정답 및 풀이

수학 Ⅱ

Ⅰ 함수의 극한과 연속

Ⅱ 다항함수의 미분법

Ⅲ 다항함수의 적분법

● 정답을 확인하려고 할 때에는 〈빠른 정답 찾기〉를 이용하면 편리합니다.

Ⅰ. 함수의 극한과 연속

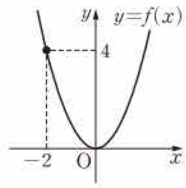
01 함수의 극한

0001 답 0

0002 답 2

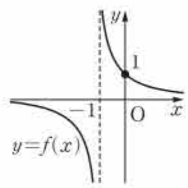
0003 $f(x)=x^2$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 -2가 아니면서 -2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 4에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to-2} x^2=4$ 답 4



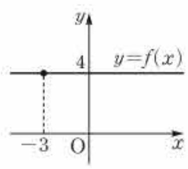
0004 $f(x)=\frac{1}{x+1}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 0이 아니면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x+1}=1$ 답 1



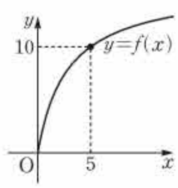
0005 $f(x)=4$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 -3이 아니면서 -3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 4이므로

$\lim_{x\to-3} 4=4$ 답 4



0006 $f(x)=\sqrt{20x}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 5가 아니면서 5에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 10에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to5}\sqrt{20x}=10$ 답 10



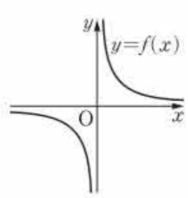
0007 답 2

0008 답 2

0009 $f(x)=\frac{1}{3x}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x}=0$

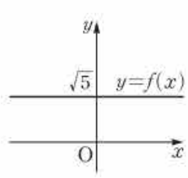
답 0



0010 $f(x)=\sqrt{5}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{5}=\sqrt{5}$

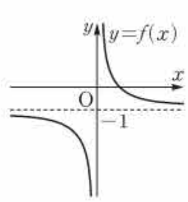
답 $\sqrt{5}$



0011 $f(x)=\frac{1}{x}-1$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-1\right)=-1$

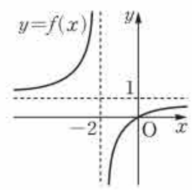
답 -1



0012 $f(x)=\frac{x}{x+2}=1-\frac{2}{x+2}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+2}=1$

답 1



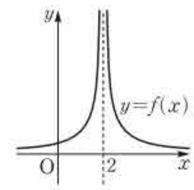
0013 답 ∞

0014 답 $-\infty$

0015 $f(x)=\frac{1}{|x-2|}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to2}\frac{1}{|x-2|}=\infty$

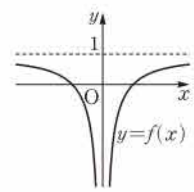
답 ∞



0016 $f(x)=1-\frac{1}{|x|}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to0}\left(1-\frac{1}{|x|}\right)=-\infty$

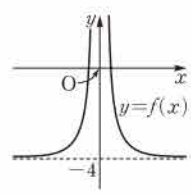
답 $-\infty$



0017 $f(x)=\frac{1}{x^2}-4$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-4\right)=\infty$

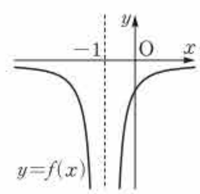
답 ∞



0018 $f(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to-1}\left\{-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}=-\infty$

답 $-\infty$



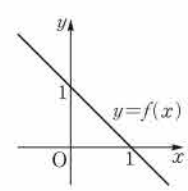
0019 답 $-\infty$

0020 답 $-\infty$

0021 $f(x)=-x+1$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to\infty}(-x+1)=-\infty$

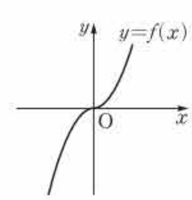
답 $-\infty$



0022 $f(x)=x^3$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

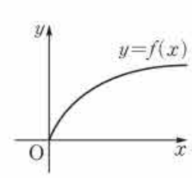
답 $-\infty$



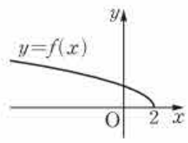
0023 $f(x)=\sqrt{x}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$

답 ∞



0024 $f(x)=\sqrt{2-x}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서



$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{2-x}=\infty$$

답 ∞

0025 답 1

0026 답 1

0027 답 0

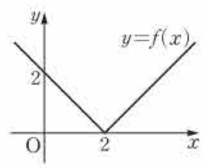
0028 답 -1

0029 답 1

0030 $\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

답 존재하지 않는다.

0031 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



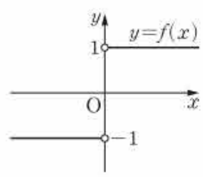
(1) $\lim_{x\to2+}f(x)=0$

(2) $\lim_{x\to2-}f(x)=0$

(3) $\lim_{x\to2}f(x)=0$

답 (1) 0 (2) 0 (3) 0

0032 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



(1) $\lim_{x\to0+}f(x)=1$

(2) $\lim_{x\to0-}f(x)=-1$

(3) $\lim_{x\to0+}f(x)\neq\lim_{x\to0-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

답 (1) 1 (2) -1 (3) 존재하지 않는다.

0033
$$\lim_{x\to0}\{-2f(x)\}=-2\lim_{x\to0}f(x)=-2\cdot5=-10$$

답 -10

0034
$$\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to0}f(x)+\lim_{x\to0}g(x)=5+(-2)=3$$

답 3

0035
$$\lim_{x\to0}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to0}f(x)-\lim_{x\to0}g(x)=5-(-2)=7$$

답 7

0036
$$\lim_{x\to0}f(x)g(x)=\lim_{x\to0}f(x)\lim_{x\to0}g(x)=5\cdot(-2)=-10$$

답 -10

0037
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to0}f(x)}{\lim_{x\to0}g(x)}=\frac{5}{-2}=-\frac{5}{2}$$

답 $-\frac{5}{2}$

0038
$$\lim_{x\to1}\{3f(x)+4g(x)\}=\lim_{x\to1}3f(x)+\lim_{x\to1}4g(x)$$
$$=3\lim_{x\to1}f(x)+4\lim_{x\to1}g(x)$$
$$=3\cdot(-3)+4\cdot\frac{1}{2}=-7$$

답 -7

0039
$$\lim_{x\to1}8f(x)g(x)=8\lim_{x\to1}f(x)g(x)$$
$$=8\lim_{x\to1}f(x)\lim_{x\to1}g(x)$$
$$=8\cdot(-3)\cdot\frac{1}{2}=-12$$

답 -12

0040
$$\lim_{x\to1}\{2f(x)g(x)+5\}=2\lim_{x\to1}f(x)g(x)+\lim_{x\to1}5$$
$$=2\lim_{x\to1}f(x)\lim_{x\to1}g(x)+5$$
$$=2\cdot(-3)\cdot\frac{1}{2}+5=2$$

답 2

0041
$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{2g(x)+1}=\frac{\lim_{x\to1}\{f(x)-1\}}{\lim_{x\to1}\{2g(x)+1\}}=\frac{\lim_{x\to1}f(x)-1}{2\lim_{x\to1}g(x)+1}$$
$$=\frac{-3-1}{2\cdot\frac{1}{2}+1}=-2$$

답 -2

0042 $\lim_{x\to-3}(-2x+1)=-2\cdot(-3)+1=7$

답 7

0043 $\lim_{x\to-1}(x^2-3x+4)=(-1)^2-3\cdot(-1)+4=8$

답 8

0044 $\lim_{x\to2}(x-1)(3x+1)=(2-1)(3\cdot2+1)=7$

답 7

0045
$$\lim_{x\to1}(2x^2+1)(x^3-5)=(2\cdot1^2+1)(1^3-5)=-12$$

답 -12

0046 $\lim_{x\to4}\frac{x^2-4x}{x-1}=\frac{4^2-4\cdot4}{4-1}=0$

답 0

0047 $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}}{x^2-1}=\frac{\sqrt{2+7}}{2^2-1}=1$

답 1

0048
$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

답 2

0049
$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x-1)=-3$$

답 -3

0050
$$\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4}(\sqrt{x}+2)=4$$

답 4

0051
$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x+6}+3}=\frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

0052 $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=0$ 답 0

0053 $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x+1}{2x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5+\frac{1}{x}}{2-\frac{3}{x}}=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

0054 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{3+\frac{1}{x}}=\infty$ 답 ∞

0055 $\lim_{x\to\infty}\frac{4x(2x+1)}{(x+1)(x+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2+4x}{x^2+3x+2}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{8+\frac{4}{x}}{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=8$ 답 8

0056 $\lim_{x\to\infty}(x^3-x^2)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)=\infty$ 답 ∞

0057 $\lim_{x\to\infty}(5+2x^2-x^3)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(\frac{5}{x^3}+\frac{2}{x}-1\right)=-\infty$

답 $-\infty$

0058 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4}-x)(\sqrt{x^2+4}+x)}{\sqrt{x^2+4}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}=0$ 답 0

0059 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{x}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)=2$ 답 2

0060 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x-1}+1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{x-1}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-1}=-1$ 답 -1

0061 $\lim_{x\to\infty}x\left(1-\frac{x+1}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{-2}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x-1}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{1-\frac{1}{x}}=-2$ 답 -2

0062 (1) $x\longrightarrow 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

$\therefore \lim_{x\to 2}(x^2+ax)=0$

(2) $\lim_{x\to 2}(x^2+ax)=0$에서

$4+2a=0 \qquad \therefore a=-2$

답 (1) 0 (2) -2

0063 (1) $x\longrightarrow 3$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow 0$이므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

$\therefore \lim_{x\to 3}(x^2-7x+a)=0$

(2) $\lim_{x\to 3}(x^2-7x+a)=0$에서

$9-21+a=0 \qquad \therefore a=12$

답 (1) 0 (2) 12

0064 $x\longrightarrow 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(x+a)=0$이므로 $\quad a=0$ 답 0

0065 $x\longrightarrow -1$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow 0$이므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to -1}(x^2+ax-2)=0$이므로 $\quad 1-a-2=0$

$\therefore a=-1$ 답 -1

0066 (1) $\lim_{x\to 1}2x=2\cdot 1=2$

(2) $\lim_{x\to 1}(x^2+1)=1^2+1=2$

(3) 모든 실수 x에 대하여 $2x\le f(x)\le x^2+1$이고

$\lim_{x\to 1}2x=\lim_{x\to 1}(x^2+1)=2$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to 1}f(x)=2$

답 (1) 2 (2) 2 (3) 2

0067 모든 양수 x에 대하여 $1-\frac{1}{x}\le f(x)\le 1+\frac{1}{x}$이고

$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}f(x)=1$ 답 1

0068 ㄱ. $\lim_{x\to 2+}|x-2|=\lim_{x\to 2+}(x-2)=0$

$\lim_{x\to 2-}|x-2|=\lim_{x\to 2-}\{-(x-2)\}=0$

$\therefore \lim_{x\to 2}|x-2|=0$

ㄴ. $\lim_{x\to 1+}\frac{|x-1|}{x^2-x}=\lim_{x\to 1+}\frac{x-1}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1+}\frac{1}{x}=1$

$\lim_{x\to 1-}\frac{|x-1|}{x^2-x}=\lim_{x\to 1-}\frac{-(x-1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1-}\left(-\frac{1}{x}\right)=-1$

이므로 $\quad \lim_{x\to 1+}\frac{|x-1|}{x^2-x}\ne\lim_{x\to 1-}\frac{|x-1|}{x^2-x}$

따라서 $\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x^2-x}$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to -3+}\frac{x^2-9}{|x+3|}=\lim_{x\to -3+}\frac{(x+3)(x-3)}{x+3}$

$=\lim_{x\to -3+}(x-3)=-6$

$\lim_{x\to -3-}\frac{x^2-9}{|x+3|}=\lim_{x\to -3-}\frac{(x+3)(x-3)}{-(x+3)}$

$=\lim_{x\to -3-}\{-(x-3)\}=6$

이므로 $\quad \lim_{x\to -3+}\frac{x^2-9}{|x+3|}\ne\lim_{x\to -3-}\frac{x^2-9}{|x+3|}$

따라서 $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2-9}{|x+3|}$의 값은 존재하지 않는다.

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

0069 ② $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$ 답 ②

참고 ⑤ $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$

이때 $-\infty$는 일정한 값이 아닌 한없이 작아지는 상태를 나타내므로 $\lim\limits_{x\to0} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

0070 ㄱ. $\lim\limits_{x\to0+} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to0-} f(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to0+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to0-} f(x)$

따라서 $\lim\limits_{x\to0} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1+} f(x)=\lim\limits_{x\to1-} f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=1$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0071 $\lim\limits_{x\to3+} f(x)=\lim\limits_{x\to3+}(kx+1)=3k+1$

$\lim\limits_{x\to3-} f(x)=\lim\limits_{x\to3-}(x-k)^2=(3-k)^2$ ··· ❶

이때 $\lim\limits_{x\to3} f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim\limits_{x\to3+} f(x)=\lim\limits_{x\to3-} f(x)$이어야 하므로

$3k+1=(3-k)^2$, $3k+1=k^2-6k+9$

$k^2-9k+8=0$, $(k-1)(k-8)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=8$ ··· ❷

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$1+8=9$ ··· ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ $\lim\limits_{x\to3+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to3-} f(x)$를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 모든 k의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

0072 $\lim\limits_{x\to1+} f(x)-\lim\limits_{x\to1-} f(x)$

$=\lim\limits_{x\to1+}(x^2-2x+4)-\lim\limits_{x\to1-}(-x^2+2x-2)$

$=(1-2+4)-(-1+2-2)$

$=3-(-1)=4$ 답 4

0073 $\lim\limits_{x\to0} f(x)+\lim\limits_{x\to1-} f(x)+\lim\limits_{x\to2+} f(x)=0+1+1$

$=2$ 답 ②

0074 (i) $x>2019$일 때,

$f(x)=\frac{x-2019}{x-2019}=1$

$\therefore a=\lim\limits_{x\to2019+} f(x)=1$ ··· ❶

(ii) $x<2019$일 때,

$f(x)=\frac{-(x-2019)}{x-2019}=-1$

$\therefore b=\lim\limits_{x\to2019-} f(x)=-1$ ··· ❷

(i), (ii)에서 $a-b=2$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0075 $x\to3+$일 때 $x+1\to4+$이므로

$\lim\limits_{x\to3+}[x+1]=4$

$x\to3-$일 때 $x-1\to2-$이므로

$\lim\limits_{x\to3-}[x-1]=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to3+}[x+1]+\lim\limits_{x\to3-}[x-1]=4+1=5$ 답 ④

0076 ① $x\to0+$일 때 $[x]=0$이므로

$\lim\limits_{x\to0+}\frac{[x]}{x}=\lim\limits_{x\to0+}\frac{0}{x}=0$

② $x\to0-$일 때 $x-1\to-1-$이므로 $[x-1]=-2$

$\therefore \lim\limits_{x\to0-}\frac{x-1}{[x-1]}=\lim\limits_{x\to0-}\frac{x-1}{-2}=\frac{1}{2}$

③ $x\to1-$일 때 $x+1\to2-$이므로 $[x+1]=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to1-}\frac{x+1}{[x+1]}=\lim\limits_{x\to1-}(x+1)=2$

④ $x\to2+$일 때 $[x]=2$이므로

$\lim\limits_{x\to2+}\frac{[x]^2+x}{[x]}=\lim\limits_{x\to2+}\frac{2^2+x}{2}=\frac{4+2}{2}=3$

⑤ $-x^2+2x-1=-(x-1)^2$

$x\to1+$일 때 $-(x-1)^2\to0-$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}[-x^2+2x-1]=-1$

답 ⑤

0077 (i) $x>1$일 때,

$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=x-2$

$\therefore a=\lim\limits_{x\to1+} f(x)=\lim\limits_{x\to1+}(x-2)=-1$

(ii) $x\to1-$일 때 $[x]=0$이므로

$\lim\limits_{x\to1-} f(x)=\lim\limits_{x\to1-}\frac{[x]}{x-1}=\lim\limits_{x\to1-}\frac{0}{x-1}=0$

$\therefore b=0$

(i), (ii)에서 $a+b=-1$ 답 -1

0078 $f(x)=t$로 놓으면 $x\to-1+$일 때 $t=0$이므로

$\lim\limits_{x\to-1+} g(f(x))=g(0)=0$

또 $x\to1+$일 때 $t\to1-$이므로

$\lim\limits_{x\to1+} g(f(x))=\lim\limits_{t\to1-} g(t)=\lim\limits_{t\to1-} t^2=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to-1+} g(f(x))+\lim\limits_{x\to1+} g(f(x))=0+1=1$ 답 ②

0079 $f(x)=t$로 놓으면 $x\to0-$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim\limits_{x\to0-} f(f(x))=\lim\limits_{t\to0+} f(t)=\lim\limits_{t\to0+}(t+1)=1$ 답 1

0080 $\lim\limits_{x\to1}(x^2-3x)f(x)=\lim\limits_{x\to1}x(x-3)f(x)$

$=\lim\limits_{x\to1}xf(x)\lim\limits_{x\to1}(x-3)$

$=\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1$ 답 -1

0081 $\lim_{x\to0} f(x)=2$, $\lim_{x\to0} g(x)=a$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+2g(x)}{f(x)g(x)+4}=\frac{2+2a}{2a+4}$$

즉 $\frac{2+2a}{2a+4}=2$이므로 $\quad 2+2a=4a+8$

$\therefore a=-3$ 답 ①

0082 $f(x)+2g(x)=h(x)$로 놓으면 $\lim_{x\to2020} h(x)=10$이고

$$g(x)=\frac{h(x)-f(x)}{2}$$

$$\therefore \lim_{x\to2020} g(x)=\lim_{x\to2020}\frac{h(x)-f(x)}{2}=\frac{10-(-4)}{2}=7$$

답 7

다른풀이 $\lim_{x\to2020} g(x)=a$ (a는 실수)라 하면

$\lim_{x\to2020}\{f(x)+2g(x)\}=10$에서

$-4+2a=10 \quad \therefore a=7$

$\therefore \lim_{x\to2020} g(x)=7$

0083 ㄱ. [반례] $f(x)=\begin{cases}1 & (x\ge0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-1 & (x\ge0)\\ 1 & (x<0)\end{cases}$

이면 $f(x)+g(x)=0$이므로 $\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}=0$이지만

$\lim_{x\to0} f(x)$와 $\lim_{x\to0} g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. [반례] $f(x)=\begin{cases}1 & (x\ge0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x\ge0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$이면

$f(x)-g(x)=0$이므로 $\lim_{x\to0}\{f(x)-g(x)\}=0$이지만

$\lim_{x\to0} f(x)$와 $\lim_{x\to0} g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to a} g(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\beta$$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

0084 $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{2x^2-3x-2}+\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{(2x+1)(x-2)}+\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{(2x+1)(x-2)}+\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{2x+1}+\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{x-1}$$

$$=\frac{4}{5}-2=-\frac{6}{5}$$

답 ①

0085 $\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{\frac{3}{x}+1}=\lim_{x\to-3}\frac{x(x+3)}{3+x}=\lim_{x\to-3}x=-3$ 답 -3

0086 $\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{(x^2-1)f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)f(x)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{(x+1)f(x)}=\frac{3}{2f(1)}$$ ··· ❶

따라서 $\frac{3}{2f(1)}=2$이므로 $\quad f(1)=\frac{3}{4}$ ··· ❷

답 $\frac{3}{4}$

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{(x^2-1)f(x)}=\frac{3}{2f(1)}$임을 알 수 있다.	70 %
❷ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0087 $\lim_{x\to9}\frac{(x-9)f(x)}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to9}\frac{(x-9)f(x)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$

$$=\lim_{x\to9}\frac{(x-9)f(x)(\sqrt{x}+3)}{x-9}$$

$$=\lim_{x\to9}f(x)(\sqrt{x}+3)$$

$$=-2\cdot(3+3)=-12$$

답 ①

0088 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{4x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}$

$$=\frac{3}{1+2}=1$$

답 ③

0089 $\lim_{x\to-\infty}\frac{5-x+2x^2}{3+x+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x}+2}{\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}+1}=2$ 답 2

0090 $A=\lim_{x\to\infty}\frac{7x+1}{5x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}{5-\frac{1}{x^2}}=0$

$$B=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$C=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}-1}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$\therefore A<B<C$ 답 ①

0091 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-f(x)}{x^2+\{f(x)\}^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{x}}{1+\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}^2}$

$$=\frac{2-(-1)\cdot0}{1+(-1)^2}=1$$

답 1

0092 $x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

(주어진 식) $=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{1+t+t^2}-t)$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{1+t+t^2}-t)(\sqrt{1+t+t^2}+t)}{\sqrt{1+t+t^2}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1+t}{\sqrt{1+t+t^2}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t}+1}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}+1}$$

$$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0093 (주어진 식)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-3x+5}}{(x-\sqrt{x^2-3x+5})(x+\sqrt{x^2-3x+5})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-3x+5}}{3x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}}$$

$$=\frac{1+1}{3}=\frac{2}{3}$$

답 ⑤

0094 $\lim_{x\to-1}\frac{4}{x+1}\left(x-\frac{2}{x-1}\right)=\lim_{x\to-1}\frac{4}{x+1}\cdot\frac{x^2-x-2}{x-1}$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{4}{x+1}\cdot\frac{(x+1)(x-2)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{4(x-2)}{x-1}$$

$$=\frac{4\cdot(-3)}{-1-1}=6$$

답 6

0095 $\lim_{x\to0}\frac{18}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x+9}}-\frac{1}{3}\right)=\lim_{x\to0}\frac{18}{x}\cdot\frac{3-\sqrt{x+9}}{3\sqrt{x+9}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{6(3-\sqrt{x+9})(3+\sqrt{x+9})}{x\sqrt{x+9}\,(3+\sqrt{x+9})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-6x}{x\sqrt{x+9}\,(3+\sqrt{x+9})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-6}{\sqrt{x+9}\,(3+\sqrt{x+9})}$$

$$=\frac{-6}{3\cdot(3+3)}=-\frac{1}{3}$$

답 ②

0096 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{\sqrt{x^2+4x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}$$

$$=\frac{4}{1+1}=2$$ ··· ❶

$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2x+1}-1\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{-2x}{2x+1}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2}{2x+1}=-2$$ ··· ❷

$\therefore \lim_{x\to\infty}f(x)+\lim_{x\to0}g(x)=2+(-2)=0$ ··· ❸

답 0

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to\infty}f(x)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\lim_{x\to0}g(x)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\lim_{x\to\infty}f(x)+\lim_{x\to0}g(x)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0097 $x\longrightarrow-1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}(x^2+ax+b)=0$이므로 $1-a+b=0$

$\therefore b=a-1$ ······ ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+ax+a-1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+a-1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}(x+a-1)$$

$$=a-2$$

즉 $a-2=2$이므로 $a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=3$

$\therefore a+b=7$

답 7

0098 $x\longrightarrow2$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow0$이므로 (분모) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}(ax+b)=0$이므로 $2a+b=0$

$\therefore b=-2a$ ······ ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{12+x^2}-2x}{ax-2a}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{12+x^2}-2x)(\sqrt{12+x^2}+2x)}{(ax-2a)(\sqrt{12+x^2}+2x)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{-3(x+2)(x-2)}{a(x-2)(\sqrt{12+x^2}+2x)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{-3(x+2)}{a(\sqrt{12+x^2}+2x)}$$

$$=\frac{-3\cdot4}{a(4+4)}=-\frac{3}{2a}$$

즉 $-\frac{3}{2a}=-3$이므로 $a=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $b=-1$

$\therefore ab=-\frac{1}{2}$

답 ③

0099 $x\longrightarrow1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x^3+ax^2+b)=0$이므로 $1+a+b=0$

$\therefore b=-a-1$

$f(x)=x^3+ax^2-(a+1)$이므로 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax^2-(a+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\{x^2+(a+1)x+a+1\}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\{x^2+(a+1)x+a+1\}$$

$$=2a+3$$

즉 $2a+3=5$이므로 $a=1$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-2$이므로

$f(0)=-2$

답 ①

0100 $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2+x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=2$이므로

$a=2$ ··· ❶

또 $\lim_{x\to-2}\frac{2x^2+bx+c}{x^2+x-2}=\frac{2}{3}$에서 $x\longrightarrow-2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to-2}(2x^2+bx+c)=0$이므로 $8-2b+c=0$

$\therefore c=2b-8$ ······ ㉠

㉠을 $\lim_{x\to-2}\frac{2x^2+bx+c}{x^2+x-2}$에 대입하면

$$\lim_{x\to-2}\frac{2x^2+bx+2b-8}{x^2+x-2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(2x+b-4)}{(x+2)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{2x+b-4}{x-1}=\frac{b-8}{-3}$$

즉 $\frac{b-8}{-3}=\frac{2}{3}$이므로 $b=6$

$b=6$을 ㉠에 대입하면 $c=4$ ··· ❷

$\therefore abc=48$ ··· ❸

답 48

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ b, c의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ abc의 값을 구할 수 있다.	10 %

0101 $x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{ax^2-bx}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{at^2+bt}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{at^2+bt}-t)(\sqrt{at^2+bt}+t)}{\sqrt{at^2+bt}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(a-1)t^2+bt}{\sqrt{at^2+bt}+t} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 ㉠의 극한값이 존재하려면 $a-1=0$ $\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{bt}{\sqrt{t^2+bt}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{b}{\sqrt{1+\frac{b}{t}}+1}=\frac{b}{2}$$

즉 $\frac{b}{2}=2$이므로 $b=4$

$\therefore a+b=5$

답 5

0102 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax})}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2ax}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+\sqrt{1-\frac{a}{x}}}$$
$$=\frac{2a}{1+1}=a$$

$\therefore a=4$

답 ③

0103 $a\le0$이면 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+x+1}-ax)=\infty$이므로

$a>0$

이때

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+x+1}-ax)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{2x^2+x+1}-ax)(\sqrt{2x^2+x+1}+ax)}{\sqrt{2x^2+x+1}+ax}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2-a^2)x^2+x+1}{\sqrt{2x^2+x+1}+ax} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이므로 ㉠의 극한값이 존재하려면 $2-a^2=0$

$a^2=2$ $\therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

$a=\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

따라서 $b=\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로 $\frac{a}{b}=4$

답 4

0104 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x-1}=1$에서 $f(x)$는 일차항의 계수가 2인 일차식임을 알 수 있다.

$f(x)=2x+a$ (a는 상수)로 놓으면

$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}(2x+a)=-2+a$

즉 $-2+a=2$이므로 $a=4$

따라서 $f(x)=2x+4$이므로

$f(2)=2\cdot2+4=8$

답 ③

0105 조건 (가)에서 $f(x)$는 삼차항의 계수가 1, 이차항의 계수가 2인 삼차식임을 알 수 있다.

또 조건 (나)에서 $x\longrightarrow0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$

$f(x)=x^3+2x^2+ax$ (a는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x^2+2x+a)}{x}=\lim_{x\to0}(x^2+2x+a)=a$$

$\therefore a=-1$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-x$이므로 구하는 나머지는

$f(1)=1+2-1=2$

답 2

라쎈 특강 나머지정리

다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$R=P(\alpha)$

0106 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$에서 $x\longrightarrow0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$ ······ ㉠

또 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=-1$에서 $x\longrightarrow1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$f(x)=x(x-1)(ax+b)$ ($a\ne0$, a, b는 상수)

로 놓으면 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$에서

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)(ax+b)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(x-1)(ax+b)=-b$$

즉 $-b=2$이므로 $b=-2$

또 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=-1$에서

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)(ax-2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}x(ax-2)=a-2$$

즉 $a-2=-1$이므로 $\quad a=1$

따라서 $f(x)=x(x-1)(x-2)$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x(x-1)(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}x(x-1)=2\cdot1=2$$

답 ⑤

0107 $\lim_{x\to\infty}f(x)=1$에서 $\quad \lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2-4}=1$

ax^3+bx^2+cx+d는 이차항의 계수가 1인 이차식이어야 하므로

$a=0,\ b=1$ ❶

또 $\lim_{x\to2}f(x)=2$에서 $\quad \lim_{x\to2}\frac{x^2+cx+d}{x^2-4}=2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠에서 $x\to2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}(x^2+cx+d)=0$이므로 $\quad 4+2c+d=0$

$\therefore d=-2c-4 \quad \cdots\cdots$ ㉡ ❷

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+cx-2c-4}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2+c)}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x+2+c}{x+2}=\frac{4+c}{4}$$

즉 $\frac{4+c}{4}=2$이므로 $\quad 4+c=8 \quad \therefore c=4$

$c=4$를 ㉡에 대입하면 $\quad d=-12$ ❸

답 $a=0,\ b=1,\ c=4,\ d=-12$

채점 기준	비율
❶ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ d를 c에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ $c,\ d$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0108 모든 양의 실수 x에 대하여 $2x+1<f(x)<2x+5$이므로 주어진 부등식의 각 변을 제곱하면

$(2x+1)^2<\{f(x)\}^2<(2x+5)^2$

각 변을 x^2+1로 나누면

$$\frac{(2x+1)^2}{x^2+1}<\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1}<\frac{(2x+5)^2}{x^2+1}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^2}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+5)^2}{x^2+1}=4$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1}=4$$

답 ③

0109 $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고

$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}(-x^2+6x)=9,$

$\lim_{x\to3}g(x)=\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{3}x^2-2x+12\right)=9$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to3}h(x)=9$

답 9

0110 (i) $x>1$일 때, $x-1>0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 $x-1$로 나누면

$$\frac{x^2-1}{x-1}\le\frac{f(x)}{x-1}\le\frac{2x^2-2x}{x-1}$$
$$\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\le\frac{f(x)}{x-1}\le\frac{2x(x-1)}{x-1}$$
$$\therefore x+1\le\frac{f(x)}{x-1}\le2x$$

이때 $\lim_{x\to1+}(x+1)=\lim_{x\to1+}2x=2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{x-1}=2$$

(ii) $x<1$일 때, $x-1<0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 $x-1$로 나누면

$$\frac{2x^2-2x}{x-1}\le\frac{f(x)}{x-1}\le\frac{x^2-1}{x-1}$$
$$\frac{2x(x-1)}{x-1}\le\frac{f(x)}{x-1}\le\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$\therefore 2x\le\frac{f(x)}{x-1}\le x+1$$

이때 $\lim_{x\to1-}2x=\lim_{x\to1-}(x+1)=2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)}{x-1}=2$$

(i), (ii)에서 $\quad \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$

답 ⑤

0111 직선 OP의 기울기가 $\frac{t^2}{t}=t$이므로 점 P를 지나고 직선 OP와 수직인 직선의 방정식은

$y-t^2=-\frac{1}{t}(x-t) \qquad \therefore y=-\frac{1}{t}x+t^2+1$

위의 식에 $x=0$을 대입하면 $y=t^2+1$이므로

$f(t)=t^2+1$

점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $t\to0$이므로 구하는 값은

$\lim_{t\to0}f(t)=\lim_{t\to0}(t^2+1)=1$

답 1

라쎈 특강 한 직선에 수직인 직선의 방정식

점 $(a,\ b)$를 지나고 기울기가 $m\ (m\neq0)$인 직선과 수직인 직선의 방정식은

$$y-b=-\frac{1}{m}(x-a)$$

0112 $\overline{AP}=\sqrt{(t+1)^2+(\sqrt{2t})^2}=\sqrt{t^2+4t+1}$

$\overline{BP}=\sqrt{(t-1)^2+(\sqrt{2t})^2}=\sqrt{t^2+1}$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}(\overline{AP}-\overline{BP})$$
$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+4t+1}-\sqrt{t^2+1})$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+4t+1}-\sqrt{t^2+1})(\sqrt{t^2+4t+1}+\sqrt{t^2+1})}{\sqrt{t^2+4t+1}+\sqrt{t^2+1}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4t}{\sqrt{t^2+4t+1}+\sqrt{t^2+1}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=\frac{4}{1+1}=2$$

답 ④

0113 점 $P(a, b)$는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=1$

$\therefore b=\sqrt{1-a^2}$ ($\because b>0$)

이때 $Q(a, -\sqrt{1-a^2})$이므로 $\overline{PQ}=2\sqrt{1-a^2}$ ⋯ ❶

$\therefore S(a)=\frac{1}{2}\cdot a\cdot 2\sqrt{1-a^2}=a\sqrt{1-a^2}$ ⋯ ❷

$$\therefore \lim_{a\to 1-}\frac{S(a)}{\sqrt{1-a}}=\lim_{a\to 1-}\frac{a\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a}}=\lim_{a\to 1-}\frac{a\sqrt{1-a}\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}}=\lim_{a\to 1-}a\sqrt{1+a}=\sqrt{2}$$ ⋯ ❸

답 $\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{PQ}$의 길이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $S(a)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 극한값을 구할 수 있다.	40 %

0114 전략 우극한과 좌극한을 각각 구한 후 그 값을 비교한다.

풀이 ① $\lim_{x\to 0-}\frac{4}{x}=-\infty$, $\lim_{x\to 0+}\frac{4}{x}=\infty$이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{4}{x}$의 값이 존재하지 않는다.

② $\lim_{x\to\infty}(x^2+2x)=\infty$이므로 극한값이 존재하지 않는다.

③ $\lim_{x\to 3+}\frac{x-3}{|x-3|}=\lim_{x\to 3+}\frac{x-3}{x-3}=1$,

$\lim_{x\to 3-}\frac{x-3}{|x-3|}=\lim_{x\to 3-}\frac{x-3}{-(x-3)}=-1$이므로 $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{|x-3|}$의 값이 존재하지 않는다.

④ $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+5}=\infty$이므로 극한값이 존재하지 않는다.

⑤ $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0$

답 ⑤

0115 전략 주어진 그래프를 이용하여 극한값을 구한다.

풀이 $\lim_{x\to -1-}f(x)+\lim_{x\to 0+}f(x)=1+1=2$ 답 ②

0116 전략 주어진 분수식의 분자, 분모를 각각 $f(x)$로 나눈다.

풀이 $\lim_{x\to 3}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to 3}g(x)=2$이므로

$$\lim_{x\to 3}\frac{g(x)}{f(x)}=0$$

$$\therefore \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-g(x)}{2f(x)+3g(x)}=\lim_{x\to 3}\frac{1-\frac{g(x)}{f(x)}}{2+3\cdot\frac{g(x)}{f(x)}}=\frac{1-0}{2+3\cdot 0}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0117 전략 $x \longrightarrow a$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow 0$이면 (분모) $\longrightarrow 0$임을 이용하여 미정계수를 구한다.

풀이 $x \longrightarrow 1$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow 0$이므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}(3x+a)=0$이므로 $3+a=0$

$\therefore a=-3$ ⋯ ❶

$a=-3$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{3x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{3(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$\therefore b=\frac{1}{3}$ ⋯ ❷

$\therefore ab=-1$ ⋯ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0118 전략 x가 유리수인 경우와 x가 무리수인 경우의 극한값을 각각 구한 후 그 값을 비교한다.

풀이 (i) x가 유리수일 때, $f(x)=x^2$이므로

$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}x^2=a^2$

(ii) x가 무리수일 때, $f(x)=x^3$이므로

$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}x^3=a^3$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하려면 $a^2=a^3$이어야 하므로

$a^3-a^2=0$, $a^2(a-1)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=1$

따라서 구하는 실수 a의 개수는 2이다. 답 ②

0119 전략 $x \longrightarrow -1-$이면 $x<-1$이고 $x \longrightarrow 1+$이면 $x>1$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to -1-}f(x)-\lim_{x\to 1+}f(x)$

$=\lim_{x\to -1-}(x+1)-\lim_{x\to 1+}(-3)$

$=(-1+1)-(-3)=3$ 답 ⑤

0120 전략 절댓값 기호 안의 식의 부호를 확인한다.

풀이 $x \longrightarrow -1+$일 때 $x^2 \longrightarrow 1-$이므로 $x^2-1<0$

$$\therefore a=\lim_{x\to -1+}\frac{x^2+x}{|x^2-1|}=\lim_{x\to -1+}\frac{x^2+x}{-(x^2-1)}=\lim_{x\to -1+}\frac{x(x+1)}{-(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to -1+}\frac{x}{-(x-1)}=-\frac{1}{2}$$

$x \longrightarrow 0+$일 때 $x>0$이므로

$$b=\lim_{x\to 0+}\frac{2x}{|x|}=\lim_{x\to 0+}\frac{2x}{x}=2$$

$\therefore ab=-1$ 답 -1

0121 전략 정수 n에 대하여 $\lim_{x\to n+}[x]=n$, $\lim_{x\to n-}[x]=n-1$임을 이용한다.

풀이 ① $x \longrightarrow -2-$일 때 $f(x) \longrightarrow 0+$이므로

$\lim_{x\to -2-}[f(x)]=0$

② $x \longrightarrow -2+$일 때 $f(x) \longrightarrow 0-$이므로

$\lim_{x\to -2+}[f(x)]=-1$

③ $x \longrightarrow 0+$일 때 $f(x) \longrightarrow 0+$이므로

$\lim_{x\to 0+}[f(x)]=0$

④ $x \to 2-$일 때 $f(x) \to 0+$이므로

$\lim_{x\to2-}[f(x)]=0$

⑤ $x \to 2+$일 때 $f(x) \to 0-$이므로

$\lim_{x\to2+}[f(x)]=-1$

답 ④

0122 전략 $f(x)=t$로 놓고 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때 t의 값이 한없이 가까워지는 값을 찾는다.

풀이 $f(x)=t$로 놓으면 $x \to 0-$일 때 $t=1$이므로

$$\lim_{x\to0-}f(f(x))=f(1)=0$$

또 $x \to 1+$일 때 $t \to 0+$이므로

$$\lim_{x\to1+}f(f(x))=\lim_{t\to0+}f(t)=\lim_{t\to0+}(t-1)=-1$$

$$\therefore \lim_{x\to0-}f(f(x))-\lim_{x\to1+}f(f(x))=0-(-1)=1$$

답 1

0123 전략 함수의 극한에 대한 성질을 이용한다.

풀이 $$\lim_{x\to0}\frac{5x^2-f(x)}{2f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{5x-\frac{f(x)}{x}}{2\cdot\frac{f(x)}{x}}$$

$$=\frac{-a}{2a}=-\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

0124 전략 $2f(x)-3g(x)=h(x)$로 놓고 $\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{f(x)}=0$임을 이용한다.

풀이 $2f(x)-3g(x)=h(x)$로 놓으면

$3g(x)=2f(x)-h(x)$

이때 $\lim_{x\to\infty}h(x)=2$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8f(x)-3g(x)}{3g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{8f(x)-\{2f(x)-h(x)\}}{2f(x)-h(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6f(x)+h(x)}{2f(x)-h(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{h(x)}{f(x)}}{2-\frac{h(x)}{f(x)}}$$

$$=\frac{6+0}{2-0}=3$$

답 ④

참고 $f(x)$가 이차함수이므로 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ 또는 $\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$

이때 $\lim_{x\to\infty}h(x)=2$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{f(x)}=0$

0125 전략 근호를 포함한 쪽을 유리화한다.

풀이 $$p=\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(x-1)(1+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-(x-1)}{(x-1)(1+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to1}\left(-\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}$$ ··· ❶

$$q=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+2x})$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+2x})(\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2+2x})}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2+2x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2+2x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}$$

$$=\frac{-4}{1+1}=-2$$ ··· ❷

$$\therefore 2p+q=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-2=-3$$ ··· ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ p의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ q의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $2p+q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0126 전략 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한에서 분자, 분모가 모두 다항식이면 분자, 분모를 각각 인수분해하여 약분하고, $\infty-\infty$ 꼴의 극한에서 무리식이 있으면 근호를 포함한 쪽을 유리화한다.

풀이 $$\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x+a)(x-a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+a)=2a$$

즉 $2a=6$이므로 $a=3$

$a=3$을 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx})$에 대입하면

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+bx})$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+bx})(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+bx})}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+bx}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(3-b)x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+bx}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-b}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{b}{x}}}=\frac{3-b}{2}$$

즉 $\frac{3-b}{2}=2$이므로 $3-b=4$ $\therefore b=-1$

$\therefore a+b=2$

답 ④

0127 전략 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 0이 아닌 실수)이면 $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 같음을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=1$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 1인 이차식임을 알 수 있다. ··· ❶

또 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=-2$에서 $x \to 1$일 때 극한값이 존재하고

(분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$ ··· ❷

$f(x)=(x-1)(x+a)$ (a는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+a}{x+1}=\frac{1+a}{2}$$

즉 $\frac{1+a}{2}=-2$이므로 $1+a=-4$ $\therefore a=-5$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-5)$이므로 ⋯ ❸

$f(4)=3\cdot(-1)=-3$ ⋯ ❹

답 -3

채점 기준	비율
❶ $f(x)$는 이차항의 계수가 1인 이차식임을 알 수 있다.	30 %
❷ $f(1)=0$임을 알 수 있다.	30 %
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❹ $f(4)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0128 전략 $\overline{AP}^2$과 $\overline{AQ}^2$을 t에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 직선 $y=x+1$에 수직인 직선의 기울기는 -1이므로 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-(t+1)=-(x-t)$

$\therefore y=-x+2t+1$

위의 식에 $x=0$을 대입하면 $y=2t+1$이므로

$Q(0, 2t+1)$

$\overline{AP}^2$과 $\overline{AQ}^2$을 t에 대한 식으로 나타내면

$\overline{AP}^2=(t+1)^2+(t+1)^2=2t^2+4t+2$

$\overline{AQ}^2=1^2+(2t+1)^2=4t^2+4t+4$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+4t+2}{2t^2+4t+2}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4+\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}}{2+\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}}=2$$

답 ③

0129 전략 주어진 그래프를 이용하여 x의 값이 어떤 값에 한없이 가까워질 때 $f(x)$ 또는 $g(x)$의 값이 한없이 가까워지는 값을 찾는다.

풀이 $g(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 1-$일 때 $t=0$이므로

$\lim_{x\to1-}f(g(x))=f(0)=0$

또 $f(x)=s$로 놓으면 $x\longrightarrow 1+$일 때 $s\longrightarrow -1-$이므로

$\lim_{x\to1+}g(f(x))=\lim_{s\to-1-}g(s)=-1$

$\therefore \lim_{x\to1-}f(g(x))-\lim_{x\to1+}g(f(x))=0-(-1)=1$

답 1

0130 전략 $x-1=t$로 놓고 정리한 후 함수의 극한에 대한 성질을 이용한다.

풀이 $x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 1$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t(t+2)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}\cdot\frac{1}{t+2}$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

답 ④

0131 전략 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 0이 아닌 실수)이면 $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 같음을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3x^2}{2x-3}=a$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차식임을 알 수 있다.

또 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=10$에서 $x\longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$f(x)=3(x-1)(x+k)$ (k는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)(x+k)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}3(x+k)=3(1+k)$$

즉 $3(1+k)=10$이므로 $1+k=\frac{10}{3}$

$\therefore k=\frac{7}{3}$

따라서 $f(x)=3(x-1)\left(x+\frac{7}{3}\right)=3x^2+4x-7$이므로

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2+4x-7)-3x^2}{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-7}{2x-3}=2$$

답 ④

0132 전략 $|f(x)-3x-1|<1$을 변형하여 함수의 극한의 대소 관계를 이용한다.

풀이 모든 양의 실수 x에 대하여 $|f(x)-3x-1|<1$이므로

$-1<f(x)-3x-1<1$

$\therefore 3x<f(x)<3x+2$

이 식의 각 변을 제곱하면

$9x^2<\{f(x)\}^2<9x^2+12x+4$

모든 양의 실수 x에 대하여 $2x^2-x+1>0$이므로 위의 식의 각 변을 $2x^2-x+1$로 나누면

$$\frac{9x^2}{2x^2-x+1}<\frac{\{f(x)\}^2}{2x^2-x+1}<\frac{9x^2+12x+4}{2x^2-x+1}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2}{2x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+12x+4}{2x^2-x+1}=\frac{9}{2}$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{2x^2-x+1}=\frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

0133 전략 $f(r)$는 $x^2+y^2=1$과 $(x-1)^2+y^2=r^2$에서 y^2을 소거한 방정식의 해임을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2=1$에서 $y^2=1-x^2$이므로 이것을 $(x-1)^2+y^2=r^2$에 대입하면

$(x-1)^2+(1-x^2)=r^2$

$-2x+2=r^2 \quad \therefore x=1-\frac{1}{2}r^2$

이때 점 P의 x좌표가 $f(r)$이므로

$f(r)=1-\frac{1}{2}r^2$

$$\therefore \lim_{r\to\sqrt{2}-}\frac{f(r)}{4-r^4}=\lim_{r\to\sqrt{2}-}\frac{1-\frac{1}{2}r^2}{4-r^4}$$

$$=\lim_{r\to\sqrt{2}-}\frac{2-r^2}{2(2-r^2)(2+r^2)}$$

$$=\lim_{r\to\sqrt{2}-}\frac{1}{2(2+r^2)}$$

$$=\frac{1}{2(2+2)}=\frac{1}{8}$$

답 ①

02
함수의 연속

I. 함수의 극한과 연속

0134 답 ㄱ

0135 $\lim_{x\to0+}f(x)=4$, $\lim_{x\to0-}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)\neq\lim_{x\to0-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)$가 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. 답 ㄴ

0136 $f(0)=0$, $\lim_{x\to0}f(x)=2$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)\neq f(0)$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. 답 ㄷ

0137 $f(1)=1$, $\lim_{x\to1}f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 답 연속

0138 $f(1)$이 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. 답 불연속

0139 $f(1)=1$, $\lim_{x\to1}f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 답 연속

0140 $f(1)=0$, $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)\neq f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. 답 불연속

0141 $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}\frac{1}{x}=1$, $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(2x-1)=1$

이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=1$

이때 $f(1)=1$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 답 연속

0142 답 $[-2, 1]$

0143 답 $[0, 7)$

0144 답 $[-1, \infty)$

0145 답 $(-\infty, 10)$

0146 주어진 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이므로

$(-\infty, \infty)$ 답 $(-\infty, \infty)$

0147 주어진 함수의 정의역은 $x-2\neq0$, 즉 $x<2$ 또는 $x>2$인 x의 값들의 집합이므로

$(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$ 답 $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$

0148 주어진 함수의 정의역은 $x+1\geq0$, 즉 $x\geq-1$인 x의 값들의 집합이므로 $[-1, \infty)$ 답 $[-1, \infty)$

0149 주어진 함수의 정의역은 $16-x^2\geq0$, 즉 $-4\leq x\leq4$인 x의 값들의 집합이므로 $[-4, 4]$ 답 $[-4, 4]$

0150 함수 $f(x)=x^2$은 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다. 답 $(-\infty, \infty)$

0151 함수 $f(x)=\sqrt{x-3}$은 $x-3\geq0$, 즉 $x\geq3$일 때 연속이므로 구간 $[3, \infty)$에서 연속이다. 답 $[3, \infty)$

0152 함수 $f(x)=-\frac{1}{x}$은 $x\neq0$일 때, 즉 $x<0$ 또는 $x>0$일 때 연속이므로 구간 $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$에서 연속이다.

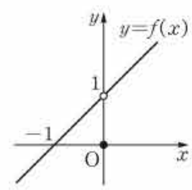
답 $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$

0153 $f(0)=0$,

$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(x+1)=1$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)\neq f(0)$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 그 이외의 x의 값에서는 연속이다.



답 풀이 참조

0154 함수 $f(x)=x^3+x^2-3x+2$는 다항함수이므로 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty, \infty)$

0155 함수 $f(x)=(x+1)(x^2-2x+7)$은 다항함수이므로 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty, \infty)$

0156 함수 $f(x)=x(x^4+2x^3-5)$는 다항함수이므로 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty, \infty)$

0157 함수 $f(x)=\frac{x-3}{x-1}$은 유리함수이므로 $x\neq1$인 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$

0158 함수 $f(x)=\frac{x+1}{x^2-5x+6}=\frac{x+1}{(x-2)(x-3)}$은 유리함수이므로 $x\neq2$, $x\neq3$인 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$, $(3, \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$, $(3, \infty)$

0159 $f(x)+g(x)=(x^2-x)+(x+1)=x^2+1$은 다항함수이므로 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty, \infty)$

02 함수의 연속

0160 $f(x)-g(x)=(x^2-x)-(x+1)=x^2-2x-1$은 다항함수이므로 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty, \infty)$

0161 $f(x)g(x)=(x^2-x)(x+1)=x^3-x$는 다항함수이므로 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty, \infty)$

0162 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2-x}{x+1}=\dfrac{x(x-1)}{x+1}$은 유리함수이므로 $x\neq-1$인 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$

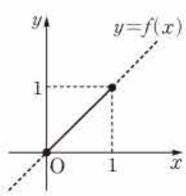
0163 $\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{x+1}{x^2-x}=\dfrac{x+1}{x(x-1)}$은 유리함수이므로 $x\neq0$, $x\neq1$인 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$

0164 답 최댓값: 1, 최솟값: 없다.

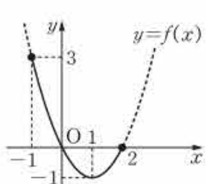
0165 답 최댓값: 0, 최솟값: -2

0166 함수 $f(x)=x$는 구간 $[0, 1]$에서 연속이고 구간 $[0, 1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 1, $x=0$에서 최솟값 0을 갖는다.



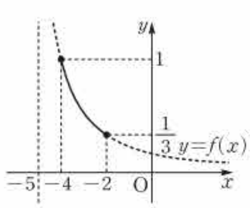
답 최댓값: 1, 최솟값: 0

0167 함수 $f(x)=x^2-2x$는 구간 $[-1, 2]$에서 연속이고 구간 $[-1, 2]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 3, $x=1$에서 최솟값 -1을 갖는다.



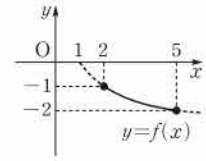
답 최댓값: 3, 최솟값: -1

0168 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x+5}$은 구간 $[-4, -2]$에서 연속이고 구간 $[-4, -2]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $f(x)$는 $x=-4$에서 최댓값 1, $x=-2$에서 최솟값 $\dfrac{1}{3}$을 갖는다.



답 최댓값: 1, 최솟값: $\dfrac{1}{3}$

0169 함수 $f(x)=-\sqrt{x-1}$은 구간 $[2, 5]$에서 연속이고 구간 $[2, 5]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 -1, $x=5$에서 최솟값 -2를 갖는다.



