정답 및 풀이

01 순열

유제

본책 9~23쪽

001-1 (ⅰ) 꺼낸 공에 적힌 수의 차가 3인 경우는

$(1, 4), (2, 5), (4, 1), (5, 2)$의 4가지

(ⅱ) 꺼낸 공에 적힌 수의 차가 4인 경우는

$(1, 5), (5, 1)$의 2가지

(ⅰ), (ⅱ)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$4+2=6$

답 6

001-2 x, y, z가 자연수이므로

$x\geq1$, $y\geq1$, $z\geq1$

$x+6y+10z=40$에서 $10z<40$, 즉 $z<4$이므로

$z=1$ 또는 $z=2$ 또는 $z=3$

(ⅰ) $z=1$일 때,

$x+6y+10=40$, 즉 $x+6y=30$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(24, 1), (18, 2), (12, 3), (6, 4)$의 4개

(ⅱ) $z=2$일 때,

$x+6y+20=40$, 즉 $x+6y=20$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(14, 1), (8, 2), (2, 3)$의 3개

(ⅲ) $z=3$일 때,

$x+6y+30=40$, 즉 $x+6y=10$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(4, 1)$의 1개

(ⅰ)~(ⅲ)은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 합의 법칙에 의하여

$4+3+1=8$

답 8

Remark

x, y, z 중에서 계수가 가장 큰 z를 기준으로 경우를 나누는 것이 편리하다.

002-1 주어진 다항식에서 a, b, c 중 어느 하나를 택하면 그 각각에 대하여 p, q의 2가지의 선택이 가능하고, 이들 각각에 대하여 x, y의 2가지의 선택이 가능하므로 구하는 항의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$3\cdot2\cdot2=12$

답 12

002-2 120과 300의 양의 공약수의 개수는 120과 300의 최대공약수의 양의 약수의 개수와 같다.

120과 300의 최대공약수는 60이고

$60=2^2\cdot3\cdot5$

이므로 60의 양의 약수는

$2^m\cdot3^n\cdot5^l$ $(m=0, 1, 2,\ n=0, 1,\ l=0, 1)$

으로 나타낼 수 있다.

이때 m, n, l을 택하는 경우의 수가 각각 3, 2, 2이므로 구하는 양의 공약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$3\cdot2\cdot2=12$

답 12

003-1 A지점에서 출발하여 C지점으로 이동한 후 다시 A지점으로 돌아올 때, B지점을 한 번 지나는 방법은

$A\to B\to C\to A$, $A\to C\to B\to A$

의 2가지가 있다.

(ⅰ) $A\to B\to C\to A$로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$4\cdot3\cdot2=24$

(ⅱ) $A\to C\to B\to A$로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2\cdot3\cdot4=24$

(ⅰ), (ⅱ)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 방법의 수는 합의 법칙에 의하여

$24+24=48$

답 48

003-2 A지점에서 D지점으로 가는 방법은

$A\to B\to D$, $A\to C\to D$,

$A\to B\to C\to D$, $A\to C\to B\to D$

의 4가지가 있다.

(ⅰ) $A\to B\to D$로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3\cdot2=6$

(ⅱ) $A\to C\to D$로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2\cdot2=4$

(ⅲ) $A\to B\to C\to D$로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3\cdot2\cdot2=12$

(ⅳ) $A\to C\to B\to D$로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2\cdot2\cdot2=8$

(i)~(iv)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 방법의 수는 합의 법칙에 의하여

$6+4+12+8=30$ 답 30

004-1 10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0, 10, 20, ⋯, 60원의 7가지

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0, 100, 200, 300, 400원의 5가지

1000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 금액은

0, 1000원의 2가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는

$7\cdot5\cdot2-1=69$ 답 69

004-2 1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0, 1, 2, 3, 4, 5장의 6가지

5000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0, 1, 2장의 3가지

10000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0, 1장의 2가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로

$a=6\cdot3\cdot2-1=35$

5000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액과 1000원짜리 지폐 5장으로 지불하는 금액이 같고, 10000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액과 1000원짜리 지폐 10장으로 지불하는 금액이 같다.

따라서 10000원짜리 지폐 1장을 1000원짜리 지폐 10장, 5000원짜리 지폐 2장을 1000원짜리 지폐 10장으로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 1000원짜리 지폐 25장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같으므로

$b=25$

$\therefore a+b=60$ 답 60

005-1 주어진 그림에서 A, B, C, D, E의 순서로 칠할 때, A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지, E에 칠할 수 있는 색은 B, D에 칠한 색을 제외한 2가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$4\cdot3\cdot2\cdot2\cdot2=96$ 답 96

006-1 (1) ${}_{n}\mathrm{P}_{2}=n(n-1)$이므로 ${}_{n}\mathrm{P}_{2}=9n$에서

$n(n-1)=9n$

$n\geq2$이므로 $n-1=9$

$\therefore n=10$

(2) ${}_{6}\mathrm{P}_{r}\cdot3!=720$에서 ${}_{6}\mathrm{P}_{r}\cdot6=720$

$\therefore {}_{6}\mathrm{P}_{r}=120$

$120=6\cdot5\cdot4$이므로

$r=3$

(3) ${}_{n}\mathrm{P}_{3}+3{}_{n}\mathrm{P}_{2}=n(n-1)(n-2)+3n(n-1)$

$=(n+1)n(n-1)$

이때 $60=5\cdot4\cdot3$이므로

$n=4$

(4) ${}_{n}\mathrm{P}_{4}:{}_{n+1}\mathrm{P}_{3}=10:3$에서 $3{}_{n}\mathrm{P}_{4}=10{}_{n+1}\mathrm{P}_{3}$이므로

$3n(n-1)(n-2)(n-3)=10(n+1)n(n-1)$

$n\geq4$이므로

$3(n-2)(n-3)=10(n+1)$

$3n^2-25n+8=0$, $(3n-1)(n-8)=0$

$\therefore n=8$

답 (1) 10 (2) 3 (3) 4 (4) 8

006-2 ${}_{n-1}\mathrm{P}_{r}+r{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-1-r)!}+r\cdot\frac{(n-1)!}{\{n-1-(r-1)\}!}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-r-1)!}+\frac{r\cdot(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$=\frac{(n-r)\cdot(n-1)!}{(n-r)!}+\frac{r\cdot(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$=\frac{\{(n-r)+r\}\cdot(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}$$

$={}_{n}\mathrm{P}_{r}$ ⋯ 증명 끝

답 풀이 참조

007-1 (1) 서로 다른 10개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_{10}\mathrm{P}_{3}=10\cdot9\cdot8=720$

(2) 1번을 제외한 9명에서 회장과 부회장을 각각 한 사람씩 뽑으면 된다. 따라서 서로 다른 9개에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_{9}\mathrm{P}_{2}=9\cdot8=72$

답 (1) 720 (2) 72

007-2 타순이 정해져 있지 않은 선수를 m명이라 하면 $n+m=9$

이때 n명의 선수의 타순이 이미 정해져 있으므로 9명의 선수의 타순을 정하는 방법의 수는

$${}_{m}\mathrm{P}_{m}=m!$$

이때 $120=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5!$이므로 $m=5$

$\therefore n=4$

답 4

008-1 (1) 축구 선수 3명을 한 묶음으로 생각하여 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$$5!=120$$

그 각각에 대하여 축구 선수 3명이 자리를 바꾸는 방법의 수는

$$3!=6$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$120\cdot6=720$$

(2) 야구 선수 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$$4!=24$$

야구 선수 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중에서 3개의 자리에 축구 선수 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$${}_{5}\mathrm{P}_{3}=60$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$24\cdot60=1440$$

(3) 축구 선수 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$$3!=6$$

축구 선수 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 야구 선수 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$$4!=24$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$6\cdot24=144$$

답 (1) 720 (2) 1440 (3) 144

009-1 (1) h를 맨 처음에, y를 맨 마지막에 고정시키고, 나머지 o, l, i, d, a의 5개의 문자를 나열하는 방법의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

$$5!=120$$

(2) h◯◯y를 한 묶음으로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$4!=24$$

h와 y 사이에 2개의 문자를 나열하는 방법의 수는

$${}_{5}\mathrm{P}_{2}=20$$

이때 h와 y의 자리를 바꾸는 방법의 수는

$$2!=2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24\cdot20\cdot2=960$$

답 (1) 120 (2) 960

010-1 7개의 문자를 나열하는 방법의 수는

$$7!=5040$$

양 끝에 모음인 o, a, e의 3개의 문자 중에서 2개를 택하여 나열하는 방법의 수는

$${}_{3}\mathrm{P}_{2}=6$$

가운데에 나머지 5개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$5!=120$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$5040-6\cdot120=4320$$

답 4320

011-1 (1) 백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지이다. 각각에 대하여 십의 자리와 일의 자리에는 백의 자리에 온 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$$5\cdot{}_{5}\mathrm{P}_{2}=100$$

(2) 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

백의 자리와 십의 자리에는 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로

$${}_{5}\mathrm{P}_{2}=20$$

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 4가지이고, 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4가지이므로

$$4\cdot4=16$$

(i), (ii)에서 구하는 5의 배수의 개수는

$$20+16=36$$

답 (1) 100 (2) 36

011-2 (1) 3의 배수이려면 각 자리의 수의 합이 3의 배수이어야 한다.

6개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 서로 다른 4개를 택하였을 때, 그 합이 3의 배수가 되는 경우는

1, 2, 3, 6 또는 1, 2, 4, 5 또는 1, 3, 5, 6
또는 2, 3, 4, 6 또는 3, 4, 5, 6

의 5가지이고, 각각에 대하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$4!=24$

이므로 구하는 3의 배수의 개수는

$5\cdot24=120$

(2) 천의 자리의 숫자가 1 또는 2 또는 3 또는 4인 자연수의 개수는

$4\cdot{}_5P_3=240$

51□□ 꼴의 자연수의 개수는

${}_4P_2=12$

따라서 5200보다 작은 자연수의 개수는

$240+12=252$

답 (1) 120 (2) 252

다른 풀이 (2) 모든 네 자리 자연수의 개수는

${}_6P_4=360$

5200보다 큰 자연수의 개수는

$4\cdot{}_4P_2+{}_5P_3=108$

따라서 5200보다 작은 자연수의 개수는

$360-108=252$

Remark 배수의 판정

① 2의 배수: 일의 자리의 수가 0 또는 2의 배수인 수
② 3의 배수: 각 자리의 수의 합이 3의 배수인 수
③ 4의 배수: 끝의 두 자리 수가 4의 배수인 수
④ 5의 배수: 일의 자리의 수가 0 또는 5인 수
⑤ 9의 배수: 각 자리의 수의 합이 9의 배수인 수

012-1 'ㄱ□□□□□' 꼴인 문자열의 개수는

$5!=120$

'ㄴ□□□□□' 꼴인 문자열의 개수는

$5!=120$

'ㄷㄱ□□□□' 꼴인 문자열의 개수는

$4!=24$

'ㄷㄴ□□□□' 꼴인 문자열의 개수는

$4!=24$

'ㄷㄹㄱ□□□' 꼴인 문자열을 순서대로 나열하면

'ㄷㄹㄱㄴㅁㅂ', 'ㄷㄹㄱㄴㅂㅁ', 'ㄷㄹㄱㅁㄴㅂ', 'ㄷㄹㄱㅁㅂㄴ', …

즉 'ㄷㄹㄱㅁㅂㄴ'은 'ㄷㄹㄱ□□□' 꼴의 네 번째에 오는 문자열이므로

$120+120+24+24+4=292$ (번째)

에 오는 문자열이다.

답 292번째

중단원 연습 문제 본책 24~27쪽

01 ①	02 8	03 240	04 ④	05 9
06 ⑤	07 72	08 ⑤	09 206	10 24
11 24	12 480	13 ③	14 30	15 ③
16 16	17 ③	18 84		

01 전략 두 수의 합이 홀수가 되려면 (짝수, 홀수) 또는 (홀수, 짝수)이어야 한다.

풀이 (i) 집합 A의 원소가 짝수이고, 집합 B의 원소가 홀수인 경우의 수는

$2\cdot3=6$

(ii) 집합 A의 원소가 홀수이고, 집합 B의 원소가 짝수인 경우의 수는

$2\cdot2=4$

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 $6+4=10$

답 ①

02 전략 270을 소인수분해한 후 홀수가 되는 조건을 생각한다.

풀이 270을 소인수분해하면 $270=2\cdot3^3\cdot5$

이때 270의 양의 약수 중 홀수는

$3^m\cdot5^n$ ($m=0, 1, 2, 3$, $n=0, 1$)

으로 나타낼 수 있다.

이때 m, n을 택하는 경우의 수가 각각 4, 2이므로 구하는 홀수의 개수는

$4\cdot2=8$

답 8

03 해결과정 • A→B→C로 가는 방법의 수는

$5\cdot4=20$ → 30% 배점

C→B→A로 돌아오는 방법의 수는 A→B, B→C로 갔던 길을 제외해야 하므로

$(4-1)\cdot(5-1)=12$ → 40% 배점

답구하기• 따라서 구하는 방법의 수는

$20\cdot 12=240$ ➔ 30% 배점

답 240

04 전략 곱의 법칙을 이용하여 지불하는 방법의 수를 구한다.

풀이 100원짜리 동전을 지불하는 방법은

0, 1, 2, 3개의 4가지

500원짜리 동전을 지불하는 방법은

0, 1, 2개의 3가지

1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0, 1, 2, 3장의 4가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는

$4\cdot 3\cdot 4-1=47$

답 ④

05 해결과정• ${}_n\mathrm{P}_4-6{}_n\mathrm{P}_3+20{}_{n-1}\mathrm{P}_2=0$에서

$n(n-1)(n-2)(n-3)-6n(n-1)(n-2)$

$+20(n-1)(n-2)=0$ ➔ 50% 배점

$n\ge 4$이므로

$n(n-3)-6n+20=0$

$n^2-9n+20=0,\quad (n-4)(n-5)=0$

$\therefore n=4$ 또는 $n=5$ ➔ 40% 배점

답구하기• 따라서 구하는 자연수 n의 값의 합은

$4+5=9$ ➔ 10% 배점

답 9

06 전략 각각의 방법의 수를 구하여 그 값을 비교한다.

풀이 ①, ②, ③ $3!=6$

④ ${}_3\mathrm{P}_2=6$

⑤ $2\cdot {}_2\mathrm{P}_2=4$

답 ⑤

07 해결과정• 홀수 1, 3, 5를 나열하는 방법의 수는

$3!=6$ ➔ 30% 배점

짝수 2, 4, 6을 나열하는 방법의 수는

$3!=6$ ➔ 30% 배점

각 경우에 대하여 홀수부터 나열하는 경우와 짝수부터 나열하는 경우의 2가지가 있다. ➔ 20% 배점

답구하기• 따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot 6\cdot 2=72$ ➔ 20% 배점

답 72

08 전략 x, y가 자연수임을 이용하여 x, y의 값의 범위를 구하고, $x=1$, 2일 때 자연수 y의 개수를 구한다.

풀이 x, y가 자연수이므로 $\quad x\ge 1,\ y\ge 1$

$5x+y\le 12$에서 $\quad 5x<12\quad \therefore x<\frac{12}{5}$

즉 $1\le x<\frac{12}{5}$이므로 $\quad x=1$ 또는 $x=2$

(i) $x=1$일 때,

$5+y\le 12$, 즉 $y\le 7$이므로 y는

1, 2, 3, ⋯, 7의 7개

(ii) $x=2$일 때,

$10+y\le 12$, 즉 $y\le 2$이므로 y는

1, 2의 2개

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$7+2=9$

답 ⑤

09 문제이해• 세 개의 주사위를 던져 나오는 모든 경우의 수는 $\quad 6\cdot 6\cdot 6=216$ ➔ 10% 배점

해결과정• 세 개의 주사위의 눈의 수를 순서쌍 (x, y, z)로 나타낼 때,

(i) $x+y+z=5$인 경우

(1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 3, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (3, 1, 1)의 6개

(ii) $x+y+z=4$인 경우

(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)의 3개

(iii) $x+y+z=3$인 경우

(1, 1, 1)의 1개 ➔ 40% 배점

이상에서 $x+y+z\le 5$인 경우의 수는

$6+3+1=10$ ➔ 20% 배점

답구하기• 따라서 구하는 경우의 수는

$216-10=206$ ➔ 30% 배점

답 206

10 전략 각 영역을 칠하는 방법의 수를 구하여 곱한다.

풀이 주어진 그림에서 A, B, C, D의 순서로 칠할 때, A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 B와 C에 칠한 색을 제외한 1가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$

답 24

11 전략 조건 (가), (나)를 이용하여 함수 f가 어떤 함수인지 알아낸다.

풀이 조건 (나)에 의하여 함수 f는 일대일함수이고, 조건 (가)에 의하여 $f(1)=3$, $f(2)=4$이므로 3, 4를 제외한 Y의 원소 1, 2, 5, 6 중에서 3개를 뽑아 X의 원소 3, 4, 5에 대응시키면 된다.
따라서 구하는 함수의 개수는
$_4P_3=24$ 답 24

Remark 일대일함수의 개수

두 집합 X, Y에 대하여 $n(X)=m$, $n(Y)=n$일 때, X에서 Y로의 일대일함수의 개수는
$_nP_m$ (단, $n\ge m$)

12 전략 이웃하지 않는 것이 있는 경우의 수를 구할 때에는 이웃해도 되는 것을 먼저 일렬로 나열한다.

풀이 빈 의자 1개와 남학생 3명이 앉을 의자 3개를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!=24$
그 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중에서 2개의 자리에 여학생 2명을 일렬로 나열하는 방법의 수는
$_5P_2=20$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\cdot20=480$ 답 480

다른 풀이 의자 6개에 5명이 앉는 모든 방법의 수는
$_6P_5=720$
여학생 2명을 한 묶음으로 생각하여 4명과 빈 의자 1개를 일렬로 나열하는 방법의 수는
$5!=120$
그 각각에 대하여 여학생 2명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$
이므로 여학생이 이웃하여 앉는 방법의 수는
$120\cdot2=240$
따라서 구하는 경우의 수는
$720-240=480$

Remark

의자의 개수는 6이고, 전체 학생 수는 5이므로 이웃해도 되는 것을 일렬로 나열할 때, 빈 의자 1개를 포함시켜야 함에 주의한다.

13 전략 f, g 사이에 적어도 1개의 문자가 들어가는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 f, g가 이웃하는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

풀이 7개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는
$7!=5040$
f, g를 한 묶음으로 생각하여 6개의 문자를 나열하는 방법의 수는 $6!=720$
그 각각에 대하여 f와 g가 자리를 바꾸는 방법의 수는
$2!=2$
이므로 f, g가 이웃하도록 나열하는 방법의 수는
$720\cdot2=1440$
따라서 구하는 경우의 수는
$5040-1440=3600$ 답 ③

14 전략 끝의 두 자리가 4의 배수인 수의 개수를 구한다.

풀이 4의 배수인 네 자리 자연수는
□□04, □□12, □□20, □□24,
□□32, □□40
꼴이다.
(i) □□04, □□20, □□40 꼴의 자연수
천의 자리와 백의 자리에는 끝의 두 자리의 숫자를 제외한 3개의 숫자 중 2개를 택하여 나열하면 되므로
$3\cdot{}_3P_2=18$
(ii) □□12, □□24, □□32 꼴의 자연수
천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 끝의 두 자리의 숫자를 제외한 2가지, 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리와 끝의 두 자리의 숫자를 제외한 2가지이므로
$3\cdot2\cdot2=12$
(i), (ii)에서 구하는 4의 배수의 개수는
$18+12=30$ 답 30

15 전략 만의 자리에 작은 수부터 차례대로 대입하여 각 경우의 자연수의 개수를 구한다.

풀이 1□□□□ 꼴인 자연수의 개수는
$4!=24$
2□□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$
31□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$
이때 32145는 32□□□ 꼴인 자연수 중에서 가장 작은 자연수이므로
$24+24+6+1=55$ (번째)
로 나타난다. 답 ③

16 해결과정 • 서로 다른 세 개의 주머니 A, B, C에서 꺼낸 공에 적힌 수를 각각 a, b, c라 하면

(i) $a+b+c\le 5$인 경우의 순서쌍 (a, b, c)는

$(0, 1, 2)$, $(0, 1, 3)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 2, 2)$,
$(0, 2, 3)$, $(0, 3, 2)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 1, 3)$,
$(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$의 10개 ➔ 30% 배점

(ii) $a+b+c$의 값이 소수인 경우의 순서쌍 (a, b, c)는

$(0, 1, 2)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 2, 3)$, $(0, 3, 2)$,
$(0, 3, 4)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 2, 4)$,
$(1, 3, 3)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 1, 4)$, $(2, 2, 3)$,
$(2, 3, 2)$의 13개 ➔ 30% 배점

이때 $a+b+c\le 5$이고 $a+b+c$의 값이 소수인 경우의 순서쌍 (a, b, c)는

$(0, 1, 2)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 2, 3)$, $(0, 3, 2)$,
$(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$의 7개 ➔ 20% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 경우의 수는

$10+13-7=16$ ➔ 20% 배점

답 16

17 전략 전체 함수의 개수에서 $f(a)f(b)f(c)<0$을 만족시키는 함수의 개수를 뺀다.

풀이 $A=\{a, b, c\}$에서 $B=\{-4, -2, 0, 2\}$로의 함수의 개수는 $4\cdot 4\cdot 4=64$

$f(a)f(b)f(c)<0$을 만족시키는 함수 f는 다음과 같다.

(i) $f(a)<0$, $f(b)<0$, $f(c)<0$인 경우

$f(a)$, $f(b)$, $f(c)$의 값이 될 수 있는 것이 각각 -4, -2의 2가지이므로 그 경우의 수는

$2\cdot 2\cdot 2=8$

(ii) $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ 중 음수가 1개, 양수가 2개인 경우

$f(a)<0$인 경우는 $f(a)$의 값이 될 수 있는 것이 -4, -2의 2가지이고, $f(b)$, $f(c)$의 값이 될 수 있는 것이 2의 1가지이므로 그 경우의 수는

$2\cdot 1\cdot 1=2$

또 $f(b)<0$인 경우와 $f(c)<0$인 경우도 각각 2가지므로 $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ 중 음수가 1개, 양수가 2개인 경우의 수는

$2+2+2=6$

(i), (ii)에서 $f(a)f(b)f(c)<0$을 만족시키는 함수 f의 개수는

$8+6=14$

따라서 $f(a)f(b)f(c)\ge 0$인 함수 f의 개수는

$64-14=50$

답 ③

18 전략 a, c가 서로 이웃하는 경우와 c, e가 서로 이웃하는 경우를 구한 후 중복되는 경우를 제외한다.

풀이 (i) a, c가 서로 이웃하는 경우

a, c를 한 묶음으로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!$이고, a와 c가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!$이므로

$4!\cdot 2!=48$

(ii) c, e가 서로 이웃하는 경우

(i)과 같은 방법으로 하면

$4!\cdot 2!=48$

(iii) a와 c, c와 e가 모두 서로 이웃하는 경우

a, c, e가 ace 순서로 서로 이웃하는 경우의 수는

$3!=6$

a, c, e가 eca 순서로 서로 이웃하는 경우의 수는

$3!=6$

이므로 $6+6=12$

이상에서 구하는 경우의 수는

$48+48-12=84$

답 84

Remark

a, c가 서로 이웃하는 경우의 수와 c, e가 서로 이웃하는 경우의 수에는 각각 a, c, e가 서로 이웃하는 경우의 수가 포함되어 있으므로 a, c, e가 서로 이웃하는 경우의 수를 빼 주어야 한다.
이때 a, c 또는 c, e가 서로 이웃하는 경우에서 c는 a와 e 사이에 있어야 하므로 ace 또는 eca의 2가지 경우가 있음에 주의한다.

02 여러 가지 순열

유제

본책 31~40쪽

013-1 (1) 회장과 부회장을 한 묶음으로 생각하여 7명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(7-1)!=6!=720$

회장과 부회장이 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$720\cdot2=1440$

(2) 회장의 자리가 결정되면 부회장의 자리는 마주 보는 자리로 고정되므로 7명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수와 같다.

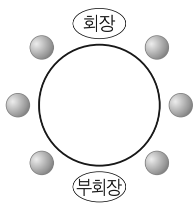
따라서 구하는 방법의 수는

$(7-1)!=6!=720$

답 (1) 1440 (2) 720

다른 풀이 (2) 오른쪽 그림과 같이 회장과 부회장이 마주 보고 앉고 나머지 6명이 6개의 자리에 앉으면 되므로 구하는 방법의 수는

$_6P_6=6!=720$



014-1 구하는 방법의 수는 4가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(4-1)!=3!=6$ 답 6

014-2 특정한 색을 윗면에 칠하면 아랫면을 칠하는 방법의 수는 5

나머지 4가지 색을 옆면에 칠하는 방법의 수는 4가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

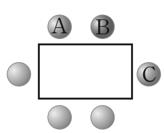
$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는 $5\cdot6=30$ 답 30

015-1 6명이 원형으로 둘러앉는 방법의 수는

$(6-1)!=5!=120$

이때 원형으로 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 기준이 되는 사람의 위치가 오른쪽 그림의 A, B, C일 때 서로 다른 경우가 된다.



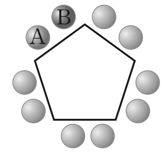
따라서 구하는 방법의 수는

$120\cdot3=360$ 답 360

015-2 10명이 원형으로 둘러앉는 방법의 수는

$(10-1)!=9!$

이때 원형으로 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 기준이 되는 사람의 위치가 오른쪽 그림의 A, B일 때 서로 다른 경우가 된다.



따라서 구하는 방법의 수는

$9!\cdot2$ 답 ①

016-1 (1) 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 1, 2, 3, 4, 5의 5가지이고, 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 5의 2가지이다. 각각에 대하여 백의 자리, 십의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 나열하면 되므로 구하는 5의 배수의 개수는

$5\cdot2\cdot{}_6\Pi_2=5\cdot2\cdot6^2=360$

(2) 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 1, 2, 3, 4, 5의 5가지이고, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리 중에서 0이 오는 자리를 정하는 경우는 3가지이다. 남은 두 자리에는 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 나열하면 되므로 구하는 자연수의 개수는

$5\cdot3\cdot{}_5\Pi_2=5\cdot3\cdot5^2=375$

답 (1) 360 (2) 375

017-1 X에서 Y로의 함수는 집합 Y의 원소 a, b, c, d에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 집합 X의 원소 1, 2에 대응시키면 되므로 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

따라서 구하는 함수의 개수는

$m={}_4\Pi_2=4^2=16$

X에서 Y로의 일대일함수는 집합 Y의 원소 a, b, c, d에서 서로 다른 2개를 뽑아 집합 X의 원소 1, 2에 대응시키면 되므로 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 순열의 수와 같다.

따라서 구하는 일대일함수의 개수는

$n={}_4P_2=12$

$\therefore m+n=28$ 답 28

017-2 (1) X에서 X로의 일대일 대응의 개수는 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$4!=24$

(2) $f(x)=f(y)$인 서로 다른 두 원소 x, y가 존재하면 함수 f는 일대일 대응이 아니다.

모든 함수의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

이므로 구하는 함수의 개수는

$256-24=232$

답 (1) 24 (2) 232

018-1 맨 앞에 올 수 있는 문자는 i, e의 2가지이고, 나머지 6개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{6!}{2!}=360$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\cdot360=720$

답 720

018-2 (1) 일의 자리의 숫자가 1 또는 3일 때 홀수이다.

(i) 일의 자리의 숫자가 1인 경우

1□□□□1에서 4개의 □ 안에 0, 2, 2, 3을 나열하면 되므로

$\dfrac{4!}{2!}=12$

2□□□□1에서 4개의 □ 안에 0, 1, 2, 3을 나열하면 되므로

$4!=24$

3□□□□1에서 4개의 □ 안에 0, 1, 2, 2를 나열하면 되므로

$\dfrac{4!}{2!}=12$

(ii) 일의 자리의 숫자가 3인 경우

1□□□□3에서 4개의 □ 안에 0, 1, 2, 2를 나열하면 되므로

$\dfrac{4!}{2!}=12$

2□□□□3에서 4개의 □ 안에 0, 1, 1, 2를 나열하면 되므로

$\dfrac{4!}{2!}=12$

(i), (ii)에서 구하는 홀수의 개수는

$12+24+12+12+12=72$

(2) 3의 배수이려면 각 자리의 수의 합이 3의 배수이어야 한다.

7개의 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3에서 4개를 택하였을 때, 그 합이 3의 배수가 되는 경우는

1, 1, 2, 2 또는 1, 2, 3, 3 또는 2, 2, 2, 3

의 3가지이다.

(i) 1, 1, 2, 2로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는 $\dfrac{4!}{2!\cdot2!}=6$

(ii) 1, 2, 3, 3으로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$

(iii) 2, 2, 2, 3으로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는 $\dfrac{4!}{3!}=4$

이상에서 구하는 3의 배수의 개수는

$6+12+4=22$

답 (1) 72 (2) 22

019-1 A지점에서 B지점으로 가는 최단 경로의 수는

$\dfrac{9!}{5!\cdot4!}=126$

A지점에서 P지점으로 가는 최단 경로의 수는

$\dfrac{5!}{3!\cdot2!}=10$

P지점에서 B지점으로 가는 최단 경로의 수는

$\dfrac{4!}{2!\cdot2!}=6$

따라서 A지점에서 P지점을 거쳐서 B지점으로 가는 최단 경로의 수는

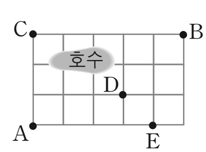
$10\cdot6=60$

이므로 구하는 최단 경로의 수는

$126-60=66$

답 66

019-2 오른쪽 그림과 같이 세 지점 C, D, E를 잡으면 A지점에서 B지점으로 최단 경로로 갈 때 반드시 C, D, E 중 어느 한 지점을 지나고, C, D, E를 동시에 지나는 경우는 없다.



