# 01강 집합의 뜻과 표현

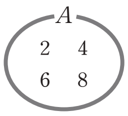
## 확인 문제 p. 6

**1** 1, 2, 3, 6

**2** (1) $A=\{2, 4, 6, 8\}$

(2) $A=\{x\,|\,x$는 10보다 작은 짝수$\}$

(3)




**3** (1) 유한집합

(2) $B=\{2, 3, 5\}$: 유한집합

(3) $C=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$: 무한집합

(4) $D=\varnothing$: 유한집합

## 교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 7

**1** '큰', '아름다운', '가까운', '유명한'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
따라서 집합인 것은 ⑤이다.

**2** ㄴ. '높은'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
따라서 집합이 아닌 것은 ㄴ이다.

**3** $A=\{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$

④ $15\notin A$

**4** ① $-\frac{1}{7}\in Q$ ② $0\in Q$ ④ $\frac{25}{4}\in Q$ ⑤ $\sqrt{3}\notin Q$

따라서 옳은 것은 ③이다.

**5** (1) $\{x\,|\,x$는 $-3\le x\le 3$인 정수$\}$

(2) $\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$

**6** (1) $\{x\,|\,x$는 12의 양의 약수$\}$

(2) $x^2-3x-10=0$에서

$(x+2)(x-5)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=5$

$\therefore \{-2, 5\}$

**7** $A=\{3, 4, 5, 6\}$이므로 $n(A)=4$

$B=\varnothing$이므로 $n(B)=0$

$x^2-3x+2=0$에서 $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

따라서 $C=\{1, 2\}$이므로 $n(C)=2$

**8** $A=\{0\}$이므로 $n(A)=1$

$B=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$이므로 $n(B)=9$

$C=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$이므로 $n(C)=6$

# 02강 집합 사이의 포함 관계

## 확인 문제 p. 8

**1** 집합 $B$의 모든 원소가 집합 $A$에 속하므로 $B\subset A$

**2** $x^2-2x-3=0$에서

$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

$\therefore B=\{-1, 3\}$

4의 양의 약수는 1, 2, 4이므로 $D=\{1, 2, 4\}$

따라서 서로 같은 집합은 $A$와 $D$, $B$와 $C$이다.

**3** 집합 $A$의 원소가 4개이므로

(1) $2^4=16$ (2) $2^4-1=15$

## 교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 9

**1** $A=\{5, 10, 15\}$의 부분집합을 원소의 개수에 따라 구하면

원소가 0개인 것: $\varnothing$

원소가 1개인 것: $\{5\}$, $\{10\}$, $\{15\}$

원소가 2개인 것: $\{5, 10\}$, $\{5, 15\}$, $\{10, 15\}$

원소가 3개인 것: $\{5, 10, 15\}$

**2** $A=\{1, 2, 4, 8\}$의 부분집합을 원소의 개수에 따라 구하면

원소가 0개인 것: $\varnothing$

원소가 1개인 것: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{8\}$

원소가 2개인 것: $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 8\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 8\}$, $\{4, 8\}$

원소가 3개인 것: $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 8\}$, $\{1, 4, 8\}$, $\{2, 4, 8\}$

원소가 4개인 것: $\{1, 2, 4, 8\}$

**3** $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

① $3\in A$ ② $4\notin A$

③ $\{2, 4\}\not\subset A$ ⑤ $\{1, 3, 5\}\subset A$

따라서 옳은 것은 ④이다.

**4** $A=\{4, 6, 8, 10\}$

⑤ 모든 집합은 자기 자신의 부분집합이므로

$\{4, 6, 8, 10\} \subset A$

**5** $A=B$이므로 $a-1=6$, $2b=2$

$\therefore a=7$, $b=1$

**6** $A \subset B$이고 $B \subset A$이면 $A=B$이므로

$a+b=3$, $a-b=1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$

**7** $A=\{2, 3, 5, 7\}$이므로

(1) $2^4=16$

(2) $2^4-1=15$

(3) $2^{4-1}=2^3=8$

**8** $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로

(1) $2^6=64$

(2) $2^6-1=63$

(3) $2^{6-2}=2^4=16$

## 01~02강 족집게 기출문제 p. 10~13

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** ② | **2** ② | **3** ④ | **4** ③ | |
| **5** ㄱ, ㄷ, ㄹ | | **6** 6 | **7** ④ | **8** ⑤ |
| **9** ② | **10** ① | **11** ③ | **12** $-1$ 또는 1 | |
| **13** ③ | **14** ② | **15** ⑤ | **16** ③ | **17** 1 |
| **18** ② | **19** ③ | **20** ⑤ | **21** $\frac{85}{8}$ | **22** ④ |
| **23** ③ | **24** (1) 풀이 참조 (2) 15 | | **25** 4 | **26** 8 |

**1** ㄱ. '신나는'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

ㄹ. '큰'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

따라서 보기 중 집합인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**2** $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$

② $2 \in A$, $2 \in B$

**3** ① $A=\{1, 2, 3, \cdots, 17\}$

② $A=\{1, 2, 3, \cdots, 18\}$

③ $A=\{3, 6, 9, 12, 15\}$

④ $A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

⑤ $A=\{3, 6, 9, 12, \cdots\}$

따라서 바르게 나타낸 것은 ④이다.

**4** 집합 $C=\{z \mid z=x+y,\ x \in A,\ y \in B\}$의 원소를 구하면 다음 표와 같다.

| $y$ \ $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

$\therefore C=\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

따라서 집합 $C$의 모든 원소의 합은

$2+3+4+5+6+7=27$

**5** ㄱ. $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$: 유한집합

ㄴ. $\{7, 14, 21, 28, \cdots\}$: 무한집합

ㄷ. $\varnothing$: 유한집합

ㄹ. $\{10, 11, 12, 13, \cdots, 99\}$: 유한집합

따라서 유한집합인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

**6** 집합 $A$가 공집합이 되려면 $5 \notin A$이어야 하므로 $k$의 값이 될 수 있는 자연수는 6, 7, 8, 9이다.

따라서 자연수 $k$의 최솟값은 6이다.

**7** ① $n(A)=4$

② $n(\varnothing)+n(\{0\})=0+1=1$

③ $A=\{1, 2, 4\}$이므로 $n(A)=3$

④ $A=\varnothing$이므로 $n(A)=0$

⑤ $n(\{1, 2, 3\})-n(\{1, 2\})=3-2=1$

따라서 옳은 것은 ④이다.

**8** (i) $|x|=2$, $|y|=0$일 때

$|x|=2$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

$|y|=0$에서 $y=0$

따라서 구하는 순서쌍 $(x, y)$는

$(-2, 0)$, $(2, 0)$

(ii) $|x|=1$, $|y|=1$일 때

$|x|=1$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$|y|=1$에서 $y=-1$ 또는 $y=1$

따라서 구하는 순서쌍 $(x, y)$는

$(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$

(iii) $|x|=0$, $|y|=2$일 때

$|x|=0$에서 $x=0$

$|y|=2$에서 $y=-2$ 또는 $y=2$

따라서 구하는 순서쌍 $(x, y)$는

$(0, -2)$, $(0, 2)$

(i), (ii), (iii)에 의하여 순서쌍 $(x, y)$는 모두 8개이므로

$n(X)=8$

**9** ① $\varnothing$은 집합 $A$의 원소이므로 $\varnothing \in A$

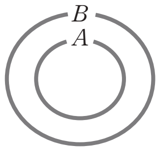
② $\{1\}$은 집합 $A$의 부분집합이므로 $\{1\} \subset A$

③ $\{1, 2\}$는 집합 $A$의 원소이므로 $\{1, 2\} \in A$

④ $\{2\}$는 집합 $A$의 부분집합이므로 $\{2\} \subset A$

⑤ $\{1, 2\}$는 집합 $A$의 부분집합이므로 $\{1, 2\} \subset A$
따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

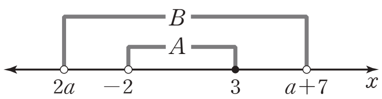
**10** $A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로
$A \subset B$
따라서 두 집합 $A$, $B$의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




**11** $A=\{-2, 0, 2\}$, $B=\{-2, 2\}$, $C=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$이므로 $B \subset A \subset C$

**12** $A \subset B$가 성립하려면 집합 $A$의 모든 원소가 집합 $B$에 속해야 하므로 $a \in B$이어야 한다.
즉, $a=-1$ 또는 $a=1$ 또는 $a=3$
(i) $a=-1$일 때
$A=\{-1, 0, 1\}$이므로 $A \subset B$
(ii) $a=1$일 때
$A=\{0, 1, 3\}$이므로 $A \subset B$
(iii) $a=3$일 때
$A=\{0, 3, 5\}$이므로 $A \not\subset B$
(i), (ii), (iii)에 의하여
$a=-1$ 또는 $a=1$

**13** $A \subset B$가 성립하도록 두 집합 $A$, $B$를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.




$2a \le -2$, $a+7>3$이어야 하므로
$-4<a \le -1$
따라서 정수 $a$는 $-3$, $-2$, $-1$의 3개이다.

**14** 조건 (가)에서 집합 $B$는 집합 $A$의 부분집합이고 조건 (나)에서 집합 $B$의 원소는 2개이며 조건 (다)에서 집합 $B$는 원소 $c$를 포함하지 않는다.
따라서 주어진 조건을 만족하는 집합 $B$는
$\{a, b\}$, $\{a, d\}$, $\{b, d\}$
의 3개이다.

**15** $A=B$이므로
$2a-b=-4$, $3a+2b=1$
두 식을 연립하여 풀면
$a=-1$, $b=2$
$\therefore b-a=3$

**16** $A \subset B$이고 $B \subset A$이면 $A=B$이므로
$a^2+1=1$, $a^2=0$ $\quad \therefore a=0$
따라서 $A=\{-1, 1, 2\}$, $B=\{-1, 1, b-1\}$이므로
$b-1=2$ $\quad \therefore b=3$
$\therefore a^2+b^2=9$

**17** $A=B$이므로
$a^2-3a=-2$, $a^2-3a+2=0$, $(a-1)(a-2)=0$
$\therefore a=1$ 또는 $a=2$
(i) $a=1$일 때
$A=\{-2, 1, 3\}$, $B=\{-2, 1, 3\}$이므로
$A=B$
(ii) $a=2$일 때
$A=\{-2, 3, 6\}$, $B=\{-2, 1, 3\}$이므로
$A \neq B$
(i), (ii)에 의하여 $a=1$

**18** $A=\{0, 1, 2, 3, 4\}$이므로 원소 0은 포함하고 원소 1은 포함하지 않는 집합 $A$의 부분집합의 개수는
$2^{5-1-1}=2^3=8$

**19** 원소 1, 2를 포함하는 집합 $A$의 진부분집합 $X$의 개수는
$2^{6-2}-1=2^4-1=15$

**20** $A=\{5, 8, 11, 14, 17\}$의 원소 중 홀수는 5, 11, 17이므로 집합 $A$의 부분집합 중 적어도 한 개의 홀수를 포함하는 부분집합은 집합 $A$의 모든 부분집합에서 홀수를 한 개도 포함하지 않는 집합, 즉 집합 $\{8, 14\}$의 부분집합을 제외시키면 된다.
따라서 구하는 부분집합의 개수는
$2^5-2^2=32-4=28$

**21** 원소 중 가장 큰 수가 1인 집합은 원소 1을 포함하는 부분집합이므로 그 개수는
$2^{4-1}=2^3=8$
원소 중 가장 큰 수가 $\frac{1}{2}$인 집합은 원소 1을 포함하지 않고 원소 $\frac{1}{2}$을 포함하는 부분집합이므로 그 개수는
$2^{4-1-1}=2^2=4$
원소 중 가장 큰 수가 $\frac{1}{4}$인 집합은 원소 1, $\frac{1}{2}$을 포함하지 않고 원소 $\frac{1}{4}$을 포함하는 부분집합이므로 그 개수는
$2^{4-2-1}=2$
원소 중 가장 큰 수가 $\frac{1}{8}$인 집합은 원소 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$을 포함하지 않고 원소 $\frac{1}{8}$을 포함하는 부분집합이므로 그 개수는
1

따라서 각 부분집합에서 원소 중 가장 큰 수를 뽑아 모두 더하면

$(1\times8)+\left(\frac{1}{2}\times4\right)+\left(\frac{1}{4}\times2\right)+\left(\frac{1}{8}\times1\right)=\frac{85}{8}$

**22** $x$와 $6-x$가 모두 자연수이므로

$x\geq1$, $6-x\geq1$

$\therefore 1\leq x\leq5$

따라서 $x$가 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5이고

$1\in A$이면 $6-1=5\in A$

$2\in A$이면 $6-2=4\in A$

$3\in A$이면 $6-3=3\in A$

$4\in A$이면 $6-4=2\in A$

$5\in A$이면 $6-5=1\in A$

이므로 1과 5, 2와 4는 반드시 짝을 이루어 집합 $A$의 원소로 포함되어야 하고, 3은 독립적으로 집합 $A$의 원소로 포함될 수 있다.

집합 $A$를 원소의 개수에 따라 구하면

원소가 1개인 것: $\{3\}$

원소가 2개인 것: $\{1, 5\}$, $\{2, 4\}$

원소가 3개인 것: $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$

원소가 4개인 것: $\{1, 2, 4, 5\}$

원소가 5개인 것: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

따라서 집합 $A$는 모두 7개이다.

**23** $\mathrm{P}(A)$는 집합 $A=\{a, \{b, c\}\}$의 부분집합을 원소로 갖는 집합이다.

$n(A)=2$이므로 집합 $A$의 부분집합의 개수는

$2^2=4$

$\therefore n(\mathrm{P}(A))=4$

**24** (1) 세 집합 $X$, $Y$, $Z$를 원소나열법으로 각각 나타내면

$X=\{6, 12, 18, 24\}$ …… (가)

$Y=\{3, 5, 7, 9, 11\}$ …… (나)

$Z=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ …… (다)

(2) $n(X)=4$, $n(Y)=5$, $n(Z)=6$이므로 …… (라)

$n(X)+n(Y)+n(Z)=15$ …… (마)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) 집합 $X$를 원소나열법으로 나타낸다. | 1점 |
| (나) 집합 $Y$를 원소나열법으로 나타낸다. | 1점 |
| (다) 집합 $Z$를 원소나열법으로 나타낸다. | 1점 |
| (라) $n(X)$, $n(Y)$, $n(Z)$를 구한다. | 1점 |
| (마) $n(X)+n(Y)+n(Z)$의 값을 구한다. | 1점 |

**25** $A\subset B$가 성립하려면 집합 $A$의 모든 원소가 집합 $B$에 속해야 하므로 $3\in B$이어야 한다.

$\therefore a+3=3$ 또는 $2a-1=3$ …… (가)

(i) $a+3=3$일 때

$a=0$이므로 $A=\{-1, 3\}$, $B=\{-1, 2, 3\}$

$\therefore A\subset B$

(ii) $2a-1=3$일 때

$a=2$이므로 $A=\{1, 3\}$, $B=\{2, 3, 5\}$

$\therefore A\not\subset B$

(i), (ii)에 의하여 $a=0$

$\therefore B=\{-1, 2, 3\}$ …… (나)

따라서 집합 $B$의 모든 원소의 합은

$-1+2+3=4$ …… (다)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) 집합 $B$의 원소 중에서 3이 될 수 있는 원소를 안다. | 2점 |
| (나) 조건을 만족하는 집합 $B$를 구한다. | 3점 |
| (다) 집합 $B$의 모든 원소의 합을 구한다. | 1점 |

**26** 두 집합 $A$, $B$를 원소나열법으로 나타내면

$A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ …… (가)

이때 집합 $X$는 집합 $B$의 부분집합 중 원소 1, 2, 4를 반드시 포함하는 집합이다. …… (나)

따라서 구하는 집합 $X$의 개수는

$2^{6-3}=2^3=8$ …… (다)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) 두 집합 $A$, $B$를 원소나열법으로 나타낸다. | 2점 |
| (나) 집합 $X$의 조건을 구한다. | 2점 |
| (다) 집합 $X$의 개수를 구한다. | 2점 |

# 03강 집합의 연산 (1)

## 확인 문제 p. 14

**1** (1) $\{1, 2, 4\}$

(2) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$

**2** (1) $\{4, 5, 7\}$ (2) $\{2, 4, 6\}$

(3) $\{2, 6\}$ (4) $\{5, 7\}$

## 교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제 p. 15

**1** (1) $A=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$, $B=\{2, 3, 5, 7, \cdots\}$이므로

$A\cap B=\{2\}$

따라서 두 집합 $A$, $B$는 서로소가 아니다.

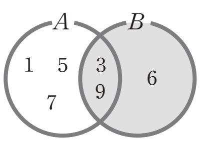
(2) $x^2+2x-8=0$에서
$(x+4)(x-2)=0$
$\therefore\ x=-4$ 또는 $x=2$
즉, $A=\{-4,\ 2\}$
$x^2-5x+6<0$에서
$(x-2)(x-3)<0$
$\therefore\ 2<x<3$
즉, $B=\{x\,|\,2<x<3\}$
따라서 $A\cap B=\varnothing$이므로 두 집합 $A$, $B$는 서로소이다.
(3) $A=\{1,\ 3,\ 9\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$이므로
$A\cap B=\{1,\ 3\}$
따라서 두 집합 $A$, $B$는 서로소가 아니다.

**2** (1) $A\cap B=\{x\,|\,x$는 정삼각형$\}$
따라서 두 집합 $A$, $B$는 서로소가 아니다.
(2) $A=\{0,\ 1,\ 2\}$, $B=\{3,\ 4\}$에서 $A\cap B=\varnothing$
따라서 두 집합 $A$, $B$는 서로소이다.
(3) $2x^2-11x+5=0$에서
$(2x-1)(x-5)=0$
$\therefore\ x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=5$
즉, $A=\left\{\frac{1}{2},\ 5\right\}$
따라서 $A\cap B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$이므로 두 집합 $A$, $B$는 서로소가 아니다.

**3** $A\cap B=\{2,\ 8\}$이므로 $8\in A$
$a-1=8$ $\therefore\ a=9$

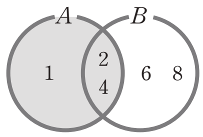
**4** $A\cap B=\{-3,\ 0\}$이므로 $-3\in B$
$a^2-4a=-3$, $a^2-4a+3=0$
$(a-1)(a-3)=0$
$\therefore\ a=1$ 또는 $a=3$
(i) $a=1$일 때
$A=\{-3,\ -2,\ 0\}$, $B=\{-3,\ 0,\ 1\}$이므로
$A\cap B=\{-3,\ 0\}$
(ii) $a=3$일 때
$A=\{-2,\ -1,\ 0\}$, $B=\{-3,\ 0,\ 1\}$이므로
$A\cap B=\{0\}$
(i), (ii)에 의하여 $a=1$

**5** 두 집합 $A$, $B$를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



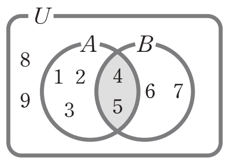

$\therefore\ B=\{3,\ 6,\ 9\}$

**6** 두 집합 $A$, $B$를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



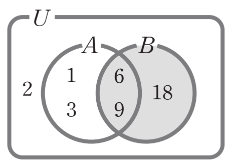

$\therefore\ A=\{1,\ 2,\ 4\}$

**7** $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$이므로 전체집합 $U$와 두 부분집합 $A$, $B$를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.




$\therefore\ A\cap B=\{4,\ 5\}$

**8** $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$이므로 전체집합 $U$와 두 부분집합 $A$, $B$를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.




$\therefore\ B=\{6,\ 9,\ 18\}$

## 04강 집합의 연산 (2)

### 확인 문제 p. 16

**1** (1) $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C=\{1,\ 3,\ 5\}$
(2) $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{5\}$

**2** (1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=23+15-10$
$=28$
(2) $n(A^C)=n(U)-n(A)$
$=30-23$
$=7$
(3) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
$=23-10$
$=13$
(4) $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$
$=15-10$
$=5$

## 교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 17

**1** (1) $A\cup(A\cap B)^c=A\cup(A^c\cup B^c)$

$=(A\cup A^c)\cup B^c$

$=U\cup B^c$

$=U$

(2) $(A\cup B)^c\cup(A^c\cap B)=(A^c\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$

$=A^c\cap(B^c\cup B)$

$=A^c\cap U$

$=A^c$

**2** (1) $(A\cap B^c)\cup B=(A\cup B)\cap(B^c\cup B)$

$=(A\cup B)\cap U$

$=A\cup B$

(2) $(A\cup B)\cap(A^c-B)=(A\cup B)\cap(A^c\cap B^c)$

$=(A\cup B)\cap(A\cup B)^c$

$=\varnothing$

**3** 야구를 좋아하는 학생의 집합을 $A$, 축구를 좋아하는 학생의 집합을 $B$라고 하면

$n(A)=23$, $n(B)=17$, $n(A\cap B)=12$

$\therefore\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=23+17-12$

$=28$

따라서 야구 또는 축구를 좋아하는 학생 수는 28이다.

**4** 수학을 좋아하는 학생의 집합을 $A$, 영어를 좋아하는 학생의 집합을 $B$라고 하면

$n(A)=19$, $n(B)=13$, $n(A\cup B)=25$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$25=19+13-n(A\cap B)$

$\therefore\ n(A\cap B)=7$

따라서 수학과 영어를 모두 좋아하는 학생 수는 7이다.

**5** $U=\{1, 2, 3, 4, \cdots, 15\}$이고

$A=\{1, 2, 5, 10\}$, $B=\{5, 10, 15\}$이므로

$A\cup B=\{1, 2, 5, 10, 15\}$

$\therefore\ n(A^c\cap B^c)=n((A\cup B)^c)$

$=n(U)-n(A\cup B)$

$=15-5=10$

**6** $U=\{1, 2, 3, 4, \cdots, 10\}$이고

$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{3, 6, 9\}$이므로

$A\cap B=\{6\}$

$\therefore\ n(A^c\cup B^c)=n((A\cap B)^c)$

$=n(U)-n(A\cap B)$

$=10-1=9$

## 계산력 다지기 p. 18~19

**1** (1) $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$

(2) $A^c=\{2, 5, 7, 8, 9\}$

(3) $A^c\cap B^c=(A\cup B)^c=\{5, 8\}$

(4) $A-B=\{1, 3, 6\}$

(5) $A-B^c=A\cap(B^c)^c=A\cap B=\{4\}$

(6) $(A-B)\cup(B-A)=\{1, 3, 6\}\cup\{2, 7, 9\}$

$=\{1, 2, 3, 6, 7, 9\}$

**2** (1) $A\cap(B\cup C)=\{1, 3, 4, 6\}\cap\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

$=\{3, 4, 6\}$

(2) $(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$=\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}\cap\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$=\{1, 3, 4, 6, 7\}$

(3) $A-(C-B)=\{1, 3, 4, 6\}-\{3, 5, 6\}=\{1, 4\}$

(4) $(A\cup B)^c\cap(B\cup C)$

$=\{5, 8\}\cap\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}=\{5\}$

(5) $(A\cap B^c)-(A\cap C)^c$

$=\{1, 3, 6\}-\{1, 2, 5, 7, 8, 9\}=\{3, 6\}$

(6) $(B\cup C)\cap(A\cup C^c)$

$=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}\cap\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$

$=\{2, 3, 4, 6, 9\}$

**3** (1) $A\cap(A\cup B)^c=A\cap(A^c\cap B^c)$

$=(A\cap A^c)\cap B^c$

$=\varnothing\cap B^c=\varnothing$

(2) $(A-B)^c\cap A=(A\cap B^c)^c\cap A$

$=(A^c\cup B)\cap A$

$=(A^c\cap A)\cup(B\cap A)$

$=\varnothing\cup(B\cap A)=A\cap B$

(3) $(A\cap B)\cup(A^c\cap B)=(A\cup A^c)\cap B$

$=U\cap B=B$

(4) $(A\cup B)\cap(A^c\cap B)^c=(A\cup B)\cap(A\cup B^c)$

$=A\cup(B\cap B^c)$

$=A\cup\varnothing$

$=A$

(5) $(A\cup B^c)\cap(A^c-B)^c$

$=(A\cup B^c)\cap(A^c\cap B^c)^c$

$=(A\cup B^c)\cap(A\cup B)$

$=A\cup(B^c\cap B)=A\cup\varnothing=A$

(6) $[(A^c\cup B)\cap(A\cup B)]\cup A$

$=[(A^c\cap A)\cup B]\cup A$

$=\varnothing\cup B\cup A=A\cup B$

**4** (1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=45+37-21=61$

(2) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
$=45-21=24$

(3) $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$
$=37-21=16$

(4) 두 집합 $A-B$와 $B-A$는 서로소이므로
$n((A-B)\cup(B-A))$
$=n(A-B)+n(B-A)$
$=24+16=40$

**5** (1) $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$
이므로
$n(A\cup B)=n(U)-n(A^C\cap B^C)=98-8=90$

(2) $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=57+64-90=31$

(3) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=57-31=26$

(4) $n(A^C)=n(U)-n(A)=98-57=41$

(5) $n(B^C)=n(U)-n(B)=98-64=34$

(6) $n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$
$=98-31=67$

**6** (1) $n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=17+15+16-5-6-3+2=36$

(2) $n(B\cap C)=0$이므로 $n(A\cap B\cap C)=0$
$n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=5+4+3-1-0-2+0=9$

## 03~04강 족집게 기출문제

p. 20~23

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** $\{4, 8\}$ | **2** ② | **3** 21 | **4** ④ | **5** 10 |
| **6** 4 | **7** ⑤ | **8** ④ | **9** ㄴ, ㄷ | **10** ② |
| **11** ⑤ | **12** ③ | **13** ① | **14** ㄷ, ㅂ | **15** ④ |
| **16** ③ | **17** 20 | **18** 8 | **19** ④ | **20** 5 |
| **21** ③ | **22** ① | **23** 15 | **24** 27 | **25** ③ |
| **26** (1) $-1$ (2) $\{0, 1, 2, 5\}$ | | | **27** 8 | **28** 27 |

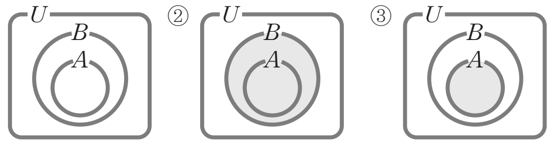
**1** $A=\{2, 4, 6, 8\}$, $B=\{2, 5, 8, 11\}$, $C=\{4, 8, 12, \cdots\}$
이므로
$A\cup B=\{2, 4, 5, 6, 8, 11\}$
$\therefore (A\cup B)\cap C=\{2, 4, 5, 6, 8, 11\}\cap\{4, 8, 12, \cdots\}$
$=\{4, 8\}$

**2** $A-B=\{5\}$이므로
$A\cap B=\{2, 3, 2a-b\}$
$3\in B$이어야 하므로
$-a+3b=3$ …… ㉠
$2a-b\in B$이어야 하므로
$2a-b=9$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=6$, $b=3$
$\therefore a+b=9$

**3** $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$, $A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{4, 6, 8\}$
이므로 $A^C=\{4, 5, 7, 8, 9\}$
$\therefore A^C-B=\{4, 5, 7, 8, 9\}-\{4, 6, 8\}=\{5, 7, 9\}$
따라서 $A^C-B$의 모든 원소의 합은
$5+7+9=21$

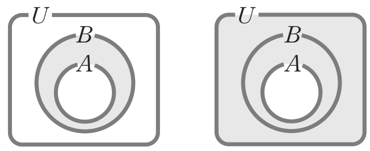
**4** 두 집합 $A$, $B$ 사이의 관계를 나타낸 벤다이어그램을 이용한다.

① ② ③



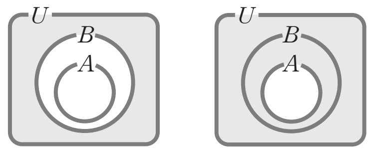

$A-B=\varnothing$　　$A\cup B=B$　　$A\cap B=A$

④




$B-A$　$\neq$　$A^C$

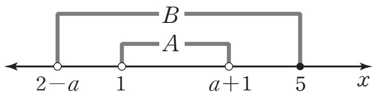
⑤




$B^C$　$\subset$　$A^C$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

**5** $A\cap B=A$이므로 $A\subset B$
$A\subset B$를 만족하도록 두 집합 $A$, $B$를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.




$2-a\le 1$, $a+1\le 5$이어야 하므로 $1\le a\le 4$
따라서 정수 $a$는 1, 2, 3, 4이므로 모든 정수 $a$의 값의 합은
$1+2+3+4=10$

**6** $B\cap X=X$이므로 $X\subset B$
$(B-A)\cup X=X$이므로 $(B-A)\subset X$
$\therefore (B-A)\subset X\subset B$
이때 $A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{2, 3, 5, 7, 11\}$이므로
$B-A=\{5, 7, 11\}$
$\therefore \{5, 7, 11\}\subset X\subset\{2, 3, 5, 7, 11\}$

따라서 집합 $X$는 집합 $B$의 부분집합 중 원소 5, 7, 11을 반드시 포함하는 집합이므로 집합 $X$의 개수는

$2^{5-3}=2^2=4$

**7** ① $A\cap B=\{7\}$

따라서 두 집합 $A$, $B$는 서로소가 아니다.

② $A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$에서

$A\cap B=\{2\}$

따라서 두 집합 $A$, $B$는 서로소가 아니다.

③ $A\subset B$이므로 $\quad A\cap B=A$

따라서 두 집합 $A$, $B$는 서로소가 아니다.

④ $A\cap B\neq\varnothing$이므로 두 집합 $A$, $B$는 서로소가 아니다.

⑤ $A\cap B^C=A$에서 $A-B=A$이므로 $\quad A\cap B=\varnothing$

따라서 두 집합 $A$, $B$는 서로소이다.

따라서 두 집합 $A$, $B$가 서로소인 것은 ⑤이다.

