THE FIRST CLASS MATHEMATICS

일등급 수학 · 고등 **수학** (상)

[해설편]

Ⅰ 다항식

Ⅱ 방정식과 부등식

Ⅲ 도형의 방정식

빠른 정답 찾기

I 다항식

01 다항식의 연산

01 ②	02 ⑤	03 ②	04 100
05 ②	06 ④	07 ④	08 ④
09 ①	10 ④	11 36	12 ③
13 22	14 ③	15 ⑤	16 ①
17 192	18 ②	19 ②	20 7
21 ⑤	22 ④	23 ①	24 81
25 2	26 12	27 ⑤	28 64
29 ③	30 ①	31 6	32 ④
33 ④	34 ②	35 ⑤	36 ②
37 348	38 ①	39 ⑤	40 ①
41 ②	42 ③	43 ⑤	44 ⑤
45 8	46 38	47 ③	48 8
49 1	50 8	51 ⑤	52 25
53 ④	54 8	55 ②	56 ⑤
57 ⑤	58 3		

02 나머지정리

01 ③	02 ③	03 ②	04 8
05 8	06 ①	07 ③	08 ③
09 ①	10 6	11 ②	12 ⑤
13 ②	14 5	15 ⑤	16 26
17 ①	18 23	19 ③	20 24
21 ③	22 ①	23 3	24 13
25 ①	26 10	27 ①	28 ③
29 31	30 ①	31 ②	32 14
33 ④	34 ②	35 ①	36 ①
37 ②	38 ①	39 ③	40 ②
41 ③	42 ④	43 ⑤	44 ①
45 ⑤	46 ④	47 10	48 ⑤
49 ②	50 495	51 12	52 1
53 26	54 40	55 ③	56 ③
57 ③	58 ⑤	59 ⑤	60 ③
61 15	62 ⑤		

03 인수분해

01 ③	02 ⑤	03 ③	04 ④
05 ③	06 ③	07 ②	08 6
09 297	10 ②	11 64	12 8
13 ②	14 ③	15 ①	16 ①
17 ⑤	18 3	19 ⑤	20 ②
21 ⑤	22 ①	23 100	24 ④
25 99	26 ⑤	27 7	28 ⑤
29 46	30 ②	31 191	32 ⑤
33 ④	34 4	35 119	36 ④
37 ②	38 10	39 4	40 10
41 244	42 100	43 ④	44 111
45 3	46 6	47 230	48 3
49 ①	50 ②	51 ③	52 ②
53 ⑤	54 ③	55 8	56 6
57 2	58 ②	59 17	

Ⅱ 방정식과 부등식

04 복소수

01 ②	02 ④	03 9	04 29
05 3	06 ④	07 ②	08 ④
09 ①	10 ④	11 4	12 ③
13 1	14 ②	15 ③	16 ③
17 44	18 ⑤	19 ②	20 25
21 ②	22 ⑤	23 ④	24 ①
25 ①	26 52	27 ②	28 ②
29 ④	30 5	31 3	32 ⑤
33 ②	34 ②	35 5	36 10
37 ④	38 ②	39 ①	40 ⑤
41 ④	42 8	43 3	44 ①
45 ④	46 ④	47 ③	48 ①
49 ③	50 12	51 ①	52 ①
53 20	54 4	55 14	56 1
57 ③	58 38	59 ⑤	60 ①
61 27	62 ②	63 ④	64 ⑤
65 1	66 ①	67 ④	68 ②

05 이차방정식

01 1	02 ⑤	03 ③	04 16
05 ④	06 2	07 4	08 ①
09 ①	10 16	11 ②	12 ④
13 ④	14 45	15 5	16 ⑤
17 ④	18 3	19 8	20 ②
21 ③	22 ③	23 ④	24 4
25 ⑤	26 3	27 25	28 ④
29 ⑤	30 ②	31 4	32 ③
33 1	34 ④	35 3	36 ⑤
37 21	38 ①	39 ③	40 ④
41 ③	42 2	43 ③	44 12
45 ②	46 ③	47 4	48 ①
49 ③	50 ②	51 4	52 13
53 9	54 4	55 34	56 3
57 27	58 ②	59 ②	60 ⑤
61 ③	62 240	63 24	64 9
65 11	66 1	67 ②	68 6

06 이차방정식과 이차함수

01 ④	02 ⑤	03 ④	04 ③
05 ③	06 ②	07 ③	08 ③
09 10	10 3	11 ①	12 ⑤
13 ④	14 ②	15 ②	16 ⑤
17 ④	18 ④	19 ⑤	20 ③
21 ①	22 ①	23 ②	24 ④
25 14	26 ②	27 ⑤	28 ④
29 6	30 ①	31 ①	32 ④
33 ①	34 1	35 12	36 ④
37 ②	38 ③	39 ①	40 22
41 ④	42 3	43 ④	44 11
45 ③	46 1	47 ⑤	48 2
49 ④	50 300	51 9	52 4
53 2	54 ⑤	55 39	56 ⑤
57 750	58 ④	59 2	60 22
61 4	62 ①		

07 여러 가지 방정식

01 ②	02 ④	03 ②	04 10
05 ⑤	06 ①	07 4	08 2
09 ④	10 ③	11 ⑤	12 ③
13 ⑤	14 13	15 ②	16 ⑤
17 ①	18 ②	19 ①	20 4
21 ③	22 ②	23 ⑤	24 ③
25 ⑤	26 ②	27 ④	28 15
29 ②	30 ③	31 ④	32 3
33 ④	34 ②	35 ④	36 7
37 ⑤	38 1	39 ①	40 ①
41 ③	42 8	43 ④	44 ①
45 ⑤	46 ①	47 53	48 ⑤
49 ④	50 ④	51 ②	52 ①
53 ③	54 84	55 4	56 3
57 20	58 ①	59 ⑤	60 25
61 ③	62 ⑤	63 18	64 ①
65 ⑤	66 2		

08 여러 가지 부등식

01 ④	02 ②	03 6	04 6
05 ②	06 27	07 ③	08 60
09 ②	10 ⑤	11 ①	12 12
13 5	14 2	15 ⑤	16 ②
17 4	18 ②	19 ①	20 ③
21 ③	22 ③	23 ⑤	24 ④
25 ④	26 7	27 ④	28 5
29 ⑤	30 ②	31 20	32 200
33 ④	34 ④	35 21	36 65
37 ①	38 10	39 2	40 ②
41 ④	42 42	43 9	44 ①
45 ⑤	46 ②	47 ④	48 46
49 ⑤	50 14	51 325	52 25
53 ④	54 2	55 4	56 13
57 ③	58 ③	59 ②	60 ④
61 ③	62 ⑤	63 5	64 27
65 5	66 27	67 ③	

Ⅲ 도형의 방정식

09 평면좌표

01 ⑤	02 234	03 ④	04 ④
05 5	06 4	07 ④	08 ⑤
09 ⑤	10 4	11 ①	12 ③
13 ⑤	14 13	15 10	16 ③
17 50	18 7	19 ①	20 97
21 20	22 672	23 17	24 ②
25 ④	26 ④	27 ①	28 ③
29 5	30 125	31 ④	32 ②
33 ③	34 ⑤	35 3	36 18
37 21	38 5	39 ④	40 ③
41 ②	42 16	43 ④	44 ③
45 ④	46 ②		

10 직선의 방정식

01 ②	02 8	03 2	04 ⑤
05 ③	06 28	07 ③	08 ②
09 ②	10 7	11 50	12 ①
13 2	14 2	15 ④	16 5
17 88	18 ③	19 ②	20 ①
21 2	22 ①	23 ②	24 ②
25 ②	26 20	27 ②	28 ②
29 ②	30 ③	31 ②	32 ②
33 ④	34 ③	35 5	36 ⑤
37 ③	38 ④	39 ①	40 9
41 ③	42 ②	43 ③	44 ④
45 ④	46 12	47 ⑤	48 11
49 2	50 9	51 ②	52 ⑤
53 ③	54 106	55 5	56 8
57 ②	58 17	59 12	

11 원의 방정식

01 14	02 ⑤	03 ③	04 13
05 ③	06 8	07 6	08 ⑤
09 3	10 ⑤	11 ②	12 ②
13 ③	14 16	15 ④	16 ④
17 125	18 ⑤	19 ①	20 ④
21 8	22 ①	23 98	24 ④
25 ②	26 5	27 ④	28 2
29 ③	30 ①	31 ③	32 ①
33 100	34 96	35 ①	36 ③
37 40	38 7	39 4	40 ②
41 ⑤	42 64	43 42	44 ②
45 7	46 5	47 12	48 8
49 ③	50 7	51 8	52 16
53 4	54 1	55 ⑤	56 25
57 ⑤	58 5	59 80	60 6
61 ①	62 5		

12 도형의 이동

01 2	02 ④	03 1	04 2
05 ⑤	06 ①	07 10	08 12
09 ⑤	10 5	11 ③	12 4
13 ②	14 5	15 ④	16 75
17 ③	18 ②	19 45	20 8
21 8	22 16	23 ⑤	24 ⑤
25 ③	26 ②	27 ⑤	28 ②
29 ②	30 ①	31 ⑤	32 ②
33 ①	34 16	35 ③	36 1
37 180	38 2	39 65	40 ①
41 23	42 ①	43 ②	44 ②
45 12	46 675	47 241	

I 다항식

01 다항식의 연산

문제편 9P

01 답 ②

(가) 교환법칙

(나) 분배법칙

(다) 결합법칙

02 답 ⑤

$A-2(X-B)=A+2B-2X=3A$에서

$-2X=2A-2B$이므로

$X=B-A$

$\quad=(2a^2+ab-b^2)-(a^2-3ab-2b^2)$

$\quad=a^2+4ab+b^2$

03 답 ②

$(2x+a)^3+(x-3)^3$

$=(8x^3+12ax^2+6a^2x+a^3)+(x^3-9x^2+27x-27)$

$=9x^3+(12a-9)x^2+(6a^2+27)x+a^3-27$

이때, x^2의 계수가 15이므로

$12a-9=15 \qquad \therefore a=2$

04 답 100

$(a+b+2c)^2=a^2+b^2+(2c)^2+2ab+2b(2c)+2(2c)a$

$\qquad\qquad\quad=a^2+b^2+4c^2+2(ab+2bc+2ca)$

$\qquad\qquad\quad=44+2\times28$

$\qquad\qquad\quad=100$

05 답 ②

$x+y=3$이므로

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서

$18=3^3-3\times xy\times3=27-9xy \qquad \therefore xy=1$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=3^2-2=7$

06 답 ④

$x-y=2,\ xy=1$이므로

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)=2^3+3\times1\times2=14$

[다른 풀이]

$x^3=(\sqrt{2}+1)^3=2\sqrt{2}+3\times2\times1+3\times\sqrt{2}\times1+1=5\sqrt{2}+7$

$y^3=(\sqrt{2}-1)^3=2\sqrt{2}-3\times2\times1+3\times\sqrt{2}\times1-1=5\sqrt{2}-7$

$\therefore x^3-y^3=(5\sqrt{2}+7)-(5\sqrt{2}-7)=14$

07 답 ④

나눗셈의 원리에 의하여

$2x^3-3x^2+4x+6=A(x^2-2x+3)+3$

좌변이 삼차식이므로 다항식 A는 일차식이다.

이때, $A=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$2x^3-3x^2+4x+6=(ax+b)(x^2-2x+3)+3$

x^3의 계수를 비교하면 $2x^3=ax^3$에서 $a=2$

또한, 상수항을 비교하면 $6=3b+3$에서 $b=1$

$\therefore A=2x+1$

[다른 풀이]

나눗셈의 원리에 의하여

$2x^3-3x^2+4x+6=A(x^2-2x+3)+3$

우변의 3을 이항하여 정리하면

$2x^3-3x^2+4x+3=A(x^2-2x+3)$

$$\begin{array}{r|l} & 2x\ +1 \\ x^2-2x+3 & 2x^3-3x^2+4x+3 \\ & 2x^3-4x^2+6x \\ \hline & \qquad\ x^2-2x+3 \\ & \qquad\ x^2-2x+3 \\ \hline & \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

$\therefore A=(2x^3-3x^2+4x+3)\div(x^2-2x+3)$

$\qquad=2x+1$

08 답 ④

$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R=(4x-2)\frac{1}{4}Q(x)+R$

따라서 $f(x)$를 $4x-2$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{4}Q(x)$, 나머지는 R이다.

09 답 ①

$A=(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)$에서

x^4항은 $1\times5x^4+2x\times4x^3+3x^2\times3x^2+4x^3\times2x+5x^4\times1$이므로

$a=1\times5+2\times4+3\times3+4\times2+5\times1$

$B=(5+4x+3x^2+2x^3+x^4)(5+4x+3x^2+2x^3+x^4)$에서

x^4항은 $5\times x^4+4x\times2x^3+3x^2\times3x^2+2x^3\times4x+x^4\times5$이므로

$b=5\times1+4\times2+3\times3+2\times4+1\times5$

따라서 $a=b$이므로 $a-b=0$

10 답 ④

(주어진 식)

$=(1+x+x^2+\cdots+x^{10})(1+x+x^2+\cdots+x^{10})$

$=1+\cdots+(1\times x^{10}+x\times x^9+x^2\times x^8+\cdots+x^{10}\times1)+\cdots+x^{20}$

$=1+\cdots+11x^{10}+\cdots+x^{20}$

따라서 x^{10}의 계수는 11이다.

11 답 36

$(x-2y+z)^3=(x-2y+z)(x-2y+z)(x-2y+z)$에서

x^2y항은 $x\times x\times(-2y)+x\times(-2y)\times x+(-2y)\times x\times x$

즉, x^2y의 계수는 $-2-2-2=-6$이므로

$a=-6$

또, 모든 항의 계수의 총합은 주어진 식의 모든 문자에 1을 대입한 값과 같다. 즉, $(1-2+1)^3=0$이므로 $b=0$

$\therefore a^2+b^2=(-6)^2+0=36$

12 답 ③

$f(x)=\{(1-x)(1+x+x^2)\}(1+x^3+x^6)(1+x^9)$

$=(1-x^3)(1+x^3+x^6)(1+x^9)$

$=(1-x^9)(1+x^9)=1-x^{18}$

따라서 $a_0=1$, $a_{18}=-1$이고 나머지 항의 계수는 모두 0이므로

$a_0+a_6+a_{12}+a_{18}=1+0+0-1=0$

13 답 22

$P=(x+1)(x-2)(x^2-x+1)(x^2+2x+4)$

$=\{(x+1)(x^2-x+1)\}\{(x-2)(x^2+2x+4)\}$

$=(x^3+1)(x^3-8)$

$=(10+1)(10-8)=22$

14 답 ③

주어진 조건에서 $A=x^3+B$이므로

$A^3-B^3=(x^3+B)^3-B^3$

$=x^9+3x^6B+3x^3B^2+B^3-B^3$

$=x^9+3x^6B+3x^3B^2$

이때, x^3항은 $3x^3B^2$에만 존재한다.

$3x^3B^2=3x^3(x+4)^2=3x^3(x^2+8x+16)$이므로 x^3의 계수는 $3\times16=48$이다.

[다른 풀이]

$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)=x^3(A^2+AB+B^2)$이므로 A^3-B^3에서 x^3의 계수는 A^2+AB+B^2의 상수항과 같다.

따라서 A^2+AB+B^2에 $x=0$을 대입하여 상수항을 구하면

$4^2+4\times4+4^2=48$

15 답 ⑤

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$에서 $x+y=4$, $x^2+y^2=18$이므로

$16=18+2xy \qquad \therefore xy=-1$

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=4^3-3\times(-1)\times4$

$=76$

16 답 ①

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$에서 $a-b=2$, $a^3-b^3=14$이므로

$14=2^3+3ab\times2 \qquad \therefore ab=1$

$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=2^2+2\times1=6$

17 답 192

$\overline{OP}=x$, $\overline{OR}=y$라 하자.

$\overline{AP}=20-x$, $\overline{RB}=20-y$, $\overline{PR}=\sqrt{x^2+y^2}$

한편, $\overline{PR}=\overline{OQ}=20$이므로 $x^2+y^2=20^2$ ⋯ ㉠

$\overline{AP}+\overline{PR}+\overline{RB}=(20-x)+20+(20-y)=32$ ($\because$ ㉠)

$x+y=28$ ⋯ ㉡

$(x+y)^2-2xy=x^2+y^2$에서 $28^2-2xy=400$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$\therefore xy=192$

따라서 직사각형 OPQR의 넓이는 $xy=192$

18 답 ②

$(x+y)(y+z)(z+x)$

$=(a-z)(a-x)(a-y)$

$=a^3-(x+y+z)a^2+(xy+yz+zx)a-xyz$

$=a^3-a\times a^2+b\times a-c=ab-c$

19 답 ②

$a^2+b^2+c^2=21$이므로

$2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=5^2-21=4$

$\therefore ab+bc+ca=2$

$a+b+c=5$에서

$a+b=5-c$, $b+c=5-a$, $c+a=5-b$이므로

(주어진 식)$=ab(5-c)+bc(5-a)+ca(5-b)$

$=5(ab+bc+ca)-3abc$

$=5(ab+bc+ca)+24$ ($\because abc=-8$)

$=5\times2+24=34$

[다른 풀이]

위의 풀이에서 $ab+bc+ca=2$이므로

(주어진 식)$=(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$

$=5\times2-3\times(-8)=34$

20 답 7

대각선의 길이가 $\sqrt{21}$이므로 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{21}$

$\therefore a^2+b^2+c^2=21$

겉넓이가 28이므로 $2(ab+bc+ca)=28$

$\therefore ab+bc+ca=14$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로

$(a+b+c)^2=21+2\times14=49$

$\therefore a+b+c=7$ ($\because a, b, c$는 양수)

21 답 ⑤

$f(x)=(x+1)Q(x)+R$이므로

$$\begin{aligned} xf(x)&=x(x+1)Q(x)+Rx \\ &=x(x+1)Q(x)+(x+1)R-R \\ &=(x+1)\{xQ(x)+R\}-R \end{aligned}$$

이때, R는 상수항이므로 $xf(x)$를 $x+1$로 나눈 몫은 $xQ(x)+R$, 나머지는 $-R$이다.

22 답 ④

$f(x)$를 x^2-1로 나눈 몫이 $x-2$이고 나머지가 $3x+1$이므로

$$\begin{aligned} f(x)&=(x^2-1)(x-2)+3x+1 \\ &=\{(x^2+1)-2\}(x-2)+3x+1 \\ &=(x^2+1)(x-2)-2(x-2)+3x+1 \\ &=(x^2+1)(x-2)+x+5 \end{aligned}$$

이때, $x+5$는 x^2+1보다 차수가 낮은 다항식이므로 $f(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는 $x+5$이다.

23 답 ①

$f(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $x+1$이므로 $f(x)=(x^2+1)Q(x)+x+1$

$$\begin{aligned} \therefore\ x^2f(x)&=x^2\{(x^2+1)Q(x)+x+1\} \\ &=x^2(x^2+1)Q(x)+x^2(x+1) \\ &=x^2(x^2+1)Q(x)+(x^2+1)(x+1)-x-1 \\ &=(x^2+1)\{x^2Q(x)+x+1\}-x-1 \end{aligned}$$

이때, $-x-1$은 x^2+1보다 차수가 낮은 다항식이므로 $x^2f(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는 $-x-1$이다.

24 답 81

조립제법을 연이어 사용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ & & -2 & 0 & -6 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 3 & \boxed{-4} \Leftarrow c \\ & & -2 & 4 & \\ \hline -2 & 1 & -2 & \boxed{7} \Leftarrow b & \\ & & -2 & & \\ \hline & 1 & \boxed{-4} \Leftarrow a & & \end{array}$$

따라서 $a=-4$, $b=7$, $c=-4$이므로

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2&=(-4)^2+7^2+(-4)^2 \\ &=81 \end{aligned}$$

25 답 2

$f(x)=x^3+ax^2-x+b$를 $(x-1)^3+p(x-1)^2+q(x-1)+r$의 꼴로 나타냈을 때, $q=r=0$이 되어야 한다.

조립제법을 연이어 사용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & a & -1 & b \\ & & 1 & a+1 & a \\ \hline 1 & 1 & a+1 & a & \boxed{a+b} \Leftarrow r \\ & & 1 & a+2 & \\ \hline & 1 & a+2 & \boxed{2a+2} \Leftarrow q & \end{array}$$

$q=2a+2=0$에서 $a=-1$

$r=a+b=0$에서 $b=1$

$\therefore\ b-a=2$

26 답 12

조립제법의 셋째 줄의 □ 안에 알맞은 수를 p, q, r라 하면

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & a & b & c & d \\ & & \square & \square & \square \\ \hline \frac{1}{3} & p & q & r & \boxed{5} \\ & & \square & \square & \\ \hline & 6 & 12 & \boxed{2} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x)&=ax^3+bx^2+cx+d \\ &=\left(x-\frac{1}{2}\right)(px^2+qx+r)+5 \\ &=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left\{\left(x-\frac{1}{3}\right)(6x+12)+2\right\}+5 \\ &=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)(6x+12)+2\left(x-\frac{1}{2}\right)+5 \\ &=(2x-1)(3x-1)(x+2)+(2x-1)+5 \\ &=(2x-1)(3x-1)(x+2)+2x+4 \end{aligned}$$

$\therefore\ f(1)=1\times2\times3+2+4=12$

27 답 ⑤

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식})&=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\} \\ &=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6) \\ &=(2+4)(2+6)\ (\because\ x^2+5x=2) \\ &=48 \end{aligned}$$

28 답 64

전개된 식에 $x=1$, $y=1$, $z=1$을 대입하면 계수만 남아 모든 계수의 총합을 구할 수 있다.

따라서 다항식 $(x+2y-3z)^3$에 $x=1$, $y=1$, $z=1$을 대입하면

$a=(1+2\times1-3\times1)^3=0$

한편, 전개된 식에 $y=0$을 대입하면 y가 있는 항은 없어지고 y가 없는 항만 남는다. 이 식에 다시 $x=1$, $z=1$을 대입하면 y가 없는 항의 계수의 총합을 구할 수 있다.

따라서 다항식 $(x+2y-3z)^3$에 $x=1$, $y=0$, $z=1$을 대입하면

$b=(1+2\times0-3\times1)^3=-8$

$\therefore\ a^2+b^2=0+(-8)^2=64$

29 답 ③

$A=(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^2$, $B=(1+2x+3x^2+4x^3)^2$이라 할 때, 두 식의 차이는 $5x^4$의 유무이므로 두 식에서 x^5의 계수의 차는 A에서 $5x^4$을 이용하여 만들 수 있는 항의 계수이다. 즉,

$A=1+\cdots+2x\times5x^4+3x^2\times4x^3+4x^3\times3x^2+5x^4\times2x+\cdots+25x^8$

$B=1+\cdots+3x^2\times4x^3+4x^3\times3x^2+\cdots+16x^6$

$\therefore a-b=2\times5+5\times2=20$

[다른 풀이]

두 식 A, B에서 x^5의 계수의 차는 $A-B$에서 x^5의 계수와 같으므로 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용하면

$A-B=(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^2-(1+2x+3x^2+4x^3)^2$

$=5x^4(2+4x+6x^2+8x^3+5x^4)$

따라서 x^5의 계수는 $5\times4=20$

30 답 ①

$(2x+2y-3)^2=89$에서

$4x^2+4y^2+9+8xy-12y-12x=89$

$4x^2+4y^2+8xy-12y-12x=80$

$4(x^2+y^2+2xy-3x-3y)=80$

$\therefore x^2+y^2+2xy-3x-3y=20$

31 답 6

$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$을 이용하면

$(a+b-c+d)(a-b+c+d)$

$=\{(a+d)+(b-c)\}\{(a+d)-(b-c)\}$

$=(a+d)^2-(b-c)^2$

에서 ab의 계수는 0이므로 $p=0$이다.

$(A+B)^3+(A-B)^3=2(A^3+3AB^2)$을 이용하면

$(a-b+c)^3+(a+b-c)^3=\{a-(b-c)\}^3+\{a+(b-c)\}^3$

$=2\{a^3+3a(b-c)^2\}$

$=2\{a^3+3a(b^2-2bc+c^2)\}$

$=2a^3+6ab^2-12abc+6ac^2$

에서 ab^2의 계수는 6이므로 $q=6$이다.

$\therefore p+q=0+6=6$

32 답 ④

$A=x^3-2x-1$, $B=2x+1$에서 $A+B=x^3$이므로

$A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B)$

$=x^9-3ABx^3$

즉, A^3+B^3의 전개식에서 x^3의 계수는 $-3AB$의 상수항과 같으므로

$-3\times(-1)\times1=3$

33 답 ④

$x\neq0$이므로 $x^4-7x^2+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-7+\frac{1}{x^2}=0$, $x^2+\frac{1}{x^2}+2=9$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=9$ $\quad\therefore x+\frac{1}{x}=3$ ($\because x>0$)

$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=3^3-3\times3=18$

34 답 ②

$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=14$에서

$x-y=2$이므로 $x^2+xy+y^2=7$

즉, $x^2+xy+y^2=(x-y)^2+3xy=4+3xy=7$

$\therefore xy=1$

한편, $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=2^2+4=8$에서

$x+y=2\sqrt{2}$ ($\because x$, y는 양수)

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=(2\sqrt{2})^3-3\times2\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

35 답 ⑤

(주어진 식)$=x^3+(y+z)^3-3yz(y+z)+3xyz$

$=x^3+x^3-3xyz+3xyz$

$=2x^3=2\times2^3=16$

[다른 풀이]

$x=2$, $y+z=2$이므로

(주어진 식)$=2^3+y^3+z^3+3\times2\times yz=2^3+y^3+z^3+3(y+z)yz$

$=8+(y+z)^3=8+2^3=16$

36 답 ②

$(ax+by)(bx+ay)=0$에서

$abx^2+a^2xy+b^2xy+aby^2=(a^2+b^2)xy+ab(x^2+y^2)=0$ ⋯ ㉠

이때, $a+b=ab=k$, $x+y=xy=k$이므로

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=k^2-2k$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=k^2-2k$

이것을 ㉠에 대입하면

$(k^2-2k)k+k(k^2-2k)=0$

$2k^2(k-2)=0$ $\quad\therefore k=2$ ($\because k>0$)

37 답 348

$\overline{AC}=x$, $\overline{CB}=y$라 하면 $x+y=10$이고, $x^3+y^3=370$이다.

두 정육면체의 겉넓이의 합은 $6(x^2+y^2)$이므로 먼저 xy의 값을 구하면 $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$에서

$10^3=370+30xy$ $\quad\therefore xy=21$

이때, $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=10^2-2\times21=58$

이므로 두 정육면체의 겉넓이의 합은 $6(x^2+y^2)=6\times58=348$

[다른 풀이]

$\overline{AC}=x$라 하면 $\overline{CB}=10-x$이고,

두 정육면체의 부피의 합이 370이므로

$x^3+(10-x)^3=370$

$x^3+(1000-300x+30x^2-x^3)=370$

$30x^2-300x+630=0$, $x^2-10x+21=0$

$(x-3)(x-7)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=7$

즉, 두 정육면체의 한 모서리의 길이는 각각 3, 7이다.

따라서 두 정육면체의 겉넓이는

$6\times3^2+6\times7^2=348$

38 답 ①

$a^2+b^2+c^2=ab-bc-ca$에서

$a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca=0$

$\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab+2bc+2ca)=0$

$\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2+2bc+c^2)+(c^2+2ca+a^2)\}=0$

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}=0$

$\therefore a=b=-c$

한편, $a+b+c=2$이므로

$a=2$, $b=2$, $c=-2$

$\therefore abc=-8$

39 답 ⑤

$a+b+c=6$, $ab+bc+ca=11$, $abc=6$이므로

(주어진 식)

$=ab^2+ac^2+bc^2+ba^2+ca^2+cb^2$

$=ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

$=ab(a+b+c-c)+bc(a+b+c-a)+ca(a+b+c-b)$

$=ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ca(a+b+c)-3abc$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$

$=6\times11-3\times6=48$

40 답 ①

$a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=3$, $a^3+b^3+c^3=10$이므로

(주어진 식)

$=(b+c)a^2+(c+a)b^2+(a+b)c^2$

$=(a+b+c)a^2+(a+b+c)b^2+(a+b+c)c^2-a^3-b^3-c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(a^3+b^3+c^3)$

$=1\times3-10=-7$

41 답 ②

$f(x)-1$을 $2x^2+3x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $2x+1$이므로

$f(x)-1=(2x^2+3x+1)Q(x)+2x+1$

$\therefore f(x)=(2x^2+3x+1)Q(x)+(2x+1)+1$

$=(2x+1)(x+1)Q(x)+(2x+1)+1$

$=(2x+1)\{(x+1)Q(x)+1\}+1$

따라서 $f(x)$를 $2x+1$로 나눈 몫은 $(x+1)Q(x)+1$이다.

42 답 ③

$f(x)+g(x)$와 $f(x)-g(x)$를 $h(x)$로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라 하면

$f(x)+g(x)=h(x)Q_1(x)+9$ ⋯ ㉠

$f(x)-g(x)=h(x)Q_2(x)-3$ ⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면 $2f(x)=h(x)\{Q_1(x)+Q_2(x)\}+6$

$\therefore f(x)=h(x)\times\frac{Q_1(x)+Q_2(x)}{2}+3$

따라서 $f(x)$를 $h(x)$로 나눈 나머지는 3이다.

43 답 ⑤

$f(x)=(x-1)Q(x)+R$이므로

$f(-x)=(-x-1)Q(-x)+R$

$=-(x+1)Q(-x)+R$

$=(x+1)\{-Q(-x)\}+R$

따라서 $f(-x)$를 $x+1$로 나눈 몫은 $-Q(-x)$, 나머지는 R이다.

44 답 ⑤

$f(x)$를 x^2-x+1로 나눈 몫이 $g(x)$, 나머지가 $4x+2$이므로

$f(x)=(x^2-x+1)g(x)+4x+2$

또, $g(x)$를 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지는 2이므로

$g(x)=(x+1)Q(x)+2$

$\therefore f(x)=(x^2-x+1)\{(x+1)Q(x)+2\}+4x+2$

$=(x^2-x+1)(x+1)Q(x)+2(x^2-x+1)+4x+2$

$=(x^3+1)Q(x)+2x^2+2x+4$

이때, $2x^2+2x+4$는 x^3+1보다 차수가 낮으므로 $f(x)$를 x^3+1로 나누었을 때의 나머지가 $R(x)=2x^2+2x+4$이다.

$\therefore R(1)=2+2+4=8$

45 답 8

$x^4+2x^3-3x^2+4x+2$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$는 조립제법에 의하여

$Q(x)=x^3+3x^2+4$

1	1	2	−3	4	2
		1	3	0	4
1	1	3	0	4	6
		1	4	4	
	1	4	4	8	

이때, 조립제법을 연이어 사용하면 $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 8이다.

46 답 38

$x^3+ax^2+bx+c=(x+1)^3+2(x+1)^2-4(x+1)+3$

여기서 $x+1=t$라 하면 $x=t-1$

$\therefore t^3+2t^2-4t+3=(t-1)^3+a(t-1)^2+b(t-1)+c$

좌변의 식에서 조립제법을 연이어 사용하면

1	1	2	-4	3	
		1	3	-1	
1	1	3	-1	2	⇦ c
		1	4		
1	1	4	3		⇦ b
		1			
	1	5			⇦ a

따라서 $a=5$, $b=3$, $c=2$이므로

$a^2+b^2+c^2=5^2+3^2+2^2=38$

47 답 ③

다항식 x^5+x^2+1을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^5+x^2+1=(x+1)^2Q(x)+ax+b$

우변의 나머지를 이항하면 $x^5+x^2-ax+(1-b)=(x+1)^2Q(x)$이므로 다항식 $x^5+x^2-ax+(1-b)$는 $(x+1)^2$으로 나누어떨어진다. 조립제법을 연이어 사용하면

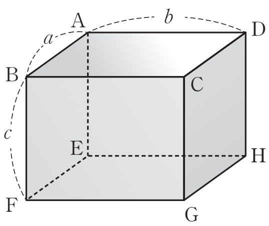
-1	1	0	0	1	$-a$	$1-b$	
		-1	1	-1	0	a	
-1	1	-1	1	0	$-a$	$1-b+a$	⇦ 0
		-1	2	-3	3		
	1	-2	3	-3	$-a+3$		⇦ 0

$-a+3=0$에서 $a=3$, $1-b+a=0$에서 $b=4$

따라서 나머지는 $3x+4$이다.

48 답 8

$\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$, $\overline{AE}=c$라 하면



겉넓이가 24이므로

$2(ab+bc+ca)=24$

$\therefore ab+bc+ca=12$

또, 모든 모서리의 길이의 합이 24이므로

$4(a+b+c)=24$

$\therefore a+b+c=6$ ······ ⓐ

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=36-24=12$

$\therefore a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$

즉, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$에서

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$\therefore a=b=c$ ······ ⓑ

따라서 $a+b+c=6$에서 $a=b=c=2$이므로

직육면체의 부피는 $abc=8$ ······ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 두 조건을 식으로 나타낸다.	[30%]
ⓑ 곱셈 공식으로 a, b, c의 관계식을 유도한다.	[40%]
ⓒ 직육면체의 부피를 구한다.	[30%]

49 답 1

$f(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $x+1$이므로

$f(x)=(x^2+x+1)Q(x)+x+1$ ··· ㉠ ······ ⓐ

$x^3f(x)=(x^3-1)f(x)+f(x)$

$=(x^2+x+1)(x-1)f(x)+f(x)$

즉, $x^3f(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지는 $f(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지와 같으므로 ㉠에 의하여 나머지는 $x+1$이다.

······ ⓑ

따라서 $a=1$, $b=1$이므로 $ab=1$ ······ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 다항식 $f(x)$를 나눗셈 정리를 이용하여 나타낸다.	[30%]
ⓑ $x^3f(x)$를 $f(x)$가 포함된 식으로 나타낸다.	[60%]
ⓒ ab의 값을 구한다.	[10%]

50 답 8

$f(x)$, $g(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라 하면

$f(x)=(x^2+x+1)Q_1(x)+x+1$

$g(x)=(x^2+x+1)Q_2(x)+x-1$ ······ ⓐ

$\therefore f(x)g(x)$

$=\{(x^2+x+1)Q_1(x)+x+1\}\{(x^2+x+1)Q_2(x)+x-1\}$

$=(x^2+x+1)\{(x^2+x+1)Q_1(x)Q_2(x)+(x-1)Q_1(x)$

$+(x+1)Q_2(x)\}+x^2-1$

$=(x^2+x+1)\{(x^2+x+1)Q_1(x)Q_2(x)+(x-1)Q_1(x)$

$+(x+1)Q_2(x)\}+(x^2+x+1)-x-2$

$=(x^2+x+1)\{(x^2+x+1)Q_1(x)Q_2(x)+(x-1)Q_1(x)$

$+(x+1)Q_2(x)+1\}-x-2$ ······ ⓑ

따라서 $f(x)g(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지 $R(x)$는 $R(x)=-x-2$이다.

$\therefore R(-10)=-(-10)-2=8$ ······ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 나눗셈 정리를 이용하여 $f(x)$, $g(x)$를 각각 나타낸다.	[30%]
ⓑ $f(x)g(x)$의 몫이 x^2+x+1이 되도록 식을 정리한다.	[50%]
ⓒ $R(-10)$의 값을 구한다.	[20%]

51 답 ⑤

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+zx}{xyz}=0$에서

$\therefore xy+yz+zx=0$

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=x^2+y^2+z^2=2$

$\therefore (x+y+z)^{12}=\{(x+y+z)^2\}^6=2^6=64$

52 답 25

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 몫은 $Q(x)$, 나머지는 5이므로

$f(x)=(x-1)Q(x)+5$

$Q(x)$를 $x-2$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지는 10이므로

$Q(x)=(x-2)Q_1(x)+10$

즉, $f(x)=(x-1)\{(x-2)Q_1(x)+10\}+5$

$=(x-1)(x-2)Q_1(x)+10(x-1)+5$

$=(x-1)(x-2)Q_1(x)+10x-5$

이때, $(x-1)(x-2)$는 $10x-5$보다 차수가 낮으므로 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지는 $10x-5$이다.

따라서 $a=10$, $b=-5$이므로 $3a+b=25$

53 답 ④

$\overline{PQ}=1$, $\overline{AR}=a^2$이므로

$\overline{MN}=\frac{1}{2}\times(\overline{PQ}+\overline{AR})=\boxed{\frac{1+a^2}{2}}$ ←(가)

또한,

$\overline{MB}=\overline{MN}-\overline{BN}=\boxed{\frac{1+a^2}{2}}-\left(\frac{a-1}{2}\right)^2=\boxed{\left(\frac{a+1}{2}\right)^2}$ ←(나)

삼각형 PAB의 넓이를 S라 하면

$S=2\times\triangle AMB=2\times\frac{1}{2}\times\overline{MB}\times\overline{NR}$

$=2\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{a+1}{2}\right)^2\times\frac{a+1}{2}$

$=\frac{(a+1)^3}{\boxed{8}}$ ←(다)

따라서 $f(a)=\frac{1+a^2}{2}$, $g(a)=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2$, $k=8$이므로

$f(3)+g(5)+k=5+9+8=22$

54 답 8

$a+b+c=3\sqrt{2}$, $a^2+b^2+c^2=6$이므로

$ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(3\sqrt{2})^2-6\}=6$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=6-6=0$이므로

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$\therefore a=b=c=\sqrt{2}$ ($\because a+b+c=3\sqrt{2}$)

$\therefore ab^2c^3=(\sqrt{2})^6=8$

55 답 ②

대각선의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}$, $\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{5}$

$\therefore a^2+b^2=5$, $c^2+d^2=5$

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=(a^2d^2+b^2c^2)+(a^2c^2+b^2d^2)$

$=(ad-bc)^2+2abcd+(ac+bd)^2-2abcd$

$=(ad-bc)^2+(ac+bd)^2$

$=16+(ac+bd)^2=25$

$(ac+bd)^2=9$이므로 $ac+bd=3$ ($\because a, b, c, d$는 양수)

56 답 ⑤

ㄱ. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{3}$

$3(xy+yz+zx)=xyz$ ⋯ ㉠

이때, $x+y+z=3$이므로 ㉠에 대입하면

$(x+y+z)(xy+yz+zx)=xyz$ (참)

ㄴ. $x+y+z=3$이므로

$(x+y)(y+z)(z+x)$

$=(3-z)(3-x)(3-y)$

$=27-9(x+y+z)+3(xy+yz+zx)-xyz$

$=27-27+3(xy+yz+zx)-xyz=0$ ($\because$ ㉠) (참)

ㄷ. $(x+y)(y+z)(z+x)=0$에서

$x+y$, $y+z$, $z+x$ 중 적어도 하나는 0이다.

이때, $x+y+z=3$이므로 x, y, z 중 적어도 하나는 3이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

57 답 ⑤

ㄱ. $a^2+b^2=1$의 양변에 d^2을 곱하면 $a^2d^2+b^2d^2=d^2$ ⋯ ㉠

$ac+bd=0$으로부터 $b^2d^2=a^2c^2$

이것을 ㉠에 대입하면 $a^2d^2+a^2c^2=d^2$

$a^2(c^2+d^2)=d^2$ $\therefore a^2=d^2$ ($\because c^2+d^2=1$)

따라서 $a^2+b^2=c^2+d^2$에서 $b^2=c^2$ (참)

ㄴ. $a^2+b^2=1$이고 $b^2=c^2$이므로 $a^2+c^2=1$

$c^2+d^2=1$이고 $b^2=c^2$이므로 $b^2+d^2=1$ (참)

ㄷ. $ac+bd=0$에서 $(ac+bd)^2=0$이므로

$a^2c^2+2abcd+b^2d^2=0$

$b^2=c^2$이므로 $a^2b^2+2abcd+c^2d^2=0$, $(ab+cd)^2=0$

$\therefore ab+cd=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

58 답 3

$A^n-1=(A-1)(A^{n-1}+A^{n-2}+\cdots+A+1)$ ⋯ ㉠

$f(x)=x^2+x+1$이므로

$f(x^{12})=x^{24}+x^{12}+1=(x^{24}-1)+(x^{12}-1)+3$

$x^{12}-1=(x^3)^4-1$
$=(x^3-1)\{(x^3)^3+(x^3)^2+x^3+1\}$ ($\because$ ㉠)
$=(x^3-1)(x^9+x^6+x^3+1)$
$=(x^2+x+1)(x-1)(x^9+x^6+x^3+1)$
$x^{24}-1=(x^3)^8-1=(x^3-1)(x^{21}+x^{18}+\cdots+x^3+1)$
$=(x^2+x+1)(x-1)(x^{21}+x^{18}+\cdots+x^3+1)$
이므로 $x^{24}-1$과 $x^{12}-1$은 x^2+x+1로 나누어떨어진다.
따라서 $f(x^{12})=(x^{24}-1)+(x^{12}-1)+3$을 x^2+x+1로 나눈 나머지는 3이다.

02 나머지정리

문제편 20P

01 답 ③

등식 $(k+2)x-(2k+5)y-2k-3=0$을 k에 대하여 정리하면
$(x-2y-2)k+(2x-5y-3)=0$
이 등식은 k에 대한 항등식이므로
$x-2y-2=0$ ⋯ ㉠
$2x-5y-3=0$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=4$, $y=1$
$\therefore x+y=5$

02 답 ③

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$4=2b$ $\quad\therefore b=2$
주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$5-7+4=-c$ $\quad\therefore c=-2$
주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면
$20-14+4=2a$ $\quad\therefore a=5$
$\therefore a+b+c=5$

03 답 ②

$x^3+2x^2+ax+b=(x^2+2)(x+c)+2$
$=x^3+cx^2+2x+2c+2$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$c=2$, $a=2$, $b=2c+2$
$\therefore a=2$, $b=6$, $c=2$
따라서 $a+b+c=10$이고 $f(x)=x^3+2x^2+2x+6$이므로
$f(a+b+c)=f(10)=10^3+2\times10^2+2\times10+6=1226$

[다른 풀이]
$x^3+2x^2+ax+b=(x^2+2)(x+c)+2$ ⋯ ㉠
㉠의 양변에 $x^2+2=0$, 즉 $x^2=-2$를 대입하면
$-2x+2\times(-2)+ax+b=0+2$
정리하면 $(a-2)x+b-4=2$
$\therefore a=2$, $b=6$
㉠의 양변의 상수항을 비교하면
$2c+2=b=6$ $\quad\therefore c=2$
(이하 동일)

04 답 8

$(x-1)(x^2+3)f(x)=x^4+ax^2+b$의 양변에
$x=1$을 대입하면 $0=1+a+b$ ⋯ ㉠
$x^2=-3$을 대입하면 $0=(-3)^2-3a+b$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$
즉, $(x-1)(x^2+3)f(x)=x^4+2x^2-3$ ⋯ ㉢
㉢의 양변에 $x=2$를 대입하면
$7f(2)=21$ $\quad\therefore f(2)=3$
$\therefore a-b+f(2)=2-(-3)+3=8$

[다른 풀이]
$f(x)=(x^4+2x^2-3)\div(x-1)(x^2+3)$
$=(x^2-1)(x^2+3)\div(x-1)(x^2+3)$
$=x+1$
(이하 동일)

05 답 8

$f(x)$를 x^2-4x로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면
나머지가 $x+4$이므로
$f(x)=(x^2-4x)Q(x)+x+4=x(x-4)Q(x)+x+4$
나머지정리에 의하여 $f(x)$를 $x-4$로 나눈 나머지는
$f(4)=8$

06 답 ①

$P(x)$를 두 일차식 $x-a$, $x-b$로 나눈 나머지가 각각 b, a이므로
$P(a)=b$, $P(b)=a$
$P(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $px+q$(p, q는 상수)라 하면
$P(x)=(x-a)(x-b)Q(x)+px+q$
$P(a)=b$에서 $pa+q=b$ ⋯ ㉠
$P(b)=a$에서 $pb+q=a$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=-1$ ($\because a\neq b$), $q=a+b$
따라서 $R(x)=px+q=-x+a+b$이므로
$R(1)=-1+a+b=0$ $\quad\therefore a+b=1$

07 답 ③

나머지정리에 의하여 $2f(1)=6$, $f(3)=5$

$\therefore f(1)=3$, $f(3)=5$

$f(x)$를 $(x-1)(x-3)$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를

$ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)(x-3)Q(x)+ax+b$

$f(1)=a+b=3$ ⋯ ㉠

$f(3)=3a+b=5$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=1$, $b=2$

따라서 구하는 나머지는 $x+2$이다.

08 답 ③

$f(x)=x^4-2x^3-7x^2+8x+12$라 하면

① $f(-1)=1+2-7-8+12=0$이므로 인수정리에 의하여 주어진 식은 $x+1$을 인수로 갖는다.

② $f(-2)=16+16-28-16+12=0$이므로 인수정리에 의하여 주어진 식은 $x+2$를 인수로 갖는다.

③ $f(1)=1-2-7+8+12=12\neq0$이므로 주어진 식은 $x-1$을 인수로 갖지 않는다.

④ $f(2)=16-16-28+16+12=0$이므로 인수정리에 의하여 주어진 식은 $x-2$를 인수로 갖는다.

⑤ $f(3)=81-54-63+24+12=0$이므로 인수정리에 의하여 주어진 식은 $x-3$을 인수로 갖는다.

09 답 ①

주어진 등식에

$x=1$을 대입하면 $d=4$

$x=2$를 대입하면 $c+d=7$ $\quad\therefore c=3$

$x=3$을 대입하면 $2b+2c+d=14$ $\quad\therefore b=2$

$x=0$을 대입하면 $-6a+2b-c+d=-1$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore abcd=1\times2\times3\times4=24$

10 답 6

$x+y=1$에서 $y=1-x$를 $ax^2+by^2=cx+1$에 대입하여 정리하면

$ax^2+b(1-x)^2=cx+1$

$\therefore (a+b)x^2-(2b+c)x+(b-1)=0$

이 식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a+b=0$, $2b+c=0$, $b-1=0$

따라서 $b=1$, $c=-2$, $a=-1$이므로

$a^2+b^2+c^2=(-1)^2+1^2+(-2)^2=6$

11 답 ②

주어진 등식은 항등식이므로

$x^2=2$를 대입하면 $0=16+4a+b$ ⋯ ㉠

$x^4=-1$을 대입하면 $0=1-a+b$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-4$이므로 $a+b=-7$

12 답 ⑤

x^3+2x^2+5x+4를 $f(x)$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라 하면

조건 (가)에서

$x^3+2x^2+5x+4=f(x)Q_1(x)+g(x)$ ⋯ ㉠

이때, $f(x)$는 이차다항식이므로 $g(x)$는 일차 이하의 다항식이다.

또, x^3+2x^2+5x+4를 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 하면

조건 (나)에서

$x^3+2x^2+5x+4=g(x)Q_2(x)+f(x)-x^2-x$ ⋯ ㉡

이때, 일차 이하의 다항식 $g(x)$로 나눈 나머지는 상수항이 되어야 하므로

$f(x)-x^2-x=a$ (a는 상수)

$\therefore f(x)=x^2+x+a$

x^3+2x^2+5x+4를 $f(x)$로 직접 나누면

$x^3+2x^2+5x+4=(x^2+x+a)(x+1)+(4-a)x+4-a$

이므로 ㉠에서 $g(x)=(4-a)(x+1)$

이것을 ㉡에 대입하면

$x^3+2x^2+5x+4=(4-a)(x+1)Q_2(x)+a$

$x=-1$을 대입하면 $a=0$이므로 $g(x)=4(x+1)$

$\therefore g(1)=4\times2=8$

13 답 ②

$f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$에서

ㄱ. $R(x)$의 차수는 $g(x)$의 차수보다 작으므로 $(n-1)$차 이하이다. (거짓)

ㄴ. $f(x)$의 차수는 $g(x)$의 차수와 $Q(x)$의 차수의 합이므로 $Q(x)$의 차수는 $m-n$이다. (참)

ㄷ. 【반례】 $f(x)=2x^3+4x^2+3x+2$, $g(x)=x^2+x$일 때, $Q(x)=2x+2$이고 $R(x)=x+2$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

14 답 5

ax^3+bx^2+1이 x^2-x-1로 나누어떨어지므로 그 몫을

$px+q$ (p, q는 상수)라 하면

$ax^3+bx^2+1=(x^2-x-1)(px+q)$

삼차항과 상수항의 계수를 비교하면 $p=a$, $q=-1$

따라서 $ax^3+bx^2+1=(x^2-x-1)(ax-1)$에서

$ax^3+bx^2+1=ax^3-(a+1)x^2-(a-1)x+1$

이 식은 x에 대한 항등식이므로

$b=-a-1$, $-a+1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-2$

$\therefore a^2+b^2=5$

15 답 ⑤

$(x+1)f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 4이므로

$2f(1)=4 \quad \therefore f(1)=2$

$(2x-1)f(2x+1)$을 $x+1$로 나눈 나머지가 12이므로

$-3f(-1)=12 \quad \therefore f(-1)=-4$

$f(x)$를 $(x+1)(x-1)$로 나눈 몫을 $Q(x)$,

나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$에서

$f(1)=a+b=2$, $f(-1)=-a+b=-4$

연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$

따라서 $R(x)=3x-1$이므로 $R(2)=5$

16 답 26

$f(x)$를 $x-3$, $x-4$로 나눈 나머지가 각각 3, 2이므로

나머지정리에 의하여

$f(3)=3$, $f(4)=2$

$f(x+1)$을 x^2-5x+6으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

나머지가 $mx+n$이므로

$f(x+1)=(x^2-5x+6)Q(x)+mx+n$

$\qquad\quad =(x-3)(x-2)Q(x)+mx+n$

이 식의 양변에 $x=2$, $x=3$을 차례로 대입하면

$f(3)=2m+n=3$, $f(4)=3m+n=2$

연립하여 풀면 $m=-1$, $n=5$이므로

$m^2+n^2=(-1)^2+5^2=26$

17 답 ①

$f(x)$를 $x+2$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$f(x)=(x+2)Q(x)+R$ (R는 상수) ⋯ ㉠

$f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 12이므로 나머지정리에 의하여

$f(1)=12$

$Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 3이므로 나머지정리에 의하여

$Q(1)=3$

㉠은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=3Q(1)+R$에서 $12=3\times3+R \quad \therefore R=3$

따라서 $f(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지 $R=3$이다.

18 답 23

$f(x)$를 두 다항식 $(x-1)(x-2)$, $(x-1)(x-3)$으로 나눈 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라 하면

$f(x)=(x-1)(x-2)Q_1(x)+2x+1$ ⋯ ㉠

$\qquad =(x-1)(x-3)Q_2(x)+6x+k$ ⋯ ㉡

㉠에서 나머지정리에 의하여

$f(1)=3$, $f(2)=5$

㉡에서 나머지정리에 의하여

$f(1)=6+k=3 \quad \therefore k=-3$

$\therefore f(3)=18+k=15$

이때, $f(x)$를 $(x-1)(x-2)(x-3)$으로 나눈 몫을 $Q(x)$,

나머지를 $R(x)$라 하자.

$R(x)$는 이차 이하의 식이므로

$R(x)=a(x-1)(x-2)+b(x-1)+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(1)=3=c$, $f(2)=5=b+c$, $f(3)=15=2a+2b+c$

세 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=2$, $c=3$이므로

$R(x)=4(x-1)(x-2)+2(x-1)+3$

$\therefore R(-1)=23$

19 답 ③

$f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

나머지가 ax^2+bx+c이므로

$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$

$f(x)$를 x^2+1로 나눈 나머지가 $x+1$이므로

ax^2+bx+c를 x^2+1로 나눈 나머지도 $x+1$이다.

$\therefore ax^2+bx+c=a(x^2+1)+x+1$ ⋯ ㉠

$\therefore f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+a(x^2+1)+x+1$ ⋯ ㉡

또한, $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 4이므로 나머지정리에 의하여

$f(1)=4$

㉡에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2a+2=4 \quad \therefore a=1$

이것을 ㉠에 대입하면

$ax^2+bx+c=x^2+x+2$이므로

$a=1$, $b=1$, $c=2 \quad \therefore abc=2$

20 답 24

$f(x)$를 $(x-1)^2(x-2)$로 나눈 몫을 $Q(x)$,

나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$(a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$

$f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 나머지가 $5x+1$이므로

ax^2+bx+c를 $(x-1)^2$으로 나눈 나머지도 $5x+1$이다.

$ax^2+bx+c=a(x-1)^2+5x+1$이므로

$f(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+a(x-1)^2+5x+1$ ⋯ ㉠

한편, $f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 13이므로

$f(2)=13$

㉠에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=a+11=13 \quad \therefore a=2$

따라서 $f(x)$를 $(x-1)^2(x-2)$로 나눈 나머지는 ㉠에서

$R(x)=2(x-1)^2+5x+1$

$\therefore R(3)=24$

21 답 ③

$f(x)=ax^4+bx^3+cx-a$라 하면

$x+1$이 $f(x)$의 인수이므로

$f(-1)=a-b-c-a=0 \qquad \therefore b+c=0$

③ $f(1)=a+b+c-a=0$이므로 인수정리에 의하여 $x-1$은 반드시 $f(x)$의 인수이다.

[다른 풀이]

$b+c=0$에서 $b=-c$이므로

$f(x)=ax^4+bx^3+cx-a=ax^4+bx^3-bx-a$

$=a(x^4-1)+b(x^3-x)=a(x^2-1)(x^2+1)+bx(x^2-1)$

$=(x^2-1)\{a(x^2+1)+bx\}$

즉, a, b, c에 상관없이 다항식 $f(x)$는 $x^2-1=(x+1)(x-1)$을 인수로 갖는다.

22 답 ①

$f(x)-k$, $(x+1)f(x)-6$이 일차식 $x-k$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(k)-k=0 \cdots$ ㉠ $\qquad (k+1)f(k)-6=0 \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(k+1)k-6=0$

$k^2+k-6=0$, $(k+3)(k-2)=0 \qquad \therefore k=2$ 또는 $k=-3$

이때, k는 양수이므로 $k=2$

23 답 3

$f(x)=x^3-2x^2+p$라 하면

$f(x)$의 상수항 p가 소수이므로 계수가 정수인 일차식의 인수가 될 수 있는 것은 $x+1$, $x-1$, $x+p$, $x-p$이다.

$f(-1)=0$일 때, $-3+p=0$에서 $p=3$

$f(1)=0$일 때, $-1+p=0$에서 $p=1$이 되어 소수가 아니다.

$f(-p)=0$일 때, $-p^3-2p^2+p=0$, $p=p^2(p+2)$

양변을 p로 나누면 $1=p(p+2)\geq 8$이 되어 성립하지 않는다.

$f(p)=0$일 때, $p^3-2p^2+p=0$

양변을 p로 나누면 $p^2-2p+1=0$, 즉 $(p-1)^2=0$에서

$p=1$이 되어 소수가 아니다.

따라서 소수 p의 값은 3이다.

24 답 13

조건 (나)에서 $f(1)=f(2)=f(3)=k$라 하자.

$g(x)=f(x)-k$라 하면 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식이고 $g(1)=g(2)=g(3)=0$이므로 인수정리에 의하여

$g(x)=f(x)-k=(x-1)(x-2)(x-3)$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+k$

한편, 조건 (가)에서 $f(0)=-6+k=1 \qquad \therefore k=7$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+7$이므로

$f(4)=3\times2\times1+7=13$

25 답 ①

$f(1)=1$, $f(2)=\frac{1}{2}$, $f(3)=\frac{1}{3}$, $f(4)=\frac{1}{4}$에서

$f(1)=1$, $2f(2)=1$, $3f(3)=1$, $4f(4)=1 \cdots$ ㉠

즉, $g(x)=xf(x)-1$은 ㉠에 의하여

$g(1)=0$, $g(2)=0$, $g(3)=0$, $g(4)=0$이므로 인수정리에 의하여

$g(x)$는 $x-1$, $x-2$, $x-3$, $x-4$의 인수를 갖는다.

이때, $f(x)$가 삼차다항식이므로

$g(x)=xf(x)-1$은 사차다항식이다.

$\therefore g(x)=k(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ (k는 상수) $\cdots$ ㉡

㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-1=k\times(-1)\times(-2)\times(-3)\times(-4) \qquad \therefore k=-\frac{1}{24}$

즉, $g(x)=-\frac{1}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$이므로

$g(5)=-\frac{1}{24}\times4\times3\times2\times1=-1$

26 답 10

삼차다항식 $f(x)$가

$f(1)=3=2\times1+1$

$f(2)=5=2\times2+1$

$f(3)=7=2\times3+1$

$\vdots$

$f(x)=2\times x+1$

이므로 $g(x)=f(x)-(2x+1)$이라 하면

$g(x)$는 삼차다항식이고 $g(1)=g(2)=g(3)=0$이므로

$g(x)=k(x-1)(x-2)(x-3)$ (k는 상수)

따라서 $f(x)=k(x-1)(x-2)(x-3)+2x+1$이므로

$f(4)+f(0)=(6k+9)+(-6k+1)=10$

27 답 ①

주어진 식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$를 차례로 대입하면

$\alpha^3+1=0$, $\beta^3+1=0$, $\gamma^3+1=0$

따라서 $\alpha^3=-1$, $\beta^3=-1$, $\gamma^3=-1$이므로

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3$

28 답 ③

$\frac{x^2+bx+a}{2x^2+ax+1}=k$ (k는 상수)라 하면

$x^2+bx+a=2kx^2+akx+k$

이 식은 x에 대한 항등식이므로

$1=2k$, $b=ak$, $a=k \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$, $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$

$\therefore a+b=\frac{3}{4}$

29 답 31

$2x^3+1$

$=a(x-1)(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)+d$

가 x에 대한 항등식이므로

최고차항의 계수를 비교하면

$a=2$

등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$d=3$

등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$c+d=17$에서 $c=14$

등식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$2b+2c+d=55$에서 $b=12$

$\therefore a+b+c+d=31$

30 답 ①

$f(x)$의 차수를 n이라 하면 $f(x^2)=(x+2)f(x)+2$ ⋯ ㉠

에서 좌변의 차수는 $2n$, 우변의 차수는 $n+1$이므로

$2n=n+1 \qquad \therefore n=1$

$f(x)=ax+b$(a, b는 상수)라 하면 $f(x^2)=ax^2+b$이므로 ㉠에서

$(x+2)f(x)+2=(x+2)(ax+b)+2$

$\qquad\qquad\qquad\quad =ax^2+(2a+b)x+2b+2$

$\therefore ax^2+b=ax^2+(2a+b)x+2b+2$

x에 대한 항등식이므로

$2a+b=0$, $2b+2=b$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-2$

따라서 $f(x)=x-2$이므로 $f(3)=1$

31 답 ②

다항식 x^3+ax^2+bx+c를 x^2+1로 나눈 나머지가 $x+1$이므로

$x^3+ax^2+bx+c=(x^2+1)(x+k)+x+1$ (k는 상수) ⋯ ㉠

이라 하면 ㉠의 좌변을 $x-2$로 나눈 나머지가 3이므로

㉠의 우변에 $x=2$를 대입하면

$5(2+k)+3=3 \qquad \therefore k=-2$

이것을 ㉠에 대입하면

$x^3+ax^2+bx+c=(x^2+1)(x-2)+x+1=x^3-2x^2+2x-1$

따라서 $a=-2$, $b=2$, $c=-1$이므로 $a+b+c=-1$

32 답 14

$f(x)$를 x^3-x^2-6x와 x^2-x-6으로 나눈 나머지가 각각

x^2+ax+4, $5x+b$이므로 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라 하면

$f(x)=x(x+2)(x-3)Q_1(x)+x^2+ax+4$

$f(x)=(x+2)(x-3)Q_2(x)+5x+b$

두 식에 $x=-2$와 $x=3$을 대입하면

$f(-2)=-2a+8=b-10$

$f(3)=3a+13=b+15$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=10$

$\therefore a+b=14$

[다른 풀이]

$f(x)$를 x^3-x^2-6x로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

나머지가 x^2+ax+4이므로

$f(x)=(x^3-x^2-6x)Q(x)+x^2+ax+4$

$f(x)=x(x^2-x-6)Q(x)+(x^2-x-6)+(a+1)x+10$

$\qquad =(x^2-x-6)\{xQ(x)+1\}+(a+1)x+10$

이고 $f(x)$를 x^2-x-6으로 나눈 나머지가 $5x+b$이므로

$(a+1)x+10=5x+b \qquad \therefore a=4$, $b=10$

$\therefore a+b=14$

33 답 ④

x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=0$, $x=-2$를 차례로 대입하여 정리하면

$0=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9+a_{10}$ ⋯ ㉠

$(-2)^{10}=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_9+a_{10}$ ⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2^{10}=2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})$

$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=\dfrac{2^{10}}{2}=2^9$

34 답 ②

주어진 항등식의 양변에 $x=1$, $x=-1$을 차례로 대입하여 정리하면

$(-2)^5=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}$ ⋯ ㉠

$2^5=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_9+a_{10}$ ⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면 $2\times(-2^5)=2(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)$

$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=-2^5$

35 답 ①

주어진 항등식의 양변에 $x=\dfrac{1}{2}$, $x=-\dfrac{1}{2}$을 차례로 대입하여 정리하면

$\left(\dfrac{5}{4}\right)^{50}=a_0+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_{99}}{2^{99}}+\dfrac{a_{100}}{2^{100}}$ ⋯ ㉠

$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{50}=a_0-\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}-\cdots-\dfrac{a_{99}}{2^{99}}+\dfrac{a_{100}}{2^{100}}$ ⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면

$\left(\dfrac{5}{4}\right)^{50}-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{50}=2\left(\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_3}{2^3}+\dfrac{a_5}{2^5}+\cdots+\dfrac{a_{99}}{2^{99}}\right)$

$\therefore \dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_3}{2^3}+\dfrac{a_5}{2^5}+\cdots+\dfrac{a_{99}}{2^{99}}=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{5}{4}\right)^{50}-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{50}\right\}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =\dfrac{5^{50}-1}{2^{101}}$

36 답 ①

$f(x)$를 $x-a$로 나눈 나머지는 $f(a)$이므로

$f(1)=3$, $f(2)=1$, $f(3)=2$이다.

$f(f(x))=(x-1)(x-3)Q(x)+R(x)$이고,

$R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(f(1))=f(3)=2=a+b$

$f(f(3))=f(2)=1=3a+b$

연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{5}{2}$이므로 $R(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

$\therefore R(5)=-\frac{1}{2}\times5+\frac{5}{2}=0$

37 답 ②

$f(x)=x^2+px+q$를 $x-\alpha$, $x-\beta$로 나눈 나머지가 각각

β, α이므로

$f(\alpha)=\alpha^2+p\alpha+q=\beta$ ⋯ ㉠

$f(\beta)=\beta^2+p\beta+q=\alpha$ ⋯ ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $\alpha^2-\beta^2+p\alpha-p\beta=\beta-\alpha$

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+p(\alpha-\beta)=-(\alpha-\beta)$

$\alpha\neq\beta$이므로 양변을 $\alpha-\beta$로 나누면 $\alpha+\beta+p=-1$

38 답 ①

$f(x)$는 $x-1$로 나누어떨어지므로 나머지정리에 의하여

$f(1)=a+b+3=0$

$\therefore a+b=-3$ ⋯ ㉠

$f(2x)-f(x+1)$은 $x+1$로 나누어떨어지므로

나머지정리에 의하여 $f(-2)-f(0)=(4a-2b+3)-3=0$

$\therefore 2a-b=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-2$

$\therefore f(x)=ax^2+bx+3=-x^2-2x+3$

따라서 $f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는

$f(2)=-4-4+3=-5$

39 답 ③

$(x+1)f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 10이므로 $2f(1)=10$

$f(1)=1+a+b=5$이므로

$a+b=4$ ⋯ ㉠

또, $(2x+1)f(2x-1)$을 $x-2$로 나눈 나머지가 55이므로

$5f(3)=55$

$f(3)=9+3a+b=11$이므로

$3a+b=2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=5$

$f(x)=x^2-x+5$이므로 $xf(x)=x^3-x^2+5x$

따라서 $xf(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지는

$-f(-1)=-1-1-5=-7$

40 답 ②

$f(x)$를 $(x-1)(x-5)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를

$ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)(x-5)Q(x)+ax+b$ ⋯ ㉠

$f(x)$를 $x-5$로 나눈 나머지가 4이므로 나머지정리에 의하여

$f(5)=4$

또한, $f(3+x)=f(3-x)$는 x에 대한 항등식이므로

$x=2$를 대입하면 $f(5)=f(1)=4$

즉, $x=1$, $x=5$를 ㉠에 차례로 대입하면

$f(1)=a+b=4$, $f(5)=5a+b=4$

$\therefore a=0$, $b=4$

따라서 $f(x)$를 $(x-1)(x-5)$로 나눈 나머지는

$R(x)=4$이므로 $R(3)=4$

41 답 ③

$f(x)$를 $(x-1)^2(x+1)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를

$R(x)$라 하면 $R(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 나머지는 $3x+2$이다.

$\therefore f(x)=(x-1)^2(x+1)Q(x)+R(x)$

$\qquad=(x-1)^2(x+1)Q(x)+a(x-1)^2+3x+2$

$f(-1)=3$이므로 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=4a-1=3 \qquad \therefore a=1$

$R(x)=(x-1)^2+3x+2=x^2+x+3=ax^2+bx+c$이므로

$a=1$, $b=1$, $c=3$

$\therefore abc=3$

42 답 ④

$x^{100}+x^{10}+x+10$을 x^2-1로 나눈 나머지를

$ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$x^{100}+x^{10}+x+10=(x-1)(x+1)Q(x)+ax+b$

$x=1$, $x=-1$을 차례로 대입하면 $13=a+b$, $11=-a+b$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=12$

$\therefore x^{100}+x^{10}+x+10=(x-1)(x+1)Q(x)+x+12$ ⋯ ㉠

한편, $Q(x)$를 x로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$Q(0)$이므로 ㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$10=-Q(0)+12 \qquad \therefore Q(0)=2$

따라서 $Q(x)$를 x로 나눈 나머지는 2이다.

43 답 ⑤

$2^{999}=(2^3)^{333}=(7+1)^{333}$에서

$f(x)=(x+1)^{333}$을 x로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여

$f(0)=1$이므로 $f(x)$를 x로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$(x+1)^{333}=xQ(x)+1$

양변에 $x=7$을 대입하면 $(7+1)^{333}=7Q(7)+1$

따라서 $2^{999}=(7+1)^{333}$을 7로 나눈 나머지는 1이다.

44 답 ①

$f(x)+g(x)$를 $h(x)$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$f(x)+g(x)=h(x)Q_1(x)+5$

$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$을 $h(x)$로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=h(x)Q_2(x)+15$

$\{f(x)+g(x)\}^2=\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2+2f(x)g(x)$에서

$$f(x)g(x)=\frac{1}{2}[\{f(x)+g(x)\}^2-\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2]$$
$$=\frac{1}{2}[\{h(x)Q_1(x)+5\}^2-\{h(x)Q_2(x)+15\}]$$
$$=\frac{1}{2}h(x)[h(x)\{Q_1(x)\}^2+10Q_1(x)-Q_2(x)]+5$$

따라서 $f(x)g(x)$를 $h(x)$로 나눈 나머지는 5이다.

45 답 ⑤

ㄱ. $f(2)=16+4a+b=0$이면 $f(-2)=16+4a+b=0$이므로 $x+2$도 $f(x)$의 인수이다. (참)

ㄴ. $f(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지면 $f(1)=1+a+b=0$
이때, $f(-1)=1+a+b=0$이므로 $f(x)$는 $x+1$로도 나누어떨어진다. 따라서 $f(x)$는 $(x-1)(x+1)=x^2-1$로 나누어떨어진다. (참)

ㄷ. $f(x)$가 $(x-1)(x-2)$로 나누어떨어지면 $f(x)$는 $x-1$, $x-2$를 인수로 갖는다. 또한, ㄱ과 ㄴ에 의하여 $f(x)$는 $x+1$과 $x+2$도 인수로 갖는다.
이때, $f(x)$는 사차식이므로 인수정리에 의하여
$$f(x)=k(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$$
$$=k(x^2-1)(x^2-4)$$
$$=k(x^4-5x^2+4)=x^4+ax^2+b$$
$k=1$, $a=-5$, $b=4$이므로 $4a+5b=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

46 답 ④

$f(x)=x^4+ax^3+x^2+bx-2$가 $x-p$를 인수로 가지므로 정수 p가 될 수 있는 값은 2의 약수인 ±1, ±2이고 $f(p)=0$이어야 한다.

$f(1)=a+b>0$이므로

$p\neq1$

$f(-1)=-a-b<0$이므로

$p\neq-1$

$f(2)=18+8a+2b>0$이므로

$p\neq2$

$f(-2)=18-8a-2b=0$인 자연수 a, b가 존재하므로

$p=-2$

즉, $4a+b=9$이고, a, b는 자연수이므로

$a=1$, $b=5$ 또는 $a=2$, $b=1$

이때, $a>b$이므로 $a=2$, $b=1$

$\therefore abp=2\times1\times(-2)=-4$

47 답 **10**

$f(1)=1$에서 $1\times f(1)=2\times1-1$

$2f(2)=3$에서 $2\times f(2)=2\times2-1$

$3f(3)=5$에서 $3\times f(3)=2\times3-1$

$4f(4)=7$에서 $4\times f(4)=2\times4-1$

⋮

$\therefore xf(x)=2x-1$

이때, $f(x)$가 삼차다항식이므로 $xf(x)$는 사차다항식이다.

$g(x)=xf(x)-(2x-1)$이라 하면 $g(x)$는 사차식이고

$g(1)=g(2)=g(3)=g(4)=0$이므로 인수정리에 의하여

$g(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ (a는 상수)

즉, $xf(x)-(2x-1)=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

$xf(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+2x-1$

양변에 $x=0$을 대입하면 $a=\frac{1}{24}$

$\therefore xf(x)=\frac{1}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+2x-1$

따라서 양변에 $x=5$를 대입하면

$5f(5)=\frac{1}{24}\times4\times3\times2\times1+10-1=10$

48 답 ⑤

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $f(x)$, $g(x)$를 x^2-2로 나눈 나머지가 같으므로 $h(x)$는 x^2-2로 나누어떨어진다. 즉, $h(x)$는 x^2-2를 인수로 갖는다. 또, $f(1)=g(1)$에 의하여 $h(1)=0$이므로 $h(x)$는 $x-1$도 인수로 가지고, 삼차식이다.

$\therefore h(x)=f(x)-g(x)=k(x^2-2)(x-1)$ (k는 상수) ⋯ ㉠

그런데 $h(0)=f(0)-g(0)=1-(-1)=2$이므로

㉠에 $x=0$을 대입하면 $2k=2$　　$\therefore k=1$

따라서 $h(x)=(x^2-2)(x-1)$이므로

$f(-1)-g(-1)=h(-1)=(-1)\times(-2)=2$

49 답 ②

$f(x)$를 $(x-a)(x-b)(x-c)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $R(x)$이므로 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)Q(x)+R(x)$

이때, $a+b+c=10$이고, 나머지정리에 의하여

$R(a)=a^2+b+c=a^2-a+10$

$R(b)=a+b^2+c=b^2-b+10$

$R(c)=a+b+c^2=c^2-c+10$

이때, $g(x)=R(x)-(x^2-x+10)$이라 하면

$g(a)=g(b)=g(c)=0$이므로 인수정리에 의하여

$g(x)=R(x)-(x^2-x+10)=k(x-a)(x-b)(x-c)$ (k는 상수)

$\therefore R(x)=k(x-a)(x-b)(x-c)+x^2-x+10$

그런데 $R(x)$는 이차 이하의 식이므로 $k=0$이다.

