01강 다항식의 덧셈, 뺄셈, 곱셈

확인 문제 p. 6

1 (1) $3x^2-2yx+y+1$
(2) $1+y-2yx+3x^2$

2 (1) $3x^2-2x-3$
(2) $(x^2-5x+2)-(3x^2-4x+1)$
$=x^2-5x+2-3x^2+4x-1$
$=-2x^2-x+1$

3 $(3x-2)(x^2+2x-1)$
$=3x^3+6x^2-3x-2x^2-4x+2$
$=3x^3+4x^2-7x+2$

교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제 p. 7

1 (1) $A+B=(x^2-2xy+3y^2)+(3x^2+xy-2y^2)$
$=4x^2-xy+y^2$
(2) $A-B=(x^2-2xy+3y^2)-(3x^2+xy-2y^2)$
$=x^2-2xy+3y^2-3x^2-xy+2y^2$
$=-2x^2-3xy+5y^2$

2 (1) $A+B=(x^3-2x^2+3x+1)+(x^4-x^2+3x-5)$
$=x^4+x^3-3x^2+6x-4$
(2) $A-B=(x^3-2x^2+3x+1)-(x^4-x^2+3x-5)$
$=x^3-2x^2+3x+1-x^4+x^2-3x+5$
$=-x^4+x^3-x^2+6$

3 (1) $(A-B)+(2C-A)$
$=-B+2C$
$=-(-2x^3+5x^2+3)+2(x^2-4x+2)$
$=2x^3-5x^2-3+2x^2-8x+4$
$=2x^3-3x^2-8x+1$
(2) $(2A+C)-(B-2C)$
$=2A+C-B+2C$
$=2A-B+3C$
$=2(x^3-2x^2+3x-1)-(-2x^3+5x^2+3)$
$+3(x^2-4x+2)$
$=2x^3-4x^2+6x-2+2x^3-5x^2-3+3x^2-12x+6$
$=4x^3-6x^2-6x+1$

4 (1) $2A-(B-C)$
$=2A-B+C$
$=2(2x^2-4xy+y^2)-(-x^2-5xy+3y^2)+(3x^2-8xy)$
$=4x^2-8xy+2y^2+x^2+5xy-3y^2+3x^2-8xy$
$=8x^2-11xy-y^2$
(2) $(A-2B)+2(B-C)$
$=A-2B+2B-2C$
$=A-2C$
$=(2x^2-4xy+y^2)-2(3x^2-8xy)$
$=2x^2-4xy+y^2-6x^2+16xy$
$=-4x^2+12xy+y^2$

5 (1) $(4x+y)(2x^2-xy+3y^2)$
$=8x^3-4x^2y+12xy^2+2x^2y-xy^2+3y^3$
$=8x^3-2x^2y+11xy^2+3y^3$
(2) $(x^2-2x+3)(x^2+2x-1)$
$=x^4+2x^3-x^2-2x^3-4x^2+2x+3x^2+6x-3$
$=x^4-2x^2+8x-3$

6 (1) $(2a^2-5a+6)(a^2-3)$
$=2a^4-6a^2-5a^3+15a+6a^2-18$
$=2a^4-5a^3+15a-18$
(2) $(x+2y-1)(3x-y+2)$
$=3x^2-xy+2x+6xy-2y^2+4y-3x+y-2$
$=3x^2+5xy-2y^2-x+5y-2$

02강 곱셈 공식

확인 문제 p. 8

1 (1) $(x+y-z)^2$
$=x^2+y^2+(-z)^2+2\times x\times y+2\times y\times(-z)$
$+2\times(-z)\times x$
$=x^2+y^2+z^2+2xy-2yz-2zx$
(2) $(a-2)^3=a^3-3\times a^2\times 2+3\times a\times 2^2-2^3$
$=a^3-6a^2+12a-8$
(3) $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$
$=(x+2y)\{x^2-x\times 2y+(2y)^2\}$
$=x^3+(2y)^3$
$=x^3+8y^3$
(4) $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$
$=(2a-b)\{(2a)^2+2a\times b+b^2\}$
$=(2a)^3-b^3$
$=8a^3-b^3$

2 (1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
$=2^2-2\times(-3)$
$=10$
(2) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=2^3-3\times(-3)\times 2$
$=26$

교/과/서/속 **핵심 유형+** 닮은꼴 문제 p. 9

1 (1) $(2x-3y+z)^2$

$=(2x)^2+(-3y)^2+z^2+2\times 2x\times(-3y)$
$\qquad +2\times(-3y)\times z+2\times z\times 2x$

$=4x^2+9y^2+z^2-12xy-6yz+4zx$

(2) $(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)$

$=(3a-2b)\{(3a)^2+3a\times 2b+(2b)^2\}$

$=(3a)^3-(2b)^3$

$=27a^3-8b^3$

2 (1) $(3a+2b)^3$

$=(3a)^3+3\times(3a)^2\times 2b+3\times 3a\times(2b)^2+(2b)^3$

$=27a^3+54a^2b+36ab^2+8b^3$

(2) $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$

$=(2x+y)\{(2x)^2-2x\times y+y^2\}$

$=(2x)^3+y^3$

$=8x^3+y^3$

3 (1) $x+y=4$, $xy=1$이므로

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$\qquad =4^3-3\times 1\times 4$

$\qquad =52$

(2) $x-y=-2\sqrt{3}$, $xy=1$이므로

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$\qquad =(-2\sqrt{3})^3+3\times 1\times(-2\sqrt{3})$

$\qquad =-30\sqrt{3}$

4 (1) $a^2+b^2+c^2$

$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=2^2-2\times(-1)$

$=6$

(2) $a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=2\times\{6-(-1)\}+3\times(-2)$

$=8$

5 (1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$

$\qquad =(-3)^2-2=7$

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$\qquad =(-3)^3-3\times(-3)=-18$

6 (1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$

$\qquad =2^2+2=6$

(2) $x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

$\qquad =2^3+3\times 2=14$

03강 다항식의 나눗셈

확인 문제 p. 10

1 (1)

$$\begin{array}{r} x^2-6x+8 \\ x+1\,\overline{)\,x^3-5x^2+2x+7} \\ \underline{x^3+\ x^2\qquad\quad} \\ -6x^2+2x\quad \\ \underline{-6x^2-6x\quad} \\ 8x+7 \\ \underline{8x+8} \\ -1 \end{array}$$

따라서 몫은 x^2-6x+8이고 나머지는 -1이다.

(2)

$$\begin{array}{r} x^2-5x+7 \\ x^2+x+1\,\overline{)\,x^4-4x^3+3x^2-x-1} \\ \underline{x^4+\ x^3+\ x^2\qquad\qquad} \\ -5x^3+2x^2-x\quad \\ \underline{-5x^3-5x^2-5x\quad} \\ 7x^2+4x-1 \\ \underline{7x^2+7x+7} \\ -3x-8 \end{array}$$

따라서 몫은 x^2-5x+7이고 나머지는 $-3x-8$이다.

2 (1)

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & 3 & -5 \\ & & 1 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & \boxed{-3} \end{array}$$

따라서 몫은 x^2-x+2이고 나머지는 -3이다.

(2)

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ & & -1 & -1 & 4 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -4 & 2 & \boxed{-1} \end{array}$$

따라서 몫은 x^3+x^2-4x+2이고 나머지는 -1이다.

교/과/서/속 **핵심 유형+** 닮은꼴 문제 p. 11

1

$$\begin{array}{r} 2x^2+5x+20 \\ x-3\,\overline{)\,2x^3-\ x^2+\ 5x-\ 8} \\ \underline{2x^3-6x^2\qquad\qquad} \\ 5x^2+\ 5x\qquad \\ \underline{5x^2-15x\qquad} \\ 20x-\ 8 \\ \underline{20x-60} \\ 52 \end{array}$$

따라서 $Q=2x^2+5x+20$이고 $R=52$이므로

$2x^3-x^2+5x-8=(x-3)(2x^2+5x+20)+52$

2

$$
\begin{array}{r}
x-3 \\
x^2+2x-5\overline{\big)\,x^3-x^2-4x+13} \\
x^3+2x^2-5x \\
\hline
-3x^2+x+13 \\
-3x^2-6x+15 \\
\hline
7x-2
\end{array}
$$

따라서 $Q=x-3$이고 $R=7x-2$이므로
$x^3-x^2-4x+13=(x^2+2x-5)(x-3)+7x-2$

3 다항식 A를 $4x^2+2x+1$로 나누었을 때의 몫이 $2x-1$이고 나머지가 $3x-4$이므로

$$
\begin{aligned}
A&=(4x^2+2x+1)(2x-1)+3x-4 \\
&=8x^3-4x^2+4x^2-2x+2x-1+3x-4 \\
&=8x^3+3x-5
\end{aligned}
$$

4 구하는 다항식을 $P(x)$라고 하면 $P(x)$를 $2x+1$로 나누었을 때의 몫이 $-2x^2+x-1$이고 나머지가 6이므로

$$
\begin{aligned}
P(x)&=(2x+1)(-2x^2+x-1)+6 \\
&=-4x^3+2x^2-2x-2x^2+x-1+6 \\
&=-4x^3-x+5
\end{aligned}
$$

5 $2x-1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$이므로 다항식 $2x^4-x^3-8x+3$을 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면

$$
\begin{array}{c|ccccc}
\frac{1}{2} & 2 & -1 & 0 & -8 & 3 \\
 & & 1 & 0 & 0 & -4 \\
\hline
 & 2 & 0 & 0 & -8 & \boxed{-1}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ 2x^4-x^3-8x+3&=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^3-8)-1 \\
&=(2x-1)\times\frac{1}{2}\times(2x^3-8)-1 \\
&=(2x-1)(x^3-4)-1
\end{aligned}
$$

따라서 다항식 $2x^4-x^3-8x+3$을 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 x^3-4이고 나머지는 -1이다.

6 $3x+2=3\left(x+\frac{2}{3}\right)$이므로 다항식 $3x^3-4x^2-x+3$을 $x+\frac{2}{3}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면

$$
\begin{array}{c|cccc}
-\frac{2}{3} & 3 & -4 & -1 & 3 \\
 & & -2 & 4 & -2 \\
\hline
 & 3 & -6 & 3 & \boxed{1}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ 3x^3-4x^2-x+3&=\left(x+\frac{2}{3}\right)(3x^2-6x+3)+1 \\
&=(3x+2)\times\frac{1}{3}\times(3x^2-6x+3)+1 \\
&=(3x+2)(x^2-2x+1)+1
\end{aligned}
$$

따라서 $3x^3-4x^2-x+3$을 $3x+2$로 나누었을 때의 몫은 x^2-2x+1이고 나머지는 1이다.

계산력 다지기 p. 12~13

1
(1) $4x^2-4x-5$
(2) $-3x^2-3x-8$
(3) $3x^2+10x-29$
(4) $2x^3+2x^2-5x+1$
(5) $-3x^4+x^3+2x^2-6x+8$
(6) $-x^4+5x^3-x^2+3x+1$

2
(1) $-2x^2+4$
(2) $5x^2-6x-13$
(3) x^3-2x^2-4x+4
(4) $x^3-7x^2+2x+17$
(5) $(2A+3C)-(B+3A)$

$$
\begin{aligned}
&=2A+3C-B-3A \\
&=-A-B+3C \\
&=-(x^2-2x-3)-(-3x^2+2x+7)+3(x^3-4x) \\
&=-x^2+2x+3+3x^2-2x-7+3x^3-12x \\
&=3x^3+2x^2-12x-4
\end{aligned}
$$

(6) $(4C+B)+2(2A-C)$

$$
\begin{aligned}
&=4C+B+4A-2C \\
&=4A+B+2C \\
&=4(x^2-2x-3)+(-3x^2+2x+7)+2(x^3-4x) \\
&=4x^2-8x-12-3x^2+2x+7+2x^3-8x \\
&=2x^3+x^2-14x-5
\end{aligned}
$$

3
(1) x^3-5x^2+5x+2
(2) $3a^3-4a^2b+b^3$
(3) $-6x^3+11x^2y-y^3$
(4) $a^2-b^2+a+7b-12$
(5) $x^2-4y^2-4x+4y+3$
(6) $2a^2-2b^2-3ab+a-7b-3$

4
(1) $x^2+4y^2+4z^2-4xy-8yz+4zx$
(2) $4a^2+9b^2+c^2-12ab+6bc-4ca$
(3) $x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$
(4) $8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3$
(5) x^3-8
(6) $27a^3+8b^3$

5
(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=6^2-2\times7=22$
(2) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=6^2-4\times7=8$
$a>b$이므로 $a-b=2\sqrt{2}$
(3) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=6^3-3\times7\times6=90$
(4) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=(2\sqrt{2})^3+3\times7\times2\sqrt{2}=58\sqrt{2}$

6
(1) $x^2-3x-1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면
$x-3-\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore\ x-\frac{1}{x}=3$

(2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4=3^2+4=13$

(3) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=3^2+2=11$

(4) $x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)=3^3+3\times3=36$

7 (1) 몫: x^2-x-2, 나머지: -3
(2) 몫: $2x^2-4x+4$, 나머지: -5
(3) 몫: $2x^2-2x+4$, 나머지: 1
(4) 몫: $-2x^2+1$, 나머지: -3
(5) 몫: $x-3$, 나머지: $-x+2$
(6) 몫: $-2x+1$, 나머지: $2x+3$
(7) 몫: x^2+5x+9, 나머지: $8x-19$
(8) 몫: $-3x^2-x-5$, 나머지: $11x+17$

8 (1) 몫: x^2+2, 나머지: 3
(2) 몫: x^2-3, 나머지: 10
(3) 몫: $2x^2-5x+5$, 나머지: -4
(4) 몫: $-x^2+2x+3$, 나머지: 9
(5) 몫: $3x^2-2x-2$, 나머지: 8
(6) 몫: $2x^2-2x$, 나머지: -3

01~03강 족집게 기출문제 p. 14~17

1 ⑤	2 ③	3 ④	4 ④	5 -3
6 ③	7 ④	8 ⑤	9 ②	10 ③
11 ①	12 ①	13 ⑤	14 ②	15 ④
16 ③	17 ②	18 ①	19 ③	20 ②
21 ③	22 4	23 ②	24 ①	25 ⑤
26 (1) 6 (2) 232		27 8	28 $2x^2+5x-3$	

1 $3A-2(A-B)=3A-2A+2B=A+2B$
$=(x^2+2xy)+2(2x^2-xy+y^2)$
$=x^2+2xy+4x^2-2xy+2y^2$
$=5x^2+2y^2$

2 $A+2X=B$에서 $2X=B-A$
$\therefore X=\frac{1}{2}(B-A)$
$=\frac{1}{2}\{(3x^2-5y^2)-(x^2-2xy+y^2)\}$
$=\frac{1}{2}(3x^2-5y^2-x^2+2xy-y^2)$
$=\frac{1}{2}(2x^2+2xy-6y^2)=x^2+xy-3y^2$

3 $A+B=-x^2-x+4$ …… ㉠
$2A-B=4x^2+4x-7$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면 $3A=3x^2+3x-3$
$\therefore A=x^2+x-1$ …… ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면
$x^2+x-1+B=-x^2-x+4$
$\therefore B=-x^2-x+4-x^2-x+1$
$=-2x^2-2x+5$

4 주어진 다항식의 전개식에서 x^2항은
$2x^2\times3+(-3x)\times(-x)=6x^2+3x^2=9x^2$
따라서 x^2의 계수는 9

5 주어진 다항식의 전개식에서 x항은
$3x\times(-2a)+(-1)\times(-ax)=-6ax+ax=-5ax$
따라서 $-5a=15$이므로 $a=-3$

6 $P(x)=(3x^2-x+2)(4x^3-5x^2+x+1)$
$=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$
(a, b, c, d, e, f는 상수)
라고 하면 $P(x)$의 모든 계수와 상수항의 합은
$a+b+c+d+e+f=P(1)$
$=(3-1+2)(4-5+1+1)$
$=4$

7 ③ $(a+b-c)(a-b+c)=\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}$
$=a^2-(b-c)^2$
$=a^2-b^2-c^2+2bc$
④ $(x-y-z)^2=x^2+y^2+z^2-2xy+2yz-2zx$
⑤ $(x-1)(x+3)(x-5)$
$=x^3+(-1+3-5)x^2$
$+\{(-1)\times3+3\times(-5)+(-5)\times(-1)\}x$
$+(-1)\times3\times(-5)$
$=x^3-3x^2-13x+15$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

8 ㄱ. $(x-3y+2z)^2=x^2+9y^2+4z^2-6xy-12yz+4zx$
ㄴ. $(3x-1)(9x^2+3x+1)=(3x)^3-1^3=27x^3-1$
ㄷ. $(a+b-1)(a^2+b^2-ab+a+b+1)$
$=\{a+b+(-1)\}\{a^2+b^2+(-1)^2-a\times b$
$-b\times(-1)-(-1)\times a\}$
$=a^3+b^3+(-1)^3-3\times a\times b\times(-1)$
$=a^3+b^3+3ab-1$
ㄹ. $(4x^2+2xy+y^2)(4x^2-2xy+y^2)$
$=\{(2x)^2+2x\times y+y^2\}\{(2x)^2-2x\times y+y^2\}$
$=(2x)^4+(2x)^2\times y^2+y^4=16x^4+4x^2y^2+y^4$
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

9 $(x-1)(x-2)(x+4)(x+5)$
$=\{(x-1)(x+4)\}\{(x-2)(x+5)\}$
$=(x^2+3x-4)(x^2+3x-10)$
$x^2+3x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X-4)(X-10)=X^2-14X+40$
$=(x^2+3x)^2-14(x^2+3x)+40$
$=x^4+6x^3+9x^2-14x^2-42x+40$
$=x^4+6x^3-5x^2-42x+40$

10 $(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^3+b^3)(a^6+b^6)$
$=(a^3-b^3)(a^3+b^3)(a^6+b^6)$
$=(a^6-b^6)(a^6+b^6)=a^{12}-b^{12}$

11 $(1+2)(1+2^2)(1+2^4)(1+2^8)$
$=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$
$=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$
$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$
$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)=(2^8-1)(2^8+1)=2^{16}-1$

12 $x-y=-2$, $xy=1$이므로
$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$=(-2)^3+3\times1\times(-2)=-14$

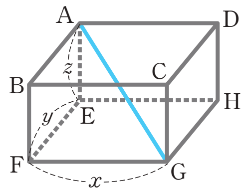
13 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서
$12=4^2-2xy \qquad \therefore xy=2$
$\therefore \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{x^3+y^3}{xy}=\dfrac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}$
$=\dfrac{4^3-3\times2\times4}{2}=\dfrac{64-24}{2}=20$

14 $a>0$, $b>0$이므로 한 면의 넓이가 각각 a^2, b^2인 두 정육면체의 한 모서리의 길이는 각각 a, b 이다.
두 정육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 36이므로
$12a+12b=36 \qquad \therefore a+b=3$
또 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서
$5=3^2-2ab \qquad \therefore ab=2$
따라서 두 정육면체의 부피의 합은
$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=3^3-3\times2\times3=9$

15 $x>1$이므로 $x^2-4x+1=0$의 양변을 x로 나누면
$x-4+\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore x+\dfrac{1}{x}=4$
$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4=4^2-4=12$
그런데 $x>1$이므로
$x-\dfrac{1}{x}>0 \qquad \therefore x-\dfrac{1}{x}=2\sqrt{3}$
$\therefore x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$
$=(2\sqrt{3})^3+3\times2\sqrt{3}=30\sqrt{3}$

16 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서
$ab+bc+ca=\dfrac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}$
$=\dfrac{1}{2}(0-2)=-1$

17 오른쪽 그림과 같이 직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 x, y, z라고 하면 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 28이므로



$4x+4y+4z=28$
$\therefore x+y+z=7$
대각선 AG의 길이가 5이므로
$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=5 \qquad \therefore x^2+y^2+z^2=25$
따라서 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$에서
구하는 직육면체의 겉넓이는
$2(xy+yz+zx)=(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)$
$=7^2-25=24$

18 $a-b=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
$b-c=3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡
㉠+㉡을 하면
$a-c=5 \qquad \therefore c-a=-5$
$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
$=\dfrac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$
$=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$
$=\dfrac{1}{2}\{2^2+3^2+(-5)^2\}=19$

19
$$
\begin{array}{r}
2x^2-3x+3 \\
x+2\,\overline{)\,2x^3+x^2-3x-5} \\
\underline{2x^3+4x^2} \\
-3x^2-3x \\
\underline{-3x^2-6x} \\
3x-5 \\
\underline{3x+6} \\
-11
\end{array}
$$
따라서 몫은 $2x^2-3x+3$이고 나머지는 -11이다.

20
$$
\begin{array}{r}
x-1 \\
x^2+x+1\,\overline{)\,x^3-2x+1} \\
\underline{x^3+x^2+x} \\
-x^2-3x+1 \\
\underline{-x^2-x-1} \\
-2x+2
\end{array}
$$
따라서 $Q(x)=x-1$, $R(x)=-2x+2$이므로
$Q(2)+R(1)=1+0=1$

21 $3x^3-4x^2+4x+2=P(x)(3x^2-x+3)+5$이므로

$3x^3-4x^2+4x-3=P(x)(3x^2-x+3)$

$\therefore P(x)=(3x^3-4x^2+4x-3)\div(3x^2-x+3)$

$$\begin{array}{r}
x-1 \\
3x^2-x+3\,\overline{)\,3x^3-4x^2+4x-3} \\
3x^3-x^2+3x \\
\hline
-3x^2+x-3 \\
-3x^2+x-3 \\
\hline
0
\end{array}$$

$\therefore P(x)=x-1$

22 다항식 x^3+2x^2-5x-8을 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면

$$\begin{array}{c|cccc}
2 & 1 & 2 & -5 & -8 \\
 & & 2 & 8 & 6 \\
\hline
 & 1 & 4 & 3 & \boxed{-2}
\end{array}$$

따라서 $a=2$, $b=4$, $c=-2$이므로

$a+b+c=4$

23 $(3x^2+2xy+y^2)(x^2-2xy+2y^2)$의 전개식에서 x^2y^2항은

$3x^2\times2y^2+2xy\times(-2xy)+y^2\times x^2=6x^2y^2-4x^2y^2+x^2y^2$

$=3x^2y^2$

$\therefore a=3$

$(2x^4-5x^3+2x^2+x-3)^2$, 즉

$(2x^4-5x^3+2x^2+x-3)(2x^4-5x^3+2x^2+x-3)$의 전개식에서 x^4항은

$2x^4\times(-3)+(-5x^3)\times x+2x^2\times2x^2+x\times(-5x^3)$
$+(-3)\times2x^4$

$=-6x^4-5x^4+4x^4-5x^4-6x^4$

$=-18x^4$

$\therefore b=-18 \qquad \therefore \dfrac{b}{a}=-6$

24 $98(10004+200)-102(10004-200)$

$=(100-2)(10000+200+4)-(100+2)(10000-200+4)$

$=(100^3-2^3)-(100^3+2^3)$

$=-8-8=-16$

25 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=a^3+b^3+c^3-3abc=24-3\times8=0$

이때 $a+b+c\neq0$이므로

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$\therefore a=b=c$

$abc=8$이므로 $\quad a^3=8$

$\therefore (a+b)(b+c)(c+a)=2a\times2a\times2a=8a^3$

$=8\times8=64$

26 (1) $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$이므로

$x+\dfrac{1}{x}=(3-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})=6$ …… (가)

(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$

$=6^2-2=34$ …… (나)

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=6^3-3\times6=198$ …… (다)

$\therefore x^3+x^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}=34+198=232$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) $x+\dfrac{1}{x}$의 값을 구한다.	2점
(나) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$의 값을 구한다.	1점
(다) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$의 값을 구한다.	1점
(라) $x^3+x^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$의 값을 구한다.	2점

27 0이 아닌 세 수를 각각 a, b, c라고 하면

$a+b+c=2$, $abc=-2$, $a^2+b^2+c^2=6$ …… (가)

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$2^2=6+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=-1$ …… (나)

따라서 구하는 각각의 세제곱의 합은 $a^3+b^3+c^3$이므로

$a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=(a+b+c)\{a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\}+3abc$

$=2\{6-(-1)\}+3\times(-2)=8$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 세 수를 a, b, c로 놓고 각 조건을 식으로 나타낸다.	2점
(나) $ab+bc+ca$의 값을 구한다.	2점
(다) $a^3+b^3+c^3$의 값을 구한다.	3점

28

$$\begin{array}{r}
2x^2-x-2 \\
2x^2+x-1\,\overline{)\,4x^4-7x^2+5x+1} \\
4x^4+2x^3-2x^2 \\
\hline
-2x^3-5x^2+5x \\
-2x^3-x^2+x \\
\hline
-4x^2+4x+1 \\
-4x^2-2x+2 \\
\hline
6x-1
\end{array}$$

따라서 몫은 $2x^2-x-2$이고 나머지는 $6x-1$ …… (가)

이므로 몫과 나머지의 합은

$(2x^2-x-2)+(6x-1)=2x^2+5x-3$ …… (나)

채점 기준	배점
(가) 몫과 나머지를 구한다.	3점
(나) 몫과 나머지의 합을 구한다.	2점

04강 나머지정리

확인 문제 p. 18

1 ㄱ, ㄹ, ㅂ

2 $a-1=0,\ b+2=0,\ c=0$이므로
$a=1,\ b=-2,\ c=0$

3 $P(2)=2\times2^4-3\times2^3+2-1=9$

교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 19

1 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=1$, $x=0,\ x=-1$을 각각 대입하면
$c=0,\ a-b+c=-3,\ 4a-2b+c=-4$
$a-b=-3,\ 2a-b=-2$이므로 두 식을 연립하여 풀면
$a=1,\ b=4$
$\therefore\ a=1,\ b=4,\ c=0$

다른 풀이
주어진 등식을 정리하면
$ax^2+(-2a+b)x+a-b+c=x^2+2x-3$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=1,\ -2a+b=2,\ a-b+c=-3$
$\therefore\ a=1,\ b=4,\ c=0$

2 주어진 등식을 정리하면
$2x^2-ax+5=cx^2+(1-bc)x-b+2$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$2=c,\ -a=1-bc,\ 5=-b+2$
$\therefore\ a=-7,\ b=-3,\ c=2$

3 $P\left(\frac{1}{3}\right)=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3-\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\times\frac{1}{3}+2=\frac{4}{3}$

4 $P\left(-\frac{1}{2}\right)=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+3\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1$
$=-\frac{7}{4}$

5 다항식 $P(x)$를 $x+1,\ x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 각각 $3,\ -1$이므로 나머지정리에 의하여
$P(-1)=3,\ P(3)=-1$
다항식 $P(x)$를 $(x+1)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b\,(a,\ b$는 상수)라고 하면
$P(x)=(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$
이 식의 양변에 $x=-1,\ x=3$을 각각 대입하면
$P(-1)=-a+b,\ P(3)=3a+b$
$\therefore\ -a+b=3,\ 3a+b=-1$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=2$
따라서 구하는 나머지는 $-x+2$이다.

6 다항식 $P(x)$를 $x+2,\ x-2$로 나누었을 때의 나머지가 각각 $-3,\ 5$이므로 나머지정리에 의하여
$P(-2)=-3,\ P(2)=5$
다항식 $P(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b\,(a,\ b$는 상수)라고 하면
$P(x)=(x^2-4)Q(x)+ax+b$
$\quad=(x+2)(x-2)Q(x)+ax+b$
이 식의 양변에 $x=-2,\ x=2$를 각각 대입하면
$P(-2)=-2a+b,\ P(2)=2a+b$
$\therefore\ -2a+b=-3,\ 2a+b=5$
두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=1$
따라서 구하는 나머지는 $2x+1$이다.

7 $P(x)=x^3-4x^2+3x+k$가 $x-2$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여
$P(2)=0$
즉, $8-16+6+k=0$
$k-2=0\qquad\therefore\ k=2$

8 $P(x)=x^3-5x^2-ax+7$이 $x+1$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여
$P(-1)=0$
즉, $-1-5+a+7=0$
$a+1=0\qquad\therefore\ a=-1$

05강 인수분해

확인 문제 p. 20

1 (1) $a^3+3a^2+3a+1=a^3+3\times a^2\times1+3\times a\times1^2+1^3$
$=(a+1)^3$
(2) $8x^3-1=(2x)^3-1^3$
$=(2x-1)\{(2x)^2+2x\times1+1^2\}$
$=(2x-1)(4x^2+2x+1)$

2 $a+b=X$로 놓으면
$(a+b)^2-3(a+b)+2=X^2-3X+2$
$=(X-2)(X-1)$
$=(a+b-2)(a+b-1)$

교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 21

1 (1) $a^3+64b^3=a^3+(4b)^3$
$=(a+4b)\{a^2-a\times4b+(4b)^2\}$
$=(a+4b)(a^2-4ab+16b^2)$

(2) $27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$
$=(3x)^3-3\times(3x)^2\times2y+3\times3x\times(2y)^2-(2y)^3$
$=(3x-2y)^3$

(3) $a^2+4b^2+4c^2-4ab-8bc+4ca$
$=a^2+(-2b)^2+(2c)^2+2\times a\times(-2b)$
$+2\times(-2b)\times2c+2\times2c\times a$
$=(a-2b+2c)^2$

2 (1) $27x^3-8y^3=(3x)^3-(2y)^3$
$=(3x-2y)\{(3x)^2+3x\times2y+(2y)^2\}$
$=(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$

(2) $a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$
$=a^3+3\times a^2\times2b+3\times a\times(2b)^2+(2b)^3$
$=(a+2b)^3$

(3) $9x^2+y^2+z^2-6xy+2yz-6zx$
$=(3x)^2+(-y)^2+(-z)^2+2\times3x\times(-y)$
$+2\times(-y)\times(-z)+2\times(-z)\times3x$
$=(3x-y-z)^2$

3 (1) $x^2-2x=X$로 놓으면
$(x^2-2x)^2-4(x^2-2x)-5$
$=X^2-4X-5=(X-5)(X+1)$
$=(x^2-2x-5)(x^2-2x+1)$
$=(x^2-2x-5)(x-1)^2$

(2) $(x^2-x)^2-3x^2+3x+2=(x^2-x)^2-3(x^2-x)+2$
$x^2-x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=X^2-3X+2=(X-2)(X-1)$
$=(x^2-x-2)(x^2-x-1)$
$=(x-2)(x+1)(x^2-x-1)$

4 (1) $x^2-3x=X$로 놓으면
$(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8$
$=X^2-2X-8=(X-4)(X+2)$
$=(x^2-3x-4)(x^2-3x+2)$
$=(x-4)(x+1)(x-2)(x-1)$

(2) $x-2y=X$로 놓으면
$(x-2y)(x-2y+3)-10$
$=X(X+3)-10=X^2+3X-10$
$=(X+5)(X-2)$
$=(x-2y+5)(x-2y-2)$

5 (1) $x^2=X$로 놓으면
$x^4+3x^2-28=X^2+3X-28=(X-4)(X+7)$
$=(x^2-4)(x^2+7)$
$=(x-2)(x+2)(x^2+7)$

(2) $x^4-8x^2+4=(x^4-4x^2+4)-4x^2$
$=(x^2-2)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x-2)(x^2-2x-2)$

6 (1) $x^2=X$로 놓으면
$x^4+4x^2-5=X^2+4X-5$
$=(X-1)(X+5)$
$=(x^2-1)(x^2+5)$
$=(x-1)(x+1)(x^2+5)$

(2) $9x^4+2x^2y^2+y^4=(9x^4+6x^2y^2+y^4)-4x^2y^2$
$=(3x^2+y^2)^2-(2xy)^2$
$=(3x^2+2xy+y^2)(3x^2-2xy+y^2)$

7 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$2x^2+3xy+y^2-x-1=2x^2+(3y-1)x+y^2-1$
$=2x^2+(3y-1)x+(y-1)(y+1)$

$$\begin{array}{llr} x & y-1 \longrightarrow & (2y-2)x \\ 2x & y+1 \longrightarrow & (y+1)x \\ \hline & & (3y-1)x \end{array}$$

$=\{x+(y-1)\}\{2x+(y+1)\}$
$=(x+y-1)(2x+y+1)$

8 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2-xy-2y^2-2x+7y-3$
$=x^2+(-y-2)x-2y^2+7y-3$
$=x^2+(-y-2)x-(2y-1)(y-3)$

$$\begin{array}{llr} x & -(2y-1) \longrightarrow & (-2y+1)x \\ x & y-3 \longrightarrow & (y-3)x \\ \hline & & (-y-2)x \end{array}$$

$=\{x-(2y-1)\}\{x+(y-3)\}$
$=(x-2y+1)(x+y-3)$

9 $P(x)=x^3+2x^2-x-2$라고 하면
$P(1)=1+2-1-2=0$
이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x^2+3x+2)$
$=(x-1)(x+1)(x+2)$

10 $P(x)=x^4-4x^3-x^2+16x-12$라고 하면
$P(1)=1-4-1+16-12=0$
이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & -4 & -1 & 16 & -12 \\ & & 1 & -3 & -4 & 12 \\ \hline & 1 & -3 & -4 & 12 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^4-4x^3-x^2+16x-12=(x-1)(x^3-3x^2-4x+12)$

이때 $Q(x)=x^3-3x^2-4x+12$라고 하면

$Q(2)=8-12-8+12=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $Q(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -3 & -4 & 12 \\ & & 2 & -2 & -12 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-3x^2-4x+12=(x-2)(x^2-x-6)$

$=(x-2)(x-3)(x+2)$

따라서 주어진 식을 인수분해하면

$x^4-4x^3-x^2+16x-12=(x-1)(x-2)(x-3)(x+2)$

다른 풀이

$P(x)=x^4-4x^3-x^2+16x-12$라고 하면 $P(1)=0$, $P(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & -4 & -1 & 16 & -12 \\ & & 1 & -3 & -4 & 12 \\ \hline 2 & 1 & -3 & -4 & 12 & \boxed{0} \\ & & 2 & -2 & -12 & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$x^4-4x^3-x^2+16x-12=(x-1)(x-2)(x^2-x-6)$

$=(x-1)(x-2)(x-3)(x+2)$

계산력 다지기

p. 22~23

1 (1) $a=0$, $b=\frac{1}{2}$, $c=-1$

(2) $a=1$, $b=-1$, $c=0$

(3) $a=-1$, $b=1$, $c=3$

(4) $a=1$, $b=4$, $c=-1$

(5) $a=2$, $b=-1$, $c=-2$

(6) $a=2$, $b=5$, $c=-5$

(7) 양변에 $x=1$, $x=0$, $x=-1$을 각각 대입하면

$2c=6$, $-a=5$, $2b=10$

$\therefore a=-5$, $b=5$, $c=3$

(8) 양변에 $x=0$, $x=1$, $x=-2$를 각각 대입하면

$-4b=-8$, $3c=-6$, $6a=0$

$\therefore a=0$, $b=2$, $c=-2$

2 (1) $f(1)=1^3-1^2+1-2=-1$

(2) $f(-1)=3\times(-1)^3-2\times(-1)^2-4\times(-1)-5=-6$

(3) $f(-2)=-2\times(-2)^3+(-2)^2+7\times(-2)-5=1$

(4) $f(2)=2^4-2\times2^3+2^2-5\times2+3=-3$

(5) $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3-7\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+15=14$

(6) $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3-10\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1$

$=-2$

3 (1) 인수정리에 의하여 $f(-1)=0$

즉, $-1-3-a+2=0$ $\therefore a=-2$

(2) 인수정리에 의하여 $f(2)=0$

즉, $-16-4a-4=0$ $\therefore a=-5$

(3) 인수정리에 의하여 $f(-2)=0$

즉, $16+16-16-a=0$ $\therefore a=16$

(4) 인수정리에 의하여 $f(-3)=0$

즉, $-81-54-9a+21+6=0$ $\therefore a=-12$

(5) 인수정리에 의하여 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

즉, $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}a+3=0$ $\therefore a=7$

(6) 인수정리에 의하여 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$

즉, $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}a+\frac{3}{2}-1=0$ $\therefore a=3$

4 (1) $(2a+b+3c)^2$

(2) $(x-2y-3z)^2$

(3) $(2a+b)^3$

(4) $(4x-y)^3$

(5) $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$

(6) $(3x-4y)(9x^2+12xy+16y^2)$

(7) $(a+b+2c)(a^2+b^2+4c^2-ab-2bc-2ca)$

(8) $(3x-y+z)(9x^2+y^2+z^2+3xy+yz-3zx)$

5 (1) $x^2-1=X$로 놓으면

$(x^2-1)^2-2(x^2-1)-3$

$=X^2-2X-3=(X+1)(X-3)$

$=x^2(x^2-4)=x^2(x+2)(x-2)$

(2) $a^2-2a=X$로 놓으면

$(a^2-2a-2)(a^2-2a-1)-2$

$=(X-2)(X-1)-2=X^2-3X=X(X-3)$

$=(a^2-2a)(a^2-2a-3)=a(a-2)(a+1)(a-3)$

(3) $x^2=X$로 놓으면

$x^4-13x^2+36=X^2-13X+36=(X-4)(X-9)$

$=(x^2-4)(x^2-9)$

$=(x-3)(x-2)(x+2)(x+3)$

(4) $a^4-7a^2b^2+b^4=(a^4+2a^2b^2+b^2)-9a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2-(3ab)^2$

$=(a^2+3ab+b^2)(a^2-3ab+b^2)$

(5) 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-xy-2y^2-x-7y-6$

$=x^2-(y+1)x-2y^2-7y-6$

$=x^2-(y+1)x-(2y+3)(y+2)$

$$\begin{array}{lll} x & -(2y+3) \longrightarrow & -(2y+3)x \\ x & y+2 \longrightarrow & (y+2)x \\ \hline & & -(y+1)x \end{array}$$

$=\{x-(2y+3)\}\{x+(y+2)\}=(x-2y-3)(x+y+2)$

(6) 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2a^2-3ab+b^2+a-1$

$=2a^2-(3b-1)a+b^2-1$

$=2a^2-(3b-1)a+(b+1)(b-1)$

$$\begin{array}{lll} 2a & -(b+1) \longrightarrow & -(b+1)a \\ a & -(b-1) \longrightarrow & -(2b-2)a \\ \hline & & -(3b-1)a \end{array}$$

$=\{2a-(b+1)\}\{a-(b-1)\}$

$=(2a-b-1)(a-b+1)$

(7) $P(x)=x^3-4x^2-x+4$라고 하면

$P(1)=1-4-1+4=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -4 & -1 & 4 \\ & & 1 & -3 & -4 \\ \hline & 1 & -3 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-4x^2-x+4=(x-1)(x^2-3x-4)$

$=(x-1)(x+1)(x-4)$

(8) $P(x)=x^4-x^3-3x^2+x+2$라고 하면

$P(1)=1-1-3+1+2=0$,

$P(-1)=1+1-3-1+2=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -1 & -3 & 1 & 2 \\ & & 1 & 0 & -3 & -2 \\ \hline -1 & 1 & 0 & -3 & -2 & \boxed{0} \\ & & -1 & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$x^4-x^3-3x^2+x+2=(x-1)(x+1)(x^2-x-2)$

$=(x-1)(x-2)(x+1)^2$

04~05강 족집게 기출문제 p. 24~27

1 ③	2 13	3 ⑤	4 ③	5 ④
6 ②	7 -11	8 0	9 ①	10 ③
11 ②	12 ①	13 ③	14 ④	15 ⑤
16 ①	17 ④	18 ②	19 2	20 ⑤
21 ⑤	22 ⑤	23 ⑤	24 ③	25 ⑤
26 ㄱ, ㄴ	27 ④	28 $3(x-y)(y-z)(z-x)$		
29 -2	30 (1) $P(1)=3$, $P(2)=3$ (2) 3			
31 $a=c$인 이등변삼각형				

1 주어진 등식을 정리하면

$2x^2+(1-2a)x-a+b=2x^2-3x-4$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$1-2a=-3$, $-a+b=-4$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-2$

$\therefore a+b=0$

2 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=-1$, $x=1$, $x=2$를 각각 대입하면

$6=6a$, $12=-2b$, $18=3c$

$\therefore a=1$, $b=-6$, $c=6$

$\therefore a-b+c=13$

3 $x+y=1$에서 $y=1-x$이므로 주어진 등식에 대입하면

$2ax+a(1-x)-3=(1-b)x+b(1-x)$

$\therefore (a+2b-1)x+a-b-3=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+2b-1=0$, $a-b-3=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{7}{3}$, $b=-\frac{2}{3}$

$\therefore a^2-b^2=\frac{49}{9}-\frac{4}{9}=5$

4 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=-2$를 대입하면

$0=16+4a-b$ $\quad\therefore 4a-b=-16$ ...... ㉠

양변에 $x^2=2$를 대입하면

$0=4+2a-b$ $\quad\therefore 2a-b=-4$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=-8$

$\therefore a-b=2$

5 다항식 x^3-x^2+ax+b를 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫을 $x+p$ (p는 상수)라고 하면 나머지가 $2x+3$이므로

$x^3-x^2+ax+b=(x^2-x+1)(x+p)+2x+3$

이 식의 우변을 x에 대하여 정리하면

$x^3-x^2+ax+b=x^3+(p-1)x^2+(3-p)x+p+3$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로

$-1=p-1$, $a=3-p$, $b=p+3$

$\therefore p=0$, $a=3$, $b=3$

$\therefore ab=9$

6 다항식 $P(x)=x^4+4x^3-2x^2+3x+7$을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $P(-1)$이므로

$P(-1)=1-4-2-3+7=-1$

7 $P(x)=x^3+mx^2+nx+1$이라고 하면 나머지정리에 의하여 $P(-1)=5$, $P(2)=3$

$P(-1)=5$에서 $-1+m-n+1=5$

$\therefore m-n=5$ ...... ㉠

$P(2)=3$에서 $8+4m+2n+1=3$

$\therefore 2m+n=-3$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=\frac{2}{3}$, $n=-\frac{13}{3}$

$\therefore 3(m+n)=3\left(\frac{2}{3}-\frac{13}{3}\right)=-11$

8 나머지정리에 의하여

$P(1)=3,\ P(-2)=6$

다항식 $P(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$P(x)=(x^2+x-2)Q(x)+ax+b$

$\quad=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$

이 식의 양변에 $x=1$, $x=-2$를 각각 대입하면

$P(1)=a+b,\ P(-2)=-2a+b$

$\therefore\ a+b=3,\ -2a+b=6$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=4$

따라서 $R(x)=-x+4$이므로

$R(4)=-4+4=0$

9 $P(x)=x^{10}$이라고 하면 $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $P(2)$이므로

$P(2)=2^{10}$

x^{10}을 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$이고 나머지가 2^{10}이므로

$x^{10}=(x-2)Q(x)+2^{10}$ …… ㉠

$Q(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $Q(4)$이므로 ㉠의 양변에 $x=4$를 대입하면

$2^{20}=2Q(4)+2^{10},\ 2Q(4)=2^{20}-2^{10}$

$\therefore\ Q(4)=2^{19}-2^{9}$

10 나머지정리에 의하여

$f(-1)=2,\ g(-1)=3,\ f(3)=1,\ g(3)=-2$ …… ㉠

다항식 $f(x)g(x)$를 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$f(x)g(x)=(x^2-2x-3)Q(x)+ax+b$

$\quad=(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$

이 식의 양변에 $x=-1$, $x=3$을 각각 대입하면

$f(-1)g(-1)=-a+b,\ f(3)g(3)=3a+b$

그런데 ㉠에 의하여

$f(-1)g(-1)=2\times3=6$

$f(3)g(3)=1\times(-2)=-2$

$\therefore\ -a+b=6,\ 3a+b=-2$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=4$

따라서 구하는 나머지는 $-2x+4$이다.

11 인수정리에 의하여

$P(1)=0,\ P(-2)=0$

$P(1)=0$에서 $1-2+a+b=0$

$\therefore\ a+b=1$ …… ㉠

$P(-2)=0$에서 $-8-8-2a+b=0$

$\therefore\ -2a+b=16$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5,\ b=6$

$\therefore\ ab=-30$

12 다항식 $P(x)-1$이 x^2-4x+3, 즉 $(x-1)(x-3)$으로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$P(1)-1=0,\ P(3)-1=0$

$\therefore\ P(1)=1,\ P(3)=1$

$P(x+1)$을 x^2-2x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$P(x+1)=(x^2-2x)Q(x)+ax+b$

$\quad=x(x-2)Q(x)+ax+b$

이 식의 양변에 $x=0$, $x=2$를 각각 대입하면

$P(1)=b,\ P(3)=2a+b$이므로

$b=1,\ 2a+b=1$

$\therefore\ a=0,\ b=1$

따라서 구하는 나머지는 1이다.

13 주어진 등식을 변형하면

$x^3-2x^2-4x+6=(x-2)\{a(x-2)^2+b(x-2)+c\}+d$

이므로 x^3-2x^2-4x+6을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지 d를 조립제법을 이용하여 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -2 & -4 & 6 \\ & & 2 & 0 & -8 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{-2} \end{array}$$

$x^3-2x^2-4x+6=(x-2)(x^2-4)-2$ …… ㉠

$\therefore\ d=-2$

㉠에서

$x^2-4=a(x-2)^2+b(x-2)+c$

$\quad=(x-2)\{a(x-2)+b\}+c$

이므로 x^2-4를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지 c를 조립제법을 이용하여 구하면

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 1 & 0 & -4 \\ & & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^2-4=(x-2)(x+2)$ …… ㉡

$\therefore\ c=0$

㉡에서 $x+2=a(x-2)+b$이므로 $x+2$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫 a와 나머지 b를 조립제법을 이용하여 구하면

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 1 & 2 \\ & & 2 \\ \hline & 1 & \boxed{4} \end{array}$$

$x+2=(x-2)\times1+4$

$\therefore\ a=1,\ b=4$

$\therefore\ a+b-c-d=7$

참고

$$\begin{array}{r|rrrrl} 2 & 1 & -2 & -4 & 6 & \\ & & 2 & 0 & -8 & \\ \hline 2 & 1 & 0 & -4 & \boxed{-2} & \Rightarrow d \\ & & 2 & 4 & & \\ \hline 2 & 1 & 2 & \boxed{0} & & \Rightarrow c \\ & & 2 & & & \\ \hline a \Leftarrow & 1 & \boxed{4} & \Rightarrow b & & \end{array}$$

14 ① $8x^3+12x^2+6x+1$
$=(2x)^3+3\times(2x)^2\times1+3\times2x\times1^2+1^3$
$=(2x+1)^3$
② $10x^2+31x+15=(5x+3)(2x+5)$
③ $x^3+8y^3=x^3+(2y)^3$
$=(x+2y)\{x^2-x\times2y+(2y)^2\}$
$=(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$
④ $x^2+y^2+z^2-2xy+2yz-2zx$
$=x^2+(-y)^2+(-z)^2+2\times x\times(-y)+2\times(-y)\times(-z)$
$+2\times(-z)\times x$
$=(x-y-z)^2$
⑤ $mx^2-4my^2=m(x^2-4y^2)$
$=m(x-2y)(x+2y)$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

15 $x^2+5x=X$로 놓으면
$(x^2+5x+4)(x^2+5x+2)-24$
$=(X+4)(X+2)-24$
$=X^2+6X-16$
$=(X+8)(X-2)$
$=(x^2+5x+8)(x^2+5x-2)$
$\therefore\ a=5,\ b=8,\ c=-2$ 또는 $a=5,\ b=-2,\ c=8$
$\therefore\ a+b+c=11$

16 $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)+24$
$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$
$x^2+x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X-2)(X-12)+24$
$=X^2-14X+48$
$=(X-6)(X-8)$
$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$
$=(x-2)(x+3)(x^2+x-8)$

17 $x^4-13x^2+4=(x^4-4x^2+4)-9x^2$
$=(x^2-2)^2-(3x)^2$
$=(x^2+3x-2)(x^2-3x-2)$
따라서 인수인 것은 ④이다.

18 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2-2xy+y^2+3x-3y+2$
$=x^2+(-2y+3)x+y^2-3y+2$
$=x^2+(-2y+3)x+(y-1)(y-2)$

$$\begin{array}{lll} x & -(y-1) \longrightarrow & (-y+1)x \\ x & -(y-2) \longrightarrow & (-y+2)x \\ \hline & & (-2y+3)x \end{array}$$

$=\{x-(y-1)\}\{x-(y-2)\}$
$=(x-y+1)(x-y+2)$

19 $P(x)=2x^3-7x^2+11x-4$라고 하면
$P\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3-7\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+11\times\frac{1}{2}-4=0$
이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & -7 & 11 & -4 \\ & & 1 & -3 & 4 \\ \hline & 2 & -6 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

$2x^3-7x^2+11x-4=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-6x+8)$
$=(2x-1)(x^2-3x+4)$
따라서 $a=2,\ b=-1,\ c=-3,\ d=4$이므로
$a+b+c+d=2$

20 $P(x)=x^4+2x^3-9x^2-2x+8$이라고 하면
$P(1)=1+2-9-2+8=0$,
$P(-1)=1-2-9+2+8=0$
이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 2 & -9 & -2 & 8 \\ & & 1 & 3 & -6 & -8 \\ \hline -1 & 1 & 3 & -6 & -8 & \boxed{0} \\ & & -1 & -2 & 8 & \\ \hline & 1 & 2 & -8 & \boxed{0} & \end{array}$$

$x^4+2x^3-9x^2-2x+8$
$=(x-1)(x+1)(x^2+2x-8)$
$=(x-1)(x+1)(x-2)(x+4)$
따라서 인수가 아닌 것은 ⑤이다.

21 주어진 식을 인수분해하면
$x^2y-3x^2-xy^2+3y^2=x^2y-xy^2-3x^2+3y^2$
$=xy(x-y)-3(x^2-y^2)$
$=xy(x-y)-3(x+y)(x-y)$
$=(x-y)\{xy-3(x+y)\}$ …… ㉠
$x=1-\sqrt{3},\ y=1+\sqrt{3}$에서
$x+y=2,\ x-y=-2\sqrt{3},\ xy=-2$
이것을 ㉠에 대입하면
(주어진 식)$=-2\sqrt{3}\times(-2-3\times2)=16\sqrt{3}$

22 $a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
에서 $a+b+c=0$이므로
$a^3+b^3+c^3-3abc=0$ $\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc$
$\therefore\ \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{3abc}{abc}=3$

23 $a=100$으로 놓으면
$\sqrt{100\times101\times102\times103+1}$
$=\sqrt{a(a+1)(a+2)(a+3)+1}$
$=\sqrt{\{a(a+3)\}\{(a+1)(a+2)\}+1}$
$=\sqrt{(a^2+3a)(a^2+3a+2)+1}$
$a^2+3a=X$로 놓으면

(주어진 식)$=\sqrt{X(X+2)+1}$

$=\sqrt{X^2+2X+1}=\sqrt{(X+1)^2}$

$=X+1=a^2+3a+1$

$=100^2+3\times100+1=10301$

24 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=0$을 대입하면 $a_0=1$

양변에 $x=1$을 대입하면

$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{39}+a_{40}=2^{20}$ …… ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면

$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{39}+a_{40}=2^{20}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{40})=2\times2^{20}$

$a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{40}=2^{20}$

$\therefore a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{40}=2^{20}-a_0=2^{20}-1$

25 주어진 식을 변형하면

$2^{2002}+2^{2001}+2^{2000}=(2^5)^{400}\times2^2+(2^5)^{400}\times2+(2^5)^{400}$

$2^5=x$로 놓으면

$2^{2002}+2^{2001}+2^{2000}=4x^{400}+2x^{400}+x^{400}$

$31=2^5-1$이므로 $31=x-1$

즉, $P(x)=4x^{400}+2x^{400}+x^{400}$이라고 하면

$2^{2002}+2^{2001}+2^{2000}$을 31로 나누었을 때의 나머지는 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지와 같다.

따라서 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $P(1)$이므로

$P(1)=4+2+1=7$

26 $f(x)+g(x)$가 $x+2$로 나누어떨어지므로

$f(-2)+g(-2)=0$ …… ㉠

$f(x)-g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로

$f(-2)-g(-2)=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$f(-2)=2,\ g(-2)=-2$

ㄱ. $A(x)=x+f(x)$라 하고 양변에 $x=-2$를 대입하면

$A(-2)=-2+f(-2)=-2+2=0$

이므로 $A(x)$는 $x+2$로 나누어떨어진다.

ㄴ. $B(x)=x^2+f(x)g(x)$라 하고 양변에 $x=-2$를 대입하면

$B(-2)=(-2)^2+f(-2)g(-2)$

$=4-4=0$

이므로 $B(x)$는 $x+2$로 나누어떨어진다.

ㄷ. $C(x)=f(x)-xg(x)$라 하고 양변에 $x=-2$를 대입하면

$C(-2)=f(-2)-(-2)\times g(-2)$

$=2-4=-2$

이므로 $C(x)$는 $x+2$로 나누어떨어지지 않는다.

따라서 보기 중 $x+2$로 나누어떨어지는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

27 $x^4-4x^3+5x^2-4x+1$

$=x^2\left(x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5\right\}$

$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\right\}$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=X^2-4X+3$

$=(X-1)(X-3)$

$=\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)$

$\therefore$ (주어진 식)$=x^2\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)$

$=(x^2-x+1)(x^2-3x+1)$

28 $x-y=A,\ y-z=B,\ z-x=C$로 놓으면

$A+B+C=(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$

$\therefore (x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

$=A^3+B^3+C^3$

$=(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)$

$+3ABC$

$=3ABC$

$=3(x-y)(y-z)(z-x)$

다른 풀이

주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

$=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3+y^3-3y^2z+3yz^2-z^3$

$+z^3-3z^2x+3zx^2-x^3$

$=3(-x^2y+xy^2-y^2z+yz^2-z^2x+zx^2)$

$=3\{(x-z)y^2-(x+z)(x-z)y+xz(x-z)\}$

$=3(x-z)\{y^2-(x+z)y+xz\}$

$=3(x-z)(y-x)(y-z)$

$=3(x-y)(y-z)(z-x)$

29 $x^3+(a-2)x^2+bx+3$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $x+p$ (p는 상수)라고 하면

$x^3+(a-2)x^2+bx+3=(x-1)^2(x+p)$ …… (가)

이 식의 우변을 x에 대하여 정리하면

$x^3+(a-2)x^2+bx+3=x^3+(p-2)x^2+(1-2p)x+p$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a-2=p-2,\ b=1-2p,\ 3=p$ …… (나)

$\therefore a=3,\ b=-5$ …… (다)

$\therefore a+b=-2$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) 몫을 $x+p$로 놓고 등식을 세운다.	2점
(나) 항등식의 성질을 이용하여 식을 세운다.	2점
(다) a, b의 값을 구한다.	1점
(라) $a+b$의 값을 구한다.	1점

30 (1) 다항식 $P(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라고 하면 나머지가 $3x$이므로

$P(x)=(x^2-4x+3)Q_1(x)+3x$
$=(x-1)(x-3)Q_1(x)+3x$

이 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$P(1)=3$ …… (가)

다항식 $P(x)$를 x^2-5x+6으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라고 하면 나머지가 $6x-9$이므로

$P(x)=(x^2-5x+6)Q_2(x)+6x-9$
$=(x-2)(x-3)Q_2(x)+6x-9$

이 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$P(2)=3$ …… (나)

(2) 다항식 $P(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$P(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$
$=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$ …… (다)

이 식의 양변에 $x=1$, $x=2$를 각각 대입하면

$P(1)=a+b$, $P(2)=2a+b$

$\therefore a+b=3$, $2a+b=3$ …… (라)

두 식을 연립하여 풀면

$a=0$, $b=3$

따라서 구하는 나머지는 3이다. …… (마)

채점 기준	배점
(가) $P(1)$의 값을 구한다.	2점
(나) $P(2)$의 값을 구한다.	2점
(다) 구하는 나머지를 $ax+b$로 놓고 식을 세운다.	1점
(라) $P(1)$, $P(2)$의 값을 이용하여 식을 세운다.	1점
(마) 나머지를 구한다.	1점

31 주어진 식의 좌변을 a에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하자.

$ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c-a)$
$=a^2b+ab^2-b^2c-bc^2-c^2a+ca^2$
$=(b+c)a^2+(b^2-c^2)a-b^2c-bc^2$
$=(b+c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b+c)$
$=(b+c)\{a^2+(b-c)a-bc\}$
$=(b+c)(a+b)(a-c)$
$=0$ …… (가)

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$a+b>0$, $b+c>0$

즉, $a-c=0$이므로

$a=c$

따라서 주어진 조건을 만족하는 삼각형은 $a=c$인 이등변삼각형이다. …… (나)

채점 기준	배점
(가) 주어진 식의 좌변을 인수분해한다.	4점
(나) 어떤 삼각형인지 말한다.	2점

06강 복소수

확인 문제 p. 28

1 (1) 실수부분: 5, 허수부분: 2
(2) 실수부분: 0, 허수부분: $-\sqrt{3}$

2 (1) $(4-i)-(2i+5)=4-i-2i-5$
$=(4-5)+(-1-2)i$
$=-1-3i$

(2) $\dfrac{3+i}{3-i}=\dfrac{(3+i)^2}{(3-i)(3+i)}$
$=\dfrac{9+6i+i^2}{3^2-i^2}$
$=\dfrac{8+6i}{10}=\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$

교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제 p. 29

1 $z=(x-1)+(x^2-4x-12)i$가 실수가 되려면 (허수부분)$=0$이어야 하므로

$x^2-4x-12=0$, $(x+2)(x-6)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=6$

따라서 구하는 x의 값은 -2, 6이다.

2 $z=(x^2-4)+(x^2-7x+10)i$가 순허수가 되려면 (실수부분)$=0$, (허수부분)$\neq0$이어야 하므로

$x^2-4=0$, $x^2-7x+10\neq0$

(i) $x^2-4=0$에서
$(x+2)(x-2)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

(ii) $x^2-7x+10\neq0$에서
$(x-2)(x-5)\neq0$
$\therefore x\neq2$이고 $x\neq5$

(i), (ii)에 의하여 $x=-2$

3 (1) 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x+3=2$, $2-y=-3$
$\therefore x=-1$, $y=5$

(2) 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$2x-1=0$, $y+6=0$
$\therefore x=\dfrac{1}{2}$, $y=-6$

4 (1) 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x+4y=1$, $y-x=4$
두 식을 연립하여 풀면 $x=-3$, $y=1$

(2) 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$2x-y=0,\ x+y-3=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=2$

5 (1) $(1+\sqrt{6}i)(-1+\sqrt{6}i)+(2-3i)(1-i)$
$=-1+6i^2+2-2i-3i+3i^2$
$=-8-5i$

(2) $\dfrac{1-3i}{1+2i}-(-i+2)^2$
$=\dfrac{(1-3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}-(i^2-4i+4)$
$=\dfrac{1-2i-3i+6i^2}{1-4i^2}-(3-4i)$
$=\dfrac{-5-5i}{5}-(3-4i)$
$=-1-i-3+4i$
$=-4+3i$

6 (1) $4i(i-1)-(-3i-1)(3i-1)$
$=4i^2-4i-(-9i^2+1)$
$=-4-4i-10$
$=-14-4i$

(2) $\dfrac{2}{1-i}=\dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}$
$=\dfrac{2(1+i)}{1-i^2}=1+i$
$\therefore\ (i-2)(1-2i)+\left(\dfrac{2}{1-i}\right)^2$
$=(i-2)(1-2i)+(1+i)^2$
$=i-2i^2-2+4i+1+2i+i^2$
$=7i$

7 (1) $(2-i)(-1+3i)(2+i)$
$=\{(2-i)(2+i)\}(-1+3i)$
$=(4-i^2)(-1+3i)$
$=5(-1+3i)$
$=-5+15i$

(2) $(\sqrt{5}-2i)(-\sqrt{5}-i)+(\sqrt{5}-2i)(2\sqrt{5}+3i)$
$=(\sqrt{5}-2i)\{(-\sqrt{5}-i)+(2\sqrt{5}+3i)\}$
$=(\sqrt{5}-2i)(\sqrt{5}+2i)$
$=5-4i^2=9$

8 (1) $(1-\sqrt{2}i)(-1+i)(1+\sqrt{2}i)(-1-i)$
$=\{(1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)\}\{(-1+i)(-1-i)\}$
$=(1-2i^2)(1-i^2)$
$=3\times 2=6$

(2) $(3-i)(5+2i)+(-2+i)(i-3)$
$=(3-i)(5+2i)-(-2+i)(3-i)$
$=(3-i)\{(5+2i)-(-2+i)\}$
$=(3-i)(7+i)$
$=21+3i-7i-i^2$
$=22-4i$

07강 음수의 제곱근

확인 문제 p. 30

1 (1) $i^{21}=(i^4)^5\times i=i$
(2) $(-i)^{15}=-i^{15}=-(i^4)^3\times i^3=-(-i)=i$
(3) $i^{102}+i^{104}=(i^4)^{25}\times i^2+(i^4)^{26}=-1+1=0$
(4) $i^{33}=(i^4)^8\times i=i$이므로 $\dfrac{1}{i^{33}}=\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{i^2}=-i$

2 (1) $\pm\sqrt{7}i$ (2) $\pm 8i$

3 (1) $\sqrt{-2}+\sqrt{-8}=\sqrt{2}i+2\sqrt{2}i=3\sqrt{2}i$
(2) $\sqrt{-12}-\sqrt{-27}=2\sqrt{3}i-3\sqrt{3}i=-\sqrt{3}i$
(3) $\sqrt{-3}\sqrt{-5}=\sqrt{3}i\times\sqrt{5}i=\sqrt{15}i^2=-\sqrt{15}$
(4) $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{2i}=\dfrac{2\sqrt{5}i}{2i^2}=-\sqrt{5}i$

교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제 p. 31

1 $i+i^2+i^3+i^4=i+(-1)+(-i)+1=0$이므로
$i+i^2+i^3+\cdots+i^{25}$
$=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)$
$+\cdots+i^{20}(i+i^2+i^3+i^4)+i^{25}$
$=i^{25}=(i^4)^6\times i=i$

2 $\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\dfrac{1}{i^4}=\dfrac{1}{i}-1-\dfrac{1}{i}+1=0$이므로
$1+\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\cdots+\dfrac{1}{i^{10}}$
$=1+\left(\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\dfrac{1}{i^4}\right)+\dfrac{1}{i^4}\left(\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\dfrac{1}{i^4}\right)+\dfrac{1}{i^9}+\dfrac{1}{i^{10}}$
$=1+\dfrac{1}{i^9}+\dfrac{1}{i^{10}}=1+\dfrac{1}{(i^4)^2\times i}+\dfrac{1}{(i^4)^2\times i^2}$
$=1-i-1=-i$

3 $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}=i$이므로
$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{100}=i^{100}=(i^4)^{25}=1$

4 $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{-2i}{2}=-i$이므로
$\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{50}=\left\{\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{25}$
$=(-i)^{25}=-i^{25}=-(i^4)^6\times i=-i$

5 $\dfrac{2-\sqrt{-4}}{2+\sqrt{-4}}=\dfrac{2-2i}{2+2i}=\dfrac{1-i}{1+i}$
$=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$

6 $\dfrac{3-\sqrt{-8}}{1+\sqrt{-2}}=\dfrac{3-2\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i}=\dfrac{(3-2\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}$

$=\dfrac{3-5\sqrt{2}i+4i^2}{3}=-\dfrac{1}{3}-\dfrac{5\sqrt{2}}{3}i$

7 (1) $\sqrt{-3}\sqrt{-12}+\sqrt{-27}\sqrt{3}=-\sqrt{36}+\sqrt{-81}=-6+9i$

(2) $\dfrac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-2}}-\sqrt{-4}\sqrt{9}=\sqrt{8}-\sqrt{-36}=2\sqrt{2}-6i$

8 (1) $\sqrt{-2}(\sqrt{6}-\sqrt{-32})=\sqrt{-2}\sqrt{6}-\sqrt{-2}\sqrt{-32}$

$=\sqrt{-12}+\sqrt{64}=8+2\sqrt{3}i$

(2) $\dfrac{\sqrt{-25}\sqrt{2}}{\sqrt{-5}}-\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{-5}}=\dfrac{\sqrt{-50}}{\sqrt{-5}}+\sqrt{-5}=\sqrt{10}+\sqrt{5}i$

계산력 다지기 p. 32~33

1 (1) $i(1+2i)-2(2i-1)=i-2-4i+2=-3i$

(2) $(2-i)(1+2i)+4i(1-i)=4+3i+4i+4=8+7i$

(3) $(\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}+i)-(4-3i)(1+i)=3-(7+i)$

$=-4-i$

(4) $(1+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}i-1)+(1-2i)(2-i)=-4-5i$

(5) $(1-2i)^2-(2+3i)(1-i)=(-3-4i)-(5+i)$

$=-8-5i$

(6) $(1-2\sqrt{2}i)^2-\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2=(-7-4\sqrt{2}i)-\dfrac{2i}{-2i}$

$=-6-4\sqrt{2}i$

(7) $\dfrac{1-2i}{1+2i}+\dfrac{1+2i}{1-2i}=\dfrac{(1-2i)^2+(1+2i)^2}{(1+2i)(1-2i)}$

$=\dfrac{(-3-4i)+(-3+4i)}{5}=-\dfrac{6}{5}$

(8) $\dfrac{2+3i}{2-3i}+\dfrac{3-2i}{3+2i}=\dfrac{(2+3i)^2}{(2-3i)(2+3i)}+\dfrac{(3-2i)^2}{(3+2i)(3-2i)}$

$=\dfrac{-5+12i}{13}+\dfrac{5-12i}{13}=0$

2 $z=2-3i$이므로 $\bar{z}=2+3i$

(1) 4 (2) $-6i$ (3) 13

(4) -10 (5) $-24i$ (6) $\dfrac{-5-12i}{13}$

3 (1) $i^{99}=(i^4)^{24}\times i^3=-i$

(2) $(-i)^{121}=-i^{121}=-(i^4)^{30}\times i=-i$

(3) $i^{50}+i^{150}=(i^4)^{12}\times i^2+(i^4)^{37}\times i^2=-1-1=-2$

(4) $i^{20}+i^{21}+i^{22}=(i^4)^5+(i^4)^5\times i+(i^4)^5\times i^2=1+i-1=i$

(5) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2=\dfrac{2}{2i}=\dfrac{1}{i}=-i$이므로

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{100}=\left\{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2\right\}^{50}=(-i)^{50}=i^{50}=-1$

(6) $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}=i$이므로

$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{201}=i^{201}=(i^4)^{50}\times i=i$

(7) $i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$이므로

$i^{100}+i^{101}+i^{102}+i^{103}+\cdots+i^{120}$

$=i^{100}+i^{100}(i+i^2+i^3+i^4)+i^{104}(i+i^2+i^3+i^4)$

$+\cdots+i^{116}(i+i^2+i^3+i^4)$

$=i^{100}=(i^4)^{25}=1$

(8) $\dfrac{1}{i}-\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}-\dfrac{1}{i^4}=\dfrac{1}{i}+1-\dfrac{1}{i}-1=0$이므로

$\dfrac{1}{i}-\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}-\dfrac{1}{i^4}+\cdots+\dfrac{1}{i^{17}}-\dfrac{1}{i^{18}}+\dfrac{1}{i^{19}}-\dfrac{1}{i^{20}}$

$=\left(\dfrac{1}{i}-\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}-\dfrac{1}{i^4}\right)+\dfrac{1}{i^4}\left(\dfrac{1}{i}-\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}-\dfrac{1}{i^4}\right)$

$+\cdots+\dfrac{1}{i^{16}}\left(\dfrac{1}{i}-\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}-\dfrac{1}{i^4}\right)$

$=0$

4 (1) $5\sqrt{2}i$ (2) $-2\sqrt{5}i$ (3) $-5\sqrt{3}$

(4) $-\dfrac{2}{5}i$ (5) $-2\sqrt{6}+16i$ (6) $6-3\sqrt{2}i$

(7) $-6-2i$ (8) $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}+4i$

06~07강 족집게 기출문제 p. 34~37

1 4개	**2** ③	**3** ⑤	**4** 72	**5** ③
6 ①	**7** ①	**8** ④	**9** ②	**10** 315
11 ④	**12** 10	**13** ⑤	**14** ④	**15** ①
16 ③	**17** ⑤	**18** ③	**19** ⑤	**20** ③
21 -4	**22** ④	**23** $2i$	**24** ②	**25** ③
26 $x=-1$, $y=-2$	**27** -2	**28** $2-i$		
29 (1) $a<0$, $b<0$, $c>0$ (2) $-2a$				

1 허수는 실수가 아닌 복소수이므로 $2+i$, $3i^2-5i$, $-4i$, $\sqrt{3}i+1$의 4개이다.

2 ① $(3-2i)+(1+5i)=4+3i$

② $(-4+3i)-(3-4i)=-4+3i-3+4i=-7+7i$

③ $(2+\sqrt{5}i)(2-\sqrt{5}i)=4-5i^2=9$

④ $(4+7i)(3-5i)=12-20i+21i-35i^2=47+i$

⑤ $\dfrac{7+i}{1+i}=\dfrac{(7+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{7-7i+i-i^2}{1-i^2}$

$=\dfrac{8-6i}{2}=4-3i$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

3 $\dfrac{5+i}{1-i}-2+3i-(5-7i)=\dfrac{(5+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}-2+3i-5+7i$

$=\dfrac{4+6i}{2}-7+10i$

$=2+3i-7+10i=-5+13i$

따라서 $a=-5$, $b=13$이므로 $a+b=8$

4 (주어진 식)$=\{(-1+i)(-1-i)\}\{(2+\sqrt{2}i)(2-\sqrt{2}i)\}^2$

$=(1-i^2)(4-2i^2)^2=2\times6^2=72$

5 $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1+i)^2+(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}$

$=\dfrac{2i+(-2i)}{2}=0$

다른 풀이

$x=1-i$, $y=1+i$이므로 $x+y=2$, $xy=2$

$\therefore \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\dfrac{2^2-2\times2}{2}=0$

6 $3x^2+3x+4=3\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2+3\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)+4$

$=3\left(\dfrac{-2+2\sqrt{3}i}{4}\right)-\dfrac{3}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}i}{2}+4$

$=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}i}{2}-\dfrac{3}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}i}{2}+4=1$

다른 풀이

$x=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$를 변형하면 $2x+1=-\sqrt{3}i$

이 식의 양변을 제곱하면

$4x^2+4x+1=-3$ $\therefore x^2+x=-1$

$\therefore 3x^2+3x+4=3(x^2+x)+4=3\times(-1)+4=1$

7 복소수 z를 (실수부분)+(허수부분)i의 꼴로 정리하면

$z=i(x-i)^2=(x^2-2xi+i^2)i=2x+(x^2-1)i$

z가 실수가 되려면 (허수부분)=0이어야 하므로

$x^2-1=0$, $(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 실수 x의 값의 합은 $-1+1=0$

8 복소수 z를 (실수부분)+(허수부분)i의 꼴로 정리하면

$z=(1+i)x^2-(1+2i)x-2-3i$

$=(x^2-x-2)+(x^2-2x-3)i$

z^2이 음의 실수가 되려면 z는 순허수이어야 하므로

(실수부분)=0, (허수부분)$\neq0$

즉, $x^2-x-2=0$, $x^2-2x-3\neq0$

(i) $x^2-x-2=0$에서

$(x+1)(x-2)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

(ii) $x^2-2x-3\neq0$에서

$(x+1)(x-3)\neq0$ $\therefore x\neq-1$이고 $x\neq3$

(i), (ii)에 의하여 $x=2$

9 주어진 식의 좌변을 정리하면

$(2x+y)+(-x+2y)i=11-3i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2x+y=11$, $-x+2y=-3$

두 식을 연립하여 풀면 $x=5$, $y=1$

$\therefore x+y=6$

10 주어진 식의 좌변과 우변을 각각 정리하면

(좌변)$=\dfrac{x}{1+3i}+\dfrac{y}{1-3i}=\dfrac{x(1-3i)+y(1+3i)}{(1+3i)(1-3i)}$

$=\dfrac{x+y}{10}-\dfrac{3(x-y)}{10}i$ …… ㉠

(우변)$=\dfrac{9}{2+i}=\dfrac{9(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{18}{5}-\dfrac{9}{5}i$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\dfrac{x+y}{10}=\dfrac{18}{5}$, $\dfrac{3(x-y)}{10}=\dfrac{9}{5}$

$\therefore x+y=36$, $x-y=6$

두 식을 연립하여 풀면 $x=21$, $y=15$

$\therefore xy=315$

11 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라고 하면 $\overline{z}=a-bi$

① $\overline{(\overline{z})}=\overline{a-bi}=a+bi=z$

② $z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ ➡ 실수

③ $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ ➡ 실수

④ ②에서 $z+\overline{z}=2a$이므로 $z+\overline{z}=0$을 만족하려면

$2a=0$에서 $a=0$ $\therefore z=bi$

이때 z는 0이 아닌 복소수이므로 $b\neq0$

따라서 z는 순허수이다.

⑤ $\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{\overline{z}}=\dfrac{1}{a+bi}-\dfrac{1}{a-bi}$

$=\dfrac{(a-bi)-(a+bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\dfrac{-2b}{a^2+b^2}i$

z가 허수이면 $b\neq0$이므로 $\dfrac{-2b}{a^2+b^2}$는 0이 아닌 실수이다.

즉, $\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{\overline{z}}$은 순허수이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

12 $\alpha=1+2i$, $\beta=2-i$이므로 $\overline{\alpha}=1-2i$, $\overline{\beta}=2+i$

$\therefore \alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}=\alpha(\overline{\alpha}+\overline{\beta})+\beta(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$

$=(3+i)(3-i)=10$

13 $z=1-i$이므로 $\overline{z}=1+i$

$\therefore \dfrac{\overline{z}+1}{\overline{z}}+\dfrac{z}{z+1}=\dfrac{2+i}{1+i}+\dfrac{1-i}{2-i}$

$=\dfrac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}+\dfrac{(1-i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$

$=\dfrac{3-i}{2}+\dfrac{3-i}{5}$

$=\dfrac{21}{10}-\dfrac{7}{10}i$

14 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라고 하면 $\overline{z}=a-bi$

z, $\overline{z}$를 주어진 등식에 대입하면

$3(a+bi)-2(a-bi)=2+15i$

$a+5bi=2+15i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=2,\ 5b=15 \qquad \therefore\ a=2,\ b=3$
따라서 $z=2+3i$, $\bar{z}=2-3i$이므로
$z\bar{z}=(2+3i)(2-3i)=13$

15 $z=a+bi$(a, b는 실수)라고 하면 $\bar{z}=a-bi$
z, $\bar{z}$를 $z+\bar{z}=6$에 대입하면
$(a+bi)+(a-bi)=6,\ 2a=6 \qquad \therefore\ a=3$
z, $\bar{z}$를 $z\bar{z}=10$에 대입하면
$(a+bi)(a-bi)=10,\ a^2+b^2=10$ …… ㉠
$a=3$을 ㉠에 대입하면
$9+b^2=10,\ b^2=1 \qquad \therefore\ b=\pm1$
$\therefore\ z=3\pm i$

16 $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1=0$이므로
$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{2}{i^3}+\frac{2}{i^4}=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}$
$=\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=-\frac{1}{i}+1=1+i$
따라서 $1+i=x+yi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $x=1,\ y=1$
$\therefore\ xy=1$

17 주어진 식의 좌변을 정리하면
$i+2i^2+3i^3+\cdots+2021i^{2021}$
$=(i+2i^2+3i^3+4i^4)+i^4(5i+6i^2+7i^3+8i^4)$
$+\cdots+i^{2016}(2017i+2018i^2+2019i^3+2020i^4)$
$+2021i\times i^{2020}$
$=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)$
$+\cdots+(2017i-2018-2019i+2020)+2021i$
$=\underbrace{(2-2i)+(2-2i)+\cdots+(2-2i)}_{505\text{개}}+2021i$
$=505(2-2i)+2021i$
$=1010-1010i+2021i$
$=1010+1011i$
따라서 $1010+1011i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=1010,\ b=1011$
$\therefore\ a+b=2021$

18 $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$
$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$
$\therefore\ \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100}-\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{101}=(-i)^{100}-i^{101}=i^{100}-i^{101}$
$=(i^4)^{25}-(i^4)^{25}\times i=1-i$

19 $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{-2i}{2}=-i$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2=\frac{2}{-2i}=-\frac{1}{i}=-\frac{i}{i^2}=i$
$\therefore\ \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{8n}+\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{8n}=\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{4n}+\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2\right\}^{4n}$
$=(-i)^{4n}+i^{4n}$
$=\{(-i)^4\}^n+(i^4)^n$
$=1^n+1^n=1+1=2$

20 ① $\sqrt{-2}\sqrt{3}=\sqrt{(-2)\times3}=\sqrt{-6}$
② $\sqrt{-2}\sqrt{-5}=-\sqrt{(-2)\times(-5)}=-\sqrt{10}$
③ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}=-\sqrt{\frac{3}{-2}}=-\sqrt{-\frac{3}{2}}$
④ $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{-3}{5}}=\sqrt{-\frac{3}{5}}$
⑤ $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{\frac{-3}{-2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$
따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

21 주어진 식의 좌변을 정리하면
$\sqrt{2}\sqrt{-8}+\sqrt{-2}\sqrt{-8}+\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}+\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}$
$=\sqrt{-16}-\sqrt{16}-\sqrt{-4}+\sqrt{4}$
$=4i-4-2i+2$
$=-2+2i$
따라서 $-2+2i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=-2,\ b=2$
$\therefore\ ab=-4$

22 ① $a<0$, $b<0$이므로 $a^2>0,\ ab>0$
$\therefore\ \sqrt{a^3b}=\sqrt{a^2\times ab}=\sqrt{a^2}\sqrt{ab}$
$=|a|\sqrt{ab}=-a\sqrt{ab}$
② $a<0$, $b<0$이므로 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$
③ $a<0$, $b<0$이므로 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$
④ $a<0$, $b<0$이므로 $a^2>0$
$\therefore\ \sqrt{\frac{b}{a^2}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}}=\frac{\sqrt{b}}{|a|}=-\frac{\sqrt{b}}{a}$
⑤ $a<0$, $b<0$이므로
$\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}=|a|\times|b|=(-a)\times(-b)=ab$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

23 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이고 $ab\neq0$이므로
$a<0,\ b<0$
(i) $a<0$이므로 $-a>0$
$\therefore\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-a}}=\sqrt{\frac{a}{-a}}=\sqrt{-1}=i$
(ii) $a<b$이므로 $a-b<0,\ b-a>0$
$\therefore\ \frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{a-b}}=-\sqrt{\frac{b-a}{a-b}}=-\sqrt{\frac{-(a-b)}{a-b}}$
$=-\sqrt{-1}=-i$
(i), (ii)에 의하여
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-a}}-\frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{a-b}}=i-(-i)=2i$

24 $-z=\frac{1}{z}$에서 $z^2=-1$ ...... ㉠

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하고, ㉠에 대입하면

$(a+bi)^2=-1$

$(a^2-b^2)+2abi=-1$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=-1$, $2ab=0$

$2ab=0$에서 $ab=0$

$\therefore a=0$ 또는 $b=0$

(i) $a=0$일 때

$a^2-b^2=-1$에서 $b^2=1$

$\therefore b=-1$ 또는 $b=1$

$\therefore z=-i$ 또는 $z=i$

(ii) $b=0$일 때

$a^2-b^2=-1$에서 $a^2=-1$

모든 실수 a에 대하여 $a^2\geq 0$이므로 $a^2=-1$을 만족하는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 복소수 z는 $-i$, i의 2개이다.

25 ㄱ. $z_1=1$, $z_2=i$이면 $\overline{z_1}=1$, $\overline{z_2}=-i$이므로

$\overline{z_1}^2+\overline{z_2}^2=1^2+(-i)^2=1-1=0$

그런데 $z_1\neq 0$, $z_2\neq 0$이다.

ㄴ. $z_1=a+bi$ (a, b는 실수)라 하고, 이것을 $z_2=iz_1$에 대입하면

$z_2=i(a+bi)=-b+ai$

$\therefore z_2^2=(-b+ai)^2=b^2-a^2-2abi$ ...... ㉠

$\overline{z_1}=a-bi$이므로

$\overline{z_1}^2=(a-bi)^2=a^2-b^2-2abi$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{z_1}^2\neq z_2^2$

ㄷ. $z_2=a+bi$ (a, b는 실수)라고 하면

$z_1=\overline{z_2}=a-bi$

$\therefore z_1+z_2=(a-bi)+(a+bi)=2a$ ➡ 실수

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄷ이다.

26 $x\neq 0$, $y\neq 0$이므로 $\sqrt{x}\sqrt{y}=-\sqrt{xy}$를 만족하려면

$x<0$, $y<0$

복소수 z를 (실수부분)+(허수부분)i의 꼴로 정리하면

$z=x^2+yi-2x-3-i$

$=(x^2-2x-3)+(y-1)i$

$z^2=-9$에서 (실수부분)=0이어야 하므로

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

그런데 $x<0$이므로 $x=-1$

따라서 복소수 $z=(y-1)i$이고, 이것을 $z^2=-9$에 대입하면

$\{(y-1)i\}^2=-9$, $(y-1)^2=9$

$y-1=\pm 3$ $\therefore y=-2$ 또는 $y=4$

그런데 $y<0$이므로 $y=-2$

$\therefore x=-1$, $y=-2$

27 x^3+y^3

$=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3+\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3$

$=\frac{1+3\sqrt{3}i+9i^2+3\sqrt{3}i^3}{8}+\frac{1-3\sqrt{3}i+9i^2-3\sqrt{3}i^3}{8}$ ...... (가)

$=-1-1=-2$ ...... (나)

채점 기준	배점
(가) x, y의 값을 대입하여 전개한다.	3점
(나) x^3+y^3의 값을 구한다.	2점

다른 풀이

$x+y=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$

$xy=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$ ...... (가)

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ ...... (나)

$=1^3-3\times 1\times 1=-2$ ...... (다)

채점 기준	배점
(가) $x+y$, xy의 값을 구한다.	2점
(나) x^3+y^3의 식을 변형한다.	2점
(다) x^3+y^3의 값을 구한다.	1점

28 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라고 하면 $\overline{z}=a-bi$

z, $\overline{z}$를 주어진 등식에 대입하면

$(2-i)(a+bi)+4i(a-bi)=-1+4i$

$(2a+b)+(-a+2b)i+4ai+4b=-1+4i$

$\therefore (2a+5b)+(3a+2b)i=-1+4i$ ...... (가)

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2a+5b=-1$, $3a+2b=4$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$ ...... (나)

$\therefore z=2-i$ ...... (다)

채점 기준	배점
(가) $z=a+bi$로 놓고 z, $\overline{z}$를 주어진 등식에 대입하여 정리한다.	3점
(나) a, b의 값을 구한다.	2점
(다) 복소수 z를 구한다.	1점

29 (1) $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서 $a<0$, $b<0$ ...... (가)

$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{c}{b}}$에서 $b<0$, $c>0$ ...... (나)

(2) $a<0$, $b<0$이므로 $a+b<0$

$b<0$, $c>0$이므로 $b-c<0$

$a<0$, $c>0$이므로 $c-a>0$ ...... (다)

$\therefore \sqrt{(a+b)^2}-\sqrt{(b-c)^2}+\sqrt{(c-a)^2}$

$=-(a+b)+(b-c)+(c-a)$

$=-a-b+b-c+c-a=-2a$ ...... (라)

채점 기준	배점
(가) a, b의 부호를 정한다.	2점
(나) c의 부호를 정한다.	1점
(다) $a+b$, $b-c$, $c-a$의 부호를 정한다.	3점
(라) $\sqrt{(a+b)^2}-\sqrt{(b-c)^2}+\sqrt{(c-a)^2}$을 간단히 한다.	2점

08강 이차방정식의 판별식

확인 문제 p. 38

1 (1) $2x^2+5x-3=0$에서
$(x+3)(2x-1)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

(2) $x^2-4x+1=0$에서 근의 공식을 이용하면
$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\times1}}{1}=2\pm\sqrt{3}$

2 (1) 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$D=3^2-4\times1\times(-1)=13>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-2)^2-3\times5=-11<0$
따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다.

교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제 p. 39

1 (1) $3x^2-5x+2=0$에서
$(3x-2)(x-1)=0$
$\therefore x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=1$
따라서 실근이다.

(2) $x^2+3x+6=0$에서 근의 공식을 이용하면
$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times6}}{2\times1}=\frac{-3\pm\sqrt{15}i}{2}$
따라서 허근이다.

(3) $2x^2-4x+1=0$에서 근의 공식을 이용하면
$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-2\times1}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$
따라서 실근이다.

(4) $2x^2+x+3=0$에서 근의 공식을 이용하면
$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times2\times3}}{2\times2}=\frac{-1\pm\sqrt{23}i}{4}$
따라서 허근이다.

2 (1) $4x^2+12x+9=0$에서
$(2x+3)^2=0$
$\therefore x=-\frac{3}{2}$ (중근)
따라서 실근이다.

(2) $x^2-7x-1=0$에서 근의 공식을 이용하면
$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}=\frac{7\pm\sqrt{53}}{2}$
따라서 실근이다.

(3) $3x^2-4x+7=0$에서 근의 공식을 이용하면
$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-3\times7}}{3}=\frac{2\pm\sqrt{17}i}{3}$
따라서 허근이다.

(4) $x^2+3x+3=0$에서 근의 공식을 이용하면
$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times3}}{2\times1}=\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{2}$
따라서 허근이다.

3 이차방정식 $x^2-(2k-1)x+k^2=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=\{-(2k-1)\}^2-4\times1\times k^2=-4k+1$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로
$-4k+1>0 \quad \therefore k<\frac{1}{4}$

(2) 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로
$-4k+1=0 \quad \therefore k=\frac{1}{4}$

(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로
$-4k+1<0 \quad \therefore k>\frac{1}{4}$

4 이차방정식 $x^2+2x+a+2=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=1^2-1\times(a+2)=-a-1$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로
$-a-1>0 \quad \therefore a<-1$

(2) 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로
$-a-1=0 \quad \therefore a=-1$

(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로
$-a-1<0 \quad \therefore a>-1$

5 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$D=k^2-4\times1\times(-k-1)=0$
$k^2+4k+4=0$
$(k+2)^2=0 \quad \therefore k=-2$
따라서 이차방정식 $x^2-2x+1=0$을 풀면
$(x-1)^2=0 \quad \therefore x=1$

6 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=\{-(m+1)\}^2-1\times(m+3)=0$
$m^2+m-2=0$
$(m+2)(m-1)=0$
$\therefore m=-2$ 또는 $m=1$
그런데 $m>0$이므로 $\quad m=1$
따라서 이차방정식 $x^2-4x+4=0$을 풀면
$(x-2)^2=0 \quad \therefore x=2$

09강 이차방정식의 근과 계수의 관계

확인 문제 p. 40

1 (1) 이차방정식 $x^2+2x-5=0$의 두 근을 α, β라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{2}{1}=-2$, $\alpha\beta=\frac{-5}{1}=-5$

(2) 이차방정식 $2x^2-3x+8=0$의 두 근을 α, β라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{-3}{2}=\frac{3}{2}$, $\alpha\beta=\frac{8}{2}=4$

2 (1) 두 근의 합과 곱을 구하면

$(-1+\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2})=-2$

$(-1+\sqrt{2})(-1-\sqrt{2})=(-1)^2-(\sqrt{2})^2=-1$

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2+2x-1=0$

(2) 두 근의 합과 곱을 구하면

$(1+3i)+(1-3i)=2$

$(1+3i)(1-3i)=1^2-(3i)^2=1+9=10$

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2-2x+10=0$

3 (1) 합이 4이고 곱이 -3인 두 수를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-4x-3=0$이므로

$x=2\pm\sqrt{7}$

따라서 구하는 두 수는 $2-\sqrt{7}$, $2+\sqrt{7}$이다.

(2) 합이 -2이고 곱이 3인 두 수를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2+2x+3=0$이므로

$x=-1\pm\sqrt{2}i$

따라서 구하는 두 수는 $-1-\sqrt{2}i$, $-1+\sqrt{2}i$이다.

교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 41

1 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=3$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=2^2-2\times3=-2$

(2) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{2}{3}$

2 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-4$

(1) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\frac{4^2-2\times(-4)}{-4}=-6$

(2) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=4^2-4\times(-4)=32$

3 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$이므로

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=3+1=4$

$(\alpha+\beta)\times\alpha\beta=3\times1=3$

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2-4x+3=0$

4 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-\frac{6}{2}=-3$, $\alpha\beta=-\frac{3}{2}$

이므로

$(\alpha+1)+(\beta+1)=\alpha+\beta+2=-3+2=-1$

$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1$

$=-\frac{3}{2}-3+1=-\frac{7}{2}$

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2+x-\frac{7}{2}=0$

5 이차방정식 $x^2+2x+5=0$의 근은 $x=-1\pm2i$이므로

$x^2+2x+5=\{x-(-1+2i)\}\{x-(-1-2i)\}$

$=(x+1-2i)(x+1+2i)$

6 이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 근은 $x=1\pm\sqrt{3}$이므로

$x^2-2x-2=\{x-(1+\sqrt{3})\}\{x-(1-\sqrt{3})\}$

$=(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})$

7 계수가 실수인 이차방정식의 한 근이 $2-i$이므로 다른 한 근은 $2+i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-i)+(2+i)=-a$, $(2-i)(2+i)=b$

$\therefore a=-4, b=5$

다른 풀이

$x=2-i$를 $x^2+ax+b=0$에 대입하면

$(2-i)^2+a(2-i)+b=0$

$\therefore (2a+b+3)-(a+4)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2a+b+3=0$, $a+4=0$ $\quad\therefore a=-4, b=5$

8 계수가 실수인 이차방정식의 한 근이 $1+\sqrt{3}i$이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{3}i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)=-a$

$(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=-ab$

$\therefore a=-2, b=2$

다른 풀이

$x=1+\sqrt{3}i$를 $x^2+ax-ab=0$에 대입하면

$(1+\sqrt{3}i)^2+a(1+\sqrt{3}i)-ab=0$

$\therefore (a-ab-2)+(a+2)\sqrt{3}i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a-ab-2=0$, $a+2=0$ $\quad\therefore a=-2, b=2$

08~09강 족집게 기출문제

p. 42~45

1 ⑤	2 ②	3 ③	4 ①	5 ①
6 ③	7 -3	8 ⑤	9 ③	10 ④
11 ②	12 ⑤	13 $6\sqrt{2}$	14 ③	15 ③
16 ①	17 -1	18 1	19 ②	20 ②
21 ①	22 ⑤	23 ④	24 ③	
25 (1) -4 (2) 서로 다른 두 허근		26 $\frac{1}{2}$	27 -3	

1 ① $x^2-8x+15=0$에서

$(x-3)(x-5)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=5$

② $x^2+3x+4=0$에서 근의 공식을 이용하면

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times4}}{2\times1}=\dfrac{-3\pm\sqrt{7}i}{2}$

③ $2x^2-4x+3=0$에서 근의 공식을 이용하면

$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-2\times3}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{2}i}{2}$

④ 주어진 이차방정식의 양변을 $\sqrt{2}$로 나누면

$x^2-\sqrt{6}x-2=0$

이 이차방정식에서 근의 공식을 이용하면

$x=\dfrac{-(-\sqrt{6})\pm\sqrt{(-\sqrt{6})^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}$

$=\dfrac{\sqrt{6}\pm\sqrt{14}}{2}$

⑤ 주어진 이차방정식의 양변에 10을 곱하면

$2x^2+x-6=0$, $(x+2)(2x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

2 x에 대한 이차방정식 $ax^2-3x+2a=5x-1$의 한 근이 -1이므로 $x=-1$을 대입하면

$a+3+2a=-5-1$

$\therefore a=-3$

x에 대한 이차방정식 $bx^2-abx+b+1=0$의 한 근이 $a+1=-2$이므로 $x=-2$를 대입하면

$4b-6b+b+1=0$

$\therefore b=1$

3 이차방정식 $\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{x^2}=2x^2-3$에서

$|x+1|+|x|=2x^2-3$

(i) $x<-1$일 때

$-(x+1)-x=2x^2-3$이므로

$2x^2+2x-2=0$, $x^2+x-1=0$

$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

이때 $x<-1$이므로

$x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

(ii) $-1\le x<0$일 때

$x+1-x=2x^2-3$이므로

$2x^2-4=0$, $2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$

$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

이때 $-1\le x<0$이므로 근은 없다.

(iii) $x\ge0$일 때

$x+1+x=2x^2-3$이므로

$2x^2-2x-4=0$, $2(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

이때 $x\ge0$이므로 $x=2$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 이차방정식의 근은

$x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=2$

4 ① 이차방정식 $x^2+2x+2=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=1^2-1\times2=-1<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

② 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=3^2-4\times1\times1=5>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

③ 이차방정식 $x^2-6x+3=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-1\times3=6>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

④ 이차방정식 $2x^2-5x+1=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-5)^2-4\times2\times1=17>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

⑤ 이차방정식 $3x^2-2x-2=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-3\times(-2)=7>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 허근을 갖는 이차방정식은 ①이다.

5 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=b^2-4ac=(a+c)^2-4ac=(a-c)^2\ge0$

따라서 주어진 이차방정식은 실근을 갖는다.

6 이차방정식 $x^2-2(k-1)x+k^2-k=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-(k^2-k)>0$, $-k+1>0$ $\quad\therefore k<1$

7 이차방정식 $3x^2-6x-a=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$\dfrac{D_1}{4}=(-3)^2-3\times(-a)\ge0$, $9+3a\ge0$ $\quad\therefore a\ge-3$

이차방정식 $x^2+2bx+b^2+b+1=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$\dfrac{D_2}{4}=b^2-(b^2+b+1)<0$, $-b-1<0$ $\quad\therefore b>-1$

이때 a, b는 정수이므로 $a+b$의 최솟값은

$-3+0=-3$

8 이차방정식 $x^2-2(k+a)x+k^2+4k-2b=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=\{-(k+a)\}^2-(k^2+4k-2b)=0$
$2ak+a^2-4k+2b=0$
이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로 k에 대하여 정리하면
$2(a-2)k+a^2+2b=0$
따라서 $a-2=0$, $a^2+2b=0$이므로
$a=2$, $b=-2$
$\therefore a-b=4$

9 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=\frac{4}{3}$
$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=2^3-3\times\frac{4}{3}\times2$
$=8-8=0$

10 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=(-3)^2-4\times1\times1=5>0$
또 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$
즉, $D>0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$이므로
$\alpha>0$, $\beta>0$
$\therefore \sqrt{\alpha}>0$, $\sqrt{\beta}>0$
$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=3+2\times1=5$
$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\pm\sqrt{5}$
그런데 $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}>0$이므로
$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{5}$

11 이차방정식 $x^2+5x+1=0$의 두 근이 α, β이므로
$\alpha^2+5\alpha+1=0$, $\beta^2+5\beta+1=0$
또 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha\beta=1$
$\therefore (\alpha^2+7\alpha+1)(\beta^2+7\beta+1)$
$=\{(\alpha^2+5\alpha+1)+2\alpha\}\{(\beta^2+5\beta+1)+2\beta\}$
$=2\alpha\times2\beta=4\alpha\beta$
$=4\times1=4$

12 두 근을 α, $\alpha+2$라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+(\alpha+2)=12$, $\alpha(\alpha+2)=k$
$\therefore \alpha=5$, $k=35$

다른 풀이

두 근을 α, β라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=12$, $\alpha\beta=k$
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에서
$2^2=12^2-4k$
$\therefore k=35$

13 두 근을 α, $2\alpha(\alpha\neq0)$라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+2\alpha=m$, 즉 $3\alpha=m$ ······ ㉠
$\alpha\times2\alpha=16$, 즉 $\alpha^2=8$ ······ ㉡
㉡에서 $\alpha=\pm2\sqrt{2}$
그런데 $m>0$이므로 $\alpha>0$ $\therefore \alpha=2\sqrt{2}$
이것을 ㉠에 대입하면 $m=6\sqrt{2}$

14 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-k$, $\alpha\beta=k+3$
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$에서
$2=(-k)^2-2(k+3)$
$k^2-2k-8=0$, $(k+2)(k-4)=0$
$\therefore k=-2$ 또는 $k=4$
그런데 $k>0$이므로 $k=4$

15 이차방정식 $2x^2-ax-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=\frac{a}{2}$ ······ ㉠
$\alpha\beta=-\frac{1}{2}$ ······ ㉡
또 이차방정식 $x^2+2x+b=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여
$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-2$ ······ ㉢
$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=b$ ······ ㉣
㉢에서 $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-2$ $\therefore \alpha+\beta=-2\alpha\beta$
이 식에 ㉠, ㉡을 대입하면
$\frac{a}{2}=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\therefore a=2$
㉣에서 $b\times\alpha\beta=1$
이 식에 ㉡을 대입하면
$b\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1$ $\therefore b=-2$
$\therefore a+b=0$

16 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=1$이므로
$\frac{\alpha+1}{\alpha}+\frac{\beta+1}{\beta}=\frac{\beta(\alpha+1)+\alpha(\beta+1)}{\alpha\beta}$
$=\frac{2\alpha\beta+(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{2\times1+4}{1}=6$
$\frac{\alpha+1}{\alpha}\times\frac{\beta+1}{\beta}=\frac{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}{\alpha\beta}=\frac{1+4+1}{1}=6$
따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-6x+6=0$

17 규리는 q의 값을 바르게 보고 풀었으므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은
$q=(-5)\times(-1)=5$
은지는 p의 값을 바르게 보고 풀었으므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은
$-p=(3+2i)+(3-2i)$ $\therefore p=-6$
$\therefore p+q=-1$

18 이차항의 계수가 1인 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 4이므로 두 근의 곱을 c (c는 상수)라고 하면

$f(x)=x^2-4x+c$

$\therefore f(2x+1)=(2x+1)^2-4(2x+1)+c$

$\qquad\qquad\quad =4x^2-4x-3+c$

따라서 이차방정식 $f(2x+1)=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$-\frac{-4}{4}=1$

다른 풀이

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 이차방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근은 $2x+1=\alpha$ 또는 $2x+1=\beta$에서

$x=\frac{\alpha-1}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta-1}{2}$

따라서 이차방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합은

$\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}$

$\qquad\qquad\quad =\frac{4-2}{2}=1$

19 계수가 실수인 이차방정식의 한 근이 $3+i$이므로 다른 한 근은 $3-i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(3+i)+(3-i)=-p$

$(3+i)(3-i)=q$

$\therefore p=-6,\ q=10$

$\therefore p+q=4$

20 계수가 유리수인 이차방정식의 한 근이 $b-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $b+\sqrt{3}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(b-\sqrt{3})+(b+\sqrt{3})=4$

$(b-\sqrt{3})(b+\sqrt{3})=a$

$\therefore a=1,\ b=2$

$\therefore b-a=1$

21 이차방정식 $x^2-4x+6=0$에서 근의 공식을 이용하면

$x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-6}=2\pm\sqrt{2}i$

$\therefore x^2-4x+6=\{x-(2+\sqrt{2}i)\}\{x-(2-\sqrt{2}i)\}$

$\qquad\qquad\qquad =(x-2-\sqrt{2}i)(x-2+\sqrt{2}i)$

따라서 두 일차식의 합은

$(x-2-\sqrt{2}i)+(x-2+\sqrt{2}i)=2x-4$

22 $f(\alpha)=3$에서 $\quad f(\alpha)-3=0$

$f(\beta)=3$에서 $\quad f(\beta)-3=0$

따라서 α, β는 이차방정식 $f(x)-3=0$의 두 근이다.

$f(x)-3=0$에서

$(x^2-2x-2)-3=0$

$\therefore x^2-2x-5=0$

이 이차방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-5$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$\qquad\qquad\quad =2^3-3\times(-5)\times 2$

$\qquad\qquad\quad =38$

23 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 p, q이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$p+q=-a,\ pq=b$

이차방정식 $bx^2-ax+1=0$의 두 근이 r, s이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$r+s=-\frac{-a}{b}=-\frac{p+q}{pq}=\left(-\frac{1}{p}\right)+\left(-\frac{1}{q}\right)$

$rs=\frac{1}{b}=\frac{1}{pq}=\left(-\frac{1}{p}\right)\times\left(-\frac{1}{q}\right)$

$\therefore r=-\frac{1}{p},\ s=-\frac{1}{q}$ 또는 $r=-\frac{1}{q},\ s=-\frac{1}{p}$

$-1<p<0$에서 $\quad -\frac{1}{p}>1$

$0<q<1$에서 $\quad -\frac{1}{q}<-1$

이때 $r<s$이므로

$r=-\frac{1}{q},\ s=-\frac{1}{p}$

따라서 $r<-1$, $s>1$이고, $-1<p<0<q<1$이므로

$r<-1<p<0<q<1<s$

$\therefore r<p<q<s$

24 주어진 이차식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-2xy+ky^2-2x+3y=x^2-2(y+1)x+ky^2+3y$

x에 대한 이차방정식 $x^2-2(y+1)x+ky^2+3y=0$의 근을 근의 공식을 이용하여 구하면

$x=y+1\pm\sqrt{(y+1)^2-(ky^2+3y)}$

$\;\; =y+1\pm\sqrt{(1-k)y^2-y+1} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 주어진 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 ㉠의 근호 안의 식 $(1-k)y^2-y+1$이 완전제곱식이어야 한다.

y에 대한 이차방정식 $(1-k)y^2-y+1=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-1)^2-4\times(1-k)\times 1=0$

$1-4+4k=0$

$\therefore k=\frac{3}{4}$

25 (1) 이차방정식 $x^2+4x-k=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$\frac{D_1}{4}=2^2-(-k)=0 \qquad \cdots\cdots$ (가)

$4+k=0$

$\therefore k=-4 \qquad \cdots\cdots$ (나)

(2) $k=-4$를 이차방정식 $(1-2k)x^2-kx+1=0$에 대입하면

$9x^2+4x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라고 하면

$\frac{D_2}{4}=2^2-9=-5<0$ …… (다)

따라서 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다. …… (라)

채점 기준	배점
(가) $x^2+4x-k=0$이 중근을 갖는 조건을 구한다.	2점
(나) k의 값을 구한다.	1점
(다) $(1-2k)x^2-kx+1=0$의 판별식의 부호를 알아본다.	2점
(라) $(1-2k)x^2-kx+1=0$은 어떤 근을 갖는지 구한다.	1점

26 이차방정식 $x^2-3x+6=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-3\alpha+6=0$, $\beta^2-3\beta+6=0$ …… (가)

또 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=6$ …… (나)

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha^2-4\alpha+6}+\frac{\alpha}{\beta^2-4\beta+6}$$
$$=\frac{\beta}{(\alpha^2-3\alpha+6)-\alpha}+\frac{\alpha}{(\beta^2-3\beta+6)-\beta}$$
$$=\frac{\beta}{-\alpha}+\frac{\alpha}{-\beta}=-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$$
$$=-\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$ …… (다)
$$=-\frac{3^2-2\times6}{6}$$
$$=\frac{1}{2}$$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) $\alpha^2-3\alpha+6=0$, $\beta^2-3\beta+6=0$임을 안다.	2점
(나) $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한다.	2점
(다) 주어진 식을 변형한다.	2점
(라) 주어진 식의 값을 구한다.	1점

27 두 근이 연속하는 정수이므로 두 근을 α, $\alpha+1$(α는 정수)로 놓을 수 있다. …… (가)

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+1)=2k+1$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+1)=k^2+2k+3$ …… ㉡ …… (나)

㉠에서 $2\alpha+1=2k+1$

$\therefore \alpha=k$

$\alpha=k$를 ㉡에 대입하면

$k(k+1)=k^2+2k+3$

$\therefore k=-3$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 두 근을 α, $\alpha+1$로 놓는다.	2점
(나) 근과 계수의 관계를 이용하여 식을 세운다.	2점
(다) k의 값을 구한다.	3점

10강 이차함수와 이차방정식

확인 문제 p. 46

1 (1) 이차방정식 $x^2+x-2=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=1^2-4\times1\times(-2)=9>0$

따라서 이차함수 $y=x^2+x-2$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 이차방정식 $x^2-2x+1=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times1=0$

따라서 이차함수 $y=x^2-2x+1$의 그래프는 x축과 한 점에서 만난다(접한다).

(3) 이차방정식 $x^2-4x+5=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times5=-1<0$

따라서 이차함수 $y=x^2-4x+5$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

2 (1) 이차방정식 $x^2-3x+1=x+2$, 즉 $x^2-4x-1=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times(-1)=5>0$

따라서 이차함수 $y=x^2-3x+1$의 그래프와 직선 $y=x+2$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 이차방정식 $x^2-3x+1=3x-8$, 즉 $x^2-6x+9=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\times9=0$

따라서 이차함수 $y=x^2-3x+1$의 그래프와 직선 $y=3x-8$은 한 점에서 만난다(접한다).

(3) 이차방정식 $x^2-3x+1=2x-7$, 즉 $x^2-5x+8=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-5)^2-4\times1\times8=-7<0$

따라서 이차함수 $y=x^2-3x+1$의 그래프와 직선 $y=2x-7$은 만나지 않는다.

교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 47

1 이차방정식 $-x^2+2x+k=0$, 즉 $x^2-2x-k=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times(-k)=1+k$

(1) 이차함수 $y=-x^2+2x+k$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 하므로

$1+k>0$ $\quad\therefore k>-1$

(2) 이차함수 $y=-x^2+2x+k$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나려면 $D=0$이어야 하므로

$1+k=0$ $\quad\therefore k=-1$

(3) 이차함수 $y=-x^2+2x+k$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 $D<0$이어야 하므로
$1+k<0 \quad \therefore k<-1$

2 이차함수 $y=x^2-kx+k+3$의 그래프가 x축에 접하려면 이차방정식 $x^2-kx+k+3=0$의 판별식을 D라고 할 때
$D=(-k)^2-4\times1\times(k+3)=0$
$k^2-4k-12=0$, $(k+2)(k-6)=0$
$\therefore k=-2$ 또는 $k=6$

3 이차방정식 $x^2-4x+1=-x+k$, 즉 $x^2-3x+1-k=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=(-3)^2-4\times1\times(1-k)=4k+5$
(1) 이차함수 $y=x^2-4x+1$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 하므로
$4k+5>0 \quad \therefore k>-\frac{5}{4}$
(2) 이차함수 $y=x^2-4x+1$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 한 점에서 만나려면 $D=0$이어야 하므로
$4k+5=0 \quad \therefore k=-\frac{5}{4}$
(3) 이차함수 $y=x^2-4x+1$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 만나지 않으려면 $D<0$이어야 하므로
$4k+5<0 \quad \therefore k<-\frac{5}{4}$

4 이차함수 $y=x^2-3x+2k$의 그래프가 직선 $y=x-5$와 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2-3x+2k=x-5$, 즉 $x^2-4x+2k+5=0$의 판별식을 D라고 할 때
$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times(2k+5)<0$
$-2k-1<0$
$\therefore k>-\frac{1}{2}$

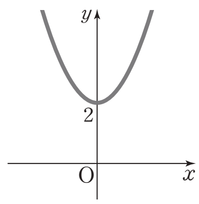
5 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 1, 3이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 1, 3이다.
(두 근의 합)$=-a=1+3=4$
(두 근의 곱)$=b=1\times3=3$
따라서 $a=-4$, $b=3$이므로
$a-b=-4-3=-7$

6 이차함수 $y=-x^2+5$의 그래프와 직선 $y=ax+b$의 교점의 x좌표가 -4, 2이므로 이차방정식 $-x^2+5=ax+b$, 즉 $x^2+ax+b-5=0$의 두 근이 -4, 2이다.
(두 근의 합)$=-a=-4+2=-2$
(두 근의 곱)$=b-5=(-4)\times2=-8$
따라서 $a=2$, $b=-3$이므로
$a+b=2-3=-1$

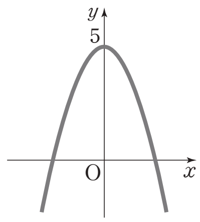
11강 이차함수의 최대·최소

확인 문제 p. 48

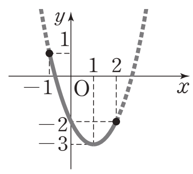
1 (1) $y=x^2+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x=0$일 때 최솟값은 2이고, 최댓값은 없다.



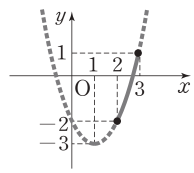
(2) $y=-x^2+5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x=0$일 때 최댓값은 5이고, 최솟값은 없다.



2 (1) $-1\le x\le 2$에서 $y=(x-1)^2-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x=-1$일 때 최댓값은 1이고, $x=1$일 때 최솟값은 -3이다.

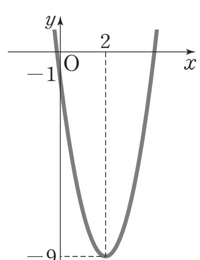


(2) $2\le x\le 3$에서 $y=(x-1)^2-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x=3$일 때 최댓값은 1이고, $x=2$일 때 최솟값은 -2이다.

