정답 및 풀이

Ⅰ 순열과 조합

01 여러 가지 순열 2
02 중복조합과 이항정리 9

Ⅱ 확률

03 확률의 뜻과 활용 16
04 조건부확률 23

Ⅲ 통계

05 확률변수와 확률분포 33
06 이항분포와 정규분포 41
07 통계적 추정 51

01 여러 가지 순열

01 원순열

확인

본책 7쪽

1 $(5-1)!=4!=24$ 　답 24

유제

본책 8~10쪽

1 남학생 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

남학생 사이사이의 5개의 자리에 여학생 5명이 앉는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot120=2880$ 　답 2880

2 부모님과 서진이를 한 사람으로 생각하여 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

부모님이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는　$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\cdot2=240$ 　답 240

3 민수의 자리가 결정되면 유진이의 자리는 마주 보는 자리로 고정되므로 구하는 경우의 수는 7명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$(7-1)!=6!=720$ 　답 720

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 민수와 유진이가 마주 보고 앉고 나머지 6개의 자리에 6명이 앉으면 되므로 구하는 경우의 수는

$6!=720$

4 7등분 한 각 영역에 7가지 색을 칠하는 경우의 수는 7가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(7-1)!=6!=720$ 　답 720

5 가운데 정사각형을 칠하는 경우의 수는　5

가운데 정사각형을 제외한 4개의 영역을 칠하는 경우의 수는 가운데 정사각형에 칠한 색을 제외한 4가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\cdot6=30$ 　답 30

6 두 밑면을 칠하는 경우의 수는　${}_6P_2=30$

옆면을 칠하는 경우의 수는 두 밑면에 칠한 색을 제외한 4가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(4-1)!=3!=6$

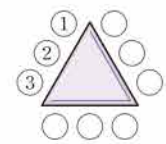
따라서 구하는 경우의 수는

$30\cdot6=180$ 　답 180

7 9명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수는

$(9-1)!=8!$

이때 원형으로 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 기준이 되는 사람의 위치가 오른쪽 그림의 1, 2, 3일 때 서로 다른 경우가 된다.



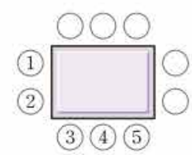
따라서 구하는 경우의 수는

$8!\cdot3$ 　답 ②

8 10명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수는

$(10-1)!=9!$

이때 원형으로 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 기준이 되는 사람의 위치가 오른쪽 그림의 1, 2, 3, 4, 5일 때 서로 다른 경우가 된다.



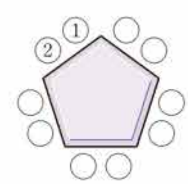
따라서 구하는 경우의 수는

$9!\cdot5$ 　답 ③

9 10명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수는

$(10-1)!=9!$

이때 원형으로 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 기준이 되는 사람의 위치가 오른쪽 그림의 1, 2일 때 서로 다른 경우가 된다.



따라서 $n=9!\cdot2$이므로

$\frac{n}{9!}=2$ 　답 2

02 중복순열

확인

본책 11쪽

1 (1) ${}_4\Pi_2=4^2=16$　(2) ${}_2\Pi_7=2^7=128$

(3) ${}_3\Pi_3=3^3=27$　(4) ${}_{10}\Pi_4=10^4=10000$

답 (1) 16 (2) 128 (3) 27 (4) 10000

2 구하는 세 자리 자연수의 개수는 1, 2, 3, 4에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_4\Pi_3=4^3=64$ 답 64

유제 본책 12~14쪽

1 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_3\Pi_5=3^5=243$ 답 243

2 구하는 경우의 수는 서로 다른 5개의 장소에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_5\Pi_3=5^3=125$ 답 125

3 두 개의 깃발을 n번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 서로 다른 2개에서 n개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_2\Pi_n=2^n$

즉 $2^n\geq100$이어야 하고

$2^6=64,\ 2^7=128$

이므로 n의 최솟값은 7이다. 답 7

4 3300보다 큰 자연수는 33□□, 34□□, 4□□□ 꼴이다.

(i) 33□□, 34□□ 꼴의 자연수

십의 자리, 일의 자리에 0, 1, 2, 3, 4에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 나열하면 된다. 이때 3300은 제외하여야 하므로

$2\cdot{}_5\Pi_2-1=2\cdot5^2-1=49$

(ii) 4□□□ 꼴의 자연수

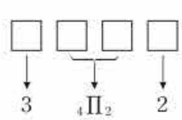
백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 0, 1, 2, 3, 4에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 나열하면 되므로

$_5\Pi_3=5^3=125$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$49+125=174$ 답 174

5 일의 자리의 숫자가 0 또는 2일 때 2의 배수이므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 2가지이다.



이때 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 1, 2, 3의 3가지이고, 각각에 대하여 백의 자리, 십의 자리에는 0, 1, 2, 3에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 나열하면 되므로 구하는 2의 배수의 개수는

$2\cdot3\cdot{}_4\Pi_2=2\cdot3\cdot4^2=96$ 답 96

6 구하는 자연수의 개수는 6개의 숫자에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 모든 세 자리 자연수의 개수에서 2를 포함하지 않고 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수를 뺀 것과 같다.

만들 수 있는 모든 세 자리 자연수의 개수는 6개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$_6\Pi_3=6^3=216$

2를 포함하지 않고 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 2를 제외한 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$216-125=91$ 답 91

7 X에서 Y로의 함수는 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 집합 X의 원소 a, b에 대응시키면 된다.

즉 X에서 Y로의 함수의 개수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$m={}_5\Pi_2=5^2=25$

X에서 Y로의 일대일함수는 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 2개를 뽑아 집합 X의 원소 a, b에 대응시키면 된다.

즉 X에서 Y로의 일대일함수의 개수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$n={}_5P_2=20$

$\therefore m+n=45$ 답 45

8 $f(2)=s$를 만족시키는 함수는 집합 Y의 원소 p, q, r, s에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 집합 X의 원소 1, 3에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_4\Pi_2=4^2=16$ 답 16

03 같은 것이 있는 순열

확인 본책 15쪽

1 7개의 문자 중 a, r가 각각 2개씩 있으므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{2!\cdot2!}=1260$ 답 1260

유제 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　본책 16~17쪽

1 일의 자리의 숫자가 0 또는 4일 때 짝수이다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

□□□□□0에서 5개의 □ 안에 4, 5, 5, 5, 7을 나열하면 되므로

$$\frac{5!}{3!}=20$$

(ii) 일의 자리의 숫자가 4인 경우

5□□□□4에서 4개의 □ 안에 0, 5, 5, 7을 나열하면 되므로

$$\frac{4!}{2!}=12$$

7□□□□4에서 4개의 □ 안에 0, 5, 5, 5를 나열하면 되므로

$$\frac{4!}{3!}=4$$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$20+12+4=36$ 　　　　　　　　　　　　답 36

2 (1) a□□□□□□□a와 같이 양 끝에 a를 고정하고 7개의 □ 안에 i, n, s, s, s, t, t를 나열하면 되므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{3!\cdot2!}=420$$

(2) 3개의 문자 s를 하나의 문자 B로 생각하고 B, a, a, i, n, t, t를 일렬로 나열하면 되므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2!\cdot2!}=1260$$

답 (1) 420 (2) 1260

3 a, c, e의 순서가 정해져 있으므로 a, c, e를 모두 x로 생각하여 5개의 문자 b, d, x, x, x를 일렬로 나열한 후 첫 번째 x는 a로, 두 번째 x는 c로, 세 번째 x는 e로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!}=20$$

답 20

4 구하는 경우의 수는 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서 A 지점에서 C 지점을 거쳐서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

(i) A → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{9!}{5!\cdot4!}=126$$

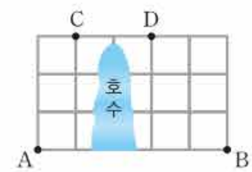
(ii) A → C → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!\cdot2!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot2!}=60$$

(i), (ii)에서 A 지점에서 C 지점을 거치지 않고 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$126-60=66$ 　　　　　　　　　　　　답 66

5 오른쪽 그림과 같이 두 지점 C, D를 잡으면 구하는 경우의 수는 A 지점에서 두 지점 C, D를 거쳐서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수와 같다.

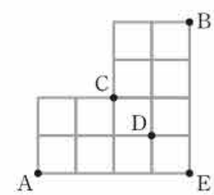


따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}\cdot1\cdot\frac{5!}{3!\cdot2!}=40$$

답 40

6 오른쪽 그림과 같이 세 지점 C, D, E를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 갈 때, 반드시 C, D, E 중 어느 한 지점을 지나고 C, D, E를 동시에 지나는 경우는 없다.



(i) A → C → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!\cdot2!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot2!}=36$$

(ii) A → D → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{4!}{3!}=16$$

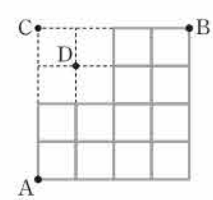
(iii) A → E → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$1\cdot1=1$

이상에서 구하는 경우의 수는

$36+16+1=53$ 　　　　　　　　　　　　답 53

다른 풀이 구하는 경우의 수는 오른쪽 그림에서 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서 A 지점에서 C 지점 또는 D 지점을 거쳐서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같다.



(i) A → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{8!}{4!\cdot4!}=70$$

(ii) A → C → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$1\cdot1=1$

(iii) A → D → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{4!}{3!}=16$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$70-(1+16)=53$

중단원 연습 문제

본책 18~21쪽

01 ②	02 144	03 ②	04 360	05 144
06 ②	07 200	08 ③	09 211	10 ⑤
11 144	12 192	13 ②	14 6	15 120
16 ②	17 ②	18 210	19 32	20 ②
21 ②	22 150	23 ③	24 ③	

01 전략 A, B를 한 묶음으로 생각하여 원순열의 수를 구한다.

풀이 A, B를 한 묶음으로 생각하여 5개를 원형의 실험 기구에 넣는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot2=48$

답 ②

02 전략 이웃한 두 수의 곱이 항상 짝수가 되려면 홀수끼리 이웃하지 않아야 한다.

풀이 이웃한 두 수의 곱이 항상 짝수이려면 홀수끼리 이웃하지 않게 배열해야 한다. ··· ❶

짝수를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$ ··· ❷

짝수 사이사이의 4개의 자리에 홀수 4개를 배열하는 경우의 수는

$4!=24$ ··· ❸

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot24=144$ ··· ❹

답 144

채점 기준	비율
❶ 이웃한 두 수의 곱이 항상 짝수가 되는 경우를 알 수 있다.	30 %
❷ 짝수를 배열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 홀수를 배열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 이웃한 두 수의 곱이 항상 짝수가 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	10 %

03 전략 먼저 각 부부를 한 사람으로 생각하여 원형으로 배열한다.

풀이 각 부부를 한 사람으로 생각하여 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

이때 남편과 아내가 번갈아 앉는 경우는 모든 남편이 아내의 왼쪽에 앉는 경우와 오른쪽에 앉는 경우의 2가지이므로 구하는 경우의 수는

$120\cdot2=240$

답 ②

04 전략 먼저 어른 2명과 어린이 3명을 뽑는 경우의 수를 구한다.

풀이 어른 3명과 어린이 5명 중에서 어른 2명과 어린이 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_3C_2\cdot{}_5C_3=30$

어린이 3명을 한 사람으로 생각하여 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(3-1)!=2!=2$

어린이 3명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$30\cdot2\cdot6=360$

답 360

05 전략 가운데 원을 제외한 나머지 영역에 색을 칠하는 경우의 수는 원순열을 이용하여 구한다.

풀이 가운데 원을 칠하는 경우의 수는 6

가운데 원을 제외한 5개의 영역을 칠하는 경우의 수는 가운데 원에 칠한 색을 제외한 5가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(5-1)!=4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot24=144$

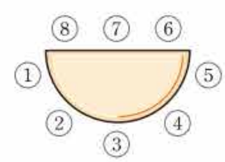
답 144

06 전략 원형으로 배열하는 한 가지 경우에 대하여 회전하였을 때 겹치지 않는 자리의 수를 구한다.

풀이 8명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수는

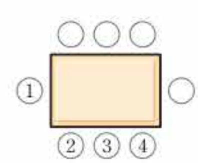
$(8-1)!=7!$

이때 반원 모양의 탁자에서는 원형으로 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 기준이 되는 사람의 위치가 오른쪽 그림의 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8일 때 서로 다른 경우가 된다.



$\therefore a=7!\cdot8$

한편 직사각형 모양의 탁자에서는 원형으로 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 기준이 되는 사람의 위치가 오른쪽 그림의 1, 2, 3, 4일 때 서로 다른 경우가 된다.



$\therefore b=7!\cdot4$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{7!\cdot4}{7!\cdot8}=\frac{1}{2}$

답 ②

다른 풀이 주어진 반원 모양의 탁자에 8명이 둘러앉을 때에는 회전하여 일치하는 경우가 없으므로 8명이 둘러앉는 경우의 수는 8명을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

$\therefore a=8!=7!\cdot8$

07 전략 r명이 각각 서로 다른 n개 중 중복을 허용하여 1개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수와 같음을 이용한다.

풀이 A 고등학교 학생 3명이 견학 갈 대학교를 택하는 경우의 수는 서로 다른 2개의 대학교에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 $\quad {}_2\Pi_3=2^3=8$ ⋯❶

B 고등학교 학생 2명이 견학 갈 대학교를 택하는 경우의 수는 서로 다른 5개의 대학교에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 $\quad {}_5\Pi_2=5^2=25$ ⋯❷

따라서 구하는 경우의 수는

$8\cdot25=200$ ⋯❸

답 200

채점 기준	비율
❶ A 고등학교 학생 3명이 견학 갈 대학교를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ B 고등학교 학생 2명이 견학 갈 대학교를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ A 고등학교 학생 3명과 B 고등학교 학생 2명이 견학 갈 대학교를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20%

08 전략 모든 경우의 수에서 △가 1개도 표시되지 않는 경우의 수를 뺀다.

풀이 설문지에 ○, △, ×가 표시되는 경우의 수는 ○, △, ×에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 $\quad {}_3\Pi_4=3^4=81$

△가 1개도 표시되지 않는 경우의 수는 ○, ×에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 $\quad {}_2\Pi_4=2^4=16$

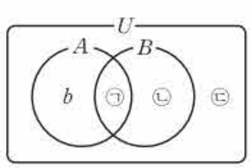
따라서 구하는 경우의 수는

$81-16=65$

답 ③

09 전략 벤다이어그램을 그려서 생각한다.

풀이 조건 (가)에서 $A\cap B^C=\{b\}$이므로 이를 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



이때 전체집합은 $A\cap B^C$를 제외하면 $A\cap B$, $A^C\cap B$, $U-(A\cup B)$의 세 영역으로 나뉜다. 이를 각각 ㉠, ㉡, ㉢이라 하면 조건 (나)에서 $B\not\subset A$이므로 ㉡에는 적어도 한 개의 원소가 있어야 한다. 즉 5개의 원소 a, c, d, e, f가 각각 ㉠, ㉡, ㉢ 중 하나에 포함되는 경우의 수에서 ㉠, ㉢ 중 하나에 포함되는 경우의 수를 빼면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_3\Pi_5-{}_2\Pi_5=3^5-2^5=211$

답 211

10 전략 마지막 자리에 올 수 있는 숫자는 3, 6, 9이다.

풀이 마지막 자리에 올 수 있는 숫자는 3, 6, 9의 3가지이고, 각각에 대하여 나머지 세 자리에는 10개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 나열하면 되므로 구하는 비밀번호의 개수는

$3\cdot{}_{10}\Pi_3=3\cdot10^3=3000$

답 ⑤

11 전략 천의 자리의 숫자가 1, 2, 3인 경우로 나누어 개수를 구한다.

풀이 3100보다 작은 자연수는 1□□□, 2□□□, 30□□ 꼴이다.

(i) 1□□□, 2□□□ 꼴의 자연수

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 0, 1, 2, 3에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 나열하면 되므로

$2\cdot{}_4\Pi_3=2\cdot4^3=128$ ⋯❶

(ii) 30□□ 꼴의 자연수

십의 자리, 일의 자리에 0, 1, 2, 3에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 나열하면 되므로

${}_4\Pi_2=4^2=16$ ⋯❷

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$128+16=144$ ⋯❸

답 144

채점 기준	비율
❶ 1□□□, 2□□□ 꼴의 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40%
❷ 30□□ 꼴의 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40%
❸ 3100보다 작은 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20%

12 전략 $f(1)=0$이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값만 정하면 된다.

풀이 $f(2)\neq0$에서 집합 X의 원소 2에 대응시킬 수 있는 집합 Y의 원소는 0을 제외한 3개이므로 $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 3이다.

또 집합 Y의 원소 0, 1, 2, 3에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 집합 X의 원소 3, 4, 5에 대응시키면 되므로 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 $\quad {}_4\Pi_3=4^3=64$

따라서 구하는 함수의 개수는

$3\cdot64=192$

답 192

13 전략 b의 개수가 홀수이면 a의 개수도 홀수이어야 한다.

풀이 a, b의 개수의 합이 6이므로 b의 개수가 홀수이면 a의 개수도 홀수이어야 한다.

(i) a가 3개, b가 3개일 때,

a, a, a, b, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{6!}{3!\cdot3!}=20$

(ⅱ) a가 5개, b가 1개일 때,

a, a, a, a, a, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{6!}{5!}=6$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$20+6=26$ 답 ②

14 전략 1, 2, 3에서 중복을 허용하여 택한 세 숫자의 합이 5가 되는 경우를 찾는다.

풀이 1, 2, 3에서 중복을 허용하여 택한 세 숫자의 합이 5가 되는 경우는

1, 1, 3 또는 1, 2, 2 ···➊

(ⅰ) 1, 1, 3을 집합 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}=3$$ ···➋

(ⅱ) 1, 2, 2를 집합 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}=3$$ ···➌

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수의 개수는

$3+3=6$ ···➍

답 6

채점 기준	비율
➊ 주어진 조건을 만족시키는 함숫값을 구할 수 있다.	30 %
➋ 1, 1, 3을 X의 원소에 대응시키는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
➌ 1, 2, 2를 X의 원소에 대응시키는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
➍ 함수의 개수를 구할 수 있다.	10 %

15 전략 일의 자리의 숫자가 1이고, 맨 앞자리의 숫자가 1, 2, 4인 경우로 나누어 개수를 구한다.

풀이 일의 자리의 숫자가 1일 때만 홀수이다.

(ⅰ) 1□□□□□1 꼴의 자연수

5개의 □ 안에 0, 0, 1, 2, 4를 나열하면 되므로

$$\frac{5!}{2!}=60$$

(ⅱ) 2□□□□□1 꼴의 자연수

5개의 □ 안에 0, 0, 1, 1, 4를 나열하면 되므로

$$\frac{5!}{2!\cdot2!}=30$$

(ⅲ) 4□□□□□1 꼴의 자연수

5개의 □ 안에 0, 0, 1, 1, 2를 나열하면 되므로

$$\frac{5!}{2!\cdot2!}=30$$

이상에서 구하는 홀수의 개수는

$60+30+30=120$ 답 120

다른 풀이 일의 자리의 숫자가 1일 때만 홀수이므로

□□□□□□1 꼴의 자연수의 개수를 구하면 된다.

6개의 □ 안에 0, 0, 1, 1, 2, 4를 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!\cdot2!}=180$$

이때 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 0, 1, 1, 2, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{2!}=60$$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$180-60=120$

16 전략 나열 순서가 정해져 있는 수는 같은 것으로 생각하여 배열한다.

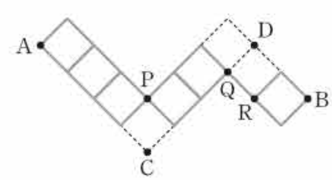
풀이 2, 4와 홀수의 순서가 정해져 있으므로 2, 4를 모두 a로 생각하고, 1, 3, 5를 모두 b로 생각하여 a, a, b, b, b, 6을 일렬로 나열한 후 첫 번째 a는 2로, 두 번째 a는 4로, 첫 번째 b는 1로, 두 번째 b는 3으로, 세 번째 b는 5로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!\cdot3!}=60$$ 답 ②

17 전략 주어진 그림에서 반드시 지나야 하는 지점을 찾는다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A → P → Q → R → B로 최단 거리로 갈 때 A 지점에서 두 지점 C, D를 모두 지나지 않고 B 지점까지 최단 거리로 갈 수 있다.



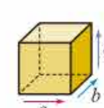
따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{3!}{2!}\cdot1\cdot2=24$$ 답 ②

18 전략 정육면체의 모서리를 따라 한 칸씩 이동하는 것을 문자로 생각하여 같은 것이 있는 순열을 이용한다.

풀이 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가려면 가로, 세로, 높이의 방향으로 정육면체의 모서리를 따라 각각 2칸, 2칸, 3칸을 이동해야 한다.

정육면체의 모서리를 따라 오른쪽 그림과 같이 가로, 세로, 높이의 방향으로 한 칸씩 이동하는 것을 각각 a, b, c라 하면 최단 거리로 가는 경우의 수는 a, a, b, b, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.



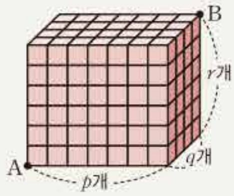
따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2!\cdot2!\cdot3!}=210$$ 답 210

라이트 UP

입체도형에서 최단 거리로 가는 경우의 수

오른쪽 그림과 같이 크기가 같은 정육면체를 가로, 세로, 높이의 칸의 개수가 각각 p, q, r가 되도록 쌓아 직육면체를 만들었을 때, 정육면체의 모서리를 따라 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $\dfrac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$



19 전략 정사면체 또는 정육면체의 어느 한 면을 먼저 칠하고, 나머지 면을 칠하는 경우를 생각한다.

풀이 정사면체에서 어느 한 가지 색을 한 면에 칠하면 나머지 세 면을 칠하는 경우의 수는 3가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$a=(3-1)!=2!=2$ ⋯➊

정육면체에서 어느 한 가지 색을 한 면에 칠하면 이 면과 마주 보는 면을 칠하는 경우의 수는 5이고, 나머지 네 면을 칠하는 경우의 수는 4가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$b=5\cdot(4-1)!=5\cdot3!=30$ ⋯➋

$\therefore a+b=32$ ⋯➌

답 32

채점 기준	비율
➊ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
➋ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
➌ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

20 전략 가운데 정사각형을 먼저 칠하고 둘레의 8개 정사각형을 칠하는 경우를 생각한다.

풀이 가운데 정사각형을 칠하는 경우의 수는 9

나머지 8개의 정사각형을 원형으로 생각하여 칠하는 경우의 수는

$(8-1)!=7!$

이때 원형으로 칠하는 한 가지 경우에 대하여 다음 그림과 같이 2가지의 서로 다른 경우가 존재한다.

1	8	7
2		6
3	4	5

8	7	6
1		5
2	3	4

따라서 구하는 경우의 수는

$9\cdot7!\cdot2=18\cdot7!$

답 ②

21 전략 $f(3)$의 값이 1, 3, 5인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) $f(3)=1$일 때,

조건 ㈏에 의하여 $f(1)=f(2)=1$이고, 조건 ㈐에 의하여 2, 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 집합 X의 원소 4, 5에 대응시키면 되므로 이때의 함수의 개수는

$1\cdot{}_4\Pi_2=4^2=16$

(ii) $f(3)=3$일 때,

조건 ㈏에 의하여 1, 2, 3에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 집합 X의 원소 1, 2에 대응시키고, 조건 ㈐에 의하여 4, 5에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 X의 원소 4, 5에 대응시키면 되므로 이때의 함수의 개수는

${}_3\Pi_2\cdot{}_2\Pi_2=3^2\cdot2^2=36$

(iii) $f(3)=5$일 때,

조건 ㈐를 만족시키는 $f(4)$, $f(5)$의 값을 정할 수 없다.

이상에서 구하는 함수의 개수는

$16+36=52$

답 ②

22 전략 모든 함수의 개수에서 치역과 공역이 같지 않은 함수의 개수를 뺀다.

풀이 X에서 Y로의 함수의 개수는

${}_3\Pi_5=3^5=243$ ⋯⋯ ㉠ ⋯➊

이 중에서 치역과 공역이 같지 않은 함수의 개수는 다음과 같이 두 가지로 나누어 구할 수 있다.

(i) 치역이 $\{1\}$ 또는 $\{2\}$ 또는 $\{3\}$인 함수의 개수는

3 ⋯⋯ ㉡ ⋯➋

(ii) 치역이 $\{1, 2\}$인 함수의 개수는 공역이 $\{1, 2\}$인 함수의 개수에서 치역이 $\{1\}$ 또는 $\{2\}$인 함수의 개수를 빼면 되므로

${}_2\Pi_5-2=2^5-2=30$

같은 방법으로 치역이 $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$인 함수의 개수도 각각 30이므로 치역이 $\{1, 2\}$ 또는 $\{1, 3\}$ 또는 $\{2, 3\}$인 함수의 개수는

$3\cdot30=90$ ⋯⋯ ㉢ ⋯➌

㉠, ㉡, ㉢에서 치역과 공역이 같은 함수의 개수는

$243-(3+90)=150$ ⋯➍

답 150

채점 기준	비율
➊ 모든 함수의 개수를 구할 수 있다.	20 %
➋ 치역이 $\{1\}$ 또는 $\{2\}$ 또는 $\{3\}$인 함수의 개수를 구할 수 있다.	30 %
➌ 치역이 $\{1, 2\}$ 또는 $\{1, 3\}$ 또는 $\{2, 3\}$인 함수의 개수를 구할 수 있다.	30 %
➍ 치역과 공역이 같은 함수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값이 각각

(i) 1, 1, 1, 2, 3 또는 1, 2, 2, 2, 3 또는 1, 2, 3, 3, 3일 때,

$3\cdot\dfrac{5!}{3!}=60$

(ii) 1, 1, 2, 2, 3 또는 1, 1, 2, 3, 3 또는 1, 2, 2, 3, 3일 때,

$$3\cdot\frac{5!}{2!\cdot2!}=90$$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는 $60+90=150$

23 전략 A와 B를 같은 사람으로 생각하고 발령하는 경우의 수를 이용한다.

