정답 및 풀이

고등 수학(하)

Ⅴ 집합과 명제

Ⅵ 함수

Ⅶ 순열과 조합

● 정답을 확인하려고 할 때에는 〈빠른 정답 찾기〉를 이용하면 편리합니다.

13 집합의 뜻과 표현

V. 집합과 명제

0001 답 ○

0002 답 ○

0003 답 ×

0004 답 수성, 금성, 지구, 화성, 목성, 토성, 천왕성, 해왕성

0005 답 2, 4

0006 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9\}$이고, $-2^2=-4$이므로
$-2^2\ \boxed{\notin}\ A$ 답 $\notin$

0007 $(-3)^2=9$이므로 $(-3)^2\ \boxed{\in}\ A$ 답 $\in$

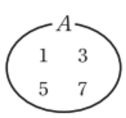
0008 답 {s, t, u, d, y}

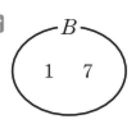
0009 답 $\{6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

0010 답 $\{x|x$는 8 이하의 자연수$\}$

참고 $\{x|x$는 9보다 작은 자연수$\}$, $\{x|x$는 9 미만의 자연수$\}$ 등으로 답할 수 도 있다.

0011 답 $\{x|x$는 5 이상의 홀수$\}$

0012 답


0013 답


0014 답 무

0015 답 유

0016 답 유

0017 답 무

0018 100 이하의 5의 양의 배수는
5, 10, 15, $\cdots$, 100
이므로 주어진 집합은 유한집합이다. 답 유

0019 9로 나누어떨어지는 자연수는
9, 18, 27, $\cdots$
따라서 주어진 집합은 무한집합이다. 답 무

0020 실수 x에 대하여 $x^2\ge0$이므로 $x^2+1=0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다.
따라서 주어진 집합은 공집합이므로 유한집합이다. 답 유

0021 $|x|>0$인 정수 x는 0을 제외한 모든 정수이므로 주어진 집합은 무한집합이다. 답 무

0022 ㄷ. 2로 나누어떨어지는 홀수는 존재하지 않으므로 주어진 집합은 공집합이다.
ㄹ. $0<x<1$인 자연수 x는 존재하지 않으므로 주어진 집합은 공집합이다.
ㅁ. $\{4\}$
이상에서 공집합인 것은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ㄷ, ㄹ

0023 답 3

0024 답 25

0025 $|x|\le2$에서 $-2\le x\le2$
따라서 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$의 5개
$\therefore n(A)=5$ 답 5

0026 $x^2=2$를 만족시키는 자연수 x는 존재하지 않는다.
$\therefore n(A)=0$ 답 0

0027 12의 양의 약수는 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12$의 6개
$\therefore n(A)=6$ 답 6

0028 답 0

0029 답 $\subset$

0030 답 $\not\subset$

0031 답 $\subset$

0032 답 $\subset$

0033 ㄷ. $B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$이므로 $A\subset B$
ㄹ. $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots\}$, $B=\{4,\ 8,\ 12,\ \cdots\}$이므로
$A\not\subset B$
이상에서 $A\subset B$인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

0034 답 ㄷ, ㄹ

0035 답 $\varnothing$

0036 답 $\{a\}$, $\{b\}$

0037 답 $\{a,\ b\}$

0038 답 $\varnothing$, $\{5\}$

0039 답 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{1,\ 2,\ 3\}$

0040 주어진 집합을 원소나열법으로 나타내면
$\{1,\ 3,\ 9\}$
이므로 구하는 부분집합은
$\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{9\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{1,\ 9\}$, $\{3,\ 9\}$, $\{1,\ 3,\ 9\}$
답 풀이 참조

0041 $x^2=4$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$
따라서 주어진 집합을 원소나열법으로 나타내면
$\{-2,\ 2\}$
이므로 구하는 부분집합은
$\varnothing$, $\{-2\}$, $\{2\}$, $\{-2,\ 2\}$
답 $\varnothing$, $\{-2\}$, $\{2\}$, $\{-2,\ 2\}$

0042 답 $A=B$

0043 $B=\{4, 8, 12, \cdots\}$이므로 $A\neq B$ 답 $A\neq B$

0044 $A=\{1, 3, 5, 7\}$이므로 $A\neq B$ 답 $A\neq B$

0045 $|x|=1$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ $\therefore A=\{-1, 1\}$
$x^2=1$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ $\therefore B=\{-1, 1\}$
$\therefore A=B$ 답 $A=B$

0046 답 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$

0047 주어진 집합을 원소나열법으로 나타내면
$\{1, 2, 4\}$
이므로 구하는 진부분집합은
$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$
답 풀이 참조

0048 $2^4=16$ 답 16

0049 주어진 집합을 원소나열법으로 나타내면
$\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
이므로 구하는 부분집합의 개수는 $2^6=64$ 답 64

0050 $2^3=8$ 답 8

0051 $2^3-1=7$ 답 7

0052 $2^{3-1}=2^2=4$ 답 4

0053 $2^{3-1}=2^2=4$ 답 4

라쎈 특강 부분집합의 개수

집합 $A=\{a, b, c\}$의 부분집합 중에서
① a를 원소로 갖지 않는 집합은 집합 $\{b, c\}$의 부분집합과 같으므로 그 개수는
$2^2=4$
② a를 반드시 원소로 갖는 집합은 집합 $\{b, c\}$의 부분집합에 각각 원소 a를 추가한 집합과 같다.
따라서 그 개수는 집합 $\{b, c\}$의 부분집합의 개수와 같으므로
$2^2=4$
일반적으로 원소의 개수가 n인 집합의 부분집합 중에서 특정한 $k(k<n)$개를 반드시 원소로 갖거나 원소로 갖지 않는 집합의 개수는 n개의 원소 중에서 k개의 원소를 제외한 집합의 부분집합의 개수 2^{n-k}과 같다.

0054 ①, ②, ③, ④ '큰', '가까운', '잘하는', '소질이 있는'은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다. 답 ⑤

0055 ② '목소리가 큰'은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다. 답 ②

참고 '높은'은 조건이 명확하지 않지만 '가장 높은'은 조건이 명확하다. 따라서 ⑤는 집합이다.

0056 $A=\{5, 10, 15, \cdots\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$
① $1\notin A$ ② $6\notin A$
③ $30\in A$ ⑤ $4\notin B$
답 ④

0057 ① $\sqrt{9}=3$이므로 $\sqrt{9}\in Z$
②, ④ $\sqrt{8}$, $\sqrt{2}+1$은 모두 무리수이므로
$\sqrt{8}\notin Q$, $\sqrt{2}+1\in R$
③, ⑤ $\frac{1}{2-i}=\frac{2+i}{5}$, $\frac{1-i}{1+i}=-i$에서 두 수는 모두 허수이므로
$\frac{1}{2-i}\notin Q$, $\frac{1-i}{1+i}\notin R$
답 ⑤

0058 ① $2015=3\cdot 671+2$이므로 $2015\notin A_1$, $2015\in A_2$
② $2016=3\cdot 672$이므로 $2016\in A_0$
③ $2017=3\cdot 672+1$이므로 $2017\notin A_2$, $2017\in A_1$
④ $2018=3\cdot 672+2$이므로 $2018\notin A_1$, $2018\in A_2$
⑤ $2019=3\cdot 673$이므로 $2019\in A_0$
답 ③

0059 ① $A=\{1, 2, 3, 6\}$
② $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
③ $A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
④ $A=\{3, 6, 9, 12\}$
⑤ $A=\{6, 12\}$
답 ②

0060 ⑤ $\{x\,|\,x$는 100 미만의 2의 양의 배수$\}$
➡ $\{2, 4, 6, \cdots, 98\}$ 답 ⑤

0061 ①, ②, ③, ⑤ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
④ $\{1, 3, 5, 9\}$ 답 ④

0062 (1)

a \ b	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

··· ❶

(2) $X=\{-1, 0, 1\}$ ··· ❷

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 표를 완성할 수 있다.	50 %
❷ 집합 X를 구할 수 있다.	50 %

0063 ① 무한집합
② $\{1, 2, 3, \cdots\}$ ⇨ 무한집합
③ $\{0\}$ ⇨ 유한집합
④ $\{102, 104, 106, \cdots\}$ ⇨ 무한집합
⑤ $\{3, 6, 9, \cdots\}$ ⇨ 무한집합

답 ③

0064 $A=\{11, 13, 15, \cdots\}$ ⇨ 무한집합
$B=\{1, 5\}$ ⇨ 유한집합
$C=\{2, 4, 6, \cdots, 30\}$ ⇨ 유한집합
$D=\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\right\}$ ⇨ 무한집합
$E=\{4, 8, 12, \cdots, 48\}$ ⇨ 유한집합
이상에서 무한집합인 것은 A, D의 2개이다. 답 ②

0065 ② $\{3\}$ 답 ②

0066 $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{11, 22, 33, \cdots, 99\}$
따라서 $n(A)=5$, $n(B)=9$이므로
$n(B)-n(A)=4$ 답 4

0067 ④ $n(\{1\})=1$, $n(\{2\})=1$이므로
$n(\{1\})=n(\{2\})$
⑤ $n(\varnothing)=0$, $n(\{\varnothing\})=1$이므로
$n(\varnothing)-n(\{\varnothing\})=-1$

답 ⑤

0068 집합 A의 원소 x, 집합 B의 원소 y에 대하여 xy의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	5	10
0	0	0
1	5	10
2	10	20

$C=\{0, 5, 10, 20\}$
$\therefore n(C)=4$ 답 4

0069 ㄱ. 집합 A의 원소는 $\varnothing$이므로 $n(A)=1$
ㄴ. $n(\{2, 3\})=2$, $n(\{3\})=1$이므로
$n(\{2, 3\})-n(\{3\})=1$
ㄷ. $n(\varnothing)=0$이므로 $n(B)=0$
따라서 집합 B는 원소가 하나도 없으므로
$B=\varnothing$
이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

0070 $A=\{2, 4, 6, 8\}$이므로 $n(A)=4$
이때 $n(A)=n(B)$이므로 $n(B)=4$ ··· ❶
즉 k의 양의 약수의 개수가 4이어야 한다.
1, 2, 3, 4, 5, 6의 양의 약수의 개수는 각각
1, 2, 2, 3, 2, 4
이므로 가장 작은 자연수 k의 값은 6이다. ··· ❷
답 6

채점 기준	비율
❶ $n(B)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ 가장 작은 자연수 k의 값을 구할 수 있다.	70 %

참고 양의 약수의 개수가 4인 자연수는
① (소수)×(소수) 꼴인 경우: 2×3, 2×5, 2×7, $\cdots$
② (소수)^3 꼴인 경우: 2^3, 3^3, 5^3, $\cdots$

0071 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
⑤ $8\notin A$이므로 $\{2, 8, 12\}\not\subset A$ 답 ⑤

0072 ① $2\in A$ 또는 $\{2\}\subset A$
③ $4\in A$ 또는 $\{4\}\subset A$
⑤ $A\subset B$
답 ②, ④

0073 ⑤ $1\in A$, $\{2\}\in A$이므로 $\{1, \{2\}\}\subset A$
답 ⑤

0074 ① $4\in A$, $4\notin B$이므로 $A\not\subset B$
② $c\in A$, $c\notin B$이므로 $A\not\subset B$
③ $A=\{1, 3, 9\}$, $B=\{1, 3\}$
$9\in A$, $9\notin B$이므로 $A\not\subset B$
④ $A=\{5, 10, 15, \cdots\}$, $B=\{10, 20, 30, \cdots\}$
$5\in A$, $5\notin B$이므로 $A\not\subset B$
⑤ $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로
$A\subset B$ 답 ⑤

0075 답 ①

0076 $A=\{1, 2, 4, 8, 16\}$이고, 주어진 벤다이어그램에서 $B\subset A$이므로 k는 16의 양의 약수이어야 한다. ··· ❶
따라서 한 자리 자연수 k는
1, 2, 4, 8
의 4개이다. ··· ❷
답 4

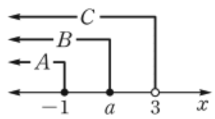
채점 기준	비율
❶ k의 조건을 구할 수 있다.	70 %
❷ k의 개수를 구할 수 있다.	30 %

0077 $A\subset B$가 성립하려면 $4\in B$이어야 하므로
$a+1=4$ 또는 $3a-8=4$
$\therefore a=3$ 또는 $a=4$
따라서 구하는 a의 값의 합은 $3+4=7$ 답 ③

참고 $a=3$일 때, $B=\{0, 1, 2, 4\}$이므로 $A\subset B$
$a=4$일 때, $B=\{0, 2, 4, 5\}$이므로 $A\subset B$

0078 $A\subset B\subset C$이면 $A\subset B$이고 $B\subset C$이다.
$A\subset B$가 성립하려면 $2\in B$이어야 하므로
$a=2$
또 $B\subset C$가 성립하려면 $4\in C$이어야 하므로
$b=4$
$\therefore a+b=6$ 답 6

0079 $A \subset B \subset C$가 성립하도록 세 집합 A, B, C를 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

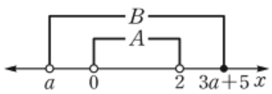


$-1 \le a < 3$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1, 2의 4개이다.

답 ②

0080 $A \subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a \le 0$, $3a+5 \ge 2$

$3a+5 \ge 2$에서 $\quad 3a \ge -3 \quad \therefore a \ge -1$

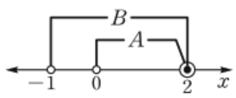
따라서 $-1 \le a \le 0$이므로 a의 최솟값은 -1이다.

답 -1

참고 $a=-1$일 때,

$A=\{x \mid 0<x<2\}$, $B=\{x \mid -1<x \le 2\}$

이므로 $A \subset B$가 성립한다.



0081 $A \subset B$가 성립하려면 $-2 \in B$이어야 한다. ··· ❶

(i) $a=-2$일 때,

$A=\{-2, 2\}$, $B=\{-2, -1, 0, 2\}$이므로

$A \subset B$

(ii) $a+1=-2$, 즉 $a=-3$일 때,

$A=\{-2, 7\}$, $B=\{-3, -2, -1, 2\}$이므로

$A \not\subset B$

(iii) $a+2=-2$, 즉 $a=-4$일 때,

$A=\{-2, 14\}$, $B=\{-4, -3, -2, 2\}$이므로

$A \not\subset B$ ··· ❷

이상에서 $\quad B=\{-2, -1, 0, 2\}$ ··· ❸

답 $\{-2, -1, 0, 2\}$

채점 기준	비율
❶ $-2 \in B$임을 알 수 있다.	20 %
❷ $a=-2$, -3, -4일 때, $A \subset B$가 성립하는지 확인할 수 있다.	60 %
❸ 집합 B를 구할 수 있다.	20 %

0082 ① $A=\{-1, 0, 1\}$이므로 $\quad n(A)=3$

② 원소가 1개인 A의 부분집합은

$\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$의 3개

③ 원소가 2개인 A의 부분집합은

$\{-1, 0\}$, $\{-1, 1\}$, $\{0, 1\}$의 3개

④ 1을 원소로 갖는 A의 부분집합은

$\{1\}$, $\{-1, 1\}$, $\{0, 1\}$, $\{-1, 0, 1\}$의 4개

⑤ 음수인 원소를 갖는 A의 부분집합은

$\{-1\}$, $\{-1, 0\}$, $\{-1, 1\}$, $\{-1, 0, 1\}$의 4개

답 ④

0083 $A=\{9, 18, 27, 36\}$ ··· ❶

집합 B는 A의 부분집합 중에서 원소가 2개인 집합이므로

$\{9, 18\}$, $\{9, 27\}$, $\{9, 36\}$, $\{18, 27\}$, $\{18, 36\}$, $\{27, 36\}$

의 6개이다. ··· ❷

답 6

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 집합 B의 개수를 구할 수 있다.	70 %

0084 $\varnothing$은 모든 집합의 부분집합이므로 $\quad \varnothing \subset A$

$\varnothing \in A$, $\{\varnothing\} \in A$이므로

$\{\varnothing\} \subset A$, $\{\{\varnothing\}\} \subset A$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \subset A$

따라서 집합 A의 부분집합을 모두 구하면

$\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

답 $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

0085 $A=B$에서 $0 \in A$, $5 \in B$이므로

$a+2b=0$, $2a-b=5$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=2$, $b=-1$

$\therefore a+b=1$

답 1

0086 ② $A=\varnothing$, $B=\{1\}$이므로 $\quad A \ne B$

③ $A=\{3, 4, 5\}$, $B=\{3, 4\}$이므로 $\quad A \ne B$

④ $A=\{1, 3\}$, $B=\{1, 3\}$이므로 $\quad A=B$

⑤ $A=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$, $B=\{4, 8, 12, 16\}$이므로

$A \ne B$

답 ④

0087 $A \subset B$이고 $B \subset A$이므로

$B=A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

$\therefore n(B)=6$

답 6

0088 $A=\{5, 10, 15, 20\}$이고 $A=B$이므로

$a-1=10$, $5b+10=15$ 또는 $a-1=15$, $5b+10=10$

$\therefore a=11$, $b=1$ 또는 $a=16$, $b=0$

그런데 $b \ne 0$이므로 $\quad a=11$, $b=1$

$\therefore ab=11$

답 ④

0089 $A \subset B$이고 $B \subset A$이므로 $\quad A=B$ ··· ❶

따라서 $1 \in A$이므로 $x^2+4x-a=0$에 $x=1$을 대입하면

$1+4-a=0 \quad \therefore a=5$ ··· ❷

방정식 $x^2+4x-5=0$에서 $\quad (x+5)(x-1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=1$

즉 $A=\{-5, 1\}$이므로

$b=-5$ ··· ❸

$\therefore a-b=10$ ··· ❹

답 10

채점 기준	비율
❶ $A=B$임을 알 수 있다.	20 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

다른풀이 $A=B$에서 이차방정식 $x^2+4x-a=0$의 두 근이 1, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+b=-4$, $b=-a$

$\therefore a=5, b=-5$
$\therefore a-b=10$

라쎈 특강 이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β일 때,

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

0090 $A=B$이므로 $\quad x^2-1=3, \quad x^2=4$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$
(i) $x=-2$일 때,
$A=\{-8, -2, 3\}$, $B=\{2, 3, 4\}$이므로
$A\neq B$
(ii) $x=2$일 때,
$A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{2, 3, 4\}$이므로
$A=B$
(i), (ii)에서 $\quad x=2$

답 2

0091 ㄱ. $\varnothing\subset\{1, 2, 3, 4\}$, $\varnothing\neq\{1, 2, 3, 4\}$
ㄴ. $\{x|x$는 $0<x<4$인 자연수$\}=\{1, 2, 3\}$이므로
$\{1, 2, 3\}\subset\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3\}\neq\{1, 2, 3, 4\}$
ㄷ. $\{x|x$는 4 이하의 자연수$\}=\{1, 2, 3, 4\}$
ㄹ. $\{x|x$는 2의 양의 약수$\}=\{1, 2\}$이므로
$\{1, 2\}\subset\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2\}\neq\{1, 2, 3, 4\}$
이상에서 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$의 진부분집합인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

0092 $x^2-6x+5<0$에서
$(x-1)(x-5)<0 \quad \therefore 1<x<5$
$\therefore A=\{2, 3, 4\}$ ··· ❶
따라서 A의 진부분집합은
$\varnothing$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$ ··· ❷

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ 집합 A의 진부분집합을 구할 수 있다.	50 %

0093 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
1을 제외한 A의 모든 원소가 X의 원소일 때 $S(X)$의 값이 최대이므로 구하는 최댓값은
$2+3+4+6+12=27$

답 27

0094 ① 원소의 개수가 3이므로 부분집합의 개수는
$2^3=8$
② $\{2, 3, 5, 7, 11\}$에서 원소의 개수가 5이므로 부분집합의 개수는
$2^5=32$
③ $\{1, 3, 5\}$에서 원소의 개수가 3이므로 부분집합의 개수는
$2^3=8$
④ $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$에서 원소의 개수가 8이므로 부분집합의 개수는 $\quad 2^8=256$
⑤ $\{1, 2, 3, \cdots, 32\}$에서 원소의 개수가 32이므로 부분집합의 개수는 $\quad 2^{32}$

답 ②

0095 $n(A)=k$라 하면
$2^k=16=2^4 \quad \therefore k=4$

답 4

0096 $f(x)=x^3-2x^2-x+2$라 하면
$f(1)=1-2-1+2=0$
이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-x-2)$
$=(x+1)(x-1)(x-2)$
따라서 방정식 $f(x)=0$의 해는
$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$
이므로 $\quad A=\{-1, 1, 2\}$
따라서 $n(A)=3$이므로 진부분집합의 개수는
$2^3-1=7$

답 ④

0097 집합 A의 원소 a, b에 대하여 ab의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

$a \backslash b$	-1	0	1	2
-1	1	0	-1	-2
0	0	0	0	0
1	-1	0	1	2
2	-2	0	2	4

$B=\{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$ ··· ❶
따라서 집합 B의 원소의 개수가 6이므로 부분집합의 개수는
$2^6=64$ ··· ❷

답 64

채점 기준	비율
❶ 집합 B를 구할 수 있다.	60 %
❷ 집합 B의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	40 %

0098 $A=\{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$
A의 부분집합 중에서 4, 16을 반드시 원소로 갖고, 12를 원소로 갖지 않는 집합의 개수는
$2^{6-2-1}=2^3=8$

답 ③

0099 X는 A의 진부분집합이고, 1, 3을 반드시 원소로 가지므로 집합 X의 개수는
$2^{5-2}-1=2^3-1=7$

답 7

0100 $A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
조건 (가), (나)에서 집합 B는 공집합이 아닌 집합 A의 부분집합이고, 조건 (다)에 의하여 1, 3, 9를 원소로 갖지 않으므로 집합 B의 개수는
$2^{6-3}-1=7$

답 7

0101 $A=\{1, 2, 3, \cdots, k\}$에서 $\quad n(A)=k$
A의 부분집합 중에서 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수가 16이므로
$2^{k-2}=16=2^4, \quad k-2=4$
$\therefore k=6$

답 6

0102 (1) $2x^2-5x-12<0$에서 $(2x+3)(x-4)<0$

$\therefore -\frac{3}{2}<x<4$ ⋯ ❶

이때 x는 정수이므로

$A=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ⋯ ❷

(2) 음수 -1을 포함하지 않는 집합 A의 부분집합의 개수는

$2^{5-1}=2^4=16$ ⋯ ❸

답 (1) $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ (2) 16

채점 기준	비율
❶ $2x^2-5x-12<0$의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ 음수를 포함하지 않는 집합 A의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	40 %

0103 $x^2-5x+6=0$에서 $(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

$\therefore A=\{2, 3\}$

$B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$이므로 집합 X는 집합 B의 부분집합 중에서 2, 3을 반드시 원소로 갖는 집합과 같다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{8-2}=2^6=64$ 답 ⑤

라쎈 특강 포함 관계를 만족시키는 집합의 개수

두 집합 A, B에 대하여 $n(A)=a$, $n(B)=b$일 때, $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수는

2^{b-a}(단, $a<b$)

0104 집합 X는 집합 $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$의 부분집합 중에서 1, 3을 반드시 원소로 갖는 집합과 같다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$ 답 16

0105 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 15\}$, $B=\{3, 6, 9, 12, 15\}$

따라서 집합 X는 집합 A의 부분집합 중 3, 6, 9, 12, 15를 반드시 원소로 갖는 집합에서 A, B를 제외한 것과 같으므로 구하는 집합 X의 개수는

$2^{15-5}-2=2^{10}-2=1022$ 답 1022

0106 $A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$의 부분집합 중에서 집합 $\{3, 9, 15\}$의 부분집합을 제외하면 되므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^6-2^3=64-8=56$ 답 56

0107 $A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$의 부분집합 중에서 집합 $\{1, 7, 9, 11\}$의 부분집합을 제외하면 되므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^6-2^4=64-16=48$ 답 ⑤

다른풀이 3 또는 5를 원소로 갖는 집합은 집합 $\{1, 7, 9, 11\}$의 부분집합에 3만 추가하거나 5만 추가하거나 3, 5를 모두 추가하면 된다.

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$2^4\cdot 3=48$

0108 전략 먼저 집합 A를 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 $x=1, 2, 3, 4$이므로 $A=\{1, 6, 11, 16\}$

따라서 집합 A의 모든 원소의 합은

$1+6+11+16=34$ 답 34

0109 전략 주어진 벤다이어그램을 보고 두 집합 A, B를 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$

⑤ $\{2, 4, 8\}\subset B$ 답 ⑤

0110 전략 두 집합 A, B를 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 $A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{1, 3, 9\}$

① $6\in A$ 또는 $\{6\}\subset A$

② $\{2, 3\}\subset A$

③ $9\in B$, $9\notin A$이므로 $B\not\subset A$

④, ⑤ $n(A)=4$, $n(B)=3$이므로

$n(A)>n(B)$, $n(B)-n(A)=-1$

답 ④

0111 전략 주어진 벤다이어그램을 보고 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 파악한다.

풀이 주어진 벤다이어그램에서 $A\subset B$

① $1\in A$, $1\notin B$이므로 $A\not\subset B$

② $\frac{1}{2}\in A$, $\frac{1}{2}\notin B$이므로 $A\not\subset B$

③ $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{1, 2, 3, 4\}$

$5\in A$, $5\notin B$이므로 $A\not\subset B$

④ $A=\{3, 6, 9, 12\}$, $B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

$12\in A$, $12\notin B$이므로 $A\not\subset B$

⑤ 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $A\subset B$ 답 ⑤

0112 전략 원소가 n개인 집합의 진부분집합의 개수는 2^n-1이다.

풀이 $A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$이므로 집합 A의 진부분집합의 개수는

$2^8-1=255$ 답 255

0113 전략 $q=1, 2, 3, 4, 5$일 때 각각의 약수를 생각한다.

풀이 집합 X의 원소 (p, q)는

(i) $q=1$일 때, $(1, 1)$

(ii) $q=2$일 때, $(1, 2)$, $(2, 2)$

(iii) $q=3$일 때, $(1, 3)$, $(3, 3)$

(iv) $q=4$일 때, $(1, 4)$, $(2, 4)$, $(4, 4)$

(v) $q=5$일 때, $(1, 5)$, $(5, 5)$

이상에서 집합 X의 원소의 개수는 10이다. 답 10

0114 전략 $X=\{2, 5, a, b\}$로 놓고, a, b 사이의 관계식을 구한다.

풀이 조건 ㈎, ㈏에서 $2\in X$, $5\in X$이고 $n(X)=4$이므로

$X=\{2, 5, a, b\}$

라 하자. 조건 ㈐에서 집합 X의 원소의 총합이 15이므로

$2+5+a+b=15$

$\therefore a+b=8$ ⋯ ❶

조건 ㈑에서 원소 중 7의 배수가 한 개 있으므로 $a=7$이라 하면

$b=8-7=1$

$\therefore X=\{1, 2, 5, 7\}$ ⋯ ❷

답 $\{1, 2, 5, 7\}$

채점 기준	비율
❶ 집합 X의 2, 5를 제외한 나머지 원소의 합을 구할 수 있다.	50 %
❷ 집합 X를 구할 수 있다.	50 %

0115 전략 두 집합 B, C를 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 집합 A의 원소 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	-1	0	1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2

$B=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$(-1)^2=1$, $0^2=0$, $1^2=1$이므로

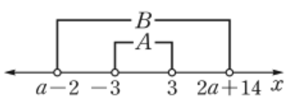
$C=\{0, 1\}$

$\therefore C\subset A\subset B$

답 ④

0116 전략 두 집합 A, B를 수직선에 나타낸다.

풀이 $A\subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a-2\le -3$, $2a+14\ge 3$ ⋯ ❶

$a\le -1$, $a\ge -\dfrac{11}{2}$

$\therefore -\dfrac{11}{2}\le a\le -1$ ⋯ ❷

따라서 정수 a의 최댓값은 -1, 최솟값은 -5이므로 구하는 합은 -6이다. ⋯ ❸

답 -6

채점 기준	비율
❶ 수직선을 이용하여 a에 대한 조건을 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ 정수 a의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0117 전략 $n(A)$는 집합 A의 원소의 개수를 뜻한다.

풀이 ① $A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2\}$이면 $A\subset B$이지만 $n(A)=n(B)$이다.

③ $A=\{1, 2\}$, $B=\{3\}$이면 $n(A)>n(B)$이지만 $B\not\subset A$이다.

④ $A=\{1, 2\}$, $B=\{3, 4\}$이면 $n(A)=n(B)$이지만 $A\ne B$이다.

⑤ $n(A)=0$이면 $A=\varnothing$이다.

답 ②

0118 전략 집합 B의 원소가 집합 A의 방정식의 해임을 이용한다.

풀이 $A\subset B$이고 $B\subset A$이므로 $A=B$ ⋯ ❶

따라서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 -2, 5이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=-2+5$, $b=-2\cdot 5$

$\therefore a=-3$, $b=-10$ ⋯ ❷

$\therefore ab=30$ ⋯ ❸

답 30

채점 기준	비율
❶ $A=B$임을 알 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0119 전략 집합 X가 반드시 원소로 갖는 것과 갖지 않는 것을 찾는다.

풀이 집합 X는 집합 S의 부분집합 중에서 2, 4를 반드시 원소로 갖고, 10을 원소로 갖지 않는 집합이다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{7-2-1}=2^4=16$

답 ④

0120 전략 집합 X의 개수를 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 집합 X는 집합 B의 부분집합 중에서 1, 2, 3을 반드시 원소로 갖는 집합이므로

$2^{n-3}=128=2^7$, $\quad n-3=7$

$\therefore n=10$

답 ⑤

0121 전략 집합 X에 반드시 속하는 원소를 구한다.

풀이 $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{2, 4\}$이므로 집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 2, 4, 8을 반드시 원소로 갖는 집합과 같다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{5-3}=2^2=4$

답 4

0122 전략 집합 A의 진부분집합 중에서 집합 $\{0, 2\}$의 부분집합을 제외한다.

풀이 $A=\{0, 1, 2, 3\}$ ⋯ ❶

집합 A의 진부분집합 중에서 홀수를 1개 이상 포함하는 집합은 A의 진부분집합에서 집합 $\{0, 2\}$의 부분집합을 제외한 것과 같으므로 구하는 집합의 개수는

$2^4-1-2^2=11$ ⋯ ❷

답 11

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 집합의 개수를 구할 수 있다.	70 %

0123 전략 m, n에 집합 A의 원소를 각각 대입하여 집합 X의 원소를 모두 구한다.

풀이 (i) $m=1$, $n=1$일 때, $\quad 2^m+3^n=2^1+3^1=5$

(ii) $m=1$, $n=2$일 때, $\quad 2^m+3^n=2^1+3^2=11$

(iii) $m=2$, $n=1$일 때, $\quad 2^m+3^n=2^2+3^1=7$

(iv) $m=2$, $n=2$일 때, $\quad 2^m+3^n=2^2+3^2=13$

이상에서 $\quad X=\{5, 7, 11, 13\}$ ⋯ ❶

따라서 집합 X의 모든 원소의 합은

$5+7+11+13=36$ ⋯ ❷

답 36

채점 기준	비율
❶ 집합 X를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	70 %
❷ 집합 X의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	30 %

0124 전략 합이 6인 두 자연수를 짝으로 생각하여 원소를 구한다.

풀이 x와 $6-x$가 모두 자연수이므로 $x \geq 1$, $6-x \geq 1$

$\therefore 1 \leq x \leq 5$

따라서 집합 S의 원소가 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4, 5이다.

이때 $1 \in S$이면 $5 \in S$, $2 \in S$이면 $4 \in S$이어야 하므로 원소의 개수가 3인 집합 S는

$\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$

답 $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$

참고 주어진 조건을 만족시키는 집합 S는 원소의 개수에 따라 다음과 같다.

원소가 1개인 집합 S는 $\{3\}$

원소가 2개인 집합 S는 $\{1, 5\}$, $\{2, 4\}$

원소가 4개인 집합 S는 $\{1, 2, 4, 5\}$

원소가 5개인 집합 S는 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

0125 전략 집합을 원소나열법으로 나타낼 때 같은 원소는 중복하여 나열하지 않음을 이용한다.

풀이 집합 A의 원소 x와 집합 B의 원소 y에 대하여 $x+y$의 값은 오른쪽 표와 같다.

x \ y	1	3	5
1	2	4	6
2	3	5	7
3	4	6	8
4	5	7	9
a	$a+1$	$a+3$	$a+5$

이때 자연수 a에 대하여 $a+1 \geq 2$이므로 $n(X)=10$이 되려면 $a+1$, $a+3$, $a+5$ 중에서 하나는 2 이상 9 이하의 자연수이고, 나머지 둘은 10 이상의 자연수이어야 한다.

$a+1<a+3<a+5$이므로

$a+1 \leq 9$, $a+3 \geq 10$

$\therefore 7 \leq a \leq 8$

따라서 자연수 a의 최댓값은 8이다. 답 8

0126 전략 k, k^2, k^3, …의 일의 자리의 수를 구하여 집합 $A(k)$를 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 ㄱ. $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, …이므로

$A(3)=\{1, 3, 7, 9\}$

$\therefore 1 \in A(3)$

ㄴ. $6^1=6$, $6^2=36$, …이므로

$A(6)=\{6\}$

이때 $6 \notin A(3)$이므로 $A(6) \not\subset A(3)$

ㄷ. $n=2$일 때, $A(3^2)=A(9)=\{1, 9\}$

$n=3$일 때,

$A(3^3)=A(27)=A(7)$

$=\{1, 3, 7, 9\}$

$=A(3)$

따라서 $A(3^n)=A(3)$인 자연수 n이 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ⑤

0127 전략 집합 A의 원소의 개수가 1, 2, 3일 때로 나누어 생각한다.

풀이 (i) 집합 A의 원소의 개수가 1일 때,

집합 B의 개수는 집합 X의 부분집합 중에서 집합 A의 원소를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{3-1}=2^2=4$

이때 원소의 개수가 1인 집합 A는 $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$의 3가지이므로 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$3 \cdot 4=12$

(ii) 집합 A의 원소의 개수가 2일 때,

집합 B의 개수는 집합 X의 부분집합 중에서 집합 A의 원소를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{3-2}=2^1=2$

이때 원소의 개수가 2인 집합 A는 $\{-1, 0\}$, $\{-1, 1\}$, $\{0, 1\}$의 3가지이므로 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$3 \cdot 2=6$

(iii) 집합 A의 원소의 개수가 3일 때,

$A=\{-1, 0, 1\}$이므로 $B=\{-1, 0, 1\}$

따라서 순서쌍 (A, B)의 개수는 1이다.

이상에서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$12+6+1=19$

답 ⑤

다른풀이 (i) 집합 B의 원소의 개수가 1일 때,

집합 A는 공집합이 아닌 집합 B의 부분집합이므로 $A=B$이다.

이때 원소의 개수가 1인 집합 B는 $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$의 3가지이므로 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

3

(ii) 집합 B의 원소의 개수가 2일 때,

집합 A는 공집합이 아닌 집합 B의 부분집합이므로 그 개수는

$2^2-1=3$

이때 원소의 개수가 2인 집합 B는 $\{-1, 0\}$, $\{-1, 1\}$, $\{0, 1\}$의 3가지이므로 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$3 \cdot 3=9$

(iii) 집합 B의 원소의 개수가 3일 때,

집합 A는 공집합이 아닌 집합 B의 부분집합이므로 그 개수는

$2^3-1=7$

이때 $B=\{-1, 0, 1\}$이므로 순서쌍 (A, B)의 개수는

$7 \cdot 1=7$

이상에서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$3+9+7=19$

14 집합의 연산

V. 집합과 명제

0128 답 $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$

0129 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$이므로
$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8\}$
답 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8\}$

0130 $A=\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 100\}$, $B=\{4,\ 8,\ 12,\ \cdots,\ 100\}$이므로
$A\cup B=\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 100\}$
답 $\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 100\}$

0131 답 $\{3,\ 4\}$

0132 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $B=\{1,\ 2,\ 5,\ 7\}$이므로
$A\cap B=\{1,\ 2\}$ 답 $\{1,\ 2\}$

0133 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \cdots\}$이므로
$A\cap B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ 답 $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

0134 답 $\varnothing$

0135 답 $\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$

0136 답 $\{1,\ 2\}$

0137 주어진 벤다이어그램의 색칠한 부분은 $A\cup B$이므로
$A\cup B=\{2,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10\}$ 답 $\{2,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10\}$

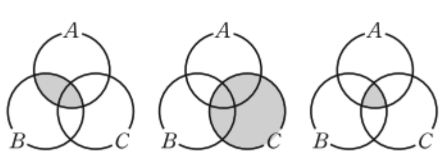
0138 주어진 벤다이어그램의 색칠한 부분은 $A\cap B$이므로
$A\cap B=\{2,\ 8\}$ 답 $\{2,\ 8\}$

0139 답 서로소이다.

0140 $A=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3\}$이므로
$A\cap B=\{1,\ 2\}$
따라서 A와 B는 서로소가 아니다.
답 서로소가 아니다.

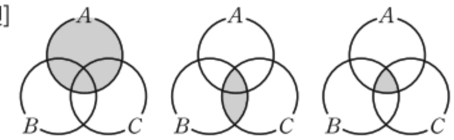
0141 $A=\{1,\ 3,\ 5,\ \cdots\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots\}$이므로
$A\cap B=\varnothing$
따라서 A와 B는 서로소이다. 답 서로소이다.

0142 [좌변]



$(A\cap B)$ $\cap$ C $=(A\cap B)\cap C$

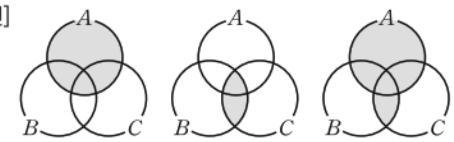
[우변]



A $\cap$ $(B\cap C)$ $=A\cap(B\cap C)$

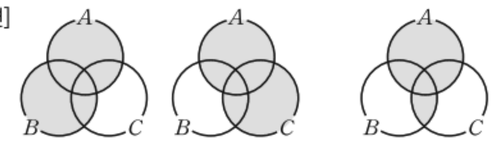
답 풀이 참조

0143 [좌변]



A $\cup$ $(B\cap C)$ $=A\cup(B\cap C)$

[우변]



$(A\cup B)$ $\cap$ $(A\cup C)$ $=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

답 풀이 참조

0144 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
$=\{x,\ y,\ z\}\cup\{m,\ n,\ x\}$
$=\{m,\ n,\ x,\ y,\ z\}$
답 $\{m,\ n,\ x,\ y,\ z\}$

0145 $C=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$이므로
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
$=\{2,\ 3,\ 5,\ 6\}\cap\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$
$=\{2,\ 3,\ 6\}$ 답 $\{2,\ 3,\ 6\}$

0146 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
$=\{-1,\ 0,\ 1\}\cap\{-2,\ -1,\ 0\}$
$=\{-1,\ 0\}$ 답 $\{-1,\ 0\}$

0147 $(A\cap B)\cup(A\cap C)=A\cap(B\cup C)$
$=\{a,\ b\}\cap\{a,\ c,\ d,\ e\}$
$=\{a\}$ 답 $\{a\}$

0148 답 $\{1,\ 3,\ 12\}$

0149 $B=\{3,\ 6,\ 12\}$이므로
$B^C=\{1,\ 2,\ 4\}$ 답 $\{1,\ 2,\ 4\}$

0150 $C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$이므로
$C^C=\varnothing$ 답 $\varnothing$

0151 답 $\{2,\ 4\}$

0152 답 $\varnothing$

0153 $A=\{2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 14\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots\}$이므로
$A-B=\{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13\}$
답 $\{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13\}$

0154 답 $\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$

0155 답 $\{1,\ 2,\ 3\}$

0156 답 $\{2\}$

0157 답 $\{4,\ 5\}$

0158 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$이고 주어진 벤다이어그램의 색칠한 부분은 A^C이므로

$A^C=\{1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10\}$

답 $\{1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10\}$

0159 주어진 벤다이어그램의 색칠한 부분은 $B-A$이므로

$B-A=\{1,\ 10\}$ 답 $\{1,\ 10\}$

0160 답 A

0161 답 A

0162 답 $\varnothing$

0163 답 A

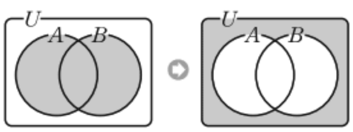
0164 답 $\varnothing$

0165 답 U

0166 답 $\varnothing$

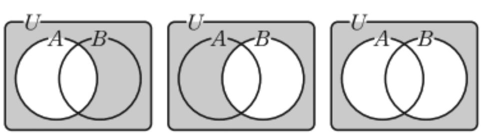
0167 답 U

0168 [좌변]



$A\cup B$ $(A\cup B)^C$

[우변]



A^C $\cap$ B^C $=$ $A^C\cap B^C$

답 풀이 참조

0169 $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$이므로

$(A\cup B)^C=\{4\}$ 답 $\{4\}$

0170 $A^C=\{1,\ 4\}$, $B^C=\{3,\ 4\}$이므로

$A^C\cap B^C=\{4\}$ 답 $\{4\}$

0171 $A\cap B=\{2,\ 5\}$이므로

$(A\cap B)^C=\{1,\ 3,\ 4\}$ 답 $\{1,\ 3,\ 4\}$

0172 $A^C=\{1,\ 4\}$, $B^C=\{3,\ 4\}$이므로

$A^C\cup B^C=\{1,\ 3,\ 4\}$ 답 $\{1,\ 3,\ 4\}$

0173 답 (가) 드모르간의 법칙 (나) 결합법칙

0174 답 b, B, $A\cap B$

0175 답 $a+b$, A

0176 답 A, $A\cup B$

0177 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=4+5-3=6$ 답 6

0178 $n(A^C)=n(U)-n(A)$

$=50-31=19$ 답 19

0179 $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$=30-9=21$ 답 21

0180 $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$

$=20-9=11$ 답 11

0181 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$15=14+3-n(A\cap B)$

$\therefore n(A\cap B)=2$ 답 2

0182 $n(A^C)=n(U)-n(A)=20-14=6$ 답 6

0183 $n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)$

$=15-14=1$ 답 1

0184 $n(A\cap B^C)=n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)$

$=15-3=12$ 답 12

0185 $n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$

$=20-15=5$ 답 5

0186 $n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$

$=20-2=18$ 답 18

0187 $B\cap C=\{2,\ 3,\ 5,\ 6\}\cap\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}=\{3,\ 5,\ 6\}$

$\therefore A\cup(B\cap C)=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}\cup\{3,\ 5,\ 6\}$

$=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6\}$

답 $\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6\}$

0188 $A\cap B=\{12,\ 24,\ 36,\ \cdots\}$

$=\{x\,|\,x$는 12의 양의 배수$\}$

$\therefore k=12$ 답 12

0189 $B=\{3,\ 4,\ 5\}$, $C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

③ $B\cap C=\{3,\ 4\}$이므로

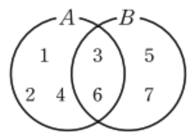
$A\cap(B\cap C)=\{4\}$

④ $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이므로

$(A\cup B)\cap C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$

답 ③

0190 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$B=\{3,\ 5,\ 6,\ 7\}$ ⋯ ❶

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$3+5+6+7=21$ ⋯ ❷

답 21

채점 기준	비율
❶ 집합 B를 구할 수 있다.	80 %
❷ 집합 B의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	20 %

0191 집합 B는 c, d를 반드시 원소로 갖고, a, b는 원소로 갖지 않아야 하므로 B가 될 수 있는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

참고 ① $B=\{a,\ b,\ c\}$이면 $A\cap B=\{a,\ b,\ c\}$

② $B=\{a,\ c,\ d\}$이면 $A\cap B=\{a,\ c,\ d\}$

③ $B=\{b,\ c,\ d\}$이면 $A\cap B=\{b,\ c,\ d\}$

④ $B=\{b,\ d,\ e\}$이면 $A\cap B=\{b,\ d\}$

0192 ① $A=\{-1\}$, $B=\{-1,\ 1\}$이므로

$A\cap B=\{-1\}$

② $B=\{-3,\ 3\}$이므로 $A\cap B=\varnothing$

③ $A=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$이므로

$A\cap B=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$

④ $A=\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5,\ \cdots\}$이므로

$A\cap B=\{2\}$

⑤ $A\cap B=\{x\,|\,x$는 28의 양의 배수$\}$

답 ②

참고 ④ 양의 약수가 2개인 자연수는 소수이다.

0193 ⑤ $\{x\,|\,x$는 9의 양의 약수$\}=\{1,\ 3,\ 9\}$

$\therefore \{3,\ 7\}\cap\{1,\ 3,\ 9\}=\{3\}$

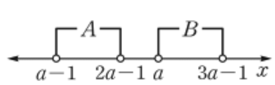
따라서 집합 $\{3,\ 7\}$과 서로소가 아니다. 답 ⑤

0194 집합 B와 서로소인 집합은 집합 A의 부분집합 중에서 '도'와 '미'를 원소로 갖지 않는 집합이므로 {레, 파, 솔, 라, 시}의 부분집합과 같다.

따라서 구하는 집합의 개수는 $2^5=32$

답 32

0195 $a-1<a$이므로 A, B가 서로소, 즉 $A\cap B=\varnothing$이려면 오른쪽 그림과 같아야 한다. ⋯ ❶



따라서 $2a-1\le a$에서

$a\le 1$ ⋯ ❷

이므로 a의 최댓값은 1이다. ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 집합 A, B를 수직선 위에 나타낼 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ a의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

0196 $A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $B=\{1,\ 5,\ 8,\ 10\}$이므로

$A\cup B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

$\therefore (A\cup B)^C=\{2,\ 4,\ 6\}$

답 $\{2,\ 4,\ 6\}$

0197 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$, $C=\{1,\ 3,\ 7,\ 9,\ 11\}$이므로

$A\cup B\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 11,\ 12\}$

$\therefore (A\cup B\cup C)^C=\{8,\ 10\}$

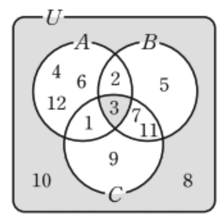
또 $A\cap B\cap C=\{3\}$이므로

$(A\cup B\cup C)^C\cup(A\cap B\cap C)=\{3,\ 8,\ 10\}$

따라서 구하는 원소의 개수는 3이다.

