i+\sqrt{3}i+3}{4}x$$
$$=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}x$$

3rd x의 값을 구한다.

연산 장치 C에 넣었을 때 출력된 값이 1이므로

$$\frac{2}{(1+\sqrt{3}i)x}=1, \qquad (1+\sqrt{3}i)x=2$$
$$\therefore x=\frac{2}{1+\sqrt{3}i}=\frac{2(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$$
$$=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

답 ④

0390 1st $f(a,\ b)$를 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 나타낸다.

$$f(a,\ b)=\frac{a+bi}{a-bi}=\frac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)}$$
$$=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}i$$ ⋯ ❶

2nd $f(2,\ 1)$, $f(4,\ 2)$, $f(6,\ 3)$, ⋯, $f(40,\ 20)$의 값을 구한다.

$a=2b$이면

$$f(2b,\ b)=\frac{(2b)^2-b^2}{(2b)^2+b^2}+\frac{2\cdot2b\cdot b}{(2b)^2+b^2}i$$
$$=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$$

이므로

$$f(2,\ 1)=f(4,\ 2)=f(6,\ 3)=\cdots=f(40,\ 20)$$
$$=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$$ ⋯ ❷

3rd $f(2,1)+f(4,2)+f(6,3)+\cdots+f(40,20)$의 값을 구한다.

$$f(2,1)+f(4,2)+f(6,3)+\cdots+f(40,20)=20\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)$$
$$=12+16i \quad \cdots ❸$$

답 $12+16i$

채점 기준	비율
❶ $f(a,b)$를 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $f(2,1)$, $f(4,2)$, $f(6,3)$, $\cdots$, $f(40,20)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	30 %

0391 1st z^4이 양의 실수, 음의 실수가 되도록 하는 조건을 각각 구한다.

z^4이 양의 실수이려면 z^2은 0이 아닌 실수이어야 하고, z^4이 음의 실수이려면 z^2은 순허수이어야 한다.

이때

$$z=(2-i)x-8-7i=(2x-8)-(x+7)i$$

에서

$$z^2=\{(2x-8)^2-(x+7)^2\}-2(2x-8)(x+7)i$$

이므로 z^4이 양의 실수이려면

$(2x-8)^2-(x+7)^2\neq0$ …… ㉠

$2(2x-8)(x+7)=0$ …… ㉡

z^4이 음의 실수이려면

$(2x-8)^2-(x+7)^2=0$ …… ㉢

$2(2x-8)(x+7)\neq0$ …… ㉣

2nd z^2의 실수부분과 허수부분이 0이 되는 x의 값을 각각 구한다.

$(2x-8)^2-(x+7)^2=0$에서

$2x-8=x+7$ 또는 $2x-8=-(x+7)$

$\therefore x=15$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

$2(2x-8)(x+7)=0$에서 $(x+7)(x-4)=0$

$\therefore x=-7$ 또는 $x=4$

3rd a의 값을 구한다.

z^4이 양의 실수이려면 ㉠에서 $x\neq15$, $x\neq\frac{1}{3}$이고, ㉡에서 $x=-7$ 또는 $x=4$이어야 하므로

$x=-7$ 또는 $x=4$

$\therefore a=-7+4=-3$

4th b의 값을 구한다.

z^4이 음의 실수이려면 ㉢에서 $x=15$ 또는 $x=\frac{1}{3}$이고, ㉣에서 $x\neq-7$, $x\neq4$이어야 하므로

$x=15$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

$\therefore b=15\cdot\frac{1}{3}=5$

5th $b-a$의 값을 구한다.

$b-a=8$

답 8

0392 1st a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{20} 중에서 -1, i, $1-i$의 개수를 각각 x, y, z라 하고 식을 세운다.

a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{20} 중에서 -1, i, $1-i$의 개수를 각각 x, y, z라 하면

$x+y+z=20$ …… ㉠

$(-1)^2=1$, $i^2=-1$, $(1-i)^2=-2i$이므로

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{20}^2=1\cdot x+(-1)\cdot y+(-2i)\cdot z$$
$$=x-y-2zi$$

$\therefore x-y-2zi=8-12i$

2nd x, y, z의 값을 구한다.

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x-y=8$ …… ㉡

$-2z=-12$

$-2z=-12$에서 $z=6$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$x+y+6=20$ $\therefore x+y=14$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x=11$, $y=3$

3rd $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}$의 실수부분과 허수부분의 합을 구한다.

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=(-1)\cdot11+i\cdot3+(1-i)\cdot6$$
$$=-5-3i$$

따라서 구하는 합은

$-5-3=-8$

답 -8

0393 1st $\overline{z^2-z}$가 실수인지 확인한다.

ㄱ. z^2-z가 실수이므로 $\overline{z^2-z}$도 실수이다.

2nd $z+\bar{z}$의 값을 구한다.

ㄴ. $z^2-z=(a+bi)^2-(a+bi)$

$=(a^2-b^2-a)+b(2a-1)i$

이때 $\underbrace{z^2-z\text{가 실수}}_{b(2a-1)=0}$이고 $b\neq0$이므로

$2a-1=0$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore z+\bar{z}=\left(\frac{1}{2}+bi\right)+\left(\frac{1}{2}-bi\right)=1$

3rd $z\bar{z}$의 값의 범위를 구한다.

ㄷ. $z\bar{z}=\left(\frac{1}{2}+bi\right)\left(\frac{1}{2}-bi\right)=\frac{1}{4}+b^2$

이때 $b\neq0$이므로 $b^2>0$

$\frac{1}{4}+b^2>\frac{1}{4}$ $\therefore z\bar{z}>\frac{1}{4}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0394 1st $A\geq0$인지 확인한다.

$z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ (a, b, c, d는 실수)라 하자.

ㄱ. $A=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=(a+bi)(a-bi)+(c+di)(c-di)$

$=a^2+b^2+c^2+d^2\geq0$

2nd $B\geq0$인지 확인한다.

ㄴ. $B=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$

$=(a+bi)(c-di)+(a-bi)(c+di)$

$=ac-adi+bci+bd+ac+adi-bci+bd$

$=2(ac+bd)$

이때 a, b, c, d의 값은 알 수 없으므로 $B\geq0$인지 알 수 없다.

3rd $A \geq B$인지 확인한다.

ㄷ. $A-B=a^2+b^2+c^2+d^2-2(ac+bd)$

$=(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bd+d^2)$

$=(a-c)^2+(b-d)^2 \geq 0$

$\therefore A \geq B$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

다른 풀이 ㄷ. $A-B=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)$

$=z_1(\overline{z_1}-\overline{z_2})-z_2(\overline{z_1}-\overline{z_2})$

$=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})$

$=(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})$

$=\{(a-c)+(b-d)i\}\{(a-c)-(b-d)i\}$

$=(a-c)^2+(b-d)^2 \geq 0$

0395

1st $z=a+bi$라 하고 주어진 등식을 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$\dfrac{2z-\overline{z}}{z\overline{z}}=1-i$에서

$\dfrac{2(a+bi)-(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=1-i$

$\dfrac{a}{a^2+b^2}+\dfrac{3b}{a^2+b^2}i=1-i$

2nd z를 구한다.

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\dfrac{a}{a^2+b^2}=1$, $\dfrac{3b}{a^2+b^2}=-1$

$a^2+b^2=a$, $a^2+b^2=-3b$

즉 $a=-3b$이므로 이것을 $a^2+b^2=-3b$에 대입하면

$10b^2=-3b$, $b(10b+3)=0$

$\therefore b=0$ 또는 $b=-\dfrac{3}{10}$

그런데 $b=0$이면 $a=0$이므로 $z=0$이다.
조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore b=-\dfrac{3}{10}$

따라서 $a=-3b=\dfrac{9}{10}$이므로

$z=\dfrac{9}{10}-\dfrac{3}{10}i$ 답 $\dfrac{9}{10}-\dfrac{3}{10}i$

0396

복소수 z가 다음 조건을 모두 만족시키도록 하는 모든 실수 x의 값의 합은? (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

(가) ❷ $z=\sqrt{3}x+(x-2)i$

(나) ❶ $z^3=(-\overline{z})^3$

$a^3=-b^3$ 꼴이므로 인수분해 공식 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$을 이용한다.

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

인수분해 공식을 이용하여 ❶을 $z+\overline{z}$, $z\overline{z}$에 대한 식으로 변형한 후 ❷를 대입하여 x의 값을 구한다.

1st 조건 (나)의 식을 변형한다.

조건 (나)에서 $z^3-(-\overline{z})^3=0$

$z^3+(\overline{z})^3=0$, $(z+\overline{z})\{z^2-z\overline{z}+(\overline{z})^2\}=0$

$(z+\overline{z})\{(z+\overline{z})^2-3z\overline{z}\}=0$ ...... ㉠

2nd $z+\overline{z}$, $z\overline{z}$를 구한다.

조건 (가)에 의하여

$z+\overline{z}=\{\sqrt{3}x+(x-2)i\}+\{\sqrt{3}x-(x-2)i\}=2\sqrt{3}x$,

$z\overline{z}=\{\sqrt{3}x+(x-2)i\}\{\sqrt{3}x-(x-2)i\}$

$=3x^2+(x-2)^2=4x^2-4x+4$

3rd 모든 실수 x의 값의 합을 구한다.

㉠에서 $2\sqrt{3}x\{(2\sqrt{3}x)^2-3(4x^2-4x+4)\}=0$이므로

$2\sqrt{3}x(12x-12)=0$, $x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 모든 실수 x의 값의 합은 1이다. 답 ④

0397

1st $\alpha-\beta$를 구한다.

$\overline{\alpha}^2-\overline{\beta}^2=-5+10i$에서

$\overline{\alpha^2-\beta^2}=-5+10i$, $\alpha^2-\beta^2=-5-10i$

$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=-5-10i$

이때 $\alpha+\beta=2+i$이므로

$(2+i)(\alpha-\beta)=-5-10i$

$\therefore \alpha-\beta=\dfrac{-5-10i}{2+i}$

$=\dfrac{-5(1+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$

$=-(1+2i)(2-i)$

$=-4-3i$ ··· ❶

2nd α, β를 구한다.

$\alpha+\beta=2+i$, $\alpha-\beta=-4-3i$를 연립하여 풀면

$\alpha=-1-i$, $\beta=3+2i$ ··· ❷

3rd $\alpha\beta\cdot\overline{\alpha\beta}$의 값을 구한다.

$\alpha\beta=(-1-i)(3+2i)=-1-5i$이므로

$\overline{\alpha\beta}=-1+5i$

$\therefore \alpha\beta\cdot\overline{\alpha\beta}=(-1-5i)(-1+5i)=26$ ··· ❸

답 26

채점 기준	비율
❶ $\alpha-\beta$를 구할 수 있다.	40 %
❷ α, β를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\alpha\beta\cdot\overline{\alpha\beta}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0398

1st z_2를 구하고 z_3, z_4, z_5, $\cdots$를 z_1 또는 z_2로 나타낸다.

$z_2=\overline{z_1}(1+i)=(1-2i)(1+i)=3-i$

$z_3=\overline{z_2}(1+i)=(3+i)(1+i)=2+4i=2(1+2i)=2z_1$

$z_4=\overline{z_3}(1+i)=\overline{2z_1}(1+i)=2\overline{z_1}(1+i)=2z_2$

$z_5=\overline{z_4}(1+i)=\overline{2z_2}(1+i)=2\overline{z_2}(1+i)=2z_3=2^2z_1$

$z_6=\overline{z_5}(1+i)=\overline{2^2z_1}(1+i)=2^2\overline{z_1}(1+i)=2^2z_2$

$z_7=\overline{z_6}(1+i)=\overline{2^2z_2}(1+i)=2^2\overline{z_2}(1+i)=2^2z_3=2^3z_1$

⋮

$\therefore z_{2k+1}=2^kz_1$, $z_{2k+2}=2^kz_2$ (k는 자연수)

2nd z_{100}의 실수부분을 구한다.

따라서 $\underbrace{z_{100}}_{100=2\cdot49+2}=2^{49}z_2=2^{49}(3-i)$이므로 z_{100}의 실수부분은 $3\cdot2^{49}$이다.

답 ③

0399 1st n의 값에 따라 주어진 등식의 좌변을 간단히 한다.

$i=i^5=i^9=\cdots$, $i^2=i^6=i^{10}=\cdots=-1$,

$i^3=i^7=i^{11}=\cdots=-i$, $i^4=i^8=i^{12}=\cdots=1$이므로

$$\begin{aligned}&\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^n}\\&=\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1+\cdots+\frac{1}{i^n}\\&=-i-1+i+1-\cdots+\frac{1}{i^n}\\&=\begin{cases}-i & (n=4m-3)\\-i-1 & (n=4m-2)\\-1 & (n=4m-1)\\0 & (n=4m)\end{cases}\ (m\text{은 자연수})\end{aligned}$$

2nd 주어진 등식이 성립하도록 하는 50 이하의 자연수 n의 개수를 구한다.

$n=4m-1$ (m은 자연수)일 때 주어진 등식이 성립한다.

이때 $n\le50$이므로

$$4m-1\le50,\qquad 4m\le51\qquad \therefore m\le\frac{51}{4}$$

따라서 자연수 m은 1, 2, 3, $\cdots$, 12의 12개이므로 구하는 자연수 n도 12개이다.

└3, 7, 11, $\cdots$, 47의 12개

답 ③

0400 1st a의 값을 구한다.

$\overline{z}=a+i$이므로

$$\frac{z}{\overline{z}}=\frac{a-i}{a+i}=\frac{(a-i)^2}{(a+i)(a-i)}=\frac{a^2-1}{a^2+1}-\frac{2a}{a^2+1}i$$

이때 $\frac{z}{\overline{z}}$가 실수이므로

$$-\frac{2a}{a^2+1}=0\qquad\therefore a=0$$ ⋯ ❶

2nd z^2, z^3, z^4, $\cdots$을 구한다.

따라서 $z=-i$이므로

$$\begin{aligned}&z^2=(-i)^2=i^2=-1\\&z^3=(-i)^3=-i^3=i\\&z^4=(-i)^4=i^4=1\\&z^5=z^4\cdot z=z=-i\\&\quad\vdots\end{aligned}$$

즉 z, z^2, z^3, z^4, $\cdots$은 $-i$, -1, i, 1이 이 순서대로 반복된다.

3rd $1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{100}$의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}&1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{100}\\&=1+(-i-1+i+1)+(-i-1+i+1)+\cdots+(-i-1+i+1)\\&=1\end{aligned}$$ ⋯ ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{100}$의 값을 구할 수 있다.	60 %

0401 1st $(\overline{z})^4$의 값을 구한다.

$z^4=\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$이므로

$$\overline{z^4}=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore (\overline{z})^4=\overline{z^4}=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$$ ⋯ ❶

2nd $(\overline{z})^{1000}$의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}(\overline{z})^{1000}&=\{(\overline{z})^4\}^{250}=\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)^{250}\\&=\left\{\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{125}=\left(\frac{2i}{2}\right)^{125}\\&=i^{125}=(i^4)^{31}\cdot i=i\end{aligned}$$ ⋯ ❷

답 i

채점 기준	비율
❶ $(\overline{z})^4$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $(\overline{z})^{1000}$의 값을 구할 수 있다.	60 %

0402 1st P_{z_1}, P_{z_2}, P_{z_3}, P_{z_4}를 구한다.

$z_1=i^2(1+i)=-1-i$이므로

$$P_{z_1}=-x-y$$

$z_2=i^3(1+i)^2=(-i)\cdot2i=2$이므로

$$P_{z_2}=2x$$

$z_3=\underbrace{i^4(1+i)^3}_{i^4(1+i)^2(1+i)}=1\cdot2i(1+i)=-2+2i$이므로

$$P_{z_3}=-2x+2y$$

$z_4=\underbrace{i^5(1+i)^4}_{i^4\cdot i\{(1+i)^2\}^2}=i\cdot(2i)^2=-4i$이므로

$$P_{z_4}=-4y$$

2nd w를 구한다.

$$\begin{aligned}P_w&=(P_{z_1}+P_{z_2})-(P_{z_3}+P_{z_4})\\&=(-x-y+2x)-(-2x+2y-4y)\\&=(x-y)-(-2x-2y)\\&=3x+y\end{aligned}$$

이므로 $\quad w=3+i$

답 ②

0403

50 이하의 두 자연수 m, n에 대하여 ❶$\left\{\underbrace{i^n}_{i,\,-1,\,-i,\,1\text{이 이 순서대로 반복된다.}}+\left(\underbrace{\frac{1}{i}}_{-i}\right)^{2n}\right\}^m$의 값이 ❷음의 실수가 되도록 하는 ❸순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$이다.)

n을 4로 나누었을 때의 나머지가 같은 경우로 n의 값을 나누어 $i^n+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n}$의 값을 구한다. 이 값을 이용하여 $m=1$, 2, 3, $\cdots$일 때 ❶의 값을 구해 보고 ❷를 만족시키는 ❸을 구한다.

1st $n=4k-3$일 때 순서쌍 (m, n)의 개수를 구한다.

$\left\{i^n+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n}\right\}^m=\{i^n+(-i)^{2n}\}^m=\{i^n+(-1)^n\}^m$에서

$f(n)=i^n+(-1)^n$이라 하자.

(i) $n=4k-3$ (k는 자연수)일 때,

$i^{4k-3}=i$, $(-1)^{4k-3}=-1$이므로

$f(n)=i-1$

$\{f(n)\}^2=(i-1)^2=-2i$

$\{f(n)\}^3=\{f(n)\}^2\cdot f(n)=-2i(i-1)=2+2i$

$\{f(n)\}^4=[\{f(n)\}^2]^2=(-2i)^2=-4$

$\vdots$

$\{f(n)\}^4=-4$이므로 $\{f(n)\}^4$의 거듭제곱 꼴인 경우에 $\{f(n)\}^m$의 값이 음의 실수가 될 수 있다.

이때

$\{f(n)\}^4=-4$, $\{f(n)\}^8=16$,

$\{f(n)\}^{12}=-64$, $\cdots$

이므로 $\{f(n)\}^m$의 값이 음의 실수가 되도록 하는 50 이하의 자연수 m은

4, 12, 20, 28, 36, 44의 6개

이고, 50 이하의 자연수 n은

1, 5, 9, $\cdots$, 49의 13개 $k=13$일 때, $n=4\cdot13-3=49$

따라서 순서쌍 (m, n)의 개수는

$6\cdot13=78$

2nd $n=4k-2$일 때 순서쌍 (m, n)의 개수를 구한다.

(ii) $n=4k-2$ (k는 자연수)일 때,

$i^{4k-2}=-1$, $(-1)^{4k-2}=1$이므로

$f(n)=-1+1=0$

따라서 $\{f(n)\}^m$의 값이 음의 실수가 되도록 하는 순서쌍 (m, n)은 존재하지 않는다.

3rd $n=4k-1$일 때 순서쌍 (m, n)의 개수를 구한다.

(iii) $n=4k-1$ (k는 자연수)일 때,

$i^{4k-1}=-i$, $(-1)^{4k-1}=-1$이므로

$f(n)=-i-1$

$\{f(n)\}^2=(-i-1)^2=2i$

$\{f(n)\}^3=\{f(n)\}^2\cdot f(n)=2i(-i-1)=2-2i$

$\{f(n)\}^4=[\{f(n)\}^2]^2=(2i)^2=-4$

$\vdots$

1st와 마찬가지로 $\{f(n)\}^m$의 값이 음의 실수가 되도록 하는 50 이하의 자연수 m은

4, 12, 20, 28, 36, 44의 6개

이고, 50 이하의 자연수 n은

3, 7, 11, $\cdots$, 47의 12개 $k=12$일 때, $n=4\cdot12-1=47$

이므로 순서쌍 (m, n)의 개수는

$6\cdot12=72$

4th $n=4k$일 때 순서쌍 (m, n)의 개수를 구한다.

(iv) $n=4k$ (k는 자연수)일 때,

$i^{4k}=1$, $(-1)^{4k}=1$이므로

$f(n)=1+1=2$

따라서 $\{f(n)\}^m$의 값이 음의 실수가 되도록 하는 순서쌍 (m, n)은 존재하지 않는다.

5th 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수를 구한다.

이상에서 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$78+72=150$

답 150

0404 **1st** z^3의 값을 구한다.

ㄱ. $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에서

$z^2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore z^3=z^2\cdot z=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\cdot\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=1$

2nd z^4+z^5의 값을 구한다.

ㄴ. $z^3=1$이므로

$z^4+z^5=z^3\cdot z+z^3\cdot z^2=z+z^2$

$=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$=-1$

3rd $z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}=-1$을 만족시키는 100 이하의 모든 자연수 n의 개수를 구한다.

ㄷ. $z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}$

$=z^n+(z^n)^2+(z^n)^3+(z^n)^4+(z^n)^5$ ······ ㉠

이때 z^n은 z, z^2, 1이 이 순서대로 반복되므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각한다.

(i) $n=3k-2$ (k는 자연수)일 때,

$z^n=z$이므로 ㉠에서

$z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}=\underbrace{z+z^2}_{z+z^2=-1}+z^3+z^4+z^5$

$=-1+1+(-1)=-1$

즉 조건을 만족시키는 100 이하의 자연수 n은

1, 4, 7, $\cdots$, 100 $k=34$일 때, $n=3\cdot34-2=100$

의 34개이다.

(ii) $n=3k-1$ (k는 자연수)일 때,

$z^n=z^2$이므로 ㉠에서

$z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}=z^2+z^4+z^6+z^8+z^{10}$

$=z^2+z+1+z^2+z$

$=-1+1+(-1)=-1$

즉 조건을 만족시키는 100 이하의 자연수 n은

2, 5, 8, $\cdots$, 98 $k=33$일 때, $n=3\cdot33-1=98$

의 33개이다.

(iii) $n=3k$ (k는 자연수)일 때,

$z^n=1$이므로 ㉠에서

$z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}=1+1+1+1+1=5$

즉 조건을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수 n의 개수는

$34+33=67$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0405 **1st** z를 구한다.

$z^2+\overline{z}=(a+bi)^2+(a-bi)$

$=(a^2-b^2+a)+b(2a-1)i$

$z^2+\overline{z}=0$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2+a=0$, $b(2a-1)=0$

$b(2a-1)=0$에서

$a=\dfrac{1}{2}$ ($\because b>0$)

이것을 $a^2-b^2+a=0$에 대입하면 $\frac{1}{4}-b^2+\frac{1}{2}=0$

$b^2=\frac{3}{4}$ $\therefore b=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\because b>0$)

$\therefore z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ⋯ ❶

2nd z^n이 정수가 되도록 하는 세 자리 자연수 n의 최솟값을 구한다.

$z^2=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$z^3=z^2\cdot z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=-1$

$z^4=z^3\cdot z=-1\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$z^5=z^3\cdot z^2=-1\cdot\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

$z^6=(z^3)^2=1$

⋮

이므로 z^n이 정수이려면 n은 3의 배수이어야 한다.
따라서 조건을 만족시키는 세 자리 자연수 n의 최솟값은 102이다. ⋯ ❷

답 102

채점 기준	비율
❶ z를 구할 수 있다.	40 %
❷ 세 자리 자연수 n의 최솟값을 구할 수 있다.	60 %

0406 1st a, b의 대소를 비교한다.
조건 (가)에서 $a<0$, $b>0$ $\therefore a<b$

2nd a, c의 대소를 비교한다.
조건 (나)에서 $b+c=0$, $a+b-2=0$
$b+c=0$에서 $b=-c$
따라서 $a+b-2=0$에서
$a-c-2=0$ $\therefore a=c+2$
$\therefore c<a$

3rd a, b, c의 대소를 비교한다.
따라서 $c<a<b$이다. 답 ④

SSEN 특강

실수 a, b에 대하여 $|a|\geq 0$, $|b|\geq 0$이므로 $|a|+|b|=0$이면
$|a|=0$, $|b|=0$ $\therefore a=0$, $b=0$

Ⅱ. 방정식

04 이차방정식

0407 $x^2-x-20=0$에서 $(x+4)(x-5)=0$
$\therefore x=-4$ 또는 $x=5$ 답 $x=-4$ 또는 $x=5$

0408 $9x^2-6x+1=0$에서 $(3x-1)^2=0$
$\therefore x=\frac{1}{3}$ 답 $x=\frac{1}{3}$

0409 $5x^2-9x-2=0$에서 $(5x+1)(x-2)=0$
$\therefore x=-\frac{1}{5}$ 또는 $x=2$ 답 $x=-\frac{1}{5}$ 또는 $x=2$

0410 $x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0$의 양변에 2를 곱하면
$2x^2-x-1=0$, $(2x+1)(x-1)=0$
$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$ 답 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

0411 $x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}$
$=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ 답 $x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

0412 $x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot2\cdot4}}{2\cdot2}=\frac{-5\pm\sqrt{-7}}{4}$
$=\frac{-5\pm\sqrt{7}i}{4}$ 답 $x=\frac{-5\pm\sqrt{7}i}{4}$

0413 $3x^2-2\cdot\sqrt{10}x+3=0$이므로
$x=\frac{-(-\sqrt{10})\pm\sqrt{(-\sqrt{10})^2-3\cdot3}}{3}$
$=\frac{\sqrt{10}\pm1}{3}$ 답 $x=\frac{\sqrt{10}\pm1}{3}$

0414 $9x^2+2\cdot3x+5=0$이므로
$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-9\cdot5}}{9}=\frac{-3\pm\sqrt{-36}}{9}$
$=\frac{-3\pm6i}{9}=\frac{-1\pm2i}{3}$ 답 $x=\frac{-1\pm2i}{3}$

0415 $2x^2-5x+2=0$에서 $(2x-1)(x-2)=0$
$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$
따라서 주어진 이차방정식의 근은 실근이다.
답 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$, 실근

0416 $16x^2-24x+9=0$에서 $(4x-3)^2=0$
$\therefore x=\frac{3}{4}$
따라서 주어진 이차방정식의 근은 실근이다.
답 $x=\frac{3}{4}$, 실근

04 이차방정식

0417 $x^2+4=0$에서 $x^2=-4$

$\therefore x=\pm\sqrt{-4}=\pm 2i$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 허근이다.

답 $x=\pm 2i$, 허근

0418 $x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1}}{4}=\dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{4}$

$=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{4}$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 허근이다.

답 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{4}$, 허근

0419 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\cdot 7\cdot(-1)=37>0$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다. 답 서로 다른 두 실근

참고 이차방정식 $7x^2+3x-1=0$에서 x^2의 계수 7과 상수항 -1의 부호가 다르므로 이 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

0420 $4x^2-2\cdot 6x+9=0$이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-6)^2-4\cdot 9=0$

따라서 중근을 갖는다. 답 중근

0421 $x^2+2\cdot\sqrt{3}x+5=0$이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(\sqrt{3})^2-1\cdot 5=-2<0$

따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다. 답 서로 다른 두 허근

0422 보기에 주어진 각 이차방정식의 판별식을 D라 하면

ㄱ. $D=5^2-4\cdot 1\cdot 3=13>0$

ㄴ. $D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 2=-7<0$

ㄷ. $\dfrac{D}{4}=1^2-1\cdot(-6)=7>0$

ㄹ. $\dfrac{D}{4}=(-2)^2-4\cdot 1=0$

ㅁ. $\dfrac{D}{4}=2^2-2\cdot 3=-2<0$

ㅂ. $\dfrac{D}{4}=1^2-2\cdot(-1)=3>0$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

ㄱ, ㄷ, ㅂ

(2) 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로 ㄹ

(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

ㄴ, ㅁ

답 (1) ㄱ, ㄷ, ㅂ (2) ㄹ (3) ㄴ, ㅁ

0423 이차방정식 $2x^2-x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-k)=1+8k$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$D=1+8k>0$ $\therefore k>-\dfrac{1}{8}$

(2) 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$D=1+8k=0$ $\therefore k=-\dfrac{1}{8}$

(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$D=1+8k<0$ $\therefore k<-\dfrac{1}{8}$

답 (1) $k>-\dfrac{1}{8}$ (2) $-\dfrac{1}{8}$ (3) $k<-\dfrac{1}{8}$

0424 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $x^2+kx+7=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4\cdot 1\cdot 7=0$, $k^2=28$

$\therefore k=\pm 2\sqrt{7}$ 답 $\pm 2\sqrt{7}$

0425 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $x^2-(k+1)x+k+4=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(k+1)\}^2-4\cdot 1\cdot(k+4)=0$

$k^2+2k+1-4k-16=0$

$k^2-2k-15=0$, $(k+3)(k-5)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=5$ 답 -3, 5

0426 이차방정식 $x^2-x+2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

(1) $\alpha+\beta=-\dfrac{-1}{1}=1$

(2) $\alpha\beta=\dfrac{2}{1}=2$

(3) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot 2=-3$

(4) $(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=2-1+1=2$

답 (1) 1 (2) 2 (3) -3 (4) 2

0427 이차방정식 $x^2-3x+1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{-3}{1}=3$, $\alpha\beta=\dfrac{1}{1}=1$

(1) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$

$=3^2-1=8$

(2) $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$

$=\alpha\beta\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$

$=1\cdot(3^2-2\cdot 1)=7$

(3) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{3^2-2\cdot 1}{1}=7$

(4) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=3^2-4\cdot 1=5$

답 (1) 8 (2) 7 (3) 7 (4) 5

0428 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 -2, 4이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+4=-\dfrac{b}{a}$, $-2\cdot 4=\dfrac{c}{a}$

$\therefore b=-2a$, $c=-8a$

따라서 이차방정식 $cx^2+ax+b=0$, 즉 $-8ax^2+ax-2a=0$에서 $\underline{a\neq 0}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$ax^2+bx+c=0$이 이차방정식이므로 $a\neq 0$

(1) 두 근의 합은 $\quad -\dfrac{a}{-8a}=\dfrac{1}{8}$

(2) 두 근의 곱은 $\quad \dfrac{-2a}{-8a}=\dfrac{1}{4}$

답 (1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{4}$

0429 $x^2-(-4+3)x+(-4)\cdot 3=0$

$\therefore x^2+x-12=0$ 답 $x^2+x-12=0$

0430 $x^2-\{(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})\}x+(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=0$

$\therefore x^2-6x+7=0$ 답 $x^2-6x+7=0$

0431 $x^2-\{(2+i)+(2-i)\}x+(2+i)(2-i)=0$

$\therefore x^2-4x+5=0$ 답 $x^2-4x+5=0$

0432 $3\left\{x^2-\left(-\frac{1}{3}+1\right)x+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 1\right\}=0$

$3\left(x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right)=0 \qquad \therefore 3x^2-2x-1=0$

답 $3x^2-2x-1=0$

0433 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-2x-7=0$

$\therefore x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot(-7)}$

$=1\pm\sqrt{8}=1\pm 2\sqrt{2}$

이때 $\alpha<\beta$이므로 $\quad \alpha=1-2\sqrt{2}$, $\beta=1+2\sqrt{2}$

답 $\alpha=1-2\sqrt{2}$, $\beta=1+2\sqrt{2}$

0434 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2+3x-1=0$

$\therefore x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

이때 $\alpha<\beta$이므로 $\quad \alpha=\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$, $\beta=\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$

답 $\alpha=\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$, $\beta=\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$

0435 $x^2+x-4=0$에서

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

$\therefore x^2+x-4=\left(x-\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)$

$=\left(x+\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$

답 $\left(x+\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$

0436 $x^2+25=0$에서 $\quad x^2=-25 \quad \therefore x=\pm 5i$

$\therefore x^2+25=(x+5i)(x-5i)$ 답 $(x+5i)(x-5i)$

0437 $3x^2-2x+2=0$에서

$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-3\cdot 2}}{3}=\dfrac{1\pm\sqrt{-5}}{3}$

$=\dfrac{1\pm\sqrt{5}i}{3}$

$\therefore 3x^2-2x+2=3\left(x-\dfrac{1+\sqrt{5}i}{3}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{5}i}{3}\right)$

답 $3\left(x-\dfrac{1+\sqrt{5}i}{3}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{5}i}{3}\right)$

0438 주어진 이차방정식의 계수가 유리수이므로 $2-\sqrt{3}$이 근이면 $2+\sqrt{3}$도 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=-a$, $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=b$

$\therefore a=-4$, $b=1$ 답 $a=-4$, $b=1$

0439 주어진 이차방정식의 계수가 유리수이므로 $-5+3\sqrt{2}$가 근이면 $-5-3\sqrt{2}$도 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-5+3\sqrt{2})+(-5-3\sqrt{2})=-a$,

$(-5+3\sqrt{2})(-5-3\sqrt{2})=b$

$\therefore a=10$, $b=7$ 답 $a=10$, $b=7$

0440 주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $1-2i$가 근이면 $1+2i$도 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-2i)+(1+2i)=-a$, $(1-2i)(1+2i)=b$

$\therefore a=-2$, $b=5$ 답 $a=-2$, $b=5$

0441 주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $3+4i$가 근이면 $3-4i$도 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(3+4i)+(3-4i)=-a$, $(3+4i)(3-4i)=b$

$\therefore a=-6$, $b=25$ 답 $a=-6$, $b=25$

유형 01 이차방정식의 풀이

본책 66쪽

(i) 이차방정식을 (x에 대한 이차식)$=0$ 꼴로 정리한다.
(ii) 인수분해 또는 근의 공식을 이용하여 해를 구한다.

0442 $x^2+3x+4=0$에서

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{7}i}{2}$

따라서 $a=-3$, $b=7$이므로

$a+b=4$ 답 4

0443 $(x+3)^2=x(3x-11)$에서

$x^2+6x+9=3x^2-11x$, $\quad 2x^2-17x-9=0$

$(2x+1)(x-9)=0 \quad \therefore x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=9$ 답 ③

0444 $\frac{4}{3}x(x-1)-x+4=\frac{(x-3)^2}{2}$에서

양변에 6을 곱한다.

$8x^2-8x-6x+24=3x^2-18x+27$

$5x^2+4x-3=0$

$\therefore x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-5\cdot(-3)}}{5}=\frac{-2\pm\sqrt{19}}{5}$

따라서 $\alpha=\frac{-2+\sqrt{19}}{5}$이므로 $5\alpha=-2+\sqrt{19}$

$\therefore 5\alpha-\sqrt{19}=-2$ 답 ①

0445 $(x*x)+(2*x)=0$에서

$(x^2-x+x)+(2x-2+x)=0$

$x^2+3x-2=0$

$\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$ 답 ①

0446 주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{2}+1$을 곱하면

$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)x^2+(\sqrt{2}+1)(3-\sqrt{2})x+(\sqrt{2}+1)\sqrt{2}=0$

$x^2+(2\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$

$(x+\sqrt{2}+1)(x+\sqrt{2})=0$

$\therefore x=-\sqrt{2}-1$ 또는 $x=-\sqrt{2}$ ··· ❶

이때 $\alpha<\beta$이므로

$\alpha=-\sqrt{2}-1,\ \beta=-\sqrt{2}$ ··· ❷

$\therefore \alpha-3\beta=2\sqrt{2}-1$ ··· ❸

답 $2\sqrt{2}-1$

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식의 근을 구할 수 있다.	60 %
❷ α, β의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\alpha-3\beta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

참고 x^2의 계수가 무리수인 이차방정식은 x^2의 계수를 유리화한 후 인수분해 또는 근의 공식을 이용하여 해를 구한다.

유형 02 한 근이 주어진 이차방정식

집중 공략 본책 66쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 α이다.
➡ $x=\alpha$를 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면 등식이 성립한다.
➡ $a\alpha^2+b\alpha+c=0$

0447 이차방정식 $x^2-2kx-k+1=0$의 한 근이 -1이므로

$(-1)^2-2k\cdot(-1)-k+1=0$

$\therefore k=-2$

$k=-2$를 주어진 이차방정식에 대입하면

$x^2+4x+3=0,\quad (x+3)(x+1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-1$

따라서 다른 한 근은 -3이다. 답 ④

0448 이차방정식 $x^2+kx+\sqrt{2}-2=0$의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로

$(1-\sqrt{2})^2+k(1-\sqrt{2})+\sqrt{2}-2=0$

$3-2\sqrt{2}+k(1-\sqrt{2})+\sqrt{2}-2=0$

$1-\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})k=0,\quad (1-\sqrt{2})k=-(1-\sqrt{2})$

$\therefore k=-1$ 답 -1

0449 이차방정식 $x^2+(a-1)x-5a=0$의 한 근이 -5이므로

$(-5)^2+(a-1)\cdot(-5)-5a=0$

$30-10a=0\quad \therefore a=3$

이차방정식 $kx^2-7x+k+1=0$의 한 근이 3이므로

$k\cdot3^2-7\cdot3+k+1=0$

$10k-20=0\quad \therefore k=2$

$\therefore ak=6$ 답 6

0450 이차방정식 $kx^2-(a+1)x-kb=0$의 한 근이 -1이므로

$k\cdot(-1)^2-(a+1)\cdot(-1)-kb=0$

$\therefore (1-b)k+a+1=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$1-b=0,\ a+1=0\quad \therefore a=-1,\ b=1$

이차방정식 $kx^2-k=0$에서 $k\neq0$이므로 양변을 k로 나누면

$x^2-1=0,\quad (x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 $c=1$이므로 $a+b+c=1$ 답 ④

SSEN 특강 항등식에 대한 여러 가지 표현

다음은 모두 k에 대한 항등식을 나타낸다.
① k의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식
② 모든 k에 대하여 성립하는 등식
③ 임의의 k에 대하여 성립하는 등식

0451 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 근이 α이므로

$\alpha^2-\alpha+1=0$

$\alpha\neq0$이므로 양변을 α로 나누면

$\alpha=0$을 위의 방정식에 대입하면 등식이 성립하지 않으므로 $\alpha\neq0$

$\alpha-1+\frac{1}{\alpha}=0$

$\therefore \alpha+\frac{1}{\alpha}=1$

$\therefore \alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2=1^2-2=-1$ 답 -1

0452 이차방정식 $x^2+2x-1=0$의 한 근이 α이므로

$\alpha^2+2\alpha-1=0\quad \therefore \alpha^2+2\alpha=1$

$\therefore \alpha(\alpha^2+3\alpha-4)(\alpha^2+\alpha-6)$

$=\alpha(\alpha^2+2\alpha+\alpha-4)(\alpha^2+2\alpha-\alpha-6)$

$=\alpha(1+\alpha-4)(1-\alpha-6)=-\alpha(\alpha-3)(\alpha+5)$

$=-\alpha(\alpha^2+2\alpha-15)$

$=-\alpha(1-15)$

$=14\alpha$ ··· ❶

이때 $x^2+2x-1=0$에서 $x=-1\pm\sqrt{2}$이므로

$\alpha=-1+\sqrt{2}\ (\because \alpha>0)$ ··· ❷

$\therefore \alpha(\alpha^2+3\alpha-4)(\alpha^2+\alpha-6)=14\alpha=-14+14\sqrt{2}$ ··· ❸

답 $-14+14\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 다항식을 간단히 할 수 있다.	60 %
❷ α의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $a(a^2+3a-4)(a^2+a-6)$

$=a(a+4)(a-1)(a+3)(a-2)$

$=a\{(a-1)(a+3)\}\{(a+4)(a-2)\}$

$=a(a^2+2a-3)(a^2+2a-8)$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+2x-1=0$의 한 근이 a이므로

$a^2+2a-1=0$ $\quad\therefore a^2+2a=1$

따라서 ㉠에서

$a(a^2+3a-4)(a^2+a-6)$

$=a(1-3)(1-8)$

$=14a$

유형 03 절댓값 기호를 포함한 방정식

본책 67쪽

① $|x|=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$임을 이용하여 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나누어 방정식을 푼다.

② $\sqrt{x^2}$을 포함한 방정식 ➡ $\sqrt{x^2}=|x|$임을 이용한다.

0453 $x^2+|3x-2|=2$에서

(i) $x<\frac{2}{3}$일 때, $\quad x^2-(3x-2)=2$

$x^2-3x=0, \quad x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

그런데 $x<\frac{2}{3}$이므로 $\quad x=0$

(ii) $x\geq\frac{2}{3}$일 때, $\quad x^2+(3x-2)=2$

$x^2+3x-4=0, \quad (x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

그런데 $x\geq\frac{2}{3}$이므로 $\quad x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=0$ 또는 $x=1$

따라서 모든 근의 합은 1이다. 답 ①

0454 $|x\triangle 3|=x\triangle x$에서 $\quad |x+3-3x|=x+x-x^2$

$|-2x+3|=-x^2+2x$ ··· ❶

(i) $x<\frac{3}{2}$일 때, $\quad -2x+3=-x^2+2x$

$x^2-4x+3=0, \quad (x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

그런데 $x<\frac{3}{2}$이므로 $\quad x=1$ ··· ❷

(ii) $x\geq\frac{3}{2}$일 때, $\quad -(-2x+3)=-x^2+2x$

$x^2=3 \quad \therefore x=\pm\sqrt{3}$

그런데 $x\geq\frac{3}{2}$이므로 $\quad x=\sqrt{3}$ ··· ❸

(i), (ii)에서 구하는 x의 값은

$x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}$ ··· ❹

답 $x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ $\|x\triangle 3\|=x\triangle x$를 변형할 수 있다.	10 %
❷ $x<\frac{3}{2}$일 때, x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $x\geq\frac{3}{2}$일 때, x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ x의 값을 구할 수 있다.	10 %

0455 방정식 $|4x^2-(3a-1)x-2a-1|=1$의 한 근이 a이므로

$|4a^2-(3a-1)a-2a-1|=1, \quad |a^2-a-1|=1$

$a^2-a-1=\pm1$

(i) $a^2-a-1=1$일 때, $\quad a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0 \quad \therefore a=-1$ 또는 $a=2$

(ii) $a^2-a-1=-1$일 때, $\quad a^2-a=0$

$a(a-1)=0 \quad \therefore a=0$ 또는 $a=1$

(i), (ii)에서 구하는 합은

$-1+2+0+1=2$ 답 2

0456 $\sqrt{(x-1)^2}+6=x^2+\sqrt{x^2}+3$에서

$|x-1|+6=x^2+|x|+3$

$x^2-\underline{|x-1|+|x|}-3=0$ 절댓값 기호가 2개이면 x의 값의 범위를 3개로 나눈다.

(i) $x<0$일 때, $x-1<0$이므로

$x^2+(x-1)-x-3=0$

$x^2=4 \quad \therefore x=\pm2$

그런데 $x<0$이므로 $\quad x=-2$

(ii) $0\leq x<1$일 때, $x-1<0$이므로

$x^2+(x-1)+x-3=0$

$x^2+2x-4=0 \quad \therefore x=-1\pm\sqrt{5}$

그런데 $0\leq x<1$이므로 $x=-1\pm\sqrt{5}$는 근이 아니다.

(iii) $x\geq1$일 때, $x-1\geq0$이므로

$x^2-(x-1)+x-3=0$

$x^2=2 \quad \therefore x=\pm\sqrt{2}$

그런데 $x\geq1$이므로 $\quad x=\sqrt{2}$

이상에서 주어진 방정식의 근은

$x=-2$ 또는 $x=\sqrt{2}$ 답 ④

유형 04 가우스 기호를 포함한 방정식

본책 68쪽

실수 x에 대하여 x보다 크지 않은 최대의 정수를 $[x]$로 나타내고, 이를 가우스 기호라 한다. 가우스 기호를 포함한 방정식은 다음과 같은 순서로 푼다.

(i) 주어진 방정식에서 $[x]$의 값을 구한다.

(ii) $[x]$의 값이 정수인 것만을 택한다.

(iii) $[x]=n$ (n은 정수)이면 $n\leq x<n+1$임을 이용하여 x의 값의 범위를 구한다.

0457 $2[x]^2+5[x]-3=0$에서

$([x]+3)(2[x]-1)=0$

$\therefore [x]=-3$ 또는 $[x]=\frac{1}{2}$

그런데 $[x]$는 정수이므로 $\quad [x]=-3$

$\therefore -3\leq x<-2$ 답 $-3\leq x<-2$

0458 $[x]^2-3[x]-4=0$에서

$([x]+1)([x]-4)=0$

$\therefore [x]=-1$ 또는 $[x]=4$

따라서 $-1\le x<0$ 또는 $4\le x<5$이므로 주어진 방정식의 해가 아닌 것은 ③이다.

답 ③

0459 $2x^2-x+3[x]=0$에서

(i) $-2<x<-1$일 때, $[x]=-2$이므로

$2x^2-x-6=0,\quad (2x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=2$

그런데 $-2<x<-1$이므로 $\quad x=-\frac{3}{2}$ ···➊

(ii) $-1\le x<0$일 때, $[x]=-1$이므로

$2x^2-x-3=0,\quad (x+1)(2x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

그런데 $-1\le x<0$이므로 $\quad x=-1$ ···➋

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-1$ ···➌

답 $x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-1$

채점 기준	비율
➊ $-2<x<-1$일 때 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
➋ $-1\le x<0$일 때 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
➌ 주어진 방정식의 근을 구할 수 있다.	20 %

유형 05 이차방정식의 활용

본책 68쪽

(i) 문제의 의미를 파악하여 구하는 것을 x로 놓는다.
(ii) 주어진 조건을 이용하여 방정식을 세운다.
(iii) 방정식을 풀어 문제의 답을 구한다.

0460 처음 정사각형 모양의 땅의 한 변의 길이를 x m라 하면 새로 만들어진 직사각형 모양의 땅의 가로, 세로의 길이는 각각 $(x-6)$ m, $(x+4)$ m이므로

$(x-6)(x+4)=\frac{2}{3}x^2,\quad x^2-2x-24=\frac{2}{3}x^2$

$x^2-6x-72=0,\quad (x+6)(x-12)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=12$

그런데 $\underbrace{x>6}_{x-6>0\text{에서 } x>6}$이므로 $\quad x=12$

따라서 처음 정사각형 모양의 땅의 한 변의 길이는 12 m이다.

답 12 m

0461 길의 폭을 x m라 하면 남은 땅의 가로, 세로의 길이는 각각 $(28-x)$ m, $(20-2x)$ m이므로

$(28-x)(20-2x)=288$

$x^2-38x+136=0,\quad (x-4)(x-34)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=34$

그런데 $0<\underbrace{x<10}_{20-2x>0\text{에서 } x<10}$이므로 $\quad x=4$

따라서 구하는 길의 폭은 4 m이다.

답 ③

0462 $\triangle ABP$와 $\triangle CBQ$에서

$\angle PAB=\angle QCB=90^\circ$,

$\overline{PB}=\overline{QB}$, $\overline{AB}=\overline{CB}$

이므로 $\quad \triangle ABP\equiv\triangle CBQ$ (RHS 합동)

$\overline{AP}=x$라 하면 $\overline{CQ}=x$이므로

$\overline{PD}=\overline{QD}=2-x$ ···➊

직각삼각형 PQD에서

$\overline{PQ}^2=(2-x)^2+(2-x)^2$

직각삼각형 ABP에서

$\overline{PB}^2=x^2+4$

$\triangle PBQ$는 정삼각형이므로 $\overline{PQ}^2=\overline{PB}^2$에서

$(2-x)^2+(2-x)^2=x^2+4$ ···➋

$x^2-8x+4=0$

$\therefore x=4\pm2\sqrt{3}$

그런데 $0<x<2$이므로

$x=4-2\sqrt{3}$

따라서 $\overline{AP}$의 길이는 $4-2\sqrt{3}$이다. ···➌

답 $4-2\sqrt{3}$

채점 기준	비율
➊ $\overline{AP}=x$라 하고 $\overline{PD}$, $\overline{QD}$의 길이를 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
➋ x에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	40 %
➌ $\overline{AP}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %

0463 정오각형 ABCDE의 한 내각의 크기는

$\frac{180^\circ\times(5-2)}{5}=108^\circ$

$\triangle ABE$는 $\angle BAE=108^\circ$이고 $\overline{AB}=\overline{AE}$인 이등변삼각형이므로

$\angle ABE=\angle AEB=\frac{1}{2}(180^\circ-108^\circ)$

$=36^\circ$

같은 방법으로 하면 $\triangle BCA$에서 $\angle BAC=36^\circ$이므로

$\angle PAE=108^\circ-36^\circ=72^\circ$

$\triangle APE$에서

$\angle APE=180^\circ-(72^\circ+36^\circ)=72^\circ$

이므로 $\triangle APE$는 $\overline{PE}=\overline{AE}$인 이등변삼각형이다.

$\therefore \overline{PE}=\overline{AE}=4$

$\triangle PAB$와 $\triangle ABE$에서

$\angle PAB=\angle ABE=36^\circ$,

$\angle PBA=\angle AEB=36^\circ$

이므로 $\quad \triangle PAB\backsim\triangle ABE$ (AA 닮음)

$\overline{BP}=x$라 하면 $\overline{AB}:\overline{BE}=\overline{BP}:\overline{EA}$이므로

$4:\underbrace{(x+4)}_{\overline{BE}=\overline{BP}+\overline{PE}}=x:4$

$x(x+4)=16$

$x^2+4x-16=0$

$\therefore x=-2\pm2\sqrt{5}$

그런데 $x>0$이므로

$x=-2+2\sqrt{5}$

따라서 $\overline{BP}$의 길이는 $-2+2\sqrt{5}$이다.

답 ②

유형 06 이차방정식의 근의 판별

집중 공략 본책 69쪽

계수가 실수인 이차방정식의 판별식을 D라 할 때
① 서로 다른 두 실근을 가지면 ➡ $D>0$
② 중근을 가지면 ➡ $D=0$
(①, ②: 실근을 가지면 ➡ $D\ge0$)
③ 서로 다른 두 허근을 가지면 ➡ $D<0$

0464 이차방정식 $x^2-2(k+3)x+k^2-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+3)\}^2-(k^2-1)>0$

$k^2+6k+9-k^2+1>0$

$6k+10>0$

$\therefore k>-\frac{5}{3}$

따라서 정수 k의 최솟값은 -1이다. 답 ②

0465 이차방정식 $x^2+ax+a-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4(a-1)=0,\quad a^2-4a+4=0$

$(a-2)^2=0\quad \therefore a=2$

$a=2$를 주어진 이차방정식에 대입하면

$x^2+2x+1=0,\quad (x+1)^2=0$

$\therefore x=-1$

따라서 $m=-1$이므로 $\quad a+m=1$ 답 ③

다른 풀이 m을 중근으로 가지고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-m)^2=0\quad \therefore x^2-2mx+m^2=0$

즉 $x^2+ax+a-1=x^2-2mx+m^2$이므로

$a=-2m$ ...... ㉠

$a-1=m^2$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad -2m-1=m^2$

$m^2+2m+1=0,\quad (m+1)^2=0$

$\therefore m=-1$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad a=2$

$\therefore a+m=1$

0466 이차방정식 $2x^2-4x-(k-5)=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-2)^2+2(k-5)<0$

$2k-6<0\quad \therefore k<3$ ...... ㉠

이차방정식 $x^2-(k+3)x+k+6=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=\{-(k+3)\}^2-4(k+6)=0$

$k^2+6k+9-4k-24=0,\quad k^2+2k-15=0$

$(k+5)(k-3)=0$

$\therefore k=-5$ 또는 $k=3$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad k=-5$ 답 -5

0467 주어진 방정식이 이차방정식이므로

$k^2-1\ne0,\quad (k+1)(k-1)\ne0$

$\therefore k\ne-1,\ k\ne1$ ...... ㉠ ··· ❶

이차방정식 $(k^2-1)x^2-2(k+1)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k^2-1)\ge0$

$k^2+2k+1-k^2+1\ge0$

$2k+2\ge0\quad \therefore k\ge-1$ ...... ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡에서 $\quad -1<k<1$ 또는 $k>1$ ··· ❸

답 $-1<k<1$ 또는 $k>1$

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식이 이차방정식이기 위한 k의 조건을 구할 수 있다.	30 %
❷ 판별식을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

0468 이차방정식 $x^2+(a+2k)x+k^2-2k-b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a+2k)^2-4(k^2-2k-b)=0$

$a^2+4ak+4k^2-4k^2+8k+4b=0$

$\therefore (4a+8)k+a^2+4b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$4a+8=0,\ a^2+4b=0$

따라서 $a=-2,\ b=-1$이므로 $\quad a+b=-3$ 답 ③

유형 07 계수의 조건이 주어진 이차방정식의 근의 판별

본책 69쪽

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근
➡ b^2-4ac의 부호를 조사하여 판별한다.

0469 이차방정식 $ax^2-bx-c=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-b)^2-4a\cdot(-c)=b^2+4ac$

$b=a-c$를 위의 식에 대입하면

$D=(a-c)^2+4ac=(a+c)^2\ge0$

따라서 주어진 이차방정식은 실근을 갖는다. 답 ①

0470 이차방정식 $x^2+2ax+a^2-2a+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(a^2-2a+4)=2a-4$

이때 $a<2$에서 $2a-4<0$이므로 $\quad \frac{D}{4}<0$

따라서 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

답 서로 다른 두 허근

0471 이차방정식 $x^2-2ax+b^2+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-a)^2-(b^2+1)=0$

$\therefore a^2=b^2+1$ ...... ㉠ ··· ❶

이차방정식 $x^2+4ax+2b+1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(2a)^2-(2b+1)$

$=4(b^2+1)-(2b+1)\ (\because ㉠)$

$=4b^2-2b+3$

$=4\left(b-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{11}{4}>0$ ··· ❷

따라서 이차방정식 $x^2+4ax+2b+1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. ··· ❸

답 서로 다른 두 실근

채점 기준	비율
❶ 방정식 $x^2-2ax+b^2+1=0$이 중근을 가짐을 이용하여 a, b에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 방정식 $x^2+4ax+2b+1=0$의 판별식의 부호를 알 수 있다.	40 %
❸ 방정식 $x^2+4ax+2b+1=0$의 근을 판별할 수 있다.	20 %

0472 $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$에서

$a<0$, $b>0$

ㄱ. 이차방정식 $x^2+ax-b=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=a^2+4b>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. 이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=b^2-4a>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. 이차방정식 $ax^2+bx+1=0$의 판별식을 D_3이라 하면

$D_3=b^2-4a>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄹ. 이차방정식 $x^2-2ax+b=0$의 판별식을 D_4라 하면

$\dfrac{D_4}{4}=(-a)^2-b=a^2-b$

a^2-b의 값의 부호는 알 수 없으므로 이 이차방정식의 근은 판별할 수 없다.

이상에서 항상 서로 다른 두 실근을 갖는 이차방정식은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0473 두 이차방정식 $P(x)=0$, $Q(x)=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=(a+1)^2-a^2=2a+1$,

$\dfrac{D_2}{4}=a^2-(a-1)^2=2a-1$

ㄱ. $P(x)=0$이 실근을 가지면

$\dfrac{D_1}{4}=2a+1\geq 0$

$2a+1\geq 0$의 양변에서 2를 빼면

$2a-1\geq -2$

즉 $\dfrac{D_2}{4}\geq -2$이므로 $Q(x)=0$이 항상 실근을 갖는다고 할 수 없다.

ㄴ. $P(x)=0$이 중근을 가지면

$\dfrac{D_1}{4}=2a+1=0$

$2a+1=0$의 양변에서 2를 빼면

$2a-1=-2$

즉 $\dfrac{D_2}{4}=-2<0$이므로 $Q(x)=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ㄷ. $P(x)=0$이 서로 다른 두 허근을 가지면

$\dfrac{D_1}{4}=2a+1<0$

$2a+1<0$의 양변에서 2를 빼면

$2a-1<-2$

즉 $\dfrac{D_2}{4}<-2$이므로 $Q(x)=0$도 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

유형 08 이차방정식의 판별식과 삼각형의 모양 본책 70쪽

판별식을 이용하여 주어진 이차방정식의 미정계수 사이의 관계를 파악한 후 다음을 이용하여 삼각형의 모양을 판단한다.
삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c $(a\leq b\leq c)$일 때
① $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ ➡ 이등변삼각형
② $a=b=c$ ➡ 정삼각형
③ $a^2+b^2>c^2$ ➡ 예각삼각형
④ $a^2+b^2=c^2$ ➡ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형
⑤ $a^2+b^2<c^2$ ➡ 둔각삼각형

0474 이차방정식 $x^2+2(a+b+c)x+3(ab+bc+ca)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=0$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$

$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)=0$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

a, b, c가 실수이므로

$a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$

$\therefore a=b=c$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 정삼각형이다.

답 ①

0475 이차방정식 $(a+c)x^2+2bx+a-c=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=b^2-(a+c)(a-c)<0$

$b^2-(a^2-c^2)<0$

$\therefore a^2>b^2+c^2$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 둔각삼각형이다. 답 둔각삼각형

0476 이차방정식 $3x^2-(a+3b)x+ab=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a+3b)\}^2-4\cdot 3\cdot ab=0$

$a^2+6ab+9b^2-12ab=0$, $a^2-6ab+9b^2=0$

$(a-3b)^2=0$ $\therefore a=3b$

따라서 직각삼각형의 빗변의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(3b)^2+b^2}=\sqrt{10b^2}$

$=\sqrt{10}b$ $(\because b>0)$ 답 ④

유형 09 이차식이 완전제곱식이 되는 조건 본책 71쪽

이차식 ax^2+bx+c가 완전제곱식으로 인수분해된다.
⇒ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 갖는다.
⇒ $b^2-4ac=0$

0477 주어진 이차식이 완전제곱식이면 x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k-1)x+k^2-5k+4=0$이 중근을 갖는다.
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-(k^2-5k+4)=0$

$k^2-2k+1-k^2+5k-4=0$

$3k-3=0$

$\therefore k=1$

답 ⑤

0478 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $kx^2+6kx+k+16=0$이 중근을 가져야 한다.
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(3k)^2-k(k+16)=0$

$8k^2-16k=0,\quad k(k-2)=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=2$

그런데 주어진 식이 x에 대한 이차식이므로 $k\neq0$

$\therefore k=2$

답 2

0479 주어진 이차식이 완전제곱식이면 x에 대한 이차방정식 $x^2-(ak+b)x+k^2+c-1=0$이 중근을 갖는다.
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(ak+b)\}^2-4(k^2+c-1)=0$

$a^2k^2+2abk+b^2-4k^2-4c+4=0$

$\therefore (a^2-4)k^2+2abk+b^2-4c+4=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$a^2-4=0,\ 2ab=0,\ b^2-4c+4=0$

$\therefore a^2=4,\ b=0,\ c=1$

$\therefore a^2+b^2+c^2=5$

답 ②

0480 주어진 이차식이 완전제곱식이 되므로 x에 대한 이차방정식 $4x^2-(3a-5)x+a^2-5a+2=0$이 중근을 갖는다.
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(3a-5)\}^2-4\cdot4\cdot(a^2-5a+2)=0$ ···➊

$9a^2-30a+25-16a^2+80a-32=0$

$7a^2-50a+7=0$

$(7a-1)(a-7)=0$

$\therefore a=7\ (\because a>1)$ ···➋

$a=7$을 주어진 이차식에 대입하면

$4x^2-16x+16=4(x-2)^2$

이므로 $k=-2$ ···➌

$\therefore a-k=9$ ···➍

답 9

채점 기준	비율
➊ 판별식을 이용하여 a에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
➋ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
➌ k의 값을 구할 수 있다.	20 %
➍ $a-k$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 10 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값 구하기 (1) 집중공략 본책 71쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β일 때, α, β에 대한 식의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$임을 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한다.
(ii) 주어진 식을 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$에 대한 식으로 변형한다.
(iii) (ii)의 식에 (i)의 값을 대입하여 주어진 식의 값을 구한다.

0481 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\frac{8}{3}$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=2^3-3\cdot\frac{8}{3}\cdot2=-8$

답 -8

0482 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{1}{2},\ \alpha\beta=-\frac{5}{2}$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{41}{4}$

$\therefore |\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{41}}{2}$

답 ②

0483 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=1$ ···➊

$\therefore (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$

$=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}\ (\because \alpha>0,\ \beta>0)$

$=5+2\cdot1=7$ ···➋

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{7}\ (\because \alpha>0,\ \beta>0)$ ···➌

답 $\sqrt{7}$

채점 기준	비율
➊ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
➋ $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$의 값을 구할 수 있다.	50 %
➌ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

참고 $\alpha\beta>0$이므로 $\alpha>0,\ \beta>0$ 또는 $\alpha<0,\ \beta<0$
이때 $\alpha+\beta>0$이므로 $\alpha>0,\ \beta>0$

0484 $|x^2-4x|=1$에서 $x^2-4x=\pm1$
(i) $x^2-4x=1$, 즉 $x^2-4x-1=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=-1$

(ii) $x^2-4x=-1$, 즉 $x^2-4x+1=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\gamma+\delta=4$, $\gamma\delta=1$

(i), (ii)에서

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}$$
$$=\frac{4}{-1}+\frac{4}{1}=0$$

답 ③

유형 11 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값 구하기 (2) 집중공략 본책 72쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β일 때, 주어진 식이 이 방정식에 α 또는 β를 대입한 식을 변형한 꼴이면 식의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) $a\alpha^2+b\alpha+c=0$, $a\beta^2+b\beta+c=0$임을 이용하여 주어진 식을 $\alpha+\beta$ 또는 $\alpha\beta$에 대한 식으로 변형한다.
(ii) $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$임을 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한다.
(iii) (i)의 식에 (ii)의 값을 대입하여 주어진 식의 값을 구한다.

0485 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$\alpha^2-(3a-2)\alpha+1=0$, $\beta^2-(3a-2)\beta+1=0$

$\therefore\ \alpha^2-3a\alpha+1=-2\alpha$, $\beta^2-3a\beta+1=-2\beta$

$\therefore\ (\alpha^2-3a\alpha+1)(\beta^2-3a\beta+1)=(-2\alpha)\cdot(-2\beta)$
$=4\alpha\beta$ …… ㉠

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=1$

따라서 ㉠에서

$(\alpha^2-3a\alpha+1)(\beta^2-3a\beta+1)=4\cdot1=4$

답 ④

0486 α가 주어진 이차방정식의 근이므로

$\alpha^2-4\alpha+7=0$ $\therefore\ \alpha^2=4\alpha-7$

$\therefore\ \alpha^2+4\beta=4\alpha-7+4\beta$
$=4(\alpha+\beta)-7$ …… ㉠

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4$

따라서 ㉠에서

$\alpha^2+4\beta=4\cdot4-7=9$

답 9

0487 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$\alpha^2-\alpha-3=0$, $\beta^2-\beta-3=0$

$\therefore\ \alpha^2-\alpha=3$, $\beta^2-\beta=3$

$\therefore\ (\alpha^3-\alpha^2-\alpha-1)(\beta^3-\beta^2-\beta-1)$
$=\{\alpha(\alpha^2-\alpha)-\alpha-1\}\{\beta(\beta^2-\beta)-\beta-1\}$
$=(2\alpha-1)(2\beta-1)$
$=4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1$ …… ㉠ ··· ❶

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-3$ ··· ❷

따라서 ㉠에서

(주어진 식)$=4\cdot(-3)-2\cdot1+1=-13$ ··· ❸

답 -13

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	50 %
❷ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

0488 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$\alpha^2+2\alpha-4=0$, $\beta^2+2\beta-4=0$

$\therefore\ \alpha^2+3\alpha-4=\alpha$, $\beta^2+3\beta-4=\beta$

$$\therefore\ \frac{\beta}{\alpha^2+3\alpha-4}+\frac{\alpha}{\beta^2+3\beta-4}=\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}\ \cdots\cdots\ ㉠$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-4$

따라서 ㉠에서

$$\frac{\beta}{\alpha^2+3\alpha-4}+\frac{\alpha}{\beta^2+3\beta-4}=\frac{(-2)^2-2\cdot(-4)}{-4}$$
$$=-3$$

답 ③

0489 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$\alpha^2+\alpha-1=0$, $\beta^2+\beta-1=0$

$\therefore\ \alpha^2+\alpha=1$, $\beta^2+\beta=1$

$\therefore\ \alpha^5+\beta^5+\alpha^4+\beta^4+\alpha^3+\beta^3$
$=\alpha^3(\alpha^2+\alpha+1)+\beta^3(\beta^2+\beta+1)=2(\alpha^3+\beta^3)$
$=2\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}$ …… ㉠

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-1$

따라서 ㉠에서

$\alpha^5+\beta^5+\alpha^4+\beta^4+\alpha^3+\beta^3=2\{(-1)^3-3\cdot(-1)\cdot(-1)\}$
$=-8$

답 ①

0490 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$\alpha^2-3\alpha-1=0$, $\beta^2-3\beta-1=0$

$\therefore\ \alpha^2-3\alpha=1$, $\beta^2-3\beta=1$

$\therefore\ (\sqrt{\alpha^4-6\alpha^3+9\alpha^2+3\alpha}-\sqrt{\beta^4-6\beta^3+9\beta^2+3\beta})^2$
$=\{\sqrt{(\alpha^2-3\alpha)^2+3\alpha}-\sqrt{(\beta^2-3\beta)^2+3\beta}\}^2$
$=(\sqrt{3\alpha+1}-\sqrt{3\beta+1})^2$
$=3\alpha+1-2\sqrt{(3\alpha+1)(3\beta+1)}+3\beta+1$
($\because\ 3\alpha+1\ge0$, $3\beta+1\ge0$)
$=3(\alpha+\beta)+2-2\sqrt{9\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+1}$ …… ㉠

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-1$

따라서 ㉠에서

(주어진 식)$=3\cdot3+2-2\sqrt{9\cdot(-1)+3\cdot3+1}=9$

답 9

참고 $\alpha^2-3\alpha-1=0$, $\beta^2-3\beta-1=0$에서 $3\alpha+1=\alpha^2$, $3\beta+1=\beta^2$
이차방정식 $x^2-3x-1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-1)=13>0$
이므로 α, β는 실수이다.
따라서 $\alpha^2\ge0$, $\beta^2\ge0$이므로 $3\alpha+1\ge0$, $3\beta+1\ge0$
$\therefore\ \sqrt{3\alpha+1}\cdot\sqrt{3\beta+1}=\sqrt{(3\alpha+1)(3\beta+1)}$

유형 12 미정계수의 결정; 근의 조건이 주어진 경우 본책 73쪽

이차방정식의 두 근의 조건이 주어지면 두 근을 다음과 같이 놓고 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 미정계수를 구한다.
① 두 근의 비가 $m:n$이면 두 근은
⇒ $m\alpha$, $n\alpha$ $(\alpha\neq0)$
② 두 근의 차가 p이면 두 근은
⇒ α, $\alpha+p$ 또는 $\alpha-p$, α
③ 한 근이 다른 근의 k배이면 두 근은
⇒ α, $k\alpha$ $(\alpha\neq0)$

0491 주어진 이차방정식의 두 근을 2α, 3α $(\alpha\neq0)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+3\alpha=5(m+2)$ $\quad\therefore \alpha=m+2$ ...... ㉠

$2\alpha\cdot3\alpha=-6m$ $\quad\therefore \alpha^2=-m$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(m+2)^2=-m,\quad m^2+5m+4=0$

$(m+4)(m+1)=0\quad\therefore m=-4$ 또는 $m=-1$

따라서 모든 실수 m의 값의 곱은 4이다. 답 ⑤

0492 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+4$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+4)=2k\quad\therefore \alpha=k-2$ ...... ㉠

$\alpha(\alpha+4)=k-2$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(k-2)(k+2)=k-2,\quad k^2-k-2=0$

$(k+1)(k-2)=0\quad\therefore k=-1$ 또는 $k=2$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 1이다. 답 1

다른 풀이 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β $(\alpha>\beta)$라 하면

$\alpha-\beta=4$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k,\ \alpha\beta=k-2$

이때 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$4^2=(2k)^2-4(k-2),\quad k^2-k-2=0$

$(k+1)(k-2)=0\quad\therefore k=-1$ 또는 $k=2$

0493 주어진 이차방정식의 두 근을 α, 2α $(\alpha\neq0)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha=-6m\quad\therefore \alpha=-2m$ ...... ㉠

$\alpha\cdot2\alpha=-m^2+1\quad\therefore 2\alpha^2=-m^2+1$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2\cdot(-2m)^2=-m^2+1,\quad 9m^2=1$

$m^2=\frac{1}{9}\quad\therefore m=\frac{1}{3}\ (\because m>0)$ 답 ①

0494 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+1$ (α는 정수)이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+1)=-(k+2)\quad\therefore k=-2\alpha-3$ ...... ㉠

$\alpha(\alpha+1)=3k-1\quad\therefore \alpha^2+\alpha=3k-1$ ...... ㉡

··· ❶

㉠을 ㉡에 대입하면

$\alpha^2+\alpha=3(-2\alpha-3)-1,\quad \alpha^2+7\alpha+10=0$

$(\alpha+5)(\alpha+2)=0\quad\therefore \alpha=-5$ 또는 $\alpha=-2$ ··· ❷

$\alpha=-5$를 ㉠에 대입하면 $\quad k=7$

$\alpha=-2$를 ㉠에 대입하면 $\quad k=1$

그런데 $k>1$이므로 $\quad k=7$ ··· ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ 두 근을 α, $\alpha+1$이라 하고 α, k에 대한 식을 구할 수 있다.	40 %
❷ α의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30 %

0495 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=-(k^2-k-2)$ ...... ㉠

(두 근의 곱)$=-2k+3$ ...... ㉡

절댓값이 같고 부호가 서로 다른 두 근의 합은 0이므로 ㉠에서

$-(k^2-k-2)=0,\quad (k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=2$ ...... ㉢

두 근의 부호가 서로 다르므로 ㉡에서

$-2k+3<0\quad\therefore k>\frac{3}{2}$ ...... ㉣

㉢, ㉣에서 $\quad k=2$ 답 2

SSEN 특강 절댓값이 같고 부호가 서로 다른 두 실근

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근 α, β의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르면

⇒ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=0$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}<0$

유형 13 미정계수의 결정 ; 근의 관계식이 주어진 경우 집중공략 본책 73쪽

이차방정식의 두 근 α, β에 대한 관계식이 주어지면 이 식을 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$에 대한 식으로 변형한 후 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 미정계수를 구한다.

0496 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k-2,\ \alpha\beta=k+3$

그런데 $\alpha+\beta<0$이므로

$k-2<0\quad\therefore k<2$ ...... ㉠

한편

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=(k-2)^2-2(k+3)\\&=k^2-6k-2\end{aligned}$$

이므로 $\alpha^2+\beta^2=5$에서

$k^2-6k-2=5,\quad k^2-6k-7=0$

$(k+1)(k-7)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=7$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad k=-1$ 답 ②

0497 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=b$

$(\alpha-1)(\beta-1)=-1$에서 $\quad \alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=-1$

$b-a+1=-1 \quad \therefore a-b=2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$(2\alpha-1)(2\beta-1)=1$에서 $\quad 4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1=1$

$4b-2a+1=1 \quad \therefore a-2b=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡ ··· ❶

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=2$ ··· ❷

$\therefore ab=8$ ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 주어진 두 식을 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	70 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0498 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4a,\ \alpha\beta=-b+1$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(-4a)^2-4(-b+1)$

$=16a^2+4b-4$

$(\alpha-\beta)^2<20$에서 $\quad 16a^2+4b-4<20$

$16a^2+4b<24 \quad \therefore 4a^2+b<6$

a, b는 자연수이므로

$a=1$일 때, $b<2$에서 $\quad b=1$

$a\geq2$일 때, $b<-10$에서 조건을 만족시키는 자연수 b의 값은 존재하지 않는다.

$\therefore a=1,\ b=1$ 답 $a=1,\ b=1$

0499 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=-2a$

$a>0$에서 $\alpha\beta<0$이므로

$(|\alpha|+|\beta|)^2=|\alpha|^2+|\beta|^2+2|\alpha\beta|$

$=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=a^2-4\cdot(-2a)$

$=a^2+8a$

$(|\alpha|+|\beta|)^2=3^2$에서 $\quad a^2+8a=9$

$a^2+8a-9=0, \quad (a+9)(a-1)=0$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$

따라서 $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-2$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=1^2-2\cdot(-2)=5$ 답 ②

0500 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1-2|a|,\ \alpha\beta=a$

$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta=6$에서

$\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\alpha+\beta=6$

$a(1-2|a|)+(1-2|a|)^2-2a+(1-2|a|)=6$

$4a^2-2a|a|-a-6|a|-4=0$

(i) $a<0$일 때,

$4a^2+2a^2-a+6a-4=0, \quad 6a^2+5a-4=0$

$(3a+4)(2a-1)=0 \quad \therefore a=-\frac{4}{3}$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

그런데 $a<0$이므로 $\quad a=-\frac{4}{3}$

(ii) $a\geq0$일 때,

$4a^2-2a^2-a-6a-4=0, \quad 2a^2-7a-4=0$

$(2a+1)(a-4)=0 \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=4$

그런데 $a\geq0$이므로 $\quad a=4$

(i), (ii)에서 $a=-\frac{4}{3}$ 또는 $a=4$이므로 구하는 합은

$-\frac{4}{3}+4=\frac{8}{3}$ 답 ④

유형 14 미정계수의 결정 ; 두 이차방정식이 주어진 경우 본책 74쪽

두 이차방정식의 근이 모두 α, β로 표현되어 있으면 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β에 대한 식을 세운 후 두 식을 연립하여 미정계수를 구한다.

0501 이차방정식 $x^2-2ax-4=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a,\ \alpha\beta=-4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $x^2+bx-12=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-b,\ (\alpha+\beta)\alpha\beta=-12 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2a-4=-b,\ -8a=-12 \quad \therefore a=\frac{3}{2},\ b=1$

$\therefore a+b=\frac{5}{2}$ 답 ④

0502 이차방정식 $2x^2+ax+1=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{a}{2},\ \alpha\beta=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $x^2+3x-b=0$의 두 근이 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-3,\ \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=-b$

$\therefore \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-3,\ \frac{1}{\alpha\beta}=-b \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-\frac{a}{2}\cdot2=-3,\ 2=-b \quad \therefore a=3,\ b=-2$

$\therefore a-b=5$ 답 5

0503 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=b \quad \cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $x^2-(2a+3)x+b+6=0$의 두 근이 α^2, β^2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha^2+\beta^2=2a+3$, $\alpha^2\beta^2=b+6$

$\therefore (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2a+3$, $(\alpha\beta)^2=b+6$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2-2b=2a+3$, $b^2=b+6$

$b^2=b+6$에서 $b^2-b-6=0$

$(b+2)(b-3)=0$ $\therefore b=-2$ ($\because b<0$)

$a^2-2b=2a+3$에서 $a^2+4=2a+3$

$a^2-2a+1=0$, $(a-1)^2=0$

$\therefore a=1$

$\therefore a^3+b^3=-7$

답 ①

유형 15 이차방정식의 작성

집중공략 본책 75쪽

두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식
➡ $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

0504 이차방정식 $2x^2-x+7=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{1}{2}$, $\alpha\beta=\frac{7}{2}$

$\therefore (\alpha-1)+(\beta-1)=\alpha+\beta-2=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$,

$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}+1=4$

따라서 $\alpha-1$, $\beta-1$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$2\left(x^2+\frac{3}{2}x+4\right)=0$ $\therefore 2x^2+3x+8=0$

답 $2x^2+3x+8=0$

0505 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{a}{b}$, $\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{b}$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2+\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}=0$ $\therefore bx^2+ax+1=0$

답 ④

0506 이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-2$ ··· ❶

$$\therefore \frac{1+\alpha}{1-\beta}+\frac{1+\beta}{1-\alpha}=\frac{(1+\alpha)(1-\alpha)+(1+\beta)(1-\beta)}{(1-\beta)(1-\alpha)}$$

$$=\frac{1-\alpha^2+1-\beta^2}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$$

$$=\frac{2-\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$$

$$=\frac{2-\{2^2-2\cdot(-2)\}}{1-2+(-2)}=2,$$

$$\frac{1+\alpha}{1-\beta}\cdot\frac{1+\beta}{1-\alpha}=\frac{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$$

$$=\frac{1+2+(-2)}{1-2+(-2)}=-\frac{1}{3}$$ ··· ❷

따라서 $\frac{1+\alpha}{1-\beta}$, $\frac{1+\beta}{1-\alpha}$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 3인 이차방정식은

$3\left(x^2-2x-\frac{1}{3}\right)=0$ $\therefore 3x^2-6x-1=0$ ··· ❸

답 $3x^2-6x-1=0$

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $\frac{1+\alpha}{1-\beta}+\frac{1+\beta}{1-\alpha}$, $\frac{1+\alpha}{1-\beta}\cdot\frac{1+\beta}{1-\alpha}$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 이차방정식을 구할 수 있다.	30 %

0507 $\overline{AB}=\overline{AH}+\overline{BH}$에서

$\alpha+\beta=8$

$\triangle ABP$는 $\angle APB=90°$인 직각삼각형이므로 $\overline{PH}^2=\overline{AH}\cdot\overline{BH}$
└ 반원에 대한 원주각의 크기는 90°이다.

에서 $\alpha\beta=9$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=8^2-2\cdot9=46$,

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=9^2=81$

따라서 α^2, β^2을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-46x+81=0$

이므로 $a=-46$, $b=81$

$\therefore a-b=-127$

답 -127

0508 이차방정식 $x^2+(a-2)x-b=0$의 두 근이 -1, α이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+\alpha=-(a-2)$, $-1\cdot\alpha=-b$

$\therefore \alpha=-a+3$, $b=\alpha$ ...... ㉠

이차방정식 $x^2+(b+2)x-a=0$의 두 근이 3, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3+\beta=-(b+2)$, $3\beta=-a$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$3+\beta=-(\alpha+2)$, $3\beta=\alpha-3$

$\therefore \alpha+\beta=-5$, $\alpha-3\beta=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$\alpha=-3$, $\beta=-2$

따라서 -3, -2를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
└ 두 근의 합: -5, 두 근의 곱: 6

$x^2+5x+6=0$

이므로 $p=5$, $q=6$

$\therefore p+q=11$

답 ⑤

유형 16 잘못 보고 푼 이차방정식

본책 75쪽

① x의 계수를 잘못 보고 풀어 얻은 두 근의 곱은 원래의 이차방정식의 두 근의 곱과 같다.
② 상수항을 잘못 보고 풀어 얻은 두 근의 합은 원래의 이차방정식의 두 근의 합과 같다.

0509 준수는 a와 c를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$\frac{c}{a}=-2\cdot6=-12$

$\therefore c=-12a$ ...... ㉠

민지는 a와 b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-\frac{b}{a}=(-2+\sqrt{7})+(-2-\sqrt{7})=-4$

$\therefore b=4a$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$ax^2+4ax-12a=0$

$a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면

$x^2+4x-12=0,\quad (x+6)(x-2)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=2$

따라서 음수인 근은 -6이다. 답 -6

0510 하늘이는 b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$\frac{b}{3}=-\frac{2}{3}\quad \therefore b=-2$

혜진이는 a를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-\frac{a}{3}=\frac{5}{3}\quad \therefore a=-5$

$\therefore a+b=-7$ 답 -7

0511 원래의 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$ (a, b는 상수)이라 하자. ⋯ ❶

정혁이는 b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$b=(4+\sqrt{3}i)(4-\sqrt{3}i)=19$ ⋯ ❷

다은이는 a를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-a=(-1+\sqrt{5})+(-1-\sqrt{5})=-2$

$\therefore a=2$ ⋯ ❸

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2+2x+19=0$ ⋯ ❹

답 $x^2+2x+19=0$

채점 기준	비율
❶ 원래의 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$으로 놓을 수 있다.	20 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 원래의 이차방정식을 구할 수 있다.	20 %

0512 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 근의 공식을

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{2a}$로 잘못 적용하여 얻은 두 근이 -2, 1이므로

$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=-2+1$

$\frac{-2b}{2a}=-1\quad \therefore a=b$ ...... ㉠

$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=-2\cdot1$

$\frac{c}{4a}=-2\quad \therefore c=-8a$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$ax^2+ax-8a=0$

따라서 원래의 이차방정식의 두 근의 곱은

$\frac{-8a}{a}=-8$ 답 ①

다른 풀이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 근의 공식은

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

이므로 주어진 근의 공식은 c를 $\frac{1}{4}c$로 잘못 대입한 것과 같다.

이때 -2, 1을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 a인 이차방정식은

$a\{x^2-(-2+1)x-2\}=0,\quad ax^2+ax-2a=0$

이므로 원래의 이차방정식의 상수항은

$-2a\cdot4=-8a$

즉 원래의 이차방정식은 $ax^2+ax-8a=0$이므로 두 근의 곱은

$\frac{-8a}{a}=-8$

유형 17 이차방정식 $f(x)=0$의 근을 이용하여 $f(ax+b)=0$의 근 구하기

본책 76쪽

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이면 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(ax+b)=0$의 두 근은

➡ $ax+b=\alpha$, $ax+b=\beta$에서

$x=\frac{\alpha-b}{a}$ 또는 $x=\frac{\beta-b}{a}$

0513 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(4x-3)=0$이려면

$4x-3=\alpha$ 또는 $4x-3=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha+3}{4}$ 또는 $x=\frac{\beta+3}{4}$

따라서 이차방정식 $f(4x-3)=0$의 두 근의 합은

$\frac{\alpha+3}{4}+\frac{\beta+3}{4}=\frac{\alpha+\beta+6}{4}=\frac{6+6}{4}=3$ 답 ②

다른 풀이 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)\ (a\neq0)$

라 하면 이차방정식 $f(4x-3)=0$에서

$a(4x-3-\alpha)(4x-3-\beta)=0$

$\therefore x=\frac{\alpha+3}{4}$ 또는 $x=\frac{\beta+3}{4}$

0514 방정식 $f(x)=0$이 -2를 근으로 가지므로

$f(-2)=0$

$x=-1$을 각 방정식의 좌변에 대입하면

① $f(-1+1)=f(0)$

② $f(-(-1)+1)=f(2)$

③ $f((-1)^2-1)=f(0)$

④ $f(3\cdot(-1)+1)=f(-2)=0$

⑤ $f((-1)^2+1)=f(2)$

답 ④

0515 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(3x-1)=0$이려면

$3x-1=\alpha$ 또는 $3x-1=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha+1}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta+1}{3}$ ⋯ ❶

따라서 이차방정식 $f(3x-1)=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{\alpha+1}{3}\cdot\frac{\beta+1}{3}=\frac{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}{9}$$
$$=\frac{-2+5+1}{9}=\frac{4}{9} \quad \cdots ❷$$

답 $\frac{4}{9}$

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $f(3x-1)=0$의 두 근을 α, β에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ 이차방정식 $f(3x-1)=0$의 두 근의 곱을 구할 수 있다.	50 %

0516 $f(2-3\alpha)=0$, $f(2-3\beta)=0$이므로 $f(4x)=0$이려면

$4x=2-3\alpha$ 또는 $4x=2-3\beta$

$\therefore x=\frac{2-3\alpha}{4}$ 또는 $x=\frac{2-3\beta}{4}$

따라서 이차방정식 $f(4x)=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{2-3\alpha}{4}\cdot\frac{2-3\beta}{4}=\frac{4-6(\alpha+\beta)+9\alpha\beta}{16}$$
$$=\frac{4-6\cdot(-1)+9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}{16}$$
$$=\frac{7}{16}$$

답 $\frac{7}{16}$

유형 18 이차식의 인수분해 본책 77쪽

x에 대한 이차식 ax^2+bx+c가 쉽게 인수분해되지 않을 때에는 다음과 같은 순서로 인수분해한다.
(i) 근의 공식을 이용하여 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근 α, β를 구한다.
(ii) $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$로 인수분해한다.