따라서 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)(x-c)$로 나눈 나머지 $R(x)$는

$R(x)=x^2-x+10$　　$\therefore R(2)=4-2+10=12$

50 답 495

$x^5=\frac{a_0}{3}+\frac{a_1}{3^2}(2x-1)+\frac{a_2}{3^3}(2x-1)^2+\cdots+\frac{a_5}{3^6}(2x-1)^5$

$=\frac{a_0}{3}+\frac{a_1}{3}\left(\frac{2x-1}{3}\right)+\frac{a_2}{3}\left(\frac{2x-1}{3}\right)^2+\cdots+\frac{a_5}{3}\left(\frac{2x-1}{3}\right)^5$

… ㉠ ---------- ⓐ

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^5=\frac{a_0}{3}+\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_5}{3}$ … ㉡

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^5=\frac{a_0}{3}-\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3}-\cdots-\frac{a_5}{3}$ … ㉢

---------- ⓑ

㉡－㉢을 하면

$2^5-(-1)^5=2\left(\frac{a_1}{3}+\frac{a_3}{3}+\frac{a_5}{3}\right)$

$33=\frac{2}{3}(a_1+a_3+a_5)$

$\therefore 10(a_1+a_3+a_5)=495$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 항등식의 성질을 이용하도록 주어진 식을 변형한다. [50%]
ⓑ 주어진 식과 변형한 식에 각각 $x=2$, $x=-1$을 대입한다. [40%]
ⓒ $10(a_1+a_3+a_5)$의 값을 구한다. [10%]

51 답 12

$f(x)$를 $(x-1)(x+1)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-1)(x+1)Q(x)+2x+5$

나머지정리에 의하여

$f(1)=7$, $f(-1)=3$ ---------- ⓐ

$(x+1)f(x-1)$을 x^2-2x로 나눈 몫을 $P(x)$라 하면 나머지가 $ax+b$이므로

$(x+1)f(x-1)=x(x-2)P(x)+ax+b$

이 식의 양변에 $x=0$, $x=2$를 차례로 대입하면

$f(-1)=b=3$

$3f(1)=2a+b=21$

두 식을 연립하면

$a=9$, $b=3$ ---------- ⓑ

$\therefore a+b=9+3=12$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 나머지정리에 의하여 $f(1)$, $f(-1)$의 값을 구한다. [40%]
ⓑ a, b의 값을 각각 구한다. [50%]
ⓒ $a+b$의 값을 구한다. [10%]

52 답 1

$f(x)$를 $(x^2+1)(x^2+2)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하면

$f(x)=(x^2+1)(x^2+2)Q(x)+R(x)$ ---------- ⓐ

이때, $R(x)$는 삼차 이하의 식이고 $f(x)$를 x^2+1로 나눈 나머지가 $4x+4$이므로

$R(x)=(x^2+1)(ax+b)+4x+4$ (a, b는 상수)

$=(x^2+2-1)(ax+b)+4x+4$

$=(x^2+2)(ax+b)-(ax+b)+4x+4$

$=(x^2+2)(ax+b)+(4-a)x+(4-b)$

$\therefore f(x)=(x^2+1)(x^2+2)Q(x)+(x^2+2)(ax+b)+(4-a)x+(4-b)$

이때, $f(x)$를 x^2+2로 나눈 나머지가 $4x+8$이므로

$(4-a)x+(4-b)=4x+8$

$4-a=4$, $4-b=8$

$\therefore a=0$, $b=-4$

$R(x)=(x^2+2)(ax+b)+4x+8$

$=(x^2+2)\times(-4)+4x+8$

$=-4x^2+4x$ ---------- ⓑ

$\therefore R\left(\frac{1}{2}\right)=-1+2=1$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $f(x)$를 $(x^2+1)(x^2+2)$로 나눈 식을 세운다. [20%]
ⓑ $f(x)$를 x^2+1, x^2+2로 나눈 나머지를 이용하여 $R(x)$의 식을 구한다. [60%]
ⓒ $R\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구한다. [20%]

53 답 26

조건 (나)에 의하여

$f(x)=(x-1)^2(ax+b)+(ax+b)$ (a, b는 상수) … ㉠

라 하면 조건 (가)에서 $f(1)=2$이므로

$ax+b=a(x-1)+2$

㉠에 대입하면

$f(x)=(x-1)^2\{a(x-1)+2\}+a(x-1)+2$

$=a(x-1)^3+2(x-1)^2+a(x-1)+2$

이때, $f(x)$를 $(x-1)^3$으로 나눈 나머지는

$R(x)=2(x-1)^2+a(x-1)+2$ … ㉡

$R(0)=R(3)$이므로

$2-a+2=8+2a+2$　　$\therefore a=-2$

따라서 ㉡에 의하여 $R(x)=2(x-1)^2-2(x-1)+2$이므로

$R(5)=26$

54 답 40

나머지정리에 의하여 다항식 $P(x)$를 $x-k$로 나눈 나머지는

$P(k)=k^3+k^2+k+1$

또한, 다항식 $P(x)$를 $x+k$로 나눈 나머지는

$P(-k)=-k^3+k^2-k+1$

두 나머지의 합이 8이므로

$$\begin{aligned}P(k)+P(-k)&=k^3+k^2+k+1+(-k^3+k^2-k+1)\\&=2k^2+2=8\end{aligned}$$

$\therefore k^2=3$

따라서 다항식 $P(x)$를 $x-k^2$으로 나눈 나머지는

$P(k^2)=(k^2)^3+(k^2)^2+k^2+1=3^3+3^2+3+1=40$

55 답 ③

ㄱ. 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-a)(x-b)Q(x)+R(x)$ ⋯ ㉠

㉠은 x에 대한 항등식이므로 $x=a$를 대입하면

$f(a)=R(a)$이므로 $f(a)-R(a)=0$ (참)

ㄴ. 【반례】 $f(x)=(x-a)(x-b)+x$라 하면

$R(x)=x$이고

$f(a)-R(b)=a-b$, $f(b)-R(a)=b-a$

이때, $a\neq b$이므로 $f(a)-R(b)\neq f(b)-R(a)$ (거짓)

ㄷ. $R(x)$는 일차 이하의 다항식이므로

$R(x)=px+q$ (p, q는 상수)라 하면

$f(a)=pa+q$, $f(b)=pb+q$에서

$af(b)-bf(a)=abp+aq-abp-bq=(a-b)q$

이때, $R(0)=q$이므로

$af(b)-bf(a)=(a-b)R(0)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

56 답 ③

$p+q=1$, $pq=-1$이므로

$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=\boxed{3}$ ←(가)

$p^4+q^4=(p^2+q^2)^2-2p^2q^2=\boxed{7}$ ←(나)

$a=\dfrac{p^8-q^8}{p-q}=(p^4+q^4)(p^2+q^2)(p+q)=7\times3\times1=\boxed{21}$ ←(다)

따라서 $r=3$, $s=7$, $t=21$이므로 $r+s+t=31$

일등급 UP

＊빈칸 채우기의 중간 과정도 알고 가자

x에 대한 다항식 ax^9+bx^8+1이 x^2-x-1로 나누어떨어지므로 몫을 $Q(x)$라 하면 $ax^9+bx^8+1=(x^2-x-1)Q(x)$

즉, $ax^9+bx^8+1=(x-p)(x-q)Q(x)$ 꼴로 나타낼 수 있다.

양변에 $x=p$, $x=q$를 각각 대입하면 문제의 ㉠, ㉡을 얻을 수 있다.

㉠, ㉡의 양변에 각각 q^8, p^8을 곱하면

$ap(pq)^8+b(pq)^8=-q^8$이고 $aq(pq)^8+b(pq)^8=-p^8$이므로

$pq=-1$을 대입하여 정리하면 문제의 ㉢, ㉣을 얻을 수 있다.

57 답 ③

$f(x)$를 x^2-3x+2로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b\\&=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b \cdots ㉠\end{aligned}$$

한편, 조건 (나)의 식 $f(x+1)=f(x)+6x^2$에

$x=2$를 대입하면 $f(3)=f(2)+24=36$에서 $f(2)=12$

$x=1$을 대입하면 $f(2)=f(1)+6=12$에서 $f(1)=6$

㉠에서

$f(1)=a+b=6$, $f(2)=2a+b=12$

두 식을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=0$

따라서 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눈 나머지는 $6x$이다.

58 답 ⑤

ㄱ. $f(1-x)=(1-x)^2-(1-x)+b=x^2-x+b=f(x)$ (참)

ㄴ. x^n을 $f(x)$로 나눈 몫이 $Q_n(x)$, 나머지가 p_nx+q_n이므로

$x^n=f(x)Q_n(x)+p_nx+q_n$

이 식은 x에 대한 항등식이므로 x 대신 $1-x$를 대입해도 성립한다.

$$\begin{aligned}\therefore (1-x)^n&=f(1-x)Q_n(1-x)+p_n(1-x)+q_n \cdots ㉠\\&=f(x)Q_n(1-x)+p_n(1-x)+q_n\ (\because ㄱ)\end{aligned}$$

따라서 $(1-x)^n$을 $f(x)$로 나눈 몫은 $Q_n(1-x)$이다. (참)

ㄷ. ㉠에서 $(1-x)^n$을 $f(x)$로 나눈 나머지는 $p_n(1-x)+q_n$이므로 $x^n+(1-x)^n$을 $f(x)$로 나눈 나머지는

$p_nx+q_n+p_n(1-x)+q_n=p_n+2q_n$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

59 답 ⑤

$f(x)$를 $(x+1)^3$으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지가 x^2+4x+2이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+1)^3Q_1(x)+x^2+4x+2\\&=(x+1)^2(x+1)Q_1(x)+(x+1)^2+2x+1\end{aligned}$$

따라서 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나눈 나머지는 $2x+1$

한편, $f(x)$를 $(x+1)^2(x-2)$로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나눈 나머지가 $2x+1$이므로

$f(x)=(x+1)^2(x-2)Q_2(x)+a(x+1)^2+2x+1$ (a는 상수) ⋯ ㉠

이때, $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지가 $4x+6$이므로

$f(2)=4\times2+6=14$

㉠에 $x=2$를 대입하면 $f(2)=9a+5=14$

$\therefore a=1$

따라서 $f(x)$를 $(x+1)^2(x-2)$로 나눈 나머지는

$R(x)=(x+1)^2+2x+1$

$\therefore R(1)=7$

60 답 ③

$f(x)$를 $x-1$, $(x-1)^2$으로 나눈 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, 나머지를 각각 R_1, $R_2(x)$라 하면

$f(x)=(x-1)Q_1(x)+R_1$

$f(x)=(x-1)^2Q_2(x)+R_2(x)$

두 식을 변끼리 더하면

$2f(x)=(x-1)Q_1(x)+(x-1)^2Q_2(x)+R_1+R_2(x)$

여기서 $R_1+R_2(x)=0$이므로

$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)Q_1(x)+\frac{1}{2}(x-1)^2Q_2(x)$ ⋯ ㉠

한편, $f(x)$를 $(x-1)^3$으로 나눈 나머지가 ax^2+bx+c이므로 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-1)^3Q(x)+ax^2+bx+c$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 $x=1$을 대입하면

$a+b+c=0$

[다른 풀이]

$f(x)=(x-1)^3Q(x)+ax^2+bx+c$

$\quad=(x-1)^3Q(x)+a(x-1)^2+p(x-1)+q$ (p, q는 상수)

라 하면 $R_1=q$, $R_2(x)=p(x-1)+q$

두 식을 변끼리 더하여 정리하면

$R_1+R_2(x)=px-p+2q=0$

$\therefore p=q=0$

따라서 $ax^2+bx+c=a(x-1)^2$이므로

이 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a+b+c=0$

61 답 15

$(x-2)f(x+1)=(x+4)f(x-1)$의 양변에

$x=2$를 대입하면

$0=6f(1)$

$\therefore f(1)=0$

$x=-4$를 대입하면

$-6f(-3)=0$

$\therefore f(-3)=0$

$x=0$을 대입하면

$-2f(1)=4f(-1)=0$

$\therefore f(-1)=0$

즉, 인수정리에 의하여 $f(x)$는

$x-1$, $x+3$, $x+1$의 인수를 갖는다.

이때, $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식이므로

$f(x)=(x-1)(x+1)(x+3)$

$\therefore f(2)=1\times3\times5=15$

62 답 ⑤

$f(x^2)=x^3f(x+1)-2x^4+2x^2$ ⋯ ㉠

ㄱ. ㉠의 양변에

$x=0$을 대입하면 $f(0)=0$

$x=-1$을 대입하면 $f(1)=-f(0)-2+2=0$

$x=1$을 대입하면 $f(1)=f(2)-2+2=f(2)$

$\therefore f(2)=f(1)=0$ (참)

ㄴ. $f(x)$의 차수를 n이라 하면

주어진 식의 좌변 $f(x^2)$의 차수는 $2n$이고 우변의 차수는 $n+3$ 또는 4이다.

(i) $2n=4$, 즉 $n=2$일 때,

㉠의 좌변 $f(x^2)$은 사차다항식이고 우변 $x^3f(x+1)$은 오차다항식이므로 성립하지 않는다.

(ii) $2n=n+3$, 즉 $n=3$일 때,

㉠의 좌변 $f(x^2)$은 육차다항식이고 우변 $x^3f(x+1)$도 육차다항식이므로 성립한다.

따라서 $f(x)$는 삼차다항식이다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 $f(0)=f(1)=f(2)=0$이고 ㄴ에서 $f(x)$는 삼차다항식이므로 인수정리에 의하여

$f(x)=ax(x-1)(x-2)$ ($a\neq0$인 상수) ⋯ ㉡

또, ㉠에 $x=2$를 대입하면

$f(4)=8f(3)-24$이므로

㉡에 $x=4$, $x=3$을 대입하여 정리하면

$24a=48a-24 \qquad \therefore a=1$

$\therefore f(x)=x(x-1)(x-2)$

따라서 $(x-3)f(x)=(x-3)x(x-1)(x-2)$이고

$xf(x-1)=x(x-1)(x-2)(x-3)$이므로

$(x-3)f(x)=xf(x-1)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

03 인수분해

문제편 31P

01 답 ③

$\dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3}=\dfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}=\dfrac{a+b}{a-b}$에서

$\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}=1$

$a^2-ab+b^2=a^2+ab+b^2$, $-2ab=0$

$\therefore ab=0$

02 답 ⑤

$(x^2-2x)^2-2x^2+4x-3=(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3$

이때, $x^2-2x=A$라 하면

$$\begin{aligned}A^2-2A-3&=(A+1)(A-3)\\&=(x^2-2x+1)(x^2-2x-3)\\&=(x-1)^2(x+1)(x-3)\end{aligned}$$

따라서 $a=-1$, $b=1$, $c=-3$ 또는 $a=-1$, $b=-3$, $c=1$

이므로 $a^2+b^2+c^2=(-1)^2+1^2+(-3)^2=11$

03 답 ③

$$\begin{aligned}x^4-3x^2+9&=(x^4+6x^2+9)-9x^2\\&=(x^2+3)^2-(3x)^2\\&=(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)\end{aligned}$$

따라서 $ab=9$, $cd=-9$ 또는 $ab=-9$, $cd=9$이므로

$ab+cd=9-9=0$

04 답 ④

주어진 식을 b에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}a^4+a^2b^2-b^2c^2-c^4&=(a^2-c^2)b^2+(a^4-c^4)\\&=(a^2-c^2)b^2+(a^2+c^2)(a^2-c^2)\\&=(a^2-c^2)(a^2+b^2+c^2)\\&=(a+c)(a-c)(a^2+b^2+c^2)\end{aligned}$$

따라서 $a^4+a^2b^2-b^2c^2-c^4$의 인수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

05 답 ③

$f(x)=x^3-7x-6$이라 하면

$f(-1)=0$, $f(-2)=0$이므로

조립제법에 의하여

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -7 & -6 \\ & & -1 & 1 & 6 \\ \hline -2 & 1 & -1 & -6 & 0 \\ & & -2 & 6 & \\ \hline & 1 & -3 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned}f(x)&=x^3-7x-6\\&=(x+1)(x+2)(x-3)\end{aligned}$$

따라서 세 일차식의 합 $g(x)$는

$g(x)=(x+1)+(x+2)+(x-3)=3x$이므로

$g(3)=3\times 3=9$

06 답 ③

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$이고,

$x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$이므로

공통인수 $g(x)$는 $g(x)=x^2-x+1$

$\therefore g(2)=4-2+1=3$

07 답 ②

주어진 식의 좌변을 정리하면

$$\begin{aligned}\frac{(a+b)^3+b^3}{a^3-b^3}&=\frac{(a+2b)\{(a+b)^2-(a+b)b+b^2\}}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}\\&=\frac{(a+2b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}\\&=\frac{a+2b}{a-b}\end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{a+2b}{a-b}=\dfrac{a+2b}{b}$이고, a, b는 서로 다른 양수이므로

$a-b=b$ $\quad\therefore a=2b$

$\therefore \dfrac{a}{b}=2$

08 답 6

$x^3+2x^2+4xy+8y^2-8y^3$

$=(x^3-8y^3)+2x^2+4xy+8y^2$

$=(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)+2(x^2+2xy+4y^2)$

$=(x-2y+2)(x^2+2xy+4y^2)$

따라서 $a=-2$, $b=2$, $c=2$, $d=4$이므로

$a+b+c+d=(-2)+2+2+4=6$

09 답 297

$99=x$라 하면 $100=x+1$이므로

$$\begin{aligned}\frac{99^4+99^2+1}{99^2+99+1}&=\frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}\\&=\frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{x^2+x+1}\\&=x^2-x+1\\&=(x+1)^2-3x\\&=100^2-3\times 99\end{aligned}$$

$\therefore k=3\times 99=297$

10 답 ②

$(x+y)^3+3(x+y)(x^2-y^2)+3(x-y)(x^2-y^2)+(x-y)^3$

$=(x+y)^3+3(x+y)(x+y)(x-y)$

$\qquad+3(x-y)(x+y)(x-y)+(x-y)^3$

$=(x+y)^3+3(x+y)^2(x-y)+3(x+y)(x-y)^2+(x-y)^3$

이때, $x+y=A$, $x-y=B$라 하면

$A^3+3A^2B+3AB^2+B^3=(A+B)^3=(x+y+x-y)^3=8x^3$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 x^2이므로 ㄷ이다.

11 답 64

$(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)+k$

$=(x-1)(x+5)(x-3)(x+7)+k$

$=(x^2+4x-5)(x^2+4x-21)+k$ ⋯ ㉠

이때, $x^2+4x-5=A$라 하면 ㉠에서

$A(A-16)+k=A^2-16A+k$

따라서 $A^2-16A+k$가 완전제곱식이 되면 주어진 식도 완전제곱식이 되므로 $k=8^2=64$

12 답 8

(나)에 알맞은 자연수가 m이므로

$(x^2-x-1)(x^2-x-5)-5=(t+m)(t-m)-5$에서

$x^2-x-1=t+m$ ⋯ ㉠

$x^2-x-5=t-m$ ⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면 $2x^2-2x-6=2t$

$\therefore t=\underbrace{\boxed{x^2-x-3}}_{(\text{가})}=f(x)$

이것을 ㉠에 대입하면 자연수 m의 값은 $m=2$

$(x^2-x-1)(x^2-x-5)-5$

$=(t+\boxed{2})(t-\underbrace{\boxed{2}}_{(\text{나})})-5$

$=t^2-9$

$=(t+3)(t-3)$

$=(x^2-x)(x^2-x-6)$

$=x(x-1)(x+2)(x-\underbrace{\boxed{3}}_{(\text{다})})$

이므로 $n=3$

$\therefore f(3)+m+n=(3^2-3-3)+2+3=8$

[다른 풀이]

(나)에서부터 위쪽 과정으로 생각하면

$(t+3)(t-3)=(t+m)(t-m)-5$에서

$t^2-9=t^2-m^2-5$

즉, $m^2+5=9$이므로 자연수 m의 값은 $m=\overset{(\text{나})}{\boxed{2}}$이다.

$(t+2)(t-2)-5=(x^2-x-1)(x^2-x-5)-5$에서

$t+2=x^2-x-1$이므로

$t=\underbrace{\boxed{x^2-x-3}}_{(\text{가})}=f(x)$

(이하 동일)

13 답 ②

x^4+4를 두 이차식의 곱으로 인수분해하면

$x^4+4=(x^4+4x^2+4)-4x^2$

$=(x^2+2)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

따라서 $f(x)=x^2+2x+2$, $g(x)=x^2-2x+2$ 또는

$f(x)=x^2-2x+2$, $g(x)=x^2+2x+2$

$\therefore f(1)+g(1)=(1+2+2)+(1-2+2)$

$=6$

14 답 ③

$(x^2-y^2)^2-2(x^2+y^2)+1$

$=(x^2-y^2)^2-2(x^2-y^2)+1-4y^2$

$=(x^2-y^2-1)^2-(2y)^2$

$=(x^2-y^2+2y-1)(x^2-y^2-2y-1)$

$=\{x^2-(y-1)^2\}\{x^2-(y+1)^2\}$

$=(x+y-1)(x-y+1)(x+y+1)(x-y-1)$

따라서 네 일차식을 모두 더하면

$(x+y-1)+(x-y+1)+(x+y+1)+(x-y-1)=4x$

[다른 풀이 ①]

$(x^2-y^2)^2-2(x^2+y^2)+1$

$=(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)+1-4x^2y^2$

$=(x^2+y^2-1)^2-4x^2y^2$

$=(x^2+y^2+2xy-1)(x^2+y^2-2xy-1)$

$=\{(x+y)^2-1\}\{(x-y)^2-1\}$

$=(x+y+1)(x+y-1)(x-y+1)(x-y-1)$

따라서 네 일차식을 모두 더하면

$(x+y+1)+(x+y-1)+(x-y+1)+(x-y-1)=4x$

[다른 풀이 ②]

$(x^2-y^2)^2-2(x^2+y^2)+1$

$=(x+y)^2(x-y)^2-2(x^2+y^2)+1$

$$\begin{array}{lr}
(x+y)^2 & -1 \\
(x-y)^2 & -1 \\
\hline
 & -2(x^2+y^2)
\end{array}$$

$=\{(x+y)^2-1\}\{(x-y)^2-1\}$

$=(x+y+1)(x+y-1)(x-y+1)(x-y-1)$

따라서 네 일차식을 모두 더하면

$(x+y+1)+(x+y-1)+(x-y+1)+(x-y-1)=4x$

15 답 ①

$a^2+b^2-3c^2+2ab+2bc+2ca$

$=(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)-4c^2$

$=(a+b+c)^2-(2c)^2$

$=(a+b+c+2c)(a+b+c-2c)$

$=(a+b+3c)(a+b-c)$

$\therefore A+B=(a+b+3c)+(a+b-c)=2(a+b+c)$

16 답 ①

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2-(y+4)x-(y^2-y-2)$

$=2x^2-(y+4)x-(y-2)(y+1)$

$=(2x+y-2)(x-y-1)$

따라서 $a=1$, $b=-2$, $c=-1$, $d=-1$이므로

$a+b+c+d=1-2-1-1=-3$

17 답 ⑤

차수가 가장 낮은 c에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2=0$에서

$(-a-b)c^2+(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=0$

$-(a+b)c^2+(a+b)a^2+(a+b)b^2=0$

$(a+b)(-c^2+a^2+b^2)=0 \qquad \therefore c^2=a^2+b^2\ (\because a+b>0)$

따라서 이 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

18 답 3

$$\begin{aligned}(\text{분모})&=ab^2-ac^2+bc^2-a^2b+a^2c-b^2c\\&=(-b+c)a^2+(b^2-c^2)a+(bc^2-b^2c)\\&=-(b-c)a^2+(b-c)(b+c)a-bc(b-c)\\&=-(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\&=-(b-c)(a-b)(a-c)=(a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

한편, $A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B)$를 이용하면

$(a-b)^3+(b-c)^3=(a-c)^3-3(a-b)(b-c)(a-c)$이므로

$$\begin{aligned}(\text{분자})&=(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3\\&=(a-c)^3-3(a-b)(b-c)(a-c)+(c-a)^3\\&=-(c-a)^3+3(a-b)(b-c)(c-a)+(c-a)^3\\&=3(a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

$\therefore (\text{주어진 식})=\dfrac{3(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=3$

[다른 풀이]

$a-b=A$, $b-c=B$, $c-a=C$라 하면

$A+B+C=0$, $A+B=-C$이므로

$$\begin{aligned}A^3+B^3+C^3&=(A+B)^3-3AB(A+B)+C^3\\&=(-C)^3-3AB(-C)+C^3=3ABC\end{aligned}$$

따라서 분자는

$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$

(이하 동일)

19 답 ⑤

$f(x)=x^3+7x^2+16x+12$라 하면 $f(-2)=0$이므로 조립제법에 의하여

$$\begin{array}{r|rrrr}-2 & 1 & 7 & 16 & 12\\ & & -2 & -10 & -12\\\hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0}\end{array}$$

$$\begin{aligned}f(x)&=x^3+7x^2+16x+12=(x+2)(x^2+5x+6)\\&=(x+2)(x+2)(x+3)=(x+2)^2(x+3)\end{aligned}$$

따라서 $a=3$, $b=2$이므로 $a+b=5$

20 답 ②

$x^3+ax^2+(2a+1)x+10$을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}-2 & 1 & a & 2a+1 & 10\\ & & -2 & -2a+4 & -10\\\hline & 1 & a-2 & 5 & \boxed{0}\end{array}$$

$$\begin{aligned}&x^3+ax^2+(2a+1)x+10\\&=(x+2)\{x^2+(a-2)x+5\}\end{aligned}$$

한편, $x^2+(a-2)x+5=(x+p)(x+q)$ (p, q는 자연수)라 하면

$x^2+(a-2)x+5=x^2+(p+q)x+pq$에서

$p+q=a-2$ ⋯ ㉠, $pq=5$

이때, p, q가 자연수이므로 $p=1$, $q=5$ 또는 $p=5$, $q=1$

따라서 $p+q=6$이므로 ㉠에서 $a=8$이다.

21 답 ⑤

분자를 $f(a)=a^4+4a^3+6a^2+5a+2$라 하면

$f(-1)=0$, $f(-2)=0$이므로 조립제법에 의하여

$$\begin{array}{r|rrrrr}-1 & 1 & 4 & 6 & 5 & 2\\ & & -1 & -3 & -3 & -2\\\hline -2 & 1 & 3 & 3 & 2 & \boxed{0}\\ & & -2 & -2 & -2 & \\\hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(a)=(a+1)(a+2)(a^2+a+1)$

또, 분모를 $g(a)=a^3+3a^2+3a+2$라 하면

$g(-2)=0$이므로 조립제법에 의하여

$$\begin{array}{r|rrrr}-2 & 1 & 3 & 3 & 2\\ & & -2 & -2 & -2\\\hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0}\end{array}$$

$g(a)=(a+2)(a^2+a+1)$

즉, $(\text{주어진 식})=\dfrac{(a+1)(a+2)(a^2+a+1)}{(a+2)(a^2+a+1)}=a+1=101$

$\therefore a=100$

22 답 ①

$f(x)=x^4-7x^2+9$, $g(x)=x^4+2x^3+x^2-9$라 하면

$f(x)$, $g(x)$ 모두 x^2+ax+b를 인수로 가지므로

$g(x)-f(x)$도 x^2+ax+b를 인수로 갖는다. 즉,

$$\begin{aligned}g(x)-f(x)&=2x^3+8x^2-18\\&=2(x^3+4x^2-9)\\&=2(x+3)(x^2+x-3)\end{aligned}$$

이때, $f(x)$, $g(x)$ 모두 $x+3$을 인수로 갖지 않으므로

공통인수는 x^2+x-3이다.

따라서 $a=1$, $b=-3$이므로 $a^2+b^2=1^2+(-3)^2=10$

[다른 풀이]

$$\begin{aligned}x^4-7x^2+9&=(x^4-6x^2+9)-x^2=(x^2-3)^2-x^2\\&=(x^2+x-3)(x^2-x-3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^4+2x^3+x^2-9&=x^2(x^2+2x+1)-9\\&=x^2(x+1)^2-9=(x^2+x)^2-3^2\\&=(x^2+x+3)(x^2+x-3)\end{aligned}$$

따라서 두 다항식의 공통인수는 x^2+x-3이므로

$a=1$, $b=-3 \qquad \therefore a^2+b^2=1^2+(-3)^2=10$

23 답 100

$x^3+2x^2+2x+1=(x^3+3x^2+3x+1)-(x^2+x)$

$\quad =(x+1)^3-x(x+1)$

$\quad =(x+1)\{(x+1)^2-x\}$

$\quad =(x+1)(x^2+x+1)$

$x^3+4x^2+4x+1=(x^3+3x^2+3x+1)+(x^2+x)$

$\quad =(x+1)^3+x(x+1)$

$\quad =(x+1)\{(x+1)^2+x\}$

$\quad =(x+1)(x^2+3x+1)$

따라서 두 다항식의 공통인수 $G(x)$는 $G(x)=x+1$이므로

$G(99)=100$

24 답 ④

$g(x)=x^3-5x^2+2x+8$에서

$g(-1)=0$, $g(2)=0$이므로

조립제법에 의하여

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -5 & 2 & 8 \\ & & -1 & 6 & -8 \\ \hline 2 & 1 & -6 & 8 & 0 \\ & & 2 & -8 & \\ \hline & 1 & -4 & 0 & \end{array}$$

$g(x)=(x+1)(x-2)(x-4)$

(i) $x+1$이 공통인수이면

$\quad f(-1)=2-n=0 \qquad \therefore n=2$

(ii) $x-2$가 공통인수이면

$\quad f(2)=2-n=0 \qquad \therefore n=2$

(iii) $x-4$가 공통인수이면

$\quad f(4)=12-n=0 \qquad \therefore n=12$

따라서 공통인수를 가지도록 하는 서로 다른 상수 n의 값의 합은

$2+12=14$

25 답 99

$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$=\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}\cdots\left\{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2\right\}$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\times\cdots$

$\qquad\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2n}$

따라서 $\frac{n+1}{2n}=\frac{50}{99}$이므로 $n=99$

26 답 ⑤

$N=3\times33^3+3^2\times33^2+3^2\times33+3$

$\quad =3(33^3+3\times33^2+3\times33+1)$

$\quad =3(33+1)^3=3\times34^3=3\times2^3\times17^3$

따라서 N의 양의 약수의 개수는 $(1+1)\times(3+1)\times(3+1)=32$

27 답 7

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$에서

$14=2^3-3ab\times2 \qquad \therefore ab=-1$

$\therefore (a^2-a+1)(b^2-b+1)=\frac{(a^3+1)(b^3+1)}{(a+1)(b+1)}$

$\quad =\frac{(ab)^3+(a^3+b^3)+1}{ab+(a+b)+1}$

$\quad =\frac{(-1)^3+14+1}{(-1)+2+1}=7$

28 답 ⑤

$(a+b)(a+1)(b+1)+ab=(a+b)(ab+a+b+1)+ab$

이때, $a+b=t$라 하면

$t(ab+1+t)+ab=t^2+(ab+1)t+ab$

$\quad =(t+1)(t+ab)$

$\quad =(a+b+1)(ab+a+b)$

따라서 두 다항식 A, B의 합은

$(a+b+1)+(ab+a+b)=ab+2a+2b+1$

29 답 46

$(x^2-4x+3)(x^2+12x+35)+15$

$=(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)+15$

$=(x-1)(x+5)(x-3)(x+7)+15$

$=(x^2+4x-\underbrace{\boxed{5}}_{(가)})(x^2+4x-\underbrace{\boxed{21}}_{(나)})+15$

이때, $x^2+4x=t$라 하면

$(t-\boxed{5})(t-\boxed{21})+15$

$=t^2-26t+120$

$=(t-6)(t-20)$

$=(x^2+4x-6)(x^2+4x-\overbrace{\boxed{20}}^{(다)})$

따라서 a, b, c의 값은 각각 5, 21, 20 또는 21, 5, 20이므로

$a+b+c=5+21+20=46$

30 답 ②

$(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)-6x^2$

$=(x-2)(x-6)(x-3)(x-4)-6x^2$

$=(x^2-8x+12)(x^2-7x+12)-6x^2$

이때, $x^2+12=t$라 하면

$(t-8x)(t-7x)-6x^2$

$=t^2-15xt+50x^2$

$=(t-5x)(t-10x)$

$=(x^2-5x+12)(x^2-10x+12)$

따라서 $a=12$, $b=10$, $c=12$이므로

$a+b+c=12+10+12=34$

31 답 191

연속한 네 홀수를 각각 n, $n+2$, $n+4$, $n+6$ (n은 홀수)이라 하면

$n(n+2)(n+4)(n+6)+16=n(n+6)(n+2)(n+4)+16$

$=(n^2+6n)(n^2+6n+8)+16$

이때, $n^2+6n=t$라 하면

$t(t+8)+16=t^2+8t+16=(t+4)^2=(n^2+6n+4)^2$

따라서 $n=11$일 때,

$11\times13\times15\times17+16=(11^2+6\times11+4)^2=191^2$

$\therefore N=191$

32 답 ⑤

$f(x)=x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$이므로

$f(f(x))=\{f(x)-2\}\{f(x)-1\}=(x^2-3x)(x^2-3x+1)$

$=x(x-3)(x^2-3x+1)$

따라서 $f(f(x))$의 인수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

33 답 ④

$n^4-11n^2+49=(n^4+14n^2+49)-25n^2$

$=(n^2+7)^2-(5n)^2$

$=(n^2-5n+7)(n^2+5n+7)$

이때, n^2-5n+7, n^2+5n+7은 모두 자연수이고

$n^2-5n+7<n^2+5n+7$이므로 n^4-11n^2+49가 소수가 되려면

$n^2-5n+7=1$이어야 한다.

즉, $n^2-5n+6=0$이므로 $(n-2)(n-3)=0$

$\therefore n=2$ 또는 $n=3$

$n=2$이면 $n^4-11n^2+49=21$이 되어 소수가 아니다.

$n=3$이면 $n^4-11n^2+49=31$이 되어 소수이다.

따라서 $a=3$, $p=31$이므로 $a+p=3+31=34$

34 답 4

$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2b^2c^2+2c^2a^2$

$=(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2)-4b^2c^2$

$=(a^2+b^2+c^2)^2-(2bc)^2$

$=(a^2+b^2+c^2+2bc)(a^2+b^2+c^2-2bc)$

따라서 $M=b^2+c^2+2bc$, $N=b^2+c^2-2bc$ 또는

$M=b^2+c^2-2bc$, $N=b^2+c^2+2bc$

이므로 M, N의 모든 계수의 합은 4이다.

35 답 119

$g(x)=x^4+ax^2+b$라 하면 $g(x)$는 짝수차수인 항만으로 이루어져 있으므로 $g(x)$가 $x-\alpha$를 인수로 가지면 $x+\alpha$도 인수로 갖는다.

$g(x)=x^4+ax^2+b=(x^2-2x-1)f(x)$에서

$x^2-2x-1=(x-p)(x-q)$ (p, q는 상수) … ㉠

라 하면 $g(x)$가 $x-p$, $x-q$의 인수를 가지므로

$x+p$, $x+q$도 인수로 갖는다.

$\therefore f(x)=(x+p)(x+q)=x^2+(p+q)x+pq$

㉠에서 $p+q=2$, $pq=-1$이므로 $f(x)=x^2+2x-1$

$\therefore f(10)=10^2+20-1=119$

[다른 풀이]

x^4의 계수가 1이므로 $f(x)=x^2+px+q$(p, q는 상수)라 하면

$x^4+ax^2+b=(x^2-2x-1)(x^2+px+q)$

x^3의 계수를 비교하면 $0=p-2$ $\quad\therefore p=2$

x의 계수를 비교하면 $0=-2q-p$

$-2q-2=0$ $\quad\therefore q=-1$

따라서 $f(x)=x^2+2x-1$이므로

$f(10)=10^2+20-1=119$

36 답 ④

x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2+3xy+2y^2-x-3y-2$

$=x^2+(3y-1)x+2y^2-3y-2$

$=x^2+(3y-1)x+(2y+1)(y-2)$

$=(x+2y+1)(x+y-2)$

따라서 두 인수의 합은

$(x+2y+1)+(x+y-2)=2x+3y-1$이므로

$a=2$, $b=3$, $c=-1$

$\therefore a+b+c=2+3-1=4$

37 답 ②

$a^2(b+c)+b^2(a-c)-c^2(a+b)=0$에서

$(b+c)a^2+(b^2-c^2)a-b^2c-bc^2=0$

$(b+c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b+c)=0$

$(b+c)\{a^2+(b-c)a-bc\}=0$

$(b+c)(a+b)(a-c)=0$

$\therefore a-c=0$ ($\because b+c>0$, $a+b>0$)

따라서 이 삼각형은 $a=c$인 이등변삼각형이다.

38 답 10

조건 (가)에서 $(a+c)^2-(a-c)^2=4ac=80$ $\quad\therefore ac=20$

조건 (나)의 좌변을 인수분해하면

$a^3+a^2b-ab^2+ac^2+bc^2-b^3$

$=a^2(a+b)-b^2(a+b)+c^2(a+b)$

$=(a+b)(a^2-b^2+c^2)=0$

a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a+b\neq0$이고

$a^2-b^2+c^2=0$ $\quad\therefore a^2+c^2=b^2$

따라서 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이므로

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}ac=\frac{1}{2}\times20=10$

39 답 4

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2+xy-2y^2+ax-y+3$

$=x^2+(y+a)x-(2y^2+y-3)$

$=x^2+(y+a)x-(2y+3)(y-1)$

이 식이 x, y에 대한 일차식으로 인수분해되기 위한 x의 계수는

$$\begin{array}{ccc} x & \diagdown\!\!\!\!\diagup & 2y+3 \\ x & & -(y-1) \\ \hline & & y+4 \end{array}$$

따라서 $y+a=y+4$이므로 $a=4$

40 답 10

$f(x)=x^3-x^2y-5xy^2-3y^3$이라 하면

$f(-y)=-y^3-y^3+5y^3-3y^3=0$이므로

$f(x)$는 $x+y$를 인수로 갖는다.

조립제법에 의하여

$$\begin{array}{r|rrrr} -y & 1 & -y & -5y^2 & -3y^3 \\ & & -y & 2y^2 & 3y^3 \\ \hline & 1 & -2y & -3y^2 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-x^2y-5xy^2-3y^3$

$=(x+y)(x^2-2xy-3y^2)$

$=(x+y)(x+y)(x-3y)$

$=(x+y)^2(x-3y)$

따라서 $a=1$, $b=-3$이므로

$a^2+b^2=1^2+(-3)^2=10$

41 답 244

$t=16$이라 하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ & & -1 & 2 & -3 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$3859=16^3-16^2+16+3$

$=t^3-t^2+t+3$

$=(t+1)(t^2-2t+3)$

$=(16+1)(16^2-2\times16+3)=17\times227$

$\therefore a+b=17+227=244$

42 답 100

밑면인 정사각형의 한 변의 길이를 $n+a$, 높이를 $n+b$라 하면 부피는 $(n+a)^2(n+b)$이다. 한편, $f(n)=n^3+7n^2+16n+12$이라 하면 $f(-2)=(-8)+28-32+12=0$이므로 $f(n)$은 $n+2$를 인수로 갖는다. 조립제법에 의하여

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 7 & 16 & 12 \\ & & -2 & -10 & -12 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(n)$

$=(n+2)(n^2+5n+6)$

$=(n+2)(n+2)(n+3)$

$=(n+2)^2(n+3)$

즉, 이 직육면체는 밑면이 한 변의 길이가 $n+2$인 정사각형이고 높이가 $n+3$인 직육면체이다.

따라서 모든 모서리의 길이의 합 $l(n)$은

$l(n)=4\{(n+2)+(n+2)+(n+3)\}=4(3n+7)$

$\therefore l(6)=4\times(18+7)=100$

43 답 ④

$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$에서

(i) $x-1$이 공통인수일 때,

다항식 $x^3+a^2x^2+2ax-16$이 $x-1$을 인수로 가지므로 인수정리에 의하여 $a^2+2a-15=0$, $(a-3)(a+5)=0$

$\therefore a=3$ 또는 $a=-5$

(ii) $x+2$가 공통인수일 때,

다항식 $x^3+a^2x^2+2ax-16$이 $x+2$를 인수로 가지므로 인수정리에 의하여 $4a^2-4a-24=0$, $4(a-3)(a+2)=0$

$\therefore a=3$ 또는 $a=-2$

(i), (ii)에서 $a=3$ 또는 $a=-5$ 또는 $a=-2$

이때, $a=3$이면 다항식 $x^3+a^2x^2+2ax-16$이 $x-1$, $x+2$를 모두 인수로 가지므로 이차식 $(x-1)(x+2)$가 공통인수가 되어 성립하지 않는다.

따라서 $a=-5$ 또는 $a=-2$이므로 모든 상수 a의 값의 합은

$(-5)+(-2)=-7$

44 답 111

$f(x)$, $g(x)$ 모두 $G(x)$를 인수로 가지므로 두 다항식 A, B에 대하여 $f(x)=AG(x)$, $g(x)=BG(x)$라 하자.

이때, $xf(x)-g(x)=(Ax-B)G(x)$이므로

다항식 $xf(x)-g(x)$도 $G(x)$를 인수로 갖는다.

$xf(x)-g(x)=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

그런데 $f(x)$, $g(x)$ 모두 $x-1$을 인수로 갖지 않으므로

$G(x)=x^2+x+1$이다.

$\therefore G(10)=10^2+10+1=111$

[다른 풀이]

다항식 $f(x)$는 조립제법에 의하여

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ & & -1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(x^2+x+1)$

$g(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$

$=x^4+x^3+(x^2+x^2)+x+1$

$=(x^4+x^3+x^2)+(x^2+x+1)$

$=x^2(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$

$=(x^2+1)(x^2+x+1)$

따라서 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$의 공통인수 $G(x)$는

$G(x)=x^2+x+1$

$\therefore G(10)=10^2+10+1=111$

45 답 3

일차식의 공통인수를 $G(x)$라 하면

$f(x)=AG(x)$, $g(x)=BG(x)$ (A, B는 일차식)

로 나타낼 수 있다.

이때, $2f(x)-g(x)=(2A-B)G(x)$이므로

$2f(x)-g(x)$도 $G(x)$를 인수로 갖는다.

$$2f(x)-g(x)=(2a+8)x-(4+a)$$
$$=(a+4)(2x-1)$$

$\therefore G(x)=2x-1$

따라서 $f(x)$가 $2x-1$의 인수를 가지므로 인수정리에 의하여

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a-2=0 \qquad \therefore a=3$

일등급 UP

*** 공통인수를 구할 때 조건을 주의**

$a=3$이면

$f(x)=2x^2+3x-2=(2x-1)(x+2)$,

$g(x)=4x^2-8x+3=(2x-1)(2x-3)$

으로 $f(x)$와 $g(x)$는 일차식인 $2x-1$을 공통인수로 갖는다.

한편, $a=-4$이면

$f(x)=2x^2-4x-2=2(x^2-2x-1)$,

$g(x)=4x^2-8x-4=4(x^2-2x-1)$

이 되어 이차식의 공통인수를 갖는다.

46 답 6

x^6을 $x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$x^6=(x-2)Q(x)+R$ (R는 상수) ---------- ⓐ

양변에 $x=2$를 대입하면 $R=2^6$이므로

$$(x-2)Q(x)=x^6-2^6=(x^3-2^3)(x^3+2^3)$$
$$=(x-2)(x^2+2x+4)(x^3+2^3)$$

$\therefore Q(x)=(x^2+2x+4)(x^3+2^3)$ ---------- ⓑ

따라서 나머지정리에 의하여 $Q(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는

$Q(2)=(4+4+4)(2^3+2^3)=3\times2^2\times2\times2^3=3\times2^6$

$\therefore k=6$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ x^6을 $x-2$로 나눈 식을 세운다.	[10%]
ⓑ 몫 $Q(x)$의 식을 구한다.	[50%]
ⓒ 나머지정리를 이용하여 k의 값을 구한다.	[40%]

47 답 230

주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(\text{주어진 식})=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+(b^2c-bc^2)$$
$$=(b-c)a^2-(b-c)(b+c)a+bc(b-c)$$
$$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$$
$$=(b-c)(a-b)(a-c)$$
$$=(b-a)(b-c)(c-a)$$ ---------- ⓐ

한편, 두 식 $b-c=5+\sqrt{2}$, $c-a=5-\sqrt{2}$를 더하면

$b-a=(5+\sqrt{2})+(5-\sqrt{2})=10$ ---------- ⓑ

따라서 인수분해한 식에 각각의 값을 대입하면

$10\times(5+\sqrt{2})\times(5-\sqrt{2})=230$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 주어진 식을 인수분해한다.	[50%]
ⓑ $b-a$의 값을 구한다.	[30%]
ⓒ 주어진 식의 값을 구한다.	[20%]

48 답 3

$x^4+kx^2+1=(x^2+mx+1)(x^2+nx+1)$ (m, n은 정수)로 인수분해되므로

$$x^4+kx^2+1=(x^2+mx+1)(x^2+nx+1)$$
$$=x^4+(m+n)x^3+(mn+2)x^2+(m+n)x+1$$

이 식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$m+n=0$, $mn+2=k$ ---------- ⓐ

$n=-m$을 $mn+2=k$에 대입하면 $k=2-m^2$ ⋯ ㉠

이때, k는 자연수이므로 $k=2-m^2\geq1$에서 $m^2\leq1$

$\therefore m=0, \pm1$ ---------- ⓑ

이것을 ㉠에 각각 대입하면 $k=2$ 또는 $k=1$

따라서 모든 자연수 k의 값의 합은 $2+1=3$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 주어진 식을 두 이차식으로 인수분해하여 관계식을 세운다.	[40%]
ⓑ 관계식의 미지수의 값을 구한다.	[40%]
ⓒ 구한 미지수의 값에 따른 k의 값을 구하여 그 합을 구한다.	[20%]

49 답 ①

$218=n$이라 하면

$218^3+1=n^3+1=(n+1)(n^2-n+1)$

$$217^3-1=(n-1)^3-1=\{(n-1)-1\}\{(n-1)^2+(n-1)+1\}$$
$$=(n-2)(n^2-n+1)$$

$$\therefore \frac{218^3+1}{217^3-1}=\frac{(n+1)(n^2-n+1)}{(n-2)(n^2-n+1)}=\frac{n+1}{n-2}$$
$$=\frac{218+1}{218-2}=\frac{219}{216}=\frac{73}{72}$$

[다른 풀이]

$217=n$이라 하면

$$218^3+1=(n+1)^3+1=\{(n+1)+1\}\{(n+1)^2-(n+1)+1\}$$
$$=(n+2)(n^2+n+1)$$

$217^3-1=n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$

$$\therefore \frac{218^3+1}{217^3-1}=\frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n-1)(n^2+n+1)}=\frac{n+2}{n-1}$$
$$=\frac{217+2}{217-1}=\frac{219}{216}$$
$$=\frac{73}{72}$$

50 답 ②

주어진 식을 b에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(a^2+2a+1)b+a^2+2a+1=(a+1)^2b+(a+1)^2$$
$$=(a+1)^2(b+1)$$

이때, 이 식의 값이 $245=7^2\times5$이므로

$(a+1)^2(b+1)=7^2\times5$

한편, a, b는 자연수이므로 $a+1=7$, $b+1=5$

따라서 $a=6$, $b=4$이므로 $a+b=10$

51 답 ③

다항식

$x^4-2x^3+2x^2-x-6$

$=(x+1)(x+a)(x^2+bx+c)$

로 인수분해되므로 조립제법에 의하여

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & -2 & 2 & -1 & -6 \\
 & & -1 & 3 & -5 & 6 \\
\hline
2 & 1 & -3 & 5 & -6 & \boxed{0} \\
 & & 2 & -2 & 6 & \\
\hline
 & 1 & -1 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$x^4-2x^3+2x^2-x-6$

$=(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$

따라서 $a=-2$, $b=-1$, $c=3$이므로

$a+b+c=0$

52 답 ②

직육면체의 부피는 가로, 세로의 길이와 높이의 곱이므로 부피를 $f(x)=x^3+ax-6$이라 하면 $f(x)$는 $x+2$를 인수로 갖는다.

이때, 인수정리에 의하여 $f(-2)=0$이므로

$(-2)^3-2a-6=0$

$\therefore a=-7$

조립제법에 의하여

$$\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 1 & 0 & -7 & -6 \\
 & & -2 & 4 & 6 \\
\hline
 & 1 & -2 & -3 & \boxed{0}
\end{array}$$

$f(x)=(x^3-7x-6)=(x+2)(x^2-2x-3)$

$\quad=(x+2)(x+1)(x-3)$

따라서 모든 모서리의 길이의 합은

$4\{(x+2)+(x+1)+(x-3)\}=12x$

53 답 ⑤

$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$을 이용하여 x에 대한 항등식을 정리하면

$\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$

$=\{f(x)+g(x)\}[\{f(x)\}^2-f(x)g(x)+\{g(x)\}^2]$

$=(2x^2-x-1)h(x)$

$f(x)+g(x)=(x^2+x)+(x^2-2x-1)=2x^2-x-1$이므로

$h(x)=\{f(x)\}^2-f(x)g(x)+\{g(x)\}^2 \cdots$ ㉠

이때, 나머지정리에 의하여 $h(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $h(1)$이다.

따라서 $f(1)=2$, $g(1)=-2$이므로 ㉠에 의하여

$h(1)=2^2-2\times(-2)+(-2)^2=12$

54 답 ③

좌변을 a에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+3bc+c^2)a+bc(b+c)-abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

즉, $(b+c)(a+b)(a+c)=210$

이때, $1<a<b<c$에서

$a\ge2$, $b\ge3$, $c\ge4$이므로 $5\le a+b<a+c<b+c$

따라서 210을 5 이상의 세 자연수의 곱으로 나타내어야 한다.

210을 소인수분해하면

$210=2\times3\times5\times7$이므로 가능한 경우는

$a+b=5$, $a+c=6$, $b+c=7$이다.

세 식을 모두 더하면

$2(a+b+c)=18$

$\therefore a+b+c=9$

55 답 8

상수 p, q, r, s에 대하여

$x^2+ax-y^2+by-3=(x+py+q)(x+ry+s)$라 할 때,

xy의 계수와 y^2의 계수를 비교하면

$0=p+r$, $pr=-1$

두 식을 연립하여 풀면

$p=1$, $r=-1$ 또는 $p=-1$, $r=1$

$\therefore x^2+ax-y^2+by-3=(x+y+q)(x-y+s)$

또한, x의 계수와 y의 계수를 비교하면

$a=s+q$, $b=s-q$

두 식을 연립하여 풀면

$s=\dfrac{a+b}{2}$, $q=\dfrac{a-b}{2}$

한편, 상수항을 비교하면

$qs=-3$이므로

$\dfrac{a-b}{2}\times\dfrac{a+b}{2}=-3$

$\therefore (b+a)(b-a)=12$

이때, a, b는 자연수이므로 $b-a$, $b+a$는 12의 양의 약수이면서 둘 다 짝수이거나 둘 다 홀수이다.

따라서 $b-a<b+a$이므로

$b-a=2$, $b+a=6$

두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=4$

$\therefore ab=8$

[다른 풀이]

$x^2+ax-y^2+by-3=x^2+ax-(y^2-by+3)$에서

y^2-by+3은 $(y-1)(y-3)$ 또는 $(y+1)(y+3)$으로 인수분해 되므로 $b=4$ 또는 $b=-4$

그런데 b는 자연수이므로 $b=4$

이때, $x^2+ax-(y^2-4y+3)=x^2+ax-(y-1)(y-3)$에서

(i) (주어진 식) $=\{x-(y-1)\}\{x+(y-3)\}$
$=x^2-2x-(y-1)(y-3)$

$\therefore a=-2$

그런데 a는 자연수이므로 성립하지 않는다.

(ii) (주어진 식) $=\{x+(y-1)\}\{x-(y-3)\}$
$=x^2+2x-(y-1)(y-3)$

$\therefore a=2$

$\therefore ab=8$

56 답 6

$A^3-B^3=(A-B)^3+3AB(A-B)$를 이용하면

$(3x-1)^3-(2x+1)^3=(x-2)^3+3(3x-1)(2x+1)(x-2)$

$\therefore (3x-1)^3-(2x+1)^3-(x-2)^3$
$=(x-2)^3+3(3x-1)(2x+1)(x-2)-(x-2)^3$
$=3(3x-1)(2x+1)(x-2)$

따라서 $a=-1$, $b=1$, $c=-2$이므로

$a^2+b^2+c^2=6$

57 답 2

$x^2-yz=1$ ⋯ ㉠

$y^2-zx=1$ ⋯ ㉡

$z^2-xy=1$ ⋯ ㉢

㉠−㉡을 하면 $x^2-y^2-yz+zx=0$이므로

$(x-y)(x+y+z)=0$

$\therefore x+y+z=0$ ($\because x\neq y$)

㉠+㉡+㉢을 하면 $x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)=3$이므로

$(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)=3$

$\therefore xy+yz+zx=-1$

$\therefore x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=0+2=2$

58 답 ②

$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$, $g(x)=3x^4+2x^3+x^2+2x+3$이라 하고 $f(x)$, $g(x)$의 공통인수를 $G(x)$라 하면 두 다항식 A, B에 대하여 $f(x)=AG(x)$, $g(x)=BG(x)$로 나타낼 수 있다.

이때, $g(x)-3f(x)=(B-3A)G(x)$이므로

다항식 $g(x)-3f(x)$도 $G(x)$를 인수로 갖는다.

$g(x)-3f(x)=8x^3-8x^2+8x=8x(x^2-x+1)$

그런데 $f(x)$, $g(x)$ 모두 x를 인수로 갖지 않으므로 공통인수는 x^2-x+1이다.

[다른 풀이]

$x^4-2x^3+3x^2-2x+1$
$=(x^4-x^3+x^2)-(x^3-x^2+x)+(x^2-x+1)$
$=x^2(x^2-x+1)-x(x^2-x+1)+(x^2-x+1)$
$=(x^2-x+1)^2$

$$\begin{aligned}3x^4+2x^3+x^2+2x+3&=x^2\left(3x^2+2x+1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\\&=x^2\left\{3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1\right\}\\&=x^2\left\{3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-5\right\}\\&=x^2\left\{3\left(x+\frac{1}{x}\right)+5\right\}\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\right\}\\&=x\left(3x+\frac{3}{x}+5\right)\times x\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\\&=(3x^2+5x+3)(x^2-x+1)\end{aligned}$$

따라서 두 다항식의 공통인수는 x^2-x+1이다.

일등급 UP

* 좌우대칭인 사차다항식의 인수분해

주어진 두 사차다항식은 모두 계수가 좌우대칭인 꼴의 식이다. 이와 같이 계수가 대칭인 사차다항식의 인수분해는

① 중간의 몇 개의 항을 적당히 쪼개거나,

② x^2으로 묶어낸 후 $x+\frac{1}{x}$의 이차식으로 나타내어 인수분해한다.

59 답 17

$f(x)=x^3+5x^2+ax$, $g(x)=x^3+6x^2+bx+6$이라 하면

$f(x)=x(x^2+5x+a)$에서 $f(x)$는 일차식 x를 인수로 갖지만 $g(x)$는 x를 인수로 갖지 않으므로 x는 공통인수가 아니다.

즉, 공통인수는 x^2+5x+a이다.

이때, 상수 p에 대하여

$g(x)=x^3+6x^2+bx+6=(x^2+5x+a)(x+p)$라 하면

$x^3+6x^2+bx+6=x^3+(p+5)x^2+(5p+a)x+ap$

양변의 계수를 비교하면 $6=p+5$, $b=5p+a$, $6=ap$

따라서 $p=1$, $a=6$, $b=11$이므로

$a+b=6+11=17$

[다른 풀이]

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$의 공통인수를 $G(x)$라 하면

두 다항식 A, B에 대하여 $f(x)=AG(x)$, $g(x)=BG(x)$로 나타낼 수 있다. 이때, $g(x)-f(x)=(B-A)G(x)$이므로

다항식 $g(x)-f(x)$도 $G(x)$를 인수로 갖는다.

$g(x)-f(x)=x^2+(b-a)x+6$

그런데 $G(x)$는 이차식이므로 $G(x)=x^2+(b-a)x+6$

즉, $f(x)=x(x^2+5x+a)$에서 $x^2+5x+a=x^2+(b-a)x+6$

따라서 양변의 계수를 비교하면

$5=b-a$, $a=6$이므로 $a=6$, $b=11$

$\therefore a+b=6+11=17$

Ⅱ 방정식과 부등식

04 복소수

문제편 45P

01 답 ②

$z=\frac{a+2i}{1-2i}=\frac{(a+2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$

$=\frac{(a-4)+(2+2a)i}{5}$

$=\frac{a-4}{5}+\frac{2+2a}{5}i$

복소수 z의 실수부분과 허수부분이 같으므로

$\frac{a-4}{5}=\frac{2+2a}{5}$, $a-4=2+2a$

$\therefore a=-6$

02 답 ④

$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$

$(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$\therefore (1+i)^2+(1-i)^2+\frac{1+i}{1-i}=2i+(-2i)+i=i$

03 답 9

$(2+i)x+\frac{y+i}{1+2i}=4-2i$의 양변에 $1+2i$를 곱하면

$(2+i)(1+2i)x+y+i=(4-2i)(1+2i)$

$5xi+y+i=8+6i$

$y+(5x+1)i=8+6i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$y=8$, $5x+1=6$

따라서 $x=1$, $y=8$이므로

$x+y=1+8=9$

04 답 29

$\beta i=(1-2i)i=2+i$이므로

$\alpha+\beta i=(3+i)+(2+i)=5+2i$

$\overline{\alpha}-\overline{\beta}i=\overline{\alpha}+\overline{\beta i}=\overline{\alpha+\beta i}=5-2i$

$\therefore (\alpha+\beta i)(\overline{\alpha}-\overline{\beta}i)=(5+2i)(5-2i)$

$=25+4=29$

05 답 3

$(\sqrt{3}+i)^2=2+2\sqrt{3}i$

$(\sqrt{3}+i)^3=(2+2\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+i)=8i$

$(\sqrt{3}+i)^9=(8i)^3=-2^9i$

$(\sqrt{3}+i)^{10}=(\sqrt{3}+i)^9(\sqrt{3}+i)$

$=-2^9i\times(\sqrt{3}+i)$

$=2^9-2^9\sqrt{3}i$

따라서 $x=2^9$, $y=-2^9\sqrt{3}$이므로

$\frac{y}{x}=\frac{-2^9\sqrt{3}}{2^9}=-\sqrt{3}$

$\therefore \left(\frac{y}{x}\right)^2=(-\sqrt{3})^2=3$

06 답 ④

$z=1+2i$에서 $z-1=2i$

양변을 제곱하여 정리하면

$z^2-2z+1=-4$, $z^2-2z+5=0$

$\therefore 2z^3-4z^2+6z+8=2z(z^2-2z+5)-4z+8$

$=0-4(1+2i)+8$

$=4-8i$

07 답 ②

$\sqrt{x-1}\sqrt{y-2}=-\sqrt{(x-1)(y-2)}$이므로

$x-1\le0$, $y-2\le0$

$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{y+1}}=-\sqrt{\frac{x+1}{y+1}}$이므로

$y+1<0$, $x+1\ge0$

$\therefore -1\le x\le1$, $y<-1$

$\therefore |x-2|+(\sqrt{x})^2-|y-3|+\sqrt{y^2}$

$=|x-2|+x-|y-3|+|y|$

$=2-x+x-(3-y)-y=-1$

08 답 ④

ㄱ. 【반례】 $\alpha=1$, $\beta=2$이면 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$는 모두 실수이지만 $\beta\neq\overline{\alpha}$이다. (거짓)

ㄴ. $\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\overline{\alpha+\beta}=\overline{0}=0$ (참)

ㄷ. $\alpha\overline{\beta}=1$이면 $\overline{\alpha\overline{\beta}}=\overline{\alpha}\beta=1$

$\overline{\alpha}+\frac{1}{\alpha}-\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=0$

$\therefore \overline{\alpha}+\frac{1}{\alpha}=\beta+\frac{1}{\beta}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

09 답 ①

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$이고

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$이므로

$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)=f(-i)+f(i)=\frac{1-i}{1+i}+\frac{1+i}{1-i}$

$=-i+i=0$

10 답 ④

$i+2i^2+3i^3+4i^4+\cdots+100i^{100}$

$=(i+2i^2+3i^3+4i^4)+(5i^5+6i^6+7i^7+8i^8)+$

$\cdots+(97i^{97}+98i^{98}+99i^{99}+100i^{100})$

$=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)+$

$\cdots+(97i-98-99i+100)$

$=\underbrace{(2-2i)+(2-2i)+\cdots+(2-2i)}_{25\text{개}}$

$=25\times(2-2i)=50-50i$

11 답 4

$\dfrac{b+ai}{b-ai}=\dfrac{(b+ai)i}{(b-ai)i}=\dfrac{-a+bi}{a+bi}=-\dfrac{a-bi}{a+bi}$이므로

$\dfrac{a+bi}{a-bi}+\dfrac{b+ai}{b-ai}=\dfrac{a+bi}{a-bi}-\dfrac{a-bi}{a+bi}$

$=\dfrac{(a+bi)^2-(a-bi)^2}{(a-bi)(a+bi)}$

$=\dfrac{4abi}{a^2+b^2}=i$

에서 $a^2+b^2=4ab$

$\therefore \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}=4$

12 답 ③

주어진 등식의 양변에 $(1+i)(1-i)$를 곱하면

$x(1-i)+y(1+i)=2(2-i)$

$(x+y)+(-x+y)i=4-2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $x+y=4,\ -x+y=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3,\ y=1$ $\quad\therefore xy=3$

13 답 1

$z^2=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi=i$에서

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=0,\ 2ab=1$

$a^2-b^2=0$에서 $a=b$ 또는 $a=-b$

(i) $a=b$이면 $2ab=1$에서 $2a^2=1$

$\therefore a^2+b^2=2a^2=1$

(ii) $a=-b$이면 $2ab=1$에서 $-2a^2=1$을 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $a^2+b^2=1$

14 답 ②

$\alpha\odot\beta=\alpha\beta+(\alpha+\beta)i$이므로 $z=x+yi$ (x, y는 실수)라 하면

$(1-i)\odot(x+yi)=(1-i)(x+yi)+(1-i+x+yi)i$

$=x+y+(y-x)i+(1-y)+(x+1)i$

$=(x+1)+(y+1)i=1-i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+1=1,\ y+1=-1$

따라서 $x=0,\ y=-2$이므로 $z=-2i$

15 답 ③

$\alpha^2-\overline{\alpha}+3=0$에서 $\alpha^2-\overline{\alpha}=-3$

$\overline{\alpha^2-\overline{\alpha}}=\overline{-3}$에서 $\overline{\alpha^2}-\alpha=-3$이므로 $(\overline{\alpha})^2-\alpha=-3$

$\therefore (\overline{\alpha})^2-\alpha+9=-3+9=6$

16 답 ③

$z=x+yi$ (x, y는 실수)이므로

$\overline{z-zi}=\overline{x+yi-(x+yi)i}$

$=\overline{x+yi}-\overline{(x+yi)}\times\overline{i}$

$=x-yi-(x-yi)\times(-i)$

$=x-yi+xi+y$

$=x+y+(x-y)i=2+i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $x+y=2,\ x-y=1$

연립하여 풀면 $x=\dfrac{3}{2},\ y=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x^2+y^2=\dfrac{9}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{10}{4}=\dfrac{5}{2}$

[다른 풀이]

$\overline{z-zi}=2+i$에서

$\overline{\overline{z-zi}}=\overline{2+i}$

$z-zi=2-i$

$\therefore z=\dfrac{2-i}{1-i}=\dfrac{(2-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{3+i}{2}$

따라서 $x=\dfrac{3}{2},\ y=\dfrac{1}{2}$이므로 $x^2+y^2=\dfrac{5}{2}$

17 답 44

$z=a+bi$라 하면 $\overline{(a+bi)^2}=\overline{z^2}=(\overline{z})^2$이므로 $(\overline{z})^2=3+i$

이때, $(a-bi)^4=(\overline{z})^4=(3+i)^2=8+6i$이므로

$8+6i=\dfrac{c+di}{3+i}$

$c+di=(8+6i)(3+i)=18+26i$

$\therefore c+d=18+26=44$

18 답 ⑤

$i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1,\ i^5=i,\ \cdots$이므로

$i+i^2+i^3+i^4=0$

따라서 $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=i^{n-1}(i+i^2+i^3+i^4)=0$이다.

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(99)$

$=i+i^2+i^2+i^3+i^3+i^4+\cdots+i^{99}+i^{100}$

$=2(i+i^2+i^3+\cdots+i^{100})-i-i^{100}$

$=-i-(i^4)^{25}=-1-i$

Ⅱ-04
복소수

19 답 ②

$z_1=1+i$

$z_2=(1-i)z_1=(1-i)(1+i)$

$z_3=(1-i)z_2=(1-i)^2(1+i)$

$z_4=(1-i)z_3=(1-i)^3(1+i)$

$\vdots$

따라서 $z_{50}=(1-i)^{49}(1+i)$임을 알 수 있다.

$(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$이므로

$$\begin{aligned}z_{50}&=(1-i)^{49}(1+i)\\&=(1-i)^{48}(1-i)(1+i)\\&=\{(1-i)^2\}^{24}\times(1-i^2)\\&=(-2i)^{24}\times 2\\&=2^{24}\times 2=2^{25}\end{aligned}$$

20 답 25

$(1+i)^2=1+2i-1=2i$에서

$(1+i)^{2n}=(2i)^n=2^ni^n$

즉, $2^ni^n=2^ni$이므로 $i^n=i$

$\therefore n=4k+1$ (k는 음이 아닌 정수)

$1\le n\le 100$에서 $1\le 4k+1\le 100$

$0\le k\le \dfrac{99}{4}=24.75$

$\therefore k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 24$

따라서 자연수 n의 개수는 25이다.

21 답 ②

$xy<0$에서 x와 y는 서로 다른 부호이고,

$x-y<0$에서 $x<y$이므로 $x<0,\ y>0$

① $\sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y}$

② $\sqrt{\dfrac{y}{x^2}}=\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^2}}=\dfrac{\sqrt{y}}{|x|}=-\dfrac{\sqrt{y}}{x}$

③ $\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

④ $\sqrt{x^2y^2}=|xy|=-xy$

⑤ $\sqrt{\dfrac{y}{x}}=-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

22 답 ⑤

① $\sqrt{-2}\sqrt{-2}=-\sqrt{(-2)(-2)}=-\sqrt{4}=-2$

② $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}=-\sqrt{\dfrac{8}{-2}}=-\sqrt{-4}=-\sqrt{4}i=-2i$

③ $(-\sqrt{-3})^2=(\sqrt{-3})^2=-3$

④ $(\sqrt{-5})^3=\sqrt{-5}\sqrt{-5}\sqrt{-5}=\sqrt{5}i\sqrt{5}i\sqrt{5}i$
$\qquad=5\sqrt{5}i^3=-5\sqrt{5}i$

⑤ $\sqrt{-3}\sqrt{-9}=-\sqrt{(-3)(-9)}=-\sqrt{27}=-3\sqrt{3}$

23 답 ④

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$에서 $a>0,\ b<0$ ($\because a\neq 0$)

ㄱ. $-a<0,\ b<0$이므로 $\sqrt{-a}\sqrt{b}=-\sqrt{-ab}$ (거짓)

ㄴ. $a>0,\ -b>0$이므로 $\sqrt{a}\sqrt{-b}=\sqrt{-ab}$ (참)

ㄷ. $-a<0,\ -b>0$이므로 $\sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{ab}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

24 답 ①

ㄱ. $z\overline{z}=0$이면 $z=0$ 또는 $\overline{z}=0$이다.
이때, 0의 켤레복소수는 0이므로 $z=\overline{z}=0$ (참)

ㄴ. $z+\overline{z}=0$이면 z는 순허수 또는 $z=0$이다.
$\therefore z^2\le 0$ (거짓)

ㄷ. $z^2+\overline{z}^2=0$이면 z^2은 순허수 또는 $z^2=0$이다.
이때, z^2이 순허수이면 $z\neq 0$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

25 답 ①

$z=(x^2-x-2)+(x^2-3x+2)i$의 제곱이 음의 실수이므로

z는 순허수이다.

즉, $x^2-x-2=0$이고 $x^2-3x+2\neq 0$이므로

$x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$ $\qquad\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

이때, $x=2$이면 $x^2-3x+2=0$이므로 $z=0$이 되어 모순이 된다.

$\therefore x=-1$

26 답 52

조건 (가)에서 $z\overline{z}=(x-y+2)^2+(x+y-8)^2=4$ … ㉠

조건 (나)에서 z^2이 실수이려면 z는 실수이거나 순허수이다.

즉, $x-y+2=0$ 또는 $x+y-8=0$

(i) $x-y+2=0$ … ㉡ 일 때, $y=x+2$를 ㉠에 대입하면
$0+(2x-6)^2=4,\ 4\{(x-3)^2-1\}=0$
$4(x-2)(x-4)=0$ $\qquad\therefore x=2$ 또는 $x=4$
이 값을 ㉡에 대입하면 $y=4$ 또는 $y=6$

(ii) $x+y-8=0$일 때, $-y=x-8$을 ㉠에 대입하면
$(2x-6)^2+0=4$가 되어 (i)과 같아진다.

따라서 x^2+y^2의 최댓값은 $x=4,\ y=6$일 때,

$4^2+6^2=52$이다.

일등급 UP

＊복소수의 제곱이 실수이기 위한 조건

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여
$z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$이므로 z^2이 실수이기 위한 조건은
$2ab=0$, 즉 $a=0$ 또는 $b=0$
① $a=0,\ b\neq 0$이면 z^2은 음수
② $a\neq 0,\ b=0$이면 z^2은 양수
③ $a=0,\ b=0$이면 $z^2=0$

27 답 ②

$x=\frac{2i}{i+1}=\frac{2i(-i+1)}{(i+1)(-i+1)}=\frac{2(1+i)}{2}=1+i$

$y=\frac{2i}{i-1}=\frac{2i(-i-1)}{(i-1)(-i-1)}=\frac{2(1-i)}{2}=1-i$

ㄱ. $x+y=(1+i)+(1-i)=2$ (참)

ㄴ. $xy=(1+i)(1-i)=2$이므로

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=2^2-2\times2=0$ (참)

ㄷ. $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=2^3-3\times2\times2=-4$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

28 답 ②

$f(a,\ b)=\frac{b-ai}{a+bi}=\frac{(b-ai)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{-(a^2+b^2)i}{a^2+b^2}=-i$

따라서 $f(1,\ 2)=f(3,\ 4)=\cdots=f(9,\ 10)=-i$이므로

$f(1,\ 2)+f(3,\ 4)+f(5,\ 6)+f(7,\ 8)+f(9,\ 10)=5\times(-i)$

$=-5i$

29 답 ④

$z=\frac{-1+2i}{1-i}=\frac{(-1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-3+i}{2}$에서

$2z+3=i$

양변을 제곱하여 정리하면

$2z^2+6z+5=0$

$\therefore 2z^3+6z^2+7z+3=z(2z^2+6z+5)+2z+3$

$=0+(2z+3)=i$

30 답 5

$\frac{1}{x+yi}=a+bi$에서

$x+yi=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a-bi}{5}=\frac{a}{5}-\frac{b}{5}i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $x=\frac{a}{5},\ y=-\frac{b}{5}$

$x^2+y^2=\frac{a^2+(-b)^2}{5^2}=\frac{5}{5^2}=\frac{1}{5}$

$\therefore \frac{1}{x^2+y^2}=5$

[다른 풀이]

$\frac{1}{x+yi}=a+bi$에서 $1=(a+bi)(x+yi)$ ⋯ ㉠

또한, $\overline{1}=\overline{(a+bi)(x+yi)}$이므로 $1=(a-bi)(x-yi)$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 변끼리 곱하면

$1=(a+bi)(x+yi)(a-bi)(x-yi)$

$=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$

$=5(x^2+y^2)$

$\therefore \frac{1}{x^2+y^2}=5$

31 답 3

$z=a+bi$에 대하여

$iz=i(a+bi)=-b+ai=-\hat{z}$이므로

$\hat{z}=-iz$ ⋯ ㉠

한편, $(m-2i)z=(n+i)\hat{z}$에 ㉠을 대입하면

$(m-2i)z=-i(n+i)z=(1-ni)z$

이때, $z\neq0$이므로 양변을 z로 나누면

$m-2i=1-ni$

$m,\ n$은 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$m=1,\ n=2$ $\therefore m+n=3$

32 답 ⑤

실수 $a,\ b$에 대하여 $z=a+bi$라 하면

조건 (가)에서 $(z-\overline{z})i=\{a+bi-(a-bi)\}i=-2b=-2$

$\therefore b=1$

조건 (나)에서

$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=a^2+1^2=5$ $\therefore a^2=4$

$\therefore (z-2i)(\overline{z-2i})=\{a+(b-2)i\}\{a-(b-2)i\}$

$=a^2+(b-2)^2=4+1=5$

33 답 ②

$z=a+bi$ ($a,\ b$는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이다.

$z-\overline{z}=2i$에서 $2bi=2i$ $\therefore b=1$ ⋯ ㉠

$\frac{\overline{z}}{z}=-i$에서 $\overline{z}=-iz$

$a-bi=-i(a+bi)=b-ai$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=b$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=b=1$ $\therefore z=1+i$

$\therefore z\overline{z}=(1+i)(1-i)=1+1=2$

[다른 풀이]

$\frac{\overline{z}}{z}=-i$에서 $\overline{z}=-iz$

$z-\overline{z}=2i$에 대입하면 $z+iz=2i$

$z(1+i)=2i$

$\therefore z=\frac{2i}{1+i}=\frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1+i$

$\therefore z\overline{z}=(1+i)(1-i)=2$

34 답 ②

$z=1+i$라 하면 $f(z)=az^2+bz+c=p-4i$

이때, $\overline{z}=\overline{1+i}=1-i$이므로

$f(1-i)=f(\overline{z})=a(\overline{z})^2+b\overline{z}+c=\overline{az^2+bz+c}$

$=\overline{p-4i}=p+4i=3+qi$

따라서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$p=3,\ q=4$ $\therefore p+q=7$

35 답 5

$z^2=3+4i$에서 $\overline{z}^2=\overline{3+4i}=3-4i$

$z^2\overline{z}^2=(3+4i)(3-4i)=9+16=25$이므로

$(z\overline{z})^2=25$ $\quad \therefore z\overline{z}=5$ 또는 $z\overline{z}=-5$

이때, $z\overline{z}\geq 0$이므로 $z\overline{z}=5$

36 답 10

$\alpha+\beta=3+i$이므로

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}&=\alpha(\overline{\alpha}+\overline{\beta})+\beta(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\\&=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\\&=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})\\&=(3+i)(3-i)\\&=9+1=10\end{aligned}$$

37 답 ④

조건 (가)에서 $(2-3i)\overline{z}=\overline{(2+3i)z}$이므로

$(2+3i)z+\overline{(2+3i)z}=2$

즉, $(2+3i)z$의 실수부분이 1이다.

조건 (나)에서 $(-1+2i)\overline{z}=-(1-2i)\overline{z}=-\overline{(1+2i)z}$이므로

$(1+2i)z-\overline{(1+2i)z}=10i$

즉, $(1+2i)z$의 허수부분이 5이다.

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$(2+3i)(a+bi)$의 실수부분은 $2a-3b=1$

$(1+2i)(a+bi)$의 허수부분은 $2a+b=5$

따라서 $a=2$, $b=1$이므로 $z=2+i$

[다른 풀이]

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$

조건 (가)에서

$(2+3i)(a+bi)+(2-3i)(a-bi)=2$

$2a+2bi+3ai-3b+2a-2bi-3ai-3b=2$

$4a-6b=2$

$\therefore 2a-3b=1$ ⋯ ㉠

조건 (나)에서

$(1+2i)(a+bi)+(-1+2i)(a-bi)=10i$

$a+bi+2ai-2b-a+bi+2ai+2b=10i$

$(4a+2b)i=10i$

$\therefore 2a+b=5$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$ $\quad \therefore z=2+i$

> 일등급 UP
>
> * 켤레복소수의 계산
>
> $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $\overline{z}=a-bi$이므로
>
> $z+\overline{z}=2a \Leftarrow$ 실수부분의 2배
>
> $z-\overline{z}=2bi \Leftarrow$ 허수부분의 2배

38 답 ②

$\alpha+\beta=1+i$ ⋯ ㉠에서 $\overline{\alpha+\beta}=\overline{1+i}=1-i$

$\therefore \overline{\alpha}+\overline{\beta}=1-i$ ⋯ ㉡

한편, $\alpha\overline{\alpha}=1$, $\beta\overline{\beta}=1$에서 $\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$, $\overline{\beta}=\dfrac{1}{\beta}$ ⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1-i$이므로

$\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{1+i}{\alpha\beta}=1-i$

$\therefore \alpha\beta=\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=i$ ⋯ ㉣

따라서 ㉠, ㉣에 의하여

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(1+i)^2-2i=0$

39 답 ①

$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$이므로

$(1+i)^{12}=(2i)^6=-2^6$ ⋯ ㉠

$(\sqrt{3}-i)^2=3-2\sqrt{3}i+i^2=2-2\sqrt{3}i$

$(\sqrt{3}-i)^3=(2-2\sqrt{3}i)(\sqrt{3}-i)=-8i$

$\therefore (\sqrt{3}-i)^{12}=(-8i)^4=2^{12}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{12}=\dfrac{2^{12}}{-2^6}=-2^6$

따라서 $x=-2^6$, $y=0$이므로 $x+y=-2^6$

40 답 ⑤

$\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$이므로

$f(n)=\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^n=(-i)^n$

ㄱ. $f(2)=(-i)^2=-1$ (참)

ㄴ. $f(n+2)=(-i)^{n+2}=(-i)^2(-i)^n$

$\quad =-(-i)^n=-f(n)$ (참)

ㄷ. $(-i)^n$은 $n=4k$, $n=4k+1$, $n=4k+2$, $n=4k+3$ (k는 음이 아닌 정수)인 경우에 각각 1, $-i$, -1, i이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

41 답 ④

$z^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}i}{1+i}\right)^2=\dfrac{-2}{2i}=i$

$z^4=(z^2)^2=-1$

$z^8=(z^4)^2=1$

따라서 $z^n=1$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 8이다.