풀이 A와 B를 같은 사람 F로 생각하여 F, F, C, D, E를 발령한 후 F, F가 발령된 두 지사 중 본사로부터 거리가 가까운 지사에 A, 거리가 먼 지사에 B를 발령한 것으로 생각하면 된다.

F, F, C, D, E를 발령하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!}=60$$

그런데 가, 나 지사는 본사로부터 거리가 같으므로 F, F를 가, 나 지사로 발령하는 경우는 제외해야 한다.

F, F를 가, 나 지사로 발령하는 경우의 수는 C, D, E를 다, 라, 마 지사에 발령하는 경우의 수와 같으므로

$$3!=6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$60-6=54$$

답 ③

다른 풀이 5개의 지사 중 A, B를 발령할 두 지사를 고른 후, 본사에 가까운 지사에 A를 발령하면 된다. 이때 가, 나 지사를 고르는 경우는 제외해야 하므로 그 경우의 수는

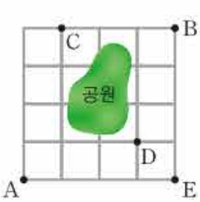
$${}_5C_2-1=9$$

나머지 세 지사에 C, D, E를 발령하는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $9\cdot6=54$

24 전략 공원을 지나지 않고 갈 때 반드시 지나야 하는 지점을 나누어 생각한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 세 지점 C, D, E를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 갈 때, 반드시 C, D, E 중 어느 한 지점을 지나고 C, D, E를 동시에 지나는 경우는 없다.



(i) A → C → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{4!}\cdot1=5$$

(ii) A → D → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{4!}{3!}=16$$

(iii) A → E → B로 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$1\cdot1=1$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$5+16+1=22$$

답 ③

I. 순열과 조합

02 중복조합과 이항정리

01 중복조합

확인 본책 25쪽

1 (1) ${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$

(2) ${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=\frac{8\cdot7}{2\cdot1}=28$

(3) ${}_7H_0={}_{7+0-1}C_0={}_6C_0=1$

(4) ${}_4H_4={}_{4+4-1}C_4={}_7C_4={}_7C_3=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$

답 (1) 10 (2) 28 (3) 1 (4) 35

2 구하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_6={}_{5+6-1}C_6={}_{10}C_6={}_{10}C_4=210$$

답 210

유제 본책 26~28쪽

1 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$$

답 45

2 (1) 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_6={}_{4+6-1}C_6={}_9C_6={}_9C_3=84$$

(2) 먼저 4개의 상자에 공을 한 개씩 넣은 후 남은 2개의 공을 서로 다른 4개의 상자에 넣으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2=10$$

답 (1) 84 (2) 10

3 구하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_8={}_{2+8-1}C_8={}_9C_8={}_9C_1=9$$

답 9

라이트 UP

무기명으로 투표하는 경우의 수

무기명 투표는 유권자가 어느 후보를 뽑았는지 알 수 없으므로 후보 중에서 중복을 허용하여 택하는 중복조합으로 생각할 수 있다. 즉

무기명 투표 ➡ 중복조합, 기명 투표 ➡ 중복순열

4 (1) 구하는 해의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_{10}={}_{4+10-1}C_{10}={}_{13}C_{10}={}_{13}C_3=286$$

(2) $x-1=a,\ y-1=b,\ z-1=c,\ w-1=d$로 놓으면

$$x=a+1,\ y=b+1,\ z=c+1,\ w=d+1$$

$x+y+z+w=10$에서

$$(a+1)+(b+1)+(c+1)+(d+1)=10$$

$\therefore a+b+c+d=6$ (단, a, b, c, d는 음이 아닌 정수) ······ ㉠

즉 구하는 해의 개수는 방정식 ㉠의 해의 개수와 같으므로

$${}_4H_6={}_{4+6-1}C_6={}_9C_6={}_9C_3=84$$

답 (1) 286 (2) 84

5 (1) $(x+y)^8$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 2개의 문자 x, y에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_8={}_{2+8-1}C_8={}_9C_8={}_9C_1=9$$

(2) $(a+b+c+d)^7$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 4개의 문자 a, b, c, d에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_7={}_{4+7-1}C_7={}_{10}C_7={}_{10}C_3=120$$

답 (1) 9 (2) 120

6 (1) 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 5개의 숫자 1, 3, 5, 7, 9에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_5P_4=5\cdot4\cdot3\cdot2=120$$

(2) 주어진 조건을 만족시키려면 5개의 숫자 1, 3, 5, 7, 9에서 4개를 택한 후 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 된다.

즉 함수 f의 개수는 서로 다른 5개에서 4개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_5C_4={}_5C_1=5$$

(3) 주어진 조건을 만족시키려면 5개의 숫자 1, 3, 5, 7, 9에서 중복을 허용하여 4개를 택한 후 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 된다.

즉 함수 f의 개수는 서로 다른 5개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_4={}_{5+4-1}C_4={}_8C_4=70$$

답 (1) 120 (2) 5 (3) 70

7 주어진 조건을 만족시키려면 3개의 숫자 $-1, 0, 1$에서 중복을 허용하여 5개를 택한 후 큰 수부터 차례대로 정의역의 원소 2, 4, 6, 8, 10에 대응시키면 된다.

즉 함수 g의 개수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$$

답 21

02 이항정리

확인

본책 30쪽

1 (1) $(a+2)^6={}_6C_0a^6+{}_6C_1a^5\cdot2+{}_6C_2a^4\cdot2^2+{}_6C_3a^3\cdot2^3$
$+{}_6C_4a^2\cdot2^4+{}_6C_5a\cdot2^5+{}_6C_62^6$
$=a^6+12a^5+60a^4+160a^3+240a^2+192a+64$

(2) $(x-y)^5={}_5C_0x^5+{}_5C_1x^4(-y)+{}_5C_2x^3(-y)^2$
$+{}_5C_3x^2(-y)^3+{}_5C_4x(-y)^4+{}_5C_5(-y)^5$
$=x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5$

(3) $(3x+y)^4={}_4C_0(3x)^4+{}_4C_1(3x)^3y+{}_4C_2(3x)^2y^2$
$+{}_4C_33xy^3+{}_4C_4y^4$
$=81x^4+108x^3y+54x^2y^2+12xy^3+y^4$

(4) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5={}_5C_0x^5+{}_5C_1x^4\cdot\frac{1}{x}+{}_5C_2x^3\cdot\frac{1}{x^2}+{}_5C_3x^2\cdot\frac{1}{x^3}$
$+{}_5C_4x\cdot\frac{1}{x^4}+{}_5C_5\frac{1}{x^5}$
$=x^5+5x^3+10x+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^5}$

답 풀이 참조

2 $(a+b)^8$의 전개식의 일반항은 ${}_8C_ra^{8-r}b^r$

(1) a^7b항은 $8-r=7,\ r=1$일 때이므로

$r=1$

따라서 ${}_8C_r$에 $r=1$을 대입하면 a^7b의 계수는

${}_8C_1=8$

(2) a^3b^5항은 $8-r=3,\ r=5$일 때이므로

$r=5$

따라서 ${}_8C_r$에 $r=5$를 대입하면 a^3b^5의 계수는

${}_8C_5={}_8C_3=56$

답 (1) 8 (2) 56

유제

본책 31~32쪽

1 (1) $(2x+3y)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(2x)^{5-r}(3y)^r={}_5C_r2^{5-r}3^rx^{5-r}y^r$

x^3y^2항은 $5-r=3,\ r=2$일 때이므로 $r=2$

따라서 ${}_5C_r2^{5-r}3^r$에 $r=2$를 대입하면 x^3y^2의 계수는

${}_5C_2\cdot2^3\cdot3^2=720$

(2) $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^9$의 전개식의 일반항은

$${}_9C_r x^{9-r}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^r={}_9C_r(-1)^r\frac{x^{9-r}}{x^{2r}}$$

상수항은 $9-r=2r$일 때이므로 $\quad r=3$

따라서 ${}_9C_r(-1)^r$에 $r=3$을 대입하면 상수항은

$${}_9C_3\cdot(-1)^3=-84$$

답 (1) 720 (2) -84

2 $\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r(x^2)^{6-r}\left(\frac{a}{x}\right)^r={}_6C_r a^r\frac{x^{12-2r}}{x^r}$$

상수항은 $12-2r=r$일 때이므로 $\quad r=4$

${}_6C_r a^r$에 $r=4$를 대입하면 상수항은

$${}_6C_4 a^4={}_6C_2 a^4=15a^4$$

따라서 $15a^4=240$이므로 $\quad a^4=16$

$$\therefore a=2\ (\because a>0)$$

답 2

3 $(3x+1)^n$, 즉 $(1+3x)^n$의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r(3x)^r={}_nC_r3^rx^r$$

x^3항은 $r=3$일 때이므로 ${}_nC_r3^r$에 $r=3$을 대입하면 x^3의 계수는

$${}_nC_3 3^3={}_nC_3\cdot27$$

따라서 ${}_nC_3\cdot27=270$이므로 $\quad {}_nC_3=10$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=10$$

$$n(n-1)(n-2)=60=5\cdot4\cdot3$$

$$\therefore n=5$$

x^2항은 $r=2$일 때이므로 ${}_nC_r3^r$에 $n=5$, $r=2$를 대입하면 x^2의 계수는

$${}_5C_2\cdot3^2=90$$

답 90

4 (1) $(x^2-2)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r(x^2)^{4-r}(-2)^r={}_4C_r(-2)^rx^{8-2r}$$

$(x+3)^3$의 전개식의 일반항은 $\quad {}_3C_sx^{3-s}3^s$

따라서 $(x^2-2)^4(x+3)^3$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r(-2)^rx^{8-2r}\cdot{}_3C_sx^{3-s}3^s$$
$$={}_4C_r{}_3C_s(-2)^r3^sx^{11-2r-s}$$

x^4항은 $11-2r-s=4$, 즉 $2r+s=7$ (r, s는 각각 $0\le r\le4$, $0\le s\le3$인 정수)일 때이므로 이를 만족시키는 정수 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$$(2,\ 3),\ (3,\ 1)$$

따라서 x^4의 계수는

$${}_4C_2\cdot{}_3C_3\cdot(-2)^2\cdot3^3+{}_4C_3\cdot{}_3C_1\cdot(-2)^3\cdot3$$
$$=648-288=360$$

(2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_rx^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_6C_r\frac{x^{6-r}}{x^r} \quad\cdots\cdots ㉠$$

이때 $(x^2+4)\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^2항은 x^2과 ㉠의 상수항, 4와 ㉠의 x^2항이 곱해질 때 나타난다.

(i) ㉠에서 상수항은 $6-r=r$, 즉 $r=3$일 때이므로 ㉠의 상수항은

$${}_6C_3=20$$

(ii) ㉠에서 x^2항은 $6-r-r=2$, 즉 $r=2$일 때이므로 ㉠의 x^2항은

$${}_6C_2x^2=15x^2$$

(i), (ii)에서 $(x^2+4)\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^2항은

$$x^2\cdot20+4\cdot15x^2=80x^2$$

이므로 구하는 계수는 80이다.

답 (1) 360 (2) 80

5 $\frac{(1+x)^6-1}{x}$의 전개식에서 x^3의 계수는 $(1+x)^6$의 전개식에서 x^4의 계수와 같다.

$(1+x)^6$의 전개식의 일반항은 $\quad {}_6C_rx^r$

따라서 $(1+x)^6$의 전개식에서 x^4항은 $r=4$일 때이므로 구하는 계수는

$${}_6C_4={}_6C_2=15$$

답 15

03 이항계수의 성질

확인

본책 33~34쪽

1 (1) ${}_5C_0+{}_5C_1+\cdots+{}_5C_5=2^5=32$

(2) ${}_4C_0-{}_4C_1+{}_4C_2-{}_4C_3+{}_4C_4=0$

(3) ${}_5C_0+{}_5C_2+{}_5C_4=2^{5-1}=2^4=16$

(4) ${}_6C_1+{}_6C_3+{}_6C_5=2^{6-1}=2^5=32$

답 (1) 32 (2) 0 (3) 16 (4) 32

2 $(x+2y)^5$

$$=x^5+5\cdot x^4\cdot(2y)+10\cdot x^3\cdot(2y)^2$$
$$+10\cdot x^2\cdot(2y)^3+5\cdot x\cdot(2y)^4+(2y)^5$$
$$=x^5+10x^4y+40x^3y^2+80x^2y^3$$
$$+80xy^4+32y^5$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

답 풀이 참조

3 답 (1) ${}_5C_3$ (2) ${}_7C_6$

유제 본책 35~36쪽

1 ${}_nC_0+{}_nC_1+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로 주어진 부등식은

$1000<2^n<2000$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$이므로

$n=10$ 답 10

2 ${}_{20}C_0+{}_{20}C_2+{}_{20}C_4+\cdots+{}_{20}C_{20}=2^{20-1}=2^{19}$

또 ${}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+{}_9C_3+{}_9C_4={}_9C_9+{}_9C_8+{}_9C_7+{}_9C_6+{}_9C_5$이고

$({}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+{}_9C_3+{}_9C_4)+({}_9C_5+{}_9C_6+{}_9C_7+{}_9C_8+{}_9C_9)$
$=2^9$

이므로

$2({}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+{}_9C_3+{}_9C_4)=2^9$

$\therefore\ {}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+{}_9C_3+{}_9C_4=2^8$

따라서

$$\frac{{}_{20}C_0+{}_{20}C_2+{}_{20}C_4+\cdots+{}_{20}C_{20}}{{}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+{}_9C_3+{}_9C_4}=\frac{2^{19}}{2^8}=2^{11}$$

이므로 $n=11$ 답 11

3 (1) ${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{12}C_{10}$

$={}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{12}C_{10}$

$={}_4C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{12}C_{10}$

$={}_5C_2+\cdots+{}_{12}C_{10}$

$\vdots$

$={}_{12}C_9+{}_{12}C_{10}$

$={}_{13}C_{10}={}_{13}C_3$

$=286$

(2) ${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{11}C_2$

$={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{11}C_2$

$={}_4C_3+{}_4C_2+\cdots+{}_{11}C_2$

$={}_5C_3+\cdots+{}_{11}C_2$

$\vdots$

$={}_{11}C_3+{}_{11}C_2$

$={}_{12}C_3=220$

답 (1) 286 (2) 220

다른 풀이 (2) 구하는 식의 값은 오른쪽 그림과 같이 파스칼의 삼각형에서 ${}_2C_2=1$부터 왼쪽 아래의 대각선 방향으로 ${}_{11}C_2$까지 내려가면서 이항계수를 더한 값과 같고, 이 값은 마지막 이항계수 ${}_{11}C_2$의 오른쪽 아래에 있는 이항계수 ${}_{12}C_3$과 같다.

1
${}_1C_0\ \ {}_1C_1$
${}_2C_0\ \ {}_2C_1\ \ {}_2C_2$
${}_3C_0\ \ {}_3C_1\ \ {}_3C_2\ \ {}_3C_3$
${}_4C_0\ \ {}_4C_1\ \ {}_4C_2\ \ {}_4C_3\ \ {}_4C_4$
$\vdots$
${}_{11}C_0\ \ {}_{11}C_1\ \ {}_{11}C_2\ \cdots\ {}_{11}C_{10}\ \ {}_{11}C_{11}$
${}_{12}C_0\ \ {}_{12}C_1\ \ {}_{12}C_2\ \ {}_{12}C_3\ \cdots\ {}_{12}C_{11}\ \ {}_{12}C_{12}$

4 ${}_{2019}C_{10}+{}_{2018}C_9+{}_{2017}C_8+{}_{2016}C_7+{}_{2016}C_6$

$={}_{2019}C_{10}+{}_{2018}C_9+{}_{2017}C_8+{}_{2017}C_7$

$={}_{2019}C_{10}+{}_{2018}C_9+{}_{2018}C_8$

$={}_{2019}C_{10}+{}_{2019}C_9$

$={}_{2020}C_{10}$ 답 ⑤

중단원 연습 문제

본책 37~39쪽

01 36	**02** 588	**03** ①	**04** ④	**05** 364
06 ④	**07** 7	**08** ②	**09** $504\sqrt{15}$	**10** 30
11 n의 최솟값: 5, 상수항: 10			**12** ①	**13** -160
14 ②	**15** ③	**16** ③	**17** 120	**18** ⑤
19 15	**20** ④	**21** 455	**22** ④	

01 전략 먼저 감, 배, 귤을 각각 1개씩 선택하고, 사과를 1개 이하로 선택하는 경우를 생각해 본다.

풀이 먼저 감, 배, 귤을 각각 1개씩 선택한 후 네 종류의 과일 중에서 5개를 선택하면 된다.

(i) 사과를 선택하지 않는 경우

감, 배, 귤 세 종류의 과일 중에서 5개를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

(ii) 사과를 1개 선택하는 경우

감, 배, 귤 세 종류의 과일 중에서 4개를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $21+15=36$ 답 36

02 전략 흰색 구슬과 검은색 구슬을 나누어 주는 경우를 각각 생각한다.

풀이 3명의 학생에게 흰색 구슬 5개를 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$ ⋯ ❶

3명의 학생에게 검은색 구슬 6개를 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=28$ ⋯ ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$21\cdot28=588$ ⋯ ❸

답 588

채점 기준	비율
❶ 흰색 구슬을 나누어 주는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 검은색 구슬을 나누어 주는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 구슬을 나누어 주는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

03 전략 서로 다른 6개의 숫자 중에서 3개를 택하는 상황으로 바꿔서 생각한다.

풀이 $a<b<c$인 경우의 수는 6개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$x={}_6C_3=20$

$a\le b\le c$인 경우의 수는 6개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$y={}_6H_3={}_{6+3-1}C_3={}_8C_3=56$

$\therefore x+y=76$ 답 ①

04 전략 $x+1=a$, $y+1=b$, $z+1=c$로 놓은 후 중복조합을 이용한다.

풀이 $x+1=a$, $y+1=b$, $z+1=c$로 놓으면

$x=a-1$, $y=b-1$, $z=c-1$

$x+y+z=5$에서 $(a-1)+(b-1)+(c-1)=5$

$\therefore a+b+c=8$ (단, a, b, c는 음이 아닌 정수) … ㉠

즉 구하는 순서쌍의 개수는 방정식 ㉠의 해의 개수와 같으므로

${}_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$ 답 ④

05 전략 a가 홀수이면 $a=2p+1$ (p는 음이 아닌 정수)로 놓을 수 있다.

풀이 x, y, z, w가 홀수이므로

$x=2i+1$, $y=2j+1$, $z=2k+1$, $w=2l+1$

로 놓으면 $x+y+z+w=26$에서

$(2i+1)+(2j+1)+(2k+1)+(2l+1)=26$

$2(i+j+k+l)=22$

$\therefore i+j+k+l=11$ (단, i, j, k, l은 음이 아닌 정수)

…… ㉠ ··· ❶

즉 구하는 순서쌍의 개수는 방정식 ㉠의 해의 개수와 같으므로

${}_4H_{11}={}_{4+11-1}C_{11}={}_{14}C_{11}={}_{14}C_3=364$ ··· ❷

답 364

채점 기준	비율
❶ x, y, z, w가 홀수임을 이용하여 새로운 방정식을 세울 수 있다.	60 %
❷ 순서쌍의 개수를 구할 수 있다.	40 %

06 전략 $x+y+z=10$을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수에서 $y+z=0$, $y+z=10$을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 뺀다.

풀이 조건 (가)를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3H_{10}={}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$ …… ㉠

이때 조건 (나)에서 $0<y+z<10$이므로 구하는 순서쌍의 개수는 ㉠에서 $y+z=0$, $y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 뺀 것과 같다.

$y+z=0$이려면 $x=10$이어야 하므로 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)는 $(10, 0, 0)$의 하나뿐이다.

$y+z=10$이려면 $x=0$이어야 하므로 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 $y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 y, z의 순서쌍 (y, z)의 개수

${}_2H_{10}={}_{2+10-1}C_{10}={}_{11}C_{10}={}_{11}C_1=11$

과 같다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$66-1-11=54$ 답 ④

07 전략 $(x+y+z)^n$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 ${}_3H_n$임을 이용한다.

풀이 $(x+y+z)^n$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 n개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_n={}_{3+n-1}C_n={}_{n+2}C_n={}_{n+2}C_2$

즉 ${}_{n+2}C_2=36$이므로 $\frac{(n+2)(n+1)}{2\cdot 1}=36$

$(n+2)(n+1)=72=9\cdot 8$

$\therefore n=7$ 답 7

08 전략 $a<b$이면 $f(a)\le f(b)$를 만족시키는 함수 f의 개수는 중복조합을 이용한다.

풀이 주어진 조건을 만족시키려면 4개의 숫자 3, 5, 7, 9에서 중복을 허용하여 4개를 택한 후 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 2, 4, 6, 8에 대응시키면 된다.

즉 구하는 함수의 개수는 서로 다른 4개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_4={}_{4+4-1}C_4={}_7C_4={}_7C_3=35$ 답 ②

09 전략 $(\sqrt{3}x+\sqrt{5})^6$의 전개식의 일반항에서 계수가 무리수인 경우를 생각한다.

풀이 $(\sqrt{3}x+\sqrt{5})^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r(\sqrt{3}x)^{6-r}(\sqrt{5})^r={}_6C_r(\sqrt{3})^{6-r}(\sqrt{5})^r x^{6-r}$

이때 계수가 무리수이려면 $6-r$, r가 모두 홀수이어야 하므로

$r=1$ 또는 $r=3$ 또는 $r=5$ ··· ❶

$r=1$일 때,

${}_6C_1\cdot(\sqrt{3})^5\cdot(\sqrt{5})^1x^5=6\cdot 9\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}x^5=54\sqrt{15}x^5$

$r=3$일 때,

${}_6C_3\cdot(\sqrt{3})^3\cdot(\sqrt{5})^3x^3=20\cdot 3\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{5}x^3=300\sqrt{15}x^3$

$r=5$일 때,

${}_6C_5\cdot(\sqrt{3})^1\cdot(\sqrt{5})^5x=6\cdot\sqrt{3}\cdot 25\sqrt{5}x$

$=150\sqrt{15}x$ ··· ❷

따라서 구하는 계수의 합은

$$54\sqrt{15}+300\sqrt{15}+150\sqrt{15}=504\sqrt{15}$$ ··· ❸

답 $504\sqrt{15}$

채점 기준	비율
❶ $(\sqrt{3}x+\sqrt{5})^6$의 전개식의 일반항을 구하여 계수가 무리수가 되는 r의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 계수가 무리수인 모든 항을 구할 수 있다.	60 %
❸ 계수의 합을 구할 수 있다.	10 %

10 전략 $(a+b)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r a^{n-r}b^r$임을 이용한다.

풀이 $(x+a)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r x^{5-r}a^r,\ 즉\ {}_5C_r a^r x^{5-r}$$

x^3항은 $5-r=3$, 즉 $r=2$일 때이므로 x^3의 계수는

$${}_5C_2 a^2=10a^2$$

x^4항은 $5-r=4$, 즉 $r=1$일 때이므로 x^4의 계수는

$${}_5C_1 a=5a$$

따라서 $10a^2=5a$이므로 $2a^2-a=0$

$$a(2a-1)=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}\ (\because a>0)$$

$$\therefore 60a=60\cdot\frac{1}{2}=30$$

답 30

11 전략 전개식의 일반항을 구하여 상수항이 존재하는 조건을 생각한다.

풀이 $\left(x^2-\frac{1}{x^3}\right)^n$의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r(x^2)^{n-r}\left(-\frac{1}{x^3}\right)^r={}_nC_r(-1)^r\frac{x^{2n-2r}}{x^{3r}}$$ ··· ❶

상수항이 존재하려면 양의 정수 n에 대하여 $2n-2r=3r$이고 $0\le r\le n$인 정수 r의 값이 존재해야 한다.

이때 $2n=5r$에서 n, r의 값은

$n=5,\ r=2$ 또는 $n=10,\ r=4$ 또는 $n=15,\ r=6$ 또는 $\cdots$

즉 n의 최솟값은 5이고, 그때의 r의 값은 2이다. ··· ❷

따라서 $n=5$, $r=2$일 때의 상수항은

$${}_5C_2\cdot(-1)^2=10$$ ··· ❸

답 n의 최솟값: 5, 상수항: 10

채점 기준	비율
❶ $\left(x^2-\frac{1}{x^3}\right)^n$의 전개식의 일반항을 구할 수 있다.	30 %
❷ n의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 상수항을 구할 수 있다.	20 %

12 전략 $11^{12}=(1+10)^{12}$임을 이용한다.