(i) A → C → B로 가는 최단 경로의 수는

$1\cdot1=1$

(ii) A → D → B로 가는 최단 경로의 수는

$\dfrac{4!}{3!}\cdot\dfrac{4!}{2!\cdot2!}=24$

(iii) $A \to E \to B$로 가는 최단 경로의 수는

$$1 \cdot \frac{4!}{3!}=4$$

이상에서 구하는 최단 경로의 수는

$$1+24+4=29$$

답 29

중단원 연습 문제

본책 41~44쪽

01 12	02 ③	03 ④	04 24	05 560
06 44	07 ②	08 ②	09 ②	10 333
11 ④	12 17	13 ③	14 24	15 50
16 19	17 19			

01 전략 남자가 원탁에 둘러앉은 다음 그 사이사이에 여자가 1명씩 앉는 방법의 수를 구한다.

풀이 남자 3명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$$(3-1)!=2!=2$$

남자 사이사이의 3개의 자리에 여자 3명이 앉는 방법의 수는

$${}_3P_3=6$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$2\cdot 6=12$$

답 12

02 전략 빨간색의 위치가 정해지면 파란색의 위치가 하나로 정해짐을 이용한다.

풀이 6개의 날개 중 한 날개에 빨간색을 칠하면 맞은편의 날개에는 파란색을 칠해야 한다.
따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 5개를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$$(5-1)!=4!=24$$

답 ③

다른 풀이 빨간색과 파란색을 서로 맞은편 날개에 칠하고 남은 4개의 날개를 4가지 색으로 칠하면 되므로

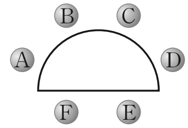
$${}_4P_4=24$$

03 전략 복잡한 모양의 탁자에 앉힐 때에는 고정시킬 자리를 먼저 정한다.

풀이 6명의 학생을 원형 탁자에 앉히는 방법의 수는

$$(6-1)!=5!=120$$

이때 원형으로 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 기준이 되는 사람의 위치가 오른쪽 그림의 A, B, C, D, E, F일 때 서로 다른 경우가 된다.



따라서 구하는 방법의 수는

$$120\cdot 6=720$$

답 ④

04 해결과정 • $99<k<10000$을 만족시키는 k는 세 자리 또는 네 자리 자연수이다.

(i) k가 세 자리 자연수인 경우
1, 2에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$${}_2\Pi_3=2^3=8$$

→ 40% 배점

(ii) k가 네 자리 자연수인 경우
1, 2에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$${}_2\Pi_4=2^4=16$$

→ 40% 배점

답구하기 • (i), (ii)에서 구하는 자연수 k의 개수는

$$8+16=24$$

→ 20% 배점

답 24

05 전략 g, i, r를 같은 문자로 생각하여 나열한다.

풀이 세 문자 g, i, r를 문자 x로 생각하여 나열한 후 첫 번째 x는 g로, 두 번째 x는 i로, 세 번째 x는 r로 바꾸면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는 8개의 문자 x, x, x, e, e, e, n, n을 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$$\frac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!}=560$$

답 560

06 해결과정 • $A \to C \to B$로 가는 최단 경로의 수는

$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{6!}{3!\cdot 3!}=80$$

→ 40% 배점

$A \to C \to D \to B$로 가는 최단 경로의 수는

$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{3!}{2!}\cdot\frac{3!}{2!}=36$$

→ 40% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 최단 경로의 수는

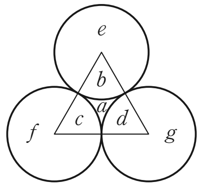
$$80-36=44$$

→ 20% 배점

답 44

07 (전략) 먼저 가운데 영역에 색을 칠하는 방법의 수를 구한 후, 원순열의 수를 이용한다.

(풀이) 오른쪽 그림과 같이 7개의 영역을 각각 a, b, c, d, e, f, g라 하자.



a에 색을 칠하는 방법의 수는 7

b, c, d에 색을 칠하는 방법의 수는 서로 다른 6개 중에서 3개를 택하여 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$$\frac{{}_6\mathrm{P}_3}{3}=40$$

e, f, g에 나머지 3개의 색을 칠하는 방법의 수는

$$3!=6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$7\cdot40\cdot6=1680$$

답 ②

08 (전략) 남학생이 각 변에 1명씩 앉는 방법의 수를 구한 다음 여학생이 앉는 방법의 수를 구한다.

(풀이) 남학생 4명이 정사각형 모양의 탁자의 각 변에 1명씩 앉을 때 각각 오른쪽 또는 왼쪽 의자를 선택하여 앉을 수 있으므로 그 방법의 수는

$$(4-1)!\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=96$$

남은 4개의 의자에 여학생 4명이 앉는 방법의 수는

$${}_4\mathrm{P}_4=24$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$96\cdot24=2304$$

답 ②

09 (전략) 부호 •와 −에서 n개를 택하여 만들 수 있는 신호의 개수는 ${}_2\Pi_n$임을 이용한다.

(풀이) 부호 •와 −에서 1개, 2개, ⋯, n개를 택하여 만들 수 있는 신호의 개수는 각각

$${}_2\Pi_1,\ {}_2\Pi_2,\ \cdots,\ {}_2\Pi_n$$

부호 •와 −에서 n개 이하를 택하여 만들 수 있는 신호가 300개 이상이라 하면

$${}_2\Pi_1+{}_2\Pi_2+\cdots+{}_2\Pi_n\ge300$$

$$2+2^2+\cdots+2^n\ge300$$

$$\frac{2(2^n-1)}{2-1}\ge300 \qquad \therefore\ 2^n\ge151$$

이때 $2^7=128$, $2^8=256$이므로 자연수 n의 최솟값은 8이다.

답 ②

10 문제이해 • 다섯 자리의 비밀번호에서 맨 앞과 맨 뒤에는 문자가 와야 하므로 가운데 3개의 자리에 숫자 7이 사용되는 개수에 따라 경우를 나누어 생각한다. ➔ 20% 배점

해결과정 • (i) 7이 1번 사용되는 경우

7의 자리를 택하는 경우의 수가 3이고, 나머지 4개의 자리에는 a, b, c의 3개의 문자에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 나열하면 된다.

따라서 비밀번호의 개수는

$$3\cdot{}_3\Pi_4=3\cdot3^4=243$$ ➔ 20% 배점

(ii) 7이 2번 사용되는 경우

7의 자리를 택하는 경우의 수가 3이고, 나머지 3개의 자리에는 a, b, c의 3개의 문자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 나열하면 된다.

따라서 비밀번호의 개수는

$$3\cdot{}_3\Pi_3=3\cdot3^3=81$$ ➔ 20% 배점

(iii) 7이 3번 사용되는 경우

7의 자리를 택하는 경우의 수가 1이고, 나머지 2개의 자리에는 a, b, c의 3개의 문자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 나열하면 된다.

따라서 비밀번호의 개수는

$${}_3\Pi_2=3^2=9$$ ➔ 20% 배점

답구하기 • 이상에서 구하는 비밀번호의 개수는

$$243+81+9=333$$ ➔ 20% 배점

답 333

(다른 풀이) a, b, c에서 중복을 허용하여 맨 앞과 맨 뒤에 사용할 문자를 나열하는 방법의 수는

$${}_3\Pi_2=3^2=9$$

7, a, b, c에서 중복을 허용하여 가운데 3개의 자리에 사용할 숫자 또는 문자를 택하여 나열하는 방법의 수는

$${}_4\Pi_3=4^3=64$$

따라서 맨 앞과 맨 뒤에 문자를 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리의 비밀번호의 개수는

$$9\cdot64=576$$

이때 다섯 자리에 모두 문자를 사용하는 비밀번호의 개수는 ${}_3\Pi_5=3^5=243$

이므로 구하는 비밀번호의 개수는

$$576-243=333$$

11 (전략) z와 z 사이에 놓이는 문자의 개수가 1, 3, 5인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) z와 z 사이에 1개의 문자가 놓이는 경우

z, x, z를 한 문자 A로 생각하여 A, x, x, y, y를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$\frac{5!}{2!\cdot 2!}=30$$

z, y, z를 한 문자 A로 생각하여 A, x, x, x, y를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$\frac{5!}{3!}=20$$

따라서 z와 z 사이에 1개의 문자가 놓이도록 나열하는 방법의 수는

$$30+20=50$$

(ii) z와 z 사이에 3개의 문자가 놓이는 경우

z, x, x, x, z를 한 문자 A로 생각하여 A, y, y를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$\frac{3!}{2!}=3$$

z, x, x, y, z를 한 문자 A로 생각하여 A, x, y를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$3!=6$$

이때 z와 z 사이의 x, x, y를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

이므로 $6\cdot 3=18$

z, x, y, y, z를 한 문자 A로 생각하여 A, x, x를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$\frac{3!}{2!}=3$$

이때 z와 z 사이의 x, y, y를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

이므로 $3\cdot 3=9$

따라서 z와 z 사이에 3개의 문자가 놓이도록 나열하는 방법의 수는

$$3+18+9=30$$

(iii) z와 z 사이에 5개의 문자가 놓이는 경우

z와 z 사이에 x, x, x, y, y를 나열하는 방법의 수는

$$\frac{5!}{3!\cdot 2!}=10$$

이상에서 구하는 방법의 수는

$$50+30+10=90$$

답 ④

다른 풀이 x, x, x, y, y의 5개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\frac{5!}{3!\cdot 2!}=10$

x, x, x, y, y를

❶ x ❷ x ❸ x ❹ y ❺ y ❻

과 같이 나열한 후 ❶, ❷, ❸, ❹, ❺, ❻의 6개의 자리 중 2개의 z 사이에 홀수 개의 문자가 놓이도록 z가 놓일 두 자리를 선택하는 경우는

❶, ❷ 또는 ❶, ❹ 또는 ❶, ❻ 또는 ❷, ❸ 또는 ❷, ❺ 또는 ❸, ❹ 또는 ❸, ❻ 또는 ❹, ❺ 또는 ❺, ❻

의 9가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$$10\cdot 9=90$$

12 전략 0을 사용하지 않는 경우와 한 개 사용하는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 0을 한 개 이하 사용해야 하므로 다섯 자리 자연수를 만들 수 있는 경우는 다음과 같다.

(i) 0을 사용하지 않는 경우

각 자리의 수의 합이 5인 다섯 자리 자연수는

11111의 1개

(ii) 0을 한 개 사용하는 경우

각 자리의 수의 합이 5가 되려면 0, 1, 1, 1, 2로 자연수를 만들어야 한다.

만의 자리의 숫자가 1인 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

만의 자리의 숫자가 2인 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

따라서 0, 1, 1, 1, 2로 만들 수 있는 다섯 자리 자연수의 개수는

$$12+4=16$$

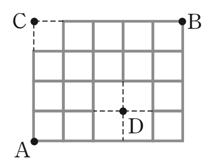
(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$1+16=17$$

답 17

13 전략 길이 없는 부분을 점선으로 연결한 후 모든 최단 경로의 수에서 지나갈 수 없는 지점을 지나는 최단 경로의 수를 뺀다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 길이 없는 부분을 점선으로 연결하고 두 지점 C, D를 잡는다.



이때 A → B로 가는 최단 경로의 수는

$$\frac{9!}{5!\cdot 4!}=126$$

A → C → B로 가는 최단 경로의 수는 1

A → D → B로 가는 최단 경로의 수는

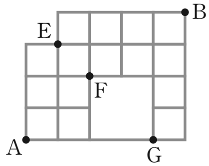
$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!}=40$$

따라서 구하는 최단 경로의 수는

$$126-(1+40)=85$$

답 ③

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 세 지점 E, F, G를 잡으면 A지점에서 B지점으로 최단 경로로 갈 때 반드시 E, F, G 중 어느 한 지점을 지나고 E, F, G를 동시에 지나는 경우는 없다.



(i) A → E → B로 가는 최단 경로의 수는

$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{5!}{4!}=20$$

(ii) A → F → B로 가는 최단 경로의 수는

$$\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{5!}{3!\cdot 2!}=60$$

(iii) A → G → B로 가는 최단 경로의 수는

$$1\cdot\frac{5!}{4!}=5$$

이상에서 구하는 최단 경로의 수는

$$20+60+5=85$$

14

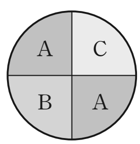
해결과정 • (i) 4가지 색을 사용하는 경우

$$(4-1)!=3!=6$$

➔ 30% 배점

(ii) 3가지 색을 사용하는 경우

4가지 색 중에서 3가지 색을 택하면 오른쪽 그림과 같이 1가지 색을 2군데 칠하고 나머지 색을 1군데씩 칠할 수 있으므로 그 방법의 수는

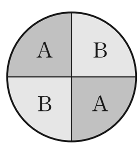


$$\frac{{}_4P_3}{2}=12$$

➔ 30% 배점

(iii) 2가지 색을 사용하는 경우

4가지 색 중에서 2가지 색을 택하면 2가지 색을 2군데씩 칠할 수 있으므로 그 방법의 수는



$$\frac{{}_4P_2}{2}=6$$

➔ 30% 배점

답구하기 • 이상에서 구하는 방법의 수는

$$6+12+6=24$$

➔ 10% 배점

답 24

15

전략 전체 함수의 개수에서 $f(a)f(b)f(c)f(d)<9$인 함수의 개수를 뺀다.

풀이 X에서 Y로의 함수의 개수는

$${}_3\Pi_4=3^4=81$$

$f(a)f(b)f(c)f(d)<9$이려면 $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$의 값이 다음과 같아야 한다.

1, 1, 1, 1인 함수 f의 개수는 1

1, 1, 1, 2인 함수 f의 개수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

1, 1, 1, 3인 함수 f의 개수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

1, 1, 2, 2인 함수 f의 개수는

$$\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$$

1, 1, 2, 3인 함수 f의 개수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

1, 2, 2, 2인 함수 f의 개수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

이상에서 $f(a)f(b)f(c)f(d)<9$인 함수 f의 개수는

$$1+4+4+6+12+4=31$$

따라서 구하는 함수의 개수는

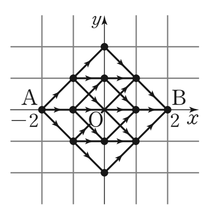
$$81-31=50$$

답 50

16

전략 점 A에서 점 B까지 가는 방법을 좌표평면 위에 나타내어 본다.

풀이 오른쪽 그림에서 점 A$(-2, 0)$에서 점 B$(2, 0)$까지 가는 방법은 다음과 같다.



(i) ↗ ↗ ↘ ↘으로 이동하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$$

(ii) ↗ → → ↘으로 이동하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

(iii) → → → →으로 이동하는 경우의 수는 1

이상에서 구하는 경우의 수는

$$6+12+1=19$$

답 19

Remark

↗ ↗ ↘ ↘으로 이동하는 경우는 반드시 이 순서로 이동하는 것을 의미하는 것이 아니라 이동 방향을 의미하는 것이다. 따라서 같은 것이 있는 순열의 수로 구할 수 있다.

17 문제이해 • 갑이 이긴 횟수를 x번, 비긴 횟수를 y번이라 하면 진 횟수는 $4-(x+y)$번이므로

$3x+2y+4-(x+y)=8$

$\therefore 2x+y=4$ (단, x, y는 음이 아닌 정수)

➔ 20% 배점

해결과정 • (i) $x=2$, $y=0$인 경우

갑이 2번 이기고 2번 지는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ ➔ 25% 배점

(ii) $x=1$, $y=2$인 경우

갑이 1번 이기고 2번 비기고 1번 지는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!}=12$ ➔ 25% 배점

(iii) $x=0$, $y=4$인 경우

갑이 4번 비기는 경우의 수는

1 ➔ 20% 배점

답구하기 • 이상에서 구하는 경우의 수는

$6+12+1=19$ ➔ 10% 배점

답 19

03 조합

유제

본책 50~60쪽

020-1 (1) ${}_nC_2+{}_nC_3$

$$=\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}$$

$$=\frac{1}{6}n(n-1)\{3+(n-2)\}$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)n(n-1)$$

이므로 $\dfrac{1}{6}(n+1)n(n-1)=56$

$(n+1)n(n-1)=8\cdot 7\cdot 6$

$\therefore n=7$

(2) ${}_nP_3+5\,{}_nC_3$

$$=n(n-1)(n-2)+5\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}$$

$$=n(n-1)(n-2)\left(1+\frac{5}{6}\right)$$

$$=\frac{11}{6}n(n-1)(n-2)$$

이므로 $\dfrac{11}{6}n(n-1)(n-2)=44$

$n(n-1)(n-2)=4\cdot 3\cdot 2$

$\therefore n=4$

(3) ${}_{16}C_{n+7}={}_{16}C_{2n}$에서

(i) $n+7=2n$에서

$n=7$

(ii) $n+7+2n=16$에서

$3n=9 \qquad \therefore n=3$

(i), (ii)에서

$n=3$ 또는 $n=7$

답 (1) 7 (2) 4 (3) 3, 7

020-2 $n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}$

$$=n\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$$

$$=n\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$$

$$=r\cdot\frac{n!}{r!(n-r)!}=r\cdot{}_nC_r$$

$\therefore r\cdot{}_nC_r=n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}$ ⋯ 증명 끝

답 풀이 참조

021-1 (1) 볼펜 6자루 중에서 2자루를 꺼내는 방법의 수는 $\quad {}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$

연필 5자루 중에서 2자루를 꺼내는 방법의 수는

$${}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$$

따라서 구하는 방법의 수는 $\quad 15\cdot10=150$

(2) (i) 볼펜 6자루 중에서 3자루를 꺼내는 방법의 수는

$${}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$$

연필 5자루 중에서 1자루를 꺼내는 방법의 수는

$${}_5C_1=5$$

따라서 방법의 수는 $\quad 20\cdot5=100$

(ii) 볼펜 6자루 중에서 4자루를 꺼내는 방법의 수는

$${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$$100+15=115$$

(3) 11자루 중에서 4자루를 꺼내는 방법의 수는

$${}_{11}C_4=\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=330$$

볼펜만 4자루를 꺼내는 방법의 수는

$${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$$

연필만 4자루를 꺼내는 방법의 수는

$${}_5C_4={}_5C_1=5$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$330-(15+5)=310$$

답 (1) 150 (2) 115 (3) 310

022-1 어른 6명 중에서 2명, 어린이 5명 중에서 1명을 뽑는 방법의 수는

$${}_6C_2\cdot{}_5C_1=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\cdot5=75$$

(1) 뽑힌 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$$3!=6$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$75\cdot6=450$$

(2) 어른 2명을 이웃하게 세우는 방법의 수는

$$2!\cdot2!=4$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$75\cdot4=300$$

답 (1) 450 (2) 300

022-2 7을 제외한 6개의 숫자 중에서 2개를 뽑는 방법의 수는

$${}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$$

7을 포함한 숫자 3개를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$3!=6$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$15\cdot6=90$$

답 90

다른 풀이 7이 올 수 있는 자리는 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 3가지이고, 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개의 숫자 중에서 2개를 뽑아 나머지 자리에 나열하면 되므로 구하는 자연수의 개수는

$$3\cdot{}_6P_2=3\cdot6\cdot5=90$$

023-1 (1) 8개의 점에서 2개의 점을 택하는 방법의 수는

$${}_8C_2=\frac{8\cdot7}{2\cdot1}=28$$

직선 l_1 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_3C_2={}_3C_1=3$$

직선 l_2 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$$

이때 일직선 위에 있는 점으로 만들 수 있는 직선은 1개이므로 구하는 직선의 개수는

$$28-3+1-10+1=17$$

(2) 8개의 점에서 3개의 점을 택하는 방법의 수는

$${}_8C_3=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$$

직선 l_1 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$${}_3C_3=1$$

직선 l_2 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$$

이때 일직선 위에 있는 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$$56-1-10=45$$

답 (1) 17 (2) 45

다른 풀이 (1) 직선 l_1 위의 한 점과 직선 l_2 위의 한 점을 택하는 방법의 수는

$${}_3C_1\cdot{}_5C_1=3\cdot5=15$$

직선 l_1 위의 점으로 만들 수 있는 직선이 1개, 직선 l_2 위의 점으로 만들 수 있는 직선이 1개이므로 구하는 직선의 개수는

$$15+1+1=17$$

024-1 (1) 가로선 5개 중에서 2개, 세로선 4개 중에서 2개를 택하면 하나의 직사각형이 결정되므로 구하는 직사각형의 개수는

$${}_5C_2\cdot{}_4C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\frac{4\cdot3}{2\cdot1}$$
$$=10\cdot6=60$$

(2) 가장 작은 정사각형 1개, 4개, 9개로 이루어진 정사각형의 개수는 각각

$$3\cdot4=12,\quad 2\cdot3=6,\quad 1\cdot2=2$$

이므로 정사각형의 개수는

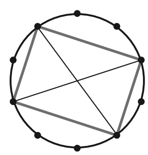
$$12+6+2=20$$

따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$$60-20=40$$

답 (1) 60 (2) 40

024-2 지름에 대한 원주각의 크기는 90°이므로 오른쪽 그림과 같이 원의 서로 다른 지름 2개가 직사각형의 대각선이 되도록 하는 원 위의 4개의 점을 연결하면 직사각형을 만들 수 있다.



따라서 원의 지름 5개 중에서 2개를 택하면 이들을 대각선으로 하는 직사각형이 결정되므로 구하는 직사각형의 개수는

$${}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$$

답 10

025-1 (1) 구하는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$$

(2) 먼저 오렌지 주스, 포도 주스, 딸기 주스를 각각 한 병씩 사고, 세 종류의 주스에서 2병을 추가로 구입하면 된다. 따라서 구하는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$$

답 (1) 21 (2) 6

026-1 구하는 항의 개수는 4개의 문자 a, b, c, d에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=20$$

답 20

026-2 $(a+b+c)^n$의 전개식에서 항의 개수는 3개의 문자 a, b, c에서 n개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_n={}_{3+n-1}C_n={}_{n+2}C_n={}_{n+2}C_2$$

따라서 ${}_{n+2}C_2=45$이므로

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2}=45$$
$$(n+2)(n+1)=10\cdot9$$

즉 $n+2=10$이므로 $n=8$

답 8

027-1 (1) 음이 아닌 정수인 해의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w에서 12개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_{12}={}_{4+12-1}C_{12}={}_{15}C_{12}={}_{15}C_3=455$$

(2) $x-1=a$, $y-1=b$, $z-1=c$, $w-1=d$로 놓으면

$$x=a+1,\ y=b+1,\ z=c+1,\ w=d+1$$

$x+y+z+w=12$에서

$$(a+1)+(b+1)+(c+1)+(d+1)=12$$
$$\therefore a+b+c+d=8$$

(단, a, b, c, d는 음이 아닌 정수)

$\cdots\cdots$ ㉠

즉 구하는 해의 개수는 방정식 ㉠의 해의 개수와 같으므로 ${}_4H_8={}_{4+8-1}C_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$

답 (1) 455 (2) 165

027-2 $a-1=x$, $b-2=y$, $c-3=z$로 놓으면

$$a=x+1,\ b=y+2,\ c=z+3$$

$a+b+c=13$에서

$$(x+1)+(y+2)+(z+3)=13$$
$$\therefore x+y+z=7$$ (단, x, y, z는 음이 아닌 정수)

$\cdots\cdots$ ㉠

즉 구하는 해의 개수는 방정식 ㉠의 해의 개수와 같으므로

$${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36$$

답 36

028-1 공역과 치역이 같아야 하므로 공역의 3개의 원소가 모두 정의역의 원소에 대응되어야 한다. 정의

역의 원소는 5개이고 공역의 원소는 3개이므로 3, 5, 7 외에 2개의 원소를 더 뽑아서 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2, 3, 4, 5에 대응시키면 된다.
따라서 함수 f의 개수는 집합 Y의 원소 3개 중에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$$

답 6

중단원 연습 문제

본책 62~65쪽

01 21	02 ⑤	03 ②	04 50	05 235
06 1	07 ④	08 235	09 ②	10 27
11 ③	12 ③	13 28	14 24	15 ③
16 ④	17 318	18 29		

01 전략 n개 중에서 특정한 m개를 반드시 포함하여 r개를 뽑는 방법의 수는 ${}_{n-m}C_{r-m}$이고, 특정한 m개를 포함하지 않고 r개를 뽑는 방법의 수는 ${}_{n-m}C_r$이다.

풀이 7개의 공 중에서 특정한 1개를 포함하여 5개를 뽑는 방법의 수는 특정한 1개를 제외한 6개에서 4개를 뽑는 방법의 수와 같으므로

$$a={}_6C_4={}_6C_2=15$$

또 7개의 공 중에서 특정한 1개를 포함하지 않는 방법의 수는 특정한 1개를 제외한 6개에서 5개를 뽑는 방법의 수와 같으므로

$$b={}_6C_5={}_6C_1=6$$

$$\therefore\ a+b=21$$

답 21

02 전략 B와 G를 제외한 나머지 6개의 문자 중에서 2개를 뽑는 조합의 수를 구한 후 B와 G를 포함한 4개의 문자를 B, G가 이웃하지 않게 나열하는 방법의 수를 구한다.

풀이 8개의 문자 중에서 B, G를 포함하여 4개를 뽑는 방법의 수는 B와 G를 제외한 나머지 6개의 문자 중에서 2개를 뽑는 방법의 수와 같으므로

$${}_6C_2=15$$

B, G를 포함하여 뽑은 4개의 문자 중에서 B, G를 제외한 2개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $2!$이고, 그 사이와 양 끝의 3개의 자리 중에서 2개의 자리에 B, G를 나열하는 방법의 수는 ${}_3P_2$이므로 B, G가 이웃하지 않게 나열하는 방법의 수는

$$2!\cdot{}_3P_2=2\cdot6=12$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$15\cdot12=180$$

답 ⑤

다른 풀이 B와 G가 이웃하지 않게 나열하는 방법의 수는 뽑은 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수에서 B와 G가 이웃하게 나열하는 방법의 수를 뺀 것과 같다.
뽑힌 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$4!=24$$

B, G를 한 묶음으로 생각하여 3개를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!$이고, 그 각각의 경우에 대하여 B, G가 자리를 바꾸는 방법의 수가 $2!$이므로 B와 G가 이웃하게 나열하는 방법의 수는

$$3!\cdot2!=6\cdot2=12$$

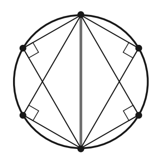
따라서 B, G가 이웃하지 않게 나열하는 방법의 수는

$$24-12=12$$

03 전략 원에서 지름에 대한 원주각의 크기는 $90°$임을 이용하여 직각삼각형의 개수를 구한다.

풀이 6개의 점으로 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$${}_6C_3=20$$



주어진 점들을 연결하여 만들 수 있는 원의 지름은 3개이고, 오른쪽 그림과 같이 원의 지름 한 개에 대하여 4개의 직각삼각형을 만들 수 있으므로 만들 수 있는 직각삼각형의 개수는

$$3\cdot4=12$$

따라서 직각삼각형이 아닌 삼각형의 개수는

$$20-12=8$$

답 ②

04 전략 중복조합을 이용하여 $(p+q)^n$ 꼴의 전개식의 항의 개수를 구한다.

풀이 $(a+b)^4$의 전개식에서 항의 개수는 2개의 문자 a, b에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$$

$(x+y+z)^3$의 전개식에서 항의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$$

따라서 구하는 항의 개수는

$$5\cdot10=50$$

답 50

05 전략 $x+y+z$의 값이 10 또는 11 또는 12일 때로 경우를 나누어 구한다.

풀이 x, y, z가 음이 아닌 정수이므로 $x+y+z$의 값은 10 또는 11 또는 12의 3가지 경우가 있다.

(i) $x+y+z=10$인 경우

3개의 문자 x, y, z에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{3+10-1}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=66$$

(ii) $x+y+z=11$인 경우

3개의 문자 x, y, z에서 11개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_{11}={}_{3+11-1}\mathrm{C}_{11}={}_{13}\mathrm{C}_{11}={}_{13}\mathrm{C}_2=78$$

(iii) $x+y+z=12$인 경우

3개의 문자 x, y, z에서 12개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_{12}={}_{3+12-1}\mathrm{C}_{12}={}_{14}\mathrm{C}_{12}={}_{14}\mathrm{C}_2=91$$

이상에서 구하는 해의 개수는

$$66+78+91=235$$

답 235

06 문제이해 • $\alpha+\beta=\dfrac{6}{5}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_5}{{}_n\mathrm{C}_6}=\frac{6}{5}$$

➔ 20% 배점

해결과정 •

즉 $\dfrac{\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}=\dfrac{6}{5}$이므로

$$\frac{6}{n-5}=\frac{6}{5}\qquad\therefore\ n=10$$

➔ 50% 배점

답구하기 • 따라서 주어진 이차방정식은 ${}_{10}\mathrm{C}_6x^2-{}_{10}\mathrm{C}_5x+{}_{10}\mathrm{C}_4=0$이므로

$$\alpha\beta=\frac{{}_{10}\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_6}=\frac{{}_{10}\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=1$$

➔ 30% 배점

답 1

07 전략 악수를 하려면 2명이 있어야 하므로 n명이 모두 서로 악수를 하였을 때, 악수를 한 총 횟수는 ${}_n\mathrm{C}_2$이다.