42 답 8

$(\sqrt{3}+i)^n=-2^n$의 양변을 2^n으로 나누면

$\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n=-1$이므로 $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

$\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^3=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=i$

$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^6=-1$

$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}=1$

$\vdots$

즉, $n=12k+6$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$일 때

$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n=-1$

따라서 $1\le 12k+6\le 100$을 만족시키는 음이 아닌 정수 k의 개수는 $0, 1, 2, \cdots, 7$의 8이다.

43 답 3

$x+y=-3<0$, $xy=1>0$에서 $x<0$, $y<0$

$x<0$, $y<0$이면 $\sqrt{x}\sqrt{y}=-\sqrt{xy}$이므로

$$\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{y})^2+(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}\sqrt{y}}$$
$$=\frac{x+y}{-\sqrt{xy}}=\frac{-3}{-1}=3$$

44 답 ①

$\sqrt{\frac{1}{a}}=-\frac{1}{\sqrt{a}}$에 의하여 $a<0$

$\sqrt{-\frac{1}{b}}=\sqrt{\frac{1}{-b}}=\frac{1}{\sqrt{-b}}$에 의하여 $-b>0$, 즉 $b<0$

따라서 $\frac{b}{a}>0$, $\frac{a}{b}>0$이므로 $\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}=1$

45 답 ④

㉢ 이후의 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{-y}}i$에서 $y<0$이므로 $-y>0$이다.

$\therefore \sqrt{-y}\ne\sqrt{y}i$

따라서 등식이 처음으로 성립하지 않는 곳은 ㉣이다.

46 답 ④

$(n+i)^4$이 실수이므로 $(n+i)^2=(n^2-1)+2ni$가 실수이거나 순허수이어야 한다.

즉, $n^2-1=0$ 또는 $n=0$이므로

$n=-1$ 또는 $n=0$ 또는 $n=1$

따라서 $(n+i)^4$이 실수가 되도록 하는 정수 n의 개수는 3이다.

47 답 ③

ㄱ. $f(1+i)=(1+i)(1-i)=1-i^2=2$ (참)

ㄴ. 【반례】 $z_1=1$, $z_2=i$이면 $f(z_1)=f(z_2)=1$이지만 $z_1\ne z_2$ (거짓)

ㄷ. $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$f(z)=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

$f(\overline{z})=(a-bi)(a+bi)=a^2+b^2$

$\therefore f(z)=f(\overline{z})$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

48 답 ①

실수 a, b에 대하여 $z=a+bi$라 하면 $\overline{z}=a-bi$

ㄱ. $z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$

이므로 $z+\overline{z}$는 항상 실수이다. (참)

ㄴ. $z-\overline{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$

이때, $b=0$, 즉 z가 실수이면 $z-\overline{z}=0$이 되어 실수이다. (거짓)

ㄷ. $\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$와 $\frac{1}{\overline{z}}=\frac{1}{a-bi}=\frac{a+bi}{a^2+b^2}$로

$b\ne0$이면 $\frac{1}{z}$과 $\frac{1}{\overline{z}}$의 허수부분은 서로 다르다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

49 답 ③

ㄱ. 【반례】 $z_1=1+i$, $z_2=i$이면 $z_1-z_2=1>0$이지만 허수는 대소 관계를 갖지 않으므로 z_1과 z_2의 대소 관계를 비교할 수 없다. (거짓)

ㄴ. 【반례】 $z_1>z_2$이면 z_1, z_2 모두 실수이다. 그러나 $z_1=-1$, $z_2=-2$이면 $z_1>z_2$이지만 $z_1{}^2<z_2{}^2$이다. (거짓)

ㄷ. $z_1>z_2$이면 z_1, z_2 모두 실수이므로 $z_1=\overline{z_1}$, $z_2=\overline{z_2}$이다.

$\therefore \overline{z_1}>\overline{z_2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

50 답 12

$z^2(z-1)-z(z-1)(2z-1)=z(z-1)\{z-(2z-1)\}$
$=-z(z-1)^2$

그런데 $z=1+2i$에서 $z-1=2i$이므로

$-z(z-1)^2=-z(2i)^2=4z=4(1+2i)$
$=4+8i=a+bi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=4$, $b=8$

$\therefore a+b=12$

51 답 ①

$\alpha-\beta=2i$ ⋯ ㉠에서 $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=-4$

이때, $\alpha^2+\beta^2=0$이므로 $\alpha\beta=2$

또, $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=0+4=4$이므로

$\alpha+\beta=2$ 또는 $\alpha+\beta=-2$

한편, $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=-4$에서

$(\alpha+\beta)^3-6(\alpha+\beta)=-4$이지만

$\alpha+\beta=-2$이면 위 식이 성립하지 않는다.

$\therefore \alpha+\beta=2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha=1+i$, $\beta=1-i$이므로

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=i$

52 답 ①

$\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega=-1$

또, $\omega^2+1=-\omega$이므로 양변을 ω로 나누면 $\omega+\frac{1}{\omega}=-1$

$f(\omega)=\omega+\frac{1}{\omega}=-1$

$f(\omega^2)=\omega^2+\frac{1}{\omega^2}=\omega^2+\frac{\omega}{\omega^3}=\omega^2+\omega=-1$

$f(\omega^3)=\omega^3+\frac{1}{\omega^3}=1+\frac{1}{1}=2$

$\therefore f(\omega^n)=\begin{cases} 2 & (n\text{이 3의 배수일 때}) \\ -1 & (n\text{이 3의 배수가 아닐때}) \end{cases}$

이때, 자연수 n에 대하여 $f(\omega^n)+f(\omega^{n+1})+f(\omega^{n+2})=0$

이고, $20=2+3\times 6$이므로

$f(\omega)+f(\omega^2)+f(\omega^3)+\cdots+f(\omega^{20})$

$=f(\omega)+f(\omega^2)+0+0+\cdots+0$

$=(-1)+(-1)=-2$

53 답 20

$\omega=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $\omega^2-\omega+1=0$

이 식의 양변에 $\omega+1$을 곱하면

$(\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0$이므로

$\omega^3+1=0 \qquad \therefore \omega^3=-1$

$f(\omega)=\omega^3+a\omega^2+b\omega+c$

$\quad=-1+a(\omega-1)+b\omega+c$ ($\because \omega^3=-1$, $\omega^2=\omega-1$)

$\quad=(a+b)\omega+(-a+c-1)=15\omega-7$

이때, a, b, c는 실수이고 ω는 허수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=15$ ⋯ ㉠, $-a+c-1=-7$ ⋯ ㉡

한편, $f(-1)=-1+a-b+c=8$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=10$, $b=5$, $c=4$

$\therefore f(1)=1+a+b+c=1+10+5+4=20$

54 답 4

$z^2=4i$에서 $\overline{z}^2=\overline{4i}=-4i$이므로 ---------- ⓐ

$\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)^2=\frac{-4i}{4i}=-1$

$\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)^4=1$ ---------- ⓑ

따라서 $\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)^n$이 양의 실수가 되게 하는 자연수 n의 최솟값은

4이다. ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ z^2의 켤레복소수를 찾는다.	[40%]
ⓑ $\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)^2$, $\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)^4$을 구한다.	[40%]
ⓒ 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.	[20%]

55 답 14

조건 (가)에서 $z+2-i$는 순허수이다.

이때, 복소수 $z=a+bi$이므로

$z+2-i=a+bi+2-i=(a+2)+(b-1)i$에서

$a+2=0$, $b-1\neq 0 \qquad \therefore a=-2$, $b\neq 1$

$\therefore z=-2+bi$ ---------- ⓐ

또한, 조건 (나)에서 $(-2+bi)^2=c+4i$이므로

$4-4bi-b^2=c+4i$

$\therefore (4-b^2)-4bi=c+4i$ ---------- ⓑ

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$-4b=4$, $4-b^2=c \qquad \therefore b=-1$, $c=3$

$\therefore a^2+b^2+c^2=14$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 조건 (가)를 이용하여 a의 값을 구한다.	[40%]
ⓑ 조건 (나)를 이용하여 z^2의 식을 정리한다.	[30%]
ⓒ 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 b, c의 값을 각각 구한 후 $a^2+b^2+c^2$의 값을 구한다.	[30%]

56 답 1

$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2\omega+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하여 정리하면 $\omega^2+\omega+1=0$ ⋯ ㉠ ---------- ⓐ

또한, $\omega+\overline{\omega}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=-1$

㉠에서 $\omega^2+1=-\omega$, $\omega+1=-\omega^2$이므로

$z=\frac{\omega+2}{\omega^2+2}=\frac{1-\omega^2}{1-\omega}=1+\omega$ ---------- ⓑ

$\therefore z+\overline{z}=1+\omega+\overline{1+\omega}=2+(\omega+\overline{\omega})=1$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ ω의 식을 정리한다.	[30%]
ⓑ 주어진 z의 식을 간단히 한다.	[50%]
ⓒ $z+\overline{z}$의 값을 구한다.	[20%]

57 답 ③

$z=a+bi$에 대하여

$\frac{iz}{z-6}=\frac{i(a+bi)}{a+bi-6}=\frac{-b+ai}{(a-6)+bi}=\frac{(-b+ai)(a-6-bi)}{(a-6)^2+b^2}$

$=\frac{6b+(b^2+a^2-6a)i}{(a-6)^2+b^2}$ ⋯ ㉠

$\frac{iz}{z-6}$가 실수이므로 ㉠에서 분자의 허수부분이 0이 되어야 한다.

$\therefore a^2+b^2-6a=0$

58 답 38

$(a-bi)^2=8i$에서

$a^2-b^2-2abi=8i$이므로

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=0$ ⋯ ㉠, $-2ab=8$ ⋯ ㉡

㉠에서 $a=b$ 또는 $a=-b$

(ⅰ) $a=b$일 때, ㉡에서 $a^2=-4$를 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a=-b$일 때, ㉡에서 $a^2=4$이므로

$a=2$, $b=-2$ ($\because a>0$)

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $20a+b=40-2=38$

59 답 ⑤

ㄱ. z^2-z가 실수이므로 $\overline{z^2-z}$도 실수이다. (참)

ㄴ. $z=a+bi$ $(b\neq 0)$에 대하여

$z^2-z=a^2+2abi-b^2-a-bi$

$=(a^2-a-b^2)+(2a-1)bi$

이때, z^2-z가 실수이고, $b\neq 0$이므로

$2a-1=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 $z=\frac{1}{2}+bi$이고 $\bar{z}=\frac{1}{2}-bi$이므로

$z+\bar{z}=1$이다. (참)

ㄷ. $z=\frac{1}{2}+bi$이고 $\bar{z}=\frac{1}{2}-bi$이므로

$z\bar{z}=\frac{1}{4}+b^2$이고 $b\neq 0$이므로 $z\bar{z}>\frac{1}{4}$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

ㄴ. $\overline{z^2-z}$가 실수이고, $\overline{z^2-z}=(\bar{z})^2-\bar{z}$이므로

$z^2-z=(\bar{z})^2-\bar{z}$가 성립한다.

$z^2-z-\{(\bar{z})^2-\bar{z}\}=0$에서 $(z-\bar{z})(z+\bar{z}-1)=0$

이때, z는 실수가 아니므로 $z\neq\bar{z}$이다.

$\therefore z+\bar{z}=1$ (참)

60 답 ①

ㄱ. $(\alpha\beta)^2=\alpha^2\beta^2=(2i)(-2i)=4$이므로

$\alpha\beta=2$ 또는 $\alpha\beta=-2$ ⋯ ㉠ (거짓)

ㄴ. $\alpha^2+\beta^2=0$ ⋯ ㉡이므로

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=2\alpha\beta$

㉠에 의하여 $(\alpha+\beta)^4=(2\alpha\beta)^2=16$ (참)

ㄷ. ㉡에 의하여

$\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2=\frac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta}=-1$

한편, 제곱한 수가 음수이므로 $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$는 실수가 아니다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

[다른 풀이]

$\alpha=a+bi$ (a, b는 실수)라 하고 $\alpha^2=2i$에 대입하여 정리하면

$\alpha^2=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi=2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=0$, $2ab=2$

(ⅰ) $(a-b)(a+b)=0$일 때,

$a+b=0$ 또는 $a-b=0 \qquad \therefore a=-b$ 또는 $a=b$

(ⅱ) $ab=1$일 때

ⅰ) $a=-b$이면 $-b^2=1$을 만족시키는 실수 b의 값은 존재하지 않는다.

ⅱ) $a=b$이면 $b^2=1 \qquad \therefore b=1$ 또는 $b=-1$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $\alpha=1+i$ 또는 $\alpha=-1-i$

마찬가지로 $\beta=c+di$ (c, d는 실수)라 하고

$\beta^2=-2i$에 대입하여 β를 구하면

$\beta=1-i$ 또는 $\beta=-1+i$

ㄱ. 【반례】 $\alpha=1+i$, $\beta=-1+i$이면 $\alpha\beta=-2$ (거짓)

ㄴ. $\alpha+\beta$의 값은 2, -2, $2i$, $-2i$이므로

$(\alpha+\beta)^4=16$ (참)

ㄷ. $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$의 값은 i, $\frac{1}{i}$이므로 실수가 아니다. (거짓)

61 답 27

$\alpha=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$에서

$\alpha^2=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\beta$ ⋯ ㉠

$\alpha^3=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^3=i$ ⋯ ㉡

$\alpha^{12}=(\alpha^3)^4=i^4=1$ ⋯ ㉢

㉠에서 $\alpha^m\beta^n=\alpha^m(\alpha^2)^n=\alpha^{m+2n}$

이때, $\alpha^m\beta^n=\alpha^{m+2n}=i$를 만족시키는 $m+2n$의 값 중 최소인 자연수는 ㉡에 의하여 3이다.

또한, ㉢에서 $m+2n=12k+3$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$이므로

$m+2n=3, 15, 27, 39, \cdots$

따라서 10 이하의 자연수 m, n에 대하여 $m+2n\leq 30$이므로

$m+2n$의 최댓값은 27이다.

62 답 ②

조건 (나)에서 $\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=0$이므로

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0 \qquad \therefore \alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma=0$ ⋯ ㉠

조건 (가)에서 $\beta+\gamma=-\alpha$, $\beta=-\alpha-\gamma$이므로

㉠에 대입하면 $-\alpha^2-(\alpha+\gamma)\gamma=0$

$\therefore \alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2=0$ ⋯ ㉡

㉡의 양변을 α^2으로 나누면 $\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2+\frac{\gamma}{\alpha}+1=0$

$\therefore \frac{\gamma}{\alpha}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

한편, ㉠에 $\beta+\gamma=-\alpha$를 대입하면

$-\alpha^2+\beta\gamma=0$이므로 $\beta\gamma=\alpha^2$

따라서 $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$이므로 $\frac{\gamma}{\alpha}+\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\gamma}{\alpha}+\overline{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}$이다.

$\therefore \frac{\gamma}{\alpha}+\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=-1$

63 답 ④

실수가 아닌 복소수를 $z=x+yi$ ($y\neq0$, x, y는 실수)라 하면

$\bar{z}=x-yi$이므로

$z\bar{z}=(x+yi)(x-yi)=x^2+y^2$

$\dfrac{\bar{z}}{z}=\dfrac{x-yi}{x+yi}=\dfrac{x^2-y^2-2xyi}{x^2+y^2}$

$\therefore\ z\bar{z}+\dfrac{\bar{z}}{z}=x^2+y^2+\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\dfrac{2xy}{x^2+y^2}i=1$

이때, 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2+y^2+\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=1$ ⋯ ㉠

$\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=0$ ⋯ ㉡

한편, $y\neq0$이므로 ㉡에서 $x=0$이다.

㉠에서 $y^2-1=1$ $\quad\therefore\ y=\pm\sqrt{2}$

따라서 $z=\pm\sqrt{2}i$이므로 $z^2=(\pm\sqrt{2}i)^2=-2$

64 답 ⑤

$\dfrac{ab}{c}=-1$, 즉 $ab=-c$에서

(i) $a>0$, $b>0$일 때,

$c<0$이고 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}=\sqrt{-c}$이므로

$\dfrac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{c}}=\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}=\dfrac{\sqrt{-c}}{\sqrt{c}}=-\sqrt{\dfrac{-c}{c}}=-i$

(ii) $a>0$, $b<0$일 때,

$c>0$이고 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}=\sqrt{-c}$이므로

$\dfrac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{c}}=\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}=\dfrac{\sqrt{-c}}{\sqrt{c}}=\sqrt{\dfrac{-c}{c}}=i$

(iii) $a<0$, $b>0$일 때,

$c>0$이고 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}=\sqrt{-c}$이므로

$\dfrac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{c}}=\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}=\dfrac{\sqrt{-c}}{\sqrt{c}}=\sqrt{\dfrac{-c}{c}}=i$

(iv) $a<0$, $b<0$일 때,

$c<0$이고 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}=-\sqrt{-c}$이므로

$\dfrac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{c}}=-\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}=-\dfrac{\sqrt{-c}}{\sqrt{c}}=-\left(-\sqrt{\dfrac{-c}{c}}\right)=i$

따라서 $\dfrac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$의 값은 $-i$ 또는 i이다.

65 답 1

$z+\dfrac{1}{z}$이 실수이면 $z+\dfrac{1}{z}=\overline{\left(z+\dfrac{1}{z}\right)}=\bar{z}+\dfrac{1}{\bar{z}}$이므로

$z-\bar{z}+\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{\bar{z}}\right)=0$

$z-\bar{z}-\dfrac{z-\bar{z}}{z\bar{z}}=0$ $\quad\therefore\ (z-\bar{z})\left(1-\dfrac{1}{z\bar{z}}\right)=0$

이때, z가 실수가 아닌 복소수이므로 $z\neq\bar{z}$

$\therefore\ z\bar{z}=1$

66 답 ①

복소수 z에 대하여 $\bar{z}=z$이면

z는 실수 ⋯ ㉠

$z+\bar{z}=0$, 즉 $\bar{z}=-z$이면

$z=0$ 또는 z는 순허수 ⋯ ㉡

실수, 순허수도 아닌 α, ω에 대하여

$\alpha-\bar{\alpha}\neq0$, $\alpha+\bar{\alpha}\neq0$ ⋯ ㉢

ㄱ. $\overline{\alpha^2-(\bar{\alpha})^2}=\overline{\alpha^2}-\overline{(\bar{\alpha})^2}$

$=(\bar{\alpha})^2-\alpha^2$

$=-\{\alpha^2-(\bar{\alpha})^2\}\neq0$ ($\because$ ㉢)

이므로 ㉡에 의하여 $\alpha^2-(\bar{\alpha})^2$은 순허수이다.

ㄴ. $\overline{\alpha\bar{\omega}+\bar{\alpha}\omega}=\bar{\alpha}\omega+\alpha\bar{\omega}$이므로

㉠에 의하여 $\alpha\bar{\omega}+\bar{\alpha}\omega$는 실수이다.

ㄷ. 【반례】 $\alpha=\omega$이면 $\alpha\bar{\omega}-\bar{\alpha}\omega=\alpha\bar{\alpha}-\bar{\alpha}\alpha=0$이 되어 실수가 된다.

따라서 순허수인 것은 ㄱ이다.

67 답 ④

$\left(\dfrac{\sqrt{b}}{1+ai}\right)^4=\left\{\left(\dfrac{\sqrt{b}}{1+ai}\right)^2\right\}^2=-1$ ⋯ ㉠에서

$\left(\dfrac{\sqrt{b}}{1+ai}\right)^2$은 순허수이므로 그 실수부분이 0이다.

즉, $\left(\dfrac{\sqrt{b}}{1+ai}\right)^2=\left\{\dfrac{\sqrt{b}(1-ai)}{1+a^2}\right\}^2=\dfrac{b(1-a^2)}{(1+a^2)^2}-\dfrac{2abi}{(1+a^2)^2}$에서

$\dfrac{b(1-a^2)}{(1+a^2)^2}=0$

이때, 자연수 a, b에 대하여

$1-a^2=0$이므로 $a=1$

㉠에 대입하면 $\left(\dfrac{\sqrt{b}}{1+i}\right)^4=-1$이므로

$b^2=-(1+i)^4=-(2i)^2=4$

$\therefore\ b=2$ ($\because$ b는 자연수)

$\therefore\ \left(\dfrac{-\sqrt{b}}{1-ai}\right)^{10}=\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{1-i}\right)^{10}$

$=\left\{\dfrac{-\sqrt{2}(1+i)}{2}\right\}^{10}$

$=\left(\dfrac{2i}{2}\right)^5=i^5=i$

68 답 ②

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에서

$\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$

자연수 k에 대하여

(i) $n=3k$일 때,

$\omega^n=\omega^{3k}=(\omega^3)^k=1$

$\omega^{2n}=\omega^{6k}=(\omega^3)^{2k}=1$

$\therefore\ f(n)=\dfrac{\omega^{2n}}{\omega^n+1}=\dfrac{1}{2}$

(ⅱ) $n=3k+1$일 때,

$\omega^n=\omega^{3k+1}=(\omega^3)^k\times\omega=\omega$

$\omega^{2n}=\omega^{6k+2}=(\omega^3)^{2k}\times\omega^2=\omega^2$

$\therefore f(n)=\dfrac{\omega^{2n}}{\omega^n+1}=\dfrac{\omega^2}{\omega+1}=-1$ ($\because \omega^2+\omega+1=0$)

(ⅲ) $n=3k+2$일 때,

$\omega^n=\omega^{3k+2}=(\omega^3)^k\times\omega^2=\omega^2$

$\omega^{2n}=\omega^{6k+4}=(\omega^3)^{2k+1}\times\omega=\omega$

$\therefore f(n)=\dfrac{\omega^{2n}}{\omega^n+1}=\dfrac{\omega}{\omega^2+1}=-1$ ($\because \omega^2+\omega+1=0$)

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)=\frac{1}{2}\times3+(-1)\times7$$
$$=-\frac{11}{2}$$

05 이차방정식

문제편 57P

01 답 1

이차방정식 $x^2+x-5=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2+\alpha=5$, $\beta^2+\beta=5$

또한, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-5$

$\therefore \dfrac{\alpha^2+\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta^2+\beta}{\alpha}=\dfrac{5}{\beta}+\dfrac{5}{\alpha}=\dfrac{5(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\dfrac{-5}{-5}=1$

02 답 ⑤

$x^2-|x-3|-9=0$에서

(ⅰ) $x\geq3$일 때,

$x^2-(x-3)-9=0$이므로

$x^2-x-6=0$, $(x-3)(x+2)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=-2$

그런데 $x\geq3$이므로 $x=3$

(ⅱ) $x<3$일 때,

$x^2-\{-(x-3)\}-9=0$이므로

$x^2+x-12=0$, $(x+4)(x-3)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=3$

그런데 $x<3$이므로 $x=-4$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 방정식의 모든 근은

$x=3$ 또는 $x=-4$이므로 그 합은

$3+(-4)=-1$

03 답 ③

이차방정식 $x^2-kx+k-1=0$이 중근을 가지므로

이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4(k-1)=0$, $k^2-4k+4=0$, $(k-2)^2=0$

$\therefore k=2$

이때, $k=2$를 $x^2-kx+k-1=0$에 대입하면

$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$ $\quad\therefore x=1$

따라서 구하는 중근은 $\alpha=1$이므로 $k+\alpha=2+1=3$

[다른 풀이]

문자를 여러 개 포함한 식은 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 정리한 후 인수분해하면 편리하다.

$x^2-kx+k-1=0$을 k에 대하여 정리하면

$-k(x-1)+x^2-1=0$

$-k(x-1)+(x+1)(x-1)=0$

$(x-1)\{-k+(x+1)\}=0$ $\quad\therefore (x-1)(x+1-k)=0$

이 방정식은 중근을 갖고 근이 $x=1$, $x=k-1$이므로

$1=k-1$ $\quad\therefore k=2$

따라서 $k=2$, $\alpha=1$이므로

$k+\alpha=2+1=3$

04 답 16

이차방정식 $3x^2-16x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=\dfrac{16}{3}$, $\alpha\beta=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{\frac{16}{3}}{\frac{1}{3}}=16$

05 답 ④

$x^2-(k+1)x+8=0$의 두 근을 α, $\alpha+2$라 하면

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+2)=k+1$ ⋯ ㉠, $\alpha(\alpha+2)=8$ ⋯ ㉡

㉡에서 $\alpha^2+2\alpha-8=0$, $(\alpha-2)(\alpha+4)=0$

$\therefore \alpha=2$ 또는 $\alpha=-4$ ⋯ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $k=5$ 또는 $k=-7$

그런데 $k>0$이므로 $k=5$

06 답 2

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=6$

이때, $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(4x-1)=0$이기 위해서는

$4x-1=\alpha$ 또는 $4x-1=\beta$

$\therefore x=\dfrac{\alpha+1}{4}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+1}{4}$

따라서 이차방정식 $f(4x-1)=0$의 두 근의 합은

$\dfrac{\alpha+1}{4}+\dfrac{\beta+1}{4}=\dfrac{(\alpha+\beta)+2}{4}=\dfrac{6+2}{4}=2$

07 답 4

a, b가 실수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $i-2$이면 다른 한 근은 $-i-2$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$(i-2)+(-i-2)=-a$

$(i-2)(-i-2)=b$

$\therefore a=4,\ b=5$

따라서 이차방정식 $x^2+5x+4=0$의 두 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 4이다.

08 답 ①

주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 양수이므로

(i) 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-3)^2-(k^2+3)\geq 0$

$-6k+6\geq 0 \qquad \therefore k\leq 1$

(ii) $\alpha+\beta=-2(k-3)>0$

$\therefore k<3$

(iii) $\alpha\beta=k^2+3>0$이므로 k는 모든 정수이다.

(i)~(iii)에 의하여 $k\leq 1$

따라서 정수 k의 최댓값은 1이다.

09 답 ①

$(x+999)^2-3(x+999)+2=0$에서

$x+999=X$라 하면

$X^2-3X+2=0,\ (X-1)(X-2)=0$

$\therefore X=1$ 또는 $X=2$

$x+999=X$에서 $x=X-999$이므로

$x=-998$ 또는 $x=-997$

$\therefore (\alpha+998)(\beta+998)=0$

[다른 풀이]

방정식 $(x+999)^2-3(x+999)+2=0$의 두 근이 α, β이므로 인수정리에 의하여

$(x+999)^2-3(x+999)+2=(x-\alpha)(x-\beta)$

로 나타낼 수 있다.

양변에 $x=-998$을 대입하면

$(-998+999)^2-3(-998+999)+2$

$=(-998-\alpha)(-998-\beta)$

$\therefore (\alpha+998)(\beta+998)=1-3+2=0$

10 답 16

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=5$

또한, α, β가 근이므로

$\alpha^2-2\alpha+5=0,\ \beta^2-2\beta+5=0$

즉, $\alpha^2+5=2\alpha,\ \beta^2+5=2\beta$이므로

$$\begin{aligned}(\alpha^2+2\beta+5)(\beta^2+2\alpha+5)&=(2\beta+2\alpha)(2\alpha+2\beta)\\&=4(\alpha+\beta)^2\\&=4\times 2^2=16\end{aligned}$$

11 답 ②

일차방정식 $a(ax-1)-(x-1)=0$에서

$(a^2-1)x=a-1$이므로

$(a+1)(a-1)x=a-1$

이 일차방정식은 $a=-1$일 때 근을 갖지 않으며 $a=1$일 때 무수히 많은 근을 갖는다.

따라서 $a=-1$이므로 이차방정식 $x^2-(1-2a)x+5a+1=0$에 $a=-1$을 대입하면

$x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

$\therefore |\alpha|+|\beta|=|-1|+|4|=5$

12 답 ④

이차방정식 $(a-1)x^2-2(a-3)x+a-3=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-3)^2-(a-1)(a-3)\geq 0$

$-2(a-3)\geq 0$

$a-3\leq 0$

$\therefore a\leq 3 \cdots$ ㉠

또한, $(a-1)x^2-2(a-3)x+a-3=0$이 이차방정식이므로

$a\neq 1 \cdots$ ㉡

이때, a는 자연수이므로 ㉠, ㉡에 의하여

$a=2$ 또는 $a=3$

따라서 모든 자연수 a의 값의 합은

$2+3=5$

13 답 ④

이차방정식 $x^2-2x-k=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-1)^2-1\times(-k)<0$

$\therefore k<-1 \cdots$ ㉠

한편, 이차방정식 $x^2+5x-k=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=5^2-4\times 1\times(-k)\geq 0$

$\therefore k\geq -\frac{25}{4} \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{25}{4}\leq k<-1$

따라서 정수 k의 개수는 -6, -5, -4, -3, -2의 5이다.

14 답 45

이차방정식 $4x^2+2(2k-m)x+k^2-k+2n=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k-m)^2-4(k^2-k+2n)=0$

$(-4m+4)k+m^2-8n=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$-4m+4=0$이고, $m^2-8n=0$ $\quad\therefore m=1,\ n=\frac{1}{8}$

$\therefore 40(m+n)=40+5=45$

15 답 5

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 $f(-x)=ax^2-bx+c$이므로

$f(x)=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이면

$f(-x)=0$의 두 근은 $-\alpha,\ -\beta$

따라서 $\alpha+\beta=-\alpha,\ \alpha\beta=-\beta$이므로

$\alpha\beta=-\beta$에서 $\alpha=-1$ ($\because ac\neq0$이므로 $\alpha\beta\neq0$)

이 값을 $\alpha+\beta=-\alpha$에 대입하면 $\beta=2$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(-1)^2+2^2=5$

[다른 풀이]

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ ⋯ ㉠, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ ⋯ ㉡

이차방정식 $ax^2-bx+c=0$의 두 근이 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$이므로

$\alpha+\beta+\alpha\beta=\frac{b}{a}$ ⋯ ㉢, $\alpha\beta(\alpha+\beta)=\frac{c}{a}$ ⋯ ㉣

㉠+㉢을 하면

$2(\alpha+\beta)+\alpha\beta=0$ ⋯ ㉤

㉣−㉡을 하면

$\alpha\beta(\alpha+\beta-1)=0$이므로 $\alpha+\beta-1=0$ ($\because ac\neq0$이므로 $\alpha\beta\neq0$)

$\therefore \alpha+\beta=1$

이 값을 ㉤에 대입하면 $\alpha\beta=-2$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1-2\times(-2)=5$

일등급 UP

* 대칭식인 근의 성질

$\alpha+\beta$와 $\alpha\beta$는 α와 β의 대칭식이므로 풀이에서 $\alpha+\beta=-\beta$, $\alpha\beta=-\alpha$라 하면 $\alpha=2,\ \beta=-1$이므로 $\alpha^2+\beta^2=5$이다.

16 답 ⑤

$x^2+2x-4=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-4$

또한, α는 $x^2+2x-4=0$의 근이므로

$\alpha^2+2\alpha-4=0$, 즉 $\alpha^2+2\alpha=4$

$\therefore \alpha^3+2\alpha^2+3\alpha\beta+4\beta=\alpha(\alpha^2+2\alpha)+3\alpha\beta+4\beta$

$=4\alpha+3\alpha\beta+4\beta$

$=4(\alpha+\beta)+3\alpha\beta$

$=-8-12=-20$

17 답 ④

이차방정식 $x^2-4x+k^2-2k+4=0$의 두 근의 차가 2이므로 두 근을 $\alpha,\ \alpha+2$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+2)=4$ $\quad\therefore \alpha=1$

이때, 다른 한 근은 $\alpha+2=3$

또한, $\alpha(\alpha+2)=3$에서 $k^2-2k+4=3$이므로

$k^2-2k+1=0$

$(k-1)^2=0$ $\quad\therefore k=1$

18 답 3

계수가 실수인 이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 한 근이 $-1+2i$이므로 다른 한 근은 $-1-2i$이다. 근과 계수의 관계에 의하여

$-m=(-1+2i)+(-1-2i)=-2$ $\quad\therefore m=2$

$n=(-1+2i)(-1-2i)=5$

따라서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근은 2와 5이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=2+5=7$에서 $a=-7$이고, $b=2\times5=10$

$\therefore a+b=-7+10=3$

19 답 8

조건 (가)에서 $f(-1)=1+p+q=1$이므로

$p+q=0$ ⋯ ㉠

조건 (나)에서 $a-\sqrt{3}$도 이차방정식 $x^2-px+q=0$의 근이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$p=2a,\ q=a^2-3$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $p+q=2a+a^2-3=0$, $(a+3)(a-1)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=1$

이때, a는 자연수이므로 $a=1$

$a=1$을 ㉡에 대입하면 $p=2,\ q=-2$

$\therefore p^2+q^2=2^2+(-2)^2=8$

20 답 ②

$f(1+i)-2=0$에서 $f(x)-2=0$

즉, $x^2+ax+b-2=0$의 한 근이 $1+i$이고

$a,\ b$는 실수이므로 다른 한 근은 $1-i$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$-a=(1+i)+(1-i)=2$ $\quad\therefore a=-2$

$b-2=(1+i)(1-i)=2$ $\quad\therefore b=4$

따라서 $f(x)=x^2-2x+4$이므로

$f(2)=4-4+4=4$

21 답 ③

이차방정식 $x^2+2x-6=0$의 두 근이 α, β이므로

$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+2x-6$

이때, $f(\alpha)=3$, $f(\beta)=3$에서

$f(\alpha)-3=0$, $f(\beta)-3=0$

즉, 이차방정식 $f(x)-3=0$의 두 근은 α, β이므로

$f(x)-3=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+2x-6$

$\therefore f(x)=x^2+2x-3$

따라서 이차방정식 $f(x)=x^2+2x-3=0$의 두 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 -3이다.

22 답 ③

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하고,

이차방정식 $f(2x-1)=0$의 두 근을 γ, δ라 하면

$\alpha=2\gamma-1$, $\beta=2\delta-1$

따라서 $\gamma=\frac{\alpha+1}{2}$, $\delta=\frac{\beta+1}{2}$이고, 이차방정식 $4x^2-4x+k=0$의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=1$이므로

$\gamma+\delta=\frac{\alpha+1}{2}+\frac{\beta+1}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}+1=\frac{3}{2}$

[다른 풀이]

$f(2x-1)=4(2x-1)^2-4(2x-1)+k=16x^2-24x+8+k$

따라서 방정식 $f(2x-1)=0$의 두 근의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{24}{16}=\frac{3}{2}$이다.

23 답 ④

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)x+\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=0$

$x^2-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}x+\frac{1}{\alpha\beta}=0$

$x^2-\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}=0$

$\therefore bx^2-ax+1=0$

[다른 풀이]

$f(x)=x^2-ax+b$라 하면

$f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로

$f\left(\frac{1}{x}\right)=0$의 두 근은 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$이다.

$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-a\left(\frac{1}{x}\right)+b=0$의 양변에 x^2을 곱하면

$bx^2-ax+1=0$

24 답 4

주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=0$, $\alpha\beta<0$

이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a^2-3a-4=0$

$(a-4)(a+1)=0$

$\therefore a=4$ 또는 $a=-1$ ⋯ ㉠

$\alpha\beta=-a+2<0 \quad \therefore a>2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=4$

일등급 Up

* 두 근의 부호에 따른 판별식의 조사 유무 결정

문제에서 두 실근의 절댓값은 같고 부호는 서로 다르므로 두 근의 곱은 음수이다. 즉, 판별식은 항상 0보다 크므로 판별식을 조사할 필요가 없다.

25 답 ⑤

이차방정식 $2x^2-3x+3-k=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 양수이므로

(i) 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times2\times(3-k)\geq0$에서 $-15+8k\geq0$

$\therefore k\geq\frac{15}{8}$

(ii) $\alpha+\beta=\frac{3}{2}>0$이므로 항상 만족시킨다.

(iii) $\alpha\beta=\frac{3-k}{2}>0 \quad \therefore k<3$

(i)~(iii)에 의하여 k의 값의 범위는 $\frac{15}{8}\leq k<3$이므로 정수 k의 값은 2이다.

26 답 3

이차방정식 $x^2+px+2p-8=0$의 두 근이 α, β이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=2p-8$

(i) $\alpha+\beta<|\alpha+\beta|$에서 $\alpha+\beta<0$이므로

$\alpha+\beta=-p<0$

$\therefore p>0$ ⋯ ㉠

(ii) $|\alpha+\beta|<|\alpha|+|\beta|$에서 $\alpha\beta<0$이므로

$\alpha\beta=2p-8<0$

$\therefore p<4$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $0<p<4$

따라서 정수 p의 개수는 1, 2, 3의 3이다.

27 답 25

이차방정식 $(x-2)(x+k)=5$의 두 근이 α, β이므로

$(\alpha-2)(\alpha+k)=5$, $(\beta-2)(\beta+k)=5$

$\therefore (\alpha-2)(\beta-2)(\alpha+k)(\beta+k)=25$

28 답 ④

$|x-2|^2+2|x-2|-8=0$에서

$|x-2|=t\,(t\ge 0)$라 하면 $t^2+2t-8=0$

$(t+4)(t-2)=0 \qquad \therefore t=-4$ 또는 $t=2$

이때, $t\ge 0$이므로 $t=2$

즉, $|x-2|=2$이므로

$x-2=2$ 또는 $x-2=-2 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=4$

$\therefore |\alpha-2|+|\beta-2|=|0-2|+|4-2|=4$

29 답 ⑤

이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha^2-2\alpha-2=0$에서 $\alpha^2=2(\alpha+1)$, $\dfrac{1}{\alpha+1}=\dfrac{2}{\alpha^2}$

마찬가지로 $\beta^2-2\beta-2=0$에서 $\dfrac{1}{\beta+1}=\dfrac{2}{\beta^2}$

또, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2$이므로

$\dfrac{\alpha^3}{\alpha+1}+\dfrac{\beta^3}{\beta+1}=\dfrac{2\alpha^3}{\alpha^2}+\dfrac{2\beta^3}{\beta^2}=2(\alpha+\beta)=4$

30 답 ②

$|x^2+(a-2)x-2|=1$에서

$x^2+(a-2)x-2=1$ 또는 $x^2+(a-2)x-2=-1$

(i) $x^2+(a-2)x-2=1$일 때,

$x^2+(a-2)x-3=0$이므로 두 근의 합은 $-(a-2)$이다.

(ii) $x^2+(a-2)x-2=-1$일 때,

$x^2+(a-2)x-1=0$이므로 두 근의 합은 $-(a-2)$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 모든 근의 합은 $-2(a-2)$이므로

$-2(a-2)=0 \qquad \therefore a=2$

31 답 4

이차방정식 $x^2-2ax+(10-b^2)=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-(10-b^2)<0 \qquad \therefore a^2+b^2<10$

이때, a, b는 자연수이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$의 4이다.

32 답 ③

$x^2+(2y+3)x+(3y^2+3y+k)=0$에서 x가 실수이므로 이 이차방정식은 실근을 갖는다. 즉, 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2y+3)^2-4(3y^2+3y+k)\ge 0$

$-8y^2+9-4k\ge 0 \qquad \therefore 8y^2-9+4k\le 0 \cdots$ ㉠

한편, 실수 y에 대하여 $8y^2\ge 0$이므로 ㉠을 만족시키는 y가 존재할 조건은 $-9+4k\le 0 \qquad \therefore k\le \dfrac{9}{4}$

따라서 정수 k의 최댓값은 2이다.

33 답 1

x에 대한 이차방정식 $x^2-2(a-1)x+a^2+2a-3=0$의 실근을 t라 하면 $t^2-2(a-1)t+a^2+2a-3=0$

즉, $a^2-2(t-1)a+t^2+2t-3=0 \cdots$ ㉠

이때, a는 실수이므로 a에 대한 이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(t-1)^2-(t^2+2t-3)\ge 0$

$-4t+4\ge 0$, 즉 $t\le 1$

따라서 주어진 x에 대한 이차방정식의 실근 t의 최댓값은 1이다.

34 답 ④

주어진 식을 x의 식으로 정리하면

$x^2-(y+a)x-2y^2-3y+1$

이차방정식 $x^2-(y+a)x-2y^2-3y+1=0$의 판별식을 D라 하면

이 이차방정식의 두 근은 $x=\dfrac{y+a\pm\sqrt{D}}{2}$이므로 주어진 식은

$\left(x-\dfrac{y+a+\sqrt{D}}{2}\right)\left(x-\dfrac{y+a-\sqrt{D}}{2}\right)$

로 인수분해된다.

이때, 인수가 x, y의 일차식이 되려면

$D=9y^2+2(a+6)y+a^2-4$가 완전제곱식이 되어야 하므로

방정식 $9y^2+2(a+6)y+a^2-4=0$의 판별식을 D'이라 하면

$D'=0$이 되어야 한다.

$\dfrac{D'}{4}=(a+6)^2-9(a^2-4)=0$이므로

$-8a^2+12a+72=0$

$2a^2-3a-18=0 \cdots$ ㉠

따라서 모든 상수 a의 값의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 $\dfrac{3}{2}$이다.

일등급 Up

* 두 근의 합은 근과 계수의 관계 이용

이차방정식 ㉠이 세워졌으므로 실제 시험에서는 인수분해하여 a의 값의 합을 구하기보다는 근과 계수의 관계를 이용하여 답을 구하는 것이 더 빠르다.
정확하고 빠르게 접근하는 방법도 수능 일등급을 위해 중요하다.

35 답 3

$x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b \cdots$ ㉠

마찬가지로 $x^2+bx+a=0$의 두 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$이므로

$(\alpha+1)+(\beta+1)=-b$에서 $(\alpha+\beta)+2=-b$

$(\alpha+1)(\beta+1)=a$에서 $\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=a$

㉠에 의하여 $-a+2=-b$, $b-a+1=a$이므로

$a-b=2$, $2a-b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-3$

$\therefore ab=3$

36 답 ⑤

이차방정식 $x^2+(p-3)x+1=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2+(p-3)\alpha+1=0$에서 $\alpha^2+p\alpha+1=3\alpha$

$\beta^2+(p-3)\beta+1=0$에서 $\beta^2+p\beta+1=3\beta$

또한, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=1$

$\therefore (1+p\alpha+\alpha^2)(1+p\beta+\beta^2)=3\alpha\times3\beta=9\alpha\beta=9$

37 답 21

$x^2+2(m-5)x-12=0$에서 두 근의 곱이 -12이므로 두 근은 서로 다른 부호이다.

즉, 두 근을 α, -3α라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha-3\alpha=-2(m-5)$ … ㉠

$\alpha\times(-3\alpha)=-12$ … ㉡

㉡에서 $\alpha^2=4$ $\quad\therefore \alpha=-2$ 또는 $\alpha=2$

이것을 ㉠에 각각 대입하면

$\alpha=-2$일 때, $m=3$

$\alpha=2$일 때, $m=7$

따라서 모든 실수 m의 값의 곱은 21이다.

38 답 ①

$x^2+4x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=1$

따라서 $\alpha<0$, $\beta<0$이므로 $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}=-\sqrt{\alpha\beta}$

$\therefore (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\sqrt{\alpha})^2+(\sqrt{\beta})^2+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}$

$=-4-2=-6$

39 답 ③

이차방정식 $x^2-ax+1=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=a^2-4>0$

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=1$

ㄱ. $\alpha\beta=1>0$이므로 α와 β는 서로 같은 부호이다.

$\therefore |\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ (참)

ㄴ. $\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=1$이므로 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=a^2-2$

이때, $D=a^2-4>0$에서 $a^2>4$이므로 $\alpha^2+\beta^2=a^2-2>2$ (참)

ㄷ. $\alpha\beta=1$에서 $\alpha=\frac{1}{\beta}$이므로 $\alpha>1$이면 $0<\beta<1$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

40 답 ④

a, b, c가 실수이므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}i$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}i$이다. 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{b}{a}=2$, $\frac{c}{a}=3$ $\quad\therefore b=-2a$, $c=3a$

$cx^2+bx-a=0$에서 $3ax^2-2ax-a=0$

$3x^2-2x-1=0$ ($\because a\neq0$)

$(3x+1)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

$\therefore 3(|\alpha|+|\beta|)=3\times\left(\frac{1}{3}+1\right)=4$

41 답 ③

계수가 실수인 이차방정식의 한 허근이 α이므로 $\overline{\alpha}$도 근이다.

$\therefore \beta=\overline{\alpha}$ … ㉠

$\frac{\beta^2}{\alpha}$이 실수이므로 $\frac{\beta^2}{\alpha}=\overline{\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)}=\frac{\overline{\beta}^2}{\overline{\alpha}}$

$\overline{\alpha}\beta^2=\alpha\overline{\beta}^2$이므로 $\beta\beta^2=\alpha\alpha^2$ ($\because$ ㉠) $\quad\therefore \beta^3=\alpha^3$

$\therefore \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3=\frac{\beta^3}{\alpha^3}=\frac{\alpha^3}{\alpha^3}=1$

42 답 2

계수가 실수인 이차방정식의 한 허근을 α라 하면

$\alpha^2-p\alpha+2p=0$을 만족시키므로 $\alpha^2=p\alpha-2p$에서

$\alpha^3=p\alpha^2-2p\alpha=p(p\alpha-2p)-2p\alpha=(p^2-2p)\alpha-2p^2$

이때, α가 허수이고, α^3이 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $p^2-2p=0$에서 $p(p-2)=0$ $\quad\therefore p=0$ 또는 $p=2$

한편, $p=0$이면 $\alpha^3=0$에서 $\alpha=0$이므로 α가 허근이라는 사실에 모순이다.

$\therefore p=2$

[다른 풀이]

계수가 실수인 이차방정식의 한 허근을 α라 하면 다른 한 근은 $\overline{\alpha}$이므로 $\alpha^2-p\alpha+2p=0$

$\alpha^2=p\alpha-2p$, $\alpha^3=p\alpha^2-2p\alpha$

이때, 실수 α^3에 대하여 $\alpha^3=\overline{\alpha^3}$이므로

$p\alpha^2-2p\alpha=\overline{p\alpha^2-2p\alpha}=p\overline{\alpha}^2-2p\overline{\alpha}$

$p\neq0$이므로 $\alpha^2-2\alpha=\overline{\alpha}^2-2\overline{\alpha}$

$\alpha^2-\overline{\alpha}^2=2\alpha-2\overline{\alpha}$

$(\alpha+\overline{\alpha})(\alpha-\overline{\alpha})=2(\alpha-\overline{\alpha})$

한편, 허수 α에 대하여 $\alpha\neq\overline{\alpha}$이므로 $\alpha+\overline{\alpha}=2$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\overline{\alpha}=p$이므로 $p=2$

43 답 ③

$f(x)+x-2=0$의 두 근이 α, β이고

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-4$이므로 0이 아닌 상수 k에 대하여

$f(x)+x-2=k(x^2-2x-4)$ … ㉠

또한, $f(1)=6$이므로 $x=1$을 ㉠에 대입하면

$f(1)+1-2=k(1^2-2-4)=5$

$-5k=5$ $\quad\therefore k=-1$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$f(x)+x-2=-(x^2-2x-4)$ $\quad\therefore f(x)=-x^2+x+6$

$\therefore f(2)=4$

44 답 12

이차방정식 $x^2-x-1=0$의 두 근이 α, β이므로

$x^2-x-1=(x-\alpha)(x-\beta)$ ⋯ ㉠

조건 (나)에 의하여 α, β는 이차방정식 $f(x)=2x+1$,

즉 $f(x)-2x-1=0$의 두 근이다.

조건 (가)에서 $f(x)$의 이차항의 계수가 1이므로

$f(x)-2x-1=(x-\alpha)(x-\beta)$

$=x^2-x-1$ ($\because$ ㉠)

따라서 $f(x)=x^2+x$이므로

$f(3)=9+3=12$

45 답 ②

농도 $2x$ %의 소금물 100 g에 녹아 있는 소금의 양은

$2x$ g ⋯ ㉠

덜어낸 소금물 x g에 녹아 있는 소금의 양은

$\frac{2x}{100}\times x=\frac{x^2}{50}$(g) ⋯ ㉡

또, 다시 넣은 소금의 양은 x g ⋯ ㉢

이때, 섞은 후 28 %의 소금물에 녹아 있는 소금의 양은 28 g이므로

㉠－㉡＋㉢＝28에서 $2x-\frac{x^2}{50}+x=28$

$x^2-150x+1400=0$

$(x-140)(x-10)=0$

$\therefore x=10$ ($\because 0<x<50$)

46 답 ③

$\overline{BP}=x$라 하면 $\overline{CP}=9-x$이다.

$\triangle ABC \backsim \triangle RBP \backsim \triangle QPC$(AA 닮음)이고,

세 삼각형의 닮음비는 $9:x:(9-x)$이므로 넓이의 비는

$9^2:x^2:(9-x)^2=81:x^2:(x^2-18x+81)$

이때, 평행사변형 ARPQ의 넓이와 삼각형 ABC의 넓이의 비가 $4:9$이므로 두 삼각형 RBP와 QPC의 넓이의 합과 삼각형 ABC의 넓이의 비는 $(9-4):9=5:9$

즉, $(x^2+x^2-18x+81):81=5:9$이므로

$9(2x^2-18x+81)=405$

$x^2-9x+18=0$

$(x-3)(x-6)=0$ $\quad\therefore x=3$ 또는 $x=6$

그런데 $\overline{BP}<\overline{CP}$이므로 $x=3$

$\therefore \overline{BP}=3$

47 답 4

이차방정식 $x^2+\sqrt{p}x+p-3=0$의 두 근이 모두 음수이기 위해서는

(i) 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(\sqrt{p})^2-4(p-3)\geq 0$

$-3p+12\geq 0$ $\quad\therefore p\leq 4$

(ii) 두 근의 합이 음수이므로 $-\sqrt{p}<0$ $\quad\therefore p>0$

(iii) 두 근의 곱이 양수이므로 $p-3>0$ $\quad\therefore p>3$

(i)~(iii)에 의하여 $3<p\leq 4$이므로 정수 p의 값은 4이다.

48 답 ①

두 실근이 모두 0 이하가 되는 경우를 찾아 제외하면 된다.

두 실근을 α, β라 하면 두 실근이 모두 0 이하가 되는 경우는

(i) $\alpha+\beta=2m\leq 0$

$\therefore m\leq 0$

(ii) $\alpha\beta=-2m-6\geq 0$

$\therefore m\leq -3$

(iii) 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=m^2+2m+6=(m+1)^2+5>0$

이므로 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i)~(iii)에 의하여 두 실근이 모두 0 이하가 되도록 하는 m의 값의 범위는 $m\leq -3$이다.

따라서 두 근 중 적어도 하나가 양의 실수가 되려면 $m>-3$이므로 정수 m의 최솟값은 -2이다.

49 답 ③

이차방정식 $ax^2+bx-(a-b)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=b^2+4a(a-b)=b^2-4ab+4a^2=(b-2a)^2\geq 0$

이므로 항상 실근을 갖는다.

한편, 근과 계수의 관계에 의하여

두 근의 합은

$-\frac{b}{a}$ ⋯ ㉠

두 근의 곱은

$-\frac{a-b}{a}=\frac{b}{a}-1$ ⋯ ㉡

ㄱ. a, b가 모두 양수이면 ㉠에 의하여 $-\frac{b}{a}<0$에서 두 근의 합이 음수이므로 적어도 하나의 음의 실근을 갖는다. (거짓)

ㄴ. 【반례】 $a=-4$, $b=-2$이면 a, b가 모두 음수이지만

$-4x^2-2x+2=0$에서

$2x^2+x-1=0$이므로

$(x+1)(2x-1)=0$

즉, $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$이므로

음의 두 실근을 갖지 않는다.(거짓)

ㄷ. a, b가 서로 다른 부호이면 $\frac{b}{a}<0$이므로 ㉡에서 두 근의 곱은

$\frac{b}{a}-1<0$이 되어 서로 다른 부호의 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

50 답 ②

두 이차방정식 $x^2+3ax+8=0$, $x^2+(2a+1)x+2a+6=0$

의 공통인 해를 $x=p$라 하면

$p^2+3ap+8=0$ ⋯ ㉠

$p^2+(2a+1)p+2a+6=0$ ⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면 $(a-1)p-2a+2=0$이므로

$(a-1)(p-2)=0$ $\quad\therefore a=1$ 또는 $p=2$

(i) $a=1$이면 두 이차방정식은 $x^2+3x+8=0$으로 같게 되어 공통인 해가 2개이므로 성립하지 않는다.

(ii) $p=2$이면 ㉠에서 $6a+12=0$ $\quad\therefore a=-2$

51 답 4

서로 다른 두 정수인 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-m$, $\alpha\beta=m-6$

두 식을 연립하면 $\alpha+\beta=-(\alpha\beta+6)$이므로

$\alpha\beta+\alpha+\beta+6=0$

$\therefore (\alpha+1)(\beta+1)=-5$

이때, $\alpha+1$, $\beta+1$은 정수이므로

(i) $\alpha+1=1$, $\beta+1=-5$일 때, $\alpha=0$, $\beta=-6$

(ii) $\alpha+1=-5$, $\beta+1=1$일 때, $\alpha=-6$, $\beta=0$

(iii) $\alpha+1=5$, $\beta+1=-1$일 때, $\alpha=4$, $\beta=-2$

(iv) $\alpha+1=-1$, $\beta+1=5$일 때, $\alpha=-2$, $\beta=4$

(i), (ii)에서 $m=-(\alpha+\beta)=-(0-6)=6$

(iii), (iv)에서 $m=-(\alpha+\beta)=-(4-2)=-2$

따라서 모든 상수 m의 값의 합은

$6+(-2)=4$

52 답 13

두 정수인 근을 α, $\beta(\alpha\le\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=p$ ⋯ ㉠

$\alpha\beta=q$ ⋯ ㉡

p, q가 소수이므로 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

즉, α, β는 자연수이다.

또, q가 소수이므로 ㉡에서 $\alpha=1$, $\beta=q$이다.

㉠에 대입하면 $1+q=p$

따라서 p, q는 연속하는 두 자연수인 소수이므로

$q=2$, $p=3$

$\therefore p^2+q^2=3^2+2^2=13$

53 답 9

근의 공식에 의하여 이차방정식의 두 근은 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-mn}}{m}$

이때, $\dfrac{-3\pm\sqrt{9-mn}}{m}$의 값이 유리수가 되려면

$\sqrt{9-mn}$이 유리수가 되어야 하므로 $9-mn$이 제곱수이어야 한다.

자연수 m, n에 대하여 $0\le 9-mn<9$이므로

(i) $9-mn=0$이면 $mn=9$

$\therefore (m, n)=(1, 9), (3, 3), (9, 1)$

(ii) $9-mn=1$이면 $mn=8$

$\therefore (m, n)=(1, 8), (2, 4), (4, 2), (8, 1)$

(iii) $9-mn=4$이면 $mn=5$

$\therefore (m, n)=(1, 5), (5, 1)$

따라서 순서쌍 (m, n)의 개수는 9이다.

54 답 4

이차방정식 $x^2-px+q=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=p$ ⋯ ㉠, $\alpha\beta=q$ ⋯ ㉡ ---------- ⓐ

이차방정식 $x^2-3px+4(q-1)=0$의 두 근이 α^2, β^2이므로

이 이차방정식의 근과 계수의 관계와 ㉠, ㉡에 의하여

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3p$에서 $p^2-3p-2q=0$ ⋯ ㉢

$(\alpha\beta)^2=4(q-1)$에서

$q^2-4q+4=(q-2)^2=0$ $\quad\therefore q=2$ ---------- ⓑ

$q=2$를 ㉢에 대입하면 $p^2-3p-4=0$이므로

$(p+1)(p-4)=0$ $\quad\therefore p=-1$ 또는 $p=4$

그런데 p는 양수이므로 $p=4$이다. ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $x^2-px+q=0$에서 근과 계수의 관계를 이용한다.	[20%]
ⓑ $x^2-3px+4(q-1)=0$에서 근과 계수의 관계를 이용하여 q의 값을 구한다.	[50%]
ⓒ 이차방정식 $p^2-3p-4=0$을 풀어 양수 p의 값을 구한다.	[30%]

55 답 34

α, β가 이차방정식 $x^2-x-5=0$의 두 근이므로

$x^2-x-5=(x-\alpha)(x-\beta)$ ⋯ ㉠

또, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=1$

즉, $1-\alpha=\beta$, $1-\beta=\alpha$이므로

$f(1-\alpha)=4\beta$에서 $f(\beta)=4\beta$

$f(1-\beta)=4\alpha$에서 $f(\alpha)=4\alpha$ ---------- ⓐ

따라서 α, β는 이차방정식 $f(x)=4x$,

즉 $f(x)-4x=0$의 두 근이므로

$f(x)-4x=(x-\alpha)(x-\beta)$ ---------- ⓑ

㉠에 의하여 $f(x)-4x=x^2-x-5$

$\therefore f(x)=x^2+px+q=x^2+3x-5$

양변의 계수를 비교하면 $p=3$, $q=-5$

$\therefore p^2+q^2=3^2+(-5)^2=34$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $x^2-x-5=0$에서 근과 계수의 관계를 이용한다.	[30%]
ⓑ α, β가 $f(x)-4x=0$의 두 근임을 안다.	[40%]
ⓒ 이차함수 $f(x)$를 찾아 p^2+q^2의 값을 구한다.	[30%]

56 답 3

공통근을 β라 하면

$\beta^2-a\beta+2a=0$ ⋯ ㉠

$\beta^2-2\beta+a^2=0$ ⋯ ㉡

㉡−㉠을 하면

$(a-2)\beta+a^2-2a=0$이므로

$(a-2)(\beta+a)=0$ ---------- ⓐ

(ⅰ) $a=2$이면 두 식은 같은 이차방정식이 되어 2개의 공통근을 갖는다.

(ⅱ) $\beta=-a$를 ㉠에 대입하면

$(-a)^2-a(-a)+2a=0$에서 $a^2+a=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=-1$ ---------- ⓑ

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 실수 a의 개수는 2, 0, −1의 3이다. ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 공통근을 정하여 식을 세운다.	[40%]
ⓑ 세운 식에 따라 실수 a의 값을 구한다.	[50%]
ⓒ 실수 a의 개수를 구한다.	[10%]

57 답 27

α는 이차방정식 $x^2+5x-2=0$의 한 근이므로

$\alpha^2+5\alpha-2=0$에서

$\alpha^2=-5\alpha+2$

이때, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-5$이므로

$\alpha^2-5\beta=(-5\alpha+2)-5\beta$

$=-5(\alpha+\beta)+2=27$

58 답 ②

$\alpha+\beta=\alpha\beta=k$($k$는 실수)라 하자.

이때, $f(x)=x^2-kx+k$이므로

$f(x-1)=(x-1)^2-k(x-1)+k=x^2-(k+2)x+2k+1$

방정식 $f(x-1)=0$의 두 근이 γ, δ이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\gamma+\delta=k+2$, $\gamma\delta=2k+1$

$\therefore \gamma^2+\delta^2=(k+2)^2-4k-2=k^2+2$

따라서 $\gamma^2+\delta^2$의 최솟값은 2이다.

[다른 풀이]

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이면

이차방정식 $f(x-1)=0$의 두 근은 $\alpha+1$, $\beta+1$이므로

$\gamma^2+\delta^2=(\alpha+1)^2+(\beta+1)^2$

$=\alpha^2+\beta^2+2(\alpha+\beta)+2$

$=(\alpha+\beta)^2+2(\alpha+\beta-\alpha\beta)+2$

$=(\alpha+\beta)^2+2\geq 2$

따라서 $\gamma^2+\delta^2$의 최솟값은 2이다.

59 답 ②

복소수 α가 이차방정식 $x^2-px+p+3=0$의 한 근이면

$\overline{\alpha}$도 근이므로

$\alpha=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq 0$)라 하면 $\overline{\alpha}=a-bi$이고,

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\overline{\alpha}=2a=p$, $\alpha\overline{\alpha}=a^2+b^2=p+3$

$a=\frac{p}{2}$, $b^2=-a^2+p+3=-\frac{p^2}{4}+p+3$ ⋯ ㉠

$\alpha^3=(a+bi)^3=a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i$

$=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i$

이때, α^3이 실수이므로 허수부분인 $3a^2b-b^3=0$이다.

$b\neq 0$이므로 $b^2=3a^2$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-\frac{p^2}{4}+p+3=3\times\left(\frac{p}{2}\right)^2 \quad \therefore p^2-p-3=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 p의 값의 곱은 −3이다.

[다른 풀이 ①]

이차방정식 $x^2-px+p+3=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=p^2-4(p+3)<0 \quad \therefore -2<p<6$ ⋯ ㉢

이차방정식 $x^2-px+p+3=0$의 한 허근이 α이므로

$\alpha^2-p\alpha+p+3=0$이 성립한다.

즉, $\alpha^2=p\alpha-p-3$

$\alpha^3=\alpha^2\times\alpha=p\alpha^2-(p+3)\alpha$

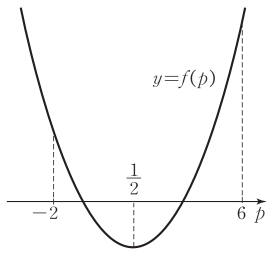
$=p(p\alpha-p-3)-(p+3)\alpha$

$=(p^2-p-3)\alpha-p(p+3)$

이때, α^3은 실수, $p(p+3)$은 실수, α는 허수이므로

$p^2-p-3=0$이다.

$f(p)=p^2-p-3$이라 하면 $f(p)=\left(p-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$이고, 실수 p는 ㉢을 만족시켜야 하므로 함수 $y=f(p)$의 그래프는 그림과 같다.



(ⅰ) 축 $p=\frac{1}{2}$은 p축 위의 −2와 6 사이에 존재하고,

(ⅱ) $f(-2)>0$, $f(6)>0$

(ⅲ) $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$이므로 실근이 존재한다.

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 $p^2-p-3=0$의 두 실근은 −2와 6 사이에 존재한다.

따라서 α^3이 실수가 되는 모든 실수 p의 값의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 −3이다.

[다른 풀이 ②]

이차방정식 $x^2-px+p+3=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=p^2-4(p+3)<0 \qquad \therefore -2<p<6$

이차방정식 $x^2-px+p+3=0$의 한 허근이 α이므로

$\alpha^2-p\alpha+p+3=0$이고, $\alpha^2-p\alpha+p^2=p^2-p-3$이다.

식의 양변에 $\alpha+p$를 각각 곱하면

$\alpha^3+p^3=(\alpha+p)(p^2-p-3)$이므로

$\alpha^3=(p^2-p-3)\alpha-p(p+3)$이다.

이때, α^3이 실수이므로 $p^2-p-3=0$이다.

(이하 동일)

60 답 ⑤

함수 $f(x)$는 이차항의 계수가 1이고 조건 (가)에서

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 곱이 7이므로

$f(x)=x^2+ax+7$ (a는 상수)이라 하자.

조건 (나)에서 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=7$

조건 (나)에 의하여

$f(\alpha)+f(\beta)=(\alpha^2+\beta^2)+a(\alpha+\beta)+14=7+3a+14=3$

$\therefore a=-6$

따라서 $f(x)=x^2-6x+7$이므로 $f(7)=14$

61 답 ③

$2+\sqrt{3}$은 이차방정식 $ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$ ⋯ ㉠의 한 근이므로

$a(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{3}b(2+\sqrt{3})+c=0$

$\therefore (7a+3b+c)+(4a+2b)\sqrt{3}=0$

이때, a, b, c가 유리수이므로

$7a+3b+c=0$, $4a+2b=0 \qquad \therefore b=-2a$, $c=-a$

㉠에 대입하면 $a(x^2-2\sqrt{3}x-1)=0$

이 이차방정식의 두 근은 $x=\sqrt{3}\pm2$이다.

따라서 $\beta=-2+\sqrt{3}$이므로 $\alpha+\dfrac{1}{\beta}=2+\sqrt{3}+\dfrac{1}{-2+\sqrt{3}}=0$

[다른 풀이 ①]

$t=\sqrt{3}x$라 하면 주어진 방정식은 $\dfrac{a}{3}t^2+bt+c=0$,

즉 $at^2+3bt+3c=0$이다.

이 이차방정식은 한 근이 $t=\sqrt{3}(2+\sqrt{3})=3+2\sqrt{3}$

이고 계수가 모두 유리수이므로 다른 한 근은 $t=3-2\sqrt{3}$

따라서 주어진 방정식의 다른 한 근

$\beta=\dfrac{t}{\sqrt{3}}=\dfrac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=-2+\sqrt{3}$이므로

$\alpha+\dfrac{1}{\beta}=2+\sqrt{3}+\dfrac{1}{-2+\sqrt{3}}=0$

[다른 풀이 ②]

$\alpha=2+\sqrt{3}$에서 $\alpha-\sqrt{3}=2$이고 양변을 제곱하여 정리하면

$\alpha^2-2\sqrt{3}\alpha-1=0$

즉, α는 이차방정식 $a(x^2-2\sqrt{3}x-1)=0$의 근이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$2+\sqrt{3}+\beta=2\sqrt{3} \qquad \therefore \beta=-2+\sqrt{3}$

$\therefore \alpha+\dfrac{1}{\beta}=2+\sqrt{3}+\dfrac{1}{-2+\sqrt{3}}=0$

일등급 UP

* 켤레근의 성질을 이용하여 다른 한 근 구하기

$\overline{A}$를 A의 켤레근이라 하자. 즉, 유리수 p, q에 대하여

$\overline{p+q\sqrt{3}}=p-q\sqrt{3}$

$f(x)=ax^2+\sqrt{3}bx+c$ (a, b, c는 유리수)라 하고

한 근을 $\alpha=2+\sqrt{3}$이라 하면 $f(\alpha)=0$이다.

즉, $a\alpha^2+\sqrt{3}b\alpha+c=0$에서

$\overline{a\alpha^2+\sqrt{3}b\alpha+c}=\overline{a\alpha^2}+\overline{\sqrt{3}b\alpha}+\overline{c}=\overline{a}\overline{\alpha}^2+\overline{\sqrt{3}}\overline{b}\overline{\alpha}+\overline{c}$

$=a\overline{\alpha}^2-\sqrt{3}b\overline{\alpha}+c=a(-\overline{\alpha})^2+\sqrt{3}b(-\overline{\alpha})+c=0$

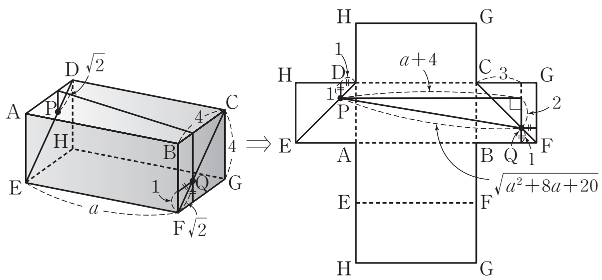
이므로 $f(-\overline{\alpha})=0$이다.

$\therefore -\overline{\alpha}=-(2-\sqrt{3})=-2+\sqrt{3}=\beta$

62 답 240

점 P에서 직육면체의 겉면을 따라 점 Q에 도달하는 최단거리를 구하기 위해 고려해야 할 경로를 다음과 같이 나누자.

(i) 다음과 같은 경로로 이동하는 경우

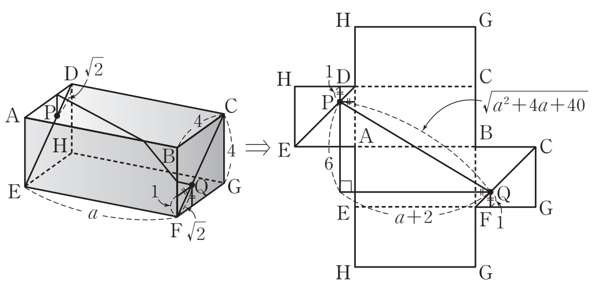


[그림 1]

그림의 전개도는 [그림 1]과 같으므로 $\overline{\mathrm{DP}}=\overline{\mathrm{FQ}}=\sqrt{2}$를 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선으로 보면

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(a+4)^2+2^2}=\sqrt{a^2+8a+20}$

(ii) 다음과 같은 경로로 이동하는 경우



[그림 2]

그림의 전개도는 [그림 2]와 같으므로 $\overline{\mathrm{DP}}=\overline{\mathrm{FQ}}=\sqrt{2}$를 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선으로 보면

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(a+2)^2+6^2}=\sqrt{a^2+4a+40}$

한편, $a>5$이므로 (i), (ii)에 의하여

$(a^2+4a+40)-(a^2+8a+20)=-4a+20<0$

즉, $\sqrt{a^2+4a+40}$이 최단거리이므로

$\sqrt{a^2+4a+40}=2\sqrt{34}$에서

$a^2+4a+40=136$

$a^2+4a-96=0$

$(a-8)(a+12)=0 \quad \therefore a=8$

$\therefore 30a=240$

63 답 24

근의 공식에 의하여

$x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-4m}}{2}$ ⋯ ㉠

주어진 방정식의 근이 서로 다른 정수가 된다는 조건은 서로 다른 실근을 갖는다는 것이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 한다.

즉, $D=25-4m>0$

$\therefore m<\dfrac{25}{4}$

이때, m은 자연수이므로 가능한 값은

$m=1, 2, 3, 4, 5, 6$ ⋯ ㉡

한편, 근이 정수가 되려면 $\sqrt{25-4m}$이 유리수가 되어야 하므로

$25-4m$ ⋯ ㉢

은 완전제곱수이다.

㉢에 ㉡을 대입하여 완전제곱수가 되게 하는 m을 찾아보면

$m=4$, $m=6$이다.

㉠에 $m=4$를 대입하면 $x=1$ 또는 $x=4$

㉠에 $m=6$을 대입하면 $x=2$ 또는 $x=3$

$\therefore m=4$ 또는 $m=6$

따라서 모든 자연수 m의 값의 곱은 $4\times6=24$이다.

64 답 9

주어진 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2(b-2)^2-a^2(ab-2a-3)=0$

$a^2\{(b-2)^2-a(b-2)+3\}=0$

이때, $a\neq0$이므로 $(b-2)^2-a(b-2)+3=0$

$(b-2)(b-2-a)=-3$

$(b-2)(a-b+2)=3$

한편, a, b는 자연수이므로

(i) $\begin{cases} b-2=1 \\ a-b+2=3 \end{cases}$ 일 때, $a=4$, $b=3$

(ii) $\begin{cases} b-2=3 \\ a-b+2=1 \end{cases}$ 일 때, $a=4$, $b=5$

(i), (ii)에 의하여 $a+b$의 최댓값은 $4+5=9$

65 답 11

이차방정식 $x^2+x+3=0$의 두 근이 α, β이므로

$x^2+x+3=(x-\alpha)(x-\beta)$ ⋯ ㉠

또한, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=3$

한편, $\beta=-\alpha-1$, $\alpha=-\beta-1$이고 조건 (나)에 의하여

$f(\alpha)=\beta=-\alpha-1$, $f(\beta)=\alpha=-\beta-1$

즉, 이차방정식 $f(x)+x+1=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(x)+x+1=k(x-\alpha)(x-\beta)$

$\qquad=k(x^2+x+3)$ (k는 상수) ($\because$ ㉠)

$f(x)=k(x^2+x+3)-x-1$ ⋯ ㉡

이때, 조건 (가)에서 $f(1)=3$이므로 ㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=3=5k-2 \quad \therefore k=1$

따라서 $f(x)=x^2+2$이므로

$f(3)=9+2=11$

[다른 풀이]

이차방정식 $x^2+x+3=0$의 두 근이 α, β이므로

$x^2+x+3=(x-\alpha)(x-\beta)$

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=3$

조건 (나)에 의하여

$f(\alpha)=\beta$의 양변에 α를 곱하면 $\alpha f(\alpha)=\alpha\beta=3$

$f(\beta)=\alpha$의 양변에 β를 곱하면 $\beta f(\beta)=\alpha\beta=3$

조건 (가)에서 $f(1)=3$이므로 $1\times f(1)=3$

이때, $g(x)=xf(x)-3$이라 하면

$g(1)=g(\alpha)=g(\beta)=0$이므로 인수정리에 의하여

$g(x)=k(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)$

$\quad=k(x-1)(x^2+x+3)$

$\quad=k(x^3+2x-3)$ (k는 상수)

$\therefore xf(x)-3=k(x^3+2x-3)$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $-3=-3k \quad \therefore k=1$

㉠에 대입하여 정리하면 $f(x)=x^2+2$

$\therefore f(3)=9+2=11$

66 답 1

α가 이차방정식 $x^2-\sqrt{3}x+1=0$의 근이므로

$\alpha^2-\sqrt{3}\alpha+1=0$, 즉 $\alpha^2+1=\sqrt{3}\alpha$

양변을 제곱한 후 정리하면 $\alpha^4-\alpha^2+1=0$

$(\alpha^2+1)(\alpha^4-\alpha^2+1)=0 \quad \therefore \alpha^6=-1$

이때,

$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{10}=1+\alpha+\cdots+\alpha^5+\alpha^6(1+\alpha+\cdots+\alpha^4)$

$\qquad=1+\alpha+\cdots+\alpha^5-(1+\alpha+\cdots+\alpha^4)=\alpha^5$

마찬가지로 β도 이차방정식 $x^2-\sqrt{3}x+1=0$의 근이므로

$1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{10}=\beta^5$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=1$이므로 구하는 식의 값은

$\alpha^5\beta^5=(\alpha\beta)^5=1^5=1$

67 답 ②

두 이차방정식 $x^2+ax+b=0$, $ax^2+bx+1=0$의 공통인 실수해를 $x=p$라 하면

$p^2+ap+b=0$ ⋯ ㉠

$ap^2+bp+1=0$ ⋯ ㉡

㉠$\times p-$㉡을 하면 $p^3-1=0$이므로

$(p-1)(p^2+p+1)=0$

이때, p는 실수이므로 $p=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $1+a+b=0$

$\therefore a+b=-1$

68 답 6

주어진 이차방정식의 소수인 두 근을 p, q $(p\le q)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$p+q=\dfrac{20}{m}$, $pq=\dfrac{n}{m}$

소수 p, q에 대하여 $p+q$는 4 이상의 자연수이므로 $m=1, 2, 4, 5$

(i) $m=1$이면 $p+q=20$이므로

$p=3$, $q=17$ $\quad\therefore pq=n=51$

$p=7$, $q=13$ $\quad\therefore pq=n=91$

(ii) $m=2$이면 $p+q=10$이므로

$p=3$, $q=7$에서 $pq=\dfrac{n}{2}=21$ $\quad\therefore n=42$

$p=5$, $q=5$에서 $pq=\dfrac{n}{2}=25$ $\quad\therefore n=50$

(iii) $m=4$이면 $p+q=5$이므로

$p=2$, $q=3$에서 $pq=\dfrac{n}{4}=6$ $\quad\therefore n=24$

(iv) $m=5$이면 $p+q=4$이므로

$p=2$, $q=2$에서 $pq=\dfrac{n}{5}=4$ $\quad\therefore n=20$

따라서 순서쌍 (m, n)의 개수는

$(1, 51)$, $(1, 91)$, $(2, 42)$, $(2, 50)$, $(4, 24)$, $(5, 20)$

의 6이다.