풀이 $11^{12}=(1+10)^{12}$

$$={}_{12}C_0+{}_{12}C_1\cdot10^1+{}_{12}C_2\cdot10^2+{}_{12}C_3\cdot10^3+\cdots+{}_{12}C_{12}\cdot10^{12}$$

$$=1+120+6600+{}_{12}C_3\cdot10^3+\cdots+{}_{12}C_{12}\cdot10^{12}$$

$$=6721+{}_{12}C_3\cdot10^3+\cdots+{}_{12}C_{12}\cdot10^{12}$$

이때 10^3이 곱해진 항 이후에는 백의 자리 이하의 숫자에 영향을 주지 않으므로 11^{12}의 일의 자리의 숫자는 1, 십의 자리의 숫자는 2, 백의 자리의 숫자는 7이다.

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=7$이므로

$$a+b+c=10$$

답 ①

13 전략 x^4y^2항이 나오는 경우를 생각해 본다.

풀이 $(2x-y)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r(2x)^{5-r}(-y)^r={}_5C_r2^{5-r}(-1)^rx^{5-r}y^r \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $(x+3y)(2x-y)^5$의 전개식에서 x^4y^2항은 x와 ㉠의 x^3y^2항, $3y$와 ㉠의 x^4y항이 곱해질 때 나타난다.

(i) ㉠에서 x^3y^2항은 $r=2$일 때이므로 ㉠의 x^3y^2항은

$${}_5C_2\cdot2^3\cdot(-1)^2x^3y^2=80x^3y^2$$

(ii) ㉠에서 x^4y항은 $r=1$일 때이므로 ㉠의 x^4y항은

$${}_5C_1\cdot2^4\cdot(-1)x^4y=-80x^4y$$

(i), (ii)에서 $(x+3y)(2x-y)^5$의 전개식에서 x^4y^2항은

$$x\cdot80x^3y^2+3y\cdot(-80x^4y)=-160x^4y^2$$

이므로 구하는 계수는 -160이다.

답 -160

14 전략 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$임을 이용한다.

풀이 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

$${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-{}_nC_0$$
$$=2^n-1$$

따라서 $2^n-1=255$이므로

$$2^n=256=2^8 \qquad \therefore n=8$$

답 ②

15 전략 10개의 원소 중 홀수 개의 원소를 택하는 조합을 이용한다.

풀이 원소의 개수가 1, 3, 5, 7, 9인 부분집합의 개수는 각각

$${}_{10}C_1,\ {}_{10}C_3,\ {}_{10}C_5,\ {}_{10}C_7,\ {}_{10}C_9$$

따라서 구하는 개수는

$${}_{10}C_1+{}_{10}C_3+{}_{10}C_5+{}_{10}C_7+{}_{10}C_9=2^{10-1}=2^9=512$$

답 ③

16 전략 ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$임을 이용한다.

풀이 ${}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3$

$$={}_3C_1+{}_3C_2+{}_4C_3$$

$$={}_4C_2+{}_4C_3$$

$$={}_5C_3$$

답 ③

17 전략 30의 배수는 $2\cdot3\cdot5\cdot k$ (k는 자연수) 꼴임을 이용한다.

풀이 30의 배수는 $2\cdot3\cdot5\cdot k$ (k는 자연수) 꼴이므로 택한 10개의 수의 곱이 30의 배수가 되려면 먼저 2, 3, 5를 각각 1개씩 택한 후 4개의 숫자 2, 3, 5, 7에서 중복을 허용하여 7개를 택하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_7={}_{4+7-1}C_7={}_{10}C_7={}_{10}C_3=120$$ 답 120

18 전략 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수에서 조건 (나)의 세 점이 한 직선 위에 있도록 하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 뺀다.

풀이 조건 (가)를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=28$$

세 점 $(1, a)$, $(2, b)$, $(3, c)$가 한 직선 위에 있으려면 두 점 $(1, a)$, $(2, b)$를 지나는 직선의 기울기와 두 점 $(2, b)$, $(3, c)$를 지나는 직선의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{b-a}{2-1}=\frac{c-b}{3-2}, \quad b-a=c-b$$

$$\therefore a+c=2b \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a+b+c=6$에 ㉠을 대입하면

$$3b=6 \quad \therefore b=2$$

즉 $b=2$이면 $a+c=4$이므로 조건 (가)를 만족시키면서 조건 (나)의 세 점이 한 직선 위에 있도록 하는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 방정식 $a+c=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, c의 순서쌍 (a, c)의 개수

$${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$$

와 같다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$$28-5=23$$ 답 ⑤

19 전략 $f(2)$, $f(3)$의 값을 먼저 정한 후 경우를 나누어 생각한다.

풀이 조건 (가), (나)에서 $f(2)$, $f(3)$의 값은 각각 3, 1 또는 2, 2이다.

(i) $f(2)=3$, $f(3)=1$일 때,

$f(1)\ge f(2)=3$이므로 $f(1)$의 값은 3, 4, 5 중 하나이고

$f(3)=1\ge f(4)\ge f(5)$이므로 $\quad f(4)=f(5)=1$

따라서 함수의 개수는 $\quad 3\cdot 1=3$ ➊

(ii) $f(2)=2$, $f(3)=2$일 때,

$f(1)\ge f(2)=2$이므로 $f(1)$의 값은 2, 3, 4, 5 중 하나이고,

$f(3)=2\ge f(4)\ge f(5)$이므로 $f(4)$, $f(5)$의 값은 2개의 숫자 1, 2에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 큰 수부터 차례대로 4, 5에 대응시키면 된다.

따라서 함수의 개수는

$$4\cdot{}_2H_2=4\cdot{}_{2+2-1}C_2=4\cdot{}_3C_2=4\cdot{}_3C_1=4\cdot 3=12$$ ➋

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$$3+12=15$$ ➌

답 15

채점 기준	비율
➊ $f(2)=3$, $f(3)=1$일 때 함수의 개수를 구할 수 있다.	40%
➋ $f(2)=2$, $f(3)=2$일 때 함수의 개수를 구할 수 있다.	40%
➌ 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구할 수 있다.	20%

20 전략 $22^7=(1+21)^7$임을 이용한다.

풀이 $22^7=(1+21)^7$

$$={}_7C_0+{}_7C_1\cdot 21^1+{}_7C_2\cdot 21^2+\cdots+{}_7C_7\cdot 21^7$$

에서 ${}_7C_0$을 제외한 나머지 항은 모두 7의 배수이다.

이때 ${}_7C_0=1$이므로 오늘로부터 22^7일 후는 목요일이다.

답 ④

21 전략 구하는 방법의 수를 중복조합의 수를 이용하여 나타낸 후 이항계수의 성질을 이용하여 계산한다.

풀이 먼저 빨간색, 파란색, 노란색 색연필을 각각 1개씩 선택한 후 12개 이하의 색연필을 선택하는 것으로 생각하면 구하는 방법의 수는 선택하는 빨간색, 파란색, 노란색 색연필의 개수를 각각 x, y, z라 할 때, 부등식 $0\le x+y+z\le 12$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수와 같다.

따라서 구하는 방법의 수는

$$\begin{aligned}
&{}_3H_0+{}_3H_1+{}_3H_2+\cdots+{}_3H_{12}\\
&={}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{14}C_{12}\\
&={}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{14}C_{12}\\
&={}_4C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{14}C_{12}\\
&={}_5C_2+\cdots+{}_{14}C_{12}\\
&\quad\vdots\\
&={}_{14}C_{11}+{}_{14}C_{12}\\
&={}_{15}C_{12}={}_{15}C_3\\
&=455
\end{aligned}$$

답 455

22 전략 ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$임을 이용한다.

풀이 $(1+x)^k$의 전개식의 일반항은 ${}_kC_r x^r$이므로 $k\ge 2$인 자연수 k에 대하여 $(1+x)^k$의 전개식에서 x^2의 계수는 ${}_kC_2$이다.

주어진 식의 전개식에서 x^2의 계수는 각 항의 전개식에서 x^2의 계수의 합이므로 구하는 계수는

$$\begin{aligned}
&{}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_2\\
&={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_2\\
&={}_4C_3+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_2\\
&={}_5C_3+\cdots+{}_{10}C_2\\
&\quad\vdots\\
&={}_{10}C_3+{}_{10}C_2\\
&={}_{11}C_3=165
\end{aligned}$$

답 ④

02 중복조합과 이항정리

03 확률의 뜻과 활용

01 시행과 사건

확인

본책 42~43쪽

1 답 (1) $S=\{HH,\ HT,\ TH,\ TT\}$

(2) $A=\{TT\}$

(3) $B=\{HT,\ TH\}$

2 $A=\{4,\ 8\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$이므로

(1) $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8\}$

(2) $A\cap B=\{4\}$

(3) $B^C=\{5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

(4) $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$A^C\cap B^C=\{5,\ 7,\ 9,\ 10\}$

답 풀이 참조

라이트 UP

드모르간의 법칙

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

① $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$

② $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

유제

본책 44쪽

1 $A=\{5\}$, $B=\{4,\ 8\}$, $C=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$이므로

$A\cap B=\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$, $B\cap C=\{4,\ 8\}$

따라서 서로 배반사건인 두 사건은

A와 B, A와 C

답 A와 B, A와 C

2 $A=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$이므로

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 10\}$

$\therefore (A\cup B)^C=\{4,\ 6,\ 8,\ 9\}$

따라서 사건 C는 $(A\cup B)^C=\{4,\ 6,\ 8,\ 9\}$의 부분집합이어야 하므로 구하는 사건의 개수는

$2^4=16$

답 16

라이트 UP

원소의 개수가 n인 집합의 부분집합의 개수 ➡ 2^n

02 확률의 뜻과 기본 성질

확인

본책 45~47쪽

1 (1) $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이므로

$n(S)=6$

(2) $A=\{2,\ 3,\ 5\}$이므로 $n(A)=3$

(3) $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

답 (1) 6 (2) 3 (3) $\dfrac{1}{2}$

2 구하는 확률은

$\dfrac{(\text{성공한 횟수})}{(\text{전체 시행 횟수})}=\dfrac{350}{500}=\dfrac{7}{10}$

답 $\dfrac{7}{10}$

3 구하는 확률은

$\dfrac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\text{전체 과녁의 넓이})}=\dfrac{\pi\cdot 1^2}{\pi\cdot 2^2}=\dfrac{1}{4}$

답 $\dfrac{1}{4}$

4 전체 공의 개수는 $4+6=10$

(1) $\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

(2) $\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

(3) 주머니 안의 공은 모두 빨간 공 또는 파란 공이므로 구하는 확률은 1이다.

(4) 주머니 안에 노란 공은 없으므로 구하는 확률은 0이다.

답 (1) $\dfrac{2}{5}$ (2) $\dfrac{3}{5}$ (3) 1 (4) 0

유제

본책 48~51쪽

1 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\cdot 6=36$

나온 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면 두 눈의 수의 차가 3인 경우는

$(1,\ 4)$, $(4,\ 1)$, $(2,\ 5)$, $(5,\ 2)$, $(3,\ 6)$, $(6,\ 3)$

의 6가지이므로 구하는 확률은

$\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

답 $\dfrac{1}{6}$

2 모든 경우의 수는 20

1부터 20까지의 자연수 중에서 36의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18의 8개이므로 구하는 확률은

$\dfrac{8}{20}=\dfrac{2}{5}$

답 $\dfrac{2}{5}$

3 집합 A의 부분집합의 개수는 $\quad 2^5=32$

집합 A의 부분집합 중 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

따라서 구하는 확률은 $\quad \frac{8}{32}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

4 5개의 숫자를 모두 한 번씩 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리 자연수의 개수는 $\quad 5!=120$

홀수인 자연수는 일의 자리의 숫자가 홀수, 즉

□□□□1 또는 □□□□3 또는 □□□□5

꼴이므로 홀수의 개수는 $\quad 4!\cdot 3=72$

따라서 구하는 확률은 $\quad \frac{72}{120}=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

5 6명의 학생이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

중학생 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

중학생 사이사이의 3개의 자리에 고등학생 3명이 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 중학생과 고등학생이 번갈아 앉는 경우의 수는

$2\cdot 6=12$

이므로 구하는 확률은

$\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$ 답 $\frac{1}{10}$

라이트 UP

원순열의 수

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$\frac{n!}{n}=(n-1)!$

6 6개의 문자 s, c, h, o, o, l을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!}=360$

o, o를 한 묶음으로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\quad 5!=120$

따라서 구하는 확률은 $\quad \frac{120}{360}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

7 9개의 공 중에서 4개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_9C_4=126$

(1) 검은 공 6개 중에서 4개가 나오는 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$

따라서 구하는 확률은 $\quad \frac{15}{126}=\frac{5}{42}$

(2) 흰 공 3개 중에서 1개, 검은 공 6개 중에서 3개가 나오는 경우의 수는 $\quad {}_3C_1\cdot{}_6C_3=3\cdot 20=60$

따라서 구하는 확률은 $\quad \frac{60}{126}=\frac{10}{21}$

답 (1) $\frac{5}{42}$ (2) $\frac{10}{21}$

8 5명 중에서 3명을 대표로 뽑는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

이때 A는 뽑고 D는 뽑지 않는 경우의 수는 A는 이미 뽑았다고 생각하고 D를 제외한 3명의 학생 중에서 2명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_3C_2=3$

따라서 구하는 확률은 $\quad \frac{3}{10}$ 답 $\frac{3}{10}$

9 6명을 3명씩 2개의 조로 나누는 경우의 수는

${}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{2!}=20\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=10$

남학생 2명이 같은 조에 속하려면 여학생 4명 중 1명이 남학생 2명과 조를 이루면 된다.

즉 남학생 2명이 같은 조에 속하는 경우의 수는 여학생 4명을 1명, 3명으로 나누는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_1\cdot{}_3C_3=4\cdot 1=4$

따라서 구하는 확률은

$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ 답 $\frac{2}{5}$

라이트 UP

분할하는 경우의 수

서로 다른 n개를 p개, q개, r개$(p+q+r=n)$의 세 묶음으로 나누는 경우의 수

① p, q, r가 모두 다른 수일 때 ➡ ${}_nC_p\cdot{}_{n-p}C_q\cdot{}_rC_r$

② p, q, r 중에서 어느 두 수가 같을 때 ➡ ${}_nC_p\cdot{}_{n-p}C_q\cdot{}_rC_r\cdot\frac{1}{2!}$

③ p, q, r가 모두 같은 수일 때 ➡ ${}_nC_p\cdot{}_{n-p}C_q\cdot{}_rC_r\cdot\frac{1}{3!}$

10 7개의 공 중에서 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_7C_2=21$

상자 속에 들어 있는 검은 공의 개수를 n이라 하면 모두 검은 공이 나오는 경우의 수는

${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2}$

즉 모두 검은 공이 나올 확률은

$\frac{{}_nC_2}{{}_7C_2}=\frac{n(n-1)}{42}$

이때 7번에 2번 꼴로 모두 검은 공이 나오므로

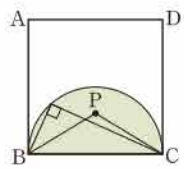
$\frac{n(n-1)}{42}=\frac{2}{7}$,　　$n(n-1)=12=4\cdot 3$

$\therefore n=4$

따라서 상자에 들어 있는 검은 공은 4개라고 할 수 있다.

답 4개

11 오른쪽 그림에서 변 BC를 지름으로 하는 반원 위에 점 P를 잡으면 삼각형 PBC는 직각삼각형이므로 이 반원의 내부에 점 P를 잡으면 삼각형 PBC는 둔각삼각형이다.



색칠한 부분의 넓이는　$\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{8}$

정사각형 ABCD의 넓이는 1이므로 구하는 확률은

$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square\text{ABCD의 넓이})}=\frac{\pi}{8}$

답 $\frac{\pi}{8}$

03 확률의 덧셈정리

확인

본책 53쪽

1 (1) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{3}{5}$

(2) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$0.5=0.3+0.4-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=0.2$

답 (1) $\frac{3}{5}$ (2) 0.2

2 5개의 공 중에서 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_2=10$

(1) 2개 모두 흰 공이 나오는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2=3$

따라서 구하는 확률은　$\frac{3}{10}$

(2) 적어도 한 개는 검은 공이 나오는 사건을 A라 하면 2개 모두 흰 공이 나오는 사건은 A^C이므로

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$

답 (1) $\frac{3}{10}$ (2) $\frac{7}{10}$

유제

본책 54~55쪽

1 나온 두 눈의 수의 합이 8인 사건을 A, 곱이 12인 사건을 B라 할 때, 나온 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 사건 A가 일어나는 경우는

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)

의 5가지이므로　$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{36}$

(ii) 사건 B가 일어나는 경우는

(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)

의 4가지이므로　$\mathrm{P}(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

(iii) 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우는

(2, 6), (6, 2)

의 2가지이므로　$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

이상에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{5}{36}+\frac{1}{9}-\frac{1}{18}=\frac{7}{36}$

답 $\frac{7}{36}$

2 모두 동요 CD가 나오는 사건을 A, 모두 클래식 CD가 나오는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{20}\mathrm{C}_2}=\frac{10}{190}=\frac{1}{19}$,　$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_8\mathrm{C}_2}{{}_{20}\mathrm{C}_2}=\frac{28}{190}=\frac{14}{95}$

이때 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{19}+\frac{14}{95}=\frac{1}{5}$

답 $\frac{1}{5}$

3 나온 두 눈의 수의 합이 9 이하인 사건을 A라 하면 두 눈의 수의 합이 10 이상인 사건은 A^C이다.

나온 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면 두 눈의 수의 합이 10 이상인 경우는

(4, 6), (5, 5), (6, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 6)

의 6가지이므로　$\mathrm{P}(A^C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

답 $\frac{5}{6}$

4 카드에 적힌 두 수의 곱이 짝수인 사건을 A라 하면 카드에 적힌 두 수의 곱이 홀수인 사건은 A^C이다.

두 수의 곱이 홀수이려면 두 수가 모두 홀수이어야 하고, 1부터 15까지의 자연수 중 홀수는 8개이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_8\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_2}=\frac{4}{15}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{4}{15}=\frac{11}{15}$

답 $\frac{11}{15}$

5 3의 배수를 택하는 사건을 A, 5의 배수를 택하는 사건을 B라 하면 $A\cap B$는 3과 5의 공배수, 즉 15의 배수를 택하는 사건이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{13}{40}+\frac{8}{40}-\frac{2}{40}=\frac{19}{40}\end{aligned}$$

택한 수가 3의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 사건은 $A^C\cap B^C$, 즉 $(A\cup B)^C$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B^C)&=\mathrm{P}((A\cup B)^C)\\&=1-\mathrm{P}(A\cup B)\\&=1-\frac{19}{40}=\frac{21}{40}\end{aligned}$$

답 $\frac{21}{40}$

중단원 연습 문제

본책 56~59쪽

01 ㄴ	**02** $\frac{1}{18}$	**03** ⑤	**04** ②	**05** $\frac{4}{15}$
06 $\frac{27}{55}$	**07** ④	**08** C	**09** $\frac{3}{4}$	**10** ⑤
11 ①	**12** $\frac{3}{5}$	**13** ④	**14** 4	**15** ⑤
16 11	**17** ③	**18** ①	**19** $\frac{1}{2}$	**20** ④
21 ③	**22** 68			

01 전략 각각의 사건을 집합으로 나타낸 후 교집합이 $\varnothing$인 것을 찾는다.

풀이 $A=\{2,\ 4,\ 6\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5\}$, $C=\{1,\ 3\}$이므로

$A\cap B=\{2\}$, $A\cap C=\varnothing$, $B\cap C=\{3\}$

따라서 서로 배반사건인 것은 A와 C뿐이다.

답 ㄴ

02 전략 이차방정식이 중근을 가지려면 판별식 D가 0이어야 함을 이용한다.

풀이 모든 경우의 수는 $6\cdot 6=36$ ···➊

이차방정식 $x^2+2ax+b=0$이 중근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2-b=0\qquad\therefore a^2=b$ ···➋

이 등식을 만족시키는 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 1)$, $(2,\ 4)$의 2가지이다. ···➌

따라서 구하는 확률은 $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$ ···➍

답 $\frac{1}{18}$

채점 기준	비율
➊ 모든 경우의 수를 구할 수 있다.	20%
➋ a와 b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30%
➌ 이차방정식이 중근을 가지는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
➍ 이차방정식이 중근을 가질 확률을 구할 수 있다.	20%

03 전략 여학생끼리 모두 이웃하여 앉는 경우의 수는 여학생 3명을 한 사람으로 생각하여 구한다.

풀이 7명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(7-1)!=6!=720$

여학생 3명을 한 사람으로 생각하여 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(5-1)!=4!=24$

여학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 여학생끼리 모두 이웃하여 앉는 경우의 수는

$24\cdot 6=144$

이므로 구하는 확률은

$\frac{144}{720}=\frac{1}{5}$

답 ⑤

04 전략 0이 아닌 서로 다른 n개의 숫자에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 r자리 자연수의 개수는 ${}_n\Pi_r=n^r$임을 이용한다.

풀이 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$4\cdot{}_5\Pi_3=4\cdot 5^3=500$

각 자리의 숫자가 모두 다른 네 자리 자연수는 천의 자리에는 0이 올 수 없고, 나머지 세 자리에는 천의 자리의 숫자를 제외한 4개의 숫자 중 3개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 개수는

$4\cdot{}_4\mathrm{P}_3=96$

따라서 구하는 확률은

$\frac{96}{500}=\frac{24}{125}$

답 ②

05 전략 두 개의 N 사이에 A와 B가 있는 두 가지 경우로 나누어 생각한다.

풀이 6개의 문자 A, A, A, B, N, N을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{6!}{3!\cdot 2!}=60$ ···➊

(i) 두 개의 N 사이에 A가 있는 경우

NAN, A, A, B를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$ ···➋

(ii) 두 개의 N 사이에 B가 있는 경우

NBN, A, A, A를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$ ···➌

(i), (ii)에서 두 개의 N 사이에 한 개의 문자만 있도록 나열하는 경우의 수는 $12+4=16$

따라서 구하는 확률은

$\frac{16}{60}=\frac{4}{15}$ ⋯❹

답 $\frac{4}{15}$

채점 기준	비율
❶ 모든 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 두 개의 N 사이에 A가 있는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 두 개의 N 사이에 B가 있는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 두 개의 N 사이에 한 개의 문자만 있을 확률을 구할 수 있다.	20 %

06 전략 먼저 4개의 동아리 중 3개의 동아리를 선택한 후 선택한 3개의 동아리에서 회원을 각각 1명씩 뽑는 경우의 수를 구한다.

풀이 12명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_{12}C_3=220$ ⋯❶

4개의 동아리에서 회원을 뽑을 3개의 동아리를 선택하는 경우의 수는

${}_4C_3=4$

선택한 3개의 동아리에서 회원을 각각 1명씩 뽑는 경우의 수는

${}_3C_1\cdot{}_3C_1\cdot{}_3C_1=3\cdot3\cdot3=27$

즉 뽑힌 3명 모두 다른 동아리의 회원인 경우의 수는

$4\cdot27=108$ ⋯❷

따라서 구하는 확률은

$\frac{108}{220}=\frac{27}{55}$ ⋯❸

답 $\frac{27}{55}$

채점 기준	비율
❶ 모든 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 뽑힌 3명 모두 다른 동아리의 회원인 경우의 수를 구할 수 있다.	60 %
❸ 3명 모두 다른 동아리의 회원일 확률을 구할 수 있다.	20 %

07 전략 남자 1명, 여자 1명으로 이루어진 조가 2개이려면 남자 2명으로 이루어진 조, 여자 2명으로 이루어진 조가 각각 1개씩 있어야 한다.

풀이 8명을 2명씩 4개의 조로 나누는 경우의 수는

${}_8C_2\cdot{}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{4!}=105$

남자 1명, 여자 1명으로 이루어진 조가 2개이려면 남자 2명으로 이루어진 조, 여자 2명으로 이루어진 조가 각각 1개씩 있어야 한다.

남자 4명 중에서 2명, 여자 4명 중에서 2명을 뽑아 각각 1개의 조를 만드는 경우의 수는

${}_4C_2\cdot{}_4C_2=36$

남아 있는 남자 2명, 여자 2명을 남자 1명, 여자 1명으로 이루어진 2개의 조로 나누는 경우는 2가지이므로 남자 1명, 여자 1명으로 이루어진 조가 2개인 경우의 수는

$36\cdot2=72$

따라서 구하는 확률은 $\frac{72}{105}=\frac{24}{35}$ 답 ④

08 전략 사건 A가 n번 중에서 r번 꼴로 일어난다.

➡ (사건 A가 일어날 확률)$=\frac{r}{n}$

풀이 세 선수가 각각 화살을 한 번씩 쏘았을 때, 10점을 맞힐 확률은

A: $\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$

B: $\frac{12}{200}=\frac{3}{50}$

C: $\frac{18}{150}=\frac{3}{25}$

$\frac{3}{50}<\frac{1}{10}<\frac{3}{25}$이므로 10점을 맞힐 확률이 가장 큰 선수는 C이다.

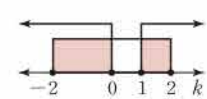
답 C

09 전략 이차방정식이 실근을 가지려면 판별식 D가 $D\geq0$이어야 함을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2-2kx+k=0$이 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 $D\geq0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-k)^2-k=k(k-1)\geq0$

$\therefore k\leq0$ 또는 $k\geq1$



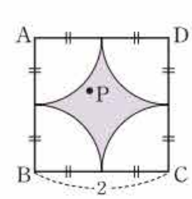
이때 $-2\leq k\leq2$이므로 주어진 이차방정식이 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$-2\leq k\leq0$ 또는 $1\leq k\leq2$

따라서 구하는 확률은

$\frac{\{0-(-2)\}+(2-1)}{2-(-2)}=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

10 전략 정사각형의 한 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 부채꼴의 호 위에 점 P를 잡으면 점 P에서 그 꼭짓점까지의 거리가 1임을 이용한다.