답 3

다른풀이 집합 U, A, B, C를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같고 $(A\cup B\cup C)^C\cup(A\cap B\cap C)$는 색칠한 부분이므로 구하는 집합의 원소는



3, 8, 10의 3개

0198 $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, $B=\{3,\ 6\}$이므로

$A-B=\{2,\ 4,\ 8\}$

$\therefore (A-B)^C=\{1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$ 답 ⑤

0199 $B-C=\{3,\ 4,\ 5\}-\{5,\ 6,\ 7\}=\{3,\ 4\}$이므로

$A-(B-C)=\{1,\ 2,\ 3\}-\{3,\ 4\}$

$=\{1,\ 2\}$ 답 ③

0200 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$이므로

$A-B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}-\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}=\{1,\ 3\}$,

$B-A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}-\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}=\{6,\ 8\}$ ⋯ ❶

$\therefore (A-B)\cup(B-A)=\{1,\ 3,\ 6,\ 8\}$ ⋯ ❷

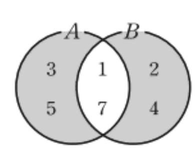
따라서 구하는 원소의 합은

$1+3+6+8=18$ ⋯ ❸

답 18

채점 기준	비율
❶ $A-B$, $B-A$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $(A-B)\cup(B-A)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 원소의 합을 구할 수 있다.	20 %

0201 오른쪽 벤다이어그램에서 집합 $(A\cup B)-(A\cap B)$는 색칠한 부분과 같고, $A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$이므로



$A\cap B=\{1,\ 7\}$

따라서 $A-B=\{3,\ 5\}$, $B-A=\{2,\ 4\}$이므로

$B=\{1,\ 2,\ 4,\ 7\}$ 답 $\{1,\ 2,\ 4,\ 7\}$

0202 $A\cap B=\{1,\ 2\}$에서 $2\in A$이므로

$a^2-a=2$, $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

(i) $a=-1$일 때,

$A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{0, 1, 2\}$이므로

$A\cap B=\{1, 2\}$

(ii) $a=2$일 때,

$A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{3, 4, 5\}$이므로

$A\cap B=\{3\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=-1$

답 -1

0203 $A\cap B=\{2, 5\}$에서 $5\in A$이므로

$a=5$

또 $2\in B$이므로 $b-1=2$ $\therefore b=3$

$\therefore ab=15$

답 15

0204 $B-A=\{5\}$에서 $3\in(A\cap B)$이므로 $3\in A$

$\therefore a=3$

$\therefore A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{2, 3, 5\}$

⑤ $A-B=\{4\}$

답 ⑤

0205 $A\cap B=\{5\}$이므로 $5\in A$, $5\in B$

$5\in A$에서 $25-20+a=0$ $\therefore a=-5$

$5\in B$에서 $25+5b+10=0$ $\therefore b=-7$ ··· ❶

$x^2-4x-5=0$에서 $(x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

$\therefore A=\{-1, 5\}$

$x^2-7x+10=0$에서 $(x-2)(x-5)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=5$

$\therefore B=\{2, 5\}$ ··· ❷

$\therefore A\cup B=\{-1, 2, 5\}$ ··· ❸

답 $\{-1, 2, 5\}$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 두 집합 A, B를 구할 수 있다.	40 %
❸ $A\cup B$를 구할 수 있다.	20 %

0206 $A\cup B=\{0, 2, 3, 5\}$이므로

$a+3=3$ 또는 $a+3=5$

$\therefore a=0$ 또는 $a=2$

(i) $a=0$일 때,

$A=\{0, 2, 3\}$, $B=\{1, 3\}$이므로

$A\cup B=\{0, 1, 2, 3\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=2$일 때,

$A=\{0, 2, 5\}$, $B=\{3, 5\}$이므로

$A\cup B=\{0, 2, 3, 5\}$

(i), (ii)에서 $a=2$

따라서 $B=\{3, 5\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은

$3+5=8$

답 8

0207 ① $U-A^C=U\cap(A^C)^C=U\cap A=A$

③ $U^C=\varnothing$이므로 $A\not\subset U^C$

④ $A\subset(A\cup B)$이므로 $A\cap(A\cup B)=A$

답 ③

0208 $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$

답 ①

0209 ② $A\cap B^C=A-B$

③ $B^C-A^C=B^C\cap(A^C)^C=B^C\cap A=A\cap B^C=A-B$

④ $(U\cap B)-A=B-A$

⑤ $A\cap(U\cap B^C)=A\cap B^C=A-B$

답 ④

0210 ③ $A-B=A\cap B^C$

$=\{x|-3<x<1\}\cap\{x|0<x<2\}$

$=\{x|0<x<1\}$

④ $B-A=B\cap A^C$

$=\{x|x\le0$ 또는 $x\ge2\}\cap\{x|x\le-3$ 또는 $x\ge1\}$

$=\{x|x\le-3$ 또는 $x\ge2\}$

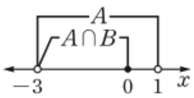
⑤ $A\cup B=\{x|x<1$ 또는 $x\ge2\}$이므로

$(A\cup B)^C=\{x|1\le x<2\}$

답 ④

참고 $A\cap B=\{x|-3<x\le0\}$이므로

③ $A-B=A-(A\cap B)=\{x|0<x<1\}$



④ $B-A=B-(A\cap B)$

$=\{x|x\le-3$ 또는 $x\ge2\}$

0211 $B^C-A^C=\varnothing$이면 $B^C\subset A^C$

$\therefore A\subset B$

③ $A\cup B=B$이므로 $(A\cup B)\subset B$

④ $A\neq B$이므로 $B-A\neq\varnothing$

⑤ $A^C\cup B=A^C\cup(A\cup B)=(A^C\cup A)\cup B$

$=U\cup B=U$

답 ④

0212 ① $A\cup B=B$

② $A\cap(A\cup B)=A\cap B=A$

③ $(A\cap B)\cup B=A\cup B=B$

④ $(A\cap\varnothing)\cup B=\varnothing\cup B=B$

⑤ $(A\cap B)\cup(A\cup B)=A\cup B=B$

답 ②

0213 $A=\{5, 10, 15, \cdots\}$, $B=\{10, 20, 30, \cdots\}$

$\therefore B\subset A$

ㄱ. $A-B=\{5, 15, 25, \cdots\}$이므로 $A-B\neq\varnothing$

ㄴ. $B\cap A^C=B-A=\varnothing$

ㄷ. $A\cap B=B$이므로 $B\subset(A\cap B)$

ㄹ. $A\cup B=A$이므로

$A\cup B^C=(A\cup B)\cup B^C=A\cup(B\cup B^C)=A\cup U=U$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

0214 $A\cap X=X$이므로 $X\subset A$

$(A-B)\cup X=X$이므로 $(A-B)\subset X$

$\therefore (A-B)\subset X\subset A$

이때 $A-B=\{7, 10, 13\}$이므로 집합 X의 개수는 집합 $\{1, 4, 7, 10, 13, 16\}$의 부분집합 중에서 7, 10, 13을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같다.

$\therefore 2^{6-3}=2^3=8$ 답 ③

0215 $A\cap B=\{1, 3\}$, $A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$

따라서 집합 X의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$의 부분집합 중에서 1, 3을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{6-2}=2^4=16$ 답 16

0216 $A\cup B=\{2, 3, 4, 5, 6\}$

$(A\cup B)\cap X=X$에서 $X\subset(A\cup B)$

따라서 집합 X의 개수는 집합 $\{2, 3, 4, 5, 6\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^5=32$ 답 32

0217 $B=\{1, 2, 4, 8, 16\}$ ··· ❶

$A-X=\varnothing$이므로 $A\subset X$

$B\cap X=X$이므로 $X\subset B$

$\therefore A\subset X\subset B$ ··· ❷

따라서 집합 X의 개수는 집합 $\{1, 2, 4, 8, 16\}$의 부분집합 중에서 1, 2, 4를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{5-3}=2^2=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 집합 B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	10 %
❷ 세 집합 A, X, B 사이의 포함 관계를 알 수 있다.	50 %
❸ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	40 %

0218 $U=\{1, 3, 5, 15\}$이고, U의 부분집합 X가 $\{1, 3\}\cup X=\{3, 5\}\cup X$를 만족시키려면 집합 X는 두 집합 $\{1, 3\}$, $\{3, 5\}$의 공통인 원소 3을 제외한 나머지 원소 1, 5를 반드시 원소로 가져야 한다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는 $2^{4-2}=2^2=4$

답 4

참고 $3\in A$, $3\in B$이므로 $3\in(A\cup X)$, $3\in(B\cup X)$

따라서 집합 X는 3을 원소로 갖지 않아도 된다.

0219 드모르간의 법칙에 의하여

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$

이때 $A\cup B=(A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)$이므로

$A\cup B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$

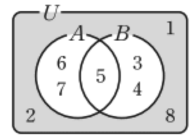
$U=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$이므로

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{1, 2, 8\}$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$1+2+8=11$ 답 ①

다른풀이 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같고 $A^C\cap B^C$는 색칠한 부분과 같으므로



$A^C\cap B^C=\{1, 2, 8\}$

$\therefore 1+2+8=11$

0220 $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$

$A=\{0, 5, 9\}$, $A-B=\{0\}$에서

$A\cap B=A-(A-B)=\{5, 9\}$

$\therefore A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$

$=\{0, 1, 3, 7\}$ 답 $\{0, 1, 3, 7\}$

0221 $(A\cap B^C)\cup(A-B^C)=(A\cap B^C)\cup\{A\cap(B^C)^C\}$

$=(A\cap B^C)\cup(A\cap B)$

$=A\cap(B^C\cup B)=A\cap U$

$=A$ 답 A

0222 $(A-B)^C\cap B=(A\cap B^C)^C\cap B=\{A^C\cup(B^C)^C\}\cap B$

$=(A^C\cup B)\cap B=(A^C\cap B)\cup(B\cap B)$

$=(B-A)\cup B=B$

① $(A\cap B)\subset A$이므로 $(A\cap B)\cup A=A$

② $A-(A\cap B)=A-B$

③ $(A\cup B)-A=B-A$

④ $(A\cup B)-(A-B)=(A\cup B)-(A\cap B^C)$

$=(A\cup B)\cap(A\cap B^C)^C$

$=(A\cup B)\cap(A^C\cup B)$

$=(A\cap A^C)\cup B=\varnothing\cup B$

$=B$

⑤ $A\cap(B-A)^C=A\cap(B\cap A^C)^C=A\cap\{B^C\cup(A^C)^C\}$

$=A\cap(B^C\cup A)=(A\cap B^C)\cup(A\cap A)$

$=(A-B)\cup A=A$

답 ④

0223 $A\cup\{(A\cap B)\cup(B-A)\}=A\cup\{(A\cap B)\cup(B\cap A^C)\}$

$=A\cup\{(A\cup A^C)\cap B\}$

$=A\cup(U\cap B)$

$=A\cup B$

따라서 $A\cup B=B$이므로 $A\subset B$

ㄱ. $A\cap B=A$

ㄷ. $A^C\cup B=A^C\cup(A\cup B)=(A^C\cup A)\cup B$

$=U\cup B=U$

ㄹ. $B^C-A^C=B^C\cap(A^C)^C=B^C\cap A$

$=A-B=\varnothing$

이상에서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

0224 $(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$

$=(A\cup B)-(A\cap B)$ ··· ❶

이때 $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8\}$, $A\cap B=\{1,\ 2\}$이므로

$(A\cup B)-(A\cap B)=\{3,\ 4,\ 5,\ 8\}$ ··· ❷

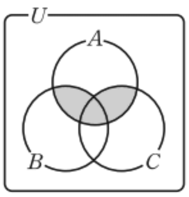
따라서 구하는 원소의 개수는 4이다. ··· ❸

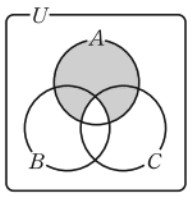
답 4

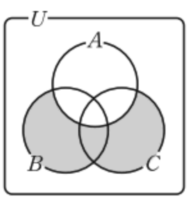
채점 기준	비율
❶ $(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)$를 변형할 수 있다.	50 %
❷ $(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ 원소의 개수를 구할 수 있다.	10 %

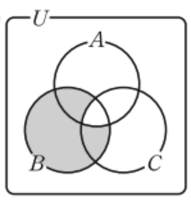
0225 ② $A\cap(B^C\cap C^C)=A\cap(B\cup C)^C=A-(B\cup C)$

따라서 주어진 벤다이어그램의 색칠한 부분과 같다.

①


③


④


⑤


답 ②

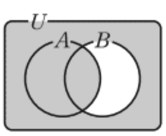
참고 ③ $A\cap(B^C\cup C^C)=A\cap(B\cap C)^C=A-(B\cap C)$

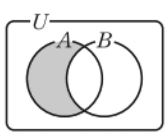
④ $(B\cup C)\cap A^C=(B\cup C)-A$

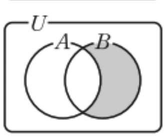
⑤ $B\cap(A^C\cup C^C)=B\cap(A\cap C)^C=B-(A\cap C)$

0226 ⑤ $(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$

따라서 주어진 벤다이어그램의 색칠한 부분과 같다.

①


②, ③


④


답 ⑤

참고 ③ $A\cap(A^C\cup B^C)=A\cap(A\cap B)^C=A-(A\cap B)=A-B$

④ $(A\cup B)\cap A^C=(A\cup B)-A=B-A$

0227 답 ④

0228 $\{(A\cup B^C)\cap B\}\cup(A\cap B)^C$

$=\{(A\cap B)\cup(B^C\cap B)\}\cup(A\cap B)^C$

$=\{(A\cap B)\cup\varnothing\}\cup(A\cap B)^C$

$=(A\cap B)\cup(A\cap B)^C$

$=U$

답 ⑤

0229 $(A_3\cup A_8)\cap A_{12}=(A_3\cap A_{12})\cup(A_8\cap A_{12})$

$=\underline{A_{12}\cup A_{24}}$ $A_{24}\subset A_{12}$

$=A_{12}$

답 ④

0230 $A_6\cap A_8=A_{24}$이므로

$A_4\cup(A_6\cap A_8)=\underline{A_4\cup A_{24}}=A_4$ $A_{24}\subset A_4$ ··· ❶

100 이하의 자연수 중에서 4의 배수는 25개이므로 구하는 원소의 개수는 25이다. ··· ❷

답 25

채점 기준	비율
❶ $A_4\cup(A_6\cap A_8)=A_4$임을 알 수 있다.	60 %
❷ 원소의 개수를 구할 수 있다.	40 %

0231 $P_{36}\cap(P_{12}\cup P_8)=(P_{36}\cap P_{12})\cup(P_{36}\cap P_8)$

$=\underline{P_{12}\cup P_4}=P_{12}$ $P_4\subset P_{12}$

$=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

따라서 구하는 원소의 합은

$1+2+3+4+6+12=28$

답 28

라쎈 특강 배수의 집합과 약수의 집합

(1) 자연수 k의 양의 배수의 집합을 A_k라 할 때, 자연수 m이 자연수 n의 배수이면

$A_m\subset A_n$

$\therefore A_m\cap A_n=A_m,\ A_m\cup A_n=A_n$

(2) 자연수 k의 양의 약수의 집합을 P_k라 할 때, 자연수 m이 자연수 n의 배수이면

$P_n\subset P_m$

$\therefore P_m\cap P_n=P_n,\ P_m\cup P_n=P_m$

0232 ㄴ. $(A_6\cup A_{15})\cap(A_{10}\cup A_{15})=(A_6\cap A_{10})\cup A_{15}$

$=A_{30}\cup A_{15}$

$=A_{15}$

ㄷ. $A_3\cap(A_2\cup A_8)=A_3\cap A_2=A_6$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0233 $x^2-6x+8\ge0$에서 $(x-2)(x-4)\ge0$

$\therefore x\le2$ 또는 $x\ge4$

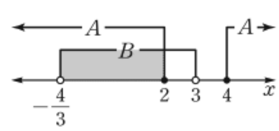
$\therefore A=\{x\,|\,x\le2$ 또는 $x\ge4\}$

$3x^2-5x-12<0$에서 $(3x+4)(x-3)<0$

$\therefore -\frac{4}{3}<x<3$

$\therefore B=\left\{x\,\middle|\,-\frac{4}{3}<x<3\right\}$

따라서 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$A\cap B=\left\{x\,\middle|\,-\frac{4}{3}<x\le2\right\}$

답 $\left\{x\,\middle|\,-\frac{4}{3}<x\le2\right\}$

0234 $x+a<-x$에서 $2x<-a$ $\therefore x<-\frac{a}{2}$

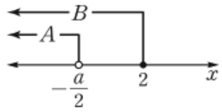
$\therefore A=\left\{x\,\middle|\,x<-\frac{a}{2}\right\}$

$x-2\geq 3x-6$에서　　$2x\leq 4$

$\therefore x\leq 2$

$\therefore B=\{x|x\leq 2\}$　　··· ❶

이때 $A\cap B=A$에서 $A\subset B$이므로 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $-\frac{a}{2}\leq 2$이므로

$a\geq -4$　　··· ❷

따라서 a의 최솟값은 -4이다.　　··· ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ 집합 A, B를 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ a의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

0235 $x^2-3x-10\geq 0$에서　　$(x+2)(x-5)\geq 0$

$\therefore x\leq -2$ 또는 $x\geq 5$

이때 $A=\{x|x>-2\}$, $B=\{x|x<5\}$이므로

$A^C=\{x|x\leq -2\}$, $B^C=\{x|x\geq 5\}$

따라서 부등식 $x^2-3x-10\geq 0$의 해의 집합은

$\{x|x\leq -2$ 또는 $x\geq 5\}=\{x|x\leq -2\}\cup\{x|x\geq 5\}$

$=A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$

답 ④

참고 ① $A\cap B=\{x|-2<x<5\}$

② $A\cup B=U$

③ $A-B=A\cap B^C=\{x|x\geq 5\}$

⑤ $(A\cup B)^C=\varnothing$

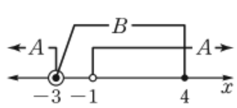
0236 $x^2+4x+3>0$에서　　$(x+3)(x+1)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>-1$

$\therefore A=\{x|x<-3$ 또는 $x>-1\}$

이때 $A\cup B=R$,

$A\cap B=\{x|-1<x\leq 4\}$가 성립하려면 집합 B는 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$B=\{x|-3\leq x\leq 4\}$

$=\{x|(x+3)(x-4)\leq 0\}$

$=\{x|x^2-x-12\leq 0\}$

따라서 $a=-1$, $b=-12$이므로

$ab=12$

답 ⑤

0237 ① $A☆\varnothing=(A\cup\varnothing)-(A\cap\varnothing)=A-\varnothing=A$

② $A☆A=(A\cup A)-(A\cap A)=A-A=\varnothing$

③ $U☆\varnothing=(U\cup\varnothing)-(U\cap\varnothing)=U-\varnothing=U$

④ $U☆A=(U\cup A)-(U\cap A)=U-A=A^C$

⑤ $A☆B=(A\cup B)-(A\cap B)$

$=(B\cup A)-(B\cap A)=B☆A$

답 ②

0238 $A\triangle B=(A\cap B)\cup(A^C\cap B)$

$=(A\cup A^C)\cap B$

$=U\cap B=B$　　··· ❶

이므로

$(A\triangle B)\triangle A=B\triangle A=A$

$=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$　　··· ❷

따라서 구하는 원소의 개수는 6이다.　　··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $A\triangle B$를 간단히 할 수 있다.	40 %
❷ $(A\triangle B)\triangle A$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $(A\triangle B)\triangle A$의 원소의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0239 ㄱ. $A^C * B^C=(A^C-B^C)\cup(B^C-A^C)$

$=\{A^C\cap(B^C)^C\}\cup\{B^C\cap(A^C)^C\}$

$=(A^C\cap B)\cup(B^C\cap A)$

$=(B-A)\cup(A-B)$

$=(A-B)\cup(B-A)=A*B$

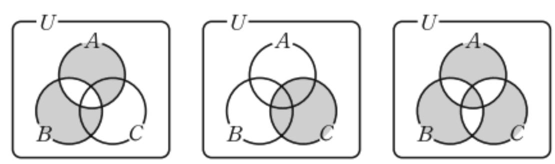
ㄴ. $A*A^C=(A-A^C)\cup(A^C-A)$

$=\{A\cap(A^C)^C\}\cup(A^C\cap A^C)$

$=A\cup A^C=U$

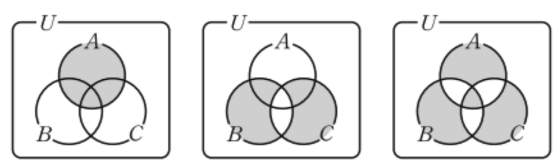
ㄷ. 양변을 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.

[좌변]



$A*B$　　$*$　　C　　$=$　　$(A*B)*C$

[우변]



A　　$*$　　$B*C$　　$=$　　$A*(B*C)$

$\therefore (A*B)*C=A*(B*C)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

0240 $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$

이때

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=20+15-9=26$

이므로

$n(A^C\cap B^C)=n(U)-n(A\cup B)=30-26=4$

답 4

0241 $A\cap B=\varnothing$이므로　　$n(A\cap B)=0$

$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

$=15+12=27$

답 ③

0242 $n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)=28-20=8$
$n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)=28-16=12$
$\therefore n(A-B)+n(B-A)=20$ 답 ①

다른풀이 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서
$28=16+20-n(A\cap B)$ $\therefore n(A\cap B)=8$
$\therefore n(A-B)+n(B-A)=n(A\cup B)-n(A\cap B)$
$=28-8=20$

0243 $A=\{2, 4, 6, \cdots, 60\}$, $B=\{3, 6, 9, \cdots, 60\}$이므로
$A\cap B=\{6, 12, 18, \cdots, 60\}$ ··· ❶
따라서 $n(A)=30$, $n(A\cap B)=10$이므로
$n(A\cap B^C)=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
$=30-10=20$ ··· ❷
답 20

채점 기준	비율
❶ 집합 A, B, $A\cap B$를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $n(A\cap B^C)$를 구할 수 있다.	70 %

0244 $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$에서
$n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)$
$=n(A)-n(A\cap B^C)$
$=12-9=3$
이므로
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=12+15-3=24$
$\therefore n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$
$=40-24=16$
따라서 구하는 원소의 개수는
$n(A\cap B)+n((A\cup B)^C)=3+16=19$
답 ④

다른풀이 $n(A\cap B^C)=n(A-B)=9$이므로
$n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)=12-9=3$
$\therefore n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=15-3=12$
색칠한 부분이 나타내는 집합은 $\{(A-B)\cup(B-A)\}^C$이므로 구하는 원소의 개수는
$n(U)-n((A-B)\cup(B-A))=40-(9+12)=19$

0245 $B\subset A$일 때 $n(A\cap B)$가 최대이므로
$M=n(B)=8$
$A\cup B=U$일 때 $n(A\cap B)$가 최소이므로
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$에서
$m=15+8-20=3$
$\therefore M+m=11$ 답 11

다른풀이 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=23-n(A\cup B)$
$A\subset(A\cup B)$이므로 $n(A)\le n(A\cup B)$
$(A\cup B)\subset U$이므로 $n(A\cup B)\le n(U)$
즉 $15\le n(A\cup B)\le 20$이므로
$-20\le -n(A\cup B)\le -15$
$\therefore 3\le 23-n(A\cup B)\le 8$
따라서 $3\le n(A\cap B)\le 8$이므로 $M=8$, $m=3$
$\therefore M+m=11$

0246 $n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)$이므로 $n(A\cup B)$가 최대일 때 $n(A-B)$가 최대이다.
$A\cup B=U$일 때 $n(A\cup B)$가 최대이므로 $n(A-B)$의 최댓값은
$50-27=23$
답 ④

0247 A메뉴를 주문한 고객의 집합을 A, B메뉴를 주문한 고객의 집합을 B라 하면
$n(A)=19$, $n(B)=23$, $n(A\cup B)=33$
A메뉴와 B메뉴를 모두 주문한 고객의 집합은 $A\cap B$이므로
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=19+23-33=9$
따라서 구하는 고객은 9명이다.
답 ②

0248 빨간색을 좋아하는 학생의 집합을 A, 파란색을 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면
$n(A)=17$, $n(B)=13$, $n(A\cap B)=8$
빨간색 또는 파란색을 좋아하는 학생의 집합은 $A\cup B$이므로
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=17+13-8=22$
따라서 구하는 학생은 22명이다.
답 ②

0249 재현이네 반 학생 전체의 집합을 U, 거울을 소지한 학생의 집합을 A, 빗을 소지한 학생의 집합을 B라 하면
$n(U)=28$, $n(A)=13$, $n(B)=7$, $n(A\cap B)=3$ ··· ❶
거울과 빗 중 어느 것도 소지하지 않은 학생의 집합은
$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로
$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$
$=28-n(A\cup B)$ ······ ㉠ ··· ❷
이때
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=13+7-3=17$
이므로 ㉠에서 구하는 학생 수는
$28-17=11$ ··· ❸
답 11

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 집합으로 나타내고, 각 집합의 원소의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 구하는 학생 수를 집합의 원소의 개수로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 답을 구할 수 있다.	40 %

0250 스키를 타 본 학생의 집합을 A, 스노보드를 타 본 학생의 집합을 B라 하면
$n(A)=21$, $n(B)=19$, $n(A\cap B)=8$

스키만 타 본 학생의 집합은 $A-B$, 스노보드만 타 본 학생의 집합은 $B-A$이므로

$n(A-B)+n(B-A)$
$=\{n(A)-n(A\cap B)\}+\{n(B)-n(A\cap B)\}$
$=(21-8)+(19-8)=24$

따라서 구하는 학생은 24명이다.

답 ④

0251 여행 동호회 회원 전체의 집합을 U, 제주도를 가 본 회원의 집합을 A, 울릉도를 가 본 회원의 집합을 B라 하면

$n(U)=40,\ n(A)=32,\ n(B)=15,\ n(A^C\cap B^C)=7$ ⋯ ❶

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$이므로

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$
$=40-7=33$ ⋯ ❷

이때 제주도와 울릉도를 모두 가 본 회원의 집합은 $A\cap B$이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=32+15-33=14$

따라서 구하는 회원 수는 14이다. ⋯ ❸

답 14

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 집합으로 나타내고, 각 집합의 원소의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 제주도 또는 울릉도를 가 본 회원 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 답을 구할 수 있다.	30 %

0252 하랑이네 반 학생 전체의 집합을 U, K메신저를 사용하는 학생의 집합을 A, L메신저를 사용하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=30,\ n(A)=20,\ n(B)=12$

두 메신저를 모두 사용하는 학생의 집합은 $A\cap B$이고, $B\subset A$일 때 $n(A\cap B)$가 최대이므로 두 메신저를 모두 사용하는 학생 수의 최댓값은

$n(A\cap B)=n(B)=12$

한편 $A\cup B=U$일 때 $n(A\cap B)$가 최소이므로 두 메신저를 모두 사용하는 학생 수의 최솟값은

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(U)$
$=20+12-30=2$

답 최댓값: 12, 최솟값: 2

다른풀이 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=32-n(A\cup B)$

$A\subset(A\cup B)$이므로 $n(A)\le n(A\cup B)$

$(A\cup B)\subset U$이므로 $n(A\cup B)\le n(U)$

즉 $20\le n(A\cup B)\le 30$이므로

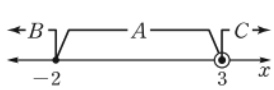
$-30\le -n(A\cup B)\le -20$

$\therefore 2\le 32-n(A\cup B)\le 12$

따라서 $2\le n(A\cap B)\le 12$이므로 K메신저와 L메신저를 모두 사용하는 학생 수의 최댓값은 12, 최솟값은 2이다.

0253 전략 세 집합을 수직선 위에 나타내어 교집합이 공집합인 두 집합을 찾는다.

풀이 세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$A\cap B=\{-2\}$, $A\cap C=\varnothing$,
$B\cap C=\varnothing$

따라서 서로소인 집합은 A와 C, B와 C이다.

답 A와 C, B와 C

0254 전략 합집합, 교집합, 여집합, 차집합의 뜻을 이용한다.

풀이 ① $A\cap B=\{3\}$
② $A^C=\{2,\ 4,\ 5\}$
③ $A-B=\{1,\ 6\}$
④ $B^C=\{1,\ 2,\ 6\}$이므로 $A-B^C=\{3\}$
⑤ $A\cup B=\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

답 ④

0255 전략 주어진 벤다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은 $B-A$이다.

풀이 $A=\{3,\ 6,\ 9,\ \cdots\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

주어진 벤다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은 $B-A$이므로

$B-A=\{1,\ 2\}$

답 ②

0256 전략 $a\in(A-B)$이면 $a\in A$, $a\notin B$임을 이용한다.

풀이 $A-B=\{1,\ 3\}$에서 $3\in A$이므로 $x=3$

따라서 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6\}$이므로

$B-A=\{4,\ 6\}$

답 ③

0257 전략 $A\cup B=B$이면 $A\subset B$임을 이용한다.

풀이 $A\cup\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이므로

$A\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

따라서 집합 A의 개수는 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^4=16$

답 ⑤

0258 전략 보기를 만족시키지 않는 예가 있는지 찾아본다.

풀이 ⑤ $A=\{1\}$, $B=\{1,\ 2\}$이면 $A\subset B$이지만

$B-A=\{2\}\ne\varnothing$

답 ⑤

0259 전략 주어진 벤다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은 $A\cap B$이다.

풀이 주어진 벤다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은

$A\cap B$ ⋯ ❶

따라서 구하는 집합의 원소의 개수는

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=20+17-29=8$ ⋯ ❷

답 8

채점 기준	비율
❶ 벤다이어그램에서 색칠한 부분을 집합으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 원소의 개수를 구할 수 있다.	70 %

0260 전략 $A\cap B=\{3\}$이므로 $3\in A$임을 이용한다.

풀이 $A\cap B=\{3\}$이므로 $3\in A$

즉 $k^2-3k-1=3$이므로

$k^2-3k-4=0$, $(k+1)(k-4)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=4$ ⋯ ❶

(i) $k=-1$일 때,

$A=\{1,\ 3\}$, $B=\{-4,\ 3\}$이므로

$A\cap B=\{3\}$

(ii) $k=4$일 때,

$A=\{1,\ 3\}$, $B=\{-2,\ 1\}$이므로

$A\cap B=\{1\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다. ⋯ ❷

(i), (ii)에서 $k=-1$ ⋯ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 집합 A에서 k가 될 수 있는 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ k의 값에 따라 경우를 나누어 조건을 만족시키는지 확인할 수 있다.	50 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0261 전략 먼저 집합의 연산의 성질을 이용하여 B^C-A^C를 변형한다.

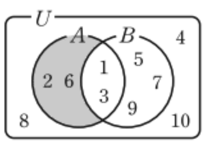
풀이 $B^C-A^C=B^C\cap(A^C)^C=B^C\cap A$

$=A-B=\{2,\ 6\}$

따라서 구하는 원소의 합은 $2+6=8$

답 ①

다른풀이 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같고, B^C-A^C는 색칠한 부분과 같으므로



$B^C-A^C=\{2,\ 6\}$

따라서 구하는 원소의 합은

$2+6=8$

0262 전략 A, B가 서로소이면 $A\cap B=\varnothing$임을 이용한다.

풀이 A, B가 서로소이므로 $A\cap B=\varnothing$

ㄱ. $A\cup B=U$인지는 알 수 없다.

ㄴ. $A\cap B^C=A-B=A$

ㄷ. $B\subset A^C$이므로 $A^C\cup B=A^C$

ㄹ. $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C=\varnothing^C=U$

이상에서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ③

0263 전략 먼저 집합 B를 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 $4\cdot1-3=1$, $4\cdot2-3=5$, $4\cdot3-3=9$, $4\cdot4-3=13$이므로

$B=\{1,\ 5,\ 9,\ 13\}$

$\therefore B-A=\{5,\ 9,\ 13\}$ ⋯ ❶

이때 $\{5,\ 9,\ 13\}\cap X=X$이므로 $X\subset\{5,\ 9,\ 13\}$

따라서 집합 X의 개수는 집합 $\{5,\ 9,\ 13\}$의 부분집합의 개수와 같으므로 $2^3=8$ ⋯ ❷

답 8

채점 기준	비율
❶ 집합 $B-A$를 구할 수 있다.	50 %
❷ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	50 %

0264 전략 교집합이 공집합인 두 집합을 찾는다.

풀이 ㄱ. $A\cap A^C=\varnothing$

ㄴ. $\varnothing^C\cap U=U\cap U=U$

ㄷ. $(A-B)\cap(B-A)=(A\cap B^C)\cap(B\cap A^C)$

$=A\cap(B^C\cap B)\cap A^C$

$=A\cap\varnothing\cap A^C=\varnothing$

ㄹ. $(A\cap B^C)\cap(A\cap B)=A\cap(B^C\cap B)$

$=A\cap\varnothing=\varnothing$

이상에서 항상 서로소인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ④

0265 전략 $A\cap B$는 18과 k의 양의 공약수의 집합임을 이용한다.

풀이 $A\cap B$는 18과 k의 양의 공약수의 집합이므로 18과 k의 최대공약수가 9이어야 한다.

이때 $18=9\cdot2$에서 $k=9m$ (m은 2와 서로소) 꼴이어야 하므로 k의 값이 될 수 있는 것은 ③ $27=9\cdot3$이다.

답 ③

0266 전략 각 부등식의 해의 집합을 구한 후 수직선 위에 나타내어 본다.

풀이 $x^2-4x-5<0$에서 $(x+1)(x-5)<0$

$\therefore -1<x<5$

$\therefore A=\{x\,|\,-1<x<5\}$

$x^2-5x+6>0$에서 $(x-2)(x-3)>0$

$\therefore x<2$ 또는 $x>3$

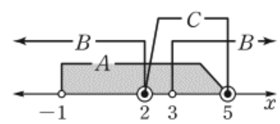
$\therefore B=\{x\,|\,x<2$ 또는 $x>3\}$

$x^2-7x+10\le0$에서 $(x-2)(x-5)\le0$

$\therefore 2\le x\le5$

$\therefore C=\{x\,|\,2\le x\le5\}$ ⋯ ❶

세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$(A\cap B)\cup C$

$=\{x\,|\,-1<x<2$ 또는 $3<x<5\}$

$\cup\{x\,|\,2\le x\le5\}$

$=\{x\,|\,-1<x\le5\}$ ⋯ ❷

따라서 정수인 원소는

0, 1, 2, 3, 4, 5

의 6개이다. ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 세 집합 A, B, C를 구할 수 있다.	50 %
❷ $(A\cap B)\cup C$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 정수인 원소의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0267 전략 집합의 원소의 개수를 구하는 공식을 이용한다.

풀이 ① $n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)$

$=16-12=4$

② $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=16+18-4=30$

③ $n(A^C)=n(U)-n(A)=30-16=14$

④ $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=18-4=14$

⑤ $n(A^C\cup B)=n(A^C)+n(B)-n(A^C\cap B)$

$=n(A^C)+n(B)-n(B-A)$

$=14+18-14=18$

답 ④

14 집합의 연산

0268 **전략** 주어진 조건을 집합을 이용하여 나타낸다.

풀이 두 동아리 A, B에 가입한 학생의 집합을 각각 A, B라 하면 조건 (가), (나)에서

$n(A\cup B)=56$, $n(A)=35$, $n(B)=27$

동아리 A에만 가입한 학생의 집합은 $A-B$이므로

$$n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)$$
$$=56-27=29$$

따라서 구하는 학생 수는 29이다.

답 29

0269 **전략** 주어진 조건을 집합을 이용하여 나타낸다.

풀이 조사한 고객 전체의 집합을 U, 짜장면을 좋아하는 고객의 집합을 A, 짬뽕을 좋아하는 고객의 집합을 B라 하면

$n(U)=30$, $n(A)=18$, $n(B)=13$, $n(A\cap B)=7$ ➊

짜장면과 짬뽕 중 어느 것도 좋아하지 않는 고객의 집합은 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$$
$$=30-n(A\cup B) \quad \cdots\cdots ㉠$$ ➋

이때

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=18+13-7=24$$

이므로 ㉠에서 구하는 고객의 수는

$30-24=6$ ➌

답 6

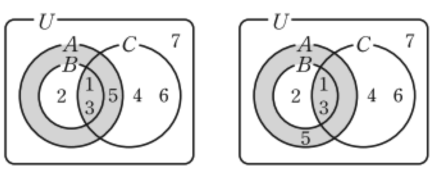
채점 기준	비율
➊ 주어진 조건을 집합으로 나타내고, 각 집합의 원소의 개수를 구할 수 있다.	20 %
➋ 구하는 고객의 수를 집합의 원소의 개수로 나타낼 수 있다.	30 %
➌ 답을 구할 수 있다.	50 %

0270 **전략** 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타낸다.

풀이 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 7\}$이고 $A\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로

$(A\cup C)^C=\{7\}$

주어진 조건을 만족시키도록 집합 U, A, B, C를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 두 가지 중 하나이고, 구하는 집합은 색칠한 부분과 같다.



$\therefore A\cap(B^C\cup C)=\{1, 3, 5\}$

답 ④

0271 **전략** 주어진 조건을 이용하여 집합 사이의 포함 관계를 구한다.

풀이 $X\cup A=X$이므로 $A\subset X$

$X\cap B^C=X$이므로 $X\subset B^C$

즉 $A\subset X\subset B^C$이고 $A=\{1, 2\}$, $B^C=\{1, 2, 6, 7, 8\}$이므로 집합 X는 집합 $\{1, 2, 6, 7, 8\}$의 부분집합 중 1, 2를 반드시 포함하는 집합이다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{5-2}=8$

답 8

0272 **전략** $XY<0$이면 $X>0$, $Y<0$ 또는 $X<0$, $Y>0$임을 이용한다.

풀이 $f(x)g(x)<0$의 해는

$f(x)>0$, $g(x)<0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)>0$

따라서 부등식 $f(x)g(x)<0$의 해의 집합은

$$\{x\,|\,f(x)>0,\ g(x)<0 \text{ 또는 } f(x)<0,\ g(x)>0\}$$
$$=\{x\,|\,f(x)>0,\ g(x)<0\}\cup\{x\,|\,f(x)<0,\ g(x)>0\}$$
$$=(\{x\,|\,f(x)>0\}\cap\{x\,|\,g(x)<0\})$$
$$\cup(\{x\,|\,f(x)<0\}\cap\{x\,|\,g(x)>0\})$$
$$=(A\cap D)\cup(B\cap C)$$

답 ⑤

0273 **전략** $n(A\cup B)$는 $A\cap B=\varnothing$일 때 최대이고, $A\subset B$일 때 최소임을 이용한다.

풀이 소비자 전체의 집합을 U, A제품을 선호하는 사람의 집합을 A, B제품을 선호하는 사람의 집합을 B라 하면

$n(U)=100$, $n(A)=39$, $n(B)=52$

$n(A)+n(B)<n(U)$이므로 $A\cap B=\varnothing$일 때 $n(A\cup B)$가 최대이다. 따라서 $n(A\cup B)$의 최댓값은

$n(A)+n(B)=39+52=91$

또 $A\subset B$일 때 $n(A\cup B)$가 최소이므로 $n(A\cup B)$의 최솟값은

$n(B)=52$

답 최댓값: 91, 최솟값: 52

15 명제

V. 집합과 명제

0274 답 ○

0275 답 ×

0276 답 ×

0277 답 ○

0278 답 거짓

0279 답 참

0280 답 참

0281 답 거짓

0282 답 정의

0283 답 정리

0284 답 정의

0285 답 정리

0286 답 $\{8\}$

0287 답 $\{1, 2, 3, 4\}$

0288 $x^2-25=0$에서 $(x+5)(x-5)=0$
$\therefore x=-5$ 또는 $x=5$
따라서 주어진 조건의 진리집합은 $\{5\}$ 답 $\{5\}$

0289 $x^2-4x+3=0$에서 $(x-1)(x-3)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$
따라서 주어진 조건의 진리집합은 $\{1, 3\}$ 답 $\{1, 3\}$

0290 답 $x\neq1$

0291 답 $x\leq3$

0292 답 $x\neq0$이고 $x\neq1$

0293 답 $x=-3$ 또는 $x=4$

0294 답 $\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.

0295 답 직사각형은 평행사변형이 아니다.

0296 답 1은 소수이다.

0297 답 $(-1)^2>1$

0298 명제: 0은 자연수이다. (거짓)
부정: 0은 자연수가 아니다. (참)
답 명제: 거짓, 부정: 참

0299 명제: 2는 합성수이다. (거짓)
부정: 2는 합성수가 아니다. (참)
답 명제: 거짓, 부정: 참

참고 2는 소수이다.

0300 명제: $3x+9=3(x+3)$ (참)
부정: $3x+9\neq3(x+3)$ (거짓)
답 명제: 참, 부정: 거짓

0301 명제: $3i$는 실수가 아니다. (단, $i^2=-1$) (참)
부정: $3i$는 실수이다. (단, $i^2=-1$) (거짓)
답 명제: 참, 부정: 거짓

0302 답 부정: x는 6의 약수가 아니다.
진리집합: $\{4, 8\}$

0303 답 부정: $x^2-8x+12\neq0$
진리집합: $\{4, 8\}$

0304 답 부정: $5\leq x\leq8$
진리집합: $\{6, 8\}$

0305 답 가정: a가 짝수이다., 결론: a^2은 짝수이다.

0306 답 가정: $x=2$이다., 결론: $x-1=1$이다.

0307 답 가정: 3의 배수이다., 결론: 9의 배수이다.

0308 $|-1|=1$이므로 주어진 명제는 참이다.
답 참

0309 [반례] $x=2$이면 x는 소수이지만 홀수가 아니므로 주어진 명제는 거짓이다.
답 거짓

0310 답 참

0311 [반례] $x=2$이면 $x>1$이지만 $x\leq2$이므로 주어진 명제는 거짓이다.
답 거짓

0312 답 참

0313 [반례] $2^2=4$, $4^2=16$이고 4와 16은 짝수이므로 주어진 명제는 거짓이다.
답 거짓

0314 답 참

0315 답 거짓

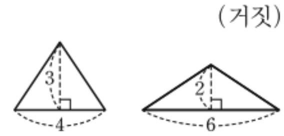
0316 답 어떤 자연수 x에 대하여 $x\leq0$이다.

0317 답 모든 실수 x에 대하여 $x^2\neq-1$이다.

0318 역: $|x|=1$이면 $x=-1$이다. (거짓)
[반례] $x=1$이면 $|x|=1$이지만 $x\neq-1$이다.
대우: $|x|\neq1$이면 $x\neq-1$이다. (참)
답 풀이 참조

0319 역: x가 홀수이면 x는 소수이다. (거짓)
[반례] $x=9$이면 x는 홀수이지만 소수가 아니다.
대우: x가 홀수가 아니면 x는 소수가 아니다. (거짓)
[반례] $x=2$이면 x는 홀수가 아니지만 소수이다.
답 풀이 참조

0320 역: 두 삼각형의 넓이가 같으면 두 삼각형은 합동이다. (거짓)
[반례] 오른쪽 그림에서 두 삼각형의 넓이는 6으로 같지만 합동은 아니다.



대우: 두 삼각형의 넓이가 다르면 두 삼각형은 합동이 아니다. (참)
답 풀이 참조

0321 역: $x>2$이면 $x>1$이다. (참)
대우: $x\le 2$이면 $x\le 1$이다. (거짓)
[반례] $x=2$이면 $x\le 2$이지만 $x>1$이다.

답 풀이 참조

0322 $p \longrightarrow q$: $x\le 0$이면 $x<0$이다. (거짓)
[반례] $x=0$이면 $x\le 0$이지만 $x\ge 0$이다.
$q \longrightarrow p$: $x<0$이면 $x\le 0$이다. (참)
따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

답 필요조건

0323 모든 한 자리 자연수는 10 미만의 자연수이고, 10 미만의 자연수는 모두 한 자리 자연수이다.
따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

답 필요충분조건

0324 $p \longrightarrow q$: x가 8의 양의 배수이면 x는 짝수인 자연수이다. (참)
$q \longrightarrow p$: x가 짝수인 자연수이면 x는 8의 양의 배수이다. (거짓)
[반례] $x=4$이면 짝수인 자연수이지만 8의 배수는 아니다.
따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

답 충분조건

0325 $a=0 \Longrightarrow a=0$ 또는 $b=0$
따라서 $a=0$은 $a=0$ 또는 $b=0$이기 위한 충분조건이다.

답 충분조건

0326 $ab=0 \Longleftrightarrow a=0$ 또는 $b=0$
따라서 $ab=0$은 $a=0$ 또는 $b=0$이기 위한 필요충분조건이다.

답 필요충분조건

0327 $a^2+b^2=0 \Longleftrightarrow a=b=0$
$a=b=0 \Longrightarrow a=0$ 또는 $b=0$이므로
$a^2+b^2=0 \Longrightarrow a=0$ 또는 $b=0$
따라서 $a^2+b^2=0$은 $a=0$ 또는 $b=0$이기 위한 충분조건이다.

답 충분조건

0328 $(a+b)^2\ge 0 \Longleftrightarrow a+b$는 실수
$a=0$ 또는 $b=0 \Longrightarrow a+b$는 실수이므로
$a=0$ 또는 $b=0 \Longrightarrow (a+b)^2\ge 0$
따라서 $(a+b)^2\ge 0$은 $a=0$ 또는 $b=0$이기 위한 필요조건이다.

답 필요조건

0329 주어진 명제의 대우는
'$x=2$이고 $y=3$이면 $xy=6$이다.'
따라서 대우가 참이므로 주어진 명제는 참이다.

답 풀이 참조

0330 $\sqrt{2}$가 무리수가 아니라고 하면 $\sqrt{2}$는 $\boxed{\text{유리수}}$이므로
$\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)
으로 나타낼 수 있다. 즉 $\sqrt{2}m=n$이므로 양변을 제곱하면
$2m^2=n^2$ ...... ㉠
이때 n^2이 짝수이므로 n도 $\boxed{\text{짝수}}$이다.
$n=2k$ (k는 자연수)로 놓으면 ㉠에서
$2m^2=4k^2$ $\therefore m^2=2k^2$
따라서 m^2이 짝수이므로 m도 $\boxed{\text{짝수}}$이다.
이것은 m, n이 $\boxed{\text{서로소}}$라는 가정에 모순이므로 $\sqrt{2}$는 무리수이다.
$\therefore$ (가) 유리수 (나) 짝수 (다) 짝수 (라) 서로소

답 풀이 참조

0331 $a^2+b^2\ge ab$에서 $a^2-ab+b^2\ge 0$ ...... ㉠
㉠의 좌변을 변형하면
$$a^2-ab+b^2=\left(a^2-ab+\frac{b^2}{4}\right)-\frac{b^2}{4}+b^2$$
$$=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\boxed{\frac{3}{4}b^2}$$
a, b가 실수이므로 $\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2\ge 0$, $\dfrac{3}{4}b^2\ge 0$
$\therefore a^2-ab+b^2 \boxed{\ge} 0$
이때 등호는 $a-\dfrac{b}{2}=0$, $\dfrac{3}{4}b^2=0$일 때, 즉 $a=\boxed{0}$, $b=\boxed{0}$일 때 성립한다.
$\therefore$ (가) $\dfrac{3}{4}b^2$ (나) $\ge$ (다) 0 (라) 0

답 풀이 참조

0332 ㄱ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
ㄴ. $48\div 6=8<9$이므로 거짓인 명제이다.
ㄷ. 모든 x에 대하여 항상 성립하므로 참인 명제이다.
ㄹ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
이상에서 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

0333 ①, ③ 참인 명제이다.
② x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
④, ⑤ 거짓인 명제이다.

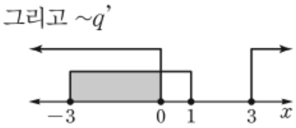
답 ②

0334 ㄱ, ㄹ. 명제가 아니다.
ㄴ. 참인 명제이다.
ㄷ, ㅁ. 거짓인 명제이다.
이상에서 명제인 것은 ㄴ, ㄷ, ㅁ이다.

답 ㄴ, ㄷ, ㅁ

참고 ㅁ. 원소 기호 1번은 수소(H)이다.

