정답 및 풀이

고등 수학(상)

● 정답을 확인하려고 할 때에는 〈빠른 정답 찾기〉를 이용하면 편리합니다.

01 다항식의 연산

Ⅰ. 다항식

0001 답 $-5x^3+2x^2-x+4$

0002 답 $4-x+2x^2-5x^3$

0003 x에 대하여 차수가 높은 항부터 정리하면
$x^3+(-2y+1)x-3y^2+4y-1$
답 $x^3+(-2y+1)x-3y^2+4y-1$

0004 y에 대하여 차수가 낮은 항부터 정리하면
$x^3+x-1+(-2x+4)y-3y^2$
답 $x^3+x-1+(-2x+4)y-3y^2$

0005 $A+B=(x^3+6x^2+x-7)+(5x^3-2x+1)$
$=x^3+6x^2+x-7+5x^3-2x+1$
$=6x^3+6x^2-x-6$ 답 $6x^3+6x^2-x-6$

0006 $B-A=(5x^3-2x+1)-(x^3+6x^2+x-7)$
$=5x^3-2x+1-x^3-6x^2-x+7$
$=4x^3-6x^2-3x+8$ 답 $4x^3-6x^2-3x+8$

0007 $(2x^2+xy)+(3x^2-y^2)-(4xy-5y^2)$
$=2x^2+xy+3x^2-y^2-4xy+5y^2$
$=5x^2-3xy+4y^2$ 답 $5x^2-3xy+4y^2$

0008 $2A-(B+3C)$
$=2A-B-3C$
$=2(x^2+4x-5)-(2x^2-3x+1)-3(-x^2-2x+7)$
$=2x^2+8x-10-2x^2+3x-1+3x^2+6x-21$
$=3x^2+17x-32$ 답 $3x^2+17x-32$

0009 $(A+2B)-(4A-C)$
$=A+2B-4A+C$
$=-3A+2B+C$
$=-3(x^2+4x-5)+2(2x^2-3x+1)+(-x^2-2x+7)$
$=-3x^2-12x+15+4x^2-6x+2-x^2-2x+7$
$=-20x+24$ 답 $-20x+24$

0010 답 $3x^3-x^2+2x$

0011 답 $2a^3b+5a^2b-2ab^2$

0012 $(x+y)(3x+4y)=3x^2+4xy+3xy+4y^2$
$=3x^2+7xy+4y^2$ 답 $3x^2+7xy+4y^2$

0013 $(x-1)(x^2-x-3)$
$=x^3-x^2-3x-x^2+x+3$
$=x^3-2x^2-2x+3$ 답 x^3-2x^2-2x+3

0014 $(2a^2+2a-1)(a+3)$
$=2a^3+6a^2+2a^2+6a-a-3$
$=2a^3+8a^2+5a-3$ 답 $2a^3+8a^2+5a-3$

0015 $(5a^2-b)(a^2-a+2b)$
$=5a^4-5a^3+10a^2b-a^2b+ab-2b^2$
$=5a^4-5a^3+9a^2b+ab-2b^2$
답 $5a^4-5a^3+9a^2b+ab-2b^2$

0016 $(3x^2-xy+1)(x-y^2)$
$=3x^3-3x^2y^2-x^2y+xy^3+x-y^2$
답 $3x^3-3x^2y^2-x^2y+xy^3+x-y^2$

0017 $AB=(x-1)(2x+1)=2x^2+x-2x-1=2x^2-x-1$
$BA=(2x+1)(x-1)=2x^2-2x+x-1=2x^2-x-1$
$\therefore AB=BA$ 답 풀이 참조

0018 $(AB)C=\{(x-1)(2x+1)\}(x^2+2)$
$=(2x^2-x-1)(x^2+2)$
$=2x^4+4x^2-x^3-2x-x^2-2$
$=2x^4-x^3+3x^2-2x-2$
$A(BC)=(x-1)\{(2x+1)(x^2+2)\}$
$=(x-1)(2x^3+4x+x^2+2)$
$=2x^4+4x^2+x^3+2x-2x^3-4x-x^2-2$
$=2x^4-x^3+3x^2-2x-2$
$\therefore (AB)C=A(BC)$ 답 풀이 참조

0019 $A(B+C)=(x-1)\{(2x+1)+(x^2+2)\}$
$=(x-1)(x^2+2x+3)$
$=x^3+2x^2+3x-x^2-2x-3$
$=x^3+x^2+x-3$
$AB+AC=(x-1)(2x+1)+(x-1)(x^2+2)$
$=(2x^2-x-1)+(x^3+2x-x^2-2)$
$=x^3+x^2+x-3$
$\therefore A(B+C)=AB+AC$ 답 풀이 참조

0020 답 (가) 분배법칙 (나) 결합법칙 (다) 교환법칙

0021 $(2x+1)^2=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 1+1^2$
$=4x^2+4x+1$ 답 $4x^2+4x+1$

0022 $(3x-5)^2=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 5+5^2$
$=9x^2-30x+25$ 답 $9x^2-30x+25$

0023 $(4x+y)(4x-y)=(4x)^2-y^2=16x^2-y^2$ 답 $16x^2-y^2$

0024 $(x+2)(x-7)=x^2+(2-7)x+2\cdot(-7)$
$=x^2-5x-14$ 답 $x^2-5x-14$

0025 $(3x+4)(2x-1)=3\cdot 2x^2+(-3+8)x+4\cdot(-1)$
$=6x^2+5x-4$ 답 $6x^2+5x-4$

0026 $(a-b+2c)^2$
$=a^2+(-b)^2+(2c)^2+2\cdot a\cdot(-b)+2\cdot(-b)\cdot 2c+2\cdot 2c\cdot a$
$=a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc+4ca$
답 $a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc+4ca$

0027 $(x+4)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 4+3\cdot x\cdot 4^2+4^3$
$=x^3+12x^2+48x+64$ 답 $x^3+12x^2+48x+64$

0028 $(x-2y)^3=x^3-3\cdot x^2\cdot 2y+3\cdot x\cdot(2y)^2-(2y)^3$
$=x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$
답 $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$

0029 $(x+3)(x^2-3x+9)=x^3+3^3=x^3+27$ 답 x^3+27

0030 $(2x-1)(4x^2+2x+1)=(2x)^3-1^3=8x^3-1$ 답 $8x^3-1$

0031 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4^2-2\cdot 3=10$ 답 10

0032 $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=(-3)^2+2\cdot 4=17$ 답 17

0033 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=5^2-4\cdot(-1)=29$ 답 29

0034 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=3^3-3\cdot(-6)\cdot 3=81$ 답 81

0035 $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=2^3+3\cdot 8\cdot 2=56$ 답 56

0036 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=6^2-2\cdot 11=14$ 답 14

0037 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=4^2-2=14$ 답 14

0038 $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$
$=4^3-3\cdot 4=52$ 답 52

0039 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=3^2+2=11$ 답 11

0040 $x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=3^3+3\cdot 3=36$ 답 36

0041 $x+y=(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}$,
$xy=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$이므로
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=(2\sqrt{2})^2-2\cdot 1=6$ 답 6

0042 $x+y=2\sqrt{2}$, $xy=1$이므로
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=(2\sqrt{2})^3-3\cdot 1\cdot 2\sqrt{2}$
$=10\sqrt{2}$ 답 $10\sqrt{2}$

0043
$$\begin{array}{r r}
 & x^2-\boxed{3}x \\ \cline{2-2}
x+2\,) & x^3-x^2-6x+2 \\
 & x^3+\boxed{2}x^2 \\ \cline{2-2}
 & \boxed{-3}x^2-6x \\
 & \boxed{-3}x^2-\boxed{6}x \\ \cline{2-2}
 & 2
\end{array}$$
답 풀이 참조

0044
$$\begin{array}{r r}
 & 2x+\boxed{3} \\ \cline{2-2}
x^2-x+1\,) & 2x^3+x^2-5 \\
 & 2x^3-\boxed{2}x^2+2x \\ \cline{2-2}
 & \boxed{3}x^2-2x-5 \\
 & \boxed{3}x^2-\boxed{3}x+\boxed{3} \\ \cline{2-2}
 & x-\boxed{8}
\end{array}$$
답 풀이 참조

0045
$$\begin{array}{r r}
 & x-2 \\ \cline{2-2}
x^2+3\,) & x^3-2x^2+4x+1 \\
 & x^3+3x \\ \cline{2-2}
 & -2x^2+x+1 \\
 & -2x^2-6 \\ \cline{2-2}
 & x+7
\end{array}$$
∴ 몫: $x-2$, 나머지: $x+7$
답 몫: $x-2$, 나머지: $x+7$

0046
$$\begin{array}{r r}
 & 2x-5 \\ \cline{2-2}
x^2-x-2\,) & 2x^3-7x^2+3 \\
 & 2x^3-2x^2-4x \\ \cline{2-2}
 & -5x^2+4x+3 \\
 & -5x^2+5x+10 \\ \cline{2-2}
 & -x-7
\end{array}$$
∴ 몫: $2x-5$, 나머지: $-x-7$
답 몫: $2x-5$, 나머지: $-x-7$

0047
$$\begin{array}{r r}
 & -2x^2+x-3 \\ \cline{2-2}
2x^2+x-3\,) & -4x^4+x^2+x-1 \\
 & -4x^4-2x^3+6x^2 \\ \cline{2-2}
 & 2x^3-5x^2+x \\
 & 2x^3+x^2-3x \\ \cline{2-2}
 & -6x^2+4x-1 \\
 & -6x^2-3x+9 \\ \cline{2-2}
 & 7x-10
\end{array}$$
∴ 몫: $-2x^2+x-3$, 나머지: $7x-10$
답 몫: $-2x^2+x-3$, 나머지: $7x-10$

0048

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2-x+3 \\ \hline 2x+3 & 4x^3+4x^2+3x-2 \\ & 4x^3+6x^2 \\ \hline & -2x^2+3x \\ & -2x^2-3x \\ \hline & 6x-2 \\ & 6x+9 \\ \hline & -11 \end{array}$$

$\therefore\ 4x^3+4x^2+3x-2=(2x+3)(2x^2-x+3)-11$

답 풀이 참조

0049 $A-2(A-B)$
$=A-2A+2B$
$=-A+2B$
$=-(x^3-2x^2+5x-4)+2(x^3+x-3)$
$=-x^3+2x^2-5x+4+2x^3+2x-6$
$=x^3+2x^2-3x-2$ 답 ④

0050 $P(x)=2(x^3-2x^2+1)-(-x^3+4x+2)+(2x^2-x+5)$
$=2x^3-4x^2+2+x^3-4x-2+2x^2-x+5$
$=3x^3-2x^2-5x+5$
$\therefore\ P(2)=3\cdot2^3-2\cdot2^2-5\cdot2+5=11$ 답 11

0051 $2X+B=2A-3B$에서 $2X=2A-4B$
$\therefore\ X=A-2B$
$=(2x^2+xy+3y^2)-2\left(-\frac{1}{2}x^2+4xy+y^2\right)$
$=2x^2+xy+3y^2+x^2-8xy-2y^2$
$=3x^2-7xy+y^2$ 답 $3x^2-7xy+y^2$

0052 $A+2B=7x^2+xy-3y^2$ …… ㉠
$A-B=-5x^2+4xy+3y^2$ …… ㉡
㉠$+2\times$㉡을 하면 $3A=-3x^2+9xy+3y^2$
$\therefore\ A=-x^2+3xy+y^2$ ··· ❶
㉠$-$㉡을 하면 $3B=12x^2-3xy-6y^2$
$\therefore\ B=4x^2-xy-2y^2$ ··· ❷
$\therefore\ A+B=3x^2+2xy-y^2$ ··· ❸
답 $3x^2+2xy-y^2$

채점 기준	비율
❶ 다항식 A를 구할 수 있다.	40%
❷ 다항식 B를 구할 수 있다.	40%
❸ $A+B$를 구할 수 있다.	20%

0053 $A+BC=(3x^3+2x^2+x-1)+(x^2-2)(x+1)$
$=3x^3+2x^2+x-1+x^3+x^2-2x-2$
$=4x^3+3x^2-x-3$ 답 ④

0054 $(x+3y)(2x+y)-(2x^2-xy+3y^2)$
$=(2x^2+7xy+3y^2)-(2x^2-xy+3y^2)$
$=2x^2+7xy+3y^2-2x^2+xy-3y^2$
$=8xy$ 답 ③

0055 $[2x+1,\ x^2+x+1]=(2x+1)(x^2+x+1)-1$
$=2x^3+3x^2+3x+1-1$
$=2x^3+3x^2+3x$ 답 $2x^3+3x^2+3x$

0056 $(3x^2+2x+1)(x^2+2x+3)$의 전개식에서 x^3항은
$3x^2\cdot2x+2x\cdot x^2=8x^3$
따라서 x^3의 계수는 8이다. 답 ④

0057 $(2x-y+3)(4x+5y-1)$의 전개식에서 xy항은
$2x\cdot5y+(-y)\cdot4x=6xy$ ··· ❶
따라서 xy의 계수는 6이다. ··· ❷
답 6

채점 기준	비율
❶ xy항을 구할 수 있다.	70%
❷ xy의 계수를 구할 수 있다.	30%

0058 $(2x^2+3x-1)(x^2+x+k)$의 전개식에서 x항은
$3x\cdot k+(-1)\cdot x=(3k-1)x$
이때 x의 계수가 8이므로 $3k-1=8$
$3k=9$ $\therefore\ k=3$ 답 3

0059 $(a+b)^2(a-b)^2=\{(a+b)(a-b)\}^2$
$=(a^2-b^2)^2=a^4-2a^2b^2+b^4$
답 $a^4-2a^2b^2+b^4$

다른풀이 $(a+b)^2(a-b)^2$
$=(a^2+2ab+b^2)(a^2-2ab+b^2)$
$=a^4-2a^3b+a^2b^2+2a^3b-4a^2b^2+2ab^3+a^2b^2-2ab^3+b^4$
$=a^4-2a^2b^2+b^4$

0060 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$
$=(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2$
$=18-5=13$ 답 13

0061 $(a+2b+c)^2=a^2+4b^2+c^2+2\cdot a\cdot2b+2\cdot2b\cdot c+2\cdot c\cdot a$
$=a^2+4b^2+c^2+2(2ab+2bc+ca)$
$=26+2\cdot19=64$ 답 ②

0062 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=0$
$\therefore\ xy+yz+zx=0$
이때 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=2+2\cdot0=2$이므로
$(x+y+z)^4=\{(x+y+z)^2\}^2=2^2=4$ 답 ①

0063 $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
$=\{(x+y)(x^2-xy+y^2)\}\{(x-y)(x^2+xy+y^2)\}$
$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$
$=x^6-y^6$ 답 ②

0064 $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$=a^3-b^3-3ab(a-b)$

$=8-3\cdot(-5)=23$ 답 ③

0065 $A=(x-1)^3$, $B=(x+1)^3$이므로

$A+B=(x-1)^3+(x+1)^3$

$=(x^3-3x^2+3x-1)+(x^3+3x^2+3x+1)$

$=2x^3+6x$ 답 ③

0066 $x^2+3x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t+1)(t-3)$

$=t^2-2t-3$

$=(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-3$

$=x^4+6x^3+9x^2-2x^2-6x-3$

$=x^4+6x^3+7x^2-6x-3$

답 $x^4+6x^3+7x^2-6x-3$

0067 $y-z=t$로 놓으면

(주어진 식)$=\{x-(y-z)\}\{x+(y-z)\}$

$=(x-t)(x+t)$

$=x^2-t^2$

$=x^2-(y-z)^2$

$=x^2-(y^2-2yz+z^2)$

$=x^2-y^2-z^2+2yz$ 답 $x^2-y^2-z^2+2yz$

0068 $(x+3)(x+1)(x-2)(x-4)$

$=\{(x+3)(x-4)\}\{(x+1)(x-2)\}$

$=(x^2-x-12)(x^2-x-2)$ 상수항끼리 더한 값이 같도록 다항식을 짝지어 전개한다.

$x^2-x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t-12)(t-2)$

$=t^2-14t+24$

$=(x^2-x)^2-14(x^2-x)+24$

$=x^4-2x^3+x^2-14x^2+14x+24$

$=x^4-2x^3-13x^2+14x+24$

따라서 $a=-13$, $b=14$이므로

$a+2b=-13+2\cdot 14=15$ 답 ⑤

0069 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$7=3^2-2xy$, $2xy=2$ $\therefore xy=1$

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=3^3-3\cdot 1\cdot 3=18$ 답 ④

0070 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4^2-2\cdot 4=8$

$\therefore x^3y+xy^3=xy(x^2+y^2)$

$=4\cdot 8=32$ 답 32

0071 $x+y=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$,

$xy=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$이므로

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{4^2-2\cdot 1}{1}=14$ 답 ②

다른풀이 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

$=\frac{(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$

$=\frac{(4+4\sqrt{3}+3)+(4-4\sqrt{3}+3)}{4-3}$

$=14$

0072 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서

$10=1^3-3xy$, $3xy=-9$

$\therefore xy=-3$ ··· ❶

$\therefore x^4+y^4=(x^2)^2+(y^2)^2$

$=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$=\{(x+y)^2-2xy\}^2-2(xy)^2$

$=\{1^2-2\cdot(-3)\}^2-2\cdot(-3)^2=31$ ··· ❷

답 31

채점 기준	비율
❶ xy의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ x^4+y^4의 값을 구할 수 있다.	70%

0073 $x\neq 0$이므로 $x^2-5x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-5-\frac{1}{x}=0$ $\therefore x-\frac{1}{x}=5$

$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=5^2+2=27$ 답 ④

참고 $x=0$을 $x^2-5x-1=0$에 대입하면 $-1\neq 0$이므로 $x\neq 0$이다.

0074 (1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$에서

$6=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$ $\therefore \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=8$

그런데 $x>1$이면 $x+\frac{1}{x}>0$이므로 $x+\frac{1}{x}=2\sqrt{2}$

$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=(2\sqrt{2})^3-3\cdot 2\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

(2) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$에서

$6=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$ $\therefore \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=4$

그런데 $x>1$이면 $x-\frac{1}{x}>0$이므로 $x-\frac{1}{x}=2$

$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=2^3+3\cdot 2=14$

답 (1) $10\sqrt{2}$ (2) 14

0075 $x\neq 0$이므로 $x^2-4x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-4+\frac{1}{x}=0$ $\therefore x+\frac{1}{x}=4$ ··· ❶

따라서 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=4^2-2=14$,

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=4^3-3\cdot 4=52$이므로 ··· ❷

$$x^3+2x^2+3x+4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}$$
$$=x^3+\frac{1}{x^3}+2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4$$
$$=52+2\cdot14+3\cdot4+4=96$$ ··· ❸

답 96

채점 기준	비율
❶ $x+\frac{1}{x}$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	30%

0076 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$에서
$13=5^2-2(xy+yz+zx)$, $\quad 2(xy+yz+zx)=12$
$\therefore xy+yz+zx=6$

답 ②

0077 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서
$46=8^2-2(ab+bc+ca)$, $\quad 2(ab+bc+ca)=18$
$\therefore ab+bc+ca=9$ ··· ❶
$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$
$=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2$
$=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$
$=2\cdot46-2\cdot9=74$ ··· ❷

답 74

채점 기준	비율
❶ $ab+bc+ca$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	60%

0078 $a-b=7$, $b-c=-3$을 변끼리 더하면
$a-c=4$
$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$
$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(a^2-2ca+c^2)\}$
$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\}$
$=\frac{1}{2}\{7^2+(-3)^2+4^2\}$
$=\frac{1}{2}\cdot74=37$

답 37

0079 $(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)$
$=(3-2)(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)$
$=(3^2-2^2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)$
$=(3^4-2^4)(3^4+2^4)$
$=3^8-2^8$

답 ③

0080 $98^2+102^2=(100-2)^2+(100+2)^2$
$=100^2-2\cdot100\cdot2+2^2+100^2+2\cdot100\cdot2+2^2$
$=20008$

답 ⑤

0081 $\frac{108^3}{107\times109+1}=\frac{108^3}{(108-1)(108+1)+1}$
$=\frac{108^3}{(108^2-1)+1}$
$=108$

답 108

0082 직사각형의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면 직사각형의 대각선의 길이가 15이므로
$a^2+b^2=15^2=225$
또 직사각형의 둘레의 길이가 42이므로
$2(a+b)=42 \quad \therefore a+b=21$
이때 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서
$225=21^2-2ab \quad \therefore ab=108$
따라서 직사각형의 넓이는 108이다.

답 108

0083 직사각형의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면 직사각형의 대각선의 길이는 사분원의 반지름의 길이와 같으므로
$a^2+b^2=8^2=64$
또 직사각형의 둘레의 길이가 20이므로
$2(a+b)=20 \quad \therefore a+b=10$
이때 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서
$64=10^2-2ab \quad \therefore ab=18$
따라서 직사각형의 넓이는 18이다.

답 18

0084 직육면체의 밑면의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b, 높이를 c라 하면 직육면체의 겉넓이가 10이므로
$2(ab+bc+ca)=10$
또 모든 모서리의 길이의 합이 16이므로
$4(a+b+c)=16 \quad \therefore a+b+c=4$
$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=4^2-10=6$
따라서 직육면체의 대각선의 길이는 $\sqrt{6}$이다.

답 $\sqrt{6}$

0085 두 구의 반지름의 길이를 각각 a, b라 하면 두 구의 지름의 길이의 합이 8이므로
$2(a+b)=8 \quad \therefore a+b=4$
또 두 구의 겉넓이의 합이 40π이므로
$4\pi(a^2+b^2)=40\pi \quad \therefore a^2+b^2=10$
이때 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서
$10=4^2-2ab \quad \therefore ab=3$
따라서 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=4^3-3\cdot3\cdot4=28$이므로 두 구의 부피의 합은
$\frac{4}{3}\pi(a^3+b^3)=\frac{4}{3}\pi\cdot28=\frac{112}{3}\pi$

답 $\frac{112}{3}\pi$

0086
$$\begin{array}{r|l} & 3x-5 \\ \hline x^2+x-1 & 3x^3-2x^2+4x-1 \\ & 3x^3+3x^2-3x \\ \hline & -5x^2+7x-1 \\ & -5x^2-5x+5 \\ \hline & 12x-6 \end{array}$$
따라서 몫은 $3x-5$, 나머지는 $12x-6$이다.

답 ③

0087 $a=5,\ b=5,\ c=4,\ d=16$이므로

$a+b+c+d=30$ 답 30

0088

$$
\begin{array}{r}
3x\ +3 \\
x^2-x+2\,\big)\overline{\,3x^3\qquad +5x+11} \\
\underline{3x^3-3x^2+6x} \\
3x^2-\ x+11 \\
\underline{3x^2-3x+\ 6} \\
2x+\ 5
\end{array}
$$

즉 $2x+5=2x+k$이므로 $k=5$ 답 5

0089

$$
\begin{array}{r}
x\ -3 \\
x^2+1\,\big)\overline{\,x^3-3x^2+4x-1} \\
\underline{x^3\qquad +\ x} \\
-3x^2+3x-1 \\
\underline{-3x^2\qquad -3} \\
3x+2
\end{array}
$$

따라서 몫은 $x-3$, 나머지는 $3x+2$이므로 ··· ❶

$a=1,\ b=-3,\ c=3,\ d=2$ ··· ❷

$\therefore\ ad+bc=1\cdot2+(-3)\cdot3=-7$ ··· ❸

답 -7

채점 기준	비율
❶ 몫과 나머지를 구할 수 있다.	60%
❷ $a,\ b,\ c,\ d$의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ $ad+bc$의 값을 구할 수 있다.	20%

0090 $2x^3+x^2-7x-1=A(2x+3)+5$이므로

$A(2x+3)=2x^3+x^2-7x-6$

$\therefore\ A=(2x^3+x^2-7x-6)\div(2x+3)$

$$
\begin{array}{r}
x^2-\ x\ -2 \\
2x+3\,\big)\overline{\,2x^3+\ x^2-7x-6} \\
\underline{2x^3+3x^2} \\
-2x^2-7x \\
\underline{-2x^2-3x} \\
-4x-6 \\
\underline{-4x-6} \\
0
\end{array}
$$

$\therefore\ A=x^2-x-2$ 답 ①

0091 $4x^3-13x^2-36x+5=A(x-5)$이므로

$A=(4x^3-13x^2-36x+5)\div(x-5)$

$$
\begin{array}{r}
4x^2+7x-1 \\
x-5\,\big)\overline{\,4x^3-13x^2-36x+5} \\
\underline{4x^3-20x^2} \\
7x^2-36x \\
\underline{7x^2-35x} \\
-\ \ x+5 \\
\underline{-\ \ x+5} \\
0
\end{array}
$$

$\therefore\ A=4x^2+7x-1$ 답 $4x^2+7x-1$

0092 $P(x)=(x+3)(3x-4)-2=3x^2+5x-14$

$$
\begin{array}{r}
3x\ +14 \\
x-3\,\big)\overline{\,3x^2+\ 5x-14} \\
\underline{3x^2-\ 9x} \\
14x-14 \\
\underline{14x-42} \\
28
\end{array}
$$

따라서 몫은 $3x+14$, 나머지는 28이다.

답 몫: $3x+14$, 나머지: 28

0093 $P(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$$
\begin{aligned}
P(x)&=\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R \\
&=\frac{1}{2}(2x-1)Q(x)+R \\
&=(2x-1)\cdot\frac{1}{2}Q(x)+R
\end{aligned}
$$

따라서 $P(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{2}Q(x)$, 나머지는 R이다. 답 ①

0094 $P(x)$를 $2x+3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$$
\begin{aligned}
P(x)&=(2x+3)Q(x)+R \\
&=2\left(x+\frac{3}{2}\right)Q(x)+R \\
&=\left(x+\frac{3}{2}\right)\cdot2Q(x)+R
\end{aligned}
$$

따라서 $P(x)$를 $x+\frac{3}{2}$으로 나누었을 때의 몫은 $2Q(x)$, 나머지는 R이다. 답 몫: $2Q(x)$, 나머지: R

0095 $P(x)=(2x-1)Q(x)+1$이므로

$$
\begin{aligned}
xP(x)&=x(2x-1)Q(x)+x \\
&=2x\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2} \\
&=\left(x-\frac{1}{2}\right)\{2xQ(x)+1\}+\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

따라서 $xP(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $2xQ(x)+1$, 나머지는 $\frac{1}{2}$이다. 답 몫: $2xQ(x)+1$, 나머지: $\frac{1}{2}$

0096 전략 $X-A=B$를 X에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $X-A=B$이므로

$$
\begin{aligned}
X&=A+B=(2x^2-4x-2)+(3x+3) \\
&=2x^2-x+1
\end{aligned}
$$

답 ①

0097 전략 x^4항은 $(x^2$항$)\times(x^2$항$)$, $(x$항$)\times(x^3$항$)$에서 나올 수 있으므로 각 다항식에서 이 항들만 선택하여 곱한다.

풀이 $(2x^2-x+3)(x^3+2x^2-4)$의 전개식에서 x^4항은

$2x^2\cdot2x^2+(-x)\cdot x^3=3x^4$

따라서 x^4의 계수는 3이다. 답 ④

0098 전략 먼저 곱셈 공식의 변형을 이용하여 xy의 값을 구한다.

풀이 $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$에서

$5=3^2+2xy,\quad 2xy=-4$

$\therefore xy=-2$ ⋯ ❶

$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=3^3+3\cdot(-2)\cdot3$

$=9$ ⋯ ❷

답 9

채점 기준	비율
❶ xy의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ x^3-y^3의 값을 구할 수 있다.	50%

0099 전략 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

$=3^2-2\cdot(-13)$

$=35$

답 ③

0100 전략 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 다항식의 나눗셈을 하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 $a=3$, $b=5$이므로

$a+b=8$

답 ④

0101 전략 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 $A=BQ+R$이다.

풀이 $A=(x^2-3x)(3x+1)+x-6$

$=3x^3+x^2-9x^2-3x+x-6$

$=3x^3-8x^2-2x-6$

답 ③

0102 전략 주어진 세 식을 변끼리 더한다.

풀이 $A+B=2x^2+x-5$ ⋯⋯ ㉠

$B+C=x^2-3x-8$ ⋯⋯ ㉡

$C+A=-x^2+4x-1$ ⋯⋯ ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면 $\quad 2(A+B+C)=2x^2+2x-14$

$\therefore A+B+C=x^2+x-7$

답 ③

0103 전략 주어진 표에서 첫 번째 줄 왼쪽의 위치에 알맞은 다항식을 A라 하고 먼저 A를 구한다.

풀이

A		
$2x-2$	$2x^2+4x$	
$f(x)$		$-x^2+x-3$

위의 표에서 $A+(2x^2+4x)+(-x^2+x-3)=6x^2+12x$이므로

$A=(6x^2+12x)-(2x^2+4x)-(-x^2+x-3)$

$=6x^2+12x-2x^2-4x+x^2-x+3$

$=5x^2+7x+3$

이때 $f(x)+(2x-2)+(5x^2+7x+3)=6x^2+12x$이므로

$f(x)=(6x^2+12x)-(2x-2)-(5x^2+7x+3)$

$=6x^2+12x-2x+2-5x^2-7x-3$

$=x^2+3x-1$

$\therefore f(10)=10^2+3\cdot10-1=129$

답 129

0104 전략 x^3항은 (상수항)×(x^3항), (x항)×(x^2항), (x^2항)×(x항), (x^3항)×(상수항)에서 나올 수 있으므로 각 다항식에서 이 항들만 선택하여 곱한다.

풀이 $(1+x+2x^2+\cdots+10x^{10})^2$

$=(1+x+2x^2+\cdots+10x^{10})(1+x+2x^2+\cdots+10x^{10})$

이 식의 전개식에서 x^3항은

$1\cdot3x^3+x\cdot2x^2+2x^2\cdot x+3x^3\cdot1=10x^3$

따라서 x^3의 계수는 10이다.

답 10

0105 전략 곱셈 공식 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$을 이용한다.

풀이 $(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$에서

$2(x^2-xy+y^2)=56$

$\therefore x^2-xy+y^2=28$

답 28

0106 전략 $(x-2)(x+3)$을 전개한 후 공통부분을 치환한다.

풀이 $(x-2)(x+3)(x^2+x+1)=(x^2+x-6)(x^2+x+1)$

$x^2+x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t-6)(t+1)$

$=t^2-5t-6$

$=(x^2+x)^2-5(x^2+x)-6$

$=x^4+2x^3+x^2-5x^2-5x-6$

$=x^4+2x^3-4x^2-5x-6$

따라서 $a=2$, $b=-4$, $c=-5$이므로

$a+b-c=3$

답 ④

0107 전략 먼저 $a+b$의 값을 구한 후 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

풀이 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=4$에서 $\quad \dfrac{a+b}{ab}=4$

$\dfrac{a+b}{-2}=4 \quad \therefore a+b=-8$

$\therefore (a-b)^2=(a+b)^2-4ab=(-8)^2-4\cdot(-2)=72$

그런데 $a>b$이므로

$a-b=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

답 ⑤

0108 전략 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4$임을 이용한다.

풀이 $x\neq0$이므로 $x^2-3x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-3+\dfrac{1}{x}=0 \quad \therefore x+\dfrac{1}{x}=3$ ⋯ ❶

$\therefore \left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4=3^2-4=5$ ⋯ ❷

그런데 $x>1$이면 $x-\dfrac{1}{x}>0$이므로

$x-\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$ ⋯ ❸

답 $\sqrt{5}$

채점 기준	비율
❶ $x+\dfrac{1}{x}$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $x-\dfrac{1}{x}$의 값을 구할 수 있다.	20%

0109 전략 먼저 곱셈 공식의 변형을 이용하여 $ab+bc+ca$의 값을 구한다.

풀이 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$25=7^2-2(ab+bc+ca)$

$2(ab+bc+ca)=24$

$\therefore ab+bc+ca=12$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{12}{4}=3$

답 ⑤

0110 전략 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용한다.

풀이 $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$

$=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$

$=(x^4-1)(x^4+1)$

$=x^8-1$

$=32-1=31$

답 ②

0111 전략 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 다항식 $3x^3-2x^2-x+6$을 x^2-2x+3으로 나누어 몫과 나머지를 구한다.

풀이

$$\begin{array}{r|l} & 3x+4 \\ \hline x^2-2x+3 & 3x^3-2x^2-x+6 \\ & 3x^3-6x^2+9x \\ \hline & 4x^2-10x+6 \\ & 4x^2-8x+12 \\ \hline & -2x-6 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=3x+4$, $R(x)=-2x-6$이므로

$Q(1)+R(-2)=7+(-2)=5$

답 ③

0112 전략 x항은 (x항)×(상수항), (상수항)×(x항)에서 나올 수 있으므로 각 다항식에서 이 항들만 선택하여 곱한다.

풀이 $<x^2+x+1,\ x^2+x>$

$=(x^2+x+1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)(x^2+x)$

$+(x^2+x)(x^2+x)$

이 식의 전개식에서 x항은

$x\cdot 1+1\cdot x+1\cdot x=3x$

따라서 x의 계수는 3이다.

답 ①

0113 전략 곱셈 공식 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$를 이용한다.

풀이 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$0=3+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=-\frac{3}{2}$

위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(ab^2c+abc^2+a^2bc)=\frac{9}{4}$

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=\frac{9}{4}$

이때 $a+b+c=0$이므로

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{9}{4}$

답 $\frac{9}{4}$

0114 전략 $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$임을 이용한다.

풀이 $x-y=(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)=2$, $xy=(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=2$ 이므로

$\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}=\frac{x^3-y^3}{xy}=\frac{(x-y)^3+3xy(x-y)}{xy}$

$=\frac{2^3+3\cdot 2\cdot 2}{2}=10$

답 ④

0115 전략 공통부분이 생기도록 적당히 항을 묶은 후 곱셈 공식을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 $(a+b+c)(a-b+c)+(a+b-c)(a-b-c)$

$=\{(a+c)+b\}\{(a+c)-b\}+\{(a-c)+b\}\{(a-c)-b\}$

$=(a+c)^2-b^2+(a-c)^2-b^2$

$=a^2+2ac+c^2-b^2+a^2-2ac+c^2-b^2$

$=2(a^2-b^2+c^2)=0$

따라서 $a^2-b^2+c^2=0$, 즉 $b^2=a^2+c^2$이므로 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다.

답 ④

0116 전략 두 정육면체의 모서리의 길이의 합과 부피의 합을 식으로 나타낸 후 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

풀이 $\overline{AC}=x$, $\overline{CB}=y$라 하면

$x+y=8$, $x^3+y^3=224$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서

$224=8^3-3xy\cdot 8 \qquad \therefore xy=12$

이때 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=8^2-2\cdot 12=40$이므로 두 정육면체의 겉넓이의 합은

$6(x^2+y^2)=6\cdot 40=240$

답 240

다른풀이 $\overline{AC}=x$라 하면 $\overline{CB}=8-x$이므로

$x^3+(8-x)^3=224, \qquad 24x^2-192x+288=0$

$x^2-8x+12=0, \qquad (x-2)(x-6)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=6$

따라서 두 정육면체의 모서리의 길이는 각각 2, 6이므로 두 정육면체의 겉넓이의 합은 $\quad 6\cdot 2^2+6\cdot 6^2=240$

0117 전략 다항식의 나눗셈은 각 다항식을 내림차순으로 정리한 후 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 한다.

풀이 (1)

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2-x-1 \\ \hline x^2-x+1 & 2x^4-3x^3+2x^2+1 \\ & 2x^4-2x^3+2x^2 \\ \hline & -x^3 \\ & -x^3+x^2-x \\ \hline & -x^2+x+1 \\ & -x^2+x-1 \\ \hline & 2 \end{array}$$

따라서 몫은 $2x^2-x-1$, 나머지는 2이다. ··· ❶

(2) $A=(x^2-x+1)(2x^2-x-1)+2$

$=0\cdot(2x^2-x-1)+2=2$ ··· ❷

답 (1) 몫: $2x^2-x-1$, 나머지: 2 (2) 2

채점 기준	비율
❶ 다항식 A를 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구할 수 있다.	50%
❷ $x^2-x+1=0$일 때, 다항식 A의 값을 구할 수 있다.	50%

Ⅰ. 다항식

02 나머지정리와 인수분해

0118 답 ㄷ, ㅁ, ㅂ

0119 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a-2=0,\ b=0$ $\quad\therefore a=2,\ b=0$ 답 $a=2,\ b=0$

0120 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=0,\ b+2=0$ $\quad\therefore a=0,\ b=-2$ 답 $a=0,\ b=-2$

0121 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=1,\ b=0,\ c=5$ 답 $a=1,\ b=0,\ c=5$

0122 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a-1=3,\ b+4=-1,\ 7=c$
$\therefore a=4,\ b=-5,\ c=7$ 답 $a=4,\ b=-5,\ c=7$

0123 주어진 등식이 x, y에 대한 항등식이므로
$a=0,\ b=0,\ c+4=0$
$\therefore a=0,\ b=0,\ c=-4$ 답 $a=0,\ b=0,\ c=-4$

0124 주어진 등식이 x, y에 대한 항등식이므로
$a=-3,\ b=4,\ c=-1$ 답 $a=-3,\ b=4,\ c=-1$

0125 주어진 등식이 x, y에 대한 항등식이므로
$a+2=1,\ b-8=1,\ 3=c$
$\therefore a=-1,\ b=9,\ c=3$ 답 $a=-1,\ b=9,\ c=3$

0126 답 (가) $a+b$ (나) 1 (다) $-2a+b$ (라) 2 (마) -1

0127 주어진 등식에서 우변을 전개하여 정리하면
$x^2-2x+3=ax^2+(a+b)x+c$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$1=a,\ -2=a+b,\ 3=c$
$\therefore a=1,\ b=-3,\ c=3$ 답 $a=1,\ b=-3,\ c=3$

0128 주어진 등식에서 우변을 전개하여 정리하면
$x^3+ax-12=x^3+(b-2)x^2+(c-2b)x-2c$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$0=b-2,\ a=c-2b,\ -12=-2c$
$\therefore a=2,\ b=2,\ c=6$ 답 $a=2,\ b=2,\ c=6$

0129 답 (가) -3 (나) -12 (다) 3 (라) 1 (마) 16 (바) 4

0130 주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면
$-a=-3$ $\quad\therefore a=3$
주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$b=-1$ 답 $a=3,\ b=-1$

0131 주어진 등식의 양변에 $x=5$를 대입하면
$30a=30$ $\quad\therefore a=1$
주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$-5b=5$ $\quad\therefore b=-1$
주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$6c=12$ $\quad\therefore c=2$ 답 $a=1,\ b=-1,\ c=2$

0132 $P(-1)=-2+1+3-1=1$ 답 1

0133 $P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-1=-2$ 답 -2

0134 $P(-2)=5$이므로
$-8+8-2a-3=5,\quad 2a=-8\quad \therefore a=-4$ 답 -4

0135 $P(-1)=0$이므로
$4-a+5=0\quad\therefore a=9$ 답 9

0136 $P(2)=0$이므로
$8+4a-6+6=0,\quad 4a=-8\quad\therefore a=-2$ 답 -2

0137
$$\begin{array}{c|cccc} \boxed{3} & 1 & \boxed{-2} & 1 & 5 \\ & & 3 & 3 & 12 \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{4} & \boxed{17} \end{array}$$
따라서 구하는 몫은 $\boxed{x^2+x+4}$, 나머지는 $\boxed{17}$이다. 답 풀이 참조

0138
$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & 1 & -4 & -8 \\ & & -1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & -4 \end{array}$$
$\therefore$ 몫: x^2-4, 나머지: -4 답 몫: x^2-4, 나머지: -4

0139
$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 2 & 5 & -3 & 1 \\ & & 1 & 3 & 0 \\ \hline & 2 & 6 & 0 & 1 \end{array}$$
$\therefore$ 몫: $2x^2+6x$, 나머지: 1 답 몫: $2x^2+6x$, 나머지: 1

0140 $x^2+6x+9=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2=(x+3)^2$ 답 $(x+3)^2$

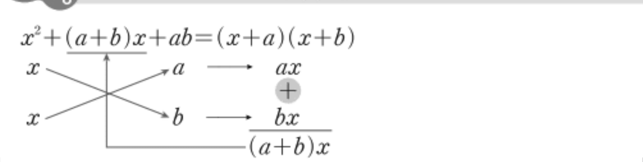
0141 $a^2-4a+4=a^2-2\cdot a\cdot 2+2^2=(a-2)^2$ 답 $(a-2)^2$

0142 $x^2-36=x^2-6^2=(x+6)(x-6)$ 답 $(x+6)(x-6)$

0143 $16a^2-9b^2=(4a)^2-(3b)^2=(4a+3b)(4a-3b)$
답 $(4a+3b)(4a-3b)$

0144 답 $(x-1)(x-4)$

라쎈 특강 $x^2+(a+b)x+ab$의 인수분해



0145 답 $(2x+1)(2x+3)$

라쎈특강 $acx^2+(ad+bc)x+bd$의 인수분해

$$acx^2+\underline{(ad+bc)}x+bd=(ax+b)(cx+d)$$

$$\begin{array}{ccccc} ax & \searrow\nearrow & b & \longrightarrow & bcx \\ & & & & + \\ cx & \nearrow\searrow & d & \longrightarrow & adx \\ \hline & & & & (ad+bc)x \end{array}$$

0146 $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$
$=a^2+(-b)^2+c^2+2a\cdot(-b)+2\cdot(-b)\cdot c+2ca$
$=(a-b+c)^2$ 답 $(a-b+c)^2$

0147 $a^2+9b^2+4c^2+6ab+12bc+4ca$
$=a^2+(3b)^2+(2c)^2+2\cdot a\cdot 3b+2\cdot 3b\cdot 2c+2\cdot 2c\cdot a$
$=(a+3b+2c)^2$ 답 $(a+3b+2c)^2$

0148 $x^3+9x^2+27x+27$
$=x^3+3\cdot x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 3^2+3^3$
$=(x+3)^3$ 답 $(x+3)^3$

0149 $x^3-12x^2+48x-64$
$=x^3-3\cdot x^2\cdot 4+3\cdot x\cdot 4^2-4^3$
$=(x-4)^3$ 답 $(x-4)^3$

0150 $x^3+125=x^3+5^3=(x+5)(x^2-5x+25)$
답 $(x+5)(x^2-5x+25)$

0151 $x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$
답 $(x-2)(x^2+2x+4)$

0152 $x+y=t$로 놓으면
$(x+y)(x+y+3)+2=t(t+3)+2$
$=t^2+3t+2$
$=(t+1)(t+2)$
$=(x+y+1)(x+y+2)$
답 $(x+y+1)(x+y+2)$

0153 $a-2=t$로 놓으면
$(a-2)^2-7(a-2)+12=t^2-7t+12$
$=(t-3)(t-4)$
$=(a-2-3)(a-2-4)$
$=(a-5)(a-6)$ 답 $(a-5)(a-6)$

0154 $x^2=X$로 놓으면
$x^4-10x^2+9=X^2-10X+9$
$=(X-1)(X-9)$
$=(x^2-1)(x^2-9)$
$=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$
답 $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$

0155 $x^4+4x^2+16=(x^4+8x^2+16)-4x^2$
$=(x^2+4)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$
답 $(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

0156 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2+xy+2x+3y-3=(x+3)y+x^2+2x-3$
$=(x+3)y+(x+3)(x-1)$
$=(x+3)(x+y-1)$
답 $(x+3)(x+y-1)$

다른풀이 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2+xy+2x+3y-3=x^2+(y+2)x+3(y-1)$
$=(x+3)(x+y-1)$

0157 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면
$a^2+3ab+2b^2-2a-5b-3$
$=a^2+(3b-2)a+2b^2-5b-3$
$=a^2+(3b-2)a+(2b+1)(b-3)$
$=(a+2b+1)(a+b-3)$ 답 $(a+2b+1)(a+b-3)$

0158 답 (가) 0 (나) $x-1$ (다) x^2-x-6
(라) $(x-1)(x+2)(x-3)$

0159 $P(x)=x^3-x^2-5x-3$으로 놓으면
$P(-1)=-1-1+5-3=0$
조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -1 & -5 & -3 \\ & & -1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x+1)(x^2-2x-3)$
$=(x+1)^2(x-3)$
답 $(x+1)^2(x-3)$

0160 $P(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$으로 놓으면
$P(-1)=1+5+5-5-6=0$,
$P(1)=1-5+5+5-6=0$
조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -5 & 5 & 5 & -6 \\ & & -1 & 6 & -11 & 6 \\ \hline 1 & 1 & -6 & 11 & -6 & \boxed{0} \\ & & 1 & -5 & 6 & \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x-1)(x^2-5x+6)$
$=(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$
답 $(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$

0161 주어진 등식에서 우변을 전개하여 정리하면
$x^3+ax-6=x^3+(b+c)x^2+(3+bc)x+3b$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$0=b+c$, $a=3+bc$, $-6=3b$
$\therefore a=-1$, $b=-2$, $c=2$
$\therefore a+b+c=-1$ 답 ⑤

0162 주어진 등식을 k에 대하여 정리하면

$(x-y-1)k-(2x+3y+8)=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x-y-1=0,\ 2x+3y+8=0$

$\therefore x=-1,\ y=-2$

$\therefore x+y=-3$ 　답 ③

0163 $\dfrac{-ax+by+2}{x-2y+1}=k$($k$는 상수)로 놓으면

$-ax+by+2=k(x-2y+1)$

$\therefore (a+k)x-(b+2k)y+k-2=0$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a+k=0,\ b+2k=0,\ k-2=0$

$\therefore a=-2,\ b=-4,\ k=2$

$\therefore ab=8$ 　답 8

0164 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-4=2c \qquad \therefore c=-2$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a-3=0 \qquad \therefore a=3$

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2a=2b, \qquad a=b \qquad \therefore b=3$

$\therefore abc=-18$ 　답 -18

0165 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$c=2$ ⋯ ❶

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$b+c=-1, \qquad b+2=-1 \qquad \therefore b=-3$ ⋯ ❷

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2a+2b+c=-2, \qquad 2a-6+2=-2 \qquad \therefore a=1$ ⋯ ❸

$\therefore a+b+c=0$ ⋯ ❹

답 0

채점 기준	비율
❶ c의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10%

0166 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면 　$6=c$

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$1=a-b+c, \qquad 1=a-b+6$

$\therefore a-b=-5$ ⋯⋯ ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$17=a+b+c, \qquad 17=a+b+6$

$\therefore a+b=11$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 　$a=3,\ b=8$

$\therefore 2a+b-c=8$ 　답 8

0167 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a+b \qquad \therefore a+b=-1$ ⋯⋯ ㉠

주어진 등식의 양변에 $x^2=2$를 대입하면

$0=4+2a+b \qquad \therefore 2a+b=-4$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 　$a=-3,\ b=2$

$\therefore a^2+b^2=(-3)^2+2^2=13$ 　답 ③

0168 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 　$1=a_0$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^5=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_5$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_5=(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_5)-a_0$

$=2^5-1=31$ 　답 ①

0169 주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$3^5=a_{10}+a_9+\cdots+a_1+a_0$

$\therefore a_0+a_1+\cdots+a_9+a_{10}=243$ 　답 ④

0170 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1^4=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$3^4=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_8$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

㉠+㉡을 하면 　$82=2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8)$

$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6+a_8=41$ ⋯ ❸

답 41

채점 기준	비율
❶ $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $a_0-a_1+a_2-\cdots+a_8$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a_0+a_2+a_4+a_6+a_8$의 값을 구할 수 있다.	20%

0171 x^3+ax^2+b를 x^2+x+2로 나누었을 때의 몫을 $x+c$(c는 상수)라 하면

$x^3+ax^2+b=(x^2+x+2)(x+c)+2x+3$

$=x^3+(c+1)x^2+(c+4)x+2c+3$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=c+1,\ 0=c+4,\ b=2c+3$

$\therefore a=-3,\ b=-5,\ c=-4$

$\therefore ab=15$ 　답 15

참고 x^3+ax^2+b의 최고차항의 계수가 1, x^2+x+2의 최고차항의 계수가 1이므로 몫은 $x+c$(c는 상수) 꼴이다.

0172 x^3+2x^2+3을 x^2+ax+b로 나누었을 때의 몫이 $x+1$, 나머지가 $-3x+1$이므로

$x^3+2x^2+3=(x^2+ax+b)(x+1)-3x+1$

$=x^3+(a+1)x^2+(a+b-3)x+b+1$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$2=a+1,\ 0=a+b-3,\ 3=b+1$

$\therefore a=1,\ b=2$ 　답 $a=1,\ b=2$

0173 x^3+ax+b를 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫을 $x+c$(c는 상수)라 하면

$x^3+ax+b=(x^2-x+1)(x+c)$

$=x^3+(c-1)x^2+(1-c)x+c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$0=c-1,\ a=1-c,\ b=c$

$\therefore a=0,\ b=1,\ c=1$

$\therefore a^2+b^2=1$ 답 ①

0174 $P(x)=x^3+ax^2+bx+1$이라 하면 나머지정리에 의하여 $P(1)=1,\ P(3)=13$이므로

$1+a+b+1=1,\ 27+9a+3b+1=13$

$\therefore a+b=-1,\ 3a+b=-5$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=1$ 답 $a=-2,\ b=1$

0175 나머지정리에 의하여

$P(2)=-4$

따라서 구하는 나머지는 $3P(2)=3\cdot(-4)=-12$ 답 ③

0176 나머지정리에 의하여

$P(-2)=3,\ Q(-2)=-1$

따라서 구하는 나머지는

$4P(-2)+3Q(-2)=4\cdot3+3\cdot(-1)=9$ 답 ⑤

0177 나머지정리에 의하여

$P(2)=3,\ P(-3)=-7$

$P(x)$를 x^2+x-6으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2+x-6)Q(x)+ax+b$

$=(x+3)(x-2)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=-3,\ x=2$를 각각 대입하면

$P(-3)=-3a+b,\ P(2)=2a+b$

$\therefore -3a+b=-7,\ 2a+b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-1$

따라서 구하는 나머지는 $2x-1$이다. 답 $2x-1$

0178 나머지정리에 의하여

$P(-1)=8,\ P(1)=-2$

$(x+2)P(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$(x+2)P(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$

$=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$ ··· ❶

양변에 $x=-1,\ x=1$을 각각 대입하면

$P(-1)=-a+b,\ 3P(1)=a+b$

$\therefore -a+b=8,\ a+b=-6$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-7,\ b=1$ ··· ❷

따라서 $R(x)=-7x+1$이므로

$R(-2)=15$ ··· ❸

답 15

채점 기준	비율
❶ $(x+2)P(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 나타낼 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $R(-2)$의 값을 구할 수 있다.	20%

0179 $P(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$P(x)=(x^2-3x+2)Q_1(x)+4x-1$

$=(x-1)(x-2)Q_1(x)+4x-1$ ······ ㉠

$P(x)$를 x^2+4x+3으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$P(x)=(x^2+4x+3)Q_2(x)-x+3$

$=(x+1)(x+3)Q_2(x)-x+3$ ······ ㉡

$P(x)$를 x^2-x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-x-2)Q(x)+ax+b$

$=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$ ······ ㉢

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $P(2)=7$

㉡의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $P(-1)=4$

㉢의 양변에 $x=2,\ x=-1$을 각각 대입하면

$P(2)=2a+b,\ P(-1)=-a+b$

$\therefore 2a+b=7,\ -a+b=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=5$

따라서 구하는 나머지는 $x+5$이다. 답 ②

0180 $x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5$을 x^3-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5$

$=(x^3-x)Q(x)+ax^2+bx+c$

$=x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $0=c$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=a-b+c$ $\quad\therefore a-b=0$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$4=a+b+c$ $\quad\therefore a+b=4$

$\therefore a=2,\ b=2,\ c=0$

따라서 $R(x)=2x^2+2x$이므로

$R(2)=12$ 답 ④

0181 $P(x)$를 $x(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$P(x)=x(x-2)Q_1(x)$ ······ ㉠

$P(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$P(x)=(x-1)(x-2)Q_2(x)+x-2$ ······ ㉡

$P(x)$를 $x(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$P(x)=x(x-1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$ ······ ㉢

㉠의 양변에 $x=0,\ x=2$를 각각 대입하면 $P(0)=0,\ P(2)=0$

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면 $P(1)=-1$

㉢의 양변에 $x=0,\ x=1,\ x=2$를 각각 대입하면

$P(0)=c,\ P(1)=a+b+c,\ P(2)=4a+2b+c$

$0=c,\ -1=a+b+c,\ 0=4a+2b+c$

$\therefore a=1,\ b=-2,\ c=0$

따라서 구하는 나머지는 x^2-2x이다. 답 x^2-2x

0182 $P(x)$를 x^3-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$(a, b, c는 상수)라 하면

$P(x)=(x^3-1)Q(x)+ax^2+bx+c$

$=(x-1)(x^2+x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$

$P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로 ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 4이다.

$\therefore a+b+c=4$ ...... ㉠

또 $P(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지가 $3x+4$이므로 ax^2+bx+c를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지가 $3x+4$이다.

$\therefore ax^2+bx+c=a(x^2+x+1)+3x+4$
$=ax^2+(a+3)x+a+4$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$b=a+3,\ c=a+4$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a+(a+3)+(a+4)=4$

$3a+7=4 \quad \therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉡에 대입하면 $b=2,\ c=3$

따라서 $R(x)=-x^2+2x+3$이므로

$R(3)=0$ 답 0

0183 나머지정리에 의하여

$P(-4)=5$

$P(3x+5)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는

$P(3\cdot(-3)+5)=P(-4)=5$ 답 5

0184 나머지정리에 의하여

$P(3)=2$

$xP(x-1)$을 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는

$4P(4-1)=4P(3)=4\cdot 2=8$ 답 8

0185 $P(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+2x-4$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$P(-1)=-6$

$P(2x+3)$을 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$P(2\cdot(-2)+3)=P(-1)=-6$ 답 ①

0186 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 2이므로

$P(x)=(x-1)Q(x)+2$

$Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로

$Q(2)=4$

따라서 $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$P(2)=(2-1)Q(2)+2=4+2=6$ 답 6

0187 $P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 2이므로

$P(x)=(x-3)Q(x)+2$

이때 나머지정리에 의하여 $P(-2)=-8$이므로

$P(-2)=-5Q(-2)+2=-8$

$\therefore Q(-2)=2$

따라서 $Q(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 2이다. 답 ①

0188 x^3-2x^2+ax+6을 $x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 5이므로

$x^3-2x^2+ax+6=(x+1)Q(x)+5$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1-2-a+6=5 \quad \therefore a=-2$ ⋯ ❶

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1-2-2+6=2Q(1)+5 \quad \therefore Q(1)=-1$

따라서 $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 -1이다. ⋯ ❷

답 -1

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	50%

0189 x^{10}을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면 $x^{10}=(x-1)Q(x)+R$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $R=1$

㉠의 양변에 $x=99$를 대입하면 $99^{10}=98Q(99)+1$

따라서 99^{10}을 98로 나누었을 때의 나머지는 1이다. 답 ①

0190 (1) x^{2019}을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면 $x^{2019}=(x-1)Q(x)+R$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $R=1$

따라서 구하는 나머지는 1이다.

(2) ㉠의 양변에 $x=2019$를 대입하면

$2019^{2019}=2018Q(2019)+1$

따라서 2019^{2019}을 2018로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

답 (1) 1 (2) 1

0191 $2x^{10}$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면 $2x^{10}=(x+1)Q(x)+R$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $R=2$

㉠의 양변에 $x=5$를 대입하면 $2\cdot 5^{10}=6Q(5)+2$

따라서 $2\cdot 5^{10}$을 6으로 나누었을 때의 나머지는 2이다. 답 ②

0192 $P(x)=x^4+kx^3-2x^2-7x-8$이라 하면 $P(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로 $P(-1)=0$

$1-k-2+7-8=0 \quad \therefore k=-2$ 답 ④

0193 $P(x)=ax^3+bx^2+2x+3$이라 하면 $P(x)$가 $x-1$, $x-3$으로 각각 나누어떨어지므로

$P(1)=0,\ P(3)=0$

$a+b+2+3=0,\ 27a+9b+6+3=0$

$\therefore a+b=-5,\ 3a+b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-7$

$\therefore ab=-14$ 답 -14

0194 $P(x)=x^3-4x^2+ax+b$라 하면 $P(x)$가 $x-1$, $x-2$를 인수로 가지므로

$P(1)=0,\ P(2)=0$

$1-4+a+b=0,\ 8-16+2a+b=0$

$\therefore a+b=3,\ 2a+b=8$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=5,\ b=-2$

따라서 x^2+5x+2를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$1+5+2=8$ 답 8

0195 $P(x)=(ax^2-4)(ax+3)-ax$라 하면 $P(x)$가 $x+1$로 나누어떨어질 때

$P(-1)=0$ ⋯ ❶

$(a-4)(-a+3)+a=0,\quad a^2-8a+12=0$

$(a-2)(a-6)=0\quad \therefore a=2$ 또는 $a=6$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은 8이다. ⋯ ❷

답 8

채점 기준	비율
❶ 인수정리를 이용할 수 있다.	50%
❷ 모든 상수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	50%

0196 $P(x)=x^3-2x^2+ax+b$라 하면 $P(x)$가 x^2+3x+2, 즉 $(x+1)(x+2)$로 나누어떨어지므로

$P(-1)=0,\ P(-2)=0$

$-1-2-a+b=0,\ -8-8-2a+b=0$

$\therefore a-b=-3,\ 2a-b=-16$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-13,\ b=-10$

$\therefore a+b=-23$ 답 -23

0197 $P(x)$가 x^2+2x-3, 즉 $(x+3)(x-1)$로 나누어떨어지므로

$P(-3)=0,\ P(1)=0$

$-54+81-3a+b=0,\ 2+9+a+b=0$

$\therefore 3a-b=27,\ a+b=-11$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=-15$

$\therefore P(x)=2x^3+9x^2+4x-15$

따라서 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(-1)=-2+9-4-15=-12$ 답 ③

0198 $P(x)-4$가 x^2-4x+3, 즉 $(x-1)(x-3)$으로 나누어떨어지므로

$P(1)-4=0,\ P(3)-4=0$

$\therefore P(1)=4,\ P(3)=4$

$P(x+3)$을 x^2+2x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x+3)=(x^2+2x)Q(x)+ax+b$

$\quad =x(x+2)Q(x)+ax+b$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$P(3)=b\quad \therefore b=4$

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$P(1)=-2a+b,\quad 4=-2a+4$

$\therefore a=0$

따라서 구하는 나머지는 4이다. 답 4

0199 다항식 x^3+ax^2+2x+b를 $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & a & 2 & b \\ & & -2 & -2a+4 & 4a-12 \\ \hline & 1 & a-2 & -2a+6 & \boxed{4a+b-12} \end{array}$$

따라서 $k=-2,\ c=-2,\ a-2=2,\ -2a+4=d,\ -2a+6=-2,\ 4a-12=4,\ 4a+b-12=1$이므로

$k=-2,\ a=4,\ b=-3,\ c=-2,\ d=-4$ 답 ②

0200 오른쪽 조립제법에 의하여 다항식 x^3-2x^2+4x-7을 $x-3$으로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$는

$Q(x)=x^2+x+7$ ⋯ ❶

또 $Q(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫은 $x-1$ ⋯ ❷

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -2 & 4 & -7 \\ & & 3 & 3 & 21 \\ \hline -2 & 1 & 1 & 7 & \boxed{14} \\ & & -2 & 2 & \\ \hline & 1 & -1 & \boxed{9} & \end{array}$$

답 $x-1$

채점 기준	비율
❶ 조립제법을 이용하여 $Q(x)$를 구할 수 있다.	50%
❷ $Q(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 구할 수 있다.	50%

0201 (1) 주어진 조립제법에서 $2a+1=0$이므로 $a=-\frac{1}{2}$

따라서 조립제법을 완성하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 2 & -7 & 2 & 1 \\ & & -1 & 4 & -3 \\ \hline & 2 & -8 & 6 & \boxed{-2} \end{array}$$

즉 $a=-\frac{1}{2},\ b=-8,\ c=4,\ d=-2$이므로

$a+b+c+d=-\frac{13}{2}$

(2) $2x^3-7x^2+2x+1$을 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $2x^2-8x+6$, 나머지는 -2이므로

$$\begin{aligned} 2x^3-7x^2+2x+1&=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2-8x+6)-2 \\ &=\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot 2(x^2-4x+3)-2 \\ &=(2x+1)(x^2-4x+3)-2 \end{aligned}$$

따라서 주어진 다항식을 $2x+1$로 나누었을 때의 몫은 x^2-4x+3, 나머지는 -2이다.

답 (1) $-\frac{13}{2}$ (2) 몫: x^2-4x+3, 나머지: -2

0202 $ax^3+ax^2y=ax^2(x+y)$ 답 ④

0203 $xy(z+1)-(z+1)=(xy-1)(z+1)$ 답 $(xy-1)(z+1)$

0204 (주어진 식)$=xy-y^2+x-y$

$\quad =y(x-y)+(x-y)$

$\quad =(x-y)(y+1)$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0205 ③ $x^2-(y+z)^2=(x+y+z)(x-y-z)$ 답 ③

0206 $xy^2-xz^2+y^3-yz^2$
$=x(y^2-z^2)+y(y^2-z^2)$
$=(y^2-z^2)(x+y)$
$=(x+y)(y+z)(y-z)$ 답 $(x+y)(y+z)(y-z)$

0207 $x^2-(2a+5)x+(a+2)(a+3)$
$=(x-a-2)(x-a-3)$
즉 $(x-a-2)+(x-a-3)=2x+3$이므로
$2x-2a-5=2x+3$, $-2a=8$
$\therefore a=-4$ 답 -4

0208 $(a+3b)^3-64b^3$
$=(a+3b)^3-(4b)^3$
$=(a+3b-4b)\{(a+3b)^2+(a+3b)\cdot 4b+(4b)^2\}$
$=(a-b)(a^2+10ab+37b^2)$ 답 ④

0209 $a^3+27=a^3+3^3=(a+3)(a^2-3a+9)$
따라서 a^3+27의 인수인 것은 ①이다. 답 ①

0210 ⑤ $x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2$
$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$
$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$
답 ⑤

0211 $x^2+2x=t$로 놓으면
(주어진 식)$=(t-2)(t-6)+3$
$=t^2-8t+15$
$=(t-3)(t-5)$
$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-5)$
$=(x+3)(x-1)(x^2+2x-5)$
따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ②이다. 답 ②

0212 $x+3=t$로 놓으면
(주어진 식)$=t^2+3t+2$
$=(t+1)(t+2)$
$=(x+4)(x+5)$
$\therefore a+b=4+5=9$ 답 ⑤

0213 $(x+1)(x-2)(x+3)(x+6)+54$
$=\{(x+1)(x+3)\}\{(x-2)(x+6)\}+54$
$=(x^2+4x+3)(x^2+4x-12)+54$ ··· ❶
$x^2+4x=t$로 놓으면
(주어진 식)$=(t+3)(t-12)+54$
$=t^2-9t+18$
$=(t-3)(t-6)$
$=(x^2+4x-3)(x^2+4x-6)$ ··· ❷
따라서 $a=-3$, $b=4$이므로
$ab=-12$ ··· ❸
답 -12

채점 기준	비율
❶ 공통부분이 생기도록 짝을 지어 전개할 수 있다.	40%
❷ 공통부분을 치환하여 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	40%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20%

0214 $(x^2+4x+3)(x^2+12x+35)+15$
$=(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$
$=\{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\}+15$
$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$
$x^2+8x=t$로 놓으면
(주어진 식)$=(t+7)(t+15)+15$
$=t^2+22t+120$
$=(t+12)(t+10)$
$=(x^2+8x+12)(x^2+8x+10)$
$=(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$
$\therefore a+b+c=2+6+8=16$ 답 16

0215 $x^2=X$로 놓으면
$x^4-5x^2+4=X^2-5X+4$
$=(X-1)(X-4)$
$=(x^2-1)(x^2-4)$
$=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$
$a<b<c<d$이므로 $a=-2$, $b=-1$, $c=1$, $d=2$
$\therefore ad+bc=-5$ 답 -5

0216 $x^2=X$, $y^2=Y$로 놓으면
$x^4-x^2y^2-12y^4=X^2-XY-12Y^2$
$=(X+3Y)(X-4Y)$
$=(x^2+3y^2)(x^2-4y^2)$
$=(x^2+3y^2)(x+2y)(x-2y)$
따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ③이다. 답 ③

0217 $x^4-x^2+16=(x^4+8x^2+16)-9x^2$
$=(x^2+4)^2-(3x)^2$
$=(x^2+3x+4)(x^2-3x+4)$ ··· ❶
따라서 $a=3$, $b=4$, $c=4$이므로 $a-b+c=3$ ··· ❷
답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	70%
❷ $a-b+c$의 값을 구할 수 있다.	30%

0218 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2+(2y+3)x-(3y^2-5y-2)$
$=x^2+(2y+3)x-(3y+1)(y-2)$
$=\{x+(3y+1)\}\{x-(y-2)\}$
$=(x+3y+1)(x-y+2)$
따라서 $a=3$, $b=1$, $c=-1$이므로 $a+b-c=5$ 답 5

0219 주어진 식을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면
$(-a+b)c+(a^2b-ab^2)=-(a-b)c+ab(a-b)$
$=(a-b)(ab-c)$
따라서 주어진 식의 인수인 것은 ①이다. 답 ①

0220 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&x^2+(-3y+4)x+(2y^2-5y+3)\\=&x^2+(-3y+4)x+(y-1)(2y-3)\\=&\{x-(y-1)\}\{x-(2y-3)\}\\=&(x-y+1)(x-2y+3)\end{aligned}$$

따라서 두 일차식의 합은

$(x-y+1)+(x-2y+3)=2x-3y+4$ 답 $2x-3y+4$

0221 주어진 식을 전개한 다음 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc\\=&a^2b+a^2c+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2+2abc\\=&(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)\\=&(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)\\=&(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}\\=&(b+c)(a+b)(a+c)\\=&(a+b)(b+c)(c+a)\end{aligned}$$

답 ⑤

참고 b 또는 c에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해해도 결과는 같다.

0222 $P(x)=x^4-2x^3+2x^2-x-6$으로 놓으면

$P(2)=16-16+8-2-6=0$,

$P(-1)=1+2+2+1-6=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}2&1&-2&2&-1&-6\\&&2&0&4&6\\\hline-1&1&0&2&3&\boxed{0}\\&&-1&1&-3&\\\hline&1&-1&3&\boxed{0}&\end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(x+1)(x^2-x+3)$

따라서 $a=1$, $b=-1$, $c=3$이므로

$a-b+c=5$ 답 5

0223 $P(x)$가 $x-1$을 인수로 가지므로

$P(1)=1-a-6+8=0$ $\quad\therefore a=3$

따라서 $P(x)=x^3-3x^2-6x+8$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}1&1&-3&-6&8\\&&1&-2&-8\\\hline&1&-2&-8&\boxed{0}\end{array}$$

$$\begin{aligned}P(x)&=(x-1)(x^2-2x-8)\\&=(x-1)(x+2)(x-4)\end{aligned}$$

답 $(x-1)(x+2)(x-4)$

0224 $P(x)=2x^4-5x^3-8x^2+17x-6$으로 놓으면

$P(1)=2-5-8+17-6=0$,

$P(-2)=32+40-32-34-6=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}1&2&-5&-8&17&-6\\&&2&-3&-11&6\\\hline-2&2&-3&-11&6&\boxed{0}\\&&-4&14&-6&\\\hline&2&-7&3&\boxed{0}&\end{array}$$

$$\begin{aligned}\therefore P(x)&=(x-1)(x+2)(2x^2-7x+3)\\&=(x-1)(x+2)(2x-1)(x-3)\end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ②이다. 답 ②

0225 $P(x)$가 $x-2$로 나누어떨어지므로

$P(2)=8a-16+2a+6=0$ $\quad\therefore a=1$

따라서 $P(x)=x^3-4x^2+x+6$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}2&1&-4&1&6\\&&2&-4&-6\\\hline&1&-2&-3&\boxed{0}\end{array}$$

$$\begin{aligned}P(x)&=(x-2)(x^2-2x-3)\\&=(x-2)(x+1)(x-3)\end{aligned}$$

따라서 $P(x)$의 인수인 것은 ③이다. 답 ③

0226 $P(x)=x^3+ax-2$로 놓으면 $P(x)$가 $x+1$을 인수로 가지므로

$P(-1)=-1-a-2=0$ $\quad\therefore a=-3$ ··· ❶

따라서 $P(x)=x^3-3x-2$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}-1&1&0&-3&-2\\&&-1&1&2\\\hline&1&-1&-2&\boxed{0}\end{array}$$

$$\begin{aligned}P(x)&=(x+1)(x^2-x-2)\\&=(x+1)^2(x-2)\end{aligned}$$

$\therefore b=-2$ ··· ❷

$\therefore ab=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20%

0227 주어진 등식의 좌변을 c에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned}(-a+b)c+a^2-b^2&=-(a-b)c+(a+b)(a-b)\\&=(a-b)(a+b-c)\end{aligned}$$

즉 $(a-b)(a+b-c)=0$에서 $a+b-c\neq0$이므로

$a-b=0$ $\quad\therefore a=b$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 $a=b$인 이등변삼각형이다. 답 ④

참고 삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 항상 크므로 $a+b-c\neq0$이다.

0228 주어진 등식의 좌변을 b에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned}a^2+c^2-2ac+ab-bc&=(a-c)b+a^2-2ac+c^2\\&=(a-c)b+(a-c)^2\\&=(a-c)(a+b-c)\end{aligned}$$

즉 $(a-c)(a+b-c)=0$에서 $a+b-c\neq0$이므로

$a-c=0$ $\quad\therefore a=c$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 $a=c$인 이등변삼각형이다. 답 ⑤

0229 주어진 등식의 좌변을 인수분해하면

$$\begin{aligned}a^4-b^4+c^4+2a^2c^2&=(a^2+c^2)^2-(b^2)^2\\&=(a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)\end{aligned}$$

즉 $(a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)=0$에서 $a^2+b^2+c^2\neq0$이므로

$$a^2-b^2+c^2=0 \qquad \therefore a^2+c^2=b^2$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이므로 그 넓이는

$$\frac{1}{2}ac$$

답 ③

0230 $x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+y^2)^2-x^2y^2$

$$\begin{aligned}&=\{(x+y)^2-2xy\}^2-(xy)^2\\&=(4^2-2\cdot2)^2-2^2\\&=140\end{aligned}$$

답 ②

0231 $a+b=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$,

$a-b=(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$,

$ab=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$ ··· ❶

$$\begin{aligned}\therefore a^3-a^2b+ab^2-b^3&=a^2(a-b)+b^2(a-b)\\&=(a^2+b^2)(a-b)\\&=\{(a+b)^2-2ab\}(a-b)\\&=\{2^2-2\cdot(-1)\}\cdot2\sqrt{2}\\&=12\sqrt{2}\end{aligned}$$

$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$임을 이용해도 된다.

··· ❷

답 $12\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $a+b$, $a-b$, ab의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $a^3-a^2b+ab^2-b^3$의 값을 구할 수 있다.	60%

0232 $a-b=3+\sqrt{3}$, $c-a=3-\sqrt{3}$을 변끼리 더하면

$c-b=6$ ··· ❶

주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned}&ab^2-a^2b+bc^2-b^2c-ac^2+a^2c\\&=(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc(c-b)\\&=(c-b)a^2-(c+b)(c-b)a+bc(c-b)\\&=(c-b)\{a^2-(c+b)a+bc\}\\&=(c-b)(a-b)(a-c)\\&=-(c-b)(a-b)(c-a)\\&=-6\cdot(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})\\&=-36\end{aligned}$$

··· ❷

답 -36

채점 기준	비율
❶ 두 등식을 변끼리 더하여 $c-b$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	70%

0233 $x=77$, $y=33$으로 놓으면

$$\begin{aligned}\frac{77^3-33^3}{77^2+33\cdot110}&=\frac{x^3-y^3}{x^2+y(x+y)}\\&=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^2+xy+y^2}\\&=x-y\\&=77-33\\&=44\end{aligned}$$

답 ②

0234 $x=2018$로 놓으면

$$\begin{aligned}\frac{2018^3+1}{2018^2-2018+1}&=\frac{x^3+1}{x^2-x+1}\\&=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}\\&=x+1\\&=2019\end{aligned}$$

답 2019

0235 $x=100$으로 놓으면

$$\begin{aligned}98\cdot100\cdot103\cdot105+25&=(x-2)x(x+3)(x+5)+25\\&=\{(x-2)(x+5)\}\{x(x+3)\}+25\\&=(x^2+3x-10)(x^2+3x)+25\end{aligned}$$

$x^2+3x=t$로 놓으면

$$\begin{aligned}(x^2+3x-10)(x^2+3x)+25&=(t-10)t+25\\&=t^2-10t+25\\&=(t-5)^2\\&=(x^2+3x-5)^2\\&=(100^2+3\cdot100-5)^2\\&=(10000+300-5)^2\\&=10295^2\end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{98\cdot100\cdot103\cdot105+25}=\sqrt{10295^2}=10295$

답 10295

0236 $P(1)=1-4+3+4-4=0$, $P(-1)=1+4+3-4-4=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}1 & 1 & -4 & 3 & 4 & -4\\ & & 1 & -3 & 0 & 4\\ \hline -1 & 1 & -3 & 0 & 4 & \boxed{0}\\ & & -1 & 4 & -4 & \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$\begin{aligned}\therefore P(x)&=(x-1)(x+1)(x^2-4x+4)\\&=(x-1)(x+1)(x-2)^2\end{aligned}$$

$\therefore P(2.1)=1.1\times3.1\times0.1^2=0.0341$

답 ②

0237 전략 주어진 등식의 양변에 적당한 값을 대입한다.

풀이 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+5+7=a \qquad \therefore a=13$

답 13

0238 전략 주어진 등식의 양변에 적당한 값을 대입한다.

풀이 주어진 등식의 양변에 $x=1$, $x=2$, $x=0$을 각각 대입하면

$8=c$, $17=b+c$, $1=2a-b+c$

$\therefore a=1$, $b=9$, $c=8$

$\therefore a+b+c=18$

답 ⑤

0239 전략 주어진 등식의 우변이 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8$이 되도록 양변에 적당한 값을 대입한다.

풀이 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$4^4=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8$

$\therefore a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8=256$

답 256

0240 전략 다항식 $P(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $P(a)$임을 이용한다.

풀이 $P(x)=x^4-2x^3+ax+14$라 하면 나머지정리에 의하여

$P(2)=4$이므로 $\quad 16-16+2a+14=4, \quad 2a=-10$

$\therefore a=-5$

답 -5

0241 전략 다항식 $P(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $P(a)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)$를 x^2-7x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$\begin{aligned} f(x)&=(x^2-7x)Q(x)+x+4 \\ &=x(x-7)Q(x)+x+4 \end{aligned}$$

양변에 $x=7$을 대입하면

$f(7)=7+4=11$

따라서 다항식 $f(x)$를 $x-7$로 나누었을 때의 나머지는 11이다.

답 11

0242 전략 다항식을 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 $ax+b$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

풀이 $P(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} P(x)&=(x^2-1)Q(x)+ax+b \\ &=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$ ··· ❶

양변에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면

$P(-1)=-a+b$, $P(1)=a+b$

$-1-3-4-6=-a+b$, $1-3+4-6=a+b$

$\therefore -a+b=-14$, $a+b=-4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=5$, $b=-9$ ··· ❷

따라서 $R(x)=5x-9$이므로

$R(3)=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 나머지를 $R(x)=ax+b$라 하고 항등식을 세울 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $R(3)$의 값을 구할 수 있다.	20%

0243 전략 다항식 $P(x)$가 $x-a$로 나누어떨어지면 $P(a)=0$임을 이용한다.

풀이 $P(x)$가 $x+2$로 나누어떨어질 때 $\quad P(-2)=0$

$-8-4a-16+a=0, \quad 3a=-24$

$\therefore a=-8$

답 ③

0244 전략 인수정리와 조립제법을 이용하여 주어진 식을 인수분해한다.

풀이 $P(x)=4x^3-7x-3$으로 놓으면

$P(-1)=-4+7-3=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 4 & 0 & -7 & -3 \\ & & -4 & 4 & 3 \\ \hline & 4 & -4 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(x)&=(x+1)(4x^2-4x-3) \\ &=(x+1)(2x+1)(2x-3) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ④이다.

답 ④

0245 전략 주어진 등식의 좌변을 x에 대하여 정리한 후 항등식의 성질을 이용한다.

