최상위의 품격

일품 미적분

정답 및 풀이

빠른 정답 찾기

Ⅰ. 수열의 극한

Ⅰ-1. 수열의 극한

본책 8~10쪽

01 ③ 02 ⑤ 03 ④
04 5 05 3 06 ② 07 2 08 6
09 ④ 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ④
14 ① 15 $\frac{1}{3}$ 16 ③ 17 ① 18 0

본책 11~15쪽

01 ③ 02 44 03 ⑤
04 15 05 -2 06 ② 07 ④ 08 $\frac{4}{3}$
09 ② 10 ④ 11 ⑤ 12 2 13 ⑤
14 $\frac{3}{4}$ 15 $-\frac{7}{8}$ 16 ⑤ 17 ② 18 $\frac{1}{3}$
19 ④ 20 ③ 21 ② 22 -2 23 $\frac{4}{3}$
24 16 25 ⑤ 26 9 27 ② 28 ①

본책 16쪽

01 1 02 2 03 ④
04 ② 05 ⑤ 06 5

Ⅰ-2. 급수

본책 18~20쪽

01 ⑤ 02 $-\frac{1}{2}$ 03 $\frac{9}{4}$
04 ② 05 5 06 ㄱ 07 $\frac{3}{8}$ 08 6
09 ② 10 7 11 ① 12 ① 13 ⑤
14 ② 15 ② 16 $2\sqrt{3}$ 17 ⑤

본책 21~25쪽

01 ① 02 7 03 15
04 8 05 1 06 ① 07 3 08 ③
09 ④ 10 ② 11 54 12 ⑤ 13 ②
14 19 15 ④ 16 17 17 ③ 18 ①
19 ⑤ 20 ② 21 121 22 10 23 ②
24 $\frac{35}{61}$ 25 ③ 26 12π 27 $\frac{9\sqrt{3}}{8}$ 28 $\frac{10}{7}$

본책 26쪽

01 15 02 ② 03 11
04 ⑤ 05 ③

본책 27~30쪽

01 ③ 02 ② 03 ④
04 ⑤ 05 ③ 06 ① 07 ② 08 ③
09 ② 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ①
14 ③ 15 ② 16 ③ 17 ③ 18 3
19 2 20 9 21 8 22 4 23 $\frac{1}{2}$
24 $\frac{16}{21}$

본책 31쪽

01 $\frac{3}{4}\pi$ 02 $\frac{3}{13}$ 03 11
04 17

Ⅱ. 미분법

Ⅱ-1. 지수함수와 로그함수의 미분

본책 34~35쪽

01 6 02 ④ 03 4
04 ④ 05 e^2 06 1 07 ② 08 $\frac{1}{4}$
09 ① 10 80 11 ④ 12 ③

본책 36~38쪽

01 ④ 02 $\frac{5}{4}$ 03 ③
04 $\frac{3}{2}$ 05 ④ 06 ③ 07 $10\ln 2$ 08 2
09 ③ 10 2 11 18 12 6 13 ③
14 2 15 $-\frac{1}{2\ln 3}$ 16 ③ 17 $\frac{2}{3}$ 18 18
19 3 20 $\frac{e+2}{2}$ 21 ③

본책 39쪽

01 4 02 ① 03 ④
04 8 05 ② 06 ⑤

Ⅱ-2. 삼각함수의 미분

본책 40~42쪽		01 ②	02 $-\frac{8}{3}$	03 50
04 6	05 ⑤	06 $\frac{1}{2}$	07 ④	08 $\frac{1}{2}$
09 ②	10 $4\sqrt{3}$	11 ①	12 ⑤	13 ④
14 ⑤	15 3	16 ⑤	17 ⑤	18 2

본책 43~46쪽		01 ⑤	02 16	03 $\frac{1}{3}$
04 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	05 ⑤	06 4	07 ③	08 $\frac{\sqrt{2}}{2}$
09 $-\frac{\pi}{12}$	10 $\frac{1}{3}$	11 ③	12 ⑤	13 12
14 $2\sqrt{2}\pi$	15 $10\sqrt{5}$	16 ④	17 ②	18 ①
19 2	20 5	21 2	22 ⑤	23 $\frac{1}{9}$
24 $\frac{1}{4}$	25 ②			

본책 47쪽		01 ④	02 9	03 ①
04 ⑤	05 ①			

Ⅱ-3. 여러 가지 미분법

본책 48~50쪽		01 $\frac{1}{2}$	02 110	03 ④
04 -5	05 ①	06 $\frac{\sqrt{3}}{2}$	07 ②	08 $\sqrt{3}$
09 18	10 36	11 ①	12 ②	
13 (가) y^4 (나) $4y^3$ (다) $\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$			14 $\frac{1}{6}$	15 ⑤
16 ③	17 ②	18 ③		

본책 51~54쪽		01 12	02 ⑤	03 ①
04 ①	05 ④	06 $\sqrt{3}$	07 $-\frac{1}{2}$	08 $\frac{4}{5}$
09 ④	10 1024	11 10	12 1	13 $-\frac{1}{2}$
14 146	15 ①	16 4	17 ②	18 2
19 ②	20 $\frac{4}{11}$	21 $\frac{1}{6}$	22 1	23 $-\frac{1}{7}$
24 ④	25 ③	26 9	27 ②	28 $15e^3$

본책 55쪽		01 ⑤	02 4	03 ④
04 8	05 ③	06 1		

Ⅱ-4. 도함수의 활용

본책 56~59쪽		01 $\frac{9}{2}$	02 ②	03 $\frac{e}{2}$
04 ④	05 ①	06 $\frac{1}{4}$	07 ⑤	08 ③
09 $a\geq 2$	10 $\frac{9}{2}$	11 ④	12 ②	13 3
14 $\frac{\pi}{4}$	15 ②	16 ①	17 15	18 36
19 ⑤	20 ②	21 $\frac{5}{2}$, $\frac{1}{2}$	22 ④	23 $\frac{1}{3}$

본책 60~64쪽		01 0	02 ④	03 ②
04 ①	05 $\sqrt{2}(e^2-1)$		06 20	07 ④
08 ③	09 15	10 15	11 6	12 ④
13 $\frac{1}{e^{2\pi}-1}$	14 $e^{\frac{\pi}{2}}$	15 ④	16 ⑤	
17 $-1<a<1$		18 ④	19 ③	20 ⑤
21 $\frac{1}{e}$	22 ③	23 $\frac{\sqrt{2}}{2}$	24 ⑤	25 ③
26 1	27 $0<k<e$	28 $4e^2$	29 ⑤	30 18
31 ④	32 $\frac{1}{\sqrt{1+e^2}}$			

본책 65쪽		01 ②	02 ①	03 ②
04 ⑤	05 ③	06 8		

본책 66~70쪽		01 ⑤	02 ④	03 ③
04 ⑤	05 ①	06 ⑤	07 ①	08 ③
09 ③	10 ③	11 ③	12 ②	13 ⑤
14 ②	15 ⑤	16 ③	17 ④	18 ⑤
19 ②	20 ③	21 ③	22 ①	23 $-2e^{\pi}$
24 $\pi\ln\pi$	25 8	26 6	27 $\frac{4}{5}$	28 8
29 ㄴ, ㄷ	30 50	31 12	32 $\frac{5}{4}$	