0335 '$\sim p$ 또는 q'의 부정은 'p 그리고 $\sim q$'
p: $-3\le x\le 1$,
$\sim q$: $x\le 0$ 또는 $x\ge 3$이므로
'p 그리고 $\sim q$'는
$-3\le x\le 0$



답 $-3\le x\le 0$

0336 답 ⑤

0337 $(a-b)(b-c)(c-a)=0$에서

$a-b=0$ 또는 $b-c=0$ 또는 $c-a=0$

$\therefore a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$

따라서 주어진 조건의 부정은

$a\neq b$이고 $b\neq c$이고 $c\neq a$

답 ②

0338 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$이고 조건 p의 진리집합을 P라 하면

$x^2-6x-16<0$에서 $(x+2)(x-8)<0$

$\therefore -2<x<8$

$\therefore P=\{1, 2, 3, \cdots, 7\}$

따라서 p의 진리집합의 원소의 개수는 7이다. 답 ④

0339 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{3, 6, 9, \cdots, 48\}$, $Q=\{4, 8, 12, \cdots, 48\}$

따라서 조건 'p이고 q'의 진리집합은

$\underbrace{P\cap Q}_{\text{3과 4의 공배수의 집합}}=\{12, 24, 36, 48\}$

답 $\{12, 24, 36, 48\}$

0340 $0\leq x<2$에서 $x\geq 0$이고 $x<2$

p: $x<0$에서 $\sim p$: $x\geq 0$이므로 $P^C=\{x|x\geq 0\}$

q: $x<2$이므로 $Q=\{x|x<2\}$

따라서 구하는 진리집합은

$P^C\cap Q$

답 ⑤

참고 ① $P\cup Q=\{x|x<2\}$

② $P\cap Q=\{x|x<0\}$

③ $P\cup Q^C=\{x|x<0$ 또는 $x\geq 2\}$

④ $P\cap Q^C=\varnothing$

0341 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

p: $|x-3|>2$에서 $\sim p$: $|x-3|\leq 2$이므로

$-2\leq x-3\leq 2$ $\therefore 1\leq x\leq 5$

$\therefore P^C=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ··· ❶

q: $x^2+3x-10=0$에서 $(x+5)(x-2)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=2$

$\therefore Q=\{-5, 2\}$ ··· ❷

따라서 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합은

$P^C\cup Q=\{1, 2, 3, 4, 5\}\cup\{-5, 2\}$

$=\{-5, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ··· ❸

이므로 모든 원소의 합은

$-5+1+2+3+4+5=10$ ··· ❹

답 10

채점 기준	비율
❶ 조건 $\sim p$의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❷ 조건 q의 진리집합을 구할 수 있다.	20 %
❸ 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❹ 원소의 합을 구할 수 있다.	20 %

0342 ① 두 홀수의 합은 항상 짝수이다.

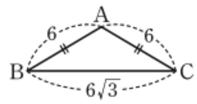
② $x=-1$이면 $2x-3=2\cdot(-1)-3=-5$

④ $a=2k$(k는 자연수)라 하면

$3a=6k=2\cdot 3k$

이므로 $3a$는 항상 짝수이다.

⑤ 오른쪽 그림에서 △ABC는 이등변삼각형이지만 정삼각형은 아니다.



답 ③

0343 ⑤ [반례] 6은 2의 양의 배수이지만 4의 양의 배수는 아니다.

답 ⑤

0344 ㄱ. [반례] $x=1$, $y=-2$이면 $x>y$이지만 $x^2=1$, $y^2=4$이므로 $x^2<y^2$이다.

ㄷ. $x^2+y^2\neq 0$이면 $x^2\neq 0$ 또는 $y^2\neq 0$

$\therefore x\neq 0$ 또는 $y\neq 0$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0345 명제 $q \longrightarrow p$가 거짓임을 보이는 원소는 집합 Q에는 속하고 집합 P에는 속하지 않는다.

따라서 구하는 원소는 $Q-P$의 원소인 c이다. 답 ③

0346 명제 '$\sim p$이면 q이다.'가 거짓임을 보이는 원소는 집합 P^C에는 속하고 집합 Q에는 속하지 않는다.

따라서 구하는 집합은

$P^C-Q=P^C\cap Q^C$

답 ③

0347 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보여주는 원소는 집합 P에는 속하고 집합 Q에는 속하지 않으므로 $P-Q$의 원소이다.

또 명제 $q \longrightarrow p$가 거짓임을 보여주는 원소는 집합 Q에는 속하고 집합 P에는 속하지 않으므로 $Q-P$의 원소이다. ··· ❶

따라서 a의 값은 집합 $P-Q$에 속하는 모든 원소의 합이고, b의 값은 집합 $Q-P$에 속하는 모든 원소의 합이다.

이때 두 집합 $P-Q$, $Q-P$는 서로소이므로

$(P-Q)\cup(Q-P)=(P\cup Q)-(P\cap Q)$

$=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}-\{3, 7\}$

$=\{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$

$a+b$의 값은 집합 $(P-Q)\cup(Q-P)$에 속하는 모든 원소의 합이므로

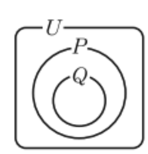
$1+2+4+5+6+8+9+10=45$ ··· ❷

답 45

채점 기준	비율
❶ 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow p$가 거짓임을 보여주는 원소가 속하는 집합을 각각 구할 수 있다.	40 %
❷ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	60 %

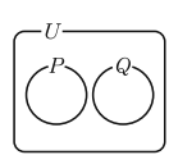
0348 명제 $q \longrightarrow p$가 참이면 $Q\subset P$

④ $P-Q\neq\varnothing$



답 ④

0349 $P\cap Q=\varnothing$에서 두 집합 P, Q는 서로소이므로 P, Q는 오른쪽 그림과 같다.



③ $Q\subset P^C$이므로 명제 $q \longrightarrow \sim p$는 항상 참이다.

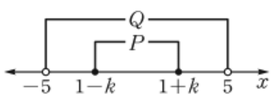
답 ③

참고 $P\subset Q^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$도 참이다.

0350 ①, ② $P\subset Q^C$, $P\subset R^C$이므로 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $p \longrightarrow \sim r$는 모두 참이다.
③ $Q\subset P^C$이므로 명제 $q \longrightarrow \sim p$는 참이다.
④ $R\subset Q$이므로 명제 $r \longrightarrow q$는 참이다.
⑤ $R^C \not\subset Q^C$이므로 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$는 거짓이다.

답 ⑤

0351 $|x-1|\le k$에서 $\quad -k\le x-1\le k$
$\therefore 1-k\le x\le 1+k$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|1-k\le x\le 1+k\}$,
$Q=\{x|-5<x<5\}$
명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서

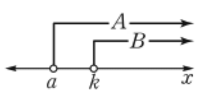


$-5<1-k$, $1+k<5$
$k<6$, $k<4$
$\therefore k<4$
따라서 자연수 k는 1, 2, 3의 3개이다.

답 ③

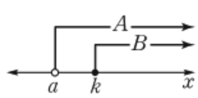
라쎈 특강 **$B\subset A$가 되도록 하는 a의 값의 범위**

①



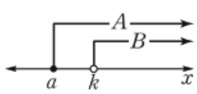
➡ $a\le k$

②



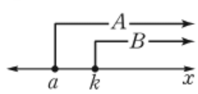
➡ $a<k$

③



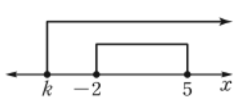
➡ $a\le k$

④



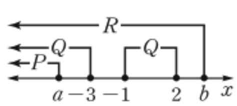
➡ $a\le k$

0352 주어진 명제가 참이 되려면
$\{x|-2\le x\le 5\}\subset\{x|x\ge k\}$
이어야 하므로 오른쪽 그림에서
$k\le -2$



답 $k\le -2$

0353 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면
$P=\{x|x\le a\}$, $Q=\{x|x\le -3$ 또는 $-1\le x\le 2\}$,
$R=\{x|x\le b\}$
두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 모두 참이 되려면
$P\subset Q$, $Q\subset R$ ···➊

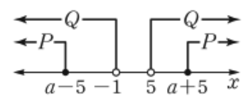


이어야 하므로 오른쪽 그림에서
$a\le -3$, $b\ge 2$ ···➋
따라서 a의 최댓값은 -3, b의 최솟값은 2이므로 구하는 곱은
$-3\cdot 2=-6$ ···➌

답 -6

채점 기준	비율
➊ 세 조건의 진리집합 사이의 포함 관계를 구할 수 있다.	40 %
➋ a, b의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
➌ a의 최댓값과 b의 최솟값의 곱을 구할 수 있다.	20 %

0354 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
$|x-a|\ge 5$에서 $\quad x-a\le -5$ 또는 $x-a\ge 5$
즉 $x\le a-5$ 또는 $x\ge a+5$이므로
$P=\{x|x\le a-5$ 또는 $x\ge a+5\}$
$|x-2|>3$에서 $\quad x-2<-3$ 또는 $x-2>3$
즉 $x<-1$ 또는 $x>5$이므로
$Q=\{x|x<-1$ 또는 $x>5\}$ ···➊
명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서

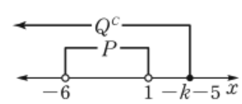


$a-5<-1$, $a+5>5$
$\therefore 0<a<4$ ···➋
따라서 정수 a는 1, 2, 3의 3개이다. ···➌

답 3

채점 기준	비율
➊ 조건 p, q의 진리집합을 구할 수 있다.	40 %
➋ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
➌ 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0355 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
$x^2+5x-6<0$에서 $\quad (x+6)(x-1)<0$
$\therefore -6<x<1$
$\therefore P=\{x|-6<x<1\}$
또 $x-5<2x+k$에서 $\quad x>-k-5$
따라서 $Q=\{x|x>-k-5\}$이므로
$Q^C=\{x|x\le -k-5\}$
명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면
$P\subset Q^C$
이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-k-5\ge 1$
$\therefore k\le -6$
따라서 k의 최댓값은 -6이다.

답 ③

0356 ㄱ. [반례] $x=1$이면 $1^2+1=2$이다.
ㄴ. $x=0$이면 $0^2=0$이므로 참이다.
ㄷ. $x=2$이면 $2>\dfrac{1}{2}$이므로 참이다.
이상에서 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

참고 ㄷ. $x>0$이므로 $x>\dfrac{1}{x}$의 양변에 x를 곱하면
$x^2>1$, $\quad x^2-1>0$
$(x+1)(x-1)>0 \quad \therefore x>1\ (\because x>0)$
따라서 $x>1$인 모든 실수 x에 대하여 $x>\dfrac{1}{x}$이다.

0357 ㄴ. $P=U$일 때만 참이므로 참이 아닐 수도 있다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

라센 특강 '모든'이나 '어떤'이 있는 명제의 참, 거짓

공집합이 아닌 전체집합 U에 대하여 조건 p의 진리집합을 P라 할 때,

① $P=\varnothing$ ⇨ '어떤 x에 대하여 p이다.' (거짓)
'모든 x에 대하여 p이다.' (거짓)

② $P=U$ ⇨ '어떤 x에 대하여 p이다.' (참)
'모든 x에 대하여 p이다.' (참)

③ $P\neq\varnothing$ ⇨ '어떤 x에 대하여 p이다.' (참)

④ $P\neq U$ ⇨ '모든 x에 대하여 p이다.' (거짓)

0358 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

① $4x$의 값은　4, 8, 12, 16, 20
따라서 모든 x에 대하여 $4x\leq 20$이므로 참이다.

② $x=5$이면 $5+5=10$이므로 참이다.

③ $-x+3$의 값은　2, 1, 0, -1, -2
따라서 모든 x에 대하여 $-x+3\geq -2$이므로 참이다.

④ x^2의 값은　1, 4, 9, 16, 25
따라서 $x^2<1$을 만족시키는 x가 존재하지 않으므로 거짓이다.

⑤ $x-5$의 값은　-4, -3, -2, -1, 0
따라서 모든 x에 대하여 $x-5\leq 0$이므로 참이다.

답 ④

0359 (1) 모든 실수 x에 대하여 $|x|\leq x$이다. ··· ❶

(2) [반례] $x=-1$이면 $|x|=1$이므로 $|x|>x$이다.
따라서 명제의 부정은 거짓이다. ··· ❷

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 부정을 말할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 명제의 부정의 참, 거짓을 판별할 수 있다.	50 %

0360 ① 역: $x=y$이면 $x^2=y^2$이다. (참)

② 역: $x=0$이면 $xy=0$이다. (참)

③ 역: $2x-2=2$이면 $x=2$이다. (참)

④ 역: $xy>0$이면 $x<0$이고 $y<0$이다. (거짓)
[반례] $x=1$, $y=2$이면 $xy>0$이지만 $x>0$이고 $y>0$이다.

⑤ 역: 4의 양의 약수이면 8의 양의 약수이다. (참)

답 ④

0361 명제 $p \longrightarrow q$의 역은　$q \longrightarrow p$
따라서 $q \longrightarrow p$가 참이므로 그 대우인 $\sim p \longrightarrow \sim q$도 반드시 참이다.

답 ②

0362 주어진 명제의 대우는
'$x\neq 0$ 또는 $y\neq 0$이면 $x^2+y^2\neq 0$이다.'
이때 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다. 답 ②

0363 ㄱ. 역: $xy=0$이면 $x=0$ 또는 $y=0$이다. (참)
대우: $xy\neq 0$이면 $x\neq 0$이고 $y\neq 0$이다. (참)

ㄴ. 역: $x<0$ 또는 $y<0$이면 $xy<0$이다. (거짓)
[반례] $x=-1$, $y=-1$이면 $xy=1>0$이다.
대우: $x\geq 0$이고 $y\geq 0$이면 $xy\geq 0$이다. (참)

ㄷ. 역: xy가 짝수이면 x와 y가 짝수이다. (거짓)
[반례] $x=2$, $y=1$이면 xy는 짝수이지만 y는 짝수가 아니다.
대우: xy가 홀수이면 x 또는 y가 홀수이다. (참)

이상에서 역과 대우가 모두 참인 명제는 ㄱ뿐이다. 답 ①

0364 주어진 명제가 참이므로 그 대우
'$x-5=0$이면 $x^2+kx+10=0$이다.'
도 참이다.
따라서 $x=5$를 $x^2+kx+10=0$에 대입하면
$25+5k+10=0$,　$5k=-35$
$\therefore k=-7$ 답 -7

0365 주어진 명제가 참이므로 그 대우
'$a\geq k$이고 $b\geq 2$이면 $a+b\geq 10$이다.'
도 참이다.
$a\geq k$, $b\geq 2$에서 $a+b\geq k+2$이므로
$k+2\geq 10$　$\therefore k\geq 8$
따라서 k의 최솟값은 8이다. 답 ④

0366 ①, ④ 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $r \longrightarrow p$가 모두 참이므로 각각의 대우인 $q \longrightarrow \sim p$, $\sim p \longrightarrow \sim r$도 모두 참이다.

②, ③ 두 명제 $r \longrightarrow p$, $p \longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 $r \longrightarrow \sim q$가 참이고, 그 대우인 $q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 ⑤이다. 답 ⑤

0367 ㄱ, ㄷ. 두 명제 $r \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim p$가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 $r \longrightarrow \sim p$가 참이고, 그 대우인 $p \longrightarrow \sim r$도 참이다.
이상에서 항상 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

0368 p: 수학을 좋아한다.
q: 과학을 좋아한다.
r: 영어를 좋아한다.
s: 국어를 좋아한다.
로 놓으면 (가), (나)에서 두 명제 $r \longrightarrow \sim p$, $\sim q \longrightarrow s$가 모두 참이므로 각각의 대우인 $p \longrightarrow \sim r$, $\sim s \longrightarrow q$도 모두 참이다.
따라서 명제 $p \longrightarrow q$가 참임을 보이기 위해 필요한 명제는 $\sim r \longrightarrow \sim s$, 즉 '영어를 좋아하지 않으면 국어를 좋아하지 않는다.'이다. 답 ⑤

0369 ① $x^2=x$에서　$x=0$ 또는 $x=1$
따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

② $x^2=y^2$에서　$x=y$ 또는 $x=-y$
따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

③ $x>y$의 양변에서 z를 빼면　$x-z>y-z$
$x-z>y-z$의 양변에 z를 더하면　$x>y$
따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

④ $xy\geq 0$에서
'$x>0$이고 $y>0$' 또는 '$x<0$이고 $y<0$' 또는
$x=0$ 또는 $y=0$

따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

⑤ $xy \neq 0$에서 $\quad x \neq 0$이고 $y \neq 0$

$x^2+y^2 \neq 0$에서 $\quad x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$

따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

답 ④

0370 ③ $q \Longrightarrow p$이므로 $\sim p \Longrightarrow \sim q$이다.

따라서 $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다. 답 ③

참고 ⑤ $\sim q$는 $\sim p$이기 위한 필요조건이다.

0371 $A \cup B = A$이면 $B \subset A$이므로 $\quad n(B) \leq n(A)$

$\therefore p \Longrightarrow q$

$A=\{1, 2\}$, $B=\{3\}$이면 $n(A)=2$, $n(B)=1$이므로

$n(B) \leq n(A)$이지만 $A \cup B \neq A$이다.

$\therefore q \not\Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

답 충분조건

0372 ㄱ. $xy=0 \Longleftrightarrow x=0$ 또는 $y=0$이고

$x=0$이고 $y=0 \Longrightarrow x=0$ 또는 $y=0$

따라서 $xy=0$은 $x=0$이고 $y=0$이기 위한 필요조건이다.

ㄴ. $x^2+y^2=0 \Longleftrightarrow x=0$이고 $y=0$

ㄷ. $|x|+|y|=0 \Longleftrightarrow x=0$이고 $y=0$

ㄹ. $x-y=0 \Longleftrightarrow x=y$이고

$x=0$이고 $y=0 \Longrightarrow x=y$

따라서 $x-y=0$은 $x=0$이고 $y=0$이기 위한 필요조건이다.

이상에서 필요충분조건인 것은 ㄴ, ㄷ의 2개이다. 답 ③

0373 $(A \cap B) \cup (A-B) = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$

$= A \cap (B \cup B^C)$

$= A \cap U = A$

따라서 $A \cup B = A$가 성립하기 위한 필요충분조건은 ② $B \subset A$이다.

답 ②

0374 p가 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 $\quad p \Longrightarrow \sim q$

q가 r이기 위한 필요조건이므로 $\quad r \Longrightarrow q$

②, ⑤ 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $r \longrightarrow q$가 모두 참이므로 각각의 대우인

$q \longrightarrow \sim p$, $\sim q \longrightarrow \sim r$

도 참이다.

①, ④ 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $p \longrightarrow \sim r$가 참이고, 그 대우인 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 ③이다.

답 ③

0375 p가 q이기 위한 충분조건이므로 $\quad p \Longrightarrow q$

r가 q이기 위한 필요조건이므로 $\quad q \Longrightarrow r$

ㄷ. 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $p \longrightarrow r$가 참이다.

이상에서 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

0376 명제 $\sim p \longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우인 $r \longrightarrow p$가 참이다.

따라서 두 명제 $r \longrightarrow p$, $p \longrightarrow q$가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 $r \longrightarrow q$가 참이다.

ㄱ. $p \Longrightarrow q$이므로 q는 p이기 위한 필요조건이다.

ㄴ. $r \Longrightarrow q$이므로 r는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄷ. $r \Longrightarrow p$이므로 p는 r이기 위한 필요조건이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0377 주어진 벤다이어그램에서 $Q \subset P$이므로 $\quad q \Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 $\boxed{\text{필요}}$조건이다.

또 $P \subset R^C$이므로 $\quad p \Longrightarrow \sim r$

따라서 $\sim r$는 p이기 위한 $\boxed{\text{필요}}$조건이다.

답 필요, 필요

0378 p는 q이기 위한 필요조건이므로 $\quad Q \subset P$

q는 r이기 위한 필요조건이므로 $\quad R \subset Q$

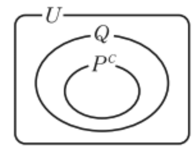
$\therefore R \subset Q \subset P$ 답 ⑤

0379 $\sim p$는 q이기 위한 충분조건이므로 $\quad P^C \subset Q$

이것을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$P \cup Q = U$

답 ⑤



0380 (1) $P=\{-1, 0, 1\}$, $Q=\{0\}$, $R=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ··· ❶

(2) $Q \subset P$이므로 $\quad q \Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다. ··· ❷

(3) $P \subset R$이므로 $\quad p \Longrightarrow r$

따라서 p는 r이기 위한 충분조건이다. ··· ❸

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ P, Q, R를 구할 수 있다.	20 %
❷ p가 q이기 위한 어떤 조건인지 말할 수 있다.	40 %
❸ p가 r이기 위한 어떤 조건인지 말할 수 있다.	40 %

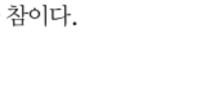
0381 $-a<x<a$가 $x^2+6x+8<0$이기 위한 필요조건이므로 명제 '$x^2+6x+8<0$이면 $-a<x<a$이다.'가 참이다.

$x^2+6x+8<0$에서 $\quad (x+4)(x+2)<0$

$\therefore -4<x<-2$

즉 $\{x \mid -4<x<-2\} \subset \{x \mid -a<x<a\}$

이므로 오른쪽 그림에서



$-a \leq -4$, $a \geq -2$

$\therefore a \geq 4$

따라서 a의 최솟값은 4이다. 답 ④

0382 $x-3=0$, 즉 $x=3$은 $x^2+ax+b=0$이기 위한 필요충분조건이므로 명제 '$x=3$이면 $x^2+ax+b=0$이다.'와 명제 '$x^2+ax+b=0$이면 $x=3$이다.'가 참이다.

따라서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 해는 $x=3$뿐이어야 하므로

$(x-3)^2=0$에서 $\quad x^2-6x+9=0$

따라서 $a=-6$, $b=9$이므로 $\quad a+b=3$ 답 ⑤

0383 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$|x-2|\geq 10$에서 $\quad x-2\leq -10$ 또는 $x-2\geq 10$

$\therefore x\leq -8$ 또는 $x\geq 12$

$\therefore P=\{x|x\leq -8$ 또는 $x\geq 12\}$

$Q=\{x|x\geq a\}$이므로 $\quad Q^C=\{x|x<a\}$

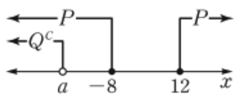
$\sim q$가 p이기 위한 충분조건이 되려면

$\sim q \Longrightarrow p$

즉 $Q^C\subset P$이므로 오른쪽 그림에서

$a\leq -8$

따라서 a의 최댓값은 -8이다.



답 -8

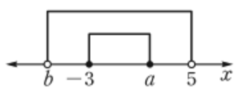
0384 (1) p가 q이기 위한 충분조건이므로

$p \Longrightarrow q$ ⋯ ❶

즉 $\{x|-3\leq x\leq a\}\subset\{x|b<x<5\}$

이므로 오른쪽 그림에서

$b<-3,\ a<5$ ⋯ ❷



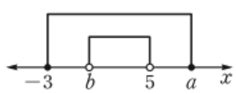
(2) p가 q이기 위한 필요조건이므로

$q \Longrightarrow p$ ⋯ ❸

즉 $\{x|b<x<5\}\subset\{x|-3\leq x\leq a\}$

이므로 오른쪽 그림에서

$b\geq -3,\ a\geq 5$ ⋯ ❹



답 (1) $a<5,\ b<-3$ (2) $a\geq 5,\ b\geq -3$

채점 기준	비율
❶ $p \Longrightarrow q$임을 알 수 있다.	20 %
❷ 조건을 만족시키는 a, b의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ $q \Longrightarrow p$임을 알 수 있다.	20 %
❹ 조건을 만족시키는 a, b의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %

0385 주어진 명제의 대우는

'$\boxed{n\text{이 홀수이면 } n^2\text{도 홀수이다.}}$'

이다.

n이 홀수이면 $n=2k-1$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있으므로

$n^2=(2k-1)^2=4k^2-4k+1$

$=2(2k^2-2k)+\boxed{1}$

이때 $2k^2-2k$는 0 또는 자연수이므로 n^2은 홀수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

$\therefore$ (가) n이 홀수이면 n^2도 홀수이다. (나) 1

답 풀이 참조

0386 (1) x가 유리수이면 x^2도 유리수이다. ⋯ ❶

(2) x가 유리수이면

$x=\pm\dfrac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)

으로 나타낼 수 있다. 이때 양변을 제곱하면

$x^2=\left(\pm\dfrac{n}{m}\right)^2=\dfrac{n^2}{m^2}$

이고, m, n이 서로소인 자연수이므로 m^2, n^2도 서로소인 자연수이다.

따라서 x^2이 유리수이므로 주어진 명제의 대우는 참이고, 주어진 명제도 참이다. ⋯ ❷

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 대우를 구할 수 있다.	20 %
❷ 대우가 참임을 이용하여 주어진 명제가 참임을 증명할 수 있다.	80 %

0387 $1+\sqrt{2}$가 $\boxed{\text{유리수}}$라 가정하면

$1+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}$

이때 $1+\sqrt{2}$, -1은 모두 $\boxed{\text{유리수}}$이므로 $\sqrt{2}$는 $\boxed{\text{유리수}}$이다.

그런데 이것은 $\sqrt{2}$가 $\boxed{\text{무리수}}$라는 사실에 모순이므로 $1+\sqrt{2}$는 무리수이다.

$\therefore$ (가) 유리수 (나) 유리수 (다) 유리수 (라) 무리수

답 풀이 참조

0388 (i) $k=2n$(n은 정수)일 때,

$a(2n)^2+b\cdot 2n+c=0, \qquad 4an^2+2bn+c=0$

$2(2an^2+bn)+\boxed{c}=0$

c는 홀수이므로 위의 등식에서 좌변은 $\boxed{\text{홀수}}$가 되어 모순이다.

(ii) $k=2n+1$(n은 정수)일 때,

$a(2n+1)^2+b(2n+1)+c=0$

$4an^2+4an+2bn+a+b+c=0$

$2(2an^2+2an+bn)+\boxed{a+b+c}=0$

$a+b$가 짝수이고 c가 홀수이므로 $a+b+c$는 홀수이다.

즉 위의 등식에서 좌변은 $\boxed{\text{홀수}}$가 되어 모순이다.

$\therefore$ (가) c (나) 홀수 (다) $a+b+c$

답 ④

0389 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$

$=b^2x^2-2abxy+a^2y^2$

$=(\boxed{bx-ay})^2\geq 0$

$\therefore (a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$

이때 등호는 $\boxed{bx=ay}$일 때 성립한다.

$\therefore$ (가) $bx-ay$ (나) $bx=ay$

답 (가) $bx-ay$ (나) $bx=ay$

참고 (가)에 $ay-bx$를 써넣어도 된다.

0390 $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{a+b-\boxed{2\sqrt{ab}}}{2}=\dfrac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}{2}$

$=\dfrac{(\boxed{\sqrt{a}-\sqrt{b}})^2}{2}\geq 0$

$\therefore \dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

이때 등호는 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, 즉 $a=\boxed{b}$일 때 성립한다.

$\therefore$ (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (다) b

답 (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (다) b

0391 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2=a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b}-(a+b)$
$=\boxed{2\sqrt{ab}}>0$

$\therefore (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \boxed{>} (\sqrt{a+b})^2$

그런데 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$, $\sqrt{a+b}>0$이므로

$\sqrt{a}+\sqrt{b}\boxed{>}\sqrt{a+b}$

$\therefore$ (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $>$ (다) $>$

답 (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $>$ (다) $>$

0392 $(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$
$=(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)-(a+b)^2$
$=(a^2+2|ab|+b^2)-(a^2+2ab+b^2)$
$=2(\boxed{|ab|-ab})\geq 0$ ($\because \underbrace{|ab|\geq ab}_{\text{모든 실수 } A\text{에 대하여 } |A|\geq A}$) …… ㉠

$\therefore (|a|+|b|)^2\geq|a+b|^2$

그런데 $|a|+|b|\geq 0$, $|a+b|\geq 0$이므로

$|a|+|b|\geq|a+b|$

이때 등호는 ㉠에서 $|ab|-ab=0$, 즉 $|ab|=ab$일 때 성립하므로

$\boxed{ab\geq 0}$일 때 성립한다.

$\therefore$ (가) $|ab|-ab$ (나) $ab\geq 0$ 답 ①

0393 $x>2$에서 $x-2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+\frac{1}{x-2}=x-2+\frac{1}{x-2}+2$$
$$\geq 2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}}+2$$
$$=2+2=4 \text{ (단, 등호는 } x=3\text{일 때 성립)}$$

따라서 구하는 최솟값은 4이다. 답 ④

참고 등호는 $x-2=\frac{1}{x-2}$일 때 성립하므로

$(x-2)^2=1$, $x-2=1$ ($\because x-2>0$) $\therefore x=3$

따라서 $x+\frac{1}{x-2}$은 $x=3$일 때 최솟값 4를 갖는다.

0394 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3a+4b\geq 2\sqrt{3a\cdot 4b}=2\sqrt{12ab}$

그런데 $ab=12$이므로

$3a+4b\geq 2\sqrt{12\cdot 12}$
$=24$ (단, 등호는 $3a=4b$일 때 성립)

따라서 $3a+4b$의 최솟값은 24이다. 답 24

다른풀이 $ab=12$에서 $b=\frac{12}{a}$

$$\therefore 3a+4b=3a+4\cdot\frac{12}{a}=3a+\frac{48}{a}$$
$$\geq 2\sqrt{3a\cdot\frac{48}{a}}$$
$$=2\cdot 12$$
$$=24 \text{ (단, 등호는 } \underbrace{a=4}_{3a=\frac{48}{a}\text{에서 } a^2=16\ \therefore a=4(\because a>0)}\text{일 때 성립)}$$

0395 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3a+2b+\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=3a+\frac{3}{a}+2b+\frac{2}{b}$$
$$\geq 2\sqrt{3a\cdot\frac{3}{a}}+2\sqrt{2b\cdot\frac{2}{b}}$$
$$=10 \text{ (단, 등호는 } a=1,\ b=1\text{일 때 성립)}$$

따라서 구하는 최솟값은 10이다. 답 ②

0396 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(x+\frac{4}{y}\right)\left(y+\frac{9}{x}\right)=xy+9+4+\frac{36}{xy}=13+xy+\frac{36}{xy}$$
$$\geq 13+2\sqrt{xy\cdot\frac{36}{xy}}$$
$$=13+2\cdot 6=25$$

따라서 최솟값 b는 25이다. ··· ❶

이때 등호는 $xy=\frac{36}{xy}$일 때 성립하므로

$(xy)^2=36$ $\therefore xy=6$ ($\because x>0$, $y>0$)

따라서 $a=6$이므로 ··· ❷

$a+b=31$ ··· ❸

답 31

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0397 전략 x의 값에 관계없이 참, 거짓을 판별할 수 있는 문장이나 식을 찾는다.

풀이 ①, ③, ④, ⑤ x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

② $x+7>x+5$에서 $7>5$이므로 x의 값에 관계없이 참인 명제이다. 답 ②

0398 전략 $ab=0$이면 $a=0$ 또는 $b=0$이다.

풀이 $f(x)g(x)=0$에서

$f(x)=0$ 또는 $g(x)=0$ …… ㉠

p: $f(x)\neq 0$에서 $\sim p$: $f(x)=0$이므로 $P^C=\{x|f(x)=0\}$

q: $g(x)\neq 0$에서 $\sim q$: $g(x)=0$이므로 $Q^C=\{x|g(x)=0\}$

따라서 ㉠의 진리집합은

$P^C\cup Q^C$ 답 ⑤

0399 전략 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보여주는 반례는 $p \longrightarrow \sim q$를 만족시킴을 이용한다.

풀이 ⑤ $x=\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}$이면 x, y가 모두 무리수이지만 $xy=3$이므로 유리수이다.

답 ⑤

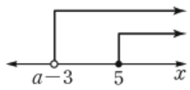
0400 전략 역의 가정과 결론을 각각 수직선 위에 나타낸다.

풀이 주어진 명제의 역은

'$x\geq 5$이면 $x+3>a$이다.' ··· ❶

$x+3>a$에서 $\quad x>a-3$

따라서 주어진 명제의 역이 참이려면 오른쪽 그림에서



$a-3<5$

$\therefore a<8$ ··· ❷

답 $a<8$

채점 기준	비율
❶ 명제의 역을 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	70 %

0401 **전략** $p \Longleftrightarrow q$이므로 조건 q의 이차부등식 $x^2+ax+b\le 0$의 해가 $-3\le x\le 5$이다.

풀이 p는 q이기 위한 필요충분조건이므로 명제 '$-3\le x\le 5$이면 $x^2+ax+b\le 0$이다.'가 참이고, 명제 '$x^2+ax+b\le 0$이면 $-3\le x\le 5$이다.'도 참이다.

즉 부등식 $x^2+ax+b\le 0$의 해가 $-3\le x\le 5$이므로 ··· ❶

$(x+3)(x-5)\le 0 \qquad \therefore x^2-2x-15\le 0$

따라서 $a=-2$, $b=-15$이므로 ··· ❷

$a+b=-17$ ··· ❸

답 -17

채점 기준	비율
❶ 부등식 $x^2+ax+b\le 0$의 해가 $-3\le x\le 5$임을 알 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0402 **전략** 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 $a>0$에서 $9a>0$, $\frac{4}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$9a+\frac{4}{a}\ge 2\sqrt{9a\cdot\frac{4}{a}}$$
$$=2\cdot 6=12$$

이때 등호는 $9a=\frac{4}{a}$일 때 성립하므로

$a^2=\frac{4}{9} \qquad \therefore a=\frac{2}{3}\ (\because a>0)$

따라서 $9a+\frac{4}{a}$는 $a=\frac{2}{3}$일 때 최솟값 12를 가지므로

$m=\frac{2}{3}$, $n=12$

$\therefore mn=8$

답 8

0403 **전략** 두 조건 p, q의 진리집합을 구한 다음, 조건 'p이고 $\sim q$'의 진리집합을 구한다.

풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$x^2-9x+8\le 0$에서 $\quad (x-1)(x-8)\le 0$

$\therefore 1\le x\le 8$

$\therefore P=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ··· ❶

또 $x^2-4x+3=0$에서 $\quad (x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

즉 $Q=\{1, 3\}$이므로

$Q^C=\{x\,|\,x$는 $x\ne 1$이고 $x\ne 3$인 정수$\}$ ··· ❷

따라서 조건 'p이고 $\sim q$'의 진리집합은

$P\cap Q^C=\{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ··· ❸

이므로 모든 원소의 합은

$2+4+5+6+7+8=32$ ··· ❹

답 32

채점 기준	비율
❶ 조건 p의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❷ 조건 $\sim q$의 진리집합을 구할 수 있다.	40 %
❸ 조건 'p이고 $\sim q$'의 진리집합을 구할 수 있다.	20 %
❹ 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	10 %

0404 **전략** '어떤 x에 대하여 p이다.'의 부정은 '모든 x에 대하여 $\sim p$이다.'임을 이용한다.

풀이 주어진 명제의 부정은

'모든 실수 x에 대하여 $x^2-18x+k\ge 0$'

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-18x+k\ge 0$이 성립하려면 이차방정식 $x^2-18x+k=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=(-9)^2-k\le 0$

$\therefore k\ge 81$

따라서 k의 최솟값은 81이다.

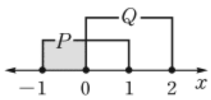
답 81

0405 **전략** p이고 $\sim q$를 만족시키는 x가 속하는 집합을 구한다.

풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

명제 'p이면 q이다.'가 거짓임을 보이는 원소 x는 $x\in P$이고 $x\notin Q$이다.

따라서 $x\in(P\cap Q^C)$이므로 오른쪽 그림에서 구하는 집합은



$P\cap Q^C=\{x\,|\,-1\le x<0\}$

답 ②

0406 **전략** 조건 p, q의 부등식에 a, b의 값을 대입하여 P, Q를 구한다.

풀이 ㄱ. $a=0$이면 $a(x-1)(x-2)=0$이므로 조건 p의 부등식을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다.

$\therefore P=\varnothing$

ㄴ. $a>0$, $b=0$이면

조건 p의 진리집합은 $\quad P=\{x\,|\,1<x<2\}$

조건 q의 진리집합은 $\quad Q=\{x\,|\,x>0\}$

$\therefore P\subset Q$

ㄷ. $a<0$, $b=3$이면

조건 p의 진리집합은 $\quad P=\{x\,|\,x<1$ 또는 $x>2\}$

이므로 조건 $\sim p$의 진리집합은 $\quad P^C=\{x\,|\,1\le x\le 2\}$

조건 q의 진리집합은 $\quad Q=\{x\,|\,x>3\}$

$\therefore P^C\not\subset Q$

따라서 명제 '$\sim p$이면 q이다.'는 거짓이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

0407 **전략** 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $q \longrightarrow p$가 참이면 $Q\subset P$이다.

풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|x>0\}$이고, 명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q \subset P$이어야 한다.
① $x^2 \geq 0$은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로
$Q=\{x|x$는 실수$\}$ $\quad \therefore Q \not\subset P$
② $x^2 \leq 0$이면 $x=0$이므로 $\quad Q=\{0\}$
$\therefore Q \not\subset P$
③ $Q=\{x|x$는 0이 아닌 실수$\}$이므로 $\quad Q \not\subset P$
④ $Q=\{x|x>1\}$이므로 $\quad Q \subset P$
⑤ $Q=\{x|x>-1\}$이므로 $\quad Q \not\subset P$

답 ④

0408 전략 삼단논법을 이용한다.

풀이 ㄴ. 명제 $r \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우인 $\sim q \longrightarrow \sim r$도 참이다.
ㄷ. 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 $p \longrightarrow \sim r$가 참이고, 그 대우인 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.
이상에서 항상 참인 명제는 ㄴ, ㄷ의 2개이다. 답 2

참고 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim p \longrightarrow \sim s$가 모두 참이므로 그 대우인 $q \longrightarrow \sim p$, $s \longrightarrow p$도 모두 참이다.

0409 전략 전구에 불이 켜지는 경우를 생각해 본다.

풀이 C스위치가 닫혀 있어도 A와 B스위치가 모두 열려 있으면 전구에 불이 켜지지 않는다. 전구에 불이 켜져 있으면 C스위치는 항상 닫혀 있다.
따라서 C스위치가 닫혀 있는 것은 전구에 불이 켜지기 위한 필요조건이다.

답 필요조건

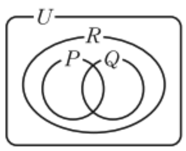
0410 전략 $p \Longleftrightarrow q$인 것을 찾는다.

풀이 ㄱ. $|x|=|y|$이면 $|x|^2=|y|^2$이므로 $\quad x^2=y^2$
또 $x^2=y^2$이면 $x=y$ 또는 $x=-y$이므로 $\quad |x|=|y|$
따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
ㄴ. $x^2+y^2>0$이면 $\quad x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$
$xy \neq 0$이면 $\quad x \neq 0$이고 $y \neq 0$
따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
ㄷ. $x^2>y^2$에서 $\quad x^2-y^2>0 \quad \therefore (x+y)(x-y)>0$
따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
이상에서 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

0411 전략 세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타낸다.

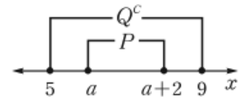
풀이 r는 'p 또는 q'이기 위한 필요조건이므로
$(P \cup Q) \subset R$
이것을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.
③ $P^C \cap Q = Q-P \neq \varnothing$



답 ③

0412 전략 $q \Longrightarrow \sim p$일 때 진리집합 사이의 포함 관계를 이용한다.

풀이 $q \Longrightarrow \sim p$이므로 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$Q \subset P^C \quad \therefore P \subset Q^C$
이때 $P=\{x|a \leq x \leq a+2\}$,
$Q^C=\{x|5 \leq x \leq 9\}$이므로 $P \subset Q^C$를 만족시키도록 두 집합 P, Q^C를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



즉 $a \geq 5$, $a+2 \leq 9$에서
$5 \leq a \leq 7$
이므로 정수 a는 $\quad 5, 6, 7$
따라서 구하는 합은 $\quad 5+6+7=18$ 답 ③

0413 전략 결론을 부정하여 모순이 생김을 보인다.

풀이 mn이 짝수일 때, m, n이 모두 $\boxed{\text{홀수}}$라 가정하면
$m=2k-1$, $n=2l-1$ (k, l은 자연수)
로 나타낼 수 있으므로
$mn=(2k-1)(2l-1)=4kl-2k-2l+1$
$=2(\boxed{2kl-k-l})+1$
이때 $2kl-k-l$은 0 또는 자연수이므로 mn은 $\boxed{\text{홀수}}$이다.
$\therefore$ (가) 홀수 (나) $2kl-k-l$ (다) 홀수 답 풀이 참조

0414 전략 주어진 식을 정리하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{3}{xy}$ ······ ㉠
$xy>0$, $x+y=3$에서 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$x+y \geq 2\sqrt{xy}$
그런데 $x+y=3$이므로
$3 \geq 2\sqrt{xy}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)
양변을 제곱하면 $\quad 9 \geq 4xy \quad \therefore \dfrac{3}{xy} \geq \dfrac{4}{3}$
따라서 ㉠에서 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$의 최솟값은 $\dfrac{4}{3}$이다. 답 ②

0415 전략 $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(a+\dfrac{4}{a}\right)$를 전개한 후, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 $a \neq 0$이므로 $\quad a^2>0$
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{4}{a}\right)=a^2+4+1+\frac{4}{a^2}=5+a^2+\frac{4}{a^2}$$
$$\geq 5+2\sqrt{a^2 \cdot \frac{4}{a^2}}$$
$$=5+2 \cdot 2=9 \text{ (단, 등호는 } a^2=2\text{일 때 성립)}$$
따라서 $k \leq 9$이므로 k의 최댓값은 9이다. 답 9

0416 전략 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y로 놓고 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y라 하면 대각선의 길이가 12이므로
$\sqrt{x^2+y^2}=12 \quad \therefore x^2+y^2=144$ ··· ❶
$x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$x^2+y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2}=2xy$ ($\because x>0$, $y>0$)
그런데 $x^2+y^2=144$이므로 $\quad 144 \geq 2xy$
$\therefore xy \leq 72$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립) ··· ❷
따라서 직사각형의 넓이는 xy이므로 구하는 최댓값은 72이다. ··· ❸
답 72

채점 기준	비율
❶ x, y 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 xy의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 직사각형의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

0417 전략 **명제 p가 참이면 $\sim p$는 거짓이고, p가 거짓이면 $\sim p$는 참임을 이용한다.**

풀이 (i) 영호의 말만 참인 경우 다음 문장이 모두 참이다.
- 수진이는 결석했다.
- 대웅이는 결석하지 않았다.

(ii) 수진이의 말만 참인 경우 다음 문장이 모두 참이다.
- 수진이는 결석하지 않았다.
- 대웅이는 결석하지 않았다.

(iii) 대웅이의 말만 참인 경우 다음 문장이 모두 참이다.
- 수진이는 결석하지 않았다.
- 수진이는 결석했다.
- 대웅이는 결석했다.

이때 첫 번째 문장과 두 번째 문장은 모순이므로 대웅이의 말은 참이 될 수 없다.

이상에서 참을 말한 사람은 영호 또는 수진이다.

이때 항상 참이 되는 것은 ⑤ '대웅이는 결석하지 않았다.'이다.

답 ⑤

다른풀이 영호와 수진이가 한 말은 서로 반대이므로 영호와 수진이 중 한 명의 말만 참이고, 다른 한 명의 말은 거짓이다.

이때 한 명의 말만 참이므로 대웅이의 말은 거짓이다. 따라서 '대웅이는 결석하지 않았다.'는 항상 참이다.

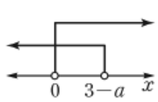
0418 전략 **모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+ax+b\geq 0$이 항상 성립하려면 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식 D에 대하여 $D\leq 0$임을 이용한다.**

풀이 명제 (가)가 참이려면 이차방정식 $x^2+x+a=0$의 판별식을 D라 할 때

$D=1^2-4a\leq 0,\qquad 4a\geq 1$

$\therefore a\geq \frac{1}{4}$ ······ ㉠

명제 (나)에서 $x<3-a$이므로 명제 (나)가 참이려면 오른쪽 그림에서



$3-a>0\qquad \therefore a<3$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{4}\leq a<3$

답 $\frac{1}{4}\leq a<3$

0419 전략 **조건을 만족시키도록 세 조건의 진리집합을 수직선 위에 나타낸다.**

풀이 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

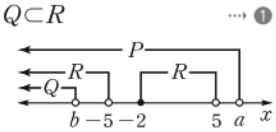
$P=\{x\,|\,x<a\}$, $Q=\{x\,|\,x<b\}$,

$R=\{x\,|\,x<-5$ 또는 $-2\leq x<5\}$

이때 p는 r이기 위한 필요조건이므로 $R\subset P$

또 q는 r이기 위한 충분조건이므로 $Q\subset R$ ··· ❶

오른쪽 그림에서



$a\geq 5$, $b\leq -5$ ··· ❷

따라서 $a-b$의 최솟값은

$5-(-5)=10$ ··· ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ 세 조건의 진리집합 사이의 포함 관계를 알 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값의 범위를 각각 구할 수 있다.	50 %
❸ $a-b$의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0420 전략 **$p \Longrightarrow q$이면 $P\subset Q$, $p \Longrightarrow r$이면 $P\subset R$임을 이용한다.**

풀이 p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$ ······ ㉠

r는 p이기 위한 필요조건이므로 $P\subset R$ ······ ㉡

㉠에서 $3\in Q$이므로 $a^2-1=3$ 또는 $b=3$

(i) $a^2-1=3$일 때, $a=-2$ 또는 $a=2$

이때 ㉡에서 $3\in R$이므로 $ab=3$

$\therefore a=-2,\ b=-\frac{3}{2}$ 또는 $a=2,\ b=\frac{3}{2}$

(ii) $b=3$일 때,

㉡에서 $3\in R$이므로 $a=3$ 또는 $ab=3$

$\therefore a=3,\ b=3$ 또는 $a=1,\ b=3$

(i), (ii)에서 $a+b$의 최솟값은

$(-2)+\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{7}{2}$

답 ⑤

0421 전략 **$a-b\geq 0$이면 $a\geq b$임을 이용한다.**

풀이 $A-B=(x^2+y^2)-(x^2y^2+1)$

$=x^2+y^2-x^2y^2-1$

$=x^2(1-y^2)-(1-y^2)$

$=(x^2-1)(1-y^2)$

이때 $-1\leq x\leq 1$, $-1\leq y\leq 1$이므로

$x^2-1\leq 0$, $1-y^2\geq 0$

$\therefore (x^2-1)(1-y^2)\leq 0$

즉 $A-B\leq 0$이므로

$A\leq B$ (단, 등호는 $|x|=1$ 또는 $|y|=1$일 때 성립)

답 ④

0422 전략 **소포의 밑면의 가로, 세로의 길이에 대한 식을 세운다.**

풀이 소포의 밑면의 가로, 세로의 길이를 각각 a cm, b cm라 하면 노끈의 길이가 100 cm이므로

$2a+2b+4\cdot 10=100\qquad \therefore a+b=30$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$

그런데 $a+b=30$이므로 $30\geq 2\sqrt{ab}$

$\therefore \sqrt{ab}\leq 15$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

양변을 제곱하면 $ab\leq 225$

이때 소포의 부피는 $10ab$ cm^{3}이므로

$10ab\leq 2250$

따라서 소포의 최대 부피는 2250 cm^{3}이다.