답 최댓값: -1, 최솟값: -2

0170 답 (가) 연속 (나) 사잇값의 정리

0171 (1) $f(1)=1^2+2\cdot1-4=-1$, $f(2)=2^2+2\cdot2-4=4$
(2) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고 $f(1)f(2)=-4<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 (1) $f(1)=-1$, $f(2)=4$ (2) 풀이 참조

0172 ① $f(0)$이 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.
② $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}[x]=0$, $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}[x]=-1$이므로
$\lim\limits_{x\to0+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0-}f(x)$
따라서 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$가 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.
③ $f(0)$이 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.
④ $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x}{x}=1$,
$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{x}{-x}=-1$이므로
$\lim\limits_{x\to0+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0-}f(x)$
따라서 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$가 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.
⑤ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+2x}{x}=\lim\limits_{x\to0}(x+2)=2$
이때 $f(0)=2$이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$
따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

답 ⑤

라쎈 특강 여러 가지 함수의 연속성

① 다항함수 ➡ 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속
② 유리함수 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ➡ $g(x)\neq0$인 x에서 연속
③ 무리함수 $y=\sqrt{f(x)}$ ➡ $f(x)\geq0$인 x에서 연속
④ [ ] 기호를 포함한 함수 $y=[x]$
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)
➡ $x\neq n$ (n은 정수)에서 연속

0173 $f(x)=\dfrac{1}{x}+3$, $g(x)=x-1$에서
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x-1)=\dfrac{1}{x-1}+3$

따라서 함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로

$a=1$ 답 1

0174 $f(a)=-2a$이고,

$\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}(-2x)=-2a$

$\lim\limits_{x\to a-}f(x)=\lim\limits_{x\to a-}(x^2-3)=a^2-3$ ··· ❶

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$가 존재하고 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$이어야 하므로

$-2a=a^2-3,\quad a^2+2a-3=0$

$(a+3)(a-1)=0\quad \therefore a=-3$ 또는 $a=1$ ··· ❷

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-3+1=-2$ ··· ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ $f(a)$, $\lim\limits_{x\to a+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to a-}f(x)$의 값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 모든 a의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0175 ㄱ. $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\ge 0) \\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$이므로 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

$f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x|x|=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄴ. $f(-1)$이 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

ㄷ. $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$f(1)=5$이고,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}f(x)&=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x+4)(x-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}(x+4)=5\end{aligned}$$

이므로 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

이상에서 모든 실수 x에서 연속인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0176 (i) $\lim\limits_{x\to -1+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1+}(x^2+1)=2$,

$\lim\limits_{x\to -1-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1-}(x+3)=2$

이므로 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=2$

이때 $f(-1)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=f(-1)$

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

(ii) $\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2+}2x=4$, $\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2-}(x^2+1)=5$

이므로 $\lim\limits_{x\to 2+}f(x)\ne\lim\limits_{x\to 2-}f(x)$

따라서 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$가 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(i), (ii)에서 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이고 그 이외의 x의 값에서는 연속이다. 답 풀이 참조

0177 (i) $\lim\limits_{x\to -1+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to -1-}f(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to -1+}f(x)\ne\lim\limits_{x\to -1-}f(x)$

따라서 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$가 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(ii) $f(1)=0$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)\ne f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(i), (ii)에서 $a=1$, $b=2$이므로

$a^2+b^2=5$ 답 5

0178 ㄱ. $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=2$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to 3+}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 3-}f(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to 3}f(x)=2$

따라서 $x=3$에서 $f(x)$의 극한값이 존재한다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=3$에서 불연속이므로 불연속이 되는 x의 값은 2개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0179 (1) $f(1)=0$이므로

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(0)=1$ ··· ❶

(2) $f(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 1$일 때 $t\longrightarrow 2-$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}(f\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to 1}f(f(x))=\lim\limits_{t\to 2-}f(t)=1$ ··· ❷

(3) (1), (2)에서 $\lim\limits_{x\to 1}(f\circ f)(x)=(f\circ f)(1)$

따라서 $(f\circ f)(x)$는 $x=1$에서 연속이다. ··· ❸

답 (1) 1 (2) 1 (3) 연속

채점 기준	비율
❶ $(f\circ f)(1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\lim\limits_{x\to 1}(f\circ f)(x)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 합성함수 $(f\circ f)(x)$가 $x=1$에서 연속임을 알 수 있다.	20 %

0180 함수 $f(x)$가 $x=1$, $x=2$, $x=3$에서 불연속이므로 $x=1$, $x=2$, $x=3$에서 함수 $g(x)$의 연속성을 조사해 보자.

(i) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}g(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)f(x)=0\cdot 0=0$

이때 $g(1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}g(x)=g(1)$

따라서 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $\lim\limits_{x\to 2+}g(x)=\lim\limits_{x\to 2+}(x-1)f(x)=1\cdot 1=1$,

$\lim\limits_{x\to 2-}g(x)=\lim\limits_{x\to 2-}(x-1)f(x)=1\cdot 2=2$이므로

$\lim\limits_{x\to 2+}g(x)\ne\lim\limits_{x\to 2-}g(x)$

따라서 $\lim\limits_{x\to 2}g(x)$가 존재하지 않으므로 $g(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

02 함수의 연속

(iii) $\lim_{x\to3} f(x)=2$이므로

$$\lim_{x\to3} g(x)=\lim_{x\to3}(x-1)f(x)=2\cdot2=4$$

이때 $g(3)=2f(3)=0$이므로

$$\lim_{x\to3} g(x)\neq g(3)$$

따라서 $g(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

이상에서 구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $g(x)$가 불연속이 되는 x의 값은 2, 3이므로 구하는 합은

$2+3=5$

답 5

0181 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$$

$$\therefore k=\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^2+1)$$

$$=2$$

답 ②

0182 $f(0)=-2$이므로

$-b=-2 \quad \therefore b=2$

이때 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1-} f(x)=f(1)$$

$2+a=1-b,\quad 2+a=-1 \quad \therefore a=-3$

또 $x=-1$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1-} f(x)=f(-1)$$

$1-b=-3-c,\quad -1=-3-c \quad \therefore c=-2$

$\therefore abc=12$

답 ⑤

0183 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이려면 $x=-1$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to-1} f(x)=f(-1)$$

$$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+8}+a}{x+1}=f(-1) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x \longrightarrow -1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}(\sqrt{x^2+8}+a)=0$이므로

$3+a=0 \quad \therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면

$$f(-1)=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(\sqrt{x^2+8}-3)(\sqrt{x^2+8}+3)}{(x+1)(\sqrt{x^2+8}+3)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{(x+1)(\sqrt{x^2+8}+3)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+8}+3)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+8}+3}=-\frac{1}{3}$$

답 $-\frac{1}{3}$

라쎈 특강 미정계수의 결정

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)일 때

① $\lim_{x\to a} g(x)=0$이면 $\quad \lim_{x\to a} f(x)=0$

② $\alpha\neq0$이고 $\lim_{x\to a} f(x)=0$이면 $\quad \lim_{x\to a} g(x)=0$

0184 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+a}+b}{x^2}=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ❶$$

$x \longrightarrow 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(\sqrt{x^2+a}+b)=0$이므로

$\sqrt{a}+b=0 \quad \therefore b=-\sqrt{a} \qquad \cdots\cdots ㉡ \quad \cdots ❷$

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{a}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x^2+a}-\sqrt{a})(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a})}{x^2(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

따라서 $\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2}$이므로 $\quad a=1$

$a=1$을 ㉡에 대입하면 $\quad b=-1$ $\quad \cdots ❸$

$\therefore a-b=2$ $\quad \cdots ❹$

답 2

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+a}+b}{x^2}=\frac{1}{2}$임을 알 수 있다.	30 %
❷ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0185 함수 $f(x)=[x]^2+a[x]$에서

(i) $2\le x<3$일 때, $[x]=2$이므로

$$f(x)=2^2+a\cdot2=2a+4$$

(ii) $3\le x<4$일 때, $[x]=3$이므로

$$f(x)=3^2+a\cdot3=3a+9$$

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to3+} f(x)=\lim_{x\to3-} f(x)=f(3)$$

$3a+9=2a+4 \quad \therefore a=-5$

답 ③

0186 $x\neq1$일 때, $\quad f(x)=\frac{x^2-3x+a}{x-1}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+a}{x-1}$$

$x \longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(x^2-3x+a)=0$이므로

$-2+a=0 \quad \therefore a=2$

$\therefore f(1)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x-2)=-1$

답 -1

0187 $x\neq-2$일 때,

$f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}=x-2$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-2$에서 연속이므로

$f(-2)=\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}(x-2)=-4$

답 -4

0188 $x\neq4$일 때,

$f(x)=\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-2}=\frac{(\sqrt{x})^3-2^3}{\sqrt{x}-2}=\frac{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}-2}$

$=x+2\sqrt{x}+4$

함수 $f(x)$가 모든 양수 x에서 연속이면 $x=4$에서 연속이므로

$f(4)=\lim_{x\to4}f(x)=\lim_{x\to4}(x+2\sqrt{x}+4)=12$

답 12

0189 $x\neq-1$일 때, $\quad f(x)=\frac{ax^3+bx}{x+1}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-1$에서 연속이므로

$f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{ax^3+bx}{x+1}$

$x \longrightarrow -1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로

(분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}(ax^3+bx)=0$이므로

$-a-b=0 \quad \therefore a+b=0$ ⋯⋯ ㉠

이때 $f(2)=2$이므로 $x=2$를 $(x+1)f(x)=ax^3+bx$에 대입하면

$3f(2)=8a+2b \quad \therefore 4a+b=3$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=-1$

$\therefore ab=-1$

답 ②

0190 ① $f(x)+2g(x)=(x+3)+2(x^2+1)=2x^2+x+5$이므로 이 함수는 모든 실수 x에서 연속이다.

② $f(x)g(x)=(x+3)(x^2+1)=x^3+3x^2+x+3$이므로 이 함수는 모든 실수 x에서 연속이다.

③ $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+3}{x^2+1}$이므로 이 함수는 모든 실수 x에서 연속이다.

④ $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^2+1}{x+3}$이고, 이 함수는 $x=-3$에서 정의되지 않으므로 $x=-3$에서 불연속이다.

⑤ $g(f(x))=g(x+3)=(x+3)^2+1=x^2+6x+10$이므로 이 함수는 모든 실수 x에서 연속이다.

답 ④

0191 $f(x)=x^2+6x+6,\ g(x)=x^2-8x+15$에서

$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2+6x+6}{x^2-8x+15}=\frac{x^2+6x+6}{(x-3)(x-5)}$ ⋯ ❶

즉 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x=3,\ x=5$에서 정의되지 않으므로 불연속이 되는 x의 값은 3, 5이다. ⋯ ❷

따라서 모든 x의 값의 합은 $\quad 3+5=8$ ⋯ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ $\frac{f(x)}{g(x)}$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $\frac{f(x)}{g(x)}$가 불연속이 되는 x의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ 모든 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0192 두 함수 $f(x),\ g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a}f(x)=f(a),\ \lim_{x\to a}g(x)=g(a)$

ㄱ. $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}g(x)=f(a)g(a)$이므로 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. $f(a)=g(a)$이면 $\frac{f(x)}{f(x)-g(x)}$는 $x=a$에서 정의되지 않으므로 $x=a$에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to a}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}f(x)=\{f(a)\}^2$이므로 $\{f(x)\}^2$은 $x=a$에서 연속이다.

ㄹ. [반례] $f(x)=x-1,\ g(x)=\begin{cases}1 & (x\geq0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$이면

$g(f(x))=\begin{cases}1 & (x\geq1)\\ -1 & (x<1)\end{cases}$

이때 $f(x),\ g(x)$가 모두 $x=1$에서 연속이지만 $g(f(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

이상에서 항상 연속인 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

0193 ① $f(x)$와 $g(x)$가 연속함수이면 $\{f(x)\}^2$과 $\{g(x)\}^2$도 연속함수이다.

따라서 $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$도 연속함수이다.

② $f(x)+g(x)=h(x)$로 놓으면

$g(x)=h(x)-f(x)$

이때 $f(x)$와 $h(x)$가 연속함수이므로 $g(x)$도 연속함수이다.

③ [반례] $f(x)=0,\ g(x)=\begin{cases}1 & (x\geq0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$이면

$f(x)g(x)=0$

따라서 $f(x)$와 $f(x)g(x)$는 연속함수이지만 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

④ 임의의 실수 a에 대하여 $g(a)=b$라 하면 $g(x)$가 연속함수이므로 $\quad \lim_{x\to a}g(x)=b$

즉 $g(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow a$일 때 $t \longrightarrow b$이므로

$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to a}f(g(x))=\lim_{t\to b}f(t)=f(b)$

($\because f(x)$가 연속함수)

이때 $(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(b)$이므로

$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x)=(f\circ g)(a)$

따라서 $(f\circ g)(x)$는 $x=a$에서 연속이므로 연속함수이다.

⑤ $f(x)$와 $g(x)$가 연속함수이고 $|g(x)|+1>0$이므로

$\frac{f(x)}{|g(x)|+1}$는 연속함수이다.

답 ③

0194 ① $\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to3}f(x)=2$

② $\lim_{x\to5+}f(x)=2$, $\lim_{x\to5-}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to5+}f(x)\neq\lim_{x\to5-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to5}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

③ 불연속이 되는 x의 값은 3, 5의 2개이다.

④ 함수 $f(x)$가 구간 $[1, 2]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최솟값을 갖는다.

답 ⑤

0195 함수 $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$은 $x=-1$에서 불연속이고, 그 이외의 x의 값에서는 연속이다.

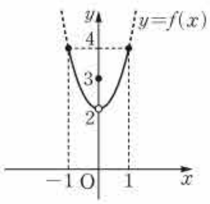
①, ④, ⑤ $f(x)$는 주어진 구간에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

② $-2\le x<-1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 최댓값은 $f(-2)=\dfrac{3}{-2+1}=-3$

③ $-1<x\le0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 최댓값은 없다.

답 ③

0196 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 구간 $[-1, 1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$에서 최댓값 4를 갖고, 최솟값은 없다.



답 최댓값: 4, 최솟값: 없다.

0197 $x\neq2$일 때,

$$f(x)=\frac{-x^3+6x^2-5x-6}{x-2}$$
$$=\frac{(x-2)(-x^2+4x+3)}{x-2}$$
$$=-x^2+4x+3$$

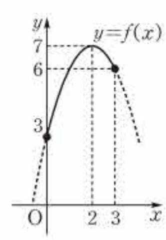
이때 $f(2)=7$이고, $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}(-x^2+4x+3)=7$이므로

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

즉 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 구간 $[0, 3]$에서 연속이다.
따라서 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

구간 $[0, 3]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 7, $x=0$에서 최솟값 3을 갖는다.
따라서 $M=7$, $m=3$이므로

$M+m=10$



답 ⑤

0198 $f(x)=x^3+3x-3$으로 놓으면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$f(-2)=-17<0$, $f(-1)=-7<0$, $f(0)=-3<0$,
$f(1)=1>0$, $f(2)=11>0$, $f(3)=33>0$

따라서 $f(0)f(1)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 $(0, 1)$이다.

답 ③

0199 $f(-2)f(-1)=-2\cdot2=-4<0$,
$f(0)f(1)=2\cdot(-1)=-2<0$,
$f(1)f(2)=(-1)\cdot1=-1<0$
이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-2, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 3개의 실근을 가지므로

$n=3$

답 ②

0200 $f(x)=x^2-2x+a$로 놓으면 $f(x)$는 구간 $[-1, 1]$에서 연속이고

$f(-1)=a+3$, $f(1)=a-1$ ⋯ ❶

이므로 $f(-1)f(1)<0$에서

$(a+3)(a-1)<0$　　$\therefore -3<a<1$ ⋯ ❷

따라서 정수 a는 -2, -1, 0의 3개이다. ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $f(-1)$, $f(1)$을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0201 주어진 조건에서 $f(0)=0$, $f(3)=0$이므로

$f(x)=x(x-3)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항함수) ⋯⋯ ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠을 $\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{x(x-3)Q(x)}{x}=\lim_{x\to0}(x-3)Q(x)=-3Q(0)$$

즉 $-3Q(0)=1$이므로　$Q(0)=-\dfrac{1}{3}$ ⋯⋯ ㉡

또 ㉠을 $\lim_{x\to3}\dfrac{f(x)}{x-3}=1$의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)Q(x)}{x-3}=\lim_{x\to3}xQ(x)=3Q(3)$$

즉 $3Q(3)=1$이므로　$Q(3)=\dfrac{1}{3}$ ⋯⋯ ㉢

이때 $Q(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이고, ㉡, ㉢에서 $Q(0)Q(3)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $Q(x)=0$은 구간 $(0, 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 구간 $[0, 3]$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

답 ③

0202 전략 주어진 그래프에서 불연속이 되는 x의 값을 먼저 찾는다.

풀이 주어진 그래프에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=2$에서 불연속이다.

(i) $\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=1$

(ii) $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=2$

(iii) $\lim_{x\to2+}f(x)=0$, $\lim_{x\to2-}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)\neq\lim_{x\to2-}f(x)$

이상에서 주어진 조건을 만족시키는 정수 a의 값은 -1, 0이다.

답 -1, 0

0203 전략 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

풀이 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$$

$$\lim_{x\to1-}(4x^2-a)=\lim_{x\to1+}(x^3+a)=1+a$$

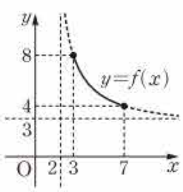
$4-a=1+a$, $\quad 2a=3$

$\therefore a=\dfrac{3}{2}$

답 ①

0204 전략 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

풀이 함수 $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-2}=3+\dfrac{5}{x-2}$는 구간 $[3, 7]$에서 연속이고 이 구간에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 8, $x=7$에서 최솟값 4를 갖는다.

즉 $M=8$, $m=4$이므로

$M-m=4$

답 4

0205 전략 경곗값에서의 함수의 연속성을 조사한다.

풀이 ㄱ. $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$f(1)=1$이고,

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

이므로 $\quad \lim_{x\to1}f(x)\neq f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄴ. $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}(2\sqrt{x}+1)=1$, $\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}1=1$이므로 $\quad \lim_{x\to0}g(x)=1$

이때 $g(0)=1$이므로 $\quad \lim_{x\to0}g(x)=g(0)$

따라서 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄷ. $h(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-1$에서 연속이어야 한다.

$$\lim_{x\to-1+}h(x)=\lim_{x\to-1+}\frac{x(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to-1+}x=-1,$$

$$\lim_{x\to-1-}h(x)=\lim_{x\to-1-}\frac{x(x+1)}{-(x+1)}=\lim_{x\to-1-}(-x)=1\text{이므로}$$

$$\lim_{x\to-1+}h(x)\neq\lim_{x\to-1-}h(x)$$

따라서 $\lim_{x\to-1}h(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $h(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

이상에서 모든 실수 x에서 연속인 함수는 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

0206 전략 함수가 연속일 조건을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\lim_{x\to0+}f(x)g(x)=0\cdot1=0$,

$\lim_{x\to0-}f(x)g(x)=0\cdot(-1)=0$

이므로 $\quad \lim_{x\to0}f(x)g(x)=0$

이때 $f(0)g(0)=2\cdot1=2$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)g(x)\neq f(0)g(0)$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to0+}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to0+}f(g(x))=f(1)=1$,

$\lim_{x\to0-}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to0-}f(g(x))=f(-1)=1$

이므로 $\quad \lim_{x\to0}(f\circ g)(x)=1$

이때 $(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(1)=1$이므로

$\lim_{x\to0}(f\circ g)(x)=(f\circ g)(0)$

따라서 $(f\circ g)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to0}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to0}g(f(x))=\lim_{x\to0+}g(x)=1$

이때 $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(2)=1$이므로

$\lim_{x\to0}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(0)$

따라서 $(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

0207 전략 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

풀이 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to1}\dfrac{x^2-ax-3}{x-1}=b \qquad \cdots\cdots ㉠$

$x\longrightarrow1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(x^2-ax-3)=0$이므로

$1-a-3=0 \qquad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+3)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+3)=4$$

$\therefore a+b=2$

답 2

0208 전략 $x\longrightarrow0$일 때 $f(x)$의 극한값을 이용하여 $\lim_{x\to0}g(x)$의 값을 구한다.

풀이 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0}g(x)=g(0)$

$\therefore k=\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}[f(x)]=\lim_{x\to0}[x^2+2]$

$x\longrightarrow0$일 때 $x^2+2\longrightarrow2+$이므로

$\lim_{x\to0}[x^2+2]=2$

$\therefore k=2$

답 ③

0209 전략 $\lim_{x\to0}\{g(x)\}^2=\{g(0)\}^2$을 만족시키는 a의 값을 구한다.

풀이 두 함수 $f(x)=x^2-x+a$, $g(x)=\begin{cases}f(x+1) & (x\le0)\\ f(x-1) & (x>0)\end{cases}$에 대하여

$$\{g(x)\}^2=\begin{cases}\{f(x+1)\}^2 & (x\le 0)\\ \{f(x-1)\}^2 & (x>0)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to 0-}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to 0+}\{g(x)\}^2=\{g(0)\}^2$$

$$\lim_{x\to 0-}\{f(x+1)\}^2=\lim_{x\to 0+}\{f(x-1)\}^2=\{f(1)\}^2$$

$$\{f(1)\}^2=\{f(-1)\}^2$$

$$(1-1+a)^2=(1+1+a)^2$$

$$a^2=a^2+4a+4,\qquad 4a=-4$$

$$\therefore a=-1$$

답 ②

0210 전략 $f(x)$가 $x=3$에서 연속임을 이용한다.

풀이 $x\neq 3$일 때, $\quad f(x)=\dfrac{a\sqrt{x-2}+b}{x-3}$

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 3}f(x)=f(3)$$

$$\therefore \lim_{x\to 3}\frac{a\sqrt{x-2}+b}{x-3}=1 \qquad \cdots\cdots ㉠ \qquad ➊$$

$x\longrightarrow 3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 3}(a\sqrt{x-2}+b)=0$이므로

$$a+b=0 \qquad \therefore b=-a \qquad \cdots\cdots ㉡ \qquad ➋$$

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 3}\frac{a\sqrt{x-2}-a}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{a(\sqrt{x-2}-1)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{a(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2}+1)}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{a(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{a}{\sqrt{x-2}+1}=\frac{a}{2}$$

즉 $\dfrac{a}{2}=1$이므로 $\quad a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하면 $\quad b=-2$ ➌

$\therefore ab=-4$ ➍

답 -4

채점 기준	비율
➊ $\lim_{x\to 3}\dfrac{a\sqrt{x-2}+b}{x-3}=1$임을 알 수 있다.	30 %
➋ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
➌ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
➍ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0211 전략 반례를 찾아 주어진 명제가 거짓임을 보인다.

풀이 ㄱ. [반례] $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $g(x)=-\dfrac{1}{x^2}$이라 하면

$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$, $\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty$이지만

$\lim_{x\to 0}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to 0}\left\{\dfrac{1}{x^2}+\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\right\}=\lim_{x\to 0}0=0$이다.

따라서 $\lim_{x\to 0}f(x)$와 $\lim_{x\to 0}g(x)$가 모두 존재하지 않지만 $\lim_{x\to 0}\{f(x)+g(x)\}$는 존재한다.

ㄴ. $y=f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$

$x\longrightarrow 0$일 때 $f(x)\longrightarrow f(0)$이므로

$$\lim_{x\to 0}|f(x)|=|f(0)|$$

따라서 $y=|f(x)|$도 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. [반례] $f(x)=\begin{cases}1 & (x\ge 0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$이라 하면 $|f(x)|=1$이다.

따라서 $y=|f(x)|$는 $x=0$에서 연속이지만 $y=f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ①

0212 전략 $x\ge 1$, $x<1$인 경우로 나누어 각각 $f(x)$를 구한 후 최대·최소 정리를 이용한다.

풀이 $f(x)=\begin{cases}x+2 & (x\ge 1)\\ -x+4 & (x<1)\end{cases}$에서 $f(1)=3$이고,

$$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(x+2)=3,$$

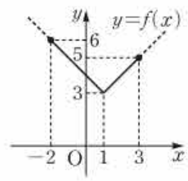
$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(-x+4)=3$$

이므로 $\quad \lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

즉 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 구간 $[-2, 3]$에서 연속이다.

따라서 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

구간 $[-2, 3]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 6, $x=1$에서 최솟값 3을 갖는다.



따라서 $M=6$, $m=3$이므로

$$M+m=9$$

답 9

0213 전략 사잇값의 정리를 이용한다.

풀이 이차함수 $f(x)$는 연속함수이므로 $f(1)<0$이면 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(0, 1)$, $(1, 2)$에서 각각 하나의 실근을 갖는다.

$f(1)<0$에서

$$a^2-7a+10<0,\qquad (a-2)(a-5)<0$$

$$\therefore 2<a<5$$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=5$이므로

$$\beta-\alpha=3$$

답 ②

0214 전략 지하철이 A역을 출발한 지 x시간 후의 속력을 $f(x)$ km/h라 하고 주어진 속력을 이용하여 사잇값의 정리를 적용한다.

풀이 지하철이 A역을 출발한 지 x시간 후의 속력을 $f(x)$ km/h라 하면 함수 $f(x)$는 연속함수이다.

A역을 출발한 지 각각 a시간, b시간 후에 B역, C역에 도착하였다고 하면

$$f(0)=0,\ f(a)=0,\ f(b)=0$$

이때 $0<\alpha<a$, $a<\beta<b$라 하면 $f(\alpha)=75$, $f(\beta)=75$인 α, β가 존재하므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=30$인 c가 구간 $(0, \alpha)$, (α, a), (a, β), (β, b)에 각각 적어도 하나씩 존재한다.

따라서 지하철의 속력이 30 km/h인 순간은 적어도 4번이다.

$$\therefore n=4$$

답 ④

0215 전략 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 함수 $f(k)$를 구하고 k의 값의 경곗값에서 함수의 연속성을 조사한다.

풀이 원 $x^2+y^2=1$의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=-2x+k$, 즉 $2x+y-k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0+0-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

(i) $\frac{|k|}{\sqrt{5}}<1$, 즉 $-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$일 때 주어진 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만나므로 $f(k)=2$

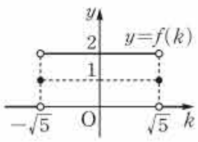
(ii) $\frac{|k|}{\sqrt{5}}=1$, 즉 $k=\pm\sqrt{5}$일 때 주어진 원과 직선은 한 점에서 만나므로 $f(k)=1$

(iii) $\frac{|k|}{\sqrt{5}}>1$, 즉 $k<-\sqrt{5}$ 또는 $k>\sqrt{5}$일 때 주어진 원과 직선은 만나지 않으므로 $f(k)=0$

이상에서

$$f(k)=\begin{cases} 2 & (-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}) \\ 1 & (k=\pm\sqrt{5}) \\ 0 & (k<-\sqrt{5} \text{ 또는 } k>\sqrt{5}) \end{cases}$$ ··· ❶

따라서 함수 $y=f(k)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 a의 값은 $-\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$이다. ··· ❷



답 $-\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(k)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

0216 전략 $\lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)=(f\circ g)(0)$인 것을 찾는다.

풀이 ㄱ. $\lim_{x\to 0+}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to 0+}f(g(x))=f(-1)=0$

$\lim_{x\to 0-}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to 0-}f(g(x))=\lim_{x\to 1-}f(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)=0$

이때 $(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(0)=0$이므로

$\lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)=(f\circ g)(0)$

따라서 $(f\circ g)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to 0}f(g(x))=\lim_{x\to 1-}f(x)=0$

이때 $(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(0)=0$이므로

$\lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)=(f\circ g)(0)$

따라서 $(f\circ g)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to 0}f(g(x))=\lim_{x\to 0+}f(x)=-1$

이때 $(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(1)=0$이므로

$\lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)\neq(f\circ g)(0)$

따라서 $(f\circ g)(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

이상에서 $(f\circ g)(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 함수 $y=g(x)$의 그래프는 ㄱ, ㄴ이다. 답 ④

0217 전략 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 한다.

풀이 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to a+}f(x)g(x)=\lim_{x\to a-}f(x)g(x)=f(a)g(a)$$

이어야 한다.

이때

$$\lim_{x\to a+}f(x)g(x)=\lim_{x\to a+}(x^2-x)(x-2a-7)=(a^2-a)(-a-7)$$

$$\lim_{x\to a-}f(x)g(x)=\lim_{x\to a-}(x+3)(x-2a-7)=(a+3)(-a-7)$$

$$f(a)g(a)=(a+3)(-a-7)$$

이므로

$(a^2-a)(-a-7)=(a+3)(-a-7)$

$(a+7)(a^2-2a-3)=0$, $\quad (a+7)(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-7$ 또는 $a=-1$ 또는 $a=3$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$(-7)\cdot(-1)\cdot 3=21$ 답 21

0218 전략 사잇값의 정리를 이용한다.

풀이 $g(x)=f(x)-x$로 놓으면 함수 $g(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, ··· ❶

$g(a)=f(a)-a=b-a>0$,

$g(b)=f(b)-b=a-b<0$

이므로 $g(a)g(b)<0$ ··· ❷

따라서 사잇값의 정리에 의하여 $g(c)=0$인 c가 구간 $(a,\ b)$에 적어도 1개 존재한다. 즉 방정식 $f(x)=x$는 구간 $(a,\ b)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. ··· ❸

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ $g(x)=f(x)-x$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속임을 알 수 있다.	30 %
❷ $g(a)g(b)<0$임을 알 수 있다.	30 %
❸ 방정식 $f(x)=x$가 구간 $(a,\ b)$에서 실근을 가짐을 알 수 있다.	40 %

Ⅱ. 다항함수의 미분법

03 미분계수와 도함수

0219 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{4-2}{2}=1$ 답 1

0220 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{-2-(-2)}{2}=0$ 답 0

0221 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{2-(-2)}{2}=2$ 답 2

0222 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(-1)-f(-4)}{-1-(-4)}=\frac{3-9}{3}=-2$ 답 -2

0223 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{(1+\Delta x)-1}=\frac{\{-2(1+\Delta x)+1\}-(-1)}{\Delta x}$

$=\frac{-2\Delta x}{\Delta x}=-2$ 답 -2

0224 $f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(\boxed{1})}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{(\Delta x)^2+2\Delta x}}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2)=\boxed{2}$

$\therefore$ (가) 1 (나) $(\Delta x)^2+2\Delta x$ (다) 2

답 풀이 참조

0225 $f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{-(1+\Delta x)+2\}-1}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$ 답 -1

0226 $f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(1+\Delta x)^2-(1+\Delta x)\}-0}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+1)=1$ 답 1

0227 $f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{3(1+\Delta x)^3+(1+\Delta x)+1\}-5}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(\Delta x)^3+9(\Delta x)^2+10\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\{3(\Delta x)^2+9\Delta x+10\}=10$ 답 10

0228 답 (가) 연속 (나) 미분가능하지 않다

0229 (i) $f(0)=0$이고,

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}x^2=0$, $\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}x^3=0$

이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0+}x=0$,

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to 0-}x^2=0$

이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

따라서 $f'(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

답 연속이고 미분가능하다.

0230 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{10-10}{\Delta x}=0$ 답 $f'(x)=0$

0231 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{3(x+\Delta x)+1\}-(3x+1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x}{\Delta x}=3$ 답 $f'(x)=3$

0232 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)\}-(x^2+x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+(2x+1)\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x+1)$

$=2x+1$ 답 $f'(x)=2x+1$

0233 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(x+\Delta x)^3+5\}-(x^3+5)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^3+3x(\Delta x)^2+3x^2\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\{(\Delta x)^2+3x\Delta x+3x^2\}$

$=3x^2$ 답 $f'(x)=3x^2$

0234 (1) $f'(x)$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{-(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)+2\}-(-x^2+3x+2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(\Delta x)^2+(-2x+3)\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(-\Delta x-2x+3)=-2x+3$

(2) $f'(x)=-2x+3$이므로 $\quad f'(0)=3$

답 (1) $f'(x)=-2x+3$ (2) 3

0235 $y'=(x^{10})'=10x^9$ 답 $y'=10x^9$

0236 $y'=(-9)'=0$ 답 $y'=0$

0237 $y'=(2x^7)'=14x^6$ 답 $y'=14x^6$

0238 $y'=(-4x+3)'=(-4x)'+(3)'$
$=-4$ 답 $y'=-4$

0239 $y'=(x^2-3x+8)'=(x^2)'-(3x)'+(8)'$
$=2x-3$ 답 $y'=2x-3$

0240 $y'=(2x^3-3x^2+x+1)'$
$=(2x^3)'-(3x^2)'+(x)'+(1)'$
$=6x^2-6x+1$ 답 $y'=6x^2-6x+1$

0241 함수 $f(x)+g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수는
$f'(0)+g'(0)=2+(-3)=-1$ 답 -1

0242 함수 $f(x)-2g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수는
$f'(0)-2g'(0)=2-2\cdot(-3)=8$ 답 8

0243 $y'=(x+1)'(2x+3)+(x+1)(2x+3)'$
$=2x+3+2(x+1)=4x+5$ 답 $y'=4x+5$

0244 $y'=(3x)'(3x-1)+3x(3x-1)'$
$=3(3x-1)+3x\cdot 3$
$=18x-3$ 답 $y'=18x-3$

0245 $y'=(x)'(x-1)(x-2)+x(x-1)'(x-2)$
$+x(x-1)(x-2)'$
$=(x-1)(x-2)+x(x-2)+x(x-1)$
$=3x^2-6x+2$ 답 $y'=3x^2-6x+2$

0246 $y'=(x+1)'(2x-1)(-x+2)$
$+(x+1)(2x-1)'(-x+2)$
$+(x+1)(2x-1)(-x+2)'$
$=(2x-1)(-x+2)+2(x+1)(-x+2)$
$-(x+1)(2x-1)$
$=-6x^2+6x+3$ 답 $y'=-6x^2+6x+3$

0247 $y'=\{(2x-3)^5\}'=5(2x-3)^4(2x-3)'$
$=10(2x-3)^4$ 답 $y'=10(2x-3)^4$

0248 $y'=\{(x^2-3x+3)^2\}'$
$=2(x^2-3x+3)(x^2-3x+3)'$
$=2(2x-3)(x^2-3x+3)$
답 $y'=2(2x-3)(x^2-3x+3)$

0249 x의 값이 2에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(2)}{a-2}=\frac{(a^3-2a)-4}{a-2}=\frac{(a-2)(a^2+2a+2)}{a-2}$$
$$=a^2+2a+2$$

따라서 $a^2+2a+2=26$이므로
$a^2+2a-24=0, \quad (a+6)(a-4)=0$
$\therefore a=4\ (\because a>2)$ 답 ②

0250 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{3^3-3a+5-(1^3-a+5)}{2}$$
$$=\frac{26-2a}{2}=13-a$$

따라서 $13-a=4$이므로 $\quad a=9$ 답 9

0251 x의 값이 -2에서 2까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\frac{10-(-2)}{4}=3$$ ➊

또 x의 값이 -1에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(-1)}{a-(-1)}=\frac{a^2+3a-(-2)}{a+1}$$
$$=\frac{(a+1)(a+2)}{a+1}=a+2$$ ➋

따라서 $a+2=3$이므로 $\quad a=1$ ➌

답 1

채점 기준	비율
➊ x의 값이 -2에서 2까지 변할 때의 평균변화율을 구할 수 있다.	40 %
➋ x의 값이 -1에서 a까지 변할 때의 평균변화율을 구할 수 있다.	40 %
➌ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

0252 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{f(a)}{a}=2a^2+a$$

따라서 $f(a)=2a^3+a^2$이므로
$f(2)=16+4=20$ 답 ④

0253 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은 두 점 A$(0,\ f(0))$, B$(4,\ f(4))$를 지나는 직선의 기울기와 같다.
따라서 직선 AB의 기울기는 -1이다. 답 -1

0254 직선 OA의 기울기는 함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율과 같으므로

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=2$$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=0$에 대하여 대칭이므로
$f(-2)=f(2)$

따라서 함수 $f(x)$에서 x의 값이 -2에서 0까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}=\frac{f(0)-f(2)}{2}=-\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=-2$$

답 ①

0255 x의 값이 -1에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{12-0}{4}=3$$

또 함수 $f(x)$의 $x=c$에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(c)&=\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\{(c+h)^2+(c+h)\}-(c^2+c)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{h^2+(2c+1)h}{h}\\&=\lim_{h\to0}(h+2c+1)=2c+1\end{aligned}$$

따라서 $2c+1=3$이므로 $c=1$

답 ③

0256 x의 값이 2에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(2)}{a-2}=\frac{f(a)-1}{a-2}=-a$$

따라서 $f(a)=-a^2+2a+1$이므로 $x=2$에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(2)&=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\{-(2+h)^2+2(2+h)+1\}-1}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{-h^2-2h}{h}\\&=\lim_{h\to0}(-h-2)=-2\end{aligned}$$

답 -2

0257 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}&=\frac{(b^2-3b+2)-(a^2-3a+2)}{b-a}\\&=\frac{(b^2-a^2)-3(b-a)}{b-a}\\&=\frac{(b+a)(b-a)-3(b-a)}{b-a}\\&=a+b-3\end{aligned}$$

⋯ ❶

또 함수 $f(x)$의 $x=-1$에서의 순간변화율은

$$\begin{aligned}f'(-1)&=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\{(-1+h)^2-3(-1+h)+2\}-6}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{h^2-5h}{h}\\&=\lim_{h\to0}(h-5)=-5\end{aligned}$$

⋯ ❷

따라서 $a+b-3=-5$이므로

$a+b=-2$ ⋯ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율을 구할 수 있다.	40 %
❷ $x=-1$에서의 순간변화율을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0258 $$\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\cdot(-2)=-2f'(1)=-2\cdot2=-4$$

답 ①

0259 $$\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{5h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5}f'(a)$$

답 ①

0260 $$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a+h)}{3h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\{f(a+3h)-f(a)\}-\{f(a+h)-f(a)\}}{3h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}-\frac{1}{3}\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\&=f'(a)-\frac{1}{3}f'(a)=\frac{2}{3}f'(a)\\&=\frac{2}{3}\cdot3=2\end{aligned}$$

답 2

0261 $$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(4h)}{-4h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\{f(h)-f(0)\}-\{f(4h)-f(0)\}}{-4h}\\&=-\frac{1}{4}\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(4h)-f(0)}{4h}\\&=-\frac{1}{4}f'(0)+f'(0)=\frac{3}{4}f'(0)\end{aligned}$$

따라서 $\frac{3}{4}f'(0)=6$이므로 $f'(0)=8$

답 ⑤

0262 $$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x+1)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\\&=\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}\cdot2=1\end{aligned}$$

답 ④

0263 $$\begin{aligned}&\lim_{x\to2}\frac{x^2f(2)-4f(x)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{\{x^2f(2)-4f(2)\}-\{4f(x)-4f(2)\}}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-4)f(2)}{x-2}-\lim_{x\to2}\frac{4\{f(x)-f(2)\}}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}\cdot f(2)-4\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\\&=4f(2)-4f'(2)=4\cdot3-4\cdot2=4\end{aligned}$$

답 4

0264 $x\longrightarrow1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}\{f(x)-5\}=0$이므로 $\quad f(1)=5$ ··· ❶

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-5}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}f'(1)$$

따라서 $\frac{1}{2}f'(1)=2$이므로 $\quad f'(1)=4$ ··· ❷

$\therefore f(1)+f'(1)=9$ ··· ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $f(1)+f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0265 $x^2=t$로 놓으면 $x\to-1$일 때 $t\to1$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x^2)-f(1)}{(x+1)(x-1)}\cdot(x-1)$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x-1)$$
$$=\lim_{t\to1}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}\cdot(-2)$$
$$=-2f'(1)$$
$$=-2\cdot5=-10$$

답 -10

0266 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$

$$\therefore f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$=f'(0)=3$$

답 3

0267 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0 \quad \therefore f(0)=0$

$$\therefore f'(5a)=\lim_{h\to0}\frac{f(5a+h)-f(5a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(5a)+f(h)+5ah-f(5a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+5ah}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+5a$$
$$=f'(0)+5a=2+5a$$

따라서 $2+5a=-3$이므로 $\quad a=-1$

답 ②

0268
$$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2)+f(h)+2-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2}{h}$$

즉 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2}{h}=3$이므로 자연수 k에 대하여

$$f'(k)=\lim_{h\to0}\frac{f(k+h)-f(k)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(k)+f(h)+2-f(k)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2}{h}=3$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{10}f'(k)=\sum_{k=1}^{10}3=30$$

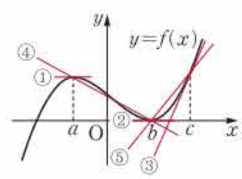
답 ⑤

0269 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 기울기가 -3이므로 $\quad f'(2)=-3$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}=-\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$$
$$=-f'(2)=3$$

답 ⑤

0270 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기이고, 평균변화율은 두 점을 지나는 직선의 기울기이다.



따라서 직선의 기울기 중 가장 큰 것은 ③이다.

답 ③

0271 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ -4)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3+3x-4-(-4)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3+3x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{3}x^2+3\right)=3$$ ··· ❶

이때 $\tan\theta$의 값은 이 접선의 기울기와 같으므로

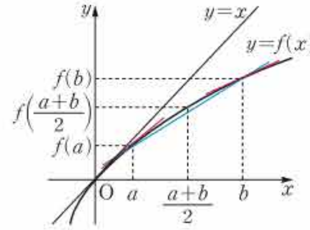
$\tan\theta=3$ ··· ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ 접선의 기울기를 구할 수 있다.	70 %
❷ $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0272 ㄱ. $x=a$인 점에서의 접선의 기울기는 $x=b$인 점에서의 접선의 기울기보다 크므로

$f'(a)>f'(b)$



ㄴ. $a\le x\le b$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하므로

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

ㄷ. 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기는 직선 $y=x$의 기울기보다 작으므로

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

라쎈 특강

$a<b$일 때

① 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하면

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{f(a)+f(b)}{2},\quad f'(a)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

② 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하면

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{f(a)+f(b)}{2},\quad f'(a)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

0273 ㄱ. (i) $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{h\to0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{|h|-h}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{0}{h}=0,$

$\lim_{h\to0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{|h|-h}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-2h}{h}=-2$

이므로 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$이 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. (i) $\lim_{x\to0}g(x)=g(0)=0$

따라서 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{h\to0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h|h|}{h}=\lim_{h\to0}|h|=0$

따라서 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. (i) $\lim_{x\to0}k(x)=k(0)=0$

따라서 $k(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{h\to0+}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{|h^3|}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h^3}{h}=\lim_{h\to0+}h^2=0,$

$\lim_{h\to0-}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{|h^3|}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-h^3}{h}=\lim_{h\to0-}(-h^2)=0$

이므로 $\lim_{h\to0}\frac{k(h)-k(0)}{h}=0$

따라서 $k(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

이상에서 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ㄱ뿐이다. 답 ①

0274 함수 $y=f(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 불연속이므로

$m=2$

또 $x=-1$, $x=0$, $x=2$에서 미분가능하지 않으므로

$n=3$

$\therefore m+n=5$ 답 5

0275 ① 함수 $f(x)$는 $x=3$, $x=4$에서 불연속이므로 불연속인 x의 값은 2개이다.

② 함수 $f(x)$는 $x=2$, $x=3$, $x=4$에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 x의 값은 3개이다.

③ $f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$의 1개뿐이다.

④ $1<x<2$에서의 접선의 기울기는 음수이므로 $f'(x)<0$이다.

⑤ $\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to3}f(x)$의 값이 존재한다.

답 ③

0276 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)\qquad\therefore a+b=1$ …… ㉠

또 $f'(1)$이 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}&=\lim_{h\to0+}\frac{(1+h)^2-1}{h}\\&=\lim_{h\to0+}\frac{h^2+2h}{h}\\&=\lim_{h\to0+}(h+2)=2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}&=\lim_{h\to0-}\frac{a(1+h)+b-1}{h}\\&=\lim_{h\to0-}\frac{a(1+h)-a}{h}\ (\because ㉠)\\&=\lim_{h\to0-}\frac{ah}{h}=a\end{aligned}$$

에서 $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=-1$

$\therefore ab=-2$ 답 -2

0277 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)\qquad\therefore b=1$

또 $f'(0)$이 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}&=\lim_{h\to0+}\frac{(ah+1)-1}{h}\\&=\lim_{h\to0+}\frac{ah}{h}=a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}&=\lim_{h\to0-}\frac{h^3+h^2+1-1}{h}\\&=\lim_{h\to0-}\frac{h^2(h+1)}{h}\\&=\lim_{h\to0-}h(h+1)=0\end{aligned}$$

에서 $a=0$

$\therefore a+b=1$ 답 ①

0278 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하므로 $x=1$에서 미분가능하다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1),\qquad -b+3=a-2$

$\therefore a+b=5$ …… ㉠

또 $f'(1)$이 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1+}\frac{(x^2+ax-3)-(a-2)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1+}\frac{x^2+ax-1-a}{x-1}\\&=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x+1+a)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1+}(x+1+a)\\&=2+a\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(-bx^2+3x)-(a-2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(-bx^2+3x)-(-b+3)}{x-1}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{-bx^2+3x+b-3}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(-bx-b+3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}(-bx-b+3)$$
$$=-2b+3$$

에서 $2+a=-2b+3$

$\therefore a+2b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=9,\ b=-4$

$\therefore a-b=13$

답 ⑤

0279 $f'(-1)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1+}\frac{(x+a)|x+1|}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+}\frac{(x+a)(x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+}(x+a)$$
$$=a-1$$
$$\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1-}\frac{(x+a)|x+1|}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1-}\frac{-(x+a)(x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1-}\{-(x+a)\}$$
$$=-a+1$$

에서 $a-1=-a+1,\quad 2a=2$

$\therefore a=1$

답 1

0280 $f'(x)=3x^2+1$이므로 $f'(a)=10$에서

$3a^2+1=10,\quad a^2=3$

$\therefore a=\sqrt{3}\ (\because a>0)$

답 $\sqrt{3}$

0281 $f(2)=3$에서 $4+2a+b=3$

$\therefore 2a+b=-1$ …… ㉠

$f'(x)=2x+a$이므로 $f'(0)=-2$에서

$a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $b=3$

$\therefore ab=-6$

답 ①

0282 $f(x)=2x^2-xf'(2)$에서

$f'(x)=4x-f'(2)$

위의 식에 $x=2$를 대입하면 $f'(2)=8-f'(2)$

$2f'(2)=8 \quad \therefore f'(2)=4$

따라서 $f'(x)=4x-4$이므로

$f'(4)=4\cdot4-4=12$

답 ⑤

0283 $f(x)=\sum_{k=1}^{10}kx^k=x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10}$이므로

$f'(x)=1+2^2x+3^2x^2+\cdots+10^2x^9$ ··· ❶

$$\therefore f'(1)=1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$$
$$=\sum_{k=1}^{10}k^2=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}$$
$$=385$$ ··· ❷

답 385

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ $f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

라쎈 특강 자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

0284 $f'(x)=(x^2+x+1)'(x^3+x^2-x-1)$
$\quad+(x^2+x+1)(x^3+x^2-x-1)'$
$=(2x+1)(x^3+x^2-x-1)$
$\quad+(x^2+x+1)(3x^2+2x-1)$

$\therefore f'(-1)=-1\cdot0+1\cdot0=0$

답 ③

0285 $f'(x)=(x)'(x+2)(x+4)+x(x+2)'(x+4)$
$\quad+x(x+2)(x+4)'$
$=(x+2)(x+4)+x(x+4)+x(x+2)$
$=3x^2+12x+8$

$f'(k)=0$에서 k는 이차방정식 $3k^2+12k+8=0$의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 합은

$-\frac{12}{3}=-4$

답 -4

0286 $f'(x)=4(x^2-x)^3(x^2-x)'$
$=4(2x-1)(x^2-x)^3$

$\therefore f'(-1)+f'(2)=4\cdot(-3)\cdot2^3+4\cdot3\cdot2^3$
$=0$

답 ③

0287 임의의 실수 x에 대하여

$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

이므로

$$f(x)=\frac{(x+1)(x^6-1)}{x^2-x+1}=\frac{(x+1)(x^3+1)(x^3-1)}{x^2-x+1}$$
$$=\frac{(x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)}{x^2-x+1}$$
$$=(x+1)^2(x-1)(x^2+x+1)$$

$\therefore f'(x)=\{(x+1)^2\}'(x-1)(x^2+x+1)$
$\quad+(x+1)^2(x-1)'(x^2+x+1)$
$\quad+(x+1)^2(x-1)(x^2+x+1)'$
$=2(x+1)(x-1)(x^2+x+1)+(x+1)^2(x^2+x+1)$
$\quad+(x+1)^2(x-1)(2x+1)$

$\therefore f'(1)=2\cdot2\cdot0\cdot3+2^2\cdot3+2^2\cdot0\cdot3$
$=12$

답 12

0288 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2)-f(2-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$

$=f'(2)$

이때 $f'(x)=3x^2-4x$이므로 구하는 값은

$f'(2)=4$ 답 4

0289 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

이때 $f'(x)=4x^3-3x^2+2x-1$이므로 구하는 값은

$f'(1)=2$ 답 ③

0290 $f(-1)=0$이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$

$=\frac{1}{2}f'(-1)$

이때

$f'(x)=(x^2-1)'(x^3-2x+2)+(x^2-1)(x^3-2x+2)'$

$=2x(x^3-2x+2)+(x^2-1)(3x^2-2)$

이므로 $f'(-1)=-2\cdot 3+0\cdot 1=-6$

따라서 구하는 값은

$\frac{1}{2}f'(-1)=\frac{1}{2}\cdot(-6)=-3$ 답 ②

0291 $\lim_{x\to 3}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(3)\}^2}{x-3}$

$=\lim_{x\to 3}\frac{\{f(x)-f(3)\}\{f(x)+f(3)\}}{x-3}$

$=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\cdot\lim_{x\to 3}\{f(x)+f(3)\}$

$=f'(3)\cdot 2f(3)$ ··· ❶

이때 $f(x)=x^3-2x^2$, $f'(x)=3x^2-4x$이므로 구하는 값은 ··· ❷

$f'(3)\cdot 2f(3)=15\cdot 2\cdot 9=270$ ··· ❸

답 270

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to 3}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(3)\}^2}{x-3}$을 $f'(3)$, $f(3)$으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 극한값을 구할 수 있다.	20 %

0292 $f(x)=x^8+2x$로 놓으면 $f(-1)=-1$이므로

$\lim_{x\to -1}\frac{x^8+2x+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$

이때 $f'(x)=8x^7+2$이므로 구하는 값은

$f'(-1)=-8+2=-6$ 답 -6

0293 $p=1$, $q=1$, $r=8$이므로

$p+q+r=10$ 답 10

0294 $f(x)=x^n-3x$로 놓으면 $f(1)=-2$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=10$

이때 $f'(x)=nx^{n-1}-3$이므로 $f'(1)=10$에서

$n-3=10$ $\therefore n=13$ 답 ⑤

0295 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$

$=\frac{1}{2}f'(1)$

즉 $\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}$이므로 $f'(1)=1$

한편 $f(x)=x^3+ax^2+b$, $f'(x)=3x^2+2ax$이므로

$f(-1)=3$에서 $-1+a+b=3$

$\therefore a+b=4$ ······ ㉠

$f'(1)=1$에서 $3+2a=1$ $\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=5$

따라서 $f(x)=x^3-x^2+5$이므로

$f(-2)=-8-4+5=-7$ 답 ①

0296 $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=2$에서 $x\longrightarrow -1$일 때 극한값이 존재하고

(분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to -1}f(x)=0$이므로 $f(-1)=0$ ··· ❶

$\therefore \lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$=f'(-1)=2$ ··· ❷

한편 $f(x)=x^3+ax+b$, $f'(x)=3x^2+a$이므로

$f(-1)=0$에서 $-1-a+b=0$

$\therefore a-b=-1$ ······ ㉠

$f'(-1)=2$에서 $3+a=2$ $\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=0$ ··· ❸

$\therefore a+b=-1$ ··· ❹

답 -1

채점 기준	비율
❶ $f(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $f'(-1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

라쎈 특강 함수의 극한에서 미정계수의 결정

① $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)이고 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면

$\lim_{x\to a}f(x)=0$

② $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 0이 아닌 실수)이고 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이면

$\lim_{x\to a}g(x)=0$

0297 조건 (가)에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 2인 이차식이므로

$f(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 $x\longrightarrow 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로

(분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2}\{f(x)-11\}=0$이므로 $f(2)=11$

$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)-11}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=f'(2)=7$

한편 $f(x)=2x^2+ax+b$, $f'(x)=4x+a$이므로

$f(2)=11$에서　$8+2a+b=11$

$\therefore 2a+b=3$　…… ㉠

$f'(2)=7$에서　$8+a=7$

$\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면　$b=5$

따라서 $f(x)=2x^2-x+5$이므로

$f(1)=2-1+5=6$　답 ③

0298 $f(1)=2$에서

$1+a+2=2$　$\therefore a=-1$

따라서 $f(x)=x^2-x+2$에서 $f'(x)=2x-1$이므로

$m=f'(1)=2-1=1$

$\therefore a+m=0$　답 ③

0299 $f'(x)=2x-5$이므로 $f'(a)=3$에서

$2a-5=3$　$\therefore a=4$

$f(a)=b$이므로　$b=f(4)=16-20=-4$

$\therefore ab=-16$　답 -16

0300 $f(x)=ax^2+bx+c$로 놓으면

$f'(x)=2ax+b$

$f(-1)=6$에서　$a-b+c=6$　…… ㉠

$f(1)=0$에서　$a+b+c=0$　…… ㉡

$f'(1)=1$에서　$2a+b=1$　…… ㉢　→ ❶

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-3,\ c=1$　→ ❷

$\therefore a^2+b^2+c^2=4+9+1=14$　→ ❸

답 14

채점 기준	비율
❶ a, b, c에 대한 방정식을 세울 수 있다.	50 %
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a^2+b^2+c^2$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0301 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$, a, b, c는 상수)로 놓으면

$f'(x)=2ax+b$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면

$(x+1)(2ax+b)-2(ax^2+bx+c)+2=0$

$\therefore (2a-b)x+(b-2c+2)=0$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2a-b=0,\ b-2c+2=0$　…… ㉠

한편 $f(0)=2$이므로　$c=2$

$c=2$를 ㉠에 대입한 후 두 식을 연립하면

$a=1,\ b=2$

따라서 $f(x)=x^2+2x+2$이므로

$f(2)=4+4+2=10$　답 10

라쎈 특강　항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면
　$a=b=c=0$

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면
　$a=a',\ b=b',\ c=c'$

③ $ax+by+c=0$이 x, y에 대한 항등식이면
　$a=b=c=0$

0302 $f'(x)=2x+2$이므로 $f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면

$x(2x+2)+a(x^2+2x)+2x=0$

$\therefore (2+a)x^2+(2a+4)x=0$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2+a=0,\ 2a+4=0$　$\therefore a=-2$　답 ②

0303 $f(x)=x^8+ax^2+b$로 놓으면　$f'(x)=8x^7+2ax$

$f(x)$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(1)=0,\ f'(1)=0$

$f(1)=0$에서　$1+a+b=0$　…… ㉠

$f'(1)=0$에서　$8+2a=0$　$\therefore a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면　$b=3$

$\therefore b-a=7$　답 ④

0304 $f(x)=x^4-4x+k$로 놓으면　$f'(x)=4x^3-4$

$f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(a)=0,\ f'(a)=0$

$f(a)=0$에서　$a^4-4a+k=0$　…… ㉠

$f'(a)=0$에서　$4a^3-4=0$

$a^3=1$　$\therefore a=1$　→ ❶

$a=1$을 ㉠에 대입하면　$k=3$　→ ❷

$\therefore ak=3$　→ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ ak의 값을 구할 수 있다.	20 %

0305 다항식 $x^{10}-1$을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^{10}-1=(x+1)^2Q(x)+ax+b$　…… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-a+b$　…… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$

위의 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면　$a=-10$

$a=-10$을 ㉡에 대입하면　$b=-10$

따라서 $R(x)=-10x-10$이므로

$R\left(-\frac{1}{2}\right)=-10\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-10=-5$　답 -5

다른풀이 $f(x)=x^{10}-1$로 놓으면 다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는

$$R(x)=f'(-1)(x+1)+f(-1)$$

이때 $f(x)=x^{10}-1$, $f'(x)=10x^9$이므로

$$f(-1)=0,\ f'(-1)=-10$$

따라서 $R(x)=-10(x+1)=-10x-10$이므로

$$R\left(-\frac{1}{2}\right)=-5$$

라쎈 특강 다항식을 $(x-a)^2$으로 나누었을 때의 나머지

다항식 $f(x)$를 $(x-a)^2$ (a는 상수)으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)=px+q$ (p, q는 상수)라 하면

$$f(a)=R(a),\ f'(a)=R'(a)$$

즉 $f(a)=pa+q$, $f'(a)=p$이므로

$$\begin{aligned}R(x)&=f'(a)\cdot x+\{f(a)-pa\}\\&=f'(a)\cdot x+\{f(a)-f'(a)\cdot a\}\\&=f'(a)(x-a)+f(a)\end{aligned}$$

0306 전략 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$임을 이용한다.