풀이 24명 중에서 악수할 2명을 택하는 방법의 수는

$${}_{24}\mathrm{C}_2=276$$

부인 12명 중에서 2명을 택하는 방법의 수는

$${}_{12}\mathrm{C}_2=66$$

24명 중에서 부부 2명을 택하는 방법의 수는

$$12$$

따라서 악수한 총 횟수는

$$276-(66+12)=198\ (\text{번})$$

답 ④

08 해결과정 • (i) 12개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

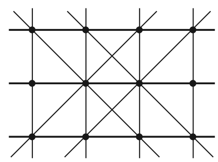
$${}_{12}\mathrm{C}_2=66$$

일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_4\mathrm{C}_2=6$$



이때 오른쪽 그림과 같이 일직선 위에 3개의 점이 있는 경우는 8가지이고, 일직선 위에 4개의 점이 있는 경우는 3가지이므로 서로 다른 직선의 개수는

$$66-8\cdot3-3\cdot6+8+3=35$$

$$\therefore\ a=35$$

➔ 50% 배점

(ii) 12개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$${}_{12}\mathrm{C}_3=220$$

이때 일직선 위에 있는 3개의 점을 택하는 방법의 수는

$$8\cdot{}_3\mathrm{C}_3+3\cdot{}_4\mathrm{C}_3=8\cdot1+3\cdot4=20$$

따라서 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$$220-20=200$$

$$\therefore\ b=200$$

➔ 40% 배점

답구하기 • $\therefore\ a+b=235$

➔ 10% 배점

답 235

09 전략 중복조합을 이용하여 m에 대한 식을 세운다.

풀이 세 종류의 피자 중에서 m개를 주문하는 경우의 수는

$${}_3H_m={}_{3+m-1}C_m={}_{m+2}C_m={}_{m+2}C_2$$

즉 ${}_{m+2}C_2=36$이므로

$$\frac{(m+2)(m+1)}{2}=36$$

$$(m+2)(m+1)=9\cdot 8$$

$m+2=9$이므로

$$m=7$$

따라서 세 종류의 피자를 적어도 하나씩 포함하여 7개를 주문하는 경우의 수는 세 종류의 피자를 1개씩 주문하고 나머지 4개를 주문하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$$

답 ②

10 해결과정 • A, B, C에게 초콜릿을 적어도 한 개씩 나누어 주려면 A, B, C에게 초콜릿을 한 개씩 나누어 준 다음 나머지 5개의 초콜릿을 나누어 주면 되므로

$m={}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$ ➔ 40% 배점

A, B에게 2개 이상씩, C에게 홀수 개를 나누어 줄 때, A, B, C가 받는 초콜릿의 개수를 순서쌍으로 나타내면

$(2, 3, 3)$, $(3, 2, 3)$, $(2, 5, 1)$, $(5, 2, 1)$,
$(3, 4, 1)$, $(4, 3, 1)$

$\therefore n=6$ ➔ 40% 배점

답구하기 • $\therefore m+n=27$ ➔ 20% 배점

답 27

11 전략 중복조합을 이용하기 위하여 x, y, z를 치환한다.

풀이 $x+1=a$, $y+1=b$, $z+1=c$로 놓으면

$$x=a-1,\ y=b-1,\ z=c-1$$

$x+y+z=4$에서 $(a-1)+(b-1)+(c-1)=4$이므로

$a+b+c=7$ (단, a, b, c는 음이 아닌 정수) ……㉠

즉 구하는 순서쌍의 개수는 방정식 ㉠의 해의 개수와 같으므로

$${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36$$

답 ③

12 전략 방정식의 음이 아닌 정수인 해의 개수는 중복조합의 수를 이용하여 구한다.

풀이 $x+y+z=a$를 만족시키는 음이 아닌 정수인 해의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 a개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$f(a)={}_3H_a={}_{3+a-1}C_a={}_{a+2}C_a={}_{a+2}C_2$$

$$=\frac{(a+2)(a+1)}{2}=\frac{a^2+3a+2}{2}$$

$$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(20)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{20}(a^2+3a+2)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{a=1}^{20}a^2+3\sum_{a=1}^{20}a+\sum_{a=1}^{20}2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{20\cdot 21\cdot 41}{6}+3\cdot\frac{20\cdot 21}{2}+2\cdot 20\right)$$

$$=1770$$

답 ③

Remark 자연수의 거듭제곱의 합

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

13 전략 $a+b+c=9$이므로 중복조합을 이용한다.

풀이 주어진 조건에 의하여

$$a+b+c=9\ (a\ge 1,\ b\ge 1,\ c\ge 1)$$

이므로 구하는 상담 계획표의 가짓수는 위의 방정식의 자연수인 해의 개수와 같다.

$a-1=x$, $b-1=y$, $c-1=z$로 놓으면

$$a=x+1,\ b=y+1,\ c=z+1$$

따라서 $(x+1)+(y+1)+(z+1)=9$이므로

$x+y+z=6$ (단, x, y, z는 음이 아닌 정수) ……㉠

즉 구하는 상담 계획표의 가짓수는 방정식 ㉠의 해의 개수와 같으므로

${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

답 28

14 문제이해 • 조건 (나)에서 $f(1)f(4)=6$이고 조건 (가)에 의하여 $f(1)\le f(4)$이므로

$f(1)=1$, $f(4)=6$ 또는 $f(1)=2$, $f(4)=3$

➔ 20% 배점

해결과정 • (ⅰ) $f(1)=1, f(4)=6$인 경우

6개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 2, 3에 대응시키면 된다.

즉 서로 다른 6개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_6H_2={}_{6+2-1}C_2={}_7C_2=21$ ➔ 30% 배점

(ⅱ) $f(1)=2$, $f(4)=3$인 경우

2개의 숫자 2, 3 중에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 2, 3에 대응시키면 된다.

즉 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_2={}_{2+2-1}C_2={}_3C_2={}_3C_1=3$ ➔ 30% 배점

답구하기 • (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수 f의 개수는

$21+3=24$ ➔ 20% 배점

답 24

15 전략 사용하는 색의 개수로 경우를 나누어 구한다.

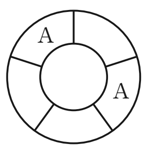
풀이 (ⅰ) 6가지 색을 사용하는 경우

6가지 색 중에서 1가지 색을 택하여 가운데 원에 칠하고 남은 5가지 색을 칠하는 방법의 수는

${}_6C_1\cdot(5-1)!=6\cdot24=144$

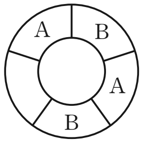
(ⅱ) 5가지 색을 사용하는 경우

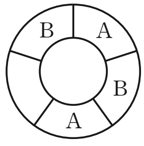
오른쪽 그림과 같이 6가지 색 중에서 1가지 색을 택하여 2개의 영역에 칠하고, 남은 5가지 색 중에서 4개를 택하여 남은 4개의 영역에 칠하는 방법의 수는



${}_6C_1\cdot{}_5P_4=6\cdot120=720$

(ⅲ) 4가지 색을 사용하는 경우





위의 그림과 같이 6가지 색 중에서 2가지 색을 택하여 4개의 영역에 칠하고, 남은 4가지 색 중에서 2개를 택하여 남은 2개의 영역에 칠하는 방법의 수는

${}_6C_2\cdot2\cdot{}_4P_2=15\cdot2\cdot12=360$

이상에서 구하는 방법의 수는

$144+720+360=1224$

답 ③

16 전략 1부터 40까지의 홀수를 3으로 나눈 나머지에 따라 분류한다.

풀이 1부터 40까지의 홀수 중에서 3으로 나눈 나머지가 0, 1, 2인 집합을 각각 A_0, A_1, A_2라 하면

$A_0=\{3, 9, 15, 21, 27, 33, 39\}$,

$A_1=\{1, 7, 13, 19, 25, 31, 37\}$,

$A_2=\{5, 11, 17, 23, 29, 35\}$

두 수의 합이 3의 배수가 되려면 A_0에서 2개의 원소를 뽑거나 A_1과 A_2에서 각각 1개의 원소를 뽑아야 한다.

(ⅰ) A_0에서 2개의 원소를 뽑는 경우의 수는

${}_7C_2=21$

(ⅱ) A_1과 A_2에서 각각 1개의 원소를 뽑는 경우의 수는

${}_7C_1\cdot{}_6C_1=42$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$21+42=63$

답 ④

17 해결과정 • 6개의 빨간 구슬을 서로 다른 3개의 상자에 넣는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

4개의 노란 구슬을 서로 다른 3개의 상자에 넣는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

따라서 구슬을 상자에 넣는 모든 방법의 수는

$28\cdot15=420$ ➔ 30% 배점

(ⅰ) 빈 상자가 1개인 경우

구슬을 1개도 넣지 않을 1개의 상자를 택하는 방법의 수는 ${}_3C_1=3$

나머지 2개의 상자에 빨간 구슬 6개를 넣는 방법의 수는 ${}_2H_6={}_{2+6-1}C_6={}_7C_6={}_7C_1=7$

노란 구슬 4개를 넣는 방법의 수는

${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

이때 빈 상자가 2개인 경우의 수가 2이므로 빈 상자가 1개인 방법의 수는

$3\cdot(7\cdot5-2)=99$ ➔ 30% 배점

(ⅱ) 빈 상자가 2개인 경우

구슬을 1개도 넣지 않을 2개의 상자를 택하면 나머지 1개의 상자에 10개의 구슬을 모두 넣으면 되므로 이때의 방법의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$ ➔ 20% 배점

답구하기 • 이상에서 구하는 방법의 수는

$420-(99+3)=318$ ➔ 20% 배점

답 318

18 문제이해 • $x=2a+1$, $y=2b+1$, $z=2c+1$ (a, b, c는 음이 아닌 정수)로 놓으면 $x+y+z=n$에서

$$(2a+1)+(2b+1)+(2c+1)=n$$

$$\therefore a+b+c=\frac{n-3}{2}$$

따라서 $x+y+z=n$을 만족시키는 양의 홀수인 해의 개수는 $a+b+c=\frac{n-3}{2}$을 만족시키는 음이 아닌 정수인 해의 개수와 같다. ➔ 30% 배점

해결과정 • $\frac{n-3}{2}=k$라 하면

$$A_n={}_3\mathrm{H}_k={}_{3+k-1}\mathrm{C}_k={}_{k+2}\mathrm{C}_k={}_{k+2}\mathrm{C}_2$$

$$=\frac{(k+2)(k+1)}{2}$$ ➔ 20% 배점

$A_n\ge100$에서

$$\frac{(k+2)(k+1)}{2}\ge100$$

$$\therefore (k+2)(k+1)\ge200$$ ➔ 20% 배점

답구하기 • 이때 $14\cdot13=182$, $15\cdot14=210$이므로

$k+1\ge14$ $\therefore k\ge13$

즉 $\frac{n-3}{2}\ge13$이므로 $n\ge29$

따라서 구하는 n의 최솟값은 29이다. ➔ 30% 배점

답 29

04 이항정리와 분할

유제

본책 70~86쪽

029-1 (1) $\left(x^2-\frac{3}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5\mathrm{C}_r(x^2)^{5-r}\left(-\frac{3}{x}\right)^r={}_5\mathrm{C}_r(-3)^r x^{10-3r}$$

x^4항은 $10-3r=4$일 때이므로

$r=2$

따라서 x^4의 계수는

$${}_5\mathrm{C}_2(-3)^2=10\cdot9=90$$

(2) $(3x-2y)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4\mathrm{C}_r(3x)^{4-r}(-2y)^r={}_4\mathrm{C}_r3^{4-r}(-2)^r x^{4-r}y^r$$

xy^3항은 $4-r=1$, $r=3$일 때이므로

$r=3$

따라서 xy^3의 계수는

$${}_4\mathrm{C}_3\,3^{4-3}(-2)^3=4\cdot3\cdot(-8)=-96$$

답 (1) 90 (2) −96

029-2 $\left(kx^3-\frac{2}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4\mathrm{C}_r(kx^3)^{4-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r={}_4\mathrm{C}_r(-2)^r k^{4-r}x^{12-4r}$$

상수항은 $12-4r=0$일 때이므로 $r=3$

이때 상수항이 8이므로

${}_4\mathrm{C}_3(-2)^3k=8$, $-32k=8$

$$\therefore k=-\frac{1}{4}$$

답 $-\frac{1}{4}$

030-1 (1) $(x-2)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4\mathrm{C}_r x^{4-r}(-2)^r$$

$(x^2+y)^7$의 전개식의 일반항은

$${}_7\mathrm{C}_s(x^2)^{7-s}y^s={}_7\mathrm{C}_s x^{14-2s}y^s$$

따라서 $(x-2)^4(x^2+y)^7$의 전개식의 일반항은

$${}_4\mathrm{C}_r x^{4-r}(-2)^r\cdot{}_7\mathrm{C}_s x^{14-2s}y^s$$

$$={}_4\mathrm{C}_r\cdot{}_7\mathrm{C}_s(-2)^r x^{18-r-2s}y^s$$

x^6y^5항은 $18-r-2s=6$, $s=5$일 때이고, 이를 만족시키는 r, s의 값은

$r=2$, $s=5$

이므로 x^6y^5의 계수는

$${}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_7\mathrm{C}_5(-2)^2=6\cdot21\cdot4=504$$

(2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r x^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_6C_r x^{6-2r} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $(x^2-3)\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^2항은 x^2과 ㉠의 상수항, -3과 ㉠의 x^2항이 곱해질 때 나타난다.

(i) ㉠에서 상수항은 $6-2r=0$, 즉 $r=3$일 때이므로

$${}_6C_3=20$$

(ii) ㉠에서 x^2항은 $6-2r=2$, 즉 $r=2$일 때이므로

$${}_6C_2 x^2=15x^2$$

(i), (ii)에서 x^2항은

$$x^2\cdot 20+(-3)\cdot 15x^2=-25x^2$$

이므로 구하는 x^2의 계수는 -25이다.

답 (1) 504 (2) -25

다른 풀이 (1) $(x^2+y)^7$의 전개식에서만 y^5을 포함하고 있는 항을 얻을 수 있다. 이때

$${}_7C_5(x^2)^2y^5={}_7C_5x^4y^5$$

이므로 x^6y^5항은 $(x^2+y)^7$의 전개식에서 x^4y^5항과 $(x-2)^4$의 전개식에서 x^2항이 곱해질 때 나타난다.

따라서 x^6y^5의 계수는

$${}_4C_2(-2)^2\cdot{}_7C_5=504$$

031-1 $(x+y-2z)^6$의 전개식의 일반항은

$$\frac{6!}{p!q!r!}x^py^q(-2z)^r=\frac{6!}{p!q!r!}(-2)^rx^py^qz^r$$

(단, $p+q+r=6$)

x^2yz^3항은 $p=2$, $q=1$, $r=3$일 때이므로 x^2yz^3의 계수는

$$\frac{6!}{2!\cdot 1!\cdot 3!}\cdot(-2)^3=-480$$

답 -480

031-2 $(x^2+ax+2)^6$의 전개식의 일반항은

$$\frac{6!}{p!q!r!}(x^2)^p(ax)^q2^r=\frac{6!}{p!q!r!}2^ra^qx^{2p+q}$$

(단, $p+q+r=6$)

x^3항은 $2p+q=3$일 때이므로 p, q, r의 순서쌍 (p, q, r)는

$$(0, 3, 3), (1, 1, 4)$$

따라서 x^3의 계수는

$$\frac{6!}{0!\cdot 3!\cdot 3!}\cdot 2^3a^3+\frac{6!}{1!\cdot 1!\cdot 4!}\cdot 2^4a^1$$

$$=160a^3+480a$$

이때 x^3의 계수가 2240이므로

$$160a^3+480a=2240$$

$$a^3+3a-14=0, \quad (a-2)(a^2+2a+7)=0$$

a는 실수이므로 $a=2$

답 2

032-1 $A={}_5C_1+{}_6C_2+{}_7C_3+\cdots+{}_{14}C_{10}$이라 하면

$${}_5C_0+A={}_5C_0+{}_5C_1+{}_6C_2+{}_7C_3+\cdots+{}_{14}C_{10}$$
$$={}_6C_1+{}_6C_2+{}_7C_3+\cdots+{}_{14}C_{10}$$
$$={}_7C_2+{}_7C_3+\cdots+{}_{14}C_{10}$$
$$\vdots$$
$$={}_{14}C_9+{}_{14}C_{10}$$
$$={}_{15}C_{10}={}_{15}C_5=3003$$
$$\therefore A=3003-{}_5C_0=3002$$

답 3002

032-2 파스칼의 삼각형에서 n행의 이항계수를 모두 더한 값은 2^{n-1}이므로 1행부터 10행까지의 모든 수의 합은

$$2^0+2^1+2^2+\cdots+2^9=\frac{2^{10}-1}{2-1}$$
$$=1023$$

답 1023

033-1 (1) $\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r={}_nC_0+{}_nC_1+\cdots+{}_nC_n=2^n$

이므로 주어진 부등식은

$$2000<2^n<3000$$

이때 $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$, $2^{12}=4096$이므로

$$n=11$$

(2) $\sum_{k=25}^{49}{}_{49}C_k={}_{49}C_{25}+{}_{49}C_{26}+\cdots+{}_{49}C_{49} \quad \cdots\cdots ㉠$

한편 ${}_{49}C_0+{}_{49}C_1+{}_{49}C_2+\cdots+{}_{49}C_{49}=2^{49}$이므로

$$({}_{49}C_{49}+{}_{49}C_{48}+\cdots+{}_{49}C_{25})$$
$$+({}_{49}C_{25}+{}_{49}C_{26}+\cdots+{}_{49}C_{49})=2^{49}$$
$$2({}_{49}C_{25}+{}_{49}C_{26}+\cdots+{}_{49}C_{49})=2^{49}$$
$$\therefore {}_{49}C_{25}+{}_{49}C_{26}+\cdots+{}_{49}C_{49}=2^{48}$$

따라서 ㉠에서 $\sum_{k=25}^{49}{}_{49}C_k=2^{48}$이므로 구하는 값은

$$\log_2 2^{48}=48$$

답 (1) 11 (2) 48

Remark 로그의 성질

$a>0$, $a\neq 1$, $M>0$, $N>0$일 때

① $\log_a M+\log_a N=\log_a MN$

② $\log_a M-\log_a N=\log_a \frac{M}{N}$

③ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

034-1 $9=8+1=7+2=6+3=5+4$
$=7+1+1=6+2+1=5+3+1$
$=5+2+2=4+4+1=4+3+2$
$=3+3+3$
$=6+1+1+1=5+2+1+1$
$=4+3+1+1=4+2+2+1$
$=3+3+2+1=3+2+2+2$

(1) 구하는 방법의 수는 자연수 9를 4개의 자연수로 분할하는 방법의 수와 같으므로
$P(9,\ 4)=6$

(2) 빈 봉지가 1개, 2개, 3개인 것은 9개의 사탕을 각각 3개, 2개, 1개의 봉지에 나누어 담는 방법의 수와 같다.
즉 구하는 방법의 수는 자연수 9를 4개 이하의 자연수로 분할하는 방법의 수와 같으므로
$P(9,\ 4)+P(9,\ 3)+P(9,\ 2)+P(9,\ 1)$
$=6+7+4+1=18$

답 (1) 6 (2) 18

034-2 각 부분에 우표를 2장씩 포함시키고, 나머지 4장을 3부분 또는 2부분 또는 1부분으로 나누면 되므로 자연수 4를 3개 이하의 자연수로 분할하는 것과 같다. 이때
$4=3+1=2+2$
$=2+1+1$
이므로 구하는 방법의 수는
$P(4,\ 1)+P(4,\ 2)+P(4,\ 3)=1+2+1=4$

답 4

다른 풀이 각 부분에 우표를 1장씩 포함시키고, 나머지 7장을 3부분으로 나누면 되므로 자연수 7을 3개의 자연수로 분할하는 것과 같다. 이때
$7=5+1+1=4+2+1$
$=3+3+1=3+2+2$
이므로 구하는 방법의 수는
$P(7,\ 3)=4$

035-1 (1) $6=5+1=4+2=3+3$
이므로 원소의 개수가 6인 집합을 2개의 집합으로 분할하는 방법은 다음과 같다.
(i) 원소의 개수가 1, 5인 집합으로 분할하는 방법의 수는
$_6C_1\cdot{}_5C_5=6$
(ii) 원소의 개수가 2, 4인 집합으로 분할하는 방법의 수는
$_6C_2\cdot{}_4C_4=15$
(iii) 원소의 개수가 3, 3인 집합으로 분할하는 방법의 수는
$_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\dfrac{1}{2!}=10$
이상에서
$S(6,\ 2)=6+15+10=31$

(2) $6=4+1+1=3+2+1=2+2+2$
이므로 원소의 개수가 6인 집합을 3개의 집합으로 분할하는 방법은 다음과 같다.
(i) 원소의 개수가 1, 1, 4인 집합으로 분할하는 방법의 수는
$_6C_1\cdot{}_5C_1\cdot{}_4C_4\cdot\dfrac{1}{2!}=15$
(ii) 원소의 개수가 1, 2, 3인 집합으로 분할하는 방법의 수는
$_6C_1\cdot{}_5C_2\cdot{}_3C_3=60$
(iii) 원소의 개수가 2, 2, 2인 집합으로 분할하는 방법의 수는
$_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\dfrac{1}{3!}=15$
이상에서
$S(6,\ 3)=15+60+15=90$

답 (1) 31 (2) 90

036-1 (1) $8=7+1=6+2=5+3=4+4$
이므로 8송이로 2개의 꽃다발을 만드는 경우는 다음과 같다.
(i) 1송이, 7송이로 나누는 방법의 수는
$_8C_1\cdot{}_7C_7=8$
(ii) 2송이, 6송이로 나누는 방법의 수는
$_8C_2\cdot{}_6C_6=28$
(iii) 3송이, 5송이로 나누는 방법의 수는
$_8C_3\cdot{}_5C_5=56$
(iv) 4송이, 4송이로 나누는 방법의 수는
$_8C_4\cdot{}_4C_4\cdot\dfrac{1}{2!}=35$
이상에서 구하는 방법의 수는
$8+28+56+35=127$

(2) $127\cdot 2!=254$

답 (1) 127 (2) 254

036-2 (1) 구하는 방법의 수는 자연수 5를 2개의 자연수로 분할하는 것과 같다.
이때
$$5=4+1=3+2$$
이므로 구하는 방법의 수는
$$P(5,\ 2)=2$$
(2) (i) 1개, 4개로 나누어 담는 방법의 수는
$${}_5C_1\cdot{}_4C_4=5$$
(ii) 2개, 3개로 나누어 담는 방법의 수는
$${}_5C_2\cdot{}_3C_3=10$$
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$$5+10=15$$
(3) (i) 1개, 4개로 나누어 담는 방법의 수는
$${}_5C_1\cdot{}_4C_4=5$$
(ii) 2개, 3개로 나누어 담는 방법의 수는
$${}_5C_2\cdot{}_3C_3=10$$
(iii) 3개, 2개로 나누어 담는 방법의 수는
$${}_5C_3\cdot{}_2C_2=10$$
(iv) 4개, 1개로 나누어 담는 방법의 수는
$${}_5C_4\cdot{}_1C_1=5$$
이상에서 구하는 방법의 수는
$$5+10+10+5=30$$
답 (1) 2 (2) 15 (3) 30

다른 풀이 (3) 구하는 방법의 수는 (2)에서 나누어 담은 상자를 두 사람 A, B에게 나누어 주는 방법의 수와 같으므로
$$15\cdot 2!=30$$

중단원 연습 문제 (본책 88~91쪽)

01 ③	02 ⑤	03 99	04 ③	05 280
06 ①	07 624	08 2	09 84	10 952
11 15	12 7	13 25	14 ③	15 ⑤
16 ③	17 25	18 8	19 ⑤	20 1806

01 전략 주어진 식의 전개식의 일반항을 이용하여 x의 계수와 상수항을 구한다.

풀이 $(x-a)^9$의 전개식의 일반항은
$${}_9C_r x^{9-r}(-a)^r$$
(i) x항은 $9-r=1$일 때이므로
$$r=8$$
따라서 x의 계수는
$${}_9C_8(-a)^8=9a^8$$
(ii) 상수항은 $9-r=0$일 때이므로
$$r=9$$
따라서 상수항은
$${}_9C_9(-a)^9=-a^9$$
(i), (ii)에서 x의 계수와 상수항의 합이 0이므로
$$9a^8-a^9=0,\qquad a^8(9-a)=0$$
$$\therefore a=9\ (\because\ a>0)$$
답 ③

02 전략 $(x^2+1)^3$, $(2x-y)^5$의 전개식의 일반항을 이용하여 $(x^2+1)^3(2x-y)^5$의 전개식의 일반항을 구한다.

풀이 $(x^2+1)^3$의 전개식의 일반항은
$${}_3C_r(x^2)^{3-r}\cdot 1^r={}_3C_r x^{6-2r}$$
$(2x-y)^5$의 전개식의 일반항은
$${}_5C_s(2x)^{5-s}(-y)^s={}_5C_s 2^{5-s}(-1)^s x^{5-s}y^s$$
따라서 $(x^2+1)^3(2x-y)^5$의 전개식의 일반항은
$${}_3C_r x^{6-2r}\cdot{}_5C_s 2^{5-s}(-1)^s x^{5-s}y^s$$
$$={}_3C_r\cdot{}_5C_s 2^{5-s}(-1)^s x^{11-2r-s}y^s \qquad \cdots\cdots ㉠$$
㉠에서 x^7y^4항은 $11-2r-s=7$, $s=4$일 때이므로
$$r=0,\ s=4$$
따라서 x^7y^4의 계수는
$${}_3C_0\cdot{}_5C_4\cdot 2^1\cdot(-1)^4=10$$
㉠에서 x^2y^3항은 $11-2r-s=2$, $s=3$일 때이므로
$$r=3,\ s=3$$
따라서 x^2y^3의 계수는
$${}_3C_3\cdot{}_5C_3\cdot 2^2(-1)^3=-40$$
즉 $a=10$, $b=-40$이므로
$$a-b=50$$
답 ⑤

03 전략 이항계수의 성질을 이용하여 주어진 로그의 진수 부분을 간단히 한다.

풀이 ${}_{100}C_1+{}_{100}C_3+{}_{100}C_5+\cdots+{}_{100}C_{99}=2^{100-1}=2^{99}$
이므로
$$\log_2({}_{100}C_1+{}_{100}C_3+{}_{100}C_5+\cdots+{}_{100}C_{99})$$
$$=\log_2 2^{99}=99$$
답 99

04 전략 8을 8 이하의 홀수인 자연수의 합으로 나타낸다.

풀이 자연수 8을 홀수 1, 3, 5, 7을 이용하여 분할하는 방법은

$$\begin{aligned}8&=7+1=5+3\\&=5+1+1+1=3+3+1+1\\&=3+1+1+1+1+1\\&=1+1+1+1+1+1+1+1\end{aligned}$$

이므로 구하는 방법의 수는

$2+2+1+1=6$ 답 ③

05 전략 조합의 수를 이용하여 분할하는 방법의 수를 구한다.

풀이 구하는 방법의 수는

${}_9C_3\cdot{}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\dfrac{1}{3!}=280$ 답 280

06 전략 주어진 식의 전개식의 일반항을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 $(x+a)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7C_r\,x^{7-r}a^r$ ······ ㉠

x^4항은 $7-r=4$일 때이므로 $r=3$

따라서 x^4의 계수는 ${}_7C_3\,a^3=35a^3$

즉 $35a^3=280$이므로

$a^3=8,\quad (a-2)(a^2+2a+4)=0$

$\therefore a=2$

㉠에서 일반항이 ${}_7C_r\,2^rx^{7-r}$이고, x^5항은 $7-r=5$일 때이므로 $r=2$

따라서 x^5의 계수는

${}_7C_2\cdot2^2=84$ 답 ①

07 문제이해 • $\left(x^5-\dfrac{3}{x^3}\right)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r\,(x^5)^{n-r}\left(-\dfrac{3}{x^3}\right)^r={}_nC_r\,(-3)^r\cdot x^{5n-8r}$

➔ 30% 배점

해결과정 • 상수항은 $5n-8r=0$일 때이므로

$r=\dfrac{5}{8}n$ ➔ 20% 배점

n이 자연수이고, r는 음이 아닌 정수이므로 n이 8의 배수이어야 한다. 따라서 n의 값은

$8,\ 16,\ 24,\ \cdots,\ 96$ ➔ 20% 배점

답구하기 • 따라서 상수항이 나오도록 하는 100 이하의 자연수 n의 값의 합은

$\dfrac{12(8+96)}{2}=624$ ➔ 30% 배점

답 624

Remark 등차수열의 합

등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

① 첫째항이 a, 제n항이 l일 때,

$S_n=\dfrac{n(a+l)}{2}$

② 첫째항이 a, 공차가 d일 때,

$S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

08 전략 $(a+b+c)^n$의 전개식의 일반항을 이용한다.

풀이 $(x+ay+3)^5$의 전개식의 일반항은

$$\begin{aligned}&\frac{5!}{p!q!r!}x^p(ay)^q\,3^r\\&=\frac{5!}{p!q!r!}a^q3^rx^py^q\ \ (\text{단, } p+q+r=5)\end{aligned}$$

x^2y항은

$p=2,\ q=1,\ r=2$

일 때이므로 x^2y의 계수는

$\dfrac{5!}{2!\cdot1!\cdot2!}a^1\,3^2=270a$

즉 $270a=540$이므로 $a=2$ 답 2

09 전략 각각의 전개식에서 x^2의 계수를 구한다.

풀이 $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$

이므로 x^2의 계수는 ${}_nC_2$이다.

따라서 주어진 다항식을 전개하였을 때, x^2의 계수는

$$\begin{aligned}&{}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_8C_2\\&=\sum_{k=2}^{8}{}_kC_2=\sum_{k=2}^{8}\frac{k(k-1)}{2}\\&=\frac{2\cdot1}{2}+\frac{3\cdot2}{2}+\cdots+\frac{8\cdot7}{2}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{7}k(k+1)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{7}(k^2+k)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{7\cdot8\cdot15}{6}+\frac{7\cdot8}{2}\right)=84\end{aligned}$$

답 84

다른 풀이 $(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^8$ ······ ㉠

㉠은 첫째항이 $1+x$, 공비가 $1+x$인 등비수열의 첫째항부터 제8항까지의 합이므로

$\dfrac{(1+x)\{(1+x)^8-1\}}{(1+x)-1}=\dfrac{(1+x)^9-(1+x)}{x}$ ······ ㉡

㉠의 전개식에서 x^2의 계수는 ㉡의 분자에 있는 $(1+x)^9$의 전개식에서 x^3의 계수와 같다.

