정답과 해설

1 | 수열의 극한

1 수열의 수렴과 발산

개념 확인 8쪽~13쪽

1 (1) 1 (2) -3 (3) 1

2 (1) 양의 무한대로 발산 (2) 발산(진동) (3) 음의 무한대로 발산

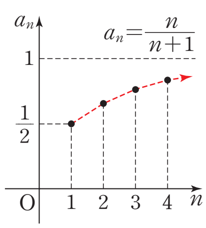
3 (1) 5 (2) -3 (3) $-\frac{1}{2}$

4 (1) $\frac{2}{3}$에 수렴 (2) 0에 수렴 (3) 음의 무한대로 발산

5 (1) 0에 수렴 (2) 양의 무한대로 발산

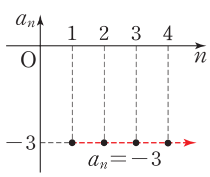
6 3

1 (1) $a_n=\frac{n}{n+1}$에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입하면 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots$이므로 n이 커짐에 따라 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



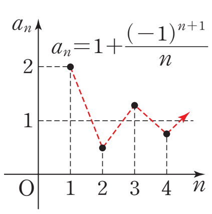
따라서 수열 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$의 극한값은 1이다.

(2) $a_n=-3$의 항의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



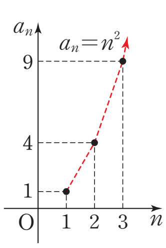
따라서 수열 $\{-3\}$의 극한값은 -3이다.

(3) $a_n=1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}$에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입하면 $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \cdots$이므로 n이 커짐에 따라 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



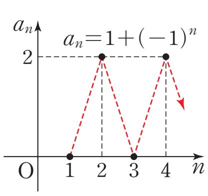
따라서 수열 $\left\{1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$의 극한값은 1이다.

2 (1) $a_n=n^2$에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입하면 $1, 4, 9, \cdots$이므로 n이 커짐에 따라 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



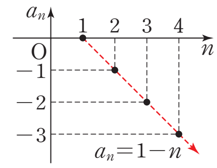
따라서 수열 $\{n^2\}$은 양의 무한대로 발산한다.

(2) $a_n=1+(-1)^n$에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입하면 $0, 2, 0, 2, \cdots$이므로 n이 커짐에 따라 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 수열 $\{1+(-1)^n\}$은 발산(진동)한다.

(3) $a_n=1-n$에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입하면 $0, -1, -2, \cdots$이므로 n이 커짐에 따라 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 수열 $\{1-n\}$은 음의 무한대로 발산한다.

3 (1) $\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-2\lim_{n\to\infty}b_n$

$=3-2\cdot(-1)=5$

(2) $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n$

$=3\cdot(-1)=-3$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{3b_n}{2a_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}3b_n}{\lim_{n\to\infty}2a_n}=\frac{3\lim_{n\to\infty}b_n}{2\lim_{n\to\infty}a_n}$

$=\frac{3\cdot(-1)}{2\cdot3}=-\frac{1}{2}$

4 (1) 분모의 최고차항인 n^2으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2-n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}$$

$$=\frac{2+0}{3-0+0}=\frac{2}{3}\text{ (수렴)}$$

(2) 분모의 최고차항인 n^2으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-n+2}{2n^2+3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}$$

$$=\frac{-0+0}{2+0-0}=0\text{ (수렴)}$$

(3) 분모의 최고차항인 n으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^3+1}{n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^2+\frac{1}{n}}{1+\frac{4}{n}}$$

$$=\frac{-\infty+0}{1+0}=-\infty\text{ (발산)}$$

다른 풀이

(1) (분자의 차수)=(분모의 차수)이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2-n+2}=\frac{2}{3}$ (수렴)

(2) (분자의 차수)<(분모의 차수)이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{-n+2}{2n^2+3n-1}=0$ (수렴)

(3) (분자의 차수)>(분모의 차수)이고, 최고차항의 계수의 부호가 다르므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^3+1}{n+4}=-\infty$ (발산)

5 (1) 분모를 1로 생각하고 분자를 유리화하면

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{1}{\infty}=0\text{ (수렴)}$$

(2) 최고차항인 n^3으로 묶으면

$$\lim_{n\to\infty}(2n^3-3n^2-1)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(2-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^3}\right)$$
$$=\infty\cdot2=\infty\ (\text{발산})$$

6 $\dfrac{3n-5}{n+1}<a_n<\dfrac{3n+2}{n+1}$이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-5}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{3-0}{1+0}=3$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{3+0}{1+0}=3$$

따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$

STEP 1 개념 드릴

| 14쪽~15쪽 |

개념 check

1-1 (1) 양, 발산 (2) 0, 수렴

2-1 (1) 0, 1 (2) 0, $-\dfrac{1}{5}$

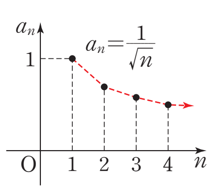
3-1 (1) ∞, 발산 (2) 0, 수렴

4-1 (1) $\dfrac{1}{n}$, $-\dfrac{1}{4}$, 수렴 (2) $-\infty$, 발산

스스로 check

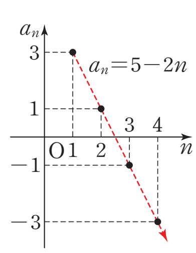
1-2 답 (1) 0에 수렴 (2) 음의 무한대로 발산 (3) 1에 수렴

(1) $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입하면 $1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \cdots$이므로 n이 커짐에 따라 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

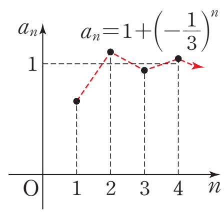


따라서 수열 $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}$은 0에 수렴한다.

(2) $a_n=5-2n$에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입하면 $3, 1, -1, \cdots$이므로 n이 커짐에 따라 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.
따라서 수열 $\{5-2n\}$은 음의 무한대로 발산한다.



(3) $a_n=1+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입하면 $\dfrac{2}{3}, \dfrac{10}{9}, \dfrac{26}{27}, \cdots$이므로 n이 커짐에 따라 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 수열 $\left\{1+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$은 1에 수렴한다.

2-2 답 (1) 0 (2) 3 (3) 0

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^3}$
$=0-0=0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{n}\right)\left(3-\dfrac{1}{2n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{2n}+\dfrac{12}{n}-\dfrac{2}{n^2}\right)$
$=3-0+0-0=3$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}$
$=0+0=0$

다른 풀이

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{n}\right)\left(3-\dfrac{1}{2n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{n}\right)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{2n}\right)$
$=1\cdot3=3$

3-2 답 (1) $\dfrac{1}{2}$에 수렴 (2) 음의 무한대로 발산 (3) 0에 수렴

(1) 분모의 최고차항인 n^2으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{2n^2-10}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{2-\frac{10}{n^2}}$$
$$=\frac{1+0}{2-0}=\frac{1}{2}\ (\text{수렴})$$

(2) 분모의 최고차항인 n으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{-3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1+\frac{2}{n}}{-3+\frac{1}{n}}$$
$$=\frac{\infty-1+0}{-3+0}=-\infty\ (\text{발산})$$

(3) 분모의 최고차항인 n^2으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}-\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$
$$=\frac{0-0}{1+0+0}=0\ (\text{수렴})$$

다른 풀이

(1) (분자의 차수)=(분모의 차수)이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{2n^2-10}=\frac{1}{2}\ (\text{수렴})$$

(2) (분자의 차수)>(분모의 차수)이고, 최고차항의 계수의 부호가 다르므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{-3n+1}=-\infty\ (\text{발산})$$

(3) (분자의 차수)<(분모의 차수)이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{n^2+n+1}=0\ (\text{수렴})$$

4-2 답 (1) 0에 수렴 (2) 1에 수렴 (3) 양의 무한대로 발산

(1) 분모를 1로 생각하고 분자를 유리화하면

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+5}-\sqrt{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+5}-\sqrt{n})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n}}=\frac{5}{\infty}=0\ (\text{수렴})$$

(2) 분모를 유리화하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}{2}$$

$$=\frac{1+1}{2}=1\ (\text{수렴})$$

(3) 최고차항인 n^2으로 묶으면

$$\lim_{n\to\infty}(n^2-5n)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{5}{n}\right)$$

$$=\infty\cdot 1=\infty\ (\text{발산})$$

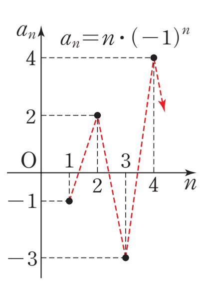
STEP 2 필수 유형

| 16쪽~21쪽 |

01-1 답 (1) 발산(진동) (2) 0에 수렴 (3) 발산(진동)

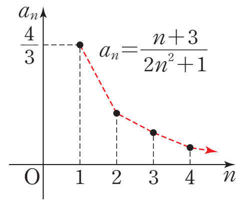
| 해결 전략 | 일반항 a_n에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입하여 항의 값의 변화를 파악한다.

(1) $a_n=n\cdot(-1)^n$에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입하면 $-1, 2, -3, 4, \cdots$이므로 n이 커짐에 따라 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



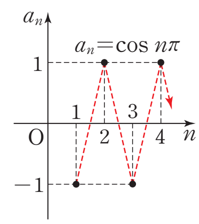
따라서 수열 $\{n\cdot(-1)^n\}$은 발산(진동)한다.

(2) $a_n=\dfrac{n+3}{2n^2+1}$에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입하면 $\dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{9}, \dfrac{6}{19}, \cdots$이므로 n이 커짐에 따라 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 수열 $\left\{\dfrac{n+3}{2n^2+1}\right\}$은 0에 수렴한다.

(3) $a_n=\cos n\pi$에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입하면 $-1, 1, -1, 1, \cdots$이므로 n이 커짐에 따라 변화하는 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 수열 $\{\cos n\pi\}$는 발산(진동)한다.

02-1 답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 1 (3) 1

| 해결 전략 | $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 무리식이 있든 없든 항상 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나누어 그 극한값을 구한다.

(1) $1+2+3+\cdots+(n-1)=\sum\limits_{k=1}^{n-1}k=\dfrac{(n-1)n}{2}=\dfrac{n^2-n}{2}$

이므로

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2}$$

$$=\frac{1-0}{2}=\frac{1}{2}$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}^2 n^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot n^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot n^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}1=1$$

(3) 분모의 최고차항인 n(근호 안은 n^2)으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}}$$

$$=\frac{1}{1-0}=1$$

03-1 답 (1) 양의 무한대로 발산 (2) $\frac{2}{3}$에 수렴 (3) 양의 무한대로 발산

| 해결 전략 | $\infty-\infty$ 꼴의 극한은 무리식이면 근호를 포함한 쪽을 유리화하고, 다항식이면 최고차항으로 묶는다.

(1) 분모를 1로 생각하고 분자를 유리화하면

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$
$$=\frac{\infty}{1+1}=\infty \text{ (발산)}$$

(2) 분모, 분자를 각각 유리화하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-2}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-2})(\sqrt{n}+\sqrt{n-2})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n-2})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}{3(\sqrt{n}+\sqrt{n-2})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1}\right)}{3\left(\sqrt{1}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}\right)}$$
$$=\frac{2(1+1)}{3(1+1)}=\frac{2}{3} \text{ (수렴)}$$

(3) 최고차항인 n^3으로 묶으면

$$\lim_{n\to\infty}(n^3-100n)=\lim_{n\to\infty} n^3\left(1-\frac{100}{n^2}\right)=\infty\cdot 1=\infty \text{ (발산)}$$

04-1 답 2

|해결 전략| $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한이므로 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈다.

분모의 최고차항인 n(근호 안은 n^2)으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{\sqrt{n^2+2n-1}+an}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+a}=\frac{1}{1+a}$$

따라서 $\frac{1}{1+a}=\frac{1}{3}$이므로 $a=2$

04-2 답 6

|해결 전략| 분자를 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 식을 변형한 후 극한값이 0이 아닌 수에 수렴하려면 분자의 차수와 분모의 차수가 같아야 함을 이용한다.

분모를 1로 생각하고 분자를 유리화하면

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-\sqrt{bn^2+3n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+an}-\sqrt{bn^2+3n})(\sqrt{n^2+an}+\sqrt{bn^2+3n})}{\sqrt{n^2+an}+\sqrt{bn^2+3n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-b)n^2+(a-3)n}{\sqrt{n^2+an}+\sqrt{bn^2+3n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-b)n+(a-3)}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+\sqrt{b+\frac{3}{n}}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때, $1-b\neq 0$이면 발산하여 극한값이 존재할 수 없으므로

$1-b=0 \quad \therefore b=1$

따라서 ㉠에서 $\frac{a-3}{1+\sqrt{b}}=\frac{a-3}{1+1}=1$이므로 $a=5$

$\therefore a+b=5+1=6$

05-1 답 3

|해결 전략| 먼저 $\frac{3a_n-5}{a_n-2}=b_n$으로 치환한다.

$\frac{3a_n-5}{a_n-2}=b_n$으로 놓으면

$3a_n-5=a_nb_n-2b_n$, $(3-b_n)a_n=5-2b_n$

$\therefore a_n=\frac{5-2b_n}{3-b_n}$

$\lim_{n\to\infty} b_n=4$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5-2b_n}{3-b_n}=\frac{5-2\cdot 4}{3-4}=3$$

05-2 답 3

|해결 전략| 먼저 $(3n-2)a_n=b_n$으로 치환한다.

$(3n-2)a_n=b_n$으로 놓으면

$a_n=\frac{b_n}{3n-2}$

$\lim_{n\to\infty} b_n=9$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{(n+1)\cdot\frac{b_n}{3n-2}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{3n-2}\cdot b_n\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n-2}\cdot\lim_{n\to\infty} b_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty} b_n$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 9=3$$

다른 풀이

$\lim_{n\to\infty}(3n-2)a_n=9$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{(3n-2)a_n\cdot\frac{n+1}{3n-2}\right\}$$
$$=9\cdot\frac{1}{3}=3$$

06-1 답 2

|해결 전략| 부등식으로 대소 관계가 주어진 수열의 극한값을 구할 때에는 수열의 극한의 대소 관계를 이용한다.

$\frac{2n^2}{n+1}<a_n<\frac{2n^2+3n}{n+1}$에서 각 변을 n으로 나누면

$$\frac{2n}{n+1}<\frac{a_n}{n}<\frac{2n+3}{n+1}$$

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}}=2$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}=2$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$

06-2 답 0

|해결 전략| 모든 자연수 n에 대하여 $-1\le\sin n\theta\le1$임을 이용한다.

$-1\le\sin n\theta\le1$이므로 부등식의 각 변을 $1+n^2$으로 나누면

$-\frac{1}{1+n^2}\le\frac{\sin n\theta}{1+n^2}\le\frac{1}{1+n^2}$

이때, $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{1+n^2}\right)=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+n^2}=0$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{1+n^2}=0$

2 등비수열의 극한

개념 확인 22쪽

1 (1) 양의 무한대로 발산 (2) 발산(진동) (3) 0에 수렴

1 (1) 수열 $\{6^n\}$은 공비가 6인 등비수열이고, $6>1$이므로

$\lim_{n\to\infty}6^n=\infty$ (발산)

(2) 수열 $\{(-3)^n\}$은 공비가 -3인 등비수열이고, $-3<-1$이므로 발산(진동)한다.

(3) 수열 $\left\{\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right\}$은 공비가 $-\frac{3}{4}$인 등비수열이고,

$-1<-\frac{3}{4}<1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n=0$ (수렴)

STEP 1 개념 드릴 | 24쪽 |

개념 check

1-1 (1) ∞, 발산 (2) 0, 수렴 (3) 0, 0, 0, 수렴

2-1 -1, -2, -1

스스로 check

1-2 답 (1) 0에 수렴 (2) 1에 수렴 (3) 양의 무한대로 발산 (4) 0에 수렴

(1) $\frac{(-2)^{n+1}}{3^{2n}}=\frac{(-2)\cdot(-2)^n}{(3^2)^n}=(-2)\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)^n$에서

공비는 $-\frac{2}{9}$이고, $-1<-\frac{2}{9}<1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{3^{2n}}=0$ (수렴)

(2) $(\log5+\log2)^n=(\log10)^n=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}(\log5+\log2)^n=1$ (수렴)

(3) $\frac{\sqrt{7}^n}{2^{n+2}}=\frac{(\sqrt{7})^n}{2^2\cdot2^n}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^n$에서

공비는 $\frac{\sqrt{7}}{2}$이고, $\frac{\sqrt{7}}{2}>1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{7^n}}{2^{n+2}}=\infty$ (발산)

(4) $6^{-n}\cdot3^n=\frac{3^n}{6^n}=\left(\frac{3}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$에서

공비는 $\frac{1}{2}$이고, $-1<\frac{1}{2}<1$이므로

$\lim_{n\to\infty}(6^{-n}\cdot3^n)=0$ (수렴)

2-2 답 (1) $2\le x<4$ (2) $-2<x\le6$

(1) 등비수열 $\{(3-x)^n\}$의 공비가 $3-x$이므로

주어진 수열이 수렴할 조건은 $-1<3-x\le1$

따라서 $-4<-x\le-2$이므로 $2\le x<4$

(2) 등비수열 $\left\{\left(\frac{x-2}{4}\right)^n\right\}$의 공비가 $\frac{x-2}{4}$이므로

주어진 수열이 수렴할 조건은 $-1<\frac{x-2}{4}\le1$

따라서 $-4<x-2\le4$이므로 $-2<x\le6$

STEP 2 필수 유형 | 25쪽~27쪽 |

01-1 답 (1) 27에 수렴 (2) 양의 무한대로 발산 (3) 음의 무한대로 발산

|해결 전략| $\left\{\frac{c^n+d^n}{a^n+b^n}\right\}$ 꼴일 때는 분모에서 밑의 절댓값이 가장 큰 항으로 분모, 분자를 나누고, a^n-b^n 꼴일 때는 밑이 가장 큰 항으로 묶어서 생각한다.

(1) 분모에서 밑의 절댓값이 가장 큰 항인 3^{n-1}으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}+1}{3^{n-1}-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$$

$=\frac{27+0}{1-0}$ ← $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$

$=27$ (수렴)

(2) 분모에서 밑의 절댓값이 가장 큰 항인 2^n(근호 안은 4^n)으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5^n}-5}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^n}-5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1}$$
$$=\frac{\infty-0}{1} \quad \leftarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^n}=\infty,\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$$
$$=\infty\ (\text{발산})$$

(3) 밑이 가장 큰 항인 7^n으로 묶으면

$$\lim_{n\to\infty}\{(-4)^n-7^n\}=\lim_{n\to\infty}7^n\left\{\left(-\frac{4}{7}\right)^n-1\right\}$$
$$=\infty\cdot(-1) \leftarrow \lim_{n\to\infty}7^n=\infty,\ \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{4}{7}\right)^n=0$$
$$=-\infty\ (\text{발산})$$

02-1 답 $2<x\le 8$

|해결 전략| 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하기 위한 조건은 $-1<r\le 1$임을 이용한다.

등비수열 $\{(\log_2 x-2)^n\}$의 공비는 $\log_2 x-2$이므로

주어진 수열이 수렴할 조건은

$-1<\log_2 x-2\le 1$

$1<\log_2 x\le 3$

$\log_2 2^1<\log_2 x\le \log_2 2^3$

$\therefore\ 2<x\le 8$

LECTURE

로그의 진수에 미지수를 포함하는 부등식의 풀이

$x_1>0,\ x_2>0$이고

❶ $a>1$일 때, $\log_a x_1<\log_a x_2 \Longleftrightarrow x_1<x_2$

❷ $0<a<1$일 때, $\log_a x_1<\log_a x_2 \Longleftrightarrow x_1>x_2$

02-2 답 $x=-2$ 또는 $-1<x<2$

|해결 전략| 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$이 수렴하기 위한 조건은 $a=0$ 또는 $-1<r\le 1$임을 이용한다.

등비수열 $\left\{(x+2)\left(\frac{x-x^2}{2}\right)^{n-1}\right\}$의 첫째항은 $x+2$, 공비는 $\frac{x-x^2}{2}$이므로 주어진 수열이 수렴할 조건은

$x=-2$ 또는 $-1<\frac{x-x^2}{2}\le 1$

$-1<\frac{x-x^2}{2}\le 1$에서 $-2<x-x^2\le 2$

(i) $-2<x-x^2$에서 $x^2-x-2<0$이므로

$(x+1)(x-2)<0 \qquad \therefore\ -1<x<2$

(ii) $x-x^2\le 2$에서 $x^2-x+2\ge 0$

이때, $x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(i), (ii)에서 $-1<x<2$

따라서 구하는 x의 값의 범위는

$x=-2$ 또는 $-1<x<2$

03-1 답 $0<r<1$일 때 0, $r>1$일 때 $-\frac{1}{r}$

|해결 전략| $r>0$, $r\ne 1$이므로 r의 값의 범위를 $0<r<1$, $r>1$로 나누어 구한다.

(i) $0<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}}{1-r^{2n+1}}=\frac{0}{1-0}=0$$

(ii) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$, 즉 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}}{1-r^{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r}}{\frac{1}{r^{2n+1}}-1}=\frac{\frac{1}{r}}{0-1}=-\frac{1}{r}$$

03-2 답 6

|해결 전략| r의 값의 범위를 $|r|<1$, $r=1$, $r=-1$, $|r|>1$의 네 가지 경우로 나누어 12로 수렴할 수 있는지 여부를 판단한다.

(i) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^{n+1}}{r^n-5}=\frac{0}{0-5}=0\ne 12$$

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^{n+1}}{r^n-5}=\frac{2}{1-5}=-\frac{1}{2}\ne 12$$

(iii) $r=-1$일 때,

n이 홀수이면 $\lim_{n\to\infty}r^n=-1$, $\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^{n+1}}{r^n-5}=\frac{2}{-1-5}=-\frac{1}{3}$$

n이 짝수이면 $\lim_{n\to\infty}r^n=1$, $\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=-1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^{n+1}}{r^n-5}=\frac{-2}{1-5}=\frac{1}{2}$$

따라서 수렴하지 않는다.

(iv) $|r|>1$일 때, $-1<\frac{1}{r}<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^{n+1}}{r^n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2r}{1-\frac{5}{r^n}}=\frac{2r}{1-0}=2r$$

즉, $2r=12$에서 $r=6$

(i)~(iv)에서 수열 $\left\{\frac{2r^{n+1}}{r^n-5}\right\}$이 12로 수렴하도록 하는 r의 값은 6뿐이다.

STEP 3 유형 드릴

| 28쪽~29쪽 |

1-1 답 9

|해결 전략| 자연수의 거듭제곱의 합 공식을 이용하여 주어진 식을 정리한 후 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나누어 구한다.

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$이므로

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+n}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}=\lim_{n\to\infty}\frac{18n^3+6n}{2n^3+3n^2+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{18+\frac{6}{n^2}}{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}=9$$

1-2 답 2

| 해결 전략 | 로그의 기본 성질을 이용하여 하나의 로그로 변형한다.

$\log_2(2n+1)+\log_2(2n-1)-2\log_2(n-3)$

$=\log_2\frac{(2n+1)(2n-1)}{(n-3)^2}=\log_2\frac{4n^2-1}{n^2-6n+9}$

이므로

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{4n^2-1}{n^2-6n+9}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{4-\frac{1}{n^2}}{1-\frac{6}{n}+\frac{9}{n^2}}$$

$$=\log_2 4=2$$

LECTURE

로그의 기본 성질

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때, 다음이 성립한다.

❶ $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

❷ $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

❸ $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

❹ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

2-1 답 3

| 해결 전략 | 먼저 분모를 유리화한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n})}{(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n})(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n})}{4n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n})}{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}\right)}{2}$$

$$=\frac{3(1+1)}{2}=3$$

2-2 답 $-\frac{1}{2}$

| 해결 전략 | 자연수의 거듭제곱의 합 공식을 이용하여 주어진 식을 정리한 후 분모를 1로 생각하고 분자를 유리화한다.

$$2+4+6+\cdots+2n=\sum_{k=1}^{n}2k=2\sum_{k=1}^{n}k=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n^2+n$$

이므로

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-\sqrt{n^2+n})(n+\sqrt{n^2+n})}{n+\sqrt{n^2+n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n+\sqrt{n^2+n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

3-1 답 4

| 해결 전략 | 분모를 1로 생각하고 분자를 유리화한다.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-an+1}-n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-an+1}-n)(\sqrt{n^2-an+1}+n)}{\sqrt{n^2-an+1}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-an+1}{\sqrt{n^2-an+1}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-a+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=-\frac{a}{2}$$

즉, $-\frac{a}{2}=-2$이므로 $a=4$

3-2 답 54

| 해결 전략 | 분모를 1로 생각하고 분자를 유리화한 후 $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\alpha$ (α는 0이 아닌 상수)이면 ($f(n)$의 차수)$=$($g(n)$의 차수) 임을 이용한다.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+bn}-3n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{an^2+bn}-3n)(\sqrt{an^2+bn}+3n)}{\sqrt{an^2+bn}+3n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-9)n^2+bn}{\sqrt{an^2+bn}+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-9)n+b}{\sqrt{a+\frac{b}{n}}+3}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

㉠에서 $a-9\neq0$이면 발산하므로

$a-9=0$ $\quad\therefore a=9$

$a=9$를 ㉠에 대입하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{b}{\sqrt{9+\frac{b}{n}}+3}=\frac{b}{3+3}=\frac{b}{6}$

즉, $\frac{b}{6}=1$이므로 $b=6$

$\therefore ab=54$

4-1 답 4

|해결 전략| 일반항 a_n을 포함한 식을 b_n으로 치환하여 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 구한다.

$(3n+2)a_n=b_n$으로 놓으면 $a_n=\dfrac{b_n}{3n+2}$

이때, $\lim_{n\to\infty} b_n=6$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{n-1}a_n&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3}{n-1}\cdot\frac{b_n}{3n+2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3}{3n^2-n-2}\cdot b_n\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n^2}}{3-\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}\cdot\lim_{n\to\infty}b_n\\&=\frac{2}{3}\cdot 6=4\end{aligned}$$

다른 풀이

$\lim_{n\to\infty}(3n+2)a_n=6$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{n-1}a_n&=\lim_{n\to\infty}\left\{(3n+2)a_n\cdot\frac{2n^2+3}{(n-1)(3n+2)}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{(3n+2)a_n\cdot\frac{2n^2+3}{3n^2-n-2}\right\}\\&=6\cdot\frac{2}{3}=4\end{aligned}$$

4-2 답 3

|해결 전략| 일반항 a_n을 포함한 식을 b_n으로 치환하여 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 구한다.

$\dfrac{a_n+3}{2a_n-3}=b_n$으로 놓으면

$a_n+3=2a_nb_n-3b_n$, $(2b_n-1)a_n=3b_n+3$

$\therefore\ a_n=\dfrac{3b_n+3}{2b_n-1}$

이때, $\lim_{n\to\infty}b_n=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3b_n+3}{2b_n-1}=\frac{3\cdot2+3}{2\cdot2-1}=3$$

5-1 답 2

|해결 전략| 먼저 주어진 부등식에서 a_n을 $\dfrac{a_n-5n^2}{n}$이 되도록 부등식을 변형한 후 수열의 극한의 대소 관계를 이용한다.

$5n^2+2n-2<a_n<5n^2+2n+3$에서

$2n-2<a_n-5n^2<2n+3$

$\therefore\ \dfrac{2n-2}{n}<\dfrac{a_n-5n^2}{n}<\dfrac{2n+3}{n}$

이때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n-2}{n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2-\frac{2}{n}}{1}=2$,

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2+\frac{3}{n}}{1}=2$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n-5n^2}{n}=2$

5-2 답 $\lim_{n\to\infty}a_n=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

|해결 전략| $a_n+b_n=c_n$, $a_n-b_n=d_n$으로 치환하여 계산한다.

$a_n+b_n=c_n$ ······ ㉠

으로 놓으면 $\alpha-\dfrac{1}{n}<c_n<\alpha+\dfrac{1}{n}$

이때, $\lim_{n\to\infty}\left(\alpha-\dfrac{1}{n}\right)=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}\left(\alpha+\dfrac{1}{n}\right)=\alpha$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$

$a_n-b_n=d_n$ ······ ㉡

으로 놓으면 $\beta-\dfrac{1}{n}<d_n<\beta+\dfrac{1}{n}$

이때, $\lim_{n\to\infty}\left(\beta-\dfrac{1}{n}\right)=\beta$, $\lim_{n\to\infty}\left(\beta+\dfrac{1}{n}\right)=\beta$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}d_n=\beta$

㉠+㉡을 하면 $2a_n=c_n+d_n$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{c_n+d_n}{2}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

㉠−㉡을 하면 $2b_n=c_n-d_n$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{c_n-d_n}{2}=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

6-1 답 0

|해결 전략| 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}-2x}{x^{2n}+x}$에 $x=2$, $x=\dfrac{1}{2}$을 각각 대입하여 구한다.

$$f(2)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}-4}{2^{2n}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{4}{2^{2n}}}{1+\frac{2}{2^{2n}}}=\frac{2-0}{1+0}=2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}+\frac{1}{2}}=\frac{0-1}{0+\frac{1}{2}}=-2$$

$\therefore\ f(2)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$

6-2 답 $\dfrac{3}{2}$

|해결 전략| 먼저 주어진 조건을 이용하여 등비수열의 일반항을 구한다.

주어진 조건에서 $a_1=2$이므로 첫째항이 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_n=2r^{n-1}$

$a_1-a_2+a_3-a_4=2-2r+2r^2-2r^3=-40$에서

$r^3-r^2+r-21=0$, $(r-3)(r^2+2r+7)=0$

$\therefore r=3$ ($\because r$는 자연수)

$\therefore a_n=2\cdot 3^{n-1}$

이때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\dfrac{2(3^n-1)}{3-1}=3^n-1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{2\cdot 3^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{3^{n-1}}}{2}=\frac{3}{2}$$

LECTURE

등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 $r(r\neq 0)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

❶ $r\neq 1$일 때, $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

❷ $r=1$일 때, $S_n=na$

7-1 답 $1<x\leq 100$

| 해결 전략 | 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하기 위한 조건은 $-1<r\leq 1$임을 이용한다.

등비수열 $\{(\log x-1)^n\}$의 공비는 $\log x-1$이므로 주어진 등비수열이 수렴할 조건은

$-1<\log x-1\leq 1$, $0<\log x\leq 2$

$\log 1<\log x\leq \log 10^2$ $\quad\therefore 1<x\leq 100$

7-2 답 $\dfrac{\pi}{3}\leq x<\dfrac{2}{3}\pi$

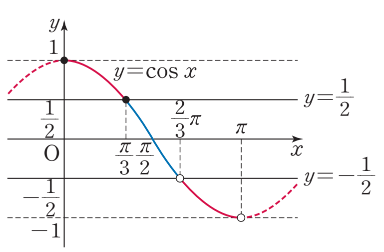
| 해결 전략 | 코사인함수 $y=\cos x$의 그래프를 이용하여 코사인함수가 포함된 부등식을 푼다.

등비수열 $\{(2\cos x)^{n-1}\}$의 공비는 $2\cos x$이므로 주어진 등비수열이 수렴할 조건은

$-1<2\cos x\leq 1$ $\quad\therefore -\dfrac{1}{2}<\cos x\leq\dfrac{1}{2}$

따라서 구하는 x의 값의 범위는 다음 그림에 의하여

$\dfrac{\pi}{3}\leq x<\dfrac{2}{3}\pi$ ($\because 0\leq x<\pi$)



8-1 답 ④

| 해결 전략 | r의 값의 범위에 따라 극한을 조사한다.

① $-1<r<0$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}r^{2n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^{2n}}{1+r^n}=\frac{1-0}{1+0}=1\ (\text{수렴})\qquad\therefore \text{참}$$

② $0<r<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}r^{2n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^{2n}}{1+r^n}=\frac{1-0}{1+0}=1\ (\text{수렴})\qquad\therefore \text{참}$$

③ $r=1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}r^{2n}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^{2n}}{1+r^n}=\frac{1-1}{1+1}=0\ (\text{수렴})\qquad\therefore \text{참}$$

④ $r<-1$일 때,

n이 홀수이면 $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=-\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}r^{2n}=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^{2n}}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^n}-r^n}{\frac{1}{r^n}+1}=\infty$$

n이 짝수이면 $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}r^{2n}=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^{2n}}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^n}-r^n}{\frac{1}{r^n}+1}=-\infty$$

따라서 주어진 수열은 $r<-1$일 때 발산(진동)한다. $\quad\therefore$ 거짓

⑤ $r>1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}r^{2n}=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^{2n}}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^n}-r^n}{\frac{1}{r^n}+1}=-\infty\ (\text{발산})$$

④에서 $r<-1$일 때도 발산한다.

따라서 주어진 수열은 $|r|>1$일 때 발산한다. $\quad\therefore$ 참

8-2 답 10

| 해결 전략 | $r\neq -5$이므로 r의 값의 범위를 $|r|<5$, $r=5$, $|r|>5$로 나누어 구한다.

(i) $|r|<5$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{r}{5}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+2r^n}{5^n+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2\cdot\left(\frac{r}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{r}{5}\right)^n}=\frac{1+0}{1+0}=1$$

(ii) $r=5$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{r}{5}\right)^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+2r^n}{5^n+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2\cdot\left(\frac{r}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{r}{5}\right)^n}=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}$$

(iii) $|r|>5$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{r}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+2r^n}{5^n+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{r}\right)^n+2}{\left(\frac{5}{r}\right)^n+1}=\frac{0+2}{0+1}=2$$

(i)~(iii)에서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n+2r^n}{5^n+r^n}<2$를 만족시키는 r의 값의 범위는

$-5<r\leq 5$이므로 구하는 정수 r의 개수는 10이다.

2 | 급수

1 급수의 수렴과 발산

개념 확인 32쪽~34쪽

1 수렴, 1

2 풀이 참조

3 (1) -2 (2) $-\frac{5}{2}$

1 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$$
$$=2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=2\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=2\cdot\frac{1}{2} \leftarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0$$
$$=1$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.

2 (1) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{n^2-6}{n^2+8}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-6}{n^2+8}=1$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

(2) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=\infty$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

3 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+b_n)=3\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$$=3\cdot(-2)+4$$
$$=-2$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{4}-\frac{b_n}{2}\right)=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$$=\frac{1}{4}\cdot(-2)-\frac{1}{2}\cdot4$$
$$=-\frac{5}{2}$$

STEP 1 개념 드릴 | 35쪽 |

개념 check

1-1 (1) 1, 수렴, 1 (2) $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 발산

2-1 1, 0

스스로 check

1-2 답 (1) 수렴, $\frac{1}{2}$ (2) 발산 (3) 발산

(1) 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}=\frac{3n}{2(3n+2)}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2(3n+2)}=\frac{1}{2}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{1}{2}$이다.

(2) 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$$
$$=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$$
$$=\sqrt{2n+1}-1$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+1}-1)=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

(3) 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$$
$$=\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-1-\sqrt{2}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-1-\sqrt{2})=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

2-2 답 풀이 참조

(1) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{n}{2n-1}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

(2) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{2n}{2n+1}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1}=1$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

STEP 2 필수 유형 | 36쪽~38쪽 |

01-1 답 $-\log 2$

|해결 전략| 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}$의 합은 로그의 기본 성질을 이용하여 구한다.

제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log\left\{1-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k}{k+1}\cdot\frac{k+2}{k+1}\right)$$
$$=\log\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)+\log\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)+\log\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)+\cdots+\log\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$=\log\left\{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\cdots\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\log\frac{n+2}{2(n+1)}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log\frac{n+2}{2(n+1)}=\log\frac{1}{2}$$
$$=-\log 2$$

01-2 답 $\frac{3}{4}$

|해결 전략| 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n을 구한 후 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}$의 값을 구한다.

첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n\{2\cdot3+(n-1)\cdot2\}}{2}=n(n+2)$$
$$\therefore \frac{1}{S_n}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{3}{4}$$

LECTURE

등차수열의 합

등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

❶ 첫째항이 a, 제n항이 l일 때, $S_n=\frac{n(a+l)}{2}$

❷ 첫째항이 a, 공차가 d일 때, $S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

02-1 답 발산

|해결 전략| 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$의 일반항의 극한값이 0이 되는지 조사한다.

$a_n=\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$이라 하면

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}}=1$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

02-2 답 4

|해결 전략| 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$임을 이용한다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(3^n a_n-2)$가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(3^n a_n-2)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}3^n a_n=2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{6a_n+5\cdot 4^{-n}}{a_n+3^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6\cdot 3^n a_n+5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n}{3^n a_n+1}$$
$$=\frac{6\cdot 2+5\cdot 0}{2+1}=4$$

03-1 답 2

| 해결 전략 | 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)로 놓고 급수의 성질을 이용한다.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)로 놓으면

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=6$에서

$\alpha+\beta=6$ ······ ㉠

또, $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-3b_n)=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n-3\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2$에서

$2\alpha-3\beta=2$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=4$, $\beta=2$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta=2$

다른 풀이

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\{2(a_n+b_n)-(2a_n-3b_n)\}$$
$$=\frac{2}{5}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)-\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-3b_n)$$
$$=\frac{2}{5}\cdot 6-\frac{1}{5}\cdot 2=2$$

03-2 답 참

| 해결 전략 | 먼저 급수와 수열의 극한값 사이의 관계를 이용한다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n b_n=0$

수열 $\{a_n\}$이 0이 아닌 값으로 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=p\,(p\neq 0)$라 하면

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n b_n}{a_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n b_n}{\lim_{n\to\infty}a_n}$$
$$=\frac{0}{p}=0$$

따라서 주어진 명제는 참이다.

2 등비급수

개념 확인 39쪽~41쪽

1 (1) 수렴, $\frac{3}{2}$ (2) 발산

2 (1) $0<x<\frac{2}{3}$ (2) $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$

1 (1) 주어진 급수는 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비급수이다.

이때, $\left|\frac{1}{3}\right|<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴하고, 그 합은

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

(2) 주어진 급수는 첫째항이 1, 공비가 -2인 등비급수이다.
이때, $|-2|>1$이므로 주어진 등비급수는 발산한다.

2 (1) 첫째항이 1, 공비가 $3x-1$이므로 주어진 등비급수가 수렴할 조건은

$-1<3x-1<1$, $0<3x<2$ $\quad\therefore 0<x<\frac{2}{3}$

(2) 첫째항이 1, 공비가 $-3x$이므로 주어진 등비급수가 수렴할 조건은

$-1<-3x<1$ $\quad\therefore -\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$

STEP 1 개념 드릴 | 42쪽 |

개념 check

1-1 (1) $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ (2) $\sqrt{3}$, 발산

2-1 1, 4, 3

3-1 0.1, 90, $\frac{23}{90}$

스스로 check

1-2 답 (1) 수렴, $\frac{2}{3}$ (2) 발산 (3) 수렴, $-\frac{1}{3}$ (4) 발산

(1) 주어진 급수는 첫째항이 0.6, 공비가 0.1인 등비급수이다.
이때, $|0.1|<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴하고, 그 합은

$$\frac{0.6}{1-0.1}=\frac{2}{3}$$

(2) 주어진 급수는 첫째항이 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 공비가 $-\sqrt{2}$인 등비급수이다.

이때, $|-\sqrt{2}|>1$이므로 주어진 등비급수는 발산한다.

(3) 주어진 급수는 첫째항이 $-\frac{1}{2}$, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비급수이다.

이때, $\left|-\frac{1}{2}\right|<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴하고, 그 합은

$$\frac{-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{3}$$

(4) 주어진 급수는 첫째항이 1, 공비가 $-\sqrt{5}$인 등비급수이다.
이때, $|-\sqrt{5}|>1$이므로 주어진 등비급수는 발산한다.

2-2 답 (1) $1<x<3$ (2) $1<x<5$

(1) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(2-x)^n$의 공비가 $2-x$이므로 주어진 등비급수가

수렴할 조건은 $-1<2-x<1$

따라서 $-3<-x<-1$이므로

$1<x<3$

(2) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-3}{2}\right)^n$의 공비가 $\frac{x-3}{2}$이므로 주어진 등비급수가

수렴할 조건은 $-1<\frac{x-3}{2}<1$

따라서 $-2<x-3<2$이므로

$1<x<5$

3-2 답 (1) $\frac{7}{18}$ (2) $\frac{116}{99}$

(1) $0.3\dot{8}=0.3+\underline{0.08+0.008+0.0008+\cdots}$

첫째항이 0.08, 공비가 0.1인 등비급수

$$=0.3+\frac{0.08}{1-0.1}=0.3+\frac{0.08}{0.9}$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{8}{90}=\frac{35}{90}=\frac{7}{18}$$

(2) $1.\dot{1}\dot{7}=1+\underline{0.17+0.0017+0.000017+\cdots}$

첫째항이 0.17, 공비가 0.01인 등비급수

$$=1+\frac{0.17}{1-0.01}=1+\frac{0.17}{0.99}$$

$$=1+\frac{17}{99}=\frac{116}{99}$$

STEP 2 필수 유형 | 43쪽~46쪽 |

01-1 답 $-\frac{9}{4}$

| 해결 전략 | 등비급수의 합의 꼴로 나타낸 후 주어진 급수의 합을 구한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-2^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$=\frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}-\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=-\frac{1}{4}-2=-\frac{9}{4}$$

01-2 답 $\frac{1}{5}$

| 해결 전략 | $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$임을 이용하여 등비급수의 합을 구한다.

$\sin^n\frac{\pi}{6}=\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\sin^n\frac{\pi}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{1}{5}$$

02-1 답 (1) -3, -2, -1, 1 (2) -2

| 해결 전략 | 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$이 수렴하기 위한 조건은 $a=0$ 또는 $-1<r<1$임을 이용한다.

(1) 첫째항이 $x-1$, 공비가 $1+\frac{x}{2}$이므로 주어진 등비급수가 수렴할 조건은 다음과 같다.

(i) 첫째항이 0일 때, $x=1$

(ii) $-1<(\text{공비})<1$에서 $-1<1+\frac{x}{2}<1$이므로

$-2<\frac{x}{2}<0$

$\therefore -4<x<0$

(i), (ii)에서 구하는 정수 x의 값은

-3, -2, -1, 1

(2) 첫째항이 $x-1$, 공비가 $1+\frac{x}{2}$, 등비급수의 합이 -3이므로

$\frac{x-1}{1-\left(1+\frac{x}{2}\right)}=-3$에서

$\frac{2(x-1)}{-x}=-3$

$2(x-1)=3x$

$\therefore x=-2$

02-2 답 $\frac{1}{10}<x\le 1$

| 해결 전략 | 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하기 위한 조건은 $-1<r\le 1$이고, 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 수렴하기 위한 조건은 $-1<r<1$이다.

(i) 등비수열 $\left\{\left(\frac{x+1}{2}\right)^n\right\}$이 수렴할 조건은

$-1<\frac{x+1}{2}\le 1$이므로

$-2<x+1\le 2$

$\therefore -3<x\le 1$

(ii) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(\log x)^n$이 수렴할 조건은

$-1<\log x<1$이므로

$\log\frac{1}{10}<\log x<\log 10$

$\therefore \frac{1}{10}<x<10$

(i), (ii)에서 구하는 x의 값의 범위는

$\frac{1}{10}<x\le 1$

03-1 답 $\frac{8}{99}$

|해결 전략| 순환소수를 등비급수로 나타낸 후 등비급수의 합 공식을 이용하여 a_1의 값을 구한다.

$0.\dot{5}=0.5+0.05+0.005+\cdots$

$=\frac{0.5}{1-0.1}=\frac{0.5}{0.9}=\frac{5}{9}$

$0.\dot{1}\dot{8}=0.18+0.0018+0.000018+\cdots$

$=\frac{0.18}{1-0.01}=\frac{0.18}{0.99}=\frac{2}{11}$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{2}{11}$에서 $\frac{a_1}{1-\frac{5}{9}}=\frac{2}{11}$

$\therefore a_1=\frac{2}{11}\cdot\frac{4}{9}=\frac{8}{99}$

03-2 답 $\frac{5}{21}$

|해결 전략| 순환소수를 등비급수로 나타낸 후 등비급수의 합을 구한다.

$0.\dot{2}=0.2+0.02+0.002+\cdots$

$=\frac{0.2}{1-0.1}=\frac{0.2}{0.9}=\frac{2}{9}$

$0.0\dot{6}=0.06+0.006+0.0006+\cdots$

$=\frac{0.06}{1-0.1}=\frac{0.06}{0.9}=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{2}{9}$, 공비가 $\frac{1}{15}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{15}}=\frac{5}{21}$$

04-1 답 $\frac{2}{3}$

|해결 전략| $S_1, S_2, S_3, \cdots$을 구한 후 등비급수의 합을 구한다.