풀이 주어진 등식의 좌변을 x에 대하여 정리하면

$(a^2-a-2)x-(a^2-10a+16)=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a^2-a-2=0$, $a^2-10a+16=0$

(i) $a^2-a-2=0$에서 $\quad (a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

(ii) $a^2-10a+16=0$에서 $\quad (a-2)(a-8)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=8$

(i), (ii)에서 $\quad a=2 \quad \therefore a^2=4$

답 4

0246 전략 삼차식을 이차식으로 나누었을 때의 몫은 일차식임을 이용한다.

풀이 x^3+ax^2+7x+b를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} x^3+ax^2+7x+b&=(x-1)^2(x+c) \\ &=(x^2-2x+1)(x+c) \\ &=x^3+(c-2)x^2+(1-2c)x+c \end{aligned}$$ ··· ❶

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=c-2$, $7=1-2c$, $b=c$

$\therefore a=-5$, $b=-3$, $c=-3$ ··· ❷

$\therefore ab=15$ ··· ❸

답 15

채점 기준	비율
❶ x에 대한 항등식을 세울 수 있다.	70%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10%

0247 전략 다항식 $P(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $P(a)$임을 이용한다.

풀이 나머지정리에 의하여

$P(3)+Q(3)=8$, $P(3)Q(3)=6$

이때 $\{P(x)\}^2+\{Q(x)\}^2$을 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$$\begin{aligned} \{P(3)\}^2+\{Q(3)\}^2&=\{P(3)+Q(3)\}^2-2P(3)Q(3) \\ &=8^2-2\cdot6=52 \end{aligned}$$

답 52

0248 전략 다항식 $P(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $P(a)$임을 이용한다.

풀이 $P(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 나머지정리에 의하여 $\quad P(1)=6$, $P(2)=10$

$1+a+b=6$, $4+2a+b=10$

$\therefore a+b=5$, $2a+b=6$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=1$, $b=4$

따라서 $P(x)=x^2+x+4$이므로 $P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$P(3)=16$

답 ①

0249 전략 다항식 $f(x)$를 $(x-2)(x+1)$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $ax+b$(a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

풀이 $f(x)$를 $(x-2)(x+1)$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$f(x)=(x-2)(x+1)(ax+b)+ax+b$$

이때 (가), (나)에서 나머지정리에 의하여 $f(2)=7$, $f(-1)=1$이므로

$$2a+b=7,\ -a+b=1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면　　$a=2$, $b=3$

따라서 $f(x)=(x-2)(x+1)(2x+3)+2x+3$이므로

$$f(0)=-3$$

답 ①

0250 전략 다항식 $P(x+a)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $P(\alpha+a)$임을 이용한다.

풀이 $P(x)$를 $(x-2)(x-5)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$P(x)=(x-2)(x-5)Q(x)+3x+1$$

양변에 $x=5$를 대입하면　　$P(5)=16$

따라서 $P(x+4)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$$P(1+4)=P(5)=16$$

답 ④

0251 전략 다항식 $P(ax+b)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $P(a\alpha+b)$임을 이용한다.

풀이 $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 7이므로

$$P(2)=8+2a+b=7$$

$$\therefore\ 2a+b=-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$P(2x+2017)$을 $x+1009$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로

$$P(2\cdot(-1009)+2017)=P(-1)=-1-a+b=4$$

$$\therefore\ -a+b=5 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면　　$a=-2$, $b=3$

$$\therefore\ ab=-6$$

답 ③

0252 전략 다항식 $P(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이면 $P(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$임을 이용한다.

풀이 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 5이므로

$$f(x)=(x-1)Q(x)+5$$

$Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 10이므로

$$Q(x)=(x-2)Q'(x)+10$$

이때

$$f(x)=(x-1)\{(x-2)Q'(x)+10\}+5$$
$$=(x-1)(x-2)Q'(x)+10x-5$$

이므로 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 나머지는 $10x-5$이다.

따라서 $a=10$, $b=-5$이므로

$$3a+b=25$$

답 25

0253 전략 주어진 조립제법을 이용하여 다항식 $P(x)$를 먼저 구한다.

풀이 주어진 조립제법을 완성하면 오른쪽과 같으므로

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & a & b & c & d \\ & & \boxed{2} & \boxed{8} & \boxed{12} \\ \hline & 1 & 4 & 6 & \boxed{10} \end{array}$$

$$a=1,\ b+2=4,\ c+8=6,$$
$$d+12=10$$
$$\therefore\ a=1,\ b=2,\ c=-2,\ d=-2$$
$$\therefore\ P(x)=x^3+2x^2-2x-2$$

따라서 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$$P(-1)=-1+2+2-2=1$$

답 ①

0254 전략 공통부분을 한 문자로 치환하여 인수분해한다.

풀이 $x^2+x=t$로 놓으면

$$(\text{주어진 식})=(t+3)(t-4)+10$$
$$=t^2-t-2$$
$$=(t+1)(t-2)$$
$$=(x^2+x+1)(x^2+x-2)$$
$$=(x^2+x+1)(x+2)(x-1)$$

따라서 $a=2$, $b=1$이므로　　$a+b=3$

답 ②

0255 전략 주어진 식을 전개한 다음 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

풀이 $[a,\ b,\ c]+[b,\ c,\ a]+[c,\ a,\ b]$

$$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$
$$=a^2b-a^2c+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$$
$$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$$
$$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$$
$$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$$
$$=(b-c)(a-b)(a-c)$$
$$=(a-b)(b-c)(a-c)$$

답 ⑤

0256 전략 먼저 a의 값을 구한 후 주어진 등식의 우변을 인수분해한다.

풀이 $(x+1)P(x)=x^3+4x^2-10x+a$의 양변에 $x=-1$을 대입하면　　$0=-1+4+10+a$　　$\therefore\ a=-13$　　⋯ ❶

따라서 주어진 등식의 우변은 $x^3+4x^2-10x-13$이므로 조립제법을 이용하여 이 식을 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & 4 & -10 & -13 \\ & & -1 & -3 & 13 \\ \hline & 1 & 3 & -13 & \boxed{0} \end{array}$$

$$(x+1)P(x)=(x+1)(x^2+3x-13)$$

$$\therefore\ P(x)=x^2+3x-13 \qquad ⋯ ❷$$

$$\therefore\ P(-1)=-15 \qquad ⋯ ❸$$

답 -15

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $P(x)$를 구할 수 있다.	40%
❸ $P(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20%

0257 전략 68을 문자로 치환한 다음 인수분해 공식을 이용한다.

풀이 $t=68$로 놓으면

$$a=\frac{68^3+2^3}{68\cdot66+4}$$
$$=\frac{t^3+2^3}{t(t-2)+4}=\frac{(t+2)(t^2-2t+4)}{t^2-2t+4}$$
$$=t+2=70$$
$$\therefore\ \frac{a-2}{a+2}=\frac{70-2}{70+2}=\frac{17}{18}$$

답 $\frac{17}{18}$

0258 전략 다항식을 삼차식으로 나누었을 때의 나머지는 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)로 놓을 수 있다.

풀이 $P(x)$를 $(x-2)^2(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$$P(x)=(x-2)^2(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$$

$P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 7이므로 ax^2+bx+c를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 7이다.

$\therefore a-b+c=7$ …… ㉠

또 $P(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x-1$이므로 ax^2+bx+c를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x-1$이다.

$$\therefore ax^2+bx+c=a(x-2)^2+x-1$$
$$=ax^2+(-4a+1)x+4a-1$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$b=-4a+1$, $c=4a-1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a-(-4a+1)+(4a-1)=7$

$9a-2=7$ $\therefore a=1$

$a=1$을 ㉡에 대입하면 $b=-3$, $c=3$

$\therefore R(x)=x^2-3x+3$

답 ②

0259 전략 자연수 a를 자연수 b로 나누었을 때의 몫을 q, 나머지를 r라 하면 $a=bq+r(0\le r<b)$임을 이용한다.

풀이 (1) x^8을 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$x^8=(x+2)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면 $R=256$

따라서 구하는 나머지는 256이다.

(2) ㉠의 양변에 $x=99$를 대입하면

$$99^8=101Q(99)+256$$
$$=101\{Q(99)+2\}+54$$

따라서 구하는 나머지는 54이다.

답 (1) 256 (2) 54

0260 전략 삼차식을 이차식으로 나누었을 때의 몫은 일차식임을 이용한다.

풀이 $P(x)+8$을 $(x+2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $ax+b$ (a, b는 상수, $a\ne0$)라 하면

$P(x)+8=(x+2)^2(ax+b)$ …… ㉠

한편 $P(x)-1$이 x^2-1, 즉 $(x+1)(x-1)$로 나누어떨어지므로

$P(-1)-1=0$, $P(1)-1=0$

$\therefore P(-1)=1$, $P(1)=1$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$P(-1)+8=-a+b$

$9=-a+b$ $\therefore a-b=-9$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$P(1)+8=9a+9b$

$9=9a+9b$ $\therefore a+b=1$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=5$

따라서 $P(x)+8=(x+2)^2(-4x+5)$이므로 이 등식의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$P(-3)+8=(-3+2)^2\{-4\cdot(-3)+5\}$

$\therefore P(-3)=9$

답 ④

0261 전략 다항식 x^2+ax+b(a, b는 상수)가 완전제곱식으로 인수분해되려면 $b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$이어야 한다.

풀이 $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)+a$

$=(x^2-x-2)(x^2-x-12)+a$

$x^2-x=t$로 놓으면

$$(\text{주어진 식})=(t-2)(t-12)+a$$
$$=t^2-14t+24+a$$ …… ㉠

주어진 식이 x에 대한 이차식의 완전제곱 꼴로 인수분해되려면 ㉠이 t에 대한 완전제곱식으로 인수분해되어야 하므로

$24+a=(-7)^2$ $\therefore a=25$

답 25

0262 전략 주어진 식을 인수분해한 다음 조건을 대입하여 식을 간단히 한다.

풀이
$$1-x^2-4y^2+4xy=1-(x^2-4xy+4y^2)$$
$$=1-(x-2y)^2$$
$$=\{1+(x-2y)\}\{1-(x-2y)\}$$
$$=(1+x-2y)(1-x+2y)$$

이때 $x+2y+1=0$에서

$1+x=-2y$, $1+2y=-x$

$$\therefore (\text{주어진 식})=(-2y-2y)(-x-x)$$
$$=(-4y)\cdot(-2x)$$
$$=8xy$$

답 ③

다른풀이 $x+2y+1=0$에서 $x=-2y-1$

$x=-2y-1$을 주어진 식에 대입하면

$$1-x^2-4y^2+4xy=1-(-2y-1)^2-4y^2+4(-2y-1)y$$
$$=-16y^2-8y$$
$$=8y(-2y-1)$$
$$=8xy$$

0263 전략 주어진 식을 b에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해한다.

풀이 주어진 식을 b에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$(a^2+2a+1)b+(a^2+2a+1)=(a+1)^2b+(a+1)^2$$
$$=(a+1)^2(b+1)$$

위의 식의 값이 $245=7^2\cdot5$이므로

$(a+1)^2(b+1)=7^2\cdot5$

이때 a, b는 자연수이므로

$a+1=7$, $b+1=5$

따라서 $a=6$, $b=4$이므로

$a+b=10$

답 ②

0264 전략 다항식 $P(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $P(a)$임을 이용한다.

풀이 다항식 x^3-3x^2+5x+7을 두 이차식 $A(x)$, $B(x)$로 나누었을 때의 나머지가 $5x+3$으로 같으므로 두 이차식 $A(x)$, $B(x)$는

$$x^3-3x^2+5x+7-(5x+3)=x^3-3x^2+4$$

의 서로 다른 인수이다.

$P(x)=x^3-3x^2+4$로 놓으면

$P(-1)=-1-3+4=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x^2-4x+4)$
$=(x+1)(x-2)^2$

따라서 $A(x)=(x+1)(x-2)$, $B(x)=(x-2)^2$ 또는 $A(x)=(x-2)^2$, $B(x)=(x+1)(x-2)$이므로

$A(x)+B(x)=(x-2)^2+(x+1)(x-2)$ ··· ❶

$A(x)+B(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$A(3)+B(3)=(3-2)^2+(3+1)(3-2)=5$ ··· ❷

답 5

채점 기준	비율
❶ $A(x)+B(x)$를 구할 수 있다.	70%
❷ $A(x)+B(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	30%

Ⅱ. 방정식

03 복소수

0265 답 실수부분: 2, 허수부분: 3

0266 답 실수부분: -3, 허수부분: $\sqrt{5}$

0267 답 실수부분: $\frac{4}{3}$, 허수부분: $-\frac{2}{3}$

0268 답 실수부분: 0, 허수부분: -2

0269 답 실수부분: 4, 허수부분: 0

0270 답 ㄱ, ㄷ

0271 답 ㄷ, ㄹ

0272 실수부분이 0인 허수는 $-i$, $\frac{i}{2}$의 2개이다. 답 2

0273 답 $a=-1$, $b=3$

0274 답 $a=0$, $b=-4$

0275 답 $a=7$, $b=0$

0276 답 $a=-3$, $b=2$

0277 $2a=4$, $a-5b=7$ $\therefore a=2$, $b=-1$
답 $a=2$, $b=-1$

0278 $a+9=0$, $a+b=0$ $\therefore a=-9$, $b=9$
답 $a=-9$, $b=9$

0279 답 $4-3i$

0280 답 $-5i-6$

0281 답 $-7+2i$

0282 답 $-2i$

0283 답 $6i$

0284 답 8

0285 $(-1+4i)+(7-3i)=(-1+7)+(4-3)i$
$=6+i$
답 $6+i$

0286 $(2+5i)-(-8+i)=(2+8)+(5-1)i$
$=10+4i$
답 $10+4i$

0287 $(-3+i)-(9-2i)+6i=(-3-9)+(1+2+6)i$
$=-12+9i$
답 $-12+9i$

0288 $(4+i)(2+5i)=8+20i+2i+5i^2$
$=8+22i-5$
$=3+22i$
답 $3+22i$

0289 $(6-i)(-1-4i)=-6-24i+i+4i^2$
$=-6-23i-4$
$=-10-23i$ 답 $-10-23i$

0290 $\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2(1+i)}{1-i^2}$
$=\frac{2(1+i)}{1+1}=1+i$ 답 $1+i$

0291 $\frac{4+3i}{1+2i}=\frac{(4+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{4-8i+3i-6i^2}{1-4i^2}$
$=\frac{4-5i+6}{1+4}=2-i$ 답 $2-i$

0292 $\frac{6+2i}{3+i}=\frac{(6+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{18-6i+6i-2i^2}{9-i^2}$
$=\frac{18+2}{9+1}=2$ 답 2

0293 $\frac{5+i}{2i}=\frac{(5+i)i}{2i\cdot i}=\frac{5i+i^2}{2i^2}$
$=\frac{5i-1}{-2}=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$ 답 $\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$

0294 $i^6=i^4\cdot i^2=-1$ 답 -1

0295 $(-i)^7=-i^7=-i^4\cdot i^3=i$ 답 i

0296 $i^{10}+i^{100}=(i^4)^2\cdot i^2+(i^4)^{25}=-1+1=0$ 답 0

0297 $(1+i)^8=\{(1+i)^2\}^4=(1+2i+i^2)^4=(2i)^4=16i^4=16$
답 16

0298 $\sqrt{-6}=\sqrt{6}i$ 답 $\sqrt{6}i$

0299 $\sqrt{-25}=\sqrt{25}i=5i$ 답 $5i$

0300 $-\sqrt{-9}=-\sqrt{9}i=-3i$ 답 $-3i$

0301 $-\sqrt{-12}=-\sqrt{12}i=-2\sqrt{3}i$ 답 $-2\sqrt{3}i$

0302 $-\sqrt{-\frac{4}{9}}=-\sqrt{\frac{4}{9}}i=-\frac{2}{3}i$ 답 $-\frac{2}{3}i$

0303 $\pm\sqrt{-5}=\pm\sqrt{5}i$ 답 $\pm\sqrt{5}i$

0304 $\pm\sqrt{-8}=\pm\sqrt{8}i=\pm2\sqrt{2}i$ 답 $\pm2\sqrt{2}i$

0305 $\pm\sqrt{-16}=\pm\sqrt{16}i=\pm4i$ 답 $\pm4i$

0306 $\pm\sqrt{-20}=\pm\sqrt{20}i=\pm2\sqrt{5}i$ 답 $\pm2\sqrt{5}i$

0307 $\pm\sqrt{-\frac{1}{4}}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}i=\pm\frac{1}{2}i$ 답 $\pm\frac{1}{2}i$

0308 $\sqrt{-2}\sqrt{-6}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{6}i=\sqrt{12}i^2=-2\sqrt{3}$ 답 $-2\sqrt{3}$

0309 $\sqrt{-4}\sqrt{-9}=\sqrt{4}i\cdot\sqrt{9}i=\sqrt{36}i^2=-6$ 답 -6

0310 $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}i}=\frac{3i}{i^2}=-3i$ 답 $-3i$

0311 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-12}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}i}=\frac{\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i^2}=-\frac{1}{2}i$ 답 $-\frac{1}{2}i$

0312 ④ $1-5i$의 실수부분은 1, 허수부분은 -5이다. 답 ④

0313 $a=\sqrt{2}$, $b=\frac{4}{2}=2$이므로
$a^2+b^2=(\sqrt{2})^2+2^2=6$ 답 6

0314 허수는 $-3i$, $-1-i$, $3+\sqrt{-1}=3+i$의 3개이다. 답 3
참고 $2+i^2=2-1=1$이므로 실수이다.

0315 $2(1+7i)+(5-i)-(2i-6)=2+14i+5-i-2i+6$
$=13+11i$ 답 ⑤

0316 $z_1z_2=(2-3i)(2+3i)=4+9=13$ 답 ④

0317 $(3-i)(4+2i)+\frac{4+3i}{2-i}$
$=12+6i-4i+2+\frac{(4+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$
$=14+2i+\frac{8+4i+6i-3}{4+1}$
$=14+2i+1+2i=15+4i$ 답 $15+4i$

0318 $(2+3i)*(4-i)$
$=(2+3i)-(4-i)+2(2+3i)(4-i)$ ⋯ ❶
$=-2+4i+2(8-2i+12i+3)$
$=-2+4i+22+20i=20+24i$ ⋯ ❷
따라서 구하는 허수부분은 24이다. ⋯ ❸
답 24

채점 기준	비율
❶ 연산의 규칙을 이해하고 적용할 수 있다.	30%
❷ 복소수의 사칙연산을 할 수 있다.	50%
❸ 허수부분을 구할 수 있다.	20%

0319 $z=1+\sqrt{3}i$에서 $z-1=\sqrt{3}i$
양변을 제곱하면 $z^2-2z+1=-3$ $\therefore z^2-2z=-4$
$\therefore z^2-2z+2=-4+2=-2$ 답 ①
다른풀이 $z^2-2z+2=(1+\sqrt{3}i)^2-2(1+\sqrt{3}i)+2$
$=1+2\sqrt{3}i-3-2-2\sqrt{3}i+2$
$=-2$

0320 $x=\dfrac{1-3i}{2}$에서 $\quad 2x-1=-3i$

양변을 제곱하면 $\quad 4x^2-4x+1=-9$

$4x^2-4x=-10 \quad \therefore x^2-x=-\dfrac{5}{2}$

$\therefore 3x^2-3x+5=3(x^2-x)+5$

$=3\cdot\left(-\dfrac{5}{2}\right)+5=-\dfrac{5}{2}$ 답 $-\dfrac{5}{2}$

다른풀이 $3x^2-3x+5=3\cdot\left(\dfrac{1-3i}{2}\right)^2-3\cdot\dfrac{1-3i}{2}+5$

$=3\cdot\dfrac{1-6i-9}{4}-\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{2}i+5$

$=-6-\dfrac{9}{2}i-\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{2}i+5=-\dfrac{5}{2}$

0321 $z=\dfrac{2+i}{1+i}=\dfrac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2-2i+i+1}{1+1}=\dfrac{3-i}{2}$에서

$2z-3=-i$

양변을 제곱하면 $\quad 4z^2-12z+9=-1$

$4z^2-12z+10=0 \quad \therefore 2z^2-6z+5=0$

$\therefore 2z^3-6z^2+7z+2=z(2z^2-6z+5)+2z+2$

$=2z+2=2\cdot\dfrac{3-i}{2}+2$

$=5-i$ 답 $5-i$

0322 $z=x(2-i)+2(i-3)=2x-xi+2i-6$

$=(2x-6)+(-x+2)i$

z^2이 음의 실수가 되려면 z의 실수부분은 0이고, 허수부분은 0이 아니어야 하므로

$2x-6=0,\ \underbrace{-x+2\neq0}_{x\neq2}$

$\therefore x=3$ 답 3

0323 $x(x+1+i)-(2+i)=x^2+x+xi-2-i$

$=(x^2+x-2)+(x-1)i$

이것이 실수가 되려면

$x-1=0 \quad \therefore x=1$ 답 ⑤

0324 z^2이 실수가 되려면 z의 실수부분이 0 또는 z의 허수부분이 0이어야 하므로

$a-1=0$ 또는 $\underbrace{a^2-4a+3=0}_{a^2-4a+3=(a-1)(a-3)=0}$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$1+3=4$ 답 ②

다른풀이 $z^2=(a^2-4a+3)^2-(a-1)^2+2(a^2-4a+3)(a-1)i$

이것이 실수가 되려면

$2(a^2-4a+3)(a-1)=0$

$(a-1)^2(a-3)=0 \quad \therefore a=1$ 또는 $a=3$

0325 $z=(1+5i)(a-i)=a-i+5ai+5$

$=(a+5)+(5a-1)i$

z^2이 양의 실수가 되려면 z는 0이 아닌 실수이어야 하므로

$\underbrace{a+5\neq0}_{a\neq-5},\ 5a-1=0$

$\therefore a=\dfrac{1}{5}$ 답 $\dfrac{1}{5}$

0326 $x(2-i)-y(3+2i)=3-5i$에서

$2x-xi-3y-2yi=3-5i$

$(2x-3y)+(-x-2y)i=3-5i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2x-3y=3,\ -x-2y=-5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=3,\ y=1$

$\therefore xy=3$ 답 3

0327 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x-6=0,\ 2x-13y+1=0$

$\therefore x=6,\ y=1$

$\therefore x+y=7$ 답 7

0328 $\dfrac{x}{2+i}+\dfrac{y}{2-i}=\dfrac{8}{1+3i}$에서

$\dfrac{x(2-i)+y(2+i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{8(1-3i)}{\underbrace{(1+3i)(1-3i)}_{1-9i^2=1+9=10}}$

$\dfrac{2(x+y)-(x-y)i}{5}=\dfrac{4-12i}{5}$

$2(x+y)-(x-y)i=4-12i$ ··· ❶

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=2,\ x-y=12$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=7,\ y=-5$ ··· ❷

$\therefore xy=-35$ ··· ❸

답 -35

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 양변을 각각 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 나타낼 수 있다.	40%
❷ x, y의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ xy의 값을 구할 수 있다.	10%

0329 $x^2+y^2i+x+yi-2-6i=0$에서

$(x^2+x-2)+(y^2+y-6)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2+x-2=0,\ y^2+y-6=0$

$x^2+x-2=0$에서 $\quad (x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

$y^2+y-6=0$에서 $\quad (y+3)(y-2)=0$

$\therefore y=-3$ 또는 $y=2$

$\therefore x+y=-5$ 또는 $x+y=-2$ 또는 $x+y=0$ 또는 $x+y=3$

따라서 $x+y$의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0330 $(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$

$=\{(1+2i)-(2-5i)\}\{(1-2i)-(2+5i)\}$

$=(-1+7i)(-1-7i)$

$=1+49=50$ 답 50

0331 $\dfrac{1-z}{\overline{z}}=\dfrac{1-(3-2i)}{3+2i}=\dfrac{(-2+2i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$

$=\dfrac{-6+4i+6i+4}{9+4}=-\dfrac{2}{13}+\dfrac{10}{13}i$ 답 ②

0332 $z=\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2(1-i)}{1+1}=1-i$ ⋯ ❶

$\therefore 1+\bar{z}+z\bar{z}=1+(1+i)+(1-i)(1+i)$

$=1+1+i+1+1$

$=4+i$ ⋯ ❷

답 $4+i$

채점 기준	비율
❶ z를 간단히 할 수 있다.	40%
❷ $1+\bar{z}+z\bar{z}$의 값을 구할 수 있다.	60%

0333 $z=a+bi$(a, b는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$이고

$z^2=(a+bi)^2=2+6i$에서

$a^2-b^2+2abi=2+6i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=2,\ ab=3$

$\therefore z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)$

$=a^2+b^2=\sqrt{(a^2+b^2)^2}$

$=\sqrt{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2}$

$=\sqrt{2^2+4\cdot3^2}=2\sqrt{10}$

답 $2\sqrt{10}$

다른풀이 $(z\bar{z})^2=z^2\bar{z}^2=z^2\overline{z^2}=(2+6i)(2-6i)=40$이므로

$z\bar{z}=2\sqrt{10}\ (\because z\bar{z}>0)$

0334 $x+y=(3+i)+(3-i)=6$, $xy=(3+i)(3-i)=10$이므로

$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$

$=\frac{6^2-2\cdot10}{10}=\frac{8}{5}$

답 ②

다른풀이 $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{3-i}{3+i}+\frac{3+i}{3-i}=\frac{(3-i)^2+(3+i)^2}{(3+i)(3-i)}$

$=\frac{9-6i-1+9+6i-1}{9+1}=\frac{8}{5}$

0335 $x+y=(2+\sqrt{3}i)+(2-\sqrt{3}i)=4$,

$xy=(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)=7$이므로

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=4^2-2\cdot7=2$

답 2

다른풀이 $x^2+y^2=(2+\sqrt{3}i)^2+(2-\sqrt{3}i)^2$

$=4+4\sqrt{3}i-3+4-4\sqrt{3}i-3$

$=2$

0336 $x+y=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$,

$xy=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=\frac{1+3}{4}=1$

① $x+y=1$

② $x^2y^2=(xy)^2=1^2=1$

③ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{1}=1$

④ $x^2y+xy^2=xy(x+y)=1\cdot1=1$

⑤ $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=1^3-3\cdot1\cdot1=-2$

답 ⑤

0337 $z=a+bi$(a, b는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$

ㄱ. $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$

따라서 $z+\bar{z}$는 실수이다.

ㄴ. $z=1+i$이면 $-\bar{z}=-(1-i)=-1+i$

$\therefore z\neq-\bar{z}$

ㄷ. $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=0$에서

$a=0,\ b=0$, 즉 $z=0$

따라서 $z\bar{z}=0$이면 $z=0$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

0338 $z=\bar{z}$를 만족시키는 z는 실수이다.

따라서 조건을 만족시키는 z는 0, $\sqrt{2}+1$의 2개이다.

답 2

0339 $z=-\bar{z}$이고 $z\neq0$이므로 z의 실수부분은 0이고, 허수부분은 0이 아니다.

따라서 $z=(x^2-x-6)+(x^2-4)i$에서

$x^2-x-6=0,\ x^2-4\neq0$

$x^2-x-6=0$에서 $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$ ⋯⋯ ㉠

$x^2-4\neq0$에서 $x^2\neq4$

$\therefore x\neq\pm2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $x=3$

답 3

0340 z^2이 실수이므로 $z^2=\overline{z^2}$

$z^2-\bar{z}^2=0$, $(z-\bar{z})(z+\bar{z})=0$

이때 z는 허수이므로 $z\neq\bar{z}$이다.

$\therefore z+\bar{z}=0$, 즉 $z=-\bar{z}$

답 ②

참고 z^2이 실수이므로 $z=bi$(b는 0이 아닌 실수)라 하면

③ $z\bar{z}=bi\cdot(-bi)=-b^2i^2=b^2\neq0$

④ $z\bar{z}=-1$, 즉 $b^2=-1$을 만족시키는 실수 b는 존재하지 않으므로

$z\bar{z}\neq-1$

⑤ $z\bar{z}\neq0$, $z+\bar{z}=0$이므로 $z\bar{z}\neq z+\bar{z}$

0341 $\alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\beta}=\bar{\alpha}(\alpha+\beta)+\bar{\beta}(\alpha+\beta)$

$=(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$

이때 $\alpha=4+3i$, $\beta=-1-2i$이므로

$\alpha+\beta=3+i$, $\overline{\alpha+\beta}=3-i$

$\therefore$ (주어진 식)$=(3+i)(3-i)=10$

답 10

0342 $\alpha\bar{\alpha}-\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+\beta\bar{\beta}=\alpha(\bar{\alpha}-\bar{\beta})-\beta(\bar{\alpha}-\bar{\beta})$

$=(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})$

$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})$

$=(5-3i)(5+3i)$

$=34$

답 34

0343 $\alpha\bar{\beta}=1$에서 $\alpha=\frac{1}{\bar{\beta}}$

$\overline{\alpha\bar{\beta}}=1$에서 $\bar{\alpha}\beta=1$이므로 $\beta=\frac{1}{\bar{\alpha}}$ ⋯ ❶

$\therefore \beta+\frac{1}{\bar{\beta}}=\frac{1}{\bar{\alpha}}+\alpha=5i$ ⋯ ❷

답 $5i$

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 변형할 수 있다.	60%
❷ $\beta+\frac{1}{\beta}$의 값을 구할 수 있다.	40%

0344 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 주어진 식은

$(3-i)(a+bi)+2i(a-bi)=3+7i$

$3a+3bi-ai+b+2ai+2b=3+7i$

$(3a+3b)+(a+3b)i=3+7i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3a+3b=3$, $a+3b=7$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=3$

$\therefore z=-2+3i$

답 ②

0345 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면

$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=6$

$\therefore a=3$ ⋯ ❶

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=25$

$9+b^2=25$, $b^2=16$

$\therefore b=\pm4$ ⋯ ❷

$\therefore z=3\pm4i$ ⋯ ❸

답 $3\pm4i$

채점 기준	비율
❶ $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓고 a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 복소수 z를 구할 수 있다.	20%

0346 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면

$z+zi=(a+bi)+(a+bi)i=a+bi+ai-b$

$=(a-b)+(a+b)i$

이므로 주어진 식은

$(a-b)-(a+b)i=4-2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a-b=4$, $a+b=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-1$

따라서 $z=3-i$이므로 z의 허수부분은 -1이다.

답 ⑤

0347 $z=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)로 놓으면

$$z+\frac{1}{z}=a+bi+\frac{1}{a+bi}$$
$$=a+bi+\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}$$
$$=a+bi+\frac{a-bi}{a^2+b^2}$$
$$=\left(a+\frac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(b-\frac{b}{a^2+b^2}\right)i$$

이때 $z+\frac{1}{z}$이 실수이므로

$b-\frac{b}{a^2+b^2}=0$ $\quad\therefore a^2+b^2=1$ ($\because b\neq0$)

$\therefore z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=1$

답 1

0348 $i=i^5=i^9=\cdots=i^{97}$, $i^2=i^6=i^{10}=\cdots=i^{98}=-1$,
$i^3=i^7=i^{11}=\cdots=i^{99}=-i$, $i^4=i^8=i^{12}=\cdots=i^{100}=1$이므로

$1+i+i^2+\cdots+i^{100}$

$=(1+i-1-i)+(1+i-1-i)+\cdots+(1+i-1-i)+1$

$=1$

답 ④

0349 $i=i^5=i^9$, $i^2=i^6=i^{10}=-1$, $i^3=i^7=-i$, $i^4=i^8=1$이므로

$$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{10}}$$
$$=\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\frac{1}{i}-1$$
$$=\frac{1}{i}-1=\frac{i}{i^2}-1$$
$$=-1-i$$

따라서 $-1-i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-1$, $b=-1$

$\therefore a+b=-2$

답 -2

0350 $i=i^5=i^9=\cdots=i^{29}$, $i^2=i^6=i^{10}=\cdots=i^{30}=-1$,
$i^3=i^7=i^{11}=\cdots=i^{27}=-i$, $i^4=i^8=i^{12}=\cdots=i^{28}=1$이므로

$i+2i^2+3i^3+\cdots+30i^{30}$

$=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)$

$\quad+\cdots+(25i-26-27i+28)+(29i-30)$

$=(2-2i)+(2-2i)+\cdots+(2-2i)+(29i-30)$

$=7(2-2i)+(29i-30)$

$=-16+15i$

따라서 $-16+15i=x+yi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x=-16$, $y=15$

$\therefore x-y=-31$

답 ①

0351 $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$\therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100}=i^{100}=(i^4)^{25}=1$

답 1

0352 $(1+i)^{50}=\{(1+i)^2\}^{25}=(2i)^{25}=2^{25}\cdot(i^4)^6\cdot i=2^{25}i$
$(1-i)^{50}=\{(1-i)^2\}^{25}=(-2i)^{25}=(-2)^{25}\cdot(i^4)^6\cdot i=-2^{25}i$

$\therefore (1+i)^{50}+(1-i)^{50}=2^{25}i+(-2^{25}i)=0$

답 ③

0353 $z^2=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2i}{2}=i$이므로

$z^2+z^4+z^6+z^8+z^{10}=i+i^2+i^3+i^4+i^5$

$=i-1-i+1+i=i$

답 i

0354 $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$,

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$이므로

$f(n)=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n=(-i)^n+i^n$ ⋯ ❶

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$
$=\{(-i)+i\}+\{(-i)^2+i^2\}+\{(-i)^3+i^3\}+\{(-i)^4+i^4\}$
$=0-2+0+2=0$ ··· ❷

답 0

채점 기준	비율
❶ $f(n)$을 간단히 할 수 있다.	60%
❷ $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$의 값을 구할 수 있다.	40%

0355 $\sqrt{-2}\sqrt{-4}+\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}+\sqrt{-4}$
$=-\sqrt{8}-\sqrt{\dfrac{12}{-3}}+\sqrt{4}i$
$=-2\sqrt{2}-2i+2i$
$=-2\sqrt{2}$

답 $-2\sqrt{2}$

0356 ① $\sqrt{-2}\sqrt{7}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{7}=\sqrt{14}i=\sqrt{-14}$
② $\sqrt{-2}\sqrt{-7}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{7}i=\sqrt{14}i^2=-\sqrt{14}$
③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-7}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}i}=\dfrac{\sqrt{2}i}{-\sqrt{7}}=-\sqrt{-\dfrac{2}{7}}$
④ $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-7}}=\dfrac{\sqrt{2}i}{\sqrt{7}i}=\sqrt{\dfrac{2}{7}}$
⑤ $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{2}i}{\sqrt{7}}=\sqrt{\dfrac{2}{7}}i=\sqrt{-\dfrac{2}{7}}$

답 ③

0357 $z=\dfrac{2-\sqrt{-4}}{2+\sqrt{-4}}=\dfrac{2-\sqrt{4}i}{2+\sqrt{4}i}$
$=\dfrac{2-2i}{2+2i}=\dfrac{1-i}{1+i}$
$=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$ ··· ❶
$\therefore z+\overline{z}=-i+i=0$ ··· ❷

답 0

채점 기준	비율
❶ z를 간단히 할 수 있다.	70%
❷ $z+\overline{z}$의 값을 구할 수 있다.	30%

0358 $\sqrt{-3}\sqrt{-27}+\sqrt{-4}\sqrt{4}+\dfrac{\sqrt{-20}}{\sqrt{-5}}+\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{-3}}$
$=-\sqrt{81}+\sqrt{-16}+\sqrt{\dfrac{20}{5}}-\sqrt{\dfrac{48}{-3}}$
$=-9+4i+2-4i$
$=-7$
따라서 $-7=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a=-7,\ b=0$
$\therefore b-a=7$

답 7

0359 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서 $a<0,\ b<0$
$\therefore \sqrt{(a+b)^2}-|b|=-(a+b)+b=-a$

답 $-a$

0360 $\dfrac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-8}}=-\sqrt{\dfrac{x-5}{x-8}}$에서 $x-5>0,\ x-8<0$
$\therefore |x-5|+|x-8|=(x-5)-(x-8)=3$

답 ②

0361 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$에서 $a>0,\ b<0$
① $\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b}=a\sqrt{b}$
② $\sqrt{ab^2}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b^2}=-b\sqrt{a}$
④ $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

답 ④

0362 전략 실수부분이 0인 허수 bi(b는 0이 아닌 실수)를 찾는다.
풀이 실수부분이 0인 허수는 $-5i,\ \sqrt{2}i,\ -\sqrt{-1}=-i$의 3개이다.

답 3

0363 전략 복소수 $a+bi$($a,\ b$는 실수)가 실수이면 $b=0$이다.
풀이 $x(1+xi)-2(2i-3)=x+x^2i-4i+6$
$=(x+6)+(x^2-4)i$
이것이 실수가 되려면 $x^2-4=0$
$(x+2)(x-2)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=2$
따라서 모든 실수 x의 값의 합은 0이다.

답 ③

0364 전략 복소수의 곱셈은 허수단위 i를 문자처럼 생각하여 전개한 후 $i^2=-1$임을 이용하여 계산한다.
풀이 $(5-6i)(6+i)=30+5i-36i+6=36-31i$
따라서 $36-31i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a=36,\ b=-31$
$\therefore a+b=5$

답 ③

0365 전략 $x,\ y$가 서로 켤레복소수이므로 $x+y,\ xy$의 값을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.
풀이 $x+y=(2+i)+(2-i)=4,\ xy=(2+i)(2-i)=5$이므로
$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{4}{5}$

답 $\dfrac{4}{5}$

다른풀이 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2+i}+\dfrac{1}{2-i}=\dfrac{(2-i)+(2+i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{4}{5}$

0366 전략 $(1+i)^2$의 값을 구한 후 거듭제곱을 이용한다.
풀이 $(1+i)^{10}=\{(1+i)^2\}^5=(2i)^5=2^5i^5=2^5\cdot i^4\cdot i=32i$
따라서 $32i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a=0,\ b=32$
$\therefore a-b=-32$

답 ①

0367 전략 $a<0,\ b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$임을 이용한다.
풀이 $2=\sqrt{4}=\sqrt{(-2)(-2)}=-\sqrt{-2}\sqrt{-2}$
$=-(\sqrt{-2})^2=-(-2)=2$

답 ③

0368 전략 복소수 z에 대하여 $z^2<0$이면 z의 실수부분은 0이고, 허수부분은 0이 아니어야 한다.
풀이 $z=i(x+2i)^2=i(x^2+4xi-4)$
$=ix^2-4x-4i=-4x+(x^2-4)i$ ··· ❶
$z^2<0$이면 z의 실수부분은 0이고, 허수부분은 0이 아니어야 하므로
$-4x=0,\ \underbrace{x^2-4\neq0}_{x\neq\pm2}$
$\therefore x=0$ ··· ❷

답 0

채점 기준	비율
❶ z를 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 나타낼 수 있다.	40%
❷ x의 값을 구할 수 있다.	60%

0369 전략 $a+bi=c+di$(a, b, c, d는 실수)이면 $a=c$, $b=d$이다.

풀이 $(a-bi)^2=8i$에서

$a^2-b^2-2abi=8i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=0$, $-2ab=8$

$a^2-b^2=0$에서 $(a+b)(a-b)=0$

$\therefore a=b$ 또는 $a=-b$

(i) $a=b$일 때, $-2ab=8$에서 $a^2=-4$이므로 이를 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

(ii) $a=-b$일 때, $-2ab=8$에서 $a^2=4$이므로

$a=2$, $b=-2$ ($\because a>0$)

(i), (ii)에서 $20a+b=20\cdot2-2=38$

답 38

0370 전략 $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$(a, b, c, d는 실수)로 놓고 복소수의 연산과 켤레복소수의 성질을 이용한다.

풀이 $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ (a, b, c, d는 실수)로 놓으면

$\overline{z_1}=a-bi$, $\overline{z_2}=c-di$

① $z_1\overline{z_1}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=0$에서

$a=0$, $b=0$

따라서 z_1은 실수이다.

② $z_1=\overline{z_2}$이면 $a+bi=c-di$에서 $a=c$, $b=-d$이므로

$z_2=c+di=a-bi=\overline{z_1}$

③ $z_1=\overline{z_2}$이면 $a+bi=c-di$에서 $a=c$, $b=-d$이므로

$z_1z_2=(c-di)(c+di)=c^2+d^2$

따라서 z_1z_2는 실수이다.

④ $z_1+z_2=0$이면

$\overline{z_1}+\overline{z_2}=\overline{z_1+z_2}=\overline{0}=0$

⑤ $z_1\overline{z_2}=1$이면 $z_1=\dfrac{1}{\overline{z_2}}$, $\overline{z_2}=\dfrac{1}{z_1}$

$z_1=\dfrac{1}{\overline{z_2}}$에서 $\overline{z_1}=\dfrac{1}{z_2}$

$\therefore \overline{z_1}+\dfrac{1}{z_1}=\dfrac{1}{z_2}+\overline{z_2}=\overline{z_2}+\dfrac{1}{z_2}$

답 ③

0371 전략 켤레복소수의 성질을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ㄱ. z^2-z가 실수이므로 $\overline{z^2-z}$도 실수이다.

ㄴ. $z^2-z=a^2+2abi-b^2-a-bi$

$=(a^2-a-b^2)+(2ab-b)i$

이때 z^2-z가 실수이므로

$2ab-b=0$, $b(2a-1)=0$

$\therefore a=\dfrac{1}{2}$ ($\because b\neq0$)

따라서 $z=\dfrac{1}{2}+bi$, $\overline{z}=\dfrac{1}{2}-bi$이므로

$z+\overline{z}=1$

ㄷ. $z\overline{z}=\left(\dfrac{1}{2}+bi\right)\left(\dfrac{1}{2}-bi\right)=\dfrac{1}{4}+b^2$이므로

$z\overline{z}>\dfrac{1}{4}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0372 전략 주어진 식을 간단히 정리한 후 켤레복소수의 성질을 이용한다.

풀이 $\alpha\overline{\alpha}-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=\overline{\alpha}(\alpha-\beta)-\overline{\beta}(\alpha-\beta)$

$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$

$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})$

이때 $\alpha=1+4i$, $\beta=3+2i$이므로

$\alpha-\beta=-2+2i$, $\overline{\alpha-\beta}=-2-2i$

$\therefore$ (주어진 식)$=(-2+2i)(-2-2i)=8$

답 8

0373 전략 $z=a+bi$(a, b는 실수)로 놓고 주어진 식을 간단히 정리한 후 a, b 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $z=a+bi$(a, b는 실수)로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$$\frac{z}{1+i}+\frac{\overline{z}}{1-i}=\frac{a+bi}{1+i}+\frac{a-bi}{1-i}$$

$$=\frac{(a+bi)(1-i)+(a-bi)(1+i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$=\frac{(a-ai+bi+b)+(a+ai-bi+b)}{2}$$

$=a+b=1$

즉 z는 실수부분과 허수부분의 합이 1이다.

③ $1+i$는 (실수부분)+(허수부분)$=1+1=2$이므로 $a+b=1$을 만족시키지 않는다.

답 ③

0374 전략 i^n(n은 자연수)의 값은 i, -1, $-i$, 1이 반복되어 나타남을 이용한다.

풀이 $(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{19})$

$=(i+i^2+i^3+\cdots+i^{18})+(i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{19})$

$=(i^{17}+i^{18})+(i^{18}+i^{19})$

$=(i+i^2)+(i^2+i^3)$

$=(i-1)+(-1-i)$

$=-2$

따라서 $-2=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-2$, $b=0$

$\therefore 4(a+b)^2=16$

답 16

다른풀이 $i+i^{19}=i+(-i)=0$이므로

$(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{19})$

$=i+\{(i^2+i^2)+(i^3+i^3)+(i^4+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{18})\}+i^{19}$

$=(i^2+i^2)+(i^3+i^3)+(i^4+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{18})$

$=2(i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{18})$

$=2\cdot i^{18}=2\cdot i^2$

$=2\cdot(-1)=-2$

0375 전략 i^n(n은 자연수)의 값은 i, -1, $-i$, 1이 반복되어 나타남을 이용한다.

풀이 $f(k)=0$이 되려면

$f(k)=1+i+i^2+\cdots+i^k$

$=(1+i-1-i)+(1+i-1-i)+\cdots+(1+i-1-i)$ ··· ❶

이때 $k=3$, 7, 11, $\cdots$, 즉 $k+1$이 4의 배수이어야 한다. ··· ❷

따라서 100 이하의 자연수 k는 3, 7, 11, $\cdots$, 99의 25개이다. ··· ❸

답 25

채점 기준	비율
❶ i의 거듭제곱을 이용하여 $f(k)=0$이 되도록 변형할 수 있다.	30%
❷ $f(k)=0$을 만족시키는 k의 조건을 구할 수 있다.	40%
❸ k의 개수를 구할 수 있다.	30%

0376 전략 $\frac{1+i}{1-i}=i$, $\frac{1-i}{1+i}=-i$임을 이용한다.

풀이 $f(i)=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{98}=\left\{\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right\}^{98}$

$=i^{98}=(i^4)^{24}\cdot i^2=-1$

$f(-i)=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{98}=\left\{\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}\right\}^{98}$

$=(-i)^{98}=i^{98}=-1$

$\therefore f(i)+f(-i)=-2$

답 ①

0377 전략 음수의 제곱근의 성질을 이용한다.

풀이 $\sqrt{x}\sqrt{y}=-\sqrt{xy}$에서

$x<0$, $y<0$ 또는 $x=0$ 또는 $y=0$ ...... ㉠

$x^2+2x-(y+3)i=15+4i$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2+2x=15$, $-(y+3)=4$

$x^2+2x=15$에서 $x^2+2x-15=0$, $(x+5)(x-3)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=3$

$-(y+3)=4$에서 $y=-7$

따라서 $x=-5$, $y=-7$ ($\because$ ㉠)이므로 $xy=35$

답 ④

0378 전략 새로운 규칙을 적용한 후 분모의 켤레복소수를 분자, 분모에 곱하여 식을 간단히 한다.

풀이 $f(1, 2)+f(2, 4)+f(3, 6)+\cdots+f(20, 40)$

$=\frac{1+2i}{1-2i}+\frac{2+4i}{2-4i}+\frac{3+6i}{3-6i}+\cdots+\frac{20+40i}{20-40i}$

$=\frac{1+2i}{1-2i}+\frac{1+2i}{1-2i}+\frac{1+2i}{1-2i}+\cdots+\frac{1+2i}{1-2i}$

$=20\cdot\frac{1+2i}{1-2i}$

$=20\cdot\frac{(1+2i)^2}{(1-2i)(1+2i)}$

$=20\cdot\frac{-3+4i}{5}$

$=-12+16i$

답 $-12+16i$

0379 전략 분모의 켤레복소수를 분자, 분모에 곱하여 z를 간단히 정리한 후 연산의 새로운 규칙을 적용하여 계산한다.

풀이 $z=\frac{5}{2+i}=\frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{5(2-i)}{5}=2-i$이므로 ··· ❶

$z◎\overline{z}=(2-i)◎(2+i)$

$=(2-i+1)(2+i+1)$

$=(3-i)(3+i)$

$=10$ ··· ❷

답 10

채점 기준	비율
❶ z를 간단히 정리할 수 있다.	40%
❷ $z◎\overline{z}$의 값을 구할 수 있다.	60%

0380 전략 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓고 주어진 조건에 대입한다.

풀이 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$이다.

조건 (가)에서

$(1+i)+(a+bi)=(a+1)+(b+1)i$

가 양의 실수이므로

$a+1>0$, $b+1=0$

$\therefore a>-1$, $b=-1$

조건 (나)에서

$(a+bi)(a-bi)=4$, $a^2+b^2=4$

$a^2=3$ $\therefore a=\sqrt{3}$ ($\because a>-1$)

따라서 $z=\sqrt{3}-i$이므로

$z+\overline{z}=(\sqrt{3}-i)+(\sqrt{3}+i)=2\sqrt{3}$

답 $2\sqrt{3}$

0381 전략 z^2, z^3, z^4, …을 차례대로 계산해 본다.

풀이 $z^2=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}i}\right)^2=\frac{2i}{2i^2}=-i$

$z^3=z^2z=-i\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}i}=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$z^4=z^3z=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}i}=-\frac{2i}{2i}=-1$

$z^5=z^4z=-1\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}i}=-\frac{1+i}{\sqrt{2}i}$

$z^6=z^5z=-\frac{1+i}{\sqrt{2}i}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}i}=-\frac{2i}{2i^2}=i$

$z^7=z^6z=i\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$z^8=z^7z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}i}=\frac{2i}{2i}=1$

따라서 $z^n=1$이 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은 8이다.

답 ④

참고 $z^4=(z^2)^2=(-i)^2=-1$, $z^6=z^4z^2=-1\cdot(-i)=i$, $z^8=(z^4)^2=(-1)^2=1$과 같이 계산할 수도 있다.

0382 전략 음수의 제곱근의 성질을 이용한다.

풀이 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서 $a<0$, $b<0$

$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{c}{b}}$에서 $b<0$, $c>0$

$\therefore \sqrt{a^2}-|b|+\sqrt{c^2}=-a+b+c$

답 ②

Ⅱ. 방정식

04 이차방정식

0383 $x^2+8x+12=0$에서 $(x+2)(x+6)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=-6$ 답 $x=-2$ 또는 $x=-6$

0384 $4x^2-1=0$에서 $(2x+1)(2x-1)=0$
$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 답 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

0385 $2x^2+5x-3=0$에서 $(x+3)(2x-1)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 답 $x=-3$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

0386 $x^2-2x+1=0$에서 $(x-1)^2=0$
$\therefore x=1$ 답 $x=1$

0387 $x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$
답 $x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

0388 $x^2+2\cdot1\cdot x-4=0$이므로
$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-4)}}{1}=-1\pm\sqrt{5}$ 답 $x=-1\pm\sqrt{5}$

0389 $x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot2\cdot3}}{2\cdot2}=\frac{-1\pm\sqrt{23}i}{4}$ 답 $x=\frac{-1\pm\sqrt{23}i}{4}$

0390 $4x^2+2\cdot(-4)x-7=0$이므로
$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot(-7)}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{11}}{2}$
답 $x=\frac{2\pm\sqrt{11}}{2}$

0391 $4x^2+4x-3=0$에서 $(2x+3)(2x-1)=0$
$\therefore x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ (실근)
답 $x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ (실근)

0392 $x^2-10x+25=0$에서 $(x-5)^2=0$
$\therefore x=5$ (실근) 답 $x=5$ (실근)

0393 $x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}$
$=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$ (허근) 답 $x=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$ (허근)

0394 $3x^2+2\cdot2x+6=0$이므로
$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-3\cdot6}}{3}=\frac{-2\pm\sqrt{14}i}{3}$ (허근)
답 $x=\frac{-2\pm\sqrt{14}i}{3}$ (허근)

0395 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(-7)^2-4\cdot2\cdot(-3)=73>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다. 답 서로 다른 두 실근

참고 방정식 $2x^2-7x-3=0$에서 이차항의 계수는 2, 상수항은 -3이다. 즉 이차항의 계수와 상수항의 부호가 다르므로 이 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

0396 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=1^2-4\cdot1\cdot\frac{1}{4}=0$
따라서 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.
답 중근(서로 같은 두 실근)

0397 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(-3)^2-4\cdot3\cdot8=-87<0$
따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다. 답 서로 다른 두 허근

0398 $x^2+2\cdot2x-1=0$이므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot(-1)=5>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다. 답 서로 다른 두 실근

0399 $5x^2+2\cdot(-\sqrt{2})x+3=0$이므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-\sqrt{2})^2-5\cdot3=-13<0$
따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다. 답 서로 다른 두 허근

0400 $9x^2+2\cdot12x+16=0$이므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=12^2-9\cdot16=0$
따라서 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.
답 중근(서로 같은 두 실근)

0401 주어진 각 방정식의 판별식을 D라 하면
ㄱ. $D=3^2-4\cdot1\cdot5=-11<0$
ㄴ. $D=(-3)^2-4\cdot2\cdot1=1>0$
ㄷ. $\frac{D}{4}=1^2-1\cdot(-7)=8>0$
ㄹ. $\frac{D}{4}=(-3)^2-9\cdot1=0$
ㅁ. $D=5^2-4\cdot2\cdot4=-7<0$
ㅂ. $\frac{D}{4}=1^2-3\cdot(-1)=4>0$
(1) 서로 다른 두 실근을 가지면 $D>0$이므로 ㄴ, ㄷ, ㅂ
(2) 중근(서로 같은 두 실근)을 가지면 $D=0$이므로 ㄹ
(3) 서로 다른 두 허근을 가지면 $D<0$이므로 ㄱ, ㅁ
답 (1) ㄴ, ㄷ, ㅂ (2) ㄹ (3) ㄱ, ㅁ

0402 이차방정식 $x^2+5x+k=0$의 판별식을 D라 하면
$D=5^2-4\cdot1\cdot k=25-4k$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$D=25-4k>0 \qquad \therefore k<\frac{25}{4}$

(2) 중근(서로 같은 두 실근)을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$D=25-4k=0 \qquad \therefore k=\frac{25}{4}$

(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$D=25-4k<0 \qquad \therefore k>\frac{25}{4}$

답 (1) $k<\frac{25}{4}$ (2) $k=\frac{25}{4}$ (3) $k>\frac{25}{4}$

0403 이차방정식 $x^2-4x+2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{-4}{1}=4,\ \alpha\beta=\frac{2}{1}=2$

답 $\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=2$

0404 이차방정식 $2x^2-5x-4=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{-5}{2}=\frac{5}{2},\ \alpha\beta=\frac{-4}{2}=-2$

답 $\alpha+\beta=\frac{5}{2},\ \alpha\beta=-2$

0405 이차방정식 $3x^2+5x+6=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{5}{3},\ \alpha\beta=\frac{6}{3}=2$

답 $\alpha+\beta=-\frac{5}{3},\ \alpha\beta=2$

0406 이차방정식 $x^2+3x-2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

(1) $\alpha+\beta=-\frac{3}{1}=-3$ (2) $\alpha\beta=\frac{-2}{1}=-2$

(3) $\alpha+\beta+\alpha\beta=-3-2=-5$ (4) $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$

답 (1) -3 (2) -2 (3) -5 (4) $\frac{3}{2}$

0407 답 $x^2-2x+5=0$

0408 $x^2-(-2+5)x+(-2)\cdot5=0$

$\therefore x^2-3x-10=0$

답 $x^2-3x-10=0$

0409 $x^2-\{(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\}x+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=0$

$\therefore x^2-4x+1=0$

답 $x^2-4x+1=0$

0410 $x^2-\{(1+i)+(1-i)\}x+(1+i)(1-i)=0$

$\therefore x^2-2x+2=0$

답 $x^2-2x+2=0$

0411 $2\left\{x^2-\left(1+\frac{1}{2}\right)x+1\cdot\frac{1}{2}\right\}=0$

$2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)=0 \qquad \therefore 2x^2-3x+1=0$

답 $2x^2-3x+1=0$

0412 $6\left\{x^2-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)x+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right\}=0$

$6\left(x^2-\frac{7}{6}x+\frac{1}{3}\right)=0 \qquad \therefore 6x^2-7x+2=0$

답 $6x^2-7x+2=0$

0413 $x^2-4x-1=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot(-1)}=2\pm\sqrt{5}$

$\therefore x^2-4x-1=\{x-(2+\sqrt{5})\}\{x-(2-\sqrt{5})\}$

$=(x-2-\sqrt{5})(x-2+\sqrt{5})$

답 $(x-2-\sqrt{5})(x-2+\sqrt{5})$

0414 $x^2+x+1=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore x^2+x+1=\left(x-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$

$=\left(x+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$

답 $\left(x+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$

0415 $x^2+8=0$에서 $\quad x^2=-8 \quad \therefore x=\pm2\sqrt{2}i$

$\therefore x^2+8=(x+2\sqrt{2}i)(x-2\sqrt{2}i)$

답 $(x+2\sqrt{2}i)(x-2\sqrt{2}i)$

0416 $x^2-2x+3=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot3}=1\pm\sqrt{2}i$

$\therefore x^2-2x+3=\{x-(1+\sqrt{2}i)\}\{x-(1-\sqrt{2}i)\}$

$=(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

답 $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

0417 $x^2+3x+5=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot5}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{11}i}{2}$

$\therefore x^2+3x+5=\left(x-\frac{-3+\sqrt{11}i}{2}\right)\left(x-\frac{-3-\sqrt{11}i}{2}\right)$

$=\left(x+\frac{3-\sqrt{11}i}{2}\right)\left(x+\frac{3+\sqrt{11}i}{2}\right)$

답 $\left(x+\frac{3-\sqrt{11}i}{2}\right)\left(x+\frac{3+\sqrt{11}i}{2}\right)$

0418 (1) a, b가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $1+\sqrt{5}$이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{5}$이다.

(2) 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})=-a,\ (1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})=b$

$\therefore a=-2,\ b=-4$

답 (1) $1-\sqrt{5}$ (2) $a=-2,\ b=-4$

0419 a가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $-1-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $-1+\sqrt{3}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1-\sqrt{3})+(-1+\sqrt{3})=-a$

$\therefore a=2$

답 $a=2$

다른풀이 방정식 $x^2+ax-2=0$의 한 근이 $-1-\sqrt{3}$이므로

$(-1-\sqrt{3})^2+(-1-\sqrt{3})a-2=0$

$(1+\sqrt{3})a=2(1+\sqrt{3}) \qquad \therefore a=2$

0420 a, b가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $3+\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $3-\sqrt{2}$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})=-a$, $(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=b$
$\therefore a=-6$, $b=7$ 답 $a=-6$, $b=7$

0421 a, b가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $4-2\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $4+2\sqrt{3}$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$(4-2\sqrt{3})+(4+2\sqrt{3})=-a$, $(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})=b$
$\therefore a=-8$, $b=4$ 답 $a=-8$, $b=4$

0422 a가 실수이고 주어진 방정식의 한 근이 $1+i$이므로 다른 한 근은 $1-i$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$(1+i)(1-i)=a$
$\therefore a=2$ 답 $a=2$
다른풀이 방정식 $x^2-2x+a=0$의 한 근이 $1+i$이므로
$(1+i)^2-2(1+i)+a=0$
$-2+a=0$ $\therefore a=2$

0423 a, b가 실수이고 주어진 방정식의 한 근이 $3+2i$이므로 다른 한 근은 $3-2i$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$(3+2i)+(3-2i)=-a$, $(3+2i)(3-2i)=b$
$\therefore a=-6$, $b=13$ 답 $a=-6$, $b=13$

0424 a, b가 실수이고 주어진 방정식의 한 근이 $2-i$이므로 다른 한 근은 $2+i$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$(2-i)+(2+i)=-a$, $(2-i)(2+i)=b$
$\therefore a=-4$, $b=5$ 답 $a=-4$, $b=5$

0425 $3(x-2)^2-4=12-x$에서
$3(x^2-4x+4)-4=12-x$, $3x^2-12x+8=12-x$
$3x^2-11x-4=0$, $(3x+1)(x-4)=0$
$\therefore x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=4$ 답 ④

0426 $6x^2-7x-3=0$에서 $(3x+1)(2x-3)=0$
$\therefore x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$
따라서 $\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=-\frac{1}{3}$이므로
$\alpha-\beta=\frac{11}{6}$ 답 ④

0427 $x^2-5x+4=0$에서 $(x-1)(x-4)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=4$ $\therefore M=4$ ⋯ ❶
$2x^2+3x-2=0$에서 $(x+2)(2x-1)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ $\therefore m=-2$ ⋯ ❷
$\therefore M+m=2$ ⋯ ❸
답 2

채점 기준	비율
❶ M의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ m의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $M+m$의 값을 구할 수 있다.	20%

0428 이차방정식 $2x^2-kx-5k-6=0$의 한 근이 k이므로
$2k^2-k^2-5k-6=0$, $k^2-5k-6=0$
$(k+1)(k-6)=0$
$\therefore k=6\,(\because k>0)$ 답 6

0429 근의 공식을 이용하여 근을 구하면
$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot3}=-1\pm\sqrt{2}i$
따라서 $a=-1$, $b=2$이므로
$a+b=1$ 답 ④

0430 $3x^2-1=2\sqrt{6}x$에서
$3x^2-2\sqrt{6}x-1=0$
$\therefore x=\frac{-(-\sqrt{6})\pm\sqrt{(-\sqrt{6})^2-3\cdot(-1)}}{3}=\frac{\sqrt{6}\pm3}{3}$
답 $x=\frac{\sqrt{6}\pm3}{3}$

0431 $2x(x-2)=4x-3$에서
$2x^2-4x=4x-3$, $2x^2-8x+3=0$
$\therefore x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-2\cdot3}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{10}}{2}$
따라서 $\alpha=\frac{4-\sqrt{10}}{2}$이므로 $2\alpha=4-\sqrt{10}$
$\therefore 2\alpha+\sqrt{10}=4$ 답 ④

0432 $(x*x)+(1*x)=0$에서
$(x^2+x+x)+(x+1+x)=0$, $x^2+4x+1=0$
$\therefore x=-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot1}=-2\pm\sqrt{3}$ 답 ③

0433 (i) $x<3$일 때,
$x^2-(x-3)=9$에서
$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$
그런데 $x<3$이므로 $x=-2$
(ii) $x\geq3$일 때,
$x^2+(x-3)=9$에서
$x^2+x-12=0$, $(x+4)(x-3)=0$
$\therefore x=-4$ 또는 $x=3$
그런데 $x\geq3$이므로 $x=3$
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은
$x=-2$ 또는 $x=3$
따라서 모든 근의 합은 1이다. 답 ①

0434 (i) $x<0$일 때,

$x^2-x-20=0$에서 $(x+4)(x-5)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=5$

그런데 $x<0$이므로 $x=-4$

(ii) $x\ge0$일 때,

$x^2+x-20=0$에서 $(x+5)(x-4)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=4$

그런데 $x\ge0$이므로 $x=4$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-4$ 또는 $x=4$ 답 $x=-4$ 또는 $x=4$

다른풀이 $x^2=|x|^2$이므로 주어진 방정식은

$|x|^2+|x|-20=0$

$(|x|+5)(|x|-4)=0$

이때 $|x|\ge0$이므로 $|x|=4$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=4$

0435 (i) $x<-1$일 때,

$x^2=-x-(x+1)$에서

$x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$

$\therefore x=-1$

그런데 $x<-1$이므로 해가 없다.

(ii) $-1\le x<0$일 때,

$x^2=-x+(x+1)$에서 $x^2=1$

$\therefore x=\pm1$

그런데 $-1\le x<0$이므로 $x=-1$

(iii) $x\ge0$일 때,

$x^2=x+(x+1)$에서 $x^2-2x-1=0$

$\therefore x=1\pm\sqrt{2}$

그런데 $x\ge0$이므로 $x=1+\sqrt{2}$

이상에서 주어진 방정식의 근은

$x=-1$ 또는 $x=1+\sqrt{2}$

따라서 모든 근의 곱은 $-1-\sqrt{2}$이다. 답 $-1-\sqrt{2}$

라쎈 특강 절댓값 기호를 2개 포함한 방정식

절댓값 기호를 2개 포함한 방정식

$|x-a|+|x-b|=c$ $(a<b,\ c>0)$

는 x의 값의 범위를 $x<a$, $a\le x<b$, $x\ge b$로 나누어서 푼다.

0436 $\sqrt{(x-1)^2}=x^2-3$에서

$|x-1|=x^2-3$

(i) $x<1$일 때,

$-(x-1)=x^2-3$, $x^2+x-4=0$

$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

그런데 $x<1$이므로 $x=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$

(ii) $x\ge1$일 때,

$x-1=x^2-3$, $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

그런데 $x\ge1$이므로 $x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$ 또는 $x=2$ 답 ④

0437 방정식 $x^2+kx-2k+1=0$의 한 근이 1이므로

$1^2+k\cdot1-2k+1=0$ $\therefore k=2$

$k=2$를 주어진 방정식에 대입하면

$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 다른 한 근은 -3이다. 답 -3

0438 방정식 $x^2+ax+a+2=0$의 한 근이 -2이므로

$(-2)^2+a\cdot(-2)+a+2=0$

$4-2a+a+2=0$ $\therefore a=6$

방정식 $bx^2-2x+b+3=0$의 한 근이 1이므로

$b\cdot1^2-2\cdot1+b+3=0$

$2b=-1$ $\therefore b=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore a+b=\dfrac{11}{2}$ 답 ⑤

0439 방정식 $x^2+ax+1=0$의 한 근이 $2+\sqrt{5}$이므로

$(2+\sqrt{5})^2+(2+\sqrt{5})a+1=0$

$(2+\sqrt{5})a=-10-4\sqrt{5}$

$(2+\sqrt{5})a=-2\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)$

$\therefore a=-2\sqrt{5}$

$a=-2\sqrt{5}$를 주어진 방정식에 대입하면

$x^2-2\sqrt{5}x+1=0$

$\therefore x=\sqrt{5}\pm2$

따라서 다른 한 근은 $\sqrt{5}-2$이다.

답 $a=-2\sqrt{5}$, 다른 한 근: $\sqrt{5}-2$

0440 방정식 $x^2-(2m-3)x+m=0$의 한 근이 4이므로

$4^2-(2m-3)\cdot4+m=0$

$16-8m+12+m=0$

$7m=28$ $\therefore m=4$ ··· ❶

$m=4$를 주어진 방정식에 대입하면

$x^2-5x+4=0$, $(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$ $\therefore n=1$ ··· ❷

$\therefore mn=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ m의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ mn의 값을 구할 수 있다.	20%

0441 방정식 $2x^2-(k+1)x-k+3=0$의 한 근이 $k-1$이려면

$2(k-1)^2-(k+1)(k-1)-k+3=0$

$k^2-5k+6=0$, $(k-2)(k-3)=0$

$\therefore k=2$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 5이다. 답 ⑤

0442 처음 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 새로 만들어진 직사각형의 가로의 길이는 $(x+2)$ cm, 세로의 길이는 $(x-3)$ cm이므로

$(x+2)(x-3)=36,\qquad x^2-x-42=0$

$(x+6)(x-7)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=7$

그런데 $x>3$이므로 $\qquad x=7$

따라서 처음 정사각형의 한 변의 길이는 7 cm이므로 처음 정사각형의 넓이는 49 cm^{2}이다. 답 49 cm^2

참고 길이는 항상 양수이므로 $x-3>0$, 즉 $x>3$을 만족해야 한다.

0443 사다리꼴의 윗변의 길이를 x cm라 하면 높이는 x cm, 아랫변의 길이는 $(x+3)$ cm이므로

$\frac{1}{2}\{x+(x+3)\}\cdot x=45,\qquad 2x^2+3x-90=0$

$(2x+15)(x-6)=0$

$\therefore x=-\frac{15}{2}$ 또는 $x=6$

그런데 $x>0$이므로 $\qquad x=6$

따라서 윗변의 길이는 6 cm이다. 답 ②

0444 처음 종이의 세로의 길이를 x cm라 하면 가로의 길이는 $2x$ cm이다. ⋯ ❶

직육면체 모양의 상자의 밑면의 가로의 길이는 $(2x-2)$ cm, 세로의 길이는 $(x-2)$ cm, 높이는 1 cm이므로

$(2x-2)(x-2)\cdot 1=40$ ⋯ ❷

$2x^2-6x-36=0,\qquad x^2-3x-18=0$

$(x+3)(x-6)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=6$

그런데 $x>2$이므로 $\qquad x=6$

따라서 처음 종이의 가로의 길이는 12 cm이다. ⋯ ❸

답 12 cm

채점 기준	비율
❶ 세로의 길이를 x cm로 놓고 가로의 길이를 x로 나타낼 수 있다.	20%
❷ 주어진 조건을 이용하여 x에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	40%
❸ 처음 종이의 가로의 길이를 구할 수 있다.	40%

0445 처음 물건의 가격을 a라 하면 x % 인상한 물건의 가격은

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)$

다시 x % 인하한 물건의 가격은

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{100}\right)$ ⋯⋯ ㉠

이때 ㉠은 처음 가격보다 9 % 낮아진 가격이므로

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{100}\right)=a\left(1-\frac{9}{100}\right)$

$1-\frac{x^2}{10000}=1-\frac{9}{100}$

$\frac{x^2}{10000}=\frac{9}{100},\qquad x^2=900$

$\therefore x=\pm 30$

그런데 $x>0$이므로 $\qquad x=30$ 답 30

다른풀이 x % 인상한 후, 다시 x % 인하한 가격이 9 % 인하한 가격과 같으므로

$\frac{x}{100}\cdot\left(-\frac{x}{100}\right)=-\frac{9}{100},\qquad x^2=900$

$\therefore x=\pm 30$

그런데 $x>0$이므로 $\qquad x=30$

0446 이차방정식 $x^2+(2k+1)x+k^2+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2k+1)^2-4(k^2+3)>0$

$4k^2+4k+1-4k^2-12>0$

$4k-11>0\qquad \therefore k>\frac{11}{4}$

따라서 가장 작은 정수 k의 값은 3이다. 답 ③

0447 이차방정식 $x^2-5x+k+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4(k+1)\ge 0$

$21-4k\ge 0\qquad \therefore k\le\frac{21}{4}$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다. 답 ②

0448 주어진 방정식이 이차방정식이므로

$m+1\ne 0\qquad \therefore m\ne -1$ ⋯⋯ ㉠

이차방정식 $(m+1)x^2+2mx+m-4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=m^2-(m+1)(m-4)\ge 0$

$m^2-m^2+3m+4\ge 0\qquad \therefore m\ge -\frac{4}{3}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\qquad -\frac{4}{3}\le m<-1$ 또는 $m>-1$

답 $-\frac{4}{3}\le m<-1$ 또는 $m>-1$

0449 이차방정식 $x^2-2(a+k)x-a+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+k)\}^2-(-a+5)\ge 0$

$(a+k)^2+a-5\ge 0$ ⋯⋯ ㉠

이때 a, k는 실수이므로 $\qquad (a+k)^2\ge 0$

㉠이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면 $a-5\ge 0$, 즉 $a\ge 5$이어야 하므로 가장 작은 실수 a의 값은 5이다. 답 5

0450 이차방정식 $x^2+2ax+2a-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(2a-1)=0$

$a^2-2a+1=0,\qquad (a-1)^2=0$

$\therefore a=1$

$a=1$을 주어진 방정식에 대입하면

$x^2+2x+1=0,\qquad (x+1)^2=0$

$\therefore x=-1$

따라서 $m=-1$이므로 $\qquad a+m=0$ 답 0

0451 이차방정식 $x^2+kx+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4k=0,\qquad k(k-4)=0$

$\therefore k=4\ (\because k\ne 0)$ 답 ②

0452 주어진 방정식이 이차방정식이므로

$k^2-1\neq 0$, $(k+1)(k-1)\neq 0$

$\therefore k\neq -1,\ k\neq 1$ …… ㉠ ⋯ ❶

이차방정식 $(k^2-1)x^2-2(k-1)x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-3(k^2-1)=0$ ⋯ ❷

$k^2-2k+1-3k^2+3=0$, $k^2+k-2=0$

$(k+2)(k-1)=0$

$\therefore k=-2\,(\because$ ㉠$)$ ⋯ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식이 이차방정식이기 위한 k의 조건을 구할 수 있다.	30%
❷ 이차방정식이 중근을 가질 조건을 이용하여 k에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	40%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30%

0453 이차방정식 $x^2+2(a+k)x+k^2+4k+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+k)^2-(k^2+4k+b)=0$

$a^2+2ak+k^2-k^2-4k-b=0$

$(2a-4)k+a^2-b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2a-4=0,\ a^2-b=0$

$\therefore a=2,\ b=4$

$\therefore a+b=6$

답 ⑤

0454 이차방정식 $x^2-(3-2k)x+k^2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(3-2k)\}^2-4k^2<0$

$9-12k+4k^2-4k^2<0$

$9-12k<0$ $\therefore k>\frac{3}{4}$

따라서 가장 작은 정수 k의 값은 1이다.

답 1

0455 이차방정식 $x^2+4x-k+9=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-(-k+9)<0$

$k-5<0$ $\therefore k<5$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

답 ①

0456 이차방정식 $x^2+2(1-k)x-k+3=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(1-k)^2-(-k+3)=0$

$k^2-k-2=0$, $(k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=2$ …… ㉠ ⋯ ❶

이차방정식 $2x^2-x+k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-1)^2-4\cdot 2\cdot k<0$

$1-8k<0$ $\therefore k>\frac{1}{8}$ …… ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡에서 $k=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $x^2+2(1-k)x-k+3=0$이 중근을 가질 때, k의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ 이차방정식 $2x^2-x+k=0$이 허근을 가질 때, k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20%

0457 이차방정식 $x^2-2kx+k^2+2k-4=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-k)^2-(k^2+2k-4)<0$

$-2k+4<0$ $\therefore k>2$

즉 가장 작은 정수 k의 값은 3이므로 $m=3$

$m=3$을 이차방정식 $x^2-(2m-1)x+m+4=0$에 대입하면

$x^2-5x+7=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 7=-3<0$

따라서 이차방정식 $x^2-(2m-1)x+m+4=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

답 서로 다른 두 허근

0458 이차방정식 $x^2-2ax+a^2+3a-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(a^2+3a-3)=-3a+3$

$a>1$일 때 $-3a+3<0$이므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

답 ⑤

0459 이차방정식 $x^2+2ax+b=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-b\geq 0$ …… ㉠ ⋯ ❶

이차방정식 $x^2+2(a-1)x-2a+b=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(a-1)^2-(-2a+b)=a^2-2a+1+2a-b$

$=a^2-b+1>0\,(\because$ ㉠$)$ ⋯ ❷

따라서 이차방정식 $x^2+2(a-1)x-2a+b=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. ⋯ ❸

답 서로 다른 두 실근

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $x^2+2ax+b=0$이 실근을 가질 조건을 이용하여 ㉠을 구할 수 있다.	40%
❷ 이차방정식 $x^2+2(a-1)x-2a+b=0$의 판별식의 부호를 조사할 수 있다.	40%
❸ 이차방정식 $x^2+2(a-1)x-2a+b=0$의 근을 판별할 수 있다.	20%

0460 이차방정식 $x^2-ax+b-1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-a)^2-4(b-1)=0$ $\therefore a^2=4b-4$ …… ㉠

이차방정식 $2x^2+2ax+b^2+b+1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=a^2-2(b^2+b+1)$

$=(4b-4)-2(b^2+b+1)\,(\because$ ㉠$)$

$=-2b^2+2b-6=-2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{11}{2}<0$

따라서 이차방정식 $2x^2+2ax+b^2+b+1=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

답 서로 다른 두 허근

0461 이차방정식 $x^2+2cx+a^2-b^2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=c^2-(a^2-b^2)<0$$

$$\therefore\ a^2>b^2+c^2$$

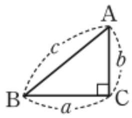
따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 둔각삼각형이다.

답 ③

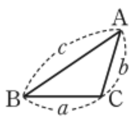
라쎈 특강 변의 길이에 따른 삼각형의 모양

$\triangle$ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$이고 c가 가장 긴 변의 길이일 때,

$a^2+b^2>c^2$ ➡ $\triangle$ABC는 예각삼각형



$a^2+b^2=c^2$ ➡ $\triangle$ABC는 직각삼각형



$a^2+b^2<c^2$ ➡ $\triangle$ABC는 둔각삼각형

0462 이차방정식 $3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(a+b+c)\}^2-3(ab+bc+ca)=0$$

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$$

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$$

$$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)=0$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

이때 a, b, c가 실수이므로

$$a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$$

$$\therefore\ a=b=c$$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 정삼각형이다.

답 정삼각형

0463 이차방정식 $2x^2-(2a+b)x+ab=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=\{-(2a+b)\}^2-4\cdot2\cdot ab=0$$

$$4a^2+4ab+b^2-8ab=0$$

$$4a^2-4ab+b^2=0$$

$$(2a-b)^2=0 \qquad \therefore\ b=2a$$

따라서 직각삼각형의 빗변의 길이는

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+(2a)^2}=\sqrt{5a^2}=\sqrt{5}a\ (\because\ a>0)$$

답 ③

0464 주어진 이차식이 완전제곱식이면 이차방정식 $(k+3)x^2+2(k+1)x+k-5=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(k+1)^2-(k+3)(k-5)=0$$

$$k^2+2k+1-k^2+2k+15=0$$

$$4k+16=0 \qquad \therefore\ k=-4$$

답 -4

0465 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식 $x^2+2kx+2k^2-4k+3=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-(2k^2-4k+3)=0$$

$$k^2-2k^2+4k-3=0, \qquad k^2-4k+3=0$$

$$(k-1)(k-3)=0 \qquad \therefore\ k=1 \text{ 또는 } k=3$$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 4이다.