$(1+x)^9$의 전개식의 일반항은

$${}_9C_r\, x^r$$

x^3항은 $r=3$일 때이므로 x^3의 계수는

$${}_9C_3=84$$

따라서 구하는 x^2의 계수는 84이다.

Remark 등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

① $r\neq1$일 때, $S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

② $r=1$일 때, $S_n=na$

10 해결과정 • $A={}_4C_0+{}_5C_1+{}_6C_2+\cdots+{}_{10}C_6$, $B={}_4C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_7$, $C={}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+\cdots+{}_{10}C_8$

이라 하면

$$\begin{aligned}A&={}_4C_0+{}_5C_1+{}_6C_2+\cdots+{}_{10}C_6\\&={}_5C_0+{}_5C_1+{}_6C_2+\cdots+{}_{10}C_6\\&={}_6C_1+{}_6C_2+\cdots+{}_{10}C_6\\&={}_7C_2+\cdots+{}_{10}C_6\\&\ \vdots\\&={}_{10}C_5+{}_{10}C_6\\&={}_{11}C_6={}_{11}C_5=462\end{aligned}$$ ➔ 30% 배점

$$\begin{aligned}{}_4C_0+B&={}_4C_0+{}_4C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_7\\&={}_5C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_7\\&={}_6C_2+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_7\\&={}_7C_3+\cdots+{}_{10}C_7\\&\ \vdots\\&={}_{10}C_6+{}_{10}C_7\\&={}_{11}C_7={}_{11}C_4=330\end{aligned}$$

$\therefore B=330-{}_4C_0=329$ ➔ 30% 배점

$$\begin{aligned}{}_4C_1+C&={}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+\cdots+{}_{10}C_8\\&={}_5C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+\cdots+{}_{10}C_8\\&={}_6C_3+{}_6C_4+\cdots+{}_{10}C_8\\&={}_7C_4+\cdots+{}_{10}C_8\\&\ \vdots\\&={}_{10}C_7+{}_{10}C_8\\&={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165\end{aligned}$$

$\therefore C=165-{}_4C_1=161$ ➔ 30% 배점

답구하기 • 따라서 색칠한 부분의 모든 수의 합은

$A+B+C=952$ ➔ 10% 배점

답 952

다른 풀이

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&{}_1C_0&{}_1C_1&&&&&&\\
&&&&{}_2C_0&{}_2C_1&{}_2C_2&&&&&&\\
&&&{}_3C_0&{}_3C_1&{}_3C_2&{}_3C_3&&&&&&\\
&&{}_4C_0&{}_4C_1&{}_4C_2&{}_4C_3&{}_4C_4&&&&&&\\
&{}_5C_0&{}_5C_1&{}_5C_2&{}_5C_3&{}_5C_4&{}_5C_5&&&&&&\\
&&&&&\vdots&&&&&&&\\
{}_{10}C_0&{}_{10}C_1&\cdots&{}_{10}C_6&{}_{10}C_7&{}_{10}C_8&{}_{10}C_9&{}_{10}C_{10}&&&&&\\
{}_{11}C_0&{}_{11}C_1&\cdots&{}_{11}C_6&{}_{11}C_7&{}_{11}C_8&{}_{11}C_9&{}_{11}C_{10}&{}_{11}C_{11}&&&&
\end{array}$$

구하는 합을 S라 하면

$${}_2C_0+{}_3C_1+{}_3C_0+S={}_{11}C_6+{}_{11}C_7+{}_{11}C_8$$

$$\begin{aligned}\therefore S&={}_{11}C_6+{}_{11}C_7+{}_{11}C_8-{}_2C_0-{}_3C_1-{}_3C_0\\&=462+330+165-1-3-1=952\end{aligned}$$

11 문제이해 • $8=7+1=6+2=5+3=4+4$
$=6+1+1=5+2+1=4+3+1$
$=4+2+2=3+3+2$ ➔ 30% 배점

해결과정 • 3개의 통에 나누어 담는 방법의 수는 자연수 8을 3개의 자연수로 분할하는 방법의 수와 같으므로

$a=P(8,\ 3)=5$ ➔ 30% 배점

3개 이하의 통에 나누어 담는 방법의 수는 자연수 8을 3개 이하의 자연수로 분할하는 방법의 수와 같으므로

$b=P(8,\ 3)+P(8,\ 2)+P(8,\ 1)$
$=5+4+1=10$ ➔ 30% 배점

답구하기 • $\therefore a+b=15$ ➔ 10% 배점

답 15

12 전략 먼저 각 상자에 2개의 사탕을 나누어 담는다.

풀이 3개의 상자에 사탕을 2개씩 담고, 남은 6개의 사탕을 3개의 상자에 나누어 담으면 되므로 자연수 6을 3개 이하의 자연수로 분할하는 것과 같다. 이때

$6=5+1=4+2=3+3$
$=4+1+1=3+2+1=2+2+2$

이므로 구하는 방법의 수는

$P(6,1)+P(6,2)+P(6,3)$
$=1+3+3=7$

답 7

다른 풀이 3개의 상자에 사탕을 1개씩 담고, 남은 9개의 사탕을 3개의 상자에 빈 상자 없이 나누어 담으면 되므로 자연수 9를 3개의 자연수로 분할하는 것과 같다. 이때

$$9=7+1+1=6+2+1=5+3+1$$
$$=5+2+2=4+4+1=4+3+2$$
$$=3+3+3$$

이므로 구하는 방법의 수는

$$P(9,\ 3)=7$$

13 문제이해 • $5=3+1+1=2+2+1$
이므로 5개의 파일을 3개의 USB에 나누어 저장하는 방법은 다음과 같다. ➜ 30% 배점

해결과정 • (i) 1개, 1개, 3개로 나누어 저장하는 방법의 수는

$${}_5C_1\cdot{}_4C_1\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{2!}=10$$ ➜ 30% 배점

(ii) 1개, 2개, 2개로 나누어 저장하는 방법의 수는

$${}_5C_1\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}=15$$ ➜ 30% 배점

답구하기 • (i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$$10+15=25$$ ➜ 10% 배점

답 25

14 전략 두 번 경기할 팀과 세 번 경기할 팀으로 나누어 생각한다.

풀이 먼저 6개의 팀을 두 번 경기하는 2개의 팀과 세 번 경기하는 4개의 팀으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_2\cdot{}_4C_4=15$$

4개의 팀을 다시 2개의 팀, 2개의 팀으로 나누는 방법의 수는

$${}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}=3$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$15\cdot3=45$$

답 ③

15 전략 $S(n, k)=S(n-1, k-1)+k\cdot S(n-1, k)$ 임을 이용한다.

풀이

$$\begin{aligned}S(8,\ 3)&=S(7,\ 2)+3\cdot S(7,\ 3)\\&=S(7,\ 2)+3\{S(6,\ 2)+3\cdot S(6,\ 3)\}\\&=S(7,\ 2)+3S(6,\ 2)+9S(6,\ 3)\\&=63+3\cdot31+9\cdot90\\&=966\end{aligned}$$

답 ⑤

Remark

$$8=6+1+1=5+2+1=4+3+1$$
$$=4+2+2=3+3+2$$

이므로

$$\begin{aligned}S(8,\ 3)&={}_8C_1\cdot{}_7C_1\cdot{}_6C_6\cdot\frac{1}{2!}+{}_8C_1\cdot{}_7C_2\cdot{}_5C_5\\&\quad+{}_8C_1\cdot{}_7C_3\cdot{}_4C_4+{}_8C_2\cdot{}_6C_2\cdot{}_4C_4\cdot\frac{1}{2!}\\&\quad+{}_8C_2\cdot{}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{2!}\\&=28+168+280+210+280\\&=966\end{aligned}$$

16 전략 이항정리를 이용하여 전개식의 꼴을 추론한다.

풀이

$$\begin{aligned}\{a+(b+c)^2\}^6&=\sum_{k=0}^{6}{}_6C_k a^{6-k}(b+c)^{2k}\\&=\sum_{k=0}^{6}{}_6C_k a^{6-k}\left(\sum_{i=0}^{2k}{}_{2k}C_i b^{2k-i}c^i\right)\\&=\sum_{k=0}^{6}\left\{\sum_{i=0}^{2k}({}_6C_k\cdot{}_{2k}C_i a^{6-k}b^{2k-i}c^i)\right\}\end{aligned}$$

$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2k$이므로 $(2k+1)$개의 항이 생긴다. 따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{6}(2k+1)&=1+\sum_{k=1}^{6}(2k+1)\\&=1+2\cdot\frac{6\cdot7}{2}+6\\&=49\end{aligned}$$

답 ③

17 전략 이항계수의 성질 ${}_nC_0+{}_nC_1+\cdots+{}_nC_n=2^n$을 이용한다.

풀이 $\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}{}_nC_k=2^n-{}_nC_0=2^n-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 50$을 차례대로 대입하면

$$1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ \cdots,\ 2^{50}-1$$

이므로 n이 짝수일 때 ㉠은 3의 배수이다.
따라서 구하는 n의 개수는 25이다. 답 25

다른 풀이 (i) $n=2k$ (k는 자연수)일 때,

$$2^n-1=2^{2k}-1=4^k-1$$

이때

$$\begin{aligned}4^k&=(1+3)^k\\&={}_kC_0 3^0+{}_kC_1 3^1+{}_kC_2 3^2+\cdots+{}_kC_k 3^k\\&=1+3({}_kC_1+{}_kC_2 3+\cdots+{}_kC_k 3^{k-1})\end{aligned}$$

이므로 4^k-1은 3의 배수이다.
즉 $n=2k$일 때 2^n-1은 3의 배수이다.

(ii) $n=2k+1$ (k는 음이 아닌 정수)일 때,

$$2^n-1=2^{2k+1}-1=2\cdot 4^k-1$$
$$=2\{1+3({}_kC_1+{}_kC_2 3+\cdots+{}_kC_k 3^{k-1})\}-1$$
$$=6({}_kC_1+{}_kC_2 3+\cdots+{}_kC_k 3^{k-1})+1$$

이므로 2^n-1을 3으로 나눈 나머지는 1이다.

즉 $n=2k+1$일 때 2^n-1은 3의 배수가 아니다.

(i), (ii)에서 ㉠은 n이 짝수이면 3의 배수이므로 구하는 n의 개수는 25이다.

Remark

2^n은 n이 짝수일 때는 3으로 나누면 나머지가 1이고, n이 홀수일 때는 3으로 나누면 나머지가 2이다. 따라서 2^n-1은 n이 짝수일 때는 3으로 나누어떨어지고, n이 홀수일 때는 3으로 나누면 나머지가 1이다.

18 문제이해 • 자연수 N을 10으로 나누었을 때의 나머지는 N의 일의 자리의 숫자와 같다. ➔ 20% 배점

해결과정 • N

$$={}_{50}C_1\cdot 6+{}_{50}C_2\cdot 6^2+{}_{50}C_3\cdot 6^3+\cdots+{}_{50}C_{50}\cdot 6^{50}$$
$$=(1+6)^{50}-1$$
$$=7^{50}-1$$
➔ 30% 배점

한편 7의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는

7, 9, 3, 1

이 이 순서대로 반복된다.

이때 $7^{50}=(7^4)^{12}\cdot 7^2$이므로 7^{50}의 일의 자리의 숫자는 9이다. ➔ 30% 배점

답구하기 • 따라서 $7^{50}-1$, 즉 자연수 N을 10으로 나누었을 때의 나머지는 8이다. ➔ 20% 배점

답 8

19 전략 2310을 소인수분해한다.

풀이 $2310=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11$

이므로 구하는 방법의 수는 집합 $\{2, 3, 5, 7, 11\}$을 2개의 집합으로 분할하는 방법의 수와 같다.

(i) 원소의 개수가 1, 4인 집합으로 분할하는 방법의 수는

$${}_5C_1\cdot {}_4C_4=5$$

(ii) 원소의 개수가 2, 3인 집합으로 분할하는 방법의 수는

$${}_5C_2\cdot {}_3C_3=10$$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$5+10=15$

답 ⑤

20 문제이해 • $7=5+1+1=4+2+1$
$=3+3+1=3+2+2$

이므로 7개의 과일을 3묶음으로 나누는 방법은 다음과 같다. ➔ 20% 배점

해결과정 • (i) 1개, 1개, 5개로 나누는 방법의 수는

$${}_7C_1\cdot {}_6C_1\cdot {}_5C_5\cdot \frac{1}{2!}=21$$

(ii) 1개, 2개, 4개로 나누는 방법의 수는

$${}_7C_1\cdot {}_6C_2\cdot {}_4C_4=105$$

(iii) 1개, 3개, 3개로 나누는 방법의 수는

$${}_7C_1\cdot {}_6C_3\cdot {}_3C_3\cdot \frac{1}{2!}=70$$

(iv) 2개, 2개, 3개로 나누는 방법의 수는

$${}_7C_2\cdot {}_5C_2\cdot {}_3C_3\cdot \frac{1}{2!}=105$$

이상에서 3묶음으로 나누는 방법의 수는

$21+105+70+105=301$ ➔ 50% 배점

답구하기 • 3묶음을 A, B, C에게 나누어 주는 방법의 수가 $3!$이므로 구하는 방법의 수는

$301\cdot 3!=1806$ ➔ 30% 배점

답 1806

05 확률의 뜻과 활용

유제

본책 98~112쪽

037-1 표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

이고 두 사건 A, B는

$A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$

(1) $A\cup B=\{2, 3, 4, 5, 6\}$

(2) $A\cap B=\{2\}$

(3) $A^C=\{1, 3, 5\}$이므로

$A^C\cap B=\{3, 5\}$

답 풀이 참조

037-2 표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

이고 세 사건 A, B, C는

$A=\{4, 5, 6\}$, $B=\{2\}$, $C=\{1, 3, 5\}$

$A\cap B=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$, $A\cap C=\{5\}$이므로 사건 A와 사건 B, 사건 B와 사건 C는 서로 배반사건이다.

답 A와 B, B와 C

038-1 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는 $6\cdot6=36$

두 눈의 수의 차가 4인 경우는

$(1, 5)$, $(2, 6)$, $(5, 1)$, $(6, 2)$

의 4가지이므로 $a=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$

두 눈의 수의 곱이 홀수인 경우는

$(1, 1)$, $(1, 3)$, $(1, 5)$, $(3, 1)$, $(3, 3)$,
$(3, 5)$, $(5, 1)$, $(5, 3)$, $(5, 5)$

의 9가지이므로 $b=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore a+b=\dfrac{13}{36}$

답 $\dfrac{13}{36}$

038-2 $60=2^2\cdot3\cdot5$이므로 60의 양의 약수의 개수는

$(2+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)=12$

60의 양의 약수 중에서 6의 약수는 1, 2, 3, 6의 4개이므로 구하는 확률은

$\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$

답 $\dfrac{1}{3}$

Remark

자연수 N이 $N=p^lq^mr^n$(p, q, r는 서로 다른 소수, l, m, n은 자연수) 꼴로 소인수분해될 때, N의 양의 약수의 개수는

$(l+1)(m+1)(n+1)$

039-1 5개의 숫자를 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리 자연수의 개수는

$5!=120$

이때 짝수이려면

□□□□2, □□□□4

꼴이어야 하므로 짝수의 개수는

$4!\cdot2=48$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{48}{120}=\dfrac{2}{5}$

답 $\dfrac{2}{5}$

039-2 6명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(6-1)!=5!=120$

여학생 3명을 한 묶음으로 생각하여 4명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$

여학생 3명이 자리를 바꾸는 방법의 수는

$3!=6$

이므로 여학생 3명이 이웃하여 앉는 방법의 수는

$6\cdot6=36$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$

답 $\dfrac{3}{10}$

040-1 12개의 제비 중에서 3개의 제비를 뽑는 방법의 수는 ${}_{12}C_3=220$

(1) 4개의 당첨 제비 중에서 3개를 뽑는 방법의 수는

${}_4C_3=4$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{4}{220}=\dfrac{1}{55}$

(2) 4개의 당첨 제비 중에서 1개, 당첨 제비가 아닌 8개의 제비 중에서 2개를 뽑는 방법의 수는

${}_4C_1\cdot{}_8C_2=4\cdot28=112$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{112}{220}=\dfrac{28}{55}$

답 (1) $\dfrac{1}{55}$ (2) $\dfrac{28}{55}$

040-2 10개의 구슬 중에서 3개의 구슬을 꺼내는 방법의 수는 $_{10}C_3=120$
주머니 안의 흰 구슬의 개수를 n이라 하면 n개의 흰 구슬 중에서 3개를 꺼내는 방법의 수는

$$_nC_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

이므로 모두 흰 구슬일 확률은

$$\frac{_nC_3}{_{10}C_3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{720}$$

따라서 $\frac{n(n-1)(n-2)}{720}=\frac{1}{6}$이므로

$$n(n-1)(n-2)=120=6\cdot5\cdot4$$

$$\therefore n=6$$

즉 주머니 안에 6개의 흰 구슬이 들어 있다.

답 6

041-1 서울에서 건강 상태가 A단계인 사람의 비율을 구하면

$$\frac{35}{500}\cdot100=7(\%)$$

같은 방법으로 서울에서 각 단계의 건강 상태의 비율을 구하면 다음과 같다.

단계	A	B	C	D	E	합계
비율(%)	7	38	37	16	2	100

따라서 P지역에 비해 그 비율이 높은 단계는 A, B이다.

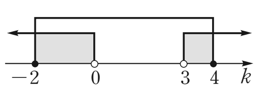
답 A, B

042-1 이차방정식 $x^2+2kx+3k=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$$\frac{D}{4}=k^2-3k>0$$

$$k(k-3)>0$$

$$\therefore k<0 \text{ 또는 } k>3$$



$-2\leq k\leq4$이므로 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$$-2\leq k<0 \text{ 또는 } 3<k\leq4$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\{0-(-2)\}+(4-3)}{4-(-2)}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

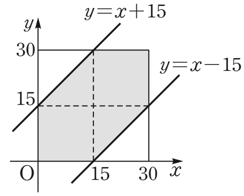
042-2 공연을 시작하는 시각과 주원이가 A공원에 도착하는 시각을 각각 2시 x분, 2시 y분이라 하면

$$0\leq x\leq30,\ 0\leq y\leq30 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때 주원이가 공연을 볼 수 있으려면 $|x-y|\leq15$이어야 하므로

$$-15\leq x-y\leq15$$

$$\therefore x-15\leq y\leq x+15 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$



부등식 ㉠의 영역은 오른쪽 그림의 정사각형의 내부(경계선 포함)이고, 부등식 ㉠, ㉡의 공통인 영역은 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.
따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\text{정사각형의 넓이})}=\frac{3\cdot15\cdot15}{30\cdot30}=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

043-1 음악을 좋아하는 학생을 택하는 사건을 A, 체육을 좋아하는 학생을 택하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=0.3,\ \mathrm{P}(B)=0.7,\ \mathrm{P}(A\cap B)=0.2$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=0.3+0.7-0.2\\&=0.8\end{aligned}$$

답 0.8

043-2 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$$6\cdot6=36$$

주사위의 눈의 수의 곱이 12의 배수인 사건을 A, 18의 배수인 사건을 B라 하자.

(i) 눈의 수의 곱이 12의 배수인 경우

$(2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2),$
$(4,\ 6),\ (6,\ 4),\ (6,\ 6)$

이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{7}{36}$

(ii) 눈의 수의 곱이 18의 배수인 경우

$(3,\ 6),\ (6,\ 3),\ (6,\ 6)$

이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{36}$

이때 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{36}$이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{7}{36}+\frac{3}{36}-\frac{1}{36}\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{4}$

043-3 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로 $P(A\cap B)$가 최소일 때 $P(A\cup B)$는 최대이고, $P(A\cap B)$가 최대일 때 $P(A\cup B)$는 최소이다.

(ⅰ) $P(A\cap B)$가 최소인 경우

$P(A\cap B)=0$이므로

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

(ⅱ) $P(A\cap B)$가 최대인 경우

$P(A)<P(B)$이므로

$$P(A\cap B)=P(A)$$

$$\begin{aligned}\therefore P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A)\\&=P(B)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $P(A\cup B)$의 최댓값은 $\frac{5}{6}$, 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다.

답 최댓값: $\frac{5}{6}$, 최솟값: $\frac{1}{2}$

044-1 2명의 사원이 모두 남자인 사건을 A, 2명의 사원이 모두 여자인 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{21}{45},\quad P(B)=\frac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{3}{45}$$

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)\\&=\frac{21}{45}+\frac{3}{45}=\frac{8}{15}\end{aligned}$$

답 $\frac{8}{15}$

044-2 3개의 공이 모두 흰 공인 사건을 A, 3개의 공이 모두 검은 공인 사건을 B, 3개의 공이 모두 노란 공인 사건을 C라 하면

$$P(A)=\frac{{}_5C_3}{{}_{12}C_3}=\frac{10}{220},\quad P(B)=\frac{{}_4C_3}{{}_{12}C_3}=\frac{4}{220},$$

$$P(C)=\frac{{}_3C_3}{{}_{12}C_3}=\frac{1}{220}$$

이때 세 사건 A, B, C는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)\\&=\frac{10}{220}+\frac{4}{220}+\frac{1}{220}\\&=\frac{3}{44}\end{aligned}$$

답 $\frac{3}{44}$

045-1 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는 $6\cdot6=36$

눈의 수의 합이 4 이상인 사건을 A라 하면 여사건 A^C는 눈의 수의 합이 2 또는 3인 사건이다.

눈의 수의 합이 2 또는 3인 경우는

$(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$

이므로 $P(A^C)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

$$\begin{aligned}\therefore P(A)&=1-P(A^C)\\&=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}\end{aligned}$$

답 $\frac{11}{12}$

045-2 당첨 제비가 2개 이하인 사건을 A라 하면 여사건 A^C는 3개의 제비가 모두 당첨 제비인 사건이므로

$$P(A^C)=\frac{{}_4C_3}{{}_{20}C_3}=\frac{4}{1140}=\frac{1}{285}$$

$$\begin{aligned}\therefore P(A)&=1-P(A^C)\\&=1-\frac{1}{285}=\frac{284}{285}\end{aligned}$$

답 $\frac{284}{285}$

045-3 A가 문제를 맞히는 사건을 A, B가 문제를 맞히는 사건을 B라 하자.

두 명 중 한 명만 문제를 맞힐 확률이 0.6이므로

$$P(A\cup B)-P(A\cap B)=0.6$$

이때 $P(A\cap B)=0.2$이므로

$$P(A\cup B)-0.2=0.6$$

$$\therefore P(A\cup B)=0.8$$

A, B 모두 문제를 틀리는 사건은 $A^C\cap B^C$이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A^C\cap B^C)&=P((A\cup B)^C)\\&=1-P(A\cup B)\\&=1-0.8=0.2\end{aligned}$$

답 0.2

Remark 드모르간 법칙

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여
① $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$
② $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

중단원 연습 문제 본책 113~117쪽

01 32	**02** ④	**03** ④	**04** ⑤	**05** ②
06 $\frac{8}{9}$	**07** $\frac{5}{12}$	**08** ③	**09** $\frac{3}{10}$	**10** $\frac{55}{84}$
11 $\frac{9}{10}$	**12** $\frac{5}{9}$	**13** ④	**14** $\frac{24}{35}$	**15** ⑤
16 154	**17** $\frac{4}{9}$	**18** $\frac{49}{60}$	**19** 68	**20** $\frac{5}{12}$
21 $\frac{20}{63}$	**22** ①	**23** ④		

01 문제이해 • 흰 공을 W, 검은 공을 B로 나타낼 때, 표본공간을 S라 하면

$S=\{WWW, WWB, WBW, BWW, WBB, BWB, BBW\}$

이고, 두 사건 P, Q는

$P=\{WWW, WWB, WBW, WBB\}$

$Q=\{WWW, WBW, BWW, BBW\}$

➜ 40% 배점

해결과정 • $R=P\cap Q=\{WWW, WBW\}$이므로

$R^C=\{WWB, BWW, WBB, BWB, BBW\}$

➜ 30% 배점

답구하기 • R와 서로 배반인 사건의 개수는 R^C의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^5=32$ ➜ 30% 배점

답 32

02 전략 함수의 개수는 중복순열, 일대일함수의 개수는 순열을 이용하여 구한다.

풀이 X에서 Y로의 함수의 개수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

일대일함수의 개수는

${}_4P_3=24$

이므로 구하는 확률은

$\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$

답 ④

Remark 일대일함수

함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 원소 x_1, x_2에 대하여

$x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$

가 성립하는 함수를 일대일함수라 한다.

03 전략 대표 4명을 뽑을 때, 순서를 생각하지 않으므로 조합을 이용하여 경우의 수를 구한다.

풀이 8명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는

${}_8C_4=70$

남자 5명 중에서 3명, 여자 3명 중에서 1명을 뽑는 방법의 수는

${}_5C_3\cdot{}_3C_1=30$

따라서 구하는 확률은

$\frac{30}{70}=\frac{3}{7}$

답 ④

04 전략 베고니아의 각 품종에 대하여 꽃을 피운 종자의 상대도수를 구한다.

풀이 심은 종자 수를 n, 꽃을 피운 것의 개수를 a, 꽃을 피울 확률을 p로 놓고 표로 나타내면 다음과 같다.

베고니아	n	a	p
세이라	30	25	$\frac{25}{30}=0.833\cdots$
베라세븐	40	32	$\frac{32}{40}=0.8$
워커	50	44	$\frac{44}{50}=0.88$
진	40	35	$\frac{35}{40}=0.875$
위스키	30	27	$\frac{27}{30}=0.9$

따라서 꽃을 피울 확률이 가장 큰 것은 위스키이다.

답 ⑤

05 전략 $P(A^C\cup B^C)=1-P(A\cap B)$임을 이용한다.

풀이 $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이므로

$P(A^C\cup B^C)=\frac{4}{5}$에서 $P((A\cap B)^C)=\frac{4}{5}$

$1-P(A\cap B)=\frac{4}{5}$ $\therefore P(A\cap B)=\frac{1}{5}$

$P(A\cap B^C)=\frac{1}{4}$에서

$P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $P(A)-\frac{1}{5}=\frac{1}{4}$

$\therefore P(A)=\frac{9}{20}$

$\therefore P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}$

답 ②

06 (전략) 여사건의 확률을 이용한다.

(풀이) 주어진 정육면체를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는 $6 \cdot 6=36$

6의 약수가 적어도 한 번 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 두 번 모두 6의 약수가 나오지 않는 사건이다.

1, 2, 2, 3, 4, 4 중에서 6의 약수가 아닌 것은 4, 4 이므로

$$P(A^C)=\frac{2 \cdot 2}{36}=\frac{1}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)$$
$$=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

답 $\frac{8}{9}$

07 (전략) 이차방정식이 허근을 가질 조건은 판별식 $D<0$임을 이용한다.

(풀이) 두 주사위 A, B를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는 $6 \cdot 6=36$

이차방정식 $x^2-2ax+3b=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 방정식이 허근을 가지려면

$$\frac{D}{4}=a^2-3b<0$$
$$\therefore a^2<3b$$

이를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),
(2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),
(3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 6)

의 15개이므로 구하는 확률은

$$\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

답 $\frac{5}{12}$

08 (전략) 을이 뽑은 카드에 적힌 수를 기준으로 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한다.

(풀이) 갑이 2장의 카드를 임의로 뽑고 을이 남은 카드 중에서 1장의 카드를 임의로 뽑는 방법의 수는

$${}_4C_2 \cdot {}_2C_1=12$$

을이 뽑은 1장의 카드에 적힌 수를 a라 하고, 갑이 뽑은 2장의 카드에 적힌 두 수의 곱을 b라 할 때, $a>b$가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) $a=3$인 경우

$b=2$이어야 하므로 갑은 1, 2의 숫자가 적혀 있는 카드를 뽑아야 한다.

(ii) $a=4$인 경우

$b=2$ 또는 $b=3$이어야 하므로 갑은 1, 2 또는 1, 3의 숫자가 적혀 있는 카드를 뽑아야 한다.

(i), (ii)에서 $a>b$를 만족시키는 경우의 수는 3이므로 구하는 확률은

$$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

답 ③

09 (전략) A, B 사이에 서는 한 명을 뽑고, 이 세 명을 한 묶음으로 생각하여 일렬로 세우는 방법의 수를 구한다.

(풀이) 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$$5!=120$$

C, D, E 중 A, B 사이에 서는 한 명을 뽑는 방법의 수는 3이고, A, B와 사이에 서는 한 명을 한 묶음으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$$3!=6$$

이때 A, B가 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는

$$2!=2$$

따라서 A, B 사이에 한 명을 세우는 방법의 수는

$$3 \cdot 6 \cdot 2=36$$

이므로 구하는 확률은 $\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$

답 $\frac{3}{10}$

10 문제이해 • 9장의 카드 중에서 3장의 카드를 택하는 방법의 수는 ${}_9C_3=84$ ➔ 20% 배점

해결과정 • 3장의 카드에 적힌 수의 곱이 6의 배수인 경우는 다음과 같다.