$S_1=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2},\ S_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8},\ S_3=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{32},\ \cdots$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

STEP 3 유형 드릴

| 47쪽~49쪽 |

1-1 답 $\frac{3}{2}$

|해결 전략| 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 합은 제n항까지의 부분합 S_n을 구하여 $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값을 구한다.

주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$a_n=\frac{2}{n^2+2n}=\frac{2}{n(n+2)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$

제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{2}$$

1-2 답 $\frac{1}{4}$

|해결 전략| 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 합은 제n항까지의 부분합 S_n을 구하여 $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값을 구한다.

주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$a_n=\frac{1}{(2n+1)^2-1}=\frac{1}{2n(2n+2)}=\frac{1}{4n(n+1)}$

제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{4}$$

2-1 답 $\frac{1}{\log 2}$

|해결 전략| 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(\log_{n+1}10-\log_{n+2}10)$의 합은 로그의 밑의 변환 공식을 이용하여 구한다.

로그의 밑의 변환 공식에 의하여

$\log_{n+1}10=\frac{1}{\log(n+1)},\ \log_{n+2}10=\frac{1}{\log(n+2)}$

제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(\log_{k+1}10-\log_{k+2}10)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{\log(k+1)}-\frac{1}{\log(k+2)}\right\}$$
$$=\left(\frac{1}{\log 2}-\frac{1}{\log 3}\right)+\left(\frac{1}{\log 3}-\frac{1}{\log 4}\right)+\left(\frac{1}{\log 4}-\frac{1}{\log 5}\right)+\cdots+\left\{\frac{1}{\log(n+1)}-\frac{1}{\log(n+2)}\right\}$$
$$=\frac{1}{\log 2}-\frac{1}{\log(n+2)}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\log 2}-\frac{1}{\log(n+2)}\right\}=\frac{1}{\log 2}$$

LECTURE

로그의 밑의 변환 공식

$a>0,\ a\neq1,\ b>0,\ c>0,\ c\neq1$일 때

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

2-2 답 -1

|해결 전략| 급수 $\sum_{n=2}^{\infty}\log_2\frac{n^2-1}{n^2}$의 합은 로그의 기본 성질을 이용하여 구한다.

$$\sum_{k=2}^{n}\log_2\frac{k^2-1}{k^2}$$
$$=\sum_{k=2}^{n}\log_2\frac{(k-1)(k+1)}{k\cdot k}$$
$$=\log_2\frac{1\cdot3}{2\cdot2}+\log_2\frac{2\cdot4}{3\cdot3}+\log_2\frac{3\cdot5}{4\cdot4}+\cdots+\log_2\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}$$
$$=\log_2\left\{\frac{1\cdot3}{2\cdot2}\cdot\frac{2\cdot4}{3\cdot3}\cdot\frac{3\cdot5}{4\cdot4}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}\right\}$$
$$=\log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\right)$$
$$=\log_2\frac{n+1}{2n}$$
$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\log_2\frac{n^2-1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\log_2\frac{k^2-1}{k^2}=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n+1}{2n}=\log_2\frac{1}{2}=-1$$

3-1 답 $\frac{1}{3}$

|해결 전략| 먼저 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구한 후 부분분수를 이용하여 급수의 합을 구한다.

수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의하여

$a_1=S_1=3$ …… ㉠

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=2n+1\ (n\geq2)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a_n=2n+1\ (n\geq1)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{a_na_{n+1}}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{3}$$

3-2 답 $\frac{1}{2}$

|해결 전략| a_n 대신 $a_{n+2}-a_{n+1}$로 놓고 부분분수를 이용하여 급수의 합을 구한다.

주어진 조건에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2}}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\left(\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$$

수열 $\{a_n\}$의 정의에서 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)=\frac{1}{a_2}=\frac{1}{2}$$

4-1 답 1

|해결 전략| 먼저 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한 후 부분분수를 이용하여 급수의 합을 구한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=\frac{4n}{4n^2-1},\ \alpha_n\beta_n=\frac{1}{4n^2-1}$이므로

$$(\alpha_n-\beta_n)^2=(\alpha_n+\beta_n)^2-4\alpha_n\beta_n=\left(\frac{4n}{4n^2-1}\right)^2-\frac{4}{4n^2-1}=\left(\frac{2}{4n^2-1}\right)^2$$

이때, $\alpha_n>\beta_n$이므로

$$\alpha_n-\beta_n=\frac{2}{4n^2-1}=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n-\beta_n)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=1$$

4-2 답 $\frac{1}{8}$

| 해결 전략 | 먼저 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한 후 부분분수를 이용하여 급수의 합을 구한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=2(n+2)$, $\alpha_n\beta_n=n(n+1)$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n{}^2\beta_n+\alpha_n\beta_n{}^2}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n\beta_n(\alpha_n+\beta_n)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}\right)+\cdots+\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\right]$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$
$$=\frac{1}{8}$$

5-1 답 6

| 해결 전략 | 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2)$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=-2$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{12a_n+3b_n{}^2}{2a_n-b_n{}^2}=\frac{\lim_{n\to\infty}(12a_n+3b_n{}^2)}{\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n{}^2)}$$
$$=\frac{12\lim_{n\to\infty}a_n+3\lim_{n\to\infty}b_n{}^2}{2\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n{}^2}$$
$$=\frac{12\cdot(-2)+3\cdot 0}{2\cdot(-2)-0}=6$$

5-2 답 $\frac{1}{3}$

| 해결 전략 | 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이고, $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$임을 이용하여 문제를 해결한다.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}\right)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}\right)=0$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$
$$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

6-1 답 거짓

| 해결 전략 | 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}a_{2n}$, $\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}$이 각각 수렴한다고 해서 $\lim_{n\to\infty}a_n$이 항상 수렴하지는 않는다.

(반례) $a_n=(-1)^n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=1>-1=\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

이때, $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 하면 $S_{2n}=0$, $S_{2n-1}=-1$이므로

$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=0\neq-1=\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.

그러므로 주어진 명제는 거짓이다.

6-2 답 거짓

| 해결 전략 | 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.

(반례) $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $b_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$이라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

즉, $\alpha=1$, $\beta=\frac{1}{3}$이므로 주어진 조건 $\alpha>\beta$를 만족시키지만

$\lim_{n\to\infty}a_n=0=\lim_{n\to\infty}b_n$

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

7-1 답 $\sqrt{e}$

| 해결 전략 | 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}(a \neq 0, |r|<1)$의 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

등비급수의 공비가 $\ln x$이고 $1<x<e$이므로

$0<\ln x<1$

따라서 주어진 등비급수는 수렴한다.

즉, $\frac{1}{1-\ln x}=2$에서 $\ln x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

7-2 답 12

| 해결 전략 | 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}(a \neq 0, |r|<1)$의 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

등비급수의 공비가 $\sin\theta$이고 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로

$0<\sin\theta<1$

따라서 주어진 등비급수는 수렴한다.

즉, $\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}=\frac{18}{13}$에서 $\frac{1-\sin^2\theta}{1-\sin\theta}=\frac{18}{13}$

$1+\sin\theta=\frac{18}{13}$

$\therefore \sin\theta=\frac{5}{13}$

이때, $\sin\theta=\frac{5}{13}$이고 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로

$\tan\theta=\frac{5}{12}$

$\therefore \frac{5}{\tan\theta}=12$

8-1 답 ⑤

| 해결 전략 | 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하기 위한 조건은 $-1<r<1$이다.

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하므로 $-1<r<1$

① $0<r^2<1$이고 $\sum_{n=1}^{\infty}(r^n+r^{2n})=\sum_{n=1}^{\infty}r^n+\sum_{n=1}^{\infty}r^{2n}$이므로
$\sum_{n=1}^{\infty}(r^n+r^{2n})$은 수렴한다.

② $0<r^2<1$이고 $\sum_{n=1}^{\infty}(r^n-r^{2n})=\sum_{n=1}^{\infty}r^n-\sum_{n=1}^{\infty}r^{2n}$이므로
$\sum_{n=1}^{\infty}(r^n-r^{2n})$은 수렴한다.

③ $-1<-r<1$이고
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n+(-r)^n}{2}=\frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}r^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n\right\}$이므로
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n+(-r)^n}{2}$은 수렴한다.

④ $-1<\frac{r-1}{2}<0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r-1}{2}\right)^n$은 수렴한다.

⑤ $-\frac{3}{2}<\frac{r}{2}-1<-\frac{1}{2}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}-1\right)^n$은 반드시 수렴한다고 할 수 없다.

8-2 답 ④

| 해결 전략 | 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하기 위한 조건은 $-1<r<1$이다.

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{[r-1]}{2}\right)^n$이 수렴하므로

$$-1<\frac{[r-1]}{2}<1 \iff -2<[r-1]<2$$
$$\iff -1\le r-1<2$$
$$\iff 0\le r<3$$

① $0\le r^2<9$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}r^{2n}$은 반드시 수렴한다고 할 수 없다.

② $-3<-r\le 0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$은 반드시 수렴한다고 할 수 없다.

③ $0\le\frac{r}{2}<\frac{3}{2}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}\right)^n$은 반드시 수렴한다고 할 수 없다.

④ $0\le\frac{r}{4}<\frac{3}{4}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{4}\right)^n$은 수렴한다.

⑤ $\frac{1}{2}\le\frac{r+1}{2}<2$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r+1}{2}\right)^n$은 반드시 수렴한다고 할 수 없다.

LECTURE

$[x]$가 x를 넘지 않는 최대 정수일 때, 정수 n에 대하여
$[x]=n \Rightarrow n\le x<n+1$

9-1 답 2

| 해결 전략 | 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$이 수렴하기 위한 조건은 $a=0$ 또는 $-1<r<1$이다.

(i) $x=1$일 때, $0+0+0+\cdots=0$ (수렴)

(ii) $x\neq1$일 때, 공비가 $(1-x)^2$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면 $-1<(1-x)^2<1$이어야 한다.
그런데 $(1-x)^2>0$이므로 $(1-x)^2<1$에서
$x^2-2x+1<1$, $x^2-2x<0$
$x(x-2)<0$ $\quad\therefore 0<x<2$
이때, $x\neq1$이므로
$0<x<1$ 또는 $1<x<2$

(i), (ii)에서 $0<x<2$

따라서 $a=0$, $b=2$이므로

$a+b=2$

9-2 답 18

| 해결 전략 | 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하기 위한 조건은 $-1<r\le1$이고, 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하기 위한 조건은 $-1<r<1$이다.

(ⅰ) 등비수열 $\left\{\left(\frac{x-3}{4}\right)^n\right\}$이 수렴할 조건은

$-1<\frac{x-3}{4}\le1$이므로

$-4<x-3\le4$

$\therefore\ -1<x\le7$ …… ㉠

(ⅱ) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(\log_2 x-3)^n$이 수렴할 조건은

$-1<\log_2 x-3<1$이므로

$2<\log_2 x<4$

$\log_2 2^2<\log_2 x<\log_2 2^4$

$\therefore\ 4<x<16$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$4<x\le7$

따라서 정수 x는 5, 6, 7이므로 그 합은

$5+6+7=18$

10-1 답 $0.\dot{4}\dot{6}$

| 해결 전략 | a_n을 구한 후 급수의 합을 순환소수로 나타낸다.

4^n을 10으로 나눈 나머지는 4^n의 일의 자리 수와 같으므로

$a_1=4,\ a_2=6,\ a_3=4,\ a_4=6,\ \cdots$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}=\frac{4}{10}+\frac{6}{10^2}+\frac{4}{10^3}+\frac{6}{10^4}+\cdots$$
$$=0.4646\cdots$$
$$=0.\dot{4}\dot{6}$$

10-2 답 1

| 해결 전략 | 각 항을 분수로 나타내고 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}$을 계산하여 급수의 합을 구한다.

$a_1=\frac{1}{9},\ a_2=\frac{10}{99},\ a_3=\frac{100}{999},\ \cdots$이므로

$\frac{1}{a_1}=9,\ \frac{1}{a_2}=\frac{99}{10},\ \frac{1}{a_3}=\frac{999}{100},\ \cdots$

따라서 $\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=\frac{9}{10},\ \frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}=\frac{9}{100},\ \cdots$ 이므로

$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{9}{10}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}=1$$

3 | 지수함수와 로그함수의 미분

1 지수함수와 로그함수의 극한

개념 확인 52쪽~57쪽

1 (1) $\frac{1}{9}$ (2) ∞ (3) ∞

2 (1) 2 (2) $-\infty$ (3) $-\infty$

3 (1) $e^{\frac{2}{3}}$ (2) $e^{\frac{5}{2}}$ (3) $e^{\frac{5}{4}}$

4 (1) 4 (2) $\frac{2}{3}$ (3) -2

5 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $-\frac{1}{5}$

6 (1) $\frac{1}{\ln 5}$ (2) $\frac{2}{\ln 6}$ (3) $\ln 7$ (4) $\ln 2$

1 (1) $\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

(2) $\frac{\sqrt{5}}{2}>1$이므로 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^x=\infty$

(3) $0<\frac{2}{5}<1$이므로 $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^x=\infty$

2 (1) $\lim_{x\to4} log_2 x=log_2 4=log_2 2^2=2$

(2) $3>1$이므로 $\lim_{x\to0+} log_3 x=-\infty$

(3) $0<\frac{1}{3}<1$이므로 $\lim_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{3}}x=-\infty$

3 (1) $\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{3x}}=\lim_{x\to0}\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^{\frac{2}{3}}=e^{\frac{2}{3}}$

(2) $\lim_{x\to0}(1+5x)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to0}\{(1+5x)^{\frac{1}{5x}}\}^{\frac{5}{2}}=e^{\frac{5}{2}}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{4x}\right\}^{\frac{5}{4}}=e^{\frac{5}{4}}$

4 (1) $ln\,e^4=4\,ln\,e=4$

(2) $\ln\sqrt[3]{e^2}=\ln e^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\ln e=\frac{2}{3}$

(3) $\ln\frac{1}{e^2}=\ln e^{-2}=-2\ln e=-2$

5 (1) $\lim_{x\to0}\frac{ln\,(1+x)}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{ln\,(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{3}=1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{ln\left(1+;2X;\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{ln\left(1+;2X;\right)}{;2X;}\cdot\frac{1}{2}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{1}{4}=1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{5x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{-x}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)$

$=1\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=-\frac{1}{5}$

6 (1) $\lim_{x\to0}\frac{\log_5(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln 5}$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{\log_6(1+2x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\log_6(1+2x)}{2x}\cdot2$

$=\frac{1}{\ln 6}\cdot2=\frac{2}{\ln 6}$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{7^x-1}{x}=\ln 7$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{4^x-1}{2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4^x-1}{x}\right)=\frac{1}{2}\ln 4=\ln 2$

STEP 1 개념 드릴

| 58쪽~59쪽 |

개념 check

1-1 (1) 0 (2) $-\infty$

2-1 (1) -3, -3, $\frac{1}{e^3}$ (2) -1, -1, $\frac{1}{e}$

3-1 (1) 1, $\frac{1}{2}$ (2) 1, $\frac{5}{3}$

4-1 (1) $\ln 2$, $6\ln 2$ (2) 3, $\frac{3}{\ln 5}$ (3) $\ln 2$, $\ln 6$, $\ln\frac{1}{3}$

스스로 check

1-2 답 (1) ∞ (2) 0 (3) ∞ (4) ∞

(1) $0<\frac{2}{7}<1$이므로 $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^x=\infty$

(2) $0<\frac{\sqrt{7}}{3}<1$이므로 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^x=0$

(3) $\frac{\sqrt{6}}{2}>1$이므로 $\lim_{x\to\infty}\log_{\frac{\sqrt{6}}{2}}x=\infty$

(4) $0<\frac{3}{4}<1$이므로 $\lim_{x\to0+}\log_{\frac{3}{4}}x=\infty$

2-2 답 (1) $\frac{1}{e^2}$ (2) e^3 (3) $e^{\frac{5}{2}}$

(1) $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{6x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{3t}\right)^{-6t}$

$=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{3t}\right)^{3t}\right\}^{-2}$

$=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$

(2) $x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to1}x^{\frac{3}{x-1}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{3}{t}}$

$=\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^3=e^3$

(3) $x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to1}x^{\frac{5}{2x-2}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{5}{2t}}$

$=\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{\frac{5}{2}}=e^{\frac{5}{2}}$

3-2 답 (1) 2 (2) $\frac{1}{9}$ (3) 3 (4) $-\frac{1}{2}$

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{4x}\cdot2$

$=1\cdot2=2$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{9}$

$=1\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{9}$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{e^{6x}-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{6x}-1}{6x}\cdot3$

$=1\cdot3=3$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{e^{-2x}-1}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-2x}-1}{-2x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

4-2 답 (1) $\frac{5}{2\ln 5}$ (2) $\frac{3}{2}\ln 6$ (3) $\frac{4}{\ln 3}$ (4) $\ln\frac{4}{5}$

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\log_5(1+5x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\log_5(1+5x)}{5x}\cdot\frac{5}{2}$

$=\frac{1}{\ln 5}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{2\ln 5}$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{3x}{\log_6(1+2x)}=\lim_{x\to0}\frac{3x}{\frac{\log_6(1+2x)}{2x}\cdot2x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{3}{\frac{\log_6(1+2x)}{2x}\cdot2}$

$=\frac{3}{\frac{1}{\ln 6}\cdot2}=\frac{3}{2}\ln 6$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{4x}{3^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{4}{\frac{3^x-1}{x}}=\frac{4}{\ln 3}$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{4^x-5^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{4^x-1-(5^x-1)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{4^x-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{5^x-1}{x}$

$=\ln 4-\ln 5=\ln\frac{4}{5}$

01-1 답 (1) -1 (2) 9

|해결 전략| $0<a<1$일 때, $\lim_{x\to\infty} a^x=0$임을 이용한다.

(1) $x=-t$로 놓으면 $x \longrightarrow -\infty$일 때 $t \longrightarrow \infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^{-x}}{2^x-2^{-x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{2^t}{2^{-t}-2^t}$$

이때, 분모에서 밑이 가장 큰 항인 2^t으로 분모, 분자를 각각 나누면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{2^t}{2^{-t}-2^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^t-1}=\frac{1}{0-1}=-1$$

(2) $\lim_{x\to\infty}(4^x-3^{2x+1})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}(4^x-3\cdot9^x)^{\frac{1}{x}}$

이므로 밑이 가장 큰 항인 9^x으로 묶으면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(4^x-3\cdot9^x)^{\frac{1}{x}}&=\lim_{x\to\infty}\left[9^x\left\{\left(\frac{4}{9}\right)^x-3\right\}\right]^{\frac{1}{x}}\\&=\lim_{x\to\infty}(9^x)^{\frac{1}{x}}\left\{\left(\frac{4}{9}\right)^x-3\right\}^{\frac{1}{x}}\\&=\lim_{x\to\infty}9\left\{\left(\frac{4}{9}\right)^x-3\right\}^{\frac{1}{x}}\\&=9\cdot(0-3)^0=9\end{aligned}$$

01-2 답 6

|해결 전략| 3^x으로 분모, 분자를 각각 나눈 다음 지수함수의 극한을 생각한다.

3^x으로 분모, 분자를 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a\cdot3^x+2}{3^{x+1}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{2}{3^x}}{3+\left(\frac{1}{3}\right)^x}=\frac{a+0}{3+0}=\frac{a}{3}=2$$

$\therefore a=6$

02-1 답 1

|해결 전략| 로그의 성질 $\log_a M-\log_a N=\log_a\frac{M}{N}$을 이용한다.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to2}\{\log_3|x^3-8|-\log_3|x^2-4|\}\\&=\lim_{x\to2}\log_3\left|\frac{x^3-8}{x^2-4}\right|\\&=\lim_{x\to2}\log_3\left|\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}\right|\\&=\lim_{x\to2}\log_3\left|\frac{x^2+2x+4}{x+2}\right|\end{aligned}$$

이때, $\lim_{x\to2}\left|\frac{x^2+2x+4}{x+2}\right|=\left|\frac{4+4+4}{2+2}\right|=3$이므로

$$\lim_{x\to2}\log_3\left|\frac{x^2+2x+4}{x+2}\right|=\log_3 3=1$$

02-2 답 16

|해결 전략| 로그의 성질 $\log_a M-\log_a N=\log_a\frac{M}{N}$을 이용한다.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\{\log_2\sqrt{ax^2+2x-1}-\log_2(2x+1)\}\\&=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{\sqrt{ax^2+2x-1}}{2x+1}\end{aligned}$$

$\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{\sqrt{ax^2+2x-1}}{2x+1}=1$에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{ax^2+2x-1}}{2x+1}=2$이어야 하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{ax^2+2x-1}}{2x+1}&=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{a+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{1}{x}}\\&=\frac{\sqrt{a+0-0}}{2+0}=\frac{\sqrt{a}}{2}=2\end{aligned}$$

즉, $\sqrt{a}=4$에서 $a=16$

03-1 답 (1) 2 (2) 4

|해결 전략| 0이 아닌 상수 a에 대하여 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{ax}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{ax}=1$임을 이용한다.

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{4x}\cdot\frac{2x}{\ln(1+2x)}\cdot2$

$=1\cdot1\cdot2=2$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}+4x-1}{2x}=\lim_{x\to0}\left(2+\frac{e^{4x}-1}{2x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left(2+\frac{e^{4x}-1}{4x}\cdot2\right)$

$=2+1\cdot2=4$

03-2 답 -4

|해결 전략| 0이 아닌 상수 a에 대하여 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{ax}=1$임을 이용한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\ln(ax+1)}{x^2-2x}&=\lim_{x\to0}\left\{\frac{a}{x-2}\cdot\frac{\ln(ax+1)}{ax}\right\}\\&=\frac{a}{0-2}\cdot1=-\frac{a}{2}=2\end{aligned}$$

$\therefore a=-4$

04-1 답 (1) $\frac{1}{\ln 3}$ (2) $\log_3 2$

|해결 전략| $a>0$, $a\neq1$일 때, $\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$, $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$임을 이용한다.

(1) $x-1=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 1$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{\log_3 x}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{\log_3(1+t)}{t}=\frac{1}{\ln 3}$$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{(2^x-1)\log_3(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{2^x-1}{x}\cdot\frac{\log_3(1+x)}{x}\right\}$

$=\ln 2\cdot\frac{1}{\ln 3}=\log_3 2$

04-2 답 -3

|해결 전략| $a>0$, $a\neq 1$일 때, $\lim_{●\to 0}\frac{\log_a(1+●)}{●}=\frac{1}{\ln a}$임을 이용한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1-3x)}{\log_4(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\log_2(1-3x)}{-3x}}{\frac{\log_4(1+2x)}{2x}}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{\ln 2}}{\frac{1}{\ln 4}}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-3$$

05-1 답 1

|해결 전략| 분수 꼴의 함수에서 $x\longrightarrow a$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하면 (분자) $\longrightarrow 0$임을 이용한다.

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-a}{2\ln x}=b$에서 $\lim_{x\to 1}2\ln x=0$이므로

$\lim_{x\to 1}(x^2-a)=0$이어야 한다.

즉, $1-a=0$에서 $a=1$

$a=1$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2\ln x}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{2}\cdot\frac{x-1}{\ln x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$$

$x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 1$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=1=b$$

$\therefore ab=1$

05-2 답 1

|해결 전략| 분수 꼴의 함수에서 $x\longrightarrow a$일 때 (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하면 (분모) $\longrightarrow 0$임을 이용한다.

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{e^{ax}+b}=\frac{1}{2}$에서 $\lim_{x\to 0}\ln(x+1)=0$이므로

$\lim_{x\to 0}(e^{ax}+b)=0$이어야 한다.

즉, $1+b=0$에서 $b=-1$

$b=-1$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{e^{ax}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(x+1)}{x}}{\frac{e^{ax}-1}{ax}\cdot a}$$

$$=\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$$

$\therefore a=2$

$\therefore a+b=1$

06-1 답 -3

|해결 전략| 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$임을 이용한다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\ln(4x+a)}{x}=b$ ...... ㉠

㉠에서 $\lim_{x\to 0}x=0$이므로

$\lim_{x\to 0}\ln(4x+a)=\ln a=0$ $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(4x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(4x+1)}{4x}\cdot 4$$

$$=1\cdot 4=b$$

$\therefore a-b=1-4=-3$

06-2 답 2

|해결 전략| 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=f(0)$

이때, $\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{x+1}{x^2+3}=\frac{1}{3}$, $f(0)=\frac{1}{3}$이므로

$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{ax}{e^{2x}-b}=\frac{1}{3}$ ...... ㉠

㉠에서 $\lim_{x\to 0-}ax=0$이므로

$\lim_{x\to 0-}(e^{2x}-b)=1-b=0$ $\quad\therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to 0-}\frac{ax}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0-}\frac{2x}{e^{2x}-1}\cdot\frac{a}{2}$$

$$=1\cdot\frac{a}{2}=\frac{1}{3}$$

$\therefore a=\frac{2}{3}$

$\therefore 3ab=2$

2 지수함수와 로그함수의 도함수

개념 확인 66쪽~67쪽

1 (1) $y'=7^x\ln 7$ (2) $y'=3e^{3x}$ (3) $y'=3^{x+2}\ln 3$

2 (1) $y'=\frac{1}{x}$ (2) $y'=\frac{1}{x\ln 5}$ (3) $y'=\frac{2}{x}$

1 (1) $y=7^x$에서 $y'=7^x\ln 7$

(2) $y=e^{3x}$에서 $e^{3x}=(e^3)^x$이므로

$y'=(e^3)^x\ln e^3=3e^{3x}$

(3) $y=3^{x+2}$에서 $3^{x+2}=3^2\cdot 3^x$이므로

$y'=3^2\cdot 3^x\ln 3=3^{x+2}\ln 3$

2 (1) $y=\ln 3x$에서 $\ln 3x=\ln 3+\ln x$이므로

$y'=0+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}$

(2) $y=\log_5 x$에서 $y'=\dfrac{1}{x\ln 5}$

(3) $y=\ln x^2$에서 $\ln x^2=2\ln x$이므로

$y'=2\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{x}$

STEP 1 개념 드릴 | 68쪽 |

개념 check

1-1 (1) 8, 2 (2) e^x, $1+x$ (3) $5^x\ln 5$, $2+x\ln 5$

2-1 (1) $x\ln 3$, $\dfrac{2}{x\ln 3}$ (2) $\dfrac{1}{x\ln 2}$, $\dfrac{1}{\ln 2}$ (3) $\dfrac{1}{x}$, x, 1

스스로 check

1-2 답 (1) $y'=2^x\ln 2+6^x\ln 6$ (2) $y'=-9e^x$
(3) $y'=2\cdot 5^{2x-1}\ln 5$ (4) $y'=3^x(x\ln 3+3\ln 3+1)$
(5) $y'=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\{4-(4x-5)\ln 2\}$

(1) $y'=(2^x)'+(6^x)'=2^x\ln 2+6^x\ln 6$

(2) $y'=-9(e^x)'=-9e^x$

(3) $y=5^{2x-1}=5^{2x}\cdot 5^{-1}=5^{-1}\cdot 25^x$이므로

$y'=5^{-1}\cdot 25^x\ln 25=5^{2x-1}\ln 5^2$

$=2\cdot 5^{2x-1}\ln 5$

(4) 곱의 미분법에 의하여

$y'=(3^x)'(x+3)+3^x(x+3)'$

$=3^x\ln 3\cdot(x+3)+3^x\cdot 1$

$=3^x(x\ln 3+3\ln 3+1)$

(5) 곱의 미분법에 의하여

$y'=\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right\}'(4x-5)+\left(\dfrac{1}{2}\right)^x(4x-5)'$

$=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\ln\dfrac{1}{2}\cdot(4x-5)+\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\cdot 4$

$=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\{4-(4x-5)\ln 2\}$

2-2 답 (1) $y'=\dfrac{2}{5x}$ (2) $y'=\dfrac{1}{x\ln 6}$ (3) $y'=\dfrac{3}{x}$
(4) $y'=e^x\left(\log_2 x+\dfrac{1}{x\ln 2}\right)$ (5) $y'=4x(2\ln x+1)$

(1) $y'=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{5x}$

(2) $y=\log_6 6x=\log_6 6+\log_6 x$

$=1+\log_6 x$

이므로

$y'=0+\dfrac{1}{x\ln 6}=\dfrac{1}{x\ln 6}$

(3) $y=\ln(2x)^3=3\ln 2x$

$=3(\ln 2+\ln x)=3\ln 2+3\ln x$

이므로

$y'=0+3\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{x}$

(4) 곱의 미분법에 의하여

$y'=(e^x)'\log_2 x+e^x(\log_2 x)'$

$=e^x\log_2 x+e^x\cdot\dfrac{1}{x\ln 2}$

$=e^x\left(\log_2 x+\dfrac{1}{x\ln 2}\right)$

(5) 곱의 미분법에 의하여

$y'=(4x^2)'\ln x+4x^2(\ln x)'+0$

$=8x\ln x+4x^2\cdot\dfrac{1}{x}$

$=4x(2\ln x+1)$

STEP 2 필수 유형 | 69쪽~71쪽 |

01-1 답 2

|해결 전략| $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$이면 $y'=a^x\ln a$임을 이용한다.

곱의 미분법에 의하여

$f'(x)=(x+a)'2^x+(x+a)(2^x)'$

$=2^x+(x+a)\cdot 2^x\ln 2$

$=2^x\{1+(x+a)\ln 2\}$

이때, $f'(0)=1\cdot(1+a\ln 2)=1+\ln 4$이므로

$a\ln 2=\ln 2^a=\ln 4$

$\therefore a=2$

01-2 답 8

|해결 전략| $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$임을 이용한다.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(\ln 2+h)-f(\ln 2-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(\ln 2+h)-f(\ln 2)-f(\ln 2-h)+f(\ln 2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(\ln 2+h)-f(\ln 2)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(\ln 2-h)-f(\ln 2)}{-h}$$
$$=f'(\ln 2)+f'(\ln 2)$$
$$=2f'(\ln 2)$$

한편, $f(x)=e^{x+\ln 2}=e^{\ln 2}\cdot e^x=2e^x$이므로

$f'(x)=2(e^x)'=2e^x$

따라서 구하는 값은

$2f'(\ln 2)=2\cdot 2e^{\ln 2}=2\cdot 2\cdot 2=8$

LECTURE

미분계수의 정의

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

02-1 답 $\frac{1}{\ln 7}-1$

|해결 전략| 함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같음을 이용한다.

$y=\log_7 x-x$에서 $y'=\frac{1}{x\ln 7}-1$

이때, 곡선 $y=\log_7 x-x$ 위의 점 $(1, -1)$에서의 접선의 기울기는 $x=1$에서의 미분계수와 같으므로

$\frac{1}{\ln 7}-1$

02-2 답 $a=1$, $b=-2$

|해결 전략| $y=\ln x$이면 $y'=\frac{1}{x}$임을 이용한다.

$f(x)=x^2\ln ax+b=x^2(\ln a+\ln x)+b$이므로

곱의 미분법에 의하여

$$f'(x)=(x^2)'(\ln a+\ln x)+x^2(\ln a+\ln x)'+0$$
$$=2x(\ln a+\ln x)+x^2\cdot\frac{1}{x}$$
$$=2x\ln ax+x$$
$$=x(2\ln ax+1)$$

$f'(e)=3e$에서 $e(2\ln ae+1)=3e$, $\ln ae=1$

$\therefore a=1$

따라서 $f(x)=x^2\ln x+b$이므로

$f(e)=e^2-2$에서 $e^2+b=e^2-2$

$\therefore b=-2$

03-1 답 $\ln\frac{e}{2}$

|해결 전략| 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이고 $f'(2)$가 존재함을 이용한다.

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하면 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2+}(ax+b)=\lim_{x\to2-}2^{x-2}=f(2)$

$\therefore 2a+b=1$ ...... ㉠

또, 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하면 $f'(2)$가 존재하므로

$$f'(x)=\begin{cases}a & (x>2)\\ 2^{x-2}\ln 2 & (x<2)\end{cases}$$

$x<2$일 때, $f(x)=2^{x-2}=2^{-2}\cdot 2^x$이므로 $f'(x)=2^{-2}\cdot 2^x\ln 2=2^{x-2}\ln 2$

에서 $\lim_{x\to2+}a=\lim_{x\to2-}2^{x-2}\ln 2$

$\therefore a=\ln 2$

$a=\ln 2$를 ㉠에 대입하면

$b=1-2a=1-2\ln 2$

$\therefore a+b=\ln 2+(1-2\ln 2)=1-\ln 2=\ln\frac{e}{2}$

STEP 3 유형 드릴

| 72쪽~73쪽 |

1-1 답 4

|해결 전략| $0<a<1$일 때, $\lim_{x\to\infty}a^x=0$임을 이용한다.

밑이 가장 큰 항인 4^x으로 묶으면

$$\lim_{x\to\infty}(3^x+4^x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left[4^x\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^x+1\right\}\right]^{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}(4^x)^{\frac{1}{x}}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}4\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}$$
$$=4\cdot(0+1)^0=4$$

1-2 답 e

|해결 전략| 분모에서 밑이 가장 큰 항인 e^x으로 분모, 분자를 각각 나눈 다음 지수함수의 극한을 생각한다.

분모에서 밑이 가장 큰 항인 e^x으로 분모, 분자를 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x+1}+e^{-x-1}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e+\frac{1}{e}\cdot\left(\frac{1}{e^2}\right)^x}{1+\left(\frac{1}{e^2}\right)^x}$$
$$=\frac{e+\frac{1}{e}\cdot 0}{1+0}=e$$

2-1 답 $\frac{1}{2}$

| 해결 전략 | 0이 아닌 상수 a에 대하여 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{ax}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}=1$임을 이용한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{2x}{e^{2x}-1}\cdot\frac{1}{2}\right\}$$
$$=1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

2-2 답 3

| 해결 전략 | 로그의 성질 $\ln MN=\ln M+\ln N$을 이용하여 식을 변형한 후 0이 아닌 상수 a에 대하여 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{ax}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}=1$임을 이용한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\{(1+x)(1+2x)\}}{e^{x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+\ln(1+2x)}{e^{x}-1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot 2}{\frac{e^{x}-1}{x}}$$
$$=\frac{1+1\cdot 2}{1}=3$$

3-1 답 $\frac{3}{2}\ln 2$

| 해결 전략 | $a>0$, $a\neq 1$일 때, $\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a$임을 이용한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{x}+4^{x}-2}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^{x}-1}{2x}+\frac{4^{x}-1}{2x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{2^{x}-1}{x}+\frac{4^{x}-1}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(\ln 2+\ln 4)$$
$$=\frac{1}{2}\ln 2^{3}=\frac{3}{2}\ln 2$$

3-2 답 $\frac{\ln 5}{2}$

| 해결 전략 | $x-1=t$로 치환한 후 $\lim_{t\to 0}\frac{a^{t}-1}{t}=\ln a$ $(a>0, a\neq 1)$임을 이용한다.

$x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 1$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{5^{x-1}-1}{x^{2}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{5^{x-1}-1}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{5^{t}-1}{t(t+2)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t+2}\cdot\frac{5^{t}-1}{t}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\ln 5=\frac{\ln 5}{2}$$

4-1 답 1

| 해결 전략 | 분수 꼴의 함수에서 $x\longrightarrow a$일 때 (분자) $\longrightarrow$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하면 (분모) $\longrightarrow$ 0임을 이용한다.

$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x}-1)\ln(1+x)}{ax^{2}+b}=3$에서 $\lim_{x\to 0}\{(e^{x}-1)\ln(1+x)\}=0$이므로

$\lim_{x\to 0}(ax^{2}+b)=0$이어야 한다.

$\therefore b=0$

$b=0$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x}-1)\ln(1+x)}{ax^{2}}=\frac{1}{a}\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^{x}-1}{x}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\right\}$$
$$=\frac{1}{a}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{a}=3$$

$\therefore a=\frac{1}{3}$

$\therefore 3a+b=1$

4-2 답 $\frac{1}{2}$

| 해결 전략 | 분수 꼴의 함수에서 $x\longrightarrow a$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하면 (분자) $\longrightarrow$ 0임을 이용한다.

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{bx+c}-1}{\ln(1+ax)}=2$에서 $\lim_{x\to 0}\ln(1+ax)=0$이므로

$\lim_{x\to 0}(e^{bx+c}-1)=0$이어야 한다.

즉, $e^{c}-1=0$에서 $c=0$

$c=0$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{bx}-1}{\ln(1+ax)}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{ax}{\ln(1+ax)}\cdot\frac{e^{bx}-1}{bx}\cdot\frac{b}{a}\right\}$$
$$=1\cdot 1\cdot\frac{b}{a}=\frac{b}{a}=2$$

$\therefore \frac{a}{b+c}=\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$

5-1 답 $\ln 2$

| 해결 전략 | 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$x\neq 1$인 경우 $f(x)=\frac{2^{x-1}-1}{x-1}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$ …… ㉠

이때, $\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2^{x-1}-1}{x-1}$에서

$x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 1$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$\lim_{t\to 0}\frac{2^{t}-1}{t}=\ln 2$

㉠에서 $f(1)=\ln 2$

5-2 답 2

|해결 전략| 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$임을 이용한다.

$x\neq0$인 경우 $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^{\frac{x}{2}}-1}$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$

이때,

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{xe^x}{e^{\frac{x}{2}}-1}=\lim_{x\to0}\left(2e^x\cdot\frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}-1}\right)=2$$

이므로 $f(0)=2$

6-1 답 2

|해결 전략| $f'(a)=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$임을 이용한다.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)\right\}$$
$$=2f'(1)$$

한편, $f(x)=x\ln x$에서

$f'(x)=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$

따라서 구하는 값은

$2f'(1)=2\cdot(0+1)=2$

6-2 답 $8\ln 2$

|해결 전략| $f'(a)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$임을 이용한다.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)-f(1-h)+f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$
$$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$$

한편, $f(x)=2^{x+1}=2\cdot2^x$이므로

$f'(x)=2\cdot2^x\ln2=2^{x+1}\ln2$

따라서 구하는 값은

$2f'(1)=2\cdot4\ln2=8\ln2$

7-1 답 108

|해결 전략| 함수 $f(x)=2^x+3^x$의 그래프 위의 점 $(1, 5)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$임을 이용한다.

함수 $f(x)=2^x+3^x$의 그래프 위의 점 $(1, 5)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이고 $f'(x)=2^x\ln2+3^x\ln3$이므로

$f'(1)=2\ln2+3\ln3=\ln2^2+\ln3^3$

$\quad=\ln(2^2\cdot3^3)=\ln108$

$\therefore a=108$

7-2 답 e

|해결 전략| 함수 $f(x)=(x+a)e^x$의 그래프 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이고 접선의 방정식은 $y=f'(1)(x-1)+f(1)$임을 이용한다.

$f(x)=(x+a)e^x$에서

$f'(x)=e^x+(x+a)e^x=(x+a+1)e^x$

함수 $f(x)=(x+a)e^x$의 그래프 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$과 같으므로 $f'(1)=(a+2)e=e$에서

$a+2=1 \qquad \therefore a=-1$

$\therefore f(x)=(x-1)e^x$

이때, $f(1)=0$이므로 직선 $y=ex+b$가 점 $(1, 0)$을 지난다.

즉, $e+b=0$에서 $b=-e$

$\therefore ab=e$

8-1 답 $a=e^{\frac{9}{4}}$, $b=\frac{1}{4}$

|해결 전략| 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이고 $f'(1)$이 존재함을 이용한다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}\ln ax=\lim_{x\to1-}(bx^4+2)=f(1)$

$\therefore \ln a=b+2$ …… ㉠

또, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $f'(1)$이 존재하므로

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (x>1)\\ 4bx^3 & (x<1)\end{cases}$$ 에서

$x>1$일 때, $f(x)=\ln ax=\ln a+\ln x$이므로 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

$\lim_{x\to1+}\dfrac{1}{x}=\lim_{x\to1-}4bx^3$

$1=4b \qquad \therefore b=\dfrac{1}{4}$

$b=\dfrac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면 $\ln a=\dfrac{9}{4} \qquad \therefore a=e^{\frac{9}{4}}$

8-2 답 -2

|해결 전략| 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이고 $f'(1)$이 존재함을 이용한다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}ae^{x-1}=\lim_{x\to1-}(\ln x+bx^2)=f(1)$

$\therefore a=b$ …… ㉠

또, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $f'(1)$이 존재하므로

$$f'(x)=\begin{cases}ae^{x-1} & (x>1)\\ \dfrac{1}{x}+2bx & (x<1)\end{cases}$$ 에서

$x>1$일 때, $f(x)=ae^{x-1}=ae^{-1}\cdot e^x$이므로 $f'(x)=ae^{-1}\cdot e^x=ae^{x-1}$

$\lim_{x\to1+}ae^{x-1}=\lim_{x\to1-}\left(\dfrac{1}{x}+2bx\right)$

$\therefore a=1+2b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=-1$

$\therefore a+b=-2$

4 | 삼각함수의 미분

1 삼각함수의 덧셈정리

개념 확인 76쪽

1 (1) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (3) $-2-\sqrt{3}$

1 (1) $\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)$

$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(2) $\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)$

$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(3) $\tan 105^\circ=\tan(60^\circ+45^\circ)=\frac{\tan 60^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 60^\circ\tan 45^\circ}$

$=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}=\frac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}$

$=-2-\sqrt{3}$

STEP 1 개념 드릴 | 79쪽 |

개념 check

1-1 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

(3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, 1, 1, $2+\sqrt{3}$

2-1 (1) 100°, 55° (2) 40°, 70° (3) 80°, 20°

스스로 check

1-2 답 (1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (3) $2-\sqrt{3}$

(1) $\sin\frac{11}{12}\pi=\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{2}{3}\pi\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{2}{3}\pi\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) $\cos\frac{5}{12}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(3) $\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}$

$=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}$

2-2 답 (1) 0 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $-\sqrt{3}$

(1) $\sin 140^\circ\cos 40^\circ+\cos 140^\circ\sin 40^\circ=\sin(140^\circ+40^\circ)$

$=\sin 180^\circ=0$

(2) $\cos 10^\circ\cos 50^\circ-\sin 10^\circ\sin 50^\circ=\cos(10^\circ+50^\circ)$

$=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

(3) $\frac{\tan 80^\circ+\tan 40^\circ}{1-\tan 80^\circ\tan 40^\circ}=\tan(80^\circ+40^\circ)$

$=\tan 120^\circ=-\sqrt{3}$

STEP 2 필수 유형 | 80쪽~81쪽 |

01-1 답 (1) $\frac{-2+2\sqrt{10}}{9}$ (2) $\frac{\sqrt{5}-4\sqrt{2}}{9}$ (3) $\frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}$

|해결 전략| 주어진 삼각함수의 값과 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하여 필요한 삼각함수의 값을 구한다.

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$이므로 $\cos\alpha<0$, $\sin\beta>0$

$\therefore \cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}}=-2\sqrt{2}$

(1) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$=\frac{-2+2\sqrt{10}}{9}$

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-4\sqrt{2}}{9}$$

(3) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)-(-2\sqrt{2})}{1+\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\cdot(-2\sqrt{2})}$$

$$=\frac{-2\sqrt{5}+10\sqrt{2}}{5+4\sqrt{10}}$$

$$=\frac{(-2\sqrt{5}+10\sqrt{2})(4\sqrt{10}-5)}{(4\sqrt{10}+5)(4\sqrt{10}-5)}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}$$

01-2 답 $-\frac{5}{8}$

|해결 전략| 주어진 식의 양변을 제곱한 후 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용한다.

$\sin\alpha-\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}$ ······㉠

$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{4}$ ······㉡

㉠+㉡을 하면

$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)$

$+2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=\dfrac{3}{4}$

$2+2\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{3}{4}$

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{5}{8}$

02-1 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

|해결 전략| 두 직선이 이루는 예각의 크기를 탄젠트함수의 덧셈정리 $|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$를 이용하여 구한 후 $\cos\theta$의 값을 구한다.

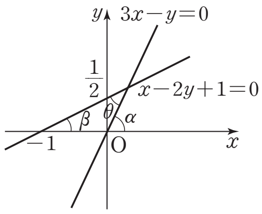
$3x-y=0$에서 $y=3x$

$x-2y+1=0$에서 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

두 직선 $3x-y=0$, $x-2y+1=0$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=3$, $\tan\beta=\dfrac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 $\theta=\alpha-\beta$이므로



$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}}=1$$

이때, θ는 예각이므로 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ $\quad\therefore \cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

02-2 답 $\frac{1}{2}$

|해결 전략| 탄젠트함수의 덧셈정리 $|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$를 이용하여 m의 값을 구한다.