답 ③

0466 주어진 이차식이 완전제곱식이면 x에 대한 이차방정식 $x^2-(2k+a)x+(k+1)^2+a^2-b=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=\{-(2k+a)\}^2-4\{(k+1)^2+a^2-b\}=0$$

$$4k^2+4ka+a^2-4k^2-8k-4-4a^2+4b=0$$

$$(4a-8)k-3a^2+4b-4=0 \quad \cdots ❶$$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$4a-8=0,\ -3a^2+4b-4=0$$

$$\therefore\ a=2,\ b=4 \quad \cdots ❷$$

$$\therefore\ ab=8 \quad \cdots ❸$$

답 8

채점 기준	비율
❶ 이차식이 완전제곱식이 되는 조건을 이용하여 k에 대한 식을 세울 수 있다.	50%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10%

0467 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식 $x^2-2(a+1)x+a^2-b+12=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(a+1)\}^2-(a^2-b+12)=0$$

$$a^2+2a+1-a^2+b-12=0$$

$$2a+b-11=0$$

$$\therefore\ b=11-2a \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 a, b는 자연수이므로 ㉠을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$$(1, 9),\ (2, 7),\ (3, 5),\ (4, 3),\ (5, 1)$$

의 5개이다.

답 5

0468 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$=3^2-2\cdot\frac{1}{3}=\frac{25}{3}$$

답 $\frac{25}{3}$

0469 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=7,\ \alpha\beta=3 \quad \cdots ❶$$

$$\therefore\ \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{7^2-2\cdot3}{3}=\frac{43}{3} \quad \cdots ❷$$

답 $\frac{43}{3}$

채점 기준	비율
❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$의 값을 구할 수 있다.	50%

0470 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=\frac{2}{3}$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-2)^3-3\cdot\frac{2}{3}\cdot(-2)=-4$ 답 ②

0471 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{\alpha\beta}$

$=4(\alpha-\beta)\cdot 2=8(\alpha-\beta)$

이때 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4^2-4\cdot\frac{1}{2}=14$이므로

$\alpha-\beta=\sqrt{14}$ ($\because \alpha>\beta$)

따라서 구하는 식의 값은

$8(\alpha-\beta)=8\sqrt{14}$ 답 $8\sqrt{14}$

0472 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=1$

이때 $\alpha>0$, $\beta>0$이므로

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$

$=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$

$=6+2\cdot 1=8$

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

0473 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$\alpha^2-\alpha-3=0$, $\beta^2-\beta-3=0$

$\therefore \alpha^2-2\alpha-1=-\alpha+2$, $\beta^2-2\beta-1=-\beta+2$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-3$

$\therefore (\alpha^2-2\alpha-1)(\beta^2-2\beta-1)=(-\alpha+2)(-\beta+2)$

$=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4$

$=-3-2\cdot 1+4=-1$ 답 ⑤

0474 α가 주어진 이차방정식의 근이므로

$\alpha^2-3\alpha+5=0$ $\therefore \alpha^2=3\alpha-5$

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3$이므로

$\alpha^2+3\beta=3\alpha-5+3\beta=3(\alpha+\beta)-5$

$=3\cdot 3-5=4$ 답 4

0475 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$\alpha^2-4\alpha+1=0$, $\beta^2-4\beta+1=0$

$\therefore \alpha^2-3\alpha+1=\alpha$, $\beta^2-3\beta+1=\beta$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=1$

$\therefore \frac{\beta}{\alpha^2-3\alpha+1}+\frac{\alpha}{\beta^2-3\beta+1}=\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\frac{4^2-2\cdot 1}{1}=14$ 답 14

0476 주어진 방정식의 두 근을 α, $3\alpha(\alpha\neq 0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+3\alpha=-4(m+1)$ $\therefore \alpha=-m-1$ ...... ㉠

$\alpha\cdot 3\alpha=-4m$ $\therefore 3\alpha^2=-4m$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$3(-m-1)^2=-4m$, $3m^2+10m+3=0$

$(m+3)(3m+1)=0$ $\therefore m=-3$ 또는 $m=-\frac{1}{3}$

따라서 정수 m의 값은 -3이다. 답 ①

0477 주어진 방정식의 두 근을 α, $\alpha+1$이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+1)=2k-3$ $\therefore \alpha=k-2$ ...... ㉠

$\alpha(\alpha+1)=k-1$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(k-2)(k-1)=k-1$, $k^2-3k+2=k-1$

$k^2-4k+3=0$, $(k-1)(k-3)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 4이다. 답 ④

다른풀이 주어진 방정식의 두 근을 α, $\beta(\alpha>\beta)$라 하면 $\alpha-\beta=1$이고 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k-3$, $\alpha\beta=k-1$

이때 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$1^2=(2k-3)^2-4(k-1)$

$k^2-4k+3=0$, $(k-1)(k-3)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 4이다.

0478 주어진 방정식의 두 근을 α, $4\alpha(\alpha\neq 0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+4\alpha=5m$ $\therefore \alpha=m$ ...... ㉠

$\alpha\cdot 4\alpha=4m-1$ $\therefore 4\alpha^2=4m-1$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4m^2=4m-1$, $4m^2-4m+1=0$

$(2m-1)^2=0$ $\therefore m=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0479 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2k$, $\alpha\beta=2k-1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-2k)^2-2(2k-1)$

$=4k^2-4k+2$

$\alpha^2+\beta^2=10$에서

$4k^2-4k+2=10$, $k^2-k-2=0$

$(k+1)(k-2)=0$ $\therefore k=2$ ($\because k>0$) 답 2

04 이차방정식

0480 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3k-1,\ \alpha\beta=k$

$\therefore\ \alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha+\beta=\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)$
$=(\alpha\beta+1)(\alpha+\beta)$
$=(k+1)(3k-1)$
$=3k^2+2k-1$

$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha+\beta=7$에서

$3k^2+2k-1=7,\quad 3k^2+2k-8=0$

$(k+2)(3k-4)=0\quad \therefore\ k=-2\ (\because\ k$는 정수)

답 ①

0481 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$

$(\alpha+1)(\beta+1)=5$에서

$\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=5,\quad b-a+1=5$

$\therefore\ a-b=-4$ …… ㉠

$(2\alpha+1)(2\beta+1)=-1$에서

$4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1=-1,\quad 4b-2a+1=-1$

$\therefore\ a-2b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-9,\ b=-5$

$\therefore\ ab=45$

답 45

0482 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=\dfrac{a}{2}$

$|\alpha|+|\beta|=5$의 양변을 제곱하면

$|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2=25,\quad \alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2=25$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|=25,\quad 1^2-2\cdot\dfrac{a}{2}+2\cdot\left|\dfrac{a}{2}\right|=25$

$\therefore\ a-|a|=-24$

이때 $a\ge0$이면 $a-|a|=0$이므로 $a<0$

따라서 $a-(-a)=-24$이므로

$a=-12$

답 -12

0483 방정식 $x^2+ax-3=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=-3$ …… ㉠

방정식 $x^2+7x+b=0$의 두 근이 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-7,\ (\alpha+\beta)\alpha\beta=b$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-a-3=-7,\ 3a=b$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=12$

$\therefore\ a+b=16$

답 16

0484 방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $-3,\ 1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+1=-a,\ -3\cdot1=b$

$\therefore\ a=2,\ b=-3$

따라서 이차방정식 $ax^2-x-b+1=0$의 두 근의 곱은

$\dfrac{-b+1}{a}=\dfrac{-(-3)+1}{2}=2$

답 ⑤

0485 방정식 $2x^2+ax+6=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{a}{2},\ \alpha\beta=3$ …… ㉠ ⋯ ❶

방정식 $6x^2-3x+b=0$의 두 근이 $\dfrac{1}{\alpha},\ \dfrac{1}{\beta}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{b}{6}$

$\therefore\ \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{\alpha\beta}=\dfrac{b}{6}$ …… ㉡ ⋯ ❷

㉠을 ㉡에 대입하면

$-\dfrac{a}{6}=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3}=\dfrac{b}{6}\quad \therefore\ a=-3,\ b=2$

$\therefore\ b-a=5$ ⋯ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 ㉠을 구할 수 있다.	40%
❷ 근과 계수의 관계를 이용하여 ㉡을 구할 수 있다.	40%
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	20%

0486 방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$ …… ㉠

방정식 $x^2-(b-3)x-4a=0$의 두 근이 $\alpha+1,\ \beta+1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+1)+(\beta+1)=b-3,\ (\alpha+1)(\beta+1)=-4a$

$\therefore\ \alpha+\beta=b-5,\ \alpha\beta+\alpha+\beta+1=-4a$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-a=b-5,\ b-a+1=-4a$

$\therefore\ a+b=5,\ 3a+b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=8$

$\therefore\ ab=-24$

답 -24

0487 방정식 $x^2-6x+3=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=3$

$\therefore\ (\alpha+\beta)+\alpha\beta=6+3=9,$
$(\alpha+\beta)\alpha\beta=6\cdot3=18$

따라서 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-9x+18=0$

답 $x^2-9x+18=0$

0488 방정식 $x^2+4x-2=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4,\ \alpha\beta=-2$

$\therefore\ (\alpha-1)+(\beta-1)=\alpha+\beta-2=-4-2=-6,$
$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=-2+4+1=3$

따라서 $\alpha-1,\ \beta-1$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2+6x+3=0$

답 ⑤

다른풀이 $P(x)=x^2+4x-2$라 하면 방정식 $P(x)=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$P(\alpha)=0,\ P(\beta)=0$

$\alpha-1=\alpha'$, $\beta-1=\beta'$이라 하면 $\alpha=\alpha'+1$, $\beta=\beta'+1$이므로

$$P(\alpha'+1)=0,\ P(\beta'+1)=0$$

즉 α', β'은 이차방정식 $P(x+1)=0$의 두 근이고

$$P(x+1)=(x+1)^2+4(x+1)-2=x^2+6x+3$$

이므로 구하는 이차방정식은

$$x^2+6x+3=0$$

0489 방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{b}{c},$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{a}{c}$$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 c인 이차방정식은

$$c\left(x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}\right)=0$$

$\therefore cx^2+bx+a=0$ 답 $cx^2+bx+a=0$

0490 방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 -1이므로

$1-a+b=0$ $\quad\therefore a-b=1$ ...... ㉠

방정식 $x^2+(b+5)x+3a-2=0$의 한 근이 2이므로

$4+2b+10+3a-2=0$

$\therefore 3a+2b=-12$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-2,\ b=-3$ ··· ❶

$x^2-2x-3=0$에서 $\quad (x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

$\therefore \alpha=3$

$x^2+2x-8=0$에서 $\quad (x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

$\therefore \beta=-4$ ··· ❷

따라서 3, -4를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(3-4)x+3\cdot(-4)=0$

$\therefore x^2+x-12=0$ ··· ❸

답 $x^2+x-12=0$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ α, β의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ α, β를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구할 수 있다.	40%

0491 유리와 준호가 푼 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$이라 하자.
유리는 b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$b=-5\cdot3=-15$

준호는 a를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-a=(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)=2$

$\therefore a=-2$

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2-2x-15=0$ 답 $x^2-2x-15=0$

0492 나은이는 a, c를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$\frac{c}{a}=-6\cdot2=-12$ $\quad\therefore c=-12a$ ...... ㉠

민주는 a, b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-\frac{b}{a}=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4$

$\therefore b=-4a$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$ax^2-4ax-12a=0$

$a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면

$x^2-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=6$

따라서 음수인 근은 -2이다. 답 -2

0493 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 공식을

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{2a}$로 잘못 적용하여 얻은 두 근이 1, 2이므로

$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=1+2=3$

$\frac{-2b}{2a}=3$ $\quad\therefore b=-3a$ ...... ㉠

$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=1\cdot2=2$

$\frac{b^2-(b^2-ac)}{4a^2}=\frac{c}{4a}=2$ $\quad\therefore c=8a$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$ax^2-3ax+8a=0$

따라서 원래의 방정식의 두 근의 곱은

$\frac{8a}{a}=8$ 답 ⑤

다른풀이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 공식은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이므로 주어진 근의 공식은 c의 값을 $\frac{1}{4}c$로 잘못 대입한 것과 같다.

이때 1, 2를 근으로 하고, x^2의 계수가 a인 이차방정식은

$a\{x^2-(1+2)x+1\cdot2\}=0,\quad ax^2-3ax+2a=0$

따라서 원래의 방정식의 상수항은

$2a\cdot4=8a$

즉 원래의 방정식은 $ax^2-3ax+8a=0$이므로 두 근의 곱은

$\frac{8a}{a}=8$

0494 $x^2-4x+6=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot6}=2\pm\sqrt{2}i$

$\therefore x^2-4x+6=\{x-(2+\sqrt{2}i)\}\{x-(2-\sqrt{2}i)\}$

$=(x-2-\sqrt{2}i)(x-2+\sqrt{2}i)$ 답 ①

0495 $x^2+2x+5=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot5}=-1\pm2i$

$\therefore x^2+2x+5=\{x-(-1+2i)\}\{x-(-1-2i)\}$

$=(x+1-2i)(x+1+2i)$

따라서 인수인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0496 $\frac{1}{2}x^2-3x+5=0$, 즉 $x^2-6x+10=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\cdot10}=3\pm i$

$\therefore \frac{1}{2}x^2-3x+5=\frac{1}{2}\{x-(3+i)\}\{x-(3-i)\}$

$=\frac{1}{2}(x-3-i)(x-3+i)$

따라서 $a=-1$, $b=-3$이므로

$ab=3$ 답 3

0497 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(2x+1)=0$이려면

$2x+1=\alpha$ 또는 $2x+1=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha-1}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta-1}{2}$

따라서 이차방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합은

$\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{4-2}{2}=1$ 답 ④

0498 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha\beta=27$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(3x)=0$이려면

$3x=\alpha$ 또는 $3x=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta}{3}$

따라서 이차방정식 $f(3x)=0$의 두 근의 곱은

$\frac{\alpha}{3}\cdot\frac{\beta}{3}=\frac{\alpha\beta}{9}=\frac{27}{9}=3$ 답 ③

0499 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(3x-1)=0$이려면

$3x-1=\alpha$ 또는 $3x-1=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha+1}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta+1}{3}$

따라서 이차방정식 $f(3x-1)=0$의 두 근의 곱은

$\frac{\alpha+1}{3}\cdot\frac{\beta+1}{3}=\frac{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}{9}$

$=\frac{3+5+1}{9}=1$ 답 1

0500 $f(\alpha+1)=0$, $f(\beta+1)=0$이므로 $f(x-2)=0$이려면

$x-2=\alpha+1$ 또는 $x-2=\beta+1$

$\therefore x=\alpha+3$ 또는 $x=\beta+3$

따라서 이차방정식 $f(x-2)=0$의 두 근의 합과 곱은 각각

$(\alpha+3)+(\beta+3)=\alpha+\beta+6=3+6=9$,

$(\alpha+3)(\beta+3)=\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+9$

$=4+3\cdot3+9=22$

답 합: 9, 곱: 22

0501 a, b가 실수이면 ab, $a-b$도 실수이므로 이차방정식 $x^2+abx+a-b=0$의 한 근이 $2+3i$이면 다른 한 근은 $2-3i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+3i)+(2-3i)=-ab$, $(2+3i)(2-3i)=a-b$

이므로 $ab=-4$, $a-b=13$

$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$=13^2+2\cdot(-4)=161$ 답 ①

0502 a, b가 실수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1-i$이면 다른 한 근은 $1+i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+i)+(1-i)=-a$, $(1+i)(1-i)=b$

이므로 $a=-2$, $b=2$

$\therefore ab=-4$ 답 -4

0503 a, b가 유리수이므로 이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 한 근이 $b-\sqrt{3}$이면 다른 한 근은 $b+\sqrt{3}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(b+\sqrt{3})+(b-\sqrt{3})=4$, $(b+\sqrt{3})(b-\sqrt{3})=a$

이므로 $a=1$, $b=2$

$\therefore a+b=3$ 답 3

0504 $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$ ··· ❶

a, b가 실수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $-i$이면 다른 한 근은 i이다. ··· ❷

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$i+(-i)=-a$, $i\cdot(-i)=b$

이므로 $a=0$, $b=1$ ··· ❸

그러므로 이차방정식 $x^2+bx+a=0$, 즉 $x^2+x=0$에서

$x(x+1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-1$ ··· ❹

답 $x=0$ 또는 $x=-1$

채점 기준	비율
❶ $\frac{1-i}{1+i}$를 간단히 할 수 있다.	20%
❷ 켤레근을 이용하여 다른 한 근을 구할 수 있다.	30%
❸ 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ 이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 근을 구할 수 있다.	20%

0505 전략 주어진 이차방정식을 (x에 대한 이차식)$=0$ 꼴로 변형한 후 인수분해를 이용하여 근을 구한다.

풀이 $(2x+1)(x-1)=9$에서 $2x^2-x-1=9$

$2x^2-x-10=0$, $(x+2)(2x-5)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

따라서 $\alpha=\frac{5}{2}$, $\beta=-2$이므로

$2\alpha-\beta=7$ 답 7

0506 전략 주어진 이차방정식에 $x=1+\sqrt{2}$를 대입한다.

풀이 방정식 $x^2+kx-3=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$이므로

$(1+\sqrt{2})^2+k(1+\sqrt{2})-3=0$

$3+2\sqrt{2}+k(1+\sqrt{2})-3=0$, $k(1+\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$

$\therefore k=\frac{-2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\frac{-2\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=-4+2\sqrt{2}$ 답 ③

주의 k가 유리수라는 조건이 없으므로 이차방정식의 켤레근의 성질을 이용하여 다른 한 근을 $1-\sqrt{2}$로 생각하지 않도록 한다.

0507 전략 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, $D\geq 0$이면 실근을 가짐을 이용한다.

풀이 주어진 각 방정식의 판별식을 D라 하면

ㄱ. $\frac{D}{4}=2^2-1\cdot1=3>0$

ㄴ. $D=(-5)^2-4\cdot3\cdot6=-47<0$

ㄷ. $\frac{D}{4}=(\sqrt{3})^2-1\cdot5=-2<0$

ㄹ. $x^2=4(x-1)$, 즉 $x^2-4x+4=0$에서

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot4=0$

이상에서 실근을 갖는 이차방정식은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

0508 전략 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 중근을 가질 조건은 $D=0$이다.

풀이 이차방정식 $x^2-2(a-1)x+2a-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a-1)\}^2-(2a-3)=0$

$a^2-2a+1-2a+3=0,\qquad a^2-4a+4=0$

$(a-2)^2=0\qquad \therefore a=2$ 답 2

0509 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β일 때, $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$임을 이용한다.

풀이 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=4$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ 답 ④

0510 전략 먼저 주어진 근의 분모를 유리화한 후 이차방정식의 켤레근의 성질을 이용한다.

풀이 $\frac{1}{2-\sqrt{5}}=\frac{2+\sqrt{5}}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}=-2-\sqrt{5}$ ··· ❶

a, b가 유리수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $-2-\sqrt{5}$이면 다른 한 근은 $-2+\sqrt{5}$이다. ··· ❷

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(-2+\sqrt{5})+(-2-\sqrt{5})=-a$, $(-2+\sqrt{5})(-2-\sqrt{5})=b$

이므로 $\quad a=4$, $b=-1$ ··· ❸

$\therefore ab=-4$ ··· ❹

답 -4

채점 기준	비율
❶ $\frac{1}{2-\sqrt{5}}$의 분모를 유리화할 수 있다.	20%
❷ 켤레근을 이용하여 다른 한 근을 구할 수 있다.	40%
❸ 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	10%

0511 전략 주어진 방정식에 $x=\alpha$를 대입한 후 양변을 α로 나눈다.

풀이 주어진 방정식의 한 근이 α이므로

$\alpha^2-3\alpha+1=0$

$\alpha\neq0$이므로 양변을 α로 나누면

$\alpha-3+\frac{1}{\alpha}=0\qquad \therefore \alpha+\frac{1}{\alpha}=3$

$\therefore \alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2=3^2-2=7$ 답 7

0512 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나누어 푼다.

풀이 (i) $x<0$일 때,

$x^2-3x+2x-6=0$에서 $\qquad x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0\qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=3$

그런데 $x<0$이므로 $\qquad x=-2$

(ii) $x\geq0$일 때,

$x^2+3x+2x-6=0$에서 $\qquad x^2+5x-6=0$

$(x+6)(x-1)=0\qquad \therefore x=-6$ 또는 $x=1$

그런데 $x\geq0$이므로 $\qquad x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 모든 근의 곱은 -2이다. 답 ④

0513 전략 길의 폭을 x m라 하고 주어진 조건을 이용하여 x에 대한 방정식을 세운다.

풀이 길의 폭을 x m라 하면 남은 땅의 가로, 세로의 길이는 각각 $(24-x)$ m, $(16-2x)$ m이므로

$(24-x)(16-2x)=210$

$x^2-32x+87=0,\qquad (x-3)(x-29)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=29$

그런데 $0<x<8$이므로 $\qquad x=3$

따라서 구하는 길의 폭은 3 m이다. 답 3 m

0514 전략 이차식 ax^2+bx+c가 완전제곱식이면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 갖는다.

풀이 주어진 이차식이 완전제곱식이면 이차방정식 $(a+b)x^2-2cx+a-b=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-c)^2-(a+b)(a-b)=0$

$c^2-a^2+b^2=0\qquad \therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이므로 그 넓이는

$\frac{1}{2}bc$ 답 ②

0515 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근이 α이면 $a\alpha^2+b\alpha+c=0$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 방정식 $x^2-3x-2=0$의 한 근이 α이므로

$\alpha^2-3\alpha-2=0\qquad \therefore \alpha^2-3\alpha=2$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-2$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^3-3\alpha^2+\alpha\beta+2\beta&=\alpha(\alpha^2-3\alpha)+\alpha\beta+2\beta\\&=2\alpha+\alpha\beta+2\beta\\&=2(\alpha+\beta)+\alpha\beta\\&=2\cdot3-2=4\end{aligned}$$ 답 ③

0516 전략 $P(a)=0$, $P(b)=0$이므로 a, b는 방정식 $P(x)=0$의 두 근이다.

풀이 이차식 $P(x)=2x^2-6x-1$에서 $P(a)=0$, $P(b)=0$이므로 a, b는 이차방정식 $2x^2-6x-1=0$의 두 근이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여 $a+b=3$이므로

$$P(a+b)=P(3)=2\cdot3^2-6\cdot3-1=-1$$

답 ②

0517 전략 주어진 이차방정식의 두 근이 연속인 정수이므로 두 근을 α, $\alpha+1$로 놓는다.

풀이 주어진 방정식의 두 근을 α, $\alpha+1$(α는 정수)이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+1)=2k+1 \quad \therefore \alpha=k$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+1)=3k-1$ …… ㉡ ⋯ ❶

㉠을 ㉡에 대입하면

$k(k+1)=3k-1, \quad k^2-2k+1=0$

$(k-1)^2=0 \quad \therefore k=1$ ⋯ ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ 두 근을 α, $\alpha+1$로 놓고 근과 계수의 관계를 이용하여 ㉠, ㉡을 구할 수 있다.	60%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40%

0518 전략 두 실근의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르면 두 근의 합은 0, 두 근의 곱은 음수이다.

풀이 주어진 이차방정식의 두 실근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=m+2<0 \quad \therefore m<-2$ …… ㉠

또 두 근의 절댓값이 같으므로

$\alpha+\beta=-(m^2-m-12)=0$

$m^2-m-12=0, \quad (m+3)(m-4)=0$

$\therefore m=-3$ 또는 $m=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $m=-3$

답 -3

라센 특강 절댓값이 같고 부호가 서로 다른 두 실근

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근 α, β의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르면

➡ $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=0$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}<0$

0519 전략 $\alpha^3+\beta^3=7$을 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$에 대한 식으로 변형한 후 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=\dfrac{k}{2}$

$$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$
$$=2^3-3\cdot\frac{k}{2}\cdot2=8-3k$$

$\alpha^3+\beta^3=7$에서 $\quad 8-3k=7 \quad \therefore k=\dfrac{1}{3}$

$\therefore 30k=10$

답 10

0520 전략 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$이다.

풀이 방정식 $x^2-x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$

$$\therefore \frac{1+\alpha}{1+\beta}+\frac{1+\beta}{1+\alpha}=\frac{(1+\alpha)^2+(1+\beta)^2}{(1+\beta)(1+\alpha)}$$
$$=\frac{1+2\alpha+\alpha^2+1+2\beta+\beta^2}{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}$$
$$=\frac{2+2(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$$
$$=\frac{2+2\cdot1+1^2-2\cdot(-1)}{1+1-1}=7,$$

$$\frac{1+\alpha}{1+\beta}\cdot\frac{1+\beta}{1+\alpha}=1$$

따라서 $\dfrac{1+\alpha}{1+\beta}$, $\dfrac{1+\beta}{1+\alpha}$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-7x+1=0$

답 ④

0521 전략 이차방정식의 켤레근의 성질과 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값을 먼저 구한다.

풀이 a, b가 실수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1-2i$이면 다른 한 근은 $1+2i$이다.
근과 계수의 관계에 의하여

$(1+2i)+(1-2i)=-a$, $(1+2i)(1-2i)=b$

이므로 $\quad a=-2$, $b=5$ ⋯ ❶

이때 $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{5}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)x+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{5}=0$$

$$\therefore x^2+\frac{3}{10}x-\frac{1}{10}=0$$

따라서 $m=\dfrac{3}{10}$, $n=\dfrac{1}{10}$이므로

$m+n=\dfrac{2}{5}$ ⋯ ❷

답 $\dfrac{2}{5}$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	50%

0522 전략 주어진 이차방정식에 $x=2$를 대입하여 얻은 식이 k에 대한 항등식임을 이용한다.

풀이 주어진 방정식의 한 근이 2이므로

$4k+2a-(k+1)a^2+8=0$

$(4-a^2)k+(-a^2+2a+8)=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$4-a^2=0, \quad -a^2+2a+8=0$

$4-a^2=0$에서 $\quad a^2=4 \quad \therefore a=\pm2$ …… ㉠

$-a^2+2a+8=0$에서 $\quad a^2-2a-8=0$

$(a+2)(a-4)=0 \quad \therefore a=-2$ 또는 $a=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad a=-2$

답 -2

0523 전략 0이 아닌 실수 a, b에 대하여 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면 $a<0$, $b<0$임을 이용한다.

풀이 0이 아닌 실수 a, b에 대하여 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면

$a<0$, $b<0$

이때 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-a)^2-4b=a^2-4b>0$

따라서 이차방정식 $x^2-ax+b=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

답 서로 다른 두 실근

0524 전략 $\overline{AE}=\alpha$, $\overline{AH}=\beta$라 하고 직사각형 PFCG의 둘레의 길이와 넓이를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한다.

풀이 $\overline{AE}=\alpha$, $\overline{AH}=\beta$라 하면

$\overline{PF}=10-\alpha$, $\overline{PG}=10-\beta$

직사각형 PFCG의 둘레의 길이가 28이므로

$2\{(10-\alpha)+(10-\beta)\}=28$

$20-(\alpha+\beta)=14 \quad \therefore \alpha+\beta=6$

또 직사각형 PFCG의 넓이가 46이므로

$(10-\alpha)(10-\beta)=46$

$100-10(\alpha+\beta)+\alpha\beta=46$

$100-10\cdot6+\alpha\beta=46 \quad \therefore \alpha\beta=6$

따라서 $\overline{AE}$, $\overline{AH}$의 길이 α, β를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-6x+6=0$

답 ②

0525 전략 주어진 이차식을 x에 대하여 내림차순으로 정리한 후 (이차식)$=0$의 판별식 D가 완전제곱식이어야 함을 이용한다.

풀이 $x^2+4xy+3y^2-2x-10y+k$를 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+2(2y-1)x+3y^2-10y+k$

이때 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(2y-1)x+3y^2-10y+k=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(2y-1)^2-(3y^2-10y+k)$

$=4y^2-4y+1-3y^2+10y-k$

$=y^2+6y+1-k$

가 완전제곱식이어야 한다.

즉 y에 대한 이차방정식 $y^2+6y+1-k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=3^2-(1-k)=0 \quad \therefore k=-8$

답 -8

라쎈 특강 이차식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되는 조건

① 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$(a는 상수, b, c는 y에 대한 다항식)의 근이

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이므로 b^2-4ac가 완전제곱식일 때, ax^2+bx+c가 두 일차식의 곱으로 인수분해될 수 있다.

② x, y에 대한 이차식 A가 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때

(i) A를 x (또는 y)에 대하여 내림차순으로 정리한다.

(ii) $A=0$의 판별식 D가 완전제곱식이어야 한다.

(iii) $D=0$의 판별식이 0이다.

0526 전략 이차방정식의 켤레근의 성질을 이용한다.

풀이 $\alpha=a+bi$(a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면 p가 실수이므로 이차방정식 $x^2-px+p+3=0$의 다른 한 근은 $\overline{\alpha}=a-bi$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\overline{\alpha}=2a=p \quad \therefore a=\frac{p}{2}$ …… ㉠

$\alpha\overline{\alpha}=a^2+b^2=p+3$ …… ㉡

한편

$\alpha^3=(a+bi)^3=a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i$

$=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i$

이고 α^3이 실수이려면 $3a^2b-b^3=0$이어야 한다.

이때 $b\neq0$이므로 $b(3a^2-b^2)=0$에서

$3a^2-b^2=0 \quad \therefore b^2=3a^2=\frac{3p^2}{4}$ ($\because$ ㉠)

$a^2=\frac{p^2}{4}$, $b^2=\frac{3p^2}{4}$을 ㉡에 대입하면

$\frac{p^2}{4}+\frac{3p^2}{4}=p+3 \quad \therefore p^2-p-3=0$

따라서 모든 실수 p의 값의 곱은 -3이다.

답 ②

다른풀이 이차방정식 $x^2-px+p+3=0$의 한 근이 α이므로

$\alpha^2-p\alpha+p+3=0$, 즉 $\alpha^2=p\alpha-p-3$

$\therefore \alpha^3=p\alpha^2-p\alpha-3\alpha$

$=p(p\alpha-p-3)-p\alpha-3\alpha$

$=p^2\alpha-p^2-3p-p\alpha-3\alpha$

$=(p^2-p-3)\alpha-p^2-3p$

이때 p는 실수, α는 허수이므로 α^3이 실수이려면

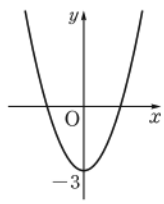
$p^2-p-3=0$

04 이차방정식

05 이차방정식과 이차함수

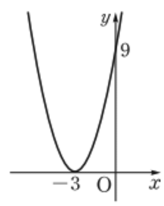
Ⅱ. 방정식

0527 꼭짓점의 좌표: $(0,\ -3)$
축의 방정식: $x=0$
그래프는 오른쪽 그림과 같다.



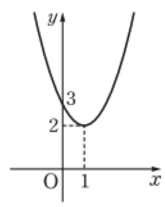
답 풀이 참조

0528 꼭짓점의 좌표: $(-3,\ 0)$
축의 방정식: $x=-3$
그래프는 오른쪽 그림과 같다.



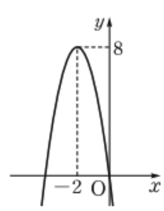
답 풀이 참조

0529 꼭짓점의 좌표: $(1,\ 2)$
축의 방정식: $x=1$
그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0530 꼭짓점의 좌표: $(-2,\ 8)$
축의 방정식: $x=-2$
그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0531 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$이므로
꼭짓점의 좌표: $(1,\ -1)$
축의 방정식: $x=1$ 답 $(1,\ -1)$, $x=1$

0532 $y=-x^2-4x-4=-(x+2)^2$이므로
꼭짓점의 좌표: $(-2,\ 0)$
축의 방정식: $x=-2$ 답 $(-2,\ 0)$, $x=-2$

0533 $y=2x^2-12x+5=2(x-3)^2-13$이므로
꼭짓점의 좌표: $(3,\ -13)$
축의 방정식: $x=3$ 답 $(3,\ -13)$, $x=3$

0534 $y=-3x^2-6x+1=-3(x+1)^2+4$이므로
꼭짓점의 좌표: $(-1,\ 4)$
축의 방정식: $x=-1$ 답 $(-1,\ 4)$, $x=-1$

0535 (1) 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$
(2) 그래프의 축이 y축의 오른쪽에 있으므로
$ab<0$ $\therefore b<0$
└ $-\frac{b}{2a}>0$에서 $ab<0$
(3) 그래프와 y축의 교점이 원점의 아래쪽에 있으므로 $c<0$
답 (1) $a>0$ (2) $b<0$ (3) $c<0$

0536 $2x^2-6x=0$에서 $2x(x-3)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=3$ 답 0, 3

0537 $-3x^2+x+2=0$에서 $3x^2-x-2=0$
$(3x+2)(x-1)=0$ $\therefore x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=1$
답 $-\frac{2}{3}$, 1

0538 $4x^2-20x+25=0$에서 $(2x-5)^2=0$
$\therefore x=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

0539 이차방정식 $x^2-5x+3=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot3=13>0$
이므로 방정식 $x^2-5x+3=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 2개이다. 답 2

0540 이차방정식 $-2x^2+x-3=0$의 판별식을 D라 하면
$D=1^2-4\cdot(-2)\cdot(-3)=-23<0$
이므로 방정식 $-2x^2+x-3=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.
따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 없다. 답 0

0541 이차방정식 $9x^2+6x+1=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=3^2-9\cdot1=0$
이므로 방정식 $9x^2+6x+1=0$은 중근을 갖는다.
따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 1개이다. 답 1

0542 이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot k=1-k>0$ $\therefore k<1$ 답 $k<1$

0543 $\frac{D}{4}=1-k=0$ $\therefore k=1$ 답 $k=1$

0544 $\frac{D}{4}=1-k<0$ $\therefore k>1$ 답 $k>1$

0545 $x^2-x-4=-2x+2$에서 $x^2+x-6=0$
$(x+3)(x-2)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=2$ 답 -3, 2

0546 $2x^2+5x+3=x+1$에서 $x^2+2x+1=0$
$(x+1)^2=0$ $\therefore x=-1$ 답 -1

0547 $-3x^2-2x+4=x-2$에서 $x^2+x-2=0$
$(x+2)(x-1)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ 답 -2, 1

0548 $x^2+4x+3=2x-1$, 즉 $x^2+2x+4=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=1^2-1\cdot4=-3<0$
따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.
답 만나지 않는다.

0549 $-x^2-2x+1=-x-4$, 즉 $x^2+x-5=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=1^2-4\cdot1\cdot(-5)=21>0$$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

답 서로 다른 두 점에서 만난다.

0550 $-x^2-3x+6=x+10$, 즉 $x^2+4x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot4=0$$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다.(접한다.)

답 한 점에서 만난다.(접한다.)

0551 $2x^2-5x+1=-3x-2$, 즉 $2x^2-2x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-2\cdot3=-5<0$$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

답 만나지 않는다.

0552 $x^2+x+2=3x+k$, 즉 $x^2-2x+2-k=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(2-k)=k-1>0 \qquad \therefore k>1$$

답 $k>1$

0553 $\frac{D}{4}=k-1=0 \qquad \therefore k=1$

답 $k=1$

0554 $\frac{D}{4}=k-1<0 \qquad \therefore k<1$

답 $k<1$

0555 답 최솟값: 5, $x=2$

0556 답 최댓값: -8, $x=-3$

0557 답 최댓값: 3, $x=0$

0558 (1) $y=3x^2-6x+5=3(x-1)^2+2$
(2) $x=1$에서 최솟값 2를 갖는다.

답 (1) $y=3(x-1)^2+2$ (2) 최솟값: 2, $x=1$

0559 (1) $y=-2x^2-4x+7=-2(x+1)^2+9$
(2) $x=-1$에서 최댓값 9를 갖는다.

답 (1) $y=-2(x+1)^2+9$ (2) 최댓값: 9, $x=-1$

0560 $y=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$
따라서 $x=2$에서 최솟값 -2를 갖는다.

답 최솟값: -2

0561 $y=-x^2+12x+3=-(x-6)^2+39$
따라서 $x=6$에서 최댓값 39를 갖는다.

답 최댓값: 39

0562 $y=2x^2+8x-1=2(x+2)^2-9$
따라서 $x=-2$에서 최솟값 -9를 갖는다.

답 최솟값: -9

0563 $y=3x^2+6x-2=3(x+1)^2-5$
따라서 $x=-1$에서 최솟값 -5를 갖는다.

답 최솟값: -5

0564 $y=-2x^2-8x+1=-2(x+2)^2+9$
따라서 $x=-2$에서 최댓값 9를 갖는다.

답 최댓값: 9

0565 $y=-\frac{1}{2}x^2-2x+5=-\frac{1}{2}(x+2)^2+7$
따라서 $x=-2$에서 최댓값 7을 갖는다.

답 최댓값: 7

0566 $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1=-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{5}{4}$
따라서 $x=1$에서 최댓값 $\frac{5}{4}$를 갖는다.

답 최댓값: $\frac{5}{4}$

0567 답 1, 1, 10, 1, 5, 10, 1

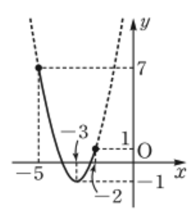
0568 답 2, 7, 6, -2, 6, -2

0569 $-5\le x\le -2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉

$$f(-5)=7,\ f(-3)=-1,\ f(-2)=1$$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 7, 최솟값은 -1이다.

답 최댓값: 7, 최솟값: -1

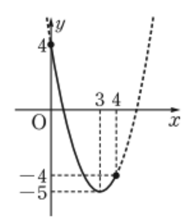


0570 $f(x)=x^2-6x+4=(x-3)^2-5$
$0\le x\le 4$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉

$$f(0)=4,\ f(3)=-5,\ f(4)=-4$$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 4, 최솟값은 -5이다.

답 최댓값: 4, 최솟값: -5

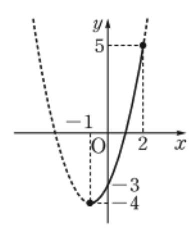


0571 $f(x)=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$
$-1\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉

$$f(-1)=-4,\ f(2)=5$$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 5, 최솟값은 -4이다.

답 최댓값: 5, 최솟값: -4

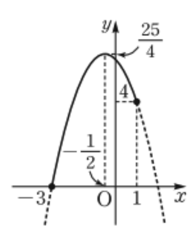


0572 $f(x)=-x^2-x+6$

$$=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$$

$-3\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉

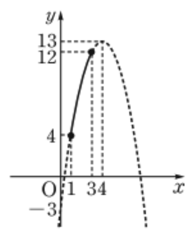
$$f(-3)=0,\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{25}{4},\ f(1)=4$$



따라서 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{25}{4}$, 최솟값은 0이다.

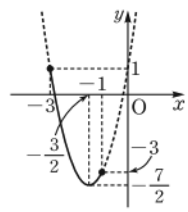
답 최댓값: $\frac{25}{4}$, 최솟값: 0

0573 $f(x)=-x^2+8x-3$
$\qquad =-(x-4)^2+13$



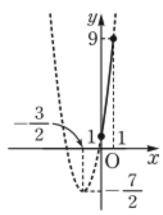
$1\le x\le 3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉
$\quad f(1)=4,\ f(3)=12$
따라서 $f(x)$의 최댓값은 12, 최솟값은 4이다.
답 최댓값: 12, 최솟값: 4

0574 $f(x)=2x^2+6x+1$
$\qquad =2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{2}$



$-3\le x\le -1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉
$\quad f(-3)=1,\ f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{7}{2},$
$\quad f(-1)=-3$
따라서 $f(x)$의 최댓값은 1, 최솟값은 $-\frac{7}{2}$이다.
답 최댓값: 1, 최솟값: $-\frac{7}{2}$

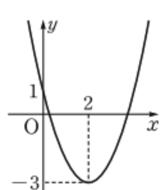
0575 $0\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉



$\quad f(0)=1,\ f(1)=9$
따라서 $f(x)$의 최댓값은 9, 최솟값은 1이다.
답 최댓값: 9, 최솟값: 1

0576 $y=x^2+2kx+2k-4=(x+k)^2-k^2+2k-4$이므로 그래프의 꼭짓점의 좌표는
$\quad (-k,\ -k^2+2k-4)$
꼭짓점이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로
$\quad -k^2+2k-4=-2k,\qquad k^2-4k+4=0$
$\quad (k-2)^2=0\qquad \therefore k=2$
답 ②

0577 $y=x^2-4x+1$
$\qquad =(x-2)^2-3$



이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
① 아래로 볼록한 포물선이다.
② 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ -3)$이다.
③ 축의 방정식은 $x=2$이다.
④ 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 $y=x^2$의 그래프와 포개어진다.
⑤ 제3사분면을 지나지 않는다.
답 ⑤

0578 $y=-x^2-6x+10=-(x+3)^2+19$ ··· ❶
이므로 그래프의 꼭짓점의 좌표는
$\quad (-3,\ 19)$ ··· ❷
따라서 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -7만큼 평행이동한 그래프의 꼭짓점의 좌표는
$\quad (-1,\ 12)$ ··· ❸
답 $(-1,\ 12)$

채점 기준	비율
❶ 주어진 이차함수의 식을 $y=a(x-m)^2+n$ 꼴로 변형할 수 있다.	40%
❷ 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.	20%
❸ 평행이동한 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.	40%

0579 이차함수의 식을 $y=a(x-2)^2+1$이라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(3,\ 2)$를 지나므로
$\quad 2=a+1\qquad \therefore a=1$
따라서 이차함수의 식은
$\quad y=(x-2)^2+1=x^2-4x+5$
이므로 y절편은 5이다.
답 ②

0580 이차함수의 식을 $y=a(x-1)^2+b$라 하면 이 함수의 그래프가 두 점 $(2,\ 0)$, $(-1,\ 6)$을 지나므로
$\quad 0=a+b,\ 6=4a+b$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ b=-2$
따라서 이차함수의 식은
$\quad y=2(x-1)^2-2$
이 함수의 그래프가 점 $(-2,\ k)$를 지나므로
$\quad k=2\cdot(-3)^2-2=16$
답 16

0581 $f(x)=a(x+3)(x+1)$이라 하면
$\quad f(x)=a(x^2+4x+3)=a(x+2)^2-a$
$y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ -a)$이므로
$\quad -a=-2\qquad \therefore a=2$
따라서 $f(x)=2(x+3)(x+1)$이므로
$\quad f(1)=2\cdot 4\cdot 2=16$
답 ④

0582 주어진 함수의 그래프가 점 $(0,\ 8)$을 지나므로 $\quad c=8$
따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+8$의 그래프가 두 점 $(1,\ 3)$, $(3,\ -1)$을 지나므로
$\quad 3=a+b+8,\ -1=9a+3b+8$
$\quad \therefore a+b=-5,\ 3a+b=-3$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=-6$
$\quad \therefore a-b-c=-1$
답 -1

0583 이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 1, 3이므로 1, 3은 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 근이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$\quad 1+3=-\frac{a}{2},\ 1\cdot 3=\frac{b}{2}$
$\quad \therefore a=-8,\ b=6$
$\quad \therefore b-a=14$
답 14

0584 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표의 합이 3, 곱이 -4이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근의 합이 3, 곱이 -4이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$\quad 3=-a,\ -4=b\qquad \therefore a=-3,\ b=-4$
$\quad \therefore ab=12$
답 ④

0585 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 α, β이므로 α, β는 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이다.
즉 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(x+2)=0$이려면

$x+2=\alpha$ 또는 $x+2=\beta$

$\therefore x=\alpha-2$ 또는 $x=\beta-2$

따라서 이차방정식 $f(x+2)=0$의 두 근의 합은

$(\alpha-2)+(\beta-2)=\alpha+\beta-4$

$=5-4=1$ 답 1

0586 이차방정식 $x^2+kx-2=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-k$, $\alpha\beta=-2$ …… ㉠

이때 주어진 이차함수의 그래프와 x축이 만나는 두 점 사이의 거리가 3이므로 $|\alpha-\beta|=3$

양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=9$

$\therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=9$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $k^2+8=9$, $k^2=1$

$\therefore k=1\ (\because k>0)$ 답 1

다른풀이 이차방정식 $x^2+kx-2=0$의 두 근을 α, $\alpha+3$이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+3)=-k$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+3)=-2$ …… ㉡

㉡에서 $\alpha^2+3\alpha+2=0$, $(\alpha+1)(\alpha+2)=0$

$\therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=-2$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $k=-1$ 또는 $k=1$

$\therefore k=1\ (\because k>0)$

0587 이차함수 $y=x^2+2kx+k^2-3k+9$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $x^2+2kx+k^2-3k+9=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(k^2-3k+9)>0$

$3k-9>0$ $\therefore k>3$

따라서 정수 k의 최솟값은 4이다. 답 ⑤

0588 이차함수 $y=x^2-4x+k$의 그래프가 x축과 만나므로 방정식 $x^2-4x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-k\geq0$ $\therefore k\leq4$

따라서 실수 k의 최댓값은 4이다. 답 4

0589 이차함수 $y=x^2+kx+k-1$의 그래프가 x축에 접하므로 방정식 $x^2+kx+k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4(k-1)=0$, $k^2-4k+4=0$

$(k-2)^2=0$ $\therefore k=2$

따라서 $x^2+2x+1=0$에서 $(x+1)^2=0$

$\therefore x=-1$

즉 접점의 x좌표는 -1이다. 답 ②

0590 이차함수 $y=x^2-2kx+k+6$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로 방정식 $x^2-2kx+k+6=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-k)^2-(k+6)=0$, $k^2-k-6=0$

$(k+2)(k-3)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=3$ …… ㉠ ⋯ ❶

또 이차함수 $y=-2x^2+x+k-1$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 방정식 $-2x^2+x+k-1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=1^2-4\cdot(-2)\cdot(k-1)<0$, $-7+8k<0$

$\therefore k<\frac{7}{8}$ …… ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡에서 $k=-2$ ⋯ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ ㉠을 구할 수 있다.	40%
❷ ㉡을 구할 수 있다.	40%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20%

0591 이차함수 $y=x^2+kx+3$의 그래프와 직선 $y=-x+2$가 접하므로 방정식 $x^2+kx+3=-x+2$, 즉 $x^2+(k+1)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k+1)^2-4=0$, $k^2+2k-3=0$

$(k+3)(k-1)=0$ $\therefore k=1\ (\because k>0)$ 답 1

0592 이차함수 $y=2x^2+(m-3)x+m-1$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $2x^2+(m-3)x+m-1=mx$, 즉 $2x^2-3x+m-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot(m-1)>0$

$17-8m>0$ $\therefore m<\frac{17}{8}$

따라서 정수 m의 최댓값은 2이다. 답 2

0593 이차함수 $y=x^2-2kx+k^2$의 그래프와 직선 $y=2x+1$이 적어도 한 점에서 만나므로 방정식 $x^2-2kx+k^2=2x+1$, 즉 $x^2-2(k+1)x+k^2-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k^2-1)\geq0$ ⋯ ❶

$2k+2\geq0$ $\therefore k\geq-1$ ⋯ ❷

따라서 실수 k의 최솟값은 -1이다. ⋯ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 이차함수의 그래프와 직선이 적어도 한 점에서 만나기 위한 조건을 구할 수 있다.	60%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%
❸ k의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

0594 이차함수 $y=kx^2+2kx+1$의 그래프와 직선 $y=x-k$가 만나지 않으므로 방정식 $kx^2+2kx+1=x-k$, 즉 $kx^2+(2k-1)x+k+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4k(k+1)<0$

$-8k+1<0$ $\therefore k>\frac{1}{8}$

$\therefore a=\frac{1}{8}$ 답 ①

0595 이차함수 $y=x^2+kx+k$의 그래프가 x축에 접하므로 방정식 $x^2+kx+k=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=k^2-4k=0$, $\quad k(k-4)=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=4$ …… ㉠ ⋯ ❶

또 이차함수 $y=x^2+kx+k$의 그래프가 직선 $y=(k+1)x$와 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $x^2+kx+k=(k+1)x$, 즉 $x^2-x+k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-1)^2-4k>0$, $\quad 1-4k>0$

$\therefore k<\frac{1}{4}$ …… ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡에서 $\quad k=0$ ⋯ ❸

답 0

채점 기준	비율
❶ ㉠을 구할 수 있다.	40%
❷ ㉡을 구할 수 있다.	40%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20%

0596 기울기가 2인 직선의 방정식을 $y=2x+b$라 하면 이 직선이 이차함수 $y=x^2-4x+3$의 그래프에 접하므로 방정식 $x^2-4x+3=2x+b$, 즉 $x^2-6x+3-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(3-b)=0$

$6+b=0 \quad \therefore b=-6$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $\quad y=2x-6$ 답 $y=2x-6$

0597 점 (1, 2)를 지나는 직선의 방정식을 $y=a(x-1)+2$라 하면 이 직선이 이차함수 $y=2x^2-x+1$의 그래프에 접하므로 방정식 $2x^2-x+1=a(x-1)+2$, 즉 $2x^2-(1+a)x+a-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(1+a)\}^2-4\cdot2\cdot(a-1)=0$

$a^2-6a+9=0$, $\quad (a-3)^2=0$

$\therefore a=3$

따라서 직선의 방정식은 $y=3(x-1)+2=3x-1$이므로 구하는 y절편은 -1이다. 답 -1

0598 점 (2, 4)를 지나는 직선의 방정식을 $y=a(x-2)+4$라 하면 이 직선이 이차함수 $y=-2x^2+7x-4$의 그래프에 접하므로 방정식 $-2x^2+7x-4=a(x-2)+4$, 즉 $2x^2+(a-7)x-2a+8=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-7)^2-4\cdot2\cdot(-2a+8)=0$

$\therefore a^2+2a-15=0$

이 방정식의 두 실근은 구하는 두 직선의 기울기이므로 구하는 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 -15이다. 답 ②

0599 $2x^2+ax+3=2x+b$에서 $\quad 2x^2+(a-2)x+3-b=0$

이 이차방정식의 두 근이 -1, 2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+2=-\frac{a-2}{2}$, $-1\cdot2=\frac{3-b}{2}$

$a-2=-2$, $3-b=-4 \quad \therefore a=0$, $b=7$

$\therefore b-a=7$ 답 ①

0600 $x^2+ax+b=x-a$에서 $\quad x^2+(a-1)x+a+b=0$

이 이차방정식의 두 근의 합이 4, 곱이 -2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-(a-1)=4$, $a+b=-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-3$, $b=1$

$\therefore ab=-3$ 답 -3

0601 $2x^2-x-1=3x+k$에서 $\quad 2x^2-4x-1-k=0$

이 이차방정식의 한 근이 3이므로

$18-12-1-k=0 \quad \therefore k=5$ ⋯ ❶

$2x^2-4x-6=0$에서 $\quad x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=3$ ⋯ ❷

$x=-1$을 $y=3x+5$에 대입하면 $\quad y=2$

따라서 점 B의 좌표는 $\quad (-1, 2)$ ⋯ ❸

답 $(-1, 2)$

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	40%
❸ 점 B의 좌표를 구할 수 있다.	30%

0602 $x^2-4x+5=ax+b$에서 $\quad x^2-(4+a)x+5-b=0$

이 이차방정식의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $3+2\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $3-2\sqrt{2}$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=4+a$,

$(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=5-b$

이므로

$6=4+a$, $1=5-b \quad \therefore a=2$, $b=4$

$\therefore a+b=6$ 답 6

0603 $y=-2x^2+4x+7=-2(x-1)^2+9$이므로

$M=9$

$y=3x^2+6x-5=3(x+1)^2-8$이므로

$m=-8$

$\therefore M+m=1$ 답 1

0604 $y=3x^2-6x-2=3(x-1)^2-5$이므로 $x=1$에서 최솟값 -5를 갖는다.

따라서 $a=1$, $b=-5$이므로 $\quad ab=-5$ 답 ②

0605 ① 최솟값은 4이다.

② 최솟값은 1이다.

③ $y=\frac{2}{5}x^2+4x+1=\frac{2}{5}(x+5)^2-9$이므로 최솟값은 -9이다.

④ $y=x^2+4x+6=(x+2)^2+2$이므로 최솟값은 2이다.

⑤ $y=2x^2-8x+2=2(x-2)^2-6$이므로 최솟값은 -6이다.

따라서 최솟값이 가장 작은 것은 ③이다. 답 ③

0606 $y=2x^2+ax-3$의 그래프가 점 $(1, -5)$를 지나므로

$-5=2+a-3 \quad \therefore a=-4$

따라서 $y=2x^2-4x-3=2(x-1)^2-5$이므로 최솟값은 -5이다.

답 ⑤

0607 x^2의 계수가 1이므로 이차함수의 식은

$$y=(x+3)(x-2)=x^2+x-6$$
$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$$

따라서 이 이차함수의 최솟값은 $-\frac{25}{4}$이다. 답 $-\frac{25}{4}$

0608 $y=-x^2-2ax+6a-3=-(x+a)^2+a^2+6a-3$이므로 $x=-a$에서 최댓값 a^2+6a-3을 갖는다. ··· ❶

따라서 $m=a^2+6a-3=(a+3)^2-12$이므로 m은 $a=-3$에서 최솟값 -12를 갖는다. ··· ❷

답 -12

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수의 최댓값을 구할 수 있다.	60%
❷ m의 최솟값을 구할 수 있다.	40%

0609 $y=-2x^2+12x+k-3=-2(x-3)^2+k+15$이므로 $x=3$에서 최댓값 $k+15$를 갖는다.

즉 $k+15=3$이므로 $k=-12$ 답 ⑤

0610 $y=mx^2-4mx+1=m(x-2)^2+1-4m$이므로 $m>0$이고, $x=2$에서 최솟값 $1-4m$을 갖는다.

즉 $1-4m=-3$이므로 $m=1$ 답 ④

0611 $y=2x^2+4x+2a+1=2(x+1)^2+2a-1$ ··· ❶

이므로 $x=-1$에서 최솟값 $2a-1$을 갖는다.

즉 $2a-1=-3$이므로 $a=-1$ ··· ❷

따라서 $y=2x^2+4x-1$이므로 $b=-1$ ··· ❸

$\therefore a+b=-2$ ··· ❹

답 -2

채점 기준	비율
❶ 주어진 이차함수의 식을 $y=2(x-p)^2+q$ 꼴로 변형할 수 있다.	30%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

0612 $y=-2x^2+8x+6+2k=-2(x-2)^2+14+2k$이므로 $x=2$에서 최댓값 $14+2k$를 갖는다.

또 $y=(x+3)(x-5)-k=x^2-2x-15-k=(x-1)^2-16-k$이므로 $x=1$에서 최솟값 $-16-k$를 갖는다.

따라서 $14+2k=-16-k$이므로

$k=-10$ 답 -10

0613 이차함수 $y=x^2+ax+b$가 $x=1$에서 최솟값 -7을 가지므로

$$x^2+ax+b=(x-1)^2-7$$
$$=x^2-2x-6$$

따라서 $a=-2$, $b=-6$이므로 $ab=12$ 답 12

0614 이차함수 $y=ax^2+2ax+b$의 그래프가 점 $(1, 3)$을 지나므로

$3=a+2a+b \quad \therefore 3a+b=3$ ······ ㉠

$y=ax^2+2ax+b=a(x+1)^2-a+b$에서 최솟값이 -5이므로

$-a+b=-5$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

$\therefore a+b=-1$ 답 ⑤

0615 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 $x=2$에서 최댓값 2를 가지므로

$f(x)=a(x-2)^2+2\ (a<0)$

$f(1)=1$에서 $1=a+2 \quad \therefore a=-1$

$\therefore f(x)=-(x-2)^2+2=-x^2+4x-2$

따라서 $a=-1$, $b=4$, $c=-2$이므로

$a-b+c=-7$ 답 -7

0616 $f(x)=ax^2+4ax+b=a(x+2)^2-4a+b$에서 최솟값이 -7이므로 $a>0$이고 $-4a+b=-7$

$\therefore 4a-b=7$ ······ ㉠

$g(x)=-x^2+4x+2a+b=-(x-2)^2+2a+b+4$에서 최댓값이 3이므로 $2a+b+4=3$

$\therefore 2a+b=-1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$

$\therefore a-b=4$ 답 ②

0617 조건 (나), (다)에 의하여 $f(x)=a(x-1)^2-3(a>0)$이라 하면 조건 (가)에서 $f(-1)=1$이므로

$4a-3=1 \quad \therefore a=1$

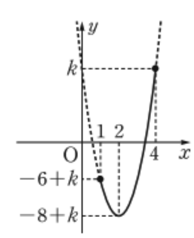
따라서 $f(x)=(x-1)^2-3$이므로

$f(2)=1^2-3=-2$ 답 ①

0618 $f(x)=2x^2-8x+k$

$=2(x-2)^2-8+k$

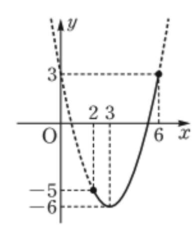
이므로 $1\le x\le 4$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=4$에서 최댓값 k를 가지므로

$k=4$ 답 ①

0619 $f(x)=x^2-6x+3=(x-3)^2-6$이므로 $2\le x\le 6$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=6$에서 최댓값 3을 갖고, $x=3$에서 최솟값 -6을 가지므로

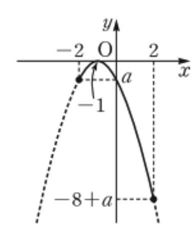
$M=3$, $m=-6$

$\therefore Mm=-18$ 답 -18

0620 $f(x)=-x^2-2x+a$

$=-(x+1)^2+1+a$

이므로 $-2\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=2$에서 최솟값 $-8+a$를 가지므로

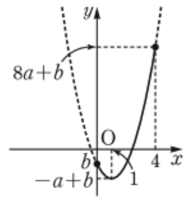
$-8+a=-9 \quad \therefore a=-1$

즉 $f(x)=-(x+1)^2$이므로 $x=-1$에서 최댓값 0을 갖는다. 답 ③

05 이차방정식과 이차함수

0621 $y=ax^2-2ax+b=a(x-1)^2-a+b$

이므로 $0\le x\le 4$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=4$에서 최댓값 $8a+b$를 갖고, $x=1$에서 최솟값 $-a+b$를 가지므로

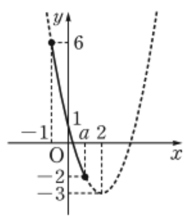
$8a+b=7,\ -a+b=-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-1$

$\therefore\ a+b=0$ 답 0

0622 $f(x)=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$이라 하면 $f(2)=-3$이므로



$-1<\underbrace{a<2}_{a\ge 2\text{이면 최솟값이 }-3\text{이다.}}$

따라서 $x=a$에서 최솟값 -2를 가지므로

$a^2-4a+1=-2,\qquad a^2-4a+3=0$

$(a-1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=1\ (\because\ -1<a<2)$ 답 1

0623 $x^2-2x=t$로 놓으면

$t=(x-1)^2-1\ge -1$

이때 주어진 함수는

$y=t^2+4t-3=(t+2)^2-7\,(t\ge -1)$

따라서 $t=-1$에서 최솟값 -6을 갖는다. 답 -6

0624 $2x-1=t$로 놓으면 $x=1$일 때 $t=1$, $x=4$일 때 $t=7$이므로 $1\le t\le 7$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-4t+5=(t-2)^2+1\,(1\le t\le 7)$

따라서 $t=2$에서 최솟값 1, $t=7$에서 최댓값 26을 가지므로

$M=26,\ m=1$

$\therefore\ M-m=25$ 답 ②

0625 $x^2+2x-1=t$로 놓으면

$t=(x+1)^2-2\ge -2$ ··· ❶

이때 주어진 함수는

$y=-2t^2+6(t+1)+k$ — $x^2+2x-1=t$이므로 $x^2+2x=t+1$

$=-2t^2+6t+6+k$

$=-2\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{21}{2}+k\,(t\ge -2)$ ··· ❷

따라서 $t=\dfrac{3}{2}$에서 최댓값 $\dfrac{21}{2}+k$를 가지므로

$\dfrac{21}{2}+k=10\qquad \therefore\ k=-\dfrac{1}{2}$ ··· ❸

답 $-\dfrac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $x^2+2x-1=t$로 놓고 t의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❷ y를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30%

0626 $2x-y=8$에서 $\quad y=2x-8$

$\therefore\ xy=x(2x-8)=2(x-2)^2-8$

이때 $0\le x\le 5$이므로 $x=5$일 때 최댓값은 10, $x=2$일 때 최솟값은 -8이다.

따라서 구하는 합은 2이다. 답 ①

0627 $x+y=2$에서 $\quad y=2-x$

$\therefore\ 2x+y^2=2x+(2-x)^2=x^2-2x+4$

$=(x-1)^2+3$

따라서 $x=1$일 때 최솟값은 3이다. 답 3

0628 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 직선 $x+y=4$ 위의 점이므로

$a+b=4\qquad \therefore\ b=4-a$

$\therefore\ a^2+b^2=a^2+(4-a)^2=2a^2-8a+16$

$=2(a-2)^2+8$

따라서 $a=2$일 때 최솟값은 8이다. 답 ⑤

0629 $x+y^2=1$에서 $\quad y^2=1-x$ ······ ㉠

y가 실수이므로 $\quad y^2=1-x\ge 0\qquad \therefore\ x\le 1$

㉠을 $-x^2+4y^2$에 대입하면

$-x^2+4(1-x)=-x^2-4x+4$

$=-(x+2)^2+8$

이때 $x\le 1$이므로 $x=-2$일 때 최댓값은 8이다. 답 ③

0630 점 A의 좌표를 $(a,\ 0)\,(0<a<4)$이라 하면

$\mathrm{D}(a,\ -a^2+8a)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=8-2a,\ \overline{\mathrm{AD}}=-a^2+8a$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$2(8-2a-a^2+8a)=-2a^2+12a+16$

$=-2(a-3)^2+34$

이때 $0<a<4$이므로 $a=3$일 때 최댓값은 34이다.

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 34이다. 답 34

다른풀이 점 B의 좌표를 $(b,\ 0)\,(4<b<8)$이라 하면

$\mathrm{C}(b,\ -b^2+8b)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=2b-8,\ \overline{\mathrm{BC}}=-b^2+8b$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$2(2b-8-b^2+8b)=-2b^2+20b-16$

$=-2(b-5)^2+34$

이때 $4<b<8$이므로 $b=5$일 때 최댓값은 34이다.

0631 $y=-5t^2+40t=-5(t-4)^2+80$

$t=4$일 때 최댓값은 80이다.

따라서 구하는 높이는 80 m이다. 답 80 m

0632 $y=-30x^2+240x=-30(x-4)^2+480$

이때 $2\le x\le 5$이므로 $x=4$일 때 최댓값은 480, $x=2$일 때 최솟값은 360이다.

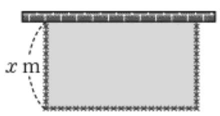
따라서 판매 수익의 최댓값은 480만 원, 최솟값은 360만 원이다.

답 최댓값: 480만 원, 최솟값: 360만 원

0633 부채꼴의 반지름의 길이를 x cm라 하면 호의 길이는
$(28-2x)$cm
이때 반지름의 길이와 호의 길이는 양수이므로
$0<x<14$
부채꼴의 넓이는
$$\frac{1}{2}x(28-2x)=-x^2+14x$$
$$=-(x-7)^2+49$$
이때 $0<x<14$이므로 $x=7$일 때 최댓값은 49이다.
따라서 부채꼴의 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이는 7 cm이다.
답 ②

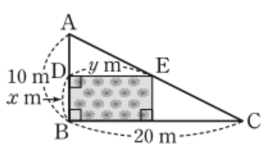
라쎈 특강 부채꼴의 넓이

반지름의 길이가 r, 호의 길이가 l인 부채꼴의 넓이
⇨ $\frac{1}{2}rl$

0634 오른쪽 그림과 같이 가축우리의 세로의 길이를 x m라 하면 가로의 길이는


$(32-2x)$ m
이때 변의 길이는 양수이므로
$0<x<16$ ··· ❶
가축우리의 넓이는
$$x(32-2x)=-2x^2+32x$$
$$=-2(x-8)^2+128 \quad \cdots ❷$$
이때 $0<x<16$이므로 $x=8$일 때 최댓값은 128이다.
따라서 가축우리의 최대 넓이는 128 m^2이다. ··· ❸
답 128 m^2

채점 기준	비율
❶ 가축우리의 가로, 세로의 길이를 미지수로 나타낼 수 있다.	30%
❷ 가축우리의 넓이를 이차식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ 가축우리의 최대 넓이를 구할 수 있다.	30%

0635 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\overline{BD}=x$ m, $\overline{DE}=y$ m라 하면 △ADE∽△ABC이므로


$\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{DE}:\overline{BC}$
즉 $(10-x):10=y:20$이므로
$y=20-2x$
이때 변의 길이는 양수이므로
$0<x<10$
꽃밭의 넓이는
$$xy=x(20-2x)=-2x^2+20x$$
$$=-2(x-5)^2+50$$
이때 $0<x<10$이므로 $x=5$일 때 최댓값은 50이다.
따라서 꽃밭의 최대 넓이는 50 m^2이다.
답 ③

0636 전략 꼭짓점의 좌표가 (m, n)이면 이차함수의 식을 $y=a(x-m)^2+n$으로 놓는다.
풀이 이차함수 $y=3x^2+ax+b$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-2, 5)$이므로
$$y=3(x+2)^2+5=3x^2+12x+17$$
따라서 $a=12$, $b=17$이므로 $b-a=5$
답 5

0637 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나지 않으면 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 할 때 $D<0$이다.
풀이 이차함수 $y=x^2+2x+k$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 방정식 $x^2+2x+k=0$의 판별식을 D라 하면
$$\frac{D}{4}=1^2-k<0 \qquad \therefore k>1$$
답 ⑤

0638 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나면 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 판별식을 D라 할 때 $D>0$이다.
풀이 이차함수 $y=x^2-4x+3$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $x^2-4x+3=x+k$, 즉 $x^2-5x+3-k=0$의 판별식을 D라 하면
$$D=(-5)^2-4(3-k)>0 \quad \cdots ❶$$
$$13+4k>0 \qquad \therefore k>-\frac{13}{4}$$
$$\therefore a=-\frac{13}{4} \quad \cdots ❷$$
답 $-\frac{13}{4}$

채점 기준	비율
❶ 방정식 $x^2-4x+3=x+k$의 판별식 D가 $D>0$이어야 함을 이용할 수 있다.	60%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40%

0639 전략 기울기가 -1이므로 직선의 방정식을 $y=-x+b$로 놓고 이차함수의 식과 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식이 0임을 이용한다.
풀이 기울기가 -1인 직선의 방정식을 $y=-x+b$라 하면 이 직선이 이차함수 $y=-2x^2+x+1$의 그래프에 접하므로 방정식 $-2x^2+x+1=-x+b$, 즉 $2x^2-2x+b-1=0$의 판별식을 D라 하면
$$\frac{D}{4}=(-1)^2-2(b-1)=0$$
$$3-2b=0 \qquad \therefore b=\frac{3}{2}$$
따라서 직선의 방정식은 $y=-x+\frac{3}{2}$이므로 y절편은 $\frac{3}{2}$이다.
답 $\frac{3}{2}$

0640 전략 이차함수 $f(x)$가 $x=p$에서 최댓값 q를 가지면 $f(x)=a(x-p)^2+q\ (a<0)$로 놓는다.
풀이 이차함수 $y=-3x^2+2ax+1$이 $x=-1$에서 최댓값 b를 가지므로
$$-3x^2+2ax+1=-3(x+1)^2+b$$
$$=-3x^2-6x-3+b$$
따라서 $2a=-6$, $1=-3+b$이므로 $a=-3$, $b=4$
$\therefore a-b=-7$
답 ②

0641 **전략** 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속하는지 확인한다.

풀이 $x=-1$에서 최솟값 -2, $x=3$에서 최댓값 14를 가지므로

$M=14$, $m=-2$

$\therefore M+m=12$ 답 ②

0642 **전략** 이차함수의 그래프가 두 점 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$을 지나면 이차함수의 식을 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$로 놓는다.

풀이 $y=a(x-2)(x-6)$이라 하면

$y=a(x^2-8x+12)=a(x-4)^2-4a$

이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 y좌표는 $-4a$이므로

$-4a=-12 \qquad \therefore a=3$

따라서 $y=3(x^2-8x+12)=3x^2-24x+36$이므로

$a=3$, $b=-24$, $c=36$

$\therefore a+b+c=15$ 답 15

0643 **전략** 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

$=x^2-6x+\alpha\beta$

$=(x-3)^2-9+\alpha\beta$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(3, -9+\alpha\beta)$이고, 이 꼭짓점이 직선 $y=2x-7$ 위에 있으므로

$-9+\alpha\beta=6-7 \qquad \therefore \alpha\beta=8$

따라서 $f(x)=x^2-6x+8$이므로

$f(0)=8$ 답 8

0644 **전략** 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=0$의 실근과 같다.

풀이 이차함수 $y=3x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -3, 1이므로 -3, 1은 이차방정식 $3x^2+ax+b=0$의 두 근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+1=-\dfrac{a}{3}$, $-3\cdot1=\dfrac{b}{3}$

이므로 $\quad a=6$, $b=-9$

$\therefore ab=-54$ 답 -54

다른풀이 $y=3x^2+ax+b=3(x+3)(x-1)=3x^2+6x-9$이므로

$a=6$, $b=-9$

0645 **전략** 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점이 존재하지 않으면 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 판별식을 D라 할 때 $D<0$이다.

풀이 이차함수 $y=2x^2+2x+a$의 그래프와 직선 $y=-2x+1$의 교점이 존재하지 않으므로 방정식 $2x^2+2x+a=-2x+1$, 즉 $2x^2+4x+a-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=2^2-2(a-1)<0 \qquad \therefore a>3$

따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다. 답 ④

0646 **전략** 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접하면 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 판별식을 D라 할 때 $D=0$이다.

풀이 이차함수 $y=2x^2-x$의 그래프와 직선 $y=-5x+k$가 접하므로 방정식 $2x^2-x=-5x+k$, 즉 $2x^2+4x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=2^2-2\cdot(-k)=0 \qquad \therefore k=-2$ ⋯ ❶

따라서 $2x^2+4x+2=0$에서

$2(x+1)^2=0 \qquad \therefore x=-1$

$x=-1$을 $y=-5x-2$에 대입하면 $\quad y=3$

즉 접점의 좌표는 $(-1, 3)$이므로 $\quad a=-1$, $b=3$

$\therefore a+b=2$ ⋯ ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ 판별식을 이용하여 k의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ 접점의 좌표를 구하여 $a+b$의 값을 구할 수 있다.	50%

0647 **전략** 이차함수 $y=a(x-p)^2+q\,(a<0)$는 $x=p$에서 최댓값 q를 갖는다.

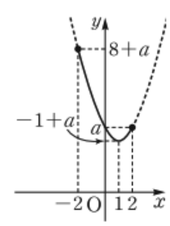
풀이 $y=-x^2-2kx+k=-(x+k)^2+k^2+k$이므로 $x=-k$에서 최댓값 k^2+k를 갖는다.

즉 $k^2+k=6$이므로 $\quad k^2+k-6=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 상수 k의 값의 합은 -1이다. 답 ③

0648 **전략** 주어진 이차함수의 식을 $f(x)=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한 후 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속하는지 확인한다.

풀이 $f(x)=x^2-2x+a=(x-1)^2-1+a$이므로 $-2\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=-2$에서 최댓값 $8+a$를 갖고, $x=1$에서 최솟값 $-1+a$를 가지므로

$(8+a)+(-1+a)=17$

$2a=10 \qquad \therefore a=5$ 답 ①

0649 **전략** $x^2-2x+2=t$로 놓고 주어진 함수를 t에 대한 이차함수로 나타낸다. 이때 t의 값의 범위에 주의한다.

풀이 $x^2-2x+2=t$로 놓으면

$t=(x-1)^2+1\ge1$

이때 주어진 함수는

$y=-t^2+2t+3=-(t-1)^2+4\,(t\ge1)$

따라서 $t=1$에서 최댓값 4를 갖는다. 답 ①

0650 **전략** $x+y=1$에서 $y=1-x$이므로 이 식을 x^2+2y^2에 대입한다. 이때 x의 값의 범위에 주의한다.

풀이 $x+y=1$에서 $\quad y=1-x$ ⋯⋯ ㉠

이때 $y\ge0$이므로 $\quad y=1-x\ge0 \qquad \therefore x\le1$

또 $x\ge0$이므로 $\quad 0\le x\le1$

㉠을 x^2+2y^2에 대입하면

$x^2+2(1-x)^2=3x^2-4x+2=3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}$

이때 $0 \le x \le 1$이므로 $x=0$에서 최댓값 2를 갖고, $x=\frac{2}{3}$에서 최솟값 $\frac{2}{3}$를 갖는다.

답 최댓값: 2, 최솟값: $\frac{2}{3}$

0651 전략 물받이의 높이를 x cm로 놓고 색칠한 단면의 넓이를 x에 대한 이차식으로 나타낸다.

풀이 물받이의 높이를 x cm라 하면 색칠한 단면은 가로의 길이가 $(12-2x)$ cm, 세로의 길이가 x cm인 직사각형이다.
이때 변의 길이는 양수이므로

$0<x<6$ ··· ❶

색칠한 단면의 넓이는

$x(12-2x)=-2x^2+12x$
$=-2(x-3)^2+18$ ··· ❷

이때 $0<x<6$이므로 $x=3$일 때 최댓값은 18이다.
따라서 색칠한 단면의 넓이가 최대가 되도록 하려면 물받이의 높이를 3 cm로 해야 한다. ··· ❸

답 3 cm

채점 기준	비율
❶ 물받이의 높이를 x cm라 하고 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❷ 색칠한 단면의 넓이를 x에 대한 이차식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ 색칠한 단면의 넓이가 최대가 되도록 하는 물받이의 높이를 구할 수 있다.	40%

0652 전략 꼭짓점의 좌표를 이용하여 이차함수의 식을 나타낸 후 이차함수의 그래프는 축에 대하여 대칭임을 이용하여 x축과의 교점의 x좌표를 구한다.

풀이 이차함수의 식을 $y=a(x-1)^2-1$이라 하면

$y=ax^2+bx+c=a(x-1)^2-1$
$=ax^2-2ax+a-1$

이때 주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이고 $\overline{PQ}=6$이므로 두 점 P, Q의 x좌표는 -2, 4이다.
-2, 4는 이차방정식 $ax^2-2ax+a-1=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-2\cdot 4=\frac{a-1}{a}$, $\quad 9a-1=0 \quad \therefore a=\frac{1}{9}$

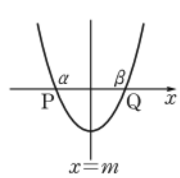
따라서 $y=\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{9}x-\frac{8}{9}$이므로

$b=-\frac{2}{9}$, $c=-\frac{8}{9}$
$\therefore a-b-3c=3$

답 ⑤

라쎈 특강

이차함수 $y=a(x-m)^2+n$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 이 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 좌표가 $\mathrm{P}(\alpha, 0)$, $\mathrm{Q}(\beta, 0)$ $(\alpha<\beta)$이면



$m-\alpha=\beta-m=\frac{\overline{PQ}}{2}$, 즉

$\alpha=m-\frac{\overline{PQ}}{2}$, $\beta=m+\frac{\overline{PQ}}{2}$

이다.

0653 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하면 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 할 때 $D=0$이다.

풀이 주어진 이차함수의 그래프가 x축에 접하므로 방정식 $x^2+2(a-k)x+k^2+4k+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-k)^2-(k^2+4k+b)=0$
$a^2-2ak+k^2-k^2-4k-b=0$
$\therefore (-2a-4)k+a^2-b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$-2a-4=0$, $a^2-b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-2$, $b=4$

$\therefore ab=-8$

답 ①

0654 전략 두 수 α, β를 근으로 하는 이차방정식은 $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ $(a\neq 0)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=a(x+2)(x-4)$
$=a(x^2-2x-8)$
$=a(x-1)^2-9a$ $(a\neq 0)$

(i) $a<0$일 때,
함수 $f(x)$는 $x=5$에서 최댓값 $7a$를 가지므로

$7a=80 \quad \therefore a=\frac{80}{7}$

이때 $a<0$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a>0$일 때,
함수 $f(x)$는 $x=8$에서 최댓값 $40a$를 가지므로

$40a=80 \quad \therefore a=2$

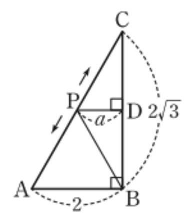
(i), (ii)에서 $a=2$이므로

$f(x)=2(x+2)(x-4)$
$\therefore f(-5)=2\cdot(-3)\cdot(-9)=54$

답 54

0655 전략 점 P에서 변 BC에 수선을 그어 삼각형의 닮음을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하고, $\overline{PD}=a$ $(0<a<2)$라 하면 $\triangle CPD \backsim \triangle CAB$이므로



$\overline{PD}:\overline{AB}=\overline{CD}:\overline{CB}$
$a:2=\overline{CD}:2\sqrt{3}$
$\therefore \overline{CD}=\sqrt{3}a$

또 $\overline{BD}=2\sqrt{3}-\sqrt{3}a$이므로

$\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\{a^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{3}a)^2\}+\{a^2+(\sqrt{3}a)^2\}$
$=a^2+12-12a+3a^2+a^2+3a^2$
$=8a^2-12a+12$
$=8\left(a-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{2}$

이때 $0<a<2$이므로 구하는 최솟값은 $\frac{15}{2}$이다.