풀이 오른쪽 그림에서 정사각형의 한 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 부채꼴의 호 위에 점 P를 잡으면 점 P에서 그 꼭짓점까지의 거리가 1이므로 색칠한 부분에 점 P를 잡으면 네 꼭짓점까지의 거리가 모두 1 이상이 된다.

앞의 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$2^2-4\cdot\pi\cdot1^2\cdot\frac{1}{4}=4-\pi$$

정사각형 ABCD의 넓이는 4이므로 구하는 확률은

$$\frac{4-\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}$$

답 ⑤

11 전략 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$임을 이용한다.

풀이 $\frac{2}{3}\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}\mathrm{P}(B)$에서 $\mathrm{P}(B)=\frac{5}{3}\mathrm{P}(A)$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)+\frac{5}{3}\mathrm{P}(A)-\frac{2}{3}\mathrm{P}(A)\\&=2\mathrm{P}(A)\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{P}(A\cup B)}{\mathrm{P}(A\cap B)}=\frac{2\mathrm{P}(A)}{\frac{2}{3}\mathrm{P}(A)}=3$$

답 ①

12 전략 이차방정식의 근을 a를 사용하여 나타낸 후 정수가 되기 위한 조건을 찾는다.

풀이 $(5x-a)(2x-a)=0$에서

$$x=\frac{a}{5} \text{ 또는 } x=\frac{a}{2}$$

이때 두 근 중에서 적어도 하나가 정수가 되려면 a가 2의 배수 또는 5의 배수이어야 한다.

1부터 100까지의 자연수 중에서 한 개의 수를 택할 때, 2의 배수를 택하는 사건을 A, 5의 배수를 택하는 사건을 B라 하면 $A\cap B$는 2와 5의 공배수, 즉 10의 배수를 택하는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{50}{100}=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5},$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

답 $\frac{3}{5}$

13 전략 3장의 카드에 적힌 수의 합이 홀수가 되려면 홀수가 적힌 카드가 1장 또는 3장이어야 한다.

풀이 3장의 카드에 적힌 수의 합이 홀수가 되는 경우는 홀수가 적힌 카드가 1장, 짝수가 적힌 카드가 2장이거나 3장 모두 홀수가 적힌 카드인 경우이다.

홀수가 적힌 카드가 1장, 짝수가 적힌 카드가 2장 나오는 사건을 A, 3장 모두 홀수가 적힌 카드가 나오는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{12}{35},\ \mathrm{P}(B)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{4}{35}$$

이때 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{16}{35}$$

답 ④

14 전략 당첨 제비의 개수가 n이면 당첨 제비가 아닌 것의 개수는 $10-n$임을 이용한다.

풀이 적어도 한 개가 당첨 제비인 사건을 A라 하면 2개가 모두 당첨 제비가 아닌 사건은 A^C이다.

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \quad \cdots ❶$$

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_{10-n}\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{(10-n)(9-n)}{90}$이므로

$$\frac{(10-n)(9-n)}{90}=\frac{1}{3} \quad \cdots ❷$$

$$(10-n)(9-n)=30,\qquad n^2-19n+60=0$$

$$(n-4)(n-15)=0 \qquad \therefore n=4 \text{ 또는 } n=15$$

이때 n은 8 이하의 자연수이므로

$$n=4 \quad \cdots ❸$$

답 4

채점 기준	비율
❶ 2개가 모두 당첨 제비가 아닐 확률을 구할 수 있다.	30%
❷ n에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	40%
❸ n의 값을 구할 수 있다.	30%

15 전략 여사건의 확률을 이용한다.

풀이 나온 공의 색의 종류가 2가지 이상인 사건을 A라 하면 나온 공의 색의 종류가 1가지인 사건은 A^C이다.

모두 빨간 공이 나올 확률은 0

모두 파란 공이 나올 확률은 $\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{1}{84}$

모두 흰 공이 나올 확률은 $\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{4}{84}=\frac{1}{21}$

$$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{84}+\frac{1}{21}=\frac{5}{84}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{5}{84}=\frac{79}{84}$$

답 ⑤

16 전략 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 수의 합이 같은 경우를 찾는다.

풀이 갑이 주머니 A, 을이 주머니 B에서 각각 임의로 두 장의 카드를 꺼내는 경우의 수는

$${}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_2=6\cdot6=36$$

꺼낸 두 장의 카드에 적힌 수의 합이 될 수 있는 수는 3, 4, 5, 6, 7이다.

(i) 적힌 수의 합이 3인 경우

갑, 을 모두 1, 2가 적힌 카드를 꺼내면 되므로 그 경우의 수는 1

(ii) 적힌 수의 합이 4인 경우

갑, 을 모두 1, 3이 적힌 카드를 꺼내면 되므로 그 경우의 수는 1

(iii) 적힌 수의 합이 5인 경우

갑, 을이 1, 4 또는 2, 3이 적힌 카드를 꺼내면 되므로 그 경우의 수는 $2\cdot2=4$

(iv) 적힌 수의 합이 6인 경우

갑, 을 모두 2, 4가 적힌 카드를 꺼내면 되므로 그 경우의 수는 1

(v) 적힌 수의 합이 7인 경우

갑, 을 모두 3, 4가 적힌 카드를 꺼내면 되므로 그 경우의 수는 1

이상에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$1+1+4+1+1=8$$

이므로 그 확률은 $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

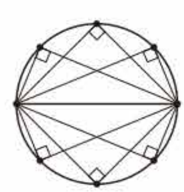
따라서 $p=9$, $q=2$이므로 $p+q=11$ 답 11

17 전략 삼각형의 3개의 꼭짓점 중 두 점이 원의 지름의 양 끝 점이면 직각삼각형임을 이용한다.

풀이 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 만드는 경우의 수는 8개의 점에서 3개의 점을 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_8C_3=56$$

오른쪽 그림과 같이 하나의 지름에 대하여 6개의 직각삼각형을 만들 수 있고, 주어진 8개의 점 중 2개의 점이 지름의 양 끝 점이 되는 경우의 수는 4이므로 만들 수 있는 직각삼각형의 개수는 $6\cdot4=24$



따라서 구하는 확률은

$$\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$$

답 ③

18 전략 3의 눈이 나오는 개수에 따라 경우를 나누어 생각한다.

풀이 모든 경우의 수는 $6\cdot6\cdot6=216$

(i) 3의 눈이 1개 나오는 경우

3의 눈이 나오는 주사위를 선택하는 경우의 수는

$${}_3C_1=3$$

나머지 두 주사위는 4, 5, 6 중 하나의 눈이 나오면 되므로 그 경우의 수는 ${}_3\Pi_2=3^2=9$

즉 구하는 경우의 수는 $3\cdot9=27$

(ii) 3의 눈이 2개 나오는 경우

3의 눈이 나오는 주사위를 선택하는 경우의 수는

$${}_3C_2=3$$

나머지 주사위는 4, 5, 6 중 하나의 눈이 나오면 되므로 그 경우의 수는 3

즉 구하는 경우의 수는 $3\cdot3=9$

(iii) 3의 눈이 3개 나오는 경우의 수는 1

이상에서 나오는 눈의 수의 최솟값이 3인 경우의 수는

$$27+9+1=37$$

이므로 구하는 확률은 $\frac{37}{216}$

따라서 $p=216$, $q=37$이므로

$$p+q=253$$

답 ①

19 전략 뒤집은 동전 중 앞면이 보이던 동전의 개수를 a, 뒷면이 보이던 동전의 개수를 $3-a$라 하고 a의 값을 구한다.

풀이 10개의 동전 중에서 뒤집을 동전 3개를 선택하는 경우의 수는 ${}_{10}C_3=120$ ··· ❶

뒤집은 3개의 동전 중에서 앞면이 보이던 것의 개수를 a, 뒷면이 보이던 것의 개수를 $3-a$라 할 때, 3개의 동전을 뒤집은 후 앞면이 보이는 동전의 개수가 5가 되려면

$$6-a+(3-a)=5 \qquad \therefore a=2$$ ··· ❷

따라서 앞면이 보이는 동전이 5개가 될 확률은 앞면이 보이던 동전 중에서 2개, 뒷면이 보이던 동전 중에서 1개를 선택할 확률과 같다. 즉 구하는 확률은

$$\frac{{}_6C_2\cdot{}_4C_1}{120}=\frac{15\cdot4}{120}=\frac{1}{2}$$ ··· ❸

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ 모든 경우의 수를 구할 수 있다.	20%
❷ 뒤집은 동전 중에서 앞면이 보이던 것의 개수를 구할 수 있다.	40%
❸ 앞면이 보이는 동전이 5개가 될 확률을 구할 수 있다.	40%

20 전략 $\mathrm{P}(A\cap B^c)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$임을 이용한다.

풀이 $\mathrm{P}(A\cap B^c)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$이고,

$\mathrm{P}(A^c\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$$\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6},$$

$$\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$$

앞의 두 식을 변끼리 더하면

$$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-2\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{12}$$

이때 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{5}{6}$이므로

$$\frac{5}{6}-2\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{12} \qquad \therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{24}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{5}{6}-\frac{5}{24}=\frac{5}{8}$$

답 ④

21 전략 주어진 10개의 수 중 세 수의 합이 10이 되는 경우를 찾는다.

풀이 주어진 카드에 적힌 수 중에서 세 수의 합이 10인 경우는

2, 4, 4 또는 3, 3, 4

2, 4, 4가 적힌 카드가 나오는 사건을 A라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{2\cdot 6}{120}=\frac{1}{10}$$

3, 3, 4가 적힌 카드가 나오는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{3\cdot 4}{120}=\frac{1}{10}$$

이때 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{5}$$

답 ③

22 전략 여사건의 확률을 이용한다.

풀이 8명이 8개의 좌석에 배정되는 경우의 수는 $8!$

적어도 2명의 남학생이 서로 이웃하게 배정되는 사건을 A라 하면 A^C는 남학생끼리 이웃하지 않게 배정되는 사건이다.

남	여	남
여		여
남	여	남

여	남	여
남		남
여	남	여

이때 남학생끼리 이웃하지 않게 배정되는 경우는 위의 그림과 같은 2가지이고, 각각에 대하여 남학생 4명, 여학생 4명이 배정되는 경우의 수는 $4!\cdot 4!$이므로 남학생끼리 이웃하지 않게 배정되는 경우의 수는

$2\cdot 4!\cdot 4!$

즉 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{2\cdot 4!\cdot 4!}{8!}=\frac{1}{35}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{35}=\frac{34}{35}$$

따라서 $p=\frac{34}{35}$이므로

$$70p=70\cdot\frac{34}{35}=68$$

답 68

Ⅱ. 확률

04 조건부확률

01 조건부확률

확인

본책 62~63쪽

1 (1) $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}}=\frac{2}{5}$

(2) $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{5}}=\frac{1}{2}$

답 (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{1}{2}$

2 $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$, $A\cap B=\{2, 6\}$이므로

(1) $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(2) $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(3) $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$

3 (1) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}=\frac{1}{10}$$

(2) $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{6}}=\frac{3}{5}$

답 (1) $\frac{1}{10}$ (2) $\frac{3}{5}$

유제

본책 64~68쪽

1 $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)$
$$=1-\mathrm{P}(A\cup B)=0.1$$

이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=0.9$$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$$0.9=0.8+0.3-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=0.2$$
$$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0.2}{0.8}=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

04 조건부확률

2 $P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$P(A^C\cap B)=P(A\cup B)-P(A)=\frac{3}{5}-\frac{1}{3}=\frac{4}{15}$

$\therefore P(B|A^C)=\frac{P(A^C\cap B)}{P(A^C)}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{2}{3}}=\frac{2}{5}$ 답 $\frac{2}{5}$

3 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{4}$이므로

$P(A\cap B)=\frac{1}{4}P(A)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$\frac{3}{4}=\frac{2}{3}+P(B)-\frac{1}{6}$

$\therefore P(B)=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$

$\therefore P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

4 임의로 택한 한 명이 여자 회원인 사건을 A, 책을 구입한 회원인 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$, $P(A\cap B)=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}}=\frac{5}{8}$ 답 $\frac{5}{8}$

5 나온 눈의 수가 6의 약수인 사건을 A, 홀수인 사건을 B라 하면

$A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{1, 3, 5\}$, $A\cap B=\{1, 3\}$

이므로

$P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

6 임의로 택한 한 물품이 학용품인 사건을 A, K 지역에서 기부한 물품인 사건을 B라 하면

$P(A)=0.6$, $P(A\cap B)=0.22$

따라서 구하는 확률은

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.22}{0.6}=\frac{11}{30}$ 답 $\frac{11}{30}$

7 첫 번째에 흰 구슬이 나오는 사건을 A라 하면

$P(A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

두 번째에 검은 구슬이 나오는 사건을 B라 하면 첫 번째에 흰 구슬이 나왔을 때 두 번째에는 검은 구슬이 나올 확률은

$P(B|A)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

8 첫 번째에 짝수가 적힌 카드가 나오는 사건을 A라 하면

$P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

두 번째에 짝수가 적힌 카드가 나오는 사건을 B라 하면 첫 번째에 짝수가 적힌 카드가 나왔을 때 두 번째에도 짝수가 적힌 카드가 나올 확률은 $P(B|A)=\frac{4}{9}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$ 답 $\frac{2}{9}$

9 진수가 자유투를 할 때 첫 번째 시도에서 성공하는 사건을 A라 하면

$P(A)=\frac{2}{3}$, $P(A^C)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

두 번째 시도에서 성공하는 사건을 B라 하면 첫 번째 시도에서 실패했을 때, 두 번째 시도에서도 실패할 확률은

$P(B^C|A^C)=\frac{3}{4}$

이므로 진수가 두 번의 자유투를 모두 실패할 확률은

$P(A^C\cap B^C)=P(A^C)\,P(B^C|A^C)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

따라서 진수가 두 번의 자유투를 할 때, 적어도 한 번은 성공할 확률은

$1-P(A^C\cap B^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

10 A가 당첨 제비를 뽑는 사건을 A, B가 당첨 제비를 뽑는 사건을 B라 하면

(i) A가 당첨 제비를 뽑고, B도 당첨 제비를 뽑을 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$

$=\frac{3}{12}\cdot\frac{2}{11}=\frac{1}{22}$

(ii) A가 당첨 제비를 뽑지 않고, B는 당첨 제비를 뽑을 확률은

$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)$

$=\frac{9}{12}\cdot\frac{3}{11}=\frac{9}{44}$

두 사건 $A\cap B$와 $A^C\cap B$는 서로 배반사건이므로 (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$$
$$=\frac{1}{22}+\frac{9}{44}=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

11 두 번째에 표적에 명중하는 사건을 A, 세 번째에 표적에 명중하는 사건을 B라 하면

(i) 두 번째에 표적에 명중하고, 세 번째에도 표적에 명중할 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$$
$$=0.9\times 0.9=0.81$$

(ii) 두 번째에 표적에 명중하지 않고, 세 번째에는 표적에 명중할 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$$
$$=0.1\times 0.8=0.08$$

두 사건 $A\cap B$와 $A^C\cap B$는 서로 배반사건이므로 (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$$
$$=0.81+0.08=0.89$$

답 0.89

12 A 주머니를 택하는 사건을 A, B 주머니를 택하는 사건을 B, 꺼낸 구슬 2개가 서로 다른 색인 사건을 E라 하면

(i) A 주머니를 택하여 꺼낸 구슬 2개가 서로 다른 색일 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{15}=\frac{4}{15}$$

(ii) B 주머니를 택하여 꺼낸 구슬 2개가 서로 다른 색일 확률은

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}=\frac{2}{7}$$

두 사건 $A\cap E$와 $B\cap E$는 서로 배반사건이므로 (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)$$
$$=\frac{4}{15}+\frac{2}{7}=\frac{58}{105}$$

답 $\frac{58}{105}$

참고 두 주머니 A, B 중 A를 택할 확률은 $\frac{1}{2}$, B를 택할 확률도 $\frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

13 A가 당첨 복권을 뽑는 사건을 A, B가 당첨 복권을 뽑는 사건을 B라 하면

(i) A가 당첨 복권을 뽑고, B도 당첨 복권을 뽑을 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$$
$$=\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{14}=\frac{1}{105}$$

(ii) A가 당첨 복권을 뽑지 않고, B는 당첨 복권을 뽑을 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$$
$$=\frac{13}{15}\cdot\frac{2}{14}=\frac{13}{105}$$

두 사건 $A\cap B$와 $A^C\cap B$는 서로 배반사건이므로 (i), (ii)에서 B가 당첨 복권을 뽑을 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$$
$$=\frac{1}{105}+\frac{13}{105}=\frac{14}{105}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A^C|B)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{13}{105}}{\frac{14}{105}}=\frac{13}{14}$$

답 $\frac{13}{14}$

14 A 주머니를 택하는 사건을 A, B 주머니를 택하는 사건을 B, 꺼낸 사탕이 자두 맛 사탕인 사건을 E라 하면

(i) A 주머니를 택하여 꺼낸 사탕이 자두 맛 사탕일 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$$

(ii) B 주머니를 택하여 꺼낸 사탕이 자두 맛 사탕일 확률은

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$$

두 사건 $A\cap E$와 $B\cap E$는 서로 배반사건이므로 (i), (ii)에서 꺼낸 사탕이 자두 맛 사탕일 확률은

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)=\frac{2}{15}+\frac{4}{9}=\frac{26}{45}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{26}{45}}=\frac{3}{13}$$

답 $\frac{3}{13}$

참고 A 주머니를 택하는 사건은 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 2 이하인 사건과 같으므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

15 임의로 택한 제품이 제1공장에서 만든 제품인 사건을 A, 제2공장에서 만든 제품인 사건을 B, 불량품인 사건을 E라 하면

(i) 임의로 택한 제품이 제1공장에서 만든 불량품일 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)$$
$$=0.6\times 0.03=0.018$$

(ii) 임의로 택한 제품이 제2공장에서 만든 불량품일 확률은

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)$$
$$=0.4\times 0.02=0.008$$

두 사건 $A\cap E$와 $B\cap E$는 서로 배반사건이므로 (i), (ii)에서 임의로 택한 제품이 불량품일 확률은

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)$$
$$=0.018+0.008=0.026$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|E)=\frac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{0.008}{0.026}=\frac{4}{13}$$

답 $\frac{4}{13}$

02 사건의 독립과 종속

확인

본책 69~71쪽

1 두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

(1) $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

(2) $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$

답 (1) $\frac{1}{4}$　(2) $\frac{2}{3}$

2 (1) $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.3\times0.4=0.12$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 종속이다.

(2) $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.2\times0.65=0.13$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

답 (1) 종속　(2) 독립

3 $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{5, 10\}$, $C=\{6\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$,　$\mathrm{P}(B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$,　$\mathrm{P}(C)=\frac{1}{10}$

(1) $A\cap B=\{10\}$이므로　$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{10}$

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

(2) $A\cap C=\{6\}$이므로　$\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{10}$

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{20}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap C)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

따라서 두 사건 A와 C는 서로 종속이다.

답 (1) 독립　(2) 종속

4 두 사건 A와 B가 서로 독립이면 두 사건

A와 B^C, A^C와 B, A^C와 B^C

도 서로 독립이다.

(1) $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=0.2\times(1-0.4)$
$=0.2\times0.6=0.12$

(2) $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=(1-0.2)\times0.4$
$=0.8\times0.4=0.32$

(3) $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$
$=(1-0.2)\times(1-0.4)$
$=0.8\times0.6=0.48$

답 (1) 0.12　(2) 0.32　(3) 0.48

유제

본책 72~73쪽

1 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\mathrm{P}(A\cap B)$　$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{12}$

이때 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.　답 독립

2 $\mathrm{P}(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$,

$\mathrm{P}(C)=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$, $\mathrm{P}(D)=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$

(i) $A\cap B$는 3과 5의 공배수, 즉 15의 배수가 나오는 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$

이때 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

즉 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

(ii) $A\cap C$는 3과 7의 공배수, 즉 21의 배수가 나오는 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{30}$

이때 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{15}=\frac{2}{45}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap C)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

즉 두 사건 A와 C는 서로 종속이다.

(iii) $A\cap D$는 3과 8의 공배수, 즉 24의 배수가 나오는 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap D)=\frac{1}{30}$

이때 $P(A)P(D)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{30}$이므로

$$P(A\cap D)=P(A)P(D)$$

즉 두 사건 A와 D는 서로 독립이다.

이상에서 사건 A와 서로 독립인 사건은 B, D이다.

답 B, D

3 A 주머니에서 흰 공이 나오는 사건을 A, B 주머니에서 흰 공이 나오는 사건을 B라 하면 $P(A)=\frac{3}{5}$, $P(B)=\frac{1}{2}$이고 두 사건 A와 B는 서로 독립이므로

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$$

답 $\frac{3}{10}$

4 두 학생 A, B가 이 문제를 맞히는 사건을 각각 A, B라 하면 $P(A)=0.5$, $P(B)=0.8$이고 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

(i) A만 문제를 맞히는 사건은 $A\cap B^C$이고 두 사건 A와 B^C는 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}P(A\cap B^C)&=P(A)P(B^C)\\&=0.5\times(1-0.8)\\&=0.1\end{aligned}$$

(ii) B만 문제를 맞히는 사건은 $A^C\cap B$이고 두 사건 A^C와 B는 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}P(A^C\cap B)&=P(A^C)P(B)\\&=(1-0.5)\times0.8\\&=0.4\end{aligned}$$

두 사건 $A\cap B^C$와 $A^C\cap B$는 서로 배반사건이므로 (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$0.1+0.4=0.5$$

답 0.5

5 내일 서울, 대전에서 비가 오는 사건을 각각 A, B라 하면

$$P(A)=\frac{1}{6},\ P(B)=\frac{1}{8}$$

이고 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

내일 적어도 한 도시에서 비가 오는 사건은 내일 두 도시 모두 비가 오지 않는 사건, 즉 $A^C\cap B^C$의 여사건이다.

이때 두 사건 A^C와 B^C는 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}P(A^C\cap B^C)&=P(A^C)P(B^C)\\&=\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{8}\right)\\&=\frac{35}{48}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$1-P(A^C\cap B^C)=1-\frac{35}{48}=\frac{13}{48}$$

답 $\frac{13}{48}$

03 독립시행의 확률

확인

본책 74쪽

1 ${}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{243}$

답 $\frac{40}{243}$

유제

본책 75~76쪽

1 자유투를 한 번 할 때 성공할 확률은 $\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$이므로

(i) 자유투를 2번 성공할 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^1=\frac{48}{125}$$

(ii) 자유투를 3번 성공할 확률은

$${}_3C_3\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^0=\frac{64}{125}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{48}{125}+\frac{64}{125}=\frac{112}{125}$$

답 $\frac{112}{125}$

2 공을 한 번 꺼낼 때, 흰 공이 나올 확률은 $\frac{3}{4}$이고, 흰 공이 4번 미만 나오는 사건은 흰 공이 4번 이상 나오는 사건의 여사건이다.

(i) 흰 공이 4번 나올 확률은

$${}_5C_4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{405}{1024}$$

(ii) 흰 공이 5번 나올 확률은

$${}_5C_5\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^0=\frac{243}{1024}$$

(i), (ii)에서 흰 공이 4번 이상 나올 확률은

$$\frac{405}{1024}+\frac{243}{1024}=\frac{648}{1024}=\frac{81}{128}$$

따라서 구하는 확률은

$$1-\frac{81}{128}=\frac{47}{128}$$

답 $\frac{47}{128}$

라이트 UP

① 꺼낸 공을 다시 넣는 시행 ➡ 독립시행이다.

② 꺼낸 공을 다시 넣지 않는 시행 ➡ 독립시행이 아니다.

3 공을 한 번 꺼낼 때, 3의 배수가 나올 확률은 $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$, 3의 배수가 아닌 수가 나올 확률은 $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$이다.

주사위를 한 번 던질 때, 5 이상의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로

(i) 공을 꺼내어 3의 배수가 나오고, 주사위를 3번 던져서 5 이상의 눈이 2번 나올 확률은

$$\frac{1}{4}\cdot{}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{1}{18}$$

(ii) 공을 꺼내어 3의 배수가 아닌 수가 나오고, 주사위를 4번 던져서 5 이상의 눈이 2번 나올 확률은

$$\frac{3}{4}\cdot{}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{18}+\frac{2}{9}=\frac{5}{18}$$ 답 $\frac{5}{18}$

4 (i) 두 번 경기하여 A 반이 우승하는 경우

A 반이 첫 번째, 두 번째 경기를 모두 이기는 경우이므로 그 확률은

$${}_2C_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^0=\frac{9}{16}$$

(ii) 세 번 경기하여 A 반이 우승하는 경우

A 반이 첫 번째, 두 번째 경기 중 한 경기만 이기고 세 번째 경기를 이기는 경우이므로 그 확률은

$${}_2C_1\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^1\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{32}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{9}{16}+\frac{9}{32}=\frac{27}{32}$$ 답 $\frac{27}{32}$

참고 2번 또는 3번 경기하면 우승하는 팀이 결정되므로 4번 이상 경기하는 경우는 없다.