1st 06 이차방정식과 이차함수

문제편 69P

01 답 ④

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 아래로 볼록하므로 $a>0$

축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $ab<0$에서 $b<0$

y절편이 x축의 아래쪽에 있으므로 $c<0$

이때, 이차함수 $y=cx^2+bx+a$의 그래프는 $c<0$이므로 위로 볼록하다.

$b<0$에서 $bc>0$이므로 축이 y축의 왼쪽에 있다.

$a>0$이므로 y절편이 x축의 위쪽에 있다.

따라서 $y=cx^2+bx+a$의 그래프의 개형은 ④와 같다.

02 답 ⑤

이차함수 $y=x^2-kx+k$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2-kx+k=0$이 중근을 갖는다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4k=0$

$k(k-4)=0$ $\quad\therefore k=0$ 또는 $k=4$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 4이다.

03 답 ④

이차함수 $y=x^2-3x+4$의 그래프와 직선 $y=3x-a$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2-3x+4=3x-a$가 서로 다른 두 실근을 갖는다.

즉, $x^2-6x+4+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-(4+a)>0$

$5-a>0$ $\quad\therefore a<5$

04 답 ③

이차함수 $y=(x-a)(ax-1)$의 그래프와 직선 $y=2x-2a$가 접하므로 이차방정식 $(x-a)(ax-1)=2x-2a$가 중근을 갖는다.

즉, $(x-a)(ax-1)=2x-2a$에서

$(x-a)(ax-1)-2(x-a)=0$

$(x-a)(ax-3)=0$

$a=\dfrac{3}{a}$ $\quad\therefore a^2=3$

05 답 ③

이차함수 $f(x)=x^2-4x+a=(x-2)^2+a-4$는 이차항의 계수가 양수이므로 $x=2$일 때 최솟값이 $a-4$이다.

즉, $a-4=1$에서 $a=5$

06 답 ②

이차함수 $f(x)=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$은 이차항의 계수가 음수이므로 $-1\le x\le 1$일 때 $x=1$에서 최댓값이 1이고, $x=-2$일 때 최솟값이 -8이다.

$\therefore M-m=1-(-8)=9$

07 답 ③

$\overline{BF}=x\ (0<x<3)$라 하면 $\overline{FC}=3-x$이고 삼각형의 닮음에 의하여 $\overline{DF}:\overline{FC}=4:3$

$\therefore \overline{DF}=\frac{4}{3}\overline{FC}=\frac{4}{3}(3-x)$

이때, 사각형 EBFD의 넓이는

$\overline{BF}\times\overline{DF}=\frac{4}{3}x(3-x)=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+3\ (0<x<3)$

따라서 $x=\frac{3}{2}$일 때, 사각형 EBFD의 넓이의 최댓값은 3이다.

08 답 ③

(i) $a>0$이면 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 아래로 볼록하고, $y=ax+b$의 그래프는 오른쪽 위를 향한다. 이를 만족시키는 한 쌍의 그래프는 없다.

(ii) $a<0$이면 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 위로 볼록하고, $y=ax+b$의 그래프는 오른쪽 아래를 향한다. 이를 만족시키는 한 쌍의 그래프는 ③이다.

09 답 10

x축과의 두 교점을 $(-1,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$이라 하면 함수 $f(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=2$이므로

$\frac{-1+\beta}{2}=2 \qquad \therefore \beta=5$

이차방정식 $f(x)=0$의 두 실근이 -1, 5이므로

$f(x)=ax^2+bx+c=a(x+1)(x-5)\ \cdots$ ㉠

또한, $a+b+c=16$에서

$f(1)=a+b+c=16$

㉠에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=a(1+1)(1-5)=-8a=16$

$\therefore a=-2$

따라서 $f(x)=-2(x+1)(x-5)$이므로

$f(4)=-2(4+1)(4-5)=10$

10 답 3

제1사분면에서 만나는 점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{2}{3}a\right)$라 하면

$\frac{2}{3}a=\frac{1}{2}t^2$, $\frac{2}{3}a=-(t-1)^2+a$이므로

$a=\frac{3}{4}t^2\ \cdots$ ㉠, $a=3(t-1)^2\ \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{3}{4}t^2=3(t-1)^2$이므로

$3t^2-8t+4=0$, $(3t-2)(t-2)=0$

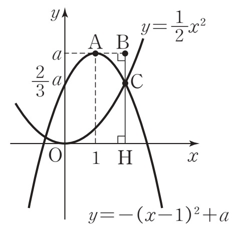
$\therefore t=\frac{2}{3}$ 또는 $t=2$

㉠에 의하여 $a=\frac{1}{3}$ 또는 $a=3$

$a>\frac{1}{2}$이므로 $a=3$

[다른 풀이]

그림과 같이 함수 $y=-(x-1)^2+a$의 그래프의 꼭짓점을 A, 두 함수의 그래프의 교점을 C, 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 점 A에서 함수 $y=-(x-1)^2+a$에 접하는 직선과 직선 CH의 교점을 B라 하자.



이때, 점 A의 y좌표가 a이고 점 C의 y좌표가 $\frac{2}{3}a$이므로

$\overline{CH}=2\overline{BC}\ \cdots$ ㉠

$\overline{AB}=k(k>0)$라 하면 $\overline{OH}=1+k$이고

$\overline{BC}=k^2$, $\overline{CH}=\frac{1}{2}(1+k)^2\ \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{2}(1+k)^2=2k^2$이므로 $3k^2-2k-1=0$

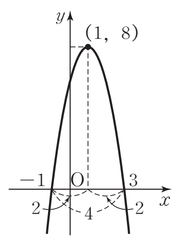
$(3k+1)(k-1)=0 \qquad \therefore k=1\ (\because k>0)$

따라서 점 C의 좌표가 $(2,\ 2)$이므로 y좌표는 $\frac{2}{3}a=2$

$\therefore a=3$

11 답 ①

$y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점이 $(1,\ 8)$이고 x축이 그래프에 의하여 잘린 선분의 길이가 4이므로 그림과 같이 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 x축과 두 점 $(3,\ 0)$, $(-1,\ 0)$에서 만난다. 즉,



$y=ax^2+bx+c=a(x-3)(x+1)$

꼭짓점이 $(1,\ 8)$이므로

$8=a(1-3)(1+1)=-4a \qquad \therefore a=-2$

따라서 $y=ax^2+bx+c=-2(x-3)(x+1)=-2x^2+4x+6$이므로 $a=-2$, $b=4$, $c=6 \qquad \therefore abc=-48$

12 답 ⑤

이차함수 $y=x^2-2ax+3a+1$의 그래프의 축이 $x=a$이고 $\overline{AB}=6$이므로 이차방정식 $x^2-2ax+3a+1=0$의 실근은 $a+3$, $a-3$이다. 근과 계수의 관계에 의하여

$(a+3)(a-3)=3a+1$이므로 $a^2-3a-10=0$

$(a+2)(a-5)=0 \qquad \therefore a=5\ (\because a>0)$

[다른 풀이]

이차함수 $y=x^2-2ax+3a+1$의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$이라 하면 이차방정식 $x^2-2ax+3a+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a$, $\alpha\beta=3a+1$ ⋯ ㉠

이때, $\overline{AB}=6$이 되려면 $|\alpha-\beta|=6$이어야 하므로 양변을 제곱하면

$(\alpha-\beta)^2=36$에서

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=36$

㉠을 대입하면 $4a^2-12a-4=36$이므로

$a^2-3a-10=0$

$(a+2)(a-5)=0$ $\quad\therefore a=5$ $(\because a>0)$

13 답 ④

이차함수 $y=x^2-2ax+b$의 그래프의 축이 $x=a$이므로 x축과 점 $(a+3, 0)$에서 만나면 x축과 만나는 다른 한 점의 좌표는 $(a-3, 0)$이다.

즉, $a-3=-2$이므로 $a=1$ ⋯ ㉠

이때, 이차방정식 $x^2-2ax+b=0$의 두 실근이 -2, 4이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$b=-2\times4=-8$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a-b=1-(-8)=9$

[다른 풀이]

-2와 $a+3$이 이차방정식 $x^2-2ax+b=0$의 두 근이므로

$x=-2$를 대입하면 $(-2)^2-2a\times(-2)+b=0$

$\therefore b=-4a-4$ ⋯ ㉠

$x=a+3$을 대입하면 $(a+3)^2-2a(a+3)+b=0$

$\therefore b=a^2-9$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a^2+4a-5=0$

$(a-1)(a+5)=0$

이때, 서로 다른 두 실근이 -2, $a+3$이고 $a+3\neq-2$이므로

$a\neq-5$ $\quad\therefore a=1$, $b=-8$ $(\because$ ㉠$)$

$\therefore a-b=1-(-8)=9$

14 답 ②

이차방정식 $2x+k=x^2$, 즉 $x^2-2x-k=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-k$

두 그래프의 교점의 좌표는 $(\alpha, 2\alpha+k)$, $(\beta, 2\beta+k)$이고 두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$이므로

$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(2\alpha-2\beta)^2}=2\sqrt{10}$

$\sqrt{5(\alpha-\beta)^2}=2\sqrt{10}$

$\therefore |\alpha-\beta|=2\sqrt{2}$

이때, $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$(2\sqrt{2})^2=2^2-4\times(-k)$, $8=4+4k$ $\quad\therefore k=1$

15 답 ②

곡선 $y=x^2-x-1$과 직선 $y=2x+1$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-x-1=2x+1$, 즉 $x^2-3x-2=0$의 두 근이 a, c이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a+c=3$, $ac=-2$

또, $P(a, b)$, $Q(c, d)$가 직선 $y=2x+1$ 위의 점이므로

$b=2a+1$, $d=2c+1$

$\therefore bd=(2a+1)(2c+1)=4ac+2(a+c)+1$

$\qquad=4\times(-2)+2\times3+1=-1$

16 답 ⑤

이차방정식 $x^2+b=ax$, 즉 $x^2-ax+b=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이다.

이때, a, b가 유리수이므로 방정식 $x^2-ax+b=0$의 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다. 따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$a=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$, $b=(2+\sqrt{3})\times(2-\sqrt{3})=1$

$\therefore a+b=5$

17 답 ④

이차함수 $y=x^2-2ax+a^2+2a-1$의 그래프가 직선 $y=mx+n$과 접하므로 이차방정식 $x^2-2ax+a^2+2a-1=mx+n$, 즉 $x^2-(2a+m)x+a^2+2a-n-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2a+m)^2-4(a^2+2a-n-1)$

$\quad=4am+m^2-8a+4n+4$

$\quad=(4m-8)a+m^2+4n+4=0$

이 식이 a의 값에 관계없이 성립하므로

$4m-8=0$이고, $m^2+4n+4=0$

두 식을 연립하여 풀면 $m=2$, $n=-2$

$\therefore m+n=0$

18 답 ④

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 일차함수 $y=h(x)$의 그래프와 $x=p$에서 접하므로 이차방정식 $f(x)-h(x)=0$은 $x=p$인 중근을 갖는다. 이때, 조건 (가)에서 이차함수 $y=f(x)$의 이차항의 계수는 1이므로 $f(x)-h(x)=(x-p)^2$

$\therefore f(x)=(x-p)^2+h(x)$ ⋯ ㉠

같은 방법으로

$g(x)=4(x-4p)^2+h(x)$ ⋯ ㉡

한편, 조건 (나)에서 방정식 $f(x)=g(x)$의 두 근이 α, β이므로

㉠, ㉡에서

$f(x)-g(x)=(x-p)^2-4(x-4p)^2=(x-p)^2-(2x-8p)^2$

$\qquad=(3x-9p)(-x+7p)=-3(x-3p)(x-7p)$

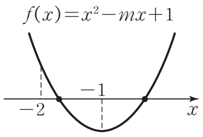
$\qquad=0$

따라서 α, β의 값은 $\alpha=3p$, $\beta=7p$ 또는 $\alpha=7p$, $\beta=3p$이므로

$\dfrac{|\alpha-\beta|}{p}=\dfrac{|\pm4p|}{p}=\dfrac{4p}{p}$ $(\because p>0)=4$

19 답 ⑤

주어진 조건을 만족시키려면 $f(x)=x^2-mx+1$이라 할 때, 함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같아야 한다.



$f(-2)=4+2m+1>0$에서

$m>-\dfrac{5}{2}$

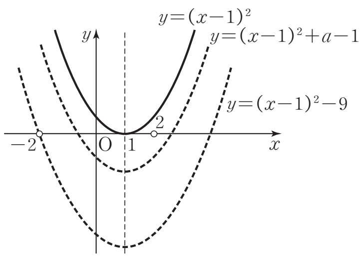
$f(-1)=1+m+1<0$에서

$m<-2$

$\therefore -\dfrac{5}{2}<m<-2$

20 답 ③

$f(x)=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ a-1)$이다. 따라서 a의 값에 따라 $y=(x-1)^2+a-1$의 그래프는 다음과 같다.



$y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -2와 2 사이에 적어도 하나 존재하려면 $f(1)\le 0$이고, $f(-2)>0$이어야 한다.

$f(1)=a-1\le 0$에서

$a\le 1$

$f(-2)=8+a>0$에서

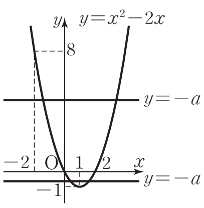
$a>-8$

따라서 $-8<a\le 1$이므로

$\alpha=-8,\ \beta=1$

$\therefore \beta-\alpha=9$

[다른 풀이]



$x^2-2x=-a$라 하면 그림과 같이 $-2\le x\le 2$에서 $y=x^2-2x,\ y=-a$의 교점 중 적어도 하나가 존재하면 된다.

즉, $-1\le -a<8$에서

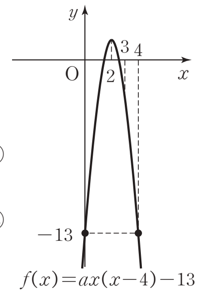
$-8<a\le 1$

$\therefore \beta-\alpha=9$

21 답 ①

이차방정식 $ax(x-4)=13$의 근은 이차함수 $f(x)=ax(x-4)-13$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표이다.

이차함수 $f(x)$는 축이 $x=2$이고 a의 값에 관계없이 두 점 $(0,\ -13),\ (4,\ -13)$을 지나므로 서로 다른 두 근이 모두 3보다 작으려면 그림과 같이 $a<0$이고, $f(2)>0,\ f(3)<0$을 만족시키면 된다.



$f(2)=-4a-13>0 \qquad \therefore a<-\dfrac{13}{4}$ ⋯ ㉠

$f(3)=-3a-13<0 \qquad \therefore a>-\dfrac{13}{3}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$-\dfrac{13}{3}<a<-\dfrac{13}{4}$

따라서 정수 a의 값은 -4이다.

22 답 ①

$f(x)=x^2-2ax+2a=(x-a)^2-a^2+2a$이므로

$x=a$일 때, $f(x)$의 최솟값은 $-a^2+2a$이다.

$\therefore g(a)=-a^2+2a=-(a-1)^2+1$

따라서 $g(a)$의 최댓값은 $g(1)=1$이다.

23 답 ②

이차함수 $y=x^2-3ax+4a$와 직선 $y=ax+b$가 접하므로 이차방정식 $x^2-3ax+4a=ax+b$가 중근을 갖는다.

이차방정식 $x^2-4ax+4a-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=4a^2-4a+b=0$이므로 $b=-4a^2+4a=-4\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+1$

따라서 실수 b는 이차항의 계수가 음수이고 축이 $a=\dfrac{1}{2}$인 이차함수이므로 $a=\dfrac{1}{2}$일 때, b의 최댓값은 1이다.

24 답 ④

두 점 $\mathrm{A}(a,\ b),\ \mathrm{B}(b,\ a)$를 지나는 직선의 방정식이 $y=-x+a+b$이므로 이차함수 $y=x^2-5x+p$의 그래프가 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(a,\ b),\ \mathrm{B}(b,\ a)$를 지난다는 것은

이차방정식 $x^2-5x+p=-x+a+b$, 즉 $x^2-4x+p-a-b=0$이 서로 다른 두 실근 $a,\ b$를 가진다는 것이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $a+b=4$

$x^2-4x+p-4=0$에서 $p=-x^2+4x+4$

즉, 함수 $y=-x^2+4x+4$의 그래프와 직선 $y=p$가 서로 다른 두 교점을 갖는다는 것이다.

이차함수 $y=-x^2+4x+4=-(x-2)^2+8$은 $x=2$에서 최댓값 8을 가지므로 $p<8$

따라서 정수 p의 최댓값은 7이다.

[다른 풀이]

$a^2-5a+p=b$, $b^2-5b+p=a$에서 두 식을 변끼리 빼면

$a^2-b^2-5(a-b)=b-a$

$(a-b)(a+b-4)=0$

이때, $a\neq b$이므로 $a+b=4$

$\therefore p=b-a^2+5a=4-a-a^2+5a$

$\quad =-(a-2)^2+8<8$ ($\because a=2$이면 $b=2$)

따라서 정수 p의 최댓값은 7이다.

25 답 14

조건 (가)에서 $f(x)=a(x+3)(x-5)$이고 축이 $x=1$인 이차함수임을 알 수 있다.

조건 (나)에서 $-3<2\leq x\leq 4<5$인 구간에서의 함숫값이 양수이므로 그래프가 위로 볼록한 이차함수이다. 즉, $a<0$이므로 이차함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(2)=a(2+3)(2-5)=-15a=30 \qquad \therefore a=-2$

$\therefore f(-2)=-2(-2+3)(-2-5)=14$

26 답 ②

$(x-1)^2+y^2=4$에서 $y^2=4-(x-1)^2$

이때, x, y가 실수이므로 $y^2=4-(x-1)^2\geq 0$

$(x-1)^2\leq 4$

$-2\leq x-1\leq 2 \qquad \therefore -1\leq x\leq 3$

한편, $x^2+2y^2=x^2+2\{4-(x-1)^2\}=-x^2+4x+6$에서

$f(x)=-x^2+4x+6=-(x-2)^2+10$ $(-1\leq x\leq 3)$이라 하면

이차함수 $f(x)$는 이차항의 계수가 음수이므로 $x=2$일 때 최댓값을 갖는다.

$M=f(2)=10$, $m=f(-1)=1$

$\therefore M+m=11$

27 답 ⑤

$f(x)=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$

$0\leq x\leq 3$에서 $-2\leq f(x)\leq 2$이므로 $f(x)=t$라 하면

$f(f(x))=f(t)=t^2-4t+2=(t-2)^2-2$ $(-2\leq t\leq 2)$

따라서 $t=2$일 때, $f(f(x))$의 최솟값은 -2이다.

28 답 ④

$\overline{OA}=1$, $\overline{OB}=2$에서 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 두 점 A$(1, 0)$, B$(0, 2)$를 지나므로

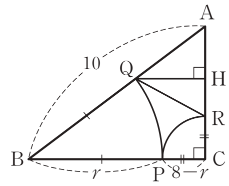
$a+b+c=0$, $c=2$

$\therefore b=-a-2$

$ab=a(-a-2)=-a^2-2a=-(a+1)^2+1$

따라서 $a=-1$일 때, ab의 최댓값은 1이다.

29 답 6



$\overline{BP}=r$ $(0<r<8)$라 하고 점 Q에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PC}=\overline{RC}=8-r$

$\overline{HC}=\frac{3}{5}\overline{BQ}=\frac{3}{5}r$

$\overline{HR}=\overline{HC}-\overline{RC}=\frac{8}{5}r-8$ ⋯ ㉠

$\overline{AQ}=10-r$

$\overline{QH}=\frac{4}{5}\overline{AQ}=\frac{4}{5}(10-r)$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\overline{QR}^2=\overline{HR}^2+\overline{QH}^2$

$\quad =\frac{64}{25}(r-5)^2+\frac{16}{25}(10-r)^2$

$\quad =\frac{16}{25}\{4(r-5)^2+(10-r)^2\}$

$\quad =\frac{16}{25}(5r^2-60r+200)$

$\quad =\frac{16}{5}(r^2-12r+40)$

따라서 $r=6$, 즉 $\overline{BP}=6$일 때 $\overline{QR}^2$의 값은 최소이다.

30 답 ①

주어진 일차함수 $y=ax+b$의 그래프에서 기울기 a와 y절편 b를 보면 $a>0$, $b<0$ ⋯ ㉠

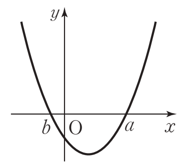
또, $x=1$일 때, y의 값이 양수이므로 $a+b>0$ ⋯ ㉡

$\therefore |a|>|b|$

이차함수

$y=x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b)$

이므로 ㉠, ㉡을 만족시키는 그래프는 그림과 같다.



31 답 ①

모든 실수 x에 대하여 $f(4-x)=f(2+x)$를 만족시키므로

$x=0$을 대입하면

$f(4)=f(2)$

함수 $f(x)$는 축이 $x=3$이고 아래로 볼록한 이차함수이므로 축과의 거리가 멀수록 함숫값은 커진다.

따라서 $f(3)<f(2)=f(4)<f(1)<f(0)$이므로 함숫값이 가장 큰 것은 $f(0)$이다.

32 답 ④

$y=x^2-2ax+a^2+a-1=(x-a)^2+a-1$

이 그래프의 꼭짓점 $(a, a-1)$이 제4사분면 위에 있으므로

$a>0$, $a-1<0$

$\therefore 0<a<1$

33 답 ①

이차함수 $y=x^2+ax-2a$를 a에 대하여 정리하면

$(x-2)a+x^2-y=0$

이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$x-2=0,\ x^2-y=0 \qquad \therefore x=2,\ y=4$

즉, 점 $\mathrm{P}(2,\ 4)$가 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점이므로

$y=x^2+ax-2a=(x-2)^2+4=x^2-4x+8 \qquad \therefore a=-4$

34 답 1

각각의 주어진 거리가 이차함수 $y=f(x)$와 x축, 즉 $y=0$과 $y=6$, $y=16$과의 교점의 x좌표의 차이므로 이차함수 $y=f(x)$의 축에는 무관함을 알 수 있다. 즉, 이 이차함수의 축을 $x=0$이라 해도 문제의 답을 구하는 데에는 무관하다.

즉, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 두 교점 사이의 거리가 $2l$이면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 차가 $2l$이므로 두 근을 $-l,\ l$이라 할 수 있다. 이때, 이차항의 계수를 a라 하면

$f(x)=a(x+l)(x-l)$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=6$의 두 교점 사이의 거리가 $2(l+1)$이므로 이차방정식 $f(x)-6=0$의 두 근의 차가 $2(l+1)$이다. 두 근을 $-l-1,\ l+1$이라 하면

$f(x)-6=a(x+l)(x-l)-6=a(x+l+1)(x-l-1)$

이므로 $al^2+6=a(l+1)^2$

$\therefore 2al+a=6 \cdots$ ㉠

마찬가지로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=16$의 두 교점 사이의 거리가 $2(l+2)$이므로 이차방정식 $f(x)-16=0$의 두 근의 차가 $2(l+2)$이다. 두 근을 $-l-2,\ l+2$라 하면

$f(x)-16=a(x+l)(x-l)-16=a(x+l+2)(x-l-2)$

이므로 $al^2+16=a(l+2)^2$

$\therefore 4al+4a=16 \cdots$ ㉡

㉡$-2\times$㉠을 하면 $a=2 \qquad \therefore l=1$

35 답 12

이차함수 $f(x)=x^2-ax$의 그래프와 x축과 만나는 두 점은 $(0,\ 0),\ (a,\ 0)$이다. 그런데 조건 (나)에서 이차함수 $g(x)=-x^2+bx-10$의 그래프는 원점을 지나지 않으므로 점 B의 좌표는 $(a,\ 0)$이고 점 A의 좌표는 $(0,\ 0)$이다.

또한, 조건 (다)에서 이차함수 $g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 다른 한 점의 좌표가 $\left(\frac{2}{5}a,\ 0\right)$임을 알 수 있다.

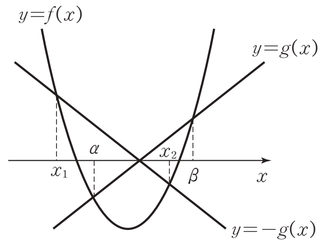
따라서 이차방정식 $g(x)=-x^2+bx-10=0$의 두 근이 $\frac{2}{5}a$와 a이다. 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{2}{5}a\times a=10$에서 $a^2=25$이므로 $a=5$ ($\because$ (가))

$\frac{2}{5}a+a=b$이므로 $b=7 \qquad \therefore a+b=12$

36 답 ④

방정식 $f(x)+g(x)=0$에서 $f(x)=-g(x)$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=-g(x)$의 그래프를 그려 보면 그림과 같다.



따라서 $f(x)+g(x)=0$의 해는 $y=f(x)$와 $y=-g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이다.

$\therefore x_1<\alpha<x_2<\beta$

37 답 ②

두 점 P, Q가 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점이므로

$b=a^2,\ d=c^2$에서 $a=\sqrt{b},\ c=\sqrt{d}$ ($\because 0<a<c$)이다.

따라서 직선 PQ의 기울기는

$\frac{d-b}{c-a}=\frac{d-b}{\sqrt{d}-\sqrt{b}}=\sqrt{d}+\sqrt{b}=1$

38 답 ③

이차방정식 $x^2=m(x+2)$, 즉 $x^2-mx-2m=0$의 서로 다른 두 실근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=-2m \cdots$ ㉠

한편, $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2),\ \mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$이라 하면 직선 OP와 직선 OQ의 기울기는 각각 $\frac{\alpha^2-0}{\alpha-0}=\alpha,\ \frac{\beta^2-0}{\beta-0}=\beta$

선분 OP와 선분 OQ가 서로 수직이므로 $\alpha\beta=-1$

㉠에서 $\alpha\beta=-2m$이므로

$-2m=-1 \qquad \therefore m=\frac{1}{2}$

39 답 ①

$f(x)-g(x)=3x^2+px+q-g(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$

이때, $\overline{\mathrm{PQ}}=6$이므로 $g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=6$

$-3\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)=6$

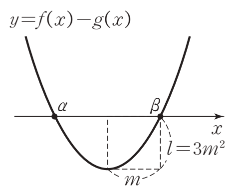
$\frac{\beta-\alpha}{2}\times\frac{\alpha-\beta}{2}=-2$

$(\alpha-\beta)^2=8$

$\therefore \overline{\mathrm{CD}}=|\alpha-\beta|=2\sqrt{2}$

[다른 풀이]

$y=3(x-\alpha)(x-\beta)$의 그래프를 그리면 그림과 같다.



그림에서 $l,\ m$의 관계는 $3m^2=l$

$l=\overline{\mathrm{PQ}}=6$이므로

$3m^2=6$에서 $m=\sqrt{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{CD}}=2\sqrt{2}$

40 답 22

직선 $y=4x+a$가 이차함수 $f(x)=x^2-3$의 그래프와 점 $(p,\ f(p))$에서 접하므로 이차방정식 $x^2-3=4x+a$가 중근 p를 갖는다.

즉, $x^2-4x-a-3=(x-p)^2$이므로

$-4=-2p,\ -a-3=p^2 \qquad \therefore p=2,\ a=-7$

또한, 직선 $y=4x+a$가 이차함수 $g(x)=-x^2-2x+b$의 그래프와 점 $(q,\ f(q))$에서 접하므로 이차방정식 $-x^2-2x+b=4x+a$가 중근 q를 갖는다.

즉, $x^2+6x+a-b=(x-q)^2$이므로

$6=-2q,\ a-b=q^2 \qquad \therefore q=-3,\ b=-16$

$\therefore (p+q)-(a+b)=(2-3)-(-7-16)=22$

41 답 ④

상수 $a,\ b,\ c,\ m$에 대하여 $f(x)=ax^2+bx+c$, 직선 l: $y=mx$라 하면 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx$, 즉 $ax^2+(b-m)x+c=0$의 두 근이 2, 5이므로 두 근의 곱은 $\dfrac{c}{a}=10$이다.

또, 원점을 지나는 다른 직선을 $y=nx$라 하면

이차방정식 $ax^2+bx+c=nx$, 즉 $ax^2+(b-n)x+c=0$이 중근을 가지므로 두 근의 곱은 $\dfrac{c}{a}=10$으로 항상 일정하다.

따라서 $\alpha^2=10,\ \beta^2=10$이므로

$\alpha^2+\beta^2=20$

42 답 3

두 점 B, C의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta$라 하고 점 B에서 함수 $y=x^2$에 접하는 직선의 방정식을 $y=ax+b$라 하자. 이차방정식 $x^2=ax+b$는 $x=\alpha$를 중근으로 가지므로

$x^2-ax-b=(x-\alpha)^2$에서

$ax+b=x^2-(x-\alpha)^2$

점 B에서 함수 $y=x^2$에 접하는 직선의 방정식은

$y=x^2-(x-\alpha)^2$ ⋯ ㉠

마찬가지로 점 C에서 함수 $y=x^2$에 접하는 직선의 방정식은

$y=x^2-(x-\beta)^2$ ⋯ ㉡

㉠과 ㉡의 두 직선이 모두 점 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2},\ -2\right)$를 지나므로

$-2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}-\alpha\right)^2$ ⋯ ㉢

$-2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}-\beta\right)^2$ ⋯ ㉣

즉, 이차방정식 $-2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}-x\right)^2$의 두 실근이 $\alpha,\ \beta$이다.

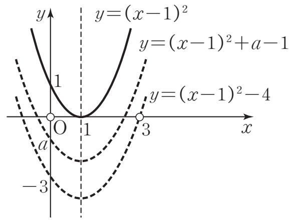
$-2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}-x\right)^2$, 즉 $x^2=x+2$이므로 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=x+2$의 교점의 x좌표가 $\alpha,\ \beta$이다.

따라서 $mx+n=x+2$이므로

$m+n=1+2=3$

43 답 ④

$f(x)=x^2-2x+a$라 하면 함수 $f(x)=(x-1)^2+a-1$의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ a-1)$이므로 a의 값에 따라 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



즉, $a-1\le 0$에서

$a\le 1$ ⋯ ㉠

$f(3)>0$에서

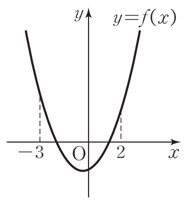
$f(3)=3^2-2\times 3+a=3+a>0$이므로

$a>-3$ ⋯ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 $-3<a\le 1$

44 답 11

$f(x)=x^2+ax+b=0$의 한 근은 -3과 0사이에 있고, 다른 한 근은 0과 2 사이에 있으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같아야 한다.



$f(-3)=9-3a+b>0$ ⋯ ㉠

$f(0)=b<0$ ⋯ ㉡

$f(2)=4+2a+b>0$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡에서 $3a-9<b<0$이므로 $a<3$

㉡, ㉢에서 $-2a-4<b<0$이므로 $a>-2$

$\therefore -2<a<3$

(i) $a=-1$일 때,

㉡, ㉢에서 $-2<b<0$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(-1,\ -1)$이다.

(ii) $a=0$일 때,

㉡, ㉢에서 $-4<b<0$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(0,\ -3),\ (0,\ -2),\ (0,\ -1)$이다.

(iii) $a=1$일 때,

㉡, ㉢에서 $-6<b<0$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ -5),\ (1,\ -4),\ (1,\ -3),\ (1,\ -2),\ (1,\ -1)$이다.

(iv) $a=2$일 때,

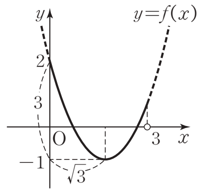
㉠, ㉡에서 $-3<b<0$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ -2),\ (2,\ -1)$이다.

따라서 (i)~(iv)에 의하여 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 11이다.

45 답 ③

이차함수 $f(x)=x^2+ax+b$의 이차항의 계수가 양수이고 x의 값의 범위가 $0\le x<3$이므로 $x=0$에서 최댓값을 가지고 $0<x<3$에서 최솟값을 가져야 함을 알 수 있다.

이때, 최솟값이 이차함수의 꼭짓점의 y좌표이어야 하므로 그림과 같은 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 생각해 보면



$f(x)=(x-\sqrt{3})^2-1=x^2-2\sqrt{3}x+2$

$\therefore a+b=2-2\sqrt{3}$

46 답 1

임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)\ge g(x_2)$를 만족시키려면 $f(x)$의 최솟값이 $g(x)$의 최댓값보다 크거나 같으면 된다. 즉,

$f(x)=(x-1)^2+1\ge1$

$g(x)=-(x+a)^2+a^2-2a+2\le a^2-2a+2$

에서 $a^2-2a+2\le1$이므로 $(a-1)^2\le0$

$\therefore a=1$

47 답 ⑤

$f(x)=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$은 $x=1$일 때 최솟값 $a-1$을 갖는다. $\quad\therefore f(x)\ge a-1$

$f(x)=t$라 하면

$f(f(x))=f(t)=t^2-2t+a\ (t\ge a-1)$의 꼭짓점의 t좌표 1이

(i) $1\ge a-1$일 때, $f(t)$의 최솟값이 $f(1)=a-1$이 되어 $f(x)$의 최솟값과 같아지므로

$1\ge a-1 \qquad \therefore a\le2$

(ii) $a-1>1$일 때, $f(a-1)=a-1$이면 최솟값이 같아지므로

$f(a-1)=(a-2)^2+a-1=a-1$에서 $a=2$

$a=2$는 $a>2$를 만족시키지 않으므로 모순이다.

(i), (ii)에 의하여 $a\le2$

48 답 2

$f(x)=x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$이므로 꼭짓점의 좌표가 $(a, 0)$이다. a의 값의 범위를 나누어서 조건에 맞는 a의 값을 구하자.

(i) $a<0$일 때,

최댓값은 $f(2)$, 최솟값은 $f(0)$이므로

$f(2)-f(0)=4-4a+a^2-a^2=2 \qquad \therefore a=\dfrac{1}{2}$

그런데 $a<0$이므로 모순이다.

(ii) $0\le a\le1$일 때,

최댓값은 $f(2)$, 최솟값은 $f(a)$이므로

$f(2)-f(a)=4-4a+a^2-0=2$

$\therefore a=2-\sqrt{2}\ (\because a\le1)$

(iii) $1<a\le2$일 때,

최댓값은 $f(0)$, 최솟값은 $f(a)$이므로

$f(0)-f(a)=a^2-0=2$

$\therefore a=\sqrt{2}\ (\because a>1)$

(iv) $a>2$일 때,

최댓값은 $f(0)$, 최솟값은 $f(2)$이므로

$f(0)-f(2)=a^2-(4-4a+a^2)=2$

$\therefore a=\dfrac{3}{2}$

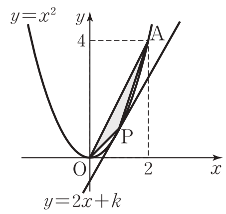
그런데 $a>2$이므로 모순이다.

(i)~(iv)에 의하여 모든 상수 a의 값의 합은 $(2-\sqrt{2})+\sqrt{2}=2$이다.

49 답 ④

직선 OA의 방정식은 $y=2x$

직선 OA와 평행하면서 $y=x^2$의 그래프에 접하는 직선의 방정식을 $y=2x+k$라 하면 $x^2=2x+k$에서



$x^2-2x-k=0 \cdots ㉠$

직선과 이차함수의 그래프가 접하므로

㉠의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1+k=0 \qquad \therefore k=-1$

$k=-1$을 ㉠에 대입하면 $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0 \qquad \therefore x=1$

따라서 점 P의 좌표는 $(1, 1)$이므로 $t=1$

50 답 300

삼각형 ABC가 직각삼각형이고 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=3$이므로 $\overline{BC}=5$이다.

세 삼각형 ABC, APR, QBP가 모두 닮음이므로

삼각형 APR의 세 변의 길이를

$\overline{AP}=4a$, $\overline{AR}=3a$, $\overline{PR}=5a\ (a>0)$

삼각형 QBP의 세 변의 길이를

$\overline{QB}=4b$, $\overline{QP}=3b$, $\overline{BP}=5b\ (b>0)$

라 하자.

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AB}$이므로

$4a+5b=4 \cdots ㉠$

$\overline{QC}=5-\overline{QB}=5-4b$이므로 사다리꼴 PQCR의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\{5a+(5-4b)\}\times3b$$

$$=\frac{1}{2}\left\{5\left(1-\frac{5}{4}b\right)+(5-4b)\right\}\times3b\ (\because ㉠)$$

$$=\frac{3}{2}b\left(10-\frac{41}{4}b\right)\ \left(0<b<\frac{5}{4}\right)$$

따라서 사각형 PQCR의 넓이는 $b=\dfrac{20}{41}$일 때, 최댓값 $\dfrac{150}{41}$을 가지므로 $82M=300$

51 답 9

이차방정식 $x^2+2(a-2)x+a^2-a+10=0$ ⋯ ㉠

이 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-(a^2-a+10)=-3a-6\ge 0$

$\therefore a\le -2$ ------ ⓐ

이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2a+4,\ \alpha\beta=a^2-a+10$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=a^2-a+10+2a-4+1$

$=a^2+a+7$ ------ ⓑ

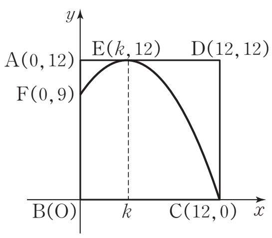
따라서 $y=a^2+a+7$의 이차항의 계수가 양수이고 $a=-\frac{1}{2}$이 축이므로 $a\le -2$에서 $a=-2$일 때 $(\alpha-1)(\beta-1)$의 최솟값은 9이다. ------ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 이차방정식이 실근을 가질 조건을 이용한다. [40%]
ⓑ 근과 계수의 관계를 이용하여 a의 이차식을 세운다. [50%]
ⓒ $(\alpha-1)(\beta-1)$의 최솟값을 구한다. [10%]

52 답 4

정사각형 ABCD를 좌표평면 위에 x축, y축의 양의 방향으로 나타내면 그림과 같다.



B(0, 0), C(12, 0), F(0, 9), E(k, 12)라 하면 주어진 이차함수는 꼭짓점이 E이므로

$y=a(x-k)^2+12$ ------ ⓐ

이때, 점 F(0, 9)를 지나므로

$9=a(0-k)^2+12$

$ak^2=-3$

$\therefore a=-\frac{3}{k^2}$ ⋯ ㉠

또, 이차함수의 그래프가 점 C(12, 0)을 지나므로

$0=a(12-k)^2+12$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$k^2+8k-48=0$ ------ ⓑ

$(k+12)(k-4)=0 \qquad \therefore k=4\ (\because k>0)$

$\therefore \overline{AE}=k=4$ ------ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 도형을 좌표평면 위에 나타내어 이차함수의 식을 세운다. [40%]
ⓑ 이차함수가 점 F와 점 C를 지남을 이용하여 이차방정식을 세운다. [50%]
ⓒ 선분 AE의 길이를 구한다. [10%]

[다른 풀이]

$\overline{AE}=x\ (0<x<6)$라 하면

$\overline{ED}=12-x$이고, $\frac{\overline{AF}}{\overline{AE}^2}=\frac{\overline{DC}}{\overline{ED}^2}$이므로

$\frac{3}{x^2}=\frac{12}{(12-x)^2}$

$(12-x)^2=4x^2$

$x^2+8x-48=0$

$(x-4)(x+12)=0$

$\therefore x=4\ (\because 0<x<6)$

53 답 2

직선 $y=kx-ka+a^2$이 이차함수 $y=x^2+2x-4$의 그래프와 만나므로 방정식 $x^2+2x-4=kx-ka+a^2$이 실근을 갖는다.

즉, $x^2+(2-k)x+ka-a^2-4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k-2)^2+4(a^2-ka+4)\ge 0$이므로

$k^2-4(a+1)k+4a^2+20\ge 0$ ------ ⓐ

이 부등식이 실수 k의 값에 관계없이 성립한다는 것은 이차함수 $y=k^2-4(a+1)k+4a^2+20$의 최솟값이 0 이상이어야 한다. ------ ⓑ

이차항의 계수가 양수이고 축이 $k=2(a+1)$이므로

$k=2(a+1)$일 때 최솟값은

$4(a+1)^2-8(a+1)^2+4a^2+20\ge 0$

$-8a+16\ge 0$

$\therefore a\le 2$

따라서 실수 a의 최댓값은 2이다. ------ ⓒ

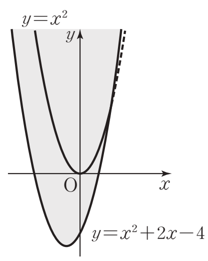
| 채점기준 |

ⓐ 일차식과 이차식을 연립한 이차방정식이 실근을 가질 조건을 찾는다. [30%]
ⓑ 이차함수의 최솟값이 0 이상일 조건을 구한다. [40%]
ⓒ 실수 a의 최댓값을 구한다. [30%]

[다른 풀이]

직선 $y=kx-ka+a^2=k(x-a)+a^2$은 실수 k의 값에 관계없이 점 $(a,\ a^2)$을 지나고 기울기가 k인 직선이다.

이때, 점 $(a,\ a^2)$은 이차함수 $y=x^2$ 위의 점이므로 기울기 k의 값에 관계없이 이차함수 $y=x^2+2x-4$의 그래프와 만나려면 그림의 색칠한 부분에 점 $(a,\ a^2)$이 있어야 한다. (경계선 포함)



즉, 점 $(a,\ a^2)$의 x좌표인 a의 최댓값은 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=x^2+2x-4$의 그래프의 교점의 x좌표이므로

$x^2=x^2+2x-4$

$\therefore x=2$

따라서 실수 a의 최댓값은 2이다.

54 답 ⑤

ㄱ. $a=b$이면 $f(x)=(x-a)^2$이므로 모든 실수 x에 대하여
$f(x)\geq 0$이다. (참)

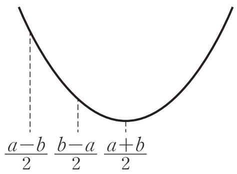
ㄴ. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 a, b이고 이차함수 $f(x)$는 아래로 볼록하므로 $x=\frac{a+b}{2}$일 때 최솟값을 갖는다. (참)

ㄷ. 이차함수 $f(x)$는 아래로 볼록하고, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$를 최솟값으로 가지고, $0<a<b$에서

$\frac{a-b}{2}<\frac{b-a}{2}<\frac{a+b}{2}$이므로

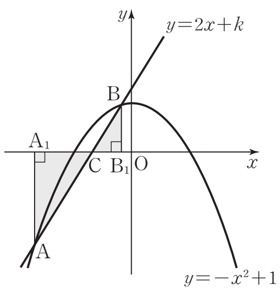
$f\left(\frac{a-b}{2}\right)>f\left(\frac{b-a}{2}\right)>f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$\therefore f\left(\frac{b-a}{2}\right)<f\left(\frac{a-b}{2}\right)$ (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

55 답 39



두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 $\mathrm{A}(\alpha,\ 2\alpha+k)$,

$\mathrm{B}(\beta,\ 2\beta+k)$, $\mathrm{A_1}(\alpha,\ 0)$, $\mathrm{B_1}(\beta,\ 0)$, $\mathrm{C}\left(-\frac{k}{2},\ 0\right)$이고,

α, β는 이차방정식 $-x^2+1=2x+k$, 즉 $x^2+2x+k-1=0$의 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=k-1$ ⋯ ㉠

삼각형 $\mathrm{ACA_1}$의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1=\frac{1}{2}(-2\alpha-k)\left(-\frac{k}{2}-\alpha\right)=\left(\frac{k}{2}+\alpha\right)^2$

삼각형 $\mathrm{BCB_1}$의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\frac{1}{2}(2\beta+k)\left(\beta+\frac{k}{2}\right)=\left(\frac{k}{2}+\beta\right)^2$

두 삼각형 $\mathrm{ACA_1}$과 $\mathrm{BCB_1}$의 넓이의 합이 $\frac{3}{2}$이므로

$\left(\alpha+\frac{k}{2}\right)^2+\left(\beta+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$

$(\alpha^2+\beta^2)+k(\alpha+\beta)+\frac{k^2}{2}=\frac{3}{2}$

즉, $2(\alpha^2+\beta^2)+2k(\alpha+\beta)+k^2-3=0$이고,

㉠에 의하여 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-2k+6$이므로

$k^2-8k+9=0$

$\therefore k=4\pm\sqrt{7}$

이때, $-2<k<2$이므로 $k=4-\sqrt{7}$

따라서 $p=4$, $q=-1$이므로 $10p+q=39$

56 답 ⑤

ㄱ. 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$이므로

$x^2-ax+b>ax+2b$ $\quad\therefore x^2-2ax-b>0$ (참)

ㄴ. $x^2-2ax-b>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$x^2-2ax-b=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=a^2+b<0$

$b<-a^2\leq 0$ $\quad\therefore b<0$ (참)

ㄷ. $f(x)=x^2-ax+b=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 y좌표는

$-\frac{a^2}{4}+b$이고, 직선 $y=g(x)$의 y절편은 $2b$이므로

$\left(-\frac{a^2}{4}+b\right)-2b=-\frac{a^2}{4}-b$

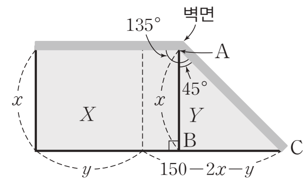
$>-\frac{a^2}{4}+a^2\ (\because b<-a^2)=\frac{3}{4}a^2\geq 0$

$\therefore -\frac{a^2}{4}+b>2b$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 y좌표는 직선 $y=g(x)$의 y절편보다 크다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

57 답 750



그림과 같이 직사각형의 세로와 가로의 길이를 각각 x, y라 하면 X의 넓이는 xy이다.

철망의 길이가 150이므로 사다리꼴의 아랫변의 길이는

$150-2x-y$

점 A에서 사다리꼴 Y의 아랫변에 내린 수선의 발을 B라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=x$

$\angle\mathrm{CAB}=45^\circ$이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=x$

사다리꼴 Y의 윗변의 길이는

$(150-2x-y)-x=150-3x-y$

이때, Y의 넓이는

$\frac{1}{2}x\{(150-3x-y)+(150-2x-y)\}=\frac{1}{2}x(300-5x-2y)$

한편, X의 넓이는 Y의 넓이의 2배이므로

$xy=x(300-5x-2y)$에서 $y=100-\frac{5}{3}x$

즉, Y의 넓이는

$\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}x\left(100-\frac{5}{3}x\right)=-\frac{5}{6}x^2+50x$

$=-\frac{5}{6}(x-30)^2+750$

따라서 $x=30$일 때, Y의 넓이의 최댓값 S는 750이다.

58 답 ④

ㄱ. 이차함수 $y=-x^2+ax+b$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $-x^2+ax+b=0$은 실근을 갖지 않는다. 따라서 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=a^2+4b<0$ (거짓)

ㄴ. 이차항의 계수가 음수인 이차함수의 그래프가 x축과 만나지 않는다는 것은 함수 $y=-x^2+ax+b<0$을 항상 만족시키는 것이므로 임의의 실수 k에 대하여

$-k^2+ak+b<0 \qquad \therefore k^2>ak+b$ (참)

ㄷ. ㄱ의 $a^2<-4b$의 양변에서 $(b-1)^2$을 빼면

$a^2-(b-1)^2<-4b-(b-1)^2=-b^2-2b-1$

$\qquad\qquad\quad =-(b+1)^2\le 0$

따라서 $a^2-(b-1)^2<0$이므로 $a^2<(b-1)^2$에서

$|a|<|b-1|$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

ㄷ. $|a|<|b-1|$이면 $a^2<(b-1)^2$, 즉 $a^2-(b-1)^2<0$이어야 하므로 인수분해하면

$(a+b-1)(a-b+1)<0$

ㄴ에서 임의의 실수 k에 대하여

$-k^2+ak+b<0$이 성립하므로

$k=1$일 때, $-1+a+b<0 \qquad \therefore a+b-1<0$

$k=-1$일 때, $-1-a+b<0 \qquad \therefore a-b+1>0$

$\therefore (a+b-1)(a-b+1)<0$ (참)

59 답 2

(i) $a\ne 0$일 때,

0이 아닌 임의의 실수 a에 대하여 정리하면

$a(x^2-3x+2)+(x-y)=0$이므로

$x^2-3x+2=0,\ x-y=0$

$\therefore (x-1)(x-2)=0,\ y=x$

따라서 이 이차함수의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 두 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$를 지나므로 점 $(2,\ 2^2)$을 지날 수는 없다.

$\therefore m=2$

(ii) $a=0$일 때,

이 함수는 일차함수 $y=x$가 되고 이 위의 점 중 $(m,\ m^2)$은 $m^2=m$을 만족시켜야 하므로

$m(m-1)=0 \qquad \therefore m=0$ 또는 $m=1$

즉, 이 함수의 그래프는 점 $(0,\ 0)$ 또는 점 $(1,\ 1)$을 지난다.

그런데 점 $(1,\ 1)$은 (i)에서 이차함수가 항상 지나는 점이므로 이차함수 $y=ax^2+(1-3a)x+2a$의 그래프는 점 $(0,\ 0)$을 지날 수는 없다.

$\therefore m=0$

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 m의 값의 합은 2이다.

60 답 22

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표를 α, β라 하면 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 해는 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$이다.

즉, $f(x)-g(x)=x^2+(a-b)x+2(b-a)$이므로

$b-a=t\ (t>0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=b-a=t,\ \alpha\beta=2(b-a)=2t$ ⋯ ㉠

한편, 직선 $y=g(x)$의 기울기가 b이므로

$\overline{AB}=|\alpha-\beta|\sqrt{b^2+1}$

이때, $\overline{AB}=3\sqrt{b^2+1}$이므로 $|\alpha-\beta|=3$ ⋯ ㉡

$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로 ㉠, ㉡을 대입하면

$9=t^2-8t$에서

$t^2-8t-9=0$

$(t+1)(t-9)=0 \qquad \therefore t=9\ (\because t>0)$

$\therefore f(-2)=4-2a+2b=4+2t=22$

61 답 4

$f(x)=x^2-2x-5$와 $g(x)=ax-a$의 그래프의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-2x-5=ax-a$의 근이다.

조건 (가)에서 $x^2-(a+2)x+a-5=0$의 두 근이 $1-\sqrt{3}$, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

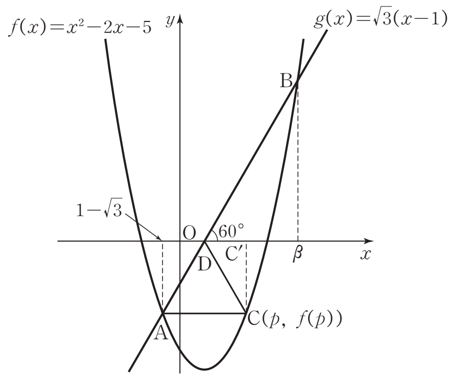
$a+2=\beta+1-\sqrt{3}$ ⋯ ㉠

$a-5=\beta-\sqrt{3}\beta$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\beta=1+2\sqrt{3}$, $a=\sqrt{3}$

이때, 일차함수 $g(x)=\sqrt{3}(x-1)$의 기울기가 $\sqrt{3}$이므로 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 이루는 예각의 크기가 $60°$이다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $C(p,\ f(p))$에 대하여 삼각형 DAC가 정삼각형이 되려면 그림과 같이 점 A를 지나며 x축에 평행한 직선이 이차함수 $y=f(x)$와 만나는 점이 C인 경우이다.



일차함수 $g(x)=\sqrt{3}(x-1)$의 x절편이 1이므로 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 C′이라 하면

$\overline{DC'}=\sqrt{3}$, $\overline{CC'}=3$

따라서 점 C의 좌표는 $(1+\sqrt{3},\ -3)$이므로

$p=1+\sqrt{3}$

$\therefore p^2-2a=(1+\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}=4$

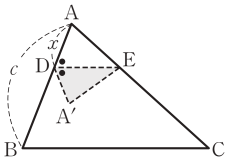
62 답 ①

$\overline{AB}=c$, $\overline{AD}=x$, 겹치는 부분의 넓이를 y라 하면

(i) [그림 1]과 같이 점 A′이

삼각형 ABC의 내부 또는 경계에

있을 때 $0\le x\le\frac{c}{2}$



[그림 1]

$\triangle ABC : \triangle ADE=c^2 : x^2$이고

삼각형 ABC의 넓이가 6이므로

$\triangle ADE=\frac{6}{c^2}x^2$

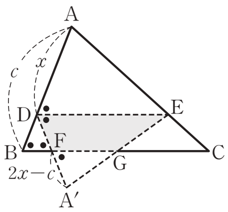
이때, $\triangle A'DE=\triangle ADE$이므로 $y=\frac{6}{c^2}x^2$

따라서 $x=\frac{c}{2}$일 때 y의 최댓값은 $\frac{3}{2}$이다.

(ii) [그림 2]와 같이 점 A′이

삼각형 ABC의 외부에 있을 때

$\frac{c}{2}<x\le c$



[그림 2]

삼각형 DBF는 이등변삼각형이므로

$\overline{BD}=\overline{DF}=c-x$

$\therefore \overline{A'F}=\overline{A'D}-\overline{DF}=\overline{AD}-\overline{DF}$

$=x-(c-x)=2x-c$

$\triangle ABC : \triangle ADE : \triangle A'FG=c^2 : x^2 : (2x-c)^2$이므로

$6 : \triangle ADE=c^2 : x^2$에서 $\triangle ADE=\frac{6}{c^2}x^2$

$6 : \triangle A'FG=c^2 : (2x-c)^2$에서 $\triangle A'FG=\frac{6}{c^2}(2x-c)^2$

$\triangle ADE=\triangle A'DE$이므로

$y=\square FGED=\triangle A'DE-\triangle A'FG=\frac{6}{c^2}x^2-\frac{6}{c^2}(2x-c)^2$

$=\frac{6}{c^2}\left\{-3\left(x-\frac{2}{3}c\right)^2+\frac{c^2}{3}\right\}$

따라서 $x=\frac{2}{3}c$일 때 y의 최댓값은 2이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 최대 넓이는 2이다.

07 여러 가지 방정식

문제편 81P

01 답 ②

$x^3+x^2+x-3=0$에서 조립제법에 의하여

1	1	1	1	−3
		1	2	3
	1	2	3	0

$(x-1)(x^2+2x+3)=0$

주어진 삼차방정식의 두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$

$\therefore (\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1$

$=3+(-2)+1=2$

02 답 ④

$x^4-4x^2+3=0$에서

$(x^2-1)(x^2-3)=0$

즉, $x^2=1$, 또는 $x^2=3$이므로

$x=\pm1$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

따라서 $M=\sqrt{3}$, $m=-\sqrt{3}$이므로

$M-m=\sqrt{3}-(-\sqrt{3})$

$=2\sqrt{3}$

03 답 ②

삼차방정식 $x^3+x-2=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$

$\alpha\beta\gamma=2$

이때, $\beta+\gamma=-\alpha$, $\gamma+\alpha=-\beta$, $\alpha+\beta=-\gamma$이므로

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(-\gamma)(-\alpha)(-\beta)$

$=-\alpha\beta\gamma=-2$

04 답 10

계수가 실수인 삼차방정식 $x^3+px+q=0$의 한 근이 $1+2i$이면 $1-2i$도 근이다.

다른 한 근을 α라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+2i)+(1-2i)+\alpha=0$

$\therefore \alpha=-2$

$(1+2i)(1-2i)+(1-2i)\alpha+\alpha(1+2i)=p$

$\therefore p=1$

$(1+2i)(1-2i)\alpha=-q$

$\therefore q=10$

$\therefore pq=10$

05 답 ⑤

$x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

이때, 한 허근을 ω라 하면

$\begin{cases} \omega^3=1 \cdots ㉠ \\ \omega^2+\omega+1=0 \cdots ㉡ \end{cases}$

한편, 이차방정식 x^2+x+1의 켤레근이 $\overline{\omega}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1 \cdots ㉢$

① ㉡의 양변을 ω로 나누면 $\omega+\dfrac{1}{\omega}=-1$ (거짓)

② ㉡−㉢을 하면 $\overline{\omega}=\omega^2$ $\quad\therefore (\overline{\omega})^2=\omega^4=\omega$ (거짓)

③ ㉠, ㉡에 의하여

$\omega^{20}+\omega^{19}=(\omega^3)^6\times\omega^2+(\omega^3)^6\times\omega=\omega^2+\omega=-1$ (거짓)

④ ㉠, ㉡에 의하여

$\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1=\omega+1+(\omega^2+\omega+1)$

$=\omega+1=-\omega^2$ (거짓)

⑤ ㉠과 ①의 결과에 의하여

$\omega^{100}+\dfrac{1}{\omega^{100}}=(\omega^3)^{33}\times\omega+\dfrac{1}{(\omega^3)^{33}\times\omega}=\omega+\dfrac{1}{\omega}=-1$ (참)

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

06 답 ①

연립방정식 $\begin{cases} 4x-y=10 \\ x+ky=-1 \end{cases}$의 해 $x=\alpha$, $y=\beta$가 $\alpha-\beta=1$을 만족시키므로

$\begin{cases} 4\alpha-\beta=10 \cdots ㉠ \\ \alpha+k\beta=-1 \cdots ㉡ \\ \alpha-\beta=1 \cdots ㉢ \end{cases}$

㉠−㉢을 하면 $3\alpha=9$ $\quad\therefore \alpha=3$

㉢에 의하여 $3-\beta=1$ $\quad\therefore \beta=2$

㉡에 의하여 $3+2k=-1$ $\quad\therefore k=-2$

07 답 4

$\begin{cases} x^2-2xy-y^2=2 \cdots ㉠ \\ x-y=2 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $y=x-2$를 ㉠에 대입하면

$x^2-2x(x-2)-(x-2)^2=2$

$-2x^2+8x-4=2$

$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

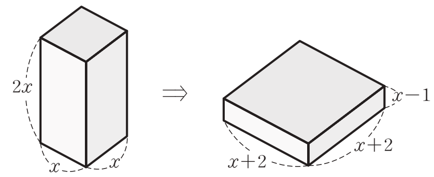
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

㉡에 의하여 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

이때, x, y가 양수이므로 $x=3$, $y=1$

$\therefore x+y=4$

08 답 2



그림에서 처음 찰흙덩이의 부피는 $2x^3$

다시 만든 찰흙덩이의 부피는 $(x+2)^2(x-1)$

이때, 두 찰흙덩이의 부피가 같으므로 $2x^3=(x+2)^2(x-1)$

$2x^3-(x+2)^2(x-1)=0$

$x^3-3x^2+4=0$

$(x+1)(x^2-4x+4)=0$

$(x+1)(x-2)^2=0$ $\quad\therefore x=2$ ($\because x>0$)

09 답 ④

방정식 $x^3+2x^2-5x-6=0$에서 $(x+3)(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2 \cdots ㉠$

또, 방정식 $x^4+4x^2-5=0$에서 $(x^2+5)(x^2-1)=0$

$(x^2+5)(x+1)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=1 \cdots ㉡$

㉠, ㉡에 의하여 두 방정식을 모두 만족시키는 x의 값은 -1이다.

10 답 ③

$x(x+1)(x+2)(x+3)=24$에서

$\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}=24$

$(x^2+3x)(x^2+3x+2)=24$이므로

$x^2+3x=t$라 하면 $t^2+2t-24=0$

$(t-4)(t+6)=0$

즉, $(x^2+3x-4)(x^2+3x+6)=0$이므로

$(x-1)(x+4)(x^2+3x+6)=0$

따라서 허근은 이차방정식 $x^2+3x+6=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 모든 허근의 곱은 6이다.

11 답 ⑤

주어진 식에 $x=k$를 대입하면 $k^3+(4-k)k^2-3k^2-k^2=0$이므로

$(x-k)(x^2+4x+k)=0$

이때, 삼차방정식이 중근을 가지기 위해서는

(i) $x^2+4x+k=0$이 중근을 가질 때,

이차방정식 $x^2+4x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=4-k=0$ $\quad\therefore k=4$

그런데 문제의 조건에서 $k<0$이므로 모순이다.

(ii) $x^2+4x+k=0$이 $x=k$를 근으로 가질 때,

$k^2+5k=0$ $\quad\therefore k=-5$ ($\because k<0$)

따라서 중근은 $\alpha=k=-5$이므로 $\alpha+k=-10$

12 답 ③

$x^4-3x^2+1=0$에서 $x^4-2x^2+1-x^2=0$

$(x^2-1)^2-x^2=0$

$(x^2+x-1)(x^2-x-1)=0$

$x^2+x-1=0$ 또는 $x^2-x-1=0$

$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

따라서 양수인 모든 근의 합은

$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$

[다른 풀이]

주어진 식의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-3+\dfrac{1}{x^2}=0$에서 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=5$

$\therefore x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5},\ x+\dfrac{1}{x}=-\sqrt{5}$

x가 양수이면 $\dfrac{1}{x}$도 양수이므로 $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$이다.

$x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$에서 $x^2-\sqrt{5}x+1=0$이므로 양수인 모든 근의 합은 $\sqrt{5}$이다.

13 답 ⑤

$x^2=t$라 하면 주어진 방정식은

$t^2-4t+a-1=0$ ⋯ ㉠

이때, 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

(i) $\dfrac{D}{4}=(-2)^2-(a-1)>0$

$\therefore a<5$

(ii) 이차방정식 ㉠의 두 근의 합은 $-(-4)>0$

(iii) 이차방정식 ㉠의 두 근의 곱은 $a-1>0$

$\therefore a>1$

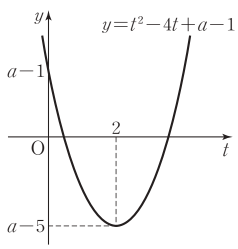
(i)~(iii)에 의하여 $1<a<5$

따라서 자연수 a의 값은 2, 3, 4이므로 그 합은 9이다.

[다른 풀이]

이차방정식 $t^2-4t+a-1=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로 이차함수 $y=t^2-4t+a-1$에 대하여 최고차항의 계수가 양수이고 축이 $t=2$이므로

그림과 같이



$t=0$일 때, $a-1>0$

$\therefore a>1$ ⋯ ㉡

$t=2$일 때, $a-5<0$

$\therefore a<5$ ⋯ ㉢

㉡, ㉢에 의하여 $1<a<5$

(이하 동일)

14 답 13

$x\neq0$이므로 주어진 식의 양변을 x^2으로 나누면

$9x^2+24x-2+\dfrac{24}{x}+\dfrac{9}{x^2}=0$

$9\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+24\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2=0$

$9\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+24\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-20=0$

$x+\dfrac{1}{x}=t$라 하면 실근을 가질 조건은 $|t|>2$이므로

$9t^2+24t-20=0$에서 $(3t-2)(3t+10)=0$

$\therefore t=-\dfrac{10}{3}$ $(\because |t|>2)$

따라서 $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=-\dfrac{10}{3}$에서

$-\dfrac{q}{p}=-\dfrac{10}{3}$이므로

$p+q=3+10=13$

15 답 ②

삼차방정식 $x^3-x^2+3x-2=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3,\ \alpha\beta\gamma=2$

이때, $\beta+\gamma=1-\alpha,\ \gamma+\alpha=1-\beta,\ \alpha+\beta=1-\gamma$이므로

주어진 식은

$$\begin{aligned}\frac{1-\alpha}{\alpha}+\frac{1-\beta}{\beta}+\frac{1-\gamma}{\gamma}&=\frac{1}{\alpha}-1+\frac{1}{\beta}-1+\frac{1}{\gamma}-1\\&=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}-3\\&=\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

16 답 ⑤

삼차방정식 $x^3-2x^2-4=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

$x^3-2x^2-4=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

이 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$\begin{aligned}(-1-\alpha)(-1-\beta)(-1-\gamma)&=(-1)^3-2\times(-1)^2-4\\&=-7\end{aligned}$$

$-(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=-7$

$\therefore (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=7$

17 답 ①

삼차방정식 $x^3-2x+3=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$

이때, $\alpha^3-2\alpha+3=0,\ \beta^3-2\beta+3=0,\ \gamma^3-2\gamma+3=0$이므로

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3+\gamma^3&=(2\alpha-3)+(2\beta-3)+(2\gamma-3)\\&=2(\alpha+\beta+\gamma)-9=-9\end{aligned}$$

18 답 ②

z가 실수라 하면 $\omega=(3-z)+3i=\frac{5}{z}i$가 되어 모순이다.

따라서 z는 허수이고, 마찬가지로 ω도 허수이다.

두 허수 z, ω의 켤레복소수 $\overline{z}$, $\overline{\omega}$에 대하여

$z\omega=5i$이므로 $\overline{z}\neq\omega$ ($\because$ 두 켤레복소수의 곱은 실수)

즉, 계수가 실수인 사차방정식의 네 근은 z, ω, $\overline{z}$, $\overline{\omega}$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$-a=z+\omega+\overline{z}+\overline{\omega}=(z+\omega)+\overline{(z+\omega)}$

$=(3+3i)+\overline{(3+3i)}=(3+3i)+(3-3i)=6$

$\therefore a=-6$

$d=z\times\omega\times\overline{z}\times\overline{\omega}=(z\times\omega)\times\overline{(z\times\omega)}$

$=(5i)\times\overline{(5i)}=(5i)\times(-5i)=25$

$\therefore ad=-150$

19 답 ①

두 방정식의 공통인 실근을 α라 하면 a, b, c가 실수이므로

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근은 $1+\sqrt{2}i$, $1-\sqrt{2}i$, α이다. 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)+\alpha=-a$에서 $\alpha+a=-2$ ⋯ ㉠

$(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)\alpha+\alpha(1+\sqrt{2}i)=b$에서

$2\alpha-b=-3$ ⋯ ㉡

$(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)\alpha=-c$에서 $3\alpha+c=0$ ⋯ ㉢

또한, α는 이차방정식의 근이므로 $2\alpha^2-b\alpha+12=0$ ⋯ ㉣

㉡을 ㉣에 대입하면

$2\alpha^2-(2\alpha+3)\alpha+12=0$, $-3\alpha+12=0$ $\therefore \alpha=4$

이것을 ㉠, ㉡, ㉢에 각각 대입하면 $a=-6$, $b=11$, $c=-12$

$\therefore a+b+c=-7$

20 답 4

계수가 실수인 삼차방정식 $x^3+px^2+qx+p=0$의 실근을 α라 하면 세 근은 α, $2+i$, $2-i$이다. 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(2+i)+(2-i)=-p$이므로 $\alpha+4=-p$ ⋯ ㉠

$\alpha(2+i)+(2+i)(2-i)+(2-i)\alpha=q$이므로 $4\alpha+5=q$ ⋯ ㉡

$\alpha(2+i)(2-i)=-p$이므로 $5\alpha=-p$ ⋯ ㉢

㉠, ㉢에서 $\alpha=1$, $p=-5$

㉡에 $\alpha=1$을 대입하면 $q=9$ $\therefore p+q=4$

21 답 ③

$x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$ $\therefore \omega^2-\omega=-1$

계수가 실수인 방정식의 한 근이 허수이면 반드시 켤레복소수도 근으로 갖는다.

따라서 $x^2-x+1=0$의 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \omega^2-\omega+\omega\overline{\omega}=(\omega^2-\omega)+(\omega\overline{\omega})=(-1)+1=0$

22 답 ②

$f(1)=\frac{\omega^2}{\omega+1}=\frac{\omega^2}{-\omega^2}=-1$

$f(2)=\frac{\omega^4}{\omega^2+1}=\frac{\omega}{\omega^2+1}=\frac{\omega}{-\omega}=-1$

$f(3)=\frac{\omega^6}{\omega^3+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

$\vdots$

따라서 n이 3의 배수일 때 $f(n)=\frac{1}{2}$,

n이 3의 배수가 아닐 때 $f(n)=-1$이다.

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$

$=3\times\left(-1-1+\frac{1}{2}\right)-1=-\frac{11}{2}$

23 답 ⑤

$x+\frac{1}{x}=-1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega+\frac{1}{\omega}=-1$의 양변에 ω를 곱하면 $\omega^2+\omega+1=0$ ⋯ ㉠

이 식의 양변에 $\omega-1$을 곱하면 $(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\omega^3-1=0$ $\therefore \omega^3=1$ ⋯ ㉡

(주어진 식)$=1+2\omega+3\omega^2+4+5\omega+6\omega^2+7$ ($\because$ ㉡)

$=12+7\omega+9\omega^2$

$=12+7\omega+9(-\omega-1)$ ($\because$ ㉠)

$=3-2\omega$

따라서 $a=3$, $b=-2$이므로 $2(a^2+b^2)=26$

24 답 ③

연립방정식 $\begin{cases} a^2x+(2a-1)y=a \\ 2x+(a+1)y=2 \end{cases}$의 해가 무수히 많을 때

$\frac{a^2}{2}=\frac{2a-1}{a+1}=\frac{a}{2}$ ⋯ ㉠

를 만족시키고, 해가 없을 때

$\frac{a^2}{2}=\frac{2a-1}{a+1}\neq\frac{a}{2}$ ⋯ ㉡

를 만족시킨다. 즉, $\frac{a^2}{2}=\frac{2a-1}{a+1}$을 만족시키는 a의 값 중에서

$\frac{2a-1}{a+1}=\frac{a}{2}$를 만족시키면 α, 만족시키지 않으면 β, γ이다.

㉠에서 $\frac{a^2}{2}=\frac{2a-1}{a+1}$이므로 $a^2(a+1)=2(2a-1)$

$a^3+a^2-4a+2=0$, $(a-1)(a^2+2a-2)=0$ ⋯ ㉢

또, ㉠에서 $\frac{2a-1}{a+1}=\frac{a}{2}$이므로 $2(2a-1)=a(a+1)$

$a^2-3a+2=0$, $(a-1)(a-2)=0$ ⋯ ㉣

㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 a의 값은 α이므로 $\alpha=1$

한편, ㉡과 같이 ㉢을 만족시키지만 ㉣을 만족시키지 않는 a의 값은 $a^2+2a-2=0$의 해이므로 β, γ는 이 이차방정식의 두 근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 $\beta+\gamma=-2$이므로

$\alpha-\beta-\gamma=\alpha-(\beta+\gamma)=1-(-2)=3$

25 답 ⑤

$\begin{cases} x+y=k+6 \cdots ㉠ \\ x-y=-k-4 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $2x=2$　　$\therefore x=1 \Rightarrow \alpha=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $y=k+5 \Rightarrow \beta=k+5$

한편, α, β가 $2\alpha+\beta=3(k+1)$을 만족시키므로

$2+k+5=3(k+1)$

$2k=4$　　$\therefore k=2$

26 답 ②

연립방정식 $\begin{cases} 4x-ay=16 \cdots ㉠ \\ ax-y=a^3 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡×a를 하면 $(4-a^2)x=16-a^4=(4+a^2)(4-a^2)$

$\therefore x=4+a^2$ ($\because 0<a<2$) $\Rightarrow \alpha=4+a^2$

㉡에서 $y=ax-a^3=a(4+a^2)-a^3=4a \Rightarrow \beta=4a$

$\therefore \begin{cases} \alpha+\beta=a^2+4a+4=(a+2)^2 \\ \alpha-\beta=a^2-4a+4=(a-2)^2 \end{cases}$

$\therefore \sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta}=\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(a-2)^2}$

$=|a+2|+|a-2|$

$=(a+2)-(a-2)$ ($\because 0<a<2$)

$=4$

27 답 ④

연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \cdots ㉠ \\ x^2+2y^2=12 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면 $(x-y)(x-2y)=0$

(i) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+2x^2=12$, $x^2=4$

$\therefore x=\pm2$, $y=\pm2$ (복호동순)

(ii) $y=\frac{1}{2}x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+\frac{1}{2}x^2=12$, $x^2=8$

$\therefore x=\pm2\sqrt{2}$, $y=\pm\sqrt{2}$ (복호동순)

따라서 x, y는 양의 무리수이므로 (i), (ii)에 의하여 $x+y=3\sqrt{2}$

28 답 15

$\begin{cases} x-y=2 \cdots ㉠ \\ x^2-3y^2=-2 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=y+2$를 ㉡에 대입하면 $(y+2)^2-3y^2=-2$이므로

$y^2-2y-3=0$

$(y+1)(y-3)=0$　　$\therefore y=-1$ 또는 $y=3$

㉠에서 $y=-1$일 때, $x=1$

$y=3$일 때, $x=5$

따라서 $\alpha>0$, $\beta>0$이므로 $\alpha=5$, $\beta=3$

$\therefore \alpha\beta=15$

29 답 ②

연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=2 \cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=1 \cdots ㉡ \end{cases}$에서

$x+y=u$, $xy=v$라 하면

㉠에서 $(x+y)^2-2xy+(x+y)=2$이므로

$u^2-2v+u=2 \cdots ㉢$

㉡에서 $(x+y)^2-xy=1$이므로

$u^2-v=1 \cdots ㉣$

㉣에서 $v=u^2-1$이므로 ㉢에 대입하면

$u^2-u=0$　　$\therefore u=0$ 또는 $u=1$

$\therefore (u, v)=(0, -1), (1, 0)$

(i) $(u, v)=(0, -1)$일 때, x, y는 $t^2-1=0$의 해이다.

$\therefore x=\pm1$, $y=\mp1$ (복호동순)

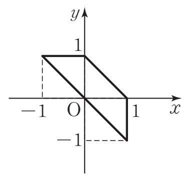
(ii) $(u, v)=(1, 0)$일 때, x, y는 $t^2-t=0$의 해이다.