본책 71쪽		01 $\frac{11}{9}$	02 ⑤	03 ③
04 ①				

III. 적분법

III-1. 여러 가지 적분법

본책 74~77쪽

01 ④　02 ④　03 $\frac{5}{2}$
04 $\frac{1}{6}$　05 $3e-3$　06 $\frac{\pi}{2}-2$　07 19　08 $\frac{1}{2}\ln 3$
09 ②　10 ④　11 1　12 ②　13 $\frac{4\pi}{1-\pi}$
14 7　15 $\frac{64}{15}$　16 ②　17 ①　18 ①
19 ④　20 5　21 ②　22 ④　23 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

본책 78~80쪽

01 -2　02 $\frac{1}{3}$　03 ③
04 ④　05 $4\sqrt{3}$　06 ④　07 3　08 $20\ln 2$
09 ④　10 $13+2\pi$　11 $\frac{9}{2}$　12 2045　13 ③
14 $\frac{2}{3}$　15 ⑤　16 19　17 8　18 ③
19 ⑤　20 -16

본책 81쪽

01 ②　02 ②　03 8
04 17　05 12

III-2. 정적분의 활용

본책 82~84쪽

01 $\ln 2$　02 ②　03 π
04 ①　05 $\frac{e^4-e}{2}$　06 9　07 ②　08 $\ln 2$
09 ②　10 49　11 4π　12 $\frac{27}{16}$　13 5π
14 36　15 ④　16 ③

본책 85~88쪽

01 ③　02 $2\ln 2-\frac{5}{4}$
03 4　04 $2\sqrt{3}\ln 2$　05 ④　06 ③　07 $\frac{5}{8}$
08 ④　09 -2　10 $\frac{\sqrt{3}}{3}$　11 ①　12 $\frac{1}{e}$
13 14　14 8　15 ④　16 ⑤　17 ②
18 $\frac{2000}{3}$　19 ④　20 $\pi-2$　21 80초　22 ①
23 ②　24 ⑤　25 ③

본책 89쪽

01 ②　02 ③　03 ④
04 ⑤

본책 90~93쪽

01 ⑤　02 ④　03 ②
04 ②　05 ③　06 ②　07 ③　08 ②
09 ②　10 ③　11 ①　12 ③　13 ③
14 ①　15 ③　16 ③　17 ③　18 ②
19 $2-\frac{3}{4}\pi$　20 $\frac{31}{35}$　21 $\frac{7}{4}$　22 $\frac{3}{2}$　23 $\frac{1}{2\ln 2}$
24 2　25 30

본책 94쪽

01 ④　02 40　03 ③
04 4

I 수열의 극한

I-1. 수열의 극한

개념 & 핵심 기출

본책 8~10쪽

01 ① 일반항이 $(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2n}$이므로

$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2n}=0$

② 일반항이 $\frac{2^n-1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$

$\lim_{n\to\infty}2^n=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$

③ 일반항이 $\frac{n}{1000}$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1000}=\infty$

④ 일반항이 $\frac{\sqrt{3n}}{n}=\sqrt{\frac{3}{n}}$이므로 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3}{n}}=0$

⑤ 일반항이 $\frac{2n}{n^2}=\frac{2}{n}$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$

답 ③

02 ㄱ. 수열 $\{(-1)^n\cos n\pi\}$의 각 항을 나열하면

$1, 1, 1, 1, \cdots$

이므로 1에 수렴한다.

ㄴ. 수열 $\{(-1)^n\cdot(-1)^{n+1}\}$의 각 항을 나열하면

$(-1)^n\cdot(-1)^{n+1}=(-1)^{2n+1}$

$-1, -1, -1, -1, \cdots$

이므로 -1에 수렴한다.

ㄷ. 수열 $\left\{\frac{(-1)^n-(-1)^{n+1}}{n}\right\}$의 각 항을 나열하면

$\frac{-2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{-2}{5}, \frac{2}{6}, \cdots$

일반항이 $\frac{2\cdot(-1)^n}{n}$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot(-1)^n}{n}=0$

이므로 0에 수렴한다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 수렴한다.

답 ⑤

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

03 ① [반례] $a_n=n$, $b_n=n^2$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$ 이지만

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

② [반례] $a_n=n+1$, $b_n=n$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$ 이지만

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}1=1$

③ [반례] $a_n=1-\frac{1}{n}$, $b_n=1+\frac{1}{n}$이면 $a_n<b_n$이지만

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=1$

④ $a_n-b_n=c_n$이라 하면 $\lim_{n\to\infty}c_n=0$

이때 $b_n=a_n-c_n$이고, $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$이므로

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(a_n-c_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}c_n$

$=\alpha-0=\alpha$

⑤ [반례] $a_n=n$, $b_n=\frac{1}{n}$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이지만

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}1=1$

답 ④

04 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n-2)+2\}$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n-2)+\lim_{n\to\infty}2$

$=\alpha+2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha+2$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-2}{2a_{n+1}+1}=\frac{1}{3}$에서

$\frac{(\alpha+2)-2}{2(\alpha+2)+1}=\frac{1}{3}$, $\quad\frac{\alpha}{2\alpha+5}=\frac{1}{3}$

$3\alpha=2\alpha+5 \quad \therefore \alpha=5$

답 5

05 $\lim_{n\to\infty}a_n^2=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}a_n=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)^2=25$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=5$ ($\because a_n>0$)

각 항이 양수이다.

이때 $\lim_{n\to\infty}(3a_n-2b_n)=3\lim_{n\to\infty}a_n-2\lim_{n\to\infty}b_n$이므로

$3\cdot5-2\lim_{n\to\infty}b_n=9$, $\quad -2\lim_{n\to\infty}b_n=-6$

$\therefore \lim_{n\to\infty}b_n=3$

답 3

06 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$

$=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

답 ②

07 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{3n}k-\sum_{k=1}^{n}k}{\sum_{k=1}^{2n}k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n(3n+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{2n(2n+1)}{2}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n(3n+1)-n(n+1)}{2n(2n+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{8n+2}{4n+2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{2}{n}}{4+\frac{2}{n}}$

$=2$

답 2

08 $a\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+1}{2n-1}=\pm\infty$이므로

$a>0$이면 양의 무한대로 발산하고, $a<0$이면 음의 무한대로 발산한다.

$a=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+1}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn+1}{2n-1}=\frac{b}{2}$

따라서 $\frac{b}{2}=-3$이므로 $\quad b=-6$

$\therefore a-b=6$

답 6

09 $\lim_{n\to\infty}(3n^2-4n+2)a_n$

$=\lim_{n\to\infty}(n^2+4n+2)a_n\cdot\frac{3n^2-4n+2}{n^2+4n+2}$

$=\lim_{n\to\infty}(n^2+4n+2)a_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-4n+2}{n^2+4n+2}$

$=6\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}$

$=6\cdot3=18$

답 ④

10 $\lim_{n\to\infty}(n\sqrt{9n^2+2}-3n^2)=\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{9n^2+2}-3n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{9n^2+2}+3n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{9+\frac{2}{n^2}}+3}$

$=\frac{2}{3+3}=\frac{1}{3}$

답 ②

분모를 1로 보고 분자를 유리화한다.