5 5번째 경기에서 우승팀이 결정되려면 우승팀은 4번의 경기에서 3번 이기고 마지막 5번째 경기에서도 이겨야 한다.

이때 두 팀이 상대팀을 이길 확률이 같으므로 A 팀, B 팀이 이길 확률은 각각 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$

(i) A 팀이 우승할 확률은 ${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

(ii) B 팀이 우승할 확률은 ${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

중단원 연습 문제

본책 77~80쪽

01 $\frac{1}{7}$	02 ②	03 ③	04 ②	05 6
06 ④	07 ②	08 $\frac{9}{29}$	09 ③	10 독립
11 ⑤	12 $\frac{2}{5}$	13 ③	14 ⑤	15 43
16 $\frac{80}{243}$	17 ①	18 $\frac{1}{4}$	19 30	20 ④
21 $\frac{3}{4}$	22 $\frac{15}{128}$	23 3배	24 $\frac{1}{2}$	

01 전략 $P(A)$, $P(B)$를 $P(A\cap B)$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{4}$이므로

$P(B)=4P(A\cap B)$ ··· ❶

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{3}$이므로

$P(A)=3P(A\cap B)$ ··· ❷

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$$\frac{6}{7}=3P(A\cap B)+4P(A\cap B)-P(A\cap B)$$

$$\frac{6}{7}=6P(A\cap B)$$

$\therefore P(A\cap B)=\frac{1}{7}$ ··· ❸

답 $\frac{1}{7}$

채점 기준	비율
❶ $P(B)$를 $P(A\cap B)$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ $P(A)$를 $P(A\cap B)$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ $P(A\cap B)$를 구할 수 있다.	40%

02 전략 주어진 표를 이용하여 구하는 확률을 조건부확률로 나타낸다.

풀이 임의로 택한 한 학생이 2학년인 사건을 S, A를 관람한 학생인 사건을 T라 하면

$$P(S)=\frac{130}{200}=\frac{13}{20},\ P(S\cap T)=\frac{50}{200}=\frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(T|S)=\frac{P(S\cap T)}{P(S)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{13}{20}}=\frac{5}{13}$$ 답 ②

03 전략 6의 눈이 한 번도 나오지 않는 사건을 A, 나온 두 눈의 수의 합이 4의 배수인 사건을 B로 놓고 조건부확률로 나타낸다.

풀이 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 6의 눈이 한 번도 나오지 않는 사건을 A라 하면

$$P(A)=\frac{5\cdot5}{36}=\frac{25}{36}$$

또 나온 두 눈의 수의 합이 4의 배수인 사건을 B라 하고, 나온 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면 사건 $A\cap B$는

$$A\cap B=\{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 5), (4, 4), (5, 3)\}$$

$$\therefore P(A\cap B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{25}{36}}=\frac{6}{25}$$ 답 ③

04 전략 민재는 꿀떡을 먹고 소희는 찹쌀떡을 먹어야 한다.

풀이 민재가 꿀떡을 먹는 사건을 A, 소희가 찹쌀떡을 먹는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{11}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{11}=\frac{8}{33}$$

답 ②

05 전략 흰 공의 개수를 n으로 놓으면 검은 공의 개수는 $10-n$임을 이용한다.

풀이 흰 공의 개수를 n이라 하면 검은 공의 개수는 $10-n$이므로 첫 번째에 흰 공이 나오는 사건을 A, 두 번째에 검은 공이 나오는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n}{10},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{10-n}{9}$$ ❶

첫 번째에는 흰 공이, 두 번째에는 검은 공이 나올 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$$
$$=\frac{n}{10}\cdot\frac{10-n}{9}=\frac{n(10-n)}{90}$$ ❷

즉 $\frac{n(10-n)}{90}=\frac{4}{15}$이므로

$n(10-n)=24,\quad n^2-10n+24=0$

$(n-4)(n-6)=0\quad \therefore n=4$ 또는 $n=6$

그런데 흰 공이 검은 공보다 많으므로 $n=6$이어야 한다.

따라서 흰 공의 개수는 6이다. ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B\|A)$를 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $\mathrm{P}(A\cap B)$를 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 흰 공의 개수를 구할 수 있다.	40 %

06 전략 첫 번째에 3의 배수가 나오는 경우와 3의 배수가 나오지 않는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 1부터 20까지의 자연수 중에서 3의 배수는 6개이다.
첫 번째에 3의 배수가 나오는 사건을 A, 두 번째에 3의 배수가 나오는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{19}$$
$$\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10},\ \mathrm{P}(B|A^C)=\frac{6}{19}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$$
$$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$$
$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{19}+\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{19}=\frac{3}{10}$$

답 ④

07 전략 내일 비가 올 때 지각하는 경우와 비가 오지 않을 때 지각하는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 내일 비가 오는 사건을 A, 이 학생이 지각하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$$
$$\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5},\ \mathrm{P}(B|A^C)=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$$
$$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$$
$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{20}=\frac{11}{100}$$

답 ②

08 전략 홀수가 적힌 두 개의 공을 A 상자에서 꺼내는 경우와 B 상자에서 꺼내는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 A 상자에서 두 개의 공을 꺼내는 사건을 A, B 상자에서 두 개의 공을 꺼내는 사건을 B, 꺼낸 두 개의 공에 적힌 수가 모두 홀수인 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(E|A)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$$
$$\therefore \mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}=\frac{1}{10}$$ ❶

또 $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(E|B)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}$이므로

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$ ❷
$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)$$
$$=\frac{1}{10}+\frac{2}{9}=\frac{29}{90}$$ ❸

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{29}{90}}=\frac{9}{29}$$ ❹

답 $\frac{9}{29}$

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(A\cap E)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\mathrm{P}(B\cap E)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\mathrm{P}(E)$를 구할 수 있다.	10 %
❹ $\mathrm{P}(A\|E)$를 구할 수 있다.	30 %

참고 A 상자에서 두 개의 공을 꺼내는 사건은 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 5 이상인 사건과 같으므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

09 전략 $A\cap B$, $A\cap C$, $B\cap C$를 구하여 두 사건의 관계를 각각 알아본다.

풀이 $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 4, 6\}$, $C=\{3, 6\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}$$

또 $A\cap B=\varnothing$, $A\cap C=\{3\}$, $B\cap C=\{6\}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=0,\ \mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{6}$$

ㄱ. $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로 A와 B는 서로 배반사건이다.

ㄴ. $\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$이므로 A와 C는 서로 독립이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$이므로 B와 C는 서로 독립이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

10 전략 $\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{12}$를 이용하여 $\mathrm{P}(A\cap B)$를 구한다.

풀이 $$\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}+\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{1}{6}}+\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{1}{4}}=6\mathrm{P}(A\cap B)+4\mathrm{P}(A\cap B)=10\mathrm{P}(A\cap B)$$ ⋯ ❶

즉 $10\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{12}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{24}$$ ⋯ ❷

이때 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이다. ⋯ ❸

답 독립

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(A\|B)+\mathrm{P}(B\|A)$를 $\mathrm{P}(A\cap B)$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\mathrm{P}(A\cap B)$를 구할 수 있다.	20 %
❸ 두 사건 A와 B가 서로 독립임을 알 수 있다.	40 %

11 전략 A와 B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$이고, A와 B^C도 서로 독립임을 이용한다.

풀이 두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)\qquad\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{3}{8}$$

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

이므로 $\frac{1}{2}=\frac{3}{8}+\mathrm{P}(B)-\frac{3}{8}\mathrm{P}(B)$

$$\frac{5}{8}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{8}\qquad\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{5}$$

A와 B가 서로 독립이면 A와 B^C도 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{8}\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{10}$$ 답 ⑤

12 전략 승재가 예선을 통과하지 못할 확률은 $1-p$임을 이용한다.

풀이 선우와 승재가 예선을 통과하는 사건을 각각 A, B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B)=p$이고 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

선우만 예선을 통과하는 사건은 $A\cap B^C$이고 두 사건 A와 B^C는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$$

에서 $\frac{2}{5}=\frac{2}{3}(1-p)$

$$1-p=\frac{3}{5}\qquad\therefore\ p=\frac{2}{5}$$ 답 $\frac{2}{5}$

13 전략 (홀수)+(짝수), (짝수)+(홀수)인 경우에 두 수의 합이 홀수임을 이용한다.

풀이 두 수의 합이 홀수이려면 두 주머니 A, B에서 꺼낸 공에 적힌 수가 각각 홀수, 짝수이거나 짝수, 홀수이어야 한다. 두 주머니 A, B에서 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수인 사건을 각각 A, B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}$이고 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

(i) A에서 홀수, B에서 짝수가 나오는 사건은 $A\cap B^C$이고 두 사건 A와 B^C는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{15}$$

(ii) A에서 짝수, B에서 홀수가 나오는 사건은 $A^C\cap B$이고 두 사건 A^C와 B는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{4}{15}+\frac{1}{5}=\frac{7}{15}$$ 답 ③

14 전략 전구의 불이 켜지려면 A는 꼭 닫혀 있어야 하고 B와 C는 둘 중 1개 이상이 닫혀 있어야 한다.

풀이 세 스위치 A, B, C가 닫히는 사건을 각각 A, B, C라 하면 전구의 불이 켜지는 사건은

$$A\cap(B\cup C)$$

두 사건 B와 C는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(B\cup C)=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

또 두 사건 A와 $B\cup C$는 서로 독립이므로

$$P(A\cap(B\cup C))=P(A)P(B\cup C)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$$

답 ⑤

참고 각 스위치가 독립적으로 작동하므로 스위치가 A가 닫히는 것이 스위치 B 또는 스위치 C가 닫힐 확률에 영향을 주지 않으므로 두 사건 A와 $B\cup C$는 서로 독립이다.

15 전략 동전을 6번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수가 뒷면이 나오는 횟수보다 큰 경우를 찾고, 동전을 던지는 시행은 독립시행임을 이용한다.

풀이 앞면이 나오는 횟수가 뒷면이 나오는 횟수보다 큰 경우는 앞면이 6회 또는 5회 또는 4회가 나오는 경우이다.

동전을 한 번 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로

(i) 앞면이 6회, 뒷면이 0회 나올 확률은

$${}_6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^0=\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

(ii) 앞면이 5회, 뒷면이 1회 나올 확률은

$${}_6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1=6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

(iii) 앞면이 4회, 뒷면이 2회 나올 확률은

$${}_6C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=15\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

이상에서 구하는 확률은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6+6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6+15\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=22\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{11}{32}$$

이므로 $p=32,\ q=11$

$\therefore p+q=43$

답 43

16 전략 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 n으로 놓으면 6의 약수가 아닌 수의 눈이 나오는 횟수는 $5-n$임을 이용한다.

풀이 주사위를 5번 던져서 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 n이라 하면 6의 약수가 아닌 수의 눈이 나오는 횟수는 $5-n$이므로

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2n+(5-n)$$
$$=n+5$$

즉 $n+5=9$에서 $n=4$ ··· ❶

따라서 구하는 확률은 주사위를 5번 던져서 6의 약수의 눈이 4번, 6의 약수가 아닌 수의 눈이 1번 나올 확률이고, 주사위를 한 번 던질 때 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이므로

$${}_5C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{80}{243}$$ ··· ❷

답 $\frac{80}{243}$

채점 기준	비율
❶ $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=9$를 만족시키는 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 구할 수 있다.	60 %
❷ $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=9$일 확률을 구할 수 있다.	40 %

17 전략 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다른 경우와 같은 경우로 나누어 생각한다.

풀이 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다를 확률은

$$\frac{{}_4C_1\cdot{}_3C_1}{{}_7C_2}=\frac{4}{7}$$

이고, 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같을 확률은

$$1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$$

(i) 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다르고, 1개의 동전을 3번 던져 앞면이 2번 나올 확률은

$$\frac{4}{7}\cdot{}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{14}$$

(ii) 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같고, 1개의 동전을 2번 던져 앞면이 2번 나올 확률은

$$\frac{3}{7}\cdot{}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{3}{28}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{14}+\frac{3}{28}=\frac{9}{28}$$

답 ①

18 전략 $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$임을 이용한다.

풀이 $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{\frac{1}{3}}=3P(A\cap B)$

즉 $P(A|B)$는 $P(A\cap B)$가 최대일 때 최댓값을 갖고, 최소일 때 최솟값을 갖는다.

(i) $P(B)<P(A)$이므로 $P(A\cap B)$가 최대일 때는 $A\cap B=B$일 때이다.

따라서 $P(A\cap B)$의 최댓값은 $P(B)$, 즉 $\frac{1}{3}$이다.

$$\therefore M=3P(A\cap B)=3\cdot\frac{1}{3}=1$$

(ii) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-P(A\cap B)$$
$$=\frac{13}{12}-P(A\cap B)$$

이므로 $P(A\cap B)$가 최소일 때는 $P(A\cup B)$가 최대일 때, 즉 $P(A\cup B)=1$일 때이다.

따라서 $1=\frac{13}{12}-P(A\cap B)$에서

$$P(A\cap B)=\frac{1}{12}$$

즉 $P(A\cap B)$의 최솟값은 $\frac{1}{12}$이다.

$$\therefore m=3P(A\cap B)=3\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$$

(i), (ii)에서 $Mm=1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

04 조건부확률

19 전략 각 부서에 속해 있는 여성 직원 수를 구한 후 전체 직원 수와 속한 부서를 표로 나타낸다.

풀이 A 부서에 속해 있는 여성 직원의 수는

$20\cdot\frac{50}{100}=10$

B 부서에 속해 있는 여성 직원의 수를 x라 하면

$(10+x)\cdot\frac{60}{100}=x$

$(10+x)\cdot\frac{3}{5}=x$

$30+3x=5x$

$\therefore x=15$

따라서 두 부서 A, B의 직원 중 남성과 여성의 수를 표로 나타내면 다음과 같다.

	남성	여성	합계
A 부서	10	10	20
B 부서	25	15	40
합계	35	25	60

이 회사의 직원 60명 중에서 임의로 선택한 한 명이 B 부서에 속해 있는 직원인 사건을 S, 여성인 사건을 T라 하면

$\mathrm{P}(S)=\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(S\cap T)=\frac{15}{60}=\frac{1}{4}$

$\therefore p=\mathrm{P}(T|S)=\frac{\mathrm{P}(S\cap T)}{\mathrm{P}(S)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{8}$

$\therefore 80p=80\cdot\frac{3}{8}=30$ 답 30

20 전략 암에 걸린 사람을 택하는 사건을 A, 암에 걸렸다고 진단하는 사건을 B라 할 때, $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$이다.

풀이 암에 걸린 사람을 택하는 사건을 A, 검진 받는 사람을 암에 걸렸다고 진단하는 사건을 B라 할 때, 100명 중 실제로 암에 걸린 사람이 20명이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$

또 $\mathrm{P}(B|A)=0.95$, $\mathrm{P}(B|A^C)=1-\mathrm{P}(B^C|A^C)=1-0.9=0.1$ 이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=\frac{1}{5}\times0.95+\frac{4}{5}\times0.1\\&=0.27\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은 0.27이다. 답 ④

참고 $\mathrm{P}(B|A^C)$는 암에 걸리지 않은 사람을 암에 걸렸다고 진단할 확률이다.

21 전략 두 사건 A와 B가 서로 독립이면 A와 B^C, A^C와 B^C도 서로 독립임을 이용한다.

풀이 두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(B^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ ··· ❶

$\mathrm{P}(A)=a$라 하면 $\mathrm{P}(A^C)=1-a$

이때 두 사건 A와 B^C, A^C와 B^C는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C\cap B^C)+\frac{1}{6}$에서

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)+\frac{1}{6}$

$\frac{2}{3}a=\frac{2}{3}(1-a)+\frac{1}{6}$, $\quad \frac{4}{3}a=\frac{5}{6}$

$\therefore a=\frac{5}{8}$ ··· ❷

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\frac{5}{8}+\frac{1}{3}-\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{3}\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$ ··· ❸

답 $\frac{3}{4}$

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(B^C)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $\mathrm{P}(A)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\mathrm{P}(A\cup B)$를 구할 수 있다.	40 %

22 전략 점 A가 점 P, 점 B까지 이동하려면 오른쪽, 위쪽으로 각각 몇 칸을 움직여야 하는지 생각한다.

풀이 주사위를 한 번 던질 때, 소수의 눈이 나올 확률은

$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

점 A가 점 P까지 이동하려면 주사위를 5번 던져서 소수의 눈이 3번 나와야 하므로 그 확률은

${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$

점 A가 점 P에서 출발하여 점 B까지 이동하려면 주사위를 3번 던져서 소수의 눈이 1번 나와야 하므로 그 확률은

${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

따라서 주사위를 8번 던질 때, 점 A가 점 P를 거쳐 점 B까지 이동할 확률은

$\frac{5}{16}\cdot\frac{3}{8}=\frac{15}{128}$ 답 $\frac{15}{128}$

23 전략 윷짝을 던지는 각 시행은 독립시행임을 이용한다.

풀이 4개의 윷짝을 던져서 개가 나올 확률은

$${}_4C_2 p^2(1-p)^2$$

4개의 윷짝을 던져서 도가 나올 확률은

$${}_4C_3 p^3(1-p)$$ ⋯ ❶

이때 개가 나올 확률이 도가 나올 확률의 2배이므로

$${}_4C_2 p^2(1-p)^2 = 2\cdot{}_4C_3 p^3(1-p)$$

$$6p^2(1-p)^2 = 8p^3(1-p)$$

$0<p<1$이므로 위의 식의 양변을 $p^2(1-p)$로 나누면

$$6(1-p)=8p$$

$$\therefore p=\frac{3}{7}$$ ⋯ ❷

따라서 4개의 윷짝을 던져서 걸이 나올 확률은

$${}_4C_1\left(\frac{3}{7}\right)^1\left(\frac{4}{7}\right)^3$$

4개의 윷짝을 던져서 윷이 나올 확률은

$${}_4C_0\left(\frac{3}{7}\right)^0\left(\frac{4}{7}\right)^4$$

$\dfrac{{}_4C_1\left(\frac{3}{7}\right)^1\left(\frac{4}{7}\right)^3}{{}_4C_0\left(\frac{3}{7}\right)^0\left(\frac{4}{7}\right)^4}=\dfrac{4\cdot\frac{3}{7}}{\frac{4}{7}}=3$이므로 걸이 나올 확률은 윷이 나올 확률의 3배이다. ⋯ ❸

답 3배

채점 기준	비율
❶ 개와 도가 나올 확률을 p를 사용하여 나타낼 수 있다.	20 %
❷ p의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 걸이 나올 확률은 윷이 나올 확률의 몇 배인지 구할 수 있다.	40 %

24 전략 앞면만 4번 또는 뒷면만 4번 또는 앞면 2번, 뒷면 2번이 나와야 한다.

풀이 동전을 4번 던질 때, 점 A에서 출발한 점 P가 다시 점 A로 돌아오는 경우는 앞면이 4번 또는 뒷면이 4번 또는 앞면이 2번, 뒷면이 2번 나오는 경우이다.

(i) 앞면이 4번 나올 확률은

$${}_4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{16}$$

(ii) 뒷면이 4번 나올 확률은

$${}_4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

(iii) 앞면이 2번, 뒷면이 2번 나올 확률은

$${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

이상에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

Ⅲ. 통계

05 확률변수와 확률분포

01 이산확률변수와 연속확률변수

확인

본책 82~85쪽

1 답 (1) 1, 2, 3, 4, 5, 6 (2) $\frac{1}{6}$

2 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 6의 약수의 눈이 나올 확률이 $\frac{2}{3}$, 6의 약수가 아닌 수의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{3}$이므로

$$P(X=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9},$$

$$P(X=1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9},$$

$$P(X=2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	1

답 풀이 참조

3 (1) 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{4}+a+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$$

(2) $P(1\le X\le 2)=P(X=1)+P(X=2)$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$$

(3) $P(X>1)=P(X=2)+P(X=3)$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

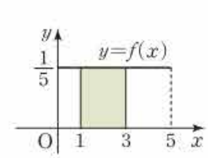
답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{7}{12}$ (3) $\frac{1}{2}$

4 (1), (4) 확률변수가 가질 수 있는 값을 셀 수 있으므로 이산확률변수이다.

(2), (3) 확률변수가 어떤 범위에 속하는 모든 실수의 값을 가질 수 있으므로 연속확률변수이다.

답 (1) 이산확률변수 (2) 연속확률변수
(3) 연속확률변수 (4) 이산확률변수

5 $P(1\le X\le 3)$은 오른쪽 그림의 색칠한 직사각형의 넓이와 같으므로



$$P(1\le X\le 3)=(3-1)\cdot\frac{1}{5}$$

$$=\frac{2}{5}$$

답 $\frac{2}{5}$

유제　　본책 86~88쪽

1 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{k+1}$	$\frac{2}{k+1}$	$\frac{3}{k+1}$	1

이때 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{k+1}+\frac{2}{k+1}+\frac{3}{k+1}=1,\qquad \frac{6}{k+1}=1$$

$\therefore k=5$ 　　답 5

2 확률의 총합은 1이므로

$a+3a+3a+a=1,\qquad 8a=1$

$\therefore a=\frac{1}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(X\le 2)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$ 　　답 $\frac{7}{8}$

3 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$k+\frac{1}{2}$	k	$\frac{k}{3}$	$\frac{2k}{3}$	1

이때 확률의 총합은 1이므로

$\left(k+\frac{1}{2}\right)+k+\frac{k}{3}+\frac{2k}{3}=1$

$3k+\frac{1}{2}=1\qquad \therefore k=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(X^2=1)=\mathrm{P}(X=-1$ 또는 $X=1)$

$=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=1)$

$=\frac{2}{3}+\frac{1}{18}=\frac{13}{18}$ 　　답 $\frac{13}{18}$

4 (1) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.
빨간 공 3개, 파란 공 5개가 들어 있는 주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_3$이고, 꺼낸 공 중에서 빨간 공이 x개인 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_x\cdot{}_5\mathrm{C}_{3-x}$이므로 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_3\mathrm{C}_x\cdot{}_5\mathrm{C}_{3-x}}{{}_8\mathrm{C}_3}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

즉 확률변수 X가 0, 1, 2, 3일 때의 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\cdot{}_5\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{5}{28}$,

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{15}{28}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_5\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{15}{56}$,

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3\cdot{}_5\mathrm{C}_0}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{1}{56}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	1

(2) 빨간 공이 1개 이하로 나올 확률은 $\mathrm{P}(X\le 1)$이므로

$\mathrm{P}(X\le 1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$=\frac{5}{28}+\frac{15}{28}=\frac{5}{7}$

답 풀이 참조

5 (1) 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 두 눈의 수의 차는 다음 표와 같다.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

따라서 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4, 5이고, 그 각각의 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},\quad \mathrm{P}(X=1)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18},$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9},\quad \mathrm{P}(X=3)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9},\quad \mathrm{P}(X=5)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	1

(2) 두 눈의 수의 차가 2 이상 4 이하일 확률은 $\mathrm{P}(2\le X\le 4)$이므로

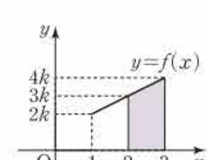
$\mathrm{P}(2\le X\le 4)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$

$=\frac{2}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}$

$=\frac{1}{2}$

답 풀이 참조

6 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\cdot(2k+4k)\cdot 2=1$

$6k=1\qquad \therefore k=\frac{1}{6}$

$P(X\geq 2)$는 앞의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

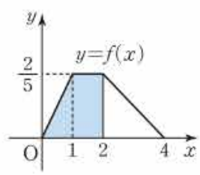
$$P(X\geq 2)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)\cdot 1$$
$$=\frac{7}{12}$$

답 $\frac{7}{12}$

7 (1) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2}\cdot(1+4)\cdot k=1,\qquad \frac{5}{2}k=1$$
$$\therefore k=\frac{2}{5}$$

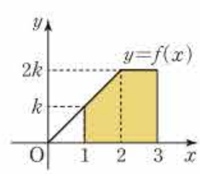
(2) $P(0\leq X\leq 2)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$$P(0\leq X\leq 2)=\frac{1}{2}\cdot(1+2)\cdot\frac{2}{5}$$
$$=\frac{3}{5}$$

답 (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{3}{5}$

8 (1) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$\frac{1}{2}\cdot(1+3)\cdot 2k=1$$
$$4k=1\qquad \therefore k=\frac{1}{4}$$

(2) $P(X\geq 1)$은 위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$P(X\geq 1)=1-P(0\leq X\leq 1)$$
$$=1-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{4}$$
$$=\frac{7}{8}$$

답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{7}{8}$

02 이산확률변수의 기댓값, 분산, 표준편차

확인

본책 89~91쪽

1 $E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{2}+5\cdot\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

답 $\frac{10}{3}$

2 (1) $E(X)=0\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{1}{2}+5\cdot\frac{1}{5}=2$