(i) 6이 적힌 카드를 포함하여 택하는 경우

6을 제외한 나머지 8개의 수 중에서 2개의 수를 뽑는 방법의 수는 ${}_8C_2=28$

(ii) 6이 적힌 카드를 포함하지 않고 택하는 경우

2의 배수인 2, 4, 8 중에서 2개의 수를 뽑고, 3의 배수인 3, 9 중에서 1개의 수를 뽑는 방법의 수는

$${}_3C_2 \cdot {}_2C_1=6$$

2의 배수인 2, 4, 8 중에서 1개의 수를 뽑고, 3의 배수인 3, 9 중에서 2개의 수를 뽑는 방법의 수는

$${}_3C_1 \cdot {}_2C_2=3$$

2의 배수인 2, 4, 8 중에서 1개, 3의 배수인 3, 9 중에서 1개, 2와 3의 배수가 아닌 1, 5, 7 중에서 1개의 수를 뽑는 방법의 수는

$${}_3C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_3C_1=18$$

따라서 6이 적힌 카드를 포함하지 않고 택하는 방법의 수는

$6+3+18=27$

(i), (ii)에서 3장의 카드에 적힌 수의 곱이 6의 배수인 경우의 수는

$28+27=55$ ➔ 60% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 확률은 $\dfrac{55}{84}$이다. ➔ 20% 배점

답 $\dfrac{55}{84}$

11 문제이해 • 20개의 동전 중에서 2개의 동전을 꺼내는 방법의 수는

${}_{20}C_2=190$

주머니 안의 500원짜리 동전의 개수를 $n(n>10)$이라 하면 100원짜리 동전의 개수는 $20-n$이므로 2개의 동전의 금액의 합이 600원이 되는 경우의 수는

${}_nC_1 \cdot {}_{20-n}C_1=n(20-n)$ ➔ 30% 배점

해결과정 • 20개의 동전 중에서 2개의 동전을 꺼낼 때, 동전의 금액의 합이 600원일 확률이 $\dfrac{1}{10}$이므로

$\dfrac{n(20-n)}{190}=\dfrac{1}{10}$

$n(20-n)=19,\quad n^2-20n+19=0$

$(n-1)(n-19)=0$

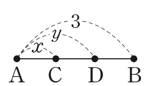
$\therefore n=19\ (\because n>10)$ ➔ 40% 배점

답구하기 • 따라서 2개의 동전의 금액의 합이 1000원이 될 확률은 $\dfrac{{}_{19}C_2}{{}_{20}C_2}=\dfrac{9}{10}$ ➔ 30% 배점

답 $\dfrac{9}{10}$

12 전략 $\overline{CD}=|\overline{AC}-\overline{AD}|$임을 이용한다.

풀이 $\overline{AC}=x$, $\overline{AD}=y$라 하면



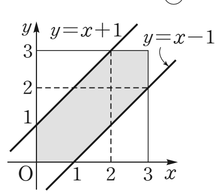
$0\le x\le 3,\ 0\le y\le 3$ ⋯ ㉠

선분 CD의 길이는 $|x-y|$이므로

$|x-y|\le 1$에서 $\quad -1\le x-y\le 1$

$\therefore x-1\le y\le x+1$ ⋯⋯ ㉡

부등식의 ㉠의 영역은 오른쪽 그림의 정사각형의 내부(경계선 포함)이고, 부등식 ㉠, ㉡의 공통인 영역은 색칠한 부분(경계선 포함)과 과 같다.



따라서 구하는 확률은

$\dfrac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\text{정사각형의 넓이})}=\dfrac{3\cdot 3-2\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\right)}{3\cdot 3}$

$=\dfrac{5}{9}$

답 $\dfrac{5}{9}$

13 전략 [실행 1]을 할 때와 [실행 2]를 할 때로 나누어 생각한다.

풀이 (i) [실행 1]에 의하여 상자 B에 있는 빨간 공의 개수가 1인 경우

A에서 2개의 공을 꺼내는 모든 방법의 수는

${}_8C_2=28$

A에서 빨간 공 1개와 검은 공 1개를 꺼내는 방법의 수는 $\quad {}_3C_1\cdot{}_5C_1=15$

이므로 그 확률은 $\quad \dfrac{15}{28}$

(ii) [실행 2]에 의하여 상자 B에 있는 빨간 공의 개수가 1인 경우

A에서 2개의 공을 꺼내고, 다시 2개의 공을 꺼내는 방법의 수는 $\quad {}_8C_2\cdot{}_6C_2=420$

A에서 검은 공 2개를 꺼내고, 다시 빨간 공 1개와 검은 공 1개를 꺼내는 방법의 수는

${}_5C_2\cdot{}_3C_1\cdot{}_3C_1=90$

이므로 그 확률은 $\quad \dfrac{90}{420}=\dfrac{3}{14}$

(i), (ii)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\dfrac{15}{28}+\dfrac{3}{14}=\dfrac{3}{4}$

답 ④

14 문제이해 • P → Q로 가는 최단 경로의 수는

$\dfrac{8!}{4!\cdot 4!}=70$ ➔ 20% 배점

해결과정 • P지점에서 Q지점까지 최단 경로로 갈 때 A지점을 지나는 사건을 A, B지점을 지나는 사건을 B라 하자.

P → A → Q로 가는 최단 경로의 수는

$\dfrac{3!}{2!}\cdot\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}=30$

이므로 $\quad \mathrm{P}(A)=\dfrac{30}{70}$ ➔ 20% 배점

P → B → Q로 가는 최단 경로의 수는

$\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=36$

이므로 $\quad \mathrm{P}(B)=\dfrac{36}{70}$ ➔ 20% 배점

P → A → B → Q로 가는 최단 경로의 수는

$$\frac{3!}{2!}\cdot 1\cdot \frac{4!}{2!\cdot 2!}=18$$

이므로 $\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{18}{70}$ ➔ 20% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$=\frac{30}{70}+\frac{36}{70}-\frac{18}{70}=\frac{24}{35}$$ ➔ 20% 배점

답 $\dfrac{24}{35}$

15 전략 4개의 공을 꺼냈을 때 세 종류의 공이 모두 포함되려면 어느 한 종류의 공을 2개 꺼내야 한다.

풀이 꺼낸 4개의 공 중에서 세 종류의 공이 모두 포함되려면 4개의 공 중 2개의 공이 같은 색이어야 한다.
흰 공 2개, 검은 공 1개, 빨간 공 1개를 꺼내는 사건을 A, 흰 공 1개, 검은 공 2개, 빨간 공 1개를 꺼내는 사건을 B, 흰 공 1개, 검은 공 1개, 빨간 공 2개를 꺼내는 사건을 C라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_4}=\frac{12}{35},$$

$$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_4}=\frac{6}{35},$$

$$\mathrm{P}(C)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_4}=\frac{6}{35}$$

이때 세 사건 A, B, C는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$$

$$=\frac{12}{35}+\frac{6}{35}+\frac{6}{35}=\frac{24}{35}$$ 답 ⑤

16 전략 5인승, 7인승, 9인승의 차에 각각 4명, 5명, 6명이 타고 있으므로 각 차에 1명, 2명, 3명을 배정해야 한다.

풀이 (i) A, B가 7인승의 차에 배정되는 경우
나머지 4명을 5인승의 차에 1명, 9인승의 차에 3명 배정하면 되므로 그 확률은

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_3}=\frac{4}{60}$$

(ii) A, B가 9인승의 차에 배정되는 경우
나머지 4명을 5인승의 차에 1명, 7인승의 차에 2명, 9인승의 차에 1명 배정하면 되므로 그 확률은

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_1\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_3}=\frac{12}{60}$$

(i), (ii)는 서로 배반사건이므로 A, B가 같은 차에 배정될 확률은 $\quad \dfrac{4}{60}+\dfrac{12}{60}=\dfrac{4}{15}$

따라서 $p=15$, $q=4$이므로

$10p+q=10\cdot 15+4=154$ 답 154

17 문제이해 • $(a-b)(b-c)(c-a)=0$에서

$a-b=0$ 또는 $b-c=0$ 또는 $c-a=0$

$\therefore\ a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$

따라서 적어도 두 개의 주사위의 눈이 서로 같아야 한다. ➔ 30% 배점

해결과정 • 적어도 두 개의 주사위의 눈이 서로 같은 사건을 A라 하면 여사건 A^C는 세 개의 주사위의 눈이 모두 다른 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_6\mathrm{P}_3}{6\cdot 6\cdot 6}=\frac{5}{9}$$ ➔ 40% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$$ ➔ 30% 배점

답 $\dfrac{4}{9}$

18 문제이해 • 10장의 카드 중에서 3장의 카드를 택하는 방법의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_3=120$ ➔ 10% 배점

해결과정 • $M-m\le 7$인 사건을 A라 하면 여사건 A^C는 $M-m\ge 8$인 사건이다.

(i) $M-m=8$인 경우

$M=10$, $m=2$이면 나머지 수가 될 수 있는 것은

3, 4, 5, ⋯, 9의 7개

$M=9$, $m=1$이면 나머지 수가 될 수 있는 것은

2, 3, 4, ⋯, 8의 7개

따라서 $M-m=8$인 경우의 수는

$7+7=14$ ➔ 30% 배점

(ii) $M-m=9$인 경우

$M=10$, $m=1$이어야 하므로 나머지 수가 될 수 있는 것은

2, 3, 4, ⋯, 9의 8개 ➔ 20% 배점

(i), (ii)에서 $M-m\ge 8$인 경우의 수는 $14+8=22$

이므로 $\quad \mathrm{P}(A^C)=\dfrac{22}{120}=\dfrac{11}{60}$ ➔ 20% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{11}{60}=\frac{49}{60}$$ ➔ 20% 배점

답 $\dfrac{49}{60}$

Remark

$\mathrm{P}(A)$를 직접 구하려면 $M-m$의 값이 2, 3, 4, 5, 6, 7인 경우를 모두 구해야 하므로 여사건의 확률을 이용하는 것이 편리하다.

19

전략 적어도 2명의 남학생을 서로 이웃하게 배정하는 사건의 여사건은 남학생 4명을 모두 이웃하지 않게 배정하는 사건임을 이용한다.

풀이 8개의 좌석에 여학생 4명과 남학생 4명을 배정하는 방법의 수는 $8!$

남	여	남
여		여
남	여	남

여	남	여
남		남
여	남	여

남학생 4명을 모두 이웃하지 않게 배정하는 방법은 위의 그림과 같으므로 그 방법의 수는

$2\cdot4!\cdot4!$

따라서 남학생을 모두 이웃하지 않게 배정할 확률은

$\dfrac{2\cdot4!\cdot4!}{8!}=\dfrac{1}{35}$

이므로 $p=1-\dfrac{1}{35}=\dfrac{34}{35}$

$\therefore 70p=70\cdot\dfrac{34}{35}=68$

답 68

20

문제이해 • X에서 X로의 일대일 대응인 함수의 개수는 $4!=24$ → 20% 배점

해결과정 • X의 임의의 원소 x에 대하여 $(f\circ f)(x)=x$를 만족시키는 함수의 개수는 다음과 같다.

(i) 1, 2, 3, 4가 모두 자기 자신으로 대응하는 함수의 개수는 1

(ii) 1, 2, 3, 4 중에서 2개만 자기 자신으로 대응하는 함수의 개수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$

(iii) 1, 2, 3, 4 중에서 2개씩 교차하여 대응하는 함수의 개수는 ${}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_2\cdot\dfrac{1}{2!}=3$

이상에서 $(f\circ f)(x)=x$를 만족시키는 함수 f의 개수는 $1+6+3=10$ → 60% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 확률은

$\dfrac{10}{24}=\dfrac{5}{12}$ → 20% 배점

답 $\dfrac{5}{12}$

Remark

(i) $f(1)=1,\ f(2)=2,\ f(3)=3,\ f(4)=4$이면
$(f\circ f)(x)=x$

(ii) $f(1)=1,\ f(2)=2,\ f(3)=4,\ f(4)=3$이면
$(f\circ f)(1)=1,\ (f\circ f)(2)=2,$
$(f\circ f)(3)=f(4)=3,$
$(f\circ f)(4)=f(3)=4$
$\therefore (f\circ f)(x)=x$

(iii) $f(1)=2,\ f(2)=1,\ f(3)=4,\ f(4)=3$이면
$(f\circ f)(1)=f(2)=1,$
$(f\circ f)(2)=f(1)=2,$
$(f\circ f)(3)=f(4)=3,$
$(f\circ f)(4)=f(3)=4$
$\therefore (f\circ f)(x)=x$

21

전략 누르기 시작하는 버튼의 위치에 따라 세 가지 경우로 나누어 생각한다.

풀이 서로 다른 3개의 버튼을 차례대로 누르는 방법의 수는 ${}_9\mathrm{P}_3=504$

(i) 맨 처음 1을 눌렀을 때, 두 번째에 누를 수 있는 버튼은

2 또는 4 또는 5

2 또는 4를 눌렀을 때, 세 번째에 누를 수 있는 버튼은 각각 4개이고, 5를 눌렀을 때 세 번째에 누를 수 있는 버튼은 7개이므로 그 경우의 수는

$4\cdot2+7\cdot1=15$

맨 처음 3 또는 7 또는 9를 눌렀을 때의 경우의 수도 각각 15이므로, 맨 처음 1 또는 3 또는 7 또는 9를 눌렀을 때 조건을 만족시키도록 버튼을 누르는 방법의 수는

$4\cdot15=60$

(ii) 맨 처음 2를 눌렀을 때, 두 번째에 누를 수 있는 버튼은

1 또는 3 또는 4 또는 5 또는 6

1 또는 3을 눌렀을 때, 세 번째에 누를 수 있는 버튼은 각각 2개, 4 또는 6을 눌렀을 때 세 번째에 누를 수 있는 버튼은 각각 4개, 5를 눌렀을 때 세 번째에 누를 수 있는 버튼은 7개이므로 그 경우의 수는

$2\cdot2+4\cdot2+7\cdot1=19$

맨 처음 4 또는 6 또는 8을 눌렀을 때의 경우의 수도 각각 19이므로, 맨 처음 2 또는 4 또는 6 또는 8을 눌렀을 때 조건을 만족시키도록 버튼을 누르는 방법의 수는

$4 \cdot 19 = 76$

(iii) 맨 처음 5를 눌렀을 때, 두 번째에 누를 수 있는 버튼은

1 또는 2 또는 3 또는 4 또는 6 또는 7
또는 8 또는 9

1 또는 3 또는 7 또는 9를 눌렀을 때 세 번째에 누를 수 있는 버튼은 각각 2개이고, 2 또는 4 또는 6 또는 8을 눌렀을 때 세 번째에 누를 수 있는 버튼은 각각 4개이므로 그 경우의 수는

$4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 24$

이상에서 첫 번째 버튼과 두 번째 버튼, 두 번째 버튼과 세 번째 버튼이 1개의 선분으로 연결되는 경우의 수는

$60 + 76 + 24 = 160$

따라서 구하는 확률은

$\frac{160}{504} = \frac{20}{63}$

답 $\frac{20}{63}$

22 전략 조건 (가), (나)를 만족시키는 a, b, c의 조건을 생각한다.

풀이 9개의 공 중에서 서로 다른 3개의 공을 꺼내는 방법의 수는

${}_9C_3 = 84$

조건 (가)에서 $a+b+c$가 홀수이므로 다음과 같은 경우가 있다.

(i) 홀수가 3개인 경우

조건 (나)에 의하여 a, b, c 중에서 적어도 하나는 3의 배수이어야 하므로 홀수 1, 3, 5, 7, 9가 적혀 있는 공 중에서 3개를 꺼내는 경우에서 3의 배수가 아닌 1, 5, 7이 적혀 있는 공을 꺼내는 경우를 제외하면 된다.

따라서 홀수가 3개인 경우의 수는

${}_5C_3 - 1 = 9$

(ii) 홀수가 1개, 짝수가 2개인 경우

조건 (나)에 의하여 a, b, c 중에서 적어도 하나는 3의 배수이어야 하므로 3의 배수가 아닌 홀수 1 또는 5 또는 7이 적혀 있는 공을 꺼낸 경우에는 6이 적힌 공을 반드시 꺼내야 하고, 3의 배수인 홀수 3 또는 9가 적혀 있는 공을 꺼낸 경우에는 짝수가 적힌 공 중에서 어느 것을 꺼내도 된다.

따라서 홀수가 1개, 짝수가 2개인 경우의 수는

$3 \cdot {}_3C_1 + 2 \cdot {}_4C_2 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 21$

(i), (ii)에서 조건을 모두 만족시키는 경우의 수는

$9 + 21 = 30$

따라서 구하는 확률은

$\frac{30}{84} = \frac{5}{14}$

답 ①

23 전략 확률의 덧셈정리를 이용한다.

풀이 6명의 학생이 좌석에 앉는 방법의 수는

$6!$

같은 나라의 두 학생의 좌석 번호를 순서쌍 (a, b) $(a<b)$로 나타낼 때, 좌석 번호의 차가 1 또는 10이 되도록 앉는 방법은 다음과 같다.

(i) (11, 12), (21, 22), (13, 23)

(ii) (11, 21), (12, 13), (22, 23)

(iii) (11, 21), (12, 22), (13, 23)

(i)의 경우 각 순서쌍을 세 나라가 택하는 방법의 수는 $3!$이고, 같은 나라의 두 학생이 좌석을 바꾸는 방법의 수는 각각 2이므로 그 경우의 수는

$3! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

따라서 (i)의 경우의 확률은

$\frac{3! \cdot 2^3}{6!} = \frac{1}{15}$

같은 방법으로 (ii)와 (iii)의 경우의 확률도 각각 $\frac{1}{15}$이고, (i), (ii), (iii)은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{5}$

답 ④

Ⅱ. 확률

06 조건부확률

유제

본책 122~137쪽

046-1 (1) $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{2}{5}$이므로

$$P(A\cap B)=\frac{2}{5}P(A)$$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$$\frac{5}{6}=P(A)+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}P(A),\quad \frac{3}{5}P(A)=\frac{1}{6}$$

$$\therefore\ P(A)=\frac{5}{18}$$

따라서 $P(A\cap B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{18}=\frac{1}{9}$이므로

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{6}$$

(2) $P(A^C)=1-P(A)=1-0.6=0.4$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$$P(A\cup B)=0.6+0.4-0.3=0.7$$

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$$P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)$$
$$=1-P(A\cup B)$$
$$=1-0.7=0.3$$

$$\therefore\ P(B^C|A^C)=\frac{P(A^C\cap B^C)}{P(A^C)}=\frac{0.3}{0.4}=0.75$$

답 (1) $\frac{1}{6}$ (2) 0.75

047-1 임의로 뽑은 한 학생이 자전거로 통학하는 학생인 사건을 A, B학급 학생인 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{12}{100}=\frac{3}{25},\ P(A\cap B)=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{25}}{\frac{3}{25}}=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

047-2 임의로 뽑은 한 학생이 운동을 좋아하는 학생인 사건을 A, 남학생인 사건을 B라 하면

$$P(A^C)=\frac{70-(28+12)}{70}=\frac{3}{7}$$

$$P(A^C\cap B)=\frac{40-28}{70}=\frac{6}{35}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A^C)=\frac{P(A^C\cap B)}{P(A^C)}=\frac{\frac{6}{35}}{\frac{3}{7}}=\frac{2}{5}$$

답 $\frac{2}{5}$

048-1 첫 번째에 흰 공을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 검은 공을 꺼내는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{3}{8},\ P(B|A)=\frac{5}{7}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$$
$$=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{15}{56}$$

답 $\frac{15}{56}$

048-2 첫 번째에 불량품을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 불량품을 꺼내는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{n}{15},\ P(B|A)=\frac{n-1}{14}$$

두 번 모두 불량품을 꺼낼 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$$
$$=\frac{n}{15}\cdot\frac{n-1}{14}$$

따라서 $\frac{n(n-1)}{14\cdot 15}=\frac{1}{35}$이므로

$n(n-1)=6,\quad n^2-n-6=0$

$(n+2)(n-3)=0\quad \therefore\ n=-2$ 또는 $n=3$

이때 n은 자연수이므로 $n=3$

답 3

049-1 화요일에 비가 오는 사건을 A, 수요일에 비가 오는 사건을 B라 하면

(i) 화요일, 수요일 모두 비가 올 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$$
$$=0.6\times 0.6=0.36$$

(ii) 화요일에는 비가 오지 않고, 수요일에는 비가 올 확률은

$$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)$$
$$=(1-0.6)\times 0.8=0.32$$

사건 $A\cap B$와 사건 $A^C\cap B$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)$$
$$=0.36+0.32=0.68$$

답 0.68

049-2 내년 여름의 평균 기온이 예년보다 높은 사건을 A, 판매 목표액을 달성하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.4,\ \mathrm{P}(B|A)=0.8,$
$\mathrm{P}(B|A^C)=0.5$

(i) 내년 여름의 평균 기온이 예년보다 높고, 판매 목표액을 달성할 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=0.4\times0.8=0.32$$

(ii) 내년 여름의 평균 기온이 예년과 비슷하거나 낮고, 판매 목표액을 달성할 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=(1-0.4)\times0.5=0.3$$

사건 $A\cap B$와 사건 $A^C\cap B$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=0.32+0.3=0.62$$

답 0.62

050-1 임의로 꺼낸 한 제품이 A기계에서 생산된 제품인 사건을 A, 불량품인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.3,\ \mathrm{P}(B|A)=0.05,$
$\mathrm{P}(B|A^C)=0.04$

이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=0.3\times0.05=0.015$$
$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=0.7\times0.04=0.028$$
$$\therefore \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=0.015+0.028=0.043$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0.015}{0.043}=\frac{15}{43}$$

답 $\frac{15}{43}$

051-1 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타내면 표본공간 S는

$S=\{$HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT$\}$

이고 사건 A, B, C, D는

$A=\{$HHH, TTT$\}$, $B=\{$HHH$\}$,
$C=\{$HHT, HTH, THH$\}$,
$D=\{$HTT, THT, TTH, TTT$\}$

이므로

$A\cap B=\{$HHH$\}$, $A\cap C=\varnothing$, $A\cap D=\{$TTT$\}$

(i) $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{8},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{8}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

(ii) $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(C)=\frac{3}{8},\ \mathrm{P}(A\cap C)=0$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap C)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$$

따라서 두 사건 A, C는 서로 종속이다.

(iii) $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(D)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A\cap D)=\frac{1}{8}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap D)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(D)$$

따라서 두 사건 A, D는 서로 독립이다.

이상에서 사건 A와 서로 독립인 사건은 D이다.

답 D

052-1 갑, 을이 수학 문제를 맞히는 사건을 각각 A, B라 하면 A, B는 서로 독립이므로 A와 B^C, A^C와 B도 서로 독립이다.

(i) 갑이 맞히고 을이 맞히지 못할 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=0.4\times(1-0.6)=0.16$$

(ii) 갑이 맞히지 못하고 을이 맞힐 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=(1-0.4)\times0.6=0.36$$

사건 $A\cap B^C$와 사건 $A^C\cap B$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=0.16+0.36=0.52$$

답 0.52

052-2 세 사격 선수 A, B, C가 표적에 명중시키는 사건을 각각 A, B, C라 하면 A, B, C는 서로 독립이다.

이때 적어도 한 발이 표적에 명중하는 사건은 A, B, C가 모두 표적에 명중시키지 못하는 사건의 여사건이다. A, B, C가 모두 표적에 명중시키지 못할 확률은 $\mathrm{P}(A^C\cap B^C\cap C^C)$이고 세 사건 A^C, B^C, C^C는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A^C\cap B^C\cap C^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(C^C)=(1-0.8)\times(1-0.6)\times(1-0.5)=0.04$$

따라서 구하는 확률은

$$1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C\cap C^C)=1-0.04=0.96$$

답 0.96

다른 풀이 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B\cup C)$이고, 세 사건 A, B, C는 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(A\cup B\cup C)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(B\cap C)\\&\quad-\mathrm{P}(C\cap A)+\mathrm{P}(A\cap B\cap C)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&\quad-\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)\\&=0.8+0.6+0.5-0.48-0.3-0.4+0.24\\&=0.96\end{aligned}$$

053-1 (1) 검은 공이 2개이므로 갑이 이기는 경우는 1회, 3회에 처음으로 흰 공을 꺼내는 경우이다.

(i) 갑이 1회에 이길 확률은

$$\frac{3}{5}$$

(ii) 갑이 3회에 이길 확률은

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}=\frac{1}{10}$$

이때 1회, 3회에 이기는 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{10}=\frac{7}{10}$$

(2) 갑이 3회 이내에 이기는 경우는 1회, 3회에 처음으로 흰 공을 꺼내는 경우이다.

(i) 갑이 1회에 이길 확률은

$$\frac{3}{5}$$

(ii) 갑이 3회에 이길 확률은

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\frac{3}{5}$$

이때 1회, 3회에 이기는 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{3}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\frac{3}{5}=\frac{75+12}{125}=\frac{87}{125}$$

답 (1) $\frac{7}{10}$ (2) $\frac{87}{125}$

054-1 자유투를 한 번 던질 때 성공할 확률이 $\frac{3}{10}$, 성공하지 못할 확률이 $\frac{7}{10}$이다.

(i) 자유투를 3회 성공할 확률은

$${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(\frac{7}{10}\right)^1=\frac{756}{10000}$$

(ii) 자유투를 4회 성공할 확률은

$${}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{3}{10}\right)^4\left(\frac{7}{10}\right)^0=\frac{81}{10000}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{756}{10000}+\frac{81}{10000}=\frac{837}{10000}$$

답 $\frac{837}{10000}$

054-2 주사위를 5번 던져 점 P와 원점 사이의 거리가 1이려면 점 P의 좌표가 -1 또는 1이어야 한다.
또한 주사위를 던질 때 짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 홀수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

(i) 점 P가 -1에 있는 경우
주사위를 던져서 짝수의 눈이 2번, 홀수의 눈이 3번 나와야 하므로 그 확률은

$${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$$

(ii) 점 P가 1에 있는 경우
주사위를 던져서 짝수의 눈이 3번, 홀수의 눈이 2번 나와야 하므로 그 확률은

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{5}{16}+\frac{5}{16}=\frac{5}{8}$$

답 $\frac{5}{8}$

055-1 한 개의 주사위를 던질 때 2 이하의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$, 2보다 큰 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

(i) 주머니에서 빨간 공을 꺼내는 경우
빨간 공을 꺼낼 확률은 $\frac{3}{8}$
주사위를 3번 던져서 2 이하의 눈이 3번 나올 확률은 ${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{27}$

$$\therefore \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{27}=\frac{1}{72}$$

(ii) 주머니에서 노란 공을 꺼내는 경우
노란 공을 꺼낼 확률은 $\frac{5}{8}$
주사위를 4번 던져서 2 이하의 눈이 3번 나올 확률은 ${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$

$$\therefore \frac{5}{8}\cdot\frac{8}{81}=\frac{5}{81}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{72}+\frac{5}{81}=\frac{49}{648}$$

답 $\frac{49}{648}$

중단원 연습 문제

본책 138~142쪽

01 $\frac{3}{10}$	02 ㄴ, ㄷ	03 ④	04 $\frac{145}{729}$	
05 ③	06 $\frac{80}{729}$	07 $\frac{80}{243}$	08 0.59	09 ⑤
10 ⑤	11 0.608	12 $\frac{91}{162}$	13 $\frac{200}{729}$	14 ⑤
15 65	16 $\frac{5}{16}$	17 ①	18 ②	19 365
20 ②				

01 전략 $P(B^C|A)=\frac{P(A\cap B^C)}{P(A)}$임을 이용한다.

풀이 $P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

$P(B^C|A)=\frac{P(A\cap B^C)}{P(A)}$에서

$$P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C|A)$$
$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$$
$$\therefore P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap B^C)$$
$$=\frac{3}{5}-\frac{3}{10}=\frac{3}{10}$$

답 $\frac{3}{10}$

02 전략 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$이면 두 사건 A, B가 서로 독립임을 이용한다.

풀이 $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C=\{2, 3, 5, 7\}$, $D=\{5, 10\}$이므로

$$A\cap B=\varnothing,\ A\cap D=\{10\},\ C\cap D=\{5\}$$

ㄱ. $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=0$이므로

$$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

ㄴ. $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(D)=\frac{1}{5}$, $P(A\cap D)=\frac{1}{10}$이므로

$$P(A\cap D)=P(A)P(D)$$

따라서 두 사건 A, D는 서로 독립이다.

ㄷ. $P(C)=\frac{2}{5}$, $P(D)=\frac{1}{5}$, $P(C\cap D)=\frac{1}{10}$이므로

$$P(C\cap D)\neq P(C)P(D)$$

따라서 두 사건 C, D는 서로 종속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

03 전략 배반사건의 정의와 독립일 필요충분조건을 이용한다.

풀이 ㄱ. A와 B가 서로 독립이면

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

이므로

$$P(A^C\cap B^C)$$
$$=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)$$
$$=1-\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}$$
$$=1-\{P(A)+P(B)-P(A)P(B)\}$$
$$=\{1-P(A)\}\{1-P(B)\}$$
$$=P(A^C)P(B^C)$$

따라서 두 사건 A^C, B^C는 서로 독립이다.

ㄴ. A와 B가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$이므로

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0}{P(A)}=0$$

ㄷ. A와 B가 서로 배반사건이면

$$P(A\cap B)=0$$

이때 $P(A)P(B)\neq 0$이므로

$$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

04 전략 지영이가 이기는 경우는 1회, 3회이고 이때 이기는 사건은 모두 배반사건이다.

풀이 두 개의 주사위를 던질 때 나온 눈의 수의 합이 5가 되는 경우는

$$(1, 4),\ (2, 3),\ (3, 2),\ (4, 1)$$

이므로 그 확률은 $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

따라서 눈의 수의 합이 5가 아닐 확률은

$$1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

지영이가 3회 이내에 이기는 경우는 1회, 3회에 처음으로 눈의 수의 합이 5인 경우이므로

(i) 지영이가 1회에 이길 확률은

$$\frac{1}{9}$$

(ii) 지영이가 3회에 이길 확률은

$$\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{9}=\left(\frac{8}{9}\right)^2\cdot\frac{1}{9}$$

이때 1회, 3회에 이기는 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{1}{9}+\left(\frac{8}{9}\right)^2\cdot\frac{1}{9}=\frac{81+64}{729}=\frac{145}{729}$$

답 $\frac{145}{729}$

05 (전략) 먼저 관람객 투표 점수와 심사 위원 점수의 합이 70이 되는 경우를 찾는다.