답 ④

06 여러 가지 방정식

Ⅱ. 방정식

0656 답 $x=-1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=7$

0657 답 $x=1$(중근) 또는 $x=-1\pm i$

0658 $x^3-1=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 답 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

0659 $x^4-8x=0$의 좌변을 인수분해하면

$x(x^3-8)=0,\quad x(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

답 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

0660 $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$으로 놓으면

$P(1)=1-2-5+6=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	-2	-5	6
		1	-1	-6
	1	-1	-6	0

$P(x)=(x-1)(x^2-x-6)$

$=(x-1)(x+2)(x-3)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

답 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

0661 $P(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$으로 놓으면

$P(1)=1-1-7+1+6=0,$

$P(-1)=1+1-7-1+6=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	-1	-7	1	6
		1	0	-7	-6
-1	1	0	-7	-6	0
		-1	1	6	
	1	-1	-6	0	

$\therefore P(x)=(x-1)(x+1)(x^2-x-6)$

$=(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

답 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

0662 $x^2+1=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$\boxed{X^2-X-2}=0,\quad (X+1)(\boxed{X-2})=0$

$\therefore X=-1$ 또는 $X=\boxed{2}$

(i) $X=-1$일 때, $x^2+1=-1$, 즉 $x^2=-2$에서

$x=\pm\sqrt{2}i$

(ii) $X=\boxed{2}$일 때, $x^2+1=2$, 즉 $x^2=\boxed{1}$에서

$x=\boxed{\pm1}$

(i), (ii)에서 $x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\boxed{\pm1}$

$\therefore$ (가) X^2-X-2 (나) $X-2$ (다) 2 (라) 1 (마) ±1

답 풀이 참조

0663 $x^2-1=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+X-6=0,\quad (X+3)(X-2)=0$

$\therefore X=-3$ 또는 $X=2$

(i) $X=-3$일 때, $x^2-1=-3$, 즉 $x^2=-2$에서

$x=\pm\sqrt{2}i$

(ii) $X=2$일 때, $x^2-1=2$, 즉 $x^2=3$에서

$x=\pm\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 $x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

답 $x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

0664 $x^2+x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$6X^2+X-1=0,\quad (2X+1)(3X-1)=0$

$\therefore X=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $X=\dfrac{1}{3}$

(i) $X=-\dfrac{1}{2}$일 때, $x^2+x=-\dfrac{1}{2}$, 즉 $2x^2+2x+1=0$에서

$x=\dfrac{-1\pm i}{2}$

(ii) $X=\dfrac{1}{3}$일 때, $x^2+x=\dfrac{1}{3}$, 즉 $3x^2+3x-1=0$에서

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$

(i), (ii)에서 $x=\dfrac{-1\pm i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$

답 $x=\dfrac{-1\pm i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$

0665 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-6X+8=0,\quad (X-2)(\boxed{X-4})=0$

$\therefore X=2$ 또는 $X=\boxed{4}$

따라서 $x^2=2$ 또는 $x^2=\boxed{4}$이므로

$x=\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=\boxed{\pm2}$

$\therefore$ (가) $X-4$ (나) 4 (다) ±2 답 풀이 참조

0666 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-8X-9=0,\quad (X+1)(X-9)=0$

$\therefore X=-1$ 또는 $X=9$

따라서 $x^2=-1$ 또는 $x^2=9$이므로

$x=\pm i$ 또는 $x=\pm3$ 답 $x=\pm i$ 또는 $x=\pm3$

0667 $x^4-6x^2+1=0$에서 $(x^4-2x^2+1)-4x^2=0$

$(x^2-\boxed{1})^2-(\boxed{2}x)^2=0$

$(x^2+2x-1)(\boxed{x^2-2x-1})=0$

$\therefore x^2+2x-1=0$ 또는 $\boxed{x^2-2x-1}=0$

(i) $x^2+2x-1=0$에서 $x=-1\pm\sqrt{2}$

(ii) $x^2-2x-1=0$에서 $x=1\pm\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 $x=-1\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=\boxed{1\pm\sqrt{2}}$

$\therefore$ (가) 1 (나) 2 (다) x^2-2x-1 (라) $1\pm\sqrt{2}$ 답 풀이 참조

0668 $x^4+5x^2+9=0$에서 $(x^4+6x^2+9)-x^2=0$

$(x^2+3)^2-x^2=0$, $(x^2+x+3)(x^2-x+3)=0$

$\therefore x^2+x+3=0$ 또는 $x^2-x+3=0$

(i) $x^2+x+3=0$에서 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$

(ii) $x^2-x+3=0$에서 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$

(i), (ii)에서 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$

답 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$

0669 방정식 $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-2x-1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-1=0$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-\boxed{3}=0$ $\quad x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$

$x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2-2X-\boxed{3}=0$, $(X+1)(X-\boxed{3})=0$

$\therefore X=-1$ 또는 $X=\boxed{3}$

(i) $X=-1$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=-1$에서

$x^2+x+1=0$ $\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(ii) $X=\boxed{3}$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=3$에서

$x^2-3x+\boxed{1}=0$ $\therefore x=\boxed{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$

(i), (ii)에서 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\boxed{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$

$\therefore$ (가) 3 (나) 3 (다) 1 (라) $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ 답 풀이 참조

0670 방정식 $x^4+5x^3-4x^2+5x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+5x-4+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-4=0$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-6=0$

$x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+5X-6=0$, $(X+6)(X-1)=0$

$\therefore X=-6$ 또는 $X=1$

(i) $X=-6$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=-6$에서

$x^2+6x+1=0$ $\therefore x=-3\pm2\sqrt{2}$

(ii) $X=1$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=1$에서

$x^2-x+1=0$ $\therefore x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에서 $x=-3\pm2\sqrt{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

답 $x=-3\pm2\sqrt{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

0671 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=7$ 답 풀이 참조

0672 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=\dfrac{1}{2}$ 답 풀이 참조

0673 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{5}{3}$, $\alpha\beta\gamma=0$ 답 풀이 참조

0674 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=5$, $\alpha\beta\gamma=\dfrac{9}{2}$ 답 풀이 참조

0675 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(1) $\alpha+\beta+\gamma=5$

(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3$

(3) $\alpha\beta\gamma=-9$

(4) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{-3}{-9}=\dfrac{1}{3}$

답 (1) 5 (2) -3 (3) -9 (4) $\dfrac{1}{3}$

0676 x^3의 계수가 1이고 근이 1, 2, 4인 삼차방정식은

$x^3-(1+2+4)x^2+(1\cdot2+2\cdot4+4\cdot1)x-1\cdot2\cdot4=0$

$\therefore x^3-7x^2+14x-8=0$ 답 $x^3-7x^2+14x-8=0$

0677 x^3의 계수가 1이고 근이 -2, 3, 5인 삼차방정식은

$x^3-(-2+3+5)x^2+\{(-2)\cdot3+3\cdot5+5\cdot(-2)\}x$

$-(-2)\cdot3\cdot5=0$

$\therefore x^3-6x^2-x+30=0$ 답 $x^3-6x^2-x+30=0$

0678 x^3의 계수가 1이고 근이 -1, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$인 삼차방정식은

$x^3-\{-1+(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\}x^2$

$+\{(-1)\cdot(2+\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\cdot(-1)\}x$

$-(-1)\cdot(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=0$

$\therefore x^3-3x^2-3x+1=0$ 답 $x^3-3x^2-3x+1=0$

0679 x^3의 계수가 1이고 근이 3, $2i$, $-2i$인 삼차방정식은

$x^3-\{3+2i+(-2i)\}x^2+\{3\cdot2i+2i\cdot(-2i)+(-2i)\cdot3\}x$

$-3\cdot2i\cdot(-2i)=0$

$\therefore x^3-3x^2+4x-12=0$ 답 $x^3-3x^2+4x-12=0$

0680 x^3의 계수가 1이고 근이 2, $1+i$, $1-i$인 삼차방정식은

$x^3-\{2+(1+i)+(1-i)\}x^2$

$+\{2(1+i)+(1+i)(1-i)+(1-i)\cdot2\}x$

$-2(1+i)(1-i)=0$

$\therefore x^3-4x^2+6x-4=0$ 답 $x^3-4x^2+6x-4=0$

0681 a, b가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $1+\sqrt{3}$이므로 $1-\sqrt{3}$도 근이다.
따라서 주어진 방정식의 세 근이 -2, $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2(1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})\cdot(-2)=a$,
$-2(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=-b$
$\therefore a=-6,\ b=-4$ 　　답 $a=-6,\ b=-4$

0682 a, b가 실수이고 주어진 방정식의 한 근이 $1-i$이므로 $1+i$도 근이다.
따라서 주어진 방정식의 세 근이 1, $1+i$, $1-i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+(1+i)+(1-i)=a$,
$1\cdot(1+i)(1-i)=-b$
$\therefore a=3,\ b=-2$ 　　답 $a=3,\ b=-2$

0683 (1) a, b가 실수이고 주어진 방정식의 한 근이 $2+3i$이므로 $2-3i$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(2+3i)+(2-3i)=-1$　　$\therefore \alpha=-5$

따라서 나머지 두 근은 -5, $2-3i$이다.

(2) 주어진 방정식의 세 근이 -5, $2+3i$, $2-3i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-5(2+3i)+(2+3i)(2-3i)+(2-3i)\cdot(-5)=a$,
$-5(2+3i)(2-3i)=-b$
$\therefore a=-7,\ b=65$

답 (1) -5, $2-3i$　(2) $a=-7$, $b=65$

0684 $x^3=1$에서　$x^3-1=0$,　$(x-1)(x^2+x+1)=0$
ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로　$\omega^2+\omega+1=0$
$\therefore \omega^2+\omega=-1$ 　　답 -1

0685 $\omega^5+\omega^4+\omega^3=\omega^3(\omega^2+\omega+1)=1\cdot 0=0$ 　　답 0

0686 $\omega+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{\omega^2+1}{\omega}=\dfrac{-\omega}{\omega}=-1$ 　　답 -1

0687 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수 $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 허근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$
$\therefore \omega+\overline{\omega}+\omega\overline{\omega}=0$ 　　답 0

0688 $x^3=-1$에서　$x^3+1=0$,　$(x+1)(x^2-x+1)=0$
ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로　$\omega^2-\omega+1=0$
$\therefore \omega^2-\omega=-1$ 　　답 -1

0689 $\omega^5-\omega^4+\omega^3=\omega^3(\omega^2-\omega+1)=-1\cdot 0=0$ 　　답 0

0690 $\omega+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{\omega^2+1}{\omega}=\dfrac{\omega}{\omega}=1$ 　　답 1

0691 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 허근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$
$\therefore \omega+\overline{\omega}-\omega\overline{\omega}=0$ 　　답 0

0692 $x+y=1$에서　$y=1-x$ 　…… ㉠
㉠을 $x^2+y^2=5$에 대입하면
$x^2+(1-x)^2=5$,　$2x^2-2x-4=0$
$x^2-x-2=0$,　$(x+1)(x-2)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$
$x=-1$을 ㉠에 대입하면　$y=2$
$x=2$를 ㉠에 대입하면　$y=-1$
따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$ 　　답 $\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$

0693 $x-y=2$에서　$y=x-2$ 　…… ㉠
㉠을 $x^2+y^2=10$에 대입하면
$x^2+(x-2)^2=10$,　$2x^2-4x-6=0$
$x^2-2x-3=0$,　$(x+1)(x-3)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$
$x=-1$을 ㉠에 대입하면　$y=-3$
$x=3$을 ㉠에 대입하면　$y=1$
따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=-1\\y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$ 　　답 $\begin{cases}x=-1\\y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$

0694 $2x+y=3$에서　$y=3-2x$ 　…… ㉠
㉠을 $y^2-x^2=24$에 대입하면
$(3-2x)^2-x^2=24$,　$3x^2-12x-15=0$
$x^2-4x-5=0$,　$(x+1)(x-5)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$
$x=-1$을 ㉠에 대입하면　$y=5$
$x=5$를 ㉠에 대입하면　$y=-7$
따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=-1\\y=5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=5\\y=-7\end{cases}$ 　　답 $\begin{cases}x=-1\\y=5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=5\\y=-7\end{cases}$

0695 $x-y=6$에서　$y=x-6$ 　…… ㉠
㉠을 $x^2+xy+y^2=12$에 대입하면
$x^2+x(x-6)+(x-6)^2=12$,　$3x^2-18x+24=0$
$x^2-6x+8=0$,　$(x-2)(x-4)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=4$
$x=2$를 ㉠에 대입하면　$y=-4$
$x=4$를 ㉠에 대입하면　$y=-2$
따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=2\\y=-4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=4\\y=-2\end{cases}$ 　　답 $\begin{cases}x=2\\y=-4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=4\\y=-2\end{cases}$

0696 $x^2+xy-2y^2=0$에서　$(x+2y)(x-y)=0$
$\therefore x=-2y$ 또는 $x=y$

(ⅰ) $x=-2y$를 $2x^2+y^2=9$에 대입하면

$8y^2+y^2=9,\quad 9y^2=9,\quad y^2=1$

$\therefore y=\pm1,\ x=\mp2$ (복호동순)

(ⅱ) $x=y$를 $2x^2+y^2=9$에 대입하면

$2y^2+y^2=9,\quad 3y^2=9,\quad y^2=3$

$\therefore y=\pm\sqrt{3},\ x=\pm\sqrt{3}$ (복호동순)

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\\y=\sqrt{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-\sqrt{3}\\y=-\sqrt{3}\end{cases}$

답 풀이 참조

0697 $x^2-2xy-3y^2=0$에서 $\quad(x+y)(x-3y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=3y$

(ⅰ) $x=-y$를 $x^2-xy=18$에 대입하면

$y^2+y^2=18,\quad 2y^2=18,\quad y^2=9$

$\therefore y=\pm3,\ x=\mp3$ (복호동순)

(ⅱ) $x=3y$를 $x^2-xy=18$에 대입하면

$9y^2-3y^2=18,\quad 6y^2=18,\quad y^2=3$

$\therefore y=\pm\sqrt{3},\ x=\pm3\sqrt{3}$ (복호동순)

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=-3\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\sqrt{3}\\y=\sqrt{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-3\sqrt{3}\\y=-\sqrt{3}\end{cases}$

답 풀이 참조

0698 x, y는 이차방정식 $t^2-4t-12=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t-6)=0\quad \therefore t=-2$ 또는 $t=6$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=-2\\y=6\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=6\\y=-2\end{cases}$

답 $\begin{cases}x=-2\\y=6\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=6\\y=-2\end{cases}$

0699 $x-xy+y=1$에서 $x+y=-2$이므로

$xy=-3$

즉 x, y는 이차방정식 $t^2+2t-3=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t-1)=0\quad \therefore t=-3$ 또는 $t=1$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=-3\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=-3\end{cases}$

답 $\begin{cases}x=-3\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=-3\end{cases}$

0700 $x^3-x^2-4x+4=0$에서

$x^2(x-1)-4(x-1)=0,\quad (x-1)(x^2-4)=0$

$(x-1)(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 가장 큰 근은 2, 가장 작은 근은 -2이므로

$\alpha=2,\ \beta=-2\quad \therefore \alpha-\beta=4$

답 4

0701 $P(x)=x^3+x^2+2x-4$로 놓으면

$P(1)=1+1+2-4=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & 2 & -4 \\ & & 1 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2+2x+4)$

즉 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

따라서 $\alpha=1,\ \beta=-1,\ \gamma=3$이므로

$\alpha+\beta+\gamma=3$

답 3

라쎈 특강 인수정리

다항식 $P(x)$에 대하여 $P(\alpha)=0$이면 $P(x)$는 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

0702 $P(x)=x^4-3x^3-x^2+5x+2$로 놓으면

$P(-1)=1+3-1-5+2=0$,

$P(2)=16-24-4+10+2=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -3 & -1 & 5 & 2 \\ & & -1 & 4 & -3 & -2 \\ \hline 2 & 1 & -4 & 3 & 2 & \boxed{0} \\ & & 2 & -4 & -2 & \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x-2)(x^2-2x-1)$ ⋯ ❶

따라서 방정식 $P(x)=0$의 근은

$x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

이므로 모든 실근의 합은

$-1+2+(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=3$ ⋯ ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ 인수정리와 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해할 수 있다.	60%
❷ 주어진 방정식의 모든 실근의 합을 구할 수 있다.	40%

0703 $P(x)=x^4-4x+3$으로 놓으면

$P(1)=1-4+3=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ & & 1 & 1 & 1 & -3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & \boxed{0} \\ & & 1 & 2 & 3 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)^2(x^2+2x+3)$

이때 방정식 $P(x)=0$의 두 허근 α, β는 방정식 $x^2+2x+3=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=3$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-2)^3-3\cdot3\cdot(-2)=10$

답 ⑤

0704 $x^2-2x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+X-12=0,\quad (X+4)(X-3)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=3$

(ⅰ) $X=-4$일 때, $x^2-2x+4=0$에서

$x=1\pm\sqrt{3}i$

(ⅱ) $X=3$일 때, $x^2-2x-3=0$에서

$(x+1)(x-3)=0\quad \therefore x=-1$ 또는 $x=3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\quad x=1\pm\sqrt{3}i$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 주어진 방정식의 근인 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0705 $x^2+3x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X+1)(X-3)=5, \qquad X^2-2X-8=0$

$(X+2)(X-4)=0$

$\therefore X=-2$ 또는 $X=4$

(i) $X=-2$일 때, $x^2+3x+2=0$에서

$(x+2)(x+1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$

(ii) $X=4$일 때, $x^2+3x-4=0$에서

$(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서 $x=-4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

$\therefore |\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|$

$=|-4|+|-2|+|-1|+|1|=8$

답 ⑤

0706 $x^2+4x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X+2)^2-2X-19=0, \qquad X^2+2X-15=0$

$(X+5)(X-3)=0$

$\therefore X=-5$ 또는 $X=3$

(i) $X=-5$일 때,

$x^2+4x+5=0$이므로 이 방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=2^2-1\cdot5=-1<0$

즉 방정식 $x^2+4x+5=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=3$일 때,

$x^2+4x-3=0$이므로 이 방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=2^2-1\cdot(-3)=7>0$

즉 방정식 $x^2+4x-3=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근은 방정식 $x^2+4x-3=0$의 근이고, 두 허근은 방정식 $x^2+4x+5=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=-4, b=5 \qquad \therefore a-b=-9$

답 -9

0707 $x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$에서

$\{x(x+6)\}\{(x+2)(x+4)\}+15=0$

$(x^2+6x)(x^2+6x+8)+15=0$

$x^2+6x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X(X+8)+15=0, \qquad X^2+8X+15=0$

$(X+5)(X+3)=0$

$\therefore X=-5$ 또는 $X=-3$

(i) $X=-5$일 때, $x^2+6x+5=0$에서

$(x+5)(x+1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=-1$

(ii) $X=-3$일 때, $x^2+6x+3=0$에서

$x=-3\pm\sqrt{6}$

(i), (ii)에서 α, β의 값은 -5, -1이므로

$\alpha^2+\beta^2=(-5)^2+(-1)^2=26$

답 ④

0708 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+3X-4=0, \qquad (X+4)(X-1)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=1$

즉 $x^2=-4$ 또는 $x^2=1$이므로

$x=\pm2i$ 또는 $x=\pm1$

따라서 주어진 방정식의 실근은 1, -1이므로 두 실근의 곱은 -1이다.

답 -1

0709 $x^4-x^2+16=0$에서

$(x^4+8x^2+16)-9x^2=0, \qquad (x^2+4)^2-(3x)^2=0$

$(x^2+3x+4)(x^2-3x+4)=0$

방정식 $x^2+3x+4=0$의 두 근을 α, $\overline{\alpha}$, 방정식 $x^2-3x+4=0$의 두 근을 β, $\overline{\beta}$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\overline{\alpha}=4, \beta\overline{\beta}=4$

$\therefore \alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}=8$

답 ⑤

0710 $x^4+6x^2+25=0$에서

$(x^4+10x^2+25)-4x^2=0, \qquad (x^2+5)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x+5)(x^2-2x+5)=0$

방정식 $x^2+2x+5=0$의 두 근을 α, β, 방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=5, \gamma+\delta=2, \gamma\delta=5$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta$

$=(-2)^2-2\cdot5+2^2-2\cdot5=-12$

답 -12

0711 방정식 $x^4+5x^3+6x^2+5x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+5x+6+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0, \qquad x^2+\frac{1}{x^2}+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+5X+4=0, \qquad (X+4)(X+1)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=-1$

(i) $X=-4$일 때, $x+\frac{1}{x}=-4$에서

$x^2+4x+1=0 \qquad \therefore x=-2\pm\sqrt{3}$

(ii) $X=-1$일 때, $x+\frac{1}{x}=-1$에서

$x^2+x+1=0 \qquad \therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근의 합은 -4이다.

답 ③

0712 방정식 $x^4-4x^3+2x^2-4x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-4x+2-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0, \qquad x^2+\frac{1}{x^2}-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2-4X=0, \qquad X(X-4)=0$

$\therefore X=0$ 또는 $X=4$

(i) $X=0$일 때, $x+\frac{1}{x}=0$에서

$x^2+1=0, \qquad x^2=-1 \qquad \therefore x=\pm i$

(ii) $X=4$일 때, $x+\frac{1}{x}=4$에서

$x^2-4x+1=0 \qquad \therefore x=2\pm\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근의 합은 4, 두 허근의 곱은 1이므로 $a=4$, $b=1$

$\therefore a+b=5$

답 5

0713 방정식 $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0,\qquad x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$$X^2+2X-3=0,\qquad (X+3)(X-1)=0$$

$$\therefore\ X=-3 \text{ 또는 } X=1$$

(i) $X=-3$일 때, $x+\frac{1}{x}=-3$에서

$$x^2+3x+1=0$$

이 방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=3^2-4\cdot1\cdot1=5>0$$

즉 방정식 $x^2+3x+1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $X=1$일 때, $x+\frac{1}{x}=1$에서

$$x^2-x+1=0$$

이 방정식의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$$

즉 방정식 $x^2-x+1=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 α는 방정식 $x^2+3x+1=0$의 한 실근이므로

$$\alpha^2+3\alpha+1=0$$

양변을 $\alpha(\alpha\neq0)$로 나누면

$$\alpha+3+\frac{1}{\alpha}=0\qquad \therefore\ \alpha+\frac{1}{\alpha}=-3$$

답 -3

0714 $2x^3+kx^2+(k-2)x+2=0$의 한 근이 1이므로

$$2+k+(k-2)+2=0$$

$$2+2k=0\qquad \therefore\ k=-1$$

따라서 주어진 방정식은

$$2x^3-x^2-3x+2=0$$

$P(x)=2x^3-x^2-3x+2$로 놓으면 $P(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ & & 2 & 1 & -2 \\ \hline & 2 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$P(x)=(x-1)(2x^2+x-2)$$

즉 주어진 방정식은 $(x-1)(2x^2+x-2)=0$

이때 α, β는 이차방정식 $2x^2+x-2=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{1}{2}$$

답 ④

0715 $x^3+ax^2+bx+10=0$의 한 근이 $\sqrt{2}$이므로

$$(\sqrt{2})^3+a(\sqrt{2})^2+b\sqrt{2}+10=0$$

$$2\sqrt{2}+2a+b\sqrt{2}+10=0$$

$$(2a+10)+(2+b)\sqrt{2}=0$$

a, b가 유리수이므로 $2a+10=0$, $2+b=0$

따라서 $a=-5$, $b=-2$이므로

$$a+b=-7$$

답 -7

라쎈 특강

a, b가 유리수이고 $\sqrt{m}$이 무리수일 때,

$a+b\sqrt{m}=0$ ⇨ $a=0$, $b=0$

0716 방정식 $3x^3-ax^2+x+b=0$의 두 근이 -1, 2이므로

$-3-a-1+b=0$에서 $a-b=-4$ …… ㉠

$24-4a+2+b=0$에서 $4a-b=26$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=10$, $b=14$

따라서 주어진 방정식은 $3x^3-10x^2+x+14=0$이고, 이 방정식의 두 근이 -1, 2이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & -10 & 1 & 14 \\ & & -3 & 13 & -14 \\ \hline 2 & 3 & -13 & 14 & \boxed{0} \\ & & 6 & -14 & \\ \hline & 3 & -7 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$\therefore\ (x+1)(x-2)(3x-7)=0$$

따라서 나머지 한 근은 $\frac{7}{3}$이므로 $\alpha=\frac{7}{3}$

$$\therefore\ \frac{ab}{\alpha}=10\cdot14\cdot\frac{3}{7}=60$$

답 ③

0717 방정식 $x^4+ax^3+5x^2-ax+b=0$의 두 근이 2, 3이므로

$16+8a+20-2a+b=0$에서 $6a+b=-36$ …… ㉠

$81+27a+45-3a+b=0$에서 $24a+b=-126$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=-6$ ⋯ ❶

따라서 주어진 방정식은 $x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0$이고, 이 방정식의 두 근이 2, 3이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -5 & 5 & 5 & -6 \\ & & 2 & -6 & -2 & 6 \\ \hline 3 & 1 & -3 & -1 & 3 & \boxed{0} \\ & & 3 & 0 & -3 & \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$\therefore\ (x-2)(x-3)(x^2-1)=0$$ ⋯ ❷

따라서 주어진 방정식의 나머지 두 근은 방정식 $x^2-1=0$의 근이므로 $x=-1$ 또는 $x=1$ ⋯ ❸

답 -1, 1

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ 주어진 방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	40%
❸ 나머지 두 근을 구할 수 있다.	20%

0718 $P(x)=x^3-3x^2+(k-4)x+k$로 놓으면

$$P(-1)=-1-3-(k-4)+k=0$$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & k-4 & k \\ & & -1 & 4 & -k \\ \hline & 1 & -4 & k & \boxed{0} \end{array}$$

$$\therefore\ P(x)=(x+1)(x^2-4x+k)$$

이때 방정식 $P(x)=0$의 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식 $x^2-4x+k=0$이 실근을 가져야 하므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-k\geq0\qquad \therefore\ k\leq4$$

답 ④

0719 $x^3+x^2+kx+k=0$에서

$$x^2(x+1)+k(x+1)=0, \qquad (x^2+k)(x+1)=0$$

이때 주어진 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+k=0$이 두 개의 허근을 가져야 하므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=0^2-4\cdot1\cdot k<0 \qquad \therefore k>0$$

따라서 정수 k의 최솟값은 1이다. 답 1

0720 $P(x)=x^3-(1+3k)x+3k$로 놓으면

$$P(1)=1-(1+3k)+3k=0$$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -(1+3k) & 3k \\ & & 1 & 1 & -3k \\ \hline & 1 & 1 & -3k & \boxed{0} \end{array}$$

$$\therefore P(x)=(x-1)(x^2+x-3k)$$

이때 방정식 $P(x)=0$이 중근을 가지려면

(ⅰ) 방정식 $x^2+x-3k=0$이 $x=1$을 근으로 가질 때,

$$1+1-3k=0 \qquad \therefore k=\frac{2}{3}$$

(ⅱ) 방정식 $x^2+x-3k=0$이 중근을 가질 때,

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=1^2-4\cdot1\cdot(-3k)=0 \qquad \therefore k=-\frac{1}{12}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 k의 값의 합은

$$\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{12}\right)=\frac{7}{12}$$

답 ④

0721 방정식 $(x-2)(x^2-4kx+3k+1)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

(ⅰ) 방정식 $x^2-4kx+3k+1=0$이 $x=2$를 근으로 가질 때,

$$4-8k+3k+1=0 \qquad \therefore k=1$$

그런데 $k=1$이면 주어진 방정식은 $(x-2)(x^2-4x+4)=0$, 즉 $(x-2)^3=0$이므로 이 방정식의 서로 다른 실근은 1개이다.

(ⅱ) 방정식 $x^2-4kx+3k+1=0$이 중근을 가질 때,

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2k)^2-(3k+1)=0$$

$$4k^2-3k-1=0, \qquad (4k+1)(k-1)=0$$

$$\therefore k=-\frac{1}{4} \text{ 또는 } k=1$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\quad k=-\frac{1}{4}$ 답 ②

0722 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라 하면

$$(x+1)(x+2)\cdot\frac{1}{2}x=\frac{3}{2}x^3$$

$$2x^3-3x^2-2x=0, \qquad x(2x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x=2$ 길이는 양수이어야 한다.

따라서 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는 2 cm이다. 답 ①

0723 $\pi\cdot3^2\cdot12=\pi\cdot r^2\cdot(r-3)$이므로

$$r^3-3r^2-108=0 \quad \cdots ❶$$

$P(r)=r^3-3r^2-108$로 놓으면

$$P(6)=216-108-108=0$$

조립제법을 이용하여 $P(r)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 6 & 1 & -3 & 0 & -108 \\ & & 6 & 18 & 108 \\ \hline & 1 & 3 & 18 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\therefore P(r)=(r-6)(r^2+3r+18)$$

따라서 방정식은

$$(r-6)(r^2+3r+18)=0$$

$$\therefore \underbrace{r=6}_{r>3}\ (\because r^2+3r+18>0) \quad \cdots ❷$$

답 6

채점 기준	비율
❶ r에 대한 삼차방정식을 세울 수 있다.	40%
❷ r의 값을 구할 수 있다.	60%

0724 처음 3개의 구의 반지름의 길이를 각각 $(x-1)$cm, x cm, $(x+1)$cm라 하면 새로 만든 구의 반지름의 길이는 $(x+2)$cm이므로

$$\frac{4}{3}\pi(x-1)^3+\frac{4}{3}\pi x^3+\frac{4}{3}\pi(x+1)^3=\frac{4}{3}\pi(x+2)^3$$

$$(x-1)^3+x^3+(x+1)^3=(x+2)^3$$

$$\therefore x^3-3x^2-3x-4=0$$

$P(x)=x^3-3x^2-3x-4$로 놓으면

$$P(4)=64-48-12-4=0$$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & -3 & -3 & -4 \\ & & 4 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$P(x)=(x-4)(x^2+x+1)$$

따라서 방정식은

$$(x-4)(x^2+x+1)=0$$

$$\therefore \underbrace{x=4}_{x>1}\ (\because x^2+x+1>0)$$

따라서 새로 만든 구의 반지름의 길이는 $4+2=6$(cm)이다. 답 ③

0725 $\overline{PA}^2=\overline{PB}\cdot\overline{PC}$이므로

$$(2\sqrt{6}x)^2=(x^2-x+4)\{(x^2-x+4)+2x\}$$

$$24x^2=(x^2+4-x)(x^2+4+x)$$

$$24x^2=(x^2+4)^2-x^2, \qquad x^4-17x^2+16=0$$

$x^2=X$로 놓으면

$$X^2-17X+16=0, \qquad (X-1)(X-16)=0$$

$$\therefore X=1 \text{ 또는 } X=16$$

즉 $x^2=1$ 또는 $x^2=16$이므로

$$x=\pm1 \text{ 또는 } x=\pm4$$

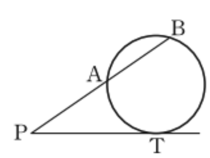
그런데 $x>0$이므로 $\quad x=1$ 또는 $x=4$

따라서 모든 x의 값의 곱은 4이다. 답 ③

라쎈 특강 원의 접선과 할선의 비례 관계

원 밖의 한 점 P에서 이 원에 그은 접선과 할선이 원과 만나는 점을 각각 T, A, B라 하면

$$\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$$



0726 삼차방정식 $x^3+2x^2-5x+3=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-5$, $\alpha\beta\gamma=-3$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$
$=(-2)^2-2\cdot(-5)=14$

답 ④

0727 삼차방정식 $x^3+3x-5=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=5$ ⋯ ❶

$\therefore (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$
$=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
$=1-0+3-5=-1$ ⋯ ❷

답 -1

채점 기준	비율
❶ 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.	50%
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	50%

0728 삼차방정식 $x^3-x^2+4x-6=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=6$

$\therefore \frac{3}{\alpha}+\frac{3}{\beta}+\frac{3}{\gamma}=\frac{3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma}=\frac{3\cdot4}{6}=2$

답 2

0729 삼차방정식 $x^3-ax^2+8x+5=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=8$, $\alpha\beta\gamma=-5$

$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=2$에서 $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=2$

$\frac{a}{-5}=2$ $\therefore a=-10$

답 -10

0730 삼차방정식 $x^3-3x^2+bx-4=0$의 세 근을 α, β, γ라 하고, α, β가 이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 두 근이라 하면 삼차방정식과 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha+\beta=2$

이므로 $\gamma=1$

또 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=4$, $\alpha\beta=a$이므로

$a+2=b$, $a=4$ $\therefore a=4$, $b=6$

$\therefore a+b=10$

답 10

0731 주어진 삼차방정식의 세 근을 α, 2α, $3\alpha(\alpha\neq0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha+3\alpha=12$, $6\alpha=12$ $\therefore \alpha=2$

따라서 세 근이 2, 4, 6이므로

$2\cdot4+4\cdot6+6\cdot2=a$, $2\cdot4\cdot6=-b$ $\therefore a=44$, $b=-48$

$\therefore a+b=-4$

답 ④

0732 주어진 삼차방정식의 세 근을 $\alpha-1$, α, $\alpha+1$(α는 정수)이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha-1)+\alpha+(\alpha+1)=3$, $3\alpha=3$ $\therefore \alpha=1$ ⋯ ❶

따라서 세 근이 0, 1, 2이므로

$0\cdot1+1\cdot2+2\cdot0=a$, $0\cdot1\cdot2=-b$ $\therefore a=2$, $b=0$ ⋯ ❷

$\therefore a-b=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 세 근을 $\alpha-1$, α, $\alpha+1$이라 하고 α의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10%

0733 주어진 삼차방정식의 세 근을 α, $-\alpha$, $\beta(\alpha>0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-\alpha)+\beta=1$, $\alpha\cdot(-\alpha)\cdot\beta=-16$

$\therefore \alpha=4$, $\beta=1$

따라서 세 근이 -4, 1, 4이므로

$k=-4\cdot1+1\cdot4+4\cdot(-4)=-16$

답 ③

0734 삼차방정식 $x^3-3x^2+2x+1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=-1$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{2}{-1}=-2$,

$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{3}{-1}=-3$,

$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3+2x^2-3x+1=0$

답 ④

0735 삼차방정식 $x^3-2x+1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$, $\alpha\beta\gamma=-1$ ⋯ ❶

$\therefore (\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=\alpha+\beta+\gamma+3=3$,

$(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)$
$=\alpha\beta+\alpha+\beta+1+\beta\gamma+\beta+\gamma+1+\gamma\alpha+\gamma+\alpha+1$
$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2(\alpha+\beta+\gamma)+3$
$=-2+2\cdot0+3=1$,

$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$
$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$
$=-1+(-2)+0+1=-2$ ⋯ ❷

따라서 $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-3x^2+x+2=0$ ⋯ ❸

답 $x^3-3x^2+x+2=0$

채점 기준	비율
❶ 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.	40%
❷ $(\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)$, $(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)$, $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구할 수 있다.	20%

0736 삼차방정식 $2x^3-5x^2+4x+4=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{5}{2},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\ \alpha\beta\gamma=-2$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta&=\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2+\alpha^2\beta\gamma\\&=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\\&=-2\cdot\frac{5}{2}=-5,\end{aligned}$$

$$\alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha=(\alpha\beta\gamma)^2=(-2)^2=4$$

따라서 $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3-2x^2-5x-4=0$

답 $x^3-2x^2-5x-4=0$

0737 $P(1)-1=P(2)-1=P(3)-1=0$이므로 삼차방정식 $P(x)-1=0$의 세 근이 1, 2, 3이다. ⋯ ❶

1, 2, 3을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3-(1+2+3)x^2+(1\cdot2+2\cdot3+3\cdot1)x-1\cdot2\cdot3=0$$

$$\therefore\ x^3-6x^2+11x-6=0$$ ⋯ ❷

즉 $P(x)-1=x^3-6x^2+11x-6$이므로

$$P(x)=x^3-6x^2+11x-5$$ ⋯ ❸

따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 방정식 $P(x)=0$의 모든 근의 곱은 5이다. ⋯ ❹

답 5

채점 기준	비율
❶ $P(1)=P(2)=P(3)=1$에서 방정식 $P(x)-1=0$의 세 근을 구할 수 있다.	30%
❷ 1, 2, 3을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ $P(x)$를 구할 수 있다.	20%
❹ 방정식 $P(x)=0$의 모든 근의 곱을 구할 수 있다.	20%

0738 a, b가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 $1+\sqrt{2}$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=-a \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\alpha(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+\alpha(1-\sqrt{2})=b \quad \cdots\cdots ㉡$$

$$\alpha(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-2 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉢에서 $\alpha=2$

$\alpha=2$를 ㉠, ㉡에 대입하면 $a=-4$, $b=3$

$$\therefore\ ab=-12$$

답 -12

참고 주어진 방정식에 $x=1-\sqrt{2}$를 대입한 후, 무리수가 서로 같을 조건을 이용하여 유리수 a, b의 값을 구할 수도 있다.

0739 a가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $3+2\sqrt{2}$이므로 $3-2\sqrt{2}$도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 세 근이 α, $3+2\sqrt{2}$, $3-2\sqrt{2}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=a,$$

$$\alpha(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=-2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=4,\ \alpha=-2$$

$$\therefore\ a\alpha=-8$$

답 -8

0740 $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 실수)라 하면 a, b, c가 실수이고 방정식의 한 근이 $2+i$이므로 $2-i$도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 세 근이 -1, $2+i$, $2-i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1+(2+i)+(2-i)=-a,$$

$$-1\cdot(2+i)+(2+i)(2-i)+(2-i)\cdot(-1)=b,$$

$$-1\cdot(2+i)(2-i)=-c$$

$$\therefore\ a=-3,\ b=1,\ c=5$$

따라서 $P(x)=x^3-3x^2+x+5$이므로

$$P(1)=1-3+1+5=4$$

답 ①

0741 a, b, c, d가 실수이고 주어진 방정식의 두 근이 i, $1-i$이므로 다른 두 근은 $-i$, $1+i$이다.

이때 i, $-i$, $1-i$, $1+i$를 근으로 하는 사차방정식은

$$(x-i)(x+i)\{x-(1-i)\}\{x-(1+i)\}=0$$

$$(x-i)(x+i)\{(x-1)+i\}\{(x-1)-i\}=0$$

$$(x^2-i^2)\{(x-1)^2-i^2\}=0$$

$$(x^2+1)(x^2-2x+2)=0$$

$$\therefore\ x^4-2x^3+3x^2-2x+2=0$$

따라서 $a=-2$, $b=3$, $c=-2$, $d=2$이므로

$$a+b+c+d=1$$

답 ④

0742 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.

따라서 $\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$이므로

$$\frac{\omega^{10}+1}{\omega^2}=\frac{(\omega^3)^3\cdot\omega+1}{\omega^2}=\frac{\omega+1}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$$

답 -1

0743 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 허근이다. 즉

$$\omega^2+\omega+1=0,\ \omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$$

$\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega^2=-\omega-1$이고, $\omega+\overline{\omega}=-1$에서 $\overline{\omega}=-\omega-1$이므로 $\omega^2=\overline{\omega}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ③

0744 $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, 즉 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이다.

따라서 $\omega^2-\omega+1=0$이므로

$$\frac{\omega^2}{1-\omega}+\frac{\omega}{1+\omega^2}=\frac{\omega^2}{-\omega^2}+\frac{\omega}{\omega}=0$$

답 ③

0745 $x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 허근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$$

$$\begin{aligned}\therefore\ (2\omega+1)(2\overline{\omega}+1)&=4\omega\overline{\omega}+2(\omega+\overline{\omega})+1\\&=4\cdot1+2\cdot1+1=7\end{aligned}$$

답 ③

0746 $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, 즉 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이다.
따라서 $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$이므로 ⋯ ❶

$$\begin{aligned}&\omega^6+\omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1\\&=(\omega^3)^2+\omega^3\cdot\omega^2+\omega^3\cdot\omega+\omega^3+\omega^2+\omega+1\\&=1-\omega^2-\omega-1+\omega^2+\omega+1=1\end{aligned}$$ ⋯ ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$임을 알 수 있다.	50%
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	50%

0747 $\begin{cases}x-y=1 & \cdots\cdots ㉠\\(x-1)^2+y^2=8 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=x-1$ ⋯⋯ ㉢
㉢을 ㉡에 대입하면
$y^2+y^2=8$, $y^2=4$ $\therefore y=\pm2$
이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는
$x=3$, $y=2$ 또는 $x=-1$, $y=-2$
따라서 $\underbrace{\alpha=3,\ \beta=2}_{\alpha>0,\ \beta>0}$이므로 $\alpha+\beta=5$

답 ③

0748 $\begin{cases}y=x+1 & \cdots\cdots ㉠\\x^2+y^2=13 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면
$x^2+(x+1)^2=13$, $x^2+x-6=0$
$(x+3)(x-2)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=2$
이것을 ㉠에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는
$x=-3$, $y=-2$ 또는 $x=2$, $y=3$
따라서 $\alpha=-3$, $\beta=-2$ 또는 $\alpha=2$, $\beta=3$이므로
$\alpha\beta=6$

답 ②

0749 $\begin{cases}x-y=-2 & \cdots\cdots ㉠\\x^2-xy+2y^2=4 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=x+2$ ⋯⋯ ㉢
㉢을 ㉡에 대입하면
$x^2-x(x+2)+2(x+2)^2=4$, $x^2+3x+2=0$
$(x+2)(x+1)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$ ⋯ ❶
이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는
$x=-2$, $y=0$ 또는 $x=-1$, $y=1$ ⋯ ❷
$\therefore |x|+|y|=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ x의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ 주어진 연립방정식의 해를 구할 수 있다.	30%
❸ $\|x\|+\|y\|$의 값을 구할 수 있다.	20%

0750 두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식
$\begin{cases}x+y=2 & \cdots ㉠\\x^2-4y^2=-3 & \cdots ㉡\end{cases}$의 해와 같다.

㉠에서 $y=-x+2$ ⋯⋯ ㉢
㉢을 ㉡에 대입하면
$x^2-4(-x+2)^2=-3$, $3x^2-16x+13=0$
$(x-1)(3x-13)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=\frac{13}{3}$
이것을 ㉢에 대입하면 앞의 연립방정식의 해는
$x=1$, $y=1$ 또는 $x=\frac{13}{3}$, $y=-\frac{7}{3}$
(i) $x=1$, $y=1$을 $x^2+ay^2=7$, $3x-by=1$에 대입하면
$a=6$, $b=2$
(ii) $x=\frac{13}{3}$, $y=-\frac{7}{3}$을 $x^2+ay^2=7$, $3x-by=1$에 대입하면
$a=-\frac{106}{49}$, $b=-\frac{36}{7}$
(i), (ii)에서 a, b는 자연수이므로 $a=6$, $b=2$
$\therefore ab=12$

답 12

0751 $\begin{cases}x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠\\x^2+xy+2y^2=4 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $(x+y)(x-y)=0$
$\therefore y=-x$ 또는 $y=x$
(i) $y=-x$를 ㉡에 대입하면
$x^2-x^2+2x^2=4$, $x^2=2$
$\therefore x=\pm\sqrt{2}$, $y=\mp\sqrt{2}$ (복호동순)
(ii) $y=x$를 ㉡에 대입하면
$x^2+x^2+2x^2=4$, $x^2=1$
$\therefore x=\pm1$, $y=\pm1$ (복호동순)
(i), (ii)에서 $\alpha+\beta$는 $\alpha=-1$, $\beta=-1$일 때 최소이므로 구하는 최솟값은 $-1+(-1)=-2$

답 -2

0752 $\begin{cases}4x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠\\2x^2-xy+y^2=16 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $(2x+y)(2x-y)=0$
$\therefore y=-2x$ 또는 $y=2x$
(i) $y=-2x$를 ㉡에 대입하면
$2x^2+2x^2+4x^2=16$, $x^2=2$
$\therefore x=\pm\sqrt{2}$, $y=\mp2\sqrt{2}$ (복호동순)
(ii) $y=2x$를 ㉡에 대입하면
$2x^2-2x^2+4x^2=16$, $x^2=4$
$\therefore x=\pm2$, $y=\pm4$ (복호동순)
(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)는
$(\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $(2, 4)$, $(-2, -4)$

답 $(\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $(2, 4)$, $(-2, -4)$

0753 $\begin{cases}x^2+xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠\\x^2+xy+y^2=3 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $(x+2y)(x-y)=0$
$\therefore x=-2y$ 또는 $x=y$
(i) $x=-2y$를 ㉡에 대입하면
$4y^2-2y^2+y^2=3$, $y^2=1$
$\therefore y=\pm1$, $x=\mp2$ (복호동순)

(ii) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+y^2+y^2=3, \qquad y^2=1$

$\therefore y=\pm1,\ x=\pm1$ (복호동순)

(i), (ii)에서 $\alpha\beta$의 값은 -2, 1이다. 　　답 -2, 1

0754 $\begin{cases} x^2-y^2+x+y=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+2y^2=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad (x+y)(x-y)+(x+y)=0$

$(x+y)(x-y+1)=0 \qquad \therefore y=-x$ 또는 $y=x+1$

(i) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2+2x^2=1, \qquad x^2=\dfrac{1}{4}$

$\therefore x=\pm\dfrac{1}{2},\ y=\mp\dfrac{1}{2}$ (복호동순)

(ii) $y=x+1$을 ㉡에 대입하면

$x^2-x(x+1)+2(x+1)^2=1, \qquad 2x^2+3x+1=0$

$(x+1)(2x+1)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

(i), (ii)에서 x, y는 정수이므로 $\quad x=-1,\ y=0$

$\therefore x^2+y^2=1$ 　　답 ①

0755 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u^2-2v=34 & \cdots\cdots ㉠ \\ v=15 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

㉡을 ㉠에 대입하면

$u^2-30=34, \qquad u^2=64 \qquad \therefore u=\pm8$

(i) $u=8$, $v=15$, 즉 $x+y=8$, $xy=15$일 때 x, y는 이차방정식 $t^2-8t+15=0$의 두 근이므로

$(t-3)(t-5)=0 \qquad \therefore t=3$ 또는 $t=5$

$\therefore \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$

(ii) $u=-8$, $v=15$, 즉 $x+y=-8$, $xy=15$일 때 x, y는 이차방정식 $t^2+8t+15=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t+5)=0 \qquad \therefore t=-3$ 또는 $t=-5$

$\therefore \begin{cases} x=-3 \\ y=-5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-3 \end{cases}$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)는

$(-5, -3), (-3, -5), (3, 5), (5, 3)$

답 $(-5, -3), (-3, -5), (3, 5), (5, 3)$

0756 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u-v=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-4v=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ $x^2-2xy+y^2=(x+y)^2-4xy$

㉠에서 $\quad v=u+1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$u^2-4u-5=0, \qquad (u+1)(u-5)=0$

$\therefore u=-1$ 또는 $u=5$

이것을 ㉢에 대입하면

$u=-1,\ v=0$ 또는 $u=5,\ v=6$

(i) $u=-1$, $v=0$, 즉 $x+y=-1$, $xy=0$일 때 x, y는 이차방정식 $t^2+t=0$의 두 근이므로

$t(t+1)=0 \qquad \therefore t=0$ 또는 $t=-1$

$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$

(ii) $u=5$, $v=6$, 즉 $x+y=5$, $xy=6$일 때 x, y는 이차방정식 $t^2-5t+6=0$의 두 근이므로

$(t-2)(t-3)=0 \qquad \therefore t=2$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

(i), (ii)에서 x^2-y^2은 $x=3$, $y=2$일 때 최대이므로 구하는 최댓값은 $\quad 3^2-2^2=5$ 　　답 ⑤

0757 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u^2+u-2v=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-v=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $\quad v=u^2-1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하여 정리하면

$u^2-u=0, \qquad u(u-1)=0$

$\therefore u=0$ 또는 $u=1$

이것을 ㉢에 대입하면

$u=0,\ v=-1$ 또는 $u=1,\ v=0$

(i) $u=0$, $v=-1$, 즉 $x+y=0$, $xy=-1$일 때 x, y는 이차방정식 $t^2-1=0$의 두 근이므로

$(t+1)(t-1)=0 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

(ii) $u=1$, $v=0$, 즉 $x+y=1$, $xy=0$일 때 x, y는 이차방정식 $t^2-t=0$의 두 근이므로

$t(t-1)=0 \qquad \therefore t=0$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

(i), (ii)에서 $2x+y$는 $x=-1$, $y=1$일 때 최소이므로 구하는 최솟값은 $\quad 2\cdot(-1)+1=-1$ 　　답 ③

0758 $\begin{cases} x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $\quad y=-x+k$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad x^2+(-x+k)^2=10$

$\therefore 2x^2-2kx+k^2-10=0$

이를 만족시키는 x의 값이 오직 한 개 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-2(k^2-10)=0$

$k^2-2k^2+20=0, \qquad k^2=20 \qquad \therefore k=\pm2\sqrt{5}$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$2\sqrt{5}\cdot(-2\sqrt{5})=-20$ 　　답 ②

0759 $\begin{cases} x+y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy+x+y=3-k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$xy+3=3-k \qquad \therefore xy=-k \quad \cdots\cdots ㉢$ ⋯➊

㉠, ㉢을 만족시키는 실수 x, y는 이차방정식 $t^2-3t-k=0$의 두 실근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot(-k)\geq 0 \quad \therefore k\geq -\frac{9}{4}$ ⋯ ❷

따라서 실수 k의 최솟값은 $-\frac{9}{4}$이다. ⋯ ❸

답 $-\frac{9}{4}$

채점 기준	비율
❶ ㉠을 ㉡에 대입하여 ㉢을 구할 수 있다.	30%
❷ x, y를 근으로 하는 이차방정식의 판별식을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ k의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

0760 주어진 연립방정식을 만족시키는 실수 x, y는 이차방정식 $t^2-(2a-1)t+a^2+a-4=0$의 두 실근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2a-1)\}^2-4(a^2+a-4)\geq 0$

$-8a+17\geq 0 \quad \therefore a\leq \frac{17}{8}$

따라서 모든 자연수 a의 값의 합은 $1+2=3$

답 ①

0761 처음 땅의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=13^2 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x-2)(y+2)=xy-18 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $xy+2x-2y-4=xy-18$

$\therefore y=x+7$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(x+7)^2=169, \quad x^2+7x-60=0$

$(x+12)(x-5)=0 \quad \therefore x=-12$ 또는 $x=5$

그런데 $x>2$이므로 $x=5$

$x=5$를 ㉢에 대입하면 $y=12$

따라서 처음 땅의 넓이는 $xy=5\cdot 12=60(\text{m}^2)$

답 60 m^2

0762 두 자리 자연수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=58 & \cdots\cdots ㉠ \\ (10y+x)+(10x+y)=110 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $y=10-x$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(10-x)^2=58, \quad x^2-10x+21=0$

$(x-3)(x-7)=0 \quad \therefore x=3$ 또는 $x=7$

$x=3$을 ㉢에 대입하면 $y=7$

$x=7$을 ㉢에 대입하면 $y=3$

그런데 $x>y$이므로 $x=7$, $y=3$

따라서 처음 수는 73이다.

답 73

0763 $\overline{\text{PA}}=x$, $\overline{\text{PB}}=y$라 하면 $\angle\text{APB}=90°$이므로

$\begin{cases} x+y=14 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=10^2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=14-x$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(14-x)^2=100, \quad x^2-14x+48=0$

$(x-6)(x-8)=0 \quad \therefore x=6$ 또는 $x=8$

$x=6$을 ㉢에 대입하면 $y=8$

$x=8$을 ㉢에 대입하면 $y=6$

$\therefore \triangle\text{PAB}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24$

답 ⑤

0764 마름모의 넓이가 96 cm^2이므로

$\frac{1}{2}ab=96 \quad \therefore ab=192$ ⋯⋯ ㉠

또 마름모의 한 변의 길이가 10 cm이므로

$\left(\frac{1}{2}a\right)^2+\left(\frac{1}{2}b\right)^2=10^2$

$\therefore a^2+b^2=400$ ⋯⋯ ㉡

㉡에서 $(a+b)^2-2ab=400$이므로 이 식에 ㉠을 대입하면

$(a+b)^2-2\cdot 192=400, \quad (a+b)^2=784$

$\therefore a+b=28 \ (\because a>0, b>0)$ ⋯⋯ ㉢

㉢에서 $b=28-a$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$a(28-a)=192, \quad a^2-28a+192=0$

$(a-12)(a-16)=0 \quad \therefore a=12$ 또는 $a=16$

$a=12$를 ㉢에 대입하면 $b=16$

$a=16$을 ㉢에 대입하면 $b=12$

그런데 $a>b$이므로 $a=16$, $b=12$

$\therefore a-b=4$

답 ④

0765 처음 직육면체의 밑면의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=15^2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 10(x+1)(y+1)=10xy+220 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ ⋯ ❶

㉡에서 $xy+x+y+1=xy+22$

$\therefore y=21-x$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(21-x)^2=225, \quad x^2-21x+108=0$

$(x-9)(x-12)=0 \quad \therefore x=9$ 또는 $x=12$

$x=9$를 ㉢에 대입하면 $y=12$

$x=12$를 ㉢에 대입하면 $y=9$

그런데 $x>y$이므로 $x=12$, $y=9$ ⋯ ❷

따라서 처음 직육면체의 밑면의 가로의 길이는 12 cm, 세로의 길이는 9 cm이다. ⋯ ❸

답 가로: 12 cm, 세로: 9 cm

채점 기준	비율
❶ 처음 직육면체의 밑면의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하고 연립방정식을 세울 수 있다.	40%
❷ x, y의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ 처음 직육면체의 밑면의 가로와 세로의 길이를 구할 수 있다.	10%

0766 전략 인수정리와 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $P(x)=x^3-5x^2+2x+8$로 놓으면

$P(-1)=-1-5-2+8=0$

06 여러 가지 방정식

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -5 & 2 & 8 \\ & & -1 & 6 & -8 \\ \hline & 1 & -6 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x+1)(x^2-6x+8)$
$=(x+1)(x-2)(x-4)$

즉 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=2$, $\gamma=4$이므로 $\alpha-\beta+\gamma=1$ 답 ④

0767 전략 인수정리와 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $P(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$이라 하면

$P(1)=1-5+5+5-6=0$,
$P(-1)=1+5+5-5-6=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -5 & 5 & 5 & -6 \\ & & 1 & -4 & 1 & 6 \\ \hline -1 & 1 & -4 & 1 & 6 & \boxed{0} \\ & & -1 & 5 & -6 & \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x+1)(x^2-5x+6)$
$=(x-1)(x+1)(x-2)(x-3)$

즉 주어진 방정식은

$(x-1)(x+1)(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=3$이므로 $\beta-\alpha=4$ 답 ④

0768 전략 $x^2=X$로 치환한 후 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$2X^2-9X+4=0$, $(2X-1)(X-4)=0$

$\therefore X=\frac{1}{2}$ 또는 $X=4$ ··· ❶

즉 $x^2=\frac{1}{2}$ 또는 $x^2=4$이므로

$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\pm2$ ··· ❷

따라서 주어진 방정식의 양의 근은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 2이므로 모든 양의 근의 곱은 $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot2=\sqrt{2}$ ··· ❸

답 $\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $x^2=X$로 놓고 X에 대한 이차방정식의 근을 구할 수 있다.	40%
❷ 주어진 방정식의 근을 구할 수 있다.	40%
❸ 모든 양의 근의 곱을 구할 수 있다.	20%

0769 전략 사차방정식 $P(x)=0$의 두 근이 α, β이면 $P(\alpha)=0$, $P(\beta)=0$임을 이용한다.

풀이 주어진 방정식의 두 근이 -1, 2이므로

$1+2+a+1+b=0$에서 $a+b=-4$ ······ ㉠

$16-16+4a-2+b=0$에서 $4a+b=2$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-6$

$\therefore a-b=8$ 답 8

0770 전략 계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $p+qi$이면 $p-qi$도 근이다. (단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

풀이 a, b가 실수이고 주어진 방정식의 한 근이 $1+i$이므로 $1-i$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(1+i)+(1-i)=4$ ······ ㉠

$\alpha(1+i)+(1+i)(1-i)+\alpha(1-i)=a$ ······ ㉡

$\alpha(1+i)(1-i)=-b$ ······ ㉢

㉠에서 $\alpha=2$

$\alpha=2$를 ㉡에 대입하면 $a=6$

$\alpha=2$를 ㉢에 대입하면 $b=-4$

$\therefore ab=-24$ 답 ④

0771 전략 일차방정식을 한 문자에 대하여 정리한 것을 이차방정식에 대입한다.

풀이 $\begin{cases} x-y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3y^2=12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=y+2$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(y+2)^2+3y^2=12$, $y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0$ $\therefore y=-2$ 또는 $y=1$

$y=-2$를 ㉢에 대입하면 $x=0$

$y=1$을 ㉢에 대입하면 $x=3$

$\therefore \alpha=3$, $\beta=1$ ($\because \alpha>0$, $\beta>0$)

$\therefore \alpha^2+\beta^2=10$ 답 10

0772 전략 인수분해가 되는 이차방정식에서 이차식을 두 일차식의 곱으로 인수분해한다.

풀이 $\begin{cases} x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x^2+y^2=4xy & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $4x^2-4xy+y^2=0$, $(2x-y)^2=0$

$\therefore y=2x$ ······ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+4x^2=10$, $x^2=2$ $\therefore x=\pm\sqrt{2}$

$x=\sqrt{2}$를 ㉢에 대입하면 $y=2\sqrt{2}$

$x=-\sqrt{2}$를 ㉢에 대입하면 $y=-2\sqrt{2}$

$\therefore \alpha\beta=4$ 답 ①

0773 전략 인수정리와 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $P(x)=x^3+x^2+x-3$이라 하면

$P(1)=1+1+1-3=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ & & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2+2x+3)$

즉 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2+2x+3)=0$

이때 α, β는 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$
$=3-(-2)+1=6$ 답 ①

0774 전략 $x^2+x=X$로 치환한 후 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $x^2+x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X-1)(X+3)-5=0,\quad X^2+2X-8=0$

$(X+4)(X-2)=0,\quad (x^2+x+4)(x^2+x-2)=0$

$(x^2+x+4)(x+2)(x-1)=0$

이때 α, β는 이차방정식 $x^2+x+4=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=4$

한편 $\overline{\alpha}=\beta$, $\overline{\beta}=\alpha$이므로 $\quad \alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}=2\alpha\beta=8$ 답 ⑤

라쎈 특강 이차방정식의 켤레근

계수가 실수인 이차방정식이 서로 다른 두 허근을 가지면 두 허근은 서로 켤레복소수이다.

0775 전략 삼차방정식 $P(x)=0$이 중근 α를 가지면 $P(\alpha)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해한다.

풀이 $P(x)=x^3+ax^2-3x+b$로 놓으면 $P(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|cccc} 1 & 1 & a & -3 & b \\ & & 1 & a+1 & a-2 \\ \hline & 1 & a+1 & a-2 & \multicolumn{1}{|c}{a+b-2} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)\{x^2+(a+1)x+a-2\}$

이때 방정식 $P(x)=0$이 중근 1을 가지므로 방정식 $x^2+(a+1)x+a-2=0$의 한 근이 1이다.

즉 $1+a+1+a-2=0$이므로 $\quad a=0$

또 $a+b-2=0$이므로 $\quad b=2$

따라서 $P(x)=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)^2(x+2)$이므로 방정식 $P(x)=0$의 나머지 한 근은 $\alpha=-2$이다.

$\therefore \alpha+a-b=-4$ 답 -4

다른풀이 삼차방정식 $x^3+ax^2-3x+b=0$의 세 근이 1, 1, α이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+1+\alpha=-a,\ 1\cdot1+1\cdot\alpha+\alpha\cdot1=-3,\ 1\cdot1\cdot\alpha=-b$

$\therefore \alpha=-2,\ a=0,\ b=2$

$\therefore \alpha+a-b=-4$

0776 전략 상자의 밑면의 가로와 세로의 길이를 각각 x로 나타내어 상자의 부피를 x에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 상자의 밑면의 가로의 길이는 $(40-2x)$ cm, 세로의 길이는 $(30-2x)$ cm이므로

$(40-2x)(30-2x)x=3000$

$x(x-20)(x-15)=750$

$x^3-35x^2+300x-750=0$ ⋯ ❶

$P(x)=x^3-35x^2+300x-750$으로 놓으면

$P(5)=125-875+1500-750=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|cccc} 5 & 1 & -35 & 300 & -750 \\ & & 5 & -150 & 750 \\ \hline & 1 & -30 & 150 & \multicolumn{1}{|c}{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-5)(x^2-30x+150)$ ⋯ ❷

따라서 방정식은

$(x-5)(x^2-30x+150)=0$

그런데 x는 자연수이므로 $\quad x=5$ ⋯ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ x에 대한 삼차방정식을 세울 수 있다.	40%
❷ 삼차방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	40%
❸ 자연수 x의 값을 구할 수 있다.	20%

0777 전략 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 삼차방정식 $x^3-x^2+4x-3=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4,\ \alpha\beta\gamma=3$

$\therefore \dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}+\dfrac{\gamma+\alpha}{\beta}+\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}$

$=\dfrac{1-\alpha}{\alpha}+\dfrac{1-\beta}{\beta}+\dfrac{1-\gamma}{\gamma}$

$=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}-3$

$=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}-3$

$=\dfrac{4}{3}-3=-\dfrac{5}{3}$ 답 ②

0778 전략 α가 방정식 $P(x)=0$의 한 근이면 $P(ax+b)=0$의 한 근은 $ax+b=\alpha$에서 $x=\dfrac{\alpha-b}{a}$이다.

풀이 삼차방정식 $P(x)=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 방정식 $P(2x+1)=0$의 근은

$2x+1=\alpha$ 또는 $2x+1=\beta$ 또는 $2x+1=\gamma$

$\therefore x=\dfrac{\alpha-1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\beta-1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\gamma-1}{2}$

따라서 방정식 $P(2x+1)=0$의 세 근의 합은

$\dfrac{\alpha-1}{2}+\dfrac{\beta-1}{2}+\dfrac{\gamma-1}{2}=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma-3}{2}=\dfrac{5-3}{2}=1$ 답 ①

0779 전략 세 수 a, b, c를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0$이다.

풀이 삼차방정식 $x^3+3x^2-x-2=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1,\ \alpha\beta\gamma=2$

$\therefore (-\alpha)+(-\beta)+(-\gamma)=-(\alpha+\beta+\gamma)=3,$

$(-\alpha)\cdot(-\beta)+(-\beta)\cdot(-\gamma)+(-\gamma)\cdot(-\alpha)$

$=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1,$

$(-\alpha)\cdot(-\beta)\cdot(-\gamma)=-\alpha\beta\gamma=-2$

따라서 $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-3x^2-x+2=0$ 답 ②

0780 전략 $x^3+1=0$의 한 허근이 ω이면 $\overline{\omega}$도 $x^3+1=0$의 한 허근임을 이용한다. (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

풀이 $x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 허근이다.

06 여러 가지 방정식

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$\therefore\ \omega+\frac{1}{\omega}+\overline{\omega}+\frac{1}{\overline{\omega}}=(\omega+\overline{\omega})+\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\overline{\omega}}\right)$

$=(\omega+\overline{\omega})+\frac{\omega+\overline{\omega}}{\omega\overline{\omega}}$

$=1+\frac{1}{1}=2$ 답 2

0781 전략 두 연립방정식의 서로 같은 해는 네 방정식의 공통인 해임을 이용한다.

풀이 주어진 두 연립방정식의 서로 같은 해는 연립방정식

$\begin{cases} x+3y=5 & \cdots\ ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots\ ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉠에서 $x=5-3y$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(5-3y)^2+y^2=5,\quad y^2-3y+2=0$

$(y-1)(y-2)=0\quad \therefore\ y=1$ 또는 $y=2$

이것을 ㉢에 대입하면 위의 연립방정식의 해는

$x=2,\ y=1$ 또는 $x=-1,\ y=2$

(i) $x=2,\ y=1$을 $ax-y=3,\ 5x+2y=b$에 대입하여 풀면

$a=2,\ b=12$

(ii) $x=-1,\ y=2$를 $ax-y=3,\ 5x+2y=b$에 대입하여 풀면

$a=-5,\ b=-1$

(i), (ii)에서 $a,\ b$는 양수이므로 $a=2,\ b=12$

$\therefore\ ab=24$ 답 24

0782 전략 인수분해가 되는 이차방정식에서 이차식을 두 일차식의 곱으로 인수분해한다.

풀이 $\begin{cases} 3x^2-5xy+2y^2=0 & \cdots\cdots\ ㉠ \\ x^2-2xy+4y^2=21 & \cdots\cdots\ ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(3x-2y)(x-y)=0$

$\therefore\ 3x=2y$ 또는 $x=y$

(i) $3x=2y$를 ㉡에 대입하면

$x^2-3x^2+9x^2=21,\quad x^2=3$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{3},\ y=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (복호동순)

(ii) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$x^2-2x^2+4x^2=21,\quad x^2=7$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{7},\ y=\pm\sqrt{7}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 xy는 $x=\pm\sqrt{7},\ y=\pm\sqrt{7}$ (복호동순)일 때 최대이므로 구하는 최댓값은 7이다. 답 7

0783 전략 $x+y=u,\ xy=v$로 놓고 $x,\ y$가 이차방정식 $t^2-ut+v=0$의 두 근임을 이용한다.

풀이 $x+y=u,\ xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u+v=7 & \cdots\cdots\ ㉠ \\ uv=12 & \cdots\cdots\ ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $v=7-u$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$u^2-7u+12=0,\quad (u-3)(u-4)=0$

$\therefore\ u=3$ 또는 $u=4$

이것을 ㉢에 대입하면 $u=3,\ v=4$ 또는 $u=4,\ v=3$

(i) $u=3,\ v=4$, 즉 $x+y=3,\ xy=4$일 때 $x,\ y$는 이차방정식 $t^2-3t+4=0$의 두 근이므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot4=-7<0$

즉 방정식 $t^2-3t+4=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $u=4,\ v=3$, 즉 $x+y=4,\ xy=3$일 때 $x,\ y$는 이차방정식 $t^2-4t+3=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-3)=0\quad \therefore\ t=1$ 또는 $t=3$

$\therefore\ \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

(i), (ii)에서 $x>y$이므로 $x=3,\ y=1$

$\therefore\ x-y=2$ 답 2

0784 전략 $2x+y=a$를 한 문자에 대하여 정리한 후 $x^2+y^2=8$에 대입한다.

풀이 $\begin{cases} 2x+y=a & \cdots\cdots\ ㉠ \\ x^2+y^2=8 & \cdots\cdots\ ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=a-2x$

이것을 ㉡에 대입하면

$x^2+(a-2x)^2=8$

$\therefore\ 5x^2-4ax+a^2-8=0$

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2a)^2-5(a^2-8)=0$

$-a^2+40=0,\quad a^2=40$

$\therefore\ a=2\sqrt{10}\ (\because\ a>0)$ 답 $2\sqrt{10}$

0785 전략 두 정사각형의 한 변의 길이를 각각 $x,\ y(x<y)$로 놓고 연립방정식을 세운다.

풀이 두 정사각형의 한 변의 길이를 각각 $x,\ y\ (x<y)$라 하면

$\begin{cases} 4x+4y=24 & \cdots\cdots\ ㉠ \\ x^2+y^2=20 & \cdots\cdots\ ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=6-x$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(6-x)^2=20,\quad x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0\quad \therefore\ x=2$ 또는 $x=4$

$x=2$를 ㉢에 대입하면 $y=4$

$x=4$를 ㉢에 대입하면 $y=2$

$x<y$이므로 $x=2,\ y=4$

따라서 작은 정사각형의 한 변의 길이는 2이다. 답 2

0786 전략 $f(a)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해한다.

풀이 $f(a)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} a & 1 & -(a+4) & 4a-5 & 5a \\ & & a & -4a & -5a \\ \hline & 1 & -4 & -5 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore\ f(x)=(x-a)(x^2-4x-5)$

$=(x-a)(x+1)(x-5)$

$f(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=5$

한편 $f(a+3)=0$에서 $a+3$은 방정식 $f(x)=0$의 근이므로

$a+3=-1$ 또는 $a+3=5$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=2$

따라서 실수 a의 값의 합은

$-4+2=-2$ 답 ②

0787 전략 공통부분이 나오도록 묶어서 전개한 후 공통부분을 한 문자로 치환하여 인수분해한다.

풀이 $(x^2-4x+3)(x^2-6x+8)=120$에서

$(x-1)(x-3)(x-2)(x-4)=120$

$(x-1)(x-4)(x-2)(x-3)=120$

$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=120$

$x^2-5x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X+4)(X+6)=120,\quad X^2+10X-96=0$

$(X-6)(X+16)=0$

$(x^2-5x-6)(x^2-5x+16)=0$

$(x+1)(x-6)(x^2-5x+16)=0$

이때 ω는 방정식 $x^2-5x+16=0$의 한 허근이므로

$\omega^2-5\omega+16=0$

$\therefore \omega^2-5\omega=-16$ 답 ①

0788 전략 삼차방정식의 좌변을 $(x-\alpha)(x^2+px+q)=0$ (α는 실수) 꼴로 인수분해한 후 이차방정식 $x^2+px+q=0$이 두 개의 허근을 가져야 함을 이용한다.

풀이 $P(x)=x^3+(2a+1)x^2+(a^2-2a-2)x-a^2$으로 놓으면

$P(1)=1+2a+1+a^2-2a-2-a^2=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2a+1 & a^2-2a-2 & -a^2 \\ & & 1 & 2a+2 & a^2 \\ \hline & 1 & 2a+2 & a^2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)\{x^2+2(a+1)x+a^2\}$ ➊

이때 방정식 $P(x)=0$이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+2(a+1)x+a^2=0$이 두 개의 허근을 가져야 하므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(a+1)^2-a^2<0$

$2a+1<0 \qquad \therefore a<-\dfrac{1}{2}$ ➋

따라서 정수 a의 최댓값은 -1이다. ➌

답 -1

채점 기준	비율
➊ 삼차방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	40%
➋ 판별식을 이용하여 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
➌ 정수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

0789 전략 인수정리와 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $P(x)=x^3-(4+a)x^2+5ax-a^2$이라 하면

$P(a)=a^3-4a^2-a^3+5a^2-a^2=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} a & 1 & -4-a & 5a & -a^2 \\ & & a & -4a & a^2 \\ \hline & 1 & -4 & a & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-a)(x^2-4x+a)$

이때 방정식 $P(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2-4x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-a>0 \qquad \therefore a<4$ …… ㉠

한편 이차방정식 $x^2-4x+a=0$이 $x=a$를 근으로 갖지 않아야 하므로

$a^2-4a+a\neq 0,\qquad a^2-3a\neq 0$

$a(a-3)\neq 0$

$\therefore a\neq 0,\ a\neq 3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 자연수 a는 1, 2의 2개이다. 답 ②

0790 전략 $x^3=1$의 한 허근이 ω이면 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$임을 이용한다.

풀이 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 허근이다. 즉

$\omega^2+\omega+1=0,\ \omega^3=1,\ \omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$

ㄱ. $\omega+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{\omega^2+1}{\omega}=\dfrac{-\omega}{\omega}=-1$

ㄴ. $\omega^2+\overline{\omega}^2=(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\overline{\omega}=(-1)^2-2\cdot 1=-1$

한편 ω, $\overline{\omega}$가 $x^3=1$의 근이므로

$\omega^3=\overline{\omega}^3=1 \qquad \therefore \omega^3+\overline{\omega}^3=2$

$\therefore \omega^2+\overline{\omega}^2\neq\omega^3+\overline{\omega}^3$

ㄷ. $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{40}$

$=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\cdots+\omega^{36}(1+\omega+\omega^2)$

$+(\omega^3)^{13}+(\omega^3)^{13}\cdot\omega$

$=1+\omega$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

0791 전략 x, y를 근으로 하는 이차방정식의 판별식을 이용한다.

풀이 $\begin{cases} x+y=2a & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y+xy=a^2-a+6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$2a+xy=a^2-a+6$

$\therefore xy=a^2-3a+6$ …… ㉢

㉠, ㉢을 만족시키는 실수 x, y는 이차방정식 $t^2-2at+a^2-3a+6=0$의 두 실근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-a)^2-(a^2-3a+6)\geq 0$

$3a-6\geq 0 \qquad \therefore a\geq 2$

따라서 실수 a의 최솟값은 2이다. 답 ②

06 여러 가지 방정식

07 일차부등식

Ⅲ. 부등식

0792 $a>b$의 양변에 2를 더하면 $a+2>b+2$ 답 $>$

0793 $a>b$의 양변에서 1을 빼면 $a-1>b-1$ 답 $>$

0794 $a>b$의 양변에 3을 곱하면 $3a>3b$ 답 $>$

0795 $a>b$의 양변에 -1을 곱하면 $-a<-b$ 답 $<$

0796 $a>b$의 양변을 3으로 나누면 $\frac{a}{3}>\frac{b}{3}$ 답 $>$

0797 $a>b$의 양변을 -2로 나누면 $-\frac{a}{2}<-\frac{b}{2}$ 답 $<$

0798 $1\le x\le 4$의 각 변에 2를 곱하면 $2\le 2x\le 8$ 답 $2\le 2x\le 8$

0799 $1\le x\le 4$의 각 변에 -1을 곱하면 $-4\le -x\le -1$
답 $-4\le -x\le -1$

0800 $1\le x\le 4$의 각 변을 4로 나누면 $\frac{1}{4}\le\frac{x}{4}\le 1$
답 $\frac{1}{4}\le\frac{x}{4}\le 1$

0801 $1\le x\le 4$의 각 변의 역수를 취하면 $\frac{1}{4}\le\frac{1}{x}\le 1$
답 $\frac{1}{4}\le\frac{1}{x}\le 1$

0802 $x+1>4x-5$에서 $-3x>-6$
$\therefore x<2$ 답 $x<2$

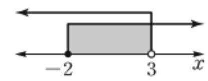
0803 $3(x+2)<x-8$에서 $3x+6<x-8$
$2x<-14$ $\therefore x<-7$ 답 $x<-7$

0804 $\frac{1}{2}x+7\ge 2(x-1)$에서 $\frac{1}{2}x+7\ge 2x-2$
$-\frac{3}{2}x\ge -9$ $\therefore x\le 6$ 답 $x\le 6$

0805 $ax>a+1$에서
(i) $a>0$일 때, $x>\frac{a+1}{a}$
(ii) $a<0$일 때, $x<\frac{a+1}{a}$
(iii) $a=0$일 때, $0\cdot x>1$이므로 해는 없다. 답 풀이 참조

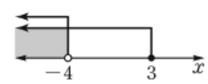
0806 $(a-1)x<a$에서
(i) $a>1$일 때, $x<\frac{a}{a-1}$
(ii) $a<1$일 때, $x>\frac{a}{a-1}$
(iii) $a=1$일 때, $0\cdot x<1$이므로 해는 모든 실수이다. 답 풀이 참조

0807 ㉠에서 $x\ge -2$
㉡에서 $x<3$
따라서 주어진 연립부등식의 해는
$-2\le x<3$



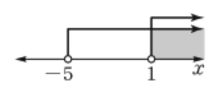
답 $-2\le x<3$

0808 ㉠에서 $3x\le 9$ $\therefore x\le 3$
㉡에서 $x<-4$
따라서 주어진 연립부등식의 해는
$x<-4$



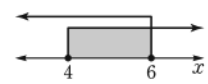
답 $x<-4$

0809 ㉠에서 $x>1$
㉡에서 $2x>-10$ $\therefore x>-5$
따라서 주어진 연립부등식의 해는
$x>1$



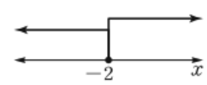
답 $x>1$

0810 ㉠에서 $x\le 6$
㉡에서 $x\ge 4$
따라서 주어진 연립부등식의 해는
$4\le x\le 6$



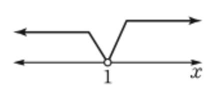
답 $4\le x\le 6$

0811 ㉠에서 $3x\ge -6$ $\therefore x\ge -2$
㉡에서 $x\le -2$
따라서 주어진 연립부등식의 해는
$x=-2$



답 $x=-2$

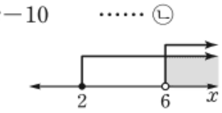
0812 ㉠에서 $x>1$
㉡에서 $5x<5$ $\therefore x<1$
따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.



답 해는 없다.