풀이 x의 값이 2에서 $2+h$까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2}=\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=\frac{h^2+4h}{h}=h+4$$

따라서 $h+4=8$이므로 $h=4$

답 ④

0307 전략 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$임을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $f'(3)=2$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(3+3h)-f(3)}{h}&=3\lim_{h\to0}\frac{f(3+3h)-f(3)}{3h}\\&=3f'(3)=3\cdot2=6\end{aligned}$$

답 6

0308 전략 $f'(x)$를 구하여 $x=1$을 대입한다.

풀이 $f'(x)=21x^2-a$이므로 $f'(1)=2$에서

$21-a=2$ $\therefore a=19$

답 19

0309 전략 곱의 미분법을 이용한다.

풀이 $F(x)=f(x)g(x)$라 하면

$$F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \quad \cdots ❶$$

이므로 구하는 순간변화율은

$$\begin{aligned}F'(0)&=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)\\&=6\cdot2+(-1)\cdot(-3)=15 \quad \cdots ❷\end{aligned}$$

답 15

채점 기준	비율
❶ $f(x)g(x)$의 도함수를 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(x)g(x)$의 $x=0$에서의 순간변화율을 구할 수 있다.	50 %

0310 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=a$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이다.

풀이 $f(x)=(x^2+1)(3x-1)$로 놓으면

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x^2+1)'(3x-1)+(x^2+1)(3x-1)'\\&=2x(3x-1)+(x^2+1)\cdot3\\&=9x^2-2x+3\end{aligned}$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=9-2+3=10$$

답 ⑤

0311 전략 평균변화율과 미분계수를 각각 구한 후 방정식을 세운다.

풀이 함수 $f(x)$에서 x의 값이 -1에서 k까지 변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{f(k)-f(-1)}{k-(-1)}&=\frac{(k^3-3)-(-4)}{k+1}\\&=\frac{k^3+1}{k+1}\\&=\frac{(k+1)(k^2-k+1)}{k+1}\\&=k^2-k+1\end{aligned}$$

한편 $f'(x)=3x^2$이므로 $x=\sqrt{7}$에서의 미분계수는

$$f'(\sqrt{7})=3\cdot(\sqrt{7})^2=21$$

따라서 $k^2-k+1=21$이므로

$k^2-k-20=0$, $(k+4)(k-5)=0$

$\therefore k=5$ ($\because k>-1$)

답 5

0312 전략 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$임을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$이므로 $f'(a)=3$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{h\to0}&\frac{f(a+4h)-f(a+h^2)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\{f(a+4h)-f(a)\}-\{f(a+h^2)-f(a)\}}{h}\\&=4\lim_{h\to0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{4h}-\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}\cdot h\\&=4f'(a)-f'(a)\cdot0\\&=4f'(a)\\&=4\cdot3=12\end{aligned}$$

답 ④

0313 전략 $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$의 $f(x+h)$에 주어진 항등식을 대입하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-0$ $\therefore f(0)=0$

$$\begin{aligned}\therefore f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-2xh-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-2xh}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-2x\\&=f'(0)-2x=-2x+5\end{aligned}$$

답 ②

0314 전략 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은 그래프 위의 두 점을 지나는 직선의 기울기와 같고, 미분계수는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점에서의 접선의 기울기와 같음을 이용한다.

풀이 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(0,\ f(0))$, $(x,\ f(x))$를 지나는 직선의 기울기이고, $f'(0)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ f(0))$에서의 접선의 기울기이다.
따라서 $x>0$일 때 주어진 부등식을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

0315 전략 $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$이지만 $\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$이 존재하지 않는 함수 $f(x)$를 찾는다.

풀이 ① (i) $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)=-7$
따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
(ii) $\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{-7-(-7)}{h}=0$
따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
② (i) $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)=0$
따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
(ii) $$\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{|h|^2-0}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{h^2}{h}=\lim_{h\to0}h=0$$
따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
③ $f(0)$이 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.
④ (i) $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)=0$
따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
(ii) $\lim_{h\to0+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\dfrac{2h-0}{h}=\lim_{h\to0+}2=2$,
$\lim_{h\to0-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\dfrac{-h-0}{h}=\lim_{h\to0-}(-1)=-1$
이므로 $\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$이 존재하지 않는다.
따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.
⑤ (i) $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)=1$
따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
(ii) $$\lim_{h\to0+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\dfrac{(h-1)^2-1}{h}=\lim_{h\to0+}\dfrac{h^2-2h}{h}=\lim_{h\to0+}(h-2)=-2$$
$$\lim_{h\to0-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\dfrac{(-2h+1)-1}{h}=\lim_{h\to0-}\dfrac{-2h}{h}=-2$$
이므로 $\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=-2$
따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다. 답 ④

0316 전략 $f(x)$가 $x=-1$, $x=1$에서 연속이고 $f'(-1)$, $f'(1)$이 존재하도록 하는 a, b, c, d의 값을 구한다.

풀이 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하면 $x=-1$, $x=1$에서 미분가능하다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to-1} f(x)=f(-1)$, $3+a=-1+b-c$
$\therefore a-b+c=-4$ ······ ㉠
또 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$, $1+b+c=-3+d$
$\therefore b+c-d=-4$ ······ ㉡
한편 $f'(x)=\begin{cases}-3 & (x<-1)\\ 3x^2+2bx+c & (-1<x<1)\\ -3 & (x>1)\end{cases}$이고
$f'(-1)$이 존재하므로
$\lim_{x\to-1+} f'(x)=\lim_{x\to-1-} f'(x)$, $3-2b+c=-3$
$\therefore 2b-c=6$ ······ ㉢
또 $f'(1)$이 존재하므로
$\lim_{x\to1+} f'(x)=\lim_{x\to1-} f'(x)$, $-3=3+2b+c$
$\therefore 2b+c=-6$ ······ ㉣
㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $b=0$, $c=-6$
이를 ㉠, ㉡에 각각 대입하면 $a=2$, $d=-2$
$\therefore a+b+c+d=-6$ 답 ③

0317 전략 주어진 조건을 이용하여 a, b, c에 대한 연립방정식을 세운다.

풀이 $f(1)=0$에서 $a+b+c=0$ ······ ㉠
$f'(x)=2ax+b$이므로 $f'(-2)=-14$에서
$-4a+b=-14$ ······ ㉡
$f'(1)=4$에서 $2a+b=4$ ······ ㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-2$
이를 ㉠에 대입하면 $c=-1$
$\therefore abc=6$ 답 ⑤

0318 전략 $\dfrac{1}{x}=h$로 놓고 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 $\dfrac{1}{x}=h$로 놓으면 $x\longrightarrow\infty$일 때 $h\longrightarrow0$이므로
$$\lim_{x\to\infty} x\left\{f\left(3+\dfrac{1}{x}\right)-f(3)\right\}=\lim_{h\to0}\dfrac{1}{h}\{f(3+h)-f(3)\}=\lim_{h\to0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)$$
이때 $f'(x)=2x-4$이므로 구하는 값은
$f'(3)=6-4=2$ 답 ⑤

0319 전략 주어진 식의 일부를 $f(x)$로 치환하여 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to1}\dfrac{x^n+kx-3}{x-1}=13$에서 $x\longrightarrow1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(x^n+kx-3)=0$이므로

$1+k-3=0 \quad \therefore k=2$ ··· ❶

$f(x)=x^n+2x$로 놓으면 $f(1)=3$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=13$$

이때 $f'(x)=nx^{n-1}+2$이므로 $f'(1)=13$에서

$n+2=13 \quad \therefore n=11$ ··· ❷

$\therefore n-k=9$ ··· ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $n-k$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0320 전략 도함수를 구하여 a, b에 대한 연립방정식을 세운다.

풀이 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$이므로

$f'(1)=-1$ ··· ❶

$$\lim_{h\to0}\frac{f(-2-h)-f(-2)}{h}=-\lim_{h\to0}\frac{f(-2-h)-f(-2)}{-h}=-f'(-2)$$

이므로 $\quad -f'(-2)=-26$

$\therefore f'(-2)=26$ ··· ❷

이때 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f'(1)=-1$에서 $\quad 3+2a+b=-1$

$\therefore 2a+b=-4$ ······ ㉠

$f'(-2)=26$에서 $\quad 12-4a+b=26$

$\therefore 4a-b=-14$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-3,\ b=2$ ··· ❸

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$이므로

$f(1)=1$ ··· ❹

답 1

채점 기준	비율
❶ $f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $f'(-2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0321 전략 $f(x)=ax^2+bx+c$로 놓고 $f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 항등식에 대입한 후 계수를 비교한다.

풀이 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$, a, b, c는 상수)로 놓으면

$f'(x)=2ax+b$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면

$x(2ax+b)=ax^2+bx+c+x^2+3$

$\therefore 2ax^2+bx=(a+1)x^2+bx+c+3$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2a=a+1,\ 0=c+3$

$\therefore a=1,\ c=-3$

한편 $f'(x)=2x+b$이므로 $f'(1)=4$에서

$2+b=4 \quad \therefore b=2$

즉 $f(x)=x^2+2x-3$이므로 $x^2+2x-3=0$에서

$(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근의 합은

$-3+1=-2$

답 -2

0322 전략 $f(x)$를 몫과 나머지를 이용하여 나타낸 후 그래프 위의 점의 좌표와 그 점에서의 접선의 기울기를 이용한다.

풀이 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ ······ ㉠

$f(1)=2$이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a+b=2$ ······ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

$f'(1)=-3$이므로 위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a=-3$

$a=-3$을 ㉡에 대입하면 $\quad b=5$

따라서 $R(x)=-3x+5$이므로

$R(-1)=8$

답 ①

0323 전략 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$임을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이
$$\begin{aligned}&\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-x^3f(1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{\{f(x^3)-f(1)\}-\{x^3f(1)-f(1)\}}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}\cdot f(1)\\&=\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\cdot(x^2+x+1)-\lim_{x\to1}(x^2+x+1)\cdot f(1)\\&=3f'(1)-3f(1)\\&=3\cdot(-1)-3\cdot(-2)=3\end{aligned}$$

답 ③

0324 전략 $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$의 $f(x+h)$에 주어진 항등식을 대입하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=3f(0)f(0)$

$f(0)>0$이므로 $\quad f(0)=\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}\therefore f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{3f(x)f(h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{3f(x)\left\{f(h)-\frac{1}{3}\right\}}{h}\\&=3f(x)\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\\&=3f(x)f'(0)\\&=3f(x)\cdot2=6f(x)\end{aligned}$$

이때 $f(x)\neq 0$이므로

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=6$$

답 6

0325 전략 먼저 도함수 $f'(x)$를 구한 후 등비수열의 합을 이용한다.

풀이 $f(x)=\sum_{n=1}^{10}\frac{x^n}{n}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{10}}{10}$이므로

$$f'(x)=1+x+x^2+\cdots+x^9$$

$$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^9}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2^{10}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1023}{512}$$

따라서 $p=512$, $q=1023$이므로

$$q-p=511$$

답 ④

라쎈 특강 등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때

① $r\neq 1$이면 $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

② $r=1$이면 $S_n=na$

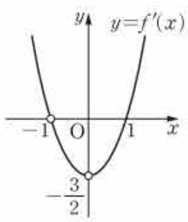
0326 전략 $x=0$에서의 미분가능성을 판단하고 도함수 $f'(x)$를 구하여 극한값을 구한다.

풀이 ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2} & (x<-1 \text{ 또는 } x>0)\\ \frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2} & (-1<x<0)\end{cases}$$

이므로 $y=f'(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$y=f'(x)$의 그래프에서

$$\lim_{x\to 0-}f'(x)=\lim_{x\to 0+}f'(x)=-\frac{3}{2}$$

이므로 $\lim_{x\to 0}f'(x)=-\frac{3}{2}$

ㄷ. $f'(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow -1+$일 때 $t\longrightarrow 0-$이므로

$$\lim_{x\to -1+}f(f'(x))=\lim_{t\to 0-}f(t)=-1$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

0327 전략 먼저 $f(x)$의 차수를 구한다.

풀이 $f(x)$가 이차 이상의 다항식이면 $f(x)f'(x)$의 차수가 삼차 이상이므로 $f(x)$는 일차식이다. ··· ❶

$f(x)=ax+b$ ($a\neq 0$, a, b는 상수)로 놓으면

$$f'(x)=a$$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 식에 대입하면

$$(ax+b)a=4x+6$$

$$\therefore (a^2-4)x+(ab-6)=0$$

이 식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$$a^2-4=0,\ ab-6=0$$

$\therefore a=2,\ b=3$ 또는 $a=-2,\ b=-3$ ··· ❷

(i) $a=2$, $b=3$일 때,

$f(x)=2x+3$이므로

$$f(1)f(2)=5\cdot 7=35$$

(ii) $a=-2$, $b=-3$일 때,

$f(x)=-2x-3$이므로

$$f(1)f(2)=-5\cdot(-7)=35$$

(i), (ii)에서

$f(1)f(2)=35$ ··· ❸

답 35

채점 기준	비율
❶ $f(x)$가 일차식임을 알 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(1)f(2)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

Ⅱ. 다항함수의 미분법

04 도함수의 활용 (1)

0328 $f(x)=2x^2-1$로 놓으면 $f'(x)=4x$
따라서 점 $(-1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는
$f'(-1)=-4$
답 -4

0329 $f(x)=x^3+x-2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+1$
따라서 점 $(2,\ 8)$에서의 접선의 기울기는
$f'(2)=12+1=13$
답 13

0330 $f(x)=-3x^4+4x^2+3x+4$로 놓으면
$f'(x)=-12x^3+8x+3$
따라서 점 $(0,\ 4)$에서의 접선의 기울기는
$f'(0)=3$
답 3

0331 $f(x)=x^2-4x$로 놓으면 $f'(x)=2x-4$
점 $(1,\ -3)$에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=2-4=-2$
이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-(-3)=-2\cdot(x-1)$
$\therefore\ y=-2x-1$
답 $y=-2x-1$

0332 $f(x)=-x^2+3x+3$으로 놓으면 $f'(x)=-2x+3$
점 $(2,\ 5)$에서의 접선의 기울기는
$f'(2)=-4+3=-1$
이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-5=-1\cdot(x-2)$
$\therefore\ y=-x+7$
답 $y=-x+7$

0333 $f(x)=2x^3+x+5$로 놓으면 $f'(x)=6x^2+1$
점 $(0,\ 5)$에서의 접선의 기울기는
$f'(0)=1$
이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-5=x$ $\therefore\ y=x+5$
답 $y=x+5$

0334 (1) $f(x)=-x^2+2$로 놓으면 $f'(x)=-2x$
점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-2$
직선 l의 기울기를 a라 하면 $-2a=-1$
$\therefore\ a=\frac{1}{2}$
(2) 직선 l은 점 $(1,\ 1)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로
$y-1=\frac{1}{2}(x-1)$ $\therefore\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

라쎈 특강 수직인 두 직선의 기울기

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 수직이면
$mm'=-1$

0335 $f(x)=x^3+2x^2-1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+4x$
점 $(-1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는
$f'(-1)=3-4=-1$
따라서 점 $(-1,\ 0)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 1이므로 구하는 직선의 방정식은
$y=x+1$
답 $y=x+1$

0336 (1) $g(x)=4x^2-7x$로 놓으면
$f(2)=g(2)=16-14=2$
(2) $g'(x)=8x-7$이므로 $g'(2)=16-7=9$
$\therefore\ f'(2)=g'(2)=9$
답 (1) 2 (2) 9

0337 (1) $f(x)=x^2+1$로 놓으면 $f'(x)=2x$
$\therefore\ f'(t)=2t$
접선의 기울기가 -4이므로 $2t=-4$ $\therefore\ t=-2$
(2) $f(-2)=5$에서 접점의 좌표가 $(-2,\ 5)$이므로 직선 l의 방정식은
$y-5=-4(x+2)$
$\therefore\ y=-4x-3$
답 (1) -2 (2) $y=-4x-3$

0338 $f(x)=-x^2$으로 놓으면 $f'(x)=-2x$
접점의 좌표를 $(t,\ -t^2)$이라 하면 접선의 기울기가 2이므로
$f'(t)=-2t=2$ $\therefore\ t=-1$
따라서 구하는 접점의 좌표는 $(-1,\ -1)$
답 $(-1,\ -1)$

0339 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{1}{3}$로 놓으면 $f'(x)=x-2$
접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{2}t^2-2t+\frac{1}{3}\right)$이라 하면 접선의 기울기가 2이므로
$f'(t)=t-2=2$ $\therefore\ t=4$
따라서 구하는 접점의 좌표는 $\left(4,\ \frac{1}{3}\right)$
답 $\left(4,\ \frac{1}{3}\right)$

0340 $f(x)=x^3+3x^2+5x-4$로 놓으면
$f'(x)=3x^2+6x+5$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3+3t^2+5t-4)$라 하면 접선의 기울기가 2이므로
$f'(t)=3t^2+6t+5=2$
$t^2+2t+1=0,$ $(t+1)^2=0$ $\therefore\ t=-1$
따라서 구하는 접점의 좌표는 $(-1,\ -7)$
답 $(-1,\ -7)$

0341 $f(x)=-x^4+\frac{4}{3}x^3+2x$로 놓으면
$f'(x)=-4x^3+4x^2+2$
접점의 좌표를 $\left(t,\ -t^4+\frac{4}{3}t^3+2t\right)$라 하면 접선의 기울기가 2이므로
$f'(t)=-4t^3+4t^2+2=2$
$t^3-t^2=0,$ $t^2(t-1)=0$
$\therefore\ t=0$ 또는 $t=1$
따라서 구하는 접점의 좌표는 $(0,\ 0),\ \left(1,\ \frac{7}{3}\right)$
답 $(0,\ 0),\ \left(1,\ \frac{7}{3}\right)$

0342 $f(x)=-x^2+3x+5$로 놓으면 $\quad f'(x)=-2x+3$
접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+3t+5)$라 하면 접선의 기울기가 5이므로
$f'(t)=-2t+3=5, \quad -2t=2$
$\therefore t=-1$
따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 1)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-1=5(x+1) \quad \therefore y=5x+6$

답 $y=5x+6$

0343 $f(x)=x^3-2x+4$로 놓으면 $\quad f'(x)=3x^2-2$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3-2t+4)$라 하면 접선의 기울기가 1이므로
$f'(t)=3t^2-2=1, \quad t^2=1$
$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$
따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 5),\ (1,\ 3)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-5=x+1,\ y-3=x-1$
$\therefore y=x+2,\ y=x+6$

답 $y=x+2,\ y=x+6$

0344 (1) $f(x)=x^2-4x$로 놓으면 $\quad f'(x)=2x-4$
접점의 좌표를 $(t,\ t^2-4t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-4$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^2-4t)=(2t-4)(x-t)$
$\therefore y=(2t-4)x-t^2 \quad \cdots\cdots ㉠$
(2) 직선 $y=(2t-4)x-t^2$이 점 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$을 지나므로
$t^2+t-2=0, \quad (t+2)(t-1)=0$
$\therefore t=-2$ 또는 $t=1$
(3) $t=-2$를 ㉠에 대입하면 $\quad y=-8x-4$
$t=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=-2x-1$

답 풀이 참조

0345 $f(x)=-x^2+3x-5$로 놓으면 $\quad f'(x)=-2x+3$
접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+3t-5)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+3$이므로 접선의 방정식은
$y-(-t^2+3t-5)=(-2t+3)(x-t)$
$\therefore y=(-2t+3)x+t^2-5 \quad \cdots\cdots ㉠$
이 직선이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로
$1=t^2-2t-2, \quad t^2-2t-3=0$
$(t+1)(t-3)=0$
$\therefore t=-1$ 또는 $t=3$
이것을 ㉠에 각각 대입하면
$y=5x-4,\ y=-3x+4$

답 $y=5x-4,\ y=-3x+4$

0346 $f(x)=x^3+16$으로 놓으면 $\quad f'(x)=3x^2$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3+16)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^3+16)=3t^2(x-t)$
$\therefore y=3t^2x-2t^3+16 \quad \cdots\cdots ㉠$
이 직선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로
$0=-2t^3+16, \quad t^3=8$
$\therefore t=2$
이것을 ㉠에 대입하면
$y=12x$

답 $y=12x$

0347 함수 $f(x)=x^2-2x+4$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(2)=4$이므로 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=2x-2$이므로 $\quad f'(c)=2c-2=0$
$\therefore c=1$

답 1

0348 함수 $f(x)=4x-x^2$은 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 3)$에서 미분가능하며 $f(1)=f(3)=3$이므로 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(1,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=4-2x$이므로 $\quad f'(c)=4-2c=0$
$\therefore c=2$

답 2

0349 함수 $f(x)=x^3-x$는 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(1)=0$이므로 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=3x^2-1$이므로 $\quad f'(c)=3c^2-1=0$
$c^2=\frac{1}{3} \quad \therefore c=\frac{\sqrt{3}}{3}\ (\because 0<c<1)$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

0350 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+2$는 닫힌구간 $[-3,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-3,\ 3)$에서 미분가능하며 $f(-3)=f(3)=11$이므로 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-3,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=x^2+2x-3$이므로 $\quad f'(c)=c^2+2c-3=0$
$(c+3)(c-1)=0$
$\therefore c=1\ (\because -3<c<3)$

답 1

0351 함수 $f(x)=-x^4+2x^2+4$는 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 미분가능하며 $f(-2)=f(2)=-4$이므로 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=-4x^3+4x$이므로 $\quad f'(c)=-4c^3+4c=0$
$c^3-c=0, \quad c(c+1)(c-1)=0$
$\therefore c=-1$ 또는 $c=0$ 또는 $c=1$

답 $-1,\ 0,\ 1$

0352 함수 $f(x)=x^2$은 닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-2,\ 1)$에서 미분가능하므로 $\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-2,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=2x$이므로
$\frac{1-4}{1-(-2)}=2c, \quad 2c=-1$
$\therefore c=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

0353 함수 $f(x)=2x^2-x$는 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 3)$에서 미분가능하므로 $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(1,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=4x-1$이므로
$\frac{15-1}{3-1}=4c-1, \quad 4c-1=7$
$\therefore c=2$

답 2

0354 함수 $f(x)=x^3+2x$는 닫힌구간 $[-3,\ 0]$에서 연속이고 열린구간 $(-3,\ 0)$에서 미분가능하므로 $\frac{f(0)-f(-3)}{0-(-3)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-3,\ 0)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=3x^2+2$이므로

$\frac{0-(-33)}{0-(-3)}=3c^2+2,\qquad 3c^2+2=11,\qquad c^2=3$

$\therefore c=-\sqrt{3}\ (\because -3<c<0)$ 답 $-\sqrt{3}$

0355 함수 $f(x)=2x^3-5x$는 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 2)$에서 미분가능하므로 $\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=6x^2-5$이므로

$\frac{6-3}{2-(-1)}=6c^2-5,\qquad 6c^2-5=1,\qquad c^2=1$

$\therefore c=1\ (\because -1<c<2)$ 답 1

0356 함수 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2-1$은 닫힌구간 $[-3,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-3,\ 3)$에서 미분가능하므로
$\frac{f(3)-f(-3)}{3-(-3)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-3,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=-x^2+2x$이므로

$\frac{-1-17}{3-(-3)}=-c^2+2c,\qquad c^2-2c-3=0$

$(c+1)(c-3)=0$

$\therefore c=-1\ (\because -3<c<3)$ 답 -1

0357 $f(x)=x^3+ax+b$로 놓으면 $\quad f'(x)=3x^2+a$
점 $(1,\ 2)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $\quad f(1)=2$

$1+a+b=2\qquad \therefore a+b=1$ …… ㉠

점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기가 -3이므로 $\quad f'(1)=-3$

$3+a=-3\qquad \therefore a=-6$

$a=-6$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=7$

$\therefore ab=-42$ 답 ①

0358 $f'(3)=2$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{h}=2\lim_{h\to 0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{2h}$$
$$=2f'(3)=2\cdot 2=4$$
답 4

0359 $f(x)=x^3-3x^2+x-5$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x+1=3(x-1)^2-2$

이므로 $f'(x)$는 $x=1$에서 최솟값 -2를 갖는다.
따라서 접선의 기울기 m의 최솟값은 -2이다. 답 -2

0360 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

두 점 $(-1,\ 3)$, $(3,\ -17)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(-1)=3,\ f(3)=-17$

$-1+a-b+c=3,\ 27+9a+3b+c=-17$

$\therefore a-b+c=4,\ 9a+3b+c=-44$ …… ㉠

또 두 점 $(-1,\ 3)$, $(3,\ -17)$에서의 접선이 서로 평행하므로

$f'(-1)=f'(3)$

$3-2a+b=27+6a+b,\qquad 8a=-24\qquad \therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면

$-3-b+c=4,\ -27+3b+c=-44$

$\therefore b-c=-7,\ 3b+c=-17$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad b=-6,\ c=1$

$\therefore a+b+c=-8$ 답 ③

0361 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-4x+1$로 놓으면

$f'(x)=x-4$

점 $(2,\ -5)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(-5)=-2(x-2)$

$\therefore y=-2x-1$

$-2x-1=0$에서 $\quad x=-\frac{1}{2}$

따라서 접선의 x절편은 $-\frac{1}{2}$이다. 답 $-\frac{1}{2}$

0362 $f(x)=x^3+ax+b$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+a$

점 $(-1,\ 1)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $\quad f(-1)=1$

$-1-a+b=1\qquad \therefore a-b=-2$ …… ㉠

또 점 $(-1,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 3이므로 $\quad f'(-1)=3$

$3+a=3\qquad \therefore a=0$

$a=0$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=2$

$\therefore a^2+b^2=0^2+2^2=4$ 답 ②

0363 $f(x)=-x^3+2x^2-x+1$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+4x-1$

점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=-1$이므로 접선의 방정식은

$y-1=-x\qquad \therefore y=-x+1$ ··· ❶

주어진 곡선과 직선 $y=-x+1$이 만나는 점의 x좌표는
$-x^3+2x^2-x+1=-x+1$에서

$x^3-2x^2=0,\qquad x^2(x-2)=0\qquad \therefore x=0$ 또는 $x=2$

$\therefore \mathrm{B}(2,\ -1)$ ··· ❷

따라서 구하는 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(2-0)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2}$ ··· ❸

답 $2\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 점 A에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❷ 점 B의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ 선분 AB의 길이를 구할 수 있다.	20 %

0364 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=-1$에서 $x\longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고
(분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.
즉 $\lim_{x\to 1}\{f(x)-2\}=0$이므로 $\quad f(1)=2$

이때 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=-1$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$, 즉 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 -1이다.
따라서 접선의 방정식은
$y-2=-1\cdot(x-1)\qquad \therefore y=-x+3$
즉 $a=-1,\ b=3$이므로 $\quad a-b=-4$ 답 ①

0365 $f(x)=x^3+x^2-2x-3$으로 놓으면
$f'(x)=3x^2+2x-2$
점 $(1,\ -3)$에서의 접선의 기울기가 $f'(1)=3$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.
따라서 점 $(1,\ -3)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{3}$인 직선의 방정식은
$y-(-3)=-\frac{1}{3}(x-1)$
$\therefore x+3y+8=0$
따라서 $a=1,\ b=8$이므로 $\quad \frac{b}{a}=8$ 답 ⑤

0366 $f(x)=x^2+ax+b$로 놓으면
$f'(x)=2x+a$
점 $(2,\ 3)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $\quad f(2)=3$
$4+2a+b=3\qquad \therefore 2a+b=-1$ …… ㉠
점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4+a$이므로
$(4+a)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$
$4+a=2\qquad \therefore a=-2$
$a=-2$를 ㉠에 대입하면
$-4+b=-1\qquad \therefore b=3$
$\therefore ab=-6$ 답 -6

0367 $f(x)=x^3,\ g(x)=ax^2+bx$로 놓으면
$f'(x)=3x^2,\ g'(x)=2ax+b$
두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프가 모두 점 $(-1,\ -1)$을 지나므로 $f(-1)=g(-1)$에서
$a-b=-1$ …… ㉠
또 점 $(-1,\ -1)$에서의 두 접선이 서로 수직이므로 $f'(-1)g'(-1)=-1$에서
$3(-2a+b)=-1\qquad \therefore 2a-b=\frac{1}{3}$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{4}{3},\ b=\frac{7}{3}$
$\therefore a+b=\frac{11}{3}$ 답 ⑤

0368 $g(x)=-x^2$으로 놓으면 $\quad g'(x)=-2x$
점 $\mathrm{P}(t,\ -t^2)$에서의 접선의 기울기가 $g'(t)=-2t$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2t}$이다. ··· ❶
따라서 점 P에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은
$y-(-t^2)=\frac{1}{2t}(x-t)$
$\therefore y=\frac{1}{2t}x-t^2-\frac{1}{2}$ ··· ❷
$x=0$일 때 $y=-t^2-\frac{1}{2}$이므로
$f(t)=-t^2-\frac{1}{2}$ ··· ❸
$\therefore \lim_{t\to0}f(t)=\lim_{t\to0}\left(-t^2-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$ ··· ❹
답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ 점 P에서의 접선과 수직인 직선의 기울기를 구할 수 있다.	30 %
❷ 점 P에서의 접선과 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(t)$를 구할 수 있다.	20 %
❹ $\lim_{t\to0}f(t)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0369 $f(x)=x^2-x+2$로 놓으면
$f'(x)=2x-1$
접점의 좌표를 $(t,\ t^2-t+2)$라 하면 직선 $x+y-1=0$, 즉 $y=-x+1$에 평행한 직선의 기울기는 -1이므로
$f'(t)=2t-1=-1\qquad \therefore t=0$
따라서 접점의 좌표는 $(0,\ 2)$이므로 직선의 방정식은
$y-2=-x\qquad \therefore x+y-2=0$
$\therefore k=-2$ 답 -2

0370 $f(x)=x^2+4x+2$로 놓으면
$f'(x)=2x+4$
접점의 좌표를 $(t,\ t^2+4t+2)$라 하면 직선 $y=3x-1$에 평행한 직선의 기울기는 3이므로
$f'(t)=2t+4=3\qquad \therefore t=-\frac{1}{2}$
따라서 접점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$이므로
$a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{4}$
$\therefore a-2b=-\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{4}=-1$ 답 ②

0371 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 1),\ \mathrm{B}(1,\ 3)$을 지나는 직선의 기울기는
$\frac{3-1}{1-0}=2$ ··· ❶
$f(x)=-x^2+4$로 놓으면
$f'(x)=-2x$
접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+4)$라 하면 접선의 기울기가 2이므로
$f'(t)=-2t=2\qquad \therefore t=-1$ ··· ❷
따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 3)$이므로 접선의 방정식은
$y-3=2(x+1)\qquad \therefore y=2x+5$ ··· ❸
즉 구하는 y절편은 5이다. ··· ❹
답 5

채점 기준	비율
❶ 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기를 구할 수 있다.	20 %
❷ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❹ 접선의 y절편을 구할 수 있다.	20 %

0372 $f(x)=x^3-5x-3$으로 놓으면 $\quad f'(x)=3x^2-5$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3-5t-3)\ (t>0)$이라 하면 직선 $y=-x+5$와 수직인 직선의 기울기는 1이므로

$f'(t)=3t^2-5=1$

$t^2=2 \quad \therefore t=\sqrt{2}\ (\because t>0)$

따라서 접점의 좌표는 $(\sqrt{2},\ -3\sqrt{2}-3)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-3\sqrt{2}-3)=x-\sqrt{2}$

$\therefore y=x-4\sqrt{2}-3$

즉 $g(x)=x-4\sqrt{2}-3$이므로

$g(3)=-4\sqrt{2}$

답 $-4\sqrt{2}$

0373 $f(x)=x^3+3x^2+ax$로 놓으면 $\quad f'(x)=3x^2+6x+a$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3+3t^2+at)$라 하면 $f'(t)=3t^2+6t+a$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+3t^2+at)=(3t^2+6t+a)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+6t+a)x-2t^3-3t^2$

이 직선이 $y=7x-5$와 일치해야 하므로

$3t^2+6t+a=7 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$-2t^3-3t^2=-5 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡에서 $\quad 2t^3+3t^2-5=0, \quad (t-1)(2t^2+5t+5)=0$

$\therefore t=1\ (\because 2t^2+5t+5>0)$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad 9+a=7 \quad \therefore a=-2$

답 ②

0374 $f(x)=-x^2+3x+a$로 놓으면 $\quad f'(x)=-2x+3$
점 $(t,\ t+1)$에서의 접선의 기울기가 1이므로 $f'(t)=1$에서

$-2t+3=1 \quad \therefore t=1$

따라서 접점의 좌표가 $(1,\ 2)$이고, 이 접점은 곡선 $y=-x^2+3x+a$ 위의 점이므로

$2=-1+3+a \quad \therefore a=0$

$\therefore a+t=1$

답 ①

0375 $f(x)=x^3+k$로 놓으면 $\quad f'(x)=3x^2$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3+k)$라 하면 접선의 기울기가 6이므로

$f'(t)=3t^2=6, \quad t^2=2$

$\therefore t=-\sqrt{2}$ 또는 $t=\sqrt{2}$ ··· ❶

이때 주어진 직선과 곡선이 제1사분면에서 접하므로 접점의 좌표는

$(\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}+k)$

점 $(\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}+k)$가 직선 $y=6x$ 위에 있으므로

$2\sqrt{2}+k=6\sqrt{2}$

$\therefore k=4\sqrt{2}$ ··· ❷

답 $4\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	50 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	50 %

0376 $f(x)=x^3+x+a$로 놓으면 $\quad f'(x)=3x^2+1$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3+t+a)$라 하면 접선의 기울기가 4이므로

$f'(t)=3t^2+1=4, \quad t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ a-2)$, $(1,\ a+2)$이고, 이 접점은 직선 $y=4x+b$ 위의 점이므로

$a-2=-4+b,\ a+2=4+b$

$a-b=-2$ 또는 $a-b=2$

$\therefore |a-b|=2$

답 ③

0377 $f(x)=x^2-1$로 놓으면 $\quad f'(x)=2x$
점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4$이므로 접선의 방정식은 $\quad y-3=4(x-2)$

$\therefore y=4x-5 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

한편 $g(x)=x^3+ax+11$로 놓으면 $\quad g'(x)=3x^2+a$
㉠과 곡선 $y=g(x)$의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3+at+11)$이라 하면 접선의 기울기는 $g'(t)=3t^2+a$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+at+11)=(3t^2+a)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+a)x-2t^3+11$

이 직선이 ㉠과 일치해야 하므로

$3t^2+a=4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

$-2t^3+11=-5 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉢에서 $\quad t^3=8 \quad \therefore t=2$

$t=2$를 ㉡에 대입하면 $\quad 12+a=4$

$\therefore a=-8$

답 -8

0378 $f(x)=x^2+3x+3$으로 놓으면 $\quad f'(x)=2x+3$
곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=-x-2$와 평행한 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^2+3t+3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(t)=2t+3=-1 \quad \therefore t=-2$

따라서 접점의 좌표는 $(-2,\ 1)$이고, 점 $(-2,\ 1)$과 직선 $y=-x-2$, 즉 $x+y+2=0$ 사이의 거리가 구하는 최솟값이므로

$$\frac{|-2+1+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 ②

0379 $f(x)=x^2+1$로 놓으면 $\quad f'(x)=2x$
곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=2x-4$와 평행한 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^2+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 2이므로

$f'(t)=2t=2 \quad \therefore t=1$ ··· ❶

따라서 접점의 좌표는 $(1,\ 2)$이므로 $\mathrm{P}(1,\ 2)$일 때 $\triangle\mathrm{ABP}$의 넓이가 최소이다.
점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$와 직선 $y=2x-4$, 즉 $2x-y-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-2-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$ ··· ❷

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(4-2)^2+(4-0)^2}=2\sqrt{5}$이므로 구하는 $\triangle\mathrm{ABP}$의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\frac{4}{\sqrt{5}}=4$$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 점 P와 직선 $y=2x-4$ 사이의 거리의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\triangle\mathrm{ABP}$의 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

0380 $f(x)=x^3-x$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-1$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3-t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-1$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)$
$\therefore y=(3t^2-1)x-2t^3$
이 직선이 점 $(0,\ -2)$를 지나므로
$-2=-2t^3,\quad t^3=1\quad \therefore t=1$
따라서 구하는 접선의 기울기는
$f'(1)=3-1=2$ 답 ④

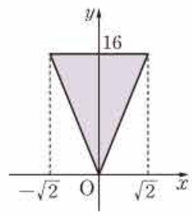
0381 $f(x)=x^2+x$로 놓으면 $f'(x)=2x+1$
접점의 좌표를 $(t,\ t^2+t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+1$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^2+t)=(2t+1)(x-t)$
$\therefore y=(2t+1)x-t^2$ …… ㉠
이 직선이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로
$1=2t+1-t^2,\quad t^2-2t=0$
$t(t-2)=0\quad \therefore t=0$ 또는 $t=2$
이것을 각각 ㉠에 대입하면 두 접선의 방정식은
$y=x,\ y=5x-4$
따라서 구하는 y절편의 합은
$0+(-4)=-4$ 답 -4

0382 $f(x)=x^3-7$로 놓으면 $f'(x)=3x^2$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3-7)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^3-7)=3t^2(x-t)$
$\therefore y=3t^2x-2t^3-7$ …… ㉠
이 직선이 점 $(0,\ 9)$를 지나므로
$9=-2t^3-7,\quad t^3=-8\quad \therefore t=-2$
$t=-2$를 ㉠에 대입하면 $y=12x+9$
따라서 직선 $y=12x+9$ 위의 점의 좌표는 ②이다. 답 ②

0383 $f(x)=\frac{1}{8}x^2+a$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{4}x$
접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{8}t^2+a\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{1}{4}t$이므로 접선의 방정식은
$y-\left(\frac{1}{8}t^2+a\right)=\frac{1}{4}t(x-t)$
$\therefore y=\frac{1}{4}tx-\frac{1}{8}t^2+a$
이 직선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로
$0=\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}t^2+a$
$\therefore t^2-2t-8a=0$ …… ㉠
두 접점의 x좌표를 각각 $t_1,\ t_2$라 하면 $t_1,\ t_2$는 ㉠의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$t_1t_2=-8a$
이때 두 접선이 서로 수직이므로
$\frac{1}{4}t_1\cdot\frac{1}{4}t_2=-1,\quad \frac{1}{16}\cdot(-8a)=-1$
$\therefore a=2$ 답 2

0384 $f(x)=x^4+2x^2+5$로 놓으면 $f'(x)=4x^3+4x$
접점의 좌표를 $(t,\ t^4+2t^2+5)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=4t^3+4t$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^4+2t^2+5)=(4t^3+4t)(x-t)$
$\therefore y=(4t^3+4t)x-3t^4-2t^2+5$
이 직선이 원점을 지나므로 $0=-3t^4-2t^2+5$
$3t^4+2t^2-5=0,\quad (t+1)(t-1)(3t^2+5)=0$
$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$ ($\because 3t^2+5>0$)
따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 8),\ (1,\ 8)$이므로
$\overline{PQ}=2$ 답 2

0385 $f(x)=x^4+12$로 놓으면 $f'(x)=4x^3$
접점의 좌표를 $(t,\ t^4+12)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=4t^3$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^4+12)=4t^3(x-t)$
$\therefore y=4t^3x-3t^4+12$
이 직선이 원점을 지나므로
$0=-3t^4+12,\quad t^4-4=0$
$(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})(t^2+2)=0$
$\therefore t=-\sqrt{2}$ 또는 $t=\sqrt{2}$ ($\because t^2+2>0$)
따라서 접점의 좌표는 $(-\sqrt{2},\ 16),\ (\sqrt{2},\ 16)$이므로 구하는 삼각형의 넓이는
$\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot16=16\sqrt{2}$ 답 ④



0386 $f(x)=x^3+2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2$
점 $(-1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=3$이므로 접선의 방정식은
$y-1=3(x+1)\quad \therefore y=3x+4$
따라서 접선의 x절편이 $-\frac{4}{3}$, y절편이 4이므로 구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot4=\frac{8}{3}$ 답 ③

0387 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+3$으로 놓으면
$f'(x)=-x+1$
접점의 좌표를 $\left(t,\ -\frac{1}{2}t^2+t+3\right)$이라 하면 접선의 기울기가 -1이므로
$f'(t)=-t+1=-1\quad \therefore t=2$
따라서 접점의 좌표는 $(2,\ 3)$이므로 접선의 방정식은
$y-3=-1\cdot(x-2)\quad \therefore y=-x+5$
따라서 접선의 x절편과 y절편이 모두 5이므로 구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot5\cdot5=\frac{25}{2}$ 답 $\frac{25}{2}$

0388 $f(x)=x^2+2x-2$로 놓으면
$f'(x)=2x+2$
접점의 좌표를 $(t,\ t^2+2t-2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+2$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^2+2t-2)=(2t+2)(x-t)$
$\therefore y=(2t+2)x-t^2-2$ …… ㉠

이 직선이 점 A$(-1,\ -4)$를 지나므로

$-4=-(2t+2)-t^2-2,\qquad t^2+2t=0$

$t(t+2)=0\qquad \therefore t=-2$ 또는 $t=0$

이것을 각각 ㉠에 대입하면 두 접선의 방정식은

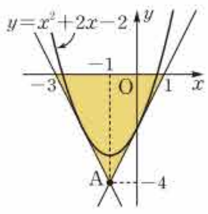
$y=-2x-6,\ y=2x-2$

이므로 두 접선이 x축과 만나는 점의 좌표는

$(-3,\ 0),\ (1,\ 0)$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4=8$ 답 8



0389 점 $(1,\ k)$는 곡선 $y=2x^2-5x+a$ 위의 점이므로

$k=-3+a$ ······ ㉠

$f(x)=2x^2-5x+a$로 놓으면 $\quad f'(x)=4x-5$

점 $(1,\ k)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-1$이므로 접선의 방정식은

$y-k=-1\cdot(x-1)\qquad \therefore y=-x+k+1$

따라서 접선의 x절편과 y절편은 모두 $k+1$이다.

이때 $k>-1$이고 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{9}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\cdot(k+1)^2=\frac{9}{2},\qquad (k+1)^2=9$

$\therefore k=2\ (\because k>-1)$

$k=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad 2=-3+a\qquad \therefore a=5$

$\therefore a+k=7$ 답 ②

0390 $f(x)=x^3+ax-3,\ g(x)=x^2+4x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+a,\ g'(x)=2x+4$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가진다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad t^3+at-3=t^2+4t$ ······ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad 3t^2+a=2t+4$

$\therefore a=-3t^2+2t+4$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$2t^3-t^2+3=0,\qquad (t+1)(2t^2-3t+3)=0$

$2t^2-3t+3>0$이므로 $\quad t=-1$

$t=-1$을 ㉡에 대입하면 $\quad a=-1$ 답 ③

0391 (1) $f(x)=ax^3+6x,\ g(x)=2x^2+bx$로 놓으면

$f'(x)=3ax^2+6,\ g'(x)=4x+b$

두 곡선이 $x=3$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(3)=g(3)$에서 $\quad 27a+18=18+3b$

$\therefore 9a-b=0$ ······ ㉠

$f'(3)=g'(3)$에서 $\quad 27a+6=12+b$

$\therefore 27a-b=6$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{1}{3},\ b=3$ ··· ❶

(2) 두 곡선 $y=\frac{1}{3}x^3+6x,\ y=2x^2+3x$의 접점의 좌표가 $(3,\ 27)$이고 접선의 기울기가 $g'(3)=15$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-27=15(x-3)\qquad \therefore y=15x-18$ ··· ❷

답 (1) $a=\frac{1}{3},\ b=3$ (2) $y=15x-18$

채점 기준	비율
❶ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 공통인 접선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %

0392 $f(x)=x^3-2,\ g(x)=2x^3-3x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2,\ g'(x)=6x^2-3$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가진다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad t^3-2=2t^3-3t$

$t^3-3t+2=0,\qquad (t+2)(t-1)^2=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=1$

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad 3t^2=6t^2-3,\qquad t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 좌표가 $(1,\ -1)$이고 접선의 기울기가 $f'(1)=3$이므로 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.

따라서 점 $(1,\ -1)$을 지나고 공통인 접선과 수직인 직선의 방정식은

$y-(-1)=-\frac{1}{3}(x-1)\qquad \therefore y=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$

즉 $m=-\frac{1}{3},\ n=-\frac{2}{3}$이므로

$9mn=9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=2$ 답 ④

0393 함수 $f(x)=x^3-3x+1$은 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 2)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(2)=3$이므로 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-3$이므로 $\quad f'(c)=3c^2-3=0$

$3(c+1)(c-1)=0$

$\therefore c=1\ (\because -1<c<2)$

따라서 상수 c의 개수는 1이다. 답 1

0394 함수 $f(x)=-x^2+kx$에서 $\quad f'(x)=-2x+k$

닫힌구간 $[2,\ 4]$에서 롤의 정리를 만족시키는 상수가 3이므로

$f'(3)=-6+k=0\qquad \therefore k=6$ 답 ⑤

0395 함수 $f(x)=x^3+2x^2-4x-9$는 닫힌구간 $[-a,\ a]$에서 연속이고 열린구간 $(-a,\ a)$에서 미분가능하다.

이때 롤의 정리를 만족시키려면 $f(-a)=f(a)$이어야 하므로

$-a^3+2a^2+4a-9=a^3+2a^2-4a-9$

$2a^3-8a=0,\qquad 2a(a+2)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a$는 자연수$)$ ··· ❶

따라서 함수 $f(x)=x^3+2x^2-4x-9$는 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2+4x-4$이므로 $\quad f'(c)=3c^2+4c-4=0$

$(c+2)(3c-2)=0$

$\therefore c=\frac{2}{3}\ (\because -2<c<2)$ ··· ❷

답 $a=2,\ c=\frac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ $f(-a)=f(a)$임을 이용하여 a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 롤의 정리를 만족시키는 c의 값을 구할 수 있다.	50 %

0396 함수 $f(x)=-x^2+6x+1$에서 $\quad f'(x)=-2x+6$
닫힌구간 $[1,\ k]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수가 2이므로

$$\frac{f(k)-f(1)}{k-1}=f'(2)$$

$$\frac{(-k^2+6k+1)-6}{k-1}=2, \qquad -k^2+6k-5=2k-2$$

$$k^2-4k+3=0, \qquad (k-1)(k-3)=0$$

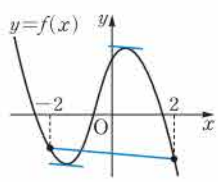
$$\therefore\ k=3\ (\because\ k>2)$$

답 3

0397 답 (가) $(a,\ x)$ (나) $f(a)$

0398 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 $(-2,\ f(-2))$, $(2,\ f(2))$를 잇는 직선과 평행한 접선을 갖는 점의 x좌표이다.
오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-2,\ f(-2))$, $(2,\ f(2))$를 잇는 직선과 평행한 접선을 2개 그을 수 있으므로 상수 c의 개수는 2이다.