**8** 주어진 조건에서 $\quad A\cap B=\{1\}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

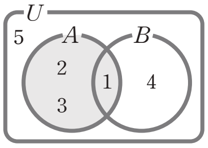
$A^C\cap B=B-A=\{4\}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

드모르간 법칙에 의하여

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{5\}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

$\therefore A\cup B=\{1, 2, 3, 4\}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

따라서 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로




$A=\{1, 2, 3\}$

**9** ㄱ. $A\cap(A^C\cup B)=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)$

$=\varnothing\cup(A\cap B)$

$=A\cap B$

ㄴ. $(A\cap B)\cup(A^C\cap B)=(A\cup A^C)\cap B$

$=U\cap B$

$=B$

ㄷ. $(A-B)\cup(A\cap B)=(A\cap B^C)\cup(A\cap B)$

$=A\cap(B^C\cup B)$

$=A\cap U$

$=A$

ㄹ. $(A-B)\cup(A-C)=(A\cap B^C)\cup(A\cap C^C)$

$=A\cap(B^C\cup C^C)$

$=A\cap(B\cap C)^C$

$=A-(B\cap C)$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**10** $(B-A)^C-A=(B\cap A^C)^C\cap A^C$

$=(B^C\cup A)\cap A^C$

$=(B^C\cap A^C)\cup(A\cap A^C)$

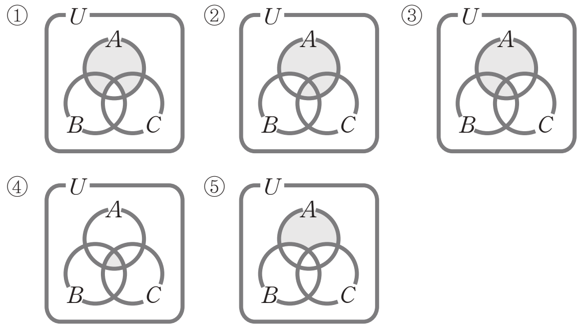
$=(B^C\cap A^C)\cup\varnothing$

$=B^C\cap A^C$

$=(A\cup B)^C$

따라서 $(B-A)^C-A=(A\cup B)^C$이므로 이를 벤다이어그램으로 나타낸 것은 ②이다.

**11** 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.




따라서 색칠한 부분을 나타내는 집합은 ⑤이다.

**12** 주어진 식의 좌변을 정리하면

$[(A\cap B)\cup(B-A)]\cap A=[(A\cap B)\cup(B\cap A^C)]\cap A$

$=[(A\cap B)\cup(A^C\cap B)]\cap A$

$=[(A\cup A^C)\cap B]\cap A$

$=(U\cap B)\cap A$

$=B\cap A$

따라서 $B\cap A=B$이므로 두 집합 $A$, $B$ 사이의 포함 관계는

$B\subset A$

**13** 주어진 식의 좌변을 정리하면

$(A\cup B)\cap A^C=(A\cap A^C)\cup(B\cap A^C)$

$=\varnothing\cup(B\cap A^C)$

$=B\cap A^C$

$=B-A$

따라서 $B-A=B$이므로 $\quad A\cap B=\varnothing$

**14** ㄱ. 4의 배수는 모두 2의 배수이므로 $\quad G_2\cup G_4=G_2$

ㄴ. 집합 $G_3\cap G_{12}$는 3과 12의 공배수의 집합, 즉 12의 배수의 집합이므로 $\quad G_3\cap G_{12}=G_{12}$

ㄷ. 집합 $G_4\cap G_5$는 4와 5의 공배수의 집합, 즉 20의 배수의 집합이므로 $\quad G_2\cup(G_4\cap G_5)=G_2\cup G_{20}$

20의 배수는 모두 2의 배수이므로

$G_2\cup(G_4\cap G_5)=G_2\cup G_{20}=G_2$

ㄹ. 6의 배수는 모두 3의 배수이므로

$G_2\cap(G_3\cup G_6)=G_2\cap G_3$

집합 $G_2\cap G_3$은 2와 3의 공배수의 집합, 즉 6의 배수의 집합이므로 $\quad G_2\cap(G_3\cup G_6)=G_2\cap G_3=G_6$

ㅁ. 집합 $G_4\cap G_8$은 4와 8의 공배수의 집합, 즉 8의 배수의 집합이므로 $\quad G_{16}\cup(G_4\cap G_8)=G_{16}\cup G_8$

16의 배수는 모두 8의 배수이므로

$G_{16}\cup(G_4\cap G_8)=G_{16}\cup G_8=G_8$

ㅂ. $G_3\cap(G_4\cup G_6)=(G_3\cap G_4)\cup(G_3\cap G_6)$

집합 $G_3\cap G_4$는 3과 4의 공배수의 집합, 즉 12의 배수의 집합이고, 집합 $G_3\cap G_6$은 3과 6의 공배수의 집합,

즉 6의 배수의 집합이므로

$(G_3 \cap G_4) \cup (G_3 \cap G_6) = G_{12} \cup G_6$

12의 배수는 모두 6의 배수이므로

$G_3 \cap (G_4 \cup G_6) = G_{12} \cup G_6 = G_6$

따라서 보기 중 옳지 않은 것은 ㄷ, ㅂ이다.

**15** ① $A \triangle B = (A-B) \cup (B-A)$
$= (B-A) \cup (A-B)$
$= B \triangle A$

② $A^C \triangle B^C = (A^C - B^C) \cup (B^C - A^C)$
$= (A^C \cap B) \cup (B^C \cap A)$
$= (B-A) \cup (A-B)$
$= (A-B) \cup (B-A)$
$= A \triangle B$

③ $A \triangle \varnothing = (A-\varnothing) \cup (\varnothing - A)$
$= A \cup \varnothing$
$= A$

④ $A \triangle U = (A-U) \cup (U-A)$
$= \varnothing \cup A^C$
$= A^C$

⑤ $A \triangle A^C = (A-A^C) \cup (A^C - A)$
$= A \cup A^C$
$= U$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

**16** $n(B \cap A^C) = n(B-A)$
$= n(A \cup B) - n(A)$
$= 43 - 35 = 8$

**17** $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$이므로

$n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$ ⋯⋯ ㉠

이때 $n(A \cup B)$를 구하면

$n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^C)$
$= n(U) - n(A^C \cap B^C)$
$= 30 - 18 = 12$

따라서 $n(A \cup B) = 12$, $n(A \cap B) = 8$을 ㉠에 대입하면

$n(A) + n(B) = 12 + 8 = 20$

**18** $n(A \cup B \cup C)$
$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C)$
$- n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$ ⋯⋯ ㉠

이때 $n(A \cap B)$, $n(B \cap C)$를 구하면

$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$
$= 5 + 4 - 7 = 2$

$n(B \cap C) = n(B) + n(C) - n(B \cup C)$
$= 4 + 3 - 5 = 2$

또 $A \cap C = \varnothing$이므로

$A \cap B \cap C = (A \cap C) \cap B = \varnothing \cap B = \varnothing$

$\therefore n(A \cap C) = 0$, $n(A \cap B \cap C) = 0$

따라서 $n(A) = 5$, $n(B) = 4$, $n(C) = 3$, $n(A \cap B) = 2$, $n(B \cap C) = 2$, $n(A \cap C) = 0$, $n(A \cap B \cap C) = 0$을 ㉠에 대입하면

$n(A \cup B \cup C) = 5 + 4 + 3 - 2 - 2 - 0 + 0 = 8$

**19** $(A \cap B) \subset A$, $(A \cap B) \subset B$이므로

$n(A \cap B) \leq n(A)$, $n(A \cap B) \leq n(B)$

이때 $n(A) = 9$, $n(B) = 6$이므로 $n(A \cap B) \leq 6$

$\therefore 3 \leq n(A \cap B) \leq 6$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$이므로

(i) $n(A \cap B) = 3$일 때

$n(A \cup B) = 9 + 6 - 3 = 12$

(ii) $n(A \cap B) = 6$일 때

$n(A \cup B) = 9 + 6 - 6 = 9$

(i), (ii)에 의하여 $9 \leq n(A \cup B) \leq 12$

따라서 $n(A \cup B)$의 최댓값은 12, 최솟값은 9이므로 구하는 합은 $12 + 9 = 21$

**20** 우리 반 학생 전체의 집합을 $U$, 야구 경기장에 가 본 학생의 집합을 $A$, 축구 경기장에 가 본 학생의 집합을 $B$라고 하면

$n(U) = 35$, $n(A) = 9$, $n(B) = 13$

이때 둘 다 가 보지 못한 학생의 집합은 $A^C \cap B^C$이므로

$n(A^C \cap B^C) = n((A \cup B)^C) = 18$

$\therefore n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^C) = 35 - 18 = 17$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$이므로

$17 = 9 + 13 - n(A \cap B)$ $\therefore n(A \cap B) = 5$

따라서 야구 경기장과 축구 경기장을 둘 다 가 본 학생 수는 5이다.

**21** 전체 학생의 집합을 $U$, A 가수를 좋아하는 학생의 집합을 $A$, B 가수를 좋아하는 학생의 집합을 $B$라고 하면

$n(U) = 54$, $n(A) = 28$, $n(B) = 30$

이때 A와 B 두 가수를 모두 좋아하지 않는 학생의 집합은 $A^C \cap B^C$이므로

$n(A^C \cap B^C) = n((A \cup B)^C) = 4$

$\therefore n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^C)$
$= 54 - 4 = 50$ ⋯⋯ ㉠

A 가수만 좋아하는 학생의 집합은 $A-B$이므로

$n(A-B) = n(A \cup B) - n(B) = 50 - 30 = 20$

따라서 A 가수만 좋아하는 학생 수는 20이다.

**다른 풀이**

㉠에서 $n(A \cup B) = 50$이므로

$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$
$= 28 + 30 - 50 = 8$

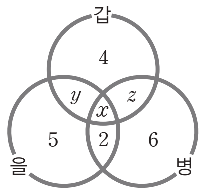
$\therefore n(A-B) = n(A) - n(A \cap B)$
$= 28 - 8 = 20$

**22** $a$, $b$, $c$ 세 문제를 푼 학생의 집합을 각각 $A$, $B$, $C$라고 하면
$n(A\cup B\cup C)=50$, $n(A\cap B\cap C)=5$,
$n(A)=30$, $n(B)=27$, $n(C)=24$
$n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$\quad -n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$
$=n(A)+n(B)+n(C)+n(A\cap B\cap C)-n(A\cup B\cup C)$
$=30+27+24+5-50$
$=36$
$\therefore n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-3\times n(A\cap B\cap C)$
$=36-15$
$=21$
따라서 두 문제만 푼 학생 수는 21이다.

**23** $(N_{12}\cup N_{15})\subset N_k$를 만족하는 $k$의 최댓값은 12와 15의 최대공약수 3이므로
$a=3$
$(N_3\cap N_4)\supset N_l$ 을 만족하는 $l$의 최솟값은 3과 4의 최소공배수 12이므로
$b=12$
$\therefore a+b=15$

**24** $A\cap B=\{a_1, a_4\}$이므로
$a_1\in B$, $a_4\in B$
$a_1+a_4=10$이므로
$a_1=1$, $a_4=9$ 또는 $a_1=9$, $a_4=1$
그런데 $a_1<a_4$이므로
$a_1=1$, $a_4=9$
$\therefore A=\{1, a_2, a_3, 9, a_5\}$, $B=\{1, a_2^2, a_3^2, 81, a_5^2\}$
이때 $9\in B$이므로
$a_2^2=9$ 또는 $a_3^2=9$
(i) $a_2^2=9$일 때, $a_2=3$이므로
$A=\{1, 3, a_3, 9, a_5\}$, $B=\{1, 9, a_3^2, 81, a_5^2\}$
$\therefore A\cup B=\{1, 3, 9, 81, a_3, a_3^2, a_5, a_5^2\}$
$A\cup B$의 모든 원소의 합이 224이므로
$94+a_3+a_3^2+a_5+a_5^2=224$
$\therefore a_3+a_3^2+a_5+a_5^2=130$ …… ㉠
이때 $a_4<a_5$이므로 $a_5>9$
$a_5\geq 11$이라고 하면 $a_5+a_5^2\geq 132$
이것은 ㉠을 만족하지 않으므로 $a_5=10$
$a_5=10$을 ㉠에 대입하면
$a_3+a_3^2+10+10^2=130$
$a_3^2+a_3-20=0$
$(a_3+5)(a_3-4)=0$
$\therefore a_3=-5$ 또는 $a_3=4$
그런데 $a_3$은 양의 정수이므로 $a_3=4$
$\therefore A=\{1, 3, 4, 9, 10\}$
(ii) $a_3^2=9$일 때, $a_3=3$
이때 $a_1<a_2<a_3$이므로 $1<a_2<3$
$\therefore a_2=2$
즉, $A=\{1, 2, 3, 9, a_5\}$, $B=\{1, 4, 9, 81, a_5^2\}$
$\therefore A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 9, 81, a_5, a_5^2\}$
$A\cup B$의 모든 원소의 합이 224이므로
$100+a_5+a_5^2=224$
$\therefore a_5+a_5^2=124$
이 등식을 만족하는 양의 정수 $a_5$는 존재하지 않는다.
(i), (ii)에 의하여 $A=\{1, 3, 4, 9, 10\}$
따라서 집합 $A$의 모든 원소의 합은
$1+3+4+9+10=27$

**25** 갑, 을, 병 세 사람이 가진 서로 다른 스티커의 종류의 수를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.




이때 세 사람이 모두 가지고 있는 스티커의 종류의 수를 $x$, 갑과 을만 가지고 있는 스티커의 종류의 수를 $y$, 갑과 병만 가지고 있는 스티커의 종류의 수를 $z$라고 하면
$4+5+6+2+x+y+z=20$
$\therefore x+y+z=3$
따라서 $y=z=0$일 때, $x$의 값이 최대가 되므로 구하는 $x$의 최댓값은 3이다.

**26** (1) $A\cap B=\{1, 2\}$이므로 $1\in A$
$a^2=1$이므로 $a=1$ 또는 $a=-1$ …… (가)
(i) $a=1$일 때
$A=\{1, 2, 5\}$, $B=\{2, 3, 4\}$이므로
$A\cap B=\{2\}$
(ii) $a=-1$일 때
$A=\{1, 2, 5\}$, $B=\{0, 1, 2\}$이므로
$A\cap B=\{1, 2\}$
(i), (ii)에 의하여 $a=-1$ …… (나)
(2) $A=\{1, 2, 5\}$, $B=\{0, 1, 2\}$이므로
$A\cup B=\{0, 1, 2, 5\}$ …… (다)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) $a=1$ 또는 $a=-1$임을 안다. | 2점 |
| (나) $a$의 값을 구한다. | 2점 |
| (다) $A\cup B$를 구한다. | 2점 |

**27** $A^C\cup B^C=U$에서 $(A\cap B)^C=U$
$\therefore A\cap B=\varnothing$
즉, 두 집합 $A$, $B$는 서로소이다. …… (가)

이때 집합 $B$는 전체집합 $U$의 부분집합 중 2, 4, 6을 원소로 갖지 않는 집합이다. ⋯⋯ (나)

따라서 집합 $B$의 개수는

$2^{6-3}=2^3=8$ ⋯⋯ (다)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) 두 집합 $A$, $B$가 서로소임을 구한다. | 2점 |
| (나) 집합 $B$의 조건을 안다. | 2점 |
| (다) 집합 $B$의 개수를 구한다. | 2점 |

**28** 민호네 반 학생 전체의 집합을 $U$, 영화반에 가입한 학생의 집합을 $A$, 등산반에 가입한 학생의 집합을 $B$라고 하면

$n(U)=35$, $n(A)=24$, $n(B)=19$ ⋯⋯ (가)

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=24+19-n(A\cup B)$

$=43-n(A\cup B)$ ⋯⋯ ㉠

이때 $n(B)<n(A)$이므로 $n(A\cup B)$의 최솟값은 $B\subset A$일 때이고, $n(A\cup B)$의 최댓값은 $A\cup B=U$일 때이다.

$\therefore\ 24\le n(A\cup B)\le 35$ ⋯⋯ ㉡ ⋯⋯ (나)

㉠, ㉡에서 $8\le n(A\cap B)\le 19$ ⋯⋯ (다)

따라서 영화반과 등산반에 모두 가입한 학생은 최대 19명, 최소 8명이므로

$M=19$, $m=8$ ⋯⋯ (라)

$\therefore\ M+m=27$ ⋯⋯ (마)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) 조건을 집합을 이용하여 나타낸다. | 1점 |
| (나) $n(A\cup B)$의 범위를 구한다. | 2점 |
| (다) $n(A\cap B)$의 범위를 구한다. | 2점 |
| (라) $M$, $m$의 값을 구한다. | 1점 |
| (마) $M+m$의 값을 구한다. | 1점 |

# 05강 명제와 조건

## 확인 문제 p. 24

**1** (2), (4)

**2** 가정: $ab=0$이다.
결론: $a=0$ 또는 $b=0$이다.

**3** (1) 어떤 실수 $x$에 대하여 $|x|\le 0$이다.
(2) 모든 실수 $x$에 대하여 $x+2\ne 1$이다.

## 교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제 p. 25

**1** (1) $1+3\le 2$ (거짓)
(2) 3은 4의 약수가 아니다. (참)
(3) $\sqrt{2}$는 무리수가 아니다. (거짓)
(4) 직사각형은 평행사변형이다. (참)

**2** (1) $2-5=-3$ (참)
(2) 4는 2의 배수가 아니다. (거짓)
(3) 7은 짝수가 아니다. (참)
(4) 평행한 두 직선이 다른 한 직선과 만나서 생기는 엇각의 크기는 같지 않다. (거짓)

**3** $U=\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$
(1) 조건 $p$의 진리집합은
$\{5, 10, 15\}$
(2) $x^2-6x+8\le 0$에서
$(x-2)(x-4)\le 0$
$\therefore\ 2\le x\le 4$
따라서 조건 $q$의 진리집합은
$\{2, 3, 4\}$

**4** $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
(1) $\sim p$: $x$는 소수가 아니다.
따라서 조건 $\sim p$의 진리집합은
$\{1, 4, 6\}$
(2) $\sim q$: $2x-1\ge 5$
이때 $2x-1\ge 5$에서 $x\ge 3$
따라서 조건 $\sim q$의 진리집합은
$\{3, 4, 5, 6\}$

**5** (1) 두 조건 '$x^2-3x+2=0$', '$x-2=0$'의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라고 하면
$x^2-3x+2=0$에서
$(x-1)(x-2)=0$
$\therefore\ x=1$ 또는 $x=2$
$\therefore\ P=\{1, 2\}$
$x-2=0$에서 $x=2$
$\therefore\ Q=\{2\}$
따라서 $P\not\subset Q$이므로 주어진 명제는 거짓이다.
(2) 두 조건 '6의 배수이다.', '3의 배수이다.'의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라고 하면
$P=\{6, 12, 18, 24, \cdots\}$
$Q=\{3, 6, 9, 12, \cdots\}$
따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

**6** (1) 두 조건 '$x-1<0$', '$x-2<0$'의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라고 하면

$P=\{x|x<1\}$
$Q=\{x|x<2\}$
따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

(2) [반례] $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$이면 $x+y$는 유리수이지만 $x$, $y$는 유리수가 아니다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다.

**7** (1) '$x^2-1>0$'의 진리집합을 $P$라고 하면
$x^2-1>0$에서
$(x+1)(x-1)>0$
$\therefore x<-1$ 또는 $x>1$
$\therefore P=\{x|x<-1$ 또는 $x>1\}$
따라서 $P\neq U$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

(2) '$x^2-3x-4=0$'의 진리집합을 $P$라고 하면
$x^2-3x-4=0$에서
$(x+1)(x-4)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$
$\therefore P=\{-1, 4\}$
따라서 $P\neq\varnothing$이므로 주어진 명제는 참이다.

**8** (1) '$|x-2|\geq 0$'의 진리집합을 $P$라고 하면
$P=U$
따라서 주어진 명제는 참이다.

(2) '$x^2<0$'의 진리집합을 $P$라고 하면
$P=\varnothing$
따라서 주어진 명제는 거짓이다.

# 06강 명제의 역과 대우, 필요조건, 충분조건

## 확인 문제 p. 26

**1** (1) 역: $x^2=9$이면 $x=3$이다.
대우: $x^2\neq 9$이면 $x\neq 3$이다.

(2) 역: $x$가 4의 약수이면 $x$는 8의 약수이다.
대우: $x$가 4의 약수가 아니면 $x$는 8의 약수가 아니다.

**2** 두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라고 하면
$P=\{\sqrt{3}\}$
$x^2=3$에서 $x=\pm\sqrt{3}$
$\therefore Q=\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$
$\therefore P\subset Q$
(1) $p \Longrightarrow q$이므로 $p$는 $q$이기 위한 충분조건이다.
(2) $p \Longrightarrow q$이므로 $q$는 $p$이기 위한 필요조건이다.

## 교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 27

**1** 역: $x+y>0$이면 $x>0$이고 $y>0$이다. (거짓)
[반례] $x=-1$, $y=2$이면 $x+y>0$이지만 $x<0$이고 $y>0$이다.
대우: $x+y\leq 0$이면 $x\leq 0$ 또는 $y\leq 0$이다. (참)

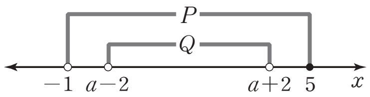
**2** 역: $x^2>y^2$이면 $x>y$이다. (거짓)
[반례] $x=-2$, $y=1$이면 $x^2>y^2$이지만 $x<y$이다.
대우: $x^2\leq y^2$이면 $x\leq y$이다. (거짓)
[반례] $x=1$, $y=-2$이면 $x^2\leq y^2$이지만 $x>y$이다.

**3** 두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라고 하면
(1) $P=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$, $Q=\{4, 8, 12, 16, \cdots\}$
$P\supset Q$이므로 $p$는 $q$이기 위한 필요조건이다.
(2) $P=\left\{x \middle| x<\frac{3}{2}\right\}$, $Q=\{x|x<4\}$
$P\subset Q$이므로 $p$는 $q$이기 위한 충분조건이다.
(3) $x^2=1$에서 $x=\pm 1$
$\therefore P=\{-1, 1\}$
$|x|=1$에서 $x=\pm 1$
$\therefore Q=\{-1, 1\}$
$P=Q$이므로 $p$는 $q$이기 위한 필요충분조건이다.

**4** (1) 두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라고 하면
$P=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $Q=\{1, 2, 3, 6\}$
$P\supset Q$이므로 $p$는 $q$이기 위한 필요조건이다.
(2) $ab=0 \Longleftrightarrow a=0$ 또는 $b=0$
따라서 $p$는 $q$이기 위한 필요충분조건이다.
(3) 두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라고 하면
$P=\{3\}$
$x^2-4x+3=0$에서
$(x-1)(x-3)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$
$\therefore Q=\{1, 3\}$
$P\subset Q$이므로 $p$는 $q$이기 위한 충분조건이다.

**5** 두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라고 하면
$2x+k=0$에서 $x=-\frac{k}{2}$ $\quad\therefore P=\left\{-\frac{k}{2}\right\}$
$x^2-3x-4=0$에서 $(x+1)(x-4)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$
$\therefore Q=\{-1, 4\}$
$p$가 $q$이기 위한 충분조건이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로
$-\frac{k}{2}=-1$ 또는 $-\frac{k}{2}=4$
$\therefore k=2$ 또는 $k=-8$

**6** 두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라고 하면
$x^2-4x-5<0$에서 $(x+1)(x-5)<0$
∴ $-1<x<5$
∴ $P=\{x|-1<x<5\}$
한편 $Q=\{x|a-2\le x\le a+2\}$
$p$는 $q$이기 위한 필요조건이 되려면 $Q\subset P$이어야 하므로




$a-2>-1$이고 $a+2<5$ ∴ $1<a<3$
따라서 정수 $a$의 값은 2이다.

## 07강 명제의 증명과 절대부등식

### 확인 문제 p. 28

**1** (1) 정의 (2) 정리 (3) 정리 (4) 정의

**2** (1) $3x-3>0$에서 $x>1$
따라서 주어진 부등식은 $x>1$일 때 성립한다.
(2) $x=-1$일 때, $(x+1)^2=0$
따라서 주어진 부등식은 $x\ne-1$인 모든 실수 $x$에 대하여 성립한다.
(3) 부등식 $|x-1|\ge0$은 모든 실수 $x$에 대하여 성립한다.
(4) $x^2-2x-(-1)=x^2-2x+1=(x-1)^2\ge0$
∴ $x^2-2x\ge-1$
따라서 부등식 $x^2-2x\ge-1$은 모든 실수 $x$에 대하여 성립한다.
따라서 절대부등식은 (3), (4)이다.

### 교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 29

**1** (가) 홀수 (나) 홀수 (다) $2k^2-2k$

**2** (가) 유리수 (나) 서로소 (다) 짝수(또는 2의 배수)

**3** $|a|+|b|\ge\boxed{0}$, $|a+b|\ge\boxed{0}$이므로
$\boxed{(|a|+|b|)^2}\ge|a+b|^2$임을 보이면 된다.
$\boxed{(|a|+|b|)^2}-|a+b|^2$
$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$
$=a^2+2|ab|+b^2-a^2-2ab-b^2$
$=2(|ab|-ab)$
$|ab|\ge ab$이므로
$2(|ab|-ab)\ge\boxed{0}$
따라서 $\boxed{(|a|+|b|)^2}\ge|a+b|^2$이므로
$|a|+|b|\ge|a+b|$
이때 등호는 $|ab|=ab$, 즉 $\boxed{ab}\ge0$일 때 성립한다.
∴ (가) 0 (나) $(|a|+|b|)^2$ (다) $ab$

**4** $\dfrac{a+b}{2}>0$, $\sqrt{ab}>0$이므로 $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\ge(\sqrt{ab})^2$임을 보이면 된다.
$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-(\sqrt{ab})^2=\frac{a^2+2ab+b^2}{4}-ab$$
$$=\frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4}$$
$$=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}$$
$$=\frac{(a-b)^2}{4}\ge0$$
따라서 $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\ge(\sqrt{ab})^2$이므로
$\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$
이때 등호는 $a-b=0$, 즉 $a=b$일 때 성립한다.

### 05~07강 족집게 기출문제 p. 30~33

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 ③ | 2 ③ | 3 ① | 4 $\{1, 2\}$ | 5 ② |
| 6 ⑤ | 7 ① | 8 ㄴ, ㄹ | 9 ⑤ | 10 ④ |
| 11 ② | 12 ④ | 13 ⑤ | 14 ⑤ | 15 $-4$ |
| 16 ④ | 17 (가) $3k+2$ (나) $3k^2+2k$ (다) $3k^2+4k+1$ | | | |
| 18 (가) $2\sqrt{b}$ (나) $b=0$ | | 19 ⑤ | 20 ① | 21 ③ |
| 22 ⑤ | 23 ㄴ | 24 혜수, 현지, 수연 | | |
| 25 $-2\le a\le-1$ | | 26 5 | 27 풀이 참조 | |

**1** ㄴ. $x^2=x$는 $x$의 값에 따라 참이 되기도 하고 거짓이 되기도 하므로 명제가 아니고 조건이다.
ㅁ. '날씨가 좋다.'는 기준이 명확하지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
따라서 보기 중 명제인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

**2** '적어도 하나는 ~이 아니다.'의 부정은 '모두 ~이다.'이므로 주어진 조건의 부정은 '$x$, $y$는 모두 0이다.'

**3** $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$에서
$a=b$이고 $b=c$이고 $c=a$이므로 $a=b=c$
따라서 이것의 부정은
$a\ne b$ 또는 $b\ne c$ 또는 $c\ne a$

**4** 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라고 하면

$x^2-x-12=0$에서 $(x+3)(x-4)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=4$

따라서 $P=\{4\}$이므로

$P^C=\{1, 2, 3, 5\}$

또 16의 약수는 1, 2, 4, 8, 16이므로

$Q=\{1, 2, 4\}$

따라서 '$\sim p$이고 $q$'의 진리집합은

$P^C \cap Q=\{1, 2\}$

**5** ① [반례] $x=-2$이면 $x^2>1$이지만 $x<1$이다. (거짓)

② '$2x-1=3$'의 진리집합을 $P$라고 하면

$2x=4$에서 $x=2$

$\therefore P=\{2\}$

'$x^2-4=0$'의 진리집합을 $Q$라고 하면

$(x+2)(x-2)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=2$

$\therefore Q=\{-2, 2\}$

$P \subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

③ [반례] $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$이면 $x$, $y$는 무리수이지만 $x+y$는 유리수이다. (거짓)

④ [반례] $x=2$, $y=-2$이면 $x+y=0$이지만 $x^2+y^2 \neq 0$이다. (거짓)

⑤ [반례] $\angle A=40°$, $\angle B=70°$, $\angle C=70°$이면 $\triangle ABC$는 이등변삼각형이지만 $\angle A \neq \angle B$이다. (거짓)

따라서 참인 명제는 ②이다.

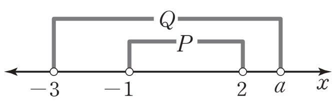
**6** 두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라고 하면

$P=\{x \mid -1<x<2\}$

$Q=\{x \mid -3<x<a\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 $P \subset Q$

$P \subset Q$를 만족하도록 두 집합 $P$, $Q$를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



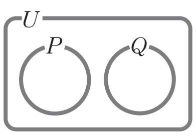

$\therefore a \geq 2$

따라서 실수 $a$의 최솟값은 2이다.

**7** 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 $P \subset Q^C$

$P-Q^C=\varnothing$ $\therefore P \cap Q=\varnothing$

이것을 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.




① $P \cap Q^C=P-Q=P$

② $P^C \supset Q$

③ $P \cup Q^C=Q^C$

④ $P^C \cap Q=Q-P=Q$

⑤ $P^C \cap Q^C=(P \cup Q)^C \neq \varnothing$ ($\because P \cup Q \neq U$)

따라서 옳은 것은 ①이다.

**8** ㄱ. [반례] 2는 소수이지만 짝수이다. (거짓)

ㄴ. $x^2=2x$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 $x=0$ 또는 $x=2$이면 $x^2=2x$가 성립한다. (참)

ㄷ. [반례] $x=0$이면 $2x+1<5$이다. (거짓)

ㄹ. 주어진 부등식의 좌변을 변형하면

$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

이므로 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $x^2-x+1>0$이 성립한다. (참)

따라서 보기 중 참인 명제는 ㄴ, ㄹ이다.

**9** 주어진 명제의 대우는

'$\sim(a=0$ 또는 $b=0)$이면 $\sim(ab=0)$이다.'

즉, '$a \neq 0$이고 $b \neq 0$이면 $ab \neq 0$이다.'

**10** ① 역: 마름모이면 정사각형이다. (거짓)

대우: 마름모가 아니면 정사각형이 아니다. (참)

② 역: $a \neq 2$ 또는 $b \neq 3$이면 $ab \neq 6$이다. (거짓)

[반례] $a=1$, $b=6$이면 $a \neq 2$ 또는 $b \neq 3$이지만 $ab=6$이다.

대우: $a=2$이고 $b=3$이면 $ab=6$이다. (참)

③ 역: $ab$가 정수이면 $a+b$는 정수이다. (거짓)

[반례] $a=2$, $b=\frac{1}{2}$이면 $ab$는 정수이지만 $a+b$는 정수가 아니다.

대우: $ab$가 정수가 아니면 $a+b$는 정수가 아니다. (거짓)

[반례] $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이면 $ab$는 정수가 아니지만 $a+b$는 정수이다.