$x+3y-1=0$에서 $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$

$mx-y+2=0$에서 $y=mx+2$

두 직선 $x+3y-1=0$, $mx-y+2=0$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=-\dfrac{1}{3}$, $\tan\beta=m$

이때, 두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\dfrac{\pi}{4}$이므로

$|\tan(\alpha-\beta)|=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$에서

$\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=1$, $\dfrac{m+\frac{1}{3}}{1-\frac{m}{3}}=\pm1$

$m+\dfrac{1}{3}=\pm\left(1-\dfrac{m}{3}\right)$ $\quad\therefore m=-2$ 또는 $m=\dfrac{1}{2}$

그런데 m은 양수이므로 $m=\dfrac{1}{2}$

2 삼각함수의 극한

개념 확인 82쪽~83쪽

1 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) 0

2 (1) 5 (2) $\frac{3}{4}$

1 (1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin x=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos x=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\tan x=\tan 0=0$

2 (1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5=1\cdot 5=5$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{3x}\cdot\frac{3}{4}=1\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$

STEP 1 개념 드릴 | 84쪽 |

개념 check

1-1 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{3}$ (2) 0, 0

2-1 (1) $\frac{1}{\cos x}$, 1, 1 (2) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$

스스로 check

1-2 답 (1) 3 (2) -5 (3) $2\sqrt{3}$ (4) 0

(1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 3\sin x=3\sin\frac{\pi}{2}=3\cdot 1=3$

(2) $\lim_{x\to\pi} 5\cos x=5\cos\pi=5\cdot(-1)=-5$

(3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} 2\tan x=2\tan\frac{\pi}{3}=2\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

(4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sqrt{2}\cos x-\tan x)=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{4}$

$=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-1=0$

2-2 답 (1) 1 (2) 5 (3) 8 (4) 1

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\cos x\right)=1\cdot 1=1$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{\frac{\tan x}{x}}=\frac{5}{1}=5$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\tan 6x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}+\frac{\tan 6x}{x}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2+\frac{\tan 6x}{6x}\cdot 6\right)$

$=1\cdot 2+1\cdot 6=8$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}}$

$=\frac{1}{1\cdot 1}=1$

STEP 2 필수 유형 | 85쪽~89쪽 |

01-1 답 (1) 0 (2) 2 (3) 0 (4) $2\sqrt{2}$

|해결 전략| 삼각함수의 여러 가지 공식을 이용하여 주어진 식을 변형하여 구한다.

(1) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1+\sin x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)$

$=1-\sin\frac{\pi}{2}=1-1=0$

(2) $\sin 2x=2\sin x\cos x$이므로

$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 2x}{\tan x}=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin x\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to\pi}2\cos^2 x$

$=2\cos^2\pi=2\cdot(-1)^2=2$

(3) $\sin 2x=2\sin x\cos x$,

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x$이므로

$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\cos x}$

$=\lim_{x\to\pi}\tan x=\tan\pi=0$

(4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 x-1}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 x-1}{\cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x}-1\right)}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\tan x+1)(\tan x-1)}{\cos x(\tan x-1)}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x+1}{\cos x}=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+1}{\cos\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{1+1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}$

02-1 답 (1) 1 (2) 4 (3) -3 (4) $-\frac{1}{2}$

|해결 전략| 주어진 식을 $\lim_{●\to 0}\frac{\sin●}{●}$, $\lim_{■\to 0}\frac{\tan■}{■}$ 꼴로 변형하여 계산한다.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\sin x}{3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{3x}+\frac{\sin x}{3x}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{3}+\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{3}\right)$

$=1\cdot\frac{2}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=1$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{3x+\sin x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{3+\frac{\sin x}{x}}{\frac{\tan x}{x}}=\frac{3+1}{1}=4$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2+3x)}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin(2x^2+3x)}{2x^2+3x}\cdot\frac{2x^2+3x}{x^2-x}\right\}$

$=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x(2x+3)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+3}{x-1}=-3$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x^2-x)}{\sin(x^2+2x)}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\tan(2x^2-x)}{2x^2-x}\cdot\frac{x^2+2x}{\sin(x^2+2x)}\cdot\frac{2x^2-x}{x^2+2x}\right\}$

$=1\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x(2x-1)}{x(x+2)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-1}{x+2}=-\frac{1}{2}$

03-1 답 (1) $-\pi$ (2) 1 (3) $\sqrt{2}$ (4) $\frac{1}{2}$

|해결 전략| $x\longrightarrow a(a\neq 0)$이면 $x-a=t$, $x\longrightarrow\infty$이면 $\frac{1}{x}=t$로 치환하여 주어진 식을 변형한 후 극한값을 구한다.

(1) $x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 1$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi+\pi t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin\pi t}{t}$

$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\pi t}{\pi t}\cdot(-\pi)=1\cdot(-\pi)=-\pi$

(2) $x-2\pi=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 2\pi$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$\lim_{x\to 2\pi}\frac{\tan x}{x-2\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan(2\pi+t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t}=1$

(3) $x-\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\frac{\pi}{4}$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$

$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{t}$

$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t\cos\frac{\pi}{4}+\cos t\sin\frac{\pi}{4}-\cos t\cos\frac{\pi}{4}+\sin t\sin\frac{\pi}{4}}{t}$

$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2}\sin t}{t}=\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$

(4) $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\infty$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\tan\frac{2}{x}}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\tan 2t}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{2t}{\tan 2t}\cdot\frac{1}{2}\right)$

$=1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

04-1 답 $-\frac{1}{2}$

|해결 전략| 분수 꼴의 함수에서 $x\longrightarrow a$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하면 (분자) $\longrightarrow 0$임을 이용한다.

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3x+4}+a}{\tan 3x}=b$에서 $\lim_{x\to 0}\tan 3x=0$이므로

$\lim_{x\to 0}(\sqrt{3x+4}+a)=0$이어야 한다.

즉, $2+a=0$에서 $a=-2$

$a=-2$를 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3x+4}-2}{\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x}{\tan 3x}\cdot\frac{\sqrt{3x+4}-2}{3x}\right)$

$=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{3x+4}-2)(\sqrt{3x+4}+2)}{3x(\sqrt{3x+4}+2)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{3x+4}+2}$

$=\frac{1}{4}=b$

$\therefore ab=(-2)\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$

04-2 답 $\frac{3}{2}$

|해결 전략| 분수 꼴의 함수에서 $x\longrightarrow a$일 때 (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하면 (분모) $\longrightarrow 0$임을 이용한다.

$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-a}=b(b\neq 0)$에서 $\lim_{x\to 1}\sin(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}(x^2-a)=0$이어야 한다.

즉, $1-a=0$에서 $a=1$

$a=1$을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}=b$

$x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 1$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{(t+1)^2-1}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{t+2}\right)$

$=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=b$

$\therefore a+b=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

05-1 답 $\frac{3}{2}$

|해결 전략| 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$임을 이용한다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)\quad\therefore\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\sin^2 x}=b$ ...... ㉠

㉠에서 $\lim_{x\to 0}\sin^2 x=0$이므로

$\lim_{x\to 0}(a-\cos x)=a-1=0\quad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}$

$=\frac{1}{2}=b$

$\therefore a+b=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

05-2 답 1

|해결 전략| 함수 $f(x)$가 $x=\pi$에서 연속이면 $\lim_{x \to \pi} f(x)=f(\pi)$임을 이용한다.

$x \neq \pi$에서 함수 $f(x)=\frac{\tan(x-\pi)}{x-\pi}$이므로 함수 $f(x)$가 $x=\pi$에서 연속이려면

$\lim_{x \to \pi} \frac{\tan(x-\pi)}{x-\pi}=f(\pi)$

이어야 한다.

$x-\pi=t$로 놓으면 $x \longrightarrow \pi$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$f(\pi)=\lim_{x \to \pi} \frac{\tan(x-\pi)}{x-\pi}=\lim_{t \to 0} \frac{\tan t}{t}=1$

3 삼각함수의 도함수

개념 확인 90쪽

1 (1) $y'=2\cos x$ (2) $y'=3\sin x$ (3) $y'=\cos x-\sin x$

1 (1) $y'=(2\sin x)'=2(\sin x)'=2\cos x$

(2) $y'=(-3\cos x)'=-3(\cos x)'=3\sin x$

(3) $y'=(\sin x+\cos x)'=(\sin x)'+(\cos x)'$

$=\cos x-\sin x$

STEP 1 개념 드릴 | 91쪽 |

개념 check

1-1 (1) $-\sin x$, $\cos x$ (2) e^x, $\cos x$

(3) $\frac{1}{x\ln 2}$, $\sin x$ (4) $\cos x$, $\cos x$, $\cos x$

스스로 check

1-2 답 (1) $y'=\cos x-\sqrt{2}\sin x$ (2) $y'=6x+2\sin x$

(3) $y'=3x^2+5\cos x$ (4) $y'=\frac{1}{x}+\sin x$

(5) $y'=3^x\ln 3+\sqrt{3}\cos x$ (6) $y'=-\sin x-\frac{2}{x\ln 3}$

(7) $y'=2x\sin x+(x^2+3)\cos x$ (8) $y'=-2\sin x\cos x$

(9) $y'=2(\cos^2 x-\sin^2 x)$ (10) $y'=e^x(\sin x+\cos x)$

(1) $y'=(\sin x+\sqrt{2}\cos x)'=(\sin x)'+\sqrt{2}(\cos x)'$

$=\cos x-\sqrt{2}\sin x$

(2) $y'=(3x^2-2\cos x)'=3(x^2)'-2(\cos x)'$

$=6x+2\sin x$

(3) $y'=(x^3+5\sin x)'=(x^3)'+5(\sin x)'$

$=3x^2+5\cos x$

(4) $y'=(\ln x-\cos x)'=(\ln x)'-(\cos x)'$

$=\frac{1}{x}+\sin x$

(5) $y'=(3^x+\sqrt{3}\sin x)'=(3^x)'+\sqrt{3}(\sin x)'$

$=3^x\ln 3+\sqrt{3}\cos x$

(6) $y'=(\cos x-2\log_3 x)'=(\cos x)'-2(\log_3 x)'$

$=-\sin x-\frac{2}{x\ln 3}$

(7) 곱의 미분법에 의하여

$y'=\{(x^2+3)\sin x\}'$

$=(x^2+3)'\sin x+(x^2+3)(\sin x)'$

$=2x\sin x+(x^2+3)\cos x$

(8) $y=\cos^2 x=\cos x\cos x$이므로

곱의 미분법에 의하여

$y'=(\cos x\cos x)'$

$=(\cos x)'\cos x+\cos x(\cos x)'$

$=-\sin x\cos x-\sin x\cos x$

$=-2\sin x\cos x$

(9) $y=\sin 2x=\sin(x+x)$

$=\sin x\cos x+\cos x\sin x$

$=2\sin x\cos x$

이므로 곱의 미분법에 의하여

$y'=(2\sin x\cos x)'$

$=2(\sin x)'\cos x+2\sin x(\cos x)'$

$=2\cos x\cos x+2\sin x(-\sin x)$

$=2(\cos^2 x-\sin^2 x)$

(10) 곱의 미분법에 의하여

$y'=(e^x\sin x)'$

$=(e^x)'\sin x+e^x(\sin x)'$

$=e^x\sin x+e^x\cos x$

$=e^x(\sin x+\cos x)$

STEP 2 필수 유형 | 92쪽~93쪽 |

01-1 답 0

|해결 전략| $y=\sin x$이면 $y'=\cos x$, $y=\cos x$이면 $y'=-\sin x$임을 이용한다.

곱의 미분법에 의하여

$f'(x)=(x^3)'\sin x+x^3(\sin x)'+3(x^2)'\cos x+3x^2(\cos x)'$

$=3x^2\sin x+x^3\cos x+6x\cos x-3x^2\sin x$

$=(x^3+6x)\cos x$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

01-2 답 2

|해결 전략| $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$임을 이용한다.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+2h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+2h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2h}\cdot 2\right\}$$
$$=2f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

한편,

$$f(x)=\cos^2 x+2\sin^2 x$$
$$=(1-\sin^2 x)+2\sin^2 x$$
$$=1+\sin^2 x$$

이므로

$$f'(x)=(1+\sin^2 x)'=(\sin x\sin x)'$$
$$=(\sin x)'\sin x+\sin x(\sin x)'$$
$$=\cos x\sin x+\sin x\cos x$$
$$=2\sin x\cos x$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1$$

따라서 구하는 값은 $2f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$

02-1 답 6

|해결 전략| 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 $f'(0)$이 존재함을 이용한다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+} ae^x\cos x=\lim_{x\to 0-}(x^2+2x-b)=f(0)$$

$\therefore a=-b$ …… ㉠

또, 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $f'(0)$이 존재하므로

$$f'(x)=\begin{cases} ae^x(\cos x-\sin x) & (x>0) \\ 2x+2 & (x<0)\end{cases}$$

$x>0$일 때, $f(x)=ae^x\cos x$이므로 $f'(x)=a(e^x)'\cos x+ae^x(\cos x)'=ae^x\cos x-ae^x\sin x=ae^x(\cos x-\sin x)$

에서

$$\lim_{x\to 0+} ae^x(\cos x-\sin x)=\lim_{x\to 0-}(2x+2)$$

$\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=-2$

$\therefore a-2b=2+4=6$

STEP 3 유형 드릴

| 94쪽~95쪽 |

1-1 답 $\frac{3}{4}$

|해결 전략| 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=3$, $\tan\alpha\tan\beta=-3$

$$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3}{1-(-3)}=\frac{3}{4}$$

1-2 답 $\frac{1}{4}$

|해결 전략| 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{2}$, $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{a}{2}$

$\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{2}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{2}$$

$$\therefore \sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$$

즉, $\frac{1}{4}=\frac{a}{2}$에서 $a=\frac{1}{2}$

$$\therefore a\sin 2\alpha=a(\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha)$$
$$=2a\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$$

2-1 답 -5

|해결 전략| $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$임을 이용한다.

$\cos(\alpha+\beta)=1$에서

$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=1$ …… ㉠

$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{2}{3}$에서

$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{2}{3}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $2\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{3}$

$$\therefore \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{6}$$

이것을 ㉠에 대입하면 $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{5}{6}$

$$\therefore \tan\alpha\tan\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$$
$$=\frac{-\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}}=-5$$

2-2 답 $-\frac{1}{2}$

|해결 전략| $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$임을 이용한다.

$$\overline{PQ}=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}=\sqrt{3}$$

양변을 제곱하면

$$\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=3$$

이때, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$$2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=3$$

$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$$

3-1 답 6

|해결 전략| 주어진 식을 $\lim_{\bullet \to 0} \frac{\sin \bullet}{\bullet}$ 꼴로 변형하여 계산한다.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 + \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 \right)$$

$$= 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 6$$

3-2 답 $\frac{1}{10}$

|해결 전략| 주어진 식을 $\lim_{\blacksquare \to 0} \frac{\tan \blacksquare}{\blacksquare}$ 꼴로 변형하여 계산한다.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x + \tan 2x + \tan 3x + \tan 4x}$$

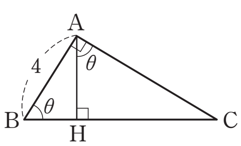
$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\tan x + \tan 2x + \tan 3x + \tan 4x}{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\tan x}{x} + \frac{\tan 2x}{2x} \cdot 2 + \frac{\tan 3x}{3x} \cdot 3 + \frac{\tan 4x}{4x} \cdot 4}$$

$$= \frac{1}{1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4} = \frac{1}{10}$$

4-1 답 4

|해결 전략| $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$임을 이용한다.



오른쪽 그림에서

$\overline{AH} = 4 \sin \theta$, $\angle CAH = \theta$이므로

$\overline{CH} = \overline{AH} \tan \theta = 4 \sin \theta \tan \theta$

$$\therefore \lim_{\theta \to 0+} \frac{\overline{CH}}{\theta^2} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{4 \sin \theta \tan \theta}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \left(4 \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\tan \theta}{\theta} \right)$$

$$= 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4$$

4-2 답 $\sqrt{17}$

|해결 전략| 주어진 식을 $\lim_{\blacksquare \to 0} \frac{\tan \blacksquare}{\blacksquare}$ 꼴로 변형하여 계산한다.

점 P의 좌표는 $P(t, 2\tan 2t)$이므로

$\overline{OP} = \sqrt{t^2 + 4\tan^2 2t}$

$$\therefore \lim_{t \to 0+} \frac{\overline{OP}}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{\sqrt{t^2 + 4\tan^2 2t}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0+} \sqrt{1 + \frac{4\tan^2 2t}{t^2}}$$

$$= \lim_{t \to 0+} \sqrt{1 + \frac{\tan 2t}{2t} \cdot \frac{\tan 2t}{2t} \cdot 16}$$

$$= \sqrt{1 + 1 \cdot 1 \cdot 16} = \sqrt{17}$$

5-1 답 $-\frac{1}{2}$

|해결 전략| $x + \pi = t$로 치환하여 주어진 식을 변형한 후 극한값을 구한다.

$x + \pi = t$로 놓으면 $x \longrightarrow -\pi$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x \to -\pi} \frac{1 + \cos x}{(x + \pi) \sin x} = \lim_{t \to 0} \frac{1 + \cos (t - \pi)}{t \sin (t - \pi)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1 + \cos (\pi - t)}{-t \sin (\pi - t)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{-t \sin t}$$

$$= -\lim_{t \to 0} \frac{(1 - \cos t)(1 + \cos t)}{t \sin t (1 + \cos t)}$$

$$= -\lim_{t \to 0} \frac{\sin^2 t}{t \sin t (1 + \cos t)}$$

$$= -\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t(1 + \cos t)}$$

$$= -\lim_{t \to 0} \left(\frac{\sin t}{t} \cdot \frac{1}{1 + \cos t} \right)$$

$$= -1 \cdot \frac{1}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$$

5-2 답 $-\frac{\pi}{2}$

|해결 전략| $x - 1 = t$로 치환하여 주어진 식을 변형한 후 극한값을 구한다.

$x - 1 = t$로 놓으면 $x \longrightarrow 1$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin\left(\cos \frac{\pi}{2} x\right)}{x - 1} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} t \right) \right\}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin \left(-\sin \frac{\pi}{2} t \right)}{t}$$

$$= -\lim_{t \to 0} \frac{\sin \left(\sin \frac{\pi}{2} t \right)}{t}$$

$$= -\lim_{t \to 0} \left\{ \frac{\sin \left(\sin \frac{\pi}{2} t \right)}{\sin \frac{\pi}{2} t} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2} t}{\frac{\pi}{2} t} \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$= -1 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

6-1 답 $\frac{1}{2}$

|해결 전략| 분수 꼴의 함수에서 $x \longrightarrow a$일 때 (분자) $\longrightarrow$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하면 (분모) $\longrightarrow$ 0임을 이용한다.

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{ax \sin x + b} = 1$에서 $\lim_{x \to 0} (1 - \cos x) = 0$이므로

$\lim_{x \to 0} (ax \sin x + b) = 0$

이어야 한다.

$\therefore b = 0$

$b = 0$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{ax\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{ax\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{ax\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{ax\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{ax(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right)$$
$$=\frac{1}{a}\cdot1\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2a}=1$$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=\frac{1}{2}$

6-2 답 8

| 해결 전략 | 분수 꼴의 함수에서 $x\longrightarrow a$일 때 (분자) $\longrightarrow$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하면 (분모) $\longrightarrow$ 0임을 이용한다.

$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{ax+b}-2}=4$에서 $\lim_{x\to0}\sin 2x=0$이므로

$\lim_{x\to0}(\sqrt{ax+b}-2)=0$

이어야 한다.

즉, $\sqrt{b}-2=0$에서 $b=4$

$b=4$를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{ax+4}-2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x(\sqrt{ax+4}+2)}{(\sqrt{ax+4}-2)(\sqrt{ax+4}+2)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x(\sqrt{ax+4}+2)}{ax}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{a}\cdot(\sqrt{ax+4}+2)\right\}$$
$$=1\cdot\frac{2}{a}\cdot4=\frac{8}{a}=4$$

$\therefore a=2$

$\therefore ab=8$

7-1 답 0

| 해결 전략 | $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$임을 이용한다.

$f(\pi)=0$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=f'(\pi)$$

한편, $f(x)=\ln x(\cos x+1)$이므로

$f'(x)=(\ln x)'(\cos x+1)+\ln x(\cos x+1)'$

$=\frac{1}{x}(\cos x+1)-\ln x\sin x$

$\therefore f'(\pi)=0$

7-2 답 $\sqrt{3}$

| 해결 전략 | $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$임을 이용한다.

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

한편, $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x-1$이므로

$f'(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}$

8-1 답 2

| 해결 전략 | 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 $f'(0)$이 존재함을 이용한다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}(\sin x+a)=\lim_{x\to0-}(bx+1)=f(0)$

$\therefore a=1$

또, 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $f'(0)$이 존재하므로

$f'(x)=\begin{cases}\cos x & (x>0)\\ b & (x<0)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to0+}\cos x=\lim_{x\to0-}b$

$\therefore b=1$

$\therefore a+b=2$

8-2 답 8

| 해결 전략 | 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 $f'(0)$이 존재함을 이용한다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}(ae^x+2x+5)=\lim_{x\to0-}(\cos x+bx)=f(0)$

즉, $a+5=1$에서 $a=-4$

또, 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $f'(0)$이 존재하므로

$f'(x)=\begin{cases}ae^x+2 & (x>0)\\ -\sin x+b & (x<0)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to0+}(ae^x+2)=\lim_{x\to0-}(-\sin x+b)$

$a+2=b \quad \therefore b=-2\ (\because a=-4)$

$\therefore ab=8$

5 | 여러 가지 미분법

1 함수의 몫의 미분법

개념 확인 98쪽~101쪽

1 (1) $y'=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ (2) $y'=\dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

2 (1) $y'=-\dfrac{2}{x^3}$ (2) $y'=3x^2-\dfrac{12}{x^4}$

(3) $y'=\dfrac{4}{x^5}$ (4) $y'=2x-\dfrac{2}{x^3}$

3 (1) $-\dfrac{13}{12}$ (2) $\dfrac{13}{5}$ (3) $-\dfrac{5}{12}$

4 (1) $y'=\sec x(\tan x+\sec x)$

(2) $y'=-\csc x(\cot x+\csc x)$

1 (1) $y'=-\dfrac{(x+1)'}{(x+1)^2}=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

(2) $y'=\dfrac{(x)'(x^2+1)-x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{1\times(x^2+1)-x\times2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

2 (1) $y'=(x^{-2})'=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}=-\dfrac{2}{x^3}$

(2) $y'=(x^3+4x^{-3})'=3x^{3-1}+4\times(-3)x^{-3-1}$

$=3x^2-12x^{-4}=3x^2-\dfrac{12}{x^4}$

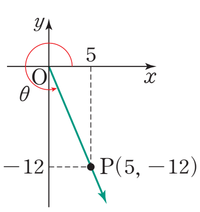
(3) $y'=(1-x^{-4})'=-1\times(-4)x^{-4-1}=4x^{-5}=\dfrac{4}{x^5}$

(4) $y'=(x^2+x^{-2})'=2x^{2-1}+(-2)x^{-2-1}$

$=2x-2x^{-3}=2x-\dfrac{2}{x^3}$

3 오른쪽 그림에서

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{5^2+(-12)^2}=13$이므로



(1) $\csc\theta=\dfrac{13}{-12}=-\dfrac{13}{12}$

(2) $\sec\theta=\dfrac{13}{5}$

(3) $\cot\theta=\dfrac{5}{-12}=-\dfrac{5}{12}$

4 (1) $y'=(\sec x)'+(\tan x)'=\sec x\tan x+\sec^2 x$

$=\sec x(\tan x+\sec x)$

(2) $y'=(\csc x)'+(\cot x)'=-\csc x\cot x-\csc^2 x$

$=-\csc x(\cot x+\csc x)$

STEP 1 개념 드릴 | 102쪽 |

개념 check

1-1 (1) $-\dfrac{2}{(2x+1)^2}$ (2) $-\dfrac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$

2-1 (1) $\tan x$, $\cot x$ (2) $-\csc^2 x$, $\csc^2 x$

스스로 check

1-2 답 (1) $y'=-\dfrac{3}{x^4}$ (2) $y'=-\dfrac{3x^2}{(x^3+2)^2}$

(3) $y'=\dfrac{13}{(3x+2)^2}$ (4) $y'=\dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$

(1) $y'=-\dfrac{(x^3)'}{(x^3)^2}=-\dfrac{3x^2}{x^6}=-\dfrac{3}{x^4}$

(2) $y'=-\dfrac{(x^3+2)'}{(x^3+2)^2}=-\dfrac{3x^2}{(x^3+2)^2}$

(3) $y'=\dfrac{(2x-3)'(3x+2)-(2x-3)(3x+2)'}{(3x+2)^2}$

$=\dfrac{2(3x+2)-(2x-3)\times3}{(3x+2)^2}$

$=\dfrac{13}{(3x+2)^2}$

(4) $y'=\dfrac{(x^2+2)'(x-1)-(x^2+2)(x-1)'}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{2x(x-1)-(x^2+2)\times1}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$

2-2 답 (1) $y'=\sec^2 x-1$ (2) $y'=2\cos x+3\sec^2 x$

(3) $y'=-\sin x+5\sec x\tan x$

(4) $y'=\csc x(3\csc x-\cot x)$

(1) $y'=(\tan x)'-(x)'=\sec^2 x-1$

(2) $y'=(2\sin x)'+(3\tan x)'=2\cos x+3\sec^2 x$

(3) $y'=(\cos x)'+(5\sec x)'=-\sin x+5\sec x\tan x$

(4) $y'=(\csc x)'-(3\cot x)'=-\csc x\cot x-3(-\csc^2 x)$

$=\csc x(3\csc x-\cot x)$

STEP 2 필수 유형 | 103쪽~106쪽 |

01-1 답 (1) $y'=-\dfrac{3x^2+1}{(x^3+x+1)^2}$ (2) $y'=\dfrac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$

|해결 전략| 함수의 몫의 미분법을 이용한다.

(1) $y'=-\dfrac{(x^3+x+1)'}{(x^3+x+1)^2}=-\dfrac{3x^2+1}{(x^3+x+1)^2}$

(2) $y'=\dfrac{(1-\cos x)'(1+\cos x)-(1-\cos x)(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$

$=\dfrac{\sin x(1+\cos x)-(1-\cos x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$

$=\dfrac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$

01-2 답 $-\dfrac{8}{9}$

|해결 전략| 함수의 몫의 미분법을 이용한다.

$f(x)=\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$이므로

$f'(x)=\dfrac{(2x^2)'(x^2-1)-2x^2(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$

$=\dfrac{4x(x^2-1)-2x^2\times 2x}{(x^2-1)^2}=-\dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$

$\therefore f'(2)=-\dfrac{4\times 2}{(2^2-1)^2}=-\dfrac{8}{9}$

02-1 답 $\dfrac{1}{2}$

|해결 전략| $y=x^n$ (n은 정수)이면 $y'=nx^{n-1}$임을 이용한다.

$f(x)=\dfrac{x^2-6}{x^4}=x^{-2}-6x^{-4}$이므로

$f'(x)=-2x^{-3}+24x^{-5}=-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{24}{x^5}$

$\therefore f'(2)=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}$

02-2 답 385

|해결 전략| $y=x^n$ (n은 정수)이면 $y'=nx^{n-1}$임을 이용한다.

$f(x)=-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}-\cdots-\dfrac{10}{x^{10}}$

$=-x^{-1}-2x^{-2}-3x^{-3}-\cdots-10x^{-10}$

이므로

$f'(x)=x^{-2}+2^2x^{-3}+3^2x^{-4}+\cdots+10^2x^{-11}$

$\therefore f'(1)=1+2^2+3^2+\cdots+10^2$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k^2=\dfrac{10\times 11\times 21}{6}=385$

LECTURE

자연수의 거듭제곱의 합

❶ $1+2+3+\cdots+n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$

❷ $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

❸ $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

03-1 답 (1) $\dfrac{3}{4}$ (2) $-\dfrac{5}{3}$

|해결 전략| 제3사분면에서 각 삼각함수의 값의 부호를 조사하고 삼각함수 사이의 관계를 이용한다.

(1) $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$에서

$\cot^2\theta=\csc^2\theta-1=\left(-\dfrac{5}{4}\right)^2-1=\dfrac{9}{16}$

그런데 θ가 제3사분면의 각이므로 $\cot\theta>0$

$\therefore \cot\theta=\dfrac{3}{4}$

(2) $\tan\theta=\dfrac{1}{\cot\theta}=\dfrac{4}{3}$이므로

$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\left(\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{25}{9}$

그런데 θ가 제3사분면의 각이므로 $\sec\theta<0$

$\therefore \sec\theta=-\dfrac{5}{3}$

03-2 답 2

|해결 전략| 주어진 식의 분모를 통분하고 삼각함수 사이의 관계를 이용한다.

$\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\dfrac{\cos\theta(1-\sin\theta)+\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$=\dfrac{2\cos\theta}{1-\sin^2\theta}=\dfrac{2\cos\theta}{\cos^2\theta}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$=\dfrac{2}{\cos\theta}=2\sec\theta$

$\therefore a=2$

04-1 답 (1) $y'=\cot x-x\csc^2 x$
(2) $y'=\csc x(2x-x^2\cot x+\cot x)$

|해결 전략| 함수의 곱의 미분법을 이용한다.

(1) $y'=(x)'\cot x+x(\cot x)'$

$=\cot x-x\csc^2 x$

(2) $y'=(x^2-1)'\csc x+(x^2-1)(\csc x)'$

$=2x\csc x+(x^2-1)(-\csc x\cot x)$

$=\csc x(2x-x^2\cot x+\cot x)$

04-2 답 $-2-\sqrt{2}$

|해결 전략| 함수의 몫의 미분법을 이용한다.

$f'(x)=\dfrac{(1+\sec x)'\tan x-(1+\sec x)(\tan x)'}{\tan^2 x}$

$=\dfrac{\sec x\tan x\times\tan x-(1+\sec x)\times\sec^2 x}{\tan^2 x}$

$=\sec x-\csc^2 x(1+\sec x)$

$\sec^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$이므로 $\dfrac{\sec^2 x}{\tan^2 x}=\csc^2 x$

$\therefore f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sec\dfrac{\pi}{4}-\csc^2\dfrac{\pi}{4}\left(1+\sec\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}-(\sqrt{2})^2(1+\sqrt{2})=-2-\sqrt{2}$

다른 풀이

$f(x)=\frac{1}{\tan x}+\frac{\sec x}{\tan x}=\cot x+\csc x$이므로

$f'(x)=-\csc^2 x-\csc x\cot x$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\csc^2\frac{\pi}{4}-\csc\frac{\pi}{4}\cot\frac{\pi}{4}$

$=-(\sqrt{2})^2-\sqrt{2}\times 1=-2-\sqrt{2}$

2 합성함수의 미분법

개념 확인 107쪽~110쪽

1 (1) $y'=4(x-1)^3$ (2) $y'=-6x(1-x^2)^2$

2 (1) $y'=10(2x+5)^4$ (2) $y'=12x(2x^2-1)^2$

3 (1) $y'=e^{x-2}$ (2) $y'=3\times 2^{3x+1}\ln 2$

4 (1) $y'=\frac{1}{x\ln 2}$ (2) $y'=\frac{1}{x}$

1 (1) $u=x-1$로 놓으면 $y=u^4$이므로

$\frac{dy}{du}=4u^3,\ \frac{du}{dx}=1$

$\therefore y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$

$=4u^3\times 1=4(x-1)^3$

(2) $u=1-x^2$으로 놓으면 $y=u^3$이므로

$\frac{dy}{du}=3u^2,\ \frac{du}{dx}=-2x$

$\therefore y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$

$=3u^2\times(-2x)$

$=-6x(1-x^2)^2$

2 (1) $y'=5(2x+5)^4(2x+5)'$

$=5(2x+5)^4\times 2$

$=10(2x+5)^4$

(2) $y'=3(2x^2-1)^2(2x^2-1)'$

$=3(2x^2-1)^2\times 4x$

$=12x(2x^2-1)^2$

3 (1) $y'=e^{x-2}(x-2)'=e^{x-2}\times 1=e^{x-2}$

(2) $y'=2^{3x+1}\ln 2\times(3x+1)'$

$=2^{3x+1}\ln 2\times 3$

$=3\times 2^{3x+1}\ln 2$

4 (1) $y'=\frac{1}{x\ln 2}$

(2) $y'=\frac{(2x)'}{2x}=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}$

STEP 1 개념 드릴

| 111쪽 |

개념 check

1-1 (1) $2x+3$ (2) $2x,\ -\frac{4x}{(x^2-3)^3}$

2-1 (1) $2,\ 2e^{2x+1}$ (2) $\frac{3}{3x+2}$

스스로 check

1-2 답 (1) $y'=12(3x-4)^3$ (2) $y'=10x(x^2-2)^4$

(3) $y'=4(6x+1)(3x^2+x+1)^3$ (4) $y'=\frac{6}{(2-3x)^3}$

(1) $y'=4(3x-4)^3(3x-4)'=4(3x-4)^3\times 3=12(3x-4)^3$

(2) $y'=5(x^2-2)^4(x^2-2)'=5(x^2-2)^4\times 2x=10x(x^2-2)^4$

(3) $y'=4(3x^2+x+1)^3(3x^2+x+1)'$

$=4(3x^2+x+1)^3\times(6x+1)=4(6x+1)(3x^2+x+1)^3$

(4) $y=\frac{1}{(2-3x)^2}=(2-3x)^{-2}$이므로

$y'=-2(2-3x)^{-3}(2-3x)'$

$=-2(2-3x)^{-3}\times(-3)=\frac{6}{(2-3x)^3}$

다른 풀이

(4) $y'=-\frac{\{(2-3x)^2\}'}{\{(2-3x)^2\}^2}=-\frac{2(2-3x)(2-3x)'}{(2-3x)^4}$

$=-\frac{2(2-3x)\times(-3)}{(2-3x)^4}=\frac{6}{(2-3x)^3}$

2-2 답 (1) $y'=3e^{3x-2}$ (2) $y'=2\times 5^{2x+3}\ln 5$

(3) $y'=\frac{2x+3}{x^2+3x}$ (4) $y'=\frac{5}{(5x-3)\ln 2}$

(1) $y'=e^{3x-2}(3x-2)'=e^{3x-2}\times 3=3e^{3x-2}$

(2) $y'=5^{2x+3}\ln 5\times(2x+3)'$

$=5^{2x+3}\ln 5\times 2=2\times 5^{2x+3}\ln 5$

(3) $y'=\frac{(x^2+3x)'}{x^2+3x}=\frac{2x+3}{x^2+3x}$

(4) $y'=\frac{(5x-3)'}{(5x-3)\ln 2}=\frac{5}{(5x-3)\ln 2}$

STEP 2 필수 유형

| 112쪽~114쪽 |

01-1 답 (1) $y'=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\cos\frac{1}{1+x^2}$

(2) $y'=2\sec^2(2x+1)$

(3) $y'=-\cos x\sin(1+\sin x)$

(4) $y'=2(2x-1)(4x^2-x+2)$

|해결 전략| 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는 $y'=f'(g(x))g'(x)$임을 이용한다.

(1) $y'=\cos\dfrac{1}{1+x^2}\times\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)'$

$=\cos\dfrac{1}{1+x^2}\times\left\{-\dfrac{(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}\right\}$

$=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}\cos\dfrac{1}{1+x^2}$

(2) $y'=\sec^2(2x+1)\times(2x+1)'$

$=2\sec^2(2x+1)$

(3) $y'=-\sin(1+\sin x)\times(1+\sin x)'$

$=-\sin(1+\sin x)\times\cos x$

$=-\cos x\sin(1+\sin x)$

(4) $y'=\{(2x-1)^2\}'(x^2+1)+(2x-1)^2(x^2+1)'$

$=2(2x-1)(2x-1)'(x^2+1)+(2x-1)^2\times 2x$

$=4(2x-1)(x^2+1)+2x(2x-1)^2$

$=2(2x-1)(4x^2-x+2)$

01-2 답 -1

|해결 전략| 합성함수 $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$의 도함수 $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$에 $x=\frac{\pi}{2}$를 대입한다.

$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$

$\therefore h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=g'\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=g'(0)f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ······㉠

이때, $f'(x)=-\sin x$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$

$g'(x)=\sec^2 x$이므로

$g'(0)=\sec^2 0=1$

따라서 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$, $g'(0)=1$을 ㉠에 대입하면

$h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\times(-1)=-1$

02-1 답 (1) $y'=e^{\sin x}\cos x$ (2) $y'=(-x+4)e^{-x}$ (3) $y'=2^{x^2+2}x\ln 2$ (4) $y'=-5^{\cos x}\sin x\times\ln 5$

|해결 전략| $y=e^{f(x)}$이면 $y'=e^{f(x)}f'(x)$이고, $y=a^{f(x)}\,(a>0,\ a\neq 1)$이면 $y'=a^{f(x)}\ln a\times f'(x)$임을 이용한다.

(1) $y'=e^{\sin x}(\sin x)'=e^{\sin x}\cos x$

(2) $y'=(x-3)'e^{-x}+(x-3)(e^{-x})'$

$=1\times e^{-x}+(x-3)\times(-e^{-x})$

$=(-x+4)e^{-x}$

(3) $y'=2^{x^2+1}\ln 2\times(x^2+1)'$

$=2^{x^2+1}\ln 2\times 2x$

$=2^{x^2+2}x\ln 2$

(4) $y'=5^{\cos x}\ln 5\times(\cos x)'$

$=5^{\cos x}\ln 5\times(-\sin x)$

$=-5^{\cos x}\sin x\times\ln 5$

02-2 답 -32

|해결 전략| $y=\{f(x)\}^n$ (n은 정수)이면 $y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$임을 이용한다.

$f'(x)=4(1+e^{-x})^3(1+e^{-x})'$

$=4(1+e^{-x})^3\times(-e^{-x})$

$=-4e^{-x}(1+e^{-x})^3$

$\therefore f'(0)=-4\times 2^3=-32$

03-1 답 (1) $y'=\cot x$ (2) $y'=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ (3) $y'=-\dfrac{\tan x}{\ln 2}$ (4) $y'=\dfrac{3x^2}{(x^3-2)\ln 4}$

|해결 전략| $y=\ln|f(x)|$이면 $y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$이고, $y=\log_a|f(x)|$이면 $y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)\ln a}$임을 이용한다.

(1) $y'=\dfrac{(\sin x)'}{\sin x}=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x$

(2) $y'=\dfrac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(3) $y'=\dfrac{(\cos x)'}{\cos x\times\ln 2}=\dfrac{-\sin x}{\cos x\times\ln 2}=-\dfrac{\tan x}{\ln 2}$

(4) $y'=\dfrac{(x^3-2)'}{(x^3-2)\ln 4}=\dfrac{3x^2}{(x^3-2)\ln 4}$

03-2 답 $\frac{5}{3}$

|해결 전략| $y=\ln|f(x)|$이면 $y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$임을 이용한다.

$f'(x)=\dfrac{(x^2+5x+3)'}{x^2+5x+3}=\dfrac{2x+5}{x^2+5x+3}$ $\quad\therefore f'(0)=\dfrac{5}{3}$

3 여러 가지 함수의 미분법

개념 확인 115쪽~119쪽

1 풀이 참조

2 (1) $x^2-x-y+2=0$ (2) $3xy-x+4y=0$

3 (1) $y'=\pi x^{\pi-1}$ (2) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (3) $y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ (4) $y'=-\dfrac{1}{4x\sqrt[4]{x}}$

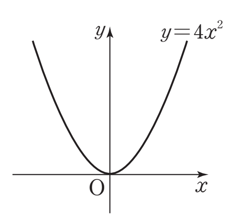
4 (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ (2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9x^2}}$

5 (1) $y''=6$ (2) $y''=-2$ (3) $y''=24x+2$ (4) $y''=60x^2-6x$

1 $x=\frac{1}{2}t$에서 $t=2x$이므로

$y=t^2$에서 $y=4x^2$

따라서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



2 (1) 함수 $y=x^2-x+2$를 음함수의 꼴로 나타내면

$x^2-x-y+2=0$

(2) 함수 $y=\frac{x}{3x+4}$를 음함수의 꼴로 나타내면

$3xy-x+4y=0$

3 (1) $y'=(x^{\pi})'=\pi x^{\pi-1}$

(2) $y'=(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

(3) $y'=(\sqrt[3]{x^2})'=(x^{\frac{2}{3}})'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

(4) $y'=\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)'=(x^{-\frac{1}{4}})'=-\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{4}-1}=-\frac{1}{4x\sqrt[4]{x}}$

4 (1) $y=\sqrt[4]{x}$에서 $x=y^4$

양변을 y에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy}=4y^3$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{4y^3}=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

(2) $y=\sqrt[3]{3x}$에서 $x=\frac{1}{3}y^3$

양변을 y에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy}=y^2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{y^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{9x^2}}$

5 (1) $y'=6x+3$이므로 $y''=6$

(2) $y'=-2x-2$이므로 $y''=-2$

(3) $y'=12x^2+2x$이므로 $y''=24x+2$

(4) $y'=20x^3-3x^2+2$이므로 $y''=60x^2-6x$

STEP 1 개념 드릴

| 120쪽~121쪽 |

개념 check

1-1 (1) $-6t$, $-6t$, $-3t$ (2) $6t^2-3$, $6t^2-3$, $2t^2-1$

2-1 (1) $\frac{x}{4y}$ (2) $-\frac{x}{2y^3}$

3-1 (1) $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ (2) $\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

4-1 (1) $\frac{3}{2}y^2$, 2, 2 (2) $4y^3$, $\frac{1}{4\sqrt[4]{(x+2)^3}}$

5-1 3, $108(3x+5)^2$

스스로 check

1-2 답 (1) $\frac{dy}{dx}=-t$ (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2t+2}$ (단, $t\neq-1$)

(1) $\frac{dx}{dt}=4$, $\frac{dy}{dt}=-4t$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-4t}{4}=-t$

(2) $\frac{dx}{dt}=2t+2$, $\frac{dy}{dt}=1$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{2t+2}$ (단, $t\neq-1$)

2-2 답 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}$ (단, $y\neq0$) (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$ (단, $y\neq0$)

(1) 각 항을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}(y^2)-\frac{d}{dx}(2x)-\frac{d}{dx}(1)=0$

$2y\frac{dy}{dx}-2=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}$ (단, $y\neq0$)

(2) 각 항을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}(x^2)-\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(1)$

$2x-2y\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$ (단, $y\neq0$)

3-2 답 (1) $y'=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$ (2) $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(1) $y'=(\sqrt{x})'+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=(x^{\frac{1}{2}})'+(x^{-\frac{1}{2}})'$

$=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}$

$=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$

(2) $y=\sqrt{x^2+1}=(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$이므로

$y'=\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}-1}(x^2+1)'$

$=\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\times2x$

$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

4-2 답 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt[3]{(3x-6)^2}}$ (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

(1) $y=\sqrt[3]{3x-6}$에서 $y^3=3x-6$이므로 $x=\frac{1}{3}y^3+2$

양변을 y에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy}=y^2$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x-6)^2}}$

(2) $y=\sqrt{x+1}-3$에서 $(y+3)^2=x+1$이므로

$x=y^2+6y+8$

양변을 y에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dy}=2y+6$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{2y+6}=\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}-3)+6}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

5-2 답 $y''=\dfrac{2}{(x-1)^3}$

$y'=-\dfrac{(x-1)'}{(x-1)^2}=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$이므로

$y''=\dfrac{\{(x-1)^2\}'}{\{(x-1)^2\}^2}=\dfrac{2(x-1)}{(x-1)^4}=\dfrac{2}{(x-1)^3}$

STEP 2 필수 유형

| 122쪽~126쪽 |

01-1 답 (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^t}{2}$ (2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{\sin t}$

| 해결 전략 | $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$를 각각 구하고 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$임을 이용한다.

(1) $\dfrac{dx}{dt}=2$, $\dfrac{dy}{dt}=e^t$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{e^t}{2}$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=\sec t\tan t$, $\dfrac{dy}{dt}=2\sec^2 t$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{2\sec^2 t}{\sec t\tan t}=\underbrace{\dfrac{2\sec t}{\tan t}}_{\sec t=\frac{1}{\cos t},\ \tan t=\frac{\sin t}{\cos t}}=\dfrac{2}{\sin t}$

01-2 답 $\dfrac{6}{5}$

| 해결 전략 | 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하고, $t=2$를 대입한다.