답 ③



0399 함수 $f(x)=x^3-x+2$에서 $\quad f'(x)=3x^2-1$
$f(2)-f(0)=2f'(c)$에서 $\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c)$이므로

$$\frac{8-2}{2}=3c^2-1, \qquad c^2=\frac{4}{3}$$

$$\therefore\ c=\frac{2\sqrt{3}}{3}\ (\because\ 0<c<2)$$

답 ④

0400 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이다.
풀이 점 $(1,\ c)$는 직선 $y=3x$ 위의 점이므로 $\quad c=3$
$f(x)=2x^2+ax+b$로 놓으면 $\quad f'(x)=4x+a$
점 $(1,\ 3)$이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로 $\quad f(1)=3$

$2+a+b=3 \qquad \therefore\ a+b=1$ ...... ㉠

점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기가 3이므로 $\quad f'(1)=3$

$4+a=3 \qquad \therefore\ a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$-1+b=1 \qquad \therefore\ b=2$

$\therefore\ a+bc=-1+2\cdot 3=5$

답 ⑤

0401 전략 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓고 접선의 기울기가 -5임을 이용하여 t의 값을 구한다.
풀이 $f(x)=x^3+3x^2-2x-4$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+6x-2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+3t^2-2t-4)$라 하면 접선의 기울기가 -5이므로

$f'(t)=3t^2+6t-2=-5$

$t^2+2t+1=0, \qquad (t+1)^2=0$

$\therefore\ t=-1$

즉 접점의 좌표는 $(-1,\ 0)$이므로 직선의 방정식은

$y=-5(x+1) \qquad \therefore\ y=-5x-5$

이 직선이 점 $(-2,\ a)$를 지나므로

$a=10-5=5$

답 5

0402 전략 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓고 접선이 점 $(0,\ 3)$을 지남을 이용하여 t의 값을 구한다.
풀이 $f(x)=-x^2+2$로 놓으면 $\quad f'(x)=-2x$
접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2+2)=-2t(x-t)$

$\therefore\ y=-2tx+t^2+2$

이 직선이 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=t^2+2, \qquad t^2=1$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$f'(-1)\cdot f'(1)=2\cdot(-2)=-4$

답 ②

0403 전략 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=a$인 점에서 공통인 접선을 가지면 $f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$임을 이용한다.
풀이 $f(x)=-x^2+ax+b$, $g(x)=x^2+4$로 놓으면

$f'(x)=-2x+a,\ g'(x)=2x$

두 곡선이 $x=1$인 점에서 공통인 접선을 가지므로
$f(1)=g(1)$에서 $\qquad -1+a+b=5$

$\therefore\ a+b=6$ ...... ㉠

$f'(1)=g'(1)$에서 $\qquad -2+a=2 \qquad \therefore\ a=4$
$a=4$를 ㉠에 대입하면 $\qquad b=2$

$\therefore\ a-b=2$

답 ③

0404 전략 $f'(x)=0$이면 $f(x)$가 상수함수임을 이용한다.
풀이 $F'(x)=f'(x)-g'(x)=\boxed{0}$
따라서 $F(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 $\boxed{\text{상수}}$함수이다.

$\therefore$ (가) 0 (나) 상수

답 풀이 참조

0405 전략 두 직선 l, m의 방정식을 각각 구해 본다.
풀이 $f(x)=x^3-3x^2+4$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x$

점 $(-1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=9$이므로 직선 l의 방정식은 $\qquad y=9(x+1)$

$\therefore\ 9x-y=-9$ ...... ㉠ ··· ❶

점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-3$이므로 직선 m의 방정식은 $\qquad y-2=-3(x-1)$

$\therefore\ 3x+y=5$ ...... ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\qquad x=-\dfrac{1}{3},\ y=6$

따라서 두 직선 l, m의 교점의 좌표는 $\left(-\dfrac{1}{3},\ 6\right)$이므로

$a=-\dfrac{1}{3},\ b=6$ ··· ❸

$\therefore\ ab=-2$ ··· ❹

답 -2

채점 기준	비율
❶ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 직선 m의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0406 전략 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기는 $g'(a)$임을 이용한다.

풀이 함수 $g(x)$의 도함수가 $f(x)$이므로

$g'(x)=f(x)$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선의 기울기는

$g'(2)=f(2)=(-1)^2=1$

이때 접선의 y절편이 -5이므로 접선의 방정식은

$y=x-5$

따라서 이 접선의 x절편은 5이다. 답 ⑤

0407 전략 기울기가 a인 직선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{a}$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$x-3y-3=0$에서 $y=\frac{1}{3}x-1$이므로 이 직선과 수직인 직선의 기울기는 -3이다.

접점의 좌표를 (t, t^3-6t^2+9t+2)라 하면 접선의 기울기가 -3이므로

$f'(t)=3t^2-12t+9=-3$

$t^2-4t+4=0$, $(t-2)^2=0$

$\therefore t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2, 4)$이므로 직선의 방정식은

$y-4=-3(x-2)$

$\therefore 3x+y-10=0$ 답 ③

0408 전략 주어진 곡선에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식을 구하여 평행이동한 직선의 방정식과 비교한다.

풀이 평행이동한 직선의 방정식은

$y=3(x-m)+1$ $\therefore y=3x-3m+1$ …… ㉠

$f(x)=x^3-9x+2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-9$

접점의 좌표를 (t, t^3-9t+2)라 하면 접선의 기울기가 3이므로

$f'(t)=3t^2-9=3$, $t^2=4$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=2$

(i) $t=-2$일 때,

접점의 좌표가 $(-2, 12)$이므로 접선의 방정식은

$y-12=3(x+2)$ $\therefore y=3x+18$

이 방정식이 ㉠과 일치해야 하므로 $-3m+1=18$

$\therefore m=-\frac{17}{3}$

(ii) $t=2$일 때,

접점의 좌표가 $(2, -8)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-8)=3(x-2)$ $\therefore y=3x-14$

이 방정식이 ㉠과 일치해야 하므로 $-3m+1=-14$

$\therefore m=5$

(i), (ii)에서 $m=5$ ($\because m$은 정수) 답 5

0409 전략 점 A에서의 접선의 기울기와 점 B에서의 접선의 기울기가 같음을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-3x^2+x+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x+1$

점 A의 x좌표가 3이므로 점 A에서의 접선의 기울기는

$f'(3)=27-18+1=10$

점 B의 x좌표를 t $(t\neq3)$라 하면 점 B에서의 접선의 기울기가 10이므로

$f'(t)=3t^2-6t+1=10$

$t^2-2t-3=0$, $(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=-1$ ($\because t\neq3$)

이때 $f(-1)=-4$이므로 점 B의 좌표는 $(-1, -4)$

따라서 점 B$(-1, -4)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-4)=10(x+1)$, 즉 $y=10x+6$

이므로 구하는 y절편은 6이다. 답 ②

0410 전략 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기의 최댓값은 $f'(x)$의 최댓값임을 이용한다.

풀이 $f(x)=-x^3+6x^2-10x+1$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+12x-10=-3(x-2)^2+2$

이므로 $f'(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 2를 갖는다.

따라서 접점의 좌표가 $(2, -3)$이고 기울기가 2이므로 직선의 방정식은

$y-(-3)=2(x-2)$ $\therefore y=2x-7$

즉 $m=2$, $n=-7$이므로 $m+n=-5$ 답 -5

0411 전략 주어진 곡선에 접하고 기울기가 1인 두 직선의 방정식을 구한다.

풀이 $f(x)=x^3-2x+2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 (t, t^3-2t+2)라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$f'(t)=3t^2-2=1$, $t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$ ⋯ ❶

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 3)$, $(1, 1)$이므로 접선의 방정식은

$y-3=x+1$, $y-1=x-1$

$\therefore x-y+4=0$, $x-y=0$ ⋯ ❷

이 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-y+4=0$ 위의 점 $(0, 4)$와 직선 $x-y=0$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 거리는

$$\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$ ⋯ ❸

답 $2\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ 두 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %

라쎈 특강 평행한 두 직선 사이의 거리

① 평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 임의의 점과 직선 l' 사이의 거리와 같다.

② 평행한 두 직선 $ax+by+c=0$, $ax+by+c'=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

0412 전략 $x=t$인 점에서의 접선의 방정식을 구하여 주어진 직선의 방정식과 비교한다.

풀이 $f(x)=x^3$으로 놓으면 $\quad f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$$y-t^3=3t^2(x-t)$$
$$\therefore\ y=3t^2x-2t^3$$

이 직선이 직선 $y=ax-2$와 일치하므로

$$3t^2=a,\ -2t^3=-2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad t=1,\ a=3$

답 ④

0413 전략 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓고 접선의 방정식을 구한다.

풀이 $f(x)=x^3+2x$로 놓으면 $\quad f'(x)=3x^2+2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+2t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+2$이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3+2t)=(3t^2+2)(x-t)$$
$$\therefore\ y=(3t^2+2)x-2t^3 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이 직선이 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$$-2=-2t^3,\quad t^3=1 \quad \therefore\ t=1$$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$$y=5x-2$$

이 직선이 x축과 만나는 점의 좌표가 $\left(\frac{2}{5},\ 0\right)$이므로

$$a=\frac{2}{5}$$

답 ①

0414 전략 두 직선 l, m의 방정식을 각각 구한다.

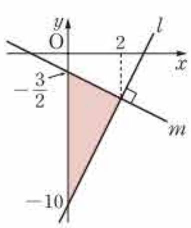
풀이 $f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+2$로 놓으면 $\quad f'(x)=2x^3-6x$

점 P$(2,\ -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4$이므로 접선 l의 방정식은

$$y-(-2)=4(x-2) \quad \therefore\ y=4x-10 \quad \cdots ❶$$

한편 직선 l에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이므로 직선 m의 방정식은

$$y-(-2)=-\frac{1}{4}(x-2)$$
$$\therefore\ y=-\frac{1}{4}x-\frac{3}{2} \quad \cdots ❷$$



따라서 오른쪽 그림에서 두 직선 l, m과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\left\{-\frac{3}{2}-(-10)\right\}\cdot 2=\frac{17}{2} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{17}{2}$

채점 기준	비율
❶ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 직선 m의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ 두 직선 l, m과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

0415 전략 $f'(c)=0$인 상수 c의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=0$에서 $\quad x^3-x=0$

$$x(x+1)(x-1)=0 \quad \therefore\ x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$
$$\therefore\ \alpha=-1,\ \beta=0$$

함수 $f(x)=x^3-x$는 닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 0)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(0)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1,\ 0)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-1$이므로

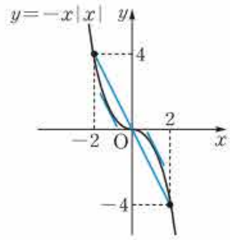
$$f'(c)=3c^2-1=0,\quad c^2=\frac{1}{3}$$
$$\therefore\ c=-\frac{\sqrt{3}}{3}\ (\because\ -1<c<0)$$

답 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

0416 전략 평균값 정리의 기하적 의미를 생각한다.

풀이 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 상수 c가 평균값 정리를 만족시키면 $x=c$에서의 접선의 기울기는 두 점 $(-2,\ 4)$, $(2,\ -4)$를 잇는 직선의 기울기와 같다.

함수 $y=-x|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 점 $(-2,\ 4)$, $(2,\ -4)$를 잇는 직선과 평행한 접선을 2개 그을 수 있다.



따라서 상수 c의 개수는 2이다.

답 ②

0417 전략 곱의 미분법을 이용하여 $y=f(x)g(x)$의 도함수를 구한다.

풀이 $h(x)=f(x)g(x)$로 놓으면

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

곡선 $y=h(x)$에서 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는

$$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$$
$$=-1\cdot 4+1\cdot(-2)=-6 \quad \cdots ❶$$

$h(1)=f(1)g(1)=1\cdot 4=4$이므로 점 $(1,\ 4)$를 지나고 기울기가 -6인 접선의 방정식은

$$y-4=-6(x-1)$$
$$\therefore\ y=-6x+10 \quad \cdots ❷$$

답 $y=-6x+10$

채점 기준	비율
❶ $x=1$인 점에서의 접선의 기울기를 구할 수 있다.	50 %
❷ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %

0418 전략 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$($\alpha$는 실수)일 때, $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}=2$에서 $x\longrightarrow 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to 2}\{f(x)-g(x)\}=0$이므로 $\quad f(2)=g(2) \quad \cdots\cdots$ ㉠

이때

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\{f(x)-f(2)\}-\{g(x)-g(2)\}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$
$$=f'(2)-g'(2)=2$$

이므로 $\quad f'(2)=g'(2)+2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

$g(x)=x^3f(x)-7$에 $x=2$를 대입하면

$g(2)=8f(2)-7$

$g(2)=8g(2)-7$ ($\because$ ㉠)

$7g(2)=7 \qquad \therefore g(2)=1$

$g(x)=x^3f(x)-7$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

위의 식에 $x=2$를 대입하면

$g'(2)=12f(2)+8f'(2)$

$g'(2)=12\cdot 1+8\{g'(2)+2\}$ ($\because$ ㉡)

$7g'(2)=-28 \qquad \therefore g'(2)=-4$

점 $(2, g(2))$, 즉 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기는 -4이므로 접선의 방정식은

$y-1=-4(x-2)$, 즉 $y=-4x+9$

따라서 $a=-4$, $b=9$이므로

$a^2+b^2=(-4)^2+9^2=97$

답 97

0419 전략 삼각형 OAP의 넓이가 최대인 점 P에서의 접선의 기울기는 1이다.

풀이 직선 $y=x$와 평행한 직선, 즉 기울기가 1인 직선이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때의 접점이 P가 되면 삼각형 OAP의 넓이는 최대가 된다.

$f(x)=ax(x-2)^2=ax^3-4ax^2+4ax$에서

$f'(x)=3ax^2-8ax+4a$

따라서 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=1$이므로

$\frac{3}{4}a-4a+4a=1, \qquad \frac{3}{4}a=1$

$\therefore a=\frac{4}{3}$

답 ②

0420 전략 곡선 $y=f(x)$와 원 O가 접할 때 원 O의 중심과 접점을 지나는 직선은 접선과 수직임을 이용한다.

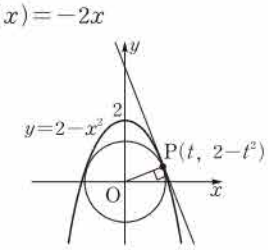
풀이 $f(x)=2-x^2$으로 놓으면 $\quad f'(x)=-2x$

접점을 $P(t, 2-t^2)$이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-2t$

직선 OP의 기울기는 $\quad \frac{2-t^2}{t}$

이때 접선과 직선 OP는 서로 수직이므로



$-2t\cdot\frac{2-t^2}{t}=-1, \qquad t^2=\frac{3}{2}$

$\therefore t=-\frac{\sqrt{6}}{2}$ 또는 $t=\frac{\sqrt{6}}{2}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}\right)$이고 원 O의 반지름의 길이는 원점과 점 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{OP}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

따라서 원 O의 둘레의 길이는

$2\pi\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}\pi$

답 $\sqrt{7}\pi$

0421 전략 주어진 등식에 $f(1+h)$, $f'(1+\theta h)$를 대입한 다음 θ에 대하여 정리한다.

풀이 $f(x)=x^3$에서 $\quad f'(x)=3x^2$

$f(1+h)=f(1)+hf'(1+\theta h)$, 즉 $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1+\theta h)$

에서

$\frac{(1+h)^3-1}{h}=3(1+\theta h)^2$

$h^2+3h+3=3+6\theta h+3\theta^2h^2$

$3h^2\theta^2+6h\theta-h^2-3h=0$

$h\neq 0$이므로

$3h\theta^2+6\theta-h-3=0$

$\therefore \theta=\frac{-3+\sqrt{9+9h+3h^2}}{3h}$ ($\because \theta>0$)

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{h\to 0+}\theta&=\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{9+9h+3h^2}-3}{3h}\\&=\lim_{h\to 0+}\frac{(\sqrt{9+9h+3h^2}-3)(\sqrt{9+9h+3h^2}+3)}{3h(\sqrt{9+9h+3h^2}+3)}\\&=\lim_{h\to 0+}\frac{3h(3+h)}{3h(\sqrt{9+9h+3h^2}+3)}\\&=\lim_{h\to 0+}\frac{3+h}{\sqrt{9+9h+3h^2}+3}\\&=\frac{3}{3+3}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ④

05 도함수의 활용 (2)

Ⅱ. 다항함수의 미분법

0422 $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1^3-1)-(x_2^3-1)$$
$$=x_1^3-x_2^3$$
$$=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$$

이때 $x_1-x_2<0$, $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2>0$이므로

$f(x_1)-f(x_2)\boxed{<}0$

$\therefore f(x_1)\boxed{<}f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)=x^3-1$은 구간 $(-\infty, \infty)$에서 $\boxed{\text{증가}}$한다.

$\therefore$ (가) $<$ (나) 증가

답 풀이 참조

0423 $x_1<x_2$인 임의의 두 양수 x_1, x_2에 대하여

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$$

이때 $x_1+x_2>0$, $x_1-x_2<0$이므로

$f(x_1)-f(x_2)<0$

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)=x^2$은 구간 $(0, \infty)$에서 증가한다. 답 증가

0424 $x_1<x_2<1$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$$f(x_1)-f(x_2)$$
$$=(-2x_1^2+4x_1+1)-(-2x_2^2+4x_2+1)$$
$$=-2(x_1+x_2)(x_1-x_2)+4(x_1-x_2)$$
$$=-2(x_1-x_2)(x_1+x_2-2)$$

이때 $x_1-x_2<0$, $x_1+x_2-2<1+1-2=0$이므로

$f(x_1)-f(x_2)<0$

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)=-2x^2+4x+1$은 구간 $(-\infty, 1)$에서 증가한다. 답 증가

0425 $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$$f(x_1)-f(x_2)=-x_1^3-(-x_2^3)=-(x_1^3-x_2^3)$$
$$=-(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$$

이때 $x_1-x_2<0$, $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2>0$이므로

$f(x_1)-f(x_2)>0$ $\quad\therefore f(x_1)>f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)=-x^3$은 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소한다.

답 감소

0426 답 (가) $>$ (나) $<$ (다) 증가 (라) 감소

0427 $f(x)=x^2+2x$에서

$f'(x)=2x+2=2(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소하고, 구간 $[-1, \infty)$에서 증가한다.

답 풀이 참조

0428 $f(x)=-x^2+4x-2$에서

$f'(x)=-2x+4=-2(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	2	↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 2]$에서 증가하고, 구간 $[2, \infty)$에서 감소한다. 답 풀이 참조

0429 $f(x)=x^3+3x^2+2$에서

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	6	↘	2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -2]$ 또는 구간 $[0, \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-2, 0]$에서 감소한다. 답 풀이 참조

0430 $f(x)=-x^3+3x^2-9x$에서

$f'(x)=-3x^2+6x-9=-3(x-1)^2-6<0$

즉 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소한다. 답 풀이 참조

0431 답 극댓값: 4, 극솟값: -3

0432 답 (1) a, c (2) b, d

0433 답 (1) 6 (2) 0

0434 (1) $f'(x)=3x^2-6x-9$

(2) $f'(x)=0$에서 $\quad 3x^2-6x-9=0$

$x^2-2x-3=0$, $\quad (x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

(3)

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	12	↘	-20	↗

(4) 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 12, $x=3$에서 극솟값 -20을 갖는다.

답 풀이 참조

0435 $f(x)=x^3-6x^2$에서

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-32	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0, $x=4$에서 극솟값 -32를 갖는다. 답 극댓값: 0, 극솟값: -32

0436 $f(x)=-x^3+3x+1$에서

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	3	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 3, $x=-1$에서 극솟값 -1을 갖는다.

답 극댓값: 3, 극솟값: -1

0437 $f(x)=x^4-6x^2+1$에서

$f'(x)=4x^3-12x=4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-8	↗	1	↘	-8	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 1, $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$에서 극솟값 -8을 갖는다.

답 극댓값: 1, 극솟값: -8

0438 (1) $f'(x)=3x^2-12x+9$

(2) $f'(x)=0$에서 $3x^2-12x+9=0$

$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

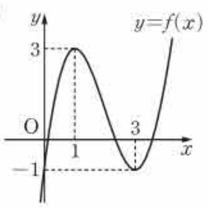
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

(3)

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 3, $x=3$에서 극솟값 -1을 갖는다.

(4)



답 풀이 참조

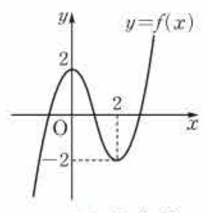
0439 $f(x)=x^3-3x^2+2$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

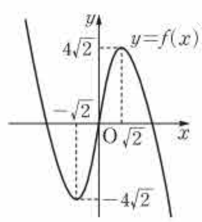
0440 $f(x)=-x^3+6x$에서

$f'(x)=-3x^2+6=-3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-4\sqrt{2}$	↗	$4\sqrt{2}$	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

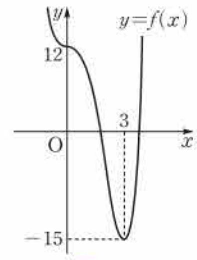
0441 $f(x)=x^4-4x^3+12$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	12	↘	-15	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

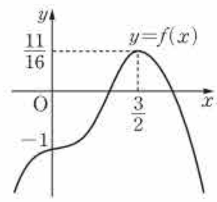
0442 $f(x)=-x^4+2x^3-1$에서

$f'(x)=-4x^3+6x^2=-2x^2(2x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-1	↗	$\frac{11}{16}$	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0443 $f(x)=x^2-2x$에서

$f'(x)=2x-2=2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	3

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 3, $x=1$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

답 최댓값: 3, 최솟값: -1

0444 $f(x)=-x^3+3x^2+5$에서

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because -2\le x\le 1$)

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	25	↘	5	↗	7

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 25, $x=0$일 때 최솟값 5를 갖는다.

답 최댓값: 25, 최솟값: 5

0445 $f(x)=x^4-6x^3+4x^2-1$에서

$f'(x)=4x^3-18x^2+8x=2x(2x-1)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ ($\because -1\le x\le 1$)

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	10	↘	-1	↗	$-\frac{11}{16}$	↘	-2

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 10, $x=1$일 때 최솟값 -2를 갖는다.

답 최댓값: 10, 최솟값: -2

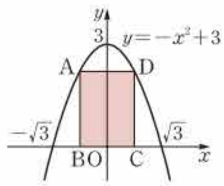
0446 (1) $-x^2+3=0$에서

$x^2-3=0, \quad (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$

$\therefore x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

이때 $a>0$이므로 $\quad 0<a<\sqrt{3}$

(2) 오른쪽 그림에서



$A(-a, -a^2+3)$, $B(-a, 0)$,

$C(a, 0)$, $D(a, -a^2+3)$

이므로 직사각형의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=2a(-a^2+3)$

$=-2a^3+6a$

(3) $S(a)=-2a^3+6a$에서

$S'(a)=-6a^2+6=-6(a^2-1)$

$=-6(a+1)(a-1)$

$S'(a)=0$에서 $\quad a=1$ ($\because 0<a<\sqrt{3}$)

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$		↗	4	↘	

따라서 직사각형의 넓이는 $a=1$일 때 최댓값 4를 갖는다.

답 (1) $0<a<\sqrt{3}$ (2) $-2a^3+6a$ (3) 4

0447 $f(x)=-x^3+12x+9$에서

$f'(x)=-3x^2+12=-3(x+2)(x-2)$

함수 $f(x)$는 $f'(x)\ge 0$인 구간에서 증가하므로

$-3(x+2)(x-2)\ge 0, \quad (x+2)(x-2)\le 0$

$\therefore -2\le x\le 2$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=2$이므로

$\alpha\beta=-4$

답 ①

0448 ① 구간 $(-\infty, -2)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

② 구간 $(-2, -1)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

③ 구간 $(-1, 0)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

④ 구간 $(1, 2)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

⑤ 구간 $(2, 3)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소하고, 구간 $(3, \infty)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

답 ④

0449 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+3$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+b$

주어진 조건에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=1$의 좌우에서 증가와 감소가 바뀌므로 $x=-2$, $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀐다. 즉 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 -2, 1이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+1=-\frac{2a}{6}, \ -2\cdot 1=\frac{b}{6}$

$\therefore a=3, b=-12$

$\therefore a-b=15$

답 15

0450 $f(x)=x^3+x^2+ax-3$에서

$f'(x)=3x^2+2x+a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-3a\le 0 \qquad \therefore a\ge\frac{1}{3}$

답 ⑤

라쎈 특강 이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

① 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge 0$이 성립하려면
$a>0$, $D\le 0$

② 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\le 0$이 성립하려면
$a<0$, $D\le 0$

0451 $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+4x^2+ax+2$에서

$f'(x)=-2x^2+8x+a$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=16+2a\le 0 \qquad \therefore a\le -8$

따라서 실수 a의 최댓값은 -8이다.

답 ①

0452 $f(x)=-x^3+2ax^2-4ax$에서

$f'(x)=-3x^2+4ax-4a$

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소해야 하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4a^2-12a\le 0, \qquad 4a(a-3)\le 0$

$\therefore 0\le a\le 3$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

답 4

0453 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 $f(x)$는 증가하거나 감소해야 한다. 그런데 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$는 증가해야 한다. ❶

$f(x)=2x^3+x^2+kx-1$에서

$f'(x)=6x^2+2x+k$ ❷

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-6k\le 0 \qquad \therefore k\ge\frac{1}{6}$ ❸

따라서 정수 k의 최솟값은 1이다. ❹

답 1

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$가 증가해야 함을 알 수 있다.	30 %
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❹ 정수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

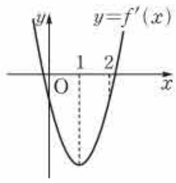
05 도함수의 활용 (2)

0454 $f(x)=x^3-3x^2+ax+4$에서

$f'(x)=3x^2-6x+a$

함수 $f(x)$가 $1<x<2$에서 감소하려면 $1<x<2$에서 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

오른쪽 그림에서



$f'(1)=a-3\le 0$이어야 하므로

$a\le 3$ ······ ㉠

$f'(2)=a\le 0$이어야 하므로

$a\le 0$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$a\le 0$

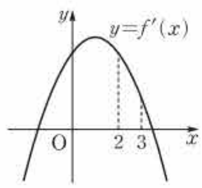
답 ①

0455 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+ax-4$에서

$f'(x)=-x^2+2x+a$

함수 $f(x)$가 구간 $(2,\ 3)$에서 증가하려면 이 구간에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

오른쪽 그림에서



$f'(2)=a\ge 0$이어야 하므로

$a\ge 0$ ······ ㉠

$f'(3)=a-3\ge 0$이어야 하므로

$a\ge 3$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a\ge 3$

따라서 실수 a의 최솟값은 3이다.

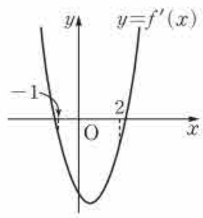
답 3

0456 $f(x)=x^3+ax^2-7x+3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-7$

함수 $f(x)$가 구간 $(-1,\ 2)$에서 감소하려면 이 구간에서 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

오른쪽 그림에서



$f'(-1)=-2a-4\le 0$이어야 하므로

$a\ge -2$ ······ ㉠

$f'(2)=4a+5\le 0$이어야 하므로

$a\le -\frac{5}{4}$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-2\le a\le -\frac{5}{4}$

따라서 $\alpha=-2,\ \beta=-\frac{5}{4}$이므로

$\alpha+\beta=-\frac{13}{4}$

답 ①

0457 $f(x)=-x^3+3x+5$에서

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	3	↗	7	↘

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 7, $x=-1$에서 극솟값 3을 가지므로

$M=7,\ m=3$

$\therefore M+m=10$

답 ⑤

0458 $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+11$에서

$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-21	↗	11	↘	6	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2,\ x=1$에서 극솟값을 가지므로 모든 x의 값의 합은 $-2+1=-1$

답 -1

0459 $f(x)=-x^4+\frac{8}{3}x^3-2x^2+1$에서

$f'(x)=-4x^3+8x^2-4x=-4x(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	↗	1	↘	$\frac{2}{3}$	↘

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 1을 가지므로 $a=0,\ b=1$

$\therefore a+b=1$

답 ④

참고 $f'(1)=0$이지만 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=1$에서는 극값을 갖지 않는다.

0460 $f(x)=x^3-3x^2+6$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$ ··· ❶

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	6	↘	2	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 6, $x=2$에서 극솟값 2를 가지므로

$\mathrm{A}(0,\ 6),\ \mathrm{B}(2,\ 2)$ ··· ❷

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{0+2}{2},\ \frac{6+2}{2}\right)$, 즉 $(1,\ 4)$ ··· ❸

답 $(1,\ 4)$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	50 %
❸ $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표를 구할 수 있다.	20 %

0461 $f(x)=-2x^3+3x^2+ax+b$에서

$f'(x)=-6x^2+6x+a$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극솟값 -5를 가지므로

$f(-1)=-5,\ f'(-1)=0$

$2+3-a+b=-5,\ -6-6+a=0$

$\therefore a=12,\ b=2$

$\therefore a+b=14$

답 14

0462 $f(x)=x^3-6x^2+9x+a$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$a+4$	$\searrow$	a	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 a를 가지므로

$a=3$

또 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $a+4$를 가지므로 구하는 극댓값은

$3+4=7$ 답 ②

0463 $f(x)=x^3-6x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	a	$\searrow$	$a-32$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 a, $x=4$에서 극솟값 $a-32$를 갖는다.

이때 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 $a\neq a-32$이므로

$a=-(a-32)$, $2a=32$

$\therefore a=16$ 답 ⑤

0464 $f(x)=-x^3+3ax^2-a$에서

$f'(x)=-3x^2+6ax=-3x(x-2a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2a$ ⋯ ❶

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=2a$에서 극값을 갖는다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하므로

$f(0)=0$ 또는 $f(2a)=0$ ⋯ ❷

그런데 $f(0)=-a\neq 0$이므로 $f(2a)=0$

$-8a^3+12a^3-a=0$

$4a^3-a=0$, $a(2a+1)(2a-1)=0$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ ($\because a\neq 0$)

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$ ⋯ ❸

답 $-\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ 곡선 $y=f(x)$가 x축에 접할 조건을 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값의 곱을 구할 수 있다.	40 %

0465 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+b$

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 1이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$f'(-2)=0$, $f'(1)=0$이므로

$f'(-2)=24-4a+b=0$ ⋯⋯ ㉠

$f'(1)=6+2a+b=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-12$

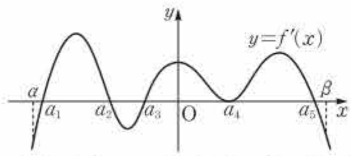
즉 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+c$이고, 함수 $f(x)$의 극댓값이 15이므로

$f(-2)=-16+12+24+c=15$ $\therefore c=-5$

따라서 $f(x)=2x^3+3x^2-12x-5$이므로 구하는 극솟값은

$f(1)=2+3-12-5=-12$ 답 ④

0466



위의 그림과 같이 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 왼쪽부터 차례대로 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5라 하면

(i) $x=a_2$, $x=a_5$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a_2$, $x=a_5$에서 극댓값을 갖는다.

$\therefore m=2$

(ii) $x=a_1$, $x=a_3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a_1$, $x=a_3$에서 극솟값을 갖는다.

$\therefore n=2$

(i), (ii)에서 $m-n=0$ 답 0

0467 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에서

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 2이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

$f'(0)=0$, $f'(2)=0$이므로

$f'(0)=c=0$

$f'(2)=12a+4b+c=0$

$\therefore 3a+b=0$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

$f(x)$의 극솟값이 -3, 극댓값이 5이므로

$f(0)=d=-3$

$f(2)=8a+4b+d=5$

$\therefore 2a+b=2$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=6$ ⋯ ❸

$\therefore ad-bc=-2\cdot(-3)-6\cdot 0=6$ ⋯ ❹

답 6

채점 기준	비율
❶ $f'(0)=0$, $f'(2)=0$임을 이용할 수 있다.	30 %
❷ $f(0)=-3$, $f(2)=5$임을 이용할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $ad-bc$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0468 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 1이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 $f(x)$는 $-1<x<1$에서 감소하고, $x>1$에서 증가한다.

또 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값을 갖는다. 답 ④

0469 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -4, -1, 1, 3이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-4$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. 구간 $(-3, -1)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

ㄴ. $f'(3)=0$이고 $x=3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. 구간 $(-4, 3)$에서 극댓값을 갖는 x의 값은 1의 1개뿐이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ①

0470 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 3이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않고, $x=3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ②이다.

답 ②

0471 $f(x)=x^3+ax^2+3x-5$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+3$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-9>0,\quad (a+3)(a-3)>0$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>3$ 답 ①

참고 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는다.
$\Longleftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

0472 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+ax$에서

$f'(x)=x^2-2ax+a$

삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-a>0,\quad a(a-1)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>1$

따라서 자연수 a의 최솟값은 2이다. 답 2

0473 $f(x)=\frac{2}{3}x^3+ax^2+8x+2$에서

$f'(x)=2x^2+2ax+8$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-16\le0,\quad (a+4)(a-4)\le0$

$\therefore -4\le a\le4$ 답 ④

0474 $f(x)=2x^3+ax^2+ax+5$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다. ⋯ ❶

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-6a\le0,\quad a(a-6)\le0$

$\therefore 0\le a\le6$ ⋯ ❷

따라서 실수 a의 최댓값은 6, 최솟값은 0이므로 구하는 합은

$6+0=6$ ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 함을 알 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0475 $f(x)=x^3-6ax^2+3bx-5$에서

$f'(x)=3x^2-12ax+3b$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=36a^2-9b\le0\quad \therefore b\ge4a^2$

(i) $a=1$일 때

$4\le b\le20$이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 17

(ii) $a=2$일 때

$16\le b\le20$이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 5

(iii) $a\ge3$일 때

$b\ge4a^2$을 만족시키는 20 이하의 자연수 b는 존재하지 않는다.

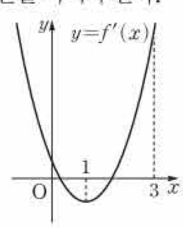
이상에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$17+5=22$ 답 22

0476 $f(x)=x^3-3x^2+ax$에서

$f'(x)=3x^2-6x+a$

함수 $f(x)$가 구간 $(0, 3)$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 $0<x<3$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-3a>0\quad \therefore a<3$

(ii) $f'(0)>0$에서 $a>0$

$f'(3)>0$에서 $9+a>0$

$\therefore a>-9$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=1$이고 $0<1<3$이다.

이상에서 실수 a의 값의 범위는

$0<a<3$ 답 $0<a<3$

0477 $f(x)=2x^3+x^2+ax-3$에서

$f'(x)=6x^2+2x+a$

함수 $f(x)$가 $-1<x<0$에서 극댓값, $x>0$에서 극솟값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 할 때,

$-1<\alpha<0$, $\beta>0$

이어야 한다.

(i) $f'(-1)>0$에서 $\quad 4+a>0$

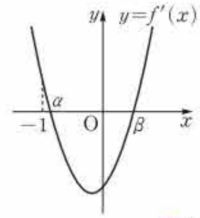
$\therefore a>-4$

(ii) $f'(0)<0$에서 $\quad a<0$

(i), (ii)에서

$-4<a<0$

이므로 정수 a는 $-3,\ -2,\ -1$의 3개이다.



답 3

0478 $f(x)=x^3+ax^2+ax$에서

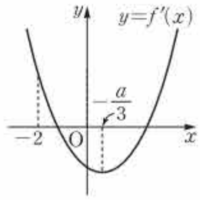
$f'(x)=3x^2+2ax+a$

함수 $f(x)$가 $x>-2$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 $x>-2$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a>0, \quad a(a-3)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>3$



(ii) $f'(-2)>0$에서 $\quad 12-3a>0$

$\therefore a<4$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-\frac{a}{3}$이므로

$-\frac{a}{3}>-2 \quad \therefore a<6$

이상에서 실수 a의 값의 범위는

$a<0$ 또는 $3<a<4$

따라서 보기 중 a의 값이 될 수 없는 것은 ④이다.

답 ④

0479 $f(x)=3x^4-6x^3+3ax^2+9$에서

$f'(x)=12x^3-18x^2+6ax=6x(2x^2-3x+a)$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. 그런데 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $2x^2-3x+a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $2x^2-3x+a=0$의 판별식을 D라 하면 $a\neq0$,

$D=9-8a>0$이므로 $\quad a\neq0,\ a<\frac{9}{8}$

$\therefore a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{8}$

따라서 정수 a의 최댓값은 1이다.

답 ③

0480 $f(x)=-x^4+8x^3+2ax^2$에서

$f'(x)=-4x^3+24x^2+4ax=-4x(x^2-6x-a)$

함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가져야 하므로 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. ··· ❶

즉 이차방정식 $x^2-6x-a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. ··· ❷

이차방정식 $x^2-6x-a=0$의 판별식을 D라 하면 $a\neq0$,

$\frac{D}{4}=9+a>0$이므로

$a\neq0,\ a>-9$

$\therefore -9<a<0$ 또는 $a>0$ ··· ❸

따라서 $\alpha=-9,\ \beta=0$이므로

$\beta-\alpha=9$ ··· ❹

답 9

채점 기준	비율
❶ 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 함을 알 수 있다.	30 %
❷ 이차방정식 $x^2-6x-a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 함을 알 수 있다.	20 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ $\beta-\alpha$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0481 $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^3+(a-2)x^2-4ax$에서

$f'(x)=2x^3-2x^2+2(a-2)x-4a$

$=2(x-2)(x^2+x+a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근을 갖거나 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

$2(x-2)(x^2+x+a)=0$의 한 근이 $x=2$이므로 이차방정식 $x^2+x+a=0$이 허근을 가져야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2+x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1-4a<0 \quad \therefore a>\frac{1}{4}$

$x^2+x+a=0$이 $x=2$를 중근으로 가질 수 없으므로 $f'(x)=0$은 삼중근을 가질 수 없다.

(ii) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근 또는 삼중근을 갖는 경우

$2(x-2)(x^2+x+a)=0$의 한 근이 $x=2$이므로 이차방정식 $x^2+x+a=0$이 $x=2$를 근으로 갖거나 중근을 가져야 한다.

$x^2+x+a=0$이 $x=2$를 근으로 가지면

$6+a=0 \quad \therefore a=-6$

$x^2+x+a=0$이 중근을 가지면 판별식을 D라 할 때,

$D=1-4a=0 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 $\quad a=-6$ 또는 $a\geq\frac{1}{4}$

따라서 실수 a의 최솟값은 -6이다.

답 -6

0482 $f(x)=-x^4+2x^2-3$에서

$f'(x)=-4x^3+4x=-4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	-11	↗	-2	↘	-3	↗	-2

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$일 때 최댓값 -2, $x=-2$일 때 최솟값 -11을 가지므로 $\quad M=-2,\ m=-11$

$\therefore M-m=9$

답 ⑤

0483 $f(x)=-x^4+\frac{4}{3}x^3+2x^2-4x$에서

$f'(x)=-4x^3+4x^2+4x-4=-4(x+1)(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1\ (\because -2\leq x\leq 0)$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{32}{3}$	↗	$\frac{11}{3}$	↘	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 $\frac{11}{3}$을 가지므로

$a=-1,\ b=\frac{11}{3} \quad \therefore a+b=\frac{8}{3}$

답 $\frac{8}{3}$

05 도함수의 활용 (2)

0484 $x+2=t$로 놓으면 $-4\le x\le 0$에서
$-2\le t\le 2$
$g(t)=t^3+3t^2-9t+6$으로 놓으면
$g'(t)=3t^2+6t-9=3(t+3)(t-1)$
$g'(t)=0$에서 $t=1$ ($\because -2\le t\le 2$)

t	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	28	↘	1	↗	8

따라서 함수 $g(t)$는 $t=-2$일 때 최댓값 28, $t=1$일 때 최솟값 1을 가지므로 $M=28$, $m=1$
$\therefore Mm=28$

답 28

0485 $f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3+4x^2-8x+a$에서
$f'(x)=4x^3-4x^2+8x-8=4(x-1)(x^2+2)$
$f'(x)=0$에서
$x=1$ ($\because x^2+2>0$)

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{13}{3}+a$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $-\frac{13}{3}+a$를 가지므로
$-\frac{13}{3}+a=-\frac{1}{3}$
$\therefore a=4$

답 ③

0486 $f(x)=2x^3-3x^2+k$에서
$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ ··· ❶

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k-28$	↗	k	↘	$k-1$	↗	$k+4$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $k+4$, $x=-2$일 때 최솟값 $k-28$을 갖는다. ··· ❷
이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 -12이므로
$k-28=-12$ $\therefore k=16$ ··· ❸
따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은
$16+4=20$ ··· ❹

답 20

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $f(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

0487 $f(x)=-x^3+12x+k$에서
$f'(x)=-3x^2+12=-3(x+2)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because -1\le x\le 3$)

x	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$k-11$	↗	$k+16$	↘	$k+9$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $k+16$, $x=-1$일 때 최솟값 $k-11$을 갖는다.
이때 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합이 17이므로
$k+16+k-11=17$, $2k=12$
$\therefore k=6$

답 ②

0488 $f(x)=\frac{1}{3}ax^3-ax^2+b$에서
$f'(x)=ax^2-2ax=ax(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 1\le x\le 3$)

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{2}{3}a+b$	↘	$-\frac{4}{3}a+b$	↗	b

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 b, $x=2$일 때 최솟값 $-\frac{4}{3}a+b$를 가지므로
$b=5$, $-\frac{4}{3}a+b=-3$ $\therefore a=6$, $b=5$
$\therefore ab=30$

답 ④

0489 잘라 내는 정사각형의 한 변의 길이를 x $(x>0)$라 하면 상자의 밑면은 한 변의 길이가 $12-2x$인 정사각형이므로
$12-2x>0$ $\therefore 0<x<6$
상자의 부피를 $V(x)$라 하면
$V(x)=x(12-2x)^2=4x^3-48x^2+144x$
$\therefore V'(x)=12x^2-96x+144=12(x-2)(x-6)$
$V'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 0<x<6$)

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=2$일 때 극대이면서 최대이므로 상자의 부피의 최댓값은
$V(2)=2\cdot 8^2=128$

답 ④

0490 점 P의 좌표를 (t, t^2-1)이라 하면
$\overline{AP}^2=t^2+(t^2-2)^2=t^4-3t^2+4$
$f(t)=t^4-3t^2+4$로 놓으면
$f'(t)=4t^3-6t=2t(2t^2-3)$
$f'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

t	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	$\frac{7}{4}$	↗	4	↘	$\frac{7}{4}$	↗

따라서 $f(t)$는 $t=-\frac{\sqrt{6}}{2}$ 또는 $t=\frac{\sqrt{6}}{2}$일 때 최솟값 $\frac{7}{4}$을 가지므로 $\overline{AP}^2$의 최솟값은 $\frac{7}{4}$이다.

답 $\frac{7}{4}$

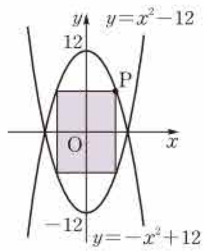
0491 점 P의 좌표를 $(a, -a^2+6a)$ $(0<a<6)$라 하면 H$(a, 0)$이므로 $\triangle$OPH의 넓이를 $S(a)$라 하면
$S(a)=\frac{1}{2}a(-a^2+6a)=\frac{1}{2}(-a^3+6a^2)$
$\therefore S'(a)=\frac{1}{2}(-3a^2+12a)=-\frac{3}{2}a(a-4)$
$S'(a)=0$에서 $a=4$ ($\because 0<a<6$)

a	0	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	극대	↘	

따라서 $S(a)$는 $a=4$일 때 극대이면서 최대이므로 $\triangle$OPH의 넓이의 최댓값은

$S(4)=\frac{1}{2}(-64+96)=16$ 답 ④

0492 오른쪽 그림과 같이 직사각형의 꼭짓점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하고 점 P의 x좌표를 a라 하면



$\mathrm{P}(a,\ 12-a^2)\ (0<a<2\sqrt{3})$

직사각형의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=2a\cdot 2(12-a^2)$

$=-4a^3+48a$ ⋯ ❶

$\therefore\ S'(a)=-12a^2+48$

$=-12(a+2)(a-2)$

$S'(a)=0$에서 $a=2\ (\because\ 0<a<2\sqrt{3})$ ⋯ ❷

a	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{3}$
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	극대	↘	

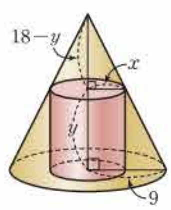
따라서 $S(a)$는 $a=2$일 때 극대이면서 최대이므로 직사각형의 넓이의 최댓값은

$S(2)=-32+96=64$ ⋯ ❸

답 64

채점 기준	비율
❶ 직사각형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $S'(a)=0$인 a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 직사각형의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

0493 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x, 높이를 y라 하면



$9:18=x:(18-y)$

$18-y=2x$

$\therefore\ y=18-2x\ (0<x<9)$

원기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\pi x^2y=\pi x^2(18-2x)=2\pi(9x^2-x^3)$

$\therefore\ V'(x)=2\pi(18x-3x^2)=6\pi x(6-x)$

$V'(x)=0$에서 $x=6\ (\because\ 0<x<9)$

x	0	$\cdots$	6	$\cdots$	9
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=6$일 때 극대이면서 최대이므로 원기둥의 부피의 최댓값은

$V(6)=2\pi(324-216)=216\pi$ 답 216π

0494 전략 $f'(x)=0$의 근이 -1, b임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-3x^2+ax-4$에서

$f'(x)=3x^2-6x+a$

함수 $f(x)$가 증가하는 x의 값의 범위가 $x\le -1$ 또는 $x\ge b$이므로 이차부등식 $f'(x)\ge 0$의 해가 $x\le -1$ 또는 $x\ge b$이다.

즉 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 -1, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+b=2,\ -b=\frac{a}{3}$ $\quad\therefore\ a=-9,\ b=3$

$\therefore\ a+b=-6$ 답 -6

0495 전략 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=-x^3+2ax^2-4x+3$에서

$f'(x)=-3x^2+4ax-4$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4a^2-12\le 0$ $\quad\therefore\ -\sqrt{3}\le a\le\sqrt{3}$

따라서 정수 a의 최댓값은 1이다. 답 ④

0496 전략 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구하고 그 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사한다.

풀이 $f(x)=x^4-4x^3+4x^2-3$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ ⋯ ❶

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-3	↗	-2	↘	-3	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖고, $x=0$, $x=2$에서 극솟값을 가지므로 $a=1,\ b=2$ ⋯ ❷

$\therefore\ a-b=-1$ ⋯ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0497 전략 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 p를 가지면 $f(a)=p$, $f'(a)=0$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^4+ax^2+b$에서

$f'(x)=4x^3+2ax$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 -13을 가지므로

$f(2)=-13,\ f'(2)=0$

$16+4a+b=-13,\ 32+4a=0$

$\therefore\ a=-8,\ b=3$

$\therefore\ ab=-24$ 답 ①

0498 전략 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 조사한다.

풀이 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 0, 2이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. $f'(1)<0$이므로 $x=1$에서 극값을 갖지 않는다.

ㄴ. 구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $f(2)$이다.

ㄷ. 구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)$는 $f(-2)$와 $f(2)$ 중 작은 값을 최솟값으로 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

0499 전략 주어진 구간에서의 $f(x)$의 극값과 양 끝 점의 함숫값을 비교하여 최솟값을 구한다.

풀이 $f(x)=2x^3-3x^2-12x$에서

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	-4	↗	7	↘	-20	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 -20을 갖는다. 답 -20

0500 전략 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=ax^3+x^2+3ax$에서

$f'(x)=3ax^2+2x+3a$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로

$3a>0 \quad \therefore a>0$ …… ㉠

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-9a^2\leq 0 \quad \therefore a\leq -\frac{1}{3}$ 또는 $a\geq \frac{1}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a\geq \frac{1}{3}$ 답 ⑤

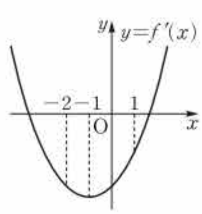
0501 전략 주어진 조건을 만족시키도록 $y=f'(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $f(x)=x^3+3x^2+(2a+3)x$에서

$f'(x)=3x^2+6x+2a+3=3(x+1)^2+2a$

함수 $f(x)$가 $-2\leq x\leq 1$에서 감소하려면 $-2\leq x\leq 1$에서 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.

오른쪽 그림에서



$f'(1)=2a+12\leq 0$이어야 하므로

$a\leq -6$ …… ㉠

$f'(-2)=2a+3\leq 0$이어야 하므로

$a\leq -\frac{3}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a\leq -6$

따라서 a의 최댓값은 -6이다. 답 ①

0502 전략 먼저 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 극값을 갖는 점의 좌표를 구한다.

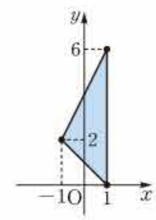
풀이 $f(x)=-x^3+3x+4$에서

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	2	↗	6	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 2, $x=1$에서 극댓값 6을 가지므로 세 점 $(-1,\ 2)$, $(1,\ 6)$, $(1,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2=6$ 답 6

0503 전략 함수 $f(x)$의 증감표를 만들어 모든 극값을 a에 대한 식으로 각각 나타낸다.

풀이 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-3x^2+a$에서

$f'(x)=2x^2-6x=2x(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	a	↘	$a-9$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 a를 갖고, $x=3$에서 극솟값 $a-9$를 가지므로

$a(a-9)=22, \quad a^2-9a-22=0$

$(a+2)(a-11)=0 \quad \therefore a=11$ ($\because$ a는 양수) 답 ⑤

0504 전략 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하고, 극값을 갖지 않으려면 방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=2x^3+ax^2+6x+1$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+6$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-36>0, \quad (a+6)(a-6)>0$

$\therefore a<-6$ 또는 $a>6$ …… ㉠ ⋯➊

$g(x)=x^3+ax^2-3ax+2$에서

$g'(x)=3x^2+2ax-3a$

함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않으려면 방정식 $g'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $g'(x)=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=a^2+9a\leq 0, \quad a(a+9)\leq 0$

$\therefore -9\leq a\leq 0$ …… ㉡ ⋯➋

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-9\leq a<-6$

따라서 정수 a는 $-9,\ -8,\ -7$의 3개이다. ⋯➌

답 3

채점 기준	비율
➊ 함수 $f(x)$가 극값을 갖도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
➋ 함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
➌ 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0505 전략 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^4+6x^3+ax^2$에서

$f'(x)=4x^3+18x^2+2ax=2x(2x^2+9x+a)$

함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가져야 하므로 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. 즉 이차방정식 $2x^2+9x+a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $2x^2+9x+a=0$의 판별식을 D라 하면 $a\neq0$, $D=81-8a>0$이므로

$a\neq0$, $a<\dfrac{81}{8}$

$\therefore a<0$ 또는 $0<a<\dfrac{81}{8}$

따라서 정수 a의 최댓값은 10이다.