답 2250 cm^3

15 명제

16 함수

Ⅵ. 함수

0423 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.
또 정의역은 $\{1, 2, 3\}$, 공역은 $\{4, 5, 6\}$, 치역은 $\{4, 5, 6\}$이다.
답 풀이 참조

0424 X의 원소 3에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
답 함수가 아니다.

0425 X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소가 4, 5의 2개이므로 함수가 아니다.
답 함수가 아니다.

0426 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.
또 정의역은 $\{1, 2, 3\}$, 공역은 $\{4, 5, 6\}$, 치역은 $\{5\}$이다.
답 풀이 참조

0427 답 정의역: $\{x|x$는 실수$\}$, 치역: $\{y|y$는 실수$\}$

0428 답 정의역: $\{x|x\neq0$인 실수$\}$, 치역: $\{y|y\neq0$인 실수$\}$

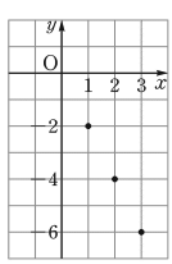
0429 (1) $f(-1)=-1$, $f(1)=1$, $g(-1)=-1$, $g(1)=1$
(2) $f(-1)=g(-1)=-1$, $f(1)=g(1)=1$이므로 두 함수 f, g는 서로 같다.
답 풀이 참조

참고 두 함수 f, g의 정의역은 $\{-1, 1\}$, 공역은 실수 전체의 집합이다.

0430 $f(-1)=g(-1)=2$, $f(0)=g(0)=1$, $f(1)=g(1)=2$
따라서 두 함수 f, g는 서로 같다. 답 서로 같다.

0431 $f(-1)=-2$, $g(-1)=0$이므로
$f(-1)\neq g(-1)$
따라서 두 함수 f, g는 서로 같지 않다.
답 서로 같지 않다.

0432 $f(x)=-2x$라 하면
$f(1)=-2$, $f(2)=-4$, $f(3)=-6$
따라서 정의역이 $\{1, 2, 3\}$인 함수 $y=-2x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
답 풀이 참조



0433 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

0434 답 ㄴ, ㄷ

0435 답 ㄷ

0436 답 ㄱ

0437 답 ㄱ, ㄴ

0438 ㄹ. $f(x)=x^2$이라 하면 $f(-1)=1$, $f(1)=1$이므로 $y=f(x)$는 일대일함수가 아니다. 답 ㄱ, ㄷ

0439 답 ㄱ, ㄷ

0440 답 ㄱ

0441 답 ㄴ

0442 $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(b)=4$ 답 4

0443 $(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(c)=5$ 답 5

0444 $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(b)=4$ 답 4

0445 $(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(a)=3$ 답 3

0446 $(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(3)=a$ 답 a

0447 $(f\circ g)(b)=f(g(b))=f(4)=d$ 답 d

0448 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\boxed{2x})$
$=3\cdot2x+1=\boxed{6x+1}$
$\therefore$ (가) $2x$ (나) $6x+1$ 답 (가) $2x$ (나) $6x+1$

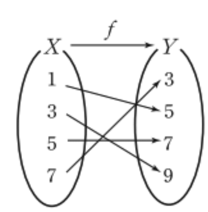
0449 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^3+1)$
$=(x^3+1)^2=x^6+2x^3+1$
답 $(g\circ f)(x)=x^6+2x^3+1$

0450 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)$
$=(x^2)^3+1=x^6+1$
답 $(f\circ g)(x)=x^6+1$

0451 $(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(x^3+1)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}$이므로
$((h\circ f)\circ g)(x)=(h\circ f)(g(x))=(h\circ f)(x^2)$
$=\frac{1}{2}(x^2)^3+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{2}$
답 $((h\circ f)\circ g)(x)=\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{2}$

0452 $(f\circ g)(x)=x^6+1$이므로
$(h\circ(f\circ g))(x)=h(x^6+1)$
$=\frac{1}{2}(x^6+1)=\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{2}$
답 $(h\circ(f\circ g))(x)=\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{2}$

0453 함수 f가 일대일대응이어야 하므로
$f(7)=3$
따라서 대응 관계를 완성하면 오른쪽 그림과 같다.
이때 $f(3)=9$, $f^{-1}(3)=7$이므로
$f(3)+f^{-1}(3)=16$



답 풀이 참조

0454 답 3

0455 답 2

0456 답 4

0457 $(f^{-1})^{-1}(3)=f(3)=5$ 답 5

0458 주어진 함수는 $\boxed{\text{일대일대응}}$이므로 역함수가 존재한다.
$y=2x-1$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$2x=y+1 \qquad \therefore x=\boxed{\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\boxed{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$

$\therefore$ (가) 일대일대응 (나) $\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$ (다) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

답 풀이 참조

0459 $y=-4x+8$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$4x=-y+8 \qquad \therefore x=-\frac{1}{4}y+2$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-\frac{1}{4}x+2$

답 $y=-\frac{1}{4}x+2$

0460 $y=\frac{1}{3}x-2$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

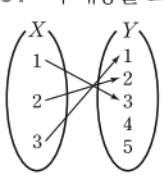
$\frac{1}{3}x=y+2 \qquad \therefore x=3y+6$

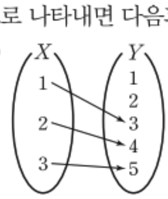
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

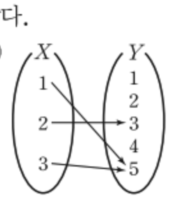
$y=3x+6$

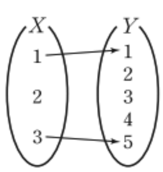
답 $y=3x+6$

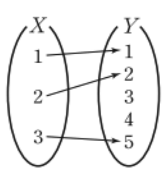
0461 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

①


②


③


④


⑤


따라서 X에서 Y로의 함수가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

0462 ㄱ, ㄴ, ㄷ. 실수 a에 대하여 직선 $x=a$가 그래프와 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.
ㄹ. 실수 a에 대하여 직선 $x=a$가 그래프와 만나지 않거나 두 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.
이상에서 함수의 그래프는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0463 ① $1\le x\le 3$에서 $\quad 2\le x+1\le 4$

$\therefore 2\le y\le 4$

② $1\le x\le 3$에서 $\quad 1\le x^2\le 9$

$\therefore 1\le y\le 9$

③ $1\le x\le 3$에서 $\quad -3\le -x\le -1$

$\therefore -4\le -x-1\le -2$

$\therefore -4\le y\le -2$

④ $1\le x\le 3$에서 $\quad 1\le |x|\le 3$

$\therefore 0\le |x|-1\le 2$

$\therefore 0\le y\le 2$

⑤ $1\le x\le 3$에서 $\quad 1\le x^3\le 27$

$\therefore -9\le -\frac{1}{3}x^3\le -\frac{1}{3}$

$\therefore -9\le y\le -\frac{1}{3}$

따라서 X에서 Y로의 함수인 것은 ④이다.

답 ④

0464 $\sqrt{3}-1>0$이므로

$f(\sqrt{3}-1)=2(\sqrt{3}-1)=2\sqrt{3}-2$

$\sqrt{3}-2<0$이므로 $\quad f(\sqrt{3}-2)=\sqrt{3}-2$

$\therefore f(\sqrt{3}-1)-f(\sqrt{3}-2)=2\sqrt{3}-2-(\sqrt{3}-2)$
$=\sqrt{3}$

답 ③

0465 $\frac{x-1}{2}=-2$에서

$x-1=-4 \qquad \therefore x=-3$

$x=-3$을 $f\left(\frac{x-1}{2}\right)=3x-2$에 대입하면

$f(-2)=3\cdot(-3)-2=-11$

답 -11

다른풀이 $\frac{x-1}{2}=t$로 놓으면 $\quad x=2t+1$

$\therefore f(t)=3(2t+1)-2=6t+1$

따라서 $f(x)=6x+1$이므로

$f(-2)=6\cdot(-2)+1=-11$

0466 (1) $2x+1=t$로 놓으면 $\quad 2x=t-1$

$\therefore x=\frac{1}{2}(t-1)$ ···❶

$f(2x+1)=3x+5$에 $x=\frac{1}{2}(t-1)$을 대입하면

$f(t)=3\cdot\frac{1}{2}(t-1)+5=\frac{3}{2}t+\frac{7}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$ ···❷

(2) $f(3)=\frac{9}{2}+\frac{7}{2}=8$ ···❸

답 (1) $f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$ (2) 8

채점 기준	비율
❶ x를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0467 $-10\le x\le 8$에서 $\quad -12\le x-2\le 6$

$-4\le \dfrac{x-2}{3}\le 2 \quad \therefore\ -2\le -\dfrac{x-2}{3}\le 4$

따라서 함수 $y=-\dfrac{x-2}{3}$의 치역이 $\{y\mid -2\le y\le 4\}$이므로

$a=-2,\ b=4$

$\therefore\ a+b=2$

답 2

0468 치역이 $\{-3,\ -1,\ 5,\ 9\}$이므로

$y=-3$일 때, $\quad -3=-\dfrac{8}{x}+1$

$-4=-\dfrac{8}{x} \quad \therefore\ x=2$

$y=-1$일 때, $\quad -1=-\dfrac{8}{x}+1$

$-2=-\dfrac{8}{x} \quad \therefore\ x=4$

$y=5$일 때, $\quad 5=-\dfrac{8}{x}+1$

$4=-\dfrac{8}{x} \quad \therefore\ x=-2$

$y=9$일 때, $\quad 9=-\dfrac{8}{x}+1$

$8=-\dfrac{8}{x} \quad \therefore\ x=-1$

따라서 정의역의 원소가 아닌 것은 ③ 1이다.

답 ③

0469 정의역이 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$이므로

$f(1)=10-1=9,\quad f(2)=\dfrac{1}{2}\cdot 2+1=2,$

$f(3)=10-3=7,\quad f(4)=\dfrac{1}{2}\cdot 4+1=3,$

$f(5)=10-5=5,\quad f(6)=\dfrac{1}{2}\cdot 6+1=4,$

$f(7)=10-7=3,\quad f(8)=\dfrac{1}{2}\cdot 8+1=5,$

$f(9)=10-9=1$

따라서 치역이 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9\}$이므로 원소의 개수는 7이다.

답 7

0470 $f(0)=g(0)$에서 $\quad b=2$

$f(1)=g(1)$에서 $\quad a+2=1-2+b$

$\therefore\ a-b=-3$

$b=2$를 위의 식에 대입하면 $\quad a=-1$

$\therefore\ ab=-2$

답 -2

0471 $f(0)=0,\ f(1)=1,\ f(2)=2$

ㄱ. $g(0)=0,\ g(1)=1,\ g(2)=2$이므로

$f=g$

ㄴ. $h(0)=0,\ h(1)=1,\ h(2)=2$이므로

$f=h$

ㄷ. $k(2)=4$이므로 $\quad f\ne k$

이상에서 함수 f와 서로 같은 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0472 $f(x)=g(x)$에서 $\quad x^2=x+2$

$x^2-x-2=0,\quad (x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$ ··· ❶

따라서 집합 X는 집합 $\{-1,\ 2\}$의 부분집합이어야 하므로

$\{-1\},\ \{2\},\ \{-1,\ 2\}$ ··· ❷

답 $\{-1\},\ \{2\},\ \{-1,\ 2\}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)=g(x)$가 되는 x의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 집합 X를 구할 수 있다.	50 %

0473 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만나는 그래프는 ㄱ, ㄹ이다.

따라서 일대일대응의 그래프인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ③

0474 ① 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일대응이다.

② 양수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수이다.

그런데 치역이 $\{y\mid y>0\}$이므로 일대일대응이 아니다.

③ 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 2개 이상의 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

④, ⑤ 양수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 만나지 않거나 2개 이상의 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

답 ②

0475 $a>0$이므로 함수 f가 일대일대응이면

$f(-1)=-2,\ f(2)=7$

$-a+b=-2,\ 2a+b=7$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=3,\ b=1$

$\therefore\ a+b=4$

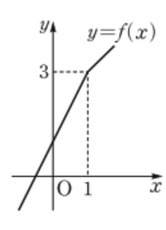
답 4

0476 함수 f가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉 직선 $y=2x+a$가 점 $(1,\ 3)$을 지나야 하므로

$2+a=3 \quad \therefore\ a=1$

답 ①



0477 $f(x)=x^2-4x+a=(x-2)^2+a-4$

이므로 $x\ge 2$일 때 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.

따라서 함수 f가 일대일대응이 되려면 $f(2)=4$이어야 하므로

$a-4=4 \quad \therefore\ a=8$

답 ⑤

0478 함수 $f(x)=ax+b$는 일대일함수이고, 공역과 치역이 서로 같으므로 일대일대응이다. ··· ❶

(i) $a>0$일 때,

x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가하므로

$f(0)=0,\ f(3)=3$

$f(0)=0$에서 $\quad b=0$

$f(3)=3$에서 $\quad 3a+b=3 \quad$ ...... ㉠

$b=0$을 ㉠에 대입하면 $\quad a=1$

이때 $ab=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다. ··· ❷

(ii) $a<0$일 때,

x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소하므로

$f(0)=3,\ f(3)=0$

$f(0)=3$에서 $\quad b=3$

$f(3)=0$에서 $\quad 3a+b=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

$b=3$을 ㉡에 대입하면 $\quad a=-1$

$\therefore ab=-3$ ⋯➌

(i), (ii)에서 $\quad ab=-3$ ⋯➍

답 -3

채점 기준	비율
➊ $f(x)$가 일대일대응임을 알 수 있다.	10 %
➋ $a>0$일 때, ab의 값을 구할 수 있다.	40 %
➌ $a<0$일 때, ab의 값을 구할 수 있다.	40 %
➍ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0479 ① $f(-1)=1,\ f(0)=0,\ f(1)=-1$

②, ③ $f(-1)=1,\ f(0)=0,\ f(1)=1$

④ $f(-1)=-1,\ f(0)=0,\ f(1)=1$

⑤ $f(-1)=-2,\ f(0)=1,\ f(1)=2$

따라서 항등함수인 것은 ④이다.

답 ④

0480 함수 f가 상수함수이므로

$f(1)=f(2)=\cdots=f(10)=f(100)=3$

$\therefore f(1)+f(2)+\cdots+f(10)=3\cdot 10=30$

답 30

0481 함수 f가 항등함수이므로

$f(1)=1,\ f(5)=5$ ⋯➊

따라서 $f(5)=g(5)$에서 $\quad g(5)=5$

이때 함수 g가 상수함수이므로 $\quad g(2)=5$ ⋯➋

$\therefore f(1)+g(2)=1+5=6$ ⋯➌

답 6

채점 기준	비율
➊ $f(1),\ f(5)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
➋ $g(2)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
➌ $f(1)+g(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0482 $f(2)=g(6)+h(6)$에서 함수 g가 항등함수이므로

$f(2)=6+h(6)$

$X=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$에서 $\underbrace{f(2)\text{의 값이 될 수 있는 것은 } 8}_{h(6)>0\text{이므로 } f(2)>6}$이므로

$f(2)=8,\ h(6)=2$

이때 함수 h는 상수함수이므로 $\quad h(4)=2$

또 $f(8)=f(6)+4$에서 $f(8)>4$이고, 함수 f는 일대일대응이므로

$f(6)=2,\ f(8)=6$

따라서 $f(4)=4$이므로

$f(4)+g(4)+h(4)=4+4+2=10$

답 ①

0483 X에서 X로의 함수의 개수는 $\quad 3^3=27$

X에서 X로의 일대일대응의 개수는 $\quad 3\cdot 2\cdot 1=6$

따라서 $p=27,\ q=6$이므로

$p+q=33$

답 33

0484 $f(1)=a,\ f(2)=c$이고 함수 f는 일대일대응이므로

$f(3)=b,\ f(4)=d$ 또는 $f(3)=d,\ f(4)=b$

따라서 함수 f의 개수는 2이다.

답 2

0485 $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $\quad -1,\ 0,\ 1$의 3개

$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 $\quad -1,\ 0,\ 1$의 3개

$f(-1)=f(1)$에서 $f(-1)$의 값이 될 수 있는 것은 $\quad$ 1개

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$3\cdot 3\cdot 1=9$

답 ③

참고 주어진 조건을 만족시키는 $f(-1),\ f(0),\ f(1)$의 값을 순서쌍 $(f(-1),\ f(0),\ f(1))$로 나타내면

$(-1,\ -1,\ -1),\ (-1,\ 0,\ -1),\ (-1,\ 1,\ -1),$

$(0,\ -1,\ 0),\ (0,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 0),$

$(1,\ -1,\ 1),\ (1,\ 0,\ 1),\ (1,\ 1,\ 1)$

0486 $f(-10)=\frac{1}{2}\cdot(-10)+3=-2$이므로

$(g\circ f)(-10)=g(f(-10))=g(-2)$

$=-2\cdot(-2)+10=14$

$g(4)=4^2-2=14$이므로

$(f\circ g)(4)=f(g(4))=f(14)$

$=\frac{1}{2}\cdot 14+3=10$

$\therefore (g\circ f)(-10)+(f\circ g)(4)=24$

답 24

0487 $f(1)=3$이므로

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(3)=2$

$(f\circ f\circ f)(1)=f((f\circ f)(1))=f(2)=1$

따라서 구하는 값은 $\quad 2-1=1$

답 ④

0488 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$이므로

$(h\circ(g\circ f))\left(\frac{1}{2}\right)=((h\circ g)\circ f)\left(\frac{1}{2}\right)=(h\circ g)\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

$=(h\circ g)\left(\frac{3}{2}\right)=4\cdot\frac{3}{2}-3$

$=3$

답 3

0489 $(f\circ g)(-1)=f(g(-1))=f(-a-1)$

$=2(-a-1)-3=-2a-5$

즉 $-2a-5=-3$이므로

$-2a=2 \quad \therefore a=-1$ ⋯➊

따라서 $g(x)=-x-1$이므로

$g(4)=-4-1=-5$ ⋯➋

답 -5

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ $g(4)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0490 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=4(4x-8)-8=16x-40$이므로

$(f\circ f\circ f)(x)=f((f\circ f)(x))=4(16x-40)-8$
$=64x-168$

$(f\circ f\circ f)(a)=24$에서 $\quad 64a-168=24$

$64a=192 \quad \therefore a=3$

답 3

다른풀이 $f(f(f(a)))=24$에서 $f(f(a))=k$라 하면 $f(k)=24$이므로

$4k-8=24, \quad 4k=32$

$\therefore k=8$

$f(f(a))=8$에서 $f(a)=l$이라 하면 $f(l)=8$이므로

$4l-8=8, \quad 4l=16 \quad \therefore l=4$

따라서 $f(a)=4$이므로 $\quad 4a-8=4$

$4a=12 \quad \therefore a=3$

0491 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=a(x+c)+b$
$=ax+ac+b$

따라서 $ax+ac+b=4x+7$이므로

$a=4,\ ac+b=7 \quad \therefore a=4,\ b+4c=7$

또 $f(1)=3$이므로

$4+b=3 \quad \therefore b=-1$

$b+4c=7$에 $b=-1$을 대입하면

$-1+4c=7, \quad 4c=8$

$\therefore c=2$

$\therefore abc=4\cdot(-1)\cdot 2=-8$

답 -8

0492 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=a(ax+b)+b$
$=a^2x+ab+b$

따라서 $a^2x+ab+b=4x-3$이므로

$a^2=4,\ ab+b=-3$

$a^2=4$에서 $\quad a=2\ (\because a>0)$

$ab+b=-3$에 $a=2$를 대입하면

$3b=-3 \quad \therefore b=-1$

따라서 $f(x)=2x-1$이므로

$f(2)=2\cdot 2-1=3$

답 ③

0493 $f(x)=ax-1,\ g(x)=3x-4$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(3x-4)=a(3x-4)-1$
$=3ax-4a-1,$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax-1)=3(ax-1)-4$
$=3ax-7$

$f\circ g=g\circ f$이므로 $\quad 3ax-4a-1=3ax-7$

$-4a-1=-7, \quad 4a=6$

$\therefore a=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

0494 $f(2)=7$에서 $\quad 2a+1=7 \quad \therefore a=3$ ··· ❶

따라서 $f(x)=3x+1,\ g(x)=bx+2$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(bx+2)=3(bx+2)+1$
$=3bx+7,$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x+1)=b(3x+1)+2$
$=3bx+b+2$ ··· ❷

$f\circ g=g\circ f$이므로 $\quad 3bx+7=3bx+b+2$

$7=b+2 \quad \therefore b=5$ ··· ❸

$\therefore ab=3\cdot 5=15$ ··· ❹

답 15

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $f\circ g,\ g\circ f$를 구할 수 있다.	40 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0495 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(bx+2)=a(bx+2)-4$
$=abx+2a-4,$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax-4)=b(ax-4)+2$
$=abx-4b+2$

$f\circ g=g\circ f$이므로 $\quad abx+2a-4=abx-4b+2$

$2a-4=-4b+2, \quad 2a+4b=6$

$\therefore a+2b=3$

이때 $a,\ b$는 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+2b\ge 2\sqrt{2ab}$, 즉 $3\ge 2\sqrt{2ab}$

$\frac{3}{2}\ge\sqrt{2ab}, \quad 2ab\le\frac{9}{4} \quad \therefore ab\le\frac{9}{8}$

따라서 ab의 최댓값은 $\frac{9}{8}$이다.

답 $\frac{9}{8}$

참고 등호는 $a=2b$일 때, 즉 $a=\frac{3}{2},\ b=\frac{3}{4}$일 때 성립한다.

0496 $(g\circ h)(x)=g(h(x))=2h(x)+1$

따라서 $2h(x)+1=2x^2-3$이므로

$2h(x)=2x^2-4 \quad \therefore h(x)=x^2-2$

답 ①

0497 (1) $(h\circ g\circ f)(x)=((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))$
$=-f(x)+4$ ··· ❶

따라서 $-f(x)+4=\frac{1}{2}x+1$이므로

$-f(x)=\frac{1}{2}x-3 \quad \therefore f(x)=-\frac{1}{2}x+3$ ··· ❷

(2) $f(10)=-\frac{1}{2}\cdot 10+3=-2$ ··· ❸

답 (1) $f(x)=-\frac{1}{2}x+3$ (2) -2

채점 기준	비율
❶ $(h\circ g\circ f)(x)$를 $f(x)$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(10)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0498 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-5)=3(2x-5)+1$
$=6x-14$

$(h\circ g\circ f)(x)=g(x)$에서 $(h\circ(g\circ f))(x)=g(x)$이므로

$h(6x-14)=3x+1$

$6x-14=t$로 놓으면 $\quad 6x=t+14 \quad \therefore x=\frac{1}{6}t+\frac{7}{3}$

따라서 $h(t)=3\left(\frac{1}{6}t+\frac{7}{3}\right)+1=\frac{1}{2}t+8$이므로

$h(x)=\frac{1}{2}x+8$ 답 $h(x)=\frac{1}{2}x+8$

다른풀이 $(g\circ f)(x)=6x-14$

$(h\circ g\circ f)(x)=g(x)$에서 $\quad h(6x-14)=3x+1$

$h(x)$가 일차함수이므로 $h(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$a(6x-14)+b=3x+1$

$\therefore 6ax-14a+b=3x+1$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$6a=3,\ -14a+b=1$

$\therefore a=\frac{1}{2},\ b=8$

$\therefore h(x)=\frac{1}{2}x+8$

0499 $f^1(x)=f(x)=x-1$에서

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=x-1-1$
$=x-2$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=x-2-1$
$=x-3$

⋮

$\therefore f^{10}(x)=x-10$

$f^{10}(a)=-1$에서 $\quad a-10=-1$

$\therefore a=9$ 답 ⑤

0500 $f_1(x)=f(x)=-x+1$에서

$f_2(x)=f(f(x))=-(-x+1)+1=x$

따라서 $f_3(x)=f(x)$, $f_4(x)=f(f(x))=f_2(x)$이므로

$f(x)=f_3(x)=f_5(x)=\cdots=-x+1$,

$f_2(x)=f_4(x)=f_6(x)=\cdots=x$

$f_{2018}(x)=x$이므로 $\quad f_{2018}(2018)=2018$

답 2018

다른풀이 $f_1(2018)=f(2018)=-2018+1=-2017$

$f_2(2018)=f(f_1(2018))=f(-2017)=-(-2017)+1=2018$

$f_3(2018)=f(f_2(2018))=f(2018)=-2017$

$f_4(2018)=f(f_3(2018))=f(-2017)=2018$

⋮

$\therefore f_{2018}(2018)=2018$

0501 $f^1\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=1$에서

$f^2\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(1)=2$

$f^3\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f^2\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(2)=0$

$f^4\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f^3\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(0)=1$

⋮

따라서 $f^n\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은 1, 2, 0이 이 순서대로 반복된다. ··· ❶

$\therefore f^{100}\left(\frac{1}{2}\right)=f^{3\cdot 33+1}\left(\frac{1}{2}\right)=f^1\left(\frac{1}{2}\right)=1$ ··· ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ $f^n\left(\frac{1}{2}\right)$의 값의 규칙을 찾을 수 있다.	70 %
❷ $f^{100}\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0502 $f(k)=m$이라 하면 $(f\circ f)(k)=2$에서

$f(f(k))=f(m)=2$

이때 주어진 그래프에서 $f(1)=2$이므로

$m=1 \quad \therefore f(k)=1$

따라서 주어진 그래프에서 $f(0)=1$이므로

$k=0$ 답 0

0503 (1) $(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(1)=3$ ··· ❶

(2) $f(a)=b$라 하면 $(f\circ f)(a)=4$에서

$f(f(a))=f(b)=4$

이때 주어진 그래프에서 $f(0)=4$이므로 $\quad b=0$

$\therefore f(a)=0$ ··· ❷

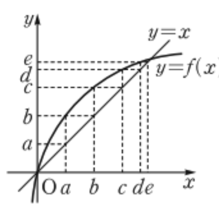
따라서 주어진 그래프에서 $f(4)=0$이므로

$a=4$ ··· ❸

답 (1) 3 (2) 4

채점 기준	비율
❶ $(f\circ f)(3)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(a)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

0504 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같으므로



$(f\circ f\circ f)(a)=f(f(f(a)))$
$=f(f(b))$
$=f(c)=d$

답 ④

참고 직선 $y=x$ 위의 점은 x좌표와 y좌표가 같음을 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 찾을 수 있다.

0505 $f^{-1}(3)=-1$에서 $f(-1)=3$이므로

$-a+b=3$ ······ ㉠

$f^{-1}(9)=2$에서 $f(2)=9$이므로

$2a+b=9$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ b=5$

$\therefore ab=10$ 답 ⑤

0506 $f^{-1}(5)=3$에서 $f(3)=5$이므로

$3\cdot 3+a=5 \quad \therefore a=-4$ ··· ❶

따라서 $f(x)=3x-4$이므로

$f(2)=3\cdot 2-4=2$ ··· ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0507 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(0)=0$이므로　　$c=0$

　$\therefore\ f(x)=ax^2+bx$

$f^{-1}(7)=-1$에서 $f(-1)=7$이므로

　$a-b=7$　　…… ㉠

$f^{-1}(-5)=1$에서 $f(1)=-5$이므로

　$a+b=-5$　　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

　$a=1,\ b=-6$

따라서 $f(x)=x^2-6x$이므로

　$f(-2)=(-2)^2-6\cdot(-2)=4+12=16$　　답 ④

0508 $f(-2)=(-2)^2+1=5$이므로

　$(f\circ f)(-2)=f(f(-2))=f(5)$

　　　　　　$=-5+1=-4$　　⋯ ❶

$f^{-1}(2)=k$라 하면　　$f(k)=2$

(i) $k\geq 0$이면

　$-k+1=2$　　$\therefore\ k=-1$

　이것은 $k\geq 0$을 만족시키지 않는다.

(ii) $k<0$이면

　$k^2+1=2,$　　$k^2=1$

　$\therefore\ k=-1\ (\because\ k<0)$

(i), (ii)에서 $k=-1$이므로　　$f^{-1}(2)=-1$　　⋯ ❷

　$\therefore\ (f\circ f)(-2)+f^{-1}(2)=-4+(-1)=-5$　　⋯ ❸

답 -5

채점 기준	비율
❶ $(f\circ f)(-2)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f^{-1}(2)$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $(f\circ f)(-2)+f^{-1}(2)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0509 $\dfrac{2x-1}{3}=t$로 놓으면　　$2x=3t+1$

　$\therefore\ x=\dfrac{3t+1}{2}$

따라서 $f(t)=6\cdot\dfrac{3t+1}{2}-2=9t+1$이므로

　$f(x)=9x+1$

$f^{-1}(28)=k$라 하면 $f(k)=28$이므로

　$9k+1=28$　　$\therefore\ k=3$　　답 3

다른풀이 $f^{-1}(28)=k$라 하면　　$f(k)=28$

$6x-2=28$에서　　$6x=30$　　$\therefore\ x=5$

$x=5$를 $f\left(\dfrac{2x-1}{3}\right)=6x-2$에 대입하면

　$f(3)=28$　　$\therefore\ k=3$

　$\therefore\ f^{-1}(28)=3$

0510 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이다.

$f(x)=2x-3$에서 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가하므로

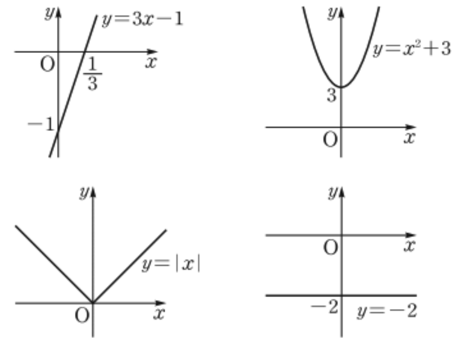
　$a=f(1)=2-3=-1,$

　$b=f(5)=2\cdot 5-3=7$

　$\therefore\ a+b=6$　　답 6

0511 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이다.

이때 주어진 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 일대일대응인 함수는 $y=3x-1$뿐이므로 역함수가 존재하는 함수의 개수는 1이다.　　답 1

0512 $f(x)=2x^2-4x+2=2(x-1)^2$

함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이므로

　$a\geq 1,\ f(a)=a$

$f(a)=a$에서 $2a^2-4a+2=a$이므로

　$2a^2-5a+2=0,$　　$(2a-1)(a-2)=0$

　$\therefore\ a=2\ (\because\ a\geq 1)$　　답 ⑤

0513 $y=3x+a$로 놓으면

　$3x=y-a$　　$\therefore\ x=\dfrac{1}{3}y-\dfrac{a}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면　　$y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{a}{3}$

따라서 $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{a}{3}$이므로

　$\dfrac{1}{3}=b,\ -\dfrac{a}{3}=2$　　$\therefore\ a=-6,\ b=\dfrac{1}{3}$

　$\therefore\ ab=-2$　　답 ①

0514 $y=2x+5$로 놓으면　　$2x=y-5$

　$\therefore\ x=\dfrac{1}{2}y-\dfrac{5}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면　　$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2}$

　$\therefore\ f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2}$

직선 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2}$의 x절편이 5, y절편이 $-\dfrac{5}{2}$이므로

　$a=5,\ b=-\dfrac{5}{2}$

　$\therefore\ a-b=\dfrac{15}{2}$　　답 $\dfrac{15}{2}$

다른풀이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 x절편이 a, y절편이 b이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 x절편은 b, y절편은 a이다.

이때 직선 $y=2x+5$의 x절편이 $-\dfrac{5}{2}$, y절편이 5이므로

　$a=5,\ b=-\dfrac{5}{2}$　　$\therefore\ a-b=\dfrac{15}{2}$

0515 $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$

　　　$=3(-x+1)-2=-3x+1$　　⋯ ❶

$y=-3x+1$로 놓으면　　$3x=-y+1$

$\therefore x=-\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면　$y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

$\therefore h^{-1}(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ ⋯ ❷

답 $h^{-1}(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ $h(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $h^{-1}(x)$를 구할 수 있다.	50 %

0516 $y=ax+1$로 놓으면　$ax=y-1$

$\therefore x=\frac{1}{a}y-\frac{1}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면　$y=\frac{1}{a}x-\frac{1}{a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{1}{a}$

$f=f^{-1}$에서 $ax+1=\frac{1}{a}x-\frac{1}{a}$이므로

$a=\frac{1}{a}$, $-\frac{1}{a}=1$

$\therefore a=-1$ 답 -1

다른풀이 $f=f^{-1}$이므로　$(f\circ f)(x)=x$

$f(x)=ax+1$에서

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=a(ax+1)+1$
$=a^2x+a+1$

따라서 $a^2x+a+1=x$이므로　$a^2=1$, $a+1=0$

$\therefore a=-1$

0517 $2x+1=t$로 놓으면　$2x=t-1$

$\therefore x=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$을 $f(2x+1)=4x+5$에 대입하면

$f(t)=4\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\right)+5=2t+3$

$\therefore f(x)=2x+3$

$y=2x+3$으로 놓으면　$2x=y-3$

$\therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면　$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$이므로

$4ab=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-3$

답 ②

0518 $g(x)=\frac{1}{3}x-1$에서 $y=\frac{1}{3}x-1$로 놓으면

$\frac{1}{3}x=y+1$　$\therefore x=3y+3$

x와 y를 서로 바꾸면　$y=3x+3$

따라서 $g^{-1}(x)=3x+3$이므로 $(f\circ g^{-1})(x)=6x+1$에서

$f(3x+3)=6x+1$ ⋯⋯ ㉠

$3x+3=t$로 놓으면　$3x=t-3$

$\therefore x=\frac{t-3}{3}$

$x=\frac{t-3}{3}$을 ㉠에 대입하면

$f(t)=6\cdot\frac{t-3}{3}+1=2t-5$

$\therefore f(x)=2x-5$ 답 $f(x)=2x-5$

0519 $g(-3)=-3+1=-2$이므로

$(f^{-1}\circ g)(-3)=f^{-1}(g(-3))=f^{-1}(-2)$

$f^{-1}(-2)=k$라 하면 $f(k)=-2$이므로

$2k-4=-2$,　$2k=2$

$\therefore k=1$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(-3)=f^{-1}(-2)=1$ 답 ①

0520 $g(2)=1$이므로　$g^{-1}(1)=2$

$\therefore (f^{-1}\circ g^{-1})(1)=f^{-1}(g^{-1}(1))=f^{-1}(2)$

이때 $f(1)=2$이므로　$f^{-1}(2)=1$

$\therefore (f^{-1}\circ g^{-1})(1)=f^{-1}(2)=1$ 답 1

0521 $(g^{-1}\circ f)(k)=1$에서

$g^{-1}(f(k))=1$　$\therefore g^{-1}(-k+2)=1$

따라서 $g(1)=-k+2$이므로

$-k+2=4$　$\therefore k=-2$

답 -2

0522 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=2\left(\frac{1}{2}x-1\right)+a$
$=x-2+a$

따라서 $x-2+a=x+7$이므로

$-2+a=7$　$\therefore a=9$

$\therefore f(x)=2x+9$

$f^{-1}(5)=k$라 하면 $f(k)=5$이므로

$2k+9=5$,　$2k=-4$　$\therefore k=-2$

$\therefore (g\circ f^{-1})(5)=g(f^{-1}(5))=g(-2)$
$=\frac{1}{2}\cdot(-2)-1=-2$

답 ①

0523 $f(x)=ax+b$에서 $a>0$이면 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값도 증가하므로

$f(-3)=-5$, $f(5)=11$

$-3a+b=-5$, $5a+b=11$

두 식을 연립하여 풀면　$a=2$, $b=1$

$\therefore f(x)=2x+1$ ⋯ ❶

$g(x)=cx+d$에서 $c<0$이면 x의 값이 증가할 때 $g(x)$의 값은 감소하므로

$g(-3)=11$, $g(5)=-5$

$-3c+d=11$, $5c+d=-5$

두 식을 연립하여 풀면　$c=-2$, $d=5$

$\therefore g(x)=-2x+5$ ⋯ ❷

한편 $g^{-1}(1)=k$라 하면 $g(k)=1$이므로

$-2k+5=1$,　$-2k=-4$　$\therefore k=2$

따라서 $g^{-1}(1)=2$이므로

$(f\circ g^{-1})(1)=f(g^{-1}(1))=f(2)=2\cdot2+1=5$ ⋯ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $g(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $(f\circ g^{-1})(1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0524 $(f\circ(g\circ f)^{-1})(5)=(\underbrace{f\circ f^{-1}}_{f\circ f^{-1}=I\ (I\text{는 항등함수})}\circ g^{-1})(5)$

$=g^{-1}(5)$

$g^{-1}(5)=k$라 하면 $g(k)=5$이므로

$3k+2=5$ $\quad\therefore k=1$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1})(5)=1$

답 1

0525 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(3)=5$이므로 $\quad 3a+b=5$ ⋯⋯ ㉠

$f^{-1}(1)=2$에서 $f(2)=1$이므로

$2a+b=1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=-7$

따라서 $f(x)=4x-7$이므로

$(f\circ f^{-1}\circ f)(x)=f(x)=4x-7$

답 $(f\circ f^{-1}\circ f)(x)=4x-7$

0526 $(g^{-1}\circ f)^{-1}(9)=(f^{-1}\circ g)(9)=f^{-1}(g(9))$

$=f^{-1}(10)$

$f^{-1}(10)=k$라 하면 $f(k)=10$이므로

$2k-4=10,\quad 2k=14$

$\therefore k=7$

답 ④

0527 $(g\circ f)^{-1}(0)+(f^{-1}\circ g^{-1})(0)$

$=(f^{-1}\circ g^{-1})(0)+(f^{-1}\circ g^{-1})(0)$

$=2(f^{-1}\circ g^{-1})(0)=2f^{-1}(g^{-1}(0))$

$g^{-1}(0)=a$라 하면 $g(a)=0$이므로

$a+3=0\quad \therefore a=-3$

$f^{-1}(-3)=b$라 하면 $f(b)=-3$이므로

$2b-7=-3,\quad 2b=4$

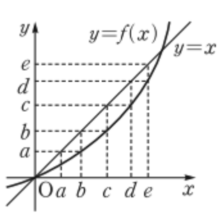
$\therefore b=2$

$\therefore$ (주어진 식)$=2f^{-1}(g^{-1}(0))=2f^{-1}(-3)$

$=2\cdot2=4$

답 ①

0528 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$f^{-1}(b)=k$라 하면 $f(k)=b$이므로

$k=c$

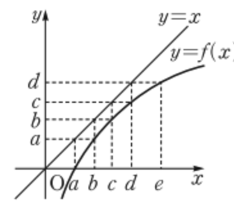
$f^{-1}(c)=l$이라 하면 $f(l)=c$이므로

$l=d$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(b)=f^{-1}(f^{-1}(b))=f^{-1}(c)=d$

답 ④

0529 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$f^{-1}(c)=k$라 하면 $f(k)=c$이므로

$k=d$

$\therefore f^{-1}(c)=d$

답 ④

0530 $f^{-1}(2)=a$, $f^{-1}(4)=b$라 하면

$f(a)=2,\ f(b)=4$

이때 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이므로

$a=3,\ b=4$ 또는 $a=4,\ b=3$

$\therefore f^{-1}(2)+f^{-1}(4)=a+b=7$

답 7

0531 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같다.

$\frac{1}{3}x-2=x$에서 $\quad \frac{2}{3}x=-2$

$\therefore x=-3$

따라서 교점의 좌표는 $(-3,\ -3)$이므로

$a=-3,\ b=-3$

$\therefore a+b=-6$

답 ②

0532 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-1,\ 4)$를 지나므로

$-a+b=4$ ⋯⋯ ㉠

또 $y=f(x)$의 역함수의 그래프가 점 $(-2,\ 5)$를 지나므로 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(5,\ -2)$를 지난다.

$\therefore 5a+b=-2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-1,\ b=3$

$\therefore ab=-3$

답 ①

0533 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 3)$을 지나므로 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(3,\ 1)$을 지난다. 이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치하므로 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(1,\ 3)$, $(3,\ 1)$을 지난다.

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$a+b=3,\ 3a+b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-1,\ b=4$

따라서 $f(x)=-x+4$이므로 $\quad f(4)=0$

답 ③

다른풀이 $f=f^{-1}$이므로 $\quad (f\circ f)(x)=x$

일차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$f(x)=a(x-1)+3=ax-a+3\ (a\neq0)$

이라 하면

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=a(ax-a+3)-a+3$

$=a^2x-a^2+2a+3$

따라서 $a^2x-a^2+2a+3=x$이므로

$a^2=1,\ -a^2+2a+3=0$

$a^2=1$에서 $\quad a=\pm1$

$a^2-2a-3=0$에서 $\quad (a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

따라서 $a=-1$이므로 $\quad f(x)=-x+4$

$\therefore f(4)=0$

0534 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 P는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점이다. ··· ❶

$3x+8=x$에서 $\quad 2x=-8$

$\therefore x=-4$

따라서 $\mathrm{P}(-4,\ -4)$이므로 ··· ❷

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-4)^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}$ ··· ❸

답 $4\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 점 P가 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점임을 알 수 있다.	30 %
❷ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ 선분 OP의 길이를 구할 수 있다.	30 %

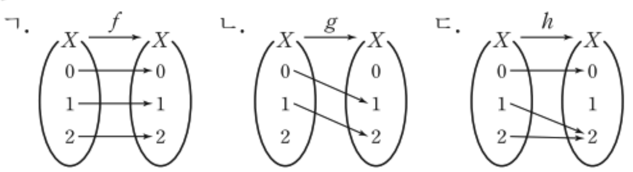
라쎈 특강 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

① 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

② 원점 O와 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ 사이의 거리는
$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}$

0535 전략 각 대응을 그림으로 나타내어 본다.

풀이 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



이상에서 함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0536 전략 $a\geq 0$이면 $|a|=a$, $a<0$이면 $|a|=-a$임을 이용한다.

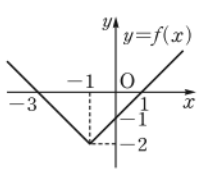
풀이 (1) $x\geq -1$일 때, $x+1\geq 0$이므로

$f(x)=x+1-2=x-1$

$x<-1$일 때, $x+1<0$이므로

$f(x)=-(x+1)-2=-x-3$ ··· ❶

(2)



··· ❷

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ $x\geq -1$일 때와 $x<-1$일 때의 $f(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	40 %

0537 전략 먼저 집합 X의 원소를 구한다.

풀이 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이므로 X에서 X로의 일대일대응의 개수는

$4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$ 답 24

0538 전략 $\sqrt{3}$과 $f(\sqrt{3})$의 값이 유리수인지 무리수인지 구분하여 함숫값을 구한다.

풀이 $\sqrt{3}$은 무리수이므로 $\quad f(\sqrt{3})=-(\sqrt{3})^2=-3$

-3은 유리수이므로 $\quad f(-3)=2\cdot(-3)=-6$

$\therefore (f\circ f)(\sqrt{3})=f(f(\sqrt{3}))=f(-3)=-6$ 답 ①

0539 전략 k의 값의 범위를 나누어 생각한다.

풀이 (i) $0\leq k\leq 5$일 때,

$2k=8$에서 $\quad k=4$ ··· ❶

(ii) $k>5$일 때,

$k+1=8$에서 $\quad k=7$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 k의 값의 합은 $\quad 4+7=11$ ··· ❸

답 11

채점 기준	비율
❶ $0\leq k\leq 5$일 때, k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $k>5$일 때, k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 k의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0540 전략 $x_1\neq x_2$이면서 $f(x_1)=f(x_2)$인 x_1, x_2가 존재하면 일대일대응이 아니다.

풀이 ① $x_1=1,\ x_2=2$이면 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=3,\ f(x_2)=3$

따라서 $f(x)=3$은 일대일대응이 아니다.

③ $x_1=0,\ x_2=2$이면 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=(0-1)^2=1,\ f(x_2)=(2-1)^2=1$

따라서 $f(x)=(x-1)^2$은 일대일대응이 아니다.

④ $x_1=0,\ x_2=1$이면 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=0,\ f(x_2)=0$

따라서 $f(x)=x^3-x^2$은 일대일대응이 아니다.

⑤ $x_1=-1,\ x_2=-2$이면 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=-1+|-1|=0,\ f(x_2)=-2+|-2|=0$

따라서 $f(x)=x+|x|$는 일대일대응이 아니다.

답 ②

0541 전략 일대일함수는 정의역의 서로 다른 원소에 공역의 서로 다른 원소가 대응됨을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$가 일대일함수이고 $f(2)=4$이므로 4가 아닌 집합 Y의 서로 다른 두 원소 $a,\ b$에 대하여

$f(1)=a,\ f(3)=b$

로 놓을 수 있다.

이때 $f(1)+f(3)=a+b$이므로

$a=2,\ b=3$ 또는 $a=3,\ b=2$

일 때 $a+b$의 값이 최대이다.

따라서 $f(1)+f(3)$의 최댓값은 5이다. 답 ③

0542 전략 $f(x)$가 항등함수이면 $f(x)=x$이다.

풀이 $f(x)$가 항등함수이므로

$f(a)=a,\ f(b)=b$ ··· ❶

$a^2-6=a$에서 $\quad a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0 \quad \therefore a=-2$ 또는 $a=3$

같은 방법으로 $\quad b=-2$ 또는 $b=3$ ··· ❷

이때 $a \neq b$이므로

$a=-2$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=-2$

$\therefore a^2+b^2=(-2)^2+3^2=13$ ⋯ ❸

답 13

채점 기준	비율
❶ $f(a)=a$, $f(b)=b$임을 알 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

0543 전략 $f(2)$의 값이 될 수 있는 것을 찾아 조건을 만족시키는지 확인한다.

풀이 함수 f가 일대일대응이고, $f(1)=4$이므로

$f(2)=2$ 또는 $f(2)=6$

(i) $f(2)=2$일 때,

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(2)=3$

$g(2)=3$, $g(6)=6$이므로 $g(4)=9$

즉 함수 g는 일대일대응이다.

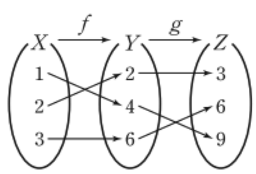
(ii) $f(2)=6$일 때,

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(6)=6\neq 3$

(i), (ii)에서 $f(2)=2$이므로 $f(3)=6$

답 6

참고 두 함수 f, g를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



0544 전략 $f(x)=11$이 되는 x의 값을 $(g\circ f)(x)=2x-1$에 대입한다.

풀이 $(g\circ f)(x)=2x-1$에서

$g(3x+2)=2x-1$ ⋯⋯ ㉠

$3x+2=11$에서 $3x=9$ $\therefore x=3$

$x=3$을 ㉠에 대입하면 $g(11)=2\cdot 3-1=5$

답 ⑤

다른풀이 $(g\circ f)(x)=2x-1$에서

$g(f(x))=2x-1$, $g(3x+2)=2x-1$

$3x+2=t$로 놓으면 $3x=t-2$

$\therefore x=\frac{1}{3}t-\frac{2}{3}$

따라서 $g(t)=2\left(\frac{1}{3}t-\frac{2}{3}\right)-1=\frac{2}{3}t-\frac{7}{3}$이므로

$g(11)=\frac{2}{3}\cdot 11-\frac{7}{3}=5$

0545 전략 $f\circ g=g\circ f$임을 이용하여 $g(2)$, $g(3)$의 값을 구한다.

풀이 주어진 그림에서

$f(1)=3$, $f(2)=1$, $f(3)=2$

$f\circ g=g\circ f$에서 $f(g(x))=g(f(x))$ ⋯⋯ ㉠

$x=1$을 ㉠에 대입하면 $f(g(1))=g(f(1))$

$f(2)=g(3)$ $\therefore g(3)=1$

$x=3$을 ㉠에 대입하면 $f(g(3))=g(f(3))$

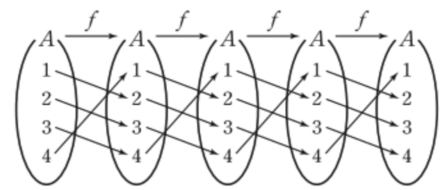
$f(1)=g(2)$ $\therefore g(2)=3$

$\therefore g(2)-g(3)=2$

답 ⑤

0546 전략 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 구하여 f^1, f^2, f^3, f^4의 대응 관계를 그려 본다.