0517 $x^2-2x+6=0$에서

$x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot6}=1\pm\sqrt{5}i$

$\therefore x^2-2x+6=\{x-(1+\sqrt{5}i)\}\{x-(1-\sqrt{5}i)\}$
$=(x-1-\sqrt{5}i)(x-1+\sqrt{5}i)$

답 ①

0518 $x^2+4x+5=0$에서

$x=-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot5}=-2\pm i$

$\therefore x^2+4x+5=\{x-(-2+i)\}\{x-(-2-i)\}$
$=(x+2-i)(x+2+i)$

따라서 인수인 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0519 $\frac{1}{2}x^2-x+1=0$, 즉 $x^2-2x+2=0$에서

$x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot2}=1\pm i$ $\cdots$ ❶

$\therefore \frac{1}{2}x^2-x+1=\frac{1}{2}\{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}$
$=\frac{1}{2}(x-1-i)(x-1+i)$ $\cdots$ ❷

따라서 $a=-1$, $b=1$이므로 $a-b=-2$ $\cdots$ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $\frac{1}{2}x^2-x+1=0$의 근을 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 이차식을 인수분해할 수 있다.	40 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 19 $f(\alpha)=f(\beta)=k$를 만족시키는 이차식 $f(x)$ 구하기 본책 77쪽

이차식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=f(\beta)=k$이면 $f(\alpha)-k=0$, $f(\beta)-k=0$이므로 이차방정식 $f(x)-k=0$의 두 근은 α, β이다.

0520 $f(\alpha)=f(\beta)=-1$이므로

$f(\alpha)+1=0$, $f(\beta)+1=0$

즉 이차방정식 $f(x)+1=0$의 두 근이 α, β이고, $f(x)$의 x^2의 계수가 1이므로

$f(x)+1=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-3x-5$

따라서 $f(x)=x^2-3x-6$이므로

$f(3)=-6$

답 ②

0521 $f(\alpha)=f(\beta)=1$이므로

$f(\alpha)-1=0$, $f(\beta)-1=0$

따라서 이차방정식 $f(x)-1=0$, 즉 $x^2+4x-3=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=-3$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=(-4)^3-3\cdot(-3)\cdot(-4)$
$=-100$

답 ①

0522 이차방정식 $x^2+2x-6=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=-6$

$f(\alpha)=f(\beta)=-6$이므로

$f(\alpha)+6=0$, $f(\beta)+6=0$

즉 이차방정식 $f(x)+6=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(x)+6=a(x-\alpha)(x-\beta)=a(x^2+2x-6)$ $(a\neq0)$

이라 하면 $f(0)=6$에서

$6+6=-6a$ $\quad\therefore a=-2$

따라서 $f(x)=-2(x^2+2x-6)-6$이므로

$f(-1)=8$

답 8

다른 풀이 이차방정식 $x^2+2x-6=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-6$ $\cdots\cdots$ ㉠

이차식 $f(x)$에 대하여 $f(0)=6$이므로

$f(x)=ax^2+bx+6$ (a, b는 상수, $a\neq0$)

이라 하자.

이때 $f(\alpha)=f(\beta)=-6$이므로

$f(\alpha)+6=0$, $f(\beta)+6=0$

따라서 이차방정식 $f(x)+6=0$, 즉 $ax^2+bx+12=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{12}{a} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\quad -\frac{b}{a}=-2,\ \frac{12}{a}=-6$

$\therefore a=-2,\ b=-4$

즉 $f(x)=-2x^2-4x+6$이므로 $\quad f(-1)=8$

0523 이차방정식 $2x^2-2x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$

$\therefore \alpha=1-\beta,\ \beta=1-\alpha$

$P(\alpha)=\beta$, $P(\beta)=\alpha$에서

$P(\alpha)=1-\alpha,\ P(\beta)=1-\beta$

$\therefore P(\alpha)+\alpha-1=0,\ P(\beta)+\beta-1=0$

따라서 이차방정식 $P(x)+x-1=0$의 두 근이 α, β이고, $P(x)$의 x^2의 계수가 1이므로

$$P(x)+x-1=(x-\alpha)(x-\beta)=\frac{1}{2}(2x^2-2x+3)$$
$$=x^2-x+\frac{3}{2}$$

$\therefore P(x)=x^2-2x+\frac{5}{2}$ 　　　답 $x^2-2x+\frac{5}{2}$

다른 풀이 이차방정식 $2x^2-2x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=\frac{3}{2}$

$P(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 $P(\alpha)=\beta$, $P(\beta)=\alpha$에서

$\alpha^2+a\alpha+b=\beta \quad \cdots\cdots ㉠$

$\beta^2+a\beta+b=\alpha \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠$-$㉡을 하면

$\alpha^2-\beta^2+a(\alpha-\beta)=-(\alpha-\beta)$

$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)+a(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)=0$

$(\alpha+\beta+a+1)(\alpha-\beta)=0$

$\alpha\neq\beta$이므로 $\quad \alpha+\beta+a+1=0$

$2x^2-2x+3=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=(-1)^2-2\cdot3=-5<0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$1+a+1=0 \quad \therefore a=-2$

㉠$+$㉡을 하면

$\alpha^2+\beta^2+a(\alpha+\beta)+2b=\alpha+\beta$

$\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+a(\alpha+\beta)+2b=\alpha+\beta$

$1^2-2\cdot\frac{3}{2}+(-2)\cdot1+2b=1 \quad \therefore b=\frac{5}{2}$

$\therefore P(x)=x^2-2x+\frac{5}{2}$

유형 20 이차방정식의 켤레근

집중공략 본책 78쪽

① 계수가 유리수인 이차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면
➡ $p-q\sqrt{m}$도 근이다.
(단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)
② 계수가 실수인 이차방정식의 한 근이 $p+qi$이면
➡ $p-qi$도 근이다. (단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

0524 a, b가 실수이므로 $a-b$, ab도 실수이다.
즉 주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $3+\sqrt{2}i$가 근이면 $3-\sqrt{2}i$도 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(3+\sqrt{2}i)+(3-\sqrt{2}i)=-(a-b)$,

$(3+\sqrt{2}i)(3-\sqrt{2}i)=ab$

이므로

$a-b=-6,\ ab=11$

$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$=(-6)^2+2\cdot11=58$ 　　　답 58

0525 $\frac{b+i}{1-i}=\frac{(b+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{(b-1)+(b+1)i}{2}$

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로

$\frac{(b-1)+(b+1)i}{2}$가 근이면 $\frac{(b-1)-(b+1)i}{2}$도 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{(b-1)+(b+1)i}{2}+\frac{(b-1)-(b+1)i}{2}=4$

$b-1=4 \quad \therefore b=5$

즉 두 근은 $2+3i$, $2-3i$이므로

$a=(2+3i)(2-3i)=13$

$\therefore a+b=18$ 　　　답 ⑤

0526 주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $-1+2i$가 근이면 $-1-2i$도 근이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1+2i)+(-1-2i)=-m,\ (-1+2i)(-1-2i)=n$

이므로

$m=2,\ n=5$ ··· ❶

$\therefore \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10},\ \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$

$\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 10인 이차방정식은

$10\left(x^2-\frac{7}{10}x+\frac{1}{10}\right)=0$

$\therefore 10x^2-7x+1=0$ ··· ❷

따라서 $a=-7$, $b=1$이므로

$b-a=8$ ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ m, n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 10인 이차방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0527 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=14$

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 한 근이 α이면 다른 한 근은 $\overline{\alpha}$이고 한 근이 β이면 다른 한 근은 $\overline{\beta}$이다.

즉 $\overline{\alpha}=\beta$, $\overline{\beta}=\alpha$이므로

$$14\left(\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}+\frac{\overline{\beta}}{\beta}\right)=14\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\right)$$
$$=14\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$$
$$=14\cdot\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$
$$=14\cdot\frac{5^2-2\cdot 14}{14}=-3$$

답 -3

0528 $\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=1+\sqrt{2}$

계수가 유리수인 이차방정식의 한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 $1-\sqrt{2}$도 근이다.

따라서 $\alpha=1-\sqrt{2}$이므로

$\alpha-1=-\sqrt{2}$, $\quad(\alpha-1)^2=2$

$\therefore\ \alpha^2-2\alpha=1$

$$\therefore\ 2\alpha^3-4\alpha^2-\alpha-1=2\alpha(\alpha^2-2\alpha)-\alpha-1$$
$$=2\alpha\cdot 1-\alpha-1$$
$$=\alpha-1=-\sqrt{2}$$

답 ②

0529 조건 (가)에서 나머지 정리에 의하여 $f(2)=9$이므로

$4+2m+n=9$

$\therefore\ 2m+n=5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 계수가 실수이므로 조건 (나)에서 $a+3i$가 근이면 $a-3i$도 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a+3i)+(a-3i)=-m$, $(a+3i)(a-3i)=n$

이므로 $\quad 2a=-m$, $a^2+9=n$

$\therefore\ m=-2a$, $n=a^2+9$

이것을 ㉠에 대입하면

$-4a+(a^2+9)=5$, $\quad a^2-4a+4=0$

$(a-2)^2=0$ $\quad\therefore\ a=2$

따라서 $m=-4$, $n=13$이므로

$m+n=9$

답 ⑤

0530 **1st** α의 값을 구한다.

$2024=a$로 놓으면 $(2024x)^2-2023\cdot 2025x-1=0$에서

$a^2x^2-(a-1)(a+1)x-1=0$

$a^2x^2-(a^2-1)x-1=0$, $\quad(a^2x+1)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-\frac{1}{a^2}$ 또는 $x=1$, 즉 $x=-\frac{1}{2024^2}$ 또는 $x=1$

이때 $-\frac{1}{2024^2}<1$이므로

$\alpha=1$

2nd β의 값을 구한다.

$x^2+2024x-2025=0$에서

$(x+2025)(x-1)=0$ $\quad\therefore\ x=-2025$ 또는 $x=1$

이때 $-2025<1$이므로 $\quad\beta=-2025$

3rd $\alpha-\beta$의 값을 구한다.

$\alpha-\beta=2026$

답 ⑤

0531 **1st** b, c를 a에 대한 식으로 나타낸다.

이차방정식 $ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이므로

$a(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{3}b(2+\sqrt{3})+c=0$

$\therefore\ (7a+3b+c)+(4a+2b)\sqrt{3}=0$

이때 a, b, c는 유리수이므로

$7a+3b+c=0$, $4a+2b=0$

$\therefore\ b=-2a$, $c=-a$

2nd β의 값을 구한다.

이차방정식 $ax^2-2\sqrt{3}ax-a=0$에서 $a\neq 0$이므로 양변을 a로 나누면 $\quad x^2-2\sqrt{3}x-1=0$

$x=-(-\sqrt{3})\pm\sqrt{(-\sqrt{3})^2-1\cdot(-1)}=\sqrt{3}\pm 2$

$\therefore\ \beta=\sqrt{3}-2$

3rd $\alpha+\frac{1}{\beta}$의 값을 구한다.

$\alpha+\frac{1}{\beta}=2+\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}-2}=2+\sqrt{3}-(\sqrt{3}+2)=0$

답 ③

다른 풀이 $\alpha=2+\sqrt{3}$에서 $\quad\alpha-\sqrt{3}=2$

$(\alpha-\sqrt{3})^2=4$ $\quad\therefore\ \alpha^2-2\sqrt{3}\alpha-1=0$

즉 α가 이차방정식 $a(x^2-2\sqrt{3}x-1)=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2\sqrt{3}$

따라서 $\beta=2\sqrt{3}-\alpha$이므로 $\quad\beta=\sqrt{3}-2$

$\therefore\ \alpha+\frac{1}{\beta}=0$

0532 **1st** $z^n(1+z)^{2n}$을 간단히 한다.

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근이 z이므로

$z^2+z+1=0$ $\quad\therefore\ 1+z=-z^2$

$$\therefore\ z^n(1+z)^{2n}=z^n\cdot(-z^2)^{2n}$$
$$=z^n\cdot z^{4n}=z^{5n}\quad\cdots\cdots ㉠$$

2nd 자연수 n의 개수를 구한다.

$z^2+z+1=0$에서 $\quad(z-1)(z^2+z+1)=0$

$z^3-1=0$ $\quad\therefore\ z^3=1$

㉠에서 z^{5n}의 값이 양의 실수이려면 $n=3k$ (k는 자연수) 꼴이어야 한다.

따라서 자연수 n은 3, 6, 9, $\cdots$, 48의 16개이다.

답 16

0533 **1st** $\overline{AP}=x$라 하고 $\overline{SD}$의 길이를 x에 대한 식으로 나타낸다.

$\overline{AP}=x$라 하면 $\triangle ABD\backsim\triangle SOD$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AB}:\overline{SO}=\overline{AD}:\overline{SD}$

$2:x=4:\overline{SD}$ $\quad\therefore\ \overline{SD}=2x$

2nd 두 사각형 APOS, OQCR의 넓이를 x에 대한 식으로 나타낸다.

□APOS의 넓이는

$$\overline{AP}\cdot\overline{AS}=\overline{AP}\cdot(\overline{AD}-\overline{SD})$$
$$=x(4-2x)$$
$$=4x-2x^2$$

□OQCR의 넓이는

$$\overline{OQ}\cdot\overline{OR}=(\overline{SQ}-\overline{SO})\cdot\overline{OR}$$
$$=(2-x)\cdot 2x$$
$$=4x-2x^2$$

3rd $\overline{AP}$의 길이를 구한다.

□APOS와 □OQCR의 넓이의 합이 3이므로

$4x-2x^2+4x-2x^2=3$

$4x^2-8x+3=0,\quad (2x-1)(2x-3)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

이때 $\overline{AP}<\overline{PB}$에서 $x<2-x$, 즉 $x<1$이므로

$x=\frac{1}{2}$

따라서 $\overline{AP}$의 길이는 $\frac{1}{2}$이다. 답 ③

0534 1st a, b 사이의 관계식을 구한다.

이차방정식 $x^2-2ax+10a-2b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(10a-2b)=0$

$(a^2-10a+25)-25+2b=0$

$\therefore (a-5)^2=25-2b$ …… ㉠

2nd b의 값을 구한다.

b는 자연수이고 ㉠에서 $25-2b\geq 0$이므로 $b\leq\frac{25}{2}$

$\therefore b=1, 2, 3, \cdots, 12$

3rd a의 값을 구한다.

a가 자연수이므로 $(a-5)^2$은 $(정수)^2$ 꼴이어야 한다.

$b=8$일 때, ㉠에서 $(a-5)^2=9$이므로

$a-5=\pm3\quad \therefore a=2$ 또는 $a=8$

$b=12$일 때, ㉠에서 $(a-5)^2=1$이므로

$a-5=\pm1\quad \therefore a=4$ 또는 $a=6$

4th $a+b$의 최댓값을 구한다.

따라서

$a+b=10$ 또는 $a+b=16$ 또는 $a+b=18$

이므로 $a+b$의 최댓값은 18이다. 답 18

0535 1st $f(1)$의 값을 구한다.

(i) $n=1$일 때,

$-2x+1=0$이므로 $x=\frac{1}{2}$

$\therefore f(1)=1$ ⋯ ❶

2nd $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 구한다.

(ii) $n\neq1$일 때,

이차방정식 $(n-1)x^2-2x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(n-1)=2-n$

$n=0$이면 $\frac{D}{4}=2>0$이므로 $f(0)=2$

$n=2$이면 $\frac{D}{4}=0$이므로 $f(2)=1$

$n=3$이면 $\frac{D}{4}=-1<0$이므로 $f(3)=0$ ⋯ ❷

3rd $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$의 값을 구한다.

(i), (ii)에서

$f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=2+1+1+0=4$ ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0536 1st ㄱ이 성립하는지 확인한다.

ㄱ. 세 이차방정식이 공통인 실근 α를 가지므로

$a\alpha^2-2b\alpha+c=0$ …… ㉠

$-2b\alpha^2+c\alpha+a=0$ …… ㉡

$c\alpha^2+a\alpha-2b=0$ …… ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$(a-2b+c)\alpha^2+(a-2b+c)\alpha+(a-2b+c)=0$

$(a-2b+c)(\alpha^2+\alpha+1)=0$

이때 $\alpha^2+\alpha+1=\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로

$a-2b+c=0$

2nd ㄴ이 성립하는지 확인한다.

ㄴ. ㄱ에서 $a-2b+c=0$이므로

$2b=a+c$

이것을 $ax^2-2bx+c=0$에 대입하면

$ax^2-(a+c)x+c=0$

$(ax-c)(x-1)=0$

$\therefore x=\frac{c}{a}$ 또는 $x=1$

이때 $0<c<a$이므로

$0<\frac{c}{a}<1$

즉 이차방정식 $ax^2-2bx+c=0$은 1보다 작은 실근을 갖는다.

3rd ㄷ이 성립하는지 확인한다.

ㄷ. ㄴ에서 이차방정식 $ax^2-2bx+c=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이차방정식 $-2bx^2+cx+a=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=c^2-4\cdot(-2b)\cdot a=c^2+8ab>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이차방정식 $cx^2+ax-2b=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=a^2-4c\cdot(-2b)=a^2+8bc>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 세 이차방정식 중에서 중근을 갖는 이차방정식은 존재하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0537 1st a의 값을 구한다.

$\{P(x)+2\}^2=(x-a)(x-2a)+4$에서

$\{P(x)+2\}^2=x^2-3ax+2a^2+4$

이때 $x^2-3ax+2a^2+4$가 완전제곱식이어야 하므로 이차방정식 $x^2-3ax+2a^2+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3a)^2-4(2a^2+4)=0$

$a^2-16=0,\quad (a+4)(a-4)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=4$

2nd $P(1)$의 값을 구한다.

(i) $a=-4$일 때,

$\{P(x)+2\}^2=x^2+12x+36$이므로

$\{P(x)+2\}^2=(x+6)^2$

$P(x)+2=\pm(x+6)$

$\therefore P(x)=x+4$ 또는 $P(x)=-x-8$

$\therefore P(1)=5$ 또는 $P(1)=-9$

(ii) $a=4$일 때,

$\{P(x)+2\}^2=x^2-12x+36$이므로

$\{P(x)+2\}^2=(x-6)^2$

$P(x)+2=\pm(x-6)$

$\therefore P(x)=x-8$ 또는 $P(x)=-x+4$

$\therefore P(1)=-7$ 또는 $P(1)=3$

3rd 모든 $P(1)$의 값의 합을 구한다.

(i), (ii)에서 구하는 합은

$5+(-9)+(-7)+3=-8$ 답 ②

다른 풀이 $\{P(x)+2\}^2=(x-a)(x-2a)+4$에서 우변이 x에 대한 이차식이므로 다항식 $P(x)$는 일차식이다.

$P(x)=px+q$ (p, q는 상수, $p\neq0$)라 하면

$$\{(px+q)+2\}^2=\{px+(q+2)\}^2$$
$$=p^2x^2+2p(q+2)x+(q+2)^2$$

이므로

$p^2x^2+2p(q+2)x+(q+2)^2=x^2-3ax+2a^2+4$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로

$p^2=1$, $2p(q+2)=-3a$, $(q+2)^2=2a^2+4$

$p^2=1$에서 $p=\pm1$

(i) $p=-1$일 때,

$2p(q+2)=-3a$에서 $q+2=\dfrac{3}{2}a$ ...... ㉠

㉠을 $(q+2)^2=2a^2+4$에 대입하면

$\dfrac{9}{4}a^2=2a^2+4$, $a^2=16$ $\therefore a=\pm4$

㉠에서 $q+2=\pm6$이므로 $q=4$ 또는 $q=-8$

따라서 $P(x)=-x+4$ 또는 $P(x)=-x-8$이므로

$P(1)=3$ 또는 $P(1)=-9$

(ii) $p=1$일 때,

$2p(q+2)=-3a$에서 $q+2=-\dfrac{3}{2}a$ ...... ㉡

㉡을 $(q+2)^2=2a^2+4$에 대입하면

$\dfrac{9}{4}a^2=2a^2+4$, $a^2=16$ $\therefore a=\pm4$

㉡에서 $q+2=\mp6$이므로 $q=-8$ 또는 $q=4$

따라서 $P(x)=x-8$ 또는 $P(x)=x+4$이므로

$P(1)=-7$ 또는 $P(1)=5$

(i), (ii)에서 구하는 합은

$3+(-9)+(-7)+5=-8$

0538 1st 주어진 이차식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되기 위한 조건을 구한다.

주어진 이차식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$2x^2-(3y+5)x-2y^2+ky+3$

이때 x에 대한 이차방정식 $2x^2-(3y+5)x-2y^2+ky+3=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=\{-(3y+5)\}^2-4\cdot2\cdot(-2y^2+ky+3)$$
$$=9y^2+30y+25+16y^2-8ky-24$$
$$=25y^2+2(15-4k)y+1$$

주어진 이차식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 D_1이 완전제곱식이어야 한다.

2nd 정수 k의 값을 구한다.

y에 대한 이차방정식 $25y^2+2(15-4k)y+1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=(15-4k)^2-25=0$

$16k^2-120k+225-25=0$, $2k^2-15k+25=0$

$(2k-5)(k-5)=0$ $\therefore k=5$ ($\because k$는 정수) 답 5

참고 주어진 식을 y에 대한 내림차순으로 정리해도 같은 결과를 얻을 수 있다.

SSEN 특강 이차식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되는 조건

① 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a는 상수, b, c는 y에 대한 다항식)의 근은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이므로 b^2-4ac가 완전제곱식일 때, ax^2+bx+c가 두 일차식의 곱으로 인수분해될 수 있다.

② x, y에 대한 이차식 A가 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때에는 다음과 같은 순서로 문제를 해결한다.

(i) A를 x (또는 y)에 대한 내림차순으로 정리한다.

(ii) $A=0$의 판별식 D가 완전제곱식이어야 한다.

(iii) $D=0$의 판별식이 0이다.

0539 1st $\alpha_n+\beta_n$, $\alpha_n\beta_n$을 n에 대한 식으로 나타낸다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=6n+16$, $\alpha_n\beta_n=n^2-8$ ··· ❶

2nd $\dfrac{1}{\alpha_n+1}+\dfrac{1}{\beta_n+1}$을 n에 대한 식으로 나타낸다.

$$\frac{1}{\alpha_n+1}+\frac{1}{\beta_n+1}=\frac{\beta_n+1+\alpha_n+1}{(\alpha_n+1)(\beta_n+1)}$$
$$=\frac{\alpha_n+\beta_n+2}{\alpha_n\beta_n+\alpha_n+\beta_n+1}$$
$$=\frac{(6n+16)+2}{(n^2-8)+(6n+16)+1}$$
$$=\frac{6(n+3)}{(n+3)^2}=\frac{6}{n+3}$$ ··· ❷

3rd $p+q$의 값을 구한다.

$$\left(\frac{1}{\alpha_1+1}+\frac{1}{\alpha_2+1}+\frac{1}{\alpha_3+1}\right)+\left(\frac{1}{\beta_1+1}+\frac{1}{\beta_2+1}+\frac{1}{\beta_3+1}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{\alpha_1+1}+\frac{1}{\beta_1+1}\right)+\left(\frac{1}{\alpha_2+1}+\frac{1}{\beta_2+1}\right)+\left(\frac{1}{\alpha_3+1}+\frac{1}{\beta_3+1}\right)$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{6}{5}+1=\frac{37}{10}$$ ··· ❸

따라서 $p=10$, $q=37$이므로 $p+q=47$ ··· ❹

답 47

04 이차방정식

채점 기준	비율
❶ $\alpha_n+\beta_n$, $\alpha_n\beta_n$을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $\frac{1}{\alpha_n+1}+\frac{1}{\beta_n+1}$을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ $\left(\frac{1}{\alpha_1+1}+\frac{1}{\alpha_2+1}+\frac{1}{\alpha_3+1}\right)+\left(\frac{1}{\beta_1+1}+\frac{1}{\beta_2+1}+\frac{1}{\beta_3+1}\right)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0540 **1st** α, β가 될 수 있는 수를 구한다.

조건 (나)에서 양의 약수가 3개인 자연수는 소수의 제곱인 수이고 조건 (가)에서 $\alpha\le150$, $\beta\le150$이므로 α, β가 될 수 있는 수는

2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 즉 4, 9, 25, 49, 121

2nd p, q를 α, β에 대한 식으로 나타낸다.

이차방정식 $x^2-px+q=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$p=\alpha+\beta$, $q=\alpha\beta$

3rd 순서쌍 (p, q)의 개수를 구한다.

조건 (가)에 의하여 p, q는 150 이하의 서로 다른 자연수이므로 순서쌍 (p, q)는

$(4+9,\ 4\cdot9)$, $(4+25,\ 4\cdot25)$,

즉 $(13, 36)$, $(29, 100)$

의 2개이다. 답 ②

참고 $q=\alpha\beta$이고

$4\cdot49>150$, $4\cdot121>150$

이므로 α, β는 49와 121이 될 수 없다.

0541 **1st** $x^2+x-k-2=1$인 경우와 $x^2+x-k-2=-1$인 경우로 나누어 두 근의 곱을 각각 k에 대한 식으로 나타낸다.

$|x^2+x-k-2|=1$에서

$x^2+x-k-2=\pm1$

(i) $x^2+x-k-2=1$일 때,

$x^2+x-k-3=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$-k-3$ ⋯ ❶

(ii) $x^2+x-k-2=-1$일 때,

$x^2+x-k-1=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$-k-1$ ⋯ ❷

2nd 양수 k의 값을 구한다.

주어진 방정식의 모든 근의 곱이 24이므로 (i), (ii)에서

$(-k-3)(-k-1)=24$

$k^2+4k-21=0$, $(k+7)(k-3)=0$

$\therefore k=3$ ($\because k>0$) ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $x^2+x-k-2=1$일 때, 두 근의 곱을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $x^2+x-k-2=-1$일 때, 두 근의 곱을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 양수 k의 값을 구할 수 있다.	40 %

참고 두 방정식 $x^2+x-k-3=0$, $x^2+x-k-1=0$을 동시에 만족시키는 x의 값은 없으므로 두 방정식의 공통인 근은 존재하지 않는다.

또 방정식 $x^2+x-k-3=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=1^2-4\cdot1\cdot(-k-3)=4k+13$

방정식 $x^2+x-k-1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=1^2-4\cdot1\cdot(-k-1)=4k+5$

따라서 $k>0$이면 $D_1>0$, $D_2>0$이므로 주어진 방정식은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

0542

이차방정식 ❶ $x^2-x+a=0$의 서로 다른 두 근을 α, β라 할 때, ❷ $\alpha^3+\beta^3=-2$이다. 이때 다음 조건을 모두 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

(가) ❸ $\alpha^n+\beta^n<0$

(나) $\alpha^n+\beta^n+\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}=0$

❶에서 이차방정식의 근과 계수의 관계로 구한 식과 ❷를 이용하여 a의 값을 구한다.

$n=1, 2, 3, \cdots$일 때 ❸의 값을 차례대로 구해 보면서 두 조건을 모두 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

1st a의 값을 구한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=a$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=1-3a$

이때 $\alpha^3+\beta^3=-2$이므로

$1-3a=-2$

$\therefore a=1$

2nd α^3, β^3의 값을 구한다.

이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 근이 α이므로

$\alpha^2-\alpha+1=0$

에서

$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$, $\alpha^3+1=0$

$\therefore \alpha^3=-1$

같은 방법으로 하면

$\beta^3=-1$

3rd $n=1, 2, 3, \cdots$일 때 $\alpha^n+\beta^n$의 값을 구한다.

$n=1$일 때, $\alpha+\beta=1$

$n=2$일 때, $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1-2\cdot1=-1$

$n=3$일 때, $\alpha^3+\beta^3=-2$

$n=4$일 때, $\alpha^4+\beta^4=\alpha\cdot\alpha^3+\beta\cdot\beta^3=-(\alpha+\beta)=-1$

$n=5$일 때, $\alpha^5+\beta^5=\alpha^2\cdot\alpha^3+\beta^2\cdot\beta^3=-(\alpha^2+\beta^2)=1$

⋮

4th 자연수 n의 최솟값을 구한다.

$\alpha^4+\beta^4<0$, $\alpha^4+\beta^4+\alpha^5+\beta^5=0$이므로 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 4이다. 답 4

0543 **1st** α, β, γ, a, b 사이의 관계식을 구한다.

이차방정식 $x^2+(a-6)x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a+6$ ······ ㉠

$\alpha\beta=-1$ ······ ㉡

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, γ이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\gamma=-a$ ······ ㉢

$\alpha\gamma=b$ ······ ㉣ ··· ❶

2nd α, β, γ, a, b의 값을 구한다.

㉠−㉢을 하면 $\beta-\gamma=6$

이때 $2\alpha=\beta-\gamma$이므로

$2\alpha=6$ $\quad\therefore \alpha=3$

$\alpha=3$을 ㉡에 대입하여 풀면 $\beta=-\frac{1}{3}$

$\alpha=3$, $\beta=-\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하여 풀면

$a=\frac{10}{3}$

$\alpha=3$, $a=\frac{10}{3}$을 ㉢에 대입하여 풀면

$\gamma=-\frac{19}{3}$

$\alpha=3$, $\gamma=-\frac{19}{3}$를 ㉣에 대입하여 풀면

$b=-19$ ··· ❷

3rd $3a+b$의 값을 구한다.

$3a+b=3\cdot\frac{10}{3}-19=-9$ ··· ❸

답 -9

채점 기준	비율
❶ α, β, γ, a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❷ α, β, γ, a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $3a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

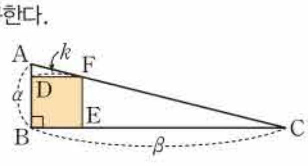
0544 **1st** $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한다.

이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$

2nd 정사각형의 한 변의 길이를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC에 내접하는 정사각형 DBEF의 한 변인 $\overline{DF}$의 길이를 k라 하자.



$\triangle$ADF$\backsim\triangle$ABC (AA 닮음)이므로

$\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{DF}:\overline{BC}$

$(\alpha-k):\alpha=k:\beta$

$\alpha k=\beta(\alpha-k)$

$(\alpha+\beta)k=\alpha\beta$

$\therefore k=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

3rd 정사각형의 넓이와 둘레의 길이를 두 근으로 하는 이차방정식을 세운다.

정사각형 DBEF의 넓이는 $\overset{k^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}$, 둘레의 길이는 $\overset{4k=4\cdot\frac{1}{2}=2}{2}$이므로 $\frac{1}{4}$, 2를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 4인 이차방정식은

$4\left\{x^2-\left(\frac{1}{4}+2\right)x+\frac{1}{4}\cdot 2\right\}=0$

$4\left(x^2-\frac{9}{4}x+\frac{1}{2}\right)=0$

$\therefore 4x^2-9x+2=0$

4th $m+n$의 값을 구한다.

$m=-9$, $n=2$이므로

$m+n=-7$

답 ⑤

0545 **1st** 잘못 적용한 근의 공식을 이용하여 두 근의 합과 곱을 구한다.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 잘못 적용한 근의 공식에 의하면 두 근의 합은

$$\frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2b}+\frac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2b}=\frac{2a}{2b}=\frac{a}{b} \quad \cdots\cdots ㉠$$

두 근의 곱은

$$\frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2b}\cdot\frac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2b}=\frac{a^2-(a^2-4bc)}{4b^2}$$

$$=\frac{c}{b} \quad \cdots\cdots ㉡$$

2nd k의 값을 구한다.

[1단계]에서 이차방정식 $kX^2+X-8=0$의 두 근은 p, q이므로 ㉠, ㉡에 의하여

$p+q=k$, $pq=-8$

[2단계]에서 $\alpha+4=p$, $\beta+4=q$이므로

$(\alpha+5)(\beta+5)=(p+1)(q+1)=pq+p+q+1$

$=-8+k+1$

$=k-7$

즉 $k-7=2$이므로 $\quad k=9$

3rd 올바른 두 근의 합을 구한다.

주어진 이차방정식은 $9(x+4)^2+(x+4)-8=0$, 즉

$9x^2+73x+140=0$이므로 올바른 두 근의 합은 $-\frac{73}{9}$이다.

답 $-\frac{73}{9}$

0546 **1st** $\alpha+\beta$의 값을 구한다.

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$ ······ ㉠

2nd $f(\alpha^2)=-4\alpha$의 식을 변형한다.

α가 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근이므로

$\alpha^2+\alpha+1=0$

㉠에서 $\alpha=-\beta-1$이므로 이것을 위의 식에 대입하면

$\alpha^2-\beta=0$ $\quad\therefore \alpha^2=\beta$

$f(\alpha^2)=-4\alpha$에서 $\quad f(\beta)=-4(-\beta-1)$

$\therefore f(\beta)-4\beta-4=0$ ······ ㉡

3rd $f(\beta^2)=-4\beta$의 식을 변형한다.

β가 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근이므로

$$\beta^2+\beta+1=0$$

㉠에서 $\beta=-\alpha-1$이므로 이것을 위의 식에 대입하면

$$\beta^2-\alpha=0 \qquad \therefore \beta^2=\alpha$$

$f(\beta^2)=-4\beta$에서

$$f(\alpha)=-4(-\alpha-1)$$

$$\therefore f(\alpha)-4\alpha-4=0 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

4th $f(x)$를 구한다.

㉡, ㉢에서 이차방정식 $f(x)-4x-4=0$의 두 근이 α, β이고 $f(x)$의 x^2의 계수가 1이므로

$$f(x)-4x-4=(x-\alpha)(x-\beta)$$
$$=x^2+x+1$$
$$\therefore f(x)=x^2+5x+5$$

5th $p+q$의 값을 구한다.

$p=5$, $q=5$이므로

$$p+q=10$$

답 10

다른 풀이 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=1$$

$f(\alpha^2)=-4\alpha$, $f(\beta^2)=-4\beta$이므로

$$\alpha^4+p\alpha^2+q=-4\alpha \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$$\beta^4+p\beta^2+q=-4\beta \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$\alpha^4+\beta^4+p(\alpha^2+\beta^2)+2q=-4(\alpha+\beta)$$

이때

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-1,$$
$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=-1$$

이므로

$$-1-p+2q=4 \qquad \therefore p-2q=-5 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉠−㉡을 하면

$$\alpha^4-\beta^4+p(\alpha^2-\beta^2)=-4(\alpha-\beta)$$
$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2)+p(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)+4(\alpha-\beta)=0$$
$$5(\alpha-\beta)-p(\alpha-\beta)=0$$
$$(\alpha-\beta)(5-p)=0$$
$$\therefore p=5\ (\because \alpha\neq\beta)$$

$x^2+x+1=0$의 판별식을 D라 하면 $D=1^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$p=5$를 ㉢에 대입하면 $\quad q=5$

$$\therefore p+q=10$$

0547

x에 대한 이차방정식 ❶$x^2-px+p+3=0$이 허근 α를 가질 때, ❸α^3이 실수가 되도록 하는 모든 ❷실수 p의 값의 곱은?

└ α^3의 허수부분이 0이다.

① -2 ② -3 ③ -4 ④ -5 ⑤ -6

❶, ❷에서 주어진 이차방정식의 다른 한 근이 α의 켤레복소수이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 p에 대한 식을 구한다.
❸을 만족시키는 조건을 이용하여 모든 실수 p의 값의 곱을 구한다.

1st a, b, p 사이의 관계식을 구한다.

$\alpha=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하자.

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 α가 근이면 $a-bi$도 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a+bi)+(a-bi)=p \qquad \therefore a=\frac{p}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$$(a+bi)(a-bi)=p+3 \qquad \therefore a^2+b^2=p+3 \quad \cdots\cdots ㉡$$

2nd α^3이 실수가 되는 조건을 구한다.

$$\alpha^3=(a+bi)^3=a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i$$
$$=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i$$

이므로 α^3이 실수이려면 $3a^2b-b^3=0$이어야 한다.

3rd 모든 실수 p의 값의 곱을 구한다.

$b\neq0$이므로

$$3a^2-b^2=0$$
$$\therefore b^2=3a^2=\frac{3p^2}{4}\ (\because ㉠)$$

$a^2=\frac{p^2}{4}$, $b^2=\frac{3p^2}{4}$을 ㉡에 대입하면

$$\frac{p^2}{4}+\frac{3p^2}{4}=p+3$$
$$\therefore p^2-p-3=0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 p의 값의 곱은 -3이다.

답 ②

다른 풀이 이차방정식 $x^2-px+p+3=0$의 한 근이 α이므로

$$\alpha^2-p\alpha+p+3=0, \qquad \alpha^2=p\alpha-p-3$$
$$\therefore \alpha^3=p\alpha^2-p\alpha-3\alpha$$
$$=p(p\alpha-p-3)-p\alpha-3\alpha$$
$$=p^2\alpha-p^2-3p-p\alpha-3\alpha$$
$$=(p^2-p-3)\alpha-p^2-3p$$

이때 p는 실수, α는 허수이므로 α^3이 실수이려면

$$p^2-p-3=0$$

Ⅱ. 방정식

05 이차방정식과 이차함수

0548 이차방정식 $x^2+x-2=0$에서
$(x+2)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ 답 -2, 1

0549 이차방정식 $3x^2-7x+2=0$에서
$(3x-1)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=2$ 답 $\frac{1}{3}$, 2

0550 이차방정식 $-4x^2+12x-9=0$에서
$4x^2-12x+9=0$, $\quad(2x-3)^2=0$ $\quad\therefore x=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

0551 이차방정식 $x^2-5x+5=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot5=5>0$
따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 2개이다.
답 2

0552 이차방정식 $2x^2-x+5=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-1)^2-4\cdot2\cdot5=-39<0$
따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 없다.
답 0

0553 이차방정식 $-4x^2+4x-1=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=2^2-(-4)\cdot(-1)=0$
따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 1개이다.
답 1

0554 이차방정식 $x^2-2x-k=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(-k)=1+k>0$
$\therefore k>-1$ 답 $k>-1$

0555 $\frac{D}{4}=1+k=0$ $\quad\therefore k=-1$ 답 -1

0556 $\frac{D}{4}=1+k<0$ $\quad\therefore k<-1$ 답 $k<-1$

0557 주어진 이차함수의 그래프가 x축과 만나려면 이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 판별식을 D라 할 때
$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot k=4-k\ge0$
$\therefore k\le4$ 답 $k\le4$

0558 $x^2-x+5=3x+1$에서
$x^2-4x+4=0$, $\quad(x-2)^2=0$
$\therefore x=2$ 답 2

0559 $-x^2+4x+1=-x+5$에서
$x^2-5x+4=0$, $\quad(x-1)(x-4)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=4$ 답 1, 4

0560 $-3x^2+5x+7=-x-2$에서
$3x^2-6x-9=0$, $\quad x^2-2x-3=0$
$(x+1)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=3$ 답 -1, 3

0561 $x^2+2x+2=-x+1$, 즉 $x^2+3x+1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=3^2-4\cdot1\cdot1=5>0$
따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다. 답 서로 다른 두 점에서 만난다.

0562 $2x^2-3x+4=x+2$, 즉 $x^2-2x+1=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot1=0$
따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다. (접한다.) 답 한 점에서 만난다.(접한다.)

0563 $-x^2+6x+1=2x+7$, 즉 $x^2-4x+6=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot6=-2<0$
따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.
답 만나지 않는다.

0564 $x^2-3x-4=x+k$, 즉 $x^2-4x-4-k=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot(-4-k)=k+8>0$
$\therefore k>-8$ 답 $k>-8$

0565 $\frac{D}{4}=k+8=0$ $\quad\therefore k=-8$ 답 -8

0566 $\frac{D}{4}=k+8<0$ $\quad\therefore k<-8$ 답 $k<-8$

0567 주어진 이차함수의 그래프와 직선이 만나려면 $2x^2-x+2=x+m$, 즉 $2x^2-2x+2-m=0$의 판별식을 D라 할 때
$\frac{D}{4}=(-1)^2-2\cdot(2-m)=2m-3\ge0$
$\therefore m\ge\frac{3}{2}$ 답 $m\ge\frac{3}{2}$

0568 $y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$
따라서 $x=-1$일 때 최솟값은 2이고, 최댓값은 없다.
답 최솟값: 2, 최댓값: 없다.

0569 $y=3x^2-12x+15=3(x-2)^2+3$

따라서 $x=2$일 때 최솟값은 3이고, 최댓값은 없다.

답 최솟값: 3, 최댓값: 없다.

0570 $y=-x^2-4x+5=-(x+2)^2+9$

따라서 $x=-2$일 때 최댓값은 9이고, 최솟값은 없다.

답 최댓값: 9, 최솟값: 없다.

0571 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+1=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{3}{2}$

따라서 $x=1$일 때 최댓값은 $\frac{3}{2}$이고, 최솟값은 없다.

답 최댓값: $\frac{3}{2}$, 최솟값: 없다.

0572 x^2의 계수가 1이고 $x=1$에서 최솟값 -3을 갖는 이차함수는

$y=(x-1)^2-3=x^2-2x-2$

$\therefore a=-2,\ b=-2$

답 $a=-2,\ b=-2$

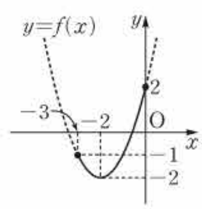
0573 x^2의 계수가 -2이고 $x=-1$에서 최댓값 4를 갖는 이차함수는

$y=-2(x+1)^2+4=-2x^2-4x+2$

$\therefore a=-4,\ b=2$

답 $a=-4,\ b=2$

0574 $f(x)=x^2+4x+2=(x+2)^2-2$



$-3\le x\le 0$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

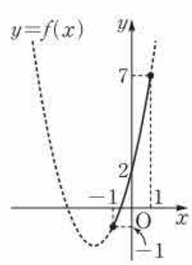
$f(-3)=-1,\ f(-2)=-2,$

$f(0)=2$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 2, 최솟값은 -2이다.

답 최댓값: 2, 최솟값: -2

0575 $-1\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

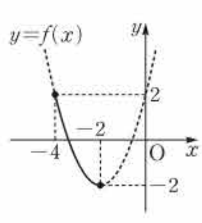


$f(-1)=-1,\ f(1)=7$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 7, 최솟값은 -1이다.

답 최댓값: 7, 최솟값: -1

0576 $-4\le x\le -2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

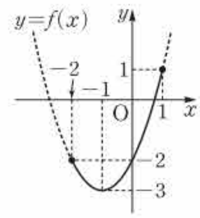


$f(-4)=2,\ f(-2)=-2$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 2, 최솟값은 -2이다.

답 최댓값: 2, 최솟값: -2

0577 $f(x)=x^2+2x-2=(x+1)^2-3$



$-2\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

$f(-2)=-2,\ f(-1)=-3,$

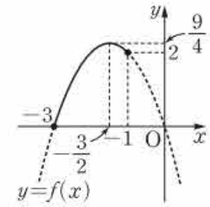
$f(1)=1$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 1, 최솟값은 -3이다.

답 최댓값: 1, 최솟값: -3

0578 $f(x)=-x^2-3x$

$=-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$



$-3\le x\le -1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

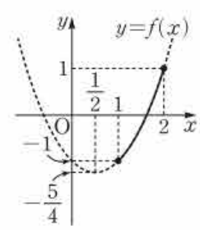
$f(-3)=0,\ f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4},$

$f(-1)=2$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{9}{4}$, 최솟값은 0이다.

답 최댓값: $\frac{9}{4}$, 최솟값: 0

0579 $f(x)=x^2-x-1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$



$1\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

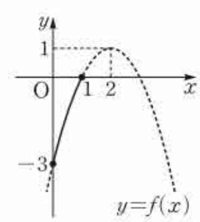
$f(1)=-1,\ f(2)=1$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.

답 최댓값: 1, 최솟값: -1

0580 $f(x)=-x^2+4x-3$

$=-(x-2)^2+1$



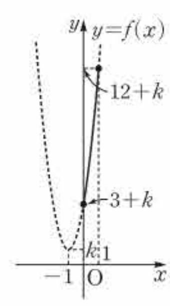
$0\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

$f(0)=-3,\ f(1)=0$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 0, 최솟값은 -3이다.

답 최댓값: 0, 최솟값: -3

0581 $0\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=0$에서 최솟값 $3+k$를 가지므로

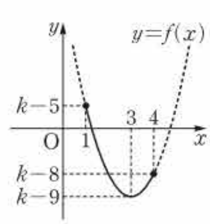
$3+k=4$

$\therefore k=1$

답 1

0582 $f(x)=x^2-6x+k$

$=(x-3)^2+k-9$



이므로 $1\le x\le 4$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=1$에서 최댓값 $k-5$를 가지므로

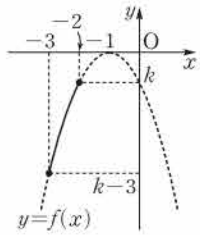
$k-5=1 \qquad \therefore k=6$

답 6

0583 $f(x)=-x^2-2x+k$

$=-(x+1)^2+k+1$

이므로 $-3\le x\le -2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



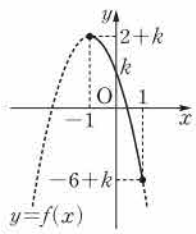
따라서 $x=-2$에서 최댓값 k를 가지므로

$k=-1$ 답 -1

0584 $f(x)=-2x^2-4x+k$

$=-2(x+1)^2+2+k$

이므로 $-1\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=1$에서 최솟값 $-6+k$를 가지므로

$-6+k=-4$

$\therefore k=2$ 답 2

0585 (2) 변의 길이는 양수이므로

$0<x<5$

(3) 새로운 직사각형의 넓이는

$(3+x)(5-x)=-x^2+2x+15$

$=-(x-1)^2+16$

이때 $0<x<5$이므로 $x=1$일 때 최댓값은 16이다.

따라서 새로운 직사각형의 넓이의 최댓값은 16 cm^2이다.

답 (1) $(3+x)$ cm, $(5-x)$ cm (2) $0<x<5$ (3) 16 cm^2

유형 01 이차함수의 그래프와 x축의 교점 본책 86쪽

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 α, β이다.

➡ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근이 α, β이다.

➡ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

0586 이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 -1, 4이므로 -1, 4는 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+4=-\dfrac{a}{2}$, $-1\cdot 4=\dfrac{b}{2}$

이므로 $a=-6$, $b=-8$

$\therefore ab=48$ 답 48

0587 이차함수 $y=x^2-ax+b$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 -3, -2이므로 -3, -2는 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+(-2)=a$, $-3\cdot(-2)=b$

이므로 $a=-5$, $b=6$

이차함수 $y=x^2-bx-a$, 즉 $y=x^2-6x+5$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-6x+5=0$의 근이므로

$(x-1)(x-5)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=5$

따라서 두 점 사이의 거리는

$5-1=4$ 두 점의 좌표는 (1, 0), (5, 0)이다. 답 ④

0588 이차방정식 $3x^2+ax-2=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{a}{3}$, $\alpha\beta=-\dfrac{2}{3}$ …… ㉠

이때 주어진 이차함수의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 $\dfrac{5}{3}$이므로

$|\alpha-\beta|=\dfrac{5}{3}$

양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=\dfrac{25}{9}$

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\dfrac{25}{9}$

㉠을 위의 식에 대입하면 $\dfrac{a^2}{9}+\dfrac{8}{3}=\dfrac{25}{9}$

$a^2=1$ $\therefore a=\pm1$

따라서 모든 a의 값의 곱은 -1이다. 답 -1

다른 풀이 이차방정식 $3x^2+ax-2=0$의 두 근을 α, $\alpha+\dfrac{5}{3}$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\left(\alpha+\dfrac{5}{3}\right)=-\dfrac{a}{3}$ …… ㉠

$\alpha\left(\alpha+\dfrac{5}{3}\right)=-\dfrac{2}{3}$ …… ㉡

㉡에서 $\alpha^2+\dfrac{5}{3}\alpha+\dfrac{2}{3}=0$

$3\alpha^2+5\alpha+2=0$, $(\alpha+1)(3\alpha+2)=0$

$\therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=-\dfrac{2}{3}$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=1$ 또는 $a=-1$

0589 꼭짓점의 좌표가 $(-2, -1)$이므로 주어진 이차함수를 $y=a(x+2)^2-1$이라 하면

$y=a(x+2)^2-1=ax^2+4ax+4a-1$ …… ㉠

이때 주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=-2$이고 $\overline{PQ}=4$이므로 두 점 P, Q의 x좌표는 -4, 0이다.

즉 -4, 0은 이차방정식 $ax^2+4ax+4a-1=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-4\cdot 0=\dfrac{4a-1}{a}$, $4a-1=0$

$\therefore a=\dfrac{1}{4}$ ··· ❶

$a=\dfrac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면 주어진 이차함수는 $y=\dfrac{1}{4}x^2+x$

따라서 $b=1$, $c=0$이므로 ··· ❷

$a+b+c=\dfrac{5}{4}$ ··· ❸

답 $\dfrac{5}{4}$

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ b, c의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 주어진 이차함수를 $y=a(x+2)^2-1$이라 하면 이차방정식 $a(x+2)^2-1=0$에서

$$(x+2)^2=\frac{1}{a},\qquad x+2=\pm\sqrt{\frac{1}{a}}\ (\because a>0)$$

꼭짓점이 제3사분면 위에 있고 x축과 두 점에서 만나므로 $a>0$

$$\therefore x=-2\pm\sqrt{\frac{1}{a}}$$

따라서 두 점 P, Q의 x좌표가 $-2+\sqrt{\frac{1}{a}}$, $-2-\sqrt{\frac{1}{a}}$이고

$\overline{\mathrm{PQ}}=4$이므로 $\quad -2+\sqrt{\frac{1}{a}}-\left(-2-\sqrt{\frac{1}{a}}\right)=4$

$$\sqrt{\frac{1}{a}}=2,\qquad \frac{1}{a}=4\qquad \therefore a=\frac{1}{4}$$

따라서 주어진 이차함수는

$$y=\frac{1}{4}(x+2)^2-1=\frac{1}{4}x^2+x$$

0590 $2\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$에서 $\mathrm{A}(-\alpha,\ 0)$, $\mathrm{B}(2\alpha,\ 0)\ (\alpha>0)$이라 하면 $-\alpha$, 2α는 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이다.
이때 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 1이므로

$$-\alpha+2\alpha=1\qquad \therefore \alpha=1$$

즉 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 -1, 2이므로 이차방정식 $f(4x-k)=0$에서

$$4x-k=-1 \text{ 또는 } 4x-k=2$$

$$\therefore x=\frac{k-1}{4} \text{ 또는 } x=\frac{k+2}{4}$$

이차방정식 $f(4x-k)=0$의 두 근의 합이 -1이므로

$$\frac{k-1}{4}+\frac{k+2}{4}=-1,\qquad 2k+1=-4$$

$$\therefore k=-\frac{5}{2}$$

답 ①

유형 02 **이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계** 집중공략 본책 86쪽

> 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때
> ① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다.
> ② $D=0$ ➡ 한 점에서 만난다.(접한다.)
> (①, ② : 만난다.)
> ③ $D<0$ ➡ 만나지 않는다.

0591 이차함수 $y=x^2+(2-m)x+\frac{m^2}{4}$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2+(2-m)x+\frac{m^2}{4}=0$의 판별식을 D라 할 때

$$D=(2-m)^2-4\cdot\frac{m^2}{4}>0$$

$$-4m+4>0\qquad \therefore m<1$$

따라서 정수 m의 최댓값은 0이다.

답 0

0592 이차함수 $y=x^2+2kx-4k$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2+2kx-4k=0$의 판별식을 D_1이라 할 때

$$\frac{D_1}{4}=k^2-(-4k)=0,\qquad k^2+4k=0$$

$$k(k+4)=0\qquad \therefore k=-4 \text{ 또는 } k=0\qquad \cdots\cdots ㉠ \qquad \cdots ❶$$

이차함수 $y=-2x^2+x+k$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 이차방정식 $-2x^2+x+k=0$의 판별식을 D_2라 할 때

$$D_2=1^2-4\cdot(-2)\cdot k<0,\qquad 1+8k<0$$

$$\therefore k<-\frac{1}{8}\qquad \cdots\cdots ㉡ \qquad \cdots ❷$$

㉠, ㉡에서 $\quad k=-4 \qquad \cdots ❸$

답 -4

채점 기준	비율
❶ 이차함수 $y=x^2+2kx-4k$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나도록 하는 k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 이차함수 $y=-2x^2+x+k$의 그래프가 x축과 만나지 않도록 하는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0593 이차함수 $y=x^2-2ax-b^2+9$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2-2ax-b^2+9=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-(-b^2+9)<0\qquad \therefore a^2+b^2<9$$

따라서 이를 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$

의 4개이다.

답 4

0594 이차함수 $y=x^2+(2m-1)x+m^2+m-2$의 그래프가 x축과 만나려면 이차방정식 $x^2+(2m-1)x+m^2+m-2=0$의 판별식을 D라 할 때

$$D=(2m-1)^2-4(m^2+m-2)\geq 0$$

$$-8m+9\geq 0\qquad \therefore m\leq\frac{9}{8}$$

따라서 실수 m의 최댓값은 $\frac{9}{8}$이다.

답 ⑤

0595 이차함수 $y=x^2+2(a+k)x+k^2+6k+b$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $x^2+2(a+k)x+k^2+6k+b=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(a+k)^2-(k^2+6k+b)=0$$

$$\therefore (2a-6)k+a^2-b=0$$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$2a-6=0,\ a^2-b=0$$

따라서 $a=3$, $b=9$이므로

$$ab=27$$

답 27

SSEN 특강 **항등식의 성질**

> ① $ax+b=0$이 x에 대한 항등식 ➡ $a=0$, $b=0$
> ② $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식 ➡ $a=0$, $b=0$, $c=0$
> ③ $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식
> ➡ $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$

유형 03 이차함수의 그래프와 직선의 교점 (집중 공략) 본책 87쪽

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 두 교점의 x좌표가 α, β이다.
➡ 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 두 실근이 α, β이다.
➡ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

0596 이차함수 $y=2x^2-3x+1$의 그래프와 직선 $y=ax+b$의 두 교점의 x좌표가 -2, 3이므로 -2, 3은 이차방정식

$$2x^2-3x+1=ax+b,\ \text{즉 } 2x^2-(a+3)x+1-b=0$$

의 두 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2+3=\frac{a+3}{2},\ -2\cdot3=\frac{1-b}{2}$$

이므로

$$a+3=2,\ 1-b=-12$$
$$\therefore\ a=-1,\ b=13$$
$$\therefore\ a+b=12$$

답 ③

다른 풀이 이차함수 $y=2x^2-3x+1$의 그래프와 직선 $y=ax+b$의 두 교점의 x좌표가 -2, 3이므로

$$2\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)+1=-2a+b$$
$$\therefore\ -2a+b=15 \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$2\cdot3^2-3\cdot3+1=3a+b$$
$$\therefore\ 3a+b=10 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-1,\ b=13$$

0597 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 두 교점의 x좌표가 -3, 2이므로 -3, 2는 이차방정식

$$ax^2+bx+c=mx+n,$$
$$\text{즉 } ax^2+(b-m)x+c-n=0$$

의 두 근이다.
따라서 모든 실근의 곱은

$$-3\cdot2=-6$$

답 -6

0598 이차함수 $y=x^2-2$의 그래프와 직선 $y=mx$의 두 교점의 x좌표의 차가 4이므로 이차방정식

$$x^2-2=mx,\ \text{즉 } x^2-mx-2=0$$

의 두 근의 차가 4이다.
즉 두 근을 α, β라 하면

$$|\alpha-\beta|=4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=m,\ \alpha\beta=-2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$(\alpha-\beta)^2=16$$
$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16$$

㉡을 위의 식에 대입하면

$$m^2+8=16 \qquad m^2=8$$
$$\therefore\ m=2\sqrt{2}\ (\because\ m>0)$$

답 ④

0599 이차함수 $y=x^2+px+q$의 그래프와 직선 $y=3x-1$의 한 교점의 x좌표가 $1-\sqrt{3}$이므로 $1-\sqrt{3}$은 이차방정식

$$x^2+px+q=3x-1,\ \text{즉 } x^2+(p-3)x+q+1=0$$

의 한 근이다. ··· ❶
이때 이 이차방정식의 계수가 유리수이고 한 근이 $1-\sqrt{3}$이므로 $1+\sqrt{3}$도 근이다. ··· ❷
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})=-(p-3),$$
$$(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})=q+1$$

이므로 $\quad 2=-p+3,\ -2=q+1$

$$\therefore\ p=1,\ q=-3 \quad ···\ ❸$$
$$\therefore\ p-q=4 \quad ···\ ❹$$

답 4

채점 기준	비율
❶ $1-\sqrt{3}$을 한 근으로 갖는 이차방정식을 세울 수 있다.	20 %
❷ $1+\sqrt{3}$도 이차방정식의 근임을 알 수 있다.	20 %
❸ p, q의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $p-q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0600 이차함수 $y=x^2+6x$, 즉 $y=(x+3)^2-9$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면

$$y=(x-4+3)^2-9-3$$
$$=(x-1)^2-12$$

두 점 P, Q는 이차함수 $y=(x-1)^2-12$의 그래프와 직선 $y=mx$의 교점이므로 두 점 P, Q의 x좌표는 이차방정식

$$(x-1)^2-12=mx,\ \text{즉 } x^2-(m+2)x-11=0$$

의 두 근이다.
이때 두 점 P, Q의 x좌표의 합이 0이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$m+2=0 \qquad \therefore\ m=-2$$

답 -2

0601 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 α, β이므로 α, β는 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이다.
$f(x)$의 x^2의 계수가 1이므로

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 두 교점의 x좌표가 α, γ이므로 α, γ는 이차방정식

$$f(x)=g(x),\ \text{즉 } f(x)-g(x)=0$$

의 두 근이다.
$f(x)-g(x)$의 x^2의 계수가 1이므로 — $g(x)$가 일차함수이므로 $f(x)-g(x)$는 x^2의 계수가 1인 이차함수이다.

$$f(x)-g(x)=(x-\alpha)(x-\gamma)$$
$$\therefore\ g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)-(x-\alpha)(x-\gamma)$$
$$=(x-\alpha)(x-\beta-x+\gamma)$$
$$=2(x-\alpha)\ (\because\ \gamma-\beta=2)$$

이때 $g(0)=-2$이므로 $\quad -2\alpha=-2 \quad \therefore\ \alpha=1$

$\beta-\alpha=3$에서 $\quad \beta=\alpha+3=4$

$\gamma-\beta=2$에서 $\quad \gamma=\beta+2=6$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-4)$이므로

$$f(\alpha+\beta+\gamma)=f(11)=70$$

답 ④

05 이차방정식과 이차함수

유형 04 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 본책 88쪽

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$, 즉 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 판별식을 D라 할 때
① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다.
② $D=0$ ➡ 한 점에서 만난다. (접한다.)
(①, ② 만난다.)
③ $D<0$ ➡ 만나지 않는다.

0602 이차함수 $y=x^2+kx+2$의 그래프와 직선 $y=x+1$이 접하려면 이차방정식 $x^2+kx+2=x+1$, 즉 $x^2+(k-1)x+1=0$의 판별식을 D라 할 때

$D=(k-1)^2-4=0$, $\quad k^2-2k-3=0$

$(k+1)(k-3)=0 \quad \therefore k=-1$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $-1+3=2$ 답 ⑤

0603 이차함수 $y=x^2-2x+k$의 그래프와 직선 $y=2x-1$이 적어도 한 점에서 만나려면 이차방정식

$x^2-2x+k=2x-1$, 즉 $x^2-4x+k+1=0$

의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(k+1)\geq 0$

$3-k\geq 0 \quad \therefore k\leq 3$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3의 3개이다. 답 3

0604 이차함수 $y=x^2-4ax+5a^2-1$의 그래프와 직선 $y=-2x+k$가 만나지 않으려면 이차방정식

$x^2-4ax+5a^2-1=-2x+k$,

즉 $x^2-2(2a-1)x+5a^2-1-k=0$

의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=\{-(2a-1)\}^2-(5a^2-1-k)<0$

$\therefore k<a^2+4a-2$

(i) $a=1$일 때, $k<3$

자연수 k는 1, 2의 2개이므로 $f(1)=2$

(ii) $a=2$일 때, $k<10$

자연수 k는 1, 2, 3, $\cdots$, 9의 9개이므로 $f(2)=9$

(iii) $a=3$일 때, $k<19$

자연수 k는 1, 2, 3, $\cdots$, 18의 18개이므로 $f(3)=18$

이상에서 $f(1)+f(2)+f(3)=29$ 답 29

0605 이차함수 $y=x^2-2kx+3$의 그래프가 직선 $y=-4x-k^2$보다 항상 위쪽에 있으려면 이차함수의 그래프와 직선이 만나지 않아야 한다.

이차방정식 $x^2-2kx+3=-4x-k^2$, 즉 $x^2-2(k-2)x+k^2+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-2)\}^2-(k^2+3)<0$ ⋯ ❶

$-4k+1<0 \quad \therefore k>\frac{1}{4}$ ⋯ ❷

따라서 정수 k의 최솟값은 1이다. ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 주어진 이차함수의 그래프가 직선보다 항상 위쪽에 있도록 하는 조건을 구할 수 있다.	60 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❸ 정수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0606 ㄱ. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=a^2-4b=0$ ⋯⋯ ㉠

ㄴ. ㉠에서 $a^2=4b$이므로

$\frac{a^2}{4}-d=b-d$ ⋯⋯ ㉡

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 제 1 사분면과 제 2 사분면에서 만나므로 이차방정식

$x^2+ax+b=cx+d$,

즉 $x^2+(a-c)x+b-d=0$ ⋯⋯ ㉢

의 두 근의 곱은 음수이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$b-d<0$

따라서 ㉡에서 $\frac{a^2}{4}-d<0$

ㄷ. ㉢이 서로 다른 두 실근을 가지므로 ㉢의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(a-c)^2-4(b-d)>0$

$a^2-2ac+c^2-4b+4d>0$

$\therefore c^2-2ac+4d>0 \ (\because ㉠)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

유형 05 이차함수의 그래프에 접하는 직선의 방정식 본책 89쪽

① 기울기가 m이고 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에 접하는 직선
➡ $y=mx+b$로 놓고, 이차방정식 $f(x)=mx+b$의 판별식을 D라 할 때 $D=0$임을 이용하여 b의 값을 구한다.
② 점 (p, q)를 지나고 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에 접하는 직선
➡ $y=a(x-p)+q$로 놓고, 이차방정식 $f(x)=a(x-p)+q$의 판별식을 D라 할 때 $D=0$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

0607 직선 $y=ax+b$가 직선 $y=-2x+1$에 평행하므로

$a=-2$

직선 $y=-2x+b$가 이차함수 $y=x^2+2x-3$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2+2x-3=-2x+b$, 즉 $x^2+4x-3-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-(-3-b)=0 \quad \therefore b=-7$

$\therefore a+b=-9$ 답 ③

참고 두 직선 $y=ax+b$, $y=a'x+b'$이 평행하면 $a=a'$, $b\neq b'$이다.

0608 직선 $y=x+m$을 y축의 방향으로 $-2m$만큼 평행이동하면

$y=x+m-2m \quad \therefore y=x-m$

이 직선이 이차함수 $y=x^2-x+2$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-x+2=x-m$, 즉 $x^2-2x+2+m=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-(2+m)=0$$

$$-1-m=0 \qquad \therefore m=-1$$

답 -1

0609 점 $(-3, 1)$을 지나는 직선의 방정식을 $y=a(x+3)+1$ (a는 실수)이라 하면 이 직선이 이차함수 $y=-x^2+2x+5$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-x^2+2x+5=a(x+3)+1$, 즉 $x^2+(a-2)x+3a-4=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(a-2)^2-4(3a-4)=0$$

$$\therefore a^2-16a+20=0$$

이 이차방정식의 두 실근을 α, β라 하면 α, β는 두 직선의 기울기이므로 구하는 기울기의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=20$

답 20

참고 이차방정식 $a^2-16a+20=0$의 판별식을 D'이라 하면

$$\frac{D'}{4}=(-8)^2-20=44>0$$

따라서 $a^2-16a+20=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

0610 기울기가 4인 직선의 방정식을 $y=4x+a$ (a는 실수)라 하면 이 직선이 이차함수 $y=2x^2$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $2x^2=4x+a$, 즉 $2x^2-4x-a=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(-2)^2-2\cdot(-a)=0$$

$$4+2a=0 \qquad \therefore a=-2$$

따라서 직선 $y=4x-2$가 이차함수 $y=-x^2-kx-k-5$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-x^2-kx-k-5=4x-2$, 즉 $x^2+(k+4)x+k+3=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=(k+4)^2-4(k+3)=0$$

$$k^2+4k+4=0, \qquad (k+2)^2=0$$

$$\therefore k=-2$$

답 ②

0611 구하는 직선의 방정식을 $y=mx+n$ (m, n은 실수)이라 하면 이 직선이 이차함수 $y=x^2-2ax+a^2-1$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-2ax+a^2-1=mx+n$, 즉 $x^2-(2a+m)x+a^2-1-n=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=\{-(2a+m)\}^2-4(a^2-1-n)=0 \quad \cdots ❶$$

$$\therefore 4ma+(m^2+4n+4)=0$$

이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$4m=0,\ m^2+4n+4=0$$

$$\therefore m=0,\ n=-1$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=-1 \quad \cdots ❷$$

답 $y=-1$

채점 기준	비율
❶ 직선이 주어진 이차함수의 그래프에 접하기 위한 조건을 구할 수 있다.	50 %
❷ 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %

유형 06 이차함수의 최대, 최소

본책 89쪽

(1) 이차함수 $f(x)$가 $x=p$에서 최솟값 또는 최댓값을 갖는다.
➡ $f(x)=a(x-p)^2+q$로 놓는다.
(2) 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$는
① $a>0$일 때, $x=p$에서 최솟값 q를 갖는다.
② $a<0$일 때, $x=p$에서 최댓값 q를 갖는다.

0612 $y=\frac{1}{2}x^2-2x+k=\frac{1}{2}(x-2)^2-2+k$이므로 $x=2$에서 최솟값 $-2+k$를 갖는다.
$y=-2x^2-4x-3k=-2(x+1)^2+2-3k$이므로 $x=-1$에서 최댓값 $2-3k$를 갖는다.
따라서 $-2+k=2-3k$이므로

$$k=1$$

답 ①

0613 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 $x=1$에서 최댓값 1을 가지므로 $f(x)=a(x-1)^2+1$
$f(-1)=-7$이므로 $4a+1=-7$

$$4a=-8 \qquad \therefore a=-2 \quad \cdots ❶$$

따라서 $f(x)=-2(x-1)^2+1=-2x^2+4x-1$이므로

$$b=4,\ c=-1 \quad \cdots ❷$$

$$\therefore 2a+b+c=-1 \quad \cdots ❸$$

답 -1

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ b, c의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $2a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0614 $f(x)=2x^2-4x-3a+1=2(x-1)^2-3a-1$이므로 $x=1$에서 최솟값 $-3a-1$을 갖는다.
즉 $-3a-1\geq -4$이므로 $-3a\geq -3$

$$\therefore a\leq 1$$

$g(x)=-x^2-6x+2b-1=-(x+3)^2+2b+8$이므로 $x=-3$에서 최댓값 $2b+8$을 갖는다.
즉 $2b+8\leq 2$이므로 $2b\leq -6$

$$\therefore b\leq -3$$

따라서 $a+b$는 $a=1$, $b=-3$일 때 최댓값 -2를 갖는다.

답 ①

0615 조건 (나)에서 이차함수 $f(x)$의 최댓값이 4이므로

$$f(x)=a(x-b)^2+4 \ (a,\ b\text{는 상수},\ a<0)$$

라 하자. 조건 (가)에서 $f(1)=2$이므로

$$a(1-b)^2+4=2 \qquad \therefore a(1-b)^2=-2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (다)의 방정식 $f(x)+10=0$에서

$$a(x-b)^2+4+10=0$$

$$\therefore ax^2-2abx+ab^2+14=0$$

이 이차방정식의 두 실근의 합이 6이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{2ab}{a}=6 \qquad \therefore b=3$$

$b=3$을 ㉠에 대입하면

$4a=-2 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}(x-3)^2+4$이므로 이차방정식

$-\frac{1}{2}(x-3)^2+4=0$, 즉 $x^2-6x+1=0$의 두 실근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 1이다.

답 ①

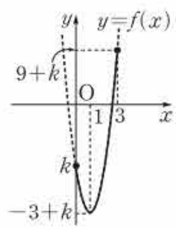
유형 07 제한된 범위에서의 이차함수의 최대, 최소

집중 공략 본책 90쪽

$\alpha \le x \le \beta$에서 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값
① $\alpha \le p \le \beta$일 때
➡ $f(\alpha)$, $\underbrace{f(p)}_{q}$, $f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.
② $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$일 때
➡ $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

0616 $f(x)=3x^2-6x+k$
$\qquad=3(x-1)^2-3+k$

이므로 $0\le x\le 3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x=3$에서 최댓값 $9+k$를 가지므로

$9+k=4 \qquad \therefore k=-5$

$x=1$에서 최솟값 $-3+k$를 가지므로 $f(x)$의 최솟값은

$-3+k=-3+(-5)=-8$

답 -8

0617 $y=-2x^2+4x+a=-2(x-1)^2+2+a$

$-2\le x\le 1$에서 $x=1$일 때 최댓값은 $2+a$이고, $x=-2$일 때 최솟값은 $-16+a$이다.

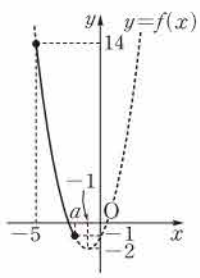
따라서 구하는 차는

$2+a-(-16+a)=18$

답 ⑤

0618 $f(x)=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$

라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $f(-1)=-2$이므로



$-5<\underline{a<-1}$ $a\ge-1$이면 $f(x)$의 최솟값은 -2이다.

$x=a$에서 최솟값 a^2+2a-1을 가지므로

$a^2+2a-1=-1$

$a^2+2a=0$

$a(a+2)=0$

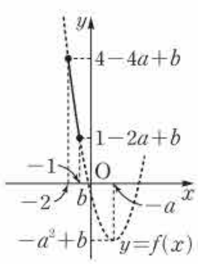
$\therefore a=-2$ ($\because a<-1$)

답 -2

0619 $f(x)=x^2+2ax+b$
$\qquad=(x+a)^2-a^2+b$

$-a>0$이므로 $-2\le x\le -1$에서

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x=-1$에서 최솟값 $1-2a+b$를 가지므로

$1-2a+b=4$

$\therefore b=2a+3$

$b<0$에서 $2a+3<0$이므로 $\qquad a<-\frac{3}{2}$

$a<b$에서 $a<2a+3$이므로 $\qquad a>-3$

즉 $\underline{a=-2}$이므로 $\qquad b=2\cdot(-2)+3=-1$ a는 정수이다.

$\therefore ab=2$

답 ②

0620 $f(x)=ax^2-4ax+b=a(x-2)^2-4a+b$라 하면

(i) $a>0$일 때,

$x=-1$에서 최댓값 5를 갖고, $x=1$에서 최솟값 -3을 가지므로

$f(-1)=5 \qquad \therefore 5a+b=5$

$f(1)=-3 \qquad \therefore -3a+b=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=0$

$\therefore a+b=1$ ⋯ ❶

(ii) $a<0$일 때,

$x=-1$에서 최솟값 -3을 갖고, $x=1$에서 최댓값 5를 가지므로

$f(-1)=-3 \qquad \therefore 5a+b=-3$

$f(1)=5 \qquad \therefore -3a+b=5$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=2$

$\therefore a+b=1$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 $\qquad a+b=1$ ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ $a>0$일 때, $a+b$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $a<0$일 때, $a+b$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0621 $f(x)=-x^2+2kx=-(x-k)^2+k^2$이라 하면

(i) $\underline{k<3}$일 때, 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속하지 않는다.

$x=3$에서 최댓값 $-9+6k$를 가지므로

$-9+6k=15 \qquad \therefore k=4$

그런데 $k<3$이므로 조건을 만족시키는 k의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $\underline{k\ge3}$일 때, 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속한다.

$x=k$에서 최댓값 k^2을 가지므로

$k^2=15 \qquad \therefore k=\pm\sqrt{15}$

그런데 $k\ge3$이므로 $\qquad k=\sqrt{15}$

(i), (ii)에서 $\qquad k=\sqrt{15}$

답 $\sqrt{15}$

유형 08 공통부분이 있는 함수의 최대, 최소

본책 91쪽

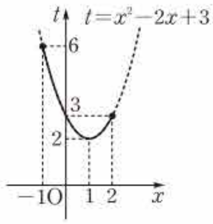
함수 $y=\{f(x)\}^2+af(x)+b$의 최댓값과 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) $f(x)=t$로 놓고 t의 값의 범위를 구한다.
(ii) $y=t^2+at+b$를 $y=(t-p)^2+q$ 꼴로 변형한다.
(iii) (i)의 범위에서 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

0622 $x^2-2x+3=t$로 놓으면

$t=(x-1)^2+2$

$-1\le x\le 2$이므로 오른쪽 그림에서

$2\le t\le 6$



이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t-4$

$=(t-1)^2-5$ $(2\le t\le 6)$

따라서 $t=2$일 때 최솟값은 -4이고, $t=6$일 때 최댓값은 20이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$20+(-4)=16$

답 ②

0623 $x^2+4x=t$로 놓으면

$t=(x+2)^2-4\ge -4$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-4t-10$

$=(t-2)^2-14$ $(t\ge -4)$

따라서 $t=2$일 때 최솟값은 -14이다.

답 -14

0624 $x^2-6x+7=t$로 놓으면

$t=(x-3)^2-2\ge -2$

이때 주어진 함수는

$y=-2t^2+4(t-7)+k+20$

$=-2t^2+4t+k-8$

$=-2(t-1)^2+k-6$ $(t\ge -2)$

따라서 $t=1$일 때 최댓값은 $k-6$이므로

$k-6=2$ $\quad\therefore k=8$

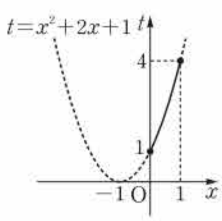
답 ④

0625 $x^2+2x+1=t$로 놓으면

$t=(x+1)^2$

$0\le x\le 1$이므로 오른쪽 그림에서

$1\le t\le 4$ ··· ❶



이때 주어진 함수는

$y=t(t+2)+4(t-1)$

$=t^2+6t-4$

$=(t+3)^2-13$ $(1\le t\le 4)$

따라서 $t=1$일 때 최솟값은 3이고, $t=4$일 때 최댓값은 36이므로

$M=36,\ m=3$ ··· ❷

$\therefore M-m=33$ ··· ❸

답 33

채점 기준	비율
❶ $x^2+2x+1=t$로 놓고 t의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ M, m의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $M-m$의 값을 구할 수 있다.	20 %

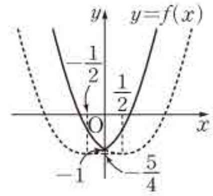
0626 (i) $x<0$일 때,

$f(x)=x^2-x-1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$

(ii) $x\ge 0$일 때,

$f(x)=x^2+x-1$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$



(i), (ii)에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$\therefore f(x)\ge -1$

$y=\{f(x)\}^2+4f(x)+5$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$y=t^2+4t+5=(t+2)^2+1$ $(t\ge -1)$

따라서 $t=-1$, 즉 $f(x)=-1$일 때 최솟값은 2이다.

답 2

유형 09 완전제곱식을 이용한 이차식의 최대, 최소 본책 91쪽

x, y가 실수일 때, $ax^2+by^2+cx+dy+e$의 최댓값과 최솟값

➡ $a(x-m)^2+b(y-n)^2+k$ 꼴로 변형한 후 (실수)$^2\ge 0$임을 이용한다.

➡ $x=m$, $y=n$일 때, 최댓값 또는 최솟값은 k이다.

0627 $2x^2-4x+y^2+6y+16=2(x-1)^2+(y+3)^2+5$

이때 x, y가 실수이므로 $\quad(x-1)^2\ge 0,\ (y+3)^2\ge 0$

$\therefore 2x^2-4x+y^2+6y+16\ge 5$

따라서 주어진 식의 최솟값은 5이다.

답 ⑤

0628 $-x^2-y^2+10x-10=-(x-5)^2-y^2+15$

이때 x, y가 실수이므로 $\quad\underline{(x-5)^2\ge 0,\ y^2\ge 0}$ $-(x-5)^2\le 0,\ -y^2\le 0$

$\therefore -x^2-y^2+10x-10\le 15$

따라서 주어진 식은 $x=5$, $y=0$에서 최댓값 15를 가지므로

$\alpha=5,\ \beta=0,\ \gamma=15$ $\quad\therefore \alpha+\beta+\gamma=20$

답 ⑤

0629 $x^2+2y^2+3z^2+4x-4y+6z-4$

$=(x+2)^2+2(y-1)^2+3(z+1)^2-13$

이때 x, y, z가 실수이므로

$(x+2)^2\ge 0,\ (y-1)^2\ge 0,\ (z+1)^2\ge 0$

$\therefore x^2+2y^2+3z^2+4x-4y+6z-4\ge -13$

따라서 주어진 식의 최솟값은 -13이다.

답 ①

0630 $x^2-x=t$로 놓으면

$(x^2-x)^2-2(x^2-x)y+2y^2-8y+k$

$=t^2-2ty+2y^2-8y+k$

$=(t-y)^2+(y-4)^2+k-16$ ··· ❶

이때 t, y가 실수이므로

$(t-y)^2\ge 0,\ (y-4)^2\ge 0$

$\therefore (t-y)^2+(y-4)^2+k-16\ge k-16$

따라서 주어진 식의 최솟값이 $k-16$이므로 ··· ❷

$k-16=5$ $\quad\therefore k=21$ ··· ❸

답 21

채점 기준	비율
❶ 공통부분을 t로 놓고 식을 정리할 수 있다.	40 %
❷ 최솟값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 10 조건을 만족시키는 이차식의 최대, 최소 본책 92쪽

등식이 조건으로 주어진 이차식의 최댓값과 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 주어진 등식에서 한 문자를 다른 문자에 대한 식으로 나타낸다.
(ii) (i)의 식을 이차식에 대입하여 한 문자에 대한 이차식으로 나타낸다.
(iii) (ii)의 식에서 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

0631 $x-y+4=0$에서 $\quad x=y-4$

$\therefore x^2+y^2-4y=(y-4)^2+y^2-4y$
$=2y^2-12y+16$
$=2(y-3)^2-2$

따라서 $y=3$일 때 최솟값은 -2이다. 답 ②

0632 $a-2b=3$에서 $\quad b=\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}$ ⋯ ❶

$\therefore ab=a\left(\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}\right)$
$=\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{2}a$
$=\frac{1}{2}\left(a-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{8}$ ⋯ ❷

이때 $-2\le a\le 1$이므로 $a=-2$일 때 최댓값은 5, $a=1$일 때 최솟값은 -1이다.
따라서 구하는 합은
$5+(-1)=4$ ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ ab를 a에 대한 이차식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ ab의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	40 %

0633 점 P(a, b)가 이차함수 $y=x^2-4x+3$의 그래프 위의 점이므로

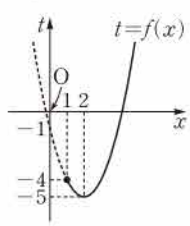
$b=a^2-4a+3$
$\therefore 3a^2-2b+2=3a^2-2(a^2-4a+3)+2$
$=a^2+8a-4$
$=(a+4)^2-20$

따라서 $-6\le a\le 0$에서 $a=0$일 때 최댓값은 -4이다. 답 -4

0634 $x-2y^2=1$에서 $\quad 2y^2=x-1$ ⋯⋯ ㉠

이때 y가 실수이므로 $\quad 2y^2\ge 0$
$x-1\ge 0 \quad \therefore x\ge 1$
㉠을 x^2+2y^2-5x에 대입하면
$x^2+2y^2-5x=x^2+x-1-5x=(x-2)^2-5$

$f(x)=(x-2)^2-5$라 하면 $x\ge 1$에서 함수 $t=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=2$일 때 최솟값은 -5이다.
즉 x^2+2y^2-5x의 최솟값은 -5이다.



답 -5

0635 이차방정식 $x^2-2(a+3)x+a^2-a+2=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+3)\}^2-(a^2-a+2)>0$
$7a+7>0 \quad \therefore a>-1$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2(a+3),\ \alpha\beta=a^2-a+2$
$\therefore (\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1$
$=a^2-a+2+2(a+3)+1$
$=a^2+a+9$
$=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{35}{4}$

따라서 $a>-1$에서 $a=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $\frac{35}{4}$이다. 답 ②

0636 두 점 A$(1, 1)$, B$(4, -5)$를 지나는 직선의 기울기는
$\frac{-5-1}{4-1}=-2$
기울기가 -2이고 점 A$(1, 1)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-1=-2(x-1) \quad \therefore y=-2x+3$
$\therefore 2x^2-y^2=2x^2-(-2x+3)^2$
$=-2x^2+12x-9$
$=-2(x-3)^2+9$

따라서 $\underline{1\le x\le 4}$에서 $x=3$일 때 최댓값은 9이다. 답 9
└점 P가 $\overline{AB}$ 위를 움직이므로 $1\le x\le 4$

유형 11 이차함수의 최대, 최소의 활용 집중공략 본책 93쪽

(i) 주어진 조건을 이용하여 한 문자에 대한 이차식을 세우고 문자의 값의 범위를 구한다.
(ii) (i)의 이차식을 완전제곱식을 포함한 식으로 변형한다.
(iii) (i)의 범위에서 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

0637 점 B의 좌표를 $(a, 0)$ $(\underline{0<a<\sqrt{3}})$이라 하면
└$y=-x^2+3$의 그래프가 $x>0$인 부분에서 x축과 만나는 점의 x좌표

C$(a, -a^2+3)$
$\therefore \overline{AB}=2a,\ \overline{BC}=-a^2+3$

직사각형 ABCD의 둘레의 길이는
$2(2a-a^2+3)=-2a^2+4a+6$
$=-2(a-1)^2+8$

이때 $0<a<\sqrt{3}$이므로 $a=1$일 때 최댓값은 8이다.
따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 8이다.