$\therefore x=1$, $y=0$ 또는 $x=0$, $y=1$

(i), (ii)에서 구한 네 꼭짓점의 좌표는

$(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$

이것을 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



따라서 구하는 사각형의 넓이는

$3\times\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{3}{2}$

30 답 ③

원래의 세 구의 반지름의 길이를 각각 $r-1$, r, $r+1$이라 하면 새로 만들어진 구의 반지름의 길이는 $r+2$이고, 원래의 세 구의 부피의 합이 새로 만들어진 구의 부피와 같으므로

$\frac{4}{3}\pi(r-1)^3+\frac{4}{3}\pi r^3+\frac{4}{3}\pi(r+1)^3=\frac{4}{3}\pi(r+2)^3$

$(r-1)^3+r^3+(r+1)^3=(r+2)^3$

$r^3-3r^2-3r-4=0$

$(r-4)(r^2+r+1)=0$

$\therefore r=4$

따라서 새로 만들어진 구의 반지름의 길이는 $r+2=6$이다.

31 답 ④

의영이가 맞힌 2점, 3점, 4점짜리 문항의 개수를 각각 x개, $3y$개, y개라 하면

$x+3y+y=20$에서

$x+4y=20 \cdots ㉠$

$2x+3(3y)+4y=55$에서

$2x+13y=55 \cdots ㉡$

㉡−2×㉠을 하면 $5y=15$

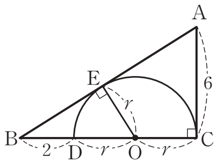
$\therefore y=3$, $x=8$

따라서 2점짜리 문항 8개, 3점짜리 문항 9개, 4점짜리 문항 3개를 맞혔으므로 의영이가 맞춘 2점짜리 문항의 개수는 8이다.

32 답 3

반원의 중심을 O라 하고

반지름의 길이를 r라 하면



$\overline{BE}^2=\overline{OB}^2-\overline{OE}^2$

$=(r+2)^2-r^2$

$=4r+4$

삼각형 OBE와 삼각형 ABC는 닮음이므로

$\overline{OE}^2 : \overline{BE}^2=\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$

즉, $r^2 : (4r+4)=6^2 : (2r+2)^2$이므로

$4r^2(r+1)^2=144(r+1)$

$r^2(r+1)=36$

$r^3+r^2-36=0$

$(r-3)(r^2+4r+12)=0$

$\therefore r=3$

33 답 ④

$f(x)=x^4+x^3-x^2-7x-6$이라 하자.

이때, $f(-1)=0$, $f(2)=0$이므로 조립제법에 의하여

-1	1	1	-1	-7	-6
		-1	0	1	6
2	1	0	-1	-6	0
		2	4	6	
	1	2	3	0	

$f(x)=(x+1)(x^3-x-6)$

$=(x+1)(x-2)(x^2+2x+3)$

따라서 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하면

$(x+1)(x-2)(x^2+2x+3)=0$

여기서 $x^2+2x+3=0$이 허근을 가지므로 두 허근의 합은 -2이다.

34 답 ②

$x^2(x+1)^2=x^2+x+6$에서

$(x^2+x)^2=(x^2+x)+6$이므로 $x^2+x=t$라 하면

$t^2-t-6=0$

$(t-3)(t+2)=0$

$\therefore t-3=0$ 또는 $t+2=0$

이때, $t=x^2+x$이므로

$x^2+x-3=0$ 또는 $x^2+x+2=0$

두 이차방정식 중 실근을 갖는 것은 $x^2+x-3=0$이므로

모든 실근의 곱은 -3이다.

35 답 ④

④ 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근은

$\dfrac{(d\text{의 약수})}{(a\text{의 약수})}$의 약수 중 하나이다.

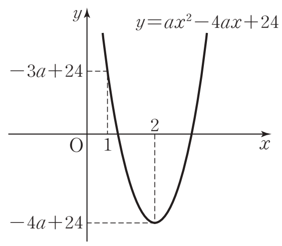
36 답 7

삼차방정식 $ax^3-5ax^2+4(a+6)x-24=0$에 $x=1$을 대입하면

$a-5a+4(a+6)-24=0$을 만족시키므로 이 삼차방정식은

$(x-1)(ax^2-4ax+24)=0$

또한, 이 삼차방정식이 1 이상의 서로 다른 세 실근을 가지도록 하려면 이차방정식 $ax^2-4ax+24=0$이 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



이차함수 $y=ax^2-4ax+24$에 대하여 a가 자연수이고 축이 $x=2$이므로 그림과 같이

$x=1$일 때, $-3a+24>0$

$\therefore a<8$ ⋯ ㉠

$x=2$일 때, $-4a+24<0$

$\therefore a>6$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $6<a<8$

따라서 자연수 a의 값은 7이다.

37 답 ⑤

$x^4-13x^2+36=0$에서 $(x^2-4)(x^2-9)=0$

$(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

이 중 자연수는 2와 3이므로 구하는 합은 5이다.

[다른 풀이]

$x^4-13x^2+36=0$에서 $(x^4-12x^2+36)-x^2=0$

$(x^2-6)^2-x^2=0$

$(x^2+x-6)(x^2-x-6)=0$

$(x+3)(x-2)(x-3)(x+2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

(이하 동일)

38 답 1

$x^4+3x^2+4=0$에서 $(x^4+4x^2+4)-x^2=0$

$(x^2+2)^2-x^2=0$

$(x^2+x+2)(x^2-x+2)=0$

$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

따라서 이 중 실수 부분이 양수인 켤레복소수는 $\dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$이므로

두 근의 합은 1이다.

일등급 UP

* 켤레근의 합

$(x^2+x+2)(x^2-x+2)=0$에서 두 이차방정식 $x^2+x+2=0$, $x^2-x+2=0$은 각각 한 쌍의 켤레복소수를 근으로 갖는다.
이 중 실수부분이 양수인 켤레복소수는 두 근의 합도 양수이므로 구하는 두 근의 합은 방정식 $x^2-x+2=0$의 두 근의 합이다. 따라서 근과 계수의 관계에 의하여 1이다.

39 답 ①

$x\neq0$이므로 $x^4-3x^3-6x^2+3x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-3x-6+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)-4=0$

$x-\dfrac{1}{x}=t$라 하면 $t^2-3t-4=0$이므로

$(t+1)(t-4)=0$

$\therefore x-\dfrac{1}{x}=-1$ 또는 $x-\dfrac{1}{x}=4$

즉, $x^2+x-1=0$ 또는 $x^2-4x-1=0$의 근이 각각

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=2\pm\sqrt{5}$

따라서 $M=2+\sqrt{5}$, $m=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$이므로

$M+2m=2+\sqrt{5}+(-1-\sqrt{5})=1$

40 답 ①

삼차방정식 $x^3-3x^2-1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta+\gamma=3$

$\therefore \alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)$

$=\alpha^2(3-\alpha)+\beta^2(3-\beta)+\gamma^2(3-\gamma)$

$=-(\alpha^3-3\alpha^2)-(\beta^3-3\beta^2)-(\gamma^3-3\gamma^2)$ ⋯ ㉠

한편, α, β, γ는 방정식 $x^3-3x^2-1=0$의 근이므로

$\alpha^3-3\alpha^2=1$, $\beta^3-3\beta^2=1$, $\gamma^3-3\gamma^2=1$

따라서 ㉠에 대입하면

$-1-1-1=-3$

41 답 ③

$\dfrac{a^3-3a}{a+1}=\dfrac{b^3-3b}{b+1}=\dfrac{c^3-3c}{c+1}=k$ ($k\neq0$인 상수)라 하면

$\dfrac{a^3-3a}{a+1}=k$에서 $a^3-3a=ka+k$이므로

$a^3-(3+k)a-k=0$

마찬가지로

$b^3-(3+k)b-k=0$, $c^3-(3+k)c-k=0$

따라서 삼차방정식 $x^3-(3+k)x-k=0$의 세 근이 a, b, c이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $a+b+c=0$

42 답 8

조건 (가), (나)에서

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

$2^2=54+2(xy+yz+zx)$

$\therefore xy+yz+zx=-25$

이때, 이것과 조건 (가), (다)에서

$x+y+z=2$, $xy+yz+zx=-25$, $xyz=-50$

이므로 최고차항의 계수가 1이고 x, y, z를 세 근으로 하는 삼차방정식은

$t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz=0$

$\therefore t^3-2t^2-25t+50=0$

따라서

$x^3=2x^2+25x-50$, $y^3=2y^2+25y-50$, $z^3=2z^2+25z-50$

위의 식을 변끼리 더하면

$x^3+y^3+z^3=2(x^2+y^2+z^2)+25(x+y+z)-150$

$=2\times54+25\times2-150=8$

43 답 ④

a, b, c, d가 실수이므로 계수가 실수인 사차방정식

$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$

은 허수를 근으로 가지면 반드시 그 켤레복소수도 근으로 갖는다. 그런데 두 허수 $i+1$과 $i-1$은 켤레복소수의 관계가 아니므로 나머지 두 근은 $-i+1$과 $-i-1$이다.

$\therefore x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

$=(x-i-1)(x+i-1)(x-i+1)(x+i+1)$

이 식은 x의 항등식이므로 $x=1$을 대입하면

$1+a+b+c+d=(-i)\times i\times(2-i)\times(2+i)=5$

$\therefore a+b+c+d=4$

44 답 ①

$x^3-5x+2=0$에 $x=2$를 대입하면

$2^3-5\times2+2=8-10+2=0$이므로

$x^3-5x+2=0$에서 $(x-2)(x^2+2x-1)=0$

이고 방정식 $x^2+2x-1=0$의 두 무리수 근을 α, β라 하면 방정식 $x^3-5x+2=0$의 세 근은 2, α, β이다.

한편, $x^3+(a-1)x^2-(a-b)x-b=0$에 $x=1$을 대입하면

$1^3+(a-1)-(a-b)-b=0$이므로

$x^3+(a-1)x^2-(a-b)x-b=0$에서

$(x-1)(x^2+ax+b)=0$이고, 방정식 $x^2+ax+b=0$이 2, α, β 중 2개를 근으로 가져야 한다. 그런데 a, b가 유리수이므로 2와 α 또는 2와 β를 근으로 가질 수는 없다.

따라서 α, β를 근으로 가지고 $x^2+ax+b=x^2+2x-1$이 x에 대한 항등식이므로 $a=2$, $b=-1$

$\therefore a+b=1$

45 답 ⑤

계수가 실수인 사차방정식 $x^4+2x^3+mx^2+(n-3)x-2=0$

에서 $\alpha^2=\overline{\alpha}$이므로

$\alpha^4=(\overline{\alpha})^2=\overline{(\alpha^2)}=\overline{(\overline{\alpha})}=\alpha$

$\therefore \alpha^3=1$ ($\because \alpha\neq0$)

즉, $\alpha^3-1=0$에서

$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$

α는 허근이므로 α, α^2은 $x^2+x+1=0$의 두 허근이다.

$\therefore x^4+2x^3+mx^2+(n-3)x-2$

$=(x^2+x+1)(x^2+ax-2)$ (a는 상수)

x^3의 계수를 비교하면 $2=a+1$ $\quad\therefore a=1$

x^2의 계수를 비교하면 $m=-2+1+a=0$

x의 계수를 비교하면 $n-3=a-2$ $\quad\therefore n=2$

$\therefore m+n=2$

46 답 ①

$x^2+x+1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 $x^3=1$

$\therefore \alpha^3=1,\ \beta^3=1$

방정식 $x^2+x+1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=1$ ⋯ ㉠

$\dfrac{1+\alpha^n}{1+\beta^n}$의 분자와 분모에 α^n을 곱하면

$\dfrac{\alpha^n(1+\alpha^n)}{\alpha^n+(\alpha\beta)^n}=\dfrac{\alpha^n(1+\alpha^n)}{\alpha^n+1}$ ($\because$ ㉠)$=\alpha^n$

$\dfrac{1+\beta^n}{1+\alpha^n}$의 분자와 분모에 β^n을 곱하면

$\dfrac{\beta^n(1+\beta^n)}{\beta^n+(\alpha\beta)^n}=\dfrac{\beta^n(1+\beta^n)}{\beta^n+1}$ ($\because$ ㉠)$=\beta^n$

또한, $\alpha^n+\beta^n$은 $n=3k+1$일 때,

$\alpha^{3k+1}+\beta^{3k+1}=\alpha+\beta=-1$

$n=3k+2$일 때,

$\alpha^{3k+2}+\beta^{3k+2}=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-1)^2-2=-1$

즉, n이 3의 배수가 아니면 $\alpha^n+\beta^n=-1$

따라서 $\alpha^n\beta^n=(\alpha\beta)^n=1$이므로 $\dfrac{1+\alpha^n}{1+\beta^n}$, $\dfrac{1+\beta^n}{1+\alpha^n}$을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2-(\alpha^n+\beta^n)x+\alpha^n\beta^n=0$이므로

$x^2+x+1=0$

47 답 53

조건 (나)에서 계수가 실수인 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

또한, $x^2+x+1=0$의 양변에 $(x-1)$을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$에서 $x^3-1=0$이므로 두 허수 ω, $\overline{\omega}$는 $x^3=1$을 만족시킨다. $\quad\therefore \omega^3=1,\ \overline{\omega}^3=1$

조건 (가), (나)에서

$P(1)-1^3=0,\ P(2)-2^3=0,\ P(\omega)-\omega^3=0,\ P(\overline{\omega})-\overline{\omega}^3=0$

이므로 사차방정식 $P(x)-x^3=0$은 사차항의 계수가 1이고 1, 2, ω, $\overline{\omega}$를 네 근으로 갖는다.

$\therefore P(x)-x^3=(x-1)(x-2)(x-\omega)(x-\overline{\omega})$ ⋯ ㉠

한편, 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이 ω, $\overline{\omega}$이므로

$x^2+x+1=(x-\omega)(x-\overline{\omega})$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $P(x)-x^3=(x-1)(x-2)(x^2+x+1)$

$\therefore P(x)=(x-1)(x-2)(x^2+x+1)+x^3$

따라서 다항식 $P(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는

$P(3)=(3-1)(3-2)(3^2+3+1)+3^3=53$

48 답 ⑤

$x^{10}=1$에서 $x^{10}-1=0$이므로 $(x-1)(x^9+x^8+\cdots+x+1)=0$

즉, $x^9+x^8+\cdots+x+1=0$의 근이 $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \cdots,\ \omega_9$이므로

$x^9+x^8+\cdots+x+1=(x-\omega_1)(x-\omega_2)\cdots(x-\omega_9)$

이 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$(1-\omega_1)(1-\omega_2)\cdots(1-\omega_9)=\underbrace{1+1+\cdots+1+1}_{10\text{개}}=10$

49 답 ④

$\begin{cases} x-2y+a=2 \cdots ㉠ \\ 2x+y-3a=4 \cdots ㉡ \\ 3x-y-2a=k \cdots ㉢ \end{cases}$

㉠+㉡×2를 하면 $5x-5a=10$ $\quad\therefore x-a=2$ ⋯ ㉣

㉡+㉢을 하면 $5x-5a=4+k$ $\quad\therefore x-a=\dfrac{4+k}{5}$ ⋯ ㉤

해가 무수히 많기 위해서는 ㉣=㉤이어야 하므로

$2=\dfrac{4+k}{5}$ $\quad\therefore k=6$

50 답 ④

$\begin{cases} (x-1)(x-4)=y \cdots ㉠ \\ (x-y-2)(x-y-3)=2 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 정리하면 $(x-y-2)(x-y-3)=2$,

$(x-y)^2-5(x-y)+4=0,\ (x-y-1)(x-y-4)=0$

$\therefore x-y-1=0$ 또는 $x-y-4=0$

이것을 ㉠에 대입하면

(i) $y=x-1$일 때,

$(x-1)(x-4)=(x-1)$에서

$(x-1)(x-5)=0$ $\quad\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$

(ii) $y=x-4$일 때,

$(x-1)(x-4)=(x-4)$에서

$(x-2)(x-4)=0$ $\quad\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$

(i), (ii)에 의하여 $x+y$의 최댓값은 9이다.

51 답 ②

삼차방정식 $(x-1)(x-4)^2=a$, 즉 $x^3-9x^2+24x-16-a=0$의 세 근을 α, α, β라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+\beta=9$ ⋯ ㉠

$\alpha^2+2\alpha\beta=24$ ⋯ ㉡

$\alpha^2\beta=16+a$ ⋯ ㉢

㉠에서 $\beta=9-2\alpha$를 ㉡에 대입하면

$\alpha^2+2\alpha(9-2\alpha)=24$

$\alpha^2-6\alpha+8=0$

$(\alpha-2)(\alpha-4)=0$

$\therefore \alpha=2$ 또는 $\alpha=4$

(i) $\alpha=2$일 때, ㉠에서 $\beta=5$이고 ㉢에서 $a=4$

(ii) $\alpha=4$일 때, ㉠에서 $\beta=1$이고 ㉢에서 $a=0$

(i), (ii)에 의하여 $a\neq0$인 실수 a의 값은 4이다.

52 답 ①

직선 AB의 기울기가 $\dfrac{b-(-3)}{a-0}=\dfrac{b+3}{a}=1$이므로

$a-b=3$ ⋯ ㉠

직선 BC의 기울기가 $\dfrac{-b-(-3)}{2a-0}=\dfrac{-b+3}{2a}=1$이므로

$2a+b=3$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$

$\therefore a+b=1$

53 답 ③

수도꼭지 A, B로 1 시간 동안 물통을 채우는 비율을 각각 a, b라 하자.

조건 (가)에서 수도꼭지 3개를 모두 틀어 물통을 가득 채우면 1시간이 걸리므로 C로 1시간 동안 물통을 채우는 비율은

$(1-a-b)$

조건 (나)에서 A를 잠그고 B와 C를 틀면 2시간이 걸리므로 B와 C로 1시간 동안 물통을 채우는 비율은

$b+(1-a-b)=\dfrac{1}{2}\qquad \therefore a=\dfrac{1}{2}$

조건 (다)에서 B를 잠그고 A와 C를 틀면 1시간 30분이 걸리므로 A와 C로 1시간 동안 물통을 채우는 비율은

$a+(1-a-b)=\dfrac{2}{3}\qquad \therefore b=\dfrac{1}{3}$

따라서 수도꼭지 C를 잠그고 수도꼭지 A와 B로 1시간 동안 물통을 채우는 비율은

$a+b=\dfrac{5}{6}$

이므로 수도꼭지 C를 잠그고 A와 B를 틀어 물통을 채울 때 걸리는 시간은 $\dfrac{1}{\frac{5}{6}}=\dfrac{6}{5}$(시간)

54 답 84

$\overline{BH}=x$, $\overline{CH}=y$라 하면 $\overline{AH}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$의 길이가 각각 다음과 같다.

$\overline{AH}=x+y-2$, $\overline{AC}=x+y-1$,

$\overline{BC}=x+y$, $\overline{AB}=x+y+1$

두 삼각형 ABH, ACH가 선분 AH를 공유하는 직각삼각형이므로

$\overline{AB}^2-\overline{BH}^2=\overline{AC}^2-\overline{CH}^2$에서

$(x+y+1)^2-x^2=(x+y-1)^2-y^2$

$(x+y+1)^2-(x+y-1)^2=x^2-y^2$

$(2x+2y)\times2=(x+y)(x-y)$

$4(x+y)=(x+y)(x-y)$

이때, $x>0$, $y>0$이므로 $4=x-y$

$\therefore y=x-4$ ⋯ ㉠

또한, 직각삼각형 ABH에서

$\overline{AB}^2-\overline{BH}^2=\overline{AH}^2$이므로

$(x+y+1)^2-x^2=(x+y-2)^2$

$(x+y+1)^2-(x+y-2)^2=x^2$

$(2x+2y-1)\times3=x^2$

㉠을 대입하면 $3(4x-9)=x^2$

$x^2-12x+27=0$

$(x-3)(x-9)=0$

$\therefore x=9$, $y=5$ ($\because x>0$, $y>0$)

따라서 $\overline{AH}$, $\overline{BC}$의 길이는 각각

$\overline{AH}=x+y-2=12$,

$\overline{BC}=x+y=14$

이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\times14\times12=84$

55 답 4

$x^4-5x^3+8x^2-7x+3=0$에서 조립제법에 의하여

$$\begin{array}{c|rrrrr}
1 & 1 & -5 & 8 & -7 & 3 \\
 & & 1 & -4 & 4 & -3 \\
\hline
3 & 1 & -4 & 4 & -3 & \boxed{0} \\
 & & 3 & -3 & 3 & \\
\hline
 & 1 & -1 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$(x-1)(x^3-4x^2+4x-3)=0$

$(x-1)(x-3)(x^2-x+1)=0$ ⋯⋯ ⓐ

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ ⋯⋯ ⓑ

따라서 모든 실근의 합은 $1+3=4$ ⋯⋯ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 주어진 식을 인수분해한다.	[50%]
ⓑ 근을 구한다.	[30%]
ⓒ 모든 실근의 합을 구한다.	[20%]

56 답 3

사차방정식 $x^4-7x^2+9=0$에서

$(x^2-3)^2-x^2=0$

$(x^2+x-3)(x^2-x-3)=0$

$x^2+x-3=0$ 또는 $x^2-x-3=0$

$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ ---- ⓐ

이 중 양수인 근은 $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$이므로

양수인 모든 근의 곱은

$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\times\frac{1+\sqrt{13}}{2}=\frac{-1+13}{4}=3$ ---- ⓑ

| 채점기준 |

ⓐ 사차방정식의 해를 구한다.	[50%]
ⓑ 양수인 모든 근의 곱을 구한다.	[50%]

57 답 20

조건 (나)에서

$(4-2x+x^2)(3+2x-x^2)=10$이므로

$(x^2-2x+4)(x^2-2x-3)=-10$

$x^2-2x=t$라 하면

$(t+4)(t-3)=-10$, $t^2+t-2=0$, $(t-1)(t+2)=0$

즉, $(x^2-2x-1)(x^2-2x+2)=0$

$\therefore x=1\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=1\pm i$

조건 (가)에서 $a=1+\sqrt{2}$ ---- ⓐ

또한, 조건 (가)에서 b, c는 유리수이므로 조건 (다)에서

$a+b=b+1+\sqrt{2}$가 계수가 유리수인 방정식 $x^2-6x+c=0$의 근이면 $b+1-\sqrt{2}$도 이 방정식의 근이다.

이차방정식 $x^2-6x+c=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\begin{cases}(b+1+\sqrt{2})+(b+1-\sqrt{2})=6 & \therefore b=2\\(b+1+\sqrt{2})(b+1-\sqrt{2})=c & \therefore c=7\end{cases}$ ---- ⓑ

따라서 $a+b+c=10+\sqrt{2}$이고, p, q는 유리수이므로

$p=10$, $q=2$

$\therefore pq=20$ ---- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 조건 (가), (나)를 만족시키는 a의 값을 구한다	[40%]
ⓑ 조건 (가), (다)를 만족시키는 b, c의 값을 각각 구한다.	[50%]
ⓒ p, q의 값을 각각 찾아 pq의 값을 구한다.	[10%]

58 답 ①

α가 삼차방정식 $x^3+2x^2+3x+1=0$의 한 근이므로

$\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1=0$이다.

α는 0이 아니므로 양변을 α^3으로 나누면

$1+\frac{2}{\alpha}+\frac{3}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}=0$이므로 식을 정리하면

$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+\overset{(가)}{\boxed{3}}\times\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+2\left(\frac{1}{\alpha}\right)+1=0$이다.

그러므로 $\frac{1}{\alpha}$은 최고차항의 계수가 1인 삼차방정식

$\overset{(나)}{\boxed{x^3+3x^2+2x+1}}=0$의 한 근이다.

따라서 $p=3$, $f(2)=25$이므로 $p+f(2)=28$

일등급 Up

＊ 역수를 근으로 갖는 삼차방정식

같은 방법으로 β와 γ에 적용해 보자.

β, γ도 삼차방정식 $x^3+2x^2+3x+1=0$의 근이므로

$\beta^3+2\beta^2+3\beta+1=0$ ⋯ ㉠

$\gamma^3+2\gamma^2+3\gamma+1=0$ ⋯ ㉡

β, γ는 0이 아니므로 ㉠, ㉡의 양변을 각각 β^3, γ^3으로 나누면

$1+\frac{2}{\beta}+\frac{3}{\beta^2}+\frac{1}{\beta^3}=0$, $1+\frac{2}{\gamma}+\frac{3}{\gamma^2}+\frac{1}{\gamma^3}=0$

이므로 식을 정리하면

$\left(\frac{1}{\beta}\right)^3+3\left(\frac{1}{\beta}\right)^2+2\left(\frac{1}{\beta}\right)+1=0$

$\left(\frac{1}{\gamma}\right)^3+3\left(\frac{1}{\gamma}\right)^2+2\left(\frac{1}{\gamma}\right)+1=0$

그러므로 $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$은 최고차항의 계수가 1인 삼차방정식

$x^3+3x^2+2x+1=0$의 근이다.

따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 갖는 최고차항의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3+3x^2+2x+1=0$이다.

59 답 ⑤

$(x^2+x-1)(x^2+x+3)-5=0$에서 $t=x^2+x$라 하면

$(t-1)(t+3)-5=0$

$t^2+2t-8=0$

$(t+4)(t-2)=0$

$\therefore t+4=0$ 또는 $t-2=0$

이때, $t=x^2+x$이므로 $x^2+x+4=0$ 또는 $x^2+x-2=0$

한편, 허근인 α, β는 $x^2+x+4=0$의 서로 다른 두 허근이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=4$

$\overline{\alpha}=\beta$, $\overline{\beta}=\alpha$이므로 $\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}=2\alpha\beta=8$

60 답 25

$\begin{cases}x^2-y^2=6 \cdots ㉠\\(x+y)^2-2(x+y)=3 \cdots ㉡\end{cases}$

㉡에서 $x+y=t$라 하면 $t^2-2t-3=0$이므로

$(t+1)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

즉, $x+y=-1$ 또는 $x+y=3$인데 x, y는 양수이므로

$x+y=3$ ⋯ ㉢

㉠을 인수분해하면 $(x+y)(x-y)=6$이므로

㉢에 의하여 $3(x-y)=6$

$\therefore x-y=2$ ⋯ ㉣

㉢+㉣을 하면 $2x=5$ $\quad\therefore x=\frac{5}{2}$

이것을 ㉢에 대입하면 $y=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore 20xy=25$

[다른 풀이]

$x+y=\alpha$, $xy=\beta$라 하면 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$이므로

$(x-y)^2=\alpha^2-4\beta$ ⋯ ㉤

㉡에 의하여 $\alpha^2-2\alpha-3=0$이므로 $(\alpha-3)(\alpha+1)=0$

$\therefore \alpha=3$ 또는 $\alpha=-1$

한편, x, y는 양수이므로 $\alpha=3$, 즉 $x+y=3$이다.

㉤에서 $(x-y)^2=9-4\beta$

또한, ㉠을 제곱하면 $(x^2-y^2)^2=6^2$이고, 이것을 정리하면

$(x+y)^2(x-y)^2=6^2$ ⋯ ㉥

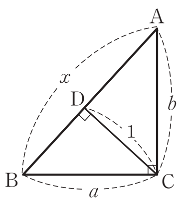
㉥에 ㉢, ㉤을 대입하면

$3^2(9-4\beta)=6^2$이므로 $9-4\beta=4$ $\quad\therefore \beta=\frac{5}{4}$

따라서 $xy=\frac{5}{4}$이므로 $20xy=25$

61 답 ③

그림과 같이 $\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하자.



$\triangle ABC=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}x$

$\therefore ab=x$ ⋯ ㉠

삼각형 ABC의 세 변의 길이의 합은 5이므로

$a+b+x=5$

$\therefore a+b=5-x$ ⋯ ㉡

한편, 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$a^2+b^2=x^2$이고

$x^2=(a+b)^2-2ab$에 ㉠과 ㉡을 대입하면

$x^2=(5-x)^2-2x$, $x^2=5^2-10x+x^2-2x$

$25-12x=0$ $\quad\therefore x=\frac{25}{12}$

62 답 ⑤

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 한 근이 α이므로

$a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$

① $a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$의 양변을 α^3으로 나누면

$a+\frac{b}{\alpha}+\frac{c}{\alpha^2}+\frac{d}{\alpha^3}=0$

즉, $d\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+c\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+b\left(\frac{1}{\alpha}\right)+a=0$

따라서 방정식 $dx^3+cx^2+bx+a=0$의 세 근은

$\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$이다.

② $a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$의 양변에 -1을 곱하면

$-a\alpha^3-b\alpha^2-c\alpha-d=0$

즉, $a(-\alpha)^3-b\alpha^2+c(-\alpha)-d=0$에서

$-\alpha$가 삼차방정식 $ax^3-bx^2+cx-d=0$의 한 근이므로 방정식 $ax^3-bx^2+cx-d=0$의 세 근은 $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$이다.

③ $a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$에서

$a(\alpha-1+1)^3+b(\alpha-1+1)^2+c(\alpha-1+1)+d=0$

따라서 $\alpha-1$이 삼차방정식

$a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d=0$의 한 근이므로

방정식 $a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d=0$의 세 근은

$\alpha-1$, $\beta-1$, $\gamma-1$이다.

④ $a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$의 양변을 $-\alpha^3$으로 나누면

$-a-\frac{b}{\alpha}-\frac{c}{\alpha^2}-\frac{d}{\alpha^3}=0$

즉, $d\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^3-c\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^2+b\left(-\frac{1}{\alpha}\right)-a=0$

따라서 $-\frac{1}{\alpha}$이 삼차방정식 $dx^3-cx^2+bx-a=0$의

한 근이므로 방정식 $dx^3-cx^2+bx-a=0$의 세 근은

$-\frac{1}{\alpha}$, $-\frac{1}{\beta}$, $-\frac{1}{\gamma}$이다.

⑤ $a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$의 양변에 8을 곱하면

$8a\alpha^3+8b\alpha^2+8c\alpha+8d=0$

즉, $a(2\alpha)^3+2b(2\alpha)^2+4c(2\alpha)+8d=0$에서

2α가 삼차방정식 $ax^3+2bx^2+4cx+8d=0$의 한 근이므로

방정식 $ax^3+2bx^2+4cx+8d=0$의 세 근은 2α, 2β, 2γ이다.

63 답 18

$x\neq0$이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-2x-12+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}=0$

$x^2+\left(\frac{2}{x}\right)^2-2\left(x-\frac{2}{x}\right)-12=0$

$\left(x-\frac{2}{x}\right)^2-2\left(x-\frac{2}{x}\right)-8=0$

$\left(x-\frac{2}{x}+2\right)\left(x-\frac{2}{x}-4\right)=0$

$(x^2+2x-2)(x^2-4x-2)=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=2\pm\sqrt{6}$

이 중 양수는 $-1+\sqrt{3}$과 $2+\sqrt{6}$이므로 그 합은 $1+\sqrt{3}+\sqrt{6}$

따라서 p, q, r는 자연수이므로 $pqr=18$

64 답 ①

주어진 사차방정식이 x에 대한 복이차식이므로 방정식의 네 근을 $\pm\alpha$, $\pm\beta$라 할 수 있다.

따라서 $X=x^2$이라 하면 이차방정식 $X^2-3X+k=0$의 두 근은 α^2, β^2이다.

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha^2+\beta^2=3$, $\alpha^2\beta^2=k$

또한, 두 근의 합이 1이므로 $\alpha+\beta=1$이라 해도 일반성을 잃지 않는다.

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$이므로 $1^2=3+2\alpha\beta$

$\alpha\beta=-1$이므로 $k=(\alpha\beta)^2=1$

65 답 ⑤

ㄱ. 실수 a, b, c를 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 삼차방정식은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0$

이때, $a+b+c=0$이므로

$x^3+(ab+bc+ca)x-abc=0$ (참)

ㄴ. 실수 a가 삼차방정식 $x^3+(ab+bc+ca)x-abc=0$의 한 근이므로 $a^3+(ab+bc+ca)a-abc=0$

$\therefore a^3=abc-(ab+bc+ca)a$ (참)

ㄷ. 마찬가지로 두 실수 b, c도 삼차방정식

$x^3+(ab+bc+ca)x-abc=0$의 근이므로

$a^3=abc-(ab+bc+ca)a$ ⋯ ㉠

$b^3=abc-(ab+bc+ca)b$ ⋯ ㉡

$c^3=abc-(ab+bc+ca)c$ ⋯ ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$a^3+b^3+c^3=3abc-(ab+bc+ca)(a+b+c)$

그런데 $a+b+c=0$이므로 $a^3+b^3+c^3=3abc$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

66 답 2

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$에서

$xy+yz+zx=\frac{1}{3}$

$x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$이므로

$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

$\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

x, y, z가 실수이므로 $x=y=z$이고 $x+y+z=1$에서

$x=y=z=\frac{1}{3}$

$\therefore x+2y+3z=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+1=2$

[다른 풀이]

$x+y+z=1$에서 $z=1-x-y$이므로

$x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+(1-x-y)^2=\frac{1}{3}$

$2x^2+2y^2+1+2xy-2x-2y=\frac{1}{3}$

$2x^2+2(y-1)x+2y^2-2y+\frac{2}{3}=0$ ⋯ ㉠

x가 실수이므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(y-1)^2-2\left(2y^2-2y+\frac{2}{3}\right)=-3\left(y-\frac{1}{3}\right)^2\ge 0$에서 $y=\frac{1}{3}$

이것을 ㉠에 대입하면 $x=\frac{1}{3}$

$\therefore x=y=z=\frac{1}{3}$

(이하 동일)

1st 08 여러 가지 부등식

문제편 93P

01 답 ④

부등식 $f(x)\le 0$의 해가 $-2\le x\le 1$이므로

이차함수 $f(x)$는 $f(x)=a(x+2)(x-1)$ $(a>0)$

이때, $f(2)=8$이므로 $f(2)=4a=8$ $\quad\therefore a=2$

따라서 $f(x)=2(x+2)(x-1)$이므로 $f(3)=20$

02 답 ②

$2|x-1|+3|x+1|<9$에서

(i) $x<-1$일 때,

$-2(x-1)-3(x+1)<9$이므로 $x>-2$

$\therefore -2<x<-1$

(ii) $-1\le x<1$일 때,

$-2(x-1)+3(x+1)<9$이므로 $x<4$

$\therefore -1\le x<1$

(iii) $x\ge 1$일 때,

$2(x-1)+3(x+1)<9$이므로 $x<\frac{8}{5}$

$\therefore 1\le x<\frac{8}{5}$

(i)~(iii)에 의하여 $-2<x<\frac{8}{5}$

따라서 정수인 해의 개수는 -1, 0, 1의 3이다.

03 답 6

$x^2-(a+2)x+2a<0$에서 $(x-a)(x-2)<0$

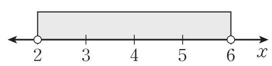
(i) $a<2$이면 해는 $a<x<2$

이때, $a<x<2$인 정수 x가 3개가 되도록 하는 자연수 a는 존재하지 않는다.

(ii) $a=2$이면 $(x-2)^2<0$이 되어 해가 없으므로 성립하지 않는다.

(iii) $a>2$이면 해는 $2<x<a$

이때, $2<x<a$인 정수 x가 3개가 되도록 하는 자연수 a의 값은 그림에서 6이다.



(i)~(iii)에서 $a=6$

04 답 6

이차부등식의 해가 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$이므로

$\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)<0$에서 $6x^2-5x+1<0$

즉, $-6x^2+5x-1>0$이므로

$a=-6$, $b=-1$ $\quad\therefore ab=6$

05 답 ②

$x-10\le -x^2+4x<-2x+9$에서

(i) $x-10\le -x^2+4x$에서

$x^2-3x-10\le 0$이므로 $(x+2)(x-5)\le 0$

$\therefore -2\le x\le 5$ ⋯ ㉠

(ii) $-x^2+4x<-2x+9$에서

$x^2-6x+9>0$이므로 $(x-3)^2>0$

즉, $x\ne 3$인 모든 실수이다. ⋯ ㉡

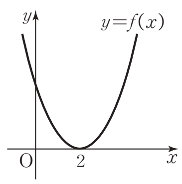
㉠, ㉡에서 주어진 부등식을 만족시키는 해는

$-2\le x<3,\ 3<x\le 5$

따라서 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5$이므로

그 합은 9이다.

06 답 27



조건 (나)에서 이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $x\ne 2$인 모든 실수이므로 그림과 같이 이차함수 $f(x)$의 이차항의 계수는 양수이고 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 점 $(2,\ 0)$에서 접한다.

이때, $f(x)=a(x-2)^2\ (a>0)$

이라 하면 조건 (가)에서

$f(1)=a(1-2)^2=3$에서 $a=3$

따라서 $f(x)=3(x-2)^2$이므로 $f(5)=27$

07 답 ③

이차함수 $y=x^2-2(k-1)x+k^2-3k+4$의 그래프는 아래로 볼록하므로 모든 실수 x에 대하여 $y\ge 0$이 되려면 이차함수의 그래프가 x축에 접하거나 만나지 않아야 한다.

즉, 방정식 $x^2-2(k-1)x+k^2-3k+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-3k+4)\le 0$이므로

$k-3\le 0 \qquad \therefore k\le 3$

이때, 자연수 k는 1, 2, 3이므로 그 합은 6이다.

08 답 60

현재 커피의 가격을 a원, 판매량을 b개라 하면

8 % 증가한 판매액은 $ab\left(1+\dfrac{8}{100}\right)$원이다. ⋯ ㉠

가격을 x % 인상하면 판매량이 $0.5x$ % 감소할 때의 판매액이 8 % 이상 증가하여야 하므로

$a\left(1+\dfrac{x}{100}\right)\times b\left(1-\dfrac{x}{200}\right)\ge ab\left(1+\dfrac{8}{100}\right)$

양변에 $\dfrac{20000}{ab}$을 곱하면

$(100+x)(200-x)\ge 21600$

$x^2-100x+1600\le 0$

$(x-20)(x-80)\le 0$

$\therefore 20\le x\le 80$

따라서 $p=20,\ q=80$이므로 $q-p=80-20=60$

일등급 UP

* 인상 전후의 관계를 표로 나타내기

이런 유형은 인상 전후의 관계를 표로 나타내면 좀더 쉽게 이해가 된다.

x % 인상 후 가격, 판매량, 판매액을 정리해 보자.

	현재	x % 인상 후
가격	a원	$a\left(1+\dfrac{x}{100}\right)$원
판매량	b개	$b\left(1-\dfrac{x}{200}\right)$개
판매액	ab원	$ab\left(1+\dfrac{x}{100}\right)\left(1-\dfrac{x}{200}\right)$원

09 답 ②

ㄱ. $1<\dfrac{1}{b}$에서 $0<b<1$이다.

이때, $a>0$이면 $\dfrac{1}{a}<1$에서 $a>1$, 즉 $b<1<a$가 되어 조건 $a<b$에 맞지 않는다.

$\therefore a<0$ (거짓)

ㄴ. 【반례】 $a=-1,\ b=\dfrac{1}{2}$이면 $a<b$이고 $\dfrac{1}{a}<1<\dfrac{1}{b}$이지만

$a^2>b^2$이다. (거짓)

ㄷ. $a<0,\ b>0,\ a-b<0$이므로

$a^2b-ab^2=ab(a-b)>0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

10 답 ⑤

ㄱ. $a>b>1$이므로 양변을 ab로 나누면

$\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{a}$

$\therefore \dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$ (참)

ㄴ. $a>b>1$이므로 $a^3>b^3$이다.

이 식의 양변을 a^2b^2으로 나누면

$\dfrac{a}{b^2}>\dfrac{b}{a^2}$

$\therefore \dfrac{b}{a^2}<\dfrac{a}{b^2}$ (참)

ㄷ. $a-1>0,\ b-1>0$이므로

$ab-(a+b-1)=(a-1)(b-1)>0$

$\therefore ab>a+b-1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

11 답 ①

ㄱ. $(b-a)(b-c)<0$에서 $a<b<c$ 또는 $c<b<a$ ⋯ ㉠

즉, b는 a와 c 사이에 있다. (참)

ㄴ. $a(a-c)<0$에서

(i) $a>0$이면 $a<c$이므로 ㉠에 의하여 $0<a<b<c$

(ii) $a<0$이면 $a>c$이므로 ㉠에 의하여 $c<b<a<0$

즉, 세 수 a, b, c의 부호는 항상 같다. (거짓)

ㄷ. 【반례】 ㄴ에서 $c<b<a<0$인 경우 c가 가장 작은 수이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

12 답 12

$$\begin{cases} 4x-1\ge 2x+a & \therefore x\ge \dfrac{a+1}{2} \\ x+1>2x+b & \therefore x<-b+1 \end{cases}$$

즉, 연립부등식의 해는 $\dfrac{a+1}{2}\le x<-b+1$이고 이 해가

$-1\le x<5$와 같으므로

$\dfrac{a+1}{2}=-1 \qquad \therefore a=-3$

$-b+1=5 \qquad \therefore b=-4$

$\therefore ab=(-3)\times(-4)=12$

[다른 풀이]

연립부등식 $\begin{cases} 4x-1\ge 2x+a \\ x+1>2x+b \end{cases}$의 해인 $-1\le x<5$의 양 끝값에

대하여 $x=-1$은 방정식 $4x-1=2x+a$의 근이므로

$4\times(-1)-1=2\times(-1)+a \qquad \therefore a=-3$

또, $x=5$는 방정식 $x+1=2x+b$의 근이므로

$5+1=2\times 5+b \qquad \therefore b=-4$

$\therefore ab=(-3)\times(-4)=12$

13 답 5

$2x-a<bx-3$에서 $(2-b)x<a-3$

이때, 이 부등식의 해가 존재하지 않아야 하므로

$2-b=0$, $a-3\le 0 \qquad \therefore a\le 3$, $b=2$

따라서 $a+b$의 최댓값은 $3+2=5$이다.

14 답 2

$2x+y=-2x-y+6$에서

$2y=-4x+6 \qquad \therefore y=-2x+3$ ⋯ ㉠

이것을 $1<y-2x<8$에 대입하면 $1<-4x+3<8$

$-2<-4x<5 \qquad \therefore -\dfrac{5}{4}<x<\dfrac{1}{2}$

정수 x는 -1, 0이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$x=-1$일 때, $y=5$

$x=0$일 때, $y=3$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $(-1, 5)$, $(0, 3)$의 2이다.

15 답 ⑤

부등식 $|ax-1|<b$에서

$-b<ax-1<b$, $-b+1<ax<b+1$

$\therefore \dfrac{-b+1}{a}<x<\dfrac{b+1}{a}$ $(\because a>0)$

이때, 해가 $-1<x<2$이므로

$\dfrac{-b+1}{a}=-1$, $\dfrac{b+1}{a}=2$

즉, $-b+1=-a$, $b+1=2a$이므로

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3 \qquad \therefore ab=6$

16 답 ②

$0\le|2x-1|<k+2$이므로 $k+2>0$이면 주어진 부등식의 실수해가 존재한다. $\qquad \therefore k>-2$

따라서 정수 k의 최솟값은 -1이다.

17 답 4

$(a+b)x+2a-3b<0$의 해가 $x>-\dfrac{3}{4}$이므로

$a+b<0$ ⋯ ㉠

$x>\dfrac{3b-2a}{a+b}$, 즉 $x>-\dfrac{3}{4}$에서

$\dfrac{3b-2a}{a+b}=-\dfrac{3}{4}$이므로 $-12b+8a=3a+3b$

$5a=15b \qquad \therefore a=3b$ ⋯ ㉡

㉡을 부등식 $|bx-a|<b-a$에 대입하면

$|bx-3b|<-2b$이고, ㉠, ㉡에서 $b<0$이므로

$2b<bx-3b<-2b$

$5b<bx<b \qquad \therefore 1<x<5$ $(\because b<0)$

따라서 정수 x의 최댓값은 4이다.

18 답 ②

$x^2+ax+b\le 0$의 해가 $-1\le x\le 3$이므로

방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 -1, 3이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$-1+3=-a$, $(-1)\times 3=b \qquad \therefore a=-2$, $b=-3$

이것을 $x^2-ax+b\le 0$에 대입하면 $x^2+2x-3\le 0$

$(x+3)(x-1)\le 0 \qquad \therefore -3\le x\le 1$

[다른 풀이]

$f(x)=x^2+ax+b$라 하면

$f(-x)=x^2-ax+b$

$f(x)\le 0$의 해가 $-1\le x\le 3$이므로

$f(-x)\le 0$의 해는 $-1\le -x\le 3$

즉, $-3\le x\le 1$

따라서 부등식 $x^2-ax+b\le 0$의 해는

$-3\le x\le 1$

19 답 ①

이차부등식 $x^2+ax+b<0$의 해가 $\alpha<x<\beta$이므로

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근은

$x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$이다.

$(x-1)^2-a(x-1)+b>0$에서

$x-1=t$라 하면 $t^2-at+b=0$, 즉 $(-t)^2+a(-t)+b=0$에서

$t=-\alpha$ 또는 $t=-\beta$

$\therefore x=1-\alpha$ 또는 $x=1-\beta$

즉, $(x-1+\alpha)(x-1+\beta)>0$에서

$\alpha<\beta$이므로 $1-\alpha>1-\beta$

$\therefore x<1-\beta$ 또는 $x>1-\alpha$

20 답 ③

이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $-2<x<1$이므로

$f(x)=a(x+2)(x-1)\ (a<0)$이라 하면

$$\begin{aligned}f(200-x)&=a(200-x+2)(200-x-1)\\&=a(x-202)(x-199)\end{aligned}$$

$f(200-x)\le0$에서

$a(x-199)(x-202)\le0$

$a<0$이므로 $(x-199)(x-202)\ge0$

$x\le199$ 또는 $x\ge202$

따라서 $f(200-x)\le0$을 만족시키는 x의 값이 아닌 것은 ③ 200이다.

[다른 풀이]

$200-x=t$라 하면

부등식 $f(t)\le0$의 해는 $t\le-2$ 또는 $t\ge1$이다.

따라서 부등식 $f(200-x)\le0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$200-x\le-2$ 또는 $200-x\ge1$

$\therefore x\ge202$ 또는 $x\le199$

21 답 ③

그림에서 이차함수 $y=ax^2+bx$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 0, 2이므로

$ax^2+bx=0$에서 $ax(x-2)=0$

$\therefore b=-2a$ ⋯ ㉠

한편, 이차함수 $y=ax^2+bx$의 그래프와 직선 $y=cx$의 교점의 x좌표가 0, 3이므로

$ax^2+(b-c)x=0$에서 $ax(x-3)=0$

$\therefore b-c=-3a$

㉠을 대입하여 정리하면 $c=a$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 $ax^2+cx+b<0$에 대입하면 $ax^2+ax-2a<0$

$a(x^2+x-2)<0$

이때, $a>0$이므로 $x^2+x-2<0$에서 $(x+2)(x-1)<0$

$\therefore -2<x<1$

22 답 ③

그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 1, 3이므로 $f(x)=a(x-1)(x-3)\ (a>0)$이라 하자.

이때, $f(3-2x)\le0$에서

$a(3-2x-1)(3-2x-3)\le0$이므로

$4ax(x-1)\le0\qquad\therefore 0\le x\le1$

23 답 ⑤

$-2\le x\le2$에서 $f(x)=x^2-6x=(x-3)^2-9$라 하면

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $f(2)=-8$을 갖는다.

주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $a^2-6a\le-8$이어야 하므로

$a^2-6a+8\le0$

$(a-2)(a-4)\le0\qquad\therefore 2\le a\le4$

따라서 정수 a는 2, 3, 4이므로 그 합은

$2+3+4=9$

24 답 ④

$f(x)>g(x)$에서 $f(x)-g(x)>0$

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=ax^2+2ax+1-2x^2-4x+5\\&=(a-2)x^2+2(a-2)x+6\end{aligned}$$

(i) $a=2$일 때, $f(x)-g(x)=6>0$이므로 성립한다.

(ii) $a-2>0$이고 방정식 $f(x)-g(x)=0$에서 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-6(a-2)<0$

$(a-2)(a-8)<0\qquad\therefore 2<a<8$

(i), (ii)에서 $2\le a<8$

따라서 정수 a의 개수는 2, 3, 4, 5, 6, 7의 6이다.

25 답 ④

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}\\&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}\end{aligned}$$

ㄱ. $D>0$이면 방정식 $ax^2+bx+c=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
이때, 두 실근을 α, $\beta\ (\alpha<\beta)$라 하면 $ax^2+bx+c<0$의 해는 $\alpha<x<\beta$이다. (거짓)

ㄴ. $D<0$이면 $-\frac{D}{4a}>0$이므로 모든 실수 x에 대하여
항상 $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}>0$이다.
따라서 $ax^2+bx+c\ge0$의 해는 모든 실수이다. (참)

ㄷ. $D=0$이면 $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\ge0$이 되어
$ax^2+bx+c\le0$의 해는 $x=-\frac{b}{2a}$뿐이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

26 답 7

이차함수 $f(x)=x^2+3$의 그래프가 직선 $g(x)=k(x-1)$보다 항상 위쪽에 있으므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+3>k(x-1)$이 성립한다.

이 부등식을 정리하면 $x^2-kx+k+3>0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

이차방정식 $x^2-kx+k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4(k+3)<0$, $k^2-4k-12<0$, $(k+2)(k-6)<0$

$\therefore\ -2<k<6$

따라서 정수 k의 개수는 $-1, 0, 1, \cdots, 5$의 7이다.

27 답 ④

연립부등식 $\begin{cases} x^2-2x+a\le 0 \\ x^2-4x+b<0 \end{cases}$의 해가 $-1<x\le 4$이므로

$x=4$는 방정식 $x^2-2x+a=0$의 근이고, ⋯ ㉠

$x=-1$은 방정식 $x^2-4x+b=0$의 근이다. ⋯ ㉡

㉠에서 $16-8+a=0$ $\quad\therefore\ a=-8$

㉡에서 $1+4+b=0$ $\quad\therefore\ b=-5$

$\therefore\ ab=40$

28 답 5

부등식 $x^2-2x-3<0$에서

$(x+1)(x-3)<0$

$\therefore\ -1<x<3$

부등식 $(x-a)(x-a-2)<0$에서 $a<x<a+2$

연립부등식의 해가 존재하려면 $a<3$, $-1<a+2$이어야 하므로

$-3<a<3$

따라서 정수 a의 개수는 $-2, -1, 0, 1, 2$의 5이다.

29 답 ⑤

$x^2+14x+48\le 0$에서 $(x+8)(x+6)\le 0$

$\therefore -8\le x\le -6$ ⋯ ㉠

$x^2-ax-2a^2>0$에서 $(x+a)(x-2a)>0$

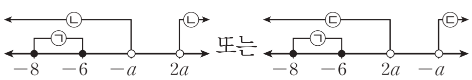
(i) $a\ge 0$일 때,

$x<-a$ 또는 $x>2a$ ⋯ ㉡

(ii) $a<0$일 때,

$x<2a$ 또는 $x>-a$ ⋯ ㉢

주어진 연립부등식의 해가 부등식 $x^2+14x+48\le 0$의 해 ㉠과 같으려면 다음과 같은 두 가지 경우가 있다.



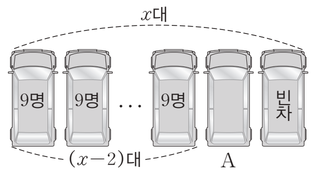
즉, $-6<-a\le 0$ 또는 $-6<2a<0$

$\therefore\ -3<a<6$

30 답 ②

승합차가 x대라 하면 한 대에 7명씩 타면 2명이 남으므로 사람 수는 $(7x+2)$명이다.

9명씩 타면 승합차가 1대 남으므로 그림과 같이 9명씩 탄 승합차가 $(x-2)$대이고, 승합차 A에는 최소 1명에서 최대 9명까지 탈 수 있다.



$9(x-2)+1\le 7x+2\le 9(x-2)+9$

$\therefore\ \frac{11}{2}\le x\le \frac{19}{2}$

따라서 승합차는 최소 6대이다.

31 답 20

A 영양제를 30일 중 x일 선택하여 복용한다고 하면 B 영양제를 선택하여 복용한 날은 $(30-x)$일이다.

30일 동안 섭취한 비타민의 양은 $6x+16(30-x)$ mg,

칼슘의 양은 $20x+10(30-x)$ mg이다.

$\begin{cases} 6x+16(30-x)\ge 230 & \cdots \text{㉠} \\ 20x+10(30-x)\ge 500 & \cdots \text{㉡} \end{cases}$

㉠에서 $10x\le 250$

$\therefore\ x\le 25$ ⋯ ㉢

㉡에서 $10x\ge 200$

$\therefore\ x\ge 20$ ⋯ ㉣

㉢, ㉣의 공통 범위는 $20\le x\le 25$

따라서 A 영양제를 적어도 20일은 선택하여 복용해야 한다.

$\therefore\ a=20$

32 답 200

운송거리가 $100x$ km일 때 트럭, 철도, 선박의 운송 비용이 각각 x^2-x+4(만 원), $3x+16$(만 원), $x+32$(만 원)이므로

(i) (철도 운송 비용)<(트럭 운송 비용)일 때,

$3x+16<x^2-x+4$에서

$x^2-4x-12>0$, $(x+2)(x-6)>0$

$\therefore\ x>6$ ($\because\ x>0$) ⋯ ㉠

(ii) (철도 운송 비용)<(선박 운송 비용)일 때,

$3x+16<x+32$에서

$2x<16$ $\quad\therefore\ 0<x<8$ ($\because\ x>0$) ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $6<x<8$

따라서 철도로 운송하는 것이 다른 교통수단으로 운송하는 것보다 비용이 적게 드는 운송 거리는 600 km에서 800 km 사이이다.

$\therefore\ l=800-600=200$

33 답 ④

ㄱ. 【반례】 $a=-2$, $b=-1$인 경우 $0<\frac{b}{a}<1$은 만족시키지만

$b>a$이므로 성립하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $0<\frac{b}{a}<1$에서 각 변에 $\frac{a}{b}$를 곱하면 $0<1<\frac{a}{b}$

$\therefore \frac{b}{a}<1<\frac{a}{b}$ (참)

ㄷ. $0<\frac{b}{a}<1$의 각 변에 a^2을 곱하면 $0<ab<a^2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

34 답 ④

$x=a+b-2c$, $y=b+c-2a$, $z=c+a-2b$라 하면

$x+y+z=0$이고 $x>y>z$이다.

ㄱ. $x\le 0$이면 $0\ge x>y>z$이므로 $x+y+z\ne 0$이 되어 성립하지 않는다.

즉, $x>0$이므로 $a+b>2c$ (참)

ㄴ. 【반례】 $a=4$, $b=5$, $c=2$이면 주어진 부등식은 성립하지만

$b+c<2a$ (거짓)

ㄷ. $z\ge 0$이면 $x>y>z\ge 0$이므로 역시 $x+y+z\ne 0$이 되어 성립하지 않는다.

즉, $z<0$이므로 $c+a<2b$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

35 답 21

$x+3<y<25-2x$에서

$x+3<25-2x$이므로

$3x<22 \qquad \therefore x<\frac{22}{3}$

이때, x는 소수이므로 2, 3, 5, 7이 가능하다.

$x=7$일 때, $x+3<y<25-2x$에서 $10<y<11$이므로 이를 만족시키는 소수 y는 존재하지 않는다.

$x=5$일 때, $8<y<15$이므로 소수 y는 11, 13

$x=3$일 때, $6<y<19$이므로 소수 y는 7, 11, 13, 17

$x=2$일 때, $5<y<21$이므로 소수 y는 7, 11, 13, 17, 19

따라서 $x=2$, $y=19$일 때 $x+y$는 최댓값 21을 갖는다.

36 답 65

x의 범위를 구해야 하므로 조건 (가)를 이용하여 y와 z를 소거한다.

우선 z를 소거하기 위하여 $3z=6-2y$를 부등식에 대입하면

$x<2y<6-2y$

다음으로 y를 소거하기 위하여 $y=\frac{4-x}{5}$를 부등식에 대입하면

$x<2\times\frac{4-x}{5}<6-2\times\frac{4-x}{5}$

즉, $5x<8-2x<30-8+2x$에서 $\begin{cases}5x<8-2x\\8-2x<22+2x\end{cases}$

$5x<8-2x$에서 $7x<8$

$\therefore x<\frac{8}{7}$ ⋯ ㉠

$8-2x<22+2x$에서 $-4x<14$

$\therefore x>-\frac{7}{2}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $-\frac{7}{2}<x<\frac{8}{7}$

따라서 $a=-\frac{7}{2}$, $b=\frac{8}{7}$이므로

$14(b-a)=14\times\left(\frac{8}{7}+\frac{7}{2}\right)=65$

37 답 ①

$|x-2|<|x-4|$의 양변을 제곱하면

$(x-2)^2<(x-4)^2$

정리하면 $4x<12$

$\therefore x<3$ ⋯ ㉠

같은 방법으로 $|x-4|<|x-8|$에서

$x<6$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $x<3$

38 답 10

$|x-n|\ge 0$이므로 $x-9\le 0$ 또는 $x=n$

자연수 x가 10개이려면 n은 9보다 큰 자연수이어야 한다.

따라서 n의 최솟값은 10이다.

39 답 2

이차방정식 $x^2+2(k-1)x+2k^2-14=0$이 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, $D>0$이어야 한다.

즉, $\frac{D}{4}=(k-1)^2-(2k^2-14)>0$에서 $k^2+2k-15<0$

$(k+5)(k-3)<0$

$\therefore -5<k<3$

따라서 자연수 k의 개수는 1, 2의 2이다.

40 답 ②

$x^2+ax-2\le 0$의 해가 $-1\le x\le b$이므로

방정식 $x^2+ax-2=0$의 두 근이 -1, b이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$-1+b=-a$, $(-1)\times b=-2$

$\therefore b=2$, $a=-1$

따라서 부등식 $x^2-ax-2\le 0$은 $x^2+x-2\le 0$이므로

$(x+2)(x-1)\le 0$

$\therefore -2\le x\le 1$

41 답 ④

이차부등식 $(a+b)x^2+(b+c)x+(c+a)>0$의 해가

$1<x<2$이므로 $a+b<0$이고

방정식 $f(x)=(a+b)x^2+(b+c)x+(c+a)=0$의 두 근이

$x=1$, $x=2$이다.

$f(1)=2(a+b+c)=0$에서 $a+b+c=0$ ⋯ ㉠

$f(2)=5a+6b+3c=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-3c$, $b=2c$

이때, $a+b<0$이므로 ㉠에서 $c>0$

$ax^2+bx+c>0$에 $a=-3c$, $b=2c$를 대입하면

$-3cx^2+2cx+c>0$

$3x^2-2x-1<0$ ($\because c>0$)

$(3x+1)(x-1)<0$ $\quad\therefore -\frac{1}{3}<x<1$

따라서 해가 $\alpha<x<\beta$이므로 $\alpha=-\frac{1}{3}$, $\beta=1$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{2}{3}$

42 답 42

부등식 $x^2-ax+12\le0$의 해가 $\alpha\le x\le\beta$이므로

$(x-\alpha)(x-\beta)\le0$에서 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\le0$

이것이 $x^2-ax+12\le0$과 같으므로

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=12$ ⋯ ㉠

또, 해가 $x\le\alpha-1$ 또는 $x\ge\beta-1$이고,

x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-\alpha+1)(x-\beta+1)\ge0$에서

$x^2-(\alpha+\beta-2)x+(\alpha-1)(\beta-1)\ge0$

이것이 $x^2-5x+b\ge0$과 같으므로

$\alpha+\beta-2=5$, $(\alpha-1)(\beta-1)=b$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=7$, $b=6$ $\quad\therefore ab=42$

43 답 9

부등식 $f(x)g(x)>0$에서

$\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases}$

즉, $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 모두 x축보다 위에 있거나 모두 x축보다 아래에 있어야 한다. $\quad\therefore -5<x<2$ 또는 $9<x<13$

따라서 정수 x의 개수는 -4, -3, -2, -1, 0, 1, 10, 11, 12의 9이다.

44 답 ①

부등식 $\{f(x)\}^2<f(x)g(x)$를 정리하면

$f(x)\{f(x)-g(x)\}<0$

(i) $f(x)>0$이고 $f(x)<g(x)$일 때, $a<x<b$

(ii) $f(x)<0$이고 $f(x)>g(x)$일 때, $d<x<e$

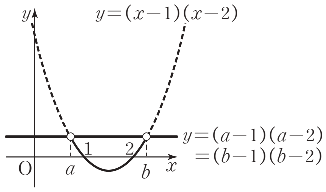
따라서 해는 $a<x<b$ 또는 $d<x<e$이다.

45 답 ⑤

$a<b$이고 $(a-1)(a-2)=(b-1)(b-2)$에서

$y=(x-1)(x-2)$의 그래프는

그림과 같다.



$y=(x-1)(x-2)$에

$x=a$, $x=b$를 대입하면

$y=(a-1)(a-2)$

$=(b-1)(b-2)$

이므로 $(x-1)(x-2)<(a-1)(a-2)$를 만족시키는 x의 값의 범위는 $a<x<b$

46 답 ②

이차함수의 그래프가 x축보다 위쪽에 있으려면 임의의 실수 x에 대하여 $x^2-2ax+2am-2m+b>0$이어야 하므로

$x^2-2ax+2am-2m+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-2am+2m-b<0$

이 부등식이 실수 m의 값에 관계없이 성립해야 하므로

$(2-2a)m+a^2-b<0$에서 $2-2a=0$이고, $a^2-b<0$

$a=1$이고, $b>a^2$이므로 $b>1$ $\quad\therefore ab>1$

이때, a, b가 자연수이므로 ab의 최솟값은 2이다.

47 답 ④

부등식 $(a-1)x^2+2(a-1)x-5>0$을 만족시키는 실수 x가 없으므로 모든 실수 x에 대하여 $(a-1)x^2+2(a-1)x-5\le0$ ⋯ ㉠

이 성립할 조건을 구하면 된다.

(i) $a=1$일 때, 부등식 ㉠은 항상 성립한다.

(ii) $a\ne1$일 때, $a-1<0$이고, $(a-1)x^2+2(a-1)x-5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-1)^2+5(a-1)\le0$

$(a-1)(a+4)\le0$ $\quad\therefore -4\le a\le1$

그런데 $a<1$이므로 $-4\le a<1$

(i), (ii)에 의하여 $-4\le a\le1$이므로 주어진 조건을 만족시키는 정수 a의 개수는 -4, -3, -2, -1, 0, 1의 6이다.

48 답 46

주어진 식을 x에 대하여 정리하면

$x^2+2(2y+5)x+(4y^2+ay+b)>0$

이것이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

이차방정식 $x^2+2(2y+5)x+(4y^2+ay+b)=0$의 판별식을

D라 하면

$\frac{D}{4}=(2y+5)^2-(4y^2+ay+b)<0$

$\therefore (20-a)y+25-b<0$

그런데 모든 실수 y에 대하여 이 부등식이 성립하므로

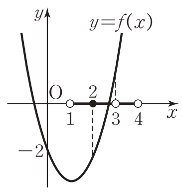
$20-a=0$이고 $25-b<0$ $\quad\therefore a=20,\ b>25$

따라서 정수 a, b에 대하여 $a=20$, $b=26$일 때 $a+b$의 최솟값은 $20+26=46$이다.

49 답 ⑤

이차부등식 $x^2-5x+4<0$에서

$1<x<4$



이때, $f(x)=x^2-kx-2$라 하면

$y=f(x)$의 그래프는 y절편이 -2이므로

그림과 같이 $2\le x<3$에서 x축과 만나야 한다.

$f(2)=2-2k\le 0$에서 $k\ge 1$

$f(3)=7-3k>0$에서 $k<\frac{7}{3}$

따라서 $1\le k<\frac{7}{3}$이므로 $\alpha=1$, $\beta=\frac{7}{3}$ $\quad\therefore \alpha+\beta=\frac{10}{3}$

50 답 14

(i) $2x-1\ge a$에서

$x\ge\frac{a+1}{2}$ ⋯ ㉠

(ii) $(x-3)(x-b)\le 0$에서

$b\le x\le 3$ 또는 $3\le x\le b$

㉠과의 공통 범위가 $4\le x\le 7$이므로

$b\le x\le 3$이면 성립하지 않는다.

즉, $3\le x\le b$ ⋯ ㉡

이때, ㉠, ㉡의 공통 범위는 $\frac{a+1}{2}\le x\le b$이고

$4\le x\le 7$과 같아야 하므로

$\frac{a+1}{2}=4$, $b=7$에서 $a=7$, $b=7$

$\therefore a+b=7+7=14$

51 답 325

4월 회원의 남녀의 비가 $2:3$이므로 회원 수를 각각 $2a$, $3a$라 하자.

5월에 더 가입한 남녀 회원 수를 각각 x, $2x$라 하면

$\begin{cases} 2a+3a<260 & \cdots ㉠ \\ 5a+3x>320 & \cdots ㉡ \end{cases}$

한편, 5월 말 남녀의 비가 $5:8$이므로

$(2a+x):(3a+2x)=5:8$ $\quad\therefore a=2x$ ⋯ ㉢

㉢을 ㉠, ㉡에 대입하면

$4x+6x<260$ $\quad\therefore x<26$

$10x+3x>320$ $\quad\therefore x>24.6\cdots$

$\therefore 24.6\cdots<x<26$

이때, x는 자연수이므로 $x=25$

따라서 5월 말 현재 전체 회원 수는 $5a+3x=13x$($\because$ ㉢)$=325$(명)

52 답 25

(매출액)$=$(가격)$\times$(판매량)이므로

현재의 가격을 a원, 판매량을 b개라 하면

현재의 매출액은 ab원

인상 후의 가격은 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$원

인상 후의 판매량은 $b\left(1-\frac{\frac{4}{5}x}{100}\right)=b\left(1-\frac{x}{125}\right)$(개)

이때, 인상 후에도 매출액이 줄지 않으려면

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{x}{125}\right)\ge ab$이므로

$\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{125}\right)\ge 1$

$(x+100)(x-125)+12500\le 0$

$x^2-25x\le 0$

$x(x-25)\le 0$ $\quad\therefore 0\le x\le 25$

따라서 가격인상률 x의 최댓값은 25이다.

53 답 ④

차량을 구입한 후 주행거리를 x km라 하고 차의 구입 가격과 휘발유의 가격을 비교하면

$4000000+1200\times\frac{x}{12}>5000000+1200\times\frac{x}{15}$

$1200\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{15}\right)x>1000000$

$1200\times\frac{1}{60}x>1000000$

$\therefore x>50000$

따라서 최소 5만 km를 넘게 타야 한다.

54 답 2

이차방정식 $x^2+(m-4)x+3-mk=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(m-4)^2-4(3-mk)>0$

$\therefore m^2+4(k-2)m+4>0$ ---------- ⓐ

이 이차부등식이 실수 m의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

이차방정식 $m^2+4(k-2)m+4=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\frac{D'}{4}=4(k-2)^2-4<0$ ---------- ⓑ

$4(k-1)(k-3)<0$

$\therefore 1<k<3$

따라서 자연수 k의 값은 2이다. ---------- ⓒ

| 채점기준 |

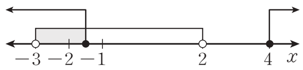
ⓐ x의 이차방정식으로 m의 이차부등식을 세운다.	[40%]
ⓑ m의 이차부등식이 항상 성립하는 조건을 찾는다.	[50%]
ⓒ 자연수 k의 값을 구한다.	[10%]

55 답 4

$x^2+x-6<0$에서 $(x+3)(x-2)<0$ $\quad\therefore -3<x<2$ ······ ⓐ

한편, $x^2-(a+4)x+4a\geq0$에서 $(x-4)(x-a)\geq0$

이때, $a\geq4$이면 $x\leq4$ 또는 $x\geq a$이므로 주어진 연립부등식의 해가 $-3<x<2$가 되어 연립 부등식을 만족시키는 정수 x가 -2뿐이라는 조건에 모순이다.



즉, $a<4$이고, 이때 $x\leq a$ 또는 $x\geq4$이다. ······ ⓑ

따라서 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 -2뿐이려면 $-2\leq a<-1$이어야 하므로 정수 a는 $p=-2$이다.

$\therefore p^2=4$ ······ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 부등식 $x^2+x-6<0$의 해를 구한다.	[30%]
ⓑ 부등식 $x^2-(a+4)x+4a\geq0$의 해를 구한다.	[50%]
ⓒ 정수 a의 값을 찾아 p^2의 값을 구한다.	[20%]

56 답 13

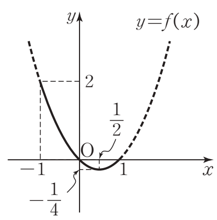
$x+a\leq x^2\leq 2x+b$, 즉 $\begin{cases} x^2-x\geq a & \cdots ㉠ \\ x^2-2x\leq b & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이므로

(i) $f(x)=x^2-x$라 하면 $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

$-1\leq x\leq1$일 때, $y=f(x)$의 그래프에서 $-\frac{1}{4}\leq f(x)\leq2$이므로

$-\frac{1}{4}\leq x^2-x\leq2$

㉠에서 $a\leq-\frac{1}{4}$ ······ ⓐ

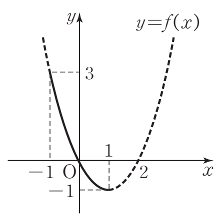


(ii) $g(x)=x^2-2x$라 하면 $g(x)=(x-1)^2-1$

$-1\leq x\leq1$일 때, $y=g(x)$의 그래프에서 $-1\leq g(x)\leq3$이므로

$-1\leq x^2-2x\leq3$

㉡에서 $b\geq3$ ······ ⓑ



(i), (ii)에 의하여 $b-a\geq\frac{13}{4}$ 이므로

$b-a$의 최솟값 $p=\frac{13}{4}$ $\quad\therefore 4p=13$ ······ ⓒ

| 채점기준 |

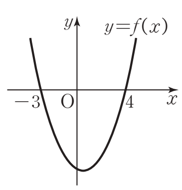
ⓐ $x+a\leq x^2$이 성립하는 a의 값의 범위를 구한다.	[40%]
ⓑ $x^2\leq 2x+b$가 성립하는 b의 값의 범위를 구한다.	[40%]
ⓒ $b-a$의 최솟값을 구하여 $4p$의 값을 계산한다.	[20%]

57 답 ③

$x^2-x-12=(x+3)(x-4)$이므로 이차함수 $f(x)=x^2-x-12$의 그래프는 그림과 같다.

$f(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$-3<x<4$



한편, 함수 $y=f(x-1)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 그래프이다.

이때, $f(x-1)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는 $-2<x<5$이므로 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3, 4이다.

따라서 모든 정수 x의 값의 합은 9이다.

58 답 ③

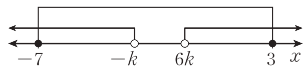
$x^2+4x-21\leq0$에서 $(x+7)(x-3)\leq0$

$\therefore -7\leq x\leq3$ ··· ㉠

$x^2-5kx-6k^2>0$에서 $(x-6k)(x+k)>0$

$k>0$이므로 $x<-k$ 또는 $x>6k$ ··· ㉡

㉠, ㉡에서 해가 존재하기 위한 양의 정수 k의 값의 범위는 그림과 같이 $-k>-7$ 또는 $6k<3$이므로



$0<k<7$

따라서 양의 정수 k의 개수는 6이다.

59 답 ②

모든 실수 x에 대하여 $-x^2+3x+2\leq mx+n$이므로

$x^2+(m-3)x+n-2\geq0$이다.

이차방정식 $x^2+(m-3)x+n-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(m-3)^2-4n+8\leq0$이므로

$4n\geq m^2-6m+17$ ··· ㉠

또한, 모든 실수 x에 대하여 $mx+n\leq x^2-x+4$이므로

$x^2-(m+1)x+4-n\geq0$이다.

이차방정식 $x^2-(m+1)x+4-n=0$의 판별식을 D'이라 하면

$D'=(m+1)^2-16+4n\leq0$이므로

$4n\leq -m^2-2m+15$ ··· ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여

$m^2-6m+17\leq4n\leq-m^2-2m+15$ ··· ㉢

즉, $m^2-6m+17\leq-m^2-2m+15$이므로

$2m^2-4m+2\leq0$

$2(m-1)^2\leq0$ $\quad\therefore m=1$

㉢에서 $12\leq4n\leq12$이므로 $n=3$

$\therefore m^2+n^2=10$

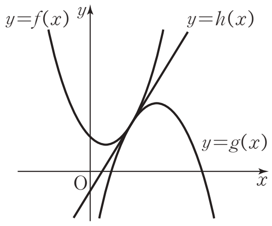
[다른 풀이]

$f(x)=x^2-x+4$, $g(x)=-x^2+3x+2$, $h(x)=mx+n$이라 하면 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\leq h(x)\leq f(x)$가 성립한다.

$f(x)-g(x)=2x^2-4x+2=2(x-1)^2$이므로

$y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 서로 접한다.

따라서 $g(x)\leq h(x)\leq f(x)$가 성립하기 위해서는 그림과 같이 $y=h(x)$의 그래프가 $y=g(x)$와 $y=f(x)$의 그래프에 동시에 접해야 한다.



$f(x)=h(x)$에서 이차방정식 $x^2-(m+1)x+4-n=0$의

판별식을 D라 하면 $D=(m+1)^2-4(4-n)=0$ ⋯ ㉣

또한, $g(x)=h(x)$에서 이차방정식 $x^2+(m-3)x+n-2=0$의

판별식을 D'이라 하면 $D'=(m-3)^2-4(n-2)=0$ ⋯ ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $m=1$, $n=3$이므로 $m^2+n^2=10$

60 답 ④

이차함수 $f(x)=x^2+px+p=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+p-\frac{p^2}{4}$에서

점 A의 좌표는 $\left(-\frac{p}{2}, p-\frac{p^2}{4}\right)$, 점 B의 좌표는 $(0, p)$이므로

직선 l의 방정식은 $y=\frac{p}{2}x+p$, 즉 $g(x)=\frac{p}{2}x+p$이다.

부등식 $f(x)-g(x)=x^2+\frac{p}{2}x\le0$, 즉 $x\left(x+\frac{p}{2}\right)\le0$에 대하여

(ⅰ) $p>0$인 경우

$-\frac{p}{2}\le x\le0$을 만족시키는 정수 x의 개수가 10이 되도록 하는 p의 값의 범위는 $-10<-\frac{p}{2}\le-9$에서 $18\le p<20$ 이므로 정수 p의 값은 18, 19이다.