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{(1-t^2)-t\times(-2t)}{(1-t^2)^2}=\dfrac{t^2+1}{(1-t^2)^2}$,

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2(1-t^2)-(2t-1)\times(-2t)}{(1-t^2)^2}=\dfrac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{\dfrac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}}{\dfrac{t^2+1}{(1-t^2)^2}}=\dfrac{2t^2-2t+2}{t^2+1}$

따라서 $t=2$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$\dfrac{2\times2^2-2\times2+2}{2^2+1}=\dfrac{6}{5}$

02-1 답 (1) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+y}{x+2y}$ (단, $x\neq-2y$)

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y}{x-2}$ (단, $x\neq2$)

| 해결 전략 | 주어진 음함수의 각 항을 x에 대하여 미분하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다.

(1) 각 항을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{d}{dx}(x^2)+\dfrac{d}{dx}(xy)+\dfrac{d}{dx}(y^2)=\dfrac{d}{dx}(4)$

$2x+y+x\dfrac{dy}{dx}+2y\dfrac{dy}{dx}=0$

$(x+2y)\dfrac{dy}{dx}=-2x-y$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+y}{x+2y}$ (단, $x\neq-2y$)

(2) 각 항을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{d}{dx}(xy)=\dfrac{d}{dx}(x^2)+\dfrac{d}{dx}(2y)$

$y+x\dfrac{dy}{dx}=2x+2\dfrac{dy}{dx}$

$(x-2)\dfrac{dy}{dx}=2x-y$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y}{x-2}$ (단, $x\neq2$)

02-2 답 0

| 해결 전략 | 주어진 음함수의 각 항을 x에 대하여 미분하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하고, $x=1$, $y=-1$을 대입한다.

각 항을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{d}{dx}(x^2)+\dfrac{d}{dx}(y^2)-\dfrac{d}{dx}(2x)=0$

$2x+2y\dfrac{dy}{dx}-2=0$

$2y\dfrac{dy}{dx}=-2x+2$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-x+1}{y}$ (단, $y\neq0$)

따라서 곡선 $x^2+y^2-2x=0$ 위의 점 $(1, -1)$에서의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$\dfrac{-1+1}{-1}=0$

03-1 답 (1) $y'=\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\sec x}\tan x$ (2) $y'=-\dfrac{\cos x}{2\sqrt{1-\sin x}}$

(3) $y'=-\dfrac{3x+8}{2x^2(x+4)\sqrt{x+4}}$ (4) $y'=\dfrac{x}{(x^2+1)\ln 2}$

| 해결 전략 | 함수 $y=\{f(x)\}^n$ (n은 실수)일 때, $y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$임을 이용한다.

(1) $y=\sqrt[3]{\sec x}=(\sec x)^{\frac{1}{3}}$이므로

$$y'=\frac{1}{3}(\sec x)^{-\frac{2}{3}}(\sec x)'$$
$$=\frac{1}{3}(\sec x)^{-\frac{2}{3}}\sec x\tan x$$
$$=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\sec x}\tan x$$

(2) $y=\sqrt{1-\sin x}=(1-\sin x)^{\frac{1}{2}}$이므로

$$y'=\frac{1}{2}(1-\sin x)^{-\frac{1}{2}}(1-\sin x)'$$
$$=\frac{1}{2}(1-\sin x)^{-\frac{1}{2}}(-\cos x)$$
$$=-\frac{\cos x}{2\sqrt{1-\sin x}}$$

(3) $y'=-\frac{(x\sqrt{x+4})'}{(x\sqrt{x+4})^2}=-\frac{\sqrt{x+4}+\frac{x}{2\sqrt{x+4}}}{x^2(x+4)}$

$$=-\frac{3x+8}{2x^2(x+4)\sqrt{x+4}}$$

(4) $y'=\frac{(\sqrt{x^2+1})'}{\sqrt{x^2+1}\ln 2}=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}\ln 2}=\frac{x}{(x^2+1)\ln 2}$

03-2 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

|해결 전략| 함수 $f(x)=\{g(x)\}^n$(n은 실수)일 때, $f'(x)=n\{g(x)\}^{n-1}g'(x)$임을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

$f(x)=\sqrt{x^2+x+1}=(x^2+x+1)^{\frac{1}{2}}$이므로

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}(x^2+x+1)'$$
$$=\frac{1}{2}(x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}(2x+1)$$
$$=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

$\therefore f'(1)=\frac{2\times1+1}{2\sqrt{1^2+1+1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

04-1 답 $\frac{1}{2}$

|해결 전략| 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$임을 이용한다.

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $f(1)=2$에서 $g(2)=1$

$\therefore g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2}$

04-2 답 $\frac{1}{2}$

|해결 전략| 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$임을 이용한다.

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$

$f(x)=\tan x+2$이므로 $f(a)=1$에서 $\tan a+2=1$, $\tan a=-1$

$\therefore a=-\frac{\pi}{4}\left(\because -\frac{\pi}{2}<a<\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 $g(1)=-\frac{\pi}{4}$이고, $f'(x)=\sec^2 x$이므로

$$g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$=\frac{1}{\sec^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

05-1 답 (1) $y''=-4x\sin x-(x^2-1)\cos x$ (2) $y''=\frac{2(x-6)}{x^4}$ (3) $y''=(x+1)e^x$ (4) $y''=\frac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$

|해결 전략| 주어진 함수를 두 번 미분하여 y''을 구한다.

(1) $y'=2x\cos x-(x^2+1)\sin x$이므로

$$y''=2\cos x-2x\sin x-2x\sin x-(x^2+1)\cos x$$
$$=-4x\sin x-(x^2-1)\cos x$$

(2) $y'=\frac{(3x^2+1)x^2-(x^3+x-2)\times2x}{x^4}=\frac{x^4-x^2+4x}{x^4}$이므로

$$y''=\frac{(4x^3-2x+4)x^4-(x^4-x^2+4x)\times4x^3}{x^8}$$
$$=\frac{2x^4(x-6)}{x^8}=\frac{2(x-6)}{x^4}$$

(3) $y'=e^x+(x-1)e^x=xe^x$이므로

$$y''=e^x+xe^x=(x+1)e^x$$

(4) $y'=\frac{2x}{x^2-1}$이므로

$$y''=\frac{2(x^2-1)-2x\times2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$$

STEP 3 유형 드릴

| 127쪽~129쪽 |

1-1 답 12

|해결 전략| 주어진 극한을 미분계수를 포함한 식으로 변형하고, 몫의 미분법을 이용하여 함수 $f(x)$를 미분한다.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(0)-f(-2h)+f(0)}{h}$$
$$=2\lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(0)}{2h}+2\lim_{h\to0}\frac{f(-2h)-f(0)}{-2h}$$
$$=2f'(0)+2f'(0)=4f'(0)$$

이때, $f(x)=-\frac{3}{x-1}$에서 $f'(x)=\frac{3}{(x-1)^2}$이므로

$4f'(0)=4\times3=12$

1-2 답 $-2<x<2$

| 해결 전략 | 몫의 미분법을 이용하여 함수 $f(x)$를 미분한 후 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위를 구한다.

$f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$에서

$$f'(x)=\frac{1\times(x^2+4)-x\times 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$$

$f'(x)>0$에서 $\dfrac{4-x^2}{(x^2+4)^2}>0$

이때, $(x^2+4)^2>0$이므로 $4-x^2>0$

$x^2-4<0 \qquad \therefore -2<x<2$

2-1 답 $\frac{3}{4}$

| 해결 전략 | 주어진 식의 좌변을 통분하여 간단히 한 후 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 $\cot^2\theta$의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\cos\theta}+\frac{1}{1-\cos\theta}&=\frac{(1-\cos\theta)+(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}\\&=\frac{2}{1-\cos^2\theta}=\frac{2}{\sin^2\theta}\\&=2\csc^2\theta=\frac{7}{2}\end{aligned}$$

$\therefore \csc^2\theta=\dfrac{7}{4}$

$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$에서

$\cot^2\theta=\csc^2\theta-1=\dfrac{7}{4}-1=\dfrac{3}{4}$

2-2 답 $\frac{25}{4}$

| 해결 전략 | $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$, $\csc^2\theta=1+\cot^2\theta$임을 이용하여 주어진 식을 변형한다.

$$\begin{aligned}\sec^2\theta+\csc^2\theta&=(1+\tan^2\theta)+(1+\cot^2\theta)\\&=2+\tan^2\theta+\frac{1}{\tan^2\theta}\\&=2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{25}{4}\end{aligned}$$

3-1 답 1

| 해결 전략 | 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 연속이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$이고, $\lim\limits_{x\to0+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0-}f'(x)$이다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to0+}\sec x=\lim\limits_{x\to0-}(ax+b)=f(0) \qquad \therefore b=1$

또, $f'(0)$이 존재하므로

$f'(x)=\begin{cases}\sec x\tan x & (x>0)\\ a & (x<0)\end{cases}$에서

$\lim\limits_{x\to0+}(\sec x\tan x)=\lim\limits_{x\to0-}a \qquad \therefore a=0$

즉, $f(x)=\begin{cases}\sec x & (x\ge0)\\ 1 & (x<0)\end{cases}$이므로 $f(-\pi)=1$

3-2 답 $2\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$

| 해결 전략 | 주어진 극한을 미분계수를 포함한 식으로 변형하고, 삼각함수의 도함수를 이용하여 함수 $f(x)$를 미분한다.

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}-h\right)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)-f\left(\frac{\pi}{4}-h\right)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{-h}\\&=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)+f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

이때, $f(x)=x\csc x$에서

$f'(x)=\csc x-x\csc x\cot x=\csc x(1-x\cot x)$이므로

$2f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$

4-1 답 56

| 해결 전략 | 합성함수의 미분법을 이용하여 함수 $g(x)$를 미분한다.

$g(x)=x^2\left\{f\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^3$에서

$$\begin{aligned}g'(x)&=2x\left\{f\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^3+x^2\times3\left\{f\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^2\left\{f\left(\frac{x}{2}\right)\right\}'\\&=2x\left\{f\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^3+3x^2\left\{f\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^2f'\left(\frac{x}{2}\right)\times\frac{1}{2}\\&=2x\left\{f\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^3+\frac{3}{2}x^2\left\{f\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^2f'\left(\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore g'(4)&=8\{f(2)\}^3+24\{f(2)\}^2f'(2)\\&=8\times1^3+24\times1^2\times2\\&=8+48=56\end{aligned}$$

4-2 답 ②

| 해결 전략 | 합성함수의 미분법을 이용하여 $f^4(x)$를 차례로 미분한다.

$f^4(x)=f(f^3(x))$, $f^3(x)=f(f^2(x))$, $f^2(x)=f(f(x))$이므로

$$\begin{aligned}\{f^4(x)\}'&=\{f(f^3(x))\}'\\&=f'(f^3(x))\times\{f^3(x)\}'\\&=f'(f^3(x))\times\{f(f^2(x))\}'\\&=f'(f^3(x))\times f'(f^2(x))\times\{f^2(x)\}'\\&=f'(f^3(x))\times f'(f^2(x))\times\{f(f(x))\}'\\&=f'(f^3(x))\times f'(f^2(x))\times f'(f(x))\times f'(x)\end{aligned}$$

한편, $f(a)=a$이므로

$f^2(a)=f(f(a))=f(a)=a$

$f^3(a)=f(f^2(a))=f(a)=a$

$$\begin{aligned}\therefore g'(a)&=\{f^4(a)\}'\\&=f'(f^3(a))\times f'(f^2(a))\times f'(f(a))\times f'(a)\\&=f'(a)\times f'(a)\times f'(a)\times f'(a)\\&=b^4\end{aligned}$$

5-1 답 3

|해결 전략| 합성함수의 미분법과 곱의 미분법을 이용하여 $y=\{xf(x)\}^n$을 미분한다.

$y=\{xf(x)\}^n$에서

$y'=n\{xf(x)\}^{n-1}\{xf(x)\}'$

$\quad=n\{xf(x)\}^{n-1}\{f(x)+xf'(x)\}$

이므로 $x=1$에서의 미분계수는

$n\{1\times f(1)\}^{n-1}\{f(1)+1\times f'(1)\}=n\times 2^{n-1}(2+3)=60$

즉, $n\times 2^{n-1}=12=3\times 2^2$이므로 $n=3$

5-2 답 $-\frac{8}{3}$, 2

|해결 전략| $y=f(g(x))$이면 $y'=f'(g(x))g'(x)$임을 이용한다.

$f(ax-1)=x^2-x+a+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$af'(ax-1)=2x-1$

$\therefore f'(ax-1)=\frac{2x-1}{a}$ ...... ㉠

$ax-1=3$이 되도록 하는 x의 값을 구하면 $x=\frac{4}{a}$

$x=\frac{4}{a}$를 ㉠에 대입하면 $f'(3)=\frac{\frac{8}{a}-1}{a}=\frac{8-a}{a^2}$

이때, $f'(3)=\frac{3}{2}$이므로 $\frac{8-a}{a^2}=\frac{3}{2}$, $3a^2=16-2a$

$3a^2+2a-16=0$, $(3a+8)(a-2)=0$

$\therefore a=-\frac{8}{3}$ 또는 $a=2$

6-1 답 5

|해결 전략| $y=e^{f(x)}$이면 $y'=e^{f(x)}f'(x)$임을 이용한다.

$f(x)=xe^{ax+b}$에서

$f'(x)=e^{ax+b}+xe^{ax+b}\times a=(1+ax)e^{ax+b}$

이때, $f'(0)=e^3$, $f'(1)=3e^5$이므로

$f'(0)=e^b=e^3 \qquad \therefore b=3$

$f'(1)=(1+a)e^{a+3}=3e^5 \qquad \therefore a=2$

$\therefore a+b=2+3=5$

6-2 답 $\frac{10}{3}$

|해결 전략| $y=a^{f(x)}$이면 $y'=a^{f(x)}\ln a\times f'(x)$임을 이용한다.

$f(x)=3^{x^2+ax+3}$에서

$f'(x)=3^{x^2+ax+3}\ln 3\times(x^2+ax+3)'$

$\qquad=3^{x^2+ax+3}\ln 3\times(2x+a)$

이므로

$f'(1)=3^{4+a}\ln 3\times(2+a)$

$f'(-1)=3^{4-a}\ln 3\times(-2+a)$

$\therefore \frac{f'(1)}{f'(-1)}=\frac{3^{4+a}\ln 3\times(2+a)}{3^{4-a}\ln 3\times(-2+a)}=\frac{a+2}{a-2}\times 3^{2a}$

이때, $\frac{f'(1)}{f'(-1)}=4\times 3^{2a}$이므로

$\frac{a+2}{a-2}=4$, $4(a-2)=a+2$

$3a=10 \qquad \therefore a=\frac{10}{3}$

7-1 답 $-\frac{4}{55}$

|해결 전략| 주어진 극한을 미분계수를 포함한 식으로 변형하고, 로그함수의 미분법을 이용하여 함수 $f(x)$를 미분한다.

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=f'(2)-f'(1)$

이때, $f(x)=\ln(2x^2+3)$에서 $f'(x)=\frac{(2x^2+3)'}{2x^2+3}=\frac{4x}{2x^2+3}$이므로

$f'(2)-f'(1)=\frac{4\times 2}{2\times 2^2+3}-\frac{4\times 1}{2\times 1^2+3}=\frac{8}{11}-\frac{4}{5}=-\frac{4}{55}$

7-2 답 $\frac{11}{2}$

|해결 전략| $f(x)=\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{10x})$이라 하고 로그의 성질을 이용하여 주어진 극한을 미분계수를 포함한 식으로 변형한다.

$f(x)=\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{10x})$이라 하면

$f(0)=\ln(1+1+1+\cdots+1)=\ln 10$

$\therefore$ (주어진 식)$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{10x})-\ln 10}{x}$

$a>0$, $a\neq 1$이고 $M>0$, $N>0$일 때 $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

$\qquad=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$\qquad=f'(0)$

이때, $f'(x)=\frac{e^x+2e^{2x}+3e^{3x}+\cdots+10e^{10x}}{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{10x}}$이므로

$f'(0)=\frac{1+2+3+\cdots+10}{1+1+1+\cdots+1}=\frac{\frac{10\times 11}{2}}{10}=\frac{11}{2}$

8-1 답 $\frac{5}{2}$

|해결 전략| $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$임을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 t에 대한 식으로 나타낸 후 $\lim_{t\to 2}\frac{dy}{dx}$의 값을 구한다.

$\frac{dx}{dt}=t^2-4$, $\frac{dy}{dt}=2t^2+2t-12$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t^2+2t-12}{t^2-4}$ (단, $t\neq\pm 2$)

$\therefore \lim_{t\to 2}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to 2}\frac{2t^2+2t-12}{t^2-4}=\lim_{t\to 2}\frac{2(t-2)(t+3)}{(t+2)(t-2)}$

$\qquad=\lim_{t\to 2}\frac{2(t+3)}{t+2}=\frac{5}{2}$

8-2 답 $\sqrt{3}$

|해결 전략| $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$임을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구하고 $\frac{dy}{dx}=-\sqrt{3}$을 만족시키는 t의 값을 구한다.

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\frac{8t}{2\sqrt{4t^2-1}}\times t-\sqrt{4t^2-1}}{t^2}$$
$$=\frac{4t^2-(4t^2-1)}{t^2\sqrt{4t^2-1}}=\frac{1}{t^2\sqrt{4t^2-1}}$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{t^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2\sqrt{4t^2-1}}}=-\sqrt{4t^2-1}$$

이때, $-\sqrt{4t^2-1}=-\sqrt{3}$에서 $4t^2-1=3$

$t^2=1 \qquad \therefore t=1\ (\because a>0,\ b>0)$

따라서 $a=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$, $b=1$이므로

$ab=\sqrt{3}$

9-1 답 $\frac{dy}{dx}=\tan x\tan y$ (단, $\cos x\cos y\neq 0$)

|해결 전략| 음함수의 미분법에 의하여 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분한다.

$4\cos x\sin y=1$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(4\cos x\sin y)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$-4\sin x\sin y+4\cos x\cos y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{4\sin x\sin y}{4\cos x\cos y}=\tan x\tan y\ (\text{단, }\cos x\cos y\neq 0)$$

9-2 답 $\frac{dy}{dx}=\frac{x-2y}{2x-y}$ (단, $y\neq 2x$)

|해결 전략| 음함수의 미분법에 의하여 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분한다.

$x^2+y^2=4xy$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(4xy)$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=4y+4x\frac{dy}{dx}$$

$$2(2x-y)\frac{dy}{dx}=2(x-2y)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x-2y}{2x-y}\ (\text{단, }y\neq 2x)$$

10-1 답 -1

|해결 전략| $y=x^n$ (n은 음의 정수)의 도함수는 몫의 미분법을 이용하여 구한다.

$y=\frac{1}{x^m}$이므로

$$y'=-\frac{\boxed{mx^{m-1}}}{x^{2m}}=-mx^{m-1-2m}=-mx^{\boxed{-m-1}}$$

이때, $-m=n$이므로 $y'=nx^{n-1}$

따라서 $f(x)=mx^{m-1}$, $g(x)=-m-1$이므로

$f(1)+g(2)=m+(-m-1)=-1$

10-2 답 5

|해결 전략| $y=x^n$ (n은 실수)의 도함수는 양변의 절댓값에 자연로그를 취한 후 음함수의 미분법을 이용하여 구한다.

$y=x^n$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|y|=\ln|x^n|$, $\ln|y|=n\boxed{\ln|x|}$

각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}=\boxed{\frac{n}{x}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=y\times\boxed{\frac{n}{x}}=nx^{n-1}$$

따라서 $f(x)=\ln|x|$, $g(x)=\frac{n}{x}$이므로

$$f(e^3)+g\left(\frac{n}{2}\right)=\ln e^3+\frac{n}{\frac{n}{2}}=3+2=5$$

11-1 답 $\frac{27}{11}$

|해결 전략| 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$일 때,

$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$임을 이용한다.

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g\left(-\frac{1}{9}\right)=a$라 하면

$f(a)=-\frac{1}{9}$

$f(x)=\frac{1}{27}(x^5+2x^3)$이므로 $f(a)=-\frac{1}{9}$에서 $a^5+2a^3+3=0$

$h(a)=a^5+2a^3+3$이라 하면 $h(-1)=0$이고

$h'(a)=5a^4+6a^2\geq 0$에서 함수 $y=h(a)$의 그래프는 항상 증가하므로 $a=-1$은 방정식 $a^5+2a^3+3=0$의 유일한 실근이다.

따라서 $g\left(-\frac{1}{9}\right)=-1$이고, $f'(x)=\frac{1}{27}(5x^4+6x^2)$이므로

$$g'\left(-\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{f'\left(g\left(-\frac{1}{9}\right)\right)}=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{27}{11}$$

11-2 답 $\frac{1}{2}$

|해결 전략| 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$일 때,

$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$임을 이용한다.

$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-1}{x-2}=2$에서 $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to 2}\{g(x)-1\}=0 \qquad \therefore \lim_{x\to 2}g(x)=1$

미분가능한 함수 $f(x)$는 연속함수이고 그 역함수 $g(x)$도 연속함수이므로

$g(2)=\lim_{x\to 2}g(x)=1$

따라서 $f(1)=2$이고

$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)=2$이므로

$f'(1)=\frac{1}{g'(f(1))}=\frac{1}{g'(2)}=\frac{1}{2}$

LECTURE

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

❶ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$ (L은 실수)일 때

$\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 ➡ $\lim_{x\to a}f(x)=0$

❷ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$ ($L\neq 0$인 실수)일 때

$\lim_{x\to a}f(x)=0$이면 ➡ $\lim_{x\to a}g(x)=0$

12-1 답 -1

|해결 전략| $y=e^{ax}\sin x$를 미분하여 y', y''을 구하고 $y''+2y'+2y=0$에 대입한다.

$y=e^{ax}\sin x$에서

$y'=ae^{ax}\sin x+e^{ax}\cos x=e^{ax}(a\sin x+\cos x)$

$y''=ae^{ax}(a\sin x+\cos x)+e^{ax}(a\cos x-\sin x)$

$\quad=e^{ax}\{(a^2-1)\sin x+2a\cos x\}$

$y''+2y'+2y=0$에서

$e^{ax}\{(a^2-1)\sin x+2a\cos x\}+2e^{ax}(a\sin x+\cos x)$
$+2e^{ax}\sin x=0$

$e^{ax}(a+1)\{(a+1)\sin x+2\cos x\}=0$

위의 등식이 임의의 실수 x에 대하여 성립하므로 $a=-1$

12-2 답 3

|해결 전략| $y=e^x\cos 2x$를 미분하여 y', y''을 구하고 $y''+ay'+by=0$에 대입한다.

$y=e^x\cos 2x$에서

$y'=e^x\cos 2x-2e^x\sin 2x=e^x(\cos 2x-2\sin 2x)$

$y''=e^x(\cos 2x-2\sin 2x)+e^x(-2\sin 2x-4\cos 2x)$

$\quad=-e^x(3\cos 2x+4\sin 2x)$

$y''+ay'+by=0$에서

$-e^x(3\cos 2x+4\sin 2x)+ae^x(\cos 2x-2\sin 2x)+be^x\cos 2x$
$=0$

$e^x\{(a+b-3)\cos 2x+(-2a-4)\sin 2x\}=0$

이때, $e^x\neq 0$이므로

$(a+b-3)\cos 2x+(-2a-4)\sin 2x=0$

위의 등식이 임의의 실수 x에 대하여 성립하므로

$a+b-3=0,\ -2a-4=0 \qquad \therefore a=-2,\ b=5$

$\therefore a+b=-2+5=3$

6 | 도함수의 활용 (1)

1 접선의 방정식

개념 확인 132쪽~133쪽

1 (1) $-2e$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2 (1) 2 (2) 0

1 (1) $f(x)=e^{-2x+1}$으로 놓으면

$f'(x)=e^{-2x+1}\times(-2)=-2e^{-2x+1}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, e)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)$이므로

$f'(0)=-2e^{-2\times 0+1}=-2e$

(2) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\times 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, \sqrt{2})$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이므로

$f'(1)=\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2 (1) $f(x)=\frac{1}{x}$로 놓으면 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(a, \frac{1}{a}\right)$이라 하면 접선의 기울기가 $-\frac{1}{4}$이므로

$f'(a)=-\frac{1}{a^2}=-\frac{1}{4}$에서 $a=2$ ($\because a>0$)

따라서 접점의 x좌표는 2이다.

(2) $f(x)=2e^x$으로 놓으면 $f'(x)=2e^x$

접점의 좌표를 $(a, 2e^a)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=2e^a$이므로 접선의 방정식은

$y-2e^a=2e^a(x-a) \qquad \therefore y=2e^ax+2(1-a)e^a$

이 직선이 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$0=-2e^a+2(1-a)e^a,\ 2ae^a=0 \qquad \therefore a=0$ ($\because e^a>0$)

따라서 접점의 x좌표는 0이다.

STEP 1 개념 드릴 | 134쪽 |

개념 check

1-1 $2e$, $2e$, $2ex$

2-1 1, 1, $2x+3$

3-1 $\frac{e^2}{2}$, $\frac{e^2}{2}$, $\frac{2}{e^2}x+1$

스스로 check

1-2 답 $y=-2x+4$

$f(x)=\frac{2}{x}$로 놓으면 $f'(x)=-\frac{2}{x^2}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이므로

$f'(1)=-2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-2=-2(x-1)\qquad \therefore y=-2x+4$

2-2 답 $y=x+\frac{\pi}{2}$

$f(x)=\cos x$로 놓으면 $f'(x)=-\sin x$

접점의 좌표를 $(a, \cos a)$라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$f'(a)=-\sin a=1$에서 $\sin a=-1$

$\therefore a=-\frac{\pi}{2}\ (\because -\pi<a<\pi)$

따라서 접점의 좌표는 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-0=1\times\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\qquad \therefore y=x+\frac{\pi}{2}$

3-2 답 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$f(x)=\sqrt{x}$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

접점의 좌표를 $(a, \sqrt{a})$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$이므로 접선의 방정식은

$y-\sqrt{a}=\frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)$

$\therefore y=\frac{1}{2\sqrt{a}}x+\frac{\sqrt{a}}{2}$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$0=\frac{1}{2\sqrt{a}}\times(-1)+\frac{\sqrt{a}}{2}\qquad \therefore a=1$

따라서 $a=1$을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

STEP 2 필수 유형

| 135쪽~139쪽 |

01-1 답 (1) $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ (2) $y=2x-\frac{\pi}{2}+1$

| 해결 전략 | 주어진 함수의 도함수를 구해 접점에서의 접선의 기울기를 구한다.

(1) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{2x+1}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(2x+1)-(x^2+x+1)\times 2}{(2x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-1}{(2x+1)^2}$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이므로

$f'(1)=\frac{2+2-1}{(2+1)^2}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{3}(x-1)\qquad \therefore y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

(2) $f(x)=\tan x$로 놓으면 $f'(x)=\sec^2 x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$에서의 접선의 기울기는 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sec^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}=2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-1=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\qquad \therefore y=2x-\frac{\pi}{2}+1$

01-2 답 $y=-6x+69$

| 해결 전략 | 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$를 지나고 점 P에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은 $y-b=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$임을 이용한다.

$f(x)=\sqrt{x-2}$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(11, 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(11)=\frac{1}{2\sqrt{11-2}}=\frac{1}{6}$

이므로 접선에 수직인 직선의 기울기는 -6이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-3=-6(x-11)\qquad \therefore y=-6x+69$

02-1 답 $y=x-\frac{2}{e}$

| 해결 전략 | 평행한 두 직선의 기울기는 서로 같음을 이용하여 접점의 좌표를 구한다.

$f(x)=x+2x\ln x$로 놓으면

$f'(x)=1+2\ln x+2x\times\frac{1}{x}=2\ln x+3$

접점의 좌표를 $(a, a+2a\ln a)$라 하면 직선 $y=x-4$에 평행한 접선의 기울기는 1이므로

$f'(a)=2\ln a+3=1,\ \ln a=-1\qquad \therefore a=\frac{1}{e}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y+\frac{1}{e}=1\times\left(x-\frac{1}{e}\right)\qquad \therefore y=x-\frac{2}{e}$

02-2 답 $y=3x+1$

| 해결 전략 | 기울기가 m인 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{m}$임을 이용하여 접점의 좌표를 구한다.

$f(x)=e^{3x}$으로 놓으면 $f'(x)=e^{3x}\times3=3e^{3x}$

접점의 좌표를 (a, e^{3a})이라 하면 직선 $x+3y+3=0$, 즉

$y=-\frac{1}{3}x-1$에 수직인 접선의 기울기는 3이므로

$f'(a)=3e^{3a}=3$, $e^{3a}=1$ $\quad\therefore a=0$

따라서 접점의 좌표는 $(0, 1)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-1=3(x-0)$ $\quad\therefore y=3x+1$

03-1 답 $y=-e^2x$

|해결 전략| 접점의 좌표를 (a, e^{-a+1})으로 놓고 접선의 방정식에 $x=0$, $y=0$을 대입하여 a의 값을 구한다.

$f(x)=e^{-x+1}$으로 놓으면 $f'(x)=e^{-x+1}\times(-1)=-e^{-x+1}$

접점의 좌표를 (a, e^{-a+1})이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=-e^{-a+1}$이므로 접선의 방정식은

$y-e^{-a+1}=-e^{-a+1}(x-a)$

$\therefore y=-e^{-a+1}x+(a+1)e^{-a+1}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 원점을 지나므로

$0=(a+1)e^{-a+1}$ $\quad\therefore a=-1$ $(\because e^{-a+1}>0)$

따라서 $a=-1$을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=-e^2x$

03-2 답 $-\frac{3}{4}$

|해결 전략| 먼저 곡선 위의 임의의 점 $\left(a, \frac{1}{a-1}\right)$에서의 접선의 방정식을 구한다.

$f(x)=\frac{1}{x-1}$로 놓으면 $f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$

접점의 좌표를 $\left(a, \frac{1}{a-1}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=-\frac{1}{(a-1)^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{a-1}=-\frac{1}{(a-1)^2}(x-a)$

$\therefore y=-\frac{1}{(a-1)^2}x+\frac{2a-1}{(a-1)^2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(-3, 0)$을 지나므로

$0=\frac{3}{(a-1)^2}+\frac{2a-1}{(a-1)^2}$, $2a-1=-3$ $\quad\therefore a=-1$

따라서 $a=-1$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은 $y=-\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$이므로 구하는 y절편은 $-\frac{3}{4}$이다.

04-1 답 $y=x-1$

|해결 전략| 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한 후 t의 값을 대입하여 접선의 기울기를 구한다.

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t+1}$, $\frac{dy}{dt}=t^2-t+1$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t^2-t+1}{\frac{1}{t+1}}=t^3+1$$

$t=0$일 때,

$x=2$, $y=1$, $\frac{dy}{dx}=1$

이므로 접점의 좌표는 $(2, 1)$, 접선의 기울기는 1이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-1=1\times(x-2)$ $\quad\therefore y=x-1$

04-2 답 $y=3x+7$

|해결 전략| 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구하고, $t^2-3t=-2$, $3t-5=1$을 만족시키는 t의 값을 $\frac{dy}{dx}$에 대입한다.

$\frac{dx}{dt}=2t-3$, $\frac{dy}{dt}=3$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3}{2t-3}\ \left(단,\ t\neq\frac{3}{2}\right)$$

이때, $t^2-3t=-2$, $3t-5=1$이므로 $t=2$

$t=2$일 때, $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2\times2-3}=3$

따라서 접선의 기울기는 3이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-1=3(x+2)$ $\quad\therefore y=3x+7$

05-1 답 (1) $y=-x-1$ (2) $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+2$

|해결 전략| 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한 후 주어진 점의 좌표를 대입하여 접선의 기울기를 구한다.

(1) $y^2=4x$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$2y\frac{dy}{dx}=4$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}$ (단, $y\neq0$)

곡선 $y^2=4x$ 위의 점 $(1, -2)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{2}{-2}=-1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y+2=-(x-1)$ $\quad\therefore y=-x-1$

(2) $x^2+4y^2=4$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$2x+8y\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4y}$ (단, $y\neq0$)

곡선 $x^2+4y^2=4$ 위의 점 $\left(-\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$-\frac{-\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}(x+\sqrt{3})$ $\quad\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+2$

2 함수의 극대 · 극소

개념 확인 140쪽~142쪽

1 구간 $(-\infty, 0]$에서 감소, 구간 $[0, \infty)$에서 증가

2 극솟값: $-\frac{1}{e}$

3 극댓값: 48, 극솟값: -77

1 $f(x)=e^x-x$에서 $f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$에서 감소하고, 구간 $[0, \infty)$에서 증가한다.

2 $f(x)=xe^x$에서

$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ ($\because e^x>0$)

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 $-\frac{1}{e}$을 갖는다.

3 $f(x)=2x^3-3x^2-36x+4$에서

$f'(x)=6x^2-6x-36=6(x+2)(x-3)$

$f''(x)=12x-6$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=3$

이때, $f''(-2)=-30<0$, $f''(3)=30>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 48, $x=3$에서 극솟값 -77을 갖는다.

STEP 1 개념 드릴 | 143쪽 |

개념 check

1-1 $(-\infty, 0]$, $[0, \infty)$

2-1 (1) 1, 1 (2) 1, 1

스스로 check

1-2 답 (1) 구간 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$에서 감소, 구간 $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)$에서 증가

(2) 구간 $(-\infty, -\ln 3]$에서 감소, 구간 $[-\ln 3, \infty)$에서 증가

(1) $f(x)=x-2\sin x$에서 $f'(x)=1-2\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ ($\because 0<x<\pi$)

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$에서 감소하고, 구간 $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)$에서 증가한다.

(2) $f(x)=3x+e^{-x}$에서 $f'(x)=3-e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $e^{-x}=3$, $-x=\ln 3$ $\therefore x=-\ln 3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\ln 3$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -\ln 3]$에서 감소하고, 구간 $[-\ln 3, \infty)$에서 증가한다.

2-2 답 (1) 극댓값: 1 (2) 극솟값: $\ln 3$

(1) [도함수 이용]

$f(x)=e^{-x^2}$에서 $f'(x)=-2xe^{-x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 1을 갖는다.

[이계도함수 이용]

$f(x)=e^{-x^2}$에서

$f'(x)=-2xe^{-x^2}$

$$\begin{aligned}f''(x)&=-2e^{-x^2}-2xe^{-x^2}\times(-2x)\\&=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}\\&=2(2x^2-1)e^{-x^2}\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

이때, $f''(0)=-2<0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 1을 갖는다.

(2) [도함수 이용]

$f(x)=\ln(x^2+3)$에서 $f'(x)=\frac{2x}{x^2+3}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\ln 3$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $\ln 3$을 갖는다.

[이계도함수 이용]

$f(x)=\ln(x^2+3)$에서

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+3}$$

$$f''(x)=\frac{2(x^2+3)-2x\times 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{-2x^2+6}{(x^2+3)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

이때, $f''(0)=\frac{2}{3}>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $\ln 3$을 갖는다.

STEP 2 필수 유형

| 144쪽~146쪽 |

01-1 답 (1) 구간 $(-\infty, -1-\sqrt{5}]$, $[-1+\sqrt{5}, \infty)$에서 증가, 구간 $[-1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5}]$에서 감소
(2) 구간 $(1, 5]$에서 감소, 구간 $[5, \infty)$에서 증가

|해결 전략| 어떤 구간에서 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 증가하고, $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 감소한다.

(1) $f(x)=(x^2-4)e^x$에서

$f'(x)=2xe^x+(x^2-4)e^x=(x^2+2x-4)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x^2+2x-4=0$ ($\because e^x>0$)

$\therefore x=-1-\sqrt{5}$ 또는 $x=-1+\sqrt{5}$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-1-\sqrt{5}$	$\cdots$	$-1+\sqrt{5}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1-\sqrt{5}]$, $[-1+\sqrt{5}, \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5}]$에서 감소한다.

(2) $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x-1}}$에서 $x>1$이고

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x-1}-(x+3)\times\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{x-1}=\frac{x-5}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$f'(x)=0$에서 $x=5$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(1)	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(1, 5]$에서 감소하고, 구간 $[5, \infty)$에서 증가한다.

01-2 답 $a\geq 1$

|해결 전략| 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

$f(x)=ax+\ln(x^2+1)$에서

$$f'(x)=a+\frac{2x}{x^2+1}=\frac{ax^2+2x+a}{x^2+1}$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

이때, $x^2+1>0$이므로 $ax^2+2x+a\geq 0$이어야 한다.

따라서 $a>0$이고, 이차방정식 $ax^2+2x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-a^2\leq 0$, $a^2-1\geq 0$

$(a+1)(a-1)\geq 0$ $\quad\therefore a\geq 1$ ($\because a>0$)

02-1 답 (1) 극댓값: $\frac{1}{2}$, 극솟값: -1 (2) 극댓값: $2\sqrt{3}$
(3) 극댓값: $\frac{4}{e^2}$, 극솟값: 0 (4) 극솟값: $-\frac{1}{2e}$

|해결 전략| $f'(x)=0$이 되는 x의 값을 구한 후, 이 x의 값의 좌우에서의 $f'(x)$의 부호를 살펴본다.

(1) $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+2x+3}$에서

$$f'(x)=\frac{2(x^2+2x+3)-(2x+1)(2x+2)}{(x^2+2x+3)^2}$$
$$=\frac{-2x^2-2x+4}{(x^2+2x+3)^2}=\frac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2+2x+3)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값 -1, $x=1$에서 극댓값 $\frac{1}{2}$을 갖는다.

(2) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{6-x}$에서 $x\geq 0$, $6-x\geq 0$이므로 $0\leq x\leq 6$이고

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{6-x}}=\frac{\sqrt{6-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{6-x}}$$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{6-x}=\sqrt{x}$

양변을 제곱하면 $6-x=x$ $\quad\therefore x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$	6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$2\sqrt{3}$	$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값 $2\sqrt{3}$을 갖는다.

(3) $f(x)=x^2e^x$에서

$f'(x)=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x=x(x+2)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ ($\because e^x>0$)

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 $\frac{4}{e^2}$, $x=0$에서 극솟값 0을 갖는다.

(4) $f(x)=x^2\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}=x(2\ln x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-\frac{1}{2}$ $\quad\therefore x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$에서 극솟값 $-\frac{1}{2e}$을 갖는다.

다른 풀이

(3) $f'(x)=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x=x(x+2)e^x$

$f''(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x)e^x$
$=(x^2+4x+2)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ $(\because e^x>0)$

이때, $f''(-2)=-2e^{-2}<0$, $f''(0)=2>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 $\frac{4}{e^2}$, $x=0$에서 극솟값 0을 갖는다.

(4) $f(x)=x^2\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}=x(2\ln x+1)$

$f''(x)=2\ln x+1+x\times\frac{2}{x}=2\ln x+3$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-\frac{1}{2}$ $\quad\therefore x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

이때, $f''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=2>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$에서 극솟값 $-\frac{1}{2e}$을 갖는다.

03-1 답 $a=3$, 극댓값: $\frac{6}{e^3}$

|해결 전략| 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극값을 가지면 $f'(\alpha)=0$임을 이용한다.

$f(x)=(x^2-a)e^x$에서

$f'(x)=2xe^x+(x^2-a)e^x=(x^2+2x-a)e^x$

함수 $f(x)$가 $x=-3$에서 극댓값을 가지므로

$f'(-3)=0$에서 $(9-6-a)\frac{1}{e^3}=0$ $\quad\therefore a=3$

$\therefore f(x)=(x^2-3)e^x$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값 $f(-3)=(9-3)\frac{1}{e^3}=\frac{6}{e^3}$을 갖는다.

03-2 답 6

|해결 전략| 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내고 극댓값과 극솟값의 곱을 a에 대한 식으로 나타낸다.

$f(x)=x+a+\frac{1}{x}$에서

$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고 $x=1$에서 극소이다.

이때, 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱이 5이므로

$f(-1)f(1)=(a-2)(a+2)=5$

$a^2=9$ $\quad\therefore a=3$ $(\because a>0)$ $\quad f(x)=x+3+\frac{1}{x}$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은

$f(-1)+f(1)=1+5=6$

STEP 3 유형 드릴 | 147쪽~149쪽 |

1-1 답 $\frac{e}{4}$

|해결 전략| 주어진 함수의 도함수를 구해 접점에서의 접선의 기울기를 구한다.

$f(x)=e^{x^2}$으로 놓으면 $f'(x)=2xe^{x^2}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, e)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2e$이므로 접선의 방정식은

$y-e=2e(x-1)$

$\therefore y=2ex-e$

따라서 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\mathrm{B}(0, -e)$이므로

$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times e=\frac{e}{4}$

1-2 답 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{\pi}{16}+2$

|해결 전략| 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$를 지나고 점 P에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은 $y-b=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$임을 이용한다.

$f(x)=\sec^2 x$로 놓으면

$f'(x)=2\sec x(\sec x)'=2\sec^2 x\tan x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$에서의 접선의 기울기는

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\times(\sqrt{2})^2\times 1=4$

이므로 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-2=-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore y=-\frac{1}{4}x+\frac{\pi}{16}+2$

2-1 답 1

|해결 전략| 평행한 두 직선의 기울기는 서로 같음을 이용하여 접점의 좌표를 구한다.

$f(x)=\ln(x+2)$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{x+2}$

접점의 좌표를 $(a, \ln(a+2))$라 하면 직선 $y=x+3$에 평행한 접선의 기울기는 1이므로

$f'(a)=\frac{1}{a+2}=1 \qquad \therefore a=-1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 0)$이므로 접선의 방정식은

$y-0=1\times(x+1) \qquad \therefore y=x+1$

$x=0$을 $y=x+1$에 대입하면

$y=1$

즉, 구하는 y절편은 1이다.

2-2 답 $4\sqrt{2}$

|해결 전략| 기울기가 -1인 두 접선의 접점의 좌표를 구하여 두 점 사이의 거리를 구한다.

$f(x)=\frac{4}{x-2}$로 놓으면 $f'(x)=-\frac{4}{(x-2)^2}$

접점의 좌표를 $\left(a, \frac{4}{a-2}\right)$라 하면 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(a)=-\frac{4}{(a-2)^2}=-1,\ (a-2)^2=4$

$a-2=\pm2 \qquad \therefore a=0$ 또는 $a=4$

따라서 두 접점의 좌표는 $(0, -2)$, $(4, 2)$이므로 두 접점 사이의 거리는

$\sqrt{(4-0)^2+\{2-(-2)\}^2}=4\sqrt{2}$

3-1 답 17

|해결 전략| 점 P의 좌표를 $(a, \sqrt{a}-1)$로 놓고 점 P에서의 접선의 방정식을 구한다.

$f(x)=\sqrt{x}-1$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

점 P의 좌표를 $(a, \sqrt{a}-1)$이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$이므로 접선의 방정식은

$y-(\sqrt{a}-1)=\frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)$

$\therefore y=\frac{1}{2\sqrt{a}}x+\frac{\sqrt{a}}{2}-1$

이 접선이 원점 O를 지나므로

$0=\frac{\sqrt{a}}{2}-1,\ \sqrt{a}=2 \qquad \therefore a=4$

따라서 P(4, 1)이므로

$\overline{\mathrm{OP}}^2=4^2+1^2=17$

3-2 답 $\frac{1}{e}$

|해결 전략| 접점의 좌표를 $\left(t, \frac{\ln t}{t}\right)$로 놓고 이 점에서의 접선의 방정식을 구한다.

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(t, \frac{\ln t}{t}\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{\ln t}{t}=\frac{1-\ln t}{t^2}(x-t)$

$\therefore y=\frac{1-\ln t}{t^2}x+\frac{-1+2\ln t}{t}$ ······ ㉠

이 접선이 원점을 지나므로

$0=\frac{-1+2\ln t}{t},\ \ln t=\frac{1}{2}$

$\therefore t=\sqrt{e}$

$t=\sqrt{e}$를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2e}x$

이때, 이 접선이 점 $(2, a)$를 지나므로

$a=\frac{1}{2e}\times2=\frac{1}{e}$

4-1 답 e

|해결 전략| 접점의 좌표를 (a, ae^a+1)로 놓고 이 점에서의 접선의 기울기를 각각 찾는다.