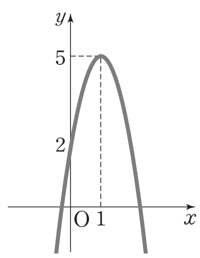


교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 49

1 (1) $y=2x^2-8x-1$
$=2(x-2)^2-9$
이므로 주어진 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x=2$일 때 최솟값은 -9이고, 최댓값은 없다.



(2) $y=-3x^2+6x+2$
$=-3(x-1)^2+5$
이므로 주어진 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x=1$일 때 최댓값은 5이고, 최솟값은 없다.

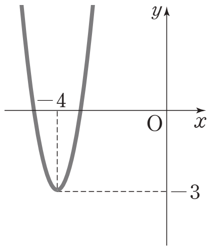


2 (1) $y=4x^2+32x+61$

$=4(x+4)^2-3$

이므로 주어진 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=-4$일 때 최솟값은 -3이고, 최댓값은 없다.

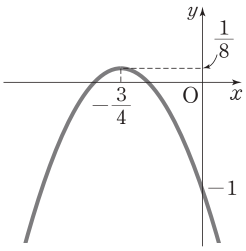


(2) $y=-2x^2-3x-1$

$=-2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$

이므로 주어진 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=-\frac{3}{4}$일 때 최댓값은 $\frac{1}{8}$이고, 최솟값은 없다.

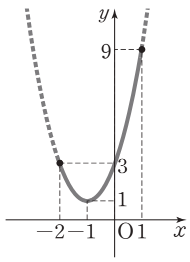


3 (1) $y=2x^2+4x+3$

$=2(x+1)^2+1$

이므로 $-2\le x\le 1$에서 주어진 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=1$일 때 최댓값은 9이고, $x=-1$일 때 최솟값은 1이다.

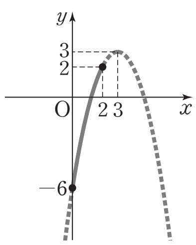


(2) $y=-x^2+6x-6$

$=-(x-3)^2+3$

이므로 $0\le x\le 2$에서 주어진 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=2$일 때 최댓값은 2이고, $x=0$일 때 최솟값은 -6이다.

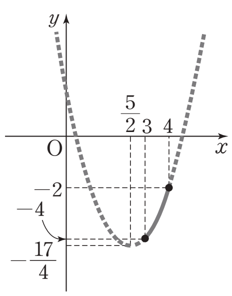


4 (1) $y=x^2-5x+2$

$=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{17}{4}$

이므로 $3\le x\le 4$에서 주어진 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=4$일 때 최댓값은 -2이고, $x=3$일 때 최솟값은 -4이다.

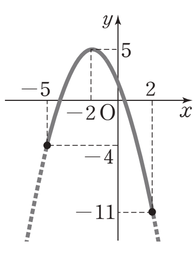


(2) $y=-x^2-4x+1$

$=-(x+2)^2+5$

이므로 $-5\le x\le 2$에서 주어진 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=-2$일 때 최댓값은 5이고, $x=2$일 때 최솟값은 -11이다.



5 $y=x^2+2x-k$

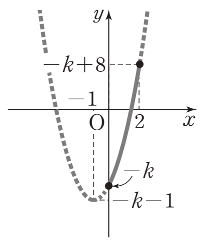
$=(x+1)^2-k-1$

이므로 $0\le x\le 2$에서 주어진 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$x=0$일 때 최솟값 -5를 가지므로

$-k=-5 \qquad \therefore k=5$

따라서 주어진 이차함수는 $x=2$일 때 최댓값을 가지므로 구하는 최댓값은 3이다.



6 $y=-2x^2-4x+k$

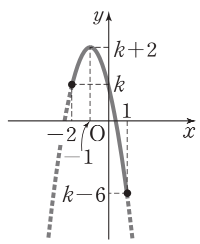
$=-2(x+1)^2+k+2$

이므로 $-2\le x\le 1$에서 주어진 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$x=-1$일 때 최댓값 4를 가지므로

$k+2=4 \qquad \therefore k=2$

따라서 주어진 이차함수는 $x=1$일 때 최솟값을 가지므로 구하는 최솟값은 -4이다.



7 철망의 길이는 12 m이므로 직사각형 모양의 울타리의 세로의 길이를 x m라고 하면 가로의 길이는 $(12-2x)$ m이다.

이때 $x>0$, $12-2x>0$이므로

$0<x<6$

울타리의 넓이를 S m^{2}라고 하면

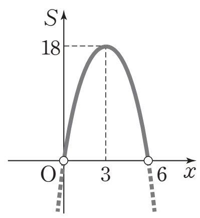
$S=x(12-2x)$

$=-2x^2+12x$

$=-2(x-3)^2+18$

이므로 $0<x<6$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=3$일 때 최댓값은 18이므로 세로의 길이가 3 m, 가로의 길이가 6 m일 때, 울타리의 넓이의 최댓값은 18 m^{2}이다.



8 물받이의 높이는 색칠한 직사각형의 세로의 길이와 같다. 철판의 너비가 20 cm이므로 물받이의 높이를 x cm라고 하면 색칠한 직사각형의 가로의 길이는

$(20-2x)$ cm

이때 $x>0$, $20-2x>0$이므로

$0<x<10$

색칠한 직사각형의 넓이를 S cm^{2}라고 하면

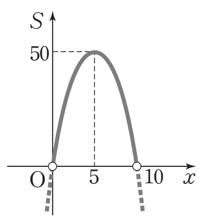
$S=x(20-2x)$

$=-2x^2+20x$

$=-2(x-5)^2+50$

이므로 $0<x<10$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=5$일 때 최댓값은 50이므로 물받이의 높이가 5 cm일 때, 색칠한 직사각형의 넓이는 최대가 된다.



10~11강 족집게 기출문제

p. 50~53

1 ⑤	2 ②	3 ①	4 2	5 ①
6 ④	7 ②	8 ③	9 ③	10 ④
11 ⑤	12 ③	13 ④	14 ②	15 ①
16 ④	17 ⑤	18 ④	19 ③	20 ②
21 6	22 42	23 0		
24 (1) -10 (2) -10		25 4000원		

1 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -2, 3이므로 -2, 3은 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이다.
근과 계수의 관계에 의하여
$-2+3=-a$, $(-2)\times3=b$
따라서 $a=-1$, $b=-6$이므로
$4a-b=2$

2 이차함수 $y=x^2+kx-5$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 α, β라고 하면 α, β는 이차방정식 $x^2+kx-5=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-k$, $\alpha\beta=-5$
이때 두 교점 사이의 거리가 6이므로
$|\alpha-\beta|=6$
양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=36$
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에서
$36=(-k)^2-4\times(-5)$, $k^2=16$
$\therefore k=-4$ 또는 $k=4$
그런데 $k>0$이므로 $k=4$

3 이차방정식 $x^2+(2k-1)x+k^2=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=(2k-1)^2-4k^2>0$, $-4k+1>0$
$\therefore k<\frac{1}{4}$

4 이차방정식 $x^2-2(a+k)x+k^2+2k+b=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=\{-(a+k)\}^2-(k^2+2k+b)=0$
$a^2+2ak-2k-b=0$
이 식이 k에 대한 항등식이므로 k에 대하여 정리하면
$(2a-2)k+a^2-b=0$
따라서 $2a-2=0$, $a^2-b=0$이므로 $a=1$, $b=1$
$\therefore a+b=2$

5 이차방정식 $-x^2+2x+k-1=-2x+1$, 즉
$x^2-4x-k+2=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times(-k+2)>0$
$k+2>0$ $\therefore k>-2$
따라서 실수 k의 값이 될 수 없는 것은 ①이다.

6 이차방정식 $x^2+5=2x+a$, 즉 $x^2-2x-a+5=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times(-a+5)<0$
$a-4<0$ $\therefore a<4$
따라서 자연수 a는 1, 2, 3의 3개이다.

7 구하는 직선의 기울기는 -2이므로 직선의 방정식을 $y=-2x+k$ (k는 상수)라고 하자.
이 직선이 이차함수 $y=-x^2+2x-3$의 그래프와 접하므로 이차방정식 $-x^2+2x-3=-2x+k$, 즉
$x^2-4x+k+3=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times(k+3)=0$
$-k+1=0$ $\therefore k=1$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y=-2x+1$

8 주어진 그림에서 이차함수 $y=x^2+mx+1$의 그래프와 직선 $y=-x+n$의 교점의 x좌표가 -3, 1이므로 -3, 1은 이차방정식 $x^2+mx+1=-x+n$, 즉
$x^2+(m+1)x+1-n=0$의 두 근이다.
근과 계수의 관계에 의하여
$-3+1=-(m+1)$, $(-3)\times1=1-n$
따라서 $m=1$, $n=4$이므로
$m+n=5$

9 직선이 두 이차함수의 그래프의 두 교점을 지나므로
$ax^2-bx+9=-x+3$에서 $ax^2-(b-1)x+6=0$
$2x^2-5x-3=-x+3$에서 $2x^2-4x-6=0$
위 두 이차방정식의 근이 같다.
$\therefore a=-2$, $b-1=-4$
따라서 $a=-2$, $b=-3$이므로
$a-b=-2-(-3)=1$

10 $y=2x^2-4kx-2k+3$
$=2(x-k)^2-2k^2-2k+3$
이므로 주어진 이차함수는 $x=k$에서
최솟값 $-2k^2-2k+3$을 갖는다.
즉, $f(k)=-2k^2-2k+3$이므로
$f(k)=-2k^2-2k+3=-2\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{2}$
따라서 $f(k)$의 최댓값은 $k=-\frac{1}{2}$일 때 $\frac{7}{2}$이다.

11 x의 값의 범위가 실수 전체인 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 $x=1$에서 최솟값 2를 가지므로 꼭짓점의 좌표는 (1, 2)

이다.

$\therefore f(x)=a(x-1)^2+2$

주어진 조건에서 $f(2)=4$이므로

$a+2=4 \qquad \therefore a=2$

$\therefore f(x)=2(x-1)^2+2$

$\qquad\quad =2x^2-4x+4$

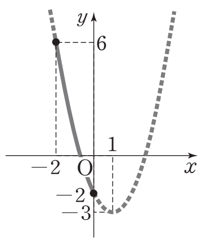
따라서 $a=2$, $b=-4$, $c=4$이므로

$2a+b+c=4$

12 $y=x^2-2x-2$

$\quad =(x-1)^2-3$

이므로 $-2\le x\le 0$에서 주어진 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=-2$일 때 최댓값은 6이고, $x=0$일 때 최솟값은 -2이므로

$M=6$, $m=-2$

$\therefore M-m=8$

13 $f(x)=ax^2+bx+c\,(a\ne 0)$라고 하면

$f(0)=1$이므로 $\quad c=1$

$\therefore f(x)=ax^2+bx+1(a\ne 0)$

$f(x+1)=f(x)+2x$이므로

$a(x+1)^2+b(x+1)+1=ax^2+bx+1+2x$

$\therefore ax^2+(2a+b)x+a+b+1=ax^2+(b+2)x+1$

이 식의 양변의 계수를 비교하면

$2a+b=b+2$, $a+b+1=1$

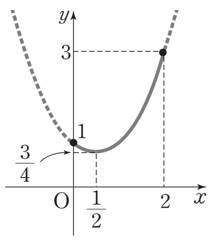
$\therefore a=1$, $b=-1$

따라서 구하는 이차함수의 식은

$f(x)=x^2-x+1$

$\qquad =\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

이므로 $0\le x\le 2$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=2$일 때 최댓값은 3이고, $x=\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $\frac{3}{4}$이므로

$M=3$, $m=\frac{3}{4}$

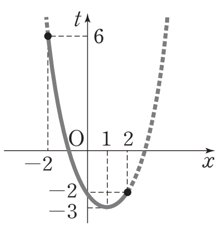
$\therefore M-4m=0$

14 $x^2-2x-2=t$로 놓으면

$t=x^2-2x-2$

$\quad =(x-1)^2-3$

이므로 $-2\le x\le 2$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 t의 값의 범위는

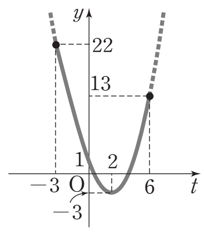
$-3\le t\le 6$

한편 주어진 함수식은

$y=t^2-4t+1$

$\quad =(t-2)^2-3$

이므로 $-3\le t\le 6$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $t=-3$일 때 최댓값은 22이고, $t=2$일 때 최솟값은 -3이므로

$M=22$, $m=-3$

$\therefore M+m=19$

15 $x+y=2$에서

$y=2-x \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $y\ge 0$이므로

$2-x\ge 0 \qquad \therefore x\le 2$

그런데 $x\ge 0$이므로

$0\le x\le 2$

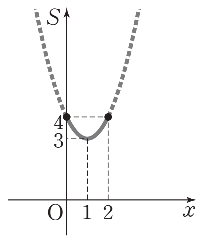
이때 $S=2x+y^2$이라 하고 ㉠을 대입하면

$S=2x+(2-x)^2$

$\quad =x^2-2x+4$

$\quad =(x-1)^2+3$

이므로 $0\le x\le 2$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=0$ 또는 $x=2$일 때 최댓값은 4이고, $x=1$일 때 최솟값은 3이므로

$M=4$, $m=3$

$\therefore M-m=1$

16 $4x+y^2=2$에서

$y^2=2-4x \qquad \cdots\cdots$ ㉠

그런데 $y^2\ge 0$이므로

$2-4x\ge 0$

$\therefore x\le\frac{1}{2}$

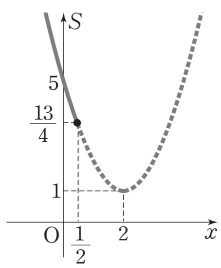
이때 $S=x^2+y^2+3$이라 하고 ㉠을 대입하면

$S=x^2+(2-4x)+3$

$\quad =x^2-4x+5$

$\quad =(x-2)^2+1$

이므로 $x\le\frac{1}{2}$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $\frac{13}{4}$

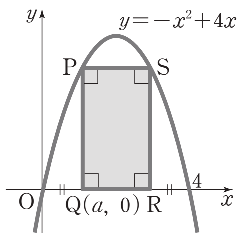
이다.

17 $y=-x^2+4x$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 구하면

$-x^2+4x=0$, $x(x-4)=0$

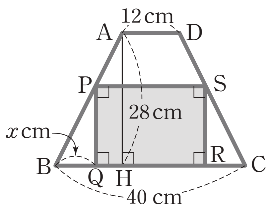
$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

오른쪽 그림과 같이 점 Q의 좌표를 $(a,\ 0)\,(0<a<2)$이라고 하면



$\overline{\mathrm{QR}}=4-2a$
$\overline{\mathrm{PQ}}=-a^2+4a$
직사각형 PQRS의 둘레의 길이를 l이라고 하면
$l=2(\overline{\mathrm{QR}}+\overline{\mathrm{PQ}})$
$=2(4-2a-a^2+4a)$
$=-2a^2+4a+8$
$=-2(a-1)^2+10$
이때 $0<a<2$이므로 $a=1$일 때 직사각형 PQRS의 둘레의 길이의 최댓값은 10이다.

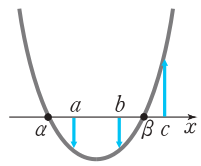
18 오른쪽 그림에서 선분 BH의 길이는



$\overline{\mathrm{BH}}=\dfrac{40-12}{2}=14\,(\mathrm{cm})$
이때 $\overline{\mathrm{BQ}}=x$ cm라고 하면
$\triangle\mathrm{BQP}\backsim\triangle\mathrm{BHA}$이므로
$\overline{\mathrm{BQ}}:\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{AH}}$
$x:14=\overline{\mathrm{PQ}}:28 \qquad \therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=2x\,(\mathrm{cm})$
그런데 점 P는 $\overline{\mathrm{AB}}$ 위에 있으므로 x의 값의 범위는
$0<x\le\overline{\mathrm{BH}} \qquad \therefore\ 0<x\le14$
직사각형 PQRS의 넓이를 $S\,\mathrm{cm}^2$라고 하면
$S=\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}=2x\times(40-2x)$
$=-4x^2+80x$
$=-4(x-10)^2+400$
따라서 $0<x\le14$이므로 $x=10$일 때 직사각형 PQRS의 넓이의 최댓값은 $400\,\mathrm{cm}^2$이다.

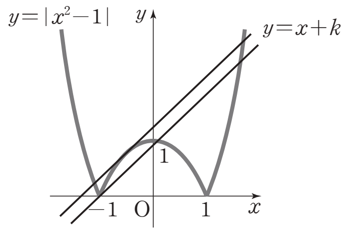
19 직사각형의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라고 하면 직사각형의 둘레의 길이는 200 cm이므로
$2x+2y=200,\ x+y=100$
$\therefore\ y=100-x$
이때 $y>0$이므로 $\quad 100-x>0$
$\therefore\ x<100$
그런데 $x>0$이므로 $\quad 0<x<100$
직사각형의 넓이를 $S\,\mathrm{cm}^2$라고 하면
$S=xy=x(100-x)$
$=-x^2+100x$
$=-(x-50)^2+2500$
따라서 $0<x<100$이므로 $x=50$일 때 직사각형의 넓이의 최댓값은 $2500\,\mathrm{cm}^2$이다.

20 이차방정식 $2(x-a)(x-b)=(x-c)^2$, 즉
$2(x-a)(x-b)-(x-c)^2=0$에서
$f(x)=2(x-a)(x-b)-(x-c)^2$이라고 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 α, β이다.
이때 $y=f(x)$의 그래프는 x^2의 계수가 1이므로 아래로 볼록하다.
$f(a)=-(a-c)^2$에서 $(a-c)^2>0$이므로
$f(a)<0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
$f(b)=-(b-c)^2$에서 $(b-c)^2>0$이므로
$f(b)<0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡
$f(c)=2(c-a)(c-b)$에서 $c-a>0,\ c-b>0$이므로
$f(c)>0 \qquad \cdots\cdots$ ㉢
따라서 ㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



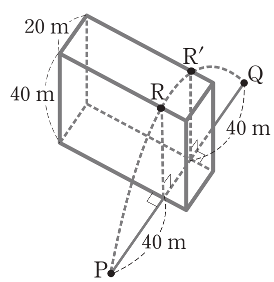
$\alpha<a<b<\beta<c$

21 방정식 $|x^2-1|=x+k$가 서로 다른 네 실근을 가지려면 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 교점이 네 개이어야 한다.
따라서 다음 그림과 같이 직선 $y=x+k$가 이차함수 $y=-x^2+1$의 그래프에 접하는 직선과 점 $(-1,\ 0)$을 지나는 직선 사이에 있어야 한다.



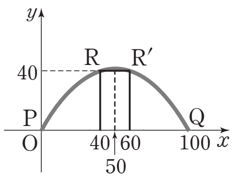
(i) $y=-x^2+1$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때
이차방정식 $-x^2+1=x+k$, 즉 $x^2+x+k-1=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=1^2-4\times1\times(k-1)=0$
$-4k+5=0 \qquad \therefore\ k=\dfrac{5}{4}$
(ii) 직선 $y=x+k$가 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때
$0=-1+k \qquad \therefore\ k=1$
(i), (ii)에 의하여 $\quad 1<k<\dfrac{5}{4}$
따라서 $\alpha=1$, $\beta=\dfrac{5}{4}$이므로
$\alpha+4\beta=6$

22 오른쪽 그림과 같이 건물의 꼭대기의 두 지점을 각각 R, R′이라고 하면 공이 그리는 포물선의 최고점의 높이는 공이 점 R, R′을 지날 때보다는 높아야 한다.



이때 점 P를 원점, 직선 PQ를 x축으로 하여 네 점 P, R,

R′, Q를 지나는 포물선을 좌표 평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



공이 그리는 포물선을 나타내는 이차함수의 식을 $y=f(x)$라고 하면 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 0, 100이므로

$f(x)=ax(x-100)(a<0)$

으로 놓을 수 있다.

이 이차함수의 그래프가 점 R(40, 40)을 지나면

$40(40-100)a=40 \qquad \therefore a=-\dfrac{1}{60}$

$\therefore f(x)=-\dfrac{1}{60}x(x-100)$

$\qquad\quad =-\dfrac{1}{60}(x-50)^2+\dfrac{125}{3}$

$0\le x\le 100$이므로 $x=50$일 때 최댓값은 $\dfrac{125}{3}$이다.

따라서 $h>\dfrac{125}{3}$이므로 자연수 h의 최솟값은 42이다.

23 이차함수 $y=x^2+x+a+b$의 그래프가 점 $(-1, 3)$을 지나므로

$3=1-1+a+b$

$\therefore a+b=3$ …… ㉠ …… (가)

이차함수 $y=x^2+x+a+b$의 그래프와 직선 $y=-x+2b$가 접하므로 이차방정식 $x^2+x+a+b=-x+2b$, 즉 $x^2+2x+a-b=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=1^2-1\times(a-b)=0$

$\therefore a-b=1$ …… ㉡ …… (나)

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$ …… (다)

$\therefore a-2b=0$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) 그래프가 지나는 점을 이용하여 식을 세운다.	2점
(나) 직선과의 위치 관계를 이용하여 식을 세운다.	2점
(다) a, b의 값을 구한다.	1점
(라) $a-2b$의 값을 구한다.	1점

24 (1) $y=3x^2+6x+k$

$\quad =3(x+1)^2+k-3$

이므로 $0\le x\le 2$에서 이 이차함수는 $x=2$일 때 최댓값을 갖는다. …… (가)

최댓값이 14이므로

$27+k-3=14 \qquad \therefore k=-10$ …… (나)

(2) 이차함수의 식에 $k=-10$을 대입하면

$y=3(x+1)^2-13$이므로 $0\le x\le 2$에서 이 이차함수는 $x=0$일 때 최솟값을 갖는다. …… (다)

따라서 구하는 최솟값은

$3-13=-10$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) 최댓값을 갖는 x의 값을 구한다.	2점
(나) k의 값을 구한다.	1점
(다) 최솟값을 갖는 x의 값을 구한다.	2점
(라) 최솟값을 구한다.	1점

25 튀김 1인분의 가격을 $50x$원 올리면 튀김 1인분의 가격은 $(3000+50x)$원, 하루 판매량은 $(100-x)$인분이 되므로 하루 판매 금액을 y원이라고 하면

$y=(3000+50x)(100-x)$ …… (가)

$\ =-50x^2+2000x+300000$

$\ =-50(x-20)^2+320000$

즉, $x=20$일 때 하루 판매 금액이 최대가 된다. …… (나)

이때의 튀김 1인분의 가격은

$3000+50x=4000$(원) …… (다)

채점 기준	배점
(가) 하루 판매 금액에 대한 이차함수의 식을 세운다.	3점
(나) 하루 판매 금액이 최대가 되는 x의 값을 구한다.	2점
(다) 하루 판매 금액이 최대가 되는 튀김 1인분의 가격을 구한다.	2점

12강 삼차방정식과 사차방정식

확인 문제 p. 54

1 (1) $x^3-8=0$에서 $(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

(2) $x^4+27x=0$에서 $x(x^3+27)=0$

$x(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

2 (1) $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{-2}{2}=1$

(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-\dfrac{3}{2}$

(3) $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{-5}{2}=\dfrac{5}{2}$

3 $x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

따라서 ω는 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$\therefore \omega^4+\omega^2+1=\omega^3\times\omega+\omega^2+1$

$\qquad\qquad\qquad =\omega+\omega^2+1=0$

교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제 p. 55

1 (1) $P(x)=x^3-x^2-17x-15$라고 하면 $P(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -1 & -17 & -15 \\ & & -1 & 2 & 15 \\ \hline & 1 & -2 & -15 & 0 \end{array}$$

$P(x)=(x+1)(x^2-2x-15)$
$\quad=(x+1)(x+3)(x-5)$
따라서 주어진 방정식은
$(x+1)(x+3)(x-5)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=5$

(2) $P(x)=2x^3-3x-1$이라고 하면 $P(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ & & -2 & 2 & 1 \\ \hline & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

$P(x)=(x+1)(2x^2-2x-1)$
따라서 주어진 방정식은
$(x+1)(2x^2-2x-1)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

(3) $P(x)=x^4-2x^3-x^2-4x+12$라고 하면 $P(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -2 & -1 & -4 & 12 \\ & & 2 & 0 & -2 & -12 \\ \hline 2 & 1 & 0 & -1 & -6 & 0 \\ & & 2 & 4 & 6 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 & \end{array}$$

◀ $Q(x)=x^3-x-6$이라고 하면 $Q(2)=0$

$P(x)=(x-2)^2(x^2+2x+3)$
따라서 주어진 방정식은
$(x-2)^2(x^2+2x+3)=0$
$\therefore x=2$(중근) 또는 $x=-1\pm\sqrt{2}i$

2 (1) $P(x)=x^3-3x^2+2$라고 하면 $P(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ & & 1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2-2x-2)$
따라서 주어진 방정식은
$(x-1)(x^2-2x-2)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}$

(2) $P(x)=2x^3-9x^2+7x+6$이라고 하면 $P(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -9 & 7 & 6 \\ & & 4 & -10 & -6 \\ \hline & 2 & -5 & -3 & 0 \end{array}$$

$P(x)=(x-2)(2x^2-5x-3)$
$\quad=(x-2)(x-3)(2x+1)$
따라서 주어진 방정식은
$(x-2)(x-3)(2x+1)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

(3) $P(x)=x^4-9x^3+13x^2+9x-14$라고 하면 $P(-1)=0$, $P(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -9 & 13 & 9 & -14 \\ & & -1 & 10 & -23 & 14 \\ \hline 1 & 1 & -10 & 23 & -14 & 0 \\ & & 1 & -9 & 14 & \\ \hline & 1 & -9 & 14 & 0 & \end{array}$$

$P(x)=(x+1)(x-1)(x^2-9x+14)$
$\quad=(x+1)(x-1)(x-2)(x-7)$
따라서 주어진 방정식은
$(x+1)(x-1)(x-2)(x-7)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=7$

3 (1) $x^2-2x=X$로 놓으면 주어진 방정식은
$X^2+2X-3=0$, $(X+3)(X-1)=0$
$X=x^2-2x$를 다시 대입하면
$(x^2-2x+3)(x^2-2x-1)=0$
$\therefore x=1\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

(2) $x^2-4x=X$로 놓으면 주어진 방정식은
$(X+2)^2-6X-19=0$
$X^2-2X-15=0$, $(X+3)(X-5)=0$
$X=x^2-4x$를 다시 대입하면
$(x^2-4x+3)(x^2-4x-5)=0$
$(x-1)(x-3)(x+1)(x-5)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=5$

(3) $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은
$X^2-9X+20=0$, $(X-4)(X-5)=0$
$X=x^2$을 다시 대입하면
$(x^2-4)(x^2-5)=0$
$\therefore x=\pm2$ 또는 $x=\pm\sqrt{5}$

(4) $x^4-6x^2+1=0$에서
$(x^4-2x^2+1)-4x^2=0$
$(x^2-1)^2-(2x)^2=0$
$(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)=0$
$\therefore x=-1\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

4 (1) $x^2+x=X$로 놓으면 주어진 방정식은
$X^2-X-6=0$, $(X+2)(X-3)=0$
$X=x^2+x$를 다시 대입하면
$(x^2+x+2)(x^2+x-3)=0$
$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

(2) $x^2+8x=X$로 놓으면 주어진 방정식은
$(X+7)(X+15)+15=0$
$X^2+22X+120=0$, $(X+10)(X+12)=0$
$X=x^2+8x$를 다시 대입하면
$(x^2+8x+10)(x^2+8x+12)=0$
$(x^2+8x+10)(x+6)(x+2)=0$
$\therefore x=-4\pm\sqrt{6}$ 또는 $x=-6$ 또는 $x=-2$
(3) $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은
$X^2-8X-9=0$, $(X-9)(X+1)=0$
$X=x^2$을 다시 대입하면
$(x^2-9)(x^2+1)=0$
$\therefore x=\pm3$ 또는 $x=\pm i$
(4) $4x^4-8x^2+1=0$에서
$(4x^4-4x^2+1)-4x^2=0$
$(2x^2-1)^2-(2x)^2=0$, $(2x^2+2x-1)(2x^2-2x-1)=0$
$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

5 $\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=1$이므로
(1) $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$
$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$
$=1+2+3+1=7$
(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$
$=3^2-2\times2=5$

6 $\alpha+\beta+\gamma=-1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$, $\alpha\beta\gamma=-3$이므로
(1) $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$
$=\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)-1$
$=-3-(-2)-1-1=-3$
(2) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$
$=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$

7 주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 $1+\sqrt{2}$가 근이면 $1-\sqrt{2}$도 근이다.
나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})+\alpha=7$ …… ㉠
$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+\alpha(1-\sqrt{2})+\alpha(1+\sqrt{2})=a$ …… ㉡
$\alpha(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-b$ …… ㉢
㉠에서 $2+\alpha=7$ $\therefore \alpha=5$
㉡에서 $2\alpha-1=a$ $\therefore a=9$
㉢에서 $-\alpha=-b$ $\therefore b=5$
따라서 $a=9$, $b=5$이고, 나머지 두 근은 $x=1-\sqrt{2}$ 또는 $x=5$이다.

참고
주어진 방정식에 $x=1+\sqrt{2}$를 대입한 후 무리수가 서로 같을 조건을 이용하여 a, b의 값을 구한 다음 주어진 삼차방정식의 근을 구할 수도 있다.

8 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $3-i$가 근이면 $3+i$도 근이다.
나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$(3-i)+(3+i)+\alpha=a-5$ …… ㉠
$(3-i)(3+i)+\alpha(3+i)+\alpha(3-i)=4$ …… ㉡
㉡에서 $10+6\alpha=4$ $\therefore \alpha=-1$
㉠에서 $6+\alpha=a-5$ $\therefore a=10$
따라서 $a=10$이고, 나머지 두 근은 $x=3+i$ 또는 $x=-1$이다.

9 $x^3=-1$에서
$x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$
따라서 ω는 $x^2-x+1=0$의 근이므로
$\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$
$\therefore \omega^{102}+\omega^{106}+\omega^{110}=(\omega^3)^{34}+(\omega^3)^{35}\times\omega+(\omega^3)^{36}\times\omega^2$
$=1-\omega+\omega^2=0$

10 $x^3=1$에서
$x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$
따라서 ω는 $x^2+x+1=0$의 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$
$\therefore \frac{1}{1-\omega}+\frac{1}{1-\overline{\omega}}=\frac{1-\overline{\omega}+1-\omega}{(1-\omega)(1-\overline{\omega})}$
$=\frac{2-(\omega+\overline{\omega})}{1-(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}}$
$=\frac{2-(-1)}{1-(-1)+1}=1$

13강 연립방정식

확인 문제 p. 56

1 $\begin{cases} x-y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=25 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $y=x-1$을 ㉡에 대입하면
$x^2+(x-1)^2=25$, $x^2-x-12=0$
$(x+3)(x-4)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=4$
이것을 $y=x-1$에 각각 대입하면
$x=-3$일 때 $y=-4$, $x=4$일 때 $y=3$
따라서 주어진 연립방정식의 해는
$\begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$

2 x, y는 정수이므로 $x(y-1)=3$인 경우를 표로 나타내면

x	-3	-1	1	3
$y-1$	-1	-3	3	1

▼

x	-3	-1	1	3
y	0	-2	4	2

따라서 순서쌍 (x, y)는 $(-3, 0)$, $(-1, -2)$, $(1, 4)$, $(3, 2)$이다.

3 x, y가 실수이므로 $x^2+(y-1)^2=0$에서
$x=0$, $y-1=0$ $\quad\therefore x=0$, $y=1$

교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제

p. 57

1 (1) $\begin{cases} x-y=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2xy+y^2=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-4$를 ㉡에 대입하면
$x^2+2x(x-4)+(x-4)^2=4$
$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$
이것을 $y=x-4$에 각각 대입하면
$x=1$일 때 $y=-3$, $x=3$일 때 $y=-1$
따라서 주어진 연립방정식의 해는
$\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

(2) x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-3t-4=0$의 두 근이므로
$(t+1)(t-4)=0$ $\quad\therefore t=-1$ 또는 $t=4$
따라서 주어진 연립방정식의 해는
$\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$

2 (1) $\begin{cases} 2x-y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+y^2=19 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=2x-1$을 ㉡에 대입하면
$x^2-x(2x-1)+(2x-1)^2=19$, $x^2-x-6=0$
$(x+2)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=3$
이것을 $y=2x-1$에 각각 대입하면
$x=-2$일 때 $y=-5$, $x=3$일 때 $y=5$
따라서 주어진 연립방정식의 해는
$\begin{cases} x=-2 \\ y=-5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$

(2) x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+2t-15=0$의 두 근이므로 $\quad (t+5)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=-5$ 또는 $t=3$
따라서 주어진 연립방정식의 해는
$\begin{cases} x=-5 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-5 \end{cases}$

3 (1) $\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 좌변을 인수분해하면
$(x+y)(x-2y)=0$
$\therefore x=-y$ 또는 $x=2y$
(i) $x=-y$를 ㉡에 대입하면
$y^2+y^2=20$, $y^2=10$ $\quad\therefore y=\pm\sqrt{10}$
$\therefore y=\sqrt{10}$일 때 $x=-\sqrt{10}$,
$y=-\sqrt{10}$일 때 $x=\sqrt{10}$
(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면
$4y^2+y^2=20$, $y^2=4$ $\quad\therefore y=\pm 2$
$\therefore y=2$일 때 $x=4$, $y=-2$일 때 $x=-4$
(i), (ii)에 의하여 주어진 연립방정식의 해는
$\begin{cases} x=-\sqrt{10} \\ y=\sqrt{10} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{10} \\ y=-\sqrt{10} \end{cases}$
또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x^2-xy-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2-3x-2=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 좌변을 인수분해하면 $\quad (x-y)(2x+y)=0$
$\therefore y=x$ 또는 $y=-2x$
(i) $y=x$를 ㉡에 대입하면
$x^2+x^2-3x-2=0$, $2x^2-3x-2=0$
$(2x+1)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$
$\therefore x=-\frac{1}{2}$일 때 $y=-\frac{1}{2}$, $x=2$일 때 $y=2$
(ii) $y=-2x$를 ㉡에 대입하면
$x^2+4x^2-3x-2=0$, $5x^2-3x-2=0$
$(5x+2)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=-\frac{2}{5}$ 또는 $x=1$
$\therefore x=-\frac{2}{5}$일 때 $y=\frac{4}{5}$, $x=1$일 때 $y=-2$
(i), (ii)에 의하여 주어진 연립방정식의 해는
$\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\frac{2}{5} \\ y=\frac{4}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

4 (1) $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x^2-y^2=32 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 좌변을 인수분해하면
$(x-y)(2x-y)=0$ $\quad\therefore y=x$ 또는 $y=2x$
(i) $y=x$를 ㉡에 대입하면
$5x^2-x^2=32$, $x^2=8$ $\quad\therefore x=\pm 2\sqrt{2}$
$\therefore x=2\sqrt{2}$일 때 $y=2\sqrt{2}$,
$x=-2\sqrt{2}$일 때 $y=-2\sqrt{2}$
(ii) $y=2x$를 ㉡에 대입하면
$5x^2-4x^2=32$, $x^2=32$ $\quad\therefore x=\pm 4\sqrt{2}$
$\therefore x=4\sqrt{2}$일 때 $y=8\sqrt{2}$,
$x=-4\sqrt{2}$일 때 $y=-8\sqrt{2}$

(i), (ii)에 의하여 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=2\sqrt{2} \\ y=2\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{2} \\ y=-2\sqrt{2} \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=4\sqrt{2} \\ y=8\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4\sqrt{2} \\ y=-8\sqrt{2} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x^2-5xy+2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-4y^2-10y+20=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 좌변을 인수분해하면

$(2x-y)(x-2y)=0 \quad \therefore y=2x$ 또는 $x=2y$

(i) $y=2x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-16x^2-20x+20=0,\ 3x^2+4x-4=0$

$(3x-2)(x+2)=0 \quad \therefore x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=-2$

$\therefore x=\frac{2}{3}$일 때 $y=\frac{4}{3}$, $x=-2$일 때 $y=-4$

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$4y^2-4y^2-10y+20=0 \quad \therefore y=2$

$\therefore y=2$일 때 $x=4$

(i), (ii)에 의하여 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{4}{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

5 방정식 $xy+x+y=5$에서

$xy+x+y+1=6,\ (x+1)(y+1)=6$

이때 x, y가 자연수이므로 $x+1$, $y+1$은 2 이상의 자연수이다.

$x+1$	2	3
$y+1$	3	2

▼

x	1	2
y	2	1

따라서 $x>y$이므로 $x=2$, $y=1$

6 방정식 $2xy-2x-y=-4$에서

$2xy-2x-y+1=-3,\ (2x-1)(y-1)=-3$

이때 x, y가 정수이므로 $2x-1$, $y-1$도 정수이다.

$2x-1$	-3	-1	1	3
$y-1$	1	3	-3	-1

▼

x	-1	0	1	2
y	2	4	-2	0
$x+y$	1	4	-1	2

따라서 $x+y$의 최댓값은 4이다.

7 방정식 $x^2+y^2-4x+2y+5=0$에서

$(x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)=0$

$(x-2)^2+(y+1)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로

$x=2,\ y=-1$

8 방정식 $x^2+5y^2-4xy-2y+1=0$에서

$(x^2-4xy+4y^2)+(y^2-2y+1)=0$

$(x-2y)^2+(y-1)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로

$x=2y,\ y=1 \quad \therefore x=2,\ y=1$

계산력 다지기

p. 58~59

1 (1) $x=1$(중근) 또는 $x=2$

(2) $x=-1$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}$

(3) $x=-3$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

(4) $x=-5$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$(중근)

(5) $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$

(6) $x=-1$(중근) 또는 $x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

(7) $x=-3$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{2}$

(8) $x=\pm2$ 또는 $x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

2 $x^3=1$에서 $\quad x^3-1=0,\ (x-1)(x^2+x+1)=0$

따라서 ω, $\overline{\omega}$는 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^3=1,\ \overline{\omega}^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0,\ \overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$

$\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$

(1) -1 (2) -1 (3) 1 (4) -1

(5) -1 (6) 1 (7) -1 (8) 1

3 (1) $\begin{cases} x+y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2y^2=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+1$을 ㉡에 대입하면

$x^2-2(-x+1)^2=1,\ x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x-y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-y^2=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=2x-3$을 ㉡에 대입하면

$2x^2-(2x-3)^2=7,\ x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0$

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x-y=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 16x^2-2xy-y^2=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=3x$를 ㉡에 대입하면

$16x^2-6x^2-9x^2=1,\ x^2=1$

$\therefore \begin{cases} x=\pm1 \\ y=\pm3 \end{cases}$ (복부호 동순)

(4) $\begin{cases} x-2y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy-y^2=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=2y+1$을 ㉡에 대입하면

$(2y+1)^2-(2y+1)y-y^2=5$, $y^2+3y-4=0$

$(y+4)(y-1)=0$

$\therefore \begin{cases} x=-7 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-y^2=49 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면 $(x-y)(x-2y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=2y$

(ⅰ) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$2y^2-y^2=49$, $y^2=49$

$\therefore y=\pm7$, $x=\pm7$ (복부호 동순)

(ⅱ) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$8y^2-y^2=49$, $y^2=7$

$\therefore y=\pm\sqrt{7}$, $x=\pm2\sqrt{7}$ (복부호 동순)

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\pm7 \\ y=\pm7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\pm2\sqrt{7} \\ y=\pm\sqrt{7} \end{cases}$ (복부호 동순)

(6) $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy-y^2=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면 $(x+y)(x-3y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=3y$

(ⅰ) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+y^2-y^2=5$, $y^2=5$

$\therefore y=\pm\sqrt{5}$, $x=\mp\sqrt{5}$ (복부호 동순)

(ⅱ) $x=3y$를 ㉡에 대입하면

$9y^2-3y^2-y^2=5$, $y^2=1$

$\therefore y=\pm1$, $x=\pm3$ (복부호 동순)

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\pm\sqrt{5} \\ y=\mp\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\pm3 \\ y=\pm1 \end{cases}$ (복부호 동순)

(7) $\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-y^2+2x-3=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면

$(x+y)(x-y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=y$

(ⅰ) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$2y^2-y^2-2y-3=0$, $y^2-2y-3=0$

$(y+1)(y-3)=0$ $\quad\therefore y=-1$ 또는 $y=3$

$\therefore y=-1$일 때 $x=1$, $y=3$일 때 $x=-3$

(ⅱ) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$2y^2-y^2+2y-3=0$, $y^2+2y-3=0$

$(y+3)(y-1)=0$ $\quad\therefore y=-3$ 또는 $y=1$

$\therefore y=-3$일 때 $x=-3$, $y=1$일 때 $x=1$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

(8) $\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-3y^2-2y+4=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면

$(x+y)(x-2y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=2y$

(ⅰ) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$y^2-3y^2-2y+4=0$, $y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0$

$\therefore y=-2$ 또는 $y=1$

$\therefore y=-2$일 때 $x=2$, $y=1$일 때 $x=-1$

(ⅱ) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$4y^2-3y^2-2y+4=0$, $y^2-2y+4=0$

$\therefore y=1\pm\sqrt{3}i$, $x=2\pm2\sqrt{3}i$ (복부호 동순)

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=2\pm2\sqrt{3}i \\ y=1\pm\sqrt{3}i \end{cases}$ (복부호 동순)

(9) $\begin{cases} x+y=xy+1 \\ x+y-1=4xy \end{cases}$에서

$\begin{cases} (x+y)-xy=1 \\ (x+y)-4xy=1 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x+y=1 \\ xy=0 \end{cases}$

이때 x, y는 이차방정식 $t^2-t=0$의 두 근이므로

$t(t-1)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

(10) $\begin{cases} xy-x-y=-1 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$에서

$\begin{cases} xy-(x+y)=-1 \\ (x+y)^2-2xy=10 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$라고 하면

$\begin{cases} v-u=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-2v=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $v=u-1$을 ㉡에 대입하면

$u^2-2(u-1)=10$, $u^2-2u-8=0$

$(u+2)(u-4)=0$

$\therefore u=-2$ 또는 $u=4$

$\therefore \begin{cases} u=-2 \\ v=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} u=4 \\ v=3 \end{cases}$

즉, $\begin{cases} x+y=-2 \\ xy=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$이므로 x, y를 두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식을 만들면

(ⅰ) $x+y=-2$, $xy=-3$일 때

$t^2+2t-3=0$, $(t+3)(t-1)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

$\therefore x=-3$일 때 $y=1$, $x=1$일 때 $y=-3$

(ii) $x+y=4$, $xy=3$일 때

$t^2-4t+3=0$, $(t-1)(t-3)=0$

$\therefore$ $t=1$ 또는 $t=3$

$\therefore$ $x=1$일 때 $y=3$, $x=3$일 때 $y=1$

(i), (ii)에 의하여 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

4 (1) $(3,\ 7)$, $(7,\ 3)$

(2) $(-4,\ -2)$, $(-2,\ -4)$, $(0,\ 2)$, $(2,\ 0)$

(3) $(1,\ -3)$

(4) $(1,\ -1)$

12~13강 족집게 기출문제 p. 60~63

1 ⑤	**2** $x=-6$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\frac{-5\pm\sqrt{39}i}{2}$			
3 ③	**4** ①	**5** ④	**6** ⑤	**7** ②
8 9	**9** ③	**10** ②	**11** ③	**12** ④
13 ②	**14** 3 cm	**15** 3	**16** ④	**17** ⑤
18 $4\sqrt{2}$	**19** ①	**20** ③	**21** 5	**22** ③
23 ④	**24** -2	**25** ①	**26** -6	
27 (1) $a=-1$, $b=-6$ (2) $x=-1\pm\sqrt{2}i$				
28 38 또는 83				

1 $P(x)=2x^3-4x^2-3x+6$이라고 하면 $P(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -4 & -3 & 6 \\ & & 4 & 0 & -6 \\ \hline & 2 & 0 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-2)(2x^2-3)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-2)(2x^2-3)=0$

$\therefore$ $x=2$ 또는 $x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

따라서 주어진 삼차방정식의 근 중 가장 큰 근은 2이다.

2 주어진 방정식을 변형하면

$\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}-120=0$

$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-120=0$

$x^2+5x=X$로 놓으면

$(X+4)(X+6)-120=0$, $X^2+10X-96=0$

$(X-6)(X+16)=0$

$X=x^2+5x$를 다시 대입하면

$(x^2+5x-6)(x^2+5x+16)=0$

$(x+6)(x-1)(x^2+5x+16)=0$

$\therefore$ $x=-6$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\frac{-5\pm\sqrt{39}i}{2}$

3 $x^4+3x^2+4=0$에서

$(x^4+4x^2+4)-x^2=0$

$(x^2+2)^2-x^2=0$, $(x^2+x+2)(x^2-x+2)=0$

$\therefore$ $x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

따라서 서로 다른 네 근의 합은 0이다.

4 주어진 방정식에 $x=0$을 대입하면 등호가 성립하지 않는다. 즉, $x\neq0$이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$, $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$

$\therefore$ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+2X-3=0$, $(X+3)(X-1)=0$

$\therefore$ $X=-3$ 또는 $X=1$

(i) $X=-3$일 때

$x+\frac{1}{x}=-3$에서 $x^2+3x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라고 하면

$D_1=3^2-4\times1\times1=5>0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $X=1$일 때

$x+\frac{1}{x}=1$에서 $x^2-x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라고 하면

$D_2=(-1)^2-4\times1\times1=-3<0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에 의하여 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=-3$

5 사차방정식 $x^4-ax^3-(3a+1)x^2+8x+6a=0$에 $x=-1$을 대입하면

$1+a-(3a+1)-8+6a=0$, $4a=8$

$\therefore$ $a=2$

사차방정식 $x^4-2x^3-7x^2+8x+12=0$에서

$P(x)=x^4-2x^3-7x^2+8x+12$라고 하면 $P(-1)=0$, $P(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -2 & -7 & 8 & 12 \\ & & -1 & 3 & 4 & -12 \\ \hline 2 & 1 & -3 & -4 & 12 & \boxed{0} \\ & & 2 & -2 & -12 & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$P(x)=(x+1)(x-2)(x^2-x-6)$

$\quad\ \ =(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

따라서 가장 큰 근과 가장 작은 근의 합은

$3+(-2)=1$

6 $P(x)=x^3+(a-1)x-a$라고 하면 $P(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & a-1 & -a \\ & & 1 & 1 & a \\ \hline & 1 & 1 & a & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2+x+a)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2+x+a)=0$

$\therefore$ $x=1$ 또는 $x^2+x+a=0$

이때 주어진 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 갖기 위해서는 이차방정식 $x^2+x+a=0$이 $x\neq1$인 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) $x=1$은 이차방정식 $x^2+x+a=0$의 근이 아니어야 하므로

$1+1+a\neq0$ $\quad\therefore$ $a\neq-2$

(ii) 이차방정식 $x^2+x+a=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=1-4a>0$ $\quad\therefore$ $a<\frac{1}{4}$

(i), (ii)에 의하여

$a<-2$ 또는 $-2<a<\frac{1}{4}$

7 $x^2-4x-5=0$에서 $(x+1)(x-5)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=5$

$P(x)=x^3+(a-2)x^2-(2a-1)x+a$라고 하면

$P(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a-2 & -2a+1 & a \\ & & 1 & a-1 & -a \\ \hline & 1 & a-1 & -a & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)\{x^2+(a-1)x-a\}$

$\quad=(x-1)^2(x+a)$

$P(x)=0$에서 $(x-1)^2(x+a)=0$

$\therefore$ $x=1$ (중근) 또는 $x=-a$

이때 두 방정식이 공통인 근을 가지려면

$-a=-1$ 또는 $-a=5$ $\quad\therefore$ $a=1$ 또는 $a=-5$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은

$1+(-5)=-4$

8 삼차방정식 $x^3+3x-1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=1$

$\therefore$ $\frac{\beta\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma\alpha}{\beta}+\frac{\alpha\beta}{\gamma}$

$=\frac{\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2}{\alpha\beta\gamma}$

$=\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha\beta\gamma}$

$=\frac{3^2-2\times1\times0}{1}=9$

9 삼차방정식 $2x^3-7x^2+ax+b=0$의 세 근을 k, $2k$, $4k(k>0)$라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$k+2k+4k=\frac{7}{2}$ ······ ㉠

$2k^2+8k^2+4k^2=\frac{a}{2}$ ······ ㉡

$8k^3=-\frac{b}{2}$ ······ ㉢

㉠에서 $7k=\frac{7}{2}$ $\quad\therefore$ $k=\frac{1}{2}$

㉡에서 $14k^2=\frac{a}{2}$ $\quad\therefore$ $a=7$

㉢에서 $b=-2$

$\therefore$ $a-b=7-(-2)=9$

10 삼차방정식 $2x^3+8x^2-ax+3=0$의 세 근을 α, β, γ라 하고 이 중 삼차방정식 $2x^3+6x^2+bx=0$의 두 근을 α, β라고 하자.

$2x^3+6x^2+bx=0$에서 $x(2x^2+6x+b)=0$이고

$2x^3+8x^2-ax+3=0$에서 $x\neq0$이므로 α, β는 이차방정식 $2x^2+6x+b=0$의 두 근이다.

두 방정식 $2x^3+8x^2-ax+3=0$, $2x^2+6x+b=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-4$, $\alpha+\beta=-3$이므로 $\gamma=-1$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{3}{2}$이므로 $\alpha\beta=\frac{3}{2}$

$\alpha\beta=\frac{b}{2}$이므로 $b=3$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-\frac{a}{2}$이므로

$a=-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$\quad=-2\{\alpha\beta+\gamma(\beta+\alpha)\}$

$\quad=-2\left\{\frac{3}{2}-(-3)\right\}=-9$

$\therefore$ $a+b=-9+3=-6$

11 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $1+i$가 근이면 $1-i$도 근이다.

나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+i)+(1-i)+\alpha=-p$ ······ ㉠

$(1+i)(1-i)+\alpha(1-i)+\alpha(1+i)=q$ ······ ㉡

$\alpha(1+i)(1-i)=-6$ ······ ㉢

㉢에서 $2\alpha=-6$

$\therefore$ $\alpha=-3$

㉠에서 $2+\alpha=-p$

$\therefore$ $p=1$

㉡에서 $2+2\alpha=q$

$\therefore$ $q=-4$

따라서 $p=1$, $q=-4$이므로

$p+q=-3$

12 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$이므로

① $\omega^3=1$

② $\omega^2+\omega=-1$

③ $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^8$
$=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\omega^6(1+\omega+\omega^2)$
$=0$

④ $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)=(-\omega^2)\times(-\omega)\times(1+1)$
$=2\omega^3=2$

⑤ $\dfrac{\omega^2}{1+\omega}+\dfrac{1+\omega^2}{\omega}+\dfrac{1}{\omega+\omega^2}=\dfrac{\omega^2}{-\omega^2}+\dfrac{-\omega}{\omega}+\dfrac{1}{-1}$
$=-1-1-1=-3$

따라서 그 값이 가장 큰 것은 ④이다.

13 $\omega=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2\omega-1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하여 정리하면 $\omega^2-\omega+1=0$

양변에 $\omega+1$을 곱하면 $(\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0$

$\omega^3+1=0$ $\therefore$ $\omega^3=-1$

$\therefore$ $\omega^{2500}+\dfrac{1}{\omega^{2500}}=(\omega^3)^{833}\times\omega+\dfrac{1}{(\omega^3)^{833}\times\omega}$
$=-\omega-\dfrac{1}{\omega}=-\dfrac{\omega^2+1}{\omega}$
$=-\dfrac{\omega}{\omega}=-1$

14 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라고 하면 직육면체의 부피가 20 cm^3이므로

$(x+1)(x+2)(x-2)=20$

$x^3+x^2-4x-24=0$

$P(x)=x^3+x^2-4x-24$라고 하면 $P(3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

3	1	1	−4	−24
		3	12	24
	1	4	8	0

$P(x)=(x-3)(x^2+4x+8)$

$P(x)=0$에서 $(x-3)(x^2+4x+8)=0$

$\therefore$ $x=3$ 또는 $x=-2\pm2i$

그런데 x는 실수이고 $x>2$이므로 $x=3$

따라서 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는 3 cm이다.

15 상자의 밑면의 가로의 길이와 세로의 길이는 각각 $(20-2x)$ cm, $(16-2x)$ cm이므로

$x(20-2x)(16-2x)=420$

$4x(x-10)(x-8)=420$

$x^3-18x^2+80x-105=0$

$P(x)=x^3-18x^2+80x-105$라고 하면

$P(3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

3	1	−18	80	−105
		3	−45	105
	1	−15	35	0

$P(x)=(x-3)(x^2-15x+35)$

$P(x)=0$에서 $(x-3)(x^2-15x+35)=0$

$\therefore$ $x=3$ 또는 $x=\dfrac{15\pm\sqrt{85}}{2}$

따라서 자연수 x의 값은 3이다.

16 $\begin{cases} x+y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=2-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x(2-x)+(2-x)^2=7$, $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$ $\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=3$

이것을 $y=2-x$에 각각 대입하면

$x=-1$일 때 $y=3$, $x=3$일 때 $y=-1$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=3$ 또는 $\alpha=3$, $\beta=-1$이므로

$\alpha\beta=-3$

17 $\begin{cases} 2x+y=k & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=k-2x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+(k-2x)^2=5$ $\therefore$ $5x^2-4kx+k^2-5=0$

주어진 연립방정식이 한 쌍의 해를 가지므로 이차방정식 $5x^2-4kx+k^2-5=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2k)^2-5(k^2-5)=0$, $k^2=25$

$\therefore$ $k=-5$ 또는 $k=5$

18 $\begin{cases} x^2-4xy+3y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-3xy+4y^2=8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면

$(x-y)(x-3y)=0$

$\therefore$ $x=y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2-3y^2+4y^2=8$, $y^2=4$ $\therefore$ $y=\pm2$

$\therefore$ $y=2$일 때 $x=2$, $y=-2$일 때 $x=-2$

(ii) $x=3y$를 ㉡에 대입하면

$9y^2-9y^2+4y^2=8$, $y^2=2$ $\therefore$ $y=\pm\sqrt{2}$

$\therefore$ $y=\sqrt{2}$일 때 $x=3\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$일 때 $x=-3\sqrt{2}$

(i), (ii)에 의하여 $x+y=\pm4$ 또는 $x+y=\pm4\sqrt{2}$

따라서 $x+y$의 최댓값은 $4\sqrt{2}$

19 처음 꽃밭의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 x m, y m라고 하면

$x^2+y^2=100$ $\cdots\cdots$ ㉠

$(x+3)(y+3)=xy+51$ $\therefore$ $y=14-x$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^2+(14-x)^2=100$, $x^2-14x+48=0$

$(x-6)(x-8)=0$ $\therefore$ $x=6$ 또는 $x=8$

이것을 ㉡에 각각 대입하면

$x=6$일 때 $y=8$, $x=8$일 때 $y=6$

따라서 가로의 길이와 세로의 길이의 차는 2 m이다.