답 10

0506 전략 $y=f'(x)$의 그래프를 보고 함수 $f(x)$가 극대, 극소가 되는 점을 찾는다.

풀이 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(0)=0$에서 $\quad b=0$

$f'(2)=0$에서 $\quad 12+4a+b=0 \quad \therefore a=-3$ ··· ❶

$f'(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

즉 $f(0)=5$이므로 $\quad c=5$ ··· ❷

$\therefore f(x)=x^3-3x^2+5$, $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	5	↘	1	↗	5

따라서 구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 1이다. ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ c의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 함수 $f(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

0507 전략 함수 $f(x)$의 증감표를 이용하여 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

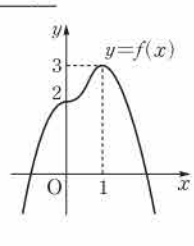
풀이 $f(x)=-3x^4+4x^3+2$에서

$f'(x)=-12x^3+12x^2=-12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	2	↗	3	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{2}{3}$일 때, $f'(x)>0$이므로

$f(x)$는 구간 $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$에서 증가한다.

ㄴ. $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고, 극값을 갖는 점은 1개이다.

ㄷ. $y=f(x)$의 치역은 $\{y\,|\,y\leq3\}$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0508 전략 구간 $[1, 4]$에서 $f(x)$의 극값과 $f(1)$, $f(4)$의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=x^3-3x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2$ ($\because 1\leq x\leq4$)

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$a-2$	↘	$a-4$	↗	$a+16$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 $a+16$, $x=2$일 때 최솟값 $a-4$를 갖는다.

$\therefore M=a+16$, $m=a-4$

이때 $M+m=20$이므로

$a+16+a-4=20$

$2a=8 \quad \therefore a=4$

답 ④

0509 전략 x개를 판매하여 얻는 이익은 $1000x-f(x)$(원)이다.

풀이 x개를 판매하여 얻는 이익을 $g(x)$원이라 하면

$g(x)=1000x-f(x)$

$=1000x-(x^3-60x^2+1000x+4000)$

$=-x^3+60x^2-4000$

$\therefore g'(x)=-3x^2+120x=-3x(x-40)$

$g'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=40$

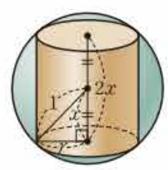
x	0	$\cdots$	40	$\cdots$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	-4000	↗	극대	↘

따라서 $g(x)$는 $x=40$일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 제품의 개수는 40이다.

답 40

0510 전략 원기둥의 부피를 함수로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 $2x$라 하면



$r^2=1-x^2$

이때 구의 반지름의 길이가 1이므로

$0<x<1$

원기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\pi r^2\cdot 2x=\pi(1-x^2)2x=2\pi(-x^3+x)$

$\therefore V'(x)=2\pi(-3x^2+1)$

$V'(x)=0$에서 $\quad x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ($\because 0<x<1$)

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	1
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$일 때 극대이면서 최대이므로 원기둥의 부피의 최댓값은

$V\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=2\pi\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{9}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi$

답 ③

0511 전략 x의 값의 범위를 $x \ge 2a$, $x<2a$로 나누어 함수 $f(x)$를 구한다.

풀이 (i) $x \ge 2a$일 때, $f(x)=x^3+3x^2-24(x-2a)+11$이므로

$$f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2)$$

함수 $f(x)$가 $x \ge 2a$에서 증가하려면

$$2a \ge 2 \qquad \therefore a \ge 1$$

(ii) $x<2a$일 때, $f(x)=x^3+3x^2+24(x-2a)+11$이므로

$$f'(x)=3x^2+6x+24=3(x+1)^2+21>0$$

따라서 함수 $f(x)$는 증가한다.

(i), (ii)에서 주어진 조건을 만족시키는 실수 a의 최솟값은 1이다.

답 1

0512 전략 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 p를 가지면 $f(a)=p$, $f'(a)=0$이다.

풀이 $g(x)=(x^3+2)f(x)$에서

$$g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+2)f'(x)$$

$g(x)$가 $x=1$에서 극솟값 24를 가지므로

$$g'(1)=0,\ g(1)=24$$

$g(1)=3f(1)=24$이므로

$$f(1)=8$$

$g'(1)=3f(1)+3f'(1)=0$이므로

$$24+3f'(1)=0$$

$$\therefore f'(1)=-8$$

$$\therefore f(1)-f'(1)=8-(-8)=16$$

답 16

0513 전략 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 식을 세워 함수 $y=f(x)g(x)$의 그래프의 개형을 추측한다.

풀이 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 세 점 $(a, 0)$, $(c, 0)$, $(e, 0)$을 지나고 오른쪽 위를 향하므로

$$f(x)=k(x-a)(x-c)(x-e)\ (k>0)$$

라 하자.

또 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(c, 0)$을 지나고 기울기가 양수이므로

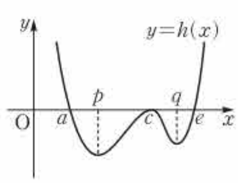
$$g(x)=m(x-c)\ (m>0)$$

라 하자.

$h(x)=f(x)g(x)$라 하면

$$h(x)=km(x-a)(x-c)^2(x-e)$$

이때 함수 $h(x)$가 $x=p$와 $x=q$에서 극소이고 $km>0$이므로 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



한편 $h(x)=f(x)g(x)$에서

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

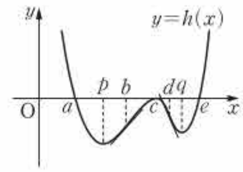
㉠의 양변에 $x=b$를 대입하면

$$h'(b)=f'(b)g(b)+f(b)g'(b)$$
$$=f(b)\cdot m>0\ (\because g'(b)=m>0) \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠의 양변에 $x=d$를 대입하면

$$h'(d)=f'(d)g(d)+f(d)g'(d)$$
$$=f(d)\cdot m<0\ (\because g'(d)=m>0) \qquad \cdots\cdots ㉢$$

$a<b<c$, $c<d<e$이면서 ㉡, ㉢을 만족시키는 b, d를 그래프에 나타내어 보면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 옳은 것은 ②이다.

답 ②

0514 전략 $x^2-4x=t$로 놓고 주어진 함수를 t에 대한 함수로 변형한다.

풀이 $x^2-4x=t$로 놓으면

$$t=x^2-4x=(x-2)^2-4$$

$1 \le x \le 4$에서 t의 값의 범위는 $\quad -4 \le t \le 0$

$g(t)=t^3-12t+1$로 놓으면

$$g'(t)=3t^2-12=3(t+2)(t-2)$$

$g'(t)=0$에서 $\quad t=-2\ (\because -4 \le t \le 0)$

t	-4	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	-15	↗	17	↘	1

따라서 함수 $g(t)$는 $t=-2$일 때 최댓값 17, $t=-4$일 때 최솟값 -15를 가지므로 구하는 합은

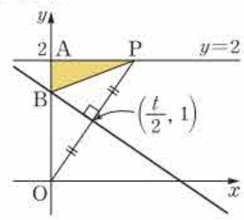
$$17-15=2$$

답 ②

0515 전략 먼저 선분 OP의 중점의 좌표와 직선 OP의 기울기를 이용하여 선분 OP의 수직이등분선의 방정식을 구한다.

풀이 선분 OP의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{0+t}{2}, \frac{0+2}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{t}{2}, 1\right)$$



이고, 직선 OP의 기울기가 $\frac{2}{t}$이므로 선분 OP의 수직이등분선의 기울기는 $-\frac{t}{2}$이다.

따라서 선분 OP의 수직이등분선의 방정식은

$$y-1=-\frac{t}{2}\left(x-\frac{t}{2}\right)$$

$$\therefore y=-\frac{t}{2}x+\frac{t^2}{4}+1$$

이때 점 B의 좌표는 $\left(0, \frac{t^2}{4}+1\right)$이므로

$$f(t)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AP}\cdot\overline{AB}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot t\cdot\left(2-\frac{t^2}{4}-1\right)=-\frac{t^3}{8}+\frac{t}{2}$$

$$\therefore f'(t)=-\frac{3}{8}t^2+\frac{1}{2}=-\frac{1}{8}(3t^2-4)$$

$f'(t)=0$에서 $\quad 3t^2-4=0$

$$\therefore t=\frac{2\sqrt{3}}{3}\ (\because 0<t<2)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	2
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	극대	↘	

함수 $f(t)$는 $t=\frac{2\sqrt{3}}{3}$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

$$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{9}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

따라서 $a=9$, $b=2$이므로 $\quad a+b=11$

답 11

06 도함수의 활용 (3)

Ⅱ. 다항함수의 미분법

0516 (1) $f(x)=x^3-3x^2+1$에서

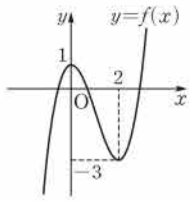
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $3x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

(2)

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	−3	↗



따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

(3) (2)에서 함수 $f(x)=x^3-3x^2+1$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $x^3-3x^2+1=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

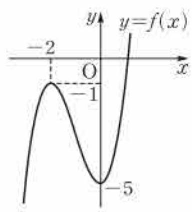
답 (1) 0, 2 (2) 풀이 참조 (3) 3

0517 $f(x)=x^3+3x^2-5$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	−2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	−1	↘	−5	↗



따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.

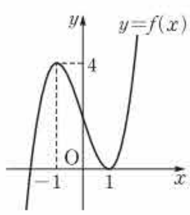
답 1

0518 $f(x)=x^3-3x+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	−1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗



따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

답 2

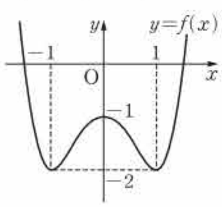
0519 $f(x)=x^4-2x^2-1$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	−1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	−2	↗	−1	↘	−2	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



답 2

0520 $f(x)=2x^3-3x^2+2$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=\boxed{1}$ ($\because x>0$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	1	↗

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 $\boxed{1}$이므로

$f(x)\geq 0$, 즉 $2x^3-3x^2+2\geq 0$

$\therefore$ (가) 1 (나) 1

답 (가) 1 (나) 1

0521 $f(x)=x^3-x^2-x+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x\geq 0$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$	2	↘	1	↗

$x\geq 0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 1이므로

$f(x)>0$, 즉 $x^3-x^2-x+2>0$

따라서 $x\geq 0$일 때, 부등식 $x^3-x^2-x+2>0$이 성립한다.

답 풀이 참조

0522 $f(x)=x^4+4x+3$으로 놓으면

$f'(x)=4x^3+4=4(x^3+1)$

$=4(x+1)(x^2-x+1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ ($\because x^2-x+1>0$)

x	$\cdots$	−1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	0	↗

함수 $f(x)$의 최솟값은 0이므로

$f(x)\geq 0$, 즉 $x^4+4x+3\geq 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^4+4x+3\geq 0$이 성립한다.

답 풀이 참조

0523 $v=\dfrac{dx}{dt}=10t-20$, $a=\dfrac{dv}{dt}=10$이므로 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=10-20=-10$, $a=10$

답 $v=-10$, $a=10$

0524 $v=\dfrac{dx}{dt}=-6t^2+12$, $a=\dfrac{dv}{dt}=-12t$이므로 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=-6+12=6$, $a=-12$

답 $v=6$, $a=-12$

0525 $v=\dfrac{dx}{dt}=4t^3-8t$, $a=\dfrac{dv}{dt}=12t^2-8$이므로 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=4-8=-4$, $a=12-8=4$

답 $v=-4$, $a=4$

0526 (1) 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=6t^2-6t$, $a=\dfrac{dv}{dt}=12t-6$

이므로 $t=2$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=6\cdot 2^2-6\cdot 2=12$, $a=12\cdot 2-6=18$

(2) 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$6t^2-6t=0$에서 $\quad 6t(t-1)=0$

$\therefore t=1\ (\because t>0)$

따라서 $t=1$에서 점 P가 운동 방향을 바꾼다.

답 (1) 속도: 12, 가속도: 18 (2) 1

0527 (1) $\dfrac{dl}{dt}=10t-7$

(2) $10\cdot4-7=33$

답 (1) $\dfrac{dl}{dt}=10t-7$ (2) 33

0528 $\dfrac{dS}{dt}=(2t+1)+(t+1)\cdot2=4t+3$

이므로 $t=1$에서의 도형의 넓이의 변화율은

$4\cdot1+3=7$

답 7

0529 $\dfrac{dV}{dt}=3\left(10+\dfrac{t}{3}\right)^2\cdot\dfrac{1}{3}=\left(10+\dfrac{t}{3}\right)^2$

이므로 $t=3$에서의 도형의 부피의 변화율은

$\left(10+\dfrac{3}{3}\right)^2=11^2=121$

답 121

0530 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=\dfrac{1}{2}x^4-4x^3+8x^2$과 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^4-4x^3+8x^2$으로 놓으면

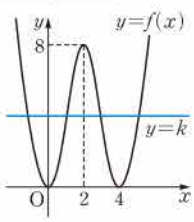
$f'(x)=2x^3-12x^2+16x$

$=2x(x-2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	8	↘	0	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로



$0<k<8$

따라서 정수 k는 1, 2, 3, $\cdots$, 7의 7개이다.

답 7

0531 $3x^4+4x^3-12x^2-k=0$에서

$3x^4+4x^3-12x^2=k$

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=3x^4+4x^3-12x^2$과 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=3x^4+4x^3-12x^2$으로 놓으면

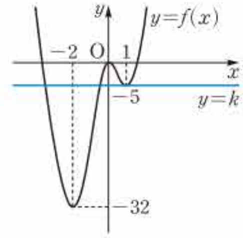
$f'(x)=12x^3+12x^2-24x$

$=12x(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-32	↗	0	↘	-5	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 접하고 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로



$k=-5$ 또는 $k=0$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-5+0=-5$

답 ②

0532 $x^4-\dfrac{8}{3}x^3+5-k=0$에서

$x^4-\dfrac{8}{3}x^3+5=k$

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=x^4-\dfrac{8}{3}x^3+5$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

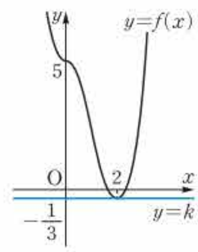
$f(x)=x^4-\dfrac{8}{3}x^3+5$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-8x^2=4x^2(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	5	↘	$-\frac{1}{3}$	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 오직 하나의 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 오직 한 점에서 만나야 하므로



$k=-\dfrac{1}{3}$

답 $-\dfrac{1}{3}$

0533 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 α, β, γ이고 $\alpha<\beta<\gamma$이므로 함수 $y=f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 가지려면

$f(\alpha)<0,\ f(\beta)>0,\ f(\gamma)<0$

이어야 한다.

답 ④

0534 $x^3+3x^2-9x-k=0$에서

$x^3+3x^2-9x=k$

$f(x)=x^3+3x^2-9x$로 놓으면

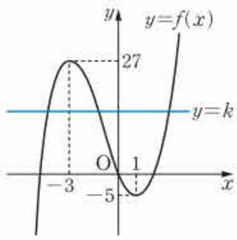
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	27	↘	-5	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 한 개의 양근과 서로 다른 두 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수이어야 하므로

$0<k<27$ 답 ⑤



0535 $x^3-4x^2+6x+k=2x^2-3x$에서

$x^3-6x^2+9x=-k$ ⋯ ❶

$f(x)=x^3-6x^2+9x$로 놓으면

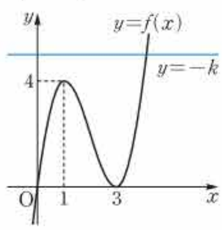
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$ ⋯ ❷

x	⋯	1	⋯	3	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 한 개의 양근만을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 한 점에서 만나고, 교점의 x좌표가 양수이어야 하므로

$-k>4$ $\therefore k<-4$ ⋯ ❸



따라서 정수 k의 최댓값은 -5이다. ⋯ ❹

답 -5

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 정리할 수 있다.	10 %
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❹ 정수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

0536 $x^3-3x^2+4x-1=3x^2-5x+k$에서

$x^3-6x^2+9x-1=k$

$f(x)=x^3-6x^2+9x-1$로 놓으면

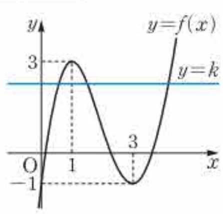
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	⋯	1	⋯	3	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	3	↘	−1	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 서로 다른 세 개의 양근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 서로 다른 세 개의 양수이어야 하므로

$-1<k<3$



따라서 실수 k의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0537 $x^4-8x^2+48=k-4x^3$에서 $x^4+4x^3-8x^2+48=k$

$f(x)=x^4+4x^3-8x^2+48$로 놓으면

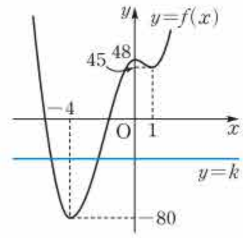
$f'(x)=4x^3+12x^2-16x=4x(x+4)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	⋯	−4	⋯	0	⋯	1	⋯
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	−80	↗	48	↘	45	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 음근과 두 허근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나고, 교점의 x좌표가 모두 음수이어야 하므로

$-80<k<45$



따라서 정수 k는

$-79,\ -78,\ -77,\ \cdots,\ 44$

의 124개이다. 답 124

0538 $f(x)=x^3-12x+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-2)f(2)<0$이어야 하므로

$(k+16)(k-16)<0$ $\therefore -16<k<16$

따라서 정수 k는 $-15,\ -14,\ -13,\ \cdots,\ 15$의 31개이다. 답 31

다른풀이 $x^3-12x+k=0$에서 $x^3-12x=-k$

$f(x)=x^3-12x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

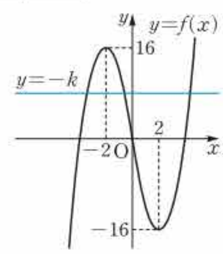
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

x	⋯	−2	⋯	2	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	16	↘	−16	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-16<-k<16$

$\therefore -16<k<16$



따라서 정수 k는 $-15,\ -14,\ -13,\ \cdots,\ 15$의 31개이다.

0539 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+k$로 놓으면

$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 개의 실근과 중근을 가지려면

$f(-1)f(3)=0$이어야 하므로

$\left(k+\frac{5}{3}\right)(k-9)=0$ $\therefore k=-\frac{5}{3}$ 또는 $k=9$

따라서 정수 k의 값은 9이다. 답 9

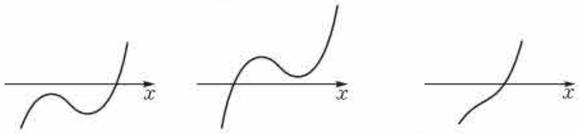
0540 $f(x)=x^3-3x^2+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$
삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근을 가지려면 $f(0)f(2)>0$
이어야 하므로 $\quad k(k-4)>0 \quad \therefore k<0$ 또는 $k>4$
따라서 $\alpha=0$, $\beta=4$이므로 $\quad \beta-\alpha=4$ 답 ④

라쎈 특강 삼차방정식이 오직 하나의 실근을 갖는 경우

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a>0)$에 대하여 삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근을 갖는 경우, 즉 한 실근과 두 허근을 갖는 경우의 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



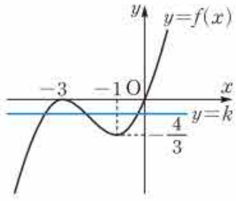
[극값을 갖는 경우] [극값을 갖지 않는 경우]

0541 주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식
$$\frac{1}{3}x^3+2x^2=-3x+k,\ \text{즉}\ \frac{1}{3}x^3+2x^2+3x-k=0$$
이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
$f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x-k$로 놓으면
$$f'(x)=x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$$
$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=-1$
삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면
$f(-3)f(-1)<0$이어야 하므로
$$-k\left(-k-\frac{4}{3}\right)<0,\quad k\left(k+\frac{4}{3}\right)<0$$
$$\therefore -\frac{4}{3}<k<0$$
답 $-\frac{4}{3}<k<0$

다른풀이 주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식
$$\frac{1}{3}x^3+2x^2=-3x+k,\ \text{즉}\ \frac{1}{3}x^3+2x^2+3x=k \quad \cdots\cdots ㉠$$
가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
$f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x$로 놓으면
$$f'(x)=x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$$
$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=-1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	$-\frac{4}{3}$	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로



$$-\frac{4}{3}<k<0$$

0542 주어진 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식
$$x^3-4x^2=2x^2-k,\ \text{즉}\ x^3-6x^2+k=0$$
이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
$f(x)=x^3-6x^2+k$로 놓으면
$$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$$
$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=4$
삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $f(0)f(4)=0$
이어야 하므로
$$k(k-32)=0$$
$$\therefore k=0\ \text{또는}\ k=32$$
따라서 자연수 k의 값은 32이다. 답 32

0543 주어진 곡선과 직선이 한 점에서 만나려면 방정식
$$x^3+\frac{3}{2}x^2=6x-k,\ \text{즉}\ x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+k=0$$
이 오직 한 개의 실근을 가져야 한다.
$f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+k$로 놓으면
$$f'(x)=3x^2+3x-6=3(x+2)(x-1)$$
$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=1$
삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 한 개의 실근을 가지려면
$f(-2)f(1)>0$이어야 하므로
$$(k+10)\left(k-\frac{7}{2}\right)>0$$
$$\therefore k<-10\ \text{또는}\ k>\frac{7}{2}$$
따라서 실수 k의 값이 될 수 없는 것은 ③이다. 답 ③

0544 주어진 두 곡선이 한 점에서는 만나고 다른 한 점에서는 접하려면 방정식
$$x^3+x^2-4x-12=-2x^2+5x+k,$$
$$\text{즉}\ x^3+3x^2-9x-12-k=0$$
이 한 실근과 중근을 가져야 한다. ··· ❶
$f(x)=x^3+3x^2-9x-12-k$로 놓으면
$$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$$
$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=1$ ··· ❷
삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면 $f(-3)f(1)=0$
이어야 하므로
$$(-k+15)(-k-17)=0$$
$$\therefore k=-17\ \text{또는}\ k=15$$ ··· ❸
따라서 실수 k의 값의 합은
$$-17+15=-2$$ ··· ❹
답 -2

채점 기준	비율
❶ 방정식이 한 실근과 중근을 가짐을 알 수 있다.	20 %
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❹ k의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

0545 $f(x)=x^4+4a^3x+12$로 놓으면
$$f'(x)=4x^3+4a^3$$
$$=4(x+a)(x^2-ax+a^2)$$
이때 $x^2-ax+a^2=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a^2\geq 0$이므로 $f'(x)=0$에서
$$x=-a$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-a$일 때 극소이면서 최소이므로 $f(x)$의 최솟값은

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

$f(-a)=a^4-4a^4+12$
$=-3a^4+12$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이려면 $f(-a)>0$이어야 하므로

$-3a^4+12>0,\quad a^4-4<0$

$(a^2+2)(a^2-2)<0,\quad a^2-2<0\ (\because a^2+2>0)$

$(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})<0\quad \therefore -\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1의 3개이다. 답 ③

0546 $x^4-2x^2\geq k$에서 $\quad x^4-2x^2-k\geq 0$

$f(x)=x^4-2x^2-k$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 $f(x)$의 최솟값은

$f(-1)=f(1)=-1-k$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이려면 $f(-1)=f(1)\geq 0$이어야 하므로

$-1-k\geq 0\quad \therefore k\leq -1$ 답 $k\leq -1$

0547 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)>0$이어야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(x)=x^4-x^2-9x-(5x^2-x-k)$
$=x^4-6x^2-8x+k$

$\therefore h'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘		↘	극소	↗

따라서 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이므로 $h(x)$의 최솟값은

$h(2)=16-24-16+k=k-24$

모든 실수 x에 대하여 $h(x)>0$이려면 $h(2)>0$이어야 하므로

$k-24>0\quad \therefore k>24$

$\therefore a=24$ 답 ⑤

0548 $f(x)=x^3-3x^2+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$0<x<2$일 때 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(0, 2)$에서 감소한다.

따라서 $0<x<2$에서 $f(x)>0$이려면 $f(2)\geq 0$이어야 하므로

$8-12+k\geq 0,\quad -4+k\geq 0\quad \therefore k\geq 4$

즉 실수 k의 최솟값은 4이다. 답 4

0549 $x^3>6x^2-k$에서 $\quad x^3-6x^2+k>0$

$f(x)=x^3-6x^2+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$x>4$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(4, \infty)$에서 증가한다.

따라서 $x>4$에서 $f(x)>0$이려면 $f(4)\geq 0$이어야 하므로

$64-96+k\geq 0,\quad -32+k\geq 0$

$\therefore k\geq 32$ 답 ⑤

0550 $2<x<4$일 때 함수 $y=x^3+2x^2$의 그래프가 직선 $y=4x-k$보다 항상 아래에 있으려면 부등식

$x^3+2x^2<4x-k$, 즉 $x^3+2x^2-4x+k<0$

이 성립해야 한다. ··· ❶

$f(x)=x^3+2x^2-4x+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+4x-4=(x+2)(3x-2)$

$2<x<4$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(2, 4)$에서 증가한다. ··· ❷

따라서 $2<x<4$일 때 $f(x)<0$이려면 $f(4)\leq 0$이어야 하므로

$64+32-16+k\leq 0,\quad 80+k\leq 0$

$\therefore k\leq -80$ ··· ❸

즉 실수 k의 최댓값은 -80이다. ··· ❹

답 -80

채점 기준	비율
❶ 부등식을 세울 수 있다.	20 %
❷ 함수 $f(x)$가 구간 $(2, 4)$에서 증가함을 알 수 있다.	30 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❹ k의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

0551 $2x^3+3x^2-12x\geq k$에서

$2x^3+3x^2-12x-k\geq 0$

$f(x)=2x^3+3x^2-12x-k$로 놓으면

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1\ (\because x>0)$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 $f(x)$의 최솟값은 $\quad f(1)=2+3-12-k=-7-k$

따라서 $x>0$일 때 $f(x)\geq 0$이려면 $f(1)\geq 0$이어야 하므로

$-7-k\geq 0\quad \therefore k\leq -7$ 답 ①

0552 $f(x)=2x^3+3x^2-36x+k$로 놓으면

$f'(x)=6x^2+6x-36=6(x+3)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3\ (\because x<1)$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↗	극대	↘	

$x<1$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대이면서 최대이므로 $f(x)$의 최댓값은

$f(-3)=-54+27+108+k=81+k$

따라서 $x<1$일 때 $f(x)\le 0$이려면 $f(-3)\le 0$이어야 하므로

$81+k\le 0 \qquad \therefore k\le -81$

즉 실수 k의 값이 될 수 있는 것은 ①이다. 답 ①

0553 $f(x)<g(x)$에서 $\quad x^4+x^3+x^2<x^3-x^2+k$

$\therefore x^4+2x^2-k<0$

$h(x)=x^4+2x^2-k$로 놓으면

$h'(x)=4x^3+4x=4x(x^2+1)$

$h'(x)=0$에서 $\quad x=0\ (\because x^2+1>0)$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$3-k$	↘	$-k$	↗	$24-k$

$-1\le x\le 2$일 때, 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $24-k$를 갖는다.

따라서 $-1\le x\le 2$일 때 $h(x)<0$이려면 $h(2)<0$이어야 하므로

$24-k<0 \qquad \therefore k>24$

즉 정수 k의 최솟값은 25이다. 답 25

0554 점 P가 원점을 지나는 순간은 $x=0$일 때이므로

$t^3-2t^2+t=0, \qquad t(t-1)^2=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=1$

따라서 점 P가 출발 후 다시 원점을 지나는 순간은 $t=1$일 때이다.

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-4t+1,\ a=\frac{dv}{dt}=6t-4$$

이므로 $t=1$에서의 점 P의 가속도는

$6-4=2$ 답 2

0555 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=6t^2-12t-8$$

$6t^2-12t-8=10$에서 $\qquad 6t^2-12t-18=0$

$6(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=3\ (\because t\ge 0)$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 위치는

$2\cdot 3^3-6\cdot 3^2-8\cdot 3=-24$ 답 ①

0556 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=2t^2+2pt+q,\ a=\frac{dv}{dt}=4t+2p \qquad \cdots❶$$

이때 $t=2$에서의 점 P의 속도가 9이므로

$2\cdot 2^2+2p\cdot 2+q=9$

$\therefore 4p+q=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

또 $t=2$에서의 점 P의 가속도가 6이므로

$4\cdot 2+2p=6, \qquad 2p=-2 \qquad \therefore p=-1$

$p=-1$을 ㉠에 대입하면

$-4+q=1 \qquad \therefore q=5 \qquad \cdots❷$

$\therefore p+q=4 \qquad \cdots❸$

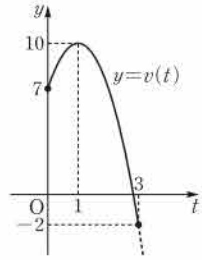
답 4

채점 기준	비율
❶ 시각 t에서의 점 P의 속도와 가속도를 구할 수 있다.	40 %
❷ p, q의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0557 시각 t에서의 점 P의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=x'(t)=-3t^2+6t+7=-3(t-1)^2+10$

이므로 $0\le t\le 3$에서 $y=v(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 $0\le t\le 3$에서 $-2\le v(t)\le 10$이므로

$0\le |v(t)|\le 10$

따라서 점 P의 속력의 최댓값은 10이고 그때의 시각은 $t=1$이므로

$M=10,\ a=1$

$\therefore M-a=9$

답 ③

0558 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-15t+12=3(t-1)(t-4)$$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=1$ 또는 $t=4$

이때 $t=1$, $t=4$의 좌우에서 v의 부호가 바뀌므로 $t=1$일 때 점 P는 첫 번째로 운동 방향을 바꾸고, $t=4$일 때 두 번째로 운동 방향을 바꾼다.

따라서 구하는 위치는 $t=4$에서의 점 P의 위치이므로

$$4^3-\frac{15}{2}\cdot 4^2+12\cdot 4=-8$$ 답 ①

0559 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-4t=t(3t-4)$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=0$ 또는 $t=\frac{4}{3}$

따라서 점 P가 출발 후 운동 방향을 바꾸는 순간은 $t=\frac{4}{3}$일 때이다.

시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라 하면

$$a=\frac{dv}{dt}=6t-4$$

이므로 $t=\frac{4}{3}$에서의 점 P의 가속도는

$$6\cdot\frac{4}{3}-4=4$$ 답 ④

0560 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$$v_P=\frac{dx_P}{dt}=2t-4,\ v_Q=\frac{dx_Q}{dt}=2t-8 \qquad \cdots❶$$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 $v_Pv_Q<0$이므로

$(2t-4)(2t-8)<0, \qquad 4(t-2)(t-4)<0$

$\therefore 2<t<4 \qquad \cdots❷$

따라서 $t=2$에서 $t=4$까지 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이므로 $\quad a=2,\ b=4$

$\therefore b-a=2 \qquad \cdots❸$

답 2

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q의 속도를 각각 구할 수 있다.	40 %
❷ t의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0561 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-18t+15=3(t-1)(t-5)$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=1$ 또는 $t=5$

$t=1$에서의 점 P의 위치는

$1^3-9\cdot1^2+15\cdot1=7$

$t=5$에서의 점 P의 위치는

$5^3-9\cdot5^2+15\cdot5=-25$

$\therefore |p-q|=|7-(-25)|=32$ 답 32

0562 ㄱ. $v(a)>0$, $v(c)<0$이므로 $t=a$일 때와 $t=c$일 때 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다.

ㄴ. $v(b)=0$이고 $t=b$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 $t=b$일 때 점 P는 운동 방향을 바꾼다.

ㄷ. $v'(t)=0$이면 가속도가 0이고, $v'(a)=0$, $v'(c)=0$이므로 가속도가 0이 되는 순간은 두 번이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0563 주어진 그래프에서 점 P가 원점을 지나는 시각은 $t=3$ 또는 $t=5$이고, 이 중 처음으로 원점을 지나는 순간은 $t=3$이므로 구하는 속도는 $x'(3)$의 값과 같다. 답 ④

0564 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

① $t=a$일 때 $x'(t)>0$이므로 점 P는 양의 방향으로 움직인다.

② $t=b$일 때 $v(t)=x'(t)=0$이므로 점 P의 속도는 0이다.

③ $b<t<d$에서 $v(t)=x'(t)<0$이므로 $t=c$일 때 점 P는 운동 방향을 바꾸지 않는다.

④ $0<t<f$에서 $t=c$, $t=e$일 때 $x(t)=0$이므로 점 P는 원점을 두 번 지난다.

⑤ $0<t<f$에서 $t=d$일 때 $|x(t)|$의 값이 가장 크므로 점 P가 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.

답 ③

0565 자동차가 브레이크를 밟은 지 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=7.2-0.72t$$

자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$7.2-0.72t=0 \qquad \therefore t=10$

따라서 이 자동차가 10초 동안 움직인 거리는

$7.2\times10-0.36\times10^2=36\,(\text{m})$ 답 36 m

0566 제동을 건 지 t초 후의 열차의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=48-2at$$

이때 열차가 제동을 건 지 30초 후에 정지하므로 $t=30$일 때의 속도는 0이다.

즉 $48-60a=0$에서 $\quad a=0.8$ 답 ②

0567 로켓의 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=20-10t$$

최고 높이에 도달했을 때 $v=0$이므로

$20-10t=0 \qquad \therefore t=2$

따라서 2초 후 이 로켓의 지면으로부터의 높이는

$30+20\cdot2-5\cdot2^2=50\,(\text{m})$ 답 ④

0568 공이 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로 $24.5t-4.9t^2=0$에서

$4.9t(5-t)=0 \qquad \therefore t=0$ 또는 $t=5$

따라서 공이 지면에 떨어지는 순간은 $t=5$일 때이다. ➊

공의 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=24.5-9.8t$$

이므로 $t=5$일 때의 공의 속도는

$24.5-9.8\times5=-24.5\,(\text{m/s})$ ➋

답 -24.5 m/s

채점 기준	비율
➊ 공이 지면에 떨어지는 순간의 시각을 구할 수 있다.	40 %
➋ 공이 지면에 떨어지는 순간의 속도를 구할 수 있다.	60 %

0569 물체의 t초 후의 속도를 v m/s, 가속도를 a m/s²이라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=30-10t,\ a=\frac{dv}{dt}=-10$$

ㄱ. 가속도 a는 상수이므로 물체의 가속도는 일정하다.

ㄴ. $t=1$일 때의 속도는

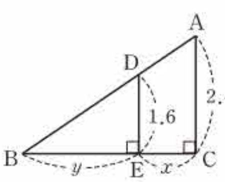
$30-10\cdot1=20\,(\text{m/s})$

ㄷ. 최고 높이에 도달한 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$30-10t=0 \qquad \therefore t=3$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0570 t초 동안 재현이가 움직인 거리를 x m, 재현이의 그림자의 길이를 y m라 하면 오른쪽 그림에서



$\triangle ABC \backsim \triangle DBE$

이므로 $\quad 2.4:1.6=(x+y):y$

$2.4y=1.6(x+y), \qquad 0.8y=1.6x \qquad \therefore y=2x$

이때 $x=2t$이므로 $\qquad y=4t$

$$\therefore \frac{dy}{dt}=4$$

따라서 그림자의 길이의 변화율은 4 m/s이다. 답 ④

0571 t초 후의 정사각형의 한 변의 길이는 $(5+3t)$ cm이므로 정사각형의 한 대각선의 길이를 l cm라 하면

$l=(5+3t)\sqrt{2}=3\sqrt{2}t+5\sqrt{2}$

$$\therefore \frac{dl}{dt}=3\sqrt{2}$$

따라서 정사각형의 한 대각선의 길이의 변화율은 $3\sqrt{2}$ cm/s이다.

답 $3\sqrt{2}$ cm/s

0572 돌을 던진 지 t초 후의 가장 바깥쪽 파문의 반지름의 길이는 $15t$ cm이므로 가장 바깥쪽 파문의 넓이를 S cm²라 하면

$S=\pi(15t)^2=225\pi t^2$

$$\therefore \frac{dS}{dt}=450\pi t$$

06 도함수의 활용 (3)

따라서 2초 후의 가장 바깥쪽 파문의 넓이의 변화율은

$450\pi \cdot 2 = 900\pi\,(\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$ 답 $900\pi\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$

0573 t초 후의 정삼각형의 한 변의 길이는 $(6+2t)$cm이므로 정삼각형의 넓이를 $S\ \mathrm{cm}^2$라 하면

$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(6+2t)^2$

$\therefore \frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2\cdot(6+2t)\cdot 2 = \sqrt{3}(6+2t)$

정삼각형의 넓이가 $36\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$인 순간은

$\frac{\sqrt{3}}{4}(6+2t)^2 = 36\sqrt{3}$에서 $t^2+6t-27=0$

$(t+9)(t-3)=0$

$\therefore t=3\ (\because t>0)$

따라서 구하는 정삼각형의 넓이의 변화율은

$\sqrt{3}(6+2\cdot 3) = 12\sqrt{3}\,(\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$ 답 ②

라쎈 특강 함수 $y=\{f(x)\}^n$의 도함수

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $y=\{f(x)\}^n$ (n은 자연수)이면

$y' = n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$

0574 점 P가 출발한 지 t초 후의 두 점 P, Q의 좌표는

$\mathrm{P}(2t,\ 0),\ \mathrm{Q}(0,\ 3(t-1))\ (t\ge 1)$

t초 후의 $\triangle$OPQ의 넓이를 S라 하면

$S = \frac{1}{2}\cdot 2t\cdot 3(t-1) = 3t^2-3t$

$\therefore \frac{dS}{dt} = 6t-3$

따라서 점 P가 출발한 지 4초 후의 $\triangle$OPQ의 넓이의 변화율은

$6\cdot 4-3=21$ 답 ④

0575 시각 t에서의 구의 부피를 V라 하면

$V = \frac{4}{3}\pi(0.5t)^3 = \frac{1}{6}\pi t^3$

$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}\pi t^2$

따라서 $t=10$일 때 구의 부피의 변화율은

$\frac{1}{2}\pi\times 10^2 = 50\pi$ 답 50π

0576 t초 후의 정육면체의 한 모서리의 길이는 $(4+t)$ cm이므로 정육면체의 부피를 $V\ \mathrm{cm}^3$라 하면

$V=(4+t)^3$ ··· ❶

$\therefore \frac{dV}{dt} = 3(4+t)^2$ ··· ❷

따라서 2초 후의 정육면체의 부피의 변화율은

$3(4+2)^2 = 108\,(\mathrm{cm}^3/\mathrm{s})$ ··· ❸

답 $108\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$

채점 기준	비율
❶ 정육면체의 부피 V를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\frac{dV}{dt}$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 2초 후의 정육면체의 부피의 변화율을 구할 수 있다.	30 %

0577 t초 후의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r cm, 높이를 h cm라 하면

$r=5+t,\ h=10-t$

t초 후의 원기둥의 부피를 $V\ \mathrm{cm}^3$라 하면

$V=\pi r^2h = \pi(5+t)^2(10-t)$

$\therefore \frac{dV}{dt} = 2\pi(5+t)(10-t)+\pi(5+t)^2\cdot(-1)$

$= 3\pi(5+t)(5-t)$

$\frac{dV}{dt}=0$에서 $t=5\ (\because 0<t<10)$

따라서 원기둥의 부피의 변화율이 0이 되는 것은 5초 후이다.

답 ⑤

0578 전략 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 $3x^4-2x^2+1 = x^4+2x^2$에서

$2x^4-4x^2+1=0$

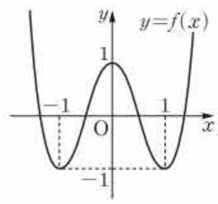
$f(x)=2x^4-4x^2+1$로 놓으면

$f'(x)=8x^3-8x=8x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 네 실근을 갖는다.



답 4

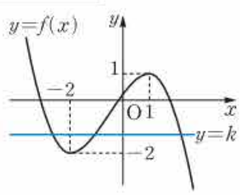
0579 전략 주어진 조건을 이용하여 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $f(x)-k=0$에서 $f(x)=k$

주어진 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(-2)=f'(1)=0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-2	↗	1	↘

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=k$와 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로 $-2<k<1$



따라서 정수 k는 -1, 0의 2개이다.

답 2

0580 전략 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면 (함수 $f(x)$의 최솟값)>0임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^4-4x^3+k$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이면서 최소이므로 $f(x)$의 최솟값은

$f(3)=k-27$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이려면 $f(3)>0$이어야 하므로

$k-27>0 \qquad \therefore k>27$

즉 정수 k의 최솟값은 28이다. 답 ④

0581 전략 점 P의 시각 t에서의 위치가 x일 때, 점 P의 속도 v는 $v=\dfrac{dx}{dt}$, 가속도 a는 $a=\dfrac{dv}{dt}$임을 이용한다.

풀이 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=30+50t-15t^2,\ a=\dfrac{dv}{dt}=50-30t$

따라서 $t=4$에서의 점 P의 가속도는

$50-30\cdot4=-70$ 답 ①

0582 전략 시각 t에서의 넓이를 S라 할 때, 넓이의 변화율은 $\dfrac{dS}{dt}$임을 이용한다.

풀이 시각 t에서의 원의 반지름의 길이가 $4t$이므로 원의 넓이를 S라 하면

$S=\pi(4t)^2=16\pi t^2$ ··· ❶

$\therefore \dfrac{dS}{dt}=32\pi t$ ··· ❷

원의 넓이가 48π인 순간은 $16\pi t^2=48\pi$에서

$t^2=3 \qquad \therefore t=\sqrt{3}\ (\because t>0)$ ··· ❸

따라서 구하는 원의 넓이의 변화율은

$32\pi\cdot\sqrt{3}=32\sqrt{3}\pi$ ··· ❹

답 $32\sqrt{3}\pi$

채점 기준	비율
❶ 원의 넓이 S를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $\dfrac{dS}{dt}$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 넓이가 48π인 순간의 t의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ 원의 넓이의 변화율을 구할 수 있다.	20 %

0583 전략 주어진 방정식을 $f(x)=k$ 꼴로 변형하고 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $3x^4+8x^3-18x^2+k=0$에서 $\qquad -3x^4-8x^3+18x^2=k$

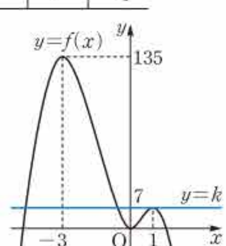
$f(x)=-3x^4-8x^3+18x^2$으로 놓으면

$f'(x)=-12x^3-24x^2+36x=-12x(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	135	↘	0	↗	7	↘

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로



$k=7\ (\because k$는 자연수$)$ 답 ⑤

0584 전략 주어진 방정식을 $f(x)=k$ 꼴로 변형하고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표의 부호를 알아본다.

풀이 $x^3-9x^2+24x-k=0$에서

$x^3-9x^2+24x=k$

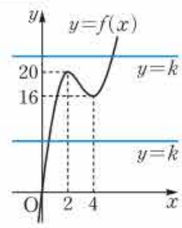
$f(x)=x^3-9x^2+24x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-18x+24=3(x-2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=2$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	20	↘	16	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 한 개의 양근만을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나고, 교점의 x좌표가 양수이어야 하므로



$0<k<16$ 또는 $k>20$

즉 $\alpha=16,\ \beta=20$이므로

$\beta-\alpha=4$

답 ②

0585 전략 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프가 서로 접하면 방정식 $f(x)=g(x)$가 중근을 가짐을 이용한다.

풀이 주어진 곡선과 직선이 접하려면 방정식

$x^3-2x+7=x+k$, 즉 $x^3-3x+7-k=0$

이 중근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3x+7-k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=-1$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면 $f(-1)f(1)=0$이어야 하므로

$(9-k)(5-k)=0 \qquad \therefore k=5$ 또는 $k=9$

따라서 구하는 k의 값의 합은

$5+9=14$ 답 14

다른풀이 $f(x)=x^3-2x+7$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-2t+7)$이라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$f'(t)=3t^2-2=1, \qquad t^2=1$

$\therefore t=\pm1$

즉 접점의 좌표가 $(-1,\ 8),\ (1,\ 6)$이므로 접선의 방정식은

$y-8=x+1,\ y-6=x-1$

$\therefore y=x+9,\ y=x+5$

따라서 $k=9$ 또는 $k=5$이므로 구하는 k의 값의 합은

$9+5=14$

0586 전략 모든 실수 x에 대하여 $(f(x)-g(x)$의 최솟값$)\ge0$임을 이용한다.

풀이 부등식 $f(x)\ge g(x)$에서

$x^4+x^3+2ax^2-4ax\ge x^3+4x-a^2$

$\therefore x^4+2ax^2-4(a+1)x+a^2\ge0$

$h(x)=x^4+2ax^2-4(a+1)x+a^2$으로 놓으면

$h'(x)=4x^3+4ax-4(a+1)$

$=4(x-1)(x^2+x+a+1)$

이때 자연수 a에 대하여

$$x^2+x+a+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+a+\frac{3}{4}>0$$

이므로 $h'(x)=0$에서 $\quad x=1$

따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	극소	↗

$$h(1)=1+2a-4(a+1)+a^2$$
$$=a^2-2a-3$$

모든 실수 x에 대하여 $h(x)\ge0$이려면 $h(1)\ge0$이어야 하므로

$a^2-2a-3\ge0,\quad (a+1)(a-3)\ge0$

$\therefore a\le-1$ 또는 $a\ge3$

따라서 자연수 a의 최솟값은 3이다.

답 3

0587 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위에 있으면 $f(x)>g(x)$이다.

풀이 $x>3$일 때, 곡선 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$이 직선 $y=-2x+k$보다 항상 위에 있으려면

$\frac{1}{3}x^3-x^2>-2x+k$, 즉 $\frac{1}{3}x^3-x^2+2x-k>0$

이어야 한다.

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x-k$로 놓으면

$f'(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1\ge1$

$x>3$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(3, \infty)$에서 증가한다.

따라서 $x>3$에서 $f(x)>0$이려면 $f(3)\ge0$이어야 하므로

$6-k\ge0\quad \therefore k\le6$

즉 실수 k의 최댓값은 6이다.

답 ③

0588 전략 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\le a$가 성립하려면 그 구간에서 (함수 $f(x)$의 최댓값)$\le a$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=2x^3-9x^2+12x+k$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=2$ ··· ❶

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	k	↗	$k+5$	↘	$k+4$	↗	$k+9$

$0\le x\le3$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $k+9$를 갖는다. ··· ❷

따라서 $0\le x\le3$일 때 $f(x)\le0$이려면 $f(3)\le0$이어야 하므로

$k+9\le0\quad \therefore k\le-9$ ··· ❸

답 $k\le-9$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $0\le x\le3$일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

0589 전략 시각 t에서의 위치가 $x=f(t)$일 때 속도는 $f'(t)$이다.

풀이 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=P'(t)=t^2+4,\ v_Q=Q'(t)=4t$

$v_P=v_Q$에서 $\quad t^2+4=4t,\quad t^2-4t+4=0$

$(t-2)^2=0\quad \therefore t=2$

이때 $t=2$에서의 두 점 P, Q의 위치는 각각

$P(2)=\frac{1}{3}\cdot2^3+4\cdot2-\frac{2}{3}=10,\ Q(2)=2\cdot2^2-10=-2$

이므로 구하는 두 점 P, Q 사이의 거리는

$|P(2)-Q(2)|=|10-(-2)|=12$

답 12

0590 전략 시각 t에서의 속도가 v일 때 가속도는 $\frac{dv}{dt}$이다.

풀이 ① 점 P의 가속도는 $v'(t)$이고, $v'(a)<0$이므로 $t=a$일 때 가속도는 음수이다.

② $b<t<c$일 때 $|v(t)|$의 값이 작아지므로 속력은 감소한다.

③ $b<t<d$일 때 $v(t)$가 일차함수이므로 $\quad v'(t)=k$ (k는 상수)

따라서 가속도는 일정하다.

④ $t=e$일 때 $v(t)>0$이므로 점 P는 양의 방향으로 움직이고 있다.

⑤ $v(c)=0$이고, $t=c$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P의 운동 방향이 바뀐다.

따라서 $0<t<e$에서 점 P는 운동 방향을 1번 바꾼다.

답 ④

0591 전략 속도가 0 m/s일 때 물체의 높이가 80 m임을 이용한다.

풀이 물체의 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dh}{dt}=a-10t$

최고 높이에 도달했을 때 $v=0$이므로

$a-10t=0\quad \therefore t=\frac{a}{10}$ ··· ❶

즉 $t=\frac{a}{10}$일 때 물체의 높이가 80 m이므로

$a\cdot\frac{a}{10}-5\left(\frac{a}{10}\right)^2=80,\quad \frac{1}{20}a^2=80$

$a^2=1600\quad \therefore a=40\ (\because a>0)$ ··· ❷

따라서 $h=40t-5t^2$이므로 지면에 떨어질 때의 시각은

$40t-5t^2=0,\quad -5t(t-8)=0\quad \therefore t=8\ (\because t>0)$

따라서 지면에 떨어지는 순간의 속도는

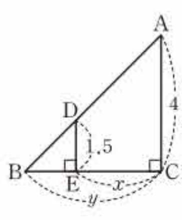
$40-10\cdot8=-40$ (m/s) ··· ❸

답 -40 m/s

채점 기준	비율
❶ 80 m인 지점에 도착하는 시각을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 지면에 떨어지는 순간의 속도를 구할 수 있다.	40 %

0592 전략 가로등 바로 밑에서 준수의 그림자의 앞 끝까지의 거리를 시각 t에 대한 함수로 나타낸다.

풀이 t초 후에 가로등 바로 밑에서부터 준수는 x m, 준수의 그림자의 앞 끝은 y m 떨어져 있다고 하면 오른쪽 그림에서



$\triangle ABC \backsim \triangle DBE$

이므로

$4:1.5=y:(y-x),\quad 4(y-x)=1.5y$

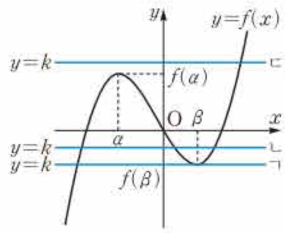
$2.5y=4x\quad \therefore y=\frac{8}{5}x$

이때 $x=2.5t$이므로 $\quad y=4t \quad \therefore \dfrac{dy}{dt}=4$

따라서 그림자의 앞 끝이 움직이는 속도는 4 m/s이다. 답 ⑤

0593 전략 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극대, $x=\beta$에서 극소이고 $f(0)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $k=f(\beta)$이면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=k$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

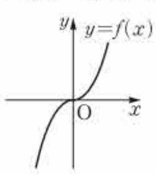
ㄴ. $f(\beta)<k<0$이면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점이 3개이고, 교점의 x좌표 중에서 양수가 2개, 음수가 1개이므로 방정식 $f(x)=k$는 서로 다른 두 개의 양근과 한 개의 음근을 갖는다.

ㄷ. $k>f(\alpha)$이면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점이 1개이고, 교점의 x좌표가 양수이므로 방정식 $f(x)=k$는 오직 하나의 양근을 갖는다.

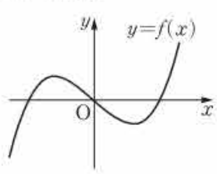
이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

0594 전략 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=2$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 그래프를 그려 본다.