④ 역: $a=0$이고 $b=0$이면 $|a|+|b|=0$이다. (참)

대우: $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$이면 $|a|+|b| \neq 0$이다. (참)

⑤ 역: $x>10$이면 $x>5$이다. (참)

대우: $x \leq 10$이면 $x \leq 5$이다. (거짓)

[반례] $x=7$이면 $x \leq 10$이지만 $x>5$이다.

따라서 역과 대우가 모두 참인 명제는 ④이다.

**11** $Q \subset P^C$이므로 명제 $q \longrightarrow \sim p$는 참이다.

따라서 이 명제의 대우 $p \longrightarrow \sim q$도 참이다.

**12** 명제 $p \longrightarrow q$와 $r \longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 각각의 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$와 $q \longrightarrow \sim r$도 모두 참이다.

또 명제 $p \longrightarrow q$와 $q \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$도 참이고, 이것의 대우 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 ④이다.

**13** ① $p$: $x=1$, $q$: $x=0$ 또는 $x=1$

이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이고, 명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이다.

따라서 $p$는 $q$이기 위한 충분조건이다.

② $p$: $x=y$, $q$: $x=y$ 또는 $x=-y$

이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이고 명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이다.

따라서 $p$는 $q$이기 위한 충분조건이다.

③ $p$: $x=y$, $q$: $x=y$ 또는 $z=0$

이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이고, 명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이다.

따라서 $p$는 $q$이기 위한 충분조건이다.

④ 명제 $p \longrightarrow q$는 참

명제 $q \longrightarrow p$는 거짓

[반례] $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$이면 $x+y$는 유리수이지만 $x$, $y$는 무리수이다.

따라서 $p$는 $q$이기 위한 충분조건이다.

⑤ 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓

[반례] $x=\frac{1}{2}$이면 $x>0$이지만 $x<1$이다.

명제 $q \longrightarrow p$는 참

따라서 $p$는 $q$이기 위한 필요조건이다.

따라서 $p$가 $q$이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ⑤이다.

**14** ① $p$: $x=y$ 또는 $x=-y$, $q$: $x=-y$

이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이고, 명제 $q \longrightarrow p$는 참이다.

따라서 $p$는 $q$이기 위한 필요조건이다.

② 두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라고 하면 $P \subset Q$이므로 $p$는 $q$이기 위한 충분조건이다.

③ $p$: $x=0$ 또는 $y=0$, $q$: $x=0$이고 $y=0$

이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이고, 명제 $q \longrightarrow p$는 참이다.

따라서 $p$는 $q$이기 위한 필요조건이다.

④ $p$: $x>2$, $q$: $x<-2$ 또는 $x>2$

이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이고, 명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이다.

따라서 $p$는 $q$이기 위한 충분조건이다.

⑤ $p$: $x>0$, $y>0$, $q$: $x>0$, $y>0$

이므로 명제 $p \longrightarrow q$와 $q \longrightarrow p$가 모두 참이다.

따라서 $p$는 $q$이기 위한 필요충분조건이다.

따라서 $p$가 $q$이기 위한 필요충분조건인 것은 ⑤이다.

**15** 주어진 네 조건을

$p$: $x \le -4$ 또는 $-3 \le x \le -1$,

$q$: $x<a$, $r$: $x>b$, $s$: $x \ge 0$

이라 하고, 네 조건 $p$, $q$, $r$, $s$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$, $R$, $S$라고 하면

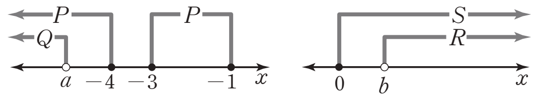
$P=\{x \mid x \le -4$ 또는 $-3 \le x \le -1\}$

$Q=\{x \mid x<a\}$, $R=\{x \mid x>b\}$, $S=\{x \mid x \ge 0\}$

이때 $p$는 $q$이기 위한 필요조건이므로 $Q \subset P$

$r$는 $s$이기 위한 충분조건이므로 $R \subset S$

따라서 $Q \subset P$, $R \subset S$를 만족하도록 집합 $P$와 $Q$, $R$와 $S$를 수직선 위에 각각 나타내면 다음 그림과 같다.




$\therefore$ $a \le -4$, $b \ge 0$

따라서 $a$의 최댓값은 $-4$, $b$의 최솟값은 0이므로 그 합은

$-4+0=-4$

**16** 주어진 세 조건을

$p$: $1 \le x \le 5$, $q$: $a \le x \le 7$, $r$: $b \le x \le 3$

이라 하고, 세 조건 $p$, $q$, $r$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$, $R$라 고 하면

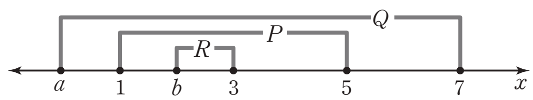
$P=\{x \mid 1 \le x \le 5\}$, $Q=\{x \mid a \le x \le 7\}$, $R=\{x \mid b \le x \le 3\}$

이때 $q$는 $p$이기 위한 필요조건이므로 $P \subset Q$ ······ ㉠

$r$는 $p$이기 위한 충분조건이므로 $R \subset P$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $R \subset P \subset Q$

따라서 $R \subset P \subset Q$를 만족하도록 세 집합 $P$, $Q$, $R$를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.




$\therefore$ $a \le 1$, $1 \le b \le 3$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=3$이므로

$\alpha\beta\gamma=3$

**17** (가) $3k+2$ (나) $3k^2+2k$ (다) $3k^2+4k+1$

**18** $\sqrt{a-b}>0$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$이므로

$(\sqrt{a-b})^2 \ge (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$임을 보이면 된다.

$$\begin{aligned}(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 &= a-b-(a-2\sqrt{ab}+b)\\ &= 2\sqrt{ab}-2b\\ &= \boxed{2\sqrt{b}}(\sqrt{a}-\sqrt{b})\end{aligned}$$

이때 $\sqrt{b} \ge 0$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$이므로

$2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \ge 0$

따라서 $(\sqrt{a-b})^2 \ge (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$이므로

$\sqrt{a-b} \ge \sqrt{a}-\sqrt{b}$

이때 $\sqrt{a} \ne \sqrt{b}$이므로 등호는 $\sqrt{b}=0$, 즉 $\boxed{b=0}$일 때 성립한다.

$\therefore$ (가) $2\sqrt{b}$ (나) $b=0$

**19** $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right) &= ab+4+1+\frac{4}{ab}\\ &= ab+\frac{4}{ab}+5\\ &\ge 2\sqrt{ab \times \frac{4}{ab}}+5\\ &= 9\end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 } ab=\frac{4}{ab}\text{, 즉 } ab=2\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)$의 최솟값은 9이다.

**20** $a$, $b$, $x$, $y$가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$

$24\times54\ge(ax+by)^2$, $36^2\ge(ax+by)^2$

$\therefore\ -36\le ax+by\le36$ (단, 등호는 $ay=bx$일 때 성립)

따라서 $ax+by$의 최솟값은 $-36$이다.

**21** $x$, $y$는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(3^2+4^2)(x^2+y^2)\ge(3x+4y)^2$

$25a\ge(3x+4y)^2$

$\therefore\ -5\sqrt{a}\le3x+4y\le5\sqrt{a}$ (단, 등호는 $3y=4x$일 때 성립)

$3x+4y$의 최댓값과 최솟값의 차가 $20\sqrt{2}$이므로

$10\sqrt{a}=20\sqrt{2}$, $\sqrt{a}=2\sqrt{2}$

$\therefore\ a=8$

**22** ㄱ. [반례] $x=\sqrt{2}$이면 $x^2=2$이므로 $x^2\in Q$이지만 $x^3=2\sqrt{2}$이므로 $x^3\notin Q$이다. (거짓)

ㄴ. (유리수)$\div$(0이 아닌 유리수)$=$(유리수)이므로

$x\in Q$이고 $x^3\in Q$이면 $\dfrac{x^3}{x}=x^2\in Q$

$\therefore\ (p$이고 $r)\Longrightarrow q$

ㄷ. (유리수)$\div$(0이 아닌 유리수)$=$(유리수)이므로

$x^2\in Q$이고 $x^3\in Q$이면 $\dfrac{x^3}{x^2}=x\in Q$

$\therefore\ (q$이고 $r)\Longrightarrow p$

따라서 보기 중 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다.

**23** $\sim q$는 $p$이기 위한 필요조건이므로

$P\subset Q^C\qquad\therefore\ Q\subset P^C$

ㄱ. $x$가 집합 $Q$의 원소가 아니면 $x$는 집합 $P$의 원소이다.

$\Longleftrightarrow x\in Q^C$이면 $x\in P$이다.

$\Longleftrightarrow Q^C\subset P$ (거짓)

ㄴ. $x$가 집합 $Q$의 원소이면 $x$는 집합 $P$의 원소가 아니다.

$\Longleftrightarrow x\in Q$이면 $x\in P^C$이다.

$\Longleftrightarrow Q\subset P^C$ (참)

ㄷ. $x$가 집합 $P$의 원소가 아니면 $x$는 집합 $Q$의 원소이다.

$\Longleftrightarrow x\in P^C$이면 $x\in Q$이다.

$\Longleftrightarrow P^C\subset Q$ (거짓)

따라서 보기 중 항상 옳은 것은 ㄴ이다.

**24** 각각의 주장이 참일 때를 T, 거짓일 때를 F라 하고 세 사람의 주장의 참, 거짓을 알아보자.

(i) 수연이의 주장이 참인 경우

| | | |
|---|---|---|
| 수연 | T | 수연이는 도서관에 가지 않았다. |
| 현지 | F | 현지는 서점에 갔다. |
| 혜수 | F | 혜수는 서점에 가지 않았다. |

현지는 서점에 갔고, 수연이는 도서관과 체육관 중 도서관에 가지 않았으므로 체육관에 간 것이고, 혜수는 도서관에 간 것이다.

(ii) 현지의 주장이 참인 경우

| | | |
|---|---|---|
| 수연 | F | 수연이는 도서관에 갔다. |
| 현지 | T | 현지는 서점에 가지 않았다. |
| 혜수 | F | 혜수는 서점에 가지 않았다. |

수연이가 도서관에 갔으므로 현지와 혜수 둘 중 한 명은 서점에 갔어야 하는데 둘 다 서점에 가지 않은 것이 되므로 모순이다.

(iii) 혜수의 주장이 참인 경우

| | | |
|---|---|---|
| 수연 | F | 수연이는 도서관에 갔다. |
| 현지 | F | 현지는 서점에 갔다. |
| 혜수 | T | 혜수는 서점에 갔다. |

현지와 혜수 둘 다 서점에 간 것이 되므로 모순이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 도서관, 서점, 체육관에 간 사람은 차례로 혜수, 현지, 수연이다.

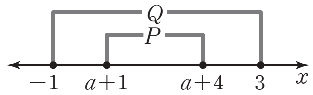
**25** 두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라고 하면

$P=\{x\,|\,a+1\le x\le a+4\}$

$Q=\{x\,|\,-1\le x\le3\}$

명제 $p\longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 한다. …… (가)

따라서 $P\subset Q$를 만족하도록 두 집합 $P$, $Q$를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.




$a+1\ge-1$, $a+4\le3$ …… (나)

$\therefore\ -2\le a\le-1$ …… (다)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) 두 조건 $p$, $q$의 진리집합 사이의 포함 관계를 구한다. | 2점 |
| (나) $a$의 조건을 구한다. | 2점 |
| (다) $a$의 값의 범위를 구한다. | 1점 |

**26** $p$는 $q$이기 위한 충분조건이므로 명제 $p\longrightarrow q$는 참이다. …… (가)

따라서 이 명제의 대우 $\sim q\longrightarrow\sim p$도 참이다.

즉, $\sim q$: $x=-2$, $\sim p$: $x^2+ax+6=0$이므로 명제 '$x=-2$이면 $x^2+ax+6=0$이다.'는 참이다. …… (나)

$x=-2$를 $x^2+ax+6=0$에 대입하면

$4-2a+6=0$

$\therefore\ a=5$ …… (다)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) 명제 $p\longrightarrow q$가 참임을 안다. | 2점 |
| (나) 대우가 참임을 알고 대우를 말한다. | 2점 |
| (다) $a$의 값을 구한다. | 2점 |

**27** (1) 주어진 명제의 대우는

'자연수 $a$, $b$에 대하여 $a$와 $b$가 모두 홀수이면 $ab$는 홀수이다.' …… (가)

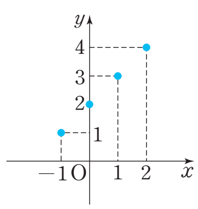
(2) 주어진 명제의 대우가 참임을 보이면 된다.
자연수 $a$, $b$에 대하여 $a$와 $b$가 모두 홀수이면
$a=2m+1$, $b=2n+1$ ($m$, $n$은 음이 아닌 정수)
로 나타낼 수 있다. …… (나)
이때
$ab=(2m+1)(2n+1)=2(2mn+m+n)+1$
이므로 $ab$는 홀수이다. …… (다)
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 명제 '자연수 $a$, $b$에 대하여 $ab$가 짝수이면 $a$ 또는 $b$는 짝수이다.'는 참이다. …… (라)

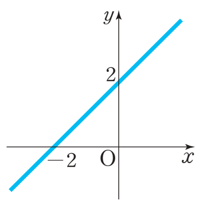
| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) 주어진 명제의 대우를 말한다. | 2점 |
| (나) $a$, $b$를 홀수로 표현한다. | 2점 |
| (다) $ab$가 홀수임을 보인다. | 2점 |
| (라) 대우를 이용한 증명법을 이용하여 결론을 쓴다. | 1점 |

# 08강 함수의 뜻과 그래프

## 확인 문제 p. 34

**1** (3) 정의역: $\{1, 2, 3\}$, 공역: $\{a, b, c, d\}$, 치역: $\{a, c\}$

**2** (1)



(2)



## 교/과/서/속 핵심+유형 닮은꼴 문제 p. 35

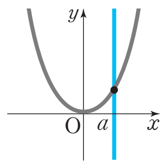
**1** (1) 정의역: $\{x \mid x$는 실수$\}$, 치역: $\{y \mid y$는 실수$\}$
(2) 정의역: $\{x \mid x$는 실수$\}$, 치역: $\{y \mid y\le 8$인 실수$\}$

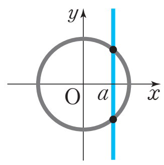
**2** (1) 정의역: $\{x \mid x\neq 0$인 실수$\}$, 치역: $\{y \mid y\neq 0$인 실수$\}$
(2) 정의역: $\{x \mid x$는 실수$\}$, 치역: $\{y \mid y\ge -3$인 실수$\}$

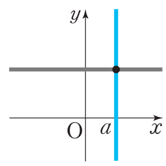
**3** ㄱ. $f(-1)=-1$, $g(-1)=1$이므로 $f\neq g$
ㄴ. $f(-1)=-2$, $g(-1)=0$이므로 $f\neq g$
ㄷ. $f(-1)=g(-1)=1$, $f(0)=g(0)=0$,
$f(1)=g(1)=1$이므로 $f=g$
따라서 보기 중 $f=g$인 것은 ㄷ이다.

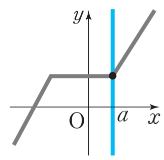
**4** (1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 정의역과 공역은 각각 실수 전체의 집합이고 $f(x)=|x|=\begin{cases} x & (x\ge 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$이므로 $f=g$
따라서 서로 같은 함수이다.
(2) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 정의역과 공역은 각각 실수 전체의 집합이고 $x<0$일 때, $f(x)\neq g(x)$이므로 $f\neq g$
따라서 서로 같은 함수가 아니다.

**5** 주어진 그래프 위에 직선 $x=a$($a$는 정의역의 임의의 원소)를 그어 교점이 항상 1개인 것을 찾는다.

ㄱ.


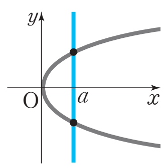

ㄴ.


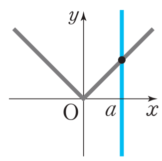

ㄷ.


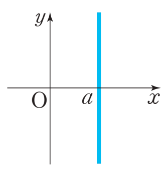

ㄹ.


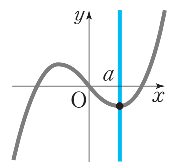

따라서 보기 중 함수의 그래프인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

**6** 주어진 그래프 위에 직선 $x=a$($a$는 정의역의 임의의 원소)를 그어 교점이 항상 1개인 것을 찾는다.

ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.



따라서 보기 중 함수의 그래프인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

# 09강 여러 가지 함수와 합성함수

## 확인 문제 p. 36

**1** (1) 정의역에 속하는 임의의 서로 다른 두 원소에 대하여 함숫값이 항상 다르므로 일대일함수이지만 치역과 공역이 서로 같지 않으므로 일대일대응이 아니다.

(2) 정의역에 속하는 임의의 서로 다른 두 원소에 대하여 함숫값이 항상 다르므로 일대일함수이고, 치역과 공역이 서로 같으므로 일대일대응이다.

(3) $2\neq3$이지만 $f(2)=f(3)$이므로 일대일함수가 아니다.

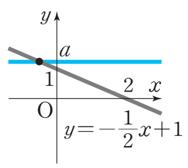
따라서 일대일함수인 것은 (1), (2), 일대일대응인 것은 (2)이다.

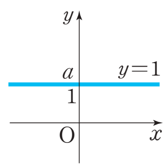
**2** (1) $(f\circ g)(-1)=f(g(-1))=f(1)=1$

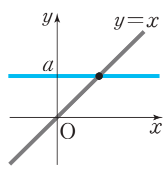
(2) $(g\circ f)(-1)=g(f(-1))=g(-3)=9$

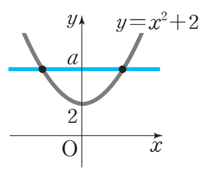
## 교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 37

**1** 주어진 함수의 그래프를 각각 좌표평면 위에 나타낸 후 직선 $y=a$($a$는 상수)와의 교점을 나타내면 다음 그림과 같다.

ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.


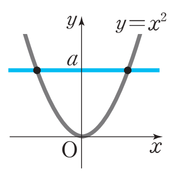

ㄹ.


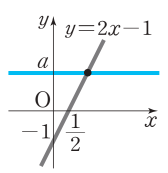

(1) 일대일대응의 그래프는 공역의 임의의 원소 $a$에 대하여 직선 $y=a$와 항상 한 점에서 만나는 그래프이므로 ㄱ, ㄷ이다.

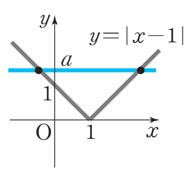
(2) 항등함수의 그래프는 직선 $y=x$이므로 ㄷ이다.

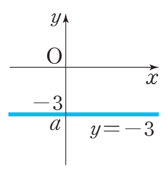
(3) 상수함수의 그래프는 $x$축에 평행한 직선이므로 ㄴ이다.

**2** 주어진 함수의 그래프를 각각 좌표평면 위에 나타낸 후 직선 $y=a$($a$는 치역의 임의의 원소)와의 교점이 항상 1개인 것을 찾는다.

ㄱ.


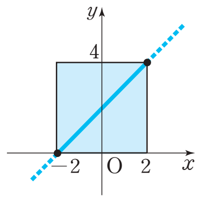

ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.



따라서 일대일함수인 것은 ㄴ이다.

**3** 함수 $f$가 일대일대응이 되려면 치역과 공역이 같아야 한다.




따라서 함수 $f(x)=ax+b\,(a>0)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-2,\ 0)$, $(2,\ 4)$를 지나야 하므로

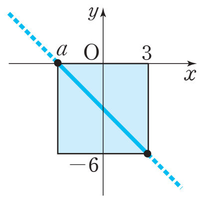
$-2a+b=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$2a+b=4$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=2$

**4** 함수 $f$가 일대일대응이 되려면 치역과 공역이 같아야 한다.




따라서 함수 $f(x)=-x+b$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(a,\ 0)$, $(3,\ -6)$을 지나야 하므로

$-a+b=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$-3+b=-6$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=-3$

**5** (1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=g(x^2-1)$

$=3(x^2-1)+1$

$=3x^2-3+1$

$=3x^2-2$

(2) $(g\circ g)(x)=g(g(x))$

$=g(3x+1)$

$=3(3x+1)+1$

$=9x+3+1$

$=9x+4$

**6** (1) $(g\circ h)(x)=g(h(x))$

$=g(x^2+2)$

$=\frac{1}{2}(x^2+2)+1$

$=\frac{1}{2}x^2+1+1$

$=\frac{1}{2}x^2+2$

(2) $((f\circ g)\circ h)(x)=f(g(h(x)))$이고, (1)에서

$g(h(x))=\frac{1}{2}x^2+2$이므로

$((f\circ g)\circ h)(x)=f\left(\frac{1}{2}x^2+2\right)$

$=2\left(\frac{1}{2}x^2+2\right)-4$

$=x^2+4-4$

$=x^2$

## 10강 역함수

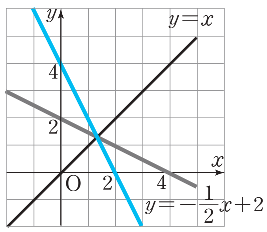
### 확인 문제 p. 38

**1** (1) 3

(2) $(f\circ f^{-1})(c)=f(f^{-1}(c))=f(2)=c$

(3) $(f^{-1}\circ f)(1)=f^{-1}(f(1))=f^{-1}(b)=1$

**2**




### 교/과/서/속 핵심 유형+ 닮은꼴 문제 p. 39

**1** (1) $f(a)=1$이므로 $2a-3=1$ $\quad\therefore a=2$

(2) $f(b)=7$이므로 $2b-3=7$ $\quad\therefore b=5$

**2** $f(3)=5$이므로 $3a-2=5$ $\quad\therefore a=\frac{7}{3}$

$g(4)=-2$이므로 $\frac{1}{2}\times 4-b=-2$ $\quad\therefore b=4$

**3** (1) 함수 $y=3x-2$는 실수 전체의 집합 $R$에서 $R$로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=3x-2$를 $x$에 대하여 풀면

$3x=y+2$ $\quad\therefore x=\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

(2) 함수 $y=-\frac{1}{2}x+2$는 실수 전체의 집합 $R$에서 $R$로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=-\frac{1}{2}x+2$를 $x$에 대하여 풀면

$\frac{1}{2}x=-y+2$ $\quad\therefore x=-2y+4$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-2x+4$

**4** (1) 함수 $y=\frac{3}{2}x+4$는 실수 전체의 집합 $R$에서 $R$로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=\frac{3}{2}x+4$를 $x$에 대하여 풀면

$\frac{3}{2}x=y-4$ $\quad\therefore x=\frac{2}{3}y-\frac{8}{3}$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}$

(2) 함수 $y=-2x-\frac{1}{3}$은 실수 전체의 집합 $R$에서 $R$로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=-2x-\frac{1}{3}$을 $x$에 대하여 풀면

$2x=-y-\frac{1}{3}$ $\quad\therefore x=-\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}$

**5** (1) $(g^{-1}\circ f)(-3)=g^{-1}(f(-3))$

$=g^{-1}(-3)$

$g^{-1}(-3)=k$ ($k$는 상수)라고 하면 $g(k)=-3$이므로

$\frac{1}{2}k-4=-3$에서 $k=2$ $\quad\therefore g^{-1}(-3)=2$

$\therefore (g^{-1}\circ f)(-3)=2$

(2) $((g\circ f)^{-1}\circ g)(2)=(f^{-1}\circ g^{-1}\circ g)(2)$

$=f^{-1}(2)$

$f^{-1}(2)=k$ ($k$는 상수)라고 하면 $f(k)=2$이므로

$2k+3=2$에서 $k=-\frac{1}{2}$ $\quad\therefore f^{-1}(2)=-\frac{1}{2}$

$\therefore ((g\circ f)^{-1}\circ g)(2)=-\frac{1}{2}$

**6** (1) $(f^{-1}\circ g)(2)=f^{-1}(g(2))$

$=f^{-1}(4)$

$f^{-1}(4)=k$ ($k$는 상수)라고 하면 $f(k)=4$이므로

$k+1=4$에서 $k=3$ $\quad\therefore f^{-1}(4)=3$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(2)=3$

(2) $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(-2)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(-2)$

$=(g^{-1}\circ f)(-2)$

$=g^{-1}(f(-2))$

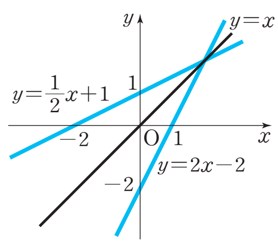
$=g^{-1}(-1)$

$g^{-1}(-1)=k$ ($k$는 상수)라고 하면 $g(k)=-1$이므로

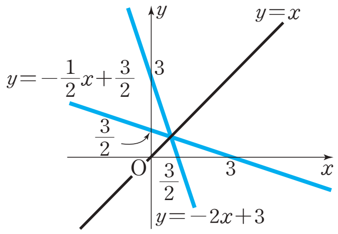
$3k-2=-1$에서 $k=\frac{1}{3}$ $\quad\therefore g^{-1}(-1)=\frac{1}{3}$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(-2)=\frac{1}{3}$

**7** 함수 $y=\frac{1}{2}x+1$의 역함수는 $y=2x-2$이므로 두 함수의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



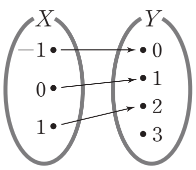
**8** 함수 $y=-2x+3$의 역함수는 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$이므로 두 함수의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.

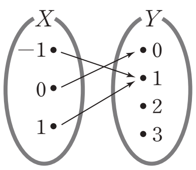


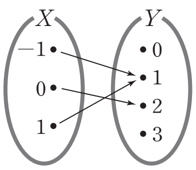

## 08~10강 족집게 기출문제 p. 40~43

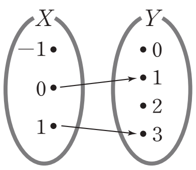
**1** ④ **2** 3 **3** ②
**4** $\{-1, 0, 1, 5, 7, 9\}$ **5** ③ **6** 3 **7** ④
**8** ③ **9** $0<a<2$ **10** ⑤ **11** ②
**12** ③ **13** ③ **14** 35 **15** ③ **16** ④
**17** ③ **18** ② **19** $-2$ **20** ⑤ **21** 97
**22** 2 **23** ③ **24** 3
**25** (1) $(f\circ g)(x)=x-a+4$, $(g\circ f)(x)=x-\frac{1}{2}a+2$
(2) 4
**26** $\sqrt{2}$

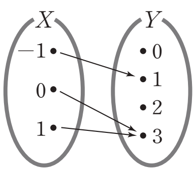
**1** 주어진 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

①


②


③


④


⑤


이때 ④의 경우는 집합 $X$의 원소 $-1$에 대응하는 집합 $Y$의 원소가 없으므로 이 대응은 함수가 아니다.

**2** $\sqrt{2}+1$은 무리수이므로
$f(\sqrt{2}+1)=(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}$
8은 유리수이므로
$f(8)=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$
$\therefore f(\sqrt{2}+1)-f(8)=(3+2\sqrt{2})-2\sqrt{2}=3$

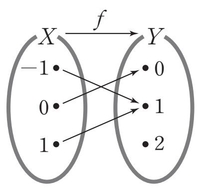
**3** $f(x+y)=f(x)+f(y)$ ...... ㉠
㉠에 $x=0$, $y=0$을 대입하면
$f(0)=f(0)+f(0)$ $\therefore f(0)=0$
㉠에 $x=2$, $y=-2$를 대입하면
$f(0)=f(2)+f(-2)$
$0=f(2)+3$ $\therefore f(2)=-3$

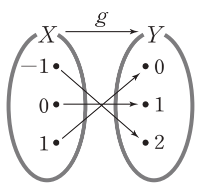
**4** 함수 $f$의 정의역은 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$x\le 3$일 때, $f(x)=-x+2$이므로
$f(1)=-1+2=1$
$f(2)=-2+2=0$
$f(3)=-3+2=-1$
$x>3$일 때, $f(x)=2x-3$이므로
$f(4)=2\times4-3=5$
$f(5)=2\times5-3=7$
$f(6)=2\times6-3=9$
따라서 구하는 치역은 $\{-1, 0, 1, 5, 7, 9\}$

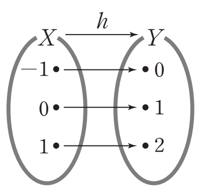
**5** 주어진 네 함수
$f(x)=x^2$, $g(x)=x^3-2x$, $h(x)=-x$, $k(x)=2|x|-1$
에 정의역의 원소 $-1$, 0, 1을 각각 대입하면
ㄱ. $f(-1)=1$, $f(0)=0$, $f(1)=1$
ㄴ. $g(-1)=1$, $g(0)=0$, $g(1)=-1$
ㄷ. $h(-1)=1$, $h(0)=0$, $h(1)=-1$
ㄹ. $k(-1)=1$, $k(0)=-1$, $k(1)=1$
이때 $g(-1)=h(-1)=1$, $g(0)=h(0)=0$,
$g(1)=h(1)=-1$이므로 $g=h$
따라서 보기 중 서로 같은 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

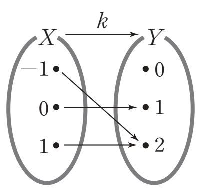
**6** $f(1)=g(1)$에서 $a+b=-5$ ...... ㉠
$f(2)=g(2)$에서 $2a+b=-6$ ...... ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-1$, $b=-4$
$\therefore a-b=3$

**7** 주어진 함수의 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

ㄱ.


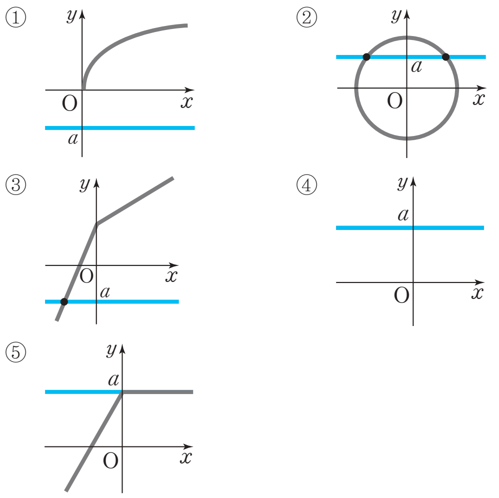
ㄴ.


ㄷ.


ㄹ.


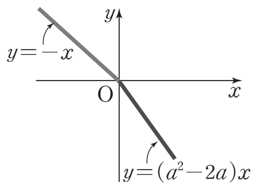
ㄱ. $f(-1)=f(1)=1$이므로 일대일함수가 아니다.
ㄹ. $k(-1)=k(1)=2$이므로 일대일함수가 아니다.
따라서 보기 중 일대일함수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**8** 주어진 그래프에 직선 $y=a$($a$는 공역의 임의의 원소)를 그어 교점이 항상 1개인 것을 찾는다.