11 분자와 분모를 각각 유리화하면

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3}-(n-1)}{\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt{n^2+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2+1})}{(2n+2)\{\sqrt{n^2+3}+(n-1)\}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+3}+n-1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+1-\frac{1}{n}}$

$=\frac{1+1}{1+1}=1$

답 ③

분자, 분모에 $\{\sqrt{n^2+3}+(n-1)\}$과 $(\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2+1})$을 각각 곱한다.

12 $\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt{n^2+4n}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a(\sqrt{n^2+4n}+n)}{4n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{a\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1\right)}{4}$

$=\frac{a}{2}$

따라서 $\frac{a}{2}=6$이므로 $a=12$

답 ④

$a>0$, $a\neq1$이고 $M>0$, $N>0$일 때
$\log_a a=1$,
$\log_a MN$
$=\log_a M+\log_a N$

13 $1+\log_2 n<\log_2 n+\log_2 a_n<1+\log_2(n+1)$에서

$\log_2 2n<\log_2 na_n<\log_2 2(n+1)$

$\therefore 2n<na_n<2n+2$

각 변을 n으로 나누면

$2<a_n<2+\frac{2}{n}$ ($\because n>0$)

이때 $\lim_{n\to\infty}2=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{2}{n}\right)=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=2$

답 ④

양수 x, y에 대하여
$\log_2 x<\log_2 y$이면
$x<y$

14 $-1\le\sin n\theta\le1$, $-1\le\cos 2n\theta\le1$이므로

$-2\le\sin n\theta+\cos 2n\theta\le2$

따라서 $n>0$일 때, 각 변을 $n+1$로 나누면

$-\frac{2}{n+1}\le\frac{1}{n+1}(\sin n\theta+\cos 2n\theta)\le\frac{2}{n+1}$

이고, $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}(\sin n\theta+\cos 2n\theta)=0$

답 ①

15 $|a_n-2n^2|<n$에서 $-n<a_n-2n^2<n$이므로

$2n^2-n<a_n<2n^2+n$

각 변을 n^2으로 나누면

$2-\frac{1}{n}<\frac{a_n}{n^2}<2+\frac{1}{n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n-n^2}{a_n+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n^2}-1}{\frac{a_n}{n^2}+1}$

$=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

16 주어진 수열이 수렴하려면

$-1<\frac{x^2-3x-2}{2}\le1$

(i) $\frac{x^2-3x-2}{2}>-1$에서

$x^2-3x-2>-2$, $x(x-3)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>3$

(ii) $\frac{x^2-3x-2}{2}\le1$에서

$x^2-3x-2\le2$, $(x+1)(x-4)\le0$

$\therefore -1\le x\le4$

(i), (ii)에서

$-1\le x<0$ 또는 $3<x\le4$

따라서 정수 x는 -1, 4이므로 구하는 합은

$-1+4=3$

답 ③

17 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+3}-3^{n+1}}{a\cdot2^{2n}+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8\cdot4^n-3\cdot3^n}{a\cdot4^n+3^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{8-3\left(\frac{3}{4}\right)^n}{a+\left(\frac{3}{4}\right)^n}$

$=\frac{8}{a}$

따라서 $\frac{8}{a}=6$이므로 $a=\frac{4}{3}$

답 ①

18 (i) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$a=\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=1$

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$이므로

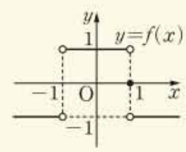
$$b=\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(iii) $|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$이므로

$$c=\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^n}-1}{\frac{1}{r^n}+1}=-1$$

이상에서 $a+b+c=0$ 답 0

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{1+x^n}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



1등급을 위한 고난도 문제

본책 11~15쪽

01 ㄱ. $a_1=0$, $a_2=\frac{1}{4}$, $a_3=0$, $a_4=\frac{1}{16}$, $a_5=0$, $a_6=\frac{1}{64}$, $\cdots$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=0$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 0에 수렴한다.

ㄴ. $a_1=-1$, $a_2=\frac{2}{3}$, $a_3=-\frac{1}{3}$, $a_4=\frac{2}{5}$, $a_5=-\frac{1}{5}$, $a_6=\frac{2}{7}$, $\cdots$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=0$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 0에 수렴한다.

ㄷ. $a_1=0$, $a_2=-1$, $a_3=0$, $a_4=1$, $a_5=0$, $a_6=-1$, $\cdots$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다.

이상에서 수렴하는 수열은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

02 $a_{n+1}-a_n=\frac{8}{n^2+2n}=\frac{8}{n(n+2)}$

$$=4\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

> $A\neq B$일 때
> $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$

이므로 $a_{n+1}=a_n+4\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

위의 식의 n에 1, 2, 3, 4, $\cdots$를 차례대로 대입하면

$$a_2=a_1+4\left(1-\frac{1}{3}\right)$$
$$a_3=a_2+4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=a_1+4\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$
$$a_4=a_3+4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=a_1+4\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$$
$$a_5=a_4+4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=a_1+4\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)$$
$$\vdots$$
$$\therefore a_n=a_1+4\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=a_1+4\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{a_1+4\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}=a_1+4\cdot\frac{3}{2}=a_1+6 \quad \cdots ❷$$

따라서 $a_1+6=50$이므로

$a_1=44$ $\cdots$ ❸

답 44

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 a_1을 이용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❸ a_1의 값을 구할 수 있다.	20 %

03 ㄱ. $a_n=0$ 또는 $a_n=1$이므로 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 극한값은 반드시 0 또는 1이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_n=1$이면 어떤 항 이후부터는 모든 항의 값이 1이다. 따라서 집합 $\{n\,|\,a_n=0\}$은 유한집합이다.

ㄷ. (i) 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 1인 경우
$b_n=1$이므로 수열 $\{b_n\}$은 1에 수렴한다.

(ii) 수열 $\{a_n\}$의 항 중에서 0이 하나라도 있는 경우
수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 0이 나오는 항을 제 m항이라 하면

$$b_m=b_{m+1}=b_{m+2}=\cdots=0$$

이므로 수열 $\{b_n\}$은 0에 수렴한다.