풀이 최고차항의 계수가 1이고 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키는 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같아야 한다.

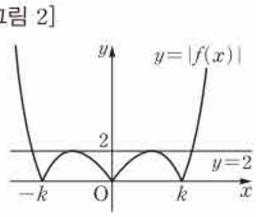


[그림 1]



[그림 2]

이때 방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수가 4이기 위해서는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=2$가 오른쪽 그림과 같이 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같아야 한다.



함수 $y=f(x)$의 그래프의 0이 아닌 x절편을 각각 $-k$, $k\ (k>0)$라 하면

$$f(x)=x(x+k)(x-k)=x^3-k^2x$$

이므로 $\quad f'(x)=3x^2-k^2=(\sqrt{3}x+k)(\sqrt{3}x-k)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\dfrac{k}{\sqrt{3}}$ 또는 $x=\dfrac{k}{\sqrt{3}}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{k}{\sqrt{3}}$에서 극댓값 2를 갖고, $x=\dfrac{k}{\sqrt{3}}$에서 극솟값 -2를 가지므로

$$f\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right)=-2, \quad \left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right)^3-k^2\cdot\frac{k}{\sqrt{3}}=-2$$

$$k^3=3\sqrt{3} \quad \therefore k=\sqrt{3}$$

따라서 $f(x)=x^3-3x$이므로

$$f(3)=3^3-3\cdot3=18$$

답 ④

참고 함수 $f(x)$가 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키면 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

0595 전략 점 $(1,\ a)$에서 곡선에 그은 접선이 3개 존재하도록 하는 정수 a의 조건을 구한다.

풀이 $y=3x^3+1$에서 $\quad y'=9x^2$

점 $(1,\ a)$에서 곡선 $y=3x^3+1$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ 3t^3+1)$이라 하면 접선의 방정식은

$$y-(3t^3+1)=9t^2(x-t)$$

이 직선이 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$$a-(3t^3+1)=9t^2(1-t)$$

$$\therefore 6t^3-9t^2+a-1=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

점 $(1,\ a)$에서 주어진 곡선에 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(t)=6t^3-9t^2+a-1$로 놓으면

$$f'(t)=18t^2-18t=18t(t-1)$$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=0$ 또는 $t=1$

삼차방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(0)f(1)<0$이어야 하므로

$$(a-1)(a-4)<0 \quad \therefore 1<a<4$$

따라서 정수 a의 값은 2, 3이다. 답 2, 3

0596 전략 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓고 주어진 조건을 이용하여 삼차함수 $f(x)$의 식을 구한다.

풀이 조건 ㈎에서 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

이때 $f(0)=c$, $f'(0)=b$이므로 조건 ㈏에서 $\quad c=b$

$$\therefore f(x)=x^3+ax^2+bx+b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

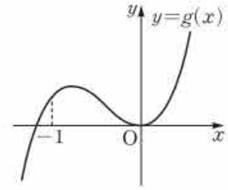
조건 ㈐에서 $x\ge-1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge f'(x)$이므로

$$f(x)-f'(x)\ge0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$g(x)=f(x)-f'(x)$라 하면

$$g(x)=(x^3+ax^2+bx+b)-(3x^2+2ax+b)$$
$$=x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x$$

$g(0)=0$이므로 ㉡을 만족시키려면 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같이 $x=0$일 때 x축에 접하고, $x\ge-1$인 부분에서 $g(x)\ge0$이어야 한다.



즉 $g'(0)=0$, $g(-1)\ge0$이어야 한다.

$g'(x)=3x^2+2(a-3)x+(b-2a)$이므로 $g'(0)=0$에서

$$b-2a=0 \quad \therefore b=2a \qquad \cdots\cdots ㉢$$

$$\therefore g(x)=x^3+(a-3)x^2$$

또 $g(-1)\ge0$에서 $\quad -1+a-3\ge0 \quad \therefore a\ge4$

㉠, ㉢에서 $f(x)=x^3+ax^2+2ax+2a$이므로

$$f(2)=10a+8$$

이때 $a\ge4$이므로

$$f(2)=10a+8\ge10\cdot4+8=48$$

따라서 $f(2)$의 최솟값은 48이다. 답 ⑤

0597 전략 두 점 $\mathrm{P}(x_1)$, $\mathrm{Q}(x_2)$를 잇는 선분의 중점 M의 좌표는 $\dfrac{x_1+x_2}{2}$이다.

풀이 선분 PQ의 중점 M의 t분 후의 위치를 x_3이라 하면

$$x_3=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{(2t^3-9t^2)+(t^2+8t)}{2}=t^3-4t^2+4t$$

세 점 P, Q, M의 속도를 각각 v_{P}, v_{Q}, v_{M}이라 하면

$$v_{\mathrm{P}}=\frac{dx_1}{dt}=6t^2-18t=6t(t-3)$$

$$v_{\mathrm{Q}}=\frac{dx_2}{dt}=2t+8=2(t+4)$$

$$v_{\mathrm{M}}=\frac{dx_3}{dt}=3t^2-8t+4=(3t-2)(t-2)$$

$0<t\le4$에서 v_{P}, v_{Q}, v_{M}의 값이 0이 되는 t의 개수를 각각 구하면 다음과 같다.

(i) $v_{\mathrm{P}}=0$에서 $t=3$ $\therefore a=1$

(ii) $v_{\mathrm{Q}}=0$을 만족시키는 t는 존재하지 않으므로 $b=0$

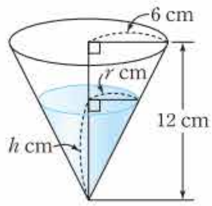
(iii) $v_{\mathrm{M}}=0$에서 $t=\dfrac{2}{3}$ 또는 $t=2$ $\therefore c=2$

이상에서 $a+b+c=3$

답 ③

0598 전략 시각 t에서의 부피가 V일 때, 부피의 변화율은 $\dfrac{dV}{dt}$이다.

풀이 t초 후의 수면의 반지름의 길이를 r cm, 수면의 높이를 h cm라 하면 오른쪽 그림에서



$6:12=r:h$

$\therefore r=\dfrac{1}{2}h$

이때 $h=0.5t=\dfrac{1}{2}t$이므로

$r=\dfrac{1}{4}t$

물의 부피를 V cm³라 하면

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{4}t\right)^2\cdot\frac{1}{2}t$$

$$=\frac{1}{96}\pi t^3 \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{1}{32}\pi t^2 \quad \cdots ❷$$

수면의 높이가 5 cm가 되는 시각은

$5=\dfrac{1}{2}t$ $\therefore t=10$ ⋯ ❸

따라서 $t=10$일 때 물의 부피의 변화율은

$$\frac{1}{32}\pi\cdot10^2=\frac{25}{8}\pi\,(\mathrm{cm^3/s})$$

$$\therefore a=\frac{25}{8} \quad \cdots ❹$$

답 $\dfrac{25}{8}$

채점 기준	비율
❶ 물의 부피 V를 시각 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\dfrac{dV}{dt}$를 구할 수 있다.	20 %
❸ 수면의 높이가 5 cm가 되는 시각을 구할 수 있다.	20 %
❹ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

07 부정적분

Ⅲ. 다항함수의 적분법

0599 (1) $f'(x)=2x-1$

(2) $\displaystyle\int f'(x)dx=\int(2x-1)dx=x^2-x+C$

답 (1) $f'(x)=2x-1$ (2) $\displaystyle\int f'(x)dx=x^2-x+C$

0600 ㄴ. $\left(\dfrac{1}{3}x^3\right)'=x^2$이므로 $\displaystyle\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C$

ㄷ. $\left(\dfrac{1}{2}x^2+x\right)'=x+1$이므로 $\displaystyle\int(x+1)dx=\frac{1}{2}x^2+x+C$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

0601 $f(x)=(3x+C)'=3$ 답 $f(x)=3$

0602 $f(x)=(x^2-4x+C)'=2x-4$ 답 $f(x)=2x-4$

0603 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}x^2-3x+C\right)'=x-3$ 답 $f(x)=x-3$

0604 $f(x)=(x^3+5x+C)'=3x^2+5$ 답 $f(x)=3x^2+5$

0605 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f(x)dx=f(x)$이므로

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int(x^2+x)dx=x^2+x$ 답 x^2+x

0606 $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$이므로

$\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2+x)\right\}dx=x^2+x+C$ 답 x^2+x+C

0607 답 $5x+C$

0608 답 $\dfrac{1}{2}x^2+C$

0609 답 $\dfrac{1}{5}x^5+C$

0610 답 $\dfrac{1}{8}x^8+C$

0611 답 $4x^2+C$

0612 답 $\dfrac{1}{2}x^2+3x+C$

0613 답 $\dfrac{1}{2}x^2-7x+C$

0614 답 x^2+x+C

0615 답 $\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+C$

0616 답 $\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{2}{3}x^3+5x+C$

0617 $\int(x+1)^2dx=\int(x^2+2x+1)dx$

$=\frac{1}{3}x^3+x^2+x+C$

답 $\frac{1}{3}x^3+x^2+x+C$

0618 $\int(3x+1)(x-2)dx=\int(3x^2-5x-2)dx$

$=x^3-\frac{5}{2}x^2-2x+C$

답 $x^3-\frac{5}{2}x^2-2x+C$

0619 $\int\frac{x^2-1}{x-1}dx=\int\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}dx=\int(x+1)dx$

$=\frac{1}{2}x^2+x+C$

답 $\frac{1}{2}x^2+x+C$

0620 $\int\frac{x^3+1}{x+1}dx=\int\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx$

$=\int(x^2-x+1)dx$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$

답 $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$

0621 $f(x)=(-x^3+3x^2+5x+C)'=-3x^2+6x+5$이므로

$f(2)=-12+12+5=5$ 답 ③

0622 $f(x)=(2x^2-3x+1)'=4x-3$이므로

$f(-1)=-4-3=-7$ 답 ②

0623 $xf(x)=(x^3+4x^2-7)'=3x^2+8x=x(3x+8)$이므로

$f(x)=3x+8$

$\therefore f(4)=12+8=20$ 답 20

0624 $f(x)=F'(x)=(x^3+ax^2+bx)'$

$=3x^2+2ax+b$

$f(0)=1$이므로 $b=1$ ··· ❶

따라서 $f(x)=3x^2+2ax+1$이므로

$f'(x)=6x+2a$

$f'(0)=4$이므로 $2a=4$

$\therefore a=2$ ··· ❷

$\therefore ab=2$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0625 $F(x)=\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$=2x(2x-3)+(x^2+1)\cdot 2$

$=6x^2-6x+2$

따라서 함수 $F(x)$의 상수항은 2이다. 답 2

0626 $\frac{d}{dx}\int(x^2+ax+5)dx=bx^2-x+c$이므로

$x^2+ax+5=bx^2-x+c$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=-1,\ b=1,\ c=5$

$\therefore a+b+c=5$ 답 ③

라쎈 특강 항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이다.
 ⭘ $a=b=c=0$
② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이다.
 ⭘ $a=a',\ b=b',\ c=c'$
③ $ax+by+c=0$이 $x,\ y$에 대한 항등식이다.
 ⭘ $a=b=c=0$
④ $ax+by+c=a'x+b'y+c'$이 $x,\ y$에 대한 항등식이다.
 ⭘ $a=a',\ b=b',\ c=c'$

0627 $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=5x^2-2x+1$이므로

$f(x)=5x^2-2x+1$

$\therefore f(1)=5-2+1=4$ 답 4

0628 $F(x)=\frac{d}{dx}\int xf(x)dx=xf(x)$

$=x(3x^2-4x)=3x^3-4x^2$

$\therefore F(2)=24-16=8$ 답 ⑤

0629 $\int\left\{\frac{d}{dx}(x^3+2x)\right\}dx=x^3+2x+C$이므로

$F(x)=x^3+2x+C$

$F(0)=-1$이므로 $C=-1$

따라서 $F(x)=x^3+2x-1$이므로

$F(-1)=-1-2-1=-4$ 답 -4

0630 $\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-6x)\right\}dx=x^2-6x+C$이므로

$f(x)=x^2-6x+C$

방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱이 7이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $C=7$

따라서 $f(x)=x^2-6x+7$이므로

$f(4)=16-24+7=-1$ 답 -1

0631 $\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-4x)\right\}dx=x^2-4x+C$이므로

$f(x)=x^2-4x+C=(x-2)^2+C-4$

이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 2이므로

$C-4=2$ $\therefore C=6$

따라서 $f(x)=x^2-4x+6$이므로

$f(3)=9-12+6=3$ 답 ①

0632 $\int\left[\dfrac{d}{dx}\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx\right]dx=\int\left[\dfrac{d}{dx}\{f(x)+C_1\}\right]dx$

$=f(x)+C$

이므로

$F(x)=100x^{100}+99x^{99}+98x^{98}+\cdots+2x^2+x+C$

이때 $F(0)=1$이므로 $C=1$

$\therefore F(x)=100x^{100}+99x^{99}+98x^{98}+\cdots+2x^2+x+1$ ⋯ ❶

$\therefore F(1)=100+99+98+\cdots+2+1+1$

$=\dfrac{100\cdot 101}{2}+1$

$=5051$ ⋯ ❷

답 5051

채점 기준	비율
❶ $F(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ $F(1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0633 $\int\left\{\dfrac{d}{dx}(x^2+kx)\right\}dx=x^2+kx+C$이므로

$f(x)=x^2+kx+C$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

즉 $f(x)=x^2+kx$이므로 $f'(x)=2x+k$ ⋯⋯ ㉠

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=3$에서

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)=3$

이므로 $x=-1$을 ㉠에 대입하면

$-2+k=3$ $\therefore k=5$

따라서 $f(x)=x^2+5x$이므로

$k+f(-2)=5-6=-1$

답 ⑤

0634 $\int\{f(x)+3x\}dx=x^3+ax^2+bx+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+3x=3x^2+2ax+b$

$\therefore f(x)=3x^2+(2a-3)x+b$

$f(0)=2$이므로 $b=2$

또 $f'(x)=6x+2a-3$이고 $f'(-1)=-3$이므로

$2a-9=-3$ $\therefore a=3$

즉 $f(x)=3x^2+3x+2$이므로

$f(-2)=12-6+2=8$

답 ⑤

0635 $\int(x+2)f'(x)dx=x^3+x^2-8x+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$(x+2)f'(x)=3x^2+2x-8=(x+2)(3x-4)$

$\therefore f'(x)=3x-4$ ⋯ ❶

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x-4)dx$

$=\dfrac{3}{2}x^2-4x+C_1$ ⋯ ❷

따라서 함수 $f(x)$의 일차항의 계수는 -4이다. ⋯ ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(x)$의 일차항의 계수를 구할 수 있다.	10 %

0636 $\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2$에서

$\int\left[\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int 2dx$

$\therefore f(x)+g(x)=2x+C_1$

위의 등식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+g(0)=C_1$

이때 $f(0)=5,\ g(0)=-5$이므로 $C_1=0$

$\therefore f(x)+g(x)=2x$ ⋯⋯ ㉠

또 $\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=2x$에서

$\int\left[\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int 2x\,dx$

$\therefore f(x)g(x)=x^2+C_2$

위의 등식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)g(0)=C_2$

이때 $f(0)=5,\ g(0)=-5$이므로 $C_2=-25$

$\therefore f(x)g(x)=x^2-25=(x+5)(x-5)$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$\begin{cases}f(x)=x+5\\g(x)=x-5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}f(x)=x-5\\g(x)=x+5\end{cases}$

그런데 $f(0)=5,\ g(0)=-5$이므로

$f(x)=x+5,\ g(x)=x-5$

$\therefore f(1)-g(1)=6-(-4)=10$

답 ④

다른풀이 $f(x),\ g(x)$가 일차함수이고 $f(0)=5,\ g(0)=-5$이므로

$f(x)=ax+5,\ g(x)=bx-5$ (a, b는 0이 아닌 상수)

로 놓으면

$f(x)+g(x)=(a+b)x,\ f(x)g(x)=(ax+5)(bx-5)$

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=a+b$이므로

$a+b=2$ ⋯⋯ ㉠

또 $\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=a(bx-5)+(ax+5)\cdot b=2abx-5a+5b$이므로 $2ab=2,\ -5a+5b=0$

$\therefore ab=1,\ a=b$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=1$

따라서 $f(x)=x+5,\ g(x)=x-5$이므로

$f(1)-g(1)=10$

0637 $f(x)=\int\dfrac{x^3}{x-1}dx-\int\dfrac{1}{x-1}dx=\int\dfrac{x^3-1}{x-1}dx$

$=\int\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}dx=\int(x^2+x+1)dx$

$=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+x+C$

이때 $f(-1)=-\dfrac{11}{6}$이므로

$-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-1+C=-\dfrac{11}{6}$ $\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x-1$이므로

$f(-2)=-\frac{8}{3}+2-2-1=-\frac{11}{3}$ 답 ②

0638 $f(x)=\int(1+2x+3x^2+\cdots+10x^9)dx$

$=x+x^2+x^3+\cdots+x^{10}+C$

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{10}$이므로

$f(1)=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{11개}=11$ 답 ②

0639 $f(x)=\int(3+\sqrt{x})^2dx+\int(3-\sqrt{x})^2dx$

$=\int\{(3+\sqrt{x})^2+(3-\sqrt{x})^2\}dx$

$=\int(2x+18)dx$

$=x^2+18x+C$

이때 $f(1)=10$이므로 $1+18+C=10$

$\therefore C=-9$

따라서 $f(x)=x^2+18x-9$이므로 ··· ❶

$f(-1)=1-18-9=-26$ ··· ❷

답 -26

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	80 %
❷ $f(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0640 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+4x+a)dx$

$=x^3+2x^2+ax+C$

이때 $f(0)=-4$이므로 $C=-4$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2+ax-4$이므로 $f(-1)=2$에서

$-1+2-a-4=2$ $\therefore a=-5$

즉 $f(x)=x^3+2x^2-5x-4$이므로

$f(2)=8+8-10-4=2$ 답 2

0641 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+8x+1)dx$

$=x^3+4x^2+x+C$

이때 $f(-1)=-4$이므로 $-1+4-1+C=-4$

$\therefore C=-6$

따라서 $f(x)=x^3+4x^2+x-6$이므로 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{-6}{1}=6$ 답 ③

라쎈 특강 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

0642 $f'(x)=6x^2+8x-5$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x^2+8x-5)dx$

$=2x^3+4x^2-5x+C_1$

이때 $f(0)=1$이므로 $C_1=1$

따라서 $f(x)=2x^3+4x^2-5x+1$이므로

$\int f(x)dx=\int(2x^3+4x^2-5x+1)dx$

$=\frac{1}{2}x^4+\frac{4}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+x+C$ 답 ③

0643 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{x^3+8}{x^2-2x+4}dx$

$=\int\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^2-2x+4}dx$

$=\int(x+2)dx$

$=\frac{1}{2}x^2+2x+C$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 3)$을 지나므로

$f(0)=3$ $\therefore C=3$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+3$이고 곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1, a)$를 지나므로

$a=f(-1)=\frac{1}{2}-2+3=\frac{3}{2}$ 답 ④

0644 $\int f(x)dx=xf(x)-2x^3+x^2+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2+2x$

$xf'(x)=6x^2-2x$

$\therefore f'(x)=6x-2$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x-2)dx=3x^2-2x+C_1$

이때 $f(1)=3$이므로

$3-2+C_1=3$ $\therefore C_1=2$

$\therefore f(x)=3x^2-2x+2$ 답 $f(x)=3x^2-2x+2$

0645 $\int g(x)dx=x^3f(x)+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

$\therefore g(3)=27f(3)+27f'(3)$

$=27\cdot1+27\cdot(-2)=-27$ 답 ②

0646 $F(x)$는 함수 $f(x)$의 부정적분이므로

$F'(x)=f(x)$

$F(x)+\int(x-1)f(x)dx=x^4+8x^3-3x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+(x-1)f(x)=4x^3+24x^2-6x$ ··· ❶

$xf(x)=x(4x^2+24x-6)$

$\therefore f(x)=4x^2+24x-6$

$=4(x+3)^2-42$ ··· ❷

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 최솟값 -42를 갖는다. ···➌

답 -42

채점 기준	비율
➊ 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분할 수 있다.	30 %
➋ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
➌ $f(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

라쎈특강 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최대 · 최소

$y=a(x-m)^2+n$ 꼴로 변형하면

① $a>0$일 때 $x=m$에서 최솟값 n을 갖는다.

② $a<0$일 때 $x=m$에서 최댓값 n을 갖는다.

0647 $2\int f(x)dx=xf(x)+f(x)-4x+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)=f(x)+xf'(x)+f'(x)-4$

$\therefore f(x)=(x+1)f'(x)-4$ ······ ㉠

$f(x)$가 일차함수이므로 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)로 놓으면

$f'(x)=a$

$f(x)=ax+b$, $f'(x)=a$를 ㉠에 대입하면

$ax+b=ax+a-4$

$\therefore b=a-4$ ······ ㉡

이때 $f(2)=5$이므로 $2a+b=5$ ······ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$

따라서 $f(x)=3x-1$이므로

$f(-1)=-3-1=-4$

답 ①

0648 $f'(x)=\begin{cases}-2x & (x>1)\\ 3x^2 & (x<1)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}-x^2+C_1 & (x>1)\\ x^3+C_2 & (x<1)\end{cases}$

이때 $f(2)=2$이므로

$-4+C_1=2 \quad \therefore C_1=6$

또 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉 $f(1)=\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$에서

$-1+6=1+C_2 \quad \therefore C_2=4$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-x^2+6 & (x\geq1)\\ x^3+4 & (x<1)\end{cases}$이므로

$f(-3)+f(3)=(-27+4)+(-9+6)=-26$

답 -26

라쎈특강 함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라 한다.

(i) $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.

(ii) 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

(iii) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

0649 $f'(x)=\begin{cases}x+2 & (x>-1)\\ k & (x<-1)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+2x+C_1 & (x>-1)\\ kx+C_2 & (x<-1)\end{cases}$

$f(0)=2$이므로 $C_1=2$

$f(-2)=-4$이므로

$-2k+C_2=-4$ ······ ㉠

또 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$f(-1)=\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)$에서

$\frac{1}{2}-2+2=-k+C_2$

$\therefore -k+C_2=\frac{1}{2}$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$C_2=5$, $k=\frac{9}{2}$

답 ⑤

0650 $f'(x)=\begin{cases}-x+2 & (x\geq1)\\ 1 & (x<1)\end{cases}$이므로 ···➊

$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+2x+C_1 & (x\geq1)\\ x+C_2 & (x<1)\end{cases}$ ···➋

$y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$f(0)=0 \quad \therefore C_2=0$

또 $f(x)$가 연속함수이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉 $f(1)=\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$에서

$-\frac{1}{2}+2+C_1=1$

$\therefore C_1=-\frac{1}{2}$ ···➌

따라서 $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2} & (x\geq1)\\ x & (x<1)\end{cases}$이므로

$f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{8}+3-\frac{1}{2}=\frac{11}{8}$ ···➍

답 $\frac{11}{8}$

채점 기준	비율
➊ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
➋ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	20 %
➌ C_1, C_2의 값을 구할 수 있다.	40 %
➍ $f\left(\frac{3}{2}\right)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0651 $f'(x)=x^2+1$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2+1)dx=\frac{1}{3}x^3+x+C$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, -2)$를 지나므로

$f(0)=-2 \quad \therefore C=-2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x-2$이므로

$f(2)=\frac{8}{3}+2-2=\frac{8}{3}$

답 $\frac{8}{3}$

0652 $f'(x)=-2x+6$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-2x+6)dx$$
$$=-x^2+6x+C=-(x-3)^2+9+C$$

이때 함수 $f(x)$의 최댓값이 8이므로

$9+C=8 \quad \therefore C=-1$

따라서 $f(x)=-x^2+6x-1$이므로

$f(1)=-1+6-1=4$

답 ④

0653 $f'(x)=4x-k$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x-k)dx=2x^2-kx+C$$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$f(0)=1 \quad \therefore C=1$

$\therefore f(x)=2x^2-kx+1$

따라서 이차방정식 $2x^2-kx+1=0$의 두 근의 합이 $\frac{3}{2}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{k}{2}=\frac{3}{2} \quad \therefore k=3$

즉 $f(x)=2x^2-3x+1$이므로

$f(2)=8-6+1=3$

답 ⑤

0654 $f(x)=\int(1-2ax)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=1-2ax$

점 $(1, 4)$에서의 접선의 기울기가 -3이므로 $f'(1)=-3$

$1-2a=-3 \quad \therefore a=2$

$\therefore f'(x)=1-4x$ ··· ❶

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(1-4x)dx=x-2x^2+C$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 4)$를 지나므로 $f(1)=4$

$1-2+C=4 \quad \therefore C=5$

따라서 $f(x)=-2x^2+x+5$이므로 ··· ❷

$f(3)=-18+3+5=-10$ ··· ❸

답 -10

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0655 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(h)-f(0)\}-\{f(-h)-f(0)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(-h)-f(0)}{-h}$$
$$=f'(0)+f'(0)=2f'(0)$$

$f(x)=\int(x-2)(x^2+2x+4)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-2)(x^2+2x+4)=x^3-8$

$\therefore f'(0)=-8$

따라서 구하는 값은

$2f'(0)=2\cdot(-8)=-16$

답 ①

0656 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$
$$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$$

$f(x)=\int(x^2+x-3)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+x-3 \quad \therefore f'(1)=-1$

따라서 구하는 값은

$2f'(1)=-2$

답 ②

0657 $\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x-2h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x-h)-f(x)\}-\{f(x-2h)-f(x)\}}{h}$$
$$=-\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}+2\lim_{h\to0}\frac{f(x-2h)-f(x)}{-2h}$$
$$=-f'(x)+2f'(x)=f'(x)$$

즉 $f'(x)=3x^2-4x+5$에서

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-4x+5)dx$$
$$=x^3-2x^2+5x+C$$

$f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+5x+1$이므로

$f(-1)=-1-2-5+1=-7$

답 -7

0658 $f'(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $\frac{3}{2}$을 갖고, $x=2$에서 극솟값을 갖는다. 이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2-x-2)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+C$$

이므로 $f(-1)=\frac{3}{2}$에서

$-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2+C=\frac{3}{2} \quad \therefore C=\frac{1}{3}$

즉 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{1}{3}$이므로 $f(x)$의 극솟값은

$f(2)=\frac{8}{3}-2-4+\frac{1}{3}=-3$

답 ④

0659 $f'(x)=a(x+1)^2+1\ (a<0)$로 놓으면 $f'(0)=0$이므로

$a+1=0 \quad \therefore a=-1$

$\therefore f'(x)=-(x+1)^2+1=-x^2-2x=-x(x+2)$ ··· ❶

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=0$ ⋯ ❷

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 1을 갖는다. 이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-x^2-2x)dx$$
$$=-\frac{1}{3}x^3-x^2+C$$

$f(0)=1$이므로 $\quad C=1$

즉 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2+1$이므로 ⋯ ❸

$$f(3)=-9-9+1=-17$$ ⋯ ❹

답 -17

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❹ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0660 $f(x)$의 최고차항이 x^3이므로 $f'(x)$의 최고차항은 $3x^2$이다. 이때 $f'(1)=f'(5)=0$이므로

$$f'(x)=3(x-1)(x-5)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=5$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 7을 갖고, $x=5$에서 극솟값을 갖는다. 이때

$$f(x)=\int 3(x-1)(x-5)dx$$
$$=\int(3x^2-18x+15)dx$$
$$=x^3-9x^2+15x+C$$

$f(1)=7$이므로 $\quad 1-9+15+C=7$

$\therefore C=0$

즉 $f(x)=x^3-9x^2+15x$이므로 극솟값은

$$f(5)=125-225+75=-25$$

답 ②

다른 풀이 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$f'(1)=0$에서 $\quad 3+2a+b=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(5)=0$에서 $\quad 75+10a+b=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-9$, $b=15$

$\therefore f(x)=x^3-9x^2+15x+c$

$f(1)=7$에서 $\quad 1-9+15+c=7 \quad \therefore c=0$

따라서 $f(x)=x^3-9x^2+15x$이므로 극솟값은

$$f(5)=-25$$

0661 $f(x+y)=f(x)+f(y)-xy$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-0 \quad \therefore f(0)=0$

$f'(0)=2$이므로

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(0)+f(h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=2$$

즉 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=2$이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-xh-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-x=2-x$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(2-x)dx=-\frac{1}{2}x^2+2x+C$$

그런데 $f(0)=0$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x$이므로

$$f(2)=-2+4=2$$

답 ③

0662 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+2 \quad \therefore f(0)=-2$

$f'(0)=3$이므로

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(0)+f(h)+2-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2}{h}=3$$

즉 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2}{h}=3$이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+2-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2}{h}=3$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int 3dx=3x+C$$

그런데 $f(0)=-2$이므로 $\quad C=-2$

$\therefore f(x)=3x-2$

답 $f(x)=3x-2$

0663 $f(x+y)=f(x)+f(y)-2xy+1$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+1 \quad \therefore f(0)=-1$

$f'(1)=1$이므로

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)-2h+1-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-2h+1}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}-2=1$$

즉 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}=3$이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-2xh+1-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-2xh+1}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}-2x$$
$$=3-2x$$
$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3-2x)dx=-x^2+3x+C$$

그런데 $f(0)=-1$이므로 $\quad C=-1$

따라서 $f(x)=-x^2+3x-1$이므로

$f(1)=-1+3-1=1$ **답** 1

0664 전략 y 이외의 문자는 상수로 생각하여 적분한다.

풀이 $\int(2x+y)^2dy=\int(4x^2+4xy+y^2)dy$

$$=4x^2y+2xy^2+\frac{1}{3}y^3+C$$

답 $4x^2y+2xy^2+\frac{1}{3}y^3+C$

0665 전략 $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\frac{d}{dx}\int(2x^3+x+1)dx=2x^3+x+1$

따라서 $f'(x)=6x^2+1$이므로

$f'(1)=6+1=7$ **답** 7

0666 전략 $\int f(x)dx-\int g(x)dx=\int\{f(x)-g(x)\}dx$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int\left(\frac{1}{2}x^3+2x+1\right)dx-\int\left(\frac{1}{2}x^3+x\right)dx$

$$=\int\left\{\frac{1}{2}x^3+2x+1-\left(\frac{1}{2}x^3+x\right)\right\}dx$$
$$=\int(x+1)dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2+x+C$$

$f(0)=1$이므로 $\quad C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1$이므로

$f(4)=8+4+1=13$ **답** ④

0667 전략 $f(x)=\int f'(x)dx$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-12x)dx=x^3-6x^2+C$

이때 $f(0)=1$이므로 $\quad C=1$

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+1$이므로

$f(-1)=-1-6+1=-6$ **답** ③

0668 전략 미분계수의 정의를 이용하여 구하는 값을 도함수 $f'(x)$를 사용하여 나타낸다.

풀이 $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(2+h)-f(2)\}-\{f(2-h)-f(2)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$$
$$=f'(2)+f'(2)=2f'(2)$$

$f(x)=\int(x^2+2x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+2x \qquad \therefore f'(2)=4+4=8$

따라서 구하는 값은 $\quad 2f'(2)=2\cdot8=16$ **답** ②

0669 전략 $F(x)$와 $G(x)$가 모두 $f(x)$의 부정적분이므로 $F'(x)=G'(x)$이다.

풀이 $F'(x)=G'(x)$이므로

$G(x)=F(x)+C$ (C는 상수)

가 성립한다.

이때 $G(0)=F(0)+C$이므로 $\quad C=3$

따라서 $G(x)=5x^3-2x^2+x+3$이므로

$G(-1)=-5-2-1+3=-5$ **답** -5

0670 전략 $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$임을 이용한다.

풀이 $\frac{d}{dx}\left\{f(x)+\int xf(x)dx\right\}=x^3+3x$에서

$f'(x)+xf(x)=x^3+3x \qquad \cdots\cdots ㉠$

다항함수 $f(x)$는 이차함수이므로 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)로 놓으면

$f'(x)=2ax+b$

$f(x)=ax^2+bx+c$, $f'(x)=2ax+b$를 ㉠에 대입하면

$2ax+b+x(ax^2+bx+c)=x^3+3x$

$\therefore ax^3+bx^2+(2a+c)x+b=x^3+3x$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=1$, $b=0$, $2a+c=3$

즉 $a=1$, $b=0$, $c=1$이므로

$f(x)=x^2+1$

$\therefore f(-2)=4+1=5$ **답** ③

0671 전략 $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int3x^2dx$이므로

$f(x)g(x)=x^3+C$

이때 조건 (나)에서 $f(1)=3$, $g(1)=0$이므로

$f(1)g(1)=1+C, \qquad 0=1+C$

$\therefore C=-1$

따라서 $f(x)g(x)=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$이고 $f(1)=3$, $g(1)=0$이므로

$f(x)=x^2+x+1$, $g(x)=x-1$

$\therefore f(2)+g(4)=(4+2+1)+3=10$ **답** 10

0672 전략 $\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = \int \{f(x) \pm g(x)\}dx$ (복호동순)임을 이용한다.

풀이 $f(x)+g(x)=\int(x^2-6x)dx$ …… ㉠

$f(x)-g(x)=\int(x^2+2x)dx$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$$2f(x)=\int(x^2-6x)dx+\int(x^2+2x)dx$$
$$=\int(2x^2-4x)dx=\frac{2}{3}x^3-2x^2+C_1$$
$$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{C_1}{2}$$

이때 $f(0)=0$이므로 $C_1=0$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2$ ⋯ ❶

㉠−㉡을 하면

$$2g(x)=\int(x^2-6x)dx-\int(x^2+2x)dx$$
$$=\int(-8x)dx=-4x^2+C_2$$
$$\therefore g(x)=-2x^2+\frac{C_2}{2}$$

이때 $g(0)=0$이므로 $C_2=0$

$\therefore g(x)=-2x^2$ ⋯ ❷

$\therefore f(6)g(-1)=36\cdot(-2)=-72$ ⋯ ❸

답 -72

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $g(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(6)g(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0673 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $F(x)=xf(x)-x^3+2x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-3x^2+4x$

$xf'(x)=3x^2-4x$ $\quad\therefore f'(x)=3x-4$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x-4)dx=\frac{3}{2}x^2-4x+C$$

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-4x+1$이므로

$f(1)=\frac{3}{2}-4+1=-\frac{3}{2}$

답 ①

0674 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$이다.

풀이 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 x^2에 정비례하므로

$f'(x)=ax^2$ (a는 상수)

으로 놓으면

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int ax^2dx=\frac{a}{3}x^3+C$$

곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(-2, 0)$, $(0, -2)$를 지나므로

$f(-2)=0$에서 $\quad -\frac{8}{3}a+C=0$ …… ㉠

$f(0)=-2$에서 $\quad C=-2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad a=-\frac{3}{4}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}x^3-2$이므로

$f(-4)=16-2=14$

답 ④

0675 전략 극한의 성질과 미분계수를 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=3a-1$에서 극한값이 존재하고 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) ⟶ 0이므로 (분자) ⟶ 0이어야 한다. 즉

$\lim_{x\to1}f(x)=0$ $\quad\therefore f(1)=0$ ⋯ ❶

즉 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$f'(1)=3a-1$

한편 $f'(x)=3x+a$에서 $f'(1)=3+a$이므로

$3a-1=3+a$, $\quad 2a=4$

$\therefore a=2$ ⋯ ❷

따라서 $f'(x)=3x+2$이므로

$$f(x)=\int(3x+2)dx=\frac{3}{2}x^2+2x+C$$

이때 $f(1)=0$이므로 $\quad \frac{3}{2}+2+C=0$

$\therefore C=-\frac{7}{2}$

즉 $f(x)=\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{7}{2}$이므로 ⋯ ❸

$f(0)=-\frac{7}{2}$ ⋯ ❹

답 $-\frac{7}{2}$

채점 기준	비율
❶ $f(1)=0$임을 알 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❹ $f(0)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0676 전략 극댓값을 갖는 x좌표와 극솟값을 갖는 x좌표를 각각 찾는다.

풀이 $f'(x)=ax(x-3)$ $(a<0)$으로 놓으면

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=3$

x	⋯	0	⋯	3	⋯
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값 14를 갖고, $x=0$에서 극솟값 5를 갖는다. 이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int ax(x-3)dx$$
$$=\int(ax^2-3ax)dx$$
$$=\frac{a}{3}x^3-\frac{3}{2}ax^2+C$$

$f(3)=14$에서 $\quad -\frac{9}{2}a+C=14$ …… ㉠

$f(0)=5$에서 $\quad C=5$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad a=-2$

$\therefore f(x)=-\frac{2}{3}x^3+3x^2+5$ 답 $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+3x^2+5$

0677 전략 도함수의 정의를 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{axh+\frac{1}{2}h^2}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\left(ax+\frac{1}{2}h\right)=ax$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int ax\,dx=\frac{1}{2}ax^2+C$

$f(1)=2$에서 $\quad \frac{1}{2}a+C=2$

$\therefore a+2C=4$ …… ㉠

$f(3)=6$에서 $\quad \frac{9}{2}a+C=6$

$\therefore 9a+2C=12$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ C=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}$이므로

$f(2)=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$ 답 ④

0678 전략 $p(x)=\int q(x)dx$이면 $\frac{d}{dx}p(x)=q(x)$이다.

풀이 ㄱ. $\frac{d}{dx}\{f(x)+x^3+C\}=f'(x)+3x^2$이므로

$\int f'(x)dx+\int 3x^2dx=\int\{f'(x)+3x^2\}dx$

$=f(x)+x^3+C$

ㄴ. $\frac{d}{dx}[\{f(x)\}^2+C]=2f(x)f'(x)$이므로

$\int 2f(x)f'(x)dx=\{f(x)\}^2+C$

ㄷ. 주어진 식의 좌변을 정리하면

$\int f(x)dx+\int f'(x)dx=\int\{f(x)+f'(x)\}dx$

주어진 식의 우변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\{xf(x)+C\}=f(x)+xf'(x)$

$\therefore \int f(x)dx+\int f'(x)dx\neq xf(x)+C$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

0679 전략 부정적분과 미분의 관계를 이용한다.

풀이 $f(x)=\int xg(x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\int xg(x)dx=xg(x)$

$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=4x^3+2x$에서

$\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)=4x^3+2x$

이므로 $\quad xg(x)-\frac{d}{dx}g(x)=4x^3+2x$ …… ㉠

이때 $g(x)=ax^n+\cdots$ (a는 상수, n은 음이 아닌 정수)이라 하면

$xg(x)=ax^{n+1}+\cdots,$

$\frac{d}{dx}g(x)=anx^{n-1}+\cdots$

이므로 $\quad xg(x)-\frac{d}{dx}g(x)=ax^{n+1}+\cdots$

위의 식이 ㉠과 같으므로

$a=4,\ n=2$

따라서 $g(x)=4x^2+px+q$ (p, q는 상수)로 놓으면

$g'(x)=8x+p$

㉠에서

$x(4x^2+px+q)-(8x+p)=4x^3+2x$

$4x^3+px^2+(q-8)x-p=4x^3+2x$

이므로

$p=0,\ q-8=2 \quad \therefore p=0,\ q=10$

즉 $g(x)=4x^2+10$이므로 $\quad g(1)=4+10=14$ 답 ⑤

0680 전략 직선 $y=3x+2$와 곡선 $y=f(x)$의 접점의 좌표를 $(a,\ b)$로 놓고 주어진 조건을 이용한다.

풀이 직선 $y=3x+2$와 곡선 $y=f(x)$의 접점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $f'(a)=3$이므로

$3a^2-a+1=3, \quad 3a^2-a-2=0$

$(3a+2)(a-1)=0$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$

또 $b=3a+2$이므로 $\quad b=5$

한편 $f'(x)=3x^2-x+1$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-x+1)dx$

$=x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 5)$를 지나므로 $\quad f(1)=5$

$1-\frac{1}{2}+1+C=5 \quad \therefore C=\frac{7}{2}$

따라서 $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{7}{2}$이므로 곡선 $y=f(x)$의 y절편은 $\frac{7}{2}$이다. 답 $\frac{7}{2}$

다른풀이 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-x+1)dx$

$=x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=3a^2-a+1$

이므로 접선의 방정식은

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

$=(3a^2-a+1)(x-a)+a^3-\frac{1}{2}a^2+a+C$

$=(3a^2-a+1)x-2a^3+\frac{1}{2}a^2+C$ …… ㉠

이때 $y=3x+2$는 ㉠과 같으므로

$$3a^2-a+1=3,\ -2a^3+\frac{1}{2}a^2+C=2$$

$3a^2-a+1=3$에서 $\quad 3a^2-a-2=0$

$$(3a+2)(a-1)=0$$

$$\therefore a=-\frac{2}{3} \text{ 또는 } a=1$$

이때 $a>0$이므로 $\quad a=1$

$a=1$을 $-2a^3+\frac{1}{2}a^2+C=2$에 대입하면

$$-2+\frac{1}{2}+C=2 \qquad \therefore C=\frac{7}{2}$$

$$\therefore f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{7}{2}$$

따라서 곡선 $y=f(x)$의 y절편은 $\frac{7}{2}$이다.

0681 전략 함수 $f(x)$가 $x=-1$, $x=1$에서 연속임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & (|x|>1) \\ -3x^2+4 & (|x|<1) \end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases} x^3+C_1 & (x>1) \\ -x^3+4x+C_2 & (-1<x<1) \\ x^3+C_3 & (x<-1) \end{cases}$$

$f(-2)=-7$이므로

$$-8+C_3=-7 \qquad \therefore C_3=1$$

이때 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$$f(-1)=\lim_{x\to-1+}(-x^3+4x+C_2)=\lim_{x\to-1-}(x^3+1)$$

$$1-4+C_2=-1+1 \qquad \therefore C_2=3$$

또 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to1+}(x^3+C_1)=\lim_{x\to1-}(-x^3+4x+3)$$

$$1+C_1=6 \qquad \therefore C_1=5$$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^3+5 & (x\ge1) \\ -x^3+4x+3 & (-1\le x<1) \\ x^3+1 & (x<-1) \end{cases}$이므로

$$f(2)=8+5=13$$

답 ①

08 정적분

Ⅲ. 다항함수의 적분법

0682 $\int(4x+1)dx=2x^2+x+C$이므로

$$\int_0^1(4x+1)dx=\Big[2x^2+x\Big]_0^1=2+1=3$$

답 3

0683 $\int(3t^2-2t)dt=t^3-t^2+C$이므로

$$\int_2^3(3t^2-2t)dt=\Big[t^3-t^2\Big]_2^3=(27-9)-(8-4)=14$$

답 14

0684 $\int(u^3+2u+1)du=\frac{1}{4}u^4+u^2+u+C$이므로

$$\int_{-1}^1(u^3+2u+1)du=\Big[\frac{1}{4}u^4+u^2+u\Big]_{-1}^1=\Big(\frac{1}{4}+1+1\Big)-\Big(\frac{1}{4}+1-1\Big)=2$$

답 2

0685 $\int(5x-2)dx=\frac{5}{2}x^2-2x+C$이므로

$$\int_0^{-1}(5x-2)dx=\Big[\frac{5}{2}x^2-2x\Big]_0^{-1}=\frac{5}{2}+2=\frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

0686 $\int(4x^3+3x^2-6x)dx=x^4+x^3-3x^2+C$이므로

$$\int_{-1}^{-2}(4x^3+3x^2-6x)dx=\Big[x^4+x^3-3x^2\Big]_{-1}^{-2}=(16-8-12)-(1-1-3)=-1$$

답 -1

0687 $\int f(x)dx=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x+C$이므로

(1) $\int_2^2 f(x)dx=\int_2^2(2x^2+3x+1)dx$

$$=\Big[\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x\Big]_2^2=\Big(\frac{16}{3}+6+2\Big)-\Big(\frac{16}{3}+6+2\Big)=0$$

(2) $\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1(2x^2+3x+1)dx$

$$=\Big[\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x\Big]_{-1}^1=\Big(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+1\Big)-\Big(-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-1\Big)=\frac{10}{3}$$

(3) $\int_{1}^{-1} f(x)dx=\int_{1}^{-1}(2x^2+3x+1)dx$

$$=\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x\right]_1^{-1}$$
$$=\left(-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-1\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+1\right)$$
$$=-\frac{10}{3}$$

답 (1) 0 (2) $\frac{10}{3}$ (3) $-\frac{10}{3}$

다른풀이 (3) $\int_{1}^{-1} f(x)dx=-\int_{-1}^{1} f(x)dx=-\frac{10}{3}$

0688 답 $2x^3-x$

0689 답 $(x+1)(x^2-4x-3)$

0690 $\int_1^2 3(3x^2+4x)dx=3\int_1^2(3x^2+4x)dx$

$$=3\left[x^3+2x^2\right]_1^2$$
$$=3\{(8+8)-(1+2)\}$$
$$=39$$

답 39

0691 $\int_{-1}^{0}(x^2+6)dx+\int_{-1}^{0}(x^2-x-2)dx$

$$=\int_{-1}^{0}(x^2+6+x^2-x-2)dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(2x^2-x+4)dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+4x\right]_{-1}^{0}$$
$$=-\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-4\right)$$
$$=\frac{31}{6}$$

답 $\frac{31}{6}$

0692 $\int_0^2(2x+1)^2dx-\int_0^2(2x-1)^2dx$

$$=\int_0^2(4x^2+4x+1)dx-\int_0^2(4x^2-4x+1)dx$$
$$=\int_0^2(4x^2+4x+1-4x^2+4x-1)dx$$
$$=\int_0^2 8x\,dx$$
$$=\left[4x^2\right]_0^2=16$$

답 16

0693 $\int_{-2}^{0}(x^2+3x+1)dx+\int_{0}^{1}(x^2+3x+1)dx$

$$=\int_{-2}^{1}(x^2+3x+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x\right]_{-2}^{1}$$
$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+1\right)-\left(-\frac{8}{3}+6-2\right)$$
$$=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

0694 $\int_{-1}^{1}(x^3+3x^2+4x+2)dx$

$$=\int_{-1}^{1}(x^3+4x)dx+\int_{-1}^{1}(3x^2+2)dx$$
$$=2\int_0^1(3x^2+2)dx$$
$$=2\left[x^3+2x\right]_0^1$$
$$=2(1+2)=6$$

답 6

0695 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=4x+5$

답 $f(x)=4x+5$

0696 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-8x+7$

답 $f(x)=3x^2-8x+7$

0697 $F'(x)=3x^2+x-1$이라 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_0^h(3x^2+x-1)dx=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_0^h F'(x)dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_0^h$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(h)-F(0)}{h}$$
$$=F'(0)=-1$$

답 -1

0698 $F'(t)=(t+1)(t+2)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x(t+1)(t+2)dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x F'(t)dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\Big[F(t)\Big]_1^x$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=F'(1)=2\cdot3=6$$

답 6

0699 $\int_1^2(x-2)(x^2+2x+4)dx=\int_1^2(x^3-8)dx$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-8x\right]_1^2$$
$$=(4-16)-\left(\frac{1}{4}-8\right)$$
$$=-\frac{17}{4}$$

따라서 $p=4$, $q=17$이므로 $p+q=21$

답 21

0700 $f(x)=x^2+5x+1$이므로

$$\int_0^1 x^3f(x)dx=\int_0^1 x^3(x^2+5x+1)dx$$
$$=\int_0^1(x^5+5x^4+x^3)dx$$
$$=\left[\frac{1}{6}x^6+x^5+\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{6}+1+\frac{1}{4}=\frac{17}{12}$$

답 ⑤

0701 $\int_0^{-2}\frac{4-x^2}{x-2}dx=\int_{-2}^0\frac{x^2-4}{x-2}dx$

$=\int_{-2}^0\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}dx$

$=\int_{-2}^0(x+2)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^0$

$=-(2-4)=2$

답 2

0702 $\int_3^3(x+1)(4x+5)dx-\int_{-1}^{-3}(y-1)(3y+1)dy$

$=\int_{-3}^{-1}(y-1)(3y+1)dy$

$=\int_{-3}^{-1}(3y^2-2y-1)dy$

$=\left[y^3-y^2-y\right]_{-3}^{-1}$

$=(-1-1+1)-(-27-9+3)$

$=32$

답 32

0703 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(ax+b)dx=\left[\frac{1}{2}ax^2+bx\right]_0^1=\frac{1}{2}a+b$

$\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1(ax^2+bx)dx=\left[\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2\right]_0^1=\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b$

이때 $\frac{1}{2}a+b=3,\ \frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b=2$이므로

$a=6,\ b=0$

$\therefore\ a-b=6$

답 ⑤

0704 $f'(x)=4x-1$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x-1)dx=2x^2-x+C$

$\therefore\ \int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1(2x^2-x+C)dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+Cx\right]_{-1}^1$

$=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+C\right)-\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-C\right)$

$=\frac{4}{3}+2C$

이때 $\frac{4}{3}+2C=0$이므로 $\quad C=-\frac{2}{3}$

따라서 $f(x)=2x^2-x-\frac{2}{3}$이므로

$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3\left(2x^2-x-\frac{2}{3}\right)dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x\right]_0^3$

$=18-\frac{9}{2}-2=\frac{23}{2}$

답 $\frac{23}{2}$

0705 $\int_{-2}^1(3x^2+2kx+1)dx=\left[x^3+kx^2+x\right]_{-2}^1$

$=(2+k)-(4k-10)$

$=-3k+12$

이때 $-3k+12>6$이므로 $\quad k<2$

따라서 정수 k의 최댓값은 1이다.