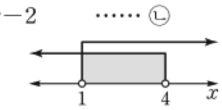
0813 답 (가) $2x+1$ (나) -2 (다) -1

0814 주어진 부등식에서 $\begin{cases} 2\le 3x-4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-4<4x-10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $-3x\le -6$ $\therefore x\ge 2$
㉡에서 $-x<-6$ $\therefore x>6$
따라서 주어진 부등식의 해는
$x>6$



답 $x>6$

0815 주어진 부등식에서 $\begin{cases} 3x-1<2x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+3<7x-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $x<4$
㉡에서 $-5x<-5$ $\therefore x>1$
따라서 주어진 부등식의 해는
$1<x<4$



답 $1<x<4$

0816 답 $-4<x<4$

0817 답 $x\le -5$ 또는 $x\ge 5$

0818 $|x-2|<3$에서 $-3<x-2<3$

$\therefore -1<x<5$ 답 $-1<x<5$

0819 $|x+1|>6$에서 $x+1<-6$ 또는 $x+1>6$

$\therefore x<-7$ 또는 $x>5$ 답 $x<-7$ 또는 $x>5$

0820 $|6-5x|\le 4$에서 $-4\le 6-5x\le 4$

$-10\le -5x\le -2$

$\therefore \frac{2}{5}\le x\le 2$ 답 $\frac{2}{5}\le x\le 2$

0821 $|3x+2|\ge 5$에서 $3x+2\le -5$ 또는 $3x+2\ge 5$

$3x\le -7$ 또는 $3x\ge 3$

$\therefore x\le -\frac{7}{3}$ 또는 $x\ge 1$ 답 $x\le -\frac{7}{3}$ 또는 $x\ge 1$

0822 (i) $x<0$일 때,

$-(x-1)-x<2$에서 $x>-\frac{1}{2}$

그런데 $x<0$이므로 $\boxed{-\frac{1}{2}}<x<\boxed{0}$

(ii) $0\le x<1$일 때,

$-(x-1)+x<2$에서 $1<2$이므로 주어진 부등식은 항상 성립한다.

$\therefore \boxed{0}\le x<\boxed{1}$

(iii) $x\ge 1$일 때,

$x-1+x<2$에서 $x<\frac{3}{2}$

그런데 $x\ge 1$이므로 $\boxed{1}\le x<\boxed{\frac{3}{2}}$

이상에서 부등식 $|x-1|+|x|<2$의 해는 $\boxed{-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}}$

답 풀이 참조

0823 ① $a>b$에서 $a+6>b+6$

② $a>b$에서 $-a<-b$ $\therefore 5-a<5-b$

③ $a>b$에서 $3a>3b$ $\therefore 3a-1>3b-1$

④ $a>b$에서 $-\frac{a}{4}<-\frac{b}{4}$ $\therefore -\frac{a}{4}+1<-\frac{b}{4}+1$

⑤ $a=1$, $b=-1$이면 $a>b$이지만 $\frac{3}{a}>\frac{3}{b}$이다.

답 ②

0824 ㄱ. $a<b$, $c>0$이므로 $ac<bc$

$c<d$, $b>0$이므로 $bc<bd$

$\therefore ac<bd$

ㄴ. $b<c$에서 $b-a<c-a$

ㄷ. $a=1$, $b=-2$이면 $a>b$이지만 $a^2<b^2$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0825 ㄱ. $b<0$이므로 $a<b$의 양변을 b로 나누면 $\frac{a}{b}>1$

ㄴ. $a<b$이므로 $a-b<0$

$a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2>0$이므로

$(a-b)(a^2+ab+b^2)<0$, $a^3-b^3<0$ $\therefore a^3<b^3$

ㄷ. $|a|>|b|$이므로 $a^2>b^2$

$ab>0$이므로 양변을 ab로 나누면 $\frac{a}{b}>\frac{b}{a}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

다른풀이 ㄷ. $a<0$이므로 $a<b$의 양변을 a로 나누면 $1>\frac{b}{a}$

ㄱ에서 $\frac{a}{b}>1$이므로 $\frac{a}{b}>\frac{b}{a}$

0826 $ax-1>6$에서 $ax>7$

이 부등식의 해가 $x>\frac{1}{3}$이므로 $a>0$, $\frac{7}{a}=\frac{1}{3}$

$\therefore a=21$ 답 21

0827 $ax+2b>bx+2a$에서 $(a-b)x>2(a-b)$

이때 $a<b$, 즉 $a-b<0$이므로 양변을 $a-b$로 나누면

$x<2$ 답 $x<2$

0828 부등식 $ax\le b$의 해가 $x\le 1$이므로 $a>0$, $\frac{b}{a}=1$

$\therefore b=a$

이것을 $ax\le a-2b$에 대입하면

$ax\le a-2a$, $ax\le -a$

$a>0$이므로 $x\le -1$ 답 ②

0829 부등식 $(a+1)x-(a-b)\ge 0$, 즉 $(a+1)x\ge a-b$의 해가 $x\le -3$이므로

$a+1<0$, $\frac{a-b}{a+1}=-3$

$\therefore 4a-b=-3$

이것을 $(4a-b)x\ge 9$에 대입하면

$-3x\ge 9$ $\therefore x\le -3$ 답 $x\le -3$

0830 부등식 $(a+3)(a-3)x\le a-3$의 해가 모든 실수이려면

$(a+3)(a-3)=0$, $a-3\ge 0$

$\therefore a=3$ 답 ⑤

0831 $a^2x-a>x$에서 $(a^2-1)x>a$

이 부등식의 해가 존재하지 않으려면

$a^2-1=0$, $a\ge 0$

$\therefore a=1$ 답 ③

0832 $ax-2>b+x$에서 $(a-1)x>b+2$

이 부등식의 해가 모든 실수이려면

$a-1=0$, $b+2<0$

$\therefore a=1$, $b<-2$ ··· ❶

이때 정수 b의 최댓값은 -3이므로 $a+b$의 최댓값은

$1+(-3)=-2$ ··· ❷

답 -2

채점 기준	비율
❶ a의 값과 b의 값의 범위를 구할 수 있다.	70%
❷ $a+b$의 최댓값을 구할 수 있다.	30%

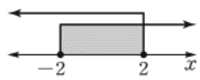
0833 $2x-3\le 4x+1$에서

$-2x\le 4$　　$\therefore x\ge -2$

$-x+6\ge 3x-2$에서

$-4x\ge -8$　　$\therefore x\le 2$

따라서 주어진 연립부등식의 해는



$-2\le x\le 2$

이므로　$a=-2,\ b=2$

$\therefore b-a=4$

답 4

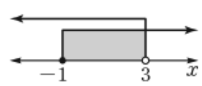
0834 $3x-(4x+1)\le x+1$에서　$-x-1\le x+1$

$-2x\le 2$　　$\therefore x\ge -1$

$2(x+5)>6x-2$에서　$2x+10>6x-2$

$-4x>-12$　　$\therefore x<3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는



$-1\le x<3$

이므로　$M=2,\ m=-1$

$\therefore M-m=3$

답 3

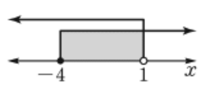
0835 $5(x+1)\ge 1+2(x-4)$에서　$5x+5\ge 2x-7$

$3x\ge -12$　　$\therefore x\ge -4$

$\dfrac{x+1}{2}<\dfrac{4-x}{3}$에서　$3(x+1)<2(4-x)$

$3x+3<8-2x,$　$5x<5$　　$\therefore x<1$

따라서 주어진 연립부등식의 해는



$-4\le x<1$

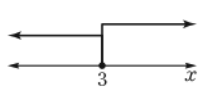
이므로 x의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0836 ① $4x-7\le 5$에서　$4x\le 12$

$\therefore x\le 3$

따라서 연립부등식의 해는



$x=3$

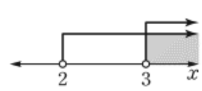
② $3(x-1)>-x+9$에서　$3x-3>-x+9$

$4x>12$　　$\therefore x>3$

$5x-8>2$에서　$5x>10$

$\therefore x>2$

따라서 연립부등식의 해는



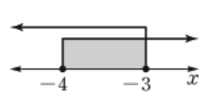
$x>3$

③ $2x-6\le 2(2x+1)$에서　$2x-6\le 4x+2$

$-2x\le 8$　　$\therefore x\ge -4$

$4x+1\le 3x-2$에서　$x\le -3$

따라서 연립부등식의 해는

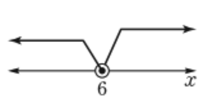


$-4\le x\le -3$

④ $0.2(x-1)\le 1$에서　$x-1\le 5$

$\therefore x\le 6$

따라서 연립부등식의 해는 없다.



⑤ $5x+1<-9$에서　$5x<-10$

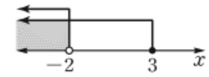
$\therefore x<-2$

$\dfrac{x-1}{2}\le\dfrac{8-x}{5}$에서　$5(x-1)\le 2(8-x)$

$5x-5\le 16-2x,$　$7x\le 21$

$\therefore x\le 3$

따라서 연립부등식의 해는



$x<-2$

그러므로 해가 없는 것은 ④이다.

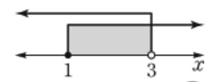
답 ④

0837 주어진 부등식에서 $\begin{cases} 15x-24<5x+6 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x+6\le 10x+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서　$10x<30$　　$\therefore x<3$

㉡에서　$-5x\le -5$　　$\therefore x\ge 1$

따라서 주어진 부등식의 해는



$1\le x<3$

이므로 정수 x는 1, 2의 2개이다.

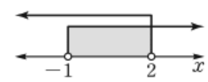
답 ②

0838 주어진 부등식에서 $\begin{cases} -2<-3x+4 & \cdots\cdots ㉠ \\ -3x+4<7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서　$3x<6$　　$\therefore x<2$

㉡에서　$-3x<3$　　$\therefore x>-1$

따라서 주어진 부등식의 해는



$-1<x<2$

이므로 모든 정수 x의 값의 합은

$0+1=1$

답 1

다른풀이 $-2<-3x+4<7$의 각 변에서 4를 빼면

$-6<-3x<3$

$-6<-3x<3$의 각 변을 -3으로 나누면

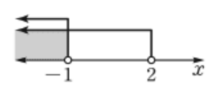
$-1<x<2$

0839 주어진 부등식에서 $\begin{cases} 5x-8<\dfrac{x}{2}+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{x}{2}+1<\dfrac{x+3}{4} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서　$10x-16<x+2,$　$9x<18$　　$\therefore x<2$

㉡에서　$2x+4<x+3$　　$\therefore x<-1$

따라서 주어진 부등식의 해는



$x<-1$

이므로 정수 x의 최댓값은 -2이다.

답 -2

0840 $3x-1\le x+a$에서　$2x\le a+1$

$\therefore x\le\dfrac{a+1}{2}$

$2x+3\le 3x+1$에서　$-x\le -2$

$\therefore x\ge 2$

주어진 연립부등식의 해가 $2\le x\le 4$이므로

$\dfrac{a+1}{2}=4,$　$a+1=8$　　$\therefore a=7$

답 ③

0841 $x-3a\ge 0$에서　$x\ge 3a$

$2x+b>0$에서　$x>-\dfrac{b}{2}$

주어진 그림에서 $x>-1$, $x\geq 3$이므로

$3a=3,\ -\dfrac{b}{2}=-1 \qquad \therefore a=1,\ b=2$

$\therefore ab=2$

답 2

0842 주어진 부등식에서 $\begin{cases} 3x-a\leq 2x & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x<5x+b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad x\leq a$

㉡에서 $\quad -3x<b \qquad \therefore x>-\dfrac{b}{3}$

주어진 부등식의 해가 $-2<x\leq 1$이므로

$a=1,\ -\dfrac{b}{3}=-2 \qquad \therefore a=1,\ b=6$

$\therefore a+b=7$

답 7

0843 $\dfrac{5x+1}{8}+\dfrac{3}{4}x\leq x-1$에서 $\qquad 5x+1+6x\leq 8x-8$

$3x\leq -9 \qquad \therefore x\leq -3$

$3(x+2)+1\geq a-x$에서 $\qquad 3x+7\geq a-x$

$4x\geq a-7 \qquad \therefore x\geq \dfrac{a-7}{4}$ ··· ❶

주어진 연립부등식의 해가 $x=-3$이므로

$\dfrac{a-7}{4}=-3, \qquad a-7=-12 \qquad \therefore a=-5$ ··· ❷

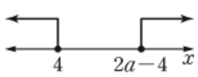
답 -5

채점 기준	비율
❶ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	60%
❷ 상수 a의 값을 구할 수 있다.	40%

0844 $3x-7\leq 5$에서 $\qquad 3x\leq 12 \qquad \therefore x\leq 4$

$x+4\geq 2a$에서 $\qquad x\geq 2a-4$

주어진 연립부등식의 해가 없으므로 오른쪽 그림에서



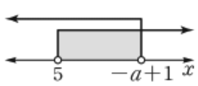
$2a-4>4, \qquad 2a>8 \qquad \therefore a>4$

답 ⑤

0845 $3(x-2)>2x-1$에서 $\qquad 3x-6>2x-1 \qquad \therefore x>5$

$4x-1<3x-a$에서 $\qquad x<-a+1$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$-a+1>5 \qquad \therefore a<-4$

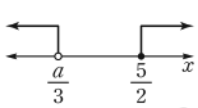
답 ②

0846 $3x+a<2a$에서 $\qquad 3x<a \qquad \therefore x<\dfrac{a}{3}$

$-(x-5)\leq x$에서 $\qquad -x+5\leq x, \qquad -2x\leq -5$

$\therefore x\geq \dfrac{5}{2}$ ··· ❶

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



$\dfrac{a}{3}\leq \dfrac{5}{2} \qquad \therefore a\leq \dfrac{15}{2}$ ··· ❷

따라서 정수 a의 최댓값은 7이다. ··· ❸

답 7

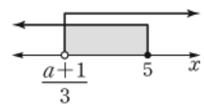
채점 기준	비율
❶ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	40%
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 정수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

0847 주어진 부등식에서 $\begin{cases} 3x-4\leq 2x+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+1<5x-a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad x\leq 5$

㉡에서 $\quad -3x<-a-1 \qquad \therefore x>\dfrac{a+1}{3}$

주어진 부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$\dfrac{a+1}{3}<5, \qquad a+1<15$

$\therefore a<14$

답 $a<14$

0848 형광펜을 x자루 산다고 하면 색연필은 $(12-x)$자루 살 수 있으므로

$7200\leq 500(12-x)+800x\leq 8400$

$7200\leq 300x+6000\leq 8400, \qquad 1200\leq 300x\leq 2400$

$\therefore 4\leq x\leq 8$

따라서 형광펜은 4자루 이상 8자루 이하 살 수 있다.

답 ③

0849 연속하는 세 짝수를 $x-2$, x, $x+2$라 하면

$63<(x-2)+x+(x+2)<72$

$63<3x<72 \qquad \therefore 21<x<24$

x는 짝수이므로 $\qquad x=22$

따라서 연속하는 세 짝수는 20, 22, 24이므로 가장 큰 수는 24이다.

답 ④

0850 세로의 길이를 x cm라 하면 가로의 길이는

$\dfrac{1}{2}(150-2x)=75-x\,(\text{cm})$

이므로 $\qquad x+15\leq 75-x<2x$

즉 $\begin{cases} x+15\leq 75-x & \cdots\cdots ㉠ \\ 75-x<2x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad 2x\leq 60 \qquad \therefore x\leq 30$

㉡에서 $\quad -3x<-75 \qquad \therefore x>25$

$\therefore 25<x\leq 30$

따라서 세로의 길이는 25 cm 초과 30 cm 이하이다.

답 25 cm 초과 30 cm 이하

0851 가장 긴 변의 길이가 $x+5$, 가장 짧은 변의 길이가 $x-2$이므로

$\begin{cases} x+5<(x-2)+(x+2) & \cdots\cdots ㉠ \\ x-2>0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad x+5<2x, \qquad -x<-5 \qquad \therefore x>5$

㉡에서 $\quad x>2$

$\therefore x>5$

답 ⑤

라쎈 특강 삼각형의 변의 길이

삼각형의 세 변의 길이가 주어질 때
① (가장 긴 변의 길이)$<$(나머지 두 변의 길이의 합)
② (가장 짧은 변의 길이)>0

0852 세 변의 길이는 각각 x cm, x cm, $(60-2x)$cm이다.
(i) 가장 긴 변의 길이가 x cm일 때,
$60-2x\le x$에서 $\quad -3x\le -60$
$\therefore x\ge 20$ ...... ㉠
또 $x<x+(60-2x)$이어야 하므로 $\quad 2x<60$
$\therefore x<30$ ...... ㉡
㉠, ㉡에서 $\quad 20\le x<30$
(ii) 가장 긴 변의 길이가 $(60-2x)$cm일 때,
$x<60-2x$에서 $\quad 3x<60$
$\therefore x<20$ ...... ㉢
또 $60-2x<x+x$이어야 하므로 $\quad -4x<-60$
$\therefore x>15$ ...... ㉣
㉢, ㉣에서 $\quad 15<x<20$
(i), (ii)에서 삼각형을 만들 수 있는 x의 값의 범위는
$15<x<30$ 답 $15<x<30$

0853 회원 수를 x라 하면 탁구공은 $(6x+2)$개이므로
$80\le 6x+2\le 90,\quad 78\le 6x\le 88\quad \therefore 13\le x\le \frac{44}{3}$
따라서 최대 회원 수는 14이다. 답 14

0854 상자의 개수를 x라 하면
$45x+20\le 500\le 60x-100$
즉 $\begin{cases}45x+20\le 500 & \cdots\cdots ㉠\\ 500\le 60x-100 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$ ➊
㉠에서 $\quad 45x\le 480\quad \therefore x\le \frac{32}{3}$
㉡에서 $\quad -60x\le -600\quad \therefore x\ge 10$
$\therefore 10\le x\le \frac{32}{3}$ ➋
따라서 상자의 개수는 10이다. ➌
답 10

채점 기준	비율
➊ 상자의 개수를 x라 하고 연립부등식을 세울 수 있다.	50%
➋ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	30%
➌ 상자의 개수를 구할 수 있다.	20%

0855 학생 수를 x라 하면 볼펜은 $(3x+18)$자루이므로
$5(x-1)+1\le 3x+18<5(x-1)+4$
즉 $\begin{cases}5(x-1)+1\le 3x+18 & \cdots\cdots ㉠\\ 3x+18<5(x-1)+4 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$
㉠에서 $\quad 5x-4\le 3x+18,\quad 2x\le 22\quad \therefore x\le 11$
㉡에서 $\quad 3x+18<5x-1,\quad -2x<-19\quad \therefore x>\frac{19}{2}$
$\therefore \frac{19}{2}<x\le 11$
따라서 학생 수는 10 또는 11이다. 답 ③

0856 의자의 개수를 x라 하면 학생은 $(5x+8)$명이므로
$6(x-4)+1\le 5x+8\le 6(x-4)+6$
즉 $\begin{cases}6(x-4)+1\le 5x+8 & \cdots\cdots ㉠\\ 5x+8\le 6(x-4)+6 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$
㉠에서 $\quad 6x-23\le 5x+8\quad \therefore x\le 31$
㉡에서 $\quad 5x+8\le 6x-18,\quad -x\le -26\quad \therefore x\ge 26$
$\therefore 26\le x\le 31$
따라서 의자의 개수가 될 수 있는 것은 ②이다. 답 ②

0857 $|4x-3|<9$에서 $\quad -9<4x-3<9$
$-6<4x<12\quad \therefore -\frac{3}{2}<x<3$
따라서 $a=-\frac{3}{2}$, $b=3$이므로
$ab=-\frac{9}{2}$ 답 ①

0858 $2|3x-1|\ge 1$, 즉 $|3x-1|\ge \frac{1}{2}$에서
$3x-1\le -\frac{1}{2}$ 또는 $3x-1\ge \frac{1}{2}$
$\therefore x\le \frac{1}{6}$ 또는 $x\ge \frac{1}{2}$ 답 $x\le \frac{1}{6}$ 또는 $x\ge \frac{1}{2}$

0859 $|x-2a|<b$에서 $\quad -b<x-2a<b$
$2a-b<x<2a+b$
주어진 부등식의 해가 $-4<x<6$이므로
$2a-b=-4,\ 2a+b=6$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{1}{2},\ b=5$
$\therefore 2ab=5$ 답 ③

0860 $|x-1|\ge a$에서 $\quad x-1\le -a$ 또는 $x-1\ge a$
$\therefore x\le 1-a$ 또는 $x\ge 1+a$
주어진 부등식의 해가 $x\le -1$ 또는 $x\ge b$이므로
$1-a=-1,\ 1+a=b$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ b=3$
$\therefore a+b=5$ 답 5

0861 $|3x-2|\le x+6$에서
(i) $x\ge \frac{2}{3}$일 때, $3x-2\ge 0$이므로
$3x-2\le x+6,\quad 2x\le 8\quad \therefore x\le 4$
그런데 $x\ge \frac{2}{3}$이므로 $\quad \frac{2}{3}\le x\le 4$
(ii) $x<\frac{2}{3}$일 때, $3x-2<0$이므로
$-(3x-2)\le x+6,\quad -4x\le 4\quad \therefore x\ge -1$
그런데 $x<\frac{2}{3}$이므로 $\quad -1\le x<\frac{2}{3}$
(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는
$-1\le x\le 4$
따라서 $a=-1$, $b=4$이므로
$a+b=3$ 답 ③

0862 $|1-x|<4x-1$에서

(i) $x\le1$일 때, $1-x\ge0$이므로

$1-x<4x-1,\quad -5x<-2\quad \therefore x>\frac{2}{5}$

그런데 $x\le1$이므로 $\frac{2}{5}<x\le1$

(ii) $x>1$일 때, $1-x<0$이므로

$-(1-x)<4x-1,\quad -3x<0\quad \therefore x>0$

그런데 $x>1$이므로 $x>1$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $x>\frac{2}{5}$

$\therefore k=\frac{2}{5}$

답 ②

0863 $2|x-3|+x\ge9$에서

(i) $x\ge3$일 때, $x-3\ge0$이므로

$2(x-3)+x\ge9,\quad 3x\ge15\quad \therefore x\ge5$

그런데 $x\ge3$이므로 $x\ge5$

(ii) $x<3$일 때, $x-3<0$이므로

$-2(x-3)+x\ge9,\quad -x\ge3\quad \therefore x\le-3$

그런데 $x<3$이므로 $x\le-3$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x\le-3$ 또는 $x\ge5$

따라서 자연수 x의 최솟값은 5이다.

답 ⑤

0864 $|x-2|+|x|<4$에서

(i) $x<0$일 때,

$-(x-2)-x<4,\quad -2x<2\quad \therefore x>-1$

그런데 $x<0$이므로 $-1<x<0$

(ii) $0\le x<2$일 때,

$-(x-2)+x<4,\quad 0\cdot x<2$

따라서 주어진 부등식은 항상 성립한다.

그런데 $0\le x<2$이므로 $0\le x<2$

(iii) $x\ge2$일 때,

$x-2+x<4,\quad 2x<6\quad \therefore x<3$

그런데 $x\ge2$이므로 $2\le x<3$

이상에서 주어진 부등식의 해는 $-1<x<3$

따라서 $a=-1$, $b=3$이므로

$b-a=4$

답 4

0865 $|3x-2|\ge|2x-7|$에서

(i) $x<\frac{2}{3}$일 때,

$-(3x-2)\ge-(2x-7)$

$-x\ge5\quad \therefore x\le-5$

그런데 $x<\frac{2}{3}$이므로 $x\le-5$

(ii) $\frac{2}{3}\le x<\frac{7}{2}$일 때,

$3x-2\ge-(2x-7)$

$5x\ge9\quad \therefore x\ge\frac{9}{5}$

그런데 $\frac{2}{3}\le x<\frac{7}{2}$이므로 $\frac{9}{5}\le x<\frac{7}{2}$

(iii) $x\ge\frac{7}{2}$일 때,

$3x-2\ge2x-7\quad \therefore x\ge-5$

그런데 $x\ge\frac{7}{2}$이므로 $x\ge\frac{7}{2}$

이상에서 주어진 부등식의 해는 $x\le-5$ 또는 $x\ge\frac{9}{5}$

따라서 $a=-5$, $b=\frac{9}{5}$이므로

$ab=-9$

답 -9

0866 $|x-1|+3|x+1|<8$에서

(i) $x<-1$일 때,

$-(x-1)-3(x+1)<8$

$-4x<10\quad \therefore x>-\frac{5}{2}$

그런데 $x<-1$이므로 $-\frac{5}{2}<x<-1$

(ii) $-1\le x<1$일 때,

$-(x-1)+3(x+1)<8$

$2x<4\quad \therefore x<2$

그런데 $-1\le x<1$이므로 $-1\le x<1$

(iii) $x\ge1$일 때,

$x-1+3(x+1)<8$

$4x<6\quad \therefore x<\frac{3}{2}$

그런데 $x\ge1$이므로 $1\le x<\frac{3}{2}$

이상에서 주어진 부등식의 해는 $-\frac{5}{2}<x<\frac{3}{2}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 -2, -1, 0, 1이므로 구하는 합은 -2이다.

답 ①

0867 $\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$이므로 주어진 부등식은

$|x-2|+|x+1|<x+3$ ··· ❶

(i) $x<-1$일 때,

$-(x-2)-(x+1)<x+3$

$-3x<2\quad \therefore x>-\frac{2}{3}$

그런데 $x<-1$이므로 해는 없다.

(ii) $-1\le x<2$일 때,

$-(x-2)+x+1<x+3$

$-x<0\quad \therefore x>0$

그런데 $-1\le x<2$이므로 $0<x<2$

(iii) $x\ge2$일 때,

$x-2+x+1<x+3\quad \therefore x<4$

그런데 $x\ge2$이므로 $2\le x<4$ ··· ❷

이상에서 주어진 부등식의 해는 $0<x<4$ ··· ❸

답 $0<x<4$

채점 기준	비율
❶ $\sqrt{A^2}=\|A\|$임을 이용하여 주어진 식을 변형할 수 있다.	20%
❷ $x<-1$, $-1\le x<2$, $x\ge2$로 범위를 나누어 부등식을 각각 풀 수 있다.	60%
❸ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%

0868 전략 먼저 $x+1$, $12-y$의 값의 범위를 구한다.

풀이 $0<x<4$에서 $\quad 1<x+1<5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$5<y<10$에서 $\quad -10<-y<-5$

$\therefore\ 2<12-y<7$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$2<(x+1)(12-y)<35$

따라서 $(x+1)(12-y)$의 값 중 가장 큰 자연수는 34이다. 답 ②

0869 전략 부등식 $Ax\geq B$의 해가 $x\geq C$이면 $A>0$, $\dfrac{B}{A}=C$이다.

풀이 $a(x-1)\geq -(x-a)$에서 $\quad (a+1)x\geq 2a$

이 부등식의 해가 $x\geq 1$이므로

$a+1>0$, $\dfrac{2a}{a+1}=1$

$2a=a+1 \quad \therefore\ a=1$ 답 1

0870 전략 각각의 부등식을 풀어 공통인 해를 구한다.

풀이 $3x-8\leq 4-x$에서

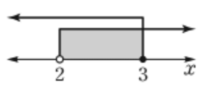
$4x\leq 12 \quad \therefore\ x\leq 3$

$5x+1>2x+7$에서

$3x>6 \quad \therefore\ x>2$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$2<x\leq 3$



이므로 $\quad a=2,\ b=3$

$\therefore\ a+b=5$ 답 5

0871 전략 학생 수를 x라 하고 주어진 조건을 부등식으로 나타내어 본다.

풀이 학생 수를 x라 하면 $\quad 4x<100<5x$

즉 $\begin{cases} 4x<100 & \cdots\cdots ㉠ \\ 100<5x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad x<25$

㉡에서 $\quad x>20$

$\therefore\ 20<x<25$

따라서 최대 학생 수는 24이다. 답 ⑤

0872 전략 부등식 $|x-a|<b\,(b>0)$의 해는 $a-b<x<a+b$임을 이용한다.

풀이 $|x-a|<5$에서 $\quad -5<x-a<5$

$\therefore\ a-5<x<a+5$

이때 a가 정수이므로 이 부등식을 만족시키는 정수 x의 최댓값은

$a+4$

따라서 $a+4=12$이므로

$a=8$ 답 ③

다른 풀이 $|x-a|<5$에서 $\quad a-5<x<a+5$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 최댓값이 12이므로

$12<a+5\leq 13 \quad \therefore\ 7<a\leq 8$

따라서 정수 a의 값은 8이다.

0873 전략 $x\geq 1$, $x<1$로 범위를 나누어 푼다.

풀이 $|x-1|\leq 2x$에서

(i) $x\geq 1$일 때,

$x-1\leq 2x, \quad -x\leq 1 \quad \therefore\ x\geq -1$

그런데 $x\geq 1$이므로 $\quad x\geq 1$

(ii) $x<1$일 때,

$-(x-1)\leq 2x, \quad -3x\leq -1 \quad \therefore\ x\geq \dfrac{1}{3}$

그런데 $x<1$이므로 $\quad \dfrac{1}{3}\leq x<1$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $\quad x\geq \dfrac{1}{3}$

$\therefore\ k=\dfrac{1}{3}$ 답 $\dfrac{1}{3}$

0874 전략 부등식 $Ax<B$의 해가 존재하지 않을 조건은 $A=0$, $B\leq 0$이다.

풀이 $x-a<bx+2$에서 $\quad (1-b)x<a+2$

이 부등식의 해가 존재하지 않으려면

$1-b=0,\ a+2\leq 0$

$\therefore\ a\leq -2,\ b=1$

이때 a의 최댓값은 -2이므로 $a+b$의 최댓값은

$-2+1=-1$ 답 ②

0875 전략 부등식 $Ax\leq B$의 해가 모든 실수일 조건은 $A=0$, $B\geq 0$이고, 해가 존재하지 않을 조건은 $A=0$, $B<0$이다.

풀이 $a^2x-a\leq 4x-1$에서 $\quad (a^2-4)x\leq a-1$

$\therefore\ (a+2)(a-2)x\leq a-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

부등식 ㉠의 해가 모든 실수이려면

$(a+2)(a-2)=0,\ a-1\geq 0$

$\therefore\ a=2$

부등식 ㉠의 해가 없으려면

$(a+2)(a-2)=0,\ a-1<0$

$\therefore\ a=-2$

따라서 $m=2$, $n=-2$이므로

$m-n=4$ 답 4

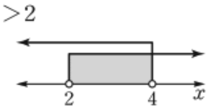
0876 전략 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 값을 구한 후 일차방정식에 대입한다.

풀이 $3x-1<x+7$에서 $\quad 2x<8 \quad \therefore\ x<4$

$4x-1>-(x-9)$에서 $\quad 5x>10 \quad \therefore\ x>2$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$2<x<4$



이므로 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 3이다.

$x=3$을 $ax+10=7$에 대입하면

$3a+10=7 \quad \therefore\ a=-1$ 답 -1

0877 전략 연립부등식 $\begin{cases} x\geq a \\ x\leq b \end{cases}$의 해가 한 개이면 $a=b$임을 이용한다.

풀이 $2-7x\leq x+a$에서 $\quad -8x\leq a-2 \quad \therefore\ x\geq \dfrac{2-a}{8}$

$4x+1\geq 5x+2$에서 $\quad -x\geq 1 \quad \therefore\ x\leq -1$ $\quad\cdots$ ❶

주어진 연립부등식의 해가 한 개이므로

$\frac{2-a}{8}=-1, \quad 2-a=-8$

$\therefore a=10$ ⋯➋

이때 그 해는 $x=-1$이므로

$b=-1$ ⋯➌

답 $a=10,\ b=-1$

채점 기준	비율
❶ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	40%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30%

0878 전략 부등식을 푼 후 주어진 해와 비교한다.

풀이 주어진 부등식에서 $\begin{cases} -8<6x-a & \cdots\cdots ㉠ \\ 6x-a<5x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $-6x<-a+8 \quad \therefore x>\frac{a-8}{6}$

㉡에서 $x<a$

주어진 부등식의 해가 $b<x<2$이므로

$\frac{a-8}{6}=b,\ a=2$

$\therefore a=2,\ b=-1$

$\therefore a-b=3$

답 ④

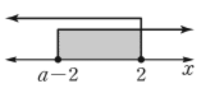
0879 전략 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분이 있도록 해를 수직선 위에 나타낸다.

풀이 $\begin{cases} x-2\le 2x-a & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-4\le 12-5x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $-x\le -a+2 \quad \therefore x\ge a-2$

㉡에서 $8x\le 16 \quad \therefore x\le 2$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$a-2\le 2 \quad \therefore a\le 4$

따라서 a의 최댓값은 4이다.

답 ④

0880 전략 연속하는 세 개의 3의 배수를 $x,\ x+3,\ x+6$으로 놓고 부등식을 세운다.

풀이 연속하는 세 개의 3의 배수를 $x,\ x+3,\ x+6$이라 하면

$90<x+(x+3)+(x+6)\le 99$

$90<3x+9\le 99, \quad 81<3x\le 90$

$\therefore 27<x\le 30$

x는 3의 배수이므로 $\quad x=30$

따라서 연속하는 세 개의 3의 배수는 30, 33, 36이므로 가장 큰 수는 36이다.

답 36

0881 전략 염소 우리의 개수를 x라 하고 염소의 수를 x로 나타낸다.

풀이 염소 우리의 개수를 x라 하면 염소는 $(6x+5)$마리이므로

$8(x-2)+1\le 6x+5\le 8(x-2)+8$

즉 $\begin{cases} 8(x-2)+1\le 6x+5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 6x+5\le 8(x-2)+8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ ⋯➊

㉠에서 $8x-15\le 6x+5$

$2x\le 20 \quad \therefore x\le 10$

㉡에서 $6x+5\le 8x-8$

$-2x\le -13 \quad \therefore x\ge \frac{13}{2}$

$\therefore \frac{13}{2}\le x\le 10$ ⋯➋

따라서 염소 우리는 최대 10개이다. ⋯➌

답 10개

채점 기준	비율
❶ 염소 우리의 개수를 x라 하고 연립부등식을 세울 수 있다.	50%
❷ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	30%
❸ 염소 우리는 최대 몇 개인지 구할 수 있다.	20%

0882 전략 부등식 $|x-a|<b\,(b>0)$의 해는 $a-b<x<a+b$임을 이용한다.

풀이 $|ax-1|<b$에서 $\quad -b<ax-1<b$

$1-b<ax<1+b$

$\therefore \frac{1-b}{a}<x<\frac{1+b}{a}\ (\because a>0)$

주어진 부등식의 해가 $-1<x<2$이므로

$\frac{1-b}{a}=-1,\ \frac{1+b}{a}=2$

$\therefore a-b=-1,\ 2a-b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=3$

$\therefore ab=6$

답 ③

0883 전략 $x<1,\ 1\le x<4,\ x\ge 4$로 범위를 나누어 푼다.

풀이 $2|x-4|+|x-1|\ge 9$에서

(i) $x<1$일 때,

$-2(x-4)-(x-1)\ge 9$

$-3x\ge 0 \quad \therefore x\le 0$

그런데 $x<1$이므로 $\quad x\le 0$

(ii) $1\le x<4$일 때,

$-2(x-4)+(x-1)\ge 9$

$-x\ge 2 \quad \therefore x\le -2$

그런데 $1\le x<4$이므로 해는 없다.

(iii) $x\ge 4$일 때,

$2(x-4)+(x-1)\ge 9$

$3x\ge 18 \quad \therefore x\ge 6$

그런데 $x\ge 4$이므로 $\quad x\ge 6$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$x\le 0$ 또는 $x\ge 6$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x의 최솟값은 6이다.

답 6

0884 전략 부등식 $Ax<B$의 해가 $x<C$이면 $A>0,\ \frac{B}{A}=C$이다.

풀이 $a+b=0$에서 $\quad b=-a \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠을 주어진 부등식에 대입하면

$ax-2a<4ax+3a-12$

$-3ax<5a-12$ ⋯➊

이 부등식의 해가 $x<-3$이므로

$a<0$, $\dfrac{5a-12}{-3a}=-3$

$5a-12=9a$, $\quad -4a=12$

$\therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=3$ ⋯ ❷

$\therefore ab=-9$ ⋯ ❸

답 -9

채점 기준	비율
❶ 조건을 이용하여 주어진 부등식을 변형할 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20%

0885 전략 부등식 $Ax>B$의 해가 존재하지 않을 조건은 $A=0$, $B\geq 0$이다.

풀이 $a(x-2)>b(x+1)-15$에서

$ax-2a>bx+b-15$

$\therefore (a-b)x>2a+b-15$

이 부등식의 해가 없으려면

$a-b=0$, $2a+b-15\geq 0$

$\therefore a=b$, $2a+b-15\geq 0$

$a=b$를 $2a+b-15\geq 0$에 대입하면

$2a+a-15\geq 0$, $\quad 3a\geq 15$

$\therefore a\geq 5$

따라서 a의 최솟값은 5이다.

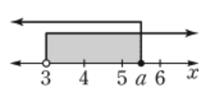
답 5

0886 전략 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 자연수가 2개 포함되도록 하는 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 $3x+1>10$에서

$3x>9 \qquad \therefore x>3$

주어진 연립부등식을 만족시키는 자연수 x가 2개이므로 오른쪽 그림에서



$5\leq a<6$

답 ③

0887 전략 y를 x에 대한 식으로 나타내고 주어진 부등식에 대입하여 x에 대한 연립부등식으로 바꾼 후 해를 구한다.

풀이 $2x+y=5$에서 $\quad y=5-2x$

이것을 주어진 부등식에 대입하면

$3x-9\leq 5-2x-4<2x+5$

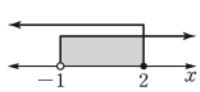
$\therefore 3x-9\leq 1-2x<2x+5$

즉 $\begin{cases} 3x-9\leq 1-2x & \cdots\cdots ㉠ \\ 1-2x<2x+5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad 5x\leq 10 \qquad \therefore x\leq 2$

㉡에서 $\quad -4x<4 \qquad \therefore x>-1$

따라서 주어진 부등식의 해는



$-1<x\leq 2$

이므로 정수 x는 0, 1, 2의 3개이고 구하는 해의 개수는 3이다.

답 3

0888 전략 빵 A의 개수를 x라 하고 빵 B의 개수를 x로 나타낸다.

풀이 빵 A의 개수를 x라 하면 빵 B의 개수는 $12-x$이므로

$\begin{cases} 50x+100(12-x)\leq 1000 & \cdots\cdots ㉠ \\ 20x+15(12-x)\leq 220 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad -50x+1200\leq 1000$, $\quad -50x\leq -200 \qquad \therefore x\geq 4$

㉡에서 $\quad 5x+180\leq 220$, $\quad 5x\leq 40 \qquad \therefore x\leq 8$

$\therefore 4\leq x\leq 8$

따라서 빵 A는 최대 8개까지 만들 수 있다.

답 ⑤

0889 전략 먼저 $x\geq 1$, $x<1$로 범위를 나누어 주어진 부등식을 푼다.

풀이 $|x-1|>2x+1$에서

(i) $x\geq 1$일 때, $x-1\geq 0$이므로

$x-1>2x+1$, $\quad -x>2 \qquad \therefore x<-2$

그런데 $x\geq 1$이므로 해는 없다.

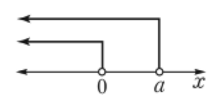
(ii) $x<1$일 때, $x-1<0$이므로

$-(x-1)>2x+1$, $\quad -3x>0 \qquad \therefore x<0$

그런데 $x<1$이므로 $\quad x<0$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $\quad x<0$

따라서 $x<0$이 $x<a$에 포함되려면 오른쪽 그림에서 $a\geq 0$이어야 하므로 a의 최솟값은 0이다.



답 ⑤

08 이차부등식

Ⅲ. 부등식

0890 부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하면 다음과 같다.
ㄱ. $-x-3<0$ ㄴ. $x^2-3x-1>0$
ㄷ. $6\ge0$ ㄹ. $x^2-1\le0$
이상에서 이차부등식은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄹ

0891 답 $x<-3$ 또는 $x>-1$ 0892 답 $-3<x<-1$

0893 답 $x\le-3$ 또는 $x\ge-1$ 0894 답 $-3\le x\le-1$

0895 답 $x=-2$ 또는 $x=2$ 0896 답 $x=-3$ 또는 $x=1$

0897 답 $-2\le x\le2$ 0898 답 $x\le-3$ 또는 $x\ge1$

0899 답 $x<3$ 또는 $x>5$ 0900 답 $3\le x\le5$

0901 답 $x\ne2$인 모든 실수 0902 답 $x=2$

0903 답 해는 없다. 0904 답 모든 실수

0905 답 $x\le2$ 또는 $x\ge7$ 0906 답 $-5<x<1$

0907 답 모든 실수 0908 답 해는 없다.

0909 답 모든 실수 0910 답 해는 없다.

0911 $x^2-5x+6<0$에서 $(x-2)(x-3)<0$
$\therefore 2<x<3$ 답 $2<x<3$

0912 $-3x^2+10x-3\le0$에서 $3x^2-10x+3\ge0$
$(3x-1)(x-3)\ge0$ $\therefore x\le\frac{1}{3}$ 또는 $x\ge3$
답 $x\le\frac{1}{3}$ 또는 $x\ge3$

0913 $x^2-6x+9=(x-3)^2>0$
따라서 $x^2-6x+9>0$의 해는 $x\ne3$인 모든 실수이다.
답 $x\ne3$인 모든 실수

0914 $-x^2+2x-1\ge0$에서 $x^2-2x+1\le0$
$x^2-2x+1=(x-1)^2\ge0$
따라서 $-x^2+2x-1\ge0$의 해는 $x=1$이다.
답 $x=1$

0915 $x^2+6x+11=(x+3)^2+2\ge2$
따라서 $x^2+6x+11>0$의 해는 모든 실수이다.
답 모든 실수

0916 $-x^2-x-1\ge0$에서 $x^2+x+1\le0$
$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$
따라서 $-x^2-x-1\ge0$의 해는 없다. 답 해는 없다.

0917 $(x-1)(x-3)<0$에서 $x^2-4x+3<0$
답 $x^2-4x+3<0$

0918 $(x+7)(x-1)>0$에서 $x^2+6x-7>0$
답 $x^2+6x-7>0$

0919 $(x+5)(x-2)\le0$에서 $x^2+3x-10\le0$
답 $x^2+3x-10\le0$

0920 $(x+2)(x-9)\ge0$에서 $x^2-7x-18\ge0$
답 $x^2-7x-18\ge0$

0921 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=x^2-kx+k+3$의 그래프가 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $x^2-kx+k+3=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-k)^2-4\cdot1\cdot(k+3)<0$
$k^2-4k-12<0,\quad (k+2)(k-6)<0$
$\therefore -2<k<6$ 답 $-2<k<6$

0922 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=-x^2+kx-4$의 그래프가 x축에 접하거나 x축보다 항상 아래쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $-x^2+kx-4=0$, 즉 $x^2-kx+4=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-k)^2-4\cdot1\cdot4\le0$
$k^2-16\le0,\quad (k+4)(k-4)\le0$
$\therefore -4\le k\le4$ 답 $-4\le k\le4$

0923 모든 실수 x에 대하여 주어진 이차부등식이 성립하려면
$k>0$ …… ㉠
이차함수 $y=kx^2+3kx+8$의 그래프가 x축에 접하거나 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $kx^2+3kx+8=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(3k)^2-4\cdot k\cdot8\le0$
$9k^2-32k\le0,\quad k(9k-32)\le0$
$\therefore 0\le k\le\frac{32}{9}$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $0<k\le\frac{32}{9}$ 답 $0<k\le\frac{32}{9}$

0924 모든 실수 x에 대하여 주어진 이차부등식이 성립하려면
$k<0$ …… ㉠
이차함수 $y=kx^2-kx-4$의 그래프가 x축보다 항상 아래쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $kx^2-kx-4=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-k)^2-4\cdot k\cdot(-4)<0$
$k^2+16k<0,\quad k(k+16)<0$
$\therefore -16<k<0$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $-16<k<0$ 답 $-16<k<0$

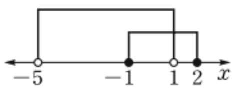
0925 (1) $x^2-x-2\le0$에서 $(x+1)(x-2)\le0$

$\therefore -1\le x\le2$

(2) $x^2+4x-5<0$에서 $(x+5)(x-1)<0$

$\therefore -5<x<1$

(3)



(4) $-1\le x<1$

답 풀이 참조

0926 $x+7\ge0$에서 $x\ge-7$ ······ ㉠

$(x-3)(x-5)\le0$에서 $3\le x\le5$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$3\le x\le5$

답 $3\le x\le5$

0927 $4x-1<3x-7$에서 $x<-6$ ······ ㉠

$x^2-3x\le54$에서 $x^2-3x-54\le0$

$(x+6)(x-9)\le0$ $\therefore -6\le x\le9$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.

답 해는 없다.

0928 $x^2+3x-4<0$에서 $(x+4)(x-1)<0$

$\therefore -4<x<1$ ······ ㉠

$x^2+5x\le0$에서 $x(x+5)\le0$

$\therefore -5\le x\le0$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-4<x\le0$

답 $-4<x\le0$

0929 $x^2+6\le7x$에서 $x^2-7x+6\le0$

$(x-1)(x-6)\le0$ $\therefore 1\le x\le6$ ······ ㉠

$x^2-5x<x-8$에서 $x^2-6x+8<0$

$(x-2)(x-4)<0$ $\therefore 2<x<4$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$2<x<4$

답 $2<x<4$

0930 $2\le x^2+x$에서 $x^2+x-2\ge0$

$(x+2)(x-1)\ge0$ $\therefore x\le-2$ 또는 $x\ge1$ ······ ㉠

$x^2+x\le6$에서 $x^2+x-6\le0$

$(x+3)(x-2)\le0$ $\therefore -3\le x\le2$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3\le x\le-2$ 또는 $1\le x\le2$

답 $-3\le x\le-2$ 또는 $1\le x\le2$

0931 $-2x-6<x^2-14$에서 $x^2+2x-8>0$

$(x+4)(x-2)>0$ $\therefore x<-4$ 또는 $x>2$ ······ ㉠

$x^2-14\le5x$에서 $x^2-5x-14\le0$

$(x+2)(x-7)\le0$ $\therefore -2\le x\le7$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$2<x\le7$

답 $2<x\le7$

0932 부등식 $f(x)>g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x<2$ 또는 $x>3$

답 ③

0933 $px^2+(q-m)x+r-n<0$에서

$px^2+qx+r-(mx+n)<0$

$\therefore px^2+qx+r<mx+n$

부등식 $px^2+qx+r<mx+n$의 해는 이차함수 $y=px^2+qx+r$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$b<x<d$

답 $b<x<d$

0934 $f(x)g(x)>0$에서

$f(x)>0,\ g(x)>0$ 또는 $f(x)<0,\ g(x)<0$ ··· ❶

(i) $f(x)>0$, $g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$f(x)>0$일 때, $x<-1$ 또는 $x>2$ ······ ㉠

$g(x)>0$일 때, $-3<x<1$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-3<x<-1$ ··· ❷

(ii) $f(x)<0$, $g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$f(x)<0$일 때, $-1<x<2$ ······ ㉢

$g(x)<0$일 때, $x<-3$ 또는 $x>1$ ······ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $1<x<2$ ··· ❸

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-3<x<-1$ 또는 $1<x<2$ ··· ❹

답 $-3<x<-1$ 또는 $1<x<2$

채점 기준	비율
❶ $f(x)g(x)>0$이면 $f(x)>0,\ g(x)>0$ 또는 $f(x)<0,\ g(x)<0$임을 알 수 있다.	10%
❷ $f(x)>0,\ g(x)>0$일 때 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ $f(x)<0,\ g(x)<0$일 때 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❹ $f(x)g(x)>0$의 해를 구할 수 있다.	10%

0935 $x^2+2x-15>0$에서 $(x+5)(x-3)>0$

$\therefore x<-5$ 또는 $x>3$

따라서 $\alpha=-5$, $\beta=3$이므로

$\alpha-\beta=-8$

답 ①

다른풀이 α, β가 이차방정식 $x^2+2x-15=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-15$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(-2)^2-4\cdot(-15)=64$

$\therefore \alpha-\beta=\pm8$

이때 $\alpha<\beta$에서 $\alpha-\beta<0$이므로

$\alpha-\beta=-8$

라쎈 특강 **이차방정식의 근과 계수의 관계**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 할 때

① $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ ② $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

0936 $x^2-x-12\le0$에서 $(x+3)(x-4)\le0$
$\therefore -3\le x\le4$
따라서 정수 x는 $-3, -2, -1, \cdots, 4$의 8개이다. 답 8

0937 ① $x^2-10x+25=(x-5)^2\ge0$
따라서 $x^2-10x+25\le0$의 해는 $x=5$이다.
② $x^2-2x+3=(x-1)^2+2\ge2$
따라서 $x^2-2x+3\le0$의 해는 없다.
③ $-4x^2+4x-\frac{7}{4}<0$에서 $4x^2-4x+\frac{7}{4}>0$
$4x^2-4x+\frac{7}{4}=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$
따라서 $-4x^2+4x-\frac{7}{4}<0$의 해는 모든 실수이다.
④ $9x^2\le6x-1$에서 $9x^2-6x+1\le0$
$9x^2-6x+1=(3x-1)^2\ge0$
따라서 $9x^2\le6x-1$의 해는 $x=\frac{1}{3}$이다.
⑤ $2(x^2+5)>x^2-8x-6$에서 $x^2+8x+16>0$
$x^2+8x+16=(x+4)^2\ge0$
따라서 $2(x^2+5)>x^2-8x-6$의 해는 $x\ne-4$인 모든 실수이다.
답 ②

0938 $x^2-2x-5<|x-1|$에서
(i) $x\ge1$일 때,
$x^2-2x-5<x-1$, $x^2-3x-4<0$
$(x+1)(x-4)<0$ $\therefore -1<x<4$
그런데 $x\ge1$이므로 $1\le x<4$
(ii) $x<1$일 때,
$x^2-2x-5<-(x-1)$, $x^2-x-6<0$
$(x+2)(x-3)<0$ $\therefore -2<x<3$
그런데 $x<1$이므로 $-2<x<1$
(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-2<x<4$
따라서 정수 x는 $-1, 0, 1, 2, 3$이므로 구하는 합은 5이다. 답 5

0939 해가 $-8<x<2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+8)(x-2)<0$ $\therefore x^2+6x-16<0$
따라서 $a=6$, $b=-16$이므로
$a+b=-10$ 답 -10
다른풀이 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 -8, 2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-a=-8+2$, $b=-8\cdot2$ $\therefore a=6$, $b=-16$
$\therefore a+b=-10$

0940 해가 $x<1$ 또는 $x>b$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-1)(x-b)>0$ $\therefore x^2-(b+1)x+b>0$
따라서 $a=-(b+1)$, $3=b$이므로
$a=-4$, $b=3$
$\therefore ab=-12$ 답 ①
다른풀이 이차방정식 $x^2+ax+3=0$의 두 근이 1, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-a=1+b$, $3=1\cdot b$ $\therefore a=-4$, $b=3$
$\therefore ab=-12$

0941 부등식 $f(x)\le0$의 해가 $-2\le x\le0$이므로
$f(x)=ax(x+2)(a>0)$
로 놓을 수 있다. ··· ❶
이때 $f(1)=6$에서 $f(1)=a\cdot1\cdot(1+2)=6$
$\therefore a=2$ ··· ❷
따라서 $f(x)=2x(x+2)$이므로
$f(3)=2\cdot3\cdot5=30$ ··· ❸
답 30

채점 기준	비율
❶ $f(x)=ax(x+2)(a>0)$로 놓을 수 있다.	50%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	20%

0942 해가 $1<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-1)(x-3)<0$ $\therefore x^2-4x+3<0$
따라서 $a=-4$, $b=3$이므로 이것을 $bx^2+ax+1>0$에 대입하면
$3x^2-4x+1>0$, $(3x-1)(x-1)>0$
$\therefore x<\frac{1}{3}$ 또는 $x>1$ 답 ③

0943 $f(x)<0$의 해가 $-1<x<4$이므로
$f(x)=a(x+1)(x-4)$ $(a>0)$
라 하면
$f(2x)=a(2x+1)(2x-4)$
$=2a(2x+1)(x-2)$
따라서 부등식 $f(2x)<0$의 해는 $2a(2x+1)(x-2)<0$에서
$(2x+1)(x-2)<0$ $\therefore -\frac{1}{2}<x<2$ 답 $-\frac{1}{2}<x<2$

0944 $f(x)\le0$의 해가 $2\le x\le5$이므로
$f(x)=a(x-2)(x-5)$ $(a>0)$
라 하면
$f(3x-1)=a(3x-1-2)(3x-1-5)$
$=9a(x-1)(x-2)$
즉 부등식 $f(3x-1)\ge0$의 해는 $9a(x-1)(x-2)\ge0$에서
$(x-1)(x-2)\ge0$ $\therefore x\le1$ 또는 $x\ge2$
따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로
$\alpha\beta=2$ 답 ④

0945 $f(x)<0$의 해가 $x<-2$ 또는 $x>6$이므로
$f(x)=a(x+2)(x-6)$ $(a<0)$
이라 하면
$f(-x)=a(-x+2)(-x-6)$
$=a(x-2)(x+6)$
즉 부등식 $f(-x)>0$의 해는 $a(x-2)(x+6)>0$에서
$(x+6)(x-2)<0$ $\therefore -6<x<2$
따라서 정수 x는 $-5, -4, -3, \cdots, 1$의 7개이다. 답 ④

0946 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 $f(x)\ge0$의 해가 $x\le3$ 또는 $x\ge4$이므로
$f(x)=a(x-3)(x-4)(a>0)$

부등식 $a(x-5)^2+b(x-5)+c<0$, 즉 $f(x-5)<0$의 해는
$a(x-5-3)(x-5-4)<0$에서

$(x-8)(x-9)<0$　　$\therefore 8<x<9$　　답 $8<x<9$

다른풀이 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 $f(x)\geq 0$의 해가
$x\leq 3$ 또는 $x\geq 4$
이므로 $f(x)<0$의 해는 $3<x<4$이다.
따라서 $a(x-5)^2+b(x-5)+c<0$, 즉 $f(x-5)<0$의 해는
$3<x-5<4$　　$\therefore 8<x<9$

다른풀이 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면
$f(x)=a(x-3)(x-4)\,(a>0)$
$=ax^2-7ax+12a$
따라서 $b=-7a$, $c=12a$이므로 이것을
$a(x-5)^2+b(x-5)+c<0$에 대입하면
$a(x-5)^2-7a(x-5)+12a<0$
$x^2-17x+72<0$,　$(x-8)(x-9)<0$
$\therefore 8<x<9$

0947 $x^2-|x|-2<0$에서
(i) $x\geq 0$일 때,
$x^2-x-2<0$,　$(x+1)(x-2)<0$
$\therefore -1<x<2$
그런데 $x\geq 0$이므로　$0\leq x<2$
(ii) $x<0$일 때,
$x^2+x-2<0$,　$(x+2)(x-1)<0$
$\therefore -2<x<1$
그런데 $x<0$이므로　$-2<x<0$
(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는　$-2<x<2$
따라서 $\alpha=-2$, $\beta=2$이므로　$\dfrac{\beta}{\alpha}=-1$　　답 -1

0948 $x^2-5x\leq|x-5|$에서
(i) $x\geq 5$일 때,
$x^2-5x\leq x-5$,　$x^2-6x+5\leq 0$
$(x-1)(x-5)\leq 0$　$\therefore 1\leq x\leq 5$
그런데 $x\geq 5$이므로　$x=5$
(ii) $x<5$일 때,
$x^2-5x\leq-(x-5)$,　$x^2-4x-5\leq 0$
$(x+1)(x-5)\leq 0$　$\therefore -1\leq x\leq 5$
그런데 $x<5$이므로　$-1\leq x<5$
(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는　$-1\leq x\leq 5$
따라서 정수 x는 $-1, 0, 1, \cdots, 5$의 7개이다.　　답 ④

0949 $|x^2-1|>3$에서
$x^2-1<-3$ 또는 $x^2-1>3$　　⋯ ❶
(i) $x^2-1<-3$에서　$x^2+2<0$
$x^2+2\geq 2$
따라서 $x^2+2<0$의 해는 없다.
(ii) $x^2-1>3$에서　$x^2-4>0$
$(x+2)(x-2)>0$　$\therefore x<-2$ 또는 $x>2$　　⋯ ❷
(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는　$x<-2$ 또는 $x>2$　　⋯ ❸
답 $x<-2$ 또는 $x>2$

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식을 변형할 수 있다.	30%
❷ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	50%
❸ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	20%

0950 이차부등식 $x^2-4x+a\leq 0$이 오직 한 개의 실근을 가지므로 이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot a=0$,　$4-a=0$　$\therefore a=4$　　답 4

0951 이차부등식 $-x^2+kx-5\geq 0$, 즉 $x^2-kx+5\leq 0$이 오직 한 개의 실근을 가지므로 이차방정식 $x^2-kx+5=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-k)^2-4\cdot 1\cdot 5=0$,　$k^2-20=0$
$\therefore k=-2\sqrt{5}$ 또는 $k=2\sqrt{5}$
따라서 모든 실수 k의 값의 곱은 -20이다.　　답 -20

0952 주어진 이차부등식이 오직 한 개의 실근을 가지므로
$a+1>0$　$\therefore a>-1$　　⋯⋯ ㉠
이차방정식 $(a+1)x^2+2(a+1)x+2=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=(a+1)^2-(a+1)\cdot 2=0$
$a^2-1=0$,　$(a+1)(a-1)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$　　⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡에서　$a=1$　　답 1

0953 이차부등식 $x^2-x+a<0$이 해를 가지려면 이차방정식 $x^2-x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot a>0$,　$1-4a>0$
$\therefore a<\dfrac{1}{4}$　　답 $a<\dfrac{1}{4}$

0954 $-2x^2+4x-a>0$에서　$2x^2-4x+a<0$
이 부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $2x^2-4x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-2\cdot a>0$,　$4-2a>0$
$\therefore a<2$
따라서 정수 a의 최댓값은 1이다.　　답 ①

0955 (i) $a>0$일 때,
이차함수 $y=ax^2+4x+a$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.
(ii) $a<0$일 때,
주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $ax^2+4x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=2^2-a\cdot a>0$,　$4-a^2>0$
$(a+2)(a-2)<0$　$\therefore -2<a<2$
그런데 $a<0$이므로　$-2<a<0$

(i), (ii)에서 a의 값의 범위는 $\quad -2<a<0$ 또는 $a>0$ 　답 ②

참고 $a=0$이면 주어진 부등식이 이차부등식이 아니므로 $a\neq0$이다.

0956 모든 실수 x에 대하여 $kx^2+4kx+8>0$이 성립해야 하므로

$k>0$ …… ㉠

이차방정식 $kx^2+4kx+8=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-k\cdot8<0, \quad 4k^2-8k<0$

$k(k-2)<0 \quad \therefore 0<k<2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 k의 값의 범위는 $\quad 0<k<2$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=2$이므로 $\quad \alpha+\beta=2$ 　답 ②

0957 모든 실수 x에 대하여 $x^2+3ax+9\geq0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+3ax+9=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(3a)^2-4\cdot1\cdot9\leq0$

$9a^2-36\leq0, \quad (a+2)(a-2)\leq0$

$\therefore -2\leq a\leq2$ 　답 $-2\leq a\leq2$

0958 실수 x의 값에 관계없이 $(k-1)x^2+2(k-1)x-1\leq0$이 항상 성립해야 하므로

$k-1<0 \quad \therefore k<1$ …… ㉠

이차방정식 $(k-1)x^2+2(k-1)x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k-1)\cdot(-1)\leq0$

$k^2-k\leq0, \quad k(k-1)\leq0$

$\therefore 0\leq k\leq1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 k의 값의 범위는 $\quad 0\leq k<1$

따라서 정수 k는 0의 1개이다. 　답 ①

0959 주어진 부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식

$x^2-(m-8)x+m\geq0$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-(m-8)x+m=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(m-8)\}^2-4\cdot1\cdot m\leq0$

$m^2-20m+64\leq0, \quad (m-4)(m-16)\leq0$

$\therefore 4\leq m\leq16$

따라서 m의 최댓값은 16, 최솟값은 4이므로 구하는 합은 20이다.

답 ⑤

라쎈 특강 이차부등식이 해를 갖지 않을 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

① $ax^2+bx+c>0$을 만족시키는 x가 존재하지 않는다.
　→ $a<0$, $D\leq0$

② $ax^2+bx+c\geq0$을 만족시키는 x가 존재하지 않는다.
　→ $a<0$, $D<0$

③ $ax^2+bx+c<0$을 만족시키는 x가 존재하지 않는다.
　→ $a>0$, $D\leq0$

④ $ax^2+bx+c\leq0$을 만족시키는 x가 존재하지 않는다.
　→ $a>0$, $D<0$

0960 $-x^2+4(a+2)x+a+2>0$에서

$x^2-4(a+2)x-(a+2)<0$

이 부등식의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식

$x^2-4(a+2)x-(a+2)\geq0$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-4(a+2)x-(a+2)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-2(a+2)\}^2+(a+2)\leq0$

$4a^2+17a+18\leq0, \quad (4a+9)(a+2)\leq0$

$\therefore -\frac{9}{4}\leq a\leq-2$

따라서 정수 a의 값은 -2이다. 　답 ①

0961 이차부등식 $(k-4)x^2-2(k-4)x-1>0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식

$(k-4)x^2-2(k-4)x-1\leq0$

이 성립해야 하므로

$k-4<0 \quad \therefore k<4$ …… ㉠ ··· ❶

이차방정식 $(k-4)x^2-2(k-4)x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-4)\}^2-(k-4)\cdot(-1)\leq0$

$k^2-7k+12\leq0, \quad (k-3)(k-4)\leq0$

$\therefore 3\leq k\leq4$ …… ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡에서 k의 값의 범위는 $\quad 3\leq k<4$ ··· ❸

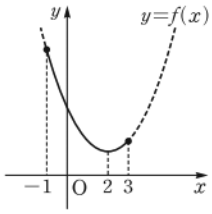
답 $3\leq k<4$

채점 기준	비율
❶ x^2의 계수를 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❷ 이차방정식의 판별식을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%

0962 $f(x)=x^2-4x+2a^2-a+1$이라 하면

$f(x)=(x-2)^2+2a^2-a-3$

$-1\leq x\leq3$에서 $f(x)>0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$-1\leq x\leq3$에서 $f(x)$는 $x=2$일 때 최소이므로 $f(2)>0$에서

$2a^2-a-3>0$

$(a+1)(2a-3)>0$

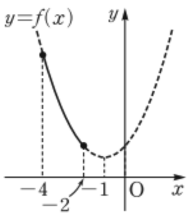
$\therefore a<-1$ 또는 $a>\frac{3}{2}$ 　답 $a<-1$ 또는 $a>\frac{3}{2}$

0963 $x^2+3x-1>x-4a^2$에서 $\quad x^2+2x+4a^2-1>0$

$f(x)=x^2+2x+4a^2-1$이라 하면

$f(x)=(x+1)^2+4a^2-2$

$-4\leq x\leq-2$에서 $f(x)>0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$-4\leq x\leq-2$에서 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최소이므로 $f(-2)>0$에서

$4a^2-1>0, \quad (2a+1)(2a-1)>0$

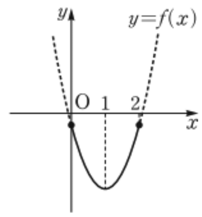
$\therefore a<-\frac{1}{2}$ 또는 $a>\frac{1}{2}$

따라서 자연수 a의 최솟값은 1이다. 　답 ①

0964 $f(x)=2x^2-4x+a^2-3a+2$라 하면

$f(x)=2(x-1)^2+a^2-3a$

$0\le x\le 2$에서 $f(x)<0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$0\le x\le 2$에서 $f(x)$는 $x=0$ 또는 $x=2$일 때 최대이므로 $f(0)<0$에서

$a^2-3a+2<0$

$(a-1)(a-2)<0$

$\therefore 1<a<2$

답 $1<a<2$

0965 $y=x^2-x+5$의 그래프가 직선 $y=2x+15$보다 위쪽에 있으면

$x^2-x+5>2x+15,\quad x^2-3x-10>0$

$(x+2)(x-5)>0\quad \therefore x<-2$ 또는 $x>5$

답 $x<-2$ 또는 $x>5$

0966 $y=-x^2+ax-b$의 그래프가 직선 $y=-x+5$보다 위쪽에 있으면

$-x^2+ax-b>-x+5$

$\therefore x^2-(a+1)x+b+5<0$ …… ㉠

해가 $5<x<6$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-5)(x-6)<0\quad \therefore x^2-11x+30<0$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로 $a+1=11,\ b+5=30$

$\therefore a=10,\ b=25$

$\therefore b-a=15$

답 ③

0967 $y=2x^2-3x-3$의 그래프가 $y=x^2+mx+n$의 그래프보다 아래쪽에 있으면

$2x^2-3x-3<x^2+mx+n$

$\therefore x^2-(3+m)x-(3+n)<0$ …… ㉠

해가 $-1<x<2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-2)<0\quad \therefore x^2-x-2<0$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로 $3+m=1,\ 3+n=2$

$\therefore m=-2,\ n=-1$

$\therefore m+n=-3$

답 ①

0968 $y=-2x^2-4x+1$의 그래프가 직선 $y=ax+3$보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $-2x^2-4x+1<ax+3$, 즉 $2x^2+(4+a)x+2>0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $2x^2+(4+a)x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(4+a)^2-4\cdot 2\cdot 2<0$

$a^2+8a<0,\quad a(a+8)<0$

$\therefore -8<a<0$

답 $-8<a<0$

0969 $y=x^2-3x+1$의 그래프가 직선 $y=mx-3$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-3x+1>mx-3$, 즉 $x^2-(3+m)x+4>0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-(3+m)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(3+m)\}^2-4\cdot 1\cdot 4<0$

$m^2+6m-7<0,\quad (m+7)(m-1)<0$

$\therefore -7<m<1$

따라서 정수 m의 최댓값은 0, 최솟값은 -6이므로 구하는 합은 -6이다.

답 ①

0970 $y=x^2-mx$의 그래프는 아래로 볼록하므로 이 그래프가 직선 $y=-3$과 만나지 않으려면 $y=x^2-mx$의 그래프가 직선 $y=-3$보다 항상 위쪽에 있어야 한다. ··· ❶

따라서 모든 실수 x에 대하여 $x^2-mx>-3$, 즉 $x^2-mx+3>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-mx+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-m)^2-4\cdot 1\cdot 3<0$

$m^2-12<0,\quad (m+2\sqrt{3})(m-2\sqrt{3})<0$

$\therefore -2\sqrt{3}<m<2\sqrt{3}$ ··· ❷

그러므로 정수 m은 $-3,\ -2,\ -1,\ \cdots,\ 3$의 7개이다. ··· ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ $y=x^2-mx$의 그래프와 직선 $y=-3$의 위치 관계를 알 수 있다.	30%
❷ m의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ 정수 m의 개수를 구할 수 있다.	20%

0971 가격을 x만 원 인상한다고 하면 구두의 가격은

$(10+x)$만 원

구두의 하루 판매량은

$(30-2x)$켤레 $30-2x>0$이어야 하므로 $0<x<15$

하루 판매액이 308만 원 이상이 되려면

$(10+x)(30-2x)\ge 308,\quad -2x^2+10x+300\ge 308$

$x^2-5x+4\le 0,\quad (x-1)(x-4)\le 0$

$\therefore 1\le x\le 4$

답 $1\le x\le 4$

0972 도로의 폭을 x m라 하면 남은 땅을 직사각형 모양으로 이어 붙였을 때 가로, 세로의 길이는 각각

$(40-x)$m, $(30-x)$m $40-x>0,\ 30-x>0$이어야 하므로 $0<x<30$

이므로 남은 땅의 넓이가 600 m^2 이상이 되려면

$(40-x)(30-x)\ge 600$ ··· ❶

$x^2-70x+600\ge 0,\quad (x-10)(x-60)\ge 0$

$\therefore x\le 10$ 또는 $x\ge 60$

그런데 $0<x<30$이어야 하므로 $0<x\le 10$ ··· ❷

따라서 도로의 최대 폭은 10 m이다. ··· ❸

답 10 m

채점 기준	비율
❶ 도로의 폭을 x m라 하고 x에 대한 이차부등식을 세울 수 있다.	50%
❷ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❸ 도로의 최대 폭을 구할 수 있다.	20%

0973 야구공의 높이 h m가 3.2 m 이상이 되려면

$-5t^2+8t+0.8\ge 3.2,\quad 5t^2-8t+2.4\le 0$

$25t^2-40t+12\le 0,\quad (5t-2)(5t-6)\le 0$

$\therefore \dfrac{2}{5}\le t\le \dfrac{6}{5}$

따라서 야구공의 높이가 3.2 m 이상인 시간은 $\frac{6}{5}-\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$(초) 동안이다.

답 ②

0974 $x^2+3x-10>0$에서 $(x+5)(x-2)>0$

$\therefore x<-5$ 또는 $x>2$ …… ㉠

$x^2-x-12\le0$에서 $(x+3)(x-4)\le0$

$\therefore -3\le x\le4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$2<x\le4$

따라서 $a=2$, $b=4$이므로 $ab=8$

답 8

0975 $2x+6<0$에서 $x<-3$ …… ㉠

$x^2+6x-7<0$에서 $(x+7)(x-1)<0$

$\therefore -7<x<1$ …… ㉡ ⋯ ❶

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-7<x<-3$ ⋯ ❷

따라서 정수 x는 -6, -5, -4이므로 구하는 합은 -15이다. ⋯ ❸

답 -15

채점 기준	비율
❶ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	50%
❷ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	30%
❸ 모든 정수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

0976 $|x-2|<6$에서 $-6<x-2<6$

$\therefore -4<x<8$ …… ㉠

$x^2-10x+9>0$에서 $(x-1)(x-9)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>9$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-4<x<1$

따라서 정수 x는 -3, -2, -1, 0의 4개이다.

답 ③

0977 $x^2+5x-3\le3x^2$에서 $2x^2-5x+3\ge0$

$(x-1)(2x-3)\ge0$ $\therefore x\le1$ 또는 $x\ge\frac{3}{2}$ …… ㉠

$3x^2\le-x+2$에서 $3x^2+x-2\le0$

$(x+1)(3x-2)\le0$ $\therefore -1\le x\le\frac{2}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1\le x\le\frac{2}{3}$

따라서 실수 x의 최댓값은 $\frac{2}{3}$이다.

답 ②

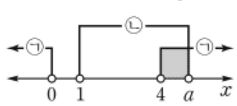
0978 $x^2-4x>0$에서 $x(x-4)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>4$ …… ㉠

$x^2-(a+1)x+a<0$에서

$(x-1)(x-a)<0$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 $4<x<5$이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



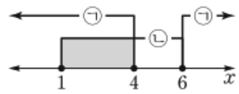
$a=5$

답 ③

0979 연립부등식

$\begin{cases} x^2+ax+b\ge0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+cx+d\le0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 해를 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



즉 $x^2+ax+b\ge0$의 해는 $x\le4$ 또는 $x\ge6$이므로

$(x-4)(x-6)\ge0$, $x^2-10x+24\ge0$

$\therefore a=-10$, $b=24$

또 $x^2+cx+d\le0$의 해는 $1\le x\le6$이므로

$(x-1)(x-6)\le0$, $x^2-7x+6\le0$

$\therefore c=-7$, $d=6$

$\therefore a+b+c+d=13$

답 ③

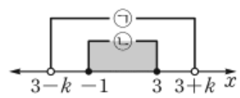
0980 $|x-3|<k$에서 $-k<x-3<k$

$\therefore 3-k<x<3+k$ …… ㉠

$x^2-2x-3\le0$에서 $(x+1)(x-3)\le0$

$\therefore -1\le x\le3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 5개이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



(i) $3-k<-1$에서 $k>4$

(ii) $3+k>3$에서 $k>0$

(i), (ii)에서 k의 값의 범위는 $k>4$

따라서 자연수 k의 최솟값은 5이다.

답 5

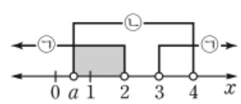
0981 $x^2-5x+6>0$에서 $(x-2)(x-3)>0$

$\therefore x<2$ 또는 $x>3$ …… ㉠

$x^2-(a+4)x+4a<0$에서

$(x-a)(x-4)<0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x의 값이 1뿐이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$0\le a<1$

답 ②

참고 $a=1$이면 $(x-a)(x-4)<0$의 해는 $1<x<4$

따라서 ㉠과의 공통부분은 $1<x<2$ 또는 $3<x<4$이므로 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x의 값은 없다.