(i), (ii)에서 수열 $\{b_n\}$은 반드시 수렴한다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

> $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$
> $=\sum_{k=1}^{n}k^2$
> $=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

04 $\lim_{n\to\infty}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)a_n=5$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}a_n=5$$

즉 $\lim_{n\to\infty}n(n+1)(2n+1)a_n=30$이므로

$$\lim_{n\to\infty}n(n+1)(n+2)a_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}n(n+1)(2n+1)a_n\cdot\frac{n+2}{2n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}n(n+1)(2n+1)a_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n+1}$$
$$=30\cdot\frac{1}{2}=15$$

답 15

05 $\lim_{n\to\infty}(a_n+1)=3$에서

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+1)-1\}=\lim_{n\to\infty}(a_n+1)-\lim_{n\to\infty}1=3-1=2 \quad \cdots ❶$$

$\frac{a_n-1}{b_n}=c_n$으로 놓으면 $\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{1}{4}$이고 $b_n=\frac{a_n-1}{c_n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-1}{c_n}=\frac{2-1}{\frac{1}{4}}=4 \quad \cdots ❷$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=2-4=-2 \quad \cdots ❸$$

답 −2

채점 기준	비율
❶ $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\lim_{n\to\infty} b_n$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\lim_{n\to\infty} (a_n-b_n)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

06 ㄱ. [반례] $a_n=\frac{2}{n}$, $b_n=\frac{1}{n}$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=0$이지만

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}2=2$$

ㄴ. 수열 $\{a_nb_n\}$이 발산하고 수열 $\{a_n\}$이 수렴할 때 수열 $\{b_n\}$이 수렴한다고 하자.

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β는 상수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n=\alpha\beta$$

즉 수열 $\{a_nb_n\}$은 수렴하므로 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 수열 $\{b_n\}$은 발산한다.

> **일품 BOX**
> **귀류법**
> 어떤 명제의 결론을 부정한 후 모순이 생기는 것을 보임으로써 주어진 명제가 참임을 증명하는 방법

ㄷ. [반례] $a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^{n+1}$이면

$$a_nb_n=-1,\ a_n+b_n=0$$

이므로 두 수열 $\{a_nb_n\}$, $\{a_n+b_n\}$은 모두 수렴하지만 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모두 발산(진동)한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

07 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{na_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)b_n}{(2n^2+3)a_n}\cdot\frac{2n^2+3}{n(3n-1)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)b_n}{(2n^2+3)a_n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{3n^2-n}$$

$$=\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{3}$$

$$=\frac{1}{2}$$

답 ④

08 $f(x)=ax+b$ $(a\neq0)$라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nf(n)-3n^2}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(an+b)-3n^2}{2n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-3)n^2+bn}{2n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-3)n+b}{2+\frac{1}{n}}=6$$

이므로 $a-3=0$, $\frac{b}{2}=6$

$\therefore a=3$, $b=12$

> $a-3\neq0$이면
> $\lim_{n\to\infty}\frac{(a-3)n+b}{2+\frac{1}{n}}=\begin{cases}\infty & (a>3)\\ -\infty & (a<3)\end{cases}$

따라서 $f(x)=3x+12$이므로 ··· ❶

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2f\left(\frac{1}{n}\right)}{\{f(n)\}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\frac{3}{n}+12\right)}{(3n+12)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12n^2+3n}{9n^2+72n+144}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12+\frac{3}{n}}{9+\frac{72}{n}+\frac{144}{n^2}}$$

$$=\frac{4}{3}$$ ··· ❷

답 $\frac{4}{3}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2f\left(\frac{1}{n}\right)}{\{f(n)\}^2}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

09 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{n^2+2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4pn^2+2qn+r}{n^2+2n+3}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4p+\frac{2q}{n}+\frac{r}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}$$

$$=4p$$

이므로 $4p=6$에서 $p=\frac{3}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{2n+3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{p(n+1)^2+q(n+1)+r-(pn^2+qn+r)}{2n+3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2pn+p+q}{2n+3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2p+\frac{p+q}{n}}{2+\frac{3}{n}}$$

$$=p=\frac{3}{2}$$

답 ②

10 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례대로 나열하면

$5,\ -2,\ 5,\ -2,\ 5,\ -2,\ \cdots$

> $a_1=5$, $a_n+a_{n+1}=3$에서
> $5+a_2=3$이므로
> $a_2=-2$
> $-2+a_3=3$이므로
> $a_3=5$
> $5+a_4=3$이므로
> $a_4=-2$
> ⋮

(i) $n=2m$ (m은 자연수)일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{2m}a_k$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m}\left(\sum_{k=1}^{m}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{m}a_{2k}\right)$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m}\left\{\sum_{k=1}^{m}5+\sum_{k=1}^{m}(-2)\right\}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{3m}{2m}=\frac{3}{2}$$

> $\sum_{k=1}^{m}5+\sum_{k=1}^{m}(-2)$
> $=5m-2m=3m$

(ii) $n=2m-1$ (m은 자연수)일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m-1}\sum_{k=1}^{2m-1}a_k$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m-1}\left(\sum_{k=1}^{m}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{m-1}a_{2k}\right)$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m-1}\left\{\sum_{k=1}^{m}5+\sum_{k=1}^{m-1}(-2)\right\}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{3m+2}{2m-1}=\frac{3}{2}$$

> $\sum_{k=1}^{m}5+\sum_{k=1}^{m-1}(-2)$
> $=5m-2(m-1)$
> $=3m+2$

(i), (ii)에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{3}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{100(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)}{n}$$

$$=100\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=100\cdot\frac{3}{2}=150$$

답 ④

다른 풀이 수열 $\{a_n\}$의 이웃한 두 항의 합이 3이므로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\begin{cases}3\cdot\frac{n-1}{2}+5 & (n\text{이 홀수})\\ 3\cdot\frac{n}{2} & (n\text{이 짝수})\end{cases}$$

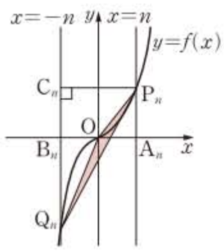
이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{100}{n}\left(3\cdot\frac{n-1}{2}+5\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{100}{n}\cdot\frac{3n+7}{2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{150n+350}{n}=150,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{100}{n}\cdot 3\cdot\frac{n}{2}=150$$

이므로 구하는 극한값은 150이다.

11 $A_n(n,\ 0)$, $B_n(-n,\ 0)$, $P_n(n,\ n^2)$, $Q_n(-n,\ -n^3)$ 이므로

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot n\cdot n^2=\frac{1}{2}n^3$$
$$T_n=\frac{1}{2}\cdot n\cdot n^3=\frac{1}{2}n^4$$



오른쪽 그림과 같이 점 P_n에서 직선 $x=-n$에 내린 수선의 발을 C_n이라 하면

$$C_n(-n,\ n^2)$$

이므로

$$R_n=\triangle P_nC_nQ_n-\triangle Q_nOB_n-\square P_nC_nB_nO$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2n(n^2+n^3)-\frac{1}{2}\cdot n\cdot n^3-\frac{1}{2}(n+2n)\cdot n^2$$
$$=n^3+n^4-\frac{1}{2}n^4-\frac{3}{2}n^3$$
$$=\frac{1}{2}n^4-\frac{1}{2}n^3$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{R_n}{S_n+T_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n^4-\frac{1}{2}n^3}{\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{2}n^3}=1$$