(2) $E(X^2)=0^2\cdot\frac{3}{10}+2^2\cdot\frac{1}{2}+5^2\cdot\frac{1}{5}=7$

(3) $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=7-2^2=3$

(4) $\sigma(X)=\sqrt{3}$

답 (1) 2 (2) 7 (3) 3 (4) $\sqrt{3}$

3 (1) $E(3X-1)=3E(X)-1=3\cdot 5-1=14$

$\sigma(3X-1)=|3|\sigma(X)=3\sqrt{V(X)}=3\sqrt{2}$

(2) $E(-5X+4)=-5E(X)+4$
$$=-5\cdot 5+4=-21$$

$\sigma(-5X+4)=|-5|\sigma(X)$
$$=5\sqrt{V(X)}=5\sqrt{2}$$

답 (1) 평균: 14, 표준편차: $3\sqrt{2}$
(2) 평균: -21, 표준편차: $5\sqrt{2}$

유제

본책 92~94쪽

1 확률의 총합은 1이므로

$$a+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1\qquad\therefore a=\frac{1}{4}$$
$$\therefore E(X)=-2\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

$E(X^2)=(-2)^2\cdot\frac{1}{4}+0^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{1}{4}+4^2\cdot\frac{1}{8}=4$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=4-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{4}$$
$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{15}{4}}=\frac{\sqrt{15}}{2}$$

답 평균: $\frac{1}{2}$, 표준편차: $\frac{\sqrt{15}}{2}$

2 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$	1

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{15}+2\cdot\frac{2}{15}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{4}{15}+5\cdot\frac{1}{3}=\frac{11}{3}$$
$$E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{15}+2^2\cdot\frac{2}{15}+3^2\cdot\frac{1}{5}+4^2\cdot\frac{4}{15}+5^2\cdot\frac{1}{3}=15$$
$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=15-\left(\frac{11}{3}\right)^2=\frac{14}{9}$$

답 $\frac{14}{9}$

3 확률의 총합은 1이므로

$$a+\frac{1}{6}+b=1\qquad\therefore a+b=\frac{5}{6}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

$E(X)=1$이므로

$$-1\cdot a+1\cdot\frac{1}{6}+4\cdot b=1$$
$$\therefore -a+4b=\frac{5}{6}\qquad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{3}$

$E(X^2)=(-1)^2\cdot\frac{1}{2}+1^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{1}{3}=6$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=6-1^2=5$ 답 5

4 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 각각의 확률은

$P(X=0)=\frac{{}_4C_2\cdot{}_2C_0}{{}_6C_2}=\frac{2}{5}$,

$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\cdot{}_2C_1}{{}_6C_2}=\frac{8}{15}$,

$P(X=2)=\frac{{}_4C_0\cdot{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$\therefore E(X)=0\cdot\frac{2}{5}+1\cdot\frac{8}{15}+2\cdot\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$

또 $E(X^2)=0^2\cdot\frac{2}{5}+1^2\cdot\frac{8}{15}+2^2\cdot\frac{1}{15}=\frac{4}{5}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{4}{5}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{16}{45}$

답 평균: $\frac{2}{3}$, 분산: $\frac{16}{45}$

5 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고, 그 각각의 확률은

$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_2C_2}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$,

$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_2C_1}{{}_5C_3}=\frac{3}{5}$,

$P(X=3)=\frac{{}_3C_3\cdot{}_2C_0}{{}_5C_3}=\frac{1}{10}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$E(X)=1\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{3}{5}+3\cdot\frac{1}{10}=\frac{9}{5}$

$E(X^2)=1^2\cdot\frac{3}{10}+2^2\cdot\frac{3}{5}+3^2\cdot\frac{1}{10}=\frac{18}{5}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{18}{5}-\left(\frac{9}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

6 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타내면 동전을 세 번 던졌을 때 받을 수 있는 상금은

HHH일 때, 300원

HHT, HTH, THH일 때, 200원

HTT, THT, TTH일 때, 100원

TTT일 때, 0원

따라서 받을 수 있는 상금을 확률변수 X라 할 때 X가 가질 수 있는 값은 0, 100, 200, 300이고, 그 각각의 확률은 $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{8}$이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	100	200	300	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$\therefore E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+100\cdot\frac{3}{8}+200\cdot\frac{3}{8}+300\cdot\frac{1}{8}=150$

따라서 구하는 기댓값은 150원이다. 답 150원

7 확률의 총합은 1이므로

$3a+\frac{1}{2}+a=1,\quad 4a+\frac{1}{2}=1\quad \therefore a=\frac{1}{8}$

따라서 확률변수 X의 평균, 분산, 표준편차는

$E(X)=(-1)\cdot\frac{3}{8}+0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{8}=-\frac{1}{4}$

$V(X)=(-1)^2\cdot\frac{3}{8}+0^2\cdot\frac{1}{2}+1^2\cdot\frac{1}{8}-\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

(1) $E(4X+2)=4E(X)+2=4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+2=1$

(2) $V(-4X+9)=(-4)^2V(X)=16\cdot\frac{7}{16}=7$

(3) $\sigma(8X-5)=|8|\sigma(X)=8\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=2\sqrt{7}$

답 (1) 1 (2) 7 (3) $2\sqrt{7}$

8 $E(Y)=-1$에서 $E(aX+b)=-1$

$aE(X)+b=-1,\quad a\cdot1+b=-1$

$\therefore a+b=-1$ …… ㉠

$V(Y)=16$에서 $V(aX+b)=16$

$a^2V(X)=16,\quad a^2\cdot4=16,\quad a^2=4$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

㉠에 $a=2$를 대입하면

$2+b=-1\quad \therefore b=-3$

답 $a=2$, $b=-3$

9 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 각각의 확률은

$$P(X=0)=\frac{{}_2C_0\cdot{}_4C_3}{{}_6C_3}=\frac{1}{5},$$

$$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\cdot{}_4C_2}{{}_6C_3}=\frac{3}{5},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_2C_2\cdot{}_4C_1}{{}_6C_3}=\frac{1}{5}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$E(X)=0\cdot\frac{1}{5}+1\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{1}{5}=1$

$V(X)=0^2\cdot\frac{1}{5}+1^2\cdot\frac{3}{5}+2^2\cdot\frac{1}{5}-1^2=\frac{2}{5}$

$\therefore E(5X-7)=5E(X)-7=5\cdot1-7=-2$

$V(5X-7)=5^2V(X)=25\cdot\frac{2}{5}=10$

답 평균: -2, 분산: 10

중단원 연습 문제

본책 95~97쪽

01 $\frac{3}{4}$	02 ①	03 $\frac{1}{2}$	04 2	05 ③
06 ③	07 5	08 $\frac{3}{2}$	09 550원	10 ①
11 ④	12 ④	13 $\frac{1}{3}$	14 $\frac{3}{10}$	15 ③
16 ②	17 12			

01 전략 먼저 확률의 총합이 1임을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{8}+a+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a=1,\quad \frac{1}{8}+\frac{7}{4}a=1\quad \therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore P(2\le X\le3)=P(X=2)+P(X=3)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

답 $\frac{3}{4}$

02 전략 확률의 총합이 1임을 이용한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)$
$+P(X=2)$

$=\left(k+\frac{2}{9}\right)+\left(k+\frac{1}{9}\right)+k+\left(k+\frac{1}{9}\right)+\left(k+\frac{2}{9}\right)=1$

$5k+\frac{2}{3}=1\quad \therefore k=\frac{1}{15}$

답 ①

03 전략 먼저 $P(X^2-5X+4<0)$이 나타내는 확률을 찾는다.

풀이 $X^2-5X+4<0$에서

$(X-1)(X-4)<0$

$\therefore 1<X<4$

이때 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이므로

$P(X^2-5X+4<0)=P(1<X<4)$

$=P(X=2)+P(X=3)$ ···➊

뽑힌 카드에 적힌 두 수를 a, b $(a<b)$라 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여 두 수의 차가

2인 경우는 (1, 3), (2, 4), (3, 5)의 3가지,

3인 경우는 (1, 4), (2, 5)의 2가지

이므로 그 확률은 각각

$P(X=2)=\frac{3}{{}_5C_2}=\frac{3}{10},$

$P(X=3)=\frac{2}{{}_5C_2}=\frac{1}{5}$ ···➋

따라서 구하는 확률은

$P(X^2-5X+4<0)=P(X=2)+P(X=3)$

$=\frac{3}{10}+\frac{1}{5}=\frac{1}{2}$ ···➌

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
➊ $P(X^2-5X+4<0)=P(X=2)+P(X=3)$임을 알 수 있다.	40%
➋ $P(X=2)$, $P(X=3)$을 구할 수 있다.	40%
➌ $P(X^2-5X+4<0)$을 구할 수 있다.	20%

04 전략 확률변수 X가 가질 수 있는 값과 그 확률을 구한다.

풀이 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 각각의 확률은

$$P(X=0)=\frac{{}_5C_3\cdot{}_4C_0}{{}_9C_3}=\frac{5}{42},$$

$$P(X=1)=\frac{{}_5C_2\cdot{}_4C_1}{{}_9C_3}=\frac{10}{21},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_5C_1\cdot{}_4C_2}{{}_9C_3}=\frac{5}{14},$$

$$P(X=3)=\frac{{}_5C_0\cdot{}_4C_3}{{}_9C_3}=\frac{1}{21}$$ ···➊

이때 $P(X=2)+P(X=3)=\frac{17}{42}$이므로

$P(X\ge2)=\frac{17}{42}\quad \therefore k=2$ ···➋

답 2

채점 기준	비율
➊ 확률변수 X가 가질 수 있는 값과 그 확률을 구할 수 있다.	60%
➋ 자연수 k의 값을 구할 수 있다.	40%

05 전략 확률밀도함수의 성질을 만족시키는 함수의 그래프를 찾는다.

풀이 ①, ② $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이 아니다.

③ $0\le x\le 2$에서 $f(x)\ge 0$이고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right)\cdot 2=1$$

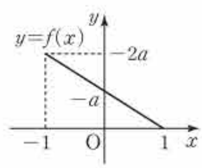
④ $\frac{3}{2}<x\le 2$에서 $f(x)<0$이다.

⑤ $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이 아니다.

답 ③

06 전략 $f(x)\ge 0$임을 이용하여 그래프를 그린다.

풀이 확률밀도함수 $f(x)$는 $f(x)\ge 0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다. 즉 $a<0$이다.



$y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=-1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2}\cdot\{1-(-1)\}\cdot(-2a)=1$$

$$\therefore a=-\frac{1}{2}$$

답 ③

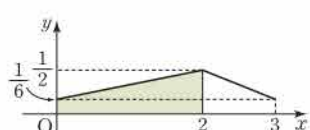
07 전략 먼저 주어진 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1임을 이용하여 k의 값을 구한다.

풀이 주어진 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로

$$3\cdot k+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2k=1$$

$$6k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{6}$$

$\mathrm{P}(0\le X\le 2)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$$\mathrm{P}(0\le X\le 2)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)\cdot 2=\frac{2}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=2$이므로 $\quad p+q=5$

답 5

08 전략 a, b의 값을 구한 후 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$임을 이용한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로 $\quad a+a+b=1$

$$\therefore 2a+b=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\mathrm{E}(X)=-\frac{1}{2}$이므로

$$(-2)\cdot a+0\cdot a+1\cdot b=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore -2a+b=-\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=\frac{3}{8},\ b=\frac{1}{4} \qquad \cdots ❶$$

$\mathrm{E}(X^2)=(-2)^2\cdot\frac{3}{8}+0^2\cdot\frac{3}{8}+1^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=\frac{7}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2} \qquad \cdots ❷$$

답 $\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\mathrm{V}(X)$를 구할 수 있다.	50 %

09 전략 한 번의 게임에서 받을 수 있는 상금을 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내어 본다.

풀이 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타내고 100원짜리 동전 1개와 500원짜리 동전 2개를 동시에 던졌을 때 받을 수 있는 상금을 표로 나타내면 다음과 같다.

100원	500원	500원	상금(원)
H	H	H	1100
H	H	T	600
H	T	H	600
H	T	T	100
T	H	H	1000
T	H	T	500
T	T	H	500
T	T	T	0

한 번의 게임에서 받을 수 있는 상금을 확률변수 X라 하면 X가 가질 수 있는 값은 0, 100, 500, 600, 1000, 1100이고, 그 각각의 확률은

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{8},\quad \mathrm{P}(X=100)=\frac{1}{8},$$

$$\mathrm{P}(X=500)=\frac{1}{4},\quad \mathrm{P}(X=600)=\frac{1}{4},$$

$$\mathrm{P}(X=1000)=\frac{1}{8},\quad \mathrm{P}(X=1100)=\frac{1}{8}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	100	500	600	1000	1100	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{8}+100\cdot\frac{1}{8}+500\cdot\frac{1}{4}+600\cdot\frac{1}{4}$

$+1000\cdot\frac{1}{8}+1100\cdot\frac{1}{8}$

$=550$

따라서 구하는 기댓값은 550원이다. 답 550원

10 전략 먼저 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$임을 이용하여 $\mathrm{V}(X)$를 구한다.

풀이 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=200-10^2=100$

이므로

$$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}\left(\frac{1}{2}X+4\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{V}(X)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot100=25$$

답 ①

11 전략 a, b의 값을 구한 후 $\sigma\left(\frac{1}{a}X+b\right)=\left|\frac{1}{a}\right|\sigma(X)$임을 이용한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$\frac{2}{5}+a+\frac{1}{5}+b=1 \quad \therefore a+b=\frac{2}{5}$ …… ㉠

$\mathrm{E}(X)=2$이므로

$1\cdot\frac{2}{5}+2\cdot a+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot b=2$

$\therefore a+2b=\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{10}$, $b=\frac{1}{10}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=1^2\cdot\frac{2}{5}+2^2\cdot\frac{3}{10}+3^2\cdot\frac{1}{5}+4^2\cdot\frac{1}{10}-2^2$

$=1$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{1}=1$이므로

$$\sigma\left(\frac{1}{a}X+b\right)=\sigma\left(\frac{10}{3}X+\frac{1}{10}\right)$$

$$=\left|\frac{10}{3}\right|\sigma(X)=\frac{10}{3}$$

답 ④

12 전략 $\mathrm{V}(X)$를 구한 후 $\mathrm{V}(aX)=a^2\mathrm{V}(X)$임을 이용한다.

풀이 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 각각의 확률은

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_0}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3},$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{8}{15},$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_6\mathrm{C}_0\cdot{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{2}{15}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{8}{15}+2\cdot\frac{2}{15}=\frac{4}{5}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot\frac{8}{15}+2^2\cdot\frac{2}{15}=\frac{16}{15}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{16}{15}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{32}{75}$

$\therefore \mathrm{V}(15X)=15^2\mathrm{V}(X)=15^2\cdot\frac{32}{75}=96$ 답 ④

13 전략 먼저 확률의 총합이 1임을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 $\frac{a}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=a(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$이고, 확률의 총합은 1이므로

$a\{(\sqrt{1}-\sqrt{0})+(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{81}-\sqrt{80})\}$

$=a\sqrt{81}=9a$

즉 $9a=1$이므로 $a=\frac{1}{9}$ ··· ❶

$\therefore \mathrm{P}(16\le X\le 48)$

$=\mathrm{P}(X=16)+\mathrm{P}(X=17)+\mathrm{P}(X=18)+\cdots+\mathrm{P}(X=48)$

$=\frac{1}{9}\{(\sqrt{17}-\sqrt{16})+(\sqrt{18}-\sqrt{17})+(\sqrt{19}-\sqrt{18})$

$+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{48})\}$

$=\frac{1}{9}(\sqrt{49}-\sqrt{16})$

$=\frac{1}{9}(7-4)=\frac{1}{3}$ ··· ❷

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\mathrm{P}(16\le X\le 48)$을 구할 수 있다.	50 %

14 전략 $f(3-x)=f(3+x)$가 성립하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 $f(3-x)=f(3+x)$가 성립하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.

$\therefore \mathrm{P}(3\le X\le 5)=\mathrm{P}(1\le X\le 3)$

$=\mathrm{P}(0\le X\le 3)-\mathrm{P}(0\le X\le 1)$ ··· ㉠

또 $\mathrm{P}(0\le X\le 3)=\mathrm{P}(3\le X\le 6)$이고,

$\mathrm{P}(0\le X\le 3)+\mathrm{P}(3\le X\le 6)=\mathrm{P}(0\le X\le 6)$

이므로 $\mathrm{P}(0\le X\le 6)=1$에서

$\mathrm{P}(0\le X\le 3)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(0\le X\le 6)=\frac{1}{2}$

따라서 ㉠에서

$$P(3\le X\le 5)=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$$

$$=\frac{3}{10}$$

답 $\frac{3}{10}$

15 전략 확률변수 X가 가질 수 있는 값과 그 확률을 구하여 X의 확률분포를 표로 나타내어 본다.

풀이 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 6, 9이고, 그 각각의 확률은 다음과 같다.

(i) $X=2$인 경우

1이 적혀 있는 구슬과 2가 적혀 있는 구슬을 각각 1개씩 꺼내야 하므로

$$P(X=2)=\frac{{}_1C_1\cdot{}_3C_1}{{}_9C_2}=\frac{1}{12}$$

(ii) $X=3$인 경우

1이 적혀 있는 구슬과 3이 적혀 있는 구슬을 각각 1개씩 꺼내야 하므로

$$P(X=3)=\frac{{}_1C_1\cdot{}_5C_1}{{}_9C_2}=\frac{5}{36}$$

(iii) $X=4$인 경우

2가 적혀 있는 구슬을 2개 꺼내야 하므로

$$P(X=4)=\frac{{}_3C_2}{{}_9C_2}=\frac{1}{12}$$

(iv) $X=6$인 경우

2가 적혀 있는 구슬과 3이 적혀 있는 구슬을 각각 1개씩 꺼내야 하므로

$$P(X=6)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_5C_1}{{}_9C_2}=\frac{5}{12}$$

(v) $X=9$인 경우

3이 적혀 있는 구슬을 2개 꺼내야 하므로

$$P(X=9)=\frac{{}_5C_2}{{}_9C_2}=\frac{5}{18}$$

이상에서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	6	9	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{18}$	1

$$\therefore E(X)=2\cdot\frac{1}{12}+3\cdot\frac{5}{36}+4\cdot\frac{1}{12}+6\cdot\frac{5}{12}+9\cdot\frac{5}{18}$$

$$=\frac{71}{12}$$

답 ③

16 전략 이산확률변수 X의 확률질량함수가 $P(X=x_i)=p_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$일 때, $E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$임을 이용한다.

풀이 $P(X=k)=p_k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$라 하면

$$E(X)=p_1+2p_2+\cdots+5p_5=4$$

$\therefore E(Y)$

$$=\left(\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{10}\right)+2\left(\frac{1}{2}p_2+\frac{1}{10}\right)+\cdots+5\left(\frac{1}{2}p_5+\frac{1}{10}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(p_1+2p_2+\cdots+5p_5)+\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\cdots+\frac{5}{10}\right)$$

$$=\frac{1}{2}E(X)+\frac{3}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot4+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$$

답 ②

17 전략 확률변수 X가 가질 수 있는 값과 그 확률을 구하여 X의 확률분포를 표로 나타내어 본다.

풀이 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$이고, 그 각각의 확률은 다음과 같다.

(i) $X=1$인 경우

정육면체의 모서리의 양 끝 점을 택해야 하므로

$$P(X=1)=\frac{12}{{}_8C_2}=\frac{3}{7}$$

(ii) $X=\sqrt{2}$인 경우

정육면체의 각 면의 대각선의 양 끝 점을 택해야 하므로

$$P(X=\sqrt{2})=\frac{6\cdot2}{{}_8C_2}=\frac{3}{7}$$

(iii) $X=\sqrt{3}$인 경우

정육면체의 대각선의 양 끝 점을 택해야 하므로

$$P(X=\sqrt{3})=\frac{4}{{}_8C_2}=\frac{1}{7}$$

이상에서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

··· ❶

$$\therefore E(X^2)=1^2\cdot\frac{3}{7}+(\sqrt{2})^2\cdot\frac{3}{7}+(\sqrt{3})^2\cdot\frac{1}{7}=\frac{12}{7}$$ ··· ❷

$$\therefore E(7X^2)=7E(X^2)=7\cdot\frac{12}{7}=12$$ ··· ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낼 수 있다.	40%
❷ $E(X^2)$을 구할 수 있다.	30%
❸ $E(7X^2)$을 구할 수 있다.	30%

참고 정육면체에서

① 꼭짓점의 개수: 8

② 모서리의 개수: 12

③ 각 면의 대각선의 총개수: 면의 개수는 6, 각 면당 대각선의 개수는 2이므로 $6\cdot2=12$

④ 대각선의 개수: 4

Ⅲ. 통계

06 이항분포와 정규분포

01 이항분포

확인 본책 100~101쪽

1 (1) 자유투를 한 번할 때 성공할 확률이 0.85이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(8,\ 0.85)$를 따른다.

(2) $\mathrm{P}(X=x)={}_{8}\mathrm{C}_{x}(0.85)^{x}(0.15)^{8-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$

답 풀이 참조

2 (1) $\mathrm{P}(X=x)={}_{6}\mathrm{C}_{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\left(\frac{2}{3}\right)^{6-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$

(2) $\mathrm{P}(X=2)={}_{6}\mathrm{C}_{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{4}=\frac{80}{243}$

답 풀이 참조

3 (1) $\mathrm{E}(X)=18\cdot\frac{1}{3}=6,\ \mathrm{V}(X)=18\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=4,$

$\sigma(X)=\sqrt{4}=2$

(2) $\mathrm{E}(X)=240\cdot\frac{1}{4}=60,\ \mathrm{V}(X)=240\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=45,$

$\sigma(X)=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

답 (1) 평균: 6, 분산: 4, 표준편차: 2
(2) 평균: 60, 분산: 45, 표준편차: $3\sqrt{5}$

유제 본책 103~104쪽

1 (1) 공을 한 번 굴릴 때 스트라이크를 성공할 확률이 $\frac{1}{5}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(4,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

따라서 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{4}\mathrm{C}_{x}\left(\frac{1}{5}\right)^{x}\left(\frac{4}{5}\right)^{4-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

(2) 스트라이크를 3번 미만 성공할 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X<3)&=1-\{\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)\}\\&=1-\left\{{}_{4}\mathrm{C}_{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{1}+{}_{4}\mathrm{C}_{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{4}\left(\frac{4}{5}\right)^{0}\right\}\\&=1-\left(\frac{16}{625}+\frac{1}{625}\right)=\frac{608}{625}\end{aligned}$$

답 풀이 참조

2 (1) 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(5,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

따라서 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{5}\mathrm{C}_{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\left(\frac{2}{3}\right)^{5-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

(2)
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(1\le X\le 3)&=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)\\&={}_{5}\mathrm{C}_{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{4}+{}_{5}\mathrm{C}_{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}+{}_{5}\mathrm{C}_{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\\&=\frac{80}{243}+\frac{80}{243}+\frac{40}{243}=\frac{200}{243}\end{aligned}$$

답 풀이 참조

3 한 개의 동전을 400번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 한 개의 동전을 한 번 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=400\cdot\frac{1}{2}=200$

또 $\mathrm{V}(X)=400\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=100$이므로

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{100}=10$

답 평균: 200, 표준편차: 10

4 노란 공 3개, 파란 공 2개가 들어 있는 주머니에서 한 개의 공을 꺼낼 때 노란 공이 나올 확률은 $\frac{3}{5}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{3}{5}\right)$을 따른다.

이때 $\mathrm{E}(X)=60$이므로 $n\cdot\frac{3}{5}=60$에서

$\mathrm{V}(X)=n\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=60\cdot\frac{2}{5}=24$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{E}(X^2)&=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=24+60^2\\&=3624\end{aligned}$$

답 3624

5 이 농장에서 생산된 복숭아 중 임의로 한 개를 선택할 때 특등품일 확률은 $\frac{1}{4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(80,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다. 이때

$\mathrm{E}(X)=80\cdot\frac{1}{4}=20,$

$\mathrm{V}(X)=80\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=15$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(2X-5)&=2\mathrm{E}(X)-5\\&=2\cdot 20-5=35\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(2X-5)&=2^2\mathrm{V}(X)\\&=4\cdot 15=60\end{aligned}$$

답 $\mathrm{E}(2X-5)=35,\ \mathrm{V}(2X-5)=60$

02 정규분포

확인 본책 105~108쪽

1 답 (1) $\mathrm{N}(4,\ 3^2)$ (2) $\mathrm{N}(-5,\ 4^2)$

2 (1) 세 곡선 A, B, C는 각각 직선 $x=m_1$, $x=m_2$, $x=m_3$에 대하여 대칭이므로

$m_1<m_2<m_3$

(2) 표준편차가 클수록 곡선의 가운데 부분의 높이는 낮아지고 옆으로 퍼진 모양이므로

$\sigma_3<\sigma_2<\sigma_1$

답 (1) $m_1<m_2<m_3$ (2) $\sigma_3<\sigma_2<\sigma_1$

3 (1) $\mathrm{P}(1\le Z\le 2)=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=0.4772-0.3413$
$=0.1359$

(2) $\mathrm{P}(Z\ge 2)=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=0.5-0.4772$
$=0.0228$

(3) $\mathrm{P}(Z\le 2.5)=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$
$=0.5+0.4938$
$=0.9938$

(4) $\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 1)=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=0.4332+0.3413$
$=0.7745$

(5) $\mathrm{P}(|Z|\le 1.5)=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 1.5)$
$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$
$=2\times 0.4332$
$=0.8664$

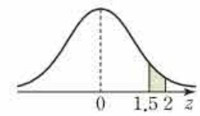
답 (1) 0.1359 (2) 0.0228 (3) 0.9938 (4) 0.7745 (5) 0.8664

4 답 (1) $Z=\dfrac{X-140}{5}$ (2) $Z=\dfrac{X+12}{3}$

유제 본책 109~111쪽

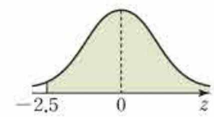
1 $Z=\dfrac{X-80}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(89\le X\le 92)$



$=\mathrm{P}\left(\dfrac{89-80}{6}\le Z\le \dfrac{92-80}{6}\right)$
$=\mathrm{P}(1.5\le Z\le 2)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$
$=0.4772-0.4332=0.044$

(2) $\mathrm{P}(X\ge 65)$

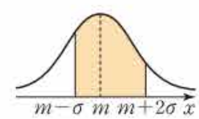


$=\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{65-80}{6}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\ge -2.5)$
$=\mathrm{P}(-2.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)+\mathrm{P}(Z\ge 0)$
$=0.4938+0.5=0.9938$

답 (1) 0.044 (2) 0.9938

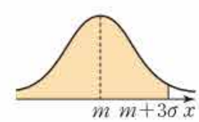
2 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 3^2)$을 따르므로 $m=50$, $\sigma=3$이다.