답 ②

0638 $h=-5t^2+4t+3=-5\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{19}{5}$

따라서 $t=\frac{2}{5}$일 때 최댓값은 $\frac{19}{5}$이므로 구하는 높이는 $\frac{19}{5}$ m이다. 답 $\frac{19}{5}$ m

0639 귤 한 개의 가격이 $(300-x)$원일 때 하루 판매량은 $(100+x)$개이므로 하루 판매액을 y원이라 하면

$y=(300-x)(100+x)=-x^2+200x+30000$
$=-(x-100)^2+40000$

따라서 $x=100$일 때 y는 최대이고, 이때의 귤 한 개의 가격은 $300-100=200$(원)이다. 　　답 200원

0640 직각을 낀 한 변의 길이를 x m라 하면 다른 한 변의 길이는 $(80-x)$ m이다.
변의 길이는 양수이므로 　$0<x<80$
가축우리의 넓이는

$$\frac{1}{2}x(80-x)=-\frac{1}{2}(x^2-80x)$$
$$=-\frac{1}{2}(x-40)^2+800$$

이때 $0<x<80$이므로 $x=40$일 때 최댓값은 800이다.
따라서 가축우리의 넓이의 최댓값은 800 m^2이다. 　　답 ③

0641 $\overline{AP}=\overline{BQ}=\overline{CR}=\overline{DS}=x$라 하면
$\overline{BP}=\overline{DR}=12-x$, $\overline{CQ}=\overline{AS}=16-x$
변의 길이는 양수이므로 　$0<x<12$
□PQRS의 넓이는

$$12\cdot16-2\cdot\frac{1}{2}x(12-x)-2\cdot\frac{1}{2}x(16-x)$$
$$=2x^2-28x+192$$
$$=2(x-7)^2+94$$

이때 $0<x<12$이므로 $x=7$일 때 최솟값은 94이다.
따라서 □PQRS의 넓이의 최솟값은 94이다. 　　답 ③

0642 $\overline{BF}=a$, $\overline{DF}=b$라 하면 $\triangle ABC \backsim \triangle DFC$ (AA 닮음)이므로 　$\overline{AB}:\overline{DF}=\overline{BC}:\overline{FC}$

$20:b=10:(10-a)$ 　$\therefore b=20-2a$

변의 길이는 양수이므로 　$0<a<10$
□DEBF의 넓이는

$$ab=a(20-2a)=-2a^2+20a$$
$$=-2(a-5)^2+50 \quad \cdots ❶$$

이때 $0<a<10$이므로 $a=5$일 때 최댓값은 50이다.
따라서 $a=5$일 때 $b=10$이므로 구하는 둘레의 길이는

$$2(a+b)=30 \quad \cdots ❷$$

답 30

채점 기준	비율
❶ □DEBF의 넓이를 이차식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ □DEBF의 넓이가 최대일 때, □DEBF의 둘레의 길이를 구할 수 있다.	40 %

0643 **1st** $\overline{AB}$의 길이를 a에 대한 식으로 나타낸다.
두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면

$\overline{AB}=|\alpha-\beta|$

이때 이차방정식 $x^2-(a+5)x+4a+4=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=a+5,\ \alpha\beta=4a+4$$
$$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=(a+5)^2-4(4a+4)$$
$$=a^2-6a+9=(a-3)^2$$
$$\therefore \overline{AB}=|\alpha-\beta|=3-a\ (\because 0<a<3)$$

2nd a의 값을 구한다.
점 C의 y좌표는 $4a+4$이고 △ABC의 넓이가 $\frac{7}{2}$이므로

$$\frac{1}{2}(3-a)(4a+4)=\frac{7}{2} \quad a>0\text{이므로 } 4a+4>0$$
$$4a^2-8a-5=0, \qquad (2a+1)(2a-5)=0$$
$$\therefore a=\frac{5}{2}\ (\because 0<a<3)$$

답 $\frac{5}{2}$

다른 풀이 이차방정식 $x^2-(a+5)x+4a+4=0$에서

$x^2-(a+5)x+4(a+1)=0,\qquad (x-4)\{x-(a+1)\}=0$
$\therefore x=4$ 또는 $x=a+1$

$0<a<3$에서 $1<a+1<4$이므로

$\overline{AB}=4-(a+1)=3-a$

0644 **1st** 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 위치 관계를 파악한다.
ㄱ. 이차방정식 $x^2-5x+7=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-5)^2-4\cdot7=-3<0$

이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

2nd 이차함수 $y=f(x)-n$의 그래프와 x축의 위치 관계를 파악한다.
ㄴ. 이차방정식 $f(x)-n=0$, 즉 $x^2-5x+7-n=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-5)^2-4(7-n)=4n-3$

이때 모든 자연수 n에 대하여 $4n-3>0$, 즉 $D_2>0$이므로 이차함수 $y=f(x)-n$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

3rd $\alpha+\beta$의 값을 구한다.
ㄷ. 이차방정식 $f(x)-k=0$, 즉 $x^2-5x+7-k=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$

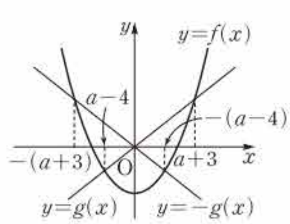
따라서 $\alpha+\beta$의 값은 k의 값에 관계없이 항상 일정하다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 　　답 ⑤

0645 **1st** 방정식 $|f(x)|=|g(x)|$의 실근을 a에 대한 식으로 나타낸다.
방정식 $|f(x)|=|g(x)|$에서
(i) $f(x)=g(x)$일 때,
이 방정식의 실근은 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표와 같으므로

$$x=a-4 \text{ 또는 } x=a+3 \quad \cdots ❶$$

(ii) $f(x)=-g(x)$일 때,
이 방정식의 실근은 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-g(x)$의 교점의 x좌표와 같으므로 오른쪽 그림에서



$x=-(a+3)$ 또는
$x=-(a-4)$
$$\therefore x=-a-3 \text{ 또는 } x=-a+4 \quad \cdots ❷$$

2nd 모든 실수 a의 값의 곱을 구한다.

(i), (ii)에서 방정식 $|f(x)|=|g(x)|$를 만족시키는 서로 다른 모든 실근의 제곱의 합은

$$\begin{aligned}&(-a-3)^2+(a-4)^2+(-a+4)^2+(a+3)^2\\&=2(a+3)^2+2(a-4)^2\\&=2(a^2+6a+9)+2(a^2-8a+16)\\&=4a^2-4a+50\end{aligned}$$

즉 $4a^2-4a+50=60$이므로

$\underline{2a^2-2a-5=0}$

판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=(-1)^2-2\cdot(-5)=11>0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 곱은 $\quad -\frac{5}{2}$ ⋯ ❸

답 $-\frac{5}{2}$

채점 기준	비율
❶ 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근을 구할 수 있다.	20 %
❷ 방정식 $f(x)=-g(x)$의 실근을 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 실수 a의 값의 곱을 구할 수 있다.	40 %

참고 직선 $y=g(x)$가 원점을 지나는 직선이므로 $g(x)=kx$ $(k>0)$라 하면 $-g(x)=-kx$

이때 두 직선 $y=kx$, $y=-kx$는 y축에 대하여 대칭이므로 두 직선 $y=g(x)$, $y=-g(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.

0646

1st $f(x)$의 식을 세운다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 접하는 점의 x좌표가 α이므로 이차방정식 $f(x)=h(x)$, 즉 $f(x)-h(x)=0$은 중근 $x=\alpha$를 갖는다. 이때 조건 (가)에서 $f(x)$의 x^2의 계수는 1이므로

$f(x)-h(x)=(x-\alpha)^2$

$\therefore f(x)=(x-\alpha)^2+h(x)$

2nd $g(x)$의 식을 세운다.

두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 접하는 점의 x좌표가 β이므로 이차방정식 $g(x)=h(x)$, 즉 $g(x)-h(x)=0$은 중근 $x=\beta$를 갖는다. 이때 조건 (가)에서 $g(x)$의 x^2의 계수는 4이므로

$g(x)-h(x)=4(x-\beta)^2$

$\therefore g(x)=4(x-\beta)^2+h(x)$

3rd 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표를 구한다.

조건 (나)에서 $\alpha:\beta=1:2$이므로

$\beta=2\alpha$

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표는 $f(x)=g(x)$에서

$(x-\alpha)^2+h(x)=4(x-2\alpha)^2+h(x)$

$3x^2-14\alpha x+15\alpha^2=0$

$(3x-5\alpha)(x-3\alpha)=0$

$\therefore x=\frac{5}{3}\alpha$ 또는 $x=3\alpha$

4th $\frac{t}{\alpha}$의 값을 구한다.

$\alpha<t<\beta$에서 $\alpha<t<2\alpha$이므로 $\quad t=\frac{5}{3}\alpha$

$\therefore \frac{t}{\alpha}=\frac{5}{3}$

답 ④

0647

1st $f(x)$를 구한다.

$f(x)=a(x-1)(x-4)$ $(a<0)$라 하자.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 접하므로 이차방정식

$a(x-1)(x-4)=\frac{1}{2}x$,

즉 $ax^2-\left(5a+\frac{1}{2}\right)x+4a=0$ ⋯⋯ ㉠

의 판별식을 D라 하면

$D=\left\{-\left(5a+\frac{1}{2}\right)\right\}^2-4\cdot a\cdot 4a=0$

$5a+\frac{1}{2}=\pm 4a$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{1}{18}$

(i) $a=-\frac{1}{2}$일 때,

이차방정식 ㉠, 즉 $-\frac{1}{2}x^2+2x-2=0$에서

$x^2-4x+4=0, \quad (x-2)^2=0$

$\therefore x=2$

(ii) $a=-\frac{1}{18}$일 때,

이차방정식 ㉠, 즉 $-\frac{1}{18}x^2-\frac{2}{9}x-\frac{2}{9}=0$에서

$x^2+4x+4=0, \quad (x+2)^2=0 \quad \therefore x=-2$

이때 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 $\underline{제 1 사분면에서 접하므로}$ 조건을 만족시키지 않는다.

교점의 x좌표가 양수이다.

(i), (ii)에서 $\quad a=-\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)(x-4)$

2nd $\alpha+\beta$의 값을 구한다.

이차방정식 $f(x)=\frac{1}{4}x$에서

$-\frac{1}{2}(x-1)(x-4)=\frac{1}{4}x$

$\therefore 2x^2-9x+8=0$

따라서 이 이차방정식의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

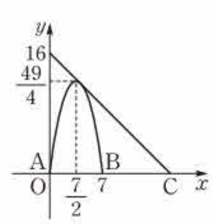
$\alpha+\beta=\frac{9}{2}$

답 $\frac{9}{2}$

0648

1st 조형물의 모양을 나타내는 이차함수의 식을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 직선 AB를 x축, 조명을 y축이라 하자.



조형물의 모양을 나타내는 이차함수의 식을 $y=ax(x-7)$ $(0\le x\le 7,\ a<0)$이라 하면 이 그래프가 점 $\left(\frac{7}{2},\ \frac{49}{4}\right)$를 지나므로

$a\cdot\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{49}{4}$

$\therefore a=-1$

즉 조형물의 모양을 나타내는 이차함수의 식은

$y=-x(x-7)$

$=-x^2+7x\ (0\le x\le 7)$

2nd 조형물에 접하는 불빛을 나타내는 직선의 방정식을 구한다.

이 조형물에 접하는 불빛을 나타내는 직선의 방정식을 $y=mx+16\ (m<0)$이라 하고 이차방정식

$-x^2+7x=mx+16$,

즉 $x^2+(m-7)x+16=0$

의 판별식을 D라 하면

$D=(m-7)^2-4\cdot 16=0$

$m^2-14m-15=0$

$(m+1)(m-15)=0$

$\therefore\ m=-1\ (\because\ m<0)$

따라서 조형물에 접하는 불빛을 나타내는 직선의 방정식은

$y=-x+16$

3rd 두 지점 A, C 사이의 거리를 구한다.

이 직선의 x절편은 16이므로 두 지점 A, C 사이의 거리는 16 m 이다.

답 16 m

0649 **1st** △ABC의 넓이가 최대일 조건을 구한다.

두 점 A, B를 지나는 직선과 평행한 직선이 점 C에서 이차함수 $y=-x^2+6x-5$의 그래프에 접할 때 △ABC의 넓이는 최대가 된다.

2nd 직선의 방정식을 구한다.

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{3-0}{4-1}=1$이므로 기울기가 1이고 이차함수의 그래프에 접하는 직선의 방정식을 $y=x+k$ (k는 실수)라 하자.

이차방정식

$-x^2+6x-5=x+k$,

즉 $x^2-5x+k+5=0$ ...... ㉠

의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4(k+5)=0$

$-4k+5=0$

$\therefore\ k=\frac{5}{4}$

즉 직선의 방정식은 $y=x+\frac{5}{4}$이다.

3rd $\frac{b}{a}$의 값을 구한다.

이차방정식 ㉠, 즉 $x^2-5x+\frac{5}{4}+5=0$에서

$4x^2-20x+25=0$

$(2x-5)^2=0$

$\therefore\ x=\frac{5}{2}$

따라서 $a=\frac{5}{2}$이고 점 C$(a,\ b)$는 직선 $y=x+\frac{5}{4}$ 위의 점이므로

$b=\frac{5}{2}+\frac{5}{4}=\frac{15}{4}$

$\therefore\ \frac{b}{a}=\frac{3}{2}$

답 ③

0650

이차함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(4)$의 값은?

(가) 모든 실수 x에 대하여 ❶ $f(1-x)=f(1+x)$이다.
$y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이다.

(나) ❷ $0\le x\le 3$에서 $f(x)$의 최댓값은 4이고 최솟값은 0이다.

(다) ❸ 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(1,\ -1)$을 지나는 직선과 항상 만난다.

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

❶에서 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$임을 이용하여 $f(x)$의 식을 세운다. 최고차항의 계수가 양수와 음수인 경우로 나누어 ❷, ❸을 모두 만족시킬 때의 $f(4)$의 값을 구한다.

1st $f(x)$의 식을 세운다.

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이므로

$f(x)=a(x-1)^2+b$ (a, b는 상수)

라 하자.

2nd 최고차항의 계수가 양수와 음수인 경우로 나누어 $f(x)$를 구한다.

(i) $a>0$일 때,

조건 (나)에서 $f(3)=4$, $f(1)=0$이므로

$4a+b=4$, $b=0$

$\therefore\ a=1$, $b=0$

$\therefore\ f(x)=(x-1)^2$

이때 함수 $y=(x-1)^2$의 그래프는 직선 $y=-1$과 만나지 않으므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때,

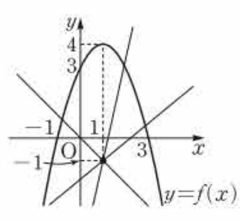
조건 (나)에서 $f(1)=4$, $f(3)=0$이므로

$b=4$, $4a+b=0$

$\therefore\ a=-1$, $b=4$

$\therefore\ f(x)=-(x-1)^2+4$

이때 함수 $y=-(x-1)^2+4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 $(1,\ -1)$을 지나는 직선과 항상 만난다.



3rd $f(4)$의 값을 구한다.

(i), (ii)에서

$f(x)=-(x-1)^2+4$

$\therefore\ f(4)=-5$

답 ①

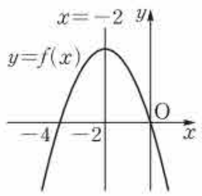
0651 **1st** $f(0)$의 값과 $-1\le x\le 1$에서 $f(x)$의 최솟값을 구한다.

ㄱ, ㄴ. 조건 (나)에서 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le f(-2)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록하고, $x=-2$일 때 최댓값을 갖는다.

즉 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=-2$에 대하여 대칭이고 조건 ㈎에서 $f(-4)=0$이므로

$f(0)=0$

따라서 $-1\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)$이다.



2nd p의 값의 범위를 나누어 함수 $g(p)$를 구한 후 $f(-2)$의 값을 구한다.

ㄷ. $f(x)=ax(x+4)\ (a<0)$라 하면

(i) $p=-3$일 때, $f(p)=f(p+2)$를 만족시키는 p의 값이 -3이다.

$f(p)=f(p+2)$이므로

$g(p)=f(p)$

(ii) $p<-3$일 때,

$f(p)<f(p+2)$이므로

$g(p)=f(p)$

(iii) $p>-3$일 때,

$f(p)>f(p+2)$이므로

$g(p)=f(p+2)$

이상에서

$$g(p)=\begin{cases} f(p) & (p\le -3) \\ f(p+2) & (p>-3) \end{cases}$$

$p\le -3$인 모든 실수 p에 대하여 $g(p)\le f(-3)$이고 $p>-3$인 모든 실수 p에 대하여 $g(p)<f(-1)=f(-3)$이므로 $g(p)$의 최댓값은 $f(-3)$이다.

즉 $f(-3)=1$이므로

$-3a=1 \quad \therefore a=-\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{3}x(x+4)$이므로

$f(-2)=\frac{4}{3}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0652

실수 a에 대하여 이차함수 ❶$f(x)=(x-a)^2$이 다음 조건을 만족시킨다.
꼭짓점의 x좌표가 a이고 아래로 볼록한 그래프이다.

> ㈎ ❷$2\le x\le 10$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이다.
> ㈏ ❸$2\le x\le 6$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 $6\le x\le 10$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 같다.

$f(-1)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① 34 ② 35 ③ 36 ④ 37 ⑤ 38

❶, ❷에서 a의 값의 범위를 파악한다. ❸에서 a의 값에 따라 $f(x)$의 최댓값과 최솟값이 정해지므로 a의 값의 범위를 나누어 ❸을 만족시키는지 확인한다.

1st 조건 ㈎에서 a의 값의 범위를 구한다.

이차함수 $f(x)=(x-a)^2$은 $x=a$일 때 최솟값 0을 가지므로 조건 ㈎에서

$2\le a\le 10$

2nd a의 값의 범위를 나누어 조건 ㈏를 만족시키는 a의 값의 범위를 구한다.

(i) $a=2$일 때,

$2\le x\le 6$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(6)$

$6\le x\le 10$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(6)$

즉 조건 ㈏를 만족시킨다.

(ii) $2<a<4$일 때,

$2\le x\le 6$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(6)$

$6\le x\le 10$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(6)$

즉 조건 ㈏를 만족시킨다.

(iii) $a=4$일 때,

$2\le x\le 6$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(2)$ 또는 $f(6)$

$6\le x\le 10$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(6)$

$f(x)$의 그래프는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이므로 $f(2)=f(6)$

즉 조건 ㈏를 만족시킨다.

(iv) $4<a\le 6$일 때,

$2\le x\le 6$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(2)$

$6\le x\le 10$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(6)$

즉 조건 ㈏를 만족시키지 않는다.

(v) $6<a\le 10$일 때,

$2\le x\le 6$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(2)$

$6\le x\le 10$에서 $f(x)$의 최솟값은 0

이때 $f(2)>0$이므로 조건 ㈏를 만족시키지 않는다.

이상에서 $2\le a\le 4$ …… ㉠

3rd $M+m$의 값을 구한다.

$f(-1)=(-1-a)^2=(a+1)^2$

이때 ㉠에서 $3\le a+1\le 5 \quad \therefore 9\le (a+1)^2\le 25$

따라서 $9\le f(-1)\le 25$이므로 $M=25$, $m=9$

$\therefore M+m=34$ 답 ①

0653

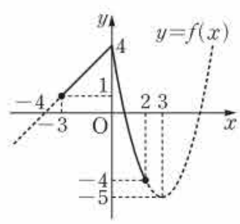
1st $-3\le x\le 2$에서 $f(x)$의 값의 범위를 구한다.

$x\ge 0$에서

$f(x)=x^2-6x+4=(x-3)^2-5$

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $-3\le x\le 2$에서

$-4\le f(x)\le 4$



2nd M과 k의 값을 구한다.

$f(x)=t$로 놓으면

$h(x)=t^2-2t-1$

$=(t-1)^2-2\ (-4\le t\le 4)$

따라서 함수 $h(x)$는 $t=-4$에서 최댓값 23을 가지므로

$M=23$

$t=-4$, 즉 $f(x)=-4$일 때 $x=2$이므로

$k=2$

3rd $M-k$의 값을 구한다.

$M-k=21$ 답 21

0654 **1st** a의 값의 범위를 구한다.

점 A는 주어진 이차함수의 그래프와 y축의 교점이므로

$\quad A(0,\ 4)$

두 점 B, C는 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점이므로

$\quad x^2-5x+4=0, \qquad (x-1)(x-4)=0$

$\quad \therefore\ x=1$ 또는 $x=4$

$\quad \therefore\ B(1,\ 0),\ C(4,\ 0)$

이때 점 $P(a,\ b)$가 점 $A(0,\ 4)$에서 점 $C(4,\ 0)$까지 움직이므로

$\quad 0\le a\le 4$

2nd $7a+b+2$를 a에 대한 식으로 나타낸다.

점 $P(a,\ b)$가 이차함수 $y=x^2-5x+4$의 그래프 위의 점이므로

$\quad b=a^2-5a+4$

$$\therefore\ 7a+b+2=7a+(a^2-5a+4)+2=a^2+2a+6$$
$$=(a+1)^2+5\ (0\le a\le 4)$$

3rd $7a+b+2$의 최댓값과 최솟값의 곱을 구한다.

$a=4$일 때 최댓값은 30이고, $a=0$일 때 최솟값은 6이므로 구하는 곱은

$\quad 30\cdot 6=180$

답 180

0655 **1st** 주어진 식을 x에 대한 식으로 나타낸다.

$$(\sqrt{17+3x}+\sqrt{11+4y})^2$$
$$=28+3x+4y+2\sqrt{(17+3x)(11+4y)}$$

이때 $3x+4y=8$에서 $4y=8-3x$이므로

$$(\text{주어진 식})=28+8+2\sqrt{(17+3x)(19-3x)}$$
$$=36+2\sqrt{-9x^2+6x+323}$$
$$=36+2\sqrt{-9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+324} \quad \cdots ❶$$

2nd 주어진 식의 최댓값을 구한다.

$x=\frac{1}{3}$일 때 최댓값은

$$36+2\sqrt{324}=36+2\cdot 18=72 \quad \cdots ❷$$

답 72

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	70 %
❷ 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

0656 **1st** $\overline{BQ}=x$라 하고 $\overline{PQ}$, $\overline{QC}$, $\overline{PR}$의 길이를 x에 대한 식으로 나타낸다.

$\overline{BQ}=x$라 하면 $\quad \overline{PQ}=x,\ \overline{BP}=\sqrt{2}x$

△BQP는 직각이등변삼각형이다.

$\overline{AB}=6$이므로 $\quad \overline{BC}=6\sqrt{2}$

$\quad \therefore\ \overline{QC}=6\sqrt{2}-x$

$\overline{AP}=6-\sqrt{2}x$이므로

$\quad \overline{PR}=\sqrt{2}(6-\sqrt{2}x)=6\sqrt{2}-2x$

△APR∽△ABC (AA 닮음)이므로 △APR는 직각이등변삼각형이다.

2nd □PQCR의 넓이의 최댓값을 구한다.

□PQCR의 넓이는

$$\frac{1}{2}x(6\sqrt{2}-2x+6\sqrt{2}-x)=6\sqrt{2}x-\frac{3}{2}x^2$$
$$=-\frac{3}{2}(x-2\sqrt{2})^2+12$$

이때 $0<x<3\sqrt{2}$이므로 $x=2\sqrt{2}$일 때 최댓값은 12이다.

따라서 □PQCR의 넓이의 최댓값은 12이다.

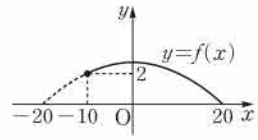
답 12

참고 점 P는 꼭짓점 A와 꼭짓점 B가 아니므로

$\quad 0<\overline{BQ}<\frac{1}{2}\overline{BC}, \qquad 0<x<\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}$

$\quad \therefore\ 0<x<3\sqrt{2}$

0657 **1st** 물 로켓이 날아가는 모양을 나타내는 이차함수의 식을 구한다.



주어진 그림을 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 나타내고, 물 로켓이 날아가는 모양을 나타내는 이차함수의 식을 $y=f(x)$라 하면 축의 방정식은 $x=0$, x절편은 -20, 20이므로

$$f(x)=a(x+20)(x-20)\ (a<0) \quad \cdots ❶$$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-10,\ 2)$를 지나므로

물 로켓을 쏘아 올린 위치

$$-300a=2 \qquad \therefore\ a=-\frac{1}{150}$$
$$\therefore\ f(x)=-\frac{1}{150}(x+20)(x-20)$$
$$=-\frac{1}{150}x^2+\frac{8}{3} \quad \cdots ❷$$

2nd 지면으로부터의 최고 높이를 구한다.

$x=0$일 때 최댓값은 $\frac{8}{3}$이므로 물 로켓의 지면으로부터의 최고 높이는 $\frac{8}{3}$ m이다. $\quad \cdots ❸$

답 $\frac{8}{3}$ m

채점 기준	비율
❶ 이차함수의 식을 세울 수 있다.	30 %
❷ 이차함수를 구할 수 있다.	50 %
❸ 지면으로부터의 최고 높이를 구할 수 있다.	20 %

06 여러 가지 방정식

0658 $x^3-8=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

답 $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

0659 $x^3+4x^2-x-4=0$의 좌변을 인수분해하면

$x^2(x+4)-(x+4)=0,\qquad (x+4)(x^2-1)=0$

$(x+4)(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

답 $x=-4$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

0660 $x^4-27x=0$의 좌변을 인수분해하면

$x(x^3-27)=0,\qquad x(x-3)(x^2+3x+9)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

답 $x=0$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

0661 $x^4-x^3+x-1=0$의 좌변을 인수분해하면

$x^3(x-1)+(x-1)=0,\qquad (x^3+1)(x-1)=0$

$(x+1)(x-1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

답 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

0662 $P(x)=x^3-2x^2+1$이라 하면

$P(1)=1-2+1=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ & & 1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2-x-1)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2-x-1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

답 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

SSEN 특강 인수 정리

다항식 $P(x)$에 대하여 $P(a)=0$이면 $P(x)$는 일차식 $x-a$로 나누어떨어진다.

0663 $P(x)=2x^3-x^2-3x+2$라 하면

$P(1)=2-1-3+2=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ & & 2 & 1 & -2 \\ \hline & 2 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(2x^2+x-2)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(2x^2+x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$

답 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$

0664 $P(x)=x^4+5x^3+5x^2-5x-6$이라 하면

$P(1)=1+5+5-5-6=0,$

$P(-1)=1-5+5+5-6=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 5 & 5 & -5 & -6 \\ & & 1 & 6 & 11 & 6 \\ \hline -1 & 1 & 6 & 11 & 6 & \boxed{0} \\ & & -1 & -5 & -6 & \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x-1)(x^2+5x+6)$

$=(x+3)(x+2)(x+1)(x-1)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+3)(x+2)(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

답 $x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

0665 $P(x)=x^4-3x^3-x^2+5x+2$라 하면

$P(-1)=1+3-1-5+2=0,$

$P(2)=16-24-4+10+2=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -3 & -1 & 5 & 2 \\ & & -1 & 4 & -3 & -2 \\ \hline 2 & 1 & -4 & 3 & 2 & \boxed{0} \\ & & 2 & -4 & -2 & \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x-2)(x^2-2x-1)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(x^2-2x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

답 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

0666 방정식 $x^3+ax^2+7x+15=0$의 한 근이 3이므로

$27+9a+21+15=0,\qquad 9a+63=0\qquad \therefore a=-7$

즉 주어진 방정식은 $x^3-7x^2+7x+15=0$이므로

$P(x)=x^3-7x^2+7x+15$라 하면 $\quad P(3)=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -7 & 7 & 15 \\ & & 3 & -12 & -15 \\ \hline & 1 & -4 & -5 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-3)(x^2-4x-5)$

$=(x+1)(x-3)(x-5)$

따라서 주어진 방정식은 $\quad (x+1)(x-3)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=5$

답 $a=-7$, 나머지 두 근: -1, 5

0667 $x^2-x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-3X+2=0$, $(X-1)(X-2)=0$

$\therefore X=1$ 또는 $X=2$

(i) $X=1$일 때, $x^2-x-1=0$이므로

$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

(ii) $X=2$일 때, $x^2-x-2=0$이므로

$(x+1)(x-2)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에서 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

답 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

0668 $x^2+2x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-X-6=0$, $(X+2)(X-3)=0$

$\therefore X=-2$ 또는 $X=3$

(i) $X=-2$일 때, $x^2+2x+2=0$이므로

$x=-1\pm i$

(ii) $X=3$일 때, $x^2+2x-3=0$이므로

$(x+3)(x-1)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서 $x=-3$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-1\pm i$

답 $x=-3$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-1\pm i$

0669 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-2X+1=0$, $(X-1)^2=0$ $\therefore X=1$

따라서 $x^2=1$이므로 $x=\pm1$ 답 $x=\pm1$

0670 $x^4+3x^2+4=0$에서 $(x^4+4x^2+4)-x^2=0$

$(x^2+2)^2-x^2=0$, $(x^2+x+2)(x^2-x+2)=0$

$x^2+x+2=0$ 또는 $x^2-x+2=0$

$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

답 $x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

0671 $x^4-7x^3+12x^2-7x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x=0$을 주어진 방정식에 대입하면 등식이 성립하지 않으므로 $x\neq0$

$x^2-7x+12-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$x^2+\frac{1}{x^2}-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+12=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+10=0$

이때 $x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2-7X+10=0$, $(X-2)(X-5)=0$

$\therefore X=2$ 또는 $X=5$

(i) $X=2$일 때, $x+\frac{1}{x}=2$에서

$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$ $\therefore x=1$

(ii) $X=5$일 때, $x+\frac{1}{x}=5$에서

$x^2-5x+1=0$ $\therefore x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

(i), (ii)에서 $x=1$ 또는 $x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

답 $x=1$ 또는 $x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

0672 답 (1) -4 (2) 3 (3) 5

0673 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=1$

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=1^2-2\cdot2=-3$

(2) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{2}{1}=2$

(3) $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=\alpha\beta\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha+\beta+\gamma+1$

$=1+2+1+1=5$

답 (1) -3 (2) 2 (3) 5

0674 세 수 1, $3+\sqrt{2}$, $3-\sqrt{2}$를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-\{1+(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})\}x^2$

$+\{1\cdot(3+\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})\cdot1\}x$

$-1\cdot(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=0$

$\therefore x^3-7x^2+13x-7=0$ 답 $x^3-7x^2+13x-7=0$

0675 세 수 -3, $1+2i$, $1-2i$를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-\{-3+(1+2i)+(1-2i)\}x^2$

$+\{(-3)\cdot(1+2i)+(1+2i)(1-2i)+(1-2i)\cdot(-3)\}x$

$-(-3)\cdot(1+2i)(1-2i)=0$

$\therefore x^3+x^2-x+15=0$ 답 $x^3+x^2-x+15=0$

0676 주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 $1+\sqrt{2}$가 근이면 $1-\sqrt{2}$도 근이다.

따라서 주어진 삼차방정식의 세 근이 -2, $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\cdot(-2)=-a$,

$-2(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-b$

$\therefore a=5$, $b=-2$ 답 $a=5$, $b=-2$

0677 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $1+i$가 근이면 $1-i$도 근이다.

따라서 주어진 삼차방정식의 세 근이 3, $1+i$, $1-i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3(1+i)+(1+i)(1-i)+(1-i)\cdot3=a$,

$3(1+i)(1-i)=-b$

$\therefore a=8$, $b=-6$ 답 $a=8$, $b=-6$

0678 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$

$\therefore (x-1)(x^2+x+1)=0$

06 여러 가지 방정식

(1) ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로 $\qquad \omega^2+\omega+1=0$

(2), (3) 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 계수가 실수이므로 ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 이 방정식의 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$

(4) $\omega^8+\omega^4+1=(\omega^3)^2\cdot\omega^2+\omega^3\cdot\omega+1=\omega^2+\omega+1=0$

(5) $\omega^{20}+\omega^{10}=(\omega^3)^6\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega=\omega^2+\omega=-1$

(6) $\omega+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{\omega^2+1}{\omega}=\dfrac{-\omega}{\omega}=-1$

답 (1) 0 (2) -1 (3) 1 (4) 0 (5) -1 (6) -1

0679 $x^3=-1$에서 $\qquad x^3+1=0$

$\therefore (x+1)(x^2-x+1)=0$

(1) ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로 $\qquad \omega^2-\omega+1=0$

(2), (3) 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 계수가 실수이므로 ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 이 방정식의 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$

(4) $\omega^8+\omega^4+1=(\omega^3)^2\cdot\omega^2+\omega^3\cdot\omega+1=\omega^2-\omega+1=0$

(5) $\omega^{20}+\omega^{10}=(\omega^3)^6\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega=\omega^2-\omega=-1$

(6) $\omega+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{\omega^2+1}{\omega}=\dfrac{\omega}{\omega}=1$

답 (1) 0 (2) 1 (3) 1 (4) 0 (5) -1 (6) 1

0680 $\begin{cases} x-y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\qquad y=x-2 \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(x-2)^2=20, \qquad x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

$x=-2$를 ㉢에 대입하면 $\qquad y=-4$

$x=4$를 ㉢에 대입하면 $\qquad y=2$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

0681 $\begin{cases} x+y=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=13 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\qquad y=-x+4 \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+x(-x+4)+(-x+4)^2=13$

$x^2-4x+3=0, \qquad (x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

$x=1$을 ㉢에 대입하면 $\qquad y=3$

$x=3$을 ㉢에 대입하면 $\qquad y=1$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

다른 풀이 $x^2+xy+y^2=13$에서 $\qquad (x+y)^2-xy=13$

$x+y=4$이므로 $\qquad 4^2-xy=13 \qquad \therefore xy=3$

즉 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-4t+3=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-3)=0 \qquad \therefore t=1$ 또는 $t=3$

따라서 구하는 해는 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

0682 $\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+y^2=9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\qquad (x+y)(x-2y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$2(-y)^2+y^2=9, \qquad 3y^2=9$

$y^2=3 \qquad \therefore y=\pm\sqrt{3}$

$\therefore x=\pm\sqrt{3},\ y=\mp\sqrt{3}$ (복호동순)

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$2(2y)^2+y^2=9, \qquad 9y^2=9$

$y^2=1 \qquad \therefore y=\pm1$

$\therefore x=\pm2,\ y=\pm1$ (복호동순)

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

0683 $\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+3y^2=15 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\qquad (x+y)(x-y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=y$

(i) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$(-y)^2+(-y)\cdot y+3y^2=15, \qquad 3y^2=15$

$y^2=5 \qquad \therefore y=\pm\sqrt{5}$

$\therefore x=\pm\sqrt{5},\ y=\mp\sqrt{5}$ (복호동순)

(ii) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+y\cdot y+3y^2=15, \qquad 5y^2=15$

$y^2=3 \qquad \therefore y=\pm\sqrt{3}$

$\therefore x=\pm\sqrt{3},\ y=\pm\sqrt{3}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

0684 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-3t-10=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t-5)=0 \qquad \therefore t=-2$ 또는 $t=5$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$

0685 $x-xy+y=5$에서 $x+y=-1$이므로

$-xy-1=5 \qquad \therefore xy=-6$

즉 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+t-6=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t-2)=0 \qquad \therefore t=-3$ 또는 $t=2$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$ 　　답 $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$

0686 $2x+3y=16$에서 $\quad y=\dfrac{16-2x}{3}$

y가 자연수이므로 $\quad \dfrac{16-2x}{3} \geq 1 \qquad \therefore x \leq \dfrac{13}{2}$

x가 자연수이므로 $\quad x=1, 2, 3, 4, 5, 6$

x	1	2	3	4	5	6
y	$\frac{14}{3}$	4	$\frac{10}{3}$	$\frac{8}{3}$	2	$\frac{4}{3}$

위의 표에서 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(2, 4)$, $(5, 2)$ 　　답 $(2, 4)$, $(5, 2)$

0687 x, y가 정수이므로

(i) $x-1=1$, $y-2=5$일 때, $\quad x=2$, $y=7$

(ii) $x-1=5$, $y-2=1$일 때, $\quad x=6$, $y=3$

(iii) $x-1=-1$, $y-2=-5$일 때, $\quad x=0$, $y=-3$

(iv) $x-1=-5$, $y-2=-1$일 때, $\quad x=-4$, $y=1$

이상에서 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(-4, 1)$, $(0, -3)$, $(2, 7)$, $(6, 3)$

답 $(-4, 1)$, $(0, -3)$, $(2, 7)$, $(6, 3)$

0688 $x^2+y^2+4x-6y+13=0$에서

$(x^2+4x+4)+(y^2-6y+9)=0$

$(x+2)^2+(y-3)^2=0$

x, y는 실수이므로 $\quad x+2=0$, $y-3=0$

$\therefore x=-2$, $y=3$ 　　답 $x=-2$, $y=3$

유형 01 삼차방정식과 사차방정식의 풀이

집중 공략 본책 102쪽

방정식 $P(x)=0$은 $P(x)$를 인수분해한 후

$ABC=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$ 또는 $C=0$

임을 이용하여 푼다. 이때 $P(x)$의 인수분해는 다음과 같은 방법으로 한다.

① 공통인수로 묶어 인수분해한다.

② 인수 정리와 조립제법을 이용하여 인수분해한다.

0689 $x^3-2x^2-x+2=0$에서

$x^2(x-2)-(x-2)=0, \qquad (x^2-1)(x-2)=0$

$(x+1)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 가장 큰 근은 2, 가장 작은 근은 -1이므로

$\alpha=2$, $\beta=-1$

$\therefore \alpha-\beta=3$ 　　답 ③

0690 $P(x)=x^3-3x^2+5x-3$이라 하면

$P(1)=1-3+5-3=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -3 & 5 & -3 \\ & & 1 & -2 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2-2x+3)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2-2x+3)=0$ 　　··· ❶

$\therefore x=1$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}i$

즉 $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=2$이므로 　　··· ❷

$\alpha-\beta+\gamma=2$ 　　··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	60 %
❷ α, β, γ의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\alpha-\beta+\gamma$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0691 $P(x)=x^4+3x^3+3x^2-x-6$이라 하면

$P(1)=1+3+3-1-6=0$,

$P(-2)=16-24+12+2-6=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & 3 & 3 & -1 & -6 \\ & & 1 & 4 & 7 & 6 \\ \hline -2 & 1 & 4 & 7 & 6 & \boxed{0} \\ & & -2 & -4 & -6 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+2)(x-1)(x^2+2x+3)$

따라서 방정식 $P(x)=0$의 근은

$x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{2}i$

이므로 모든 실근의 합은

$-2+1=-1$ 　　답 ②

0692 $P(x)=x^4-2x^2-3x-2$라 하면

$P(-1)=1-2+3-2=0$,

$P(2)=16-8-6-2=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc} -1 & 1 & 0 & -2 & -3 & -2 \\ & & -1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 & -1 & -1 & -2 & \boxed{0} \\ & & 2 & 2 & 2 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x-2)(x^2+x+1)$

이때 방정식 $P(x)=0$의 두 허근 α, β는 방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-1)^2-2\cdot1=-1$ 　　답 -1

0693 $P(x)=x^4+4x^3-x^2-16x-12$라 하면

$P(-1)=1-4-1+16-12=0$,

$P(2)=16+32-4-32-12=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 4 & -1 & -16 & -12 \\ & & -1 & -3 & 4 & 12 \\ \hline 2 & 1 & 3 & -4 & -12 & \boxed{0} \\ & & 2 & 10 & 12 & \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x-2)(x^2+5x+6)$

$=(x+3)(x+2)(x+1)(x-2)$

따라서 방정식 $P(x)=0$의 근은

$x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$

$\therefore (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)$

$=(1+3)\cdot(1+2)\cdot(1+1)\cdot(1-2)$

$=-24$ 답 ②

다른 풀이 사차방정식 $x^4+4x^3-x^2-16x-12=0$의 네 근이 α, β, γ, δ이므로

$x^4+4x^3-x^2-16x-12=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+4-1-16-12=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)$

$\therefore (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)=-24$

유형 02 공통부분이 있는 사차방정식의 풀이 본책 102쪽

방정식에 공통부분이 있으면 공통부분을 한 문자로 치환하여 그 문자에 대한 방정식으로 변형한 후 인수분해하여 푼다.

0694 $x^2-3x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-2X-8=0$, $(X+2)(X-4)=0$

$\therefore X=-2$ 또는 $X=4$

(i) $X=-2$일 때, $x^2-3x+2=0$이므로

$(x-1)(x-2)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=2$

(ii) $X=4$일 때, $x^2-3x-4=0$이므로

$(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

(i), (ii)에서 구하는 합은

$1+2+4=7$ 답 ③

0695 $x^2+x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X+1)^2-5X-11=0$, $X^2-3X-10=0$

$(X+2)(X-5)=0$

$\therefore X=-2$ 또는 $X=5$

(i) $X=-2$일 때, $x^2+x+2=0$이므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=1^2-4\cdot1\cdot2=-7<0$

즉 이 방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=5$일 때, $x^2+x-5=0$이므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=1^2-4\cdot1\cdot(-5)=21>0$

즉 이 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근은 방정식 $x^2+x-5=0$의 근이고 두 허근은 방정식 $x^2+x+2=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=-5$, $b=-1$ $\therefore b-a=4$ 답 4

0696 $x^2-x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X+2)(X-1)-4=0$, $X^2+X-6=0$

$(X+3)(X-2)=0$ $\therefore X=-3$ 또는 $X=2$ ⋯ ❶

(i) $X=-3$일 때, $x^2-x+3=0$이므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-1)^2-4\cdot1\cdot3=-11<0$

즉 이 방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다. ⋯ ❷

(ii) $X=2$일 때, $x^2-x-2=0$이므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)=9>0$

즉 이 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다. ⋯ ❸

(i), (ii)에서 α, β는 이차방정식 $x^2-x+3=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=3$

또 $\overline{\alpha}=\beta$, $\overline{\beta}=\alpha$이므로 계수가 실수인 이차방정식의 한 허근이 α이면 $\overline{\alpha}$도 근이므로 α와 β는 서로 켤레복소수이다.

$\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}=2\alpha\beta=6$ ⋯ ❹

답 6

채점 기준	비율
❶ $x^2-x=X$로 놓고 X에 대한 이차방정식을 풀 수 있다.	30 %
❷ $X=-3$일 때, 근을 판별할 수 있다.	20 %
❸ $X=2$일 때, 근을 판별할 수 있다.	20 %
❹ $\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0697 $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)+55=0$에서

$\{(x-1)(x+5)\}\{(x-3)(x+7)\}+55=0$

$(x^2+4x-5)(x^2+4x-21)+55=0$ 공통부분이 생기도록 두 개씩 짝을 지어 곱한다.

이때 $x^2+4x=X$로 놓으면

$(X-5)(X-21)+55=0$, $X^2-26X+160=0$

$(X-10)(X-16)=0$ $\therefore X=10$ 또는 $X=16$

(i) $X=10$일 때, $x^2+4x-10=0$이고 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 가지므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 곱은 -10

(ii) $X=16$일 때, $x^2+4x-16=0$이고 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 가지므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 곱은 -16

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 실근의 곱은

$-10\cdot(-16)=160$ 답 ⑤

참고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 상수)에서 $ac<0$이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

유형 03 $x^4+ax^2+b=0$ **꼴의 방정식의 풀이** 본책 103쪽

① $x^2=X$로 치환한 후 좌변을 인수분해하여 푼다.
② $(x^2+A)^2-(Bx)^2=0$ 꼴로 변형한 후 좌변을 인수분해하여 푼다.

0698 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-5X+4=0,\quad (X-1)(X-4)=0$

$\therefore X=1$ 또는 $X=4$

즉 $x^2=1$ 또는 $x^2=4$이므로

$x=\pm1$ 또는 $x=\pm2$

$\therefore |\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|=|1|+|-1|+|2|+|-2|$
$=6$

답 6

0699 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+2X-15=0,\quad (X+5)(X-3)=0$

$\therefore X=-5$ 또는 $X=3$

즉 $x^2=-5$ 또는 $x^2=3$이므로

$x=\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

따라서 주어진 방정식의 실근은 $\pm\sqrt{3}$이므로 두 실근의 곱은

$\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3})=-3$

답 ③

0700 $x^4-12x^2+16=0$에서

$(x^4-8x^2+16)-4x^2=0,\quad (x^2-4)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x-4)(x^2-2x-4)=0$

$x^2+2x-4=0$ 또는 $x^2-2x-4=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{5}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{5}$ ··· ❶

따라서 주어진 방정식의 음의 근은 $-1-\sqrt{5}$, $1-\sqrt{5}$이므로

$\alpha+\beta=(-1-\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})=-2\sqrt{5}$ ··· ❷

답 $-2\sqrt{5}$

채점 기준	비율
❶ 사차방정식을 풀 수 있다.	70 %
❷ $\alpha+\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0701 $x^4+3x^2+36=0$에서

$(x^4+12x^2+36)-9x^2=0,\quad (x^2+6)^2-(3x)^2=0$

$(x^2+3x+6)(x^2-3x+6)=0$

$x^2+3x+6=0$ 또는 $x^2-3x+6=0$

방정식 $x^2+3x+6=0$의 두 근을 α, β, 방정식 $x^2-3x+6=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=6,\ \gamma+\delta=3,\ \gamma\delta=6$

$$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}$$
$$=\frac{-3}{6}+\frac{3}{6}=0$$

답 0

0702 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-(2a+3)X+a^2+3a=0$

$X^2-(2a+3)X+a(a+3)=0$

$(X-a)\{X-(a+3)\}=0$

$\therefore X=a$ 또는 $X=a+3$, 즉 $x^2=a$ 또는 $x^2=a+3$

이때 $a<0$이므로 방정식 $x^2=a$는 서로 다른 두 허근을 갖는다.
즉 방정식 $x^2=a+3$이 실근을 가져야 하므로 $a+3\ge0$이고 주어진 사차방정식의 실근은

이차방정식 $x^2=k$ (k는 실수)는 $k\ge0$이면 실근을 갖고, $k<0$이면 허근을 갖는다.

$x=\pm\sqrt{a+3}$

이때 모든 실근의 곱이 -1이므로

$\sqrt{a+3}\cdot(-\sqrt{a+3})=-1$

$a+3=1\quad \therefore a=-2$

따라서 $x^2=-2$에서 주어진 사차방정식의 허근은

$x=\pm\sqrt{2}i$

이므로 모든 허근의 곱은

$\sqrt{2}i\cdot(-\sqrt{2}i)=2$

답 2

유형 04 $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ **꼴의 방정식의 풀이** 본책 103쪽

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ 꼴의 사차방정식은 다음과 같은 순서로 푼다.
(i) 양변을 x^2으로 나눈다.
(ii) $x+\frac{1}{x}=X$로 치환한 후 X에 대한 이차방정식을 푼다.
(iii) (ii)에서 구한 X의 값을 $x+\frac{1}{x}=X$에 대입하여 x의 값을 구한다.

0703 방정식 $x^4+5x^3-4x^2+5x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2+5x-4+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0,\quad x^2+\frac{1}{x^2}+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$$

이때 $x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+5X-6=0,\quad (X+6)(X-1)=0$

$\therefore X=-6$ 또는 $X=1$

(i) $X=-6$일 때, $x+\frac{1}{x}=-6$이므로

$x^2+6x+1=0\quad \therefore x=-3\pm2\sqrt{2}$

(ii) $X=1$일 때, $x+\frac{1}{x}=1$이므로

$x^2-x+1=0\quad \therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 실근은 $-3\pm2\sqrt{2}$이다. 답 ②

0704 방정식 $x^4+6x^3-8x^2+6x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2+6x-8+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}=0,\quad x^2+\frac{1}{x^2}+6\left(x+\frac{1}{x}\right)-8=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+6\left(x+\frac{1}{x}\right)-10=0$$

이때 $x+\frac{1}{x}=k$이므로 모든 k의 값의 곱은 이차방정식

$k^2+6k-10=0$의 두 근의 곱과 같다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 곱은 -10이다. 답 ①

0705 방정식 $x^4+4x^3-3x^2+4x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2+4x-3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0, \qquad x^2+\frac{1}{x^2}+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-5=0$$

이때 $x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+4X-5=0, \qquad (X+5)(X-1)=0$

$\therefore X=-5$ 또는 $X=1$ ⋯ ❶

(i) $X=-5$일 때, $x+\frac{1}{x}=-5$이므로

$x^2+5x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=5^2-4\cdot1\cdot1=21>0$

즉 이 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다. ⋯ ❷

(ii) $X=1$일 때, $x+\frac{1}{x}=1$이므로

$x^2-x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$

즉 이 방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다. ⋯ ❸

(i), (ii)에서 α는 방정식 $x^2+5x+1=0$의 한 실근이므로

$\alpha^2+5\alpha+1=0 \qquad \therefore \alpha+\frac{1}{\alpha}=-5$ ⋯ ❹

답 -5

채점 기준	비율
❶ $x+\frac{1}{x}=X$로 놓고 X에 대한 이차방정식을 풀 수 있다.	40 %
❷ $X=-5$일 때, 근을 판별할 수 있다.	20 %
❸ $X=1$일 때, 근을 판별할 수 있다.	20 %
❹ $\alpha+\frac{1}{\alpha}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 05 근이 주어진 삼·사차방정식

집중 공략 본책 104쪽

① 삼차방정식 $P(x)=0$의 한 근이 $\alpha \Rightarrow P(\alpha)=0$
② 사차방정식 $P(x)=0$의 두 근이 α, $\beta \Rightarrow P(\alpha)=0$, $P(\beta)=0$

0706 주어진 방정식의 한 근이 3이므로

$27-9k+3(k+2)-9=0$

$24-6k=0 \qquad \therefore k=4$

즉 주어진 방정식은 $x^3-4x^2+6x-9=0$이므로

$P(x)=x^3-4x^2+6x-9$라 하면 $\qquad P(3)=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -4 & 6 & -9 \\ & & 3 & -3 & 9 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-3)(x^2-x+3)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-3)(x^2-x+3)=0$

이때 α, β는 이차방정식 $x^2-x+3=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\qquad \alpha+\beta=1$

$\therefore k+\alpha+\beta=5$

답 ③

0707 주어진 방정식의 두 근이 -1, 4이므로

$-1-a-b-1+3b=0$에서

$-a+2b=2$ ⋯⋯ ㉠

$64-16a+4b+4+3b=0$에서

$-16a+7b=-68$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\qquad a=6$, $b=4$

즉 주어진 방정식은 $x^3-6x^2+5x+12=0$이므로

$P(x)=x^3-6x^2+5x+12$라 하면

$P(-1)=0$, $P(4)=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -6 & 5 & 12 \\ & & -1 & 7 & -12 \\ \hline 4 & 1 & -7 & 12 & \boxed{0} \\ & & 4 & -12 & \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$P(x)$
$=(x+1)(x-3)(x-4)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x-3)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=4$

즉 나머지 한 근은 3이다.

답 3

0708 주어진 방정식의 두 근이 1, -2이므로

$2+a+b-1+a=0$에서

$2a+b=-1$ ⋯⋯ ㉠

$32-8a+4b+2+a=0$에서

$-7a+4b=-34$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\qquad a=2$, $b=-5$ ⋯ ❶

즉 주어진 방정식은 $2x^4+2x^3-5x^2-x+2=0$이므로

$P(x)=2x^4+2x^3-5x^2-x+2$라 하면

$P(1)=0$, $P(-2)=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & 2 & -5 & -1 & 2 \\ & & 2 & 4 & -1 & -2 \\ \hline -2 & 2 & 4 & -1 & -2 & \boxed{0} \\ & & -4 & 0 & 2 & \\ \hline & 2 & 0 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+2)(x-1)(2x^2-1)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+2)(x-1)(2x^2-1)=0$ ⋯ ❷

즉 주어진 방정식의 나머지 두 근은 방정식 $2x^2-1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 곱은 $-\frac{1}{2}$이다. ⋯ ❸

답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	40 %
❸ 나머지 두 근의 곱을 구할 수 있다.	20 %

0709 주어진 방정식의 한 근이 α이므로

$a\alpha^3-b\alpha^2+c\alpha-d=0$ ⋯⋯ ㉠

ㄱ. ㉠의 양변에 -1을 곱하면

$-a\alpha^3+b\alpha^2-c\alpha+d=0$

$\therefore a(-\alpha)^3+b(-\alpha)^2+c(-\alpha)+d=0$

따라서 $-\alpha$는 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 근이다.

ㄴ. ㉠의 양변을 α^3으로 나누면

$a-\frac{b}{\alpha}+\frac{c}{\alpha^2}-\frac{d}{\alpha^3}=0$

$\therefore d\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^3+c\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^2+b\left(-\frac{1}{\alpha}\right)+a=0$

따라서 $-\frac{1}{\alpha}$은 $dx^3+cx^2+bx+a=0$의 근이다.

ㄷ. ㉠의 양변을 $-\alpha^3$으로 나누면

$-a+\frac{b}{\alpha}-\frac{c}{\alpha^2}+\frac{d}{\alpha^3}=0$

$\therefore d\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3-c\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+b\cdot\frac{1}{\alpha}-a=0$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$은 $dx^3-cx^2+bx-a=0$의 근이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

유형 06 삼차방정식의 근의 판별 본책 104쪽

주어진 삼차방정식을 $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)=0$ (α는 실수) 꼴로 변형한 후 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 이용한다.

0710 $P(x)=x^3-(1+2k)x+2k$라 하면

$P(1)=1-(1+2k)+2k=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -(1+2k) & 2k \\ & & 1 & 1 & -2k \\ \hline & 1 & 1 & -2k & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x^2+x-2k)$

이때 방정식 $P(x)=0$이 중근을 가지려면

(i) 방정식 $x^2+x-2k=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우

$1+1-2k=0 \quad \therefore k=1$

(ii) 방정식 $x^2+x-2k=0$이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot1\cdot(-2k)=0$

$1+8k=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{8}$

(i), (ii)에서 k의 값의 합은

$1+\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{7}{8}$ 답 $\frac{7}{8}$

0711 $P(x)=x^3-4x^2+(k+4)x-2k$라 하면

$P(2)=8-16+2(k+4)-2k=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -4 & k+4 & -2k \\ & & 2 & -4 & 2k \\ \hline & 1 & -2 & k & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(x^2-2x+k)$

이때 방정식 $P(x)=0$의 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식 $x^2-2x+k=0$이 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot k\geq0 \quad \therefore k\leq1$ 답 ④

0712 $x^3-x^2+2kx-2k=0$에서

$x^2(x-1)+2k(x-1)=0$

$\therefore (x-1)(x^2+2k)=0$ ··· ❶

이때 주어진 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+2k=0$이 두 개의 허근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=0^2-4\cdot1\cdot2k<0, \quad -8k<0 \quad \therefore k>0$ ··· ❷

따라서 정수 k의 최솟값은 1이다. ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	30 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $x^2+2k=0$에서 $\quad x^2=-2k$

이 방정식이 두 개의 허근을 가지려면

$-2k<0 \quad \therefore k>0$

0713 $P(x)=x^3-4x^2+(k+3)x-k$라 하면

$P(1)=1-4+(k+3)-k=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -4 & k+3 & -k \\ & & 1 & -3 & k \\ \hline & 1 & -3 & k & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)$

$=(x-1)(x^2-3x+k)$

이때 방정식 $P(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2-3x+k=0$이 1이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot k>0, \quad 4k<9 \quad \therefore k<\frac{9}{4}$

또 $1-3+k\neq0$이어야 하므로 $\quad k\neq2$

$\therefore k<2$ 또는 $2<k<\frac{9}{4}$ ······ ㉠

이차방정식 $x^2-3x+k=0$의 두 실근을 α, β $(0<\alpha<\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$ ······ ㉡

$\alpha\beta=k$

1, α, β가 직각삼각형의 세 변의 길이가 되려면

(i) 빗변의 길이가 1인 경우

$\alpha^2+\beta^2=1$이므로 $\quad (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1$

$3^2-2k=1 \quad \therefore k=4$

그런데 ㉠이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 빗변의 길이가 β인 경우

$1+\alpha^2=\beta^2, \quad \beta^2-\alpha^2=1$

$(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)=1, \quad 3(\beta-\alpha)=1$

$\therefore \beta-\alpha=\frac{1}{3}$ ······ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $\alpha=\frac{4}{3}$, $\beta=\frac{5}{3}$

$\therefore k=\alpha\beta=\frac{20}{9}$

(i), (ii)에서 $k=\frac{20}{9}$ 답 $\frac{20}{9}$

참고 1, α, β가 직각삼각형의 세 변의 길이이고 $\alpha<\beta$일 때 $\alpha+\beta=3$이면

$3-\beta<\beta$ $\therefore \beta>\frac{3}{2}$

따라서 $\beta>1$이므로 빗변의 길이는 β이다.

유형 07 삼차방정식의 근과 계수의 관계

집중공략 본책 105쪽

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

0714 삼차방정식 $x^3+2x^2+x+4=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, $\alpha\beta\gamma=-4$

$\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(-2-\gamma)(-2-\alpha)(-2-\beta)$

$=-8-4(\alpha+\beta+\gamma)-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=-8-4\cdot(-2)-2\cdot1-(-4)$

$=2$ 답 ⑤

0715 삼차방정식 $x^3+ax^2-5x+3=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-a$, $\alpha\beta\gamma=-3$

$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{2}{3}$에서 $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{2}{3}$

$\frac{-a}{-3}=\frac{2}{3}$ $\therefore a=2$ 답 2

0716 $\alpha-4=\alpha'$, $\beta-1=\beta'$, $\gamma+1=\gamma'$이라 하면 삼차방정식 $x^3+3x^2-5x-1=0$의 세 근이 α', β', γ'이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha'+\beta'+\gamma'=-3$, $\alpha'\beta'+\beta'\gamma'+\gamma'\alpha'=-5$, $\alpha'\beta'\gamma'=1$

$\therefore (\alpha-1)(\beta+2)(\gamma+4)$

$=(\alpha'+3)(\beta'+3)(\gamma'+3)$

$=\alpha'\beta'\gamma'+3(\alpha'\beta'+\beta'\gamma'+\gamma'\alpha')+9(\alpha'+\beta'+\gamma')+27$

$=1+3\cdot(-5)+9\cdot(-3)+27$

$=-14$ 답 ②

0717 주어진 삼차방정식의 세 근을 α, 2α, 4α ($\alpha\neq0$)라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha+4\alpha=14$, $7\alpha=14$ $\therefore \alpha=2$

따라서 세 근이 2, 4, 8이므로

$2\cdot4+4\cdot8+8\cdot2=a$, $2\cdot4\cdot8=-b$

$\therefore a=56$, $b=-64$

$\therefore a+b=-8$ 답 -8

0718 주어진 삼차방정식의 세 근을 α, 2α, β (α, β는 정수)라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha+\beta=5$ $\therefore 3\alpha+\beta=5$ ...... ㉠

$\alpha\cdot2\alpha+2\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\alpha=2$ $\therefore 2\alpha^2+3\alpha\beta=2$ ...... ㉡

$\alpha\cdot2\alpha\cdot\beta=-k$ $\therefore k=-2\alpha^2\beta$ ...... ㉢

㉠에서 $\beta=5-3\alpha$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$2\alpha^2+3\alpha(5-3\alpha)=2$, $7\alpha^2-15\alpha+2=0$

$(7\alpha-1)(\alpha-2)=0$ $\therefore \alpha=2$ ($\because$ α는 정수)

$\therefore \beta=5-3\cdot2=-1$

$\alpha=2$, $\beta=-1$을 ㉢에 대입하면

$k=-2\cdot2^2\cdot(-1)=8$ 답 ④

유형 08 삼차방정식의 작성

본책 105쪽

세 수 α, β, γ를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식

$\Rightarrow x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$

0719 삼차방정식 $x^3-2x^2-x+1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$, $\alpha\beta\gamma=-1$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-1}{-1}=1$,

$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{2}{-1}=-2$,

$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{-1}=-1$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-x^2-2x+1=0$ 답 $x^3-x^2-2x+1=0$

0720 삼차방정식 $x^3+3x^2+x-2=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, $\alpha\beta\gamma=2$

$\therefore (\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=\alpha+\beta+\gamma+3=0$,

$(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2(\alpha+\beta+\gamma)+3$

$=1+2\cdot(-3)+3=-2$,

$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$

$=2+1+(-3)+1=1$

따라서 $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-2x-1=0$ 답 $x^3-2x-1=0$

0721 $P(1)=P(3)=P(4)=-1$에서

$P(1)+1=P(3)+1=P(4)+1=0$

이므로 방정식 $P(x)+1=0$의 세 근은 1, 3, 4이다. ··· ❶

이때 1, 3, 4를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(1+3+4)x^2+(1\cdot3+3\cdot4+4\cdot1)x-1\cdot3\cdot4=0$

$\therefore x^3-8x^2+19x-12=0$ ··· ❷

즉 $P(x)+1=x^3-8x^2+19x-12$이므로

$P(x)=x^3-8x^2+19x-13$ ⋯ ❸

$\therefore P(2)=8-32+38-13$

$=1$ ⋯ ❹

답 1

채점 기준	비율
❶ 방정식 $P(x)+1=0$의 세 근을 구할 수 있다.	30 %
❷ 1, 3, 4를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ $P(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❹ $P(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 09 삼차방정식과 사차방정식의 켤레근

집중 공략 본책 106쪽

① 계수가 유리수인 이차 이상의 방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면
⇒ $p-q\sqrt{m}$도 근이다.
(단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)
② 계수가 실수인 이차 이상의 방정식의 한 근이 $p+qi$이면
⇒ $p-qi$도 근이다. (단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

0722 주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 $1+\sqrt{2}$가 근이면 $1-\sqrt{2}$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=-a$,

$\alpha(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\cdot\alpha=b$,

$\alpha(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=3$

이므로

$\alpha+2=-a$, $2\alpha-1=b$, $-\alpha=3$

$\therefore \alpha=-3$, $a=1$, $b=-7$

$\therefore a+b=-6$

답 ③

다른 풀이 방정식 $x^3+ax^2+bx-3=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$이므로

$(1+\sqrt{2})^3+a(1+\sqrt{2})^2+b(1+\sqrt{2})-3=0$

$7+5\sqrt{2}+a(3+2\sqrt{2})+b+\sqrt{2}b-3=0$

$(4+3a+b)+(5+2a+b)\sqrt{2}=0$

곱셈 공식 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$을 이용한다.

무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$4+3a+b=0$, $5+2a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-7$

0723 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $-1-2i$가 근이면 $-1+2i$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha(-1-2i)(-1+2i)=5$

$\therefore \alpha=1$

따라서 1이 주어진 방정식의 근이므로

$1+a-b-5=0$

$\therefore a-b=4$

답 4

0724 주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 $2+\sqrt{3}$이 근이면 $2-\sqrt{3}$도 근이다. ⋯ ❶

주어진 방정식의 세 근이 1, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=-\dfrac{b}{a}$,

$1\cdot(2+\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\cdot1=\dfrac{c}{a}$,

$1\cdot(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=\dfrac{1}{a}$

따라서 $-\dfrac{b}{a}=5$, $\dfrac{c}{a}=5$, $\dfrac{1}{a}=1$이므로

$a=1$, $b=-5$, $c=5$ ⋯ ❷

$\therefore abc=-25$ ⋯ ❸

답 -25

채점 기준	비율
❶ $2-\sqrt{3}$도 주어진 방정식의 근임을 알 수 있다.	30 %
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ abc의 값을 구할 수 있다.	20 %

0725 주어진 사차방정식의 계수가 실수이므로 $-2i$, $1+i$가 근이면 $2i$, $1-i$도 근이다.

이때 $-2i$, $2i$, $1-i$, $1+i$를 네 근으로 하고 x^4의 계수가 1인 사차방정식은

$(x+2i)(x-2i)\{x-(1-i)\}\{x-(1+i)\}=0$

$(x^2+4)(x^2-2x+2)=0$

$\therefore x^4-2x^3+6x^2-8x+8=0$

따라서 $a=-2$, $b=6$, $c=-8$, $d=8$이므로

$a+b+c+d=4$

답 4

0726 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $1+\sqrt{2}i$가 근이면 $1-\sqrt{2}i$도 근이다.

이때 $(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=3\neq2$이므로 $1+\sqrt{2}i$, $1-\sqrt{2}i$는 이차방정식 $x^2+ax+2=0$의 두 근이 될 수 없다.

이차방정식 $x^2+ax+2=0$의 나머지 한 근을 n이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$m+n=-a$ ⋯⋯ ㉠

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)+m=-a$

$\therefore 2+m=-a$

따라서 $m+n=2+m$이므로 $n=2$

즉 $x^2+ax+2=0$의 한 근이 2이므로

$4+2a+2=0$ $\therefore a=-3$

㉠에서 $m+2=-(-3)$이므로

$m=1$

답 ①

0727 $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면

$\alpha^2=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$

이때 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $a+bi$가 근이면 $a-bi$도 근이다.

즉 $\alpha^2=a-bi$이므로

$(a^2-b^2)+2abi=a-bi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=a,\ 2ab=-b$

$\therefore a=-\frac{1}{2}\ (\because b\neq 0),\ b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

나머지 한 실근을 k라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$k+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=3$$

$k-1=3\qquad \therefore k=4$

따라서

$$4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot 4=p,$$

$$4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-q$$

이므로 $\quad p=-3,\ q=-4$

$\therefore pq=12$

답 ④

유형 10 방정식 $x^3=1,\ x^3=-1$의 허근의 성질 집중공략 본책 107쪽

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때 (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수)

① $\omega^3=1 \Rightarrow \omega^{3n-2}=\omega,\ \omega^{3n-1}=\omega^2,\ \omega^{3n}=1$ (단, n은 자연수)

② $\omega^2+\omega+1=0 \Rightarrow 1+\omega=-\omega^2,\ 1+\omega^2=-\omega$

③ $\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$

④ $\omega^2=\overline{\omega}=\frac{1}{\omega}$

0728 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 근이다.

$\therefore \omega^2+\omega+1=0,\ \overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0,$

$\omega^3=1,\ \underline{\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1}$

$x^2+x+1=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

ㄱ. $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{100}$

$=(\underbrace{1+\omega+\omega^2}_{0})+\omega^3(\underbrace{1+\omega+\omega^2}_{0})+\cdots+\omega^{96}(\underbrace{1+\omega+\omega^2}_{0})$

$+(\underbrace{\omega^3}_{1})^{33}+(\underbrace{\omega^3}_{1})^{33}\cdot\omega$

$=\omega+1$

ㄴ. $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4)(1+\omega^5)$

$=(1+\omega)(1+\omega^2)(1+1)(1+\omega)(1+\omega^2)$

$=2(1+\omega)^2(1+\omega^2)^2$

$=2(-\omega^2)^2(-\omega)^2$

$=2\omega^6=2(\omega^3)^2=2$

ㄷ. $\frac{1}{1-\omega}+\frac{1}{1-\overline{\omega}}=\frac{1-\overline{\omega}+1-\omega}{(1-\omega)(1-\overline{\omega})}=\frac{2-(\omega+\overline{\omega})}{1-(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}}$

$=\frac{2-(-1)}{1-(-1)+1}=1$

ㄹ. $\frac{\omega^2}{1+\omega}+\frac{\overline{\omega}}{1+\overline{\omega}^2}=\frac{\omega^2}{-\omega^2}+\frac{\overline{\omega}}{-\overline{\omega}}=-2$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

0729 $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, 즉 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이다.

따라서 $\omega^2-\omega+1=0$이므로

$$\frac{\omega-1}{\omega^2}+\frac{\omega^2}{\omega-1}=\frac{\omega^2}{\omega^2}+\frac{\omega^2}{\omega^2}=2$$

답 2

0730 $\omega=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$에서 $\quad 2\omega-1=-\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면 $\quad 4\omega^2-4\omega+1=-3$

$\therefore \omega^2-\omega+1=0$

양변에 $\omega+1$을 곱하면 $\quad (\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0$

$\omega^3+1=0\qquad \therefore \omega^3=-1$

$$\therefore \omega^{2025}+\frac{1}{\omega^{2025}}=(\omega^3)^{675}+\frac{1}{(\omega^3)^{675}}$$

$=-1+(-1)=-2$

답 ①

0731 $x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$$\therefore \frac{(\omega-1)\overline{(\omega-1)}}{(3\omega+1)\overline{(3\omega+1)}}=\frac{(\omega-1)(\overline{\omega}-1)}{(3\omega+1)(3\overline{\omega}+1)}$$

$$=\frac{\omega\overline{\omega}-(\omega+\overline{\omega})+1}{9\omega\overline{\omega}+3(\omega+\overline{\omega})+1}$$

$$=\frac{1-1+1}{9\cdot 1+3\cdot 1+1}=\frac{1}{13}$$

답 ④

SSEN 특강 켤레복소수의 성질

두 복소수 $z_1,\ z_2$의 켤레복소수를 각각 $\overline{z_1},\ \overline{z_2}$라 할 때

① $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

② $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

③ $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

④ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2\neq 0$)

0732 $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, 즉 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 근이다.

$\therefore \omega^2-\omega+1=0,\ \omega^3=-1,\ \omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$(\omega-1)^n=\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n$에서

$$(\omega-1)^n=(\omega^2)^n=\omega^{2n},\ \left(\frac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n=(\overline{\omega})^n=\left(\frac{1}{\omega}\right)^n=\frac{1}{\omega^n}$$

이므로 $\quad \omega^{2n}=\frac{1}{\omega^n}$

양변에 ω^n을 곱하면 $\quad \omega^{3n}=1\qquad \therefore (-1)^n=1$

따라서 자연수 n은 짝수이어야 하므로 조건을 만족시키는 50 이하의 자연수 n은 25개이다.

답 25

다른 풀이 $\omega+\overline{\omega}=1$이므로 $(\omega-1)^n=\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n$에서

$(-\overline{\omega})^n=(\overline{\omega})^n,\qquad (-1)^n\cdot(\overline{\omega})^n=(\overline{\omega})^n$

$\therefore (-1)^n=1\ (\because \overline{\omega}\neq 0)$

0733 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.

$\therefore\ \omega^2+\omega+1=0,\ \omega^3=1$ ⋯➊

이때

$$f(1)=\frac{\omega}{1+\omega^2}=\frac{\omega}{-\omega}=-1,$$

$$f(2)=\frac{\omega^2}{1+\omega^4}=\frac{\omega^2}{1+\omega}=\frac{\omega^2}{-\omega^2}=-1,$$

$$f(3)=\frac{\omega^3}{1+\omega^6}=\frac{1}{2},$$

$$f(4)=\frac{\omega^4}{1+\omega^8}=\frac{\omega}{1+\omega^2}=f(1),$$

$$f(5)=\frac{\omega^5}{1+\omega^{10}}=\frac{\omega^2}{1+\omega^4}=f(2),$$

$$f(6)=\frac{\omega^6}{1+\omega^{12}}=\frac{\omega^3}{1+\omega^6}=f(3),$$

⋮

이므로

$f(1)=f(4)=f(7)=\cdots=f(16)=-1,$

$f(2)=f(5)=f(8)=\cdots=f(17)=-1,$

$f(3)=f(6)=f(9)=\cdots=f(18)=\frac{1}{2}$ ⋯➋

$\therefore\ f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(18)$

$=\left(-1-1+\frac{1}{2}\right)\cdot 6=-9$ ⋯➌

답 -9

채점 기준	비율
➊ $\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$임을 알 수 있다.	20 %
➋ $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $\cdots$, $f(18)$의 값을 구할 수 있다.	60 %
➌ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(18)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 11 삼차방정식과 사차방정식의 활용

본책 108쪽

(i) 문제의 의미를 파악하여 구하는 것을 x로 놓는다.
(ii) 주어진 조건을 이용하여 방정식을 세운다.
(iii) 방정식을 풀어 문제의 답을 구한다.

0734 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라 하면

$\underbrace{(x-1)(x+2)(x+3)}_{\text{직육면체의 부피}}=\frac{5}{2}\underbrace{x^3}_{\text{처음 정육면체의 부피}}$

$\therefore\ 3x^3-8x^2-2x+12=0$ ⋯⋯ ㉠

$P(x)=3x^3-8x^2-2x+12$라 하면

$P(2)=24-32-4+12=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 3 & -8 & -2 & 12 \\ & & 6 & -4 & -12 \\ \hline & 3 & -2 & -6 & 0 \end{array}$$

$P(x)=(x-2)(3x^2-2x-6)$

따라서 방정식 ㉠은

$(x-2)(3x^2-2x-6)=0$

$\therefore\ x=2$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{19}}{3}$

그런데 x는 자연수이므로 $x=2$

따라서 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는 2 cm이다. 답 ①

0735 $\pi x^2(x-2)=75\pi$이므로

$x^3-2x^2-75=0$ ⋯⋯ ㉠

$P(x)=x^3-2x^2-75$라 하면

$P(5)=125-50-75=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 5 & 1 & -2 & 0 & -75 \\ & & 5 & 15 & 75 \\ \hline & 1 & 3 & 15 & 0 \end{array}$$

$P(x)=(x-5)(x^2+3x+15)$

따라서 방정식 ㉠은

$(x-5)\underline{(x^2+3x+15)=0}$

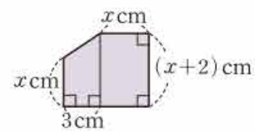
그런데 x는 실수이므로 $3^2-4\cdot1\cdot15<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$x=5$ 답 5

참고 $x^2+3x+15=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{51}{4}>0$

즉 모든 실수 x의 값에 관계없이 $x^2+3x+15\neq0$이므로 $(x-5)(x^2+3x+15)=0$의 실근이 $x=5$임을 알 수도 있다.

0736 밑면인 오각형은 오른쪽 그림과 같이 직사각형과 사다리꼴로 나눌 수 있으므로



(밑넓이)

$=x(x+2)+\frac{1}{2}\cdot\{x+(x+2)\}\cdot3$

$=x^2+2x+\frac{3}{2}(2x+2)$

$=x^2+5x+3\ (\text{cm}^2)$

이때 오각기둥의 높이는 $(x+1)$ cm이고, 부피가 195 cm^{3}이므로

$(x^2+5x+3)(x+1)=195$

$\therefore\ x^3+6x^2+8x-192=0$ ⋯⋯ ㉠

$P(x)=x^3+6x^2+8x-192$라 하면

$P(4)=64+96+32-192=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & 6 & 8 & -192 \\ & & 4 & 40 & 192 \\ \hline & 1 & 10 & 48 & 0 \end{array}$$

$P(x)$

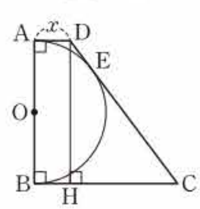
$=(x-4)(x^2+10x+48)$

따라서 방정식 ㉠은 $(x-4)(x^2+10x+48)=0$

그런데 x는 실수이므로 $x=4$ 답 4

0737 $\overline{BC}$의 길이가 $\overline{AD}$의 길이의 4배이므로 $\overline{BC}=4x$

오른쪽 그림과 같이 반원 O와 $\overline{CD}$의 접점을 E라 하면



$\overline{DE}=\overline{AD}=x$, $\overline{CE}=\overline{BC}=4x$

$\therefore\ \overline{CD}=\overline{DE}+\overline{CE}=5x$

점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{CH}=\overline{BC}-\overline{BH}=\overline{BC}-\overline{AD}=3x$

이므로 직각삼각형 DHC에서

$\overline{DH}=\sqrt{(5x)^2-(3x)^2}=4x\ (\because\ x>0)$

$\therefore\ \overline{AB}=\overline{DH}=4x$ ⋯➊

$S=\frac{1}{2}\cdot(x+4x)\cdot4x=10x^2$이므로

$S^2=100x^4$ ⋯➋

$l=x+4x+4x+5x=14x$이므로

$l^2=196x^2$ ⋯ ❸

$S^2-l^2=8$에서

$100x^4-196x^2=8,\quad 25x^4-49x^2-2=0$

이때 $x^2=X$로 놓으면

$25X^2-49X-2=0$

$(25X+1)(X-2)=0$

$\therefore X=-\frac{1}{25}$ 또는 $X=2$

그런데 $X>0$이므로

$X=2$ $x>0$이므로 $X=x^2>0$

즉 $x^2=2$에서 $\quad x=\pm\sqrt{2}$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x=\sqrt{2}$ ⋯ ❹

답 $\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$의 길이를 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ S^2을 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ l^2을 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❹ x의 값을 구할 수 있다.	30 %

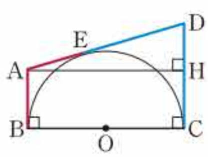
SSEN 특강 **반원에서의 접선**

$\overline{AB}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$가 각각 점 B, C, E에서 반원 O에 접할 때

① $\overline{AD}=\overline{AE}+\overline{DE}=\overline{AB}+\overline{DC}$

② 점 A에서 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{BC}=\overline{AH}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{DH}^2}$



유형 12 **{일차방정식 / 이차방정식} 꼴의 연립이차방정식** 집중공략 본책 108쪽

일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식은 다음과 같은 순서로 푼다.

(i) 일차방정식을 x 또는 y에 대하여 정리한다.

(ii) (i)의 식을 이차방정식에 대입하여 푼다.

0738 $\begin{cases} 2x+y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=13 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad y=1-2x$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(1-2x)^2=13,\quad 5x^2-4x-12=0$

$(5x+6)(x-2)=0$

$\therefore x=-\frac{6}{5}$ 또는 $x=2$

이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=-\frac{6}{5},\ y=\frac{17}{5}$ 또는 $x=2,\ y=-3$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{11}{5}$ 또는 $\alpha+\beta=-1$

따라서 $\alpha+\beta$의 값이 될 수 있는 것은 ③이다. 답 ③

0739 $\begin{cases} x-y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x-2)^2+y^2=18 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad y=x-2$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$2(x-2)^2=18,\quad (x-2)^2=9,\quad x-2=\pm3$

$\therefore x=5$ 또는 $x=-1$

이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=5,\ y=3$ 또는 $x=-1,\ y=-3$

이때 α, β는 양수이므로 $\quad \alpha=5,\ \beta=3$

$\therefore \alpha\beta=15$ 답 ④

0740 $\begin{cases} x-3y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad x=3y+1$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(3y+1)^2-(3y+1)y=2$

$6y^2+5y-1=0,\quad (y+1)(6y-1)=0$

$\therefore y=-1$ 또는 $y=\frac{1}{6}$

이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=-2,\ y=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2},\ y=\frac{1}{6}$

$\therefore x-y=-1$ 또는 $x-y=\frac{4}{3}$

따라서 $x-y$의 최솟값은 -1이다. 답 -1

0741 두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식

$\begin{cases} x-y=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-3y^2=-11 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

을 만족시킨다.

㉠에서 $\quad y=x+1$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2-3(x+1)^2=-11,\quad x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0 \quad \therefore x=-4$ 또는 $x=1$

이것을 ㉢에 대입하면 위의 연립방정식의 해는

$x=-4,\ y=-3$ 또는 $x=1,\ y=2$ ⋯ ❶

(i) $x=-4$, $y=-3$을 $x^2+ay^2=9$, $2x+by=8$에 각각 대입하면

$16+9a=9,\ -8-3b=8$

$\therefore a=-\frac{7}{9},\ b=-\frac{16}{3}$

(ii) $x=1$, $y=2$를 $x^2+ay^2=9$, $2x+by=8$에 각각 대입하면

$1+4a=9,\ 2+2b=8$

$\therefore a=2,\ b=3$

(i), (ii)에서 a, b는 자연수이므로 $\quad a=2,\ b=3$ ⋯ ❷

$\therefore a^2+b^2=13$ ⋯ ❸

답 13

채점 기준	비율
❶ 연립방정식 $\begin{cases} x-y=-1 \\ x^2-3y^2=-11 \end{cases}$의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ 자연수 a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 13 $\begin{cases}\text{이차방정식}\\\text{이차방정식}\end{cases}$ 꼴의 연립이차방정식

집중 공략 본책 109쪽

두 개의 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식은 다음과 같은 순서로 푼다.
(i) 인수분해가 되는 이차방정식의 좌변을 두 일차식의 곱으로 인수분해하여 일차방정식을 얻는다.
(ii) (i)의 일차방정식을 다른 이차방정식에 대입하여 푼다.

0742 $\begin{cases}x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠\\x^2-xy+2y^2=8 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $(x+y)(x-y)=0$

$\therefore y=-x$ 또는 $y=x$

(i) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2+2x^2=8,\quad x^2=2$

$\therefore x=\pm\sqrt{2},\ y=\mp\sqrt{2}$ (복호동순)

(ii) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-x^2+2x^2=8,\quad x^2=4$

$\therefore x=\pm2,\ y=\pm2$ (복호동순)

(i), (ii)에서 해가 아닌 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0743 $\begin{cases}3x^2-4xy+y^2=0 & \cdots\cdots ㉠\\x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $(3x-y)(x-y)=0$

$\therefore y=3x$ 또는 $y=x$

(i) $y=3x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+9x^2=10,\quad x^2=1$

$\therefore x=\pm1,\ y=\pm3$ (복호동순)

(ii) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2=10,\quad x^2=5$

$\therefore x=\pm\sqrt{5},\ y=\pm\sqrt{5}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 x, y는 정수이므로

$x=\pm1,\ y=\pm3$ (복호동순)

$\therefore xy=3$

답 3

0744 $\begin{cases}2x^2-xy-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠\\x^2+xy+y^2=3 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $(2x+y)(x-y)=0$

$\therefore y=-2x$ 또는 $y=x$

(i) $y=-2x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-2x^2+4x^2=3,\quad x^2=1$

$\therefore x=\pm1,\ y=\mp2$ (복호동순)

$\therefore \alpha+\beta=-1$ 또는 $\alpha+\beta=1$

(ii) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2+x^2=3,\quad x^2=1$

$\therefore x=\pm1,\ y=\pm1$ (복호동순)

$\therefore \alpha+\beta=2$ 또는 $\alpha+\beta=-2$

(i), (ii)에서 $\alpha+\beta$의 최댓값은 2이다.