풀이 $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=4$, $f(4)=1$이므로 f^1, f^2, f^3, f^4의 대응 관계를 나타내면 다음 그림과 같다.



즉 $f^4(x)=x$이므로

$f^{2012}(2)=f^{4\cdot 503}(2)=f^4(2)=2$

$f^{2013}(3)=f^{4\cdot 503+1}(3)=f^1(3)=4$

$\therefore f^{2012}(2)+f^{2013}(3)=6$

답 ④

0547 전략 $f^{-1}(m)=n \Longleftrightarrow f(n)=m$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(3)=8$이므로 $3a+b=8$ ⋯⋯ ㉠

$f^{-1}(5)=2$에서 $f(2)=5$이므로

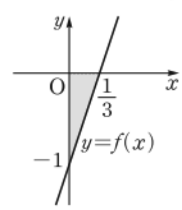
$2a+b=5$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$

$\therefore f(x)=3x-1$ ⋯ ❶

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{6}$ ⋯ ❷



답 $\frac{1}{6}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ $y=f(x)$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

0548 전략 함수 f의 역함수 f^{-1}를 구하여 계수를 비교한다.

풀이 ㄱ. $y=ax+b$로 놓으면 $ax=y-b$

$\therefore x=\frac{1}{a}(y-b)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{a}(x-b)$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}(x-b)$

ㄴ. $a=-1$이면

$f(x)=-x+b$, $f^{-1}(x)=-x+b$

따라서 b의 값에 관계없이 $f=f^{-1}$이다.

ㄷ. $a=1$이면

$f(x)=x+b$, $f^{-1}(x)=x-b$

따라서 $b=0$이면 $f=f^{-1}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

참고 일차함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 $f=f^{-1}$이려면

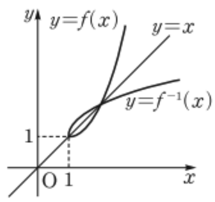
$a=\frac{1}{a}$, $b=-\frac{b}{a}$

$\therefore a^2=1$, $ab+b=0$

0549 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1\ (x\geq 1)$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근은 방정식 $f(x)=x$의 근과 같으므로

$x^2-2x+2=x,\qquad x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0\qquad \therefore x=1$ 또는 $x=2$

따라서 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근은 $x=1$ 또는 $x=2$이므로 구하는 합은

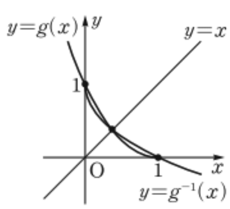
$1+2=3$

답 ③

라쎈 특강 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점

함수 $f(x)=x^2-2x+2\ (x\geq 1)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이 모두 직선 $y=x$ 위에 존재한다.

하지만 $g(x)=(x-1)^2\ (x\leq 1)$이면 오른쪽 그림과 같이 $y=g(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g^{-1}(x)$의 그래프의 교점이 직선 $y=x$ 밖에서도 존재한다. 따라서 반드시 그래프를 그려서 교점의 위치를 확인해야 한다.



0550 전략 x, y에 적당한 수를 대입하여 $f(0)$, $f(-1)$의 값을 구한다.

풀이 $f(x+y)=f(x)+f(y)$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)\qquad \therefore f(0)=0$ ⋯ ❶

또 $x=-1$, $y=1$을 대입하면

$f(0)=f(-1)+f(1)$

이때 $f(1)=3$이므로 $\quad 0=f(-1)+3$

$\therefore f(-1)=-3$ ⋯ ❷

답 -3

채점 기준	비율
❶ $f(0)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(-1)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0551 전략 $x<-2$일 때와 $x\geq -2$일 때로 나누어 함수 $f(x)$를 구한 후 $y=f(x)$의 그래프를 이용한다.

풀이 (i) $x<-2$일 때, $x+2<0$이므로

$f(x)=-a(x+2)-4x=-(a+4)x-2a$

(ii) $x\geq -2$일 때, $x+2\geq 0$이므로

$f(x)=a(x+2)-4x=(a-4)x+2a$

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases}-(a+4)x-2a & (x<-2)\\ (a-4)x+2a & (x\geq -2)\end{cases}$$

함수 f가 일대일대응이 되려면 두 직선 $y=-(a+4)x-2a$, $y=(a-4)x+2a$의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로

$-(a+4)(a-4)>0,\qquad (a+4)(a-4)<0$

$\therefore -4<a<4$

따라서 정수 a는 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3의 7개이다.

답 7

0552 전략 $g^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ g)^{-1}$임을 이용한다.

풀이 $g^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ g)^{-1}$이므로 $(g\circ f)^{-1}=(f\circ g)^{-1}$가 성립한다.

$\therefore g\circ f=f\circ g$

이때

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=3\left(\frac{1}{3}x-1\right)+a$

$\qquad =x-3+a,$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{1}{3}(3x+a)-1$

$\qquad =x+\frac{1}{3}a-1$

이므로 $g\circ f=f\circ g$에서

$x-3+a=x+\frac{1}{3}a-1$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$-3+a=\frac{1}{3}a-1,\qquad \frac{2}{3}a=2$

$\therefore a=3$

답 ⑤

다른풀이 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=3\left(\frac{1}{3}x-1\right)+a$

$\qquad =x-3+a$

$y=x-3+a$로 놓으면 $\quad x=y+3-a$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=x+3-a$

$\therefore (g\circ f)^{-1}(x)=x+3-a$

$f(x)=\frac{1}{3}x-1$에서 $y=\frac{1}{3}x-1$로 놓으면

$\frac{1}{3}x=y+1\qquad \therefore x=3y+3$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=3x+3$

$\therefore f^{-1}(x)=3x+3$

$g(x)=3x+a$에서 $y=3x+a$로 놓으면

$3x=y-a\qquad \therefore x=\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}a$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}a$

$\therefore g^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}a$

$\therefore (g^{-1}\circ f^{-1})(x)=g^{-1}(f^{-1}(x))$

$\qquad =\frac{1}{3}(3x+3)-\frac{1}{3}a$

$\qquad =x+1-\frac{1}{3}a$

$(g\circ f)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$에서

$x+3-a=x+1-\frac{1}{3}a$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$3-a=1-\frac{1}{3}a,\qquad -\frac{2}{3}a=-2$

$\therefore a=3$

0553 전략 $\frac{1}{2}x+1=h(x)$로 놓고 $f\circ h$의 역함수를 구한다.

풀이 $h(x)=\frac{1}{2}x+1$이라 하면 함수 $y=f\left(\frac{1}{2}x+1\right)$, 즉 $y=f(h(x))$의 역함수는

$$(f\circ h)^{-1}(x)=(h^{-1}\circ f^{-1})(x)=h^{-1}(g(x))$$

$h(x)=\frac{1}{2}x+1$에서 $y=\frac{1}{2}x+1$로 놓으면

$$\frac{1}{2}x=y-1 \qquad \therefore x=2y-2$$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=2x-2$

즉 $h^{-1}(x)=2x-2$이므로

$$h^{-1}(g(x))=2g(x)-2$$

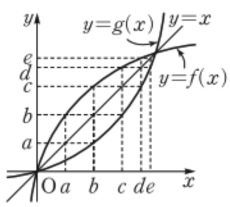
따라서 $y=f\left(\frac{1}{2}x+1\right)$의 역함수는 $y=2g(x)-2$이므로

$$a=2,\ b=-2$$
$$\therefore ab=-4$$

답 -4

0554 전략 먼저 $f^{-1}(d)=k$로 놓고 k의 값을 구한다.

풀이 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$f^{-1}(d)=k$라 하면 $f(k)=d$이므로

$$k=c \qquad \therefore f^{-1}(d)=c$$

$$\begin{aligned}\therefore (f\circ g\circ f^{-1})(d)&=f(g(f^{-1}(d)))\\&=f(g(c))=f(b)\\&=c\end{aligned}$$

답 ③

17 유리식과 유리함수

Ⅵ. 함수

0555 답 ㄱ, ㄷ, ㅁ

0556 다항식이 아닌 유리식은 모두 분수식이므로 분수식인 것은 ㄴ, ㄹ, ㅂ이다.

답 ㄴ, ㄹ, ㅂ

0557 $\frac{6}{x^2y^2}$, $\frac{2}{xy^2}$의 분모의 최소공배수는 x^2y^2이므로

$$\frac{6}{x^2y^2},\ \frac{2x}{x^2y^2}$$

답 $\frac{6}{x^2y^2}$, $\frac{2x}{x^2y^2}$

0558 $\frac{2}{x+1}$, $\frac{x+1}{x-1}$의 분모의 최소공배수는 $(x+1)(x-1)$이므로

$$\frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)},\ \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}$$

답 $\frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)}$, $\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}$

0559 $\frac{x-2}{(x+1)(x+2)}$, $\frac{x-4}{(x+2)(x+3)}$의 분모의 최소공배수는 $(x+1)(x+2)(x+3)$이므로

$$\frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x+2)(x+3)},\ \frac{(x+1)(x-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

답 $\frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, $\frac{(x+1)(x-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

0560 $\frac{x+1}{x^2-5x+4}=\frac{x+1}{(x-1)(x-4)}$,

$\frac{x}{x^2-16}=\frac{x}{(x+4)(x-4)}$에서 분모의 최소공배수는 $(x+4)(x-1)(x-4)$이므로

$$\frac{(x+4)(x+1)}{(x+4)(x-1)(x-4)},\ \frac{x(x-1)}{(x+4)(x-1)(x-4)}$$

답 $\frac{(x+4)(x+1)}{(x+4)(x-1)(x-4)}$, $\frac{x(x-1)}{(x+4)(x-1)(x-4)}$

0561 답 $\frac{3}{yz^3}$

0562 $\frac{a^2+3a}{(a+3)(a-3)}=\frac{a(a+3)}{(a+3)(a-3)}=\frac{a}{a-3}$

답 $\frac{a}{a-3}$

0563 $\frac{a^2+a-2}{a^2+4a-5}=\frac{(a+2)(a-1)}{(a+5)(a-1)}=\frac{a+2}{a+5}$

답 $\frac{a+2}{a+5}$

0564 $\frac{x^2-1}{x^3+3x^2+3x+1}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^3}=\frac{x-1}{(x+1)^2}$

답 $\frac{x-1}{(x+1)^2}$

0565 $\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+(x+3)}{(x+3)(x-1)}$

$=\dfrac{3x+1}{(x+3)(x-1)}$

답 $\dfrac{3x+1}{(x+3)(x-1)}$

0566 $\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x(x+3)}=\dfrac{5(x+3)+1}{x(x+3)}=\dfrac{5x+16}{x(x+3)}$

답 $\dfrac{5x+16}{x(x+3)}$

0567 $\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{5}{(x+3)(x-1)}$

$=\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}+\dfrac{5}{(x+3)(x-1)}$

$=\dfrac{2(x+3)+5(x+1)}{(x+3)(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{7x+11}{(x+3)(x+1)(x-1)}$

답 $\dfrac{7x+11}{(x+3)(x+1)(x-1)}$

0568 $2-\dfrac{3}{x+4}=\dfrac{2(x+4)-3}{x+4}=\dfrac{2x+5}{x+4}$ 답 $\dfrac{2x+5}{x+4}$

0569 $\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{2(x+2)-3(x+1)}{(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{-x+1}{(x+1)(x+2)}$

답 $\dfrac{-x+1}{(x+1)(x+2)}$

0570 $\dfrac{x+2}{x^2-4}-\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)}-\dfrac{x}{x+3}$

$=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{x+3-x(x-2)}{(x+3)(x-2)}$

$=\dfrac{-x^2+3x+3}{(x+3)(x-2)}$

답 $\dfrac{-x^2+3x+3}{(x+3)(x-2)}$

0571 $\dfrac{2}{x+1}\times\dfrac{x^2+x}{x+2}=\dfrac{2}{x+1}\times\dfrac{x(x+1)}{x+2}$

$=\dfrac{2x}{x+2}$ 답 $\dfrac{2x}{x+2}$

0572 $\dfrac{x}{x^2-4}\times\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{x}{(x+2)(x-2)}\times\dfrac{x+2}{x-2}$

$=\dfrac{x}{(x-2)^2}$ 답 $\dfrac{x}{(x-2)^2}$

0573 $\dfrac{1-x}{2x^2-5x-3}\times\dfrac{2x+1}{3x^2-4x+1}$

$=\dfrac{-(x-1)}{(2x+1)(x-3)}\times\dfrac{2x+1}{(x-1)(3x-1)}$

$=-\dfrac{1}{(x-3)(3x-1)}$ 답 $-\dfrac{1}{(x-3)(3x-1)}$

0574 $\dfrac{x}{x^2-1}\div\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{x}{(x+1)(x-1)}\times\dfrac{x-1}{x+1}$

$=\dfrac{x}{(x+1)^2}$ 답 $\dfrac{x}{(x+1)^2}$

0575 $\dfrac{x-1}{x+3}\div\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-9}=\dfrac{x-1}{x+3}\div\dfrac{(x+4)(x-1)}{(x+3)(x-3)}$

$=\dfrac{x-1}{x+3}\times\dfrac{(x+3)(x-3)}{(x+4)(x-1)}$

$=\dfrac{x-3}{x+4}$ 답 $\dfrac{x-3}{x+4}$

0576 $\dfrac{x^2-x-6}{6x^2+7x+2}\div\dfrac{-x^2+4x-3}{3x^2-4x-4}$

$=\dfrac{(x+2)(x-3)}{(3x+2)(2x+1)}\div\dfrac{-(x-3)(x-1)}{(3x+2)(x-2)}$

$=-\dfrac{(x+2)(x-3)}{(3x+2)(2x+1)}\times\dfrac{(3x+2)(x-2)}{(x-3)(x-1)}$

$=-\dfrac{(x+2)(x-2)}{(2x+1)(x-1)}$

답 $-\dfrac{(x+2)(x-2)}{(2x+1)(x-1)}$

0577 $\dfrac{2x+4}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+2}{x+1}=2+\dfrac{\boxed{2}}{x+1}$ 답 2

0578 $\dfrac{\dfrac{x+2}{x+1}}{\dfrac{x}{x+3}}=\dfrac{x+2}{x+1}\div\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{x+2}{x+1}\times\dfrac{x+3}{x}$

$=\dfrac{\boxed{(x+2)(x+3)}}{x(x+1)}$

답 $(x+2)(x+3)$

0579 $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{x+1-(x-1)}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

$=\dfrac{1}{\boxed{2}}\left(\dfrac{1}{\boxed{x-1}}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

답 2, $x-1$

0580 답 $\dfrac{x+3}{x+2}$

0581 $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x}}=\dfrac{x}{x+1}$ 답 $\dfrac{x}{x+1}$

0582 $\dfrac{\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x-1}{x}}=\dfrac{x}{x(x-1)}=\dfrac{1}{x-1}$

답 $\dfrac{1}{x-1}$

17 유리식과 유리함수

0583 $\dfrac{\dfrac{x^2-2x}{x+1}}{\dfrac{x^2-4}{x^2-1}}=\dfrac{\dfrac{x(x-2)}{x+1}}{\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-1)}}$

$=\dfrac{x(x+1)(x-1)(x-2)}{(x+2)(x+1)(x-2)}$

$=\dfrac{x(x-1)}{x+2}$ 답 $\dfrac{x(x-1)}{x+2}$

0584 $\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{(x+3)-1}{x+3}-\dfrac{(x-1)-1}{x-1}$

$=\left(1-\dfrac{1}{x+3}\right)-\left(1-\dfrac{1}{x-1}\right)$

$=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{x+3-(x-1)}{(x+3)(x-1)}$

$=\dfrac{4}{(x+3)(x-1)}$ 답 $\dfrac{4}{(x+3)(x-1)}$

0585 $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2-(x+1)}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$

$=\dfrac{1}{x+2}$ 답 $\dfrac{1}{x+2}$

다른풀이 $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{(x+2)-1}{(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{x+1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+2}$

0586 $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}$

$=\dfrac{1}{x+1-(x-1)}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

$+\dfrac{1}{x+3-(x+1)}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+3}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x+3-(x-1)}{(x+3)(x-1)}$

$=\dfrac{2}{(x+3)(x-1)}$ 답 $\dfrac{2}{(x+3)(x-1)}$

0587 $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$

$=\dfrac{1}{x+1-x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

$+\dfrac{1}{x+2-(x+1)}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$+\dfrac{1}{x+3-(x+2)}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{x+3-x}{x(x+3)}$

$=\dfrac{3}{x(x+3)}$ 답 $\dfrac{3}{x(x+3)}$

0588 답 ㄴ, ㄷ, ㅂ

0589 답 ㄱ, ㄹ, ㅁ

0590 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1}=x-1$

이때 함수 $f(x)$의 정의역은 $\{x|x\neq-1$인 실수$\}$

함수 $g(x)$의 정의역은 $\{x|x$는 실수$\}$

따라서 두 함수 f, g는 서로 같지 않다.

답 서로 같지 않다.

0591 $x+3=0$에서 $x=-3$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x|x\neq-3$인 실수$\}$

답 $\{x|x\neq-3$인 실수$\}$

0592 $x-2=0$에서 $x=2$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x|x\neq2$인 실수$\}$

답 $\{x|x\neq2$인 실수$\}$

0593 $x^2+1\neq0$이므로 주어진 함수의 정의역은

$\{x|x$는 실수$\}$

답 $\{x|x$는 실수$\}$

0594 $x^2-4=0$에서 $x^2=4$ $\therefore x=\pm2$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x|x\neq-2,\ x\neq2$인 실수$\}$

답 $\{x|x\neq-2,\ x\neq2$인 실수$\}$

0595 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프가 제2사분면을 지나려면 $k<0$이어야 한다. 따라서 그래프가 제2사분면을 지나는 것은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄷ, ㄹ

0596 함수 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq0)$의 그래프는 $|k|$가 커질수록 원점으로부터 멀어진다.

$\left|-\dfrac{1}{5}\right|<\left|\dfrac{1}{3}\right|<|3|<|-5|$이므로 그래프가 원점으로부터 가장 멀리 떨어진 것은 ㄷ이다. 답 ㄷ

0597 답 3, -4

0598 답 3, -1, 7

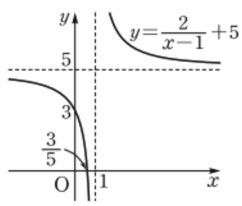
0599 답 $y=-\dfrac{1}{x-5}-7$

0600 답 정의역: $\{x|x\neq2$인 실수$\}$, 치역: $\{y|y\neq3$인 실수$\}$

0601 답 정의역: $\{x|x\neq-2$인 실수$\}$, 치역: $\{y|y\neq1$인 실수$\}$

0602 $y=\dfrac{2}{x-1}+5$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다. 따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은

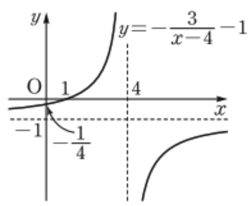
$x=1$, $y=5$



답 풀이 참조

0603 $y=-\dfrac{3}{x-4}-1$의 그래프는 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다. 따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은

$x=4$, $y=-1$



답 풀이 참조

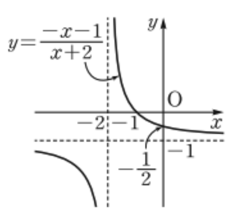
0604 (1) $y=\dfrac{-x-1}{x+2}=\dfrac{-(x+2)+1}{x+2}$

$=\dfrac{1}{x+2}-1$

(2) 정의역: $\{x|x\neq-2$인 실수$\}$, 치역: $\{y|y\neq-1$인 실수$\}$

(3) $x=-2$, $y=-1$

(4) $y=\dfrac{-x-1}{x+2}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

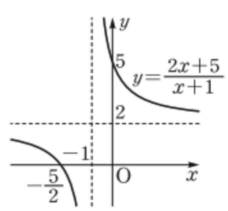


답 풀이 참조

0605 $y=\dfrac{2x+5}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+3}{x+1}=\dfrac{3}{x+1}+2$

이므로 $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. 따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은

$x=-1$, $y=2$

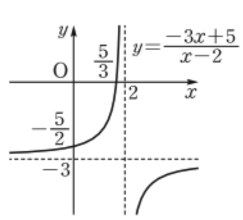


답 풀이 참조

0606 $y=\dfrac{-3x+5}{x-2}=\dfrac{-3(x-2)-1}{x-2}=-\dfrac{1}{x-2}-3$

이므로 $y=\dfrac{-3x+5}{x-2}$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다. 따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은

$x=2$, $y=-3$



답 풀이 참조

0607 $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$

$=\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}\right)+\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

$=\dfrac{x-(x-1)}{x(x-1)}+\dfrac{x+1-(x+2)}{(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{1}{x(x-1)}-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{(x+2)(x+1)-x(x-1)}{x(x+2)(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{x^2+3x+2-x^2+x}{x(x+2)(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{4x+2}{x(x+2)(x+1)(x-1)}$

따라서 $f(x)=4x+2$이므로 방정식 $f(x)=0$의 해는

$x=-\dfrac{1}{2}$

답 $x=-\dfrac{1}{2}$

0608 $\dfrac{x+3}{x^2-x}-\dfrac{x+2}{x^2-1}=\dfrac{x+3}{x(x-1)}-\dfrac{x+2}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{(x+1)(x+3)-x(x+2)}{x(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{x^2+4x+3-(x^2+2x)}{x(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{2x+3}{x(x+1)(x-1)}$

답 $\dfrac{2x+3}{x(x+1)(x-1)}$

0609 $\dfrac{a}{(a-b)(c-a)}+\dfrac{b}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{c}{(c-a)(b-c)}$

$=\dfrac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\dfrac{ab-ac+bc-ab+ac-bc}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=0$

답 0

0610 $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2+1}=\dfrac{x+1-(x-1)}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{2}{x^2+1}$

$=\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{2}{x^2+1}$

$=\dfrac{2(x^2+1)-2(x^2-1)}{(x^2+1)(x^2-1)}$

$=\dfrac{4}{x^4-1}$ ··· ❶

따라서 $f(x)=x^4-1$, $a=4$이므로 ··· ❷

$f(a)=f(4)=4^4-1=255$ ··· ❸

답 255

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변을 계산할 수 있다.	60 %
❷ $f(x)$와 a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $f(a)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0611 $\frac{x^2-4y^2}{x^2-4xy+4y^2}\times\frac{x-2y}{x^2+2xy}$

$=\frac{(x+2y)(x-2y)}{(x-2y)^2}\times\frac{x-2y}{x(x+2y)}$

$=\frac{1}{x}$

답 $\frac{1}{x}$

0612 $\frac{a^2-a}{a^2+a}\times\frac{a^2+3a+2}{a^2-4a+3}\div\frac{a+2}{a-3}$

$=\frac{a(a-1)}{a(a+1)}\times\frac{(a+1)(a+2)}{(a-1)(a-3)}\times\frac{a-3}{a+2}$

$=1$

답 ⑤

0613 주어진 식의 좌변을 계산하면

$\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-3}=\frac{a(x-3)+b(x+1)}{(x+1)(x-3)}$

$=\frac{(a+b)x-3a+b}{x^2-2x-3}$

따라서 $\frac{(a+b)x-3a+b}{x^2-2x-3}=\frac{3x-1}{x^2-2x-3}$이 x에 대한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$a+b=3,\ -3a+b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=2$

$\therefore\ a-b=-1$

답 -1

라쎈 특강 항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이다.
⇨ $a=b=c=0$

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이다.
⇨ $a=a',\ b=b',\ c=c'$

③ $ax+by+c=0$이 $x,\ y$에 대한 항등식이다.
⇨ $a=b=c=0$

④ $ax+by+c=a'x+b'y+c'$이 $x,\ y$에 대한 항등식이다.
⇨ $a=a',\ b=b',\ c=c'$

0614 주어진 식의 우변을 계산하면

$\frac{2}{x-1}-\frac{2x+3}{x^2+x+1}=\frac{2(x^2+x+1)-(2x+3)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\frac{2x^2+2x+2-(2x^2+x-3)}{x^3-1}$

$=\frac{x+5}{x^3-1}$

따라서 $\frac{ax^2+bx+c}{x^3-1}=\frac{x+5}{x^3-1}$가 x에 대한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$a=0,\ b=1,\ c=5$

$\therefore\ a+b+c=6$

답 6

0615 주어진 식의 우변을 계산하면

$\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$

$=\frac{a(x-1)^2+b(x+1)(x-1)+c(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}$

$=\frac{(a+b)x^2+(-2a+c)x+a-b+c}{(x+1)(x-1)^2}$ ⋯ ❶

따라서 $\frac{3-x^2}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{(a+b)x^2+(-2a+c)x+a-b+c}{(x+1)(x-1)^2}$가 x에 대한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$a+b=-1,\ -2a+c=0,\ a-b+c=3$ ⋯ ❷

세 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{3}{2},\ c=1$ ⋯ ❸

$\therefore\ abc=-\frac{3}{4}$ ⋯ ❹

답 $-\frac{3}{4}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 우변을 계산할 수 있다.	40 %
❷ $a,\ b,\ c$에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	30 %
❸ $a,\ b,\ c$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ abc의 값을 구할 수 있다.	10 %

0616 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$

답 ③

0617 $a^2-\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a-\frac{1}{a}\right)$이므로

$\frac{5}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)=\frac{15}{4}\qquad\therefore\ a-\frac{1}{a}=\frac{3}{2}$

$\therefore\ a^3-\frac{1}{a^3}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^3+3\left(a-\frac{1}{a}\right)$

$=\left(\frac{3}{2}\right)^3+3\cdot\frac{3}{2}$

$=\frac{63}{8}$

답 $\frac{63}{8}$

다른풀이 $a+\frac{1}{a}=\frac{5}{2},\ a-\frac{1}{a}=\frac{3}{2}$을 변끼리 더하면

$2a=4\qquad\therefore\ a=2$

$\therefore\ a^3-\frac{1}{a^3}=2^3-\frac{1}{2^3}=\frac{63}{8}$

0618 $x^2-x-1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-1-\frac{1}{x}=0\qquad\therefore\ x-\frac{1}{x}=1$

$\therefore\ x^2+x-1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x-\frac{1}{x}\right)-1$

$=\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\right\}+\left(x-\frac{1}{x}\right)-1$

$=(1^2+2)+1-1$

$=3$

답 3

0619 $x=k$, $y=2k$, $z=3k$ $(k\neq0)$로 놓으면

$$\frac{3x-y-3z}{-x+y+z}=\frac{3k-2k-9k}{-k+2k+3k}=-\frac{8k}{4k}=-2$$

답 -2

0620 $a=3k$, $b=5k$ $(k\neq0)$로 놓으면

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{(3k)^2+(5k)^2}{(3k)^2-(5k)^2}=-\frac{34k^2}{16k^2}=-\frac{17}{8}$$

답 $-\frac{17}{8}$

0621 $3x=y$, $2y=3z$에서 $\quad x=\frac{1}{3}y$, $z=\frac{2}{3}y$ ⋯ ❶

$$\therefore \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{\frac{1}{3}y^2+\frac{2}{3}y^2+\frac{2}{9}y^2}{\frac{1}{9}y^2+y^2+\frac{4}{9}y^2}=\frac{\frac{11}{9}y^2}{\frac{14}{9}y^2}$$

$$=\frac{11}{14}$$ ⋯ ❷

따라서 $p=14$, $q=11$이므로

$p+q=25$ ⋯ ❸

답 25

채점 기준	비율
❶ x, z를 y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0622 $\frac{x+1}{x}-\frac{x+2}{x+1}-\frac{x+3}{x+2}+\frac{x+4}{x+3}$

$$=\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{(x+1)+1}{x+1}-\frac{(x+2)+1}{x+2}+\frac{(x+3)+1}{x+3}$$

$$=\left(1+\frac{1}{x}\right)-\left(1+\frac{1}{x+1}\right)-\left(1+\frac{1}{x+2}\right)+\left(1+\frac{1}{x+3}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+2}\right)$$

$$=\frac{x+1-x}{x(x+1)}+\frac{x+2-(x+3)}{(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{(x+2)(x+3)-x(x+1)}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{x^2+5x+6-(x^2+x)}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{\boxed{4x+6}}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$

답 ⑤

0623 $\frac{2x^2-2x+2}{x^2-x}-\frac{4x^2+2x+1}{2x^2+x}$

$$=\frac{2(x^2-x)+2}{x^2-x}-\frac{2(2x^2+x)+1}{2x^2+x}$$

$$=\left(2+\frac{2}{x^2-x}\right)-\left(2+\frac{1}{2x^2+x}\right)$$

$$=\frac{2}{x^2-x}-\frac{1}{2x^2+x}$$

$$=\frac{2}{x(x-1)}-\frac{1}{x(2x+1)}$$

$$=\frac{2(2x+1)-(x-1)}{x(2x+1)(x-1)}=\frac{3x+3}{x(2x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{3(x+1)}{x(2x+1)(x-1)}$$

답 $\frac{3(x+1)}{x(2x+1)(x-1)}$

0624 $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{x+1}{x}}}=\frac{1}{1+\frac{x}{x+1}}$

$$=\frac{1}{\frac{x+1+x}{x+1}}=\frac{1}{\frac{2x+1}{x+1}}$$

$$=\frac{x+1}{2x+1}$$

답 ④

0625 $A+B=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}=\frac{a-b+a+b}{(a+b)(a-b)}=\frac{2a}{(a+b)(a-b)}$

$$A-B=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}=\frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{-2b}{(a+b)(a-b)}$$

$$\therefore \frac{A-B}{A+B}=\frac{\frac{-2b}{(a+b)(a-b)}}{\frac{2a}{(a+b)(a-b)}}=\frac{-2b(a+b)(a-b)}{2a(a+b)(a-b)}$$

$$=-\frac{b}{a}$$

답 ①

다른풀이 $\frac{A-B}{A+B}=\frac{\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}}$의 분자와 분모에 각각 $(a+b)(a-b)$를 곱하면

$$\frac{A-B}{A+B}=\frac{\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}}=\frac{a-b-(a+b)}{a-b+a+b}$$

$$=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

0626 주어진 식의 좌변을 간단히 하면

$$\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2-\frac{1}{\frac{2x-1}{x}}}=\frac{1}{2-\frac{x}{2x-1}}$$

$$=\frac{1}{\frac{2(2x-1)-x}{2x-1}}=\frac{1}{\frac{3x-2}{2x-1}}$$

$$=\frac{2x-1}{3x-2}$$ ⋯ ❶

따라서 $\frac{2x-1}{3x-2}=\frac{ax-1}{3x+b}$이 x에 대한 항등식이므로

$a=2$, $b=-2$ ⋯ ❷

$\therefore a-b=4$ ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	60 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0627 $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}+\dfrac{6}{(x+3)(x+9)}$

$=\dfrac{1}{x+1-x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)+\dfrac{2}{x+3-(x+1)}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

$+\dfrac{6}{x+9-(x+3)}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+9}\right)$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+9}$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+9}=\dfrac{x+9-x}{x(x+9)}$

$=\dfrac{9}{x(x+9)}$

$\therefore\ k=9$ 답 9

다른풀이 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 $x=1$을 대입하면

$\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{2}{2\cdot4}+\dfrac{6}{4\cdot10}=\dfrac{k}{1\cdot10}$

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{20}=\dfrac{k}{10}\qquad\therefore\ k=9$

0628 $\dfrac{y}{x(x+y)}+\dfrac{z}{(x+y)(x+y+z)}$

$=\dfrac{y}{x+y-x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+y}\right)$

$+\dfrac{z}{x+y+z-(x+y)}\left(\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{1}{x+y+z}\right)$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{1}{x+y+z}$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+y+z}$

$=\dfrac{x+y+z-x}{x(x+y+z)}=\dfrac{y+z}{x(x+y+z)}$ 답 ⑤

다른풀이 $\dfrac{y}{x(x+y)}+\dfrac{z}{(x+y)(x+y+z)}$

$=\dfrac{y(x+y+z)+zx}{x(x+y)(x+y+z)}=\dfrac{xy+y^2+zy+zx}{x(x+y)(x+y+z)}$

$=\dfrac{y(x+y)+z(x+y)}{x(x+y)(x+y+z)}=\dfrac{y+z}{x(x+y+z)}$

0629 $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x+1-x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$

$\therefore\ f(1)+f(2)+\cdots+f(99)$

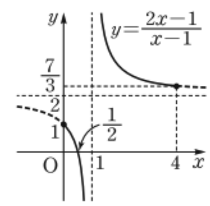
$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{99}-\dfrac{1}{100}\right)$

$=1-\dfrac{1}{100}=\dfrac{99}{100}$ 답 ②

0630 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+2$

이므로 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0\le x<1$ 또는 $1<x\le4$에서 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 치역은



$\left\{y\,\middle|\,y\le1 \text{ 또는 } y\ge\dfrac{7}{3}\right\}$

답 ①

0631 $y=\dfrac{bx+2}{a-x}=\dfrac{-b(a-x)+ab+2}{a-x}$

$=\dfrac{ab+2}{a-x}-b$ ⋯ ❶

이므로

정의역은 $\{x\,|\,x\neq a$인 실수$\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\neq -b$인 실수$\}$

따라서 $a=2,\ b=1$이므로 ⋯ ❷

$a+b=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형할 수 있다.	50 %
❷ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0632 $y=\dfrac{2x+7}{x+2}=\dfrac{2(x+2)+3}{x+2}=\dfrac{3}{x+2}+2$

따라서 $y=\dfrac{2x+7}{x+2}$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$a=-2,\ b=2,\ k=3$

$\therefore\ a+b+k=3$ 답 ①

0633 ① $y=\dfrac{x+1}{1-x}=\dfrac{(x-1)+2}{-(x-1)}=-\dfrac{2}{x-1}-1$

② $y=\dfrac{2x+3}{x-2}=\dfrac{2(x-2)+7}{x-2}=\dfrac{7}{x-2}+2$

③ $y=\dfrac{2x+5}{x+2}=\dfrac{2(x+2)+1}{x+2}=\dfrac{1}{x+2}+2$

④ $y=\dfrac{4x-6}{2x-1}=\dfrac{2(2x-1)-4}{2x-1}=-\dfrac{4}{2x-1}+2$

⑤ $y=\dfrac{2x+3}{2x-2}=\dfrac{2x-2+5}{2x-2}=\dfrac{5}{2x-2}+1$

따라서 ③ $y=\dfrac{1}{x+2}+2$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면

$y=\dfrac{1}{(x-3)+2}+2-2=\dfrac{1}{x-1}$

이므로 $y=\dfrac{1}{x-1}$의 그래프와 겹쳐진다.

답 ③

참고 두 함수 $y=\dfrac{k_1}{x-p_1}+q_1,\ y=\dfrac{k_2}{x-p_2}+q_2\ (k_1k_2\neq0)$에 대하여 $k_1=k_2$이면 두 함수의 그래프는 평행이동에 의하여 겹쳐진다.

0634 $y=\frac{bx-1}{x+a}=\frac{b(x+a)-1-ab}{x+a}=-\frac{ab+1}{x+a}+b$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$y=-\frac{ab+1}{x+2+a}+b+1$

이 그래프가 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프와 일치해야 하므로

$2+a=0,\ b+1=0,\ ab+1=3$

$\therefore a=-2,\ b=-1$

$\therefore a+b=-3$ 답 ①

다른풀이 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$y=-\frac{3}{x-2}-1=\frac{-3-(x-2)}{x-2}=\frac{-x-1}{x-2}$

이 그래프가 $y=\frac{bx-1}{x+a}$의 그래프와 일치해야 하므로

$a=-2,\ b=-1$

$\therefore a+b=-3$

0635 $y=\frac{3x+5}{x+1}=\frac{3(x+1)+2}{x+1}=\frac{2}{x+1}+3$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-1,\ y=3$이므로

$a=-1,\ b=3$

$\therefore a^2+b^2=1+9=10$ 답 10

0636 $y=\frac{bx-3}{x-a}=\frac{b(x-a)-3+ab}{x-a}$

$=\frac{ab-3}{x-a}+b$ ⋯ ❶

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=a,\ y=b$이므로

$a=3,\ b=-5$ ⋯ ❷

$\therefore ab=-15$ ⋯ ❸

답 -15

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수를 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형할 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0637 점근선의 방정식이 $x=-2,\ y=3$이므로 주어진 함수의 식을

$y=\frac{k}{x+2}+3\ (k\neq 0)$ ⋯⋯ ㉠

으로 놓을 수 있다. ㉠의 그래프가 점 $(3, 1)$을 지나므로

$1=\frac{k}{3+2}+3,\quad \frac{k}{5}=-2\quad \therefore k=-10$

$k=-10$을 ㉠에 대입하면

$y=\frac{-10}{x+2}+3=\frac{-10+3(x+2)}{x+2}=\frac{3x-4}{x+2}$

따라서 $a=3,\ b=-4,\ c=2$이므로

$a+b+c=1$ 답 ④

다른풀이 $y=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{a(x+c)+b-ac}{x+c}$

$=\frac{b-ac}{x+c}+a$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-c,\ y=a$

$\therefore c=2,\ a=3$ ⋯⋯ ㉠

또 $y=\frac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 점 $(3, 1)$을 지나므로

$1=\frac{3a+b}{3+c}$ ⋯⋯ ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$1=\frac{9+b}{5}\qquad \therefore b=-4$

$\therefore a+b+c=1$

0638 $y=\frac{3x-2}{x+1}=\frac{3(x+1)-5}{x+1}=-\frac{5}{x+1}+3$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-1,\ y=3$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점근선의 교점 $(-1, 3)$에 대하여 대칭이므로

$a=-1,\ b=3$

$\therefore a+b=2$ 답 2

0639 $y=\frac{5x-3}{x-2}=\frac{5(x-2)+7}{x-2}=\frac{7}{x-2}+5$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=2,\ y=5$

이때 주어진 함수의 그래프가 직선 $y=x+k$에 대하여 대칭이므로 직선 $y=x+k$는 점근선의 교점 $(2, 5)$를 지난다. 즉

$5=2+k\qquad \therefore k=3$ 답 3

0640 주어진 함수의 그래프가 점 $(2, 1)$에 대하여 대칭이므로 점근선의 방정식은

$x=2,\ y=1$ ⋯ ❶

주어진 함수의 식을

$y=\frac{k}{x-2}+1\ (k\neq 0)$ ⋯⋯ ㉠

로 놓으면 ㉠의 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로

$3=\frac{k}{-2}+1,\qquad -\frac{k}{2}=2$

$\therefore k=-4$

$k=-4$를 ㉠에 대입하면

$y=\frac{-4}{x-2}+1=\frac{-4+(x-2)}{x-2}=\frac{x-6}{x-2}$ ⋯ ❷

따라서 $a=1,\ b=-3,\ c=-2$이므로

$a+b+c=-4$ ⋯ ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ 점근선의 방정식을 알 수 있다.	20 %
❷ 함수의 식을 구할 수 있다.	60 %
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

17 유리식과 유리함수

0641 주어진 함수의 그래프가 두 직선 $y=x-1$, $y=-x-5$에 대하여 대칭이므로 두 직선의 교점은 주어진 함수의 그래프의 점근선의 교점과 같다.
$x-1=-x-5$에서 $\quad 2x=-4 \quad \therefore x=-2$
$x=-2$를 $y=x-1$에 대입하면 $\quad y=-3$
따라서 점근선의 교점의 좌표가 $(-2,\ -3)$이므로 점근선의 방정식은

$x=-2$, $y=-3$

$y=\dfrac{1}{x-a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=b$이므로

$a=-2$, $b=-3$

$\therefore a+b=-5$

답 ①

0642 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=1$이므로 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x+2}+1\ (k\neq0)$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.
㉠의 그래프가 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{k}{2+2}+1 \quad \therefore k=-4$

$k=-4$를 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{-4}{x+2}+1=\dfrac{-4+(x+2)}{x+2}=\dfrac{x-2}{x+2}$

따라서 $a=1$, $b=-2$, $c=2$이므로

$a+b+c=1$

답 1

0643 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=3$이므로

$a=-2$, $b=3$

따라서 $y=\dfrac{k}{x-2}+3$의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{k}{1-2}+3 \quad \therefore k=3$

$\therefore abk=-18$

답 ①

0644 함수 $y=f(x)$의 그래프의 한 점근선의 방정식이 $x=-2$이므로

$f(x)=\dfrac{k}{x+2}+m\ (k\neq0)$

으로 놓을 수 있다.
$y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(-4,\ 0)$, $(0,\ 2)$를 지나므로

$0=\dfrac{k}{-4+2}+m$에서 $\quad k-2m=0$ …… ㉠

$2=\dfrac{k}{2}+m$에서 $\quad k+2m=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad k=2$, $m=1$

$\therefore f(x)=\dfrac{2}{x+2}+1=\dfrac{2+(x+2)}{x+2}=\dfrac{x+4}{x+2}$

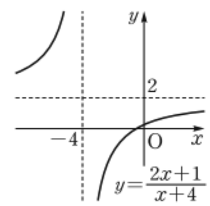
답 $f(x)=\dfrac{x+4}{x+2}$

0645 ① $y=\dfrac{2x+1}{x+4}$에 $x=0$을 대입하면 $\quad y=\dfrac{1}{4}$

따라서 그래프의 y절편은 $\dfrac{1}{4}$이다.

②, ③ $y=\dfrac{2x+1}{x+4}=\dfrac{2(x+4)-7}{x+4}=-\dfrac{7}{x+4}+2$

이므로 $y=\dfrac{2x+1}{x+4}$의 그래프는 $y=-\dfrac{7}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.



④ $y=\dfrac{2x+1}{x+4}$의 그래프의 점근선의 방정식은

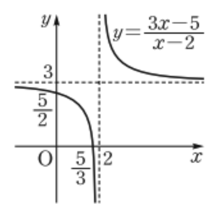
$x=-4$, $y=2$

이므로 그래프는 점 $(-4,\ 2)$에 대하여 대칭이다.
⑤ $x+4=0$에서 $\quad x=-4$
따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq-4$인 실수$\}$이다.

답 ②

0646 $y=\dfrac{3x-5}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}+3$

이므로 $y=\dfrac{3x-5}{x-2}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



답 제3사분면

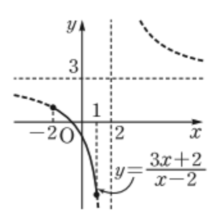
0647 $y=\dfrac{2x-1}{x+2}=\dfrac{2(x+2)-5}{x+2}=-\dfrac{5}{x+2}+2$

ㄴ. 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=2$이므로 그래프는 점 $(-2,\ 2)$에 대하여 대칭이다.
ㄷ. $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$의 그래프는 $y=-\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0648 $y=\dfrac{3x+2}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+8}{x-2}=\dfrac{8}{x-2}+3$

이므로 $y=\dfrac{3x+2}{x-2}$의 그래프는 $y=\dfrac{8}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $-2\le x\le1$에서 $y=\dfrac{3x+2}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-2$일 때 최댓값 $\dfrac{-6+2}{-2-2}=1$,

$x=1$일 때 최솟값 $\dfrac{3+2}{1-2}=-5$

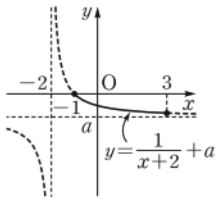
를 갖는다.

즉 $a=1$, $b=-5$이므로

$a+b=-4$ 답 ②

0649 $y=\dfrac{1}{x+2}+a$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x\le 3$에서 $y=\dfrac{1}{x+2}+a$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=3$일 때 최솟값 $\dfrac{1}{5}+a$

를 갖는다.

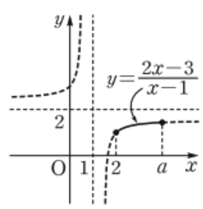
즉 $\dfrac{1}{5}+a=-\dfrac{4}{5}$이므로

$a=-1$ 답 -1

0650 $y=\dfrac{2x-3}{x-1}=\dfrac{2(x-1)-1}{x-1}=-\dfrac{1}{x-1}+2$ ⋯ ❶

이므로 $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2\le x\le a$에서 $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=a$일 때 최댓값 $\dfrac{2a-3}{a-1}$,

$x=2$일 때 최솟값 $\dfrac{4-3}{2-1}=1$

을 갖는다.

즉 $\dfrac{2a-3}{a-1}=\dfrac{5}{3}$, $m=1$이므로 $\dfrac{2a-3}{a-1}=\dfrac{5}{3}$에서

$6a-9=5a-5$ $\therefore a=4$ ⋯ ❷

$\therefore am=4$ ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형할 수 있다.	30 %
❷ a, m의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ am의 값을 구할 수 있다.	10 %

0651 $y=\dfrac{x+2}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 한 점에서 만나므로 $\dfrac{x+2}{x+1}=-x+k$에서

$x+2=(x+1)(-x+k)$

$\therefore x^2+(2-k)x+2-k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2-k)^2-4(2-k)=0$

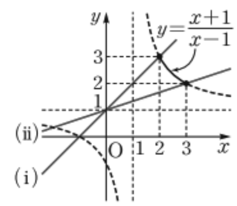
$k^2=4$ $\therefore k=-2$ 또는 $k=2$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $-2+2=0$ 답 0

0652 $y=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+1$

이므로 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2\le x\le 3$에서 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ⋯ ❶



이때 직선 $y=kx+1$은 k의 값에 관계없이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=kx+1$이 만나려면

(i) 직선 $y=kx+1$이 점 $(2,\ 3)$을 지날 때,

$3=2k+1$ $\therefore k=1$

(ii) 직선 $y=kx+1$이 점 $(3,\ 2)$를 지날 때,

$2=3k+1$ $\therefore k=\dfrac{1}{3}$

(i), (ii)에서 $\dfrac{1}{3}\le k\le 1$ ⋯ ❷

답 $\dfrac{1}{3}\le k\le 1$

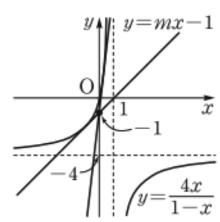
채점 기준	비율
❶ $y=\dfrac{x+1}{x-1}$의 그래프를 그릴 수 있다.	40 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %

0653 $y=\dfrac{4x}{1-x}=-\dfrac{4(x-1)+4}{x-1}$

$=-\dfrac{4}{x-1}-4$

이므로 $y=\dfrac{4x}{1-x}$의 그래프는 $y=-\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

직선 $y=mx-1$은 m의 값에 관계없이 점 $(0,\ -1)$을 지나므로 $y=\dfrac{4x}{1-x}$의 그래프와 직선 $y=mx-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $y=\dfrac{4x}{1-x}$의 그래프와 직선 $y=mx-1$이 한 점에서 만날 때의 m의 값은 $\dfrac{4x}{1-x}=mx-1$에서

$4x=(1-x)(mx-1)$

$\therefore mx^2+(3-m)x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(3-m)^2-4m=0$

$m^2-10m+9=0$, $(m-1)(m-9)=0$

$\therefore m=1$ 또는 $m=9$

따라서 구하는 m의 값의 범위는

$1<m<9$ 답 ③

0654 $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$에서

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

$=\dfrac{\dfrac{x-1}{x}-1}{\dfrac{x-1}{x}}=\dfrac{\dfrac{x-1-x}{x}}{\dfrac{x-1}{x}}$

$=-\dfrac{1}{x-1}$

$$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f\left(-\frac{1}{x-1}\right)$$
$$=\frac{-\frac{1}{x-1}-1}{-\frac{1}{x-1}}=\frac{\frac{1}{x-1}+1}{\frac{1}{x-1}}=\frac{\frac{1+(x-1)}{x-1}}{\frac{1}{x-1}}$$
$$=x$$

따라서 함수 $f^{3n}(x)$ (n은 자연수)는 항등함수이므로

$$f^{2018}(x)=f^{3\cdot672+2}(x)=f^2(x)=-\frac{1}{x-1}$$
$$\therefore f^{2018}(2)=-1$$

답 ②

다른풀이 $f(x)=\frac{x-1}{x}$에서

$$f^1(2)=f(2)=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$$
$$f^2(2)=f(f^1(2))=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}}=-1$$
$$f^3(2)=f(f^2(2))=f(-1)=\frac{-1-1}{-1}=2$$
$$f^4(2)=f(f^3(2))=f(2)=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$$
$$\vdots$$

이므로 $f^n(2)$의 값은 $\frac{1}{2}$, -1, 2가 이 순서대로 반복된다.