20 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 x cm, y cm라고 하면

$x^2+y^2=169$

$\frac{1}{2}xy=30 \qquad \therefore xy=60$

$\therefore (x+y)^2=x^2+y^2+2xy=169+2\times60=289$

이때 $x>0$, $y>0$이므로 $\quad x+y=17$

$x+y=17$, $xy=60$이므로 x, y는 t에 대한 이차방정식

$t^2-17t+60=0$의 두 근이다.

$(t-5)(t-12)=0$

$\therefore t=5$ 또는 $t=12$

$\therefore \begin{cases} x=5 \\ y=12 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=12 \\ y=5 \end{cases}$

따라서 짧은 변의 길이는 5 cm이다.

21 주어진 식의 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2-2(y+1)x+y^2-2y+5=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

x가 실수이므로 x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=\{-(y+1)\}^2-2(y^2-2y+5)\geq0$

$y^2-6y+9\leq0$, $(y-3)^2\leq0$

이때 y도 실수이므로

$y-3=0 \qquad \therefore y=3$

$y=3$을 ㉠에 대입하면

$2x^2-8x+9-6+5=0$

$x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$

$\therefore x=2$ (중근)

따라서 $x=2$, $y=3$이므로

$x+y=5$

22 두 사람이 모은 장난감의 개수를 각각 x, $y(x>y)$라고 하면

$xy=2(x-y)+13$

$xy-2x+2y-4=9$

$\therefore (x+2)(y-2)=9$

이때 x, y가 자연수이므로 $x+2$는 3 이상의 자연수이고 $y-2$는 -1 이상의 정수이다.

$x+2$	3	9
$y-2$	3	1

▶

x	1	7
y	5	3

따라서 x, y는 $x>y$인 자연수이므로

$x-y=7-3=4$

23 $P(x)=x^3-10x^2+(a+16)x-2a$라고 하면 $P(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -10 & a+16 & -2a \\ & & 2 & -16 & 2a \\ \hline & 1 & -8 & a & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-2)(x^2-8x+a)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-2)(x^2-8x+a)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x^2-8x+a=0$

이때 주어진 삼차방정식의 세 근이 이등변삼각형의 세 변의 길이이므로 이차방정식 $x^2-8x+a=0$이 $x=2$를 근으로 가지거나 중근을 가져야 한다.

(i) $x=2$를 근으로 가질 때

$2^2-8\times2+a=0 \qquad \therefore a=12$

이때 $x^2-8x+12=0$에서

$(x-2)(x-6)=0 \qquad \therefore x=2$ 또는 $x=6$

따라서 삼차방정식의 세 근은 $\quad 2, 2, 6$

그런데 $2+2<6$이므로 삼각형의 세 변의 길이가 될 수 없다.

(ii) 중근을 가질 때

이차방정식 $x^2-8x+a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-a=0 \qquad \therefore a=16$

이때 $x^2-8x+16=0$에서

$(x-4)^2=0 \qquad \therefore x=4$ (중근)

따라서 삼차방정식의 세 근은 $\quad 2, 4, 4$

이때 $2+4>4$이므로 삼각형의 세 변의 길이가 될 수 있다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 세 변의 길이는 2, 4, 4이다.

24 ω는 삼차방정식 $x^3=1$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

(i) $n=3k+1$ (k는 음이 아닌 정수)일 때

$\omega^n=\omega^{3k+1}=(\omega^3)^k\times\omega=\omega$

$\omega^{2n}=\omega^{6k+2}=(\omega^3)^{2k}\times\omega^2=\omega^2$

$\therefore f(n)=\frac{1+\omega^n}{\omega^{2n}}=\frac{1+\omega}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$

(ii) $n=3k+2$ (k는 음이 아닌 정수)일 때

$\omega^n=\omega^{3k+2}=(\omega^3)^k\times\omega^2=\omega^2$

$\omega^{2n}=\omega^{6k+4}=(\omega^3)^{2k+1}\times\omega=\omega$

$\therefore f(n)=\frac{1+\omega^n}{\omega^{2n}}=\frac{1+\omega^2}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$

(iii) $n=3k+3$ (k는 음이 아닌 정수)일 때

$\omega^n=\omega^{3k+3}=(\omega^3)^{k+1}=1$

$\omega^{2n}=\omega^{6k+6}=(\omega^3)^{2k+2}=1$

$\therefore f(n)=\frac{1+\omega^n}{\omega^{2n}}=\frac{1+1}{1}=2$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)$

$=\{f(1)+f(4)+\cdots+f(49)\}$

$\qquad+\{f(2)+f(5)+\cdots+f(50)\}$

$\qquad+\{f(3)+f(6)+\cdots+f(48)\}$

$=(-1)\times17+(-1)\times17+2\times16=-2$

25 주어진 이차방정식의 정수인 두 근을 α, β라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k$ …… ㉠
$\alpha\beta=k+2$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$\alpha\beta=\alpha+\beta+2$
$\alpha\beta-\alpha-\beta=2$
$\alpha(\beta-1)-(\beta-1)-1=2$
$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=3$
이때 α, β가 정수이므로 $\alpha-1$, $\beta-1$도 정수이다.

$\alpha-1$	-1	-3	1	3
$\beta-1$	-3	-1	3	1

▶

α	0	-2	2	4
β	-2	0	4	2

㉠에서 $k=\alpha+\beta$이므로
$k=-2$ 또는 $k=6$
따라서 모든 상수 k의 값의 곱은
$(-2)\times 6=-12$

26 삼차방정식 $x^3-6x^2+7x-3=0$의 세 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$(\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=6$ …… ㉠
$(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)=7$ …… ㉡
$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=3$ …… ㉢
㉠에서 $\alpha+\beta+\gamma=3$ …… (가)
㉡에서 $(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2(\alpha+\beta+\gamma)+3=7$
$\therefore \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$ …… (나)
㉢에서 $\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1=3$
$\therefore \alpha\beta\gamma=1$ …… (다)
삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma=-a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=-c$
따라서 $a=-3$, $b=-2$, $c=-1$이므로 …… (라)
$abc=-6$ …… (마)

채점 기준	배점
(가) $\alpha+\beta+\gamma$의 값을 구한다.	1점
(나) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$의 값을 구한다.	2점
(다) $\alpha\beta\gamma$의 값을 구한다.	2점
(라) a, b, c의 값을 구한다.	2점
(마) abc의 값을 구한다.	1점

27 (1) 주어진 방정식에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면
$1-1+a+7+b=0$에서
$a+b=-7$ …… ㉠
$16+8+4a-14+b=0$에서
$4a+b=-10$ …… ㉡
㉠$-$㉡을 하면
$-3a=3$
$\therefore a=-1$
$a=-1$을 ㉠에 대입하면
$-1+b=-7$
$\therefore b=-6$ …… (가)
(2) $x^4+x^3-x^2-7x-6=0$에서
$P(x)=x^4+x^3-x^2-7x-6$이라고 하면 $P(-1)=0$, $P(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 1 & -1 & -7 & -6 \\ & & -1 & 0 & 1 & 6 \\ \hline 2 & 1 & 0 & -1 & -6 & 0 \\ & & 2 & 4 & 6 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 & \end{array}$$

$P(x)=(x+1)(x-2)(x^2+2x+3)$ …… (나)
따라서 주어진 사차방정식은
$(x+1)(x-2)(x^2+2x+3)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{2}i$
따라서 나머지 두 근은
$x=-1\pm\sqrt{2}i$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) a, b의 값을 구한다.	2점
(나) 사차방정식의 좌변을 인수분해한다.	3점
(다) 나머지 두 근을 구한다.	2점

28 처음 자연수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라고 하면
$x^2+y^2=73$
$(10y+x)+(10x+y)=121$
$\therefore x+y=11$
따라서 주어진 조건을 연립방정식으로 나타내면
$\begin{cases} x^2+y^2=73 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y=11 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ …… (가)
㉡에서 $y=11-x$를 ㉠에 대입하면
$x^2+(11-x)^2=73$
$x^2-11x+24=0$
$(x-3)(x-8)=0$
$\therefore x=3$ 또는 $x=8$
이것을 $y=11-x$에 각각 대입하면
$x=3$일 때 $y=8$, $x=8$일 때 $y=3$ …… (나)
따라서 처음 자연수는 38 또는 83이다. …… (다)

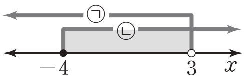
채점 기준	배점
(가) 주어진 조건을 이용하여 연립방정식을 세운다.	2점
(나) 연립방정식의 해를 구한다.	3점
(다) 처음 자연수를 구한다.	1점

14강 연립일차부등식

확인 문제 p. 64

1 (1) $\begin{cases} x<3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x\ge -4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

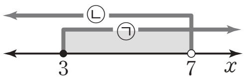
따라서 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 연립부등식의 해는



$-4\le x<3$

(2) $\begin{cases} x\ge 3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x<7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

따라서 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 연립부등식의 해는

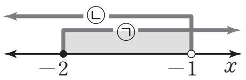


$3\le x<7$

(3) $3x\ge -6$에서 $x\ge -2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$-2x>2$에서 $x<-1$ $\cdots\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 연립부등식의 해는

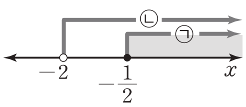


$-2\le x<-1$

(4) $4x\ge -2$에서 $x\ge -\frac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$-2x<4$에서 $x>-2$ $\cdots\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 연립부등식의 해는



$x\ge -\frac{1}{2}$

2 (1) $|x-1|\le 6$에서 $-6\le x-1\le 6$ $\therefore -5\le x\le 7$

(2) $|x+2|>3$에서 $x+2<-3$ 또는 $x+2>3$

$\therefore x<-5$ 또는 $x>1$

(3) $|3x-7|\ge 2$에서 $3x-7\le -2$ 또는 $3x-7\ge 2$

$\therefore x\le \frac{5}{3}$ 또는 $x\ge 3$

(4) $|5-2x|<9$에서 $-9<5-2x<9$

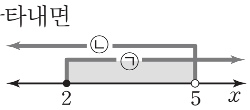
$\therefore -2<x<7$

교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 65

1 (1) $2x-1\ge 5-x$에서 $x\ge 2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$2-3x<7-4x$에서 $x<5$ $\cdots\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 연립부등식의 해는



$2\le x<5$

(2) $\frac{x-1}{2}+\frac{2-x}{3}>-2$의 양변에 6을 곱하면

$3(x-1)+2(2-x)>-12$

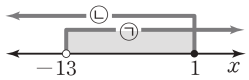
$\therefore x>-13$ $\cdots\cdots$ ㉠

$0.2-\frac{3}{2}x\le 0.7-2x$의 양변에 10을 곱하면

$2-15x\le 7-20x$

$\therefore x\le 1$ $\cdots\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 연립부등식의 해는



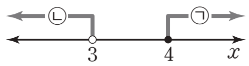
$-13<x\le 1$

(3) $2(x-1)-3\ge 7-x$에서

$2x-5\ge 7-x$ $\therefore x\ge 4$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x-2<13-4x$에서 $x<3$ $\cdots\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 연립부등식의 해는 없다.



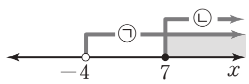
2 (1) $2(x-2)-3x<5-(1-x)$에서

$-x-4<4+x$ $\therefore x>-4$ $\cdots\cdots$ ㉠

$1.6-0.2x\ge 3-0.4x$의 양변에 10을 곱하면

$16-2x\ge 30-4x$ $\therefore x\ge 7$ $\cdots\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 연립부등식의 해는



$x\ge 7$

(2) $\frac{2x+1}{3}-1>\frac{2+3x}{2}$의 양변에 6을 곱하면

$2(2x+1)-6>3(2+3x)$, $4x-4>6+9x$

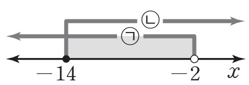
$\therefore x<-2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$2+\frac{3x+2}{5}\ge \frac{2-x}{2}+x$의 양변에 10을 곱하면

$20+2(3x+2)\ge 5(2-x)+10x$

$\therefore x\ge -14$ $\cdots\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 연립부등식의 해는



$-14\le x<-2$

(3) $\frac{3x-1}{2}\ge 3-2x$의 양변에 2를 곱하면

$3x-1\ge 2(3-2x)$, $3x-1\ge 6-4x$

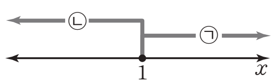
$\therefore x\ge 1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$1.2-0.3x\le 1.4-0.5x$의 양변에 10을 곱하면

$12-3x\le 14-5x$

$\therefore x\le 1$ $\cdots\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 연립부등식의 해는



$x=1$

3 (1) 주어진 부등식을 연립부등식으로 변형하면

$$\begin{cases} -2\le -3(x+1)+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ -3(x+1)+1<1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

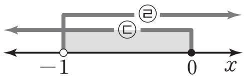
부등식 ㉠에서 $-2\le -3x-2$

$\therefore x\le 0$ ⋯⋯ ㉢

부등식 ㉡에서 $-3x-2<1$

$\therefore x>-1$ ⋯⋯ ㉣

따라서 ㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 연립부등식의 해는



$-1<x\le 0$

(2) 주어진 부등식을 연립부등식으로 변형하면

$$\begin{cases} 3x-2\le 2-(x-4) & \cdots\cdots ㉠ \\ 2-(x-4)\le 2x+3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

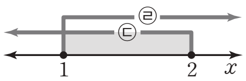
부등식 ㉠에서 $3x-2\le 6-x$

$\therefore x\le 2$ ⋯⋯ ㉢

부등식 ㉡에서 $6-x\le 2x+3$

$\therefore x\ge 1$ ⋯⋯ ㉣

따라서 ㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 연립부등식의 해는



$1\le x\le 2$

4 (1) 주어진 부등식을 연립부등식으로 변형하면

$$\begin{cases} -4<2(2x-1)+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2(2x-1)+1<2x+3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

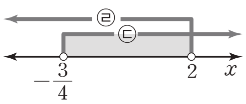
부등식 ㉠에서 $-4<4x-1$

$\therefore x>-\frac{3}{4}$ ⋯⋯ ㉢

부등식 ㉡에서 $4x-1<2x+3$

$\therefore x<2$ ⋯⋯ ㉣

따라서 ㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 연립부등식의 해는



$-\frac{3}{4}<x<2$

(2) 주어진 부등식을 연립부등식으로 변형하면

$$\begin{cases} \frac{3x-2}{2}<\frac{5}{2}x+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{5}{2}x+1\le 2(x-1)+3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

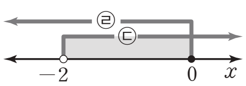
부등식 ㉠에서 $3x-2<5x+2$

$\therefore x>-2$ ⋯⋯ ㉢

부등식 ㉡에서 $5x+2\le 4x+2$

$\therefore x\le 0$ ⋯⋯ ㉣

따라서 ㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 연립부등식의 해는



$-2<x\le 0$

5 (1) 부등식 $x+2<|6-3x|$에서

(i) $x\le 2$일 때

$x+2<6-3x$ $\quad\therefore x<1$

그런데 $x\le 2$이므로 $x<1$

(ii) $x>2$일 때

$x+2<-(6-3x)$ $\quad\therefore x>4$

그런데 $x>2$이므로 $x>4$

(i), (ii)에 의하여 $x<1$ 또는 $x>4$

(2) 부등식 $|2x-6|\le 3x-4$에서

(i) $x\ge 3$일 때

$2x-6\le 3x-4$ $\quad\therefore x\ge -2$

그런데 $x\ge 3$이므로 $x\ge 3$

(ii) $x<3$일 때

$-(2x-6)\le 3x-4$ $\quad\therefore x\ge 2$

그런데 $x<3$이므로 $2\le x<3$

(i), (ii)에 의하여 $x\ge 2$

6 (1) 부등식 $|3x-1|\le 4+x$에서

(i) $x\ge \frac{1}{3}$일 때

$3x-1\le 4+x$ $\quad\therefore x\le \frac{5}{2}$

그런데 $x\ge \frac{1}{3}$이므로 $\frac{1}{3}\le x\le \frac{5}{2}$

(ii) $x<\frac{1}{3}$일 때

$-(3x-1)\le 4+x$ $\quad\therefore x\ge -\frac{3}{4}$

그런데 $x<\frac{1}{3}$이므로 $-\frac{3}{4}\le x<\frac{1}{3}$

(i), (ii)에 의하여 $-\frac{3}{4}\le x\le \frac{5}{2}$

(2) 부등식 $2(3x+1)>|3-x|$에서

(i) $x\le 3$일 때

$2(3x+1)>3-x$ $\quad\therefore x>\frac{1}{7}$

그런데 $x\le 3$이므로 $\frac{1}{7}<x\le 3$

(ii) $x>3$일 때

$2(3x+1)>-(3-x)$ $\quad\therefore x>-1$

그런데 $x>3$이므로 $x>3$

(i), (ii)에 의하여 $x>\frac{1}{7}$

7 (1) 부등식 $|x+1|\ge 9-|2x-4|$에서

(i) $x<-1$일 때

$-(x+1)\ge 9+(2x-4)$ $\quad\therefore x\le -2$

그런데 $x<-1$이므로 $x\le -2$

(ii) $-1\le x<2$일 때

$x+1\ge 9+(2x-4)$ $\quad\therefore x\le -4$

그런데 $-1\le x<2$이므로 해는 없다.

(iii) $x\ge2$일 때
$x+1\ge9-(2x-4)$ $\therefore x\ge4$
그런데 $x\ge2$이므로 $x\ge4$
(i), (ii), (iii)에 의하여
$x\le-2$ 또는 $x\ge4$
(2) 부등식 $3|2-x|<5|x+4|+10$에서
(i) $x<-4$일 때
$3(2-x)<-5(x+4)+10$ $\therefore x<-8$
그런데 $x<-4$이므로 $x<-8$
(ii) $-4\le x<2$일 때
$3(2-x)<5(x+4)+10$ $\therefore x>-3$
그런데 $-4\le x<2$이므로 $-3<x<2$
(iii) $x\ge2$일 때
$-3(2-x)<5(x+4)+10$ $\therefore x>-18$
그런데 $x\ge2$이므로 $x\ge2$
(i), (ii), (iii)에 의하여
$x<-8$ 또는 $x>-3$

8 (1) 부등식 $|2x+1|+|x-3|\le8$에서
(i) $x<-\frac{1}{2}$일 때
$-(2x+1)-(x-3)\le8$ $\therefore x\ge-2$
그런데 $x<-\frac{1}{2}$이므로 $-2\le x<-\frac{1}{2}$
(ii) $-\frac{1}{2}\le x<3$일 때
$2x+1-(x-3)\le8$ $\therefore x\le4$
그런데 $-\frac{1}{2}\le x<3$이므로 $-\frac{1}{2}\le x<3$
(iii) $x\ge3$일 때
$2x+1+x-3\le8$ $\therefore x\le\frac{10}{3}$
그런데 $x\ge3$이므로 $3\le x\le\frac{10}{3}$
(i), (ii), (iii)에 의하여
$-2\le x\le\frac{10}{3}$
(2) 부등식 $2|x-1|+3|4-x|>11$에서
(i) $x<1$일 때
$-2(x-1)+3(4-x)>11$ $\therefore x<\frac{3}{5}$
그런데 $x<1$이므로 $x<\frac{3}{5}$
(ii) $1\le x<4$일 때
$2(x-1)+3(4-x)>11$ $\therefore x<-1$
그런데 $1\le x<4$이므로 해는 없다.
(iii) $x\ge4$일 때
$2(x-1)-3(4-x)>11$ $\therefore x>5$
그런데 $x\ge4$이므로 $x>5$
(i), (ii), (iii)에 의하여
$x<\frac{3}{5}$ 또는 $x>5$

15강 이차부등식

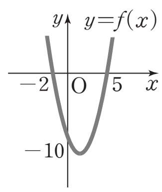
확인 문제 p. 66

1 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 두 점 $(1, 0)$, $(4, 0)$에서 만난다.
따라서 이 그래프에서 $y\le0$인 x의 값의 범위는 $1\le x\le4$이므로 부등식 $f(x)\le0$의 해는
$1\le x\le4$

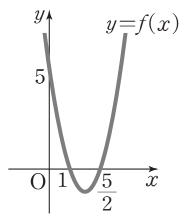
2 (1) x^2의 계수가 1이고 해가 $-2\le x\le1$인 이차부등식은
$(x+2)(x-1)\le0$ $\therefore x^2+x-2\le0$
(2) x^2의 계수가 1이고 해가 $x<-1$ 또는 $x>3$인 이차부등식은
$(x+1)(x-3)>0$ $\therefore x^2-2x-3>0$

교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 67

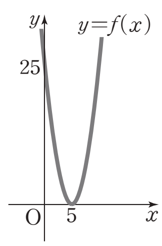
1 (1) $f(x)=x^2-3x-10$이라고 하면
$f(x)=(x+2)(x-5)$
이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 두 점 $(-2, 0)$, $(5, 0)$에서 만난다.



따라서 구하는 부등식의 해는 $f(x)<0$인 x의 값의 범위와 같으므로
$-2<x<5$
(2) 주어진 부등식의 양변에 -1을 곱하면
$2x^2-7x+5\ge0$
$f(x)=2x^2-7x+5$라고 하면
$f(x)=(x-1)(2x-5)$
이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 두 점 $(1, 0)$, $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$에서 만난다.



따라서 구하는 부등식의 해는 $f(x)\ge0$인 x의 값의 범위와 같으므로
$x\le1$ 또는 $x\ge\frac{5}{2}$
(3) 주어진 부등식을 정리하면 $x^2-10x+25\le0$
$f(x)=x^2-10x+25$라고 하면
$f(x)=(x-5)^2$
이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 한 점 $(5, 0)$에서 만난다.



따라서 구하는 부등식의 해는 $f(x)\le0$인 x의 값의 범위와 같으므로
$x=5$

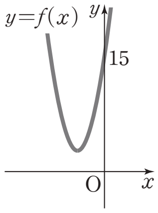
(4) 주어진 부등식을 정리하면

$x^2+7x+15<0$

$f(x)=x^2+7x+15$라고 하면 이차방정식 $x^2+7x+15=0$의 판별식 D는

$D=7^2-4\times1\times15=-11<0$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 만나지 않는다.

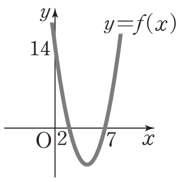


따라서 이 그래프에서 $f(x)<0$인 x의 값의 범위는 없으므로 구하는 부등식의 해는 없다.

2 (1) $f(x)=x^2-9x+14$라고 하면

$f(x)=(x-2)(x-7)$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 두 점 $(2,\ 0)$, $(7,\ 0)$에서 만난다.



따라서 구하는 부등식의 해는 $f(x)\geq0$인 x의 값의 범위와 같으므로

$x\leq2$ 또는 $x\geq7$

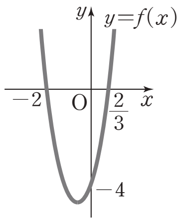
(2) 주어진 부등식의 양변에 -1을 곱하면

$3x^2+4x-4<0$

$f(x)=3x^2+4x-4$라고 하면

$f(x)=(x+2)(3x-2)$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 두 점 $(-2,\ 0)$, $\left(\frac{2}{3},\ 0\right)$에서 만난다.



따라서 구하는 부등식의 해는 $f(x)<0$인 x의 값의 범위와 같으므로

$-2<x<\frac{2}{3}$

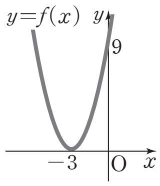
(3) 주어진 부등식을 정리하면

$x^2+6x+9>0$

$f(x)=x^2+6x+9$라고 하면

$f(x)=(x+3)^2$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 한 점 $(-3,\ 0)$에서 만난다.



따라서 구하는 부등식의 해는 $f(x)>0$인 x의 값의 범위와 같으므로 $x\neq-3$인 모든 실수이다.

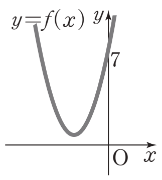
(4) 주어진 부등식을 정리하면

$x^2+5x+7\geq0$

$f(x)=x^2+5x+7$이라고 하면 이차방정식 $x^2+5x+7=0$의 판별식 D는

$D=5^2-4\times1\times7=-3<0$

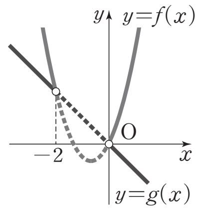
이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 만나지 않는다.



따라서 이 그래프에서 $f(x)\geq0$인 x의 값의 범위는 모든 실수이므로 구하는 부등식의 해는 모든 실수이다.

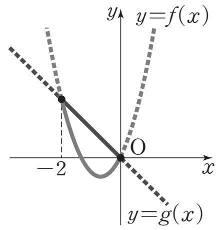
3 (1) 부등식 $f(x)>g(x)$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위와 같으므로

$x<-2$ 또는 $x>0$



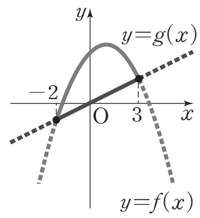
(2) 부등식 $f(x)\leq g(x)$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위와 같으므로

$-2\leq x\leq0$



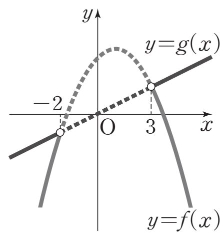
4 (1) 부등식 $f(x)\geq g(x)$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 위쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위와 같으므로

$-2\leq x\leq3$



(2) 부등식 $f(x)<g(x)$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위와 같으므로

$x<-2$ 또는 $x>3$



5 해가 $-1<x<5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-5)<0$ $\quad\therefore\ x^2-4x-5<0$

이 부등식은 이차부등식 $x^2-4ax+2b+1<0$과 일치하므로

$-4a=-4,\ 2b+1=-5$

$\therefore\ a=1,\ b=-3$

6 해가 $x\leq-2$ 또는 $x\geq6$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-6)\geq0$ $\quad\therefore\ x^2-4x-12\geq0$

주어진 이차부등식과 부등호의 방향이 다르므로 $a<0$

위 부등식의 양변에 a를 곱하면

$ax^2-4ax-12a\leq0$

이 부등식은 이차부등식 $ax^2+bx+12\leq0$과 일치하므로

$-4a=b,\ -12a=12$

$\therefore\ a=-1,\ b=4$

7 $f(x)=x^2+ax+a+8$이라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+ax+a+8>0$이 성립하려면 이차방정식 $x^2+ax+a+8=0$의 판별식 D는

$D=a^2-4\times1\times(a+8)<0,\ a^2-4a-32<0$

$(a+4)(a-8)<0$

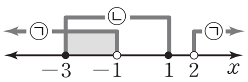
$\therefore\ -4<a<8$

8 주어진 부등식을 정리하면
$x^2+(a-1)x+a^2-a<0$
$f(x)=x^2+(a-1)x+a^2-a$라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다.
따라서 부등식 $x^2+(a-1)x+a^2-a<0$의 해가 존재하지 않으려면 이차방정식 $x^2+(a-1)x+a^2-a=0$의 판별식 D는
$D=(a-1)^2-4\times1\times(a^2-a)\le0$, $3a^2-2a-1\ge0$
$(3a+1)(a-1)\ge0$ $\quad\therefore a\le-\frac{1}{3}$ 또는 $a\ge1$

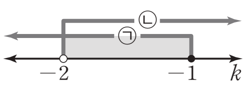
16강 연립이차부등식

확인 문제 p. 68

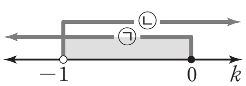
1 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $y>0$인 x의 값의 범위는 $x<-1$ 또는 $x>2$이므로 부등식 $f(x)>0$의 해는
$x<-1$ 또는 $x>2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
이차함수 $y=g(x)$의 그래프에서 $y\ge0$인 x의 값의 범위는 $-3\le x\le1$이므로 부등식 $g(x)\ge0$의 해는
$-3\le x\le1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
따라서 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 연립부등식의 해는
$-3\le x<-1$



2 (1) 이차방정식 $x^2-2x+k+2=0$의 두 실근을 α, β라 하고 판별식을 D라고 하면 두 근이 모두 양수이므로
$\frac{D}{4}=(-1)^2-(k+2)\ge0$ $\quad\therefore k\le-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$\alpha+\beta=2>0$
$\alpha\beta=k+2>0$ $\quad\therefore k>-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
따라서 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 실수 k의 값의 범위는 $-2<k\le-1$



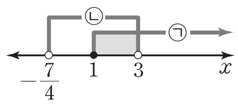
(2) 이차방정식 $x^2+2x+k+1=0$의 두 실근을 α, β라 하고 판별식을 D라 하면 두 근이 모두 음수이므로
$\frac{D}{4}=1^2-(k+1)\ge0$ $\quad\therefore k\le0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$\alpha+\beta=-2<0$
$\alpha\beta=k+1>0$ $\quad\therefore k>-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
따라서 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 실수 k의 값의 범위는 $-1<k\le0$



(3) 이차방정식 $x^2-2x+k-1=0$의 두 실근을 α, β라고 하면 두 근이 서로 다른 부호이므로
$\alpha\beta=k-1<0$ $\quad\therefore k<1$

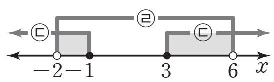
교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 69

1 (1) $2x-7\ge x-6$에서 $x\ge1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$4x^2-5x-21<0$에서 $(4x+7)(x-3)<0$
$\therefore -\frac{7}{4}<x<3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
따라서 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 연립부등식의 해는 $1\le x<3$

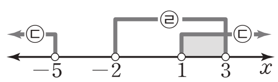


(2) $3(x+8)<2x^2-x-6$에서
$x^2-2x-15>0$, $(x+3)(x-5)>0$
$\therefore x<-3$ 또는 $x>5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$3x^2+7\le4x^2-5x+1$에서
$x^2-5x-6\ge0$, $(x+1)(x-6)\ge0$
$\therefore x\le-1$ 또는 $x\ge6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
따라서 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 연립부등식의 해는
$x<-3$ 또는 $x\ge6$

(3) 주어진 부등식을 연립부등식으로 변형하면
$$\begin{cases}2x+3\le x^2 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2<4(x+3) & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$
부등식 ㉠에서 $x^2-2x-3\ge0$, $(x+1)(x-3)\ge0$
$\therefore x\le-1$ 또는 $x\ge3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢
부등식 ㉡에서 $x^2-4x-12<0$, $(x+2)(x-6)<0$
$\therefore -2<x<6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣
따라서 ㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 연립부등식의 해는
$-2<x\le-1$ 또는 $3\le x<6$



(4) 주어진 부등식을 연립부등식으로 변형하면
$$\begin{cases}-5(x-1)<x(x-1) & \cdots\cdots ㉠\\ x(x-1)<6 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$
부등식 ㉠에서 $x^2+4x-5>0$, $(x+5)(x-1)>0$
$\therefore x<-5$ 또는 $x>1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢
부등식 ㉡에서 $x^2-x-6<0$, $(x+2)(x-3)<0$
$\therefore -2<x<3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣
따라서 ㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 연립부등식의 해는 $1<x<3$



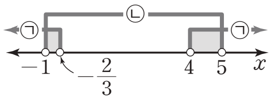
2 (1) $|3x-5|>7$에서 $3x-5<-7$ 또는 $3x-5>7$

$\therefore\ x<-\frac{2}{3}$ 또는 $x>4$ …… ㉠

$2x^2-5x-7<3(x+1)$에서 $x^2-4x-5<0$

$(x+1)(x-5)<0$ $\therefore\ -1<x<5$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 연립부등식의 해는 $-1<x<-\frac{2}{3}$ 또는 $4<x<5$



(2) $(x+3)^2\le 4$에서 $x^2+6x+5\le 0$, $(x+5)(x+1)\le 0$

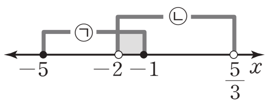
$\therefore\ -5\le x\le -1$ …… ㉠

$x^2-x+5>4x^2-5$에서

$3x^2+x-10<0$, $(x+2)(3x-5)<0$

$\therefore\ -2<x<\frac{5}{3}$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 연립부등식의 해는 $-2<x\le -1$



(3) 주어진 부등식을 연립부등식으로 변형하면

$\begin{cases} x(x+7)<3(3x+1) & \cdots\cdots ㉠ \\ 3(3x+1)\le 2x^2+7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

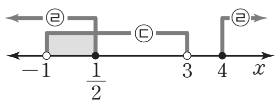
부등식 ㉠에서 $x^2-2x-3<0$, $(x+1)(x-3)<0$

$\therefore\ -1<x<3$ …… ㉢

부등식 ㉡에서 $2x^2-9x+4\ge 0$, $(2x-1)(x-4)\ge 0$

$\therefore\ x\le \frac{1}{2}$ 또는 $x\ge 4$ …… ㉣

따라서 ㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 연립부등식의 해는 $-1<x\le \frac{1}{2}$



(4) 주어진 부등식을 연립부등식으로 변형하면

$\begin{cases} x+2\le x^2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2\le 2x^2-x-6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

부등식 ㉠에서 $x^2-x-2\ge 0$, $(x+1)(x-2)\ge 0$

$\therefore\ x\le -1$ 또는 $x\ge 2$ …… ㉢

부등식 ㉡에서 $x^2-x-6\ge 0$, $(x+2)(x-3)\ge 0$

$\therefore\ x\le -2$ 또는 $x\ge 3$ …… ㉣

따라서 ㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 연립부등식의 해는 $x\le -2$ 또는 $x\ge 3$

3 직사각형의 한 변의 길이를 x cm라고 하면 다른 한 변의 길이는 $(14-x)$ cm이므로 $24\le x(14-x)\le 40$

이 부등식을 연립부등식으로 변형하면

$\begin{cases} 24\le x(14-x) & \cdots\cdots ㉠ \\ x(14-x)\le 40 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

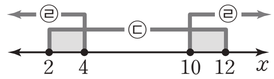
부등식 ㉠에서 $x^2-14x+24\le 0$, $(x-2)(x-12)\le 0$

$\therefore\ 2\le x\le 12$ …… ㉢

부등식 ㉡에서 $x^2-14x+40\ge 0$, $(x-4)(x-10)\ge 0$

$\therefore\ x\le 4$ 또는 $x\ge 10$ …… ㉣

㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는



$2\le x\le 4$ 또는 $10\le x\le 12$

따라서 짧은 변의 길이의 범위는 2 cm 이상 4 cm 이하이므로 구하는 최댓값은 4 cm, 최솟값은 2 cm이다.

4 세 변의 길이는 모두 양수이므로

$3x-1>0$, $x>0$, $3x+1>0$ $\therefore\ x>\frac{1}{3}$ …… ㉠

이때 세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $3x+1$이다.

삼각형이 만들어질 조건에 의하여

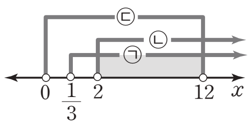
$3x+1<x+(3x-1)$ $\therefore\ x>2$ …… ㉡

둔각삼각형이 되려면

$(3x+1)^2>x^2+(3x-1)^2$, $x^2-12x<0$

$x(x-12)<0$ $\therefore\ 0<x<12$ …… ㉢

따라서 ㉠, ㉡, ㉢을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 x의 값의 범위는 $2<x<12$



5 (1) 이차방정식 $x^2-2kx-4k+5=0$의 두 실근을 α, β라 하고 판별식을 D라고 하면 두 근이 모두 양수이므로

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(-4k+5)\ge 0$, $k^2+4k-5\ge 0$

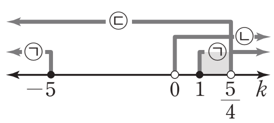
$(k+5)(k-1)\ge 0$

$\therefore\ k\le -5$ 또는 $k\ge 1$ …… ㉠

$\alpha+\beta=2k>0$ $\therefore\ k>0$ …… ㉡

$\alpha\beta=-4k+5>0$ $\therefore\ k<\frac{5}{4}$ …… ㉢

따라서 ㉠, ㉡, ㉢을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 실수 k의 값의 범위는



$1\le k<\frac{5}{4}$

(2) 이차방정식 $x^2-2kx-4k+5=0$의 두 실근을 α, β라 하고 판별식을 D라고 하면 두 근이 모두 음수이므로

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(-4k+5)\ge 0$, $k^2+4k-5\ge 0$

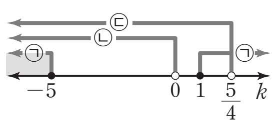
$(k+5)(k-1)\ge 0$

$\therefore\ k\le -5$ 또는 $k\ge 1$ …… ㉠

$\alpha+\beta=2k<0$ $\therefore\ k<0$ …… ㉡

$\alpha\beta=-4k+5>0$ $\therefore\ k<\frac{5}{4}$ …… ㉢

따라서 ㉠, ㉡, ㉢을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 실수 k의 값의 범위는 $k\le -5$



6 (1) 이차방정식 $x^2+kx-k+3=0$의 두 실근을 α, β라 하고 판별식을 D라고 하면 두 근이 모두 양수이므로

$D=k^2-4(-k+3)\geq 0$, $k^2+4k-12\geq 0$

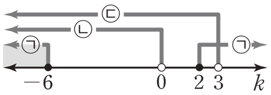
$(k+6)(k-2)\geq 0$

$\therefore k\leq -6$ 또는 $k\geq 2$ …… ㉠

$\alpha+\beta=-k>0$ $\therefore k<0$ …… ㉡

$\alpha\beta=-k+3>0$ $\therefore k<3$ …… ㉢

따라서 ㉠, ㉡, ㉢을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 실수 k의 값의 범위는 $k\leq -6$



(2) 이차방정식 $x^2+kx-k+3=0$의 두 실근을 α, β라 하고 판별식을 D라고 하면 두 근이 모두 음수이므로

$D=k^2-4(-k+3)\geq 0$, $k^2+4k-12\geq 0$

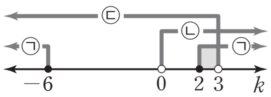
$(k+6)(k-2)\geq 0$

$\therefore k\leq -6$ 또는 $k\geq 2$ …… ㉠

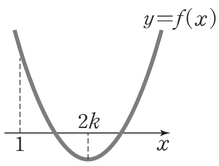
$\alpha+\beta=-k<0$ $\therefore k>0$ …… ㉡

$\alpha\beta=-k+3>0$ $\therefore k<3$ …… ㉢

따라서 ㉠, ㉡, ㉢을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 실수 k의 값의 범위는 $2\leq k<3$



7 $f(x)=x^2-4kx+3k+1$이라고 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 크므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$f(1)>0$에서 $1-4k+3k+1>0$

$\therefore k<2$ …… ㉠

$2k>1$에서 $k>\frac{1}{2}$ …… ㉡

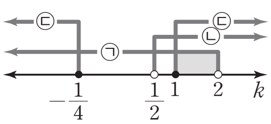
이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-(3k+1)\geq 0$, $4k^2-3k-1\geq 0$

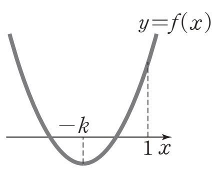
$(4k+1)(k-1)\geq 0$

$\therefore k\leq -\frac{1}{4}$ 또는 $k\geq 1$ …… ㉢

따라서 ㉠, ㉡, ㉢을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 실수 k의 값의 범위는 $1\leq k<2$



8 $f(x)=x^2+2kx-3k+4$라고 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 근이 모두 1보다 작으므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$f(1)>0$에서 $1+2k-3k+4>0$

$\therefore k<5$ …… ㉠

$-k<1$에서 $k>-1$ …… ㉡

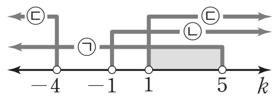
이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(-3k+4)>0$, $k^2+3k-4>0$

$(k+4)(k-1)>0$

$\therefore k<-4$ 또는 $k>1$ …… ㉢

따라서 ㉠, ㉡, ㉢을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 실수 k의 값의 범위는 $1<k<5$



계산력 다지기

p. 70~71

1 (1) $x\leq 2$ (2) $1<x\leq 3$

(3) $1<x\leq 2$ (4) $\frac{1}{8}\leq x<5$

(5) $-8\leq x<4$ (6) $x<-11$

(7) $x=1$ (8) 해는 없다.

2 (1) $0\leq x<5$ (2) $-2\leq x<3$

(3) $2\leq x\leq \frac{5}{2}$ (4) $-7<x<-2$

(5) $2<x\leq \frac{7}{2}$ (6) $6\leq x\leq 17$

3 (1) $-\frac{4}{3}\leq x\leq 2$ (2) $x<-\frac{1}{5}$ 또는 $x>1$

(3) $x\geq 0$ (4) $-1<x<1$

(5) (i) $x<1$일 때

$-(x-1)-(x-2)<3$ $\therefore x>0$

그런데 $x<1$이므로 $0<x<1$

(ii) $1\leq x<2$일 때

$(x-1)-(x-2)<3$, $0\times x<2$

$\therefore$ 해는 모든 실수

그런데 $1\leq x<2$이므로 $1\leq x<2$

(iii) $x\geq 2$일 때

$(x-1)+(x-2)<3$ $\therefore x<3$

그런데 $x\geq 2$이므로 $2\leq x<3$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $0<x<3$

(6) (i) $x<-2$일 때

$(3-x)-(x+2)\geq 7$ $\therefore x\leq -3$

그런데 $x<-2$이므로 $x\leq -3$

(ii) $-2\leq x<3$일 때

$(3-x)+(x+2)\geq 7$, $0\times x\geq 2$ $\therefore$ 해는 없다.

(iii) $x\geq 3$일 때

$-(3-x)+(x+2)\geq 7$ $\therefore x\geq 4$

그런데 $x\geq 3$이므로 $x\geq 4$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $x\leq -3$ 또는 $x\geq 4$

4 (1) $-1<x<5$ (2) $x\le -3$ 또는 $x\ge -2$

(3) $-1\le x\le \frac{7}{2}$ (4) $x<-4$ 또는 $x>2$

(5) 모든 실수 (6) 해는 없다.

5 (1) $2x-3<15-4x$에서 $x<3$ …… ㉠

$x^2-5x+4\le 0$에서 $(x-1)(x-4)\le 0$

$\therefore\ 1\le x\le 4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $1\le x<3$

(2) $2x^2-x<15$에서 $2x^2-x-15<0$

$(2x+5)(x-3)<0$ $\therefore\ -\frac{5}{2}<x<3$ …… ㉠

$x^2-2x-8\ge 0$에서 $(x+2)(x-4)\ge 0$

$\therefore\ x\le -2$ 또는 $x\ge 4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{5}{2}<x\le -2$

(3) $x^2+7x+6\le 0$에서 $(x+6)(x+1)\le 0$

$\therefore\ -6\le x\le -1$ …… ㉠

$x^2-3>4x-6$에서 $x^2-4x+3>0$

$(x-1)(x-3)>0$

$\therefore\ x<1$ 또는 $x>3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-6\le x\le -1$

(4) $2x^2-5x-7\le 0$에서 $(x+1)(2x-7)\le 0$

$\therefore\ -1\le x\le \frac{7}{2}$ …… ㉠

$4-3x\ge 2-x^2$에서 $x^2-3x+2\ge 0$

$(x-1)(x-2)\ge 0$

$\therefore\ x\le 1$ 또는 $x\ge 2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-1\le x\le 1$ 또는 $2\le x\le \frac{7}{2}$

(5) $x^2-3x-2>2x-8$에서 $x^2-5x+6>0$

$(x-2)(x-3)>0$

$\therefore\ x<2$ 또는 $x>3$ …… ㉠

$4-2x^2\ge x^2-4x$에서 $3x^2-4x-4\le 0$

$(3x+2)(x-2)\le 0$

$\therefore\ -\frac{2}{3}\le x\le 2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{2}{3}\le x<2$

(6) $x^2-2|x|-3<0$에서

(i) $x<0$일 때

$x^2+2x-3<0$, $(x+3)(x-1)<0$

$\therefore\ -3<x<1$

그런데 $x<0$이므로 $-3<x<0$

(ii) $x\ge 0$일 때

$x^2-2x-3<0$, $(x+1)(x-3)<0$

$\therefore\ -1<x<3$

그런데 $x\ge 0$이므로 $0\le x<3$

(i), (ii)에 의하여 $-3<x<3$ …… ㉠

$x^2-4x-12>0$에서 $(x+2)(x-6)>0$

$\therefore\ x<-2$ 또는 $x>6$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-3<x<-2$

14~16강 족집게 기출문제 p. 72~75

1 ②	2 ④	3 ①	4 ④	5 3
6 ③	7 ②	8 ③	9 10	10 $-\frac{1}{3}$
11 ①	12 6	13 ②	14 ①	15 ④
16 ⑤	17 ⑤	18 ④	19 ①	20 ⑤
21 ④	22 ④	23 ③	24 ③	25 ④

26 (1) $b=-a$, $c=-2a$ (2) $-1<x<\frac{1}{4}$

27 $-3\le a<-1$ 28 $-\frac{3}{2}\le a<-1$ 또는 $2<a\le \frac{5}{2}$

1 $3x-2<4x+1$에서 $x>-3$

$2(3x-1)>8x+a$에서

$6x-2>8x+a$, $x<-\frac{a+2}{2}$

주어진 연립부등식의 해가 $-3<x<2$이므로

$-\frac{a+2}{2}=2$ $\therefore\ a=-6$

2 ① $2x-1\le 3$에서 $x\le 2$ …… ㉠

$x-2>4-3x$에서 $x>\frac{3}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{3}{2}<x\le 2$

② $1.2x+1.7\le -1.5-2x$에서

$12x+17\le -15-20x$ $\therefore\ x\le -1$ …… ㉠

$2(x+4)-3>-2$에서

$2x+5>-2$ $\therefore\ x>-\frac{7}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{7}{2}<x\le -1$

③ $\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\ge 2x$에서

$2x-3\ge 8x$ $\therefore\ x\le -\frac{1}{2}$ …… ㉠

$2-5x\le 3-3x$에서 $x\ge -\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x=-\frac{1}{2}$

④ $2x-3<1-(x-2)$에서

$2x-3<-x+3$ $\therefore\ x<2$ …… ㉠

$3-2x\le \frac{3}{2}x-4$에서

$6-4x\le 3x-8$ $\therefore\ x\ge 2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 해는 없다.

⑤ $3x-2\le 2(x-2)+3$에서

$3x-2\le 2x-1$ $\therefore\ x\le 1$ …… ㉠

$2(x-2)+3<5-x$에서

$2x-1<5-x$ $\therefore\ x<2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x\le 1$

따라서 해가 존재하지 않는 연립부등식은 ④이다.

3 부등식 $2|1-x|+3|x+1|<9$에서

(i) $x<-1$일 때

$2(1-x)-3(x+1)<9$ $\quad\therefore\ x>-2$

그런데 $x<-1$이므로 $\quad -2<x<-1$

(ii) $-1\le x<1$일 때

$2(1-x)+3(x+1)<9$ $\quad\therefore\ x<4$

그런데 $-1\le x<1$이므로 $\quad -1\le x<1$

(iii) $x\ge1$일 때

$-2(1-x)+3(x+1)<9$ $\quad\therefore\ x<\frac{8}{5}$

그런데 $x\ge1$이므로 $\quad 1\le x<\frac{8}{5}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $\quad -2<x<\frac{8}{5}$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=\frac{8}{5}$이므로 $\quad \alpha+\beta=-\frac{2}{5}$

4 $\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$이므로 주어진 부등식은

$2|x+2|+|x-1|\le6$

(i) $x<-2$일 때

$-2(x+2)-(x-1)\le6$ $\quad\therefore\ x\ge-3$

그런데 $x<-2$이므로 $\quad -3\le x<-2$

(ii) $-2\le x<1$일 때

$2(x+2)-(x-1)\le6$ $\quad\therefore\ x\le1$

그런데 $-2\le x<1$이므로 $\quad -2\le x<1$

(iii) $x\ge1$일 때

$2(x+2)+(x-1)\le6$ $\quad\therefore\ x\le1$

그런데 $x\ge1$이므로 $\quad x=1$

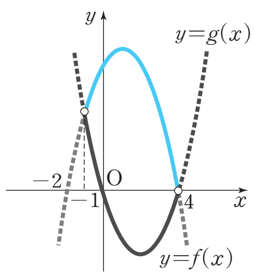
(i), (ii), (iii)에 의하여 $\quad -3\le x\le1$

따라서 정수 x는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$의 5개이다.

5 부등식 $f(x)>g(x)$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 이차함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위와 같으므로 $\quad -1<x<4$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=4$이므로

$\alpha+\beta=3$



6 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 해는 $\quad x=1\pm\sqrt{2}$

따라서 이차부등식 $x^2-2x-1<0$의 해는

$1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$

이때 $\sqrt{2}=1.414\times\times\times$이므로

$-0.414\times\times\times<x<2.414\times\times\times$

따라서 정수 x는 0, 1, 2이므로 합은 3이다

7 부등식 $x^2-|x|-6<0$에서

(i) $x\ge0$일 때

$x^2-x-6<0$, $(x+2)(x-3)<0$

$\therefore\ -2<x<3$

그런데 $x\ge0$이므로 $\quad 0\le x<3$

(ii) $x<0$일 때

$x^2+x-6<0$, $(x+3)(x-2)<0$

$\therefore\ -3<x<2$

그런데 $x<0$이므로 $\quad -3<x<0$

(i), (ii)에 의하여 $\quad -3<x<3$

다른 풀이

$x^2-|x|-6<0$에서 $\quad |x|^2-|x|-6<0$

$(|x|+2)(|x|-3)<0$

이때 $|x|+2>0$이므로 $\quad |x|-3<0$

$|x|<3$ $\quad\therefore\ -3<x<3$

8 해가 $x<b$ 또는 $x>4$이고 x^2의 계수가 2인 이차부등식은

$2(x-4)(x-b)>0$

$\therefore\ 2x^2-2(4+b)x+8b>0$

이 이차부등식이 $2x^2-12x+4a>0$과 같으므로

$2(4+b)=12$, $8b=4a$ $\quad\therefore\ a=4,\ b=2$

$\therefore\ a+b=6$

9 이차함수 $y=x^2-ax+b$의 그래프가 직선 $y=x+2$보다 아래쪽에 있으려면

$x^2-ax+b<x+2$

$\therefore\ x^2-(a+1)x+b-2<0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 해가 $1<x<4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)(x-4)<0$, $x^2-5x+4<0$

이 이차부등식이 이차부등식 ㉠과 같으므로

$a+1=5$, $b-2=4$ $\quad\therefore\ a=4,\ b=6$

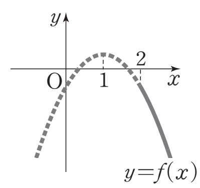
$\therefore\ a+b=10$

10 $f(x)=-x^2+2x+3a+1$이라고 하면

$f(x)=-(x-1)^2+3a+2$

$x\ge2$에서 $f(x)\le0$이어야 하므로

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$f(2)\le0$에서

$-4+4+3a+1\le0$ $\quad\therefore\ a\le-\frac{1}{3}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $-\frac{1}{3}$이다.

11 x만 원 인상하면 스캐너 한 대의 가격은 $(10+x)$만 원이고, 월 판매량은 $(100-4x)$대이다.

(총 판매액)=(스캐너 한 대의 가격)×(월 판매량)이므로

$(10+x)(100-4x)\ge1200$, $x^2-15x+50\le0$

$(x-5)(x-10)\le0$ $\quad\therefore\ 5\le x\le10$

이때 인상된 스캐너 한 대의 가격은 $(10+x)$만 원이므로

$15\le10+x\le20$

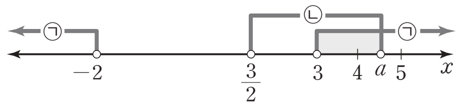
따라서 스캐너 한 대의 가격을 15만 원 이상 20만 원 이하로 하면 된다.

12 $f(x)=2x^2+ax+b$라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하고, 부등식 $f(x)\le 0$의 해가 $x=-3$뿐이므로 x축과 한 점 $(-3,\ 0)$에서만 만나야 한다.
이때 x^2의 계수가 2이므로
$f(x)=2(x+3)^2=2x^2+12x+18$
따라서 $a=12,\ b=18$이므로
$b-a=6$

13 이차부등식 $(a-1)x^2-2(a-1)x+1>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로
(i) $a-1>0$ $\quad\therefore\ a>1$
(ii) 이차방정식 $(a-1)x^2-2(a-1)x+1=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=\{-(a-1)\}^2-(a-1)<0$
$a^2-3a+2<0,\ (a-1)(a-2)<0$
$\therefore\ 1<a<2$
(i), (ii)에 의하여 $\quad 1<a<2$

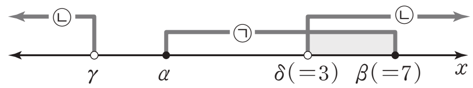
14 $x^2+6x+5\ge 0$에서 $\quad (x+5)(x+1)\ge 0$
$\therefore\ x\le -5$ 또는 $x\ge -1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$x^2+4x-21<0$에서 $\quad (x+7)(x-3)<0$
$\therefore\ -7<x<3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $\quad -7<x\le -5$ 또는 $-1\le x<3$
따라서 정수 x는 $-6,\ -5,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$이므로 그 합은
$-6+(-5)+(-1)+0+1+2=-9$

15 $x^2-x-6>0$에서 $\quad (x+2)(x-3)>0$
$\therefore\ x<-2$ 또는 $x>3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$2x^2-(2a+3)x+3a<0$에서
$(2x-3)(x-a)<0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
이때 두 부등식을 동시에 만족하는 정수 x의 값이 4뿐이도록 ㉠과 ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, ㉡의 해는 $\frac{3}{2}<x<a$이고, 이때 a의 값의 범위는
$4<a\le 5$

16 $x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)\ (\alpha<\beta)$라고 하면
$x^2+ax+b\le 0$에서 $\quad (x-\alpha)(x-\beta)\le 0$
$\therefore\ \alpha\le x\le\beta$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$x^2-x+a=(x-\gamma)(x-\delta)\ (\gamma<\delta)$라고 하면
$x^2-x+a>0$에서 $\quad (x-\gamma)(x-\delta)>0$
$\therefore\ x<\gamma$ 또는 $x>\delta$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통부분이 $3<x\le 7$이 되도록 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore\ \beta=7,\ \delta=3$
이때 $x=7$은 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이므로
$49+7a+b=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢
또 $x=3$은 이차방정식 $x^2-x+a=0$의 한 근이므로
$9-3+a=0$ $\quad\therefore\ a=-6$
$a=-6$을 ㉢에 대입하면
$49+7\times(-6)+b=0$ $\quad\therefore\ b=-7$
$\therefore\ ab=42$

17 처음 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라고 하면 직사각형의 넓이는 $(x+3)(x+2)\,\mathrm{cm}^2$이므로
$42\le(x+3)(x+2)\le 72$
이 부등식을 연립부등식으로 변형하면
$\begin{cases} 42\le(x+3)(x+2) & \cdots\cdots ㉠ \\ (x+3)(x+2)\le 72 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
부등식 ㉠에서 $\quad x^2+5x-36\ge 0$
$(x+9)(x-4)\ge 0$
$\therefore\ x\le -9$ 또는 $x\ge 4$
그런데 $x>0$이므로 $\quad x\ge 4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢
부등식 ㉡에서 $\quad x^2+5x-66\le 0$
$(x+11)(x-6)\le 0$
$\therefore\ -11\le x\le 6$
그런데 $x>0$이므로 $\quad 0<x\le 6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣
㉢, ㉣에서 $\quad 4\le x\le 6$
따라서 처음 정사각형의 한 변의 길이의 최댓값은 6 cm이다.