따라서 일대일대응의 그래프인 것은 ③이다.

**9** 함수 $f$가 일대일대응이 되려면 $x$의 값이 증가할 때, $y$의 값은 항상 증가하거나 항상 감소해야 한다.
$x\le 0$일 때, $f(x)=-x$의 그래프는 기울기가 음수이므로 다음 그림과 같이 $x>0$일 때도 $f(x)=(a^2-2a)x$의 그래프의 기울기가 음수이어야 한다.




즉, $a^2-2a<0$에서 $a(a-2)<0$ $\therefore 0<a<2$

**10** 집합 $X$에서 $X$로의 일대일대응을 $f: X \longrightarrow X$라고 하면 $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3 중 하나이므로 3개, $f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값을 제외한 2개, $f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 1개이다.
따라서 일대일대응의 개수 $a$는
$a=3\times2\times1=6$
항등함수는 정의역의 원소 1, 2, 3에 각각 1, 2, 3을 대응시키는 함수이므로 1개이다.
$\therefore b=1$
상수함수는 정의역의 원소 1, 2, 3에 1 또는 2 또는 3을 대응시키는 함수이므로 3개이다.
$\therefore c=3$
$\therefore a+b+c=10$

**11** $(h\circ(g\circ f))(2)=(h\circ g\circ f)(2)$
$=h(g(f(2)))$
$=h(g(5))$
$=h(4)=9$

**12** $(g\circ f)(x)$와 $(f\circ g)(x)$를 각각 구하면
$(g\circ f)(x)=g(f(x))$
$=g(x+k)$
$=3(x+k)^2$
$=3x^2+6kx+3k^2$
$(f\circ g)(x)=f(g(x))$
$=f(3x^2)$
$=3x^2+k$
이때 $(g\circ f)(x)=(f\circ g)(x)$이므로
$3x^2+6kx+3k^2=3x^2+k$
이 식이 $x$에 대한 항등식이어야 하므로
$6k=0$, $3k^2=k$
$\therefore k=0$

**13** $(h\circ f)(x)=g(x)$에서
$h(f(x))=g(x)$
$\therefore h(x-3)=2x+4$ ⋯⋯ ㉠
이때 $x-3=t$로 놓으면
$x=t+3$
이를 ㉠에 대입하면
$h(t)=2(t+3)+4=2t+10$
$\therefore h(x)=2x+10$

**다른 풀이**
세 함수 $f$, $g$, $h$는 각각 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이다.
이때 함수 $f$의 역함수 $f^{-1}$가 존재하므로
$h\circ f=g$에서
$h\circ f\circ f^{-1}=g\circ f^{-1}$
$\therefore h=g\circ f^{-1}$
$f(x)=x-3$에서 $f^{-1}(x)=x+3$이므로
$h(x)=(g\circ f^{-1})(x)$
$=g(f^{-1}(x))$
$=g(x+3)$
$=2(x+3)+4$
$=2x+10$

**14** $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})$이므로
$$h(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & (\sqrt{x}\text{가 유리수})\\ 1 & (\sqrt{x}\text{가 무리수})\end{cases}$$
따라서 $1\le x\le 25$를 만족하는 자연수 $x$ 중 $\sqrt{x}$가 유리수인 $x$의 값은
$1^2$, $2^2$, $3^2$, $4^2$, $5^2$, 즉 1, 4, 9, 16, 25
이고, $\sqrt{x}$가 무리수인 $x$의 값은 1, 4, 9, 16, 25를 제외한 $x$의 값이다.
$\therefore h(1)+h(2)+h(3)+\cdots+h(25)$
$=\sqrt{1}+\sqrt{4}+\sqrt{9}+\sqrt{16}+\sqrt{25}+1\times20$
$=1+2+3+4+5+20$
$=35$

**15** $f(0)=2$, $f(1)=0$, $f(2)=1$이므로

$f^1(0)=f(0)=2$

$f^2(0)=(f\circ f)(0)=f(f(0))=f(2)=1$

$f^3(0)=(f\circ f^2)(0)=f(f^2(0))=f(1)=0$

$f^4(0)=(f\circ f^3)(0)=f(f^3(0))=f(0)=2$

$f^5(0)=(f\circ f^4)(0)=f(f^4(0))=f(2)=1$

$f^6(0)=(f\circ f^5)(0)=f(f^5(0))=f(1)=0$

$f^7(0)=(f\circ f^6)(0)=f(f^6(0))=f(0)=2$

$\vdots$

따라서 $f^n(0)$의 함숫값은 2, 1, 0이 이 순서대로 반복되므로

$f^{3k+1}(0)=2$, $f^{3k+2}(0)=1$, $f^{3k+3}(0)=0$

($k$는 음이 아닌 정수)

$\therefore f^{100}(0)=f^{3\times 33+1}(0)=2$

**16** $y=ax+3$에서 $ax=y-3$

$\therefore x=\frac{1}{a}y-\frac{3}{a}$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{a}x-\frac{3}{a}$

따라서 $\frac{1}{a}x-\frac{3}{a}=bx+1$이므로

$\frac{1}{a}=b$, $-\frac{3}{a}=1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=-\frac{1}{3}$

$\therefore ab=1$

다른 풀이

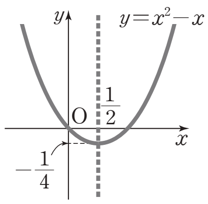
$(f\circ g)(x)=x$이므로

$a(bx+1)+3=x$, $abx+a+3=x$

$\therefore ab=1$, $a+3=0$

**17** 함수 $f$의 역함수가 존재하려면 $f$는 일대일대응이어야 한다.

$f(x)=x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$




함수 $f$가 일대일대응이 되려면 $x$의 값이 증가할 때, $y$의 값은 항상 증가하거나 항상 감소해야 한다.

따라서 함수 $f$의 정의역은 오른쪽 그림에서 직선 $x=\frac{1}{2}$을 기준으로 왼쪽 또는 오른쪽이어야 한다.

그런데 $X=\{x\,|\,x\ge k\}$이므로 $k\ge\frac{1}{2}$ ...... ㉠

또 일대일대응이 되려면 함수 $f$의 치역과 공역이 같아야 하므로 정의역 $\{x\,|\,x\ge k\}$에 대하여 치역도 $\{y\,|\,y\ge k\}$이어야 한다.

즉, $f(k)=k$이므로

$k^2-k=k$, $k^2-2k=0$, $k(k-2)=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=2$ ...... ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $k=2$

**18** $(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(6)=12$

$f^{-1}(-5)=k$ ($k$는 상수)라고 하면

$f(k)=-5$

(i) $k\ge 2$일 때

$f(k)=2k$이므로 $2k=-5$

$\therefore k=-\frac{5}{2}$

그런데 $k\ge 2$이므로 이는 모순이다.

(ii) $k<2$일 때

$f(k)=-k^2+4k$이므로

$-k^2+4k=-5$, $k^2-4k-5=0$

$(k+1)(k-5)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=5$

그런데 $k<2$이므로 $k=-1$

(i), (ii)에 의하여

$k=-1$

$\therefore f^{-1}(-5)=-1$

$\therefore (f\circ f)(3)+f^{-1}(-5)=12+(-1)=11$

**19** $(f\circ g\circ h)(x)=(f\circ g)(h(x))=h(x)$

이므로 $f\circ g$는 항등함수이다.

이때 $f$가 일대일대응이므로 $g$는 $f$의 역함수이다.

따라서 $g(2)=k$ ($k$는 상수)라고 하면

$f(k)=2$이므로

$\frac{1}{2}k+3=2$에서 $k=-2$

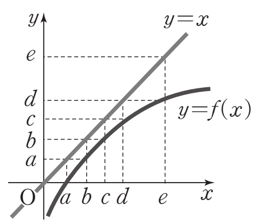
$\therefore g(2)=-2$

**20** $(f\circ f)^{-1}(c)=(f^{-1}\circ f^{-1})(c)$

$=f^{-1}(f^{-1}(c))$ ...... ㉠

이때 $f^{-1}(c)=k$ ($k$는 상수)라고 하면

$f(k)=c$




직선 $y=x$를 이용하여 $y$축과 점선이 만나는 점의 $y$좌표를 구하여 표시하면 위의 그림과 같다.

위의 그래프에서 $f(k)=c$를 만족하는 $k$의 값은

$k=d$ $\therefore f^{-1}(c)=d$

이를 ㉠에 대입하면

$(f\circ f)^{-1}(c)=f^{-1}(d)$

$f^{-1}(d)=l$ ($l$은 상수)라고 하면

$f(l)=d$

위의 그래프에서 $f(l)=d$를 만족하는 $l$의 값은

$l=e$ $\therefore f^{-1}(d)=e$

$\therefore (f\circ f)^{-1}(c)=e$

**21** 2에서 100까지의 짝수 중 2의 배수는 50개, $2^2$의 배수는 25개, $2^3$의 배수는 12개, $2^4$의 배수는 6개, $2^5$의 배수는 3개, $2^6$의 배수는 1개이다.
2와 서로소인 자연수 $m$에 대하여
$2\times4\times6\times\cdots\times98\times100$을 $2^y\times m$ 꼴로 나타내면

$$\begin{aligned}2\times4\times6\times\cdots\times98\times100&=2^{50}\times2^{25}\times2^{12}\times2^6\times2^3\times2^1\times m\\&=2^{97}\times m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(2\times4\times6\times\cdots\times98\times100)&=f(2^{97}\times m)\\&=97\end{aligned}$$

**22** $f(2)$는 $2^{121}$을 10으로 나누었을 때의 나머지이므로 $2^{121}$의 일의 자리의 숫자와 같다.
이때 $2^1=2,\ 2^2=4,\ 2^3=8,\ 2^4=16,\ 2^5=32,\ 2^6=64,\ \cdots$이므로 $2^n$ ($n$은 자연수)의 일의 자리의 숫자는 2, 4, 8, 6이 이 순서대로 반복된다.
따라서 $121=4\times30+1$에서 $2^{121}$의 일의 자리의 숫자는 $2^1$의 일의 자리의 숫자와 같으므로 2이다.
$\therefore\ f(2)=2$

$$\begin{aligned}\therefore\ (f\circ f\circ f)(2)&=f(f(f(2)))\\&=f(f(2))\\&=f(2)\\&=2\end{aligned}$$

**23** 함수 $g(x)$의 함수식을 구하면 다음과 같다.

(i) $0\le x<1$일 때
$f(x)=x$이고 $(g\circ f)(x)=2x$이므로

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=g(f(x))\\&=g(x)\\&=2x\ (0\le x<1)\end{aligned}$$

(ii) $1\le x<2$일 때
$f(x)=1$이고 $(g\circ f)(x)=2$이므로

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=g(f(x))\\&=g(1)\\&=2\end{aligned}$$

(iii) $2\le x\le3$일 때
$f(x)=x-1$이고 $(g\circ f)(x)=-2x+6$이므로

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=g(f(x))\\&=g(x-1)\\&=-2x+6\end{aligned}$$

이때 $x-1=t$로 놓으면 $x=t+1$이므로

$$\begin{aligned}g(t)&=-2(t+1)+6\\&=-2t+4\end{aligned}$$

그런데 $2\le x\le3$이므로 $1\le t\le2$
$\therefore\ g(x)=-2x+4\ (1\le x\le2)$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$g(x)=\begin{cases}2x & (0\le x<1)\\-2x+4 & (1\le x\le2)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 ③이다.

**24** 두 함수 $f$, $g$의 정의역이 집합 $X$로 같으므로 $f=g$이려면 정의역 $X$의 모든 원소 $x$에 대하여 $f(x)=g(x)$이어야 한다. …… (가)
$f(x)=g(x)$에서
$x^2+7x-7=2x+7$
$x^2+5x-14=0$
$(x+7)(x-2)=0$
$\therefore\ x=-7$ 또는 $x=2$ …… (나)
이때 정의역 $X$가 공집합이면 두 함수 $f$, $g$도 존재하지 않으므로 $X$는 공집합이 아닌 집합 $\{-7,\ 2\}$의 부분집합이다. …… (다)
따라서 $f=g$가 되도록 하는 정의역 $X$의 개수는
$2^2-1=3$ …… (라)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) 두 함수가 서로 같을 조건을 안다. | 1점 |
| (나) 정의역 $X$의 원소가 될 수 있는 값을 구한다. | 2점 |
| (다) 정의역 $X$의 조건을 구한다. | 2점 |
| (라) 정의역 $X$의 개수를 구한다. | 1점 |

**25** (1)

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f(g(x))\\&=f\left(\frac{1}{2}x+2\right)\\&=2\left(\frac{1}{2}x+2\right)-a\\&=x-a+4\end{aligned}$$

…… (가)

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=g(f(x))\\&=g(2x-a)\\&=\frac{1}{2}(2x-a)+2\\&=x-\frac{1}{2}a+2\end{aligned}$$

…… (나)

(2) $(f\circ g)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$에서
$(f\circ g)^{-1}=(g\circ f)^{-1}$이므로
$f\circ g=g\circ f$ …… (다)
이때 $(f\circ g)(x)=x-a+4$,
$(g\circ f)(x)=x-\frac{1}{2}a+2$이므로
$x-a+4=x-\frac{1}{2}a+2$
이 식이 $x$에 대한 항등식이므로
$-a+4=-\frac{1}{2}a+2$
$-\frac{1}{2}a=-2$
$\therefore\ a=4$ …… (라)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) $(f\circ g)(x)$를 구한다. | 1점 |
| (나) $(g\circ f)(x)$를 구한다. | 1점 |
| (다) $f\circ g=g\circ f$임을 안다. | 2점 |
| (라) $a$의 값을 구한다. | 1점 |

**26** 집합 $X$에서 함수 $f(x)=(x-1)^2+1$은 $x$의 값이 증가할 때, $y$의 값도 증가하므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다. …… (가)

$y=(x-1)^2+1$과 $y=x$에서 $y$를 소거하면

$(x-1)^2+1=x$

$x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$ …… (나)

두 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로 두 교점의 좌표는

$(1,\ 1),\ (2,\ 2)$ …… (다)

따라서 이 두 교점 사이의 거리는

$\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$ …… (라)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 일치함을 이해한다. | 2점 |
| (나) 방정식 $f(x)=x$를 푼다. | 2점 |
| (다) 두 교점의 좌표를 구한다. | 1점 |
| (라) 두 교점 사이의 거리를 구한다. | 1점 |

# 11강 유리식과 유리함수

## 확인 문제 p. 44

**1** (1) $\dfrac{x-2}{x^2-x-2}=\dfrac{x-2}{(x-2)(x+1)}=\dfrac{1}{x+1}$

(2) $\dfrac{x(x-y)}{y(y-x)}=\dfrac{x(x-y)}{-y(x-y)}=-\dfrac{x}{y}$

**2** (2), (3), (4)

## 교/과/서/속 핵심+유형 닮은꼴 문제 p. 45

**1** (1) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{x(x+2)+2(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$=\dfrac{x^2+4x-4}{(x-2)(x+2)}$

(2) $\dfrac{x+1}{x^2+2x+1}-\dfrac{3}{x^2-x-2}=\dfrac{x+1}{(x+1)^2}-\dfrac{3}{(x-2)(x+1)}$

$=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{(x-2)(x+1)}$

$=\dfrac{x-2-3}{(x-2)(x+1)}$

$=\dfrac{x-5}{(x-2)(x+1)}$

(3) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x}\times\dfrac{x-1}{x^2-4}$

$=\dfrac{(x+1)(x+2)}{x(x-1)}\times\dfrac{x-1}{(x-2)(x+2)}$

$=\dfrac{x+1}{x(x-2)}$

(4) $\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-9}\div\dfrac{x^2+x-2}{x-3}$

$=\dfrac{(x-1)(x+4)}{(x-3)(x+3)}\div\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-3}$

$=\dfrac{(x-1)(x+4)}{(x-3)(x+3)}\times\dfrac{x-3}{(x-1)(x+2)}$

$=\dfrac{x+4}{(x+3)(x+2)}$

**2** (1) $2+\dfrac{3}{3x+1}=\dfrac{2(3x+1)+3}{3x+1}=\dfrac{6x+5}{3x+1}$

(2) $\dfrac{x+1}{x-2}-\dfrac{x+3}{x^2+x-6}=\dfrac{x+1}{x-2}-\dfrac{x+3}{(x-2)(x+3)}$

$=\dfrac{x+1}{x-2}-\dfrac{1}{x-2}$

$=\dfrac{x}{x-2}$

(3) $\dfrac{x^2-1}{(x-3)^2}\times\dfrac{2x-6}{x^2+x}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-3)^2}\times\dfrac{2(x-3)}{x(x+1)}$

$=\dfrac{2(x-1)}{x(x-3)}$

(4) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\div\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+4x+3}$

$=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}\div\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)(x+3)}$

$=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}\times\dfrac{(x+1)(x+3)}{(x-1)(x+3)}$

$=\dfrac{x-2}{x+2}$

**3** (1) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{x-1}-1}=\dfrac{1}{\dfrac{1-(x-1)}{x-1}}=\dfrac{1}{\dfrac{-x+2}{x-1}}=\dfrac{x-1}{2-x}$

(2) $\dfrac{1-\dfrac{x-y}{x+y}}{1+\dfrac{x-y}{x+y}}=\dfrac{\dfrac{x+y-(x-y)}{x+y}}{\dfrac{x+y+x-y}{x+y}}=\dfrac{\dfrac{2y}{x+y}}{\dfrac{2x}{x+y}}$

$=\dfrac{2y(x+y)}{2x(x+y)}=\dfrac{y}{x}$

**4** (1) $\dfrac{2-\dfrac{1}{x+1}}{2+\dfrac{1}{x+1}}=\dfrac{\dfrac{2(x+1)-1}{x+1}}{\dfrac{2(x+1)+1}{x+1}}$

$=\dfrac{\dfrac{2x+1}{x+1}}{\dfrac{2x+3}{x+1}}$

$=\dfrac{(2x+1)(x+1)}{(2x+3)(x+1)}$

$=\dfrac{2x+1}{2x+3}$

(2) $\dfrac{\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}}{\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}}=\dfrac{\dfrac{x+y+x-y}{(x-y)(x+y)}}{\dfrac{x+y-(x-y)}{(x-y)(x+y)}}$

$=\dfrac{\dfrac{2x}{(x-y)(x+y)}}{\dfrac{2y}{(x-y)(x+y)}}$

$=\dfrac{2x(x-y)(x+y)}{2y(x-y)(x+y)}=\dfrac{x}{y}$

**5** (1) $x+3\neq0$에서 $x\neq-3$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\neq-3$인 실수$\}$

(2) 주어진 함수는 모든 실수에서 정의되므로 정의역은

$\{x\,|\,x$는 실수$\}$

**6** (1) $x+2\neq0$에서 $x\neq-2$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\neq-2$인 실수$\}$

(2) $x^2-1\neq0$에서 $x\neq-1,\ x\neq1$

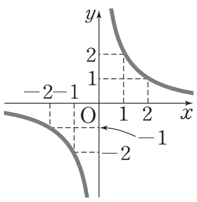
따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\neq-1,\ x\neq1$인 실수$\}$

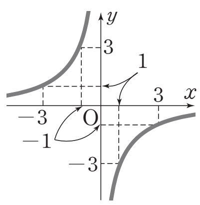
# 12강 유리함수의 그래프

## 확인 문제 p. 46

**1** (1)



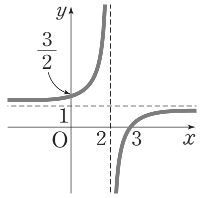

(2)




**2** 2, $-1$

## 교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 47

**1** (1) $y=-\dfrac{1}{x-2}+1$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

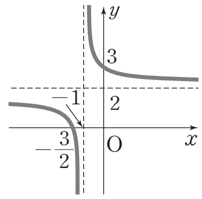



이때 점근선의 방정식은 $x=2,\ y=1$이고, 정의역은 $\{x\,|\,x\neq2$인 실수$\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\neq1$인 실수$\}$이다.

(2) $y=\dfrac{2x+3}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+1}{x+1}$

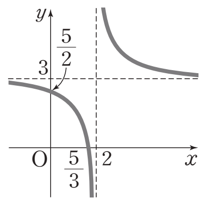
$=\dfrac{1}{x+1}+2$

따라서 $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.




이때 점근선의 방정식은 $x=-1,\ y=2$이고, 정의역은 $\{x\,|\,x\neq-1$인 실수$\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\neq2$인 실수$\}$이다.

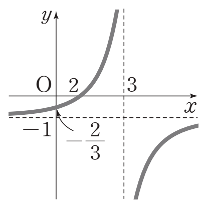
**2** (1) $y=\dfrac{1}{x-2}+3$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.




이때 점근선의 방정식은 $x=2,\ y=3$이고, 정의역은 $\{x\,|\,x\neq2$인 실수$\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\neq3$인 실수$\}$이다.

(2) $y=\dfrac{2-x}{x-3}=\dfrac{-(x-3)-1}{x-3}=-\dfrac{1}{x-3}-1$

따라서 $y=\dfrac{2-x}{x-3}$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 3만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.




이때 점근선의 방정식은 $x=3,\ y=-1$이고, 정의역은 $\{x\,|\,x\neq3$인 실수$\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\neq-1$인 실수$\}$이다.

**3** $y=\frac{3x-5}{x-2}=\frac{3(x-2)+1}{x-2}$
$=\frac{1}{x-2}+3$

따라서 $y=\frac{3x-5}{x-2}$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로

$a=2,\ b=3,\ k=1$

**4** $y=\frac{3-4x}{2x+1}=\frac{-2(2x+1)+5}{2x+1}$
$=\frac{5}{2x+1}-2$

따라서 이 그래프를 $x$축의 방향으로 $a$만큼, $y$축의 방향으로 $b$만큼 평행이동하면

$y=\frac{5}{2(x-a)+1}-2+b$
$=\frac{5}{2x-2a+1}-2+b$

이 그래프가 $y=\frac{5}{2x}$의 그래프와 일치해야 하므로

$-2a+1=0,\ -2+b=0$

$\therefore\ a=\frac{1}{2},\ b=2$

**5** 두 직선 $x=1,\ y=2$를 점근선으로 가지므로 주어진 유리함수의 식은

$y=\frac{k}{x-1}+2\ (k\neq0)$ ...... ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=-k+2$ $\therefore\ k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면

$y=\frac{1}{x-1}+2$

이 식을 $y=\frac{a}{x-b}+c$와 비교하면

$a=1,\ b=1,\ c=2$

**6** 두 직선 $x=-1,\ y=3$을 점근선으로 가지므로 주어진 유리함수의 식은

$y=\frac{k}{x+1}+3\ (k\neq0)$ ...... ㉠

㉠의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{2}+3$

$\therefore\ k=-6$

$k=-6$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$y=\frac{-6}{x+1}+3=\frac{3x-3}{x+1}$

이 식을 $y=\frac{ax+b}{x-c}$와 비교하면

$a=3,\ b=-3,\ c=-1$

## 11~12강 족집게 기출문제

p. 48~51

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 ② | 2 ③ | 3 ⑤ | 4 ① | |
| 5 $\frac{3}{x(x+6)}$ | | 6 ⑤ | 7 ③ | 8 $-\frac{1}{2}$ |
| 9 ② | 10 ④ | 11 ① | 12 ⑤ | 13 ④ |
| 14 ④ | 15 ③ | 16 8 | 17 ③ | 18 ② |
| 19 ① | 20 ③ | 21 ② | 22 ③ | 23 $-\frac{1}{6}$ |
| 24 4 | 25 12 | | | |

**1** $\frac{x+2}{x^2-1}\div\frac{x^2+5x+6}{x^2+x}\times\frac{2x^2+4x-6}{5x-2x^2}$
$=\frac{x+2}{x^2-1}\times\frac{x^2+x}{x^2+5x+6}\times\frac{2x^2+4x-6}{5x-2x^2}$
$=\frac{x+2}{(x-1)(x+1)}\times\frac{x(x+1)}{(x+2)(x+3)}\times\frac{2(x-1)(x+3)}{x(5-2x)}$
$=\frac{2}{5-2x}$

**2** $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$
$=-\left\{\frac{x^2}{(x-y)(z-x)}+\frac{y^2}{(x-y)(y-z)}+\frac{z^2}{(z-x)(y-z)}\right\}$
$=-\frac{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$ ...... ㉠

이때 ㉠의 분자를 인수분해하면

$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$
$=x^2(y-z)+y^2z-xy^2+xz^2-yz^2$
$=x^2(y-z)-x(y^2-z^2)+y^2z-yz^2$
$=x^2(y-z)-x(y-z)(y+z)+yz(y-z)$
$=(y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$
$=(y-z)(x-y)(x-z)$
$=-(x-y)(y-z)(z-x)$

이를 ㉠에 대입하면

(주어진 식)$=-\frac{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$
$=-\frac{-(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=1$

**3** $\frac{3x}{x^2-3x+2}+\frac{4}{1-x}=\frac{3x}{(x-1)(x-2)}-\frac{4}{x-1}$
$=\frac{3x-4(x-2)}{(x-1)(x-2)}$
$=\frac{-x+8}{(x-1)(x-2)}$

따라서 주어진 등식은

$\frac{-x+8}{(x-1)(x-2)}=\frac{cx+d}{(x-a)(x-b)}$

이 등식은 $x$에 대한 항등식이므로

$a=1,\ b=2,\ c=-1,\ d=8$

또는 $a=2,\ b=1,\ c=-1,\ d=8$

$\therefore\ ab-cd=2-(-8)=10$

**4** $\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x+3}{x+2}-\dfrac{x+4}{x+3}+\dfrac{x+5}{x+4}$

$=\dfrac{(x+1)+1}{x+1}-\dfrac{(x+2)+1}{x+2}-\dfrac{(x+3)+1}{x+3}+\dfrac{(x+4)+1}{x+4}$

$=\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)-\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)-\left(1+\dfrac{1}{x+3}\right)+\left(1+\dfrac{1}{x+4}\right)$

$=1+\dfrac{1}{x+1}-1-\dfrac{1}{x+2}-1-\dfrac{1}{x+3}+1+\dfrac{1}{x+4}$

$=\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)-\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}\right)$

$=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}-\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}$

$=\dfrac{(x+3)(x+4)-(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

$=\dfrac{4x+10}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

따라서 주어진 등식은

$\dfrac{4x+10}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

$=\dfrac{ax+b}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

이 등식은 $x$에 대한 항등식이므로

$a=4,\ b=10$

$\therefore\ a-b=-6$

**5** $\dfrac{1}{x(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+4)}+\dfrac{1}{(x+4)(x+6)}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+4}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x+6}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}-\cancel{\dfrac{1}{x+2}}+\cancel{\dfrac{1}{x+2}}-\cancel{\dfrac{1}{x+4}}+\cancel{\dfrac{1}{x+4}}-\dfrac{1}{x+6}\right)\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+6}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{x+6-x}{x(x+6)}$

$=\dfrac{3}{x(x+6)}$

**6** $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}}=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{x+2}{x+1}}}$

$=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{x+1}{x+2}}$

$=1+\dfrac{1}{\dfrac{2x+3}{x+2}}=1+\dfrac{x+2}{2x+3}$

$=\dfrac{3x+5}{2x+3}$

**7** $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$에서

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=3+2=5$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$

$\therefore\ x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=(\sqrt{5})^3-3\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

**8** 주어진 식을 간단히 하면

$\dfrac{\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}}=\dfrac{\dfrac{x(x-1)+x+1}{(x+1)(x-1)}}{\dfrac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)}}$

$=\dfrac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{2x(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{x^2+1}{2x}$

$x^2+x+1=0$에서 $x^2+1=-x$이므로

(주어진 식)$=\dfrac{x^2+1}{2x}=\dfrac{-x}{2x}=-\dfrac{1}{2}$

**9** 모든 실수 $x$, $y$에 대하여 $\dfrac{-3x+ay+b}{2x-3y-1}$가 항상 일정한 값 $k$($k$는 상수)를 가진다고 하면

$\dfrac{-3x+ay+b}{2x-3y-1}=k$

$2x-3y\neq1$이므로 $\quad 2x-3y-1\neq0$

양변에 $2x-3y-1$을 곱하면

$-3x+ay+b=k(2x-3y-1)$

$(2k+3)x-(3k+a)y-k-b=0$

이 등식은 $x$, $y$에 대한 항등식이므로

$2k+3=0,\ 3k+a=0,\ -k-b=0$

세 식을 연립하여 풀면

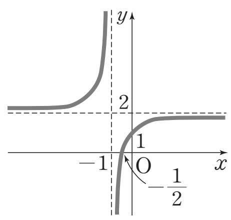
$k=-\dfrac{3}{2},\ a=\dfrac{9}{2},\ b=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ a+b=6$

**10** $y=\dfrac{2x+1}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-1}{x+1}$

$=-\dfrac{1}{x+1}+2$

이므로 $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

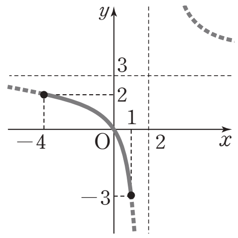



따라서 주어진 유리함수의 그래프는 위의 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.

**11** $y=\dfrac{3x}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+6}{x-2}$

$=\dfrac{6}{x-2}+3$

이므로 $y=\frac{3x}{x-2}$의 그래프는 $y=\frac{6}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.




따라서 $-4\le x\le 1$에서 주어진 유리함수의 그래프는 위의 그림과 같다.

$x=-4$일 때, $M=2$

$x=1$일 때, $m=-3$

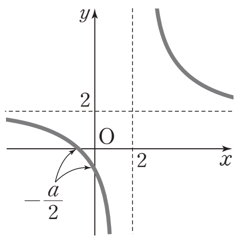
$\therefore\ M+m=-1$

**12** $y=\frac{2x+a}{x-2}=\frac{2(x-2)+a+4}{x-2}$

$=\frac{a+4}{x-2}+2$

이므로 $y=\frac{2x+a}{x-2}$의 그래프는 $y=\frac{a+4}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 주어진 유리함수의 그래프가 모든 사분면을 지나려면 다음 그림과 같아야 한다.




$a+4>0$이어야 하므로

$a>-4$ ...... ㉠

$x=0$일 때, $y<0$이어야 하므로

$-\frac{a}{2}<0$ $\therefore\ a>0$ ...... ㉡

$y=0$일 때, $x<0$이어야 하므로

$-\frac{a}{2}<0$ $\therefore\ a>0$ ...... ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $a>0$

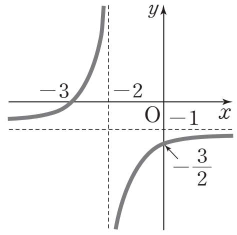
따라서 정수 $a$의 최솟값은 1이다.