(1) $\mathrm{P}(47\le X\le 56)$



$=\mathrm{P}(50-3\le X\le 50+6)$
$=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+2\sigma)$
$=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)$
$=\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)$
$=0.3413+0.4772$
$=0.8185$

(2) $\mathrm{P}(X\le 59)$



$=\mathrm{P}(X\le 50+9)$
$=\mathrm{P}(X\le m+3\sigma)$
$=\mathrm{P}(X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+3\sigma)$
$=0.5+0.4987$
$=0.9987$

답 (1) 0.8185 (2) 0.9987

3 $Z=\dfrac{X-40}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\le k)=0.9772$에서

$\mathrm{P}\left(Z\le \dfrac{k-40}{5}\right)=0.9772$

$\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{k-40}{5}\right)=0.9772$

$0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{k-40}{5}\right)=0.9772$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{k-40}{5}\right)=0.4772$

이때 $P(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\frac{k-40}{5}=2$ $\quad\therefore k=50$

답 50

참고 $P\left(Z\le\frac{k-40}{5}\right)>0.5$이므로 $\frac{k-40}{5}>0$이다.

4 형우네 반 학생의 수학 시험 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(85,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-85}{10}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(X\ge 90)&=P\left(Z\ge\frac{90-85}{10}\right)\\&=P(Z\ge 0.5)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 0.5)\\&=0.5-0.19\\&=0.31\end{aligned}$$

따라서 수학 시험 점수가 90점 이상인 학생은 전체의 31 %이다.

답 31 %

5 지우가 등교하는 데 걸리는 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(40,\ 8^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-40}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$X\le 48$이면 지각하지 않으므로

$$\begin{aligned}P(X\le 48)&=P\left(Z\le\frac{48-40}{8}\right)\\&=P(Z\le 1)\\&=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 1)\\&=0.5+0.34\\&=0.84\end{aligned}$$

따라서 지각하지 않을 확률은 0.84이다.

답 0.84

6 이 고등학교 학생의 키를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(162,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-162}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(154\le X\le 168)&=P\left(\frac{154-162}{4}\le Z\le\frac{168-162}{4}\right)\\&=P(-2\le Z\le 1.5)\\&=P(-2\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 1.5)\\&=P(0\le Z\le 2)+P(0\le Z\le 1.5)\\&=0.48+0.43\\&=0.91\end{aligned}$$

따라서 키가 154 cm 이상 168 cm 이하인 학생 수는

$0.91\times 1000=910$

답 910

7 응시자의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(320,\ 45^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-320}{45}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

합격자의 최저 점수를 k라 하면

$$P(X\ge k)=\frac{800}{5000}=0.16$$

$$P\left(Z\ge\frac{k-320}{45}\right)=0.16$$

$$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{k-320}{45}\right)=0.16$$

$$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{k-320}{45}\right)=0.16$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{k-320}{45}\right)=0.34$$

이때 $P(0\le Z\le 1)=0.34$이므로

$$\frac{k-320}{45}=1$$

$$\therefore k=365$$

따라서 합격자의 최저 점수는 365점이다.

답 365점

8 학생의 지능 지수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(104,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-104}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

상위 7 % 이내인 학생의 최저 지능 지수를 k라 하면

$$P(X\ge k)=0.07$$

$$P\left(Z\ge\frac{k-104}{6}\right)=0.07$$

$$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{k-104}{6}\right)=0.07$$

$$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{k-104}{6}\right)=0.07$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{k-104}{6}\right)=0.43$$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.43$이므로

$$\frac{k-104}{6}=1.5$$

$$\therefore k=113$$

따라서 상위 7 % 이내인 학생의 최저 지능 지수는 113이다.

답 113

9 응시자의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(72,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-72}{5}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

상위 120등 이내에 드는 응시자의 최저 점수를 k라 하면

$$P(X\ge k)=\frac{120}{600}=0.2$$

$$P\left(Z\ge\frac{k-72}{5}\right)=0.2$$

$$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{k-72}{5}\right)=0.2$$

$$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{k-72}{5}\right)=0.2$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{k-72}{5}\right)=0.3$$

이때 $P(0\le Z\le 0.84)=0.3$이므로

$$\frac{k-72}{5}=0.84 \qquad \therefore k=76.2$$

따라서 상위 120등 이내에 들기 위해서는 적어도 76.2점을 받아야 한다.

답 76.2점

03 이항분포와 정규분포의 관계

확인 본책 112쪽

1 (1) $E(X)=600\times0.4=240$

$V(X)=600\times0.4\times0.6=144$

이때 600은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(240,\ 12^2)$을 따른다.

(2) $E(X)=450\cdot\frac{1}{3}=150$

$V(X)=450\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=100$

이때 450은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(150,\ 10^2)$을 따른다.

답 (1) $N(240,\ 12^2)$ (2) $N(150,\ 10^2)$

유제 본책 113쪽

1 확률변수 X가 이항분포 $B\left(400,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$E(X)=400\cdot\frac{1}{5}=80$$

$$V(X)=400\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=64$$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(80,\ 8^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-80}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(X\ge76)&=P\left(Z\ge\frac{76-80}{8}\right)\\&=P(Z\ge-0.5)\\&=P(-0.5\le Z\le0)+P(Z\ge0)\\&=P(0\le Z\le0.5)+P(Z\ge0)\\&=0.1915+0.5\\&=0.6915\end{aligned}$$

답 0.6915

2 자유투를 성공하는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(720,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$$E(X)=720\cdot\frac{1}{6}=120$$

$$V(X)=720\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=100$$

이때 720은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(120,\ 10^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-120}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(105\le X\le140)&=P\left(\frac{105-120}{10}\le Z\le\frac{140-120}{10}\right)\\&=P(-1.5\le Z\le2)\\&=P(-1.5\le Z\le0)+P(0\le Z\le2)\\&=P(0\le Z\le1.5)+P(0\le Z\le2)\\&=0.4332+0.4772\\&=0.9104\end{aligned}$$

답 0.9104

3 치료되는 환자의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(1600,\ \frac{9}{10}\right)$를 따르므로

$$E(X)=1600\cdot\frac{9}{10}=1440$$

$$V(X)=1600\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}=144$$

이때 1600은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(1440,\ 12^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-1440}{12}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(X\ge1428)&=P\left(Z\ge\frac{1428-1440}{12}\right)\\&=P(Z\ge-1)\\&=P(-1\le Z\le0)+P(Z\ge0)\\&=P(0\le Z\le1)+P(Z\ge0)\\&=0.3413+0.5\\&=0.8413\end{aligned}$$

답 0.8413

중단원 연습 문제

본책 114~117쪽

01 ⑤	02 $\frac{56}{3}$	03 24	04 ⑤	05 ③
06 ③	07 ③	08 ①	09 11	10 1
11 0.6915	12 ③	13 820	14 87점	15 ①
16 0.135	17 ③	18 35910	19 $\frac{250}{3}$	20 ①
21 ③	22 ③	23 222	24 ②	

01 전략 두 주사위를 한 번 던질 때 나온 두 눈의 수의 합이 5 또는 8일 확률을 p라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(5,\ p)$를 따른다.

풀이 나온 두 눈의 수의 합이 5인 경우는

$(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$의 4가지,

나온 두 눈의 수의 합이 8인 경우는

$(2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3),\ (6,\ 2)$의 5가지

이므로 두 주사위 A, B를 동시에 한 번 던질 때 나온 두 눈의 수의 합이 5 또는 8일 확률은 $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(5,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

$$\therefore \mathrm{P}(X\le4)=1-\mathrm{P}(X=5)$$
$$=1-{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0$$
$$=1-\frac{1}{2^{10}}=\frac{1023}{1024}$$

답 ⑤

02 전략 가위바위보를 한 번 할 때 경희가 이길 확률을 p라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(12,\ p)$를 따른다.

풀이 가위바위보를 한 번 할 때 경희가 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(12,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다. ⋯ ❶

$$\therefore \mathrm{E}(X)=12\cdot\frac{1}{3}=4,\ \mathrm{V}(X)=12\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{3} \quad ⋯ ❷$$

$$\therefore \mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=\frac{8}{3}+4^2=\frac{56}{3} \quad ⋯ ❸$$

답 $\frac{56}{3}$

채점 기준	비율
❶ 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(12,\ \frac{1}{3}\right)$을 따름을 알 수 있다.	30 %
❷ $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\mathrm{E}(X^2)$을 구할 수 있다.	30 %

03 전략 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때 $\mathrm{E}(X)=np$임을 이용한다.

풀이 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=n\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}n$$

이때 $\mathrm{E}(2X-3)=5$이므로 $2\mathrm{E}(X)-3=5$에서

$$2\cdot\frac{1}{6}n-3=5,\quad \frac{1}{3}n=8$$

$$\therefore n=24$$

답 24

04 전략 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때 $\mathrm{E}(X)=np$, $\mathrm{V}(X)=np(1-p)$임을 이용한다.

풀이 $\mathrm{E}(X)=np=6$ ⋯⋯ ㉠

$\mathrm{V}(X)=np(1-p)=2$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠으로 나누면 $1-p=\frac{1}{3}$ $\therefore p=\frac{2}{3}$

㉠에 $p=\frac{2}{3}$를 대입하면 $\frac{2}{3}n=6$ $\therefore n=9$

따라서 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_9\mathrm{C}_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{9-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$$

$$\therefore \mathrm{P}(X\le1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$$
$$={}_9\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^9+{}_9\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^8$$
$$=\frac{19}{3^9}$$

답 ⑤

05 전략 두 주사위의 눈의 수의 차가 3 또는 4 또는 5인 경우의 수를 구한다.

풀이 두 주사위의 눈의 수의 차가 3인 경우는

$(1,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6),\ (4,\ 1),\ (5,\ 2),\ (6,\ 3)$의 6가지

두 주사위의 눈의 수의 차가 4인 경우는

$(1,\ 5),\ (2,\ 6),\ (5,\ 1),\ (6,\ 2)$의 4가지

두 주사위의 눈의 수의 차가 5인 경우는

$(1,\ 6),\ (6,\ 1)$의 2가지

즉 두 주사위의 눈의 수의 차가 3보다 크거나 같은 경우의 수는 12이므로 한 번의 시행에서 B가 1점을 얻을 확률은 $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$이고, A가 1점을 얻을 확률은 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이다.

A가 얻는 점수의 합을 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(15,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로 $\mathrm{E}(X)=15\cdot\frac{2}{3}=10$

또 B가 얻는 점수의 합을 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(15,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로 $\mathrm{E}(Y)=15\cdot\frac{1}{3}=5$

06 이항분포와 정규분포

따라서 구하는 기댓값의 차는

$10-5=5$ 답 ③

06 전략 정규분포 곡선은 직선 $x=$(평균)에 대하여 대칭이고, 자료들이 평균에 밀집한 정도가 클수록 표준편차 및 분산이 작다.

풀이 ㄱ. 확률변수 X_1의 정규분포 곡선의 대칭축이 확률변수 X_2의 정규분포 곡선의 대칭축보다 왼쪽에 있으므로

$\mathrm{E}(X_1)<\mathrm{E}(X_2)$

ㄴ. 확률변수 X_2의 정규분포 곡선이 확률변수 X_1의 정규분포 곡선보다 가운데 부분의 높이가 낮고 모양이 옆으로 퍼져 있으므로

$\mathrm{V}(X_1)<\mathrm{V}(X_2)$

ㄷ. 직선 $x=a$가 두 곡선 A, B의 대칭축보다 각각 오른쪽에 있으므로

$\mathrm{P}(X_1\ge a)<0.5$, $\mathrm{P}(X_2\ge a)<0.5$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

07 전략 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수는 $x=m$일 때 최댓값을 가짐을 이용한다.

풀이 정규분포 $\mathrm{N}(14, 3^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수는 $x=14$에서 최댓값을 갖고, 정규분포 곡선은 직선 $x=14$에 대하여 대칭이다.

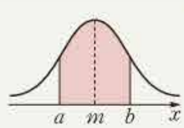
따라서 $\mathrm{P}(k-5\le X\le k+1)$이 최대가 되려면

$\dfrac{k-5+k+1}{2}=14$, $\quad 2k-4=28$

$\therefore k=16$ 답 ③

라이트 UP

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 정규분포 곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다. 따라서 $\mathrm{P}(a\le X\le b)$가 최대이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\dfrac{a+b}{2}=m$ (단, $b-a$는 일정)

08 전략 $m=120$, $\sigma=4$일 때 124, 126을 $m+k\sigma$ (k는 상수) 꼴로 나타낸다.

풀이 $m=120$, $\sigma=4$이므로

$\mathrm{P}(124\le X\le 126)$

$=\mathrm{P}(120+4\le X\le 120+1.5\times 4)$

$=\mathrm{P}(m+\sigma\le X\le m+1.5\sigma)$

$=\mathrm{P}(m\le X\le m+1.5\sigma)-\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$

$=0.4332-0.3413$

$=0.0919$ 답 ①

09 전략 두 확률변수 X, Y를 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르는 확률변수로 각각 표준화한다.

풀이 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(12, 2^2)$, $\mathrm{N}(20, 3^2)$을 따르므로

$Z_X=\dfrac{X-12}{2}$, $Z_Y=\dfrac{Y-20}{3}$

으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다. ⋯ ❶

$\mathrm{P}(X\ge 18)=\mathrm{P}(Y\le k)$에서

$\mathrm{P}\left(Z_X\ge \dfrac{18-12}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\le \dfrac{k-20}{3}\right)$

$\therefore \mathrm{P}(Z_X\ge 3)=\mathrm{P}\left(Z_Y\le \dfrac{k-20}{3}\right)$

따라서 $\dfrac{k-20}{3}=-3$이므로

$k-20=-9$

$\therefore k=11$ ⋯ ❷

답 11

채점 기준	비율
❶ 두 확률변수 X, Y를 각각 표준화할 수 있다.	30 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	70 %

라이트 UP

a가 양수일 때, 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여

$\mathrm{P}(0\le Z\le a)=\mathrm{P}(-a\le Z\le 0)$

이므로

$\mathrm{P}(Z\ge a)=\mathrm{P}(Z\le -a)$

10 전략 확률변수 X를 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르는 확률변수 Z로 표준화한다.

풀이 $Z=\dfrac{X-150}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(X\ge 150-10k)=0.84$에서

$\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{150-10k-150}{10}\right)=0.84$

$\mathrm{P}(Z\ge -k)=0.84$

$\mathrm{P}(-k\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)=0.84$

$\mathrm{P}(0\le Z\le k)+0.5=0.84$

$\therefore \mathrm{P}(0\le Z\le k)=0.34$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.34$이므로

$k=1$

답 1

11 전략 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$, $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$임을 이용한다.

풀이 $\mathrm{E}(X)=10$, $\sigma(X)=4$이므로

$$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(4X-2)=4\mathrm{E}(X)-2$$
$$=4\cdot 10-2=38$$
$$\sigma(Y)=\sigma(4X-2)=|4|\sigma(X)=4\cdot 4=16 \quad \cdots❶$$

이때 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 4^2)$을 따르므로 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(38,\ 16^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{Y-38}{16}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 ⋯❷

$$\mathrm{P}(Y\le 46)=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{46-38}{16}\right)=\mathrm{P}(Z\le 0.5)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$$
$$=0.5+0.1915$$
$$=0.6915 \quad \cdots❸$$

답 0.6915

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{E}(Y)$, $\sigma(Y)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ 확률변수 Y를 표준화할 수 있다.	20 %
❸ $\mathrm{P}(Y\le 46)$을 구할 수 있다.	50 %

다른 풀이 $Y=4X-2$이므로

$$\mathrm{P}(Y\le 46)=\mathrm{P}(4X-2\le 46)=\mathrm{P}(X\le 12)$$

$Z=\dfrac{X-10}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(Y\le 46)=\mathrm{P}(X\le 12)=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{12-10}{4}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le 0.5)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$$
$$=0.5+0.1915$$
$$=0.6915$$

12 전략 쌀의 무게를 확률변수 X라 하면 $Z=\dfrac{X-1.5}{0.2}$는 표준정규분포를 따름을 이용한다.

풀이 쌀의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(1.5,\ 0.2^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-1.5}{0.2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\therefore \mathrm{P}(1.3\le X\le 1.8)=\mathrm{P}\left(\frac{1.3-1.5}{0.2}\le Z\le \frac{1.8-1.5}{0.2}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1.5)$$
$$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$$
$$=0.3413+0.4332$$
$$=0.7745$$

답 ③

13 전략 먼저 휴대 전화 음성 통화량이 2시간 30분 이상 3시간 이하일 확률을 구한다.

풀이 한 달 동안 사용한 휴대 전화 음성 통화량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(170,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-170}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\therefore \mathrm{P}(150\le X\le 180)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{150-170}{10}\le Z\le \frac{180-170}{10}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 1)$$
$$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=0.48+0.34=0.82$$

따라서 휴대 전화 음성 통화량이 2시간 30분 이상 3시간 이하인 학생 수는

$$0.82\times 1000=820$$

답 820

14 전략 1차 합격자로 선발될 확률은 $\dfrac{140}{2000}$임을 이용한다.

풀이 응시자의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(72,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-72}{10}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. ⋯❶

1차 합격자는 모집 정원 70명의 200 %이므로 140명이고, 1차 합격자의 최저 점수를 k라 하면

$$\mathrm{P}(X\ge k)=\frac{140}{2000}=0.07 \quad \cdots❷$$
$$\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{k-72}{10}\right)=0.07$$
$$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-72}{10}\right)=0.07$$
$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-72}{10}\right)=0.07$$
$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-72}{10}\right)=0.43$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.43$이므로

$$\frac{k-72}{10}=1.5 \qquad \therefore k=87$$

따라서 1차 합격자의 최저 점수는 87점이다. ⋯❸

답 87점

채점 기준	비율
❶ 확률변수 X를 정하고 표준화할 수 있다.	30 %
❷ $\mathrm{P}(X\ge k)=0.07$임을 알 수 있다.	30 %
❸ 1차 합격자의 최저 점수를 구할 수 있다.	40 %

15 전략 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르는 확률변수 X는 n이 충분히 크면 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ np(1-p))$를 따른다.

풀이 확률변수 X가 이항분포 $B\left(288,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$$E(X)=288\cdot\frac{2}{3}=192$$

$$V(X)=288\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=64$$

따라서 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(192,\ 8^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-192}{8}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ &P(X\le168)+P(X\ge208)\\&=P\left(Z\le\frac{168-192}{8}\right)+P\left(Z\ge\frac{208-192}{8}\right)\\&=P(Z\le-3)+P(Z\ge2)\\&=P(Z\ge3)+P(Z\ge2)\\&=\{P(Z\ge0)-P(0\le Z\le3)\}+\{P(Z\ge0)-P(0\le Z\le2)\}\\&=(0.5-0.4987)+(0.5-0.4772)\\&=0.0241\end{aligned}$$

답 ①

16 전략 확률변수 X의 확률질량함수가
$P(X=x)={}_nC_xp^x(1-p)^{n-x}\ (x=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$
이면 X는 이항분포 $B(n,\ p)$를 따른다.

풀이 확률변수 X는 이항분포 $B\left(600,\ \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$$E(X)=600\cdot\frac{2}{5}=240$$

$$V(X)=600\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=144$$ ··· ❶

따라서 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(240,\ 12^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-240}{12}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다. ··· ❷

$$\begin{aligned}\therefore\ P(252\le X\le264)&=P\left(\frac{252-240}{12}\le Z\le\frac{264-240}{12}\right)\\&=P(1\le Z\le2)\\&=P(0\le Z\le2)-P(0\le Z\le1)\end{aligned}$$

이때 $P(-1\le Z\le1)=0.68$에서

$2P(0\le Z\le1)=0.68\qquad\therefore\ P(0\le Z\le1)=0.34$

또 $P(-2\le Z\le2)=0.95$에서

$2P(0\le Z\le2)=0.95\qquad\therefore\ P(0\le Z\le2)=0.475$

$$\begin{aligned}\therefore\ P(252\le X\le264)&=0.475-0.34\\&=0.135\end{aligned}$$ ··· ❸

답 0.135

채점 기준	비율
❶ $E(X)$, $V(X)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ 확률변수 X를 표준화할 수 있다.	20 %
❸ $P(252\le X\le264)$를 구할 수 있다.	50 %

참고 $P(1\le Z\le2)$를 다음과 같이 구할 수도 있다.

$$\begin{aligned}P(1\le Z\le2)&=\frac{1}{2}\{P(-2\le Z\le2)-P(-1\le Z\le1)\}\\&=\frac{1}{2}\{P(|Z|\le2)-P(|Z|\le1)\}\\&=\frac{1}{2}(0.95-0.68)=0.135\end{aligned}$$

17 전략 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$을 따름을 이용한다.

풀이 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$E(X)=100\cdot\frac{1}{2}=50$$

$$V(X)=100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=25$$

따라서 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(50,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-50}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(X\ge k)=0.0228$에서

$$P\left(Z\ge\frac{k-50}{5}\right)=0.0228$$

$$P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le\frac{k-50}{5}\right)=0.0228$$

$$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{k-50}{5}\right)=0.0228$$

$$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{k-50}{5}\right)=0.4772$$

이때 $P(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$$\frac{k-50}{5}=2\qquad\therefore\ k=60$$

답 ③

18 전략 응답자의 수를 확률변수 X로 놓으면 X는 이항분포 $B(40000,\ 0.9)$를 따름을 이용한다.

풀이 응답자의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B(40000,\ 0.9)$를 따르므로

$$E(X)=40000\times0.9=36000$$

$$V(X)=40000\times0.9\times0.1=3600$$ ··· ❶

따라서 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(36000,\ 60^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-36000}{60}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다. ··· ❷

$P(X\ge k)=0.93$에서

$$P\left(Z\ge\frac{k-36000}{60}\right)=0.93$$

$$P\left(\frac{k-36000}{60}\le Z\le0\right)+P(Z\ge0)=0.93$$

$$P\left(0\le Z\le\frac{36000-k}{60}\right)+0.5=0.93$$

$$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{36000-k}{60}\right)=0.43$$

이때 $P(0 \le Z \le 1.5)=0.43$이므로

$$\frac{36000-k}{60}=1.5$$

$\therefore k=35910$ ⋯➌

답 35910

채점 기준	비율
❶ 확률변수 X를 정하고 $E(X)$, $V(X)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ 확률변수 X를 표준화할 수 있다.	20 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	50 %

19 전략 주사위를 15번 던질 때 5 이상의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y로 놓는다.

풀이 주사위를 15번 던질 때 5 이상의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 4 이하의 눈이 나오는 횟수는 $15-Y$이므로

$X=2Y-3(15-Y)=5Y-45$ ⋯➊

주사위를 한 번 던질 때 5 이상의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로 Y는 이항분포 $B\left(15, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\therefore V(Y)=15\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$ ⋯➋

$\therefore V(X)=V(5Y-45)$

$=5^2V(Y)=25\cdot\frac{10}{3}=\frac{250}{3}$ ⋯➌

답 $\frac{250}{3}$

채점 기준	비율
❶ X를 Y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $V(Y)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $V(X)$를 구할 수 있다.	30 %

20 전략 추가된 부품 S의 개수를 확률변수 X로 놓고 그 분포를 표로 나타내어 본다.

풀이 추가된 부품 S의 개수를 확률변수 X라 하면 X가 이항분포 $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$P(X=x)={}_2C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}={}_2C_x\left(\frac{1}{2}\right)^2 \ (x=0,\ 1,\ 2)$$

$\therefore P(X=0)={}_2C_0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,

$P(X=1)={}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$,

$P(X=2)={}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X의 확률분포와 각 경우의 부품의 개수, 7개의 부품 중 임의로 1개를 선택한 것이 T일 확률을 표로 나타내면 다음과 같다.

	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
부품	S 3개 T 4개	S 4개 T 3개	S 5개 T 2개
선택한 것이 T일 확률	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$

7개의 부품 중에서 임의로 1개를 선택한 것이 T인 사건을 A, 추가된 부품이 모두 S인 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$,

$P(A\cap B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{7}=\frac{1}{14}$

$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{14}}{\frac{3}{7}}=\frac{1}{6}$

답 ①

21 전략 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 정규분포 곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 정규분포 곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고,

$P(X<a-5)=P(X>b+3)$이므로

$$\frac{(a-5)+(b+3)}{2}=m$$

$\therefore a+b=2m+2$ ⋯⋯ ㉠

또 확률변수 $Y=\frac{1}{2}X+3$의 평균이 45, 분산이 1이므로

$E(Y)=E\left(\frac{1}{2}X+3\right)=\frac{1}{2}E(X)+3$

$=\frac{1}{2}m+3=45$

$\therefore m=84$

$V(Y)=V\left(\frac{1}{2}X+3\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2V(X)$

$=\frac{1}{4}\sigma^2=1$

$\therefore \sigma=2\ (\because \sigma>0)$

㉠에 $m=84$를 대입하면 $a+b=170$

$\therefore a+b+\sigma=172$

답 ③

22 전략 세 확률변수 A, B, C를 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르는 확률변수로 각각 표준화하여 비교한다.