18 이차방정식 $x^2-3ax+a(2a+1)=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라고 하면
$D_1=(-3a)^2-4a(2a+1)\ge 0$
$a^2-4a\ge 0,\ a(a-4)\ge 0$
$\therefore\ a\le 0$ 또는 $a\ge 4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
이차방정식 $x^2+2(3a+1)x+4a^2+9=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라고 하면
$\frac{D_2}{4}=(3a+1)^2-(4a^2+9)<0$
$5a^2+6a-8<0,\ (a+2)(5a-4)<0$
$\therefore\ -2<a<\frac{4}{5}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $\quad -2<a\le 0$

19 이차방정식 $x^2+(2a^2+a-15)x+a-2=0$의 두 근을 α, β라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-(2a^2+a-15),\ \alpha\beta=a-2$
이때 α, β의 부호는 서로 다르므로 $\quad \alpha\beta<0$
즉, $a-2<0$에서 $\quad a<2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 양수인 근이 음수인 근의 절댓값보다 크므로

$\alpha+\beta>0$

즉, $-(2a^2+a-15)>0$에서

$2a^2+a-15<0$, $(a+3)(2a-5)<0$

$\therefore\ -3<a<\frac{5}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-3<a<2$

따라서 정수 a는 -2, -1, 0, 1의 4개이다.

20 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=b^2-4ac>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 가진다.

이때 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로

(두 근의 합)$=-\frac{b}{a}<0$

(두 근의 곱)$=\frac{c}{a}>0$

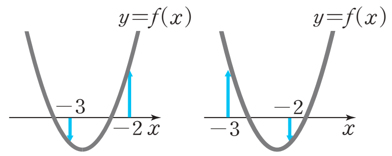
즉, 두 근의 합은 음수이고 두 근의 곱은 양수이므로 두 근은 모두 음수이다.

따라서 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 개의 음의 근을 가진다.

21 $x^2+5x+6=0$에서 $(x+3)(x+2)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=-2$

즉, 이차방정식 $x^2-ax+2=0$의 두 근 중에서 한 근만이 -3과 -2 사이에 있어야 하므로 $f(x)=x^2-ax+2$라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(-3)f(-2)<0$이므로 $(3a+11)(2a+6)<0$

$\therefore\ -\frac{11}{3}<a<-3$

따라서 $\alpha=-\frac{11}{3}$, $\beta=-3$이므로

$\alpha\beta=11$

22 한 방에 6명씩 배정하면 9명의 회원이 남으므로 방의 개수를 x라고 하면 회원은 $(6x+9)$명이다.

한 방에 8명씩 배정하면 방이 4개 남으므로 $(x-5)$개의 방에는 8명씩 배정되고, 나머지 한 방에는 1명 이상 8명 이하가 배정된다.

즉, $8(x-5)+1\le 6x+9\le 8(x-4)$

$8(x-5)+1\le 6x+9$에서

$8x-39\le 6x+9$ $\therefore\ x\le 24$ …… ㉠

$6x+9\le 8(x-4)$에서

$6x+9\le 8x-32$ $\therefore\ x\ge\frac{41}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{41}{2}\le x\le 24$

이때 x는 자연수이므로

$x=21$ 또는 $x=22$ 또는 $x=23$ 또는 $x=24$

따라서 회원은 135명 또는 141명 또는 147명 또는 153명이므로 회원 수가 될 수 있는 것은 ④이다.

23 (ⅰ) $x<-3$일 때

$2|x+3|+|x-3|=-2(x+3)-(x-3)$

$=-3x-3$

그런데 $x<-3$이므로 $-3x-3>6$

$\therefore\ 2|x+3|+|x-3|>6$

(ⅱ) $-3\le x<3$일 때

$2|x+3|+|x-3|=2(x+3)-(x-3)$

$=x+9$

그런데 $-3\le x<3$이므로 $6\le x+9<12$

$\therefore\ 6\le 2|x+3|+|x-3|<12$

(ⅲ) $x\ge 3$일 때

$2|x+3|+|x-3|=2(x+3)+(x-3)$

$=3x+3$

그런데 $x\ge 3$이므로 $3x+3\ge 12$

$\therefore\ 2|x+3|+|x-3|\ge 12$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$2|x+3|+|x-3|\ge 6$

따라서 주어진 부등식이 해를 가지려면

$k\ge 6$

24 $2x+y=k$ (k는 실수)라고 하면

$y=-2x+k$

이 식을 $2x^2+y^2=1$에 대입하면

$2x^2+(-2x+k)^2=1$

$\therefore\ 6x^2-4kx+k^2-1=0$ …… ㉠

이 방정식을 만족하는 실수 x가 존재해야 하므로 x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-6(k^2-1)\ge 0$, $k^2-3\le 0$

$\therefore\ -\sqrt{3}\le k\le\sqrt{3}$

따라서 $M=\sqrt{3}$, $m=-\sqrt{3}$이므로

$Mm=-3$

25 n이 정수일 때, $[x-n]=[x]-n$이므로

$[x-2]=[x]-2$

즉, 부등식 $[x-2]^2-[x]-10\le 0$에서

$([x]-2)^2-[x]-10\le 0$

$[x]^2-5[x]-6\le 0$

$([x]+1)([x]-6)\le 0$

$\therefore\ -1\le[x]\le 6$

그런데 $[x]$는 정수이므로

$[x]=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

$[x]=-1$일 때, $\quad -1\le x<0$

$[x]=0$일 때, $\quad 0\le x<1$

$[x]=1$일 때, $\quad 1\le x<2$

$\vdots$

$[x]=5$일 때, $\quad 5\le x<6$

$[x]=6$일 때, $\quad 6\le x<7$

따라서 구하는 부등식의 해는 $\ -1\le x<7$이므로

$\alpha=-1,\ \beta=7 \qquad \therefore\ \alpha+\beta=6$

26 (1) 해가 $-2<x<1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-1)<0$

$\therefore\ x^2+x-2<0$ …… ㉠ …… (가)

부등식 ㉠과 부등식 $ax^2-bx+c>0$의 해가 같으므로

$a<0$

부등식 ㉠의 양변에 a를 곱하면 $\ ax^2+ax-2a>0$

이 부등식이 부등식 $ax^2-bx+c>0$과 같으므로

$a=-b,\ -2a=c$

$\therefore\ b=-a,\ c=-2a$ …… (나)

(2) $b=-a,\ c=-2a$를 부등식 $2cx^2+3bx+a<0$에 대입하면 $\ -4ax^2-3ax+a<0$

이때 $-a>0$이므로 이 부등식의 양변을 $-a$로 나누면

$4x^2+3x-1<0$ …… (다)

$(x+1)(4x-1)<0$

$\therefore\ -1<x<\frac{1}{4}$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) 해가 $-2<x<1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식을 구한다.	1점
(나) $b,\ c$를 a에 관한 식으로 나타낸다.	2점
(다) 이차부등식 $2cx^2+3bx+a<0$에서 $a,\ b,\ c$를 없앤다.	2점
(라) 이차부등식의 해를 구한다.	1점

27 $f(x)>g(x)$에서 $\ ax^2-2ax+3>-3x^2+6x+1$

$(a+3)x^2-2(a+3)x+2>0$ …… ㉠ …… (가)

(i) $a+3=0$, 즉 $a=-3$일 때

부등식 ㉠에서 $0\times x^2-0\times x+2>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

$\therefore\ a=-3$ …… (나)

(ii) $a+3\ne0$, 즉 $a\ne-3$일 때

부등식 ㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$a+3>0 \qquad \therefore\ a>-3$ …… ㉡

이차방정식 $(a+3)x^2-2(a+3)x+2=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+3)\}^2-2(a+3)<0$

$a^2+4a+3<0,\ (a+3)(a+1)<0$

$\therefore\ -3<a<-1$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $\ -3<a<-1$ …… (다)

(i), (ii)에 의하여 $\ -3\le a<-1$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) $f(x)>g(x)$를 x에 대한 이차부등식으로 나타낸다.	1점
(나) 부등식의 x^2의 계수가 0일 때, a의 값을 구한다.	2점
(다) 부등식의 x^2의 계수가 0이 아닐 때, a의 값의 범위를 구한다.	2점
(라) a의 값의 범위를 구한다.	1점

28 $x^2-2x-15\le0$에서 $\ (x+3)(x-5)\le0$

$\therefore\ -3\le x\le5$ …… ㉠ …… (가)

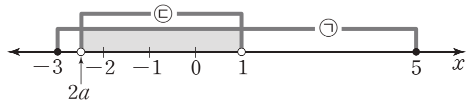
$x^2-(2a+1)x+2a<0$에서

$(x-1)(x-2a)<0$ …… ㉡

(i) $2a<1$, 즉 $a<\frac{1}{2}$일 때

부등식 ㉡의 해는 $\ 2a<x<1$ …… ㉢

㉠, ㉢을 동시에 만족하는 정수 x의 개수가 3이 되도록 ㉠, ㉢을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$-3\le2a<-2$이므로 $\ -\frac{3}{2}\le a<-1$

그런데 $a<\frac{1}{2}$이므로 $\ -\frac{3}{2}\le a<-1$ …… (나)

(ii) $2a=1$, 즉 $a=\frac{1}{2}$일 때

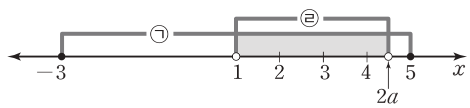
부등식 ㉡에서 $(x-1)^2<0$이므로 주어진 두 부등식을 동시에 만족하는 x의 값은 없다.

$\therefore\ a\ne\frac{1}{2}$ …… (다)

(iii) $2a>1$, 즉 $a>\frac{1}{2}$일 때

부등식 ㉡의 해는 $\ 1<x<2a$ …… ㉣

㉠, ㉣을 동시에 만족하는 정수 x의 개수가 3이 되도록 ㉠, ㉣을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$4<2a\le5$이므로 $\ 2<a\le\frac{5}{2}$

그런데 $a>\frac{1}{2}$이므로 $\ 2<a\le\frac{5}{2}$ …… (라)

(i), (ii), (iii)에 의하여

$-\frac{3}{2}\le a<-1$ 또는 $2<a\le\frac{5}{2}$ …… (마)

채점 기준	배점
(가) 부등식 $x^2-2x-15\le0$의 해를 구한다.	1점
(나) $2a<1$일 때, a의 값의 범위를 구한다.	2점
(다) $2a=1$일 때, 조건을 만족하지 않음을 확인한다.	1점
(라) $2a>1$일 때, a의 값의 범위를 구한다.	2점
(마) a의 값의 범위를 구한다.	1점

17강 두 점 사이의 거리

확인 문제 p. 76

1 (1) $\overline{AB}=|-2-7|=9$

(2) $\overline{AB}=|-8|=8$

(3) $\overline{AB}=|5-(-1)|=6$

(4) $\overline{AB}=|-4-(-3)|=1$

2 (1) $\overline{AB}=\sqrt{(5-1)^2+(4-1)^2}=5$

(2) $\overline{AB}=\sqrt{1^2+(-6)^2}=\sqrt{37}$

(3) $\overline{AB}=\sqrt{(3-3)^2+\{2-(-6)\}^2}=8$

(4) $\overline{AB}=\sqrt{\{0-(-5)\}^2+(-4-0)^2}=\sqrt{41}$

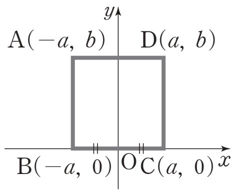
3 점 C는 x축 위의 점이므로 점 C의 좌표는 $C(a,\ 0)$

$\overline{OB}=\overline{OC}$이므로 점 B의 좌표는

$B(-a,\ 0)$

$\overline{AB}=\overline{CD}$이므로 점 A의 좌표는

$A(-a,\ b)$



교/과/서/속 핵심+유형 닮은꼴 문제 p. 77

1 $\overline{AB}=10$이므로

$\sqrt{\{4-(-2)\}^2+(a-3)^2}=10$

양변을 제곱하여 정리하면 $a^2-6a-55=0$

$(a+5)(a-11)=0$ $\quad\therefore a=-5$ 또는 $a=11$

2 $\overline{AB}=\overline{OB}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{OB}^2$이므로

$(-1-a)^2+(1-2)^2=(-1)^2+1^2$

$a^2+2a=0,\ a(a+2)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=0$

3 $\overline{AB}^2=\{5-(-1)\}^2+(-1-1)^2=40$

$\overline{BC}^2=(6-5)^2+\{2-(-1)\}^2=10$

$\overline{CA}^2=(-1-6)^2+(1-2)^2=50$

따라서 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이므로 삼각형 ABC는 $\angle B=90°$인 직각삼각형이다.

4 $\overline{AB}^2=\{4-(-2)\}^2+(-4-0)^2=52$

$\overline{BC}^2=(5-4)^2+\{4-(-4)\}^2=65$

$\overline{CA}^2=(-2-5)^2+(0-4)^2=65$

$\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이므로 $\overline{BC}=\overline{CA}$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{BC}=\overline{CA}$인 이등변삼각형이다.

5 점 P가 x축 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $P(a,\ 0)$이라고 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-2)^2+(0-4)^2=(a-9)^2+(0-3)^2$

$a^2-4a+20=a^2-18a+90$

$14a=70$ $\quad\therefore a=5$

따라서 구하는 점 P의 좌표는

$P(5,\ 0)$

6 점 P가 y축 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $P(0,\ a)$라고 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(0-4)^2+(a-1)^2=(0-2)^2+\{a-(-1)\}^2$

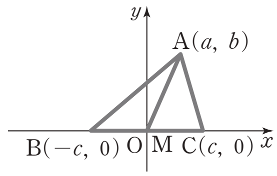
$a^2-2a+17=a^2+2a+5$

$-4a=-12$ $\quad\therefore a=3$

따라서 구하는 점 P의 좌표는

$P(0,\ 3)$

7 오른쪽 그림과 같이 △ABC에서 점 A, B, C, M의 좌표를 각각 $A(a,\ b)$, $B\boxed{(-c,\ 0)}$, $C(c,\ 0)$, $M(0,\ 0)$이라고 하면



$\overline{AB}^2=\{a-(-c)\}^2+(b-0)^2=(a+c)^2+b^2$,

$\overline{AC}^2=(a-c)^2+(b-0)^2=(a-c)^2+b^2$

이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\{\boxed{(a+c)^2}+b^2\}+\{\boxed{(a-c)^2}+b^2\}$

$=2(a^2+b^2+c^2)$

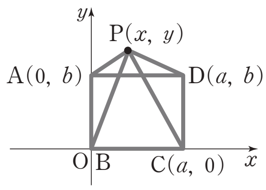
또 $\overline{AM}^2=a^2+b^2$, $\overline{BM}^2=c^2$이므로

$2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)=2(a^2+b^2+c^2)$

따라서 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이 성립한다.

$\therefore$ (가) $(-c,\ 0)$ (나) $(a+c)^2$ (다) $(a-c)^2$

8 오른쪽 그림과 같이 사각형 ABCD에서 점 A, B, C, D의 좌표를 각각 $A\boxed{(0,\ b)}$, $B(0,\ 0)$, $C\boxed{(a,\ 0)}$, $D(a,\ b)$라 하고, 임의의 점 P의 좌표를 $P(x,\ y)$라고 하면



$\overline{PA}^2=(x-0)^2+(y-b)^2=x^2+(y-b)^2$,

$\overline{PC}^2=(x-a)^2+(y-0)^2=(x-a)^2+y^2$

이므로

$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\{x^2+\boxed{(y-b)^2}\}+\{\boxed{(x-a)^2}+y^2\}$

또 $\overline{PB}^2=x^2+y^2$, $\overline{PD}^2=(x-a)^2+(y-b)^2$이므로

$\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=\boxed{x^2+y^2}+\{(x-a)^2+(y-b)^2\}$

$=\{x^2+(y-b)^2\}+\{(x-a)^2+y^2\}$

따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$이 성립한다.

$\therefore$ (가) $(0,\ b)$ (나) $(a,\ 0)$ (다) $(y-b)^2$ (라) $(x-a)^2$

(마) x^2+y^2

18강 선분의 내분점과 외분점

확인 문제 p. 78

1 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표를 구하면

$\frac{2\times4+1\times(-2)}{2+1}=2$ $\quad\therefore$ P(2)

$\overline{AB}$를 $2:1$로 외분하는 점 Q의 좌표를 구하면

$\frac{2\times4-1\times(-2)}{2-1}=10$ $\quad\therefore$ Q(10)

2 $\overline{AB}$를 $2:3$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{2\times(-2)+3\times3}{2+3},\ \frac{2\times1+3\times(-4)}{2+3}\right)$

$\therefore$ P(1, -2)

$\overline{AB}$를 $2:3$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{2\times(-2)-3\times3}{2-3},\ \frac{2\times1-3\times(-4)}{2-3}\right)$

$\therefore$ Q(13, -14)

교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 79

1 $\overline{AB}$를 $5:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{5\times4+1\times(-2)}{5+1},\ \frac{5\times(-9)+1\times3}{5+1}\right)$

$\therefore$ P(3, -7)

$\overline{AB}$를 $3:1$로 외분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{3\times4-1\times(-2)}{3-1},\ \frac{3\times(-9)-1\times3}{3-1}\right)$

$\therefore$ Q(7, -15)

따라서 $\overline{PQ}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3+7}{2},\ \frac{-7-15}{2}\right)$ $\quad\therefore$ (5, -11)

2 $\overline{AB}$를 $1:4$로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{1\times(-2)+4\times3}{1+4},\ \frac{1\times7+4\times2}{1+4}\right)$

$\therefore$ P(2, 3)

$\overline{BA}$를 $2:3$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{2\times3-3\times(-2)}{2-3},\ \frac{2\times2-3\times7}{2-3}\right)$

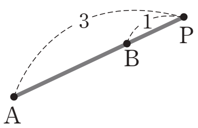
$\therefore$ Q(-12, 17)

따라서 $\overline{PQ}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2-12}{2},\ \frac{3+17}{2}\right)$ $\quad\therefore$ (-5, 10)

3 $\overline{AP}=3\overline{BP}$에서 $\quad\overline{AP}:\overline{BP}=3:1$

오른쪽 그림에서 점 P는 $\overline{AB}$를 $3:1$로 외분하는 점이므로

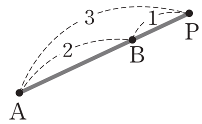


$\left(\frac{3\times1-1\times(-5)}{3-1},\ \frac{3\times3-1\times(-1)}{3-1}\right)$

$\therefore$ P(4, 5)

다른 풀이

$\overline{AP}:\overline{BP}=3:1$이므로 오른쪽 그림에서 점 B는 $\overline{AP}$를 $2:1$로 내분하는 점이다.



점 P의 좌표를 P(a, b)라고 하면

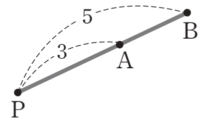
$\frac{2\times a+1\times(-5)}{2+1}=1,\ \frac{2\times b+1\times(-1)}{2+1}=3$

$\therefore a=4,\ b=5$ $\quad\therefore$ P(4, 5)

4 $5\overline{AP}=3\overline{BP}$에서

$\overline{AP}:\overline{BP}=3:5$

오른쪽 그림에서 점 P는 $\overline{AB}$를 $3:5$로 외분하는 점이므로

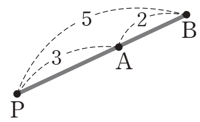


$\left(\frac{3\times3-5\times(-1)}{3-5},\ \frac{3\times(-4)-5\times(-2)}{3-5}\right)$

$\therefore$ P(-7, 1)

다른 풀이

$\overline{AP}:\overline{BP}=3:5$이므로 오른쪽 그림에서 점 A는 $\overline{PB}$를 $3:2$로 내분하는 점이다.



점 P의 좌표를 P(a, b)라고 하면

$\frac{3\times3+2\times a}{3+2}=-1,\ \frac{3\times(-4)+2\times b}{3+2}=-2$

$\therefore a=-7,\ b=1$ $\quad\therefore$ P(-7, 1)

5 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.

따라서 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\frac{-2+b}{2}=\frac{-5+3}{2},\ \frac{1-7}{2}=\frac{a+2}{2}$

$\therefore a=-8,\ b=0$

6 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.

따라서 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로 점 D의 좌표를 D(a, b)라고 하면

$\frac{3+(-3)}{2}=\frac{-1+a}{2},\ \frac{3+1}{2}=\frac{5+b}{2}$

$\therefore a=1,\ b=-1$ $\quad\therefore$ D(1, -1)

7 $\triangle$ABC의 무게중심의 좌표가 (b, -3)이므로

$\frac{-2+3+5}{3}=b,\ \frac{-1+a-4}{3}=-3$

$\therefore a=-4,\ b=2$

8 점 C의 좌표를 C(a, b)라고 하면 $\triangle$ABC의 무게중심의 좌표가 (2, 1)이므로

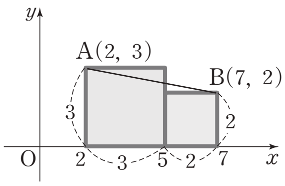
$\frac{-2+3+a}{3}=2,\ \frac{-1+4+b}{3}=1$

$\therefore a=5,\ b=0$ $\quad\therefore$ C(5, 0)

17~18강 족집게 기출문제 p. 80~83

1 ③　2 ⑤　3 ④　4 ④　5 ⑤
6 $\sqrt{3}$　7 P$(0,\ -1)$　8 ③　9 ②
10 ③　11 ①　12 ④　13 2
14 P$(22,\ 19)$ 또는 P$(-10,\ -13)$　15 ③　16 14
17 ③　18 5
19 ④　20 ②　21 ④　22 ③　23 ①
24 (1) P$(-1,\ 3)$, Q$(-7,\ 0)$ (2) $3\sqrt{5}$
25 $\frac{75\sqrt{3}}{4}$　26 $\left(-7,\ -\frac{21}{2}\right)$

1 오른쪽 그림과 같이 두 정사각형의 한 변의 길이가 각각 3, 2이므로 두 점 A, B의 좌표는



A$(2,\ 3)$, B$(7,\ 2)$

$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{(7-2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{26}$

2 $\overline{AC}=2\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=4\overline{BC}^2$이므로

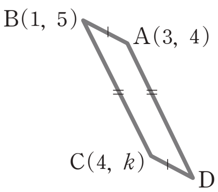
$(a-1)^2+(3+1)^2=4\{(a-2)^2+(3-1)^2\}$

$a^2-2a+17=4a^2-16a+32,\ 3a^2-14a+15=0$

$(3a-5)(a-3)=0\qquad\therefore\ a=\frac{5}{3}$ 또는 $a=3$

따라서 모든 a의 값의 곱은 $\frac{5}{3}\times3=5$

3 $\overline{AB}=\overline{CD}$, $\overline{AD}=\overline{BC}$이고, 둘레의 길이가 $8\sqrt{5}$이므로



$\overline{AB}+\overline{BC}=4\sqrt{5}$ …… ㉠

$\overline{AB}=\sqrt{(1-3)^2+(5-4)^2}=\sqrt{5}$

$\overline{BC}=\sqrt{(4-1)^2+(k-5)^2}$

$=\sqrt{k^2-10k+34}$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$\sqrt{k^2-10k+34}=3\sqrt{5}$

양변을 제곱하여 정리하면

$k^2-10k-11=0,\ (k+1)(k-11)=0$

$\therefore\ k=-1$ 또는 $k=11$

그런데 점 C는 제4사분면 위의 점이므로 $k=-1$

4 외심 P의 좌표를 P$(a,\ b)$라고 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$이므로 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$

(i) $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$에서 $(a-2)^2+(b-3)^2=(a-1)^2+b^2$

$\therefore\ a+3b=6$ …… ㉠

(ii) $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$에서 $(a-1)^2+b^2=(a-5)^2+(b-4)^2$

$\therefore\ a+b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{9}{2},\ b=\frac{1}{2}$

따라서 외심 P의 좌표는 P$\left(\frac{9}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

5 $\overline{AB}^2=(-3-1)^2+(-2-1)^2=25$

$\overline{BC}^2=(4+3)^2+(-3+2)^2=50$

$\overline{CA}^2=(1-4)^2+(1+3)^2=25$

따라서 $\overline{AB}^2=\overline{CA}^2$이고, $\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2$이므로 △ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$이고 ∠A$=90°$인 직각이등변삼각형이다.

6 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{AB}$이므로 $\overline{OA}^2=\overline{OB}^2=\overline{AB}^2$

(i) $\overline{OA}^2=\overline{OB}^2$에서 $1^2+(\sqrt{3})^2=(-1)^2+a^2$

$4=a^2+1,\ a^2=3\qquad\therefore\ a=\pm\sqrt{3}$

(ii) $\overline{OA}^2=\overline{AB}^2$에서

$1^2+(\sqrt{3})^2=(-1-1)^2+(a-\sqrt{3})^2$

$4=(a-\sqrt{3})^2+4,\ (a-\sqrt{3})^2=0\qquad\therefore\ a=\sqrt{3}$

(i), (ii)에 의하여 $a=\sqrt{3}$

7 점 P의 좌표를 P$(a,\ b)$라고 하면

$\overline{PA}^2=(a+6)^2+(b+5)^2$

$=a^2+b^2+12a+10b+61$

$\overline{PB}^2=(a-4)^2+(b+1)^2$

$=a^2+b^2-8a+2b+17$

$\overline{PC}^2=(a-2)^2+(b-3)^2$

$=a^2+b^2-4a-6b+13$

$\therefore\ \overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=3a^2+3b^2+6b+91$

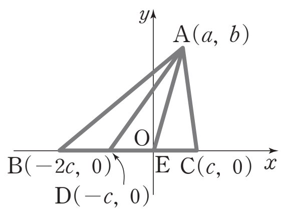
$=3a^2+3(b^2+2b+1)+88$

$=3a^2+3(b+1)^2+88$

이때 모든 실수 a, b에 대하여 $a^2\ge0$, $(b+1)^2\ge0$이므로 $a=0$, $b=-1$일 때 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값은 최소이다.

따라서 구하는 점 P의 좌표는 P$(0,\ -1)$

8 오른쪽 그림과 같이 △ABC에서 점 A, B, C, D, E의 좌표를 각각



A$(a,\ b)$, B$\boxed{(-2c,\ 0)}$,

C$(c,\ 0)$, D$\boxed{(-c,\ 0)}$,

E$(0,\ 0)$이라고 하면

$\overline{AB}^2=\{a-(-2c)\}^2+b^2=(a+2c)^2+b^2$

$\overline{AC}^2=(a-c)^2+b^2$

$\therefore\ \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\{\boxed{(a+2c)^2}+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}$

$=2a^2+2ac+2b^2+5c^2$

$\overline{AD}^2=\{a-(-c)\}^2+b^2=(a+c)^2+b^2$

$\overline{AE}^2=a^2+b^2$

$\overline{DE}^2=c^2$

$\therefore\ \overline{AD}^2+\overline{AE}^2+4\overline{DE}^2$

$=\{\boxed{(a+c)^2}+b^2\}+(a^2+b^2)+4c^2$

$=2a^2+2ac+2b^2+5c^2$

따라서 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2+4\overline{DE}^2$이 성립한다.

$\therefore$ (가) $(-2c,\ 0)$ (나) $(-c,\ 0)$ (다) $(a+2c)^2$ (라) $(a+c)^2$

9 ㄱ. $\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times3+2\times(-3)}{1+2},\ \dfrac{1\times(-2)+2\times7}{1+2}\right)$

$\therefore$ P$(-1,\ 4)$

ㄴ. $\overline{AB}$를 $1:2$로 외분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times3-2\times(-3)}{1-2},\ \dfrac{1\times(-2)-2\times7}{1-2}\right)$

$\therefore$ Q$(-9,\ 16)$

ㄷ. $\overline{AB}$의 중점 M의 좌표는

$\left(\dfrac{-3+3}{2},\ \dfrac{7-2}{2}\right)$

$\therefore$ M$\left(0,\ \dfrac{5}{2}\right)$

ㄹ. ㄱ, ㄴ에서 P$(-1,\ 4)$, Q$(-9,\ 16)$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{(-9+1)^2+(16-4)^2}=4\sqrt{13}$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

10 $\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표가 $(0,\ 1)$이므로

$\dfrac{1\times(b+1)+2\times2}{1+2}=0,\ \dfrac{1\times3+2\times(-2+a)}{1+2}=1$

$\therefore a=2,\ b=-5$

따라서 B$(-4,\ 3)$, C$(4,\ -5)$이므로 $\overline{BC}$를 $1:2$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times4-2\times(-4)}{1-2},\ \dfrac{1\times(-5)-2\times3}{1-2}\right)$

$\therefore (-12,\ 11)$

11 $\overline{AB}$를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{3m-n}{m+n},\ \dfrac{-m+4n}{m+n}\right)$

이 점이 y축 위에 있으므로

$\dfrac{3m-n}{m+n}=0,\ 3m-n=0 \qquad \therefore 3m=n$

$\therefore m:n=1:3$

따라서 서로소인 자연수 m, n의 값은 $m=1,\ n=3$

$\therefore mn=3$

12 $t:(1-t)$에서 $t>0,\ 1-t>0$이므로

$0<t<1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\overline{AB}$를 $t:(1-t)$로 내분하는 점의 좌표를 구하면

(x좌표)$=\dfrac{t\times5+(1-t)\times(-3)}{t+(1-t)}=8t-3$

(y좌표)$=\dfrac{t\times(-1)+(1-t)\times4}{t+(1-t)}=-5t+4$

$\therefore (8t-3,\ -5t+4)$

이 점이 제1사분면 위에 있으려면

$8t-3>0,\ -5t+4>0$

$\therefore \dfrac{3}{8}<t<\dfrac{4}{5} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 t의 값의 범위는 $\dfrac{3}{8}<t<\dfrac{4}{5}$

따라서 $\alpha=\dfrac{3}{8},\ \beta=\dfrac{4}{5}$이므로 $\alpha\beta=\dfrac{3}{10}$

13 $\overline{AB}$를 $1:k$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times0-k\times(-2)}{1-k},\ \dfrac{1\times7-k\times0}{1-k}\right)$

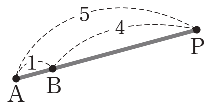
$\therefore \left(\dfrac{2k}{1-k},\ \dfrac{7}{1-k}\right)$

이 점이 직선 $x-y=3$ 위에 있으므로

$\dfrac{2k}{1-k}-\dfrac{7}{1-k}=3,\ 2k-7=3(1-k) \qquad \therefore k=2$

14 $4\overline{AB}=\overline{BP}$에서 $\overline{AB}:\overline{BP}=1:4$

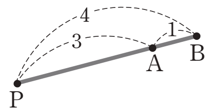
(i) 오른쪽 그림에서 점 P는 $\overline{AB}$를 $5:4$로 외분하는 점이므로 점 P의 좌표는



$\left(\dfrac{5\times6-4\times2}{5-4},\ \dfrac{5\times3-4\times(-1)}{5-4}\right)$

$\therefore$ P$(22,\ 19)$

(ii) 오른쪽 그림에서 점 P는 $\overline{AB}$를 $3:4$로 외분하는 점이므로 점 P의 좌표는



$\left(\dfrac{3\times6-4\times2}{3-4},\ \dfrac{3\times3-4\times(-1)}{3-4}\right)$

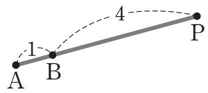
$\therefore$ P$(-10,\ -13)$

(i), (ii)에 의하여 P$(22,\ 19)$ 또는 P$(-10,\ -13)$

다른 풀이

점 P의 좌표를 P$(a,\ b)$라고 하면

(i) 오른쪽 그림에서 점 B는 $\overline{AP}$를 $1:4$로 내분하는 점이므로

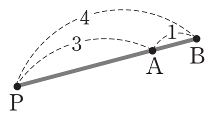


$\dfrac{1\times a+4\times2}{1+4}=6$

$\dfrac{1\times b+4\times(-1)}{1+4}=3$

$\therefore a=22,\ b=19 \qquad \therefore$ P$(22,\ 19)$

(ii) 오른쪽 그림에서 점 A는 $\overline{PB}$를 $3:1$로 내분하는 점이므로



$\dfrac{3\times6+1\times a}{3+1}=2,$

$\dfrac{3\times3+1\times b}{3+1}=-1$

$\therefore a=-10,\ b=-13 \qquad \therefore$ P$(-10,\ -13)$

(i), (ii)에 의하여 P$(22,\ 19)$ 또는 P$(-10,\ -13)$

15 두 점 C, D의 좌표를 C$(a,\ b)$, D$(c,\ d)$라고 하면 두 대각선 AC, BD의 교점은 $\overline{AC}$의 중점과 일치하므로

$2=\dfrac{5+a}{2},\ -1=\dfrac{1+b}{2} \qquad \therefore a=-1,\ b=-3$

$\therefore$ C$(-1,\ -3)$

두 대각선 AC, BD의 교점은 $\overline{BD}$의 중점과 일치하므로

$2=\dfrac{-3+c}{2},\ -1=\dfrac{4+d}{2} \qquad \therefore c=7,\ d=-6$

$\therefore$ D$(7,\ -6)$

따라서 $\overline{CD}$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-1+7}{2},\ \dfrac{-3-6}{2}\right) \qquad \therefore \left(3,\ -\dfrac{9}{2}\right)$

16 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\frac{a+7}{2}=\frac{3+b}{2}$

$\therefore\ a-b=-4$ ⋯⋯ ㉠

또 $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$

$(a-3)^2+(1-5)^2=(3-7)^2+(5-3)^2$

$a^2-6a+5=0$, $(a-1)(a-5)=0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=5$

그런데 $a>3$이므로 $a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면 $b=9$

$\therefore\ a+b=14$

17 두 점 B, C의 좌표를 B$(a,\ b)$, C$(c,\ d)$라고 하면 $\overline{BC}$의 중점의 좌표가 $(-1,\ 2)$이므로

$\frac{a+c}{2}=-1$, $\frac{b+d}{2}=2$

$\therefore\ a+c=-2$, $b+d=4$

따라서 △ABC의 무게중심 G의 좌표를 구하면

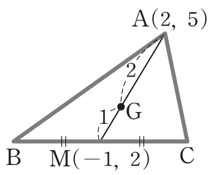
$\frac{2+a+c}{3}=\frac{2-2}{3}=0$

$\frac{5+b+d}{3}=\frac{5+4}{3}=3$

$\therefore$ G$(0,\ 3)$

다른 풀이

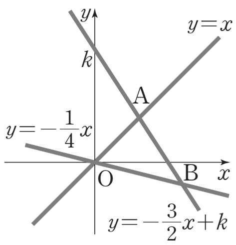
△ABC에서 $\overline{BC}$의 중점을 M이라고 할 때, 무게중심 G는 $\overline{AM}$을 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 G의 좌표는



$\left(\frac{2\times(-1)+1\times2}{2+1},\ \frac{2\times2+1\times5}{2+1}\right)$

$\therefore$ G$(0,\ 3)$

18 오른쪽 그림에서 두 점 A, B의 좌표를 A$(a,\ a)$, B$(4b,\ -b)$라고 하면 △OAB의 무게중심의 좌표가 $\left(2,\ \frac{1}{3}\right)$이므로



$\frac{0+a+4b}{3}=2$

$\frac{0+a-b}{3}=\frac{1}{3}$

$\therefore\ a+4b=6$, $a-b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

따라서 직선 $y=-\frac{3}{2}x+k$는 점 A$(2,\ 2)$를 지나므로

$2=-3+k$ $\therefore\ k=5$

19 점 P$(a,\ b)$라고 하면

$\overline{AP}^2=(a-1)^2+(b+4)^2=a^2+b^2-2a+8b+17$

$\overline{BP}^2=(a+2)^2+(b-1)^2=a^2+b^2+4a-2b+5$

$\overline{CP}^2=(a-4)^2+(b+3)^2=a^2+b^2-8a+6b+25$

$\therefore\ \overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=3a^2+3b^2-6a+12b+47$

$=3(a-1)^2+3(b+2)^2+32$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$은 $a=1$, $b=-2$일 때 최솟값이 32이므로

P$(1,\ -2)$

다른 풀이

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P는 △ABC의 무게중심이므로 점 P의 좌표는

$\left(\frac{1-2+4}{3},\ \frac{-4+1-3}{3}\right)$

$\therefore$ P$(1,\ -2)$

20 삼각형의 내각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$

선분 AB의 길이와 선분 AC의 길이를 각각 구하면

$\overline{AB}=\sqrt{(1+3)^2+(4+4)^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

$\overline{AC}=\sqrt{(1-5)^2+(4-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\therefore\ \overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}$

$=4\sqrt{5}:2\sqrt{5}=2:1$

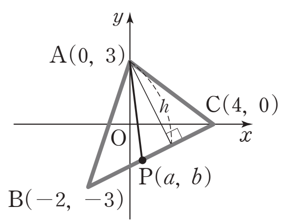
따라서 점 D$(a,\ b)$는 $\overline{BC}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$a=\frac{2\times5+1\times(-3)}{2+1}=\frac{7}{3}$

$b=\frac{2\times2+1\times(-4)}{2+1}=0$

$\therefore\ 3(a+b)=7$

21 오른쪽 그림과 같이 △ABP와 △APC에서 각각의 밑변 $\overline{BP}$, $\overline{PC}$에 대한 높이가 같으므로 그 높이를 h라고 하면 △ABP : △APC$=3:4$에서



$\left(\frac{1}{2}\times\overline{BP}\times h\right):\left(\frac{1}{2}\times\overline{PC}\times h\right)=3:4$

$\therefore\ \overline{BP}:\overline{PC}=3:4$

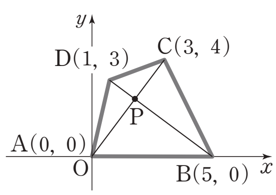
즉, 점 P$(a,\ b)$는 $\overline{BC}$를 $3:4$로 내분하는 점이므로

$a=\frac{3\times4+4\times(-2)}{3+4}=\frac{4}{7}$

$b=\frac{3\times0+4\times(-3)}{3+4}=-\frac{12}{7}$

$\therefore\ a-b=\frac{16}{7}$

22 오른쪽 그림과 같이 A 쇼핑몰을 원점으로 하고, 직선 AB를 x축으로 하여 A, B, C, D 쇼핑몰을 좌표평면 위에 놓을 때, 각 쇼핑몰이 있는 점을 A, B, C, D라고 하면 네 점 A, B, C, D의 좌



표는 $A(0, 0)$, $B(5, 0)$, $C(3, 4)$, $D(1, 3)$

이때 물류창고가 있는 점을 P라고 하면 $\overline{PA}+\overline{PC}$의 값은 점 P가 $\overline{AC}$ 위에 있을 때 최소이고, $\overline{PB}+\overline{PD}$의 값은 점 P가 $\overline{BD}$ 위에 있을 때 최소이다.

즉, 점 P는 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 교점이어야 한다.

이때 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$의 최솟값은 $\overline{AC}+\overline{BD}$와 같으므로

$\overline{AC}+\overline{BD}=\sqrt{3^2+4^2}+\sqrt{(1-5)^2+(3-0)^2}=10$

따라서 각 쇼핑몰에서 물류창고까지의 직선 거리의 합은 10 km이다.

23 세 점 A, B, C의 좌표를 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이라고 하자.

점 $P(3, 1)$은 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\dfrac{2x_2+x_1}{2+1}=3$, $\dfrac{2y_2+y_1}{2+1}=1$

$\therefore 2x_2+x_1=9$, $2y_2+y_1=3$ …… ㉠

점 $Q(-1, 6)$은 $\overline{BC}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\dfrac{2x_3+x_2}{2+1}=-1$, $\dfrac{2y_3+y_2}{2+1}=6$

$\therefore 2x_3+x_2=-3$, $2y_3+y_2=18$ …… ㉡

점 $R(4, 5)$는 $\overline{CA}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\dfrac{2x_1+x_3}{2+1}=4$, $\dfrac{2y_1+y_3}{2+1}=5$

$\therefore 2x_1+x_3=12$, $2y_1+y_3=15$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$3(x_1+x_2+x_3)=18$, $3(y_1+y_2+y_3)=36$

$\therefore x_1+x_2+x_3=6$, $y_1+y_2+y_3=12$

따라서 △ABC의 무게중심의 좌표를 구하면

$(x\text{좌표})=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}=\dfrac{6}{3}=2$

$(y\text{좌표})=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}=\dfrac{12}{3}=4$

$\therefore (2, 4)$

다른 풀이

△ABC의 무게중심과 △PQR의 무게중심은 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{3-1+4}{3}, \dfrac{1+6+5}{3}\right)$

$\therefore (2, 4)$

24 (1) 점 P는 직선 $x+y=2$, 즉 $y=-x+2$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $P(a, -a+2)$라고 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}$이므로 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$

$(a-0)^2+\{(-a+2)-6\}^2=(a-2)^2+\{(-a+2)-2\}^2$

$12a=-12$ $\therefore a=-1$

$\therefore P(-1, 3)$ …… (가)

점 Q는 x축 위의 점이므로 점 Q의 좌표를 $Q(b, 0)$이라고 하면

$\overline{AQ}=\overline{BQ}$이므로 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$

$(b-0)^2+(0-6)^2=(b-2)^2+(0-2)^2$

$4b=-28$ $\therefore b=-7$

$\therefore Q(-7, 0)$ …… (나)

(2) 두 점 P, Q의 좌표는 $P(-1, 3)$, $Q(-7, 0)$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{\{-7-(-1)\}^2+(0-3)^2}$

$=3\sqrt{5}$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 점 P의 좌표를 구한다.	2점
(나) 점 Q의 좌표를 구한다.	2점
(다) 선분 PQ의 길이를 구한다.	2점

25 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하고, 정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 a라고 하자.

$\overline{AG}:\overline{GM}=2:1$이므로

$\overline{AG}=\dfrac{2}{3}\overline{AM}$

$=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$ …… (가)

이때 $\overline{AG}=\sqrt{(3+1)^2+(2+1)^2}=5$이므로 …… (나)

$\dfrac{\sqrt{3}}{3}a=5$ $\therefore a=5\sqrt{3}$ …… (다)

따라서 △ABC의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(5\sqrt{3})^2=\dfrac{75\sqrt{3}}{4}$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) 정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 a로 놓고, $\overline{AG}$를 a에 관한 식으로 나타낸다.	2점
(나) 선분 AG의 길이를 구한다.	1점
(다) a의 값을 구한다.	2점
(라) △ABC의 넓이를 구한다.	2점

26 두 점 B, C의 좌표를 $B(a, b)$, $C(c, d)$라고 하면 $\overline{AB}$의 중점 M의 좌표가 $M(2, 0)$이므로

$\dfrac{7+a}{2}=2$, $\dfrac{5+b}{2}=0$

$\therefore a=-3$, $b=-5$

$\therefore B(-3, -5)$ …… (가)

또 △ABC의 무게중심 G의 좌표가 $G(3, 2)$이므로

$\dfrac{7-3+c}{3}=3$, $\dfrac{5-5+d}{3}=2$

$\therefore c=5$, $d=6$

$\therefore C(5, 6)$ …… (나)

따라서 $\overline{BC}$를 $1:3$으로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times5-3\times(-3)}{1-3}, \dfrac{1\times6-3\times(-5)}{1-3}\right)$

$\therefore \left(-7, -\dfrac{21}{2}\right)$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 점 B의 좌표를 구한다.	2점
(나) 점 C의 좌표를 구한다.	2점
(다) $\overline{BC}$를 $1:3$으로 외분하는 점의 좌표를 구한다.	2점

19강 직선의 방정식

확인 문제 p. 84

1 구하는 직선의 방정식은
$y-4=3\{x-(-2)\}$ $\quad\therefore\ y=3x+10$

2 주어진 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$x-3y-3=0,\ 3x-2y+5=0$
두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=-3,\ y=-2$
따라서 구하는 점의 좌표는 $\ (-3,\ -2)$

교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제 p. 85

1 (1) 구하는 직선의 방정식은
$y-(-5)=\dfrac{5-(-5)}{-1-4}(x-4)$ $\quad\therefore\ y=-2x+3$
(2) 두 점의 x좌표가 2로 같으므로 구하는 직선의 방정식은
$x=2$
(3) 점 $(9,\ -3)$을 지나고 x축에 평행하면 y좌표가 일정하므로 구하는 직선의 방정식은 $\ y=-3$
(4) 구하는 직선의 방정식은
$\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{-1}=1$ $\quad\therefore\ y=\dfrac{1}{5}x-1$

2 (1) 구하는 직선의 방정식은
$y-(-3)=\dfrac{5-(-3)}{3-1}(x-1)$ $\quad\therefore\ y=4x-7$
(2) 두 점의 y좌표가 6으로 같으므로 구하는 직선의 방정식은
$y=6$
(3) 점 $(-7,\ 2)$를 지나고 x축에 수직이면 x좌표가 일정하므로 구하는 직선의 방정식은 $\ x=-7$
(4) 구하는 직선의 방정식은
$\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{-4}=1$ $\quad\therefore\ y=-2x-4$

3 세 점이 한 직선 위에 있으려면 직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로
$\dfrac{2-(2k+5)}{1-(-2)}=\dfrac{-7-2}{4-1}$
$\dfrac{-2k-3}{3}=-3$ $\quad\therefore\ k=3$

다른 풀이
두 점 B$(1,\ 2)$, C$(4,\ -7)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-2=\dfrac{-7-2}{4-1}(x-1)$ $\quad\therefore\ y=-3x+5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 점 A가 직선 ㉠ 위에 있어야 하므로
$2k+5=-3\times(-2)+5$ $\quad\therefore\ k=3$

4 세 점이 한 직선 위에 있으려면 직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로
$\dfrac{7-k}{3-1}=\dfrac{11-7}{(k+2)-3},\ \dfrac{7-k}{2}=\dfrac{4}{k-1}$
$(7-k)(k-1)=8,\ k^2-8k+15=0$
$(k-3)(k-5)=0$ $\quad\therefore\ k=3$ 또는 $k=5$

5 주어진 식을 k에 대하여 정리하면
$(x+2y-9)+k(3x+y-2)=0$
이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$x+2y-9=0,\ 3x+y-2=0$
두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=-1,\ y=5$
따라서 구하는 점의 좌표는 $\ (-1,\ 5)$

6 주어진 식을 k에 대하여 정리하면
$(2x-3y-1)+k(-x+5y-3)=0$
이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$2x-3y-1=0,\ -x+5y-3=0$
두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=2,\ y=1$
따라서 구하는 점의 좌표는 $\ (2,\ 1)$

7 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(x-y+4)+k(3x-y+2)=0$ (단, k는 실수)
이 직선이 원점을 지나므로
$(0-0+4)+k(0-0+2)=0$ $\quad\therefore\ k=-2$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$(x-y+4)-2(3x-y+2)=0$ $\quad\therefore\ 5x-y=0$

다른 풀이
주어진 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면 $\quad x=1,\ y=5$
따라서 두 직선의 교점의 좌표는 $\ (1,\ 5)$
원점과 점 $(1,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은
$y=5x$ $\quad\therefore\ 5x-y=0$

8 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(x-2y-3)+k(3x+y+5)=0$ (단, k는 실수)
이 직선이 점 $(2,\ -3)$을 지나므로
$(2+6-3)+k(6-3+5)=0$ $\quad\therefore\ k=-\dfrac{5}{8}$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$(x-2y-3)-\dfrac{5}{8}(3x+y+5)=0$
$\therefore\ x+3y+7=0$

다른 풀이
주어진 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면
$x=-1,\ y=-2$
따라서 두 직선의 교점의 좌표는 $\ (-1,\ -2)$
두 점 $(-1,\ -2)$, $(2,\ -3)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-(-2)=\dfrac{-3-(-2)}{2-(-1)}\{x-(-1)\}$
$\therefore\ x+3y+7=0$

20강 두 직선의 위치 관계

확인 문제 p. 86

1 (1) $\frac{2}{1}=\frac{2}{1}\neq\frac{-5}{-4}$이므로 두 직선은 평행하다.

(2) $4\times1+1\times(-4)=0$이므로 두 직선은 수직이다.

(3) $\frac{3}{-1}=\frac{-3}{1}=\frac{-6}{2}$이므로 두 직선은 일치한다.

(4) $\frac{2}{1}\neq\frac{-1}{-1}$이므로 두 직선은 한 점에서 만난다.

2 (1) $\frac{|1\times(-1)+2\times(-2)-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

(2) $\frac{|1\times0+2\times0-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제 p. 87

1 (1) 두 직선이 평행하려면

$\frac{2a-1}{a}=\frac{1}{-1}\neq\frac{1}{3}$

$\frac{2a-1}{a}=\frac{1}{-1}$에서 $\quad -(2a-1)=a$

$\therefore\ a=\frac{1}{3}$

(2) 두 직선이 수직이려면

$(2a-1)\times a+1\times(-1)=0$

$2a^2-a-1=0,\ (2a+1)(a-1)=0$

$\therefore\ a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$

2 (1) 두 직선이 평행하려면

$\frac{1}{a}=\frac{-(a-3)}{-4}\neq\frac{1}{4}$

(i) $\frac{1}{a}=\frac{-(a-3)}{-4}$에서 $\quad 4=a(a-3)$

$a^2-3a-4=0,\ (a+1)(a-4)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=4$

(ii) $\frac{1}{a}\neq\frac{1}{4}$에서 $\quad a\neq4$

(i), (ii)에 의하여 $\quad a=-1$

(2) 두 직선이 수직이려면

$1\times a+\{-(a-3)\}\times(-4)=0$

$5a=12 \qquad \therefore\ a=\frac{12}{5}$

3 직선 $2x-y+3=0$, 즉 $y=2x+3$에 평행한 직선의 기울기는 2이다.

따라서 구하는 직선은 기울기가 2이고 점 $(1,\ 3)$을 지나므로 이 직선의 방정식은

$y-3=2(x-1) \qquad \therefore\ y=2x+1$

4 직선 $x-3y+1=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$에 수직인 직선의 기울기는 -3이다.

따라서 구하는 직선은 기울기가 -3이고 점 $(6,\ -5)$를 지나므로 이 직선의 방정식은

$y-(-5)=-3(x-6) \qquad \therefore\ y=-3x+13$

5 직선 AB의 기울기는 $\frac{2-4}{5-(-3)}=-\frac{1}{4}$이므로 $\overline{AB}$를 수직이등분하는 직선의 기울기는 4이다.

또 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-3+5}{2},\ \frac{4+2}{2}\right) \qquad \therefore\ (1,\ 3)$

따라서 구하는 직선은 기울기가 4이고 점 $(1,\ 3)$을 지나므로 이 직선의 방정식은

$y-3=4(x-1) \qquad \therefore\ y=4x-1$

6 직선 $2x-y-4=0$의 x절편은 2, y절편은 -4이므로

$A(2,\ 0),\ B(0,\ -4)$

직선 AB, 즉 $2x-y-4=0$의 기울기는 2이므로 $\overline{AB}$를 수직이등분하는 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

또 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+0}{2},\ \frac{0-4}{2}\right) \qquad \therefore\ (1,\ -2)$

따라서 구하는 직선은 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 점 $(1,\ -2)$를 지나므로 이 직선의 방정식은

$y-(-2)=-\frac{1}{2}(x-1) \qquad \therefore\ y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

7 구하는 직선의 기울기를 m이라고 하면 이 직선의 방정식은

$y=mx \qquad \therefore\ mx-y=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

점 $(1,\ 2)$와 직선 ㉠ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{|m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5},\ |m-2|=\sqrt{5(m^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4m^2+4m+1=0,\ (2m+1)^2=0 \qquad \therefore\ m=-\frac{1}{2}$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $\quad x+2y=0$

8 직선 $3x-4y-2=0$, 즉 $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{4}{3}$이다.