**13** $y=\frac{-x-3}{x+2}=\frac{-(x+2)-1}{x+2}$

$=-\frac{1}{x+2}-1$

이므로 $y=\frac{-x-3}{x+2}$의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-2$만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 것이다.

이때 주어진 유리함수의 그래프는 다음 그림과 같다.




따라서 $x<-2$일 때, $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가하므로 옳지 않은 것은 ④이다.

**14** ① $y=\frac{x-1}{x+1}=\frac{(x+1)-2}{x+1}=-\frac{2}{x+1}+1$

② $y=\frac{-x+1}{x+1}=\frac{-(x+1)+2}{x+1}=\frac{2}{x+1}-1$

③ $y=\frac{x-3}{x-2}=\frac{(x-2)-1}{x-2}=-\frac{1}{x-2}+1$

④ $y=\frac{2x-1}{x+2}=\frac{2(x+2)-5}{x+2}=-\frac{5}{x+2}+2$

⑤ $y=\frac{2x-4}{2x-1}=\frac{(2x-1)-3}{2x-1}=-\frac{3}{2x-1}+1$

따라서 평행이동하여 $y=-\frac{5}{x}$의 그래프와 겹쳐질 수 있는 것은 ④이다.

**15** $y=\frac{ax-3}{x-1}=\frac{a(x-1)+a-3}{x-1}=\frac{a-3}{x-1}+a$

이므로 점근선의 방정식은 $x=1,\ y=a$

따라서 주어진 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(1,\ a)$에 대하여 대칭이므로

$a=2,\ b=1$ $\therefore\ a+b=3$

**16** 주어진 유리함수의 그래프에서 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=1$이므로 유리함수의 식은

$y=\frac{k}{x-2}+1\,(k<0)$ ...... ㉠

㉠의 그래프는 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=\frac{k}{0-2}+1$ $\therefore\ k=-2$

$k=-2$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$y=\frac{-2}{x-2}+1=\frac{x-4}{x-2}$

이 식을 $y=\frac{ax+b}{x+c}$와 비교하면

$a=1,\ b=-4,\ c=-2$

$\therefore\ abc=8$

**17** $f^1(-1)=f(-1)=\frac{1}{2}$

$f^2(-1)=(f\circ f)(-1)=f(f(-1))=f\left(\frac{1}{2}\right)=2$

$f^3(-1)=(f\circ f^2)(-1)=f(f^2(-1))=f(2)=-1$

$f^4(-1)=(f\circ f^3)(-1)=f(f^3(-1))=f(-1)=\frac{1}{2}$

$f^5(-1)=(f\circ f^4)(-1)=f(f^4(-1))=f\left(\frac{1}{2}\right)=2$

$\vdots$

따라서 $f^n(-1)$의 함숫값은 $\frac{1}{2}$, 2, $-1$이 이 순서대로 반복되므로

$f^{3k+1}(-1)=\frac{1}{2}$, $f^{3k+2}(-1)=2$, $f^{3k+3}(-1)=-1$

($k$는 음이 아닌 정수)

$\therefore f^{2020}(-1)=f^{3\times673+1}(-1)=\frac{1}{2}$

**18** $(f\circ g)(x)=x$이므로 $g(x)=f^{-1}(x)$

$y=\frac{2x-1}{x-1}$을 $x$에 대하여 풀면

$xy-y=2x-1$, $x(y-2)=y-1$

$\therefore x=\frac{y-1}{y-2}$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $y=\frac{x-1}{x-2}$

$\therefore g(x)=\frac{x-1}{x-2}$

**다른 풀이** $f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$의 역함수 구하기

$f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$ 2와 $-1$의 위치와 부호를 바꿈 $f^{-1}(x)=\frac{1\times x-1}{x-2}$

**19** $y=\frac{bx+1}{x+a}$을 $x$에 대하여 풀면

$xy+ay=bx+1$, $x(y-b)=-ay+1$

$\therefore x=\frac{-ay+1}{y-b}$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $y=\frac{-ax+1}{x-b}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{-ax+1}{x-b}$

$=\frac{-a(x-b)-ab+1}{x-b}$

$=\frac{-ab+1}{x-b}-a$

따라서 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=b$, $y=-a$

주어진 조건에서 역함수의 그래프의 점근선이 두 직선

$x=-1$, $y=2$이므로

$a=-2$, $b=-1$

**다른 풀이** $f(x)=\frac{bx+1}{x+a}$의 역함수 구하기

$f(x)=\frac{bx+1}{x+a}$ $b$와 $a$의 위치와 부호를 바꿈 $f^{-1}(x)=\frac{-ax+1}{x-b}$

**20** $y=\frac{x+1}{x-3}$과 $y=-x+m$에서 $y$를 소거하면

$\frac{x+1}{x-3}=-x+m$, $m+1=(-x+m)(x-3)$

$x+1=-x^2+(m+3)x-3m$

$x^2-(m+2)x+3m+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 $D$라고 하면

$D<0$이어야 하므로

$D=(m+2)^2-4(3m+1)<0$

$m^2-8m<0$, $m(m-8)<0$

$\therefore 0<m<8$

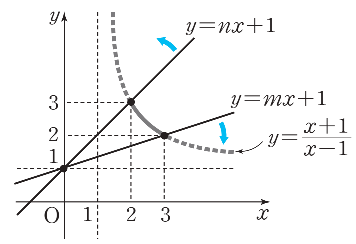
따라서 정수 $m$의 최댓값은 7이다.

**21** $y=\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x-1)+2}{x-1}=\frac{2}{x-1}+1$

이므로 $2\le x\le3$에서 주어진 부등식이 성립하도록

$y=\frac{x+1}{x-1}$, $y=mx+1$, $y=nx+1$

의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.




즉, 직선 $y=nx+1$은 점 (2, 3)을 지나거나 위쪽에 있어야 하고, 직선 $y=mx+1$은 점 (3, 2)를 지나거나 아래쪽에 있어야 한다.

(i) 직선 $y=nx+1$이 점 (2, 3)을 지날 때

$3=2n+1$ $\therefore n=1$

따라서 직선 $y=nx+1$이 점 (2, 3)을 지나거나 위쪽에 있으려면 $n\ge1$

(ii) 직선 $y=mx+1$이 점 (3, 2)를 지날 때

$2=3m+1$ $\therefore m=\frac{1}{3}$

따라서 직선 $y=mx+1$이 점 (3, 2)를 지나거나 아래쪽에 있으려면 $m\le\frac{1}{3}$

(i), (ii)에 의하여 상수 $m$의 최댓값은 $\frac{1}{3}$, 상수 $n$의 최솟값은 1이므로 구하는 $m$의 최댓값과 $n$의 최솟값의 곱은 $\frac{1}{3}$이다.

**22** 주어진 유리함수의 그래프에서 점근선의 방정식이 $x=m$, $y=n$이므로 유리함수의 식은

$y=\frac{k}{x-m}+n\ (k>0)$ ...... ㉠

㉠의 그래프는 점 $(0, l)$을 지나므로

$l=\frac{k}{0-m}+n$ $\therefore k=-m(l-n)$

이를 ㉠에 대입하면

$y=\frac{-m(l-n)}{x-m}+n$

이 식을 $y=\frac{b}{x-a}+c$와 비교하면

$a=m$, $b=-m(l-n)$, $c=n$

ㄱ. $m>n$이므로　$a-c=m-n>0$

ㄴ. $a=m>0$, $c=n>0$

　또 주어진 그래프에서　$b>0$

　$\therefore a+b+c>0$

ㄷ. $ac=mn$, $b=-m(l-n)=mn-lm$

　이때 $m>0$, $l<0$에서 $lm<0$이므로

　$mn<mn-lm$　　$\therefore ac<b$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

**23** $\dfrac{2x+y}{5}=\dfrac{x+2y}{7}$에서 $7(2x+y)=5(x+2y)$

$\therefore y=3x$ …… (가)

이를 주어진 식에 대입하면

$\dfrac{x^2-xy}{xy+y^2}=\dfrac{x^2-x\times 3x}{x\times 3x+(3x)^2}$

$=\dfrac{-2x^2}{12x^2}=-\dfrac{1}{6}$ …… (나)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) $y$를 $x$에 관한 식으로 나타낸다. | 3점 |
| (나) 주어진 식의 값을 구한다. | 3점 |

**다른 풀이**

$\dfrac{2x+y}{5}=\dfrac{x+2y}{7}=k$로 놓으면

$2x+y=5k$, $x+2y=7k$

두 식을 연립하여 풀면

$x=k$, $y=3k$ …… ㉠ …… (가)

$xy\neq 0$이므로　$k\neq 0$

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\dfrac{x^2-xy}{xy+y^2}=\dfrac{k^2-k\times 3k}{k\times 3k+(3k)^2}$

$=\dfrac{-2k^2}{12k^2}=-\dfrac{1}{6}$ …… (나)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) $\dfrac{2x+y}{5}=\dfrac{x+2y}{7}=k$로 놓고, $x$, $y$를 $k$에 관한 식으로 나타낸다. | 4점 |
| (나) 주어진 식의 값을 구한다. | 2점 |

**24** $y=\dfrac{3x+a}{x+1}=\dfrac{3(x+1)+a-3}{x+1}$

$=\dfrac{a-3}{x+1}+3$ …… (가)

따라서 $y=\dfrac{a-3}{x+1}+3$의 그래프를 평행이동하면 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프와 겹쳐지므로

$a-3=1$　　$\therefore a=4$ …… (나)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) 주어진 유리함수의 식을 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한다. | 2점 |
| (나) $a$의 값을 구한다. | 3점 |

**25** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$

$=\dfrac{(x+1)-2}{x+1}$

$=-\dfrac{2}{x+1}+1$

이므로 점근선의 방정식은

$x=-1$, $y=1$ …… ㉠ …… (가)

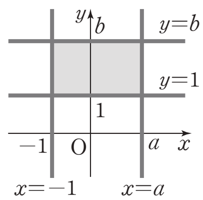
$y=\dfrac{bx+1}{x-a}$

$=\dfrac{b(x-a)+ab+1}{x-a}$

$=\dfrac{ab+1}{x-a}+b$

이므로 점근선의 방정식은

$x=a$, $y=b$ …… ㉡ …… (나)




따라서 ㉠, ㉡으로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림과 같이 가로의 길이와 세로의 길이가 각각

$a+1$, $b-1$ ($\because a$, $b$는 자연수)

인 직사각형이다. …… (다)

이 직사각형의 넓이가 11이므로

$(a+1)(b-1)=11$

이때 $a$, $b$는 자연수이므로 $a+1$은 2 이상의 정수, $b-1$은 음이 아닌 정수이다.

따라서 $a+1=11$, $b-1=1$이므로

$a=10$, $b=2$ …… (라)

$\therefore a+b=12$ …… (마)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$의 그래프의 점근선의 방정식을 구한다. | 2점 |
| (나) $y=\dfrac{bx+1}{x-a}$의 그래프의 점근선의 방정식을 구한다. | 2점 |
| (다) 점근선으로 둘러싸인 도형이 어떤 모양인지 안다. | 1점 |
| (라) $a$, $b$의 값을 구한다. | 2점 |
| (마) $a+b$의 값을 구한다. | 1점 |

# 13강 무리식과 무리함수

**확인 문제** p. 52

**1** (1) $x+1\geq 0$이어야 하므로

$x\geq -1$

(2) $1-x>0$이어야 하므로

$x<1$

**2** (2), (4)

교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 53

**1** $\sqrt{x-2}$에서 $x-2\geq 0$

$\therefore x\geq 2$ ······ ㉠

$\sqrt{3-x}$에서 $3-x\geq 0$

$\therefore x\leq 3$ ······ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $2\leq x\leq 3$

**2** $\sqrt{6-2x}$에서 $6-2x\geq 0$ $\therefore x\leq 3$ ······ ㉠

$\sqrt{x}$에서 $x\geq 0$ ······ ㉡

$\sqrt{x}-1\neq 0$에서 $x\neq 1$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$0\leq x<1$ 또는 $1<x\leq 3$

**3** (1) $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$

$=(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x})^2$

$=x+1-x=1$

(2) $\dfrac{1}{1-\sqrt{x-2}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{x-2}}$

$=\dfrac{1+\sqrt{x-2}+1-\sqrt{x-2}}{(1-\sqrt{x-2})(1+\sqrt{x-2})}$

$=\dfrac{2}{1^2-(\sqrt{x-2})^2}$

$=\dfrac{2}{1-(x-2)}$

$=\dfrac{2}{3-x}$

**4** (1) $(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})$

$=(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{x-2})^2$

$=x+2-(x-2)=4$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-y}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-y}+\sqrt{x}-\sqrt{x-y}}{(\sqrt{x}-\sqrt{x-y})(\sqrt{x}+\sqrt{x-y})}$

$=\dfrac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{x-y})^2}=\dfrac{2\sqrt{x}}{x-(x-y)}$

$=\dfrac{2\sqrt{x}}{y}$

**5** (1) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}}=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2})}$

$=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}}{(x+1)-(x-2)}$

$=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}}{3}$

(2) $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\dfrac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}$

$=\dfrac{x+1+2\sqrt{x^2-1}+x-1}{(x+1)-(x-1)}$

$=x+\sqrt{x^2-1}$

**6** (1) $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}$

$=\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x^2-(x^2-1)}$

$=x+\sqrt{x^2-1}$

(2) $\dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x}}=\dfrac{\sqrt{2x}(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x})}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x})(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x})}$

$=\dfrac{\sqrt{4x^2+2x}-2x}{2x+1-2x}$

$=\sqrt{4x^2+2x}-2x$

**7** (1) $2x-1\geq 0$에서

$x\geq \dfrac{1}{2}$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\left\{x\,\middle|\,x\geq \dfrac{1}{2}\right\}$

(2) $5-x\geq 0$에서

$x\leq 5$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\leq 5\}$

**8** (1) $3x-6\geq 0$에서

$x\geq 2$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\geq 2\}$

(2) $1-x^2\geq 0$에서

$(x+1)(x-1)\leq 0$

$\therefore -1\leq x\leq 1$

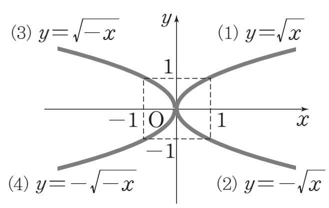
따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,-1\leq x\leq 1\}$

# 14강 무리함수의 그래프

## 확인 문제 p. 54

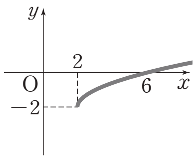
**1**




**2** 1, $-2$

## 교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 55

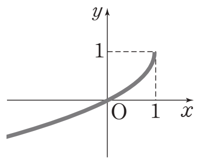
**1** (1) $y=\sqrt{x-2}-2$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.




이때 정의역은 $\{x|x\ge 2\}$, 치역은 $\{y|y\ge -2\}$이다.

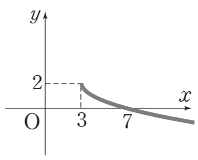
(2) $y=-\sqrt{-x+1}+1=-\sqrt{-(x-1)}+1$

따라서 $y=-\sqrt{-x+1}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.




이때 정의역은 $\{x|x\le 1\}$, 치역은 $\{y|y\le 1\}$이다.

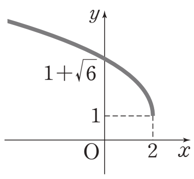
**2** (1) $y=2-\sqrt{x-3}$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 3만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.




이때 정의역은 $\{x|x\ge 3\}$, 치역은 $\{y|y\le 2\}$이다.

(2) $y=\sqrt{6-3x}+1=\sqrt{-3(x-2)}+1$

따라서 $y=\sqrt{6-3x}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.




이때 정의역은 $\{x|x\le 2\}$, 치역은 $\{y|y\ge 1\}$이다.

**3** $y=\sqrt{2-4x}-3=\sqrt{-4\left(x-\frac{1}{2}\right)}-3$

따라서 $y=\sqrt{2-4x}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{-4x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, $y$축의 방향으로 $-3$만큼 평행이동한 것이므로

$a=\frac{1}{2}$, $b=-3$

**4** $y=-\sqrt{kx}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $a$만큼, $y$축의 방향으로 $b$만큼 평행이동하면

$y=-\sqrt{k(x-a)}+b=-\sqrt{kx-ak}+b$

이 그래프가 $y=-\sqrt{2x-6}+1$의 그래프와 일치해야 하므로

$k=2$, $-ak=-6$, $b=1$

$\therefore a=3$, $b=1$, $k=2$

**5** 주어진 무리함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\,(a>0)$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 무리함수의 식은

$y=\sqrt{a(x+1)}+2$ …… ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=\sqrt{a}+2$, $\sqrt{a}=1$

$\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{x+1}+2$

$\therefore a=1$, $b=1$, $c=2$

**6** 주어진 무리함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\,(a>0)$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 무리함수의 식은

$y=-\sqrt{a(x-2)}+2$ …… ㉠

㉠의 그래프가 점 $(3,\ 0)$을 지나므로

$0=-\sqrt{a}+2$, $\sqrt{a}=2$ $\therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$y=-\sqrt{4(x-2)}+2=-\sqrt{4x-8}+2$

$\therefore a=4$, $b=-8$, $c=2$

## 13~14강 족집게 기출문제 p. 56~59

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 ③ | 2 ④ | 3 ⑤ | 4 ④ | 5 ④ |
| 6 ④ | 7 ① | 8 ⑤ | 9 ④ | 10 ② |
| 11 ③ | 12 제4사분면 | | 13 ⑤ | 14 ③ |
| 15 ② | 16 ① | 17 ③ | 18 ⑤ | |
| 19 $-\frac{11}{4}<a<3$ | | 20 $\frac{1}{8}$ | 21 3 | |
| 22 (1) 8 (2) 1 | | 23 5 | | |

**1** $6-3x\ge 0$, $x+2\ge 0$, $3-x\ne 0$에서

$-2\le x\le 2$

따라서 $M=2$, $m=-2$이므로

$M+m=0$

**2** $x+1\ge 0$, $2-x\ge 0$에서 $-1\le x\le 2$

따라서 $x+2>0$, $x-3<0$이므로

$\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{4x^2-24x+36}$

$=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{4(x-3)^2}$

$=|x+2|+2|x-3|$

$=x+2-2(x-3)$

$=-x+8$

**3** $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

$=\frac{\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})-\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}$

$=\frac{x+2+\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+2x}+x}{x+2-x}$

$=\dfrac{2x+2}{2}$

$=x+1$

**4** $x=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=3+2\sqrt{2}$

$\therefore \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$

$=\dfrac{2x+2}{x-1}$

$=\dfrac{2(3+2\sqrt{2})+2}{3+2\sqrt{2}-1}$

$=\dfrac{8+4\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{4\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2(1+\sqrt{2})}$

$=2\sqrt{2}$

**5** $y=-\sqrt{ax-3}+4$의 그래프가 점 $(2,\ 3)$을 지나므로

$3=-\sqrt{2a-3}+4$, $\sqrt{2a-3}=1$

$\therefore a=2$

$a=2$를 주어진 식에 대입하여 정리하면

$y=-\sqrt{2x-3}+4=-\sqrt{2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)}+4$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\left\{x\,\middle|\,x\ge\dfrac{3}{2}\right\}$

**6** $y=2\sqrt{2x+1}+3=2\sqrt{2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}+3$

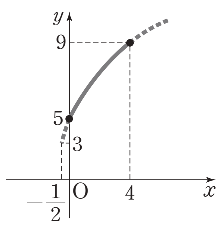
이므로 $y=2\sqrt{2x+1}+3$의 그래프는 $y=2\sqrt{2x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-\dfrac{1}{2}$만큼, $y$축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0\le x\le 4$에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=4$일 때, $M=9$

$x=0$일 때, $m=5$

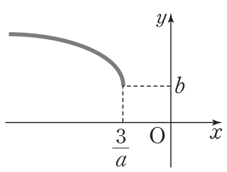
$\therefore M-m=4$




**7** $y=\sqrt{ax-3}+b=\sqrt{a\left(x-\dfrac{3}{a}\right)}+b$

이므로 $y=\sqrt{ax-3}+b$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $\dfrac{3}{a}$만큼, $y$축의 방향으로 $b$만큼 평행이동한 것이다.

이때 정의역이 $\{x\,|\,x\le -1\}$, 치역이 $\{y\,|\,y\ge 1\}$이므로 이를 만족하도록 주어진 함수의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.




따라서 주어진 함수의 정의역은

$\left\{x\,\middle|\,x\le\dfrac{3}{a}\right\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\ge b\}$이므로

$\dfrac{3}{a}=-1$, $b=1$ $\quad\therefore a=-3$, $b=1$

$\therefore ab=-3$

**8** $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 3만큼 평행이동하면

$y=\sqrt{-2(x-2)}+3$

$\therefore y=\sqrt{-2x+4}+3$

이 그래프가 $y=\sqrt{-2x+a}+b$의 그래프와 일치해야 하므로

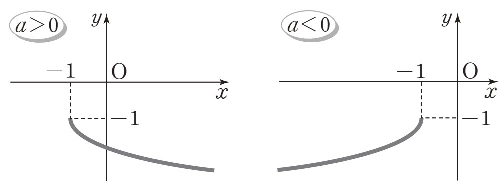
$a=4$, $b=3$ $\quad\therefore ab=12$

**9** ④ $y=\sqrt{2-x}=\sqrt{-(x-2)}$

이므로 $y=\sqrt{2-x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

**10** $y=-\sqrt{ax+a}-1=-\sqrt{a(x+1)}-1\,(a\ne 0)$

이므로 주어진 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.




① $a>0$일 때, 정의역은 $\{x\,|\,x\ge -1\}$

$a<0$일 때, 정의역은 $\{x\,|\,x\le -1\}$

② $a>0$일 때와 $a<0$일 때 모두 치역은 $\{y\,|\,y\le -1\}$

③ 주어진 함수의 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동하면

$-y=-\sqrt{ax+a}-1$ $\quad\therefore y=\sqrt{ax+a}+1$

④ 주어진 함수의 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동하면

$y=-\sqrt{a(-x)+a}-1$ $\quad\therefore y=-\sqrt{-ax+a}-1$

⑤ 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳은 것은 ②이다.

**11** 주어진 무리함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\,(a<0)$의 그래프를 $x$축의 방향으로 4만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 무리함수의 식은

$y=\sqrt{a(x-4)}+2\,(a<0)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0,\ 4)$를 지나므로

$4=\sqrt{-4a}+2$, $\sqrt{-4a}=2$ $\quad\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$y=\sqrt{-(x-4)}+2=\sqrt{-x+4}+2$

이 식을 $y=\sqrt{ax+b}+c$와 비교하면

$a=-1$, $b=4$, $c=2$

$\therefore abc=-8$

**12** 주어진 유리함수의 그래프에서 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=2$이므로 유리함수의 식은

$y=\dfrac{k}{x-1}+2\,(k>0)$ ...... ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=\dfrac{k}{-1}+2$ $\quad\therefore k=1$

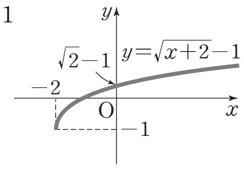
$k=1$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$y=\dfrac{1}{x-1}+2=\dfrac{2x-1}{x-1}$

이 식을 $y=\dfrac{bx+c}{ax-1}$와 비교하면

$a=1,\ b=2,\ c=-1$

따라서 $y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{x+2}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-2$만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같이 제4사분면을 지나지 않는다.




**13** 주어진 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서

(i) 아래로 볼록하므로 $\quad a>0$

(ii) 축의 방정식은 $\quad x=-\dfrac{b}{2a}$

이때 축이 $y$축의 오른쪽에 위치하므로

$-\dfrac{b}{2a}>0$

그런데 (i)에서 $a>0$이므로 $\quad b<0$

(iii) $y$절편이 음수이므로 $\quad c<0$

$y=\sqrt{cx+b}+a=\sqrt{c\left(x+\dfrac{b}{c}\right)}+a$

이므로 $y=\sqrt{cx+b}+a$의 그래프는 $y=\sqrt{cx}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-\dfrac{b}{c}$만큼, $y$축의 방향으로 $a$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $c<0,\ -\dfrac{b}{c}<0,\ a>0$이므로 $y=\sqrt{cx+b}+a$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ⑤이다.

**14** $y=\sqrt{2-x}-1$을 $x$에 대하여 풀면

$\sqrt{2-x}=y+1,\ 2-x=(y+1)^2$

$\therefore x=-(y+1)^2+2$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면

$y=-(x+1)^2+2$

이때 주어진 무리함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\le 2\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\ge -1\}$이므로 주어진 무리함수의 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge -1\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\le 2\}$이다.

따라서 구하는 역함수는

$y=-(x+1)^2+2\ (x\ge -1)$

**15** $f^{-1}(4)=a$에서 $f(a)=4$이므로

$\dfrac{a+2}{a-1}=4$ $\quad\therefore a=2$

$(f\circ(g\circ f)^{-1})(2)=b$에서

$(f\circ(g\circ f)^{-1})(2)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1})(2)$

$=g^{-1}(2)=b$

따라서 $g(b)=2$이므로 $\sqrt{2b-1}=2$ $\quad\therefore b=\dfrac{5}{2}$

$\therefore ab=5$

**16** 두 함수 $f$와 $f^{-1}$는 서로 역함수 관계에 있으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이때 무리함수 $f(x)=\sqrt{x-2}+2$는 $x$의 값이 증가할 때, $y$의 값도 증가하므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$y=\sqrt{x-2}+2$와 $y=x$에서 $y$를 소거하면

$\sqrt{x-2}+2=x,\ \sqrt{x-2}=x-2$

양변을 제곱하면

$x-2=x^2-4x+4,\ x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=3$

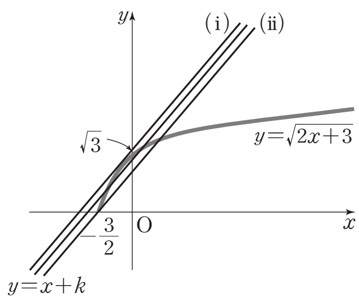
따라서 두 교점 P, Q의 좌표는

P$(2,\ 2)$, Q$(3,\ 3)$ 또는 P$(3,\ 3)$, Q$(2,\ 2)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(3-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$

**17** $y=\sqrt{2x+3}=\sqrt{2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)}$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-\dfrac{3}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

$y=\sqrt{2x+3}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 다음 그림과 같이 직선 $y=x+k$가 두 직선 (i)과 (ii) 사이를 지나거나 직선 (ii)일 때이다.




(i) $y=\sqrt{2x+3}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때

$\sqrt{2x+3}=x+k$에서 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+2(k-1)x+k^2-3=0$

이 이차방정식의 판별식을 $D$라고 하면

$\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-3)=0$

$-2k+4=0$ $\quad\therefore k=2$

(ii) 직선 $y=x+k$가 점 $\left(-\dfrac{3}{2},\ 0\right)$을 지날 때

$0=-\dfrac{3}{2}+k$ $\quad\therefore k=\dfrac{3}{2}$

(i), (ii)에 의하여 $\dfrac{3}{2}\le k<2$

따라서 $a=\dfrac{3}{2}$, $b=2$이므로 $ab=3$

**18** $f(x)=\sqrt{x}+1+|\sqrt{x}-1|$에서

(i) $0\le x<1$일 때

$f(x)=\sqrt{x}+1-(\sqrt{x}-1)=2$

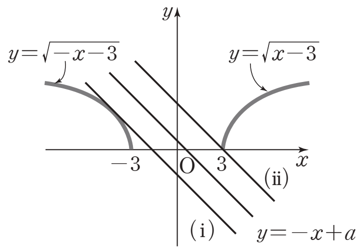
(ii) $x\ge 1$일 때

$f(x)=\sqrt{x}+1+(\sqrt{x}-1)=2\sqrt{x}$

(i), (ii)에 의하여 $y=f(x)$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ⑤이다.

**19** $y=\begin{cases}\sqrt{x-3} & (x\ge 0)\\ \sqrt{-x-3} & (x<0)\end{cases}$

이때 $y=\sqrt{|x|-3}$의 그래프와 직선 $y=-x+a$가 만나지 않으려면 다음 그림과 같이 직선 $y=-x+a$가 두 직선 (i)과 (ii) 사이에 있어야 한다.




(i) $y=\sqrt{-x-3}$의 그래프와 직선 $y=-x+a$가 접할 때

$\sqrt{-x-3}=-x+a$에서 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-(2a-1)x+a^2+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 $D$라고 하면

$D=\{-(2a-1)\}^2-4(a^2+3)=0$

$-4a-11=0 \qquad \therefore a=-\dfrac{11}{4}$

(ii) 직선 $y=-x+a$가 점 $(3, 0)$을 지날 때

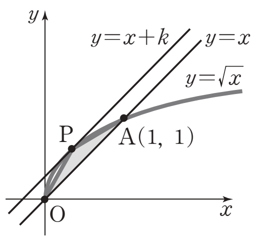
$0=-3+a \qquad \therefore a=3$

(i), (ii)에 의하여

$-\dfrac{11}{4}<a<3$

**20** 직선 OA는 기울기가 1이고 원점을 지나는 직선이므로 직선 OA의 방정식은 $y=x$

다음 그림과 같이 점 P가 $y=\sqrt{x}$의 그래프의 접선 중 기울기가 1인 접선과의 접점일 때, △OAP의 넓이가 최대가 된다.




이때 접선의 방정식을 $y=x+k$ ($k$는 상수)라고 하자.