답 ⑤

유형 14 대칭식으로 이루어진 연립이차방정식

본책 109쪽

x, y에 대한 대칭식으로 이루어진 연립이차방정식은 다음과 같은 순서로 푼다.
(i) $x+y=u$, $xy=v$로 놓는다.
(ii) 주어진 식을 u, v에 대한 식으로 변형하여 연립방정식을 푼다.
(iii) x, y가 이차방정식 $t^2-ut+v=0$의 두 근임을 이용한다.

0745 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases}u-v=1 & \cdots\cdots ㉠\\u^2-v=7 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=u^2-v$

㉠에서 $v=u-1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$u^2-(u-1)=7,\quad u^2-u-6=0$

$(u+2)(u-3)=0\quad \therefore u=-2$ 또는 $u=3$

이것을 ㉢에 대입하면

$u=-2,\ v=-3$ 또는 $u=3,\ v=2$

(i) $u=-2$, $v=-3$, 즉 $x+y=-2$, $xy=-3$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2+2t-3=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t-1)=0\quad \therefore t=-3$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases}x=-3\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=-3\end{cases}$

(ii) $u=3$, $v=2$, 즉 $x+y=3$, $xy=2$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-3t+2=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-2)=0\quad \therefore t=1$ 또는 $t=2$

$\therefore \begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)는

$(-3, 1), (1, -3), (1, 2), (2, 1)$

답 $(-3, 1), (1, -3), (1, 2), (2, 1)$

0746 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases}u^2-2v=58 & \cdots\cdots ㉠\\v=21 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v$

㉡을 ㉠에 대입하면

$u^2-42=58,\quad u^2=100\quad \therefore u=\pm10$ ⋯ ❶

(i) $u=10$, $v=21$, 즉 $x+y=10$, $xy=21$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-10t+21=0$의 두 근이므로

$(t-3)(t-7)=0\quad \therefore t=3$ 또는 $t=7$

$\therefore \begin{cases}x=3\\y=7\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=7\\y=3\end{cases}$ ⋯ ❷

(ii) $u=-10$, $v=21$, 즉 $x+y=-10$, $xy=21$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2+10t+21=0$의 두 근이므로

$(t+7)(t+3)=0\quad \therefore t=-7$ 또는 $t=-3$

$\therefore \begin{cases}x=-7\\y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-3\\y=-7\end{cases}$ ⋯ ❸

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases}x=3\\y=7\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=7\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-7\\y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-3\\y=-7\end{cases}$ ⋯ ❹

답 $\begin{cases}x=3\\y=7\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=7\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-7\\y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-3\\y=-7\end{cases}$

채점 기준	비율
❶ $x+y=u$, $xy=v$로 놓고 u, v의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $u=10$, $v=21$일 때, 해를 구할 수 있다.	30 %
❸ $u=-10$, $v=21$일 때, 해를 구할 수 있다.	30 %
❹ 연립방정식의 해를 구할 수 있다.	10 %

0747 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u+v=11 \\ \underline{uv}=30 \end{cases} \quad x^2y+xy^2=xy(x+y)=uv$$

u, v는 이차방정식 $s^2-11s+30=0$의 두 근이므로

$(s-5)(s-6)=0 \quad \therefore s=5$ 또는 $s=6$

$\therefore \begin{cases} u=5 \\ v=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} u=6 \\ v=5 \end{cases}$

(i) $u=5$, $v=6$, 즉 $x+y=5$, $xy=6$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-5t+6=0$의 두 근이므로

$(t-2)(t-3)=0 \quad \therefore t=2$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

$\therefore x-y=-1$ 또는 $x-y=1$

(ii) $u=6$, $v=5$, 즉 $x+y=6$, $xy=5$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-6t+5=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-5)=0 \quad \therefore t=1$ 또는 $t=5$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$

$\therefore x-y=-4$ 또는 $x-y=4$

(i), (ii)에서 $x-y$의 최솟값은 -4이다. 답 -4

유형 15 연립이차방정식의 해의 조건 본책 110쪽

일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식이 오직 한 쌍의 해를 갖거나 실근을 가지면 일차방정식을 이차방정식에 대입한 후 이차방정식의 판별식을 이용한다.

0748 $\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+y=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $y=-2x+k$

이것을 ㉠에 대입하면 $x^2+(-2x+k)^2=5$

$\therefore 5x^2-4kx+k^2-5=0$

이 이차방정식의 해가 오직 한 개 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5(k^2-5)=0$

$-k^2+25=0, \quad k^2=25 \quad \therefore k=\pm5$

따라서 k의 값의 곱은

$5\cdot(-5)=-25$ 답 ⑤

0749 $\begin{cases} x-y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+k=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-3$

이것을 ㉡에 대입하면 $x^2+x(x-3)+k=0$

$\therefore 2x^2-3x+k=0$

이 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot k\ge0$

$9-8k\ge0 \quad \therefore k\le\frac{9}{8}$

따라서 k의 최댓값은 $\frac{9}{8}$이다. 답 $\frac{9}{8}$

0750 주어진 연립방정식을 만족시키는 실수 x, y는 이차방정식 $t^2-2(a-2)t+a^2-4=0$의 두 실근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a-2)\}^2-(a^2-4)\ge0$

$-4a+8\ge0 \quad \therefore a\le2$

따라서 자연수 a는 1, 2이므로 구하는 합은 3이다. 답 3

유형 16 연립이차방정식의 활용 본책 110쪽

(i) 문제의 의미를 파악하여 구하는 것을 x, y로 놓는다.
(ii) 주어진 조건을 이용하여 연립방정식을 세운다.
(iii) 연립방정식을 풀어 문제의 답을 구한다.

0751 처음 땅의 가로의 길이를 x km, 세로의 길이를 y km라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=13 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x+1)(y+1)=xy+6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $xy+x+y+1=xy+6$

$\therefore y=5-x \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(5-x)^2=13, \quad x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0 \quad \therefore x=2$ 또는 $x=3$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=2$, $y=3$ 또는 $x=3$, $y=2$

따라서 처음 땅의 가로의 길이와 세로의 길이의 차는

$3-2=1$ (km) 답 ①

다른 풀이 ㉡에서 $x+y=5$

이때 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$이므로

$25=13+2xy \quad \therefore xy=6$

따라서 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=25-24=1$이므로

$|x-y|=1$

즉 처음 땅의 가로의 길이와 세로의 길이의 차는 1 km이다.

0752 처음 수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라 하면

$$\begin{cases} x^2+y^2=40 & \cdots\cdots ㉠ \\ \underbrace{(10y+x)}_{\text{바꾼 수}}+\underbrace{(10x+y)}_{\text{처음 수}}=88 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases} \quad \cdots ❶$$

㉡에서 $11x+11y=88$

$\therefore y=8-x \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(8-x)^2=40, \quad x^2-8x+12=0$

$(x-2)(x-6)=0 \quad \therefore x=2$ 또는 $x=6$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=2,\ y=6$ 또는 $x=6,\ y=2$

그런데 $x>y$이므로 $\quad x=6,\ y=2$ ⋯ ❷

따라서 처음 수는 62이다. ⋯ ❸

답 62

채점 기준	비율
❶ 연립방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 연립방정식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❸ 처음 수를 구할 수 있다.	10 %

0753 $\overline{AB}$가 원 O의 지름이므로

$\angle ACB=90°$ 반원에 대한 원주각의 크기는 90°이다.

직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=x$ cm, $\overline{BC}=y$ cm라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=\underbrace{400}_{20^2=400} & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y+20=48 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $\quad y=28-x$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(28-x)^2=400, \quad x^2-28x+192=0$

$(x-12)(x-16)=0 \quad \therefore x=12$ 또는 $x=16$

이것을 ㉢에 대입하면

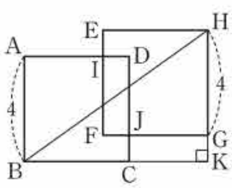
$x=12,\ y=16$ 또는 $x=16,\ y=12$

그런데 $x<y$이므로 $\quad x=12,\ y=16$

$\therefore \overline{BC}=16$ cm

답 16 cm

0754 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$, $\overline{GH}$를 각각 연장한 직선의 교점을 K라 하자. $\overline{ID}=x$, $\overline{DJ}=y$라 하면



$\overline{BK}=8-x$, $\overline{HK}=8-y$

이므로

$\begin{cases} 2(x+y)=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ \underbrace{(8-x)^2+(8-y)^2=74}_{\overline{BK}^2+\overline{HK}^2=\overline{BH}^2} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서

$y=4-x$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(8-x)^2+\{8-(4-x)\}^2=74$

$x^2-4x+3=0, \quad (x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=1,\ y=3$ 또는 $x=3,\ y=1$

그런데 $x<y$이므로 $\quad x=1,\ y=3$

$\therefore \overline{ID}=1$

답 1

유형 17 정수 조건의 부정방정식

본책 111쪽

x, y가 정수 (또는 자연수)라는 조건이 주어진
$xy+ax+by+c=0$ (a, b, c는 정수) 꼴의 부정방정식은
$x(y+a)+b(y+a)=ab-c$, 즉 $(x+b)(y+a)=ab-c$
로 변형하여 $x+b$, $y+a$가 $ab-c$의 약수임을 이용한다.

0755 $xy+x+y-3=0$에서

$x(y+1)+(y+1)-4=0 \quad \therefore (x+1)(y+1)=4$

이때 x, y가 정수이므로 $x+1$, $y+1$도 정수이다.

(i) $x+1=-4$, $y+1=-1$일 때,

$x=-5,\ y=-2 \quad \therefore xy=10$

(ii) $x+1=-2$, $y+1=-2$일 때,

$x=-3,\ y=-3 \quad \therefore xy=9$

(iii) $x+1=-1$, $y+1=-4$일 때,

$x=-2,\ y=-5 \quad \therefore xy=10$

(iv) $x+1=1$, $y+1=4$일 때,

$x=0,\ y=3 \quad \therefore xy=0$

(v) $x+1=2$, $y+1=2$일 때,

$x=1,\ y=1 \quad \therefore xy=1$

(vi) $x+1=4$, $y+1=1$일 때,

$x=3,\ y=0 \quad \therefore xy=0$

이상에서 xy의 최댓값은 10이다.

답 ④

0756 $xy-x-2y-2=0$에서

$x(y-1)-2(y-1)-4=0$

$\therefore (x-2)(y-1)=4$ ⋯ ❶

이때 $\underbrace{x,\ y\text{가 자연수}}_{x\ge1,\ y\ge1}$이므로 $x-2$, $y-1$은 $x-2\ge-1$, $y-1\ge0$인 정수이다. ⋯ ❷

(i) $x-2=1$, $y-1=4$일 때, $\quad x=3,\ y=5$

(ii) $x-2=2$, $y-1=2$일 때, $\quad x=4,\ y=3$

(iii) $x-2=4$, $y-1=1$일 때, $\quad x=6,\ y=2$

이상에서 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(3, 5)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$ ⋯ ❸

답 $(3, 5)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 $(x-2)(y-1)=4$로 변형할 수 있다.	30 %
❷ $x-2\ge-1$, $y-1\ge0$임을 알 수 있다.	20 %
❸ 순서쌍 (x, y)를 모두 구할 수 있다.	50 %

0757 이차방정식 $x^2-(a-3)x+a-2=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a-3$ ⋯⋯ ㉠

$\alpha\beta=a-2$ ⋯⋯ ㉡

㉡−㉠을 하면 $\quad \alpha\beta-\alpha-\beta=1$

$\alpha(\beta-1)-(\beta-1)-1=1$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=2$

이때 α, β가 정수이므로 $\alpha-1$, $\beta-1$도 정수이다.

(i) $\alpha-1=-2$, $\beta-1=-1$일 때,

$\alpha=-1,\ \beta=0$

(ii) $\alpha-1=-1$, $\beta-1=-2$일 때,

$\alpha=0,\ \beta=-1$

(iii) $\alpha-1=1$, $\beta-1=2$일 때,

$\alpha=2,\ \beta=3$

(iv) $\alpha-1=2$, $\beta-1=1$일 때,

$\alpha=3,\ \beta=2$

(i), (ii)에서 $\alpha+\beta=-1$이므로 ㉠에 대입하면

$-1=a-3 \quad \therefore a=2$

(iii), (iv)에서 $\alpha+\beta=5$이므로 ㉠에 대입하면

$5=a-3 \quad \therefore a=8$

따라서 a의 값의 합은 $\quad 2+8=10$ 답 10

유형 18 실수 조건의 부정방정식 본책 111쪽

① 실수 A, B가 $A^2+B^2=0$을 만족시키면 $A=0$, $B=0$임을 이용한다.
② 실수 x, y에 대한 이차방정식이 주어진 경우
➡ 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 방정식이 실근을 가져야 하므로 판별식 D가 $D\geq 0$임을 이용한다.

0758 $2x^2+4xy+5y^2-4x+2y+5=0$에서

$(x^2+4xy+4y^2)+(x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)=0$

$\therefore (x+2y)^2+(x-2)^2+(y+1)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로

$x+2y=0,\ x-2=0,\ y+1=0 \quad \therefore x=2,\ y=-1$

$\therefore x-y=3$ 답 ④

0759 $4x^2-4xy+2y^2+6y+9=0$에서

$(4x^2-4xy+y^2)+(y^2+6y+9)=0$

$\therefore (2x-y)^2+(y+3)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로

$2x-y=0,\ y+3=0 \quad \therefore x=-\frac{3}{2},\ y=-3$

$\therefore x+y=-\frac{9}{2}$ 답 ③

0760 $x^2-2(y+1)x+y^2-3=0$을 만족시키는 x, y가 음의 정수이므로 주어진 이차방정식이 실근을 가져야 한다.

x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(y+1)\}^2-(y^2-3)\geq 0$

$2y+4\geq 0 \quad \therefore y\geq -2$

그런데 y는 음의 정수이므로 $\quad y=-2$ 또는 $y=-1$ ··· ❶

(i) $y=-2$일 때, $x^2+2x+1=0$이므로

$(x+1)^2=0 \quad \therefore x=-1$ ··· ❷

(ii) $y=-1$일 때, $x^2-2=0$이므로

$x^2=2 \quad \therefore x=\pm\sqrt{2}$

그런데 x가 음의 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다. ··· ❸

(i), (ii)에서 $\quad x=-1,\ y=-2$

$\therefore xy=2$ ··· ❹

답 2

채점 기준	비율
❶ y의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $y=-2$일 때, x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $y=-1$일 때, 음의 정수 x가 존재하지 않음을 알 수 있다.	20 %
❹ xy의 값을 구할 수 있다.	20 %

0761 1st 방정식 $P(3x-1)=0$의 세 근을 α, β, γ에 대한 식으로 나타낸다.

방정식 $P(x)=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 방정식 $P(3x-1)=0$에서
└ $P(\alpha)=0,\ P(\beta)=0,\ P(\gamma)=0$

$3x-1=\alpha$ 또는 $3x-1=\beta$ 또는 $3x-1=\gamma$

$\therefore x=\frac{\alpha+1}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta+1}{3}$ 또는 $x=\frac{\gamma+1}{3}$

2nd 방정식 $P(3x-1)=0$의 세 근의 합을 구한다.

방정식 $P(3x-1)=0$의 세 근의 합은

$\frac{\alpha+1}{3}+\frac{\beta+1}{3}+\frac{\gamma+1}{3}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)+3}{3}$

$=\frac{15+3}{3}=6$ 답 6

0762

9 이하의 자연수 n에 대하여 다항식 $P(x)$가

$P(x)=$❶$x^4+x^2-n^2-n$

일 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $P(\sqrt{n})=0$

ㄴ. ❷방정식 $P(x)=0$의 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. 모든 정수 k에 대하여 ❸$P(k)\neq 0$이 되도록 하는 모든 n의 값의 합은 31이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$x=\sqrt{n}$을 ❶에 대입하여 ㄱ이 성립하는지 확인한다.
❶에서 $x^2=X$로 치환하여 ❷를 풀어 ㄴ이 성립하는지 확인한다.
❸을 만족시키는 모든 n의 값을 구하여 ㄷ이 성립하는지 확인한다.

1st $P(\sqrt{n})$의 값을 구한다.

ㄱ. $P(\sqrt{n})=(\sqrt{n})^4+(\sqrt{n})^2-n^2-n$

$=n^2+n-n^2-n=0$

2nd 방정식 $P(x)=0$의 실근의 개수를 구한다.

ㄴ. $P(x)=0$에서

$x^4+x^2-n^2-n=0$

이때 $x^2=X$로 놓으면

$X^2+X-n(n+1)=0$

$\{X+(n+1)\}(X-n)=0$

$\therefore X=-(n+1)$ 또는 $X=n$

즉 $x^2=-(n+1)$ 또는 $x^2=n$이므로

$x=\pm\sqrt{n+1}\,i$ 또는 $x=\pm\sqrt{n}$ ┌ 실근

따라서 방정식 $P(x)=0$의 실근의 개수는 2이다.

3rd 조건을 만족시키는 n의 값의 합을 구한다.

ㄷ. $k=\pm\sqrt{n}$일 때 $P(k)=0$이므로 모든 정수 k에 대하여 $P(k)\neq 0$을 만족시키려면 $k\neq\pm\sqrt{n}$, 즉 $n\neq k^2$이어야 한다.

따라서 n의 값은 2, 3, 5, 6, 7, 8이므로 그 합은
└ $1=1^2,\ 4=2^2,\ 9=3^2$

$2+3+5+6+7+8=31$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0763 **1st** 1을 근으로 갖도록 하는 m의 값을 구한다.

주어진 방정식의 한 근이 1이어야 하므로

$1+(2m+1)+4-(m^2+3)=0$

$m^2-2m-3=0,\quad (m+1)(m-3)=0$

$\therefore m=-1$ 또는 $m=3$

2nd 조건을 만족시키는 m의 값을 구한다.

(i) $m=-1$일 때, $x^3-x^2+4x-4=0$이므로

$x^2(x-1)+4(x-1)=0,\quad (x-1)(x^2+4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\pm 2i$

그런데 서로 다른 두 개의 음의 정수인 근을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $m=3$일 때, $x^3+7x^2+4x-12=0$이므로

$P(x)=x^3+7x^2+4x-12$라 하면 $\quad P(1)=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 7 & 4 & -12 \\ & & 1 & 8 & 12 \\ \hline & 1 & 8 & 12 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2+8x+12)$

$=(x+6)(x+2)(x-1)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+6)(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서 $\quad m=3$

답 ⑤

0764 **1st** 삼차방정식의 좌변을 인수분해한다.

$P(x)=ax^3+2bx^2+4bx+8a$라 하면

$P(-2)=-8a+8b-8b+8a=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|cccc} -2 & a & 2b & 4b & 8a \\ & & -2a & 4(a-b) & -8a \\ \hline & a & -2(a-b) & 4a & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+2)\{ax^2-2(a-b)x+4a\}$

2nd 삼차방정식의 근이 될 수 있는 정수를 구한다.

삼차방정식 $P(x)=0$이 서로 다른 세 정수를 근으로 가지므로 이차방정식 $ax^2-2(a-b)x+4a=0$은 $x\neq-2$인 서로 다른 두 정수를 근으로 갖는다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이

$\frac{4a}{a}=4$이므로 두 근은

$1,\ 4$ 또는 $-4,\ -1$ ← 서로 다른 두 정수이므로 2, 2는 될 수 없다.

3rd a, b 사이의 관계식을 구한다.

두 근의 합은 5 또는 -5이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{2(a-b)}{a}=5$ 또는 $\frac{2(a-b)}{a}=-5$

$\therefore b=-\frac{3}{2}a$ 또는 $b=\frac{7}{2}a$ ← b가 정수이므로 a는 짝수이어야 한다.

4th 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구한다.

(i) $b=-\frac{3}{2}a$일 때, 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(2,\ -3),\ (4,\ -6),\ \cdots,\ (32,\ -48),$

$(-2,\ 3),\ (-4,\ 6),\ \cdots,\ (-32,\ 48)$

의 32개이다.

(ii) $b=\frac{7}{2}a$일 때, 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(2,\ 7),\ (4,\ 14),\ \cdots,\ (14,\ 49),$

$(-2,\ -7),\ (-4,\ -14),\ \cdots,\ (-14,\ -49)$

의 14개이다.

(i), (ii)에서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$32+14=46$

답 46

0765 **1st** a, b, c를 세 근으로 하는 삼차방정식을 구한다.

조건 (가)에서 $\quad a^3-5a^2+2a+33-(a^2+b^2+c^2)=0$

조건 (나)에서 $\quad b^3-5b^2+2b+33-(a^2+b^2+c^2)=0$

조건 (다)에서 $\quad c^3-5c^2+2c+33-(a^2+b^2+c^2)=0$

따라서 a, b, c는 x에 대한 삼차방정식

$x^3-5x^2+2x+33-(a^2+b^2+c^2)=0$

의 세 근이다.

2nd abc의 값을 구한다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b+c=5,\ ab+bc+ca=2,\ abc=-33+a^2+b^2+c^2$

$\therefore abc=-33+(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=-33+5^2-2\cdot 2$

$=-12$

답 -12

0766 **1st** α, β, γ 사이의 관계식을 구한다.

삼차방정식 $x^3-3x^2+2x-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=3,$

$\frac{1}{\alpha\beta}\cdot\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\cdot\frac{1}{\gamma\alpha}+\frac{1}{\gamma\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha\beta}=2,$

$\frac{1}{\alpha\beta}\cdot\frac{1}{\beta\gamma}\cdot\frac{1}{\gamma\alpha}=1$

$\therefore \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=3,\ \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{(\alpha\beta\gamma)^2}=2,\ \frac{1}{(\alpha\beta\gamma)^2}=1$

…… ㉠ ··· ❶

2nd a^2, b^2, c^2의 값을 구한다.

α, β, γ가 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-a,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b,\ \alpha\beta\gamma=-c$

이것을 ㉠의 각 식에 대입하면

$\frac{-a}{-c}=3,\ \frac{b}{(-c)^2}=2,\ \frac{1}{(-c)^2}=1$

따라서 $a=3c$, $b=2c^2$, $c^2=1$이므로

$a^2=9c^2=9,\ b^2=2^2=4,\ c^2=1$ ··· ❷

3rd $a^2+b^2+c^2$의 값을 구한다.

$a^2+b^2+c^2=14$ ··· ❸

답 14

채점 기준	비율
❶ 삼차방정식 $x^3-3x^2+2x-1=0$에서 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β, γ 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50 %
❷ a^2, b^2, c^2의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a^2+b^2+c^2$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0767 (1st) 사차방정식의 한 근과 나머지 세 근의 합을 구한다.

$Q(x)=x^4-x^3-x^2-4$라 하면

$$Q(2)=16-8-4-4=0$$

조립제법을 이용하여 $Q(x)$를 인수분해하면

2	1	-1	-1	0	-4
		2	2	2	4
	1	1	1	2	0

$$Q(x)=(x-2)(x^3+x^2+x+2)$$

따라서 주어진 방정식은

$$(x-2)(x^3+x^2+x+2)=0$$

$a=2$라 하면 b, c, d는 삼차방정식 $x^3+x^2+x+2=0$의 세 근이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$b+c+d=-1$$

(2nd) $P(a)+P(b)+P(c)+P(d)$의 값을 구한다.

$$P(x)=x^6-x^5-x^4-4x^2-x$$
$$=x^2(x^4-x^3-x^2-4)-x$$
$$=x^2Q(x)-x$$

이때 $Q(a)=0$, $Q(b)=0$, $Q(c)=0$, $Q(d)=0$이므로

$$P(a)=-a,\ P(b)=-b,\ P(c)=-c,\ P(d)=-d$$
$$\therefore P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=-a-b-c-d$$
$$=-2-(b+c+d)$$
$$=-2-(-1)$$
$$=-1$$

답 -1

0768 (1st) 방정식 $P(2x+1)=0$의 세 근을 구한다.

방정식 $P(x)=0$의 계수가 실수이므로 $3+4i$가 근이면 $3-4i$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 방정식 $P(2x+1)=0$에서

$$2x+1=\alpha \text{ 또는 } 2x+1=3+4i \text{ 또는 } 2x+1=3-4i$$

$$\therefore x=\frac{\alpha-1}{2} \text{ 또는 } x=1+2i \text{ 또는 } x=1-2i$$ ⋯ ❶

(2nd) 방정식 $P(x)=0$의 나머지 한 근을 구한다.

방정식 $P(2x+1)=0$의 세 근의 곱이 15이므로

$$\frac{\alpha-1}{2}\cdot(1+2i)\cdot(1-2i)=15$$

$$\alpha-1=6 \qquad \therefore \alpha=7$$ ⋯ ❷

(3rd) $P(x)$를 구한다.

7, $3+4i$, $3-4i$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3-\{7+(3+4i)+(3-4i)\}x^2$$
$$+\{7\cdot(3+4i)+(3+4i)(3-4i)+(3-4i)\cdot 7\}x$$
$$-7\cdot(3+4i)(3-4i)=0$$
$$\therefore x^3-13x^2+67x-175=0$$
$$\therefore P(x)=x^3-13x^2+67x-175$$ ⋯ ❸

(4th) $P(x)$의 이차항의 계수와 일차항의 계수의 합을 구한다.

삼차식 $P(x)$의 이차항의 계수와 일차항의 계수의 합은

$$-13+67=54$$ ⋯ ❹

답 54

채점 기준	비율
❶ 방정식 $P(2x+1)=0$의 세 근을 구할 수 있다.	30 %
❷ 방정식 $P(x)=0$의 나머지 한 근을 구할 수 있다.	30 %
❸ $P(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❹ $P(x)$의 이차항의 계수와 일차항의 계수의 합을 구할 수 있다.	10 %

0769 (1st) 방정식 $P(x)=0$의 세 근을 구한다.

조건 (가)에서 $P(x)$는 $x-2$를 인수로 가지므로 2는 방정식 $P(x)=0$의 한 근이다.

조건 (나)에서 방정식 $P(x)=0$의 계수가 유리수이므로 $\sqrt{2}-1$이 근이면 $-\sqrt{2}-1$도 근이다.

(2nd) 방정식 $P(2x-1)=0$의 세 근을 구한다.

삼차방정식 $(2x-1)^3+a(2x-1)^2+b(2x-1)+c=0$, 즉 방정식 $P(2x-1)=0$에서

$$2x-1=2 \text{ 또는 } 2x-1=\sqrt{2}-1 \text{ 또는 } 2x-1=-\sqrt{2}-1$$

$$\therefore x=\frac{3}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(3rd) 방정식 $P(2x-1)=0$의 모든 근의 곱을 구한다.

따라서 구하는 곱은

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{3}{4}$$

답 ③

0770

❸ 5 이상의 자연수 n에 대하여 다항식

❷ $P_n(x)$

$=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^{n-1})(1+x^n)-64$

가 ❶ x^2+x+1로 나누어떨어지도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

$x^2+x+1=0$이 되도록 하는 x의 값을 $P_n(x)$에 대입하면 0이다.

❶에서 $x^2+x+1=0$의 한 허근을 ω라 할 때 $P_n(\omega)=0$임을 이용한다. ❷에서 $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^{n-1})(1+x^n)$을 $Q_n(x)$라 하고 ❸을 하나씩 대입하면서 ω에 대한 여러 가지 식의 값을 이용하여 식을 간단히 한 후 ❶을 만족시키는 자연수 n의 값을 모두 구한다.

(1st) $x^2+x+1=0$의 한 허근을 ω라 하고 $\omega^2+\omega+1$, ω^3의 값을 구한다.

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근을 ω라 하면

$$\omega^2+\omega+1=0$$

양변에 $\omega-1$을 곱하면 $(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$$\omega^3-1=0 \qquad \therefore \omega^3=1$$

(2nd) $P_n(\omega)=0$을 만족시키는 자연수 n의 값을 모두 구한다.

$Q_n(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^{n-1})(1+x^n)$이라 하면

$$P_n(x)=Q_n(x)-64$$

$P_n(x)$가 x^2+x+1로 나누어떨어지려면 $P_n(\omega)=0$이어야 하므로

$$Q_n(\omega)=64$$

즉 $P_n(\omega)=0$을 만족시키는 자연수 n의 값은 $Q_n(\omega)=64$를 만족시키는 자연수 n의 값과 같다.

$n\geq 5$일 때,

$$Q_5(\omega)=(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4)(1+\omega^5)$$
$$=(-\omega^2)\cdot(-\omega)\cdot(1+1)\cdot(1+\omega)(1+\omega^2)$$
$$=2\omega^3\cdot(-\omega^2)\cdot(-\omega)$$
$$=2\omega^3\cdot\omega^3=2,$$
$$Q_6(\omega)=Q_5(\omega)(1+\omega^6)=2(1+1)=4,$$
$$Q_7(\omega)=Q_6(\omega)(1+\omega^7)=4(1+\omega)$$
$$=4\cdot(-\omega^2)=-4\omega^2,$$

$Q_8(\omega)=Q_7(\omega)(1+\omega^8)=-4\omega^2(1+\omega^2)$

$=-4\omega^2\cdot(-\omega)=4\omega^3=4,$

$Q_9(\omega)=Q_8(\omega)(1+\omega^9)=4(1+1)=8,$

$\vdots$

$Q_{18}(\omega)=Q_{17}(\omega)(1+\omega^{18})=32(1+1)=64,$

$Q_{19}(\omega)=Q_{18}(\omega)(1+\omega^{19})=64(1+\omega)$

$=64\cdot(-\omega^2)=-64\omega^2,$

$Q_{20}(\omega)=Q_{19}(\omega)(1+\omega^{20})=-64\omega^2(1+\omega^2)$

$=-64\omega^2\cdot(-\omega)=64\omega^3=64$

$\vdots$

이므로 $P_n(\omega)=0$을 만족시키는 자연수 n의 값은

$18,\ 20$

3rd 모든 자연수 n의 값의 합을 구한다.

따라서 구하는 n의 값의 합은

$18+20=38$ 답 38

참고 $n\geq 6$일 때, 2, $-\omega^2$, $-\omega$가 이 순서대로 반복되어 곱해지므로 다음과 같이 3개씩 묶어서 생각하면 $Q_n(\omega)=64$를 만족시키는 n의 값을 찾기 편리하다.

(i) $Q_6(\omega)=2\cdot 2=4$, $Q_7(\omega)=4\cdot(-\omega^2)=-4\omega^2$,
$Q_8(\omega)=-4\omega^2\cdot(-\omega)=4$

(ii) $Q_9(\omega)=4\cdot 2=8$, $Q_{10}(\omega)=8\cdot(-\omega^2)=-8\omega^2$,
$Q_{11}(\omega)=-8\omega^2\cdot(-\omega)=8$

(iii) $Q_{12}(\omega)=8\cdot 2=16$, $Q_{13}(\omega)=16\cdot(-\omega^2)=-16\omega^2$,
$Q_{14}(\omega)=-16\omega^2\cdot(-\omega)=16$

$\vdots$

0771 **1st** 처음 직육면체의 겉넓이를 x에 대한 식으로 나타낸다.

처음 직육면체의 겉넓이는

$2\cdot x\cdot x^2+2\cdot x(x-2)+2\cdot x^2(x-2)=4x^3-2x^2-4x$

2nd 새로운 입체도형의 겉넓이를 x에 대한 식으로 나타낸다.

정육면체를 잘라 내면서 줄어든 겉넓이는 $2(x-2)^2$이고 정육면체를 붙이면서 추가된 겉넓이는 $4(x-2)^2$이므로

$4x^3-2x^2-4x-2(x-2)^2+4(x-2)^2=80$

$4x^3-2x^2-4x+2(x-2)^2-80=0$

$4x^3-12x-72=0$ $\quad\therefore x^3-3x-18=0$

3rd x의 값을 구한다.

$P(x)=x^3-3x-18$이라 하면

$P(3)=27-9-18=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

3	1	0	-3	-18
		3	9	18
	1	3	6	0

$P(x)=(x-3)(x^2+3x+6)$

그런데 x는 실수이므로 방정식 $P(x)=0$의 근은

$x=3$ 답 ②

0772 **1st** $x\geq y$일 때 주어진 연립방정식을 푼다.

(i) $x\geq y$일 때,

$\max(x,\ y)=x$, $\min(x,\ y)=y$이므로 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} x-y-2=2y & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+y^2=x+16 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=3y+2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(3y+2)^2-(3y+2)y+y^2=(3y+2)+16$

$y^2+y-2=0,\quad (y+2)(y-1)=0$

$\therefore y=-2$ 또는 $y=1$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=-4,\ y=-2$ 또는 $x=5,\ y=1$

그런데 $x\geq y$이므로 $\quad x=5,\ y=1$

2nd $x<y$일 때 주어진 연립방정식을 푼다.

(ii) $x<y$일 때,

$\max(x,\ y)=y$, $\min(x,\ y)=x$이므로 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} x-y-2=2x & \cdots\cdots ㉣ \\ x^2-xy+y^2=y+16 & \cdots\cdots ㉤ \end{cases}$

㉣에서 $y=-x-2$ $\cdots\cdots$ ㉥

㉥을 ㉤에 대입하면

$x^2-x(-x-2)+(-x-2)^2=(-x-2)+16$

$3x^2+7x-10=0,\quad (3x+10)(x-1)=0$

$\therefore x=-\dfrac{10}{3}$ 또는 $x=1$

이것을 ㉥에 대입하면

$x=-\dfrac{10}{3},\ y=\dfrac{4}{3}$ 또는 $x=1,\ y=-3$

그런데 $x<y$이므로 $\quad x=-\dfrac{10}{3},\ y=\dfrac{4}{3}$

3rd $\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2$의 값을 구한다.

(i), (ii)에서 순서쌍 $(x,\ y)$는 $\quad (5,\ 1),\ \left(-\dfrac{10}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$

$\therefore \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=5+\left(-\dfrac{40}{9}\right)=\dfrac{5}{9}$ 답 ③

0773 **1st** $\overline{AD}=2n$ (n은 자연수)이라 하고 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$의 길이를 n에 대한 식으로 나타낸다.

$\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$가 이 순서대로 네 개의 연속된 짝수이므로 $\overline{AD}=2n$ (n은 자연수)이라 하면

$\overline{AC}=2n+2,\ \overline{BC}=2n+4,\ \overline{AB}=2n+6$

2nd $\overline{BD}=x$, $\overline{CD}=y$라 하고 x, y에 대한 두 방정식을 세운다.

$\overline{BD}=x$, $\overline{CD}=y$라 하면

$\underbrace{x+y=2n+4}_{\overline{BD}+\overline{CD}=\overline{BC}}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\triangle ABD$와 $\triangle ADC$는 각각 $\angle ADB=90^\circ$, $\angle ADC=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{AB}^2-\overline{BD}^2=\overline{AC}^2-\overline{CD}^2$

$(2n+6)^2-x^2=(2n+2)^2-y^2,\quad x^2-y^2=16n+32$

$(x+y)(x-y)=8(2n+4)$ $\cdots\cdots$ ㉡

3rd x, y를 각각 n에 대한 식으로 나타낸다.

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad (2n+4)(x-y)=8(2n+4)$

$\therefore x-y=8$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $\quad x=n+6,\ y=n-2$

4th n의 값을 구한다.

직각삼각형 ADC에서

$(2n+2)^2=(2n)^2+(n-2)^2$

$n^2-12n=0,\quad n(n-12)=0$

$\therefore n=12$ ($\because$ n은 자연수)

5th) $\dfrac{S}{\pi}$의 값을 구한다.

$\overline{AB}=2\cdot12+6=30$, $\overline{AC}=2\cdot12+2=26$이므로

$$S=\pi\cdot15^2+\pi\cdot13^2=394\pi$$

$$\therefore \frac{S}{\pi}=394$$

답 394

0774 1st) 두 원 A, B의 반지름의 길이를 각각 x, y라 하고 x, y에 대한 두 방정식을 세운다.

두 원 A, B의 반지름의 길이를 각각 x, y라 하면 두 원 A, B의 지름의 길이의 합이 32이므로

$2x+2y=32$

$x+y=16$

$\therefore x=16-y$ …… ㉠ ⋯ ❶

또 $\underbrace{\text{원 } C\text{의 지름의 길이}}_{(\text{원 }A\text{의 지름의 길이})-(\text{원 }B\text{의 지름의 길이})}$는 $2x-2y$이므로 원 D의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\underbrace{\{2y-(2x-2y)\}}_{(\text{원 }B\text{의 지름의 길이})-(\text{원 }C\text{의 지름의 길이})}=-x+2y$$

두 원 A, D의 넓이의 차가 96π이므로

$\pi x^2-\pi(-x+2y)^2=96\pi$

$x^2-(x^2-4xy+4y^2)=96$

$\therefore xy-y^2=24$ …… ㉡ ⋯ ❷

2nd) x, y의 값을 구한다.

㉠을 ㉡에 대입하면

$(16-y)y-y^2=24$

$y^2-8y+12=0$

$(y-2)(y-6)=0$

$\therefore y=2$ 또는 $y=6$

이것을 ㉠에 대입하면

$x=14$, $y=2$ 또는 $x=10$, $y=6$

그런데 $x=14$, $y=2$이면 $\underbrace{\text{원 } D\text{의 반지름의 길이}}_{-x+2y=-14+4=-10<0}$가 음수이므로

$x=10$, $y=6$ ⋯ ❸

3rd) 원 B의 반지름의 길이를 구한다.

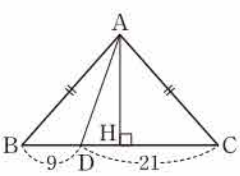
따라서 원 B의 반지름의 길이는 6이다. ⋯ ❹

답 6

채점 기준	비율
❶ 두 원 A, B의 지름의 길이의 합이 32임을 이용하여 방정식을 세울 수 있다.	30 %
❷ 두 원 A, D의 넓이의 차가 96π임을 이용하여 방정식을 세울 수 있다.	30 %
❸ 두 방정식을 연립하여 풀 수 있다.	30 %
❹ 원 B의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	10 %

0775 1st) $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$라 하고 a, b에 대한 방정식을 세운다.

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로



$$\overline{BH}=\overline{CH}=\frac{9+21}{2}=15$$

$\therefore \overline{DH}=15-9=6$

$\overline{AH}=x$, $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$라 하면 두 직각삼각형 ABH, ADH에서

$a^2=x^2+15^2=x^2+225$ …… ㉠

$b^2=x^2+6^2=x^2+36$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $a^2-b^2=189$

$\therefore (a+b)(a-b)=189$

2nd) a, b의 값을 구한다.

$\underbrace{a>15,\ b>6}_{a,\ b\text{는 각각 }\triangle\text{ABH, }\triangle\text{ADH의 가장 긴 변의 길이이다.}}$에서 $a+b>21$

또 a, b는 자연수이므로

(i) $a+b=27$, $a-b=7$일 때,

$a=17$, $b=10$

(ii) $a+b=63$, $a-b=3$일 때,

$a=33$, $b=30$

(iii) $a+b=189$, $a-b=1$일 때,

$a=95$, $b=94$

3rd) 모든 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 합을 구한다.

이상에서 모든 $\underbrace{\text{삼각형 ABC의 둘레의 길이}}_{2a+9+21}$의 합은

$(2\cdot17+30)+(2\cdot33+30)+(2\cdot95+30)=380$

답 ④

0776 1st) 주어진 식을 $A^2+B^2=0$ 꼴로 정리한다.

$x^2y^2+x^2+9y^2-8xy+1=0$에서

$(x^2y^2-2xy+1)+(x^2-6xy+9y^2)=0$

$\therefore (xy-1)^2+(x-3y)^2=0$ ⋯ ❶

2nd) x^2, y^2의 값을 구한다.

x, y는 실수이므로

$xy-1=0$, $x-3y=0$

$\therefore xy=1$, $x=3y$

$x=3y$를 $xy=1$에 대입하면

$3y^2=1 \qquad \therefore y^2=\dfrac{1}{3}$

이때 $x=3y$에서 $x^2=9y^2$이므로

$x^2=3$ ⋯ ❷

3rd) $6(x^2+y^2)$의 값을 구한다.

$$6(x^2+y^2)=6\cdot\left(3+\frac{1}{3}\right)=20$$ ⋯ ❸

답 20

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 $A^2+B^2=0$ 꼴로 정리할 수 있다.	40 %
❷ x^2, y^2의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $6(x^2+y^2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

Ⅲ. 부등식

07 일차부등식

0777 $b<a$의 양변에 a를 더하면

$b+a<a+a \qquad \therefore a+b<2a$ 　답 $a+b<2a$

0778 $b<0$이므로 $a>b$의 양변에 b를 곱하면

$ab<b^2$ 　답 $ab<b^2$

0779 $a>b$의 양변에 3을 곱하면

$3a>3b$

이 식의 양변에 1을 더하면

$3a+1>3b+1$ 　답 $3a+1>3b+1$

0780 $a>b$의 양변에 $-\frac{1}{2}$을 곱하면

$-\frac{1}{2}a<-\frac{1}{2}b$

이 식의 양변에 5를 더하면

$-\frac{1}{2}a+5<-\frac{1}{2}b+5$ 　답 $-\frac{1}{2}a+5<-\frac{1}{2}b+5$

0781 $2\le x\le 4$의 각 변에서 2를 빼면

$0\le x-2\le 2$ 　답 $0\le x-2\le 2$

0782 $2\le x\le 4$의 각 변에 3을 곱하면

$6\le 3x\le 12$ 　답 $6\le 3x\le 12$

0783 $2\le x\le 4$의 각 변에 -1을 곱하면

$-4\le -x\le -2$ 　답 $-4\le -x\le -2$

0784 $2\le x\le 4$의 각 변의 역수를 취하면

$\frac{1}{4}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{2}$ 　답 $\frac{1}{4}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{2}$

SSEN 특강

$0<a\le x\le b$ 또는 $a\le x\le b<0$일 때, x의 역수 $\frac{1}{x}$의 값의 범위는 다음과 같다.

(i) $ax>0$이므로 $a\le x$의 양변을 ax로 나누면

$\frac{1}{x}\le\frac{1}{a}$

(ii) $bx>0$이므로 $x\le b$의 양변을 bx로 나누면

$\frac{1}{b}\le\frac{1}{x}$

(i), (ii)에서 　$\frac{1}{b}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{a}$

➡ a와 b의 부호가 같으면 $a\le x\le b$일 때 $\frac{1}{b}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{a}$임을 알 수 있다.

0785 $7x-8\ge 10x+4$에서 　$-3x\ge 12$

$\therefore x\le -4$ 　답 $x\le -4$

0786 $5(x-2)<3x+2$에서 　$5x-10<3x+2$

$2x<12 \qquad \therefore x<6$ 　답 $x<6$

0787 $\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}\le\frac{1}{4}x+1$의 양변에 12를 곱하면

$4x+3\le 3x+12 \qquad \therefore x\le 9$ 　답 $x\le 9$

0788 $0.2x>0.42-0.01x$의 양변에 100을 곱하면

$20x>42-x, \qquad 21x>42$

$\therefore x>2$ 　답 $x>2$

0789 $ax<a+2$에서

(i) $a>0$일 때, 　$x<\frac{a+2}{a}$

(ii) $a<0$일 때, 　$x>\frac{a+2}{a}$

(iii) $a=0$일 때, $0\cdot x<2$이므로 해는 모든 실수이다.

답 풀이 참조

0790 $(a-1)x>a$에서

(i) $a>1$일 때, 　$x>\frac{a}{a-1}$

(ii) $a<1$일 때, 　$x<\frac{a}{a-1}$

(iii) $a=1$일 때, $0\cdot x>1$이므로 해는 없다. 　답 풀이 참조

0791 $ax+1\ge a^2-x$에서 　$(a+1)x\ge a^2-1$

$(a+1)x\ge(a+1)(a-1)$

(i) $a>-1$일 때, 　$x\ge a-1$

(ii) $a<-1$일 때, 　$x\le a-1$

(iii) $a=-1$일 때, $0\cdot x\ge 0$이므로 해는 모든 실수이다.

답 풀이 참조

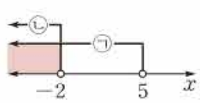
0792 $x+1<6$에서 　$x<5$ 　…… ㉠

$5x-2<2x-8$에서 　$3x<-6$

$\therefore x<-2$ 　…… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x<-2$ 　답 $x<-2$



0793 $2x+3<9$에서 　$2x<6$

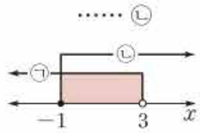
$\therefore x<3$ 　…… ㉠

$4x+1\ge x-2$에서 　$3x\ge -3$

$\therefore x\ge -1$ 　…… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1\le x<3$ 　답 $-1\le x<3$



0794 $5x+6>x+4$에서 $\quad 4x>-2$

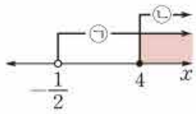
$\therefore\ x>-\frac{1}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x+5\le 3(x-1)$에서 $\quad x+5\le 3x-3$

$-2x\le -8 \quad \therefore\ x\ge 4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x\ge 4$ $\quad$ 답 $x\ge 4$



0795 $0.9x+1.3<-5$의 양변에 10을 곱하면

$9x+13<-50, \quad 9x<-63$

$\therefore\ x<-7$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

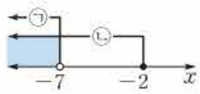
$\frac{5}{12}x-1\ge x+\frac{1}{6}$의 양변에 12를 곱하면

$5x-12\ge 12x+2, \quad -7x\ge 14$

$\therefore\ x\le -2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x<-7$



답 $x<-7$

0796 $\frac{1}{3}x-2<\frac{1}{2}$의 양변에 6을 곱하면

$2x-12<3, \quad 2x<15$

$\therefore\ x<\frac{15}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

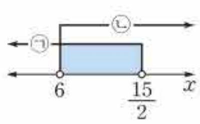
$1.3x-3.6>0.7x$의 양변에 10을 곱하면

$13x-36>7x, \quad 6x>36$

$\therefore\ x>6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$6<x<\frac{15}{2}$ $\quad$ 답 $6<x<\frac{15}{2}$



0797 $0.8(x+5)\le 0.5(x+8)$의 양변에 10을 곱하면

$8(x+5)\le 5(x+8), \quad 8x+40\le 5x+40$

$3x\le 0 \quad \therefore\ x\le 0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

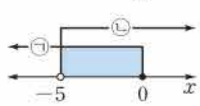
$\frac{x}{5}-\frac{x+5}{4}<-1$의 양변에 20을 곱하면

$4x-5(x+5)<-20, \quad 4x-5x-25<-20$

$-x<5 \quad \therefore\ x>-5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

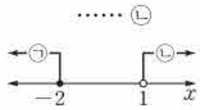
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-5<x\le 0$ $\quad$ 답 $-5<x\le 0$



0798 $\begin{cases} x\le -2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x>1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



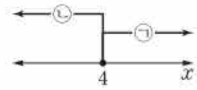
답 해는 없다.

0799 $x\ge 4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x-4\le 0$에서 $\quad x\le 4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

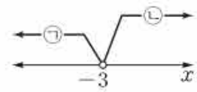
$x=4$ $\quad$ 답 $x=4$



0800 $x+3<0$에서 $\quad x<-3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$-2x<6$에서 $\quad x>-3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



답 해는 없다.

0801 $4x+7\le -5$에서 $\quad 4x\le -12$

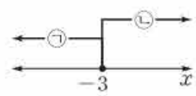
$\therefore\ x\le -3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$2x+10\ge 1-x$에서 $\quad 3x\ge -9$

$\therefore\ x\ge -3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x=-3$ $\quad$ 답 $x=-3$

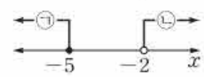


0802 $x-1\le -6$에서 $\quad x\le -5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$3(x-4)<5x-8$에서 $\quad 3x-12<5x-8$

$-2x<4 \quad \therefore\ x>-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



답 해는 없다.

0803 $\frac{1}{2}(x+4)\le 3x-13$의 양변에 2를 곱하면

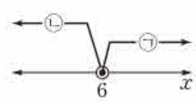
$x+4\le 6x-26, \quad -5x\le -30$

$\therefore\ x\ge 6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$-2x+11>x-7$에서 $\quad -3x>-18$

$\therefore\ x<6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



답 해는 없다.

0804 $-10\le 3x+2<4$에서 $\quad -12\le 3x<2$

$\therefore\ -4\le x<\frac{2}{3}$ $\quad$ 답 $-4\le x<\frac{2}{3}$

0805 $-9<5-2x\le -1$에서 $\quad -14<-2x\le -6$

$\therefore\ 3\le x<7$ $\quad$ 답 $3\le x<7$

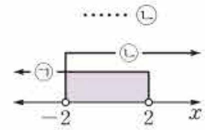
0806 (1) $5x-3<4x-1$에서 $\quad x<2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

(2) $4x-1<7x+5$에서 $\quad -3x<6$

$\therefore\ x>-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

(3) ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-2<x<2$



답 (1) $x<2$ $\quad$ (2) $x>-2$ $\quad$ (3) $-2<x<2$

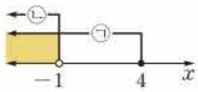
0807 $3x+1\le 2x+5$에서 $\quad x\le 4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$2x+5<3$에서 $\quad 2x<-2$

$\therefore x<-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x<-1$ $\quad$ 답 $x<-1$



0808 $2x-1\le 3x+4$에서 $\quad -x\le 5$

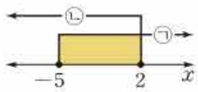
$\therefore x\ge -5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$3x+4\le x+8$에서 $\quad 2x\le 4$

$\therefore x\le 2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-5\le x\le 2$ $\quad$ 답 $-5\le x\le 2$



0809 $|7x|\le 21$에서 $\quad -21\le 7x\le 21$

$\therefore -3\le x\le 3$ $\quad$ 답 $-3\le x\le 3$

0810 $|5-x|<4$에서 $\quad -4<5-x<4$

$-9<-x<-1$ $\quad \therefore 1<x<9$ $\quad$ 답 $1<x<9$

0811 $|3x-2|\ge 5$에서 $\quad 3x-2\le -5$ 또는 $3x-2\ge 5$

$3x\le -3$ 또는 $3x\ge 7$ $\quad \therefore x\le -1$ 또는 $x\ge \frac{7}{3}$

답 $x\le -1$ 또는 $x\ge \frac{7}{3}$

0812 $1<|4x+1|<6$에서

$1<4x+1<6$ 또는 $-6<4x+1<-1$

(i) $1<4x+1<6$에서 $\quad 0<4x<5$ $\quad \therefore 0<x<\frac{5}{4}$

(ii) $-6<4x+1<-1$에서 $\quad -7<4x<-2$

$\therefore -\frac{7}{4}<x<-\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-\frac{7}{4}<x<-\frac{1}{2}$ 또는 $0<x<\frac{5}{4}$

답 $-\frac{7}{4}<x<-\frac{1}{2}$ 또는 $0<x<\frac{5}{4}$

0813 (1) $x<-1$일 때, $x+1<0$, $x-4<0$이므로 ㉠은

$-(x+1)-\{-(x-4)\}<3$, $\quad -x-1+x-4<3$

$\therefore 0\cdot x<8$

따라서 해는 모든 실수이다.

그런데 $x<-1$이므로 이때의 ㉠의 해는

$x<-1$

(2) $-1\le x<4$일 때, $x+1\ge 0$, $x-4<0$이므로 ㉠은

$x+1-\{-(x-4)\}<3$, $\quad x+1+x-4<3$

$2x<6$ $\quad \therefore x<3$

그런데 $-1\le x<4$이므로 이때의 ㉠의 해는

$-1\le x<3$

(3) $x\ge 4$일 때, $x+1>0$, $x-4\ge 0$이므로 ㉠은

$x+1-(x-4)<3$, $\quad x+1-x+4<3$

$\therefore 0\cdot x<-2$

따라서 이때의 ㉠의 해는 없다.

(4) (1)~(3)에서 ㉠의 해는 $\quad x<3$

답 (1) $x<-1$ (2) $-1\le x<3$ (3) 해는 없다. (4) $x<3$

유형 01 부등식의 기본 성질

본책 120쪽

실수 a, b, c에 대하여

① $a>b$, $b>c \Rightarrow a>c$

② $a>b \Rightarrow a+c>b+c$, $a-c>b-c$

③ $a>b$, $c>0 \Rightarrow ac>bc$, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

④ $a>b$, $c<0 \Rightarrow ac<bc$, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

0814 ㄴ. $d>0$이므로 $a<b$의 양변에 d를 곱하면

$ad<bd$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$b<0$이므로 $c<d$의 양변에 b를 곱하면

$bc>bd$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad ad<bc$

ㄷ. $a>b$에서 $\quad a-c>b-c$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

$c<d$에서 $\quad -c>-d$

$\therefore b-c>b-d$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서 $\quad a-c>b-d$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. $\quad$ 답 ③

다른 풀이 ㄷ. $(a-c)-(b-d)=(a-b)-(c-d)$

이때 $a>b$에서 $a-b>0$, $c<d$에서 $c-d<0$이므로

$(a-b)-(c-d)>0$ $\quad \therefore a-c>b-d$

0815 ① $ac>bc$에서 $c<0$이면 $a<b$이다.

② $c^2>0$이므로 $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$의 양변에 c^2을 곱하면 $a>b$이다.

③ $a=1$, $b=-1$, $c=1$이면 $\frac{c^2}{a}>\frac{c^2}{b}$이지만 $a>b$이다.

④ $a=1$, $b=-1$, $c=-2$이면 $a>b>c$이지만 $ab<c^2$이다.

⑤ $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$이면 $a>b>0$이지만 $ab<b$이다.

답 ②

0816 ㄱ. $ab>0$이므로 $a<b$의 양변을 ab로 나누면

$\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$

ㄴ. $|a|>|b|$이므로 $\quad a^2>b^2$

$ab>0$이므로 양변을 ab로 나누면 $\quad \frac{a}{b}>\frac{b}{a}$

ㄷ. $a<b<0$에서 $\quad a^3<b^3$

$ab>0$이므로 양변을 ab로 나누면 $\quad \frac{a^2}{b}<\frac{b^2}{a}$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. $\quad$ 답 ⑤

유형 02 부등식 $ax>b$의 풀이 본책 120쪽

부등식 $ax>b$의 해가
① $x>a$ ➡ $a>0$, $\frac{b}{a}=a$
② $x<a$ ➡ $a<0$, $\frac{b}{a}=a$
③ 없다. ➡ $a=0$, $b\geq 0$
④ 모든 실수이다. ➡ $a=0$, $b<0$

0817 $(1-a)x>a+b$의 해가 $x<-2$이므로 $\quad 1-a<0$

$\therefore x<\frac{a+b}{1-a}$

따라서 $\frac{a+b}{1-a}=-2$이므로 $\quad a+b=-2+2a$

$\therefore a-b=2$

이것을 $(a-b)x\geq 6$에 대입하면

$2x\geq 6 \quad \therefore x\geq 3$

답 ④

0818 $bx-3a>ax-3b$에서 $\quad (b-a)x>-3(b-a)$

이때 $a>b$에서 $b-a<0$이므로 양변을 $b-a$로 나누면

$x<-3$

답 $x<-3$

0819 $a+b=0$에서 $\quad b=-a$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 부등식에 대입하면

$(2a+a)x>3a-2a+8 \quad \therefore 3ax>a+8$

이 부등식의 해가 $x<-1$이므로 $\quad 3a<0$

$\therefore x<\frac{a+8}{3a}$

따라서 $\frac{a+8}{3a}=-1$이므로 $\quad a+8=-3a$

$4a=-8 \quad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=2$

$\therefore ab=-4$

답 -4

0820 $(a-b)x+a-2b\leq 0$에서 $\quad (a-b)x\leq -a+2b$

이 부등식을 만족시키는 x가 존재하지 않으려면

$a-b=0$, $-a+2b<0$ $\quad \cdots$ ❶

$a-b=0$에서 $b=a$이므로 $-a+2b<0$에 대입하면

$-a+2a<0 \quad \therefore a<0$ $\quad \cdots$ ❷

또 $b=a$를 $(a-3b)x+a-5b>0$에 대입하면

$(a-3a)x+a-5a>0$, $\quad -2ax>4a$

이때 $-2a>0$이므로 $\quad x>-2$ $\quad \cdots$ ❸

답 $x>-2$

채점 기준	비율
❶ 부등식 $(a-b)x+a-2b\leq 0$을 만족시키는 x가 존재하지 않을 조건을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 부호를 구할 수 있다.	20 %
❸ 부등식 $(a-3b)x+a-5b>0$의 해를 구할 수 있다.	40 %

유형 03 연립일차부등식의 풀이 집중공략 본책 121쪽

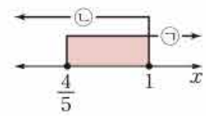
연립일차부등식을 풀 때에는 각 일차부등식의 해를 구한 후, 구한 해를 수직선 위에 나타내어 공통부분을 찾는다.
이때 괄호가 있으면 분배법칙을 이용하여 괄호를 풀고, 계수가 소수 또는 분수이면 적당한 수를 곱하여 계수를 정수로 고친 후 부등식을 푼다.

0821 $-(1+2x)\leq 3x-5$에서 $\quad -1-2x\leq 3x-5$

$-5x\leq -4 \quad \therefore x\geq \frac{4}{5}$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

$4x-1\leq x+2$에서 $\quad 3x\leq 3 \quad \therefore x\leq 1$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$\frac{4}{5}\leq x\leq 1$

따라서 $a=\frac{4}{5}$, $b=1$이므로

$b-a=\frac{1}{5}$

답 ①

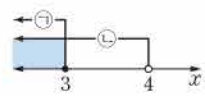
0822 $\frac{2}{3}x+0.4\geq x-0.6$에서 $\quad 20x+12\geq 30x-18$ — 양변에 30을 곱한다.

$-10x\geq -30 \quad \therefore x\leq 3$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

$5x<3(x+3)-1$에서 $\quad 5x<3x+9-1$

$2x<8 \quad \therefore x<4$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$x\leq 3$

따라서 자연수 x는 1, 2, 3의 3개이다.

답 3

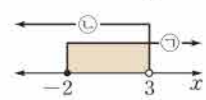
0823 $7x+2\leq 9x+6$에서 $\quad -2x\leq 4$

$\therefore x\geq -2$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

$8-x>4(x-3)+5$에서 $\quad 8-x>4x-12+5$

$-5x>-15 \quad \therefore x<3$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$-2\leq x<3$ $\quad \cdots$ ❶

$-3<-x\leq 2$이므로

$-1<-x+2\leq 4$

$\therefore -1<A\leq 4$ $\quad \cdots$ ❷

따라서 A의 최댓값은 4이다. $\quad \cdots$ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 주어진 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❷ A의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ A의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

0824 $2(3-x)+8>5x-7$에서 $\quad 6-2x+8>5x-7$

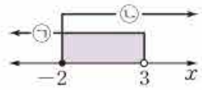
$-7x>-21 \quad \therefore x<3$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{-x-6}{4}\leq \frac{2x+1}{3}$에서 $\quad 3(-x-6)\leq 4(2x+1)$

$-3x-18\leq 8x+4$, $\quad -11x\leq 22$

$\therefore x\geq -2$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$-2\le x<3$

$\therefore a=-2,\ b=3$

이것을 $ax-b<0$에 대입하면

$-2x-3<0,\qquad -2x<3$

$\therefore x>-\frac{3}{2}$

따라서 해가 아닌 것은 ①이다. 답 ①

유형 04 $A<B<C$ 꼴의 부등식의 풀이

집중 공략 본책 121쪽

$A<B<C$ 꼴의 부등식은 연립부등식 $\begin{cases}A<B\\B<C\end{cases}$ 꼴로 고쳐서 푼다.

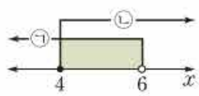
0825 $2(x-1)<x+4$에서 $\quad 2x-2<x+4$

$\therefore x<6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x+4\le 2+3(x-2)$에서 $\quad x+4\le 2+3x-6$

$-2x\le -8\qquad \therefore x\ge 4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$4\le x<6$

따라서 정수 x는 4, 5이므로 구하는 합은

$4+5=9$ 답 9

0826 $2x-3\le 3x+1$에서 $\quad -x\le 4$

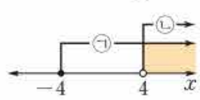
$\therefore x\ge -4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$3x+1<6x-11$에서 $\quad -3x<-12$

$\therefore x>4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x>4$ 답 ④



0827 $-5<\frac{1}{2}x+3$에서 $\quad -\frac{1}{2}x<8$

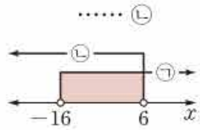
$\therefore x>-16$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{2}x+3<\frac{1}{3}x+4$에서 $\quad 3x+18<2x+24$

$\therefore x<6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-16<x<6$ ⋯ ❶



따라서 $a=-16,\ b=6$이므로

$a+b=-10$ ⋯ ❷

답 -10

채점 기준	비율
❶ 부등식의 해를 구할 수 있다.	80 %
❷ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

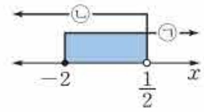
0828 $-3x+4\le 10$에서 $\quad -3x\le 6$

$\therefore x\ge -2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$10<-2x+11$에서 $\quad 2x<1$

$\therefore x<\frac{1}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$-2\le x<\frac{1}{2}$

ㄱ. 정수인 해는 $-2,\ -1,\ 0$의 3개이다.

ㄷ. $x=\frac{1}{2}$은 부등식의 해가 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

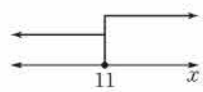
유형 05 특수한 해를 갖는 연립일차부등식

본책 122쪽

① 연립부등식의 해가 한 개인 경우
➡ 수직선에서 공통부분이 한 점뿐이다.
② 연립부등식의 해가 없는 경우
➡ 수직선에서 공통부분이 없다.

0829 ① 주어진 연립부등식의 해는

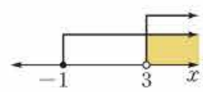
$x=11$



② $-2x<-6$에서 $\quad x>3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x>3$

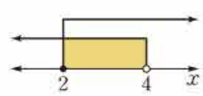


③ $5x-12<8$에서 $\quad 5x<20$

$\therefore x<4$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$2\le x<4$

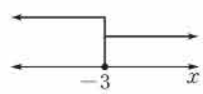


④ $0.5(x+6)\ge 1.5$에서 $\quad x+6\ge 3$

$\therefore x\ge -3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x=-3$



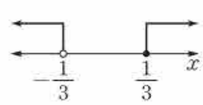
⑤ $7x-1<x-3$에서 $\quad 6x<-2$

$\therefore x<-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}\ge\frac{x-5}{12}$에서 $\quad 4x-6\ge x-5$

$3x\ge 1\qquad \therefore x\ge\frac{1}{3}$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.



답 ⑤

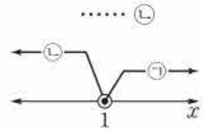
0830 $4x+3\ge x+6$에서 $\quad 3x\ge 3$

$\therefore x\ge 1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$10-2x>9-x$에서 $\quad -x>-1$

$\therefore x<1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



답 ⑤

0831 $\frac{5}{3}x-1\le x+\frac{7}{3}$에서　　$5x-3\le 3x+7$

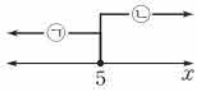
$2x\le 10$　　$\therefore x\le 5$　　$\cdots\cdots$ ㉠

$0.3(x-2)\ge 0.2x-0.1$에서　　$3(x-2)\ge 2x-1$

$3x-6\ge 2x-1$　　$\therefore x\ge 5$　　$\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x=5$



답 $x=5$

유형 06 해가 주어진 연립일차부등식

집중공략 본책 122쪽

연립부등식에서 각 일차부등식의 해를 구한 후 공통부분이 주어진 연립부등식의 해가 되도록 하는 미지수의 값을 구한다.

0832 $6x-1\le 2x+a$에서　　$4x\le a+1$

$\therefore x\le \frac{a+1}{4}$

$x-3<2x+1$에서　　$-x<4$

$\therefore x>-4$

주어진 연립부등식의 해가 $b<x\le 3$이므로

$\frac{a+1}{4}=3,\ b=-4$　　$\therefore a=11,\ b=-4$

$\therefore a+b=7$

답 7

0833 $x+2a>0$에서　　$x>-2a$

$3x-b\ge 0$에서　　$x\ge \frac{b}{3}$

주어진 그림에서 $x>-2,\ x\ge 1$이므로

$-2a=-2,\ \frac{b}{3}=1$　　$\therefore a=1,\ b=3$

$\therefore ab=3$

답 ⑤

0834 $\frac{5x+a}{2}\le \frac{x}{4}+2$에서

$2(5x+a)\le x+8$,　　$10x+2a\le x+8$

$9x\le -2a+8$　　$\therefore x\le \frac{-2a+8}{9}$

$\frac{x}{2}-\frac{3x+1}{6}\ge \frac{x-2}{3}$에서

$3x-(3x+1)\ge 2(x-2)$,　　$3x-3x-1\ge 2x-4$

$-2x\ge -3$　　$\therefore x\le \frac{3}{2}$　　⋯ ❶

주어진 연립부등식의 해가 $x\le -\frac{2}{3}$이므로

$\frac{-2a+8}{9}=-\frac{2}{3}$,　　$-2a+8=-6$

$-2a=-14$　　$\therefore a=7$　　⋯ ❷

답 7

채점 기준	비율
❶ 각 일차부등식의 해를 구할 수 있다.	60 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

참고 $-\frac{2}{3}<\frac{3}{2}$이므로 $x\le \frac{-2a+8}{9}$과 $x\le \frac{3}{2}$의 공통부분이 $x\le -\frac{2}{3}$이려면 $\frac{-2a+8}{9}=-\frac{2}{3}$이어야 한다.

0835 $-x+7\ge 2x+a$에서　　$-3x\ge a-7$

$\therefore x\le -\frac{a-7}{3}$

$3(x-1)\le 5x+b$에서　　$3x-3\le 5x+b$

$-2x\le b+3$　　$\therefore x\ge -\frac{b+3}{2}$

주어진 연립부등식의 해가 $x=-1$이므로

$-\frac{a-7}{3}=-1,\ -\frac{b+3}{2}=-1$

$a-7=3,\ b+3=2$　　$\therefore a=10,\ b=-1$

$\therefore a-b=11$

답 ③

0836 $2x+a\le -x+5$에서　　$3x\le 5-a$

$\therefore x\le \frac{5-a}{3}$　　$\cdots\cdots$ ㉠

$-x+5\le b(x+3)$에서　　$-x+5\le bx+3b$

$(-1-b)x\le 3b-5$　　$\cdots\cdots$ ㉡

주어진 부등식의 해가 $-1\le x\le 2$이므로 부등식 ㉠의 해는 $x\le 2$, 부등식 ㉡의 해는 $x\ge -1$이어야 한다.

즉 ㉡에서 $-1-b<0$이므로

$x\ge \frac{3b-5}{-1-b}$

따라서 $\frac{5-a}{3}=2,\ \frac{3b-5}{-1-b}=-1$이므로

$5-a=6,\ 3b-5=1+b$　　$\therefore a=-1,\ b=3$

$\therefore b-a=4$

답 4

유형 07 해를 갖거나 갖지 않는 연립일차부등식

집중공략 본책 123쪽

연립부등식에서 각 일차부등식의 해를 구한 후 이를 주어진 해의 조건에 맞게 수직선 위에 나타낸다.

① 연립부등식이 해를 갖지 않는 경우

➡ 공통부분이 없도록 해를 수직선 위에 나타낸다.

② 연립부등식이 해를 갖는 경우

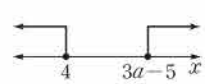
➡ 공통부분이 있도록 해를 수직선 위에 나타낸다.

0837 $4x-3\le 13$에서　　$4x\le 16$

$\therefore x\le 4$

$x+5\ge 3a$에서　　$x\ge 3a-5$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



$3a-5>4$,　　$3a>9$

$\therefore a>3$

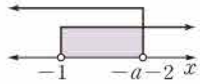
답 ④

0838 $\frac{8x+5}{3}<3x+2$에서　　$8x+5<9x+6$

$-x<1$　　$\therefore x>-1$

$3x+2<2x-a$에서　　$x<-a-2$

주어진 부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$-a-2>-1$,　　$-a>1$

$\therefore\ a<-1$

답 ②

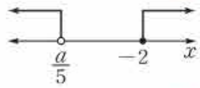
0839 $a+5x<2a$에서　　$5x<a$

$\therefore\ x<\frac{a}{5}$

$7(x+1)\ge 3x-1$에서　　$7x+7\ge 3x-1$

$4x\ge -8$　　$\therefore\ x\ge -2$ ⋯ ❶

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



$\frac{a}{5}\le -2$　　$\therefore\ a\le -10$ ⋯ ❷

따라서 a의 최댓값은 -10이다. ⋯ ❸

답 -10

채점 기준	비율
❶ 각 일차부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ a의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

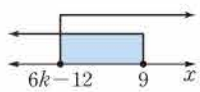
0840 $0.3x-1.7\le 1$에서　　$3x-17\le 10$

$3x\le 27$　　$\therefore\ x\le 9$

$2(x-6)\le 3(x-2k)$에서　　$2x-12\le 3x-6k$

$-x\le -6k+12$　　$\therefore\ x\ge 6k-12$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서　　$6k-12\le 9$



$6k\le 21$　　$\therefore\ k\le \frac{7}{2}$

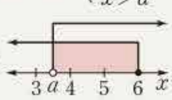
답 $k\le \frac{7}{2}$

유형 08 정수인 해의 개수가 주어진 연립일차부등식

본책 123쪽

연립부등식의 정수인 해가 n개로 주어지면 각 일차부등식의 해를 공통부분이 n개의 정수를 포함하도록 수직선 위에 나타낸다.

예 연립부등식 $\begin{cases} x\le 6 \\ x>a \end{cases}$의 정수인 해가 3개이다.

➡ 

➡ $3\le a<4$

└ $a=3$이면 정수인 해는 4, 5, 6의 3개
$a=4$이면 정수인 해는 5, 6의 2개

0841 $0.4(x+1)>x-2$에서　　$4(x+1)>10(x-2)$

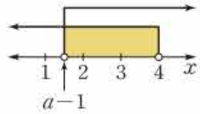
$4x+4>10x-20$,　　$-6x>-24$

$\therefore\ x<4$

$2x+a<3x+1$에서　　$-x<-a+1$

$\therefore\ x>a-1$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이므로 오른쪽 그림에서



$1\le a-1<2$

$\therefore\ 2\le a<3$

답 ④

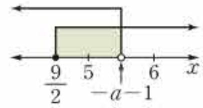
0842 $3x+8\le 5x-1$에서　　$-2x\le -9$

$\therefore\ x\ge \frac{9}{2}$

$x-1>2x+a$에서　　$-x>a+1$

$\therefore\ x<-a-1$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 1개이므로 오른쪽 그림에서



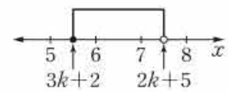
$5<-a-1\le 6$

$6<-a\le 7$　　$\therefore\ -7\le a<-6$

따라서 a의 최솟값은 -7이다.

답 -7

0843 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 6과 7뿐이므로 오른쪽 그림에서

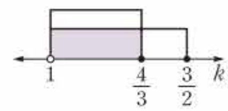


$5<3k+2\le 6$, $7<2k+5\le 8$

$3<3k\le 4$, $2<2k\le 3$

$\therefore\ 1<k\le \frac{4}{3}$, $1<k\le \frac{3}{2}$

따라서 오른쪽 그림에서



$1<k\le \frac{4}{3}$

답 $1<k\le \frac{4}{3}$

0844 $\frac{x}{2}-\frac{a}{4}\ge \frac{x}{4}-\frac{1}{8}$에서　　$4x-2a\ge 2x-1$

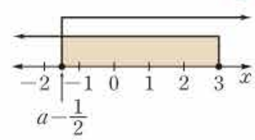
$2x\ge 2a-1$　　$\therefore\ x\ge a-\frac{1}{2}$

$3x-1\ge 5x-7$에서　　$-2x\ge -6$

$\therefore\ x\le 3$ ⋯ ❶

주어진 연립부등식을 만족시키는 음의 정수 x가 1개이므로 오른쪽 그림에서

└ -1뿐이다.



$-2<a-\frac{1}{2}\le -1$

$\therefore\ -\frac{3}{2}<a\le -\frac{1}{2}$ ⋯ ❷

답 $-\frac{3}{2}<a\le -\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ 각 일차부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %

유형 09 연립일차부등식의 활용

집중 공략

본책 124쪽

(i) 문제의 의미를 파악하여 구하는 것을 x로 놓는다.
(ii) 주어진 조건을 이용하여 연립부등식을 세운다.
(iii) 연립부등식을 풀어 문제의 답을 구한다.

0845 의자의 개수를 x라 하면 학생은 $(4x+10)$명이므로

$5(x-8)+1\le 4x+10\le 5(x-8)+5$

$5(x-8)+1\le 4x+10$에서

$5x-39\le 4x+10$　　$\therefore\ x\le 49$ ⋯⋯ ㉠

$4x+10\le 5(x-8)+5$에서

$4x+10\le 5x-35$

$-x\le -45$

$\therefore\ x\ge 45$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$45\le x\le 49$

따라서 의자의 개수가 될 수 있는 것은 ②이다. 답 ②

SSEN 특강 **과부족에 대한 문제**

한 의자에 a명씩 앉으면 n개의 의자가 남는다.

➡ 의자의 개수를 x라 하면

(i) 빈 의자의 개수: n

(ii) a명씩 앉은 의자의 개수: $x-(n+1)$

(iii) 나머지 1개의 의자에는 최소 1명에서 최대 a명까지 앉을 수 있다.

➡ $\begin{cases} \text{최소 인원: } a\{x-(n+1)\}+1\text{(명)} \\ \text{최대 인원: } a\{x-(n+1)\}+a\text{(명)} \end{cases}$

0846 초콜릿을 x개 산다고 하면 사탕은 $(14-x)$개 살 수 있으므로

$9400\le 600(14-x)+800x\le 10000$

$94\le 84+2x\le 100$

$10\le 2x\le 16$

$\therefore\ 5\le x\le 8$

따라서 초콜릿은 5개 이상 8개 이하로 살 수 있다. 답 ③

0847 빵 A를 x개 만든다고 하면 빵 B는 $(10-x)$개 만들 수 있으므로

$\begin{cases} 80x+100(10-x)\le 900 \\ 30x+25(10-x)\le 285 \end{cases}$ ··· ❶

$80x+100(10-x)\le 900$에서

$-20x+1000\le 900$

$-20x\le -100$

$\therefore\ x\ge 5$ ...... ㉠

$30x+25(10-x)\le 285$에서

$5x+250\le 285$

$5x\le 35$

$\therefore\ x\le 7$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$5\le x\le 7$ ··· ❷

따라서 빵 A는 최대 7개 만들 수 있다. ··· ❸

답 7개

채점 기준	비율
❶ 연립부등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❸ 빵 A는 최대 몇 개 만들 수 있는지 구할 수 있다.	10 %

0848 작년 남자 회원 수와 여자 회원 수를 각각 $5a$, $3a$라 하고, 올해 새로 가입한 남자 회원 수와 여자 회원 수를 각각 x라 하면

$(5a+x):(3a+x)=8:5$

$25a+5x=24a+8x$

$\therefore\ a=3x$

즉 작년 남자 회원 수는 $15x$, 여자 회원 수는 $9x$이므로

$\begin{cases} 15x+9x<500 \\ (15x+x)+(9x+x)>500 \end{cases}$

$15x+9x<500$에서 $24x<500$

$\therefore\ x<\frac{125}{6}$ ...... ㉠

$(15x+x)+(9x+x)>500$에서

$26x>500$

$\therefore\ x>\frac{250}{13}$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{250}{13}<x<\frac{125}{6}$ $\frac{250}{13}=19.2307\cdots$, $\frac{125}{6}=20.8333\cdots$

그런데 x는 자연수이므로

$x=20$

따라서 올해 새로 가입한 남자 회원 수와 여자 회원 수가 각각 20이므로 구하는 합은

$20+20=40$ 답 ③

0849 농도가 30 %인 소금물 300 g에 들어 있는 소금의 양은

$\frac{30}{100}\cdot 300=90\,(\mathrm{g})$

농도가 10 %인 소금물을 x g 섞는다고 하면

$\frac{15}{100}(300+x)\le 90+\frac{10}{100}x\le \frac{18}{100}(300+x)$

$\frac{15}{100}(300+x)\le 90+\frac{10}{100}x$에서

$4500+15x\le 9000+10x$

$5x\le 4500$

$\therefore\ x\le 900$ ...... ㉠

$90+\frac{10}{100}x\le \frac{18}{100}(300+x)$에서

$9000+10x\le 5400+18x$

$-8x\le -3600$

$\therefore\ x\ge 450$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$450\le x\le 900$

따라서 농도가 10 %인 소금물을 450 g 이상 900 g 이하로 섞어야 한다. 답 450 g 이상 900 g 이하

SSEN 특강 **소금물의 농도**

① $(\text{소금물의 농도})=\frac{(\text{소금의 양})}{(\text{소금물의 양})}\times 100\,(\%)$

② $(\text{소금의 양})=\frac{(\text{소금물의 농도})}{100}\times(\text{소금물의 양})$

유형 10 $|ax+b|<c$, $|ax+b|>c$ 꼴의 부등식

집중 공략 본책 124쪽

양수 c에 대하여
① $|ax+b|<c \Rightarrow -c<ax+b<c$
② $|ax+b|>c \Rightarrow ax+b<-c$ 또는 $ax+b>c$

0850 $|8-3x|>11$에서

$8-3x<-11$ 또는 $8-3x>11$

$-3x<-19$ 또는 $-3x>3$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>\frac{19}{3}$

따라서 자연수 x의 최솟값은 7이다.

답 7

0851 $|3x-1|<5$에서 $-5<3x-1<5$

$-4<3x<6$ $\therefore -\frac{4}{3}<x<2$ ...... ㉠

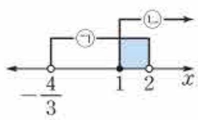
$9-x\ge-4x+12$에서 $3x\ge3$

$\therefore x\ge1$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$1\le x<2$

따라서 정수 x는 1의 1개이다.



답 ①

0852 $|x-a|<7$에서 $-7<x-a<7$

$\therefore a-7<x<a+7$

정수 x의 최솟값이 10이고 $a-7$이 정수이므로

$a-7=9$ $\therefore a=16$

a가 정수이므로 $a-7$도 정수이다.

답 16

0853 $|2x-a|\le4$에서 $-4\le2x-a\le4$

$a-4\le2x\le a+4$

$\therefore \frac{1}{2}a-2\le x\le\frac{1}{2}a+2$

주어진 부등식의 해가 $-1\le x\le b$이므로

$\frac{1}{2}a-2=-1$, $\frac{1}{2}a+2=b$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로

$ab=6$

답 ⑤

0854 $|ax+3|>b$에서 $b>0$이므로

$ax+3<-b$ 또는 $ax+3>b$

$ax+3<-b$에서 $ax<-b-3$

이때 $a<0$이므로 $x>\frac{-b-3}{a}$ ...... ㉠

$ax+3>b$에서 $ax>b-3$

이때 $a<0$이므로 $x<\frac{b-3}{a}$ ...... ㉡ ⋯ ❶

주어진 부등식의 해가 $x<1$ 또는 $x>4$이므로 ㉠, ㉡에서

$\frac{b-3}{a}=1$, $\frac{-b-3}{a}=4$

$\therefore a-b=-3$, $4a+b=-3$

앞의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-\frac{6}{5}$, $b=\frac{9}{5}$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=\frac{3}{5}$ ⋯ ❸

답 $\frac{3}{5}$

채점 기준	비율
❶ 각 일차부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 11 $|ax+b|<cx+d$ 꼴의 부등식

본책 125쪽

$|ax+b|<cx+d$ 꼴의 부등식은 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값인 $-\frac{b}{a}$를 기준으로 x의 값의 범위를

$x<-\frac{b}{a}$, $x\ge-\frac{b}{a}$

로 나누어 푼다.

0855 $|3x-1|-5\le x$에서

(i) $x<\frac{1}{3}$일 때, $3x-1<0$이므로

$-(3x-1)-5\le x$, $-3x-4\le x$

$-4x\le4$ $\therefore x\ge-1$

그런데 $x<\frac{1}{3}$이므로 $-1\le x<\frac{1}{3}$

(ii) $x\ge\frac{1}{3}$일 때, $3x-1\ge0$이므로

$3x-1-5\le x$, $2x\le6$

$\therefore x\le3$

그런데 $x\ge\frac{1}{3}$이므로 $\frac{1}{3}\le x\le3$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-1\le x\le3$

따라서 $a=-1$, $b=3$이므로

$a-b=-4$

답 ①

0856 $|3-x|\le10-x$에서

(i) $x<3$일 때, $3-x>0$이므로

$3-x\le10-x$ $\therefore 0\cdot x\le7$

따라서 해는 모든 실수이다.

그런데 $x<3$이므로 $x<3$

(ii) $x\ge3$일 때, $3-x\le0$이므로

$-(3-x)\le10-x$, $-3+x\le10-x$

$2x\le13$ $\therefore x\le\frac{13}{2}$

그런데 $x\ge3$이므로 $3\le x\le\frac{13}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $x\le\frac{13}{2}$

따라서 자연수 x는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다.