$f(x)=xe^x+1$로 놓으면

$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

접점의 좌표를 (a, ae^a+1)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=(a+1)e^a$이므로 접선의 방정식은

$y-(ae^a+1)=(a+1)e^a(x-a)$

$\therefore y=(a+1)e^ax-a^2e^a+1$

이 직선이 점 $(1, 1)$을 지나므로

$1=(a+1)e^a-a^2e^a+1,\ (a^2-a-1)e^a=0$

$\therefore a^2-a-1=0\ (\because e^a>0)$

이 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$

이때, 두 접선의 기울기는 각각 $(\alpha+1)e^\alpha$, $(\beta+1)e^\beta$이므로

$m_1m_2=(\alpha+1)e^\alpha\times(\beta+1)e^\beta$
$=(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)e^{\alpha+\beta}$
$=(-1+1+1)e^1=e$

4-2 답 -5

|해결 전략| 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 접선의 방정식에 $x=a$, $y=0$을 대입하여 얻은 방정식의 해가 1개이어야 한다.

$f(x)=(x+1)e^{x}$으로 놓으면

$f'(x)=e^{x}+(x+1)e^{x}=(x+2)e^{x}$

접점의 좌표를 $(t, (t+1)e^{t})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=(t+2)e^{t}$이므로 접선의 방정식은

$y-(t+1)e^{t}=(t+2)e^{t}(x-t)$

$\therefore y=(t+2)e^{t}x-(t^2+t-1)e^{t}$

이 직선이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$0=(t+2)e^{t}a-(t^2+t-1)e^{t}$

$\{t^2+(1-a)t-2a-1\}e^{t}=0$

$\therefore t^2+(1-a)t-2a-1=0 \ (\because e^{t}>0)$ …… ㉠

점 $(a, 0)$에서 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 ㉠이 중근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(1-a)^2-4(-2a-1)=0,\ a^2+6a+5=0$

$(a+5)(a+1)=0 \qquad \therefore a=-5 \ (\because a\neq-1)$

$a=-1$이면 점 $(a, 0)$은 곡선 $y=(x+1)e^{x}$ 위의 점이 된다.

5-1 답 4

| 해결 전략 | 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가지면 $f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$임을 이용한다.

$f(x)=a-2\sin^2 x$, $g(x)=2\sin x$로 놓으면

$f'(x)=-4\sin x\cos x$, $g'(x)=2\cos x$

두 곡선의 접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $a-2\sin^2 t=2\sin t$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $-4\sin t\cos t=2\cos t$

$\cos t(2\sin t+1)=0 \qquad \therefore \cos t=0$ 또는 $\sin t=-\frac{1}{2}$

이때, $0<t<\pi$에서 $\sin t>0$이므로

$\cos t=0 \qquad \therefore t=\frac{\pi}{2}$

$t=\frac{\pi}{2}$를 ㉠에 대입하면

$a-2\sin^2\frac{\pi}{2}=2\sin\frac{\pi}{2},\ a-2=2 \qquad \therefore a=4$

5-2 답 $-\frac{5}{3}$

| 해결 전략 | 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가지면 $f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$임을 이용한다.

$f(x)=ax^2+be^{x-1}$, $g(x)=\frac{1}{3x}$로 놓으면

$f'(x)=2ax+be^{x-1}$, $g'(x)=-\frac{1}{3x^2}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $\left(1, \frac{1}{3}\right)$에서 접하므로

$f(1)=g(1)$에서 $a+b=\frac{1}{3}$ …… ㉠

$f'(1)=g'(1)$에서 $2a+b=-\frac{1}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{2}{3}$, $b=1$

$\therefore a-b=-\frac{2}{3}-1=-\frac{5}{3}$

6-1 답 $y=\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}$

| 해결 전략 | 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$일 때, $f(a)=b$이면 $g'(b)=\frac{1}{f'(a)}\ (f'(a)\neq0)$이다.

$g(4)=k$로 놓으면 $f(k)=4$이므로

$k^3+2k+1=4,\ k^3+2k-3=0$

$(k-1)(k^2+k+3)=0$

$\therefore k=1 \ (\because k^2+k+3>0)$

즉, $g(4)=1$이고, $f'(x)=3x^2+2$이므로

$g'(4)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{5}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(4, 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{5}(x-4) \qquad \therefore y=\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}$

LECTURE

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이고 $g(b)=a$이면

➡ $g'(b)=\frac{1}{f'(g(b))}=\frac{1}{f'(a)}$ (단, $f'(a)\neq0$)

6-2 답 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$

| 해결 전략 | 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$일 때, $f(a)=b$이면 $g'(b)=\frac{1}{f'(a)}\ (f'(a)\neq0)$이다.

$g(-1)=k$로 놓으면 $f(k)=-1$이므로

$\tan k=-1 \qquad \therefore k=-\frac{\pi}{4}\left(\because -\frac{\pi}{2}<k<\frac{\pi}{2}\right)$

즉, $g(-1)=-\frac{\pi}{4}$이고, $f'(x)=\sec^2 x$이므로

$g'(-1)=\frac{1}{f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sec^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(-1, -\frac{\pi}{4}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y+\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(x+1) \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$

7-1 답 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

| 해결 전략 | 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한 후 주어진 t의 값을 대입하여 접점의 좌표와 접선의 기울기를 각각 구한다.

$\frac{dx}{dt}=3\cos^2 t(-\sin t)=-3\sin t\cos^2 t$,

$\frac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cos t$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\sin^2 t\cos t}{-3\sin t\cos^2 t}=-\tan t$ (단, $\sin t\neq0$, $\cos t\neq0$)

$t=\frac{\pi}{4}$일 때,

$x=\cos^3\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $y=\sin^3\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\frac{dy}{dx}=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

이므로 접점의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, 접선의 기울기는 -1이다.

따라서 접선의 방정식은

$y-\frac{\sqrt{2}}{4}=-\left(x-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ $\quad\therefore y=-x+\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때, $a=-1$, $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $\frac{b}{a}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

7-2 답 -1

| 해결 전략 | 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한 후 주어진 t의 값을 대입하여 접점의 좌표와 접선의 기울기를 각각 구한다.

$\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=3t^2+1$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+1}{2}$$

$t=1$일 때,

$x=2-1=1$, $y=1+1+1=3$, $\frac{dy}{dx}=\frac{3+1}{2}=2$

이므로 접점의 좌표는 $(1, 3)$, 접선의 기울기는 2이다.

따라서 접선의 방정식은

$y-3=2(x-1)$ $\quad\therefore y=2x+1$

이때, 이 접선이 점 $(a, -1)$을 지나므로

$-1=2a+1$ $\quad\therefore a=-1$

8-1 답 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

| 해결 전략 | 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한 후 $x=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$을 대입하여 접선의 기울기를 구한다.

$x^2+y^4-y^2=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$2x+4y^3\frac{dy}{dx}-2y\frac{dy}{dx}=0$, $(2y^3-y)\frac{dy}{dx}=-x$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{2y^3-y}$ (단, $2y^3-y\neq 0$)

따라서 곡선 $x^2+y^4-y^2=0$ 위의 점 $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{2\times\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-1$$

이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\left(x-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ $\quad\therefore y=-x+\frac{3\sqrt{3}}{4}$

따라서 $a=-1$, $b=\frac{3\sqrt{3}}{4}$이므로 $ab=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

8-2 답 5

| 해결 전략 | 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 구하고, 점 $(b, b-3)$이 접선 위의 점이므로 $x=b$, $y=b-3$을 접선의 방정식에 대입하면 등식이 성립함을 이용한다.

점 $(1, a)$가 곡선 $2x^2+y^2=6$ 위의 점이므로

$2+a^2=6$, $a^2=4$ $\quad\therefore a=2$ ($\because a>0$)

$2x^2+y^2=6$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$4x+2y\frac{dy}{dx}=0$ $\quad\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{y}$ (단, $y\neq 0$)

따라서 곡선 $2x^2+y^2=6$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 -1이므로 접선의 방정식은

$y-2=-(x-1)$ $\quad\therefore y=-x+3$

이때, 이 접선이 점 $(b, b-3)$을 지나므로

$b-3=-b+3$, $2b=6$ $\quad\therefore b=3$

$\therefore a+b=2+3=5$

9-1 답 4

| 해결 전략 | $f'(x)$를 구하여 $f'(x)<0$인 구간을 찾는다.

$f(x)=x+\sqrt{25-x^2}$에서

$$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}=\frac{\sqrt{25-x^2}-x}{\sqrt{25-x^2}}$$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{25-x^2}=x$

양변을 제곱하여 정리하면 $x^2=\frac{25}{2}$

$\therefore x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ($\because 0<x<5$)

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{5\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	(5)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$가 감소하는 구간은 $\left[\frac{5\sqrt{2}}{2}, 5\right)$이므로 이 구간에 속하는 자연수 x의 값은 4이다.

9-2 답 -14

| 해결 전략 | 함수 $f(x)$가 주어진 구간에서 증가하려면 주어진 구간에서 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

$f(x)=(x^2+2x+a)e^x$에서

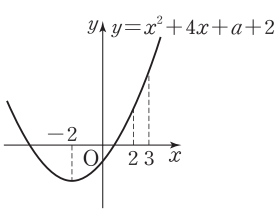
$f'(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x+a)e^x$

$\quad\quad=(x^2+4x+a+2)e^x$

함수 $f(x)$가 구간 $(2, 3)$에서 증가하려면 $2<x<3$일 때 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

이때, $e^x>0$이므로 $x^2+4x+a+2\geq 0$이어야 한다.

오른쪽 그림에서



$2^2+4\times 2+a+2\geq 0$

$\therefore a\geq -14$

따라서 실수 a의 최솟값은 -14이다.

10-1 답 $-\frac{3}{2}$

| 해결 전략 | 삼각함수의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구하고 주어진 구간에서 $f'(x)=0$이 되는 x의 값을 찾는다.

$f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x$에서

$$\begin{aligned} f'(x)&=-\sin 2x-\cos x\\ &=-2\sin x\cos x-\cos x\\ &=-\cos x(2\sin x+1)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$ 또는 $\sin x=-\frac{1}{2}$

이때, $0<x<\pi$에서 $\sin x>0$이므로

$\cos x=0 \quad \therefore x=\frac{\pi}{2}$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극솟값 $-\frac{3}{2}$을 갖는다.

10-2 답 -2

| 해결 전략 | 몫의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구하고, $f'(x)=0$이 되는 x의 값을 찾는다.

$f(x)=\frac{4x-4}{x^2+1}$에서

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{4(x^2+1)-(4x-4)\times 2x}{(x^2+1)^2}\\ &=\frac{-4(x^2-2x-1)}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $x^2-2x-1=0$ ...... ㉠

$\therefore x=1-\sqrt{2}$ 또는 $x=1+\sqrt{2}$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 $f(x)$는 $x=1-\sqrt{2}$에서 극소이고, $x=1+\sqrt{2}$에서 극대이므로

$\alpha=1+\sqrt{2}$, $\beta=1-\sqrt{2}$

또, ㉠에 의하여 $\alpha^2=2\alpha+1$, $\beta^2=2\beta+1$이고, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$이므로

$$\begin{aligned} f(\alpha)+f(\beta)&=\frac{4\alpha-4}{\alpha^2+1}+\frac{4\beta-4}{\beta^2+1}\\ &=\frac{4\alpha-4}{2\alpha+2}+\frac{4\beta-4}{2\beta+2}\\ &=\frac{(2\alpha-2)(\beta+1)+(2\beta-2)(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}\\ &=\frac{4(\alpha\beta-1)}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}\\ &=\frac{4(-1-1)}{-1+2+1}=-4\end{aligned}$$

$\therefore \alpha+\beta+f(\alpha)+f(\beta)=2+(-4)=-2$

11-1 답 $\frac{9}{8}+2\ln 2$

| 해결 전략 | 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극값을 가지면 $f'(\alpha)=0$임을 이용한다.

$f(x)=ax^2+bx-\ln x$에서

$f'(x)=2ax+b-\frac{1}{x}$, $f''(x)=2a+\frac{1}{x^2}$

$f''(1)=2a+1=-3$이므로 $a=-2$

또, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값을 가지므로

$f'(1)=-4+b-1=0 \quad \therefore b=5$

$\therefore f(x)=-2x^2+5x-\ln x$

$f'(x)=-4x+5-\frac{1}{x}=\frac{-4x^2+5x-1}{x}$

$f''(x)=-4+\frac{1}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $4x^2-5x+1=0$

$(4x-1)(x-1)=0 \quad \therefore x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=1$

이때, $f''\left(\frac{1}{4}\right)=12>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{4}$에서 극소이고 극솟값은

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{4}\right)&=-2\times\frac{1}{16}+5\times\frac{1}{4}-\ln\frac{1}{4}\\ &=\frac{9}{8}+2\ln 2\end{aligned}$$

11-2 답 0

| 해결 전략 | 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극값 β를 가지면 $f(\alpha)=\beta$, $f'(\alpha)=0$임을 이용한다.

$f(x)=a\sin x+b\cos x+x$에서

$f'(x)=a\cos x-b\sin x+1$

$f''(x)=-a\sin x-b\cos x$

함수 $f(x)$가 $x=\pi$에서 극댓값 $\pi+1$을 가지므로

$f(\pi)=-b+\pi=\pi+1$에서 $b=-1$

$f'(\pi)=-a+1=0$에서 $a=1$

따라서 $f(x)=\sin x-\cos x+x$이고

$f''(x)=-\sin x+\cos x$이므로

$f(0)+f''(0)=-1+1=0$

12-1 답 2

| 해결 전략 | $f'(x)=0$이 되는 x의 값이 α, β임을 이용한다.

$f(x)=\frac{x^2-3x}{x^2+a}$에서

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{(2x-3)(x^2+a)-(x^2-3x)\times 2x}{(x^2+a)^2}\\ &=\frac{3x^2+2ax-3a}{(x^2+a)^2}\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $3x^2+2ax-3a=0$을 만족시키는 x의 값이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{2a}{3}$ ...... ㉠

$\alpha\beta=-a$ ...... ㉡

또, 주어진 조건에 의하여 $\beta-\alpha=4$ ...... ㉢

㉠+㉢을 하면 $2\beta=4-\frac{2a}{3}$ $\quad\therefore \beta=2-\frac{a}{3}$

㉠−㉢을 하면 $2\alpha=-4-\frac{2a}{3}$ $\quad\therefore \alpha=-2-\frac{a}{3}$

㉡에서 $\left(-2-\frac{a}{3}\right)\left(2-\frac{a}{3}\right)=-a$, $4-\frac{a^2}{9}=a$

$a^2+9a-36=0$, $(a+12)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

$\therefore f(x)=\frac{x^2-3x}{x^2+3}$

$$f'(x)=\frac{3x^2+6x-9}{(x^2+3)^2}=\frac{3(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값 $\frac{3}{2}$, $x=1$에서 극솟값 $-\frac{1}{2}$을 가지므로 구하는 극댓값과 극솟값의 차는

$\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=2$

12-2 답 1

|해결 전략| $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 $f'(x)=0$인 x의 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌면 안 된다.

$f(x)=(ax^3+x^2+b)e^{-x}$에서

$f'(x)=(3ax^2+2x)e^{-x}-(ax^3+x^2+b)e^{-x}$

$\quad=\{-ax^3+(3a-1)x^2+2x-b\}e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $-ax^3+(3a-1)x^2+2x-b=0$ ($\because e^{-x}>0$)

$g(x)=-ax^3+(3a-1)x^2+2x-b$라 하면 $f(x)$가 $f'(x)=0$인 x의 값이 존재하지만 극댓값과 극솟값을 갖지 않으려면 방정식 $g(x)=0$이 실근을 갖지만 실근의 좌우에서 $g(x)$의 부호가 바뀌지 않아야 한다.

만약 $a\neq0$이라면 $g(x)$는 삼차함수이고 이 경우 반드시 최소 하나 이상의 실근이 존재하며 실근의 좌우에서 $g(x)$의 부호가 반드시 바뀐다.

$\therefore a=0$

따라서 $g(x)=-x^2+2x-b$이고 이차방정식 $g(x)=0$이 중근을 가지면 조건을 만족시킨다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-b=0$에서 $b=1$

$\therefore a+b=1$

7 | 도함수의 활용 (2)

1 함수의 그래프

개념 확인 152쪽~155쪽

1 (1) 구간 $(-\infty, 0)$에서 위로 볼록, 구간 $(0, \infty)$에서 아래로 볼록

(2) 구간 $\left(-\infty, \frac{8}{3}\right)$에서 아래로 볼록, 구간 $\left(\frac{8}{3}, \infty\right)$에서 위로 볼록

2 (1) $(0, 0)$ (2) $(-1, -2)$

3 풀이 참조

4 최댓값: $e-1$, 최솟값: 1

1 (1) $f(x)=x^3-x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-1$, $f''(x)=6x$

$f''(x)=0$에서 $x=0$

이때, $x<0$이면 $f''(x)<0$, $x>0$이면 $f''(x)>0$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, 0)$에서 위로 볼록하고, 구간 $(0, \infty)$에서 아래로 볼록하다.

(2) $f(x)=-x^3+8x^2+1$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+16x$

$f''(x)=-6x+16=-2(3x-8)$

$f''(x)=0$에서 $x=\frac{8}{3}$

이때, $x<\frac{8}{3}$이면 $f''(x)>0$, $x>\frac{8}{3}$이면 $f''(x)<0$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(-\infty, \frac{8}{3}\right)$에서 아래로 볼록하고, 구간 $\left(\frac{8}{3}, \infty\right)$에서 위로 볼록하다.

2 (1) $f(x)=2x^3+3x$로 놓으면

$f'(x)=6x^2+3$, $f''(x)=12x$

$f''(x)=0$에서 $x=0$

이때, $x<0$이면 $f''(x)<0$, $x>0$이면 $f''(x)>0$

따라서 $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(0, 0)$이다.

(2) $f(x)=-x^3-3x^2$으로 놓으면

$f'(x)=-3x^2-6x$

$f''(x)=-6x-6=-6(x+1)$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$

이때, $x<-1$이면 $f''(x)>0$, $x>-1$이면 $f''(x)<0$

따라서 $x=-1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-1, -2)$이다.

3 $f(x)=-x^3+3x^2-4$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f''(x)=-6x+6=-6(x-1)$

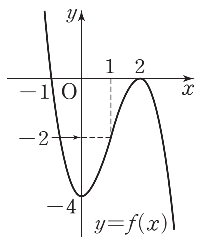
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$f''(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	⤷	-4	⤴	-2	↗	0	⤵

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



4 $f(x)=x-\ln x$에서 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

구간 $\left[\dfrac{1}{e}, e\right]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1	$\cdots$	e
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{e}+1$	↘	1	↗	$e-1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 최댓값 $e-1$, $x=1$에서 최솟값 1을 갖는다.

STEP 1 개념 드릴

| 156쪽 |

개념 check

1-1 $\left(-\dfrac{2}{3}, 0\right)$, $\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{43}{27}\right)$

2-1 $-\dfrac{11}{16}$, 0, 1

스스로 check

1-2 답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) $f(x)=x^4-3x^3$으로 놓으면

$f'(x)=4x^3-9x^2$

$f''(x)=12x^2-18x=6x(2x-3)$

$f''(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}$

이때, $x<0$ 또는 $x>\dfrac{3}{2}$이면 $f''(x)>0$, $0<x<\dfrac{3}{2}$이면 $f''(x)<0$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, 0)$, $\left(\dfrac{3}{2}, \infty\right)$에서 아래로 볼록하고, 구간 $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$에서 위로 볼록하다.

또, $x=0$, $x=\dfrac{3}{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(0, 0)$, $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{81}{16}\right)$이다.

(2) $f(x)=x^4-2x^3+3x-1$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-6x^2+3$

$f''(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$

$f''(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

이때, $x<0$ 또는 $x>1$이면 $f''(x)>0$, $0<x<1$이면 $f''(x)<0$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$에서 아래로 볼록하고, 구간 $(0, 1)$에서 위로 볼록하다.

또, $x=0$, $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(0, -1)$, $(1, 1)$이다.

2-2 답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) $f(x)=-2x^4+8$로 놓으면

$f'(x)=-8x^3$, $f''(x)=-24x^2$

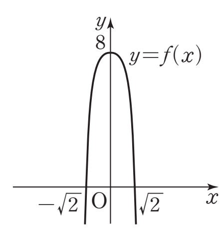
$f'(x)=0$에서 $x=0$

$f''(x)=0$에서 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	↗	8	⤵

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f(x)=-x^4+6x^2-1$로 놓으면

$f'(x)=-4x^3+12x=-4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$f''(x)=-12x^2+12=-12(x+1)(x-1)$

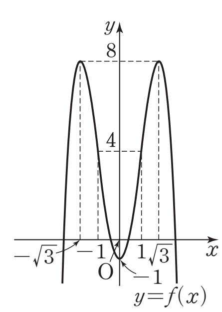
$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	↗	8	⤵	4	⤷	-1	⤴	4	↗	8	⤵

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



01-1

답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

|해결 전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $f''(x)>0$일 때 아래로 볼록하고, $f''(x)<0$일 때 위로 볼록하다.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$로 놓으면

$f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=-\dfrac{2(x^2+1)^2-2x\times2(x^2+1)\times2x}{(x^2+1)^4}$

$=\dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}=\dfrac{2(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)}{(x^2+1)^3}$

$f''(x)=0$에서 $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

이때, $x<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이면 $f''(x)>0$, $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이면 $f''(x)<0$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$에서 아래로 볼록하고, 구간 $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$에서 위로 볼록하다.

(2) $f(x)=\sin^2 x$로 놓으면

$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$

$f''(x)=2\cos 2x$

$f''(x)=0$에서 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{3}{4}\pi$ ($\because 0<x<\pi$)

이때, $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $\dfrac{3}{4}\pi<x<\pi$이면 $f''(x)>0$, $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3}{4}\pi$이면 $f''(x)<0$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$, $\left(\dfrac{3}{4}\pi, \pi\right)$에서 아래로 볼록하고, 구간 $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3}{4}\pi\right)$에서 위로 볼록하다.

02-1

답 (1) $(-\sqrt{3}, \ln 6)$, $(\sqrt{3}, \ln 6)$ (2) $\left(-4, \dfrac{12}{e^4}\right)$, $(-1, 0)$

|해결 전략| 함수 $f(x)$에서 $f''(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a, f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

(1) $f(x)=\ln(x^2+3)$으로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+3}$

$f''(x)=\dfrac{2(x^2+3)-2x\times2x}{(x^2+3)^2}=\dfrac{-2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+3)^2}$

$f''(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

이때, $x<-\sqrt{3}$ 또는 $x>\sqrt{3}$이면 $f''(x)<0$, $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$이면 $f''(x)>0$

따라서 $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-\sqrt{3}, \ln 6)$, $(\sqrt{3}, \ln 6)$이다.

(2) $f(x)=(x^2+x)e^x$으로 놓으면

$f'(x)=(2x+1)e^x+(x^2+x)e^x=(x^2+3x+1)e^x$

$f''(x)=(2x+3)e^x+(x^2+3x+1)e^x$

$=(x^2+5x+4)e^x$

$=(x+4)(x+1)e^x$

$f''(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=-1$

이때, $x<-4$ 또는 $x>-1$이면 $f''(x)>0$, $-4<x<-1$이면 $f''(x)<0$

따라서 $x=-4$, $x=-1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(-4, \dfrac{12}{e^4}\right)$, $(-1, 0)$이다.

03-1

답 $a=-2$, $b=3$

|해결 전략| 점 (α, β)가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이면 $f(\alpha)=\beta$, $f''(\alpha)=0$임을 이용한다.

$f(x)=x^4+ax^3+b$에서

$f'(x)=4x^3+3ax^2$, $f''(x)=12x^2+6ax$

점 $(1, 2)$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이므로

$f(1)=2$에서 $1+a+b=2$ $\quad\therefore a+b=1$ ...... ㉠

$f''(1)=0$에서 $12+6a=0$ $\quad\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $-2+b=1$ $\quad\therefore b=3$

03-2

답 $\dfrac{3e}{2}$

|해결 전략| 주어진 곡선의 변곡점의 좌표를 구하고, 이 점이 직선 $y=3x-1$ 위에 있음을 이용한다.

$f(x)=(\ln ax)^2$으로 놓으면 $x>0$이고

$f'(x)=2\ln ax\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{2\ln ax}{x}$

$f''(x)=\dfrac{\dfrac{2}{x}\times x-2\ln ax}{x^2}=\dfrac{2(1-\ln ax)}{x^2}$

$f''(x)=0$에서 $\ln ax=1$, $ax=e$ $\quad\therefore x=\dfrac{e}{a}$

이때, $0<x<\dfrac{e}{a}$이면 $f''(x)>0$, $x>\dfrac{e}{a}$이면 $f''(x)<0$

따라서 $x=\dfrac{e}{a}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\dfrac{e}{a}, 1\right)$이다.

이때, 변곡점 $\left(\dfrac{e}{a}, 1\right)$이 직선 $y=3x-1$ 위에 있으므로

$1=3\times\dfrac{e}{a}-1$, $2a=3e$ $\quad\therefore a=\dfrac{3e}{2}$

04-1

답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

|해결 전략| 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 곡선의 오목과 볼록, 변곡점 등을 조사하여 그래프의 개형을 그린다.

(1) (i) $f(x)=e^{-x^2}$으로 놓으면 함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(-x)=f(x)$이므로 y축에 대하여 대칭이다.

(iii) $f(0)=1$이므로 점 $(0, 1)$을 지난다.

(iv) $f'(x)=-2xe^{-x^2}$

$f''(x)=-2e^{-x^2}-2xe^{-x^2}\times(-2x)=2(2x^2-1)e^{-x^2}$

$=2(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)e^{-x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

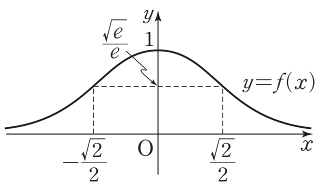
$f''(x)=0$에서 $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⤴	$\frac{\sqrt{e}}{e}$	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{e}}{e}$	⤵

(v) $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 점근선은 x축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



(2) (i) $f(x)=(\ln x)^2$으로 놓으면 함수 $f(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,x>0\}$이다.

(ii) $f(1)=0$이므로 점 $(1, 0)$을 지난다.

(iii) $f'(x)=2\ln x\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{2\ln x}{x}$

$f''(x)=\dfrac{\frac{2}{x}\times x-2\ln x}{x^2}=\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

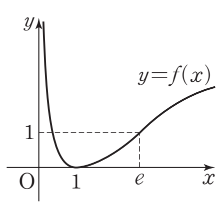
$f''(x)=0$에서 $\ln x=1$ $\quad\therefore x=e$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$		⤵	0	⤴	1	↗

(iv) $\lim_{x\to0+} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 점근선은 y축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



05-1 답 (1) 최댓값: $\frac{1}{7}$, 최솟값: -1

(2) 최댓값: $4\sqrt{2}$, 최솟값: $-4\sqrt{2}$

|해결 전략| 주어진 구간에서 함수의 극값을 구한 후 극댓값, 극솟값, 구간의 양 끝에서의 함숫값을 비교하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

(1) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-x+2}$에서

$f'(x)=\dfrac{x^2-x+2-(x-2)(2x-1)}{(x^2-x+2)^2}$

$=\dfrac{-x^2+4x}{(x^2-x+2)^2}=\dfrac{-x(x-4)}{(x^2-x+2)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

구간 $[-1, 5]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$	5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{3}{4}$	↘	-1	↗	$\frac{1}{7}$	↘	$\frac{3}{22}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값 $\frac{1}{7}$, $x=0$에서 최솟값 -1을 갖는다.

(2) $f(x)=x\sqrt{x+6}$에서

$f'(x)=\sqrt{x+6}+\dfrac{x}{2\sqrt{x+6}}=\dfrac{3x+12}{2\sqrt{x+6}}=\dfrac{3(x+4)}{2\sqrt{x+6}}$

$f'(x)=0$에서 $x=-4$

구간 $[-6, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-6	$\cdots$	-4	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-4\sqrt{2}$	↗	$4\sqrt{2}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $4\sqrt{2}$, $x=-4$에서 최솟값 $-4\sqrt{2}$를 갖는다.

06-1 답 (1) 최댓값: 3, 최솟값: 2

(2) 최댓값: π, 최솟값: -2π

|해결 전략| 주어진 구간에서 함수의 극값을 구한 후 극댓값, 극솟값, 구간의 양 끝에서의 함숫값을 비교하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

(1) $f(x)=x\ln x-x+3$에서

$f'(x)=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}-1=\ln x$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

구간 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1	$\cdots$	e
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$3-\frac{2}{e}$	↘	2	↗	3

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 최댓값 3, $x=1$에서 최솟값 2를 갖는다.

(2) $f(x)=\sin x-x\cos x$에서

$f'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $\sin x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ $(\because 0\le x\le 2\pi)$

구간 $[0, 2\pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	π	$\searrow$	-2π

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\pi$에서 최댓값 π, $x=2\pi$에서 최솟값 -2π를 갖는다.

07-1 답 1

|해결 전략| 주어진 구간에서의 극값과 구간의 양 끝에서의 함숫값을 구한 후 주어진 최댓값을 이용하여 a의 값을 구한다.

$f(x)=ax^2e^{-x}$에서

$f'(x)=2axe^{-x}+ax^2\times(-e^{-x})=-ax(x-2)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 1\le x\le 3$)

$1\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{a}{e}$	$\nearrow$	$\frac{4a}{e^2}$	$\searrow$	$\frac{9a}{e^3}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값을 가지므로

$f(2)=\frac{4a}{e^2}=\frac{4}{e^2}\qquad \therefore a=1$

07-2 답 $a=2$, $b=1$

|해결 전략| 주어진 구간에서의 극값과 구간의 양 끝에서의 함숫값을 구한 후 주어진 최댓값과 최솟값을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

$f(x)=a\sqrt{3-x^2}e^{-2x}+b$에서 $-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$이고

$$\begin{aligned}f'(x)&=a\left\{\frac{-2x}{2\sqrt{3-x^2}}e^{-2x}+\sqrt{3-x^2}\times(-2e^{-2x})\right\}\\&=\frac{a\{-xe^{-2x}-2(3-x^2)e^{-2x}\}}{\sqrt{3-x^2}}\\&=\frac{a(2x^2-x-6)e^{-2x}}{\sqrt{3-x^2}}\\&=\frac{a(2x+3)(x-2)e^{-2x}}{\sqrt{3-x^2}}\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{3}{2}$ ($\because -\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$)

$-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	b	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}e^3a}{2}+b$	$\searrow$	b

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{3}{2}$에서 최댓값을 갖고, $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$에서 최솟값을 갖는다.

$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\sqrt{3}e^3+1$에서

$\frac{\sqrt{3}e^3a}{2}+b=\sqrt{3}e^3+1\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$f(-\sqrt{3})=f(\sqrt{3})=1$에서 $b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면

$\frac{\sqrt{3}e^3a}{2}+1=\sqrt{3}e^3+1\qquad\therefore a=2$

08-1 답 $\frac{7}{4}$

|해결 전략| 두 점 P, Q의 좌표를 구하여 $\overline{PQ}$의 길이를 a에 대한 함수로 나타낸 후 최솟값을 구한다.

$P(a, a)$, $Q(a, \sqrt{a-2})$이므로

$\overline{PQ}=a-\sqrt{a-2}$

이때, $f(a)=a-\sqrt{a-2}$로 놓으면

$f'(a)=1-\frac{1}{2\sqrt{a-2}}=\frac{2\sqrt{a-2}-1}{2\sqrt{a-2}}$

$f'(a)=0$에서 $2\sqrt{a-2}-1=0$, $\sqrt{a-2}=\frac{1}{2}$

$a-2=\frac{1}{4}\qquad\therefore a=\frac{9}{4}$

$a>2$에서 함수 $f(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(2)	$\cdots$	$\frac{9}{4}$	$\cdots$
$f'(a)$		$-$	0	$+$
$f(a)$		$\searrow$	$\frac{7}{4}$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(a)$는 $a=\frac{9}{4}$에서 극소이면서 최소이므로 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 $\frac{7}{4}$이다.

2 방정식과 부등식에의 활용

개념 확인 165쪽~166쪽

1 (1) 2 (2) 1

2 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

1 (1) $f(x)=x-6\ln x$로 놓으면 $x>0$이고

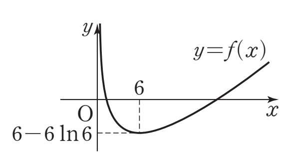
$f'(x)=1-\frac{6}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=6$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$6-6\ln 6$	$\nearrow$

이때, $\lim_{x\to 0+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



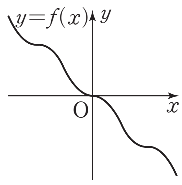
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(2) $f(x)=\sin x-x$로 놓으면

$f'(x)=\cos x-1$

$f'(x)\le 0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

이때, $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

2 (1) $f(x)=(x-1)e^x+1$로 놓으면

$f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$

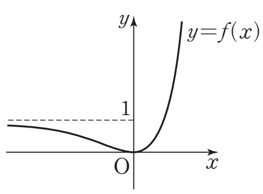
$f'(x)=0$에서 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

이때, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 0을 가지므로

$f(x)=(x-1)e^x+1\ge 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $(x-1)e^x\ge -1$이 성립한다.

(2) $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$로 놓으면 $x>0$이고

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$

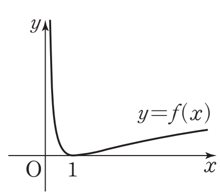
$f'(x)=0$에서 $x=1$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	0	↗

이때, $\lim_{x\to 0+} f(x)=\infty$,

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 0을 가지므로

$f(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1\ge 0$

따라서 $x>0$일 때, 부등식 $\ln x\ge 1-\frac{1}{x}$이 성립한다.

STEP 1 개념 드릴

| 167쪽 |

개념 check

1-1 $\frac{3}{2}$, 2

2-1 1, 0

스스로 check

1-2 답 (1) 1 (2) 1

(1) $f(x)=\frac{\ln x}{x}+1$로 놓으면 $x>0$이고

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

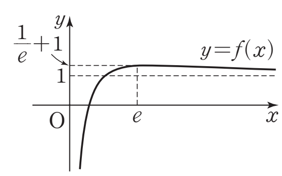
$f'(x)=0$에서 $\ln x=1$ $\quad\therefore x=e$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}+1$	↘

이때, $\lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to\infty} f(x)=1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

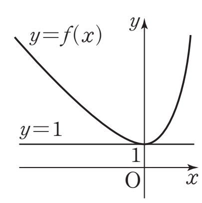
(2) $f(x)=e^x-x$로 놓으면 $f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗

이때, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=1$과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

2-2 답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) $f(x)=x+2-(2-x)e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1+e^x-(2-x)e^x=(x-1)e^x+1$

$f''(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$

$x>0$일 때, $f''(x)>0$이므로 $f'(x)$는 증가하고, $f'(0)=0$이므로

$f'(x)>0$

또, $x>0$일 때, $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가하고, $f(0)=0$이므로 $f(x)>0$

따라서 $x>0$일 때, 부등식 $x+2>(2-x)e^x$이 성립한다.

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}-1$로 놓으면

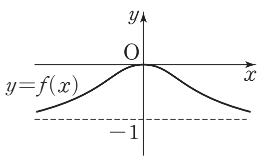
$f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

이때, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 0을 가지므로

$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}-1\le 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $\dfrac{1}{x^2+1}\le 1$이 성립한다.

STEP 2 필수 유형

| 168쪽~170쪽 |

01-1 답 $k>2+\ln 2$

|해결 전략| $f(x)=2x-\ln\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$로 놓고 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 직선 $y=k$와 두 점에서 만나도록 하는 k의 값의 범위를 구한다.

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=2x-\ln\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=2x-\ln\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$로 놓으면 $x>\dfrac{1}{2}$이고

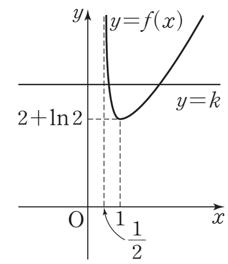
$f'(x)=2-\dfrac{1}{x-\frac{1}{2}}=2-\dfrac{2}{2x-1}=\dfrac{4(x-1)}{2x-1}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

$x>\dfrac{1}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$2+\ln 2$	$\nearrow$

이때, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}+} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$k>2+\ln 2$

02-1 답 $0<k<\dfrac{1}{e^2}$

|해결 전략| 곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=kx+1$이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 값의 범위를 구한다.

방정식 $\ln x=kx+1$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=kx+1$이 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=\ln x$, $g(x)=kx+1$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g'(x)=k$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접할 때, 접점의 x좌표를 a라 하면

$f(a)=g(a)$에서 $\ln a=ka+1$ ······㉠

$f'(a)=g'(a)$에서 $\dfrac{1}{a}=k$ ······㉡

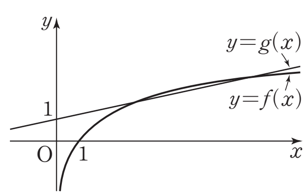
㉡을 ㉠에 대입하면

$\ln a=\dfrac{1}{a}\times a+1$, $\ln a=2$ $\quad\therefore a=e^2$

$a=e^2$을 ㉡에 대입하면 $k=\dfrac{1}{e^2}$

따라서 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 k의 값의 범위는

$0<k<\dfrac{1}{e^2}$



03-1 답 $k\le 2e$

|해결 전략| $x>1$에서 함수 $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}-k$의 최솟값이 0보다 크거나 같도록 하는 k의 값의 범위를 구한다.

$f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}-k$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{2x\ln x-x^2\times\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{x(2\ln x-1)}{(\ln x)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore x=\sqrt{e}$

$x>1$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(1)	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$2e-k$	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{e}$에서 최소이므로 $f(x)\ge 0$이 성립하려면
$2e-k\ge 0$　　$\therefore k\le 2e$

03-2 답 $-e^{\frac{\pi}{2}}$

|해결 전략| $0\le x\le \frac{3}{4}\pi$에서 함수 $f(x)=-e^x(\sin x+\cos x)-k$의 최솟값이 0보다 크거나 같도록 하는 k의 값의 범위를 구한다.

$f(x)=-e^x(\sin x+\cos x)-k$로 놓으면
$f'(x)=-e^x(\sin x+\cos x)-e^x(\cos x-\sin x)=-2e^x\cos x$
$f'(x)=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}\left(\because 0\le x\le \frac{3}{4}\pi\right)$

$0\le x\le \frac{3}{4}\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$-e^{\frac{\pi}{2}}-k$	↗	

함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 최소이므로 $f(x)\ge 0$이 성립하려면
$-e^{\frac{\pi}{2}}-k\ge 0$　　$\therefore k\le -e^{\frac{\pi}{2}}$
따라서 구하는 k의 최댓값은 $-e^{\frac{\pi}{2}}$이다.

3 속도와 가속도

개념 확인 171쪽~172쪽

1 (1) 속도: e^2, 가속도: e^2　(2) 속도: $\frac{1}{2}$, 가속도: $-\frac{1}{4}$

2 속도: $(2t, 2)$, 가속도: $(2, 0)$

1 (1) 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하면
$v(t)=f'(t)=e^t$, $a(t)=f''(t)=e^t$
따라서 $t=2$에서의 점 P의 속도와 가속도는
$v(2)=e^2$, $a(2)=e^2$
(2) 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하면
$v(t)=f'(t)=\frac{1}{t}$, $a(t)=f''(t)=-\frac{1}{t^2}$
따라서 $t=2$에서의 점 P의 속도와 가속도는
$v(2)=\frac{1}{2}$, $a(2)=-\frac{1}{2^2}=-\frac{1}{4}$

2 $\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=2$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는 $(2t, 2)$
또, $\frac{d^2x}{dt^2}=2$, $\frac{d^2y}{dt^2}=0$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는
$(2, 0)$

STEP 1 개념 드릴 | 174쪽 |

개념 check

1-1 0, -2
2-1 (1) 2, 2, $\sqrt{5}$　(2) 2, 2, 2

스스로 check

1-2 답 (1) 속도: 1, 가속도: 1

(2) 속도: $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, 가속도: $\frac{\sqrt{2}}{8}$

(1) 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하면
$v(t)=f'(t)=1-\sin t$, $a(t)=f''(t)=-\cos t$
따라서 $t=\pi$에서의 점 P의 속도와 가속도는
$v(\pi)=1-\sin\pi=1$, $a(\pi)=-\cos\pi=1$
(2) 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하면
$v(t)=f'(t)=1-\frac{1}{\sqrt{t}}$, $a(t)=f''(t)=\frac{1}{2t\sqrt{t}}$
따라서 $t=2$에서의 점 P의 속도와 가속도는
$v(2)=1-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, $a(2)=\frac{1}{2\times 2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$

2-2 답 (1) 5　(2) 2

(1) $\frac{dx}{dt}=-3$, $\frac{dy}{dt}=2t-6$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는
$(-3, 2t-6)$
따라서 $t=5$에서의 점 P의 속도는
$(-3, 2\times 5-6)$, 즉 $(-3, 4)$
이므로 속력은
$\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$
(2) $\frac{d^2x}{dt^2}=0$, $\frac{d^2y}{dt^2}=2$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는
$(0, 2)$
따라서 $t=6$에서의 점 P의 가속도는 $(0, 2)$이므로 가속도의 크기는
$\sqrt{0^2+2^2}=2$

STEP 2 필수 유형 | 175쪽~176쪽 |

01-1 답 (1) 속도: $2+\sqrt{2}$, 가속도: $-\sqrt{2}$

(2) -2

|해결 전략| 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 속도 v와 가속도 a는 $v=f'(t)$, $a=f''(t)$이다.

(1) 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하면
$v(t)=f'(t)=2+2\cos t$, $a(t)=f''(t)=-2\sin t$

따라서 $t=\frac{\pi}{4}$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$$v\left(\frac{\pi}{4}\right)=2+2\cos\frac{\pi}{4}=2+2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2+\sqrt{2}$$

$$a\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2\sin\frac{\pi}{4}=-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$$

(2) 속도가 2인 순간은 $2+2\cos t=2$에서

$\cos t=0$

$\therefore t=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0<t<\pi$)

따라서 속도가 2인 순간의 점 P의 가속도는

$$a\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin\frac{\pi}{2}=-2$$

02-1 답 속력: $\sqrt{3}$, 가속도의 크기: $\frac{\sqrt{2}}{4}$

| 해결 전략 | 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속력은 $\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$, 가속도의 크기는 $\sqrt{\{f''(t)\}^2+\{g''(t)\}^2}$이다.

$\frac{dx}{dt}=1$, $\frac{dy}{dt}=\frac{2}{\sqrt{t}}$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$\left(1, \frac{2}{\sqrt{t}}\right)$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 속도는

$\left(1, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$, 즉 $(1, \sqrt{2})$

이므로 속력은

$\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$

$\frac{d^2x}{dt^2}=0$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{1}{t\sqrt{t}}$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$\left(0, -\frac{1}{t\sqrt{t}}\right)$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는

$\left(0, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, 즉 $\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

이므로 가속도의 크기는

$\sqrt{0^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

STEP 3 유형 드릴 | 177쪽~179쪽 |

1-1 답 구간 $\left(0, \frac{\sqrt{e}}{e}\right)$

| 해결 전략 | 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 한다.

$f(x)=x^2(\ln x-1)$로 놓으면 $x>0$이고

$$f'(x)=2x(\ln x-1)+x^2\times\frac{1}{x}=x(2\ln x-1)$$

$$f''(x)=2\ln x-1+x\times\frac{2}{x}=2\ln x+1$$

곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로

$2\ln x+1<0$, $\ln x<-\frac{1}{2}$

$\therefore 0<x<\frac{\sqrt{e}}{e}$ ($\because x>0$)

따라서 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록한 구간은 $\left(0, \frac{\sqrt{e}}{e}\right)$이다.

1-2 답 π

| 해결 전략 | 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 한다.

$f(x)=e^x\sin x$로 놓으면

$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$

$f''(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$

곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로

$2e^x\cos x<0$ $\quad\therefore \frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

따라서 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록한 구간은 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$이므로

$a=\frac{\pi}{2}$, $b=\frac{3}{2}\pi$

$\therefore b-a=\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}=\pi$

2-1 답 $\frac{4}{3}\pi$

| 해결 전략 | 함수 $y=f(x)$에서 $f''(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a, f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

$f(x)=x^2+4\cos x$로 놓으면

$f'(x)=2x-4\sin x$, $f''(x)=2-4\cos x$

$f''(x)=0$에서 $2-4\cos x=0$, $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

이때, $0<x<\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi<x<2\pi$이면 $f''(x)<0$, $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi$이면 $f''(x)>0$

따라서 $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{5}{3}\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 두 변곡점의 x좌표는 각각 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{3}\pi$이다.