답 ⑤

다른 풀이 두 점 P_n, Q_n을 지나는 직선의 방정식은

$$y-n^2=\frac{n^2+n^3}{2n}(x-n),\ \text{즉 } y=\frac{n+n^2}{2}(x-n)+n^2$$

$x=0$을 대입하면

$$y=\frac{-n^2-n^3}{2}+n^2=\frac{-n^3+n^2}{2}$$

따라서 직선 P_nQ_n이 y축과 만나는 점을 D_n이라 하면

$$D_n\left(0,\ \frac{-n^3+n^2}{2}\right)$$
$$\therefore R_n=\triangle OQ_nD_n+\triangle OD_nP_n$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n^3-n^2}{2}\cdot n+\frac{1}{2}\cdot\frac{n^3-n^2}{2}\cdot n$$
$$=\frac{n^4-n^3}{2}$$

12 $p_n=\sum_{k=1}^{3n}k-\sum_{k=1}^{n}3k$

$$=\frac{3n(3n+1)}{2}-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=3n^2 \quad \cdots❶$$

$q_n=1+4+7+10+\cdots+(3n-2)$

$$=\sum_{k=1}^{n}(3k-2)$$
$$=3\cdot\frac{n(n+1)}{2}-2n$$
$$=\frac{3n^2-n}{2} \quad \cdots❷$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{\frac{3n^2-n}{2}}$$
$$=2 \quad \cdots❸$$

답 2

채점 기준	비율
❶ p_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ q_n을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

참고 $1,\ \cancel{2},\ \cancel{3},\ 4,\ \cancel{5},\ \cancel{6},\ 7,\ \cancel{8},\ \cancel{9},\ 10,\ \cancel{11},\ \cancel{12},\ \cdots,\ 3n-2,\ \cancel{3n-1},\ \cancel{3n}$

➡ $q_n=1+4+7+10+\cdots+(3n-2)$

13 $\overline{A_nB_1}=2+4+\cdots+2n$

$$=2(1+2+\cdots+n)$$
$$=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=n(n+1)$$

$1+2+\cdots+n$
$=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

이므로 $\triangle A_nB_1C_1$에서

$$\overline{A_nC_1}=\sqrt{n^2(n+1)^2+1^2}=\sqrt{n^4+2n^3+n^2+1}$$

또 $\overline{B_1C_n}=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$이므로 $\triangle A_1B_1C_n$에서

$$\overline{A_1C_n}=\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2}{4}+2^2}$$
$$=\frac{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+16}}{2}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{A_1C_n}}{\overline{A_nC_1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+16}}{2}}{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+1}}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+16}}{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+1}}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{16}{n^4}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}}$$
$$=\frac{1}{2}$$

답 ⑤

1등급 비밀노트

문제 해결 순서

(i) $\overline{A_nB_1}$, $\overline{B_1C_n}$의 길이를 각각 n에 대한 식으로 나타낸다.
(ii) 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{A_nC_1}$, $\overline{A_1C_n}$의 길이를 각각 n에 대한 식으로 나타낸다.
(iii) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값을 구한다.

14 자연수 n에 대하여

$$(2n-1)^2<4n^2-n<(2n)^2$$
$$\therefore 2n-1<\sqrt{4n^2-n}<2n$$

따라서 $\sqrt{4n^2-n}$의 정수 부분은 $2n-1$이므로

$$a_n=\sqrt{4n^2-n}-(2n-1) \quad \cdots❶$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\{\sqrt{4n^2-n}-(2n-1)\}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-n-(2n-1)^2}{\sqrt{4n^2-n}+2n-1}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{4n^2-n}+2n-1}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{\sqrt{4-\frac{1}{n}}+2-\frac{1}{n}}$

$= \frac{3}{2+2} = \frac{3}{4}$ ⋯ ❷

답 $\frac{3}{4}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구할 수 있다.	70 %

15 $\lim_{n\to\infty}(n+a-\sqrt{n^2+3n+4})$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+a)^2-(n^2+3n+4)}{n+a+\sqrt{n^2+3n+4}}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2a-3)n+a^2-4}{n+a+\sqrt{n^2+3n+4}}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{2a-3+\frac{a^2-4}{n}}{1+\frac{a}{n}+\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}}$

$= \frac{2a-3}{2}$

따라서 $\frac{2a-3}{2}=0$이므로

$a=\frac{3}{2}$ ⋯ ❶

$\therefore \lim_{n\to\infty} n\left(n+\frac{3}{2}-\sqrt{n^2+3n+4}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{n\left\{\left(n+\frac{3}{2}\right)^2-(n^2+3n+4)\right\}}{n+\frac{3}{2}+\sqrt{n^2+3n+4}}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{7}{4}n}{n+\frac{3}{2}+\sqrt{n^2+3n+4}}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{7}{4}}{1+\frac{3}{2n}+\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}}$

$= -\frac{7}{8}$ ⋯ ❷

답 $-\frac{7}{8}$

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\lim_{n\to\infty} n(n+a-\sqrt{n^2+3n+4})$의 값을 구할 수 있다.	60 %

16 함수 $y=\frac{n}{x}$의 그래프와 직선 $y=-x+n$의 교점의 x좌표는 $\frac{n}{x}=-x+n$에서

$n=-x^2+nx$

$\therefore x^2-nx+n=0$

두 점 P_n, Q_n의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β가 $x^2-nx+n=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$P_n(\alpha, -\alpha+n)$, $Q_n(\beta, -\beta+n)$

$\alpha+\beta=n$, $\alpha\beta=n$

$\therefore \overline{P_nQ_n}^2=(\alpha-\beta)^2+\{(-\alpha+n)-(-\beta+n)\}^2$

$=(\alpha-\beta)^2+(\beta-\alpha)^2$

$=2(\alpha-\beta)^2$

$(\alpha-\beta)^2$
$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=n^2-4n$

$=2(n^2-4n)$

$\therefore \overline{P_nQ_n}=\sqrt{2(n^2-4n)}$

또 $A_n(0, n)$, $B_n(n, 0)$이므로

$\overline{A_nB_n}=\sqrt{n^2+(-n)^2}=\sqrt{2}n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(\overline{A_nB_n}-\overline{P_nQ_n})=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{2}n-\sqrt{2(n^2-4n)}\}$

$=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-4n})$

$=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+\sqrt{n^2-4n}}$

$=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{n}}}$

$=2\sqrt{2}$

답 ⑤

17 점 P_n의 좌표는 (n, n^2+2n)이고, 원 $(x-2n)^2+(y-2n)^2=n^4$의 중심의 좌표는 $(2n, 2n)$, 반지름의 길이는 n^2이므로

원의 중심과 점 P_n 사이의 거리에서 원의 반지름의 길이를 뺀 값이다.