답 ①

0706 $f(x)=x^3-6x^2+k$이므로

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(x^3-6x^2+k)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+kx\right]_0^2$

$=4-16+2k$

$=-12+2k$

이때 $-12+2k=0$이므로 $\quad k=6$

답 6

0707 $\int_1^k(2x-5)dx=\left[x^2-5x\right]_1^k$

$=(k^2-5k)-(1-5)$

$=k^2-5k+4$

$=\left(k-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$ ··· ❶

따라서 $\int_1^k(2x-5)dx$는 $k=\frac{5}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{9}{4}$를 가지므로

$m=\frac{5}{2},\ n=-\frac{9}{4}$ ··· ❷

$\therefore\ m+n=\frac{1}{4}$ ··· ❸

답 $\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ $\int_1^k(2x-5)dx$의 값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ m, n의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0708 $\int_0^2(2x^2+x)dx+\int_2^0(x-x^2)dx$

$=\int_0^2(2x^2+x)dx-\int_0^2(x-x^2)dx$

$=\int_0^2(2x^2+x-x+x^2)dx$

$=\int_0^2 3x^2dx$

$=\left[x^3\right]_0^2=8$

답 ⑤

0709 $\int_0^1\frac{x^3}{x+2}dx+\int_0^1\frac{8}{t+2}dt$

$=\int_0^1\frac{x^3}{x+2}dx+\int_0^1\frac{8}{x+2}dx$

$=\int_0^1\frac{x^3+8}{x+2}dx$

$=\int_0^1\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}dx$

$=\int_0^1(x^2-2x+4)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+4x\right]_0^1$

$=\frac{1}{3}-1+4=\frac{10}{3}$

답 ④

0710 $\int_0^1 1dx+\int_0^1 2xdx+\int_0^1 3x^2dx+\cdots+\int_0^1 nx^{n-1}dx$

$=\int_0^1 (1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})dx$

$=\Big[x+x^2+x^3+\cdots+x^n\Big]_0^1$

$=1+1+1+\cdots+1=n$

$\therefore n=10$

답 10

0711 $\int_{-1}^2 (2x+k)^2dx-\int_2^{-1}(1-3x^2)dx$

$=\int_{-1}^2 (4x^2+4kx+k^2)dx+\int_{-1}^2 (1-3x^2)dx$

$=\int_{-1}^2 (4x^2+4kx+k^2+1-3x^2)dx$

$=\int_{-1}^2 (x^2+4kx+k^2+1)dx$

$=\Big[\frac{1}{3}x^3+2kx^2+(k^2+1)x\Big]_{-1}^2$

$=\Big\{\frac{8}{3}+8k+2(k^2+1)\Big\}-\Big\{-\frac{1}{3}+2k-(k^2+1)\Big\}$

$=3k^2+6k+6$

$=3(k+1)^2+3$ ··· ❶

따라서 주어진 정적분은 $k=-1$일 때 최솟값 3을 갖는다. ··· ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 정적분의 값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	80 %
❷ 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0712 $\int_0^2 (x^2-x-5)dx+\int_2^6 (y^2-y-5)dy$

$=\int_0^2 (x^2-x-5)dx+\int_2^6 (x^2-x-5)dx$

$=\int_0^6 (x^2-x-5)dx=\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-5x\Big]_0^6$

$=72-18-30=24$

답 ③

0713 $\int_2^5 (x-1)(x^2+x+1)dx+\int_5^4 (x^3-1)dx$

$=\int_2^5 (x^3-1)dx+\int_5^4 (x^3-1)dx$

$=\int_2^4 (x^3-1)dx=\Big[\frac{1}{4}x^4-x\Big]_2^4$

$=(64-4)-(4-2)=58$

답 ⑤

0714 $\int_0^3 (6x-1)dx-\int_a^3 (6x-1)dx$

$=\int_0^3 (6x-1)dx+\int_3^a (6x-1)dx$

$=\int_0^a (6x-1)dx=\Big[3x^2-x\Big]_0^a$

$=3a^2-a$ ··· ❶

이때 $3a^2-a=44$이므로 $\quad 3a^2-a-44=0$

$(3a+11)(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$) ··· ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 좌변을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

0715 $\int_1^5 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^5 f(x)dx$

$=\Big\{\int_1^3 f(x)dx+\int_3^2 f(x)dx\Big\}+\int_2^5 f(x)dx$

$=\int_1^3 f(x)dx-\int_2^3 f(x)dx+\int_2^5 f(x)dx$

$=5-2+4=7$

답 7

0716 $\int_{-2}^{-1} \frac{x^2}{x^2+3}dx-\int_1^{-1} \frac{y^2}{y^2+3}dy+\int_{-2}^1 \frac{3}{z^2+3}dz$

$=\int_{-2}^{-1} \frac{x^2}{x^2+3}dx+\int_{-1}^1 \frac{x^2}{x^2+3}dx+\int_{-2}^1 \frac{3}{x^2+3}dx$

$=\int_{-2}^1 \frac{x^2}{x^2+3}dx+\int_{-2}^1 \frac{3}{x^2+3}dx$

$=\int_{-2}^1 \frac{x^2+3}{x^2+3}dx=\int_{-2}^1 1dx$

$=\Big[x\Big]_{-2}^1=1-(-2)=3$

답 3

0717 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$

$=\int_0^1 (-x+2)dx+\int_1^2 (2x-1)dx$

$=\Big[-\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_0^1+\Big[x^2-x\Big]_1^2$

$=\Big(-\frac{1}{2}+2\Big)+(4-2)-(1-1)$

$=\frac{7}{2}$

답 ③

0718 $f(x)=\begin{cases} 2 & (x\ge 0) \\ 2x+2 & (x\le 0) \end{cases}$ 이므로

$xf(x)=\begin{cases} 2x & (x\ge 0) \\ 2x^2+2x & (x\le 0) \end{cases}$ ··· ❶

$\therefore \int_{-2}^2 xf(x)dx=\int_{-2}^0 xf(x)dx+\int_0^2 xf(x)dx$

$=\int_{-2}^0 (2x^2+2x)dx+\int_0^2 2xdx$

$=\Big[\frac{2}{3}x^3+x^2\Big]_{-2}^0+\Big[x^2\Big]_0^2$

$=-\Big(-\frac{16}{3}+4\Big)+4$

$=\frac{16}{3}$ ··· ❷

답 $\frac{16}{3}$

08 정적분

채점 기준	비율
❶ $xf(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\int_{-2}^{2} xf(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	70 %

0719 (i) $a\le 2$일 때,

$$\int_1^a f(x)dx=\int_1^a (2x-4)dx$$
$$=\Big[x^2-4x\Big]_1^a$$
$$=(a^2-4a)-(1-4)$$
$$=a^2-4a+3$$

이때 $a^2-4a+3=0$이므로

$(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

그런데 $a\ne1$, $a\le2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a\ge2$일 때,

$$\int_1^a f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^a f(x)dx$$
$$=\int_1^2(2x-4)dx+\int_2^a\left(\frac{1}{2}x-1\right)dx$$
$$=\Big[x^2-4x\Big]_1^2+\Big[\frac{1}{4}x^2-x\Big]_2^a$$
$$=(4-8)-(1-4)+\left(\frac{1}{4}a^2-a\right)-(1-2)$$
$$=\frac{1}{4}a^2-a$$

이때 $\frac{1}{4}a^2-a=0$이므로

$a^2-4a=0$, $\quad a(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a\ge2$)

(i), (ii)에서 $\quad a=4$

답 4

0720 $|x^2-3x|=\begin{cases} x^2-3x & (x\le0 \text{ 또는 } x\ge3) \\ -x^2+3x & (0\le x\le3)\end{cases}$이므로

$$\int_{-1}^{2}|x^2-3x|dx=\int_{-1}^{0}(x^2-3x)dx+\int_0^2(-x^2+3x)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\Big]_{-1}^{0}+\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\Big]_0^2$$
$$=-\left(-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{8}{3}+6\right)$$
$$=\frac{31}{6}$$

답 ⑤

0721 $|x+1|=\begin{cases} x+1 & (x\ge-1) \\ -x-1 & (x\le-1)\end{cases}$이므로

$$\int_{-2}^{0}|x+1|dx=\int_{-2}^{-1}(-x-1)dx+\int_{-1}^{0}(x+1)dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{2}x^2-x\Big]_{-2}^{-1}+\Big[\frac{1}{2}x^2+x\Big]_{-1}^{0}$$
$$=\left(-\frac{1}{2}+1\right)-(-2+2)-\left(\frac{1}{2}-1\right)$$
$$=1$$

답 ②

0722 $|x^2-4|=\begin{cases} x^2-4 & (x\le-2 \text{ 또는 } x\ge2) \\ -x^2+4 & (-2\le x\le2)\end{cases}$이므로

$$\int_0^3\frac{|x^2-4|}{x+2}dx$$
$$=\int_0^2\frac{-x^2+4}{x+2}dx+\int_2^3\frac{x^2-4}{x+2}dx$$
$$=-\int_0^2\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}dx+\int_2^3\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}dx$$
$$=-\int_0^2(x-2)dx+\int_2^3(x-2)dx$$
$$=-\Big[\frac{1}{2}x^2-2x\Big]_0^2+\Big[\frac{1}{2}x^2-2x\Big]_2^3$$
$$=-(2-4)+\left(\frac{9}{2}-6\right)-(2-4)$$
$$=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

0723 $|2x-1|=\begin{cases} 2x-1 & \left(x\ge\frac{1}{2}\right) \\ -2x+1 & \left(x\le\frac{1}{2}\right)\end{cases}$이므로

$$\int_0^a|2x-1|dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(-2x+1)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{a}(2x-1)dx$$
$$=\Big[-x^2+x\Big]_0^{\frac{1}{2}}+\Big[x^2-x\Big]_{\frac{1}{2}}^{a}$$
$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+(a^2-a)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=a^2-a+\frac{1}{2}$$

이때 $a^2-a+\frac{1}{2}=\frac{13}{2}$이므로

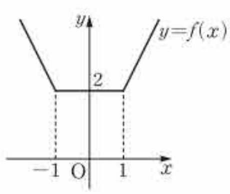
$a^2-a-6=0$, $\quad (a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ $\left(\because a>\frac{1}{2}\right)$

답 ①

0724 $f(x)=\begin{cases} 2x & (x\ge1) \\ 2 & (-1\le x\le1) \\ -2x & (x\le-1)\end{cases}$ ❶

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $f(x)$는 $-1\le x\le1$일 때 최솟값 2를 가지므로

$a=2$ ❷

$$\therefore \int_0^a f(x)dx$$
$$=\int_0^1 2dx+\int_1^2 2xdx$$
$$=\Big[2x\Big]_0^1+\Big[x^2\Big]_1^2=2+4-1=5$$ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\int_0^a f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0725 $\int_{-1}^{1} f(x)dx$

$=\int_{-1}^{1}(1+2x+3x^2+\cdots+10x^9)dx$

$=\int_{-1}^{1}(\underbrace{1+3x^2+\cdots+9x^8}_{\text{우함수}})dx+\int_{-1}^{1}(\underbrace{2x+4x^3+\cdots+10x^9}_{\text{기함수}})dx$

$=2\int_{0}^{1}(1+3x^2+5x^4+7x^6+9x^8)dx$

$=2\Big[x+x^3+x^5+x^7+x^9\Big]_0^1$

$=2\cdot 5=10$

답 10

0726 $\int_{-a}^{a}(3x^2-5x)dx=2\int_0^a 3x^2dx=2\Big[x^3\Big]_0^a=2a^3$

이때 $2a^3=\frac{1}{4}$이므로 $a^3=\frac{1}{8}$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because a$는 실수)

답 ②

0727 $|x^3|=\begin{cases} x^3 & (x\geq 0) \\ -x^3 & (x\leq 0)\end{cases}$이므로

$\int_{-2}^{2}(3x^5-|x^3|+4x+1)dx$

$=\int_{-2}^{2}(-|x^3|+1)dx$

$=\int_{-2}^{0}(x^3+1)dx+\int_{0}^{2}(-x^3+1)dx$

$=\Big[\frac{1}{4}x^4+x\Big]_{-2}^{0}+\Big[-\frac{1}{4}x^4+x\Big]_0^2$

$=-(4-2)+(-4+2)$

$=-4$

답 -4

0728 $f(x)=f(-x)$에서 $f(x)$는 우함수이고, $g(x)=-g(-x)$에서 $g(-x)=-g(x)$이므로 $g(x)$는 기함수이다.

$\therefore \int_{-2}^{2}\{f(x)+g(x)\}dx=\int_{-2}^{2}f(x)dx+\int_{-2}^{2}g(x)dx$

$=2\int_0^2 f(x)dx$

$=2\cdot 2$

$=4$

답 ①

0729 $f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로

$\int_{-4}^{4}f(x)dx=2\int_0^4 f(x)dx=28$

$\therefore \int_0^4 f(x)dx=14$

$\therefore \int_3^4 f(x)dx=\int_3^0 f(x)dx+\int_0^4 f(x)dx$

$=\int_0^4 f(x)dx-\int_0^3 f(x)dx$

$=14-6$

$=8$

답 8

0730 $f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로 $x^3f(x)$, $xf(x)$는 모두 기함수이다. ··· ❶

$\therefore \int_{-1}^{1}(3x^3-x+2)f(x)dx$

$=3\int_{-1}^{1}x^3f(x)dx-\int_{-1}^{1}xf(x)dx+2\int_{-1}^{1}f(x)dx$

$=2\int_{-1}^{1}f(x)dx$

$=4\int_0^1 f(x)dx$

$=4\cdot 5$

$=20$ ··· ❷

답 20

채점 기준	비율
❶ $f(x)$는 우함수, $x^3f(x)$, $xf(x)$는 모두 기함수임을 알 수 있다.	30 %
❷ $\int_{-1}^{1}(3x^3-x+2)f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	70 %

라쎈 특강 우함수, 기함수의 곱

① (우함수)×(우함수)=(우함수)
② (우함수)×(기함수)=(기함수)
③ (기함수)×(기함수)=(우함수)

0731 $\int_0^2 f(t)dt=k$ (k는 상수) ······ ㉠

로 놓으면 $f(x)=-2x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^2(-2t+k)dt=k$, $\Big[-t^2+kt\Big]_0^2=k$

$-4+2k=k$ $\therefore k=4$

따라서 $f(x)=-2x+4$이므로

$f(1)=-2+4=2$

답 ④

0732 $\int_0^1 tf(t)dt=k$ (k는 상수) ······ ㉠

로 놓으면 $f(x)=x^2-3x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^1 t(t^2-3t+k)dt=k$

$\int_0^1(t^3-3t^2+kt)dt=k$

$\Big[\frac{1}{4}t^4-t^3+\frac{k}{2}t^2\Big]_0^1=k$

$\frac{1}{4}-1+\frac{k}{2}=k$ $\therefore k=-\frac{3}{2}$

$\therefore f(x)=x^2-3x-\frac{3}{2}$

답 $f(x)=x^2-3x-\frac{3}{2}$

0733 $\int_1^2 f(t)dt=k$ (k는 상수) ······ ㉠

로 놓으면 $f(x)=\frac{3}{7}x^2+2kx+k^2$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_1^2\left(\frac{3}{7}t^2+2kt+k^2\right)dt=k, \quad \left[\frac{1}{7}t^3+kt^2+k^2t\right]_1^2=k$$

$$\left(\frac{8}{7}+4k+2k^2\right)-\left(\frac{1}{7}+k+k^2\right)=k$$

$$k^2+2k+1=0, \quad (k+1)^2=0$$

$$\therefore k=-1$$

따라서 $f(x)=\frac{3}{7}x^2-2x+1$이므로

$$f(7)=21-14+1=8$$

답 8

0734 $f(x)=3x^2+\int_0^1(x+1)f(t)dt$

$$=3x^2+x\int_0^1 f(t)dt+\int_0^1 f(t)dt$$

$\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=3x^2+kx+k$ ⋯ ❶

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^1(3t^2+kt+k)dt=k, \quad \left[t^3+\frac{1}{2}kt^2+kt\right]_0^1=k$$

$1+\frac{1}{2}k+k=k \quad \therefore k=-2$ ⋯ ❷

따라서 $f(x)=3x^2-2x-2$이므로 $f'(x)=6x-2$

$\therefore f'(-1)=-6-2=-8$ ⋯ ❸

답 -8

채점 기준	비율
❶ 정적분의 값을 k로 놓고 $f(x)$를 k를 사용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f'(-1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0735 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$$a^2-a=0, \quad a(a-1)=0$$

$$\therefore a=1\ (\because a>0)$$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=2x-1$$

$$\therefore f(a)=f(1)=2-1=1$$

답 1

0736 $f(x)=\int_1^x(t^2+2t)dt$에 $x=1$을 대입하면

$$f(1)=0$$

$f(x)$를 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=x^2+2x$$

$$\therefore f'(1)=1+2=3$$

$$\therefore f(1)+f'(1)=3$$

답 ⑤

0737 주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$4+2a-10=0 \quad \therefore a=3$$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=2x+a=2x+3$$

$$\therefore f(5)=10+3=13$$

답 ②

0738 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$f(1)=3-1=2$$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2xf(x)+x^2f'(x)=15x^4-4x^3+2xf(x)$$

$$x^2f'(x)=15x^4-4x^3$$

$$\therefore f'(x)=15x^2-4x$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(15x^2-4x)dx=5x^3-2x^2+C$$

이때 $f(1)=3+C=2$이므로

$$C=-1$$

따라서 $f(x)=5x^3-2x^2-1$이므로

$$f(-1)=-5-2-1=-8$$

답 ①

0739 $\int_{-1}^x(x-t)f(t)dt=x^3+3x^2+3x+1$에서

$$x\int_{-1}^x f(t)dt-\int_{-1}^x tf(t)dt=x^3+3x^2+3x+1$$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_{-1}^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2+6x+3$$

$$\therefore \int_{-1}^x f(t)dt=3x^2+6x+3$$

위의 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=6x+6 \quad \therefore f(0)=6$$

답 ④

0740 $\int_1^x(x-t)f(t)dt=x^3+ax^2+9x-4$의 양변에 $x=1$을 대입하면 $1+a+9-4=0 \quad \therefore a=-6$

$\int_1^x(x-t)f(t)dt=x^3-6x^2+9x-4$에서

$$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^3-6x^2+9x-4$$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-12x+9$$

$$\therefore \int_1^x f(t)dt=3x^2-12x+9$$

위의 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=6x-12 \quad \therefore b=f(1)=-6$$

$$\therefore a+b=-12$$

답 -12

0741 $\int_0^x(x-t)f'(t)dt=x^3$에서

$$x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt=x^3$$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=3x^2$$

$$\int_0^x f'(t)dt=3x^2, \quad \left[f(t)\right]_0^x=3x^2$$

$$\therefore f(x)-f(0)=3x^2$$

이때 $f(0)=4$이므로 $f(x)=3x^2+4$

답 $f(x)=3x^2+4$

0742 $f(x)=\int_1^x (t^2+t-2)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 a, $x=1$에서 극솟값 b를 가지므로

$$a=f(-2)=\int_1^{-2}(t^2+t-2)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-2t\right]_1^{-2}$$
$$=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=\frac{9}{2}$$
$$b=f(1)=\int_1^1(t^2+t-2)dt=0$$
$$\therefore 2a+b=2\cdot\frac{9}{2}+0=9$$

답 9

0743 $f(x)=\int_0^x (3t^2-6t-9)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 b를 가지므로

$$b=f(3)=\int_0^3(3t^2-6t-9)dt=\left[t^3-3t^2-9t\right]_0^3$$
$$=27-27-27=-27$$

즉 $a=3$, $b=-27$이므로 $a+b=-24$

답 -24

0744 $f(x)=\int_{-1}^x (-t^2+at-a)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=-x^2+ax-a$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4a>0$, $a(a-4)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>4$

따라서 자연수 a의 최솟값은 5이다.

답 ⑤

0745 $f(x)=\int_0^x (3t^2+at+b)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 2를 가지므로

$f(2)=2$, $f'(2)=0$

$f'(2)=12+2a+b=0$이므로

$2a+b=-12$ …… ㉠

$$f(2)=\int_0^2(3t^2+at+b)dt=\left[t^3+\frac{1}{2}at^2+bt\right]_0^2=8+2a+2b=2$$

이므로 $a+b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-9$, $b=6$ ··· ❶

따라서 $f'(x)=3x^2-9x+6$이므로 $f'(x)=0$에서

$3x^2-9x+6=0$, $3(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$ ··· ❷

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 가지므로 구하는 극댓값은

$$f(1)=\int_0^1(3t^2-9t+6)dt=\left[t^3-\frac{9}{2}t^2+6t\right]_0^1$$
$$=1-\frac{9}{2}+6=\frac{5}{2}$$ ··· ❸

답 $\frac{5}{2}$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $f(x)$의 극댓값을 구할 수 있다.	30 %

0746 $\int_0^x (x-t)f(t)dt=\frac{1}{4}x^4-2x^3+x^2$에서

$$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=\frac{1}{4}x^4-2x^3+x^2$$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=x^3-6x^2+2x$$
$$\therefore \int_0^x f(t)dt=x^3-6x^2+2x$$

위의 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-12x+2=3(x-2)^2-10$

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 -10을 갖는다.

답 -10

0747 $f(x)=3x^2-2\int_0^1 xf(t)dt=3x^2-2x\int_0^1 f(t)dt$

$\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=3x^2-2kx$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^1(3t^2-2kt)dt=k,\quad \left[t^3-kt^2\right]_0^1=k$$

$1-k=k$ $\therefore k=\frac{1}{2}$

$$\therefore f(x)=3x^2-x=3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{12}$$

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{1}{6}$에서 최솟값 $-\frac{1}{12}$을 갖는다.

답 $-\frac{1}{12}$

0748 $f(x)=\int_x^{x+1}(t^2+t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\{(x+1)^2+(x+1)\}-(x^2+x)$

$=2x+2=2(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

이때 $-2\le x\le 2$이므로

$$f(-2)=\int_{-2}^{-1}(t^2+t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_{-2}^{-1}$$
$$=\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{8}{3}+2\right)=\frac{5}{6}$$

08 정적분

$$f(-1)=\int_{-1}^{0}(t^2+t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{0}$$
$$=-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{6}$$
$$f(2)=\int_{2}^{3}(t^2+t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_{2}^{3}$$
$$=\left(9+\frac{9}{2}\right)-\left(\frac{8}{3}+2\right)=\frac{53}{6}$$

따라서 $M=\frac{53}{6}$, $m=-\frac{1}{6}$이므로 $M-m=9$

답 ⑤

0749 $g(k)=\int_0^1(x+k)^2f(x)dx$

$$=\int_0^1(x^2+2kx+k^2)f(x)dx$$
$$=\int_0^1 x^2f(x)dx+2k\int_0^1 xf(x)dx+k^2\int_0^1 f(x)dx$$
$$=\int_0^1 x^2f(x)dx+10k+2k^2$$
$$=2\left(k+\frac{5}{2}\right)^2+\int_0^1 x^2f(x)dx-\frac{25}{2}$$

이때 정적분 $\int_0^1 x^2f(x)dx$는 상수이므로 $g(k)$는 $k=-\frac{5}{2}$에서 최솟값을 갖는다.

답 $-\frac{5}{2}$

0750 주어진 그래프에서

$f(x)=ax(x-4)=a(x-2)^2-4a$ $(a>0)$

로 놓을 수 있다. 이때 $f(x)$의 최솟값이 -2이므로

$-4a=-2$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x(x-4)=\frac{1}{2}x^2-2x$

한편 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

즉 $f(x)$는 $F(x)$의 도함수이다.

주어진 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(4)=0$이고 $x=4$의 좌우에서 $f(x)$의 값이 음에서 양으로 바뀌므로 $F(x)$는 $x=4$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 구하는 극솟값은

$$F(4)=\int_0^4 f(t)dt=\int_0^4\left(\frac{1}{2}t^2-2t\right)dt$$
$$=\left[\frac{1}{6}t^3-t^2\right]_0^4=\frac{32}{3}-16=-\frac{16}{3}$$

답 $-\frac{16}{3}$

참고 주어진 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $f(x)$의 값이 양에서 음으로 바뀌므로 $F(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

0751 주어진 그래프에서

$F(x)=a(x-1)(x-2)=a(x^2-3x+2)$ $(a<0)$

로 놓을 수 있다. 이때 $F(x)=\int_1^x f(t)dt$에서

$a(x^2-3x+2)=\int_1^x f(t)dt$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=a(2x-3)$

$f(2)=-1$이므로 $\quad a=-1$

따라서 $f(x)=-(2x-3)=-2x+3$이므로

$f(0)=3$

답 ⑤

0752 주어진 그래프에서 $\quad f(x)=x(x-3)=x^2-3x$ ···➊

$F(x)=\int_x^{x+2}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$F'(x)=f(x+2)-f(x)$$
$$=\{(x+2)^2-3(x+2)\}-(x^2-3x)$$
$$=4x-2$$ ···➋

$F'(x)=0$에서 $\quad 4x-2=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ ···➌

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $F(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}}(t^2-3t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}}$$
$$=\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{125}{8}-\frac{3}{2}\cdot\frac{25}{4}\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)$$
$$=-\frac{23}{6}$$ ···➍

답 $-\frac{23}{6}$

채점 기준	비율
➊ $f(x)$를 구할 수 있다.	20 %
➋ $F'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
➌ $F'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
➍ $F(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

0753 $f(t)=4t^2-5t+1$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x(4t^2-5t+1)dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$
$$=F'(0)$$
$$=f(0)$$
$$=1$$

답 ①

0754 $f(x)=x^3-2x^2$, $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_3^{3+h}(x^3-2x^2)dx=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_3^{3+h}f(x)dx$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(3+h)-F(3)}{h}$$
$$=F'(3)$$
$$=f(3)$$
$$=27-18=9$$

답 ⑤

0755 $f(x)=\int_0^x(2t^3+t^2)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2x^3+x^2$ ···➊

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{2-h}^{2+h}f'(x)dx$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(2+h)-f(2)\}-\{f(2-h)-f(2)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$$
$$=f'(2)+f'(2)=2f'(2)$$
$$=2\cdot(16+4)$$
$$=40 \quad \cdots ❷$$

답 40

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{2-h}^{2+h}f'(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	70 %

0756 $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1-3h}^{1+h}f(x)dx$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{F(1+h)-F(1)\}-\{F(1-3h)-F(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}+3\lim_{h\to 0}\frac{F(1-3h)-F(1)}{-3h}$$
$$=F'(1)+3F'(1)$$
$$=4F'(1)=4f(1)$$
$$=4(4+a)=4a+16$$

이때 $4a+16=2$이므로 $\quad 4a=-14$

$$\therefore a=-\frac{7}{2}$$

답 $-\frac{7}{2}$

0757 $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$$
$$=F'(2)=f(2)$$
$$=16+4-2-1$$
$$=17$$

답 ④

0758 $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_{x^2}^{1}f(t)dt=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{x-1}\int_1^{x^2}f(t)dt$$
$$=-\lim_{x\to 1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}$$
$$=-\lim_{x\to 1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)$$
$$=-2F'(1)=-2f(1)$$
$$=-2(1-3+1+5)$$
$$=-8$$

답 -8

0759 $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)=\frac{5+a}{2}$$

이때 $\frac{5+a}{2}=7$이므로 $\quad a=9$

답 ⑤

0760 $f(t)=t(k-t)$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\int_3^x t(k-t)dt=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\int_3^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}$$
$$=F'(3)=f(3)=3(k-3)$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\left\{\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\int_3^x t(k-t)dt\right\}=\sum_{k=1}^{10}3(k-3)$$
$$=3\left(\frac{10\cdot 11}{2}-30\right)$$
$$=75$$

답 ⑤

0761 전략 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$임을 이용한다.

풀이 $\int_0^k(6x-1)dx=\Big[3x^2-x\Big]_0^k=3k^2-k$

이때 $3k^2-k=\frac{5}{4}$이므로 $\quad 12k^2-4k-5=0$

$(2k+1)(6k-5)=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{2}\ (\because k<0)$

답 ③

0762 전략 $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$임을 이용한다.

풀이 $\int_{-1}^0(x^3-4x)dx+\int_0^1(y^3-4y)dy+\int_1^2(z^3-4z)dz$

$$=\int_{-1}^0(x^3-4x)dx+\int_0^1(x^3-4x)dx+\int_1^2(x^3-4x)dx$$
$$=\int_{-1}^2(x^3-4x)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-1}^2$$
$$=(4-8)-\left(\frac{1}{4}-2\right)=-\frac{9}{4}$$

답 $-\frac{9}{4}$

0763 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x의 값을 경계로 구간을 나누어 함수를 절댓값 기호 없이 나타낸 후 정적분의 값을 구한다.

풀이 $|x|=\begin{cases} x & (x\ge 0) \\ -x & (x\le 0)\end{cases}$이므로

$$\int_{-3}^2(|x|-x+1)^2dx$$
$$=\int_{-3}^0(-x-x+1)^2dx+\int_0^2(x-x+1)^2dx$$
$$=\int_{-3}^0(-2x+1)^2dx+\int_0^2 1dx$$
$$=\int_{-3}^0(4x^2-4x+1)dx+\int_0^2 1dx$$
$$=\left[\frac{4}{3}x^3-2x^2+x\right]_{-3}^0+\Big[x\Big]_0^2$$
$$=-(-36-18-3)+2$$
$$=59$$

답 ⑤

08 정적분

0764 전략 $f(x)$가 우함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$, $f(x)$가 기함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$임을 이용한다.

풀이 $\int_{-a}^{a}(x^5+4x^3+2x^2-5x+a)dx=2\int_{0}^{a}(2x^2+a)dx$

$$=2\left[\frac{2}{3}x^3+ax\right]_0^a$$
$$=2\left(\frac{2}{3}a^3+a^2\right)$$
$$=\frac{4}{3}a^3+2a^2$$

이때 $\frac{4}{3}a^3+2a^2=a^2$이므로 $\quad 4a^3+3a^2=0$

$a^2(4a+3)=0 \qquad \therefore a=-\frac{3}{4}\ (\because a\neq 0)$

답 $-\frac{3}{4}$

0765 전략 먼저 $\int_{0}^{1} tf(t)dt=k$로 놓고 k의 값을 구한다.

풀이 $\int_{0}^{1} tf(t)dt=k$ (k는 상수) $\quad \cdots\cdots$ ㉠

로 놓으면 $\quad f(x)=x^2-2x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_{0}^{1} t(t^2-2t+k)dt=k, \qquad \int_{0}^{1}(t^3-2t^2+kt)dt=k$

$\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{2}{3}t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_0^1=k, \qquad \frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{k}{2}=k$

$\frac{k}{2}=-\frac{5}{12} \qquad \therefore k=-\frac{5}{6}$

따라서 $f(x)=x^2-2x-\frac{5}{6}$이므로

$f(3)=9-6-\frac{5}{6}=\frac{13}{6}$

답 ①

0766 전략 $\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)dt=f(x)$임을 이용한다.

풀이 $\int_{a}^{x} f(t)dt=x^2+4x-5$의 양변에 $x=a$를 대입하면

$a^2+4a-5=0, \qquad (a+5)(a-1)=0$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x+4$

$\therefore f(a)=f(1)=2+4=6$

답 6

0767 전략 $F'(x)=f(x)$일 때, $\int_{a}^{b} f(x)dx=F(b)-F(a)$임을 이용한다.

풀이 $\int_{1}^{3}\{5f'(x)-4x\}dx=\left[5f(x)-2x^2\right]_1^3$

$$=\{5f(3)-18\}-\{5f(1)-2\}$$
$$=5f(3)-5f(1)-16$$
$$=5f(3)-26\ (\because f(1)=2)$$

이때 $5f(3)-26=4$이므로 $\quad 5f(3)=30$

$\therefore f(3)=6$

답 ⑤

0768 전략 $\int_{a}^{b}\{f(x)+g(x)\}dx=\int_{a}^{b} f(x)dx+\int_{a}^{b} g(x)dx$임을 이용한다.

풀이 $\int_{1}^{2}\{1+f(x)\}^2dx=\int_{1}^{2}[\{f(x)\}^2+2f(x)+1]dx$

$$=\int_{1}^{2}\{f(x)\}^2dx+2\int_{1}^{2} f(x)dx+\int_{1}^{2} 1dx$$
$$=4-2\int_{2}^{1} f(x)dx+\left[x\right]_1^2$$
$$=4+2+(2-1)=7$$

답 7

0769 전략 거짓인 보기는 반례를 찾아 거짓임을 보인다.

풀이 ㄱ. [반례] $f(x)=x$로 놓으면

$\int_{0}^{3} xdx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$, $3\int_{0}^{1} xdx=3\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{3}{2}$

$\therefore \int_{0}^{3} f(x)dx\neq 3\int_{0}^{1} f(x)dx$

ㄴ. 정적분의 성질에 의하여 참이다.

ㄷ. [반례] $f(x)=x$로 놓으면

$\int_{0}^{1} x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$, $\left(\int_{0}^{1} xdx\right)^2=\left\{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\right\}^2=\frac{1}{4}$

$\therefore \int_{0}^{1}\{f(x)\}^2dx\neq\left\{\int_{0}^{1} f(x)dx\right\}^2$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ①

0770 전략 구간에 따라 다르게 정의된 함수는 구간을 나누어 각각 정적분의 값을 구한다.

풀이 $|x|=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -x & (x\leq 0)\end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x\leq -1 \text{ 또는 } x\geq 1) \\ x & (0\leq x\leq 1) \\ -x & (-1\leq x\leq 0)\end{cases}$$

$\therefore \int_{0}^{3} f(x)dx=\int_{0}^{1} xdx+\int_{1}^{3} 1dx$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[x\right]_1^3$$
$$=\frac{1}{2}+3-1=\frac{5}{2}$$

답 ③

0771 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x의 값을 경계로 구간을 나누어 함수를 절댓값 기호 없이 나타낸 후 정적분의 값을 구한다.

풀이 $|x-a|=\begin{cases} x-a & (x\geq a) \\ -x+a & (x\leq a)\end{cases}$이고, $1\leq a\leq 4$이므로

$\int_{1}^{4}|x-a|dx$

$=\int_{1}^{a}(-x+a)dx+\int_{a}^{4}(x-a)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_1^a+\left[\frac{1}{2}x^2-ax\right]_a^4$

$=\left(-\frac{1}{2}a^2+a^2\right)-\left(-\frac{1}{2}+a\right)+(8-4a)-\left(\frac{1}{2}a^2-a^2\right)$

$=a^2-5a+\frac{17}{2}=\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

따라서 주어진 정적분은 $a=\frac{5}{2}$일 때 최솟값 $\frac{9}{4}$를 갖는다. 답 $\frac{5}{2}$

0772 전략 $f(x)$가 우함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$, $f(x)$가 기함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$임을 이용한다.

풀이 $\int_{-1}^{1} f(x)dx=2$에서

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)dx=2\int_{0}^{1}(x^2+b)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+bx\right]_0^1=2\left(\frac{1}{3}+b\right)$$
$$=\frac{2}{3}+2b$$

이때 $\frac{2}{3}+2b=2$이므로 $b=\frac{2}{3}$ ➊

또 $\int_{-1}^{1} xf(x)dx=4$에서

$$\int_{-1}^{1} xf(x)dx=\int_{-1}^{1}(x^3+ax^2+bx)dx=2\int_{0}^{1} ax^2dx$$
$$=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}a$$

이때 $\frac{2}{3}a=4$이므로 $a=6$ ➋

$\therefore ab=4$ ➌

답 4

채점 기준	비율
➊ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
➋ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
➌ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0773 전략 먼저 $\int_{a}^{b} f(x)dx+\int_{b}^{c} f(x)dx=\int_{a}^{c} f(x)dx$임을 이용하여 주어진 등식의 우변을 간단히 한다.

풀이 일차함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$$f(x)=-2x+\int_{0}^{3} f(t)dt-\int_{0}^{1} f(t)dt$$
$$=-2x+\int_{1}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{3} f(t)dt$$
$$=-2x+\int_{1}^{3} f(t)dt$$

$\int_{1}^{3} f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=-2x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_{1}^{3}(-2t+k)dt=k$, $\left[-t^2+kt\right]_1^3=k$

$(-9+3k)-(-1+k)=k$ $\therefore k=8$

$\therefore f(x)=-2x+8$ 답 $f(x)=-2x+8$

0774 전략 $\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)dt=f(x)$임을 이용한다.

풀이 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-f(-1)+2+1=0$ $\therefore f(-1)=3$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2+2x$

$xf'(x)=6x^2-2x$ $\therefore f'(x)=6x-2$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x-2)dx$$
$$=3x^2-2x+C$$

이때 $f(-1)=3+2+C=3$이므로 $C=-2$

따라서 $f(x)=3x^2-2x-2$이므로

$f(2)=12-4-2=6$ 답 ④

0775 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분한 다음 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=\int_{0}^{x}(t-1)(t-a)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-1)(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=a$

이때 $f(x)$는 $x=1$일 때 극대이므로 $x=a$일 때 극소이다. ➊

$f(1)=\frac{4}{3}$에서

$$f(1)=\int_{0}^{1}(t-1)(t-a)dt$$
$$=\int_{0}^{1}\{t^2-(a+1)t+a\}dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a+1}{2}t^2+at\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{a+1}{2}+a$$
$$=\frac{3a-1}{6}$$

즉 $\frac{3a-1}{6}=\frac{4}{3}$이므로 $3a-1=8$

$\therefore a=3$ ➋

따라서 구하는 극솟값은

$$f(3)=\int_{0}^{3}(t-1)(t-3)dt=\int_{0}^{3}(t^2-4t+3)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^3=9-18+9=0$$ ➌

답 0

채점 기준	비율
➊ 극값을 갖는 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
➋ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
➌ 극솟값을 구할 수 있다.	30 %

0776 전략 $a+\int_{0}^{1}\{f(t)\}^2dt=k$로 놓고 a를 k에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $a+\int_{0}^{1}\{f(t)\}^2dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$a+\int_{0}^{1}(t+k)^2dt=k$, $a+\int_{0}^{1}(t^2+2kt+k^2)dt=k$

$a+\left[\frac{1}{3}t^3+kt^2+k^2t\right]_0^1=k$, $a+\frac{1}{3}+k+k^2=k$

$\therefore\ a=-k^2-\dfrac{1}{3}$

따라서 a는 $k=0$일 때 최댓값 $-\dfrac{1}{3}$을 갖는다. 답 ①

0777 전략 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=f(a)$임을 이용한다.

풀이 $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_{a^2}^{x^2}f(t)dt=\lim_{x\to a}\frac{F(x^2)-F(a^2)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{F(x^2)-F(a^2)}{x^2-a^2}\cdot(x+a)$$

$x^2=t$로 놓으면 $x\longrightarrow a$일 때 $t\longrightarrow a^2$이므로

$$\lim_{x\to a}\frac{F(x^2)-F(a^2)}{x^2-a^2}\cdot(x+a)=\lim_{t\to a^2}\frac{F(t)-F(a^2)}{t-a^2}\cdot 2a$$
$$=2aF'(a^2)$$
$$=2af(a^2)$$

답 ⑤

0778 전략 정적분의 성질을 이용한다.

풀이 조건 (나)에서

$$\int_n^{n+3}f(x)dx=\int_n^{n+1}4x\,dx=\Big[2x^2\Big]_n^{n+1}$$
$$=2(n+1)^2-2n^2=4n+2$$
$$\therefore\ \int_0^9 f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^6 f(x)dx+\int_6^9 f(x)dx$$
$$=2+14+26=42$$ ···➊

조건 (가)에서 $\int_0^1 f(x)dx=1$이므로

$$\int_0^7 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^4 f(x)dx+\int_4^7 f(x)dx$$
$$=1+6+18=25$$ ···➋
$$\therefore\ \int_7^9 f(x)dx=\int_7^0 f(x)dx+\int_0^9 f(x)dx$$
$$=\int_0^9 f(x)dx-\int_0^7 f(x)dx$$
$$=42-25=17$$ ···➌

답 17

채점 기준	비율
➊ $\int_0^9 f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	40 %
➋ $\int_0^7 f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	30 %
➌ $\int_7^9 f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0779 전략 $\int_p^q f(x)dx=\int_p^r f(x)dx+\int_r^q f(x)dx$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)로 놓으면
$f(0)=-1$이므로

$c=-1$

$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$에서

$\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$이므로

$$\int_{-1}^0 f(x)dx=0$$
$$\therefore\ \int_{-1}^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx=0$$
$$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1(ax^2+bx-1)dx=2\int_0^1(ax^2-1)dx$$
$$=2\Big[\frac{a}{3}x^3-x\Big]_0^1=2\Big(\frac{a}{3}-1\Big)$$

이때 $2\Big(\dfrac{a}{3}-1\Big)=0$이므로 $a=3$

따라서

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(3x^2+bx-1)dx$$
$$=\Big[x^3+\frac{b}{2}x^2-x\Big]_0^1$$
$$=\Big(1+\frac{b}{2}-1\Big)=\frac{b}{2}$$

이때 $\dfrac{b}{2}=0$이므로 $b=0$

따라서 $f(x)=3x^2-1$이므로 $f(2)=12-1=11$ 답 ①

0780 전략 도함수 $h'(x)$가 우함수인지 기함수인지 알아본다.

풀이 $f(x)$와 $g(x)$가 다항함수이므로 $h(x)=f(x)g(x)$는 다항함수이다.

이때 모든 실수 x에 대하여

$h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-h(x)$

이므로 함수 $h(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, $h(0)=0$이다.

또 함수 $h(x)$는 기함수인 다항함수이므로 $h'(x)$는 우함수이고 $xh'(x)$는 기함수이다.

$$\therefore\ \int_{-3}^3(x+5)h'(x)dx=\int_{-3}^3\{xh'(x)+5h'(x)\}dx$$
$$=\int_{-3}^3 xh'(x)dx+\int_{-3}^3 5h'(x)dx$$
$$=2\int_0^3 5h'(x)dx=10\Big[h(x)\Big]_0^3$$
$$=10\{h(3)-h(0)\}$$
$$=10h(3)\ (\because h(0)=0)$$

이때 $10h(3)=10$이므로 $h(3)=1$ 답 ①

라쎈 특강

함수 $h(x)$가 기함수인 다항함수이므로

$h(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots+a_3x^3+a_1x$

로 놓으면

$h'(x)=(2n+1)a_{2n+1}x^{2n}+(2n-1)a_{2n-1}x^{2n-2}$
$+\cdots+3a_3x^2+a_1$

따라서 $h'(x)$는 우함수이다.

0781 전략 $\int_0^1 g(t)dt=k$, $\int_0^2 f(t)dt=l$로 놓고 k, l의 값을 구한다.

풀이 $\int_0^1 g(t)dt=k$ (k는 상수) ······ ㉠

$\int_0^2 f(t)dt=l$ (l은 상수) ······ ㉡

로 놓으면 $f(x)=2x-1+k$, $g(x)=4x+5-l$

㉠에서 $\int_0^1 (4t+5-l)dt=k$

$\left[2t^2+(5-l)t\right]_0^1=k, \quad 2+5-l=k$

$\therefore k+l=7$ …… ㉢

㉡에서 $\int_0^2 (2t-1+k)dt=l$

$\left[t^2+(-1+k)t\right]_0^2=l, \quad 4-2+2k=l$

$\therefore 2k-l=-2$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $k=\frac{5}{3}, l=\frac{16}{3}$

$\therefore f(x)=2x-1+\frac{5}{3}=2x+\frac{2}{3}$,

$g(x)=4x+5-\frac{16}{3}=4x-\frac{1}{3}$

따라서 $f(2)=4+\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$, $g(1)=4-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}$이므로

$f(2)-g(1)=\frac{14}{3}-\frac{11}{3}=1$ 답 1

0782 전략 증감표를 이용하여 $f(x)$가 최대가 되는 x의 값을 찾는다.

풀이 $f(x)=\int_{-2}^{x}(2-|t|)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2-|x|$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 0\le x\le 3$)

x	0	…	2	…	3
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

$f(2)=\int_{-2}^{2}(2-|t|)dt=2\int_0^2 \underbrace{(2-|t|)}dt$

$y=2-|x|$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 우함수이다.

$=2\int_0^2(2-t)dt=2\left[2t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^2$

$=2\cdot 2=4$ 답 ⑤

09 정적분의 활용

Ⅲ. 다항함수의 적분법

0783 $\int_1^3 (-x^2+4x-3)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3$

$=-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}$ 답 $\frac{4}{3}$

0784 $\int_{-3}^{0}\{-(x^2+3x)\}dx=\int_{-3}^{0}(-x^2-3x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{0}$

$=-\left(-\frac{9}{2}\right)=\frac{9}{2}$ 답 $\frac{9}{2}$

0785 $\int_1^3 |x^2-2x|dx$

$=\int_1^2(-x^2+2x)dx+\int_2^3(x^2-2x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3$

$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$ 답 2

0786 $\int_{-3}^{-1}|-x^2-x+2|dx$

$=\int_{-3}^{-2}(x^2+x-2)dx+\int_{-2}^{-1}(-x^2-x+2)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-3}^{-2}+\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{-1}$

$=\frac{11}{6}+\frac{7}{6}=3$ 답 3

0787 (1) 곡선 $y=x^2-2$와 직선 $y=4x+3$의 교점의 x좌표는

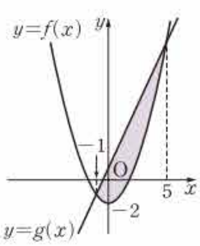
$x^2-2=4x+3$에서 $x^2-4x-5=0$

$(x+1)(x-5)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=5$

$\therefore a=-1, b=5$ ($\because a<b$)

(2) $f(x)=x^2-2$, $g(x)=4x+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구간 $[-1, 5]$에서

$f(x)\le g(x)$



(3) $\int_{-1}^{5}|f(x)-g(x)|dx=\int_{-1}^{5}\{g(x)-f(x)\}dx$

$=\int_{-1}^{5}(-x^2+4x+5)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2+5x\right]_{-1}^{5}$

$=\frac{100}{3}-\left(-\frac{8}{3}\right)=36$

답 (1) $a=-1$, $b=5$ (2) $f(x)\le g(x)$ (3) 36

09 정적분의 활용

0788 (1) 두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2-2x+4$의 교점의 x좌표는

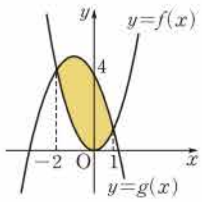
$x^2=-x^2-2x+4$에서 $\quad 2x^2+2x-4=0$

$2(x+2)(x-1)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=1$

$\therefore a=-2,\ b=1\ (\because a<b)$

(2) $f(x)=x^2$, $g(x)=-x^2-2x+4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구간 $[-2, 1]$에서

$f(x)\le g(x)$



(3) $\displaystyle\int_{-2}^{1}|f(x)-g(x)|dx=\int_{-2}^{1}\{g(x)-f(x)\}dx$

$\displaystyle=\int_{-2}^{1}(-2x^2-2x+4)dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-2}^{1}$

$\displaystyle=\frac{7}{3}-\left(-\frac{20}{3}\right)=9$

답 (1) $a=-2,\ b=1$ (2) $f(x)\le g(x)$ (3) 9

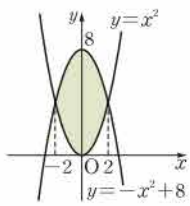
0789 두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2+8$의 교점의 x좌표는 $x^2=-x^2+8$에서

$2x^2-8=0$

$2(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는



$\displaystyle\int_{-2}^{2}\{(-x^2+8)-x^2\}dx=\int_{-2}^{2}(-2x^2+8)dx$

$\displaystyle=2\int_{0}^{2}(-2x^2+8)dx$

$\displaystyle=2\left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_{0}^{2}$

$\displaystyle=2\cdot\frac{32}{3}$

$\displaystyle=\frac{64}{3}$ 답 $\dfrac{64}{3}$

0790 (1) 시각 $t=0$에서의 위치가 $x=\boxed{0}$이므로 시각 t에서 점 P의 위치 x는

$\displaystyle x=0+\int_{0}^{t}(-t^2+2t)dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_{0}^{t}=\boxed{-\frac{1}{3}t^3+t^2}$

$\therefore$ (가) 0 (나) $-\dfrac{1}{3}t^3+t^2$

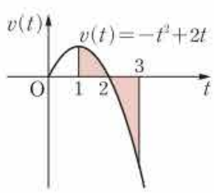
(2) $\displaystyle\int_{1}^{3}v(t)dt=\int_{1}^{3}(-t^2+2t)dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_{1}^{3}=-\frac{2}{3}$

(3) $\displaystyle\int_{1}^{3}|v(t)|dt$

$\displaystyle=\int_{1}^{2}(-t^2+2t)dt+\int_{2}^{3}(t^2-2t)dt$

$\displaystyle=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_{1}^{2}+\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_{2}^{3}$

$\displaystyle=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$



답 (1) (가) 0 (나) $-\dfrac{1}{3}t^3+t^2$ (2) $-\dfrac{2}{3}$ (3) 2

0791 (1) 시각 $t=0$에서의 위치가 $x=0$이므로 $t=4$에서 점 P의 위치는

$\displaystyle 0+\int_{0}^{4}v(t)dt=\int_{0}^{4}(t^2-3t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_{0}^{4}=-\frac{8}{3}$

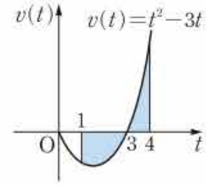
(2) $\displaystyle\int_{1}^{4}v(t)dt=\int_{1}^{4}(t^2-3t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_{1}^{4}=-\frac{3}{2}$

(3) $\displaystyle\int_{1}^{4}|v(t)|dt$

$\displaystyle=\int_{1}^{3}(-t^2+3t)dt+\int_{3}^{4}(t^2-3t)dt$

$\displaystyle=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_{1}^{3}+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_{3}^{4}$

$\displaystyle=\frac{10}{3}+\frac{11}{6}=\frac{31}{6}$



답 (1) $-\dfrac{8}{3}$ (2) $-\dfrac{3}{2}$ (3) $\dfrac{31}{6}$

0792 (1) 시각 $t=0$에서의 위치가 $x=\boxed{1}$이므로 시각 t에서 점 P의 위치 x는

$\displaystyle x=1+\int_{0}^{t}(4-t)dt=1+\left[4t-\frac{1}{2}t^2\right]_{0}^{t}=\boxed{-\frac{1}{2}t^2+4t+1}$

$\therefore$ (가) 1 (나) $-\dfrac{1}{2}t^2+4t+1$

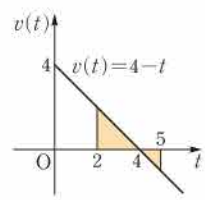
(2) $\displaystyle\int_{2}^{5}v(t)dt=\int_{2}^{5}(4-t)dt=\left[4t-\frac{1}{2}t^2\right]_{2}^{5}=\frac{3}{2}$

(3) $\displaystyle\int_{2}^{5}|v(t)|dt$

$\displaystyle=\int_{2}^{4}(4-t)dt+\int_{4}^{5}(t-4)dt$

$\displaystyle=\left[4t-\frac{1}{2}t^2\right]_{2}^{4}+\left[\frac{1}{2}t^2-4t\right]_{4}^{5}$

$\displaystyle=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$



답 (1) (가) 1 (나) $-\dfrac{1}{2}t^2+4t+1$ (2) $\dfrac{3}{2}$ (3) $\dfrac{5}{2}$

다른풀이 (3) 움직인 거리는 직선 $v(t)=4-t$와 t축 및 두 직선 $t=2$, $t=5$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$\displaystyle\int_{2}^{5}|v(t)|dt=\frac{1}{2}\cdot2\cdot|4-2|+\frac{1}{2}\cdot1\cdot|4-5|=\frac{5}{2}$

0793 (1) 시각 $t=0$에서의 위치가 3이므로 $t=3$에서 점 P의 위치는

$\displaystyle 3+\int_{0}^{3}v(t)dt=3+\int_{0}^{3}(2t-3)dt=3+\left[t^2-3t\right]_{0}^{3}=3$

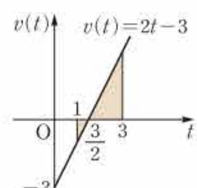
(2) $\displaystyle\int_{1}^{3}v(t)dt=\int_{1}^{3}(2t-3)dt=\left[t^2-3t\right]_{1}^{3}=2$

(3) $\displaystyle\int_{1}^{3}|v(t)|dt$

$\displaystyle=\int_{1}^{\frac{3}{2}}(3-2t)dt+\int_{\frac{3}{2}}^{3}(2t-3)dt$

$\displaystyle=\left[3t-t^2\right]_{1}^{\frac{3}{2}}+\left[t^2-3t\right]_{\frac{3}{2}}^{3}$

$\displaystyle=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{5}{2}$

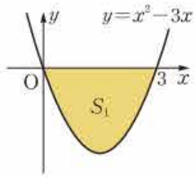


답 (1) 3 (2) 2 (3) $\dfrac{5}{2}$

0794 곡선 $y=x^2-3x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-3x=0$에서

$x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$



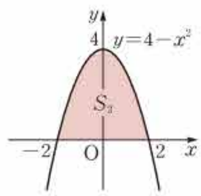
$\therefore S_1=\int_0^3(-x^2+3x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$