풀이 철수가 받는 관람객 투표 점수와 심사 위원 점수의 합이 70이 되는 경우의 확률은 다음과 같다.

(i) 관람객 투표 점수가 A, 심사 위원 점수가 C일 확률은

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

(ii) 관람객 투표 점수가 B, 심사 위원 점수가 B일 확률은

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

(iii) 관람객 투표 점수가 C, 심사 위원 점수가 A일 확률은

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

이상에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}=\frac{5}{18}$$

답 ③

06 (전략) 5번의 시행에서 흰 공이 2번, 검은 공이 3번 나오고, 마지막 시행에서 흰 공이 나와야 한다.

풀이 흰 공 2개, 검은 공 4개가 들어 있는 상자에서 1개의 공을 꺼낼 때 꺼낸 공이 흰 공일 확률은 $\frac{1}{3}$, 검은 공일 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

구하는 확률은 5번의 시행에서 흰 공이 2번, 검은 공이 3번 나온 후 마지막에 흰 공이 나올 확률이므로

$${}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}=\frac{80}{729}$$

답 $\frac{80}{729}$

07 해결과정 • 한 번의 경기에서 A팀이 이길 확률을 p라 하면 두 팀이 비기는 경우는 없으므로 B팀이 이길 확률은 $1-p$이다. 이때 각 경기는 서로 독립이고 4번의 경기에서 A팀이 모두 이길 확률이 $\frac{1}{81}$이므로

$${}_4C_4\,p^4(1-p)^0=\frac{1}{81}$$

$$p^4=\left(\frac{1}{3}\right)^4 \qquad \therefore p=\frac{1}{3}$$ → 40% 배점

즉 한 번의 경기에서 A팀이 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이고 B팀이 이길 확률은 $\frac{2}{3}$이다. → 20% 배점

답구하기 • 따라서 5번의 경기에서 A팀이 2번 이길 확률은

$${}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{80}{243}$$ → 40% 배점

답 $\frac{80}{243}$

08 문제이해 • 임의로 택한 한 사람이 음주한 사람인 사건을 A, 음주했다고 측정하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{10}=0.6,\ \mathrm{P}(B^C|A)=0.15,$$

$$\mathrm{P}(B|A^C)=0.2$$ → 10% 배점

해결과정 • (i) 음주한 사람을 택하고 음주했다고 측정할 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=0.6\times(1-0.15)\\&=0.51\end{aligned}$$ → 40% 배점

(ii) 음주하지 않은 사람을 택하고 음주했다고 측정할 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=0.4\times0.2\\&=0.08\end{aligned}$$ → 30% 배점

답구하기 • 사건 $A\cap B$와 사건 $A^C\cap B$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=0.51+0.08\\&=0.59\end{aligned}$$ → 20% 배점

답 0.59

09 (전략) 주머니 A에서 꺼낸 공이 흰 공일 때와 검은 공일 때로 나누어 생각한다.

풀이 주머니 A에서 흰 공을 꺼내는 사건을 A, 주머니 B에서 흰 공을 꺼내는 사건을 B라 하면 주머니 B에서 흰 공을 꺼내는 경우는 다음과 같다.

(i) 주머니 A에서 흰 공을 꺼내는 경우

주머니 B는 흰 공 3개, 검은 공 3개가 되므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

(ii) 주머니 A에서 검은 공을 꺼내는 경우

주머니 B는 흰 공 1개, 검은 공 5개가 되므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{10}\end{aligned}$$

사건 $A\cap B$와 사건 $A^{c}\cap B$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A^{c}\cap B)$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$$

답 ⑤

10 전략 버스로 등교한 학생을 선택하는 사건을 A, 지각한 학생을 선택하는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A|B)$이다.

풀이 임의로 선택한 학생이 버스로 등교한 학생인 사건을 A, 지각한 학생인 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{3}{5},\ P(B|A)=\frac{1}{20},\ P(B|A^{c})=\frac{1}{15}$$

이므로

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{20}=\frac{3}{100}$$
$$P(A^{c}\cap B)=P(A^{c})P(B|A^{c})$$
$$=\left(1-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{1}{15}=\frac{2}{75}$$

사건 $A\cap B$와 사건 $A^{c}\cap B$는 서로 배반사건이므로

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A^{c}\cap B)$$
$$=\frac{3}{100}+\frac{2}{75}=\frac{17}{300}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{100}}{\frac{17}{300}}=\frac{9}{17}$$

답 ⑤

11 문제이해 • 세 플러그 A, B, C가 점화되는 사건을 각각 A, B, C라 하면

$$P(A)=0.8,\ P(B)=0.6,\ P(C)=0.4$$

➜ 20% 배점

해결과정 • B, C 중 적어도 한 플러그가 점화될 확률은 $P(B\cup C)$이고, 두 사건 B, C는 서로 독립이므로

$$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)$$
$$=P(B)+P(C)-P(B)P(C)$$
$$=0.6+0.4-0.6\times0.4$$
$$=0.76$$

➜ 40% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 확률은

$$P(A\cap(B\cup C))=P(A)P(B\cup C)$$
$$=0.8\times0.76$$
$$=0.608$$

➜ 40% 배점

답 0.608

다른 풀이 (i) A, B플러그가 점화되고 C플러그가 점화되지 않을 확률은

$$0.8\times0.6\times(1-0.4)=0.288$$

(ii) A, C플러그가 점화되고 B플러그가 점화되지 않을 확률은

$$0.8\times(1-0.6)\times0.4=0.128$$

(iii) A, B, C플러그가 모두 점화될 확률은

$$0.8\times0.6\times0.4=0.192$$

이상에서 구하는 확률은

$$0.288+0.128+0.192=0.608$$

12 전략 전류가 흐르지 않을 확률을 이용한다.

풀이 스위치 a, b, c, d, e가 닫히는 사건을 각각 A, B, C, D, E라 하면

$$P(A)=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{2}{3},\ P(C)=\frac{1}{2},$$
$$P(D)=\frac{1}{3},\ P(E)=\frac{1}{6}$$

$A^{c}\cap B^{c}=X$, $C^{c}\cap D^{c}\cap E^{c}=Y$라 하면 사건 A^{c}, B^{c}, C^{c}, D^{c}, E^{c}는 서로 독립이므로

$$P(X)=P(A^{c}\cap B^{c})=P(A^{c})P(B^{c})$$
$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}$$
$$P(Y)=P(C^{c}\cap D^{c}\cap E^{c})$$
$$=P(C^{c})P(D^{c})P(E^{c})$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{18}$$

따라서 X에서 Y로 전류가 흐르지 않을 확률은

$$P(X\cup Y)=P(X)+P(Y)-P(X\cap Y)$$
$$=\frac{2}{9}+\frac{5}{18}-\frac{2}{9}\cdot\frac{5}{18}=\frac{71}{162}$$

이므로 X에서 Y로 전류가 흐를 확률은

$$1-P(X\cup Y)=1-\frac{71}{162}=\frac{91}{162}$$

답 $\frac{91}{162}$

13 문제이해 • 6번째 경기에서 승리 팀이 결정되려면 승리한 팀은 5번의 경기에서 3번을 이기고 마지막 6번째 경기에서도 이겨야 한다. 이때 한 번의 경기에서 A팀이 이길 확률은 $\frac{2}{3}$이고 두 팀이 비기는 경우는 없으므로 B팀이 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

➜ 30% 배점

해결과정 • (i) A팀이 승리 팀이 될 확률은

$${}_5C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{160}{729}$$

➜ 30% 배점

(ii) B팀이 승리 팀이 될 확률은

$${}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{40}{729}$$ ➔ 30% 배점

답구하기 • (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{160}{729}+\frac{40}{729}=\frac{200}{729}$$ ➔ 10% 배점

답 $\frac{200}{729}$

14 전략 $a+b=6$인 경우는 $a=3$, $b=3$ 또는 $a=4$, $b=2$뿐임을 이용한다.

풀이 한 개의 주사위를 던질 때 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$, 3의 배수의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

이때 $a\le 4$, $b\le 3$이므로 $a+b=6$인 경우는

$a=3$, $b=3$ 또는 $a=4$, $b=2$

(i) $a=3$, $b=3$일 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1\cdot{}_3C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{8}{3^7}$$

(ii) $a=4$, $b=2$일 확률은

$${}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0\cdot{}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{6}{3^7}$$

(i), (ii)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{8}{3^7}+\frac{6}{3^7}=\frac{14}{3^7}$$

답 ⑤

15 문제이해 • 한 쌍의 나무를 접목시켰을 때 빨간 꽃이 피는 나무가 될 확률은 $\frac{1}{4}$, 빨간 꽃이 피는 나무가 되지 않을 확률은 $\frac{3}{4}$이다. ➔ 20% 배점

해결과정 • (i) 빨간 꽃이 피는 나무가 4그루일 확률은

$${}_5C_4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{15}{4^5}$$

(ii) 빨간 꽃이 피는 나무가 5그루일 확률은

$${}_5C_5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{4^5}$$

(i), (ii)에서 빨간 꽃이 피는 나무가 4그루 이상일 확률은

$$\frac{15}{4^5}+\frac{1}{4^5}=\frac{1}{64}$$ ➔ 60% 배점

답구하기 • 따라서 $m=64$, $n=1$이므로

$m+n=65$ ➔ 20% 배점

답 65

16 문제이해 • 점 P가 점 A에서 출발하여 다시 점 A로 돌아오려면 점 P가 6 또는 9만큼 움직여야 한다.

➔ 20% 배점

해결과정 • 짝수의 눈이 나오는 횟수를 a, 홀수의 눈이 나오는 횟수를 b라 하면

(i) $a+b=5$, $2a+b=6$일 때,

$a=1$, $b=4$

즉 짝수의 눈이 1번, 홀수의 눈이 4번 나올 확률은

$${}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{32}$$ ➔ 30% 배점

(ii) $a+b=5$, $2a+b=9$일 때,

$a=4$, $b=1$

즉 짝수의 눈이 4번, 홀수의 눈이 1번 나올 확률은

$${}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{5}{32}$$ ➔ 30% 배점

답구하기 • (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{5}{32}+\frac{5}{32}=\frac{5}{16}$$ ➔ 20% 배점

답 $\frac{5}{16}$

Remark

주사위를 5번 던졌을 때, 5번 모두 홀수의 눈이 나오면 점 P는 5만큼 움직이고, 5번 모두 짝수의 눈이 나오면 점 P는 10만큼 움직인다.
따라서 점 P가 움직이는 거리 l은

$5\le l\le 10$

17 전략 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다를 때와 같을 때로 나누어 생각한다.

풀이 (i) 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다른 경우

주머니에서 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다를 확률은

$$\frac{{}_4C_1\cdot{}_3C_1}{{}_7C_2}=\frac{4}{7}$$

동전을 3번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$$

이므로 확률은

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{14}$$

(ii) 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같은 경우

주머니에서 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같을 확률은

$$\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}+\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}=\frac{3}{7}$$

동전을 2번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$${}_{2}C_{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=\frac{1}{4}$$

이므로 확률은

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{28}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{14}+\frac{3}{28}=\frac{9}{28}$$

답 ①

18 전략 조건부확률을 이용한다.

풀이 임의로 택한 학생이 남학생인 사건을 A, K자격증을 가지고 있는 학생인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5},\ \mathrm{P}(B)=\frac{7}{10},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}$$

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^{C})$이므로

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{5}+\mathrm{P}(A\cap B^{C})$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B^{C})=\frac{1}{5}$$

한편 $\mathrm{P}(B^{C})=1-\mathrm{P}(B)=\frac{3}{10}$이고

$\mathrm{P}(B^{C})=\mathrm{P}(A\cap B^{C})+\mathrm{P}(A^{C}\cap B^{C})$이므로

$$\frac{3}{10}=\frac{1}{5}+\mathrm{P}(A^{C}\cap B^{C})$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A^{C}\cap B^{C})=\frac{1}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A^{C}|B^{C})=\frac{\mathrm{P}(A^{C}\cap B^{C})}{\mathrm{P}(B^{C})}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{3}$$

답 ②

19 전략 x축 또는 y축에 대하여 대칭이동시키는 횟수가 각각 0 또는 짝수가 되어야 제자리로 돌아올 수 있다.

풀이 주사위를 던져서 3보다 작은 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$, 3 이상의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

이때 x축, y축에 대하여 대칭이동시키는 횟수를 각각 a, b라 하면

$a+b=6$ (a, b는 음이 아닌 정수)

점 P가 제자리로 돌아오기 위해서는 a, b가 0 또는 짝수이어야 하므로 점 P가 다시 제자리에 올 확률은 다음과 같다.

(i) $a=6$, $b=0$일 때의 확률은

$${}_{6}C_{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}=\frac{1}{3^{6}}$$

(ii) $a=4$, $b=2$일 때의 확률은

$${}_{6}C_{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}=\frac{60}{3^{6}}$$

(iii) $a=2$, $b=4$일 때의 확률은

$${}_{6}C_{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{4}=\frac{240}{3^{6}}$$

(iv) $a=0$, $b=6$일 때의 확률은

$${}_{6}C_{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{6}=\frac{64}{3^{6}}$$

이상에서 점 P가 다시 제자리에 올 확률은

$$\frac{1}{3^{6}}+\frac{60}{3^{6}}+\frac{240}{3^{6}}+\frac{64}{3^{6}}=\frac{365}{3^{6}}$$

$\therefore\ n=365$

답 365

20 전략 1단계 치료에 성공한 환자가 각각 2명, 3명, 4명인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) 1단계 치료에 성공한 환자가 2명이고 완치된 것으로 판단될 환자가 2명일 확률은

$${}_{4}C_{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot{}_{2}C_{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}=\frac{1}{6}$$

(ii) 1단계 치료에 성공한 환자가 3명이고 완치된 것으로 판단될 환자가 2명일 확률은

$${}_{4}C_{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\cdot{}_{3}C_{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{1}=\frac{1}{9}$$

(iii) 1단계 치료에 성공한 환자가 4명이고 완치된 것으로 판단될 환자가 2명일 확률은

$${}_{4}C_{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\cdot{}_{4}C_{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}=\frac{1}{54}$$

이상에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{54}=\frac{8}{27}$$

답 ②

Ⅲ. 통계

07 확률분포

유제 본책 148~164쪽

056-1 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 두 눈의 수의 차는 다음 표와 같다.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

따라서 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4, 5이고, 그 각각의 확률은

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(X=1)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18},$$
$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9},\ \mathrm{P}(X=3)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},$$
$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9},\ \mathrm{P}(X=5)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	1

답 풀이 참조

057-1 (1) 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	k	$4k$	$9k$	$16k$	1

확률의 총합은 1이므로

$$k+4k+9k+16k=1$$
$$30k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{30}$$

(2) $\mathrm{P}(X\le3)$

$$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$$
$$=\frac{1}{30}+\frac{4}{30}+\frac{9}{30}=\frac{7}{15}$$

답 (1) $\frac{1}{30}$ (2) $\frac{7}{15}$

057-2 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{k}{6}$	$\frac{k}{3}$	$k-1$	1

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{k}{6}+\frac{k}{3}+(k-1)=1$$
$$\frac{3}{2}k-1=1 \qquad \therefore k=\frac{4}{3}$$
$$\therefore \mathrm{P}(X^2-6X+8\le0)$$
$$=\mathrm{P}((X-2)(X-4)\le0)$$
$$=\mathrm{P}(2\le X\le4)$$
$$=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$$
$$=\frac{4}{9}+\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$$

답 $\frac{7}{9}$

058-1 (1) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다. 10개의 공 중에서 3개의 공을 꺼내는 방법의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_3$이고, 꺼낸 공 중에서 빨간 공이 x개인 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_x\cdot{}_5\mathrm{C}_{3-x}$이므로 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_5\mathrm{C}_x\cdot{}_5\mathrm{C}_{3-x}}{{}_{10}\mathrm{C}_3}\quad(x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

(2) $\mathrm{P}(X\le2)=1-\mathrm{P}(X>2)=1-\mathrm{P}(X=3)$

$$=1-\frac{{}_5\mathrm{C}_3\cdot{}_5\mathrm{C}_0}{{}_{10}\mathrm{C}_3}$$
$$=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$$

답 풀이 참조

다른 풀이 (2) $\mathrm{P}(X\le2)$

$$=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$$
$$=\frac{{}_5\mathrm{C}_0\cdot{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}+\frac{{}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}+\frac{{}_5\mathrm{C}_2\cdot{}_5\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}$$
$$=\frac{1}{12}+\frac{5}{12}+\frac{5}{12}=\frac{11}{12}$$

059-1 확률의 총합은 1이므로

$$a+b+c=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\mathrm{E}(X)=\frac{5}{4}$이므로

$$0\cdot a+1\cdot b+2\cdot c=\frac{5}{4}$$
$$\therefore b+2c=\frac{5}{4} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$V(X)=\frac{11}{16}$이므로

$$0^2\cdot a+1^2\cdot b+2^2\cdot c-\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{11}{16}$$

$$\therefore b+4c=\frac{9}{4} \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$a=\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{4},\ c=\frac{1}{2}$$

$$\therefore a-b+c=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

059-2 확률의 총합은 1이므로

$$a+\frac{1}{5}+b=1$$

$$\therefore a+b=\frac{4}{5} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$E(X)=2$이므로

$$1\cdot a+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot b=2$$

$$\therefore a+3b=\frac{8}{5} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{2}{5},\ b=\frac{2}{5}$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

$$=1^2\cdot\frac{2}{5}+2^2\cdot\frac{1}{5}+3^2\cdot\frac{2}{5}-2^2$$

$$=\frac{24}{5}-4=\frac{4}{5}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

답 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

060-1 100원짜리 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고, 10원짜리 동전의 앞면을 h, 뒷면을 t라 할 때, 받을 수 있는 상금은

Hhh일 때, $100+10+10=120$

Hht, Hth일 때, $100+10=110$

Htt일 때, 100

Thh일 때, $10+10=20$

Tht, Tth일 때, 10

Ttt일 때, 0

따라서 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 10, 20, 100, 110, 120이고, 그 각각의 확률은 $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	10	20	100	110	120	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1

$$\therefore E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+10\cdot\frac{1}{4}+20\cdot\frac{1}{8}+100\cdot\frac{1}{8}+110\cdot\frac{1}{4}+120\cdot\frac{1}{8}$$

$$=60$$

$$V(X)=0^2\cdot\frac{1}{8}+10^2\cdot\frac{1}{4}+20^2\cdot\frac{1}{8}+100^2\cdot\frac{1}{8}+110^2\cdot\frac{1}{4}+120^2\cdot\frac{1}{8}-60^2$$

$$=2550$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{2550}=5\sqrt{102}$$

즉 X의 평균은 60, 표준편차는 $5\sqrt{102}$이다.

답 평균: 60, 표준편차: $5\sqrt{102}$

060-2 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 각각의 확률은

$$P(X=0)=\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}=\frac{2}{5},$$

$$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\cdot{}_4C_1}{{}_6C_2}=\frac{8}{15},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$$\therefore E(X)=0\cdot\frac{2}{5}+1\cdot\frac{8}{15}+2\cdot\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$$

$$V(X)=0^2\cdot\frac{2}{5}+1^2\cdot\frac{8}{15}+2^2\cdot\frac{1}{15}-\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$=\frac{16}{45}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{16}{45}}=\frac{4\sqrt{5}}{15}$$

즉 X의 평균은 $\frac{2}{3}$, 표준편차는 $\frac{4\sqrt{5}}{15}$이다.

답 평균: $\frac{2}{3}$, 표준편차: $\frac{4\sqrt{5}}{15}$

061-1 확률변수 X의 평균, 분산, 표준편차는

$$E(X)=(-2)\cdot\frac{1}{6}+0\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{1}{6}=0$$

$$V(X)=(-2)^2\cdot\frac{1}{6}+0^2\cdot\frac{2}{3}+2^2\cdot\frac{1}{6}-0^2=\frac{4}{3}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(1) $E(2X-3)=2E(X)-3=2\cdot 0-3=-3$

(2) $V(-3X+5)=(-3)^2V(X)=9\cdot\frac{4}{3}=12$

(3) $\sigma(9X+2)=9\sigma(X)=9\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}=6\sqrt{3}$

답 (1) -3 (2) 12 (3) $6\sqrt{3}$

061-2 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 20, 110, 200이고, 그 각각의 확률은

$$P(X=20)=\frac{{}_5C_2}{{}_8C_2}=\frac{5}{14},$$

$$P(X=110)=\frac{{}_5C_1\cdot{}_3C_1}{{}_8C_2}=\frac{15}{28},$$

$$P(X=200)=\frac{{}_3C_2}{{}_8C_2}=\frac{3}{28}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	20	110	200	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

$$\therefore E(X)=20\cdot\frac{5}{14}+110\cdot\frac{15}{28}+200\cdot\frac{3}{28}$$

$$=\frac{175}{2}$$

$$\therefore E(2X-25)=2E(X)-25$$

$$=2\cdot\frac{175}{2}-25=150$$

답 150

062-1 한 개의 동전을 한 번 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(20, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$$\therefore E(X)=20\cdot\frac{1}{2}=10$$

$$V(X)=20\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=5$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{5}$$

따라서 X의 평균은 10, 표준편차는 $\sqrt{5}$이다.

답 평균: 10, 표준편차: $\sqrt{5}$

062-2 흰 공 3개, 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 한 개의 공을 꺼낼 때 흰 공이 나올 확률은 $\frac{3}{5}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100, \frac{3}{5}\right)$을 따른다.

$$\therefore E(X)=100\cdot\frac{3}{5}=60$$

$$V(X)=100\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=24$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=2\sqrt{6}$$

따라서 X의 평균은 60, 표준편차는 $2\sqrt{6}$이다.

답 평균: 60, 표준편차: $2\sqrt{6}$

063-1 한 개의 동전을 한 번 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$E(X)=35$이므로

$$n\cdot\frac{1}{2}=35 \qquad \therefore n=70$$

답 70

063-2 $E(X)=10$, $\sigma(X)=2\sqrt{2}$이므로

$np=10$ …… ㉠

$\sqrt{np(1-p)}=2\sqrt{2}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\sqrt{10(1-p)}=2\sqrt{2}, \qquad 10(1-p)=8$$

$$\therefore p=\frac{1}{5}$$

$p=\frac{1}{5}$을 ㉠에 대입하면 $n=50$

답 $n=50$, $p=\frac{1}{5}$

064-1 두 개의 동전을 동시에 던질 때 둘 다 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(30, \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$$\therefore E(X)=30\cdot\frac{1}{4}=\frac{15}{2}$$

$$V(X)=30\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{45}{8}$$

$Y=8X+3$이므로

$$E(Y)=E(8X+3)=8E(X)+3$$

$$=8\cdot\frac{15}{2}+3=63$$

$$V(Y)=V(8X+3)=8^2V(X)$$

$$=64\cdot\frac{45}{8}=360$$

답 $E(Y)=63$, $V(Y)=360$

064-2 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=np$

$\mathrm{V}(X)=np(1-p)$

$\mathrm{E}(10X)=280$에서

$10\mathrm{E}(X)=280,\quad 10np=280$

$\therefore np=28$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\mathrm{V}(10X)=2660$에서

$10^2\mathrm{V}(X)=2660,\quad 10^2np(1-p)=2660$

$\therefore np(1-p)=26.6$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$28(1-p)=26.6,\quad 1-p=0.95$

$\therefore p=0.05$

$p=0.05$를 ㉠에 대입하면

$n\times 0.05=28\quad \therefore n=560$

$\therefore 100p+n=5+560=565$

답 565

중단원 연습 문제

본책 166~170쪽

01 10	**02** $\frac{5}{64}$	**03** $\frac{\sqrt{6}}{4}$	**04** ⑤	**05** 3650
06 ④	**07** ③	**08** ③	**09** $\frac{3}{5}$	**10** $\frac{9}{10}$
11 ⑤	**12** 37	**13** ①	**14** ④	**15** 20
16 4	**17** 100	**18** 899	**19** 28	**20** ②
21 31	**22** ④			

01 전략 확률의 총합은 1임을 이용한다.

풀이 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{a-1}{35}$	$\frac{a-2}{35}$	$\frac{a-3}{35}$	$\frac{a-4}{35}$	$\frac{a-5}{35}$	1

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{a-1}{35}+\frac{a-2}{35}+\frac{a-3}{35}+\frac{a-4}{35}+\frac{a-5}{35}=1$$

$$\frac{5a-15}{35}=1,\quad 5a=50$$

$\therefore a=10$

답 10

02 해결과정 • 확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{4}+b=1$

$\therefore a+b=\frac{3}{4}$ $\cdots\cdots$ ㉠ ➜ 30% 배점

$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{2}$이므로

$(-1)\cdot a+0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot b=\frac{1}{2}$

$\therefore -a+b=\frac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉡ ➜ 40% 배점

답구하기 • ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{8},\ b=\frac{5}{8}$

$\therefore ab=\frac{5}{64}$ ➜ 30% 배점

답 $\frac{5}{64}$

03 전략 안타를 칠 확률이 $\frac{1}{4}$이므로 안타를 치지 못할 확률은 $\frac{3}{4}$이다.

풀이 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 각각의 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{16},$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8},$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{9}{16}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{V}(X)=0^2\cdot\frac{9}{16}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{1}{16}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{3}{8}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$

답 $\frac{\sqrt{6}}{4}$

다른 풀이 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(2,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\sigma(X)=\sqrt{2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$

04 (전략) 확률의 총합이 1임을 이용하여 a의 값을 구하여 $\mathrm{E}(X)$를 구한 다음, $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$임을 이용한다.

(풀이) 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{4}+a+2a=1, \qquad 3a=\frac{3}{4}$$

$$\therefore a=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$$

$$\therefore \mathrm{E}(4X+10)=4\mathrm{E}(X)+10=4\cdot\frac{5}{4}+10=15$$

답 ⑤

05 (전략) $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$를 구한 후 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$임을 이용한다.

(풀이) 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(360, \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=360\cdot\frac{1}{6}=60,$$

$$\mathrm{V}(X)=360\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=50$$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=50+60^2=3650$$

답 3650

06 (전략) 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, $\mathrm{E}(X)=np$, $\mathrm{V}(X)=np(1-p)$임을 이용한다.

(풀이) 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(9, p)$를 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=9p,\ \mathrm{V}(X)=9p(1-p)$$

이때 $\{\mathrm{E}(X)\}^2=\mathrm{V}(X)$이므로

$$(9p)^2=9p(1-p), \qquad 9p=1-p\ (\because 0<p<1)$$

$$\therefore p=\frac{1}{10}$$

답 ④

07 (전략) $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$임을 이용하여 n에 대한 식을 세운다.

(풀이) 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 두 눈의 수가 모두 짝수일 확률은 $\frac{1}{4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$$\therefore \mathrm{E}(X)=\frac{n}{4},\ \mathrm{V}(X)=n\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{16}n$$

이때 $\mathrm{E}(X^2)=\frac{11}{2}$이므로 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$$\frac{3}{16}n=\frac{11}{2}-\left(\frac{n}{4}\right)^2, \qquad n^2+3n-88=0$$

$$(n+11)(n-8)=0$$

$$\therefore n=-11 \text{ 또는 } n=8$$

이때 n은 자연수이므로 $\quad n=8$

답 ③

08 (전략) 확률변수 $aX+b$에 대하여 $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$임을 이용한다.

(풀이) 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=\frac{n}{3}$$

이때 $\mathrm{E}(2X+5)=13$이므로

$$2\mathrm{E}(X)+5=13, \qquad \frac{2n}{3}+5=13$$

$$\therefore n=12$$

답 ③

09 문제이해 • $\mathrm{P}(X=x)=\dfrac{a}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=a(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

➔ 20% 배점

해결과정 • 확률의 총합은 1이므로

$$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\cdots+\mathrm{P}(X=35)=1$$

$$a(\sqrt{2}-\sqrt{1})+a(\sqrt{3}-\sqrt{2})+a(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+a(\sqrt{36}-\sqrt{35})=1$$

$$a(\sqrt{36}-\sqrt{1})=1, \qquad 5a=1$$

$$\therefore a=\frac{1}{5}$$

➔ 40% 배점

답구하기 • $\therefore \mathrm{P}(X=9)+\mathrm{P}(X=10)+\mathrm{P}(X=11)+\cdots+\mathrm{P}(X=35)$

$$=\frac{1}{5}\{(\sqrt{10}-\sqrt{9})+(\sqrt{11}-\sqrt{10})+(\sqrt{12}-\sqrt{11})+\cdots+(\sqrt{36}-\sqrt{35})\}$$

$$=\frac{1}{5}(\sqrt{36}-\sqrt{9})=\frac{3}{5}$$

➔ 40% 배점

답 $\frac{3}{5}$

10 문제이해 • $\mathrm{P}(X\ge k)=1-\dfrac{k^2}{20}$에서

$$\mathrm{P}(X\ge 0)=1,$$

$$\mathrm{P}(X \geq 1)=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20},$$

$$\mathrm{P}(X \geq 2)=1-\frac{4}{20}=\frac{4}{5},$$

$$\mathrm{P}(X \geq 3)=1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}$$ ➔ 20% 배점

해결과정 • $\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(X \geq k)-\mathrm{P}(X \geq k+1)$
이므로

$$\mathrm{P}(X=0)=\mathrm{P}(X \geq 0)-\mathrm{P}(X \geq 1)=1-\frac{19}{20}=\frac{1}{20},$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(X \geq 1)-\mathrm{P}(X \geq 2)=\frac{19}{20}-\frac{4}{5}=\frac{3}{20},$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\mathrm{P}(X \geq 2)-\mathrm{P}(X \geq 3)=\frac{4}{5}-\frac{11}{20}=\frac{1}{4},$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\mathrm{P}(X \geq 3)=\frac{11}{20}$$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{20}$	1

➔ 40% 배점

답구하기 • $\therefore \mathrm{E}(X)=0 \cdot \frac{1}{20}+1 \cdot \frac{3}{20}+2 \cdot \frac{1}{4}+3 \cdot \frac{11}{20}=\frac{23}{10}$

$$\mathrm{V}(X)=0^2 \cdot \frac{1}{20}+1^2 \cdot \frac{3}{20}+2^2 \cdot \frac{1}{4}+3^2 \cdot \frac{11}{20}-\left(\frac{23}{10}\right)^2=\frac{81}{100}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{81}{100}}=\frac{9}{10}$$ ➔ 40% 배점

답 $\frac{9}{10}$

11 전략 $\mathrm{P}(0 \leq X \leq 2)=\frac{7}{8}$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 $\mathrm{P}(0 \leq X \leq 2)$

$$=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{3+a}{8}+\frac{1}{8}=\frac{a+5}{8}$$

즉 $\frac{a+5}{8}=\frac{7}{8}$이므로

$a=2$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$\therefore \mathrm{E}(X)=(-1) \cdot \frac{1}{8}+0 \cdot \frac{1}{8}+1 \cdot \frac{5}{8}+2 \cdot \frac{1}{8}=\frac{3}{4}$$

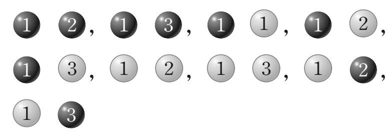
답 ⑤

12 전략 확률변수 X가 가질 수 있는 값과 그 확률을 구하여 확률분포를 표로 나타낸다.