이때 구하는 직선의 y절편을 b라고 하면 이 직선의 방정식은

$y=-\frac{4}{3}x+b \qquad \therefore\ 4x+3y-3b=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

원점과 직선 ㉠ 사이의 거리가 3이므로

$\frac{|-3b|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3,\ |-3b|=15 \qquad \therefore\ b=-5$ 또는 $b=5$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$4x+3y+15=0$ 또는 $4x+3y-15=0$

9 주어진 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x-2y+2=0$ 위의 한 점 $(0,\ 1)$과 직선 $3x-2y+15=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|3\times0-2\times1+15|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$

10 주어진 두 직선 사이의 거리는 직선 $x+7y-5=0$ 위의 한 점 $(5,\ 0)$과 직선 $x+7y+a=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|5+7\times0+a|}{\sqrt{1^2+7^2}}=2\sqrt{2}$, $|5+a|=20$

$\therefore\ a=-25$ 또는 $a=15$

19~20강 족집게 기출문제 p. 88~91

1 ㄴ, ㄷ	**2** ④	**3** ②	**4** ③	**5** ④
6 ①	**7** 5	**8** ③	**9** 2	**10** ⑤
11 ②	**12** -8	**13** 3	**14** ④	**15** 1
16 ⑤	**17** ⑤	**18** -1 또는 7	**19** ①	
20 ②	**21** $4x-y-3=0$ 또는 $8x-7y-1=0$			
22 $x-7y-1=0$ 또는 $7x+y+3=0$			**23** ④	
24 ⑤	**25** ②	**26** $10x-3y-31=0$		
27 $\left(\dfrac{11}{5},\ \dfrac{22}{5}\right)$				
28 (1) $(-2,\ -1)$, $(5,\ -2)$, $(3,\ 4)$ (2) 20				

1 ㄱ. 두 점 $(-1,\ 3)$, $(2,\ -3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\dfrac{-3-3}{2-(-1)}\{x-(-1)\}$

$\therefore\ y=-2x+1$

ㄴ. 구하는 직선은 기울기가 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$이고, 점 $(\sqrt{3},\ -1)$을 지나므로 직선의 방정식은

$y-(-1)=\sqrt{3}(x-\sqrt{3})$ $\quad\therefore\ y=\sqrt{3}x-4$

ㄷ. 두 점 $(4,\ 1)$, $(4,\ -5)$의 x좌표가 4로 같으므로 구하는 직선의 방정식은 $x=4$

ㄹ. 점 $(-2,\ 7)$을 지나고 y축에 수직이면 y좌표가 일정하므로 구하는 직선의 방정식은 $y=7$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

2 $a=3b$이므로 직선 l의 방정식은 $\dfrac{x}{3b}+\dfrac{y}{b}=1$

이 직선이 점 $(3,\ 1)$을 지나므로

$\dfrac{3}{3b}+\dfrac{1}{b}=1$, $\dfrac{2}{b}=1$ $\quad\therefore\ b=2$

직선 l : $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{2}=1$, 즉 $y=-\dfrac{1}{3}x+2$의 기울기는 $-\dfrac{1}{3}$

따라서 구하는 직선은 기울기가 $-\dfrac{1}{3}$이고 점 $(-7,\ 3)$을 지나므로 이 직선의 방정식은

$y-3=-\dfrac{1}{3}\{x-(-7)\}$ $\quad\therefore\ x+3y-2=0$

3 세 점 A, B, C가 삼각형을 이루지 않으려면 세 점이 한 직선 위에 있어야 한다.

세 점이 한 직선 위에 있으려면 직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\dfrac{2-k}{-1-1}=\dfrac{8-2}{(k+1)-(-1)}$, $\dfrac{2-k}{-2}=\dfrac{6}{k+2}$

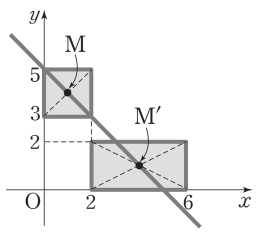
$(2-k)(k+2)=-12$, $k^2=16$

$\therefore\ k=-4$ 또는 $k=4$

그런데 $k>0$이므로 $k=4$

4 두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 직사각형의 대각선의 교점을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 두 직사각형의 대각선의 교점을 각각 M, M′이라고 하면 점 M은



두 점 $(0,\ 5)$, $(2,\ 3)$을 이은 선분의 중점이므로

$\dfrac{0+2}{2}=1$, $\dfrac{5+3}{2}=4$ $\quad\therefore\ \mathrm{M}(1,\ 4)$

또 점 M′은 두 점 $(2,\ 2)$, $(6,\ 0)$을 이은 선분의 중점이므로

$\dfrac{2+6}{2}=4$, $\dfrac{2+0}{2}=1$ $\quad\therefore\ \mathrm{M'}(4,\ 1)$

두 점 $\mathrm{M}(1,\ 4)$, $\mathrm{M'}(4,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\dfrac{1-4}{4-1}(x-1)$ $\quad\therefore\ x+y-5=0$

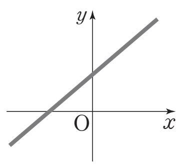
따라서 $a=1$, $b=-5$이므로 $a-b=6$

5 직선 $ax+by+c=0$의 기울기는 $-\dfrac{a}{b}$, x절편은 $-\dfrac{c}{a}$, y절편은 $-\dfrac{c}{b}$이다.

ㄱ. $ac>0$에서 $\dfrac{c}{a}>0$이므로 $-\dfrac{c}{a}<0$

$bc<0$에서 $\dfrac{c}{b}<0$이므로 $-\dfrac{c}{b}>0$

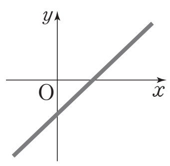
주어진 직선은 x절편이 음수, y절편이 양수이므로 오른쪽 그림과 같이 제1, 2, 3사분면을 지난다.



ㄴ. $ab<0$에서 $\dfrac{a}{b}<0$이므로 $-\dfrac{a}{b}>0$

$bc>0$에서 $\dfrac{c}{b}>0$이므로 $-\dfrac{c}{b}<0$

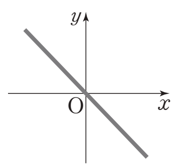
주어진 직선은 기울기가 양수, y절편이 음수이므로 오른쪽 그림과 같이 제1, 3, 4사분면을 지난다.



ㄷ. $ab>0$에서 $\dfrac{a}{b}>0$이므로 $-\dfrac{a}{b}<0$

$ab>0$, $bc=0$에서 $b\neq0$, $c=0$이므로 $-\dfrac{c}{b}=0$

주어진 직선은 기울기가 음수, y절편이 0이므로 위의 그림과 같이 제2, 4사분면을 지난다.



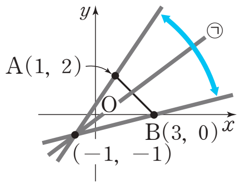
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

6 주어진 직선의 방정식을 a에 대하여 정리하면

$a(x+1)-y-1=0$ ...... ㉠

직선 ㉠은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ -1)$을 지난다.

직선 ㉠이 두 점 $A(1,\ 2)$, $B(3,\ 0)$을 이은 선분과 한 점에서 만나기 위해서는 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B를 지나거나 그 사이를 지나야 한다.



(i) 직선 ㉠이 점 $A(1,\ 2)$를 지날 때

$a(1+1)-2-1=0$, $2a-3=0$

$\therefore a=\frac{3}{2}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $B(3,\ 0)$을 지날 때

$a(3+1)-0-1=0$, $4a-1=0$

$\therefore a=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에 의하여 $\frac{1}{4}\le a\le\frac{3}{2}$

따라서 $M=\frac{3}{2}$, $m=\frac{1}{4}$이므로

$M-m=\frac{5}{4}$

7 주어진 직선의 방정식을 k에 대하여 정리하면

$(x-2)k-y+3=0$

이 직선은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(2,\ 3)$을 지난다.

따라서 점 $A(2,\ 3)$을 지나고 $\triangle ABC$의 넓이를 이등분하는 직선은 $\overline{BC}$의 중점을 지나는 직선이다.

$\overline{BC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-2+4}{2},\ \frac{-1-3}{2}\right)$ $\therefore (1,\ -2)$

직선 $y=kx-2k+3$이 점 $(1,\ -2)$를 지나므로

$-2=k-2k+3$ $\therefore k=5$

8 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x+y+1)+k(3x+2y-1)=0$ (단, k는 실수)

이 직선이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$(1+2+1)+k(3+4-1)=0$

$4+6k=0$ $\therefore k=-\frac{2}{3}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$(x+y+1)-\frac{2}{3}(3x+2y-1)=0$

$\therefore 3x+y-5=0$

다른 풀이

주어진 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$x=3$, $y=-4$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는 $(3,\ -4)$

두 점 $(3,\ -4)$, $(1,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-(-4)=\frac{2-(-4)}{1-3}(x-3)$

$\therefore 3x+y-5=0$

9 두 직선 $x+ay-1=0$, $x-by+1=0$이 서로 수직이므로

$1\times1+a\times(-b)=0$ $\therefore ab=1$ ...... ㉠

또 두 직선 $x+ay-1=0$, $x-(b-2)y+1=0$이 서로 평행하므로

$\frac{1}{1}=\frac{a}{-(b-2)}\ne\frac{-1}{1}$

$\frac{1}{1}=\frac{a}{-(b-2)}$에서 $-(b-2)=a$

$\therefore a+b=2$ ...... ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=2^2-2\times1=2$

10 두 점 $(2,\ 1)$, $(3,\ 4)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{4-1}{3-2}=3$

따라서 구하는 직선은 기울기가 3이고 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로 이 직선의 방정식은

$y-2=3\{x-(-1)\}$ $\therefore y=3x+5$

따라서 $a=3$, $b=5$이므로 $ab=15$

11 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(2x-y-1)+k(x-3y+2)=0$ (단, k는 실수)

$\therefore (2+k)x+(-1-3k)y-1+2k=0$

이 직선과 직선 $2x-3y+1=0$이 서로 수직이므로

$(2+k)\times2+(-1-3k)\times(-3)=0$ $\therefore k=-\frac{7}{11}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$(2x-y-1)-\frac{7}{11}(x-3y+2)=0$ $\therefore 3x+2y-5=0$

다른 풀이

주어진 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=1$

즉, 두 직선의 교점의 좌표는 $(1,\ 1)$

직선 $2x-3y+1=0$, 즉 $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{3}{2}$이다.

따라서 구하는 직선은 기울기가 $-\frac{3}{2}$이고 점 $(1,\ 1)$을 지나므로 이 직선의 방정식은

$y-1=-\frac{3}{2}(x-1)$ $\therefore 3x+2y-5=0$

12 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+1}{2},\ \frac{-7+b}{2}\right)$

이 점은 직선 $x+3y+4=0$ 위에 있으므로

$\frac{a+1}{2}+3\times\frac{-7+b}{2}+4=0$ $\therefore a+3b=12$ ...... ㉠

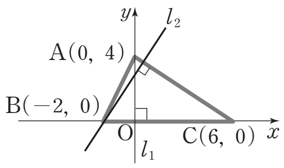
또 직선 $x+3y+4=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이므로 직선 AB의 기울기는 3이다.

즉, $\frac{b-(-7)}{1-a}=3$ $\therefore 3a+b=-4$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=5$

$\therefore a-b=-8$

13 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A를 지나고 $\overline{BC}$에 수직인 직선을 l_1, 꼭짓점 B를 지나고 $\overline{AC}$에 수직인 직선을 l_2라고 하면 두 직선 l_1, l_2의 교점은 △ABC의 각 꼭짓점에서 그 대변에 내린 세 수선의 교점과 일치한다.



이때 직선 l_1의 방정식은 $x=0$ …… ㉠

직선 AC의 기울기는 $\dfrac{0-4}{6-0}=-\dfrac{2}{3}$

따라서 직선 l_2는 기울기가 $\dfrac{3}{2}$이고 점 B$(-2,\ 0)$을 지나므로 직선 l_2의 방정식은 $y=\dfrac{3}{2}x+3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=0,\ y=3$

즉, 구하는 교점의 좌표는 $(0,\ 3)$이므로

$a=0,\ b=3$ $\quad\therefore a+b=3$

14 주어진 세 직선의 방정식을 변형하면

$y=x+1$ …… ㉠

$y=-x-3$ …… ㉡

$y=kx-k$ …… ㉢

세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 직선 ㉠, ㉢이 평행할 때, $k=1$

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 평행할 때, $k=-1$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때

두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는 $(-2,\ -1)$

이 점이 직선 ㉢ 위에 있어야 하므로

$-1=-2k-k$ $\quad\therefore k=\dfrac{1}{3}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $k=1$ 또는 $k=-1$ 또는 $k=\dfrac{1}{3}$

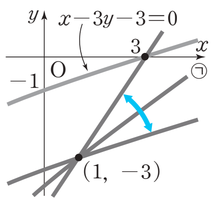
따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $\dfrac{1}{3}$

15 직선 $ax+y-a+3=0$을 a에 대하여 정리하면

$a(x-1)+y+3=0$ …… ㉠

직선 ㉠은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ -3)$을 지난다.

두 직선이 제1사분면에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 점 $(3,\ 0)$을 지날 때와 직선 $x-3y-3=0$과 평행할 때의 사이를 지나야 한다.



(i) 직선 ㉠이 점 $(3,\ 0)$을 지날 때

$a(3-1)+0+3=0$ $\quad\therefore a=-\dfrac{3}{2}$

(ii) 직선 ㉠이 직선 $x-3y-3=0$과 평행할 때

$\dfrac{a}{1}=\dfrac{1}{-3}\neq\dfrac{-a+3}{-3}$ $\quad\therefore a=-\dfrac{1}{3}$

(i), (ii)에 의하여 $-\dfrac{3}{2}<a<-\dfrac{1}{3}$

따라서 $m=-\dfrac{3}{2},\ n=-\dfrac{1}{3}$이므로 $2mn=1$

16 두 점 $(-6,\ 4)$, $(2,\ 8)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\dfrac{8-4}{2-(-6)}\{x-(-6)\}$

$\therefore x-2y+14=0$ …… ㉠

따라서 점 $(3,\ -4)$와 직선 ㉠ 사이의 거리는

$\dfrac{|3-2\times(-4)+14|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{25}{\sqrt{5}}=5\sqrt{5}$

17 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(-x+y+4)k+x+2y-1=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$-x+y+4=0,\ x+2y-1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3,\ y=-1$

따라서 점 A의 좌표는 A$(3,\ -1)$

점 A$(3,\ -1)$과 직선 $2x-y+m=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\dfrac{|2\times3-(-1)+m|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $|7+m|=5$

$\therefore m=-12$ 또는 $m=-2$

따라서 모든 상수 m의 값의 곱은 24

18 점 $(1,\ -2)$를 지나는 직선의 기울기를 m이라고 하면 이 직선의 방정식은

$y-(-2)=m(x-1)$

$\therefore mx-y-m-2=0$ …… ㉠

점 $(0,\ 1)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이므로

$\dfrac{|-1-m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

$|-m-3|=\sqrt{2(m^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면

$m^2-6m-7=0,\ (m+1)(m-7)=0$

$\therefore m=-1$ 또는 $m=7$

따라서 구하는 직선의 기울기는 -1 또는 7

19 두 직선이 서로 평행하므로 $\dfrac{2}{1}=\dfrac{-4}{a}\neq\dfrac{3}{-1}$

$\dfrac{2}{1}=\dfrac{-4}{a}$에서 $a=-2$

두 직선 $2x-4y+3=0$, $x-2y-1=0$ 사이의 거리는 직선 $x-2y-1=0$ 위의 한 점 $(1,\ 0)$과 직선 $2x-4y+3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|2\times1-4\times0+3|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\dfrac{5}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

다른 풀이

직선 $x+ay-1=0$을 a에 대하여 정리하면

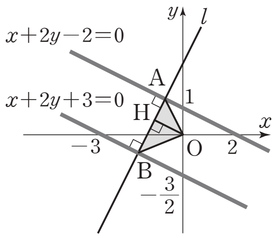
$ay+x-1=0$

이 직선은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ 0)$을 지난다.

따라서 구하는 거리는 점 $(1,\ 0)$과 직선 $2x-4y+3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|2\times1-4\times0+3|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\dfrac{5}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

20 오른쪽 그림에서 선분 AB의 길이는 직선 $x+2y-2=0$ 위의 한 점 $(2,\ 0)$과 직선 $x+2y+3=0$ 사이의 거리와 같으므로



$$\overline{AB}=\frac{|2+2\times0+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$
$$=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

원점 O에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 하면
△OAB의 넓이가 2이므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\overline{OH}=2$ $\therefore\ \overline{OH}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

이때 직선 $x+2y-2=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+1$에 수직인 직선 l의 기울기는 2이다.
직선 l의 y절편을 b라고 하면 직선 l의 방정식은
$y=2x+b$ $\therefore\ 2x-y+b=0$
원점 O와 직선 l 사이의 거리는 선분 OH의 길이와 같으므로

$\frac{|b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$, $|b|=4$

$\therefore\ b=-4$ 또는 $b=4$
그런데 점 A는 제2사분면 위의 점이므로
$b=4$
따라서 구하는 직선 l의 방정식은
$2x-y+4=0$

21 $\overline{PA}=2\overline{PB}$를 만족하는 임의의 점 P의 좌표를 $P(x,\ y)$라고 하면

$$\frac{|2x-3y+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=2\times\frac{|3x-2y-1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}$$
$$\frac{|2x-3y+1|}{\sqrt{13}}=\frac{2|3x-2y-1|}{\sqrt{13}}$$

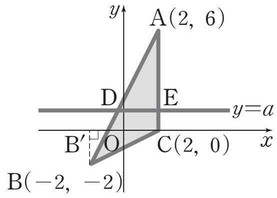
$|2x-3y+1|=2|3x-2y-1|$
$2x-3y+1=\pm2(3x-2y-1)$
따라서 구하는 자취의 방정식은
$4x-y-3=0$ 또는 $8x-7y-1=0$

22 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면 이 점에서 두 직선에 이르는 거리는 같으므로

$$\frac{|3x+4y+2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|4x-3y+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$$
$$\frac{|3x+4y+2|}{5}=\frac{|4x-3y+1|}{5}$$

$|3x+4y+2|=|4x-3y+1|$
$3x+4y+2=\pm(4x-3y+1)$
따라서 구하는 각의 이등분선의 방정식은
$x-7y-1=0$ 또는 $7x+y+3=0$

23 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 B′이라고 하면 점 B′의 좌표는 $B'(-2,\ 0)$



△ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{B'C}=\frac{1}{2}\times6\times4=12$

이때 직선 $y=a$가 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$와 만나는 점을 각각 D, E라고 하면 직선 $y=a$는 △ABC의 넓이를 이등분하므로
△ADE의 넓이는 6
두 점 $A(2,\ 6)$, $B(-2,\ -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-6=\frac{-2-6}{-2-2}(x-2)$ $\therefore\ y=2x+2$

이 직선과 직선 $y=a$의 교점 D의 좌표는
$D\left(\frac{a-2}{2},\ a\right)$
또 두 점 $A(2,\ 6)$, $C(2,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은 $x=2$이므로 이 직선과 직선 $y=a$의 교점 E의 좌표는
$E(2,\ a)$
△ADE에서

$\overline{DE}=2-\frac{a-2}{2}=\frac{-a+6}{2}$

$\overline{AE}=6-a$
따라서 △ADE의 넓이는 6이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{AE}=6$

$\frac{1}{2}\times\frac{-a+6}{2}\times(6-a)=6$

$(6-a)^2=24$, $a^2-12a+12=0$
$\therefore\ a=6\pm2\sqrt{6}$
그런데 $-2<a<6$이므로 $a=6-2\sqrt{6}$

24 △ABC는 정삼각형이므로 직선 AG는 선분 BC의 수직이등분선이다.
이때 직선 AG의 기울기는 $\frac{5-4}{-1-1}=-\frac{1}{2}$이므로 직선 BC의 기울기는 2이다.
직선 BC의 방정식은 $ax-y+b=0$, 즉 $y=ax+b$이므로
$a=2$
점 $G(-1,\ 5)$와 직선 $2x-y+b=0$ 사이의 거리 d는

$d=\frac{|-2-5+b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|-7+b|}{\sqrt{5}}$

$\overline{AG}=\sqrt{(-1-1)^2+(5-4)^2}=\sqrt{5}$
$\overline{AG}:d=2:1$이므로

$\sqrt{5}:\frac{|-7+b|}{\sqrt{5}}=2:1$, $|-7+b|=\frac{5}{2}$

$\therefore\ b=\frac{9}{2}$ 또는 $b=\frac{19}{2}$

그런데 $b=\frac{9}{2}$이면 점 G는 △ABC의 외부에 존재하므로

$b=\frac{19}{2}$

$\therefore\ ab=19$

25 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(2x-y-1)+k(x+2y)=0$ (단, k는 실수)

$\therefore\ (k+2)x+(2k-1)y-1=0$

이 직선과 원점 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|-1|}{\sqrt{(k+2)^2+(2k-1)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5k^2+5}}$$

d의 값이 최대가 되려면 $5k^2+5$의 값이 최소이어야 한다.

따라서 $k=0$일 때 $5k^2+5$의 값이 최소이므로 구하는 거리의 최댓값은 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

다른 풀이

주어진 두 직선의 교점을 A라고 하면 점 A의 좌표는

$A\left(\frac{2}{5},\ -\frac{1}{5}\right)$

점 A를 지나는 직선을 l이라고 하면 원점 O와 직선 l 사이의 거리가 최대인 경우는 $\overline{OA}\perp l$일 때이고, 이때의 최댓값은 선분 OA의 길이와 같다.

따라서 구하는 최댓값은

$$\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(-\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

26 △APC와 △PBC에서 밑변을 각각 $\overline{AP}$, $\overline{PB}$라고 하고 높이를 h라고 하자.

△APC : △PBC$=2:1$에서

$\left(\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times h\right):\left(\frac{1}{2}\times\overline{PB}\times h\right)=2:1$

$\therefore\ \overline{AP}:\overline{PB}=2:1$ ...... (가)

즉, 점 P는 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2\times5+1\times(-1)}{2+1},\ \frac{2\times(-1)+1\times1}{2+1}\right)$$

$\therefore\ P\left(3,\ -\frac{1}{3}\right)$ ...... (나)

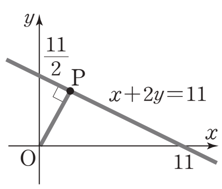
따라서 두 점 $C(4,\ 3)$, $P\left(3,\ -\frac{1}{3}\right)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=\frac{-\frac{1}{3}-3}{3-4}(x-4)$$

$\therefore\ 10x-3y-31=0$ ...... (다)

채점 기준	배점
(가) $\overline{AP}:\overline{PB}$를 구한다.	2점
(나) 점 P의 좌표를 구한다.	2점
(다) 두 점 C, P를 지나는 직선의 방정식을 구한다.	2점

27 직선 $x+2y=11$ 위의 점 중에서 원점과의 거리가 가장 가까운 점을 P라고 하면 직선 OP는 직선 $x+2y=11$과 수직이다. ...... (가)



또 직선 $x+2y=11$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}$에 수직인 직선의 기울기는 2이다.

따라서 직선 OP는 기울기가 2이고 원점 O를 지나므로 직선의 방정식은 $y=2x$ ...... (나)

점 P는 두 직선 $x+2y=11$과 $y=2x$의 교점이므로 두 식을 연립하여 풀면

$x=\frac{11}{5},\ y=\frac{22}{5}$

따라서 구하는 점의 좌표는

$\left(\frac{11}{5},\ \frac{22}{5}\right)$ ...... (다)

채점 기준	배점
(가) 직선 $x+2y=11$ 위의 점 P와 원점 사이의 거리가 가장 가까운 경우를 말한다.	1점
(나) 직선 OP의 방정식을 구한다.	2점
(다) 점 P의 좌표를 구한다.	2점

28 (1) $x-y+1=0$ ...... ㉠

$x+7y+9=0$ ...... ㉡

$3x+y-13=0$ ...... ㉢

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=-2,\ y=-1$

즉, 두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는

$(-2,\ -1)$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x=5,\ y=-2$

즉, 두 직선 ㉡, ㉢의 교점의 좌표는

$(5,\ -2)$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$x=3,\ y=4$

즉, 두 직선 ㉠, ㉢의 교점의 좌표는

$(3,\ 4)$

따라서 삼각형의 세 꼭짓점의 좌표는

$(-2,\ -1)$, $(5,\ -2)$, $(3,\ 4)$ ...... (가)

(2) 삼각형의 세 꼭짓점을 $A(-2,\ -1)$, $B(5,\ -2)$, $C(3,\ 4)$라고 하면

$\overline{AB}=\sqrt{\{5-(-2)\}^2+\{-2-(-1)\}^2}=5\sqrt{2}$ ...... (나)

또 점 $C(3,\ 4)$와 직선 AB, 즉 $x+7y+9=0$ 사이의 거리를 h라고 하면

$h=\frac{|3+28+9|}{\sqrt{1^2+7^2}}=4\sqrt{2}$ ...... (다)

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times h=\frac{1}{2}\times5\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=20$ ...... (라)

채점 기준	배점
(가) 세 꼭짓점의 좌표를 구한다.	3점
(나) 삼각형의 밑변의 길이를 구한다.	2점
(다) 삼각형의 높이를 구한다.	2점
(라) 삼각형의 넓이를 구한다.	1점

21강 원의 방정식

확인 문제 p. 92

1 중심의 좌표: $(2,\ -1)$, 반지름의 길이: 2

2 (1) 주어진 원의 방정식을 변형하면 $(x-3)^2+y^2=9$
따라서 중심이 점 $(3,\ 0)$이고 반지름의 길이가 3인 원이다.
(2) 주어진 원의 방정식을 변형하면 $(x-1)^2+(y+5)^2=64$
따라서 중심이 점 $(1,\ -5)$이고 반지름의 길이가 8인 원이다.

교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제 p. 93

1 (1) $(x-3)^2+y^2=1$
(2) x축에 접하므로 반지름의 길이는 $|-5|=5$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+2)^2+(y+5)^2=25$
(3) 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은
$x^2+y^2=r^2$
이 원이 점 $(-1,\ 3)$을 지나므로
$(-1)^2+3^2=r^2 \qquad \therefore\ r^2=10$
따라서 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2=10$

2 (1) $x^2+y^2=5$
(2) y축에 접하므로 반지름의 길이는 2
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-2)^2+(y-1)^2=4$
(3) 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은
$(x-4)^2+(y+1)^2=r^2$
이 원이 점 $(0,\ -1)$을 지나므로
$(-4)^2+(-1+1)^2=r^2 \qquad \therefore\ r^2=16$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-4)^2+(y+1)^2=16$

3 원의 중심은 $\overline{AB}$의 중점이므로
$\left(\frac{-2-4}{2},\ \frac{0+4}{2}\right)$
$\therefore\ (-3,\ 2)$
또 원의 반지름의 길이는
$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{\{-4-(-2)\}^2+(4-0)^2}=\sqrt{5}$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+3)^2+(y-2)^2=5$

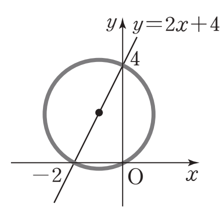
4 원의 중심은 $\overline{AB}$의 중점이므로
$\left(\frac{-1+3}{2},\ \frac{-4+2}{2}\right)$
$\therefore\ (1,\ -1)$
원의 반지름의 길이는
$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{\{3-(-1)\}^2+\{2-(-4)\}^2}=\sqrt{13}$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y+1)^2=13$

5 주어진 원의 방정식을 변형하면
$(x+a)^2+(y-2)^2=a^2-3a-4$
이 방정식이 원을 나타내려면
$a^2-3a-4>0,\ (a+1)(a-4)>0$
$\therefore\ a<-1$ 또는 $a>4$

6 주어진 원의 방정식을 변형하면
$x^2+\{y+(a-1)\}^2=-a^2-a+6$
이 방정식이 반지름의 길이가 2 이상인 원을 나타내려면
$-a^2-a+6\geq 4,\ a^2+a-2\leq 0$
$(a+2)(a-1)\leq 0$
$\therefore\ -2\leq a\leq 1$

7 구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하고, 세 점 $(0,\ 0)$, $(3,\ -1)$, $(2,\ 0)$의 좌표를 각각 대입하면
$C=0$ ...... ㉠
$9+1+3A-B+C=0$ ...... ㉡
$4+0+2A+C=0$ ...... ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$A=-2,\ B=4,\ C=0$
따라서 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2-2x+4y=0$

8 오른쪽 그림과 같이 x축, y축 및 직선 $y=2x+4$로 둘러싸인 삼각형의 외접원은 세 점 $(0,\ 0)$, $(-2,\ 0)$, $(0,\ 4)$를 지나는 원이다.



구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하고, 세 점의 좌표 $(0,\ 0)$, $(-2,\ 0)$, $(0,\ 4)$를 각각 대입하면
$C=0$ ...... ㉠
$4-2A+C=0$ ...... ㉡
$16+4B+C=0$ ...... ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$A=2,\ B=-4,\ C=0$
따라서 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2+2x-4y=0$

22강 원과 직선의 위치 관계

확인 문제 p. 94

1 (1) $y=x+2$를 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$x^2+(x+2)^2=1$, $2x^2+4x+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=2^2-2\times3=-2<0$

따라서 만나지 않는다.

다른 풀이

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=x+2$, 즉 $x-y+2=0$ 사이의 거리 d는

$d=\frac{|0-0+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

원의 반지름의 길이 r는 $r=1$

따라서 $d>r$이므로 만나지 않는다.

(2) $y=-x+\sqrt{2}$를 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$x^2+(-x+\sqrt{2})^2=1$, $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-\sqrt{2})^2-2\times1=0$

따라서 한 점에서 만난다(접한다).

다른 풀이

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=-x+\sqrt{2}$, 즉 $x+y-\sqrt{2}=0$ 사이의 거리 d는

$d=\frac{|0+0-\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1$

원의 반지름의 길이 r는 $r=1$

따라서 $d=r$이므로 한 점에서 만난다(접한다).

2 $y=-2x\pm5\sqrt{(-2)^2+1}$ $\quad\therefore\ y=-2x\pm5\sqrt{5}$

교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 95

1 $y=-x+k$를 $x^2+y^2=3$에 대입하면

$x^2+(-x+k)^2=3$, $2x^2-2kx+k^2-3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-2(k^2-3)=6-k^2$

(1) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 하므로

$6-k^2>0$, $k^2-6<0$ $\quad\therefore\ -\sqrt{6}<k<\sqrt{6}$

(2) 원과 직선이 한 점에서 만나려면 $D=0$이어야 하므로

$6-k^2=0$ $\quad\therefore\ k=-\sqrt{6}$ 또는 $k=\sqrt{6}$

(3) 원과 직선이 만나지 않으려면 $D<0$이어야 하므로

$6-k^2<0$, $k^2-6>0$ $\quad\therefore\ k<-\sqrt{6}$ 또는 $k>\sqrt{6}$

다른 풀이

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=-x+k$, 즉 $x+y-k=0$ 사이의 거리 d는 $d=\frac{|0+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이 r는 $r=\sqrt{3}$

(1) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d<r$이어야 하므로

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<\sqrt{3}$, $|k|<\sqrt{6}$ $\quad\therefore\ -\sqrt{6}<k<\sqrt{6}$

(2) 원과 직선이 한 점에서 만나려면 $d=r$이어야 하므로

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$, $|k|=\sqrt{6}$

$\therefore\ k=-\sqrt{6}$ 또는 $k=\sqrt{6}$

(3) 원과 직선이 만나지 않으려면 $d>r$이어야 하므로

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}>\sqrt{3}$, $|k|>\sqrt{6}$

$\therefore\ k<-\sqrt{6}$ 또는 $k>\sqrt{6}$

2 $y=kx+3$을 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$x^2+(kx+3)^2=1$, $(k^2+1)x^2+6kx+8=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(3k)^2-8(k^2+1)=k^2-8$

(1) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 하므로

$k^2-8>0$ $\quad\therefore\ k<-2\sqrt{2}$ 또는 $k>2\sqrt{2}$

(2) 원과 직선이 한 점에서 만나려면 $D=0$이어야 하므로

$k^2-8=0$ $\quad\therefore\ k=-2\sqrt{2}$ 또는 $k=2\sqrt{2}$

(3) 원과 직선이 만나지 않으려면 $D<0$이어야 하므로

$k^2-8<0$ $\quad\therefore\ -2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$

다른 풀이

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=kx+3$, 즉 $kx-y+3=0$ 사이의 거리 d는 $d=\frac{|0-0+3|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{k^2+1}}$

원의 반지름의 길이 r는 $r=1$

(1) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d<r$이어야 하므로

$\frac{3}{\sqrt{k^2+1}}<1$, $\sqrt{k^2+1}>3$

양변을 제곱하여 정리하면 $k^2-8>0$

$\therefore\ k<-2\sqrt{2}$ 또는 $k>2\sqrt{2}$

(2) 원과 직선이 한 점에서 만나려면 $d=r$이어야 하므로

$\frac{3}{\sqrt{k^2+1}}=1$, $\sqrt{k^2+1}=3$

양변을 제곱하여 정리하면 $k^2-8=0$

$\therefore\ k=-2\sqrt{2}$ 또는 $k=2\sqrt{2}$

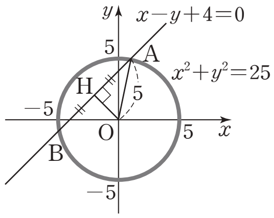
(3) 원과 직선이 만나지 않으려면 $d>r$이어야 하므로

$\frac{3}{\sqrt{k^2+1}}>1$, $\sqrt{k^2+1}<3$

양변을 제곱하여 정리하면 $k^2-8<0$

$\therefore\ -2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$

3 오른쪽 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하고, 원의 중심 O에서 직선 $x-y+4=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\overline{OH}=\dfrac{|0-0+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$

$\overline{OA}=5$

$\triangle$OAH는 직각삼각형이므로

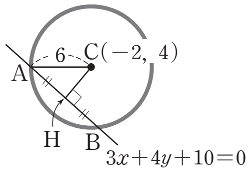
$\overline{AH}^2+(2\sqrt{2})^2=5^2$, $\overline{AH}^2=17$ $\quad\therefore\ \overline{AH}=\pm\sqrt{17}$

그런데 $\overline{AH}>0$이므로 $\overline{AH}=\sqrt{17}$

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{17}$

4 주어진 원의 방정식을 변형하면 $(x+2)^2+(y-4)^2=36$

오른쪽 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하고, 원의 중심 C에서 직선 $3x+4y+10=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\overline{CH}=\dfrac{|-6+16+10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$, $\overline{CA}=6$

$\triangle$CAH는 직각삼각형이므로

$\overline{AH}^2+4^2=6^2$, $\overline{AH}^2=20$ $\quad\therefore\ \overline{AH}=\pm2\sqrt{5}$

그런데 $\overline{AH}>0$이므로 $\overline{AH}=2\sqrt{5}$

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AH}=2\times2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

5 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(a,\ -2)$에서의 접선의 방정식은

$ax-2y=20$, 즉 $ax-2y-20=0$

이 직선이 직선 $2x-y+5=0$과 평행하므로

$\dfrac{a}{2}=\dfrac{-2}{-1}\neq\dfrac{-20}{5}$ $\quad\therefore\ a=4$

6 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=10$

이 직선이 직선 $x+3y+4=0$과 서로 수직이므로

$a\times1+b\times3=0$ $\quad\therefore\ a=-3b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

점 $(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=10$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=1$ 또는 $a=3$, $b=-1$ $\quad\therefore\ ab=-3$

7 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 점 $(0,\ -4)$를 지나므로

$-4y_1=8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

한편 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=8$ 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x_1=-2$, $y_1=-2$ 또는 $x_1=2$, $y_1=-2$

이것을 ㉠에 각각 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$x+y+4=0$ 또는 $x-y-4=0$

다른 풀이

접선의 기울기를 m이라고 하면 접선이 점 $(0,\ -4)$를 지나므로 접선의 방정식은

$y=mx-4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $x^2+y^2=8$에 대입하면

$x^2+(mx-4)^2=8$, $(m^2+1)x^2-8mx+8=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=(-4m)^2-8(m^2+1)=0$, $m^2-1=0$

$(m+1)(m-1)=0$ $\quad\therefore\ m=-1$ 또는 $m=1$

이것을 ㉠에 각각 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$x+y+4=0$ 또는 $x-y-4=0$

다른 풀이

접선의 기울기를 m이라고 하면 접선이 점 $(0,\ -4)$를 지나므로 접선의 방정식은

$y=mx-4$ $\quad\therefore\ mx-y-4=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는 반지름의 길이와 같으므로

$\dfrac{|-4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$, $4=2\sqrt{2(m^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면 $m^2-1=0$

$(m+1)(m-1)=0$ $\quad\therefore\ m=-1$ 또는 $m=1$

이것을 ㉠에 각각 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$x+y+4=0$ 또는 $x-y-4=0$

8 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$x_1+3y_1=5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

한편 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x_1=-1$, $y_1=2$ 또는 $x_1=2$, $y_1=1$

이것을 ㉠에 각각 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$x-2y+5=0$ 또는 $2x+y-5=0$

다른 풀이

접선의 기울기를 m이라고 하면 접선이 점 $(1,\ 3)$을 지나므로 접선의 방정식은

$y-3=m(x-1)$

$\therefore\ mx-y-m+3=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는 반지름의 길이와 같으므로

$\dfrac{|-m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $|-m+3|=\sqrt{5(m^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면

$2m^2+3m-2=0$, $(m+2)(2m-1)=0$

$\therefore\ m=-2$ 또는 $m=\frac{1}{2}$

이것을 ㉠에 각각 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$2x+y-5=0$ 또는 $x-2y+5=0$

21~22강 족집게 기출문제 p. 96~99

1 ①	2 ④	3 8	4 ⑤	5 -3
6 ③	7 -4	8 ④	9 10	10 ②
11 ②	12 ②	13 ③	14 ④	15 ②
16 $x-y-6=0$ 또는 $x-y-2=0$			17 ③	18 ①
19 8	20 ③	21 ⑤	22 ④	23 ②
24 ③	25 4	26 $(x-1)^2+(y-2)^2=16$		
27 3	28 (1) $y=3$ 또는 $4x-3y+1=0$ (2) $\frac{32}{5}$			

1 주어진 원의 방정식을 변형하면 $(x-2)^2+(y+3)^2=6$이므로 구하는 원의 중심은 $(2,\ -3)$

중심이 같은 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은 $(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$

이 원이 점 $(3,\ -1)$을 지나므로

$(3-2)^2+(-1+3)^2=r^2 \qquad \therefore\ r^2=5$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\pi r^2=5\pi$

2 원의 중심의 좌표를 $(a,\ a-1)$이라고 하면 x축에 접하므로 반지름의 길이는 $|a-1|$

즉, 원의 방정식은 $(x-a)^2+\{y-(a-1)\}^2=(a-1)^2$

이 원이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$(1-a)^2+(3-a)^2=(a-1)^2$

$(3-a)^2=0 \qquad \therefore\ a=3$

따라서 중심이 점 $(3,\ 2)$이고 반지름의 길이가 2이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-2)^2=4$

3 점 $(2,\ 2)$는 제1사분면 위의 점이므로 점 $(2,\ 2)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 중심은 제1사분면 위에 있다.

이때 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은

$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

이 원이 점 $(2,\ 2)$를 지나므로

$(2-r)^2+(2-r)^2=r^2,\ r^2-8r+8=0$

$\therefore\ r=4\pm2\sqrt{2}$

즉, 두 원의 중심의 좌표는

$(4-2\sqrt{2},\ 4-2\sqrt{2}),\ (4+2\sqrt{2},\ 4+2\sqrt{2})$

따라서 두 원의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{\{4+2\sqrt{2}-(4-2\sqrt{2})\}^2+\{4+2\sqrt{2}-(4-2\sqrt{2})\}^2}$

$=\sqrt{32+32}=8$

4 두 점 A, B의 좌표를 $A(a,\ b),\ B(c,\ d)$라고 하면 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표가 $(-2,\ 1)$이므로

$\frac{2c+a}{2+1}=-2,\ \frac{2d+b}{2+1}=1$

$\therefore\ a+2c=-6,\ b+2d=3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표가 $(2,\ 5)$이므로

$\frac{c+2a}{1+2}=2,\ \frac{d+2b}{1+2}=5$

$\therefore\ 2a+c=6,\ 2b+d=15 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=6,\ b=9,\ c=-6,\ d=-3$

따라서 두 점 A, B의 좌표는

$A(6,\ 9),\ B(-6,\ -3)$

원의 중심은 $\overline{AB}$의 중점이므로

$\frac{6-6}{2}=0,\ \frac{9-3}{2}=3 \qquad \therefore\ (0,\ 3)$

원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(6+6)^2+(9+3)^2}=6\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+(y-3)^2=72$

5 주어진 원의 방정식을 변형하면 $(x-2)^2+(y+3)^2=25$

직선 $y=ax+3$이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(2,\ -3)$을 지나야 하므로

$-3=2a+3 \qquad \therefore\ a=-3$

6 주어진 원의 방정식을 변형하면

$(x-5)^2+(y+4)^2=-k^2-4k+21$

이 방정식이 원을 나타내려면

$-k^2-4k+21>0,\ k^2+4k-21<0$

$(k+7)(k-3)<0$

$\therefore\ -7<k<3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이 원이 제4사분면 위에만 있으려면 반지름의 길이가 4보다 작아야 하므로

$-k^2-4k+21<16,\ k^2+4k-5>0$

$(k+5)(k-1)>0$

$\therefore\ k<-5$ 또는 $k>1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-7<k<-5$ 또는 $1<k<3$

따라서 정수 k는 -6, 2의 2개이다.

7 세 점 $A(0,\ 0),\ B(0,\ 4),\ C(-4,\ 0)$을 지나는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하고, 세 점의 좌표를 각각 대입하면

$C=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$16+4B+C=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

$16-4A+C=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$A=4,\ B=-4,\ C=0$

따라서 원의 방정식은 $x^2+y^2+4x-4y=0$

이 원이 점 $(k,\ 4)$를 지나므로

$k^2+16+4k-16=0$, $k^2+4k=0$

$k(k+4)=0$ $\quad\therefore\ k=0$ 또는 $k=-4$

그런데 $k<0$이므로 $\quad k=-4$

8 $x-2y=0$ …… ㉠

$x+y=0$ …… ㉡

$x-3y+4=0$ …… ㉢

두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는 $(0,\ 0)$

두 직선 ㉡, ㉢의 교점의 좌표는 $(-1,\ 1)$

두 직선 ㉠, ㉢의 교점의 좌표는 $(8,\ 4)$

구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라고 하면 이 원이 세 점 $(0,\ 0)$, $(-1,\ 1)$, $(8,\ 4)$를 지나므로

$C=0$ …… ㉣

$1+1-A+B+C=0$ …… ㉤

$64+16+8A+4B+C=0$ …… ㉥

㉣, ㉤, ㉥을 연립하여 풀면

$A=-6$, $B=-8$, $C=0$

따라서 구하는 원의 방정식은 $\quad x^2+y^2-6x-8y=0$

9 주어진 원의 방정식을 변형하면 $\quad (x-1)^2+(y+2)^2=4$

점 $(4,\ 2)$와 원의 중심 $(1,\ -2)$ 사이의 거리 d는

$d=\sqrt{(4-1)^2+\{2-(-2)\}^2}=5$

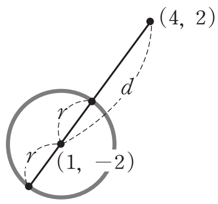
원의 반지름의 길이 r는 $\quad r=2$

오른쪽 그림에서

$M=d+r=5+2=7$

$m=d-r=5-2=3$

$\therefore\ M+m=10$



10 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 위의 임의의 점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면

$(a-1)^2+(b+2)^2=4$ …… ㉠

점 $(3,\ 2)$와 점 $(a,\ b)$를 이은 선분의 중점의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$x=\dfrac{3+a}{2}$, $y=\dfrac{2+b}{2}$ $\quad\therefore\ a=2x-3$, $b=2y-2$

이것을 ㉠에 대입하면

$(2x-4)^2+(2y)^2=4$ $\quad\therefore\ (x-2)^2+y^2=1$

이 방정식은 중심이 점 $(2,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원을 나타내므로 구하는 자취의 길이는

$2\pi\times1=2\pi$

11 두 원의 교점을 지나는 도형의 방정식은

$x^2+y^2-4+k(x^2+y^2-2x+6y-14)=0$ (단, k는 실수)

이때 $k=-1$이면 직선이므로

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-2x+6y-14)=0$

$\therefore\ x-3y+5=0$

12 $y=x+2k$를 $(x-1)^2+y^2=2$에 대입하면

$(x-1)^2+(x+2k)^2=2$

$\therefore\ 2x^2+2(2k-1)x+4k^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

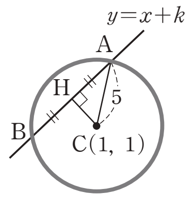
$\dfrac{D}{4}=(2k-1)^2-2(4k^2-1)>0$

$4k^2+4k-3<0$, $(2k+3)(2k-1)<0$

$\therefore\ -\dfrac{3}{2}<k<\dfrac{1}{2}$

따라서 정수 k는 -1, 0의 2개이다.

13 오른쪽 그림과 같이 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=25$와 직선 $y=x+k$의 두 교점을 A, B, 원의 중심을 C라 하고, 점 C에서 직선에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



원의 중심 $C(1,\ 1)$과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리 $\overline{CH}$는

$\overline{CH}=\dfrac{|1-1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}$

또 $\overline{AB}=8$이므로 $\quad \overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=4$

이때 $\triangle CAH$는 직각삼각형이므로

$4^2+\left(\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}\right)^2=5^2$, $k^2=18$ $\quad\therefore\ k=\pm3\sqrt{2}$

그런데 $k>0$이므로 $\quad k=3\sqrt{2}$

14 점 P와 $\overline{AB}$ 사이의 거리를 h라고 하면 $\triangle PAB$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times h$

이때 $\triangle PAB$의 넓이가 최대가 되려면 h의 값이 최대이어야 한다.

두 점 $A(-3,\ 0)$, $B(0,\ 4)$를 지나는 직선 AB의 방정식은

$\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{4}=1$ $\quad\therefore\ 4x-3y+12=0$ …… ㉠

원의 중심 $(1,\ 2)$와 직선 ㉠ 사이의 거리 d는

$d=\dfrac{|4-6+12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$

원의 반지름의 길이 r는 $\quad r=1$

오른쪽 그림에서 h의 최댓값은

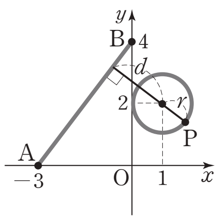
$d+r=2+1=3$

이고

$\overline{AB}=\sqrt{(-3-0)^2+(0-4)^2}=5$

이므로 $\triangle PAB$의 넓이의 최댓값은

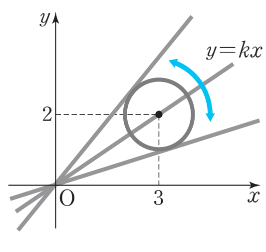
$\dfrac{1}{2}\times5\times3=\dfrac{15}{2}$



15 $\dfrac{y}{x}=k$ (k는 상수)로 놓으면

$y=kx$

직선 $y=kx$는 k의 값에 관계없이 항상 원점을 지나므로 오른쪽 그림과 같이 직선이 원과 접할 때, k의 값이 최대 또는 최소이다.



이때 원의 중심 (3, 2)와 직선 $y=kx$, 즉 $kx-y=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|3k-2|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=1$, $|3k-2|=\sqrt{k^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $8k^2-12k+3=0$ …… ㉠

이때 k의 최댓값 M과 최솟값 m은 이차방정식 ㉠의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$Mm=\frac{3}{8}$ $\therefore$ $8Mm=3$

16 주어진 원의 방정식을 변형하면

$(x-3)^2+(y+1)^2=2$

접선의 기울기는 $\tan 45°=1$이고, y절편을 b라고 하면 접선의 방정식은

$y=x+b$ $\therefore$ $x-y+b=0$ …… ㉠

원의 중심 (3, −1)과 접선 ㉠ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|3+1+b|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$, $|4+b|=2$

$\therefore$ $b=-6$ 또는 $b=-2$

이것을 ㉠에 각각 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$x-y-6=0$ 또는 $x-y-2=0$

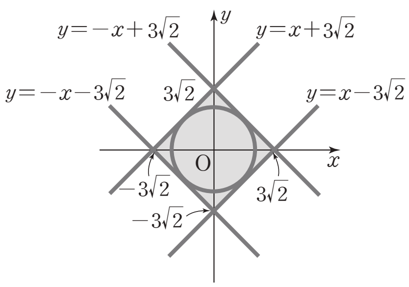
17 원 $x^2+y^2=9$에 접하고, 기울기가 −1인 직선의 방정식은

$y=-x\pm3\sqrt{(-1)^2+1}$ $\therefore$ $y=-x\pm3\sqrt{2}$

원 $x^2+y^2=9$에 접하고, 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y=x\pm3\sqrt{1^2+1}$ $\therefore$ $y=x\pm3\sqrt{2}$

따라서 원 $x^2+y^2=9$에 접하고, 기울기가 −1 또는 1인 직선은 다음 그림과 같다.

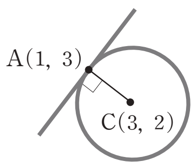


위의 네 직선으로 둘러싸인 사각형의 넓이는

$2\left(\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times3\sqrt{2}\right)=36$

18 주어진 원의 방정식을 변형하면 $(x-3)^2+(y-2)^2=5$

오른쪽 그림에서 원의 중심을 C라고 하면 직선 AC의 기울기는



$\frac{2-3}{3-1}=-\frac{1}{2}$

구하는 접선은 직선 AC와 수직이므로 접선의 기울기는 2

이때 접선의 방정식은

$y-3=2(x-1)$ $\therefore$ $2x-y+1=0$

따라서 $a=2$, $b=-1$이므로 $ab=-2$

19 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점 (1, −1)에서의 접선의 방정식은

$x-y=2$ $\therefore$ $y=x-2$ …… ㉠

㉠을 $(x-3)^2+(y+1)^2=10-k$에 대입하면

$(x-3)^2+(x-1)^2=10-k$

$2x^2-8x+k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-2k=0$

$\therefore$ $k=8$

20 점 (0, 6)을 지나고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$y=mx+6$

$\therefore$ $mx-y+6=0$ …… ㉠

원의 중심 (1, 3)과 직선 ㉠ 사이의 거리는 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|m-3+6|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$, $|m+3|=2\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$m^2+6m+9=4m^2+4$

$3m^2-6m-5=0$ …… ㉡

이때 두 접선의 기울기는 이차방정식 ㉡의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 접선의 기울기의 합은

$-\frac{-6}{3}=2$

21 점 (5, 4)를 지나고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$y-4=m(x-5)$

$\therefore$ $mx-y-5m+4=0$ …… ㉠

원의 중심 (1, 2)와 직선 ㉠ 사이의 거리는 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|m-2-5m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=r$, $|-4m+2|=r\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$16m^2-16m+4=r^2m^2+r^2$

$(r^2-16)m^2+16m+r^2-4=0$ …… ㉡

이때 두 접선의 기울기는 이차방정식 ㉡의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 접선의 기울기의 곱은

$\frac{r^2-4}{r^2-16}$

두 접선이 서로 수직이므로

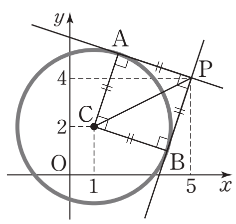
$\frac{r^2-4}{r^2-16}=-1$, $r^2-4=-r^2+16$

$r^2=10$ $\therefore$ $r=\pm\sqrt{10}$

그런데 $r>0$이므로 $r=\sqrt{10}$

다른 풀이

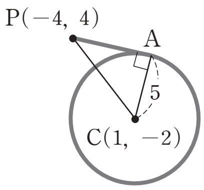
오른쪽 그림과 같이 점 P(5, 4)라 하고, 원의 중심을 C, 점 P에서 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라고 하면 사각형 PACB는 정사각형이므로



$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{CA}=\overline{CB}=r$

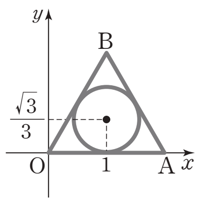
이때 $\overline{PC}^2=(5-1)^2+(4-2)^2=20$이고,
$\triangle PAC$는 직각삼각형이므로
$r^2+r^2=20,\ r^2=10 \qquad \therefore r=\pm\sqrt{10}$
그런데 $r>0$이므로 $\quad r=\sqrt{10}$

22 주어진 원의 방정식을 변형하면 $\quad (x-1)^2+(y+2)^2=25$
오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C, 점 P에서 원에 그은 한 접선의 접점을 A라고 하면

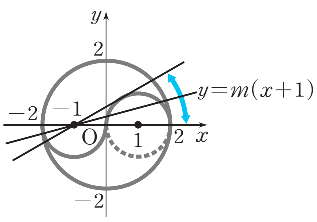


$\overline{CA}=5$
$\overline{PC}^2=\{1-(-4)\}^2+(-2-4)^2=61$
이때 $\triangle PAC$는 직각삼각형이므로
$\overline{PA}^2+5^2=61,\ \overline{PA}^2=36 \qquad \therefore \overline{PA}=\pm 6$
그런데 $\overline{PA}>0$이므로 $\quad \overline{PA}=6$

23 $\overline{OA}=2$
$\overline{AB}=\sqrt{(1-2)^2+(\sqrt{3}-0)^2}=2$
$\overline{BO}=\sqrt{(0-1)^2+(0-\sqrt{3})^2}=2$
따라서 $\triangle OAB$는 정삼각형이다.
정삼각형의 내심은 무게중심과 일치하므로 $\triangle OAB$의 내심의 좌표를 구하면
$\dfrac{0+2+1}{3}=1,\ \dfrac{0+0+\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \qquad \therefore \left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$
오른쪽 그림과 같이 $\triangle OAB$의 내접원은 중심이 점 $\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$이고, x축에 접하는 원이므로 원의 반지름의 길이는 $\quad \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

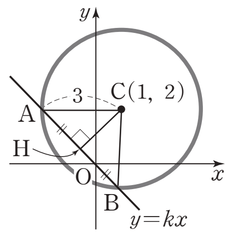


24 직선 $y=m(x+1)$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 0)$을 지난다.
오른쪽 그림과 같이 직선 $y=m(x+1)$이 태극 문양과 서로 다른 다섯 개의 점에서 만나려면 직선 $y=m(x+1)$은 반원 $(x-1)^2+y^2=1\,(y\ge 0)$에 접하는 직선과 x축 사이에 있어야 한다.

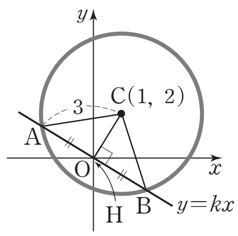


(i) 직선 $y=m(x+1)$과 반원 $(x-1)^2+y^2=1\,(y\ge 0)$이 접할 때
원 $(x-1)^2+y^2=1$의 중심 $(1,\ 0)$과 직선 $y=m(x+1)$, 즉 $mx-y+m=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로
$\dfrac{|m+m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1,\ |2m|=\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하면 $\quad 4m^2=m^2+1$
$m^2=\dfrac{1}{3} \qquad \therefore m=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
그런데 $m>0$이므로 $\quad m=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
(ii) 직선 $y=m(x+1)$이 x축일 때
직선의 기울기가 0이므로 $\quad m=0$
(i), (ii)에 의하여 $\quad 0<m<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
따라서 $a=0,\ b=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $\quad a^2+b^2=\dfrac{1}{3}$

25 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하고, 점 C에서 직선 $y=kx$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\overline{AB}=2\overline{AH}$이므로 선분 AB의 길이가 최소이려면 선분 AH의 길이가 최소이어야 한다.