$a_n=\sqrt{(n-2n)^2+\{(n^2+2n)-2n\}^2}-n^2$

$=n\sqrt{n^2+1}-n^2$

또 $\overline{OP_n}=\sqrt{n^2+(n^2+2n)^2}=n\sqrt{n^2+4n+5}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{\overline{OP_n}-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n\sqrt{n^2+1}-n^2)}{n\sqrt{n^2+4n+5}-n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)}{\sqrt{n^2+4n+5}-n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+4n+5}+n)}{(4n+5)(\sqrt{n^2+1}+n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}+1}{\left(4+\frac{5}{n}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}$

$=\frac{1+1}{4\cdot(1+1)}$

$=\frac{1}{4}$

답 ②

18 $n(n-2)<a_n<n^2$에서

$\sum_{k=1}^{n}k(k-2)<\sum_{k=1}^{n}a_k<\sum_{k=1}^{n}k^2$

이때

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-2)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k)$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n(n+1)$$
$$=\frac{n(n+1)(2n-5)}{6},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

이므로

$$\frac{n(n+1)(2n-5)}{6}<\sum_{k=1}^{n} a_k<\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\therefore \frac{(n+1)(2n-5)}{6n^2}<\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} a_k<\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

그런데

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n-5)}{6n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$
$$=\frac{1}{3}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{1}{3}$$ 답 $\frac{1}{3}$

19 곡선 $y=x^2-n\sqrt{a_n}\,x+2n-1$은 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2-n\sqrt{a_n}\,x+2n-1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=n^2a_n-8n+4>0$$

$$\therefore a_n>\frac{8n-4}{n^2}$$

곡선 $y=x^2-n\sqrt{2a_n}\,x+4n+3$은 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2-n\sqrt{2a_n}\,x+4n+3=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=2n^2a_n-16n-12<0$$

$$\therefore a_n<\frac{8n+6}{n^2}$$

따라서 $\frac{8n-4}{n^2}<a_n<\frac{8n+6}{n^2}$이므로

$$\frac{8n-4}{n}<na_n<\frac{8n+6}{n}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{8n-4}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n+6}{n}=8$이므로

$$\lim_{n\to\infty} na_n=8$$ 답 ④

> 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 이차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

20 $a_n-\frac{1}{2}=b_n$으로 놓으면 조건 (가)에서

$$0<a_n-\frac{1}{2}<\frac{1}{2} \qquad \therefore 0<b_n<\frac{1}{2}$$

조건 (나)에서

$$a_{n+1}-\frac{1}{2}<\frac{2}{3}\left(a_n-\frac{1}{2}\right),\ 즉\ b_{n+1}<\frac{2}{3}b_n$$

이므로 $b_{n+1}<\frac{2}{3}b_n<\left(\frac{2}{3}\right)^2 b_{n-1}<\cdots<\left(\frac{2}{3}\right)^n b_1$

즉 $0<b_n<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}b_1$이고 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}b_1=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} b_n=0,\ 즉\ \lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{1}{2}\right)=0$$

> $\frac{2}{3}b_n<\left(\frac{2}{3}\right)^n b_1$이므로 $b_n<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}b_1$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{1}{2}\right)\left(a_n+\frac{2}{3}\right)(a_n+1)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{1}{2}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{2}{3}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}(a_n+1)$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{7}{4}$$ 답 ③

21 $a=3^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{3^3}=\sqrt[4]{27}$, $b=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}=\sqrt[4]{5^2}=\sqrt[4]{25}$이므로 $a>b$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2a^{n+4}+3b^{n+2}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2a^4+3b^2\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$$
$$=2a^4$$
$$=2\cdot 27=54$$ 답 ②

> $\frac{b}{a}=\sqrt[4]{\frac{25}{27}}$이고 $0<\sqrt[4]{\frac{25}{27}}<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n=0$

22 $a_n+b_n=\frac{1}{3^n}$, $a_n-b_n=\frac{1}{2^n}$의 양변을 각각 제곱하면

$$a_n^2+b_n^2+2a_nb_n=\frac{1}{9^n} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$a_n^2+b_n^2-2a_nb_n=\frac{1}{4^n} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡, ㉠−㉡을 각각 하면

$$2(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{9^n}+\frac{1}{4^n},\ 4a_nb_n=\frac{1}{9^n}-\frac{1}{4^n}$$

$$\therefore a_n^2+b_n^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9^n}+\frac{1}{4^n}\right),\ a_nb_n=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9^n}-\frac{1}{4^n}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{a_nb_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9^n}+\frac{1}{4^n}\right)}{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9^n}-\frac{1}{4^n}\right)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(4^n+9^n)}{4^n-9^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left\{\left(\frac{4}{9}\right)^n+1\right\}}{\left(\frac{4}{9}\right)^n-1}$$
$$=-2$$ 답 −2

> 분자, 분모에 $4^n\cdot 9^n$을 곱한다.

23 n년 후의 A 회사와 B 회사의 매출액은 각각

$$a_n=10(1.08)^n+15(1.12)^n$$
$$b_n=5(1.08)^n+20(1.12)^n \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5(1.08)^n+20(1.12)^n}{10(1.08)^n+15(1.12)^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5\left(\frac{1.08}{1.12}\right)^n+20}{10\left(\frac{1.08}{1.12}\right)^n+15}$$
$$=\frac{4}{3} \quad \cdots ❷$$ 답 $\frac{4}{3}$

> $0<\frac{1.08}{1.12}<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1.08}{1.12}\right)^n=0$

채점 기준	비율
❶ a_n, b_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$의 값을 구할 수 있다.	60 %

24 수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\ (r>0)$라 하면

$a_n=r^{n-1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+1)(a_n+2)}{a_{2n+1}+a_{2n+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(r^{n-1}+1)(r^{n-1}+2)}{r^{2n}+r^{2n+2}}$$

이때 $0<r\le1$이면 주어진 조건을 만족시키지 않으므로

$r>1$ ⋯ ❶

$0<r<1$이면 극한값이 존재하지 않고, $r=1$이면 극한값이 3이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(r^{n-1}+1)(r^{n-1}+2)}{r^{2n}+r^{2n+2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r^n}\right)\left(\frac{1}{r}+\frac{2}{r^n}\right)}{1+r^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r}}{1+r^2}=\frac{1}{r^2+r^4}$$

즉 $\frac{1}{r^2+r^4}=\frac{1}{6}$이므로

$r^4+r^2=6,\qquad (r^2+3)(r^2-2)=0$

$\therefore r=\sqrt{2}\ (\because r>0)$ ⋯ ❷

$\therefore a_9=r^8=(\sqrt{2})^8=16$ ⋯ ❸

답 16

채점 기준	비율
❶ $r>1$임을 알 수 있다.	30 %
❷ r의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ a_9의 값을 구할 수 있다.	20 %

25 ㄱ. $b_n=1+10+10^2+\cdots+10^{n-1}=\frac{1\cdot(10^n-1)}{10-1}$

첫째항이 1, 공비가 10인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합

$$=\frac{10^n-1}{9}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{10^{n+1}-1}{9}}{\frac{10^n-1}{9}}=\lim_{n\to\infty}\frac{10^{n+1}-1}{10^n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10^n}}$$

$$=10$$

ㄴ. $c_n=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{10^n}$

$$+\frac{2}{10^{n+1}}+\frac{2}{10^{n+2}}+\cdots+\frac{2}{10^{2n}}$$

$$\frac{2}{10^{n+1}}+\frac{2}{10^{n+2}}+\cdots+\frac{2}{10^{2n}}=\frac{2}{10^n}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{10^n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{2}{10^n}\right)\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{10^n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{2}{10^n}\right)\cdot\frac{\frac{1}{10}\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{1}{9}\left(1+\frac{2}{10^n}\right)\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{9}\left(1+\frac{2}{10^n}\right)\left(1-\frac{1}{10^n}\right)=\frac{1}{9}$$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{10^n-1}{9}=\infty$