0982 $x^2+2x-15>0$에서 $(x+5)(x-3)>0$

$\therefore x<-5$ 또는 $x>3$ …… ㉠

$|x-a|\le1$에서 $-1\le x-a\le1$

$\therefore a-1\le x\le a+1$ …… ㉡ ⋯ ❶

㉠, ㉡의 공통부분이 존재하려면

$a-1<-5$ 또는 $a+1>3$

$\therefore a<-4$ 또는 $a>2$ ⋯ ❷

따라서 자연수 a의 최솟값은 3이다. ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	30%
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ 자연수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

0983 이차방정식 $x^2+2kx+3k=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-3k>0$

$k(k-3)>0 \qquad \therefore k<0$ 또는 $k>3$

따라서 실수 k의 값이 아닌 것은 ③이다. 답 ③

0984 이차방정식 $x^2-4kx+k^2+1=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-(k^2+1)<0$

$3k^2-1<0, \qquad (\sqrt{3}k+1)(\sqrt{3}k-1)<0$

$\therefore -\frac{1}{\sqrt{3}}<k<\frac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 $\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $\qquad \alpha\beta=-\frac{1}{3}$ 답 ②

0985 이차방정식 $x^2-2kx+9=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-k)^2-9<0$

$k^2-9<0, \qquad (k+3)(k-3)<0$

$\therefore -3<k<3$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+2kx+k+2=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=k^2-(k+2)\ge 0$

$k^2-k-2\ge 0, \qquad (k+1)(k-2)\ge 0$

$\therefore k\le -1$ 또는 $k\ge 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\qquad -3<k\le -1$ 또는 $2\le k<3$

따라서 정수 k는 -2, -1, 2의 3개이다. 답 ③

0986 이차방정식 $x^2-2\sqrt{2}kx+k+1=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 양수이므로

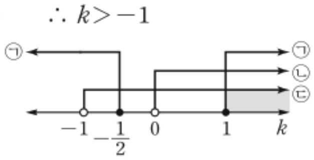
(i) $\frac{D}{4}=(-\sqrt{2}k)^2-(k+1)\ge 0$

$2k^2-k-1\ge 0, \qquad (2k+1)(k-1)\ge 0$

$\therefore k\le -\frac{1}{2}$ 또는 $k\ge 1$ …… ㉠

(ii) $\alpha+\beta=2\sqrt{2}k>0 \qquad \therefore k>0$ …… ㉡

(iii) $\alpha\beta=k+1>0 \qquad \therefore k>-1$ …… ㉢



이상에서 공통부분을 구하면 $\qquad k\ge 1$ 답 $k\ge 1$

0987 이차방정식 $x^2-2(m+1)x+5-m=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 음수이므로

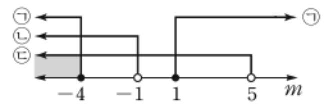
(i) $\frac{D}{4}=\{-(m+1)\}^2-(5-m)\ge 0$

$m^2+3m-4\ge 0, \qquad (m+4)(m-1)\ge 0$

$\therefore m\le -4$ 또는 $m\ge 1$ …… ㉠

(ii) $\alpha+\beta=2(m+1)<0 \qquad \therefore m<-1$ …… ㉡

(iii) $\alpha\beta=5-m>0 \qquad \therefore m<5$ …… ㉢



이상에서 공통부분을 구하면 $\qquad m\le -4$

따라서 실수 m의 최댓값은 -4이다. 답 ②

0988 이차방정식 $x^2-(k-1)(k-2)x-k+2=0$의 두 근을 α, β라 하면 α, β의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=-k+2<0 \qquad \therefore k>2$ …… ㉠ ··· ❶

또 음의 근의 절댓값이 양의 근보다 작으므로

$\alpha+\beta=(k-1)(k-2)>0$

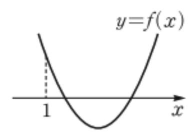
$\therefore k<1$ 또는 $k>2$ …… ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡에서 k의 값의 범위는 $\qquad k>2$ ··· ❸

답 $k>2$

채점 기준	비율
❶ 두 근의 부호가 다름을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❷ 음의 근의 절댓값이 양의 근보다 작음을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%

0989 $f(x)=x^2+ax+9$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 크므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4\cdot 1\cdot 9\ge 0$

$a^2-36\ge 0, \qquad (a+6)(a-6)\ge 0$

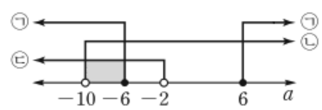
$\therefore a\le -6$ 또는 $a\ge 6$ …… ㉠

(ii) $f(1)=1+a+9>0$

$\therefore a>-10$ …… ㉡

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-\frac{a}{2}$이므로

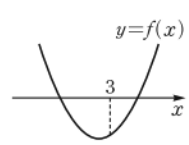
$-\frac{a}{2}>1 \qquad \therefore a<-2$ …… ㉢



이상에서 공통부분을 구하면 $\qquad -10<a\le -6$

따라서 정수 a는 -9, -8, -7, -6의 4개이다. 답 4

0990 $f(x)=x^2+(k-1)x+k^2-10$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 3이 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $f(3)<0$이어야 하므로

$9+3(k-1)+k^2-10<0$

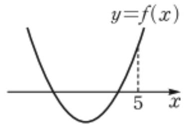
$k^2+3k-4<0, \qquad (k+4)(k-1)<0$

$\therefore -4<k<1$

따라서 $\alpha=-4$, $\beta=1$이므로

$\alpha+\beta=-3$ 답 ②

0991 $f(x)=x^2-2kx+k+20$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 5보다 작으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-(k+20)\geq 0$

$k^2-k-20\geq 0,\qquad (k+4)(k-5)\geq 0$

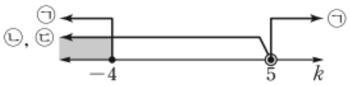
$\therefore\ k\leq -4$ 또는 $k\geq 5$ …… ㉠

(ii) $f(5)=25-10k+k+20>0,\qquad -9k>-45$

$\therefore\ k<5$ …… ㉡

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k$이므로

$k<5$ …… ㉢



이상에서 공통부분을 구하면

$k\leq -4$ 답 $k\leq -4$

0992 $x-1$, x, $x+1$은 변의 길이이므로

$x-1>0\qquad \therefore\ x>1$ …… ㉠

세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $x+1$이므로 삼각형이 만들어질 조건에 의하여

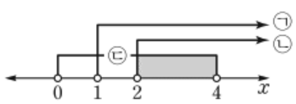
$x+1<(x-1)+x\qquad \therefore\ x>2$ …… ㉡

둔각삼각형이 되려면

$(x+1)^2>(x-1)^2+x^2$

$x^2-4x<0,\qquad x(x-4)<0$

$\therefore\ 0<x<4$ …… ㉢



㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$2<x<4$

따라서 정수 x의 값은 3이다. 답 3

라쎈 특강 삼각형의 변의 길이와 모양

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c $(a\leq b\leq c)$일 때

① $c^2<a^2+b^2$ ➡ 예각삼각형

② $c^2=a^2+b^2$ ➡ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

③ $c^2>a^2+b^2$ ➡ 둔각삼각형

0993 새로 만든 직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이는 각각 $a+5$, a, $a-3$이므로

$a-3>0\qquad \therefore\ a>3$ …… ㉠

이 직육면체의 부피는 $a(a+5)(a-3)$이고 처음 정육면체의 부피는 a^3이므로

$a(a+5)(a-3)<a^3,\qquad 2a^2-15a<0$

$a(2a-15)<0\qquad \therefore\ 0<a<\dfrac{15}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad 3<a<\dfrac{15}{2}$

따라서 자연수 a는 4, 5, 6, 7의 4개이다. 답 4

0994 직사각형의 가로의 길이가 x이므로 세로의 길이는

$12-x$

이때 x, $12-x$는 변의 길이이고, 가로의 길이가 세로의 길이보다 길어야 하므로

$x>0,\ 12-x>0,\ x>12-x$

$\therefore\ 6<x<12$ …… ㉠

또 직사각형의 넓이는 $x(12-x)$이므로

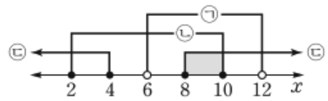
$20\leq x(12-x)\leq 32$

$20\leq x(12-x)$에서 $\qquad x^2-12x+20\leq 0$

$(x-2)(x-10)\leq 0\qquad \therefore\ 2\leq x\leq 10$ …… ㉡

$x(12-x)\leq 32$에서 $\qquad x^2-12x+32\geq 0$

$(x-4)(x-8)\geq 0\qquad \therefore\ x\leq 4$ 또는 $x\geq 8$ …… ㉢



㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$8\leq x\leq 10$

따라서 x의 최댓값은 10, 최솟값은 8이므로 구하는 합은 18이다.

답 ⑤

0995 전략 해가 $x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$ $(\alpha<\beta)$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta)\geq 0$이다.

풀이 해가 $x\leq -2$ 또는 $x\geq 4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-4)\geq 0$

$\therefore\ x^2-2x-8\geq 0$

이 부등식이 $-x^2+ax+b\leq 0$, 즉 $x^2-ax-b\geq 0$과 같으므로

$a=2,\ b=8$

$\therefore\ ab=16$ 답 16

0996 전략 $|A|=\begin{cases}A\ (A\geq 0)\\ -A\ (A<0)\end{cases}$임을 이용하여 x의 값의 범위를 나누어 푼다.

풀이 $x^2-5|x|+6\leq 0$에서

(i) $x\geq 0$일 때,

$x^2-5x+6\leq 0,\qquad (x-2)(x-3)\leq 0$

$\therefore\ 2\leq x\leq 3$

그런데 $x\geq 0$이므로 $\qquad 2\leq x\leq 3$

(ii) $x<0$일 때,

$x^2+5x+6\leq 0,\qquad (x+2)(x+3)\leq 0$

$\therefore\ -3\leq x\leq -2$

그런데 $x<0$이므로 $\qquad -3\leq x\leq -2$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-3\leq x\leq -2$ 또는 $2\leq x\leq 3$

답 $-3\leq x\leq -2$ 또는 $2\leq x\leq 3$

다른풀이 $x^2=|x|^2$이므로 주어진 부등식은

$|x|^2-5|x|+6\leq 0,\qquad (|x|-2)(|x|-3)\leq 0$

$\therefore\ 2\leq |x|\leq 3$

$|x|\geq 2$에서 $\qquad x\leq -2$ 또는 $x\geq 2$ …… ㉠

$|x|\leq 3$에서 $\qquad -3\leq x\leq 3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3\leq x\leq -2$ 또는 $2\leq x\leq 3$

0997 전략 이차부등식 $x^2+ax+b>0$이 항상 성립하려면 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식 D가 $D<0$이어야 한다.

풀이 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2(k+2)x-k>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2(k+2)x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+2)\}^2-(-k)<0$

$k^2+5k+4<0, \quad (k+4)(k+1)<0$

$\therefore -4<k<-1$

따라서 정수 k는 -3, -2이므로 구하는 합은 -5이다. 답 -5

0998 전략 물체의 높이 y m가 지면으로부터 5 m 이상이면 $y\geq5$임을 이용하여 t에 대한 이차부등식을 세운다.

풀이 물체의 높이 y m가 5 m 이상이면

$10-5t^2\geq5$ ⋯ ❶

$t^2-1\leq0, \quad (t+1)(t-1)\leq0$

$\therefore -1\leq t\leq1$

그런데 $t\geq0$이므로 $\quad 0\leq t\leq1$ ⋯ ❷

따라서 높이가 5 m 이상인 시간은 1초 동안이다. ⋯ ❸

답 1초

채점 기준	비율
❶ t에 대한 이차부등식을 세울 수 있다.	40%
❷ t의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 높이가 5 m 이상인 시간을 구할 수 있다.	20%

0999 전략 $A<B<C$ 꼴의 부등식은 $A<B$, $B<C$로 바꾸어 푼다.

풀이 $-x^2-3x+4\leq x^2-x-8$에서 $\quad -2x^2-2x+12\leq0$

$x^2+x-6\geq0, \quad (x+3)(x-2)\geq0$

$\therefore x\leq-3$ 또는 $x\geq2$

$x^2-x-8<2x^2-5x-4$에서 $\quad -x^2+4x-4<0$

$x^2-4x+4>0, \quad (x-2)^2>0$

$\therefore x\neq2$인 모든 실수

따라서 주어진 부등식의 해는 $\quad x\leq-3$ 또는 $x>2$

답 $x\leq-3$ 또는 $x>2$

1000 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근의 부호가 서로 다르면 $\frac{c}{a}<0$이다.

풀이 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha\beta=m^2-4m-12<0$

$(m+2)(m-6)<0 \quad \therefore -2<m<6$

따라서 정수 m의 최댓값은 5이다. 답 ①

1001 전략 부등식 $f(x)\leq g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이다.

풀이 ㄱ. $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

$D=b^2-4ac>0$

ㄴ. $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 $x>0$일 때, $f(x)>0$이다.

이때 직선 $y=px+q$의 y절편 q가 양수이므로

$f(q)=aq^2+bq+c>0$

ㄷ. $ax^2+(b-p)x+c-q\leq0$에서

$ax^2+bx+c-(px+q)\leq0$

$\therefore ax^2+bx+c\leq px+q$

위의 부등식의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=px+q$보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로

$\alpha\leq x\leq\beta$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

다른풀이 ㄷ. $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=px+q$의 교점의 x좌표가 α, β이므로 $ax^2+bx+c=px+q$, 즉 $ax^2+(b-p)x+c-q=0$의 해는 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$이다.

$\therefore ax^2+(b-p)x+c-q=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$ax^2+(b-q)x+c-q\leq0$에서 $\quad a(x-\alpha)(x-\beta)\leq0$

이때 $a>0$이므로 부등식의 해는 $\quad \alpha\leq x\leq\beta$

1002 전략 주어진 그래프를 이용하여 먼저 이차함수의 식을 구한다.

풀이 $f(x)=a(x+1)(x-4)(a>0)$라 하면 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, -2)$를 지나므로

$-2=a\cdot1\cdot(-4) \quad \therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)(x-4)$이므로 $f(x)<3$에서

$\frac{1}{2}(x+1)(x-4)<3, \quad x^2-3x-10<0$

$(x+2)(x-5)<0 \quad \therefore -2<x<5$ 답 $-2<x<5$

1003 전략 각 부등식의 좌변을 $a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한다. 이때 x^2의 계수가 음수이면 부등식의 양변에 -1을 곱한다.

풀이 ㄱ. $4x^2-4x+1=(2x-1)^2\geq0$

따라서 $4x^2-4x+1\geq0$의 해는 모든 실수이다.

ㄴ. $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$

따라서 $x^2+x+1\leq0$의 해는 없다.

ㄷ. $-x^2+8x-16>0$에서 $\quad x^2-8x+16<0$

$x^2-8x+16=(x-4)^2\geq0$

따라서 $-x^2+8x-16>0$의 해는 없다.

ㄹ. $-3x^2+x-1\leq0$에서 $\quad 3x^2-x+1\geq0$

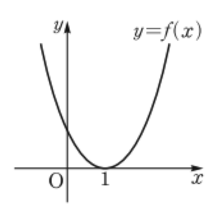
$3x^2-x+1=3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{11}{12}\geq\frac{11}{12}$

따라서 $-3x^2+x-1\leq0$의 해는 모든 실수이다.

이상에서 해가 모든 실수인 부등식은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

1004 전략 이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $x\neq k$인 모든 실수이면 $f(x)=a(x-k)^2\ (a>0)$임을 이용한다.

풀이 조건 (나)에서 이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $x\neq1$인 모든 실수이므로 이차함수 $f(x)$에서 x^2의 계수는 양수이고 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 점 $(1, 0)$에서 접한다.



즉 $f(x)=a(x-1)^2(a>0)$이라 하면 조건 (가)에서 $f(0)=2$이므로 $\quad a=2$

따라서 $f(x)=2(x-1)^2$이므로

$f(4)=2\cdot(4-1)^2=18$ 답 ⑤

1005 전략 이차함수 $f(x)=p(x-\alpha)(x-\beta)$에 대하여 $f(x-a)=p(x-a-\alpha)(x-a-\beta)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2-x-12=(x+3)(x-4)$이므로

$f(x-1)=(x-1+3)(x-1-4)$
$=(x+2)(x-5)$

즉 부등식 $f(x-1)<0$의 해는 $(x+2)(x-5)<0$에서

$-2<x<5$

따라서 정수 x는 $-1, 0, 1, \cdots, 4$이므로 구하는 합은 9이다.

답 ③

1006 전략 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq0$의 해가 오직 한 개이면 $a<0$임을 이용하여 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

풀이 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq0$의 해가 3뿐이므로 $a<0$이고

$ax^2+bx+c=a(x-3)^2$

즉 $ax^2+bx+c=ax^2-6ax+9a$이므로

$b=-6a, c=9a$

이것을 부등식 $bx^2+cx+6a<0$에 대입하면

$-6ax^2+9ax+6a<0, \quad -3a(2x^2-3x-2)<0$

$2x^2-3x-2<0 \ (\because -3a>0)$

$(2x+1)(x-2)<0$

$\therefore -\frac{1}{2}<x<2$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 0, 1의 2개이다.

답 2

1007 전략 이차부등식 $ax^2+bx+c\leq0$이 항상 성립하려면 $a<0$, $b^2-4ac\leq0$이어야 한다.

풀이 실수 x의 값에 관계없이 $ax^2-4\sqrt{2}x+a+2\leq0$이 항상 성립해야 하므로

$a<0$ …… ㉠

이차방정식 $ax^2-4\sqrt{2}x+a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2\sqrt{2})^2-a(a+2)\leq0$

$a^2+2a-8\geq0, \quad (a+4)(a-2)\geq0$

$\therefore a\leq-4$ 또는 $a\geq2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 a의 값의 범위는 $a\leq-4$

따라서 a의 최댓값은 -4이다.

답 ②

1008 전략 이차부등식 $x^2+bx+c<0$의 해가 존재하지 않으려면 $b^2-4c\leq0$이어야 한다.

풀이 이차부등식 $x^2-2ax+9a<0$을 만족시키는 해가 없으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2-2ax+9a\geq0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-2ax+9a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-9a\leq0$

$a^2-9a\leq0, \quad a(a-9)\leq0$

$\therefore 0\leq a\leq9$

따라서 정수 a는 $0, 1, 2, \cdots, 9$의 10개이다.

답 ②

1009 전략 $\alpha\leq x\leq\beta$에서 이차부등식 $f(x)>0$이 항상 성립하려면 $\alpha\leq x\leq\beta$에서 $(f(x)$의 최솟값$)>0$이어야 한다.

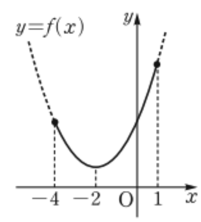
풀이 $x^2-4x<2x^2+a^2-3a$에서

$x^2+4x+a^2-3a>0$

$f(x)=x^2+4x+a^2-3a$라 하면

$f(x)=(x+2)^2+a^2-3a-4$

$-4\leq x\leq1$에서 $f(x)>0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$-4\leq x\leq1$에서 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최소이므로 $f(-2)>0$에서

$a^2-3a-4>0$

$(a+1)(a-4)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>4$

답 $a<-1$ 또는 $a>4$

1010 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 이차부등식 $f(x)<g(x)$의 해와 같다.

풀이 $y=x^2-4x$의 그래프가 직선 $y=a$보다 아래쪽에 있으면

$x^2-4x<a$

$\therefore x^2-4x-a<0$ …… ㉠

해가 $b<x<5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-b)(x-5)<0$

$\therefore x^2-(b+5)x+5b<0$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로 $4=b+5, -a=5b$

$\therefore a=5, b=-1$

$\therefore ab=-5$

답 ①

1011 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 항상 위쪽에 있으면 이차부등식 $f(x)>g(x)$가 항상 성립한다.

풀이 $y=x^2-x+2$의 그래프가 직선 $y=x+m-1$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-x+2>x+m-1$, 즉 $x^2-2x-m+3>0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-2x-m+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-m+3)<0$

$1+m-3<0 \quad \therefore m<2$

따라서 정수 m의 최댓값은 1이다.

답 ④

1012 전략 각 이차부등식을 풀어 해의 공통부분이 존재하지 않게 하는 k의 값의 범위를 생각해 본다.

풀이 $x^2+x-6<0$에서 $(x+3)(x-2)<0$

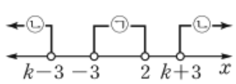
$\therefore -3<x<2$ …… ㉠

$x^2-2kx+k^2-9>0$에서 $x^2-2kx+(k+3)(k-3)>0$

$\{x-(k-3)\}\{x-(k+3)\}>0$

$\therefore x<k-3$ 또는 $x>k+3$ …… ㉡ ··· ❶

㉠, ㉡의 공통부분이 존재하지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$k-3\leq-3, k+3\geq2$

$\therefore -1\leq k\leq0$ ··· ❷

답 $-1\leq k\leq0$

채점 기준	비율
❶ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	40%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	60%

1013 전략 각 부등식을 풀어 해의 공통부분을 구한다.

풀이 $|4x-1|>5$에서 $4x-1<-5$ 또는 $4x-1>5$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>\frac{3}{2}$ ...... ㉠

$3x^2-11x-4\le0$에서 $(3x+1)(x-4)\le0$

$\therefore -\frac{1}{3}\le x\le4$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{3}{2}<x\le4$

따라서 정수 x는 2, 3, 4이므로 구하는 합은 9이다. 답 ②

1014 전략 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지면 $D>0$, 허근을 가지면 $D<0$이다.

풀이 이차방정식 $2x^2-ax+3a=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-a)^2-4\cdot2\cdot3a<0$

$a^2-24a<0$, $a(a-24)<0$

$\therefore 0<a<24$ ...... ㉠

이차방정식 $x^2-2ax+2-a=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-a)^2-(2-a)>0$

$a^2+a-2>0$, $(a+2)(a-1)>0$

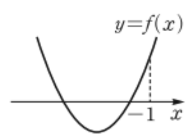
$\therefore a<-2$ 또는 $a>1$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$1<a<24$ 답 $1<a<24$

1015 전략 $f(x)=x^2-4ax+8$이라 하고 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 조건에 맞게 그려 본다.

풀이 $f(x)=x^2-4ax+8$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -1보다 작으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2a)^2-8\ge0$

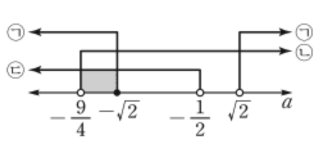
$4a^2-8\ge0$, $(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})\ge0$

$\therefore a\le-\sqrt{2}$ 또는 $a\ge\sqrt{2}$ ...... ㉠

(ii) $f(-1)=1+4a+8>0$ $\therefore a>-\frac{9}{4}$ ...... ㉡

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=2a$이므로

$2a<-1$ $\therefore a<-\frac{1}{2}$ ...... ㉢



이상에서 공통부분을 구하면

$-\frac{9}{4}<a\le-\sqrt{2}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $-\sqrt{2}$이다. 답 $-\sqrt{2}$

1016 전략 테두리 장식의 넓이를 x에 대한 식으로 나타내어 본다.

풀이 테두리 장식의 넓이는

$(2x+20)(2x+15)-20\cdot15=4x^2+70x\,(\text{cm}^2)$

테두리 장식의 넓이가 114 cm^2 이상 200 cm^2 이하이어야 하므로

$114\le4x^2+70x\le200$

$\therefore 57\le2x^2+35x\le100$

(i) $57\le2x^2+35x$에서

$2x^2+35x-57\ge0$, $(x+19)(2x-3)\ge0$

$\therefore x\le-19$ 또는 $x\ge\frac{3}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $x\ge\frac{3}{2}$ ...... ㉠

(ii) $2x^2+35x\le100$에서

$2x^2+35x-100\le0$, $(x+20)(2x-5)\le0$

$\therefore -20\le x\le\frac{5}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $0<x\le\frac{5}{2}$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{3}{2}\le x\le\frac{5}{2}$

따라서 정수 x의 값은 2이다. 답 2

1017 전략 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge0$이 오직 한 개의 실근을 가지려면 $a<0$, $b^2-4ac=0$이어야 한다.

풀이 이차부등식 $(1-k)x^2+2(k-1)x-1\ge0$이 오직 한 개의 실근을 가지므로

$1-k<0$ $\therefore k>1$ ...... ㉠

이차방정식 $(1-k)x^2+2(k-1)x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(1-k)\cdot(-1)=0$

$k^2-3k+2=0$, $(k-1)(k-2)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=2$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $k=2$ 답 ③

1018 전략 $\overline{AC}=x$라 하고 삼각형의 넓이를 x에 대한 식으로 나타내어 본다.

풀이 $\overline{AC}=x$라 하면 $\overline{BC}=14-x$

삼각형 ABC의 넓이가 24 이상이어야 하므로

$\frac{1}{2}\cdot(14-x)\cdot x\ge24$

$x^2-14x+48\le0$, $(x-6)(x-8)\le0$

$\therefore 6\le x\le8$

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}=\sqrt{x^2+(14-x)^2}$

$=\sqrt{2x^2-28x+196}$

$=\sqrt{2(x-7)^2+98}$

이므로 $\overline{AB}$의 길이의 최댓값은 $x=6$ 또는 $x=8$일 때,

$\sqrt{2\cdot1+98}=\sqrt{100}=10$ 답 10

1019 전략 먼저 연립부등식을 풀고, 그 해를 이용하여 이차부등식을 작성한다.

풀이 $x^2+3x-4<0$에서 $(x+4)(x-1)<0$

$\therefore -4<x<1$ ...... ㉠

$x^2-4>0$에서 $\quad (x+2)(x-2)>0$

$\therefore\ x<-2$ 또는 $x>2$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-4<x<-2$

따라서 이차부등식 $ax^2+bx-4>0$의 해가 $-4<x<-2$이므로

$a<0$

해가 $-4<x<-2$이고 x^2의 계수가 $a(a<0)$인 이차부등식은

$a(x+4)(x+2)>0 \quad \therefore\ ax^2+6ax+8a>0$

따라서 $6a=b$, $8a=-4$이므로

$a=-\frac{1}{2}$, $b=-3$

$\therefore\ ab=\frac{3}{2}$

답 ③

1020 전략 부등식 $ax\ge b$가 모든 실수 x에 대하여 성립할 조건은 $a=0$, $b\le 0$이다.

풀이 부등식 $x-2\le g(x)\le f(x)$에서

$x-2\le (a-1)x+b\le 2x^2+5x+2$

(i) $x-2\le (a-1)x+b$에서 $\quad (a-2)x\ge -b-2$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로

$a-2=0$, $-b-2\le 0$

$\therefore\ a=2$, $b\ge -2$

(ii) $(a-1)x+b\le 2x^2+5x+2$에서 $a=2$이므로

$x+b\le 2x^2+5x+2$

$2x^2+4x+2-b\ge 0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $2x^2+4x+2-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-2(2-b)\le 0$

$2b\le 0 \quad \therefore\ b\le 0$

(i), (ii)에서 $\quad -2\le b\le 0$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=0$이므로 $\quad \beta-\alpha=2$

답 ③

1021 전략 각 부등식을 풀어 해의 공통부분을 생각해 본다.

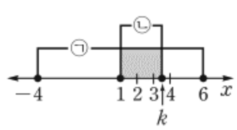
풀이 $x^2-2x-24\le 0$에서 $\quad (x+4)(x-6)\le 0$

$\therefore\ -4\le x\le 6$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

$x^2-(k+1)x+k\le 0$에서

$(x-1)(x-k)\le 0$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡ $\quad \cdots$ ❶

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 자연수 x가 3개만 존재하려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$3\le k<4$ $\quad \cdots$ ❷

답 $3\le k<4$

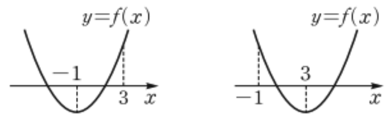
채점 기준	비율
❶ ㉠, ㉡을 구할 수 있다.	50%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%

1022 전략 이차방정식 $x^2-2x-3=0$의 해를 이용하여 이차함수 $y=x^2+2ax+9$의 그래프의 개형을 생각해 본다.

풀이 $x^2-2x-3=0$에서 $\quad (x+1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$ $\quad \cdots$ ❶

즉 $x^2+2ax+9=0$의 한 근이 -1과 3 사이에 있어야 하므로 $f(x)=x^2+2ax+9$라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(-1)f(3)<0$에서

$(1-2a+9)(9+6a+9)<0$

$(10-2a)(6a+18)<0, \quad (a+3)(a-5)>0$

$\therefore\ a<-3$ 또는 $a>5$ $\quad \cdots$ ❷

따라서 자연수 a의 최솟값은 6이다. $\quad \cdots$ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $x^2-2x-3=0$의 두 근을 구할 수 있다.	20%
❷ a에 대한 이차부등식을 세우고, 그 해를 구할 수 있다.	60%
❸ 자연수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

09 평면좌표

Ⅳ. 도형의 방정식

1023 $\overline{AB}=|9-3|=6$ 답 6

1024 $\overline{AB}=|5-(-2)|=7$ 답 7

1025 $\overline{AB}=|-1-(-7)|=6$ 답 6

1026 $\overline{AB}=|-6-4|=10$ 답 10

1027 $\overline{OA}=|-4|=4$ 답 4

1028 $\overline{AB}=\sqrt{(5-3)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

1029 $\overline{AB}=\sqrt{(-1-1)^2+\{3-(-1)\}^2}=2\sqrt{5}$ 답 $2\sqrt{5}$

1030 $\overline{AB}=\sqrt{\{1-(-2)\}^2+\{6-(-3)\}^2}=3\sqrt{10}$ 답 $3\sqrt{10}$

1031 $\overline{AB}=\sqrt{(-5-2)^2+(1-1)^2}=7$ 답 7

1032 $\overline{OA}=\sqrt{5^2+(-12)^2}=13$ 답 13

1033 답 D　　**1034** 답 C

1035 답 1　　**1036** 답 3

1037 $\dfrac{1\cdot4+3\cdot(-8)}{1+3}=-5$　$\therefore$ P(-5) 답 P(-5)

1038 $\dfrac{-8+4}{2}=-2$　$\therefore$ M(-2) 답 M(-2)

1039 $\dfrac{5\cdot4-2\cdot(-8)}{5-2}=12$　$\therefore$ Q(12) 답 Q(12)

1040 $\dfrac{a+(-2)}{2}=3$이므로　$a=8$ 답 8

1041 $\dfrac{3\cdot(-2)+2\cdot6}{3+2}=\dfrac{6}{5}$, $\dfrac{3\cdot(-4)+2\cdot2}{3+2}=-\dfrac{8}{5}$

$\therefore$ P$\left(\dfrac{6}{5}, -\dfrac{8}{5}\right)$ 답 P$\left(\dfrac{6}{5}, -\dfrac{8}{5}\right)$

1042 $\dfrac{6-2}{2}=2$, $\dfrac{2-4}{2}=-1$　$\therefore$ M$(2, -1)$

답 M$(2, -1)$

1043 $\dfrac{2\cdot(-2)-1\cdot6}{2-1}=-10$, $\dfrac{2\cdot(-4)-1\cdot2}{2-1}=-10$

$\therefore$ Q$(-10, -10)$ 답 Q$(-10, -10)$

1044 $\dfrac{-7+b}{2}=-2$, $\dfrac{a+4}{2}=3$이므로

$a=2$, $b=3$ 답 $a=2$, $b=3$

1045 $\dfrac{0+2+4}{3}=2$, $\dfrac{0+3+3}{3}=2$

$\therefore$ G$(2, 2)$ 답 G$(2, 2)$

1046 $\dfrac{2-1-4}{3}=-1$, $\dfrac{5-3+1}{3}=1$

$\therefore$ G$(-1, 1)$ 답 G$(-1, 1)$

1047 $\dfrac{6+8-2}{3}=4$, $\dfrac{-7+1+9}{3}=1$

$\therefore$ G$(4, 1)$ 답 G$(4, 1)$

1048 $\dfrac{a+1-5}{3}=-1$, $\dfrac{-5+3+b}{3}=0$이므로

$a=1$, $b=2$ 답 $a=1$, $b=2$

1049 $\overline{AB}=5$이므로　$\sqrt{(a-3)^2+(0-3)^2}=5$

양변을 제곱하면　$(a-3)^2+9=25$

$a^2-6a-7=0$,　$(a+1)(a-7)=0$

$\therefore a=7$ ($\because a>0$) 답 ⑤

1050 ① $\overline{OA}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

② $\overline{OB}=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

③ $\overline{OC}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

④ $\overline{AB}=\sqrt{(3-2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{17}$

⑤ $\overline{BC}=\sqrt{(4-3)^2+(2+1)^2}=\sqrt{10}$

따라서 길이가 가장 긴 것은 ③이다. 답 ③

1051 $\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$a^2+(5+1)^2=(-5-a)^2+(4-5)^2$

$36=10a+26$　$\therefore a=1$ 답 1

1052 $\overline{AB}=\sqrt{(a-6)^2+(4-a)^2}$

$=\sqrt{2a^2-20a+52}$

$=\sqrt{2(a-5)^2+2}$

따라서 $a=5$일 때 $\overline{AB}$의 길이가 최소이다. 답 5

1053 구하는 점을 P$(a, 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로

$(a-2)^2+4^2=(a-6)^2+(-8)^2$

$-4a+20=-12a+100$　$\therefore a=10$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(10, 0)$이다. 답 $(10, 0)$

1054 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(-1)^2+(a+2)^2=(-4)^2+(a-1)^2$

$4a+5=-2a+17 \quad \therefore a=2$

답 2

1055 P$(a, 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a+1)^2+(-5)^2=(a-2)^2+(-2)^2$

$2a+26=-4a+8 \quad \therefore a=-3$

$\therefore$ P$(-3, 0)$

또 Q$(0, b)$라 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$1^2+(b-5)^2=(-2)^2+(b-2)^2$

$-10b+26=-4b+8 \quad \therefore b=3$

$\therefore$ Q$(0, 3)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

답 ②

1056 점 P(a, b)가 직선 $y=x-1$ 위에 있으므로

$b=a-1$ …… ㉠ ⋯ ❶

또 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-1)^2+(b-3)^2=(a-3)^2+(b+1)^2$

$-2a-6b=-6a+2b$

$\therefore a-2b=0$ …… ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2, b=1$

$\therefore a+b=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 점 P가 직선 $y=x-1$ 위의 점임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40%
❷ $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

1057 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$

$\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$에서 $(a+2)^2+b^2=(a-4)^2+b^2$

$4a+4=-8a+16$

$\therefore a=1$ …… ㉠

$\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$에서 $(a-2)^2+(b-4)^2=(a-4)^2+b^2$

$-4a-8b+4=-8a$

$\therefore a-2b=-1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $b=1$

$\therefore b-a=0$

답 ③

1058 $\overline{OP}+\overline{PA}\geq\overline{OA}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

따라서 $\overline{OP}+\overline{PA}$의 최솟값은 10이다.

답 ⑤

1059 $\overline{AP}+\overline{PB}\geq\overline{AB}$

$=\sqrt{(a+2-1)^2+(-2-1+a)^2}$

$=\sqrt{2a^2-4a+10}=\sqrt{2(a-1)^2+8}$

따라서 $a=1$일 때 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$이다.

답 $2\sqrt{2}$

1060 $\sqrt{(a+1)^2+(b-5)^2}=\overline{AB}$, $\sqrt{(a-3)^2+(b-2)^2}=\overline{BC}$이므로

$\sqrt{(a+1)^2+(b-5)^2}+\sqrt{(a-3)^2+(b-2)^2}$

$=\overline{AB}+\overline{BC}$

$\geq\overline{AC}$

$=\sqrt{(3+1)^2+(2-5)^2}=5$

따라서 구하는 최솟값은 5이다.

답 5

라쎈 특강

실수 a, b, x, y에 대하여 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$은 두 점 (x, y), (a, b) 사이의 거리와 같다.

1061 P$(a, 0)$이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(a-2)^2+(-5)^2+(a-6)^2+(-2)^2$

$=2a^2-16a+69$

$=2(a-4)^2+37$

따라서 $a=4$일 때 주어진 식의 최솟값은 37이다.

답 ④

1062 점 P가 직선 $y=x+4$ 위에 있으므로 P$(a, a+4)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(a+1)^2+(a+4-7)^2+(a-3)^2+(a+4+5)^2$

$=4a^2+8a+100$

$=4(a+1)^2+96$

따라서 $a=-1$일 때 주어진 식의 최솟값은 96이므로 점 P의 x좌표는 -1이다.

답 ②

1063 P(a, b)라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=(a+1)^2+b^2+(a-2)^2+(b-6)^2+(a-5)^2+(b-3)^2$

$=3a^2-12a+3b^2-18b+75$

$=3(a-2)^2+3(b-3)^2+36$ ⋯ ❶

이때 a, b가 실수이므로 $(a-2)^2\geq0$, $(b-3)^2\geq0$

$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2\geq36$

따라서 $a=2$, $b=3$일 때 주어진 식의 최솟값은 36이므로

P$(2, 3)$ ⋯ ❷

답 $(2, 3)$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 좌표를 (a, b)라 하고, 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 이차식을 세울 수 있다.	60%
❷ ❶의 식의 값이 최소일 때의 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	40%

1064 $\overline{AB}=\sqrt{(3+2)^2+(-3-2)^2}=5\sqrt{2}$,

$\overline{BC}=\sqrt{(2-3)^2+(4+3)^2}=5\sqrt{2}$,

$\overline{CA}=\sqrt{(2+2)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{5}$

따라서 △ABC는 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다.

답 ②

1065 $\overline{OB}^2=\overline{OA}^2+\overline{AB}^2$이므로

$6^2+(-2)^2=a^2+2^2+(6-a)^2+(-2-2)^2$

$a^2-6a+8=0, \quad (a-2)(a-4)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=4$

따라서 모든 a의 값의 합은 6이다.

답 ③

1066 $C(a, b)$라 하면 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$에서

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$에서

$(1+1)^2+(3+3)^2=(a-1)^2+(b-3)^2$

$a^2+b^2-2a-6b-30=0$ ...... ㉠

$\overline{AB}^2=\overline{CA}^2$에서

$(1+1)^2+(3+3)^2=(a+1)^2+(b+3)^2$

$a^2+b^2+2a+6b-30=0$ ...... ㉡

㉡－㉠을 하면

$4a+12b=0 \quad \therefore a=-3b$ ··· ❶

이것을 ㉠에 대입하면

$(-3b)^2+b^2-2\cdot(-3b)-6b-30=0, \quad 10b^2=30$

$b^2=3 \quad \therefore b=\pm\sqrt{3}$

$\therefore a=\pm 3\sqrt{3},\ b=\mp\sqrt{3}$ (복호동순) ··· ❷

그런데 점 C가 제2사분면 위의 점이므로

$a<0,\ b>0$

$\therefore C(-3\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ··· ❸

답 $(-3\sqrt{3}, \sqrt{3})$

채점 기준	비율
❶ 점 C의 좌표를 (a, b)라 하고, a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 점 C의 좌표를 구할 수 있다.	20%

1067 직선 BC를 x축, 선분 BC의 수직이등분선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 $\boxed{M}$이 원점이다.

이때 삼각형 ABC의 두 꼭짓점 A, C의 좌표를 각각 (a, b), $(c, 0)$이라 하면 꼭짓점 B의 좌표는 $\boxed{(-c, 0)}$이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}$

$=(a^2+2ac+c^2+b^2)+(a^2-2ac+c^2+b^2)$

$=\boxed{2(a^2+b^2+c^2)}$

$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=(a^2+b^2)+c^2=\boxed{a^2+b^2+c^2}$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

$\therefore$ (가) M (나) $(-c, 0)$ (다) $2(a^2+b^2+c^2)$ (라) $a^2+b^2+c^2$

답 풀이 참조

참고 위와 같은 삼각형의 성질을 파푸스 정리 또는 중선 정리라 한다.

1068 직선 BC를 x축, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 $\boxed{B}$가 원점이다.

이때 사각형 ABCD의 두 꼭짓점 A, C의 좌표를 각각 $(0, b)$, $(a, 0)$이라 하면 꼭짓점 D의 좌표는 $\boxed{(a, b)}$이므로 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=x^2+(y-b)^2+(x-a)^2+y^2$

$=\boxed{x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2}$

$\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=\boxed{x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2}$

$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$

$\therefore$ (가) B (나) (a, b) (다) $x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2$

(라) $x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2$

답 풀이 참조

1069 $\dfrac{2\cdot(-2)+3\cdot 8}{2+3}=4 \quad \therefore a=4$

$\dfrac{3\cdot(-2)-2\cdot 8}{3-2}=-22 \quad \therefore b=-22$

$\therefore a-b=26$

답 ②

1070 $\dfrac{1\cdot(-9)+5\cdot 3}{1+5}=1 \quad \therefore P(1)$

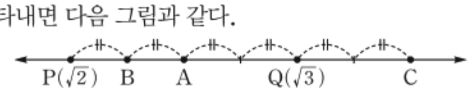
$\dfrac{1\cdot(-9)-5\cdot 3}{1-5}=6 \quad \therefore Q(6)$

따라서 $\overline{PQ}$의 중점의 좌표는

$\dfrac{1+6}{2}=\dfrac{7}{2} \quad \therefore a=\dfrac{7}{2}$

답 ③

1071 점 A는 $\overline{PQ}$의 중점, 점 B는 $\overline{PQ}$를 $1:3$으로 내분하는 점, 점 C는 $\overline{PQ}$를 $3:1$로 외분하는 점이므로 세 점 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 왼쪽에 있는 점부터 순서대로 나열하면 B, A, C이다. 답 ③

1072 $\dfrac{4\cdot 7+5\cdot(-2)}{4+5}=2,\ \dfrac{4\cdot a+5\cdot(-1)}{4+5}=\dfrac{4a-5}{9}$이므로

$2=b,\ \dfrac{4a-5}{9}=-5$

따라서 $a=-10$, $b=2$이므로 $\quad ab=-20$

답 ①

1073 $\dfrac{1\cdot b+4\cdot 8}{1+4}=7,\ \dfrac{1\cdot 9+4\cdot a}{1+4}=1$이므로

$b+32=35,\ 9+4a=5$

$\therefore a=-1,\ b=3$

따라서 $A(8, -1)$, $B(3, 9)$이고, $\overline{AB}$를 $1:2$로 외분하는 점의 좌표가 (x, y)이므로

$\dfrac{1\cdot 3-2\cdot 8}{1-2}=13,\ \dfrac{1\cdot 9-2\cdot(-1)}{1-2}=-11$

$\therefore x=13,\ y=-11$

$\therefore x+y=2$

답 ①

1074 $\dfrac{2\cdot(-4)+1\cdot 2}{2+1}=-2,\ \dfrac{2\cdot(-2)+1\cdot 7}{2+1}=1$이므로

$P(-2, 1)$

$\dfrac{2\cdot(-4)-1\cdot 2}{2-1}=-10,\ \dfrac{2\cdot(-2)-1\cdot 7}{2-1}=-11$이므로

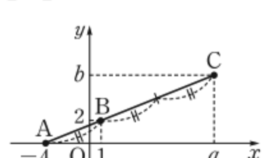
$Q(-10, -11)$

따라서 $\overline{PQ}$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-2-10}{2}, \dfrac{1-11}{2}\right)$, 즉 $(-6, -5)$ 답 $(-6, -5)$

1075 $2\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\quad \overline{AB}:\overline{BC}=1:2$

점 C의 x좌표가 양수이므로 오른쪽 그림과 같이 점 C는 $\overline{AB}$를 $3:2$로 외분하는 점이다.



점 C의 좌표를 (a, b)라 하면

$a=\dfrac{3\cdot 1-2\cdot(-4)}{3-2}=11,$

$b=\dfrac{3\cdot2-2\cdot0}{3-2}=6$

따라서 점 C의 좌표는 $(11,\ 6)$이다. 답 $(11,\ 6)$

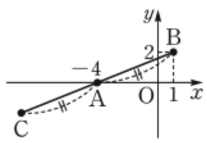
다른풀이 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$에서 점 B는 $\overline{AC}$를 $1:2$로 내분하는 점이므로 점 C의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$\dfrac{1\cdot a+2\cdot(-4)}{1+2}=1,\ \dfrac{1\cdot b+2\cdot0}{1+2}=2$

$\therefore\ a=11,\ b=6$

따라서 점 C의 좌표는 $(11,\ 6)$이다.

주의 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$일 때, 오른쪽 그림과 같이 점 C가 $\overline{AB}$를 $1:2$로 외분하는 점인 경우도 있다. 이때 점 C의 x좌표는 음수이다.



1076 $\overline{AB}$를 $k:7$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{k\cdot0-7\cdot2}{k-7},\ \dfrac{k\cdot7-7\cdot0}{k-7}\right)$

$\therefore\ \left(\dfrac{-14}{k-7},\ \dfrac{7k}{k-7}\right)$

이 점이 직선 $y=-x$ 위에 있으므로

$\dfrac{7k}{k-7}=\dfrac{14}{k-7},\qquad 7k=14$

$\therefore\ k=2$ 답 2

1077 $\overline{AB}$를 $3:2$로 내분하는 점의 x좌표가 0이어야 하므로

$\dfrac{3\cdot(-8)+2\cdot a}{3+2}=0$

$-24+2a=0\qquad \therefore\ a=12$ 답 ④

1078 $\overline{AB}$를 $(1-a):a$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{(1-a)\cdot4+a\cdot(-5)}{1-a+a},\ \dfrac{(1-a)\cdot(-3)+a\cdot2}{1-a+a}\right)$

$\therefore\ (4-9a,\ -3+5a)$ ··· ❶

이 점이 제3사분면 위에 있으므로

$4-9a<0,\ -3+5a<0$

$\therefore\ \dfrac{4}{9}<a<\dfrac{3}{5}$ ··· ❷

답 $\dfrac{4}{9}<a<\dfrac{3}{5}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$를 $(1-a):a$로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	50%
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%

1079 $\overline{AB}$를 $m:n$으로 내분하는 점의 x좌표가 0이어야 하므로

$\dfrac{4m-7n}{m+n}=0,\qquad 4m-7n=0$

$\therefore\ 4m=7n$

이때 $m,\ n$은 서로소인 자연수이므로

$m=7,\ n=4$

$\therefore\ m+n=11$ 답 11

1080 $\dfrac{a+(a-1)+b}{3}=0,\ \dfrac{(b+1)-4+a}{3}=0$이므로

$2a+b=1,\ a+b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-2,\ b=5$

$\therefore\ a^2+b^2=(-2)^2+5^2=29$ 답 ④

1081 $\dfrac{0+x_1+x_2}{3}=8,\ \dfrac{0+y_1+y_2}{3}=10$이므로

$x_1+x_2=24,\ y_1+y_2=30$

$\therefore\ \dfrac{x_1+x_2}{2}=12,\ \dfrac{y_1+y_2}{2}=15$

따라서 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $(12,\ 15)$이다. 답 ②

1082 세 점 D, E, F의 좌표는 각각

$D\left(\dfrac{5-1}{2},\ \dfrac{9+5}{2}\right)$, 즉 $D(2,\ 7)$

$E\left(\dfrac{-1+3}{2},\ \dfrac{5+1}{2}\right)$, 즉 $E(1,\ 3)$

$F\left(\dfrac{3+5}{2},\ \dfrac{1+9}{2}\right)$, 즉 $F(4,\ 5)$

따라서 △DEF의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{2+1+4}{3},\ \dfrac{7+3+5}{3}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{7}{3},\ 5\right)$ 답 $\left(\dfrac{7}{3},\ 5\right)$

다른풀이 △DEF의 무게중심은 △ABC의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{5-1+3}{3},\ \dfrac{9+5+1}{3}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{7}{3},\ 5\right)$

1083 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면 △ABC의 무게중심은 $\overline{AM}$을 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\dfrac{2\cdot3+1\cdot6}{2+1}=4,\ \dfrac{2\cdot(-4)+1\cdot(-1)}{2+1}=-3$

따라서 △ABC의 무게중심의 좌표는 $(4,\ -3)$이다. 답 $(4,\ -3)$

1084 점 D의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\dfrac{-9+7}{2}=\dfrac{-4+a}{2},\ \dfrac{-2+1}{2}=\dfrac{-4+b}{2}$

$\therefore\ a=2,\ b=3$

따라서 점 D의 좌표는 $(2,\ 3)$이다. 답 $(2,\ 3)$

1085 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\dfrac{-1+2}{2}=\dfrac{a+5}{2},\ \dfrac{6+b}{2}=\dfrac{1-2}{2}$

$\therefore\ a=-4,\ b=-7$

$\therefore\ a-b=3$ 답 ③

1086 $C(x_1,\ y_1),\ D(x_2,\ y_2)$라 하면 두 대각선 AC, BD의 교점은 각각 $\overline{AC},\ \overline{BD}$의 중점과 일치한다. ··· ❶

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{-2+x_1}{2},\ \dfrac{3+y_1}{2}\right)$이므로

$\dfrac{-2+x_1}{2}=\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3+y_1}{2}=\dfrac{7}{2}\qquad \therefore\ x_1=7,\ y_1=4$

$\therefore\ C(7,\ 4)$ ··· ❷

또 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{3+x_2}{2}, \frac{-1+y_2}{2}\right)$이므로

$\frac{3+x_2}{2}=\frac{5}{2}, \frac{-1+y_2}{2}=\frac{7}{2}$ $\quad\therefore x_2=2, y_2=8$

$\therefore$ D(2, 8) ··· ❸

답 C(7, 4), D(2, 8)

채점 기준	비율
❶ 두 꼭짓점 C, D의 좌표를 미지수를 이용하여 나타낼 수 있다.	20%
❷ 점 C의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❸ 점 D의 좌표를 구할 수 있다.	40%

1087 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로 중점의 y좌표에서

$\frac{a+4}{2}=\frac{b+7}{2}$ $\quad\therefore b=a-3$ ······ ㉠

또 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{CD}}$에서 $\overline{\mathrm{AD}}^2=\overline{\mathrm{CD}}^2$이므로

$(1-5)^2+(7-a)^2=(1+3)^2+(7-4)^2$

$a^2-14a+40=0, \quad (a-4)(a-10)=0$

$\therefore a=4$ 또는 $a=10$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=1$

$a=10$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=7$

이때 $b=7$이면 점 B와 점 D가 일치하므로 □ABCD가 만들어지지 않는다.

따라서 $a=4, b=1$이므로 $\quad ab=4$

답 4

1088 $\overline{\mathrm{AD}}$는 ∠A의 이등분선이므로

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-3-2)^2+(-6-6)^2}=13$,

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(6-2)^2+(3-6)^2}=5$이므로

$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}=13:5$

따라서 점 D는 $\overline{\mathrm{BC}}$를 13 : 5로 내분하는 점이므로

$\frac{13\cdot6+5\cdot(-3)}{13+5}=\frac{7}{2}, \frac{13\cdot3+5\cdot(-6)}{13+5}=\frac{1}{2}$

에서 $\quad \mathrm{D}\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$

답 $\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$

1089 $\overline{\mathrm{OP}}$는 ∠AOB의 이등분선이므로

$\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}$

이때 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$, $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{6^2+(-2)^2}=2\sqrt{10}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{10}:2\sqrt{10}=1:2$

따라서 점 P는 $\overline{\mathrm{AB}}$를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$\frac{1\cdot6+2\cdot1}{1+2}=\frac{8}{3}, \frac{1\cdot(-2)+2\cdot3}{1+2}=\frac{4}{3}$

에서 $\quad \mathrm{P}\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$\therefore \overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$

답 ②

1090 $\overline{\mathrm{AD}}$는 ∠A의 이등분선이므로

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-1-1)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{5}$,

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$이므로

$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}=2\sqrt{5}:\sqrt{5}=2:1$

따라서 점 D는 $\overline{\mathrm{BC}}$를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\frac{2\cdot3+1\cdot(-1)}{2+1}=\frac{5}{3}, \frac{2\cdot1+1\cdot(-2)}{2+1}=0$

에서 $\quad \mathrm{D}\left(\frac{5}{3}, 0\right)$

즉 $a=\frac{5}{3}$, $b=0$이므로 $\quad a+b=\frac{5}{3}$

답 ②

1091 전략 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$이다.

풀이 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}^2=2$이므로

$(4-a)^2+(a-2)^2=2, \quad a^2-6a+9=0$

$(a-3)^2=0 \quad \therefore a=3$

답 ③

1092 전략 구하는 점이 y축 위에 있으므로 그 좌표를 $(0, a)$라 한다.

풀이 구하는 점을 $\mathrm{P}(0, a)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$(-3)^2+a^2=1^2+(a+2)^2$

$9=4a+5 \quad \therefore a=1$

따라서 구하는 점의 좌표는 (0, 1)이다.

답 (0, 1)

1093 전략 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$임을 이용한다.

풀이 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$이므로

$(a+3)^2+(2-1)^2=(a+1)^2+(2+3)^2$

$6a+10=2a+26, \quad 4a=16$

$\therefore a=4$

답 ④

1094 전략 두 점 사이의 거리 공식과 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구하는 공식을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(4+2)^2+(-1-5)^2}=6\sqrt{2}$

ㄴ. $\overline{\mathrm{AB}}$를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot4+2\cdot(-2)}{1+2}, \frac{1\cdot(-1)+2\cdot5}{1+2}\right)$, 즉 (0, 3)

ㄷ. $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{5-1}{2}\right)$, 즉 (1, 2)

ㄹ. $\overline{\mathrm{AB}}$를 2 : 1로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\cdot4-1\cdot(-2)}{2-1}, \frac{2\cdot(-1)-1\cdot5}{2-1}\right)$, 즉 (10, −7)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

1095 전략 세 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, $\mathrm{C}(x_3, y_3)$을 꼭짓점으로 하는 △ABC의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$이다.

풀이 $\frac{-2+3+a}{3}=1, \frac{-1+3+b}{3}=-\frac{1}{3}$이므로

$a=2, b=-3 \quad \therefore ab=-6$

답 −6

1096 전략 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $\overline{\mathrm{AB}}=3\sqrt{10}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}^2=90$이므로

$(3b-3a)^2+(a-b)^2=90$

$9(a-b)^2+(a-b)^2=90, \quad (a-b)^2=9$

$\therefore a-b=3$ ($\because a>b$)

답 ③

1097 전략 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{Q}(3, 2)$라 하고 주어진 식이 무엇을 나타내는지 생각해 본다.

풀이 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{Q}(3, 2)$라 하면

$\sqrt{x^2+y^2}=\overline{\mathrm{OP}}$, $\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\overline{\mathrm{PQ}}$ ··· ❶

$\therefore \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PQ}}$

$\geq \overline{\mathrm{OQ}}$

$=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$ ··· ❷

따라서 주어진 식의 최솟값은 $\sqrt{13}$이므로 $m=\sqrt{13}$

$\therefore m^2=13$ ··· ❸

답 13

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{Q}(3, 2)$라 하고 주어진 식을 선분의 길이로 나타낼 수 있다.	50%
❷ 주어진 식의 최솟값을 구할 수 있다.	40%
❸ m^2의 값을 구할 수 있다.	10%

1098 전략 $\mathrm{P}(0, a)$라 하고 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$을 a에 대한 이차식으로 나타낸다.

풀이 $\mathrm{P}(0, a)$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=(-3)^2+a^2+(-k)^2+(a+2)^2$

$=2a^2+4a+13+k^2$

$=2(a+1)^2+11+k^2$

따라서 $a=-1$일 때 주어진 식의 최솟값은 $11+k^2$이므로

$11+k^2=12$, $k^2=1$

$\therefore k=1\ (\because k>0)$

답 ①

1099 전략 $\overline{\mathrm{AB}}$를 삼등분하는 두 점 중 점 A에 가까운 점은 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $1:2$로 내분하는 점임을 이용한다.

풀이 $\overline{\mathrm{AB}}$를 삼등분하는 두 점 중 점 A에 가까운 점은 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $1:2$로 내분하는 점이므로 구하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\cdot3+2\cdot0}{1+2}, \dfrac{1\cdot(-7)+2\cdot(-4)}{1+2}\right)$, 즉 $(1, -5)$

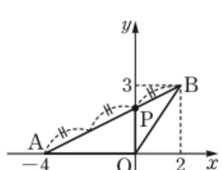
답 $(1, -5)$

참고 $\overline{\mathrm{AB}}$를 삼등분하는 두 점 중 점 B에 가까운 점은 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:1$로 내분하는 점이다.

1100 전략 $\triangle\mathrm{OAP}:\triangle\mathrm{OBP}=2:1$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=2:1$임을 이용한다.

풀이 $\triangle\mathrm{OAP}=2\triangle\mathrm{OBP}$에서 $\triangle\mathrm{OAP}:\triangle\mathrm{OBP}=2:1$

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=2:1$이므로 오른쪽 그림과 같이 점 P는 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:1$로 내분하는 점이다.



따라서

$\dfrac{2\cdot2+1\cdot(-4)}{2+1}=0$, $\dfrac{2\cdot3+1\cdot0}{2+1}=2$

이므로 $a=0$, $b=2$

$\therefore a+b=2$

답 2

1101 전략 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$이다.

풀이 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $5:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{5\cdot6+3\cdot2}{5+3}, \dfrac{5\cdot(-5)+3\cdot3}{5+3}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{9}{2}, -2\right)$

이 점이 직선 $y=2x+a$ 위에 있으므로

$-2=2\cdot\dfrac{9}{2}+a$ $\quad\therefore a=-11$

답 ①

1102 전략 세 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, $\mathrm{C}(x_3, y_3)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{ABC}$의 무게중심의 좌표는 $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$이다.

풀이 세 점 D, E, F의 좌표는 각각

$\mathrm{D}\left(\dfrac{1\cdot(-3)+2\cdot3}{1+2}, \dfrac{1\cdot1+2\cdot4}{1+2}\right)$, 즉 $\mathrm{D}(1, 3)$

$\mathrm{E}\left(\dfrac{1\cdot6+2\cdot(-3)}{1+2}, \dfrac{1\cdot(-2)+2\cdot1}{1+2}\right)$, 즉 $\mathrm{E}(0, 0)$

$\mathrm{F}\left(\dfrac{1\cdot3+2\cdot6}{1+2}, \dfrac{1\cdot4+2\cdot(-2)}{1+2}\right)$, 즉 $\mathrm{F}(5, 0)$ ··· ❶

따라서 $\triangle\mathrm{DEF}$의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{1+0+5}{3}, \dfrac{3+0+0}{3}\right)$, 즉 $(2, 1)$ ··· ❷

답 $(2, 1)$

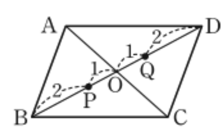
채점 기준	비율
❶ 세 점 D, E, F의 좌표를 구할 수 있다.	60%
❷ $\triangle\mathrm{DEF}$의 무게중심의 좌표를 구할 수 있다.	40%

다른 풀이 $\triangle\mathrm{DEF}$의 무게중심은 $\triangle\mathrm{ABC}$의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{3-3+6}{3}, \dfrac{4+1-2}{3}\right)$, 즉 $(2, 1)$

1103 전략 삼각형의 무게중심은 세 중선을 각 꼭짓점으로부터 $2:1$로 내분함을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점을 O라 하면 $\overline{\mathrm{BO}}=\overline{\mathrm{DO}}$이고



$\overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{PO}}=\overline{\mathrm{DQ}}:\overline{\mathrm{QO}}=2:1$

이므로

$\overline{\mathrm{PO}}=\overline{\mathrm{QO}}$

따라서 두 대각선의 교점은 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점과 같으므로 그 좌표는

$\left(\dfrac{-9+1}{2}, \dfrac{7+5}{2}\right)$, 즉 $(-4, 6)$

답 $(-4, 6)$

1104 전략 각의 이등분선의 성질과 두 점 사이의 거리 공식을 이용한다.

풀이 $\angle\mathrm{POQ}$의 이등분선과 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 교점을 R라 하면

$\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{PR}}:\overline{\mathrm{QR}}$

이때 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{12^2+5^2}=13$이므로

$\overline{\mathrm{PR}}:\overline{\mathrm{QR}}=5:13$

따라서 점 R는 $\overline{\mathrm{PQ}}$를 $5:13$으로 내분하는 점이므로 구하는 x좌표는

$\dfrac{5\cdot12+13\cdot3}{5+13}=\dfrac{11}{2}$

즉 $a=2$, $b=11$이므로

$a+b=13$

답 13

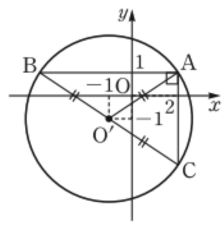
1105 전략 도로를 좌표평면 위에 나타내어 본다.

풀이 직선 OP를 x축, 직선 OQ를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 A, B 두 사람의 t초 후의 좌표는 각각 $(10-t,\ 0)$, $(0,\ 2t)$이므로 두 사람 사이의 거리는

$$\sqrt{(10-t)^2+(-2t)^2}=\sqrt{5t^2-20t+100}$$
$$=\sqrt{5(t-2)^2+80}\,(\mathrm{m})$$

따라서 A, B 두 사람 사이의 거리는 2초 후에 최소가 되고, 그때의 거리는 $\sqrt{80}=4\sqrt{5}\,(\mathrm{m})$이다. 답 ④

1106 전략 외심의 성질을 이용하여 △ABC가 어떤 삼각형인지 생각해 본다.



풀이 △ABC의 외심을 O′이라 하면 점 O′에서 각 꼭짓점까지의 거리가 같으므로 점 O′은 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점이다.
따라서 $\overline{\mathrm{BC}}$는 △ABC의 외접원의 지름이므로 △ABC는 $\overline{\mathrm{BC}}$를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

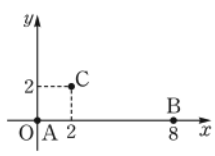
$$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2=(2\overline{\mathrm{AO'}})^2$$
$$=4\overline{\mathrm{AO'}}^2$$
$$=4\{(-1-2)^2+(-1-1)^2\}$$
$$=52$$

답 ②

라쎈 특강 삼각형의 외심

① 외심은 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점이다.
② 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

1107 전략 세 중학교 A, B, C의 위치를 좌표평면에 나타내고 두 점 사이의 거리 공식을 이용한다.



풀이 오른쪽 그림과 같이 중학교 A가 원점, 중학교 B가 x축 위에 오도록 좌표평면을 잡으면

A(0, 0), B(8, 0), C(2, 2) ··· ❶

도서관을 지으려는 지점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}$이므로

$$\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$$

$\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$에서

$a^2+b^2=(a-8)^2+b^2,\qquad -16a+64=0$

$\therefore\ a=4$ ······ ㉠

$\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$에서

$a^2+b^2=(a-2)^2+(b-2)^2,\qquad -4a-4b+8=0$

$\therefore\ b=-a+2$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad b=-2$ ··· ❷

따라서 $\mathrm{P}(4,\ -2)$이므로 구하는 거리는

$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{4^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}\,(\mathrm{km})$ ··· ❸

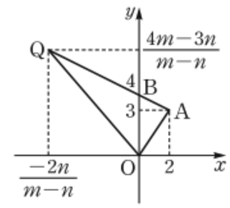
답 $2\sqrt{5}$ km

채점 기준	비율
❶ 세 중학교 A, B, C의 위치를 좌표평면에 나타낼 수 있다.	20%
❷ 도서관의 위치를 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하고 a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 도서관과 각 중학교 사이의 거리를 구할 수 있다.	40%

1108 전략 △OAQ=△OAB+△OBQ임을 이용한다.

풀이 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $m:n$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{m\cdot 0-n\cdot 2}{m-n},\ \frac{m\cdot 4-n\cdot 3}{m-n}\right),\ 즉\ \left(\frac{-2n}{m-n},\ \frac{4m-3n}{m-n}\right)$$



오른쪽 그림에서
△OAQ=△OAB+△OBQ이므로

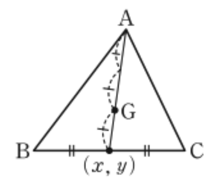
$$16=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\left|\frac{-2n}{m-n}\right|$$
$$\left|\frac{-2n}{m-n}\right|=6$$

이때 $m>n>0$이므로

$$\frac{2n}{m-n}=6,\qquad 2n=6m-6n$$
$$8n=6m\qquad \therefore\ \frac{n}{m}=\frac{3}{4}$$

답 ④

1109 전략 $\overline{\mathrm{AG}}$를 3 : 1로 외분하는 점은 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점임을 이용한다.



풀이 삼각형의 무게중심은 세 중선을 각 꼭짓점으로부터 2 : 1로 내분하므로 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AG}}$를 3 : 1로 외분하는 점은 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점이다.

$$\frac{(-a+1)+(a-5)}{2}=-2,$$
$$\frac{(b-6)+(-b+8)}{2}=1이므로$$

$x=-2,\ y=1$

$\therefore\ xy=-2$

답 -2

다른풀이 △ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{-5+(-a+1)+(a-5)}{3},\ \frac{7+(b-6)+(-b+8)}{3}\right),\ 즉$$

$(-3,\ 3)$

따라서 $\overline{\mathrm{AG}}$를 3 : 1로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\cdot(-3)-1\cdot(-5)}{3-1},\ \frac{3\cdot 3-1\cdot 7}{3-1}\right),\ 즉\ (-2,\ 1)$$

즉 $x=-2,\ y=1$이므로 $\qquad xy=-2$

10 직선의 방정식

Ⅳ. 도형의 방정식

1110 $y-1=2(x-1)$ $\qquad\therefore y=2x-1$ 답 $y=2x-1$

1111 $y-(-2)=-3(x-0)$ $\qquad\therefore y=-3x-2$ 답 $y=-3x-2$

1112 답 $y=1$

1113 답 $x=4$

1114 답 $x=3$

1115 답 $y=3$

1116 $y-4=\dfrac{6-4}{-1-1}(x-1)$

$\therefore y=-x+5$ 답 $y=-x+5$

1117 $y-(-5)=\dfrac{2-(-5)}{4-3}(x-3)$

$\therefore y=7x-26$ 답 $y=7x-26$

1118 두 점의 x좌표가 모두 6이므로 $\quad x=6$ 답 $x=6$

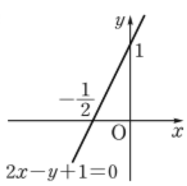
1119 답 $\dfrac{x}{7}-\dfrac{y}{3}=1$

1120 답 $-\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}=1$

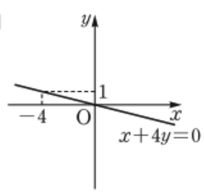
1121 x절편이 6, y절편이 5인 직선이므로

$\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{5}=1$ 답 $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{5}=1$

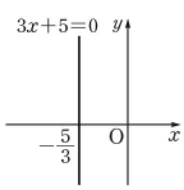
1122 답



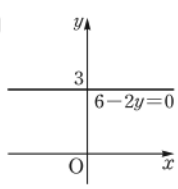
1123 답



1124 답



1125 답

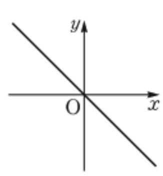


1126 직선 $ax+by+c=0$에서 $b\neq0$, $c=0$이므로

$y=-\dfrac{a}{b}x$

이때 $-\dfrac{a}{b}<0$이므로 주어진 직선의 기울기는 음수이고 y절편은 0이다.

따라서 주어진 직선은 오른쪽 그림과 같이 제2, 4사분면을 지난다.



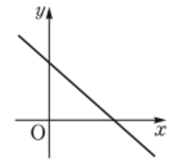
답 제2, 4사분면

1127 직선 $ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로

$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$

이때 $-\dfrac{a}{b}<0$, $-\dfrac{c}{b}>0$이므로 주어진 직선의 기울기는 음수이고 y절편은 양수이다.

따라서 주어진 직선은 오른쪽 그림과 같이 제 1, 2, 4사분면을 지난다.



답 제 1, 2, 4사분면

1128 주어진 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$3x+y-2=0$, $x-2y-3=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=1$, $y=-1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\quad(1, -1)$ 답 $(1, -1)$

참고 직선 $3x+y-2+k(x-2y-3)=0$은 k의 값에 관계없이 항상 두 직선 $3x+y-2=0$, $x-2y-3=0$의 교점 $(1, -1)$을 지난다.

1129 주어진 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+y-2=0$, $3x-y-6=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=2$, $y=0$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\quad(2, 0)$ 답 $(2, 0)$

1130 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x+y-3+k(4x-3y-1)=0$ (k는 실수)

으로 놓으면 이 직선이 점 $(0, 0)$을 지나므로

$-3-k=0$ $\qquad\therefore k=-3$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$2x+y-3-3(4x-3y-1)=0$

$\therefore x-y=0$ 답 $x-y=0$

다른풀이 $2x+y-3=0$, $4x-3y-1=0$을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=1$

즉 두 직선 $2x+y-3=0$, $4x-3y-1=0$의 교점의 좌표는

$(1, 1)$

따라서 두 점 $(1, 1)$, $(0, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=x$ $\qquad\therefore x-y=0$

1131 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x+y-3+k(4x-3y-1)=0$ (k는 실수)

으로 놓으면 이 직선이 점 $(3, 4)$를 지나므로

$7-k=0$ $\qquad\therefore k=7$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$2x+y-3+7(4x-3y-1)=0$

$\therefore 3x-2y-1=0$ 답 $3x-2y-1=0$

1132 (1) $5=5$, $-4\neq-6$이므로 두 직선 $y=5x-4$, $y=5x-6$은 평행하다.

(4) $5\cdot\left(-\dfrac{1}{5}\right)=-1$이므로 두 직선 $y=5x-4$, $y=-\dfrac{1}{5}x+9$는 수직이다.

답 평행한 직선: (1), 수직인 직선: (4)

1133 (1) $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\neq\frac{-1}{1}$이므로 두 직선 $2x+y-1=0$, $4x+2y+1=0$은 평행하다.
(3) $2\cdot1+1\cdot(-2)=0$이므로 두 직선 $2x+y-1=0$, $x-2y+6=0$은 수직이다.
답 평행한 직선: (1), 수직인 직선: (3)

1134 $-4=m$이므로 $m=-4$ 답 -4

1135 $-4\cdot m=-1$이므로 $m=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

1136 $\frac{a}{1}=\frac{5}{-(a+6)}\neq\frac{-2}{2}$에서
$a^2+6a+5=0$, $a\neq-1$
$(a+1)(a+5)=0$, $a\neq-1$
$\therefore a=-5$ 답 -5

1137 $a\cdot1+5\cdot\{-(a+6)\}=0$에서
$-4a=30$ $\therefore a=-\frac{15}{2}$ 답 $-\frac{15}{2}$

1138 직선 $y=3x$에 평행한 직선의 기울기는 3이다.
따라서 점 $(1, 1)$을 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은
$y-1=3(x-1)$ $\therefore y=3x-2$ 답 $y=3x-2$

1139 직선 $y=\frac{1}{2}x$에 수직인 직선의 기울기는 -2이다.
따라서 원점을 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은
$y=-2x$ 답 $y=-2x$

1140 직선 $5x-y=0$, 즉 $y=5x$에 평행한 직선의 기울기는 5이다.
따라서 점 $(2, 0)$을 지나고 기울기가 5인 직선의 방정식은
$y-0=5(x-2)$ $\therefore y=5x-10$ 답 $y=5x-10$

1141 직선 $x-4y=0$, 즉 $y=\frac{1}{4}x$에 수직인 직선의 기울기는 -4이다.
따라서 점 $(0, 6)$을 지나고 기울기가 -4인 직선의 방정식은
$y-6=-4(x-0)$ $\therefore y=-4x+6$ 답 $y=-4x+6$

1142 $\frac{|3\cdot4-1\cdot(-1)-3|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$ 답 $\sqrt{10}$

1143 점 $(3, 1)$과 직선 $y=-x+8$, 즉 $x+y-8=0$ 사이의 거리는
$\frac{|1\cdot3+1\cdot1-8|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

1144 점 $(-1, -2)$와 직선 $y=\frac{3}{4}x+2$, 즉 $3x-4y+8=0$ 사이의 거리는
$\frac{|3\cdot(-1)-4\cdot(-2)+8|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{13}{5}$ 답 $\frac{13}{5}$

1145 $\frac{|10|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{10}{13}$ 답 $\frac{10}{13}$

1146 원점과 직선 $y=x-5$, 즉 $x-y-5=0$ 사이의 거리는
$\frac{|-5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

1147 $|5-1|=4$ 답 4

1148 $|3-(-2)|=5$ 답 5

1149 두 직선 $3x-4y=0$, $3x-4y+5=0$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x-4y=0$ 위의 한 점 $(0, 0)$과 직선 $3x-4y+5=0$ 사이의 거리와 같다.
$\therefore \frac{|5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{5}{5}=1$ 답 1

1150 두 직선 $2x-y+6=0$, $2x-y-4=0$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x-y+6=0$ 위의 한 점 $(0, 6)$과 직선 $2x-y-4=0$ 사이의 거리와 같다.
$\therefore \frac{|2\cdot0-1\cdot6-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$ 답 $2\sqrt{5}$

1151 두 직선 $x-\frac{1}{3}y+7=0$, $3x-y-9=0$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-\frac{1}{3}y+7=0$ 위의 한 점 $(-7, 0)$과 직선 $3x-y-9=0$ 사이의 거리와 같다.
$\therefore \frac{|3\cdot(-7)-1\cdot0-9|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{30}{\sqrt{10}}=3\sqrt{10}$ 답 $3\sqrt{10}$

1152 기울기가 -3이고 점 $(3, 0)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-0=-3(x-3)$ $\therefore y=-3x+9$
따라서 $a=-3$, $b=9$이므로 $a+b=6$ 답 ③

1153 두 점 $(1, 7)$, $(5, -9)$를 잇는 선분의 중점의 좌표는
$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{7-9}{2}\right)$, 즉 $(3, -1)$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y+1=4(x-3)$ $\therefore y=4x-13$ 답 $y=4x-13$

1154 직선 $6x-2y+3=0$, 즉 $y=3x+\frac{3}{2}$의 기울기는 3이다.
따라서 점 $(-1, 5)$를 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은
$y-5=3(x+1)$ $\therefore 3x-y+8=0$
즉 $a=-1$, $b=8$이므로
$a^2+b^2=(-1)^2+8^2=65$ 답 65

1155 두 점 $(1, 4)$, $(-2, -2)$를 지나는 직선의 방정식은
$y-4=\frac{-2-4}{-2-1}(x-1)$ $\therefore y=2x+2$
이 직선이 점 $(a, -6)$을 지나므로
$-6=2a+2$ $\therefore a=-4$ 답 -4

1156 두 점 $(-1,\ 7)$, $(4,\ -3)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-7=\frac{-3-7}{4+1}(x+1) \qquad \therefore\ 2x+y-5=0$$

양변에 2를 곱하면 $\quad 4x+2y-10=0$

따라서 $a=4$, $b=2$이므로 $\quad ab=8$ 답 8

1157 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot8+3\cdot(-2)}{2+3},\ \frac{2\cdot(-6)+3\cdot14}{2+3}\right),\text{ 즉 }(2,\ 6) \quad \cdots ❶$$

따라서 두 점 $(2,\ 6)$, $(-3,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-6=\frac{1-6}{-3-2}(x-2) \qquad \therefore\ y=x+4 \quad \cdots ❷$$

답 $y=x+4$

채점 기준	비율
❶ $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:3$으로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❷ 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	60%

1158 x절편이 3, y절편이 4인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1 \qquad \therefore\ 4x+3y-12=0$$

따라서 $a=4$, $b=-12$이므로 $\quad a+b=-8$ 답 ①

1159 x절편이 6, y절편이 -8인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{6}-\frac{y}{8}=1$$

⑤ $\frac{9}{6}-\frac{5}{8}\neq1$ 답 ⑤

1160 y절편을 $a(a\neq0)$라 하면 x절편은 $3a$이므로 직선 l의 방정식은

$$\frac{x}{3a}+\frac{y}{a}=1 \quad \cdots ❶$$

이 직선이 점 $(3,\ 4)$를 지나므로

$$\frac{3}{3a}+\frac{4}{a}=1, \qquad \frac{5}{a}=1 \qquad \therefore\ a=5 \quad \cdots ❷$$

따라서 직선 l의 방정식은

$$\frac{x}{15}+\frac{y}{5}=1 \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{x}{15}+\frac{y}{5}=1$

채점 기준	비율
❶ y절편을 $a(a\neq0)$라 하고 직선 l의 방정식을 세울 수 있다.	40%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	20%

1161 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AC와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{6-k}{2+2}=\frac{6-7}{2-k},\text{ 즉 }\frac{6-k}{4}=\frac{-1}{2-k}$$

$$(6-k)(2-k)=-4, \qquad k^2-8k+16=0$$

$$(k-4)^2=0 \qquad \therefore\ k=4$$

답 ③

1162 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{1+1}{a+3}=\frac{4-a+1}{5+3},\text{ 즉 }\frac{2}{a+3}=\frac{5-a}{8}$$

$$(a+3)(5-a)=16, \qquad a^2-2a+1=0$$

$$(a-1)^2=0 \qquad \therefore\ a=1$$

따라서 직선 l은 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ -1)$, $\mathrm{B}(1,\ 1)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$$y+1=\frac{1+1}{1+3}(x+3)$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

답 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

1163 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 존재하지 않으려면 세 점은 한 직선 위에 있어야 한다.

즉 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{7-1}{-1-a}=\frac{a-6-7}{3+1},\text{ 즉 }\frac{6}{-1-a}=\frac{a-13}{4}$$

$$(-1-a)(a-13)=24, \qquad a^2-12a+11=0$$

$$(a-1)(a-11)=0 \qquad \therefore\ a=1\text{ 또는 }a=11$$

따라서 모든 a의 값의 합은 12이다. 답 ⑤

1164 직선 l이 $\triangle$ABC의 넓이를 이등분하려면 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점을 지나야 한다.

$\overline{\mathrm{AC}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-4+6}{2},\ \frac{1-1}{2}\right),\text{ 즉 }(1,\ 0)$$

따라서 직선 l은 두 점 $(1,\ 0)$, $(5,\ 8)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$$y-0=\frac{8-0}{5-1}(x-1) \qquad \therefore\ y=2x-2$$

답 ②

1165 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나야 한다. $\cdots$ ❶

직사각형의 두 대각선의 교점은 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점과 같고 $\mathrm{B}(1,\ 1)$, $\mathrm{D}(5,\ 4)$이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{1+4}{2}\right),\text{ 즉 }\left(3,\ \frac{5}{2}\right) \quad \cdots ❷$$

따라서 두 점 $(0,\ 0)$, $\left(3,\ \frac{5}{2}\right)$를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\frac{5}{2}-0}{3-0}=\frac{5}{6} \quad \cdots ❸$$

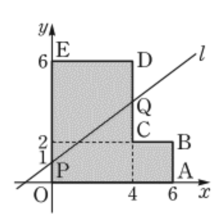
답 $\frac{5}{6}$

채점 기준	비율
❶ 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선의 조건을 알 수 있다.	30%
❷ 직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❸ 직선의 기울기를 구할 수 있다.	30%

1166 색칠한 부분의 넓이는

$$4\cdot6+2\cdot2=28$$

이므로 직선 l과 $\overline{\mathrm{OE}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$의 교점을 각각 P, Q라 하면 사다리꼴 PQDE의 넓이가 14이어야 한다. 즉

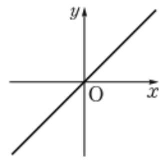


$$\frac{1}{2}\cdot(5+\overline{\mathrm{QD}})\cdot4=14 \qquad \therefore\ \overline{\mathrm{QD}}=2$$

따라서 점 Q의 좌표는 (4, 4)이므로 두 점 (0, 1), (4, 4)를 지나는 직선 l의 방정식은

$y-1=\frac{4-1}{4-0}(x-0)$ $\therefore$ $y=\frac{3}{4}x+1$ 답 $y=\frac{3}{4}x+1$

1167 $bc=0$에서 $b=0$ 또는 $c=0$
그런데 $ab<0$이므로 $b\neq0$ $\therefore$ $c=0$
따라서 직선 $ax+by-c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x$
이때 $-\frac{a}{b}>0$이므로 주어진 직선은 오른쪽 그림과 같이 제1, 3사분면을 지난다.



답 ②

1168 직선 $ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $ac<0$, $bc>0$에서 a, b의 부호가 서로 다르므로

$-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}<0$

따라서 주어진 직선의 기울기는 양수, y절편은 음수이므로 직선의 개형은 ③과 같다. 답 ③

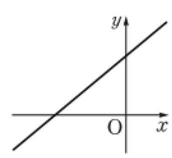
1169 직선 $ax-by+c=0$, 즉 $y=\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$의 기울기는 음수, y절편은 양수이므로

$\frac{a}{b}<0$, $\frac{c}{b}>0$ $\therefore$ $ac<0$

직선 $bx-cy-a=0$에서 $c\neq0$이므로

$y=\frac{b}{c}x-\frac{a}{c}$

이때 $\frac{b}{c}>0$, $-\frac{a}{c}>0$이므로 직선 $bx-cy-a=0$의 기울기와 y절편은 모두 양수이다.
따라서 직선 $bx-cy-a=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.