$\triangle CAH$가 직각삼각형이므로
$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{9-\overline{CH}^2}$
즉, 선분 CH의 길이가 최대일 때, 선분 AH의 길이가 최소이다.
이때 선분 CH의 길이가 최대인 경우는 점 H가 점 O와 일치할 때이므로 선분 CH의 길이의 최댓값은
$\overline{CO}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$
따라서 선분 AH의 길이의 최솟값은 $\quad \sqrt{9-(\sqrt{5})^2}=2$

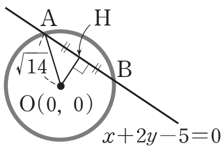


$\overline{AB}=2\overline{AH}$이므로 선분 AB의 길이의 최솟값은
$2\times 2=4$

26 원의 중심의 좌표를 $(a,\ a+1)$, 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은
$(x-a)^2+\{y-(a+1)\}^2=r^2$
이 원이 두 점 $(1,\ 6)$, $(-3,\ 2)$를 지나므로
$(1-a)^2+\{6-(a+1)\}^2=r^2 \quad \cdots\cdots ㉠$
$(-3-a)^2+\{2-(a+1)\}^2=r^2 \quad \cdots\cdots ㉡$
㉠에서 $\quad 2a^2-12a+26=r^2 \quad \cdots\cdots ㉢$
㉡에서 $\quad 2a^2+4a+10=r^2 \quad \cdots\cdots ㉣ \quad \cdots\cdots$ (가)
㉢$-$㉣을 하면
$-16a+16=0 \qquad \therefore a=1 \quad \cdots\cdots$ (나)
$a=1$을 ㉢에 대입하면
$2-12+26=r^2,\ r^2=16 \quad \cdots\cdots$ (다)
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y-2)^2=16 \quad \cdots\cdots$ (라)

채점 기준	배점
(가) a, r에 관한 방정식을 세운다.	2점
(나) a의 값을 구한다.	1점
(다) r^2의 값을 구한다.	1점
(라) 원의 방정식을 구한다.	1점

27 오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=14$와 직선 $x+2y-5=0$의 두 교점을 A, B라고 하자.



두 점 A, B를 지나는 원의 넓이가 최소이려면 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원이어야 한다. …… (가)

원의 중심 O(0, 0)에서 직선 $x+2y-5=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{OH}=\frac{|-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$ …… (나)

이때 △OAH는 직각삼각형이므로

$\overline{AH}^2+(\sqrt{5})^2=(\sqrt{14})^2$, $\overline{AH}^2=9$ $\quad\therefore \overline{AH}=\pm 3$

그런데 $\overline{AH}>0$이므로 $\overline{AH}=3$ …… (다)

따라서 넓이가 최소인 원의 반지름의 길이는 3이다. …… (라)

채점 기준	배점
(가) 구하는 원이 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원임을 안다.	2점
(나) 주어진 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구한다.	1점
(다) 선분 AH의 길이를 구한다.	2점
(라) 원의 반지름의 길이를 구한다.	1점

28 (1) 주어진 원의 방정식을 변형하면 $(x+2)^2+(y-1)^2=4$

점 P(2, 3)을 지나고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$y-3=m(x-2)$

$\therefore mx-y-2m+3=0$ …… ㉠

원의 중심 $(-2, 1)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|-2m-1-2m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$, $|-4m+2|=2\sqrt{m^2+1}$

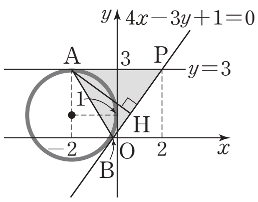
양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2-4m=0$

$m(3m-4)=0$ $\quad\therefore m=0$ 또는 $m=\frac{4}{3}$

이것을 ㉠에 각각 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=3$ 또는 $4x-3y+1=0$ …… (가)

(2) 오른쪽 그림과 같이 원과 두 접선 $y=3$, $4x-3y+1=0$의 접점을 각각 A, B라고 하자.



점 A의 좌표는 A(−2, 3)

점 A에서 직선 $4x-3y+1=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{AH}=\frac{|-8-9+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{16}{5}$ …… (나)

또 $\overline{PB}=\overline{PA}=4$ …… (다)

따라서 구하는 △PAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{PB}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{16}{5}=\frac{32}{5}$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) 접선의 방정식을 구한다.	3점
(나) 점 A와 직선 $4x-3y+1=0$ 사이의 거리를 구한다.	2점
(다) 선분 PB의 길이를 구한다.	1점
(라) △PAB의 넓이를 구한다.	1점

23강 평행이동과 대칭이동

확인 문제 p. 100

1 $5-2=3$, $-2+3=1$

따라서 평행이동한 점의 좌표는 $(3, 1)$

2 $(-5, -1)$, $(5, 1)$, $(5, -1)$, $(1, -5)$

교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제 p. 101

1 평행이동한 원의 방정식은

$(x+1)^2+\{(y-5)+1\}^2=4$

$\therefore (x+1)^2+(y-4)^2=4$

2 평행이동한 직선의 방정식은

$2(x-3)-(y+1)+5=0$

$\therefore 2x-y-2=0$

3 평행이동한 직선의 방정식은

$a(x-m)+2(y+4)+a=0$

$\therefore ax+2y-am+a+8=0$

이 직선이 직선 $x+2y+3=0$과 일치하므로

$a=1$, $-am+a+8=3$

$\therefore a=1$, $m=6$

4 평행이동한 원의 방정식은

$\{(x+3)-2\}^2+\{(y-m)+1\}^2=a$

$\therefore (x+1)^2+(y-m+1)^2=a$ …… ㉠

$x^2+y^2+2x-2y-3=0$을 변형하면

$(x+1)^2+(y-1)^2=5$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 일치하므로

$a=5$, $-m+1=-1$

$\therefore a=5$, $m=2$

5 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$x+4\times(-y)-1=0$

$\therefore x-4y-1=0$

y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-x+4y-1=0$

$\therefore x-4y+1=0$

원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-x+4\times(-y)-1=0$

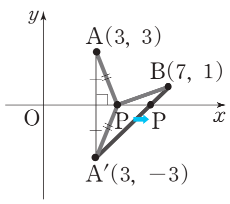
$\therefore x+4y+1=0$

직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

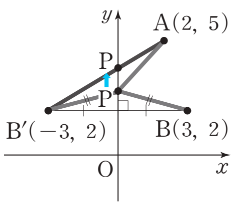
$4x+y-1=0$

6 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(x+5)^2+(-y)^2=6$
$\therefore\ (x+5)^2+y^2=6$
y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x+5)^2+y^2=6$
$\therefore\ (x-5)^2+y^2=6$
원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x+5)^2+(-y)^2=6$
$\therefore\ (x-5)^2+y^2=6$
직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$x^2+(y+5)^2=6$

7 오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(3,\ 3)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라고 하면 점 A'의 좌표는
$\mathrm{A}'(3,\ -3)$
이때 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\ge\overline{\mathrm{A'B}}$
따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 선분 $\mathrm{A'B}$의 길이와 같으므로
$\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{(7-3)^2+\{1-(-3)\}^2}$
$=4\sqrt{2}$



8 오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{B}(3,\ 2)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라고 하면 점 B'의 좌표는
$\mathrm{B}'(-3,\ 2)$
이때 $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}\ge\overline{\mathrm{AB'}}$
따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 선분 $\mathrm{AB'}$의 길이와 같으므로
$\overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{\{2-(-3)\}^2+(5-2)^2}$
$=\sqrt{34}$



9 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$3x+5\times(-y)-1=0$
$\therefore\ 3x-5y-1=0$
이 직선을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$3(x+1)-5(y-3)-1=0$
$\therefore\ 3x-5y+17=0$

10 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(x+3)^2+(y-1)^2=9$
이 원을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 원의 방정식은
$\{(x-4)+3\}^2+\{(y+2)-1\}^2=9$
$\therefore\ (x-1)^2+(y+1)^2=9$

23강 족집게 기출문제 p. 102~105

1 -4	**2** ③	**3** ⑤	**4** ①	**5** ④
6 3	**7** ⑤	**8** 6	**9** ①	**10** -9
11 $2x-y-10=0$ 또는 $2x-y+10=0$				**12** ④
13 ②	**14** ④	**15** 11	**16** $a<\frac{3}{4}$	**17** 20
18 $3\sqrt{2}$	**19** ④	**20** ②	**21** ①	**22** ④
23 ③	**24** 3	**25** $4\pi+8$	**26** $3\sqrt{2}$	**27** 28
28 -3 또는 $\frac{9}{2}$		**29** (1) 10 (2) $\mathrm{P}(2,\ 0)$		

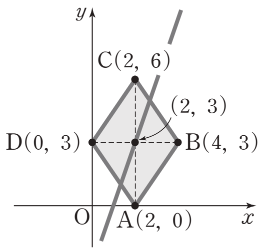
1 점 $(3,\ -1)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(3+a,\ -2)$
이 점이 직선 $2x-y=0$ 위에 있으므로
$2(3+a)-(-2)=0\qquad\therefore\ a=-4$

2 점 $(4,\ 2)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(2,\ 3)$이라고 하면
$4+a=2,\ 2+b=3$
$\therefore\ a=-2,\ b=1$
이때 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하여 점 $(-1,\ -1)$로 옮겨지는 점의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면
$x-2=-1,\ y+1=-1$
$\therefore\ x=1,\ y=-2$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(1,\ -2)$

3 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 옮기는 평행이동에 의하여 직선 l이 직선 $4x-3y-18=0$으로 옮겨지므로 직선 $4x-3y-18=0$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 직선 l과 일치한다.
따라서 직선 l의 방정식은
$4(x+2)-3(y-3)-18=0$
$\therefore\ 4x-3y-1=0$

4 직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y-2=a(x+1)+b$
$\therefore\ y=ax+a+b+2\qquad\cdots\cdots$ ㉠
직선 ㉠이 직선 $y=2x+3$과 수직으로 만나므로
$a\times2=-1\qquad\therefore\ a=-\frac{1}{2}$
또 직선 ㉠이 직선 $y=2x+3$과 y축 위에서 만나므로 두 직선의 y절편이 같아야 한다.
즉, $a+b+2=3$이므로 $b=\frac{3}{2}$
$\therefore\ ab=-\frac{3}{4}$

5 오른쪽 그림에서
$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=\sqrt{13}$
이므로 사각형 ABCD는 마름모이고, 평행이동한 직선이 마름모 ABCD의 넓이를 이등분하려면 두 대각선 AC와 BD의 교점 (2, 3)을 지나야 한다.



직선 $y=3x+2$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y-b=3(x-a)+2$
$\therefore\ y=3x-3a+b+2$
이 직선이 점 (2, 3)을 지나므로
$3=6-3a+b+2$
$\therefore\ 3a-b=5$

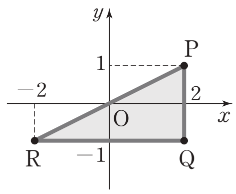
6 점 (2, 2)를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 (5, -1)이라고 하면
$2+m=5,\ 2+n=-1$
$\therefore\ m=3,\ n=-3$
따라서 원 $(x-3)^2+(y+3)^2=a$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 원의 방정식은
$\{(x-3)-3\}^2+\{(y+3)+3\}^2=a$
$\therefore\ (x-6)^2+(y+6)^2=a$
이 원이 원 $(x+b)^2+(y+6)^2=9$와 일치하므로
$a=9,\ b=-6\qquad\therefore\ a+b=3$

다른 풀이
점 (2, 2)를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 (5, -1)이라고 하면
$2+m=5,\ 2+n=-1$
$\therefore\ m=3,\ n=-3$
원 $(x-3)^2+(y+3)^2=a$의 중심 (3, -3)을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점은 원 $(x+b)^2+(y+6)^2=9$의 중심 ($-b$, -6)과 일치하므로
$3+3=-b\qquad\therefore\ b=-6$
또 평행이동을 하여도 원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로 $a=9$
$\therefore\ a+b=3$

7 원 $x^2+(y-1)^2=9$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 원의 방정식은
$(x-2)^2+\{(y+3)-1\}^2=9$
$\therefore\ (x-2)^2+(y+2)^2=9$
이 원이 직선 $3x-4y+k=0$과 만나려면 원의 중심 (2, -2)와 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 3보다 작거나 같아야 하므로
$\dfrac{|6+8+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\le 3,\ |14+k|\le 15$
$\therefore\ -29\le k\le 1$
따라서 상수 k의 최댓값은 1이다.

8 포물선 $y=x^2-2x-5$, 즉 $y=(x-1)^2-6$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 포물선의 방정식은
$y-a=\{(x-1)-1\}^2-6\qquad\therefore\ y=(x-2)^2+a-6$
이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 (2, $a-6$)
이 꼭짓점이 x축 위에 있으므로
$a-6=0\qquad\therefore\ a=6$

9 점 P(2, 1)을 x축에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는
Q(2, -1)
점 P(2, 1)을 원점에 대하여 대칭이동한 점 R의 좌표는
R(-2, -1)
따라서 오른쪽 그림에서 세 점 P, Q, R를 꼭짓점으로 하는 삼각형 PQR의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times4\times2=4$



10 직선 l을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$ax-3\times(-y)+6=0$
$\therefore\ ax+3y+6=0\qquad\cdots\cdots$ ㉠
직선 l을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$a(-x)-3\times(-y)+6=0$
$\therefore\ ax-3y-6=0\qquad\cdots\cdots$ ㉡
이때 두 직선 ㉠과 ㉡은 서로 수직이므로
$a\times a+3\times(-3)=0,\ a^2=9$
$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=3$
따라서 모든 상수 a의 값의 곱은 $(-3)\times3=-9$

11 직선 $y=\dfrac{1}{2}x+1$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$x=\dfrac{1}{2}y+1\qquad\therefore\ y=2x-2$
이 직선의 기울기는 2이므로 구하는 직선의 기울기는 2
y절편을 b라고 하면 구하는 직선의 방정식은
$y=2x+b$
$\therefore\ 2x-y+b=0\qquad\cdots\cdots$ ㉠
원점과 직선 ㉠ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$이므로
$\dfrac{|b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5},\ |b|=10$
$\therefore\ b=-10$ 또는 $b=10$
이것을 ㉠에 각각 대입하면 구하는 직선의 방정식은
$2x-y-10=0$ 또는 $2x-y+10=0$

12 주어진 원의 방정식을 변형하면
$(x-2)^2+(y+3)^2=1$
이 원을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x-2)^2+(-y+3)^2=1$
$\therefore\ (x+2)^2+(y-3)^2=1$

이 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x+2)^2+(y-3)^2=1$
$\therefore\ (x-2)^2+(y-3)^2=1$
따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(2,\ 3)$

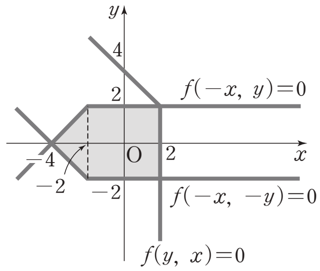
13 포물선 $y=x^2+ax+b$, 즉 $y=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$를 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
$-y=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$
$\therefore\ y=-\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-b$
이 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 2)$이므로
$-\frac{a}{2}=-1,\ \frac{a^2}{4}-b=2 \qquad \therefore\ a=2,\ b=-1$
$\therefore\ a+b=1$

14 점 $(-1,\ 2)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(1,\ -2)$
이 점을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(1+a,\ -2+b)$
이 점이 점 $(2,\ 1)$과 일치하므로
$1+a=2,\ -2+b=1 \qquad \therefore\ a=1,\ b=3$
$\therefore\ ab=3$

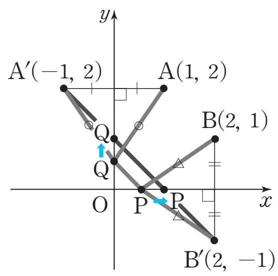
15 직선 $3x-y+a+1=0$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$3(x-2)-(y+1)+a+1=0$
$\therefore\ 3x-y+a-6=0$
이 직선을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$3\times(-x)-y+a-6=0$
$\therefore\ 3x+y-a+6=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
주어진 원의 방정식을 변형하면
$(x-2)^2+(y+1)^2=5 \qquad \cdots\cdots$ ㉡
직선 ㉠이 원 ㉡의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(2,\ -1)$을 지나야 하므로
$6-1-a+6=0 \qquad \therefore\ a=11$

16 포물선 $y=x^2$을 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
$-y=x^2 \qquad \therefore\ y=-x^2$
이 포물선을 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 포물선의 방정식은
$y-a=-x^2 \qquad \therefore\ y=-x^2+a \qquad \cdots\cdots$ ㉠
㉠과 $y=x+1$에서 y를 소거하면
$-x^2+a=x+1 \qquad \therefore\ x^2+x-a+1=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$D=1^2-4(-a+1)<0$
$4a-3<0 \qquad \therefore\ a<\frac{3}{4}$

17 방정식 $f(-x,\ y)=0,\ f(-x,\ -y)=0,\ f(y,\ x)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 각각 y축, 원점, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이다.
따라서 세 개의 도형을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는
$4\times4+\frac{1}{2}\times4\times2=20$

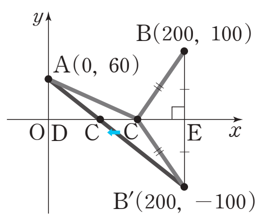


18 오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라고 하면 점 A'의 좌표는
$\mathrm{A}'(-1,\ 2)$
점 $\mathrm{B}(2,\ 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라고 하면 점 B'의 좌표는
$\mathrm{B}'(2,\ -1)$



이때 $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{A'Q}},\ \overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PB'}}$이므로
$\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{A'Q}}+\overline{\mathrm{QP}}+\overline{\mathrm{PB'}}\geq\overline{\mathrm{A'B'}}$
따라서 $\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값은 선분 $\mathrm{A'B'}$의 길이와 같으므로 $\overline{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(-1-2)^2}=3\sqrt{2}$

19 오른쪽 그림과 같이 점 D를 원점 O, 전선 l을 x축으로 하여 주어진 조건을 좌표평면 위에 나타내면 세 점 A, B, E의 좌표는 $\mathrm{A}(0,\ 60)$, $\mathrm{B}(200,\ 100)$, $\mathrm{E}(200,\ 0)$



점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라고 하면 점 B'의 좌표는 $\mathrm{B}'(200,\ -100)$
이때 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{B'C}}$이므로
$\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{B'C}}\geq\overline{\mathrm{AB'}}$
즉, 점 C가 직선 AB' 위의 점일 때, $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}$가 최소이다.
직선 AB'의 방정식은
$y-60=\frac{-100-60}{200-0}(x-0) \qquad \therefore\ y=-\frac{4}{5}x+60$
점 C는 직선 AB'과 x축의 교점이므로
$0=-\frac{4}{5}x+60 \qquad \therefore\ x=75 \qquad \therefore\ \mathrm{C}(75,\ 0)$
따라서 C 지점은 D 지점에서 75 m만큼 떨어진 곳에 있어야 한다.

20 점 $(a,\ b)$는 두 점 $(-2,\ -3),\ (4,\ 5)$를 이은 선분의 중점이므로
$\frac{-2+4}{2}=a,\ \frac{-3+5}{2}=b \qquad \therefore\ a=1,\ b=1$
$\therefore\ a+b=2$

21 포물선 $y=x^2-6x+10$, 즉 $y=(x-3)^2+1$의 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 1)$

포물선 $y=-x^2-14x-50$, 즉 $y=-(x+7)^2-1$의 꼭짓점의 좌표는 $(-7,\ -1)$

두 포물선이 점 A에 대하여 대칭이므로 두 점 $(3,\ 1)$, $(-7,\ -1)$은 점 A에 대하여 대칭이다.

따라서 점 A는 두 점 $(3,\ 1)$, $(-7,\ -1)$을 이은 선분의 중점이므로 점 A의 좌표는

$\left(\frac{3-7}{2},\ \frac{1-1}{2}\right)$ $\quad\therefore$ $A(-2,\ 0)$

22 주어진 원의 방정식을 변형하면

$(x-4)^2+(y-1)^2=1$

이 원의 중심 $(4,\ 1)$을 직선 $y=x+1$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면 직선 $y=x+1$이 두 점 $(4,\ 1)$, $(a,\ b)$를 이은 선분의 중점 $\left(\frac{4+a}{2},\ \frac{1+b}{2}\right)$를 지나므로

$\frac{1+b}{2}=\frac{4+a}{2}+1$ $\quad\therefore$ $a-b=-5$ ⋯⋯ ㉠

직선 $y=x+1$이 두 점 $(4,\ 1)$, $(a,\ b)$를 지나는 직선과 수직이므로

$1\times\frac{b-1}{a-4}=-1$ $\quad\therefore$ $a+b=5$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0,\ b=5$

따라서 대칭이동한 원은 중심이 점 $(0,\ 5)$이고 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 원의 방정식은

$x^2+(y-5)^2=1$

23 직선 $y=2x-1$ 위에 있는 두 점 $(0,\ -1)$, $(1,\ 1)$을 직선 $y=-x+3$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 각각 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$라고 하자.

(i) 직선 $y=-x+3$이 두 점 $(0,\ -1)$, $(a,\ b)$를 이은 선분의 중점 $\left(\frac{0+a}{2},\ \frac{-1+b}{2}\right)$를 지나므로

$\frac{-1+b}{2}=-\frac{a}{2}+3$ $\quad\therefore$ $a+b=7$ ⋯⋯ ㉠

직선 $y=-x+3$과 두 점 $(0,\ -1)$, $(a,\ b)$를 지나는 직선이 서로 수직이므로

$(-1)\times\frac{b-(-1)}{a-0}=-1$ $\quad\therefore$ $a-b=1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=3$

(ii) 직선 $y=-x+3$이 두 점 $(1,\ 1)$, $(c,\ d)$를 이은 선분의 중점 $\left(\frac{1+c}{2},\ \frac{1+d}{2}\right)$를 지나므로

$\frac{1+d}{2}=-\frac{1+c}{2}+3$ $\quad\therefore$ $c+d=4$ ⋯⋯ ㉢

직선 $y=-x+3$과 두 점 $(1,\ 1)$, $(c,\ d)$를 지나는 직선이 서로 수직이므로

$(-1)\times\frac{d-1}{c-1}=-1$ $\quad\therefore$ $c-d=0$ ⋯⋯ ㉣

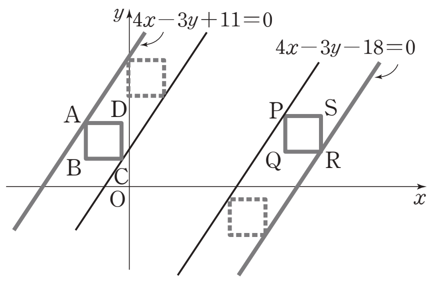
㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $c=2,\ d=2$

(i), (ii)에 의하여 직선 $mx-2y+n=0$은 두 점 $(4,\ 3)$, $(2,\ 2)$를 지나는 직선이므로 직선의 방정식은

$y-2=\frac{3-2}{4-2}(x-2)$ $\quad\therefore$ $x-2y+2=0$

따라서 $m=1,\ n=2$이므로 $m-n=-1$

24 두 정사각형 ABCD, PQRS에서 점 C와 점 P는 다음 그림과 같이 각각 일직선으로 움직인다.



점 C가 움직이는 직선은 직선 $4x-3y+11=0$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선이므로 이 직선의 방정식은

$4(x-1)-3(y+1)+11=0$

$\therefore$ $4x-3y+4=0$ ⋯⋯ ㉠

점 P가 움직이는 직선은 직선 $4x-3y-18=0$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선이므로 이 직선의 방정식은

$4(x+1)-3(y-1)-18=0$

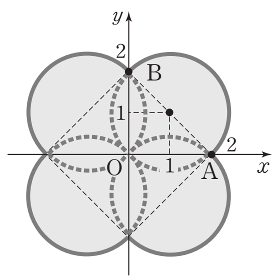
$\therefore$ $4x-3y-11=0$ ⋯⋯ ㉡

이때 점 C와 점 P 사이의 거리의 최솟값은 평행한 두 직선 ㉠, ㉡ 사이의 거리와 같다.

따라서 직선 ㉠ 위의 한 점 $(-1,\ 0)$과 직선 ㉡ 사이의 거리를 구하면

$\frac{|-4-0-11|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{15}{5}=3$

25 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$의 $x\ge0,\ y\ge0$인 부분과 이 부분을 각각 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동하여 생기는 모든 곡선으로 둘러싸인 부분은 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$가 x축, y축과 만나고 원점이 아닌 점을 각각 A, B라고 하면

(i) 점 A는 원이 x축과 만나는 점이므로

$(x-1)^2+(0-1)^2=2$, $x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$ $\quad\therefore$ $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 점 A의 좌표는 $A(2,\ 0)$

(ii) 점 B는 원이 y축과 만나는 점이므로

$(0-1)^2+(y-1)^2=2,\ y^2-2y=0$

$y(y-2)=0 \qquad \therefore\ y=0$ 또는 $y=2$

따라서 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(0,\ 2)$

선분 AB의 중점이 원의 중심과 일치하고

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(0-2)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{2}$

이므로 이 원의 지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이다.

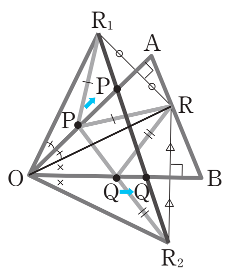
모든 곡선으로 둘러싸인 부분 중 제1사분면에 있는 부분의 넓이는 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 반원과 직각이등변삼각형의 넓이의 합과 같으므로

$\frac{1}{2}\times\pi\times(\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}\times2\times2=\pi+2$

따라서 모든 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$4(\pi+2)=4\pi+8$

26 오른쪽 그림과 같이 점 R를 두 변 OA, OB에 대하여 각각 대칭이동한 점을 $\mathrm{R_1}$, $\mathrm{R_2}$라고 하면



$\overline{\mathrm{RP}}=\overline{\mathrm{R_1P}},\ \overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{QR_2}}$이므로

$\overline{\mathrm{RP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}$

$=\overline{\mathrm{R_1P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR_2}}\geq\overline{\mathrm{R_1R_2}}$

이때 $\angle\mathrm{R_1OA}=\angle\mathrm{ROA}$,

$\angle\mathrm{R_2OB}=\angle\mathrm{ROB}$이므로

$\angle\mathrm{R_1OA}+\angle\mathrm{R_2OB}=\angle\mathrm{ROA}+\angle\mathrm{ROB}=\angle\mathrm{AOB}=45^\circ$

$\therefore\ \angle\mathrm{R_1OR_2}=45^\circ+45^\circ=90^\circ$

또 $\overline{\mathrm{OR}}=\overline{\mathrm{OR_1}},\ \overline{\mathrm{OR}}=\overline{\mathrm{OR_2}}$이고, $\overline{\mathrm{OR}}=3$이므로

$\overline{\mathrm{OR_1}}=\overline{\mathrm{OR_2}}=3$

이때 $\triangle\mathrm{R_1OR_2}$가 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{R_1R_2}}^2=3^2+3^2,\ \overline{\mathrm{R_1R_2}}^2=18 \qquad \therefore\ \overline{\mathrm{R_1R_2}}=\pm3\sqrt{2}$

그런데 $\overline{\mathrm{R_1R_2}}>0$이므로 $\overline{\mathrm{R_1R_2}}=3\sqrt{2}$

따라서 $\overline{\mathrm{RP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}$의 최솟값은 선분 $\mathrm{R_1R_2}$의 길이와 같으므로 $3\sqrt{2}$이다.

27 원 $(x+a)^2+(y+b)^2=16$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+b)^2+(y+a)^2=16$ …… (가)

이 원을 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+b+3)^2+(y+a)^2=16$ …… (나)

이 원은 반지름의 길이가 4이고, x축과 y축에 동시에 접하므로

$|-b-3|=4 \qquad \therefore\ b=-7$ 또는 $b=1$

$|-a|=4 \qquad \therefore\ a=-4$ 또는 $a=4$ …… (다)

따라서 ab의 최댓값은 $a=-4,\ b=-7$일 때, 28이다. …… (라)

채점 기준	배점
(가) 대칭이동한 원의 방정식을 구한다.	1점
(나) 평행이동한 원의 방정식을 구한다.	1점
(다) a, b의 값을 구한다.	2점
(라) ab의 최댓값을 구한다.	2점

28 원 $x^2+(y-2)^2=9$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-2)^2=9$ …… (가)

원의 중심 $(a,\ 2)$와 직선 $4x-3y+3=0$ 사이의 거리 d는

$d=\frac{|4a-6+3|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|4a-3|}{5}$

원의 반지름의 길이 r는 $r=3$ …… (나)

원과 직선이 접하려면 $d=r$이어야 하므로

$\frac{|4a-3|}{5}=3,\ |4a-3|=15$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=\frac{9}{2}$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 평행이동한 원의 방정식을 구한다.	1점
(나) 원의 중심과 직선 사이의 거리와 원의 반지름의 길이를 구한다.	2점
(다) a의 값을 구한다.	2점

29 (1) 점 $\mathrm{B}(7,\ 0)$을 직선 $x+y=2$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $\mathrm{B'}(a,\ b)$라고 하면 직선 $x+y=2$가 $\overline{\mathrm{BB'}}$의 중점 $\left(\frac{7+a}{2},\ \frac{0+b}{2}\right)$를 지나므로

$\frac{7+a}{2}+\frac{b}{2}=2$

$\therefore\ a+b=-3$ …… ㉠

직선 $x+y=2$, 즉 $y=-x+2$와 직선 BB′이 서로 수직이므로

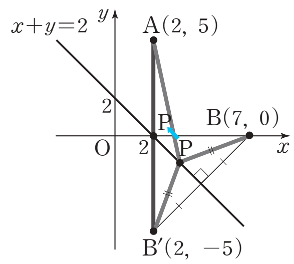
$(-1)\times\frac{b-0}{a-7}=-1$

$\therefore\ a-b=7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-5$

따라서 점 B′의 좌표는 $\mathrm{B'}(2,\ -5)$ …… (가)

오른쪽 그림에서



$\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}$

$\geq\overline{\mathrm{AB'}}$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 선분 AB′의 길이와 같으므로

$\overline{\mathrm{AB'}}=5-(-5)=10$ …… (나)

(2) 직선 AB′의 방정식은 $x=2$ …… (다)

점 P는 두 직선 $x+y=2,\ x=2$의 교점이므로

$2+y=2 \qquad \therefore\ y=0$

$\therefore\ \mathrm{P}(2,\ 0)$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) 점 B를 직선 $x+y=2$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구한다.	3점
(나) $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 구한다.	2점
(다) 직선 AB′의 방정식을 구한다.	1점
(라) 점 P의 좌표를 구한다.	1점

01~03강 내공 점검 p. 108~109

1 ⑤	2 ④	3 ③	4 ①	5 ②
6 ②	7 ④	8 ⑤	9 ⑤	10 ①
11 2	12 8	13 몫 : x^2-2x+1, 나머지 : 2		

1 $X+2A=A-2(A-B)$에서 $X+2A=A-2A+2B$

$\therefore X=-3A+2B$

$=-3(x^2-3xy+y^2)+2(2x^2-xy-3y^2)$

$=-3x^2+9xy-3y^2+4x^2-2xy-6y^2$

$=x^2+7xy-9y^2$

2 $P(x)=(2x^2+3x-1)(3x^2-x-5)^2$이라고 하면

$P(x)$를 전개하였을 때, 모든 계수의 합은 $x=1$일 때의 값과 같으므로

$P(1)=(2+3-1)(3-1-5)^2=4\times9=36$

3 ① $(x-y)(3x+2y)=3x^2-xy-2y^2$

② $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=x^4+x^2y^2+y^4$

④ $(x-y-z)^2=x^2+y^2+z^2-2xy+2yz-2zx$

⑤ $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=x^3+y^3+z^3-3xyz$

따라서 옳은 것은 ③이다.

4 $(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)=(a^2-1)(a^2+1)(a^4+1)$

$=(a^4-1)(a^4+1)$

$=a^8-1$

5 $x+y=-2$, $xy=-8$이므로

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=(-2)^2-2\times(-8)=20$

$\therefore x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-2\times(xy)^2$

$=20^2-2\times(-8)^2=272$

6 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=3^3-3\times3=18$

$\therefore 3x^3-x^2+2x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}$

$=3\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)-\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=3\times18-7+2\times3=53$

7 $ab+bc+ca=\dfrac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}$

$=\dfrac{1}{2}(9-11)=-1$

$\therefore a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=3\times\{11-(-1)\}=36$

8 $f(x)=(x^2-x+2)(2x-1)+3x+4$

$=2x^3-3x^2+8x+2$

이므로

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x\ -5 \\ \hline
x^2+x+2 & 2x^3-3x^2+8x+2 \\
 & 2x^3+2x^2+4x \\ \hline
 & \quad -5x^2+4x+2 \\
 & \quad -5x^2-5x-10 \\ \hline
 & \qquad\qquad 9x+12
\end{array}$$

따라서 구하는 나머지는 $9x+12$이다.

9 $f(x)=(3x-1)Q(x)+R$이므로

$3f(x)=3(3x-1)Q(x)+3R$

$=9\left(x-\dfrac{1}{3}\right)Q(x)+3R$

$=\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\times9Q(x)+3R$

따라서 $3f(x)$를 $x-\dfrac{1}{3}$로 나눈 몫은 $9Q(x)$, 나머지는 $3R$이다.

10 $2x-4=2(x-2)$이므로 다항식 $4x^3+ax^2-3x+b$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면

$$\begin{array}{c|cccc}
2 & 4 & a & -3 & b \\
 & & 8 & 2a+16 & 4a+26 \\ \hline
 & 4 & a+8 & 2a+13 & \boxed{4a+b+26}
\end{array}$$

즉, $k=2$, $c=4$, $a+8=3$, $2a+13=d$, $4a+b+26=10$이므로

$k=2$, $a=-5$, $b=4$, $c=4$, $d=3$

$\therefore 4x^3-5x^2-3x+4$

$=(x-2)(4x^2+3x+3)+10$

$=(2x-4)\times\dfrac{1}{2}\times(4x^2+3x+3)+10$

$=(2x-4)\left(2x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{2}\right)+10$

따라서 $Q(x)=2x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{2}$이므로

$Q(1)=5$

$\therefore a+b+c+d+k+Q(1)=-5+4+4+3+2+5$

$=13$

11 $(2x^3-x^2+x-a)^2$, 즉 $(2x^3-x^2+x-a)(2x^3-x^2+x-a)$의 전개식에서 x^2항은

$(-x^2)\times(-a)+x\times x+(-a)\times(-x^2)=(2a+1)x^2$ …… (가)

x^4항은

$2x^3\times x+(-x^2)\times(-x^2)+x\times2x^3=5x^4$ …… (나)

x^2의 계수와 x^4의 계수가 같으므로

$2a+1=5$, $2a=4$ $\quad\therefore a=2$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) x^2항을 a에 관한 식으로 나타낸다.	4점
(나) x^4항을 구한다.	4점
(다) a의 값을 구한다.	2점

12 $a+b+c=0$이므로

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$$

$$=\frac{1}{-c}+\frac{1}{-a}+\frac{1}{-b}$$

$$=-\frac{ab+bc+ca}{abc} \quad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots\cdots (가)$$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$ab+bc+ca$

$$=\frac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}$$

$$=\frac{1}{2}(0-16)$$

$$=-8 \quad \cdots\cdots (나)$$

따라서 $abc=1$, $ab+bc+ca=-8$을 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=-\frac{-8}{1}=8 \quad \cdots\cdots (다)$$

채점 기준	배점
(가) 주어진 식을 간단히 나타낸다.	3점
(나) $ab+bc+ca$의 값을 구한다.	3점
(다) 주어진 식의 값을 구한다.	4점

13 $2x-1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$이므로 다항식 $2x^3-5x^2+4x+1$을 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 2 & -5 & 4 & 1 \\ & & 1 & -2 & 1 \\ \hline & 2 & -4 & 2 & \boxed{2} \end{array}$$

$2x^3-5x^2+4x+1$을 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $2x^2-4x+2$이고 나머지는 2이므로 $\cdots\cdots$ (가)

$2x^3-5x^2+4x+1$

$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-4x+2)+2$$

$$=(2x-1)\times\frac{1}{2}\times(2x^2-4x+2)+2$$

$$=(2x-1)(x^2-2x+1)+2 \quad \cdots\cdots (나)$$

따라서 주어진 다항식을 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 x^2-2x+1이고 나머지는 2이다. $\cdots\cdots$ (다)

채점 기준	배점
(가) 조립제법을 이용하여 주어진 다항식을 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구한다.	4점
(나) (가)에서 구한 몫과 나머지를 이용하여 식을 세우고, 식을 변형한다.	4점
(다) 주어진 다항식을 $2x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구한다.	2점

04~05강 내공 점검

p. 110~111

1 ①	**2** ③	**3** ④	**4** ③	**5** -3
6 13	**7** ④	**8** ⑤	**9** ②	**10** ③
11 ①	**12** ③	**13** -24		

14 (1) $a=2$, $b=-8$ (2) $(x-1)(x+2)(x+4)$

15 $(x^2+5x+2)(x^2-x-4)$

1 주어진 등식의 좌변을 t에 대하여 정리하면

$(2x+y-3)t+3x-y-2=0$

이 등식이 t에 대한 항등식이므로

$2x+y-3=0$, $3x-y-2=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=1$

$\therefore x+y=2$

다른 풀이

주어진 등식이 t에 대한 항등식이므로 양변에 $t=-\frac{3}{2}$, $t=1$을 각각 대입하면

$-\frac{5}{2}y+\frac{5}{2}=0$, $5x-5=0$ $\quad\therefore x=1$, $y=1$

$\therefore x+y=2$

2 나머지정리에 의하여 $P\left(\frac{1}{2}\right)=2$

즉, $2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+7\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-a\times\frac{1}{2}+1=2$

$\therefore a=1$

3 다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 5이므로

$P(x)=(x+1)Q(x)+5 \quad \cdots\cdots ㉠$

$Q(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 -2이므로 나머지정리에 의하여

$Q(-2)=-2$

따라서 다항식 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 $P(-2)$이므로 ㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$P(-2)=(-2+1)\times Q(-2)+5$

$\quad\quad=(-1)\times(-2)+5=7$

4 다항식 $P(x)$를 $x(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라고 하면 나머지가 $2x-3$이므로

$P(x)=x(x-1)Q_1(x)+2x-3$

양변에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면

$P(0)=-3$, $P(1)=-1$

또 다항식 $P(x)$를 $(x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라고 하면 나머지가 $x-2$이므로

$P(x)=(x-1)(x+1)Q_2(x)+x-2$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$P(-1)=-3$

이때 다항식 $P(x)$를 $x(x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 몫

을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라고 하면
$P(x)=x(x-1)(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$
이 식의 양변에 $x=0$, $x=1$, $x=-1$을 각각 대입하면
$P(0)=c$, $P(1)=a+b+c$, $P(-1)=a-b+c$
$\therefore c=-3$, $a+b+c=-1$, $a-b+c=-3$
세 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$, $c=-3$
따라서 구하는 나머지는 x^2+x-3이다.

5 인수정리에 의하여 $P(2)=0$
즉, $8-4+2k+2=0$, $2k+6=0$
$\therefore k=-3$

6 $P(x)=x^3+ax+b$라고 하면 $P(x)$가 x^2-3x+2, 즉 $(x-1)(x-2)$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여
$P(1)=0$, $P(2)=0$
$P(1)=0$에서 $1+a+b=0$
$\therefore a+b=-1$ …… ㉠
$P(2)=0$에서 $8+2a+b=0$
$\therefore 2a+b=-8$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-7$, $b=6$
$\therefore b-a=13$

7 ① $(a+b)^3+b^3=\{(a+b)+b\}\{(a+b)^2-(a+b)\times b+b^2\}$
$=(a+2b)(a^2+ab+b^2)$
② $2x^4-3x^2y^2+y^4=(x^2-y^2)(2x^2-y^2)$
$=(x+y)(x-y)(2x^2-y^2)$
③ $a^3+2a^2-5a-6=(a+1)(a^2+a-6)$
$=(a+1)(a-2)(a+3)$
④ $x^4-11x^2y^2+y^4=(x^4-2x^2y^2+y^4)-9x^2y^2$
$=(x^2-y^2)^2-(3xy)^2$
$=(x^2+3xy-y^2)(x^2-3xy-y^2)$
⑤ $a^2c+bc^2-a^2b-c^3=(c^2-a^2)b-c(c^2-a^2)$
$=(c^2-a^2)(b-c)$
$=(c+a)(c-a)(b-c)$
$=-(c+a)(c-a)(c-b)$
따라서 옳은 것은 ④이다.

8 $(x-2)(x-1)(x+4)(x+5)+k$
$=\{(x-2)(x+5)\}\{(x-1)(x+4)\}+k$
$=(x^2+3x-10)(x^2+3x-4)+k$
$x^2+3x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X-10)(X-4)+k$
$=X^2-14X+40+k$
$=(X-7)^2+k-9=(x^2+3x-7)^2+k-9$
이 식이 완전제곱식이 되어야 하므로
$k-9=0$ $\therefore k=9$

9 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2-4xy+3y^2+x-5y-2$
$=x^2+(-4y+1)x+3y^2-5y-2$
$=x^2+(-4y+1)x+(y-2)(3y+1)$
$=\{x-(y-2)\}\{x-(3y+1)\}$
$=(x-y+2)(x-3y-1)$
$\therefore (x-y+2)+(x-3y-1)=2x-4y+1$

10 주어진 식의 좌변을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면
$b^3-c^3-b^2c+bc^2+a^2b-a^2c$
$=(b-c)a^2+b^3-b^2c+bc^2-c^3$
$=(b-c)a^2+b^2(b-c)+c^2(b-c)$
$=(b-c)(a^2+b^2+c^2)=0$
이때 $a^2+b^2+c^2>0$이므로
$b-c=0$ $\therefore b=c$
따라서 주어진 조건을 만족하는 삼각형은 $b=c$인 이등변 삼각형이다.

11 $x-2y=A$, $2y-3z=B$, $-x+3z=C$로 놓으면
$A+B+C=0$이므로
$(x-2y)^3+(2y-3z)^3-(x-3z)^3$
$=(x-2y)^3+(2y-3z)^3+(-x+3z)^3$
$=A^3+B^3+C^3$
$=(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)+3ABC$
$=3ABC$
$=3(x-2y)(2y-3z)(-x+3z)$
따라서 인수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

12 $a=2018$로 놓으면
$$\frac{2018^3+1}{2017\times2018+1}=\frac{a^3+1}{(a-1)a+1}$$
$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$
$$=a+1=2018+1=2019$$

13 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$0=2+a+b$ $\therefore a+b=-2$ …… ㉠ …… (가)
주어진 등식의 양변에 $x^2=2$를 대입하면
$0=8+2a+b$ $\therefore 2a+b=-8$ …… ㉡ …… (나)
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=4$ …… (다)
$\therefore ab=-24$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하여 a, b에 관한 식을 구한다.	2점
(나) 주어진 등식의 양변에 $x^2=2$를 대입하여 a, b에 관한 식을 구한다.	2점
(다) a, b의 값을 구한다.	2점
(라) ab의 값을 구한다.	2점

14 (1) $P(x)$는 $x-1$로 나누어떨어지므로

$P(1)=0$에서 $1+5+a+b=0$

$\therefore\ a+b=-6$ …… ㉠

$P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 24이므로

$P(2)=24$에서 $8+20+2a+b=24$

$\therefore\ 2a+b=-4$ …… ㉡ …… (가)

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-8$ …… (나)

(2) (1)에서 $P(x)=x^3+5x^2+2x-8$ …… (다)

$P(x)$는 $x-1$로 나누어떨어지므로 $x-1$을 인수로 가진다.

따라서 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 5 & 2 & -8 \\ & & 1 & 6 & 8 \\ \hline & 1 & 6 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(x)&=(x-1)(x^2+6x+8) \\ &=(x-1)(x+2)(x+4) \end{aligned}$$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) $P(1)=0$, $P(2)=24$임을 이용하여 식을 세운다.	3점
(나) a, b의 값을 구한다.	3점
(다) $P(x)$를 구한다.	2점
(라) $P(x)$를 인수분해한다.	4점

15 $x+1=X$로 놓으면

$(x+1)^4-13(x+1)^2+4$

$=X^4-13X^2+4$ …… (가)

$=(X^4-4X^2+4)-9X^2=(X^2-2)^2-(3X)^2$

$=(X^2+3X-2)(X^2-3X-2)$ …… (나)

$=\{(x+1)^2+3(x+1)-2\}\{(x+1)^2-3(x+1)-2\}$

$=(x^2+5x+2)(x^2-x-4)$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) $x+1=X$로 놓고, 주어진 식을 X에 대한 식으로 나타낸다.	2점
(나) 주어진 식을 X에 대한 두 이차식의 곱으로 인수분해한다.	3점
(다) 주어진 식을 x에 대한 식으로 나타내고 인수분해를 완성한다.	3점

06~07강 내공 점검 p. 112~113

1 ⑤	2 ②	3 ①	4 ④	5 ③
6 ③	7 ③	8 ⑤	9 ②	10 ④
11 $3+i$ 또는 $-3+i$	12 0	13 $2y+3$		

1 주어진 복소수 중 실수는 $\sqrt{13}-\sqrt{2}$, $\pi-3.14$, 0이므로

$a=3$

순허수는 $-36i$, $16i$이므로

$b=2$

순허수가 아닌 허수는 $5-\sqrt{5}i$, $3+i$, $-2+2i$, $-2i+2$, $\frac{i}{2}-1$이므로 $c=5$

$\therefore\ 2a+3b-2c=6+6-10=2$

2 ㄱ. $1-3i$는 복소수이면서 허수이다.

ㄴ. $\sqrt{3}$은 실수이므로 복소수이다.

ㄷ. 허수는 크기를 비교할 수 없다.

ㄹ. $z=1+i$일 때, $z^2=(1+i)^2=2i$ ➡ 허수

ㅁ. $z=a+bi$ (a, b는 실수)라고 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ ➡ 실수

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ ➡ 실수

따라서 보기 중 옳은 것은 ㅁ이다.

3 $z=a(a-i)-2a-2-(1+i)=(a^2-2a-3)-(a+1)i$

가 순허수가 되려면 $a^2-2a-3=0$이어야 하므로

$(a+1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=3$ …… ㉠

$a+1\neq0$이어야 하므로

$a\neq-1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=3$

$\therefore\ z=-4i$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=-4i$이므로

$\alpha^2+\beta^2=3^2+(-4i)^2=9-16=-7$

4 $$\begin{aligned} (1-2i)\triangle(2+i)&=(1-2i)(2+i)+\frac{1-2i}{2+i}i \\ &=(1-2i)(2+i)+\frac{(1-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}i \\ &=4-3i+\frac{-5i}{5}i=5-3i \end{aligned}$$

5 $$\begin{aligned} \frac{1-i}{1+i}-2(i+2)+i^2&=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}-2i-4-1 \\ &=\frac{-2i}{2}-2i-5 \\ &=-5-3i=a+bi \end{aligned}$$

따라서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=-5$, $b=-3$이므로 $a-b=-2$

6 $$\begin{aligned} \alpha\bar{\alpha}-\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\beta}&=\bar{\alpha}(\alpha-\beta)-\bar{\beta}(\alpha-\beta) \\ &=(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta}) \\ &=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta}) \end{aligned}$$

$\alpha=2-3i$, $\beta=3+2i$에서

$\alpha-\beta=(2-3i)-(3+2i)=-1-5i$이므로

$\overline{\alpha-\beta}=-1+5i$

$$\begin{aligned} \therefore\ \alpha\bar{\alpha}-\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\beta}&=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta}) \\ &=(-1-5i)(-1+5i) \\ &=(-1)^2-(5i)^2=26 \end{aligned}$$

7 $\overline{z+\bar{z}i}=z+1+2i$이므로

$z+\bar{z}i=\overline{z+1+2i}=\bar{z}+1-2i$

$z=a+bi$(a, b는 실수)라고 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로
$(a+bi)+(a-bi)i=(a-bi)+1-2i$
$a+bi+ai+b=a-bi+1-2i$
$(b-1)+(a+2b+2)i=0$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$b-1=0$, $a+2b+2=0$
$\therefore a=-4, b=1$
따라서 $z=-4+i$, $\bar{z}=-4-i$이므로
$z^2+\bar{z}^2=(-4+i)^2+(-4-i)^2$
$=(15-8i)+(15+8i)=30$

8 음이 아닌 정수 a에 대하여 $f(4a+1)=i$, $f(4a+2)=i-1$, $f(4a+3)=-1$, $f(4a+4)=0$이므로 $f(k)=i$가 되려면 $k=4a+1$의 꼴이어야 한다.
따라서 100 이하의 자연수 k는 1, 5, 9, …, 97의 25개이다.

9 $\sqrt{-3}\sqrt{-27}+2\sqrt{3}\sqrt{-9}+\dfrac{\sqrt{54}}{\sqrt{-2}}$
$=-\sqrt{81}+2\sqrt{-27}-\sqrt{-27}$
$=-9+6\sqrt{3}i-3\sqrt{3}i=-9+3\sqrt{3}i$

10 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 $a<0$, $b<0$
① $-a>0$, $b<0$이므로 $\sqrt{-a}\sqrt{b}=\sqrt{-ab}$
② $-a>0$, $-b>0$이므로
$\sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{(-a)\times(-b)}=\sqrt{ab}$
③ $a<0$이므로 $\sqrt{a^2}\sqrt{b}=|a|\sqrt{b}=-a\sqrt{b}$
④ $a<0$, $b<0$이므로 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$
⑤ $-a>0$, $b<0$이므로 $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{-a}{b}}$
따라서 옳은 것은 ④이다.

11 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라고 하면 $\bar{z}=a-bi$
주어진 등식에 $z=a+bi$, $\bar{z}=a-bi$를 대입하면
$3\{(a+bi)-(a-bi)\}+10=(a+bi)(a-bi)+6i$
$10+6bi=a^2+b^2+6i$ …… (가)
복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $10=a^2+b^2$, $6b=6$
$\therefore a=3, b=1$ 또는 $a=-3, b=1$ …… (나)
$\therefore z=3+i$ 또는 $z=-3+i$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) $z=a+bi$, $\bar{z}=a-bi$를 주어진 등식에 대입하여 정리한다.	4점
(나) a, b의 값을 구한다.	4점
(다) 복소수 z를 구한다.	2점

12 $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}=i$ …… (가)
$\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$ …… (나)
$\therefore \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2n}-\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2n}=i^{2n}-(-i)^{2n}$
$=(i^2)^n-\{(-i)^2\}^n$
$=(-1)^n-(-1)^n=0$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) $\dfrac{1+i}{1-i}$를 간단히 한다.	3점
(나) $\dfrac{1-i}{1+i}$를 간단히 한다.	3점
(다) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2n}-\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2n}$의 값을 구한다.	4점

13 $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{y+2}}=-\sqrt{\dfrac{x+1}{y+2}}$이므로
$x+1>0$, $y+2<0$ ($\because x\neq-1$)
따라서 $x>-1$, $y<-2$, $x-y>0$이므로 …… (가)
$\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{(y+2)^2}-\sqrt{(x-y)^2}$
$=|x+1|-|y+2|-|x-y|$
$=x+1+y+2-x+y=2y+3$ …… (나)

채점 기준	배점
(가) x, y, $x-y$의 값의 범위를 구한다.	6점
(나) $\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{(y+2)^2}-\sqrt{(x-y)^2}$을 간단히 한다.	4점

08~09강 내공 점검 p. 114~115

1 ③	2 ②	3 ③	4 ⑤	5 ④
6 ⑤	7 ①	8 ⑤	9 ①	10 ③
11 (1) -6 (2) $x=\dfrac{1}{4}$	12 5	13 $x^2+2x-4=0$		

1 $(x\circ x)+(4\circ x)+3$
$=(x^2-x-x)+(4x-4-x)+3$
$=x^2+x-1=0$
이므로
$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-1)}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

2 $x^2-2=\sqrt{x^2}+\sqrt{(x+1)^2}$에서
$x^2-2=|x|+|x+1|$
(i) $x<-1$일 때
$x^2-2=-x-(x+1)$, $x^2+2x-1=0$
$\therefore x=-1\pm\sqrt{2}$
그런데 $x<-1$이므로 $x=-1-\sqrt{2}$
(ii) $-1\leq x<0$일 때
$x^2-2=-x+(x+1)$, $x^2=3$
$\therefore x=\pm\sqrt{3}$
그런데 $-1\leq x<0$이므로 근은 없다.

(iii) $x \ge 0$일 때

$x^2-2=x+(x+1)$, $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

그런데 $x \ge 0$이므로 $\quad x=3$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 이차방정식의 해는

$x=-1-\sqrt{2}$ 또는 $x=3$

3 $\left[\frac{x}{2}\right]^2-5\left[\frac{x}{2}\right]+4=0$에서 $\left(\left[\frac{x}{2}\right]-1\right)\left(\left[\frac{x}{2}\right]-4\right)=0$

$\therefore \left[\frac{x}{2}\right]=1$ 또는 $\left[\frac{x}{2}\right]=4$

(i) $\left[\frac{x}{2}\right]=1$일 때, $1 \le \frac{x}{2} < 2$이므로 $\quad 2 \le x < 4$

(ii) $\left[\frac{x}{2}\right]=4$일 때, $4 \le \frac{x}{2} < 5$이므로 $\quad 8 \le x < 10$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식을 만족하는 정수 x는 2, 3, 8, 9의 4개이다.