$\sqrt{x}=x+k$에서 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+(2k-1)x+k^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 $D$라고 하면

$D=(2k-1)^2-4k^2=0$

$-4k+1=0 \qquad \therefore k=\dfrac{1}{4}$

△OAP의 높이 $h$는 직선 $y=x+\dfrac{1}{4}$ 위의 점 $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$과 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$h=\frac{\left|-\frac{1}{4}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

또 $\overline{OA}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로 △OAP의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times h=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{8}=\dfrac{1}{8}$

**21** 무리함수 $y=\sqrt{kx}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동하면

$y=\sqrt{k(x-2)}-1$ …… (가)

이 함수의 그래프가 점 $(5, 2)$를 지나므로

$2=\sqrt{3k}-1$, $\sqrt{3k}=3$

양변을 제곱하면 $3k=9$

$\therefore k=3$ …… (나)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 구한다. | 3점 |
| (나) $k$의 값을 구한다. | 2점 |

**22** (1) $y=\sqrt{a-2x}-1$

$=\sqrt{-2\left(x-\dfrac{a}{2}\right)}-1$

이므로 $y=\sqrt{a-2x}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $\dfrac{a}{2}$만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 것이다. …… (가)

따라서 $-4\le x\le 2$에서 $y=\sqrt{a-2x}-1$은 $x=-4$일 때 최댓값 3을 가지므로

$\sqrt{a+8}-1=3$, $\sqrt{a+8}=4$

양변을 제곱하면 $a+8=16$

$\therefore a=8$ …… (나)

(2) $a=8$이므로 주어진 함수는

$y=\sqrt{8-2x}-1$

$-4\le x\le 2$에서 주어진 함수는 $x=2$일 때 최솟값을 가지므로 $x=2$를 대입하면

$y=\sqrt{8-4}-1=1$

따라서 구하는 함수의 최솟값은 1이다. …… (다)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) 주어진 무리함수의 그래프의 개형을 안다. | 2점 |
| (나) $a$의 값을 구한다. | 2점 |
| (다) 함수의 최솟값을 구한다. | 2점 |

**23** 두 함수 $f$와 $f^{-1}$는 서로 역함수 관계에 있으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이때 무리함수 $f(x)=\sqrt{3x-a}+1$은 $x$의 값이 증가할 때 $y$의 값도 증가하므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

따라서 $y=\sqrt{3x-a}+1$의 그래프와 직선 $y=x$의 두 교점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이다. …… (가)

$\sqrt{3x-a}+1=x$에서 $\sqrt{3x-a}=x-1$

양변을 제곱하면

$3x-a=x^2-2x+1$

$\therefore x^2-5x+a+1=0$ …… ㉠

이때 두 교점의 좌표를 $(\alpha, \alpha)$, $(\beta, \beta)$라고 하면 $\alpha$, $\beta$는 이차방정식 ㉠의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=a+1$ …… (나)

그런데 두 점 $(\alpha, \alpha)$, $(\beta, \beta)$ 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}&=\sqrt{2(\alpha+\beta)^2-8\alpha\beta}\\&=\sqrt{2\times5^2-8(a+1)}\\&=\sqrt{42-8a}=\sqrt{2}\end{aligned}$$

에서 $42-8a=2$ $\therefore a=5$ …… (다)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) $y=\sqrt{3x-a}+1$의 그래프와 직선 $y=x$의 두 교점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$임을 안다. | 2점 |
| (나) 두 교점의 좌표를 $(\alpha, \alpha)$, $(\beta, \beta)$로 놓고 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한다. | 3점 |
| (다) $a$의 값을 구한다. | 2점 |

# 15강 경우의 수

## 확인 문제 p. 60

**1** 1부터 10까지의 자연수 중 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개이므로 구하는 경우의 수는

5

**2** 1부터 20까지의 자연수 중에서 3의 배수는 6개, 10의 배수는 2개이다.

이때 1부터 20까지의 자연수 중 3의 배수이면서 10의 배수인 수는 없으므로 구하는 자연수의 개수는

$6+2=8$

**3** 나오는 두 눈의 수의 곱이 홀수인 경우는 두 눈의 수가 모두 홀수인 경우이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times3=9$

## 교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 61

**1** 나오는 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 두 눈의 수의 차가 0인 경우

(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)

이므로 그 경우의 수는 6

(ii) 두 눈의 수의 차가 1인 경우

(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3)

(4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)

이므로 그 경우의 수는 10

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$6+10=16$

**2** 두 눈의 수의 합이 3의 배수인 경우를 순서쌍으로 나타내면

합이 3인 경우: (1, 2), (2, 1)

합이 6인 경우: (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)

합이 9인 경우: (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)

합이 12인 경우: (6, 6)

즉, 두 눈의 수의 합이 3의 배수인 경우의 수는

$2+5+4+1=12$

두 눈의 수의 합이 4의 배수인 경우를 순서쌍으로 나타내면

합이 4인 경우: (1, 3), (2, 2), (3, 1)

합이 8인 경우: (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)

합이 12인 경우: (6, 6)

즉, 두 눈의 수의 합이 4의 배수인 경우의 수는

$3+5+1=9$

이때 두 눈의 수의 합이 3의 배수이면서 4의 배수, 즉 12의 배수인 경우의 수는 (6, 6)으로 1

따라서 구하는 경우의 수는

$12+9-1=20$

**3** 방정식 $2x+2y+z=10$을 만족하는 $x$의 값에 따른 $y$, $z$의 값을 순서쌍 $(y, z)$로 나타내면

(i) $x=1$일 때, $2y+z=8$

(1, 6), (2, 4), (3, 2)이므로 그 개수는 3

(ii) $x=2$일 때, $2y+z=6$

(1, 4), (2, 2)이므로 그 개수는 2

(iii) $x=3$일 때, $2y+z=4$

(1, 2)이므로 그 개수는 1

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 순서쌍 $(x, y, z)$의 개수는

$3+2+1=6$

**4** 부등식 $3x+2y\le15$를 만족하는 $x$, $y$의 값을 순서쌍 $(x, y)$로 나타내면

(i) $x=1$일 때 $2y\le12$, 즉 $y\le6$

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)

이므로 그 개수는 6

(ii) $x=2$일 때 $2y\le 9$, 즉 $y\le 4.5$

$(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$

이므로 그 개수는 4

(iii) $x=3$일 때 $2y\le 6$, 즉 $y\le 3$

$(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$

이므로 그 개수는 3

(iv) $x=4$일 때 $2y\le 3$, 즉 $y\le 1.5$

$(4, 1)$이므로 그 개수는 1

(i)~(iv)에 의하여 구하는 순서쌍 $(x, y)$의 개수는

$6+4+3+1=14$

**5** (1) 112를 소인수분해하면

$112=2^4\times 7$

그런데 $2^4$의 양의 약수는 $1$, $2$, $2^2$, $2^3$, $2^4$으로 5개, 7의 양의 약수는 1, 7로 2개이다.

따라서 구하는 양의 약수의 개수는

$5\times 2=10$

(2) 300을 소인수분해하면

$300=2^2\times 3\times 5^2$

그런데 $2^2$의 양의 약수는 $1$, $2$, $2^2$으로 3개, 3의 양의 약수는 1, 3으로 2개, $5^2$의 양의 약수는 $1$, $5$, $5^2$으로 3개이다.

따라서 구하는 양의 약수의 개수는

$3\times 2\times 3=18$

**6** (1) 280을 소인수분해하면

$280=2^3\times 5\times 7$

그런데 $2^3$의 양의 약수는 $1$, $2$, $2^2$, $2^3$으로 4개, 5의 양의 약수는 1, 5로 2개, 7의 양의 약수는 1, 7로 2개이다.

따라서 구하는 양의 약수의 개수는

$4\times 2\times 2=16$

(2) 450을 소인수분해하면

$450=2\times 3^2\times 5^2$

그런데 2의 양의 약수는 1, 2로 2개, $3^2$의 양의 약수는 $1$, $3$, $3^2$으로 3개, $5^2$의 양의 약수는 $1$, $5$, $5^2$으로 3개이다.

따라서 구하는 양의 약수의 개수는

$2\times 3\times 3=18$

**7** (i) A → C로 가는 방법의 수는 2

(ii) A → B → C로 가는 방법의 수는 $3\times 2=6$

(i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는

$2+6=8$

**8** (i) A → D로 가는 방법의 수는 1

(ii) A → B → D로 가는 방법의 수는 $3\times 3=9$

(iii) A → C → D로 가는 방법의 수는 $2\times 3=6$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 방법의 수는

$1+9+6=16$

# 16강 순열

## 확인 문제 p. 62

**1** (1) ${}_5P_1=5$

(2) ${}_7P_3=7\times 6\times 5=210$

(3) ${}_8P_2=8\times 7=56$

(4) ${}_6P_4=6\times 5\times 4\times 3=360$

**2** (1) $4!=4\times 3\times 2\times 1=24$

(2) ${}_5P_5=5\times 4\times 3\times 2\times 1=120$

(3) ${}_7P_0=1$

(4) $3!\times {}_4P_2=(3\times 2\times 1)\times(4\times 3)=72$

**3** (1) 구하는 방법의 수는 서로 다른 8개 중에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_8P_2=8\times 7=56$

(2) $4!=4\times 3\times 2\times 1=24$

## 교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 63

**1** (1) ${}_nP_2=72$에서

$n(n-1)=72$

$n^2-n-72=0$

$(n+8)(n-9)=0$

$\therefore n=-8$ 또는 $n=9$

그런데 $n\ge 2$이므로 $n=9$

(2) ${}_{n+1}P_4=7{}_nP_3$에서

$(n+1)n(n-1)(n-2)=7n(n-1)(n-2)$

이때 $n\ge 3$이므로 양변을 $n(n-1)(n-2)$로 나누면

$n+1=7 \qquad \therefore n=6$

**2** (1) ${}_6P_n=120$에서 $120=6\times 5\times 4$이므로

$n=3$

(2) ${}_nP_3 : {}_{n+1}P_3=2:3$에서

$2{}_{n+1}P_3=3{}_nP_3$

$2(n+1)n(n-1)=3n(n-1)(n-2)$

이때 $n\ge 3$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$2(n+1)=3(n-2) \qquad \therefore n=8$

**3** (1) 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 4개이다.

나머지 자리에 오는 숫자를 택하는 경우의 수는 천의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_4P_3=24$

따라서 구하는 정수의 개수는

$4\times 24=96$

(2) 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3으로 2개이다.
천의 자리에 올 수 있는 숫자는 일의 자리에 온 숫자와 0을 제외한 3개이다.
나머지 자리에 오는 숫자를 택하는 경우의 수는 천의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3개 중에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로
${}_3P_2=6$
따라서 구하는 정수의 개수는
$2\times3\times6=36$

**4** (1) 만의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 5개이다.
나머지 자리에 오는 숫자를 택하는 경우의 수는 만의 자리에 온 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로
${}_5P_4=120$
따라서 구하는 정수의 개수는
$5\times120=600$

(2) 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 5이다.
(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우
나머지 자리에 오는 숫자를 택하는 경우의 수는 일의 자리에 온 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로 ${}_5P_4=120$
(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우
만의 자리에 올 수 있는 숫자는 일의 자리에 온 숫자와 0을 제외한 4개이다.
나머지 자리에 오는 숫자를 택하는 경우의 수는 만의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로
${}_4P_3=24$
즉, 일의 자리의 숫자가 5인 경우의 수는
$4\times24=96$
(i), (ii)에 의하여 구하는 정수의 개수는
$120+96=216$

**5** (1) 여학생 4명을 묶어 한 명으로 생각하면 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$4!=24$
그 각각에 대하여 여학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는
$4!=24$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\times24=576$

(2) 여학생 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$4!=24$
그 각각에 대하여 여학생 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 남학생 3명을 세우는 경우의 수는
${}_5P_3=60$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\times60=1440$

(3) 여학생 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$4!=24$
그 각각에 대하여 여학생 사이사이의 3개의 자리에 남학생 3명을 세우는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\times6=144$

**6** (1) $a$와 $d$를 묶어 한 문자로 생각하면 4개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는
$4!=24$
그 각각에 대하여 $a$와 $d$가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\times2=48$

(2) 세 문자 $a$, $c$, $e$를 일렬로 배열하는 경우의 수는
$3!=6$
그 각각에 대하여 세 문자 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 $b$, $d$를 배열하는 경우의 수는
${}_4P_2=12$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times12=72$

(3) 양 끝에 $b$, $c$를 일렬로 배열하는 경우의 수는
$2!=2$
그 각각에 대하여 $b$, $c$를 제외한 3개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$2\times6=12$

# 17강 조합

## 확인 문제 p. 64

**1** (1) ${}_6C_0\times{}_6C_6=1\times1=1$
(2) ${}_5C_0+{}_4C_1+{}_3C_3=1+4+1=6$
(3) ${}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$
(4) ${}_{10}C_3=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

**2** 구하는 방법의 수는 서로 다른 7개 중에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로
${}_7C_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

**3** (1) ${}_7C_5={}_7C_2$

$=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$

(2) ${}_8C_6={}_8C_2$

$=\dfrac{8\times7}{2\times1}=28$

**4** (1) ${}_nC_8={}_nC_{n-8}$이므로

${}_nC_{n-8}={}_nC_7$

즉, $n-8=7$

$\therefore n=15$

(2) ${}_{12}C_r={}_{12}C_{2r}$이므로

$r+2r=12$

$\therefore r=4$

## 교/과/서/속 핵심유형+ 닮은꼴 문제 p. 65

**1** (1) ${}_nC_2=10$에서

$\dfrac{n(n-1)}{2}=10$

$n(n-1)=20$

$n^2-n-20=0$

$(n+4)(n-5)=0$

$\therefore n=-4$ 또는 $n=5$

그런데 $n\geq2$이므로

$n=5$

(2) ${}_{n+2}C_n={}_{n+2}C_{(n+2)-n}={}_{n+2}C_2$이므로

${}_{n+2}C_2=28$

$\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}=28$

$(n+2)(n+1)=56$

$n^2+3n-54=0$

$(n+9)(n-6)=0$

$\therefore n=-9$ 또는 $n=6$

그런데 $n$은 자연수이므로

$n=6$

**2** (1) ${}_nC_3=84$에서

$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}=84$

$n(n-1)(n-2)=504$

이때 $504=9\times8\times7$이고 $n$은 3 이상의 자연수이므로

$n=9$

(2) ${}_{n+3}C_n={}_{n+3}C_{(n+3)-n}={}_{n+3}C_3$이므로

${}_{n+3}C_3=10$

$\dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3\times2\times1}=10$

$(n+3)(n+2)(n+1)=60$

이때 $60=5\times4\times3$이고 $n$은 자연수이므로

$n=2$

**3** (1) 남학생 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

여학생 6명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_2=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times15=150$

(2) 구하는 경우의 수는 기태와 진희를 제외한 9명 중에서 3명을 뽑는 조합의 수와 같으므로

${}_9C_3=84$

**4** (1) 1학년 학생 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

2학년 학생 6명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_2=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times15=90$

(2) 학생 10명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_4=210$

뽑은 학생 4명이 모두 2학년 학생인 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$210-15=195$

**5** (1) 구하는 삼각형의 개수는 서로 다른 8개의 점 중에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_8C_3=56$

(2) 직각삼각형이 되는 경우는 삼각형의 한 변이 원의 지름인 경우이다.

주어진 8개의 점 중에서 2개의 점을 이어서 만들 수 있는 원의 지름의 개수는

4

그 각각에 대하여 나머지 6개의 점 중에서 1개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_6C_1=6$

따라서 구하는 직각삼각형의 개수는

$4\times6=24$

**6** 가로 방향의 4개의 평행한 직선 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

세로 방향의 5개의 평행한 직선 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

따라서 구하는 평행사변형의 개수는

$6\times10=60$

## 계산력 다지기

p. 66~67

**1** (1) 20
(2) 720
(3) 6
(4) 1
(5) 720
(6) $\frac{{}_8P_5}{5!}=\frac{8\times7\times6\times5\times4}{5\times4\times3\times2\times1}=56$

**2** (1) ${}_nP_2=42$에서 $n(n-1)=42$
$n^2-n-42=0$
$(n+6)(n-7)=0$
$\therefore n=-6$ 또는 $n=7$
그런데 $n\geq2$이므로 $n=7$
(2) ${}_nP_2=30$에서 $n(n-1)=30$
$n^2-n-30=0$
$(n+5)(n-6)=0$
$\therefore n=-5$ 또는 $n=6$
그런데 $n\geq2$이므로 $n=6$
(3) ${}_5P_r=60=5\times4\times3$이므로
$r=3$
(4) ${}_4P_r=12=4\times3$이므로
$r=2$
(5) $n!=6=3\times2\times1$이므로
$n=3$
(6) ${}_nP_3=\frac{12!}{9!}=12\times11\times10$이므로
$n=12$
(7) ${}_{n+1}P_3=\frac{9!}{7!}\times10=10\times9\times8$이므로
$n+1=10$
$\therefore n=9$
(8) ${}_6P_r\times4!=720$에서
${}_6P_r\times24=720$
${}_6P_r=30=6\times5$
$\therefore r=2$

**3** (1) $5!=120$
(2) ${}_5P_2=20$
(3) ${}_5P_2=20$

**4** (1) 10
(2) 6
(3) 1
(4) ${}_{15}C_{14}={}_{15}C_1=15$
(5) ${}_4C_2\times{}_3C_2=6\times3=18$
(6) $\frac{{}_8C_5}{{}_4C_1}=\frac{{}_8C_3}{{}_4C_1}=\frac{56}{4}=14$

**5** (1) ${}_nC_4={}_nC_{n-4}$이므로
${}_nC_2={}_nC_{n-4}$
즉, $2=n-4$ $\quad\therefore n=6$
(2) ${}_{15}C_{2r}={}_{15}C_{3r}$이므로
$2r+3r=15$
$5r=15$ $\quad\therefore r=3$
(3) ${}_nC_2=15$에서
$\frac{n(n-1)}{2}=15$
$n^2-n-30=0,\ (n+5)(n-6)=0$
$\therefore n=-5$ 또는 $n=6$
그런데 $n\geq2$이므로 $n=6$
(4) ${}_nC_3=35$에서 $\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=35$
$n(n-1)(n-2)=210$
이때 $210=7\times6\times5$이고 $n$은 3 이상의 자연수이므로
$n=7$
(5) ${}_{n+2}C_n=66$에서 ${}_{n+2}C_2=66$이므로
$\frac{(n+2)(n+1)}{2}=66$
$n^2+3n-130=0$
$(n+13)(n-10)=0$
$\therefore n=-13$ 또는 $n=10$
그런데 $n$은 자연수이므로
$n=10$
(6) ${}_{n+1}C_{n-1}=36$에서 ${}_{n+1}C_2=36$이므로
$\frac{(n+1)\times n}{2}=36$
$n^2+n-72=0$
$(n+9)(n-8)=0$
$\therefore n=-9$ 또는 $n=8$
그런데 $n$은 자연수이므로 $n=8$
(7) ${}_{n+2}C_{n+1}={}_{n+2}C_1=1$이므로
${}_nC_1+{}_{n-1}C_1={}_{n+2}C_1$
$n+(n-1)=n+2$
$\therefore n=3$
(8) ${}_{n-2}C_2+{}_nC_2={}_{n+1}C_2$에서
$\frac{(n-2)(n-3)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n+1)\times n}{2}$
양변에 2를 곱하면 정리하면
$n^2-7n+6=0$
$(n-1)(n-6)=0$
$\therefore n=1$ 또는 $n=6$
그런데 $n\geq4$이므로
$n=6$

**6** (1) ${}_5C_2=10$
(2) ${}_6C_3=20$
(3) ${}_{10}C_2\times{}_{12}C_2=45\times66=2970$

15~17강 족집게 기출문제 p. 68~71

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 ③ | 2 4 | 3 ③ | 4 17 | 5 ② |
| 6 ① | 7 ② | 8 10 | 9 54 | 10 ④ |
| 11 ② | 12 ① | 13 ④ | 14 ② | 15 ③ |
| 16 ④ | 17 ① | 18 6 | 19 ⑤ | 20 ② |
| 21 ② | 22 ① | 23 ⑤ | 24 ③ | 25 ① |

26 (1) 0, 2, 4 또는 0, 4, 8 또는 2, 4, 6 또는 4, 6, 8 (2) 20

27 $dbace$ 28 18

**1** 36을 소인수분해하면

$36=2^2\times3^2$

즉, 36과 서로소가 아닌 자연수는 2 또는 3을 소인수로 갖는 자연수이므로 2의 배수 또는 3의 배수이다.

1부터 100까지의 자연수 중에서 2의 배수는 50개, 3의 배수는 33개이다.

이때 2의 배수이면서 3의 배수인 수, 즉 6의 배수는 16개이다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

$50+33-16=67$

**2** 한 개의 가격이 400원, 800원인 빵을 각각 $x$개, $y$개 산다고 하면

$400x+800y=3600$

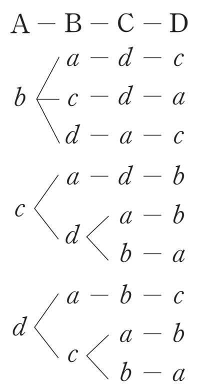
$\therefore\ x+2y=9$ …… ㉠

이때 $x$, $y$는 자연수이므로 방정식 ㉠을 만족하는 $x$, $y$의 값을 순서쌍 $(x, y)$로 나타내면

$(1, 4)$, $(3, 3)$, $(5, 2)$, $(7, 1)$

이므로 구하는 방법의 수는 4이다.

**3** 네 학생 A, B, C, D의 학생증을 각각 $a$, $b$, $c$, $d$라고 하면 네 학생이 모두 자신의 것이 아닌 학생증을 받는 경우는 다음과 같다.




따라서 구하는 경우의 수는 9이다.

**4** 10000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액과 5000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액은 같다.

즉, 10000원짜리 지폐 1장을 5000원짜리 지폐 2장으로 생각하면 구하는 금액의 수는 1000원짜리 지폐 2장, 5000원짜리 지폐 5장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

1000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액은 0원, 1000원, 2000원으로 그 금액의 수는 3

5000원짜리 지폐 5장으로 지불할 수 있는 금액은 0원, 5000원, 10000원, 15000원, 20000원, 25000원으로 그 금액의 수는 6

이때 0원을 지불하는 경우는 제외하므로 구하는 금액의 수는

$3\times6-1=17$

**5** 영역 C에 칠할 수 있는 색은 5가지, 영역 A에 칠할 수 있는 색은 영역 C에 칠한 색을 제외한 4가지, 영역 B에 칠할 수 있는 색은 두 영역 A, C에 칠한 색을 제외한 3가지, 영역 E에 칠할 수 있는 색은 두 영역 B, C에 칠한 색을 제외한 3가지, 영역 D에 칠할 수 있는 색은 두 영역 C, E에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$5\times4\times3\times3\times3=540$

**6** 540을 소인수분해하면

$540=2^2\times3^3\times5$

즉, 540의 홀수인 약수는 $3^3\times5$의 양의 약수와 같다.

이때 $3^3$의 양의 약수는 1, 3, $3^2$, $3^3$으로 4개, 5의 양의 약수는 1, 5로 2개이다.

따라서 구하는 홀수인 약수의 개수는

$4\times2=8$

**7** $(x+y)^2(a+b+c)=(x^2+2xy+y^2)(a+b+c)$ …… ㉠

두 다항식 $x^2+2xy+y^2$, $a+b+c$의 항의 개수는 각각 3

따라서 ㉠의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는

$3\times3=9$

**8** $n$명 중에서 3명을 택하는 순열의 수가 720이므로

${}_nP_3=720$

$n(n-1)(n-2)=720$

이때 $720=10\times9\times8$이고 $n$은 3 이상의 자연수이므로

$n=10$

**9** 5 7□□□ 꼴인 자연수의 개수는

$3!=6$

6□□□□ 꼴인 자연수의 개수는

$4!=24$

7□□□□ 꼴인 자연수의 개수는

$4!=24$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$6+24+24=54$

**10** (ⅰ) 20대 참가자가 첫 번째와 마지막 무대에 오르는 경우
20대 참가자 3명 중에서 2명을 뽑아 첫 번째와 마지막 무대에 세우는 경우의 수는
$_3P_2=6$
나머지 참가자 4명을 무대에 세우는 경우의 수는
$4!=24$
즉, 20대 참가자가 첫 번째와 마지막 무대에 오르는 경우의 수는
$6\times24=144$
(ⅱ) 30대 참가자가 첫 번째와 마지막 무대에 오르는 경우
30대 참가자 2명을 첫 번째와 마지막 무대에 세우는 경우의 수는
$2!=2$
나머지 참가자 4명을 무대에 세우는 경우의 수는
$4!=24$
즉, 30대 참가자가 첫 번째와 마지막 무대에 오르는 경우의 수는
$2\times24=48$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 방법의 수는
$144+48=192$

**11** 부부끼리 묶어 한 사람으로 생각하면 3명이 일렬로 앉는 방법의 수는
$3!=6$
부부끼리 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는 각각
$2!=2$
따라서 구하는 방법의 수는
$6\times2\times2\times2=48$

**12** (ⅰ) 수학책 사이에 과학책 2권만 꽂는 경우
수학책 2권과 그 사이의 과학책 2권을 묶어 1권으로 생각하면 2권을 일렬로 꽂는 방법의 수는
$2!=2$
수학책끼리, 과학책끼리 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는 각각
$2!=2$
즉, 수학책 사이에 과학책 2권만 꽂는 방법의 수는
$2\times2\times2=8$
(ⅱ) 수학책 사이에 과학책 2권, 사회책 1권을 꽂는 경우
수학책 2권을 양 끝에 꽂는 방법의 수는
$2!=2$
나머지 3권을 일렬로 꽂는 방법의 수는
$3!=6$
즉, 수학책 사이에 과학책 2권, 사회책 1권을 꽂는 방법의 수는
$2\times6=12$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 방법의 수는
$8+12=20$

**13** 선수 9명의 순서를 정하는 방법의 수는 선수 9명을 일렬로 세우는 경우의 수와 같다.
오른손 타자인 주장을 맨 앞에 세우는 방법의 수는
1
나머지 오른손 타자 5명을 주장 뒤로 일렬로 세우는 방법의 수는
$5!=120$
왼손 타자 3명을 오른손 타자 사이사이와 맨 뒤의 6개의 자리에 세우는 방법의 수는
$_6P_3=120$
따라서 구하는 방법의 수는
$1\times120\times120=14400$

**14** 6개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는
$6!=720$
4개의 자음 L, M, N, D 중에서 양 끝에 오는 2개의 자음을 택하는 경우의 수는
$_4P_2=12$
그 각각에 대하여 나머지 4개를 일렬로 배열하는 경우의 수는
$4!=24$
즉, 양 끝에 모두 자음이 오는 경우의 수는
$12\times24=288$
따라서 구하는 경우의 수는
$720-288=432$

**15** ① $_nC_0=1$, $_nC_n=1$이므로
$_nC_0={}_nC_n$
② $_nC_r=\dfrac{_nP_r}{r!}$이므로
$_nP_r={}_nC_r\times r!$
③, ④ $_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로
$_{n+1}C_r={}_{n+1}C_{n+1-r}$
⑤ $n\times{}_{n-1}C_{r-1}=n\times\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$
$=\dfrac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$
$r\times{}_nC_r=r\times\dfrac{n!}{r!(n-r)!}=\dfrac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$
$\therefore n\times{}_{n-1}C_{r-1}=r\times{}_nC_r$
따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

**16** $_{n+3}C_{n+1}=28$에서
$_{n+3}C_{n+1}={}_{n+3}C_{(n+3)-(n+1)}={}_{n+3}C_2$이므로
$_{n+3}C_2=28$
$\dfrac{(n+3)(n+2)}{2}=28$
$n^2+5n-50=0$
$(n+10)(n-5)=0$
$\therefore n=-10$ 또는 $n=5$

이때 $n$은 자연수이므로

$n=5$

등식 ${}_{11}C_{r+2}={}_{11}C_{3r-3}$에서 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $r+2=3r-3$이면

$r=\frac{5}{2}$

(ii) ${}_{11}C_{r+2}={}_{11}C_{11-(r+2)}={}_{11}C_{9-r}={}_{11}C_{3r-3}$이므로

$9-r=3r-3$이면

$4r=12$

$\therefore\ r=3$

그런데 $r$는 자연수이므로

$r=3$

$\therefore\ n+r=5+3=8$

**17** A 음식점에서 주문하는 방법의 수는

${}_3C_2\times{}_2C_1={}_3C_1\times{}_2C_1=3\times2=6$

B 음식점에서 주문하는 방법의 수는

${}_4C_2\times{}_4C_1=6\times4=24$

C 음식점에서 주문하는 방법의 수는

${}_2C_2\times{}_5C_1=1\times5=5$

따라서 구하는 방법의 수는

$6+24+5=35$

**18** 구하는 집합의 개수는 집합 $A$의 원소 중에서 6의 약수, 즉 1, 2, 3, 6을 제외한 원소 4, 5, 7, 8에서 2개를 뽑는 조합의 수와 같으므로

${}_4C_2=6$

**19** 15명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는

${}_{15}C_4=1365$

4명을 모두 여자로 뽑는 방법의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$

4명을 모두 남자로 뽑는 방법의 수는

${}_9C_4=126$

따라서 구하는 방법의 수는

$1365-(15+126)=1224$

**20** 성은이와 희근이를 포함하여 5명을 뽑는 방법의 수는 성은이와 희근이를 제외한 7명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수와 같으므로

${}_7C_3=35$

성은이와 희근이를 한 사람으로 생각하면 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$4!=24$

성은이와 희근이가 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$35\times24\times2=1680$

**21** 8개의 꼭짓점 중에서 2개를 연결하여 만들 수 있는 선분의 개수는

${}_8C_2=28$

이때 팔각형의 변의 개수는 8이다.

따라서 구하는 대각선의 개수는

$28-8=20$

**22** 7개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_7C_3=35$

반원의 지름 위의 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$35-4=31$

**23** 같은 학년 학생이 앉는 자리를 같은 색으로 나타내어 좌석 6개를 3개의 영역으로 나누면 같은 학년 학생끼리 앞뒤로 앉거나 옆으로 나란히 앉는 방법은 다음과 같이 3가지 경우가 있다.

(i)

| | | |
|---|---|---|
| F1 | F2 | F3 |
| G1 | G2 | G3 |

(ii)

| | | |
|---|---|---|
| F1 | F2 | F3 |
| G1 | G2 | G3 |

(iii)

| | | |
|---|---|---|
| F1 | F2 | F3 |
| G1 | G2 | G3 |

같은 학년 학생을 묶어 한 사람으로 생각하면 3명이 3개의 영역에 앉는 방법의 수는

$3!=6$

그 각각에 대하여 같은 학년 학생끼리 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는 각각

$2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$3\times6\times2\times2\times2=144$

**24** 조건 (가)에 의하여 먼저 ♡ 모양이 그려진 타일 9장을 배열한 다음 그 사이사이와 양 끝에 ♥ 모양이 그려진 타일을 배열하면 된다.

(i) 맨 앞에 ♡ 모양이 그려진 타일을 붙이는 경우

조건 (나)에 의하여 맨 뒤에는 ♥ 모양이 그려진 타일을 붙여야 한다.

♡∨♡∨♡∨♡∨♡∨♡∨♡∨♡∨♡♥

위의 그림에서 ∨ 자리에 ♥ 모양이 그려진 타일을 붙이면 되므로 ♥ 모양이 그려진 타일을 붙이는 방법의 수는 ♡ 모양이 그려진 타일 사이사이의 8개의 자리 중에서 3개를 택하는 방법의 수와 같다.

$\therefore\ {}_8C_3=56$

(ii) 맨 앞에 ♥ 모양이 그려진 타일을 붙이는 경우

♥♡∨♡∨♡∨♡∨♡∨♡∨♡∨♡∨♡∨

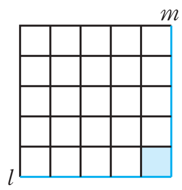
위의 그림에서 ∨ 자리에 ♥ 모양의 타일을 붙이면 되므로 ♥ 모양이 그려진 타일을 붙이는 방법의 수는 ♡ 모양이 그려진 타일 사이사이와 맨 끝의 9개의 자리 중에서 3개를 택하는 방법의 수와 같다.