(ⅱ) $p<0$인 경우

$0\le x\le-\frac{p}{2}$를 만족시키는 정수 x의 개수가 10이 되도록 하는 p의 값의 범위는 $9\le-\frac{p}{2}<10$에서 $-20<p\le-18$이므로 정수 p의 값은 -18, -19이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 정수 p의 최댓값 $M=19$, 최솟값 $m=-19$이므로 $M-m=38$

61 답 ③

라면 한 그릇의 가격을 $100x$(원)만큼 내린다 하면

라면 한 그릇의 가격은 $2000-100x$(원) ⋯ ㉠

라면 판매량은 $20x$(그릇)이 늘어나므로 하루 라면 판매량은

$200+20x$(그릇)

하루 라면 판매액의 합계가 442000원 이상이 되려면

$(2000-100x)(200+20x)\ge442000$이므로

$2000x^2-20000x+42000\le0$

$x^2-10x+21\le0$

$(x-3)(x-7)\le0$

$\therefore 3\le x\le7$ ⋯ ㉠

따라서 라면 한 그릇의 가격의 최댓값은 ㉠에서

x의 값이 최소일 때이므로 $x=3$일 때, 1700원이다.

62 답 ⑤

ㄱ. $ab+1-(a+b)$

$=a(b-1)-(b-1)$

$=(a-1)(b-1)>0$ ($\because$ $|a|<1$, $|b|<1$) (참)

ㄴ. $|b|<1$, $|c|<1$에서 $|bc|<1$이고, $|a|<1$이므로

ㄱ에 의하여 $abc+1>a+bc$ (참)

ㄷ. $abc+1>a+bc$ ($\because$ ㄴ)

ㄱ에 의하여 $bc+1>b+c$

$\therefore abc+2>a+bc+1>a+b+c$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

63 답 5

$1+4x=m$ (m은 정수)이라 하면

$x=\frac{m-1}{4}$ ⋯ ㉠

$m-\frac{1}{2}\le(x+1)(x-2)<m+\frac{1}{2}$이므로

$m-\frac{1}{2}\le\left(\frac{m-1}{4}+1\right)\left(\frac{m-1}{4}-2\right)<m+\frac{1}{2}$

각 변에 16을 곱하면

$16m-8\le(m+3)(m-9)<16m+8$

$16m-8\le m^2-6m-27<16m+8$

각 변에 $-16m+148$을 더하면

$140\le m^2-22m+121<156$

$11^2<140\le(m-11)^2<156<13^2$

즉, $(m-11)^2=12^2$이므로

$m=-1$ 또는 $m=23$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{11}{2}$ ($\because$ ㉠)

따라서 모든 실수 x의 값의 합은 5이다.

64 답 27

주어진 부등식을 m에 대하여 정리하면

$(x-2)m^2-2(x-2)m+5\ge0$

이 식이 실수 m의 값에 관계없이 항상 성립할 조건은

(ⅰ) $x-2>0$일 때,

이차방정식 $(x-2)m^2-2(x-2)m+5=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=(x-2)^2-5(x-2)\le0$이므로

$(x-2)(x-7)\le0$

$\therefore 2\le x\le7$

이때, $x>2$이므로 $2<x\le7$

(ⅱ) $x=2$일 때,

$5\ge0$으로 항상 성립하므로 $x=2$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $2\le x\le7$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은

$2+3+4+5+6+7=27$

65 답 5

임의의 실수 x에 대하여 $ax^2+2bx+c\geq0$이 성립하려면

$a>0$, $b^2-ac\leq0$ ⋯ ㉠

마찬가지 방법으로 $bx^2+2cx+a\geq0$, $cx^2+2ax+b\geq0$에서

$b>0$, $c^2-ab\leq0$ ⋯ ㉡

$c>0$, $a^2-bc\leq0$ ⋯ ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$(b^2-ac)+(c^2-ab)+(a^2-bc)\leq0$에서

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\leq0$이므로 $a=b=c$

$\therefore a>0,\ b>0,\ c>0,\ a=b=c$

즉, 주어진 부등식 $ax^2-2cx-3b\leq0$은

$a(x^2-2x-3)\leq0$이므로

$(x+1)(x-3)\leq0 \qquad \therefore -1\leq x\leq3$

따라서 정수인 해의 개수는 -1, 0, 1, 2, 3의 5이다.

66 답 27

두 자리 자연수 n의 십의 자리의 수를 m, 일의 자리의 수를 k라 하면

$n=10m+k$ $(1\leq m\leq9,\ 0\leq k\leq9)$

이때, $\frac{n}{10}=m+\frac{k}{10}$이고, $0\leq\frac{k}{10}<1$이므로 $\left[\frac{n}{10}\right]=m$이다.

$\therefore n-10\left[\frac{n}{10}\right]=(10m+k)-10m=k<3$

따라서 $n-10\left[\frac{n}{10}\right]$은 자연수 n의 일의 자리의 수를 나타내므로

일의 자리의 수가 0, 1, 2인 두 자리 자연수의 개수는 10, 11, 12, 20, 21, 22, ⋯, 92의 $3\times9=27$이다.

67 답 ③

2점, 3점, 4점짜리 문항의 개수를 각각 x, y, z라 하면

$x+y+z=30$ ⋯ ㉠

$2x+3y+4z=100$ ⋯ ㉡

$x\geq1$, $y\geq1$, $z\geq1$ ⋯ ㉢

㉡$-$㉠$\times3$을 하면

$-x+z=10 \qquad \therefore z=x+10$

이것을 ㉠에 대입하면

$2x+y=20 \qquad \therefore y=20-2x$

㉢에서 $z=x+10\geq1$, $y=20-2x\geq1$

$\therefore -9\leq x\leq\frac{19}{2}$

따라서 x는 자연수이므로 2점 문항은 최소 1문항, 최대 9문항 들어갈 수 있으므로 구하는 최솟값과 최댓값의 합은 10이다.

Ⅲ 도형의 방정식

09 평면좌표

문제편 107P

01 답 ⑤

직선 $y=x$ 위에 있는 점의 좌표를 $(a,\ a)$라 하면

점 $A(2,\ 4)$로부터의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$\sqrt{(a-2)^2+(a-4)^2}=\sqrt{10}$

양변을 제곱하여 정리하면 $a^2-6a+5=0$

$(a-1)(a-5)=0 \qquad \therefore a=1$ 또는 $a=5$

따라서 두 점 P, Q의 좌표를 $P(1,\ 1)$, $Q(5,\ 5)$라 하면

$\overline{PQ}=\sqrt{(5-1)^2+(5-1)^2}=4\sqrt{2}$

02 답 234

x축 위의 점을 $P(a,\ 0)$이라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}$에서

$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로 $a^2+2^2=(a-5)^2+3^2$

$a=3$이므로 $P(3,\ 0)$

또, y축 위의 점을 $Q(0,\ b)$라 하면 $\overline{QA}=\overline{QB}$에서

$\overline{QA}^2=\overline{QB}^2$이므로 $(b-2)^2=5^2+(b-3)^2$

$b=15$이므로 $Q(0,\ 15)$

$\therefore \overline{PQ}^2=(0-3)^2+(15-0)^2=234$

03 답 ④

두 점 $A(-2,\ -4)$, $B(7,\ a)$를 잇는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{2\times7+1\times(-2)}{2+1},\ \frac{2\times a+1\times(-4)}{2+1}\right)$

즉, $\left(4,\ \frac{2a-4}{3}\right)=(b,\ 0)$이므로

$b=4,\ \frac{2a-4}{3}=0 \qquad \therefore a=2,\ b=4$

$\therefore a+b=6$

04 답 ④

$P(x_1,\ y_1)$이라 하면

$x_1=\frac{2\times5+1\times(-1)}{2+1}=3,\ y_1=\frac{2\times8+1\times2}{2+1}=6$

즉, $P(3,\ 6)$

$Q(x_2,\ y_2)$라 하면

$x_2=\frac{2\times5-1\times(-1)}{2-1}=11,\ y_2=\frac{2\times8-1\times2}{2-1}=14$

즉, $Q(11,\ 14)$

따라서 선분 PQ의 중점 $M(a,\ b)$의 x좌표, y좌표는 각각

$a=\frac{3+11}{2}=7,\ b=\frac{6+14}{2}=10$이므로 $a+b=17$

05 답 5

삼각형 ABC의 무게중심 G는 중선 CM을 $2:1$로 내분하므로 꼭짓점 C의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 두 점 $\mathrm{M}(2,\ -1)$, $\mathrm{G}(3,\ 1)$에 대하여

$$\left(\frac{2\times2+1\times a}{2+1},\ \frac{2\times(-1)+1\times b}{2+1}\right)=(3,\ 1)$$

$\therefore a=5,\ b=5$

따라서 꼭짓점 C의 좌표는 $\mathrm{C}(5,\ 5)$이고 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(5-1)^2+(5-2)^2}=5$

06 답 4

선분 AB의 중점을 M이라 하면 중점 M의 좌표는 $\mathrm{M}(4,\ 5)$이므로

$\overline{\mathrm{AM}}^2=(4-2)^2+(5-3)^2=8$

삼각형 PAB에서 중선정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{PM}}^2)=2(8+\overline{\mathrm{PM}}^2)$

이므로 $\overline{\mathrm{PM}}$의 길이가 최소일 때 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$의 값이 최소가 된다.

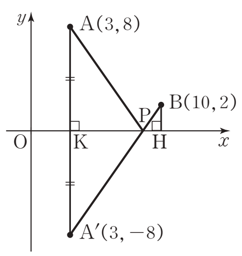
점 P가 중점 M에서 x축에 내린 수선의 발일 때 $\overline{\mathrm{PM}}$의 길이는 최소가 되므로 점 P의 좌표가 $\mathrm{P}(4,\ 0)$, 즉 $a=4$일 때 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$의 값이 최소가 된다.

일등급 UP

*** 중선정리의 활용**

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$ 꼴의 식이 주어지면 먼저 중선정리를 생각하자. 또한, 한 점과 선분 사이의 최단거리는 그 점에서 선분에 내린 수선의 발까지의 거리임을 기억한다.

07 답 ④



점 A를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 A′이라 하면 $\mathrm{A'}(3,\ -8)$

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{A'B}}$

따라서 그림과 같이 점 P가 $\overline{\mathrm{A'B}}$와 x축의 교점에 위치할 때 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 값이 최소가 된다.

이때, $\triangle\mathrm{A'PK}\backsim\triangle\mathrm{BPH}$이므로

$\overline{\mathrm{A'P}}:\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'K}}:\overline{\mathrm{BH}}=8:2=4:1$

$\therefore \overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=4:1$

08 답 ⑤

직선 $y=2x+1$ 위의 점 P의 x좌표를 a라 하면 $\mathrm{P}(a,\ 2a+1)$

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$에서

$\sqrt{(a+1)^2+(2a-1)^2}=\sqrt{(a-2)^2+(2a)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $2a=2$

$\therefore a=1$

따라서 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(1,\ 3)$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{(1+1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{5}$

09 답 ⑤

(i) $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 경우 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2$에서

$(4-2)^2+(8-2)^2=(a-2)^2+(0-2)^2$

$(a-2)^2=6^2\qquad \therefore a=8$ 또는 $a=-4$

(ii) $\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 경우 $\overline{\mathrm{BA}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$에서

$(4-2)^2+(8-2)^2=(a-4)^2+(0-8)^2$

이때, $(a-4)^2=-24$가 되어 정수 a가 존재하지 않는다.

(iii) $\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{CB}}$인 경우 $\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{CB}}^2$에서

$(a-2)^2+(0-2)^2=(a-4)^2+(0-8)^2$

$4a=72\qquad \therefore a=18$

따라서 모든 정수 a의 값의 합은 $8+(-4)+18=22$

10 답 4

점 A를 원점, 직선 AB를 x축으로 하는 좌표평면에서 $\mathrm{A}(0,\ 0)$, $\mathrm{B}(b,\ 0)$이라 하면

점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{2b}{2+1},\ \dfrac{0}{2+1}\right)=\left(\dfrac{2b}{3},\ 0\right)$

점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{2b}{2-1},\ \dfrac{0}{2-1}\right)=(2b,\ 0)$

따라서 선분 PQ의 중점 R의 좌표는

$$\left(\frac{\frac{2b}{3}+2b}{2},\ 0\right)=\left(\frac{4b}{3},\ 0\right)=\left(\frac{4b-0}{4-1},\ \frac{0}{4-1}\right)$$

이므로 점 R는 선분 AB를 $4:1$로 외분하는 점이다. $\quad\therefore k=4$

11 답 ①

선분 AB를 $k:1$로 내분하는 점을 P라 하면

$\mathrm{P}\left(\dfrac{4k+1}{k+1},\ \dfrac{-3k+8}{k+1}\right)$

점 P가 제1사분면에 존재하려면

$\dfrac{4k+1}{k+1}>0,\ \dfrac{-3k+8}{k+1}>0$이어야 한다.

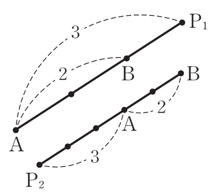
이때, k는 자연수이므로 $k+1>0$

$4k+1>0 \cdots$ ㉠, $-3k+8>0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $-\dfrac{1}{4}<k<\dfrac{8}{3}$

따라서 자연수 k는 1, 2이므로 그 합은 $1+2=3$이다.

12 답 ③



$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AP}}=2:3$이 되는 점은

그림과 같이 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점 P_1과 $3:5$로 외분하는 점 P_2가 있다. 즉,

$\mathrm{P}_1\left(\dfrac{3\times2-1\times1}{3-1},\ \dfrac{3\times2-1\times1}{3-1}\right)$이고,

$\mathrm{P}_2\left(\dfrac{3\times2-5\times1}{3-5},\ \dfrac{3\times2-5\times1}{3-5}\right)$이므로

$\mathrm{P}_1\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$, $\mathrm{P}_2\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

$\therefore \overline{\mathrm{P_1P_2}}=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}\right)^2}=3\sqrt{2}$

13 답 ⑤

두 꼭짓점 B, C를 B(a, b), C(c, d)라 하면

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{6+a+c}{3}, \frac{6+b+d}{3}\right)=(5, 3)$이므로

$\frac{6+a+c}{3}=5, \frac{6+b+d}{3}=3$ ⋯ ㉠

한편, 변 CA의 중점 M의 좌표는

$\left(\frac{6+c}{2}, \frac{6+d}{2}\right)=(7, 4)$이므로

$\frac{6+c}{2}=7, \frac{6+d}{2}=4$

$\therefore c=8, d=2$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=1, b=1$

따라서 두 점 B$(1, 1)$, C$(8, 2)$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(8-1)^2+(2-1)^2}=5\sqrt{2}$

14 답 13

두 점 A$\left(a, \frac{1}{2}a\right)$, B$(b, 3b)$라 하면

삼각형 OAB의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{a+b}{3}, \frac{\frac{1}{2}a+3b}{3}\right)=(3, 4)$이므로

$a+b=9, a+6b=24$

두 식을 연립하여 풀면 $a=6, b=3$

$\therefore$ A$(6, 3)$, B$(3, 9)$

이때, 두 점 A, B는 직선 $y=mx+n$ 위의 점이므로

$3=6m+n, 9=3m+n$

두 식을 연립하여 풀면 $m=-2, n=15$

$\therefore m+n=-2+15=13$

15 답 10

삼각형 ABC의 무게중심을 G(a, b)라 하면

삼각형 ABC와 세 변의 중점을 연결한 삼각형 LMN의 무게중심은 일치하므로 무게중심 G(a, b)에 대하여

$a=\frac{1+5+3}{3}=3, b=\frac{-2+3+2}{3}=1$

$\therefore a^2+b^2=3^2+1^2=10$

16 답 ③

처음에 A와 B의 위치를 각각 A$(-5, 0)$, B$(0, -4)$라 하면

t시간 후의 A와 B의 위치는 각각 A$(4t-5, 0)$, B$(0, 2t-4)$

이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(4t-5)^2+(2t-4)^2}=\sqrt{20t^2-56t+41}$

$=\sqrt{20\left(t-\frac{7}{5}\right)^2+\frac{9}{5}}$

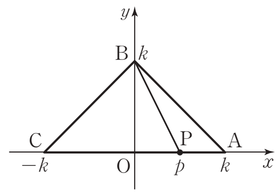
따라서 $\frac{7}{5}$시간 후에 A와 B 사이의 거리는 최소가 된다.

17 답 50

그림과 같이 좌표평면 위에

A$(k, 0)$, B$(0, k)$, C$(-k, 0)$,

P$(p, 0)$이라 하자.



$\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{CP}}=(k-p)(k+p)$

$=k^2-p^2$

$\overline{\mathrm{BP}}^2=k^2+p^2$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{CP}}+\overline{\mathrm{BP}}^2=2k^2=100$

$\therefore k^2=50$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\times 2k^2=k^2=50$

18 답 7

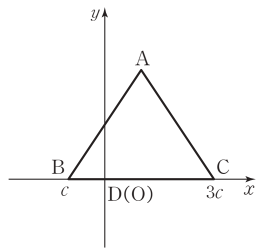
그림과 같이 변 BC를 x축으로,

점 D를 지나고 직선 BC에 수직인

직선을 y축으로 하는 좌표축을 잡고

A(a, b), B$(-c, 0)$, C$(3c, 0)$

이라 하면



$3\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2$

$=3\{(-c-a)^2+(-b)^2\}+(3c-a)^2+(-b)^2$

$=4(a^2+b^2+3c^2)$ ⋯ ㉠

$p(\overline{\mathrm{AD}}^2+q\overline{\mathrm{BD}}^2)=p(a^2+b^2+qc^2)$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $p=4, q=3$이므로 $p+q=7$

19 답 ①

점 P가 삼각형 ABC의 외심이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}$, 즉 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$이다.

(i) $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$에서

$(a-4)^2+(b+2)^2=a^2+(b-6)^2$

$\therefore a-2b=-2$ ⋯ ㉠

(ii) $\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$에서

$a^2+(b-6)^2=(a+4)^2+(b-4)^2$

$\therefore 2a+b=1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0, b=1$

$\therefore a+b=0+1=1$

20 답 97

빛이 이동한 거리를 대칭이동하면

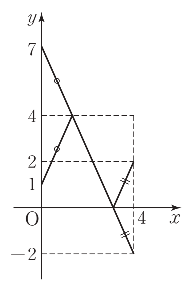
그림과 같이 두 점 $(0, 7)$과 $(4, -2)$

사이의 거리임을 알 수 있다.

따라서 빛이 이동한 거리 d는

$d=\sqrt{(4-0)^2+\{7-(-2)\}^2}=\sqrt{97}$

$\therefore d^2=97$



21 답 20

이차함수 $f(x)=x^2-ax$의 그래프와 직선 $y=2x+1$의 서로 다른 두 교점의 좌표를 $\mathrm{P}(\alpha, 2\alpha+1)$, $\mathrm{Q}(\beta, 2\beta+1)$이라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2-(a+2)x-1=0$의 서로 다른 두 실근이다.

즉, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a+2$, $\alpha\beta=-1$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(2\beta+1-2\alpha-1)^2}=\sqrt{5(\beta-\alpha)^2}$

$=\sqrt{5\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}=\sqrt{5(a+2)^2+20}\geq\sqrt{20}$

따라서 $a=-2$일 때, 두 교점 사이의 거리의 최솟값이 m이므로

$m^2=20$

22 답 672

삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA의 길이를 각각 구하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(5-0)^2+(1-2)^2}=\sqrt{26}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(2-5)^2+(a-1)^2}=\sqrt{9+(a-1)^2}$

$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(2-0)^2+(a-2)^2}=\sqrt{4+(a-2)^2}$

(i) $\overline{\mathrm{AB}}$가 빗변일 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2$이어야 하므로

$26=9+(a-1)^2+4+(a-2)^2$에서

$a^2-3a-4=0$

$(a-4)(a+1)=0$

$\therefore a=4$ 또는 $a=-1$ ⋯ ㉠

(ii) $\overline{\mathrm{BC}}$가 빗변일 때, $\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2$이어야 하므로

$9+(a-1)^2=26+4+(a-2)^2$에서

$2a=24$ $\quad\therefore a=12$ ⋯ ㉡

(iii) $\overline{\mathrm{CA}}$가 빗변일 때, $\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2$이어야 하므로

$4+(a-2)^2=26+9+(a-1)^2$에서

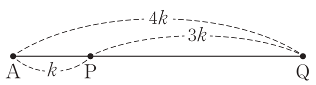
$-2a=28$ $\quad\therefore a=-14$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 모든 실수 a의 값의 곱은

$4\times(-1)\times12\times(-14)=672$

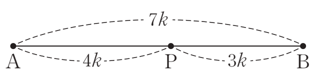
23 답 17

선분 AP를 4 : 3으로 외분하는 점이 Q이므로 점 P는 선분 AQ를 1 : 3으로 내분하는 점이다.



점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{1\times17+3\times1}{1+3}, \dfrac{1\times18+3\times2}{1+3}\right)=(5, 6)$

또한, 선분 AB를 4 : 3으로 내분하는 점이 P(5, 6)이므로 점 B는 선분 AP를 7 : 3으로 외분하는 점이다.



따라서 점 B의 좌표는

$\left(\dfrac{7\times5-3\times1}{7-3}, \dfrac{7\times6-3\times2}{7-3}\right)=(8, 9)$

$\therefore a+b=8+9=17$

24 답 ②

$\overline{\mathrm{AB}}=a$라 하면

점 P는 선분 AB를 x : 1로 내분하는 점이므로 $\overline{\mathrm{BP}}=\dfrac{a}{x+1}$

점 Q는 선분 AB를 y : 1로 외분하는 점이므로 $\overline{\mathrm{BQ}}=\dfrac{a}{y-1}$

점 B는 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점이므로 $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{BQ}}$에서 $\dfrac{a}{x+1}=\dfrac{a}{y-1}$

$x+1=y-1$ ($\because a>0$) $\qquad\therefore y=x+2$

25 답 ④

$\overline{\mathrm{AD}}$가 $\angle\mathrm{A}$의 이등분선이므로

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DC}}$

이때, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-3-1)^2+(1-4)^2}=5$, $\overline{\mathrm{AC}}=4$이므로

점 D(a, b)는 $\overline{\mathrm{BC}}$를 5 : 4로 내분하는 점이다.

$a=\dfrac{5\times1+4\times(-3)}{5+4}=-\dfrac{7}{9}$

$b=\dfrac{5\times0+4\times1}{5+4}=\dfrac{4}{9}$

$\therefore a+b=-\dfrac{7}{9}+\dfrac{4}{9}=-\dfrac{1}{3}$

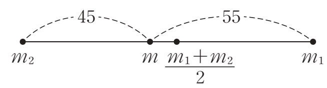
26 답 ④

두 마을 주민 전체의 평균 나이 m은

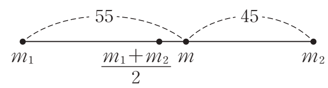
$m=\dfrac{45m_1+55m_2}{45+55}=\dfrac{45m_1+55m_2}{100}$

이므로 그림과 같이 수직선에서 m_2와 m_1이 각각 나타내는 두 점을 잇는 선분을 45 : 55로 내분하는 점의 좌표와 같다.

한편, $\dfrac{m_1+m_2}{2}$는 두 점 m_1과 m_2의 중점을 나타낸다.



[그림 1]



[그림 2]

ㄱ. $m_1>m_2$이면 [그림 1]과 같이

$m=\dfrac{45m_1+55m_2}{100}<\dfrac{m_1+m_2}{2}$

$\therefore 2m<m_1+m_2$ (참)

ㄴ. $m_1=m_2$이면 $m=\dfrac{m_1+m_2}{2}$

$\therefore m=m_1=m_2$ (참)

ㄷ. $m_1<m_2$이면 [그림 2]와 같이

$m=\dfrac{45m_1+55m_2}{100}>\dfrac{m_1+m_2}{2}$이므로

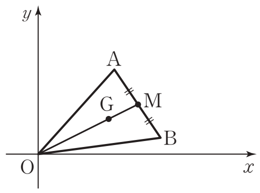
$2m>m_1+m_2$

$\therefore m-m_1>m_2-m$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

27 답 ①

$\overline{AB}$의 중점을 $M(a,\ b)$, 삼각형 OAB의 무게중심을 G라 하면 점 G는 $\overline{OM}$을 2 : 1로 내분하므로



$G\left(\dfrac{2a+0}{2+1},\ \dfrac{2b+0}{2+1}\right)=(4,\ 2)$

$a=6,\ b=3$이므로 $M(6,\ 3)$

따라서 한 변 AB는 $\overline{AB}$의 중점인 $M(6,\ 3)$을 반드시 지난다.

28 답 ③

$P(x,\ 0),\ Q(0,\ y)$라 하면

$\dfrac{0+x+0}{3}=-1,\ \dfrac{0+0+y}{3}=1$에서

$x=-3,\ y=3 \qquad \therefore P(-3,\ 0),\ Q(0,\ 3)$

$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$에서 $(a+3)^2+4^2=(1+3)^2+b^2$이므로

$(a+3)^2=b^2$ ⋯ ㉠

$\overline{QA}^2=\overline{QB}^2$에서 $a^2+(4-3)^2=1^2+(b-3)^2$이므로

$a^2=(b-3)^2$ ⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면 $(a+3)^2-a^2=b^2-(b-3)^2$

$6a-6b=-18 \qquad \therefore a-b=-3$

29 답 5

삼각형 PAB의 무게중심 G_1의 좌표는

$\left(\dfrac{0+6+a}{3},\ \dfrac{0+0+b}{3}\right)=\left(\dfrac{6+a}{3},\ \dfrac{b}{3}\right)$

삼각형 PBC의 무게중심 G_2의 좌표는

$\left(\dfrac{6+3+a}{3},\ \dfrac{0+6+b}{3}\right)=\left(\dfrac{9+a}{3},\ \dfrac{6+b}{3}\right)$

삼각형 PCA의 무게중심 G_3의 좌표는

$\left(\dfrac{3+0+a}{3},\ \dfrac{6+0+b}{3}\right)=\left(\dfrac{3+a}{3},\ \dfrac{6+b}{3}\right)$

이므로 삼각형 $G_1G_2G_3$의 무게중심은

$$\left(\dfrac{\dfrac{6+a}{3}+\dfrac{9+a}{3}+\dfrac{3+a}{3}}{3},\ \dfrac{\dfrac{b}{3}+\dfrac{6+b}{3}+\dfrac{6+b}{3}}{3}\right)$$

$=\left(\dfrac{6+a}{3},\ \dfrac{4+b}{3}\right)$ ⋯ ㉠

한편, 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\dfrac{0+6+3}{3},\ \dfrac{0+0+6}{3}\right)=(3,\ 2)$ ⋯ ㉡

㉠과 ㉡이 서로 같으므로 $3=\dfrac{6+a}{3},\ 2=\dfrac{4+b}{3}$에서

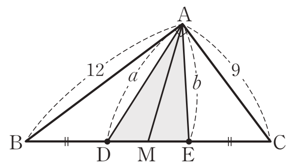
$a=3,\ b=2 \qquad \therefore a+b=5$

30 답 125

삼각형 ABC는 변 BC가 빗변인 직각삼각형이므로

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=12^2+9^2=15^2 \qquad \therefore \overline{BC}=15$

이때, 빗변 BC의 중점을 M이라 하면 점 M은 삼각형 ABC의 외심이므로 $\overline{BM}=\overline{AM}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\dfrac{15}{2}$이고, $\overline{DM}=\overline{EM}=\dfrac{1}{3}\overline{BM}=\dfrac{5}{2}$



따라서 삼각형 ADE에서 중선정리에 의하여

$a^2+b^2=2(\overline{AM}^2+\overline{DM}^2)=2\left\{\left(\dfrac{15}{2}\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2\right\}=125$

[다른 풀이]

$\overline{BC}=15$이므로 $\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}=5$

삼각형 ABE에서 점 D는 선분 BE의 중점이므로

$12^2+b^2=2(a^2+5^2)$ ⋯ ㉠

또, 삼각형 ADC에서 점 E는 선분 DC의 중점이므로

$a^2+9^2=2(b^2+5^2)$ ⋯ ㉡

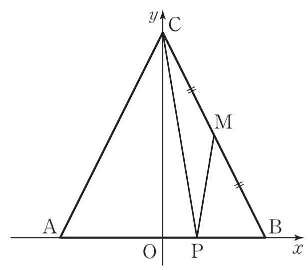
㉠+㉡을 하면 $a^2+b^2+12^2+9^2=2a^2+2b^2+4\times5^2$

$\therefore a^2+b^2=12^2+9^2-4\times5^2=125$

31 답 ④

변 BC의 중점을 M이라 하면 삼각형 PBC에서 중선정리에 의하여

$\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=2(\overline{BM}^2+\overline{PM}^2)=2(2^2+\overline{PM}^2)$



이때, $\overline{PM}^2$의 값은 점 M에서 $\overline{AB}$ 위의 점 P까지의 거리가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

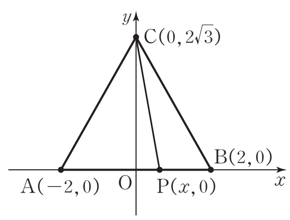
즉, 점 M에서 $\overline{AB}$ 위에 내린 수선의 발이 P일 때, $\overline{PM}$의 길이는 최솟값 $\sqrt{3}$을 가지므로

$\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=2(2^2+\overline{PM}^2)\geq2\times\{4+(\sqrt{3})^2\}=14$

[다른 풀이]

그림과 같이 변 AB를 포함하는 직선을 x축, 이 변의 수직이등분선을 y축으로 잡으면 $A(-2,\ 0),\ B(2,\ 0),\ C(0,\ 2\sqrt{3})$이고,

점 P의 좌표를 $(x,\ 0)$이라 하면 $-2\leq x\leq2$이고

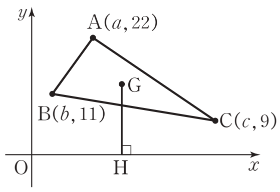


$\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=(x-2)^2+\{x^2+(2\sqrt{3})^2\}$

$=2x^2-4x+16=2(x-1)^2+14$

따라서 $x=1$일 때, $\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 최솟값은 14이다.

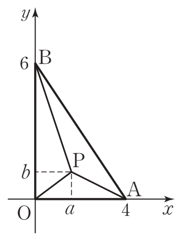
32 답 ②



그림과 같이 직선 l을 x축으로 잡으면 세 꼭짓점의 좌표를 $A(a,\ 22)$, $B(b,\ 11)$, $C(c,\ 9)$라 할 수 있다.

이때, 삼각형 ABC의 무게중심 G의 y좌표는 $\dfrac{22+11+9}{3}=\dfrac{42}{3}=14$이므로 $\overline{GH}=14$

33 답 ③



그림과 같이 꼭짓점 O를 원점, 변 OA를 x축의 양의 방향으로 하는 좌표축을 잡고 점 P의 좌표를 $P(a,\ b)$라 하면

$\triangle POA : \triangle POB=1:3$에서

$\dfrac{1}{2}\times4\times b : \dfrac{1}{2}\times6\times a=1:3$

$\therefore a=2b$ ⋯ ㉠

$\triangle PAB=\triangle OAB-\triangle POA-\triangle POB$

$=12-(3a+2b)$

이므로 $\triangle POB : \triangle PAB=3:2$에서

$\dfrac{1}{2}\times6\times a : \{12-(3a+2b)\}=3:2$

$\therefore 5a+2b=12$ ⋯ ㉡

이때, ㉠을 ㉡에 대입하면

$12b=12 \qquad \therefore b=1$

$b=1$를 ㉠에 대입하면 $a=2$

따라서 점 P의 좌표는 $P(2,\ 1)$이므로 $\overline{OP}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

34 답 ⑤

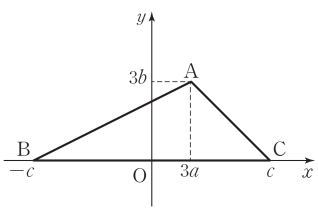
처음에 A와 B의 위치를 각각 $A(-10,\ 0)$, $B(0,\ -5)$라 하면 t시간 후의 A와 B의 위치는 각각 $A(3t-10,\ 0)$, $B(0,\ 4t-5)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(3t-10)^2+(4t-5)^2}=\sqrt{25t^2-100t+125}$

$=\sqrt{25(t-2)^2+25}$

따라서 $t=2$일 때 최솟값은 5이므로 두 사람이 가장 가까이 있을 때의 거리는 5 km이다.

35 답 3



그림과 같이 변 BC의 중점을 원점으로 하고 변 BC의 수직이등분선을 y축으로 하는 좌표축을 잡고 $A(3a,\ 3b)$, $B(-c,\ 0)$, $C(c,\ 0)$이라 하면 무게중심의 좌표는 $G(a,\ b)$가 된다.

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$

$=(-c-3a)^2+9b^2+(2c)^2+(c-3a)^2+9b^2$

$=3(6a^2+6b^2+2c^2)$ ⋯ ㉠

$\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2$

$=(3a-a)^2+(3b-b)^2+(a+c)^2+b^2+(c-a)^2+b^2$

$=6a^2+6b^2+2c^2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=3(\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2)$

$\therefore k=3$

36 답 18

$\overline{AP}^2=(a-1)^2+(b-5)^2$, $\overline{BP}^2=(a-5)^2+(b-3)^2$,

$\overline{CP}^2=(a-9)^2+(b-4)^2$이므로

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=3a^2-30a+3b^2-24b+157$

$=3(a-5)^2+3(b-4)^2+34$

즉, $a=5$, $b=4$일 때, $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 최솟값은 34이므로

$P(5,\ 4)$ ---------- ⓐ

삼각형 ABC의 무게중심 $G(c,\ d)$의 좌표를 구하면

$c=\dfrac{1+5+9}{3}=5$, $d=\dfrac{5+3+4}{3}=4$

이므로 $G(5,\ 4)$ ---------- ⓑ

$\therefore a+b+c+d=5+4+5+4=18$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 점 $P(a,\ b)$의 좌표를 구한다.	[40%]
ⓑ 점 $G(c,\ d)$의 좌표를 구한다.	[40%]
ⓒ $a+b+c+d$의 값을 구한다.	[20%]

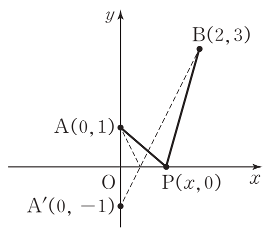
37 답 21

$A(0,\ 1)$, $B(2,\ 3)$, $P(x,\ 0)$이라 하면

$\overline{AP}=\sqrt{x^2+1}$, $\overline{BP}=\sqrt{(x-2)^2+9}$

$\therefore f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x-2)^2+9}=\overline{AP}+\overline{BP}$

즉, $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값이 $f(x)$의 최솟값이다. ---------- ⓐ



점 $A(0,\ 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(0,\ -1)$이라 하면 $f(x)$의 최솟값은

$\overline{A'B}=\sqrt{2^2+(3+1)^2}=2\sqrt{5}$

$\therefore a=2\sqrt{5}$

이때, 직선 $A'B$의 방정식은

$y+1=\dfrac{3-(-1)}{2-0}x \qquad \therefore y=2x-1$

따라서 $y=2x-1=0$에서 $x=\dfrac{1}{2}$이므로 $b=\dfrac{1}{2}$ ---------- ⓑ

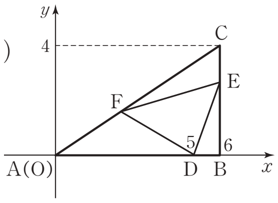
$\therefore a^2+2b=20+1=21$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $f(x)$를 좌표평면 위의 선분의 길이로 나타낸다.	[40%]
ⓑ a, b의 값을 각각 구한다.	[40%]
ⓒ a^2+2b의 값을 구한다.	[20%]

38 답 5

점 A를 원점으로 하는 좌표축을 도입하여 A(0, 0), B(6, 0), C(6, 4)라 하자.



이때, 점 D는 변 AB를 5 : 1로 내분하는 점이므로 D(5, 0)이다.

여기서 E(6, b)라 하고, 점 F의 x좌표를 a라 하면

직선 AC의 방정식이 $y=\frac{2}{3}x$이므로 $F\left(a, \frac{2}{3}a\right)$ ---------- ⓐ

삼각형 DEF의 무게중심 G′의 좌표는

$$\left(\frac{5+6+a}{3}, \frac{0+b+\frac{2}{3}a}{3}\right)=\left(\frac{a+11}{3}, \frac{2a+3b}{9}\right)$$

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{0+6+6}{3}, \frac{0+0+4}{3}\right)=\left(4, \frac{4}{3}\right)$$

삼각형 DEF의 무게중심과 삼각형 ABC의 무게중심이 서로 같으므로

$$\frac{a+11}{3}=4,\ \frac{2a+3b}{9}=\frac{4}{3}$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=\frac{10}{3}$이므로

$E\left(6, \frac{10}{3}\right)$ ---------- ⓑ

$\therefore \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}=\frac{\frac{10}{3}}{4-\frac{10}{3}}=5$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 삼각형 ABC와 삼각형 DEF를 좌표평면 위에 나타낸다. [40%]

ⓑ 삼각형 ABC와 삼각형 DEF의 무게중심이 서로 같음을 이용하여 점 E의 좌표를 구한다. [40%]

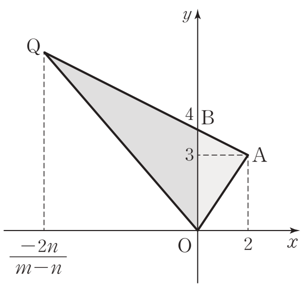
ⓒ $\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}$의 값을 구한다. [20%]

39 답 ④

삼각형 OAQ의 넓이가 16이고, 삼각형 OAB의 넓이가

$\frac{1}{2}\times4\times2=4$이므로

삼각형 OBQ의 넓이는 12이다.



삼각형 OBQ의 밑변을 선분 OB라 하면 $\overline{OB}=4$이므로 높이는 6이다.

점 Q의 x좌표는 $\frac{-2n}{m-n}$이므로 $\left|\frac{-2n}{m-n}\right|=6$

$\therefore \frac{-2n}{m-n}=-6$ ($\because m>n>0$)

따라서 $4n=3m$이므로 $\frac{n}{m}=\frac{3}{4}$

[다른 풀이]

삼각형 OAQ의 넓이가 16, 삼각형 OAB의 넓이는 4이므로 삼각형 OBQ의 넓이는 12이다.

삼각형 OAB와 삼각형 OBQ는 각각 선분 AB와 선분 BQ를 밑변으로 할 때 높이가 같으므로 두 삼각형의 밑변의 길이의 비는 두 삼각형의 넓이의 비와 같다.

따라서 $\overline{AB}:\overline{BQ}=4:12=1:3$이므로

$\overline{AQ}:\overline{BQ}=4:3=m:n$

$\therefore \frac{n}{m}=\frac{3}{4}$

40 답 ③

점 P의 좌표를 P(a, b)라 하면 직선 AB의 방정식은

$y=-x+1$이므로

$b=-a+1$ ⋯ ㉠

$\triangle OAG=\frac{1}{4}\triangle OAB$에서 두 삼각형 모두 선분 OA를 한 변으로 하므로 무게중심 G의 y좌표와 꼭짓점 B의 y좌표의 비는 1 : 4이다.

즉, 무게중심 G의 y좌표는 $\frac{1}{4}$이다.

또, $\triangle OAP=3\triangle OAG$이므로 점 P의 y좌표 b는 $b=\frac{3}{4}$

이 값을 ㉠에 대입하면 $a=\frac{1}{4}$

따라서 점 P의 x좌표는 $\frac{1}{4}$이다.

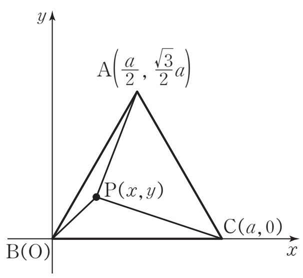
41 답 ②

정삼각형의 한 변의 길이를 a라 하자.

좌표평면에서 꼭짓점 B를 원점 O의 위치에 놓고

변 BC가 x축의 양의 방향이 되도록 하면

두 점 C, A의 좌표는 각각 $(a, 0)$, $\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$이다.



점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overline{PA}=2\sqrt{3}$, $\overline{PB}=2$, $\overline{PC}=4$이므로

$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2=12$ ⋯ ㉠

$x^2+y^2=4$ ⋯ ㉡

$(x-a)^2+y^2=16$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 x, y를 a로 나타내면

$x=\frac{a}{2}-\frac{6}{a}$, $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)$

이것을 ㉡에 대입하면

$$\left(\frac{a}{2}-\frac{6}{a}\right)^2+\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)\right\}^2=4\text{이므로}$$

$\frac{a^2}{3}-\frac{32}{3}+\frac{112}{3a^2}=0$의 양변에 $3a^2$을 곱하면

$a^4-32a^2+112=0$

$(a^2-4)(a^2-28)=0$

$\therefore a^2=4$ 또는 $a^2=28$

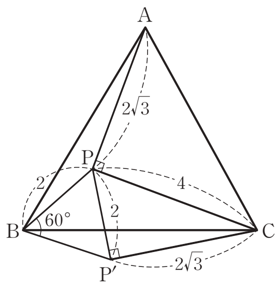
그런데 a는 4보다 커야 하므로

$a^2=28$

$\therefore a=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

[다른 풀이]

그림과 같이 삼각형 PAB를 점 B를 중심으로 시계방향으로 60°만큼 회전한 삼각형을 $\triangle P'CB$라 하자.



이때, 삼각형 PBP'은 정삼각형이므로

$\overline{PP'}=2$, $\overline{P'C}=\overline{PA}=2\sqrt{3}$, $\overline{PC}=4$

삼각형 PP'C는 $\angle P'=90°$, $\angle CPP'=60°$인 직각삼각형이다.

이때, $\angle APB=\angle CP'B=90°+60°=150°$이고

$\angle BPC=60°+60°=120°$이므로

$\angle APC=90°$

즉, 삼각형 APC는 변 AC가 빗변인 직각삼각형이므로

$\overline{AC}^2=\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=(2\sqrt{3})^2+4^2=28$

$\therefore \overline{AC}=2\sqrt{7}$

따라서 정삼각형 ABC의 한 변의 길이는 $2\sqrt{7}$이다.

42 답 16

삼각형 ABC에서 점 D는 선분 BC를 1 : 3으로 내분하므로

$\overline{BD}:\overline{DC}=1:3$

점 E는 선분 BC를 2 : 3으로 외분하므로

$\overline{EB}=2\overline{BC}$

점 F는 선분 AB를 1 : 2로 외분하므로

$\overline{BF}=2\overline{AB}$

$\overline{BD}:\overline{EB}=1:8$이므로 삼각형 AEB의 넓이는 삼각형 ABD의 넓이의 8배이다.

또한, $\overline{BF}=2\overline{AB}$이므로 삼각형 FEB의 넓이는 삼각형 ABD의 넓이의 16배이다.

$\therefore k=16$

일등급 UP

*** 높이가 같은 삼각형의 넓이의 비**

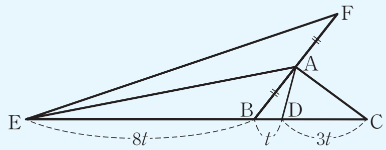
양수 t에 대하여 $\overline{BD}=t$라 하면 조건에 의하여 그림과 같이 $\overline{DC}=3t$, $\overline{EB}=8t$이다.

이때, 삼각형 ABD의 넓이를 S라 하면

삼각형 AEB의 넓이는 $\triangle AEB=8\triangle ABD=8S$이고,

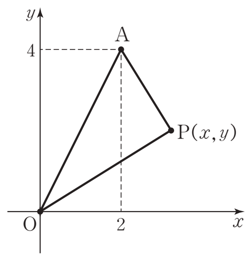
$\triangle AEB=\triangle FEA=8S$이므로 $\triangle FEB=16S$

따라서 $\triangle FEB=16\triangle ABD$이므로 $k=16$



43 답 ④

O(0, 0), A(2, 4), P(x, y)라 하면



$\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$, $\overline{AP}=\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}$

$\therefore \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=\overline{OP}+\overline{AP}\geq\overline{OA}$

따라서 구하는 최솟값은

$\overline{OA}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

44 답 ③

세 점 P_2, P_3, P_4의 좌표를 각각

(x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)라 하면

네 점 P_1, P_2, P_3, P_4는 각각

$\overline{A_4P_4}$, $\overline{A_1P_1}$, $\overline{A_2P_2}$, $\overline{A_3P_3}$의 중점이므로

$x_1=\frac{x_4}{2}$, $y_1=\frac{y_4+2}{2}$

$\therefore x_4=2x_1$, $y_4=2y_1-2$ ⋯ ㉠

$x_2=\frac{x_1}{2}$, $y_2=\frac{y_1}{2}$

$\therefore x_1=2x_2$, $y_1=2y_2$ ⋯ ㉡

$x_3=\frac{x_2+2}{2}$, $y_3=\frac{y_2}{2}$

$\therefore x_2=2x_3-2$, $y_2=2y_3$ ⋯ ㉢

$x_4=\frac{x_3+2}{2}$, $y_4=\frac{y_3+2}{2}$

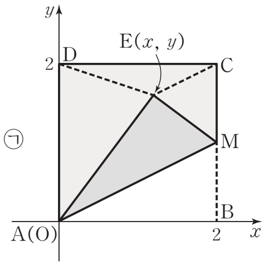
$\therefore x_3=2x_4-2$, $y_3=2y_4-2$ ⋯ ㉣

㉠~㉣을 연립하여 풀면

$x_1=\frac{4}{5}$, $y_1=\frac{8}{5}$ $\quad\therefore x_1+y_1=\frac{4}{5}+\frac{8}{5}=\frac{12}{5}$

45 답 ④

그림과 같이 $\overline{AB}$, $\overline{AD}$를 각각 x축, y축의 양의 방향이 되도록 좌표축을 잡고, $E(x, y)$라 하자.



$\overline{AE}=\sqrt{x^2+y^2}=2 \quad \therefore x^2+y^2=4 \cdots ㉠$

한편, 사각형 ABCD의 넓이가 4이고

$\triangle ABM=\triangle AEM=1$이므로

$\triangle AED+\triangle ECD+\triangle EMC=2$

$\frac{1}{2}\times 2\times x+\frac{1}{2}\times 2\times(2-y)+\frac{1}{2}\times 1\times(2-x)=2$

$\therefore x-2y+2=0 \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\frac{6}{5}$, $y=\frac{8}{5}$ $(\because x>0,\ y>0)$

따라서 $E\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$이므로

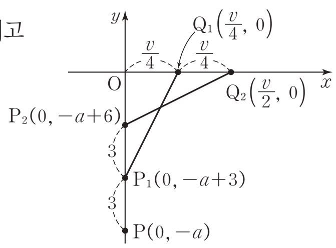
$\overline{CE}=\sqrt{\left(2-\frac{6}{5}\right)^2+\left(2-\frac{8}{5}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

46 답 ②

여객선의 진행로를 y축, 화물선의 진행로를 x축이라 하고, 화물선의 속도를 시속 v km라 하자. 여객선이 화물선을 처음 발견하였을 때의 여객선의 위치를 $P(0, -a)(a>0)$이라 하고, 이때의 화물선의 위치를 원점 O라 하자.

또한, 여객선의 속도는 시속 12 km, 화물선의 속도는 시속 v km이므로 15분 동안 여객선은 3 km, 화물선은 $\frac{v}{4}$ km 진행한다.

첫 15분 후 여객선과 화물선의 위치를 각각 P_1, Q_1이라 하면



$P_1(0, -a+3)$, $Q_1\left(\frac{1}{4}v, 0\right)$이고

$\overline{P_1Q_1}=10$이므로

$\overline{P_1Q_1}^2=\left(\frac{1}{4}v\right)^2+(a-3)^2$

$=10^2 \cdots ㉠$

다음 15분 후 두 배의 위치를 각각 P_2, Q_2라 하면

$P_2(0, -a+6)$, $Q_2\left(\frac{1}{2}v, 0\right)$이고 $\overline{P_2Q_2}=13$이므로

$\overline{P_2Q_2}^2=\left(\frac{1}{2}v\right)^2+(a-6)^2=13^2 \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=11(\because a>0)$, $v=24$

따라서 좌표평면에서 여객선의 처음 위치 P는 점 $P(0, -11)$이고, 여객선이 처음 위치 P에서 원점 O까지 이동한 시간은 $\frac{11}{12}$시간이므로 화물선이 이동한 거리는 $\frac{11}{12}\times 24=22$(km)이다.

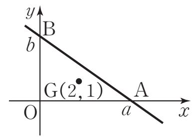
즉, 여객선이 원점에 위치할 때 화물선은 점$(22, 0)$에 위치하므로 여객선의 정동쪽에 화물선이 있을 때 두 배 사이의 거리는 22 km이다.

1st 10 직선의 방정식

문제편 117P

01 답 ②

그림과 같이 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면 두 점 A, B의 좌표는 $A(a, 0)$, $B(0, b)$이다.



삼각형 OAB의 무게중심 G의 좌표가 $(2, 1)$이므로

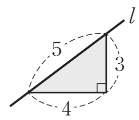
$\left(\frac{0+a+0}{3}, \frac{0+0+b}{3}\right)=(2, 1)$

$\therefore a=6,\ b=3$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times a\times b=9$

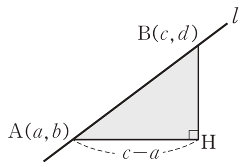
02 답 8

직선 l의 기울기가 $\frac{3}{4}$이므로 [그림 1]과 같이 직선 l 위의 두 점을 꼭짓점으로 가지고 두 변이 좌표축과 평행한 직각삼각형의 세 변의 길이의 비는 $4:3:5$이다.



[그림 1]

따라서 [그림 2]의 삼각형 AHB에서 $\overline{AB}=10$이므로



[그림 2]

$\overline{AB}:\overline{AH}=5:4$

$\therefore c-a=\overline{AH}=\frac{4}{5}\times\overline{AB}$

$=\frac{4}{5}\times 10=8$

03 답 2

두 점 $A(m-2, m+1)$, $B(1-m, m-1)$을 지나는 직선의 기울기가 m이므로 기울기는

$\frac{m-1-(m+1)}{1-m-(m-2)}=\frac{-2}{-2m+3}=m$

즉, $2m^2-3m-2=0$에서 $(2m+1)(m-2)=0$

$\therefore m=2\ (\because m>0)$

04 답 ⑤

두 직선 $(a-1)x+ay=1$, $4x+(a+3)y=2$에 대하여

ㄱ. $a=3$이면 $\frac{a-1}{4}=\frac{a}{a+3}=\frac{1}{2}$이므로 일치한다. (참)

ㄴ. $a=-1$이면 $\frac{a-1}{4}=\frac{a}{a+3}\neq\frac{1}{2}$이므로 평행하다. (참)

ㄷ. $a=6$이면 $\frac{a-1}{4}\neq\frac{a}{a+3}$이므로 한 점에서 만난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

05 답 ③

세 직선을 $l_1 : x+ay+1=0$, $l_2 : 2x+by-5=0$,

$l_3 : x-(b-2)y+4=0$이라 하면

$l_1 \perp l_2$이므로 $1\times2+a\times b=0$에서 $ab=-2$

$l_1 /\!/ l_3$이므로 $\frac{1}{1}=\frac{-(b-2)}{a}\neq\frac{4}{1}$에서 $a+b=2$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=2^2-2\times(-2)=8$

06 답 28

두 직선 $y=3x+2$, $y=4x-1$의 교점을 지나는 직선은

$(3x-y+2)m+(4x-y-1)=0$ (m은 상수)

로 나타낼 수 있다.

즉, $(3m+4)x-(m+1)y+(2m-1)=0$이므로

$y=\frac{3m+4}{m+1}x+\frac{2m-1}{m+1}$

이 직선이 직선 $y=x$와 수직이므로 직선의 기울기는 -1이다.

즉, $\frac{3m+4}{m+1}=-1$이므로 $m=-\frac{5}{4}$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $x+y-14=0$이므로

x절편은 $a=14$, y절편은 $b=14$ $\quad\therefore a+b=28$

07 답 ③

두 직선이 평행하므로 직선 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=3$ 위의 한 점 $(9, 0)$과 직선

$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=4$, 즉 $4x+3y-48=0$ 사이의 거리를 구하면 된다.

따라서 구하는 거리는 $\frac{|36+0-48|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{12}{5}$

08 답 ②

직선 l의 기울기를 m이라 하면

직선 l은 점 $A(-1, 0)$을 지나므로 직선의 방정식은

$y-0=m(x+1)$ $\quad\therefore mx-y+m=0$

점 $B(0, 2)$와 직선 l 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{|-2+m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$에서 $|-2+m|=\sqrt{5(m^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면 $4m^2+4m+1=0$

$(2m+1)^2=0$ $\quad\therefore m=-\frac{1}{2}$

09 답 ②

$\overline{OB}$의 중점을 D라 하면 $D\left(\frac{4}{2}, \frac{6}{2}\right)=(2, 3)$

그런데 평행사변형의 두 대각선의 중점은 일치하므로 $\overline{AC}$의 중점도 D이다. 두 점 A, C를 지나는 직선과 두 점 A, D를 지나는 직선은 같으므로 두 점 $A(3, 2)$, $D(2, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{3-2}{2-3}(x-3)$ $\quad\therefore y=-x+5$

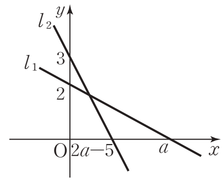
따라서 $a=-1$, $b=5$이므로 $a+b=4$

10 답 7

두 직선을

$l_1 : \frac{x}{a}+\frac{y}{2}=1$,

$l_2 : \frac{x}{2a-5}+\frac{y}{3}=1$이라 하자.



직선 l_1의 y절편은 2,

직선 l_2의 y절편은 3이므로

두 직선이 제1사분면에서 만나려면 그림과 같이

원점과 직선 l_1의 x절편 사이에 직선 l_2의 x절편이 있어야 한다.

직선 l_1의 x절편은 a, 직선 l_2의 x절편은 $2a-5$이므로

$0<2a-5<a$

$\frac{5}{2}<a<5$이므로 자연수 a는 3, 4이고 그 합은 7이다.

11 답 50

점 B의 좌표를 $B(a, b)$라 하면

조건 (나)에서 선분 BA의 중점의 x좌표는 0이므로

$\frac{a+2}{2}=0$ $\quad\therefore a=-2$

직선 PB는 y축에 평행하고,

조건 (가)에 의하여 $\overline{PA}=\sqrt{4^2+3^2}=5$이고, 조건 (나)에서 $b<0$

이므로 $\overline{PB}=3-b=5$ $\quad\therefore b=-2$

따라서 점 B의 좌표는 $B(-2, -2)$이므로

직선 l의 기울기는 $m=\frac{0-(-2)}{2-(-2)}=\frac{1}{2}$

$\therefore 100m=100\times\frac{1}{2}=50$

12 답 ①

두 점 A, B의 좌표를 각각 $A(3a, 0)$, $B(0, 3b)$라 하면

직선 l의 기울기는 $-\frac{3b}{3a}=-\frac{b}{a}$

점 C는 선분 AB를 $1 : 2$로 내분하는 점이고,

점 D는 선분 AB를 $2 : 1$로 내분하는 점이므로

점 C의 좌표는 $(2a, b)$이고 점 D의 좌표는 $(a, 2b)$이다.

따라서 직선 OC의 기울기는 $\frac{b}{2a}$, 직선 OD의 기울기는 $\frac{2b}{a}$이므로

$\frac{b}{2a}\times\frac{2b}{a}=4$에서 $\frac{b^2}{a^2}=4$ $\quad\therefore \frac{b}{a}=\pm2$

이때, 직선 l의 기울기는 음수이므로 $\frac{b}{a}=-2$

13 답 2

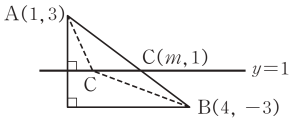
직선 $y=\frac{3}{2}x$의 기울기에서 $\frac{\overline{DP}}{\overline{AP}}=\frac{3}{2}$

직선 $y=\frac{1}{3}x$의 기울기에서 $\frac{\overline{CP}}{\overline{BP}}=\frac{1}{3}$

$\therefore \frac{\overline{AP}\times\overline{BP}}{\overline{CP}\times\overline{DP}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{DP}}\times\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\frac{2}{3}\times3=2$

14 답 2

그림과 같이 점 $C(m, 1)$의 y좌표가 항상 1이므로 점 C는 직선 $y=1$ 위를 움직이는 점이다.



직선 $y=1$은 선분 AB와 만나므로 $\overline{AC}+\overline{BC}$의 값이 최소가 되려면 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있어야 한다.
이때, 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같으므로
$\frac{-3-3}{4-1}=\frac{-3-1}{4-m}$에서 $-2=\frac{-4}{4-m}$ $\quad\therefore m=2$

15 답 ④

세 직선 $ax+by=1$ ⋯ ㉠, $(b+3)x+(a+3)y=1$ ⋯ ㉡
$(b-1)x+(a-1)y=1$ ⋯ ㉢에 대하여
㉠, ㉡에서 $\frac{b+3}{a}=\frac{a+3}{b}\neq 1$
$a^2+3a-b^2-3b=0$
$(a+b)(a-b)+3(a-b)=0$
$(a-b)(a+b+3)=0$ $\quad\therefore a=b$ 또는 $a+b=-3$
이때, $a=b$이면 두 직선 ㉠, ㉢이 서로 평행하므로 수직이라는 사실에 모순이다.
$\therefore a+b=-3$ ⋯ ㉣
한편, ㉠, ㉢이 서로 수직이므로 $a(b-1)+b(a-1)=0$
$2ab=a+b$ $\quad\therefore ab=-\frac{3}{2}$ ($\because$ ㉣)
$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=12$

16 답 5

반원의 원주각의 크기는 90°이므로 $\angle OPA=90^\circ$
즉, 직선 PO와 직선 PA의 기울기의 곱은 -1이다.
이때, 직선 PO의 기울기가 2이므로 직선 PA의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.
따라서 직선 PA의 방정식은 $y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$, 즉
$x+2y=5$이므로 직선 PA의 x절편은 5이다.
$\therefore \overline{OA}=5$

17 답 88

두 직선 $4x+3y-12=0$, $ax-3y+b=0$,
즉 $y=-\frac{4}{3}x+4$, $y=\frac{a}{3}x+\frac{b}{3}$가 평행하므로
$-\frac{4}{3}=\frac{a}{3}$ $\quad\therefore a=-4$
또, 직선 $y=-\frac{4}{3}x+4$의 x절편이 3, y절편이 4이고,
직선 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{b}{3}$의 x절편이 $\frac{b}{4}$, y절편이 $\frac{b}{3}$이므로
$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times3\times4\right)=\frac{1}{2}\times\frac{b}{4}\times\frac{b}{3}$ $\quad\therefore b^2=72$
$\therefore a^2+b^2=(-4)^2+72=88$

18 답 ③

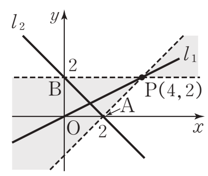
ㄱ. 직선 l은 실수 k의 값에 관계없이 두 직선 $3x-y-3=0$, $x-2y+4=0$의 교점 $(2, 3)$을 지난다. (참)
ㄴ. 두 점 $A(-1, 6)$, $B(1, 2)$를 지나는 직선의 방정식은
$y-2=\frac{2-6}{1-(-1)}(x-1)$, 즉 $2x+y-4=0$ ⋯ ㉠
직선 l을 x, y에 대하여 정리하면
$(3+k)x-(1+2k)y+(4k-3)=0$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $\frac{3+k}{2}=\frac{-1-2k}{1}$, 즉 $k=-1$이면
직선 l : $2x+y-7=0$은 직선 AB와 평행하게 되어 만나지 않는다. (거짓)
ㄷ. ㉠, ㉡이 수직일 조건인
$2(3+k)-(1+2k)=0$, 즉 $0\times k=-5$에서
k의 값은 존재하지 않는다.
즉, 직선 AB와 직선 l은 수직으로 만날 수 없다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

19 답 ②

직선 $x+y-2+k(x-y)=0$은 k의 값에 관계없이 두 직선 $x+y-2=0$, $x-y=0$의 교점인 $(1, 1)$을 지나는 직선이므로 원점과 이 직선 사이의 거리 $f(k)$가 최대일 때는 원점에서 이 직선에 내린 수선의 발이 점 $(1, 1)$일 때이다.
따라서 $f(k)$의 최대값은
$\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$

20 답 ①

직선의 방정식 l_1 : $mx-y-4m+2=0$을 m에 대하여 정리하면 $m(x-4)-(y-2)=0$이므로 직선 l_1은 m의 값에 관계없이 항상 점 $P(4, 2)$를 지난다.
직선 l_2 : $x+y-2=0$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면 $A(2, 0)$, $B(0, 2)$이다.



두 직선 l_1, l_2가 제1사분면에서 만나려면 그림과 같이 직선 l_1이 선분 AB와 만나야 하므로 직선 l_1의 기울기가 직선 PB의 기울기보다 크고 직선 PA의 기울기보다 작아야 한다.
직선 PA는 점 $A(2, 0)$을 지나므로
$2m-4m+2=0$ $\quad\therefore m=1$ ⋯ ㉠
직선 PB는 점 $B(0, 2)$를 지나므로
$-2-4m+2=0$ $\quad\therefore m=0$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $0<m<1$
따라서 $a=0$, $b=1$이므로 $b-a=1$

21 답 2

x축 위의 점 P의 좌표를 $P(a, 0)$이라 하면 점 P와 두 직선

$x-2y+2=0$, $2x-y+4=0$ 사이의 거리가 같으므로

$\dfrac{|a-2\times0+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|2\times a-0+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$에서

$\dfrac{|a+2|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|2a+4|}{\sqrt{5}}$

즉, $|a+2|=|2a+4|$이므로

(i) $a+2=2a+4$일 때, $a=-2$

(ii) $a+2=-2a-4$일 때, $a=-2$

$\therefore a=-2$

따라서 $P(-2, 0)$이므로 $\overline{OP}=2$

22 답 ①

점 $(1, 2)$를 지나는 직선의 기울기를 m이라 하면

구하는 직선의 방정식은 $y-2=m(x-1)$

$\therefore mx-y+(2-m)=0$

점 $(3, 2)$와 이 직선 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이므로

$\dfrac{|3m-2+2-m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}$에서

$\dfrac{|2m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}$

즉, $|2m|=\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$의 양변을 제곱하면

$4m^2=2(m^2+1)$에서 $m^2=1$

$\therefore m=1$ ($\because m>0$)

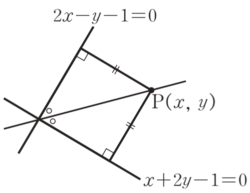
23 답 ②

그림과 같이 각의 이등분선 위의

임의의 점을 $P(x, y)$라 하면

이 점과 두 직선에 이르는 거리는

같으므로



$\dfrac{|2x-y-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|x+2y-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}$에서

$|2x-y-1|=|x+2y-1|$

즉, $2x-y-1=\pm(x+2y-1)$이므로

$x-3y=0$ 또는 $3x+y-2=0$

이때, 두 직선의 y절편은 각각 0, 2이므로 y절편의 합은 2이다.

24 답 ②

점 $A(a, b)$가 직선 $x+2y=1$ 위에 있으므로 $a+2b=1$ ⋯ ㉠

점 $P(a+b, a-b)$를 $P(x, y)$라 하면

$a+b=x$, $a-b=y$

두 식을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{x+y}{2}$, $b=\dfrac{x-y}{2}$ ⋯ ㉡

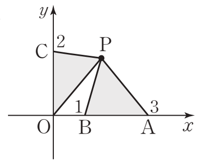
㉡을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{x+y}{2}+(x-y)=1$에서 $3x-y=2$

$\therefore y=3x-2$

25 답 ②

점 P의 좌표를 $P(x, y)$ $(x>0, y>0)$라 하면



$\triangle PAB=\dfrac{1}{2}\times2\times y=y$

$\triangle PCO=\dfrac{1}{2}\times2\times x=x$

이때, $\triangle PAB+\triangle PCO=3$이므로

$y+x=3$

$\therefore y=-x+3$ $(0<x<3)$ ($\because x>0, y>0$)

26 답 20

두 점 P, Q의 좌표를 $P(a, b)$, $Q(x, y)$라 하면

$x=\dfrac{a+2}{2}$, $y=\dfrac{b+1}{2}$

$\therefore a=2x-2$, $b=2y-1$ ⋯ ㉠

그런데 점 $P(a, b)$가 직선 $2x-y-5=0$ 위의 점이므로

$2a-b-5=0$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2(2x-2)-(2y-1)-5=0$

$\therefore y=2x-4$

따라서 $m=2$, $n=-4$이므로

$m^2+n^2=2^2+(-4)^2=20$

27 답 ②

$ax+by+c=0$에서

직선 $l_1: y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$,

$ax+cy+b=0$에서

직선 $l_2: y=-\dfrac{a}{c}x-\dfrac{b}{c}$,

$bx+ay+c=0$에서

직선 $l_3: y=-\dfrac{b}{a}x-\dfrac{c}{a}$,

이라 하고 세 직선 l_1, l_2, l_3의 기울기와 y절편을 조사하자.

직선	기울기	y절편
l_1	$-\dfrac{a}{b}$, 즉 $-ab$	$-\dfrac{c}{b}$, 즉 $-bc$
l_2	$-\dfrac{a}{c}$, 즉 $-ac$	$-\dfrac{b}{c}$, 즉 $-bc$
l_3	$-\dfrac{b}{a}$, 즉 $-ab$	$-\dfrac{c}{a}$, 즉 $-ac$

문제에 주어진 그래프에서 세 직선 중 두 직선의 기울기는 양수이고,

두 직선의 y절편은 양수이므로 $-ab>0$, $-bc>0$이다.

$\therefore ab<0$, $ac>0$, $bc<0$

한편, 직선 $bx+cy+a=0$, 즉 $y=-\dfrac{b}{c}x-\dfrac{a}{c}$에서

기울기는 $-\dfrac{b}{c}>0$, y절편은 $-\dfrac{a}{c}<0$이므로

직선 $bx+cy+a=0$의 그래프로 가장 알맞은 것은 ②이다.

28 답 ②

선분 AB의 방정식은 $y-17=\frac{281-17}{48-3}(x-3)$

$\therefore y=\frac{88}{15}(x-3)+17\ (3\le x\le 48)$

이때, y가 정수이려면 $x-3$이 15의 배수이어야 한다.

즉, $x=3,\ 18,\ 33,\ 48$로 모두 4개이다.

따라서 문제의 조건을 만족시키는 점의 좌표는

$(3,\ 17),\ (18,\ 105),\ (33,\ 193),\ (48,\ 281)$로 모두 4개이다.

29 답 ②

$l_1 : y=\frac{4}{3}x,\ l_2 : y=\frac{1}{2}x$이므로

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}=\frac{\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}}{\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}}=\frac{(l_1\text{의 기울기})}{(l_2\text{의 기울기})}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{8}{3}$$

30 답 ③

두 점 A, B의 좌표를 $A(k,\ 0),\ B(2k,\ 0)$이라 하면 직선 AD의 기울기가 -4이므로 $D(0,\ 4k)$

한편, 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$\triangle OAD=\triangle OBC$ ($\because$ □OAPC는 공통)

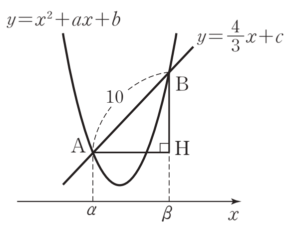
$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OD}=\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{OC}$

$\frac{1}{2}\times k\times 4k=\frac{1}{2}\times 2k\times\overline{OC}\qquad \therefore \overline{OC}=2k$

즉, $C(0,\ 2k)$이므로 직선 BC의 기울기는 $\frac{2k-0}{0-2k}=-1$

31 답 ②

그림과 같이 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 직선 $y=\frac{4}{3}x+c$가 만나는 두 점을 A, B라 하고, 두 점 A, B의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta$라 하자.



그림에서 방정식 $x^2+ax+b=\frac{4}{3}x+c$의 두 근은 $\alpha,\ \beta$이므로

$\beta-\alpha=\overline{AH}\ \cdots$ ㉠

이때, 직선 $y=\frac{4}{3}x+c$의 기울기가 $\frac{4}{3}$이므로

삼각형 AHB에서 $\overline{AH} : \overline{BH} : \overline{AB}=3 : 4 : 5$

따라서 $\overline{AH} : 10=3 : 5$이므로

㉠에서 $\beta-\alpha=\overline{AH}=\frac{3}{5}\times 10=6$

32 답 ②

양수 $a,\ c$에 대하여 $A(a,\ 3a),\ C\left(c,\ \frac{2}{3}c\right)$라 하면

$B\left(a,\ \frac{2}{3}c\right),\ D(c,\ 3a)$

세 점 O, B, D는 일직선 위에 있으므로

$\frac{\frac{2}{3}c}{a}=\frac{3a}{c}$에서 $\frac{c^2}{a^2}=3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

$\therefore \frac{a}{c}=\frac{\sqrt{2}}{3}\ \left(\because \frac{a}{c}>0\right)$

따라서 직선 BD의 기울기는 $\frac{3a}{c}=3\times\frac{\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$

33 답 ④

두 직선 $ax+y+1=0,\ x+by+c=0$이 모두 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$a+3+1=0\qquad \therefore a=-4\ \cdots$ ㉠

$1+3b+c=0\qquad \therefore c=-3b-1\ \cdots$ ㉡

또, 두 직선이 서로 수직이므로

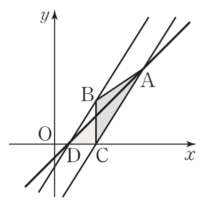
$a\times 1+1\times b=0\qquad \therefore b=4$ ($\because$ ㉠)

㉡에서 $c=-3\times 4-1=-13$

$\therefore a+b+c=(-4)+4+(-13)=-13$

34 답 ③

점 B를 지나고 직선 AC와 평행한 직선이 선분 OC와 만나는 점 D의 좌표를 $D(a,\ 0)$이라 하자. 삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 ADC의 넓이가 같으므로 직선 BD의 기울기는 직선 AC의 기울기와 같으므로



$\frac{3-0}{3-a}=\frac{6-0}{7-3}\qquad \therefore a=1$

따라서 점 $D(1,\ 0)$이므로 직선 AD의 기울기는 $\frac{6-0}{7-1}=1$

35 답 5

종이가 접힌 자국은 두 점 $P(0,\ 2)$와 $Q(4,\ 0)$을 잇는 선분의 수직이등분선이다. $\overline{PQ}$의 중점의 좌표는 $(2,\ 1)$이고 $\overline{PQ}$의 기울기는 $\frac{2-0}{0-4}=-\frac{1}{2}$이므로 접힌 선은 점 $(2,\ 1)$을 지나고 기울기가 2인 직선이다. 즉, $y-1=2(x-2)$

$\therefore y=2x-3$

이때, 두 점 $R(0,\ 7)$과 $S(p,\ q)$를 지나는 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 RS의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x+7$이다.

두 직선 $y=2x-3$과 $y=-\frac{1}{2}x+7$의 교점의 좌표를 구하면

$(4,\ 5)$이므로 $\overline{RS}$의 중점의 좌표는 $(4,\ 5)$이다.

따라서 $\frac{p+0}{2}=4,\ \frac{q+7}{2}=5$이므로 $p=8,\ q=3$

$\therefore p-q=5$

36 답 ⑤

ㄱ. 점 P$(2, 0)$에서 직선 AP의 기울기는 $\frac{2-0}{0-2}=-1$이므로

직선 l의 기울기는 1이다. (참)

ㄴ. 직선 AP의 기울기는 $-\frac{1}{t}$이므로 직선 l의 기울기는 t이다.

선분 AP의 중점의 좌표는 $(t, 1)$이므로 직선 l의 방정식은

$y-1=t(x-t)$

즉, $y=tx-t^2+1$ ⋯ ㉠이고 이 직선이 점 $(3, 3)$을 지나므로

$t^2-3t+2=0$에서 $(t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$

따라서 직선 l의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. 주어진 부등식에 ㉠을 대입하면

$tx-t^2+1\le x^2+k$

즉, $x^2-tx+t^2+k-1\ge 0$ ⋯ ㉡

㉡이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

이차방정식 $x^2-tx+t^2+k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=t^2-4(t^2+k-1)\le 0$에서 $3t^2+4(k-1)\ge 0$

즉, $t^2>0$이므로 $4(k-1)\ge 0$ $\quad\therefore k\ge 1$

따라서 실수 k의 최솟값은 1이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

37 답 ③

ㄱ. $2x-y+1=0$, $x+y+2=0$을 연립하여 풀면

$x=-1$, $y=-1$

따라서 직선 l은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, -1)$을 지난다. (참)

ㄴ. 【반례】 $m=0$이면 직선 l은 직선 $2x-y+1=0$이 되어

직선 $2x-y=0$과 평행하다.

따라서 만나지 않는 경우도 존재한다. (거짓)

ㄷ. 직선 l은 점 $(-1, -1)$을 지나는 직선 중 직선 $x+y+2=0$은 나타낼 수 없다.

왜냐하면 어떤 실수 t에 대하여

$(2x-y+1)+m(x+y+2)=t(x+y+2)$

가 되어야 하는데 이를 만족시키는 m의 값은 존재하지 않는다.

그러므로 직선 l은 m의 값에 관계없이 직선 $x+y=0$과 평행이 될 수 없다. 따라서 직선 $x+y=0$과 항상 한 점에서 만난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

38 답 ④

$(a-2)y=(3a-1)x-1$ ⋯ ㉠을 a에 대하여 정리하면

$(y-3x)a+x-2y+1=0$

따라서 이 직선은 a의 값에 관계없이 두 직선

$y-3x=0$, $x-2y+1=0$의 교점 $\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$을 지난다.

(i) $a=2$일 때, ㉠은 $x=\frac{1}{5}$로 제 2 사분면을 지나지 않는다.

(ii) $a\ne 2$일 때, 직선 ㉠이 제 2 사분면을 지나지 않을 조건은

$(y\text{절편})=-\frac{1}{a-2}\le 0$

$\therefore a>2$

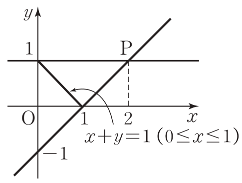
(i), (ii)에 의하여 구하는 상수 a의 값의 범위는 $a\ge 2$이다.