답 ④

0857 $x+1\le|2x-4|$에서

(i) $x<2$일 때, $2x-4<0$이므로

$x+1\le-(2x-4)$, $\quad x+1\le-2x+4$

$3x\le3 \quad \therefore x\le1$

그런데 $x<2$이므로 $\quad x\le1$

(ii) $x\ge2$일 때, $2x-4\ge0$이므로

$x+1\le2x-4$, $\quad -x\le-5$

$\therefore x\ge5$

그런데 $x\ge2$이므로 $\quad x\ge5$

(i), (ii)에서 부등식 $x+1\le|2x-4|$의 해는

$x\le1$ 또는 $x\ge5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠ $\quad\cdots$ ❶

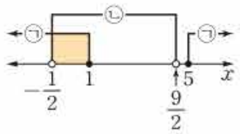
$|2x-4|<5$에서 $\quad -5<2x-4<5$

$-1<2x<9$

$\therefore -\frac{1}{2}<x<\frac{9}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡ $\quad\cdots$ ❷

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-\frac{1}{2}<x\le1$ $\quad\cdots$ ❸



답 $-\frac{1}{2}<x\le1$

채점 기준	비율
❶ 부등식 $x+1\le|2x-4|$의 해를 구할 수 있다.	50 %
❷ 부등식 $|2x-4|<5$의 해를 구할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %

0858 $|x-1|<2x-3$에서

(i) $x<1$일 때, $x-1<0$이므로

$-(x-1)<2x-3$, $\quad -x+1<2x-3$

$-3x<-4 \quad \therefore x>\frac{4}{3}$

그런데 $x<1$이므로 해는 없다.

(ii) $x\ge1$일 때, $x-1\ge0$이므로

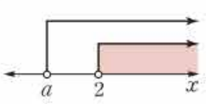
$x-1<2x-3$, $\quad -x<-2$

$\therefore x>2$

그런데 $x\ge1$이므로 $\quad x>2$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $\quad x>2$

따라서 $x>2$가 $x>a$에 포함되려면 오른쪽 그림에서



$a\le2$ $\quad$ 답 $a\le2$

유형 12 절댓값 기호가 두 개인 부등식 $\quad$ 집중공략 $\quad$ 본책 125쪽

절댓값 기호가 두 개인 부등식은 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 두 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 3가지로 나누어 푼다.

➡ 두 일차식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 부등식

$|f(x)|+|g(x)|<k\ (k>0)$

는 $f(a)=0$, $g(b)=0$을 만족시키는 a, b의 값을 구한 후 $a<b$이면

$x<a$, $a\le x<b$, $x\ge b$

로 나누어 푼다.

0859 $|x|+|x-3|\ge5$에서

(i) $x<0$일 때, $x<0$, $x-3<0$이므로

$-x-(x-3)\ge5$, $\quad -2x+3\ge5$

$-2x\ge2 \quad \therefore x\le-1$

그런데 $x<0$이므로 $\quad x\le-1$

(ii) $0\le x<3$일 때, $x\ge0$, $x-3<0$이므로

$x-(x-3)\ge5 \quad \therefore 0\cdot x\ge2$

따라서 해는 없다.

(iii) $x\ge3$일 때, $x>0$, $x-3\ge0$이므로

$x+(x-3)\ge5$, $\quad 2x\ge8$

$\therefore x\ge4$

그런데 $x\ge3$이므로 $\quad x\ge4$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$x\le-1$ 또는 $x\ge4$

따라서 $a=-1$, $b=4$이므로

$a+b=3$ $\quad$ 답 3

0860 $|x+3|-|2x-4|\ge-5$에서

(i) $x<-3$일 때, $x+3<0$, $2x-4<0$이므로

$-(x+3)+2x-4\ge-5$, $\quad x-7\ge-5$

$\therefore x\ge2$

그런데 $x<-3$이므로 해는 없다.

(ii) $-3\le x<2$일 때, $x+3\ge0$, $2x-4<0$이므로

$x+3+2x-4\ge-5$, $\quad 3x\ge-4$

$\therefore x\ge-\frac{4}{3}$

그런데 $-3\le x<2$이므로 $\quad -\frac{4}{3}\le x<2$

(iii) $x\ge2$일 때, $x+3>0$, $2x-4\ge0$이므로

$x+3-(2x-4)\ge-5$, $\quad x+3-2x+4\ge-5$

$-x\ge-12 \quad \therefore x\le12$

그런데 $x\ge2$이므로 $\quad 2\le x\le12$

이상에서 주어진 부등식의 해는 $\quad -\frac{4}{3}\le x\le12$

따라서 $M=12$, $m=-\frac{4}{3}$이므로

$Mm=-16$ $\quad$ 답 ④

0861 $\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$이므로 주어진 부등식은

$|x+1|+|x-2|<x+2$

(i) $x<-1$일 때, $x+1<0$, $x-2<0$이므로

$-(x+1)-(x-2)<x+2$

$-x-1-x+2<x+2$

$-3x<1 \quad \therefore x>-\frac{1}{3}$

그런데 $x<-1$이므로 해는 없다.

(ii) $-1\le x<2$일 때, $x+1\ge0$, $x-2<0$이므로

$x+1-(x-2)<x+2$, $\quad x+1-x+2<x+2$

$-x<-1 \quad \therefore x>1$

그런데 $-1\le x<2$이므로 $\quad 1<x<2$

(iii) $x \ge 2$일 때, $x+1>0$, $x-2 \ge 0$이므로

$x+1+x-2<x+2$ $\quad \therefore x<3$

그런데 $x \ge 2$이므로 $\quad 2 \le x<3$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$1<x<3$

답 ③

0862 $||x-1|-2| \le 3$에서 $\quad -3 \le |x-1|-2 \le 3$

$\therefore -1 \le |x-1| \le 5$

그런데 $\underbrace{|x-1| \ge 0}_{(\text{실수의 절댓값}) \ge 0}$이므로

$0 \le |x-1| \le 5$ ··· ❶

$-5 \le x-1 \le 5$ $\quad \therefore -4 \le x \le 6$ ··· ❷

따라서 정수 x는

$-4, -3, -2, \cdots, 6$

의 11개이다. ··· ❸

답 11

채점 기준	비율
❶ $\vert x-1 \vert$의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 x의 개수를 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 (i) $x<1$일 때, $x-1<0$이므로

$|-(x-1)-2| \le 3$, $\quad |-x-1| \le 3$

$-3 \le -x-1 \le 3$, $\quad -2 \le -x \le 4$

$\therefore -4 \le x \le 2$

그런데 $x<1$이므로 $\quad -4 \le x<1$

(ii) $x \ge 1$일 때, $x-1 \ge 0$이므로

$|x-1-2| \le 3$, $\quad |x-3| \le 3$

$-3 \le x-3 \le 3$ $\quad \therefore 0 \le x \le 6$

그런데 $x \ge 1$이므로 $\quad 1 \le x \le 6$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-4 \le x \le 6$

0863 $|x+2|+|x-1| \le k$에서

(i) $x<-2$일 때, $x+2<0$, $x-1<0$이므로

$-(x+2)-(x-1) \le k$, $\quad -x-2-x+1 \le k$

$-2x \le k+1$ $\quad \therefore x \ge -\dfrac{k+1}{2}$

그런데 $x<-2$이므로 $\quad \underbrace{-\dfrac{k+1}{2}}_{k>3\text{에서 } -\frac{k+1}{2}<-2} \le x<-2$

(ii) $-2 \le x<1$일 때, $x+2 \ge 0$, $x-1<0$이므로

$x+2-(x-1) \le k$, $\quad x+2-x+1 \le k$

$\therefore 0 \cdot x \le \underbrace{k-3}_{k>3\text{에서 } k-3>0}$

따라서 해는 모든 실수이다.

그런데 $-2 \le x<1$이므로 $\quad -2 \le x<1$

(iii) $x \ge 1$일 때, $x+2>0$, $x-1 \ge 0$이므로

$x+2+x-1 \le k$, $\quad 2x \le k-1$

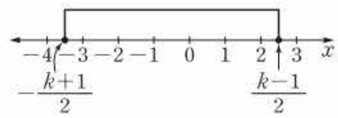
$\therefore x \le \dfrac{k-1}{2}$

그런데 $x \ge 1$이므로 $\quad 1 \le x \le \underbrace{\dfrac{k-1}{2}}_{k>3\text{에서 } \frac{k-1}{2}>1}$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$-\dfrac{k+1}{2} \le x \le \dfrac{k-1}{2}$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 6이려면 오른쪽 그림에서



$2 \le \dfrac{k-1}{2}<3$

$4 \le k-1<6$

$\therefore 5 \le k<7$

답 $5 \le k<7$

참고 $-4<-\dfrac{k+1}{2} \le -3$에서 k의 값의 범위를 구하여도 $5 \le k<7$로 같다.

SSEN 특강

$-\dfrac{k+1}{2}<-2$, $\dfrac{k-1}{2}>1$이므로 $-\dfrac{k+1}{2}$과 $\dfrac{k-1}{2}$ 사이에는 $-2, -1, 0, 1$이 존재한다.

한편 $-\dfrac{k+1}{2}$은 $-\dfrac{1}{2}$보다 $\dfrac{k}{2}$만큼 작은 수이고, $\dfrac{k-1}{2}$은 $-\dfrac{1}{2}$보다 $\dfrac{k}{2}$만큼 큰 수이므로 $-\dfrac{k+1}{2}$과 $\dfrac{k-1}{2}$은 수직선 위에서 $-\dfrac{1}{2}$로부터 같은 거리에 있다.

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 6이려면 정수 x는 $-3, -2, -1, 0, 1, 2$이어야 한다. 즉

$-4<-\dfrac{k+1}{2} \le -3$, $2 \le \dfrac{k-1}{2}<3$

이어야 한다.

유형 13 절댓값 기호를 포함한 부등식의 해의 조건 본책 126쪽

① $|ax+b|<c$의 해가 없다. ➡ $c \le 0$
② $|ax+b| \le c$의 해가 없다. ➡ $c<0$
③ $|ax+b|>c$의 해가 모든 실수이다. ➡ $c<0$
④ $|ax+b| \ge c$의 해가 모든 실수이다. ➡ $c \le 0$

0864 $|2x-3|+1>a$에서

$|2x-3|>a-1$

이 부등식의 해가 모든 실수이려면

$a-1<0$ $\quad \therefore a<1$

답 ④

0865 주어진 부등식의 해가 존재하지 않으려면

$\dfrac{1}{2}a+1<0$, $\quad \dfrac{1}{2}a<-1$

$\therefore a<-2$

따라서 정수 a의 최댓값은 -3이다.

답 ③

0866 $\left|\dfrac{1}{3}x+2\right|+k \le 0$에서

$\left|\dfrac{1}{3}x+2\right| \le -k$

이 부등식이 해를 가지려면

$-k \ge 0$ $\quad \therefore k \le 0$

답 $k \le 0$

0867 (1) $|x-k|\geq 0$이므로 주어진 부등식이 오직 한 개의 해를 가지려면

$k^2+k=0, \quad k(k+1)=0$

$\therefore k=-1$ ($\because k\neq 0$) ⋯ ❶

(2) 주어진 부등식은 $|x+1|\leq 0$이므로 구하는 해는

$x=-1$ ⋯ ❷

답 (1) -1 (2) $x=-1$

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	70 %
❷ 부등식의 해를 구할 수 있다.	30 %

참고 ① $|ax+b|\leq c$의 해가 오직 하나뿐이다. ➡ $c=0$

② $|ax+b|>c$에서 $c=0$이면 이 부등식의 해는 $ax+b=0$이 되는 x의 값을 제외한 모든 실수, 즉 $x\neq -\frac{b}{a}$인 모든 실수이다.

0868 1st $0<b<1<a$가 성립하는지 확인한다.

ㄱ. $a>0$이므로 $\frac{1}{a}<1$의 양변에 a를 곱하면

$1<a$

$b>0$이므로 $1<\frac{1}{b}$의 양변에 b를 곱하면

$b<1$

$\therefore 0<b<1<a$

2nd $ab^2>a^2b$가 성립하는지 확인한다.

ㄴ. $(ab)^2>0$이므로 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$의 양변에 $(ab)^2$을 곱하면

$ab^2<a^2b$

3rd $ab+1<a+b$가 성립하는지 확인한다.

ㄷ. $(ab+1)-(a+b)=ab-a-b+1$

$=a(b-1)-(b-1)$

$=(a-1)(b-1)$

그런데 ㄱ에서 $a>1$, $b<1$이므로

$a-1>0$, $b-1<0$

따라서 $(a-1)(b-1)<0$이므로

$(ab+1)-(a+b)<0$

$\therefore ab+1<a+b$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0869 1st $a+b$의 부호를 구하고 b를 a에 대한 식으로 나타낸다.

$(a+b)x<a$의 해가 $x>\frac{1}{3}$이므로

$a+b<0$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

$\therefore x>\frac{a}{a+b}$

따라서 $\frac{a}{a+b}=\frac{1}{3}$이므로

$3a=a+b \quad \therefore b=2a$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

2nd a의 부호를 구한다.

㉡을 ㉠에 대입하면

$a+2a<0, \quad 3a<0$

$\therefore a<0$ ⋯ ❸

3rd 부등식 $ax+a>bx-2b$의 해를 구한다.

㉡을 $ax+a>bx-2b$에 대입하면

$ax+a>2ax-4a, \quad -ax>-5a$

이때 $-a>0$이므로 $x>5$ ⋯ ❹

답 $x>5$

채점 기준	비율
❶ $a+b$의 부호를 구할 수 있다.	20 %
❷ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ a의 부호를 구할 수 있다.	20 %
❹ 부등식 $ax+a>bx-2b$의 해를 구할 수 있다.	30 %

0870 1st 조건 (가)를 만족시키는 x의 값의 범위를 구한다.

조건 (가)에서 $\sqrt{x-5}\sqrt{-3-x}=-\sqrt{(x-5)(-3-x)}$이므로

$x-5<0$, $-3-x<0$ 또는 $x-5=0$ 또는 $-3-x=0$

$-3<x<5$ 또는 $x=5$ 또는 $x=-3$

$\therefore -3\leq x\leq 5$ ⋯⋯ ㉠

2nd 조건 (나)를 만족시키는 x의 값의 범위를 구한다.

조건 (나)에서 $\frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+2}}=-\sqrt{\frac{x+6}{x+2}}$이므로

$x+6>0$, $x+2<0$ 또는 $x+6=0$, $x+2\neq 0$

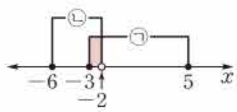
$-6<x<-2$ 또는 $x=-6$, $x\neq -2$

$\therefore -6\leq x<-2$ ⋯⋯ ㉡

3rd 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 정수 x의 개수를 구한다.

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3\leq x<-2$



따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 정수 x는 -3의 1개이다. 답 ①

SSEN 특강 음수의 제곱근의 성질

실수 a, b에 대하여

① $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면 $a<0$, $b<0$ 또는 $a=0$ 또는 $b=0$

② $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이면 $a>0$, $b<0$ 또는 $a=0$, $b\neq 0$

0871

❸두 자연수 a, b에 대하여 ❶$\frac{a}{b}$를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림하면 5이다. ❷$2a-5b=23$일 때, ❹ab의 값을 구하시오. $4.5\leq\frac{a}{b}<5.5$

❶을 이용하여 구한 $\frac{a}{b}$의 값의 범위를 ❷를 이용하여 b에 대한 부등식으로 변형한다. 이 b에 대한 부등식을 풀고 ❸을 이용하여 a, b의 값을 구한 후 ❹를 구한다.

1st $\frac{a}{b}$의 값의 범위를 구한다.

$\frac{a}{b}$를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림하면 5이므로

$4.5\leq\frac{a}{b}<5.5$

2nd b의 값의 범위를 구한다.

$2b>0$이므로 각 변에 $2b$를 곱하면 ─ b는 자연수이므로 $2b>0$

$9b\le 2a<11b$

$2a-5b=23$, 즉 $2a=5b+23$을 위의 식에 대입하면

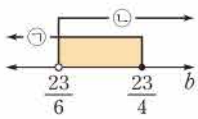
$9b\le 5b+23<11b$

$9b\le 5b+23$에서 $\quad 4b\le 23 \quad \therefore b\le \frac{23}{4}$ …… ㉠

$5b+23<11b$에서 $\quad -6b<-23 \quad \therefore b>\frac{23}{6}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{23}{6}<b\le \frac{23}{4}$



3rd ab의 값을 구한다.

b는 자연수이므로 $\quad b=4$ 또는 $b=5$

(i) $b=4$일 때,

$2a=5\cdot 4+23=43 \quad \therefore a=\frac{43}{2}$

즉 주어진 조건을 만족시키지 않는다. ─ a는 자연수이다.

(ii) $b=5$일 때,

$2a=5\cdot 5+23=48 \quad \therefore a=24$

(i), (ii)에서 $a=24$, $b=5$이므로 $\quad ab=120$

답 120

0872 **1st** a, b의 값을 구한다.

(1) $3x+a<2x+b$에서 $\quad x<b-a$

$x+1\le 2x+b$에서 $\quad -x\le b-1 \quad \therefore x\ge 1-b$

그런데 잘못 변형한 연립부등식의 해가 $-1\le x<3$이므로

$1-b=-1$, $b-a=3$

$\therefore a=-1$, $b=2$ ⋯➊

2nd 원래 부등식의 해를 구한다.

(2) 원래 부등식은 $3x-1<x+1\le 2x+2$이므로

$3x-1<x+1$에서 $\quad 2x<2$

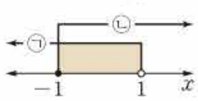
$\therefore x<1$ …… ㉠

$x+1\le 2x+2$에서 $\quad -x\le 1$

$\therefore x\ge -1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1\le x<1$ ⋯➋



답 (1) $a=-1$, $b=2$ (2) $-1\le x<1$

채점 기준	비율
➊ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
➋ 원래 부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %

0873 **1st** a의 부호와 $\frac{b}{a}$의 값을 구한다.

$ax+b<0$에서 $\quad ax<-b$

이 부등식의 해가 $x<5$이므로 $\quad a>0$

$\therefore x<-\frac{b}{a}$

따라서 $-\frac{b}{a}=5$이므로 $\quad \frac{b}{a}=-5$

2nd c의 부호와 $\frac{d}{c}$의 값을 구한다.

$cx+d\ge 0$에서 $\quad cx\ge -d$

이 부등식의 해가 $x\ge -3$이므로 $\quad c>0$

$\therefore x\ge -\frac{d}{c}$

따라서 $-\frac{d}{c}=-3$이므로 $\quad \frac{d}{c}=3$

3rd 연립부등식 $\begin{cases} ax-b<0 \\ cx-d\ge 0 \end{cases}$을 푼다.

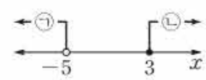
$ax-b<0$에서 $\quad x<\frac{b}{a}$

$\therefore x<-5$ …… ㉠

$cx-d\ge 0$에서 $\quad x\ge \frac{d}{c}$

$\therefore x\ge 3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 연립부등식 $\begin{cases} ax-b<0 \\ cx-d\ge 0 \end{cases}$의 해는 없다.



답 해는 없다.

0874 **1st** $a>-1$일 때, 주어진 조건을 만족시키는지 확인한다.

$ax+2\le -x-2a$에서

$(a+1)x\le -2(a+1)$ …… ㉠

(i) $a>-1$일 때, $a+1>0$이므로 부등식 ㉠의 해는

$x\le -2$

따라서 연립부등식의 해가 $x<\frac{5}{3}$일 수 없다.

2nd $a=-1$일 때, b의 값을 구한다.

(ii) $a=-1$일 때, 부등식 ㉠은 $0\cdot x\le 0$이므로 그 해는 모든 실수이다.

따라서 연립부등식의 해가 $x<\frac{5}{3}$이려면 $bx+10<2ax+5b$의 해가 $x<\frac{5}{3}$이어야 한다.

$a=-1$을 $bx+10<2ax+5b$에 대입하면

$bx+10<-2x+5b$

$(b+2)x<5b-10$

이 부등식의 해가 $x<\frac{5}{3}$이어야 하므로 $\quad b+2>0$

$\therefore x<\frac{5b-10}{b+2}$

즉 $\frac{5b-10}{b+2}=\frac{5}{3}$이므로

$15b-30=5b+10$

$10b=40 \quad \therefore b=4$

3rd $a<-1$일 때, 주어진 조건을 만족시키는지 확인한다.

(iii) $a<-1$일 때, $a+1<0$이므로 부등식 ㉠의 해는

$x\ge -2$

따라서 연립부등식의 해가 $x<\frac{5}{3}$일 수 없다.

4th $a-b$의 값을 구한다.

이상에서 $\quad a=-1$, $b=4$

$\therefore a-b=-5$

답 -5

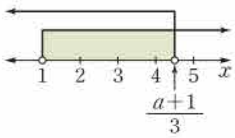
0875 (1st) 각 일차부등식의 해를 구한다.

$x+2>3$에서 $\quad x>1$

$3x<a+1$에서 $\quad x<\dfrac{a+1}{3}$

(2nd) 모든 정수 x의 값의 합이 9가 되도록 하는 자연수 a의 최댓값을 구한다.

오른쪽 그림에서 주어진 연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 9인 경우는



$2+3+4=9$

이므로

$4<\dfrac{a+1}{3}\le 5, \qquad 12<a+1\le 15$

$\therefore\ 11<a\le 14$

따라서 자연수 a의 최댓값은 14이다. 답 ⑤

0876 (1st) 학생 수를 x라 하고 부등식을 세운다.

학생 수를 x라 하면 피자 조각의 개수는 $3(x-5)$이므로

$2x+1\le 3(x-5)\le 2x+6$

(2nd) 부등식의 해를 구한다.

$2x+1\le 3(x-5)$에서

$2x+1\le 3x-15$

$-x\le -16 \qquad \therefore\ x\ge 16$ …… ㉠

$3(x-5)\le 2x+6$에서

$3x-15\le 2x+6$

$\therefore\ x\le 21$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$16\le x\le 21$

(3rd) 최소 학생 수를 구한다.

x는 자연수이고, $3(x-5)$가 6의 배수이어야 하므로

└ 한 판이 6조각이므로 6의 배수이어야 한다.

$x=17,\ 19,\ 21$

따라서 최소 학생 수는 17이다. 답 ②

0877 (1st) 처음 자연수의 십의 자리의 숫자를 x라 하고 연립부등식을 세운다.

처음 자연수의 십의 자리의 숫자를 x라 하면 일의 자리의 숫자는 $x+3$이므로

$$\begin{cases} x+(x+3)\ge 10 \\ 10(x+3)+x>2\{10x+(x+3)\}-30 \end{cases}$$ … ❶

(2nd) 연립부등식의 해를 구한다.

$x+(x+3)\ge 10$에서

$2x\ge 7 \qquad \therefore\ x\ge \dfrac{7}{2}$ …… ㉠

$10(x+3)+x>2\{10x+(x+3)\}-30$에서

$11x+30>22x-24, \qquad -11x>-54$

$\therefore\ x<\dfrac{54}{11}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\dfrac{7}{2}\le x<\dfrac{54}{11}$ … ❷

(3rd) 처음 자연수를 구한다.

x는 자연수이므로 $\quad x=4$

따라서 처음 자연수는 47이다. … ❸

답 47

채점 기준	비율
❶ 연립부등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 처음 자연수를 구할 수 있다.	20 %

0878 (1st) C 지점에서 출발하여 Q 지점까지 가는 조건을 이용하여 등식을 세운다.

다리의 길이를 l m라 하고 C 지점에서 P 지점까지의 거리를 a m, D 지점에서 Q 지점까지의 거리를 b m라 하자.

C → P → A → Q, C → B → D → Q,

C → B → A → Q로 가는 경우의 이동 거리가 모두 같으므로

$a+x+x=9+12+b=9+l+x$

$\therefore\ a=9+l-x,\ b=l+x-12$ …… ㉠

(2nd) D 지점에서 출발하여 P 지점까지 가는 조건을 이용하여 부등식을 세운다.

D → Q → A → P, D → B → C → P,

D → B → A → P로 가는 경우의 순서대로 이동 거리가 멀어지므로

$b+x+x<12+9+a<12+l+x$

㉠을 위의 식에 대입하면

$(l+x-12)+2x<21+(9+l-x)<12+l+x$ 각 변에서 l을 뺀다.

$\therefore\ 3x-12<30-x<12+x$

(3rd) 부등식의 해를 구한다.

$3x-12<30-x$에서 $\quad 4x<42$

$\therefore\ x<\dfrac{21}{2}$ …… ㉡

$30-x<12+x$에서 $\quad -2x<-18$

$\therefore\ x>9$ …… ㉢

㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $\quad 9<x<\dfrac{21}{2}$

(4th) 자연수 x의 값을 구한다.

따라서 구하는 자연수 x의 값은 10이다. 답 ③

0879 (1st) 각 부등식의 해를 a로 나타낸다.

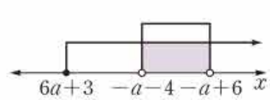
$x-6a\ge 3$에서 $\quad x\ge 6a+3$

$|x+a-1|<5$에서 $\quad -5<x+a-1<5$

$\therefore\ -a-4<x<-a+6$ …… ㉠ … ❶

(2nd) a의 값의 범위를 구한다.

주어진 연립부등식의 해가 부등식 $|x+a-1|<5$의 해, 즉 ㉠과 같으려면 오른쪽 그림에서



$6a+3\le -a-4$

$7a\le -7 \qquad \therefore\ a\le -1$ … ❷

답 $a\le -1$

채점 기준	비율
❶ 각 부등식의 해를 a로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %

0880 1st k의 값을 구한다.

$|x-k|<k^2$에서 ┌ $k=0$이면 이 부등식의 해는 존재하지 않으므로 $k\neq 0$ $\therefore k^2>0$

$-k^2<x-k<k^2$

$\therefore -k^2+k<x<k^2+k$

이 부등식의 해가 $-6<x<12$이므로

$-k^2+k=-6$, $k^2+k=12$

(i) $-k^2+k=-6$에서 $k^2-k-6=0$

$(k+2)(k-3)=0$ $\therefore k=-2$ 또는 $k=3$

(ii) $k^2+k=12$에서 $k^2+k-12=0$

$(k+4)(k-3)=0$ $\therefore k=-4$ 또는 $k=3$

(i), (ii)에서 $k=3$

2nd 부등식 $|x-1|<k$의 해를 구한다.

$|x-1|<k$에서

$|x-1|<3$, $-3<x-1<3$

$\therefore -2<x<4$

3rd 정수 x의 값의 합을 구한다.

정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$(-1)+0+1+2+3=5$ 답 ①

다른 풀이 $-k^2+k=-6$, $k^2+k=12$에서

$k^2=k+6$, $k^2=12-k$

즉 $k+6=12-k$이므로

$2k=6$ $\therefore k=3$

0881

연립부등식 $\begin{cases} |5-3x|<x+1 & \cdots ❶ \\ a(x+3)>a^2+3x & \cdots ❷ \end{cases}$ 가 해를 갖지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

└ 각 일차부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 공통부분이 없다.

먼저 ❶의 해를 구한 후 공통부분이 없도록 ❷의 해를 수직선 위에 나타내어 본다.

1st 부등식 $|5-3x|<x+1$의 해를 구한다.

$|5-3x|<x+1$에서

(i) $x<\frac{5}{3}$일 때, $5-3x>0$이므로

$5-3x<x+1$, $-4x<-4$

$\therefore x>1$

그런데 $x<\frac{5}{3}$이므로 $1<x<\frac{5}{3}$

(ii) $x\geq\frac{5}{3}$일 때, $5-3x\leq 0$이므로

$-(5-3x)<x+1$, $-5+3x<x+1$

$2x<6$ $\therefore x<3$

그런데 $x\geq\frac{5}{3}$이므로 $\frac{5}{3}\leq x<3$

(i), (ii)에서 $|5-3x|<x+1$의 해는

$1<x<3$

2nd 주어진 연립부등식이 해를 갖지 않도록 하는 a의 값의 범위를 구한다.

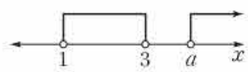
$a(x+3)>a^2+3x$에서 $ax+3a>a^2+3x$

$\therefore (a-3)x>a(a-3)$ …… ㉠

(iii) $a>3$일 때, $a-3>0$이므로 부등식 ㉠의 해는

$x>a$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



$a\geq 3$

그런데 $a>3$이므로 $a>3$

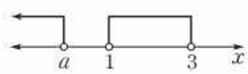
(iv) $a=3$일 때, 부등식 ㉠은 $0\cdot x>0$이므로 그 해는 없다.

따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.

(v) $a<3$일 때, $a-3<0$이므로 부등식 ㉠의 해는

$x<a$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



$a\leq 1$

그런데 $a<3$이므로 $a\leq 1$

(iii)~(v)에서 $a\leq 1$ 또는 $a\geq 3$ 답 $a\leq 1$ 또는 $a\geq 3$

0882 1st 주어진 부등식을 근호를 사용하지 않고 나타낸다.

$\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$이므로 주어진 부등식은

$||x+2|+|x-1||\leq 4$

$\therefore 0\leq|x+2|+|x-1|\leq 4$ ┌ $|x+2|\geq 0$, $|x-1|\geq 0$이므로 $|x+2|+|x-1|\geq 0$ …→ ❶

2nd 주어진 부등식의 해를 구한다.

(i) $x<-2$일 때, $x+2<0$, $x-1<0$이므로

$0\leq-(x+2)-(x-1)\leq 4$, $0\leq -2x-1\leq 4$

$1\leq -2x\leq 5$ $\therefore -\frac{5}{2}\leq x\leq -\frac{1}{2}$

그런데 $x<-2$이므로 $-\frac{5}{2}\leq x<-2$

(ii) $-2\leq x<1$일 때, $x+2\geq 0$, $x-1<0$이므로

$0\leq x+2-(x-1)\leq 4$ $\therefore 0\leq 0\cdot x+3\leq 4$

따라서 해는 모든 실수이다.

그런데 $-2\leq x<1$이므로 $-2\leq x<1$

(iii) $x\geq 1$일 때, $x+2>0$, $x-1\geq 0$이므로

$0\leq x+2+x-1\leq 4$, $0\leq 2x+1\leq 4$

$-1\leq 2x\leq 3$ $\therefore -\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}$

그런데 $x\geq 1$이므로 $1\leq x\leq\frac{3}{2}$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$-\frac{5}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}$ …→ ❷

3rd $a+b$의 값을 구한다.

$a=-\frac{5}{2}$, $b=\frac{3}{2}$이므로

$a+b=-1$ …→ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식을 근호를 사용하지 않고 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0883 **1st** 주어진 부등식의 해를 a, b로 나타낸다.

(i) $x<0$일 때, $x-a<0$이므로

$$-x-(x-a)<b, \qquad -2x<b-a$$

$$\therefore x>\frac{a-b}{2}$$

그런데 $x<0$이므로 $\quad \frac{a-b}{2}<x<0$

$a<b$에서 $\frac{a-b}{2}<0$

(ii) $0\le x<a$일 때, $x-a<0$이므로

$$x-(x-a)<b$$

$$\therefore 0\cdot x<b-a$$

이때 $b-a>0$이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $0\le x<a$이므로 $\quad 0\le x<a$

(iii) $x\ge a$일 때, $x>0$, $x-a\ge 0$이므로

$$x+x-a<b, \qquad 2x<a+b$$

$$\therefore x<\frac{a+b}{2}$$

그런데 $x\ge a$이므로 $\quad a\le x<\frac{a+b}{2}$

$a<b$에서 $2a<a+b$ $\quad \therefore a<\frac{a+b}{2}$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$\frac{a-b}{2}<x<\frac{a+b}{2}$$

2nd $f(1,\ 6)$의 값을 구한다.

ㄱ. $a=1$, $b=6$이면 주어진 부등식의 해는

$$-\frac{5}{2}<x<\frac{7}{2}$$

이를 만족시키는 정수 x는 -2, -1, 0, 1, 2, 3의 6개이므로

$$f(1,\ 6)=6$$

3rd $f(n,\ n+6)$, $f(n+1,\ n+7)$의 값을 각각 구하여 비교한다.

ㄴ. $a=n$, $b=n+6$이면 주어진 부등식의 해는

$$-3<x<n+3$$

이므로

$$f(n,\ n+6)=(n+3)-(-3)-1$$
$$=n+5$$

$a=n+1$, $b=n+7$이면 주어진 부등식의 해는

$$-3<x<n+4$$

이므로

$$f(n+1,\ n+7)=(n+4)-(-3)-1$$
$$=n+6$$

$$\therefore f(n,\ n+6)\ne f(n+1,\ n+7)$$

4th $f(2n,\ 8n)<100$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값을 구한다.

ㄷ. $a=2n$, $b=8n$이면 주어진 부등식의 해는

$$-3n<x<5n$$

이므로

$$f(2n,\ 8n)=5n-(-3n)-1$$
$$=8n-1$$

$f(2n,\ 8n)<100$에서

$$8n-1<100, \qquad 8n<101$$

$$\therefore n<\frac{101}{8}$$

따라서 자연수 n의 최댓값은 12이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

SSEN 특강 **부등식을 만족시키는 정수 x의 개수**

> $a<b$인 정수 a, b에 대하여 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 다음과 같다.
>
> ① $a<x<b$일 때, $\quad b-a-1$
>
> ② $a\le x<b$ 또는 $a<x\le b$일 때, $\quad b-a$
>
> ③ $a\le x\le b$일 때, $\quad b-a+1$

0884 **1st** x의 값의 범위를 나누어 주어진 부등식의 좌변의 값의 범위를 구한다.

(i) $x<-1$일 때, $x-1<0$, $x+1<0$이므로

$$|x-1|+2|x+1|=-(x-1)-2(x+1)$$
$$=-3x-1$$

그런데 $x<-1$이므로

$$-3x>3$$

$$\therefore -3x-1>2$$

(ii) $-1\le x<1$일 때, $x-1<0$, $x+1\ge 0$이므로

$$|x-1|+2|x+1|=-(x-1)+2(x+1)$$
$$=x+3$$

그런데 $-1\le x<1$이므로

$$2\le x+3<4$$

(iii) $x\ge 1$일 때, $x-1\ge 0$, $x+1>0$이므로

$$|x-1|+2|x+1|=x-1+2(x+1)$$
$$=3x+1$$

그런데 $x\ge 1$이므로 $\quad 3x\ge 3$

$$\therefore 3x+1\ge 4$$

2nd 주어진 부등식이 해를 갖도록 하는 실수 k의 최솟값을 구한다.

이상에서 $|x-1|+2|x+1|\ge 2$이므로 주어진 부등식이 해를 가지려면

$$k\ge 2$$

따라서 k의 최솟값은 2이다. 답 ③

Ⅲ. 부등식

08 이차부등식

0885 답 $x<-1$ 또는 $x>3$

0886 답 $-1\le x\le 3$

0887 답 $\alpha<x<\gamma$

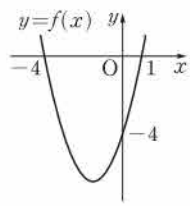
0888 답 $x\le\beta$ 또는 $x\ge\delta$

0889 $f(x)=x^2+3x-4$라 하면

$f(x)=(x+4)(x-1)$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $f(x)<0$의 해는

$-4<x<1$ 답 $-4<x<1$

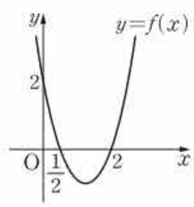


0890 $f(x)=2x^2-5x+2$라 하면

$f(x)=(2x-1)(x-2)$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $f(x)\ge 0$의 해는

$x\le\frac{1}{2}$ 또는 $x\ge 2$

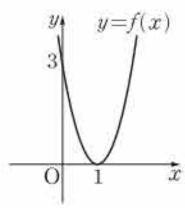


답 $x\le\frac{1}{2}$ 또는 $x\ge 2$

0891 $f(x)=3x^2-6x+3$이라 하면

$f(x)=3(x-1)^2$

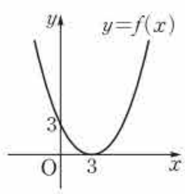
따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $f(x)>0$의 해는 $x\ne 1$인 모든 실수이다. 답 $x\ne 1$인 모든 실수



0892 $f(x)=\frac{1}{3}x^2-2x+3$이라 하면

$f(x)=\frac{1}{3}(x-3)^2$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $f(x)\le 0$의 해는 $x=3$이다.



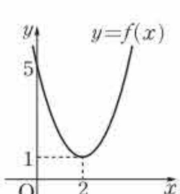
답 $x=3$

0893 $f(x)=x^2-4x+5$라 하면

$f(x)=(x-2)^2+1$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $f(x)<0$의 해는 없다.

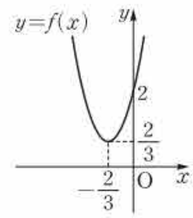
답 해는 없다.



0894 $f(x)=3x^2+4x+2$라 하면

$f(x)=3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $f(x)\ge 0$의 해는 모든 실수이다.



답 모든 실수

0895 $x^2+2x-8\le 0$에서 $(x+4)(x-2)\le 0$

$\therefore -4\le x\le 2$ 답 $-4\le x\le 2$

0896 $-3x^2+2x+1<0$에서 $3x^2-2x-1>0$

$(3x+1)(x-1)>0$

$\therefore x<-\frac{1}{3}$ 또는 $x>1$ 답 $x<-\frac{1}{3}$ 또는 $x>1$

0897 $x^2-8x+16>0$에서 $(x-4)^2>0$

따라서 주어진 부등식의 해는 $x\ne 4$인 모든 실수이다.

답 $x\ne 4$인 모든 실수

0898 $x^2+4\le 4x$에서 $x^2-4x+4\le 0$

$(x-2)^2\le 0$

그런데 $(x-2)^2\ge 0$이므로 주어진 부등식의 해는 $x=2$이다.

답 $x=2$

0899 $-x^2<x+1$에서 $x^2+x+1>0$

그런데 $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다. 답 모든 실수

0900 $2(x-2)>x^2$에서 $x^2-2x+4<0$

그런데 $x^2-2x+4=(x-1)^2+3\ge 3$이므로 주어진 부등식의 해는 없다. 답 해는 없다.

0901 $(x+1)(x-7)<0$에서 $x^2-6x-7<0$

답 $x^2-6x-7<0$

0902 $(x-3)(x-5)\ge 0$에서 $x^2-8x+15\ge 0$

답 $x^2-8x+15\ge 0$

0903 $(x-5)^2>0$에서 $x^2-10x+25>0$

답 $x^2-10x+25>0$

0904 $(x+6)^2\le 0$에서 $x^2+12x+36\le 0$

답 $x^2+12x+36\le 0$

0905 해가 $x<-2$ 또는 $x>8$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-8)>0$ $\therefore x^2-6x-16>0$

$\therefore a=-6,\ b=-16$ 답 $a=-6,\ b=-16$

0906 해가 $-3\le x\le 1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+3)(x-1)\le 0 \qquad \therefore x^2+2x-3\le 0$

$\therefore a=2,\ b=-3$ 　　답 $a=2,\ b=-3$

0907 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=x^2-4x+k+2$의 그래프가 x축보다 항상 위쪽에 있어야 한다.
└ $x^2-4x+k+2=0$의 실근이 없다.

이차방정식 $x^2-4x+k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(k+2)<0$

$2-k<0 \qquad \therefore k>2$ 　　답 $k>2$

0908 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=x^2-kx+3k$의 그래프가 x축에 접하거나 x축보다 위쪽에 있어야 한다.

이차방정식 $x^2-kx+3k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4\cdot 3k\le 0$

$k^2-12k\le 0, \qquad k(k-12)\le 0$

$\therefore 0\le k\le 12$ 　　답 $0\le k\le 12$

0909 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=-x^2-kx+k-3$의 그래프가 x축보다 항상 아래쪽에 있어야 한다.

이차방정식 $-x^2-kx+k-3=0$, 즉 $x^2+kx-k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4(-k+3)<0$

$k^2+4k-12<0, \qquad (k+6)(k-2)<0$

$\therefore -6<k<2$ 　　답 $-6<k<2$

0910 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=-2x^2-(k+1)x-k+1$의 그래프가 x축에 접하거나 x축보다 아래쪽에 있어야 한다.

이차방정식 $-2x^2-(k+1)x-k+1=0$, 즉

$2x^2+(k+1)x+k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k+1)^2-4\cdot 2\cdot (k-1)\le 0$

$k^2-6k+9\le 0, \qquad (k-3)^2\le 0$

$\therefore k=3$ 　　답 3

0911 이차부등식 $x^2+2x+k-3<0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2x+k-3\ge 0$이 성립해야 한다.

즉 이차함수 $y=x^2+2x+k-3$의 그래프가 x축에 접하거나 x축보다 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $x^2+2x+k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-(k-3)\le 0$

$-k+4\le 0 \qquad \therefore k\ge 4$ 　　답 $k\ge 4$

0912 $4x+10\ge 6$에서 $\quad 4x\ge -4$

$\therefore x\ge -1$ ...... ㉠

$2x^2-7x-4\le 0$에서 $\quad (2x+1)(x-4)\le 0$

$\therefore -\frac{1}{2}\le x\le 4$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-\frac{1}{2}\le x\le 4$ 　　답 $-\frac{1}{2}\le x\le 4$

0913 $2x+3>6x-1$에서 $\quad -4x>-4$

$\therefore x<1$ ...... ㉠

$6-x\ge x^2$에서 $\quad x^2+x-6\le 0$

$(x+3)(x-2)\le 0 \qquad \therefore -3\le x\le 2$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3\le x<1$ 　　답 $-3\le x<1$

0914 $x^2+2x-15\le 0$에서 $\quad (x+5)(x-3)\le 0$

$\therefore -5\le x\le 3$ ...... ㉠

$x^2-7x+10>0$에서 $\quad (x-2)(x-5)>0$

$\therefore x<2$ 또는 $x>5$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-5\le x<2$ 　　답 $-5\le x<2$

0915 $2x^2-9x+10>0$에서 $\quad (x-2)(2x-5)>0$

$\therefore x<2$ 또는 $x>\frac{5}{2}$ ...... ㉠

$3x^2-10x+3<0$에서 $\quad (3x-1)(x-3)<0$

$\therefore \frac{1}{3}<x<3$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{1}{3}<x<2$ 또는 $\frac{5}{2}<x<3$

답 $\frac{1}{3}<x<2$ 또는 $\frac{5}{2}<x<3$

0916 $-5\le x^2+5x-1$에서

$x^2+5x+4\ge 0, \qquad (x+4)(x+1)\ge 0$

$\therefore x\le -4$ 또는 $x\ge -1$ ...... ㉠

$x^2+5x-1\le 5$에서 $\quad x^2+5x-6\le 0$

$(x+6)(x-1)\le 0 \qquad \therefore -6\le x\le 1$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-6\le x\le -4$ 또는 $-1\le x\le 1$

답 $-6\le x\le -4$ 또는 $-1\le x\le 1$

0917 $5x-1<x^2+5$에서

$x^2-5x+6>0, \qquad (x-2)(x-3)>0$

$\therefore x<2$ 또는 $x>3$ ...... ㉠

$x^2+5<6x$에서 $\quad x^2-6x+5<0$

$(x-1)(x-5)<0 \qquad \therefore 1<x<5$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$1<x<2$ 또는 $3<x<5$ 　　답 $1<x<2$ 또는 $3<x<5$

0918 이차방정식 $x^2-2x+k+2=0$의 두 근을 α, β, 판별식을 D라 하면

└두 근이 모두 양수이므로 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

(i) $\frac{D}{4}=(-1)^2-(k+2)\geq 0$

$-1-k\geq 0 \qquad \therefore k\leq -1$

(ii) $\alpha+\beta=2>0$

(iii) $\alpha\beta=k+2>0 \qquad \therefore k>-2$

이상에서 공통부분을 구하면

$-2<k\leq -1$

답 $-2<k\leq -1$

0919 이차방정식 $x^2+(k+1)x+1=0$의 두 근을 α, β, 판별식을 D라 하면

└두 근이 모두 음수이므로 $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

(i) $D=(k+1)^2-4\geq 0$

$k^2+2k-3\geq 0, \qquad (k+3)(k-1)\geq 0$

$\therefore k\leq -3$ 또는 $k\geq 1$

(ii) $\alpha+\beta=-k-1<0 \qquad \therefore k>-1$

(iii) $\alpha\beta=1>0$

이상에서 공통부분을 구하면

$k\geq 1$

답 $k\geq 1$

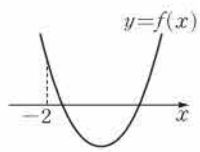
0920 이차방정식 $x^2-(k+2)x+k^2-1=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha\beta<0$이므로

$k^2-1<0, \qquad (k+1)(k-1)<0$

$\therefore -1<k<1$

답 $-1<k<1$

0921 $f(x)=x^2-4x+k-3$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -2보다 크므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(k-3)\geq 0$

$7-k\geq 0 \qquad \therefore k\leq 7$

(ii) $f(-2)=4+8+k-3>0$

$9+k>0 \qquad \therefore k>-9$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=2$이고 $2>-2$이다.

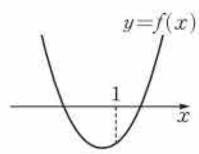
└$f(x)=x^2-4x+k-3=(x-2)^2+k-7$

이상에서 공통부분을 구하면

$-9<k\leq 7$

답 $-9<k\leq 7$

0922 $f(x)=x^2+(k^2+2)x-3k-13$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 1이 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



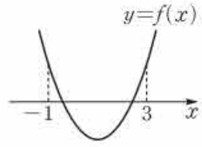
따라서 $f(1)<0$이어야 하므로

$1+k^2+2-3k-13<0, \qquad k^2-3k-10<0$

$(k+2)(k-5)<0 \qquad \therefore -2<k<5$

답 $-2<k<5$

0923 $f(x)=x^2-(k-1)x-k+4$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 -1과 3 사이에 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(k-1)\}^2-4(-k+4)\geq 0$

$k^2+2k-15\geq 0$

$(k+5)(k-3)\geq 0$

$\therefore k\leq -5$ 또는 $k\geq 3$ …… ㉠

(ii) $f(-1)=1+k-1-k+4=4>0$

(iii) $f(3)=9-3(k-1)-k+4>0$

$16-4k>0$

$\therefore k<4$ …… ㉡

(iv) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{k-1}{2}$이므로

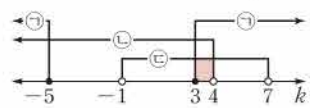
$-1<\frac{k-1}{2}<3$

$-2<k-1<6$

$\therefore -1<k<7$ …… ㉢

이상에서 공통부분을 구하면

$3\leq k<4$



답 $3\leq k<4$

유형 01 그래프를 이용한 부등식의 풀이 본책 134쪽

① 부등식 $f(x)>0$의 해
⇒ $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위

② 부등식 $f(x)>g(x)$의 해
⇒ $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위

0924 $f(x)g(x)>0$에서

$f(x)>0$, $g(x)>0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)<0$

(i) $f(x)>0$, $g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$0<x<d$

(ii) $f(x)<0$, $g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$a<x<b$

(i), (ii)에서 부등식 $f(x)g(x)>0$의 해는

$a<x<b$ 또는 $0<x<d$

답 ⑤

0925 $ax^2+(b-m)x+c-n\leq 0$에서

$ax^2+bx+c-(mx+n)\leq 0$

$\therefore ax^2+bx+c\leq mx+n$

부등식 $ax^2+bx+c\leq mx+n$의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x\leq -2$ 또는 $x\geq 3$

답 $x\leq -2$ 또는 $x\geq 3$

0926 부등식 $0<f(x)<g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있고 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$3<x<4$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=4$이므로

$\alpha+\beta=7$ 답 7

유형 02 이차부등식의 풀이 집중공략 본책 134쪽

이차부등식 $f(x)>0$의 해는 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 할 때
① $D>0$이면
➡ $f(x)$를 인수분해하거나 근의 공식을 이용하여 구한다.
② $D=0$ 또는 $D<0$이면
➡ $f(x)$를 $a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형하여 구한다.

0927 $(3x-2)(x+4)<2x-5$에서

$3x^2+10x-8<2x-5$, $\quad 3x^2+8x-3<0$

$(x+3)(3x-1)<0$

$\therefore -3<x<\frac{1}{3}$

따라서 정수 x는 -2, -1, 0의 3개이다. 답 3

0928 이차방정식 $x^2-6x+1=0$의 해는

$x=3\pm2\sqrt{2}$

이므로 이차부등식 $x^2-6x+1<0$의 해는

$3-2\sqrt{2}<x<3+2\sqrt{2}$

따라서 $\alpha=3-2\sqrt{2}$, $\beta=3+2\sqrt{2}$이므로

$\alpha-\beta=-4\sqrt{2}$ 답 $-4\sqrt{2}$

다른 풀이 이차방정식 $x^2-6x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=1$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=6^2-4\cdot1=32$

이때 $\alpha<\beta$에서 $\alpha-\beta<0$이므로

$\alpha-\beta=-\sqrt{32}=-4\sqrt{2}$

0929 ㄱ. $x^2+2x+5=(x+1)^2+4\geq4$

따라서 $x^2+2x+5\leq0$의 해는 없다.

ㄴ. $x^2-14x+49=(x-7)^2\geq0$

따라서 $x^2-14x+49\leq0$의 해는 $x=7$이다.

ㄷ. $-3x^2+3x-1<0$에서 $\quad 3x^2-3x+1>0$

그런데 $3x^2-3x+1=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\geq\frac{1}{4}$이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

ㄹ. $-2x^2+x-2>0$에서 $\quad 2x^2-x+2<0$

그런데 $2x^2-x+2=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}\geq\frac{15}{8}$이므로 주어진 부등식의 해는 없다.

이상에서 해가 없는 부등식은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

0930 $x^2-4x-21\leq0$에서 $\quad (x+3)(x-7)\leq0$

$\therefore -3\leq x\leq7$

① $|x-1|\leq4$에서 $\quad -4\leq x-1\leq4$

$\therefore -3\leq x\leq5$

② $|x-1|\leq5$에서 $\quad -5\leq x-1\leq5$

$\therefore -4\leq x\leq6$

③ $|x-2|\leq5$에서 $\quad -5\leq x-2\leq5$

$\therefore -3\leq x\leq7$

④ $|x+1|\leq4$에서 $\quad -4\leq x+1\leq4$

$\therefore -5\leq x\leq3$

⑤ $|x+1|\leq5$에서 $\quad -5\leq x+1\leq5$

$\therefore -6\leq x\leq4$

따라서 주어진 이차부등식과 해가 같은 것은 ③이다. 답 ③

0931 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-3, 0)$, $(2, 0)$에서 만나므로

$f(x)=a(x+3)(x-2)$ $(a<0)$

라 하자. 이 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로

$-6a=3 \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}(x+3)(x-2)$ ··· ❶

$f(x)>-7$에서 $\quad -\frac{1}{2}(x+3)(x-2)>-7$

$(x+3)(x-2)<14$, $\quad x^2+x-20<0$

$(x+5)(x-4)<0 \quad \therefore -5<x<4$ ··· ❷

따라서 $\alpha=-5$, $\beta=4$이므로 $\quad \beta-\alpha=9$ ··· ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ 부등식 $f(x)>-7$의 해를 구할 수 있다.	50 %
❸ $\beta-\alpha$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 03 절댓값 기호를 포함한 부등식 본책 135쪽

$|A|=\begin{cases} A & (A\geq0) \\ -A & (A<0) \end{cases}$임을 이용하여 $A=0$이 되는 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나누어 부등식을 푼다.

0932 $x^2-2x-2<2|x-1|$에서

(i) $x<1$일 때, $x-1<0$이므로

$x^2-2x-2<-2(x-1)$, $\quad x^2-4<0$

$(x+2)(x-2)<0 \quad \therefore -2<x<2$

그런데 $x<1$이므로 $\quad -2<x<1$

(ii) $x\geq1$일 때, $x-1\geq0$이므로

$x^2-2x-2<2(x-1)$, $\quad x^2-4x<0$

$x(x-4)<0 \quad \therefore 0<x<4$

그런데 $x\geq1$이므로 $\quad 1\leq x<4$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-2<x<4$
따라서 $\alpha=-2$, $\beta=4$이므로 $\beta-2\alpha=8$ 답 ④

0933 $x^2-2|x|-15<0$에서
(i) $x<0$일 때,
$x^2+2x-15<0$, $(x+5)(x-3)<0$
$\therefore -5<x<3$
그런데 $x<0$이므로 $-5<x<0$
(ii) $x\ge0$일 때,
$x^2-2x-15<0$, $(x+3)(x-5)<0$
$\therefore -3<x<5$
그런데 $x\ge0$이므로 $0\le x<5$
(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는
$-5<x<5$
따라서 정수 x는 $-4, -3, -2, \cdots, 4$의 9개이다. 답 ⑤
다른 풀이 $x^2=|x|^2$이므로 주어진 부등식은
$|x|^2-2|x|-15<0$, $(|x|+3)(|x|-5)<0$
$\therefore -3<|x|<5$
그런데 $|x|\ge0$이므로 $0\le|x|<5$
$|x|<5$에서 $-5<x<5$이므로 구하는 정수 x의 개수는 9이다.

0934 $|x^2-2|>4$에서
$x^2-2<-4$ 또는 $x^2-2>4$ ··· ❶
(i) $x^2-2<-4$에서 $x^2+2<0$
그런데 $x^2+2\ge2$이므로 $x^2+2<0$의 해는 없다.
(ii) $x^2-2>4$에서 $x^2-6>0$
$(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})>0$
$\therefore x<-\sqrt{6}$ 또는 $x>\sqrt{6}$ ··· ❷
(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는
$x<-\sqrt{6}$ 또는 $x>\sqrt{6}$ ··· ❸
답 $x<-\sqrt{6}$ 또는 $x>\sqrt{6}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식을 변형할 수 있다.	30 %
❷ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❸ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %

유형 04 해가 주어진 이차부등식

집중 공략 본책 135쪽

① 해가 $\alpha<x<\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식
⇒ $(x-\alpha)(x-\beta)<0$
② 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$ $(\alpha<\beta)$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식
⇒ $(x-\alpha)(x-\beta)>0$

0935 $ax^2+bx-3<0$의 해가 $-\frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}$이므로 $a>0$
해가 $-\frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)<0$ $\therefore x^2-\frac{7}{6}x-\frac{1}{2}<0$
양변에 a를 곱하면 $ax^2-\frac{7}{6}ax-\frac{1}{2}a<0$ ($\because a>0$)
이 부등식이 $ax^2+bx-3<0$과 같으므로
$b=-\frac{7}{6}a$, $-3=-\frac{1}{2}a$
따라서 $a=6$, $b=-7$이므로
$a+b=-1$ 답 ②
다른 풀이 이차방정식 $ax^2+bx-3=0$의 두 근이 $-\frac{1}{3}$, $\frac{3}{2}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}=-\frac{b}{a}$, $-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=-\frac{3}{a}$
$\therefore a=6$, $b=-7$

0936 해가 $x=3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-3)^2\le0$ $\therefore x^2-6x+9\le0$
이 부등식이 $x^2+ax+b\le0$과 같으므로
$a=-6$, $b=9$ ··· ❶
이것을 $bx^2-ax-8<0$에 대입하면
$9x^2+6x-8<0$, $(3x+4)(3x-2)<0$
$\therefore -\frac{4}{3}<x<\frac{2}{3}$ ··· ❷
따라서 정수 x는 -1, 0이므로 구하는 합은 -1이다. ··· ❸
답 -1

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 부등식 $bx^2-ax-8<0$의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0937 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $\frac{1}{6}<x<\frac{1}{2}$이므로 $a<0$
해가 $\frac{1}{6}<x<\frac{1}{2}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)<0$ $\therefore x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{12}<0$
양변에 a를 곱하면 $ax^2-\frac{2}{3}ax+\frac{a}{12}>0$ ($\because a<0$)
이 부등식이 $ax^2+bx+c>0$과 같으므로
$b=-\frac{2}{3}a$, $c=\frac{a}{12}$
이것을 $cx^2+bx+a>0$에 대입하면
$\frac{a}{12}x^2-\frac{2}{3}ax+a>0$, $x^2-8x+12<0$ ($\because a<0$)
$(x-2)(x-6)<0$ $\therefore 2<x<6$ 답 ②

0938 $f(x)\le0$의 해가 $-4\le x\le0$이므로
$f(x)=ax(x+4)$ $(a>0)$
라 하자. 이때 $f(1)=10$이므로
$5a=10$ $\therefore a=2$
따라서 $f(x)=2x(x+4)$이므로
$f(2)=2\cdot2\cdot6=24$ 답 24

0939 $|2x+a|<6$에서 $\quad -6<2x+a<6$

$\therefore\ -3-\dfrac{a}{2}<x<3-\dfrac{a}{2}$

해가 $-3-\dfrac{a}{2}<x<3-\dfrac{a}{2}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x+3+\dfrac{a}{2}\right)\left(x-3+\dfrac{a}{2}\right)<0$

$\therefore\ x^2+ax+\dfrac{a^2}{4}-9<0$

이 부등식이 $x^2+4x+b<0$과 같으므로

$4=a,\ b=\dfrac{a^2}{4}-9$

따라서 $a=4,\ b=-5$이므로 $\quad ab=-20$ 답 -20

유형 05 부등식 $f(x)<0$과 부등식 $f(ax+b)<0$의 관계

본책 136쪽

이차부등식 $f(x)<0$의 해를 이용하여 $f(x)$의 식을 세운 후 $f(x)<0$의 x 대신 $ax+b$를 대입하여 이차부등식 $f(ax+b)<0$의 해를 구한다.

0940 $f(x)<0$의 해가 $2<x<9$이므로

$f(x)=a(x-2)(x-9)\ (a>0)$

라 하면

$f(2x+1)=a(2x+1-2)(2x+1-9)$
$\qquad\qquad\ =2a(2x-1)(x-4)$

$f(2x+1)<0$, 즉 $2a(2x-1)(x-4)<0$에서

$(2x-1)(x-4)<0\ (\because\ a>0)$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}<x<4$ 답 $\dfrac{1}{2}<x<4$

0941 $f(x)<0$의 해가 $x<-4$ 또는 $x>3$이므로

$f(x)=a(x+4)(x-3)\ (a<0)$ ⋯ ❶

이라 하면

$f(-x)=a(-x+4)(-x-3)=a(x-4)(x+3)$

$f(-x)>0$, 즉 $a(x+3)(x-4)>0$에서

$(x+3)(x-4)<0\ (\because\ a<0)$

$\therefore\ -3<x<4$ ⋯ ❷

따라서 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 6개이다. ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 부등식 $f(-x)>0$의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 x의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0942 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-1,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서 만나므로

$f(x)=a(x+1)(x-3)\ (a>0)$

이라 하면

$f\left(\dfrac{2x-k}{3}\right)=a\left(\dfrac{2x-k}{3}+1\right)\left(\dfrac{2x-k}{3}-3\right)$
$\qquad\qquad\quad =\dfrac{a}{9}(2x-k+3)(2x-k-9)$

$f\left(\dfrac{2x-k}{3}\right)<0$, 즉 $\dfrac{a}{9}(2x-k+3)(2x-k-9)<0$에서

$(2x-k+3)(2x-k-9)<0\ (\because\ a>0)$

$\therefore\ \dfrac{k-3}{2}<x<\dfrac{k+9}{2}$

이것이 $-1<x<5$와 같으므로

$\dfrac{k-3}{2}=-1,\ \dfrac{k+9}{2}=5 \qquad \therefore\ k=1$ 답 ③

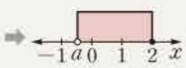
다른 풀이 $f\left(\dfrac{2x-k}{3}\right)<0$에서 $\dfrac{2x-k}{3}=t$로 놓으면 주어진 그래프에서 $f(t)<0$을 만족시키는 t의 값의 범위는 $-1<t<3$이므로 $\quad -1<\dfrac{2x-k}{3}<3 \qquad \therefore\ \dfrac{k-3}{2}<x<\dfrac{k+9}{2}$

유형 06 정수인 해의 개수가 주어진 이차부등식

본책 136쪽

이차부등식의 정수인 해가 n개로 주어지면 부등식의 해를 n개의 정수를 포함하도록 수직선 위에 나타낸다.

예 부등식 $a<x\le 2$의 정수인 해가 3개이다.



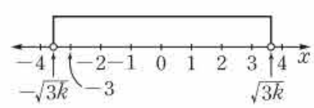
➡ $-1\le a<0$

$a=-1$이면 정수인 해는 0, 1, 2의 3개
$a=0$이면 정수인 해는 1, 2의 2개

0943 $x^2-3k<0$에서 $\quad (x+\sqrt{3k})(x-\sqrt{3k})<0$

$\therefore\ -\sqrt{3k}<x<\sqrt{3k}$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 7개이려면 오른쪽 그림에서



$3<\sqrt{3k}\le 4,\qquad 9<3k\le 16 \qquad \therefore\ 3<k\le\dfrac{16}{3}$

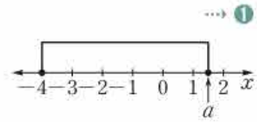
따라서 자연수 k는 4, 5이므로 구하는 합은

$4+5=9$ 답 ④

0944 $x^2-(a-4)x-4a\le 0$에서 $\quad (x+4)(x-a)\le 0$

$\therefore\ -4\le x\le a\ (\because\ a>0)$ ⋯ ❶

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 6개이려면 오른쪽 그림에서



$1\le a<2$ ⋯ ❷

답 $1\le a<2$

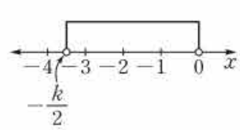
채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식의 해를 a로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %

$f(x)=\left(x+\dfrac{k}{2}\right)^2-\dfrac{k^2}{4}+k$

0945 점 A의 x좌표는 $-\dfrac{k}{2}$이고 점 B의 x좌표는 0이므로 부등식 $f(x)-g(x)<0$, 즉 $f(x)<g(x)$의 해는

$-\dfrac{k}{2}<x<0\ (\because\ k>0)$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 3개이려면 오른쪽 그림에서



$-4\le -\dfrac{k}{2}<-3$

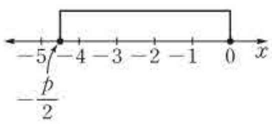
$\therefore\ 6<k\le 8$ 답 $6<k\le 8$

0946 $2x^2+px\le0$에서 $\quad x(2x+p)\le0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

(i) $p>0$일 때,

㉠에서 $\quad -\frac{p}{2}\le x\le0$

이 부등식을 만족시키는 정수 x가 5개이려면 오른쪽 그림에서



$$-5<-\frac{p}{2}\le-4 \qquad \therefore 8\le p<10$$

따라서 정수 p는 8 또는 9이다.

(ii) $p=0$일 때,

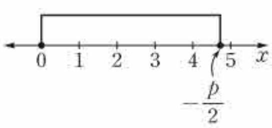
㉠에서 $\quad 2x^2\le0$

이 부등식을 만족시키는 정수 x는 0뿐이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $p<0$일 때,

㉠에서 $\quad 0\le x\le-\frac{p}{2}$

이 부등식을 만족시키는 정수 x가 5개이려면 오른쪽 그림에서



$$4\le-\frac{p}{2}<5 \qquad \therefore -10<p\le-8$$

따라서 정수 p는 -9 또는 -8이다.

이상에서 정수 p의 최댓값은 9, 최솟값은 -9이므로

$M=9,\ m=-9$

$\therefore M-m=18$

답 18

유형 07 이차부등식이 해를 한 개만 가질 조건 본책 137쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

① 이차부등식 $ax^2+bx+c\le0$이 해를 한 개만 가질 조건
⇒ $a>0,\ D=0$

② 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge0$이 해를 한 개만 가질 조건
⇒ $a<0,\ D=0$

0947 이차부등식 $(a+2)x^2-6x+a+2\ge0$이 해를 한 개만 가지려면

$a+2<0 \qquad \therefore a<-2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또 이차방정식 $(a+2)x^2-6x+a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(a+2)^2=0$

$a^2+4a-5=0, \qquad (a+5)(a-1)=0$

$\therefore a=-5$ 또는 $a=1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad a=-5$

답 ①

0948 이차부등식 $x^2-(k-8)x+k\le0$의 해가 오직 한 개 존재하려면 이차방정식 $x^2-(k-8)x+k=0$의 판별식을 D라 할 때

$D=\{-(k-8)\}^2-4k=0$

$k^2-20k+64=0, \qquad (k-4)(k-16)=0$

$\therefore k=4$ 또는 $k=16$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$4+16=20$

답 ⑤

다른 풀이 이차방정식 $k^2-20k+64=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\frac{D'}{4}=(-10)^2-64=36>0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
따라서 k는 이차방정식 $k^2-20k+64=0$의 두 실근이므로 근과 계수의 관계를 이용하면 구하는 합은 20이다.

0949 이차부등식 $kx^2-2(k^2-2k)x-k+2\le0$이 해를 한 개만 가지려면

$k>0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또 이차방정식 $kx^2-2(k^2-2k)x-k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k^2-2k)\}^2-k(-k+2)=0$

$(k^2-2k)^2+k^2-2k=0$

$(k^2-2k)(k^2-2k+1)=0$

$k(k-2)(k-1)^2=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=1$ 또는 $k=2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad k=1$ 또는 $k=2$

따라서 서로 다른 실수 k의 개수는 2이다.

답 2

0950 이차부등식 $-ax^2+8x-a<0$을 만족시키지 않는 x의 값이 한 개뿐이므로 이차부등식 $-ax^2+8x-a\ge0$은 해를 한 개만 갖는다. ··· ❶

즉 이차부등식 $ax^2-8x+a\le0$이 해를 한 개만 가지므로

$a>0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또 이차방정식 $ax^2-8x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-a^2=0$

$a^2-16=0, \qquad (a+4)(a-4)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=4 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad a=4$ ··· ❷

따라서 $-4x^2+8x-4=-4(x-1)^2<0$을 만족시키지 않는 x의 값은 1뿐이므로 $\quad k=1$ ··· ❸

$\therefore a+k=5$ ··· ❹

답 5

채점 기준	비율
❶ 부등식 $-ax^2+8x-a\ge0$이 해를 한 개만 가짐을 알 수 있다.	20 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+k$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 08 이차부등식이 해를 가질 조건 본책 137쪽

이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 해를 가질 조건

① $a>0$이면
⇒ 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

② $a<0$이면
⇒ $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, $D>0$이어야 한다.

0951 (i) $a>0$일 때,

이차함수 $y=ax^2+2x+a$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a<0$일 때,

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $ax^2+2x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-a^2>0, \quad a^2-1<0$

$(a+1)(a-1)<0 \quad \therefore -1<a<1$

그런데 $a<0$이므로 $\quad -1<a<0$

(i), (ii)에서 구하는 a의 값의 범위는

$-1<a<0$ 또는 $a>0$ 　　답 ⑤

참고 $a=0$이면 주어진 부등식은 이차부등식이 아니므로 $\quad a\neq0$

0952 이차부등식 $2x^2+x-a<0$이 해를 가지려면 이차방정식 $2x^2+x-a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot2\cdot(-a)>0$

$1+8a>0 \quad \therefore a>-\frac{1}{8}$

따라서 정수 a의 최솟값은 0이다. 　　답 ③

0953 이차부등식 $4x^2-2(k+1)x+1\leq0$이 해를 가지려면 이차방정식 $4x^2-2(k+1)x+1=0$이 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-4\geq0$

$k^2+2k-3\geq0, \quad (k+3)(k-1)\geq0$

$\therefore k\leq-3$ 또는 $k\geq1$ 　　답 $k\leq-3$ 또는 $k\geq1$

0954 (i) $a>2$일 때,

이차함수 $y=(a-2)x^2+2(a-2)x-5$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 부등식의 해는 항상 존재한다.

(ii) $a=2$일 때,

$0\cdot x^2+0\cdot x-5=-5<0$이므로 주어진 부등식의 해는 존재하지 않는다.

(iii) $a<2$일 때,

주어진 부등식의 해가 존재하려면 이차방정식 $(a-2)x^2+2(a-2)x-5=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-2)^2+5(a-2)>0$

$(a+3)(a-2)>0 \quad \therefore a<-3$ 또는 $a>2$

그런데 $a<2$이므로 $\quad a<-3$

이상에서 a의 값의 범위는

$a<-3$ 또는 $a>2$

따라서 a의 값이 아닌 것은 ③이다. 　　답 ③

유형 09 **이차부등식이 항상 성립할 조건** 　집중공략 　본책 138쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여

① $ax^2+bx+c>0$이 성립할 조건 ➡ $a>0$, $D<0$

② $ax^2+bx+c\geq0$이 성립할 조건 ➡ $a>0$, $D\leq0$

③ $ax^2+bx+c<0$이 성립할 조건 ➡ $a<0$, $D<0$

④ $ax^2+bx+c\leq0$이 성립할 조건 ➡ $a<0$, $D\leq0$

0955 x의 값에 관계없이 $ax^2+6ax+4a-15<0$이 항상 성립하므로

$a<0$ 　　…… ㉠

또 이차방정식 $ax^2+6ax+4a-15=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(3a)^2-a(4a-15)<0, \quad 5a^2+15a<0$

$a(a+3)<0 \quad \therefore -3<a<0$ 　　…… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad -3<a<0$

따라서 정수 a는 -2, -1이므로 구하는 합은

$(-2)+(-1)=-3$ 　　답 -3

0956 $x^2+3ax+2a(a-1)\geq0$의 해가 모든 실수이려면 이차방정식 $x^2+3ax+2a(a-1)=0$의 판별식을 D라 할 때

$D=(3a)^2-4\cdot2a(a-1)\leq0, \quad a^2+8a\leq0$

$a(a+8)\leq0 \quad \therefore -8\leq a\leq0$ 　　답 ②

0957 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{x^2+kx+k+3}$이 실수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2+kx+k+3\geq0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+kx+k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4(k+3)\leq0, \quad k^2-4k-12\leq0$

$(k+2)(k-6)\leq0$

$\therefore -2\leq k\leq6$

따라서 k의 최댓값은 6, 최솟값은 -2이므로 구하는 합은

$6+(-2)=4$ 　　답 ⑤

0958 (i) $m=1$일 때,

$0\cdot x^2-0\cdot x+3=3>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립한다. 　　··· ❶

(ii) $m\neq1$일 때,

모든 실수 x에 대하여 $(m-1)x^2-2(m-1)x+3>0$이 성립하므로

$m-1>0 \quad \therefore m>1$ 　　…… ㉠

또 이차방정식 $(m-1)x^2-2(m-1)x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(m-1)\}^2-3(m-1)<0$

$(m-1)^2-3(m-1)<0$

$(m-1)(m-4)<0 \quad \therefore 1<m<4$ 　　…… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad 1<m<4$ 　　··· ❷

(i), (ii)에서 $\quad 1\le m<4$ ⋯ ❸

답 $1\le m<4$

채점 기준	비율
❶ $m=1$일 때, 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립함을 알 수 있다.	30 %
❷ $m\ne1$일 때, 조건을 만족시키는 m의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ m의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

유형 10 이차부등식이 해를 갖지 않을 조건 본책 138쪽

이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 해를 갖지 않을 조건
⇒ 이차부등식 $ax^2+bx+c\le0$의 해는 모든 실수이다.
⇒ 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\le0$이 성립한다.
⇒ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때,
$a<0,\ D\le0$

0959 주어진 부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여

$$-x^2+2(a+3)x+4(a+3)\le0$$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $-x^2+2(a+3)x+4(a+3)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(a+3)^2+4(a+3)\le0$$

$$(a+7)(a+3)\le0$$

$$\therefore\ -7\le a\le-3$$

답 $-7\le a\le-3$

0960 주어진 부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여

$$x^2-2ax+8>0$$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-2ax+8=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-8<0$$

$$a^2-8<0,\qquad (a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})<0$$

$$\therefore\ -2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$$

따라서 정수 a는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$의 5개이다.

답 ③

0961 주어진 부등식의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여

$$(k-3)x^2-2(k-3)x-2\le0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 성립해야 한다.

(i) $k=3$일 때,

$0\cdot x^2-0\cdot x-2=-2<0$이므로 모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립한다.

(ii) $k\ne3$일 때,

모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하려면

$$k-3<0\qquad \therefore\ k<3 \quad \cdots\cdots ㉡$$

또 이차방정식 $(k-3)x^2-2(k-3)x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(k-3)\}^2+2(k-3)\le0$$

$$(k-3)^2+2(k-3)\le0$$

$$(k-1)(k-3)\le0\qquad \therefore\ 1\le k\le3 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢에서 $\quad 1\le k<3$

(i), (ii)에서 $\quad 1\le k\le3$

답 ④

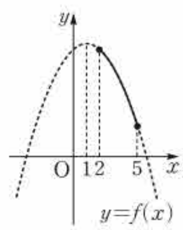
유형 11 제한된 범위에서 항상 성립하는 이차부등식 본책 138쪽

① $a\le x\le b$에서 이차부등식 $f(x)>0$이 항상 성립한다.
⇒ $a\le x\le b$에서 ($f(x)$의 최솟값)>0이다.
② $a\le x\le b$에서 이차부등식 $f(x)<0$이 항상 성립한다.
⇒ $a\le x\le b$에서 ($f(x)$의 최댓값)<0이다.

0962 $f(x)=-x^2+2x+2k$라 하면

$$f(x)=-(x-1)^2+2k+1$$

$2\le x\le5$에서 $f(x)\ge0$이므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$2\le x\le5$에서 $f(x)$는 $x=5$일 때 최소이므로 $f(5)\ge0$에서

$$-15+2k\ge0,\qquad 2k\ge15\qquad \therefore\ k\ge\frac{15}{2}$$

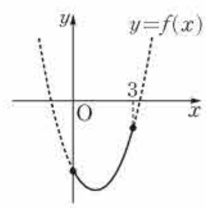
따라서 정수 k의 최솟값은 8이다.

답 8

0963 $x^2-ax\le-a^2+9$에서

$$x^2-ax+a^2-9\le0$$

$f(x)=x^2-ax+a^2-9$라 하면 $0\le x\le3$에서 $f(x)\le0$이므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$0\le x\le3$에서 $f(x)$는 $x=0$ 또는 $x=3$일 때 최대이므로

$f(0)\le0$에서

$$a^2-9\le0,\qquad (a+3)(a-3)\le0$$

$$\therefore\ -3\le a\le3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$f(3)\le0$에서 $\quad 9-3a+a^2-9\le0$

$$a^2-3a\le0,\qquad a(a-3)\le0$$

$$\therefore\ 0\le a\le3 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\quad 0\le a\le3$

답 ④

0964 $2x^2-x-1\le0$에서 $\quad (2x+1)(x-1)\le0$

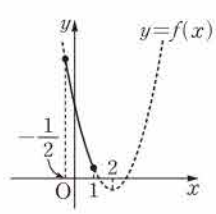
$$\therefore\ -\frac{1}{2}\le x\le1 \quad ⋯ ❶$$

$-x^2+2x-3\le x^2-6x+k$에서 $\quad 2x^2-8x+k+3\ge0$

$f(x)=2x^2-8x+k+3$이라 하면

$$f(x)=2(x-2)^2+k-5$$

$-\frac{1}{2}\le x\le1$에서 $f(x)\ge0$이므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$-\frac{1}{2} \le x \le 1$에서 $f(x)$는 $x=1$일 때 최소이므로 $f(1) \ge 0$에서

$-3+k \ge 0 \quad \therefore k \ge 3$ ⋯ ❷

따라서 k의 최솟값은 3이다. ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 부등식 $2x^2-x-1 \le 0$의 해를 구할 수 있다.	30 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
❸ k의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

0965 $f(x)>g(x)$에서

$x^2-2ax+2a^2-5>-x^2+2ax+3a$

$\therefore 2x^2-4ax+2a^2-3a-5>0$

$h(x)=2x^2-4ax+2a^2-3a-5$라 하면

$h(x)=2(x-a)^2-3a-5$ ─ 축의 방정식이 $x=a$이다.

이고 $0 \le x \le 3$에서 $h(x)>0$이다.

(i) $a<0$일 때,

$0 \le x \le 3$에서 $h(x)$는 $x=0$일 때 최소이므로 $h(0)>0$에서

$2a^2-3a-5>0, \quad (a+1)(2a-5)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>\frac{5}{2}$

그런데 $a<0$이므로 $\quad a<-1$

(ii) $0 \le a \le 3$일 때,

$0 \le x \le 3$에서 $h(x)$는 $x=a$일 때 최소이므로 $h(a)>0$에서

$-3a-5>0 \quad \therefore a<-\frac{5}{3}$

그런데 $0 \le a \le 3$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $a>3$일 때,

$0 \le x \le 3$에서 $h(x)$는 $x=3$일 때 최소이므로 $h(3)>0$에서

$2a^2-15a+13>0, \quad (a-1)(2a-13)>0$

$\therefore a<1$ 또는 $a>\frac{13}{2}$

그런데 $a>3$이므로 $\quad a>\frac{13}{2}$

이상에서 구하는 a의 값의 범위는

$a<-1$ 또는 $a>\frac{13}{2}$

답 $a<-1$ 또는 $a>\frac{13}{2}$

유형 12 두 그래프의 위치 관계와 이차부등식 ; 만나는 경우

본책 139쪽

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다
① 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위
➡ 이차부등식 $ax^2+bx+c>mx+n$의 해
② 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위
➡ 이차부등식 $ax^2+bx+c<mx+n$의 해

0966 $y=-x^2+ax+b$의 그래프가 직선 $y=x+2$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는

$-x^2+ax+b>x+2$,

즉 $x^2+(1-a)x+2-b<0$ ⋯⋯ ㉠

의 해이다.

해가 $1<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)(x-3)<0 \quad \therefore x^2-4x+3<0$ ⋯⋯ ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$1-a=-4,\ 2-b=3 \quad \therefore a=5,\ b=-1$

$\therefore a+2b=3$

답 3

0967 $y=2x^2-2x-3$의 그래프가 $y=x^2+x+7$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는

$2x^2-2x-3<x^2+x+7$

의 해이므로

$x^2-3x-10<0, \quad (x+2)(x-5)<0$

$\therefore -2<x<5$

답 $-2<x<5$

0968 $y=x^2+5x+a$의 그래프가 직선 $y=3x-2$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는

$x^2+5x+a<3x-2$,

즉 $x^2+2x+a+2<0$ ⋯⋯ ㉠

의 해이다. ⋯ ❶

해가 $b<x<1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-b)(x-1)<0$

$\therefore x^2-(b+1)x+b<0$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$2=-(b+1),\ a+2=b \quad \therefore a=-5,\ b=-3$

$\therefore a+b=-8$ ⋯ ❸

답 -8

채점 기준	비율
❶ 두 그래프의 위치 관계의 조건을 만족시키는 x의 값의 범위를 해로 갖는 부등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 해가 $b<x<1$이고 x^2의 계수가 1인 부등식을 세울 수 있다.	30 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0969 $y=mx^2+nx+mn+17$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는

$mx^2+nx+mn+17>0$ ⋯⋯ ㉠

의 해이다.

㉠의 해가 $-3<x<5$이므로 $\quad m<0$

해가 $-3<x<5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+3)(x-5)<0 \quad \therefore x^2-2x-15<0$

양변에 m을 곱하면

$mx^2-2mx-15m>0\ (\because m<0)$ ⋯⋯ ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$n=-2m,\ mn+17=-15m$

$n=-2m$을 $mn+17=-15m$에 대입하면

$m\cdot(-2m)+17=-15m, \quad 2m^2-15m-17=0$

$(m+1)(2m-17)=0 \quad \therefore m=-1$ 또는 $m=\frac{17}{2}$

그런데 $m<0$이므로 $\quad m=-1$

따라서 $n=-2\cdot(-1)=2$이므로

$m+n=1$

답 ④

유형 13 두 그래프의 위치 관계와 이차부등식 ; 만나지 않는 경우 (집중공략) 본책 139쪽

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 항상 위쪽에 있다.
➡ 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c>mx+n$, 즉 $ax^2+(b-m)x+c-n>0$이 성립한다.

0970 $y=x^2-2x+1$의 그래프가 직선 $y=mx-8$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2x+1>mx-8$, 즉 $x^2-(2+m)x+9>0$이 성립해야 한다.
이차방정식 $x^2-(2+m)x+9=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2+m)\}^2-4\cdot9<0$

$m^2+4m-32<0,\qquad (m+8)(m-4)<0$

$\therefore\ -8<m<4$

따라서 정수 m의 최댓값은 3, 최솟값은 -7이므로 구하는 곱은

$3\cdot(-7)=-21$ 답 ②

0971 $y=mx^2+2(2-m)x+1$의 그래프가 x축보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $mx^2+2(2-m)x+1>0$이 성립해야 하므로

$m>0$ …… ㉠

또 이차방정식 $mx^2+2(2-m)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2-m)^2-m<0$

$m^2-5m+4<0,\qquad (m-1)(m-4)<0$

$\therefore\ 1<m<4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $1<m<4$ 답 $1<m<4$

0972 $y=-2x^2+2kx$의 그래프가 $y=kx^2-4x+4$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여

$-2x^2+2kx<kx^2-4x+4$,

즉 $(k+2)x^2-2(k+2)x+4>0$ …… ㉠

이 성립해야 한다.

(i) $k=-2$일 때,
$0\cdot x^2-0\cdot x+4=4>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립한다.

(ii) $k\neq-2$일 때,
모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하려면

$k+2>0\qquad \therefore\ k>-2$ …… ㉡

또 이차방정식 $(k+2)x^2-2(k+2)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+2)\}^2-4(k+2)<0$

$(k+2)^2-4(k+2)<0$

$(k+2)(k-2)<0\qquad \therefore\ -2<k<2$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $-2<k<2$

(i), (ii)에서 구하는 k의 값의 범위는

$-2\le k<2$ 답 ④

유형 14 이차부등식의 활용 본책 140쪽

(i) 주어진 조건을 이용하여 한 문자에 대한 부등식을 세운다.
(ii) 부등식을 풀어 문제의 답을 구한다.