$\therefore {}_9C_3=84$

(i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는

$56+84=140$

**25** 다음 그림과 같이 두 선분 $l$, $m$을 연장하여 큰 정사각형을 만들자.




이때 가로 방향의 선분 6개 중에서 2개, 세로 방향의 선분 6개 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 결정되므로 직사각형의 개수는

${}_6C_2\times{}_6C_2=225$

이때 색칠한 정사각형을 포함하는 직사각형을 만드는 경우의 수는 가로, 세로 방향의 선분을 2개씩 택할 때, 두 선분 $l$, $m$이 포함되는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_1\times{}_5C_1=25$

따라서 구하는 직사각형의 개수는

$225-25=200$

**26** (1) 3의 배수가 되려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

5개의 숫자 0, 2, 4, 6, 8 중에서 서로 다른 3개를 택할 때, 그 합이 3의 배수인 경우는 다음과 같다.

0, 2, 4 또는 0, 4, 8 또는 2, 4, 6 또는 4, 6, 8 …… (가)

(2) (i) 0, 2, 4로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$2\times2!=4$

(ii) 0, 4, 8로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$2\times2!=4$

(iii) 2, 4, 6으로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$3!=6$

(iv) 4, 6, 8로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$3!=6$ …… (나)

(i)~(iv)에 의하여 3의 배수인 세 자리 자연수의 개수는

$4+4+6+6=20$ …… (다)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) 3의 배수가 되도록 3개의 숫자를 택하는 경우를 모두 구한다. | 2점 |
| (나) 각 경우에서 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수를 구한다. | 4점 |
| (다) 3의 배수인 세 자리 자연수의 개수를 구한다. | 1점 |

**27** $a$로 시작하는 문자열의 개수는 $4!=24$

$b$로 시작하는 문자열의 개수는 $4!=24$

$c$로 시작하는 문자열의 개수는 $4!=24$ …… (가)

$da$로 시작하는 문자열의 개수는 $3!=6$

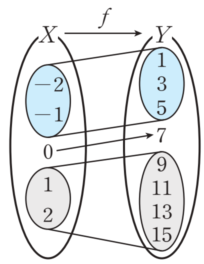
즉, $a$로 시작하는 문자열부터 $da$로 시작하는 문자열까지의 총 개수는

$24+24+24+6=78$ …… (나)

따라서 79번째에 오는 문자열은 $dbace$이다. …… (다)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) $a$, $b$, $c$로 시작하는 문자열의 개수를 각각 구한다. | 3점 |
| (나) $da$로 시작하는 문자열까지의 총 개수를 구한다. | 2점 |
| (다) 79번째에 오는 문자열을 구한다. | 2점 |

**28** 조건 (가)를 만족하려면 집합 $Y$의 8개의 원소 중에서 5개를 뽑아 작은 수부터 집합 $X$의 원소에 차례로 대응시키면 된다.




그런데 조건 (나)에서 $f(0)=7$이므로 위의 그림과 같이 집합 $Y$의 원소 1, 3, 5 중에서 2개를 뽑아 작은 수부터 집합 $X$의 원소 $-2$, $-1$에 차례로 대응시키고, 집합 $Y$의 원소 9, 11, 13, 15 중에서 2개를 뽑아 작은 수부터 집합 $X$의 원소 1, 2에 차례로 대응시키면 된다.

집합 $Y$의 원소 1, 3, 5 중에서 2개를 뽑는 방법의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$ …… (가)

집합 $Y$의 원소 9, 11, 13, 15 중에서 2개를 뽑는 방법의 수는

${}_4C_2=6$ …… (나)

따라서 구하는 함수 $f$의 개수는

$3\times6=18$ …… (다)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) 원소 $-2$, $-1$에 대응시키는 방법의 수를 구한다. | 3점 |
| (나) 원소 1, 2에 대응시키는 방법의 수를 구한다. | 3점 |
| (다) 함수 $f$의 개수를 구한다. | 2점 |

# 내공 점검

**01~02강 내공 점검** p. 74~75

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 ④ | 2 ③ | 3 ② | 4 ④ | 5 ② |
| 6 ④ | 7 ⑤ | 8 ③ | 9 ⑤ | 10 ② |
| 11 0 | 12 37 | 13 9 | | |

**1** ① $\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$
② $\{11, 12, 13, \cdots\}$
③ $\varnothing$
④ '조금 큰'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
⑤ $\{9, 11\}$
따라서 집합이 아닌 것은 ④이다.

**2** ㄱ. $\{x|x=2n-1,\ n$은 정수$\}=\{\cdots, -3, -1, 1, 3, \cdots\}$
ㄴ. $\{x|x=2k+1,\ k$는 음이 아닌 정수$\}=\{1, 3, 5, \cdots\}$
ㄷ. $\{x|x$는 2의 배수보다 1이 큰 자연수$\}=\{3, 5, 7, \cdots\}$
ㄹ. $\{x|x$는 홀수가 아닌 자연수$\}=\{2, 4, 6, \cdots\}$
ㅁ. $\{x|x$는 2로 나누어떨어지지 않는 자연수$\}=\{1, 3, 5, \cdots\}$
따라서 보기 중 서로 같은 집합은 ㄴ, ㅁ이다.

**3** $X=\{2, 4, 5, 8, 10\}$
$\therefore n(X)=5$

**4** ③ $A=\{2, 3, 5, 7\}$이므로
$n(A)=4$
④ $n(\{1, 2\})-n(\varnothing)=2-0=2$
⑤ $B=\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$이므로
$n(B)=8$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

**5** 조건 (가)에서 $1\in A$이고,
조건 (나)에서 $x\in A$이면 $2x+1\in A$이므로
$2\times1+1=3\in A$
$3\in A$이면 $2\times3+1=7\in A$
$7\in A$이면 $2\times7+1=15\in A$ (ㄴ)
⋮
한편 $x\in A$이면 $2x+1\in A$이므로
$2x+1\in A$이면 $2(2x+1)+1=4x+3\in A$ (ㄷ)
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**6** $X\subset A$이고 $A\not\subset X$인 집합 $X$는 집합 $A$의 진부분집합이다.
$A=\{x||x|\le2,\ x$는 정수$\}$에서
$A=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
따라서 집합 $X$의 개수는
$2^5-1=31$

**7** ⑤ $\{1, 2, 3\}\not\subset A$

**8** $-1\in A$이므로 $\quad -1\in B$
$\therefore a-1=-1$ 또는 $2a+3=-1$
(i) $a-1=-1$일 때, $a=0$이므로
$A=\{-1, 2\},\ B=\{-1, 2, 3\}$
$\therefore A\subset B$
(ii) $2a+3=-1$일 때, $a=-2$이므로
$A=\{-1, 0\},\ B=\{-3, -1, 2\}$
$\therefore A\not\subset B$
(i), (ii)에 의하여 $\quad a=0$
$\therefore B=\{-1, 2, 3\}$
따라서 집합 $B$의 모든 원소의 합은
$-1+2+3=4$

**9** $a\neq0$이므로
$a+1\neq1,\ 2a+1\neq1,\ 3-a\neq3$
따라서 $3-a=1$이므로 $\quad a=2$
이때 $A=\{1, 3, 5\},\ B=\{1, 3, 5\}$이므로 $\quad A=B$
$\therefore a=2$

**10** 집합 $A=\{a, b, c, d, e, f\}$의 부분집합 중 원소 $f$는 반드시 포함하고 원소 $a$, $b$는 포함하지 않는 집합은 집합 $A$에서 원소 $a$, $b$, $f$를 제외한 집합 $\{c, d, e\}$의 부분집합에 원소 $f$를 넣은 것과 같으므로 구하는 부분집합의 개수는
$2^3=8$

**11** $A=\{-1, 0, 1, 2\}$이므로
$n(A)=4$ …… (가)
$B=\{x|x$는 4의 양의 약수$\}=\{1, 2, 4\}$이므로
$n(B)=3$ …… (나)
$C=\{x+y|x\in A,\ y\in B\}=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로
$n(C)=7$ …… (다)
$\therefore n(A)+n(B)-n(C)=4+3-7=0$ …… (라)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) $n(A)$를 구한다. | 2점 |
| (나) $n(B)$를 구한다. | 3점 |
| (다) $n(C)$를 구한다. | 3점 |
| (라) $n(A)+n(B)-n(C)$의 값을 구한다. | 2점 |

**12** 집합 $A=\{1, 3, 5, 7\}$의 부분집합 중 가장 작은 원소가 1인 부분집합의 개수는 집합 $A$의 부분집합 중 1을 반드시 포함하는 집합의 개수와 같으므로
$2^{4-1}=8$ …… (가)
집합 $A=\{1, 3, 5, 7\}$의 부분집합 중 가장 작은 원소가 3인 부분집합의 개수는 집합 $\{3, 5, 7\}$의 부분집합 중 3을 반드시 포함하는 집합의 개수와 같으므로
$2^{3-1}=4$ …… (나)

집합 $A=\{1, 3, 5, 7\}$의 부분집합 중 가장 작은 원소가 5인 부분집합의 개수는 집합 $\{5, 7\}$의 부분집합 중 5를 반드시 포함하는 집합의 개수와 같으므로

$2^{2-1}=2$ ······(다)

집합 $A=\{1, 3, 5, 7\}$의 부분집합 중 가장 작은 원소가 7인 부분집합은 집합 $\{7\}$뿐이므로 개수는

1 ······ (라)

따라서 각 집합에서 가장 작은 원소를 모두 더한 값은

$1\times8+3\times4+5\times2+7\times1=37$ ······ (마)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) 가장 작은 원소가 1인 부분집합의 개수를 구한다. | 2점 |
| (나) 가장 작은 원소가 3인 부분집합의 개수를 구한다. | 2점 |
| (다) 가장 작은 원소가 5인 부분집합의 개수를 구한다. | 2점 |
| (라) 가장 작은 원소가 7인 부분집합의 개수를 구한다. | 2점 |
| (마) 각 집합에서 가장 작은 원소를 모두 더한 값을 구한다. | 2점 |

**13** $A\subset X\subset B$를 만족하는 집합 $X$는 집합 $A$의 원소를 모두 포함하는 집합 $B$의 부분집합이다. ······ (가)

$A=\{x|x$는 6의 양의 약수$\}=\{1, 2, 3, 6\}$이므로

$n(A)=4$ ······ (나)

$B=\{x|0<x<k$인 자연수$\}=\{1, 2, 3, \cdots, k-1\}$이므로

$n(B)=k-1$ ······ (다)

집합 $X$의 개수가 16이므로

$2^{(k-1)-4}=16,\ 2^{k-5}=2^4$

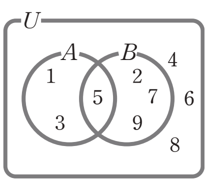
$\therefore\ k=9$ ······ (라)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) $A\subset X\subset B$를 만족하는 집합 $X$를 안다. | 2점 |
| (나) $n(A)$를 구한다. | 2점 |
| (다) $n(B)$를 구한다. | 2점 |
| (라) 자연수 $k$의 값을 구한다. | 4점 |

**03~04강 내공 점검** p. 76~77

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** ② | **2** ① | **3** ③ | **4** ④ | **5** ② |
| **6** ⑤ | **7** ④ | **8** ③ | **9** ② | **10** ② |
| **11** 10 | **12** 5 | **13** 최댓값: 3, 최솟값: $-5$ | | |

**1** 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




$\therefore\ B=\{2, 5, 7, 9\}$

따라서 집합 $B$의 원소가 아닌 것은 ② 4이다.

**2** 주어진 벤다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은

$(A\cap C)-B=(A\cap C)\cap B^C=A\cap B^C\cap C$

**3** $M=\{2, 3, 5, 7\}$, $N=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

조건 (가)에서 $X\subset(M\cup N)$

조건 (나)에서 $(M\cap N)\subset X$

$\therefore\ (M\cap N)\subset X\subset(M\cup N)$

이때 $M\cap N=\{3, 5, 7\}$, $M\cup N=\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$이므로

$\{3, 5, 7\}\subset X\subset\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$

따라서 집합 $X$는 집합 $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$의 부분집합 중 원소 3, 5, 7을 반드시 포함하는 집합이므로 집합 $X$의 개수는 $2^{6-3}=2^3=8$

**4** ① $A-B=A$

② $B\subset A^C$

③ $A\cap B=\varnothing$이므로 $n(A\cap B)=0$

④ $A\subset B^C$이므로 $A\cup B^C=B^C$

⑤ $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C=\varnothing^C=U$

따라서 옳은 것은 ④이다.

**5** ㄱ. $(A\cup B)\cap(A^C\cap B^C)=(A\cup B)\cap(A\cup B)^C$
$=\varnothing$

ㄴ. $(A\cup B)\cap(A\cup B^C)=A\cup(B\cap B^C)$
$=A\cup\varnothing=A$

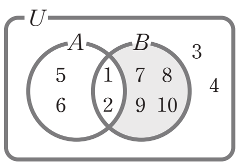
ㄷ. $A\cup(B-A)=A\cup(B\cap A^C)$
$=(A\cup B)\cap(A\cup A^C)$
$=(A\cup B)\cap U$
$=A\cup B$

따라서 보기 중 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

**6** $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$,

$A\cap B=\{1, 2\}$, $A-B=\{5, 6\}$,

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{3, 4\}$이므로 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




$\therefore\ B-A=\{7, 8, 9, 10\}$

따라서 $B-A$의 모든 원소의 합은

$7+8+9+10=34$

**7** $(A\cup B^C)\cap(A^C\cup B)$

$=[(A\cup B^C)\cap A^C]\cup[(A\cup B^C)\cap B]$

$=[(A\cap A^C)\cup(B^C\cap A^C)]\cup[(A\cap B)\cup(B^C\cap B)]$

$=[\varnothing\cup(A^C\cap B^C)]\cup[(A\cap B)\cup\varnothing]$

$=(A^C\cap B^C)\cup(A\cap B)$

따라서 $(A^C\cap B^C)\cup(A\cap B)=A^C\cap B^C$이므로

$(A\cap B)\subset(A^C\cap B^C)$

이것이 성립하려면 $A\cap B=\varnothing$

**8** $A_4=\{x|f(4x)=0,\ 0\le x\le1\}$에서

$f(4x)=4x-[4x]=0$

즉, $A_4$는 $0\le x\le 1$일 때, $4x$가 정수가 되도록 하는 $x$의 값을 원소로 갖는 집합이므로

$A_4=\left\{0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ 1\right\}$

$A_6=\{x\,|\,f(6x)=0,\ 0\le x\le 1\}$에서

$f(6x)=6x-[6x]=0$

즉, $A_6$은 $0\le x\le 1$일 때, $6x$가 정수가 되도록 하는 $x$의 값을 원소로 갖는 집합이므로

$A_6=\left\{0,\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{6},\ 1\right\}$

따라서 $A_4\cup A_6=\left\{0,\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{6},\ 1\right\}$이므로

$n(A_4\cup A_6)=9$

**9** ㄱ. $A\triangle U=(A\cup U)-(A\cap U)=U-A=A^C$

ㄴ. $A\triangle\varnothing=(A\cup\varnothing)-(A\cap\varnothing)=A-\varnothing=A$

ㄷ. $A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)$

$\qquad\qquad=(B\cup A)-(B\cap A)=B\triangle A$

ㄹ. $U\triangle\varnothing=(U\cup\varnothing)-(U\cap\varnothing)=U-\varnothing=U$

따라서 보기 중 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**10** 우리 반 학생 전체의 집합을 $U$, 경주에 가 본 학생의 집합을 $A$, 부여에 가 본 학생의 집합을 $B$라고 하면

$n(U)=45,\ n(A)=30,\ n(B)=17,\ n(A\cap B)=9$

$\therefore\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$\qquad\qquad=30+17-9=38$

$\therefore\ n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$

$\qquad\qquad=45-38=7$

따라서 두 곳 모두 가 보지 못한 학생은 7명이다.

**11** $A\cap B=\{2,\ 3\}$이므로 $\quad 3\in A$

$a^2+2a=3,\ a^2+2a-3=0$

$(a+3)(a-1)=0$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=1$ …… (가)

(i) $a=-3$일 때

$A=\{1,\ 2,\ 3\},\ B=\{-2,\ -1,\ 0\}$이므로

$A\cap B=\varnothing$

(ii) $a=1$일 때

$A=\{1,\ 2,\ 3\},\ B=\{2,\ 3,\ 4\}$이므로

$A\cap B=\{2,\ 3\}$

(i), (ii)에 의하여 $\quad a=1$

$A=\{1,\ 2,\ 3\},\ B=\{2,\ 3,\ 4\}$이므로 …… (나)

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ …… (다)

따라서 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은

$1+2+3+4=10$ …… (라)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) $a^2+2a=3$을 만족하는 $a$의 값을 구한다. | 3점 |
| (나) 조건을 만족하는 두 집합 $A$, $B$를 구한다. | 4점 |
| (다) $A\cup B$를 구한다. | 2점 |
| (라) $A\cup B$의 모든 원소의 합을 구한다. | 1점 |

**12** $A\cup X=A$이므로 $\quad X\subset A$

$(A\cap B)\cup X=X$이므로 $\quad (A\cap B)\subset X$

$\therefore\ (A\cap B)\subset X\subset A$

즉, 집합 $X$는 집합 $A$의 부분집합 중 $A\cap B$의 원소를 모두 포함하는 집합이다. …… (가)

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$이고 집합 $X$의 개수가 $8=2^3=2^{5-2}$이므로

$n(A\cap B)=2$ …… (나)

(i) $2a+1=1,\ 2a+3=3$일 때, $\quad a=0$

(ii) $2a-3=7,\ 2a-1=9$일 때, $\quad a=5$

(i), (ii)에 의하여 자연수 $a$의 값은 5이다. …… (다)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) 주어진 조건을 만족하는 집합 $X$를 안다. | 2점 |
| (나) $n(A\cap B)$를 구한다. | 4점 |
| (다) 자연수 $a$의 값을 구한다. | 4점 |

**13** $A\cap(B\cup A^C)=(A\cap B)\cup(A\cap A^C)$

$\qquad\qquad=(A\cap B)\cup\varnothing$

$\qquad\qquad=A\cap B=B$

이므로 $\quad B\subset A$ …… (가)

집합 $A$에서

$x^2-4x-45\le 0$

$(x+5)(x-9)\le 0$

$\therefore\ -5\le x\le 9$

$\therefore\ A=\{x\,|\,-5\le x\le 9\}$

집합 $B$에서

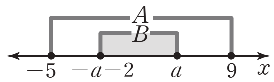
$x^2+2x-a^2-2a\le 0$

$(x+a+2)(x-a)\le 0$

(i) $a\ge -a-2$, 즉 $a\ge -1$일 때

$B=\{x\,|\,-a-2\le x\le a\}$이므로

$-a-2\ge -5,\ a\le 9$




$\therefore\ a\le 3$

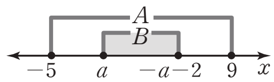
그런데 $a\ge -1$이므로

$-1\le a\le 3$

(ii) $a<-a-2$, 즉 $a<-1$일 때

$B=\{x\,|\,a\le x\le -a-2\}$이므로

$a\ge -5,\ -a-2\le 9$




$\therefore\ a\ge -5$

그런데 $a<-1$이므로

$-5\le a<-1$

(i), (ii)에 의하여 $\quad -5\le a\le 3$ …… (나)

따라서 상수 $a$의 최댓값은 3, 최솟값은 $-5$이다. …… (다)

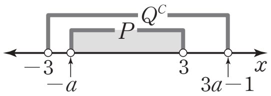
| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) 두 집합 $A$, $B$의 포함 관계를 안다. | 3점 |
| (나) 상수 $a$의 값의 범위를 구한다. | 5점 |
| (다) 상수 $a$의 최댓값과 최솟값을 구한다 | 2점 |

**05~07강 내공 점검** p. 78~79

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 ① | 2 ① | 3 ③ | 4 ① | 5 ④ |
| 6 ① | 7 ② | 8 ④ | 9 ⑤ | 10 ⑤ |
| 11 풀이 참조 | | 12 1 | 13 5 | |

**1** $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$
두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라고 하면
$P=\{2,\ 5\}$, $Q=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$
'$p$ 또는 $\sim q$'의 진리집합은
$P\cup Q^C=\{2,\ 5\}\cup\{3,\ 5,\ 6,\ 7\}$
$=\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$
따라서 집합 $P\cup Q^C$의 모든 원소의 합은
$2+3+5+6+7=23$

**2** 두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라고 하면
$P=\{x\,|\,-a<x<3\}$, $Q=\{x\,|\,x\le -3$ 또는 $x\ge 3a-1\}$
조건 $\sim q$의 진리집합은 $Q^C$이므로
$Q^C=\{x\,|\,-3<x<3a-1\}$
명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이면
$P\subset Q^C$이므로
$-a\ge -3$, $3a-1\ge 3$
$\therefore\ \frac{4}{3}\le a\le 3$




따라서 자연수 $a$는 2, 3의 2개이다.

**3** 주어진 명제의 대우는
'$\sim(x+y\ge 0)$이면 $\sim(x>0$이고 $y>0)$이다.'이므로
'$x+y<0$이면 $x\le 0$ 또는 $y\le 0$이다.'

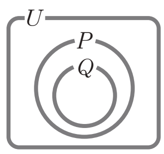
**4** ㄱ. 역: $x+y$가 정수이면 $x$, $y$는 정수이다. (거짓)
[반례] $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$이면 $x+y$는 정수이지만 $x$, $y$는 정수가 아니다.
ㄴ. 역: $ab=0$이면 $a=0$이다. (거짓)
[반례] $a=2$, $b=0$이면 $ab=0$이지만 $a\ne 0$이다.
ㄷ. 역: $\angle B=\angle C$이면 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다. (참)
따라서 보기의 명제 중 그 역이 참인 것은 ㄷ이다.

**5** 카드의 한쪽 면에 모음이 적혀 있으면 반대쪽 면에는 짝수가 적혀 있다고 했으므로 모음이 적혀 있는 카드 $\boxed{e}$의 반대쪽 면을 확인해야 한다.
또 명제가 참이면 그 명제의 대우도 참이므로 카드의 한쪽 면에 홀수가 적혀 있으면 반대쪽 면에는 자음이 적혀 있어야 한다.
즉, 홀수가 적혀 있는 카드 $\boxed{3}$의 반대쪽 면을 확인해야 한다.
따라서 보기 중 반대쪽 면을 확인해야 하는 카드는 ㄴ, ㄹ이다.

**6** ①, ② 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow r$도 참이다.
명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 참이므로 삼단논법에 의해 명제 $p \longrightarrow r$는 참이다.
명제 $\sim p \longrightarrow \sim r$가 거짓이므로 그 대우 $r \longrightarrow p$는 거짓이다.
즉, $p$는 $r$이기 위한 충분조건이다.
③, ④ 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow r$도 참이다.
명제 $\sim q \longrightarrow \sim r$가 거짓이므로 그 대우 $r \longrightarrow q$도 거짓이다.
즉, $q$는 $r$이기 위한 충분조건이다.
⑤ $p$는 $r$이기 위한 충분조건이므로 $r$는 $p$이기 위한 필요조건이다.
따라서 옳은 것은 ①이다.

**7** ① $p$: $a=-1$ 또는 $a=1$, $q$: $a=1$
이므로 $p \Longleftarrow q$
따라서 $p$는 $q$이기 위한 필요조건이다.
② $p$: $a=0$, $b=0$, $q$: $a=0$ 또는 $b=0$
이므로 $p \Longrightarrow q$
따라서 $p$는 $q$이기 위한 충분조건이다.
③ $p$: $a\ne 0$ 또는 $b\ne 0$, $q$: $a\ne 0$이고 $b\ne 0$
이므로 $p \Longleftarrow q$
따라서 $p$는 $q$이기 위한 필요조건이다.
④ $p \Longleftrightarrow q$이므로 $p$는 $q$이기 위한 필요충분조건이다.
⑤ $p$: $ab\ge 0$, $q$: $ab>0$이므로 $p \Longleftarrow q$
따라서 $p$는 $q$이기 위한 필요조건이다.
따라서 $p$가 $q$이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ②이다.

**8** $p$는 $q$이기 위한 필요조건이므로 $P\supset Q$
이것을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




① $P\cap Q=Q$
② $P\cup Q=P$
③ $P\cap Q^C=P-Q\ne\varnothing$
④ $P\cup Q^C=U$
⑤ $P^C-Q=P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C=P^C$
따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

**9** $a^2+b^2-2(a-b-1)=(a^2-2a+1)+(b^2+2b+1)$
$=(a-1)^2+\boxed{(b+1)^2}$
이때 $(a-1)^2\ge 0$, $\boxed{(b+1)^2}\ge 0$이므로
$a^2+b^2-2(a-b-1)\ge 0$
따라서 $a^2+b^2\ge 2(a-b-1)$이다.
이때 등호는 $a-1=0$, $b+1=0$, 즉 $\boxed{a=1,\ b=-1}$일 때 성립한다.
$\therefore$ (가) $(b+1)^2$ (나) $a=1$, $b=-1$

**10** $x$, $y$는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\left(2^2+\frac{1}{2^2}\right)(x^2+y^2)\ge\left(2x+\frac{y}{2}\right)^2$$

$$\left(\text{단, 등호는 } 2y=\frac{x}{2}\text{일 때 성립}\right)$$

$\frac{17}{4}(x^2+y^2)\ge(2\sqrt{17})^2$

$\therefore\ x^2+y^2\ge16$

따라서 $x^2+y^2$의 최솟값은 16이다.

**11** (1) '자연수 $n$에 대하여 $n$이 짝수이면 $n^2$도 짝수이다.' …… (가)

(2) 주어진 명제의 대우가 참임을 보이면 된다.

$n$이 짝수이면 $n=2k$ ($k$는 자연수)로 나타낼 수 있다. …… (나)

이때 $n^2=(2k)^2=4k^2=2\times2k^2$이므로 $n^2$은 짝수이다. …… (다)

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제 '자연수 $n$에 대하여 $n^2$이 홀수이면 $n$도 홀수이다.'는 참이다. …… (라)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) 주어진 명제의 대우를 말한다. | 2점 |
| (나) $n$을 짝수로 표현한다. | 3점 |
| (다) $n^2$이 짝수임을 보인다. | 3점 |
| (라) 대우를 이용한 증명법을 이용하여 결론을 쓴다. | 2점 |

**12** 세 조건 $p$, $q$, $r$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$, $R$라고 하면

$x^2-x-2\le0$에서

$(x+1)(x-2)\le0$

$\therefore\ -1\le x\le2$

$\therefore\ P=\{x\,|\,-1\le x\le2\}$ …… (가)

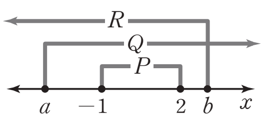
$q$는 $p$이기 위한 필요조건이므로

$P\subset Q$ …… (나)

$p$는 $r$이기 위한 충분조건이므로

$P\subset R$ …… (다)

$P\subset Q$, $P\subset R$를 만족하도록 세 집합 $P$, $Q$, $R$를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




$\therefore\ a\le-1$, $b\ge2$ …… (라)

따라서 $a$의 최댓값은 $-1$, $b$의 최솟값은 2이므로 …… (마)

구하는 합은

$-1+2=1$ …… (바)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) 집합 $P$를 구한다. | 2점 |
| (나) 두 집합 $P$, $Q$ 사이의 포함 관계를 구한다. | 1점 |
| (다) 두 집합 $P$, $R$ 사이의 포함 관계를 구한다. | 1점 |
| (라) $a$, $b$의 값의 범위를 구한다. | 2점 |
| (마) $a$의 최댓값과 $b$의 최솟값을 구한다. | 2점 |
| (바) $a$의 최댓값과 $b$의 최솟값의 합을 구한다. | 2점 |

**13** $x>0$일 때, $\frac{x^2+1}{x}>0$, $\frac{4x}{x^2+1}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$y=\frac{x^2+1}{x}+\frac{4x}{x^2+1}\ge2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}\times\frac{4x}{x^2+1}}=4$ …… (가)

$\therefore\ b=4$ …… (나)

이때 등호는 $\frac{x^2+1}{x}=\frac{4x}{x^2+1}$일 때 성립하므로

$(x^2+1)^2=4x^2$, $x^4-2x^2+1=0$

$(x^2-1)^2=0$, $x^2=1$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$

그런데 $x>0$이므로 $x=1$

$\therefore\ a=1$ …… (다)

$\therefore\ a+b=5$ …… (라)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다. | 2점 |
| (나) $b$의 값을 구한다. | 3점 |
| (다) $a$의 값을 구한다. | 3점 |
| (라) $a+b$의 값을 구한다. | 2점 |

## 08~10강 내공 점검 p. 80~81

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 ⑤ | 2 ③ | 3 ④ | 4 ④ | 5 ① |
| 6 ③ | 7 ⑤ | 8 ④ | 9 ③ | 10 ① |

11 (1) $n(A)=24$, $n(B)=16$ (2) 34 12 1 13 12

**1** ⑤ $X$의 각 원소 $-1$, 0, 1에 $Y$의 원소 3, 1, 2가 하나씩 대응되므로 함수이다.

**2** $f(-2)=\frac{4}{a}+1$, $f(-1)=\frac{1}{a}+1$, $f(0)=1$, $f(1)=\frac{1}{a}+1$,

$f(2)=\frac{4}{a}+1$

이고, 치역의 모든 원소의 합이 10이므로

$\left(\frac{4}{a}+1\right)\times2+\left(\frac{1}{a}+1\right)\times2+1=10$, $\frac{10}{a}=5$

$\therefore\ a=2$

**3** ㄱ. $f(xy)=f(x)+f(y)$에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(1\times1)=f(1)+f(1)$

$\therefore\ f(1)=0$ (참)

ㄴ. $f(2)=2$이므로 $f(xy)=f(x)+f(y)$에 $x=2$, $y=\frac{1}{2}$을 대입하면

$f\left(2\times\frac{1}{2}\right)=f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)$, $0=2+f\left(\frac{1}{2}\right)$

$\therefore\ f\left(\frac{1}{2}\right)=-2$ (거짓)

ㄷ. $a>0$이므로 $f(xy)=f(x)+f(y)$에 $x=a$, $y=\frac{1}{a}$을 대입하면

$f\left(a\times\frac{1}{a}\right)=f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)$

$0=f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)$ $\quad\therefore f\left(\frac{1}{a}\right)=-f(a)$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

**4** $f(x)=\begin{cases} 2x & (x\geq1) \\ -2(a-1)x+2a & (x<1)\end{cases}$

이때 함수 $f$가 일대일대응이 되려면 $x\geq1$일 때 기울기가 양수이므로 $x<1$일 때도 기울기가 양수이어야 한다.