ㄴ에서 $\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{1}{9}$이므로 $\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{b_n}=0$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

26 $a_1a_2=2$에서 $\qquad a_2=\frac{1}{a_1}\cdot2=\frac{1}{3}\cdot2$

$a_2a_3=2^2$에서 $\qquad a_3=\frac{1}{a_2}\cdot2^2=3\cdot2$

$a_3a_4=2^3$에서 $\qquad a_4=\frac{1}{a_3}\cdot2^3=\frac{1}{3}\cdot2^2$

$a_4a_5=2^4$에서 $\qquad a_5=\frac{1}{a_4}\cdot2^4=3\cdot2^2$

$a_5a_6=2^5$에서 $\qquad a_6=\frac{1}{a_5}\cdot2^5=\frac{1}{3}\cdot2^3$

$a_6a_7=2^6$에서 $\qquad a_7=\frac{1}{a_6}\cdot2^6=3\cdot2^3$

⋮

즉 $a_{2n-1}=3\cdot2^{n-1}$, $a_{2n}=\frac{1}{3}\cdot2^n$이므로

$$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}3\cdot2^{k-1}$$

$$=3\cdot\frac{2^n-1}{2-1}$$

$$=3(2^n-1)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}}{a_{2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3(2^n-1)}{\frac{1}{3}\cdot2^n}=\lim_{n\to\infty}9\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

$$=9$$

답 9

27 (i) $-1<x<1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}x^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-x+1}{x^n+1}=-x+1$$

즉 $-x+1=\frac{3}{2}$이므로 $\qquad x=-\frac{1}{2}$

(ii) $x=1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-x+1}{x^n+1}=\frac{1}{2}$$

이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $x>1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}x^n=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-x+1}{x^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x-\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}}$$

$$=x$$

$\therefore x=\frac{3}{2}$

이상에서 $\qquad x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

따라서 구하는 모든 x의 값의 합은

$$-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$$

답 ②

28 ㄱ. $-1<r<1$이면 $-1<-r<1$이므로

$\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{n-1}=0,\ \lim_{n\to\infty}(-r)^n=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+(-r)^n}{1+r^{n-1}}=0$$

ㄴ. $r=1$이면

$$a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}=\begin{cases}0 & (n\text{이 홀수})\\ 1 & (n\text{이 짝수})\end{cases}$$

$b_n=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}$이라 하면 자연수 k에 대하여

$$\lim_{k\to\infty}b_{2k-1}=\lim_{k\to\infty}\frac{0+1+0+1+\cdots+0}{2k-1}=\lim_{k\to\infty}\frac{k-1}{2k-1}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{k\to\infty}b_{2k}=\lim_{k\to\infty}\frac{0+1+0+1+\cdots+0+1}{2k}=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{2k}=\frac{1}{2}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{2}$

ㄷ. $r>1$이면 $a_n=\begin{cases}0 & (n\text{이 홀수})\\ \frac{2r^n}{1+r^{n-1}} & (n\text{이 짝수})\end{cases}$

$c_n=\frac{a_n}{n}$이라 하면 자연수 k에 대하여

$$\lim_{k\to\infty}c_{2k-1}=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{2k-1}}{2k-1}=\lim_{k\to\infty}\frac{0}{2k-1}=0,$$

$$\lim_{k\to\infty}c_{2k}=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{2k}}{2k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k}\cdot\frac{2r^{2k}}{1+r^{2k-1}}=\lim_{k\to\infty}\frac{r}{k\left(\frac{1}{r^{2k-1}}+1\right)}=0$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}c_n=0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

1등급 비밀노트

홀수 번째 항들의 일반항 a_{2n-1}과 짝수 번째 항들의 일반항 a_{2n}에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 수렴·발산은 다음과 같다.

① $\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\alpha$ (α는 상수) ➡ $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ ➡ $\{a_n\}$은 수렴

② $\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}a_{2n}$ ➡ $\{a_n\}$은 발산

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 16쪽

01 $\sqrt{x}=\frac{x}{n}$에서 $x=\frac{x^2}{n^2}$

$x^2-n^2x=0$ $\therefore x(x-n^2)=0$

따라서 $x=0$ 또는 $x=n^2$이므로

$a_n=n^2$ ($\because a_n>0$)

$\sqrt{x+1}=\frac{x}{n}$에서 $x+1=\frac{x^2}{n^2}$

$\therefore x^2-n^2x-n^2=0$

따라서 $x=\frac{n^2\pm\sqrt{n^4+4n^2}}{2}=\frac{n^2\pm n\sqrt{n^2+4}}{2}$이므로

$b_n=\frac{n^2+n\sqrt{n^2+4}}{2}$ ($\because b_n>0$)

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n\sqrt{n^2+4}}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}{2}=\frac{1+1}{2}=1$$

답 1

02 $\frac{\cos n+2n^2+2}{n^2}=\frac{\cos n+2}{n^2}+2$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $1\le\cos n+2\le3$이므로

$$\frac{1}{n^2}\le\frac{\cos n+2}{n^2}\le\frac{3}{n^2}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n+2}{n^2}=0 \quad \therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos n+2}{n^2}+2\right)=2$$

한편 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$라 하면

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_{n+2}=\alpha$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}+2a_{n+2}}{a_n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n+2n^2+2}{n^2}$에서

$\frac{\alpha+2\alpha}{\alpha+1}=2,$ $3\alpha=2\alpha+2$

$\therefore \alpha=2$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=2$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=2$ 답 2

03 조건 (나)에 의하여

$$\frac{6n^2+5n}{n^2}<\frac{a_nb_n}{n^2}<\frac{6n^2+10n}{n^2}$$

이고 $\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+5n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+10n}{n^2}=6$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^2}=6$$

조건 (가)에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{a_n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{a_n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{a_n}=2\cdot2=4$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^2}\cdot\left(\frac{3n-1}{a_n}\right)^2\cdot\frac{n^2}{(3n-1)^2}=6\cdot4\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{9n^2-6n+1}=24\cdot\frac{1}{9}=\frac{8}{3}$$

답 ④

04
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{-n+2}+a\cdot3^{n+1}}{3^{n-1}+3^{-n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^{2n-3}}+9a}{1+\frac{1}{3^{2n+1}}}=9a$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+3n}{(2n+3)(an-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{3}{n}}{\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(a-\frac{1}{n}\right)}=\frac{4}{a}$$

일품 BOX

n이 홀수이면 $a_n=\frac{1-1}{2}=0$

n이 짝수이면 $a_n=\frac{1+1}{2}=1$

$-1\le\cos n\le1$이므로 $1\le\cos n+2\le3$

n이 홀수이면 $(-r)^n=-r^n$ $\therefore a_n=0$

n이 짝수이면 $(-r)^n=r^n$ $\therefore a_n=\frac{2r^n}{1+r^{n-1}}$

$\frac{b_n}{a_n}$을 극한값을 알고 있는 식으로 변형한다.