4 이차방정식 $x^2-2(2k-1)x+4k^2-1=0$의 판별식을 D라 고 하면

$\frac{D}{4}=\{-(2k-1)\}^2-(4k^2-1)=-4k+2<0$

$\therefore k>\frac{1}{2}$

5 이차방정식 $x^2-2ax+b^2=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$\frac{D_1}{4}=(-a)^2-b^2=0 \qquad \therefore a^2=b^2$

이차방정식 $x^2+ax+b^2+1=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$D_2=a^2-4(b^2+1)=a^2-4b^2-4$

$=a^2-4a^2-4=-3a^2-4<0$

따라서 이차방정식 $x^2+ax+b^2+1=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

6 이차방정식 $(a+c)x^2-2bx+c-a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-b)^2-(a+c)(c-a)=b^2-c^2+a^2=0$

$\therefore c^2=a^2+b^2$

따라서 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

7 이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\quad \alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=3$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\beta^2}{\alpha-1}+\frac{\alpha^2}{\beta-1} &=\frac{\beta^2(\beta-1)+\alpha^2(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}\\ &=\frac{\alpha^3+\beta^3-(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}\\ &=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)-(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}\\ &=\frac{2^3-3\times3\times2-2^2+2\times3}{3-2+1}=-4\end{aligned}$$

8 이차방정식 $x^2-2(3-p)x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\quad \alpha\beta=3$

$\alpha^2-2(3-p)\alpha+3=0$에서 $\quad \alpha^2+2p\alpha+3=6\alpha$

$\beta^2-2(3-p)\beta+3=0$에서 $\quad \beta^2+2p\beta+3=6\beta$

$$\begin{aligned}\therefore (\alpha^2+2p\alpha+3)(\beta^2+2p\beta+3)&=6\alpha\times6\beta\\ &=36\alpha\beta=108\end{aligned}$$

9 a, b는 실수이고 $\frac{5}{1+2i}=\frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=1-2i$이므로 이차방정식 $x^2-2(a+b)x+2ab-3=0$의 다른 한 근은 $1+2i$이다.

$2(a+b)=(1-2i)+(1+2i)=2$에서 $\quad a+b=1$

$2ab-3=(1-2i)(1+2i)=5$에서 $\quad ab=4$

$$\begin{aligned}\therefore a^3+b^3&=(a+b)^3-3ab(a+b)\\ &=1^3-3\times4\times1=-11\end{aligned}$$

10 이차방정식 $f(2x-1)=0$의 두 근을 α, β라고 하면

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근은

$x=2\alpha-1$ 또는 $x=2\beta-1$

따라서 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 곱은

$$\begin{aligned}(2\alpha-1)(2\beta-1)&=4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1\\ &=4\times3-2\times(-2)+1=17\end{aligned}$$

11 (1) $(m^2-4)x^2+2(m-2)x+2=0$ $\quad$ …… ㉠

㉠이 이차방정식이므로

$m^2-4 \ne 0 \qquad \therefore m \ne \pm2$ $\quad$ …… (가)

㉠의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(m-2)^2-2(m^2-4)=-m^2-4m+12=0$

$m^2+4m-12=0$, $(m+6)(m-2)=0$

$\therefore m=-6 \ (\because m \ne 2)$ $\quad$ …… (나)

(2) $m=-6$을 $(m^2-4)x^2+2(m-2)x+2=0$에 대입하면

$32x^2-16x+2=0$ $\quad$ …… (다)

$16x^2-8x+1=0$, $(4x-1)^2=0$

$\therefore x=\frac{1}{4}$ (중근) $\quad$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) 주어진 방정식이 이차방정식이 되도록 하는 m의 조건을 구한다.	2점
(나) 판별식을 이용하여 m의 값을 구한다.	3점
(다) m의 값을 대입하여 이차방정식을 세운다.	2점
(라) 중근을 구한다.	3점

12 이차방정식 $x^2+(k+1)x+2k+5=0$의 두 근을 α, β라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-k-1$, $\alpha\beta=2k+5$ $\quad$ …… (가)

$\alpha^2+\beta^2=6$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$에서

$6=(-k-1)^2-2(2k+5)$ …… (나)
$k^2-2k-15=0,\ (k+3)(k-5)=0$
$\therefore k=-3$ 또는 $k=5$
따라서 양수 k의 값은 5이다. …… (다)

채점 기준	배점
(가) 두 근의 합과 곱을 k에 대한 식으로 나타낸다.	4점
(나) k에 대한 이차방정식을 세운다.	3점
(다) 양수 k의 값을 구한다.	3점

13 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-4,\ \alpha\beta=-1$ …… (가)
$(\alpha+1)+(\beta+1)=\alpha+\beta+2=-4+2=-2$
$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1$
$=-1-4+1=-4$ …… (나)
따라서 구하는 이차방정식은 $x^2+2x-4=0$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한다.	4점
(나) 구하려는 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 구한다.	4점
(다) 이차방정식을 구한다.	2점

10~11강 내공 점검 p. 116~117

1 ④	2 ⑤	3 ③	4 ④	5 ②
6 ④	7 ⑤	8 ④	9 ④	10 ②
11 5	12 -11	13 (1) $-\frac{5}{3}<a<5$ (2) 33		

1 ㄱ. 이차방정식 $2x^2+3x+1=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=3^2-4\times2\times1=1>0$
이므로 이차함수 $y=2x^2+3x+1$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
ㄴ. 이차방정식 $-x^2+2x-3=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=1^2-(-1)\times(-3)=-2<0$
이므로 이차함수 $y=-x^2+2x-3$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.
ㄷ. 이차방정식 $-3x^2+2\sqrt{3}x+1=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(\sqrt{3})^2-(-3)\times1=6>0$
이므로 이차함수 $y=-3x^2+2\sqrt{3}x+1$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
ㄹ. 이차방정식 $x^2-4\sqrt{2}x+8=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-2\sqrt{2})^2-1\times8=0$
이므로 이차함수 $y=x^2-4\sqrt{2}x+8$의 그래프는 x축과 한 점에서 만난다.
따라서 x축과 만나는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

2 이차방정식 $2x^2-3ax+4b-1=0$의 두 근이 $1,\ b$이므로
$1+b=\frac{3a}{2}$에서 $a=\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}$
$1\times b=\frac{4b-1}{2}$에서 $b=\frac{1}{2}$
따라서 $a=1,\ b=\frac{1}{2}$이므로
$a+4b=1+4\times\frac{1}{2}=3$

3 이차방정식 $x^2+3=2x-a$, 즉 $x^2-2x+a+3=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-(a+3)<0,\ -a-2<0$
$\therefore a>-2$

4 $a,\ b$는 유리수이므로 이차방정식 $-x^2+a=bx+1$의 한 근이 $-1-\sqrt{5}$이면 나머지 한 근은 $-1+\sqrt{5}$이다.
이차방정식 $x^2+bx-a+1=0$에서
(두 근의 합)$=-b=(-1+\sqrt{5})+(-1-\sqrt{5})=-2$
$\therefore b=2$
(두 근의 곱)$=-a+1=(-1+\sqrt{5})(-1-\sqrt{5})=-4$
$\therefore a=5$

5 $y=-2x^2-8x+3=-2(x+2)^2+11$에서
$x=-2$일 때 최댓값이 11이므로 $M=11$
$y=(2x+3)(2x-1)$
$=4x^2+4x-3=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-4$
따라서 $x=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값이 -4이므로 $m=-4$
$\therefore M+m=11+(-4)=7$

6 $y=-x^2+4x+a=-(x-2)^2+a+4$
따라서 $-1\le x\le3$에서 이 이차함수는 $x=2$일 때 최댓값 $a+4$를 가지므로
$a+4=8$ $\therefore a=4$

7 $x^2-4x=t$라고 하면 $t=(x-2)^2-4$
$1\le x\le5$에서 t는 $x=2$일 때 최솟값이 -4, $x=5$일 때 최댓값이 5이므로 $-4\le t\le5$
$\therefore y=-2(x^2-4x)^2+4(x^2-4x)+3$
$=-2t^2+4t+3=-2(t-1)^2+5$
$-4\le t\le5$에서 주어진 함수는 $t=-4$일 때 최솟값이 -45, $t=1$일 때 최댓값이 5이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 차는 $5-(-45)=50$

8 $x-y=2$, 즉 $y=x-2$를 $x^2-3xy+y^2$에 대입하면
$x^2-3xy+y^2=x^2-3x(x-2)+(x-2)^2$
$=-x^2+2x+4=-(x-1)^2+5$
$f(x)=-(x-1)^2+5$라고 하면 $-2\le x\le2$에서 $f(x)$는

$x=-2$일 때 최솟값이 -4, $x=1$일 때 최댓값이 5이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $5+(-4)=1$

9 x, y, z가 실수이므로
$2x^2+y^2+3z^2-4x+4y+6z+12$
$=(2x^2-4x+2)+(y^2+4y+4)+(3z^2+6z+3)+3$
$=2(x-1)^2+(y+2)^2+3(z+1)^2+3\geq3$
따라서 주어진 이차식은 $x=1$, $y=-2$, $z=-1$일 때 최솟값이 3이다.

10 $h(t)=-5t^2+40t+10=-5(t-4)^2+90$
이므로 $h(t)$는 $t=4$일 때 최댓값이 90이다.
따라서 이 물체가 가장 높이 올라가는 것은 4초 후이고 이 때 지면으로부터의 높이는 90 m이므로
$a=4$, $b=90$
$\therefore b-a=90-4=86$

11 이차방정식 $x^2-2kx+4k-3=0$의 두 근을 α, β라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2k$, $\alpha\beta=4k-3$ …… (가)
이차함수 $y=x^2-2kx+4k-3$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$이므로 $|\alpha-\beta|=4\sqrt{2}$
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에서
$(4\sqrt{2})^2=(2k)^2-4(4k-3)$ …… (나)
$k^2-4k-5=0$, $(k+1)(k-5)=0$
$\therefore k=-1$ 또는 $k=5$
따라서 양수 k의 값은 5이다. …… (다)

채점 기준	배점
(가) 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 k에 대한 식으로 나타낸다.	4점
(나) k에 대한 이차방정식을 세운다.	3점
(다) 양수 k의 값을 구한다.	3점

12 $y=-2x^2-4ax+8a-3=-2(x+a)^2+2a^2+8a-3$
이므로 주어진 이차함수는 $x=-a$일 때 최댓값이
$2a^2+8a-3$이다. …… (가)
즉, $M=2a^2+8a-3=2(a+2)^2-11$ …… (나)
따라서 M은 $a=-2$일 때 최솟값이 -11이다. …… (다)

채점 기준	배점
(가) 주어진 이차함수의 최댓값을 구한다.	4점
(나) M을 a에 대한 식으로 나타낸다.	2점
(다) M의 최솟값을 구한다.	4점

13 (1) 이차방정식 $x^2-(a+3)x+a^2-a-4=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=\{-(a+3)\}^2-4(a^2-a-4)>0$
$3a^2-10a-25<0$, $(3a+5)(a-5)<0$
$\therefore -\frac{5}{3}<a<5$ …… (가)

(2) 이차방정식 $x^2-(a+3)x+a^2-a-4=0$의 서로 다른 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=a+3$, $\alpha\beta=a^2-a-4$ …… (나)
$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=(a+3)^2-2(a^2-a-4)$
$=-a^2+8a+17$
$=-(a-4)^2+33$ …… (다)
$f(a)=-(a-4)^2+33$이라고 하면 $-\frac{5}{3}<a<5$에서
$f(a)$는 $a=4$일 때 최댓값이 33이다.
따라서 구하는 최댓값은 33이다. …… (라)

채점 기준	배점
(가) a의 값의 범위를 구한다.	3점
(나) $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 a에 관한 식으로 나타낸다.	2점
(다) $\alpha^2+\beta^2$을 a에 관한 식으로 나타낸다.	2점
(라) $\alpha^2+\beta^2$의 최댓값을 구한다.	3점

12~13강 내공 점검

p. 118~119

1 ④	2 ⑤	3 ①	4 ④	5 ②
6 ④	7 ④	8 ④	9 ①	10 ⑤
11 4	12 6	13 -1		

1 $f(x)=x^3+x^2-2x-8$이라고 하면 $f(2)=0$이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 1 & -2 & -8 \\ & & 2 & 6 & 8 \\ \hline & 1 & 3 & 4 & 0 \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2+3x+4)$
따라서 한 실근은 2이고 서로 다른 두 허근은 이차방정식 $x^2+3x+4=0$의 두 근이므로
$\alpha=2$, $\beta\gamma=4$ $\therefore \alpha\beta\gamma=2\times4=8$

2 $f(x)=x^3-x^2-(3a+1)x-6a+10$이라고 하면
$f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -1 & -3a-1 & -6a+10 \\ & & -2 & 6 & 6a-10 \\ \hline & 1 & -3 & -3a+5 & 0 \end{array}$$

$f(x)=(x+2)(x^2-3x-3a+5)$
삼차방정식 $f(x)=0$이 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2-3x-3a+5=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$D=(-3)^2-4(-3a+5)=12a-11\geq0$
$\therefore a\geq\frac{11}{12}$

3 $x^2+3x=X$로 놓으면 주어진 방정식은
$(x^2+3x-1)^2+7(x^2+3x)+3=0$
$(X-1)^2+7X+3=0$
$X^2+5X+4=0$, $(X+1)(X+4)=0$

$X=x^2+3x$를 다시 대입하면
$(x^2+3x+1)(x^2+3x+4)=0$
이때 주어진 사차방정식의 두 허근 α, β는 이차방정식
$x^2+3x+4=0$의 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=4$
$\therefore$ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-3)^2-2\times4=1$

4 사차방정식 $x^4-24x^2+16=0$의 좌변을 인수분해하면
$x^4-24x^2+16=x^4-8x^2+16-16x^2=(x^2-4)^2-(4x)^2$
$=(x^2+4x-4)(x^2-4x-4)$
따라서 $(x^2+4x-4)(x^2-4x-4)=0$에서
$x=-2\pm2\sqrt{2}$ 또는 $x=2\pm2\sqrt{2}$이므로 보기 중 근인 것은
ㄴ, ㄹ이다.

5 $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x^2으로 나누면
$x^2-4x+6-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$
$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$
$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$
$\therefore$ $\left(x+\frac{1}{x}-2\right)^2=0$
따라서 $x+\frac{1}{x}-2=0$이므로 $\alpha+\frac{1}{\alpha}-2=0$
양변에 α를 곱하면
$\alpha^2+1-2\alpha=0$ $\therefore$ $\alpha^2-2\alpha=-1$

6 a, b가 실수이므로 $2+\sqrt{2}i$가 근이면 $2-\sqrt{2}i$도 근이다.
$c=2-\sqrt{2}i$라고 하면 주어진 삼차방정식의 나머지 한 근은 d이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$(2+\sqrt{2}i)+(2-\sqrt{2}i)+d=-a$ …… ㉠
$(2+\sqrt{2}i)(2-\sqrt{2}i)+d(2+\sqrt{2}i)+d(2-\sqrt{2}i)=2$ …… ㉡
$d(2+\sqrt{2}i)(2-\sqrt{2}i)=-b$ …… ㉢
㉡에서 $6+4d=2$ $\therefore$ $d=-1$
㉠에서 $4+d=-a$ $\therefore$ $a=-3$
㉢에서 $6d=-b$ $\therefore$ $b=6$
$\therefore$ $a+b+c+d=4-\sqrt{2}i$

7 삼차방정식 $x^3-x^2+2x-1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=1$
$\therefore$ $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$
$=(1-\gamma)(1-\alpha)(1-\beta)$ ◀ ㉠
$=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
$=1-1+2-1=1$

다른 풀이
㉠의 값을 다음과 같이 구할 수도 있다.
$x^3-x^2+2x-1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$이므로 $x=1$을 대입하면 $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-1+2-1=1$

8 $\begin{cases} x^2+2xy-3y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=21 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 좌변을 인수분해하면
$(x+3y)(x-y)=0$
$\therefore$ $x=-3y$ 또는 $x=y$
(i) $x=-3y$를 ㉡에 대입하면
$9y^2-3y^2+y^2=21$, $y^2=3$
$\therefore$ $\begin{cases} x=3\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$
(ii) $x=y$를 ㉡에 대입하면
$y^2+y^2+y^2=21$, $y^2=7$
$\therefore$ $\begin{cases} x=\sqrt{7} \\ y=\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{7} \\ y=-\sqrt{7} \end{cases}$
(i), (ii)에 의하여 $\alpha\beta$의 최댓값은 7

9 $\begin{cases} xy+x+y=1 \\ x^2y+xy^2=-6 \end{cases}$에서 $\begin{cases} xy+(x+y)=1 \\ xy(x+y)=-6 \end{cases}$
$x+y=u$, $xy=v$라고 하면 $\begin{cases} u+v=1 \\ uv=-6 \end{cases}$
이때 u, v는 t에 대한 이차방정식 $t^2-t-6=0$의 두 근이므로 $(t+2)(t-3)=0$ $\therefore$ $t=-2$ 또는 $t=3$
$\therefore$ $\begin{cases} u=-2 \\ v=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} u=3 \\ v=-2 \end{cases}$
즉, $\begin{cases} x+y=-2 \\ xy=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=-2 \end{cases}$이므로 x, y를 두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식을 만들면
(i) $x+y=-2$, $xy=3$일 때
$t^2+2t+3=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=1^2-1\times3=-2<0$
이므로 실근이 존재하지 않는다.
(ii) $x+y=3$, $xy=-2$일 때
$t^2-3t-2=0$의 판별식을 D라고 하면
$D=(-3)^2-4\times1\times(-2)=17>0$
이므로 실근이 존재한다.
(i), (ii)에 의하여 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-2$이므로
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\times(-2)=13$

10 주어진 방정식을 변형하면
$2xy-2x-3y+3=6$, $2x(y-1)-3(y-1)=6$
$\therefore$ $(2x-3)(y-1)=6$
x, y가 자연수이므로 $2x-3$은 -1 이상의 정수이고 $y-1$은 0 이상의 정수이다.

$2x-3$	1	2	3	6
$y-1$	6	3	2	1

▼

x	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{9}{2}$
y	7	4	3	2

x, y는 자연수이고 $x<y$이므로 $x=2$, $y=7$
$\therefore$ $x+y=9$

11 가로의 길이를 x라고 하면 세로의 길이와 높이는 각각 $2x$, $2x$이므로

$(x+2)(2x-1)(2x-1)=\frac{3}{4}\times 4x^3$ …… (가)

$\therefore\ x^3+4x^2-7x+2=0$

$f(x)=x^3+4x^2-7x+2$라고 하면 $f(1)=0$이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 4 & -7 & 2 \\ & & 1 & 5 & -2 \\ \hline & 1 & 5 & -2 & 0 \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+5x-2)$

방정식 $(x-1)(x^2+5x-2)=0$에서 x는 자연수이므로

$x=1$ …… (나)

따라서 처음 직육면체의 부피는 $4x^3=4$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 주어진 조건을 이용하여 방정식을 세운다.	4점
(나) 방정식의 해를 구한다.	4점
(다) 처음 직육면체의 부피를 구한다.	2점

12 $x^3+1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=-1$ …… (가)

또 $x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로

$\omega^2-\omega+1=0$ …… (나)

삼차방정식 $2x^3+4x^2+ax+b=0$에 $x=\omega^2$을 대입하면

$2\omega^6+4\omega^4+a\omega^2+b=0$, $2(\omega^3)^2+4\omega^3\times\omega+a(\omega-1)+b=0$

$2-4\omega+a\omega-a+b=0$

$(a-4)\omega-a+b+2=0$ …… (다)

이때 a, b는 실수이므로

$a-4=0$, $-a+b+2=0$ $\quad\therefore\ a=4$, $b=2$ …… (라)

$\therefore\ a+b=6$ …… (마)

채점 기준	배점
(가) $\omega^3=-1$을 구한다.	2점
(나) $\omega^2-\omega+1=0$을 구한다.	2점
(다) $x=\omega^2$을 삼차방정식에 대입하여 정리한다.	2점
(라) a, b의 값을 구한다.	2점
(마) $a+b$의 값을 구한다.	2점

13 $x+y=2k+1$이고 $x^2+y^2=2k^2-3$이므로

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서 $2k^2-3=(2k+1)^2-2xy$

$\therefore\ xy=k^2+2k+2$ …… (가)

x, y를 두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식은

$t^2-(2k+1)t+k^2+2k+2=0$

이고 실수 x, y가 존재하지 않으므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=\{-(2k+1)\}^2-4(k^2+2k+2)=-4k-7<0$

$\therefore\ k>-\frac{7}{4}$ …… (나)

따라서 정수 k의 최솟값은 -1이다. …… (다)

채점 기준	배점
(가) xy를 k에 관한 식으로 나타낸다.	4점
(나) k의 값의 범위를 구한다.	4점
(다) 정수 k의 최솟값을 구한다.	2점

14~16강 내공 점검

p. 120~121

1 ②	2 ②	3 ③	4 ④	5 ①
6 ③	7 ③	8 ①	9 ②	10 ②

11 111명 12 $x<-2$ 또는 $x>-1$

13 $-3<a<3$

1 $1.5x-2.4<\frac{x}{2}+1$에서

$15x-24<5x+10$, $10x<34$

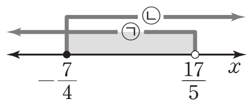
$\therefore\ x<\frac{17}{5}$ …… ㉠

$\frac{x-1}{2}+3\geq\frac{3-2x}{4}$에서

$2(x-1)+12\geq 3-2x$, $4x\geq -7$

$\therefore\ x\geq -\frac{7}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는 $-\frac{7}{4}\leq x<\frac{17}{5}$



따라서 정수 x의 최솟값은 -1이다.

2 ㄱ. $2x<2-x$에서 $x<\frac{2}{3}$

$3+x\geq 4x$에서 $x\leq 1$

$\therefore\ x<\frac{2}{3}$

ㄴ. $x-1>2x+3$에서 $x<-4$

$2x-1\geq -3$에서 $x\geq -1$

$\therefore$ 해는 없다.

ㄷ. $3x-1\geq 2-3x$에서 $x\geq\frac{1}{2}$

$2(3-x)>4x+3$에서 $6-2x>4x+3$, $x<\frac{1}{2}$

$\therefore$ 해는 없다.

ㄹ. $0.5x-1.5\leq 0.3x+2$에서

$5x-15\leq 3x+20$, $x\leq\frac{35}{2}$

$\frac{1}{2}x+1<\frac{3}{4}x-2$에서

$2x+4<3x-8$, $x>12$

$\therefore\ 12<x\leq\frac{35}{2}$

ㅁ. $2x-3<2(1-2x)$에서

$2x-3<2-4x$, $x<\frac{5}{6}$

$2(1-2x)\leq 4x-1$에서

$2-4x\leq 4x-1$, $x\geq\frac{3}{8}$

$\therefore\ \frac{3}{8}\leq x<\frac{5}{6}$

따라서 해가 없는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

3 $3x-7>a-2x$에서 $5x>a+7$

$\therefore x>\dfrac{a+7}{5}$ …… ㉠

$4x-5\le x+4$에서 $3x\le 9$ $\therefore x\le 3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 $2<x\le b$이므로

$\dfrac{a+7}{5}=2,\ b=3$

따라서 $a=3,\ b=3$이므로

$a+b=6$

4 부등식 $3|x-1|+2|x+1|>11$에서

(i) $x<-1$일 때

$-3(x-1)-2(x+1)>11$ $\therefore x<-2$

그런데 $x<-1$이므로 $x<-2$

(ii) $-1\le x<1$일 때

$-3(x-1)+2(x+1)>11$ $\therefore x<-6$

그런데 $-1\le x<1$이므로 해가 없다.

(iii) $x\ge 1$일 때

$3(x-1)+2(x+1)>11$ $\therefore x>\dfrac{12}{5}$

그런데 $x\ge 1$이므로 $x>\dfrac{12}{5}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $x<-2$ 또는 $x>\dfrac{12}{5}$

따라서 $\alpha=-2,\ \beta=\dfrac{12}{5}$이므로 $\alpha+\beta=\dfrac{2}{5}$

5 주어진 부등식의 해가 $2<x<3$이므로 $a<0$

해가 $2<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-2)(x-3)<0$

$\therefore x^2-5x+6<0$

이 부등식의 양변에 a를 곱하면 $ax^2-5ax+6a>0$

이 부등식이 부등식 $ax^2+(-a+b)x-12>0$과 같으므로

$-a+b=-5a,\ -12=6a$

$\therefore a=-2,\ b=8$ $\therefore ab=-16$

6 부등식 $f(x)-g(x)\le 0$, 즉 $f(x)\le g(x)$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 이차함수 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위와 같으므로

$-1\le x\le 4$

7 모든 실수 x에 대하여 $-x^2+4kx-4k-8<0$, 즉

$x^2-4kx+4k+8>0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2-4kx+4k+8=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2k)^2-(4k+8)<0$

$k^2-k-2<0,\ (k+1)(k-2)<0$

$\therefore -1<k<2$

따라서 정수 k는 0, 1의 2개이다.

8 $\begin{cases} x(x+1)<2(x+6) & \cdots\cdots ㉠ \\ 2(x+6)<x^2+3x+6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x^2-x-12<0,\ (x+3)(x-4)<0$

$\therefore -3<x<4$ …… ㉢

㉡에서 $x^2+x-6>0,\ (x+3)(x-2)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>2$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $2<x<4$

해가 $2<x<4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-2)(x-4)<0$

$\therefore x^2-6x+8<0$

따라서 $a=-6,\ b=8$이므로

$a+b=2$

9 $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}=-\sqrt{\alpha\beta},\ \alpha\beta\ne 0$에서 $\alpha<0,\ \beta<0$이므로 주어진 이차방정식의 서로 다른 두 실근은 모두 음수이다.

이차방정식 $x^2-2(a-2)x+a=0$의 판별식을 D라고 하면 $\dfrac{D}{4}=\{-(a-2)\}^2-a>0,\ a^2-5a+4>0$

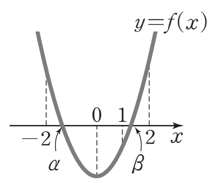
$(a-1)(a-4)>0$ $\therefore a<1$ 또는 $a>4$ …… ㉠

$\alpha+\beta=2(a-2)<0$ $\therefore a<2$ …… ㉡

$\alpha\beta=a>0$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $0<a<1$

10 $f(x)=x^2-(t-1)x+2t-4$라 하고 $-2<\alpha<0,\ 1<\beta<2$가 되도록 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로



$f(-2)>0,\ f(0)<0,$

$f(1)<0,\ f(2)>0$

(i) $f(-2)=4+2(t-1)+2t-4>0$ $\therefore t>\dfrac{1}{2}$

(ii) $f(0)=2t-4<0$ $\therefore t<2$

(iii) $f(1)=1-(t-1)+2t-4<0$ $\therefore t<2$

(iv) $f(2)=4-2(t-1)+2t-4=2>0$ ➡ 항상 성립

(i)~(iv)에 의하여 $\dfrac{1}{2}<t<2$

따라서 $a=\dfrac{1}{2},\ b=2$이므로 $ab=1$

11 한 의자에 4명씩 앉으면 학생이 3명 남으므로 의자를 x개라고 하면 학생은 $(4x+3)$명이다.

한 의자에 5명씩 앉으면 의자가 4개 남으므로 $(x-5)$개의 의자에는 5명씩 앉고 마지막 한 개의 의자에는 1명 이상 5명 이하의 학생이 앉게 된다.

$\therefore 5(x-5)+1\le 4x+3\le 5(x-4)$ …… (가)

$5(x-5)+1\le 4x+3$에서

$5x-24\le 4x+3$ $\therefore x\le 27$ …… ㉠

$4x+3\le 5(x-4)$에서

$4x+3\le 5x-20$ $\therefore x\ge 23$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $23\le x\le 27$ …… (나)

따라서 의자는 최대 27개이므로 학생은 최대

$4\times27+3=111$(명)이다. …… (다)

채점 기준	배점
(가) 연립부등식을 세운다.	4점
(나) 연립부등식의 해를 구한다.	4점
(다) 학생은 최대 몇 명인지를 구한다.	2점

12 x^2의 계수가 1이고 해가 $-1<x<3$인 이차부등식은

$(x+1)(x-3)<0$, $x^2-2x-3<0$ …… (가)

$\therefore a=2,\ b=-3$ …… (나)

이차부등식 $x^2-bx+a>0$에 $a=2,\ b=-3$을 대입하면

$x^2+3x+2>0$, $(x+2)(x+1)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>-1$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 해가 $-1<x<3$인 이차부등식을 세운다.	4점
(나) a, b의 값을 구한다.	3점
(다) 이차부등식 $x^2-bx+a>0$의 해를 구한다.	3점

13 $x^2-2x-3<0$에서

$(x+1)(x-3)<0$

$\therefore -1<x<3$ …… ㉠ …… (가)

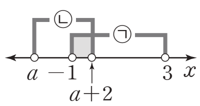
$x^2-2(a+1)x+a^2+2a<0$에서

$(x-a)(x-a-2)<0$

$\therefore a<x<a+2$ …… ㉡ …… (나)

(i) $a<-1$일 때

오른쪽 그림에서 ㉠, ㉡의 공통 부분이 존재하려면



$a+2>-1$

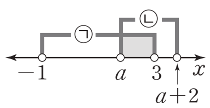
$\therefore a>-3$

그런데 $a<-1$이므로

$-3<a<-1$

(ii) $-1\le a<3$일 때

모든 a의 값에 대하여 ㉠, ㉡의 공통부분이 존재한다.

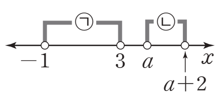


그런데 $-1\le a<3$이므로

$-1\le a<3$

(iii) $a\ge3$일 때

모든 a의 값에 대하여 ㉠, ㉡의 공통부분이 존재하지 않는다.



…… (다)

(i), (ii), (iii)에 의하여

$-3<a<3$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) 부등식 $x^2-2x-3<0$의 해를 구한다.	2점
(나) 부등식 $x^2-2(a+1)x+a^2+2a<0$의 해를 구한다.	2점
(다) 두 부등식의 해의 공통부분이 존재하기 위한 각 경우의 a의 값의 범위를 구한다.	4점
(라) a의 값의 범위를 구한다.	2점

17~18강 내공 점검

p. 122~123

1 ⑤ **2** ② **3** ④ **4** ① **5** ⑤
6 ⑤ **7** ③ **8** ⑤ **9** ⑤ **10** ①
11 풀이 참조 **12** B$(-4,\ -1)$, C$(6,\ 1)$, D$(10,\ 11)$
13 $(-5,\ 5)$

1 $\overline{AB}=\sqrt{(k-1)^2+(5-k)^2}$

$=\sqrt{2k^2-12k+26}$

$=\sqrt{2(k-3)^2+8}$

따라서 $k=3$일 때 선분 AB의 길이는 최소가 되고, 이때 점 B의 좌표는

B$(3,\ -1)$

$\therefore \overline{OB}=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

2 $\overline{AB}=\sqrt{(1-4)^2+(2-1)^2}=\sqrt{10}$

$\overline{BC}=\sqrt{(2-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{10}$

$\overline{CA}=\sqrt{(4-2)^2+(1+1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다.

3 구하는 점의 좌표를 P$(a,\ a-2)$라고 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}$이므로 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$

$(a-2)^2+(a-5)^2=(a+3)^2+a^2$ $\therefore a=1$

$\therefore$ P$(1,\ -1)$

4 점 P$(-1,\ 1)$은 삼각형 ABC의 외심이므로

$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$ $\therefore \overline{AP}^2=\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$

$\overline{CP}=\sqrt{(-1+2)^2+(1+1)^2}=\sqrt{5}$이므로 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$에서

$(-1-a)^2+(1-2)^2=5$

$a^2+2a-3=0$, $(a+3)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

$\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$에서

$(-1-1)^2+(1-b)^2=5$

$b^2-2b=0$, $b(b-2)=0$

$\therefore b=2$ ($\because b>0$)

$\therefore a+b=1+2=3$

5 점 P의 좌표를 P$(a,\ 0)$이라고 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=\{(a+2)^2+(-1)^2\}+\{(a-4)^2+(-4)^2\}$

$=2a^2-4a+37$

$=2(a-1)^2+35$

따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$은 $a=1$일 때 최솟값이 35이다.

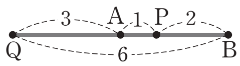
6 A$(-4,\ -3)$, B$(2,\ 1)$, P$(x,\ y)$라고 하면

$\sqrt{(x+4)^2+(y+3)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$은 $\overline{AP}+\overline{BP}$와 같으므로 구하는 최솟값은 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값과 같다.

따라서 구하는 최솟값은 선분 AB의 길이와 같으므로

$\overline{AB}=\sqrt{\{2-(-4)\}^2+\{1-(-3)\}^2}=2\sqrt{13}$

7 ㄴ. 점 P는 $\overline{QB}$를 $2:1$로 내분하는 점이다.



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

8 $\overline{AB}$를 $3:2$로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{3\times3+2\times a}{3+2}, \frac{3\times4+2\times(-1)}{3+2}\right)$ $\quad\therefore \mathrm{P}\left(\frac{2a+9}{5}, 2\right)$

$\overline{AB}$를 $3:2$로 외분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{3\times3-2\times a}{3-2}, \frac{3\times4-2\times(-1)}{3-2}\right)$

$\therefore \mathrm{Q}(-2a+9, 14)$

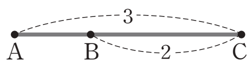
$\overline{PQ}$의 중점의 좌표는 $(7, b)$이므로

$\dfrac{\frac{2a+9}{5}-2a+9}{2}=7 \qquad \therefore a=-2$

$\frac{2+14}{2}=b \qquad \therefore b=8$

$\therefore b-a=8-(-2)=10$

9 $\overline{AB}$의 연장선 위의 점 C에 대하여 $2\overline{AC}=3\overline{BC}$가 성립하므로



점 C는 $\overline{AB}$를 $3:2$로 외분하는 점이다.

$\overline{AB}$를 $3:2$로 외분하는 점 C의 좌표는

$\left(\frac{3\times4-2\times(-2)}{3-2}, \frac{3\times(-3)-2\times1}{3-2}\right)$

$\therefore \mathrm{C}(16, -11)$

10 $\frac{4+x_1+x_2}{3}=0, \frac{6+y_1+y_2}{3}=0$이므로

$x_1+x_2=-4, y_1+y_2=-6$

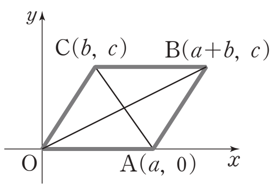
따라서 $\overline{BC}$의 중점의 좌표는

$\frac{x_1+x_2}{2}=-2, \frac{y_1+y_2}{2}=-3$에서

$(-2, -3)$

11 $\mathrm{A}(a, 0), \mathrm{C}(b, c)$라고 하면

$\mathrm{B}(a+b, c)$ …… (가)



$\overline{OB}^2+\overline{AC}^2=\{(a+b)^2+c^2\}+\{(b-a)^2+c^2\}$

$=2(a^2+b^2+c^2)$ …… (나)

$\overline{OA}^2+\overline{OC}^2=a^2+(b^2+c^2)=a^2+b^2+c^2$ …… (다)

$\therefore \overline{OB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{OA}^2+\overline{OC}^2)$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) 세 점 A, B, C의 좌표를 정한다.	2점
(나) $\overline{OB}^2+\overline{AC}^2$의 값을 구한다.	3점
(다) $\overline{OA}^2+\overline{OC}^2$의 값을 구한다.	3점
(라) $\overline{OB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{OA}^2+\overline{OC}^2)$임을 설명한다.	2점

12 세 점 B, C, D의 좌표를 $\mathrm{B}(x_1, y_1), \mathrm{C}(x_2, y_2), \mathrm{D}(x_3, y_3)$이라고 하면 변 AB의 중점의 좌표가 $(-2, 4)$이므로

$\frac{0+x_1}{2}=-2, \frac{9+y_1}{2}=4$

$\therefore x_1=-4, y_1=-1$

$\therefore \mathrm{B}(-4, -1)$ …… (가)

또 변 BC의 중점의 좌표가 $(1, 0)$이므로

$\frac{-4+x_2}{2}=1, \frac{-1+y_2}{2}=0$

$\therefore x_2=6, y_2=1$

$\therefore \mathrm{C}(6, 1)$ …… (나)

대각선 AC의 중점과 대각선 BD의 중점은 일치하므로

$\frac{0+6}{2}=\frac{-4+x_3}{2}, \frac{9+1}{2}=\frac{-1+y_3}{2}$

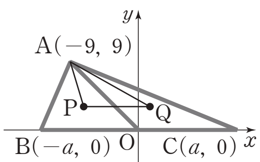
$\therefore x_3=10, y_3=11$

$\therefore \mathrm{D}(10, 11)$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 점 B의 좌표를 구한다.	3점
(나) 점 C의 좌표를 구한다.	3점
(다) 점 D의 좌표를 구한다.	4점

13 $\overline{BC}$의 중점이 원점 O이므로

$\mathrm{C}(a, 0)(a>0)$이라고 하면 $\mathrm{B}(-a, 0)$ …… (가)



삼각형 ABO의 무게중심 P의 좌표는

$\left(\frac{-9-a+0}{3}, \frac{9+0+0}{3}\right)$

$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{-9-a}{3}, 3\right)$ …… (나)

삼각형 AOC의 무게중심 Q의 좌표는

$\left(\frac{-9+0+a}{3}, \frac{9+0+0}{3}\right)$

$\therefore \mathrm{Q}\left(\frac{-9+a}{3}, 3\right)$ …… (다)

따라서 삼각형 APQ의 무게중심의 좌표는

$(x\text{좌표})=\dfrac{-9+\frac{-9-a}{3}+\frac{-9+a}{3}}{3}=-5$

$(y\text{좌표})=\frac{9+3+3}{3}=5$

$\therefore (-5, 5)$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) 두 점 B, C의 좌표를 정한다.	2점
(나) 점 P의 좌표를 구한다.	3점
(다) 점 Q의 좌표를 구한다.	3점
(라) 삼각형 APQ의 무게중심의 좌표를 구한다.	2점

19~20강 내공 점검 p. 124~125

1 ②	2 ①	3 ④	4 ④	5 ⑤
6 ③	7 ⑤	8 ②	9 ④	10 ③
11 -12	12 -1 또는 4	13 6		

1 직선 $\frac{x}{3k}-\frac{y}{4k}=1$의 x절편은 $3k$, y절편은 $-4k$이다.
이 직선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 24이므로
$\frac{1}{2}\times|3k|\times|-4k|=24$
$\therefore k^2=4$

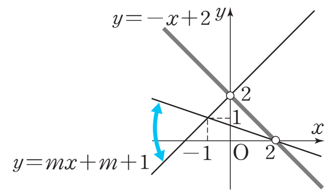
2 세 점 A$(-2, 3)$, B$(1-a, a-3)$, C$(1, -1)$이 한 직선 위에 있으므로 직선 CA와 직선 CB의 기울기는 서로 같다.
즉, $\frac{3-(-1)}{-2-1}=\frac{(a-3)-(-1)}{(1-a)-1}$, $-\frac{4}{3}=-\frac{a-2}{a}$
$\therefore a=-6$

3 두 직선 $x=3$, $y=-2$가 이루는 각의 크기는 $90°$이고, 이 각을 삼등분하는 두 직선의 기울기 a, c가 $0<a<c$이므로
$a=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $c=\tan 60°=\sqrt{3}$
두 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+b$, $y=\sqrt{3}x+d$는 모두 점 $(3, -2)$를 지나므로
$-2=\frac{\sqrt{3}}{3}\times3+b \qquad \therefore b=-2-\sqrt{3}$
$-2=\sqrt{3}\times3+d \qquad \therefore d=-2-3\sqrt{3}$
$\therefore ac+bd=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}+(-2-\sqrt{3})(-2-3\sqrt{3})$
$=14+8\sqrt{3}$

4 직선 $y=ax-2$는 점 B$(0, -2)$를 지나므로 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 $\overline{AC}$의 중점을 지나야 한다.
$\overline{AC}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+7}{2}\right)$, 즉 $(2, 5)$이므로
$5=2a-2 \qquad \therefore a=\frac{7}{2}$

5 직선 $(2x-y-4)+k(x+3y+2)=0$(k는 실수)이 점 $(2, -2)$를 지나므로
$(4+2-4)+k(2-6+2)=0$, $2-2k=0$
$\therefore k=1$
$(2x-y-4)+(x+3y+2)=0$에서
$3x+2y-2=0$
따라서 구하는 직선 위에 있는 점의 좌표는 ⑤ $(4, -5)$이다.

6 $y=mx+m+1$에서 $(x+1)m-y+1=0$ …… ㉠
직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 1)$을 지난다.



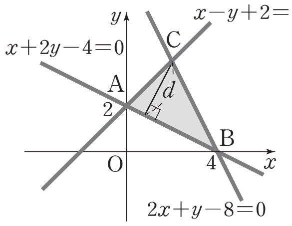
(i) 직선 ㉠이 점 $(2, 0)$을 지날 때
$3m+1=0$
$\therefore m=-\frac{1}{3}$
(ii) 직선 ㉠이 점 $(0, 2)$를 지날 때
$m-1=0 \qquad \therefore m=1$
(i), (ii)에 의하여 $-\frac{1}{3}<m<1$

7 직선 $y=mx-1$이 직선 $3x+2y-1=0$, 즉 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$과 평행하므로
$m=-\frac{3}{2}$
직선 $2x+ny+1=0$, 즉 $y=-\frac{2}{n}x-\frac{1}{n}$과 수직이므로
$m\times\left(-\frac{2}{n}\right)=-1$, $\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{2}{n}\right)=-1$
$\therefore n=-3$
$\therefore mn=\left(-\frac{3}{2}\right)\times(-3)=\frac{9}{2}$

8 직선 BD는 선분 AC의 수직이등분선이다.
직선 AC의 기울기는 $\frac{0-4}{7-1}=-\frac{2}{3}$이므로 직선 BD의 기울기는 $\frac{3}{2}$
선분 AC의 중점의 좌표는 $(4, 2)$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y-2=\frac{3}{2}(x-4)$
$\therefore 3x-2y-8=0$

9 두 직선이 서로 평행하므로
$\frac{2}{a}=\frac{a-1}{1}\neq\frac{1}{-5}$
$\frac{2}{a}=\frac{a-1}{1}$에서 $a^2-a-2=0$
$(a+1)(a-2)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$
그런데 $a>0$이므로 $a=2$
따라서 두 직선 $2x+y+1=0$, $2x+y-5=0$ 사이의 거리는 직선 $2x+y+1=0$ 위의 한 점 $(0, -1)$과 직선 $2x+y-5=0$ 사이의 거리와 같으므로
$\frac{|-1-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

10



위의 그림과 같이 주어진 세 직선을 좌표평면 위에 나타내고 교점을 A, B, C라고 하면

A$(0, 2)$, B$(4, 0)$

연립방정식 $\begin{cases} x-y+2=0 \\ 2x+y-8=0 \end{cases}$ 을 풀면 $x=2$, $y=4$이므로

C$(2, 4)$

$\overline{AB}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

점 C$(2, 4)$에서 직선 $x+2y-4=0$까지의 거리를 d라고 하면

$d=\dfrac{|2+2\times4-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

$\therefore$ $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\dfrac{6\sqrt{5}}{5}=6$

11 $ax-2y=1$에 $y=0$을 대입하면 $x=\dfrac{1}{a}$이므로 P$\left(\dfrac{1}{a}, 0\right)$

$2x-4y=1$에 $x=0$을 대입하면 $y=-\dfrac{1}{4}$이므로

Q$\left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$ …… (가)

두 점 P, Q를 지나는 직선은 x절편이 $\dfrac{1}{a}$, y절편이 $-\dfrac{1}{4}$인 직선이므로 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{\frac{1}{a}}+\dfrac{y}{-\frac{1}{4}}=1$, $ax-4y=1$

이 직선의 방정식이 $3x+by=1$과 일치하므로

$a=3$, $b=-4$ …… (나)

$\therefore$ $ab=-12$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 두 점 P, Q의 좌표를 구한다.	4점
(나) a, b의 값을 구한다.	4점
(다) ab의 값을 구한다.	2점

12 세 직선에 의해 생기는 교점이 2개이려면 세 직선 중 두 직선이 평행해야 한다. …… (가)

두 직선 $2x-y=3$, $x+2y=-1$은 서로 평행하지 않으므로

(i) 두 직선 $2x-y=3$, $2x+ay=5$가 서로 평행할 때

$\dfrac{2}{2}=\dfrac{-1}{a}\neq\dfrac{3}{5}$ $\quad\therefore$ $a=-1$ …… (나)

(ii) 두 직선 $x+2y=-1$, $2x+ay=5$가 서로 평행할 때

$\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{a}\neq\dfrac{-1}{5}$ $\quad\therefore$ $a=4$ …… (다)

(i), (ii)에 의하여 상수 a의 값은 -1 또는 4이다.

채점 기준	배점
(가) 교점이 2개일 조건을 말한다.	2점
(나) 두 직선 $2x-y=3$, $2x+ay=5$가 서로 평행할 때, a의 값을 구한다.	4점
(다) 두 직선 $x+2y=-1$, $2x+ay=5$가 서로 평행할 때, a의 값을 구한다.	4점

13 기울기가 m이고 점 $(-2, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=m(x+2)$

$\therefore$ $mx-y+2m+2=0$ …… (가)

원점과 이 직선 사이의 거리가 k이므로

$\dfrac{|2m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=k$, $|2m+2|=k\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4m^2+8m+4=k^2(m^2+1)$

$(k^2-4)m^2-8m+k^2-4=0$ …… ㉠ …… (나)

두 직선의 기울기는 이차방정식 ㉠의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-\dfrac{-8}{k^2-4}=4$ $\quad\therefore$ $k^2=6$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 기울기가 m이고 점 $(-2, 2)$를 지나는 직선의 방정식을 구한다.	4점
(나) m에 대한 이차방정식을 구한다.	4점
(다) k^2의 값을 구한다.	2점

21~23강 내공 점검 p. 126~127

1 ③	2 ④	3 ⑤	4 ④	5 ③
6 ④	7 ⑤	8 ②	9 ②	10 ④
11 $8\sqrt{3}$	12 $\sqrt{41}$	13 $a=-2$, $b=2$		

1 중심의 좌표를 $(a, 0)$, 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은 $(x-a)^2+y^2=r^2$

이 원은 두 점 $(1, 0)$, $(-2, 3)$을 지나므로

$(1-a)^2=r^2$, $(-2-a)^2+9=r^2$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-2$, $r=3$ $(\because r>0)$

$\therefore$ $(x+2)^2+y^2=3^2$

① 중심의 좌표는 $(-2, 0)$이다.

② 지름의 길이는 $2\times3=6$이다.

③ 점 $(-5, 0)$을 지난다.

④ 둘레의 길이는 $2\pi\times3=6\pi$이다.

⑤ 넓이는 $\pi\times3^2=9\pi$이다.

따라서 옳은 것은 ③이다.

2 $x^2+y^2+4x-2y-4=0$에서

$(x+2)^2+(y-1)^2=9$

$x^2+y^2-2x-2by+6=0$에서

$(x-1)^2+(y-b)^2=b^2-5$

직선 $ax-3y+7=0$이 두 원의 넓이를 각각 이등분하려면 두 원의 중심 $(-2,\ 1)$, $(1,\ b)$를 지나야 하므로

$-2a-3+7=0$에서 $\quad a=2$

$a-3b+7=0$에서 $\quad b=3$

$\therefore\ a+b=2+3=5$

3 구하는 원의 중심의 좌표를 $(\alpha,\ \alpha+4)$, 반지름의 길이를 r라고 하면 구하는 원은 x축과 y축에 모두 접하므로

$r=|\alpha|=|\alpha+4|$

$\therefore\ \alpha=-2,\ r=2$

중심이 $(-2,\ 2)$, 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은

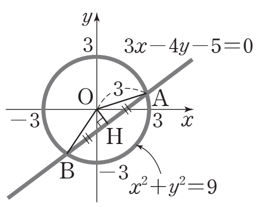
$(x+2)^2+(y-2)^2=4$

$\therefore\ x^2+y^2+4x-4y+4=0$

따라서 $a=4$, $b=-4$, $c=4$이므로

$a+b+c=4$

4 오른쪽 그림과 같이 주어진 직선과 원의 두 교점을 A, B, 원의 중심 O에서 직선에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{|-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$

이때 삼각형 OAH는 직각삼각형이므로

$1^2+\overline{\mathrm{AH}}^2=3^2$, $\overline{\mathrm{AH}}^2=8$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AH}}=\pm2\sqrt{2}$

그런데 $\overline{\mathrm{AH}}>0$이므로 $\quad \overline{\mathrm{AH}}=2\sqrt{2}$

따라서 구하는 현의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=4\sqrt{2}$

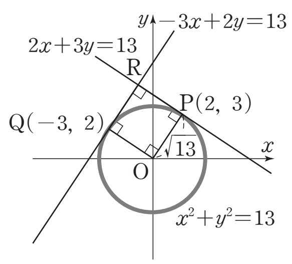
5 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $\mathrm{P}(2,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$2x+3y=13 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $\mathrm{Q}(-3,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$-3x+2y=13 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $2\times(-3)+3\times2=0$이므로 다음 그림과 같이 두 직선 ㉠, ㉡은 서로 수직이다.



따라서 사각형 OPRQ는 원의 반지름을 한 변으로 하는 정사각형이므로 구하는 둘레의 길이는 $4\sqrt{13}$이다.

6 점 $\mathrm{A}(3,\ 4)$와 원의 중심 $(0,\ 0)$ 사이의 거리 d는

$d=\sqrt{3^2+4^2}=5$

원의 반지름의 길이 r는 $\quad r=1$

$\therefore$ ($\overline{\mathrm{AP}}$의 최댓값)$=d+r=6$

따라서 반지름의 최대 길이는 3이므로 구하는 원의 넓이는

$\pi\times3^2=9\pi$

7 포물선 $y=3x^2-6x-1=3(x-1)^2-4$를 평행이동

$(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y-2a)$에 의하여 이동하면

$y+2a=3(x-a-1)^2-4$

$y=3(x-a-1)^2-2a-4$

이때 포물선의 꼭짓점 $(a+1,\ -2a-4)$가 직선

$y=-3x+4$ 위의 점이므로

$-2a-4=-3(a+1)+4$

$-2a-4=-3a+1$

$\therefore\ a=5$

8 직선 $2x+y+k=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$2(-x)+y+k=0$

$\therefore\ 2x-y-k=0$

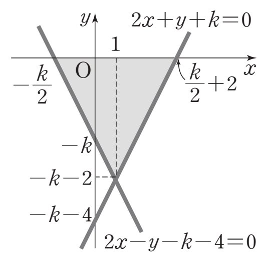
이 직선을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선 l의 방정식은

$2(x-1)-(y+2)-k=0$

$\therefore\ 2x-y-k-4=0$

직선 l과 직선 $2x+y+k=0$의 교점의 좌표는

$(1,\ -k-2)$



위의 그림에서 $k>0$이고 삼각형의 넓이는 18이므로

$\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{k}{2}+2+\dfrac{k}{2}\right)\times(k+2)=18$

$(k+2)^2=36$

$\therefore\ k=4\ (\because\ k>0)$

9 주어진 원의 방정식을 변형하면

$(x+2)^2+(y-k)^2=k^2+9$

이 원의 중심 $(-2,\ k)$를 점 $(-1,\ 2)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면

$\dfrac{-2+a}{2}=-1,\ \dfrac{k+b}{2}=2$

$\therefore a=0,\ b=-k+4$

따라서 대칭이동한 원은 중심이 $(0,\ -k+4)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{k^2+9}$이므로 이 원의 방정식은

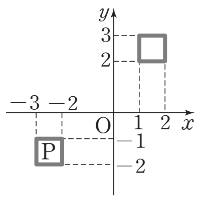
$x^2+(y+k-4)^2=k^2+9$

이 원이 점 $(3,\ 2)$를 지나므로

$3^2+(2+k-4)^2=k^2+9,\ -4k+4=0$

$\therefore k=1$

10 ④ 방정식 $f(y-5,\ x-3)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것으로 오른쪽 그림과 같다.

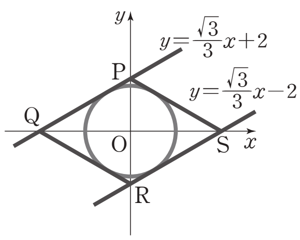


따라서 도형 Q를 나타내는 방정식이 아닌 것은 ④이다.

11 원 $x^2+y^2=3$에 접하고 기울기가 $\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$인 직선의 방정식은

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x\pm\sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}$

$\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}x\pm2$ …… (가)



위의 그림과 같이 이 두 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q, R, S라고 하면

$\mathrm{P}(0,\ 2),\ \mathrm{Q}(-2\sqrt{3},\ 0),\ \mathrm{R}(0,\ -2),\ \mathrm{S}(2\sqrt{3},\ 0)$ …… (나)

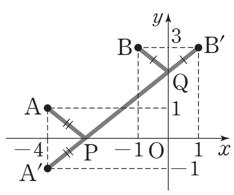
따라서 사각형 PQRS의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PR}}\times\overline{\mathrm{QS}}=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 접선의 방정식을 구한다.	4점
(나) 네 점 P, Q, R, S의 좌표를 구한다.	3점
(다) 사각형 PQRS의 넓이를 구한다.	3점

12 오른쪽 그림과 같이 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′, 점 B를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라고 하면

$\mathrm{A'}(-4,\ -1),\ \mathrm{B'}(1,\ 3)$ …… (가)



$\therefore \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB'}}$

$\geq\overline{\mathrm{A'B'}}$ …… (나)

$=\sqrt{(1+4)^2+(3+1)^2}=\sqrt{41}$ …… (다)

채점 기준	배점
(가) 두 점 A, B를 각각 x축, y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구한다.	4점
(나) $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값이 $\overline{\mathrm{A'B'}}$임을 나타낸다.	3점
(다) $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값을 구한다.	3점

13 주어진 원의 방정식을 변형하면

$(x-2a)^2+(y-a)^2=5a^2-20a+25$

이 원의 중심의 좌표는

$(2a,\ a)$ …… (가)

직선 $2x+y=0$은 두 점 $(2a,\ a)$, $(4,\ b)$를 이은 선분의 중점 $\left(a+2,\ \frac{a+b}{2}\right)$를 지나므로

$2(a+2)+\frac{a+b}{2}=0$

$\therefore 5a+b=-8$ …… ㉠ …… (나)

직선 $2x+y=0$은 두 점 $(2a,\ a)$, $(4,\ b)$를 지나는 직선과 수직이므로

$(-2)\times\frac{a-b}{2a-4}=-1$

$\therefore b=2$ …… (다)

$b=2$를 ㉠에 대입하면 $a=-2$ …… (라)

채점 기준	배점
(가) 주어진 원의 중심의 좌표를 a에 관한 식으로 나타낸다.	2점
(나) 두 점 $(2a,\ a)$, $(4,\ b)$를 이은 선분의 중점이 직선 $2x+y=0$ 위의 점임을 이용하여 a, b에 관한 식을 세운다.	3점
(다) 두 점 $(2a,\ a)$, $(4,\ b)$를 지나는 직선이 직선 $2x+y=0$과 수직임을 이용하여 b의 값을 구한다.	3점
(라) a의 값을 구한다.	2점