이때 $2018=3\cdot672+2$이므로

$$f^{2018}(2)=f^2(2)=-1$$

0655 $f(-2)=\frac{-2-1}{-2}=\frac{3}{2}$이므로

$$(g\circ f)(-2)=g(f(-2))=g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+1}=\frac{3}{5}$$

답 $\frac{3}{5}$

0656 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{x}{x-1}\right)$

$$=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-(x-1)}{x-1}}$$
$$=x$$

따라서 $(f\circ f)(k)=k$이므로 $k=10$

답 ⑤

다른풀이 $(f\circ f)(k)=f(f(k))=\frac{f(k)}{f(k)-1}=10$에서

$$f(k)=10f(k)-10,\qquad 9f(k)=10$$
$$\therefore f(k)=\frac{10}{9}$$

즉 $\frac{k}{k-1}=\frac{10}{9}$이므로 $9k=10k-10$

$$\therefore k=10$$

0657 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=1$이므로

$$f(x)=\frac{k}{x+1}+1\ (k\neq0) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓을 수 있다.

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, 0)$을 지나므로

$$0=k+1 \qquad \therefore k=-1$$

$k=-1$을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=\frac{-1}{x+1}+1=\frac{-1+x+1}{x+1}=\frac{x}{x+1} \qquad \cdots ❶$$

$f(x)=\frac{x}{x+1}$에서

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{x}{x+1}\right)$$
$$=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x+x+1}{x+1}}=\frac{x}{2x+1}$$
$$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f\left(\frac{x}{2x+1}\right)$$
$$=\frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1}=\frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x+2x+1}{2x+1}}=\frac{x}{3x+1}$$
$$\vdots$$

따라서 $f^{10}(x)=\frac{x}{10x+1}$이므로 $\cdots$ ❷

$$f^{10}(1)=\frac{1}{10+1}=\frac{1}{11} \qquad \cdots ❸$$

답 $\frac{1}{11}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f^{10}(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $f^{10}(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0658 $y=\frac{-2x+1}{x+a}$로 놓으면

$$y(x+a)=-2x+1,\qquad (y+2)x=-ay+1$$
$$\therefore x=\frac{-ay+1}{y+2}$$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{-ax+1}{x+2}$

$$\therefore f^{-1}(x)=\frac{-ax+1}{x+2}$$

따라서 $\frac{-ax+1}{x+2}=\frac{3x+b}{cx+2}$이므로

$$a=-3,\ b=1,\ c=1$$
$$\therefore a+b+c=-1$$

답 -1

0659 $f(x)=\frac{ax+1}{3x-1}$에서 $y=\frac{ax+1}{3x-1}$로 놓으면

$$y(3x-1)=ax+1,\qquad (3y-a)x=y+1$$
$$\therefore x=\frac{y+1}{3y-a}$$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{x+1}{3x-a}$

$$\therefore f^{-1}(x)=\frac{x+1}{3x-a}$$

따라서 $f=f^{-1}$에서 $\frac{ax+1}{3x-1}=\frac{x+1}{3x-a}$이므로

$$a=1$$

답 ④

다른풀이 $f=f^{-1}$이므로 $(f\circ f)(x)=x$

$$(f\circ f)(x)=f\left(\frac{ax+1}{3x-1}\right)=\frac{a\cdot\frac{ax+1}{3x-1}+1}{3\cdot\frac{ax+1}{3x-1}-1}$$
$$=\frac{a(ax+1)+3x-1}{3(ax+1)-(3x-1)}$$
$$=\frac{(a^2+3)x+a-1}{3(a-1)x+4}$$

따라서 $\frac{(a^2+3)x+a-1}{3(a-1)x+4}=x$이므로

$(a^2+3)x+a-1=3(a-1)x^2+4x$

$a-1=0,\ a^2+3=4$

$\therefore a=1$

0660 $f(x)=\frac{ax+b}{x+2}$의 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나므로

$2=\frac{a+b}{3}$ $\quad\therefore a+b=6$ ······ ㉠

또 $f(x)=\frac{ax+b}{x+2}$의 역함수의 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나면

$f(x)=\frac{ax+b}{x+2}$의 그래프는 점 $(2, 1)$을 지나므로

$1=\frac{2a+b}{4}$ $\quad\therefore 2a+b=4$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=8$

$\therefore ab=-16$

답 -16

라쎈 특강 함수와 그 역함수의 그래프 사이의 관계

$y=f(x)$의 그래프가 점 (a, b)를 지난다.
$\Longleftrightarrow y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 (b, a)를 지난다.

0661 $y=\frac{1+x}{2-x}$의 그래프와 $y=\frac{ax+b}{x+1}$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수는 서로 역함수 관계이다. ··· ❶

$y=\frac{1+x}{2-x}$에서 $y(2-x)=1+x$

$(y+1)x=2y-1$ $\quad\therefore x=\frac{2y-1}{y+1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{2x-1}{x+1}$

따라서 $\frac{ax+b}{x+1}=\frac{2x-1}{x+1}$이므로

$a=2,\ b=-1$ ··· ❷

$\therefore a-b=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 두 함수가 역함수 관계임을 알 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0662 $f\circ f^{-1}=I$ (I는 항등함수)이므로

$(f\circ f^{-1}\circ f^{-1})(7)=f^{-1}(7)$

$f^{-1}(7)=k$라 하면 $f(k)=7$이므로

$\frac{4k+3}{3k-2}=7,\quad 4k+3=21k-14$

$17k=17\quad\therefore k=1$

$\therefore (f\circ f^{-1}\circ f^{-1})(7)=f^{-1}(7)=1$

답 1

0663 $(f\circ g^{-1})^{-1}(2)=(g\circ f^{-1})(2)=g(f^{-1}(2))$

$f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2$이므로

$\frac{k}{k-1}=2,\quad k=2k-2\quad\therefore k=2$

$\therefore (f\circ g^{-1})^{-1}(2)=g(f^{-1}(2))=g(2)$

$=\frac{4-3}{2+1}=\frac{1}{3}$

답 ④

0664 전략 주어진 식을 통분하여 계산한다.

풀이 $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}=\frac{a(b+1)+b(a+1)}{(a+1)(b+1)}$

$=\frac{2ab+a+b}{ab+a+b+1}$

$=\frac{a+b+2}{a+b+2}=1$

답 1

다른풀이 $ab=1$에서 $a=\frac{1}{b}$

$\therefore \frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}=\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{b}+1}+\frac{b}{b+1}$

$=\frac{1}{b+1}+\frac{b}{b+1}=\frac{b+1}{b+1}=1$

0665 전략 y를 x에 대한 식으로 나타낸 후 주어진 식에 대입한다.

풀이 $\frac{x+y}{2x+y}=\frac{3}{4}$에서 $4x+4y=6x+3y$

$\therefore y=2x$ ··· ❶

$y=2x$를 주어진 식에 대입하면

$\frac{xy}{x^2+xy}=\frac{2x^2}{x^2+2x^2}=\frac{2x^2}{3x^2}=\frac{2}{3}$ ··· ❷

답 $\frac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ x, y 사이의 관계를 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $\frac{xy}{x^2+xy}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0666 전략 $y=\frac{k}{x}$의 그래프의 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. $k<0$이면 $y=\frac{k}{x}$의 그래프는 제2사분면, 제4사분면을 지난다.

ㄴ. 점근선이 x축, y축이므로 점근선의 방정식은 $x=0,\ y=0$이다.

ㄷ. $|k|$가 커질수록 그래프는 원점으로부터 멀어진다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

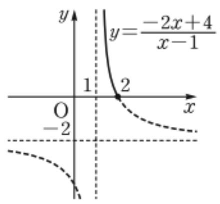
0667 전략 $y=\frac{-2x+4}{x-1}$를 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=\dfrac{-2x+4}{x-1}=\dfrac{-2(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}-2$

이므로 $y=\dfrac{-2x+4}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $1<x\le 2$에서 $y=\dfrac{-2x+4}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 치역은

$\{y \mid y\ge 0\}$



답 ④

0668 전략 $y=\dfrac{3x-2}{2-x}$를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한다.

풀이 $y=\dfrac{3x-2}{2-x}=-\dfrac{3x-2}{x-2}$

$=-\dfrac{3(x-2)+4}{x-2}$

$=-\dfrac{4}{x-2}-3$

이므로 점근선의 방정식은 $x=2,\ y=-3$

$\therefore\ a=-3$

답 ①

0669 전략 $f^{-1}(a)=b$이면 $f(b)=a$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\dfrac{4x+a}{bx-2}$의 그래프가 점 $\left(3,\ \dfrac{16}{7}\right)$을 지나므로

$\dfrac{12+a}{3b-2}=\dfrac{16}{7}$, $\quad 7a+84=48b-32$

$\therefore\ 7a-48b=-116$ …… ㉠

또 $f^{-1}(3)=2$에서 $f(2)=3$이므로

$\dfrac{8+a}{2b-2}=3$, $\quad 8+a=6b-6$

$\therefore\ a-6b=-14$ …… ㉡ ⋯ ❶

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=3$ ⋯ ❷

$\therefore\ a+b=7$ ⋯ ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ a, b에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	60 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0670 전략 유리식을 약분하여 식의 값이 정수가 되는 조건을 알아낸다.

풀이 $\dfrac{3m+9}{m^2-9}=\dfrac{3(m+3)}{(m+3)(m-3)}=\dfrac{3}{m-3}$

위의 식의 값이 정수가 되려면 $m-3$의 값은 $-3,\ -1,\ 1,\ 3$이어야 하므로 m의 값은

$0,\ 2,\ 4,\ 6$

따라서 모든 m의 값의 합은

$2+4+6=12$

답 12

0671 전략 두 분수식을 분자를 분모로 나누어 다항식과 분수식의 합으로 변형한다.

풀이 $\dfrac{3x-14}{x-5}-\dfrac{3x+13}{x+4}=\dfrac{3(x-5)+1}{x-5}-\dfrac{3(x+4)+1}{x+4}$

$=3+\dfrac{1}{x-5}-\left(3+\dfrac{1}{x+4}\right)$

$=\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{1}{x+4}$

$=\dfrac{9}{(x+4)(x-5)}$

$\therefore\ k=9$

답 ⑤

다른 풀이 $\dfrac{3x-14}{x-5}-\dfrac{3x+13}{x+4}$

$=\dfrac{(3x-14)(x+4)-(3x+13)(x-5)}{(x+4)(x-5)}$

$=\dfrac{(3x^2-2x-56)-(3x^2-2x-65)}{(x+4)(x-5)}$

$=\dfrac{9}{(x+4)(x-5)}$

$\therefore\ k=9$

0672 전략 $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$임을 이용한다.

풀이 $\dfrac{2}{x(x+2)}+\dfrac{3}{(x+2)(x+5)}+\dfrac{4}{(x+5)(x+9)}$

$=\dfrac{2}{x+2-x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}\right)+\dfrac{3}{x+5-(x+2)}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+5}\right)$

$+\dfrac{4}{x+9-(x+5)}\left(\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{x+9}\right)$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{x+9}$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+9}=\dfrac{9}{x(x+9)}$

따라서 $a=9,\ b=9$이므로

$a-b=0$

답 ①

0673 전략 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프가 제 1 사분면과 제 3 사분면을 지나면 $k>0$이고, 제 2 사분면과 제 4 사분면을 지나면 $k<0$이다.

풀이 함수 $y=\dfrac{c}{x}$의 그래프는 제 1 사분면을 지나고, 함수 $y=\dfrac{a}{x}$, $y=\dfrac{b}{x}$의 그래프는 제 2 사분면을 지나므로

$c>0,\ a<0,\ b<0$

이때 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프가 $y=\dfrac{b}{x}$의 그래프보다 원점에서 멀리 떨어져 있으므로 $\quad |a|>|b|$

$\therefore\ a<b\ (\because\ a<0,\ b<0)$

$\therefore\ a<b<c$

답 ①

0674 전략 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 평행이동한 그래프의 식은 $y=-\dfrac{2}{x-p}+q$ 꼴이다.

풀이 ① $y=-\dfrac{x}{x+1}=-\dfrac{(x+1)-1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}-1$

② $y=\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-2}{x+1}=-\dfrac{2}{x+1}+2$

③ $y=\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{(x-1)-1}{x-1}=-\dfrac{1}{x-1}+1$

④ $y=\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{(x+1)+2}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}+1$

⑤ $y=\dfrac{2-x}{x-1}=\dfrac{-(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}-1$

따라서 ② $y=-\dfrac{2}{x+1}+2$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면

$$y=-\frac{2}{(x-1)+1}+2-2=-\frac{2}{x}$$

이므로 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프와 겹쳐진다. 답 ②

0675 전략 $y=\dfrac{3x-2}{x+a}$를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한다.

풀이 $y=\dfrac{3x-2}{x+a}=\dfrac{3(x+a)-3a-2}{x+a}=\dfrac{-3a-2}{x+a}+3$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a$, $y=3$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로

$a+b=5$ 답 5

0676 전략 먼저 주어진 유리함수의 그래프의 점근선의 방정식을 구한다.

풀이 함수 $y=\dfrac{3}{x-5}+k$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=5$, $y=k$

이때 함수 $y=\dfrac{3}{x-5}+k$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점근선의 교점 $(5, k)$는 직선 $y=x$ 위의 점이어야 한다.

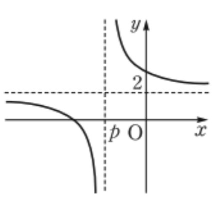
$\therefore k=5$ 답 ⑤

0677 전략 $p\le0$, $p>0$일 때로 나누어 함수 $y=\dfrac{5}{x-p}+2$의 그래프를 그려 본다.

풀이 함수 $y=\dfrac{5}{x-p}+2$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=p$, $y=2$이다.

(i) $p\le0$일 때,

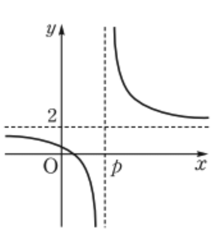
함수 $y=\dfrac{5}{x-p}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 p의 값에 관계없이 항상 제3사분면을 지난다.



(ii) $p>0$일 때,

함수 $y=\dfrac{5}{x-p}+2$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 크거나 같아야 한다. 즉

$\dfrac{5}{-p}+2\ge0 \qquad \therefore p\ge\dfrac{5}{2}$



(i), (ii)에서 $\quad p\ge\dfrac{5}{2}$

따라서 정수 p의 최솟값은 3이다. 답 ①

0678 전략 주어진 조건을 이용하여 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식을 알아낸다.

풀이 조건 (가)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=0$, $y=-1$

이므로 $f(x)=\dfrac{k}{x}-1$ $(k\ne0)$로 놓을 수 있다.

조건 (나)에 의하여 $f(-1)=4$이므로

$4=-k-1 \qquad \therefore k=-5$

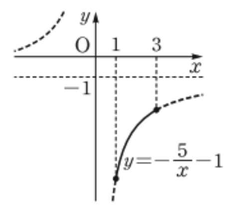
$\therefore f(x)=-\dfrac{5}{x}-1$ ··· ❶

따라서 $1\le x\le3$에서 $y=-\dfrac{5}{x}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는

$x=3$일 때 최댓값 $-\dfrac{5}{3}-1=-\dfrac{8}{3}$,

$x=1$일 때 최솟값 $-5-1=-6$

을 갖는다. ··· ❷



따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 곱은

$-\dfrac{8}{3}\cdot(-6)=16$ ··· ❸

답 16

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $1\le x\le3$에서 함수 $y=f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 최댓값과 최솟값의 곱을 구할 수 있다.	10 %

0679 전략 $(f\circ f)(x)$를 직접 구한다.

풀이 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

$$=\frac{\dfrac{x-1}{x+1}-1}{\dfrac{x-1}{x+1}+1}=\frac{x-1-(x+1)}{x-1+x+1}$$

$$=-\frac{1}{x}$$

$(f\circ f)(k)=-k-1$에서 $\qquad -\dfrac{1}{k}=-k-1$

$\therefore k^2+k-1=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 -1이다. 답 -1

0680 전략 $f(-1)$의 값을 구한 후 $(g^{-1}\circ f)(-1)=g^{-1}(f(-1))$임을 이용한다.

풀이 $f(-1)=\dfrac{-3+1}{-2+3}=-2$이므로

$(g^{-1}\circ f)(-1)=g^{-1}(f(-1))=g^{-1}(-2)$

$g^{-1}(-2)=k$라 하면 $g(k)=-2$이므로

$\dfrac{1}{k}=-2 \qquad \therefore k=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore (g^{-1}\circ f)(-1)=g^{-1}(-2)=-\dfrac{1}{2}$ 답 $-\dfrac{1}{2}$

0681 전략 $a+b-c=0$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 $a+b-c=0$에서

$a+b=c,\ b-c=-a,\ c-a=b$

$$\therefore \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right)\left(1-\frac{a}{c}\right)=\frac{a+b}{a}\cdot\frac{b-c}{b}\cdot\frac{c-a}{c}$$

$$=\frac{c}{a}\cdot\frac{-a}{b}\cdot\frac{b}{c}$$

$$=-1$$

답 ②

0682 전략 두 직선의 교점을 이용하여 점근선의 방정식을 구한다.

풀이 두 식 $y=-x+3$, $y=x-1$을 연립하여 풀면

$x=2,\ y=1$

따라서 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 교점의 좌표는 $(2,\ 1)$이다. ⋯ ❶

즉 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=1$이므로

$$f(x)=\frac{k}{x-2}+1\ (k\neq 0) \quad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓을 수 있다. 이때 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$-k+1=0 \qquad \therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=\frac{1}{x-2}+1=\frac{x-1}{x-2}$$ ⋯ ❷

따라서 $a=-2$, $b=-1$이므로

$a-b=-2-(-1)=-1$ ⋯ ❸

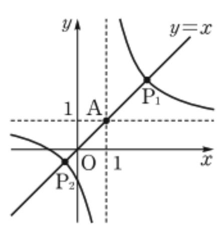
답 -1

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0683 전략 유리함수의 그래프의 점근선과 점 A 사이의 관계를 이용한다.

풀이 $y=\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{x-1}+1$에서 점 A는 이 그래프의 두 점근선의 교점이다.

원의 반지름인 $\overline{AP}$의 길이가 최소일 때 원의 넓이가 최소이고, 이때의 점 P는 오른쪽 그림과 같이 P_1, P_2 두 개가 존재한다.



한편 $y=\frac{x+1}{x-1}$의 그래프는 점 A를 지나고 기울기가 1인 직선, 즉 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 점 P_1, P_2는

$y=\frac{x+1}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점이다.

$\frac{x+1}{x-1}=x$에서 $\qquad x^2-x=x+1$

$x^2-2x-1=0 \qquad \therefore x=1\pm\sqrt{2}$

즉 두 점 P_1, P_2의 좌표는 각각 $(1+\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2})$, $(1-\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2})$이므로

$$\overline{AP_1}=\sqrt{(1+\sqrt{2}-1)^2+(1+\sqrt{2}-1)^2}=2,$$

$$\overline{AP_2}=\sqrt{(1-\sqrt{2}-1)^2+(1-\sqrt{2}-1)^2}=2$$

따라서 구하는 원의 넓이의 최솟값은

$\pi\cdot 2^2=4\pi$

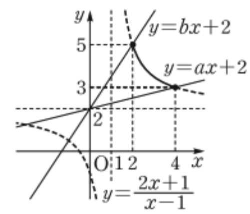
답 ④

0684 전략 $y=\frac{2x+1}{x-1}$, $y=ax+2$, $y=bx+2$의 그래프를 이용한다.

풀이 $y=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}+2$

이므로 $y=\frac{2x+1}{x-1}$의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2\le x\le 4$에서 $y=\frac{2x+1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ⋯ ❶



이때 두 직선 $y=ax+2$, $y=bx+2$는 a, b의 값에 관계없이 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

(i) 직선 $y=ax+2$가 점 $(4,\ 3)$을 지날 때,

$3=4a+2$에서 $\qquad a=\frac{1}{4}$

따라서 $ax+2\le\frac{2x+1}{x-1}$이려면 $\qquad a\le\frac{1}{4}$ ⋯ ❷

(ii) 직선 $y=bx+2$가 점 $(2,\ 5)$를 지날 때,

$5=2b+2$에서 $\qquad b=\frac{3}{2}$

따라서 $\frac{2x+1}{x-1}\le bx+2$이려면 $\qquad b\ge\frac{3}{2}$ ⋯ ❸

(i), (ii)에서 $a-b$의 최댓값은 $\qquad \frac{1}{4}-\frac{3}{2}=-\frac{5}{4}$ ⋯ ❹

답 $-\frac{5}{4}$

채점 기준	비율
❶ $y=\frac{2x+1}{x-1}$의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ b의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ $a-b$의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

0685 전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최솟값을 구한다.

풀이 점 $P(a,\ b)$가 제1사분면에서 $y=\frac{3}{x-1}+2$의 그래프 위에 있으므로 $\qquad a>1,\ b>2$

또 $b=\frac{3}{a-1}+2$에서 $\qquad b-2=\frac{3}{a-1} \quad \cdots\cdots ㉠$

이때 $a>1$, $b>2$에서 $a-1>0$, $b-2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(a-1)+(b-2)\ge 2\sqrt{(a-1)(b-2)}$$

$$=2\sqrt{(a-1)\cdot\frac{3}{a-1}}\ (\because ㉠)$$

$$=2\sqrt{3}$$

(단, 등호는 $a=1+\sqrt{3}$, $b=2+\sqrt{3}$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{3}$이다.

답 ③

라쎈 특강 산술평균과 기하평균의 관계

$A>0$, $B>0$일 때

$A+B\ge 2\sqrt{AB}$ (단, 등호는 $A=B$일 때 성립)

18 무리식과 무리함수

Ⅵ. 함수

0686 $2-2x\geq 0$이므로 $\quad x\leq 1$

답 $x\leq 1$

0687 $x-2\geq 0$, $x+2\geq 0$이므로

$x\geq 2$, $x\geq -2$

$\therefore x\geq 2$

답 $x\geq 2$

0688 $x-1>0$이므로 $\quad x>1$

답 $x>1$

0689 $x>0$, $2x-1>0$이므로

$x>0$, $x>\dfrac{1}{2}\quad \therefore x>\dfrac{1}{2}$

답 $x>\dfrac{1}{2}$

0690 $(\sqrt{x+y}+\sqrt{x})(\sqrt{x+y}-\sqrt{x})$

$=(\sqrt{x+y})^2-(\sqrt{x})^2$

$=x+y-x=y$

답 y

0691 $(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})$

$=(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{x-2})^2$

$=(x+2)-(x-2)=4$

답 4

0692 $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}$

답 $\dfrac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}$

0693 $\dfrac{1}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}{(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})}$

$=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}{a-(a-1)}=\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$

답 $\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$

0694 $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$

$=\dfrac{x+1-2\sqrt{x(x+1)}+x}{x+1-x}$

$=2x+1-2\sqrt{x(x+1)}$

답 $2x+1-2\sqrt{x(x+1)}$

0695 $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$

$=\dfrac{2\sqrt{a}}{a-b}$

답 $\dfrac{2\sqrt{a}}{a-b}$

0696 $\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{(\sqrt{x}+2)^2-(\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$

$=\dfrac{x+4\sqrt{x}+4-(x-4\sqrt{x}+4)}{x-4}$

$=\dfrac{8\sqrt{x}}{x-4}$

답 $\dfrac{8\sqrt{x}}{x-4}$

0697 답 ㄱ, ㄷ

0698 $x+2\geq 0$이므로 $\quad x\geq -2$

따라서 구하는 정의역은 $\quad \{x\mid x\geq -2\}$

답 $\{x\mid x\geq -2\}$

0699 $3-x\geq 0$이므로 $\quad x\leq 3$

따라서 구하는 정의역은 $\quad \{x\mid x\leq 3\}$

답 $\{x\mid x\leq 3\}$

0700 $5x-4\geq 0$이므로 $\quad x\geq \dfrac{4}{5}$

따라서 구하는 정의역은 $\quad \left\{x\,\middle|\,x\geq \dfrac{4}{5}\right\}$

답 $\left\{x\,\middle|\,x\geq \dfrac{4}{5}\right\}$

0701 $4-2x\geq 0$이므로 $\quad x\leq 2$

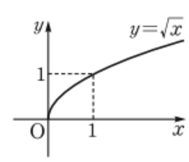
따라서 구하는 정의역은 $\quad \{x\mid x\leq 2\}$

답 $\{x\mid x\leq 2\}$

0702 $y=\sqrt{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\quad \{x\mid x\geq 0\}$,

치역은 $\quad \{y\mid y\geq 0\}$

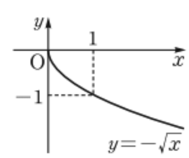


답 풀이 참조

0703 $y=-\sqrt{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\quad \{x\mid x\geq 0\}$,

치역은 $\quad \{y\mid y\leq 0\}$

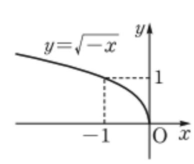


답 풀이 참조

0704 $y=\sqrt{-x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\quad \{x\mid x\leq 0\}$,

치역은 $\quad \{y\mid y\geq 0\}$

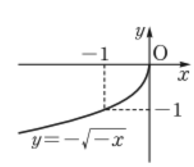


답 풀이 참조

0705 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\quad \{x\mid x\leq 0\}$,

치역은 $\quad \{y\mid y\leq 0\}$



답 풀이 참조

18 무리식과 무리함수

0706 y 대신 $-y$를 대입하면

$-y=\sqrt{3x}$ $\quad\therefore y=-\sqrt{3x}$

답 $y=-\sqrt{3x}$

0707 x 대신 $-x$를 대입하면

$y=\sqrt{3\cdot(-x)}$ $\quad\therefore y=\sqrt{-3x}$

답 $y=\sqrt{-3x}$

0708 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면

$-y=\sqrt{3\cdot(-x)}$ $\quad\therefore y=-\sqrt{-3x}$

답 $y=-\sqrt{-3x}$

0709 $y=\sqrt{3x-9}+1=\sqrt{3(x-3)}+1$

따라서 함수 $y=\sqrt{3x-9}+1$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\boxed{3}$만큼, y축의 방향으로 $\boxed{1}$만큼 평행이동한 것이다.

답 3, 1

0710 $y=\sqrt{6-2x}-2=\sqrt{-2(x-3)}-2$

따라서 함수 $y=\sqrt{6-2x}-2$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{\boxed{-2}x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\boxed{3}$만큼, y축의 방향으로 $\boxed{-2}$만큼 평행이동한 것이다.

답 -2, 3, -2

0711 답 $y=\sqrt{x-1}+2$

0712 $y=\sqrt{-2(x-3)}-4=\sqrt{-2x+6}-4$

답 $y=\sqrt{-2x+6}-4$

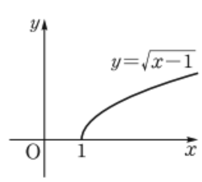
0713 $y=-\sqrt{3\{x-(-2)\}}+3=-\sqrt{3x+6}+3$

답 $y=-\sqrt{3x+6}+3$

0714 $y=-\sqrt{-\{x-(-5)\}}-1=-\sqrt{-x-5}-1$

답 $y=-\sqrt{-x-5}-1$

0715 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

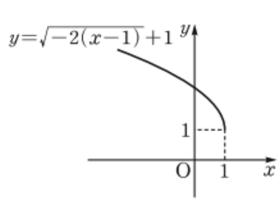


정의역은 $\{x|x\geq1\}$,

치역은 $\{y|y\geq0\}$

답 풀이 참조

0716 $y=\sqrt{-2(x-1)}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

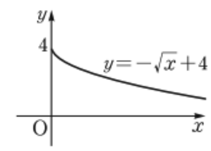


정의역은 $\{x|x\leq1\}$,

치역은 $\{y|y\geq1\}$

답 풀이 참조

0717 $y=-\sqrt{x}+4$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

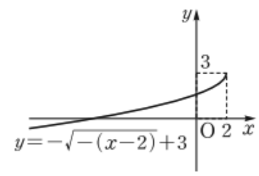


정의역은 $\{x|x\geq0\}$,

치역은 $\{y|y\leq4\}$

답 풀이 참조

0718 $y=-\sqrt{-(x-2)}+3$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고



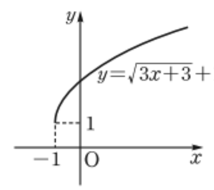
정의역은 $\{x|x\leq2\}$,

치역은 $\{y|y\leq3\}$

답 풀이 참조

0719 $y=\sqrt{3x+3}+1=\sqrt{3(x+1)}+1$

따라서 $y=\sqrt{3x+3}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고



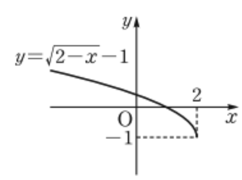
정의역은 $\{x|x\geq-1\}$,

치역은 $\{y|y\geq1\}$

답 풀이 참조

0720 $y=\sqrt{2-x}-1=\sqrt{-(x-2)}-1$

따라서 $y=\sqrt{2-x}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고



정의역은 $\{x|x\leq2\}$,

치역은 $\{y|y\geq-1\}$

답 풀이 참조

0721 $8x^2+2x-1\geq0$이어야 하므로

$(2x+1)(4x-1)\geq0$

$\therefore x\leq-\frac{1}{2}$ 또는 $x\geq\frac{1}{4}$

답 $x\leq-\frac{1}{2}$ 또는 $x\geq\frac{1}{4}$

0722 $2-x\geq0$이므로 $\quad x\leq2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x+3>0$이므로 $\quad x>-3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad -3<x\leq2$

따라서 정수 x는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

답 5

0723 $x+1\geq0$이므로 $\quad x\geq-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$1-x\geq0$이므로 $\quad x\leq1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad -1\leq x\leq1$

$-1\leq x\leq1$일 때, $x-2<0$이므로

$\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$

$=-(x-2)=-x+2$

답 ②

0724 $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}+\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}$

$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})}$

$+\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2})(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2})}$

$+\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}}{(\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3})(\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3})}$

$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{x-(x-1)}+\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}{x-1-(x-2)}+\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}}{x-2-(x-3)}$

$=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}+\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}$

$=\sqrt{x}-\sqrt{x-3}$

답 $\sqrt{x}-\sqrt{x-3}$

0725 $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

$=\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2+(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$=\frac{2+2\sqrt{(1+x)(1-x)}+2-2\sqrt{(1+x)(1-x)}}{1+x-(1-x)}$

$=\frac{2}{x}$

$\therefore k=2$

답 ④

0726 $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$

$=\frac{x-2\sqrt{x}+1+x+2\sqrt{x}+1}{x-1}$

$=\frac{2x+2}{x-1}=\frac{2(\sqrt{2}+1)+2}{(\sqrt{2}+1)-1}$

$=\frac{2\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}+2$

답 ⑤

0727 $\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}=\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})^2}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})}$

$=\frac{2+x-2\sqrt{(2+x)(2-x)}+2-x}{(2+x)-(2-x)}$

$=\frac{4-2\sqrt{4-x^2}}{2x}=\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}$

$=\frac{2-1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

0728 $\frac{1}{1-\sqrt{2x}}+\frac{1}{1+\sqrt{2x}}=\frac{(1+\sqrt{2x})+(1-\sqrt{2x})}{(1-\sqrt{2x})(1+\sqrt{2x})}$

$=\frac{2}{1-2x}=\frac{2}{1-\sqrt{2}}$

$=\frac{2(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}$

$=-2(1+\sqrt{2})$

답 $-2(1+\sqrt{2})$

0729 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}$

$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{x-(x+1)}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ ··· ❶

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(24)$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{25}-\sqrt{24})$

$=\sqrt{25}-1=4$ ··· ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 분모를 유리화할 수 있다.	60 %
❷ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(24)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0730 $x+y=2\sqrt{2}$, $x-y=2$, $xy=1$이므로

$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$

$=\frac{2\sqrt{2}+2}{2}$

$=\sqrt{2}+1$

답 $\sqrt{2}+1$

0731 $x=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=3-2\sqrt{2}$,

$y=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=3+2\sqrt{2}$

이므로 $x+y=6$, $x-y=-4\sqrt{2}$

$\therefore \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})+\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$

$=\frac{x+y}{x-y}$

$=\frac{6}{-4\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{4}$

답 $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$

0732 $x+y=4$, $xy=1$이므로 $\sqrt{3x}-\sqrt{3y}$를 제곱하면

$(\sqrt{3x}-\sqrt{3y})^2=3x-2\cdot\sqrt{3x}\sqrt{3y}+3y$

$=3(x+y)-6\sqrt{xy}$

$=3\cdot4-6\cdot1=6$

이때 $x>y$에서 $\sqrt{3x}>\sqrt{3y}$이므로 $\sqrt{3x}-\sqrt{3y}>0$

$\therefore \sqrt{3x}-\sqrt{3y}=\sqrt{6}$

답 $\sqrt{6}$

0733 $x-2\geq0$이므로 $x\geq2$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\{x|x\geq2\}$이므로 $b=2$

또 함수 $y=\sqrt{x-2}+a$에서 $\sqrt{x-2}\geq0$이므로 치역은

$\{y|y\geq a\}$ $\therefore a=1$

$\therefore ab=2$

답 ④

0734 $-2x+a\geq0$이므로 $2x\leq a$ $\therefore x\leq\frac{a}{2}$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\left\{x\middle|x\leq\frac{a}{2}\right\}$이므로

$\frac{a}{2}=2$ $\therefore a=4$

답 4

18 무리식과 무리함수

0735 $2x+2\geq0$이므로 $\quad 2x\geq-2 \quad \therefore x\geq-1$

$\therefore A=\{x|x\geq-1\}$

$12-3x\geq0$이므로 $\quad 3x\leq12 \quad \therefore x\leq4$

$\therefore B=\{x|x\leq4\}$

따라서 $A\cap B=\{x|-1\leq x\leq4\}$이므로 집합 $A\cap B$의 원소 중에서 정수는

$-1, 0, 1, 2, 3, 4$

의 6개이다. 답 ⑤

0736 $4x+a\geq0$이므로 $\quad 4x\geq-a \quad \therefore x\geq-\frac{a}{4}$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\left\{x\,\middle|\,x\geq-\frac{a}{4}\right\}$이므로

$-\frac{a}{4}=1 \quad \therefore a=-4$ ⋯ ❶

함수 $y=\sqrt{4x-4}+b$의 그래프가 점 $(2, 4)$를 지나므로

$4=\sqrt{4\cdot2-4}+b \quad \therefore b=2$ ⋯ ❷

따라서 함수 $y=\sqrt{4x-4}+2$에서 $\sqrt{4x-4}\geq0$이므로 치역은

$\{y|y\geq2\}$ ⋯ ❸

답 $\{y|y\geq2\}$

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 치역을 구할 수 있다.	40 %

0737 $y=\sqrt{2x-3}-1=\sqrt{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}-1$

이므로 $y=\sqrt{2x-3}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=-1$이므로

$a+b=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0738 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=-\sqrt{-x}$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\sqrt{-\{x-(-5)\}}-3$

$=-\sqrt{-x-5}-3$

$\therefore f(x)=-\sqrt{-x-5}-3$

답 $f(x)=-\sqrt{-x-5}-3$

0739 $y=\sqrt{2x-1}+5$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\sqrt{2(-x)-1}+5$

$\therefore y=-\sqrt{-2x-1}-5$

이 함수의 그래프가 점 $(-1, k)$를 지나므로

$k=-\sqrt{-2\cdot(-1)-1}-5$

$=-1-5=-6$ 답 ①

0740 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x-3)}+2$

이 그래프가 점 $(4, 5)$를 지나므로

$5=\sqrt{a}+2, \quad \sqrt{a}=3$

$\therefore a=9$ 답 9

0741 $y=-\sqrt{3-x}+4$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\sqrt{3-(x-k)}+4=-\sqrt{-x+k+3}+4$ ⋯ ❶

$x=0$을 대입하면 $\quad y=-\sqrt{k+3}+4$ ⋯ ❷

이때 이 그래프의 y절편이 음수이므로

$-\sqrt{k+3}+4<0, \quad \sqrt{k+3}>4$

$k+3>16 \quad \therefore k>13$ ⋯ ❸

답 $k>13$

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 평행이동한 그래프의 y절편을 구할 수 있다.	20 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

0742 $y=\sqrt{a(x+1)}-2$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x-b+1)}-2+c$

이 함수의 그래프가

$y=\sqrt{4-2x}-1=\sqrt{-2(x-2)}-1$

의 그래프와 일치하므로

$a=-2, \ -b+1=-2, \ -2+c=-1$

따라서 $a=-2$, $b=3$, $c=1$이므로

$abc=-6$ 답 ②

0743 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=\sqrt{a(x+2)}-1$ ⋯⋯ ㉠

로 놓을 수 있다.

주어진 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{2a}-1, \quad \sqrt{2a}=2$

$2a=4 \quad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad y=\sqrt{2(x+2)}-1=\sqrt{2x+4}-1$

따라서 $b=4$, $c=-1$이므로

$a+b+c=5$ 답 ④

0744 주어진 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=-\sqrt{a(x-3)}+1$ ⋯⋯ ㉠

로 놓을 수 있다.

주어진 그래프가 점 $(2, 0)$을 지나므로

$0=-\sqrt{-a}+1, \quad \sqrt{-a}=1$

$\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{-(x-3)}+1=-\sqrt{-x+3}+1$

$\therefore\ b=3,\ c=1$ 답 $a=-1,\ b=3,\ c=1$

0745 (1) 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=\sqrt{a(x+1)}+1$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

주어진 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=\sqrt{a}+1,\quad \sqrt{a}=1$

$\therefore\ a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $y=\sqrt{x+1}+1$

$\therefore\ b=1,\ c=1$ ⋯ ❶

(2) $y=\dfrac{cx+3}{ax+b}$에서

$y=\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{(x+1)+2}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}+1$ ⋯ ❷

따라서 점근선의 방정식이 $x=-1,\ y=1$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-1,\ 1)$이다. ⋯ ❸

답 (1) $a=1,\ b=1,\ c=1$ (2) $(-1,\ 1)$

채점 기준	비율
❶ $a,\ b,\ c$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $y=\dfrac{cx+3}{ax+b}$을 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형할 수 있다.	30 %
❸ 두 점근선의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	20 %

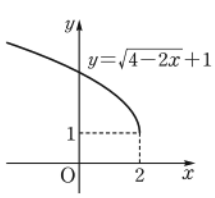
0746 ② $4-2x\ge0$에서 $x\le2$이므로 정의역은 $\{x\,|\,x\le2\}$

③ $\sqrt{4-2x}\ge0$이므로 치역은 $\{y\,|\,y\ge1\}$

④ $y=\sqrt{4-2x}+1=\sqrt{-2(x-2)}+1$

따라서 $y=\sqrt{4-2x}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프와 겹쳐진다.

⑤ $y=\sqrt{4-2x}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.



답 ⑤

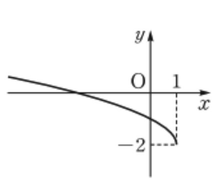
0747 ㄱ. $a>0$이면 정의역은 $\{x\,|\,x\ge0\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\ge0\}$이므로 그래프는 제1사분면을 지난다.

ㄴ. $a<0$이면 치역은 $\{y\,|\,y\le0\}$이다.

ㄷ. $y=-a\sqrt{x}$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

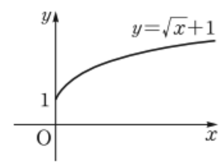
이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

0748 $y=\sqrt{-x+1}-2=\sqrt{-(x-1)}-2$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

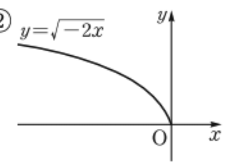


따라서 주어진 함수의 그래프는 제1사분면을 지나지 않는다. 답 제1사분면

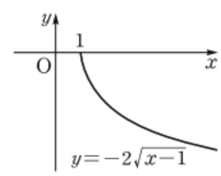
0749 ① $y=\sqrt{x}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



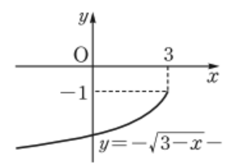
②



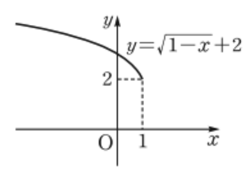
③ $y=-2\sqrt{x-1}$의 그래프는 $y=-2\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



④ $y=-\sqrt{3-x}-1=-\sqrt{-(x-3)}-1$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



⑤ $y=\sqrt{1-x}+2=\sqrt{-(x-1)}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



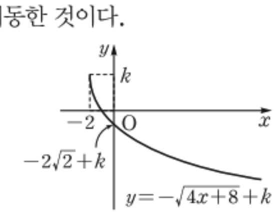
따라서 그래프가 제3사분면을 지나는 것은 ④이다.

답 ④

0750 $y=-\sqrt{4x+8}+k=-\sqrt{4(x+2)}+k$ ⋯ ❶

이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=-\sqrt{4x+8}+k$의 그래프가 제1사분면을 제외한 모든 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$k>0$ …… ㉠

또 그래프의 y절편이 음수이어야 하므로

$-2\sqrt{2}+k<0$

$\therefore\ k<2\sqrt{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $0<k<2\sqrt{2}$ ⋯ ❷

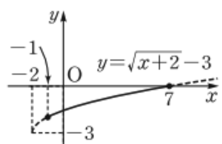
따라서 정수 k는 1, 2의 2개이다. ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 함수의 식을 $y=-\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형할 수 있다.	20 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
❸ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0751 $y=\sqrt{x+2}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1 \le x \le 7$에서 $y=\sqrt{x+2}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=7$일 때 최댓값 $\sqrt{7+2}-3=0$,

$x=-1$일 때 최솟값 $\sqrt{-1+2}-3=-2$

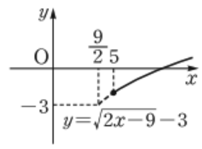
를 갖는다.

즉 $a=0$, $b=-2$이므로 $\quad a-b=2$

답 2

0752 $y=\sqrt{2x-9}-3=\sqrt{2\left(x-\frac{9}{2}\right)}-3$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{9}{2}$만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $x \ge 5$에서 $y=\sqrt{2x-9}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=5$일 때 최솟값 $\sqrt{2\cdot5-9}-3=-2$

를 갖는다.

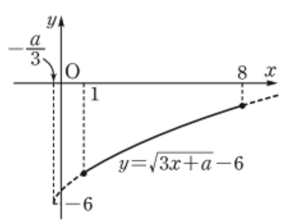
즉 $a=5$, $m=-2$이므로 $\quad a+m=3$

답 ②

0753 $y=\sqrt{3x+a}-6=\sqrt{3\left(x+\frac{a}{3}\right)}-6$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{a}{3}$만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $1 \le x \le 8$에서

$y=\sqrt{3x+a}-6$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=8$일 때 최댓값 $\sqrt{24+a}-6$,

$x=1$일 때 최솟값 $\sqrt{3+a}-6$

을 갖는다. ··· ❶

즉 $\sqrt{24+a}-6=-1$이므로

$\sqrt{24+a}=5 \qquad \therefore a=1$ ··· ❷

따라서 구하는 최솟값은

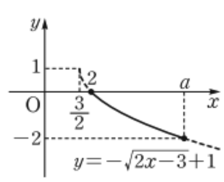
$\sqrt{3+1}-6=-4$ ··· ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=\sqrt{3x+a}-6$이 $x=8$일 때 최댓값을, $x=1$일 때 최솟값을 가짐을 알 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0754 $y=-\sqrt{2x-3}+1=-\sqrt{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}+1$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2 \le x \le a$에서 $y=-\sqrt{2x-3}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=2$일 때 최댓값 $-\sqrt{2\cdot2-3}+1=0$,

$x=a$일 때 최솟값 $-\sqrt{2a-3}+1$

을 갖는다.

즉 $b=0$, $-\sqrt{2a-3}+1=-2$이므로

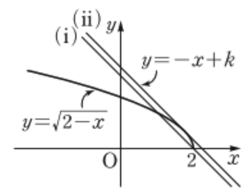
$-\sqrt{2a-3}+1=-2$에서

$\sqrt{2a-3}=3 \qquad \therefore a=6$

$\therefore a+b=6$

답 ③

0755 $y=\sqrt{2-x}=\sqrt{-(x-2)}$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(2, 0)$을 지날 때,

$0=-2+k \qquad \therefore k=2$

(ii) 직선 $y=-x+k$가 $y=\sqrt{2-x}$의 그래프에 접할 때,

$\sqrt{2-x}=-x+k$의 양변을 제곱하면

$2-x=x^2-2kx+k^2$

$\therefore x^2+(1-2k)x+k^2-2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(1-2k)^2-4(k^2-2)=0$

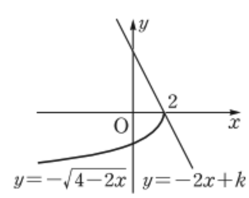
$-4k+9=0 \qquad \therefore k=\frac{9}{4}$

(i), (ii)에서 $y=\sqrt{2-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$2 \le k < \frac{9}{4}$

답 $2 \le k < \frac{9}{4}$

0756 $y=-\sqrt{4-2x}=-\sqrt{-2(x-2)}$ 이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-2x+k$는 기울기가 -2이고 y절편이 k이다.



직선 $y=-2x+k$가 점 $(2, 0)$을 지날 때,

$0=-4+k \qquad \therefore k=4$

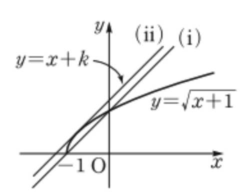
따라서 함수 $y=-\sqrt{4-2x}$의 그래프와 직선 $y=-2x+k$가 만나지 않으려면

$k>4$

이어야 하므로 자연수 k의 최솟값은 5이다.

답 ④

0757 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(-1, 0)$을 지날 때,

$0=-1+k \qquad \therefore k=1$

(ii) 직선 $y=x+k$가 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프에 접할 때,

$\sqrt{x+1}=x+k$의 양변을 제곱하면

$x+1=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+(2k-1)x+k^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2-1)=0$

$-4k+5=0 \qquad \therefore k=\frac{5}{4}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 한 점에서 만나려면

$k<1$ 또는 $k=\frac{5}{4}$

따라서 k의 값이 아닌 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0758 함수 $y=\sqrt{x-2}+1$의 치역이 $\{y|y\ge1\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\ge1\}$이다.

$\therefore c=1$

$y=\sqrt{x-2}+1$에서 $\qquad y-1=\sqrt{x-2}$

양변을 제곱하면 $\qquad (y-1)^2=x-2$

$\therefore x=(y-1)^2+2$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=(x-1)^2+2=x^2-2x+3\ (x\ge1)$

따라서 $a=-2$, $b=3$이므로

$a+b+c=2$

답 ⑤

0759 $f^{-1}(-1)=k$라 하면 $f(k)=-1$이므로

$\sqrt{2k+6}-3=-1, \qquad \sqrt{2k+6}=2$

$2k+6=4 \qquad \therefore k=-1$

$\therefore f^{-1}(-1)=-1$

답 -1

다른풀이 함수 $f(x)=\sqrt{2x+6}-3$의 치역이 $\{y|y\ge-3\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\ge-3\}$이다.