0973 새로 만든 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각

$(40-x)$ cm, $(25+x)$ cm

이므로 넓이가 750 cm^2 이상이 되려면

$(40-x)(25+x)\ge750,\qquad x^2-15x-250\le0$

$(x+10)(x-25)\le0\qquad \therefore\ -10\le x\le25$

그런데 $0\le \underbrace{x<40}_{40-x>0\text{이어야 하므로 } x<40}$이어야 하므로 $0\le x\le25$

따라서 x의 최댓값은 25이다. 답 ①

0974 축구공의 높이가 4 m 이상이려면

$-5t^2+12t\ge4,\qquad 5t^2-12t+4\le0$

$(5t-2)(t-2)\le0\qquad \therefore\ \frac{2}{5}\le t\le2$

따라서 축구공은 $2-\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$ (초) 동안 지면으로부터 4 m 이상의 높이에 있다. 답 $\frac{8}{5}$초

0975 가격을 $1000x$원 할인한다고 하면 하루 판매량이 $5x$장 늘어나므로 하루 판매액은

$\underbrace{(20000-1000x)}_{20000-1000x>0\text{이어야 하므로 } x<20}(30+5x)$ (원)

하루 판매액이 80만 원 이상이려면

$(20000-1000x)(30+5x)\ge800000$ ⋯ ❶

$(20-x)(6+x)\ge160,\qquad x^2-14x+40\le0$

$(x-4)(x-10)\le0\qquad \therefore\ 4\le x\le10$ ⋯ ❷

이때 $4000\le1000x\le10000$이므로 할인할 수 있는 최소 금액은 4000원이다. ⋯ ❸

답 4000원

채점 기준	비율
❶ 부등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 할인할 수 있는 최소 금액을 구할 수 있다.	20 %

유형 15 연립이차부등식의 풀이 (집중공략) 본책 140쪽

각 부등식의 해를 구한 다음 공통부분을 찾아 주어진 연립이차부등식의 해를 구한다. 이때 $A<B<C$ 꼴의 부등식은 연립부등식 $\begin{cases}A<B\\B<C\end{cases}$ 꼴로 고쳐서 푼다.

0976 $x^2-3x+2>0$에서 $\quad (x-1)(x-2)>0$

$\therefore\ x<1$ 또는 $x>2$ …… ㉠

$x^2-x-12\le0$에서 $\quad (x+3)(x-4)\le0$

$\therefore\ -3\le x\le4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3\le x<1$ 또는 $2<x\le4$

따라서 정수 x는 $-3, -2, -1, 0, 3, 4$의 6개이다. 답 ③

0977 $|2x+3|>4$에서 $\quad 2x+3<-4$ 또는 $2x+3>4$

$\therefore x<-\frac{7}{2}$ 또는 $x>\frac{1}{2}$ $\quad$ …… ㉠

$2x^2-5x-3<0$에서 $\quad (2x+1)(x-3)<0$

$\therefore -\frac{1}{2}<x<3$ $\quad$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{1}{2}<x<3$ $\quad$ 답 $\frac{1}{2}<x<3$

0978 $2x^2-5x+1\leq x^2+3x+10$에서

$x^2-8x-9\leq 0, \quad (x+1)(x-9)\leq 0$

$\therefore -1\leq x\leq 9$ $\quad$ …… ㉠ $\quad$ ⋯➊

$x^2+3x+10<3x^2-11x+30$에서

$-2x^2+14x-20<0, \quad x^2-7x+10>0$

$(x-2)(x-5)>0$

$\therefore x<2$ 또는 $x>5$ $\quad$ …… ㉡ $\quad$ ⋯➋

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1\leq x<2$ 또는 $5<x\leq 9$ $\quad$ ⋯➌

따라서 자연수 x는 1, 6, 7, 8, 9이므로 구하는 합은

$1+6+7+8+9=31$ $\quad$ ⋯➍

답 31

채점 기준	비율
➊ 부등식 $2x^2-5x+1\leq x^2+3x+10$의 해를 구할 수 있다.	30 %
➋ 부등식 $x^2+3x+10<3x^2-11x+30$의 해를 구할 수 있다.	30 %
➌ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %
➍ 자연수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0979 $x^2+x-6\leq 0$에서 $\quad (x+3)(x-2)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 2$ $\quad$ …… ㉠

$x^2+5\geq 2x^2+4x$에서

$x^2+4x-5\leq 0, \quad (x+5)(x-1)\leq 0$

$\therefore -5\leq x\leq 1$ $\quad$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3\leq x\leq 1$

해가 $-3\leq x\leq 1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+3)(x-1)\leq 0 \quad \therefore x^2+2x-3\leq 0$

양변에 -3을 곱하면 $\quad -3x^2-6x+9\geq 0$

상수항이 9가 되는 수를 곱한다.

이 부등식이 $ax^2+bx+9\geq 0$과 같으므로

$a=-3, b=-6$

$\therefore a+b=-9$ $\quad$ 답 ①

0980 $x^2+3x-10>0$에서 $\quad (x+5)(x-2)>0$

$\therefore x<-5$ 또는 $x>2$ $\quad$ …… ㉠

$x^2-5|x|+6\leq 0$에서

(i) $x<0$일 때,

$x^2+5x+6\leq 0, \quad (x+3)(x+2)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq -2$

그런데 $x<0$이므로 $\quad -3\leq x\leq -2$

(ii) $x\geq 0$일 때,

$x^2-5x+6\leq 0, \quad (x-2)(x-3)\leq 0$

$\therefore 2\leq x\leq 3$

그런데 $x\geq 0$이므로 $\quad 2\leq x\leq 3$

(i), (ii)에서 $x^2-5|x|+6\leq 0$의 해는

$-3\leq x\leq -2$ 또는 $2\leq x\leq 3$ $\quad$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$2<x\leq 3$

따라서 $\alpha=2, \beta=3$이므로 $\quad \alpha\beta=6$ $\quad$ 답 6

0981 $\dfrac{\sqrt{2x^2-7x+5}}{\sqrt{x^2+2x-8}}=-\sqrt{\dfrac{2x^2-7x+5}{x^2+2x-8}}$이므로

$2x^2-7x+5>0, x^2+2x-8<0$

또는 $2x^2-7x+5=0, x^2+2x-8\neq 0$

(i) $2x^2-7x+5>0$에서 $\quad (x-1)(2x-5)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>\frac{5}{2}$ $\quad$ …… ㉠

$x^2+2x-8<0$에서 $\quad (x+4)(x-2)<0$

$\therefore -4<x<2$ $\quad$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-4<x<1$

(ii) $2x^2-7x+5=0$에서 $\quad (x-1)(2x-5)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

$x^2+2x-8\neq 0$을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $\quad -4<x\leq 1$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

따라서 x의 값이 될 수 없는 것은 ④이다. $\quad$ 답 ④

유형 16 해가 주어진 연립이차부등식

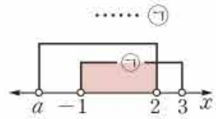
집중 공략 본책 141쪽

연립이차부등식에서 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분이 주어진 연립이차부등식의 해가 되도록 수직선 위에 나타내어 미지수의 값의 범위를 구한다.

0982 $x^2-2x-3<0$에서 $\quad (x+1)(x-3)<0$

$\therefore -1<x<3$ $\quad$ …… ㉠

따라서 ㉠과 $(x-2)(x-a)<0$의 해의 공통부분이 $-1<x<2$이므로 오른쪽 그림에서 $\quad a\leq -1$



즉 a의 최댓값은 -1이다. $\quad$ 답 -1

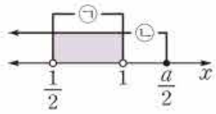
참고 (i) $a=2$이면 $(x-2)(x-a)<0$의 해는 없다.
따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.
(ii) $a>2$이면 $(x-2)(x-a)<0$의 해는 $\quad 2<x<a$
따라서 주어진 연립부등식의 해가 $-1<x<2$가 될 수 없다.
(i), (ii)에서 $a<2$이므로 부등식 $(x-2)(x-a)<0$의 해는 $a<x<2$이다.

0983 $2x^2+1<3x$에서 $\quad 2x^2-3x+1<0$

$(2x-1)(x-1)<0 \quad \therefore \frac{1}{2}<x<1$ $\quad$ …… ㉠

$3x\leq x+a$에서 $\quad 2x\leq a \quad \therefore x\leq\frac{a}{2}$ $\quad$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 $\frac{1}{2}<x<1$이므로 오른쪽 그림에서



$\frac{a}{2}\ge1$ $\therefore a\ge2$ 답 ⑤

0984 $a<b$이므로 $(x-a)(x-b)>0$에서

$x<a$ 또는 $x>b$ ...... ㉠

$b<c$이므로 $(x-b)(x-c)>0$에서

$x<b$ 또는 $x>c$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x<a$ 또는 $x>c$

이므로 $a=-3,\ c=4$

이것을 $x^2+ax-c\le0$에 대입하면

$x^2-3x-4\le0$

$(x+1)(x-4)\le0$

$\therefore -1\le x\le4$

따라서 x의 최댓값은 4, 최솟값은 -1이므로 구하는 합은

$4+(-1)=3$ 답 3

0985 $a>0$이므로 $2|x-2|<a$에서 $|x-2|<\frac{a}{2}$

$-\frac{a}{2}<x-2<\frac{a}{2}$

$\therefore -\frac{a}{2}+2<x<\frac{a}{2}+2$ ...... ㉠

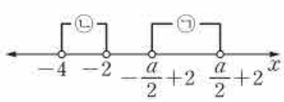
$x^2+6x+8<0$에서

$(x+4)(x+2)<0$

$\therefore -4<x<-2$ ...... ㉡ ⋯ ❶

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 ㉠, ㉡의 공통부분이 없어야 한다.

이때 $a>0$에서 $\frac{a}{2}+2>2$이므로 오른쪽 그림에서



$-\frac{a}{2}+2\ge-2,$ $-\frac{a}{2}\ge-4$

$\therefore a\le8$

그런데 $a>0$이므로 $0<a\le8$ ⋯ ❷

답 $0<a\le8$

채점 기준	비율
❶ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %

0986 모든 실수 x에 대하여

$-x^2+3<2x+a,$

즉 $x^2+2x+a-3>0$

이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+2x+a-3=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=1^2-(a-3)<0$

$4-a<0$ $\therefore a>4$ ...... ㉠

모든 실수 x에 대하여

$2x+a\le2x^2+7,$

즉 $2x^2-2x+7-a\ge0$

이 성립해야 하므로 이차방정식 $2x^2-2x+7-a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-2(7-a)\le0$

$-13+2a\le0$ $\therefore a\le\frac{13}{2}$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$4<a\le\frac{13}{2}$ 답 $4<a\le\frac{13}{2}$

유형 17 정수인 해의 개수가 주어진 연립이차부등식 본책 142쪽

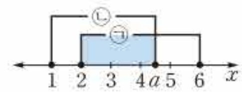
연립이차부등식의 정수인 해가 n개로 주어지면 각 부등식의 해를 공통부분이 n개의 정수를 포함하도록 수직선 위에 나타낸다.

0987 $x^2-8x+12\le0$에서 $(x-2)(x-6)\le0$

$\therefore 2\le x\le6$ ...... ㉠

$x^2-(a+1)x+a\le0$에서 $(x-1)(x-a)\le0$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 3개이므로 오른쪽 그림에서



$4\le a<5$ 답 $4\le a<5$

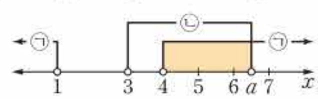
참고 $a\le1$이면 주어진 연립부등식의 해가 없으므로 $a>1$이다. 따라서 부등식 $(x-1)(x-a)\le0$의 해는 $1\le x\le a$이다.

0988 $x^2-5x+4>0$에서 $(x-1)(x-4)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>4$ ...... ㉠

$x^2-(a+3)x+3a<0$에서 $(x-3)(x-a)<0$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x의 값이 5와 6뿐이려면 오른쪽 그림에서



$6<a\le7$ 답 ④

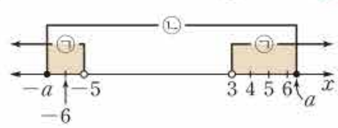
0989 $x^2+2x-15>0$에서 $(x+5)(x-3)>0$

$\therefore x<-5$ 또는 $x>3$ ...... ㉠

$x^2-a^2\le0$에서 $(x+a)(x-a)\le0$

$\therefore -a\le x\le a$ ($\because a>0$) ...... ㉡ ⋯ ❶

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 4개 이상이려면 오른쪽 그림에서



$a\ge6$ ⋯ ❷

따라서 a의 최솟값은 6이다. ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ a의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

0990 $x^2-4|x|<0$에서

(i) $x<0$일 때,

$x^2+4x<0,\quad x(x+4)<0\quad \therefore -4<x<0$

그런데 $x<0$이므로 $\quad -4<x<0$

(ii) $x\geq 0$일 때,

$x^2-4x<0,\quad x(x-4)<0\quad \therefore 0<x<4$

그런데 $x\geq 0$이므로 $\quad 0<x<4$

(i), (ii)에서 $x^2-4|x|<0$의 해는

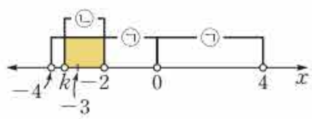
$-4<x<0$ 또는 $0<x<4$ ⋯⋯ ㉠

$x^2+(2-k)x-2k<0$에서 $\quad (x+2)(x-k)<0$

(iii) $k<-2$일 때,

$(x+2)(x-k)<0$에서 $\quad k<x<-2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 1개이므로 오른쪽 그림에서

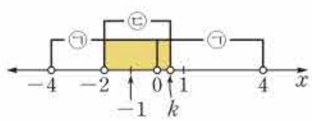


$k<-3$

(iv) $k>-2$일 때,

$(x+2)(x-k)<0$에서 $\quad -2<x<k$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉢을 동시에 만족시키는 정수 x가 1개이므로 오른쪽 그림에서



$-1<k\leq 1$

(iii), (iv)에서 $\quad k<-3$ 또는 $-1<k\leq 1$

따라서 k의 최댓값은 1이다. 답 1

유형 18 연립이차부등식의 활용 집중공략 본책 142쪽

(i) 문제의 의미를 파악하여 구하는 것을 x로 놓는다.
(ii) 주어진 조건을 이용하여 연립부등식을 세운다.
(iii) 연립부등식을 풀어 문제의 답을 구한다.

0991 $2x-1$, x, $2x+1$은 변의 길이이므로

$2x-1>0\quad \therefore x>\frac{1}{2}$ ⋯⋯ ㉠

세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $2x+1$이므로 삼각형이 만들어질 조건에 의하여 (가장 긴 변의 길이)<(나머지 두 변의 길이의 합)

$2x+1<(2x-1)+x$

$\therefore x>2$ ⋯⋯ ㉡

둔각삼각형이려면 $\quad (2x+1)^2>(2x-1)^2+x^2$

$x^2-8x<0,\quad x(x-8)<0$

$\therefore 0<x<8$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $\quad 2<x<8$

따라서 자연수 x는 3, 4, 5, 6, 7의 5개이다. 답 ③

SSEN 특강 삼각형의 변과 각 사이의 관계

삼각형의 세 변의 길이가 각각 a, b, c $(a\leq b\leq c)$일 때
① $c^2<a^2+b^2$ ➡ 예각삼각형
② $c^2=a^2+b^2$ ➡ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형
③ $c^2>a^2+b^2$ ➡ 둔각삼각형

0992 주어진 그림에서 길의 넓이는

$(2x+8)(2x+5)-8\cdot 5=4x^2+26x\,(\mathrm{m}^2)$

길의 넓이가 90 m^2 이상 140 m^2 이하이어야 하므로

$90\leq 4x^2+26x\leq 140\quad \therefore 45\leq 2x^2+13x\leq 70$

$45\leq 2x^2+13x$에서

$2x^2+13x-45\geq 0,\quad (x+9)(2x-5)\geq 0$

$\therefore x\leq -9$ 또는 $x\geq \frac{5}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x\geq \frac{5}{2}$ ⋯⋯ ㉠

$2x^2+13x\leq 70$에서

$2x^2+13x-70\leq 0,\quad (x+10)(2x-7)\leq 0$

$\therefore -10\leq x\leq \frac{7}{2}$

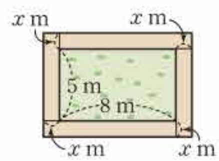
그런데 $x>0$이므로 $\quad 0<x\leq \frac{7}{2}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{5}{2}\leq x\leq \frac{7}{2}$ 답 ③

참고 오른쪽 그림과 같이 길을 네 개의 직사각형으로 나누어 넓이를 구할 수도 있다.

$2(5+x)x+2(8+x)x=4x^2+26x\,(\mathrm{m}^2)$



0993 직사각형의 둘레의 길이가 36이므로 가로의 길이를 x라 하면 세로의 길이는 $18-x$이다.

이때 x, $18-x$는 변의 길이이고, 가로의 길이가 세로의 길이보다 길거나 같으므로

$x>0,\ 18-x>0,\ x\geq 18-x$

$\therefore 9\leq x<18$ ⋯⋯ ㉠ ⋯➊

직사각형의 넓이가 56 이상이므로

$x(18-x)\geq 56$

$x^2-18x+56\leq 0,\quad (x-4)(x-14)\leq 0$

$\therefore 4\leq x\leq 14$ ⋯⋯ ㉡ ⋯➋

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$9\leq x\leq 14$

따라서 가로의 길이의 최댓값은 14, 최솟값은 9이므로 구하는 합은 $\quad 14+9=23$ ⋯➌

답 23

채점 기준	비율
➊ 둘레의 길이를 이용한 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
➋ 넓이를 이용한 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
➌ 가로의 길이의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	20 %

유형 19 이차방정식의 근의 판별과 이차부등식 본책 143쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때
① 서로 다른 두 실근을 가지면 ➡ $D>0$
② 중근을 가지면 ➡ $D=0$
③ 서로 다른 두 허근을 가지면 ➡ $D<0$

0994 이차방정식 $4x^2-2(a-1)x-a^2+2=0$이 허근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때

$$\frac{D}{4}=\{-(a-1)\}^2-4(-a^2+2)<0$$

$$5a^2-2a-7<0, \qquad (a+1)(5a-7)<0$$

$$\therefore\ -1<a<\frac{7}{5}$$

따라서 정수 a는 0, 1이므로 구하는 합은 1이다. 답 ④

0995 이차방정식 $kx^2-4kx-(k-1)=0$이 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때

$$\frac{D}{4}=(-2k)^2+k(k-1)\geq 0$$

$$5k^2-k\geq 0, \qquad k(5k-1)\geq 0$$

$$\therefore\ k<0 \text{ 또는 } k\geq\frac{1}{5}\ (\because\ k\neq 0)$$

$kx^2-4kx-(k-1)=0$이 이차방정식이므로 $k\neq 0$

답 $k<0$ 또는 $k\geq\frac{1}{5}$

0996 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k+7=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k+7)>0$$

$$k^2+k-6>0$$

$$(k+3)(k-2)>0$$

$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>2$ ...... ㉠ ··· ❶

이차방정식 $x^2+kx-k^2+5k=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=k^2-4(-k^2+5k)<0$$

$$5k^2-20k<0, \qquad k(k-4)<0$$

$\therefore\ 0<k<4$ ...... ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$2<k<4$$

따라서 정수 k는 3의 1개이다. ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ 허근을 갖도록 하는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0997 이차방정식 $x^2+2(2k-1)x+k^2+ak+1=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(2k-1)^2-(k^2+ak+1)\geq 0$$

$3k^2-(4+a)k\geq 0$ ...... ㉠

㉠이 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 k에 대한 이차방정식 $3k^2-(4+a)k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=\{-(4+a)\}^2-4\cdot 3\cdot 0\leq 0$$

$$(a+4)^2\leq 0$$

$$\therefore\ a=-4$$

답 ②

유형 20 이차방정식의 실근의 부호 본책 143쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

① 두 근이 모두 양수 ➡ $D\geq 0,\ -\frac{b}{a}>0,\ \frac{c}{a}>0$

② 두 근이 모두 음수 ➡ $D\geq 0,\ -\frac{b}{a}<0,\ \frac{c}{a}>0$

③ 두 근이 서로 다른 부호 ➡ $\frac{c}{a}<0$

0998 이차방정식 $x^2+2(m-1)x+m+5=0$의 두 근을 α, β, 판별식을 D라 하면

(i) $\frac{D}{4}=(m-1)^2-(m+5)\geq 0$

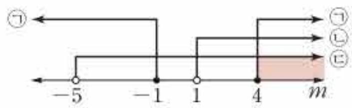
$m^2-3m-4\geq 0, \qquad (m+1)(m-4)\geq 0$

$\therefore\ m\leq -1$ 또는 $m\geq 4$ ...... ㉠

(ii) $\alpha+\beta=-2(m-1)<0$

$m-1>0 \qquad \therefore\ m>1$ ...... ㉡

(iii) $\alpha\beta=m+5>0 \qquad \therefore\ m>-5$ ...... ㉢



이상에서 공통부분을 구하면 $m\geq 4$ 답 $m\geq 4$

0999 이차방정식 $x^2+(k+3)x+k+6=0$의 두 근을 α, β, 판별식을 D라 하면

(i) $D=(k+3)^2-4(k+6)\geq 0$

$k^2+2k-15\geq 0, \qquad (k+5)(k-3)\geq 0$

$\therefore\ k\leq -5$ 또는 $k\geq 3$ ...... ㉠

(ii) $\alpha+\beta=-(k+3)>0$

$k+3<0 \qquad \therefore\ k<-3$ ...... ㉡

(iii) $\alpha\beta=k+6>0 \qquad \therefore\ k>-6$ ...... ㉢

이상에서 공통부분을 구하면 $-6<k\leq -5$

따라서 실수 k의 최댓값은 -5이다. 답 ①

1000 이차방정식 $3x^2+(m^2+m-6)x+m^2-9=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$$\alpha\beta=\frac{m^2-9}{3}<0, \qquad m^2-9<0$$

$$(m+3)(m-3)<0$$

$\therefore\ -3<m<3$ ...... ㉠

또 두 근의 절댓값이 같으므로

$$\alpha+\beta=-\frac{m^2+m-6}{3}=0$$

$$m^2+m-6=0, \qquad (m+3)(m-2)=0$$

$\therefore\ m=-3$ 또는 $m=2$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $m=2$ 답 2

SSEN 특강 이차방정식의 두 실근의 절댓값

이차방정식의 두 근이 서로 다른 부호일 때

① |양수인 근|=|음수인 근|

➡ (두 근의 합)=0, (두 근의 곱)<0

② |양수인 근|>|음수인 근|

➡ (두 근의 합)>0, (두 근의 곱)<0

③ |양수인 근|<|음수인 근|

➡ (두 근의 합)<0, (두 근의 곱)<0

1001 이차방정식 $x^2-(k^2-4k+3)x-3k+5=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=-3k+5<0 \quad \therefore k>\frac{5}{3}$ ······ ㉠ ··· ❶

또 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 크므로

$\alpha+\beta=k^2-4k+3<0$

$(k-1)(k-3)<0 \quad \therefore 1<k<3$ ······ ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{5}{3}<k<3$ ··· ❸

답 $\frac{5}{3}<k<3$

채점 기준	비율
❶ 두 근의 부호가 서로 다를 때, k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 클 때, k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

유형 21 이차방정식의 근의 분리

본책 144쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$의 판별식을 D라 하고, $f(x)=ax^2+bx+c$라 할 때

① 두 근이 모두 p보다 크다. ➡ $D\geq 0$, $f(p)>0$, $-\frac{b}{2a}>p$

② 두 근이 모두 p보다 작다. ➡ $D\geq 0$, $f(p)>0$, $-\frac{b}{2a}<p$

③ 두 근 사이에 p가 있다. ➡ $f(p)<0$

1002 $f(x)=x^2-2kx+2-k$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 작으므로

(i) $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(2-k)\geq 0$

$k^2+k-2\geq 0, \quad (k+2)(k-1)\geq 0$

$\therefore k\leq -2$ 또는 $k\geq 1$

(ii) $f(1)=1-2k+2-k>0$

$-3k+3>0 \quad \therefore k<1$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k$이므로

$k<1$

이상에서 공통부분을 구하면 $k\leq -2$

답 $k\leq -2$

1003 $f(x)=x^2+3px+3p-1$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -3보다 크므로

(i) $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(3p)^2-4(3p-1)\geq 0$

$9p^2-12p+4\geq 0 \quad \therefore (3p-2)^2\geq 0$

따라서 p는 모든 실수이다.

(ii) $f(-3)=9-9p+3p-1>0$

$-6p+8>0 \quad \therefore p<\frac{4}{3}$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-\frac{3}{2}p$이므로

$-\frac{3}{2}p>-3 \quad \therefore p<2$

이상에서 공통부분을 구하면 $p<\frac{4}{3}$

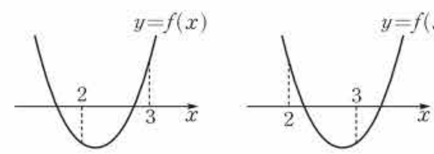
따라서 정수 p의 최댓값은 1이다.

답 ②

1004 $x^2-5x+6=0$에서 $(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

즉 $x^2+ax+3=0$의 한 근만이 2와 3 사이에 있어야 하므로 $f(x)=x^2+ax+3$이라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 $f(2)f(3)<0$이므로

$(4+2a+3)(9+3a+3)<0, \quad (2a+7)(3a+12)<0$

$\therefore -4<a<-\frac{7}{2}$

답 $-4<a<-\frac{7}{2}$

1005 $f(x)=x^2+2(k-1)x-k+3$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 0과 3 사이에 있으므로

(i) $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(-k+3)\geq 0$

$k^2-k-2\geq 0, \quad (k+1)(k-2)\geq 0$

$\therefore k\leq -1$ 또는 $k\geq 2$ ······ ㉠

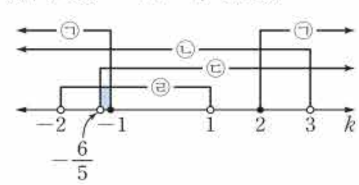
(ii) $f(0)=-k+3>0 \quad \therefore k<3$ ······ ㉡

(iii) $f(3)=9+6(k-1)-k+3>0$

$5k+6>0 \quad \therefore k>-\frac{6}{5}$ ······ ㉢

(iv) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-k+1$이므로

$0<-k+1<3 \quad \therefore -2<k<1$ ······ ㉣



이상에서 공통부분을 구하면

$-\frac{6}{5}<k\leq -1$

답 $-\frac{6}{5}<k\leq -1$

유형 22 사차방정식의 근의 판별 본책 144쪽

사차방정식 $x^4+ax^2+b=0$ (a, b는 실수)이
① 서로 다른 네 실근을 갖는다.
➡ $x^2=X$로 놓으면 이차방정식 $X^2+aX+b=0$의 두 근이 서로 다른 양수이다.
➡ $a^2-4b>0$, $-a>0$, $b>0$
② 서로 다른 두 실근과 두 허근을 갖는다.
➡ $x^2=X$로 놓으면 이차방정식 $X^2+aX+b=0$의 두 근이 서로 다른 부호이다.
➡ $b<0$

1006 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+mX-m+3=0$ ······ ㉠

이때 주어진 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 방정식 ㉠의 두 근이 서로 다른 양수이어야 하므로

(i) ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=m^2-4(-m+3)>0$

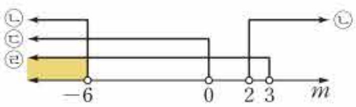
$m^2+4m-12>0$

$(m+6)(m-2)>0$

$\therefore m<-6$ 또는 $m>2$ ······ ㉡

(ii) (두 근의 합)$=-m>0$ $\therefore m<0$ ······ ㉢

(iii) (두 근의 곱)$=-m+3>0$ $\therefore m<3$ ······ ㉣



이상에서 공통부분을 구하면

$m<-6$ 답 $m<-6$

1007 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-kX+k^2-2k-8=0$ ······ ㉠

이때 주어진 사차방정식이 서로 다른 두 실근과 서로 다른 두 허근을 가지려면 방정식 ㉠의 두 근이 서로 다른 부호이어야 하므로

(두 근의 곱)$=k^2-2k-8<0$

$(k+2)(k-4)<0$ $\therefore -2<k<4$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3의 3개이다. 답 ③

1008 $x^4-2kx^2+k^2-12k=-3x^2-27$에서

$x^4+(3-2k)x^2+k^2-12k+27=0$

$x^2=X$로 놓으면 이 방정식은

$X^2+(3-2k)X+k^2-12k+27=0$ ······ ㉠

이때 주어진 사차방정식이 실근만을 가지려면 방정식 ㉠의 두 근이 모두 음이 아닌 실수이어야 하므로

(i) ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(3-2k)^2-4(k^2-12k+27)\geq 0$

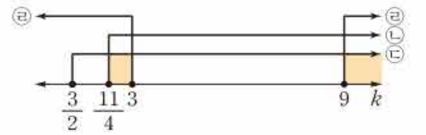
$36k-99\geq 0$ $\therefore k\geq \frac{11}{4}$ ······ ㉡

(ii) (두 근의 합)$=2k-3\geq 0$ $\therefore k\geq \frac{3}{2}$ ······ ㉢

(iii) (두 근의 곱)$=k^2-12k+27\geq 0$

$(k-3)(k-9)\geq 0$

$\therefore k\leq 3$ 또는 $k\geq 9$ ······ ㉣



이상에서 공통부분을 구하면

$\frac{11}{4}\leq k\leq 3$ 또는 $k\geq 9$

따라서 k의 최솟값은 $\frac{11}{4}$이다. 답 ②

1009 1st $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $g(\gamma)$의 대소를 비교한다.

ㄱ. 주어진 그래프에서 이차함수 $y=f(x)$는 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$에서 최댓값 $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$를 갖는다.

이때 $\beta-\gamma<\gamma-\alpha$에서 $\frac{\alpha+\beta}{2}<\gamma$이므로

$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>f(\gamma)=g(\gamma)$

2nd 방정식 $g(x)\{f(x)-g(x)\}=0$의 실근의 개수를 구한다.

ㄴ. $g(x)\{f(x)-g(x)\}=0$에서

$g(x)=0$ 또는 $f(x)=g(x)$

$\therefore x=\alpha$ 또는 $x=\gamma$

따라서 방정식 $g(x)\{f(x)-g(x)\}=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

3rd 부등식 $\{f(x)\}^2\geq g(x)f(x)$의 해를 구한다.

ㄷ. $\{f(x)\}^2\geq g(x)f(x)$에서 $\{f(x)\}^2-g(x)f(x)\geq 0$

$f(x)\{f(x)-g(x)\}\geq 0$

$f(x)\geq 0$, $f(x)-g(x)\geq 0$

또는 $f(x)\leq 0$, $f(x)-g(x)\leq 0$

$\therefore f(x)\geq 0$, $f(x)\geq g(x)$ 또는 $f(x)\leq 0$, $f(x)\leq g(x)$

(i) $f(x)\geq 0$, $f(x)\geq g(x)$일 때,

주어진 그래프에서 $\alpha\leq x\leq \gamma$

(ii) $f(x)\leq 0$, $f(x)\leq g(x)$일 때,

주어진 그래프에서 $x\leq \alpha$ 또는 $x\geq \beta$

(i), (ii)에서 $\underline{x\leq \gamma \text{ 또는 } x\geq \beta}$ └(i), (ii)의 범위를 합한 것이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

1010 1st $f(x)$, $g(x)$의 식을 세운다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(-1, k)$, $(5, k)$를 지나므로

$f(-1)=k$, $f(5)=k$

$\therefore f(-1)-k=0$, $f(5)-k=0$

즉 이차방정식 $f(x)-k=0$의 두 근이 -1, 5이다.

이때 $f(x)$의 x^2의 계수가 1이므로

$f(x)-k=(x+1)(x-5)$

$\therefore f(x)=(x+1)(x-5)+k$

마찬가지로 이차방정식 $g(x)-k=0$의 두 근이 -1, 5이고, $g(x)$의 x^2의 계수가 -1이므로

$$g(x)-k=-(x+1)(x-5)$$

$$\therefore g(x)=-(x+1)(x-5)+k$$

2nd 부등식 $f(x)<g(0)+2$의 해를 구한다.

$g(0)=5+k$이므로 부등식 $f(x)<g(0)+2$에서

$$(x+1)(x-5)+k<5+k+2$$

$$x^2-4x-12<0, \quad (x+2)(x-6)<0$$

$$\therefore -2<x<6$$

3rd $\alpha+\beta$의 값을 구한다.

$\alpha=-2$, $\beta=6$이므로

$$\alpha+\beta=4$$

답 ④

1011 **1st** $f(x)$, $g(x)$의 식을 세운 후 부등식에 대입한다.

조건 (가)에 의하여

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-p)^2+a,\ g(x)=2(x-p)^2+b\ (a,\ b\text{는 상수})$$

라 하면 조건 (나)의 $f(x)\geq g(x)$에서

$$\frac{1}{2}(x-p)^2+a\geq 2(x-p)^2+b$$

$$\therefore \frac{3}{2}x^2-3px+\frac{3}{2}p^2+b-a\leq 0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

2nd 해를 이용하여 부등식을 세운다.

해가 $-1\leq x\leq 5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+1)(x-5)\leq 0 \quad \therefore x^2-4x-5\leq 0$$

양변에 $\frac{3}{2}$을 곱하면

$$\frac{3}{2}x^2-6x-\frac{15}{2}\leq 0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

3rd $p\times\{f(2)-g(2)\}$의 값을 구한다.

㉠, ㉡이 같으므로

$$-3p=-6,\ \frac{3}{2}p^2+b-a=-\frac{15}{2}$$

$$\therefore p=2,\ a-b=\frac{27}{2}$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2+a$, $g(x)=2(x-2)^2+b$이므로

$$p\times\{f(2)-g(2)\}=2(a-b)=27$$

답 27

1012 **1st** 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 구한다.

$x^2-4x+3=0$에서 $\quad (x-1)(x-3)=0$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

$x-4=0$에서 $\quad x=4$ ⋯ ❶

2nd 절댓값 기호를 포함한 부등식의 해를 구한다.

$|x^2-4x+3|-|x-4|\geq\frac{1}{2}x^2-1$에서

(i) $x<1$일 때, $x^2-4x+3>0$, $x-4<0$이므로

$$x^2-4x+3+x-4\geq\frac{1}{2}x^2-1, \quad x^2-6x\geq 0$$

$$x(x-6)\geq 0 \quad \therefore x\leq 0 \text{ 또는 } x\geq 6$$

그런데 $x<1$이므로 $\quad x\leq 0$

(ii) $1\leq x<3$일 때, $x^2-4x+3\leq 0$, $x-4<0$이므로

$$-(x^2-4x+3)+x-4\geq\frac{1}{2}x^2-1$$

$$\therefore 3x^2-10x+12\leq 0$$

그런데 $3x^2-10x+12=3\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{11}{3}\geq\frac{11}{3}$이므로 해는 없다.

(iii) $3\leq x<4$일 때, $x^2-4x+3\geq 0$, $x-4<0$이므로

$$x^2-4x+3+x-4\geq\frac{1}{2}x^2-1, \quad x^2-6x\geq 0$$

$$x(x-6)\geq 0 \quad \therefore x\leq 0 \text{ 또는 } x\geq 6$$

그런데 $3\leq x<4$이므로 해는 없다.

(iv) $x\geq 4$일 때, $x^2-4x+3>0$, $x-4\geq 0$이므로

$$x^2-4x+3-(x-4)\geq\frac{1}{2}x^2-1$$

$$x^2-10x+16\geq 0, \quad (x-2)(x-8)\geq 0$$

$$\therefore x\leq 2 \text{ 또는 } x\geq 8$$

그런데 $x\geq 4$이므로 $\quad x\geq 8$

이상에서 $\quad x\leq 0$ 또는 $x\geq 8$ ⋯ ❷

3rd $a+b$의 값을 구한다.

해가 $x\leq 0$ 또는 $x\geq 8$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$$x(x-8)\geq 0 \quad \therefore x^2-8x\geq 0$$

이 부등식이 $x^2+ax+b\geq 0$과 같으므로

$a=-8$, $b=0$ $\quad \therefore a+b=-8$ ⋯ ❸

답 -8

채점 기준	비율
❶ 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 구할 수 있다.	10 %
❷ 절댓값 기호를 포함한 부등식의 해를 구할 수 있다.	60 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	30 %

1013 **1st** $a<0$일 때 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x를 파악한다.

(i) $a<0$일 때,

$a(x-a)(x-a^2)<0$에서 $\quad (x-a)(x-a^2)>0$

$\therefore x<a$ 또는 $x>a^2$ ← $a<0$일 때 $a^2>0$이다.

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 무수히 많다. ⋯ ❶

2nd $a=0$일 때 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x를 파악한다.

(ii) $a=0$일 때,

$a(x-a)(x-a^2)<0$에서 $0<0$이므로 주어진 부등식의 해는 없다. 즉 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 없다. ⋯ ❷

3rd $a>0$일 때 주어진 조건을 만족시키는 a의 값을 구한다.

(iii) $a>0$일 때,

$a(x-a)(x-a^2)<0$에서 $\quad (x-a)(x-a^2)<0$

$$\therefore a<x<a^2$$

a, a^2이 모두 정수이므로 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 한 개뿐이면

$$(a^2-a)-1=1, \quad a^2-a-2=0$$

$$(a+1)(a-2)=0 \quad \therefore a=-1 \text{ 또는 } a=2$$

그런데 $a>0$이므로 $\quad a=2$ ⋯ ❸

4th 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 한 개뿐인 a의 값을 구한다.

이상에서 구하는 정수 a의 값은 2이다. ⋯❹

답 2

채점 기준	비율
❶ $a<0$일 때, 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 무수히 많음을 알 수 있다.	30 %
❷ $a=0$일 때, 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 없음을 알 수 있다.	30 %
❸ $a>0$일 때, 조건을 만족시키는 a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 정수 a의 값을 구할 수 있다.	10 %

1014 1st $f(x)<0$일 때, 주어진 부등식의 해를 구한다.

(i) $f(x)<0$, 즉 $x^2+2x-3<0$에서

$(x+3)(x-1)<0 \qquad \therefore -3<x<1$

즉 $-3<x<1$일 때 주어진 부등식은

$2f(x)-f(x)\le m(x+3), \qquad f(x)\le m(x+3)$

$x^2+2x-3\le m(x+3)$

$x^2+(2-m)x-3(1+m)\le 0$

$(x+3)\{x-(1+m)\}\le 0$

$\therefore -3\le x\le 1+m \ (\because 1+m>1)$

그런데 $-3<x<1$이므로

$-3<x<1 \ (\because 1+m>1)$

2nd $f(x)\ge 0$일 때, 주어진 부등식의 해를 구한다.

(ii) $f(x)\ge 0$, 즉 $x^2+2x-3\ge 0$에서

$(x+3)(x-1)\ge 0 \qquad \therefore x\le -3$ 또는 $x\ge 1$

즉 $x\le -3$ 또는 $x\ge 1$일 때 주어진 부등식은

$2f(x)+f(x)\le m(x+3), \qquad 3f(x)\le m(x+3)$

$3(x^2+2x-3)\le m(x+3)$

$3x^2+(6-m)x-3(3+m)\le 0$

$(x+3)\{3x-(3+m)\}\le 0$

$\therefore -3\le x\le \dfrac{3+m}{3}\left(\because \dfrac{3+m}{3}>1\right)$

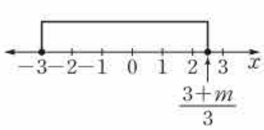
그런데 $x\le -3$ 또는 $x\ge 1$이므로

$x=-3$ 또는 $1\le x\le \dfrac{3+m}{3}\left(\because \dfrac{3+m}{3}>1\right)$

3rd 정수 x가 6개가 되도록 하는 양수 m의 최솟값을 구한다.

(i), (ii)에서 $\quad -3\le x\le \dfrac{3+m}{3}$

이 부등식을 만족시키는 정수 x가 6개이려면 오른쪽 그림에서



$2\le \dfrac{3+m}{3}<3$

$6\le 3+m<9 \qquad \therefore 3\le m<6$

따라서 양수 m의 최솟값은 3이다.

답 3

다른 풀이 $g(x)=2f(x)+|f(x)|$라 하면

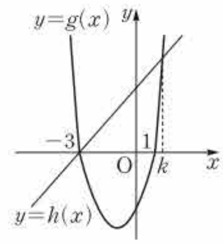
$-3<x<1$일 때,

$g(x)=2f(x)-f(x)=f(x)$

$x\le -3$ 또는 $x\ge 1$일 때,

$g(x)=2f(x)+f(x)=3f(x)$

따라서 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

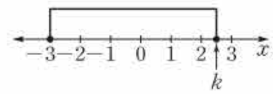


또 $h(x)=m(x+3)$이라 하면 $m>0$이므로 직선 $y=h(x)$는 오른쪽 그림과 같다.
└ m의 값에 관계없이 항상 점 $(-3,\ 0)$을 지난다.

$y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=h(x)$의 교점 중 x좌표가 -3이 아닌 점의 x좌표를 k라 하면 주어진 부등식 $g(x)\le h(x)$의 해는

$-3\le x\le k$

이 부등식을 만족시키는 정수 x가 6개이려면 오른쪽 그림에서



$2\le k<3$

k는 이차방정식 $3f(x)=h(x)$의 근이므로

$3(x^2+2x-3)=m(x+3)$

$3x^2+(6-m)x-3(3+m)=0$

$(x+3)\{3x-(3+m)\}=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\dfrac{3+m}{3}$

이때 $k=\dfrac{3+m}{3}$이므로

$2\le \dfrac{3+m}{3}<3$

1015

아래의 조건을 모두 만족시키는 이차함수 $f(x)$에 대하여 다음 중 ❹$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은?

(가) 부등식 ❶$f\left(\dfrac{1-x}{3}\right)\ge 0$의 해가 ❷$-5\le x\le 1$이다.

(나) 부등식 ❸$f(x)\ge 3x+\dfrac{3}{4}$의 해가 오직 한 개 존재한다.
└ 이차방정식 $f(x)-3x-\dfrac{3}{4}=0$의 판별식을 D라 할 때 $D=0$이다.

① -3 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}$ ④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ 2

❶에서 $\dfrac{1-x}{3}=t$로 치환하고 ❷를 t에 대한 식으로 변형하여 $f(x)$의 식을 세운다. 또 ❸이 성립할 조건을 이용하여 $f(x)$를 구한 후 ❹를 구한다.

1st $f(x)$의 식을 세운다.

조건 (가)에서 부등식 $f\left(\dfrac{1-x}{3}\right)\ge 0$의 해가 $-5\le x\le 1$이므로

$\dfrac{1-x}{3}=t$로 놓으면

$-1\le -x\le 5, \qquad 0\le 1-x\le 6$

$0\le \dfrac{1-x}{3}\le 2$

$\therefore 0\le t\le 2$

즉 $f(t)\ge 0$의 해가 $0\le t\le 2$이므로

$f(x)=ax(x-2)\ (a<0)$

라 하자.

2nd $f(x)$의 x^2의 계수를 구한다.

조건 (나)에서 부등식 $ax(x-2) \geq 3x+\frac{3}{4}$, 즉

$ax^2-(2a+3)x-\frac{3}{4} \geq 0$의 해가 오직 한 개 존재하므로 이차방정식 $ax^2-(2a+3)x-\frac{3}{4}=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=\{-(2a+3)\}^2-4\cdot a\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=0$$

$$4a^2+15a+9=0, \qquad (a+3)(4a+3)=0$$

$$\therefore a=-3 \text{ 또는 } a=-\frac{3}{4}$$

3rd $f(1)$의 값을 구한다.

(i) $a=-3$일 때,

$f(x)=-3x(x-2)$이므로

$$f(1)=-3\cdot(-1)=3$$

(ii) $a=-\frac{3}{4}$일 때,

$f(x)=-\frac{3}{4}x(x-2)$이므로

$$f(1)=-\frac{3}{4}\cdot(-1)=\frac{3}{4}$$

(i), (ii)에서 $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 ③이다. 답 ③

1016 1st 이차부등식이 해를 가질 조건을 구한다.

$(x-1)(x-p)<3(x-k)$에서

$$x^2-(p+1)x+p<3x-3k$$

$$\therefore x^2-(p+4)x+p+3k<0$$

이 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $x^2-(p+4)x+p+3k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=\{-(p+4)\}^2-4(p+3k)>0$$

$$\therefore p^2+4p+16-12k>0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

2nd k의 값의 범위를 구한다.

㉠이 p의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 p에 대한 이차방정식 $p^2+4p+16-12k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=2^2-(16-12k)<0$$

$$-12+12k<0 \qquad \therefore k<1$$

3rd 정수 k의 최댓값을 구한다.

따라서 정수 k의 최댓값은 0이다. 답 ①

1017 1st 순허수가 될 조건을 구한다.

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{(k+1)x^2-(k+1)x-1}$이 순허수가 되려면 모든 실수 x에 대하여

$$(k+1)x^2-(k+1)x-1<0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이 성립해야 한다.

2nd k의 값의 범위를 구한다.

(i) $k=-1$일 때,

$0\cdot x^2-0\cdot x-1=-1<0$이므로 모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립한다.

(ii) $k\neq-1$일 때,

모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하려면

$$k+1<0 \qquad \therefore k<-1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

또 이차방정식 $(k+1)x^2-(k+1)x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=\{-(k+1)\}^2+4(k+1)<0$$

$$(k+1)^2+4(k+1)<0$$

$$(k+5)(k+1)<0$$

$$\therefore -5<k<-1 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢에서 $\quad -5<k<-1$

(i), (ii)에서 $\quad -5<k\leq-1$ 답 ②

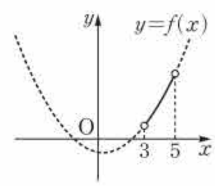
1018 1st $3<x<5$에서 주어진 부등식이 항상 성립할 조건을 구한다.

$x^2+2ax>3a^2$에서 $\quad x^2+2ax-3a^2>0$

$f(x)=x^2+2ax-3a^2$이라 하면

$$f(0)=-3a^2\leq0$$

이므로 $3<x<5$에서 $f(x)>0$이려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다. 즉 $f(3)\geq0$이어야 한다.



2nd a의 값의 범위를 구한다.

$f(3)\geq0$에서 $\quad 9+6a-3a^2\geq0$

$$a^2-2a-3\leq0, \qquad (a+1)(a-3)\leq0$$

$$\therefore -1\leq a\leq3$$

답 ③

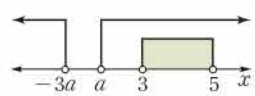
다른 풀이 $3<x<5$에서 이차부등식 $x^2+2ax>3a^2$이 항상 성립하려면 $3<x<5$가 $x^2+2ax>3a^2$의 해에 포함되어야 한다.

$x^2+2ax>3a^2$에서 $\quad x^2+2ax-3a^2>0$

$$\therefore (x+3a)(x-a)>0$$

(i) $a\geq0$일 때,

$$x<-3a \text{ 또는 } x>a$$



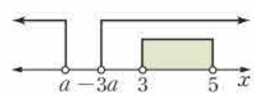
이므로 오른쪽 그림에서

$$a\leq3$$

그런데 $a\geq0$이므로 $\quad 0\leq a\leq3$

(ii) $a<0$일 때,

$$x<a \text{ 또는 } x>-3a$$



이므로 오른쪽 그림에서

$$-3a\leq3 \qquad \therefore a\geq-1$$

그런데 $a<0$이므로 $\quad -1\leq a<0$

(i), (ii)에서 $\quad -1\leq a\leq3$

1019 1st 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x-1$의 교점의 좌표를 구하고 그래프를 그린다.

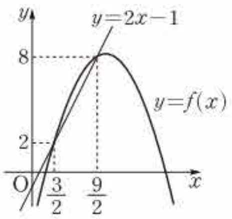
$y=2x-1$에 $y=2$를 대입하면

$$2=2x-1 \qquad \therefore x=\frac{3}{2}$$

$y=8$을 대입하면

$$8=2x-1 \qquad \therefore x=\frac{9}{2}$$

따라서 x^2의 계수가 음수인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x-1$의 두 교점의 좌표가 $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, $\left(\frac{9}{2}, 8\right)$이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ⋯ ❶



2nd 부등식의 해를 구한다.

$f(x)-2x+1>0$에서

$f(x)>2x-1$

이 부등식의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2x-1$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$\frac{3}{2}<x<\frac{9}{2}$ ⋯ ❷

3rd 모든 정수 x의 값의 합을 구한다.

정수 x는 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$2+3+4=9$ ⋯ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x-1$의 교점의 좌표를 구하고 그래프를 그릴 수 있다.	40 %
❷ 부등식 $f(x)-2x+1>0$의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

1020 **1st** $f(x)$의 최솟값과 $g(x)$의 최댓값을 구한다.

$f(x)=x^2+x-a^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-a^2-\frac{1}{4}$이므로 $f(x)$의 최솟값은 $-a^2-\frac{1}{4}$이다. ⋯ ❶

또 $g(x)=-x^2-2x+3a=-(x+1)^2+3a+1$이므로 $g(x)$의 최댓값은 $3a+1$이다. ⋯ ❷

2nd 정수 a의 최댓값을 구한다.

임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>g(x_2)$가 성립하려면

$-a^2-\frac{1}{4}>3a+1$, $\quad 4a^2+12a+5<0$

$(2a+5)(2a+1)<0 \quad \therefore -\frac{5}{2}<a<-\frac{1}{2}$

따라서 정수 a의 최댓값은 -1이다. ⋯ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $g(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 정수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

참고 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+x-a^2>-x^2-2x+3a$가 성립할 조건을 구하지 않도록 주의한다.

1021 **1st** 부등식 $[x]^2-7[x]+10\le0$의 해를 구한다.

$[x]^2-7[x]+10\le0$에서 $\quad ([x]-2)([x]-5)\le0$

$\therefore 2\le[x]\le5$

이때 $[x]$의 값은 정수이므로 $\quad [x]=2, 3, 4, 5$

$[x]=2$에서 $\quad 2\le x<3$

$[x]=3$에서 $\quad 3\le x<4$

$[x]=4$에서 $\quad 4\le x<5$

$[x]=5$에서 $\quad 5\le x<6$

$\therefore 2\le x<6$ ⋯⋯ ㉠

2nd 부등식 $x^2-5x\le6x-24$의 해를 구한다.

$x^2-5x\le6x-24$에서 $\quad x^2-11x+24\le0$

$(x-3)(x-8)\le0 \quad \therefore 3\le x\le8$ ⋯⋯ ㉡

3rd 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수를 구한다.

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad 3\le x<6$

따라서 정수 x는 3, 4, 5의 3개이다.

답 3

1022 **1st** n의 값을 구한다.

$6x^2-11nx+3n^2\le0$에 $x=1$을 대입하면

$6-11n+3n^2\le0$, $\quad (3n-2)(n-3)\le0$

$\therefore \frac{2}{3}\le n\le3$ ⋯⋯ ㉠

$|3x-2n|\ge2$에 $x=1$을 대입하면 $\quad |3-2n|\ge2$

$3-2n\le-2$ 또는 $3-2n\ge2$

$\therefore n\le\frac{1}{2}$ 또는 $n\ge\frac{5}{2}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad \frac{5}{2}\le n\le3$

그런데 n은 정수이므로 $\quad n=3$

2nd 연립부등식의 해를 구한다.

따라서 주어진 연립부등식은 $\begin{cases} 6x^2-33x+27\le0 \\ |3x-6|\ge2 \end{cases}$

$6x^2-33x+27\le0$에서 $\quad 2x^2-11x+9\le0$

$(x-1)(2x-9)\le0 \quad \therefore 1\le x\le\frac{9}{2}$ ⋯⋯ ㉢

$|3x-6|\ge2$에서 $\quad 3x-6\le-2$ 또는 $3x-6\ge2$

$\therefore x\le\frac{4}{3}$ 또는 $x\ge\frac{8}{3}$ ⋯⋯ ㉣

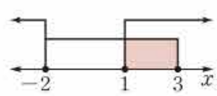
㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $\quad 1\le x\le\frac{4}{3}$ 또는 $\frac{8}{3}\le x\le\frac{9}{2}$

따라서 연립부등식의 해가 아닌 것은 ②이다.

답 ②

1023 **1st** 각 부등식의 해를 구한다.

해가 $x=-2$ 또는 $1\le x\le3$이므로 주어진 연립부등식의 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



따라서 이차부등식 $x^2+ax+b\le0$의 해는 $-2\le x\le3$이고, 이차부등식 $x^2+cx+d\ge0$의 해는 $x\le-2$ 또는 $x\ge1$이다. ⋯ ❶

2nd $ad-bc$의 값을 구한다.

해가 $-2\le x\le3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-3)\le0 \quad \therefore x^2-x-6\le0$

$\therefore a=-1$, $b=-6$ ⋯ ❷

해가 $x\le-2$ 또는 $x\ge1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-1)\ge0 \quad \therefore x^2+x-2\ge0$

$\therefore c=1$, $d=-2$ ⋯ ❸

$\therefore ad-bc=8$ ⋯ ❹

답 8

채점 기준	비율
❶ 두 부등식 $x^2+ax+b\le0$, $x^2+cx+d\ge0$의 해를 구할 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ c, d의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $ad-bc$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1024 **1st** $-x^2+3x+2\le mx+n$이 성립할 조건을 구한다.

모든 실수 x에 대하여

$-x^2+3x+2\le mx+n$,

즉 $x^2+(m-3)x+n-2\ge0$

이 성립하므로 이차방정식 $x^2+(m-3)x+n-2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(m-3)^2-4(n-2)\le0$

$m^2-6m-4n+17\le0$

$\therefore 4n\ge m^2-6m+17$ ...... ㉠

2nd $mx+n\le x^2-x+4$가 성립할 조건을 구한다.

모든 실수 x에 대하여

$mx+n\le x^2-x+4$,

즉 $x^2-(m+1)x+4-n\ge0$

이 성립하므로 이차방정식 $x^2-(m+1)x+4-n=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=\{-(m+1)\}^2-4(4-n)\le0$

$m^2+2m+4n-15\le0$

$\therefore 4n\le -m^2-2m+15$ ...... ㉡

3rd m^2+n^2의 값을 구한다.

㉠, ㉡에 의하여

$m^2-6m+17\le4n\le-m^2-2m+15$ ...... ㉢

이므로

$m^2-6m+17\le-m^2-2m+15$

$2m^2-4m+2\le0$, $(m-1)^2\le0$

$\therefore m=1$

이것을 ㉢에 대입하면

$12\le4n\le12$, $4n=12$ $\therefore n=3$

$\therefore m^2+n^2=10$ 답 ②

1025 **1st** 각 부등식의 좌변을 인수분해하거나 해를 구한다.

$x^2-(a+b)x+ab<0$에서

$(x-a)(x-b)<0$

$\therefore a<x<b$ ...... ㉠

$abx^2-(a+b)x+1<0$에서

$(ax-1)(bx-1)<0$ ...... ㉡

2nd $ab<0$일 때 연립부등식의 해가 항상 존재하는지 확인한다.

ㄱ. $ab<0$이면 $a<0<b$이므로 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

㉡에서 $x<\frac{1}{a}$ 또는 $x>\frac{1}{b}$ ...... ㉢

$\frac{1}{a}<a$, $b<\frac{1}{b}$일 때 ㉠, ㉢의 공통부분은 없으므로 이때 연립부등식의 해는 없다.

$a<0$, $b>0$이므로 $a^2<1$, $b^2<1$ $\therefore -1<a<0$, $0<b<1$

3rd $ab>0$이고 연립부등식의 해가 존재할 때 a^2+b^2과 1의 대소를 비교한다.

ㄴ. $ab>0$이면

$a>0$, $b>0$ 또는 $a<0$, $b<0$

(i) $a>0$, $b>0$일 때,

$0<a<b$이므로 $0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$

㉡에서 $\frac{1}{b}<x<\frac{1}{a}$ ...... ㉣

주어진 연립부등식의 해가 존재하면 ㉠, ㉣의 공통부분이 있으므로

$a<\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}<b$

$\therefore a^2<1$, $b^2>1$ ($\because a>0$, $b>0$)

$\therefore a^2+b^2>1$

(ii) $a<0$, $b<0$일 때,

$a<b<0$이므로 $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<0$

㉡에서 $\frac{1}{b}<x<\frac{1}{a}$ ...... ㉤

주어진 연립부등식의 해가 존재하면 ㉠, ㉤의 공통부분이 있으므로

$a<\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}<b$

$\therefore a^2>1$, $b^2<1$ ($\because a<0$, $b<0$)

$\therefore a^2+b^2>1$

(i), (ii)에서 $a^2+b^2>1$

4th $ab>0$이고 연립부등식의 해가 존재할 때 $(a-1)(b-1)$ 또는 $(a+1)(b+1)$과 0의 대소를 비교한다.

ㄷ. ㄴ의 (i)에서 $a>0$, $b>0$일 때 $a^2<1$, $b^2>1$이므로

$0<a<1<b$

즉 $a-1<0$, $b-1>0$이므로

$(a-1)(b-1)<0$

ㄴ의 (ii)에서 $a<0$, $b<0$일 때 $a^2>1$, $b^2<1$이므로

$a<-1<b<0$

즉 $a+1<0$, $b+1>0$이므로

$(a+1)(b+1)<0$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

1026

x에 대한 연립이차부등식

$$\begin{cases} x^2-10x+21\le0 & ❶ \\ x^2-2(n-1)x+\underbrace{n^2-2n}_{n(n-2)}\ge0 & ❷ \end{cases}$$

$n(n-2)$임을 이용하여 인수분해한다.

을 만족시키는 ❸ 정수 x의 개수가 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

❶의 해를 수직선 위에 나타낸 후 n의 값의 범위에 따라 ❷의 해를 수직선 위에 나타내어 보면서 공통부분을 찾아 ❸을 만족시키는 자연수 n의 값을 구한다.

1st 각 부등식의 해를 구한다.

$x^2-10x+21\le 0$에서

$(x-3)(x-7)\le 0$

$\therefore 3\le x\le 7$ …… ㉠

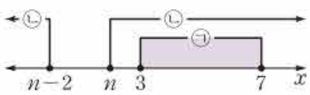
$x^2-2(n-1)x+n^2-2n\ge 0$에서

$\{x-(n-2)\}(x-n)\ge 0$

$\therefore x\le n-2$ 또는 $x\ge n$ …… ㉡

2nd n의 값의 범위에 따라 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수를 구한다.

(i) $1\le n\le 3$일 때,



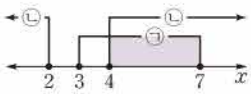
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$3\le x\le 7$

이므로 정수 x는 3, 4, 5, 6, 7의 5개이다.

즉 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $n=4$일 때,

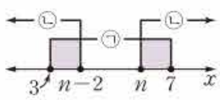


㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$4\le x\le 7$

이므로 정수 x는 4, 5, 6, 7의 4개이다.

(iii) $5\le n\le 7$일 때,



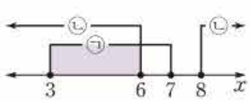
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$3\le x\le n-2$ 또는 $n\le x\le 7$

이므로 정수 x의 개수는

$\{(n-2)-3+1\}+(7-n+1)=4$

(iv) $n=8$일 때,

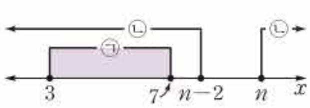


㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$3\le x\le 6$

이므로 정수 x는 3, 4, 5, 6의 4개이다.

(v) $n\ge 9$일 때,



㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$3\le x\le 7$

이므로 정수 x는 3, 4, 5, 6, 7의 5개이다.

즉 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

3rd 주어진 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구한다.

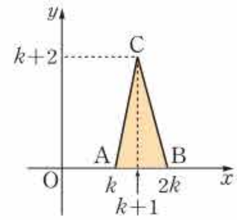
이상에서 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$4+5+6+7+8=30$

답 30

1027 1st 부등식을 세운다.

오른쪽 그림에서



$\triangle ABC=\frac{1}{2}(2k-k)(k+2)$

$=\frac{1}{2}k(k+2)$ ··· ❶

△ABC의 넓이가 4 이상 24 이하이므로

$4\le \frac{1}{2}k(k+2)\le 24$

$\therefore 8\le k^2+2k\le 48$ ··· ❷

2nd 부등식의 해를 구한다.

$8\le k^2+2k$에서 $k^2+2k-8\ge 0$

$(k+4)(k-2)\ge 0$

$\therefore k\le -4$ 또는 $k\ge 2$

그런데 k는 자연수이므로 $k\ge 2$ …… ㉠

$k^2+2k\le 48$에서 $k^2+2k-48\le 0$

$(k+8)(k-6)\le 0$ $\therefore -8\le k\le 6$

그런데 k는 자연수이므로 $0<k\le 6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2\le k\le 6$ ··· ❸

3rd 자연수 k의 개수를 구한다.

따라서 자연수 k는 2, 3, 4, 5, 6의 5개이다. ··· ❹

답 5

채점 기준	비율
❶ △ABC의 넓이를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ k에 대한 부등식을 세울 수 있다.	30 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❹ 자연수 k의 개수를 구할 수 있다.	10 %

1028 1st $g(k)$를 구한다.

$A(0,\ k^2+4)$이므로 직선 $y=k^2+4$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표는 $-x^2+2kx+k^2+4=k^2+4$에서

$x(x-2k)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=2k$

점 B의 x좌표

따라서 $C(2k,\ 0)$이므로

$g(k)=2\cdot 2k+2(k^2+4)=2k^2+4k+8$

2nd 부등식을 세워 해를 구한다.

$14\le g(k)\le 78$에서 $14\le 2k^2+4k+8\le 78$

$\therefore 7\le k^2+2k+4\le 39$

$7\le k^2+2k+4$에서

$k^2+2k-3\ge 0$, $(k+3)(k-1)\ge 0$

$\therefore k\le -3$ 또는 $k\ge 1$

그런데 $k>0$이므로 $k\ge 1$ …… ㉠

$k^2+2k+4\le 39$에서

$k^2+2k-35\le 0$, $(k+7)(k-5)\le 0$

$\therefore -7\le k\le 5$

그런데 $k>0$이므로 $0<k\le 5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $1\le k\le 5$

3rd 모든 자연수 k의 값의 합을 구한다.

자연수 k는 1, 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$1+2+3+4+5=15$

답 15

1029 (1st) 이차방정식이 실근을 갖도록 하는 k의 값의 범위를 구한다.

이차방정식 $x^2+kx-k=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=k^2+4k\ge0,\qquad k(k+4)\ge0$

$\therefore\ k\le-4$ 또는 $k\ge0$ ······ ㉠ ⋯→ ❶

(2nd) $|\alpha-\beta|\le2\sqrt{3}$을 만족시키는 k의 값의 범위를 구한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-k,\ \alpha\beta=-k$

$\therefore\ |\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=k^2+4k$

$|\alpha-\beta|\le2\sqrt{3}$에서 $|\alpha-\beta|^2\le12$이므로

$k^2+4k\le12,\qquad k^2+4k-12\le0$

$(k+6)(k-2)\le0\qquad\therefore\ -6\le k\le2$ ······ ㉡ ⋯→ ❷

(3rd) 정수 k의 개수를 구한다.

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-6\le k\le-4$ 또는 $0\le k\le2$

따라서 정수 k는 $-6,\ -5,\ -4,\ 0,\ 1,\ 2$의 6개이다. ⋯→ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 방정식 $x^2+kx-k=0$이 실근을 갖도록 하는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\lvert\alpha-\beta\rvert\le2\sqrt{3}$을 만족시키는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	20 %

1030

이차함수 ❷$f(x)=ax^2+bx+c$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, ❹$\dfrac{c}{a}$의 값의 범위를 구하시오.

(단, $a,\ b,\ c$는 실수이다.)

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(1+x)=f(1-x)$이다.
$y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

(나) ❶이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 $\alpha,\ \beta$에 대하여
❸$-2<\alpha<1<\beta<4$이다. -2와 1 사이, 1과 4 사이에 각각 $f(x)=0$의 근이 있다.

❶에서 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점 $(\alpha,\ 0),\ (\beta,\ 0)$이 축에 대하여 대칭임을 이용하여 $\alpha+\beta$의 값을 구한다. 이 값과 근과 계수의 관계를 이용하여 ❷를 $a,\ c$에 대한 식으로 나타낸다.
❸을 만족시키는 그래프의 개형을 그려 함숫값의 부호를 파악하여 ❹를 구한다.

(1st) $f(x)$를 a와 c에 대한 식으로 나타낸다.

조건 (가)에 의하여 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 두 교점도 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

즉 조건 (나)에 의하여 두 점 $(\alpha,\ 0),\ (\beta,\ 0)$이 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $\quad\dfrac{\alpha+\beta}{2}=1\qquad\therefore\ \alpha+\beta=2$

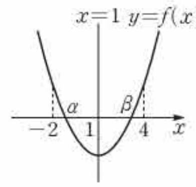
이때 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$이므로

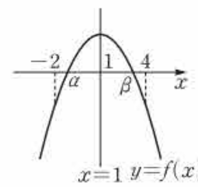
$-\dfrac{b}{a}=2\qquad\therefore\ b=-2a$

$\therefore\ f(x)=ax^2-2ax+c$

(2nd) $\dfrac{c}{a}$의 값의 범위를 구한다.

조건 (나)를 만족시키려면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.





따라서 $f(-2)f(1)<0$이므로

$(4a+4a+c)(a-2a+c)<0$

$(8a+c)(-a+c)<0$

양변을 a^2으로 나누면 — $a\ne0$이므로 $a^2>0$

$\left(8+\dfrac{c}{a}\right)\left(-1+\dfrac{c}{a}\right)<0$

$\therefore\ -8<\dfrac{c}{a}<1$

답 $-8<\dfrac{c}{a}<1$

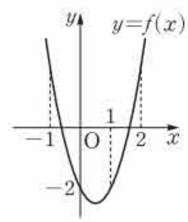
참고 두 직선 $x=-2,\ x=4$는 직선 $x=1$에서 같은 거리 3만큼 떨어져 있으므로 $f(-2)=f(4)$이다.

1031 (1st) $a>0$일 때 주어진 조건을 만족시키는 a의 값의 범위를 구한다.

$f(x)=ax^2-(a^2-4)x-2$라 하면

(i) $a>0$일 때,

$f(0)=-2$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$f(-1)>0$에서

$a^2+a-6>0$

$(a+3)(a-2)>0$

$\therefore\ a<-3$ 또는 $a>2$ ······ ㉠

$f(1)<0$에서 $\quad -a^2+a+2<0$

$a^2-a-2>0,\qquad (a+1)(a-2)>0$

$\therefore\ a<-1$ 또는 $a>2$ ······ ㉡

$f(2)>0$에서 $\quad -2a^2+4a+6>0$

$a^2-2a-3<0,\qquad (a+1)(a-3)<0$

$\therefore\ -1<a<3$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $\quad 2<a<3$

(2nd) $a<0$일 때 주어진 조건을 만족시키는지 파악한다.

(ii) $a<0$일 때,

$f(0)=-2$이므로 조건을 만족시키는 $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 없다.

(3rd) 주어진 조건을 만족시키는 a의 값의 범위를 구한다.

(i), (ii)에서 $\quad 2<a<3$

답 ③

참고 주어진 방정식은 이차방정식이므로 $a\ne0$이다. 따라서 $a>0$일 때와 $a<0$일 때로 나누어 생각한다.

Ⅳ. 순열과 조합

09 순열과 조합

1032 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면
눈의 수의 합이 4가 되는 경우는
(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지
눈의 수의 합이 7이 되는 경우는
(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)의 6가지
따라서 구하는 경우의 수는
$3+6=9$ 답 9
눈의 수의 합이 4가 되는 사건과 7이 되는 사건은 동시에 일어날 수 없다.

1033 5의 배수가 적힌 공이 나오는 경우는
5, 10, 15, ⋯, 50의 10가지
11의 배수가 적힌 공이 나오는 경우는
11, 22, 33, 44의 4가지
따라서 구하는 경우의 수는
$10+4=14$ 답 14

1034 3의 배수가 적힌 공이 나오는 경우는
3, 6, 9, ⋯, 48의 16가지
7의 배수가 적힌 공이 나오는 경우는
7, 14, 21, ⋯, 49의 7가지
3과 7의 최소공배수인 21의 배수가 적힌 공이 나오는 경우는
21, 42의 2가지
따라서 구하는 경우의 수는
$16+7-2=21$ 답 21

1035 $6\cdot 2=12$ 답 12

1036 $6\cdot 6=36$ 답 36

1037 $2\cdot 2=4$ 답 4

1038 첫 번째에 홀수의 눈이 나오는 경우는
1, 3, 5의 3가지
두 번째에 4의 약수의 눈이 나오는 경우는
1, 2, 4의 3가지
따라서 구하는 경우의 수는 $3\cdot 3=9$ 답 9

1039 (i) A 지점에서 B 지점을 거쳐 C 지점으로 가는 경우의 수는
$3\cdot 2=6$
(ii) A 지점에서 B 지점을 거치지 않고 C 지점으로 가는 경우의 수는
1
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $6+1=7$ 답 7

1040 ${}_6P_3=6\cdot 5\cdot 4=120$ 답 120

1041 답 1

1042 ${}_4P_4=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$ 답 24

1043 ${}_5P_1\cdot 3!=5\cdot(3\cdot 2\cdot 1)=30$ 답 30

1044 ${}_nP_2=n(n-1)$이므로
$n(n-1)=30=6\cdot 5 \quad \therefore n=6$ 답 6

1045 $60=5\cdot 4\cdot 3$이므로 ${}_5P_3=60 \quad \therefore r=3$ 답 3

1046 ${}_7P_r=\dfrac{7!}{(7-r)!}$이므로 $\dfrac{7!}{(7-r)!}=\dfrac{7!}{4!}$
$7-r=4 \quad \therefore r=3$ 답 3

1047 ${}_nP_n=n!$이고, $120=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$이므로
$n!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \quad \therefore n=5$ 답 5

1048 8명의 학생 중에서 3명을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
3명의 자격이 다르므로 순열을 이용한다.
${}_8P_3=8\cdot 7\cdot 6=336$ 답 336

1049 5장의 카드 중에서 3장을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
${}_5P_3=5\cdot 4\cdot 3=60$ 답 60

1050 (i) 일의 자리에 2가 오는 짝수의 개수
2가 적힌 카드를 제외한 나머지 4장의 카드 중에서 2장을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
${}_4P_2=4\cdot 3=12$
(ii) 일의 자리에 4가 오는 짝수의 개수
4가 적힌 카드를 제외한 나머지 4장의 카드 중에서 2장을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
${}_4P_2=4\cdot 3=12$
(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는
$12+12=24$ 답 24

1051 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$4!=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$ 답 24

1052 A를 제외한 3개를 일렬로 나열하고, 그 뒤에 A를 나열하면 되므로 구하는 경우의 수는
$3!=3\cdot 2\cdot 1=6$ 답 6

1053 B와 C를 한 문자로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=3\cdot 2\cdot 1=6$

B와 C의 자리를 바꾸는 경우의 수는　$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot2=12$　답 12

1054 ${}_9C_2=\frac{{}_9P_2}{2!}=\frac{9\cdot8}{2\cdot1}=36$　답 36

1055 ${}_{10}C_7={}_{10}C_3=\frac{{}_{10}P_3}{3!}=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120$　답 120

1056 답 1

1057 답 1

1058 ${}_nC_3=56$에서　$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=56$

$n(n-1)(n-2)=8\cdot7\cdot6$　$\therefore n=8$　답 8

1059 ${}_{2n+1}C_2=78$에서　$\frac{(2n+1)\cdot2n}{2\cdot1}=78$

$2n^2+n-78=0,$　$(2n+13)(n-6)=0$

$\therefore n=6$ ($\because$ n은 자연수)　답 6

1060 ${}_nC_4={}_nC_{n-4}$이므로 ${}_nC_4={}_nC_6$에서

$n-4=6$　$\therefore n=10$　답 10

1061 ${}_7C_r={}_7C_{r-3}$에서

$r=r-3$ 또는 $7-r=r-3$

그런데 $r=r-3$을 만족시키는 r는 존재하지 않으므로

$7-r=r-3,$　$2r=10$　$\therefore r=5$　답 5

1062 ${}_9C_6={}_9C_3=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$　답 84

1063 동호회 회원 8명 중에서 2명을 택하는 경우의 수와 같으므로 악수한 총횟수는

${}_8C_2=\frac{8\cdot7}{2\cdot1}=28$　답 28

1064 7명의 학생 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_7C_3=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$　답 35

1065 남학생 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_2=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$

여학생 3명 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는　${}_3C_1=3$

따라서 구하는 경우의 수는　$6\cdot3=18$　답 18

1066 A를 제외한 6권의 책 중에서 3권을 택한 후 각각의 경우에 A를 포함하면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$　답 20

1067 A를 제외한 6권의 책 중에서 4권을 택하면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$　답 15

1068 A와 B를 제외한 5권의 책 중에서 3권을 택한 후 각각의 경우에 A를 포함하면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$　답 10

1069 9명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_9C_4=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=126$

여자만 4명을 뽑는 경우의 수는　${}_5C_4={}_5C_1=5$

따라서 구하는 경우의 수는　$126-5=121$　답 121

1070 6개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 구하는 직선의 개수는

${}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$　답 15

서로 다른 두 점을 지나는 직선은 오직 하나뿐이다.

1071 서로 다른 사탕 9개를 2개, 3개, 4개의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

${}_9C_2\cdot{}_7C_3\cdot{}_4C_4=36\cdot35\cdot1=1260$　답 1260

1072 서로 다른 사탕 9개를 2개, 2개, 5개의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

${}_9C_2\cdot{}_7C_2\cdot{}_5C_5\cdot\frac{1}{2!}=36\cdot21\cdot1\cdot\frac{1}{2}=378$　답 378

1073 서로 다른 사탕 9개를 3개, 3개, 3개의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

${}_9C_3\cdot{}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{3!}=84\cdot20\cdot1\cdot\frac{1}{6}=280$　답 280

1074 서로 다른 꽃 10송이를 3송이, 3송이, 4송이의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

${}_{10}C_3\cdot{}_7C_3\cdot{}_4C_4\cdot\frac{1}{2!}=120\cdot35\cdot1\cdot\frac{1}{2}=2100$

세 묶음을 3명에게 나누어 주는 경우의 수는　$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2100\cdot6=12600$　답 12600

유형 01 합의 법칙

본책 154쪽

두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n일 때, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는
① 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않으면
$m+n$ ─ 합의 법칙
② 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수가 l이면
$m+n-l$

1075 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면
눈의 수의 합이 5가 되는 경우는
(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지
눈의 수의 합이 10이 되는 경우는
(4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지
따라서 구하는 경우의 수는
$4+3=7$ 답 7

1076 각 자리의 숫자의 합이 7인 두 자리 자연수를 택하는 경우는
16, 25, 34, 43, 52, 61, 70의 7가지
각 자리의 숫자의 합이 11인 두 자리 자연수를 택하는 경우는
29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92의 8가지
따라서 구하는 경우의 수는
$7+8=15$ 답 15

1077 꺼낸 공에 적힌 세 수를 순서쌍으로 나타내면
세 수의 곱이 3이 되는 경우는
(1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1)의 3가지 ··· ❶
세 수의 곱이 4가 되는 경우는
(1, 1, 4), (1, 4, 1), (4, 1, 1),
(1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)의 6가지 ··· ❷
따라서 구하는 경우의 수는
$3+6=9$ ··· ❸
답 9

채점 기준	비율
❶ 세 수의 곱이 3이 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 세 수의 곱이 4가 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 세 수의 곱이 3 또는 4가 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

1078 1부터 100까지의 자연수 중에서
2로 나누어떨어지는 수, 즉 2의 배수는
2, 4, 6, ⋯, 100의 50개
5로 나누어떨어지는 수, 즉 5의 배수는
5, 10, 15, ⋯, 100의 20개
2와 5로 나누어떨어지는 수, 즉 10의 배수는
10, 20, 30, ⋯, 100의 10개
따라서 2 또는 5로 나누어떨어지는 자연수의 개수는
$50+20-10=60$
이므로 2와 5로 모두 나누어떨어지지 않는 자연수의 개수는
$100-60=40$ 답 ③

유형 02 방정식과 부등식의 해의 개수

집중 공략 본책 154쪽

① 방정식 $ax+by+cz=d$ (a, b, c, d는 상수)를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수
➡ x, y, z 중 계수의 절댓값이 큰 것부터 수를 대입하여 구한다.
② 부등식 $ax+by\le c$ (a, b, c는 상수)를 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수
➡ 주어진 x, y의 값의 조건을 이용하여 부등식이 성립하는 $ax+by$의 값을 찾은 후, $ax+by=d$ (d는 상수) 꼴의 방정식을 만들어 이 방정식의 해의 개수를 구한다.

1079 (i) $z=1$일 때, $x+2y=17$이므로 순서쌍 (x, y)는
(15, 1), (13, 2), (11, 3), (9, 4),
(7, 5), (5, 6), (3, 7), (1, 8)의 8개
(ii) $z=2$일 때, $x+2y=14$이므로 순서쌍 (x, y)는
(12, 1), (10, 2), (8, 3),
(6, 4), (4, 5), (2, 6)의 6개
(iii) $z=3$일 때, $x+2y=11$이므로 순서쌍 (x, y)는
(9, 1), (7, 2), (5, 3), (3, 4), (1, 5)의 5개
(iv) $z=4$일 때, $x+2y=8$이므로 순서쌍 (x, y)는
(6, 1), (4, 2), (2, 3)의 3개
(v) $z=5$일 때, $x+2y=5$이므로 순서쌍 (x, y)는
(3, 1), (1, 2)의 2개
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
$8+6+5+3+2=24$ 답 24

1080 x, y가 자연수이므로 $2x+y\le 6$을 만족시키는 경우는
$2x+y=\underbrace{3}_{2x+y\text{에 } x=1,\ y=1\text{을 대입한 값}}$, $2x+y=4$, $2x+y=5$, $2x+y=6$
(i) $2x+y=3$일 때, 순서쌍 (x, y)는 (1, 1)의 1개
(ii) $2x+y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는 (1, 2)의 1개
(iii) $2x+y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는 (1, 3), (2, 1)의 2개
(iv) $2x+y=6$일 때, 순서쌍 (x, y)는 (1, 4), (2, 2)의 2개
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
$1+1+2+2=6$ 답 ②

다른 풀이 (i) $x=1$일 때, $2+y\le 6$, 즉 $y\le 4$이므로 순서쌍 (x, y)는
(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)의 4개
(ii) $x=2$일 때, $4+y\le 6$, 즉 $y\le 2$이므로 순서쌍 (x, y)는
(2, 1), (2, 2)의 2개
(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는
$4+2=6$

1081 x, y가 음이 아닌 정수이므로 $x+y\le 4$를 만족시키는 경우는
$x+y=0$, $x+y=1$, $x+y=2$, $x+y=3$, $x+y=4$
(i) $x+y=0$일 때, 순서쌍 (x, y)는
(0, 0)의 1개
(ii) $x+y=1$일 때, 순서쌍 (x, y)는
(0, 1), (1, 0)의 2개

(iii) $x+y=2$일 때, 순서쌍 (x, y)는

$(0, 2), (1, 1), (2, 0)$의 3개

(iv) $x+y=3$일 때, 순서쌍 (x, y)는

$(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)$의 4개

(v) $x+y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는

$(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)$의 5개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$1+2+3+4+5=15$ 답 15

1082 이차함수 $y=x^2+(a+b)x+ab+1$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2+(a+b)x+ab+1=0$이 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때

$D=(a+b)^2-4(ab+1)<0$

$a^2-2ab+b^2-4<0,\qquad (a-b)^2-4<0$

$\{(a-b)+2\}\{(a-b)-2\}<0$

$\therefore -2<a-b<2$

이때 $a-b$의 값은 정수이므로 (a, b의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6 중 하나이다.)

$a-b=-1,\ a-b=0,\ a-b=1$

(i) $a-b=-1$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)$의 5개

(ii) $a-b=0$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$의 6개

(iii) $a-b=1$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)$의 5개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$5+6+5=16$ 답 ③

유형 03 곱의 법칙 본책 155쪽

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면

(두 사건 A, B가 잇달아 일어나는 경우의 수)$=m\times n$

1083 십의 자리의 숫자는 8의 양의 약수이므로 십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 2, 4, 8의 4개

짝수이므로 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

0, 2, 4, 6, 8의 5개

따라서 구하는 짝수의 개수는

$4\cdot5=20$ 답 ③

1084 $(a+b+c+d)(x+y+z)$에서 a, b, c, d에 곱해지는 항이 각각 x, y, z의 3개이므로 항의 개수는

$4\cdot3=12$ 답 ④

SSEN 특강 항의 개수

두 다항식 A, B의 각 항의 문자가 모두 다르면 AB의 전개식에서 항의 개수는

(A의 항의 개수)$\times$(B의 항의 개수)

1085 탁구, 배드민턴 종목의 강좌를 수강하는 경우의 수는

$3\cdot2=6$

배드민턴, 요가 종목의 강좌를 수강하는 경우의 수는

$2\cdot5=10$

탁구, 요가 종목의 강좌를 수강하는 경우의 수는

$3\cdot5=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$6+10+15=31$ 답 31

1086 a^2+b^2이 홀수이려면

a^2이 짝수, b^2이 홀수 또는 a^2이 홀수, b^2이 짝수

이어야 한다.

(i) a^2이 짝수, b^2이 홀수인 경우

a가 짝수, b가 홀수인 경우이므로 그 경우의 수는

$2\cdot4=8$ (a가 짝수인 경우는 2, 4의 2가지 / b가 홀수인 경우는 1, 3, 5, 7의 4가지) ··· ❶

(ii) a^2이 홀수, b^2이 짝수인 경우

a가 홀수, b가 짝수인 경우이므로 그 경우의 수는

$3\cdot3=9$ (a가 홀수인 경우는 1, 3, 5의 3가지 / b가 짝수인 경우는 2, 4, 6의 3가지) ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$8+9=17$ ··· ❸

답 17

채점 기준	비율
❶ a^2이 짝수, b^2이 홀수인 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ a^2이 홀수, b^2이 짝수인 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ a^2+b^2이 홀수인 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

유형 04 약수의 개수 본책 155쪽

자연수 N이 $N=x^ay^b$ (x, y는 서로 다른 소수, a, b는 자연수) 꼴로 소인수분해될 때, N의 양의 약수는 x^a의 양의 약수와 y^b의 양의 약수 중에서 각각 하나씩 택하여 곱한 수이므로 그 개수는 곱의 법칙에 의하여

⇒ $(a+1)(b+1)$ ($1, y, y^2, \cdots, y^b$의 $(b+1)$개 / $1, x, x^2, \cdots, x^a$의 $(a+1)$개)

1087 72를 소인수분해하면 $\quad 72=2^3\cdot3^2$

72의 양의 약수의 개수는

$(3+1)(2+1)=12 \qquad \therefore a=12$

120을 소인수분해하면 $\quad 120=2^3\cdot3\cdot5$

120의 양의 약수의 개수는

$(3+1)(1+1)(1+1)=16 \qquad \therefore b=16$

$\therefore b-a=4$ 답 4

1088 280을 소인수분해하면 $\quad 280=2^3\cdot5\cdot7$

420을 소인수분해하면 $\quad 420=2^2\cdot3\cdot5\cdot7$

즉 280과 420의 최대공약수는 $2^2\cdot5\cdot7$이다.