곡선 $y=4-x^2$과 x축의 교점의 x좌표는 $4-x^2=0$에서

$x^2-4=0,\quad (x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$



$\therefore S_2=\int_{-2}^2(4-x^2)dx$

$=2\int_0^2(4-x^2)dx=2\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2$

$=2\cdot\frac{16}{3}=\frac{32}{3}$

$\therefore 2S_1+3S_2=2\cdot\frac{9}{2}+3\cdot\frac{32}{3}=41$

답 41

다른풀이 포물선 $y=x(x-3)$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$S_1=\frac{(3-0)^3}{6}=\frac{9}{2}$

포물선 $y=-(x+2)(x-2)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

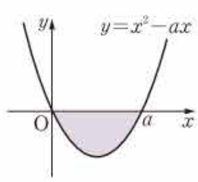
$S_2=\frac{\{2-(-2)\}^3}{6}=\frac{32}{3}\qquad \therefore 2S_1+3S_2=41$

라쎈 특강 포물선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이

포물선 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(\alpha<\beta)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$S=\frac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}$

0795 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$\int_0^a(-x^2+ax)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^a$

$=\frac{a^3}{6}$

따라서 $\frac{a^3}{6}=\frac{4}{3}$이므로 $\quad a^3=8\quad \therefore a=2$

답 ②

0796 $0\le x\le 1$에서 $\frac{1}{n}x^n\ge 0$이므로

$S_n=\int_0^1\frac{1}{n}x^n dx=\left[\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}\right]_0^1$

$=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ ⋯ ❶

$\therefore S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{20}$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)$

$=1-\frac{1}{21}=\frac{20}{21}$ ⋯ ❷

답 $\frac{20}{21}$

채점 기준	비율
❶ S_n을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{20}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

라쎈 특강 부분분수의 변형

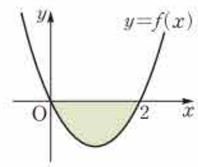
$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

0797 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=x^2-2x$

$y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-2x=0$에서

$x(x-2)=0\qquad \therefore x=0$ 또는 $x=2$



따라서 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^2(-x^2+2x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$

답 $\frac{4}{3}$

라쎈 특강 정적분으로 정의된 함수의 미분

① $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$ (단, a는 실수)

② $\frac{d}{dx}\int_x^{x+a}f(t)dt=f(x+a)-f(x)$ (단, a는 실수)

0798 $\int_0^3|x^2-5x+4|dx$

$=\int_0^1(x^2-5x+4)dx+\int_1^3(-x^2+5x-4)dx$

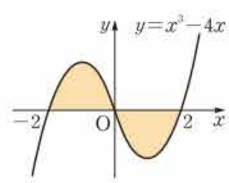
$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+4x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x\right]_1^3$

$=\frac{11}{6}+\frac{10}{3}=\frac{31}{6}$

답 ③

0799 $y=x(x+2)(x-2)=x^3-4x$

따라서 구하는 넓이는



$\int_{-2}^2|x^3-4x|dx$

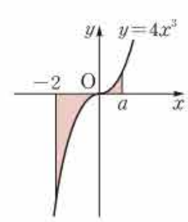
$=\int_{-2}^0(x^3-4x)dx+\int_0^2(-x^3+4x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_0^2$

$=4+4=8$

답 8

0800 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$\int_{-2}^a|4x^3|dx=\int_{-2}^0(-4x^3)dx+\int_0^a 4x^3dx$

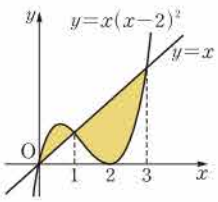
$=\left[-x^4\right]_{-2}^0+\left[x^4\right]_0^a=16+a^4$

따라서 $16+a^4=17$이므로

$a^4=1\qquad \therefore a=1\ (\because a>0)$

답 1

0801 곡선 $y=x(x-2)^2$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x(x-2)^2=x$에서



$x(x^2-4x+3)=0$

$x(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1 \{x(x-2)^2-x\}dx+\int_1^3 \{x-x(x-2)^2\}dx$$

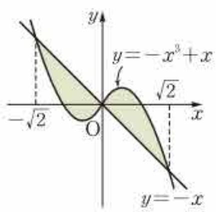
$$=\int_0^1 (x^3-4x^2+3x)dx+\int_1^3 (-x^3+4x^2-3x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_1^3$$

$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$

답 ④

0802 곡선 $y=-x^3+x$와 직선 $y=-x$의 교점의 x좌표는 $-x^3+x=-x$에서



$x^3-2x=0$

$x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-\sqrt{2}}^0 \{-x-(-x^3+x)\}dx+\int_0^{\sqrt{2}} \{(-x^3+x)-(-x)\}dx$$

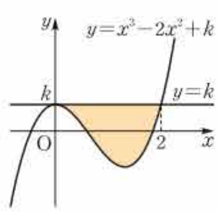
$$=\int_{-\sqrt{2}}^0 (x^3-2x)dx+\int_0^{\sqrt{2}} (-x^3+2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^2\right]_{-\sqrt{2}}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=1+1=2$$

답 ①

0803 곡선 $y=x^3-2x^2+k$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표는 $x^3-2x^2+k=k$에서



$x^3-2x^2=0,\quad x^2(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 \{k-(x^3-2x^2+k)\}dx$$

$$=\int_0^2 (-x^3+2x^2)dx$$

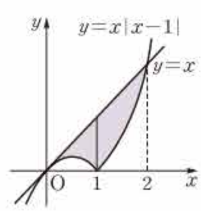
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2$$

$$=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

0804 $y=x|x-1|=\begin{cases} x^2-x & (x\geq 1) \\ -x^2+x & (x\leq 1) \end{cases}$ ··· ❶

$y=x|x-1|$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는



(i) $x\geq 1$일 때,

$x^2-x=x$에서 $\quad x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$\therefore x=2\ (\because x\geq 1)$

(ii) $x\leq 1$일 때,

$-x^2+x=x$에서 $\quad -x^2=0 \quad \therefore x=0$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 넓이는

$$\int_0^1 \{x-(-x^2+x)\}dx+\int_1^2 \{x-(x^2-x)\}dx$$

$$=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 (-x^2+2x)dx$$

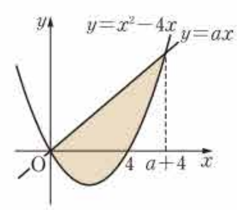
$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$ ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수를 구간을 나누어 정리할 수 있다.	20 %
❷ 함수의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ 도형의 넓이를 구할 수 있다.	50 %

0805 곡선 $y=x^2-4x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는 $x^2-4x=ax$에서



$x^2-(a+4)x=0$

$x\{x-(a+4)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a+4$

오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_0^{a+4} \{ax-(x^2-4x)\}dx$$

$$=\int_0^{a+4} \{-x^2+(a+4)x\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a+4}{2}x^2\right]_0^{a+4}$$

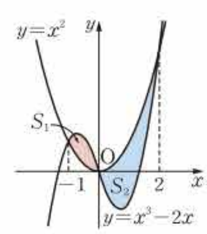
$$=\frac{(a+4)^3}{6}$$

따라서 $\frac{(a+4)^3}{6}=36$이므로 $\quad (a+4)^3=6^3$

$a+4=6 \quad \therefore a=2$

답 ④

0806 두 곡선 $y=x^3-2x$, $y=x^2$의 교점의 x좌표는 $x^3-2x=x^2$에서



$x^3-x^2-2x=0$

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 두 도형의 넓이는

$$S_1=\int_{-1}^0 \{(x^3-2x)-x^2\}dx$$

$$=\int_{-1}^0 (x^3-x^2-2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^0=\frac{5}{12}$$

$$S_2=\int_0^2 \{x^2-(x^3-2x)\}dx$$

$$=\int_0^2 (-x^3+x^2+2x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

$$\therefore S_2-S_1=\frac{9}{4}$$

답 $\frac{9}{4}$

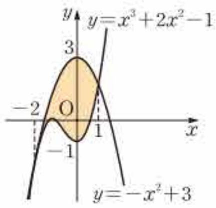
0807 두 곡선 $y=x^3+2x^2-1$, $y=-x^2+3$의 교점의 x좌표는

$x^3+2x^2-1=-x^2+3$에서

$x^3+3x^2-4=0$

$(x+2)^2(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{1}\{(-x^2+3)-(x^3+2x^2-1)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(-x^3-3x^2+4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-2}^{1}$$

$$=\frac{27}{4}$$

답 ③

0808 두 곡선 $y=x^3+ax$, $y=x^2+b$가 모두 점 $(1, 0)$을 지나므로

$y=x^3+ax$에서 $1+a=0$ $\therefore a=-1$

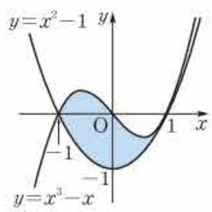
$y=x^2+b$에서 $1+b=0$ $\therefore b=-1$

두 곡선 $y=x^3-x$, $y=x^2-1$의 교점의 x좌표는 $x^3-x=x^2-1$에서

$x^3-x^2-x+1=0$

$(x+1)(x-1)^2=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{1}\{(x^3-x)-(x^2-1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^3-x^2-x+1)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}$$

$$=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

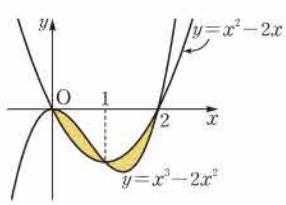
0809 두 곡선 $y=x^3-2x^2$, $y=x^2-2x$의 교점의 x좌표는

$x^3-2x^2=x^2-2x$에서

$x^3-3x^2+2x=0$

$x(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{1}\{(x^3-2x^2)-(x^2-2x)\}dx+\int_{1}^{2}\{(x^2-2x)-(x^3-2x^2)\}dx$$

$$=\int_{0}^{1}(x^3-3x^2+2x)dx+\int_{1}^{2}(-x^3+3x^2-2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_{1}^{2}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{2}$$

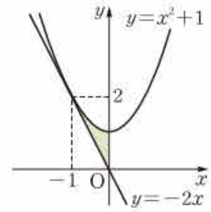
답 $\frac{1}{2}$

0810 $y=x^2+1$에서 $y'=2x$이므로 곡선 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기는

$2\cdot(-1)=-2$

따라서 접선의 방정식은

$y-2=-2(x+1)$, 즉 $y=-2x$



이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{(x^2+1)-(-2x)\}dx=\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{0}$$

$$=\frac{1}{3}$$

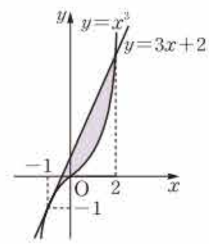
답 ①

0811 $y=x^3$에서 $y'=3x^2$이므로 곡선 위의 점 $(-1, -1)$에서의 접선의 기울기는

$3\cdot(-1)^2=3$

따라서 접선의 방정식은

$y-(-1)=3(x+1)$, 즉 $y=3x+2$



곡선 $y=x^3$과 직선 $y=3x+2$의 교점의 x좌표는 $x^3=3x+2$에서

$x^3-3x-2=0$, $(x-2)(x+1)^2=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{2}\{(3x+2)-x^3\}dx=\int_{-1}^{2}(-x^3+3x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{27}{4}$$

답 $\frac{27}{4}$

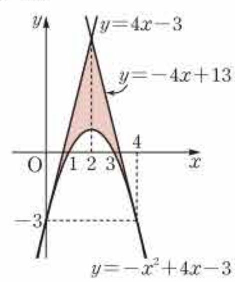
0812 $y=-x^2+4x-3$에서 $y'=-2x+4$

곡선 위의 점 $(0, -3)$에서의 접선의 기울기는 4이므로 접선의 방정식은

$y=4x-3$

곡선 위의 점 $(4, -3)$에서의 접선의 기울기는 -4이므로 접선의 방정식은

$y=-4x+13$



두 직선 $y=4x-3$, $y=-4x+13$의 교점의 x좌표는 $4x-3=-4x+13$에서

$8x=16$ $\therefore x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$2\int_{0}^{2}\{(4x-3)-(-x^2+4x-3)\}dx$$

$$=2\int_{0}^{2}x^2dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{2}$$

$$=2\cdot\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

답 ⑤

0813 (1) $y=x^2-3x+3$에서 $y'=2x-3$

접점의 좌표를 (t, t^2-3t+3)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $2t-3$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-3t+3)=(2t-3)(x-t)$

$\therefore y=(2t-3)x-t^2+3$

09 정적분의 활용

이 직선이 점 (2, 0)을 지나므로

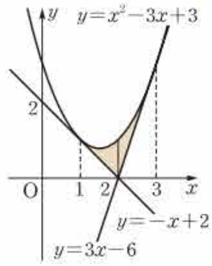
$0=2(2t-3)-t^2+3, \qquad t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0 \qquad \therefore t=1$ 또는 $t=3$

따라서 접선의 방정식은

$y=-x+2,\ y=3x-6$ ⋯ ❶

(2) 구하는 넓이는



$$\int_1^2 \{(x^2-3x+3)-(-x+2)\}dx$$

$$+\int_2^3 \{(x^2-3x+3)-(3x-6)\}dx$$

$$=\int_1^2 (x^2-2x+1)dx$$

$$+\int_2^3 (x^2-6x+9)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_2^3$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$ ⋯ ❷

답 (1) $y=-x+2,\ y=3x-6$ (2) $\frac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❷ 곡선과 두 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	50 %

0814 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$\int_{-2}^k (x^2+2x)dx=0, \qquad \left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{-2}^k=0$

$\frac{1}{3}k^3+k^2-\frac{4}{3}=0, \qquad k^3+3k^2-4=0$

$(k+2)^2(k-1)=0 \qquad \therefore k=1\ (\because k>0)$

답 1

0815 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로

$\int_0^2 \{-x^2(x-2)-ax(x-2)\}dx=0$

$\int_0^2 \{-x^3+(2-a)x^2+2ax\}dx=0$

$\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2-a}{3}x^3+ax^2\right]_0^2=0$

$-4+\frac{8(2-a)}{3}+4a=0$

$\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}=0 \qquad \therefore a=-1$

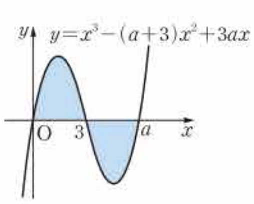
답 -1

0816 곡선 $y=x^3-(a+3)x^2+3ax$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-(a+3)x^2+3ax=0$에서

$x(x-3)(x-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$ 또는 $x=a$

오른쪽 그림에서 색칠한 두 도형의 넓이가 서로 같으므로



$\int_0^a \{x^3-(a+3)x^2+3ax\}dx=0$

$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+3)x^3+\frac{3}{2}ax^2\right]_0^a=0$

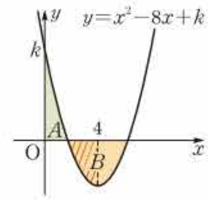
$\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}(a+3)a^3+\frac{3}{2}a^3=0$

$-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{2}a^3=0, \qquad a^3(a-6)=0$

$\therefore a=6\ (\because a>3)$

답 ⑤

0817 $A:B=1:2$에서 $\qquad B=2A$



곡선 $y=x^2-8x+k$가 직선 $x=4$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 빗금친 도형의 넓이는 A와 같다.

즉 곡선 $y=x^2-8x+k$와 x축, y축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

$\int_0^4 (x^2-8x+k)dx=0, \qquad \left[\frac{1}{3}x^3-4x^2+kx\right]_0^4=0$

$\frac{64}{3}-64+4k=0 \qquad \therefore k=\frac{32}{3}$

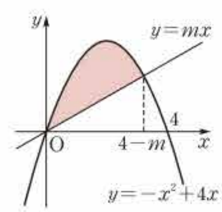
답 $\frac{32}{3}$

0818 곡선 $y=-x^2+4x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는 $-x^2+4x=mx$에서

$x^2+(m-4)x=0, \qquad x(x+m-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4-m$

따라서 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이는



$\int_0^{4-m} \{(-x^2+4x)-mx\}dx$

$=\int_0^{4-m} \{-x^2+(4-m)x\}dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{4-m}{2}x^2\right]_0^{4-m}=\frac{(4-m)^3}{6}$

이때 곡선 $y=-x^2+4x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^4 (-x^2+4x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$

이므로 $\qquad \frac{(4-m)^3}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{32}{3}=\frac{16}{3}$

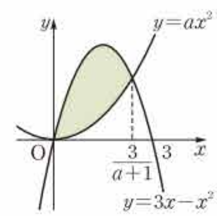
$\therefore (4-m)^3=32$

답 ⑤

0819 두 곡선 $y=3x-x^2$, $y=ax^2$의 교점의 x좌표는 $3x-x^2=ax^2$에서 $\qquad (a+1)x^2-3x=0$

$x\{(a+1)x-3\}=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=\frac{3}{a+1}$

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$\int_0^{\frac{3}{a+1}} \{(3x-x^2)-ax^2\}dx$

$=\int_0^{\frac{3}{a+1}} \{3x-(a+1)x^2\}dx$

$=\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{a+1}{3}x^3\right]_0^{\frac{3}{a+1}}$

$=\frac{9}{2(a+1)^2}$

이때 곡선 $y=3x-x^2$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^3 (3x-x^2)dx=\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=\frac{9}{2}$

이므로 $\qquad \frac{9}{2(a+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}=\frac{9}{4}$

$(a+1)^2=2 \qquad \therefore a=\sqrt{2}-1\ (\because a>0)$

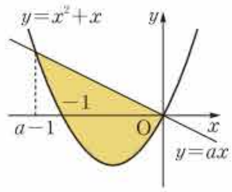
답 ①

0820 곡선 $y=x^2+x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는

$x^2+x=ax$에서 $\quad x^2+(1-a)x=0$

$x(x+1-a)=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=a-1$ ⋯ ❶

따라서 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{a-1}^{0}\{ax-(x^2+x)\}dx$$

$$=\int_{a-1}^{0}\{-x^2+(a-1)x\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a-1}{2}x^2\right]_{a-1}^{0}$$

$$=-\frac{(a-1)^3}{6}$$ ⋯ ❷

이때 곡선 $y=x^2+x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{0}(-x^2-x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{6}$$ ⋯ ❸

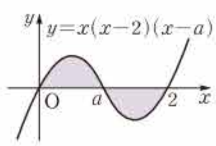
이므로 $\quad -\frac{(a-1)^3}{6}=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

$\therefore (1-a)^3=2$ ⋯ ❹

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	20 %
❷ 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	30 %
❸ 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	30 %
❹ $(1-a)^3$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0821 $0<a<2$이므로 곡선 $y=x(x-2)(x-a)$는 오른쪽 그림과 같다. 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a)$라 하면



$$S(a)=\int_{0}^{a}x(x-2)(x-a)dx+\int_{a}^{2}\{-x(x-2)(x-a)\}dx$$

$$=\int_{0}^{a}\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx$$

$$-\int_{a}^{2}\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2\right]_{0}^{a}$$

$$-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2\right]_{a}^{2}$$

$$=\left(-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3}a^3\right)-\left(\frac{1}{12}a^4-\frac{1}{3}a^3+\frac{4}{3}a-\frac{4}{3}\right)$$

$$=-\frac{1}{6}a^4+\frac{2}{3}a^3-\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}$$

이 식의 양변을 a에 대하여 미분하면

$$S'(a)=-\frac{2}{3}(a^3-3a^2+2)=-\frac{2}{3}(a-1)(a^2-2a-2)$$

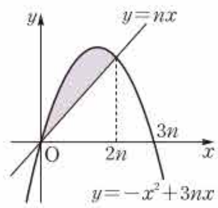
$S'(a)=0$에서 $\quad a=1\ (\because 0<a<2)$

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	극소	↗	

따라서 $0<a<2$에서 $S(a)$는 $a=1$일 때 극소이면서 최소이다.

답 1

0822 곡선 $y=-x^2+3nx$와 직선 $y=nx$의 교점의 x좌표는



$-x^2+3nx=nx$에서

$x^2-2nx=0$

$x(x-2n)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2n$

$$\therefore S_n=\int_{0}^{2n}\{(-x^2+3nx)-nx\}dx$$

$$=\int_{0}^{2n}(-x^2+2nx)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+nx^2\right]_{0}^{2n}$$

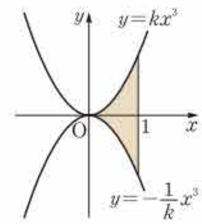
$$=\frac{4}{3}n^3$$

즉 $\frac{4}{3}n^3>40$에서 $\quad n^3>30$

따라서 자연수 n의 최솟값은 4이다.

답 ③

0823 두 곡선 $y=kx^3$, $y=-\frac{1}{k}x^3$과 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\int_{0}^{1}\left\{kx^3-\left(-\frac{1}{k}x^3\right)\right\}dx$$

$$=\left(k+\frac{1}{k}\right)\int_{0}^{1}x^3dx$$

$$=\left(k+\frac{1}{k}\right)\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{4}\left(k+\frac{1}{k}\right)$$

이때 $k>0$, $\frac{1}{k}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{4}\left(k+\frac{1}{k}\right)\ge\frac{1}{4}\cdot2\sqrt{k\cdot\frac{1}{k}}=\frac{1}{2}$$ (단, 등호는 $k=1$일 때 성립)

따라서 주어진 두 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $k=1$일 때 최솟값 $\frac{1}{2}$을 갖는다.

답 ②

라쎈 특강 산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때, $\quad \frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

0824 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$이므로

$$\int_{1}^{2}f(x)dx=\int_{2}^{3}f(x)dx=\int_{3}^{4}f(x)dx=\int_{4}^{5}f(x)dx=4$$

$$\therefore \int_{1}^{5}f(x)dx$$

$$=\int_{1}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{4}f(x)dx+\int_{4}^{5}f(x)dx$$

$$=4\cdot4=16$$

답 ⑤

0825 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}3x^2dx=2\int_{0}^{1}3x^2dx$

$$=2\left[x^3\right]_{0}^{1}=2$$ ⋯ ❶

이때 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이므로 실수 a에 대하여 $\int_{a}^{a+2} f(x)dx=\int_{-1}^{1} f(x)dx=2$

$\therefore \int_{-4}^{4} f(x)dx$

$=\int_{-4}^{-2} f(x)dx+\int_{-2}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{4} f(x)dx$

$=4\cdot 2=8$ ⋯ ❷

답 8

채점 기준	비율
❶ $\int_{-1}^{1} f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\int_{-4}^{4} f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	60 %

0826 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이므로

$\int_{-1}^{5} f(x)dx=\int_{-1}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{5} f(x)dx=2\int_{0}^{3} f(x)dx$

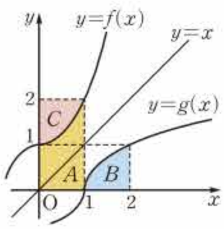
이때 $2\int_{0}^{3} f(x)dx=10$이므로 $\int_{0}^{3} f(x)dx=5$

$\therefore \int_{0}^{3}\{2x+f(x)\}dx=\int_{0}^{3} 2x\,dx+\int_{0}^{3} f(x)dx$

$=\Big[x^2\Big]_0^3+5=9+5=14$

답 14

0827 함수 $f(x)=x^3+1$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



따라서 오른쪽 그림에서

(B의 넓이)=(C의 넓이)

이므로

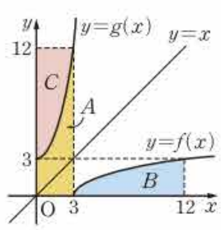
$\int_{0}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{2} g(x)dx=$(A의 넓이)+(B의 넓이)

=(A의 넓이)+(C의 넓이)

$=1\cdot 2=2$

답 ②

0828 함수 $f(x)=\sqrt{x-3}$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



따라서 오른쪽 그림에서

(B의 넓이)=(C의 넓이)

이므로

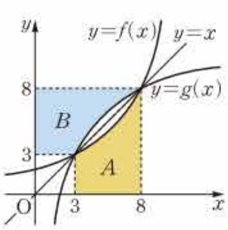
$\int_{0}^{3} g(x)dx+\int_{3}^{12} f(x)dx=$(A의 넓이)+(B의 넓이)

=(A의 넓이)+(C의 넓이)

$=3\cdot 12=36$

답 ④

0829 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



오른쪽 그림에서

(A의 넓이)=(B의 넓이)=S

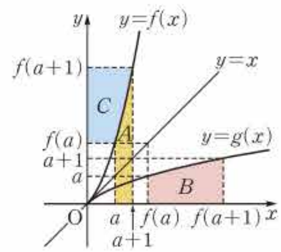
이므로

$\int_{3}^{8} g(x)dx=8^2-3^2-(B$의 넓이$)=55-S$

$\therefore a=55$

답 55

0830 함수 $f(x)=x^2+x\ (x\ge 0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



따라서 오른쪽 그림에서

(B의 넓이)=(C의 넓이)

이므로

$\int_{a}^{a+1} f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(a+1)} g(x)dx$

=(A의 넓이)+(B의 넓이)

=(A의 넓이)+(C의 넓이)

$=(a+1)f(a+1)-af(a)$

$=3a^2+5a+2$

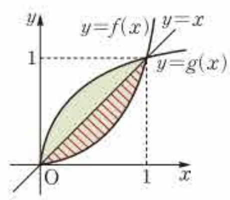
즉 $3a^2+5a+2=14$이므로

$3a^2+5a-12=0,\quad (a+3)(3a-4)=0$

$\therefore a=\frac{4}{3}\ (\because a>0)$

답 $\frac{4}{3}$

0831 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.



$x^2=x$에서 $x(x-1)=0$

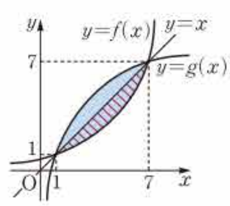
$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

이때 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이는

$2\int_{0}^{1}(x-x^2)dx=2\Big[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\Big]_0^1=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

답 ④

0832 오른쪽 그림에서 빗금친 부분의 넓이는



$\int_{1}^{7}\{x-f(x)\}dx$

$=\int_{1}^{7} x\,dx-\int_{1}^{7} f(x)dx$

$=\Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_1^7-13$

$=24-13=11$ ⋯ ❶

이때 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 빗금친 부분의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이는

$2\cdot 11=22$ ⋯ ❷

답 22

채점 기준	비율
❶ 빗금친 부분의 넓이를 구할 수 있다.	70 %
❷ 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	30 %

0833 $t=0$에서 점 P의 위치를 x_0이라 하면 $t=2$에서 점 P의 위치는

$$x_0+\int_0^2(3-2t)dt=x_0+\Big[3t-t^2\Big]_0^2=x_0+2$$

$x_0+2=10$이므로 $\quad x_0=8$

따라서 $t=0$에서 점 P의 위치는 8이다. 답 ⑤

0834 점 P가 원점으로 되돌아오는 시각을 $t=a\ (a>0)$라 하면

$$\int_0^a(8-4t)dt=0, \qquad \Big[8t-2t^2\Big]_0^a=0$$

$$-2a^2+8a=0, \qquad a(a-4)=0$$

$$\therefore a=4\ (\because a>0)$$

따라서 $t=4$일 때 점 P가 원점으로 되돌아오므로 걸리는 시간은 4이다. 답 4

0835 $t=3$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^3 v(t)dt=\int_0^1(t^2-t)dt+\int_1^3(-t^2+4t-3)dt$$

$$=\Big[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\Big]_0^1+\Big[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\Big]_1^3$$

$$=-\frac{1}{6}+\frac{4}{3}=\frac{7}{6}$$

답 ④

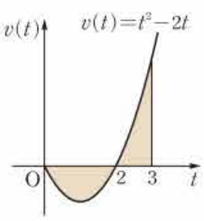
0836 점 P가 출발한 후 다시 원점을 지나는 시각을 $t=a\ (a>0)$라 하면

$$\int_0^a(t^2-2t)dt=0, \qquad \Big[\frac{1}{3}t^3-t^2\Big]_0^a=0$$

$$\frac{1}{3}a^3-a^2=0, \qquad \frac{1}{3}a^2(a-3)=0$$

$$\therefore a=3\ (\because a>0)$$

따라서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는



$$\int_0^3|t^2-2t|dt$$

$$=\int_0^2(-t^2+2t)dt+\int_2^3(t^2-2t)dt$$

$$=\Big[-\frac{1}{3}t^3+t^2\Big]_0^2+\Big[\frac{1}{3}t^3-t^2\Big]_2^3$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

답 ②

0837 시각 t에서 두 점 A, B의 위치를 각각 $x_A(t)$, $x_B(t)$라 하면

$$x_A(t)=0+\int_0^t(-2t+6)dt=\Big[-t^2+6t\Big]_0^t=-t^2+6t$$

$$x_B(t)=0+\int_0^t(2t-6)dt=\Big[t^2-6t\Big]_0^t=t^2-6t \quad \cdots ❶$$

$t=t_1$일 때 두 점 A, B가 다시 만나므로

$$-t_1^2+6t_1=t_1^2-6t_1, \qquad 2t_1(t_1-6)=0$$

$$\therefore t_1=6\ (\because t_1>0) \quad \cdots ❷$$

또 두 점 A, B 사이의 거리는

$$|(-t^2+6t)-(t^2-6t)|=2|-t^2+6t|=2|-(t-3)^2+9|$$

$0\le t\le 6$에서 두 점 사이의 거리는 $t=3$일 때 최대이므로

$$t_2=3 \quad \cdots ❸$$

$$\therefore t_1+t_2=9 \quad \cdots ❹$$

답 9

채점 기준	비율
❶ $x_A(t)$, $x_B(t)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ t_1의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ t_2의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ t_1+t_2의 값을 구할 수 있다.	10 %

0838 $v(t)=20-2t=0$에서 $\quad t=10$

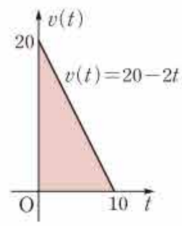
따라서 자동차는 제동을 건 지 10초 후에 정지하므로 정지할 때까지 달린 거리는

$$\int_0^{10}|20-2t|dt=\int_0^{10}(20-2t)dt$$

$$=\Big[20t-t^2\Big]_0^{10}=100\,(\text{m})$$

답 ④

다른풀이 $v(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 제동을 건 후 자동차가 정지할 때까지 달린 거리는



$$\int_0^{10}|v(t)|dt=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 20$$

$$=100\,(\text{m})$$

0839 $v(t)=15-10t=0$에서 $\quad t=\frac{3}{2}$

따라서 물체는 위로 쏘아 올린 지 $\frac{3}{2}$초 후에 최고 높이에 도달하므로 구하는 높이는

$$20+\int_0^{\frac{3}{2}}(15-10t)dt=20+\Big[15t-5t^2\Big]_0^{\frac{3}{2}}$$

$$=20+\frac{45}{4}=\frac{125}{4}\,(\text{m})$$

답 ②

0840 $t=a\ (a>0)$일 때 열차가 달린 거리가 4 km라 하면

$$\int_0^a\Big|t^2+\frac{2}{3}t\Big|dt=4, \qquad \int_0^a\Big(t^2+\frac{2}{3}t\Big)dt=4$$

$$\Big[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{3}t^2\Big]_0^a=4, \qquad \frac{1}{3}a^3+\frac{1}{3}a^2=4$$

$$a^3+a^2-12=0, \qquad (a-2)(a^2+3a+6)=0$$

$$\therefore a=2\ (\because a^2+3a+6>0)$$

열차가 출발한 후 $t=2$일 때의 속도는

$$v(2)=2^2+\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{16}{3}\,(\text{km/min})$$

이므로 구하는 거리는

$$4+\int_2^5\frac{16}{3}dt=4+\Big[\frac{16}{3}t\Big]_2^5=4+16=20\,(\text{km})$$

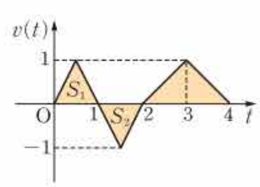
답 20 km

0841 $t=3$에서 점 P의 위치는 $\int_0^3 v(t)dt$이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(-2)+\frac{1}{2}\cdot(3-2)\cdot 2=-1$$

답 -1

0842 $t=a$일 때, 원점을 다시 지난다고 하면 $\int_0^a v(t)dt=0$이어야 한다.



오른쪽 그림에서 $S_1=S_2$이므로 $t=2$일 때 원점을 다시 지난다.

답 2

09 정적분의 활용

0843 $t=9$에서 점 P의 위치는 $\int_0^9 v(t)dt$이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot k+\frac{1}{2}\cdot(6-3)\cdot(-2)+\frac{1}{2}\{(8-7)+(9-6)\}k=11$$

$$\frac{7}{2}k-3=11 \qquad \therefore k=4$$

답 ②

0844 $t=3$에서 점 P의 위치는 $\int_0^3 v(t)dt$이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3a+\frac{1}{2}\cdot(3-1)\cdot(-a)=2$$

$$\frac{1}{2}a=2 \qquad \therefore a=4 \quad \cdots ❶$$

따라서 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^5 |v(t)|dt=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 12+\frac{1}{2}\cdot(3-1)\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot(5-3)\cdot 12$$

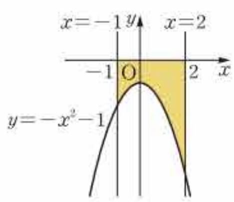
$$=22 \quad \cdots ❷$$

답 22

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리를 구할 수 있다.	50 %

0845 전략 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_a^b |f(x)|dx$임을 이용한다.

풀이 구하는 넓이는



$$\int_{-1}^2 |-x^2-1|dx$$

$$=\int_{-1}^2 (x^2+1)dx$$

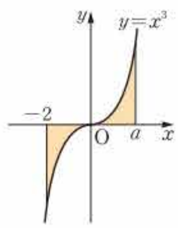
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^2$$

$$=6$$

답 ①

0846 전략 $y\ge 0$인 구간과 $y\le 0$인 구간으로 나누어 정적분의 값을 구한다.

풀이 곡선과 x축 및 두 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\int_{-2}^a |x^3|dx=\int_{-2}^0 (-x^3)dx+\int_0^a x^3dx$$

$$=\left[-\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^0+\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^a$$

$$=4+\frac{a^4}{4}$$

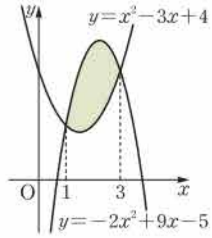
따라서 $4+\frac{a^4}{4}=8$이므로 $\qquad \frac{a^4}{4}=4$

$$a^4=16 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$$

답 2

0847 전략 두 곡선의 교점의 x좌표를 구한 다음 두 곡선의 위치 관계를 파악한다.

풀이 두 곡선 $y=x^2-3x+4$, $y=-2x^2+9x-5$의 교점의 x좌표는



$x^2-3x+4=-2x^2+9x-5$에서

$$3x^2-12x+9=0$$

$$x^2-4x+3=0$$

$$(x-1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^3 \{(-2x^2+9x-5)-(x^2-3x+4)\}dx$$

$$=\int_1^3 (-3x^2+12x-9)dx$$

$$=\left[-x^3+6x^2-9x\right]_1^3=4$$

답 4

0848 전략 $f(x+k)=f(x)$ (k는 상수)이면 $\int_a^b f(x)dx=\int_{a+k}^{b+k} f(x)dx$임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_4^6 f(x)dx$$

따라서 항상 같은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0849 전략 시각 $t=a$에서의 점 P의 위치가 x_0일 때, 시각 t에서 점 P의 위치는 $x_0+\int_a^t v(t)dt$임을 이용한다.

풀이 $v(t)=0$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀌므로

$$2-t=0 \qquad \therefore t=2$$

따라서 $t=2$에서 점 P의 위치는

$$5+\int_0^2 (2-t)dt=5+\left[2t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^2=5+2=7$$

답 7

0850 전략 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$, 움직인 거리는 $\int_a^b |v(t)|dt$임을 이용한다.

풀이 $t=0$에서 $t=c$까지 이 물체의 위치의 변화량은 $\int_0^c v(t)dt$이므로 $\qquad p=-2+3-16=-15$

또 움직인 거리는 $\int_0^c |v(t)|dt$이므로 $\qquad q=2+3+16=21$

$$\therefore p+q=6$$

답 6

0851 전략 $y\ge 0$인 구간과 $y\le 0$인 구간으로 나누어 정적분의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=\int(x^2-1)dx=\frac{1}{3}x^3-x+C$

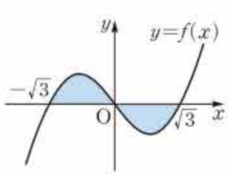
이때 $f(0)=0$이므로 $\qquad C=0 \qquad \therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는 $\frac{1}{3}x^3-x=0$에서

$$\frac{1}{3}x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$$

$$\therefore x=-\sqrt{3} \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=\sqrt{3}$$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |f(x)|dx$$

$$=2\int_0^{\sqrt{3}} \{-f(x)\}dx$$

$$=2\int_0^{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{3}x^3+x\right)dx$$

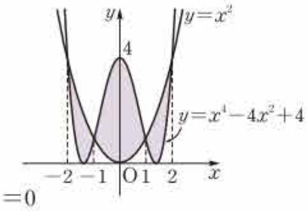
$$=2\left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$=2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$$

답 ④

0852 전략 두 곡선의 교점의 x좌표를 구한 다음 두 곡선의 위치 관계를 파악한다.

풀이 두 곡선 $y=x^4-4x^2+4$, $y=x^2$의 교점의 x좌표는



$x^4-4x^2+4=x^2$에서

$x^4-5x^2+4=0$

$(x^2-1)(x^2-4)=0$

$(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{2}|x^2-(x^4-4x^2+4)|dx$$

$$=2\int_0^1\{(x^4-4x^2+4)-x^2\}dx+2\int_1^2\{x^2-(x^4-4x^2+4)\}dx$$

$$=2\int_0^1(x^4-5x^2+4)dx+2\int_1^2(-x^4+5x^2-4)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{5}{3}x^3+4x\right]_0^1+2\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{5}{3}x^3-4x\right]_1^2$$

$$=2\cdot\left(\frac{38}{15}+\frac{22}{15}\right)$$

$$=8$$

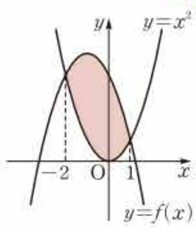
답 ②

0853 전략 평행이동한 곡선의 함수식을 찾은 다음 두 곡선의 교점의 x좌표를 구한다.

풀이 곡선 $y=-x^2$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동하면

$y=-(x+1)^2+5=-x^2-2x+4$ ❶

두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2-2x+4$의 교점의 x좌표는 $x^2=-x^2-2x+4$에서



$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ ❷

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{1}\{(-x^2-2x+4)-x^2\}dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(-2x^2-2x+4)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-2}^{1}$$

$$=9$$ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ 두 곡선의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	50 %

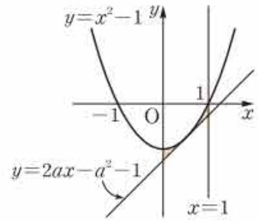
0854 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$임을 이용한다.

풀이 $y=x^2-1$에서 $y'=2x$

점 $\mathrm{P}(a, a^2-1)$에서의 접선의 기울기는 $2a$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2-1)=2a(x-a)$, 즉 $y=2ax-a^2-1$

따라서 주어진 도형의 넓이는



$$\int_0^1\{x^2-1-(2ax-a^2-1)\}dx$$

$$=\int_0^1(x^2-2ax+a^2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-ax^2+a^2x\right]_0^1$$

$$=a^2-a+\frac{1}{3}$$

$$=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}$$

이므로 구하는 최솟값은 $\frac{1}{12}$이다.

답 $\frac{1}{12}$

0855 전략 $\int_0^1\{(1-x^2)-k\}dx=0$임을 이용한다.

풀이 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$\int_0^1\{(1-x^2)-k\}dx=0$, $\int_0^1(-x^2+1-k)dx=0$

$\left[-\frac{1}{3}x^3+(1-k)x\right]_0^1=0$, $-\frac{1}{3}+1-k=0$

$\therefore k=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

0856 전략 두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 $\frac{1}{2}$이 두 곡선 $y=ax(1-x)$, $y=x^4-x^3$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같음을 이용한다.

풀이 두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1\{(-x^4+x)-(x^4-x^3)\}dx$$

$$=\int_0^1(-2x^4+x^3+x)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{7}{20}$$

따라서 두 곡선 $y=ax(1-x)$, $y=x^4-x^3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{20}=\frac{7}{40}$이고

$$\int_0^1\{ax(1-x)-(x^4-x^3)\}dx$$

$$=\int_0^1(-x^4+x^3-ax^2+ax)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{20}+\frac{a}{6}$$

이므로 $\frac{1}{20}+\frac{a}{6}=\frac{7}{40}$

$\frac{a}{6}=\frac{1}{8}$ $\therefore a=\frac{3}{4}$

답 ④

다른풀이 곡선 $y=ax(1-x)$가 두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 이등분하므로

$$\int_0^1\{(-x^4+x)-(x^4-x^3)\}dx$$

$$=2\int_0^1\{(-x^4+x)-ax(1-x)\}dx$$

09 정적분의 활용

$$\int_0^1 [(-2x^4+x^3+x)-\{-2x^4+2ax^2+(2-2a)x\}]dx=0$$

$$\int_0^1 \{x^3-2ax^2+(2a-1)x\}dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}ax^3+\frac{2a-1}{2}x^2\right]_0^1=0$$

$$\frac{1}{4}-\frac{2}{3}a+a-\frac{1}{2}=0, \qquad \frac{1}{3}a-\frac{1}{4}=0$$

$$\therefore a=\frac{3}{4}$$

0857 전략 $\int_a^b f(x)dx=\int_{a+2}^{b+2} f(x)dx$임을 이용한다.

풀이 $g(x)=\int_{-2}^{x} f(t)dt$이므로

$$\begin{aligned} &g(a+4)-g(a)\\ &=\int_{-2}^{a+4} f(t)dt-\int_{-2}^{a} f(t)dt\\ &=\int_{-2}^{a} f(t)dt+\int_{a}^{a+4} f(t)dt-\int_{-2}^{a} f(t)dt\\ &=\int_{a}^{a+4} f(t)dt\\ &=\int_{a}^{a+4} f(x)dx \qquad \cdots\cdots \text{㉠} \end{aligned}$$

조건 (가)에서 $f(x+2)=f(x)$이므로

$$\begin{aligned} \int_{a+2}^{a+4} f(x)dx&=\int_{a}^{a+2} f(x)dx\\ &=\int_{a-2}^{a} f(x)dx\\ &\ \vdots\\ &=\int_{-1}^{1} f(x)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{a}^{a+4} f(x)dx&=\int_{a}^{a+2} f(x)dx+\int_{a+2}^{a+4} f(x)dx\\ &=2\int_{-1}^{1} f(x)dx \qquad \cdots\cdots \text{㉡} \end{aligned}$$

이때 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(x)dx&=2\int_{0}^{1} f(x)dx=2\int_{0}^{1} x\,dx\\ &=2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=2\cdot\frac{1}{2}=1 \qquad \cdots\cdots \text{㉢} \end{aligned}$$

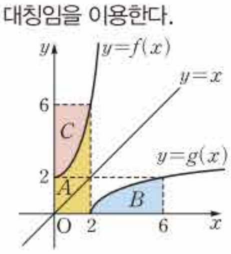
따라서 ㉠, ㉡, ㉢에서

$$\begin{aligned} g(a+4)-g(a)&=\int_{a}^{a+4} f(x)dx\\ &=2\int_{-1}^{1} f(x)dx\\ &=2\cdot1=2 \end{aligned}$$

답 ②

0858 전략 두 곡선이 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)=x^2+2\ (x\geq0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. ⋯ ❶



따라서 오른쪽 그림에서

$(B$의 넓이$)=(C$의 넓이$)$

이므로

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)dx+\int_2^6 g(x)dx&=(A\text{의 넓이})+(B\text{의 넓이})\\ &=(A\text{의 넓이})+(C\text{의 넓이})\\ &=2\cdot6\\ &=12 \end{aligned}$$

⋯ ❷

답 12

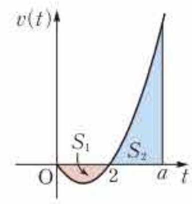
채점 기준	비율
❶ $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 안다.	40 %
❷ $\int_0^2 f(x)dx+\int_2^6 g(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	60 %

0859 전략 먼저 $t=0$에서 $t=2$까지 움직인 거리를 구한다.

풀이 $v(t)=0$에서 $\quad 3t^2-6t=0$

$3t(t-2)=0 \qquad \therefore t=0$ 또는 $t=2$

오른쪽 그림에서 $0\leq t\leq2$일 때 $v(t)\leq0$이므로 $t=0$에서 $t=2$까지 움직인 거리는



$$\begin{aligned} \int_0^2 |v(t)|dt&=\int_0^2 (-3t^2+6t)dt\\ &=\left[-t^3+3t^2\right]_0^2\\ &=4 \end{aligned}$$

이때 $4<24$이므로 $a>2$이다.

따라서 위의 그림에서 $S_1+S_2=24$이어야 하고 $S_1=4$이므로

$$\int_2^a v(t)dt=24-4=20$$

또

$$\int_2^a v(t)\,dt=\int_2^a (3t^2-6t)dt=\left[t^3-3t^2\right]_2^a=a^3-3a^2+4$$

이므로

$a^3-3a^2+4=20, \qquad a^3-3a^2-16=0$

$(a-4)(a^2+a+4)=0$

$\therefore a=4\ (\because a^2+a+4>0)$

$\therefore v(a)=v(4)=48-24=24$

답 24

0860 전략 $t=a$에서 $t=b$까지 물체가 움직인 거리는 $\int_a^b |v(t)|dt$임을 이용한다.

풀이 낙하를 시작한 지 $t(t>0)$초부터 $(t+1)$초까지 물체가 낙하한 거리는

$$\int_t^{t+1} |-10t|\,dt=\int_t^{t+1} 10t\,dt=\left[5t^2\right]_t^{t+1}=10t+5\,(\mathrm{m})$$

이때 물체가 1초 동안 낙하한 거리가 50 m 이상이 되려면

$10t+5\geq50 \qquad \therefore t\geq4.5$

따라서 이 물체가 1초 동안 낙하한 거리가 50 m 이상이 되는 것은 낙하를 시작한 지 4.5초가 지나서부터이다.

답 ③

0861 전략 곡선 $y=ax^2$과 직선 AB가 만나는 점의 x좌표를 p라 하고 S_1을 p에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 두 점 A$(2, 0)$, B$(0, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \qquad \therefore y=-\frac{3}{2}x+3$$

직선 $y=-\frac{3}{2}x+3$과 $y=ax^2$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 p $(0<p<2)$라 하면

$$-\frac{3}{2}p+3=ap^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\therefore S_1=\int_0^p \left\{\left(-\frac{3}{2}x+3\right)-ax^2\right\}dx$$
$$=\left[-\frac{3}{4}x^2+3x-\frac{1}{3}ax^3\right]_0^p$$
$$=-\frac{3}{4}p^2+3p-\frac{1}{3}ap^3$$
$$=-\frac{3}{4}p^2+3p-\frac{1}{3}p\left(-\frac{3}{2}p+3\right)\ (\because ㉠)$$
$$=-\frac{1}{4}p^2+2p \quad \cdots\cdots ㉡$$

한편

$$S_1+S_2=\triangle AOB=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3$$

이고 $S_1 : S_2=13 : 3$이므로

$$S_1=\frac{13}{13+3}\triangle AOB=\frac{13}{16}\cdot 3=\frac{39}{16} \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢에서

$$-\frac{1}{4}p^2+2p=\frac{39}{16}, \quad 4p^2-32p+39=0$$
$$(2p-3)(2p-13)=0 \quad \therefore p=\frac{3}{2}\ (\because 0<p<2)$$

㉠에 $p=\frac{3}{2}$을 대입하면 $\quad -\frac{9}{4}+3=\frac{9}{4}a$

$$\frac{9}{4}a=\frac{3}{4} \quad \therefore a=\frac{1}{3}$$

답 ②

0862 전략 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근임을 이용한다.

풀이 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=ax+1$의 교점의 x좌표는 $x^2=ax+1$에서 $\quad x^2-ax-1=0$

방정식 $x^2-ax-1=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=-1$$

이므로 $\quad (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=a^2+4$

$$\therefore \beta-\alpha=\sqrt{a^2+4}\ (\because \beta-\alpha>0) \quad \cdots ❶$$

따라서 주어진 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_\alpha^\beta (ax+1-x^2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+x\right]_\alpha^\beta$$
$$=-\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)+\frac{a}{2}(\beta^2-\alpha^2)+(\beta-\alpha)$$
$$=(\beta-\alpha)\left\{-\frac{1}{3}(\underbrace{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}_{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=a^2+1})+\frac{a}{2}(\alpha+\beta)+1\right\}$$
$$=\sqrt{a^2+4}\left\{-\frac{1}{3}(a^2+1)+\frac{a^2}{2}+1\right\}$$
$$=\sqrt{a^2+4}\left(\frac{1}{6}a^2+\frac{2}{3}\right) \quad \cdots ❷$$

이때 $a^2\geq 0$이므로 구하는 최솟값은 $\quad \sqrt{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3} \quad \cdots ❸$

답 $\frac{4}{3}$

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$, $\beta-\alpha$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 도형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0863 전략 두 점 P, Q 사이의 거리는 |(P의 위치)−(Q의 위치)|임을 이용한다.

풀이 $f(t)=2t^2-8t$, $g(t)=t^3-10t^2+24t$라 하면 시각 x에서의 두 점 P, Q의 위치는 각각 $\int_0^x f(t)dt$, $\int_0^x g(t)dt$이다.

x초 후의 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$\left|\int_0^x f(t)dt-\int_0^x g(t)dt\right|=\left|\int_0^x \{f(t)-g(t)\}dt\right|$$

이때 $h(x)=\int_0^x \{f(t)-g(t)\}dt$라 하면

$$h(x)=\int_0^x \{(2t^2-8t)-(t^3-10t^2+24t)\}dt$$
$$=\int_0^x (-t^3+12t^2-32t)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{4}t^4+4t^3-16t^2\right]_0^x$$
$$=-\frac{1}{4}x^4+4x^3-16x^2$$
$$\therefore h'(x)=-x^3+12x^2-32x=-x(x-4)(x-8)$$

$h'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=4$ 또는 $x=8$

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	8
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$h(x)$	0	↘	-64	↗	0

따라서 $0\leq x\leq 8$에서 $-64\leq h(x)\leq 0$이므로

$$0\leq |h(x)|\leq 64$$

즉 구하는 거리 $|h(x)|$의 최댓값은 64이다.

답 64

0864 전략 $v(t)=0$을 만족시키는 t를 기준으로 점 P의 운동 방향이 바뀐다.

풀이 ㄱ. $0<t\leq 7$에서 $v(t)$의 그래프는 t축과 서로 다른 두 점에서 만나고 그 두 점의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 $t=7$일 때까지 운동 방향이 두 번 바뀐다.

ㄴ. $t=4$일 때 $|v(t)|$의 값이 가장 크므로 속력이 가장 크다.

ㄷ. $3\leq t\leq 4$일 때, $v(t)=-3t+10$이므로

$-3t+10=0$에서 $\quad t=\frac{10}{3}$

따라서 $t=7$일 때 점 P의 위치는

$$\int_0^7 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{10}{3}\right)\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot\left(6-\frac{10}{3}\right)\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1$$
$$=0$$

이므로 $t=7$일 때 점 P는 원점에 있다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

09 정적분의 활용

memo