풀이 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고, 6개의 공 중에서 2개를 꺼내는 방법의 수는

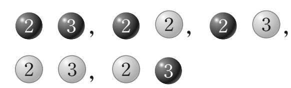
${}_6\mathrm{C}_2=15$

(i) $X=1$인 경우



의 9가지

(ii) $X=2$인 경우



의 5가지

(iii) $X=3$인 경우

의 1가지

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	1

$$\therefore \mathrm{E}(X)=1 \cdot \frac{3}{5}+2 \cdot \frac{1}{3}+3 \cdot \frac{1}{15}=\frac{22}{15}$$

따라서 $p=15$, $q=22$이므로

$p+q=37$

답 37

다른 풀이 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 숫자 중에서 최솟값이 $x\,(x=1, 2, 3)$가 되는 경우의 수는 x 이상의 숫자 중에서 2개의 숫자를 뽑는 방법의 수에서 x보다 큰 숫자 중에서 2개를 뽑는 방법의 수를 뺀 것과 같으므로

$$P(X=1)=\frac{{}_6C_2-{}_4C_2}{{}_6C_2}=\frac{15-6}{15}=\frac{3}{5},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_4C_2-{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{6-1}{15}=\frac{1}{3},$$

$$P(X=3)=\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$$

따라서 확률변수 X의 평균은

$$E(X)=1\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{15}=\frac{22}{15}$$

13 전략 상금의 기댓값을 구한 다음, 기댓값에서 2500원을 뺀다.

풀이 받을 수 있는 상금을 확률변수 X라 하면 X가 가질 수 있는 값은 2000, 3000이고, 그 각각의 확률은

$$P(X=2000)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{5},$$

$$P(X=3000)=\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}+\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{2}{5}$$

이므로 상금의 기댓값은

$$2000\cdot\frac{3}{5}+3000\cdot\frac{2}{5}=2400(\text{원})$$

이때

$$2400-2500=-100(\text{원})$$

이므로 2500원을 내고 이 게임을 한 번 할 때, 100원의 손해가 기대된다.

답 ①

14 전략 X의 확률분포를 표로 나타낸 다음, 평균과 분산을 구한다.

풀이 10장의 카드 중에 1이 적힌 카드를 a장, 2가 적힌 카드를 b장이라 하면 3이 적힌 카드는 $(10-a-b)$장이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{a}{10}$	$\frac{b}{10}$	$\frac{10-a-b}{10}$	1

$E(X)=1.9$에서

$$1\cdot\frac{a}{10}+2\cdot\frac{b}{10}+3\cdot\frac{10-a-b}{10}=1.9$$

$$\frac{-2a-b+30}{10}=1.9$$

$$\therefore 2a+b=11 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=0.49$에서

$$1^2\cdot\frac{a}{10}+2^2\cdot\frac{b}{10}+3^2\cdot\frac{10-a-b}{10}-1.9^2=0.49$$

$$\frac{-80a-50b+539}{100}=0.49$$

$$\therefore 8a+5b=49 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=5$

따라서 1, 2, 3이 적힌 카드의 개수는 차례대로 3, 5, 2이다.

답 ④

15 전략 확률변수 X의 확률분포를 구하여 $E(X)$를 구한 다음, $E(aX)=aE(X)$임을 이용한다.

풀이 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고, 그 각각의 확률은

$$P(X=1)=\frac{4}{{}_5C_2}=\frac{2}{5},$$

$$P(X=2)=\frac{3}{{}_5C_2}=\frac{3}{10},$$

$$P(X=3)=\frac{2}{{}_5C_2}=\frac{1}{5},$$

$$P(X=4)=\frac{1}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$$\therefore E(X)=1\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{10}=2$$

$$\therefore E(10X)=10E(X)=10\cdot 2=20$$

답 20

16 문제이해• 두 개의 주사위를 던졌을 때 나오는 두 눈의 수 중 작지 않은 수를 표로 나타내면 다음과 같다.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

➔ 20% 배점

해결과정 • 따라서 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이고, 그 각각의 확률은

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{36},\ \mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{12},$$
$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{5}{36},\ \mathrm{P}(X=4)=\frac{7}{36},$$
$$\mathrm{P}(X=5)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(X=6)=\frac{11}{36}$$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$	1

➔ 30% 배점

$$\therefore \mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{1}{12}+3\cdot\frac{5}{36}+4\cdot\frac{7}{36}+5\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\frac{11}{36}=\frac{161}{36}$$

➔ 20% 배점

답구하기 • $\therefore \mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}\left(\frac{36X+39}{50}\right)$
$$=\frac{36}{50}\mathrm{E}(X)+\frac{39}{50}=\frac{36}{50}\cdot\frac{161}{36}+\frac{39}{50}=4$$

➔ 30% 배점

답 4

17 (전략) 3의 배수가 나오는 횟수를 확률변수 Y로 놓고 Y가 따르는 이항분포를 먼저 구한다.

풀이 3의 배수가 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{3}{10}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(Y)=100\cdot\frac{3}{10}=30$$

이때 A가 얻은 점수는 $50Y$, B가 얻은 점수는 $20(100-Y)=2000-20Y$이므로

$$X=70Y-2000$$
$$\therefore \mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(70Y-2000)=70\mathrm{E}(Y)-2000=70\cdot30-2000=100$$

답 100

18 (전략) 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, $\mathrm{E}(X)=np$, $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$임을 이용한다.

풀이 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르고 $\mathrm{E}(X)=300$, $\sigma(X)=10$이므로

$np=300$ …… ㉠

$\sqrt{np(1-p)}=10$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\sqrt{300(1-p)}=10, \quad 300(1-p)=100$$
$$1-p=\frac{1}{3} \quad \therefore p=\frac{2}{3}$$

$p=\frac{2}{3}$를 ㉠에 대입하면 $n=450$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450, \frac{2}{3}\right)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{450}\mathrm{C}_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{450-x}$$
$$(x=0, 1, 2, \cdots, 450)$$

$$\therefore \frac{\mathrm{P}(X=3)}{\mathrm{P}(X=2)}=\frac{{}_{450}\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^{447}}{{}_{450}\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{448}}=\frac{{}_{450}\mathrm{C}_3\cdot\frac{2}{3}}{{}_{450}\mathrm{C}_2\cdot\frac{1}{3}}=\frac{448\cdot2}{3}=\frac{896}{3}$$

따라서 $a=3$, $b=896$이므로

$a+b=899$

답 899

19 문제이해 • $\mathrm{E}(X-10)=2$이므로

$\mathrm{E}(X)-10=2 \quad \therefore \mathrm{E}(X)=12$

$\mathrm{V}(X-10)=3$이므로 $\quad \mathrm{V}(X)=3$ ➔ 20% 배점

해결과정 • 흰 공 a개, 빨간 공 4개가 들어 있는 주머니에서 한 개의 공을 꺼낼 때 흰 공이 나올 확률은 $\frac{a}{a+4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{a}{a+4}\right)$를 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=\dfrac{na}{a+4}$

$\mathrm{V}(X)=n\cdot\dfrac{a}{a+4}\cdot\left(1-\dfrac{a}{a+4}\right)$

$=\dfrac{4na}{(a+4)^2}$ ➔ 40% 배점

$\mathrm{E}(X)=12$이므로

$\dfrac{na}{a+4}=12$ ⋯⋯ ㉠

$\mathrm{V}(X)=3$이므로

$\dfrac{4na}{(a+4)^2}=3$ ⋯⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$12\cdot\dfrac{4}{a+4}=3,\quad \dfrac{4}{a+4}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore a=12$

$a=12$를 ㉠에 대입하면 $\dfrac{12n}{12+4}=12$

$\therefore n=16$ ➔ 30% 배점

답구하기 • $\therefore a+n=28$ ➔ 10% 배점

답 28

20 전략 확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_k)=p_k\ (k=1, 2, \cdots, n)$일 때, $\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{n} x_kp_k$ 임을 이용한다.

풀이 X가 가질 수 있는 값은 $2k-1$이고, 각 값을 가질 확률은

$$\mathrm{P}(X=2k-1)=\frac{k}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{2k}{n(n+1)}\quad (k=1, 2, 3, \cdots, n)$$

$\therefore \mathrm{E}(X)$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{(2k-1)\cdot\frac{2k}{n(n+1)}\right\}$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}(2k^2-k)$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\left\{2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

$$=\frac{4n-1}{3}$$

이때 $\mathrm{E}(X)=13$이므로

$\dfrac{4n-1}{3}=13,\quad 4n=40$

$\therefore n=10$

답 ②

Remark 자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum_{k=1}^{n} k=\dfrac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=1}^{n} k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

21 문제이해 • 주어진 그림의 5개의 점으로 만들 수 있는 삼각형의 개수는

${}_5\mathrm{C}_3-1=9$ ➔ 20% 배점

해결과정 • 삼각형을 꼭짓점의 순서쌍으로 나타내고, 그때의 X의 값을 구하면 다음과 같다.

(i) 예각삼각형인 경우

$(1, 2, 3) \longrightarrow X=1$

$(1, 3, 4) \longrightarrow X=1$

$(1, 4, 5) \longrightarrow X=1$

(ii) 직각삼각형인 경우

$(2, 3, 5) \longrightarrow X=3$

$(2, 4, 5) \longrightarrow X=4$

(iii) 둔각삼각형인 경우

$(1, 2, 4) \longrightarrow X=4$

$(2, 3, 4) \longrightarrow X=4$

$(1, 3, 5) \longrightarrow X=5$

$(3, 4, 5) \longrightarrow X=5$

이상에서

$\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3},\quad \mathrm{P}(X=3)=\dfrac{1}{9},$

$\mathrm{P}(X=4)=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3},\quad \mathrm{P}(X=5)=\dfrac{2}{9}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	1

➔ 40% 배점

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\cdot\dfrac{1}{3}+3\cdot\dfrac{1}{9}+4\cdot\dfrac{1}{3}+5\cdot\dfrac{2}{9}$

$=\dfrac{28}{9}$ ➔ 20% 배점

답구하기 • $\therefore \mathrm{E}(9X+3)=9\mathrm{E}(X)+3$

$=9\cdot\dfrac{28}{9}+3=31$

➔ 20% 배점

답 31

22 (전략) 주어진 확률변수 X가 이항분포를 따름을 이용한다.

(풀이) 주어진 확률분포에서

$P(X=0)=p^3={}_3C_0\,p^3(2q)^0$,

$P(X=1)=6p^2q={}_3C_1\,p^2(2q)^1$,

$P(X=2)=12pq^2={}_3C_2\,p^1(2q)^2$,

$P(X=3)=8q^3={}_3C_3\,p^0(2q)^3$

이므로 확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_3C_x\,p^{3-x}\,(2q)^x\ \ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B(3,\ 2q)$를 따른다.

ㄱ. $p+2q=1$이고, $q\neq 0$이므로

$p+q\neq 1$

ㄴ. 확률변수 X가 이항분포 $B(3,\ 2q)$를 따르므로

$E(X)=3\cdot 2q=6q$

따라서 $E(X)=1$이면

$6q=1 \qquad \therefore q=\dfrac{1}{6}$

ㄷ. $V(X)=3\cdot 2q\cdot(1-2q)=\dfrac{5}{12}$에서

$144q^2-72q+5=0$

$(12q-1)(12q-5)=0$

$\therefore q=\dfrac{1}{12}$ 또는 $q=\dfrac{5}{12}$

ㄱ에서 $p+2q=1$이므로

$q=\dfrac{1}{12}$일 때, $\quad p=\dfrac{5}{6}$

$q=\dfrac{5}{12}$일 때, $\quad p=\dfrac{1}{6}$

이때 $p<q$이므로 $\quad p=\dfrac{1}{6},\ q=\dfrac{5}{12}$

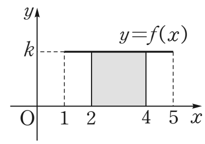
$\therefore E(X)=6q=6\cdot\dfrac{5}{12}=\dfrac{5}{2}$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

08 정규분포

유제 본책 176~185쪽

065-1 (1) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$, $x=5$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$4k=1$

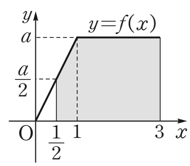
$\therefore k=\dfrac{1}{4}$

(2) $P(2\leq X\leq 4)$는 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$P(2\leq X\leq 4)=2\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$

답 (1) $\dfrac{1}{4}$ (2) $\dfrac{1}{2}$

065-2 (1) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\dfrac{1}{2}\cdot(2+3)\cdot a=1$

$\dfrac{5}{2}a=1 \qquad \therefore a=\dfrac{2}{5}$

(2) $P\left(X\geq\dfrac{1}{2}\right)$은 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

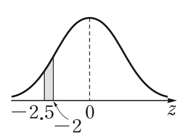
$P\left(X\geq\dfrac{1}{2}\right)=1-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{5}$

$=\dfrac{19}{20}$

답 (1) $\dfrac{2}{5}$ (2) $\dfrac{19}{20}$

066-1 $Z=\dfrac{X-70}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $P(55\leq X\leq 58)$



$=P\left(\dfrac{55-70}{6}\leq Z\leq\dfrac{58-70}{6}\right)$

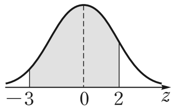
$=P(-2.5\leq Z\leq -2)$

$=P(2\leq Z\leq 2.5)$

$=P(0\leq Z\leq 2.5)-P(0\leq Z\leq 2)$

$=0.4938-0.4772=0.0166$

(2) $\mathrm{P}(52 \le X \le 82)$



$=\mathrm{P}\left(\frac{52-70}{6} \le Z \le \frac{82-70}{6}\right)$
$=\mathrm{P}(-3 \le Z \le 2)$
$=\mathrm{P}(-3 \le Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$
$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 3)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$
$=0.4987+0.4772=0.9759$

답 (1) 0.0166 (2) 0.9759

067-1 모의고사 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(270,\ 40^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-270}{40}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(290 \le X \le 370)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{290-270}{40} \le Z \le \frac{370-270}{40}\right)$
$=\mathrm{P}(0.5 \le Z \le 2.5)$
$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.5)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)$
$=0.49-0.19=0.30$

따라서 성적이 290점 이상 370점 이하인 학생은 전체의 30 %이다.

답 30 %

067-2 여학생들의 몸무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(52,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-52}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(X \ge 56)=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{56-52}{4}\right)$
$=\mathrm{P}(Z \ge 1)$
$=\mathrm{P}(Z \ge 0)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$
$=0.5-0.34=0.16$

따라서 구하는 여학생 수는

$400 \times 0.16=64$

답 64명

068-1 수학 시험 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(65,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-65}{10}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
상위 16 % 이내에 드는 학생의 최저 점수를 k라 하면

$\mathrm{P}(X \ge k)=0.16$
$\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{k-65}{10}\right)=0.16$
$\mathrm{P}(Z \ge 0)-\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{k-65}{10}\right)=0.16$
$0.5-\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{k-65}{10}\right)=0.16$
$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{k-65}{10}\right)=0.34$

이때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)=0.34$이므로

$\frac{k-65}{10}=1 \qquad \therefore k=75$

따라서 상위 16% 이내에 들려면 적어도 75점을 받아야 한다.

답 75점

068-2 음식점들의 평점을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(76,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-76}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
추천 음식점의 최저 평점을 k라 하면

$\mathrm{P}(X \ge k)=0.02$
$\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{k-76}{6}\right)=0.02$
$\mathrm{P}(Z \ge 0)-\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{k-76}{6}\right)=0.02$
$0.5-\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{k-76}{6}\right)=0.02$
$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{k-76}{6}\right)=0.48$

이때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)=0.48$이므로

$\frac{k-76}{6}=2 \qquad \therefore k=88$

따라서 추천 음식점의 최저 평점은 88점이다.

답 88점

069-1 불량품의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(10000,\ 0.02)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=10000 \times 0.02=200$
$\mathrm{V}(X)=10000 \times 0.02 \times 0.98=196$

이때 10000은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 14^2)$을 따른다.
따라서 $Z=\frac{X-200}{14}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X \ge 221)=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{221-200}{14}\right)$
$=\mathrm{P}(Z \ge 1.5)$
$=\mathrm{P}(Z \ge 0)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)$
$=0.5-0.4332=0.0668$

답 0.0668

069-2 이벤트에 당첨되는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(400,\ 0.1)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=400\times0.1=40$$
$$\mathrm{V}(X)=400\times0.1\times0.9=36$$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-40}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(37\le X\le52)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{37-40}{6}\le Z\le\frac{52-40}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le2)\\&=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=0.1915+0.4772\\&=0.6687\end{aligned}$$

답 0.6687

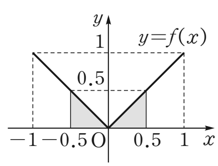
중단원 연습 문제

본책 186~190쪽

01 0.25	**02** ③	**03** $c<b<a$	**04** ②
05 97.8	**06** 0.0062	**07** ①	**08** ③
09 ③	**10** 0.043	**11** 74.32점	
12 0.9938	**13** ⑤	**14** 0.8351	
15 0.9772	**16** 0.16	**17** ③	
18 0.8351	**19** ②		

01 (전략) $|X|\le0.5$이면 $-0.5\le X\le0.5$이므로 $\mathrm{P}(-0.5\le X\le0.5)$를 구한다.

(풀이) $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $\mathrm{P}(|X|\le0.5)$, 즉 $\mathrm{P}(-0.5\le X\le0.5)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$\mathrm{P}(|X|\le0.5)=2\times\frac{1}{2}\times0.5\times0.5=0.25$$

답 0.25

02 (전략) 정규분포 곡선은 표준편차가 클수록 곡선의 가운데 부분의 높이는 낮아지고 모양은 옆으로 퍼진다.

(풀이) ㄱ. A, B 두 고등학교의 성적의 분포가 모두 정규분포를 이루고 있고 성적이 66점 이상인 부분에서 A고등학교의 그래프가 B고등학교의 그래프보다 위에 있으므로 성적이 66점 이상인 학생들은 A고등학교에 더 많다.

ㄴ. A고등학교와 B고등학교 학생들의 평균은 같으므로 두 학교의 학생들의 성적은 평균적으로 같다.

ㄷ. C고등학교의 성적의 표준편차보다 B고등학교의 성적의 표준편차가 더 작으므로 B고등학교 학생들의 성적이 더 고른 편이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

03 문제이해 • $Z=X-5$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. → 20% 배점

해결과정 • (i) $a=\mathrm{P}(5\le X\le6)$
$=\mathrm{P}(5-5\le Z\le6-5)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le1)$
$=0.3413$ → 20% 배점

(ii) $|X-5|\ge1$에서
$X-5\le-1$ 또는 $X-5\ge1$
$\therefore X\le4$ 또는 $X\ge6$
$\therefore b=\mathrm{P}(|X-5|\ge1)$
$=\mathrm{P}(X\le4)+\mathrm{P}(X\ge6)$
$=\mathrm{P}(Z\le4-5)+\mathrm{P}(Z\ge6-5)$
$=\mathrm{P}(Z\le-1)+\mathrm{P}(Z\ge1)$
$=2\mathrm{P}(Z\ge1)$
$=2\{\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)\}$
$=2(0.5-0.3413)$
$=0.3174$ → 30% 배점

(iii) $c=2\mathrm{P}(6\le X\le8)$
$=2\mathrm{P}(6-5\le Z\le8-5)$
$=2\mathrm{P}(1\le Z\le3)$
$=2\{\mathrm{P}(0\le Z\le3)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)\}$
$=2(0.4987-0.3413)$
$=0.3148$ → 20% 배점

답구하기 • 이상에서 세 수 a, b, c의 대소 관계는
$c<b<a$ → 10% 배점

답 $c<b<a$

04 (전략) 영어 시험 점수를 확률변수 X로 놓고, X를 표준화한다.

(풀이) 영어 시험 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ 12^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-70}{12}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X\geq 82)&=\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{82-70}{12}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 1)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)\\&=0.5-0.34=0.16\end{aligned}$$

따라서 구하는 학생 수는

$500\times 0.16=80$

답 ②

05 (전략) 확률변수 X를 표준화하여 주어진 조건을 만족시키는 k의 값을 구한다.

(풀이) $Z=\frac{X-100}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\geq k)=0.86$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{k-100}{2}\right)=0.86$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{k-100}{2}\leq Z\leq 0\right)+\mathrm{P}(Z\geq 0)=0.86$$

$$\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{100-k}{2}\right)+0.5=0.86$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{100-k}{2}\right)=0.36$$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.1)=0.36$이므로

$$\frac{100-k}{2}=1.1 \qquad \therefore k=97.8$$

답 97.8

Remark

$\mathrm{P}(Z\geq k)>0.5$이면 $k<0$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Z\geq k)&=\mathrm{P}(k\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(Z\geq 0)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z\leq -k)+0.5\end{aligned}$$

06 문제이해 • 성공한 자유투의 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(150,\ 0.6)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=150\times 0.6=90$

$\mathrm{V}(X)=150\times 0.6\times 0.4=36$ ➔ 30% 배점

해결과정 • 이때 150은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(90,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-90}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. ➔ 30% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq 105)&=\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{105-90}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 2.5)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2.5)\\&=0.5-0.4938\\&=0.0062\end{aligned}$$

➔ 40% 배점

답 0.0062

07 (전략) 확률밀도함수의 그래프와 x축 사이의 넓이는 1임을 이용하여 b의 값을 구한다.

(풀이) $0\leq x\leq 10$에서 확률밀도함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot b=1 \qquad \therefore b=\frac{1}{5}$$

이때 $\mathrm{P}(0\leq X\leq a)=\frac{2}{5}$이므로

$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot \frac{1}{5}=\frac{2}{5} \qquad \therefore a=4$$

$$\therefore a+b=\frac{21}{5}$$

답 ①

08 (전략) 확률변수 X를 표준화하여 $\mathrm{P}(X\leq 15)$를 t에 대한 식으로 나타낸다.

(풀이) 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ t^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-20}{t}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore H(t)&=\mathrm{P}(X\leq 15)\\&=\mathrm{P}\left(Z\leq \frac{15-20}{t}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\leq -\frac{5}{t}\right)\end{aligned}$$

ㄱ. $H(2.5)=\mathrm{P}\left(Z\leq -\frac{5}{2.5}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\leq -2)=\mathrm{P}(Z\geq 2)$

ㄴ. $H(2)=\mathrm{P}\left(Z\leq -\frac{5}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\leq -2.5)=\mathrm{P}(Z\geq 2.5)$

$H(2.5)=\mathrm{P}(Z\geq 2)$

$\therefore H(2)<H(2.5)$

ㄷ. $H(5)=\mathrm{P}(Z\leq -1)=\mathrm{P}(Z\geq 1)$
$=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)$
$=0.5-0.3413=0.1587$

한편 ㄱ에서

$$H(2.5)=\mathrm{P}(Z\geq 2)$$
$$=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$$
$$=0.5-0.4772=0.0228$$

ㄴ에서

$$H(2)<H(2.5)=0.0228$$

따라서 $5H(2)<5\times 0.0228=0.114$이므로

$$H(5)>5H(2)$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

09 전략 $G=0.8$일 때, m을 σ에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 공장에서 생산되는 병의 내압강도를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

이때 $G=0.8$이면 $0.8=\dfrac{m-40}{3\sigma}$이므로

$$m-40=2.4\sigma$$

따라서 임의로 추출한 한 개의 병이 불량품일 확률은

$$\mathrm{P}(X<40)=\mathrm{P}\left(Z<\frac{40-m}{\sigma}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z<-\frac{2.4\sigma}{\sigma}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z<-2.4)$$
$$=\mathrm{P}(Z>2.4)$$
$$=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2.4)$$
$$=0.5-0.4918=0.0082$$

답 ③

10 해결과정 • $Z_X=\dfrac{X-10}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X>k)=0.05$에서

$$\mathrm{P}\left(Z_X>\frac{k-10}{4}\right)=0.05$$
$$\mathrm{P}(Z_X>0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z_X\leq\frac{k-10}{4}\right)=0.05$$
$$0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z_X\leq\frac{k-10}{4}\right)=0.05$$
$$\therefore \mathrm{P}\left(0\leq Z_X\leq\frac{k-10}{4}\right)=0.45$$

➜ 40% 배점

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z_X\leq 1.64)=0.45$이므로

$$\frac{k-10}{4}=1.64$$
$$\therefore k=16.56$$

➜ 20% 배점

답구하기 • 한편 $Z_Y=\dfrac{Y-20}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(Y<k)=\mathrm{P}(Y<16.56)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z_Y<\frac{16.56-20}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z_Y<-1.72)$$
$$=\mathrm{P}(Z_Y>1.72)$$
$$=\mathrm{P}(Z_Y\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z_Y\leq 1.72)$$
$$=0.5-0.457=0.043$$

➜ 40% 배점

답 0.043

11 문제이해 • 학생의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(64,\ 8^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-64}{8}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

➜ 30% 배점

해결과정 • 상위 $10\,\%$ 이내에 드는 학생의 최저 점수를 k라 하면

$$\mathrm{P}(X\geq k)=0.1$$
$$\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{k-64}{8}\right)=0.1$$
$$\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{k-64}{8}\right)=0.1$$
$$0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{k-64}{8}\right)=0.1$$
$$\therefore \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{k-64}{8}\right)=0.4$$

➜ 40% 배점

답구하기 • 이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.29)=0.4$이므로

$$\frac{k-64}{8}=1.29$$
$$\therefore k=74.32$$

따라서 A학점을 받은 학생의 최저 점수는 74.32점이다.

➜ 30% 배점

답 74.32점

12 전략 실제 탑승객의 수를 확률변수 X라 하면 X는 근사적으로 정규분포를 따름을 이용한다.

풀이 400명 중 실제 탑승객의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(400,\ 0.8)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=400\times 0.8=320$$
$$\mathrm{V}(X)=400\times 0.8\times 0.2=64$$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(320,\ 8^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-320}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\le 340)&=P\left(Z\le \frac{340-320}{8}\right)\\&=P(Z\le 2.5)\\&=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 2.5)\\&=0.5+0.4938=0.9938\end{aligned}$$

답 0.9938

13 전략 $P(Z\le a)=P(Z\ge -a)$임을 이용한다.

풀이 제품 A의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(m,\ 1)$을 따르므로 $Z_X=X-m$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
따라서 제품 A의 무게가 k 이상일 확률은

$$P(X\ge k)=P(Z_X\ge k-m)$$

또 제품 B의 무게를 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $N(2m,\ 2^2)$을 따르므로 $Z_Y=\dfrac{Y-2m}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
따라서 제품 B의 무게가 k 이하일 확률은

$$\begin{aligned}P(Y\le k)&=P\left(Z_Y\le \frac{k-2m}{2}\right)\\&=P\left(Z_Y\ge -\frac{k-2m}{2}\right)\end{aligned}$$

이때 $P(X\ge k)=P(Y\le k)$이므로

$$k-m=-\frac{k-2m}{2}$$

$$2k-2m=-k+2m,\qquad 3k=4m$$

$$\therefore \frac{k}{m}=\frac{4}{3}$$

답 ⑤

14 전략 주어진 식이 이항분포를 따르는 확률변수 X의 확률의 합임을 이용한다.