답 제4사분면

1170 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+3y-6)k+(x-2y+4)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+3y-6=0$, $x-2y+4=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=0$, $y=2$
따라서 $a=0$, $b=2$이므로 $a+b=2$ 답 2

1171 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x+y+3)k+(2x+3y-7)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x+y+3=0$, $2x+3y-7=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=-4$, $y=5$

$\therefore$ P$(-4, 5)$

따라서 점 P와 원점을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{5-0}{-4-0}=-\frac{5}{4}$ 답 $-\frac{5}{4}$

1172 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+y+3)k+(2x-y+3)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+y+3=0$, $2x-y+3=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=-1$
따라서 주어진 직선은 실수 k의 값에 관계없이 점 $(-2, -1)$을 지나므로 항상 제3사분면을 지난다. 답 제3사분면

1173 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$3x-2y+7+k(2x-y+1)=0$ (k는 실수) …… ㉠

으로 놓으면 이 직선이 점 $(-1, 5)$를 지날 때

$-3-10+7+k(-2-5+1)=0$

$-6-6k=0$ $\therefore$ $k=-1$

$k=-1$을 ㉠에 대입하면 직선의 방정식은

$3x-2y+7-(2x-y+1)=0$

$\therefore$ $x-y+6=0$

따라서 $a=1$, $b=-1$이므로

$a^2+b^2=1^2+(-1)^2=2$ 답 2

다른풀이 $3x-2y+7=0$, $2x-y+1=0$을 연립하여 풀면

$x=5$, $y=11$

즉 두 직선 $3x-2y+7=0$, $2x-y+1=0$의 교점의 좌표는

(5, 11)

따라서 두 점 (5, 11), $(-1, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-11=\frac{5-11}{-1-5}(x-5)$ $\therefore$ $x-y+6=0$

1174 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$4x+3y+9+k(x+y+2)=0$ (k는 실수) …… ㉠

으로 놓으면 이 직선이 점 $(1, -2)$를 지날 때

$4-6+9+k(1-2+2)=0$

$7+k=0$ $\therefore$ $k=-7$

$k=-7$을 ㉠에 대입하면 직선 l의 방정식은

$4x+3y+9-7(x+y+2)=0$

$\therefore$ $3x+4y+5=0$

⑤ $3\cdot2+4\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+5\neq0$ 답 ⑤

1175 점 C를 지나는 직선의 방정식을

$2x-y+4+k(x+y-6)=0$ (k는 실수) …… ㉠

으로 놓으면 직선 ㉠이 $\overline{AB}$의 중점을 지날 때 △ABC의 넓이를 이등분한다. ⋯ ❶
이때 A$(-2, 0)$, B$(6, 0)$이므로 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$, 즉 (2, 0)

직선 ㉠이 점 (2, 0)을 지날 때

$4-0+4+k(2+0-6)=0$

$8-4k=0$ $\therefore$ $k=2$ ⋯ ❷

$k=2$를 ㉠에 대입하면 직선의 방정식은

$2x-y+4+2(x+y-6)=0$

$\therefore$ $y=-4x+8$

따라서 $a=-4$, $b=8$이므로 $a+b=4$ ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ ㉠을 구하고 △ABC의 넓이를 이등분하는 직선의 조건을 알 수 있다.	40%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

1176 두 직선 $2x-ay+b=0$, $x+cy-4=0$이 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$4-a+b=0 \quad \therefore\ a-b=4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$2+c-4=0 \quad \therefore\ c=2$

또 두 직선 $2x-ay+b=0$, $x+2y-4=0$이 수직이므로

$2\cdot1-a\cdot2=0 \quad \therefore\ a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=-3$

$\therefore\ a+b+c=0$ 답 ②

1177 직선 $y=mx+3$과 직선 $y=\frac{1}{2}x-1$이 수직이므로

$m\cdot\frac{1}{2}=-1 \quad \therefore\ m=-2$

또 직선 $y=mx+3$과 직선 $y=(3-n)x-1$이 평행하므로

$m=3-n \quad \therefore\ n=5$

$\therefore\ mn=-10$ 답 -10

1178 직선 $ax+y+1=0$과 직선 $bx-2y+3=0$이 수직이므로

$a\cdot b+1\cdot(-2)=0 \quad \therefore\ ab=2$

또 직선 $ax+y+1=0$과 직선 $(b+3)x-y+4=0$이 평행하므로

$\frac{a}{b+3}=\frac{1}{-1}\neq\frac{1}{4}, \quad -a=b+3$

$\therefore\ a+b=-3$

$\therefore\ a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=(-3)^2-2\cdot2=5$ 답 ②

1179 주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $y=ax+2$가 직선 $y=3x$ 또는 $y=-x+4$와 평행할 때,

$a=-1$ 또는 $a=3$

(ii) 직선 $y=ax+2$가 두 직선 $y=3x$, $y=-x+4$의 교점을 지날 때,

$y=3x$, $y=-x+4$를 연립하여 풀면

$x=1$, $y=3$

직선 $y=ax+2$가 점 $(1,\ 3)$을 지나야 하므로

$3=a+2 \quad \therefore\ a=1$

(i), (ii)에서 모든 a의 값의 합은 3이다. 답 ④

1180 두 직선 $5x+y-4=0$, $4x-2y+1=0$이 한 점에서 만나므로 주어진 세 직선에 의하여 생기는 교점이 2개가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $ax+3y+2=0$이 직선 $5x+y-4=0$과 평행할 때,

$\frac{5}{a}=\frac{1}{3}\neq\frac{-4}{2}$에서 $\quad a=15$

(ii) 직선 $ax+3y+2=0$이 직선 $4x-2y+1=0$과 평행할 때,

$\frac{4}{a}=\frac{-2}{3}\neq\frac{1}{2}$에서 $\quad a=-6$

(i), (ii)에서 구하는 a의 값은 -6, 15이다. 답 -6, 15

1181 두 직선 $2x+y-6=0$, $3x-y-4=0$이 수직이 아니므로 주어진 세 직선으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형인 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $kx-y+1=0$이 직선 $2x+y-6=0$과 수직일 때,

$2k+1\cdot(-1)=0$에서 $\quad k=\frac{1}{2}$

그런데 $k=\frac{1}{2}$이면 직선 $kx-y+1=0$이 두 직선 $2x+y-6=0$, $3x-y-4=0$의 교점 $(2,\ 2)$를 지나므로 세 직선은 한 점에서 만난다.

(ii) 직선 $kx-y+1=0$이 직선 $3x-y-4=0$과 수직일 때,

$3k+(-1)\cdot(-1)=0$에서 $\quad k=-\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 $\quad k=-\frac{1}{3}$ 답 $-\frac{1}{3}$

1182 직선 $y=-\frac{1}{3}x+2$에 평행한 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.

따라서 점 $(12,\ 4)$를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{3}$인 직선의 방정식은

$y-4=-\frac{1}{3}(x-12) \quad \therefore\ y=-\frac{1}{3}x+8$

이 직선의 방정식에 $y=0$을 대입하면

$0=-\frac{1}{3}x+8 \quad \therefore\ x=24$

즉 구하는 x절편은 24이다. 답 24

1183 두 점 $(4,\ 0)$, $(0,\ 3)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{3-0}{0-4}=-\frac{3}{4}$

이므로 이 직선에 평행한 직선의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이다.

따라서 점 $(8,\ 0)$을 지나고 기울기가 $-\frac{3}{4}$인 직선의 방정식은

$y-0=-\frac{3}{4}(x-8)$

$\therefore\ y=-\frac{3}{4}x+6$ 답 $y=-\frac{3}{4}x+6$

1184 직선 $x+5y+7=0$, 즉 $y=-\frac{1}{5}x-\frac{7}{5}$에 평행한 직선의 기울기는 $-\frac{1}{5}$이다.

따라서 점 $(5,\ 2)$를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{5}$인 직선의 방정식은

$y-2=-\frac{1}{5}(x-5) \quad \therefore\ y=-\frac{1}{5}x+3$

이 직선이 점 $(a,\ 4)$를 지나므로

$4=-\frac{1}{5}a+3 \quad \therefore\ a=-5$ 답 ①

다른풀이 두 점 $(5,\ 2)$, $(a,\ 4)$를 지나는 직선이 직선 $x+5y+7=0$, 즉 $y=-\frac{1}{5}x-\frac{7}{5}$에 평행하므로

$\frac{4-2}{a-5}=-\frac{1}{5}, \quad a-5=-10 \quad \therefore\ a=-5$

1185 직선 $2x+y-7=0$, 즉 $y=-2x+7$에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 점 $(6,\ -1)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y+1=\frac{1}{2}(x-6)$ $\therefore\ y=\frac{1}{2}x-4$ 답 $y=\frac{1}{2}x-4$

1186 두 점 $A(-6,\ -2)$, $B(0,\ 4)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{4+2}{0+6}=1$

이므로 직선 AB에 수직인 직선의 기울기는 -1이다.

한편 $\overline{AB}$를 $2:1$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\cdot 0-1\cdot(-6)}{2-1},\ \frac{2\cdot 4-1\cdot(-2)}{2-1}\right)$, 즉 $(6,\ 10)$

따라서 점 $(6,\ 10)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-10=-(x-6)$ $\therefore\ y=-x+16$ 답 ②

1187 직선 $x-3y+5=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$에 수직인 직선 AH의 기울기는 -3이다. ⋯ ❶

따라서 직선 AH의 방정식은

$y-4=-3(x+3)$ $\therefore\ 3x+y+5=0$ ⋯ ❷

$x-3y+5=0$, $3x+y+5=0$을 연립하여 풀면

$x=-2$, $y=1$

즉 점 H의 좌표는 $(-2,\ 1)$이다. ⋯ ❸

답 $(-2,\ 1)$

채점 기준	비율
❶ 직선 AH의 기울기를 구할 수 있다.	20%
❷ 직선 AH의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ 점 H의 좌표를 구할 수 있다.	40%

1188 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3-1}{2},\ \frac{-7+1}{2}\right)$, 즉 $(1,\ -3)$

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{1+7}{-1-3}=-2$

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 기울기가 $\frac{1}{2}$이고 점 $(1,\ -3)$을 지나므로 그 방정식은

$y+3=\frac{1}{2}(x-1)$ $\therefore\ x-2y-7=0$

즉 $a=1$, $b=-2$이므로

$a-b=3$ 답 3

1189 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{7-5}{2}\right)$, 즉 $(3,\ 1)$

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-5-7}{5-1}=-3$

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 기울기가 $\frac{1}{3}$이고 점 $(3,\ 1)$을 지나므로 그 방정식은

$y-1=\frac{1}{3}(x-3)$ $\therefore\ y=\frac{1}{3}x$

이 직선이 점 $(a,\ 2)$를 지나므로 $2=\frac{1}{3}a$ $\therefore\ a=6$ 답 ⑤

1190 직선 $x-2y-8=0$의 x절편은 8, y절편은 -4이므로

$A(8,\ 0)$, $B(0,\ -4)$ ⋯ ❶

$\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{8+0}{2},\ \frac{0-4}{2}\right)$, 즉 $(4,\ -2)$

또 직선 $x-2y-8=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x-4$의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로 $\overline{AB}$의 수직이등분선의 기울기는 -2이다. ⋯ ❷

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선의 방정식은

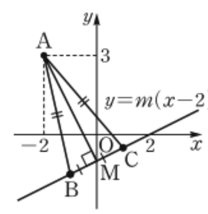
$y+2=-2(x-4)$ $\therefore\ y=-2x+6$ ⋯ ❸

답 $y=-2x+6$

채점 기준	비율
❶ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	20%
❷ $\overline{AB}$의 중점의 좌표와 수직이등분선의 기울기를 구할 수 있다.	40%
❸ $\overline{AB}$의 수직이등분선의 방정식을 구할 수 있다.	40%

1191 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면 점 M은 y축 위에 있고, $\triangle ABC$가 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로 직선 AM은 $\overline{BC}$의 수직이등분선이다.

이때 직선 BC의 기울기가 m이므로 직선 AM의 기울기는 $-\frac{1}{m}$이다.



따라서 점 $A(-2,\ 3)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{m}$인 직선 AM의 방정식은

$y-3=-\frac{1}{m}(x+2)$ $\therefore\ y=-\frac{1}{m}x-\frac{2}{m}+3$

두 직선 AM, BC의 y절편은 각각 $-\frac{2}{m}+3$, $-2m$이므로

$-\frac{2}{m}+3=-2m$, $2m^2+3m-2=0$

$(m+2)(2m-1)=0$

그런데 $m>0$이므로 $m=\frac{1}{2}$ 답 ③

1192 두 점 $(2,\ -1)$, $(1,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+1=\frac{6+1}{1-2}(x-2)$ $\therefore\ 7x+y-13=0$

따라서 점 $(5,\ 8)$과 직선 $7x+y-13=0$ 사이의 거리는

$\frac{|7\cdot 5+1\cdot 8-13|}{\sqrt{7^2+1^2}}=\frac{30}{\sqrt{50}}=3\sqrt{2}$ 답 $3\sqrt{2}$

1193 $\frac{|8\cdot(-1)+6\cdot 2+k|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{1}{2}$이므로 $|4+k|=5$

$4+k=-5$ 또는 $4+k=5$

$\therefore\ k=-9$ 또는 $k=1$

그런데 $k>0$이므로 $k=1$ 답 1

1194 점 $(0,\ k)$에서 두 직선 $5x-y-4=0$, $x+5y-2=0$에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|5\cdot0-1\cdot k-4|}{\sqrt{5^2+(-1)^2}}=\frac{|1\cdot0+5\cdot k-2|}{\sqrt{1^2+5^2}},\qquad |k+4|=|5k-2|$$

$k+4=-(5k-2)$ 또는 $k+4=5k-2$

$\therefore k=-\frac{1}{3}$ 또는 $k=\frac{3}{2}$

따라서 모든 k의 값의 곱은 $-\frac{1}{2}$이다. 답 ②

1195 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x+y)k+(2x-y-4)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x+y=0,\ 2x-y-4=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=1,\ y=-2$

$\therefore \mathrm{P}(1,\ -2)$ ⋯❶

따라서 점 $\mathrm{P}(1,\ -2)$와 직선 $y=-x-3$, 즉 $x+y+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1\cdot1+1\cdot(-2)+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$ ⋯❷

답 $\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	50%
❷ 점 P와 직선 $y=-x-3$ 사이의 거리를 구할 수 있다.	50%

1196 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(0+3)^2+(2-4)^2}=\sqrt{13}$

직선 AB의 방정식은

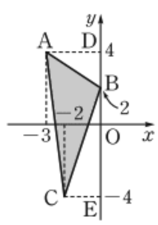
$y-4=\frac{2-4}{0+3}(x+3)\qquad \therefore 2x+3y-6=0$

점 C와 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|2\cdot(-2)+3\cdot(-4)-6|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{22}{\sqrt{13}}=\frac{22\sqrt{13}}{13}$$

$\therefore \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{22\sqrt{13}}{13}=11$ 답 ④

다른풀이 오른쪽 그림에서



$\triangle\mathrm{ABC}=\square\mathrm{DACE}-(\triangle\mathrm{DAB}+\triangle\mathrm{BCE})$

$=\frac{1}{2}\cdot(3+2)\cdot8-\left(\frac{1}{2}\cdot3\cdot2+\frac{1}{2}\cdot2\cdot6\right)$

$=20-9=11$

1197 직선 $x+y+4=0$의 x절편과 y절편이 모두 -4이므로

$\mathrm{A}(-4,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ -4)$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(0+4)^2+(-4-0)^2}=4\sqrt{2}$

점 C와 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|1\cdot(-1)+1\cdot3+4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

$\therefore \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot3\sqrt{2}=12$ 답 ④

1198 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(2-0)^2+(0-4)^2}=2\sqrt{5}$

직선 AB의 방정식은

$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1\qquad \therefore 2x+y-4=0$ ⋯❶

점 C와 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|2\cdot5+1\cdot a-4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|6+a|}{\sqrt{5}}$$ ⋯❷

△ABC의 넓이가 9이므로

$\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}\cdot\frac{|6+a|}{\sqrt{5}}=9,\qquad |6+a|=9$

$6+a=-9$ 또는 $6+a=9$

$\therefore a=-15$ 또는 $a=3$

그런데 $a>0$이므로 $\quad a=3$ ⋯❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이와 직선 AB의 방정식을 구할 수 있다.	20%
❷ 점 C와 직선 AB 사이의 거리를 구할 수 있다.	30%
❸ 양수 a의 값을 구할 수 있다.	50%

1199 주어진 두 직선이 평행하므로 직선 $x+7y-10=0$ 위의 한 점 $(10,\ 0)$과 직선 $x+7y+a=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이다.

$\frac{|1\cdot10+7\cdot0+a|}{\sqrt{1^2+7^2}}=\sqrt{2},\qquad |10+a|=10$

$10+a=-10$ 또는 $10+a=10$

$\therefore a=-20$ 또는 $a=0$

그런데 $a\neq0$이므로 $\quad a=-20$ 답 ①

1200 두 직선이 평행하므로

$\frac{2}{m}=\frac{m-3}{-1}\neq\frac{14}{4},\qquad m(m-3)=-2$

$m^2-3m+2=0,\qquad (m-1)(m-2)=0$

$\therefore m=2\ (\because m>1)$

따라서 두 직선의 방정식은

$2x-y+14=0,\ 2x-y+4=0$

이므로 직선 $2x-y+14=0$ 위의 한 점 $(-7,\ 0)$과 직선 $2x-y+4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\cdot(-7)-1\cdot0+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$ 답 ⑤

1201 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이는 평행한 두 직선 AD, BC 사이의 거리와 같다. 이때 직선 $x+ky=3$ 위의 한 점 $(3,\ 0)$과 직선 $x+2y=8$, 즉 $x+2y-8=0$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{|1\cdot3+2\cdot0-8|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

따라서 정사각형 ABCD의 넓이는 $\quad (\sqrt{5})^2=5$ 답 ⑤

1202 직선 $3x+y-2=0$에 평행한 직선의 방정식을

$3x+y+k=0\,(k\neq-2)$

이라 하면 직선 $3x+y-2=0$ 위의 한 점 $(0,\ 2)$와 이 직선 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$\frac{|3\cdot0+1\cdot2+k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10},\qquad |2+k|=10$

$2+k=-10$ 또는 $2+k=10$

$\therefore k=-12$ 또는 $k=8$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$3x+y-12=0$ 또는 $3x+y+8=0$

답 $3x+y-12=0$, $3x+y+8=0$

1203 **전략** 점 (a, b)를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y-b=m(x-a)$이다.

풀이 주어진 직선의 방정식은

$y+4=a(x-4)$ $\quad\therefore y=ax-4a-4$

따라서 $a=6$, $-4a-4=b$이므로 $\quad a=6$, $b=-28$

$\therefore a+b=-22$

답 ②

다른풀이 직선 $y=6x+b$의 기울기가 6이므로

$a=6$

직선 $y=6x+b$가 점 $(4, -4)$를 지나므로

$-4=24+b$ $\quad\therefore b=-28$

$\therefore a+b=-22$

1204 **전략** x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$이다. (단, $a\neq0$, $b\neq0$)

풀이 주어진 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{5}+y=1$

이 직선이 점 $(a, 8)$을 지나므로

$\dfrac{a}{5}+8=1$, $\quad\dfrac{a}{5}=-7$ $\quad\therefore a=-35$

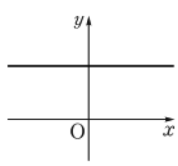
답 -35

1205 **전략** $AB=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$임을 이용한다.

풀이 $ab=0$에서 $\quad a=0$ 또는 $b=0$

그런데 $bc<0$이므로 $\quad b\neq0$ $\quad\therefore a=0$

따라서 $ax+by+c=0$에서 $\quad y=-\dfrac{c}{b}$



이때 $-\dfrac{c}{b}>0$이므로 주어진 직선은 오른쪽 그림과 같이 제1, 2사분면을 지난다.

답 ①

1206 **전략** 두 직선의 교점이 존재하지 않으면 두 직선은 평행하다.

풀이 두 직선 $ax+3y-5=0$, $2x-(1-a)y+2=0$의 교점이 존재하지 않으므로 두 직선은 평행하다. ⋯❶

$\dfrac{a}{2}=\dfrac{3}{-(1-a)}\neq\dfrac{-5}{2}$ ⋯❷

$a(a-1)=6$, $\quad a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0$ $\quad\therefore a=-2$ $(\because a<0)$ ⋯❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ 두 직선의 교점이 존재하지 않을 때의 조건을 알 수 있다.	30%
❷ 두 직선이 평행할 때의 조건을 이용하여 a에 대한 식을 세울 수 있다.	40%
❸ 음수 a의 값을 구할 수 있다.	30%

1207 **전략** 두 직선이 수직이면 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

풀이 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{1+2}{3+6}=\dfrac{1}{3}$

이므로 직선 AB에 수직인 직선의 기울기는 -3이다.

또 $\overline{\text{AB}}$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-6+3}{2}, \dfrac{-2+1}{2}\right)$, 즉 $\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

기울기가 -3이고 점 $\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+\dfrac{1}{2}=-3\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$ $\quad\therefore y=-3x-5$

따라서 구하는 y절편은 -5이다.

답 -5

1208 **전략** 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식은 $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$이다. (단, $x_1\neq x_2$)

풀이 △ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+0+5}{3}, \dfrac{-9+5+7}{3}\right)$, 즉 $(1, 1)$

두 점 $(1, 1)$, $(-1, -5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\dfrac{-5-1}{-1-1}(x-1)$ $\quad\therefore y=3x-2$

이 직선의 방정식에 $y=0$을 대입하면

$0=3x-2$ $\quad\therefore x=\dfrac{2}{3}$

따라서 구하는 x절편은 $\dfrac{2}{3}$이다.

답 ②

1209 **전략** 직선 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$의 x절편은 a, y절편은 b임을 이용한다.

풀이 직선 $\dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{6}=1$의 x절편이 5이므로 $\quad$P$(5, 0)$

직선 $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{2}=1$의 y절편이 2이므로 $\quad$Q$(0, 2)$

따라서 직선 PQ의 방정식은

$\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{2}=1$

답 ⑤

1210 **전략** 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 함을 이용한다.

풀이 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$\dfrac{4-1}{a+2}=\dfrac{a+4-1}{2+2}$, 즉 $\dfrac{3}{a+2}=\dfrac{a+3}{4}$ ⋯⋯㉠

$(a+2)(a+3)=12$, $\quad a^2+5a-6=0$

$(a+6)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ $(\because a>0)$

㉠에서 직선 l은 기울기가 1이고 점 $(-2, 1)$을 지나므로

$y-1=x+2$ $\quad\therefore y=x+3$

따라서 이 직선의 x절편은 -3, y절편은 3이므로 구하는 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot|-3|\cdot3=\dfrac{9}{2}$

답 $\dfrac{9}{2}$

1211 **전략** 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지남을 이용한다.

풀이 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지난다.

□OABC의 두 대각선의 교점은 $\overline{OB}$의 중점과 같고 B(6, 5)이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+5}{2}\right), \text{ 즉 } \left(3, \frac{5}{2}\right)$$

□FADE의 두 대각선의 교점은 $\overline{DF}$의 중점과 같고 D(6, 3), F(4, 0)이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{6+4}{2}, \frac{3+0}{2}\right), \text{ 즉 } \left(5, \frac{3}{2}\right)$$

따라서 □OABC, □FADE의 넓이를 모두 이등분하는 직선 l은 두 점 $\left(3, \frac{5}{2}\right)$, $\left(5, \frac{3}{2}\right)$을 지나므로 직선 l의 기울기는

$$\frac{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}{5-3}=-\frac{1}{2}$$

답 ③

1212 전략 주어진 직선의 기울기와 y절편이 모두 음수임을 이용한다.

풀이 직선 $ax+by+c=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 기울기와 y절편이 모두 음수이므로

$$-\frac{a}{b}<0, \ -\frac{c}{b}<0 \qquad \therefore ac>0$$

$-cx+ay-b=0$에서 $a\neq 0$이므로

$$y=\frac{c}{a}x+\frac{b}{a}$$

이때 $\frac{c}{a}>0$, $\frac{b}{a}>0$이므로 직선 $-cx+ay-b=0$의 기울기와 y절편은 모두 양수이다.

따라서 직선 $-cx+ay-b=0$의 개형은 ①과 같다. 답 ①

1213 전략 직선 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$은 실수 k의 값에 관계없이 항상 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지남을 이용한다.

풀이 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$$(x-y+4)k+(2x+y+a)=0$$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x-y+4=0, \ 2x+y+a=0$$

점 $(-5, b)$는 위의 두 직선의 교점이므로

$$-5-b+4=0, \ -10+b+a=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=11$, $b=-1$

$$\therefore a-b=12$$

답 12

1214 전략 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ ($abc\neq 0$, $a'b'c'\neq 0$)이 평행하면 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$, 수직이면 $aa'+bb'=0$이다.

풀이 직선 $(k+2)x+3y-4=0$과 직선 $kx-y+2=0$이 평행하려면

$$\frac{k+2}{k}=\frac{3}{-1}\neq\frac{-4}{2}$$

$$-k-2=3k \qquad \therefore k=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha=-\frac{1}{2} \quad \cdots ❶$$

또 직선 $(k+2)x+3y-4=0$과 직선 $kx-y+2=0$이 수직이려면

$$(k+2)\cdot k+3\cdot(-1)=0$$

$$k^2+2k-3=0, \qquad (k+3)(k-1)=0$$

$$\therefore k=-3 \text{ 또는 } k=1$$

$$\therefore \beta=1 \ (\because \beta>0) \quad \cdots ❷$$

$$\therefore \alpha+\beta=\frac{1}{2} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ α의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ β의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $\alpha+\beta$의 값을 구할 수 있다.	20%

1215 전략 세 직선이 한 점에서 만나려면 두 직선의 교점을 다른 한 직선이 지나야 한다.

풀이 주어진 세 직선이 한 점에서 만나려면 직선 $kx-2y=-5$가 두 직선 $2x+y=0$, $3x+y=-k$의 교점을 지나야 한다.

$2x+y=0$, $3x+y=-k$를 연립하여 풀면

$$x=-k, \ y=2k$$

직선 $kx-2y=-5$가 점 $(-k, 2k)$를 지나야 하므로

$$k\cdot(-k)-2\cdot 2k=-5, \qquad k^2+4k-5=0$$

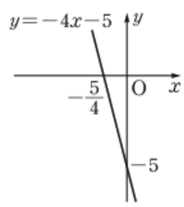
$$(k+5)(k-1)=0$$

$$\therefore k=-5 \text{ 또는 } k=1$$

따라서 모든 k의 값의 곱은 -5이다. 답 ①

1216 전략 두 직선이 평행하면 두 직선의 기울기는 같다.

풀이 직선 $y=-4x+9$에 평행한 직선의 기울기는 -4이다.



따라서 점 $(-2, 3)$을 지나고 기울기가 -4인 직선의 방정식은

$$y-3=-4(x+2) \qquad \therefore y=-4x-5$$

직선 $y=-4x-5$는 오른쪽 그림과 같이 제1사분면을 지나지 않는다. 답 제1사분면

1217 전략 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분함을 이용한다.

풀이 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로 직선 l은 $\overline{AC}$의 수직이등분선이다.

A(1, 3), C(5, 1)이므로 $\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right), \text{ 즉 } (3, 2)$$

두 점 A, C를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{1-3}{5-1}=-\frac{1}{2}$$

따라서 $\overline{AC}$의 수직이등분선은 기울기가 2이고 점 $(3, 2)$를 지나므로 그 방정식은

$$y-2=2(x-3) \qquad \therefore 2x-y-4=0$$

즉 $a=-1$, $b=-4$이므로

$$ab=4$$

답 4

1218 전략 평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 한 점과 직선 l' 사이의 거리와 같다.

풀이 주어진 두 직선이 평행하므로

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{a}\neq\frac{-1}{b} \qquad \therefore a=4, \ b\neq -2$$

10 직선의 방정식

즉 직선 $x+2y-1=0$ 위의 한 점 $(1, 0)$과 직선 $2x+4y+b=0$ 사이의 거리가 $\frac{\sqrt{5}}{2}$이므로

$$\frac{|2\cdot1+4\cdot0+b|}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}, \qquad |2+b|=5$$

$2+b=-5$ 또는 $2+b=5$

$\therefore b=-7$ 또는 $b=3$

그런데 $b>0$이므로 $\quad b=3$

$\therefore a+b=7$

답 ③

1219 전략 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$(k는 실수)으로 놓는다.

풀이 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x-2y+2+k(2x+y-6)=0$(k는 실수)

으로 놓으면

$(1+2k)x+(-2+k)y+2-6k=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

직선 ㉠이 직선 $x-3y+6=0$에 수직이므로

$1\cdot(1+2k)-3\cdot(-2+k)=0$

$-k+7=0 \qquad \therefore k=7$

$k=7$을 ㉠에 대입하면 직선의 방정식은

$15x+5y-40=0 \qquad \therefore y=-3x+8$

따라서 구하는 y절편은 8이다.

답 ④

1220 전략 두 직선이 수직이면 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

풀이 직선 AP의 기울기는 $\quad \frac{4-2}{4-0}=\frac{1}{2}$

직선 BP의 기울기는 $\quad \frac{4-2}{4-n}=\frac{2}{4-n}$

두 직선 AP와 BP가 수직이므로

$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4-n}=-1, \qquad 4-n=-1 \qquad \therefore n=5$

점 B의 좌표는 $(5, 2)$이므로 $\triangle$ABP의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{0+5+4}{3}, \frac{2+2+4}{3}\right)$, 즉 $\left(3, \frac{8}{3}\right)$

따라서 $a=3$, $b=\frac{8}{3}$이므로

$a+b=\frac{17}{3}$

답 ②

다른풀이 $\overline{AB}^2=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$이므로

$n^2=(4-0)^2+(4-2)^2+(n-4)^2+(2-4)^2$

$8n=40 \qquad \therefore n=5$

1221 전략 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$이다.

풀이 직선 $2x+3y+3=0$, 즉 $y=-\frac{2}{3}x-1$의 기울기가 $-\frac{2}{3}$이므로 구하는 직선의 기울기는 $\frac{3}{2}$이다.

이 직선의 방정식을 $y=\frac{3}{2}x+k$라 하면 원점과 직선 $y=\frac{3}{2}x+k$, 즉 $3x-2y+2k=0$ 사이의 거리가 $2\sqrt{13}$이므로

$$\frac{|2k|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=2\sqrt{13}, \qquad |2k|=26$$

$2k=-26$ 또는 $2k=26$

$\therefore k=-13$ 또는 $k=13$

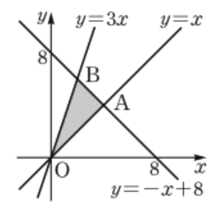
따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=\frac{3}{2}x-13$ 또는 $y=\frac{3}{2}x+13$

답 $y=\frac{3}{2}x-13$, $y=\frac{3}{2}x+13$

1222 전략 먼저 두 점 A, B의 좌표를 구한 후 삼각형의 넓이를 구한다.

풀이 직선 $y=-x+8$과 두 직선 $y=x$, $y=3x$의 교점은 각각



A$(4, 4)$, B$(2, 6)$ $\cdots$ ❶

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(2-4)^2+(6-4)^2}=2\sqrt{2}$

원점 O와 직선 $y=-x+8$, 즉 $x+y-8=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-8|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$$

따라서 $\triangle$OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot4\sqrt{2}=8$ $\cdots$ ❷

답 8

채점 기준	비율
❶ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❷ $\triangle$OAB의 넓이를 구할 수 있다.	60%

다른풀이 직선 $y=-x+8$과 두 직선 $y=x$, $y=3x$의 교점은 각각

A$(4, 4)$, B$(2, 6)$

따라서 $\overline{AB}=\sqrt{(2-4)^2+(6-4)^2}=2\sqrt{2}$, $\overline{OA}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$이고, 두 직선 $y=-x+8$과 $y=x$가 수직이므로 직각삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot4\sqrt{2}=8$

1223 전략 평행사변형의 높이는 평행한 두 변 사이의 거리와 같음을 이용한다.

풀이 평행사변형 OABC의 밑변을 $\overline{OA}$라 하면 높이는 점 B와 직선 OA 사이의 거리와 같다.

$\overline{OA}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$이고, 직선 OA의 방정식은

$y=\frac{1}{4}x \qquad \therefore x-4y=0$

점 B$(2, 3)$과 직선 $x-4y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1\cdot2-4\cdot3|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=\frac{10}{\sqrt{17}}$$

따라서 평행사변형 OABC의 넓이는

$\sqrt{17}\cdot\frac{10}{\sqrt{17}}=10$

답 10

Ⅳ. 도형의 방정식

11 원의 방정식

1224 답 $(1,\ 2),\ 2$

1225 답 $(-3,\ 0),\ 3$

1226 답 $(x-3)^2+(y+1)^2=25$

1227 답 $x^2+y^2=64$

1228 두 점 $(-3,\ 7),\ (-2,\ 4)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(-2+3)^2+(4-7)^2}=\sqrt{10}$
이므로 구하는 원의 방정식은
$(x+3)^2+(y-7)^2=10$ 답 $(x+3)^2+(y-7)^2=10$

1229 두 점 $(1,\ 5),\ (3,\ 3)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(3-1)^2+(3-5)^2}=\sqrt{8}$
이므로 구하는 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y-5)^2=8$ 답 $(x-1)^2+(y-5)^2=8$

1230 답 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$

1231 답 $(x+4)^2+(y+3)^2=16$

1232 답 $(x-5)^2+(y+5)^2=25$

1233 $x^2+y^2-4x+6y+9=0$에서
$(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=4$
$\therefore\ (x-2)^2+(y+3)^2=2^2$
따라서 중심의 좌표는 $(2,\ -3)$, 반지름의 길이는 2이다.
답 $(2,\ -3),\ 2$

1234 $x^2+y^2+2x+4y+4=0$에서
$(x^2+2x+1)+(y^2+4y+4)=1$
$\therefore\ (x+1)^2+(y+2)^2=1^2$
따라서 중심의 좌표는 $(-1,\ -2)$, 반지름의 길이는 1이다.
답 $(-1,\ -2),\ 1$

1235 $x^2+y^2-12y-13=0$에서
$x^2+(y^2-12y+36)=49$
$\therefore\ x^2+(y-6)^2=7^2$
따라서 중심의 좌표는 $(0,\ 6)$, 반지름의 길이는 7이다.
답 $(0,\ 6),\ 7$

1236 $a-2>0$이므로 $a>2$ 답 $a>2$

1237 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x^2+y^2-1-(x^2+y^2-2x-2y-2)=0$
$\therefore\ 2x+2y+1=0$ 답 $2x+2y+1=0$

1238 원의 중심 $(1,\ -3)$과 직선 $y=x-2$, 즉 $x-y-2=0$ 사이의 거리는
$$\frac{|1+3-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$
원의 반지름의 길이가 3이므로 원 O와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다. 답 서로 다른 두 점에서 만난다.

1239 원의 중심 $(4,\ 4)$와 직선 $x-y+8=0$ 사이의 거리는
$$\frac{|4-4+8|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=4\sqrt{2}$$
원의 반지름의 길이가 $4\sqrt{2}$이므로 원 O와 직선 l은 한 점에서 만난다. (접한다.) 답 한 점에서 만난다. (접한다.)

1240 $x^2+y^2+4x+6y+4=0$에서
$(x+2)^2+(y+3)^2=9$
원의 중심 $(-2,\ -3)$과 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리는
$$\frac{|-6-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{18}{5}$$
원의 반지름의 길이가 3이므로 원 O와 직선 l은 만나지 않는다.
답 만나지 않는다.

1241 $2x+y+6=0$에서
$y=-2x-6$
$y=-2x-6$을 $x^2+y^2=5$에 대입하면
$x^2+(-2x-6)^2=5$
$5x^2+24x+31=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$$\frac{D}{4}=12^2-5\cdot31=-11<0$$
따라서 원 O와 직선 l은 만나지 않는다. 답 만나지 않는다.

1242 $x-2y+1=0$에서
$x=2y-1$
$x=2y-1$을 $x^2+y^2-8y+4=0$에 대입하면
$(2y-1)^2+y^2-8y+4=0$
$5y^2-12y+5=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$$\frac{D}{4}=(-6)^2-5\cdot5=11>0$$
따라서 원 O와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다.
답 서로 다른 두 점에서 만난다.

1243 $3x-y+5=0$에서
$y=3x+5$
$y=3x+5$를 $x^2+y^2+10x+15=0$에 대입하면
$x^2+(3x+5)^2+10x+15=0$
$x^2+4x+4=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot4=0$$
따라서 원 O와 직선 l은 한 점에서 만난다. (접한다.)
답 한 점에서 만난다. (접한다.)

11 원의 방정식

1244 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<2, \qquad |k|<2\sqrt{2}$$

$$\therefore -2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$$

답 $-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$

1245 $y=3x\pm2\sqrt{3^2+1}$에서 $\quad y=3x\pm2\sqrt{10}$

답 $y=3x\pm2\sqrt{10}$

1246 $y=-2x\pm\sqrt{5}\cdot\sqrt{(-2)^2+1}$에서 $\quad y=-2x\pm5$

답 $y=-2x\pm5$

1247 답 $x+y=2$

1248 $4x-2y=20$에서 $\quad 2x-y=10$ 답 $2x-y=10$

1249 (1) $x_1x+y_1y=5$

(2) 직선 $x_1x+y_1y=5$가 점 $(3,\ -1)$을 지나므로

$3x_1-y_1=5 \qquad \therefore y_1=3x_1-5$ …… ㉠

또 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=5$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad {x_1}^2+(3x_1-5)^2=5$

${x_1}^2-3x_1+2=0, \qquad (x_1-1)(x_1-2)=0$

$\therefore x_1=1$ 또는 $x_1=2$

$x_1=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y_1=-2$

$x_1=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad y_1=1$

$\therefore x_1=1,\ y_1=-2$ 또는 $x_1=2,\ y_1=1$

(3) $x_1=1,\ y_1=-2$일 때, $\quad x-2y=5$

$x_1=2,\ y_1=1$일 때, $\quad 2x+y=5$

답 풀이 참조

1250 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=6$

이 직선이 점 $(0,\ 6)$을 지나므로

$6y_1=6 \qquad \therefore y_1=1$

또 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=6$ 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=6$ …… ㉠

$y_1=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad {x_1}^2=5 \qquad \therefore x_1=\pm\sqrt{5}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$\sqrt{5}x+y=6,\ -\sqrt{5}x+y=6$

답 $\sqrt{5}x+y=6,\ -\sqrt{5}x+y=6$

다른풀이 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(0,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-6=m(x-0) \qquad \therefore mx-y+6=0$

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $mx-y+6=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{6}$과 같아야 하므로

$$\frac{|6|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{6}, \qquad 6=\sqrt{6(m^2+1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$m^2=5 \qquad \therefore m=\pm\sqrt{5}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$\sqrt{5}x+y=6,\ -\sqrt{5}x+y=6$

1251 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=4$

이 직선이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$x_1+2y_1=4 \qquad \therefore x_1=-2y_1+4$ …… ㉠

또 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=4$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad (-2y_1+4)^2+{y_1}^2=4$

$5{y_1}^2-16y_1+12=0, \qquad (y_1-2)(5y_1-6)=0$

$\therefore y_1=2$ 또는 $y_1=\frac{6}{5}$

$y_1=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad x_1=0$

$y_1=\frac{6}{5}$을 ㉠에 대입하면 $\quad x_1=\frac{8}{5}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=2,\ 4x+3y=10$ 답 $y=2,\ 4x+3y=10$

다른풀이 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(1,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=m(x-1) \qquad \therefore mx-y-m+2=0$

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $mx-y-m+2=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2와 같아야 하므로

$$\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2, \qquad |-m+2|=2\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$3m^2+4m=0, \qquad m(3m+4)=0$

$\therefore m=0$ 또는 $m=-\frac{4}{3}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=2,\ 4x+3y=10$

1252 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=5$의 중심이 구하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$(2,\ -1)$

두 점 $(2,\ -1)$, $(2,\ -2)$ 사이의 거리는

$|-2-(-1)|=1$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+1)^2=1$

이고 이 원이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$(a-2)^2+(0+1)^2=1, \qquad (a-2)^2=0$

$\therefore a=2$ 답 ②

1253 직선 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각

$(3,\ 0),\ (0,\ 4)$

이 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(0-3)^2+(4-0)^2}=5$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+y^2=25$ 답 ③

1254 $\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점이 구하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\frac{1\cdot0+2\cdot3}{1+2}, \frac{1\cdot6+2\cdot0}{1+2}\right)$, 즉 $(2, 2)$

두 점 $(2, 2)$, $(3, 0)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(3-2)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-2)^2=5$ 답 $(x-2)^2+(y-2)^2=5$

1255 원의 중심의 좌표를 $(p, 0)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-p)^2+y^2=r^2$

이 원이 점 $(3, -4)$를 지나므로

$(3-p)^2+(-4)^2=r^2$

$\therefore p^2-6p+25=r^2$ …… ㉠

또 원이 점 $(10, -3)$을 지나므로

$(10-p)^2+(-3)^2=r^2$

$\therefore p^2-20p+109=r^2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=6$, $r^2=25$

따라서 원의 방정식은 $(x-6)^2+y^2=25$이므로

$a=6$, $b=0$, $c=25$

$\therefore a+b+c=31$ 답 ③

1256 원의 중심의 좌표를 (a, a), 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2=r^2$ ⋯ ❶

이 원이 점 $(-2, 2)$를 지나므로

$(-2-a)^2+(2-a)^2=r^2$

$\therefore 2a^2+8=r^2$ …… ㉠

또 원이 점 $(2, 6)$을 지나므로

$(2-a)^2+(6-a)^2=r^2$

$\therefore 2a^2-16a+40=r^2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $r^2=16$ ⋯ ❷

따라서 구하는 원의 넓이는 16π이다. ⋯ ❸

반지름의 길이가 r인 원의 넓이는 πr^2이다.

답 16π

채점 기준	비율
❶ 중심의 좌표를 (a, a), 반지름의 길이를 r라 하고 원의 방정식을 세울 수 있다.	30%
❷ a, r^2의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ 원의 넓이를 구할 수 있다.	20%

1257 원의 중심의 좌표를 $(0, a)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$x^2+(y-a)^2=r^2$

이 원이 점 $(-4, 0)$을 지나므로

$(-4)^2+(0-a)^2=r^2$

$\therefore a^2+16=r^2$ …… ㉠

또 원이 점 $(3, -1)$을 지나므로

$3^2+(-1-a)^2=r^2$

$\therefore a^2+2a+10=r^2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $r^2=25$

따라서 원의 방정식은 $x^2+(y-3)^2=25$

ㄱ. 중심의 좌표는 $(0, 3)$이다.

ㄴ. $4^2+(6-3)^2=25$이므로 원은 점 $(4, 6)$을 지난다.

ㄷ. 원의 반지름의 길이가 5이므로 둘레의 길이는 $2\pi\cdot5=10\pi$이다.

반지름의 길이가 r인 원의 둘레의 길이는 $2\pi r$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

다른풀이 원의 중심을 $A(0, b)$라 하고 $B(-4, 0)$, $C(3, -1)$이라 하면 $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로

$\sqrt{(-4-0)^2+(0-b)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(-1-b)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $b=3$

따라서 원의 반지름의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(-4-0)^2+(0-3)^2}=5$

1258 $\overline{AB}$의 중점이 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{-3+1}{2}\right)$, 즉 $(2, -1)$

또 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(5+1)^2+(1+3)^2}=\sqrt{13}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+1)^2=13$ 답 $(x-2)^2+(y+1)^2=13$

1259 $\overline{AB}$의 중점이 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\frac{4+10}{2}, \frac{1+9}{2}\right)$, 즉 $(7, 5)$

$\therefore a=7$, $b=5$

또 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(10-4)^2+(9-1)^2}=5$

$\therefore r=5$

$\therefore a+b+r=17$ 답 ④

1260 $P(12, 0)$, $Q(0, 12)$이고, $\overline{PQ}$의 중점이 두 점 P, Q를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\frac{12+0}{2}, \frac{0+12}{2}\right)$, 즉 $(6, 6)$

또 $\overline{PQ}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+12^2}=6\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-6)^2+(y-6)^2=72$ 답 ④

1261 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a-1)^2+(b-5)^2=(a-0)^2+(b-4)^2$

$a+b-5=0$ …… ㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a-0)^2+(b-4)^2=(a-3)^2+(b-1)^2$

$a-b+1=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$

따라서 원의 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{(2-1)^2+(3-5)^2}=\sqrt{5}$

이므로 $c=(\sqrt{5})^2=5$

$\therefore a+b+c=10$ 답 10

1262 원의 중심을 P(a, b)라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$a^2+b^2=(a+2)^2+(b-4)^2$

$a-2b+5=0$ ...... ㉠

$\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로

$a^2+b^2=(a-0)^2+(b-2)^2$

$-4b+4=0$ $\therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면 $a=-3$

따라서 원의 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$

이므로 원의 넓이는 $\pi(\sqrt{10})^2=10\pi$이다.

$\therefore k=10$ 답 10

1263 원의 중심을 P(a, b)라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a+4)^2+(b-0)^2=(a-1)^2+(b+5)^2$

$a-b-1=0$ ...... ㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a-1)^2+(b+5)^2=(a-5)^2+(b-3)^2$

$a+2b-1=0$ ...... ㉡ ··· ❶

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=0$

따라서 원의 반지름의 길이는

$\overline{PA}=|-4-1|=5$

이므로 원의 방정식은

$(x-1)^2+y^2=25$ ··· ❷

이때 점 D$(-2, k)$가 이 원 위의 점이므로

$(-2-1)^2+k^2=25$, $k^2=16$

$\therefore k=4$ ($\because k>0$) ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 원의 중심을 P(a, b)라 하고 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40%
❷ 원의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ 양수 k의 값을 구할 수 있다.	20%

1264 $x^2+y^2+2ax+4ay-12+6a^2=0$에서

$(x+a)^2+(y+2a)^2=12-a^2$

이 방정식이 원을 나타내려면

$12-a^2>0$, $a^2<12$

$\therefore -2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$

따라서 정수 a는 $-3, -2, -1, \cdots, 3$의 7개이다. 답 7

1265 $x^2+y^2-4(k-1)y+3k^2-5k+4=0$에서

$x^2+\{y-2(k-1)\}^2=k^2-3k$

이 방정식이 반지름의 길이가 2 이하인 원을 나타내려면

$0<k^2-3k\le 4$

$k^2-3k>0$에서

$k(k-3)>0$

$\therefore k<0$ 또는 $k>3$ ...... ㉠

$k^2-3k\le 4$에서

$k^2-3k-4\le 0$, $(k+1)(k-4)\le 0$

$\therefore -1\le k\le 4$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$-1\le k<0$ 또는 $3<k\le 4$

따라서 실수 k의 값이 될 수 있는 것은 ③이다. 답 ③

1266 $x^2+y^2+2(a+1)x-6ay+11a^2-5=0$에서

$\{x+(a+1)\}^2+(y-3a)^2=-a^2+2a+6$ ··· ❶

즉 $-a^2+2a+6>0$이고 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{-a^2+2a+6}$이다.

그런데

$-a^2+2a+6=-(a-1)^2+7$

이므로 $a=1$일 때 반지름의 길이가 최대이고 이때의 원의 넓이가 최대가 된다. ··· ❷

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{7}$이다. ··· ❸

답 $\sqrt{7}$

채점 기준	비율
❶ 원의 방정식을 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ 꼴로 변형할 수 있다.	30%
❷ 원의 넓이가 최대일 때의 조건을 구할 수 있다.	50%
❸ 원의 넓이가 최대일 때 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	20%

1267 $x^2+y^2-6x+2y=0$에서

$(x-3)^2+(y+1)^2=10$

따라서 중심의 좌표가 $(3, -1)$이므로 x축에 접하는 원의 반지름의 길이는 $|-1|=1$ 답 ①

1268 $x^2+y^2-4x+6y+k=0$에서

$(x-2)^2+(y+3)^2=-k+13$

이 원이 x축에 접하므로

$|-3|=\sqrt{-k+13}$, $9=-k+13$

$\therefore k=4$ 답 4

1269 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$이라 하면 이 원이 점 $(2, 1)$을 지나므로

$(2-a)^2+(1-b)^2=b^2$

$\therefore a^2-4a-2b+5=0$ ...... ㉠

또 원이 점 $(2, 9)$를 지나므로

$(2-a)^2+(9-b)^2=b^2$

$\therefore a^2-4a-18b+85=0$ ...... ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $16b-80=0$ $\therefore b=5$

$b=5$를 ㉠에 대입하면

$a^2-4a-5=0$, $(a+1)(a-5)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=5$

따라서 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(-1, 5)$, $(5, 5)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는 $|5-(-1)|=6$ 답 6

1270 중심의 좌표를 $(a, a-1)$이라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a+1)^2=(a-1)^2$

이 원이 점 $(1, 3)$을 지나므로

$(1-a)^2+(4-a)^2=(a-1)^2$

$(4-a)^2=0$ $\therefore a=4$

따라서 원의 반지름의 길이는 $|4-1|=3$이므로 구하는 원의 둘레의 길이는 $2\pi\cdot 3=6\pi$ 답 6π

1271 중심의 좌표가 $(a, 5)$이고 y축에 접하는 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-5)^2=a^2$
이 원이 점 $(1, 7)$을 지나므로
$(1-a)^2+(7-5)^2=a^2$
$-2a+5=0 \quad \therefore a=\frac{5}{2}$
답 $\frac{5}{2}$

1272 중심의 좌표가 $(-5, -2)$이고 y축에 접하는 원의 방정식은
$(x+5)^2+(y+2)^2=25$
답 ⑤

1273 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 넓이가 9π이므로
$\pi r^2=9\pi \quad \therefore r=3\ (\because r>0)$ ··· ❶
또 이 원이 점 $(0, 4)$에서 y축에 접하고, 원의 중심이 제2사분면 위에 있으므로 원의 중심의 좌표는 $(-3, 4)$이다. ··· ❷
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+3)^2+(y-4)^2=9$ ··· ❸
답 $(x+3)^2+(y-4)^2=9$

채점 기준	비율
❶ 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	30%
❷ 원의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	50%
❸ 원의 방정식을 구할 수 있다.	20%

1274 $x^2+y^2-6x+ky+4=0$에서
$(x-3)^2+\left(y+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{4}+5$
원의 중심 $\left(3, -\frac{k}{2}\right)$가 제4사분면 위에 있으므로
$-\frac{k}{2}<0 \quad \therefore k>0$
또 원이 y축에 접하므로 $\sqrt{\frac{k^2}{4}+5}=3$
$\frac{k^2}{4}+5=9, \quad k^2=16$
$\therefore k=4\ (\because k>0)$
답 ③

1275 원의 중심이 제2사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은
$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$
이 원이 점 $(-1, 2)$를 지나므로
$(-1+r)^2+(2-r)^2=r^2$
$r^2-6r+5=0, \quad (r-1)(r-5)=0$
$\therefore r=1$ 또는 $r=5$
따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은 6이다.
답 ③

1276 $x^2+y^2-4x+2ay+10-b=0$에서
$(x-2)^2+(y+a)^2=a^2+b-6$
이 원이 x축, y축에 동시에 접하므로
$2=|-a|=\sqrt{a^2+b-6}$
$|-a|=2$에서 $\quad a=2\ (\because a>0)$
$\sqrt{a^2+b-6}=2$에서 $\quad a^2+b-6=4$
$a=2$를 위의 식에 대입하면 $\quad b=6$
$\therefore a+b=8$
답 8

1277 원의 중심이 제1사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 (r, r)이다.
이때 중심 (r, r)가 직선 $5x-2y=9$ 위에 있으므로
$5r-2r=9, \quad 3r=9 \quad \therefore r=3$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y-3)^2=9$
답 $(x-3)^2+(y-3)^2=9$

1278 $x^2+y^2-8x+10y+37=0$에서
$(x-4)^2+(y+5)^2=4$
점 $\mathrm{A}(7, -1)$과 원의 중심 $(4, -5)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(4-7)^2+(-5+1)^2}=5$
이때 원의 반지름의 길이가 2이므로
$M=5+2=7, \ m=5-2=3$
$\therefore Mm=21$
답 ①

1279 점 $\mathrm{A}(4, 2)$와 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리는
$\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$
이때 원의 반지름의 길이가 r이므로 $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이의 최솟값은
$2\sqrt{5}-r=\sqrt{5} \quad \therefore r=\sqrt{5}$
답 $\sqrt{5}$

1280 $\sqrt{(a+5)^2+(b-6)^2}$은 두 점 $\mathrm{P}(a, b)$, $(-5, 6)$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 값은 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$와 점 $(-5, 6)$ 사이의 거리의 최댓값과 같다.
점 $(-5, 6)$과 원의 중심 $(1, -2)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(-5-1)^2+(6+2)^2}=10$
이때 원의 반지름의 길이가 3이므로 구하는 최댓값은
$10+3=13$
답 13

1281 $\mathrm{P}(a, b)$라 하고, $\overline{\mathrm{AP}}$의 중점을 $\mathrm{Q}(x, y)$라 하면
$x=\frac{1+a}{2}, \ y=\frac{3+b}{2}$
$\therefore a=2x-1, \ b=2y-3$ ······ ㉠
점 $\mathrm{P}(a, b)$가 원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 위의 점이므로
$a^2+b^2-2a+4b-3=0$ ······ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$(2x-1)^2+(2y-3)^2-2(2x-1)+4(2y-3)-3=0$
$4x^2+4y^2-8x-4y-3=0$
$\therefore (x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=2$
따라서 점 Q가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원이므로 구하는 둘레의 길이는
$2\pi\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}\pi$
답 $2\sqrt{2}\pi$

1282 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2=20$에서
$(x+3)^2+y^2+(x-3)^2+y^2=20$
$\therefore x^2+y^2=1$
답 $x^2+y^2=1$

1283 주어진 조건을 만족시키는 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면
$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=2:1$이므로
$\overline{\mathrm{AP}}=2\overline{\mathrm{BP}}, \quad \overline{\mathrm{AP}}^2=4\overline{\mathrm{BP}}^2$
$(x+1)^2+(y-2)^2=4\{(x-5)^2+(y+4)^2\}$

$x^2+y^2-14x+12y+53=0$

$\therefore (x-7)^2+(y+6)^2=32$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(7,\ -6)$, 반지름의 길이가 $4\sqrt{2}$인 원이므로 그 넓이는

$\pi\cdot(4\sqrt{2})^2=32\pi$ 답 ④

1284 $(x-a)^2+(y+2)^2=5$에서

$x^2+y^2-2ax+4y+a^2-1=0$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-2ax+4y+a^2-1)=0$

$\therefore 2ax-4y-a^2-3=0$

이 직선이 직선 $x-2y-10=0$과 평행하므로

$\dfrac{2a}{1}=\dfrac{-4}{-2}\neq\dfrac{-a^2-3}{-10}$ $\therefore a=1$ 답 1

1285 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-ax+y-(x^2+y^2+x-ay-1)=0$

$\therefore (a+1)x-(1+a)y-1=0$ ⋯ ❶

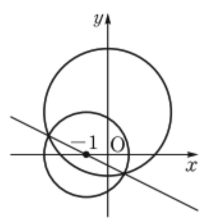
이 직선이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$(a+1)-2(1+a)-1=0$ $\therefore a=-2$ ⋯ ❷

답 -2

채점 기준	비율
❶ 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	60%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40%

1286 원 $x^2+y^2-2ay+a^2-9=0$이 원 $(x+1)^2+y^2=4$의 둘레를 이등분하려면 두 원의 교점을 지나는 직선이 원 $(x+1)^2+y^2=4$의 중심을 지나야 한다.



$(x+1)^2+y^2=4$에서

$x^2+y^2+2x-3=0$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-2ay+a^2-9-(x^2+y^2+2x-3)=0$

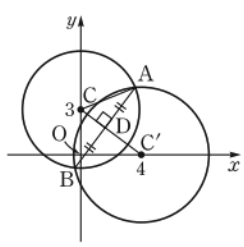
$\therefore 2x+2ay-a^2+6=0$

이 직선이 원 $(x+1)^2+y^2=4$의 중심 $(-1,\ 0)$을 지나야 하므로

$-2-a^2+6=0,\quad a^2=4$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$ 답 ②

1287 오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+(y-3)^2=15$, $(x-4)^2+y^2=20$의 중심을 각각 C, C′이라 하고, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{CC'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 D라 하자.



$x^2+(y-3)^2=15$에서

$x^2+y^2-6y-6=0$

$(x-4)^2+y^2=20$에서

$x^2+y^2-8x-4=0$

따라서 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-6y-6-(x^2+y^2-8x-4)=0$

$\therefore 4x-3y-1=0$

이 직선과 점 $C(0,\ 3)$ 사이의 거리는

$\overline{CD}=\dfrac{|-9-1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$

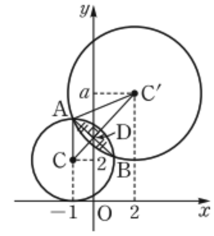
직각삼각형 ACD에서

$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{(\sqrt{15})^2-2^2}=\sqrt{11}$

따라서 공통인 현의 길이는

$\overline{AB}=2\overline{AD}=2\sqrt{11}$ 답 ③

1288 오른쪽 그림과 같이 두 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$, $(x-2)^2+(y-a)^2=10$의 중심을 각각 C, C′이라 하고, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{CC'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 D라 하자.



공통인 현의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로

$\overline{AD}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{2}$

직각삼각형 ACD에서

$\overline{CD}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$

직각삼각형 AC′D에서

$\overline{C'D}=\sqrt{\overline{AC'}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$

따라서 두 점 $C(-1,\ 2)$, $C'(2,\ a)$ 사이의 거리가

$\overline{CC'}=\overline{CD}+\overline{C'D}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$이므로

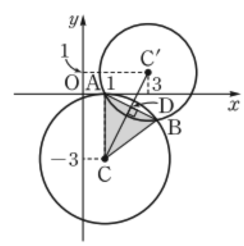
$\sqrt{(2+1)^2+(a-2)^2}=3\sqrt{2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2-4a-5=0,\quad (a+1)(a-5)=0$

$\therefore a=5\ (\because a>0)$ 답 5

1289 오른쪽 그림과 같이 $\overline{CC'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 D라 하자.



$(x-1)^2+(y+3)^2=9$에서

$x^2+y^2-2x+6y+1=0$

$(x-3)^2+(y-1)^2=5$에서

$x^2+y^2-6x-2y+5=0$

따라서 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-2x+6y+1-(x^2+y^2-6x-2y+5)=0$

$\therefore x+2y-1=0$

이 직선과 점 $C(1,\ -3)$ 사이의 거리는

$\overline{CD}=\dfrac{|1-6-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

직각삼각형 ACD에서

$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{3^2-\left(\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AD}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CD}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\cdot\dfrac{6\sqrt{5}}{5}=\dfrac{18}{5}$ 답 $\dfrac{18}{5}$

1290 원의 중심 $(0,\ 3)$과 직선 $x+2y-k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|6-k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|6-k|}{\sqrt{5}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\dfrac{|6-k|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$,　　$|6-k|<5$

$-5<6-k<5$　　$\therefore 1<k<11$

따라서 정수 k는 2, 3, 4, ⋯, 10의 9개이다.　　답 9

다른풀이 $x+2y-k=0$, 즉 $x=-2y+k$를 $x^2+(y-3)^2=5$에 대입하면

$(-2y+k)^2+(y-3)^2=5$

$5y^2-(4k+6)y+k^2+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$\dfrac{D}{4}=\{-(2k+3)\}^2-5(k^2+4)>0$

$k^2-12k+11<0$,　　$(k-1)(k-11)<0$

$\therefore 1<k<11$

따라서 정수 k는 2, 3, 4, ⋯, 10의 9개이다.

1291 원의 중심 $(1, -2)$와 직선 $3x-4y+6=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|3+8+6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{17}{5}$

원의 반지름의 길이가 r이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면　　$r>\dfrac{17}{5}$

따라서 자연수 r의 최솟값은 4이다.　　답 4

1292 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=mx-4$, 즉 $mx-y-4=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{m^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\dfrac{4}{\sqrt{m^2+1}}<\sqrt{2}$,　　$4<\sqrt{2m^2+2}$

$m^2-7>0$,　　$(m+\sqrt{7})(m-\sqrt{7})>0$

$\therefore m<-\sqrt{7}$ 또는 $m>\sqrt{7}$　　답 $m<-\sqrt{7}$ 또는 $m>\sqrt{7}$

다른풀이 $y=mx-4$를 $x^2+y^2=2$에 대입하면

$x^2+(mx-4)^2=2$

$(m^2+1)x^2-8mx+14=0$

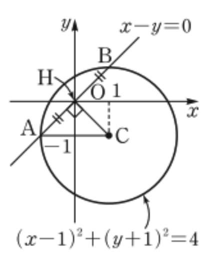
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$\dfrac{D}{4}=(-4m)^2-14(m^2+1)>0$

$m^2-7>0$,　　$(m+\sqrt{7})(m-\sqrt{7})>0$

$\therefore m<-\sqrt{7}$ 또는 $m>\sqrt{7}$

1293 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C$(1, -1)$이라 하고, 점 C에서 직선 $x-y=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\mathrm{CH}}=\dfrac{|1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

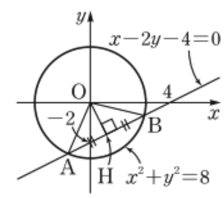
직각삼각형 CAH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CA}}^2-\overline{\mathrm{CH}}^2}$

$=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=2\sqrt{2}$　　답 ③

1294 오른쪽 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하고 원의 중심 O$(0, 0)$에서 직선 $x-2y-4=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{|-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

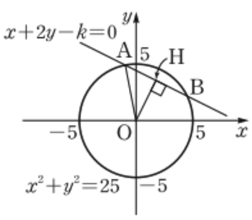
직각삼각형 OAH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{24}{5}}$

두 점 A, B를 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 원은 $\overline{\mathrm{AB}}$를 지름으로 하는 원이므로 구하는 넓이는

$\pi\cdot\left(\sqrt{\dfrac{24}{5}}\right)^2=\dfrac{24}{5}\pi$　　답 $\dfrac{24}{5}\pi$

1295 (1) 오른쪽 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하고 원의 중심 O$(0, 0)$에서 직선 $x+2y-k=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{2}\cdot 6=3$

직각삼각형 OAH에서

$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

따라서 원의 중심과 직선 사이의 거리는 4이다.　　⋯ ❶

(2) 원의 중심 O$(0, 0)$과 직선 $x+2y-k=0$ 사이의 거리가 4이므로

$\dfrac{|-k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=4$,　　$|k|=4\sqrt{5}$

$\therefore k=4\sqrt{5}$ ($\because k>0$)　　⋯ ❷

답 (1) 4　(2) $4\sqrt{5}$

채점 기준	비율
❶ 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	50%
❷ 양수 k의 값을 구할 수 있다.	50%

1296 $x^2+y^2-2x+6y=0$에서

$(x-1)^2+(y+3)^2=10$

원의 중심 $(1, -3)$과 직선 $x-3y+k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|1+9+k|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\dfrac{|10+k|}{\sqrt{10}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 원과 직선이 한 점에서 만나려면

$\dfrac{|10+k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$,　　$|10+k|=10$

$10+k=-10$ 또는 $10+k=10$

$\therefore k=-20$ ($\because k<0$)　　답 -20

다른풀이 $x=3y-k$를 $x^2+y^2-2x+6y=0$에 대입하면

$(3y-k)^2+y^2-2(3y-k)+6y=0$

$10y^2-6ky+k^2+2k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 한 점에서 만나므로

$\dfrac{D}{4}=(-3k)^2-10(k^2+2k)=0$

$k^2+20k=0$,　　$k(k+20)=0$

$\therefore k=-20$ ($\because k<0$)

1297 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\pi r^2=8\pi \qquad \therefore r=2\sqrt{2}\ (\because r>0)$

원의 중심 $(1,\ 1)$과 직선 $x+y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1+1+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|2+k|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|2+k|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}, \qquad |2+k|=4$$

$2+k=-4$ 또는 $2+k=4$

$\therefore k=-6$ 또는 $k=2$

따라서 모든 k의 값의 합은 -4이다.　　답 -4

1298 원의 중심이 제3사분면 위에 있으므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$　　⋯ ❶

이 원의 중심 $(-r,\ -r)$와 직선 $3x+4y+12=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-3r-4r+12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-7r+12|}{5}$$

원의 반지름의 길이가 r이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|-7r+12|}{5}=r, \qquad |-7r+12|=5r$$

$-7r+12=-5r$ 또는 $-7r+12=5r$

$\therefore r=6$ 또는 $r=1$　　⋯ ❷

따라서 두 원의 넓이의 합은

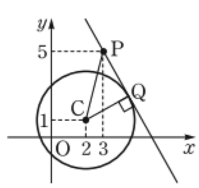
$\pi\cdot 6^2+\pi\cdot 1^2=37\pi$　　⋯ ❸

답 37π

채점 기준	비율
❶ 원의 반지름의 길이를 r라 하고 원의 방정식을 세울 수 있다.	20%
❷ r의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ 두 원의 넓이의 합을 구할 수 있다.	30%

1299 원의 중심을 C라 하면 C(2, 1)이므로

$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(3-2)^2+(5-1)^2}=\sqrt{17}$



직각삼각형 CQP에서

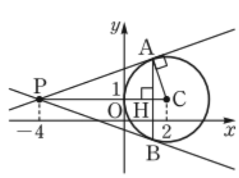
$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CP}}^2-\overline{\mathrm{CQ}}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{17})^2-(\sqrt{8})^2}=3$

답 3

1300 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$에서

$(x-2)^2+(y-1)^2=4$



원의 중심을 C라 하면 C(2, 1)이므로

$\overline{\mathrm{CP}}=|2-(-4)|=6$

직각삼각형 CAP에서

$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CP}}^2-\overline{\mathrm{CA}}^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$

한편 $\overline{\mathrm{PC}}$와 $\overline{\mathrm{AB}}$의 교점을 H라 하면

$$\triangle\mathrm{CAP}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{CA}}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{CP}}\cdot\overline{\mathrm{AH}}$$

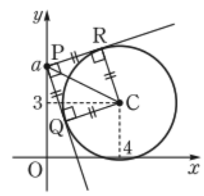
이므로　$\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{CP}}\cdot\overline{\mathrm{AH}}$

$4\sqrt{2}\cdot 2=6\cdot\overline{\mathrm{AH}} \qquad \therefore \overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$　　답 $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

1301 $x^2+y^2-8x-6y+15=0$에서

$(x-4)^2+(y-3)^2=10$



원의 중심을 C라 하면 C(4, 3)이므로

$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(0-4)^2+(a-3)^2}$

$=\sqrt{a^2-6a+25}$

두 접점을 Q, R라 하면 □PQCR는 정사각형이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{CQ}}=\sqrt{10}$

이때 $\overline{\mathrm{CP}}^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2+\overline{\mathrm{QC}}^2$이므로

$(\sqrt{a^2-6a+25})^2=(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2$

$a^2-6a+5=0, \qquad (a-1)(a-5)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=5$

따라서 모든 a의 값의 합은 6이다.　　답 6

1302 $x^2+y^2+4x-4=0$에서　$(x+2)^2+y^2=8$

원의 중심 $(-2,\ 0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-2+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|-2+k|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|-2+k|}{\sqrt{2}}>2\sqrt{2}, \qquad |-2+k|>4$$

$-2+k<-4$ 또는 $-2+k>4$

$\therefore k<-2$ 또는 $k>6$

따라서 k의 값이 아닌 것은 ⑤이다.　　답 ⑤

다른풀이 $y=x+k$를 $x^2+y^2+4x-4=0$에 대입하면

$x^2+(x+k)^2+4x-4=0$

$2x^2+2(k+2)x+k^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 만나지 않으므로

$\dfrac{D}{4}=(k+2)^2-2(k^2-4)<0$

$k^2-4k-12>0, \qquad (k+2)(k-6)>0$

$\therefore k<-2$ 또는 $k>6$

1303 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=kx-10$, 즉 $kx-y-10=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-10|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{k^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{10}{\sqrt{k^2+1}}>\sqrt{10}, \qquad 10>\sqrt{10(k^2+1)}$$

$k^2-9<0, \qquad (k+3)(k-3)<0$

$\therefore -3<k<3$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=3$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(-3)^2+3^2=18$　　답 18

다른풀이 $y=kx-10$을 $x^2+y^2=10$에 대입하면

$x^2+(kx-10)^2=10$

$(k^2+1)x^2-20kx+90=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 만나지 않으므로

$\dfrac{D}{4}=(-10k)^2-90(k^2+1)<0$

$k^2-9<0, \qquad (k+3)(k-3)<0$

$\therefore -3<k<3$

1304 원의 중심 $(0, a)$와 직선 $x-y=1$, 즉 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-a-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|a+1|}{\sqrt{2}}$$ ··· ❶

원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|a+1|}{\sqrt{2}}>3\sqrt{2}$, $\quad |a+1|>6$

$a+1<-6$ 또는 $a+1>6$

$\therefore a<-7$ 또는 $a>5$ ··· ❷

따라서 자연수 a의 최솟값은 6이다. ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	30%
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ 자연수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

1305 원의 중심 $(1, 1)$과 직선 $4x+3y+13=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4+3+13|}{\sqrt{4^2+3^2}}=4$$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로

$M=4+3=7$, $m=4-3=1$

$\therefore Mm=7$

답 7

1306 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|k|}{5}$$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 원 위의 점 P와 직선 사이의 거리의 최댓값이 5이려면

$\frac{|k|}{5}+2=5$, $\quad |k|=15 \quad \therefore k=15\ (\because k>0)$

답 ③

1307 $x^2+y^2-8x+2y+12=0$에서

$(x-4)^2+(y+1)^2=5$

원의 중심 $(4, -1)$과 직선 $x+2y-12=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4-2-12|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$$ ··· ❶

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원 위의 점 P와 직선 $x+2y-12=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$2\sqrt{5}-\sqrt{5}\le d\le 2\sqrt{5}+\sqrt{5}$, 즉 $\sqrt{5}\le d\le 3\sqrt{5}$ ··· ❷

따라서 정수 d는 3, 4, 5, 6이고 각각의 거리에 해당하는 점 P가 2개씩 있으므로 구하는 점 P는 8개이다. ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	30%
❷ 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 점 P의 개수를 구할 수 있다.	30%

1308 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=x-4$, 즉 $x-y-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원 위의 점 A와 직선 BC 사이의 거리의 최솟값과 최댓값은 각각

$2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

따라서 정삼각형 ABC의 높이가 $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$일 때 넓이가 각각 최소와 최대이므로 넓이의 최솟값과 최댓값의 비는

$(\sqrt{2})^2 : (3\sqrt{2})^2=1 : 9$

$\therefore a=9$

답 9

라쎈 특강 닮은 도형의 넓이의 비

닮은 두 도형의 닮음비가 $m : n$이면 넓이의 비는 $m^2 : n^2$이다.

1309 직선 $x+3y-1=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$에 수직인 직선의 기울기는 3이고 원 $x^2+y^2=6$의 반지름의 길이는 $\sqrt{6}$이므로 접선의 방정식은 $\quad y=3x\pm\sqrt{6}\cdot\sqrt{3^2+1} \quad \therefore y=3x\pm2\sqrt{15}$

답 $y=3x\pm2\sqrt{15}$

다른풀이 직선 $x+3y-1=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$에 수직인 직선의 기울기는 3이므로 원 $x^2+y^2=6$에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식을 $y=3x+k$라 하면 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $3x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{10}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{6}$, $\quad |k|=2\sqrt{15} \quad \therefore k=\pm2\sqrt{15}$

따라서 접선의 방정식은 $\quad y=3x\pm2\sqrt{15}$

1310 직선 $y=2x+6$에 평행한 직선의 기울기는 2이고 원 $x^2+y^2=5$의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 접선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{5}\cdot\sqrt{2^2+1} \quad \therefore y=2x\pm5$

따라서 두 직선이 y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(0, 5)$, $(0, -5)$이므로 $\quad \overline{PQ}=10$

답 ②

1311 $x^2+y^2-2x-6y+1=0$에서

$(x-1)^2+(y-3)^2=9$

접선의 방정식을 $y=3x+k$라 하면 원의 중심 $(1, 3)$과 직선 $y=3x+k$, 즉 $3x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3-3+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{10}}$$

원의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|k|}{\sqrt{10}}=3$, $\quad |k|=3\sqrt{10} \quad \therefore k=\pm3\sqrt{10}$

따라서 두 접선의 y절편은 각각 $3\sqrt{10}$, $-3\sqrt{10}$이므로 구하는 y절편의 곱은 $\quad 3\sqrt{10}\cdot(-3\sqrt{10})=-90$

답 -90

1312 점 $(-6, k)$가 원 $x^2+y^2=100$ 위의 점이므로

$(-6)^2+k^2=100$, $\quad k^2=64$

$\therefore k=8\ (\because k>0)$

원 $x^2+y^2=100$ 위의 점 $(-6, 8)$에서의 접선의 방정식은

$-6x+8y=100 \quad \therefore y=\frac{3}{4}x+\frac{25}{2}$

따라서 구하는 y절편은 $\frac{25}{2}$이다.

답 ④

11 원의 방정식

1313 원 $x^2+y^2=15$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=15 \qquad \therefore\ y=-\frac{a}{b}x+\frac{15}{b}$

이 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$-\frac{a}{b}=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ b=-2a$ …… ㉠

또 점 $(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=15$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=15$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2+(-2a)^2=15, \qquad a^2=3$

$\therefore\ a=\pm\sqrt{3}$

$a=\pm\sqrt{3}$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=\mp2\sqrt{3}$ (복호동순)

$\therefore\ ab=-6$

답 ①

1314 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$x+3y=10 \qquad \therefore\ x+3y-10=0$ …… ㉠ ··· ❶

$x^2+y^2+6x-2y+k-1=0$에서

$(x+3)^2+(y-1)^2=11-k$ …… ㉡

직선 ㉠과 원 ㉡의 중심 $(-3,\ 1)$ 사이의 거리는

$\frac{|-3+3-10|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}$ ··· ❷

원 ㉡의 반지름의 길이가 $\sqrt{11-k}$이므로 직선 ㉠과 원 ㉡이 접하려면

$\sqrt{11-k}=\sqrt{10}, \qquad 11-k=10$

$\therefore\ k=1$ ··· ❸

답 1

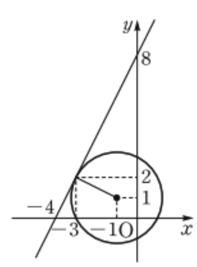
채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❷ 직선 ㉠과 원 ㉡의 중심 사이의 거리를 구할 수 있다.	40%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30%

1315 $x^2+y^2+2x-2y-3=0$에서

$(x+1)^2+(y-1)^2=5$

원의 중심 $(-1,\ 1)$과 점 $(-3,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{2-1}{-3+1}=-\frac{1}{2}$



따라서 점 $(-3,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 2이므로 접선의 방정식은

$y-2=2(x+3) \qquad \therefore\ y=2x+8$

이 직선이 점 $(a,\ 10)$을 지나므로

$10=2a+8 \qquad \therefore\ a=1$

답 1

1316 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=25$

이 직선이 점 $(7,\ -1)$을 지나므로

$7x_1-y_1=25 \qquad \therefore\ y_1=7x_1-25$ …… ㉠

또 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=25$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad {x_1}^2+(7x_1-25)^2=25$

${x_1}^2-7x_1+12=0, \qquad (x_1-3)(x_1-4)=0$

$\therefore\ x_1=3$ 또는 $x_1=4$

$x_1=3$을 ㉠에 대입하면 $\quad y_1=-4$

$x_1=4$를 ㉠에 대입하면 $\quad y_1=3$

따라서 접선의 방정식은

$3x-4y-25=0,\ 4x+3y-25=0$

즉 $a=-25,\ b=-3$이므로 $\quad a-b=-22$

답 -22

다른풀이 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(7,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+1=m(x-7)$

$\therefore\ mx-y-7m-1=0$ …… ㉠

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는

$\frac{|-7m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|7m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 5이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|7m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=5, \qquad |7m+1|=5\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$12m^2+7m-12=0, \qquad (3m+4)(4m-3)=0$

$\therefore\ m=-\frac{4}{3}$ 또는 $m=\frac{3}{4}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$4x+3y-25=0,\ 3x-4y-25=0$

1317 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(0,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=mx \qquad \therefore\ mx-y=0$

원의 중심 $(2,\ -3)$과 이 직선 사이의 거리는

$\frac{|2m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|2m+3|}{\sqrt{m^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|2m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=1, \qquad |2m+3|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$3m^2+12m+8=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 접선의 기울기의 곱은 $\frac{8}{3}$이다.