39 답 ①

선분 $x+y=1$ $(0\le x\le 1)$을 그리면 그림과 같다.

$mx-y-2m+1=0$에서 $y=m(x-2)+1$ ⋯ ㉠

직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 점 P$(2, 1)$을 지난다.



(i) 직선 ㉠이 점 $(0, 1)$을 지날 때, $m=0$

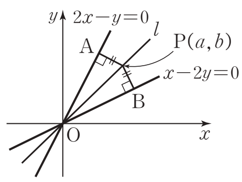
(ii) 직선 ㉠이 점 $(1, 0)$을 지날 때, $m=1$

따라서 한 점에서 만나도록 하는 상수 m의 값의 범위는 $0\le m\le 1$이므로 $a=0$, $b=1$

$\therefore a+b=1$

40 답 9

점 P(a, b)가 직선 $x+y=6$ 위의 점이므로 $a+b=6$ ⋯ ㉠



그림과 같이 점 P에서 두 직선 $2x-y=0$, $x-2y=0$에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하면

$\overline{PA}=\frac{|2a-b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|2a-b|}{\sqrt{5}}$

$\overline{PB}=\frac{|a-2b|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}}$

이때, $\overline{PA}=\overline{PB}$에서

$\frac{|2a-b|}{\sqrt{5}}=\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}}$, 즉 $|2a-b|=|a-2b|$

$2a-b=a-2b$ 또는 $2a-b=-(a-2b)$

$\therefore b=-a$ 또는 $b=a$

(i) $b=-a$이면

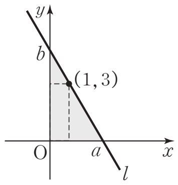
㉠에서 $0=6$이 되어 성립하지 않는다.

(ii) $b=a$이면

㉠에서 $2a=6$ $\quad\therefore a=3$, $b=3$

(i), (ii)에 의하여 $ab=9$

41 답 ③



직선 l의 x절편을 a, y절편을 b라 하면

직선 l의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

이 직선이 점 $(1, 3)$을 지나므로

$\frac{1}{a}+\frac{3}{b}=1 \quad \therefore b+3a=ab \cdots$ ㉠

직선 l과 x축, y축의 양의 방향으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S라 하면 $S=\frac{1}{2}ab=6 \quad \therefore ab=12 \cdots$ ㉡

$b=\frac{12}{a}$를 ㉠에 대입하면 $\frac{12}{a}+3a=12$이므로 $3a^2-12a+12=0$

$3(a-2)^2=0 \quad \therefore a=2$

이것을 ㉡에 대입하면 $b=6$

따라서 직선 l의 방정식은 $\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$, 즉, $3x+y-6=0$이므로

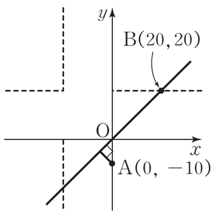
원점과 직선 l 사이의 거리는

$\frac{|-6|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$

42 답 ②

그림과 같이 건물의 모서리를 원점 O로 하는 좌표축을 설정하면

$A(0, -10)$, $B(20, 20)$이다.

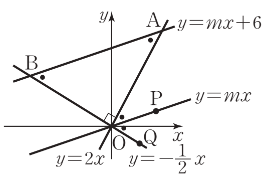


이때, 직선 OB의 방정식은 $y=x$이므로 점 A에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 길이가 움직여야 할 거리의 최솟값이다.

따라서 점 $A(0, -10)$과 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$\frac{|0+10|}{\sqrt{1^2+1^2}}=5\sqrt{2}$ (m)

43 답 ③



두 직선 $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x$의 기울기의 곱이 -1이므로 두 직선은 서로 수직이다.

즉, 삼각형 OAB는 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 직각이등변삼각형이다.

그림과 같이 원점을 지나고 직선 $y=mx+6\,(m>0)$에 평행한 직선 $y=mx$ 위의 한 점 $P(1, m)$과 직선 $y=-\frac{1}{2}x$ 위의 점 Q에 대하여

$\angle POA=\angle OAB$ (엇각), $\angle POQ=\angle ABO$ (동위각)

이등변삼각형의 두 밑각의 크기가 서로 같으므로

$\angle POA=\angle POQ$

즉, 직선 $y=mx$는 두 직선 $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x$이 이루는 각을 이등분하는 직선이다.

이때, 각의 이등분선의 성질에 의하여 점 $P(1, m)$에서 두 직선 $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x$, 즉 $2x-y=0$, $x+2y=0$에 이르는 거리가 같으므로 $\frac{|2-m|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|1+2m|}{\sqrt{1^2+2^2}} \quad \therefore |2-m|=|1+2m|$

양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2+8m-3=0$

$(3m-1)(m+1)=0$

$\therefore m=\frac{1}{3}$ 또는 $m=-3$

따라서 $m>0$이므로 $m=\frac{1}{3}$

44 답 ④

점 (a, b)가 직선 $3x+2y=1$ 위의 점이므로

$3a+2b=1 \cdots$ ㉠

이때, 점 $(b+2, a-b)$를 (x, y)라 하면

$b+2=x$에서 $b=x-2 \cdots$ ㉡, $a-b=y \cdots$ ㉢

㉡+㉢을 하면 $a=x+y-2 \cdots$ ㉣

㉡, ㉣을 ㉠에 대입하면

$3(x+y-2)+2(x-2)=1$

$\therefore 5x+3y=11$

45 답 ④

직선 $x+2y-1=0$ 위의 점 P의 좌표를 (a, b)라 하고, 선분 AP를 $2:1$로 내분하는 점을 $Q(x, y)$라 하면

$x=\frac{2a+2}{2+1}$, $y=\frac{2b+3}{2+1}$

$\therefore a=\frac{3}{2}x-1$, $b=\frac{3}{2}y-\frac{3}{2} \cdots$ ㉠

한편, 점 $P(a, b)$는 직선 $x+2y-1=0$ 위의 점이므로

$a+2b-1=0 \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{3}{2}x-1+2\left(\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}\right)-1=0$

$\therefore 3x+6y-10=0$

따라서 $m=3$, $n=6$이므로 $m+n=9$

46 답 12

점 $P(x, y)$가 움직이는 직선을 $ax+by+c=0 \cdots$ ㉠

이라 하면 점 $Q(X, Y)$도 이 식을 만족시키므로

$a(x+y+4)+b(3x-y+1)+c=0$

$(a+3b)x+(a-b)y+4a+b+c=0 \cdots$ ㉡

여기서 $a=0$이면 $b=c=0$이 되어 모순이므로 $a\neq0$

$b=0$이면 $a=c=0$이 되어 모순이므로 $b\neq0$

$c=0$이면 $c=4a+b+c$에서 $b=-4a$

㉠에서 $x-4y=0$, ㉡에서 $-11x+5y=0$이 되어 모순이므로 $c\neq0$

즉, ㉠과 ㉡이 일치하기 위하여

$\frac{a+3b}{a}=\frac{a-b}{b}=\frac{4a+b+c}{c}$ ⋯ ㉢

$\frac{a+3b}{a}=\frac{a-b}{b}$에서

$ab+3b^2=a^2-ab$

$a^2-2ab-3b^2=0$

$(a-3b)(a+b)=0$

$\therefore a=3b$ 또는 $a=-b$

(ⅰ) $a=3b$이면 ㉢에서 $c=13b$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$3x+y+13=0$

(ⅱ) $a=-b$이면 ㉢에서 $c=b$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x-y-1=0$

(ⅰ)~(ⅱ)에 의하여 구하는 직선의 방정식은

$x-y-1=0$ 또는 $3x+y+13=0$이므로

두 식을 연립하여 풀면

$x=-3$, $y=-4$

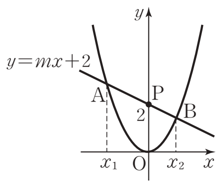
따라서 두 직선의 교점의 좌표는 $(-3, -4)$이므로

$\alpha\beta=(-3)\times(-4)=12$

47 답 ⑤

임의의 실수 m에 대하여 점 $\mathrm{P}(0, 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=mx+2$ ⋯ ㉠



직선 ㉠이 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 만나는 두 점 A, B의 좌표를 각각 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, 선분 AB의 중점 M의 좌표를 $\mathrm{M}(X, Y)$라 하면 x_1, x_2는 이차방정식 $x^2-mx-2=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=m$, $x_1x_2=-2$

(가)

$X=\frac{x_1+x_2}{2}=\boxed{\frac{m}{2}}$ ⋯ ㉡

$Y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{{x_1}^2+{x_2}^2}{2}$

$=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{2}$

$=\frac{m^2+4}{2}$

(나)

$=\boxed{\frac{m^2}{2}}+2$ ⋯ ㉢

(다)

㉡, ㉢에 의하여 $Y=\boxed{2}X^2+2$

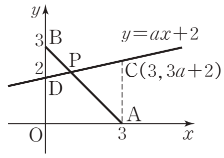
따라서 구하는 도형의 방정식은

$y=\boxed{2}x^2+2$이다.

즉, $f(m)=\frac{m}{2}$, $g(m)=\frac{m^2}{2}$, $k=2$이므로

$f(k)+g(k)=1+2=3$

48 답 11



그림과 같이 두 점 A, B를 각각 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 $y=ax+2$와 만나는 점을 각각 C, D라 하면

$\mathrm{C}(3, 3a+2)$, $\mathrm{D}(0, 2)$ ---------- ⓐ

이때, $\triangle\mathrm{PAC}\backsim\triangle\mathrm{PBD}$에서

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BD}}$이고

$\overline{\mathrm{AC}}=3a+2$, $\overline{\mathrm{BD}}=1$이므로

$\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{BP}}}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BD}}}=\frac{3a+2}{1}=3a+2$ ---------- ⓑ

따라서 $f(a)=3a+2$이므로

$f(3)=11$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 두 점 C, D를 잡아 닮은 두 삼각형을 찾는다.	[40%]
ⓑ 두 삼각형의 닮음비를 이용하여 $\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{BP}}}$를 구한다.	[50%]
ⓒ $f(3)$의 값을 구한다.	[10%]

49 답 2

주어진 식을 y에 대하여 정리하면

$y^2+2axy+x^2+2(a^2-1)x-1=0$

근의 공식으로 y의 값을 구하면

$y=-ax\pm\sqrt{(a^2-1)x^2-2(a^2-1)x+1}$ ---------- ⓐ

이 식이 두 직선을 나타내려면 근호 안의 식

$(a^2-1)x^2-2(a^2-1)x+1$이 x에 대한 완전제곱식이 되어야 한다.

이차방정식 $(a^2-1)x^2-2(a^2-1)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a^2-1)^2-(a^2-1)=0$이므로

$(a^2-1)(a^2-2)=0$

(ⅰ) $a^2-1=0$이면

$a=-1$ 또는 $a=1$

(ⅱ) $a^2-2=0$이면

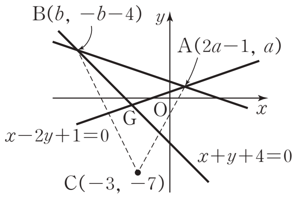
$a=-\sqrt{2}$ 또는 $a=\sqrt{2}$ ---------- ⓑ

따라서 모든 상수 a의 값의 곱은 2이다. ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 근의 공식을 이용하여 두 직선을 나타낸다.	[30%]
ⓑ 판별식을 이용하여 a의 값을 구한다.	[50%]
ⓒ 모든 상수 a의 값의 곱을 구한다.	[20%]

50 답 9



직선 GA와 직선 GB의 교점이 점 G이므로 $x-2y+1=0$과 $x+y+4=0$을 연립하여 풀면

$x=-3$, $y=-1$

$\therefore$ G$(-3, -1)$ ············ ⓐ

두 점 A, B는 각각 직선 $x-2y+1=0$, $x+y+4=0$ 위의 점이므로 A$(2a-1, a)$, B$(b, -b-4)$라 하면

삼각형 ABC의 무게중심이 G$(-3, -1)$이므로

$\frac{(2a-1)+b+(-3)}{3}=-3$, $\frac{a+(-b-4)+(-7)}{3}=-1$

$\therefore 2a+b=-5$, $a-b=8$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-7$

$\therefore$ A$(1, 1)$, B$(-7, 3)$ ············ ⓑ

즉, 직선 AB의 방정식은 $y-1=\frac{3-1}{-7-1}(x-1)$

$\therefore x+4y-5=0$

따라서 $p=4$, $q=5$이므로 $p+q=9$ ············ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 무게중심 G의 좌표를 구한다.	[30%]
ⓑ 두 점 A, B의 좌표를 각각 구한다.	[40%]
ⓒ 직선 AB의 방정식을 구하여 $p+q$의 값을 구한다.	[30%]

51 답 ②

직선 AP의 기울기는 $\frac{4-2}{4-0}=\frac{1}{2}$

직선 BP의 기울기는 $\frac{4-2}{4-n}=\frac{2}{4-n}$

직선 AP와 직선 BP가 서로 수직이므로 기울기의 곱은 -1이다.

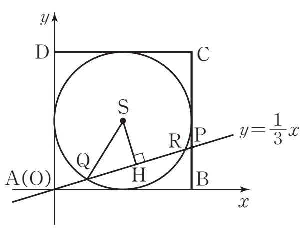
즉, $\frac{1}{2}\times\frac{2}{4-n}=-1$에서 $n=5$

세 점 A$(0, 2)$, B$(5, 2)$, P$(4, 4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABP의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{0+5+4}{3}, \frac{2+2+4}{3}\right)$이므로 $\left(3, \frac{8}{3}\right)$이다.

따라서 $a=3$, $b=\frac{8}{3}$이므로 $a+b=3+\frac{8}{3}=\frac{17}{3}$

52 답 ⑤



그림과 같이 두 직선 AB, AD를 각각 x축, y축의 양의 방향으로 좌표평면을 잡자.

$\overline{AB}:\overline{BP}=3:1$에서 직선 AP는 기울기가 $\frac{1}{3}$이고 원점을 지나므로 직선 AP의 방정식은 $y=\frac{1}{3}x$이다.

원의 중심을 S라 하면 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 10이므로 S$(5, 5)$이고, $\overline{SQ}=5$

점 S$(5, 5)$에서 직선 $x-3y=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{SH}=\frac{|5-15|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

$\therefore \overline{QH}=\sqrt{\overline{SQ}^2-\overline{SH}^2}=\sqrt{5^2-10}=\sqrt{15}$

따라서 $\overline{QR}=2\overline{QH}$이므로 $\overline{QR}=2\sqrt{15}$

53 답 ③

ㄱ. $a=0$일 때, $l: y=2$, $m: x=-2$이므로 두 직선 l과 m은 서로 수직이다. (참)

ㄴ. a에 대하여 정리하면 $a(x+1)-y+2=0$이므로 직선 l은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 2)$를 지난다. (거짓)

ㄷ. $a=0$일 때, ㄱ에서 두 직선은 서로 수직이다.

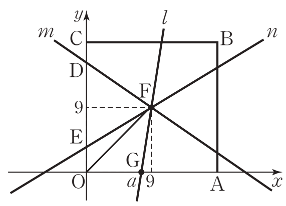
$a\neq0$일 때, 두 직선 l, m의 기울기는 각각 a, $-\frac{4}{a}$이지만

$a=-\frac{4}{a}$를 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

즉, 두 직선 l과 m이 평행이 되기 위한 실수 a의 값은 존재하지 않는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

54 답 106



두 직선 m, n이 y축과 만나는 점을 각각 D, E라 하고 점 $(9, 9)$를 F라 하자.

정사각형 OABC의 넓이가 $18^2=324$이므로

삼각형 DEF의 넓이는 $\frac{1}{6}\times324=54$ $\therefore \overline{DE}=12$

직선 l이 x축과 만나는 점을 G라 하면 사각형 OGFE의 넓이 54는 삼각형 OGF와 삼각형 OEF의 넓이의 합과 같으므로

$\overline{OE}+\overline{OG}=12$이다.

$\overline{OG}=a$이므로 $\overline{OE}=12-a$, $\overline{OD}=24-a$

$\therefore$ D$(0, 24-a)$, E$(0, 12-a)$

직선 m은 두 점 D, F를 지나므로 직선 m의 기울기는 $\frac{a-15}{9}$

직선 n은 두 점 E, F를 지나므로 직선 n의 기울기는 $\frac{a-3}{9}$

한편, 두 직선 m과 n의 기울기의 곱은 $\frac{a-15}{9}\times\frac{a-3}{9}$이므로

$\frac{1}{81}(a^2-18a+45)=\frac{1}{81}(a-9)^2-\frac{4}{9}$

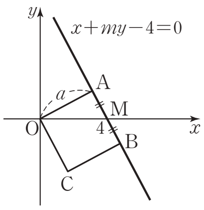
이때, $6\leq a\leq10$이므로 $a=6$일 때 최댓값 $-\frac{1}{3}$,

$a=9$일 때 최솟값 $-\frac{4}{9}$를 갖는다.

$\therefore \alpha=-\frac{1}{3}$, $\beta=-\frac{4}{9}$

따라서 $\alpha^2+\beta^2=\frac{25}{81}$이므로 $p+q=81+25=106$

55 답 5



직선 $x+my-4=0$에서

$(x-4)+my=0$

즉, 이 직선은 m의 값에 관계없이 지나는 점을 점 M$(4,\ 0)$이라 하자.

정사각형 OABC의 한 변의 길이를 a라 하면 삼각형 OAM에서

$\overline{OA}=a$, $\overline{AM}=\frac{a}{2}$, $\overline{OM}=4$이고, $\angle OAM=90^\circ$이므로

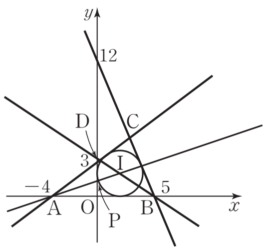
$a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=4^2$, $\frac{5}{4}a^2=16$ $\quad\therefore a=\frac{8}{\sqrt{5}}$ $(\because a>0)$

따라서 원점 O와 직선 $x+my-4=0$ 사이의 거리가 $\frac{8}{\sqrt{5}}$이므로

$\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+m^2}}$ $\quad\therefore m=\frac{1}{2}$ $(\because m>0)$

$\therefore 10m=5$

56 답 8



그림과 같이 세 직선의 교점을 A, B, C라 하고 직선 AC와 y축의 교점을 D라 하자.

$\angle$CAB의 이등분선이 y축과 만나는 점을 P라 하면

$\overline{AO}:\overline{AD}=\overline{OP}:\overline{PD}=4:5$이므로

$\overline{OP}=\frac{4}{9}\overline{OD}=\frac{4}{3}$ $\quad\therefore P\left(0,\ \frac{4}{3}\right)$

즉, 직선 AP의 방정식은 $x-3y=-4$ ⋯ ㉠

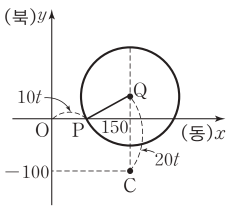
마찬가지로 $\angle$CBA의 이등분선의 방정식은 $2x+3y=10$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡의 교점이 내심 I이므로 연립하여 풀면 $x=2$, $y=2$

따라서 $a=2$, $b=2$이므로 $a^2+b^2=8$

57 답 ②

배의 현재 위치를 원점, 동쪽을 x축의 양의 방향, 북쪽을 y축의 양의 방향으로 잡으면 태풍의 중심의 현재 위치를 C라 할 때, C$(150,\ -100)$이다.



t시간 후의 배의 위치를 P, 태풍의 중심의 위치를 Q라 하면

P$(10t,\ 0)$, Q$(150,\ 20t-100)$

배가 폭풍우권 내에 있을 조건은 $\overline{PQ}\le100$이므로

$\sqrt{(150-10t)^2+(20t-100)^2}\le100$

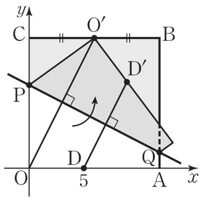
양변을 제곱하여 정리하면 $t^2-14t+45\le0$

$(t-5)(t-9)\le0$ $\quad\therefore 5\le t\le9$

즉, 배는 최초로 5시간 후에 폭풍우권 내에 들어가서 9시간 후에 폭풍우권 내에서 벗어난다.

따라서 배가 폭풍우권 내에서 항해하는 시간은 4시간이다.

58 답 17



좌표평면 위의 점 O, A, B, C, D의 좌표는 각각 $(0,\ 0)$, $(12,\ 0)$, $(12,\ 12)$, $(0,\ 12)$, $(5,\ 0)$이다.

점 O′은 선분 BC의 중점이므로 O′$(6,\ 12)$

이때, 직선 OO′과 직선 DD′은 모두 직선 PQ와 수직이므로 직선 OO′과 직선 DD′은 서로 평행하다.

따라서 두 직선의 기울기가 같으므로

$\frac{12-0}{6-0}=\frac{b-0}{a-5}$ $\quad\therefore b=2a-10$ ⋯ ㉠

$\overline{O'D'}=\overline{OD}=5$이므로

$\sqrt{(a-6)^2+(b-12)^2}=5$

양변을 제곱하면 $(a-6)^2+(b-12)^2=25$ ⋯ ㉡

$0<a<12$, $0<b<12$이므로 ㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$a=9$, $b=8$ $\quad\therefore a+b=9+8=17$

59 답 12

$\overline{BP}:\overline{PA}=1:2$이므로 $\triangle BOP:\triangle POA=1:2$

$\triangle PQA=\frac{1}{2}\triangle OAB$이려면 점 Q는 선분 OA를 $1:3$로 내분하는 점이어야 하므로 $Q\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이어야 한다.

따라서 직선 PQ의 기울기는 $\dfrac{4-\frac{1}{2}}{4-\frac{3}{2}}=\frac{7}{5}$이므로

$m+n=5+7=12$

[다른 풀이]

직선 OA의 방정식이 $y=\frac{1}{3}x$이므로 점 Q의 좌표를 Q$(3a,\ a)$ $(0\le a\le2)$라 하면

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times|6\times5-2\times3|=12$

$\triangle APQ=\frac{1}{2}\times|(6-4)\times a+(4-3a)\times2+(3a-6)\times4|$

$=\frac{1}{2}\times|8a-16|$

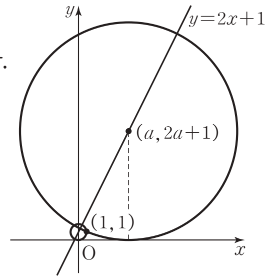
이때, $\triangle OAB=2\triangle PQA$이므로 $12=2\times\frac{1}{2}\times|8a-16|$

$|16-8a|=12$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$ $(\because 0\le a\le2)$

(이하 동일)

01 답 14

원의 중심이 직선 $y=2x+1$ 위에 있으므로 중심을 $(a,\ 2a+1)$이라 하자.
점 $(1,\ 1)$을 지나며 x축에 접하는 원의 중심의 y좌표는 양수이고 반지름의 길이는 $2a+1$이므로 구하는 원의 방정식은



$(x-a)^2+(y-2a-1)^2=(2a+1)^2$

이 원이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$(1-a)^2+(1-2a-1)^2=(2a+1)^2$에서

$a^2-6a=0$

$a(a-6)=0 \qquad \therefore a=0$ 또는 $a=6$

따라서 두 원의 반지름의 길이가 1, 13이므로 그 합은 14이다.

02 답 ⑤

$\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$이므로 $\overline{AP}=2\overline{BP} \qquad \therefore \overline{AP}^2=4\overline{BP}^2$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overline{AP}=\sqrt{(x+1)^2+(y-5)^2}$, $\overline{BP}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$이므로

$(x+1)^2+(y-5)^2=4\{(x-2)^2+(y+1)^2\}$

$x^2+y^2-6x+6y-2=0$

$\therefore (x-3)^2+(y+3)^2=20$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 $(3,\ -3)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$인 원이므로 이 도형의 길이는 원의 둘레의 길이인 $4\sqrt{5}\pi$이다.

03 답 ③

원 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$가 직선 $y=x$와 만나는 두 점의 x좌표는 방정식 $(x-2)^2+(x-1)^2=9$의 두 근이므로

$(x-2)^2+(x-1)^2=9$, 즉 $2x^2-6x-4=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3$

04 답 13

원 $(x-2)^2+(y+3)^2=5$ 위의 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 방정식은 $(1-2)(x-2)+(-1+3)(y+3)=5$이므로

$-x+2y=-3 \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

즉, 이 직선과 평행한 직선은 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선이므로

원 $(x-2)^2+(y+3)^2=5$에 접하는 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y+3=\frac{1}{2}(x-2)\pm\sqrt{5}\times\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}$

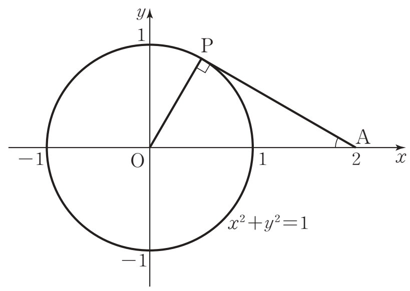
$y=\frac{1}{2}x-4\pm\frac{5}{2}$

$\therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ 또는 $y=\frac{1}{2}x-\frac{13}{2}$

한편, 이 중 점 $(1,\ -1)$을 지나지 않는 접선은 $y=\frac{1}{2}x-\frac{13}{2}$이므로 이 접선의 x절편은 13이다.

05 답 ③

그림과 같이 직선 AP가 원에 접할 때 ∠PAO의 크기가 최대가 된다.

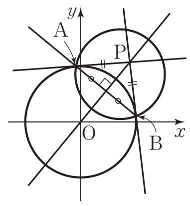


이때, $\angle OPA=90^\circ$이고 $\overline{OP}=1$, $\overline{OA}=2$이므로 $\overline{PA}=\sqrt{3}$

$\therefore \triangle POA=\frac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{PA}=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

06 답 8

$\overline{AP}=\overline{BP}$이므로 점 $P(a,\ b)$는 공통현인 $\overline{AB}$의 수직이등분선 위에 있다.
공통현의 수직이등분선은 두 원의 중심 $(0,\ 0)$, $(3,\ 4)$를 연결하는 직선이므로



$y=\frac{4}{3}x$에서 $b=\frac{4}{3}a$

따라서 $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$이므로 $\frac{6b}{a}=8$

07 답 6

x축과 만나는 두 점의 좌표가 $(-2,\ 0)$, $(3,\ 0)$이고,
y축과 만나는 두 점의 좌표가 $(0,\ \alpha)$, $(0,\ -\beta)$이므로
원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{-2+3}{2},\ \frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

이때, 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=r^2$

점 $(-2,\ 0)$을 지나므로 $\frac{25}{4}+\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=r^2 \cdots$ ㉠

또, 점 $(0,\ \alpha)$를 지나므로 $\frac{1}{4}+\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2=r^2 \cdots$ ㉡

㉠−㉡을 하면 $6-\alpha\beta=0 \qquad \therefore \alpha\beta=6$

[다른 풀이]

x축과 만나는 두 점을 $A(-2,\ 0)$, $B(3,\ 0)$
y축과 만나는 두 점을 $C(0,\ \alpha)$, $D(0,\ -\beta)$
원점을 O라 할 때, 원과 비례에 의하여
$\overline{OA}\times\overline{OB}=\overline{OC}\times\overline{OD}$이므로 $2\times3=\alpha\times\beta \qquad \therefore \alpha\beta=6$

08 답 ⑤

원의 중심을 (a, b)라 하면 원이 직선 $x=-1$에 접하므로

원의 반지름의 길이는 $|a+1|$이다.

즉, 구하는 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2=(a+1)^2$이고,

점 $(1, 0)$을 지나므로

$(1-a)^2+b^2=(a+1)^2 \qquad \therefore b^2=4a \cdots$ ㉠

중심 (a, b)가 직선 $2x-3y+4=0$ 위에 있으므로

$2a-3b+4=0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=4 \\ b=4 \end{cases}$

따라서 두 원의 중심 $(1, 2)$, $(4, 4)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{13}$

09 답 3

주어진 원의 방정식을 정리하면

$\{x-2(k-1)\}^2+(y+k)^2=-4k^2-8k+5$

이 방정식에서 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$r^2=-4k^2-8k+5=-4(k+1)^2+9$

따라서 r^2의 최댓값은 $k=-1$일 때 9이므로 반지름의 길이의 최댓값은 3이다.

10 답 ⑤

구하는 원이 x축 및 y축에 동시에 접하므로 원의 중심의 좌표가 (a, a)일 때와 $(a, -a)$일 때로 나누어 생각한다.

(i) 원의 중심이 (a, a), 반지름의 길이가 $|a|$일 때,

중심이 $y=(x-1)^2+1$의 그래프 위에 있으므로

$a=(a-1)^2+1$, $a^2-3a+2=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=2$

(ii) 원의 중심이 $(a, -a)$, 반지름의 길이가 $|a|$일 때,

중심이 $y=(x-1)^2+1$의 그래프 위에 있으므로

$-a=(a-1)^2+1$, $a^2-a+2=0$

이것을 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

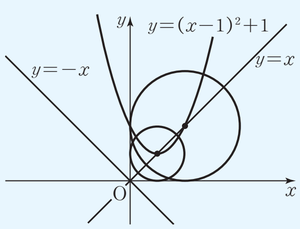
(i), (ii)에 의하여 구하는 원의 반지름의 길이는 1 또는 2이므로

두 원의 넓이의 합은 $\pi+4\pi=5\pi$

일등급 UP

＊축에 접하는 원의 특징

원이 x축 및 y축에 동시에 접할 때, 그 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다.
따라서 이차함수 $y=(x-1)^2+1$의 그래프와 두 직선 $y=\pm x$의 교점에서 원의 중심을 생각해야 한다.



한편, 그림과 같이 주어진 이차함수의 그래프와 직선 $y=-x$의 교점이 존재하지 않음을 알 수 있다.

11 답 ②

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=32$이므로

$(x+3)^2+y^2+(x-1)^2+y^2=32$

$x^2+y^2+2x-11=0$

$\therefore (x+1)^2+y^2=12$

즉, 구하는 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(-1, 0)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 원이다.

따라서 $a=-1$, $b=0$이므로

$a+b=-1$

[다른 풀이]

두 점 $A(-3, 0)$, $B(1, 0)$의 중점을 $M(-1, 0)$이라 하면 삼각형의 중선정리에 의하여

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{PM}^2)$이고

$\overline{AM}=2$이므로

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=32$에서

$2\times(2^2+\overline{PM}^2)=32$

$\therefore \overline{PM}=2\sqrt{3}$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 $M(-1, 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 원이다.

12 답 ②

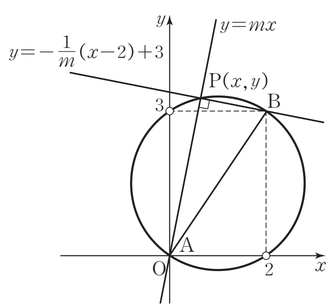
점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 다음 두 식을 모두 만족시킨다.

$\begin{cases} y=mx \cdots ㉠ \\ y=-\dfrac{1}{m}(x-2)+3 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠은 점 $A(0, 0)$을 지나며 기울기가 m인 직선이고

㉡은 점 $B(2, 3)$을 지나며 기울기가 $-\dfrac{1}{m}$인 직선이다.

두 직선의 기울기의 곱이 $m\times\left(-\dfrac{1}{m}\right)=-1$이므로 수직이다.



따라서 두 직선의 교점 P에 대하여 삼각형 APB는 직각삼각형이므로 점 P는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

이때, ㉠, ㉡은 x축에 수직이거나 평행한 직선을 나타내지 못하므로 두 점 $(0, 3)$, $(2, 0)$을 제외한 도형이다. 그런데 두 점의 포함 유무는 도형의 길이에 영향을 미치지 않으므로 점 P가 나타내는 도형의 길이는 $\sqrt{13}\pi$이다.

13 답 ③

두 점 A$(a, 0)$, B$(0, b)$ $(a>0, b>0)$라 하면

$\overline{AB}=6$에서 $a^2+b^2=36$ ⋯ ㉠

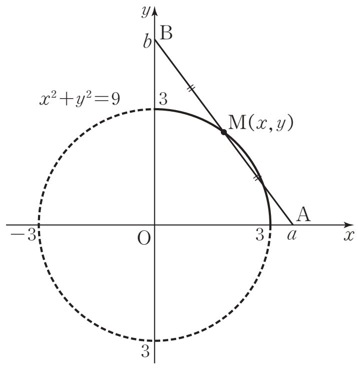
이때, 선분 AB의 중점 M의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}$

$\therefore a=2x, b=2y$ (단, $x>0, y>0$) ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $(2x)^2+(2y)^2=36$이므로

$x^2+y^2=9$ $(x>0, y>0)$



따라서 선분 AB의 중점 M이 나타내는 도형은 그림과 같이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 3인 사분원이므로 그 길이는

$\frac{1}{4}\times 2\pi\times 3=\frac{3}{2}\pi$

14 답 16

원의 중심 $(1, 1)$과 직선 $x-2y+2k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$보다 작아야 하므로

$\frac{|1-2+2k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}<\sqrt{5}$에서

$|2k-1|<5$

$-5<2k-1<5$

$\therefore -2<k<3$

따라서 정수 k의 최댓값 $M=2$이다.

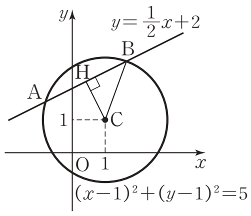
또, 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=5$와

직선 $y=\frac{1}{2}x+2$가 만나는 두 점을

A, B라 하고, 원의 중심 C$(1, 1)$에서

직선에 내린 수선의 발을 H라 하면

점 H는 $\overline{AB}$의 중점이고



$\overline{CH}=\frac{|1-2+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$이므로

직각삼각형 CBH에서

$\overline{BH}=\sqrt{\overline{CB}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

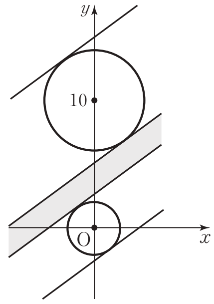
$d=\overline{AB}=2\overline{BH}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \sqrt{5}Md=\sqrt{5}\times 2\times\frac{8\sqrt{5}}{5}=16$

15 답 ④

직선 $y=\frac{3}{4}x+a$가 두 원 사이에 있으려면

그림과 같은 영역에 위치해 있으면 된다.



(i) 원 $x^2+y^2=4$의 중심이 $(0, 0)$이고

반지름의 길이가 2이다.

즉, 직선 $3x-4y+4a=0$에 접할 때는

$\frac{|4a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$이므로 $|4a|=10$

$\therefore a=\pm\frac{5}{2}$

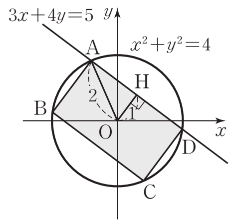
(ii) 원 $x^2+(y-10)^2=16$의 중심이 $(0, 10)$이고 반지름의 길이가 4이다. 즉, 직선 $3x-4y+4a=0$에 접할 때는

$\frac{|-40+4a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=4$이므로 $|a-10|=5$ $\quad\therefore a=5$ 또는 $a=15$

따라서 구하는 a의 값의 범위는 $\frac{5}{2}<a<5$이므로 정수 a의 최댓값은 4이다.

16 답 ④

원의 중심 O에서 직선 $3x+4y-5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면 원점과 직선 $3x+4y-5=0$ 사이의 거리는



$\overline{OH}=\frac{|5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$

삼각형 OHA는 직각삼각형이므로

$\overline{HA}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

$\triangle OHA=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \square ABCD=8\triangle OHA=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

17 답 125

구하는 접선의 기울기를 m이라 하면 원과 접선이 점 $(-1, 2)$에서 접하므로 원의 중심 $(3, -1)$과 접점 $(-1, 2)$를 잇는 선분은 직선과 수직이다. 즉, $m\times\frac{2-(-1)}{-1-3}=-1$ $\quad\therefore m=\frac{4}{3}$

구하는 접선의 방정식은 $y=\frac{4}{3}(x+1)+2$, 즉 $y=\frac{4}{3}x+\frac{10}{3}$이므로

x절편은 $-\frac{5}{2}$, y절편은 $\frac{10}{3}$이다.

따라서 이 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{10}{3}=\frac{25}{6}$ $\quad\therefore 30S=125$

[다른 풀이]

원 $(x-3)^2+(y+1)^2=25$ 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선을 공식을 이용하여 구해 보면 $(-1-3)(x-3)+(2+1)(y+1)=25$

$\therefore 4x-3y+10=0$

(이하 동일)

18 답 ⑤

직선 $x-y+1=0$, 즉 $y=x+1$의 기울기가 1이므로 구하는 접선의 기울기는 -1이다. 접선의 방정식을 $y=-x+b$라 하면 원 $x^2+y^2-4y-12=0$, 즉 $x^2+(y-2)^2=16$의 중심 $(0, 2)$와 직선 $x+y-b=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 4와 같으므로

$\dfrac{|0+2-b|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4$, $|-b+2|=4\sqrt{2}$

$\therefore b=2\pm4\sqrt{2}$

따라서 두 접선의 y절편의 차는 $(2+4\sqrt{2})-(2-4\sqrt{2})=8\sqrt{2}$이다.

[다른 풀이]

$y=-x+b$에서 $x=b-y$

이것을 $x^2+y^2-4y-12=0$에 대입하면

$(b-y)^2+y^2-4y-12=0$

$2y^2-2(b+2)y+b^2-12=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(b+2)^2-2(b^2-12)=0$이어야 하므로

$-b^2+4b+28=0 \qquad \therefore b=2\pm4\sqrt{2}$

따라서 두 접선의 y절편의 차는 $(2+4\sqrt{2})-(2-4\sqrt{2})=8\sqrt{2}$이다.

19 답 ①

점 $(-1, 3)$을 지나는 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은 $y-3=m(x+1)$

이때, 원의 중심 $(1, -2)$와 직선 $mx-y+m+3=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{10}$과 같아야 하므로

$\dfrac{|m-(-2)+m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$

$|2m+5|=\sqrt{10}\sqrt{m^2+1}$

$\therefore 6m^2-20m-15=0$

이 이차방정식의 두 근이 두 접선의 기울기 m_1, m_2이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $m_1m_2=\dfrac{-15}{6}=-\dfrac{5}{2}$

[다른 풀이]

점 $(-1, 3)$을 지나는 직선의 기울기를 m이라 하면

직선의 방정식은 $y-3=m(x+1)$

$(x-1)^2+(y+2)^2=10$에 $y=m(x+1)+3$을 대입하면

$(x-1)^2+(mx+m+5)^2=10$

$\therefore (m^2+1)x^2+2(m^2+5m-1)x+(m^2+10m+16)=0$

원과 직선이 접하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

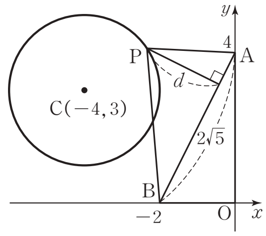
$\dfrac{D}{4}=(m^2+5m-1)^2-(m^2+1)(m^2+10m+16)=0$

$\therefore 6m^2-20m-15=0$

이 이차방정식의 두 근이 두 접선의 기울기 m_1, m_2이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $m_1m_2=-\dfrac{5}{2}$

20 답 ④

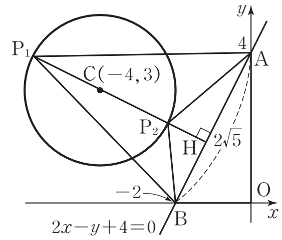


[그림 1]

[그림 1]에서 삼각형 APB의 밑변을 $\overline{AB}$라 하면 원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리 d가 높이가 된다.

$\therefore \triangle APB=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times d=\sqrt{5}d$

이때, d가 최대일 때 삼각형 APB의 넓이는 최대이고, d가 최소일 때 삼각형 ABP의 넓이는 최소이다.



[그림 2]

[그림 2]와 같이 원의 중심 C$(-4, 3)$에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

d의 최댓값은 $\overline{P_1H}$의 길이,

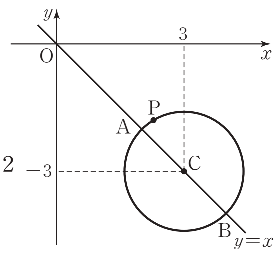
d의 최솟값은 $\overline{P_2H}$의 길이

이므로 d의 최댓값과 d의 최솟값의 차는

$\overline{P_1H}-\overline{P_2H}=\overline{P_1P_2}=$(지름의 길이)$=4$

$\therefore M-m=\sqrt{5}\times4=4\sqrt{5}$

21 답 8



원점 O와 원 $(x-3)^2+(y+3)^2=2$ 위의 점 P(x, y)에 대하여 $x^2+y^2=\overline{OP}^2$이다.

그림과 같이 원 $(x-3)^2+(y+3)^2=2$의 중심을 C$(3, -3)$, 이 원과 직선 OC의 교점을 A, B라 하자.

$\overline{OP}^2$의 값은 점 P가 A일 때 최소, B일 때 최대가 된다. 즉, 최소와 최대일 때의 x좌표 a, b는 원 $(x-3)^2+(y+3)^2=2$와 직선 $y=-x$의 교점의 x좌표이므로

$(x-3)^2+(-x+3)^2=2$, 즉 $x^2-6x+8=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$ab=8$

22 답 ①

점 P(x, y)에 대하여 $\dfrac{y}{x+3}=k$(k는 상수)라 하면 $kx-y+3k=0$

이고 점 P(x, y)는 원 $(x+1)^2+y^2=1$ 위의 점이므로

직선 $kx-y+3k=0$은 원 $(x+1)^2+y^2=1$과 만나야 한다.

즉, 원의 중심 $(-1, 0)$과 직선 $kx-y+3k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1보다 작거나 같아야 하므로

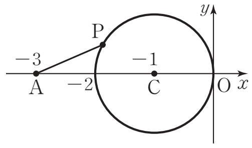
$\dfrac{|k\times(-1)-0+3k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}\le1$

양변을 제곱하여 부등식을 풀면 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le k\le\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

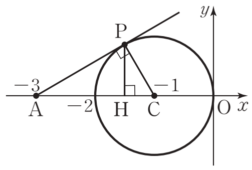
따라서 구하는 최댓값은 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다.

[다른 풀이]

[그림 1]과 같이 두 점 $A(-3,\ 0)$, $P(x,\ y)$라 하면 $\dfrac{y}{x+3}=\dfrac{y-0}{x-(-3)}$은 $\overline{AP}$의 기울기이다. 즉, [그림 2]과 같이 직선 AP의 기울기가 양수이고 원 $(x+1)^2+y^2=1$에 접할 때 기울기가 최대이다.



[그림 1]



[그림 2]

이때, 원의 중심을 $C(-1,\ 0)$이라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 PAC에서

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CP}^2}=\sqrt{3}$이고

$\triangle PAC \backsim \triangle HAP$ (AA 닮음)

이므로 직선 AP의 기울기는 $\dfrac{\overline{PH}}{\overline{AH}}=\dfrac{\overline{PC}}{\overline{AP}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

23 답 98

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$(x^2+y^2-4x-6y+10)+m(x^2+y^2-8x-2y+8)=0$

$(m\neq-1)$ ⋯ ㉠

이라 하자. ㉠에 x축의 방정식 $y=0$을 대입하면

$(m+1)x^2-4(2m+1)x+2(4m+5)=0$

원이 x축에 접하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=4(2m+1)^2-2(m+1)(4m+5)=0$

$4m^2-m-3=0$, $(4m+3)(m-1)=0$

$\therefore m=-\dfrac{3}{4}$ 또는 $m=1$

이 값을 각각 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+y^2+8x-18y+16=0$, $x^2+y^2-6x-4y+9=0$

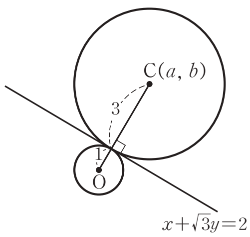
따라서 두 원의 중심의 좌표가 $(-4,\ 9)$, $(3,\ 2)$이므로

$d^2=(-4-3)^2+(9-2)^2=98$

24 답 ④

두 원의 중심을 $O(0,\ 0)$, $C(a,\ b)$라 하자.

공통접선 $x+\sqrt{3}y=2$의 기울기는 $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이고 외접하는 두 원의 공통접선은 $\overline{OC}$에 수직이므로 $\overline{OC}$의 기울기는 $\sqrt{3}$이다.



$\dfrac{b-0}{a-0}=\sqrt{3}$ $\quad\therefore b=\sqrt{3}a$ ⋯ ㉠

또, 두 원이 외접하면 중심 사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합과 같으므로 $\sqrt{a^2+b^2}=1+3$

$\therefore a^2+b^2=16$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=2\sqrt{3}$ ($\because a>0,\ b>0$)

$\therefore ab=4\sqrt{3}$

[다른 풀이]

외접하는 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-a)^2+(y-b)^2=9$의 공통접선의 방정식은 $(x^2+y^2-1)-\{(x-a)^2+(y-b)^2-9\}=0$

$\therefore 2ax+2by=a^2+b^2-8$

이것이 $x+\sqrt{3}y=2$와 같으므로

$\dfrac{2a}{1}=\dfrac{2b}{\sqrt{3}}=\dfrac{a^2+b^2-8}{2}$

연립하여 풀면

$a=2$, $b=2\sqrt{3}$ ($\because a>0,\ b>0$)

$\therefore ab=4\sqrt{3}$

25 답 ②

ㄱ. 방정식 $(x-y+1)+m(x^2+y^2-1)=0$은 m의 값에 관계없이 $x-y+1=0$과 $x^2+y^2-1=0$을 만족시키는 해를 갖는다. 즉, m의 값에 관계없이 두 도형 $x-y+1=0$과 $x^2+y^2-1=0$의 교점인 $(0,\ 1)$과 $(-1,\ 0)$을 지난다. (참)

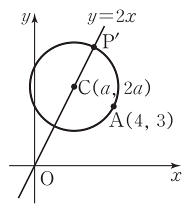
ㄴ. 도형 $(x-y+1)+m(x^2+y^2-1)=0$은 $m=0$일 때에는 직선 $x-y+1=0$을 나타내고, $m\neq0$일 때에는 원을 나타내며 원 $x^2+y^2-1=0$이 될 수 없다.
왜냐 하면 실수 x, y의 값에 관계없이 $(x-y+1)+m(x^2+y^2-1)=t(x^2+y^2-1)$을 만족시키는 실수 t가 존재하지 않기 때문이다.
따라서 도형 C와 원 $x^2+y^2=1$의 교점은 $(0,\ 1)$, $(-1,\ 0)$뿐이다. (참)

ㄷ. $m=0$이면 도형 $(x-y+1)+m(x^2+y^2-1)=0$은 $x-y+1=0$이 되어 직선 $x-y+1=0$과 일치한다. 이때, 교점은 무수히 많다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

26 답 5

구하는 원은 중심이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로 중심을 $C(a,\ 2a)$라 하자.



그림과 같이 $\overline{OP}$의 길이를 최대가 되게 하는 점은 직선 OC와 원의 교점 중 O에서 멀리 떨어진 점이다.

이 점을 $P'(b,\ 2b)$라 하면

$\overline{OP'}=\sqrt{5}b=3\sqrt{5}$이므로 $b=3$

$\therefore P'(3,\ 6)$

원 위에 두 점 $P'(3,\ 6)$과 $A(4,\ 3)$이 있으므로

$\overline{CP'}^2=\overline{CA}^2$

$(a-3)^2+(2a-6)^2=(a-4)^2+(2a-3)^2$

$a=2$

$\therefore C(2,\ 4)$

따라서 원의 반지름의 길이는 $\overline{CA}=\sqrt{5}$이므로

$r^2=5$

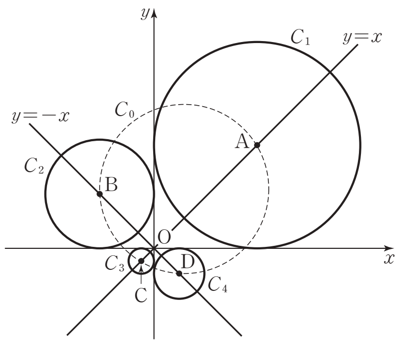
27 답 ④

점 $(-3,\ 2)$가 제2사분면 위의 점이므로 x축 및 y축에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 중심이 $(-r,\ r)$이다.
이때, 두 점 $(-r,\ r)$, $(-3,\ 2)$ 사이의 거리가 r와 같으므로
$(-r+3)^2+(r-2)^2=r^2 \qquad \therefore r^2-10r+13=0$
이 이차방정식의 두 근이 점 $(-3,\ 2)$를 지나고 x축 및 y축에 동시에 접하는 두 원의 반지름의 길이이다. 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=10$, $\alpha\beta=13$
따라서 두 원의 넓이의 합은

$$\begin{aligned}\pi\alpha^2+\pi\beta^2&=\pi(\alpha^2+\beta^2)=\pi\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}\\&=\pi(10^2-2\times13)=74\pi\end{aligned}$$

28 답 2

x축 및 y축에 동시에 접하는 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있고, 그림에서 네 원 C_1, C_2, C_3, C_4의 반지름의 길이가 각각 6, 3, 1, r이므로
$\overline{AO}=6\sqrt{2}$, $\overline{BO}=3\sqrt{2}$, $\overline{CO}=\sqrt{2}$, $\overline{DO}=\sqrt{2}r$



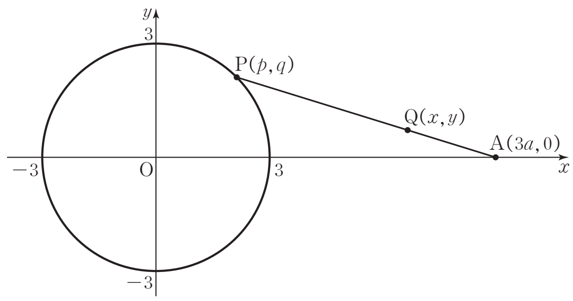
따라서 원과 비례의 관계에서 $\overline{AO}\times\overline{CO}=\overline{BO}\times\overline{DO}$이므로
$6\sqrt{2}\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}\times\sqrt{2}r \qquad \therefore r=2$

29 답 ③

원이 점 $(-1,\ 5)$를 지나므로 $x=-1$, $y=5$를 대입하여
정리하면 $a-b=6 \cdots$ ㉠
한편, 원이 y축과 만나는 두 점의 y좌표를 y_1, y_2라 하면
y_1, y_2는 $x^2+y^2+ax-4y+b=0$에 $x=0$을 대입한 이차방정식
$y^2-4y+b=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$y_1+y_2=4$, $y_1y_2=b$
$|y_1-y_2|=4\sqrt{3}$에서 $(y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2=(4\sqrt{3})^2$
$16-4b=48 \qquad \therefore b=-8 \cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $a=-2$
즉, 원의 방정식은 $x^2+y^2-2x-4y-8=0 \cdots$ ㉢이므로
이 원이 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 x_1, x_2라 하면 x_1, x_2는 $y=0$을 ㉢에 대입한 $x^2-2x-8=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $x_1+x_2=2$, $x_1x_2=-8$
$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2^2-4\times(-8)}=6$
따라서 원이 x축과 만나는 두 점 사이의 거리는 6이다.

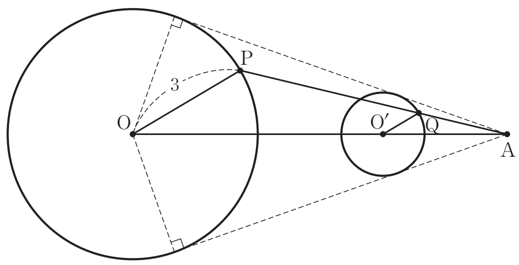
30 답 ①

그림과 같이 바퀴의 중심을 원점으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 위의 점 $P(p,\ q)$를 손잡이라 하면 $p^2+q^2=9 \cdots$ ㉠



x축 위의 한 점 $A(3a,\ 0)$을 고정핀이라 하고, 표식의 좌표를 $Q(x,\ y)$라 하면 점 Q는 $\overline{PA}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로
$x=\dfrac{6a+p}{3}$, $y=\dfrac{q}{3}$
즉, $p=3x-6a$, $q=3y$를 ㉠에 대입하면
$(3x-6a)^2+(3y)^2=9$
$\therefore (x-2a)^2+y^2=1$
따라서 표식의 잔상이 나타내는 원의 반지름의 길이는 1이다.

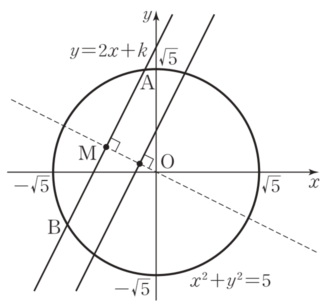
[다른 풀이]



그림과 같이 바퀴의 중심, 고정핀, 손잡이, 표식을 각각 O, A, P, Q라 하자. $\overline{OA}$를 $2:1$로 내분하는 점 O′에 대하여
$\overline{PA}:\overline{QA}=\overline{OA}:\overline{O'A}=3:1$
두 삼각형 POA와 QO′A는 $\angle QAO'$을 공유하므로
$\triangle POA \backsim \triangle QO'A$ (SAS 닮음)
따라서 $\overline{O'Q}=1$을 만족시키므로 점 Q는 중심이 O′이고 반지름의 길이가 1인 원 위에 있음을 알 수 있다.

31 답 ③

원과 직선의 두 교점을 연결한 선분 AB는 원의 현이다.
선분 AB의 중점 M에 대하여
$\overline{AB}\perp\overline{OM}$이므로 점 M은 원점 O를 지나며 직선 $y=2x+k$에 수직인 직선 위에 있다.



따라서 그림과 같이 선분 AB의 중점 M이 나타내는 도형은 원의 지름이고 그 길이는 $2\sqrt{5}$이다.

[다른 풀이]

원과 직선이 두 점에서 만나려면 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $2x-y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$보다 작아야 하므로 $\dfrac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}<\sqrt{5}$

$|k|<5 \qquad \therefore\ -5<k<5$

두 점 A, B는 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로

$A(a,\ 2a+k)$, $B(b,\ 2b+k)(-5<k<5)$라 하고

선분 AB의 중점을 $M(x,\ y)$라 하면

$x=\dfrac{a+b}{2}$, $y=a+b+k\ (-5<k<5)$ ⋯ ㉠

한편, 두 점 A, B는 원과 직선의 교점이므로 a, b는 $y=2x+k$를 $x^2+y^2=5$에 대입한 $x^2+(2x+k)^2=5$, 즉

$5x^2+4kx+(k^2-5)=0$의 두 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여 $a+b=-\dfrac{4k}{5}\ (-5<k<5)$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-\dfrac{2k}{5}$, $y=\dfrac{k}{5}$

$\therefore\ y=-\dfrac{1}{2}x$

이때, $-5<k<5$에서 $-2<-\dfrac{2}{5}k<2$이므로 $-2<x<2$

따라서 구하는 도형의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{2}x\ (-2<x<2)$이므로

선분 AB의 중점 M이 나타내는 도형의 길이는 두 점 $(-2,\ 1)$, $(2,\ -1)$을 잇는 선분의 길이와 같으므로 $2\sqrt{5}$이다.

32 답 ①

직선이 원의 둘레를 이등분하기 위해서는 직선 $my=\dfrac{x-1}{m-1}$이 원의 중심 $(3,\ 2)$를 지나야 한다.

즉, $2m=\dfrac{3-1}{m-1}$에서 $m(m-1)=1$이므로 $m^2-m-1=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 상수 m의 값의 합은 1이다.

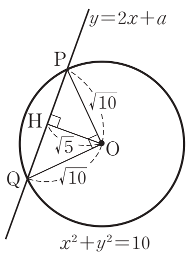
33 답 100

두 점 P, Q는 원 위의 점이므로

$\overline{OP}=\overline{OQ}=\sqrt{10}$이다.

또, $\overline{OP}\perp\overline{OQ}$이므로 삼각형 OPQ는 $\angle POQ$가 직각인 직각이등변삼각형이다.

원의 중심 O에서 현 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{HP}=\overline{HQ}$이므로



$\overline{OH}=\dfrac{\overline{OP}}{\sqrt{2}}=\sqrt{5}$

또한, 원점 O와 직선 $y=2x+a$ 사이의 거리는

$\overline{OH}=\dfrac{|a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$이므로

$|a|=5 \qquad \therefore\ a=\pm5$

직선 $2x-y\pm5=0$의 x절편, y절편은 각각 $\mp\dfrac{5}{2}$, ±5(복호동순)

이므로 이 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

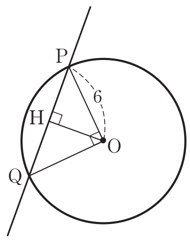
$S=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}\times5=\dfrac{25}{4}$

$\therefore\ 16S=100$

34 답 96

직선 $y=a(x+2)+4$는 a의 값에 관계없이 점 $A(-2,\ 4)$를 지나는 직선이다. 이 직선이 원 $x^2+y^2=36$의 중심 $O(0,\ 0)$을 지날 때, 즉 $a=-2$일 때 $\overline{PQ}$의 길이의 최댓값은 원의 지름의 길이와 같다.

$\therefore\ M=12$



한편, 그림과 같이 직선 $y=a(x+2)+4$가 원점을 지나지 않을 때 원의 중심 O에서 이 직선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PQ}=2\sqrt{6^2-\overline{OH}^2}$

즉, $\overline{OH}$의 길이가 최대일 때, $\overline{PQ}$의 길이는 최소이다.

그런데 직선 $y=a(x+2)+4$는 a의 값에 관계없이 점 $A(-2,\ 4)$를 지나는 직선이므로 점 H가 점 A일 때 $\overline{OH}$의 길이가 $2\sqrt{5}$로 최대이고, 이때 $\overline{PQ}=8$로 최소이다.

$\therefore\ m=8$

$\therefore\ Mm=12\times8=96$

35 답 ①

직선의 방정식을 $y=\dfrac{1}{m}(x+1)$이라 하면 중심이 $(1,\ 0)$인 반원과 서로 다른 두 점에서 만날 때 직선이 태극문양과 서로 다른 5개의 점에서 만나게 된다.

즉, $m>0$이고 점 $(1,\ 0)$과 직선 $x-my+1=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이인 1보다 작다.

즉, $\dfrac{|1-0+1|}{\sqrt{1^2+(-m)^2}}<1$이므로

$2<\sqrt{1+m^2}$

$3<m^2$

$\therefore\ m>\sqrt{3}\ (\because\ m>0)$

이때, 이를 만족시키는 최소의 자연수 m은 2이고 그때의 직선의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$이므로 두 점 P, H의 좌표는 $P(1,\ 1)$, $H(1,\ 0)$이다.

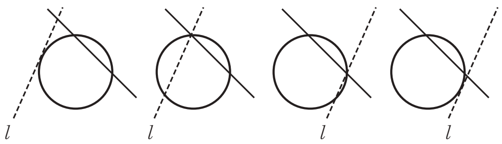
따라서 삼각형 AHP의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times2\times1=1$

36 답 ③

원 $x^2+y^2=1$과 직선 $x+y=1$에 의하여 좌표평면이 4개의 영역으로 나누어져 있는 상태에서 직선을 1개 추가하여 3개의 영역이 더 생기도록 하려면 추가되는 직선 $y=2x+k$가 두 도형 $x^2+y^2=1$, $x+y=1$과 2개의 점에서 만나도록 하면 된다.

직선 $y=2x+k$는 기울기가 2이고 k의 값에 따라 평행이동하는 직선이다. 이 직선 l이라 하면 직선 $l : y=2x+k$가 두 도형 $x^2+y^2=1$, $x+y=1$과 2개의 점에서 만나도록 평행이동시켜 보면 그림과 같이 4개의 직선을 만들 수 있고, 각각 좌표평면을 7개의 영역으로 나누고 있다.



37 답 40

점 A$(-2, 0)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식을 $y=m(x+2)$라 하면 원 $x^2+y^2=1$과의 교점인 두 점 P, Q의 x좌표는 $\begin{cases} y=m(x+2) \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=1 \cdots ㉡ \end{cases}$의 해이다.

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$(\overset{\text{(가)}}{\boxed{1+m^2}})x^2+4m^2x+(\overset{\text{(나)}}{\boxed{4m^2-1}})=0$

이 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 두 점 P, Q의 좌표는

P$(\alpha, m(\alpha+2))$, Q$(\beta, m(\beta+2))$이고

$\overline{AP}=(\alpha+2)\sqrt{\boxed{1+m^2}}$ $(\because \alpha>-2)$

$\overline{AQ}=(\beta+2)\sqrt{\boxed{1+m^2}}$ $(\because \beta>-2)$

한편, 이차방정식의 두 근이 α, β이므로

$(\boxed{1+m^2})x^2+4m^2x+(\boxed{4m^2-1})$

$=(\boxed{1+m^2})(x-\alpha)(x-\beta)$

이 식이 x에 대한 항등식이므로 $x=\overset{\text{(다)}}{\boxed{-2}}$를 대입하면

$(\boxed{1+m^2})(\alpha+2)(\beta+2)=\boxed{3}$ ←(라)

$\therefore \overline{AP}\times\overline{AQ}=(\boxed{1+m^2})(\alpha+2)(\beta+2)=\boxed{3}$ (일정)

따라서 $f(m)=1+m^2$, $g(m)=4m^2-1$, $t=-2$, $s=3$이므로

$f(t)+g(s)=f(-2)+g(3)=1+(-2)^2+4\times3^2-1=40$

일등급 UP

*** 원과 비례의 관계의 활용**

위 과정은 중학교에서 배운 원과 비례를 좌표를 이용하여 증명한 것이다. 다음 그림과 같이 도형을 이용하여도 같은 결과를 얻는다.

$\overline{AP}\times\overline{AQ}$

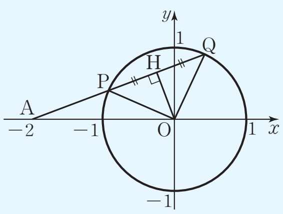
$=(\overline{AH}-\overline{PH})\times(\overline{AH}+\overline{HQ})$

$=\overline{AH}^2-\overline{PH}^2$ $(\because \overline{PH}=\overline{HQ})$

$=\overline{AH}^2-(\overline{OP}^2-\overline{OH}^2)$

$=\overline{AH}^2+\overline{OH}^2-1=\overline{AO}^2-1$

$=2^2-1=3$



38 답 7

접선의 기울기를 m이라 하면 점 $(k, 1)$을 지나므로

구하는 접선의 방정식은 $y-1=m(x-k)$

$\therefore mx-y-mk+1=0$

원의 중심 $(0, 0)$과 이 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같으므로

$\dfrac{|-mk+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$

양변을 제곱하여 정리하면

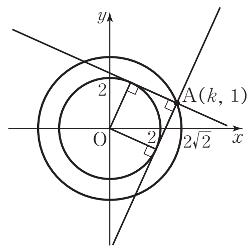
$(k^2-4)m^2-2km-3=0$

이차방정식의 두 근을 m_1, m_2라 하면 두 접선이 서로 수직이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$m_1m_2=\dfrac{-3}{k^2-4}=-1 \qquad \therefore k^2=7$

[다른 풀이]

일반적으로 원 밖의 점에서 원에 그은 두 접선이 수직일 때, 이 점이 나타내는 도형은 원이다.



그림과 같이 점 A$(k, 1)$은 원점 O가 중심이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원 위에 있다. 즉,

$\overline{OA}=\sqrt{k^2+1^2}=2\sqrt{2}$

$\therefore k^2=7$

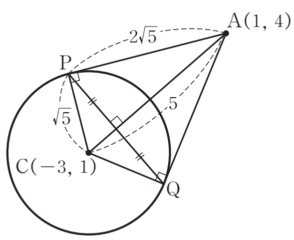
39 답 4

그림과 같이 원 $x^2+y^2+6x-2y+5=0$, 즉 $(x+3)^2+(y-1)^2=5$의 중심 C$(-3, 1)$과 A$(1, 4)$ 사이의 거리는

$\overline{AC}=\sqrt{(-3-1)^2+(1-4)^2}=5$

점 A에서 원에 그은 접선의 길이는

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CP}^2}=\sqrt{25-5}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$



한편, △APC≡△AQC (RHS 합동)이고,

$\overline{AC}\perp\overline{PQ}$이므로 □APCQ$=2$△APC

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{PQ}=2\times\left(\dfrac{1}{2}\times\overline{CP}\times\overline{AP}\right)$

$\therefore \overline{PQ}=4$

40 답 ②

원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=4$이다.

이 직선이 원 $(x-6)^2+y^2=1$과 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심 $(6, 0)$과 직선 $ax+by=4$ 사이의 거리가 반지름의 길이 1보다 작아야 하므로

$\dfrac{|6a-4|}{\sqrt{a^2+b^2}}<1$ ⋯ ㉠

또, 점 $\mathrm{P}(a, b)$는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

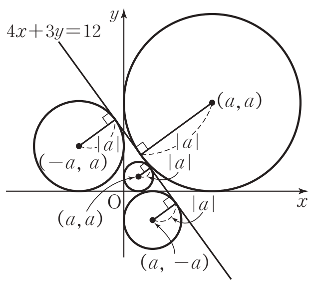
$a^2+b^2=4$

이것을 ㉠에 대입하면 $\dfrac{|6a-4|}{\sqrt{4}}<1$

$-2<6a-4<2$ $\quad\therefore \dfrac{1}{3}<a<1$

41 답 ⑤

그림과 같이 조건을 만족시키는 원을 원의 중심의 x좌표와 y좌표가 같은 부호일 때와 다른 부호일 때로 경우를 나누어서 생각한다.



(i) x좌표와 y좌표의 부호가 같을 때,

원의 중심이 (a, a)이고 원의 반지름의 길이가 $|a|$이다.

점 (a, a)와 직선 $4x+3y=12$ 사이의 거리가 $|a|$이므로

$\dfrac{|4a+3a-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=|a|$에서

$|7a-12|=|5a|$

$7a-12=\pm 5a$

$\therefore a=1$ 또는 $a=6$

(ii) x좌표와 y좌표의 부호가 다를 때,

원의 중심이 $(a, -a)$이고 원의 반지름의 길이가 $|a|$이다.

점 $(a, -a)$와 직선 $4x+3y=12$ 사이의 거리가 $|a|$이므로

$\dfrac{|4a-3a-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=|a|$에서

$|a-12|=|5a|$

$a-12=\pm 5a$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=2$

(i), (ii)에 의하여 구하는 원의 반지름의 길이는 $|a|$이므로

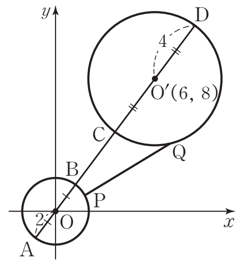
반지름의 길이가 가장 클 때는 $a=6$,

반지름의 길이가 가장 작을 때는 $a=1$이다.

따라서 두 원의 중심 $(6, 6)$과 $(1, 1)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(6-1)^2+(6-1)^2}=5\sqrt{2}$

42 답 64



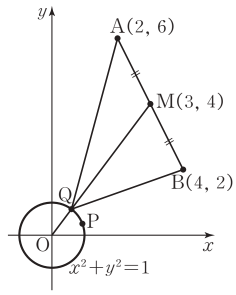
두 원의 중심을 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{O'}(6, 8)$이라 하고 두 중심을 지나는 직선을 그리면, 그림과 같다. 직선과 두 원의 교점을 x좌표가 작은 것부터 차례로 A, B, C, D라 하면 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이는 점 P가 점 B의 위치에, 점 Q가 점 C의 위치에 있을 때 최소이고, 점 P가 점 A의 위치에, 점 Q가 점 D의 위치에 있을 때 최대이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이의 최솟값은

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{OO'}}-2-4=10-6=4$

$\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이의 최댓값은 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{OO'}}+2+4=10+6=16$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이의 최댓값과 최솟값의 곱은 $16\times 4=64$

43 답 42



두 점 $\mathrm{A}(2, 6)$, $\mathrm{B}(4, 2)$의 중점을 $\mathrm{M}(3, 4)$라 하고, 원 $x^2+y^2=1$과 $\overline{\mathrm{OM}}$의 교점을 Q라 하면 중선정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2=2(\overline{\mathrm{PM}}^2+\overline{\mathrm{AM}}^2)$

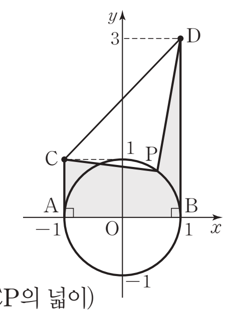
$=2(\overline{\mathrm{PM}}^2+5)$

$\geq 2(\overline{\mathrm{QM}}^2+5)$

$\overline{\mathrm{QM}}=\overline{\mathrm{OM}}-\overline{\mathrm{OQ}}=5-1=4$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$의 최솟값은 $2\times(4^2+5)=42$

44 답 ②



네 점 $\mathrm{A}(-1, 0)$, $\mathrm{B}(1, 0)$, $\mathrm{C}(-1, 1)$, $\mathrm{D}(1, 3)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}$를 지름으로 하는 원의 방정식은

$x^2+y^2=1$이다. 이 원 위의 점을 $\mathrm{P}(x, y)\,(y\neq 0)$라 하자.

(다각형 ABDPC의 넓이)

=(사다리꼴 ABDC의 넓이)−(삼각형 DCP의 넓이)

이므로 다각형 ABDPC의 넓이는 삼각형 DPC의 넓이가 최소일 때 최대가 된다.

(사다리꼴 ABDC의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}})\times\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{2}\times(1+3)\times 2=4$ ⋯ ㉠

직선 CD의 방정식은 $x-y+2=0$

점 P와 직선 $x-y+2=0$ 사이의 거리의 최솟값은

(원의 중심 O와 직선 $x-y+2=0$ 사이의 거리)

−(원의 반지름의 길이)$=\sqrt{2}-1$

이므로 삼각형 DPC의 넓이의 최솟값은

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times(\sqrt{2}-1)=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 다각형 ABDPC의 넓이의 최댓값은

$4-(2-\sqrt{2})=2+\sqrt{2}$

45 답 7

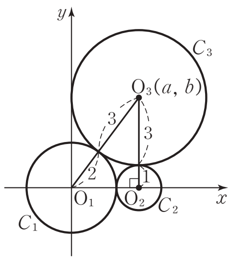
세 원 C_1, C_2, C_3의 중심을 각각 $O_1(0,\ 0)$, $O_2(3,\ 0)$, $O_3(a,\ b)$라 하면 세 원은 모두 외접하므로 중심 사이의 거리는 각각 반지름의 길이의 합과 같다.

$\overline{O_1O_2}=2+1=3$, $\overline{O_2O_3}=1+3=4$,

$\overline{O_3O_1}=3+2=5$

즉, 삼각형 $O_1O_2O_3$은 $\overline{O_3O_1}$이 빗변인 직각삼각형이다.

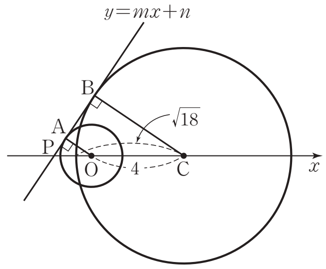
또한, 원 C_3의 중심 $O_3(a,\ b)$에 대하여 $ab>0$이므로 세 원은 그림과 같다.



따라서 $a=3$, $b=4$이므로 $a+b=7$

46 답 5

두 원 $x^2+y^2=2$, $(x-4)^2+y^2=18$의 중심을 각각 $O(0,\ 0)$, $C(4,\ 0)$ 공통접선의 접점을 각각 A, B라 하고 구하는 직선이 두 원의 중심이 지나는 x축과 만나는 점을 P라 하자.



$\triangle PAO \backsim \triangle PBC$ (AA 닮음)이므로

$\overline{PO} : \overline{PC}=\overline{AO} : \overline{BC}=1 : 3$

즉, 점 P는 $\overline{OC}$를 $1 : 3$으로 외분하는 점이다.

따라서 점 P의 좌표는 $(-2,\ 0)$이다. 구하는 직선의 기울기가 m이므로 직선의 방정식은 $y=m(x+2)$라 할 수 있다.

원 $x^2+y^2=2$의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $mx-y+2m=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{2}$와 같으므로

$\dfrac{|2m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}$에서 $4m^2=2m^2+2$ $\quad \therefore m^2=1$

이때, $n=2m$이므로 $n^2=4m^2=4$ $\quad \therefore m^2+n^2=5$

[다른 풀이]

직선 $y=mx+n$이 원 $x^2+y^2=2$과 접하므로 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $mx-y+n=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{2}$와 같다.

즉, $\dfrac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}$

$\therefore n^2-2m^2=2 \cdots$ ㉠

또, 직선 $y=mx+n$이 원 $(x-4)^2+y^2=18$과 접하므로 원의 중심 $(4,\ 0)$과 직선 $mx-y+n=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $3\sqrt{2}$와 같다. 즉, $\dfrac{|4m+n|}{\sqrt{m^2+1}}=3\sqrt{2}$

$(4m+n)^2=18m^2+18$

$\therefore n^2-2m^2=-8mn+18 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $mn=2$

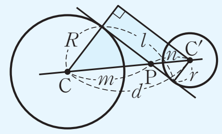
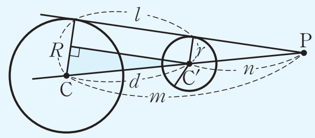
$n=\dfrac{2}{m}$를 ㉠에 대입하면

$\dfrac{4}{m^2}-2m^2=2$에서 $m^4+m^2-2=0$

$(m^2-1)(m^2+2)=0$ $\quad \therefore m^2=1$ ($\because m$은 실수)

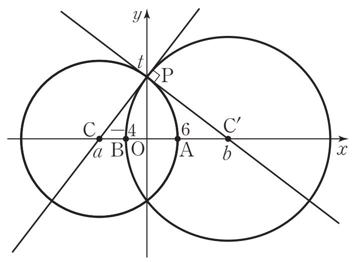
이것을 ㉠에 대입하면 $n^2=4$

$\therefore m^2+n^2=5$

> **일등급 Up**
>
> **＊두 원의 공통접선**
>
> 두 원의 중심 C, C′에 대하여 직선 CC′과 공통접선의 교점을 P라 하자.
>
> (i) 점 P는 선분 CC′을 $m : n$으로 내분하는 점이다.
>
> 
>
> (ii) 점 P는 선분 CC′을 $m : n$으로 외분하는 점이다.
>
> 

47 답 12

그림과 같이 x축 위에 중심이 있고 점 $A(6,\ 0)$, $P(0,\ t)$를 지나는 원의 중심을 $C(a,\ 0)$, x축 위에 중심이 있고 점 $B(-4,\ 0)$, $P(0,\ t)$를 지나는 원의 중심을 $C'(b,\ 0)$이라 하면 직교하는 두 원의 접선은 각각 다른 원의 중심을 지나므로 삼각형 PCC′은 직각삼각형이다. 이때, $a<0$, $b>0$이다.