$\therefore |\alpha-\beta|=\left|\frac{\pi}{3}-\frac{5}{3}\pi\right|=\frac{4}{3}\pi$

2-2 답 $\sqrt{3}$

| 해결 전략 | 함수 $y=f(x)$에서 $f''(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a, f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

$f(x)=\ln(x^2+x+1)$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

$$f''(x)=\frac{2(x^2+x+1)-(2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$
$$=-\frac{2x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2}$$
$f''(x)=0$에서 $2x^2+2x-1=0$

$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

이때, $x<\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ 또는 $x>\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$이면 $f''(x)<0$,

$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}<x<\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$이면 $f''(x)>0$

따라서 $x=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 두 변곡점의 x좌표는 각각 $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$이다.

$\therefore |\alpha-\beta|=\left|\frac{-1-\sqrt{3}}{2}-\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{3}$

다른 풀이 $f''(x)=0$에서 $2x^2+2x-1=0$

이때, 이차방정식 $2x^2+2x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-2\times(-1)=3>0$이므로 서로 다른 두 실근 α, β를 갖고, $x=\alpha$, $x=\beta$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 α, β는 곡선 $y=f(x)$의 두 변곡점의 x좌표이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-\frac{1}{2}$이므로

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$
$$=\sqrt{(-1)^2-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{3}$$

3-1 답 3

| 해결 전략 | 점 (α, β)가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이면 $f(\alpha)=\beta$, $f''(\alpha)=0$이다.

$f(x)=\ln(ax^2+b)$에서

$$f'(x)=\frac{2ax}{ax^2+b}$$
$$f''(x)=\frac{2a(ax^2+b)-2ax\times 2ax}{(ax^2+b)^2}=\frac{2a(b-ax^2)}{(ax^2+b)^2}$$

점 $(1, \ln 2)$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이므로

$f(1)=\ln 2$에서 $\ln(a+b)=\ln 2$ $\quad\therefore a+b=2$ ……㉠

$f''(1)=0$에서 $\frac{2a(b-a)}{(a+b)^2}=0$ $\quad\therefore b-a=0$ ($\because a\neq 0$) ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

$\therefore a+2b=3$

3-2 답 $a<\frac{9}{4}$

| 해결 전략 | 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 2개이려면 $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 2개이어야 한다.

$f(x)=(x^2+x+a)e^x$으로 놓으면

$$f'(x)=(2x+1)e^x+(x^2+x+a)e^x=(x^2+3x+a+1)e^x$$
$$f''(x)=(2x+3)e^x+(x^2+3x+a+1)e^x$$
$$=(x^2+5x+a+4)e^x$$

$e^x>0$이므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 2개이려면 방정식 $x^2+5x+a+4=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2+5x+a+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-4(a+4)>0$

$a+4<\frac{25}{4}$ $\quad\therefore a<\frac{9}{4}$

4-1 답 $-\frac{6}{5}$

| 해결 전략 | 구간 $[a, b]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)$, $f(b)$와 $f(x)$의 극값 중 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.

$f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-3}$에서

$$f'(x)=\frac{(2x-3)(x-3)-(x^2-3x+1)}{(x-3)^2}$$
$$=\frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}=\frac{(x-2)(x-4)}{(x-3)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ $\left(\because -2\le x\le\frac{5}{2}\right)$

$-2\le x\le\frac{5}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	$\frac{5}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{11}{5}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 1, $x=-2$에서 최솟값 $-\frac{11}{5}$을 가지므로

$M=1$, $m=-\frac{11}{5}$ $\quad\therefore M+m=1+\left(-\frac{11}{5}\right)=-\frac{6}{5}$

4-2 답 $3\sqrt{3}$

| 해결 전략 | 구간 $[a, b]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)$, $f(b)$와 $f(x)$의 극값 중 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.

$f(x)=\frac{1}{2}x^3\sqrt{4-x^2}$에서 $-2\le x\le 2$이고

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2\sqrt{4-x^2}+x^3\times\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\right)$$
$$=\frac{6x^2-2x^4}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{-2x^2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{\sqrt{4-x^2}}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

$-2\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{3}$에서 최댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $x=-\sqrt{3}$에서 최솟값 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$을 가지므로

$M=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $m=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore M-m=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=3\sqrt{3}$

5-1 답 $-2e^2$

|해결 전략| 구간 $[a, b]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)$, $f(b)$와 $f(x)$의 극값 중 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.

$f(x)=(x^2-2)e^{2x}$에서

$$f'(x)=2xe^{2x}+(x^2-2)\times 2e^{2x}$$
$$=2(x^2+x-2)e^{2x}$$
$$=2(x+2)(x-1)e^{2x}$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because 0\le x\le 2$)

$0\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	↘	$-e^2$	↗	$2e^4$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $2e^4$, $x=1$에서 최솟값 $-e^2$을 가지므로

$M=2e^4$, $m=-e^2$ $\quad\therefore \frac{M}{m}=\frac{2e^4}{-e^2}=-2e^2$

5-2 답 $2-\pi$

|해결 전략| 도함수의 정의를 이용하여 $f(x)$를 변형하고 최댓값, 최솟값을 구한다.

$$f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{x\cos(x+2h)-(x+2h)\cos x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x\{\cos(x+2h)-\cos x\}-2h\cos x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{2x\times\frac{\cos(x+2h)-\cos x}{2h}-2\cos x\right\}$$
$$=2x\times(\cos x)'-2\cos x$$

→ 미분가능한 함수 $y=g(x)$의 도함수는 $g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$$=-2x\sin x-2\cos x=-2(x\sin x+\cos x)$$

$f'(x)=-2(\sin x+x\cos x-\sin x)=-2x\cos x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0\le x\le \pi$)

$0\le x\le \pi$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	↘	$-\pi$	↗	2

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\pi$에서 최댓값 2, $x=\frac{\pi}{2}$에서 최솟값 $-\pi$를 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은 $2-\pi$이다.

6-1 답 $\sqrt{6}$

|해결 전략| 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 조사하고, 주어진 최솟값을 이용하여 a의 값을 구한다.

$f(x)=a(x-1)\sqrt{x+1}+3$에서

$$f'(x)=a\left\{\sqrt{x+1}+(x-1)\times\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right\}=\frac{a(3x+1)}{2\sqrt{x+1}}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{2}\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{3\sqrt{2}}{4}a+3$	↘	$-\frac{4\sqrt{6}}{9}a+3$	↗	$4a+3$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{3}$에서 최솟값을 가지므로

$f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{6}}{9}a+3=\frac{1}{3}$

$-\frac{4\sqrt{6}}{9}a=-\frac{8}{3}$ $\quad\therefore a=\sqrt{6}$

6-2 답 $a=3$, $b=1$

|해결 전략| 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 조사하고, 주어진 최댓값과 최솟값을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

$f(x)=\frac{(a+b)\sin x+2b}{\sin x+2}=\frac{a\sin x}{\sin x+2}+b$에서

$f'(x)=\frac{a\cos x(\sin x+2)-a\sin x\cos x}{(\sin x+2)^2}=\frac{2a\cos x}{(\sin x+2)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	b	↗	$\frac{1}{3}a+b$	↘	$-a+b$	↗	b

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 최댓값을 갖고, $x=\frac{3}{2}\pi$에서 최솟값을 가지므로

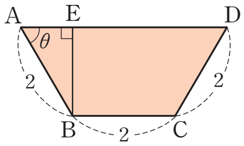
$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{3}a+b=2$ …… ㉠

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-a+b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=1$

7-1 답 $3\sqrt{3}$

|해결 전략| $\angle BAD=\theta$로 놓고 등변사다리꼴의 넓이를 θ에 대한 함수로 나타낸다.



사다리꼴 ABCD의 꼭짓점 B에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 E라 하고,

$\angle BAD$의 크기를 θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\overline{AE}=2\cos\theta$, $\overline{BE}=2\sin\theta$

$\overline{AD}=2\times 2\cos\theta+2=4\cos\theta+2$

등변사다리꼴의 넓이를 $S(\theta)$라 하면

$S(\theta)=\frac{1}{2}(2+4\cos\theta+2)\times 2\sin\theta=4(1+\cos\theta)\sin\theta$

$$\begin{aligned}S'(\theta)&=4(-\sin\theta)\sin\theta+4(1+\cos\theta)\cos\theta\\&=4(-\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos\theta)\\&=4(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)\\&=4(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)\end{aligned}$$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

$S'(\theta)=0$에서 $\cos\theta=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore\ \theta=\frac{\pi}{3}\left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $S(\theta)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		↗	$3\sqrt{3}$	↘	

따라서 $S(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{3}$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 넓이의 최댓값은 $3\sqrt{3}$이다.

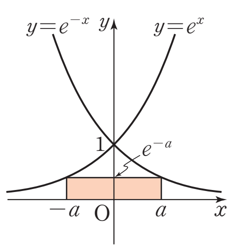
7-2 답 $\frac{2}{e}$

| 해결 전략 | 직사각형의 넓이를 a에 대한 함수로 나타낸 후 최댓값을 구한다.

직사각형의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=2ae^{-a}$

$$\begin{aligned}S'(a)&=2e^{-a}-2ae^{-a}\\&=2(1-a)e^{-a}\end{aligned}$$



$S'(a)=0$에서 $a=1$

$a>0$에서 함수 $S(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(a)$		$+$	0	$-$
$S(a)$		↗	$\frac{2}{e}$	↘

따라서 $S(a)$는 $a=1$에서 최댓값 $\frac{2}{e}$를 가지므로 구하는 넓이의 최댓값은 $\frac{2}{e}$이다.

8-1 답 $0<k<\frac{12}{e^2}$

| 해결 전략 | 함수 $y=\frac{3x^2}{e^x}$의 그래프를 그리고 직선 $y=k$와 세 점에서 만나도록 하는 k의 값의 범위를 구한다.

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=\frac{3x^2}{e^x}$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=\frac{3x^2}{e^x}$으로 놓으면

$f'(x)=\frac{6xe^x-3x^2e^x}{e^{2x}}=\frac{-3x(x-2)}{e^x}$

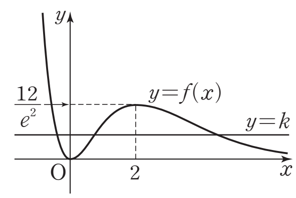
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$\frac{12}{e^2}$	↘

이때, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 k의 값의 범위는

$0<k<\frac{12}{e^2}$

8-2 답 $k>2\sqrt{2}$

| 해결 전략 | 함수 $y=\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$의 그래프를 그리고 직선 $y=k$와 두 점에서 만나도록 하는 k의 값의 범위를 구한다.

$x+1=k\sqrt{x-1}\ (x>1)$에서 $\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}=k$이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{\sqrt{x-1}-(x+1)\times\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{x-1}=\frac{x-3}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$

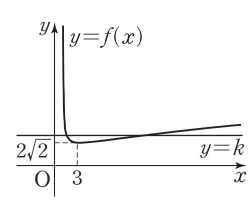
$f'(x)=0$에서 $x=3$

$x>1$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(1)	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$2\sqrt{2}$	↗

이때, $\lim_{x\to1+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 k의 값의 범위는

$k>2\sqrt{2}$

9-1 답 $k>1$

| 해결 전략 | $x>a$에서 $f(x)$가 증가할 때, $f(x)>0$이려면 $f(a)>0$이어야 한다.

$f(x)=x-\cos x+k$로 놓으면

$f'(x)=1+\sin x$

모든 실수 x에 대하여 $-1\le\sin x\le1$이므로

$f'(x)\ge0$

따라서 $x\ge 0$일 때 $f(x)$는 증가하고, $f(0)=-1+k$이므로 $f(x)>0$이 성립하려면 $-1+k>0$ $\quad\therefore k>1$

9-2 답 $3\sqrt{3}$

| 해결 전략 | $f(x)=2\sin 2x+4\sin x$로 놓고 함수 $f(x)$의 최댓값이 k의 최솟값임을 이용한다.

$f(x)=2\sin 2x+4\sin x$로 놓으면

$$f'(x)=4\cos 2x+4\cos x$$
$$=4(2\cos^2 x+\cos x-1)\ (\because \cos 2x=2\cos^2 x-1)$$
$$=4(2\cos x-1)(\cos x+1)$$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=-1$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$ ($\because 0\le x\le \pi$)

$0\le x\le \pi$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	$3\sqrt{3}$	↘	0

함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$에서 최댓값 $3\sqrt{3}$을 가지므로 $f(x)\le k$가 성립하려면 $k\ge 3\sqrt{3}$

따라서 구하는 k의 최솟값은 $3\sqrt{3}$이다.

10-1 답 $\sqrt{3}$

| 해결 전략 | 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도 v는 $v=\frac{dx}{dt}=f'(t)$이다.

점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$$v(t)=f'(t)=-\pi a\sin\left(\pi t-\frac{\pi}{6}\right)$$

$t=1$에서의 속도가 $-\pi$이므로

$$-\pi a\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\pi a\sin\frac{5}{6}\pi=-\frac{\pi}{2}a=-\pi \qquad \therefore a=2$$

따라서 $f(t)=2\cos\left(\pi t-\frac{\pi}{6}\right)$이므로 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$$f(2)=2\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\frac{\pi}{6}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

10-2 답 3

| 해결 전략 | 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도 v와 가속도 a는 $v=\frac{dx}{dt}=f'(t)$, $a=\frac{dv}{dt}=f''(t)$이다.

점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하면

$$v(t)=f'(t)=\frac{2t}{t^2+9}$$

$$a(t)=f''(t)=\frac{2(t^2+9)-2t\times 2t}{(t^2+9)^2}=\frac{-2(t+3)(t-3)}{(t^2+9)^2}$$

이때, $t\ge 0$이므로 점 P의 가속도가 0일 때의 시각은

$a(t)=0$에서 $t=3$

11-1 답 $\frac{\sqrt{15}}{4}$

| 해결 전략 | 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도는 $(f'(t), g'(t))$이고 속력은 $\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$이다.

$\frac{dx}{dt}=2\sin 2t$, $\frac{dy}{dt}=-\sin t-\cos t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(2\sin 2t, -\sin t-\cos t)$

따라서 점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{(2\sin 2t)^2+(-\sin t-\cos t)^2}$$
$$=\sqrt{4\sin^2 2t+2\sin t\cos t+1}\ (\because \sin^2 t+\cos^2 t=1)$$
$$=\sqrt{4\sin^2 2t+\sin 2t+1}$$

$\sin 2t=a$ $(-1\le a\le 1)$로 놓으면

$$4\sin^2 2t+\sin 2t+1=4a^2+a+1$$
$$=4\left(a+\frac{1}{8}\right)^2+\frac{15}{16}$$

따라서 점 P의 시각 t에서의 속력의 최솟값은

$$\sqrt{\frac{15}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

LECTURE

배각의 공식

❶ $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

❷ $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

❸ $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

11-2 답 2

| 해결 전략 | 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속력은 $\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$이다.

$\frac{dx}{dt}=e^t-e^{-t}$, $\frac{dy}{dt}=e^t+e^{-t}$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

(e^t-e^{-t}, e^t+e^{-t})

따라서 점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{(e^t-e^{-t})^2+(e^t+e^{-t})^2}$$
$$=\sqrt{2(e^{2t}+e^{-2t})}$$

$f(t)=2(e^{2t}+e^{-2t})$으로 놓으면

$f'(t)=4(e^{2t}-e^{-2t})$

$f'(t)=0$에서 $t=0$

$t\ge 0$에서 함수 $f(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$
$f'(t)$	0	$+$
$f(t)$	4	↗

함수 $f(t)$는 $t=0$에서 최솟값 4를 가지므로 점 P의 속력은 $t=0$에서 최솟값 $\sqrt{4}=2$를 갖는다.

따라서 $a=0$, $b=2$이므로

$a+b=2$

8 | 여러 가지 적분법

1 여러 가지 함수의 부정적분

개념 확인 182쪽~184쪽

1 (1) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$ (2) $-\frac{1}{3x^3}+C$ (3) $2\sqrt{x}+C$

2 (1) $2e^x+C$ (2) $\frac{3^{2x}}{2\ln 3}+C$ (3) $e^{x+3}+C$ (4) $\frac{7^{x+2}}{\ln 7}+C$

3 (1) $-2\cos x+\sin x+C$ (2) $\sin x-3\tan x+C$

1 (1) $\int \sqrt[3]{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1}+C$

$=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$

(2) $\int \frac{1}{x^4}dx=\int x^{-4}dx=\frac{1}{-4+1}x^{-4+1}+C$

$=-\frac{1}{3}x^{-3}+C=-\frac{1}{3x^3}+C$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+C$

$=2x^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{x}+C$

2 (1) $\int 2e^x dx=2\int e^x dx=2e^x+C$

(2) $\int 3^{2x}dx=\int 9^x dx=\frac{9^x}{\ln 9}+C=\frac{3^{2x}}{2\ln 3}+C$

(3) $\int e^{x+3}dx=\int e^x\times e^3 dx=e^3\int e^x dx$

$=e^3\times e^x+C=e^{x+3}+C$

(4) $\int 7^{x+2}dx=\int 7^x\times 7^2 dx=49\int 7^x dx$

$=49\times\frac{7^x}{\ln 7}+C=\frac{7^{x+2}}{\ln 7}+C$

3 (1) $\int(2\sin x+\cos x)dx=2\int \sin x\,dx+\int \cos x\,dx$

$=-2\cos x+\sin x+C$

(2) $\int(\cos x-3\sec^2 x)dx=\int \cos x\,dx-3\int \sec^2 x\,dx$

$=\sin x-3\tan x+C$

STEP 1 개념 드릴 | 185쪽 |

개념 check

1-1 x^2, $\frac{2}{x}$, $\frac{1}{3}x^3$, $2\ln|x|$

2-1 (1) 4^x, $\ln 2$ (2) 2^x, $\frac{2^x}{\ln 2}$, $\frac{2^{x+1}}{\ln 2}$

3-1 (1) $\sec^2 x$, $\sec^2 x$, $\tan x$ (2) $\sin^2 x$, $\sin^2 x$, $\sin x$, $-\cos x$

스스로 check

1-2 답 $\frac{1}{6}x^6+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{x}+C$

$\int\left(x^3-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{2}{x}\right)dx=\int\left(x^5+2x^2-x-\frac{2}{x^2}\right)dx$

$=\int(x^5+2x^2-x-2x^{-2})dx$

$=\frac{1}{6}x^6+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x^{-1}+C$

$=\frac{1}{6}x^6+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{x}+C$

2-2 답 (1) $2e^x+\frac{2^{3x}}{3\ln 2}+C$ (2) $\frac{3^{2x}}{2\ln 3}-\frac{2\times 3^x}{\ln 3}+x+C$

(1) $\int(2e^x+2^{3x})dx=\int(2e^x+8^x)dx$

$=2e^x+\frac{8^x}{\ln 8}+C$

$=2e^x+\frac{2^{3x}}{3\ln 2}+C$

(2) $\int(3^x-1)^2dx=\int(9^x-2\times 3^x+1)dx$

$=\frac{9^x}{\ln 9}-2\times\frac{3^x}{\ln 3}+x+C$

$=\frac{3^{2x}}{2\ln 3}-\frac{2\times 3^x}{\ln 3}+x+C$

3-2 답 (1) $-\cot x-x+C$ (2) $\sin x+C$

(1) $\cot^2 x=\csc^2 x-1$이므로

$\int \cot^2 x\,dx=\int(\csc^2 x-1)dx$

$=-\cot x-x+C$

(2) $1-\sin^2 x=\cos^2 x$이므로

$\int\frac{\cos^3 x}{1-\sin^2 x}dx=\int\frac{\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$

$=\int \cos x\,dx$

$=\sin x+C$

01-1 답 (1) $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}-\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+6\sqrt{x}+C$

(2) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+C$

|해결 전략| 분자를 분모로 나누거나 식을 합하고 분자를 인수분해하여 x^n (n은 실수) 꼴인 항의 합으로 변형한다.

(1) $\int\frac{x^3-x^2+3}{\sqrt{x}}dx=\int(x^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{3}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}})dx$

$=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}+C$

$=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}-\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+6\sqrt{x}+C$

(2) $\int\frac{x^2}{\sqrt{x}-1}dx-\int\frac{1}{\sqrt{x}-1}dx=\int\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}dx=\int\frac{(\sqrt{x})^4-1}{\sqrt{x}-1}dx$

$=\int\frac{\{(\sqrt{x})^2+1\}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}dx$

$=\int(x+1)(\sqrt{x}+1)dx$

$=\int(x^{\frac{3}{2}}+x+x^{\frac{1}{2}}+1)dx$

$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x+C$

$=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+C$

01-2 답 $\frac{5}{2}$

|해결 전략| 분자를 전개한 후 x^n (n은 실수) 꼴인 항의 합으로 식을 변형한다.

$\int\frac{(x^2+1)^2}{x^3}dx=\int\frac{x^4+2x^2+1}{x^3}dx$

$=\int\left(x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)dx$

$=\int\left(x+\frac{2}{x}+x^{-3}\right)dx$

$=\frac{1}{2}x^2+2\ln|x|-\frac{1}{2}x^{-2}+C$

$=\frac{1}{2}x^2+2\ln|x|-\frac{1}{2x^2}+C$

이때, $\int\frac{(x^2+1)^2}{x^3}dx=px^2+q\ln|x|-\frac{1}{2x^2}+C$이므로

$p=\frac{1}{2}$, $q=2$ $\quad\therefore p+q=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

02-1 답 (1) $\frac{3^x}{\ln 3}+x+C$ (2) $-\frac{1}{3\times2^{3x}\ln 2}-x+C$

|해결 전략| 인수분해한 후 약분하거나 곱셈 공식을 이용하여 식을 전개한다.

(1) $\int\frac{9^x-1}{3^x-1}dx=\int\frac{(3^x+1)(3^x-1)}{3^x-1}dx$

$=\int(3^x+1)dx$

$=\frac{3^x}{\ln 3}+x+C$

(2) $\int\left(\frac{1}{2^x}-1\right)\left(\frac{1}{4^x}+\frac{1}{2^x}+1\right)dx=\int\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}-1\right\}dx$

$=\int\left\{\left(\frac{1}{8}\right)^x-1\right\}dx$

$=\frac{\left(\frac{1}{8}\right)^x}{\ln\frac{1}{8}}-x+C$

$=-\frac{1}{8^x\ln 8}-x+C$

$=-\frac{1}{3\times2^{3x}\ln 2}-x+C$

02-2 답 2

|해결 전략| 곱셈 공식을 이용하여 $f(x)$의 식을 전개한 후 부정적분을 구한다.

$f(x)=(3^x+a^x)\{9^x-(3a)^x+a^{2x}\}$

$=(3^x)^3+(a^x)^3$

$=27^x+(a^3)^x$

$\therefore \int f(x)dx=\int\{27^x+(a^3)^x\}dx$

$=\frac{27^x}{\ln 27}+\frac{(a^3)^x}{\ln a^3}+C$

$=\frac{3^{3x}}{3\ln 3}+\frac{a^{3x}}{3\ln a}+C$

$=\frac{3^{3x-1}}{\ln 3}+\frac{a^{3x}}{3\ln a}+C$

이때, 함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 $F(x)=\frac{3^{3x-1}}{\ln 3}+\frac{2^{3x}}{3\ln 2}$이므로 $a=2$

03-1 답 (1) $x+2\cot x+C$ (2) $-\cot x+\csc x+C$

|해결 전략| 분자를 분모로 나누거나 식을 변형한 후 공식을 이용하여 적분한다.

(1) $\int\frac{\sin^2 x-2}{\sin^2 x}dx=\int(1-2\csc^2 x)dx$

$1-\frac{2}{\sin^2 x}$

$=x+2\cot x+C$

(2) $\int\frac{1}{1+\cos x}dx=\int\frac{1-\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}dx$

$=\int\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}dx$

$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\sin x}\times\frac{\cos x}{\sin x}$

$=\int(\csc^2 x-\csc x\cot x)dx$

$=-\cot x+\csc x+C$

03-2 답 $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$

|해결 전략| 함수 $f(x)$의 식을 삼각함수의 부정적분 공식을 적용할 수 있는 형태로 변형한다.

$f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{2}{\sin^2 x}=\sec^2 x+2\csc^2 x$이므로

$F(x)=\int f(x)dx=\int(\sec^2 x+2\csc^2 x)dx$

$=\tan x-2\cot x+C$

이때, $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$에서 $1-2+C=-1$ $\therefore C=0$

따라서 $F(x)=\tan x-2\cot x$이므로

$F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}-2\sqrt{3}=-\frac{5\sqrt{3}}{3}$

2 치환적분법

개념 확인 189쪽~191쪽

1 (1) $\frac{1}{6}(3x-2)^6+C$ (2) $\frac{1}{7}(5x+1)^7+C$

2 (1) $\frac{1}{10}(2x+5)^5+C$ (2) $\frac{1}{6}\ln|6x+5|+C$

(3) $\frac{1}{2}e^{2x-1}+\frac{3^{3x}}{\ln 3}+C$

(4) $-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+\frac{1}{3}\sin(3x+1)+C$

3 (1) $\ln|x^3+3x+1|+C$ (2) $x+\ln|x+4|+C$

(3) $\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+C$

1 (1) $3x-2=t$로 놓으면 $3=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int 3(3x-2)^5dx=\int t^5\,dt$$
$$=\frac{1}{6}t^6+C=\frac{1}{6}(3x-2)^6+C$$

(2) $5x+1=t$로 놓으면 $5=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int 5(5x+1)^6dx=\int t^6\,dt$$
$$=\frac{1}{7}t^7+C=\frac{1}{7}(5x+1)^7+C$$

2 (1) $\int(2x+5)^4dx=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}(2x+5)^5+C$
$$=\frac{1}{10}(2x+5)^5+C$$

(2) $\int\frac{1}{6x+5}dx=\frac{1}{6}\ln|6x+5|+C$

(3) $\int e^{2x-1}dx+\int 3^{3x+1}dx=\frac{1}{2}e^{2x-1}+\frac{1}{3\ln 3}3^{3x+1}+C$
$$=\frac{1}{2}e^{2x-1}+\frac{3^{3x}}{\ln 3}+C$$

(4) $\int\sin(2x+1)dx+\int\cos(3x+1)dx$
$$=-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+\frac{1}{3}\sin(3x+1)+C$$

3 (1) $(x^3+3x+1)'=3x^2+3$이므로

$$\int\frac{3x^2+3}{x^3+3x+1}dx=\int\frac{(x^3+3x+1)'}{x^3+3x+1}dx$$
$$=\ln|x^3+3x+1|+C$$

(2) $\frac{x+5}{x+4}=1+\frac{1}{x+4}$이므로

$$\int\frac{x+5}{x+4}dx=\int\left(1+\frac{1}{x+4}\right)dx$$
$$=x+\ln|x+4|+C$$

(3) $\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$이므로

$$\int\frac{1}{(x+1)(x+2)}dx=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=\ln|x+1|-\ln|x+2|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+C$$

STEP 1 개념 드릴 | 192쪽~193쪽 |

개념 check

1-1 (1) $-\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$

(2) t, t, x^2 (3) t, $\frac{1}{2}t^2$, $\frac{1}{2}(\ln x)^2$

(4) t^2, $-\frac{1}{3}t^3$, $-\frac{1}{3}\cos^3 x$

2-1 $-\csc^2 x$, $-\csc^2 x$, $\ln|\cot x|$

3-1 (1) $5\ln|x+2|$

(2) $x+3$, $x+3$

스스로 check

1-2 답 (1) $\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x-2}+C$ (2) $2e^{x^3+1}+C$

(3) $\frac{1}{12}(\ln x)^6+C$ (4) $\frac{1}{4}\sin^4 x+C$

(1) $x-2=t$로 놓으면 $1=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int\sqrt{x-2}\,dx=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x-2}+C$$

(2) $x^3+1=t$로 놓으면 $3x^2=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int 6x^2e^{x^3+1}dx=2\int 3x^2e^{x^3+1}dx=2\int e^t\,dt$$
$$=2e^t+C=2e^{x^3+1}+C$$

(3) $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int \frac{(\ln x)^5}{2x}dx=\frac{1}{2}\int \frac{(\ln x)^5}{x}dx=\frac{1}{2}\int t^5dt$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}t^6+C=\frac{1}{12}(\ln x)^6+C$$

(4) $\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int \sin^3 x\cos x\,dx=\int t^3dt$$
$$=\frac{1}{4}t^4+C=\frac{1}{4}\sin^4 x+C$$

2-2 답 $2\ln(e^{2x}+3)+C$

$(e^{2x}+3)'=2e^{2x}$이므로

$$\int \frac{4e^{2x}}{e^{2x}+3}dx=2\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+3}dx$$
$$=2\int \frac{(e^{2x}+3)'}{e^{2x}+3}dx$$
$$=2\ln(e^{2x}+3)+C\ (\because e^{2x}+3>0)$$

3-2 답 (1) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x+2\ln|x-1|+C$

(2) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C$

(1) $\frac{x^3+2x-1}{x-1}=\frac{(x^2+x+3)(x-1)+2}{x-1}$

$$=x^2+x+3+\frac{2}{x-1}$$

이므로

$$\int \frac{x^3+2x-1}{x-1}dx=\int\left(x^2+x+3+\frac{2}{x-1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x+2\ln|x-1|+C$$

(2) $\frac{1}{x^2-4x+3}=\frac{1}{(x-3)(x-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)$

이므로

$$\int \frac{1}{x^2-4x+3}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}(\ln|x-3|-\ln|x-1|)+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C$$

STEP 2 필수 유형

| 194쪽~198쪽 |

01-1 답 (1) $\frac{1}{10}(4x^2-1)^5+C$ (2) $\frac{3}{20}(5x+2)\sqrt[3]{5x+2}+C$

| 해결 전략 | $\int\{f(x)\}^nf'(x)dx$, $\int\sqrt{f(x)}f'(x)dx$ 꼴은 $f(x)=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

(1) $4x^2-1=t$로 놓으면 $8x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int 4x(4x^2-1)^4dx=\frac{1}{2}\int 8x(4x^2-1)^4dx=\frac{1}{2}\int t^4dt$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}t^5+C=\frac{1}{10}t^5+C$$
$$=\frac{1}{10}(4x^2-1)^5+C$$

(2) $5x+2=t$로 놓으면 $5=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int\sqrt[3]{5x+2}\,dx=\frac{1}{5}\int 5\sqrt[3]{5x+2}\,dx$$
$$=\frac{1}{5}\int\sqrt[3]{t}\,dt=\frac{1}{5}\int t^{\frac{1}{3}}dt$$
$$=\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}+C$$
$$=\frac{3}{20}t^{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{20}t\sqrt[3]{t}+C$$
$$=\frac{3}{20}(5x+2)\sqrt[3]{5x+2}+C$$

01-2 답 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

| 해결 전략 | $x^2+2x+3=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$x^2+2x+3=t$로 놓으면 $2x+2=\frac{dt}{dx}$, $2(x+1)=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt$$
$$=t^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{t}+C=\sqrt{x^2+2x+3}+C$$

이때, $f(-1)=2\sqrt{2}$에서 $\sqrt{2}+C=2\sqrt{2}$ $\quad\therefore C=\sqrt{2}$

따라서 $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{2}$이므로 $f(0)=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

02-1 답 (1) $\frac{1}{3}(e^{2x}+2)\sqrt{e^{2x}+2}+C$ (2) $\frac{1}{3}(\ln x-3)^3+C$

| 해결 전략 | $\int f(e^x)e^xdx$, $\int\frac{f(\ln x)}{x}dx$ 꼴은 각각 $e^x=t$, $\ln x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

(1) $e^{2x}+2=t$로 놓으면 $2e^{2x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int e^{2x}\sqrt{e^{2x}+2}\,dx=\frac{1}{2}\int 2e^{2x}\sqrt{e^{2x}+2}\,dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}t\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{1}{3}(e^{2x}+2)\sqrt{e^{2x}+2}+C$$

(2) $\ln x-3=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int\frac{(\ln x-3)^2}{x}dx=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C$$
$$=\frac{1}{3}(\ln x-3)^3+C$$

02-2 답 $(\ln 2)^2$

|해결 전략| $\ln(x^2+2)=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$\ln(x^2+2)=t$로 놓으면 $\frac{2x}{x^2+2}=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int\frac{x}{x^2+2}\ln(x^2+2)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+2}\ln(x^2+2)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int t\,dt=\frac{1}{4}t^2+C$$
$$=\frac{1}{4}\{\ln(x^2+2)\}^2+C$$

이때, $f(0)=\frac{(\ln 2)^2}{4}$에서 $\frac{(\ln 2)^2}{4}+C=\frac{(\ln 2)^2}{4}$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}\{\ln(x^2+2)\}^2$이므로

$$f(\sqrt{2})=\frac{(\ln 4)^2}{4}=\left(\frac{2\ln 2}{2}\right)^2=(\ln 2)^2$$

03-1 답 (1) $\sin^4x-\sin^3x+\sin x+C$

(2) $\frac{1}{3}\cos^3x-\cos x+C$

|해결 전략| $\int f(\sin x)\cos x\,dx$, $\int f(\cos x)\sin x\,dx$ 꼴은 각각 $\sin x=t$, $\cos x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

(1) $\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int(4\sin^3x-3\sin^2x+1)\cos x\,dx$$
$$=\int(4t^3-3t^2+1)dt$$
$$=t^4-t^3+t+C$$
$$=\sin^4x-\sin^3x+\sin x+C$$

(2) $\int\sin^3x\,dx=\int\sin x\times\sin^2x\,dx$

$$=\int\sin x(1-\cos^2x)dx$$

$\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int\sin x(1-\cos^2x)dx=-\int(1-t^2)dt=\int(t^2-1)dt$$
$$=\frac{1}{3}t^3-t+C$$
$$=\frac{1}{3}\cos^3x-\cos x+C$$

03-2 답 $\frac{5}{4}$

|해결 전략| $\cos x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$F(x)=\int f(x)dx=\int\cos^3x\sin x\,dx=-\int t^3\,dt$$
$$=-\frac{1}{4}t^4+C$$
$$=-\frac{1}{4}\cos^4x+C$$

이때, $F(0)=1$에서 $-\frac{1}{4}+C=1$ $\quad\therefore C=\frac{5}{4}$

따라서 $F(x)=-\frac{1}{4}\cos^4x+\frac{5}{4}$이므로

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{5}{4}$$

04-1 답 (1) $\ln|x^3-x+3|+C$

(2) $\ln(2^x+4^x)+C$ (3) $\ln|\sin x|+C$

|해결 전략| $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$임을 이용한다.

(1) $(x^3-x+3)'=3x^2-1$이므로

$$\int\frac{3x^2-1}{x^3-x+3}dx=\int\frac{(x^3-x+3)'}{x^3-x+3}dx$$
$$=\ln|x^3-x+3|+C$$

(2) $(2^x+4^x)'=2^x\ln 2+4^x\ln 4=(2^x+2^{2x+1})\ln 2$이므로

$$\int\frac{(2^x+2^{2x+1})\ln 2}{2^x+4^x}dx=\int\frac{(2^x+4^x)'}{2^x+4^x}dx$$
$$=\ln(2^x+4^x)+C\ (\because 2^x+4^x>0)$$

(3) $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$이고 $(\sin x)'=\cos x$이므로

$$\int\cot x\,dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{(\sin x)'}{\sin x}dx$$
$$=\ln|\sin x|+C$$

04-2 답 $\ln 17$

|해결 전략| $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$임을 이용한다.

$(e^{2x}+1)'=2e^{2x}$이므로

$$f(x)=\int\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}dx=\int\frac{(e^{2x}+1)'}{e^{2x}+1}dx$$
$$=\ln(e^{2x}+1)+C\ (\because e^{2x}+1>0)$$

이때, $f(0)=\ln 2$에서 $\ln 2+C=\ln 2$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\ln(e^{2x}+1)$이므로

$f(\ln 4)=\ln(e^{2\ln 4}+1)=\ln 17$

05-1 답 (1) $\frac{1}{3}x^3-x^2+3x-3\ln|x+2|+C$ (2) $\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$

|해결 전략| 분자를 분모로 나누어 몫과 나머지의 꼴로 나타내거나 부분분수로 변형하여 부정적분을 구한다.

(1) $\frac{x^3-x+3}{x+2}=\frac{(x^2-2x+3)(x+2)-3}{x+2}=x^2-2x+3-\frac{3}{x+2}$

이므로

$$\int\frac{x^3-x+3}{x+2}dx=\int\left(x^2-2x+3-\frac{3}{x+2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-x^2+3x-3\ln|x+2|+C$$

(2) $\frac{3}{x^2-x-2}=\frac{3}{(x-2)(x+1)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}$이므로

$$\int\frac{3}{x^2-x-2}dx=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\ln|x-2|-\ln|x+1|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$$

05-2 답 $\ln 6$

|해결 전략| $\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)$임을 이용하여 피적분함수를 간단한 유리함수의 차로 나타내어 적분한다.

$\frac{2}{x(x+2)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}$이므로

$$f(x)=\int\frac{2}{x(x+2)}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=\ln|x|-\ln|x+2|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|+C$$

이때, $f(1)=\ln 2$에서 $-\ln 3+C=\ln 2$

$\therefore C=\ln 2+\ln 3=\ln 6$

따라서 $f(x)=\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|+\ln 6=\ln\left|\frac{6x}{x+2}\right|$이므로

$f(-1)=\ln 6$

3 부분적분법

개념 확인 199쪽

1 (가) $x+2$ (나) 1 (다) e^x (라) $(x+1)e^x$

1 $f(x)=\boxed{x+2}$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=\boxed{1}$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int(x+2)e^x dx=(\boxed{x+2})e^x-\int\boxed{e^x}dx$$
$$=(x+2)e^x-e^x+C$$
$$=\boxed{(x+1)e^x}+C$$

STEP 1 개념 드릴 | 200쪽 |

개념 check

1-1 $2x$, 2, $2x$, e^{2x}

2-1 $\cos x$, $\cos x$, $\cos x$, $\sin x$

3-1 $\ln x$, 1, $\ln x$, x

스스로 check

1-2 답 $\frac{x2^x}{\ln 2}-\frac{2^x}{(\ln 2)^2}+C$

$f(x)=x$, $g'(x)=2^x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\frac{2^x}{\ln 2}$이므로

$$\int x2^x dx=\frac{x2^x}{\ln 2}-\int\frac{2^x}{\ln 2}dx$$
$$=\frac{x2^x}{\ln 2}-\frac{2^x}{(\ln 2)^2}+C$$

2-2 답 $x\sin x+\cos x+C$

$f(x)=x$, $g'(x)=\cos x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\sin x$이므로

$$\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx$$
$$=x\sin x+\cos x+C$$

3-2 답 $x\ln(x+1)-x+\ln|x+1|+C$

$f(x)=\ln(x+1)$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x+1}$, $g(x)=x$이므로

$$\int\ln(x+1)dx=x\ln(x+1)-\int\frac{x}{x+1}dx$$
$$=x\ln(x+1)-\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=x\ln(x+1)-x+\ln|x+1|+C$$

STEP 2 필수 유형 | 201쪽~202쪽 |

01-1 답 (1) $\frac{(x+3)3^x}{\ln 3}-\frac{3^x}{(\ln 3)^2}+C$

(2) $-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

(3) $(x^2-x)\ln x-\frac{1}{2}x^2+x+C$

|해결 전략| 부분적분법을 이용한다.

(1) $f(x)=x+3$, $g'(x)=3^x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\dfrac{3^x}{\ln 3}$이므로

$$\int(x+3)3^x dx=\frac{(x+3)3^x}{\ln 3}-\int\frac{3^x}{\ln 3}dx$$
$$=\frac{(x+3)3^x}{\ln 3}-\frac{3^x}{(\ln 3)^2}+C$$

(2) $f(x)=x$, $g'(x)=\sin 2x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x$이므로

$$\int x\sin 2x\,dx=x\times\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)-\int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$
$$=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

(3) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=2x-1$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x^2-x$이므로

$$\int(2x-1)\ln x\,dx=(x^2-x)\ln x-\int\frac{1}{x}\times(x^2-x)dx$$
$$=(x^2-x)\ln x-\int(x-1)dx$$
$$=(x^2-x)\ln x-\frac{1}{2}x^2+x+C$$

02-1 답 (1) $2x^2e^x-4xe^x+4e^x+C$
(2) $x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$

| 해결 전략 | 부분적분법을 한 번 적용하여 부정적분을 구할 수 없으므로 다시 부분적분법을 적용한다.

(1) $f(x)=2x^2$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=4x$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int 2x^2e^x dx=2x^2e^x-\int 4xe^x dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때, $\int 4xe^x dx$에서 $u(x)=4x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=4$, $v(x)=e^x$이므로

$$\int 4xe^x dx=4xe^x-\int 4e^x dx=4xe^x-4e^x+C_1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int 2x^2e^x dx=2x^2e^x-(4xe^x-4e^x+C_1)$$
$$=2x^2e^x-4xe^x+4e^x+C$$

$-C_1=C$

(2) $f(x)=(\ln x)^2$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$, $g(x)=x$이므로

$$\int(\ln x)^2dx=x(\ln x)^2-\int\frac{2\ln x}{x}\times x\,dx$$
$$=x(\ln x)^2-2\int\ln x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때, $\int\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\dfrac{1}{x}$, $v(x)=x$이므로

$$\int\ln x\,dx=x\ln x-\int 1\,dx$$
$$=x\ln x-x+C_1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int(\ln x)^2dx=x(\ln x)^2-2(x\ln x-x+C_1)$$
$$=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$$

$-2C_1=C$

STEP 3 유형 드릴 | 203쪽~205쪽 |

1-1 답 $\dfrac{25}{12}$

| 해결 전략 | $n\neq-1$일 때 $\int x^n dx=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+C$임을 이용한다.

$$f(x)=\int(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})dx$$
$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C_1$$
$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C_1$$

이때, $f(1)=1$에서 $\dfrac{2}{3}+2+C_1=1$ $\quad\therefore C_1=-\dfrac{5}{3}$

즉, $f(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}-\dfrac{5}{3}$

$$g(x)=\int(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})dx$$
$$=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C_2$$
$$=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C_2$$

이때, $g(1)=1$에서 $\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{2}+C_2=1$ $\quad\therefore C_2=-\dfrac{5}{4}$

즉, $g(x)=\dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{5}{4}$

$\therefore f(0)g(0)=-\dfrac{5}{3}\times\left(-\dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{25}{12}$

1-2 답 $\dfrac{4}{15}$

| 해결 전략 | 식을 전개하여 x^n(n은 실수) 꼴인 항의 합으로 변형한 후 적분한다.

$$f(x)=\int\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\int\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int(x^2-x^{-2})dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3+x^{-1}+C_1=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{x}+C_1$$

이때, $f(1)=2$에서 $\frac{1}{3}+1+C_1=2$ $\therefore C_1=\frac{2}{3}$

즉, $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{x}+\frac{2}{3}$

$$g(x)=\int\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$=\int\left(x^4-\frac{1}{x^4}\right)dx=\int(x^4-x^{-4})dx$$
$$=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^{-3}+C_2=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3x^3}+C_2$$

이때, $g(1)=2$에서 $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+C_2=2$ $\therefore C_2=\frac{22}{15}$

즉, $g(x)=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3x^3}+\frac{22}{15}$

$$\therefore f(-1)+g(-1)=\left(-\frac{1}{3}-1+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{22}{15}\right)=\frac{4}{15}$$

2-1 답 $\frac{15}{\ln 5}-2\ln 2$

| 해결 전략 | 분자를 분모로 나누어 식을 변형한 후 적분한다.

$$f(x)=\int\frac{x5^{2x}+2}{x}dx$$
$$=\int\left(5^{2x}+\frac{2}{x}\right)dx$$
$$=\int\left(25^x+\frac{2}{x}\right)dx$$
$$=\frac{25^x}{\ln 25}+2\ln|x|+C$$
$$=\frac{5^{2x}}{2\ln 5}+2\ln|x|+C$$

이때, $f(1)=\frac{25}{\ln 5}$에서 $\frac{25}{2\ln 5}+C=\frac{25}{\ln 5}$ $\therefore C=\frac{25}{2\ln 5}$

따라서 $f(x)=\frac{5^{2x}}{2\ln 5}+2\ln|x|+\frac{25}{2\ln 5}$이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2\ln 5}+2\ln\frac{1}{2}+\frac{25}{2\ln 5}=\frac{15}{\ln 5}-2\ln 2$$

2-2 답 $\frac{7}{4}$

| 해결 전략 | $a^{bx}=(a^b)^x$임을 이용하여 적분한다.

$$f(x)=\int(2^x+2^{2x}+2^{4x})dx$$
$$=\int(2^x+4^x+16^x)dx$$
$$=\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{16^x}{\ln 16}+C$$
$$=\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{2^{2x-1}}{\ln 2}+\frac{2^{4x-2}}{\ln 2}+C$$
$$=\frac{2^x}{\ln 2}(1+2^{x-1}+2^{3x-2})+C$$

이때, $f(1)=\frac{8}{\ln 2}$에서 $\frac{2}{\ln 2}\times(1+1+2)+C=\frac{8}{\ln 2}$

$\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{2^x}{\ln 2}(1+2^{x-1}+2^{3x-2})$이므로

$f(x)=\frac{2^x}{\ln 2}g(x)$에서 $g(x)=1+2^{x-1}+2^{3x-2}$

$$\therefore g(0)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$$

따라서 곡선 $y=g(x)$가 y축과 만나는 점의 y좌표는 $\frac{7}{4}$이다.