$y=\sqrt{2x+6}-3$으로 놓으면 $\qquad \sqrt{2x+6}=y+3$

양변을 제곱하면 $\qquad 2x+6=(y+3)^2$

$\therefore x=\frac{1}{2}(y+3)^2-3$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{2}(x+3)^2-3\ (x\ge-3)$

따라서 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x+3)^2-3$이므로

$f^{-1}(-1)=\frac{1}{2}\cdot2^2-3=-1$

0760 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 점 $(2, 1)$을 지나므로

$\sqrt{2a+b}=1 \qquad \therefore 2a+b=1$ …… ㉠

역함수의 그래프가 점 $(4, -3)$을 지나므로 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프는 점 $(-3, 4)$를 지난다. 즉

$\sqrt{-3a+b}=4 \qquad \therefore -3a+b=16$ …… ㉡ ⋯ ❶

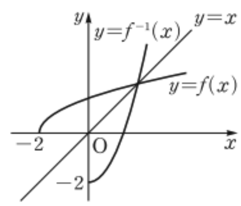
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\qquad a=-3$, $b=7$ ⋯ ❷

$\therefore ab=-21$ ⋯ ❸

답 -21

채점 기준	비율
❶ a, b에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	60 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0761 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{x+2}=x$의 양변을 제곱하면 $\qquad x+2=x^2$

$x^2-x-2=0, \qquad (x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=2\ (\because x\ge0)$

따라서 교점의 좌표가 $(2, 2)$이므로 $\qquad a=2$, $b=2$

$\therefore a+b=4$

답 4

참고 함수 $f(x)=\sqrt{x+2}$의 치역이 $\{y|y\ge0\}$이므로 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 정의역은 $\{x|x\ge0\}$이다. 따라서 두 그래프의 교점은 $x\ge0$에서 생긴다.

0762 $(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f)(5)=f^{-1}(5)$

$f^{-1}(5)=a$라 하면 $f(a)=5$이므로

$\sqrt{2a+1}=5, \qquad 2a+1=25$

$\therefore a=12$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1}\circ f)(5)=f^{-1}(5)=12$

답 12

0763 $g^{-1}(3)=a$라 하면 $g(a)=3$이므로

$\sqrt{2a+3}=3, \qquad 2a+3=9$

$\therefore a=3$

또 $f^{-1}(3)=b$라 하면 $f(b)=3$이므로

$\sqrt{b-1}+2=3, \qquad b-1=1$

$\therefore b=2$

$\therefore (f^{-1}\circ g^{-1})(3)=f^{-1}(g^{-1}(3))=f^{-1}(3)=2$

답 ②

0764 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(1)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(1)=(g^{-1}\circ f)(1)$

$=g^{-1}(f(1))$

$f(1)=\frac{1+5}{1+1}=3$이므로 $\qquad g^{-1}(f(1))=g^{-1}(3)$

$g^{-1}(3)=k$라 하면 $g(k)=3$이므로

$\sqrt{2k-1}=3, \qquad 2k-1=9$

$\therefore k=5$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(1)=g^{-1}(3)=5$

답 ⑤

0765 전략 무리식의 값이 실수가 되기 위해서는 근호 안에 있는 식의 값이 0 이상이어야 한다.

풀이 $4+x\ge0$이므로 $\qquad x\ge-4$ …… ㉠

$6-3x\ge0$이므로 $\qquad x\le2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\qquad -4\le x\le2$

답 $-4\le x\le2$

0766 전략 함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c\ (a>0)$의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\ge-\frac{b}{a}\right\}$, 치역은 $\{y|y\le c\}$이다.

풀이 $x+2\ge0$이므로 $\qquad x\ge-2$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\{x|x\ge-2\}$이므로 $\qquad a=-2$

18 무리식과 무리함수

또 함수 $y=-\sqrt{x+2}-2$에서 $-\sqrt{x+2}\le 0$이므로 치역은

$\{y|y\le -2\}$

$\therefore b=-2$

$\therefore ab=4$

답 ④

0767 전략 주어진 함수의 식을 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 나타낸다.

풀이 $y=\sqrt{3x-9}-4=\sqrt{3(x-3)}-4$

이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=3$, $n=-4$이므로

$m+n=-1$

답 ②

0768 전략 주어진 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 평행이동한 것임을 이용한다.

풀이 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$f(x)=\sqrt{3(x+2)}-1$ ⋯ ❶

$\therefore f(1)=\sqrt{9}-1=2$ ⋯ ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	70 %
❷ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0769 전략 x를 y에 대한 식으로 나타낸 후, x와 y를 서로 바꾼다.

풀이 함수 $y=-\sqrt{x+1}-3$의 치역이 $\{y|y\le -3\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\le -3\}$이다.

$y=-\sqrt{x+1}-3$에서

$\sqrt{x+1}=-y-3$

양변을 제곱하면 $x+1=(-y-3)^2$

$\therefore x=(-y-3)^2-1$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=(-x-3)^2-1$

$=x^2+6x+8\ (x\le -3)$

답 ④

0770 전략 분모의 유리화를 이용한다.

풀이 $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$

$=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$

$\therefore$ (주어진 식)$=\sqrt{x+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$

$=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$=\sqrt{x+1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}$

답 ④

0771 전략 먼저 분모의 유리화를 이용하여 주어진 무리식을 간단히 한 후 x의 값을 대입한다.

풀이 $\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}$

$=\dfrac{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})^2}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})}$

$=\dfrac{2x+1-2\sqrt{(2x+1)(2x-1)}+2x-1}{2x+1-(2x-1)}$

$=\dfrac{4x-2\sqrt{4x^2-1}}{2}=2x-\sqrt{4x^2-1}$

$=2\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\sqrt{4\cdot\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-1}$

$=\sqrt{5}-2$

답 $\sqrt{5}-2$

0772 전략 함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c\ (a>0)$의 정의역은 $\left\{x\middle|x\ge -\dfrac{b}{a}\right\}$, 치역은 $\{y|y\le c\}$이다.

풀이 $ax-6\ge 0$이므로 $ax\ge 6$

이때 $a<0$이면 $x\le\dfrac{6}{a}$이므로 정의역이 $\left\{x\middle|x\le\dfrac{6}{a}\right\}$이다.

따라서 $a>0$이므로 $x\ge\dfrac{6}{a}$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\left\{x\middle|x\ge\dfrac{6}{a}\right\}$이므로

$\dfrac{6}{a}=3 \quad \therefore a=2$ ⋯ ❶

따라서 함수 $y=-\sqrt{2x-6}+2$에서 $-\sqrt{2x-6}\le 0$이므로 치역은

$\{y|y\le 2\}$ ⋯ ❷

답 $\{y|y\le 2\}$

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ 치역을 구할 수 있다.	40 %

0773 전략 평행이동과 대칭이동한 그래프의 식에 주어진 점의 좌표를 대입한다.

풀이 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x-2)}$

$y=\sqrt{a(x-2)}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(-x-2)}$

이 함수의 그래프가 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$2=\sqrt{-a}, \quad -a=4$

$\therefore a=-4$

답 ①

0774 전략 주어진 그래프가 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 평행이동한 것임을 이용한다.

풀이 주어진 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이므로 그래프의 식을

$y=\sqrt{a(x-3)}-4$ ⋯⋯ ㉠

로 놓을 수 있다.

주어진 그래프가 점 $(0, -1)$을 지나므로

$-1=\sqrt{-3a}-4, \quad \sqrt{-3a}=3$

$\therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{-3(x-3)}-4=\sqrt{-3x+9}-4$

따라서 $b=9$, $c=-4$이므로

$abc=(-3)\cdot 9\cdot(-4)=108$

답 108

0775 전략 무리함수 $y=\sqrt{5x+10}-1$의 그래프를 그려 본다.

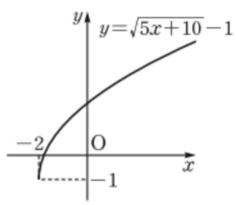
풀이 ㄱ. $5x+10\ge 0$이므로 $5x\ge -10$ $\therefore x\ge -2$

즉 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\ge -2\}$

또 $\sqrt{5x+10}\ge 0$이므로 치역은 $\{y|y\ge -1\}$

ㄴ. $y=\sqrt{5x+10}-1=\sqrt{5(x+2)}-1$

이므로 $y=\sqrt{5x+10}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다. 따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지난다.



ㄷ. $y=\sqrt{5x+10}-1$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\sqrt{5x+10}-1$

$\therefore y=-\sqrt{5x+10}+1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

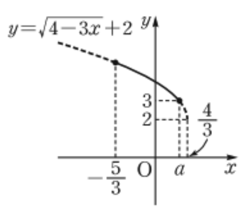
답 ③

0776 전략 함수 $y=\sqrt{4-3x}+2$를 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=\sqrt{4-3x}+2=\sqrt{-3\left(x-\frac{4}{3}\right)}+2$

이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{4}{3}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-\frac{5}{3}\le x\le a$에서 $y=\sqrt{4-3x}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-\frac{5}{3}$일 때 최댓값

$\sqrt{4-3\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)}+2=5$,

$x=a$일 때 최솟값 $\sqrt{4-3a}+2$

를 갖는다.

즉 $M=5$, $\sqrt{4-3a}+2=3$이므로 $\sqrt{4-3a}+2=3$에서

$4-3a=1$

$\therefore a=1$

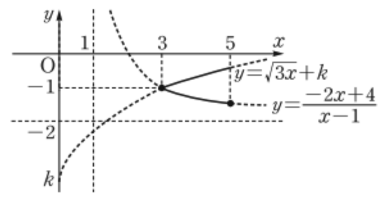
답 ④

0777 전략 $3\le x\le 5$에서 함수 $y=\frac{-2x+4}{x-1}$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=\frac{-2x+4}{x-1}=\frac{2}{x-1}-2$이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=1$, $y=-2$

$y=\sqrt{3x}+k$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로 $3\le x\le 5$에서 정의된 두 함수의 그래프가 한 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 다음 그림과 같이 $y=\sqrt{3x}+k$의 그래프가 점 $(3, -1)$을 지날 때 최대이다.



즉 $-1=\sqrt{9}+k$에서 $k=-4$

따라서 $M=-4$이므로 $M^2=16$

답 16

0778 전략 $f^{-1}(b)=a$이면 $f(a)=b$임을 이용한다.

풀이 $f(3)=4$이므로 $\sqrt{3a+b}+3=4$

$\sqrt{3a+b}=1$ $\therefore 3a+b=1$ …… ㉠

$g(5)=0$에서 $f(0)=5$이므로 $\sqrt{b}+3=5$

$\sqrt{b}=2$ $\therefore b=4$

$b=4$를 ㉠에 대입하면 $3a+4=1$

$3a=-3$ $\therefore a=-1$

$\therefore ab=-4$

답 -4

0779 전략 함수 $y=f(x)$의 정의역이 $\{x|x\ge p\}$, 치역이 $\{y|y\le q\}$이면 그 역함수의 정의역은 $\{x|x\le q\}$, 치역은 $\{y|y\ge p\}$이다.

풀이 $x+a\ge 0$이므로 $x\ge -a$

즉 $y=f(x)$의 정의역이 $\{x|x\ge -a\}$이므로

$-a=5$ $\therefore a=-5$ ··· ❶

따라서 $f(x)=-\sqrt{x-5}+b$에서 $-\sqrt{x-5}\le 0$이므로 치역은 $\{y|y\le b\}$

한편 $y=g(x)$의 정의역이 $\{x|x\le 2\}$이므로 $y=f(x)$의 치역은 $\{y|y\le 2\}$이다.

$\therefore b=2$ ··· ❷

$\therefore a+b=-3$ ··· ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0780 전략 $f^{-1}(a)$의 값은 $f(b)=a$를 만족시키는 b의 값으로 구한다.

풀이 $g(1)=\sqrt{2-1}-4=-3$이므로

$(f^{-1}\circ g)(1)=f^{-1}(g(1))=f^{-1}(-3)$

$f^{-1}(-3)=k$라 하면 $f(k)=-3$에서

$\frac{-4k-1}{k-2}=-3$, $-4k-1=-3k+6$

$\therefore k=-7$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(1)=f^{-1}(-3)=-7$

$f(1)=\frac{-4-1}{1-2}=5$이므로

$(g^{-1}\circ f)(1)=g^{-1}(f(1))=g^{-1}(5)$

$g^{-1}(5)=l$이라 하면 $g(l)=5$에서

$\sqrt{2-l}-4=5,\qquad \sqrt{2-l}=9$

$2-l=81\qquad \therefore l=-79$

$\therefore (g^{-1}\circ f)(1)=g^{-1}(5)=-79$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(1)-(g^{-1}\circ f)(1)=-7-(-79)$

$=72$

답 72

0781 전략 무리함수의 그래프의 성질을 이용하여 a, b, c의 부호를 구한다.

풀이 $y=a\sqrt{bx+c}=a\sqrt{b\left(x+\dfrac{c}{b}\right)}$이므로 주어진 그래프에서

$a<0,\ b<0,\ -\dfrac{c}{b}>0$

$\therefore a<0,\ b<0,\ c>0$

유리함수 $y=\dfrac{b}{x+a}+c$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=c$이고 $-a>0$, $b<0$, $c>0$이므로 $y=\dfrac{b}{x+a}+c$의 그래프의 개형은 ⑤와 같다.

답 ⑤

0782 전략 $|A|=\begin{cases} A\ (A\ge 0) \\ -A\ (A<0)\end{cases}$임을 이용한다.

풀이 $\sqrt{x-2}$, $\sqrt{3-x}$의 값이 실수가 되려면 각각 $x-2\ge 0$, $3-x\ge 0$이어야 하므로

$2\le x\le 3$

따라서 $x+3>0$, $x-5<0$이므로

$\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{x^2-10x+25}=\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{(x-5)^2}$

$=|x+3|+|x-5|$

$=x+3-(x-5)=8$

답 ③

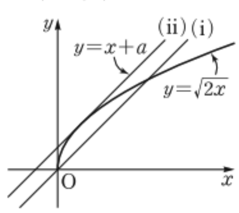
0783 전략 집합 $A\cap B$의 원소는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프와 직선 $y=x+a$의 교점의 좌표이다.

풀이 $n(A\cap B)=2$이면 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프와 직선 $y=x+a$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다. ··· ❶

이때 직선 $y=x+a$는 기울기가 1이고, y절편이 a이다.

(i) 직선 $y=x+a$가 원점을 지날 때,

$a=0$ ··· ❷



(ii) 직선 $y=x+a$가 $y=\sqrt{2x}$의 그래프에 접할 때,

$\sqrt{2x}=x+a$의 양변을 제곱하면

$2x=x^2+2ax+a^2$

$\therefore x^2+2(a-1)x+a^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(a-1)^2-a^2=0$

$-2a+1=0\qquad \therefore a=\dfrac{1}{2}$ ··· ❸

(i), (ii)에서 $y=\sqrt{2x}$의 그래프와 직선 $y=x+a$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$0\le a<\dfrac{1}{2}$ ··· ❹

답 $0\le a<\dfrac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $n(A\cap B)=2$의 의미를 파악할 수 있다.	20 %
❷ 직선 $y=x+a$가 원점을 지날 때의 a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ 직선 $y=x+a$가 $y=\sqrt{2x}$의 그래프와 접할 때의 a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

0784 전략 주어진 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 서로 역함수 관계임을 이용한다.

풀이 $y=\sqrt{x-2}+2$라 하면 $\qquad y-2=\sqrt{x-2}$

양변을 제곱하면

$(y-2)^2=x-2,\qquad x=(y-2)^2+2$

$\therefore x=y^2-4y+6$

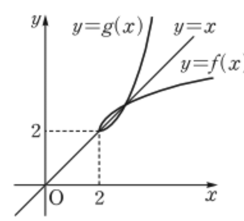
x와 y를 서로 바꾸면 $\qquad y=x^2-4x+6$

이때 함수 $f(x)=\sqrt{x-2}+2$의 치역이 $\{y\,|\,y\ge 2\}$이므로 함수 $f(x)$의 역함수는

$y=x^2-4x+6\ (x\ge 2)$

즉 함수 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 그래프의 교점의 좌표는 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같다.



$x^2-4x+6=x$에서 $\qquad x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0\qquad \therefore x=2$ 또는 $x=3$

따라서 두 교점의 좌표는 $(2,\ 2)$, $(3,\ 3)$이므로 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(3-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$

답 ②

0785 전략 $f^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ f)^{-1}$임을 이용한다.

풀이 $(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=(f\circ f)^{-1}(a)=16$에서

$(f\circ f)(16)=a$

이때 $f(16)=2-\sqrt{16}=-2$이므로

$a=(f\circ f)(16)=f(f(16))=f(-2)$

$=2+\sqrt{-2\cdot(-2)}=4$

답 ⑤

다른풀이 $(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=f^{-1}(f^{-1}(a))=16$이므로

$f(16)=f^{-1}(a)$

이때 $f(16)=2-\sqrt{16}=-2$이므로

$f^{-1}(a)=-2$

$\therefore a=f(-2)=2+\sqrt{-2\cdot(-2)}=4$

19 순열

Ⅶ. 순열과 조합

0786 $5+2=7$ 답 7

0787 $12+10=22$ 답 22

0788 6의 배수가 적힌 공은 6, 12, 18의 3개
7의 배수가 적힌 공은 7, 14의 2개
두 사건은 동시에 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는
$3+2=5$ 답 5

0789 4의 배수가 적힌 공은 4, 8, 12, 16, 20의 5개
5의 배수가 적힌 공은 5, 10, 15, 20의 4개
4와 5의 최소공배수인 20의 배수가 적힌 공은 20의 1개
따라서 구하는 경우의 수는 $5+4-1=8$ 답 8

0790 $7\cdot 8=56$ 답 56

0791 소수의 눈이 나오는 경우는 2, 3, 5의 3가지
짝수의 눈이 나오는 경우는 2, 4, 6의 3가지
따라서 구하는 경우의 수는 $3\cdot 3=9$ 답 9

0792 $2\cdot 3\cdot 4=24$ 답 24

0793 (i) A지점에서 B지점을 거쳐 C지점으로 가는 방법의 수는
$2\cdot 3=6$
(ii) A지점에서 B지점을 거치지 않고 C지점으로 가는 방법의 수는
1
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 $6+1=7$ 답 7

0794 ${}_4P_2=4\cdot 3=12$ 답 12

0795 답 1

0796 답 5

0797 ${}_3P_3=3\cdot 2\cdot 1=6$ 답 6

0798 ${}_nP_2=n(n-1)$이므로
$n(n-1)=56=8\cdot 7$ $\therefore n=8$ 답 8

0799 ${}_nP_n=n(n-1)\cdot \cdots \cdot 1$이므로
$n(n-1)\cdot \cdots \cdot 1=24=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ $\therefore n=4$ 답 4

0800 ${}_nP_1=n$이므로 $r=1$ 답 1

0801 ${}_nP_0=1$이므로 $r=0$ 답 0

0802 $120=6\cdot 5\cdot 4$이므로 ${}_6P_3=120$
$\therefore r=3$ 답 3

0803 $336=8\cdot 7\cdot 6$이므로 ${}_8P_3=336$
$\therefore r=3$ 답 3

0804 $3!=3\cdot 2\cdot 1=6$ 답 6

0805 $5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$ 답 120

0806 답 1

0807 답 1

0808 ${}_{10}P_4=\dfrac{10!}{(10-4)!}=\dfrac{10!}{6!}$ $\therefore \square=6$ 답 6

0809 ${}_7P_\square=\dfrac{7!}{(7-\square)!}=\dfrac{7!}{2!}$이므로
$7-\square=2$ $\therefore \square=5$ 답 5

0810 $6!=6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=720$ 답 720

0811 4장의 카드에서 3장을 뽑는 순열의 수는
${}_4P_3=4\cdot 3\cdot 2=24$ 답 24

0812 10명의 학생 중에서 2명을 뽑는 순열의 수는
${}_{10}P_2=10\cdot 9=90$ 답 90

0813 아버지를 제외한 나머지 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는
$3!=3\cdot 2\cdot 1=6$ 답 6

0814 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 눈의 수의 합이 5가 되는 경우는
(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지
(ii) 눈의 수의 합이 6이 되는 경우는
(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지
두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$4+5=9$ 답 ④

0815 1부터 34까지의 자연수 중에서 소수는
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31의 11개
8의 배수는 8, 16, 24, 32의 4개
두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$11+4=15$ 답 15

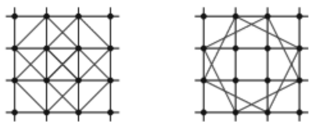
0816 뽑힌 카드에 적힌 세 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 세 수의 곱이 2가 되는 경우는
(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)의 3가지
(ii) 세 수의 곱이 4가 되는 경우는
(1, 1, 4), (1, 4, 1), (4, 1, 1),
(1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)의 6가지
두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$3+6=9$ 답 ③

0817 가장 가까운 두 점 사이의 간격을 1이라 하면
(ⅰ) 한 변의 길이가 1인 정사각형은 　9개
(ⅱ) 한 변의 길이가 2인 정사각형은 　4개
(ⅲ) 한 변의 길이가 3인 정사각형은 　1개 ⋯ ❶
(ⅳ) 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형은 　4개 ⋯ ❷
(ⅴ) 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$인 정사각형은 　2개 ⋯ ❸
모든 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 정사각형의 개수는
$9+4+1+4+2=20$ ⋯ ❹

답 20

채점 기준	비율
❶ 한 변의 길이가 1, 2, 3인 정사각형의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$인 정사각형의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 모든 정사각형의 개수를 구할 수 있다.	10 %

참고 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$인 정사각형은 다음 그림과 같이 각각 4개, 2개이다.



0818 1부터 100까지의 자연수 중에서 4의 배수는 25개, 6의 배수는 16개, 4와 6의 최소공배수인 12의 배수는 8개이므로 4의 배수 또는 6의 배수를 택하는 방법의 수는
$25+16-8=33$

답 ①

0819 $36=2^2\times3^2$이므로 36과 서로소인 수는 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 수이다. 36개의 공 중에서 2의 배수가 적힌 공은 18개, 3의 배수가 적힌 공은 12개, 2와 3의 최소공배수인 6의 배수가 적힌 공은 6개이므로 2의 배수 또는 3의 배수가 적힌 공의 개수는
$18+12-6=24$
따라서 구하는 경우의 수는
$36-24=12$

답 12

0820 모든 원소의 곱이 6의 배수인 집합은 3을 반드시 원소로 갖고, 2 또는 4를 원소로 가져야 한다.
(ⅰ) 2, 3을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는
$2^{5-2}=2^3=8$
(ⅱ) 3, 4를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는
$2^{5-2}=2^3=8$
(ⅲ) 2, 3, 4를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는
$2^{5-3}=2^2=4$
이상에서 구하는 부분집합의 개수는
$8+8-4=12$

답 12

다른풀이 (ⅰ) 3을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는
$2^{5-1}=2^4=16$
(ⅱ) 3을 반드시 원소로 갖고 2, 4를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는
$2^{5-1-2}=2^2=4$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 부분집합의 개수는
$16-4=12$

라쎈 특강 부분집합의 개수

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여
① 집합 A의 부분집합의 개수: 2^n
② 집합 A의 특정한 원소 r $(r<n)$개를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수: 2^{n-r}
③ 집합 A의 특정한 원소 k $(k<n)$개를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수: 2^{n-k}

0821 x, y가 자연수이므로 $x+3y\le8$을 만족시키는 경우는
$x+3y=4$, $x+3y=5$, $x+3y=6$, $x+3y=7$, $x+3y=8$
(ⅰ) $x+3y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는 　$(1, 1)$의 1개
(ⅱ) $x+3y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는 　$(2, 1)$의 1개
(ⅲ) $x+3y=6$일 때, 순서쌍 (x, y)는 　$(3, 1)$의 1개
(ⅳ) $x+3y=7$일 때, 순서쌍 (x, y)는 　$(4, 1)$, $(1, 2)$의 2개
(ⅴ) $x+3y=8$일 때, 순서쌍 (x, y)는 　$(5, 1)$, $(2, 2)$의 2개
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
$1+1+1+2+2=7$

답 ⑤

다른풀이 (ⅰ) $y=1$일 때,
$x+3\le8$, 즉 $x\le5$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$, $(5, 1)$의 5개
(ⅱ) $y=2$일 때,
$x+6\le8$, 즉 $x\le2$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(1, 2)$, $(2, 2)$의 2개
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 순서쌍의 개수는 　$5+2=7$

0822 (ⅰ) $x=1$일 때,
$y+z=6$이므로 순서쌍 (x, y, z)는
$(1, 1, 5)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 3)$, $(1, 4, 2)$, $(1, 5, 1)$의 5개
(ⅱ) $x=2$일 때,
$y+z=4$이므로 순서쌍 (x, y, z)는
$(2, 1, 3)$, $(2, 2, 2)$, $(2, 3, 1)$의 3개
(ⅲ) $x=3$일 때,
$y+z=2$이므로 순서쌍 (x, y, z)는
$(3, 1, 1)$의 1개
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
$5+3+1=9$

답 9

0823 $|a-b|\le1$에서 　$|a-b|=0$ 또는 $|a-b|=1$ ⋯ ❶
(ⅰ) $|a-b|=0$일 때, 순서쌍 (a, b)는
$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$의 6개
(ⅱ) $|a-b|=1$일 때, 순서쌍 (a, b)는
$(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(5, 6)$, $(6, 5)$의 10개 ⋯ ❷
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 순서쌍의 개수는
$6+10=16$ ⋯ ❸

답 16

채점 기준	비율
❶ $\|a-b\|$의 값이 될 수 있는 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ $\|a-b\|$의 값에 따른 순서쌍 (a, b)의 개수를 각각 구할 수 있다.	60 %
❸ 순서쌍 (a, b)의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0824 백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
$1, 3, 5, 7, 9$의 5개
십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
$2, 3, 5, 7$의 4개
일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
$0, 2, 4, 6, 8$의 5개
따라서 구하는 수의 개수는
$5\cdot4\cdot5=100$

답 100

0825 a가 될 수 있는 것은 $1, 2, 3, 4$의 4개
b가 될 수 있는 것은 $-1, 0, 1$의 3개
따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 $4\cdot3=12$이므로
$n(C)=12$

답 ④

0826 정의역 X의 원소 1, 2에 각각 대응시킬 수 있는 공역 Y의 원소는 모두 4, 5, 6의 3개이다.
따라서 X에서 Y로의 함수의 개수는
$3\cdot3=9$

답 ③

0827 (i) A조에서 경찰관 1명, B조에서 소방관 1명을 뽑는 방법의 수는
$4\cdot2=8$ ··· ❶
(ii) A조에서 소방관 1명, B조에서 경찰관 1명을 뽑는 방법의 수는
$3\cdot5=15$ ··· ❷
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 $8+15=23$ ··· ❸

답 23

채점 기준	비율
❶ A조에서 경찰관, B조에서 소방관을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ A조에서 소방관, B조에서 경찰관을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 경찰관 1명, 소방관 1명을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

0828 세 눈의 수의 곱이 짝수가 되는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 세 눈의 수의 곱이 홀수인 경우의 수를 빼면 된다.
3개의 주사위를 던져 나올 수 있는 모든 경우의 수는
$6\cdot6\cdot6=216$
세 눈의 수의 곱이 홀수인 경우의 수는
$3\cdot3\cdot3=27$
따라서 구하는 경우의 수는
$216-27=189$

답 ⑤

0829 $(x+y)(a+b)^2=(x+y)(a^2+2ab+b^2)$에서 x, y에 곱해지는 항이 각각 a^2, $2ab$, b^2의 3개이므로 항의 개수는
$2\cdot3=6$

답 6

0830 $(x+y+z)(a+b+c+d)$에서 x, y, z에 곱해지는 항이 각각 a, b, c, d의 4개이므로 항의 개수는
$3\cdot4=12$

답 ②

0831 $(a-b)^2(x+y)=(a^2-2ab+b^2)(x+y)$에서 a^2, $-2ab$, b^2에 곱해지는 항이 각각 x, y의 2개이므로 항의 개수는
$3\cdot2=6$
$(c+d-e)(z+w)$에서 c, d, $-e$에 곱해지는 항이 각각 z, w의 2개이므로 항의 개수는
$3\cdot2=6$
이때 $(a-b)^2(x+y)$와 $(c+d-e)(z+w)$를 각각 전개했을 때 동류항이 없으므로 구하는 항의 개수는
$6+6=12$

답 ②

0832 $54=2\cdot3^3$이므로 54의 양의 약수의 개수는
$a=(1+1)(3+1)=8$
$90=2\cdot3^2\cdot5$이므로 90의 양의 약수의 개수는
$b=(1+1)(2+1)(1+1)=12$
$\therefore a+b=20$

답 20

0833 $168=2^3\cdot3\cdot7$, $252=2^2\cdot3^2\cdot7$이므로 두 수의 최대공약수는
$2^2\cdot3\cdot7$
168과 252의 양의 공약수의 개수는 $2^2\cdot3\cdot7$의 양의 약수의 개수와 같으므로
$(2+1)(1+1)(1+1)=12$

답 ⑤

0834 $720=2^4\cdot3^2\cdot5$이므로 720의 양의 양수의 개수는
$(4+1)(2+1)(1+1)=30$ ··· ❶
이 중에서 홀수의 개수는 $3^2\cdot5$의 양의 약수의 개수와 같으므로
$(2+1)(1+1)=6$ ··· ❷
따라서 구하는 짝수의 개수는
$30-6=24$ ··· ❸

답 24

채점 기준	비율
❶ 720의 양의 약수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 720의 양의 약수 중 홀수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 720의 양의 약수 중 짝수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0835 100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개의 2가지
50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개의 3가지
10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지
이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는
$2\cdot3\cdot4-1=23$

답 ③

0836 500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 500원, 1000원, 1500원의 4가지
100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 100원, 200원, 300원의 4가지
50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 50원의 2가지
이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는
$4\cdot4\cdot2-1=31$

답 31

0837 (i) 지불할 수 있는 방법의 수
1000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개의 3가지
500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지
100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는
$a=3\cdot4\cdot4-1=47$ ··· ❶
(ii) 지불할 수 있는 금액의 수
1000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액과 500원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 1000원짜리 지폐 2장을 500원짜리 동전 4개로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 7개, 100원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.
500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 500원, 1000원, ···, 3500원의 8가지
100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 100원, 200원, 300원의 4가지
이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는
$b=8\cdot4-1=31$ ··· ❷
(i), (ii)에서 $a-b=16$ ··· ❸

답 16

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0838 (i) A → B → C로 가는 방법의 수는
$2\cdot4=8$
(ii) A → D → C로 가는 방법의 수는
$3\cdot2=6$
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$8+6=14$

답 14

0839 (i) 매표소 → 정상 → 약수터 → 매표소로 가는 방법의 수는
$3\cdot2\cdot4=24$
(ii) 매표소 → 약수터 → 정상 → 매표소로 가는 방법의 수는
$4\cdot2\cdot3=24$
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$24+24=48$

답 ③

0840 (i) 공원 → A → 서점으로 가는 방법의 수는
$3\cdot2=6$
(ii) 공원 → B → 서점으로 가는 방법의 수는
$2\cdot1=2$ ··· ❶
(iii) 공원 → A → B → 서점으로 가는 방법의 수는
$3\cdot2\cdot1=6$
(iv) 공원 → B → A → 서점으로 가는 방법의 수는
$2\cdot2\cdot2=8$ ··· ❷
이상에서 구하는 방법의 수는
$6+2+6+8=22$ ··· ❸

답 22

채점 기준	비율
❶ 공원에서 A, B 중 한 지점만 거쳐 서점으로 가는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 공원에서 A, B지점을 모두 거쳐 서점으로 가는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 공원에서 서점으로 가는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

0841 B에 칠할 수 있는 색은 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지, A에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지이다.
따라서 구하는 방법의 수는 $4\cdot3\cdot2\cdot2=48$

답 48

0842 B에 칠할 수 있는 색은 4가지, A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.
따라서 구하는 방법의 수는 $4\cdot3\cdot3=36$

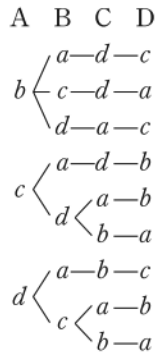
답 ⑤

0843 (i) A와 C가 같은 색인 경우
A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 방법의 수는
$4\cdot3\cdot1\cdot3=36$ ··· ❶
(ii) A와 C가 다른 색인 경우
A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 방법의 수는
$4\cdot3\cdot2\cdot2=48$ ··· ❷
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 $36+48=84$ ··· ❸

답 84

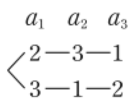
채점 기준	비율
❶ A와 C에 같은 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ A와 C에 다른 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

0844 모든 자물쇠가 열리지 않는 경우는 오른쪽과 같다.
따라서 구하는 경우의 수는 9이다.



답 ⑤

0845 $a_1 \neq 1$이므로 a_1이 2, 3인 경우에 대하여 $a_2 \neq 2$, $a_3 \neq 3$인 a_2, a_3을 각각 구하면 오른쪽과 같다.
따라서 구하는 자연수의 개수는 2이다.

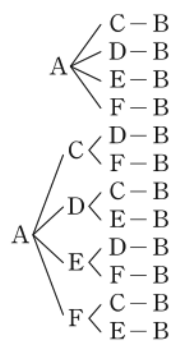


답 ①

0846 (i) 이동한 거리가 2인 경우
이동한 경로는 오른쪽과 같이 4가지이다.

(ii) 이동한 거리가 3인 경우
이동한 경로는 오른쪽과 같이 8가지이다.

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$4+8=12$



답 12

0847 ${}_nP_2 : {}_nP_3 = 1 : 7$에서 $7 \cdot {}_nP_2 = {}_nP_3$
$7n(n-1) = n(n-1)(n-2)$
${}_nP_3$에서 $n \geq 3$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면
$7 = n-2$ $\therefore n=9$

답 9

0848 ${}_nP_2 + 3 \cdot {}_nP_1 = 35$에서 $n(n-1)+3n=35$ ··· ❶
$n^2+2n-35=0$, $(n+7)(n-5)=0$
$\therefore n=5$ ($\because n \geq 2$) ··· ❷

답 5

채점 기준	비율
❶ n에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	50 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	50 %

0849 ${}_7P_r \leq 2 \cdot {}_7P_{r-2}$에서

$$\frac{7!}{(7-r)!} \leq 2 \cdot \frac{7!}{\{7-(r-2)\}!}$$

$$\frac{1}{(7-r)!} \leq 2 \cdot \frac{1}{(9-r)!}, \quad (9-r)! \leq 2 \cdot (7-r)!$$

$(9-r)(8-r) \leq 2$, $r^2-17r+70 \leq 0$
$(r-7)(r-10) \leq 0$ $\therefore 7 \leq r \leq 10$
그런데 $2 \leq r \leq 7$이므로 $r=7$
따라서 조건을 만족시키는 r의 개수는 1이다.

답 ①

참고 ${}_7P_r$에서 $0 \leq r \leq 7$ ······ ㉠
${}_7P_{r-2}$에서 $0 \leq r-2 \leq 7$
$\therefore 2 \leq r \leq 9$ ······ ㉡
㉠, ㉡에서 $2 \leq r \leq 7$

0850 구하는 방법의 수는 10명의 회원 중에서 3명을 택하여 일렬로 세우는 방법의 수와 같으므로
${}_{10}P_3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

답 ⑤

0851 구하는 방법의 수는 6곡의 노래 중에서 4곡을 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로
${}_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

답 360

0852 ${}_nP_2 = 72$이므로
$n(n-1) = 72 = 9 \cdot 8$ $\therefore n=9$

답 ④

0853 선생님 3명을 한 사람으로 생각하여 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $5! = 120$
선생님 3명이 자리를 바꾸는 방법의 수는
$3! = 6$
따라서 구하는 방법의 수는
$120 \cdot 6 = 720$

답 ①

0854 A와 D를 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3! = 6$
A와 D가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2! = 2$
따라서 구하는 방법의 수는
$6 \cdot 2 = 12$

답 ②

0855 4쌍의 부부를 각각 한 사람으로 생각하여 4명이 일렬로 앉는 방법의 수는 $4! = 24$
4쌍의 부부가 각각 부부끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는
$2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! = 16$
따라서 구하는 방법의 수는
$24 \cdot 16 = 384$

답 ④

0856 배우 2명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $2! = 2$
배우들 사이와 양 끝의 3개의 자리에 가수 2명을 세우는 방법의 수는 ${}_3P_2 = 6$
따라서 구하는 방법의 수는
$2 \cdot 6 = 12$

답 ②

0857 4개의 모음 o, u, i, e를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$4!=24$ ··· ❶

모음들 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 3개의 자음 t, s, d를 나열하는 방법의 수는

${}_5P_3=60$ ··· ❷

따라서 구하는 방법의 수는 $24\cdot60=1440$ ··· ❸

답 1440

채점 기준	비율
❶ 4개의 모음을 일렬로 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 모음 사이사이 및 양 끝에 자음을 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	50 %
❸ 자음끼리 이웃하지 않게 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

0858 3개의 의자에만 학생이 앉으므로 빈 의자는 4개이다.
빈 의자들 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 학생이 앉은 의자 3개를 놓으면 되므로 구하는 방법의 수는

${}_5P_3=60$ 답 60

참고 의자가 모두 똑같으므로 빈 의자 4개를 일렬로 나열하는 방법의 수는 1이다.

0859 (i) 남자, 여자의 순서로 번갈아 세우는 방법의 수는

$3!\cdot3!=36$

(ii) 여자, 남자의 순서로 번갈아 세우는 방법의 수는

$3!\cdot3!=36$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$36+36=72$ 답 ⑤

0860 빨간색 꽃은 4송이, 노란색 꽃은 3송이이므로 빨간색 꽃 4송이를 일렬로 심은 뒤 그 사이사이에 노란색 꽃 3송이를 심으면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는

$4!\cdot3!=24\cdot6=144$ 답 ③

0861 남학생은 4명이므로 양 끝에 남학생 2명을 세우는 방법의 수는 ${}_4P_2=12$
양 끝의 남학생 2명을 제외한 나머지 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는 $12\cdot24=288$ 답 ③

0862 구하는 방법의 수는 A를 제외한 나머지 4개의 문자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

${}_4P_2=12$ 답 ②

0863 모음 i, e를 세 군데의 홀수 번째 자리 중 두 군데에 나열하는 방법의 수는

${}_3P_2=6$ ··· ❶

나머지 빈 세 자리에 자음 3개를 나열하는 방법의 수는

$3!=6$ ··· ❷

따라서 구하는 방법의 수는 $6\cdot6=36$ ··· ❸

답 36

채점 기준	비율
❶ 모음을 홀수 번째 자리에 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 자음을 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 문자를 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

0864 지수와 미영이 사이에 2명이 앉도록 묶음을 만드는 방법의 수는

$2!\cdot{}_4P_2=24$

이 묶음과 나머지 2명이 일렬로 앉는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$24\cdot6=144$

답 ④

0865 d와 m 사이에 3개의 문자가 들어가도록 묶음을 만드는 방법의 수는

$2!\cdot{}_5P_3=120$

이 묶음과 나머지 2개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$120\cdot6=720$ 답 720

0866 (i) A와 B 사이에 2개의 문자가 들어가도록 묶음을 만드는 방법의 수는

$2!\cdot{}_3P_2=12$

이 묶음과 나머지 1개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$2!=2$

따라서 방법의 수는 $12\cdot2=24$

(ii) A와 B 사이에 3개의 문자가 들어가도록 나열하는 방법의 수는

$2!\cdot{}_3P_3=12$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$24+12=36$ 답 36

0867 5권의 책을 나란히 꽂는 방법의 수는

$5!=120$

양 끝에 만화책을 꽂는 방법의 수는

${}_3P_2\cdot3!=36$

따라서 구하는 방법의 수는

$120-36=84$ 답 ④

0868 (1) 구하는 방법의 수는 8명의 선수 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수와 같으므로

${}_8P_2=56$ ··· ❶

(2) 구하는 방법의 수는 농구 선수 3명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수와 같으므로

${}_3P_2=6$ ··· ❷

(3) 구하는 방법의 수는 모든 방법의 수에서 대표, 부대표 모두 농구 선수를 뽑는 방법의 수를 뺀 것과 같으므로

$56-6=50$ ··· ❸

답 (1) 56 (2) 6 (3) 50

채점 기준	비율
❶ 모든 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 대표, 부대표 모두 농구 선수를 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 적어도 한 명은 야구 선수를 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %

0869 7명의 학생을 일렬로 세우는 방법의 수는

$7!=5040$

여학생이 이웃하지 않는 방법의 수는 남학생 4명을 일렬로 세우고 남학생들 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 여학생 3명을 세우는 방법의 수와 같으므로

$4!\cdot{}_5P_3=1440$

따라서 구하는 방법의 수는

$5040-1440=3600$ 답 3600

0870 홀수이려면 일의 자리의 숫자가 홀수이어야 하므로

${}_3P_1=3$

일의 자리의 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수는

${}_4P_3=24$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$3\cdot24=72$ 답 ②

0871 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 2, 4, 6, 8의 4개이고 십의 자리, 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리의 숫자를 제외한 4개 중 2개이므로

${}_4P_2=12$

따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$4\cdot12=48$ 답 48

0872 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

0을 제외한 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

${}_5P_3=60$ ··· ❶

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 5를 제외한 1, 2, 3, 4의 4개이고 백의 자리, 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리와 일의 자리의 숫자를 제외한 4개 중 2개이므로

${}_4P_2=12$

따라서 일의 자리의 숫자가 5인 네 자리 자연수의 개수는

$4\cdot12=48$ ··· ❷

(i), (ii)에서 5의 배수의 개수는

$60+48=108$ ··· ❸

답 108

채점 기준	비율
❶ 일의 자리의 숫자가 0인 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 일의 자리의 숫자가 5인 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0873 백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 7개의 숫자로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$6\cdot{}_6P_2=180$

백의 자리와 일의 자리의 숫자가 모두 홀수인 자연수의 개수는

${}_3P_2\cdot5=30$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$180-30=150$ 답 ④

다른풀이 (i) 백의 자리의 숫자는 짝수, 일의 자리의 숫자는 홀수인 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4, 6의 3개

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5의 3개

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리와 일의 자리의 숫자를 제외한 5개이므로 자연수의 개수는

$3\cdot3\cdot5=45$

(ii) 백의 자리의 숫자는 홀수, 일의 자리의 숫자는 짝수인 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5의 3개

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4, 6의 4개

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리와 일의 자리의 숫자를 제외한 5개이므로 자연수의 개수는

$3\cdot4\cdot5=60$

(iii) 백의 자리와 일의 자리의 숫자가 모두 짝수인 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4, 6의 3개

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리의 숫자를 제외한 3개이고, 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리와 일의 자리의 숫자를 제외한 5개이므로 자연수의 개수는

$3\cdot3\cdot5=45$

이상에서 구하는 자연수의 개수는 $45+60+45=150$

0874 a로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$

ba로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

bc로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

bd로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

bea로 시작하는 것의 개수는 $2!=2$

bec로 시작하는 것은 순서대로 $becad$, $becda$의 2개

따라서 $abcde$부터 $becda$까지의 개수는

$24+6+6+6+2+2=46$

이므로 $becda$는 46번째에 온다. 답 46번째

0875 320보다 작은 자연수는 1□□, 2□□, 30□, 31□ 꼴이다.

1□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_2=20$

2□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_2=20$ ··· ❶

30□ 꼴인 자연수의 개수는 4

31□ 꼴인 자연수의 개수는 4 ··· ❷

따라서 구하는 자연수의 개수는

$20+20+4+4=48$ ··· ❸

답 48

채점 기준	비율
❶ 1□□, 2□□ 꼴인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 30□, 31□ 꼴인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 320보다 작은 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0876 a, n, s, w, e, r를 사전식으로 나열하면 a, e, n, r, s, w의 순이다.
a로 시작하는 것의 개수는 $5!=120$
e로 시작하는 것의 개수는 $5!=120$
na로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$
ne로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$
nra로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$
따라서 a로 시작하는 것부터 nra로 시작하는 것까지의 총개수는
$120+120+24+24+6=294$
이므로 295번째에 오는 것은 nre로 시작하는 것 중 제일 처음의 것이다.
∴ nreasw

답 ③

0877 전략 먼저 부등식을 만족시키는 $x+y$의 값을 구한다.
풀이 x, y가 자연수이므로 $3\le x+y\le 5$를 만족시키는 경우는
$x+y=3$, $x+y=4$, $x+y=5$
(i) $x+y=3$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(1, 2)$, $(2, 1)$의 2개
(ii) $x+y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 3개
(iii) $x+y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$의 4개
이상에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는
$2+3+4=9$

답 ④

0878 전략 곱의 법칙을 이용한다.
풀이 $3\cdot n\cdot 5=60$이므로
$n=4$

답 ①

0879 전략 십의 자리, 일의 자리에 올 수 있는 숫자의 개수를 구한 후 곱의 법칙을 이용한다.
풀이 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 3, 6, 9의 3개 ··· ❶
일의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 5, 7의 4개 ··· ❷
따라서 구하는 두 자리 자연수의 개수는
$3\cdot 4=12$ ··· ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ 십의 자리에 올 수 있는 숫자를 구할 수 있다.	30 %
❷ 일의 자리에 올 수 있는 숫자를 구할 수 있다.	30 %
❸ 조건을 만족시키는 두 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40 %

0880 전략 $N=x^ay^bz^c$ (x, y, z는 서로 다른 소수, a, b, c는 자연수)의 양의 약수의 개수는 $(a+1)(b+1)(c+1)$이다.
풀이 $2^3\times 3^3\times 5^n$의 양의 약수의 개수는
$(3+1)(3+1)(n+1)=16(n+1)$
따라서 $16(n+1)=48$이므로 $n+1=3$
∴ $n=2$

답 2

0881 전략 동시에 갈 수 없는 길이면 합의 법칙을, 이어지는 길이면 곱의 법칙을 이용한다.
풀이 (i) A → B → C → A로 가는 방법의 수는
$2\cdot 3\cdot 3=18$
(ii) A → C → B → A로 가는 방법의 수는
$3\cdot 3\cdot 2=18$
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$18+18=36$

답 36

0882 전략 먼저 양 끝에 소수가 오는 경우의 수를 구한다.
풀이 소수는 2, 3, 5의 3개이므로 양 끝에 소수가 오는 경우의 수는
${}_3P_2=6$
양 끝에 오는 2개의 숫자를 제외한 나머지 3개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는 $6\cdot 6=36$

답 ②

0883 전략 3종류의 초콜릿의 개수를 x, y, z로 놓고 방정식을 세운다.
풀이 100원, 200원, 400원짜리 초콜릿을 각각 x개, y개, z개 산다고 하면
$100x+200y+400z=1500$
∴ $x+2y+4z=15$ (단, x, y, z는 자연수) ··· ❶
(i) $z=1$일 때,
$x+2y=11$이므로 순서쌍 (x, y, z)는
$(9, 1, 1)$, $(7, 2, 1)$, $(5, 3, 1)$, $(3, 4, 1)$, $(1, 5, 1)$의 5개
(ii) $z=2$일 때,
$x+2y=7$이므로 순서쌍 (x, y, z)는
$(5, 1, 2)$, $(3, 2, 2)$, $(1, 3, 2)$의 3개
(iii) $z=3$일 때,
$x+2y=3$이므로 순서쌍 (x, y, z)는
$(1, 1, 3)$의 1개 ··· ❷
이상에서 구하는 방법의 수는
$5+3+1=9$ ··· ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ 방정식을 세울 수 있다.	20 %
❷ $z=1$, 2, 3일 때의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 각각 구할 수 있다.	70 %
❸ 초콜릿을 사는 방법의 수를 구할 수 있다.	10 %

0884 전략 두 자연수의 합이 짝수인 경우는 (짝수)+(짝수)=(짝수), (홀수)+(홀수)=(짝수)이다.
풀이 십의 자리의 숫자를 a, 일의 자리의 숫자를 b라 할 때, $a+b$의 값이 짝수이려면 a, b가 모두 홀수이거나 모두 짝수이어야 한다.
(i) a, b가 모두 짝수인 경우
a가 될 수 있는 숫자는 2, 4, 6, 8의 4개
b가 될 수 있는 숫자는 0, 2, 4, 6, 8의 5개
이므로 두 자리 자연수의 개수는 $4\cdot 5=20$ ··· ❶

(ⅱ) a, b가 모두 홀수인 경우

a가 될 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7, 9의 5개

b가 될 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7, 9의 5개

이므로 두 자리 자연수의 개수는 $5\cdot5=25$ ⋯ ❷

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 자연수의 개수는

$20+25=45$ ⋯ ❸

답 45

채점 기준	비율
❶ 각 자리의 숫자가 모두 짝수인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	50 %
❷ 각 자리의 숫자가 모두 홀수인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 각 자리의 숫자의 합이 짝수인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0885 **전략** 각 항의 문자가 모두 다를 때, 전개식의 항의 개수는 각 다항식의 항의 개수의 곱과 같음을 이용한다.