따라서 280과 420의 양의 공약수의 개수는 $2^2\cdot5\cdot7$의 양의 약수의 개수와 같으므로

$(2+1)(1+1)(1+1)=12$ 답 ②

1089 24를 소인수분해하면 $24=2^3\cdot3$

$24^n=(2^3\cdot3)^n=2^{3n}\cdot3^n$의 양의 약수의 개수는

$(3n+1)(n+1)$

따라서 $(3n+1)(n+1)=65$이므로

$3n^2+4n-64=0$

$(3n+16)(n-4)=0$

$\therefore n=4$ ($\because n$은 자연수)

답 4

1090 540을 소인수분해하면 $540=2^2\cdot3^3\cdot5$ ⋯ ❶

짝수는 2를 소인수로 가지므로 540의 양의 약수 중 짝수의 개수는 $2\cdot3^3\cdot5$의 양의 약수의 개수와 같다.

$2\cdot3^3\cdot5$의 양의 약수에 각각 2를 곱한 것이 540의 양의 약수 중 짝수이다.

$\therefore p=(1+1)(3+1)(1+1)=16$ ⋯ ❷

3의 배수는 3을 소인수로 가지므로 540의 양의 약수 중 3의 배수의 개수는 $2^2\cdot3^2\cdot5$의 양의 약수의 개수와 같다.

$2^2\cdot3^2\cdot5$의 양의 약수에 각각 3을 곱한 것이 540의 양의 약수 중 3의 배수이다.

$\therefore q=(2+1)(2+1)(1+1)=18$ ⋯ ❸

$\therefore p+q=34$ ⋯ ❹

답 34

채점 기준	비율
❶ 540을 소인수분해할 수 있다.	10 %
❷ p의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ q의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 05 지불 방법의 수와 지불 금액의 수

본책 156쪽

① 지불 방법의 수
x원짜리 동전 n개로 지불할 수 있는 방법
➡ 0개, 1개, 2개, ⋯, n개의 $(n+1)$가지
② 지불 금액의 수
x원짜리 동전 n개로 지불할 수 있는 금액과 y원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액이 같을 때
➡ y원짜리 동전 1개를 x원짜리 동전 n개로 바꾸어 생각한다.

1091 (i) 지불할 수 있는 방법의 수

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개의 2가지

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개의 3가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는

$2\cdot4\cdot3-1=23$

$\therefore a=23$

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수

50원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 100원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 100원짜리 동전 1개를 50원짜리 동전 2개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 50원짜리 동전 5개, 10원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 50원, 100원, ⋯, 250원의 6가지

10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 10원, 20원의 3가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는

$6\cdot3-1=17$

$\therefore b=17$

(i), (ii)에서 $a-b=6$

답 ③

1092 500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개의 3가지 ⋯ ❶

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지 ⋯ ❷

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지 ⋯ ❸

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는

$3\cdot4\cdot5-1=59$ ⋯ ❹

답 59

채점 기준	비율
❶ 500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
❸ 50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
❹ 동전의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %

1093 5000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액과 10000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 10000원짜리 지폐 2장을 5000원짜리 지폐 4장으로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 5000원짜리 지폐 6장, 1000원짜리 지폐 3장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

5000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 금액은

0원, 5000원, 10000원, ⋯, 30000원의 7가지

1000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 금액은

0원, 1000원, 2000원, 3000원의 4가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는

$7\cdot4-1=27$

답 ②

유형 06 도로망에서의 경우의 수

본책 156쪽

① 동시에 갈 수 없는 길이면 ➡ 합의 법칙
② 이어지는 길이면 ➡ 곱의 법칙

1094 (i) A → B → C로 가는 경우의 수는

$4\cdot2=8$

(ii) A → D → C로 가는 경우의 수는

$3\cdot4=12$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$8+12=20$

답 20

1095 (i) 집 → A → 도서관으로 가는 경우의 수는

$3\cdot2=6$

(ii) 집 → B → 도서관으로 가는 경우의 수는

$1\cdot3=3$

(iii) 집 → A → B → 도서관으로 가는 경우의 수는

$3\cdot2\cdot3=18$

(iv) 집 → B → A → 도서관으로 가는 경우의 수는

$1\cdot2\cdot2=4$

이상에서 구하는 경우의 수는

$6+3+18+4=31$

답 ④

1096 B 지점과 D 지점을 연결하는 x개의 도로를 추가한다고 하면

(i) A → B → C로 가는 경우의 수는

$2\cdot3=6$

(ii) A → D → C로 가는 경우의 수는

$3\cdot2=6$

(iii) A → B → D → C로 가는 경우의 수는

$2\cdot x\cdot2=4x$

(iv) A → D → B → C로 가는 경우의 수는

$3\cdot x\cdot3=9x$

이상에서 A 지점에서 C 지점으로 가는 경우의 수는

$6+6+4x+9x=13x+12$ ··· ❶

즉 $13x+12=90$이므로 $13x=78$ $\therefore x=6$

따라서 추가해야 하는 도로의 개수는 6이다. ··· ❷

답 6

채점 기준	비율
❶ A 지점에서 C 지점으로 가는 경우의 수를 추가해야 하는 도로의 개수를 이용하여 나타낼 수 있다.	70 %
❷ 추가해야 하는 도로의 개수를 구할 수 있다.	30 %

유형 07 색칠하는 경우의 수

집중공략 본책 157쪽

다음과 같이 각 영역을 색칠하는 경우의 수를 구한 후 곱의 법칙을 이용하여 색칠하는 모든 경우의 수를 구한다.

① 인접한 영역이 가장 많은 영역에 색칠하는 경우의 수를 먼저 구한다.

② 같은 색을 칠할 수 있는 영역은 같은 색인 경우와 다른 색인 경우로 나누어 생각한다.

1097 A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 3가지, E에 칠할 수 있는 색은 A와 D에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $5\cdot4\cdot3\cdot3\cdot3=540$

답 540

1098 B에 칠할 수 있는 색은 4가지, A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$4\cdot3\cdot3=36$

답 ④

1099 (i) A와 C에 같은 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, D에 칠할 수 있는 색은 A(C)에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 경우의 수는

$4\cdot3\cdot1\cdot3=36$ ··· ❶

(ii) A와 C에 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 경우의 수는

$4\cdot3\cdot2\cdot2=48$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$36+48=84$ ··· ❸

답 84

채점 기준	비율
❶ A와 C에 같은 색을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ A와 C에 다른 색을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 색을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

1100 A, B, C, D, E의 순서로 칠할 때, A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

(i) B와 D에 같은 색을 칠하는 경우

D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, E에 칠할 수 있는 색은 A와 B(D)에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 경우의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot1\cdot3=180$

(ii) B와 D에 다른 색을 칠하는 경우

D에 칠할 수 있는 색은 A, B, C에 칠한 색을 제외한 2가지, E에 칠할 수 있는 색은 A, B, D에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 경우의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot2=240$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$180+240=420$

답 ④

다른 풀이 (i) 모두 다른 색을 칠하는 경우의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

(ii) B와 D에만 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot1\cdot2=120$

(iii) C와 E에만 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

(iv) B와 D, C와 E에 각각 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot1\cdot1=60$

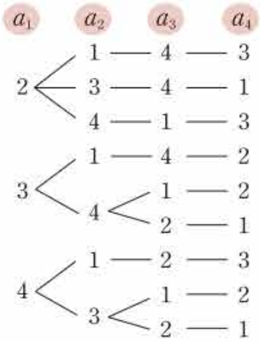
이상에서 구하는 경우의 수는

$120+120+120+60=420$

유형 08 수형도를 이용하는 경우의 수 본책 157쪽

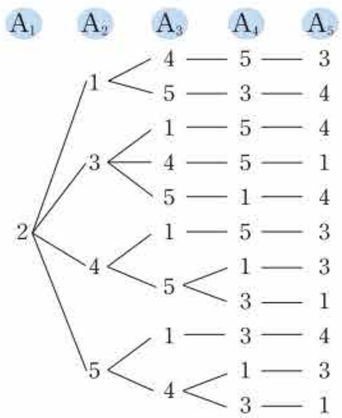
규칙을 찾기 어려운 경우의 수를 구할 때
➡ 수형도를 이용하면 중복되지 않고 빠짐없이 모든 경우를 나열할 수 있다. └ 사건이 일어나는 모든 경우를 나뭇가지 모양의 그림으로 나타낸 것을 수형도라 한다.

1101 $a_1 \neq 1$이므로 a_1이 2, 3, 4인 경우에 대하여 $a_2 \neq 2$, $a_3 \neq 3$, $a_4 \neq 4$인 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.
따라서 구하는 자연수의 개수는 9이다.



답 ①

1102 2가 적힌 공은 가방 A_1에 넣고 k가 적힌 공은 가방 A_k $(k=3,\ 4,\ 5)$에 넣지 않는 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.
따라서 구하는 경우의 수는 11이다.



답 ②

유형 09 순열의 수 본책 158쪽

① 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수
➡ ${}_nP_r$
② 서로 다른 n개를 일렬로 나열하는 경우의 수 ➡ ${}_nP_n = n!$

1103 5개의 문자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는
$${}_5P_3 = 5\cdot4\cdot3 = 60$$
답 ②

1104 7개의 영상 중에서 4개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$${}_7P_4 = 7\cdot6\cdot5\cdot4 = 840$$
답 ⑤

1105 ${}_nP_2 = 210$이므로
$n(n-1) = 210 = 15\cdot14 \quad \therefore n=15$
답 15

유형 10 이웃하는 순열의 수 집중공략 본책 158쪽

(i) 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각하여 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한다.
(ii) 이웃하는 것끼리 자리를 바꾸는 경우의 수를 구한다.
(iii) (i)과 (ii)의 결과를 곱한다.

1106 1학년 학생 3명을 한 사람으로 생각하여 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5! = 120$
1학년 학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3! = 6$
따라서 구하는 경우의 수는 $120\cdot6 = 720$
답 ④

1107 초등학생 4명을 한 사람, 중학생 3명을 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4! = 24$
초등학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $4! = 24$
중학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3! = 6$
따라서 구하는 경우의 수는 $24\cdot24\cdot6 = 3456$
답 ②

1108 여학생 3명을 한 사람으로 생각하여 $(n+1)$명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $(n+1)!$
여학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3! = 6$
따라서 여학생끼리 이웃하게 세우는 경우의 수는
$(n+1)!\cdot6$ ··· ❶
즉 $(n+1)!\cdot6 = 36$이므로
$(n+1)! = 6 = 3\cdot2\cdot1$
$n+1 = 3 \quad \therefore n=2$ ··· ❷
답 2

채점 기준	비율
❶ 여학생끼리 이웃하게 세우는 경우의 수를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40 %

1109 c와 d를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5! = 120$
c와 d의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$
즉 c와 d를 이웃하게 나열하는 경우의 수는
$120\cdot2 = 240$
마찬가지로 d와 e를 이웃하게 나열하는 경우의 수는
$120\cdot2 = 240$
c, d, e를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4! = 24$
c와 d, d와 e가 동시에 이웃하는 경우는 cde, edc의 2가지
즉 c와 d, d와 e가 동시에 이웃하게 나열하는 경우의 수는
$24\cdot2 = 48$
따라서 구하는 경우의 수는
$240+240-48 = 432$
답 ③

유형 11 이웃하지 않는 순열의 수 본책 158쪽

(i) 이웃해도 상관없는 것을 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한다.
(ii) (i)에서 나열한 것 사이사이와 양 끝에 이웃하지 않는 것을 나열하는 경우의 수를 구한다.
(iii) (i)과 (ii)의 결과를 곱한다.

1110 여자 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3! = 6$
여자들 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 남자 2명을 세우는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 12$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot12=72$ 답 72

1111 4개의 자음 c, l, m, t를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$ ⋯ ❶

자음의 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 3개의 모음 i, a, e를 나열하는 경우의 수는

${}_5P_3=60$ ⋯ ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot60=1440$ ⋯ ❸

답 1440

채점 기준	비율
❶ 자음을 일렬로 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 자음의 사이사이 및 양 끝에 모음을 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 모음끼리 이웃하지 않게 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

1112 의자 3개에만 학생이 앉으므로 빈 의자는 6개이다.
빈 의자들 사이사이 및 양 끝의 7개의 자리에 학생 3명이 앉으면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_7P_3=210$ 답 210

1113 2, 3을 한 숫자로 생각하여 4, 5, 6을 제외한 3개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

2와 3의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

3개의 숫자 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 3개의 숫자 4, 5, 6을 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_3=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot2\cdot24=288$ 답 ④

유형 12 자리에 대한 조건이 있는 순열의 수

집중 공략 본책 159쪽

특정한 자리에 대한 조건이 있을 때
➡ 특정한 자리에 오는 것의 위치를 고정시킨 후 나머지를 나열한다.

1114 여학생은 4명이므로 양 끝에 여학생 2명을 세우는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

양 끝의 여학생 2명을 제외한 나머지 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\cdot120=1440$ 답 ⑤

1115 홀수는 1, 3, 5, 7의 4개, 짝수는 2, 4, 6의 3개이므로 홀수 4개를 일렬로 나열한 후 그 사이사이에 짝수 3개를 나열하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$4!\cdot3!=24\cdot6=144$ 답 ③

1116 2송이의 노란색 꽃을 세 군데의 홀수 번째 자리 중 두 군데에 심는 경우의 수는

${}_3P_2=6$ ⋯ ❶

나머지 빈 세 자리에 빨간색 꽃 3송이를 심는 경우의 수는

$3!=6$ ⋯ ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot6=36$ ⋯ ❸

답 36

채점 기준	비율
❶ 노란색 꽃을 홀수 번째 자리에 심는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 빨간색 꽃을 심는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 꽃을 심는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

1117 1반 학생 5명이 일렬로 앉는 경우의 수는

$5!=120$

1반 학생이 앉은 사이사이의 4개의 자리에 2반 학생 3명이 앉는 경우의 수는
└ 조건 (가)에 의하여 양 끝 자리의 사이에 있는 자리에만 앉을 수 있다.

${}_4P_3=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\cdot24=2880$ 답 2880

다른 풀이 1반 학생은 5명이므로 조건 (가)에 의하여 양 끝에 1반 학생 2명이 앉는 경우의 수는 ${}_5P_2=20$

1반 학생을 △, 2반 학생을 □라 하면 나머지 6개의 의자에 1반 학생 3명과 2반 학생 3명이 조건 (나)를 만족시키도록 앉는 경우는 다음의 4가지이다.

△□△□△□, □△△□△□,
□△□△△□, □△□△□△

이때 위의 각각에 대하여 1반 학생 3명과 2반 학생 3명이 앉는 경우의 수는 $3!\cdot3!=36$

따라서 구하는 경우의 수는

$20\cdot4\cdot36=2880$

1118 w와 t 사이에 w와 t를 제외한 4개의 문자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

w, t와 그 사이의 2개의 문자를 한 문자로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

w와 t의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\cdot6\cdot2=144$ 답 144

SSEN 특강 특정한 두 개 사이에 일부가 있는 순열의 수

특정한 A, B 사이에 일부가 오도록 나열하는 경우의 수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) A, B 사이에 일부를 나열하여 한 묶음을 만드는 경우의 수를 구한다.

(ii) (i)의 묶음과 나머지를 나열하는 경우의 수를 구한다.

(iii) (i)과 (ii)의 결과를 곱한다.

유형 13 '적어도'의 조건이 있는 순열의 수 본책 160쪽

(사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수)
=(모든 경우의 수)−(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)

1119 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=720$

자음은 s, l, n, t의 4개이므로 양 끝에 모두 자음이 오도록 나열하는 경우의 수는

$\underbrace{{}_4P_2}_{\text{자음 4개에서 2개를 택하여 양 끝에 나열하는 경우의 수}}\cdot\underbrace{4!}_{\text{양 끝의 자음을 제외한 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수}}=12\cdot24=288$

따라서 구하는 경우의 수는

$720-288=432$

답 ⑤

1120 (1) 10명의 학생 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로 ${}_{10}P_2=90$ ⋯ ❶

(2) 남학생 4명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로 ${}_4P_2=12$ ⋯ ❷

(3) 모든 경우의 수에서 대표, 부대표 모두 남학생을 뽑는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로 $90-12=78$ ⋯ ❸

답 (1) 90 (2) 12 (3) 78

채점 기준	비율
❶ 모든 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 대표, 부대표 모두 남학생을 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 대표, 부대표 중에서 적어도 한 명은 여학생을 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %

1121 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

a, b, c의 3개의 문자 중에서 어느 것도 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는 d, e를 일렬로 나열하고 d와 e 사이 및 양 끝의 3개의 자리에 a, b, c를 나열하는 경우의 수와 같으므로

$2!\cdot3!=2\cdot6=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-12=108$

답 ⑤

유형 14 자연수의 개수 집중공략 본책 160쪽

① 서로 다른 n개의 한 자리 자연수 중에서 서로 다른 r개를 사용하여 만들 수 있는 r자리 자연수의 개수
⇒ ${}_nP_r$

② 0과 서로 다른 n개의 한 자리 자연수 중에서 서로 다른 r개를 사용하여 만들 수 있는 r자리 자연수의 개수
⇒ $\underbrace{n}_{\text{맨 앞 자리에는 0이 올 수 없다.}}\times{}_nP_{r-1}$

1122 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다. 3장의 카드에 적힌 세 숫자의 합이 3의 배수가 되는 경우는 다음과 같다.

0, 1, 2 또는 0, 2, 4 또는 1, 2, 3 또는 2, 3, 4

(i) 0, 1, 2로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$2\cdot2!=4$

(ii) 0, 2, 4로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$2\cdot2!=4$

(iii) 1, 2, 3으로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$3!=6$

(iv) 2, 3, 4로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$3!=6$

이상에서 구하는 3의 배수의 개수는

$4+4+6+6=20$

답 ③

1123 홀수이려면 일의 자리의 숫자가 홀수이어야 하므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5의 3개

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 5개이다.

백의 자리와 십의 자리에는 천의 자리와 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로

${}_5P_2=20$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$3\cdot5\cdot20=300$

답 ③

1124 6개의 숫자로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

${}_6P_4=360$

백의 자리와 일의 자리의 숫자가 모두 홀수인 네 자리 자연수의 개수는

$\underbrace{{}_3P_2}_{\text{1, 3, 5 중에서 2개를 택하여 나열한다.}}\cdot\underbrace{{}_4P_2}_{\text{천의 자리와 십의 자리에는 나머지 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열한다.}}=6\cdot12=72$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$360-72=288$

답 288

1125 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다. ⋯ ❶

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 5의 배수의 개수

0을 제외한 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_5P_3=60$ ⋯ ❷

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 5의 배수의 개수

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 5를 제외한

1, 3, 7, 9의 4개

백의 자리와 십의 자리에는 천의 자리와 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로

${}_4P_2=12$

따라서 일의 자리의 숫자가 5인 5의 배수의 개수는

$4\cdot12=48$ ⋯ ❸

(i), (ii)에서 구하는 5의 배수의 개수는

$60+48=108$ ⋯ ❹

답 108

채점 기준	비율
❶ 5의 배수가 되는 경우를 알 수 있다.	20 %
❷ 일의 자리의 숫자가 0인 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 일의 자리의 숫자가 5인 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❹ 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	10 %

유형 15 사전식으로 배열하는 경우의 수

본책 161쪽

문자를 사전식으로 배열하거나 자연수를 크기순으로 나열하는 경우의 수는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 기준이 되는 문자열 또는 수의 꼴을 살핀 후 먼저 자리를 정할 수 있는 자리에 문자 또는 수를 배열한다.
(ii) 순열을 이용하여 나머지 자리에 올 수 있는 것을 배열하는 경우의 수를 구한다.

1126 A로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$
B로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$
CA로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$
CBA로 시작하는 것의 개수는 $2!=2$
CBD로 시작하는 것의 개수는 $2!=2$
CBE로 시작하는 것은 순서대로
CBEAD, CBEDA의 2개
따라서 CBEDA까지의 개수는
$24+24+6+2+2+2=60$
이므로 CBEDA는 60번째에 온다. 답 60번째

1127 4300보다 큰 자연수는 43○○, 45○○, 46○○, 5○○○, 6○○○ 꼴이다. ⋯ ❶
43○○ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$
45○○ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$
46○○ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$
5○○○ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_3=60$
6○○○ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_3=60$ ⋯ ❷
따라서 구하는 자연수의 개수는
$12+12+12+60+60=156$ ⋯ ❸
답 156

채점 기준	비율
❶ 4300보다 큰 자연수의 꼴을 구할 수 있다.	30 %
❷ 각 자연수의 개수를 구할 수 있다.	50 %
❸ 4300보다 큰 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

1128 D로 시작하는 것의 개수는 $5!=120$
E로 시작하는 것의 개수는 $5!=120$
FD로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$
FE로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$
FID로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$
FIE로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$
따라서 DEFINR부터 FIERND까지의 개수는
$120+120+24+24+6+6=300$
이므로 301번째에 오는 것은 FINDER 답 ②

1129 54○○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$
53○○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$
52○○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$
51○○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$
504○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$
503○○○ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$
따라서 543210부터 503124까지의 자연수의 개수는
$24+24+24+24+6+6=108$
이므로 502431, 502413, ⋯에서 110번째로 큰 수는 502413이다. 답 ④

유형 16 ${}_nP_r$와 ${}_nC_r$의 계산

본책 161쪽

① ${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ (단, $0<r\le n$)
$=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)
② ${}_nC_r=\dfrac{{}_nP_r}{r!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)
③ ${}_nP_n=n!$, ${}_nP_0=1$, $0!=1$, ${}_nC_0=1$, ${}_nC_n=1$
④ ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ (단, $0\le r\le n$)

1130 ${}_nC_r=\dfrac{{}_nP_r}{r!}$이므로
$15=\dfrac{360}{r!}$, $r!=24=4\cdot3\cdot2\cdot1$
$\therefore r=4$
${}_nP_4=360=6\cdot5\cdot4\cdot3$이므로 $n=6$
$\therefore n+r=10$ 답 ⑤

1131 ${}_nP_5=12\cdot{}_nP_3$에서
$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)=12n(n-1)(n-2)$
${}_nP_5$에서 $n\ge5$이므로 등식의 양변을 $\underbrace{n(n-1)(n-2)}_{n\ge5\text{이면 } n(n-1)(n-2)>0}$로 나누면
$(n-3)(n-4)=12$
$n^2-7n=0$, $n(n-7)=0$
$\therefore n=7$ ($\because n\ge5$) 답 7

1132 ${}_{14}C_{r^2}={}_{14}C_{r+2}$에서
$r^2=r+2$ 또는 $14-r^2=r+2$
(i) $r^2=r+2$일 때,
$r^2-r-2=0$, $(r+1)(r-2)=0$
$\therefore r=2$ ($\because r$는 자연수)
(ii) $14-r^2=r+2$일 때,
$r^2+r-12=0$, $(r+4)(r-3)=0$
$\therefore r=3$ ($\because r$는 자연수)
(i), (ii)에서 구하는 자연수 r의 값의 합은
$2+3=5$ 답 ①

1133 ${}_{n}P_2+6\cdot{}_{n}C_2=12\cdot{}_{n-1}C_3$에서

$$n(n-1)+6\cdot\frac{n(n-1)}{2\cdot1}=12\cdot\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot2\cdot1}$$

${}_{n-1}C_3$에서 $n-1\geq3$, 즉 $n\geq4$이므로 등식의 양변을 $\underbrace{n-1}_{n\geq4\text{이면 } n-1>0}$로 나누면

$$n+3n=2(n-2)(n-3),\qquad 4n=2n^2-10n+12$$

$$n^2-7n+6=0,\qquad (n-1)(n-6)=0$$

$\therefore n=6\ (\because n\geq4)$

답 6

1134 이차방정식 ${}_{n}C_2x^2-{}_{n}C_3x+{}_{n}C_5=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=\frac{{}_{n}C_3}{{}_{n}C_2}$, $\alpha\beta=\frac{{}_{n}C_5}{{}_{n}C_2}$

이때 $\alpha\beta=1$이므로 $\frac{{}_{n}C_5}{{}_{n}C_2}=1$, ${}_{n}C_5={}_{n}C_2$

$n-5=2\qquad\therefore n=7$ ⋯ ❶

$$\therefore \alpha+\beta=\frac{{}_{7}C_3}{{}_{7}C_2}=\frac{\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}}{\frac{7\cdot6}{2\cdot1}}=\frac{5}{3}$$ ⋯ ❷

답 $\frac{5}{3}$

채점 기준	비율
❶ n의 값을 구할 수 있다.	70 %
❷ $\alpha+\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 17 ${}_{n}P_r$와 ${}_{n}C_r$를 이용한 증명

본책 162쪽

다음과 같은 순열과 조합의 수에 대한 식을 이용하여 주어진 등식이 성립함을 증명한다.

① ${}_{n}P_r=\frac{n!}{(n-r)!}$, ${}_{n}C_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0\leq r\leq n$)

② $n!=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=n\cdot(n-1)!$

1135 ${}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$

$$=\frac{(n-1)!}{r!\{(n-1)-r\}!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$$

$$=\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!\boxed{(n-r)!}}$$

분모, 분자에 각각 r를 곱한다.

분모, 분자에 각각 $n-r$를 곱한다.

$$=\frac{(\boxed{n-r})\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}+\frac{r\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}$$

$$=\frac{\{(n-r)+r\}\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}$$

$$=\frac{\boxed{n!}}{r!(n-r)!}={}_{n}C_r$$

$\therefore$ (가) $(n-r)!$ (나) $n-r$ (다) $n!$

답 (가) $(n-r)!$ (나) $n-r$ (다) $n!$

1136 ${}_{n}C_{n-r}=\frac{n!}{(n-r)!\{n-(\boxed{n-r})\}!}$

$$=\frac{n!}{(n-r)!\boxed{r!}}={}_{n}C_r$$

$\therefore$ (가) $n-r$ (나) $r!$

답 (가) $n-r$ (나) $r!$

1137 ${}_{n-1}P_r+r\cdot{}_{n-1}P_{r-1}$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-1-r)!}+r\cdot\frac{(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-r-1)!}+r\cdot\frac{(n-1)!}{(n-r)!}$$

분모, 분자에 각각 $n-r$를 곱한다.

$$=\frac{(n-1)!(n-r)}{(n-r)!}+r\cdot\frac{(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-r)!}\cdot\{(n-r)+r\}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-r)!}\cdot\boxed{n}$$

$$=\frac{\boxed{n!}}{(n-r)!}={}_{n}P_r$$

$\therefore$ (가) n (나) $n!$

답 ①

1138 $n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}=n\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$$=n\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!\boxed{(n-r)!}}$$

$$=\frac{\boxed{n!}}{(r-1)!(n-r)!}$$

분모, 분자에 각각 r를 곱한다.

$$=\frac{r\cdot n!}{\boxed{r!}(n-r)!}$$

$$=r\cdot{}_{n}C_r$$

$\therefore$ (가) $(n-r)!$ (나) $n!$ (다) $r!$

답 ⑤

유형 18 조합의 수

집중공략 본책 163쪽

① 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 경우의 수 ➡ ${}_{n}C_r$

② 서로 다른 n개에서 a개를 택한 후 나머지에서 b개를 택하는 경우의 수 ➡ ${}_{n}C_a\cdot{}_{n-a}C_b$

1139 의사 7명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_{7}C_3=35$

간호사 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_{6}C_3=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$35+20=55$

답 55

1140 색연필 n자루 중에서 3자루를 택하는 경우의 수는

${}_{n}C_3$

공책 5권 중에서 2권을 택하는 경우의 수는

${}_{5}C_2=10$

따라서 ${}_{n}C_3\cdot10=200$이므로 ${}_{n}C_3=20$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=20$$

$n(n-1)(n-2)=6\cdot5\cdot4$

$\therefore n=6$

답 6

1141 5개의 동아리 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$

택한 3개의 동아리에서 각각 1명씩 뽑는 경우의 수는

$_4C_1\cdot{}_4C_1\cdot{}_4C_1=4\cdot4\cdot4=64$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot64=640$ 답 ⑤

1142 세 수의 합이 짝수가 되려면 세 수 모두 짝수이거나 하나는 짝수, 두 수는 홀수이어야 한다.

(i) 짝수가 적힌 카드 3장을 꺼내는 경우
2, 4, 6, 8이 적힌 4장의 카드 중에서 3장을 꺼내는 경우의 수는
$_4C_3={}_4C_1=4$ ··· ❶

(ii) 짝수가 적힌 카드 1장, 홀수가 적힌 카드 2장을 꺼내는 경우
2, 4, 6, 8이 적힌 4장의 카드 중에서 1장을 꺼내고 1, 3, 5, 7, 9가 적힌 5장의 카드 중에서 2장을 꺼내는 경우의 수는
$_4C_1\cdot{}_5C_2=4\cdot10=40$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$4+40=44$ ··· ❸

답 44

채점 기준	비율
❶ 짝수가 적힌 카드 3장을 꺼내는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 짝수가 적힌 카드 1장, 홀수가 적힌 카드 2장을 꺼내는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 카드에 적힌 세 수의 합이 짝수가 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

1143 맨 앞 자리에는 0이 올 수 없으므로 1, 2, 3, 4, 5를 일렬로 나열한 후 그 사이사이 및 맨 뒤의 5개의 자리에 3개의 0을 나열하면 된다.

1, 2, 3, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

5개의 자리에 3개의 0을 나열하는 경우의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$

└ 0을 나열할 3개의 자리를 택하는 경우의 수와 같고, 이때 택하는 순서를 생각하지 않으므로 조합의 수를 이용한다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

$120\cdot10=1200$ 답 ②

1144 1부터 20까지의 홀수 중 4로 나누었을 때

나머지가 1인 수는 1, 5, 9, 13, 17 ······ ㉠

나머지가 3인 수는 3, 7, 11, 15, 19 ······ ㉡

두 수의 합이 4의 배수가 되려면 ㉠, ㉡에서 각각 1개씩 택하면 되므로 구하는 경우의 수는

$_5C_1\cdot{}_5C_1=5\cdot5=25$ 답 25

SSEN 특강

자연수 중 홀수는 4로 나누었을 때 나머지가 1 또는 3이다.
즉 $4k+1$ 또는 $4k+3$ (k는 음이 아닌 정수) 꼴이다.
따라서 두 홀수의 합이 4의 배수가 되려면 4로 나누었을 때 나머지가 1인 수와 3인 수의 합이어야 한다.

유형 19 **특정한 것을 포함하거나 포함하지 않는 조합의 수** 본책 163쪽

① 서로 다른 n개에서 특정한 k개를 포함하여 r개를 택하는 경우의 수
➡ $(n-k)$개에서 $(r-k)$개를 택하는 경우의 수와 같다.
➡ $_{n-k}C_{r-k}$

② 서로 다른 n개에서 특정한 k개를 제외하고 r개를 택하는 경우의 수
➡ $(n-k)$개에서 r개를 택하는 경우의 수와 같다.
➡ $_{n-k}C_r$

1145 혜원이와 민준이를 제외한 10명의 회원 중에서 3명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$_{10}C_3=120$ 답 ①

1146 2와 7이 적힌 공을 제외한 8개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수와 같으므로

$_8C_2=28$ 답 28

1147 (i) A와 B가 공통으로 신청하는 봉사 활동이 0개인 경우
A가 6개의 봉사 활동 중에서 2개를 택하고, B가 남은 4개의 봉사 활동 중에서 2개를 택하면 되므로 그 경우의 수는
$_6C_2\cdot{}_4C_2=15\cdot6=90$

(ii) A와 B가 공통으로 신청하는 봉사 활동이 1개인 경우
A가 6개의 봉사 활동 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
$_6C_2=15$
B가 A가 택한 2개의 봉사 활동 중에서 하나를 택하고, A가 택하지 않은 4개의 봉사 활동 중에서 하나를 택하는 경우의 수는 $_2C_1\cdot{}_4C_1=2\cdot4=8$
따라서 A와 B가 공통으로 신청하는 봉사 활동이 1개인 경우의 수는 $15\cdot8=120$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$90+120=210$ 답 ⑤

다른 풀이 (ii) A와 B가 공통으로 신청하는 봉사 활동이 1개인 경우 6개의 봉사 활동 중에서 A와 B가 공통으로 신청하는 봉사 활동을 택하는 경우의 수는 $_6C_1=6$
남은 5개의 봉사 활동 중에서 A와 B가 각각 하나씩 신청하는 봉사 활동을 택하는 경우의 수는 $_5P_2=20$
따라서 A와 B가 공통으로 신청하는 봉사 활동이 1개인 경우의 수는 $6\cdot20=120$

1148 짝이 맞는 구두 한 켤레를 택하는 경우의 수는

$_5C_1=5$

한 켤레를 제외한 구두 8짝 중에서 2짝을 택하는 경우의 수는

$_8C_2=28$

이때 구두 8짝 중에서 짝이 맞는 2짝, 즉 구두 4켤레 중에서 한 켤레를 택하는 경우의 수는

$_4C_1=4$

이므로 구두 8짝 중에서 짝이 맞지 않는 2짝을 택하는 경우의 수는

$28-4=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\cdot 24=120$ 　답 120

유형 20 '적어도'의 조건이 있는 조합의 수 　본책 164쪽

(사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수)
=(모든 경우의 수)−(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)

1149 12명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_{12}C_4=495$

남자만 4명을 뽑는 경우의 수는 　${}_6C_4={}_6C_2=15$

여자만 4명을 뽑는 경우의 수는 　${}_6C_4={}_6C_2=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$495-(15+15)=465$ 　답 ②

1150 (1) 10송이 중에서 4송이를 고르는 경우의 수는

${}_{10}C_4=210$

노란색 꽃과 보라색 꽃 중에서 4송이를 고르는 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$210-15=195$ 　⋯ ❶

(2) 10송이 중에서 4송이를 고르는 경우의 수는

${}_{10}C_4=210$

(i) 노란색 꽃이 포함되지 않도록 고르는 경우의 수는 빨간색 꽃과 보라색 꽃 중에서 4송이를 고르는 경우의 수와 같으므로

${}_7C_4={}_7C_3=35$

(ii) 노란색 꽃이 1송이만 포함되도록 고르는 경우의 수는 빨간색 꽃과 보라색 꽃 중에서 3송이를 고르고, 노란색 꽃 중에서 1송이를 고르는 경우의 수와 같으므로

${}_7C_3\cdot{}_3C_1=35\cdot 3=105$

(i), (ii)에서 노란색 꽃이 포함되지 않거나 1송이만 포함되도록 고르는 경우의 수는 　$35+105=140$

따라서 구하는 경우의 수는

$210-140=70$ 　⋯ ❷

답 (1) 195 　(2) 70

채점 기준	비율
❶ 빨간색 꽃이 적어도 1송이 포함되도록 고르는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 노란색 꽃이 적어도 2송이 포함되도록 고르는 경우의 수를 구할 수 있다.	60 %

다른 풀이 (2) (i) 노란색 꽃이 2송이 포함되도록 고르는 경우의 수는

${}_3C_2\cdot{}_7C_2={}_3C_1\cdot 21=3\cdot 21=63$

(ii) 노란색 꽃이 3송이 포함되도록 고르는 경우의 수는

${}_3C_3\cdot{}_7C_1=1\cdot 7=7$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$63+7=70$

1151 12 미만의 자연수 중에서 서로 다른 5개의 자연수를 택하는 경우의 수는

${}_{11}C_5=462$

12 미만의 자연수 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7, 9, 11의 6개, 짝수는 2, 4, 6, 8, 10의 5개이므로

홀수만 5개를 택하는 경우의 수는 　${}_6C_5={}_6C_1=6$

짝수만 5개를 택하는 경우의 수는 　${}_5C_5=1$

따라서 구하는 경우의 수는

$462-(6+1)=455$ 　답 455

1152 12명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_{12}C_3=220$

여자 지원자 수를 $n(n\geq 3)$이라 하면 여자만 3명을 뽑는 경우의 수는 　${}_nC_3$

남자 지원자가 적어도 한 명 포함되도록 뽑는 경우의 수는

$220-{}_nC_3$

즉 $220-{}_nC_3=164$이므로 　${}_nC_3=56$

$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}=56,\quad n(n-1)(n-2)=8\cdot 7\cdot 6$

$\therefore n=8$

따라서 여자 지원자 수가 8이므로 남자 지원자 수는

$12-8=4$ 　답 4

참고 12명의 지원자 중 여자 지원자가 3명 미만이면 3명을 뽑을 때 항상 남자 지원자가 적어도 한 명 포함되므로 남자 지원자가 적어도 한 명 포함되도록 3명을 뽑는 경우의 수는 　${}_{12}C_3=220$
즉 주어진 조건에 맞지 않으므로 $n\geq 3$이다.

유형 21 뽑아서 나열하는 경우의 수 　본책 164쪽

서로 다른 m개 중에서 r개, 서로 다른 n개 중에서 s개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수
➡ ${}_mC_r\cdot{}_nC_s\cdot(r+s)!$

1153 어른 5명 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_1=5$

어린이 6명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_2=15$

3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\cdot 15\cdot 6=450$ 　답 ④

1154 1부터 9까지의 자연수 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개, 짝수는 2, 4, 6, 8의 4개이므로

홀수 3개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

짝수 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

5개의 자연수를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$10\cdot6\cdot120=7200$ 답 ④

1155 지원이와 수민이를 제외한 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 $_6C_3=20$ ⋯ ❶

지원이와 수민이를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$이고, 이때 지원이와 수민이가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로 지원이와 수민이를 이웃하도록 세우는 경우의 수는 $24\cdot2=48$ ⋯ ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$20\cdot48=960$ ⋯ ❸

답 960

채점 기준	비율
❶ 지원이와 수민이를 제외한 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 지원이와 수민이를 이웃하도록 세우는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %
❸ 지원이와 수민이가 모두 포함되고 이 두 사람이 서로 이웃하도록 세우는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

유형 22 직선과 대각선의 개수

본책 165쪽

① 서로 다른 n개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않을 때, 주어진 점을 이어서 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수 ➡ $_nC_2$

② n각형의 대각선의 개수는 n개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 선분의 개수에서 변의 개수인 n을 뺀 것과 같다. ➡ $_nC_2-n$

1156 5개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 구하는 직선의 개수는

$_5C_2=10$ 답 ②

1157 구하는 대각선의 개수는 8개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 8을 뺀 것과 같으므로

$_8C_2-8=28-8=20$ 답 20

1158 두 직선 l, m 위의 점을 각각 하나씩 택하여 이으면 한 개의 직선을 만들 수 있으므로

$_4C_1\cdot{}_5C_1=4\cdot5=20$

한 직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하여 이어서 만든 직선의 개수는

└ 두 직선 l, m

2

따라서 구하는 직선의 개수는

$20+2=22$ 답 ④

다른 풀이 9개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_9C_2=36$

직선 l 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_4C_2=6$

직선 m 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_5C_2=10$

두 직선 l, m을 포함하면 구하는 직선의 개수는

$36-(6+10)+2=22$

1159 10개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_{10}C_2=45$ ⋯ ❶

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_4C_2=6$ ⋯ ❷

이때 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 5개이므로 구하는 직선의 개수는

$45-6\cdot5+5=20$ ⋯ ❸

답 20

채점 기준	비율
❶ 10개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 한 직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 만들 수 있는 직선의 개수를 구할 수 있다.	40 %

유형 23 다각형의 개수

본책 165쪽

서로 다른 n개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않을 때, 주어진 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수 ➡ $_nC_3$

1160 9개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$_9C_3=84$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$_4C_3={}_4C_1=4$

이고, 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 3개이다.

그런데 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$84-4\cdot3=72$ 답 72

1161 직선 l 위에 있는 6개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_6C_2=15$

직선 m 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_5C_2=10$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$15\cdot10=150$ 답 150

다른 풀이 11개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

$_{11}C_4=330$

두 직선 l, m 위에 있는 점 중에서 각각 3개, 1개를 택하는 경우의 수는

$_6C_3\cdot{}_5C_1=20\cdot5=100$

두 직선 l, m 위에 있는 점 중에서 각각 1개, 3개를 택하는 경우의 수는

$_6C_1\cdot{}_5C_3=6\cdot{}_5C_2=6\cdot10=60$

직선 l 위에 있는 6개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

$_6C_4={}_6C_2=15$

직선 m 위에 있는 5개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_4={}_5C_1=5$$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$$330-(100+60+15+5)=150$$

1162 7개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_7C_3=35$$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

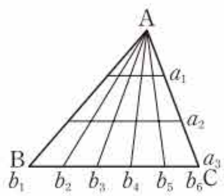
$${}_4C_3={}_4C_1=4$$

그런데 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$$35-4=31$$

답 ②

1163 오른쪽 그림과 같이 각각의 선을 a_i, b_j ($i=1$, 2, 3, $j=1$, 2, 3, 4, 5, 6)라 하자.



a_1, a_2, a_3 중에서 한 개, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 중에서 두 개를 택하면 한 개의 삼각형이 만들어지므로 구하는 삼각형의 개수는

$${}_3C_1\cdot{}_6C_2=3\cdot15=45$$

답 45

1164 16개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_{16}C_3=560$$ ··· ❶

(i) 한 직선 위에 4개의 점이 있는 경우

4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_3={}_4C_1=4$$

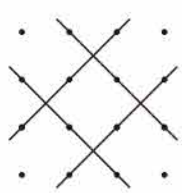
이고, 오른쪽 그림과 같이 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 10개이므로

$$4\cdot10=40$$

(ii) 한 직선 위에 3개의 점이 있는 경우

3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_3=1$$



이고, 오른쪽 그림과 같이 한 직선 위에 3개의 점이 있는 직선은 4개이므로

$$1\cdot4=4$$

(i), (ii)에서 한 직선 위에 있는 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$$40+4=44$$ ··· ❷

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$$560-44=516$$ ··· ❸

답 516

채점 기준	비율
❶ 16개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 한 직선 위에 있는 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	60 %
❸ 삼각형의 개수를 구할 수 있다.	20 %

유형 24 평행사변형의 개수

본책 166쪽

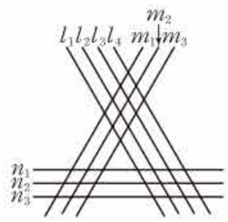
m개의 평행한 직선과 n개의 평행한 직선이 서로 만날 때, 이 직선으로 만들어지는 평행사변형의 개수 ➡ ${}_mC_2\cdot{}_nC_2$

1165 가로 방향의 평행한 직선 중에서 2개, 세로 방향의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 만들어지므로 구하는 평행사변형의 개수는

$${}_5C_2\cdot{}_4C_2=10\cdot6=60$$

답 ④

1166 오른쪽 그림과 같이 각각의 평행한 직선을 l_i, m_j, n_k ($i=1$, 2, 3, 4, $j=1$, 2, 3, $k=1$, 2, 3)라 하자.



(i) l_1, l_2, l_3, l_4 중에서 2개를 택하고, m_1, m_2, m_3 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2\cdot{}_3C_2=6\cdot{}_3C_1=6\cdot3=18$$

(ii) l_1, l_2, l_3, l_4 중에서 2개를 택하고, n_1, n_2, n_3 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2\cdot{}_3C_2=6\cdot{}_3C_1=6\cdot3=18$$

(iii) m_1, m_2, m_3 중에서 2개를 택하고, n_1, n_2, n_3 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2\cdot{}_3C_2={}_3C_1\cdot{}_3C_1=3\cdot3=9$$

이상에서 구하는 평행사변형의 개수는

$$18+18+9=45$$

답 45

1167 가로 방향의 평행한 직선 중에서 2개, 세로 방향의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 만들어지므로 직사각형의 개수는 ${}_4C_2\cdot{}_4C_2=6\cdot6=36$ ··· ❶

한 변의 길이가 1, 2, 3인 정사각형의 개수는 각각 9, 4, 1이므로 정사각형의 개수는

$$9+4+1=14$$ ··· ❷

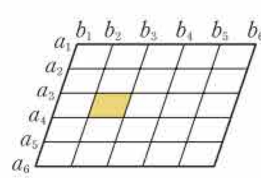
따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$$36-14=22$$ ··· ❸

답 22

채점 기준	비율
❶ 만들어지는 직사각형의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 만들어지는 정사각형의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 만들어지는 정사각형이 아닌 직사각형의 개수를 구할 수 있다.	20 %

1168 오른쪽 그림과 같이 각각의 평행한 선을 a_i, b_j ($i=1$, 2, 3, 4, 5, 6, $j=1$, 2, 3, 4, 5, 6)라 하자.



색칠한 부분을 포함하는 평행사변형을 만들려면 가로 방향의 평행한 선 2개는 a_1, a_2, a_3 중에서 한 개, a_4, a_5, a_6 중에서 한 개를 택해야 하므로 가로 방향의 선을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1\cdot{}_3C_1=3\cdot3=9$$

세로 방향의 평행한 선 2개는 b_1, b_2 중에서 한 개, b_3, b_4, b_5, b_6 중에서 한 개를 택해야 하므로 세로 방향의 선을 택하는 경우의 수는 $\quad {}_2C_1 \cdot {}_4C_1 = 2 \cdot 4 = 8$

따라서 구하는 평행사변형의 개수는

$9 \cdot 8 = 72$ 답 ③

1169 n개의 평행한 직선 중에서 2개, $(n+2)$개의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 만들어지므로

$${}_nC_2 \cdot {}_{n+2}C_2 = 210$$

$$\frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} \cdot \frac{(n+2)(n+1)}{2 \cdot 1} = 210$$

$$(n+2)(n+1)n(n-1) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$$

$\therefore n = 5$ 답 5

유형 25 분할하는 경우의 수 본책 167쪽

서로 다른 n개를 p개, q개, r개$(p+q+r=n)$로 분할하는 경우의 수는

① p, q, r가 모두 다른 수일 때 ➡ ${}_nC_p \cdot {}_{n-p}C_q \cdot {}_rC_r$

② p, q, r 중 어느 두 수가 같을 때 ➡ ${}_nC_p \cdot {}_{n-p}C_q \cdot {}_rC_r \cdot \frac{1}{2!}$

③ p, q, r가 모두 같은 수일 때 ➡ ${}_nC_p \cdot {}_{n-p}C_q \cdot {}_rC_r \cdot \frac{1}{3!}$

1170 6개의 과일을 똑같은 바구니 3개에 빈 바구니가 없도록 나누어 담을 때, 각 바구니에 담을 수 있는 과일의 개수는

$1, 1, 4$ 또는 $1, 2, 3$ 또는 $2, 2, 2$

똑같은 바구니에 담으므로 순서는 생각하지 않는다.

(i) 1개, 1개, 4개로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_4 \cdot \frac{1}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 15$$

(ii) 1개, 2개, 3개로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 = 6 \cdot 10 \cdot 1 = 60$$

(iii) 2개, 2개, 2개로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{3!} = 15 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = 15$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$15 + 60 + 15 = 90$ 답 90

1171 남자 8명 중 2명이 여자 4명과 한 조를 이루면 되므로 남자 8명을 2명, 6명으로 나누면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_8C_2 \cdot {}_6C_6 = 28 \cdot 1 = 28$ 답 28

1172 10명을 5명, 5명으로 나누는 경우의 수는

${}_{10}C_5 \cdot {}_5C_5 \cdot \frac{1}{2!} = 252 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 126$ ··· ❶

경찰관만 포함된 조가 있도록 나누는 경우의 수는 경찰관 7명을 2명, 5명으로 나누는 경우의 수와 같으므로

${}_7C_2 \cdot {}_5C_5 = 21 \cdot 1 = 21$ ··· ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$126 - 21 = 105$ ··· ❸

답 105

채점 기준	비율
❶ 10명을 5명, 5명으로 나누는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 경찰관 7명을 2명, 5명으로 나누는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 각 조에 적어도 한 명의 소방관이 포함되도록 나누는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 각 조에 적어도 한 명의 소방관이 포함되려면

경찰관 4명과 소방관 1명, 경찰관 3명과 소방관 2명

의 두 개의 조로 나눠야 한다.

경찰관 4명과 함께 한 조가 될 소방관 1명을 뽑으면 나머지 한 조가 자동으로 결정되므로 구하는 경우의 수는

$${}_7C_4 \cdot {}_3C_1 = {}_7C_3 \cdot 3 = 35 \cdot 3 = 105$$

유형 26 분할한 후 분배하는 경우의 수 본책 167쪽

n묶음으로 분할하여 n명에게 분배하는 경우의 수

➡ (n묶음으로 분할하는 경우의 수)$\cdot n!$

1173 7명의 학생을 3명, 3명, 1명의 3개의 조로 나누는 경우의 수는

$${}_7C_3 \cdot {}_4C_3 \cdot {}_1C_1 \cdot \frac{1}{2!} = 35 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 70$$

3개의 조를 3곳의 청소 구역에 분배하는 경우의 수는

$3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$70 \cdot 6 = 420$ 답 ④

1174 8명의 학생을 2명, 2명, 2명, 2명의 4개의 조로 나누는 경우의 수는

${}_8C_2 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{4!} = 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{24} = 105$ ··· ❶

4개의 조가 4종류의 컴퓨터 게임을 하는 경우의 수는

$4! = 24$ ··· ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$105 \cdot 24 = 2520$ ··· ❸

답 2520

채점 기준	비율
❶ 8명의 학생을 2명씩 4개의 조로 나누는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %
❷ 4개의 조가 4종류의 컴퓨터 게임을 하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 2명씩 짝을 이루어 4종류의 컴퓨터 게임을 하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

1175 2층부터 7층까지 6개의 층 중에서 사람들이 내리는 3개의 층을 택하는 경우의 수는 $\quad {}_6C_3 = 20$

7명을 2명, 2명, 3명의 3개의 조로 나누는 경우의 수는

$${}_7C_2 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 21 \cdot 10 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 105$$

3개의 조를 3개의 층에 분배하는 경우의 수는 $\quad 3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$20 \cdot 105 \cdot 6 = 12600$ 답 ④

1176 운전자를 제외한 나머지 7명을 3개의 조로 나눌 때, 각 승용차에 탑승하는 인원수는 각 승용차에는 운전자를 제외하고 최대 3명까지 탑승할 수 있다.

1, 3, 3 또는 2, 2, 3

(i) 1명, 3명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$${}_7C_1 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 7 \cdot 20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 70$$

(ii) 2명, 2명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$${}_7C_2 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 21 \cdot 10 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 105$$

(i), (ii)에서 3개의 조로 나누는 경우의 수는

$70 + 105 = 175$

3개의 조를 3대의 승용차에 분배하는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$175 \cdot 6 = 1050$ 답 1050

1177 6명을 3개의 조로 나눌 때, 각 관광지에 사전 답사를 가는 인원수는

1, 1, 4 또는 1, 2, 3 또는 2, 2, 2

(i) 1명, 1명, 4명으로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_4 \cdot \frac{1}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 15$$

(ii) 1명, 2명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 = 6 \cdot 10 \cdot 1 = 60$$

(iii) 2명, 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{3!} = 15 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = 15$$

이상에서 3개의 조로 나누는 경우의 수는

$15 + 60 + 15 = 90$

3개의 조를 3곳의 관광지에 분배하는 경우의 수는 $3! = 6$

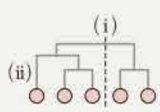
따라서 구하는 경우의 수는

$90 \cdot 6 = 540$ 답 540

유형 27 대진표 작성하기

본책 168쪽

오른쪽 그림과 같은 대진표를 작성하는 경우의 수는 다음과 같은 순서로 구한다.



(i) 5명을 3명, 2명의 2개의 조로 나눈다.
➡ ${}_5C_3 \cdot {}_2C_2$

(ii) 3명인 조에서 부전승으로 올라가는 1명을 택한다. ➡ ${}_3C_1$

(iii) (i)과 (ii)의 결과를 곱한다. ➡ $({}_5C_3 \cdot {}_2C_2) \cdot {}_3C_1$

1178 구하는 경우의 수는 먼저 6명을 3명, 3명의 2개의 조로 나눈 후 각 조에서 부전승으로 올라가는 1명을 택하는 경우의 수와 같으므로

$$\left({}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!}\right) \cdot {}_3C_1 \cdot {}_3C_1 = 20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 90$$ 답 ④

1179 구하는 경우의 수는 먼저 6개의 학급을 2개, 4개의 학급으로 나눈 후 4개의 학급을 다시 2개, 2개의 학급으로 나누는 경우의 수와 같으므로

$$({}_6C_2 \cdot {}_4C_4) \cdot \left({}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!}\right) = 15 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 45$$ 답 45

1180 9개의 팀을 5개, 4개의 팀으로 나누는 경우의 수는

${}_9C_5 \cdot {}_4C_4 = {}_9C_4 \cdot 1 = 126 \cdot 1 = 126$ ··· ❶

5개의 팀을 3개, 2개의 팀으로 나눈 후 3개의 팀 중에서 부전승으로 올라가는 1개의 팀을 택하는 경우의 수는

$({}_5C_3 \cdot {}_2C_2) \cdot {}_3C_1 = {}_5C_2 \cdot 1 \cdot 3 = 10 \cdot 1 \cdot 3 = 30$ ··· ❷

4개의 팀을 2개, 2개의 팀으로 나누는 경우의 수는

${}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} = 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 3$ ··· ❸

따라서 구하는 경우의 수는

$126 \cdot 30 \cdot 3 = 11340$ ··· ❹

답 11340

채점 기준	비율
❶ 9개의 팀을 5개, 4개의 팀으로 나누는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 5개의 팀의 대진표를 작성하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 4개의 팀의 대진표를 작성하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 대진표를 작성하는 경우의 수를 구할 수 있다.	10 %

1181 1st 만들 수 있는 사각형의 변의 길이에 대한 식을 세운다.

평행한 두 직선에서 각각 두 점을 택할 때 사각형이 되고, 이 사각형은 사다리꼴이다.

사다리꼴의 윗변과 아랫변의 길이를 각각 a, b라 할 때, 사다리꼴의 넓이가 2이려면 점의 간격이 1이므로 a, b는 자연수이다.

$$\frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot 1 = 2 \qquad \therefore a+b=4$$

2nd a, b의 값에 따라 경우의 수를 구한다.

(i) $a=1$, $b=3$일 때,

$a=1$인 경우는 4가지, $b=3$인 경우는 2가지이므로

$4 \cdot 2 = 8$

(ii) $a=2$, $b=2$일 때, 평행사변형도 사다리꼴이다.

$a=2$인 경우는 3가지, $b=2$인 경우는 3가지이므로

$3 \cdot 3 = 9$

(iii) $a=3$, $b=1$일 때,

$a=3$인 경우는 2가지, $b=1$인 경우는 4가지이므로

$2 \cdot 4 = 8$

3rd 넓이가 2인 사각형의 개수를 구한다.

이상에서 구하는 사각형의 개수는

$8+9+8=25$ 답 25

1182 1st 다섯 개의 영역 A, B, C, D, E의 넓이를 각각 구한다.

영역 A의 넓이는 $\pi \cdot 1^2 = \pi$

영역 B의 넓이는 $\pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2 = 3\pi$

영역 C의 넓이는 $\pi \cdot 3^2 - \pi \cdot 2^2 = 5\pi$

영역 D의 넓이는 $\pi \cdot 4^2 - \pi \cdot 3^2 = 7\pi$

영역 E의 넓이는 $\pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 4^2 = 9\pi$

2nd 가장 넓은 영역인 E에 칠하는 색을 기준으로 조건을 만족시키는 경우를 구한다.

각 물감은 10통 이하만 사용할 수 있고 물감 1통으로는 영역 A의 넓이인 π만큼만 칠할 수 있으므로 한 가지 색의 물감으로는 10π만큼의 넓이까지 칠할 수 있다.

3가지 색을 빨강, 노랑, 파랑이라 하고 가장 넓은 영역인 E에 빨강을 칠하는 경우를 모두 구하면 다음과 같다.

영역 E (넓이: 9π)	영역 D (넓이: 7π)	영역 C (넓이: 5π)	영역 B (넓이: 3π)	영역 A (넓이: π)
빨강	파랑	노랑	파랑	빨강
빨강	파랑	노랑	파랑	노랑
빨강	노랑	파랑	노랑	빨강
빨강	노랑	파랑	노랑	파랑

3rd 문양의 개수를 구한다.

마찬가지로 영역 E에 노랑, 파랑을 칠하는 경우도 각각 4가지씩이므로 구하는 문양의 개수는

$4\cdot3=12$ 답 ②

1183 1st 나무판 A에 7개, 나무판 B에 1개의 블록을 쌓는 경우의 수를 구한다.

(i) 8개의 블록 중에서 7개를 택하여 나무판 A에 일렬로 쌓고, 남은 1개의 블록을 나무판 B에 쌓는 경우의 수는

$_8P_7\cdot1=8!$

2nd 나무판 A에 6개, 나무판 B에 2개의 블록을 쌓는 경우의 수를 구한다.

(ii) 8개의 블록 중에서 6개를 택하여 나무판 A에 일렬로 쌓고, 남은 2개의 블록을 나무판 B에 일렬로 쌓는 경우의 수는

$_8P_6\cdot2!=8!$

3rd 나무판 A에 5개, 나무판 B에 3개의 블록을 쌓는 경우의 수를 구한다.

(iii) 8개의 블록 중에서 5개를 택하여 나무판 A에 일렬로 쌓고, 남은 3개의 블록을 나무판 B에 일렬로 쌓는 경우의 수는

$_8P_5\cdot3!=8!$

4th $a+b$의 값을 구한다.

이상에서 구하는 경우의 수는

$8!+8!+8!=3\cdot8!$

이므로 $a=3,\ b=8$

$\therefore a+b=11$ 답 ④

1184 1st A와 B가 앉는 경우의 수를 구한다.

조건 (가)에서 A와 B가 같이 앉을 수 있는 2인용 의자는 마부가 앉는 의자를 제외한 3개이고, A, B 두 사람이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로 A와 B가 앉는 경우의 수는

$3\cdot2=6$

2nd C와 D가 앉는 경우의 수를 구한다.

남은 5개의 좌석에 C와 D가 앉는 경우의 수는 $_5P_2=20$

이때 C와 D가 이웃하여 앉을 수 있는 2인용 의자는 A와 B가 앉는 의자와 마부가 앉는 의자를 제외한 2개이고, C, D 두 사람이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로 C와 D가 이웃하여 앉는 경우의 수는

$2\cdot2=4$

조건 (나)에서 C와 D가 이웃하여 앉지 않아야 하므로 C와 D가 앉는 경우의 수는

$20-4=16$

3rd E, F, G가 앉는 경우의 수를 구한다.

남은 3개의 좌석에 E, F, G가 앉는 경우의 수는

$3!=6$

4th 7개의 좌석에 앉는 경우의 수를 구한다.

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot16\cdot6=576$ 답 576

1185 1st 흰 공을 놓는 경우의 수를 구한다. 1행, 2행, 3행, 4행의 4가지

1열에 흰 공을 놓을 수 있는 경우는 4가지, 2열에 흰 공을 놓을 수 있는 경우는 1열에 흰 공을 놓은 행을 제외한 3가지, 3열에 흰 공을 놓을 수 있는 경우는 1, 2열에 흰 공을 놓은 행을 제외한 2가지, 4열에 흰 공을 놓을 수 있는 경우는 1, 2, 3열에 흰 공을 놓은 행을 제외한 1가지이다.

따라서 흰 공을 놓는 경우의 수는

$4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

2nd 검은 공을 놓는 경우의 수를 구한다.

조건 (다)에 의하여 검은 공은 다음과 같이 놓을 수 있다.

(i) 1행에 놓인 흰 공과 같은 열에서 검은 공은 3행 또는 4행에 놓을 수 있다.

(ii) 2행에 놓인 흰 공과 같은 열에서 검은 공은 4행에 놓을 수 있다.

(iii) 3행에 놓인 흰 공과 같은 열에서 검은 공은 1행에 놓을 수 있다.

(iv) 4행에 놓인 흰 공과 같은 열에서 검은 공은 1행 또는 2행에 놓을 수 있다.

이상에서 검은 공을 놓는 경우의 수는

$2\cdot1\cdot1\cdot2=4$

3rd 공을 놓는 경우의 수를 구한다.

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot4=96$ 답 ②

1186 1st 색칠한 칸에 적을 수 있는 숫자를 구한다.

색칠한 칸에 적은 수를 x, 색칠한 칸을 포함한 세로줄의 칸에 적은 3개의 수의 합을 y라 하면

$0+1+2+3+4+5+6+7+x=y+y$

좌변과 우변은 모두 (가로줄의 수의 합)+(세로줄의 수의 합)을 나타낸다.

$\therefore y=\dfrac{28+x}{2}$

이때 y는 자연수이므로 $28+x$는 짝수이어야 한다.

즉 x의 값이 될 수 있는 수는

0, 2, 4, 6

2nd x의 값에 따라 경우의 수를 구한다.

(i) $x=0$일 때,

$y=\dfrac{28+0}{2}=14$이므로 세 수 중 색칠한 칸에 적은 0을 제외한 나머지 두 수의 합이 $14-0=14$이다.

그런데 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 중 합하여 14가 되는 두 수는 존재하지 않는다.

(ii) $x=2$일 때,

$y=\dfrac{28+2}{2}=15$이므로 세 수 중 색칠한 칸에 적은 2를 제외한 나머지 두 수의 합이 $15-2=13$이다.

0, 1, 3, 4, 5, 6, 7 중 합하여 13이 되는 두 수는 6, 7이므로 세로줄의 칸에 6, 7을 적는 경우의 수는

$2!=2$

0, 1, 3, 4, 5를 가로줄의 칸에 적는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 이때의 경우의 수는

$2\cdot 120=240$

(iii) $x=4$일 때,

$y=\dfrac{28+4}{2}=16$이므로 세 수 중 색칠한 칸에 적은 4를 제외한 나머지 두 수의 합이 $16-4=12$이다.

0, 1, 2, 3, 5, 6, 7 중 합하여 12가 되는 두 수는 5, 7이므로 세로줄의 칸에 5, 7을 적는 경우의 수는

$2!=2$

0, 1, 2, 3, 6을 가로줄의 칸에 적는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 이때의 경우의 수는

$2\cdot 120=240$

(iv) $x=6$일 때,

$y=\dfrac{28+6}{2}=17$이므로 세 수 중 색칠한 칸에 적은 6을 제외한 나머지 두 수의 합이 $17-6=11$이다.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 7 중 합하여 11이 되는 두 수는 4, 7이므로 세로줄의 칸에 4, 7을 적는 경우의 수는

$2!=2$

0, 1, 2, 3, 5를 가로줄의 칸에 적는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 이때의 경우의 수는

$2\cdot 120=240$

3rd 6개의 수의 합과 3개의 수의 합이 같아지는 경우의 수를 구한다.

이상에서 구하는 경우의 수는

$240+240+240=720$ 답 720

1187 1st 같은 숫자가 없는 네 자리 자연수의 개수를 구한다.

(i) 같은 숫자가 없는 경우

1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 적힌 5개의 구슬 중 4개를 꺼내어 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 네 자리 자연수의 개수는 $_5P_4=120$ ⋯ ❶

2nd 같은 숫자가 한 쌍 있는 네 자리 자연수의 개수를 구한다.

(ii) 같은 숫자가 한 쌍 있는 경우

∨□∨□, □∨□∨, ∨□□∨

위의 3가지에서 ∨의 자리에 서로 같은 수를 넣고 □의 자리에 서로 다른 두 수를 각각 넣으면 되므로 네 자리 자연수의 개수는

$3\cdot \underbrace{2}_{\text{같은 숫자가 4 또는 5인 경우}}\cdot {_4P_2}=72$ ⋯ ❷

3rd 같은 숫자가 두 쌍 있는 자연수의 개수를 구한다.

(iii) 같은 숫자가 두 쌍 있는 경우

네 자리 자연수는

4545, 5454의 2개 ⋯ ❸

4th 같은 숫자끼리는 이웃하지 않는 자연수의 개수를 구한다.

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$120+72+2=194$ ⋯ ❹

답 194

채점 기준	비율
❶ 같은 숫자가 없는 네 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 같은 숫자가 한 쌍 있는 네 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 같은 숫자가 두 쌍 있는 네 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 같은 숫자끼리는 이웃하지 않는 자연수의 개수를 구할 수 있다.	10 %

1188 1st 숫자를 나열하는 경우의 수를 구한다.

(i) 숫자를 나열하는 경우

ⓘ 0을 사용하지 않거나 1개 사용하는 경우

0, 7, 5, 1, 3 중에서 4개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$_5P_4=120$

ⓘⓘ 0을 2개 사용하는 경우

0끼리 서로 이웃하므로 00□□, □00□, □□00의 3가지이고, 그 각각에 대하여 7, 5, 1, 3 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수가 $_4P_2=12$이므로

$3\cdot 12=36$

ⓘ, ⓘⓘ에서 숫자를 나열하는 경우의 수는

$120+36=156$

2nd 알파벳을 나열하는 경우의 수를 구한다.

(ii) 알파벳을 나열하는 경우

ⓘⓘⓘ g△g□ 또는 □g△g인 경우

△에는 i, o 중에서 한 개, □에는 l, d, n과 사용하지 않은 모음 중에서 한 개를 택하여 나열하는 경우의 수가

$2\cdot 4=8$

이므로 구하는 경우의 수는

$2\cdot 8=16$

ⓘⓥ g△□g인 경우

i, l, d, o, n 중에서 2개를 택하여 △, □에 나열하는 경우의 수는 $_5P_2=20$

l, d, n 중에서 2개를 택하여 △, □에 나열하는 경우의 수는 $_3P_2=6$

따라서 △, □에 적어도 한 개의 모음을 나열하는 경우의 수는

$20-6=14$

ⓘⓘⓘ, ⓘⓥ에서 알파벳을 나열하는 경우의 수는

$16+14=30$

3rd 만들 수 있는 비밀번호의 개수를 구한다.

(i), (ii)에서 구하는 비밀번호의 개수는

$156\cdot 30=4680$ 답 ④

1189 1st ${_nC_r}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$임을 이용하여 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 구한다.

$_{n+3}\mathrm{C}_n - {}_{n+3}\mathrm{C}_{n-1}$

$= \dfrac{(n+3)!}{n!3!} - \dfrac{(n+3)!}{(n-1)!4!}$

$= (\boxed{n+3})!\left\{\dfrac{1}{n!3!} - \dfrac{1}{(n-1)!4!}\right\}$

$= (n+3)!\left(\dfrac{4}{n!4!} - \dfrac{n}{n!4!}\right)$

$= (n+3)! \cdot \dfrac{\boxed{4-n}}{n!4!}$ $(n+3)! = \dfrac{(n+4)!}{n+4}$

$= \boxed{\dfrac{4-n}{n+4}} \cdot \dfrac{(n+4)!}{n!4!}$

$= \dfrac{4-n}{n+4} \cdot {}_{n+4}\mathrm{C}_4$

∴ (가) $n+3$ (나) $4-n$ (다) $\dfrac{4-n}{n+4}$

2nd $\dfrac{f(1)+g(2)}{h(3)}$의 값을 구한다.

$f(n)=n+3$, $g(n)=4-n$, $h(n)=\dfrac{4-n}{n+4}$이므로

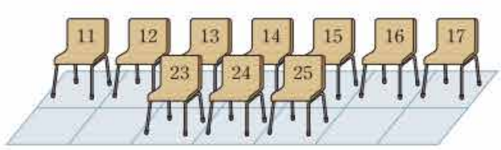
$\dfrac{f(1)+g(2)}{h(3)} = \dfrac{4+2}{\frac{1}{7}}$

$=42$

답 42

1190

그림과 같이 좌석 번호가 적힌 10개의 의자가 배열되어 있다.



두 학생 A, B를 포함한 5명의 학생이 다음 규칙에 따라 10개의 의자 중에서 서로 다른 5개의 의자에 앉는 경우의 수는?

(가) ❸A의 좌석 번호는 24 이상이고, B의 좌석 번호는 14 이하이다.
└ A의 좌석 번호는 24 또는 25이고 B의 좌석 번호는 11, 12, 13, 14 중 하나이다.

(나) ❶5명의 학생 중에서 어느 두 학생도 좌석 번호의 차가 1이 되도록 앉지 않는다.
└ 어느 두 학생도 이웃하여 앉지 않는다.

(다) ❷5명의 학생 중에서 어느 두 학생도 좌석 번호의 차가 10이 되도록 앉지 않는다.
└ 어느 두 학생도 앞뒤로 앉지 않는다.

① 54 ② 60 ③ 66 ④ 72 ⑤ 78

❶, ❷의 규칙이 의미하는 바를 파악한 후 ❶, ❷, ❸에 따라 나머지 학생이 앉는 경우를 생각한다.
이때 ❸에서 A의 좌석 번호는 두 가지뿐이므로 A의 좌석 번호에 따라 경우를 나누어 생각한다.

1st 규칙 (나), (다)의 의미를 파악한다.

규칙 (나)에 따라 5명 중 어느 두 학생도 이웃하여 앉지 않고, 규칙 (다)에 따라 5명 중 어느 두 학생도 앞뒤로 앉지 않는다.

2nd A가 24번에 앉는 경우의 수를 구한다.

A가 24번에 앉으면 규칙 (나), (다)에 따라 14번, 23번, 25번에는 아무도 앉을 수 없다.

따라서 나머지 4명의 학생은 규칙 (나)에 따라 11번, 13번, 15번, 17번에 앉아야 한다. 12번 또는 16번에 1명이 앉으면 나머지 3명은 모두 이웃하여 앉아야 한다.

11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17
		~~23~~	A	~~25~~		

이때 B는 규칙 (가)에 따라 11번 또는 13번에 앉아야 하므로 B가 의자에 앉는 경우의 수는 $_2\mathrm{C}_1=2$

나머지 3명의 학생이 의자에 앉는 경우의 수는 $3!=6$

즉 A가 24번에 앉는 경우의 수는 $2\cdot6=12$

3rd A가 25번에 앉는 경우의 수를 구한다.

A가 25번에 앉으면 규칙 (나), (다)에 따라 15번, 24번에는 아무도 앉을 수 없다. 13번에 1명이 앉으면 12번, 14번, 23번에는 아무도 앉지 못하므로 나머지 3명 중 2명은 16번, 17번에 이웃하여 앉아야 한다.

이때 13번에 1명이 앉으면 규칙 (나), (다)를 만족시키지 않는다.

따라서 나머지 4명의 학생은 11번 또는 12번 중 하나에 1명, 16번 또는 17번 중 하나에 1명이 앉고 14번과 23번에 1명씩 앉아야 한다.

11	12	~~13~~	14	~~15~~	16	17
		23	~~24~~	A		

이때 B는 규칙 (가)에 따라 11번 또는 12번 또는 14번에 앉아야 한다.

(i) B가 11번 또는 12번에 앉는 경우의 수는

$_2\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1\cdot3!=2\cdot2\cdot6=24$ └ B가 앉을 의자를 택하는 경우의 수 / 16번과 17번 중 하나를 택하는 경우의 수

(ii) B가 14번에 앉는 경우

나머지 3명의 학생이 의자에 앉는 경우의 수는

$_2\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1\cdot3!=2\cdot2\cdot6=24$ 11번과 12번, 16번과 17번 중 각각 하나를 택하는 경우의 수

(i), (ii)에서 A가 25번에 앉는 경우의 수는

$24+24=48$

4th 규칙에 따라 자리에 앉는 경우의 수를 구한다.

따라서 구하는 경우의 수는 $12+48=60$

답 ②

1191

1st 조건 (가)를 만족시키도록 9개의 자연수를 3개씩 나눈다.

$1+2+3+\cdots+9=45$이므로 각 행의 세 수의 합은

$\dfrac{45}{3}=15$

세 수의 합이 15가 되도록 자연수를 나누는 경우는

$(1, 5, 9)$, $(2, 6, 7)$, $(3, 4, 8)$

또는 $(1, 6, 8)$, $(2, 4, 9)$, $(3, 5, 7)$

2nd 각 경우에 따라 조건 (나), (다)를 만족시키는 경우의 수를 구한다.

(i) 각 행에 $(1, 5, 9)$, $(2, 6, 7)$, $(3, 4, 8)$을 적는 경우

조건 (나)에 의하여 2행에 $(1, 5, 9)$를 적고 1과 9는 자리를 바꿀 수 있으므로 그 경우의 수는 $2!=2$

1행과 3행 중 $(2, 6, 7)$, $(3, 4, 8)$을 적을 행을 택하는 경우의 수는 $2!=2$

이때 조건 (다)에 의하여 1행의 양 끝의 두 수의 합이 짝수이면 3행의 양 끝의 두 수의 합도 짝수이어야 한다. 즉 각 행의 가운데에는 홀수를 적고 양 끝의 짝수는 자리를 바꿀 수 있으므로 그 경우의 수는 $2!\cdot2!=4$

또 1행의 양 끝의 두 수의 합이 홀수이면 3행의 양 끝의 두 수의 합도 홀수이어야 한다. 즉 각 행의 가운데에 적을 짝수를 하나 택하고 양 끝의 두 수는 자리를 바꿀 수 있으므로 그 경우의 수는

$({}_2C_1\cdot2!)\cdot({}_2C_1\cdot2!)=4\cdot4=16$

따라서 적는 경우의 수는

$2\cdot2\cdot(4+16)=80$

(ii) 각 행에 (1, 6, 8), (2, 4, 9), (3, 5, 7)을 적는 경우도 (i)과 마찬가지이므로 그 경우의 수는 80

3rd 수를 적는 경우의 수를 구한다.

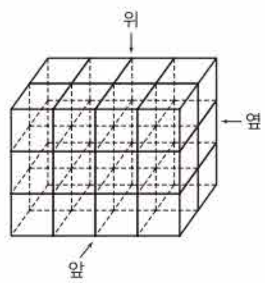
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$80+80=160$

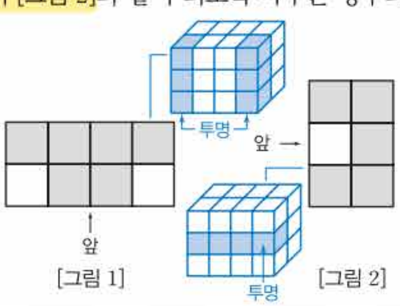
답 160

1192

다음 그림과 같이 크기가 같은 정육면체 모양의 투명한 유리 상자 24개로 직육면체를 만들었다.



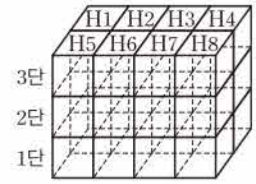
이 중에서 6개의 유리 상자를 같은 크기의 정육면체 모양의 검은색 유리 상자로 바꿀 때, ❶직육면체를 위에서 내려다본 모양이 [그림 1], 앞을 기준으로 ❷오른쪽 옆에서 본 모양이 [그림 2]와 같이 되도록 바꾸는 경우의 수를 구하시오.



❶에서 검은색이 아닌 부분은 높이로 쌓아 올린 세 상자가 모두 투명한 상자이다. ❷에서 검은색이 아닌 부분은 가로줄로 일렬로 놓인 네 상자가 모두 투명한 상자이다.
검은색으로 보이는 줄은 적어도 한 개의 상자가 검은색 상자로 바뀐 것이고, 상자가 6개 보이므로 [그림 1]을 기준으로 경우를 나누어 생각한다.

1st [그림 1]과 같은 모양이 되기 위해 바꾸어야 하는 정육면체를 파악한다.

오른쪽 그림과 같이 직육면체에서 높이로 쌓아 올린 세 개의 정육면체를 묶어서 각각 H1, H2, H3, ⋯, H8이라 하자.



6개의 유리 상자를 바꾸어 [그림 1]과 같은 모양이 되기 위해서는 H1, H2, H3, H4, H6, H7에서 정육면체를 각각 한 개씩 바꾸어야 한다.

2nd [그림 1], [그림 2]와 같은 모양이 되도록 정육면체를 바꾸는 경우의 수를 구한다.

(i) H1, H2, H3, H4에서 정육면체를 각각 한 개씩 바꿀 때, [그림 2]와 같은 모양이 되기 위해서는 어느 한 단에서는 2개를 바꾸어야 하고, 나머지 두 단에서는 한 개씩 바꾸어야 한다.

1, 2, 3단의 오른쪽이 모두 검은색으로 보이려면 각 단에서 적어도 한 개씩 바꾸어야 한다.

2개를 바꾸는 단을 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

그 단에서 바꾸는 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

나머지 두 단에서 한 개씩 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 이때의 경우의 수는

$3\cdot6\cdot2=36$

(ii) H6, H7에서 정육면체를 각각 한 개씩 바꿀 때, [그림 2]와 같은 모양이 되기 위해서는 1단과 3단에서 한 개씩 바꾸어야 하므로 그 경우의 수는 $2!=2$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$36\cdot2=72$

답 72

1193

1st 1명의 학생에게 쿠키 2개를 주는 경우의 수를 구한다.

(i) 쿠키 2개를 줄 학생을 정하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

나머지 3명의 학생에게 젤리를 각각 1개씩 주는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 1명의 학생에게 쿠키 2개를 주는 경우의 수는

$4\cdot6=24$ ⋯ ❶

2nd 1명의 학생에게 젤리 2개를 주는 경우의 수를 구한다.

(ii) 3개의 젤리 중에서 2개의 젤리를 고르는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

이 2개의 젤리를 줄 학생과 남은 한 개의 젤리를 줄 학생을 정하는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

젤리를 받지 못한 2명의 학생에게 쿠키를 각각 1개씩 주는 경우의 수는 1 ← 같은 종류의 쿠키이므로 1가지이다.

따라서 1명의 학생에게 젤리 2개를 주는 경우의 수는

$3\cdot12\cdot1=36$ ⋯ ❷

3rd 1명의 학생에게 젤리 1개와 쿠키 1개를 주는 경우의 수를 구한다.

(iii) 3개의 젤리를 각각 1개씩 줄 3명의 학생을 정하는 경우의 수는

${}_4P_3=24$

젤리를 주지 않은 학생에게 쿠키 1개를 주는 경우의 수는

1

젤리를 준 학생 3명 중 1명에게 남은 쿠키 1개를 주는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

따라서 1명의 학생에게 젤리 1개와 쿠키 1개를 주는 경우의 수는

$24\cdot1\cdot3=72$ ⋯ ❸

4th 나누어 주는 경우의 수를 구한다.

이상에서 구하는 경우의 수는

$24+36+72=132$ ⋯ ❹

답 132

채점 기준	비율
❶ 1명의 학생에게 쿠키 2개를 주는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 1명의 학생에게 젤리 2개를 주는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 1명의 학생에게 젤리 1개와 쿠키 1개를 주는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 나누어 주는 경우의 수를 구할 수 있다.	10 %

참고 아무것도 받지 못하는 학생이 없도록 5개를 4명에게 나누어 주므로 1명에게 2개를 주고 나머지 3명은 각각 1개씩 주어야 한다.

1194 **1st** c, e의 값을 구한다.

다섯 자리의 자연수 $abcde$가 5의 배수이므로

$e=5$

따라서 $c<d<5$이므로

$c=1$ 또는 $c=2$ 또는 $c=3$

2nd $c=1$일 때, 자연수의 개수를 구한다.

(i) $c=1$일 때,

d의 값이 될 수 있는 것은 2, 3, 4 중 1개이므로 $_3C_1=3$

a, b의 값이 될 수 있는 것은 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 중에서 d의 값을 제외한 6개 중 2개이고 $a>b$에서 a, b의 값은 큰 수부터 차례대로 정하면 되므로 $_6C_2=15$

$a>b>1$

따라서 자연수의 개수는 $3\cdot15=45$

3rd $c=2$일 때, 자연수의 개수를 구한다.

(ii) $c=2$일 때,

d의 값이 될 수 있는 것은 3, 4 중 1개이므로 $_2C_1=2$

a, b의 값이 될 수 있는 것은 3, 4, 6, 7, 8, 9 중에서 d의 값을 제외한 5개 중 2개이고 $a>b$에서 a, b의 값은 큰 수부터 차례대로 정하면 되므로 $_5C_2=10$

$a>b>2$

따라서 자연수의 개수는 $2\cdot10=20$

4th $c=3$일 때, 자연수의 개수를 구한다.

(iii) $c=3$일 때,

d의 값이 될 수 있는 것은 4의 1개이다.

a, b의 값이 될 수 있는 것은 6, 7, 8, 9의 4개 중 2개이고 $a>b$에서 a, b의 값은 큰 수부터 차례대로 정하면 되므로

$a>b>3$

$_4C_2=6$

따라서 자연수의 개수는 $1\cdot6=6$

5th 주어진 부등식을 만족시키는 자연수의 개수를 구한다.

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$45+20+6=71$

답 ③

1195 **1st** 3의 배수가 되는 경우를 파악한다.

3의 배수가 되려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

0부터 8까지의 9개의 정수를 3으로 나누었을 때 나머지가 0, 1, 2인 수로 나누어 생각하면 세 수의 합이 3의 배수인 경우는 다음과 같다.

(i) 나머지가 모두 같은 세 수의 합

(ii) 나머지가 모두 다른 세 수의 합

2nd **1st**의 경우에 따라 3의 배수의 개수를 구한다.

0부터 8까지의 9개의 정수 중 3으로 나누었을 때

나머지가 0인 수는 0, 3, 6 ⋯⋯ ㉠

나머지가 1인 수는 1, 4, 7 ⋯⋯ ㉡

나머지가 2인 수는 2, 5, 8 ⋯⋯ ㉢

이므로 만들 수 있는 3의 배수의 개수는 다음과 같다.

(i) ㉠의 3개로만 만드는 경우의 수는

$2\cdot{}_2P_1=2\cdot2=4$

백의 자리에는 3 또는 6이 올 수 있다.

㉡의 3개로만 만드는 경우의 수는

$3!=6$

㉢의 3개로만 만드는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 3의 배수의 개수는

$4+6+6=16$

(ii) ㉠, ㉡, ㉢ 중에서 각각 한 개씩 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

$_3C_1\cdot{}_3C_1\cdot{}_3C_1\cdot3!=3\cdot3\cdot3\cdot6$

$=162$

이때 백의 자리에 0이 오는 경우의 수는

$1\cdot{}_3C_1\cdot{}_3C_1\cdot2!=1\cdot3\cdot3\cdot2=18$

이므로 3의 배수의 개수는

$162-18=144$

3rd 3의 배수의 개수를 구한다.