3-1 답 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

| 해결 전략 | $\cos 2x=2\cos^2 x-1$임을 이용하여 식을 변형한 후 적분한다.

$$f'(x)=\frac{1}{1+\cos 2x}=\frac{1}{1+2\cos^2 x-1}$$
$$=\frac{1}{2\cos^2 x}=\frac{1}{2}\sec^2 x$$

이므로

$$f(x)=\int\frac{1}{2}\sec^2 x\,dx=\frac{1}{2}\tan x+C$$

이때, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{3}$에서 $\frac{1}{2}+C=\frac{1}{2}+\sqrt{3}$ $\therefore C=\sqrt{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\tan x+\sqrt{3}$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

LECTURE

배각의 공식

① $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

② $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

③ $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

3-2 답 $\frac{5}{4}$

| 해결 전략 | $2\sin x\cos x=\sin 2x$임을 이용하여 식을 변형한 후 적분한다.

$$f(x)=\int\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\int\frac{1}{2}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}\cos x+C$$

이때, $f(0)=1$에서 $-\frac{1}{2}+C=1$ $\therefore C=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{3}{2}$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{5}{4}$$

4-1 답 $\frac{32}{9}$

| 해결 전략 | $3x+2=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$3x+2=t$로 놓으면 $3=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int(3x+2)^5dx=\frac{1}{3}\int3(3x+2)^5dx$$
$$=\frac{1}{3}\int t^5\,dt=\frac{1}{18}t^6+C=\frac{1}{18}(3x+2)^6+C$$

이때, $f(-1)=\frac{1}{18}$에서 $\frac{1}{18}+C=\frac{1}{18}$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{18}(3x+2)^6$이므로 $f(0)=\frac{32}{9}$

4-2 답 $\frac{3}{2}$

| 해결 전략 | $x^3+6x+1=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$x^3+6x+1=t$로 놓으면 $3x^2+6=\frac{dt}{dx}$, $3(x^2+2)=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int\frac{x^2+2}{\sqrt[3]{x^3+6x+1}}dx=\frac{1}{3}\int\frac{3(x^2+2)}{\sqrt[3]{x^3+6x+1}}dx$$
$$=\frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt[3]{t}}dt=\frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{3}}dt$$
$$=\frac{1}{2}t^{\frac{2}{3}}+C=\frac{1}{2}\sqrt[3]{t^2}+C$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt[3]{(x^3+6x+1)^2}+C$$

이때, $f(1)=3$에서 $\frac{1}{2}\sqrt[3]{8^2}+C=3$ $\quad\therefore C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt[3]{(x^3+6x+1)^2}+1$이므로

$f(0)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

5-1 답 $\frac{1}{2}(e^5-e^2)$

| 해결 전략 | $3x^2+2=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$3x^2+2=t$로 놓으면 $6x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$F(x)=\int 3xe^{3x^2+2}dx=\frac{1}{2}\int 6xe^{3x^2+2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int e^t dt=\frac{1}{2}e^t+C$$
$$=\frac{1}{2}e^{3x^2+2}+C$$

$\therefore F(1)-F(0)=\left(\frac{1}{2}e^5+C\right)-\left(\frac{1}{2}e^2+C\right)=\frac{1}{2}(e^5-e^2)$

5-2 답 2

| 해결 전략 | $ax^2+1=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$ax^2+1=t$로 놓으면 $2ax=\frac{dt}{dx}$이므로

$$F(x)=\int 4ax\,2^{ax^2+1}dx=2\int 2ax\,2^{ax^2+1}dx$$
$$=2\int 2^t dt=2\times\frac{2^t}{\ln 2}+C=\frac{2^{t+1}}{\ln 2}+C$$
$$=\frac{2^{ax^2+2}}{\ln 2}+C$$

이때, $F(1)-F(0)=\frac{12}{\ln 2}$에서

$\left(\frac{2^{a+2}}{\ln 2}+C\right)-\left(\frac{2^2}{\ln 2}+C\right)=\frac{12}{\ln 2}$

$2^{a+2}=16$ $\quad\therefore a=2$

6-1 답 $\frac{3}{2}\ln 2$

| 해결 전략 | $\ln x^2=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$\ln x^2=2\ln|x|=t$로 놓으면 $\frac{2}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int\frac{1}{x\ln x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2}{x\ln x^2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}dt=\frac{1}{2}\ln|t|+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln|\ln x^2|+C$$

이때, $f(e)=\ln 2$에서 $\frac{1}{2}\ln 2+C=\ln 2$ $\quad\therefore C=\frac{1}{2}\ln 2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\ln|\ln x^2|+\frac{1}{2}\ln 2$이므로

$f(e^2)=\frac{1}{2}\ln 4+\frac{1}{2}\ln 2=\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{3}{2}\ln 2$

6-2 답 $-(\ln 2)^2-\ln 2$

| 해결 전략 | 먼저 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한 후 치환적분법을 이용한다.

$F(2x)=2xf(2x)+x\ln 2x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(2x)=2f(2x)+4xf'(2x)+\ln 2x+1$

$\therefore f'(2x)=-\frac{\ln 2x+1}{4x}$

따라서 $f'(x)=-\frac{\ln x+1}{2x}$이므로

$$f(x)=-\int\frac{\ln x+1}{2x}dx$$
$$=-\frac{1}{2}\int\frac{\ln x}{x}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx \quad\cdots\cdots㉠$$

이때, $\int\frac{\ln x}{x}dx$에서 $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int\frac{\ln x}{x}dx=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C_1=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C_1 \quad\cdots\cdots㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\ln x)^2+C_1\right\}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx$$
$$=-\frac{1}{4}(\ln x)^2-\frac{1}{2}\ln|x|+C$$

$-\frac{1}{2}C_1=C$

이때, $f(1)=0$에서 $C=0$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}(\ln x)^2-\frac{1}{2}\ln|x|$이므로

$f(4)=-\frac{1}{4}(\ln 4)^2-\frac{1}{2}\ln 4=-(\ln 2)^2-\ln 2$

7-1 답 $\frac{5}{3}$

| 해결 전략 | 함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이면 $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$임을 이용한다.

$f(x)=\int\sin(3x+2)dx=-\frac{1}{3}\cos(3x+2)+C$

이때, $f\left(-\frac{2}{3}\right)=1$에서 $-\frac{1}{3}+C=1$ $\quad\therefore C=\frac{4}{3}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{3}\cos(3x+2)+\frac{4}{3}$이므로

$f\left(\frac{\pi-2}{3}\right)=-\frac{1}{3}\cos\pi+\frac{4}{3}=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$

7-2 답 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

|해결 전략| 함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이면 $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$임을 이용한다.

$f(x)=\int\cos(2x-1)dx=\frac{1}{2}\sin(2x-1)+C$

이때, $f\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$에서 $\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}+C=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\frac{\sqrt{3}}{4}+C=\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x-1)$이므로

$f\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

8-1 답 $2\ln 3$

|해결 전략| $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$임을 이용한다.

$(x^3+2x^2-x+1)'=3x^2+4x-1$이므로

$F(x)=\int\frac{3x^2+4x-1}{x^3+2x^2-x+1}dx=\int\frac{(x^3+2x^2-x+1)'}{x^3+2x^2-x+1}dx$

$=\ln|x^3+2x^2-x+1|+C$

이때, $F(0)=\ln 3$에서 $C=\ln 3$

따라서

$F(x)=\ln|x^3+2x^2-x+1|+\ln 3=\ln|3(x^3+2x^2-x+1)|$

이므로

$F(1)=2\ln 3$

8-2 답 24

|해결 전략| $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$임을 이용한다.

$\{(x+1)(x+2)(x+3)\}'$

$=(x+2)(x+3)+(x+1)(x+3)+(x+1)(x+2)$

$=3x^2+12x+11$

이므로

$f(x)=\int\frac{3x^2+12x+11}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx$

$=\int\frac{\{(x+1)(x+2)(x+3)\}'}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx$

$=\ln|(x+1)(x+2)(x+3)|+C$

이때, $f(0)=\ln 6$에서 $\ln 6+C=\ln 6$ $\quad\therefore C=0$

$\therefore f(x)=\ln|(x+1)(x+2)(x+3)|$

따라서 $f(1)=\ln 24=\ln a$이므로 $a=24$

9-1 답 $1-4\ln 2+2\ln 3$

|해결 전략| 분자를 분모로 나누어 식을 변형한 후 적분한다.

$f(x)=\int\frac{x^2+3x}{(x+1)(x+2)}dx=\int\left\{1-\frac{2}{(x+1)(x+2)}\right\}dx$

$=\int\left\{1-2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\right\}dx$

$=x-2(\ln|x+1|-\ln|x+2|)+C$

$=x-2\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+C$

$\therefore f(1)-f(0)=\left(1-2\ln\frac{2}{3}+C\right)-\left(-2\ln\frac{1}{2}+C\right)$

$=1-4\ln 2+2\ln 3$

9-2 답 $\ln 2-2\ln 3$

|해결 전략| $\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)$임을 이용하여 피적분함수를 간단한 유리함수의 차로 나타내어 적분한다.

$f(x)=\int\frac{4}{(x+1)(x+3)}dx=2\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)dx$

$=2(\ln|x+1|-\ln|x+3|)+C=2\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+C$

$f(1)=-\ln 2$에서 $2\ln\frac{1}{2}+C=-\ln 2$ $\quad\therefore C=\ln 2$

따라서 $f(x)=2\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+\ln 2$이므로

$f(0)=2\ln\frac{1}{3}+\ln 2=\ln 2-2\ln 3$

10-1 답 $e-\frac{3}{2e}$

|해결 전략| $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$임을 이용한다.

$f(x)=2x$, $g'(x)=e^{2x+1}$으로 놓으면

$f'(x)=2$, $g(x)=\frac{1}{2}e^{2x+1}$이므로

$F(x)=\int 2xe^{2x+1}dx=xe^{2x+1}-\int e^{2x+1}dx$

$=xe^{2x+1}-\frac{1}{2}e^{2x+1}+C$

이때, $F(0)=\frac{1}{2}e$에서 $-\frac{1}{2}e+C=\frac{1}{2}e$ $\quad\therefore C=e$

따라서 $F(x)=xe^{2x+1}-\frac{1}{2}e^{2x+1}+e$이므로

$F(-1)=-e^{-1}-\frac{1}{2}e^{-1}+e=e-\frac{3}{2e}$

10-2 답 $\frac{3}{e}$

|해결 전략| $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$임을 이용한다.

$f(x)=-x$, $g'(x)=e^{-x}$으로 놓으면
$f'(x)=-1$, $g(x)=-e^{-x}$이므로

$$F(x)=\int(-xe^{-x})\,dx=xe^{-x}-\int e^{-x}dx$$
$$=xe^{-x}+e^{-x}+C$$

이때, $F(0)=1+\frac{1}{e}$에서 $1+C=1+\frac{1}{e}$ $\quad\therefore C=\frac{1}{e}$

따라서 $F(x)=xe^{-x}+e^{-x}+\frac{1}{e}$이므로

$$F(1)=\frac{1}{e}+\frac{1}{e}+\frac{1}{e}=\frac{3}{e}$$

11-1 답 $\frac{1}{4}$

|해결 전략| $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$임을 이용한다.

$f(x)=x$, $g'(x)=\sin(2x+1)$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\frac{1}{2}\cos(2x+1)$이므로

$$F(x)=\int x\sin(2x+1)dx$$
$$=-\frac{1}{2}x\cos(2x+1)+\frac{1}{2}\int\cos(2x+1)dx$$
$$=-\frac{1}{2}x\cos(2x+1)+\frac{1}{4}\sin(2x+1)+C$$

이때, $F(0)=\frac{\sin 1}{4}$에서 $\frac{\sin 1}{4}+C=\frac{\sin 1}{4}$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $F(x)=-\frac{1}{2}x\cos(2x+1)+\frac{1}{4}\sin(2x+1)$이므로

$$F\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{4}$$

11-2 답 2

|해결 전략| $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$임을 이용한다.

$f(x)=4x$, $g'(x)=\cos 2x$로 놓으면

$f'(x)=4$, $g(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$이므로

$$F(x)=\int 4x\cos 2x\,dx$$
$$=2x\sin 2x-\int 2\sin 2x\,dx$$
$$=2x\sin 2x+\cos 2x+C$$

이때, $F(0)=2$에서 $1+C=2$ $\quad\therefore C=1$
따라서 $F(x)=2x\sin 2x+\cos 2x+1$이므로
$F(\pi)=2\pi\sin 2\pi+\cos 2\pi+1=1+1=2$

12-1 답 $\pi-1$

|해결 전략| 부분적분법을 한 번 적용하여 부정적분을 구할 수 없으므로 다시 부분적분법을 적용한다.

$f(x)=x^2+x$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면
$f'(x)=2x+1$, $g(x)=-\cos x$이므로

$$F(x)=\int(x^2+x)\sin x\,dx$$
$$=-(x^2+x)\cos x+\int(2x+1)\cos x\,dx$$
$$=-(x^2+x)\cos x+2\int x\cos x\,dx+\int\cos x\,dx$$
$$=-(x^2+x)\cos x+\sin x+2\int x\cos x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때, $\int x\cos x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\sin x$이므로

$$\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx$$
$$=x\sin x+\cos x+C_1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면
$$F(x)=-(x^2+x)\cos x+\sin x+2(x\sin x+\cos x+C_1)$$
$$=(-x^2-x+2)\cos x+(2x+1)\sin x+C \quad 2C_1=C$$
$F(0)=0$에서 $2+C=0$ $\quad\therefore C=-2$
따라서 $F(x)=(-x^2-x+2)\cos x+(2x+1)\sin x-2$이므로

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi+1-2=\pi-1$$

12-2 답 4

|해결 전략| 부분적분법을 한 번 적용하여 부정적분을 구할 수 없으므로 다시 부분적분법을 적용한다.

$f(x)=x^2-2x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면
$f'(x)=2x-2$, $g(x)=e^x$이므로

$$F(x)=\int(x^2-2x)e^x dx$$
$$=(x^2-2x)e^x-\int(2x-2)e^x dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때, $\int(2x-2)e^x dx$에서 $u(x)=2x-2$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=2$, $v(x)=e^x$이므로

$$\int(2x-2)e^x dx=(2x-2)e^x-\int 2e^x dx$$
$$=(2x-2)e^x-2e^x+C_1$$
$$=(2x-4)e^x+C_1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면
$$F(x)=(x^2-2x)e^x-\{(2x-4)e^x+C_1\}$$
$$=(x-2)^2e^x+C \quad -C_1=C$$
이때, $F(2)=0$에서 $C=0$
따라서 $F(x)=(x-2)^2e^x$이므로
$F(0)=(-2)^2\times 1=4$

9 | 정적분

1 여러 가지 함수의 정적분

개념 확인 208쪽~209쪽

1 (1) $2\sqrt{3}+\frac{4}{3}$ (2) $4(e^2-1)$

2 (가) $-f(x)$ (나) 기함수 (다) 0

1 (1) $\int_1^2(\sqrt{x}+1)dx+\int_2^3(\sqrt{x}+1)dx=\int_1^3(\sqrt{x}+1)dx$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right]_1^3$$

$$=(2\sqrt{3}+3)-\left(\frac{2}{3}+1\right)$$

$$=2\sqrt{3}+\frac{4}{3}$$

(2) $\int_0^2(e^x+1)^2dx+\int_2^0(e^x-1)^2dx$

$$=\int_0^2(e^x+1)^2dx-\int_0^2(e^x-1)^2dx$$

$$=\int_0^2(e^{2x}+2e^x+1-e^{2x}+2e^x-1)dx$$

$$=\int_0^2 4e^x dx=\left[4e^x\right]_0^2=4(e^2-1)$$

2 $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx$에서 $f(x)=\sin x$로 놓으면

$f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=\boxed{-f(x)}$

따라서 $f(x)$는 $\boxed{\text{기함수}}$이므로 $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx=\boxed{0}$

STEP 1 개념 드릴 | 210쪽 |

개념 check

1-1 $-\cos x$, 8

2-1 e^x-x, $e^3+\frac{1}{e}-4$

3-1 우함수, 2

스스로 check

1-2 답 $\frac{14}{3}$

$$\int_{-\pi}^{3}f(x)dx=\int_{-\pi}^{0}\cos x\,dx+\int_0^3\sqrt{x+1}\,dx$$

$$=\left[\sin x\right]_{-\pi}^{0}+\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$$

$$=0+\left(\frac{16}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{14}{3}$$

2-2 답 2

$\cos x=0$ $(\pi\le x\le 2\pi)$에서 $x=\frac{3}{2}\pi$이므로

$$|\cos x|=\begin{cases}-\cos x & \left(\pi\le x\le\frac{3}{2}\pi\right)\\ \cos x & \left(\frac{3}{2}\pi\le x\le 2\pi\right)\end{cases}$$

$$\therefore \int_{\pi}^{2\pi}|\cos x|dx=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}(-\cos x)dx+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\cos x\,dx$$

$$=\left[-\sin x\right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}+\left[\sin x\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}$$

$$=1+1=2$$

3-2 답 0

$f(x)=\tan x$로 놓으면

$f(-x)=\tan(-x)=-\tan x=-f(x)$

따라서 $f(x)$는 기함수이므로

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=0$

STEP 2 필수 유형 | 211쪽~214쪽 |

01-1 답 (1) $2-\ln 2$ (2) $\frac{68}{3}$ (3) $\frac{40}{9\ln 3}+2$ (4) $\frac{\pi}{2}+1$

|해결 전략| 함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이면 $\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$이다.

(1) $\int_1^2\frac{2x-1}{x}dx=\int_1^2\left(2-\frac{1}{x}\right)dx=\left[2x-\ln|x|\right]_1^2$

$$=(4-\ln 2)-2=2-\ln 2$$

(2) $\int_0^4(\sqrt{x}+1)^2dx=\int_0^4(x+2\sqrt{x}+1)dx=\int_0^4(x+2x^{\frac{1}{2}}+1)dx$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^4=8+\frac{32}{3}+4=\frac{68}{3}$$

(3) $\int_0^1(3^x+3^{-x})^2dx=\int_0^1(9^x+2+9^{-x})dx$

$$=\left[\frac{9^x}{\ln 9}+2x-\frac{9^{-x}}{\ln 9}\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{9}{\ln 9}+2-\frac{1}{9\ln 9}\right)-\left(\frac{1}{\ln 9}-\frac{1}{\ln 9}\right)$$

$$=\frac{80}{9\ln 9}+2$$

$$=\frac{40}{9\ln 3}+2$$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)dx=\left[x-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}-(-1)=\frac{\pi}{2}+1$$

LECTURE

배각의 공식

❶ $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

❷ $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

❸ $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

02-1 답 $\dfrac{7}{\ln 2}+4$

|해결 전략| 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 정적분은 적분 구간을 나눈 후 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$임을 이용한다.

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx&=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx\\&=\int_0^1(2^x+3)dx+\int_1^2(4^x+1)dx\\&=\left[\frac{2^x}{\ln 2}+3x\right]_0^1+\left[\frac{4^x}{\ln 4}+x\right]_1^2\\&=\left\{\left(\frac{2}{\ln 2}+3\right)-\frac{1}{\ln 2}\right\}+\left\{\left(\frac{16}{\ln 4}+2\right)-\left(\frac{4}{\ln 4}+1\right)\right\}\\&=\frac{7}{\ln 2}+4\end{aligned}$$

02-2 답 $e+2\pi-2$

|해결 전략| 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 정적분은 적분 구간을 나눈 후 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$임을 이용한다.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^1 f(x)dx&=\int_{-\pi}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx\\&=\int_{-\pi}^0(\sin x+2)dx+\int_0^1(e^x+1)dx\\&=\Big[-\cos x+2x\Big]_{-\pi}^0+\Big[e^x+x\Big]_0^1\\&=\{-1-(1-2\pi)\}+\{(e+1)-1\}\\&=e+2\pi-2\end{aligned}$$

03-1 답 (1) 4 (2) $\dfrac{9}{\ln 2}$ (3) $2\sqrt{2}$

|해결 전략| 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x의 값을 경계로 적분 구간을 나눈다.

(1) $\sqrt{x}-2=0$에서 $x=4$이므로

$$|\sqrt{x}-2|=\begin{cases}-\sqrt{x}+2 & (0\le x\le 4)\\ \sqrt{x}-2 & (x\ge 4)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_1^9|\sqrt{x}-2|dx&=\int_1^4(-\sqrt{x}+2)dx+\int_4^9(\sqrt{x}-2)dx\\&=\int_1^4\left(-x^{\frac{1}{2}}+2\right)dx+\int_4^9\left(x^{\frac{1}{2}}-2\right)dx\\&=\left[-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x\right]_1^4+\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x\right]_4^9\\&=\left\{\left(-\frac{16}{3}+8\right)-\left(-\frac{2}{3}+2\right)\right\}\\&\quad+\left\{(18-18)-\left(\frac{16}{3}-8\right)\right\}\\&=4\end{aligned}$$

(2) $2^x-4=0$에서 $x=2$이므로

$$|2^x-4|=\begin{cases}-2^x+4 & (x\le 2)\\ 2^x-4 & (x\ge 2)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore &\int_0^4|2^x-4|dx\\&=\int_0^2(-2^x+4)dx+\int_2^4(2^x-4)dx\\&=\left[-\frac{2^x}{\ln 2}+4x\right]_0^2+\left[\frac{2^x}{\ln 2}-4x\right]_2^4\\&=\left\{\left(-\frac{4}{\ln 2}+8\right)-\left(-\frac{1}{\ln 2}\right)\right\}+\left\{\left(\frac{16}{\ln 2}-16\right)-\left(\frac{4}{\ln 2}-8\right)\right\}\\&=\frac{9}{\ln 2}\end{aligned}$$

(3) $\sin x-\cos x=0\ (0\le x\le\pi)$에서 $x=\dfrac{\pi}{4}$이므로

$$|\sin x-\cos x|=\begin{cases}-\sin x+\cos x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin x-\cos x & \left(\frac{\pi}{4}\le x\le\pi\right)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore &\int_0^\pi|\sin x-\cos x|dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(-\sin x+\cos x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^\pi(\sin x-\cos x)dx\\&=\Big[\cos x+\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^\pi\\&=\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-1\right\}+\left\{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}\\&=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

04-1 답 (1) $1+\dfrac{4}{\pi}$ (2) $\dfrac{64}{5}$

|해결 전략| 피적분함수 $f(x)$가 우함수이면 $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$, 기함수이면 $\int_{-a}^a f(x)dx=0$임을 이용한다.

(1) $f(x)=|x|$, $g(x)=\cos\dfrac{\pi}{2}x$로 놓으면

$f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$,

$g(-x)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}x\right)=\cos\dfrac{\pi}{2}x=g(x)$

따라서 $f(x)$, $g(x)$는 우함수이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1\left(|x|+\cos\frac{\pi}{2}x\right)dx&=2\int_0^1\left(|x|+\cos\frac{\pi}{2}x\right)dx\\&=2\int_0^1\left(x+\cos\frac{\pi}{2}x\right)dx\\&=2\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^1\\&=1+\frac{4}{\pi}\end{aligned}$$

(2) x^4은 우함수, $\sin\pi x$, $x\cos\pi x$, $x^2\tan x$는 기함수이므로

$$\begin{aligned}&\int_{-2}^2(x^4+\sin\pi x+x\cos\pi x+x^2\tan x)dx\\&=\int_{-2}^2 x^4dx+\int_{-2}^2(\sin\pi x+x\cos\pi x+x^2\tan x)dx\\&=2\int_0^2 x^4dx=2\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^2=\frac{64}{5}\end{aligned}$$

LECTURE

일반적으로 우함수 • 기함수의 곱은 다음과 같다.
❶ (우함수) × (우함수) = (우함수)
❷ (기함수) × (기함수) = (우함수)
❸ (우함수) × (기함수) = (기함수)

04-2 답 0

|해결 전략| $f(x)=ax^2+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)로 놓고 $f(x)\sin x$가 우함수인지 기함수인지 알아본다.

$f(x)$가 이차함수이고 $f'(0)=0$이므로
$f(x)=ax^2+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)로 놓을 수 있다.
이때, $f(x)$는 우함수이고 $\sin x$는 기함수이므로 $f(x)\sin x$는 기함수이다.

$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx=0$

2 정적분의 치환적분법과 부분적분법

개념 확인 215쪽~217쪽

1 $\frac{10\sqrt{5}}{3}-2\sqrt{3}$ **2** e^2+1

1 $x+3=t$로 놓으면 $1=\frac{dt}{dx}$이고,
$x=0$일 때 $t=3$, $x=2$일 때 $t=5$이므로

$$\int_0^2 \sqrt{x+3}\,dx=\int_3^5 \sqrt{t}\,dt=\int_3^5 t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_3^5=\frac{10\sqrt{5}}{3}-2\sqrt{3}$$

2 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면
$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$이므로

$$\int_1^{e^2} \ln x\,dx=\Big[x\ln x\Big]_1^{e^2}-\int_1^{e^2} 1\,dx=2e^2-\Big[x\Big]_1^{e^2}$$
$$=2e^2-(e^2-1)=e^2+1$$

STEP 1 개념 드릴 | 218쪽 |

개념 check

1-1 (1) 1, 7, $\frac{1}{2}(e^7-e)$ (2) 0, e^2, $\frac{8}{3}$

2-1 $x\sin x$, $\sin x$, $-\cos x$, $\frac{\pi}{2}-1$

스스로 check

1-2 답 (1) $\frac{1}{2}(e^9-1)$ (2) $\frac{26}{3}$

(1) $x^2=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이고,
$x=0$일 때 $t=0$, $x=3$일 때 $t=9$이므로

$$\int_0^3 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^3 2xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^9 e^t dt$$
$$=\frac{1}{2}\Big[e^t\Big]_0^9=\frac{1}{2}(e^9-1)$$

(2) $1+\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이고,
$x=1$일 때 $t=1$, $x=e^2$일 때 $t=3$이므로

$$\int_1^{e^2} \frac{(1+\ln x)^2}{x}dx=\int_1^3 t^2 dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^3$$
$$=9-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$$

2-2 답 π

$f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면
$f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x$이므로

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-\cos x)dx$$
$$=\pi-\Big[-\sin x\Big]_0^{\pi}=\pi$$

STEP 2 필수 유형 | 219쪽~222쪽 |

01-1 답 (1) $2\ln 2$ (2) 15

|해결 전략| $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx$ 꼴은 $g(x)=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

(1) $x^3+2x+1=t$로 놓으면 $3x^2+2=\frac{dt}{dx}$이고,
$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=4$이므로

$$\int_0^1 \frac{3x^2+2}{x^3+2x+1}dx=\int_1^4 \frac{1}{t}dt=\Big[\ln|t|\Big]_1^4=2\ln 2$$

(2) $4x+3=t$로 놓으면 $4=\frac{dt}{dx}$이고,

$x=-\frac{1}{2}$일 때 $t=1$, $x=6$일 때 $t=27$이므로

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{6}\sqrt[3]{4x+3}\,dx=\frac{1}{4}\int_{-\frac{1}{2}}^{6}4\sqrt[3]{4x+3}\,dx$$
$$=\frac{1}{4}\int_{1}^{27}\sqrt[3]{t}\,dt=\frac{1}{4}\int_{1}^{27}t^{\frac{1}{3}}\,dt=\frac{1}{4}\left[\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}\right]_{1}^{27}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{243}{4}-\frac{3}{4}\right)=15$$

01-2 답 $\frac{16}{15}$

|해결 전략| $x-1=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$x-1=t$로 놓으면 $1=\frac{dt}{dx}$이고,

$x=1$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{1}^{2}x\sqrt{x-1}\,dx=\int_{0}^{1}(t+1)\sqrt{t}\,dt$$
$$=\int_{0}^{1}(t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}})\,dt$$
$$=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{1}=\frac{16}{15}$$

02-1 답 (1) $\frac{38}{3}$ (2) $\frac{7}{6}$

|해결 전략| $\int_{a}^{b}f(g(x))g'(x)dx$ 꼴은 $g(x)=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

(1) $e^{2x}+3=t$로 놓으면 $2e^{2x}=\frac{dt}{dx}$이고,

$x=0$일 때 $t=4$, $x=\ln\sqrt{6}$일 때 $t=9$이므로

$$\int_{0}^{\ln\sqrt{6}}2e^{2x}\sqrt{e^{2x}+3}\,dx=\int_{4}^{9}\sqrt{t}\,dt=\int_{4}^{9}t^{\frac{1}{2}}\,dt=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_{4}^{9}$$
$$=18-\frac{16}{3}=\frac{38}{3}$$

(2) $\ln x+1=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이고,

$x=1$일 때 $t=1$, $x=e$일 때 $t=2$이므로

$$\int_{1}^{e}\frac{(\ln x+1)^2}{2x}dx=\frac{1}{2}\int_{1}^{2}t^2dt=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{1}^{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{6}$$

03-1 답 $\ln\frac{3}{2}$

|해결 전략| $\sin x+2=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$\sin x+2=t$로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$이고,

$x=0$일 때 $t=2$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=3$이므로

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+2}dx=\int_{2}^{3}\frac{1}{t}\,dt=\Big[\ln|t|\Big]_{2}^{3}$$
$$=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}$$

03-2 답 $-\frac{2}{3}$

|해결 전략| $\sin^2 x=1-\cos^2 x$임을 이용하여 피적분함수를 변형한 후 $\cos x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$\sin^3 x=\sin^2 x\times\sin x=(1-\cos^2 x)\sin x$

$\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$이고,

$x=-\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$, $x=0$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^3 x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$
$$=-\int_{0}^{1}(1-t^2)dt=\int_{0}^{1}(t^2-1)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_{0}^{1}=-\frac{2}{3}$$

04-1 답 (1) $\frac{5}{9}e^6+\frac{1}{9}$ (2) $-\frac{6}{e^2}+4$

|해결 전략| 부분적분법을 이용한다.

(1) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=x^2$으로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{3}x^3$이므로

$$\int_{1}^{e^2}x^2\ln x\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_{1}^{e^2}-\int_{1}^{e^2}\frac{1}{3}x^2dx$$
$$=\frac{2}{3}e^6-\left[\frac{1}{9}x^3\right]_{1}^{e^2}$$
$$=\frac{2}{3}e^6-\left(\frac{1}{9}e^6-\frac{1}{9}\right)$$
$$=\frac{5}{9}e^6+\frac{1}{9}$$

(2) $f(x)=x+3$, $g'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int_{0}^{2}(x+3)e^{-x}dx=\Big[-(x+3)e^{-x}\Big]_{0}^{2}-\int_{0}^{2}(-e^{-x})dx$$
$$=-5e^{-2}+3-\Big[e^{-x}\Big]_{0}^{2}$$
$$=-5e^{-2}+3-(e^{-2}-1)$$
$$=-6e^{-2}+4$$
$$=-\frac{6}{e^2}+4$$

04-2 답 -4π

|해결 전략| 우함수, 기함수의 성질을 이용하여 피적분함수를 변형한 후 부분적분법을 이용한다.

$$\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+x)\cos x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{x^2\cos x}_{\text{우함수}}\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{x\cos x}_{\text{기함수}}\,dx$$
$$=2\int_{0}^{\pi}x^2\cos x\,dx$$

이때, $f(x)=x^2$, $g'(x)=\cos x$로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=\sin x$이므로

$$2\int_{0}^{\pi}x^2\cos x\,dx=2\Big[x^2\sin x\Big]_{0}^{\pi}-2\int_{0}^{\pi}2x\sin x\,dx$$
$$=-4\int_{0}^{\pi}x\sin x\,dx$$

$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$이므로

$$-4\int_0^{\pi} x\sin x\,dx=-4\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi}+4\int_0^{\pi}(-\cos x)dx$$

$$=-4\pi+4\Big[-\sin x\Big]_0^{\pi}=-4\pi$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi}(x^2+x)\cos x\,dx=-4\pi$$

3 정적분으로 정의된 함수

개념 확인 223쪽

1 (1) $x\cos x$ (2) $\ln\dfrac{x+2}{x}$ (3) $e^x\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$

1 (1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_2^x t\cos t\,dt=x\cos x$

(2) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x+2}\ln t\,dt=\ln(x+2)-\ln x=\ln\dfrac{x+2}{x}$

(3) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x-1}^{x}e^t dt=e^x-e^{x-1}=e^x\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$

STEP 1 개념 드릴 | 224쪽 |

개념 check

1-1 $\dfrac{2}{3}(e-1)$

2-1 $\dfrac{1}{x}$

3-1 (1) 1, $e+9$ (2) $F(e)$, e

스스로 check

1-2 답 $f(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi-1}$

$\int_0^{\pi} f(t)dt=k$ (k는 상수) ……㉠

로 놓으면 $f(x)=\sin x+k$

$f(t)=\sin t+k$를 ㉠에 대입하면

$\int_0^{\pi}(\sin t+k)dt=k$, $\Big[-\cos t+kt\Big]_0^{\pi}=k$

$2+\pi k=k$, $(\pi-1)k=-2$ $\quad\therefore k=-\dfrac{2}{\pi-1}$

$\therefore f(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi-1}$

2-2 답 $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}+3^x\ln 3$

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-\dfrac{1}{x^2}+3^x\ln 3$

3-2 답 (1) 1 (2) e^2

(1) $f(t)=\sin t+\cos t$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{\pi}{2}}(\sin t+\cos t)dt=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{\pi}{2}}f(t)dt$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{F\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x}$$

$$=F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

(2) $f(t)=e^t$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x e^t dt=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$$

$$=F'(2)=f(2)=e^2$$

STEP 2 필수 유형 | 225쪽~228쪽 |

01-1 답 $2e$

|해결 전략| $\int_0^1 e^{-t}f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓고 k의 값을 구한다.

$\int_0^1 e^{-t}f(t)dt=k$ (k는 상수) ……㉠

로 놓으면 $f(x)=e^x+k$

$f(t)=e^t+k$를 ㉠에 대입하면

$\int_0^1 e^{-t}(e^t+k)dt=k$

이때,

$$\int_0^1 e^{-t}(e^t+k)dt=\int_0^1(1+ke^{-t})dt=\Big[t-ke^{-t}\Big]_0^1$$

$$=1-\frac{k}{e}+k$$

이므로 $1-\dfrac{k}{e}+k=k$ $\quad\therefore k=e$

따라서 $f(x)=e^x+e$이므로

$f(1)=e+e=2e$

01-2 답 $\dfrac{4}{\pi^2-2}$

|해결 전략| $\int_0^\pi tf(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓고 k의 값을 구한다.

$$\int_0^\pi tf(t)dt=k\ (k\text{는 상수}) \qquad \cdots\cdots㉠$$

로 놓으면 $f(x)=\cos x+k$

$f(t)=\cos t+k$를 ㉠에 대입하면

$$\int_0^\pi t(\cos t+k)dt=k$$

$$\int_0^\pi t\cos t\,dt+k\int_0^\pi t\,dt=k$$

이때, $\int_0^\pi t\cos t\,dt$에서 $u(t)=t$, $v'(t)=\cos t$로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=\sin t$이므로

$$\int_0^\pi t\cos t\,dt+k\int_0^\pi t\,dt=\Big[t\sin t\Big]_0^\pi-\int_0^\pi \sin t\,dt+k\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_0^\pi$$

$$=-\Big[-\cos t\Big]_0^\pi+\frac{1}{2}\pi^2k=-2+\frac{1}{2}\pi^2k$$

$-2+\frac{1}{2}\pi^2k=k$이므로 $\left(\frac{1}{2}\pi^2-1\right)k=2$

$$\therefore k=\frac{2}{\frac{1}{2}\pi^2-1}=\frac{4}{\pi^2-2}$$

따라서 $f(x)=\cos x+\dfrac{4}{\pi^2-2}$이므로 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{4}{\pi^2-2}$

02-1 답 -1

|해결 전략| 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f(x)$를 구하고, 주어진 식의 양변에 $x=0$을 대입하여 a의 값을 구한다.

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\cos x-a\sin x$

또, 주어진 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=a+1 \qquad \therefore a=-1$

따라서 $f(x)=\cos x+\sin x$이므로 $f(\pi)=-1$

02-2 답 $a=-1$, $b=0$

|해결 전략| $\int_0^x(x-t)f(t)dt=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$로 변형한 후 양변을 x에 대하여 미분한다.

$\int_0^x(x-t)f(t)dt=e^{2x}+ae^x-x+b$에서

$$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=e^{2x}+ae^x-x+b \qquad \cdots\cdots㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=2e^{2x}+ae^x-1$$

$$\therefore \int_0^x f(t)dt=2e^{2x}+ae^x-1 \qquad \cdots\cdots㉡$$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $0=1+a+b$

㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면 $0=2+a-1$

$\therefore a=-1$, $b=0$

03-1 답 극댓값: $\frac{\pi}{2}-1$, 극솟값: $-\frac{3}{2}\pi-1$

|해결 전략| 양변을 x에 대하여 미분하여 $f(x)$의 도함수를 구한다.

$f(x)=\int_0^x t\cos t\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x\cos x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

이때, $u(t)=t$, $v'(t)=\cos t$로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=\sin t$이므로

$$f(x)=\int_0^x t\cos t\,dt=\Big[t\sin t\Big]_0^x-\int_0^x \sin t\,dt$$

$$=x\sin x-\Big[-\cos t\Big]_0^x$$

$$=x\sin x+\cos x-1$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1,\ f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-\frac{3}{2}\pi-1$$

따라서 $0\le x\le 2\pi$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극댓값 $\frac{\pi}{2}-1$,

$x=\frac{3}{2}\pi$에서 극솟값 $-\frac{3}{2}\pi-1$을 갖는다.

03-2 답 $1+\dfrac{1}{e^2}$

|해결 전략| 양변을 x에 대하여 미분하여 $f(x)$의 도함수를 구한다.

$f(x)=\int_{-1}^x (1-e^{t-1})dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=1-e^{x-1}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

$0\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

$$f(1)=\int_{-1}^1 (1-e^{t-1})dt=\Big[t-e^{t-1}\Big]_{-1}^1$$

$$=(1-1)-\left(-1-\frac{1}{e^2}\right)=1+\frac{1}{e^2}$$

04-1 답 (1) 3 (2) $\frac{e}{3}$

| 해결 전략 | 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구한다.

(1) $f(t)=\sin^2 t+\cos 2t$로 놓고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{-2x}^{x}f(t)dt\\&=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(-2x)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)-\{F(-2x)-F(0)\}}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}+2\lim_{x\to 0}\frac{F(-2x)-F(0)}{-2x}\\&=F'(0)+2F'(0)\\&=3F'(0)=3f(0)=3\end{aligned}$$

(2) $f(t)=e^t+\ln t$로 놓고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^3-1}\int_{1}^{x}f(t)dt\\&=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x^3-1}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\times\frac{1}{x^2+x+1}\\&=\frac{1}{3}F'(1)=\frac{1}{3}f(1)=\frac{e}{3}\end{aligned}$$

STEP 3 유형 드릴

| 229쪽~231쪽 |

1-1 답 ②

| 해결 전략 | 피적분함수의 식을 전개하여 간단히 한다.

$$\int_0^1(2^x-4^x)(4^x+8^x+16^x)dx$$

$$=\int_0^1(8^x-64^x)dx=\left[\frac{8^x}{\ln 8}-\frac{64^x}{\ln 64}\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{8}{3\ln 2}-\frac{64}{6\ln 2}\right)-\left(\frac{1}{3\ln 2}-\frac{1}{6\ln 2}\right)=-\frac{49}{6\ln 2}$$

1-2 답 12

| 해결 전략 | 먼저 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 구한다.

$$a_n=\int_0^{\frac{n}{2}\pi}(\sin x+\cos x)dx=\left[-\cos x+\sin x\right]_0^{\frac{n}{2}\pi}$$

$$=-\cos\frac{n}{2}\pi+\sin\frac{n}{2}\pi+1$$

$a_1=a_5=a_9=2,\ a_2=a_6=a_{10}=2,\ a_3=a_7=0,\ a_4=a_8=0$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=2\times 3+2\times 3=12$$

2-1 답 $\pi+2$

| 해결 전략 | 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 정적분은 적분 구간을 나눈 후 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$임을 이용한다.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx&=\int_{-\pi}^{0}f(x)dx+\int_0^{\pi}f(x)dx\\&=\int_{-\pi}^{0}\cos x\,dx+\int_0^{\pi}(\sin x+1)dx\\&=\left[\sin x\right]_{-\pi}^{0}+\left[-\cos x+x\right]_0^{\pi}\\&=\pi+2\end{aligned}$$

2-2 답 $4\ln\frac{4}{3}+\frac{38}{3}$

| 해결 전략 | 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 정적분은 적분 구간을 나눈 후 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$임을 이용한다.

$$\begin{aligned}\int_3^9 f(x)dx&=\int_3^4 f(x)dx+\int_4^9 f(x)dx\\&=\int_3^4\frac{4}{(x-5)(x-6)}dx+\int_4^9\sqrt{x}\,dx\\&=4\int_3^4\left(\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-5}\right)dx+\int_4^9 x^{\frac{1}{2}}dx\\&=4\left[\ln|x-6|-\ln|x-5|\right]_3^4+\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_4^9\\&=4\{\ln 2-(\ln 3-\ln 2)\}+\frac{2}{3}(27-8)\\&=4(2\ln 2-\ln 3)+\frac{38}{3}\\&=4\ln\frac{4}{3}+\frac{38}{3}\end{aligned}$$

3-1 답 $5-\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e}$

| 해결 전략 | 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=0$에서도 연속임을 이용한다.

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=0$에서도 연속이므로

$$\lim_{x\to 0-}(2e^{2x}+a)=\lim_{x\to 0+}(e^{-x}+2)=f(0)$$

$2+a=3 \qquad \therefore a=1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}2e^{2x}+1 & (x\le 0)\\ e^{-x}+2 & (x\ge 0)\end{cases}$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}f(x)dx&=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx\\&=\int_{-1}^{0}(2e^{2x}+1)dx+\int_0^1(e^{-x}+2)dx\\&=\left[e^{2x}+x\right]_{-1}^{0}+\left[-e^{-x}+2x\right]_0^1\\&=\{1-(e^{-2}-1)\}+\{(-e^{-1}+2)-(-1)\}\\&=5-\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e}\end{aligned}$$

3-2 답 $1-\frac{1}{e}$

| 해결 전략 | 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=0$에서도 연속임을 이용한다.

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=0$에서도 연속이므로

$$\lim_{x\to 0-}(e^x+a)=\lim_{x\to 0+}\sin x=f(0)$$

$1+a=0 \qquad \therefore a=-1$

따라서 $f(x)=\begin{cases} e^x-1 & (x\le 0) \\ \sin x & (x\ge 0)\end{cases}$이므로

$$\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(e^x-1)dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$
$$=\Big[e^x-x\Big]_{-1}^{0}+\Big[-\cos x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\{1-(e^{-1}+1)\}+1=1-\frac{1}{e}$$

4-1 답 $8\pi+4$

| 해결 전략 | 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x의 값을 경계로 적분 구간을 나눈다.

$f(x)=|\sin x|+4=\begin{cases} \sin x+4 & (0\le x\le \pi) \\ -\sin x+4 & (\pi\le x\le 2\pi)\end{cases}$이므로

$$\int_{0}^{2\pi} f(x)dx=\int_{0}^{\pi} f(x)dx+\int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx$$
$$=\int_{0}^{\pi}(\sin x+4)dx+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x+4)dx$$
$$=\Big[-\cos x+4x\Big]_{0}^{\pi}+\Big[\cos x+4x\Big]_{\pi}^{2\pi}$$
$$=\{(1+4\pi)-(-1)\}+\{(1+8\pi)-(-1+4\pi)\}$$
$$=8\pi+4$$

4-2 답 $\frac{1}{2}$

| 해결 전략 | 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x의 값을 경계로 적분 구간을 나눈다.