풀이 $(a^2+a-1)(b^2-b+2)$에서 a^2, a, -1에 곱해지는 항이 각각 b^2, $-b$, 2의 3개이므로 전개식의 항의 개수는

$A=3\cdot3=9$

$(l+m)(x+y)(p-q+r)$에서 l, m에 곱해지는 항이 각각 x, y의 2개, p, $-q$, r의 3개이므로 전개식의 항의 개수는

$B=2\cdot2\cdot3=12$

$\therefore A+B=21$

답 ③

0886 **전략** 각각의 추마다 사용하거나 사용하지 않는 2가지의 경우가 있다.

풀이 각각의 추마다 사용하거나 사용하지 않는 2가지의 경우가 있으므로 모든 경우의 수는

$2\cdot2\cdot2\cdot2=16$

이때 0 g을 재는 것은 제외하므로 구하는 경우의 수는

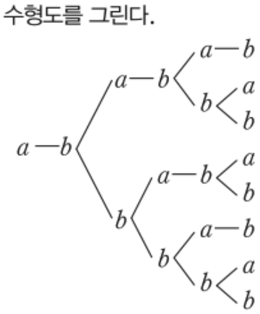
$16-1=15$

답 15

0887 **전략** 주어진 조건을 만족시키도록 수형도를 그린다.

풀이 주어진 조건을 만족시키도록 수형도를 그리면 오른쪽과 같다.

따라서 구하는 문자열의 개수는 8이다.



답 ⑤

다른 풀이 첫 문자가 a이고 a끼리는 이웃하지 않으므로 두 번째 문자는 b이다.

세 번째부터 여섯 번째까지 4개의 자리에 문자를 나열할 때 a끼리는 이웃하지 않으므로 a는 최대 2개까지 나열할 수 있다.

(ⅰ) a가 2개인 경우

$abab$, $abba$, $baba$의 3가지

(ⅱ) a가 1개인 경우

$abbb$, $babb$, $bbab$, $bbba$의 4가지

(ⅲ) a가 0개인 경우

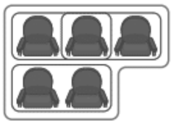
$bbbb$의 1가지

이상에서 구하는 문자열의 개수는

$3+4+1=8$

0888 **전략** 먼저 부모의 자리를 정하는 방법을 구한다.

풀이 부모의 자리를 정하는 방법은 오른쪽 그림과 같이 3가지이고, 각각의 경우에서 부모가 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!$이므로 부모의 자리를 정하는 방법의 수는



$3\cdot2!=6$

나머지 자리에 세 명이 앉는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot6=36$

답 36

0889 **전략** 같은 반 학생들을 한 사람으로 생각한다.

풀이 같은 반 학생들을 각각 한 사람으로 생각하여 2명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $2!=2$

각 반의 학생들끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는

$4!\cdot3!=144$

$\therefore a=2\cdot144=288$ ⋯ ❶

7명의 학생을 일렬로 세우는 방법의 수는 $7!=5040$

양 끝에 2반 학생을 세우는 방법의 수는

${}_3P_2\cdot5!=720$

$\therefore b=5040-720=4320$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=4608$ ⋯ ❸

답 4608

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0890 **전략** 어떤 자연수가 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 함을 이용한다.

풀이 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 3개를 택했을 때, 그 합이 3의 배수가 되는 경우는

1, 2, 3 또는 1, 3, 5 또는 2, 3, 4 또는 3, 4, 5 ⋯ ❶

이때 각각에 대하여 세 자리 자연수의 개수는

$3!=6$

따라서 구하는 3의 배수의 개수는

$4\cdot6=24$ ⋯ ❷

답 24

채점 기준	비율
❶ 합이 3의 배수가 되는 3개의 수를 구할 수 있다.	50 %
❷ 3의 배수의 개수를 구할 수 있다.	50 %

0891 **전략** 천의 자리, 백의 자리를 기준으로 나누어 생각한다.

풀이 2400보다 큰 자연수는 24□□, 3□□□, 4□□□ 꼴이다.

24□□ 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$

3□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

4□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$2+6+6=14$

답 ③

다른풀이 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는 $4!=24$

1□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

21□□ 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$

23□□ 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$24-(6+2+2)=14$

0892 전략 이차방정식이 실근을 가지려면 판별식이 0보다 크거나 같아야 함을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4b\geq 0 \quad \therefore b\leq \frac{a^2}{4}$

이때 $a\in A$, $b\in A$이므로

(i) $a=0$일 때, $b\leq 0$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(0, 0)$의 1개

(ii) $a=1$일 때, $b\leq \frac{1}{4}$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(1, 0)$의 1개

(iii) $a=2$일 때, $b\leq 1$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(2, 0)$, $(2, 1)$의 2개

(iv) $a=3$일 때, $b\leq \frac{9}{4}$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(3, 0)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$의 3개

(v) $a=4$일 때, $b\leq 4$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(4, 0)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$, $(4, 4)$의 5개

(vi) $a=5$일 때, $b\leq \frac{25}{4}$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(5, 0)$, $(5, 1)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$, $(5, 4)$, $(5, 5)$의 6개

이상에서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$1+1+2+3+5+6=18$

답 ④

0893 전략 사다리꼴의 윗변의 길이가 a, 아랫변의 길이가 b, 높이가 h일 때, 넓이는 $\frac{1}{2}(a+b)h$임을 이용한다.

풀이 사다리꼴의 윗변과 아랫변의 길이를 각각 a, b라 하면 넓이는 $\frac{1}{2}(a+b)$이므로

$\frac{1}{2}(a+b)=2 \quad \therefore a+b=4$

(i) $a=1$, $b=3$일 때,

$a=1$인 경우는 4가지, $b=3$인 경우는 2가지이므로

$4\cdot 2=8$

(ii) $a=3$, $b=1$일 때,

$a=3$인 경우는 2가지, $b=1$인 경우는 4가지이므로

$2\cdot 4=8$

(i), (ii)에서 구하는 사각형의 개수는

$8+8=16$

답 16

참고 $a=2$, $b=2$이면 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같으므로 평행사변형이다. 따라서 조건을 만족시키지 않는다.

0894 전략 $x>0$인 집합 X의 원소 x에 대하여 $f(x)=1$, $f(x)=2$, $f(x)=3$인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 $|f(x)+f(-x)|=1$에서

$f(x)+f(-x)=1$ 또는 $f(x)+f(-x)=-1$

$x>0$인 집합 X의 원소 x에 대하여

(i) $f(x)=1$일 때, $f(-x)=-2$

(ii) $f(x)=2$일 때, $f(-x)=-3$ 또는 $f(-x)=-1$

(iii) $f(x)=3$일 때, $f(-x)=-2$

이상에서 $f(x)$의 값에 따라 $f(-x)$의 값이 정해진다.

따라서 $f(1)$과 $f(-1)$, $f(2)$와 $f(-2)$, $f(3)$과 $f(-3)$의 값을 정하는 경우의 수가 각각 4이므로 구하는 함수 $f(x)$의 개수는

$4\cdot 4\cdot 4=64$

답 64

0895 전략 약수의 개수를 구하는 공식을 이용한다.

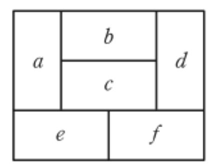
풀이 $1\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5=2\cdot 3^3\cdot 5^2$

따라서 뽑은 카드에 적힌 숫자를 곱한 값이 될 수 있는 수는 $2\cdot 3^3\cdot 5^2$의 양의 약수 중에서 1을 제외한 수이므로 구하는 수의 개수는

$(1+1)(3+1)(2+1)-1=23$

답 ①

0896 전략 먼저 서로 이웃한 2개 지역을 택하는 경우의 수를 구한다.



풀이 오른쪽 그림과 같이 6개 지역을 각각 a, b, c, d, e, f라 하면 서로 이웃한 2개 지역을 택하는 경우는

a와 b, a와 c, a와 e, b와 c, b와 d, c와 d, c와 e, c와 f, d와 f, e와 f

의 10가지

이웃한 2개 지역을 담당하는 조사원을 정하는 경우의 수는

5

나머지 4명의 조사원이 남은 4개 지역을 담당하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot 5\cdot 24=1200$

답 ⑤

0897 전략 D, E는 제외하고 A, B를 한 묶음으로 생각하여 먼저 나열한다.

풀이 A와 B를 한 묶음으로 생각하여 A, B, C, F를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$3!=6$

A와 B가 자리를 바꾸는 방법의 수는 2

위에서 나열한 문자 A, B의 묶음과 C, F의 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 D, E를 나열하는 방법의 수는

${}_4P_2=12$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot 2\cdot 12=144$

답 ③

Ⅶ. 순열과 조합

20 조합

0898 ${}_4C_2=\frac{{}_4P_2}{2!}=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$ 답 6

0899 ${}_7C_3=\frac{{}_7P_3}{3!}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$ 답 35

0900 답 1 **0901** 답 1

0902 ${}_nC_2=10$에서 $\frac{n(n-1)}{2\cdot1}=10$

$n(n-1)=5\cdot4$ $\therefore n=5$ 답 5

0903 ${}_nC_3=4$에서 $\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=4$

$n(n-1)(n-2)=4\cdot3\cdot2$ $\therefore n=4$ 답 4

0904 ${}_6C_r=20$에서 $\frac{6!}{r!(6-r)!}=20$

$6!=20\cdot r!(6-r)!$, $6\cdot3\cdot2\cdot1=r!(6-r)!$

$3!\cdot3!=r!(6-r)!$ $\therefore r=3$ 답 3

0905 ${}_8C_r=56$에서 $\frac{8!}{r!(8-r)!}=56$

$8!=56\cdot r!(8-r)!$, $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=r!(8-r)!$

$3!\cdot5!=r!(8-r)!$ $\therefore r=3$ 또는 $r=5$

답 3 또는 5

0906 ${}_{12}C_7={}_{12}C_{12-7}={}_{12}C_5$

$\therefore n=5$ 답 5

0907 ${}_nC_9={}_nC_6$에서 $6=n-9$

$\therefore n=15$ 답 15

0908 ${}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$ 답 10

0909 ${}_8C_3=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$ 답 56

0910 ${}_7C_4={}_7C_3=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$ 답 35

0911 ${}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$ 답 20

0912 2, 4, 6, 8, 10이 각각 하나씩 적힌 5장의 카드 중에서 3장의 카드를 뽑으면 되므로 구하는 방법의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$ 답 10

0913 ${}_nC_2+{}_{n-1}C_2={}_{n+2}C_2$에서

$$\frac{n(n-1)}{2\cdot1}+\frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot1}=\frac{(n+2)(n+1)}{2\cdot1}$$

$n(n-1)+(n-1)(n-2)=(n+2)(n+1)$

$n^2-7n=0$, $n(n-7)=0$

$\therefore n=7$ ($\because n$은 자연수) 답 ②

0914 ${}_8C_r={}_8C_{r-4}$에서

$r=r-4$ 또는 $r-4=8-r$

(i) $r=r-4$에서 $0\neq-4$이므로 r의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $r-4=8-r$에서 $2r=12$ $\therefore r=6$

(i), (ii)에서 $r=6$ 답 6

0915 ${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}$이므로

$35=\frac{210}{r!}$, $r!=6=3\cdot2\cdot1$

$\therefore r=3$

또 ${}_nP_3=210=7\cdot6\cdot5$에서 $n=7$

$\therefore n+r=10$ 답 ③

0916
$$\begin{aligned}{}_nC_{n-r}&=\frac{n!}{(n-r)!\{n-(\boxed{n-r})\}!}\\&=\frac{n!}{(n-r)!\boxed{r!}}={}_nC_r\end{aligned}$$

$\therefore$ (가) $n-r$ (나) $r!$ 답 (가) $n-r$ (나) $r!$

0917
$$\begin{aligned}{}_nC_k\cdot{}_{n-k}C_{r-k}&=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(r-k)!\{(n-k)-(r-k)\}!}\\&=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(r-k)!\boxed{(n-r)!}}\\&=\frac{\boxed{n!}}{k!(r-k)!(n-r)!}\\&=\frac{n!}{\boxed{r!}(n-r)!}\cdot\frac{\boxed{r!}}{k!(r-k)!}\\&={}_nC_r\cdot{}_rC_k\end{aligned}$$

$\therefore$ (가) $(n-r)!$ (나) $n!$ (다) $r!$ (라) $r!$ 답 ④

0918 (1) 지훈이를 제외한 $(n-1)$명에서 r명을 뽑는 방법의 수는

${}_{n-1}C_r$ ··· ❶

(2) 지훈이를 제외한 $(n-1)$명에서 $(r-1)$명을 뽑는 방법의 수와 같으므로

${}_{n-1}C_{r-1}$ ··· ❷

(3) n명의 학생 중에서 r명을 뽑는 방법의 수는 ${}_nC_r$이고, (1), (2)는 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙에 의하여

${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$ ··· ❸

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 지훈이를 제외하고 r명을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 지훈이를 포함하여 r명을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ ${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$임을 설명할 수 있다.	40 %

0919 플루트 연주자 5명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$

바이올린 연주자 6명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

$_6C_2=15$

따라서 구하는 방법의 수는

$10\cdot15=150$ 답 ②

0920 배우 10명 중에서 주연 1명을 뽑는 방법의 수는

$_{10}C_1=10$

나머지 배우 9명 중에서 조연 3명을 뽑는 방법의 수는

$_9C_3=84$

따라서 구하는 방법의 수는

$10\cdot84=840$ 답 840

참고 배우 10명 중에서 조연 3명을 먼저 뽑고 나머지 배우 7명 중에서 주연 1명을 뽑는 방법의 수는

$_{10}C_3\cdot{}_7C_1=120\cdot7=840$

이므로 뽑는 순서에 상관없이 결과가 같다.

0921 디자이너 5명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$

모델 n명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

$_nC_3$

따라서 $10+{}_nC_3=66$이므로 $\quad {}_nC_3=56$

$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=56,\qquad n(n-1)(n-2)=8\cdot7\cdot6$

$\therefore n=8$ 답 ①

0922 세 수의 합이 홀수가 되기 위해서는 세 수가 모두 홀수이거나 하나는 홀수, 두 개는 짝수이어야 한다.

(i) 세 수가 모두 홀수인 경우

1, 3, 5, 7, 9가 적힌 5장의 카드 중에서 3장을 뽑는 경우의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$ ··· ❶

(ii) 하나는 홀수, 두 개는 짝수인 경우

1, 3, 5, 7, 9가 적힌 5장의 카드 중에서 1장을 뽑고, 2, 4, 6, 8이 적힌 4장의 카드 중에서 2장을 뽑는 경우의 수는

$_5C_1\cdot{}_4C_2=5\cdot6=30$ ··· ❷

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$10+30=40$ ··· ❸

답 40

채점 기준	비율
❶ 세 수가 모두 홀수인 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 하나는 홀수, 두 개는 짝수인 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 카드에 적힌 수의 총합이 홀수가 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

0923 구하는 경우의 수는 A, B, C를 제외한 7명의 학생 중에서 5명의 위원을 선출하는 경우의 수와 같으므로

$_7C_5={}_7C_2=21$ 답 ③

0924 구하는 방법의 수는 3학년 선수 2명을 제외한 6명의 선수 중에서 3명을 뽑는 방법의 수와 같으므로

$_6C_3=20$ 답 ③

0925 구하는 방법의 수는 특정한 남학생 1명을 제외한 3명의 남학생 중에서 2명을 뽑고, 특정한 여학생 2명을 제외한 4명의 여학생 중에서 2명을 뽑는 방법의 수와 같으므로

$_3C_2\cdot{}_4C_2=3\cdot6=18$ 답 18

0926 구하는 경우의 수는 민정이와 지훈이를 제외한 7명의 회원 중에서 3명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$_7C_3=35$ 답 35

0927 녹차 아이스크림과 딸기 아이스크림 중에서 한 가지 아이스크림을 고르는 방법의 수는

$_2C_1=2$

녹차와 딸기 아이스크림을 제외한 6가지 아이스크림 중에서 4가지 아이스크림을 고르는 방법의 수는

$_6C_4={}_6C_2=15$

따라서 구하는 방법의 수는

$2\cdot15=30$ 답 ③

0928 6켤레의 신발 중에서 짝이 맞는 1켤레의 신발을 뽑는 경우의 수는

$_6C_1=6$

나머지 5켤레의 신발 중에서 2짝을 뽑는 경우의 수는 $_{10}C_2=45$이고 이 중에서 짝이 맞는 경우의 수는 5이므로 짝이 맞지 않는 2짝을 뽑는 경우의 수는

$45-5=40$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot40=240$ 답 ④

0929 9명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는

$_9C_4=126$

안전 요원만 4명을 뽑는 방법의 수는 $\quad {}_4C_4=1$

어린이만 4명을 뽑는 방법의 수는 $\quad {}_5C_4={}_5C_1=5$

따라서 구하는 방법의 수는 $\quad 126-1-5=120$

답 120

0930 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 3인 집합의 개수는

$_9C_3=84$ ··· ❶

이 중 짝수로만 이루어진 부분집합의 개수는 $\quad {}_4C_3=4$ ··· ❷

따라서 구하는 집합의 개수는

$84-4=80$ ··· ❸

답 80

채점 기준	비율
❶ 원소의 개수가 3인 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 짝수로만 이루어진 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 적어도 한 개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	30 %

0931 12명의 무용수 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

$_{12}C_3=220$

남자 무용수를 n명이라 할 때 남자 무용수만 3명을 뽑는 방법의 수는

$_nC_3$

이때 여자 무용수를 적어도 한 명 포함하도록 뽑는 방법의 수가 210이므로

$220-{}_nC_3=210,\quad {}_nC_3=10$

$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=10$

$n(n-1)(n-2)=5\cdot4\cdot3\quad \therefore n=5$

따라서 남자 무용수가 5명이므로 여자 무용수의 수는

$12-5=7$ 답 ⑤

0932 5개의 실내 놀이 기구 중에서 3개를 고르는 방법의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$

4개의 야외 놀이 기구 중에서 2개를 고르는 방법의 수는

$_4C_2=6$

5개의 놀이 기구를 타는 순서를 정하는 방법의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 방법의 수는

$10\cdot6\cdot120=7200$ 답 ④

0933 3, 6을 제외한 4개의 숫자 중에서 3개를 택하는 방법의 수는 $_4C_3={}_4C_1=4$

4개를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $4\cdot24=96$

답 96

0934 A, B를 제외한 5명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$ ··· ❶

A, B를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4!=24$이고, A, B끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$이므로 A, B를 이웃하도록 세우는 방법의 수는

$24\cdot2=48$ ··· ❷

따라서 구하는 방법의 수는

$10\cdot48=480$ ··· ❸

답 480

채점 기준	비율
❶ A, B를 포함하여 5명을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ A, B가 이웃하도록 세우는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 조건을 만족시키는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

0935 주어진 조건을 만족시키려면 집합 Y의 10개의 원소 중에서 4개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 된다.

따라서 함수 f의 개수는 10개의 원소 중에서 4개를 뽑는 조합의 수와 같으므로

$_{10}C_4=210$ 답 ②

0936 (1) 일대일함수 f의 개수는 집합 Y의 5개의 원소 중에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$_5P_4=120$ ··· ❶

(2) 집합 Y의 5개의 원소 중에서 4개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 -1, 0, 1, 2에 대응시키면 된다.

따라서 함수 f의 개수는 5개의 원소 중에서 4개를 뽑는 조합의 수와 같으므로

$_5C_4={}_5C_1=5$ ··· ❷

답 (1) 120 (2) 5

채점 기준	비율
❶ 일대일함수 f의 개수를 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(-1)<f(0)<f(1)<f(2)$인 함수의 개수를 구할 수 있다.	50 %

0937 $f(3)=3$이고 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이므로

$f(4)=1$ 또는 $f(4)=2$

또 $f(1)>f(2)>3$이므로 집합 Y의 원소 4, 5, 6 중 2개를 택하여 큰 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2에 대응시키면 된다.

따라서 함수 f의 개수는

$2\cdot{}_3C_2=2\cdot3=6$ 답 6

0938 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는 8개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수와 같으므로

$_8C_2=28$ 답 ①

0939 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수와 같으므로

$_5C_2=10$ 답 10

0940 10개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_{10}C_2=45$

한 선분 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_5C_2=10$

이때 한 선분 위에 있는 5개의 점으로 만들 수 있는 직선이 2개이므로 구하는 직선의 개수는

$45-2\cdot10+2=27$

답 ②

참고 일직선 위에 있는 서로 다른 n개의 점으로 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는 1임에 유의한다.

다른풀이 두 선분 위의 점을 각각 하나씩 택하여 연결하면 한 개의 직선을 만들 수 있으므로

$_5C_1\cdot{}_5C_1=25$

또 주어진 선분 위의 5개의 점으로 만들 수 있는 서로 다른 직선은 각각 한 개씩이므로 구하는 직선의 개수는

$25+2=27$

0941 구각형의 대각선의 개수는 9개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 방법의 수에서 변의 개수인 9를 뺀 것과 같으므로

$_9C_2-9=27$ 답 ②

0942 n각형의 대각선의 개수는 n개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 방법의 수에서 변의 개수인 n을 뺀 것과 같으므로

$${}_{n}C_{2}-n=54, \qquad \frac{n(n-1)}{2\cdot 1}-n=54$$
$$n^2-3n-108=0, \qquad (n+9)(n-12)=0$$
$$\therefore n=12\ (\because n\geq 3)$$

따라서 십이각형의 꼭짓점의 개수는 12이다.

답 ③

0943 7개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$${}_{7}C_{3}=35$$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$${}_{4}C_{3}={}_{4}C_{1}=4$$

이때 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$$35-4=31$$

답 31

0944 주어진 8개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 구하는 삼각형의 개수는 8개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수와 같다.

$$\therefore {}_{8}C_{3}=56$$

답 ③

0945 직선 l 위의 3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_{3}C_{2}=3$$

직선 m 위의 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_{4}C_{2}=6$$

따라서 구하는 사각형의 개수는 $3\cdot 6=18$

답 18

다른풀이 7개의 점 중에서 4개를 택하는 방법의 수는

$${}_{7}C_{4}={}_{7}C_{3}=35$$

직선 l 위의 점 중에서 3개를 택하고, 직선 m 위의 점 중에서 1개를 택하는 방법의 수는

$${}_{3}C_{3}\cdot{}_{4}C_{1}=4$$

직선 m 위의 점 중에서 3개를 택하고, 직선 l 위의 점 중에서 1개를 택하는 방법의 수는

$${}_{4}C_{3}\cdot{}_{3}C_{1}=4\cdot 3=12$$

직선 m 위의 점 중에서 4개를 택하는 방법의 수는

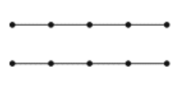
$${}_{4}C_{4}=1$$

따라서 구하는 사각형의 개수는 $35-(4+12+1)=18$

0946 15개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

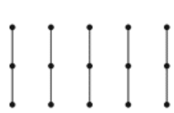
$${}_{15}C_{3}=455$$

(i) 오른쪽 그림과 같이 가로 방향의 한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는



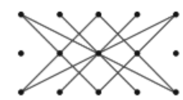
$$3\cdot{}_{5}C_{3}=30$$

(ii) 오른쪽 그림과 같이 세로 방향의 한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는



$$5\cdot{}_{3}C_{3}=5$$

(iii) 오른쪽 그림과 같이 대각선 방향의 한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는



$$8\cdot{}_{3}C_{3}=8$$

이상에서 구하는 삼각형의 개수는

$$455-(30+5+8)=412$$

답 ①

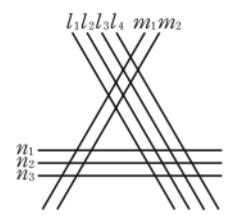
0947 가로로 나열된 5개의 평행한 직선 중에서 2개, 세로로 나열된 3개의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 결정된다.

따라서 구하는 평행사변형의 개수는

$${}_{5}C_{2}\cdot{}_{3}C_{2}=10\cdot 3=30$$

답 ②

0948 오른쪽 그림과 같이 평행한 직선을 l_i, m_j, n_k ($i=1, 2, 3, 4$, $j=1, 2$, $k=1, 2, 3$)라 하자.



(i) l_1, l_2, l_3, l_4 중에서 2개를 택하고, m_1, m_2를 택하는 경우

$${}_{4}C_{2}\cdot{}_{2}C_{2}=6\cdot 1=6 \quad \cdots ❶$$

(ii) m_1, m_2를 택하고, n_1, n_2, n_3 중에서 2개를 택하는 경우

$${}_{2}C_{2}\cdot{}_{3}C_{2}=1\cdot 3=3 \quad \cdots ❷$$

(iii) n_1, n_2, n_3 중에서 2개를 택하고, l_1, l_2, l_3, l_4 중에서 2개를 택하는 경우

$${}_{3}C_{2}\cdot{}_{4}C_{2}=3\cdot 6=18 \quad \cdots ❸$$

이상에서 구하는 평행사변형의 개수는

$$6+3+18=27 \quad \cdots ❹$$

답 27

채점 기준	비율
❶ 4개의 평행한 직선과 2개의 평행한 직선으로 만들어지는 평행사변형의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 2개의 평행한 직선과 3개의 평행한 직선으로 만들어지는 평행사변형의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 3개의 평행한 직선과 4개의 평행한 직선으로 만들어지는 평행사변형의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 모든 평행사변형의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0949 가로로 나열된 4개의 평행한 직선 중에서 2개, 세로로 나열된 6개의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 결정되므로 직사각형의 개수는

$${}_{4}C_{2}\cdot{}_{6}C_{2}=6\cdot 15=90$$

(i) 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는 15

(ii) 한 변의 길이가 2인 정사각형의 개수는 8

(iii) 한 변의 길이가 3인 정사각형의 개수는 3

이상에서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$$90-(15+8+3)=64$$

답 64

0950 동전 6개를 조건에 맞게 두 묶음으로 나누는 방법은

(1개, 5개), (2개, 4개), (3개, 3개)

(i) 6개를 1개, 5개로 나누는 방법의 수는

$${}_{6}C_{1}\cdot{}_{5}C_{5}=6\cdot 1=6$$

(ⅱ) 6개를 2개, 4개로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_2\cdot{}_4C_4=15\cdot1=15$$

(ⅲ) 6개를 3개, 3개로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{2!}=20\cdot1\cdot\frac{1}{2}=10$$

이상에서 구하는 방법의 수는

$$6+15+10=31$$

답 31

0951 $a={}_9C_5\cdot{}_4C_4=126$ ⋯ ❶

$b={}_9C_3\cdot{}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{3!}=84\cdot20\cdot1\cdot\frac{1}{6}=280$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=406$ ⋯ ❸

답 406

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0952 여학생 2명이 서로 다른 조에 속해야 하므로 남학생 4명을 2명씩 나누어 각각 여학생 1명과 한 조를 이루면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

$${}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}\cdot2=6$$

답 6

0953 8명을 4명, 4명으로 나누는 방법의 수는

$${}_8C_4\cdot{}_4C_4\cdot\frac{1}{2!}=70\cdot1\cdot\frac{1}{2}=35$$

학생 5명 중에서 4명이 같은 조가 되는 방법의 수는

$${}_5C_4={}_5C_1=5$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$35-5=30$$

답 ③

다른풀이 각 조에 적어도 한 명의 선생님이 포함되려면

선생님 1명과 학생 3명, 선생님 2명과 학생 2명

의 두 조로 나누어야 한다.

선생님 1명과 학생 3명을 뽑으면 나머지 한 조가 자동으로 결정되므로 구하는 방법의 수는

$${}_3C_1\cdot{}_5C_3=3\cdot10=30$$

0954 5개의 사탕을 2개, 2개, 1개로 나누는 방법의 수는

$${}_5C_2\cdot{}_3C_2\cdot{}_1C_1\cdot\frac{1}{2!}=10\cdot3\cdot1\cdot\frac{1}{2}=15$$

3개의 묶음을 3명의 학생에게 나누어 주는 방법의 수는

$$3!=6$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$15\cdot6=90$$

답 ②

0955 9장의 포토카드를 3장, 3장, 3장으로 나누는 방법의 수는

${}_9C_3\cdot{}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{3!}=84\cdot20\cdot1\cdot\frac{1}{6}=280$ ⋯ ❶

3개의 묶음을 3명의 학생에게 나누어 주는 방법의 수는

$3!=6$ ⋯ ❷

따라서 구하는 방법의 수는 $280\cdot6=1680$ ⋯ ❸

답 1680

채점 기준	비율
❶ 9장을 3장씩 3개의 묶음으로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	50 %
❷ 3개의 묶음을 3명의 학생에게 나누어 주는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 9장을 3명의 학생에게 3장씩 나누어 주는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

0956 6명을 2명, 2명, 1명, 1명으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_1\cdot{}_1C_1\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2!}=15\cdot6\cdot2\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=45$$

4개의 조를 2층부터 5층까지 4개의 층에 분배하는 방법의 수는

$$4!=24$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$45\cdot24=1080$$

답 1080

0957 아무도 선택하지 않은 방이 없으므로 각 방을 선택한 사람 수는 1명, 2명, 3명이어야 한다.

6명을 1명, 2명, 3명의 3개의 조로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_1\cdot{}_5C_2\cdot{}_3C_3=6\cdot10\cdot1=60$$

3개의 조를 3개의 방에 배정하는 방법의 수는

$$3!=6$$

따라서 구하는 방법의 수는 $60\cdot6=360$

답 360

0958 2대의 자동차를 각각 A, B라 하자.

운전할 수 있는 두 사람이 두 자동차 A, B에 나누어 타는 방법의 수는 $2!=2$

운전자를 제외한 4명을 2명, 2명의 두 조로 나누는 방법의 수는

$${}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}=3$$

두 조를 두 자동차 A, B에 배정하는 방법의 수는

$$2!=2$$

A자동차에서 운전자를 제외한 2명이 자리에 앉는 방법의 수는

$${}_4P_2=12$$

마찬가지로 B자동차에서 운전자를 제외한 2명이 자리에 앉는 방법의 수도 12이므로 구하는 방법의 수는

$$2\cdot3\cdot2\cdot12\cdot12=1728$$

답 ⑤

0959 구하는 방법의 수는 먼저 5개의 학급을 2개, 3개의 두 조로 나눈 후, 3개인 조에서 부전승으로 올라가는 한 학급을 택하는 방법의 수와 같으므로

$${}_5C_2\cdot{}_3C_3\cdot{}_3C_1=10\cdot1\cdot3=30$$

답 30

0960 구하는 방법의 수는 먼저 6명을 2명, 2명, 2명의 세 조로 나눈 후, 부전승으로 올라가는 한 조를 택하는 방법의 수와 같으므로

$_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{3!} \cdot {}_3C_1 = 15 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} \cdot 3 = 45$ 답 ①

다른풀이 6명을 2명, 4명의 두 조로 나누는 방법의 수는

$_6C_2 \cdot {}_4C_4 = 15$

4명을 다시 2명, 2명으로 나누는 방법의 수는

$_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} = 3$

따라서 구하는 방법의 수는 $15 \cdot 3 = 45$

0961 전략 $_nC_r = \frac{_nP_r}{r!}$임을 이용한다.

풀이 $_nC_3 : {}_{n+1}C_4 = 4 : 9$에서

$9 \cdot {}_nC_3 = 4 \cdot {}_{n+1}C_4$

$9 \cdot \frac{_nP_3}{3!} = 4 \cdot \frac{_{n+1}P_4}{4!}, \quad 9 \cdot {}_nP_3 = {}_{n+1}P_4$

$9n(n-1)(n-2) = (n+1)n(n-1)(n-2)$

$9 = n+1 \quad \therefore n = 8$ 답 ②

0962 전략 먼저 10개의 팀이 다른 모든 팀과 한 번씩 경기를 하는 방법의 수를 구한다.

풀이 10개 팀이 다른 모든 팀과 한 번씩 경기를 하는 방법의 수는

$_{10}C_2 = 45$

이때 각 팀이 다른 팀과 경기를 4번씩 하므로 전체 경기 수는

$45 \cdot 4 = 180$

답 180

0963 전략 먼저 짝수가 적힌 공의 개수와 홀수가 적힌 공의 개수를 구한다.

풀이 주머니에는 짝수가 적힌 공이 2, 4, 6, 8의 4개, 홀수가 적힌 공이 1, 3, 5, 7, 9의 5개가 들어 있다.

짝수가 적힌 4개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$_4C_2 = 6$

홀수가 적힌 5개의 공 중에서 1개를 꺼내는 경우의 수는

$_5C_1 = 5$

따라서 구하는 경우의 수는 $6 \cdot 5 = 30$

답 ③

0964 전략 순열의 수와 조합의 수를 구분한다.

풀이 6명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는

$a = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$ ··· ❶

4명을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$4! = 24$

이므로 $b = 15 \cdot 24 = 360$ ··· ❷

$\therefore a - b = -345$ ··· ❸

답 -345

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0965 전략 6개의 꼭짓점 중 4개의 점을 택하면 사각형이 만들어진다.

풀이 6개의 꼭짓점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 구하는 사각형의 개수는 6개의 점 중에서 4개를 택하는 방법의 수와 같다.

$\therefore {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$

답 15

0966 전략 분할하는 방법의 수를 이용한다.

풀이 (1) $_6C_1 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 = 6 \cdot 10 \cdot 1 = 60$ ··· ❶

(2) $_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{3!} = 15 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = 15$ ··· ❷

답 (1) 60 (2) 15

채점 기준	비율
❶ 책을 1권, 2권, 3권으로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	50 %
❷ 책을 2권씩 세 묶음으로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	50 %

0967 전략 3개의 빨간 구슬, 파란 구슬, 노란 구슬을 꺼내는 경우의 수를 각각 구한 후 합의 법칙을 이용한다.

풀이 (i) 빨간 구슬 3개를 꺼내는 경우의 수는

$_3C_3 = 1$

(ii) 파란 구슬 3개를 꺼내는 경우의 수는

$_4C_3 = {}_4C_1 = 4$

(iii) 노란 구슬 3개를 꺼내는 경우의 수는

$_5C_3 = {}_5C_2 = 10$

이상에서 구하는 경우의 수는

$1 + 4 + 10 = 15$ 답 ③

0968 전략 남녀 혼합 복식, 남자 복식, 여자 복식, 단식에 출전할 회원을 정하는 방법의 수를 구한 후 곱의 법칙을 이용한다.

풀이 남녀 혼합 복식에 출전할 회원 2명을 뽑는 방법의 수는

$_4C_1 \cdot {}_6C_1 = 4 \cdot 6 = 24$

남자 복식, 여자 복식에 출전할 회원 2명씩을 뽑는 방법의 수는

$_3C_2 \cdot {}_5C_2 = 3 \cdot 10 = 30$

남은 4명 중에서 단식에 출전할 회원 1명을 뽑는 방법의 수는

$_4C_1 = 4$

따라서 구하는 방법의 수는 $24 \cdot 30 \cdot 4 = 2880$

답 2880

0969 전략 순서를 따지지 않을 때에는 조합을 이용한다.

풀이 A가 5종류의 체험 프로그램 중에서 2종류를 선택하는 경우의 수는

$_5C_2 = 10$

B가 A가 선택한 2종류의 프로그램 중에서 하나를 선택하고, A가 선택하지 않은 3종류의 프로그램 중에서 하나를 선택하는 경우의 수는

$_2C_1 \cdot {}_3C_1 = 2 \cdot 3 = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$10 \cdot 6 = 60$ 답 60

다른풀이 A와 B가 같이 선택할 프로그램을 정하는 경우의 수는

$_5C_1 = 5$

나머지 4종류의 프로그램 중에서 A, B가 각각 하나씩 선택하는 경우의 수는

$_4C_1 \cdot {_3C_1}=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$5 \cdot 12=60$

0970 **전략** **집합 A는 2, 10을 반드시 원소로 갖고, 2보다 크고 10보다 작은 수 중에서 4개를 원소로 갖는다.**

풀이 집합 A의 가장 작은 원소가 2, 가장 큰 원소가 10이고 $n(A)=6$이므로 3 이상 9 이하의 자연수 중에서 4개의 원소를 택하면 된다.

따라서 집합 A의 개수는

$_7C_4={_7C_3}=35$

답 ③

0971 **전략** **모든 경우의 수에서 B회사의 제품이 하나도 포함되지 않거나 1개 포함되는 경우의 수를 뺀다.**

풀이 10가지 종류의 제품 중에서 4개를 택하는 방법의 수는

$_{10}C_4=210$ ⋯ ❶

(i) B회사의 제품이 하나도 포함되지 않는 경우

A회사와 C회사의 제품 중에서 4개를 택하는 방법의 수는

$_5C_4={_5C_1}=5$ ⋯ ❷

(ii) B회사의 제품이 1개 포함되는 경우

B회사의 제품 중에서 1개를 택하고 A회사와 C회사의 제품 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_5C_1 \cdot {_5C_3}=5 \cdot 10=50$ ⋯ ❸

따라서 구하는 방법의 수는

$210-(5+50)=155$ ⋯ ❹

답 155

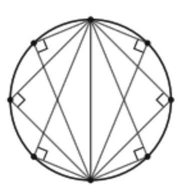
채점 기준	비율
❶ 4개의 제품을 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
❷ B회사의 제품이 하나도 포함되지 않는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ B회사의 제품이 1개 포함되는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ B회사의 제품이 적어도 2개 포함되는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

0972 **전략** **원에서 지름에 대한 원주각의 크기는 90°임을 이용하여 직각삼각형의 개수를 구한다.**

풀이 8개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_8C_3=56$

한편 8개의 점으로 만들 수 있는 지름은 4개이고, 오른쪽 그림과 같이 1개의 지름에 대하여 6개의 직각삼각형을 만들 수 있으므로 만들 수 있는 직각삼각형의 개수는



$4 \cdot 6=24$

따라서 직각삼각형이 아닌 삼각형의 개수는

$56-24=32$

답 32

0973 **전략** **한 직선 위에 있지 않은 n개의 점으로 만들 수 있는 삼각형의 개수는 $_nC_3$임을 이용한다.**

풀이 10개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_{10}C_3=120$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_4C_3={_4C_1}=4$

이때 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없고 이러한 직선은 5개가 있으므로 구하는 삼각형의 개수는

$120-4 \cdot 5=100$

답 100

0974 **전략** **순서가 정해져 있음을 이해한다.**

풀이 1부의 공연 순서를 정하는 방법의 수는 독창 2팀, 중창 2팀, 합창 3팀 중에서 각각 1팀씩 뽑는 방법의 수와 같으므로

$_2C_1 \cdot {_2C_1} \cdot {_3C_1}=2 \cdot 2 \cdot 3=12$

2부의 공연 순서를 정하는 방법의 수는 합창 2팀의 공연 순서를 정하는 방법의 수와 같으므로

$2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$12 \cdot 2=24$

답 ④

다른풀이 독창, 중창, 합창 팀끼리 공연 순서를 정하여 각각 1부, 2부로 나누면 되므로 구하는 방법의 수는

$2! \cdot 2! \cdot 3!=2 \cdot 2 \cdot 6=24$

0975 **전략** **먼저 꽃 8송이를 두 묶음으로 나누는 방법을 구한다.**

풀이 꽃 8송이를 조건에 맞게 두 묶음으로 나누는 방법은

(1송이, 7송이), (2송이, 6송이), (3송이, 5송이), (4송이, 4송이)

(i) 꽃을 1송이, 7송이로 나누는 방법의 수는

$_8C_1 \cdot {_7C_7}=8$

(ii) 꽃을 2송이, 6송이로 나누는 방법의 수는

$_8C_2 \cdot {_6C_6}=28$

(iii) 꽃을 3송이, 5송이로 나누는 방법의 수는

$_8C_3 \cdot {_5C_5}=56$

(iv) 꽃을 4송이, 4송이로 나누는 방법의 수는

$_8C_4 \cdot {_4C_4} \cdot \dfrac{1}{2!}=35$

이상에서 구하는 방법의 수는

$8+28+56+35=127$

답 127

0976 **전략** **먼저 10명을 두 조로 나누는 방법을 구한다.**

풀이 10명을 조건에 맞게 두 조로 나누는 방법은

(3명, 7명), (4명, 6명), (5명, 5명)

(i) 10명을 3명, 7명으로 나누는 방법의 수는

$_{10}C_3 \cdot {_7C_7}=120$

(ii) 10명을 4명, 6명으로 나누는 방법의 수는

$_{10}C_4 \cdot {_6C_6}=210$

(iii) 10명을 5명, 5명으로 나누는 방법의 수는

$_{10}C_5 \cdot {_5C_5} \cdot \dfrac{1}{2!}=126$

이상에서 10명을 두 조로 나누는 방법의 수는

$120+210+126=456$ ⋯ ❶

두 조를 서로 다른 2대의 승강기에 분배하는 방법의 수는

$2!=2$ ⋯ ❷

따라서 구하는 방법의 수는

$456 \cdot 2=912$ ⋯ ❸

답 912

20 조합

채점 기준	비율
❶ 10명을 두 조로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	60 %
❷ 두 조를 2대의 승강기에 분배하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
❸ 10명이 2대의 승강기에 타는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

0977 **전략** 6명을 3명, 3명의 두 조로 나눈 후, 각 조에서 부전승으로 올라가는 선수를 뽑는다.

풀이 6명을 3명, 3명의 두 조로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{2!}=20\cdot1\cdot\frac{1}{2}=10$$

각 조에서 부전승으로 올라갈 선수를 뽑는 방법의 수는

$${}_3C_1\cdot{}_3C_1=3\cdot3=9$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$10\cdot9=90$$

답 ③

0978 **전략** 같은 문자가 적힌 공의 개수에 따라 나누어 생각한다.

풀이 (i) 모두 같은 문자가 적힌 경우

AAA, BBB의 2가지이므로 경우의 수는 2 ⋯ ❶

(ii) 같은 문자가 적힌 공이 2개인 경우

같은 문자가 적힌 공은 A, B, C, D, E에서 1종류를 고르고, 나머지 1개의 공은 위에서 선택한 종류를 제외한 나머지 7종류에서 1개를 고르는 경우와 같으므로 경우의 수는

${}_5C_1\cdot{}_7C_1=35$ ⋯ ❷

(iii) 모두 다른 문자가 적힌 경우

A, B, C, D, E, F, G, H에서 3개를 고르는 경우와 같으므로 경우의 수는 ${}_8C_3=56$ ⋯ ❸

이상에서 구하는 경우의 수는

$2+35+56=93$ ⋯ ❹

답 93

채점 기준	비율
❶ 모두 같은 문자가 적힌 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ 같은 문자가 적힌 공이 2개인 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 모두 다른 문자가 적힌 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 모든 경우의 수를 구할 수 있다.	10 %

0979 **전략** '적어도' 조건이 있는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 사건이 일어나지 않는 경우의 수를 빼서 구한다.

풀이 (i) A조의 5명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

$${}_5C_3={}_5C_2=10$$

B조의 6명 중에서 1명을 뽑는 방법의 수는

$${}_6C_1=6$$

$$\therefore a=10\cdot6=60$$

(ii) 전체 11명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는

$${}_{11}C_4=330$$

A조의 5명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는

$${}_5C_4={}_5C_1=5$$

B조의 6명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는

$${}_6C_4={}_6C_2=15$$

$$\therefore b=330-(5+15)=310$$

(iii) A조의 특정한 2명을 제외한 나머지 9명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

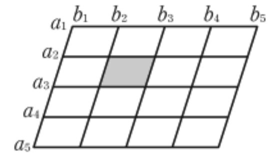
$$c={}_9C_2=36$$

$$\therefore c<a<b$$

답 ④

0980 **전략** 평행사변형을 만들려면 가로 방향의 선 2개와 세로 방향의 선 2개를 택해야 한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 각각의 평행한 선을 a_i, b_j ($i=1, 2, 3, 4, 5$, $j=1, 2, 3, 4, 5$)라 하자.



색칠한 부분을 포함하는 평행사변형을 만들려면 가로 방향의 선 2개는 a_1, a_2 중 한 개, a_3, a_4, a_5 중 한 개를 골라야 하므로 가로 방향의 선을 고르는 방법의 수는

$${}_2C_1\cdot{}_3C_1=2\cdot3=6$$

마찬가지로 세로 방향의 선 2개는 b_1, b_2 중 한 개, b_3, b_4, b_5 중 한 개를 골라야 하므로 세로 방향의 선을 고르는 방법의 수는

$${}_2C_1\cdot{}_3C_1=2\cdot3=6$$

따라서 구하는 평행사변형의 개수는

$$6\cdot6=36$$

답 ③

0981 **전략** 먼저 330을 소인수분해한다.

풀이 $330=2\cdot3\cdot5\cdot11$

이때 330의 소인수 2, 3, 5, 11을 2개의 묶음으로 나누어 곱하면 330이 되므로 구하는 방법의 수는 2, 3, 5, 11을 2개의 묶음으로 나누는 방법의 수와 같다.

(i) 1개, 3개로 나누는 방법의 수는

$${}_4C_1\cdot{}_3C_3=4\cdot1=4$$

(ii) 2개, 2개로 나누는 방법의 수는

$${}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot1\cdot\frac{1}{2}=3$$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$$4+3=7$$

답 ②

다른풀이 $330=2\cdot3\cdot5\cdot11$의 양의 약수의 개수는

$$(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)=16$$

330을 두 자연수의 곱으로 나타내는 것은 두 양의 약수의 곱으로 나타내는 것이므로 그 방법의 수는 $\frac{16}{2}=8$

이때 $330=1\cdot330$으로 나타내는 것은 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는

$$8-1=7$$

0982 **전략** 6개의 수를 2개씩 3묶음으로 나눈 후 그 합이 작은 것부터 차례로 1열, 2열, 3열에 채운다.

풀이 $a_1<a_2<a_3$이려면 6개의 수를 2개, 2개, 2개로 나눈 후 그 합이 작은 것부터 차례로 1열, 2열, 3열에 채우면 된다.

6개의 수를 2개씩 3묶음으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!}=15\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{6}=15$$

이때 각 열의 수끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2!\cdot2!\cdot2!=8$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$15\cdot8=120$$

답 ②

memo

memo