(i), (ii)에서 구하는 3의 배수의 개수는

$16+144=160$

답 160

참고 나머지가 0인 세 수를

$3k$, $3l$, $3m$ (k, l, m은 음이 아닌 정수)

이라 하면 세 수의 합은 $3(k+l+m)$이므로 3의 배수이다.

나머지가 1인 세 수를

$3k+1$, $3l+1$, $3m+1$ (k, l, m은 음이 아닌 정수)

이라 하면 세 수의 합은 $3(k+l+m+1)$이므로 3의 배수이다.

나머지가 2인 세 수를

$3k+2$, $3l+2$, $3m+2$ (k, l, m은 음이 아닌 정수)

라 하면 세 수의 합은 $3(k+l+m+2)$이므로 3의 배수이다.

나머지가 각각 0, 1, 2인 세 수를

$3k$, $3l+1$, $3m+2$ (k, l, m은 음이 아닌 정수)

라 하면 세 수의 합은 $3(k+l+m+1)$이므로 3의 배수이다.

1196 **1st** 민아, 민아의 짝과 여학생 2명이 같은 레일바이크에 타는 경우의 수를 구한다.

7명을 4명, 3명으로 나누는데 조건 (나)에 의하여 민아는 4명에 포함되어야 한다.

(i) {(민아, 여), (여, 여)}, {남, 남, 남}으로 나누는 경우

여학생 4명이 한 레일바이크에 탑승하는 경우의 수는

$4!=24$

남학생 3명이 한 레일바이크에 탑승하는 경우의 수는

$_4P_3=24$

따라서 서로 다른 두 레일바이크에 탑승하는 경우의 수는

$(24\cdot24)\cdot2!=1152$

2nd 민아, 민아의 짝과 남학생 2명이 같은 레일바이크에 타는 경우의 수를 구한다.

(ii) {(민아, 여), (남, 남)}, {(여, 여), 남}으로 나누는 경우
민아 옆에 앉을 여학생을 한 명 택하고, 남학생 3명 중에서 2명을 택하여 한 레일바이크에 탑승하는 경우의 수는

$${}_3C_1 \cdot {}_3C_2 \cdot \overbrace{2! \cdot 2!}^{\text{짝끼리 자리를 바꿔 앉는 경우의 수}} \cdot \underbrace{2!}_{\text{앞자리와 뒷자리로 바꿔 앉는 경우의 수}} = 72$$

남은 학생들이 한 레일바이크에 탑승하는 경우의 수는

$$\overbrace{2!}^{\text{여학생끼리 자리를 바꿔 앉는 경우의 수}} \cdot \underbrace{{}_2C_1 \cdot 2!}_{\text{남학생이 앉을 자리를 택하는 경우의 수}} = 8$$

따라서 서로 다른 두 레일바이크에 탑승하는 경우의 수는

$(72 \cdot 8) \cdot 2! = 1152$

3rd 레일바이크에 탑승하는 경우의 수를 구한다.

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$1152 + 1152 = 2304$ 답 2304

다른 풀이 민아가 탑승하는 경우의 수는 두 레일바이크 중에서 한 레일바이크를 택하고, 택한 레일바이크의 네 자리 중에서 한 자리를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_2C_1 \cdot {}_4C_1 = 2 \cdot 4 = 8$

민아가 탑승한 레일바이크를 A, 다른 레일바이크를 B라 하면 나머지 여학생 3명, 남학생 3명이 탑승하는 경우는

(i) 3명의 여학생이 모두 A에 탑승하는 경우
민아가 앉고 남은 3자리에 여학생 3명이 앉는 경우의 수는

$3! = 6$

남학생 3명이 B에 탑승하는 경우의 수는

${}_4P_3 = 24$

따라서 이때의 경우의 수는 $6 \cdot 24 = 144$

(ii) 1명의 여학생이 A에, 2명의 여학생이 B에 탑승하는 경우
민아 옆에 앉을 여학생을 택하는 경우의 수는

${}_3C_1 = 3$

나머지 2명의 여학생이 B에 탑승하여 옆자리에 앉는 경우의 수는 $2! \cdot 2! = 4$

남학생 3명 중에서 2명은 A에, 1명은 B에 탑승하므로
B에 1명이 탑승하는 경우의 수는 ${}_3C_1 \cdot {}_2C_1 = 3 \cdot 2 = 6$
A에 나머지 2명이 탑승하는 경우의 수는 $2! = 2$
따라서 이때의 경우의 수는

$3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2 = 144$

(i), (ii)에서 여학생 3명, 남학생 3명이 탑승하는 경우의 수는

$144 + 144 = 288$

따라서 구하는 경우의 수는

$8 \cdot 288 = 2304$

1197 1st 사각형의 꼭짓점이 될 수 있는 4개의 점을 택하는 경우의 수를 구한다.

주어진 삼각형을 포함하는 사각형의 네 꼭짓점은 다음과 같이 택하면 된다.

(i) 원점 (0, 0)
(ii) x축 위의 점 (4, 0), (8, 0) 중에서 한 점
(iii) y축 위의 점 (0, 4), (0, 8) 중에서 한 점
(iv) 제1사분면 위의 점 (4, 4), (4, 8), (8, 4), (8, 8) 중에서 한 점

이상에서 조건을 만족시키는 사각형의 꼭짓점이 될 수 있는 4개의 점을 택하는 경우의 수는

$1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_4C_1 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$

2nd 사각형의 개수를 구한다.

그런데 네 점 (0, 0), (8, 0), (4, 4), (0, 8)을 택하는 경우는 사각형을 만들 수 없으므로 구하는 사각형의 개수는

$16 - 1 = 15$ 답 ②

1198 1st 3개의 정류장 중에서 2개의 정류장을 택하는 경우의 수를 구한다.

3개의 정류장 A, B, C 중에서 승객이 내리는 2개의 정류장을 택하는 경우의 수는

${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$ ··· ❶

2nd 승객을 2개의 조로 나누는 경우의 수를 구한다.

승객 6명을 2개의 조로 나눌 때, 각 조의 인원수는

1, 5 또는 2, 4 또는 3, 3

(i) 승객을 1명, 5명으로 나누는 경우의 수는

${}_6C_1 \cdot {}_5C_5 = 6 \cdot 1 = 6$

(ii) 승객을 2명, 4명으로 나누는 경우의 수는

${}_6C_2 \cdot {}_4C_4 = 15 \cdot 1 = 15$

(iii) 승객을 3명, 3명으로 나누는 경우의 수는

${}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \dfrac{1}{2!} = 20 \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{2} = 10$

이상에서 승객을 2개의 조로 나누는 경우의 수는

$6 + 15 + 10 = 31$ ··· ❷

3rd 2개의 조를 2개의 정류장에 분배하는 경우의 수를 구한다.

2개의 조를 2개의 정류장에 분배하는 경우의 수는

$2! = 2$ ··· ❸

4th 2개의 정류장에 모든 승객이 내리는 경우의 수를 구한다.

따라서 구하는 경우의 수는

$3 \cdot 31 \cdot 2 = 186$ ··· ❹

답 186

채점 기준	비율
❶ 3개의 정류장 중에서 2개의 정류장을 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 승객을 2개의 조로 나누는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 2개의 조를 2개의 정류장에 분배하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
❹ 2개의 정류장에 모든 승객이 내리는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

1199 1st 조건 (가)를 만족시키도록 하는 세 팀의 인원수를 구한다.

조건 (가)에 의하여 6명의 학생을 세 팀으로 나눌 때, 각 팀의 인원수는

1, 2, 3 또는 2, 2, 2 ··· ❶

2nd 각 팀을 1명, 2명, 3명으로 나누어 대진표를 작성하는 경우의 수를 구한다.

(i) 1명, 2명, 3명으로 나누는 경우의 수는

${}_6C_1 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 = 6 \cdot 10 \cdot 1 = 60$

세 팀을 A, B, C에 배정하는 경우의 수는

$3! = 6$

이때 조건 (나)에 의하여 3명인 팀의 학생이 각자 다른 팀의 학생과 시합을 해야 하므로 그 경우의 수는 나머지 팀의 3명을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다. 즉

$3!=6$

따라서 대진표를 작성하는 경우의 수는

$60\cdot6\cdot6=2160$ ⋯ ❷

3rd **각 팀을 2명, 2명, 2명으로 나누어 대진표를 작성하는 경우의 수를 구한다.**

(ii) 2명, 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!}=15\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{6}=15$$

세 팀을 A, B, C에 배정하는 경우의 수는

$3!=6$

이때 조건 (나)에 의하여 A팀의 2명이 각자 B, C팀에서 한 명씩과 시합하고, B, C팀에서 각각 남은 한 명끼리 시합을 해야 하므로 그 경우의 수는 B, C팀에서 한 명씩 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다. 즉

${}_2C_1\cdot{}_2C_1\cdot2!=2\cdot2\cdot2=8$

따라서 대진표를 작성하는 경우의 수는

$15\cdot6\cdot8=720$ ⋯ ❸

4th **대진표를 작성하는 경우의 수를 구한다.**

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$2160+720=2880$ ⋯ ❹

답 2880

채점 기준	비율
❶ 세 팀의 인원수를 구할 수 있다.	10 %
❷ 각 팀을 1명, 2명, 3명으로 나누어 대진표를 작성하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 각 팀을 2명, 2명, 2명으로 나누어 대진표를 작성하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❹ 대진표를 작성하는 경우의 수를 구할 수 있다.	10 %

V. 행렬

10 행렬과 그 연산

1200 답 1×3 행렬

1201 답 3×2 행렬

1202 답 3×3 행렬

1203 답 4×1 행렬

1204 (2) $a_{13}=0$, $a_{22}=7$, $a_{31}=5$, $a_{33}=-4$이므로

$a_{13}+a_{22}+a_{31}+a_{33}=8$

답 (1) 3, -1 (2) 8

1205 $a_{11}=1-3\cdot1=-2$, $a_{12}=1-3\cdot2=-5$,
$a_{21}=2-3\cdot1=-1$, $a_{22}=2-3\cdot2=-4$

$\therefore A=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ -1 & -4\end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix}-2 & -5\\ -1 & -4\end{pmatrix}$

1206 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x-3=2$, $y+2=-1$

$\therefore x=5,\ y=-3$

답 $x=5$, $y=-3$

1207 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=2$, $2x-y=7$

$\therefore x=3,\ y=-1$

답 $x=3$, $y=-1$

1208 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=-1$, $-x+2y=-5$

$\therefore x=1,\ y=-2$

답 $x=1$, $y=-2$

1209 $\begin{pmatrix}4\\ -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-1\\ -2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 0\end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix}3\\ 0\end{pmatrix}$

1210 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+5 & 2+3\\ 3-1 & 4+2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}6 & 5\\ 2 & 6\end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix}6 & 5\\ 2 & 6\end{pmatrix}$

1211 $\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1 & 2-3\\ 3-0 & -2+6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix}5 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

1212 $\begin{pmatrix}4 & -2 & 3\\ 1 & 7 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ -5 & 0 & 6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4-2 & -2-3 & 3-4\\ 1+5 & 7-0 & 5-6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2 & -5 & -1\\ 6 & 7 & -1\end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix}2 & -5 & -1\\ 6 & 7 & -1\end{pmatrix}$

1213 (1) $A+B=\begin{pmatrix}-1&2\\3&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&-3\\-2&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1\\1&7\end{pmatrix}$

(2) $A-C=\begin{pmatrix}-1&2\\3&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&4\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-2\\0&1\end{pmatrix}$

(3) $A-(B-C)=\begin{pmatrix}-1&2\\3&0\end{pmatrix}-\left\{\begin{pmatrix}5&-3\\-2&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&4\\3&-1\end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix}-1&2\\3&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&-7\\-5&8\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-5&9\\8&-8\end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix}4&-1\\1&7\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}-2&-2\\0&1\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}-5&9\\8&-8\end{pmatrix}$

1214 $X=\begin{pmatrix}2&-4\\0&3\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}6&0\\2&-3\end{pmatrix}}_{\text{좌변에서 우변으로 이항한다.}}=\begin{pmatrix}8&-4\\2&0\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}8&-4\\2&0\end{pmatrix}$

1215 $X=\begin{pmatrix}-8&3\\0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5&1\\5&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-3&2\\-5&-3\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}-3&2\\-5&-3\end{pmatrix}$

1216 $\underline{A+X=O}$에서 ← 행렬 A를 우변으로 이항한다.

$X=O-A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&7\\0&3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2&-7\\0&-3\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}2&-7\\0&-3\end{pmatrix}$

1217 $A+X=B$에서

$X=B-A=\begin{pmatrix}1&-2\\3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&2\\4&-1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2&-4\\-1&5\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}-2&-4\\-1&5\end{pmatrix}$

1218 (1) $3A=3\begin{pmatrix}3&-2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot3&3\cdot(-2)\\3\cdot1&3\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-6\\3&0\end{pmatrix}$

(2) $-2A=-2\begin{pmatrix}3&-2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot3&-2\cdot(-2)\\-2\cdot1&-2\cdot0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-6&4\\-2&0\end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix}9&-6\\3&0\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}-6&4\\-2&0\end{pmatrix}$

1219 (1) $-A+8B=-\begin{pmatrix}6&-2\\3&0\end{pmatrix}+8\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-6&2\\-3&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&8\\-8&16\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-6&10\\-11&16\end{pmatrix}$

(2) $2(A+B)-B=2A+2B-B$

$=2A+B$

$=2\begin{pmatrix}6&-2\\3&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}12&-4\\6&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}12&-3\\5&2\end{pmatrix}$

(3) $3(A+B)-2(A-B)=3A+3B-2A+2B$

$=A+5B$

$=\begin{pmatrix}6&-2\\3&0\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}6&-2\\3&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&5\\-5&10\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}6&3\\-2&10\end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix}-6&10\\-11&16\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}12&-3\\5&2\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}6&3\\-2&10\end{pmatrix}$

1220 $\begin{pmatrix}1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}=(1\cdot6+4\cdot5)=(26)$ 답 (26)

1221 $\begin{pmatrix}2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=(2\cdot1+3\cdot0\quad 2\cdot0+3\cdot1)$

$=(2\quad 3)$ 답 $(2\quad 3)$

1222 $\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}(5\quad 4)=\begin{pmatrix}-3\cdot5&-3\cdot4\\7\cdot5&7\cdot4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-15&-12\\35&28\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}-15&-12\\35&28\end{pmatrix}$

1223 $\begin{pmatrix}4&1\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot2+1\cdot(-1)\\-2\cdot2+3\cdot(-1)\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}7\\-7\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}7\\-7\end{pmatrix}$

1224 $\begin{pmatrix}3&-1\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot2+(-1)\cdot0&3\cdot5+(-1)\cdot2\\2\cdot2+4\cdot0&2\cdot5+4\cdot2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}6&13\\4&18\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}6&13\\4&18\end{pmatrix}$

1225 $\begin{pmatrix}-1&3\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\2&-4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1\cdot2+3\cdot2&-1\cdot1+3\cdot(-4)\\2\cdot2+1\cdot2&2\cdot1+1\cdot(-4)\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4&-13\\6&-2\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}4&-13\\6&-2\end{pmatrix}$

1226 (1) $AB=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1\cdot5+2\cdot2 & -1\cdot(-1)+2\cdot(-2) \\ 0\cdot5+4\cdot2 & 0\cdot(-1)+4\cdot(-2) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$

(2) $BA=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 5\cdot(-1)+(-1)\cdot0 & 5\cdot2+(-1)\cdot4 \\ 2\cdot(-1)+(-2)\cdot0 & 2\cdot2+(-2)\cdot4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

(3) $A+B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$이므로

$(A+B)^2=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4\cdot4+1\cdot2 & 4\cdot1+1\cdot2 \\ 2\cdot4+2\cdot2 & 2\cdot1+2\cdot2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$

(4) $A-B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$이므로

$(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4\cdot(-6)+1\cdot(-2) & 4\cdot3+1\cdot6 \\ 2\cdot(-6)+2\cdot(-2) & 2\cdot3+2\cdot6 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -26 & 18 \\ -16 & 18 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -26 & 18 \\ -16 & 18 \end{pmatrix}$

1227 행렬의 곱 PQ를 할 수 있으려면 P의 열의 개수와 Q의 행의 개수가 같아야 하므로 보기에서 곱셈을 할 수 있는 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ이다.

답 ㄴ, ㄹ, ㅁ

1228 (1) $A^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1\cdot1+(-1)\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+(-1)\cdot0 \\ -1\cdot1+0\cdot(-1) & -1\cdot(-1)+0\cdot0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A^2A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2\cdot1+(-1)\cdot(-1) & 2\cdot(-1)+(-1)\cdot0 \\ -1\cdot1+1\cdot(-1) & -1\cdot(-1)+1\cdot0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$AA^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1\cdot2+(-1)\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+(-1)\cdot1 \\ -1\cdot2+0\cdot(-1) & -1\cdot(-1)+0\cdot1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore A^2A=AA^2$

답 풀이 참조

1229 (1) $AB=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore AB\neq BA$

(2) $A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$이므로

$(A+B)^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -12 & 3 \end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$,

$B^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$이므로

$A^2+2AB+B^2$

$=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -4 & 10 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore (A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$

(3) $(AB)C=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A(BC)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore (AB)C=A(BC)$

(4) $A(B+C)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$AB+AC=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$\therefore A(B+C)=AB+AC$

답 풀이 참조

1230 (1) $-E=-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(2) $E^3=E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $E^{100}+(-E)^{100}=E+E=2E=2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

유형 01 행렬의 (i, j) 성분

집중 공략 본책 178쪽

행렬의 성분의 식에서 i, j에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하여 (i, j) 성분을 구한다.

1231 $a_{11}=1\cdot1+1-2=0$, $a_{12}=1\cdot2+2-2=2$,
$a_{21}=2\cdot1+1-2=1$, $a_{22}=2\cdot2+2-2=4$,
$a_{31}=3\cdot1+1-2=2$, $a_{32}=3\cdot2+2-2=6$
따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$
$0+2+1+4+2+6=15$ 답 ②

1232 $\underset{2>1}{a_{21}}=2\cdot2-1=3$, $\underset{2=2}{a_{22}}=2^2+1=5$, $\underset{2<3}{a_{23}}=\underset{3>2}{a_{32}}=2\cdot3-1=5$ ··· ❶

따라서 행렬 A의 제2행의 모든 성분의 곱은
$3\cdot5\cdot5=75$ ··· ❷

답 75

채점 기준	비율
❶ A의 제2행의 모든 성분을 구할 수 있다.	70 %
❷ A의 제2행의 모든 성분의 곱을 구할 수 있다.	30 %

1233 (i) $i=j$일 때,
$a_{11}=-a_{11}$에서 $a_{11}=0$
$a_{22}=-a_{22}$에서 $a_{22}=0$
(ii) $i\neq j$일 때, $a_{12}=-a_{21}$
(i), (ii)에서 행렬 A는 $\begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$ (k는 상수) 꼴이어야 하므로 행렬 A가 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

1234 $b_{11}=a_{11}=(-1)+3\cdot1+5=7$,
$b_{12}=a_{21}=(-1)^2+3\cdot1+5=9$,
$b_{21}=a_{12}=(-1)+3\cdot2+5=10$,
$b_{22}=a_{22}=(-1)^2+3\cdot2+5=12$
$\therefore B=\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$ 답 ③

1235 $a_{11}=0$, $a_{12}=1$, $a_{13}=0$, $a_{21}=2$, $a_{22}=0$, $a_{23}=2$,
$a_{31}=1$, $a_{32}=0$, $a_{33}=1$
$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 답 ②

1236 $|f(1)|=|1^2-2\cdot1-2|=3$,
$|f(2)|=|2^2-2\cdot2-2|=2$, $|f(3)|=|3^2-2\cdot3-2|=1$이므로
$a_{11}=0$, $a_{12}=0$, $a_{13}=1$, $a_{21}=0$, $a_{22}=1$, $a_{23}=0$,
$a_{31}=1$, $a_{32}=0$, $a_{33}=0$
$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

유형 02 두 행렬이 서로 같을 조건

본책 179쪽

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$에 대하여
$A=B \Rightarrow \begin{cases} a_{11}=b_{11},\ a_{12}=b_{12} \\ a_{21}=b_{21},\ a_{22}=b_{22} \end{cases}$

1237 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$a=x+y$ …… ㉠, $x-3y=6$ …… ㉡
$3x+2y=7$ …… ㉢, $b=x-y$ …… ㉣
㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$x=3$, $y=-1$
이것을 ㉠, ㉣에 각각 대입하면
$a=2$, $b=4$
$\therefore ax+by=2\cdot3+4\cdot(-1)=2$ 답 ④

1238 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$\alpha=5-\beta$, $\beta=\dfrac{5}{\alpha}$
이므로 $\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=5$
$\therefore \dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$
$=\dfrac{5^2-2\cdot5}{5}=3$ 답 ③

1239 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$a^3=10-6\sqrt{3}$, $ab=k$, $a+b=2$, $b^3=10+6\sqrt{3}$
$a^3+b^3=(10-6\sqrt{3})+(10+6\sqrt{3})=20$이므로
$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
에서 $20=2^3-3\cdot k\cdot2$
$6k=-12$ $\therefore k=-2$ 답 -2

1240 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$c^2-ac=4$ …… ㉠, $6=2a$ …… ㉡
$4c=2c^2+3b$ …… ㉢, $0=b+2$ …… ㉣
㉡, ㉣에서 $a=3$, $b=-2$ ··· ❶
(i) $a=3$을 ㉠에 대입하면 $c^2-3c=4$
$c^2-3c-4=0$, $(c+1)(c-4)=0$
$\therefore c=-1$ 또는 $c=4$
(ii) $b=-2$를 ㉢에 대입하면 $4c=2c^2-6$
$c^2-2c-3=0$, $(c+1)(c-3)=0$
$\therefore c=-1$ 또는 $c=3$

(i), (ii)에서 $c=-1$ ⋯ ❷

$\therefore a^2-b^2-c^2=3^2-(-2)^2-(-1)^2=4$ ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ c의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a^2-b^2-c^2$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 03 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배

집중 공략 본책 179쪽

(1) 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$와 실수 k에 대하여

① $A\pm B=\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} \end{pmatrix}$ (복호동순)

② $kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$

(2) 행렬을 포함한 식이 주어지면 먼저 식을 간단히 한 후 행렬을 대입한다.

1241 $3\left(\frac{1}{2}P-Q\right)-(P-4Q)$

$=\frac{3}{2}P-3Q-P+4Q=\frac{1}{2}P+Q$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

답 ③

1242 $4(A-X)=5(B-X)$에서

$4A-4X=5B-5X$

$\therefore X=5B-4A$

$=5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 곱은

$-3\cdot4\cdot2\cdot1=-24$

답 ①

1243 $a_{11}=1^2-2\cdot1=-1$, $a_{12}=1^2-2\cdot2=-3$,

$a_{21}=2^2-2\cdot1=2$, $a_{22}=2^2-2\cdot2=0$,

$a_{31}=3^2-2\cdot1=7$, $a_{32}=3^2-2\cdot2=5$

$\therefore A=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

$c_{11}=1-1+2=2$, $c_{12}=1-2+2=1$,

$c_{21}=2-1+2=3$, $c_{22}=2-2+2=2$,

$c_{31}=3-1+2=4$, $c_{32}=3-2+2=3$

$\therefore B-3A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}+3A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 6 & 0 \\ 21 & 15 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 9 & 2 \\ 25 & 18 \end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 9 & 2 \\ 25 & 18 \end{pmatrix}$

1244 $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & a \\ c & -c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ b & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & c \\ 1 & b \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} a+b & 2+a \\ c & b-c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4-c \\ b-1 & 5-b \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=3$ ⋯⋯ ㉠, $2+a=4-c$ ⋯⋯ ㉡

$c=b-1$ ⋯⋯ ㉢, $b-c=5-b$ ⋯⋯ ㉣

㉣에서 $c=2b-5$이므로 이 식과 ㉢을 연립하여 풀면

$b=4$, $c=3$

$b=4$를 ㉠에 대입하면 — $c=3$을 ㉡에 대입하여 풀어도 결과는 같다.

$a+4=3$ $\therefore a=-1$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(-1)^2+4^2+3^2=26$

답 ③

1245 $xA+yB=C$에서

$x\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2x+3y & x+4y \\ 2y & x-y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2x+3y=-1$, $x+4y=2$, $2y=2$, $x-y=-3$

$2y=2$에서 $y=1$

$y=1$을 $x-y=-3$에 대입하면 — 나머지 세 식 중 계산이 간단한 식에 대입한다.

$x-1=-3$ $\therefore x=-2$

$\therefore x+y=-1$

답 ②

1246 직선 $y=-3x+7$과 이차함수 $y=x^2-5x-8$의 그래프의 두 교점의 x좌표는 $-3x+7=x^2-5x-8$에서

$x^2-2x-15=0$, $(x+3)(x-5)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=5$

즉 두 교점의 좌표는

$(-3, 16)$, $(5, -8)$

$\therefore a=5$, $b=-8$, $c=-3$, $d=16$ ($\because a>0$) ⋯ ❶

직선 $y=-3x+7$과 이차함수 $y=2x^2-15x+7$의 그래프의 두 교점의 x좌표는 $-3x+7=2x^2-15x+7$에서

$x^2-6x=0$, $x(x-6)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=6$

즉 두 교점의 좌표는

$(0, 7)$, $(6, -11)$

$\therefore e=6$, $f=-11$, $g=0$, $h=7$ ($\because e>0$) ⋯ ❷

$A=\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 16 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$이므로

$$\begin{aligned} 3A-(A-B)&=3A-A+B \\ &=2A+B \\ &=2\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 16 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 10 & -16 \\ 12 & -22 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 16 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 12 & -15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$7+0+12+(-15)=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ a, b, c, d의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ e, f, g, h의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $3A-(A-B)$의 모든 성분의 합을 구할 수 있다.	40 %

유형 04 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배 ; 행렬에 대한 두 등식이 주어진 경우

본책 180쪽

두 행렬 X, Y에 대한 두 등식이 주어질 때
➡ X, Y에 대한 방정식으로 생각하고 연립하여 풀어 X, Y를 구한다.

1247 $X+2Y=A$ ······ ㉠

$2X-Y=B$ ······ ㉡

㉠+㉡×2를 하면

$$\begin{aligned} 5X&=A+2B \\ &=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -10 & 15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -10 & 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$X=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$을 ㉡에 대입하면

$$2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}-Y=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore Y=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

따라서 $X+Y=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$이므로

$p=2$, $q=0$, $r=-1$, $s=4$

$\therefore ps+qr=2\cdot 4+0\cdot(-1)=8$

답 8

1248 $3X+Y=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ······ ㉠

$X-Y=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ······ ㉡

㉠−㉡×3을 하면

$$\begin{aligned} 4Y&=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore 2Y=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

답 ①

1249 $2A+3B=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -6 & 14 \end{pmatrix}$ ······ ㉠

$-3A+2B=\begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$ ······ ㉡

㉠×2−㉡×3을 하면

$$\begin{aligned} 13A&=2\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -6 & 14 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 2 & 16 \\ -12 & 28 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -24 & 3 \\ 27 & 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 26 & 13 \\ -39 & 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\therefore A=\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 26 & 13 \\ -39 & 13 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ ··· ❶

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$을 ㉠에 대입하면

$$2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}+3B=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -6 & 14 \end{pmatrix}$$

$$3B=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -6 & 14 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$\therefore B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ··· ❷

$\therefore A+B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ ··· ❸

답 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

채점 기준	비율
❶ A를 구할 수 있다.	40 %
❷ B를 구할 수 있다.	40 %
❸ $A+B$를 구할 수 있다.	20 %

유형 05 행렬의 곱셈

집중공략 본책 181쪽

① $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by & au+bv \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by & au+bv \\ cx+dy & cu+dv \end{pmatrix}$

1250 $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ a \end{pmatrix}$에서

$$\begin{pmatrix} 2a+ab \\ 5a-b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2a \\ -1+4a \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2a+ab=1+2a,\ 5a-b=-1+4a$

이므로 $ab=1,\ a-b=-1$

$\therefore a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$=(-1)^3+3\cdot1\cdot(-1)=-4$ 답 ①

1251 $AB=O$에서 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ x & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & y\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0 & y+2\\ 6x-18 & xy+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$y+2=0,\ 6x-18=0,\ xy+6=0$

따라서 $x=3,\ y=-2$이므로 $x+y=1$ 답 1

1252 $AB=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 6\\ 11 & 2\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12 & 16\\ -2 & 9\end{pmatrix}$

$\therefore AB-BA=\begin{pmatrix}-5 & 6\\ 11 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-12 & 16\\ -2 & 9\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}7 & -10\\ 13 & -7\end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$7+(-10)+13+(-7)=3$ 답 ④

1253 $A\begin{pmatrix}f(a)\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(a)\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}4f(a)\\ -f(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$4f(a)=0,\ -f(a)=0$

$\therefore f(a)=0$

이때 주어진 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 $-3,\ 5$이므로 $f(a)=0$을 만족시키는 a의 값은

$-3,\ 5$

따라서 구하는 합은 $-3+5=2$ 답 2

1254 $ABC=(x\ \ -1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ -8 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ -1\end{pmatrix}$

$=(x+8\ \ -7)\begin{pmatrix}x\\ -1\end{pmatrix}$

$=(x^2+8x+7)$ ⋯ ❶

$x^2+8x+7=(x+4)^2-9$이므로 $x=-4$일 때 최솟값 -9를 갖는다.

따라서 $a=-4,\ b=-9$이므로

$a-b=5$ ⋯ ❷

답 5

채점 기준	비율
❶ ABC를 구할 수 있다.	60 %
❷ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	40 %

SSEN 특강 이차함수의 최대·최소

이차함수 $y=a(x-m)^2+n$에서

① $a>0$ ➡ $x=m$일 때 최솟값은 n, 최댓값은 없다.

② $a<0$ ➡ $x=m$일 때 최댓값은 n, 최솟값은 없다.

유형 06 행렬의 거듭제곱; A^2 구하기

본책 182쪽

행렬 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$이면

➡ $A^2=AA=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix}$

1255 $A=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 1 & \beta\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 1 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 1 & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2+1 & \alpha+\beta\\ \alpha+\beta & 1+\beta^2\end{pmatrix}$

이차방정식 $x^2+4x+2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4,\ \alpha\beta=2$

따라서 행렬 A^2의 모든 성분의 합은

$\alpha^2+\beta^2+2(\alpha+\beta)+2$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+2$

$=(-4)^2-2\cdot2+2\cdot(-4)+2=6$ 답 ④

1256 $A^2=\begin{pmatrix}-1 & a\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & a\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2a & 0\\ 0 & 2a+1\end{pmatrix}$

이때 행렬 A^2의 모든 성분의 합이 10이므로

$4a+2=10$ $\therefore a=2$ 답 ⑤

1257 $A+2B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ ⋯⋯ ㉠

$A-2B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ ⋯⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

$\therefore A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ ⋯ ❶

$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$를 ㉠에 대입하면

$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}+2B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

$\therefore 2B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ ⋯ ❷

$\therefore A^2-4B^2=A^2-(2B)^2$

$=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 0\\ 6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -6 & 3\end{pmatrix}$ ⋯ ❸

따라서 행렬 A^2-4B^2의 $(2,\ 1)$ 성분은 -6이다. ⋯ ❹

답 -6

채점 기준	비율
❶ A를 구할 수 있다.	30 %
❷ $2B$를 구할 수 있다.	30 %
❸ A^2-4B^2을 구할 수 있다.	30 %
❹ A^2-4B^2의 $(2, 1)$ 성분을 구할 수 있다.	10 %

유형 07 행렬의 거듭제곱; 규칙 찾기

본책 182쪽

정사각행렬 A에 대하여 A^2, A^3, A^4, …을 차례대로 구하여 규칙을 찾는다.

1258 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\cdot2\\0 & 1\end{pmatrix}$$

규칙을 찾기 위해서는 성분의 값을 구하는 것보다 계산식으로 나타내는 것이 편리하다.

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & -2\cdot2\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\cdot3\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1 & -2\cdot3\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\cdot4\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\therefore A^n=\begin{pmatrix}1 & -2n\\0 & 1\end{pmatrix}$$

따라서 $-2n=-128$이므로

$n=64$ 답 64

1259 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\3\cdot2 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 0\\3\cdot2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\3\cdot3 & 1\end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\therefore A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\3n & 1\end{pmatrix}$$

따라서 $A^8=\begin{pmatrix}1 & 0\\3\cdot8 & 1\end{pmatrix}$이므로

$a=3\cdot8=24$ 답 24

1260 이차방정식 $x^2+x-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-1$

$\therefore \alpha+\beta+1=0$, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=1$

$$\therefore X=\begin{pmatrix}\alpha+\beta+1 & 0\\1 & \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} \quad \cdots ❶$$

$X^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$이므로

$$X=X^2=X^3=\cdots=X^{10}=\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} \quad \cdots ❷$$

$$\therefore X+X^2+X^3+\cdots+X^{10}=10X=10\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0\\10 & 10\end{pmatrix} \quad \cdots ❸$$

답 $\begin{pmatrix}0 & 0\\10 & 10\end{pmatrix}$

채점 기준	비율
❶ X를 구할 수 있다.	40 %
❷ $X=X^2=X^3=\cdots=X^{10}$임을 알 수 있다.	40 %
❸ $X+X^2+X^3+\cdots+X^{10}$을 구할 수 있다.	20 %

1261 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\3 & 6\end{pmatrix}=3A$$

$$A^4=(A^2)^2=(3A)^2=3^2A^2=3^2\cdot3A=3^3A$$

$$A^8=(A^4)^2=(3^3A)^2=3^6A^2=3^6\cdot3A=3^7A$$

$$A^{16}=(A^8)^2=(3^7A)^2=3^{14}A^2=3^{14}\cdot3A=3^{15}A$$

$$=3^{15}\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A^{16}의 모든 성분의 합은

$3^{15}(1+2+1+2)=6\cdot3^{15}=2\cdot3^{16}$

즉 $a=2$, $k=16$이므로

$a+k=18$ 답 ③

유형 08 행렬의 거듭제곱; $A^n=E$의 이용

집중 공략 본책 183쪽

정사각행렬 A에 대하여 A^2, A^3, A^4, …을 차례대로 구하여 $A^n=E$ 또는 $A^n=-E$를 만족시키는 자연수 n의 값을 구한다.

➡ $A^n=E$이면

$A^{n+1}=A$, $A^{n+2}=A^2$, …, $A^{2n}=E$

1262 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & -1\end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}=-E$$

$$A^3=A^2A=(-E)A=-A$$

$$A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E$$

$$\therefore A^{2025}=(A^4)^{506}A=EA=A=\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & -1\end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$1+2+(-1)+(-1)=1$ 답 ④

SSEN 특강

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$와 $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$에 대하여

$$AE=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=A,$$

$$EA=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=A$$

이므로 $AE=EA=A$

1263 $A=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -1\\ 3 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -1\\ 3 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -1\\ 3 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-E$$

$$A^3=A^2A=(-E)A=-A$$

$$A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E$$

따라서 $A^n=E$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 4이다. 답 4

1264 $a_{11}=|1-1|=0$, $a_{12}=|1-2|=1$,
$a_{21}=|2-1|=1$, $a_{22}=|2-2|=0$

즉 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$이므로

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

따라서 n이 자연수일 때,

$$A^{2n-1}=A,\ A^{2n}=E$$

이므로

$$\begin{aligned}&(A^{12}+A^{13}+A^{14}-A^{15})(A^{55}-A^{56}+A^{57}+A^{58})\\ &=(E+A+E-A)(A-E+A+E)\\ &=2E\cdot 2A\\ &=4A\end{aligned}$$

답 ⑤

1265 $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$이므로

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$ ⋯ ❶

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-E$$

$$A^4=A^3A=(-E)A=-A$$

$$A^5=A^4A=-AA=-A^2$$

$$A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$$ ⋯ ❷

$$\begin{aligned}&\therefore\ A+A^2+A^3+\cdots+A^{50}\\ &=(A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6)\\ &\quad+A^6(A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6)\\ &\quad+\cdots+A^{42}(A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6)+A^{49}+A^{50}\\ &=A^{49}+A^{50}\ (\because\ A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6=O)\\ &=(A^6)^8\cdot A+(A^6)^8\cdot A^2\\ &=A+A^2\ (\because\ A^6=E)\\ &=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -2 & -3\end{pmatrix}\end{aligned}$$ ⋯ ❸

따라서 행렬 $A+A^2+A^3+\cdots+A^{50}$의 $(1, 2)$ 성분은 6이다.
⋯ ❹

답 6

채점 기준	비율
❶ A^2을 구할 수 있다.	20 %
❷ A^3, A^4, A^5, A^6을 간단히 할 수 있다.	30 %
❸ $A+A^2+A^3+\cdots+A^{50}$을 구할 수 있다.	40 %
❹ $A+A^2+A^3+\cdots+A^{50}$의 $(1, 2)$ 성분을 구할 수 있다.	10 %

유형 09 행렬의 곱셈의 실생활에의 활용

본책 183쪽

주어진 자료를 행렬로 표현하고, 행렬의 곱셈에서 각 성분이 의미하는 것을 파악한다.

1266 $AB=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e & f\\ g & h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ae+bg & af+bh\\ ce+dg & cf+dh\end{pmatrix}$이므로 행렬 AB의 $(1, 2)$ 성분은 $\quad af+bh$

따라서 행렬 AB의 $(1, 2)$ 성분은 민기가 문구점 P에서 볼펜과 연필을 살 경우 지불해야 하는 금액이다. 답 ②

참고 행렬 AB의 $(1, 1)$ 성분 $ae+bg$
➡ 유진이가 문구점 P에서 볼펜과 연필을 살 경우 지불해야 하는 금액
행렬 AB의 $(2, 1)$ 성분 $ce+dg$
➡ 유진이가 문구점 Q에서 볼펜과 연필을 살 경우 지불해야 하는 금액
행렬 AB의 $(2, 2)$ 성분 $cf+dh$
➡ 민기가 문구점 Q에서 볼펜과 연필을 살 경우 지불해야 하는 금액

1267 물을 퍼내어 넣은 후 두 물통 A, B에 들어 있는 물의 양은

$$a'=\frac{2}{3}a+\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{3}a\right)=\frac{5}{6}a+\frac{1}{2}b$$

$$b'=\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{3}a\right)=\frac{1}{6}a+\frac{1}{2}b$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix}a'\\ b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{6} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

따라서 $p=5$, $q=3$, $r=1$, $s=3$이므로

$$p+q+r+s=12$$

답 12

1268 2025년 두 농작물 A, B의 재배 면적을 $a'\ \mathrm{km}^2$, $b'\ \mathrm{km}^2$라 하면

$$a'=35\times0.8+40\times0.3$$

$$b'=35\times0.2+40\times0.7$$ ⋯ ❶

이것을 행렬로 나타내면

$$(a'\quad b')=(35\quad 40)\begin{pmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}=XY$$ ⋯ ❷

2026년 두 농작물 A, B의 재배 면적은

$$a=a'\times0.8+b'\times0.3$$

$$b=a'\times0.2+b'\times0.7$$

$$\therefore\ (a\quad b)=(a'\quad b')\begin{pmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}$$

$$=XY\begin{pmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}=XY^2$$ ⋯ ❸

답 XY^2

채점 기준	비율
❶ 2025년 두 농작물 A, B의 재배 면적을 구할 수 있다.	30 %
❷ 2025년 두 농작물 A, B의 재배 면적을 X, Y로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 2026년 두 농작물 A, B의 재배 면적을 X, Y로 나타낼 수 있다.	40 %

1269 X 영업소가 A 회사에서 1톤 트럭과 4톤 트럭을 구입하는 데 드는 비용이 176(백만 원)이므로

$$6a+13b=176 \quad\cdots\cdots ㉠$$

X 영업소가 B 회사에서 1톤 트럭과 4톤 트럭을 구입하는 데 드는 비용이 d(백만 원)이므로

$6\cdot24+30b=d$ …… ㉡

Y 영업소가 A 회사에서 1톤 트럭과 4톤 트럭을 구입하는 데 드는 비용이 214(백만 원)이므로

$ca+10\cdot13=214$ …… ㉢

Y 영업소가 B 회사에서 1톤 트럭과 4톤 트럭을 구입하는 데 드는 비용이 468(백만 원)이므로

$24c+10\cdot30=468$ …… ㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$a=12,\ b=8,\ c=7,\ d=384$

또 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix}6 & b\\ c & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 24\\ 13 & 30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}176 & d\\ 214 & 468\end{pmatrix}$$

이므로 행렬 $\boxed{QP}$의 (1, 2) 성분인 d의 값은 $\boxed{384}$이다. 답 ⑤

유형 10~11 행렬의 곱셈에 대한 성질 본책 184쪽

합과 곱을 할 수 있는 세 행렬 A, B, C에 대하여
① $AB\neq BA$ ➡ 행렬의 곱셈에서는 일반적으로 교환법칙이 성립하지 않는다.
➡ $(A\pm B)^2\neq A^2\pm2AB+B^2$ (복호동순)
② $(AB)C=A(BC)=ABC$ ➡ 결합법칙
③ $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$ ➡ 분배법칙

1270 $A\underbrace{BC-C\,BC}_{\text{같다}}=(A-C)BC$

이때

$$A-C=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -4\end{pmatrix},$$

$$BC=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$$

이므로

$$ABC-CBC=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1 & -5\\ 2 & -18\end{pmatrix}$$ 답 ①

참고 두 행렬 ABC, CBC를 직접 구하여 계산하는 것보다 분배법칙을 이용하는 것이 더 편리하다.

1271 $A(B+C)-(C+A)B+C(A+B)$

$=AB+AC-CB-AB+CA+CB$

$=AC+CA$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 6 & 4\end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$0+4+6+4=14$ 답 14

1272 $A^2+AB-BA-B^2$

$=A(A+B)-B(A+B)$

$=(A-B)(A+B)$

$$=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & -5\end{pmatrix}\right\}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & -5\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 4\\ 2 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 32\\ 8 & -32\end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$-8+32+8+(-32)=0$ 답 ③

1273 $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$

이므로

$A^2+B^2=(A+B)^2-(AB+BA)$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}7 & -2\\ -3 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}6 & -2\\ -5 & 7\end{pmatrix}$$ 답 ③

1274 $(A-B)^2=(A-B)(A-B)=A^2-AB-BA+B^2$

이므로

$AB+BA=A^2+B^2-(A-B)^2$ ··· ❶

$$=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -3 & -2\end{pmatrix}$$ ··· ❷

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$0+3+(-3)+(-2)=-2$ ··· ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ $AB+BA$를 $A-B$, A^2+B^2으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $AB+BA$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $AB+BA$의 모든 성분의 합을 구할 수 있다.	20 %

1275 $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$

이므로

$AB+BA=(A+B)^2-(A^2+B^2)$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -4 & -1\end{pmatrix}$$

$\therefore\ (A-B)^2=(A-B)(A-B)$

$=A^2+B^2-(AB+BA)$

$$=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 2\\ -4 & -1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 5 & 6\end{pmatrix}$$ 답 ④

유형 12 $AB=BA$가 성립하는 경우 본책 185쪽

> 행렬의 곱셈에서 교환법칙이 성립하면 곱셈 공식이 성립한다.
> ➡ 두 행렬 A, B에 대하여 $AB=BA$이면
> $(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$ (복호동순)
> $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

1276 $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$에서

$A^2-AB-BA+B^2=A^2-2AB+B^2$

$\therefore AB=BA$

즉 $\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} x+2y & -x+3y \\ -3 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-1 & y+2 \\ 2x+3 & 2y-6 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x+2y=x-1,\ -x+3y=y+2,$

$-3=2x+3,\ -7=2y-6$

따라서 $x=-3,\ y=-\frac{1}{2}$이므로 $xy=\frac{3}{2}$ 답 ③

1277 $AB=BA$에서

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ y & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ y & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & x \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} y & 5 \\ 6+xy & 8+5x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 3+4x \\ 10 & y+5x \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$y=8,\ 5=3+4x,\ 6+xy=10,\ 8+5x=y+5x$

따라서 $x=\frac{1}{2},\ y=8$이므로 $x+y=\frac{17}{2}$ 답 ⑤

1278 $AB=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$

$BA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

이므로 $AB=BA$

따라서

$A^3B^3=AAABBB=AABABB$

$=ABABAB=(AB)^3$

이고 같은 방법으로 하면

$A^4B^4=(AB)^4,\ A^5B^5=(AB)^5$

이때

$(AB)^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{pmatrix}$

$(AB)^3=(AB)^2(AB)$

$=\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & (-1)^3 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$(AB)^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

이므로

$A^3B^3+A^4B^4+A^5B^5$

$=(AB)^3+(AB)^4+(AB)^5$

$=\begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & (-1)^3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2^4 & 0 \\ 0 & (-1)^4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2^5 & 0 \\ 0 & (-1)^5 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 56 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

즉 구하는 모든 성분의 합은

$56+0+0+(-1)=55$ 답 55

1279 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$에서

$A^2-B^2=A^2-AB+BA-B^2$

$\therefore AB=BA$ ⋯ ❶

즉 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 1 \\ 1 & -y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y & 1 \\ 1 & -y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x^2 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} y+1 & 1-y \\ x^2+y & 1-x^2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y+1 & x^2+y \\ 1-y & 1-x^2y \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$1-y=x^2+y,\quad 2y=-x^2+1$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$, 즉 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ ⋯ ❷

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표는

$-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}=0$에서

$x^2-1=0,\quad (x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

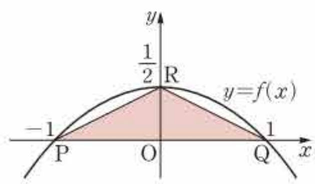
$\therefore \mathrm{P}(-1,\ 0),\ \mathrm{Q}(1,\ 0)$ — $\mathrm{P}(1,\ 0),\ \mathrm{Q}(-1,\ 0)$이라 해도 답은 같다.

$f(0)=\frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{R}\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$

따라서 오른쪽 그림에서

$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}$ ⋯ ❸



답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $AB=BA$임을 알 수 있다.	30 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\triangle\mathrm{PQR}$의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

유형 13 행렬의 변형 본책 186쪽

> 이차 정사각행렬 A에 대하여 $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$이면
> ① $A\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p+r \\ q+s \end{pmatrix}$
> ② $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$일 때, 등식의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면
> $A\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}=xA\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+yA\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$
> $=x\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xp+yr \\ xq+ys \end{pmatrix}$

1280 두 등식을 변끼리 더하면

$$A\begin{pmatrix}2a\\3b\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}2a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}4a\\4b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix},\qquad 4A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

답 ③

1281 $A\begin{pmatrix}a-2c\\b-2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\10\end{pmatrix}$에서

$$A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}-2A\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\10\end{pmatrix}$$

$$2A\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\10\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 곱은

$2\cdot(-3)=-6$

답 -6

다른 풀이 두 등식을 변끼리 빼면

$$A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}-A\begin{pmatrix}a-2c\\b-2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\10\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}2c\\2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix},\qquad 2A\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$$

1282 $A\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$$A^2\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}$$

따라서 $A\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2p\\-q\end{pmatrix}$이므로

$$A\begin{pmatrix}p+r\\q+s\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2p\\-q\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2p+r\\-q+s\end{pmatrix}$$

답 ④

1283 실수 a, b에 대하여

$$\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

이 성립한다고 하면

$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$이 주어졌으므로 $\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$을 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$로 나타낸다.

$$\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\a-b\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=4$, $a-b=6$

앞의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=5$, $b=-1$

$$\therefore\ \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$ ···➊

위의 등식의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$$A\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}=5A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$=5\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$$ ···➋

따라서 $p=2$, $q=6$이므로 $\quad pq=12$ ···➌

답 12

채점 기준	비율
➊ $\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$을 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$로 나타낼 수 있다.	50 %
➋ $A\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$을 구할 수 있다.	40 %
➌ pq의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 14~15 단위행렬 E를 포함한 식

집중공략 본책 186쪽

같은 꼴의 정사각행렬 A와 단위행렬 E에 대하여

$AE=EA=A$

➡ (1) 양변의 왼쪽 또는 오른쪽에 적당한 행렬을 곱하여 식을 변형한다.

(2) 다음과 같은 곱셈 공식이 성립한다.

① $(A+E)^2=A^2+2A+E$

② $(A\pm E)^3=A^3\pm3A^2+3A\pm E$ (복호동순)

③ $(A\pm E)(A^2\mp A+E)=A^3\pm E$ (복호동순)

1284 $(A-E)(A^2+A+E)=A^3-E$

$A=\begin{pmatrix}1&-2\\0&2\end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix}1&-2\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-6\\0&4\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&-6\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-14\\0&8\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A^3-E=\begin{pmatrix}1&-14\\0&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&-14\\0&7\end{pmatrix}$$

답 ③

1285 $(A^2+A+E)(A^2-A+E)=A^4+A^2+E$ ···➊

$A^2=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$에서

$$A^4=A^2A^2=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-4\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A^4+A^2+E=\begin{pmatrix}1&-4\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&-6\\0&3\end{pmatrix}$$ ···➋

따라서 $p=3$, $q=-6$, $r=0$, $s=3$이므로

$p-q+r-s=6$ ···➌

답 6

채점 기준	비율
❶ $(A^2+A+E)(A^2-A+E)$를 간단히 할 수 있다.	30 %
❷ $(A^2+A+E)(A^2-A+E)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $p-q+r-s$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1286 $(A-3E)(A-E)=-3A+2E$에서

$A^2-4A+3E=-3A+2E \qquad \therefore A^2-A+E=O$

양변에 행렬 $A+E$를 곱하면

$(A+E)(A^2-A+E)=O, \qquad A^3+E=O$

$\therefore A^3=-E$

$\therefore A^{99}=(A^3)^{33}=(-E)^{33}=-E$

답 ②

1287 $A^5+A^6=-2A-2E$이므로

$$\begin{aligned}A^{10}+A^{11}&=A^5(A^5+A^6)=A^5(-2A-2E)\\&=-2(A^5+A^6)=-2(-2A-2E)\\&=4A+4E\end{aligned}$$

이때 행렬 A의 모든 성분의 합이 0이므로 행렬 $4A$의 모든 성분의 합도 0이다.

따라서 행렬 $A^{10}+A^{11}$의 모든 성분의 합은 행렬 $4E$의 모든 성분의 합과 같으므로 구하는 합은

$4(1+0+0+1)=8$

답 8

1288 $A^2+2A+4E=O$의 양변에 행렬 $A-2E$를 곱하면

$(A-2E)(A^2+2A+4E)=O$

$A^3-8E=O \qquad \therefore A^3=8E$

따라서 $A^{33}=(A^3)^{11}=(8E)^{11}=8^{11}E=\begin{pmatrix}8^{11} & 0\\ 0 & 8^{11}\end{pmatrix}$이므로 행렬 A^{33}의 $(2, 2)$ 성분은 8^{11}이다.

답 ⑤

다른 풀이 $A^2=-2A-4E$이므로

$$\begin{aligned}A^3=A^2A&=-2A^2-4A\\&=-2(-2A-4E)-4A=8E\end{aligned}$$

1289 $A-B=2E$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$A(A-B)=A(2E), \qquad A^2-AB=2A$

$\therefore A^2=2A\ (\because AB=O)$

$\therefore A^3=A^2A=2A^2=2(2A)=4A$

$A-B=2E$의 양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면

$(A-B)B=(2E)B, \qquad AB-B^2=2B$

$\therefore B^2=-2B\ (\because AB=O)$

$\therefore B^3=B^2B=-2B^2=-2(-2B)=4B$

$$\begin{aligned}\therefore A^3-B^3&=4A-4B=4(A-B)\\&=4(2E)=8E=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 $a=8$, $b=0$, $c=0$, $d=8$이므로

$ad-bc=64$

답 ⑤

1290 $2A+B=O$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$2A^2+AB=O, \qquad 2A^2+2E=O\ (\because AB=2E)$

$\therefore A^2=-E$ ⋯ ❶

$2A+B=O$의 양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면

$2AB+B^2=O$

$\therefore B^2=-4E\ (\because AB=2E)$ ⋯ ❷

$$\begin{aligned}\therefore A^6+B^6&=(A^2)^3+(B^2)^3=(-E)^3+(-4E)^3\\&=-E-64E=-65E\end{aligned}$$

$\therefore k=-65$ ⋯ ❸

답 -65

채점 기준	비율
❶ A^2을 E로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ B^2을 E로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	40 %

1291 $A^2+A=E$의 양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면

$(A^2+A)B=EB, \qquad A^2B+AB=B$

$A(2E)+2E=B\ (\because AB=2E)$

$\therefore 2A+2E=B$

$$\begin{aligned}\therefore B^2&=(2A+2E)^2=4(A+E)^2\\&=4(A^2+2A+E)=4(E+A+E)\\&=4(A+2E)=4A+8E\end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이 $AB=2E$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$A^2B=2A$

$A^2+A=E$에서 $A^2=E-A$를 위의 식에 대입하면

$(E-A)B=2A, \qquad B-AB=2A$

$B-2E=2A \qquad \therefore B=2A+2E$

1292 $A+B=E$이므로 $\qquad A=E-B$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면

$AB=(E-B)B=B-B^2$ ⋯⋯ ㉡

㉠의 양변의 왼쪽에 행렬 B를 곱하면

$BA=B(E-B)=B-B^2$

$\therefore AB=BA$

$A^3=(E-B)^3=-B^3+3B^2-3B+E$

이때 $A^3=B^3=-E$이므로

$-E=-(-E)+3B^2-3B+E$

$\therefore B-B^2=E$

따라서 ㉡에서 $AB=B-B^2=E$이므로

$AB+BA=2E=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

답 ⑤

다른 풀이 $AB=BA$가 성립하므로

$(A+B)^3=A^3+B^3+3AB(A+B)$

이때 $A+B=E$, $A^3=B^3=-E$이므로

$E^3=-E+(-E)+3ABE$

$E=-2E+3AB \qquad \therefore AB=E$

$\therefore AB+BA=2E$

유형 16 행렬의 곱셈의 여러 가지 성질 (집중공략) 본책 188쪽

① 수나 식의 계산에서 성립하는 성질이 행렬에서는 성립하지 않음에 주의한다.
예 $A\neq O$, $B\neq O$이지만 $AB=O$인 경우
$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

② 행렬의 곱셈에서는 일반적으로 교환법칙이 성립하지 않으므로 행렬을 곱하는 순서에 주의한다.
예 '$AB\neq BA$'의 경우 $\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$

1293 ㄱ. $A+B=O$이면 $B=-A$이므로
$AB=A(-A)=-A^2$, $BA=(-A)A=-A^2$
$\therefore AB=BA$

ㄴ. $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$이면
$AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$
따라서 $AB=O$, $A\neq O$이지만 $B\neq O$이다.

ㄷ. $AB=A$의 양변의 오른쪽에 행렬 A를 곱하면
$ABA=A^2$
$BA=B$이므로 $\quad AB=A^2$
이때 $AB=A$이므로 $\quad A^2=A$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

1294 ㄱ. $(A+E)(A-E)=A^2-AE+EA-E^2=A^2-E$

ㄴ. $A^5=A^3A^2$이므로
$E=EA^2 \quad \therefore A^2=E$
$A^3=A^2A$이므로
$E=EA \quad \therefore A=E$

ㄷ. $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$이면
$A-E=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$
$\therefore (A-E)^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$
따라서 $(A-E)^2=O$이지만 $A\neq E$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

1295 ㄱ. $(A+B)^2=(A+B)(A+B)$
$=A^2+AB+BA+B^2$
$=A^2+B^2$ ($\because AB+BA=O$)

ㄴ. $AB+BA=O$에서 $BA=-AB$이므로
$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$
$=A^2-AB-AB-B^2$
$=A^2-2AB-B^2$

ㄷ. $AB+BA=O$에서 $BA=-AB$이므로
$(AB)^2=(AB)(AB)=A(BA)B$
$=A(-AB)B=-A^2B^2$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ⑤

1296 ㄱ. $A-B=E$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면
$A(A-B)=AE, \quad A^2-AB=A$
$\therefore A^2=A$ ($\because AB=O$)

ㄴ. $A-B=E$의 양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면
$(A-B)B=EB, \quad AB-B^2=B$
$B^2=-B$ ($\because AB=O$) …… ㉠
ㄱ에서 $A^2=A$이므로
$A^2+B^2=A-B=E$

ㄷ. ㄱ에서 $A^2=A$이고, ㉠에서 $B^2=-B$이므로
$A^2B^2=A(-B)=-AB=O$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

유형 17 케일리-해밀턴 정리 본책 188쪽

단위행렬 E와 영행렬 O가 모두 이차 정사각행렬일 때
① $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \Rightarrow A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$
② 행렬 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$에 대하여 $A^2-pA+qE=O$ (p, q는 실수)일 때
(i) $A\neq kE$ (k는 실수) $\Rightarrow a+d=p$, $ad-bc=q$
(ii) $A=kE$ (k는 실수) $\Rightarrow A=kE$를 $A^2-pA+qE=O$에 대입하여 k의 값을 구한다.

1297 케일리-해밀턴 정리에 의하여
$A^2-(2+1)A+(2\cdot1-3\cdot1)E=O$
$A^2-3A-E=O \quad \therefore A^2=3A+E$
위의 식의 양변에 행렬 A를 곱하면
$A^3=3A^2+A=3(3A+E)+A=10A+3E$
$\therefore A^3-2A^2+5A-6E$
$=(10A+3E)-2(3A+E)+5A-6E$
$=9A-5E$ 답 ①

참고 케일리-해밀턴 정리를 이용하지 않고 행렬 A^2을 A와 E에 대한 식으로 다음과 같이 나타낼 수도 있다.
$A^2=\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&9\\3&4\end{pmatrix}$이므로 $A^2=mA+nE$ (m, n은 실수)라 하면
$\begin{pmatrix}7&9\\3&4\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2m+n&3m\\m&m+n\end{pmatrix}$
두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$m=3$, $n=1$ ← $m=3$이고 $m+n=4$이므로 $n=1$이다.
$\therefore A^2=3A+E$

SSEN 특강

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$일 때, 케일리-해밀턴 정리를 이용하면
$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$
$\Rightarrow \underbrace{A^2}_{\text{2차식}}=\underbrace{(a+d)A-(ad-bc)E}_{\text{1차 이하의 식}}$
따라서 2×2 행렬 A에 대한 2차식을 1차 이하의 식으로 변형할 수 있다. 이와 같이 케일리-해밀턴 정리는 행렬 A에 대한 차수가 높은 식의 차수를 낮추는 데 활용할 수 있다.

1298 $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 3 & d \end{pmatrix} \neq kE$ (k는 실수)이므로 케일리-해밀턴 정리에 의하여 $\quad a+d=5$

또 $ad-3=3$이므로 $\quad ad=6$

$\therefore a^2+d^2=(a+d)^2-2ad=5^2-2\cdot6=13$

답 13

1299 (i) $A \neq kE$ (k는 실수)일 때,

케일리-해밀턴 정리에 의하여

$a+d=3$ ⋯ ❶

(ii) $A=kE$ (k는 실수)일 때,

$A=kE$를 주어진 식에 대입하면

$(kE)^2-3(kE)-4E=O$

$(k^2-3k-4)E=O, \quad (k+1)(k-4)E=O$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=4$

따라서 $A=-E$ 또는 $A=4E$이므로

$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 또는 $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\therefore a+d=-2$ 또는 $a+d=8$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 $a+d$의 최댓값은 8이다. ⋯ ❸

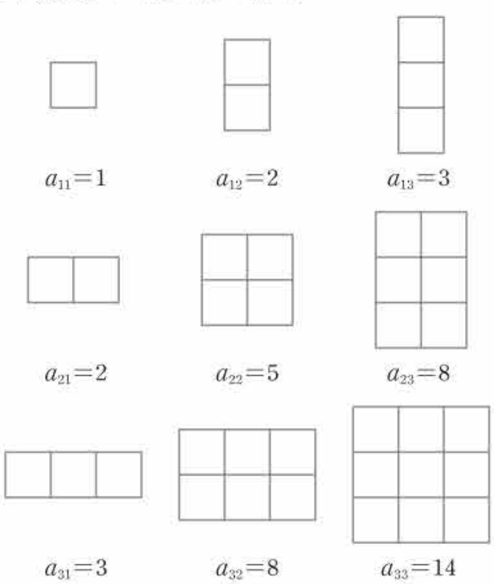
답 8

채점 기준	비율
❶ $A \neq kE$일 때, $a+d$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $A=kE$일 때, $a+d$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+d$의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

참고 (ii)에서 $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 또는 $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$인 경우 $a+d \neq 3$, $ad-bc \neq -4$임을 알 수 있다.
이와 같이 $A^2-pA+qE=O$ (p, q는 실수)를 만족시키는 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 항상 $a+d=p$, $ad-bc=q$인 것은 아니다.
따라서 $A^2-pA+qE=O$를 만족시키는 행렬 A를 구할 때에는 $A \neq kE$인 경우와 $A=kE$ (k는 실수)인 경우로 나누어 생각한다.

1300 1st A의 모든 성분을 구한다.

행렬 A의 성분을 구하면 다음과 같다.



2nd A의 모든 성분의 합을 구한다.

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$1+5+14+2(2+3+8)=46$

답 46

1301 1st A의 제1행의 모든 성분을 구한다.

이차함수 $y=x^2-6i(x-2)-8$의 그래프와 직선 $y=-2jx$의 교점의 개수는 이차방정식

$x^2-6i(x-2)-8=-2jx$

의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

(i) $i=1$, $j=1$일 때,

이차방정식 $x^2-6(x-2)-8=-2x$, 즉 $x^2-4x+4=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-2)^2-1\cdot4=0$

즉 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 1이므로 행렬 A의 $(1, 1)$ 성분은 1이다.

(ii) $i=1$, $j=2$일 때,

이차방정식 $x^2-6(x-2)-8=-4x$, 즉 $x^2-2x+4=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-1\cdot4<0$

즉 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 0이므로 행렬 A의 $(1, 2)$ 성분은 0이다. ⋯ ❶

2nd A의 제2행의 모든 성분을 구한다.

(iii) $i=2$, $j=1$일 때,

이차방정식 $x^2-12(x-2)-8=-2x$, 즉 $x^2-10x+16=0$의 판별식을 D_3이라 하면

$\frac{D_3}{4}=(-5)^2-1\cdot16>0$

즉 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 2이므로 행렬 A의 $(2, 1)$ 성분은 2이다.

(iv) $i=2$, $j=2$일 때,

이차방정식 $x^2-12(x-2)-8=-4x$, 즉 $x^2-8x+16=0$의 판별식을 D_4라 하면

$\frac{D_4}{4}=(-4)^2-1\cdot16=0$

즉 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 1이므로 행렬 A의 $(2, 2)$ 성분은 1이다. ⋯ ❷

3rd A의 모든 성분의 합을 구한다.

이상에서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$1+0+2+1=4$ ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ A의 제1행의 모든 성분을 구할 수 있다.	40 %
❷ A의 제2행의 모든 성분을 구할 수 있다.	40 %
❸ A의 모든 성분의 합을 구할 수 있다.	20 %

1302 1st 주어진 등식에서 x, y에 대한 두 방정식을 구한다.

$(x \quad y)\begin{pmatrix} 1 & x-2 \\ 2 & y-4 \end{pmatrix}=(1 \quad k)$에서

$(x+2y \quad x^2-2x+y^2-4y)=(1 \quad k)$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x+2y=1$ …… ㉠

$x^2-2x+y^2-4y=k$ …… ㉡

2nd 두 식을 연립하여 y에 대한 이차방정식을 세운다.

㉠에서 $x-1=-2y$ …… ㉢

㉡에서

$(x-1)^2+y^2-4y-k-1=0$

$4y^2+y^2-4y-k-1=0$ ($\because$ ㉢)

$5y^2-4y-k-1=0$

3rd 정수 k의 최솟값을 구한다.

위의 y에 대한 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-5(-k-1)\geq 0$

$5k+9\geq 0 \quad \therefore k\geq -\frac{9}{5}$

따라서 정수 k의 최솟값은 -1이다. 답 ③

1303 **1st** 조건 (가)를 만족시키는 B를 문자로 나타낸다.

$B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$라 하면 조건 (가)에 의하여

$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} p-q \\ r-s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$p-q=0,\ r-s=0 \quad \therefore p=q,\ r=s$

$\therefore B=\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}$

2nd 조건 (나)를 만족시키는 A를 구한다.

조건 (나)에서 $AB=2A$이므로

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} p+r & p+r \\ a(p+r) & a(p+r) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2a & 2a \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$p+r=2$ …… ㉠

또 $BA=4B$이므로

$\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}=4\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} p(1+a) & p(1+a) \\ r(1+a) & r(1+a) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4p & 4p \\ 4r & 4r \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$p(1+a)=4p,\ r(1+a)=4r$

이때 $1+a\neq 4$이면 $p=0,\ r=0$

그런데 $p=0,\ r=0$이면 ㉠을 만족시키지 않으므로

$1+a=4 \quad \therefore a=3$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

3rd $A+B$의 $(1,\ 2)$ 성분과 $(2,\ 1)$ 성분의 합을 구한다.

$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+p & 1+p \\ 3+r & 3+r \end{pmatrix}$이므로 행렬 $A+B$의 $(1,\ 2)$ 성분과 $(2,\ 1)$ 성분의 합은

$(1+p)+(3+r)=4+p+r$

$=4+2=6$ ($\because$ ㉠) 답 ③

1304 **1st** b를 a에 대한 식으로 나타낸다.

$A+B=\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & b-10 \\ a-10 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & a+b-10 \\ a+b-10 & 0 \end{pmatrix}$

이때 $A+B=O$에서 $a+b-10=0$

$\therefore b=10-a$ ⋯→ ❶

2nd A^2을 a로 나타낸다.

$A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 10-a & -1 \end{pmatrix}$이므로

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 10-a & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 10-a & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1+10a-a^2 & 0 \\ 0 & 1+10a-a^2 \end{pmatrix}$ ⋯→ ❷

3rd k의 최댓값을 구한다.

$A^2=(1+10a-a^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=(-a^2+10a+1)E$이므로

$k=-a^2+10a+1=-(a-5)^2+26$

즉 k의 최댓값은 $a=5$일 때 26이다. ⋯→ ❸

답 26

채점 기준	비율
❶ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ A^2을 a로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ k의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

다른 풀이 $A+B=O$에서

$b=10-a$ …… ㉠

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+ab & 0 \\ 0 & ab+1 \end{pmatrix}$

$=(1+ab)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=(1+ab)E$

이므로

$1+ab=k$

$\therefore ab=k-1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a(10-a)=k-1$

$\therefore a^2-10a+k-1=0$

위의 a에 대한 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-5)^2-(k-1)\geq 0, \quad 26-k\geq 0$

$\therefore k\leq 26$

따라서 k의 최댓값은 26이다.

1305

행렬 $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&x\end{pmatrix}$에 대하여 $A^{50}=\begin{pmatrix}a&0\\f(x)&g(x)\end{pmatrix}$라 할 때, 다항식 $f(x)+g(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는? (단, a는 상수이다.)

$f(a)+g(a)$

① 0 ② 1 ③ 50 ④ 51 ⑤ 100

❶을 거듭제곱하여 규칙을 찾아 ❷를 구한 후 나머지 정리를 이용하여 ❸을 구한다.

1st A^{50}을 구한다.

$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&x\end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\1&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1+x&x^2\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0\\1+x&x^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1+x+x^2&x^3\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1&0\\1+x+x^2&x^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1+x+x^2+x^3&x^4\end{pmatrix}$$

⋮

$$\therefore A^{50}=\begin{pmatrix}1&0\\1+x+x^2+\cdots+x^{49}&x^{50}\end{pmatrix}$$

2nd 다항식 $f(x)+g(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 구한다.

$a=1$, $f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{49}$, $g(x)=x^{50}$이므로 다항식

$$f(x)+g(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{50}$$

을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$$f(1)+g(1)=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{51\text{개}}=51$$

답 ④

SSEN 특강 나머지 정리

다항식 $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$R=P(a)$

1306

1st A_2, A_3, A_4, ⋯를 차례대로 구하여 규칙을 찾아 A_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$을 구한다.

$A_1=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$에서

$$A_2=PA_1=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\-1&-3\end{pmatrix}$$

$$A_3=A_2P=\begin{pmatrix}2&4\\-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&2\\3&-1\end{pmatrix}$$

$$A_4=PA_3=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&2\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1\\4&-2\end{pmatrix}$$

$$A_5=A_4P=\begin{pmatrix}3&-1\\4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}=A_1$$

⋮

$$\therefore A_{4n-3}=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix},$$

$$A_{4n-2}=\begin{pmatrix}2&4\\-1&-3\end{pmatrix},$$

$$A_{4n-1}=\begin{pmatrix}-4&2\\3&-1\end{pmatrix},$$

$$A_{4n}=\begin{pmatrix}3&-1\\4&-2\end{pmatrix}\ (n=1, 2, 3, \cdots)$$ ⋯ ❶

2nd $A_{1000}+A_{1001}$을 구한다.

$1000=4\cdot250$, $1001=4\cdot251-3$이므로

$$A_{1000}+A_{1001}=A_4+A_1=\begin{pmatrix}3&-1\\4&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\6&2\end{pmatrix}$$ ⋯ ❷

3rd $A_{1000}+A_{1001}$의 모든 성분의 합을 구한다.

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$4+2+6+2=14$ ⋯ ❸

답 14

채점 기준	비율
❶ A_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$을 구할 수 있다.	50 %
❷ $A_{1000}+A_{1001}$을 구할 수 있다.	40 %
❸ $A_{1000}+A_{1001}$의 모든 성분의 합을 구할 수 있다.	10 %

1307

1st 주어진 이차방정식의 판별식을 구한다.

이차방정식 $x^2+2mx+n=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=m^2-n$$

2nd A의 모든 성분을 구한다.

(i) $m=1$, $n=1$일 때,

$\frac{D}{4}=1^2-1=0$이므로 $a_{11}=0$

(ii) $m=1$, $n=2$일 때,

$\frac{D}{4}=1^2-2<0$이므로 $a_{12}=-1$

(iii) $m=2$, $n=1$일 때,

$\frac{D}{4}=2^2-1>0$이므로 $a_{21}=1$

(iv) $m=2$, $n=2$일 때,

$\frac{D}{4}=2^2-2>0$이므로 $a_{22}=1$

3rd $A^k=E$를 만족시키는 자연수 k의 최솟값을 구한다.

이상에서 $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}$이므로

$$A^2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-E$$

따라서 $A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$이므로 $A^k=E$를 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 6이다.

답 6

1308 1st $\alpha^2-2\alpha$, $\alpha-\frac{1}{\alpha}-3$의 값을 구한다.

이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 한 근이 α이므로

$\alpha^2-2\alpha-1=0$ $\quad\therefore \alpha^2-2\alpha=1$

$\alpha\neq0$이므로 양변을 α로 나누면 └ $\alpha=0$이면 등식이 성립하지 않으므로 $\alpha\neq0$

$$\alpha-2=\frac{1}{\alpha},\quad \alpha-\frac{1}{\alpha}=2$$

$$\therefore \alpha-\frac{1}{\alpha}-3=-1$$

2nd $A+A^2+A^3+\cdots+A^{333}$을 간단히 한다.

$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$이므로

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-E$$

$$A^3=A^2A=(-E)A=-A$$

$$A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E$$

$$\therefore A+A^2+A^3+\cdots+A^{333}$$

$$=(A+A^2+A^3+A^4)+A^4(A+A^2+A^3+A^4)$$

$$+\cdots+A^{328}(A+A^2+A^3+A^4)+A^{333}$$

$$=A^{333}\ (\because A+A^2+A^3+A^4=O)$$

$$=(A^4)^{83}\cdot A$$

$$=A$$

답 ④

1309 1st 2차 조사 결과 찬성, 반대하는 사원들의 비율을 각각 구한다.

2차 조사 결과 전체 사원 중에서 찬성하는 사원들의 비율을 p라 하면

$p=$(1차에서 찬성한 사원 중 2차에서도 찬성한 비율)

$+$(1차에서 반대한 사원 중 2차에서 찬성으로 의견을 바꾼 비율)

$=0.6\times(1-0.2)+0.4\times0.3$

$=0.6\times0.8+0.4\times0.3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

반대하는 사원들의 비율을 q라 하면

$q=$(1차에서 찬성한 사원 중 2차에서 반대로 의견을 바꾼 비율)

$+$(1차에서 반대한 사원 중 2차에서도 반대한 비율)

$=0.6\times0.2+0.4\times(1-0.3)$

$=0.6\times0.2+0.4\times0.7$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

2nd 2차 조사 결과 찬성, 반대하는 사원들의 비율을 행렬로 나타낸다.

㉠, ㉡을 행렬로 나타내면

$$(p\quad q)=(0.6\quad 0.4)\begin{pmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}=AB$$

3rd 3차 조사 결과 찬성하는 사원들의 비율을 나타내는 행렬의 성분을 찾는다.

3차 조사 결과 전체 사원 중에서 찬성하는 사원들의 비율은

(2차에서 찬성한 사원 중 3차에서도 찬성한 비율)

$+$(2차에서 반대한 사원 중 3차에서 찬성으로 의견을 바꾼 비율)

$=p\times(1-0.1)+q\times0.4$

$=p\times0.9+q\times0.4$

이것을 행렬로 나타내면

$$(p\quad q)\begin{pmatrix}0.9\\ 0.4\end{pmatrix}=AB\begin{pmatrix}0.9\\ 0.4\end{pmatrix}$$

이때 $\begin{pmatrix}0.9\\ 0.4\end{pmatrix}$는 행렬 C의 제1열 부분과 같으므로 구하는 것은 행렬 ABC의 $(1, 1)$ 성분과 같다.

답 ①

참고 3차 조사 결과 찬성하는 사원들의 비율을 경우를 나누어 구하면 다음 표와 같다.

1차 조사 결과	2차 조사 결과	3차 조사 결과	찬성하는 사원들의 비율
찬성	찬성	찬성	$0.6\times0.8\times0.9$
찬성	반대	찬성	$0.6\times0.2\times0.4$
반대	찬성	찬성	$0.4\times0.3\times0.9$
반대	반대	찬성	$0.4\times0.7\times0.4$

1310

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}0 & x\\ 1 & 0\end{pmatrix}$에 대하여

❷ $(A+X)(A-X)=A^2-X^2$,

$A^2-AX+XA-X^2=A^2-X^2$이므로 $AX=XA$

❸ $A^2=2A$, ❶ $X^3=9X$

가 성립할 때, 양수 a, b, c, d에 대하여 $abcdx$의 값은? (단, x는 상수이다.)

① $\frac{1}{3}$ ② 1 ③ 3 ④ 6 ⑤ 9

❶을 만족시키는 x의 값을 구한다. ❷가 성립하면 $AX=XA$임을 이용하여 행렬 A의 성분을 문자의 개수를 줄여 나타낸 후 ❸을 만족시키는 a, b, c, d의 값을 구한다.

1st x의 값을 구한다.

$X^2=\begin{pmatrix}0 & x\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & x\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}=xE$이므로

$$X^3=X^2X=xEX=xX$$

이때 $X^3=9X$이므로

$$xX=9X$$

$$\therefore x=9\ (\because X\neq O)$$

2nd a와 d, b와 c 사이의 관계식을 구한다.

$(A+X)(A-X)=A^2-X^2$에서

$$A^2-AX+XA-X^2=A^2-X^2$$

이므로

$$AX=XA$$

즉 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix} b & 9a \\ d & 9c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9c & 9d \\ a & b \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$b=9c,\ a=d$$

3rd a, c의 값을 구한다.

$$A^2=\begin{pmatrix} a & 9c \\ c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 9c \\ c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+9c^2 & 18ac \\ 2ac & a^2+9c^2 \end{pmatrix}$$

이때 $A^2=2A$이므로

$$\begin{pmatrix} a^2+9c^2 & 18ac \\ 2ac & a^2+9c^2 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} a & 9c \\ c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & 18c \\ 2c & 2a \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a^2+9c^2=2a,\ 2ac=2c$$

$2ac=2c$에서 $\quad a=1\ (\because c\neq 0)$

$a^2+9c^2=2a$에서 $\quad 1+9c^2=2$

$$c^2=\frac{1}{9} \qquad \therefore c=\frac{1}{3}\ (\because c>0)$$

4th $abcdx$의 값을 구한다.

$b=9c=9\cdot\frac{1}{3}=3$, $d=a=1$이므로

$$abcdx=1\cdot 3\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 9=9$$

답 ⑤

1311 1st $A^2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$을 A로 나타낸다.

$A^2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$에서 $\quad AA\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\therefore A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2nd $\begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}$를 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$으로 나타낸다.

실수 a, b에 대하여

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

가 성립한다고 하면 $\quad \begin{pmatrix} a+2b \\ -3b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a+2b=-5,\ -3b=9$$

$$\therefore a=1,\ b=-3$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

3rd $x+y$의 값을 구한다.

$A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}-3A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}$이므로

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}-A\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

즉 $x=-1$, $y=3$이므로 $\quad x+y=2$

답 2

1312 1st B^3을 간단히 한다.

조건 (나)에서

$$E-2B+B^2=E-B$$

$$\therefore B^2=B$$

$$\therefore B^3=B^2B=BB=B^2=B \qquad \cdots\cdots ㉠$$

2nd BA^3을 간단히 한다.

조건 (가), (다)에서 $BA=-B$이므로

$$BA^3=BAAA=-BAA=-(-B)A=BA=-B \qquad \cdots\cdots ㉡$$

3rd B^3+2BA^3과 항상 같은 행렬을 구한다.

㉠, ㉡에서

$$B^3+2BA^3=B+2(-B)=-B$$

답 ⑤

1313 1st B^3을 간단히 한다.

$A+B=E$의 양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면

$$AB+B^2=B$$

$$\therefore B^2=B-E\ (\because AB=E)$$

위의 등식의 양변에 행렬 B를 곱하면

$$B^3=B^2-B=(B-E)-B=-E$$

2nd A^3을 간단히 한다.

$A+B=E$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$$A^2+AB=A \qquad \therefore A^2=A-E\ (\because AB=E)$$

위의 등식의 양변에 행렬 A를 곱하면

$$A^3=A^2-A=(A-E)-A=-E$$

3rd $A^{100}+B^{100}$을 간단히 한다.

$$\begin{aligned} A^{100}+B^{100}&=(A^3)^{33}A+(B^3)^{33}B \\ &=(-E)^{33}A+(-E)^{33}B \\ &=-A-B=-(A+B) \\ &=-E \end{aligned}$$

답 ②

1314 1st 행렬의 곱셈에서 일반적으로 교환법칙은 성립하지 않음을 이용한다.

ㄱ. $f(A,\ B)=AB-BA$, $f(B,\ A)=BA-AB$이므로

$$f(A,\ B)\neq f(B,\ A)$$

2nd 행렬에 곱셈에 대한 성질을 이용한다.

ㄴ. $$\begin{aligned} f(kA,\ kB)&=(kA)(kB)-(kB)(kA) \\ &=k^2AB-k^2BA \\ &=k^2(AB-BA) \\ &=k^2f(A,\ B) \end{aligned}$$

$$\therefore f(kA,\ kB)\neq kf(A,\ B)$$

3rd 행렬의 덧셈과 곱셈에 대한 성질을 이용한다.

ㄷ. $$\begin{aligned} f(A,\ B)+f(A,\ C)&=(AB-BA)+(AC-CA) \\ &=(AB+AC)-(BA+CA) \\ &=A(B+C)-(B+C)A \\ &=f(A,\ B+C) \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

참고 ㄱ은 $AB=BA$인 경우에만 성립하고, ㄴ은 $k^2=k$인 경우, 즉 $k=0$ 또는 $k=1$인 경우에만 성립한다.

1315 **1st** $(A+B)^2=(A-B)^2$이지만 $AB\neq O$인 예를 찾아본다.

ㄱ. $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$이면

$$A+B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix},$$

$$A-B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}$$

이므로

$$(A+B)^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix},$$

$$(A-B)^2=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$$

$$\therefore (A+B)^2=(A-B)^2$$

그런데

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

이므로 $AB\neq O$

2nd $(ABA)^2$을 간단히 한다.

ㄴ. $A^2=E$, $B^2=B$이면

$$(ABA)^2=ABAABA=AB\underbrace{A^2}_{E}BA$$
$$=ABBA=A\underbrace{B^2}_{B}A$$
$$=ABA$$

3rd B를 A, E로 나타낸 후 제곱한다.

ㄷ. $A(A+E)=E$이면 $A^2+A=E$

위의 등식의 양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면

$$AAB+AB=B$$

이때 $AB=-E$이면

$$A(-E)+(-E)=B$$
$$\therefore B=-A-E$$
$$\therefore B^2=(-A-E)^2$$
$$=A^2+2A+E$$
$$=(A^2+A)+A+E$$
$$=E+A+E$$
$$=A+2E$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

참고 ㄱ. $(A+B)^2=(A-B)^2$이면

$$A^2+AB+BA+B^2=A^2-AB-BA+B^2$$
$$AB+BA=-AB-BA$$
$$\therefore AB+BA=O$$

1316 **1st** 케일리-해밀턴 정리를 이용하여 A^2을 A, E로 나타낸다.

케일리-해밀턴 정리에 의하여

$$A^2-(1+1)A+\{1\cdot1-(-2)\cdot(-1)\}E=O$$
$$A^2-2A-E=O$$
$$\therefore A^2=2A+E \quad \cdots❶$$

2nd A^5을 A, E로 나타낸다.

$$A^3=A^2A$$
$$=(2A+E)A$$
$$=2A^2+A$$
$$=2(2A+E)+A$$
$$=5A+2E$$

이므로

$$A^5=A^2A^3$$
$$=(2A+E)(5A+2E)$$
$$=10A^2+9A+2E$$
$$=10(2A+E)+9A+2E$$
$$=29A+12E \quad \cdots❷$$

3rd $p+q$의 값을 구한다.

$$A^2+A^5=(2A+E)+(29A+12E)$$
$$=31A+13E$$

이므로

$$p=31,\ q=13$$
$$\therefore p+q=44 \quad \cdots❸$$

답 44

채점 기준	비율
❶ A^2을 A, E로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ A^5을 A, E로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

MEMO