풀이 ${}_{490}C_x\left(\frac{5}{7}\right)^x\left(\frac{2}{7}\right)^{490-x}$은 한 번의 시행에서 일어날 확률이 $\frac{5}{7}$인 어떤 사건이 490번의 독립시행에서 x번 일어날 확률이다.
따라서 이 사건이 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(490,\ \frac{5}{7}\right)$를 따르므로

$$E(X)=490\cdot\frac{5}{7}=350$$

$$V(X)=490\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{7}=100$$

이때 490은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(350,\ 10^2)$을 따른다.
따라서 $Z=\dfrac{X-350}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&{}_{490}C_{340}\left(\frac{5}{7}\right)^{340}\left(\frac{2}{7}\right)^{150}+{}_{490}C_{341}\left(\frac{5}{7}\right)^{341}\left(\frac{2}{7}\right)^{149}\\&\quad+{}_{490}C_{342}\left(\frac{5}{7}\right)^{342}\left(\frac{2}{7}\right)^{148}+\cdots+{}_{490}C_{375}\left(\frac{5}{7}\right)^{375}\left(\frac{2}{7}\right)^{115}\\&=P(X=340)+P(X=341)+P(X=342)\\&\quad+\cdots+P(X=375)\\&=P(340\le X\le 375)\\&=P\left(\frac{340-350}{10}\le Z\le \frac{375-350}{10}\right)\\&=P(-1\le Z\le 2.5)\\&=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2.5)\\&=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 2.5)\\&=0.3413+0.4938=0.8351\end{aligned}$$

답 0.8351

15 문제이해 • 주사위를 450번 던져서 6의 약수의 눈이 나온 횟수를 확률변수 X라 하면 얻을 수 있는 점수는

$$2X+4(450-X)=1800-2X$$ ➔ 20% 배점

해결과정 • 확률변수 X는 이항분포 $B\left(450,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$$E(X)=450\cdot\frac{2}{3}=300$$

$$V(X)=450\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=100$$

이때 450은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(300, 10^2)$을 따른다. ➔ 40% 배점

답구하기 • 따라서 $Z=\dfrac{X-300}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 얻은 점수가 1160점 이상일 확률은

$$\begin{aligned}&P(1800-2X\ge 1160)\\&=P(X\le 320)\\&=P\left(Z\le \frac{320-300}{10}\right)\\&=P(Z\le 2)\\&=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)\\&=0.5+0.4772=0.9772\end{aligned}$$ ➔ 40% 배점

답 0.9772

08 정규분포

16 문제이해 • 시험 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(56,\ 12^2)$을 따르므로 $Z_X=\dfrac{X-56}{12}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. ➜ 20% 배점

해결과정 • $\therefore \mathrm{P}(X\ge 80)$

$$=\mathrm{P}\left(Z_X\ge \frac{80-56}{12}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z_X\ge 2)$$
$$=\mathrm{P}(Z_X\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z_X\le 2)$$
$$=0.5-0.48=0.02$$ ➜ 30% 배점

따라서 10000명의 응시자 중 합격자의 수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(10000,\ 0.02)$를 따르므로

$$\mathrm{E}(Y)=10000\times 0.02=200$$
$$\mathrm{V}(Y)=10000\times 0.02\times 0.98=196$$

이때 10000은 충분히 큰 수이므로 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 14^2)$을 따른다. ➜ 20% 배점

답구하기 • 따라서 $Z_Y=\dfrac{Y-200}{14}$으로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(Y\ge 214)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge \frac{214-200}{14}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z_Y\ge 1)$$
$$=\mathrm{P}(Z_Y\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z_Y\le 1)$$
$$=0.5-0.34=0.16$$ ➜ 30% 배점

답 0.16

17 전략 확률변수 X를 표준화하여 $f(x)$를 Z에 대한 확률로 나타낸다.

풀이 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-12}{5}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\therefore f(x)=\mathrm{P}(x-4\le X\le x)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{x-16}{5}\le Z\le \frac{x-12}{5}\right)$$

ㄱ. $f(21)=\mathrm{P}\left(\dfrac{21-16}{5}\le Z\le \dfrac{21-12}{5}\right)$

$$=\mathrm{P}(1\le Z\le 1.8)$$

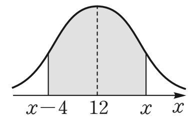
$f(7)=\mathrm{P}\left(\dfrac{7-16}{5}\le Z\le \dfrac{7-12}{5}\right)$

$$=\mathrm{P}(-1.8\le Z\le -1)$$

$\mathrm{P}(1\le Z\le 1.8)=\mathrm{P}(-1.8\le Z\le -1)$이므로

$$f(21)=f(7)$$

ㄴ. 오른쪽 그림의 정규분포 곡선에서 $f(x)$는 색칠한 부분의 넓이이다.



따라서 $\dfrac{(x-4)+x}{2}=12$

일 때 $f(x)$는 최댓값을 가지므로

$$2x=28$$
$$\therefore x=14$$

즉 $f(x)$는 $x=14$일 때 최댓값을 갖는다.

ㄷ. [반례] $x=0$일 때,

$$f(0)=\mathrm{P}\left(\frac{0-16}{5}\le Z\le \frac{0-12}{5}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-3.2\le Z\le -2.4)$$
$$f(14-0)=f(14)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{14-16}{5}\le Z\le \frac{14-12}{5}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-0.4\le Z\le 0.4)$$
$$\therefore f(0)\ne f(14-0)$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

18 전략 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 모든 실수 x에 대하여

$$f(20+x)=f(20-x)$$

이므로 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=20$에 대하여 대칭이다.

$$\therefore m=20$$

따라서 $Z_X=\dfrac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(m\le X\le m+2)=\mathrm{P}\left(0\le Z_X\le \frac{2}{\sigma}\right)$$

이때 $\mathrm{P}(m\le X\le m+2)=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$이므로

$$\frac{2}{\sigma}=1 \qquad \therefore \sigma=2$$

따라서 X는 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 2^2)$을 따른다.

한편 $g(x)=f(x-20)$에서 $g(x)$의 그래프는 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 20만큼 평행이동한 것이므로 $g(x)$의 그래프는 직선 $x=40$에 대하여 대칭이고, $f(x)$의 그래프와 모양이 같다.

즉 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 2^2)$을 따른다.

따라서 $Z_Y=\dfrac{Y-40}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(35\le Y\le 42)\\
&=\mathrm{P}\left(\frac{35-40}{2}\le Z_Y\le \frac{42-40}{2}\right)\\
&=\mathrm{P}(-2.5\le Z_Y\le 1)\\
&=\mathrm{P}(-2.5\le Z_Y\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z_Y\le 1)\\
&=\mathrm{P}(0\le Z_Y\le 2.5)+\mathrm{P}(0\le Z_Y\le 1)\\
&=0.4938+0.3413\\
&=0.8351
\end{aligned}
$$

답 0.8351

19 전략 집에서 시장까지의 거리가 2000 m 미만인 사건을 A, 자가용을 이용하여 시장에 오는 사건을 B라 하고 $\mathrm{P}(A|B)$를 구한다.

풀이 고객의 집에서 시장까지의 거리를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(1740,\ 500^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-1740}{500}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(X\ge 2000)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{2000-1740}{500}\right)\\
&=\mathrm{P}(Z\ge 0.52)\\
&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.52)\\
&=0.5-0.2=0.3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(X<2000)&=1-\mathrm{P}(X\ge 2000)\\
&=1-0.3=0.7
\end{aligned}
$$

집에서 시장까지의 거리가 2000 m 미만인 사건을 A, 자가용을 이용하여 시장에 오는 사건을 B라 하면

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\
&=0.7\times 0.05=0.035
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\
&=0.3\times 0.15=0.045
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ \mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\
&=0.035+0.045=0.08
\end{aligned}
$$

따라서 구하는 확률은

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(A|B)&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}\\
&=\frac{0.035}{0.08}=\frac{7}{16}
\end{aligned}
$$

답 ②

Remark 조건부확률

사건 B가 일어났을 때 사건 A가 일어날 조건부확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}\quad (\text{단, } \mathrm{P}(B)\neq 0)$$

Ⅲ. 통계

09 통계적 추정

유제

본책 198~213쪽

070-1 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$$
\begin{aligned}
\therefore\ \mathrm{E}(X)&=1\cdot\frac{4}{10}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{2}{10}+4\cdot\frac{1}{10}\\
&=2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(X)&=1^2\cdot\frac{4}{10}+2^2\cdot\frac{3}{10}+3^2\cdot\frac{2}{10}+4^2\cdot\frac{1}{10}-2^2\\
&=1
\end{aligned}
$$

이때 표본의 크기가 4이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=2,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{4}$$

답 $\mathrm{E}(\overline{X})=2,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{4}$

070-2 모평균이 10, 모표준편차가 8, 표본의 크기가 100이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=10,\quad \sigma(\overline{X})=\frac{8}{\sqrt{100}}=\frac{4}{5}$$

답 $\mathrm{E}(\overline{X})=10,\ \sigma(\overline{X})=\frac{4}{5}$

071-1 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 10^2)$을 따르고, 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(40,\ \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(40,\ 2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-40}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\overline{X}\ge 45)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{45-40}{2}\right)\\
&=\mathrm{P}(Z\ge 2.5)\\
&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)\\
&=0.5-0.4938\\
&=0.0062
\end{aligned}
$$

답 0.0062

071-2 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 12^2)$을 따르고, 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포

$N\left(150,\ \frac{12^2}{9}\right)$, 즉 $N(150,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-150}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

이때 빵 한 상자가 불량품이려면 $9\overline{X}\le 1296$, 즉 $\overline{X}\le 144$이어야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\le 144)&=P\left(Z\le \frac{144-150}{4}\right)\\&=P(Z\le -1.5)\\&=P(Z\ge 1.5)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

답 0.0668

072-1 표본의 크기는 100, 표본평균은 3.5 kg, 모표준편차는 0.5 kg이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$3.5-1.96\frac{0.5}{\sqrt{100}}\le m\le 3.5+1.96\frac{0.5}{\sqrt{100}}$$

$$3.5-0.098\le m\le 3.5+0.098$$

$$\therefore\ 3.402\le m\le 3.598$$

답 $3.402\le m\le 3.598$

072-2 표본평균은 45분이고, 표본의 크기 900이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 12분을 사용할 수 있다.

따라서 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$45-2.58\frac{12}{\sqrt{900}}\le m\le 45+2.58\frac{12}{\sqrt{900}}$$

$$45-1.032\le m\le 45+1.032$$

$$\therefore\ 43.968\le m\le 46.032$$

답 $43.968\le m\le 46.032$

073-1 표본의 크기를 n이라 하면 신뢰도 99 %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이가 0.6 g 이하가 되어야 하므로

$$2\times 2.58\frac{5}{\sqrt{n}}\le 0.6,\qquad \sqrt{n}\ge 43$$

$$\therefore\ n\ge 1849$$

따라서 적어도 1849개의 제품을 조사해야 한다.

답 1849개

073-2 모표준편차를 σ, 표본의 크기를 n, $P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모평균의 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$n=4$일 때 신뢰구간의 길이가 2이므로

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{4}}=2\qquad \therefore\ k\sigma=2$$

이때 신뢰구간의 길이가 0.5가 되도록 하려면

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=0.5,\qquad \frac{2\cdot 2}{\sqrt{n}}=0.5$$

$$\sqrt{n}=8\qquad \therefore\ n=64$$

따라서 표본의 크기가 64이어야 한다.

답 64

074-1 400명 중에서 복지 정책을 지지하는 주민의 비율을 표본비율 $\hat{p}$이라 하면

$$E(\hat{p})=0.8,\ V(\hat{p})=\frac{0.8\times 0.2}{400}=0.0004$$

이때 표본의 크기 400이 충분히 크므로 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.8,\ 0.02^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\hat{p}-0.8}{0.02}$로 놓으면 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(\hat{p}\ge 0.83)&=P\left(Z\ge \frac{0.83-0.8}{0.02}\right)\\&=P(Z\ge 1.5)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

답 0.0668

074-2 100개 중에서 불량품의 비율을 표본비율 $\hat{p}$이라 하면

$$E(\hat{p})=0.1,\ V(\hat{p})=\frac{0.1\times 0.9}{100}=0.0009$$

이때 표본의 크기 100이 충분히 크므로 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.1,\ 0.03^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\hat{p}-0.1}{0.03}$로 놓으면 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$P\left(\frac{7}{100}\le\hat{p}\le\frac{13}{100}\right)$$
$$=P(0.07\le\hat{p}\le0.13)$$
$$=P\left(\frac{0.07-0.1}{0.03}\le Z\le\frac{0.13-0.1}{0.03}\right)$$
$$=P(-1\le Z\le1)=2P(0\le Z\le1)$$
$$=2\times0.3413=0.6826$$

답 0.6826

다른 풀이 불량품의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B(100,\ 0.1)$을 따르므로

$E(X)=10,\ V(X)=9,\ \sigma(X)=3$

이때 n이 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(10,\ 3^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-10}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$P(7\le X\le13)=P\left(\frac{7-10}{3}\le Z\le\frac{13-10}{3}\right)$$
$$=P(-1\le Z\le1)$$
$$=0.6826$$

075-1 표본비율은 $\frac{256}{400}=0.64$이고, 표본의 크기 400이 충분히 크므로 모비율 p의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$0.64-2.58\sqrt{\frac{0.64\times0.36}{400}}\le p$$
$$\le0.64+2.58\sqrt{\frac{0.64\times0.36}{400}}$$
$$0.64-0.06192\le p\le0.64+0.06192$$
$$\therefore\ 0.57808\le p\le0.70192$$

답 $0.57808\le p\le0.70192$

중단원 연습 문제

본책 214~218쪽

01 11	**02** ②	**03** $54.02\le m\le55.98$		
04 385	**05** ②	**06** ②	**07** $\frac{152}{27}$	**08** ②
09 61	**10** 400	**11** 4	**12** ③	**13** ④
14 ②	**15** 96 %	**16** 256	**17** 9604	
18 $-\frac{1}{6}$	**19** ①	**20** 147		

01 해결과정 • 주어진 X의 확률분포에서

$$E(X)=(-1)\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$$
$$V(X)=(-1)^2\cdot\frac{1}{2}+0^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)^2$$
$$=\frac{11}{16}$$

➔ 60% 배점

답구하기 • 이때 $V(\overline{X})=\frac{1}{16}$이므로

$$\frac{11}{16n}=\frac{1}{16}\qquad\therefore\ n=11$$

➔ 40% 배점

답 11

02 (전략) 모집단이 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르면 크기가 n인 표본의 표본평균은 정규분포 $N\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따름을 이용한다.

풀이 모집단이 정규분포 $N(20,\ 5^2)$을 따르고, 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(20,\ \frac{5^2}{16}\right)$, 즉 $N\left(20,\ \left(\frac{5}{4}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-20}{\frac{5}{4}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$P(19\le\overline{X}\le22)=P\left(\frac{19-20}{\frac{5}{4}}\le Z\le\frac{22-20}{\frac{5}{4}}\right)$$
$$=P(-0.8\le Z\le1.6)$$
$$=P(0\le Z\le0.8)+P(0\le Z\le1.6)$$
$$=0.2881+0.4452$$
$$=0.7333$$

답 ②

03 (전략) 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은 $\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$임을 이용한다.

풀이 표본평균은 55 kg이고, 표본의 크기 400이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 10 kg을 사용할 수 있다.

따라서 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$55-1.96\frac{10}{\sqrt{400}}\le m\le55+1.96\frac{10}{\sqrt{400}}$$
$$55-0.98\le m\le55+0.98$$
$$\therefore\ 54.02\le m\le55.98$$

답 $54.02\le m\le55.98$

04 (전략) 모평균의 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는 $2\times1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$임을 이용한다.

(풀이) 표본의 크기를 n이라 하면 신뢰도 95 %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이가 0.8 이하가 되어야 하므로

$$2\times1.96\frac{4}{\sqrt{n}}\le0.8,\qquad \sqrt{n}\ge19.6$$

$$\therefore n\ge384.16$$

따라서 표본의 크기의 최솟값은 385이다.

답 385

05 (전략) 표본비율 $\hat{p}$의 평균과 표준편차를 구해 표준화한다.

(풀이) 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면

$$E(\hat{p})=0.5,\ V(\hat{p})=\frac{0.5\times0.5}{100}=0.0025$$

이때 표본의 크기 100이 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.5,\ 0.05^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\hat{p}-0.5}{0.05}$로 놓으면 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&P\left(\frac{45}{100}\le\hat{p}\le\frac{60}{100}\right)\\&=P(0.45\le\hat{p}\le0.6)\\&=P\left(\frac{0.45-0.5}{0.05}\le Z\le\frac{0.6-0.5}{0.05}\right)\\&=P(-1\le Z\le2)\\&=P(0\le Z\le1)+P(0\le Z\le2)\\&=0.3413+0.4772\\&=0.8185\end{aligned}$$

답 ②

(다른 풀이) 거리 응원에 참여한 학생 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B(100,\ 0.5)$를 따르므로

$$E(X)=50,\ V(X)=25,\ \sigma(X)=5$$

이때 표본의 크기 100이 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(50,\ 5^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-50}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(45\le X\le60)&=P\left(\frac{45-50}{5}\le Z\le\frac{60-50}{5}\right)\\&=P(-1\le Z\le2)\\&=0.8185\end{aligned}$$

06 (전략) 모비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은 $\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le\hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$임을 이용한다.

(풀이) 표본비율은 $\frac{90}{100}=0.9$이고, 표본의 크기 100이 충분히 크므로 모비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.9-1.96\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{100}}\le p\le0.9+1.96\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{100}}$$

$$\therefore c=1.96\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{100}}=0.0588$$

답 ②

07 문제이해 • 주머니 안의 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 할 때, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

➔ 20% 배점

해결과정 • $\therefore E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{2}{6}+3\cdot\frac{3}{6}=\frac{7}{3}$

$$V(X)=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{2}{6}+3^2\cdot\frac{3}{6}-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

➔ 30% 배점

이때 표본의 크기가 3이므로

$$E(\overline{X})=\frac{7}{3},\ V(\overline{X})=\frac{\frac{5}{9}}{3}=\frac{5}{27}$$

➔ 20% 배점

답구하기 • 한편 $V(\overline{X})=E(\overline{X}^2)-\{E(\overline{X})\}^2$이므로

$$\begin{aligned}E(\overline{X}^2)&=V(\overline{X})+\{E(\overline{X})\}^2\\&=\frac{5}{27}+\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{152}{27}\end{aligned}$$

➔ 30% 배점

답 $\frac{152}{27}$

08 (전략) 표본평균이 정규분포를 따르므로 표준화하여 확률을 구한다.

(풀이) 모집단이 정규분포 $N(60,\ 10^2)$을 따르고, 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(60,\ \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $N(60,\ 2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-60}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

이때 25회 이용 시간의 총합이 1450분 이상이려면 $25\overline{X}\ge 1450$, 즉 $\overline{X}\ge 58$이어야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\ge 58)&=P\left(Z\ge \frac{58-60}{2}\right)\\&=P(Z\ge -1)=P(Z\le 1)\\&=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 1)\\&=0.5+0.3413=0.8413\end{aligned}$$

답 ②

09 문제이해 • 모집단이 정규분포 $N(60.5,\ 5^2)$을 따르고, 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(60.5,\ \frac{5^2}{100}\right)$, 즉 $N(60.5,\ 0.5^2)$을 따른다.

➔ 20% 배점

해결과정 • 따라서 $Z=\frac{\overline{X}-60.5}{0.5}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\ge a)=0.1587$에서

$$P\left(Z\ge \frac{a-60.5}{0.5}\right)=0.1587$$

$$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le \frac{a-60.5}{0.5}\right)=0.1587$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le \frac{a-60.5}{0.5}\right)=0.5-0.1587=0.3413$$

➔ 50% 배점

답구하기 • 이때 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{a-60.5}{0.5}=1 \qquad \therefore a=61$ ➔ 30% 배점

답 61

10 전략 표본평균 $\overline{X}$가 정규분포를 따르므로 표준화한다.

풀이 모집단이 정규분포 $N(m,\ 32^2)$을 따르고, 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \left(\frac{32}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{32}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(m-4\le\overline{X}\le m+4)=0.9876$에서

$$P\left(\frac{-4}{\frac{32}{\sqrt{n}}}\le Z\le \frac{4}{\frac{32}{\sqrt{n}}}\right)=0.9876$$

$$P\left(-\frac{\sqrt{n}}{8}\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{8}\right)=0.9876$$

$$2P\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{8}\right)=0.9876$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{8}\right)=0.4938$$

이때 $P(0\le Z\le 2.5)=0.4938$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{8}=2.5, \qquad \sqrt{n}=20$

$\therefore n=400$

답 400

11 문제이해 • 모집단이 정규분포 $N(64,\ (\sqrt{10})^2)$을 따르고, 표본의 크기가 10이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(64,\ \frac{(\sqrt{10})^2}{10}\right)$, 즉 $N(64,\ 1)$을 따른다. ➔ 20% 배점

해결과정 • 따라서 $Z=\overline{X}-64$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

이때 한 꾸러미가 불량품이려면 $10\overline{X}<620$, 즉 $\overline{X}<62$이어야 하므로 한 꾸러미가 불량품일 확률은

$$\begin{aligned}P(\overline{X}<62)&=P(Z<62-64)\\&=P(Z<-2)=P(Z>2)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.48=0.02\end{aligned}$$

➔ 50% 배점

답구하기 • A, B 두 사람이 각각 독립적으로 달걀 한 꾸러미를 선택하므로

$p=0.02\times 0.02=0.0004$

$\therefore 10000p=4$ ➔ 30% 배점

답 4

Remark 독립사건의 확률

사건 A와 사건 B가 독립일 때, A와 B가 동시에 일어날 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

12 전략 모평균 m의 신뢰도 95%의 신뢰구간은 $\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$임을 이용한다.

풀이 표본의 크기는 16, 표본평균은 12.34, 모표준편차는 σ이므로 모평균 m의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$12.34-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le 12.34+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

09 통계적 추정

이때 신뢰구간이 $11.36 \le m \le a$이므로

$$12.34-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{16}}=11.36$$

$$0.49\sigma=0.98 \qquad \therefore \sigma=2$$

$\sigma=2$이므로

$$a=12.34+1.96\frac{2}{\sqrt{16}}=13.32$$

$$\therefore a+\sigma=13.32+2=15.32$$

답 ③

13 전략 신뢰도 99 %로 추정한 모평균 m과 표본평균 $\overline{X}$의 차는 $|m-\overline{X}| \le 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$임을 이용한다.

풀이 표본평균이 100시간이고, 표본의 크기가 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 5시간을 사용할 수 있다.

따라서 표본의 크기를 n이라 하면 신뢰도 99 %로 추정한 모평균 m의 신뢰구간은

$$100-2.58\frac{5}{\sqrt{n}} \le m \le 100+2.58\frac{5}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m-100| \le \frac{12.9}{\sqrt{n}}$$

이때 모평균과 표본평균의 차 $|m-100|$이 30분, 즉 0.5시간 이하이려면

$$\frac{12.9}{\sqrt{n}} \le 0.5, \qquad \sqrt{n} \ge 25.8$$

$$\therefore n \ge 665.64$$

따라서 표본의 크기를 666 이상으로 해야 한다.

답 ④

14 전략 $P(|Z| \le k)=\frac{\alpha}{100}$일 때, 모평균 m의 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$임을 이용한다.

풀이 모표준편차가 10이므로 표본의 크기를 n, $P(|Z| \le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모평균 m의 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는 $2k\frac{10}{\sqrt{n}}$이다.

ㄱ. [반례] $\alpha=95$, $n=100$일 때, 신뢰구간의 길이는

$$2\times1.96\frac{10}{\sqrt{100}}=3.92$$

$\alpha=99$, $n=400$일 때, 신뢰구간의 길이는

$$2\times2.58\frac{10}{\sqrt{400}}=2.58$$

그런데 $3.92>2.58$이므로 신뢰구간의 길이가 항상 커진다고 할 수 없다.

ㄴ. 신뢰도를 낮추면 k의 값이 작아지고, 표본의 크기를 크게 하면 $\frac{1}{\sqrt{n}}$의 값이 작아지므로 $2k\frac{10}{\sqrt{n}}$의 값은 항상 작아진다.

즉 신뢰구간의 길이는 항상 작아진다.

ㄷ. 표본의 크기가 a일 때 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{10}{\sqrt{a}}=\frac{20k}{\sqrt{a}}$$

표본의 크기가 $4a$일 때 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{10}{\sqrt{4a}}=2k\cdot\frac{10}{2\sqrt{a}}=\frac{10k}{\sqrt{a}}$$

따라서 표본의 크기가 4배가 되면 신뢰구간의 길이는 $\frac{1}{2}$배가 된다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

15 전략 먼저 주어진 표준정규분포표를 이용하여 신뢰도가 70 %일 때의 신뢰구간의 길이 l을 구한다.

풀이 $P(0 \le Z \le 1.04)=0.35$에서

$$P(-1.04 \le Z \le 1.04)=0.70$$

따라서 신뢰도가 70 %일 때 신뢰구간의 길이 l은

$$l=2\times1.04\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2.08\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore 2l=2\times2.08\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이때 $P(0 \le Z \le 2.08)=0.48$이므로

$$\begin{aligned}P(-2.08 \le Z \le 2.08)&=2P(0 \le Z \le 2.08)\\&=2\times0.48=0.96\end{aligned}$$

따라서 길이가 $2l$인 신뢰구간의 신뢰도는 96 %이다.

답 96 %

16 전략 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은 $\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \le p \le \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$임을 이용한다.

풀이 표본비율이 0.8, 표본의 크기가 n이므로 모비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.8-1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}} \le p \le 0.8+1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}$$

따라서 $a=0.8-1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}$,

$b=0.8+1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}$이므로 $b-a=0.098$에서

$$2\times1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}=0.098$$

$$\sqrt{n}=\frac{2\times1.96\times0.4}{0.098}=16$$

$\therefore\ n=256$

답 256

17 전략 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는 $2\times1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$임을 이용한다.

풀이 표본의 크기를 n, 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠이 최대가 되려면 $\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$의 값이 최대가 되어야 한다. 이때 $\hat{p}$, $1-\hat{p}$은 모두 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{\hat{p}+(1-\hat{p})}{2}\ge\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$$

$$\therefore\ \hat{p}(1-\hat{p})\le\frac{1}{4}\left(\text{단, 등호는 } \hat{p}=\frac{1}{2}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $\hat{p}(1-\hat{p})$의 최댓값이 $\frac{1}{4}$이므로 신뢰구간의 길이의 최댓값은 ㉠에서

$$2\times1.96\sqrt{\frac{1}{4n}}=\frac{1.96}{\sqrt{n}}$$

이때 신뢰구간의 길이의 최댓값이 0.02 이하이려면

$$\frac{1.96}{\sqrt{n}}\le0.02, \qquad \sqrt{n}\ge98$$

$\therefore\ n\ge9604$

따라서 표본의 크기를 9604 이상으로 해야 한다.

답 9604

18 문제이해 • 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{3}+a+b=1$$

$$\therefore\ b=\frac{2}{3}-a \quad \cdots\cdots ㉠$$ ➔ 20% 배점

해결과정 • $\overline{X}=-1$인 경우는 표본으로 -2와 0 또는 0과 -2를 추출하는 경우이므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}=-1)$$
$$=\mathrm{P}(X=-2)\cdot\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=0)\cdot\mathrm{P}(X=-2)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot a+a\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}a$$

$\overline{X}=1$인 경우는 표본으로 0과 2 또는 2와 0을 추출하는 경우이므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}=1)$$
$$=\mathrm{P}(X=0)\cdot\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=2)\cdot\mathrm{P}(X=0)$$
$$=ab+ba=2ab$$

따라서 $\mathrm{P}(\overline{X}=-1)+\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\frac{3}{8}$에서

$$\frac{2}{3}a+2ab=\frac{3}{8} \quad \cdots\cdots ㉡$$ ➔ 40% 배점

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\frac{2}{3}a+2a\left(\frac{2}{3}-a\right)=\frac{3}{8}, \qquad 2a-2a^2=\frac{3}{8}$$

$$16a^2-16a+3=0, \qquad (4a-1)(4a-3)=0$$

$$\therefore\ a=\frac{1}{4}\ \text{또는}\ a=\frac{3}{4}$$ ➔ 20% 배점

답구하기 • 이때 $a\ge0$이고 $b=\frac{2}{3}-a\ge0$이므로

$$0\le a\le\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ a=\frac{1}{4},\ b=\frac{5}{12}$$

$$\therefore\ a-b=-\frac{1}{6}$$ ➔ 20% 배점

답 $-\frac{1}{6}$

19 전략 표본평균이 정규분포를 따르므로 표준화한다.

풀이 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(m\le X\le a)=0.3413$에서

$$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-m}{4}\right)=0.3413$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1)=0.3413$이므로

$$\frac{a-m}{4}=1 \qquad \therefore\ a-m=4$$

또 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르고, 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{4^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(m,\ 1)$을 따른다.

따라서 $\overline{Z}=\overline{X}-m$으로 놓으면 확률변수 $\overline{Z}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(\overline{X}\ge a-2)=\mathrm{P}(\overline{Z}\ge a-m-2)$$
$$=\mathrm{P}(\overline{Z}\ge2)$$
$$=\mathrm{P}(\overline{Z}\ge0)-\mathrm{P}(0\le\overline{Z}\le2)$$
$$=0.5-0.4772$$
$$=0.0228$$

답 ①

20 해결과정 • $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 표본비율이 0.2이고, 표본의 크기가 64일 때, 신뢰도 $\alpha\%$로 추정한 모비율 p의 신뢰구간의 길이는

$$2k\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{64}}=\frac{k}{10}$$

$$\therefore b-a=\frac{k}{10} \quad \cdots\cdots ㉠$$

➔ 30% 배점

표본비율이 0.25이고, 표본의 크기가 n일 때, 신뢰도 $\alpha\%$로 추정한 모비율 p의 신뢰구간의 길이는

$$2k\sqrt{\frac{0.25\times0.75}{n}}=2k\sqrt{\frac{1}{n}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}$$
$$=2k\times\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{n}}$$
$$=\frac{k}{2}\sqrt{\frac{3}{n}}$$

$$\therefore d-c=\frac{k}{2}\sqrt{\frac{3}{n}} \quad \cdots\cdots ㉡$$

➔ 30% 배점

답구하기 • $b-a=\frac{7}{5}(d-c)$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$$\frac{k}{10}=\frac{7}{5}\cdot\frac{k}{2}\sqrt{\frac{3}{n}}$$

$$\sqrt{\frac{3}{n}}=\frac{1}{7}, \qquad \sqrt{n}=7\sqrt{3}$$

$$\therefore n=147$$

➔ 40% 배점

답 147

MEMO

MEMO