풀이 세 확률변수 A, B, C가 각각 정규분포 $N(3, 2^2)$, $N(4, 1^2)$, $N(10, 6^2)$을 따르므로

$$Z_A=\frac{A-3}{2},\ Z_B=\frac{B-4}{1},\ Z_C=\frac{C-10}{6}$$

으로 놓으면 세 확률변수 Z_A, Z_B, Z_C는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$\therefore a=\mathrm{P}(2\le A\le 4)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{2-3}{2}\le Z_A\le\frac{4-3}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z_A\le 0.5)$

$b=\mathrm{P}(4\le B\le 5)$

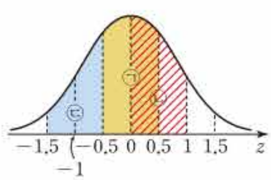
$=\mathrm{P}\left(\frac{4-4}{1}\le Z_B\le\frac{5-4}{1}\right)$

$=\mathrm{P}(0\le Z_B\le 1)$

$c=\mathrm{P}(1\le C\le 7)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{1-10}{6}\le Z_C\le\frac{7-10}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(-1.5\le Z_C\le -0.5)$



오른쪽 그림에서 세 확률 a, b, c를 나타내면 각각 ㉠, ㉡, ㉢의 넓이와 같고

(㉠의 넓이)>(㉡의 넓이)이므로

$a>b$

(㉡의 넓이)>(㉢의 넓이)이므로

$b>c$

$\therefore c<b<a$

답 ③

23 전략 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{6}\right)$을 따름을 이용한다.

풀이 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=n\cdot\frac{1}{6}=\frac{n}{6}$

$\mathrm{V}(X)=n\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5n}{36}$

따라서 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{n}{6},\ \left(\frac{\sqrt{5n}}{6}\right)^2\right)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-\frac{n}{6}}{\frac{\sqrt{5n}}{6}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}\left(\left|X-\frac{n}{6}\right|\le\frac{100}{9}\right)\ge 0.954$에서

$\mathrm{P}\left(-\frac{100}{9}\le X-\frac{n}{6}\le\frac{100}{9}\right)\ge 0.954$

$$\mathrm{P}\left(\frac{-\frac{100}{9}}{\frac{\sqrt{5n}}{6}}\le Z\le\frac{\frac{100}{9}}{\frac{\sqrt{5n}}{6}}\right)\ge 0.954$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\frac{100}{9}}{\frac{\sqrt{5n}}{6}}\right)\ge 0.477$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.477$이므로

$\dfrac{\frac{100}{9}}{\frac{\sqrt{5n}}{6}}\ge 2,\qquad \dfrac{200}{3\sqrt{5n}}\ge 2$

$\sqrt{5n}\le\frac{100}{3},\qquad 5n\le\frac{10000}{9}$

$\therefore n\le\frac{2000}{9}=222.222\cdots$

n은 자연수이므로 n의 최댓값은 222이다.

답 222

24 전략 사과의 무게와 1등급 상품의 개수를 각각 확률변수 X, Y라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(400,\ 50^2)$을 따르고, $\mathrm{P}(X\ge 442)=p$일 때 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ p)$를 따름을 이용한다.

풀이 사과의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(400,\ 50^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-400}{50}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(X\ge 442)=\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{442-400}{50}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_X\ge 0.84)$

$=\mathrm{P}(Z_X\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z_X\le 0.84)$

$=0.5-0.3$

$=0.2$

즉 이 과수원에서 임의로 사과 1개를 선택할 때, 1등급 상품일 확률은 0.2이다.

이때 100개 중 1등급 상품의 개수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ 0.2)$를 따르므로

$\mathrm{E}(Y)=100\times 0.2=20$

$\mathrm{V}(Y)=100\times 0.2\times 0.8=16$

따라서 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따르므로 $Z_Y=\frac{Y-20}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(Y\ge 24)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{24-20}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_Y\ge 1)$

$=\mathrm{P}(Z_Y\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z_Y\le 1)$

$=0.5-0.34$

$=0.16$

답 ②

Ⅲ. 통계

07 통계적 추정

01 모집단과 표본

확인

본책 121~123쪽

1 답 (1) 전수조사 (2) 표본조사
(3) 표본조사 (4) 전수조사

2 (1) $\mathrm{E}(\overline{X})=120$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{10}{\sqrt{25}}=2$

(2) $\mathrm{E}(\overline{X})=250$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{40}{\sqrt{100}}=4$

답 (1) 평균: 120, 표준편차: 2
(2) 평균: 250, 표준편차: 4

3 (1) $\mathrm{E}(\overline{X})=100$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{30}{\sqrt{100}}=3$

(2) 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 3^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{\overline{X}-100}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(97\le\overline{X}\le103)&=\mathrm{P}\left(\frac{97-100}{3}\le Z\le\frac{103-100}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le1)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=2\times0.3413\\&=0.6826\end{aligned}$$

답 (1) $\mathrm{E}(\overline{X})=100$, $\sigma(\overline{X})=3$ (2) 0.6826

유제

본책 124~125쪽

1 모평균이 50, 모분산이 $8^2=64$, 표본의 크기가 16이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=50$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{64}{16}=4$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\overline{X}^2)&=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2\\&=4+50^2\\&=2504\end{aligned}$$

답 2504

2 확률의 총합은 1이므로

$\dfrac{2}{5}+a+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10}=1$

$\therefore a=\dfrac{3}{10}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\cdot\dfrac{2}{5}+1\cdot\dfrac{3}{10}+2\cdot\dfrac{1}{5}+3\cdot\dfrac{1}{10}=1$

$\mathrm{V}(X)=0^2\cdot\dfrac{2}{5}+1^2\cdot\dfrac{3}{10}+2^2\cdot\dfrac{1}{5}+3^2\cdot\dfrac{1}{10}-1^2=1$

이때 표본의 크기가 5이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=1$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{1}{5}$

답 평균: 1, 분산: $\dfrac{1}{5}$

3 임의로 한 장의 카드를 꺼낼 때 카드에 적힌 수를 확률변수 X라 하고, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=2\cdot\dfrac{2}{7}+3\cdot\dfrac{3}{7}+4\cdot\dfrac{2}{7}=3$

$\mathrm{V}(X)=2^2\cdot\dfrac{2}{7}+3^2\cdot\dfrac{3}{7}+4^2\cdot\dfrac{2}{7}-3^2=\dfrac{4}{7}$

$\sigma(X)=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

이때 표본의 크기가 4이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=3$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\frac{2\sqrt{7}}{7}}{\sqrt{4}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

답 $\mathrm{E}(\overline{X})=3$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

4 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(80,\ \dfrac{12^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(80,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-80}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\le76)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{76-80}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le-1)=\mathrm{P}(Z\ge1)\\&=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

답 0.1587

5 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 16^2)$을 따르고 표본의 크기가 64이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(120,\ \dfrac{16^2}{64}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(120,\ 2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-120}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(118\le\overline{X}\le123)&=P\left(\frac{118-120}{2}\le Z\le\frac{123-120}{2}\right)\\&=P(-1\le Z\le1.5)\\&=P(-1\le Z\le0)+P(0\le Z\le1.5)\\&=P(0\le Z\le1)+P(0\le Z\le1.5)\\&=0.3413+0.4332\\&=0.7745\end{aligned}$$

답 0.7745

6 모집단이 정규분포 $N(135,\ 20^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(135,\ \frac{20^2}{16}\right)$, 즉 $N(135,\ 5^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-135}{5}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\ge145)&=P\left(Z\ge\frac{145-135}{5}\right)\\&=P(Z\ge2)\\&=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

답 0.0228

02 모평균의 추정

확인

본책 127쪽

1 표본의 크기는 144, 표본평균은 40, 모표준편차는 6이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$40-1.96\times\frac{6}{\sqrt{144}}\le m\le40+1.96\times\frac{6}{\sqrt{144}}$$

$$40-0.98\le m\le40+0.98$$

$$\therefore\ 39.02\le m\le40.98$$

신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$40-2.58\times\frac{6}{\sqrt{144}}\le m\le40+2.58\times\frac{6}{\sqrt{144}}$$

$$40-1.29\le m\le40+1.29$$

$$\therefore\ 38.71\le m\le41.29$$

답 풀이 참조

2 표본의 크기는 25, 모표준편차는 5이므로

(1) 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times1.96\times\frac{5}{\sqrt{25}}=3.92$$

(2) 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times2.58\times\frac{5}{\sqrt{25}}=5.16$$

답 (1) 3.92 (2) 5.16

유제

본책 128~129쪽

1 표본의 크기는 25, 표본평균은 54 kg, 모표준편차는 10 kg이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$54-1.96\times\frac{10}{\sqrt{25}}\le m\le54+1.96\times\frac{10}{\sqrt{25}}$$

$$54-3.92\le m\le54+3.92$$

$$\therefore\ 50.08\le m\le57.92$$

답 $50.08\le m\le57.92$

2 표본평균은 1200시간이고, 표본의 크기 400이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 40시간을 이용할 수 있다.
따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$1200-2.58\times\frac{40}{\sqrt{400}}\le m\le1200+2.58\times\frac{40}{\sqrt{400}}$$

$$1200-5.16\le m\le1200+5.16$$

$$\therefore\ 1194.84\le m\le1205.16$$

답 $1194.84\le m\le1205.16$

3 표본의 크기는 36, 모표준편차는 12 m이므로 신뢰도 95 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$2\times1.96\times\frac{12}{\sqrt{36}}=7.84$$

답 7.84

4 표본의 크기는 n, 모표준편차는 5 g이므로 신뢰도 99 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이가 0.3 이하가 되려면

$$2\times2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le0.3$$

$$\sqrt{n}\ge86$$

$$\therefore\ n\ge7396$$

따라서 n의 최솟값은 7396이다.

답 7396

5 표본의 크기가 144일 때, 신뢰도 99 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$2\cdot3\cdot\frac{8}{\sqrt{144}}=4$$

표본의 크기가 n일 때, 신뢰도 95 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$2\cdot2\cdot\frac{8}{\sqrt{n}}=\frac{32}{\sqrt{n}}$$

이때 두 신뢰구간의 길이가 같으므로

$$\frac{32}{\sqrt{n}}=4,\qquad \sqrt{n}=8$$

$$\therefore\ n=64$$

답 64

중단원 연습 문제

본책 130~133쪽

01 ④	02 $\frac{4}{3}$	03 ④	04 6	05 ②
06 762	07 ③	08 96	09 15	
10 $7.9\le m\le 8.1$	11 ①	12 1.29	13 ⑤	
14 ②	15 ④	16 $\frac{22}{3}$	17 ①	18 ②
19 330.94	20 ④			

01 전략 모평균이 m, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n이면 $E(\overline{X})=m$, $V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$임을 이용한다.

풀이 $E(\overline{X})=m$이므로 $\quad m=9$

$V(\overline{X})=\frac{6^2}{n}$이므로 $\quad \frac{6^2}{n}=1 \quad \therefore n=36$

$\therefore m+n=45$

답 ④

02 전략 확률의 총합은 1임을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{2}+a+\frac{1}{6}+a=1, \quad 2a=\frac{1}{3} \quad \therefore a=\frac{1}{6}$

따라서 모집단의 평균과 분산은

$E(X)=2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}+8\cdot\frac{1}{6}=4$

$V(X)=2^2\cdot\frac{1}{2}+4^2\cdot\frac{1}{6}+6^2\cdot\frac{1}{6}+8^2\cdot\frac{1}{6}-4^2=\frac{16}{3}$

$\therefore V(\overline{X})=\frac{V(X)}{4}=\frac{\frac{16}{3}}{4}=\frac{4}{3}$

답 $\frac{4}{3}$

03 전략 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n이면 표본평균의 표준편차는 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$임을 이용한다.

풀이 표본평균의 표준편차가 $\frac{2}{\sqrt{n}}$이므로

$\frac{2}{\sqrt{n}}\le 0.4, \quad \sqrt{n}\ge 5$

$\therefore n\ge 25$

따라서 n의 최솟값은 25이다.

답 ④

04 전략 상자에서 한 장의 카드를 꺼낼 때 카드에 적힌 수를 확률변수 X로 놓고 $V(X)$를 구한다.

풀이 상자에서 임의로 한 장의 카드를 꺼낼 때 카드에 적힌 수를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$E(X)=1\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{5}+5\cdot\frac{1}{5}=3$이므로

$V(X)=1^2\cdot\frac{1}{5}+2^2\cdot\frac{1}{5}+3^2\cdot\frac{1}{5}+4^2\cdot\frac{1}{5}+5^2\cdot\frac{1}{5}-3^2=2$ ⋯ ❶

즉 $V(\overline{X})=\frac{2}{n}$이고 $\sigma(\overline{X})=\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 $V(\overline{X})=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$이므로

$\frac{2}{n}=\frac{1}{3} \quad \therefore n=6$ ⋯ ❷

답 6

채점 기준	비율
❶ 확률변수 X를 정하고 $V(X)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	50 %

05 전략 모집단의 분포를 이용하여 표본평균의 분포를 파악한 후 표본평균을 표준화한다.

풀이 모집단이 정규분포 $N(400,\ 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(400,\ \frac{12^2}{9}\right)$, 즉 $N(400,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-400}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\le 390)&=P\left(Z\le\frac{390-400}{4}\right)\\&=P(Z\le -2.5)=P(Z\ge 2.5)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2.5)\\&=0.5-0.4938=0.0062\end{aligned}$$

답 ②

06 전략 9명의 몸무게의 합이 M kg 이상이면 경고음이 울린다.

풀이 모집단이 정규분포 $N(80,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(80,\ \frac{10^2}{9}\right)$, 즉 $N\left(80,\ \left(\frac{10}{3}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-80}{\frac{10}{3}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,1)$을 따른다. ⋯ ❶

9명의 몸무게의 합이 M kg 이상이면 경고음이 울리므로 경고음이 울리려면 $9\overline{X}\ge M$, 즉 $\overline{X}\ge\frac{M}{9}$이어야 한다. 이때 경고음이 울릴 확률이 0.08이므로

$P\left(\overline{X}\ge\frac{M}{9}\right)=0.08$ ⋯ ❷

$P\left(Z\ge\frac{\frac{M}{9}-80}{\frac{10}{3}}\right)=0.08, \quad P\left(Z\ge\frac{M}{30}-24\right)=0.08$

$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{M}{30}-24\right)=0.08$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{M}{30}-24\right)=0.08$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{M}{30}-24\right)=0.42$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.4)=0.42$이므로

$$\frac{M}{30}-24=1.4, \quad \frac{M}{30}=25.4$$

$$\therefore M=762$$ ···➌

답 762

채점 기준	비율
❶ 표본평균 $\overline{X}$를 표준화할 수 있다.	30 %
❷ 경고음이 울릴 확률에 대한 식을 세울 수 있다.	30 %
❸ M의 값을 구할 수 있다.	40 %

07 전략 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

풀이 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(100, 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(100, \frac{12^2}{n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(100, \left(\frac{12}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-100}{\frac{12}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\le 94)=0.0228$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\le \frac{94-100}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\right)=0.0228$$

$$\mathrm{P}\left(Z\le -\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.0228$$

$$\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.0228$$

$$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.0228$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.0228$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.4772$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{2}=2, \quad \sqrt{n}=4 \quad \therefore n=16$$ 답 ③

08 전략 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

풀이 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(90, 20^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(90, \frac{20^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(90, 4^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-90}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\ge k)=0.07$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{k-90}{4}\right)=0.07$$

$$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-90}{4}\right)=0.07$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-90}{4}\right)=0.07$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-90}{4}\right)=0.43$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.43$이므로

$$\frac{k-90}{4}=1.5, \quad k-90=6$$

$$\therefore k=96$$ 답 96

09 전략 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은 $\overline{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$임을 이용한다.

풀이 표본의 크기는 36, 표본평균은 100분, 모표준편차는 18분이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$100-2.58\times\frac{18}{\sqrt{36}}\le m\le 100+2.58\times\frac{18}{\sqrt{36}}$$

$$100-7.74\le m\le 100+7.74$$

$$\therefore 92.26\le m\le 107.74$$ ···➊

따라서 이 구간에 속하는 자연수 m은

93, 94, 95, $\cdots$, 107

의 15개이다. ···➋

답 15

채점 기준	비율
❶ 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 구할 수 있다.	80 %
❷ 신뢰구간에 속하는 자연수 m의 개수를 구할 수 있다.	20 %

10 전략 표본의 크기가 충분히 클 때, 모표준편차 대신 표본표준편차를 이용할 수 있다.

풀이 표본평균은 8 g이고, 표본의 크기 400이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 1 g을 이용할 수 있다.

이때 $\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.95$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$8-2\cdot\frac{1}{\sqrt{400}}\le m\le 8+2\cdot\frac{1}{\sqrt{400}}$$

$$\therefore 7.9\le m\le 8.1$$ 답 $7.9\le m\le 8.1$

11 전략 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은 $\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$임을 이용한다.

풀이 표본의 크기는 n, 모표준편차는 10이므로 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}$$

이것이 $38.08\le m\le 45.92$와 일치하므로

$$\overline{x}-1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}=38.08 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\overline{x}+1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}=45.92 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡−㉠을 하면

$$2\times1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}=7.84$$

$$\sqrt{n}=5 \qquad \therefore n=25$$

답 ①

12 전략 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간 $\overline{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$에서 모평균과 표본평균의 차는 $|m-\overline{x}|\le2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다.

풀이 표본의 크기는 36, 모표준편차는 3 g이므로 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-2.58\times\frac{3}{\sqrt{36}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{3}{\sqrt{36}} \quad \cdots ❶$$

$$\overline{x}-1.29\le m\le\overline{x}+1.29, \qquad -1.29\le m-\overline{x}\le1.29$$

$$\therefore |m-\overline{x}|\le1.29$$

따라서 모평균과 표본평균의 차의 최댓값은 1.29이다. ··· ❷

답 1.29

채점 기준	비율
❶ 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 구할 수 있다.	50 %
❷ 모평균과 표본평균의 차의 최댓값을 구할 수 있다.	50 %

13 전략 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$임을 이용한다.

풀이 표본의 크기는 n, 모표준편차는 5이므로 신뢰도 99 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이가 1 이하가 되려면

$$2\times2.5\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le1, \qquad \sqrt{n}\ge25$$

$$\therefore n\ge625$$

따라서 n의 최솟값은 625이다.

답 ⑤

14 전략 모표준편차를 σ, $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$로 놓고 신뢰구간의 길이를 식으로 나타낸다.

풀이 모표준편차를 σ, $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 표본의 크기가 16일 때, 신뢰구간의 길이가 6이므로

$$2\times k\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}=6 \qquad \therefore k\sigma=12$$

신뢰구간의 길이가 3이 되도록 하는 표본의 크기를 n이라 하면

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=3, \qquad \frac{2\cdot12}{\sqrt{n}}=3$$

$$\sqrt{n}=8 \qquad \therefore n=64$$

따라서 구하는 표본의 크기는 64이다.

답 ②

15 전략 k, n의 값의 변화에 따른 신뢰구간의 길이 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값의 변화를 살펴본다.

풀이 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 신뢰도 α %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\text{단, } \mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$$

ㄱ. 표본의 크기가 일정할 때, 신뢰도를 높이면 k의 값이 커지므로 신뢰구간의 길이는 길어진다.

ㄴ. 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기를 크게 하면 $\sqrt{n}$의 값이 커지므로 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

ㄷ. 신뢰도를 낮추면 k의 값이 작아지고, 표본의 크기를 크게 하면 $\sqrt{n}$의 값이 커지므로 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

16 전략 표본평균 $\overline{X}$를 표준화한 후 $\mathrm{P}(-2\le Z\le0)=0.4772$임을 이용한다.

풀이 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m, 25^2)$을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{25^2}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)$을 따른다. ··· ❶

$Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{5}{2}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}\left(\overline{X}\ge\frac{7}{3}\right)\ge0.9772$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{\frac{7}{3}-m}{\frac{5}{2}}\right)\ge0.9772 \quad \cdots ❷$$

$$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{14}{15}-\frac{2}{5}m\right)\ge0.9772$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{14}{15}-\frac{2}{5}m\le Z\le0\right)+\mathrm{P}(Z\ge0)\ge0.9772$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{14}{15}-\frac{2}{5}m\le Z\le0\right)+0.5\ge0.9772$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{14}{15}-\frac{2}{5}m\le Z\le0\right)\ge0.4772$$

이때 $\mathrm{P}(-2\le Z\le0)=\frac{1}{2}\times0.9544=0.4772$이므로

$$\frac{14}{15}-\frac{2}{5}m\le-2 \qquad \therefore m\ge\frac{22}{3}$$

07 통계적 추정

따라서 m의 최솟값은 $\frac{22}{3}$이다. ···➌

답 $\frac{22}{3}$

채점 기준	비율
➊ 표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구할 수 있다.	20 %
➋ $P\left(\overline{X}\ge\frac{7}{3}\right)$을 표준화하여 나타낼 수 있다.	30 %
➌ m의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

17 전략 표본평균 $\overline{X}$, $\overline{Y}$의 분포를 파악하여 각각 표준화한다.

풀이 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(50,\ \frac{8^2}{16}\right)$, 즉 $N(50,\ 2^2)$을 따르고, 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $N\left(75,\ \frac{\sigma^2}{25}\right)$, 즉 $N\left(75,\ \left(\frac{\sigma}{5}\right)^2\right)$을 따르므로 $Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-50}{2}$, $Z_{\overline{Y}}=\frac{\overline{Y}-75}{\frac{\sigma}{5}}$로 놓으면 두 확률변수 $Z_{\overline{X}}$, $Z_{\overline{Y}}$는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(\overline{X}\le 53)+P(\overline{Y}\le 69)=1$에서

$$P\left(Z_{\overline{X}}\le\frac{53-50}{2}\right)+P\left(Z_{\overline{Y}}\le\frac{69-75}{\frac{\sigma}{5}}\right)=1$$

$$P(Z_{\overline{X}}\le 1.5)+P\left(Z_{\overline{Y}}\le-\frac{30}{\sigma}\right)=1$$

$$\therefore P(Z_{\overline{X}}\le 1.5)+P\left(Z_{\overline{Y}}\ge\frac{30}{\sigma}\right)=1$$

즉 $\frac{30}{\sigma}=1.5$이므로 $\sigma=20$

$$\begin{aligned}\therefore P(\overline{Y}\ge 71)&=P\left(Z_{\overline{Y}}\ge\frac{71-75}{4}\right)\\&=P(Z_{\overline{Y}}\ge -1)\\&=P(Z_{\overline{Y}}\le 1)\\&=P(Z_{\overline{Y}}\le 0)+P(0\le Z_{\overline{Y}}\le 1)\\&=0.5+0.3413\\&=0.8413\end{aligned}$$

답 ①

18 전략 $P\left(|\overline{X}-m|\le\frac{\sigma}{4}\right)=0.9876$임을 이용한다.

풀이 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르므로 $Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P\left(|\overline{X}-m|\le\frac{\sigma}{4}\right)=0.9876$에서

$$P\left(-\frac{\sigma}{4}\le\overline{X}-m\le\frac{\sigma}{4}\right)=0.9876$$

$$P\left(-\frac{\frac{\sigma}{4}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{\frac{\sigma}{4}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)=0.9876$$

$$P\left(-\frac{\sqrt{n}}{4}\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{4}\right)=0.9876$$

$$2P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{4}\right)=0.9876$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{4}\right)=0.4938$$

이때 $P(0\le Z\le 2.5)=0.4938$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{4}=2.5,\quad \sqrt{n}=10$

$\therefore n=100$

답 ②

19 전략 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은 $\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$임을 이용한다.

풀이 표본의 크기는 144, 표본평균은 310분이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$310-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{144}}\le m\le 310+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{144}}$$

이것이 $307.06\le m\le a$와 일치하므로

$$310-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{144}}=307.06$$

$1.96\times\frac{\sigma}{12}=2.94\qquad\therefore \sigma=18$

따라서 $a=310+1.96\times\frac{18}{\sqrt{144}}=312.94$이므로

$a+\sigma=330.94$

답 330.94

20 전략 $P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$임을 이용한다.

풀이 $P(-k\le Z\le k)=0.7960$이라 하면

$2P(0\le Z\le k)=0.7960,\qquad P(0\le Z\le k)=0.3980$

$\therefore k=1.27$

따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 79.6 %의 신뢰구간의 길이 l은

$$l=2\times1.27\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2.54\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

또 $P(-t\le Z\le t)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이 $2l$은

$$2l=2t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\qquad\therefore l=t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\qquad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $t=2.54$이므로

$$\begin{aligned}P(-2.54\le Z\le 2.54)&=2P(0\le Z\le 2.54)\\&=2\times0.4945\\&=0.9890\end{aligned}$$

즉 $\frac{\alpha}{100}=0.9890$이므로

$\alpha=98.9$

답 ④