$\overline{CA}^2=\overline{CP}^2$에서 $(a-6)^2=a^2+t^2$

$\therefore t^2=-12a+36 \cdots$ ㉠

$\overline{C'B}^2=\overline{C'P}^2$에서 $(b+4)^2=b^2+t^2$

$\therefore t^2=8b+16 \cdots$ ㉡

$\overline{CC'}^2=\overline{CP}^2+\overline{C'P}^2$에서 $(a-b)^2=a^2+t^2+b^2+t^2$

$\therefore t^2=-ab \cdots$ ㉢

㉠, ㉡에서 $-12a+36=8b+16$ $\quad \therefore a=\dfrac{5-2b}{3} \cdots$ ㉣

㉡, ㉢에서 $8b+16=-ab$이므로 ㉣을 대입하면

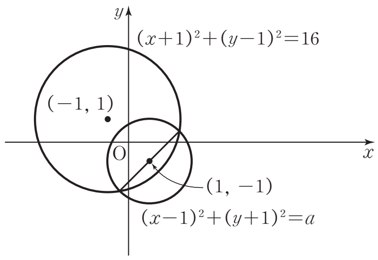
$8b+16=-\left(\dfrac{5-2b}{3}\right)b$, $2b^2-29b-48=0$

$(2b+3)(b-16)=0$ $\quad \therefore b=16$ ($\because b>0$)

㉣에서 $a=-9$이므로 ㉢에서 $t^2=144$

$\therefore t=12$ ($\because t>0$)

48 답 8



원 $(x+1)^2+(y-1)^2=16$이 원 $(x-1)^2+(y+1)^2=a$의 둘레의 길이를 이등분하기 위해서는 두 원의 공통현이 원 $(x-1)^2+(y+1)^2=a$의 지름이 되어야 한다. 즉, 원의 중심 $(1,\ -1)$이 공통현 위에 있어야 한다.

두 원 $x^2+y^2+2x-2y-14=0$,

$x^2+y^2-2x+2y+2-a=0$의 공통현의 방정식은

$4x-4y-16+a=0$

따라서 이 직선이 점 $(1,\ -1)$을 지나므로 $a=8$

49 답 ③

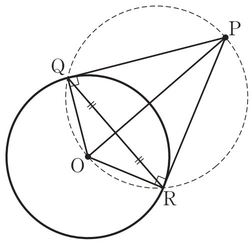
ㄱ. $\overline{OQ}\perp\overline{PQ}$, $\overline{OR}\perp\overline{PR}$에서

$\angle OQP+\angle ORP=180°$이므로

네 점 O, P, Q, R는 $\overline{OP}$가 지름인

원 $x(x-a)+y(y-b)=0$ 위에

있다. (참)



ㄴ. ㄱ에서 네 점 O, P, Q, R를 지나는

원의 방정식은 $x^2+y^2-ax-by=0$이므로

두 점 Q, R는 두 원

$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \cdots ㉠ \\ x^2+y^2-ax-by=0 \cdots ㉡ \end{cases}$

의 교점이다. (거짓)

ㄷ. 두 점 Q, R를 지나는 직선의 방정식은 두 원 ㉠, ㉡의 공통현을 포함하는 직선이므로

$x^2+y^2-r^2-(x^2+y^2-ax-by)=0$

$ax+by-r^2=0$

$\therefore ax+by=r^2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

일등급 UP

* 원에 그은 두 접선의 접점을 지나는 직선의 방정식

원 $x^2+y^2=r^2$ 밖의 한 점 $P(a,\ b)$에서 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 $Q(x_1,\ y_1)$, $R(x_2,\ y_2)$라 하면 두 접선 PQ, PR의 방정식은

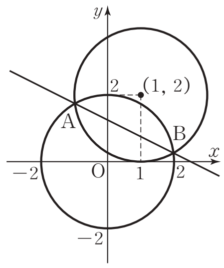
$x_1x+y_1y=r^2$, $x_2x+y_2y=r^2$

이다. 이때, 점 $P(a,\ b)$는 두 접선 위의 점이므로

$ax_1+by_1=r^2$, $ax_2+by_2=r^2$

그런데 이 식은 직선 $ax+by=r^2$이 두 점 $Q(x_1,\ y_1)$, $R(x_2,\ y_2)$를 지남을 의미한다. 두 점을 지나는 직선은 유일하므로 직선 QR의 방정식은 $ax+by=r^2$이다.

50 답 7



점 $(1,\ 0)$에서 x축에 접하는 호 AB를 원의 일부로 갖는 원의 방정식을 구하자.

이 호는 반지름의 길이가 2인 원의 일부이므로 구하는 원의 반지름의 길이도 2이다.

또, 이 원은 점 $(1,\ 0)$에서 x축에 접하므로 이 원의 중심은 $(1,\ 2)$이다.

따라서 이 원의 방정식은 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$

이때, 접힌 선분 AB는 원 $x^2+y^2=4 \cdots ㉠$와

원 $(x-1)^2+(y-2)^2=4 \cdots ㉡$의 공통현이므로

㉠$-$㉡을 하면 직선 AB의 방정식은

$2x+4y-5=0$

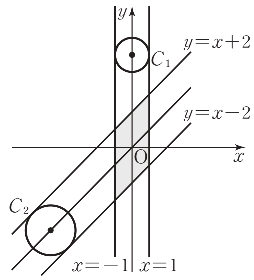
따라서 직선 AB의 x절편은 $\frac{5}{2}$이므로

$p+q=7$

51 답 8

원 C_1은 y축과 평행하고 원점으로 부터 1만큼 떨어진 두 직선 $x=1$ 및 $x=-1$과 접하면서 그 사이를 움직인다.

원 C_2는 기울기가 1이고 원점으로 부터 $\sqrt{2}$만큼 떨어진 두 직선 $y=x+2$ 및 $y=x-2$와 접하면서 그 사이를 움직인다.



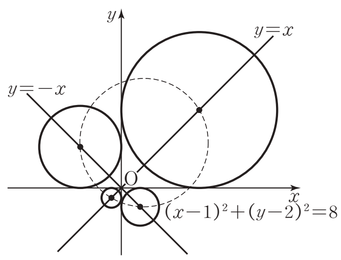
따라서 두 원이 움직이는 영역의 공통부분은 네 직선 $x=1$, $x=-1$, $y=x+2$, $y=x-2$로 둘러싸인 영역이므로

구하는 넓이는 $2\times4=8$

52 답 16

x축 및 y축에 접하는 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다.

그림과 같이 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=8$과 두 직선 $y=x$, $y=-x$의 교점이 4개이므로 x축 및 y축에 동시에 접하는 원도 4개이고 그 교점이 각 원의 중심이고 교점의 x좌표 또는 y좌표의 절댓값이 반지름의 길이이다. ⓐ



(i) 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=8$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 a, b라 하면 $(x-1)^2+(x-2)^2=8$, 즉 $2x^2-6x-3=0$의 두 근이 a, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=3$, $ab=-\frac{3}{2}$

두 원의 넓이의 합은 $\pi a^2+\pi b^2$이므로

$\pi a^2+\pi b^2=\pi(a^2+b^2)=\pi\{(a+b)^2-2ab\}$

$=\pi\left\{3^2-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}=12\pi$ ---- ⓑ

(ii) 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=8$과 직선 $y=-x$의 교점의 x좌표를 c, d라 하면 $(x-1)^2+(-x-2)^2=8$, 즉 $2x^2+2x-3=0$의 두 근이 c, d이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$c+d=-1$, $cd=-\frac{3}{2}$

두 원의 넓이의 합은 $\pi c^2+\pi d^2$이므로

$\pi c^2+\pi d^2=\pi(c^2+d^2)=\pi\{(c+d)^2-2cd\}$

$=\pi\left\{(-1)^2-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}=4\pi$ ---- ⓒ

(i), (ii)에 의하여 구하는 네 원의 넓이의 합은 16π이므로

$S=16$ ---- ⓓ

| 채점기준 |

ⓐ 원이 x축, y축에 접하는 조건을 찾는다.	[30%]
ⓑ 원과 직선 $y=x$가 만날 경우 원의 넓이를 구한다.	[30%]
ⓒ 원과 직선 $y=-x$가 만날 경우 원의 넓이를 구한다.	[30%]
ⓓ 구하는 모든 원의 넓이의 합을 계산하여 S의 값을 구한다.	[10%]

53 답 4

중심이 (a, b)인 원과 두 직선 $2x+y=0$, $x-2y=0$이 접하므로

$\frac{|2a+b|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|a-2b|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$

$2a+b=\pm(a-2b)$

$\therefore b=3a$ 또는 $b=-\frac{1}{3}a$ ---- ⓐ

이 원이 점 $(3, 2)$를 지나므로 중심은 제1사분면에 있다.

따라서 $b=3a\,(a>0)$이고, 이때 반지름의 길이는

$\frac{|2a+b|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|2a+3a|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}a$ ---- ⓑ

구하는 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-3a)^2=5a^2$이라 하면

점 $(3, 2)$를 지나므로 $(3-a)^2+(2-3a)^2=5a^2$에서

$5a^2-18a+13=0$

$(a-1)(5a-13)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=\frac{13}{5}$ ---- ⓒ

따라서 작은 원의 중심은 $a=1$일 때, 점 $(1, 3)$이므로

$a+b=1+3=4$ ---- ⓓ

| 채점기준 |

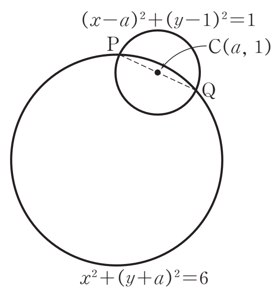
ⓐ a와 b의 관계식을 구한다.	[30%]
ⓑ 반지름의 길이를 a 또는 b에 대한 식으로 나타낸다.	[30%]
ⓒ 원의 방정식을 세우고, a, b의 값을 각각 구한다.	[30%]
ⓓ $a+b$의 값을 구한다.	[10%]

54 답 1

$\overline{PQ}$는 두 원의 공통현이다.

한 원의 현의 길이는 지름의 길이보다 작거나 같으므로 공통현의 길이는 두 원의 지름의 길이보다 작거나 같다.

따라서 $\overline{PQ}$의 길이가 최대일 때는 $\overline{PQ}$가 두 원 중 작은 원인 $(x-a)^2+(y-1)^2=1$의 지름일 때이다. ---- ⓐ



이때, 공통현 PQ는 원 $(x-a)^2+(y-1)^2=1$의 중심 C$(a, 1)$을 지난다. 공통현 PQ의 방정식은

$\{(x-a)^2+(y-1)^2-1\}-\{x^2+(y+a)^2-6\}=0$

$\therefore ax+(a+1)y=3$ ---- ⓑ

이 방정식이 점 C$(a, 1)$을 지나므로 $a^2+a-2=0$

$(a+2)(a-1)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=1$

따라서 양수 a의 값은 1이다. ---- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 선분 PQ의 길이가 최대가 되는 조건을 찾는다.	[40%]
ⓑ 공통현 PQ의 방정식을 구한다.	[30%]
ⓒ 양수 a의 값을 구한다.	[30%]

55 답 ⑤

직선 l의 방정식은 $y=\sqrt{3}x$이고 직선 m의 방정식은 $y=\underbrace{-\sqrt{3}}_{(가)}x$이다. 원 위의 제1사분면에 있는 점을 P$(a, b)$라 하면 $a>0$, $b>0$이고 $a^2+b^2=r^2$ ⋯ ㉠이다.

점 P에서 x축과 두 직선 l, m에 내린 수선의 발이 각각 A, B, C이므로 $\overline{PA}=b$, $\overline{PB}=\frac{|\sqrt{3}a-b|}{\underset{(나)}{2}}$, $\overline{PC}=\frac{|\sqrt{3}a+b|}{2}$ ⋯ ㉡

㉡을 대입하여 정리하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\frac{3a^2+3b^2}{2}$

$=\frac{3}{2}(a^2+b^2)=\underbrace{\frac{3}{2}r^2}_{(다)}\ (\because ㉠)$

따라서 $s=-\sqrt{3}$, $t=2$, $f(r)=\frac{3}{2}r^2$이므로

$f(s\times t)=f(-2\sqrt{3})=18$

56 답 25

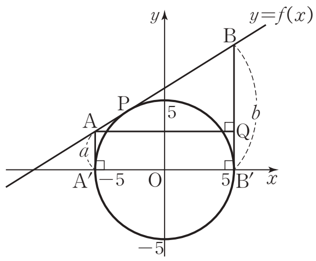
$f(x)=ax+b$라 하자. 직선 $f(x)=ax+b$와 원 $x^2+y^2=25$가 접하므로 이차방정식 $x^2+(ax+b)^2=25$는 중근을 갖는다. 즉, 이차방정식 $(a^2+1)x^2+2abx+b^2-25=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2b^2-(a^2+1)(b^2-25)$

$=25a^2-b^2+25=0$ ⋯ ㉠

$\therefore f(-5)f(5)=(-5a+b)(5a+b)=b^2-25a^2=25\ (\because ㉠)$

[다른 풀이]



두 점 $(-5,\ 0)$, $(5,\ 0)$을 각각 A′, B′이라 하고 두 직선 $x=-5$, $x=5$와 직선 $y=f(x)$의 교점을 각각 A, B라 하면 두 점 A, B의 좌표는 각각 $\mathrm{A}(-5,\ f(-5))$, $\mathrm{B}(5,\ f(5))$이고

$\overline{\mathrm{AA'}}=f(-5)=a$, $\overline{\mathrm{BB'}}=f(5)=b$라 하고 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 선분 BB′과 만나는 점을 Q라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=a+b$, $\overline{\mathrm{BQ}}=b-a$

이때, $\overline{\mathrm{AQ}}=10$이므로 직각삼각형 AQB에서

$(a+b)^2=(b-a)^2+10^2$

$4ab=100\qquad \therefore ab=25$

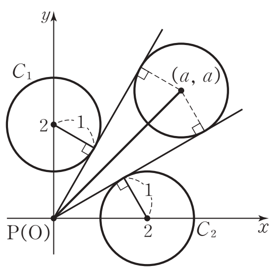
$\therefore f(-5)f(5)=ab=25$

57 답 ⑤

관람지점 P를 좌표평면 위의 원점이라 하면 전시물 A의 밑면은 중심이 $(0,\ 2)$이고 반지름의 길이가 1인 원 C_1이다.

또한, 전시물 B의 밑면은 중심이 $(2,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원 C_2이다. 두 전시물 사이로 전시물 C가 보여야 하므로 원점에서 그은 두 원의 접선 사이에 전시물 C의 밑면이 존재해야 한다.

이때, 원점에서 전시물 C의 밑면의 중심까지의 거리가 최소가 되려면 그림과 같이 전시물 C의 밑면이 두 접선에 모두 접해야 한다.



따라서 전시물 C의 밑면은 중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 접선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y=\sqrt{3}x$에 모두 접하는 반지름의 길이가 1인 원이다.

중심의 좌표를 $(a,\ a)$라 할 때, 중심에서 두 접선까지의 거리는 각각 반지름의 길이 1과 같으므로

$\frac{|a-\sqrt{3}a|}{\sqrt{1+3}}=\frac{|\sqrt{3}a-a|}{\sqrt{3+1}}=1$

$a=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$

원점에서 전시물 C의 밑면의 중심까지의 거리는 $\sqrt{2}a$이므로 d의 최솟값은 $\sqrt{6}+\sqrt{2}$이다.

58 답 5

$\overline{\mathrm{PB}}=3\overline{\mathrm{PO}}$에서 $\overline{\mathrm{PB}}:\overline{\mathrm{PO}}=3:1$을 만족시키는 점 P는 $\overline{\mathrm{BO}}$를 $3:1$로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원이다. 이 원을 C_1이라 하면

내분점은 $\left(\frac{3\times0+1\times(-3)}{3+1},\ 0\right)=\left(-\frac{3}{4},\ 0\right)$이고,

외분점은 $\left(\frac{3\times0-1\times(-3)}{3-1},\ 0\right)=\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$이므로

원 C_1의 중심은 $\left(\frac{3}{8},\ 0\right)$, 반지름의 길이는 $\frac{9}{8}$이다.

또한, $3\overline{\mathrm{PO}}=9\overline{\mathrm{PA}}$에서 $\overline{\mathrm{PO}}:\overline{\mathrm{PA}}=3:1$을 만족시키는 점 P는 $\overline{\mathrm{OA}}$를 $3:1$로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원이다. 이 원을 C_2라 하면

내분점은 $\left(\frac{3\times a+1\times0}{3+1},\ 0\right)=\left(\frac{3a}{4},\ 0\right)$이고,

외분점은 $\left(\frac{3\times a-1\times0}{3-1},\ 0\right)=\left(\frac{3a}{2},\ 0\right)$이므로

원 C_2의 중심은 $\left(\frac{9a}{8},\ 0\right)$, 반지름의 길이는 $\frac{3a}{8}$이다.

즉, $\overline{\mathrm{PB}}=3\overline{\mathrm{PO}}=9\overline{\mathrm{PA}}$를 만족시키는 점 P가 존재하기 위한 조건은 두 원 C_1, C_2가 교점을 가지는 조건이다.

두 원의 중심 사이의 거리가 $\frac{9a-3}{8}\ (a>0)$이므로

$\frac{|9-3a|}{8}\le\frac{9a-3}{8}\le\frac{9+3a}{8}$이어야 한다.

즉, $|3-a|\le3a-1\le3+a$

(i) $|3-a|^2\le(3a-1)^2$일 때,

$(3-a)^2-(3a-1)^2\le0$

$(a+1)(a-1)\ge0$

$\therefore a\ge1$ ($\because$ a는 양수)

(ii) $3a-1\le3+a$일 때,

$a\le2$

(i), (ii)에 의하여

$1\le a\le2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로 $\alpha^2+\beta^2=5$이다.

[다른 풀이]

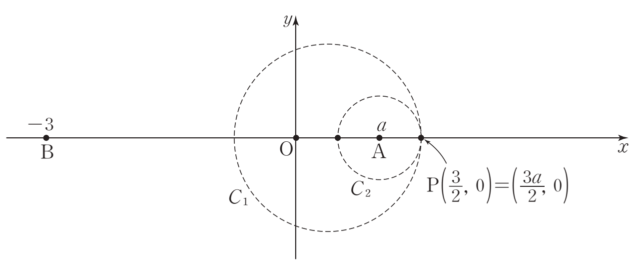
수직선을 이용하면 조금 더 직관적으로 해결할 수 있다.

위 풀이에서 정한 두 원 C_1, C_2가 교점 P를 가지는 조건은

(i) a가 최소일 때는

($\overline{\mathrm{BO}}$를 $3:1$로 외분하는 점)$=$($\overline{\mathrm{OA}}$를 $3:1$로 외분하는 점)

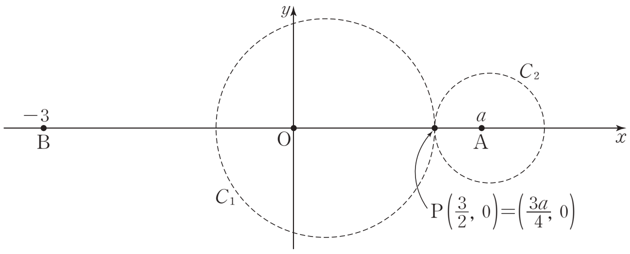
에서 $a=1$



(ⅱ) a가 최대일 때는

($\overline{BO}$를 3 : 1로 외분하는 점)=($\overline{OA}$를 3 : 1로 내분하는 점)

에서 $a=2$



(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $1\le a\le 2$

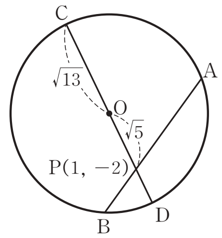
따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로 $\alpha^2+\beta^2=5$이다.

59 답 80

먼저 $\overline{AB}$의 길이를 구한다.

점 $\mathrm{P}(1,\ -2)$와 원점을 지나는 직선이 원과 만나는 두 점을 C, D라 하자. $\overline{OC}=\overline{OD}=\sqrt{13}$이고

$\overline{OP}=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$



원의 성질에 의하여

$\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$이므로

$2\overline{PB}\times\overline{PB}=(\overline{OC}+\overline{OP})(\overline{OD}-\overline{OP})$ ($\because$ $\overline{PA}=2\overline{PB}$)

$2\overline{PB}^2=(\sqrt{13}+\sqrt{5})(\sqrt{13}-\sqrt{5})$ $\quad\therefore$ $\overline{PB}=2$, $\overline{PA}=4$

$\therefore$ $\overline{AB}=\overline{PA}+\overline{PB}=6$

직선 AB의 기울기를 m이고 이 직선은 점 $\mathrm{P}(1,\ -2)$를 지나므로

$y=m(x-1)-2$ ⋯ ㉠, 즉 $mx-y-m-2=0$

원점과 직선 AB 사이의 거리를 d라 하면

$d=\sqrt{(\sqrt{13})^2-\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2}=2$이므로 $\frac{|-m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$

$(m+2)^2=4(m^2+1)$, $3m^2-4m=0$

$\therefore$ $m=\frac{4}{3}$ ($\because$ $m\ne0$) ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 직선 AB의 방정식은 $y=\frac{4}{3}x-\frac{10}{3}$

따라서 $m=\frac{4}{3}$, $n=\frac{10}{3}$이므로 $18mn=80$

60 답 6

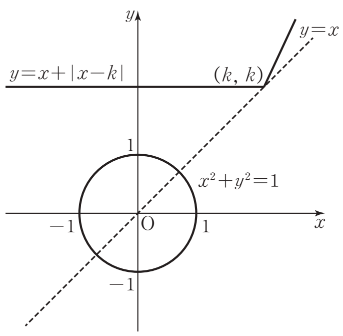
도형

$y=x+|x-k|$

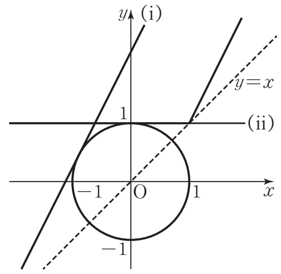
$=\begin{cases}2x-k & (x>k)\\ k & (x\le k)\end{cases}$

는 점 $(k,\ k)$에서 꺾이는 직선을 나타낸다.

따라서 두 도형의 그래프는 그림과 같다.



두 도형이 만나려면 다음 그림과 같이 두 접하는 상황 사이를 움직이면 된다.



(ⅰ) $x>k$인 직선 $y=2x-k$가 원에 접할 때

원점과 $y=2x-k$ 사이의 거리가 1이므로

$\frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}\le1$

$\therefore$ $-\sqrt{5}\le k\le\sqrt{5}$

(ⅱ) $k=1$인 경우 직선 $y=1$은 원이 접하므로 $k\le1$

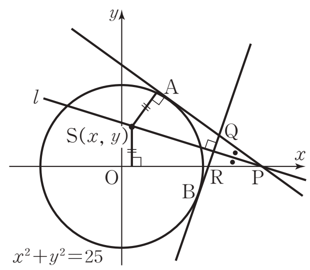
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 두 도형이 만나기 위한 k의 값의 범위가

$-\sqrt{5}\le k\le1$이므로 상수 k의 최댓값 $M=1$, 최솟값 $m=-\sqrt{5}$

$\therefore$ $M^2+m^2=6$

61 답 ①

그림과 같이 접선 AP와 x축이 이루는 각을 이등분하는 직선 중에서 기울기가 음수인 직선을 l이라 할 때, 삼각형 PQR가 $\overline{PQ}=\overline{PR}$인 이등변삼각형이 되려면 접선 QR가 직선 l에 수직이어야 한다.



원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $\mathrm{A}(3,\ 4)$에서의 접선 $3x+4y=25$와 x축이 이루는 각을 이등분하는 직선 l 위의 점을 $S(x,\ y)$라 하면

$\frac{|3x+4y-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=|y|$

따라서 직선 l의 방정식은 $3x-y=25$ 또는 $3x+9y=25$

이때, 기울기가 음수인 직선은 $3x+9y=25$이다. ⋯ ㉠

한편, 원 위의 점 $\mathrm{B}(a,\ b)$에서 원 $x^2+y^2=25$에 그은 접선의 방정식은 $ax+by=25$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡이 서로 수직이므로 $3a+9b=0$ ⋯ ㉢

또, 점 $\mathrm{B}(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점이므로 $a^2+b^2=25$ ⋯ ㉣

㉢, ㉣을 연립하면 $a^2=\frac{45}{2}$

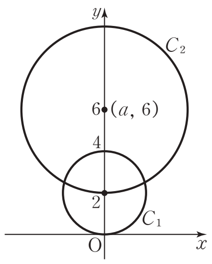
$\therefore$ $a=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ ($\because$ $a>0$), $b=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ ($\because$ ㉢)

$\therefore$ $ab=-\frac{15}{2}$

62 답 5

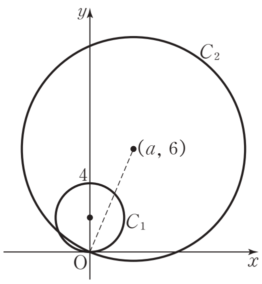
조건 (나)에서 두 원의 교점을 지나며 x축에 접하는 원이 오직 한 개 존재하므로 다음과 같이 나누어 생각하자.

(i) 두 원의 교점의 y좌표가 같을 때,



두 원의 중심의 x좌표가 같을 때이므로 $a=0$이고 그림에서 $2<b<6$이므로 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 $(0, 3)$, $(0, 4)$, $(0, 5)$의 3이다. 이것은 모두 조건 (다)를 만족시킨다.

(ii) 두 원의 교점 중 한 점이 x축 위에 있을 때,



그림과 같이 $a\neq0$이고 두 점 $(0, 0)$, $(a, 6)$ 사이의 거리가 원 C_2의 반지름의 길이 b와 같으므로 $a^2+6^2=b^2$, $|a|\le10$, $b>0$을 만족시키는 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 $(8, 10)$, $(-8, 10)$의 2이다.

(i), (ii)에 의하여 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 5이다.

12 도형의 이동

문제편 141P

01 답 2

이차함수 $y=x^2$의 그래프의 꼭짓점이 $(0, 0)$이므로 $(0, 0)$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 $(1, 2)$이고, 이것을 다시 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하면 $(-2, -1)$이다.

$\therefore ab=2$

02 답 ④

직선 $l: x+2y+4=0$을 원점에 대하여 대칭이동한

직선 l_1의 방정식은 $-x-2y+4=0$

즉, $x+2y-4=0$ ⋯ ㉠

직선 $l: x+2y+4=0$을 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한

직선 l_2의 방정식은 $x+2(y-a)+4=0$ 즉,

$x+2y-2a+4=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$-4=-2a+4$ $\quad\therefore a=4$

03 답 1

원 $(x-2)^2+(y+4)^2=9$의 중심이 $(2, -4)$이고 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 점이

원 $(x+12)^2+(y-8)^2=r^2$의 중심인 $(-12, 8)$이므로

$2+p=-12$, $-4+q=8$ $\quad\therefore p=-14$, $q=12$

이때, 반지름의 길이는 변하지 않으므로 $r^2=9$

$\therefore r=3\ (\because r>0)$ $\quad\therefore p+q+r=1$

04 답 2

직선 $y=ax+b$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하였을 때, 원래의 그래프와 일치하기 위해서는 $a=1$이거나 $a=-1$, $b=0$일 때이다. 그런데 $b\neq0$이므로 $a=1$ ⋯ ㉠

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=0$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하였을 때, 원래의 그래프와 일치하기 위해서는 중심인 점 (a, b)가 직선 $y=-x$ 위에 있어야 하므로 $b=-a$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=1$, $b=-1$이므로 $a^2+b^2=2$

05 답 ⑤

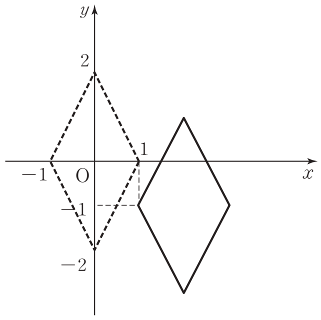
$f(2-x)=f(2+x)$를 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다. 즉, 이차함수 $f(x)=x^2+ax+3$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-\frac{a}{2}$이므로

$-\frac{a}{2}=2$ $\quad\therefore a=-4$

$\therefore f(a)=f(-4)=(-4)^2+(-4)\times(-4)+3=35$

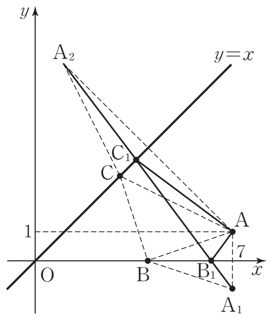
06 답 ①

$2|x-2|+|y+1|=2$의 그래프는 $2|x|+|y|=2$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 그림과 같다.



07 답 10

그림과 같이 점 A를 x축과 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 각각 A_1, A_2라 하면 삼각형 ABC의 둘레의 길이는 $\overline{A_1B}+\overline{BC}+\overline{CA_2}$와 같으므로 두 점 B와 C가 각각 점 B_1과 점 C_1에 있을 때, $\overline{A_1B}+\overline{BC}+\overline{CA_2}=\overline{A_1A_2}$로 최소가 된다.



두 점 A_1, A_2의 좌표가 $A_1(7,\ -1)$, $A_2(1,\ 7)$이므로

$\overline{A_1A_2}=\sqrt{(1-7)^2+(7+1)^2}=10$

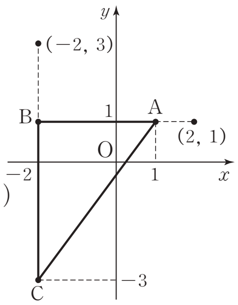
08 답 12

점 $A(1,\ 1)$ $\xrightarrow[\text{1만큼 평행이동}]{x\text{축의 방향으로}}$ 점 $(2,\ 1)$

$\xrightarrow[\text{대칭이동}]{y\text{축에 대하여}}$ 점 $B(-2,\ 1)$

$\xrightarrow[\text{2만큼 평행이동}]{y\text{축의 방향으로}}$ 점 $(-2,\ 3)$

$\xrightarrow[\text{대칭이동}]{x\text{축에 대하여}}$ 점 $C(-2,\ -3)$



세 점 A, B, C를 좌표평면에 나타내면 그림과 같고 둘레의 길이는

$3+4+5=12$

09 답 ⑤

이차함수 $y=2x^2-4x-4=2(x-1)^2-6$의 그래프의 꼭짓점은 $(1,\ -6)$, 이차함수 $y=2x^2+12x+20=2(x+3)^2+2$의 그래프의 꼭짓점은 $(-3,\ 2)$이므로 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 8만큼 평행이동한 것이다.

또한, 평행이동하기 전의 원의 중심을 $(a,\ b)$라 하면

원 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$의 중심이 $(-1,\ 2)$이므로

$a-4=-1,\ b+8=2\quad \therefore a=3,\ b=-6$

따라서 평행이동에 의하여 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$로 옮겨지는 원의 중심이 $(3,\ -6)$이고 반지름의 길이가 1이므로

$(x-3)^2+(y+6)^2=1$

10 답 5

두 사람이 던진 주사위에 의하여 점은 다음과 같이 움직인다.

연수		1회	2회	3회	4회	5회
주사위의 눈		1	2	5	4	3
말의 위치	$(0,\ 0)$	$(1,\ 0)$	$(2,\ 0)$	$(0,\ 2)$	$(0,\ 3)$	$(0,\ 4)$

은진		1회	2회	3회	4회	5회
주사위의 눈		2	6	3	4	5
말의 위치	$(0,\ 0)$	$(1,\ 0)$	$(0,\ 1)$	$(0,\ 2)$	$(0,\ 3)$	$(3,\ 0)$

따라서 두 사람의 말이 위치한 두 점 사이의 거리는 5이다.

11 답 ③

ㄱ. 점의 좌표는 위치를 나타낸다. 즉, 점 $(y,\ x)$는 x좌표가 y이고 y좌표가 x인 것을 의미한다.

따라서 점 $(y,\ x)$를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 $-q$만큼 평행이동하면 점 $(y+p,\ x-q)$로 이동한다. (참)

ㄴ. ㄷ. 도형은 위치가 아닌 문자 자체가 좌표의 의미를 가진다.

즉, 문자 x가 x좌표, 문자 y가 y좌표를 의미한다.

따라서 도형 $f(y,\ x)=0$이나 함수 $y=f(x)$의 그래프 모두 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 $-q$만큼 평행이동하면 문자 x에 $(x-p)$를, 문자 y에 $(y+q)$를 대입한 도형 $f(y+q,\ x-p)=0$이나 함수 $y=f(x-p)-q$의 그래프로 이동한다. (ㄴ: 거짓, ㄷ: 참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

12 답 4

도형 $f(x,\ y)=0$의 그래프가 점 $(a,\ b)$를 지날 때,

$f(a,\ b)=0$ … ㉠을 만족시킨다.

이때, 도형 $f(y-1,\ 2-x)=0$의 그래프가 지나는 점을 ㉠을 이용하여 구하면

$y-1=a,\ 2-x=b$

즉, $x=\underbrace{\boxed{-b+2}}_{(가)},\ y=\underbrace{\boxed{a+1}}_{(나)}$

에서 도형 $f(y-1,\ 2-x)=0$의 그래프는

점 $(\boxed{-b+2},\ \boxed{a+1})$을 지남을 알 수 있다.

점의 이동을 살펴보면 도형의 이동을 알 수 있다.

$(a,\ b)$

직선 $y=x$에 대하여 대칭이동

$\Rightarrow (b,\ a)$

y축에 대하여 대칭이동

$\Rightarrow (-b,\ a)$

x축의 방향으로 $\underbrace{\boxed{2}}_{(다)}$만큼, y축의 방향으로 $\underbrace{\boxed{1}}_{(라)}$만큼 평행이동

$\Rightarrow (\boxed{-b+2},\ \boxed{a+1})$

따라서 $g(b)=-b+2$, $h(a)=a+1$이고, $p=2$, $q=1$이므로

$g(q)+h(p)=g(1)+h(2)=1+3=4$

13 답 ②

이차함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이고, 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+3$의 축이 $x=-\dfrac{b}{2a}$이므로

$-\dfrac{b}{2a}=1$ $\quad\therefore 2a+b=0$ ⋯ ㉠

또한, 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+3$의 최솟값이 2이므로

$a>0$ ⋯ ㉡

$f(1)=a+b+3=2$ $\quad\therefore a+b=-1$ ⋯ ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-2$이고 이것은 ㉡을 만족시킨다.

$\therefore f(3)=3^2-2\times3+3=6$

14 답 5

조건 (가)의 x에 $1-t$를 대입하면 $f(2-1+t)=2-f(1-t)$,

즉 $f(1-t)+f(1+t)=2$에서 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프는 점 $(1, 1)$에 대칭이므로 점 $(1, 1)$을 지난다.

$\therefore f(1)=a+b=1$ ⋯ ㉠

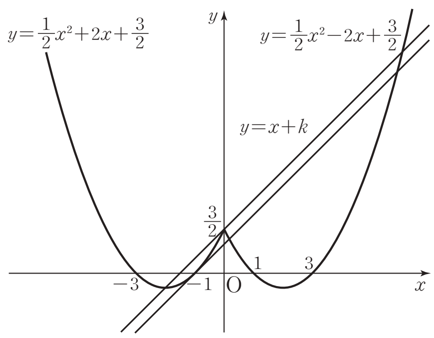
조건 (나)에서 원 $(x-3)^2+(y-5)^2=4$의 넓이를 이등분하는 함수 $f(x)$의 그래프는 원의 중심 $(3, 5)$를 지나므로

$f(3)=3a+b=5$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$ $\quad\therefore a^2+b^2=5$

15 답 ④

함수 $y=\dfrac{1}{2}x^2-2|x|+\dfrac{3}{2}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{1}{2}x^2-2x+\dfrac{3}{2}$의 그래프의 $x\geq0$인 부분과 y축에 대하여 대칭이동한 $y=\dfrac{1}{2}x^2+2x+\dfrac{3}{2}$의 그래프의 $x<0$인 부분으로 그림과 같다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$을 지날 때, $k=\dfrac{3}{2}$

(ii) 직선 $y=x+k$가 이차함수 $y=\dfrac{1}{2}x^2+2x+\dfrac{3}{2}$의 그래프에 접할 때, 즉 이차방정식 $x+k=\dfrac{1}{2}x^2+2x+\dfrac{3}{2}$이 중근을 가질 때, 이차방정식 $x^2+2x+3-2k=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1^2-(3-2k)=2k-2=0$ $\quad\therefore k=1$

(i), (ii)에 의하여 두 도형이 서로 다른 세 점에서 만나기 위한 k의 값은 1, $\dfrac{3}{2}$이므로 $\alpha+\beta=\dfrac{5}{2}$

16 답 75

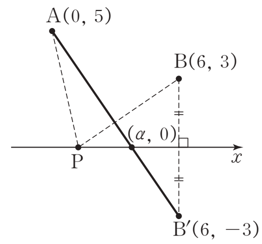
그림과 같이 세 점 $\mathrm{A}(0, 5)$, $\mathrm{B}(6, 3)$, $\mathrm{P}(a, 0)$이라 할 때,

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{a^2+25}$, $\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{(a-6)^2+9}$이므로

$\sqrt{a^2+25}+\sqrt{(a-6)^2+9}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$

그림과 같이 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점 B′에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AB'}}$의 길이와 같다. $\quad\therefore m=\sqrt{(0-6)^2+(5+3)^2}=10$

두 점 A, B′을 지나는 직선의 방정식은



$y=\dfrac{5-(-3)}{0-6}x+5$

$\therefore y=-\dfrac{4}{3}x+5$

이 직선은 점 $\mathrm{P}(a, 0)$을 지나므로

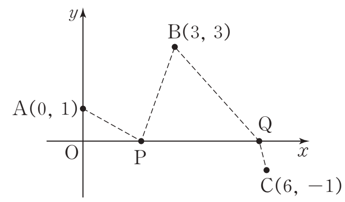
$0=-\dfrac{4}{3}a+5$ $\quad\therefore a=\dfrac{15}{4}$

$\therefore 2ma=75$

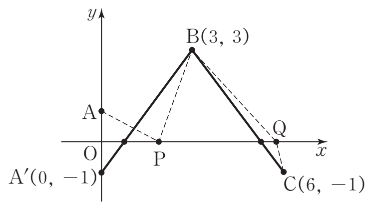
> 일등급
>
> * 점 B의 y좌표가 3이 아닌 -3인 경우
>
> 세 점을 $\mathrm{A}(0, 5)$, $\mathrm{B}'(6, -3)$, $\mathrm{P}(a, 0)$으로 해석할 수도 있다.
> 이때, 선분 AB′과 x축의 교점이 P이므로 점 B′을 대칭이동하여 생각하면 안 된다.

17 답 ③

세 점 A, B, C를 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



이때, 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점 $\mathrm{A}'(0, -1)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$이므로 A−P−B−Q−C 순으로 연결하는 최단거리는 A′−B−C를 연결한 선분의 길이의 합과 같다.



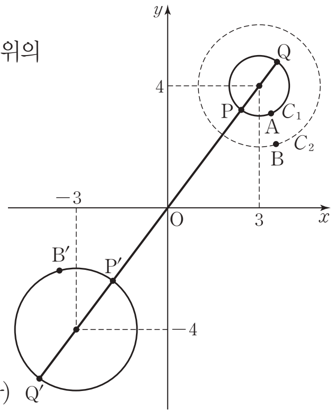
$\therefore \overline{\mathrm{A'B}}+\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{3^2+(3+1)^2}+\sqrt{(6-3)^2+(-1-3)^2}$

$=5+5=10$

18 답 ②

ㄱ. 원은 대칭이동을 해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 중심이 $(3, 4)$이고 반지름의 길이가 2인 원 C_2를 원점에 대하여 대칭이동하면 중심이 $(-3, -4)$이고 반지름의 길이가 2인 원이 된다. (참)

ㄴ. 점 A는 중심이 $(3,\ 4)$이고 반지름의 길이가 1인 원 C_1 위의 점이고 점 B′은 중심이 $(-3,\ -4)$이고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점이다.
또한, 두 원의 중심 사이의 거리가 10이므로 선분 AB′의 길이의 최솟값은 그림에서 $\overline{\mathrm{PP'}}$의 길이이다.
$\therefore \overline{\mathrm{PP'}}=10-1-2=7$ (참)



ㄷ. 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B'}(-x_2,\ -y_2)$에 대하여
$\overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$이고 그림에서 $\overline{\mathrm{QQ'}}$의 길이가 $\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$의 최댓값이다.
$\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}\le\overline{\mathrm{QQ'}}=10+1+2=13$
$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2\le 13^2=169$이므로
$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2$의 최댓값은 169이다. (거짓)

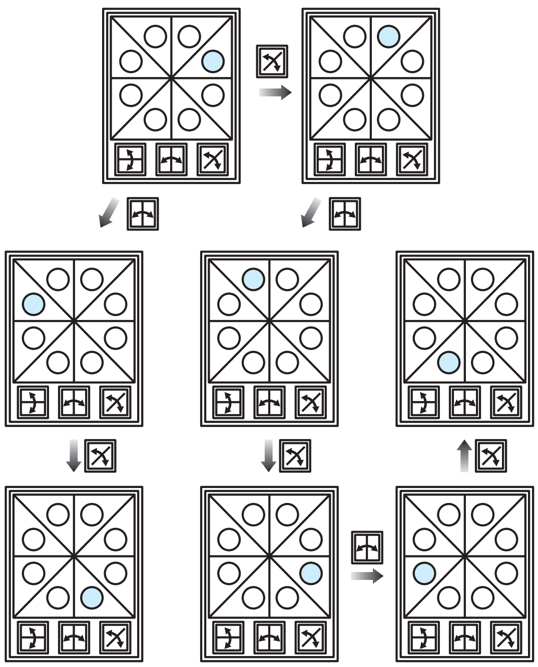
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

19 답 45

$\mathrm{A}(3,\ 0)\xrightarrow{(가)}(0,\ 3)\xrightarrow{(나)}(4,\ 2)\xrightarrow{(가)}(2,\ 4)$
$\xrightarrow{(나)}(5,\ 4)\xrightarrow{(가)}(4,\ 5)\xrightarrow{(나)}\mathrm{B}(6,\ 6)$
$\therefore l^2=(6-3)^2+(6-0)^2=45$

20 답 8

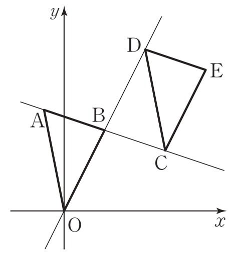
다음과 같이 모든 전구에 불을 켤 수 있다.



따라서 불이 켜지는 전구는 8개이다.

21 답 8

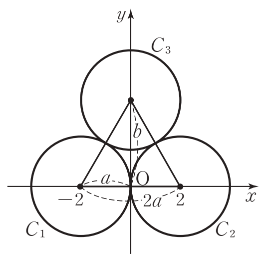
$\overline{\mathrm{OA}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{CD}}$이고,
세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로
$\triangle\mathrm{AOB}\equiv\triangle\mathrm{CDB}$ (ASA 합동)
따라서 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 5)$, $\mathrm{C}(p,\ q)$ 잇는 선분의 중점이 $\mathrm{B}(2,\ 4)$이므로
$\dfrac{-1+p}{2}=2,\ \dfrac{5+q}{2}=4$
$p=5,\ q=3 \qquad \therefore p+q=8$



[다른 풀이]
삼각형 AOB를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 삼각형 DCE의 꼭짓점의 좌표는
$\mathrm{C}(p,\ q)$, $\mathrm{D}(-1+p,\ 5+q)$, $\mathrm{B}(2+p,\ 4+q)$
직선 OB의 방정식이 $y=2x$이고 점 D를 지나므로
$5+q=2(-1+p) \qquad \therefore 2p-q=7$ ⋯ ㉠
또, 직선 AB의 방정식이 $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{14}{3}$이고
점 C를 지나므로 $q=-\dfrac{1}{3}p+\dfrac{14}{3} \qquad \therefore p+3q=14$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=5,\ q=3 \qquad \therefore p+q=8$

22 답 16

도형 C_1의 방정식을 정리하면
$f(x,\ y)=x^2+y^2+4x=0$, 즉 $(x+2)^2+y^2=4$에서 중심이 $(-2,\ 0)$이고 반지름의 길이가 2인 원이다.
따라서 도형 C_2는 도형 C_1을 x축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동한 원이고, 도형 C_3은 도형 C_1을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원이다.
이 세 원 C_1, C_2, C_3이 서로 외접하므로 다음 그림에서 세 원의 중심을 연결한 삼각형이 한 변의 길이가 $2a$인 정삼각형임을 알 수 있다.



따라서 $a=2,\ b=2\sqrt{3}$이므로 $a^2+b^2=16$

23 답 ⑤

직선은 평행이동을 하여도 기울기가 바뀌지 않으므로 $k=\dfrac{3}{2}$
즉, x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 원래의 직선이 되므로 직선의 기울기와 같은 비율로 평행이동한 것이다.
$\therefore \dfrac{n}{m}=\dfrac{3}{2}$

[다른 풀이]

직선 $y=\frac{3}{2}x+k$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 $y=\frac{3}{2}(x-m)+k+n=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}m+k+n$

이 직선이 직선 $y=kx+\frac{3}{2}$과 일치하므로

$k=\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}m+k+n$

$0=-\frac{3}{2}m+n$, $\frac{3}{2}m=n$

$\therefore \frac{n}{m}=\frac{3}{2}$

24 답 ⑤

ㄱ. 도형 $f(x+2,\ y)=0$은 도형 $f(x,\ y)=0$을 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. 도형 $f(y,\ x+2)=0$은 도형 $f(x,\ y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

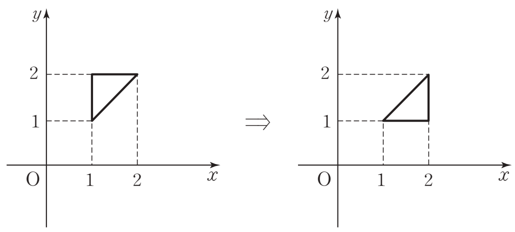
ㄷ. 도형 $f(-x,\ 2-y)=0$은 도형 $f(x,\ y)=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. 도형 $f(2-y,\ -x)=0$은 도형 $f(x,\ y)=0$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

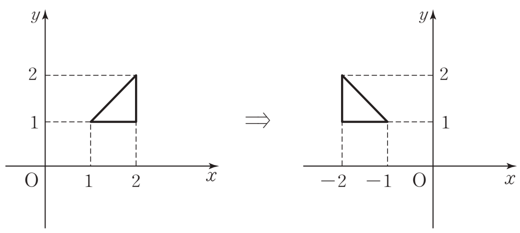
따라서 그래프가 [그림 2]와 같은 도형은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

25 답 ③

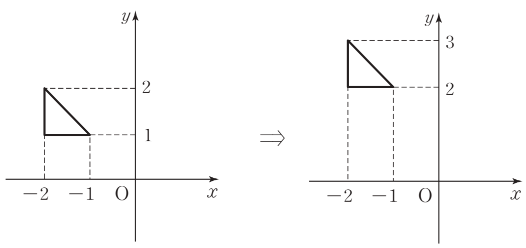
$f(x,\ y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $f(y,\ x)=0$



$f(y,\ x)=0$을 y축에 대하여 대칭이동하면 $f(y,\ -x)=0$



$f(y,\ -x)=0$을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $f(y-1,\ -x)=0$으로 이 그래프 ③과 같다.



26 답 ②

$3x^2-y^2+12x-6y+11=0$에서 $x^2-\frac{1}{3}y^2+4x-2y+\frac{11}{3}=0$

$\therefore (x+2)^2-\frac{1}{3}(y+3)^2=-\frac{8}{3}$

이 곡선을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 $x^2-\frac{1}{3}y^2=-\frac{8}{3}$이므로 $a=-\frac{1}{3}$, $b=-\frac{8}{3}$

$\therefore a+b=-3$

27 답 ⑤

$f(1-x)=f(1+x)$에서 $X=$ $1-x$ (가) 라 하면

$f(X)=f(2-X)$ ⋯ ㉠

그런데 곡선 $y=f(x)$가 직선 $x=1$에 대하여 대칭이라는 것은 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(a,\ c)$를 직선 $x=1$에 대하여 대칭이동한 점 $(b,\ c)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점임을 보이면 된다. 즉,

두 점 $(a,\ c)$와 $(b,\ c)$의 중점이 (1 (나), c)이므로

$\frac{a+b}{2}=1$ $\quad\therefore b=$ $2-a$ ← (다)

㉠에 $X=b$를 대입하면

$f(b)=f(2-b)=f(2-(2-a))=f(a)=c$

에서 점 $(b,\ c)$도 곡선 $y=f(x)$ 위의 점임을 알 수 있다.

따라서 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

즉, $g(x)=1-x$, $h(a)=2-a$, $k=1$이므로

$g(-k)\times h(-k)=g(-1)\times h(-1)=2\times 3=6$

28 답 ②

도형 $f(x,\ y)=0$을 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이동한 도형은 $f(2a-x,\ 2b-y)=0$이다.

따라서 직선 $x+2y-3=0$을 점 $(2,\ 3)$에 대하여 대칭이동한 직선은 $(2\times 2-x)+2\times(2\times 3-y)-3=0$ $\quad\therefore x+2y-13=0$

29 답 ②

직선 $x-y+5=0$을 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이동하면

$(2a-x)-(2b-y)+5=0$ $\quad\therefore x-y-2a+2b-5=0$

이 직선의 방정식이 $x-y-11=0$이므로

$-2a+2b-5=-11$ $\quad\therefore a-b=3$

$\therefore k=3$

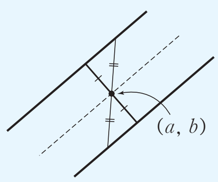
일등급 UP

＊대칭점이 나타내는 도형

그림과 같이 평행한 두 직선은 두 직선까지의 거리가 같은 한 점에 대하여 대칭이므로 점 $(a,\ b)$는 두 직선의 가운데를 통과하는 한 직선 위의 점이다.

따라서 점 $(a,\ b)$를 지나고 문제에서 주어진 두 직선과 평행한 직선의 방정식은

$\frac{(x-y+5)+(x-y-11)}{2}=0$, 즉 $x-y-3=0$이 된다.



30 답 ①

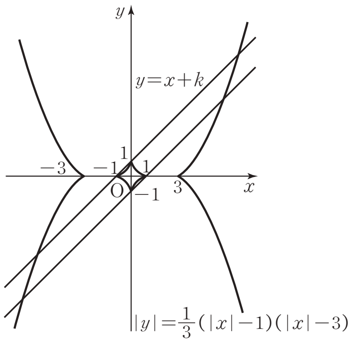
방정식 $3|x+k|=(|x|-1)(|x|-3)$의 해의 개수는

두 도형 $|y|=\frac{1}{3}(|x|-1)(|x|-3)$, $y=x+k$의 교점의 개수이다.

도형 $|y|=\frac{1}{3}(|x|-1)(|x|-3)$의 그래프와 직선 $y=x+k$의

그래프가 서로 다른 네 점에서 만나는 경우는 그림과 같으므로

상수 k의 최댓값은 1이다.



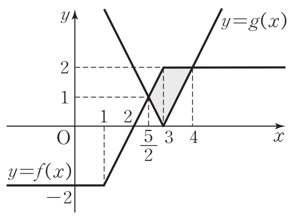
일등급 UP

* 방정식 $f(x)=g(x)$의 해

$y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 해와 같다.
한편, 문제에서 두 도형으로 나눌 때
$|y|=\frac{1}{3}(|x|-1)(|x|-3)$과 $y=x+k$
또는 $y=(|x|-1)(|x|-3)$과 $y=3|x+k|$
로 나누어도 같은 결과를 얻는다.

31 답 ⑤

두 함수 $f(x)=|x-1|-|x-3|$과 $g(x)=2|x-3|$의 그래프를 각각 그려보면 그림과 같다.



$f(a-x)=-f(a+x)$에서

함수 $f(x)$가 점 $(a, 0)$에 대하여 대칭이므로 $a=2$

$g(b-x)=g(b+x)$에서

함수 $g(x)$가 직선 $x=b$에 대하여 대칭이므로 $b=3$

또한, 둘러싸인 도형은 두 개의 삼각형으로 이루어지고 직선의 기울기가 2 또는 -2임을 이용하면 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times 2\times\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{2}$

$\therefore abS=2\times 3\times\frac{3}{2}=9$

32 답 ②

점 $(4, 1)$과 대칭인 점의 좌표를 (a, b)라 하면 두 점 (a, b)와 $(4, 1)$을 연결한 직선은 $2x-y+3=0$에 수직이므로

$\frac{b-1}{a-4}=-\frac{1}{2}$

$2b-2=-a+4$

$\therefore a+2b=6$ ⋯ ㉠

두 점 (a, b)와 $(4, 1)$을 잇는 선분의 중점이 직선 $2x-y+3=0$ 위에 있으므로

$2\times\frac{a+4}{2}-\frac{b+1}{2}+3=0$

$\therefore 2a-b=-13$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=5$

따라서 점 $(4, 1)$을 직선 $2x-y+3=0$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-4, 5)$이다.

[다른 풀이]

점 $(4, 1)$과 직선 $2x-y+3=0$ 사이의 거리가

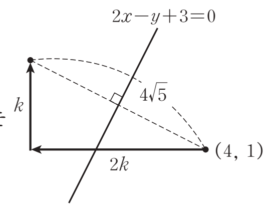
$\frac{|2\times 4-1+3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2\sqrt{5}$이고 $2x-y+3=0$에 수직인 기울기가

$-\frac{1}{2}$이므로 그림에서 양수 k에 대하여

$k^2+(2k)^2=(4\sqrt{5})^2 \quad \therefore k=4$

따라서 점 $(4, 1)$과 대칭인 점의 좌표는

$(4-8, 1+4)$, 즉 $(-4, 5)$이다.



33 답 ①

점 $(5, 3)$과 대칭인 점의 좌표를 (a, b)라 하면 두 점 (a, b), $(5, 3)$을 지나는 직선은 $x+y-3=0$과 수직이므로

$\frac{b-3}{a-5}=1 \qquad \therefore a-b=2$ ⋯ ㉠

두 점 (a, b), $(5, 3)$을 잇는 선분의 중점 $\left(\frac{a+5}{2}, \frac{b+3}{2}\right)$이 직선 $x+y-3=0$ 위에 있으므로

$\frac{a+5}{2}+\frac{b+3}{2}-3=0$

$\therefore a+b=-2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-2$

따라서 점 $(5, 3)$을 직선 $x+y-3=0$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(0, -2)$이다.

[다른 풀이]

점 $(5, 3)$을 직선 $y=-x+3$에 대하여 대칭이동하면

$(-3+3, -5+3)$, 즉 $(0, -2)$이다.

일등급 UP

* 직선과 대칭인 두 점을 잇는 직선의 기울기

기울기가 -1인 직선에 대하여 대칭이동한 경우 대칭인 두 점의 기울기가 1임을 알고 있으면 좀 더 빠르게 문제를 해결할 수 있다.

34 답 16

원을 직선에 대하여 대칭이동하여도 반지름의 길이는 변하지 않으므로 원 $x^2+y^2-4x-8y+c=0$의 반지름의 길이는 1이다.

즉, $(x-2)^2+(y-4)^2=20-c$이므로 $20-c=1$ $\quad\therefore c=19$

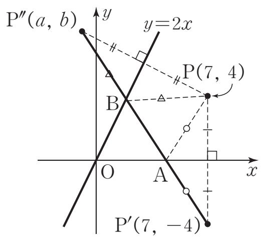
또한, 두 원의 중심 $(0,\ 0)$, $(2,\ 4)$가 직선 $x+ay+b=0$에 대하여 대칭이므로

$\dfrac{4-0}{2-0}=a$, $\dfrac{0+2}{2}+a\times\dfrac{0+4}{2}+b=0$ $\quad\therefore a=2,\ b=-5$

$\therefore a+b+c=16$

35 답 ③

개울과 숲이 만나는 점을 원점 O, 개울의 경계를 x축, 숲의 경계를 $y=2x$, 캠핑 장소를 점 P라 하자. 이때, 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(7,\ 4)$라 하고 x축과 직선 $y=2x$에 대하여 대칭이동한 점을 각각 P′, P″이라 하자.



한편, 최단거리는 두 점 P′, P″을 잇는 선분 위의 두 점 A, B를 지나는 것이고, 이 거리는 $\overline{\mathrm{P'P''}}$의 길이와 같다.

점 P′은 P에 대하여 x축에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{P'}(7,\ -4)$, $\mathrm{P''}(a,\ b)$라 하자.

$\dfrac{b-4}{a-7}=-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{b+4}{2}=2\times\dfrac{a+7}{2}$

$\therefore a=-1,\ b=8$

$\therefore \mathrm{P''}(-1,\ 8)$

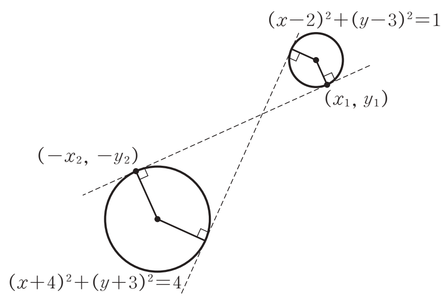
따라서 $\overline{\mathrm{P'P''}}=\sqrt{\{7-(-1)\}^2+(-4-8)^2}=4\sqrt{13}$이므로

움직이는 최단거리는 $10\overline{\mathrm{P'P''}}=40\sqrt{13}\ (\mathrm{m})$

> **일등급 UP**
>
> * 도형을 좌표평면에 간단히 나타내기
>
> 실제 거리 70 m, 40 m를 점 P의 x좌표, y좌표로 나타내도 좋지만 계산을 간편하게 하는 것이 실수를 줄이는 방법이므로 점 P의 좌표를 실제 거리의 $\dfrac{1}{10}$의 값으로 나타내었다. 이와 같이 수를 단순화시키는 것이 실수를 줄이고 풀이 시간을 단축할 수 있는 방법이다.

36 답 1

$\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\dfrac{y_1-(-y_2)}{x_1-(-x_2)}$이므로 구하는 식의 값은 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(-x_2,\ -y_2)$를 연결한 직선의 기울기이다.



이때, 점 $(-x_2,\ -y_2)$는 점 $(x_2,\ y_2)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점이므로 원 $(x-4)^2+(y-3)^2=4$를 원점에 대하여 대칭이동한 원 $(x+4)^2+(y+3)^2=4$ 위의 점이다.

한편, 그림과 같이 두 원 위의 점을 연결한 직선의 기울기의 최대, 최소는 공통접선의 기울기이다. 두 공통접선은 두 원의 중심 $(-4,\ -3)$과 $(2,\ 3)$을 반지름의 길이의 비율인 $2:1$로 내분하는 점인

$\left(\dfrac{2\times2+1\times(-4)}{2+1},\ \dfrac{2\times3+1\times(-3)}{2+1}\right)=(0,\ 1)$

을 지나는 직선이다.

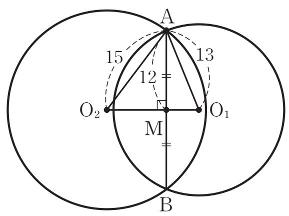
따라서 접선을 $y=ax+1$(a는 상수)이라 하면 점 $(2,\ 3)$과 직선 $ax-y+1=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 1이므로

$\dfrac{|2a-3+1|}{\sqrt{a^2+1}}=1$에서 $(2a-2)^2=a^2+1$ $\quad\therefore 3a^2-8a+3=0$

이 이차방정식의 두 근이 M, m이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $Mm=1$

> **일등급 UP**
>
> * 좌표평면 위의 원은 중심으로부터 접근하자.
>
> 두 원의 중심 $(-4,\ -3)$과 $(2,\ 3)$을 연결한 직선의 기울기가 1이므로 두 접선의 기울기의 곱은 1이라는 것을 알면 계산 과정을 줄일 수 있다.

37 답 180



원 $(x-2)^2+(y-2)^2=13^2$의 중심을 $(2,\ 2)$라 하면 점 $(2,\ 2)$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 $(2,\ 2+a)$이므로 이동한 원의 중심을 $\mathrm{O_1}(2,\ 2+a)$라 하고, 이때의 반지름의 길이가 13이다. ---------- ⓐ

그림과 같이 이동한 원이 중심이 $\mathrm{O_2}(-2,\ 2)$이고 반지름의 길이가 15인 원과 서로 다른 두 점 A, B에서 만나므로 선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{BM}}=12$에 의하여

$\overline{\mathrm{O_1O_2}}=\overline{\mathrm{O_1M}}+\overline{\mathrm{O_2M}}=5+9=14$ ---------- ⓑ

$\overline{\mathrm{O_1O_2}}^2=a^2+4^2=14^2$ $\quad\therefore a^2=180$ ---------- ⓒ

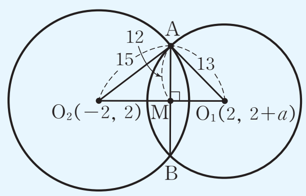
| 채점기준 |

ⓐ 중심이 $(2,\ 2)$인 원을 이동시킨다. [30%]

ⓑ 이동한 원과 원 $(x+2)^2+(y-2)^2=15^2$이 서로 다른 두 점 A, B에서 만나는 조건을 찾는다. [50%]

ⓒ a^2의 값을 구한다. [20%]

> **일등급 UP**
>
> * 도형의 위치 관계를 대략적으로 접근하기
>
> 문제를 풀기 위해 일반적인 접근법의 그림을 그려서 풀어도 된다.
> 즉, 두 점에서 만나는 두 원의 위치 관계를 대략적으로 그려 준다.



38 답 2

직선 $y=ax+b$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$x=ay+b$

$\therefore y=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$ ---------- ⓐ

이 직선이 원래의 직선 $y=ax+b$와 일치할 조건은

$\frac{1}{a}=a,\ -\frac{b}{a}=b$이므로

$a^2=1,\ (a+1)b=0$ ---------- ⓑ

따라서 $a=1,\ b=0$ 또는 $a=-1,\ b$는 모든 실수이므로

$\alpha^2+\beta^2=1^2+(-1)^2=2$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 직선 $y=ax+b$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한다.	[20%]
ⓑ 원래의 직선과 대칭이동한 직선이 일치할 조건을 찾는다.	[50%]
ⓒ $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구한다.	[30%]

39 답 65

$\sqrt{2a^2-2a+1}+\sqrt{2a^2-14a+29}$

$=\sqrt{a^2+(a-1)^2}+\sqrt{(a-2)^2+(a-5)^2}$

에서 세 점 $\mathrm{A}(0,\ 1),\ \mathrm{B}(2,\ 5),\ \mathrm{P}(a,\ a)$라 할 때, 주어진 식은

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 값과 같다. ---------- ⓐ

점 P는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 $\mathrm{A}'(1,\ 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값은 선분 $\mathrm{A}'\mathrm{B}$의 길이와 같다.

$\therefore m=\sqrt{(2-1)^2+(5-0)^2}=\sqrt{26}$ ---------- ⓑ

이때, 점 P의 좌표는 두 점 A', B를 지나는 직선과 직선 $y=x$가 만나는 점이므로 직선 $\mathrm{A}'\mathrm{B}$의 방정식은

$y=\frac{5-0}{2-1}(x-1)$

$\therefore y=5x-5$

이 직선과 직선 $y=x$가 만나는 점은 $\left(\frac{5}{4},\ \frac{5}{4}\right)$이므로

$\alpha=\frac{5}{4}$

$\therefore 2m^2\alpha=2\times26\times\frac{5}{4}=65$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 주어진 식이 의미하는 것을 파악한다.	[30%]
ⓑ 최솟값 m을 구한다.	[30%]
ⓒ α의 값을 구하여 $2m^2\alpha$의 값을 계산한다.	[40%]

40 답 ①

직선 $x-2y=9$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 $y-2x=9$가 원 $(x-3)^2+(y+5)^2=k$에 접하므로

$\frac{|-2\times3+(-5)-9|}{\sqrt{(-2)^2+1^2}}=\sqrt{k}$

$\therefore k=80$

41 답 23

주어진 규칙에 따라 점 $\mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3,\ \mathrm{P}_4,\ \cdots$를 구하면

$\mathrm{P}_1(3,\ 2)\longrightarrow\mathrm{P}_2(2,\ 3)\longrightarrow\mathrm{P}_3(2,\ -3)\longrightarrow\mathrm{P}_4(-2,\ -3)$

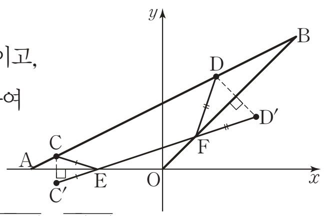
$\longrightarrow\mathrm{P}_5(-3,\ -2)\longrightarrow\mathrm{P}_6(-3,\ 2)\longrightarrow\mathrm{P}_7(3,\ 2)$

$\longrightarrow\mathrm{P}_8(2,\ 3)\longrightarrow\mathrm{P}_9(2,\ -3)\longrightarrow\cdots$

자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표와 점 P_{n+6}의 좌표가 같다. 따라서 $50=6\times8+2$로 점 P_{50}의 좌표는 점 P_2의 좌표와 같으므로 점 P_{50}의 좌표는 $(2,\ 3)$이다.

$\therefore 10x_{50}+y_{50}=23$

42 답 ①



점 $\mathrm{C}(-8,\ 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{C}'(-8,\ -1)$이고, 점 $\mathrm{D}(4,\ 7)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{D}'(7,\ 4)$이다.

$\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{C'E}},\ \overline{\mathrm{FD}}=\overline{\mathrm{FD'}}$이므로

$\overline{\mathrm{CE}}+\overline{\mathrm{EF}}+\overline{\mathrm{FD}}=\overline{\mathrm{C'E}}+\overline{\mathrm{EF}}+\overline{\mathrm{FD'}}\ge\overline{\mathrm{C'D'}}$

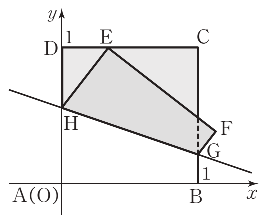
그림과 같이 $\overline{\mathrm{CE}}+\overline{\mathrm{EF}}+\overline{\mathrm{FD}}$의 값이 최소일 때는 두 점 E, F가 두 점 C', D'을 지나는 직선 위에 있을 때이다.

두 점 $\mathrm{C}'(-8,\ -1)$, $\mathrm{D}'(7,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{1}{3}(x-7)\qquad\therefore y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

따라서 $\overline{\mathrm{CE}}+\overline{\mathrm{EF}}+\overline{\mathrm{FD}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 E의 x좌표는 -5이다.

43 답 ②



좌표평면에서 점 A의 위치를 원점으로 잡고 $\mathrm{B}(1,\ 0),\ \mathrm{C}(1,\ 1),\ \mathrm{D}(0,\ 1)$이라 하자. 두 점 G, H의 좌표를 각각 $\mathrm{G}(1,\ a),\ \mathrm{H}(0,\ b)$라 하면 사다리꼴 EHGF는 사다리꼴 AHGH와 합동이므로 이 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}(a+b)$ ⋯ ㉠

점 E는 점 $\mathrm{A}(0,\ 0)$과 직선 GH에 대하여 대칭이므로 점 E의 위치를 $\mathrm{E}(t,\ 1)\,(0\le t\le1)$이라 하면 직선 GH와 직선 AE는 서로 수직이다. 직선 GH의 기울기는 $-t$이고 두 점 A, E의 중점 $\left(\frac{t}{2},\ \frac{1}{2}\right)$을 지나는 직선이므로 직선의 방정식은

$y=-t\left(x-\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}$

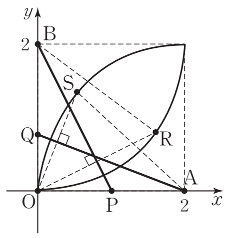
이 직선이 두 점 $\mathrm{H}(0,\ b)$와 $\mathrm{G}(1,\ a)$를 지나므로

$b=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2},\ a=\frac{t^2}{2}-t+\frac{1}{2}$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $S=\frac{1}{2}(t^2-t+1)\ (0\le t\le1)$

따라서 $t=\frac{1}{2}$일 때 넓이, S의 최솟값은 $\frac{3}{8}$이다.

44 답 ②



원점 O와 점 R가 선분 BP에 대하여 대칭이므로 선분 BP는 선분 OR를 수직이등분한다. 즉, 삼각형 BOR가 이등변삼각형이므로

$\overline{BR}=\overline{BO}=2$

즉, 점 R는 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원의 일부이다.

또한, 점 P가 점 $(0,\ 0)$에서 점 $(2,\ 0)$까지 움직일 때, 점 R는 점 $(0,\ 0)$에서 점 $(2,\ 2)$까지 움직이므로 중심각의 크기가 90°인 부채꼴의 호가 점 R가 움직이며 나타내는 도형이다.

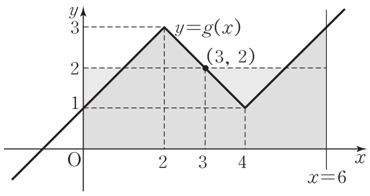
마찬가지로 점 S가 움직이며 나타내는 도형은 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2이며 중심각의 크기가 90°인 부채꼴의 호이다.

따라서 두 점 R, S가 움직이며 나타내는 도형으로 둘러싸인 도형의 둘레의 길이는 $2\pi\times2\times\dfrac{1}{4}\times2=2\pi$이다.

45 답 12

$g(x)=f(x-3)+2$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

또한, $g(3-x)+g(3+x)=4$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 점 $(3,\ 2)$에 대하여 대칭인 함수이므로 그래프는 그림과 같다.



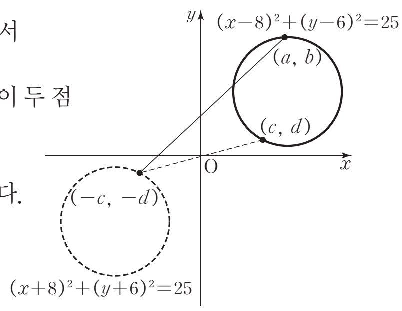
따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=6$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 12이다.

46 답 675

$\dfrac{b+d}{a+c}=\dfrac{b-(-d)}{a-(-c)}$에서

$\dfrac{b+d}{a+c}$는 [그림 1]과 같이 두 점 $(a,\ b)$, $(-c,\ -d)$를 연결한 직선의 기울기이다.

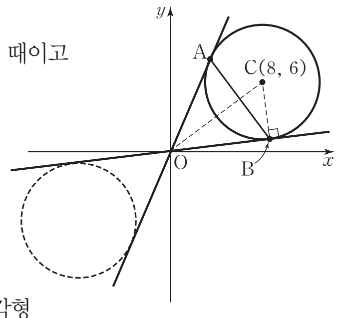
이때, 점 $(-c,\ -d)$는 점 $(c,\ d)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점이다.



[그림 1]

즉, 점 $(-c,\ -d)$는 원 $(x-8)^2+(y-6)^2=25$를 원점에 대하여 대칭이동한 원 $(x+8)^2+(y+6)^2=25$ 위에 있다.

[그림 2]와 같이 기울기인 $\dfrac{b+d}{a+c}$의 최대, 최소는 원점에서 원 $(x-8)^2+(y-6)^2=25$에 그은 두 접선의 기울기이다.



[그림 2]

따라서 최대가 될 때는 두 점 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$가 모두 점 A일 때이고 최소가 될 때는 두 점 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$가 모두 점 B일 때이다.

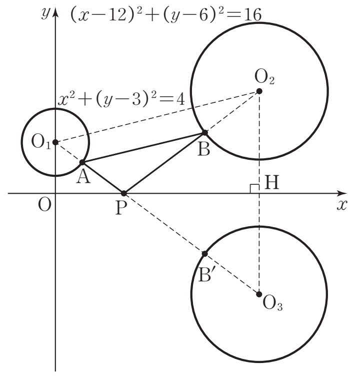
원의 중심을 C라 하면

$\overline{OC}=10$, $\overline{CB}=5$, $\overline{OB}\perp\overline{BC}$

이므로 $\angle COB=30^\circ$이고 $\angle AOB=60^\circ$이다. 따라서 삼각형 OAB는 한 변의 길이가 $5\sqrt{3}$인 정삼각형이므로 둘레의 길이 l은

$l=15\sqrt{3}\qquad\therefore\ l^2=675$

47 답 241



두 원 $x^2+(y-3)^2=4$, $(x-12)^2+(y-6)^2=16$의 중심을 각각 O_1, O_2라 하고 점 O_2와 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 각각 O_3, B′이라 하자. $\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소일 때는 $\overline{AP}+\overline{B'P}$의 값이 최소일 때이고 선분 O_1O_3이 두 원 및 x축과 만나는 점이 A, B′, P일 때이다. 점 O_3에서 x축에 내린 수선의 발 H에 대하여 각 선분의 길이는 $\overline{O_1O}=3$, $\overline{O_2H}=6$, $\overline{OH}=12$이고 점 P는 선분 O_1O_3을 $\overline{O_1O}:\overline{O_2H}=1:2$로 내분하는 점이므로

$\overline{OP}=4$, $\overline{PH}=8$

$\therefore\ \overline{O_1P}=5$, $\overline{O_2P}=10$, $\overline{AP}=3$, $\overline{BP}=6$

즉, $\overline{O_1P}:\overline{O_2P}=\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$이므로 삼각형 APB와 삼각형 O_1PO_2는 SAS 닮음이고 길이의 비는 $\overline{AP}:\overline{O_1P}=3:5$이므로 넓이의 비는 $9:25$이다. 한편, 삼각형 O_1PO_2의 넓이는

$$\triangle O_1PO_2=\square O_1OHO_2-(\triangle O_1OP+\triangle O_2PH)$$
$$=\frac{1}{2}(\overline{O_1O}+\overline{O_2H})\times\overline{OH}$$
$$-\frac{1}{2}(\overline{O_1O}\times\overline{OP}+\overline{O_2H}\times\overline{PH})$$
$$=\frac{1}{2}\times(3+6)\times12-\frac{1}{2}\times(3\times4+6\times8)$$
$$=54-30=24$$

이므로 삼각형 ABP의 넓이는

$$\triangle ABP=\frac{9}{25}\triangle O_1PO_2=\frac{9}{25}\times24=\frac{216}{25}$$

따라서 $p=25$, $q=216$이므로 $p+q=241$