답 ②

1318 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=5$

이 직선이 점 $(5,\ 0)$을 지나므로

$5x_1=5 \qquad \therefore\ x_1=1$

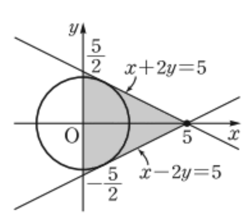
또 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=5$ …… ㉠

$x_1=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad {y_1}^2=4 \qquad \therefore\ y_1=\pm2$

따라서 접선의 방정식은

$x+2y=5,\ x-2y=5$



두 접선이 y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $\left(0,\ \frac{5}{2}\right),\ \left(0,\ -\frac{5}{2}\right)$이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\right)\cdot5=\frac{25}{2}$

답 $\frac{25}{2}$

다른풀이 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(5,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=m(x-5)$

$\therefore\ mx-y-5m=0$ …… ㉠

원의 중심 $(0,\ 0)$과 이 직선 사이의 거리는

$\dfrac{|-5m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\dfrac{|5m|}{\sqrt{m^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\dfrac{|5m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$, $\quad |5m|=\sqrt{5(m^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면

$m^2=\dfrac{1}{4}\quad \therefore\ m=\pm\dfrac{1}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$x-2y-5=0,\ x+2y-5=0$

1319 전략 주어진 방정식을 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2\ (r>0)$ 꼴로 변형하여 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구한다.

풀이 $x^2+y^2-12x+8y-12=0$에서

$(x-6)^2+(y+4)^2=64$

따라서 중심의 좌표는 $(6,\ -4)$, 반지름의 길이는 8이므로

$p=6,\ q=-4,\ r=8$

$\therefore\ p+q+r=10$

답 ⑤

1320 전략 주어진 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=c$ 꼴로 변형한 후 $c>0$이어야 함을 이용한다.

풀이 ① $x^2+y^2-2x-3=0$에서

$(x-1)^2+y^2=4$

즉 중심의 좌표가 $(1,\ 0)$, 반지름의 길이가 2인 원이다.

② $x^2+y^2-2x+6y-2=0$에서

$(x-1)^2+(y+3)^2=12$

즉 중심의 좌표가 $(1,\ -3)$, 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 원이다.

③ $x^2+y^2+4x+4y+5=0$에서

$(x+2)^2+(y+2)^2=3$

즉 중심의 좌표가 $(-2,\ -2)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원이다.

④ $x^2+y^2-6x-8y+25=0$에서

$(x-3)^2+(y-4)^2=0$

따라서 원이 아니다.

⑤ $x^2+y^2+10x-8y+40=0$에서

$(x+5)^2+(y-4)^2=1$

즉 중심의 좌표가 $(-5,\ 4)$, 반지름의 길이가 1인 원이다.

답 ④

1321 전략 원의 넓이를 이등분하는 직선은 원의 중심을 지난다.

풀이 직선 $2x-y=5$, 즉 $y=2x-5$의 기울기가 2이므로 이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이다.

한편 $x^2+y^2-2x=0$에서

$(x-1)^2+y^2=1$

이때 원의 넓이를 이등분하는 직선은 원의 중심을 지나므로 원의 중심 $(1,\ 0)$을 지나고 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{2}(x-1)\quad \therefore\ x+2y=1$

답 ①

1322 전략 y축에 접하는 원은

$|(\text{중심의 } x\text{좌표})|=(\text{원의 반지름의 길이})$임을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2-4x+8y=0$에서

$(x-2)^2+(y+4)^2=20$

따라서 중심의 좌표가 $(2,\ -4)$이고 y축에 접하는 원의 반지름의 길이는 2이므로 구하는 원의 둘레의 길이는

$2\pi\cdot 2=4\pi$

답 ①

1323 전략 원점 O와 원의 중심 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이의 최댓값은 $d+r$이다.

풀이 원점 O와 원의 중심 $(a,\ b)$ 사이의 거리는

$\sqrt{a^2+b^2}$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이의 최댓값이 9이면

$\sqrt{a^2+b^2}+2=9$, $\quad \sqrt{a^2+b^2}=7$

양변을 제곱하면

$a^2+b^2=49$

답 49

1324 전략 원과 직선이 만나려면 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 반지름의 길이를 r라 할 때, $d\le r$임을 이용한다.

풀이 원의 중심 $(0,\ k)$와 직선 $x+y+5=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|k+5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|k+5|}{\sqrt{2}}$ ··· ❶

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나려면

$\dfrac{|k+5|}{\sqrt{2}}\le 2\sqrt{2}$, $\quad |k+5|\le 4$

$-4\le k+5\le 4\quad \therefore\ -9\le k\le -1$ ··· ❷

따라서 정수 k는 $-9,\ -8, -7,\ \cdots,\ -1$의 9개이다. ··· ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	30%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	20%

1325 전략 원의 중심과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 직선의 기울기를 m이라 하면 x절편이 4이므로 직선의 방정식은

$y=m(x-4)\quad \therefore\ mx-y-4m=0$

원의 중심 $(0,\ 3)$과 직선 $mx-y-4m=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-3-4m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\dfrac{|3+4m|}{\sqrt{m^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 접하려면

$\dfrac{|3+4m|}{\sqrt{m^2+1}}=2$, $\quad |3+4m|=2\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$12m^2+24m+5=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 직선의 기울기의 합은 -2이다.

답 ②

1326 전략 구하는 원의 중심의 좌표를 $(a,\ a+1)$로 놓는다.

풀이 원의 중심의 좌표를 $(a,\ a+1)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a-1)^2=r^2$
이 원이 점 (2, 0)을 지나므로
$(2-a)^2+(0-a-1)^2=r^2$
$\therefore 2a^2-2a+5=r^2$ …… ㉠
또 이 원이 점 (0, 3)을 지나므로
$(0-a)^2+(3-a-1)^2=r^2$
$\therefore 2a^2-4a+4=r^2$ …… ㉡
㉠−㉡을 하면
$2a+1=0 \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$
$a=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $r^2=\frac{13}{2}$
따라서 구하는 원의 방정식은
$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$ 답 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$

1327 전략 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원은 (원의 중심)$=$($\overline{\text{AB}}$의 중점), (반지름의 길이)$=\frac{1}{2}\overline{\text{AB}}$임을 이용한다.

풀이 $\overline{\text{AB}}$의 중점의 좌표는
$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$, 즉 (3, 0)
$\overline{\text{AB}}$를 1 : 3으로 외분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{1\cdot5-3\cdot1}{1-3}, \frac{1\cdot0-3\cdot0}{1-3}\right)$, 즉 $(-1, 0)$
두 점 (3, 0), $(-1, 0)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는
$\left(\frac{3-1}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$, 즉 (1, 0)
또 이 원의 반지름의 길이는
$\frac{1}{2}\cdot|-1-3|=2$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-1)^2+y^2=4$ 답 ①

1328 전략 구하는 원의 중심을 $\text{P}(a, b)$라 하고 $\overline{\text{PA}}=\overline{\text{PB}}=\overline{\text{PC}}$임을 이용한다.

풀이 $y=x+1$을 $x^2+y^2=13$에 대입하면
$x^2+(x+1)^2=13, \quad x^2+x-6=0$
$(x+3)(x-2)=0 \quad \therefore x=-3$ 또는 $x=2$
$x=-3$을 $y=x+1$에 대입하면 $y=-2$
$x=2$를 $y=x+1$에 대입하면 $y=3$
따라서 원 $x^2+y^2=13$과 직선 $y=x+1$의 두 교점은
$\text{A}(-3, -2)$, $\text{B}(2, 3)$이다. ⋯ ❶
구하는 원의 중심을 $\text{P}(a, b)$라 하면 $\overline{\text{PA}}=\overline{\text{PB}}=\overline{\text{PC}}$
$\overline{\text{PA}}=\overline{\text{PB}}$에서 $\overline{\text{PA}}^2=\overline{\text{PB}}^2$이므로
$(a+3)^2+(b+2)^2=(a-2)^2+(b-3)^2$
$a+b=0$ …… ㉠
$\overline{\text{PB}}=\overline{\text{PC}}$에서 $\overline{\text{PB}}^2=\overline{\text{PC}}^2$이므로
$(a-2)^2+(b-3)^2=(a-1)^2+(b-0)^2$
$a+3b-6=0$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3, b=3$
따라서 원의 중심은 $\text{P}(-3, 3)$이고 반지름의 길이는
$\overline{\text{PA}}=|-2-3|=5$ ⋯ ❷
즉 구하는 원의 방정식은 $(x+3)^2+(y-3)^2=25$ ⋯ ❸
답 $(x+3)^2+(y-3)^2=25$

채점 기준	비율
❶ 두 교점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ 원의 중심과 반지름의 길이를 구할 수 있다.	50%
❸ 원의 방정식을 구할 수 있다.	20%

1329 전략 주어진 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=c$ 꼴로 변형한다.

풀이 $x^2+y^2-10x-6y+2k+27=0$에서
$(x-5)^2+(y-3)^2=7-2k$
이 방정식이 원을 나타내려면
$7-2k>0 \quad \therefore k<\frac{7}{2}$ …… ㉠
원의 중심의 좌표는 (5, 3), 반지름의 길이는 $\sqrt{7-2k}$이므로 이 원이 제1사분면 위에 있으려면
$\sqrt{7-2k}<3, \quad 7-2k<9$
$\therefore k>-1$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면 $-1<k<\frac{7}{2}$
따라서 $\alpha=-1$, $\beta=\frac{7}{2}$이므로 $\alpha+2\beta=6$ 답 6

1330 전략 두 원의 중심 사이의 거리를 d, 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하면 두 원 위의 점 P, Q에 대하여 $\overline{\text{PQ}}$의 길이의 최댓값과 최솟값은 각각 $d+(r_1+r_2)$, $d-(r_1+r_2)$임을 이용한다. (단, $d>r_1+r_2$)

풀이 $x^2+y^2-4x-6y+12=0$에서
$(x-2)^2+(y-3)^2=1$
$x^2+y^2-8x+2y+8=0$에서
$(x-4)^2+(y+1)^2=9$ ⋯ ❶
두 원의 중심을 각각 C, C′이라 하면 $\text{C}(2, 3)$, $\text{C}'(4, -1)$이므로
$\overline{\text{CC}'}=\sqrt{(4-2)^2+(-1-3)^2}=2\sqrt{5}$
이때 두 원의 반지름의 길이는 각각 1, 3이므로
$M=2\sqrt{5}+4, \ m=2\sqrt{5}-4$ ⋯ ❷
$\therefore Mm=(2\sqrt{5}+4)(2\sqrt{5}-4)=4$ ⋯ ❸
답 4

채점 기준	비율
❶ 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=c$ 꼴로 변형할 수 있다.	20%
❷ M, m의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ Mm의 값을 구할 수 있다.	20%

1331 전략 $\text{P}(a, b)$, $\text{G}(x, y)$라 하고 x, y 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $\text{P}(a, b)$, $\text{G}(x, y)$라 하면
$x=\frac{3+0+a}{3}, \ y=\frac{0+6+b}{3}$
$\therefore a=3x-3, \ b=3y-6$ …… ㉠
점 $\text{P}(a, b)$가 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로
$a^2+b^2=9$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $(3x-3)^2+(3y-6)^2=9$
$\therefore (x-1)^2+(y-2)^2=1$
따라서 $p=1$, $q=2$, $r=1$이므로 $p+q+r=4$ 답 ④

1332 전략 주어진 두 현과 원의 중심 사이의 거리가 같음을 이용한다.

풀이 한 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.

따라서 원의 중심 (3, 1)과 x축 사이의 거리와 직선 $y=ax$, 즉 $ax-y=0$ 사이의 거리는 같으므로

$$1=\frac{|3a-1|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}, \quad \sqrt{a^2+1}=|3a-1|$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$4a^2-3a=0, \quad a(4a-3)=0$$

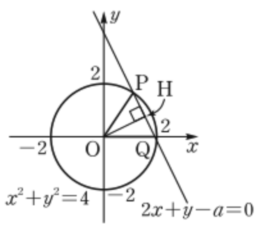
$$\therefore a=\frac{3}{4}\ (\because a\neq0)$$

$$\therefore 100a=75$$

답 75

1333 전략 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 (0, 0)에서 직선 $2x+y-a=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{OH}=\frac{|-a|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{a}{\sqrt{5}}\ (\because a>0)$$

원의 반지름의 길이가 2이므로

$$\overline{OP}=\overline{OQ}=2$$

따라서 $\overline{OH}$는 한 변의 길이가 2인 정삼각형 OPQ의 높이이므로

$$\frac{a}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot2 \quad \therefore a=\sqrt{15}$$

답 ④

1334 전략 원과 직선이 접하려면 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 반지름의 길이를 r라 할 때, $d=r$임을 이용한다.

풀이 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\pi r^2=25\pi \quad \therefore r=5\ (\because r>0)$$

원의 중심 (5, 0)과 직선 $3x-4y-k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|15-k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|15-k|}{5}$$

원의 반지름의 길이가 5이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|15-k|}{5}=5, \quad |15-k|=25$$

$$15-k=-25 \text{ 또는 } 15-k=25$$

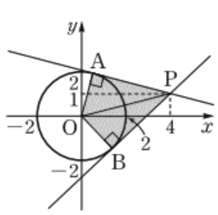
$$\therefore k=40 \text{ 또는 } k=-10$$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 30이다.

답 30

1335 전략 $\triangle OAP\equiv\triangle OBP$이므로 $\square OAPB=2\triangle OAP$임을 이용한다.

풀이 $\overline{OP}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$이므로 직각삼각형 OAP에서



$$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{17})^2-2^2}=\sqrt{13}$$

$$\therefore \triangle OAP=\frac{1}{2}\cdot\overline{AP}\cdot\overline{OA}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot2$$

$$=\sqrt{13}$$

이때 $\triangle OAP\equiv\triangle OBP$ (RHS 합동)이므로

$$\square OAPB=2\triangle OAP=2\sqrt{13}$$

답 ④

1336 전략 원의 중심을 P라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$임을 이용하여 원의 중심의 좌표를 구한다.

풀이 원의 중심을 P(a, b)라 하면 $\quad \overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$$a^2+b^2=(a+2)^2+(b-0)^2$$

$$a+1=0 \quad \therefore a=-1$$

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$$(a+2)^2+(b-0)^2=(a-1)^2+(b-3)^2$$

$$a+b-1=0$$

$a=-1$을 위의 식에 대입하면 $\quad b=2$

따라서 원의 중심은 P$(-1, 2)$이고 점 P와 직선 $x+2y-k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-1+4-k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|3-k|}{\sqrt{5}}$$

이때 원의 반지름의 길이가

$$\overline{PA}=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$$

이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|3-k|}{\sqrt{5}}>\sqrt{5}, \quad |3-k|>5$$

$$3-k<-5 \text{ 또는 } 3-k>5$$

$$\therefore k<-2 \text{ 또는 } k>8$$

따라서 자연수 k의 최솟값은 9이다.

답 9

1337 전략 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용하여 $\overline{PH}$의 길이의 최솟값을 구한다.

풀이 $x^2+y^2-10x-4y+24=0$에서

$$(x-5)^2+(y-2)^2=5$$

원의 중심 (5, 2)와 직선 $x-2y-11=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|5-4-11|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 $\overline{PH}$의 길이의 최솟값은

$$2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$$

답 ②

1338 전략 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$이다.

풀이 $y=x$를 $x^2+y^2=18$에 대입하면

$$x^2+x^2=18, \quad x^2=9 \quad \therefore x=\pm3$$

원과 직선의 교점 중 제1사분면 위에 있는 점의 x좌표는 3이므로 교점의 좌표는 $\quad$(3, 3)

따라서 원 $x^2+y^2=18$ 위의 점 (3, 3)에서의 접선의 방정식은

$$3x+3y=18 \quad \therefore x+y=6$$

이 직선이 점 $(8, a)$를 지나므로

$$8+a=6 \quad \therefore a=-2$$

답 ②

1339 전략 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하고 접선의 방정식을 구한다.

풀이 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=9$$

이 직선이 점 P(4, 3)을 지나므로

$$4x_1+3y_1=9 \quad \therefore y_1=-\frac{4}{3}x_1+3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

$$x_1^2+y_1^2=9 \quad \cdots\cdots ㉡$$

11 원의 방정식

㉠을 ㉡에 대입하면

$$x_1^2+\left(-\frac{4}{3}x_1+3\right)^2=9, \qquad 25x_1^2-72x_1=0$$

$$x_1(25x_1-72)=0$$

$$\therefore\ x_1=0 \text{ 또는 } x_1=\frac{72}{25}$$

$x_1=0$을 ㉠에 대입하면 $\quad y_1=3$

$x_1=\frac{72}{25}$를 ㉠에 대입하면 $\quad y_1=-\frac{21}{25}$

따라서 접선의 방정식은

$$y=3,\ 24x-7y=75$$

이때 기울기가 양수인 접선의 방정식은 $24x-7y=75$, 즉

$y=\frac{24}{7}x-\frac{75}{7}$이므로

$$p=7,\ q=24$$

$$\therefore\ p+q=31$$

답 31

다른풀이 접선의 기울기를 $m(m>0)$이라 하면 기울기가 m이고 점 $P(4,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=m(x-4) \qquad \therefore\ mx-y-4m+3=0$$

원의 중심 $(0,\ 0)$과 이 직선 사이의 거리는

$$\frac{|-4m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|-4m+3|}{\sqrt{m^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|-4m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=3, \qquad |-4m+3|=3\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$7m^2-24m=0, \qquad m(7m-24)=0$$

$$\therefore\ m=\frac{24}{7}\ (\because\ m>0)$$

1340 **전략** 원의 중심의 좌표를 $(a,\ 2a-1)$이라 하면 원의 반지름의 길이는 $|2a-1|$임을 이용한다.

풀이 원의 중심의 좌표를 $(a,\ 2a-1)$이라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-2a+1)^2=(2a-1)^2$$

이 원이 점 $(4,\ 3)$을 지나므로

$$(4-a)^2+(4-2a)^2=(2a-1)^2$$

$$\therefore\ a^2-20a+31=0$$

이 이차방정식의 두 실근을 $a_1,\ a_2$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a_1+a_2=20$$

따라서 구하는 y좌표의 합은

$$(2a_1-1)+(2a_2-1)=2(a_1+a_2)-2$$

$$=2\cdot20-2=38$$

답 ③

1341 **전략** 도형 C 위의 점을 $Q(x,\ y)$라 하고 $a,\ b$를 $x,\ y$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 도형 C 위의 점을 $Q(x,\ y)$라 하면 점 Q는 $\overline{AP}$를 $2:1$로 외분하는 점이므로

$$x=\frac{2\cdot a-1\cdot4}{2-1}=2a-4,\ y=\frac{2\cdot b-1\cdot(-2)}{2-1}=2b+2$$

$$\therefore\ a=\frac{x+4}{2},\ b=\frac{y-2}{2} \quad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ❶$$

점 $P(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2=2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\left(\frac{x+4}{2}\right)^2+\left(\frac{y-2}{2}\right)^2=2$$

$$\therefore\ (x+4)^2+(y-2)^2=8$$

이 원의 중심 $(-4,\ 2)$와 원점 사이의 거리는

$$\sqrt{(-4)^2+2^2}=2\sqrt{5}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로

$$M=2\sqrt{5}+2\sqrt{2},\ m=2\sqrt{5}-2\sqrt{2} \quad \cdots ❷$$

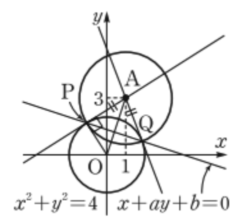
$$\therefore\ Mm=(2\sqrt{5}+2\sqrt{2})(2\sqrt{5}-2\sqrt{2})=12 \quad \cdots ❸$$

답 12

채점 기준	비율
❶ 도형 C 위의 점을 $Q(x,\ y)$라 하고 $a,\ b$를 $x,\ y$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ $M,\ m$의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ Mm의 값을 구할 수 있다.	20%

1342 **전략** 직선 PQ는 점 A를 중심으로 하고 $\overline{AP}$를 반지름으로 하는 원과 원 $x^2+y^2=4$의 교점을 지나는 직선임을 이용한다.

풀이 직선 PQ는 점 A를 중심으로 하고 $\overline{AP}$를 반지름으로 하는 원과 원 $x^2+y^2=4$의 교점을 지나는 직선이다.



$\overline{OA}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$, $\overline{OP}=2$이므로 직각삼각형 OAP에서

$$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OP}^2}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{10})^2-2^2}=\sqrt{6}$$

점 $A(1,\ 3)$을 중심으로 하고 $\overline{AP}$를 반지름으로 하는 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y-3)^2=6$$

$$\therefore\ x^2+y^2-2x-6y+4=0$$

따라서 직선 PQ는 두 원 $x^2+y^2-4=0,\ x^2+y^2-2x-6y+4=0$의 교점을 지나는 직선이므로 그 방정식은

$$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-2x-6y+4)=0$$

$$\therefore\ x+3y-4=0$$

즉 $a=3,\ b=-4$이므로 $\quad a+b=-1$

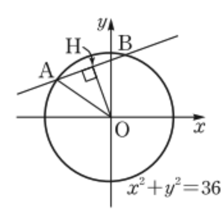
답 −1

1343 **전략** 주어진 현의 길이와 원의 반지름의 길이를 이용하여 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구한다.

풀이 구하는 직선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $P(-1,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-5=m(x+1) \qquad \therefore\ mx-y+m+5=0$$

오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=36$과 직선 $mx-y+m+5=0$의 두 교점을 A, B라 하고 원의 중심 $(0,\ 0)$에서 이 직선에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot6\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

직각삼각형 OAH에서

$$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{6^2-(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$$

따라서 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $mx-y+m+5=0$ 사이의 거리가 $3\sqrt{2}$이므로

$$\frac{|m+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}, \qquad |m+5|=3\sqrt{2(m^2+1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$17m^2-10m-7=0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 직선의 기울기의 합은

$\frac{10}{17}$이므로　　$p=17,\ q=10$

$\therefore\ p+q=27$ 답 27

1344 전략 한 점을 지나고 원점과의 거리가 최대인 직선은 원점과 주어진 점을 지나는 직선에 수직임을 이용한다.

풀이 직선 l은 점 $(3,\ 4)$를 지나는 직선 중에서 원점과의 거리가 최대인 직선이므로 원점과 점 $(3,\ 4)$를 지나는 직선에 수직이다.

이때 원점과 점 $(3,\ 4)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{4}{3}$이므로 직선 l의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이다.

기울기가 $-\frac{3}{4}$이고 점 $(3,\ 4)$를 지나는 직선 l의 방정식은

$y-4=-\frac{3}{4}(x-3)$　　$\therefore\ 3x+4y-25=0$

원의 중심 $(7,\ 5)$와 직선 $3x+4y-25=0$ 사이의 거리는

$\frac{|21+20-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{16}{5}$

이때 원의 반지름의 길이가 1이므로 점 P와 직선 l 사이의 거리의 최솟값은

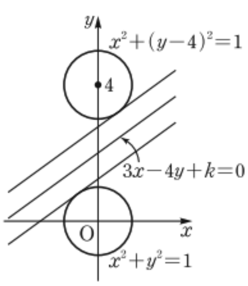
$\frac{16}{5}-1=\frac{11}{5}$　　$\therefore\ m=\frac{11}{5}$

$\therefore\ 10m=22$ 답 22

1345 전략 기울기가 m이고 두 원 C_1, C_2 사이를 지나는 직선은 기울기가 m인 두 원 C_1, C_2의 접선 사이에 있음을 이용한다.

풀이 직선 $3x-4y+k=0$, 즉

$y=\frac{3}{4}x+\frac{k}{4}$가 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+(y-4)^2=1$ 사이를 지나려면 이 직선이 오른쪽 그림과 같이 기울기가 $\frac{3}{4}$인 두 원의 접선 사이에 있어야 한다.



원 $x^2+y^2=1$의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|k|}{5}$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|k|}{5}=1$,　　$|k|=5$

$\therefore\ k=-5$ 또는 $k=5$

이때 직선이 원 $x^2+y^2=1$의 위쪽에서 접할 때의 k의 값이 5이므로　$k>5$ …… ㉠

원 $x^2+(y-4)^2=1$의 중심 $(0,\ 4)$와 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-16+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-16+k|}{5}$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|-16+k|}{5}=1$,　　$|-16+k|=5$

$-16+k=-5$ 또는 $-16+k=5$

$\therefore\ k=11$ 또는 $k=21$

이때 직선이 원 $x^2+(y-4)^2=1$의 아래쪽에서 접할 때의 k의 값이 11이므로　$k<11$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $5<k<11$이므로 정수 k는 6, 7, 8, 9, 10의 5개이다.

답 ②

1346 전략 원점에서 원 C_3에 그은 접선의 방정식을 구한 후 이 접선과 원 C_2의 중심 사이의 거리를 이용하여 $\overline{AB}$의 길이를 구한다.

풀이 원점 $(0,\ 0)$에서 원 C_3에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(0,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=mx$　　$\therefore\ mx-y=0$ …… ㉠

원 C_3의 중심 $(9,\ 0)$과 직선 $mx-y=0$ 사이의 거리는

$\frac{|9m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|9m|}{\sqrt{m^2+1}}$

원 C_3의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|9m|}{\sqrt{m^2+1}}=3$,　　$|9m|=3\sqrt{m^2+1}$

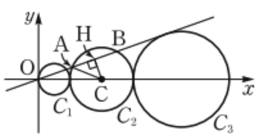
양변을 제곱하여 정리하면

$m^2=\frac{1}{8}$　　$\therefore\ m=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ (\because\ m>0)$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$\frac{1}{2\sqrt{2}}x-y=0$, 즉 $x-2\sqrt{2}y=0$

오른쪽 그림과 같이 원 C_2의 중심 C$(4,\ 0)$에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{CH}=\frac{|4|}{\sqrt{1^2+(-2\sqrt{2})^2}}=\frac{4}{3}$

직각삼각형 ACH에서

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AH}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$ 답 $\frac{4\sqrt{5}}{3}$

11 원의 방정식

Ⅳ. 도형의 방정식

12 도형의 이동

1347 $(1+8,\ 1+1)$ $\quad\therefore (9,\ 2)$ 답 $(9,\ 2)$

1348 $(5+2,\ 8-5)$ $\quad\therefore (7,\ 3)$ 답 $(7,\ 3)$

1349 $(-6-3,\ 2+4)$ $\quad\therefore (-9,\ 6)$ 답 $(-9,\ 6)$

1350 $(4+6,\ 7-1)$ $\quad\therefore (10,\ 6)$ 답 $(10,\ 6)$

1351 $(2+6,\ -4-1)$ $\quad\therefore (8,\ -5)$ 답 $(8,\ -5)$

1352 $(-7+6,\ 6-1)$ $\quad\therefore (-1,\ 5)$ 답 $(-1,\ 5)$

1353 $x-4=0$, $y+5=8$이므로
$x=4$, $y=3$ $\quad\therefore (4,\ 3)$ 답 $(4,\ 3)$

1354 $x-4=4$, $y+5=-9$이므로
$x=8$, $y=-14$ $\quad\therefore (8,\ -14)$ 답 $(8,\ -14)$

1355 $x-4=-3$, $y+5=-6$이므로
$x=1$, $y=-11$ $\quad\therefore (1,\ -11)$ 답 $(1,\ -11)$

1356 $0+a=5$, $1+b=10$이므로
$a=5$, $b=9$ 답 $a=5$, $b=9$

1357 $-2+a=-3$, $6+b=9$이므로
$a=-1$, $b=3$ 답 $a=-1$, $b=3$

1358 $3+a=-7$, $-8+b=4$이므로
$a=-10$, $b=12$ 답 $a=-10$, $b=12$

1359 $(x-2)-2(y-4)-7=0$
$\therefore x-2y-1=0$ 답 $x-2y-1=0$

1360 $\{(x-9)+1\}^2+\{(y+1)-1\}^2=4$
$\therefore (x-8)^2+y^2=4$ 답 $(x-8)^2+y^2=4$

1361 $y-5=(x+3)^2+3$
$\therefore y=x^2+6x+17$ 답 $y=x^2+6x+17$

1362 $3(x+5)+2(y-4)-1=0$
$\therefore 3x+2y+6=0$ 답 $3x+2y+6=0$

1363 $(x+5)^2+\{(y-4)-5\}^2=6$
$\therefore (x+5)^2+(y-9)^2=6$ 답 $(x+5)^2+(y-9)^2=6$

1364 $y-4=-(x+5)^2+1$
$\therefore y=-x^2-10x-20$ 답 $y=-x^2-10x-20$

1365 주어진 직선을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 원래의 직선과 일치하므로 구하는 직선의 방정식은
$(x+3)+(y+1)-2=0$
$\therefore x+y+2=0$ 답 $x+y+2=0$

1366 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=4$가 평행이동
$(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$에 의하여 옮겨지는 원의 방정식은
$\{(x-a)+2\}^2+\{(y-b)-1\}^2=4$
$\therefore (x-a+2)^2+(y-b-1)^2=4$
이 원이 원 $(x+7)^2+(y-5)^2=4$와 일치하므로
$-a+2=7$, $-b-1=-5$
$\therefore a=-5$, $b=4$ 답 $a=-5$, $b=4$

1367 $(x+1)+4(y-2)+6=0$
$\therefore x+4y-1=0$ 답 $x+4y-1=0$

1368 주어진 포물선을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동하면 원래의 포물선과 일치하므로 구하는 포물선의 방정식은
$y-6=2(x-3)^2$
$\therefore y=2x^2-12x+24$ 답 $y=2x^2-12x+24$

1369 답 $(2,\ -6)$

1370 답 $(-3,\ -7)$

1371 답 $(-5,\ 5)$

1372 답 $(-4,\ 15)$

1373 답 $(-3,\ -8)$

1374 답 $(2,\ -1)$

1375 답 $(12,\ -5)$

1376 답 $(-3,\ 6)$

1377 답 $(2,\ 10)$

1378 답 $(14,\ 5)$

1379 답 $(6,\ -7)$

1380 답 $(-4,\ -9)$

1381 $-y=x-8$ $\quad\therefore y=-x+8$ 답 $y=-x+8$

1382 $x^2+(-y-1)^2=4$
$\therefore x^2+(y+1)^2=4$ 답 $x^2+(y+1)^2=4$

1383 $-y=2x^2-5x+3$
$\therefore y=-2x^2+5x-3$ 답 $y=-2x^2+5x-3$

1384 $2\cdot(-x)+y+4=0$
$\therefore 2x-y-4=0$ 답 $2x-y-4=0$

1385 $(-x-5)^2+(y+3)^2=6$
$\therefore (x+5)^2+(y+3)^2=6$ 답 $(x+5)^2+(y+3)^2=6$

1386 $y=(-x)^2-(-x)+1$
$\therefore y=x^2+x+1$ 답 $y=x^2+x+1$

1387 $-y=9\cdot(-x)-1$ $\quad\therefore y=9x+1$ 답 $y=9x+1$

1388 $(-x)^2+(-y)^2-2\cdot(-x)-1=0$
$\therefore x^2+y^2+2x-1=0$ 답 $x^2+y^2+2x-1=0$

1389 $-y=-(-x)^2+11$ $\quad\therefore y=x^2-11$ 답 $y=x^2-11$

1390 $y-3x+9=0$ $\quad\therefore 3x-y-9=0$ 답 $3x-y-9=0$

1391 $y^2+x^2-2y+4x+4=0$
$\therefore x^2+y^2+4x-2y+4=0$ 답 $x^2+y^2+4x-2y+4=0$

1392 $\mathrm{P}\left(\frac{6-2}{2}, \frac{7+5}{2}\right)$ $\quad\therefore \mathrm{P}(2, 6)$ 답 $\mathrm{P}(2, 6)$

1393 $\mathrm{P}\left(\frac{5-3}{2}, \frac{-1+11}{2}\right)$ $\quad\therefore \mathrm{P}(1, 5)$ 답 $\mathrm{P}(1, 5)$

1394 $\mathrm{P}\left(\frac{-4-8}{2}, \frac{9-7}{2}\right)$ $\quad\therefore \mathrm{P}(-6, 1)$ 답 $\mathrm{P}(-6, 1)$

1395 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면
$\frac{2+a}{2}=-1, \frac{5+b}{2}=6$
$\therefore a=-4, b=7$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(-4, 7)$ 답 $(-4, 7)$

1396 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면
$\frac{-4+a}{2}=1, \frac{-3+b}{2}=-1$
$\therefore a=6, b=1$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(6, 1)$ 답 $(6, 1)$

1397 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면
$\frac{7+a}{2}=10, \frac{-2+b}{2}=4$
$\therefore a=13, b=10$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(13, 10)$ 답 $(13, 10)$

1398 답 (가) $\frac{-2+q}{2}$ (나) -1 (다) 2 (라) -3

1399 점 $\mathrm{P}(9, -8)$을 직선 $x-2y-10=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{Q}(p, q)$라 하자.
$\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점의 좌표는
$\left(\frac{9+p}{2}, \frac{-8+q}{2}\right)$
이 점이 직선 $x-2y-10=0$ 위의 점이므로
$\frac{9+p}{2}-2\cdot\frac{-8+q}{2}-10=0$
$\therefore p-2q=-5$ …… ㉠
또 직선 PQ는 직선 $x-2y-10=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x-5$와 수직이므로
$\frac{q+8}{p-9}\cdot\frac{1}{2}=-1$
$\therefore 2p+q=10$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=3, q=4$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(3, 4)$ 답 $(3, 4)$

1400 주어진 평행이동에 의하여 점 $(-2, 1)$이 옮겨지는 점의 좌표는
$(-2+4, 1-9)$, 즉 $(2, -8)$
이 점이 직선 $y=ax+2$ 위의 점이므로
$-8=2a+2$ $\quad\therefore a=-5$ 답 ①

1401 $a-1=-5, 8-7=b$이므로
$a=-4, b=1$ $\quad\therefore b-a=5$ 답 5

1402 점 $\mathrm{A}(0, 6)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점 B의 좌표는
$(0+a, 6-2)$, 즉 $(a, 4)$
점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 △OAB의 넓이가 12이므로
$\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{BH}}=12,$ $\quad\frac{1}{2}\cdot6\cdot|a|=12$
$|a|=4$ $\quad\therefore a=4\,(\because a>0)$ 답 4

1403 $\mathrm{P}(a, b)$라 하면 $\quad\mathrm{P}'(a-3, b+5)$ ⋯ ❶
$\therefore \overline{\mathrm{PP}'}=\sqrt{(a-3-a)^2+(b+5-b)^2}$
$=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$ ⋯ ❷
답 $\sqrt{34}$

채점 기준	비율
❶ 점 P′의 좌표를 구할 수 있다.	60%
❷ $\overline{\mathrm{PP}'}$의 길이를 구할 수 있다.	40%

1404 점 $(1, 3)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-2, 4)$라 하면
$1+a=-2, 3+b=4$
$\therefore a=-3, b=1$
따라서 점 $(-1, 6)$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(-1-3, 6+1)$, 즉 $(-4, 7)$ 답 ②

1405 평행이동한 직선의 방정식은
$5(x-a)+(y-2)-13=0$
$\therefore 5x+y-5a-15=0$
이 직선이 원점을 지나므로
$-5a-15=0$ $\quad\therefore a=-3$ 답 ②

1406 평행이동한 직선의 방정식은
$y-b=3(x-a)+1$
$\therefore y=3x-3a+b+1$
이 직선이 직선 $y=3x+1$과 일치하므로
$-3a+b+1=1,$ $\quad 3a=b$
$\therefore \frac{b}{a}=3$ 답 3

1407 점 $(3, 1)$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-3, 8)$이라 하면
$3+m=-3, 1+n=8$
$\therefore m=-6, n=7$

12 도형의 이동

따라서 직선 $x+ay+b=0$을 x축의 방향으로 -6만큼, y축의 방향으로 7만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$(x+6)+a(y-7)+b=0$

$\therefore\ x+ay+6-7a+b=0$

이 직선이 직선 $x-2y+10=0$과 일치하므로

$a=-2,\ 6-7a+b=10$

$\therefore\ a=-2,\ b=-10$

$\therefore\ a+b=-12$ 답 ①

1408 주어진 평행이동은 도형을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 직선 $4x+y-9=0$을 평행이동한 직선의 방정식은

$4(x-5)+(y+1)-9=0$

$\therefore\ 4x+y-28=0$ 답 $4x+y-28=0$

1409 평행이동한 직선의 방정식은

$y+3=(x-2)+k$

$\therefore\ x-y-5+k=0$ …… ㉠ ⋯ ❶

직선 ㉠이 원 $x^2+y^2=2$에 접하므로 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{2}$와 같다. 즉

$\dfrac{|-5+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2},\qquad |-5+k|=2$

$-5+k=-2$ 또는 $-5+k=2$

$\therefore\ k=3$ 또는 $k=7$ ⋯ ❷

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 10이다. ⋯ ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50%
❷ 상수 k의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 모든 상수 k의 값의 합을 구할 수 있다.	10%

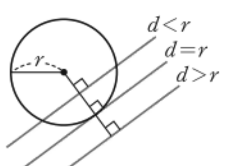
라쎈 특강 원과 직선의 위치 관계

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원과 직선의 위치 관계는

① $d<r$ ⇨ 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $d=r$ ⇨ 한 점에서 만난다. (접한다.)

③ $d>r$ ⇨ 만나지 않는다.



1410 $x^2+y^2+4x-2y+a=0$에서

$(x+2)^2+(y-1)^2=5-a$

주어진 평행이동에 의하여 이 원이 옮겨지는 원의 방정식은

$(x-2+2)^2+(y+5-1)^2=5-a$

$\therefore\ x^2+(y+4)^2=5-a$

이 원이 원 $x^2+(y+b)^2=3$과 일치하므로

$4=b,\ 5-a=3$

$\therefore\ a=2,\ b=4$

$\therefore\ a-b=-2$ 답 -2

1411 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a+1)^2+(y-b-4)^2=1$ …… ㉠

한편 $x^2+y^2+10x-2y+25=0$에서

$(x+5)^2+(y-1)^2=1$

이 원이 원 ㉠과 일치하므로

$-a+1=5,\ -b-4=-1$

$\therefore\ a=-4,\ b=-3$

$\therefore\ a+b=-7$ 답 ②

1412 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$에서

$(x-2)^2+(y+1)^2=9$

이때 평행이동하여 이 원과 겹쳐지기 위해서는 반지름의 길이가 3으로 같아야 한다.

ㄱ. 원 $(x-5)^2+y^2=9$의 반지름의 길이가 3이므로 평행이동하여 주어진 원과 겹쳐진다.

ㄴ. 원 $x^2+(y-3)^2=4$의 반지름의 길이가 2이므로 평행이동하여도 주어진 원과 겹쳐지지 않는다.

ㄷ. $x^2+y^2+2x-6y+1=0$에서

$(x+1)^2+(y-3)^2=9$

따라서 반지름의 길이가 3이므로 평행이동하여 주어진 원과 겹쳐진다.

이상에서 평행이동하여 주어진 원과 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

참고 원을 평행이동하여도 반지름의 길이는 변하지 않는다.

1413 주어진 평행이동은 도형을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$x^2+y^2-8x+2y+1=0$에서

$(x-4)^2+(y+1)^2=16$

주어진 평행이동에 의하여 이 원이 옮겨지는 원의 방정식은

$(x+1-4)^2+(y-3+1)^2=16$

$\therefore\ (x-3)^2+(y-2)^2=16$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(3,\ 2)$ 답 $(3,\ 2)$

다른풀이 $x^2+y^2-8x+2y+1=0$에서

$(x-4)^2+(y+1)^2=16$

이므로 중심의 좌표는 $(4,\ -1)$이다.

따라서 주어진 평행이동에 의하여 점 $(4,\ -1)$이 옮겨지는 점의 좌표는 $(4-1,\ -1+3)$, 즉 $(3,\ 2)$

1414 원 $(x+2)^2+(y-9)^2=5$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a+2)^2+(y-b-9)^2=5$

이 원이 원 $(x-8)^2+(y+3)^2=5$와 일치하므로

$-a+2=-8,\ -b-9=3$

$\therefore\ a=10,\ b=-12$

따라서 점 $(-7,\ -1)$을 x축의 방향으로 10만큼, y축의 방향으로 -12만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(-7+10,\ -1-12)$, 즉 $(3,\ -13)$ 답 ③

1415 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-1=(x+1)^2+4(x+1)+m$

$\therefore\ y=x^2+6x+m+6$

이 포물선이 포물선 $y=x^2+nx+3$과 일치하므로

$6=n,\ m+6=3 \qquad \therefore\ m=-3,\ n=6$

$\therefore\ m+n=3$ 답 ③

1416 점 $(3,\ -4)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(4,\ -6)$이라 하면

$3+m=4,\ -4+n=-6$

$\therefore\ m=1,\ n=-2$

포물선 $y=x^2+8x+6$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y+2=(x-1)^2+8(x-1)+6$

$\therefore\ y=x^2+6x-3=(x+3)^2-12$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-3,\ -12)$이므로

$a=-3,\ b=-12 \qquad \therefore\ a-b=9$ 답 9

다른풀이 $y=x^2+8x+6$에서

$y=(x+4)^2-10$

이므로 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-4,\ -10)$이다.

주어진 평행이동에 의하여 점 $(-4,\ -10)$이 옮겨지는 점의 좌표는

$(-4+1,\ -10-2)$, 즉 $(-3,\ -12)$

1417 포물선 $y=2x^2+12x+5$, 즉 $y=2(x+3)^2-13$을 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-(a+3)=2(x-a+3)^2-13$

$\therefore\ y=2(x-a+3)^2-10+a$ ··· ❶

이 포물선의 꼭짓점 $(a-3,\ -10+a)$가 y축 위에 있으므로

$a-3=0 \qquad \therefore\ a=3$ ··· ❷

따라서 꼭짓점의 y좌표는 $\quad -10+3=-7$ ··· ❸

답 -7

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 포물선의 방정식을 구할 수 있다.	50%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 꼭짓점의 y좌표를 구할 수 있다.	20%

다른풀이 $y=2x^2+12x+5$에서

$y=2(x+3)^2-13$

이므로 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-3,\ -13)$이다.

주어진 평행이동에 의하여 점 $(-3,\ -13)$이 옮겨지는 점의 좌표는

$(-3+a,\ -13+a+3)$

이 점이 y축 위에 있으므로 $\quad -3+a=0 \qquad \therefore\ a=3$

1418 점 $(a,\ b)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a,\ -b)$

이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-b,\ a)$

이 점이 점 $(-3,\ 4)$와 일치하므로 $\quad -b=-3,\ a=4$

$\therefore\ a=4,\ b=3$ 답 $a=4,\ b=3$

1419 점 $(5,\ -2)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는

$P(-5,\ 2)$

점 $(5,\ -2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는

$Q(-2,\ 5)$

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\dfrac{5-2}{-2+5}(x+5)$

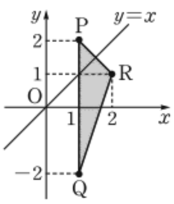
$\therefore\ y=x+7$ 답 $y=x+7$

1420 점 $P(1,\ 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는

$Q(1,\ -2)$

점 $P(1,\ 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 R의 좌표는

$R(2,\ 1)$



$\therefore\ \triangle PQR=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 1=2$ 답 ②

1421 점 $(2,\ -4)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-2,\ 4)$

이 점이 직선 $ax+6y-a^2=0$ 위의 점이므로

$-2a+24-a^2=0, \qquad a^2+2a-24=0$

$(a+6)(a-4)=0 \qquad \therefore\ a=-6$ 또는 $a=4$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 -2이다. 답 -2

1422 점 $(a,\ b)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a,\ b)$

이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$-a<0,\ b>0 \qquad \therefore\ a>0,\ b>0$

점 $(-a-b,\ ab)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a+b,\ -ab)$

이때 $a+b>0,\ -ab<0$이므로 이 점은 제4사분면 위에 있다.

답 제4사분면

1423 점 $(-3,\ 9)$를 x축에 대하여 대칭이동하면 점 $(-3,\ -9)$로 옮겨지므로 직선 $3x+2y-2=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$3x-2y-2=0$ 답 ⑤

1424 직선 $y=-3x+k$를 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=3x+k$

이 직선이 점 $(-1,\ 5)$를 지나므로

$5=-3+k \qquad \therefore\ k=8$ 답 8

1425 직선 $x-2y+6=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 l_1의 방정식은

$y-2x+6=0 \qquad \therefore\ 2x-y-6=0$ ··· ❶

직선 l_1을 원점에 대하여 대칭이동한 직선 l_2의 방정식은

$-2x+y-6=0 \qquad \therefore\ 2x-y+6=0$ ··· ❷

따라서 직선 l_2의 y절편은 6이다. ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 직선 l_1의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ 직선 l_2의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ 직선 l_2의 y절편을 구할 수 있다.	20%

1426 직선 l의 방정식은

$3x+(k+1)y-8=0$

이 직선이 직선 $2x-ky+1=0$과 수직이므로

$3\cdot 2+(k+1)\cdot(-k)=0, \qquad k^2+k-6=0$

$(k+3)(k-2)=0 \qquad \therefore\ k=-3$ 또는 $k=2$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 -1이다. 답 -1

12 도형의 이동

1427 직선 $x-2y+a=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-x+2y+a=0$

$\therefore x-2y-a=0$ …… ㉠

직선 ㉠이 원 $(x-1)^2+(y+4)^2=20$에 접하므로 원의 중심 $(1, -4)$와 직선 ㉠ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 $2\sqrt{5}$와 같다. 즉

$\dfrac{|1+8-a|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$, $\quad |9-a|=10$

$9-a=-10$ 또는 $9-a=10$

$\therefore a=19$ ($\because a>0$) 답 19

1428 중심의 좌표가 $(3, -2)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+2)^2=r^2$

이므로 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-3)^2+(-y+2)^2=r^2$

$\therefore (x-3)^2+(y-2)^2=r^2$

이 원이 점 $(4, 5)$를 지나므로

$(4-3)^2+(5-2)^2=r^2$, $\quad r^2=10$

$\therefore r=\sqrt{10}$ ($\because r>0$) 답 $\sqrt{10}$

1429 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=4$를 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x+1)^2+(-y-1)^2=4$

$\therefore (x-1)^2+(y+1)^2=4$

이 원의 중심 $(1, -1)$이 직선 $y=ax+b$ 위에 있으므로

$a+b=-1$ 답 ②

1430 원 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$x^2+(-y)^2-4x-2\cdot(-y)-4=0$

$\therefore x^2+y^2-4x+2y-4=0$ ⋯ ❶

원 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x)^2+y^2-4\cdot(-x)-2y-4=0$

$\therefore x^2+y^2+4x-2y-4=0$ ⋯ ❷

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-4x+2y-4-(x^2+y^2+4x-2y-4)=0$

$\therefore 2x-y=0$ ⋯ ❸

답 $2x-y=0$

채점 기준	비율
❶ 주어진 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ 주어진 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	20%

라쎈 특강 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식

두 점에서 만나는 두 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+ax+by+c-(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$

1431 원 $x^2+y^2+4x-10y+9=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$y^2+x^2+4y-10x+9=0$

이 원이 x축과 만나는 점의 x좌표는

$x^2-10x+9=0$, $\quad (x-1)(x-9)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=9$

따라서 두 교점 사이의 거리는

$9-1=8$ 답 ④

1432 포물선 $y=x^2-4ax+4$를 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=(-x)^2-4a\cdot(-x)+4$

$=x^2+4ax+4$

$=(x+2a)^2+4-4a^2$

이 포물선의 꼭짓점 $(-2a, 4-4a^2)$이 직선 $y=x+2$ 위에 있으므로

$4-4a^2=-2a+2$, $\quad 4a^2-2a-2=0$

$2a^2-a-1=0$, $\quad (2a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$) 답 1

1433 포물선 $y=x^2+ax+b$를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=(-x)^2+a\cdot(-x)+b$

$\therefore y=-x^2+ax-b=-\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{4}-b$

이 포물선의 꼭짓점 $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a^2}{4}-b\right)$가 점 $(5, -1)$과 일치하므로

$\dfrac{a}{2}=5$, $\dfrac{a^2}{4}-b=-1$

$\therefore a=10$, $b=26$

$\therefore a+b=36$ 답 36

1434 포물선 $y=2x^2-8x+5$를 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=2x^2-8x+5$

$\therefore y=-2x^2+8x-5$

이 포물선을 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=-2\cdot(-x)^2+8\cdot(-x)-5$

$\therefore y=-2x^2-8x-5$

이 포물선이 점 $(-1, a)$를 지나므로

$a=-2+8-5=1$ 답 1

참고 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 것은 원점에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

1435 점 $(3, a)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a, 3)$

이 점을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a-2, 3+3)$, 즉 $(a-2, 6)$

이 점이 점 $(4, b)$와 일치하므로

$a-2=4$, $6=b$ $\quad \therefore a=6$, $b=6$

$\therefore a-b=0$ 답 ①

1436 원 $(x-4)^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a-4)^2+(y-b)^2=4$

이 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-a-4)^2+(-y-b)^2=4$

$\therefore (x-a-4)^2+(y+b)^2=4$

이 원의 중심 $(a+4, -b)$가 점 $(1, 2)$와 일치하므로

$a+4=1, -b=2$

$\therefore a=-3, b=-2$

$\therefore a+b=-5$ 답 -5

1437 직선 $5x-2y+1=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-5x+2y+1=0$

$\therefore 5x-2y-1=0$ ··· ❶

이 직선을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$5(x-a)-2(y-3)-1=0$

$\therefore 5x-2y-5a+5=0$ ··· ❷

이 직선이 원 $(x-3)^2+y^2=2$의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(3, 0)$을 지나야 하므로

$15-5a+5=0$

$\therefore a=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 대칭이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ 평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20%

1438 포물선 $y=x^2+a$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-3=(x-2)^2+a$

$\therefore y=(x-2)^2+a+3$

이 포물선을 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=(x-2)^2+a+3$

$\therefore y=-(x-2)^2-a-3=-x^2+4x-a-7$

이 포물선이 포물선 $y=-x^2+4x-3$과 일치하므로

$-a-7=-3 \qquad \therefore a=-4$ 답 -4

1439 원 $(x+a)^2+(y+b)^2=16$을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+a)^2+(-y+b)^2=16$

$\therefore (x+a)^2+(y-b)^2=16$

이 원을 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+a)^2+(y-3-b)^2=16$

이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

$|-a|=4, |3+b|=4$

$\therefore a=4, b=1\ (\because a>0, b>0)$

$\therefore a+b=5$ 답 ①

1440 두 점 $(a, 4)$, $(-5, b)$를 잇는 선분의 중점의 좌표가 $(2, 3)$이므로

$\frac{a-5}{2}=2, \frac{4+b}{2}=3$

$\therefore a=9, b=2$

$\therefore ab=18$ 답 18

1441 두 포물선이 점 (a, b)에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점도 점 (a, b)에 대하여 대칭이다.

포물선 $y=x^2-6x+6=(x-3)^2-3$의 꼭짓점의 좌표는

$(3, -3)$

포물선 $y=-x^2+8x-2=-(x-4)^2+14$의 꼭짓점의 좌표는

$(4, 14)$

따라서 두 꼭짓점 $(3, -3)$, $(4, 14)$를 잇는 선분의 중점의 좌표가 (a, b)이므로

$a=\frac{3+4}{2}=\frac{7}{2}, b=\frac{-3+14}{2}=\frac{11}{2}$

$\therefore b-a=2$ 답 2

1442 $x^2+y^2-8x+12=0$에서

$(x-4)^2+y^2=4$

이 원의 중심 $(4, 0)$을 점 $(3, -1)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{4+a}{2}=3, \frac{0+b}{2}=-1$

$\therefore a=2, b=-2$

따라서 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(2, -2)$이고, 원은 대칭이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 반지름의 길이는 2이다.

즉 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+2)^2=4$ 답 ②

1443 두 점 $(-2, 9)$, $(4, 15)$를 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{9+15}{2}\right)$, 즉 $(1, 12)$

이 점이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$12=a+b$ …… ㉠

또 두 점 $(-2, 9)$, $(4, 15)$를 지나는 직선이 직선 $y=ax+b$와 수직이므로

$\frac{15-9}{4+2}\cdot a=-1 \qquad \therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하여 풀면 $\quad b=13$

$\therefore ab=-13$ 답 ②

1444 두 점 $(-3, 2)$, $(b, -8)$을 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-3+b}{2}, \frac{2-8}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{-3+b}{2}, -3\right)$

이 점이 직선 $y=x+a$ 위의 점이므로

$-3=\frac{-3+b}{2}+a$

$\therefore 2a+b=-3$ …… ㉠

또 두 점 $(-3, 2)$, $(b, -8)$을 지나는 직선이 직선 $y=x+a$와 수직이므로

$\dfrac{-8-2}{b+3}\cdot 1=-1 \qquad \therefore\ b=7$

$b=7$을 ㉠에 대입하여 풀면 $\quad a=-5$

$\therefore\ a+b=2$ 답 ④

1445 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=2$의 중심 $(-1,\ 3)$을 직선 $y=-x-4$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 두 점 $(-1,\ 3)$, $(a,\ b)$를 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-1+a}{2},\ \dfrac{3+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=-x-4$ 위의 점이므로

$\dfrac{3+b}{2}=-\dfrac{-1+a}{2}-4$

$\therefore\ a+b=-10$ …… ㉠

또 두 점 $(-1,\ 3)$, $(a,\ b)$를 지나는 직선이 직선 $y=-x-4$와 수직이므로

$\dfrac{b-3}{a+1}\cdot(-1)=-1$

$\therefore\ a-b=-4$ …… ㉡

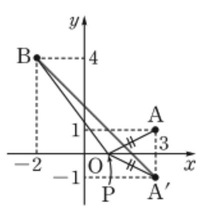
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-7,\ b=-3$

따라서 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(-7,\ -3)$이고, 원은 대칭이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

즉 구하는 원의 방정식은

$(x+7)^2+(y+3)^2=2$ 답 $(x+7)^2+(y+3)^2=2$

1446 점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면



$\mathrm{A}'(3,\ -1)$

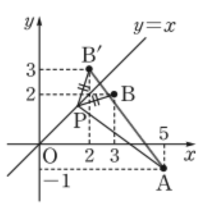
$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}$

$\geq\overline{\mathrm{A'B}}$

$=\sqrt{(-2-3)^2+(4+1)^2}$

$=5\sqrt{2}$ 답 ②

1447 점 $\mathrm{B}(3,\ 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면



$\mathrm{B}'(2,\ 3)$

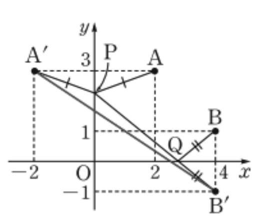
$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}$

$\geq\overline{\mathrm{AB'}}$

$=\sqrt{(2-5)^2+(3+1)^2}$

$=5$ 답 5

1448 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면



$\mathrm{A}'(-2,\ 3)$ ⋯ ❶

점 $\mathrm{B}(4,\ 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면

$\mathrm{B}'(4,\ -1)$ ⋯ ❷

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB'}}$

$\geq\overline{\mathrm{A'B'}}$

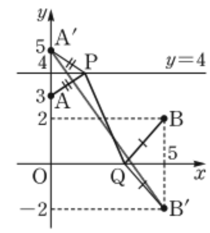
$=\sqrt{(4+2)^2+(-1-3)^2}$

$=2\sqrt{13}$ ⋯ ❸

답 $2\sqrt{13}$

채점 기준	비율
❶ 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❸ $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값을 구할 수 있다.	40%

1449 점 $\mathrm{A}(0,\ 3)$을 직선 $y=4$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{A}'(a,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{AA'}}$의 중점의 좌표는



$\left(\dfrac{0+a}{2},\ \dfrac{3+b}{2}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{3+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=4$ 위의 점이므로

$\dfrac{3+b}{2}=4 \qquad \therefore\ b=5$

또 직선 $\mathrm{AA'}$이 직선 $y=4$와 수직이므로

$a=0$

따라서 점 A'의 좌표는 $\quad (0,\ 5)$

점 $\mathrm{B}(5,\ 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면

$\mathrm{B}'(5,\ -2)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB'}}$

$\geq\overline{\mathrm{A'B'}}$

$=\sqrt{(5-0)^2+(-2-5)^2}$

$=\sqrt{74}$ 답 ④

1450 전략 점 $(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(x+a,\ y+b)$이다.

풀이 $2+a=b,\ -3+a+1=1$이므로

$a=3,\ b=5 \qquad \therefore\ ab=15$ 답 ⑤

1451 전략 도형 $f(x,\ y)=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $f(x-a,\ y-b)=0$이다.

풀이 $x^2+y^2-4x+8y+19=0$에서

$(x-2)^2+(y+4)^2=1$

이 원을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-2-2)^2+(y+3+4)^2=1$

$\therefore\ (x-4)^2+(y+7)^2=1$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(4,\ -7)$이다. 답 $(4,\ -7)$

다른풀이 $x^2+y^2-4x+8y+19=0$에서

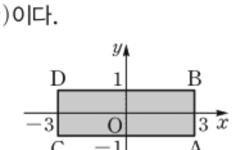
$(x-2)^2+(y+4)^2=1$

이므로 중심의 좌표는 $(2,\ -4)$이다.

따라서 주어진 평행이동에 의하여 점 $(2,\ -4)$가 옮겨지는 점의 좌표는 $\quad (2+2,\ -4-3)$, 즉 $(4,\ -7)$

1452 전략 점 $(x,\ y)$를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 각각 $(x,\ -y)$, $(-x,\ y)$, $(-x,\ -y)$이다.

풀이 점 $\mathrm{A}(3,\ -1)$을 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 점 B, C, D의 좌표는 각각



$\mathrm{B}(3,\ 1)$, $\mathrm{C}(-3,\ -1)$, $\mathrm{D}(-3,\ 1)$

따라서 □ABDC의 넓이는

$6\cdot 2=12$ 답 12

1453 전략 도형 $f(x, y)=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x, y)=0$이다.

풀이 직선 $y=ax+b$를 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=-ax+b$ ⋯ ❶

이 직선이 점 $(2, -10)$을 지나므로

$-10=-2a+b$ ⋯⋯ ㉠

또 직선 $y=-ax+b$가 직선 $y=-3x+1$과 평행하므로

$-a=-3 \quad \therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=-4$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=-1$ ⋯ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

1454 전략 도형 $f(x, y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y, x)=0$이다.

풀이 원 $(x-a)^2+(y-4)^2=16$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y-a)^2+(x-4)^2=16$

$\therefore (x-4)^2+(y-a)^2=16$

이 원의 중심의 좌표는 $\quad (4, a)$

따라서 두 점 $(4, a)$, $(8, 0)$ 사이의 거리가 5이므로

$\sqrt{(8-4)^2+(0-a)^2}=5, \quad a^2=9$

$\therefore a=3 \ (\because a>0)$

답 3

1455 전략 점 $(4, 2)$가 $\overline{PQ}$의 중점임을 이용한다.

풀이 $\overline{PQ}$의 중점의 좌표가 $(4, 2)$이므로

$\frac{a-8}{2}=4, \ \frac{3+b}{2}=2$

$\therefore a=16, b=1$

따라서 두 점 $P(16, 3)$, $Q(-8, 1)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{1-3}{-8-16}=\frac{1}{12}$

답 ①

1456 전략 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 $\overline{AP}+\overline{BP}\ge\overline{A'B}$임을 이용한다.

풀이 점 $A(1, 2)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

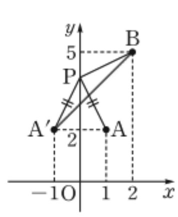
$A'(-1, 2)$

$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\ge\overline{A'B}$

$=\sqrt{(2+1)^2+(5-2)^2}$

$=3\sqrt{2}$



답 ②

1457 전략 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$에 의하여 점 (a, b)가 점 (p, q)로 옮겨지면 $p=a+m$, $q=b+n$이다.

풀이 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$에 의하여 점 $(0, 0)$이 점 $(3, -2)$로 옮겨지므로

$0+m=3, \ 0+n=-2$

$\therefore m=3, n=-2$ ⋯ ❶

따라서 점 $P(a, b)$가 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(a+3, b-2)$

이 점이 점 $(0, 0)$과 일치하므로

$a+3=0, b-2=0 \quad \therefore a=-3, b=2$ ⋯ ❷

$\therefore a-b=-5$ ⋯ ❸

답 -5

채점 기준	비율
❶ m, n의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20%

1458 전략 □O′A′B′C′이 직사각형이면 □OABC도 직사각형임을 이용한다.

풀이 $B(a, b)$라 하면 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a+6, b+5)$

이 점이 점 $B'(11, 8)$과 일치하므로

$a+6=11, \ b+5=8$

$\therefore a=5, \ b=3$

따라서 점 B의 좌표는 $(5, 3)$이고 □OABC가 직사각형이므로 구하는 넓이는

$5\cdot3=15$

답 15

참고 도형을 평행이동해도 그 모양은 변하지 않는다.

1459 전략 평행한 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리는 직선 l_1 위의 한 점과 직선 l_2 사이의 거리와 같음을 이용한다.

풀이 직선 l'의 방정식은

$(x-a)-2(y+3)+2=0$

$\therefore x-2y-a-4=0$

직선 l 위의 한 점 $(0, 1)$과 직선 l' 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$이므로

$\frac{|-2-a-4|}{\sqrt{1+(-2)^2}}=2\sqrt{5}, \quad |a+6|=10$

$a+6=-10$ 또는 $a+6=10$

$\therefore a=4 \ (\because a>0)$

답 ②

1460 전략 평행이동에 의하여 직선은 기울기가 같은 직선으로, 원은 반지름의 길이가 같은 원으로 옮겨진다.

풀이 ㄱ. $\frac{1}{2}\ne\frac{2}{1}\ne\frac{-3}{-3}$이므로 두 직선은 서로 평행하지 않다.
따라서 평행이동하여도 서로 겹쳐지지 않는다.

ㄴ. $\frac{3}{6}=\frac{4}{8}\ne\frac{-2}{-1}$이므로 두 직선은 서로 평행하다.
따라서 평행이동하여 서로 겹쳐진다.

ㄷ. 두 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$로 같으므로 평행이동하여 서로 겹쳐진다.

ㄹ. $x^2+y^2-4=0$에서 $\quad x^2+y^2=4$
$x^2+y^2-2x-1=0$에서 $\quad (x-1)^2+y^2=2$
두 원의 반지름의 길이가 각각 2, $\sqrt{2}$로 다르므로 평행이동하여도 서로 겹쳐지지 않는다.

이상에서 평행이동하여 서로 겹쳐지는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ②

1461 전략 원의 넓이가 직선에 의하여 이등분되려면 원의 중심이 이 직선 위에 있어야 함을 이용한다.

12 도형의 이동

풀이 원 C의 방정식은

$(x-3+1)^2+(y-a+2)^2=9$

$\therefore (x-2)^2+(y-a+2)^2=9$

원 C의 넓이가 직선 $3x+4y-7=0$에 의하여 이등분되려면 원 C의 중심 $(2, a-2)$가 이 직선 위에 있어야 하므로

$6+4(a-2)-7=0,\quad 4a-9=0\quad \therefore a=\frac{9}{4}$ 답 ⑤

1462 전략 세 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$이다.

풀이 점 $(6, -9)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점은

$P(6, 9)$

점 P를 y축에 대하여 대칭이동한 점은

$Q(-6, 9)$

점 Q를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은

$R(9, -6)$

따라서 $\triangle PQR$의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{6-6+9}{3}, \frac{9+9-6}{3}\right)$, 즉 $(3, 4)$

즉 $a=3$, $b=4$이므로

$ab=12$ 답 12

1463 전략 도형 $f(x, y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y, x)=0$이다.

풀이 직선 $(2k+1)x+(k+1)y-4=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$(2k+1)y+(k+1)x-4=0$

$\therefore (k+1)x+(2k+1)y-4=0$

이 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+2y)k+(x+y-4)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+2y=0,\ x+y-4=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=8,\ y=-4$

따라서 $a=8$, $b=-4$이므로

$a-b=12$ 답 12

1464 전략 원이 x축에 의하여 잘리는 현의 길이는 원과 x축이 만나는 두 점 사이의 거리와 같다.

풀이 $x^2+y^2+2x-3=0$에서 $\quad (x+1)^2+y^2=4$

이 원을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x+1)^2+(-y)^2=4$

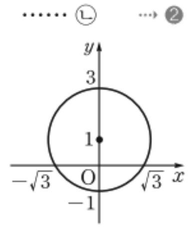
$\therefore (x-1)^2+y^2=4$ …… ㉠ ⋯ ❶

원 ㉠을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y-1)^2+x^2=4$

$\therefore x^2+(y-1)^2=4$ …… ㉡ ⋯ ❷

원 ㉡이 x축에 의하여 잘리는 현의 길이는 원과 x축이 만나는 두 점 사이의 거리와 같으므로 ㉡에 $y=0$을 대입하면



$x^2+1=4,\quad x^2=3$

$\therefore x=\pm\sqrt{3}$

따라서 원과 x축이 만나는 두 점의 좌표는

$(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$이므로 구하는 현의 길이는

$|\sqrt{3}-(-\sqrt{3})|=2\sqrt{3}$ ⋯ ❸

답 $2\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❷ 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ 현의 길이를 구할 수 있다.	40%

1465 전략 도형 $f(x, y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y, x)=0$이다.

풀이 ㄱ. 대칭이동한 도형의 방정식은

$x=-y+2\quad \therefore y=-x+2$

ㄴ. 대칭이동한 도형의 방정식은

$|y-x|=1\quad \therefore |x-y|=1$

ㄷ. 대칭이동한 도형의 방정식은

$(y+1)^2+(x-1)^2=1\quad \therefore (x-1)^2+(y+1)^2=1$

이상에서 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하였을 때, 처음의 도형과 일치하는 도형의 방정식은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

1466 전략 이동하는 순서에 주의하여 평행이동과 대칭이동한 점의 좌표를 구한다.

풀이 $P(a, b)$라 하면 이 점을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a+5, b-3)$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a-5, -b+3)$

이 점이 점 $P(a, b)$와 일치하므로

$-a-5=a,\ -b+3=b$

$\therefore a=-\frac{5}{2},\ b=\frac{3}{2}$

따라서 $P\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$이고 이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ 답 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

1467 전략 이동하는 순서에 주의하여 대칭이동과 평행이동한 직선의 방정식을 구한다.

풀이 직선 $2x+3y-7=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$2y+3x-7=0$

$\therefore 3x+2y-7=0$

이 직선을 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+a, y-1)$에 의하여 옮긴 직선의 방정식은

$3(x-a)+2(y+1)-7=0$

$\therefore 3x+2y-3a-5=0$

이 직선이 직선 $3x+2y-2=0$과 일치하므로

$-3a-5=-2\quad \therefore a=-1$ 답 ②

1468 전략 두 점 P, Q가 직선 l에 대하여 대칭이면 직선 l은 $\overline{PQ}$의 수직이등분선임을 이용한다.

풀이 $C(a,\ b)$라 하면 $\overline{BC}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{1+b}{2}\right)$$

이 점이 직선 $y=x+3$ 위의 점이므로

$$\frac{1+b}{2}=\frac{1+a}{2}+3$$

$\therefore\ a-b=-6$ …… ㉠

또 직선 BC가 직선 $y=x+3$과 수직이므로

$$\frac{b-1}{a-1}\cdot 1=-1$$

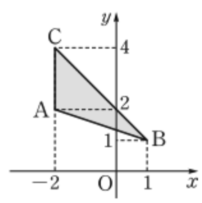
$\therefore\ a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=4$

$\therefore\ C(-2,\ 4)$

따라서 오른쪽 그림에서



$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3$$

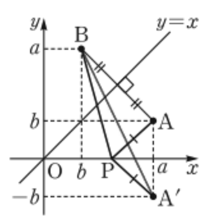
답 ①

1469 전략 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 $\overline{AP}+\overline{PB}\ge\overline{A'B}$임을 이용한다.

풀이 $A(a,\ b)\ (a>0,\ b>0)$라 하면 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은

$B(b,\ a)$

점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면



$A'(a,\ -b)$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{AP}+\overline{PB}&=\overline{A'P}+\overline{PB}\\&\ge\overline{A'B}\\&=\sqrt{(b-a)^2+(a+b)^2}\\&=\sqrt{2(a^2+b^2)}\end{aligned}$$

$\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값이 $10\sqrt{2}$이므로

$$\sqrt{2(a^2+b^2)}=10\sqrt{2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2+b^2=100$$

이때 $\overline{OA}=\sqrt{a^2+b^2}$이므로

$$\overline{OA}=\sqrt{100}=10$$

답 10

1470 전략 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이보다 작아야 함을 이용한다.

풀이 직선 $y=-3x+14$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=-3(x-a)+14$

$\therefore\ 3x+y-3a-14=0$ …… ㉠

직선 ㉠이 원 $(x-1)^2+y^2=10$과 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심 $(1,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{10}$보다 작아야 하므로

$$\frac{|3-3a-14|}{\sqrt{3^2+1^2}}<\sqrt{10},\qquad |3a+11|<10$$

$$-10<3a+11<10,\qquad -21<3a<-1$$

$$\therefore\ -7<a<-\frac{1}{3}$$

따라서 정수 a는 $-6,\ -5,\ -4,\ \cdots,\ -1$의 6개이다.

답 6

1471 전략 먼저 점 $(2,\ -3)$을 점 $(10,\ 3)$으로 옮기는 평행이동을 찾는다.

풀이 점 $(2,\ -3)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(10,\ 3)$이라 하면

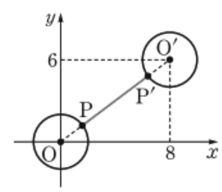
$2+a=10,\ -3+b=3$

$\therefore\ a=8,\ b=6$

즉 원 O: $x^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 8만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 원 O'의 방정식은

$(x-8)^2+(y-6)^2=4$

따라서 원 O 위의 점 P와 원 O' 위의 점 P′에 대하여 $\overline{PP'}$의 길이의 최솟값은 두 원의 중심 사이의 거리에서 두 원의 반지름의 길이의 합을 뺀 것과 같다.



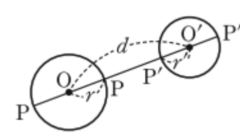
원 O의 중심의 좌표가 $(0,\ 0)$, 반지름의 길이가 2이고 원 O'의 중심의 좌표가 $(8,\ 6)$, 반지름의 길이가 2이므로 구하는 최솟값은

$$\sqrt{8^2+6^2}-(2+2)=6$$

답 6

라쎈특강 두 원 위의 점 사이의 거리의 최대·최소

반지름의 길이가 r인 원 O 위의 점 P와 반지름의 길이가 r'인 원 O' 위의 점 P′에 대하여 두 원 $O,\ O'$의 중심 사이의 거리를 d라 할 때



(단, $d>r+r'$)

① ($\overline{PP'}$의 최댓값)$=d+(r+r')$

② ($\overline{PP'}$의 최솟값)$=d-(r+r')$

1472 전략 평행한 두 직선 $l,\ l'$ 사이의 거리는 직선 l 위의 한 점과 직선 l' 사이의 거리와 같음을 이용한다.

풀이 포물선 $y=x^2-2x$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-b=(x-a)^2-2(x-a)$

$\therefore\ y=x^2-2(a+1)x+a^2+2a+b$

이 포물선이 포물선 $y=x^2-12x+30$과 일치하므로

$-2(a+1)=-12,\ a^2+2a+b=30$

$\therefore\ a=5,\ b=-5$

따라서 직선 l을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 직선 l'의 방정식은

$(x-5)-2(y+5)=0\qquad \therefore\ x-2y-15=0$

두 직선 $l,\ l'$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리 d는 직선 l 위의 한 점 $(0,\ 0)$과 직선 l' 사이의 거리와 같다. 즉

$$d=\frac{|-15|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=3\sqrt{5}$$

$$\therefore\ d^2=(3\sqrt{5})^2=45$$

답 45

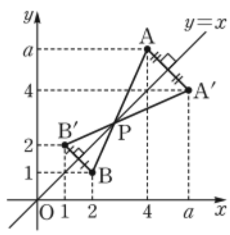
1473 전략 닮음인 두 도형의 넓이의 비가 $a:b$이면 닮음비는 $\sqrt{a}:\sqrt{b}$임을 이용한다.

풀이 두 점 $A(4,\ a)$, $B(2,\ 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 A′, B′은 각각

$A'(a,\ 4),\ B'(1,\ 2)$

오른쪽 그림과 같이 두 직선 $\mathrm{AA'}$, $\mathrm{BB'}$은 각각 직선 $y=x$와 수직이므로 $\triangle\mathrm{APA'}\backsim\triangle\mathrm{BPB'}$(AA 닮음)이다.
$\triangle\mathrm{APA'}$과 $\triangle\mathrm{BPB'}$의 넓이의 비가 $9:4$이므로

$$\overline{\mathrm{AA'}}:\overline{\mathrm{BB'}}=3:2$$



이때

$$\overline{\mathrm{AA'}}=\sqrt{(a-4)^2+(4-a)^2}=\sqrt{2}(a-4)\ (\because a>4),$$
$$\overline{\mathrm{BB'}}=\sqrt{(1-2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$$

이므로

$$\sqrt{2}(a-4):\sqrt{2}=3:2,\qquad (a-4):1=3:2$$
$$2(a-4)=3\qquad \therefore a=\frac{11}{2}$$

답 ②

1474 전략 먼저 구하는 직선의 기울기를 m이라 하고 직선의 방정식을 구한 후 이동하는 순서에 주의하여 평행이동과 대칭이동을 한다.

풀이 점 $(2,\ -9)$를 지나는 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$$y+9=m(x-2)$$
$$\therefore y=mx-2m-9 \quad \cdots ❶$$

직선 l을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y=m(x-1)-2m-9$$
$$\therefore y=mx-3m-9$$

이 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-y=-mx-3m-9$$
$$\therefore y=mx+3m+9 \quad \cdots ❷$$

이 직선이 점 $(10,\ -4)$를 지나므로

$$-4=10m+3m+9,\qquad 13m=-13$$
$$\therefore m=-1$$

따라서 직선 l의 기울기는 -1이다. $\cdots$ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 직선 l의 기울기를 m이라 하고 직선의 방정식을 세울 수 있다.	30%
❷ 직선 l을 평행이동한 후 대칭이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ 직선 l의 기울기를 구할 수 있다.	30%

1475 전략 원의 중심 C를 대칭이동한 점을 C′이라 하면 직선 $y=-x+2$가 $\overline{\mathrm{CC'}}$을 수직이등분함을 이용한다.

풀이 원 $(x+4)^2+(y-1)^2=4$의 중심 $(-4,\ 1)$을 직선 $y=-x+2$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(p,\ q)$라 하면 두 점 $(-4,\ 1)$, $(p,\ q)$를 잇는 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-4+p}{2},\ \frac{1+q}{2}\right)$$

이 점이 직선 $y=-x+2$ 위의 점이므로

$$\frac{1+q}{2}=-\frac{-4+p}{2}+2$$
$$\therefore p+q=7 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 두 점 $(-4,\ 1)$, $(p,\ q)$를 지나는 직선이 직선 $y=-x+2$와 수직이므로

$$\frac{q-1}{p+4}\cdot(-1)=-1$$
$$\therefore p-q=-5 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$p=1,\ q=6$$

대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(1,\ 6)$이고, 원은 대칭이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 반지름의 길이는 2이다.
따라서 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y-6)^2=4$$
$$\therefore x^2+y^2-2x-12y+33=0$$

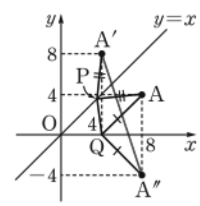
즉 $a=-2$, $b=-12$, $c=33$이므로

$$a+b+c=19$$

답 ④

1476 전략 점 $\mathrm{A}(8,\ 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′, x축에 대하여 대칭이동한 점을 A″이라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}}\ge\overline{\mathrm{A'A''}}$임을 이용한다.

풀이 점 $\mathrm{A}(8,\ 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′, x축에 대하여 대칭이동한 점을 A″이라 하면



$$\mathrm{A'}(4,\ 8),\ \mathrm{A''}(8,\ -4)$$
$$\therefore \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}}$$
$$=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA''}}$$
$$\ge\overline{\mathrm{A'A''}}$$
$$=\sqrt{(8-4)^2+(-4-8)^2}$$
$$=\sqrt{160}$$

따라서 $m=\sqrt{160}$이므로 $\qquad m^2=160$

답 160

memo

memo