$\sin 2x-\sin x=0$에서

$2\sin x\cos x-\sin x=0$

$\sin x(2\cos x-1)=0$

$\sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}\left(\because 0\le x\le \frac{\pi}{2}\right)$

따라서

$$f(x)=|\sin 2x-\sin x|=\begin{cases} \sin 2x-\sin x & \left(0\le x\le \frac{\pi}{3}\right) \\ -\sin 2x+\sin x & \left(\frac{\pi}{3}\le x\le \frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

이므로

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(-\sin 2x+\sin x)dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{3}}+\Big[\frac{1}{2}\cos 2x-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\left\{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}+1\right)\right\}+\left\{-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}$$

5-1 답 $\sqrt{10}$

| 해결 전략 | $x^2-1=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$x^2-1=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이고,

$x=1$일 때 $t=0$, $x=a$일 때 $t=a^2-1$이므로

$$\int_{1}^{a} x\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\int_{1}^{a}2x\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{a^2-1}\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\int_{0}^{a^2-1}t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big]_{0}^{a^2-1}=\frac{1}{3}(a^2-1)^{\frac{3}{2}}$$

이때, $\int_{1}^{a} x\sqrt{x^2-1}\,dx=9$이므로 $\frac{1}{3}(a^2-1)^{\frac{3}{2}}=9$

$(a^2-1)^{\frac{3}{2}}=27$, $a^2-1=9$, $a^2=10$

$\therefore a=\sqrt{10}\ (\because a>0)$

5-2 답 $\frac{3}{2}$

| 해결 전략 | $2x+1=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$2x+1=t$로 놓으면 $2=\frac{dt}{dx}$이고,

$x=0$일 때 $t=1$, $x=a$일 때 $t=2a+1$이므로

$$\int_{0}^{a}\sqrt{(2x+1)^3}\,dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{a}2(2x+1)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_{1}^{2a+1}t^{\frac{3}{2}}dt$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\Big]_{1}^{2a+1}$$
$$=\frac{1}{5}(2a+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{5}$$

이때, $\int_{0}^{a}\sqrt{(2x+1)^3}\,dx=\frac{31}{5}$이므로 $\frac{1}{5}(2a+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{5}=\frac{31}{5}$

$(2a+1)^{\frac{5}{2}}=32$, $2a+1=4$ $\quad\therefore a=\frac{3}{2}$

6-1 답 $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$

| 해결 전략 | $e^{2x}+1=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$e^{2x}+1=t$로 놓으면 $2e^{2x}=\frac{dt}{dx}$이고,

$x=0$일 때 $t=2$, $x=\ln 2$일 때 $t=5$이므로

$$\int_{0}^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{\ln 2}\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}dx=\frac{1}{2}\int_{2}^{5}\frac{1}{t}dt$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\ln|t|\Big]_{2}^{5}=\frac{1}{2}(\ln 5-\ln 2)=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$$

6-2 답 0

| 해결 전략 | 함수 $f(x)$가 정의된 구간에 따라 적분 구간을 나누어 적분하되 각 구간 안에서 치환적분법을 이용한다.

$$\int_{-\pi}^{1} f(x)dx=\int_{-\pi}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx$$
$$=\int_{-\pi}^{0}\sin x\cos^2 x\,dx+\int_{0}^{1}2^x\ln 2\sqrt{2^x-1}\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_{-\pi}^{0}\sin x\cos^2 x\,dx$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$이고,

$x=-\pi$일 때 $t=-1$, $x=0$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{-\pi}^{0}\sin x\cos^2 x\,dx=\int_{-1}^{1}(-t^2)dt=\left[-\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{1}=-\frac{2}{3}$$

$\int_{0}^{1}2^x\ln 2\sqrt{2^x-1}\,dx$에서 $2^x-1=s$로 놓으면 $2^x\ln 2=\frac{ds}{dx}$이고,

$x=0$일 때 $s=0$, $x=1$일 때 $s=1$이므로

$$\int_{0}^{1}2^x\ln 2\sqrt{2^x-1}\,dx=\int_{0}^{1}\sqrt{s}\,ds=\int_{0}^{1}s^{\frac{1}{2}}\,ds=\left[\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{1}=\frac{2}{3}$$

따라서 ㉠에서

$$\int_{-\pi}^{1}f(x)\,dx=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=0$$

7-1 답 $\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}$

| 해결 전략 | 부분적분법을 2번 적용하여 정적분의 값을 구한다.

$f(x)=\cos x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=-\sin x$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx=\left[e^x\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(-e^x\sin x)dx$$

$$=-1+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx$에서 $u(x)=\sin x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=\cos x$, $v(x)=e^x$이므로

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx=\left[e^x\sin x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx=-1+\left(e^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx\right)$$

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx=e^{\frac{\pi}{2}}-1$$

$$\therefore \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}$$

7-2 답 2

| 해결 전략 | $f(x)=ax^2+bx+c$로 놓은 후 $f(x)\sin x$를 우함수, 기함수로 구분한다.

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)로 놓으면

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(ax^2+bx+c)\sin x\,dx$$

$$=2b\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$이므로

$$2b\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=2b\left[-x\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}+2b\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$

$$=2b\left[\sin x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=2b$$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin x\,dx=4$에서 $2b=4$ $\quad\therefore b=2$

따라서 $f'(x)=2ax+2$이므로 $f'(0)=2$

8-1 답 -4

| 해결 전략 | $\int_{1}^{x}(x-t)f(t)dt=x\int_{1}^{x}f(t)dt-\int_{1}^{x}tf(t)dt$로 변형한 후 양변을 x에 대하여 미분한다.

$\int_{1}^{x}(x-t)f(t)dt=x^2\ln x+x\ln x+ax+b$에서

$$x\int_{1}^{x}f(t)dt-\int_{1}^{x}tf(t)dt=x^2\ln x+x\ln x+ax+b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_{1}^{x}f(t)dt+xf(x)-xf(x)=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}+\ln x+x\times\frac{1}{x}+a$$

$$\therefore \int_{1}^{x}f(t)dt=2x\ln x+x+\ln x+1+a \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $0=a+b$

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면 $0=1+1+a$

따라서 $a=-2$, $b=2$이므로 $ab=-4$

8-2 답 $f(x)=\cos 2x$

| 해결 전략 | 주어진 식을 변형한 후 양변을 x에 대하여 미분한다.

$\int_{0}^{x}(x-t)f'(t)dt=\sin x\cos x-x$에서

$$x\int_{0}^{x}f'(t)dt-\int_{0}^{x}tf'(t)dt=\frac{1}{2}\sin 2x-x$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_{0}^{x}f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=\cos 2x-1$$

$$\int_{0}^{x}f'(t)dt=\cos 2x-1$$

$$\left[f(t)\right]_{0}^{x}=\cos 2x-1$$

$f(x)-f(0)=\cos 2x-1$

이때, $f(0)=1$이므로 $f(x)=\cos 2x$

9-1 답 3

| 해결 전략 | 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한다.

$f(x)=\int_{0}^{x}(2^t-a)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2^x-a$

$f'(x)=0$에서 $x=\log_2 a$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\log_2 a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=\log_2 a$에서 극소이므로 극솟값은

$$f(\log_2 a)=\int_0^{\log_2 a}(2^t-a)dt=\left[\frac{2^t}{\ln 2}-at\right]_0^{\log_2 a}$$
$$=\frac{2^{\log_2 a}}{\ln 2}-a\log_2 a-\frac{1}{\ln 2}$$
$$=\frac{a-1}{\ln 2}-a\log_2 a$$
$$=\frac{a-1}{\ln 2}-\frac{a\ln a}{\ln 2}$$
$$=\frac{a-1-a\ln a}{\ln 2}$$

따라서 $\frac{a-1-a\ln a}{\ln 2}=\frac{2-3\ln 3}{\ln 2}$이므로

$a=3$

9-2 답 $\frac{\pi}{4}$

| 해결 전략 | 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한다.

$f(x)=\int_0^x \frac{1}{\sin t}dt+\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos t}dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}=\frac{\cos x-\sin x}{\sin x\cos x}$$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\sin x$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}\left(\because 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극대이므로

$\alpha=\frac{\pi}{4}$

10-1 답 2

| 해결 전략 | 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구한다.

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_1^{1+h}f(t)dt=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}$$
$$=F'(1)=f(1)=2$$

10-2 답 10

| 해결 전략 | 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구한다.

$f(t)=2^t+3^t$으로 놓고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$(\text{주어진 식})=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\times(x+1)$$
$$=2F'(1)=2f(1)=10$$

10 | 정적분의 활용

1 넓이

개념 확인 234쪽~237쪽

1 (가) h_n (나) $\frac{1}{2}l_nh_n$ (다) πr^2 **2** $\frac{1}{3}$

3 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}$ (2) e^2-1 **4** $\frac{64}{3}$

1 반지름의 길이가 r인 원에 내접하는 정n각형의 둘레의 길이를 l_n, 넓이를 S_n, $\overline{\mathrm{OH}}=h_n$이라 하면

$$S_n=n\times\triangle\mathrm{OAB}=n\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{l_n}{n}\times\boxed{h_n}\right)=\boxed{\frac{1}{2}l_nh_n}$$

이때, $n\longrightarrow\infty$이면 $l_n\longrightarrow 2\pi r$, $h_n\longrightarrow r$이고, S_n은 원의 넓이에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}l_nh_n=\boxed{\pi r^2}$$

따라서 반지름의 길이가 r인 원의 넓이는 πr^2이다.

2 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$

이때, $f(x)=x^2$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n},\ x_k=a+k\Delta x=\frac{k}{n}$$

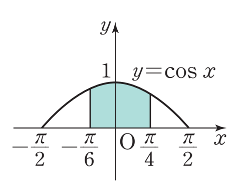
따라서 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\int_0^1 f(x)dx$$
$$=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

3 (1) 구간 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$에서 $y>0$이므로

구하는 넓이는

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}$$

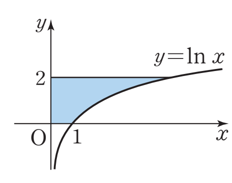


(2) $y=\ln x$에서 $x=e^y$

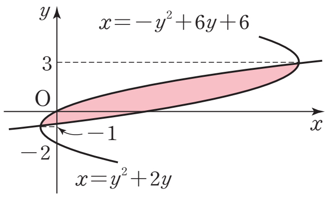
구간 $[0, 2]$에서 $x>0$이므로

구하는 넓이는

$$\int_0^2 e^y dy=\Big[e^y\Big]_0^2=e^2-1$$



4 두 곡선 $x=y^2+2y$, $x=-y^2+6y+6$의 교점의 y좌표는



$y^2+2y=-y^2+6y+6$에서

$2y^2-4y-6=0$

$2(y+1)(y-3)=0$

$\therefore\ y=-1$ 또는 $y=3$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3}\{(-y^2+6y+6)-(y^2+2y)\}dy&=\int_{-1}^{3}(-2y^2+4y+6)dy\\&=\left[-\frac{2}{3}y^3+2y^2+6y\right]_{-1}^{3}\\&=\frac{64}{3}\end{aligned}$$

STEP 1 개념 드릴 | 238쪽~239쪽 |

개념 check

1-1 $\frac{1}{n}$, n^2, $\frac{1}{3}$ **2-1** $\frac{2k}{n}$, 2

3-1 $\frac{16}{3}$ **4-1** $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$

스스로 check

1-2 답 (가) $\frac{1}{6}\pi r^2h$ (나) $\frac{1}{3}\pi r^2h$

$$\begin{aligned}V_n&=\pi\left(\frac{r}{n}\right)^2\times\frac{h}{n}+\pi\left(\frac{2r}{n}\right)^2\times\frac{h}{n}+\cdots+\pi\left\{\frac{(n-1)r}{n}\right\}^2\times\frac{h}{n}\\&=\frac{\pi r^2h}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\}\\&=\frac{\pi r^2h}{n^3}\times\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\\&=\boxed{\frac{1}{6}\pi r^2h}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

따라서 구하는 원뿔의 부피 V는

$$V=\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\pi r^2h\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\boxed{\frac{1}{3}\pi r^2h}$$

2-2 답 $\frac{17}{6}$

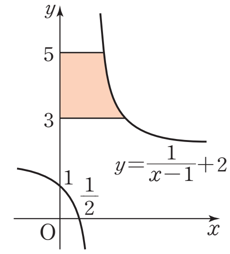
$f(x)=(1+\sqrt{x})^2$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$\varDelta x=\frac{1}{n}$, $x_k=\frac{k}{n}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\sqrt{\frac{k}{n}}\right)^2\frac{1}{n}&=\int_0^1(1+\sqrt{x})^2dx\\&=\int_0^1(1+2\sqrt{x}+x)dx\\&=\left[x+\frac{4}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\\&=\frac{17}{6}\end{aligned}$$

3-2 답 $2+\ln 3$

$y=\frac{1}{x-1}+2$에서 $x=\frac{1}{y-2}+1$



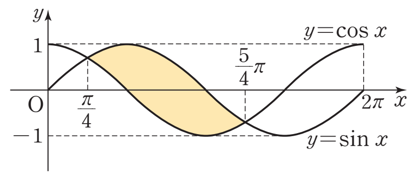
구간 $[3, 5]$에서 $x>0$이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}\int_3^5\left(\frac{1}{y-2}+1\right)dy&=\Big[\ln|y-2|+y\Big]_3^5\\&=2+\ln 3\end{aligned}$$

4-2 답 $2\sqrt{2}$

두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 교점의 x좌표는 $\sin x=\cos x$에서

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$ ($\because\ 0\le x\le 2\pi$)



따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(\sin x-\cos x)dx&=\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\\&=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

STEP 2 필수 유형 | 240쪽~245쪽 |

01-1 답 (1) $\frac{2}{3}\ln 2$ (2) $\frac{2}{\pi}$ (3) $2\ln 2-1$

| 해결 전략 | 주어진 식을 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\times\frac{p}{n}$ 꼴이 되도록 변형한 후 정적분을 이용하여 극한값을 구한다.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n+3k}=\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{3k}{n}}\times\frac{3}{n}$

$f(x)=\frac{1}{x}$, $a=1$, $b=4$로 놓으면 $\varDelta x=\frac{3}{n}$, $x_k=1+\frac{3k}{n}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{3k}{n}}\times\frac{3}{n}&=\frac{1}{3}\int_1^4\frac{1}{x}dx\\&=\frac{1}{3}\Big[\ln|x|\Big]_1^4\\&=\frac{2}{3}\ln 2\end{aligned}$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$

$=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\times\frac{\pi}{n}$

$f(x)=\sin x$, $a=0$, $b=\pi$로 놓으면 $\varDelta x=\frac{\pi}{n}$, $x_k=\frac{k\pi}{n}$

$\therefore\ \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\times\frac{\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$

$=\frac{2}{\pi}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\times\frac{1}{n}$

$f(x)=\ln x$, $a=1$, $b=2$로 놓으면 $\varDelta x=\frac{1}{n}$, $x_k=1+\frac{k}{n}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\times\frac{1}{n}$

$=\int_1^2\ln x\,dx$

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면
$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$

$=\Big[x\ln x\Big]_1^2-\int_1^2 1\,dx$

$=2\ln 2-\Big[x\Big]_1^2$

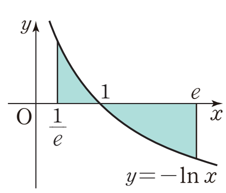
$=2\ln 2-1$

02-1 답 $2-\frac{2}{e}$

|해결 전략| 주어진 곡선과 직선을 좌표평면에 나타낸 후 정적분을 이용하여 도형의 넓이를 구한다.

곡선 $y=-\ln x$와 x축의 교점의 x좌표는

$-\ln x=0$에서 $x=1$



구간 $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$에서 $y\ge 0$, 구간 $[1, e]$에서 $y\le 0$이므로 구하는 넓이는

$\int_{\frac{1}{e}}^{1}(-\ln x)\,dx+\int_1^e\ln x\,dx$

$=\Big[-x\ln x\Big]_{\frac{1}{e}}^{1}-\int_{\frac{1}{e}}^{1}(-1)\,dx+\Big[x\ln x\Big]_1^e-\int_1^e 1\,dx$

$=-\frac{1}{e}+\Big[x\Big]_{\frac{1}{e}}^{1}+e-\Big[x\Big]_1^e$

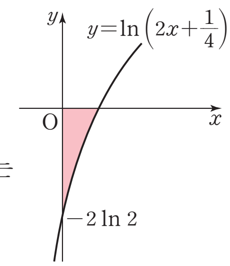
$=2-\frac{2}{e}$

03-1 답 $\frac{3}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$

|해결 전략| 주어진 곡선과 직선을 좌표평면에 나타낸 후 정적분을 이용하여 도형의 넓이를 구한다.

$y=\ln\left(2x+\frac{1}{4}\right)$에서

$2x+\frac{1}{4}=e^y\qquad\therefore\ x=\frac{1}{2}\left(e^y-\frac{1}{4}\right)$



곡선 $x=\frac{1}{2}\left(e^y-\frac{1}{4}\right)$과 y축의 교점의 y좌표는

$\frac{1}{2}\left(e^y-\frac{1}{4}\right)=0$에서 $e^y=\frac{1}{4}$

$\therefore\ y=-2\ln 2$

구간 $[-2\ln 2, 0]$에서 $x\ge 0$이므로 구하는 넓이는

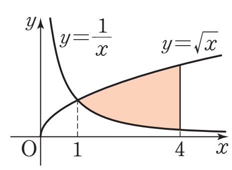
$\int_{-2\ln 2}^{0}\frac{1}{2}\left(e^y-\frac{1}{4}\right)dy=\left[\frac{1}{2}\left(e^y-\frac{1}{4}y\right)\right]_{-2\ln 2}^{0}$

$=\frac{3}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$

04-1 답 $\frac{14}{3}-2\ln 2$

|해결 전략| 두 곡선의 교점의 x좌표를 구하고, 두 곡선을 좌표평면에 나타낸 후 정적분을 이용하여 도형의 넓이를 구한다.

두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{x}$의 교점의 x좌표는



$\sqrt{x}=\frac{1}{x}$에서 $x\sqrt{x}-1=0$

$(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)=0$

$\therefore\ x=1\ (\because\ x+\sqrt{x}+1>0)$

따라서 구하는 넓이는

$\int_1^4\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\ln|x|\right]_1^4$

$=\frac{14}{3}-2\ln 2$

05-1 답 $\frac{4}{3}$

|해결 전략| 직선 $y=a$를 기준으로 아래쪽 도형의 넓이와 위쪽 도형의 넓이가 서로 같으므로 $\int_0^4(\sqrt{x}-a)dx=0$임을 이용한다.

직선 $y=a$의 아래쪽 도형의 넓이와 위쪽 도형의 넓이가 서로 같으므로

$\int_0^4(\sqrt{x}-a)dx=0$, $\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-ax\right]_0^4=0$

$\frac{16}{3}-4a=0\qquad\therefore\ a=\frac{4}{3}$

05-2 답 $\frac{1}{e-1}$

|해결 전략| 직선 $y=a$를 기준으로 아래쪽 도형의 넓이와 위쪽 도형의 넓이가 서로 같으므로 $\int_0^{e-1}\{\ln(x+1)-a\}dx=0$임을 이용한다.

직선 $y=a$의 아래쪽 도형의 넓이와 위쪽 도형의 넓이가 서로 같으므로

$\int_0^{e-1}\{\ln(x+1)-a\}dx=0$

$\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx-\int_0^{e-1}a\,dx=0\qquad\cdots\cdots㉠$

$\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx$에서 $f(x)=\ln(x+1)$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x+1}$, $g(x)=x$이므로 ㉠에서

$$\Big[x\ln(x+1)\Big]_0^{e-1}-\int_0^{e-1}\frac{x}{x+1}dx-\Big[ax\Big]_0^{e-1}=0$$

$$e-1-\int_0^{e-1}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx-a(e-1)=0$$

$$(1-a)(e-1)-\Big[x-\ln|x+1|\Big]_0^{e-1}=0$$

$$(1-a)(e-1)-(e-2)=0,\ 1-a=\frac{e-2}{e-1}$$

$$\therefore a=1-\frac{e-2}{e-1}=\frac{1}{e-1}$$

06-1 답 $\frac{1}{4}(e^2-1)$

|해결 전략| 곡선 $y=e^x$과 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한 후 직선 $y=ax$가 넓이를 이등분함을 이용한다.

곡선 $y=e^x$과 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면

$$S_1=\int_0^2 e^x\,dx=\Big[e^x\Big]_0^2=e^2-1$$

직선 $y=ax$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_0^2 ax\,dx=\left[\frac{1}{2}ax^2\right]_0^2=2a$$

이때, $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로 $2a=\frac{1}{2}(e^2-1)$ $\quad\therefore a=\frac{1}{4}(e^2-1)$

2 입체도형의 부피

개념 확인 246쪽

1 14

1 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^2 S(x)dx=\int_0^2 (2x+5)dx=\Big[x^2+5x\Big]_0^2=14$$

STEP 1 개념 드릴 | 247쪽 |

개념 check

1-1 5, 5, 70

2-1 $\frac{1}{2}x+1$, $\frac{1}{2}x+1$, $\frac{1}{2}x+1$, $\frac{\sqrt{3}}{6}$

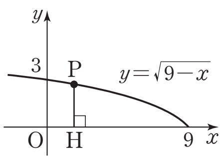
스스로 check

1-2 답 $\frac{4}{3}\text{cm}^3$

물의 깊이가 x cm일 때, 수면의 넓이가 $(2x-x^2)\text{ cm}^2$이므로 물의 깊이가 2 cm일 때, 물의 부피는

$$\int_0^2 (2x-x^2)dx=\left[x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{4}{3}\ (\text{cm}^3)$$

2-2 답 $\frac{81}{2}$



오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{9-x}$ 위의 점 $P(x, \sqrt{9-x})(0\le x\le 9)$에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PH}=\sqrt{9-x}$

이때, 단면인 정사각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=(\sqrt{9-x})^2=9-x$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^9 S(x)dx=\int_0^9 (9-x)dx=\left[9x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^9=\frac{81}{2}$$

STEP 2 필수 유형 | 248쪽~249쪽 |

01-1 답 $\left(\frac{1}{2}e^4+\frac{3}{2}\right)\text{cm}^3$

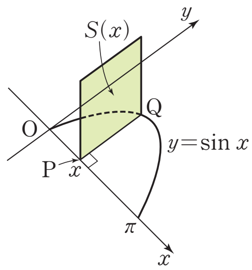
|해결 전략| 수면의 넓이를 정적분한 것이 물의 부피가 된다.

물의 깊이가 x cm일 때, 수면의 넓이가 $(e^{2x}+x)\text{ cm}^2$이므로 물의 깊이가 2 cm일 때, 물의 부피는

$$\int_0^2 (e^{2x}+x)dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}x^2\right]_0^2=\frac{1}{2}e^4+\frac{3}{2}\ (\text{cm}^3)$$

02-1 답 $\dfrac{\pi}{2}$

|해결 전략| 입체도형의 밑면을 좌표평면에 나타내고 단면의 넓이를 구한 후 정적분하여 부피를 구한다.



오른쪽 그림과 같이 x축 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)$ $(0\le x\le\pi)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\sin x$와 만나는 점을 Q라 하면 $\mathrm{Q}(x,\ \sin x)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sin x$

점 P를 지나고 x축에 수직인 평면으로 주어진 입체도형을 자른 단면은 한 변의 길이가 $\overline{\mathrm{PQ}}$인 정사각형이므로 그 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\sin^2 x$

따라서 구하는 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^\pi S(x)\,dx=\int_0^\pi \sin^2 x\,dx=\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2}$$

$\cos 2x=1-2\sin^2 x$이므로 $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

LECTURE

배각의 공식

❶ $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

❷ $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

❸ $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

3 속도와 거리

개념 확인 250쪽~252쪽

1 (1) $\frac{1}{2}(e^4-17)$ (2) $\frac{1}{2}(e^8-33)$ (3) $\frac{1}{2}e^8-\frac{39}{2}+8\ln 2$

2 13 **3** (1) 12 (2) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$

1 (1) $t=0$에서 점 P의 위치가 0이므로 시각 $t=2$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^2(e^{2t}-4)dt=\left[\frac{1}{2}e^{2t}-4t\right]_0^2=\frac{1}{2}(e^4-17)$$

(2) 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^4(e^{2t}-4)dt=\left[\frac{1}{2}e^{2t}-4t\right]_0^4=\frac{1}{2}(e^8-33)$$

(3) $0\le t\le\ln 2$일 때 $v(t)\le 0$, $t\ge\ln 2$일 때 $v(t)\ge 0$이므로 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^4|e^{2t}-4|dt=\int_0^{\ln 2}(4-e^{2t})dt+\int_{\ln 2}^4(e^{2t}-4)dt$$

$$=\left[4t-\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^{\ln 2}+\left[\frac{1}{2}e^{2t}-4t\right]_{\ln 2}^4$$

$$=\left(4\ln 2-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}e^8-18+4\ln 2\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^8-\frac{39}{2}+8\ln 2$$

2 $\dfrac{dx}{dt}=12t$, $\dfrac{dy}{dt}=3t^2-12$이므로 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

$$=\int_0^1\sqrt{(12t)^2+(3t^2-12)^2}dt$$

$$=\int_0^1\sqrt{144t^2+9t^4-72t^2+144}\,dt$$

$$=\int_0^1\sqrt{9t^4+72t^2+144}\,dt$$

$$=\int_0^1\sqrt{(3t^2+12)^2}dt$$

$$=\int_0^1(3t^2+12)dt$$

$$=\left[t^3+12t\right]_0^1=13$$

3 (1) $\dfrac{dx}{dt}=3t^2-2$, $\dfrac{dy}{dt}=2\sqrt{6}t$이므로 곡선의 길이 l은

$$l=\int_0^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

$$=\int_0^2\sqrt{(3t^2-2)^2+(2\sqrt{6}t)^2}dt$$

$$=\int_0^2\sqrt{9t^4-12t^2+4+24t^2}dt$$

$$=\int_0^2\sqrt{9t^4+12t^2+4}\,dt$$

$$=\int_0^2\sqrt{(3t^2+2)^2}dt$$

$$=\int_0^2(3t^2+2)dt$$

$$=\left[t^3+2t\right]_0^2=12$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=2$이므로 곡선의 길이 l은

$$l=\int_{-\frac{3}{2}}^1\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

$$=\int_{-\frac{3}{2}}^1\sqrt{1+2^2}dx=\int_{-\frac{3}{2}}^1\sqrt{5}\,dx$$

$$=\left[\sqrt{5}x\right]_{-\frac{3}{2}}^1=\frac{5\sqrt{5}}{2}$$

STEP 1 개념 드릴 | 253쪽 |

개념 check

1-1 e^t-e^{-t}, e^t-e^{-t}, $e^3-\dfrac{1}{e^3}$

2-1 $\dfrac{1}{2}x^2$, $\dfrac{1}{2}x^2$, $\dfrac{227}{24}$

스스로 check

1-2 답 6

$\frac{dx}{dt}=2t^{\frac{3}{2}}$, $\frac{dy}{dt}=t^3-1$이므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$
$$=\int_0^2\sqrt{(2t^{\frac{3}{2}})^2+(t^3-1)^2}dt$$
$$=\int_0^2\sqrt{t^6+2t^3+1}dt$$
$$=\int_0^2\sqrt{(t^3+1)^2}dt$$
$$=\int_0^2(t^3+1)dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^4+t\right]_0^2=6$$

2-2 답 $\frac{14}{3}$

$\frac{dy}{dx}=\sqrt{x-1}$이므로 곡선의 길이 l은

$$l=\int_1^4\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$
$$=\int_1^4\sqrt{1+(\sqrt{x-1})^2}dx$$
$$=\int_1^4\sqrt{x}\,dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{14}{3}$$

STEP 2 필수 유형

| 254쪽~256쪽 |

01-1 답 $\frac{5}{\ln 2}-2$

|해결 전략| 속력을 정적분하면 움직인 거리가 됨을 이용한다.

$0\le t\le 1$일 때 $v(t)\le 0$, $1\le t\le 3$일 때 $v(t)\ge 0$이므로 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3|2^t-2|dt=\int_0^1(2-2^t)dt+\int_1^3(2^t-2)dt$$
$$=\left[2t-\frac{2^t}{\ln 2}\right]_0^1+\left[\frac{2^t}{\ln 2}-2t\right]_1^3$$
$$=\left(2-\frac{1}{\ln 2}\right)+\left(\frac{6}{\ln 2}-4\right)$$
$$=\frac{5}{\ln 2}-2$$

02-1 답 $2\sqrt{2}\pi$

|해결 전략| 시각 t에서의 위치가 (x, y)인 점 P가 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리 s는 $s=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$임을 이용한다.

$\frac{dx}{dt}=\cos t-\sin t$, $\frac{dy}{dt}=\cos t+\sin t$이므로 시각 $t=0$에서 $t=2\pi$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{(\cos t-\sin t)^2+(\cos t+\sin t)^2}dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\,dt=\left[\sqrt{2}t\right]_0^{2\pi}=2\sqrt{2}\pi$$

02-2 답 $\frac{76}{3}$

|해결 전략| 시각 t에서의 위치가 (x, y)인 점 P가 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리 s는 $s=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$임을 이용한다.

$\frac{dx}{dt}=2t\cos t-(t^2-1)\sin t$, $\frac{dy}{dt}=2t\sin t+(t^2-1)\cos t$이므로 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^4\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$
$$=\int_0^4\sqrt{\{2t\cos t-(t^2-1)\sin t\}^2+\{2t\sin t+(t^2-1)\cos t\}^2}dt$$
$$=\int_0^4\sqrt{4t^2+(t^2-1)^2}dt=\int_0^4\sqrt{t^4+2t^2+1}\,dt=\int_0^4\sqrt{(t^2+1)^2}dt$$
$$=\int_0^4(t^2+1)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^4=\frac{76}{3}$$

03-1 답 $\frac{9}{2}$

|해결 전략| 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$ $(a\le t\le b)$의 길이 l은 $l=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_a^b\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}dt$ 임을 이용한다.

$\frac{dx}{dt}=-9\cos^2 t\sin t$, $\frac{dy}{dt}=9\sin^2 t\cos t$ 이므로 곡선의 길이 l은

$$l=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-9\cos^2 t\sin t)^2+(9\sin^2 t\cos t)^2}dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{81\sin^2 t\cos^2 t}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}9\sin t\cos t\,dt$$

$\sin 2t=2\sin t\cos t$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}9\times\frac{\sin 2t}{2}dt$$
$$=\left[-\frac{9}{4}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9}{2}$$

03-2 답 $\frac{1}{2}\left(e^6-\frac{1}{e^6}\right)$

|해결 전략| 곡선 $y=f(x)\ (a\le x\le b)$의 길이 l은 $l=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$임을 이용한다.

$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$이므로 곡선의 길이 l은

$$l=\int_{-3}^{3}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_{-3}^{3}\sqrt{1+\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\right)^2}dx$$

$$=\int_{-3}^{3}\sqrt{\frac{e^{4x}+2+e^{-4x}}{4}}dx=\int_{-3}^{3}\sqrt{\left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}\right)^2}dx$$

$$=\int_{-3}^{3}\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}dx=\frac{1}{4}\left[e^{2x}-e^{-2x}\right]_{-3}^{3}=\frac{1}{2}\left(e^6-\frac{1}{e^6}\right)$$

STEP 3 유형 드릴

| 257쪽~259쪽 |

1-1 답 2

|해결 전략| 주어진 식의 좌변을 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\times\frac{p}{n}$ 꼴이 되도록 변형한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{3n}{2n+k}=\alpha\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{2+\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}$$

$f(x)=\frac{3}{x}$, $a=2$, $b=3$으로 놓으면

$\Delta x=\frac{1}{n}$, $x_k=2+\frac{k}{n}$

$\therefore\ \alpha\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{2+\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}=\alpha\int_2^3\frac{3}{x}dx$

따라서 $\alpha\int_2^3\frac{3}{x}dx=\int_2^3\frac{6}{x}dx$이므로 $\alpha=2$

1-2 답 1

|해결 전략| 주어진 식의 좌변을 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\times\frac{p}{n}$ 꼴이 되도록 변형한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{4}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{2n}{n}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2k}{n}\right)\times\frac{2}{n}$$

$f(x)=\ln x$, $a=1$, $b=3$으로 놓으면

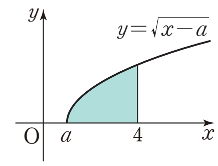
$\Delta x=\frac{2}{n}$, $x_k=1+\frac{2k}{n}$

$\therefore\ \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2k}{n}\right)\times\frac{2}{n}=\frac{1}{2}\int_1^3\ln x\,dx$

따라서 $\frac{1}{2}\int_1^3\ln x\,dx=\frac{1}{2}\int_\alpha^3\ln x\,dx$이므로 $\alpha=1$

2-1 답 1

|해결 전략| 주어진 곡선과 직선을 좌표평면 위에 그린 후 정적분을 이용한다.



오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

$$\int_a^4\sqrt{x-a}\,dx=\left[\frac{2}{3}(x-a)^{\frac{3}{2}}\right]_a^4=\frac{2}{3}(4-a)^{\frac{3}{2}}$$

따라서 $\frac{2}{3}(4-a)^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{3}$이므로

$(4-a)^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}$, $(4-a)^{\frac{3}{2}}=3^{\frac{3}{2}}$

$4-a=3\qquad\therefore\ a=1$

2-2 답 2

|해결 전략| 주어진 곡선과 x축의 교점의 x좌표를 구한 후 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

곡선 $y=\frac{a}{2x+1}-1$과 x축의 교점의 x좌표는 $\frac{a}{2x+1}-1=0$에서

$x=\frac{a-1}{2}$이므로 곡선 $y=\frac{a}{2x+1}-1$과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

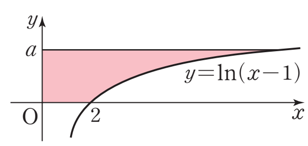
$$\int_0^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{2x+1}-1\right)dx=\left[\frac{a}{2}\ln|2x+1|-x\right]_0^{\frac{a-1}{2}}$$

$$=\frac{a}{2}\ln a-\frac{a-1}{2}$$

따라서 $\frac{a}{2}\ln a-\frac{a-1}{2}=\ln 2-\frac{1}{2}$이므로 $a=2$

3-1 답 3

|해결 전략| 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_c^d|g(y)|dy$이다.



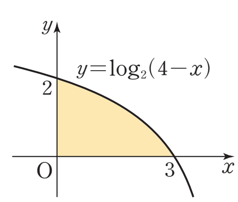
$y=\ln(x-1)$에서 $x=e^y+1$이므로 곡선 $y=\ln(x-1)$과 x축, y축 및 직선 $y=a$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^a(e^y+1)dy=\left[e^y+y\right]_0^a=e^a+a-1$$

따라서 $e^a+a-1=e^3+2$이므로 $a=3$

3-2 답 $8-\frac{3}{\ln 2}$

|해결 전략| 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_c^d|g(y)|dy$이다.



$y=\log_2(4-x)$에서 $x=-2^y+4$이므로 곡선 $y=\log_2(4-x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^2(-2^y+4)dy=\left[-\frac{2^y}{\ln 2}+4y\right]_0^2$$

$$=8-\frac{3}{\ln 2}$$

4-1 답 $\sqrt{6}$

|해결 전략| 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으면 $\int_c^d g(y)\,dy=0$임을 이용한다.

y축의 왼쪽 도형의 넓이와 오른쪽 도형의 넓이가 서로 같고,
$y=\sqrt{2-x}$에서 $x=2-y^2$이므로

$$\int_0^k (2-y^2)dy=0$$

$$\left[2y-\frac{1}{3}y^3\right]_0^k=0,\ 2k-\frac{1}{3}k^3=0$$

$k(k^2-6)=0 \qquad \therefore k=\sqrt{6}\ (\because k>\sqrt{2})$

4-2 답 $\frac{e^2-5}{2}$

|해결 전략| 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으면 $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx=0$임을 이용한다.

직선 $y=k$의 아래쪽 도형의 넓이와 위쪽 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^2 (e^x-2-k)dx=0$$

$$\left[e^x-(2+k)x\right]_0^2=0,\ e^2-5-2k=0$$

$$\therefore k=\frac{e^2-5}{2}$$

5-1 답 $\frac{1}{3}$

|해결 전략| 곡선 $y=\sqrt{x}$와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한 후 직선 $y=mx$가 넓이를 이등분함을 이용한다.

곡선 $y=\sqrt{x}$와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면

$$S_1=\int_0^4 \sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^4=\frac{16}{3}$$

직선 $y=mx$와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_0^4 mx\,dx=\left[\frac{m}{2}x^2\right]_0^4=8m$$

이때, $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로 $8m=\frac{8}{3} \qquad \therefore m=\frac{1}{3}$

5-2 답 ⑤

|해결 전략| 곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 방정식을 구하고 곡선 $y=e^x$과 접선 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

$y=e^x$에서 $y'=e^x$이므로 곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 1이다.
이때, 곡선 위의 점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 방정식은
$y-1=1\times(x-0) \qquad \therefore y=x+1$
따라서 곡선 $y=e^x$과 직선 $y=x+1$ 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1 (e^x-x-1)dx=\left[e^x-\frac{1}{2}x^2-x\right]_0^1=e-\frac{5}{2}$$

직선 $y=x+1$은 점 $(1,\ 2)$를 지나고, 색칠한 도형의 넓이가 접선에 의하여 이등분되므로

$\frac{1}{2}\times(2-a)\times1=e-\frac{5}{2} \qquad \therefore a=7-2e$

LECTURE

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은
➡ $y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)$

6-1 답 $\frac{2}{3}\pi$

|해결 전략| 단면의 넓이를 정적분한 것이 입체도형의 부피임을 이용한다.

밑면으로부터 x cm인 지점에서의 단면의 넓이가 $\sin x$ cm^{2}이므로 높이가 a cm인 이 입체도형의 부피를 V cm^{3}라 하면

$$V=\int_0^a \sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^a=-\cos a+1$$

이때, $V=\frac{3}{2}$이므로 $-\cos a+1=\frac{3}{2}$에서

$\cos a=-\frac{1}{2} \qquad \therefore a=\frac{2}{3}\pi\ (\because 0<a<\pi)$

6-2 답 10

|해결 전략| 단면의 넓이를 정적분한 것이 입체도형의 부피임을 이용한다.

밑면으로부터 x인 지점에서의 단면의 넓이가
$(e^x+1)^2=e^{2x}+2e^x+1$이므로 높이가 a인 이 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^a (e^{2x}+2e^x+1)dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x+x\right]_0^a$$

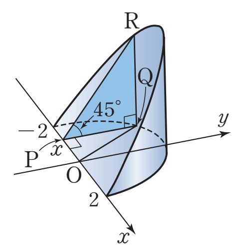
$$=\frac{1}{2}e^{2a}+2e^a+a-\frac{5}{2}$$

이때, $V=\frac{1}{2}e^{20}+2e^{10}+\frac{15}{2}$이므로

$\frac{1}{2}e^{2a}+2e^a+a-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}e^{20}+2e^{10}+\frac{15}{2}$에서 $a=10$

7-1 답 $\frac{16}{3}$

|해결 전략| 주어진 입체도형을 좌표평면에 나타낸 후 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 구한다.



오른쪽 그림과 같이 밑면의 중심을 원점, 밑면의 지름을 x축으로 정하고, x축 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)\ (-2\le x\le 2)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 주어진 입체도형을 자른 단면을 △PQR라 하자. 이때,

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}=\sqrt{4-x^2}$,
$\overline{\mathrm{RQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}\tan 45°=\sqrt{4-x^2}$
이므로 △PQR의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{RQ}}=\frac{1}{2}(4-x^2)$$

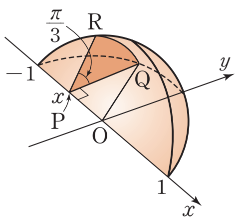
따라서 구하는 부피를 V라 하면

$$V=\int_{-2}^2 S(x)dx=\int_{-2}^2 \frac{1}{2}(4-x^2)dx$$

$$=2\times\frac{1}{2}\int_0^2 (4-x^2)dx=\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{16}{3}$$

7-2 답 $\frac{2}{9}\pi$

|해결 전략| 주어진 입체도형을 좌표평면에 나타낸 후 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 구한다.



오른쪽 그림과 같이 밑면의 중심을 원점, 밑면의 지름을 x축으로 정하고, x축 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)(-1\le x\le 1)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 주어진 입체도형을 자른 단면을 부채꼴 RPQ라 하자. 이때,

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}=\sqrt{1-x^2}$

이므로 부채꼴 RPQ의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}(1-x^2)$

따라서 구하는 부피를 V라 하면

$$V=\int_{-1}^{1}S(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{\pi}{6}(1-x^2)dx$$
$$=2\times\frac{\pi}{6}\int_{0}^{1}(1-x^2)dx$$
$$=\frac{\pi}{3}\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{9}\pi$$

8-1 답 $4\ln 2-2$

|해결 전략| 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$이고, 시각 $t=a$에서의 위치가 x_0일 때, 시각 t에서 점 P의 위치 x는 $x=x_0+\int_a^t v(t)dt$임을 이용한다.

시각 t에서 점 P의 위치를 $x=f(t)$라 하면

$$f(t)=0+\int_0^t\left(\frac{4}{t+2}-1\right)dt$$
$$=\left[4\ln|t+2|-t\right]_0^t$$
$$=4\ln|t+2|-t-4\ln 2$$

$v(t)=\frac{4}{t+2}-1=0$에서 $t=2$

$f(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$v(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		$\nearrow$	$4\ln 2-2$	$\searrow$

따라서 위치 $x=f(t)$는 $t=2$일 때 최댓값 $4\ln 2-2$를 갖는다.

8-2 답 $\frac{1}{2}-4\ln 2$

|해결 전략| 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$이고, 시각 $t=a$에서의 위치가 x_0일 때, 시각 t에서 점 P의 위치 x는 $x=x_0+\int_a^t v(t)dt$임을 이용한다.

시각 t에서 점 P의 위치를 $x=f(t)$라 하면

$$f(t)=-1+\int_0^t(e^{2t}-4)dt=-1+\left[\frac{1}{2}e^{2t}-4t\right]_0^t$$
$$=\frac{1}{2}e^{2t}-4t-\frac{3}{2}$$

$v(t)=e^{2t}-4=0$에서 $t=\ln 2$

$f(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$\ln 2$	$\cdots$
$v(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	$\frac{1}{2}-4\ln 2$	$\nearrow$

따라서 위치 $x=f(t)$는 $t=\ln 2$일 때 최솟값 $\frac{1}{2}-4\ln 2$를 갖는다.

9-1 답 2

|해결 전략| 시각 t에서의 위치가 $(x,\ y)$인 점 P가 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리 s는 $s=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$임을 이용한다.

$\frac{dx}{dt}=2\sqrt{t}$, $\frac{dy}{dt}=t-1$이므로 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^a\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$
$$=\int_0^a\sqrt{(2\sqrt{t})^2+(t-1)^2}dt$$
$$=\int_0^a\sqrt{t^2+2t+1}dt=\int_0^a\sqrt{(t+1)^2}dt$$
$$=\int_0^a(t+1)\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2+t\right]_0^a=\frac{1}{2}a^2+a$$

이때, $s=4$이므로 $\frac{1}{2}a^2+a=4$

$a^2+2a-8=0$, $(a+4)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

9-2 답 1

|해결 전략| 시각 t에서의 위치가 $(x,\ y)$인 점 P가 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리 s는 $s=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$임을 이용한다.

$\frac{dx}{dt}=2t-2$, $\frac{dy}{dt}=4\sqrt{t}$이므로 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^a\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$
$$=\int_0^a\sqrt{(2t-2)^2+(4\sqrt{t})^2}dt$$
$$=\int_0^a\sqrt{4t^2+8t+4}\,dt$$
$$=\int_0^a\sqrt{(2t+2)^2}dt=\int_0^a(2t+2)\,dt$$
$$=\left[t^2+2t\right]_0^a=a^2+2a$$

이때, $s=3$이므로 $a^2+2a=3$

$a^2+2a-3=0$, $(a+3)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)