$-2(a-1)>0$에서 $\quad a-1<0$

$\therefore a<1$

**5** $(f\circ g)(x)=2(-x+k)+1=-2x+2k+1$

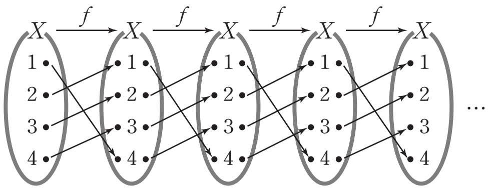
$(g\circ f)(x)=-(2x+1)+k=-2x-1+k$

이때 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$이므로

$-2x+2k+1=-2x-1+k$

$\therefore k=-2$

**6** 함수 $f$를 그림으로 나타내면 다음과 같다.




따라서 $f^4(x)=x$이므로

$f^{2021}(1)=f^{4\times505+1}(1)=f(1)=4$, $f^{2020}(4)=f^{4\times505}(4)=4$

$\therefore f^{2021}(1)-f^{2020}(4)=0$

**7** $f(x)=\frac{1}{3}x-1$이고 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=x-\frac{1}{3}$이므로

$\frac{1}{3}g(x)-1=x-\frac{1}{3}$

$\therefore g(x)=3x+2$

$\therefore g\left(\frac{1}{3}\right)=3\times\frac{1}{3}+2=3$

**8** $f\left(2f^{-1}(x)+\frac{x}{x-1}\right)=x$에서

$2f^{-1}(x)+\frac{x}{x-1}=f^{-1}(x)$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{x}{1-x}$

$f(2)=k$ ($k$는 상수)라고 하면 $f^{-1}(k)=2$이므로

$\frac{k}{1-k}=2$, $k=2-2k$ $\quad\therefore k=\frac{2}{3}$

$\therefore f(2)=\frac{2}{3}$

**9** $g(x)=x+3$이므로

$(f^{-1}\circ g)(3)=f^{-1}(g(3))=f^{-1}(6)$

이때 $f^{-1}(6)=k$ ($k$는 상수)라고 하면 $\quad f(k)=6$

(i) $k\geq0$이면

$f(k)=k^2+k=6$

$k^2+k-6=0$, $(k+3)(k-2)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=2$

그런데 $k\geq0$이므로 $\quad k=2$

(ii) $k<0$이면

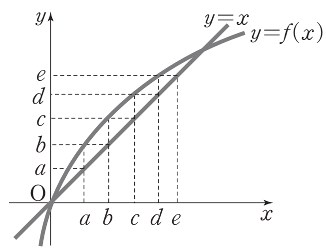
$f(k)=2k=6$ $\quad\therefore k=3$

그런데 이 값은 $k<0$을 만족하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $\quad k=2$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(3)=2$

**10**




$(f^{-1}\circ f^{-1})(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))$이므로

$f^{-1}(c)=m$이라고 하면

$f(m)=c$이므로

$m=b$

$f^{-1}(b)=n$이라고 하면

$f(n)=b$이므로

$n=a$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))$

$=f^{-1}(b)=a$

**11** (1) 집합 $A$는 일대일함수의 집합이므로

$n(A)=4\times3\times2=24$ …… (가)

집합 $B$의 원소의 개수는 집합 $\{2, 3\}$에서 집합 $\{4, 5, 6, 7\}$로의 함수의 개수와 같으므로

$n(B)=4\times4=16$ …… (나)

(2) 집합 $A\cap B$는 $f(1)=4$를 만족하는 일대일함수의 집합이므로 집합 $A\cap B$의 원소의 개수는 집합 $\{2, 3\}$에서 집합 $\{5, 6, 7\}$로의 일대일함수의 개수와 같다.

$\therefore n(A\cap B)=3\times2=6$ …… (다)

$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=24+16-6$

$=34$ …… (라)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) $n(A)$를 구한다. | 3점 |
| (나) $n(B)$를 구한다. | 3점 |
| (다) $n(A\cap B)$를 구한다. | 2점 |
| (라) $n(A\cup B)$를 구한다. | 2점 |

**12** $(f^{-1}\circ(g\circ f^{-1})^{-1})(-1)$

$=(f^{-1}\circ f\circ g^{-1})(-1)$

$=g^{-1}(-1)$

$g^{-1}(-1)=a$ ($a$는 상수)라고 하면

$g(a)=-1$이므로

$3a+2=-1$

$\therefore a=-1$

즉, $g^{-1}(-1)=-1$이므로

$(f^{-1}\circ(g\circ f^{-1})^{-1})(-1)=-1$ …… (가)

$(g^{-1}\circ f)^{-1}(-1)=(f^{-1}\circ g)(-1)$

$=f^{-1}(g(-1))$

$=f^{-1}(-1)$

$f^{-1}(-1)=b$ ($b$는 상수)라고 하면

$f(b)=-1$이므로

$-2b+3=-1$

$\therefore b=2$

즉, $f^{-1}(-1)=2$이므로

$(g^{-1}\circ f)^{-1}(-1)=2$ …… (나)

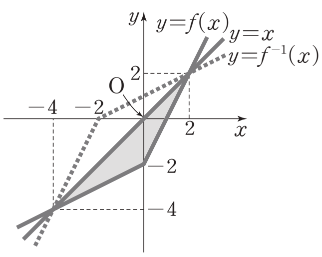
$\therefore (f^{-1}\circ(g\circ f^{-1})^{-1})(-1)+(g^{-1}\circ f)^{-1}(-1)$

$=-1+2$

$=1$ …… (다)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) $(f^{-1}\circ(g\circ f^{-1})^{-1})(-1)$의 값을 구한다. | 4점 |
| (나) $(g^{-1}\circ f)^{-1}(-1)$의 값을 구한다. | 4점 |
| (다) $(f^{-1}\circ(g\circ f^{-1})^{-1})(-1)+(g^{-1}\circ f)^{-1}(-1)$의 값을 구한다. | 2점 |

**13**




…… (가)

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 구하는 도형의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다. …… (나)

위의 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$와 두 점 $(-4,\ -4)$, $(2,\ 2)$에서 만나므로 구하는 도형의 넓이는

$2\left(\frac{1}{2}\times2\times4+\frac{1}{2}\times2\times2\right)=12$ …… (다)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) $y=f(x)$의 그래프를 그린다. | 3점 |
| (나) $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다. | 3점 |
| (다) $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다. | 4점 |

## 11~12강 내공 점검

p. 82~83

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** ③ | **2** ② | **3** ⑤ | **4** ④ | **5** ② |
| **6** ② | **7** ① | **8** ③ | **9** ① | **10** ⑤ |
| **11** $-1$ 또는 $2$ | | **12** $4$ | **13** $-10$ | |

**1** $\frac{x+2}{x-3}+\frac{x-5}{x^2-x-6}=\frac{x+2}{x-3}+\frac{x-5}{(x-3)(x+2)}$

$=\frac{(x+2)^2+x-5}{(x-3)(x+2)}$

$=\frac{x^2+5x-1}{(x-3)(x+2)}$

따라서 $\frac{x^2+5x-1}{(x-3)(x+2)}=\frac{x^2+ax+b}{(x-3)(x+2)}$이므로

$a=5,\ b=-1$

$\therefore a+b=4$

**2** $1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-x}}}=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\cfrac{-x}{1-x}}}$

$=1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1-x}{x}}$

$=1-\cfrac{1}{\cfrac{1}{x}}$

$=1-x$

**3** $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{a+b+c}{abc}=0$이므로

$a+b+c=0$ …… ㉠

$\frac{a^2+1}{bc}+\frac{b^2+1}{ca}+\frac{c^2+1}{ab}$

$=\frac{(a^2+1)a+(b^2+1)b+(c^2+1)c}{abc}$

$=\frac{a^3+b^3+c^3+a+b+c}{abc}$

$=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc}{abc}$

$=\frac{3abc}{abc}$ ($\because$ ㉠)

$=3$

**4** $2x=3y,\ 5y=4z$에서

$x=\frac{3}{2}y,\ z=\frac{5}{4}y$이므로

$x:y:z=\frac{3}{2}y:y:\frac{5}{4}y=6:4:5$

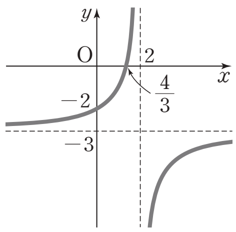
$x=6k,\ y=4k,\ z=5k\,(k>0)$라고 하면

$\frac{3x-2y+4z}{x+y+z}=\frac{18k-8k+20k}{6k+4k+5k}$

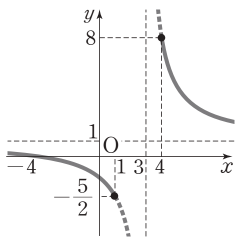
$=\frac{30k}{15k}=2$

**5** $y=\dfrac{-3x+4}{x-2}=\dfrac{-3(x-2)-2}{x-2}=-\dfrac{2}{x-2}-3$

이므로 $y=\dfrac{-3x+4}{x-2}$의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 $-3$만큼 평행이동한 것이다.
따라서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지나지 않는다.




**6** $x^2-5x+4\geq0$에서
$(x-1)(x-4)\geq0$
$\therefore\ x\leq1$ 또는 $x\geq4$
따라서 주어진 함수의 정의역은
$\{x\,|\,x\leq1$ 또는 $x\geq4\}$
$y=\dfrac{x+4}{x-3}=\dfrac{x-3+7}{x-3}=\dfrac{7}{x-3}+1$
이므로 $x\leq1$ 또는 $x\geq4$에서 $y=\dfrac{x+4}{x-3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
$x=4$일 때, $M=8$
$x=1$일 때, $m=-\dfrac{5}{2}$
$\therefore\ M+m=\dfrac{11}{2}$




**7** ㄱ. $y=\dfrac{2(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+2$
ㄴ. $y=\dfrac{2(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+2$
ㄷ. $y=\dfrac{2x-1+1}{2x-1}=\dfrac{1}{2x-1}+1$
따라서 보기의 유리함수 중 그 그래프를 평행이동하여 유리함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프와 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ이다.

**8** $y=\dfrac{ax-1}{x+2}=\dfrac{a(x+2)-2a-1}{x+2}=\dfrac{-2a-1}{x+2}+a$
이므로 주어진 유리함수의 그래프는 점 $(-2,\ a)$에 대하여 대칭이다.
점 $(-2,\ a)$는 두 직선 $y=x+b$, $y=-x+2$의 교점이므로
$a=-2+b$, $a=-(-2)+2$
$\therefore\ a=4,\ b=6$
$\therefore\ a+b=10$

**9** $f^1(x)=f(x)=\dfrac{x}{1-x}$

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=\dfrac{\dfrac{x}{1-x}}{1-\dfrac{x}{1-x}}=\dfrac{x}{1-2x}$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=\dfrac{\dfrac{x}{1-2x}}{1-\dfrac{x}{1-2x}}=\dfrac{x}{1-3x}$

$\vdots$

$\therefore\ f^{100}(x)=\dfrac{x}{1-100x}$

따라서 $\dfrac{x}{1-100x}=\dfrac{ax+b}{cx+1}$이므로
$a=1,\ b=0,\ c=-100$
$\therefore\ ab+c=-100$

**10** 주어진 함수의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로
$\dfrac{a+b}{3}=1$
$\therefore\ a+b=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$y=\dfrac{ax+b}{x+2}$를 $x$에 대하여 풀면
$y(x+2)=ax+b$
$(y-a)x=-2y+b$
$\therefore\ x=\dfrac{-2y+b}{y-a}$
$x$와 $y$를 서로 바꾸면
$y=\dfrac{-2x+b}{x-a}$
$\therefore\ f^{-1}(x)=\dfrac{-2x+b}{x-a}$
이때 $f^{-1}(x)=f(x)$이므로
$\dfrac{-2x+b}{x-a}=\dfrac{ax+b}{x+2}$
$\therefore\ a=-2$
$a=-2$를 ㉠에 대입하면
$b=5$
$\therefore\ b-a=7$

**11** $\dfrac{a+2b}{3c}=\dfrac{2b+3c}{a}=\dfrac{3c+a}{2b}=k$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
에서 $a+2b=3ck$, $2b+3c=ak$, $3c+a=2bk$
위 세 식을 변끼리 더하면
$2(a+2b+3c)=(a+2b+3c)k$ $\quad\cdots\cdots$ (가)
(ⅰ) $a+2b+3c\neq0$일 때
$k=2$ $\quad\cdots\cdots$ (나)
(ⅱ) $a+2b+3c=0$일 때
$a+2b=-3c$, $2b+3c=-a$, $3c+a=-2b$이므로 ㉠에 대입하면
$k=-1$ $\quad\cdots\cdots$ (다)
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 실수 $k$의 값은 $-1$ 또는 2이다.

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) 주어진 식을 정리하여 $k$에 대한 등식을 만든다. | 2점 |
| (나) $a+2b+3c\neq0$일 때, $k$의 값을 구한다. | 4점 |
| (다) $a+2b+3c=0$일 때, $k$의 값을 구한다. | 4점 |

**12** $y=\dfrac{x+a}{x-1}=\dfrac{(x-1)+a+1}{x-1}$

$=\dfrac{a+1}{x-1}+1$ …… (가)

$y=\dfrac{1-x}{x+1}=\dfrac{-(x+1)+2}{x+1}$

$=\dfrac{2}{x+1}-1$ …… (나)

$y=\dfrac{x+a}{x-1}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $m$만큼, $y$축의 방향으로 $n$만큼 평행이동하면

$y=\dfrac{a+1}{x-m-1}+1+n$

이 그래프가 $y=\dfrac{2}{x+1}-1$의 그래프와 일치해야 하므로

$a+1=2,\ -m-1=1,\ 1+n=-1$

$\therefore\ a=1,\ m=-2,\ n=-2$ …… (다)

$\therefore\ amn=4$ …… (라)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) $y=\dfrac{x+a}{x-1}$를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한다. | 2점 |
| (나) $y=\dfrac{1-x}{x+1}$를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한다. | 2점 |
| (다) $a,\ m,\ n$의 값을 구한다. | 4점 |
| (라) $amn$의 값을 구한다. | 2점 |

**13** $y=\dfrac{5-3x}{x-2}=\dfrac{-3(x-2)-1}{x-2}$

$=-\dfrac{1}{x-2}-3$

이므로 점근선의 방정식은

$x=2,\ y=-3$ …… (가)

$y=\dfrac{ax-2}{2x+b}$

$=\dfrac{\frac{a}{2}(2x+b)-\frac{ab}{2}-2}{2x+b}$

$=-\dfrac{\frac{ab}{2}+2}{2x+b}+\dfrac{a}{2}$

이므로 점근선의 방정식은

$x=-\dfrac{b}{2},\ y=\dfrac{a}{2}$ …… (나)

두 유리함수의 그래프의 점근선이 서로 일치하므로

$-\dfrac{b}{2}=2,\ \dfrac{a}{2}=-3$

$\therefore\ a=-6,\ b=-4$ …… (다)

$\therefore\ a+b=-10$ …… (라)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) $y=\dfrac{5-3x}{x-2}$의 그래프의 점근선의 방정식을 구한다. | 3점 |
| (나) $y=\dfrac{ax-2}{2x+b}$의 그래프의 점근선의 방정식을 구한다. | 4점 |
| (다) $a,\ b$의 값을 구한다. | 2점 |
| (라) $a+b$의 값을 구한다. | 1점 |

## 13~14강 내공 점검

p. 84~85

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 ② | 2 ④ | 3 ③ | 4 ② | 5 ① |
| 6 ⑤ | 7 ③ | 8 ③ | 9 ⑤ | 10 ④ |
| 11 $\sqrt{5}-2$ | 12 21 | 13 6 | | |

**1** $f(n)=\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}$이므로

$\dfrac{1}{f(n)}=\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$

$=\dfrac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}$

$\therefore\ \dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(2)}+\dfrac{1}{f(3)}+\cdots+\dfrac{1}{f(60)}$

$=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{2}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\cdots+\dfrac{\sqrt{121}-\sqrt{119}}{2}$

$=\dfrac{-\sqrt{1}+\sqrt{121}}{2}=\dfrac{-1+11}{2}=\dfrac{10}{2}=5$

**2** (ⅰ) $8+2x-x^2\ge0$에서 $x^2-2x-8\le0$

$(x+2)(x-4)\le0$ $\therefore\ -2\le x\le4$

(ⅱ) $x^2-3x+2\ne0$에서 $(x-1)(x-2)\ne0$

$\therefore\ x\ne1,\ x\ne2$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 정수 $x$는 $-2,\ -1,\ 0,\ 3,\ 4$이므로 모든 정수 $x$의 값의 합은

$-2+(-1)+0+3+4=4$

**3** $\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt{x+2}+1}+\dfrac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}-1}=\dfrac{(\sqrt{x+2}-1)^2+(\sqrt{x+2}+1)^2}{(\sqrt{x+2}+1)(\sqrt{x+2}-1)}$

$=\dfrac{2x+6}{x+1}=\dfrac{2\sqrt{3}+6}{\sqrt{3}+1}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}$

$=2\sqrt{3}$

**4** $y=\dfrac{ax-3}{x+b}=\dfrac{a(x+b)-ab-3}{x+b}=\dfrac{-ab-3}{x+b}+a$

이므로 주어진 유리함수의 그래프는 점 $(-b,\ a)$에 대하여 대칭이다.

$\therefore\ a=-2,\ b=6$

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}=\sqrt{-2x+6}$의 정의역은

$\{x\,|\,x\le3\}$

따라서 이 정의역에 속하는 자연수는 1, 2, 3의 3개이다.

**5** $y=\sqrt{2x-3}-1$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$y=\sqrt{2(x+1)-3}-1+2=\sqrt{2x-1}+1$

이 함수의 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동하면

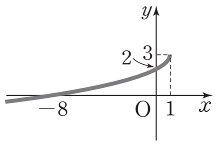
$y=\sqrt{2\times(-x)-1}+1$ $\therefore\ y=\sqrt{-2x-1}+1$

이 그래프가 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프와 일치해야 하므로

$a=-2,\ b=-1,\ c=1$

$\therefore\ a+b+c=-2$

**6** $y=-\sqrt{-x+1}+3=-\sqrt{-(x-1)}+3$
에서 $y=-\sqrt{-x+1}+3$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같이 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면을 지난다.



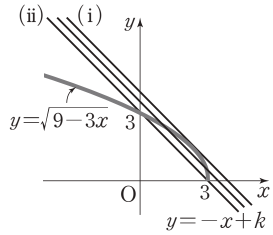

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

**7** 주어진 무리함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\,(a>0)$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-2$만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 무리함수의 식은
$y=\sqrt{a(x+2)}+1\,(a>0)$ …… ㉠
㉠의 그래프가 점 (0, 3)을 지나므로
$3=\sqrt{2a}+1$, $\sqrt{2a}=2$ $\quad\therefore a=2$
$a=2$를 ㉠에 대입하여 정리하면
$y=\sqrt{2(x+2)}+1=\sqrt{2x+4}+1$
이 식을 $y=\sqrt{ax+b}+c$와 비교하면
$a=2$, $b=4$, $c=1$
$\therefore abc=8$

**8** $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(3)$
$=(g^{-1}\circ f)(3)$
$=g^{-1}(f(3))$
$=g^{-1}(3)$
$g^{-1}(3)=k$ ($k$는 상수)라고 하면 $g(k)=3$이므로
$\sqrt{3k-6}=3$, $3k-6=9$
$\therefore k=5$
$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=5$

**9** 두 함수는 서로 역함수 관계에 있으므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
이때 무리함수 $y=2\sqrt{x+1}-1$은 $x$의 값이 증가할 때 $y$의 값도 증가하므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y=2\sqrt{x+1}-1$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
$2\sqrt{x+1}-1=x$에서
$2\sqrt{x+1}=x+1$
양변을 제곱하여 정리하면
$x^2-2x-3=0$
$(x+1)(x-3)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$
따라서 주어진 두 함수의 그래프는 두 점 $(-1, -1)$, $(3, 3)$에서 만나므로 두 교점 사이의 거리는
$\sqrt{(3+1)^2+(3+1)^2}=4\sqrt{2}$

**10** $y=\sqrt{9-3x}=\sqrt{-3(x-3)}$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, $y=-x+k$는 기울기가 $-1$이고 $y$절편이 $k$인 직선이다.




(i) $y=\sqrt{9-3x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 접할 때
$\sqrt{9-3x}=-x+k$에서 양변을 제곱하여 정리하면
$x^2+(3-2k)x+k^2-9=0$
이 이차방정식의 판별식을 $D$라고 하면
$D=(3-2k)^2-4(k^2-9)=0$ $\quad\therefore k=\frac{15}{4}$

(ii) 직선 $y=-x+k$가 점 (3, 0)을 지날 때
$0=-3+k$ $\quad\therefore k=3$

따라서 함수 $y=\sqrt{9-3x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 상수 $k$의 값의 범위는
$3\le k<\frac{15}{4}$

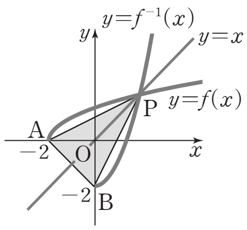
**11** $x+y=2\sqrt{5}$, $xy=4$이므로
$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(2\sqrt{5})^2-4\times4=4$
$\therefore x-y=2$ ($\because x>y>0$) …… (가)
$\therefore \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$
$=\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}$ …… (나)
$=\frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{4}}{2}=\sqrt{5}-2$ …… (다)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) $x-y$의 값을 구한다. | 4점 |
| (나) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$의 분모를 유리화한다. | 4점 |
| (다) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$의 값을 구한다. | 2점 |

**12** $y=-\sqrt{6-x}-5=-\sqrt{-(x-6)}-5$
이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 6만큼, $y$축의 방향으로 $-5$만큼 평행이동한 것이다.
$a\le x\le 2$에서 주어진 함수는 $x=a$일 때 최솟값 $-8$을 가지므로
$-\sqrt{6-a}-5=-8$, $\sqrt{6-a}=3$ $\quad\therefore a=-3$ …… (가)
$x=2$일 때 최댓값 $b$를 가지므로
$b=-\sqrt{6-2}-5=-7$ …… (나)
$\therefore ab=21$ …… (다)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) $a$의 값을 구한다. | 4점 |
| (나) $b$의 값을 구한다. | 4점 |
| (다) $ab$의 값을 구한다. | 2점 |

**13** $f(x)=\sqrt{x+2}$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.




이때 두 점 A, B의 좌표는
A$(-2,\ 0)$, B$(0,\ -2)$ ······ (가)
$y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
$\sqrt{x+2}=x$에서 양변을 제곱하여 정리하면
$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$
그런데 $x>0$이므로 $x=2$
따라서 점 P의 좌표는 P$(2,\ 2)$ ······ (나)

$$\begin{aligned}\therefore \triangle ABP&=\triangle AOB+\triangle AOP+\triangle BOP\\&=\triangle AOB+2\triangle AOP\\&=\frac{1}{2}\times2\times2+2\times\left(\frac{1}{2}\times2\times2\right)\\&=6\end{aligned}$$ ······ (다)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) 두 점 A, B의 좌표를 구한다. | 3점 |
| (나) 점 P의 좌표를 구한다. | 4점 |
| (다) △ABP의 넓이를 구한다. | 3점 |

## 15~17강 내공 점검

p. 86~87

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 ② | 2 ⑤ | 3 ③ | 4 ② | 5 ③ |
| 6 ① | 7 ② | 8 ③ | 9 ④ | 10 ① |
| 11 17 | 12 33 | 13 5명 | | |

**1** 1부터 50까지의 자연수 중에서 2의 배수는 25개, 5의 배수는 10개이다.
이때 2의 배수이면서 5의 배수, 즉 10의 배수는 5개이다.
따라서 구하는 자연수의 개수는
$25+10-5=30$

**2** $2a_1=a_2+a_3$일 때, $a_1$의 값에 따른 $a_2$, $a_3$의 값을 순서쌍 $(a_2,\ a_3)$으로 나타내면
(i) $a_1=1$, 즉 $a_2+a_3=2$인 경우
$(1,\ 1)$이므로 그 경우의 수는 1
(ii) $a_1=2$, 즉 $a_2+a_3=4$인 경우
$(1,\ 3)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$이므로 그 경우의 수는 3
(iii) $a_1=3$, 즉 $a_2+a_3=6$인 경우
$(1,\ 5)$, $(2,\ 4)$, $(3,\ 3)$, $(4,\ 2)$, $(5,\ 1)$이므로 그 경우의 수는 5
(iv) $a_1=4$, 즉 $a_2+a_3=8$인 경우
$(2,\ 6)$, $(3,\ 5)$, $(4,\ 4)$, $(5,\ 3)$, $(6,\ 2)$이므로 그 경우의 수는 5
(v) $a_1=5$, 즉 $a_2+a_3=10$인 경우
$(4,\ 6)$, $(5,\ 5)$, $(6,\ 4)$이므로 그 경우의 수는 3
(vi) $a_1=6$, 즉 $a_2+a_3=12$인 경우
$(6,\ 6)$이므로 그 경우의 수는 1
(i)~(vi)에 의하여 구하는 경우의 수는
$1+3+5+5+3+1=18$

**3** (i) A → B → C → D로 가는 방법의 수는
$2\times2\times1=4$
(ii) A → C → B → D로 가는 방법의 수는
$3\times2\times3=18$
(i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는
$4+18=22$

**4** D 칸에 올 수 있는 수는 2, 4, 6이므로 3개이다.
그 각각에 대하여 D 칸에 적은 수를 제외한 나머지 5개의 수 중에서 3개를 택하여 3개의 칸 A, B, C에 적는 방법의 수는 ${}_5P_3=60$
따라서 구하는 방법의 수는
$3\times60=180$

**5** 부모를 한 사람으로 생각하면 4명이 일렬로 버스에 타는 경우의 수는 $4!=24$
그 각각에 대하여 부모가 서로 순서를 바꾸어 타는 경우의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\times2=48$

**6** 조건 (가), (나)를 만족하는 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값은
$f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=6$
또는 $f(1)=3$, $f(2)=2$, $f(3)=6$
이므로 그 개수는 2
그 각각에 대하여 일대일대응인 함수 $f$의 개수는
$3!=6$
따라서 구하는 함수 $f$의 개수는
$2\times6=12$

**7** 서로 평행한 두 직선 위의 점을 하나씩 택하여 연결하면 하나의 직선을 만들 수 있으므로
${}_6C_1\times{}_9C_1=6\times9=54$
주어진 두 직선을 포함하면 구하는 직선의 개수는
$54+2=56$

**8** (i) ${}_{10}C_{2r}={}_{10}C_{r+4}$에서
$2r=r+4 \quad \therefore r=4$

(ii) ${}_{10}C_{r+4}={}_{10}C_{10-(r+4)}={}_{10}C_{6-r}$이므로

${}_{10}C_{2r}={}_{10}C_{6-r}$에서

$2r=6-r \qquad \therefore\ r=2$

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 정수 $r$의 값의 합은

$4+2=6$

**9** 생활 공예반 6개 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_{6}C_{2}=15$

손뜨개반 4개 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_{4}C_{2}=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$15\times6=90$

**10** 구하는 자연수의 개수는 8개의 1을 일렬로 배열한 후, 1 사이사이와 맨 끝의 8개의 자리에 4개의 0을 배열하는 경우의 수와 같으므로

${}_{8}C_{4}=70$

**11** 첫 번째로 꺼낸 공에 적힌 수를 $a$, 두 번째로 꺼낸 공에 적힌 수를 $b$라고 하면 $ab$가 4의 배수인 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) $a$가 짝수인 경우

$a$가 2 또는 6이면 그 각각에 대하여 $b$가 될 수 있는 수는 2, 4, 6으로 3개이다.

또 $a$가 4이면 $b$가 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7로 7개이다.

즉, 두 수 중 한 수가 짝수일 때, 두 수의 곱이 4의 배수인 경우의 수는

$2\times3+1\times7=13$ …… (가)

(ii) $a$가 홀수인 경우

$a$가 1, 3, 5, 7이면 그 각각에 대하여 $b$가 될 수 있는 수는 4로 1개이다.

즉, 두 수 중 한 수가 홀수일 때, 두 수의 곱이 4의 배수인 경우의 수는

$4\times1=4$ …… (나)

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$13+4=17$ …… (다)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) 두 수 중 한 수가 짝수일 때, 두 수의 곱이 4의 배수인 경우의 수를 구한다. | 6점 |
| (나) 두 수 중 한 수가 홀수일 때, 두 수의 곱이 4의 배수인 경우의 수를 구한다. | 3점 |
| (다) 두 수의 곱이 4의 배수인 경우의 수를 구한다. | 1점 |

**12** 주어진 부등식을 정리하면

$n(n-1)(n-2)\le6n(n-1)$ …… ㉠ …… (가)

이때 $n\ge3$이므로 부등식 ㉠의 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$n-2\le6$, 즉 $n\le8$

그런데 $n\ge3$이므로

$3\le n\le8$ …… (나)

따라서 주어진 부등식을 만족하는 자연수 $n$은 3, 4, 5, 6, 7, 8이므로 그 합은

$3+4+5+6+7+8=33$ …… (다)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) 주어진 부등식을 $n$에 관한 부등식으로 나타낸다. | 4점 |
| (나) 자연수 $n$의 값의 범위를 구한다. | 4점 |
| (다) 모든 자연수 $n$의 값의 합을 구한다. | 2점 |

**13** 여자 회원이 적어도 1명은 포함되도록 뽑는 방법의 수는 전체 경우의 수에서 남자 회원 중에서만 운영진 3명을 뽑는 방법의 수를 뺀 값과 같다.

전체 경우의 수는

${}_{12}C_{3}=\dfrac{12\times11\times10}{3!}=220$ …… (가)

남자 회원의 수를 $n$이라 하면 남자 회원 중에서만 운영진 3명 뽑는 방법의 수는

${}_{n}C_{3}=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}$

$=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ …… (나)

여자 회원이 적어도 1명은 포함되도록 운영진 3명을 뽑는 방법의 수가 185이므로

$220-\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}=185$

$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}=35$

$n(n-1)(n-2)=210=7\times6\times5$

$n$은 3 이상의 자연수이므로

$n=7$ …… (다)

따라서 남자 회원이 7명이므로 여자 회원은 5명이다.

…… (라)

| 채점 기준 | 배점 |
|---|---|
| (가) 전체 경우의 수를 구한다. | 3점 |
| (나) 남자 회원만 3명 뽑는 방법의 수를 구한다. | 3점 |
| (다) 남자 회원 수를 구한다. | 3점 |
| (라) 여자 회원 수를 구한다. | 1점 |