따라서 $9a=\frac{4}{a}$이므로 $\quad 9a^2=4$

$a^2=\frac{4}{9} \quad \therefore a=\frac{2}{3}$ ($\because a>0$) 답 ②

05 (i) $0<\frac{k}{5}<1$, 즉 $0<k<5$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{5}\right)^n=0$이므로 $\quad a_k=\frac{0}{0+4}=0$

(ii) $\frac{k}{5}=1$, 즉 $k=5$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{5}\right)^n=1$이므로 $\quad a_5=\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$

(iii) $\frac{k}{5}>1$, 즉 $k>5$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{5}\right)^n=\infty$이므로

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{k}{5}\right)^{-2}}{1+4\cdot\left(\frac{5}{k}\right)^{n+1}}=\left(\frac{k}{5}\right)^{-2}=\frac{25}{k^2}$$

이상에서

$$\sum_{k=1}^{9}k^3a_k=\sum_{k=1}^{4}k^3\cdot 0+5^3a_5+\sum_{k=6}^{9}k^3\cdot\frac{25}{k^2}$$
$$=0+25+\sum_{k=6}^{9}25k$$
$$=25+750$$
$$=775$$

답 ⑤

일품 BOX

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{5}\right)^n=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{k}\right)^{n+1}=0$

06 (i) $0<x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

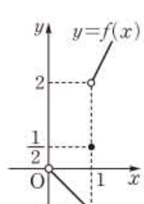
$f(x)=-x$

(ii) $x=1$일 때,

$f(1)=\frac{2-1}{1+1}=\frac{1}{2}$

(iii) $x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x-\left(\frac{1}{x}\right)^{2n-1}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}=2x$$



이상에서 $x>0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$g(x)=-x^2-2x+k$

$=-(x+1)^2+k+1$

이고, k는 $y=g(x)$의 그래프의 y절편이므로 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지날 때 $y=f(x)$의 그래프와 만나지 않으면서 k의 값이 최대이다.

즉 $g(1)=k-3=2$이므로

$k=5$ 답 5

함수 $y=g(x)$의 그래프는 점 $(-1,\ k+1)$을 꼭짓점으로 하고 위로 볼록한 포물선이다.

Ⅰ-2. 급수

개념&핵심 기출

본책 18~20쪽

01 ㄱ. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$

$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$

따라서 주어진 급수는 양의 무한대로 발산한다.

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$이 양의 무한대로 발산하므로 주어진 급수도 발산한다.

ㄴ. 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_{2n-1}=1,\ S_{2n}=1-\frac{1}{n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=1$

따라서 주어진 급수는 1에 수렴한다.

홀수 번째 항까지의 부분합 S_{2n-1}과 짝수 번째 항까지의 부분합 S_{2n}에 대하여

① $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\alpha$
➡ $\lim_{n\to\infty}S_n=\alpha$ (단, α는 상수)

② $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$
➡ $\lim_{n\to\infty}S_n$은 존재하지 않는다.

ㄷ. 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$a_n=-\frac{n-1}{n}+\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

따라서 주어진 급수는 1에 수렴한다.

이상에서 수렴하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

02 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\log_4\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}=\log_4\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$
$$=\log_4\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)$$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\log_4\left(\frac{k}{k+1}\cdot\frac{k+2}{k+1}\right)$$
$$=\log_4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)+\log_4\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)+\cdots+\log_4\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$=\log_4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$=\log_4\frac{n+2}{2(n+1)}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log_4\frac{n+2}{2(n+1)}=\log_4\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$\log_4\frac{1}{2}=\log_{2^2}2^{-1}=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

03 $f(x)=a_nx^2+2a_nx-3$이라 하면 다항식 $f(x)$가 $x-n$으로 나누어떨어지므로 $f(n)=0$

따라서 $a_nn^2+2a_nn-3=0$에서

$$a_n=\frac{3}{n(n+2)}$$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{k(k+2)}\\&=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\frac{3}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\\&=\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}S_n\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{4}\end{aligned}$$

답 $\frac{9}{4}$

> 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여
> ① $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$
> ② $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n$

04 ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄴ. 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\\&\qquad+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{2n+1}\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1$$

따라서 주어진 급수는 1에 수렴한다.

ㄷ. 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\\&=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})\\&\qquad+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\\&=\sqrt{n+1}-1\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

이상에서 수렴하는 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

> $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.
> (i) $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구한다. 이때 극한값이 0이 아니면 주어진 급수는 발산한다.
> (ii) $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$를 구한다.
> (iii) $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값을 구한다.

05 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an^2+3}{9n^2+3n-2}$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+3}{9n^2+3n-2}=0$$

$\frac{a}{9}=0 \quad \therefore a=0$

$a=0$을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}b&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2+3n-2}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{(3k-1)(3k+2)}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore 10(a+b)=10\cdot\left(0+\frac{1}{2}\right)=5$$

답 5

06 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}a_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{1}{2}\right)$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{1}{2}\right)=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$$

ㄷ. [반례] 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, 0, $\cdots$

$\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, 1, $\cdots$

이면 $a_nb_n=0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=0$

즉 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이지만 $\lim_{n\to\infty}b_n\neq0$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

> 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은
> $a_n=a+(n-1)d$

07 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1+d=-3$, $a_1+4d=-9$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a_1=-1$, $d=-2$

따라서 $a_n=-1+(n-1)\cdot(-2)=-2n+1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}3^{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}3^{-2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{8}$$

답 $\frac{3}{8}$

> 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^n$이 수렴하면
> $a=0$ 또는 $-1<r<1$

08 주어진 등비급수가 수렴하려면

$$-1<\frac{x(x-3)}{4}<1$$

이어야 한다.

(i) $-1<\frac{x(x-3)}{4}$에서 $x^2-3x+4>0$

$$\therefore \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$$

따라서 위의 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $\frac{x(x-3)}{4}<1$에서 $\quad x^2-3x-4<0$

$(x+1)(x-4)<0 \quad \therefore -1<x<4$

(i), (ii)에서 $\quad -1<x<4$

따라서 주어진 급수가 수렴하도록 하는 정수 x는 0, 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$0+1+2+3=6$

답 6

09 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하므로 $\quad -1<r<1$

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty} r^2\cdot r^{n-1}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1}$은 수렴한다.

첫째항이 r^2, 공비가 r인 등비급수

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$은 공비가 r^2인 등비급수이다.

이때 $-1<r<1$에서 $\quad 0\le r^2<1$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$은 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-2r}{2}\right)^n$은 공비가 $\frac{1-2r}{2}$인 등비급수이다.

이때 $-1<r<1$에서 $\quad -1<1-2r<3$

$\therefore -\frac{1}{2}<\frac{1-2r}{2}<\frac{3}{2}$

$\frac{1-2r}{2}\ge 1$이면 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-2r}{2}\right)^n$은 발산한다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-2r}{2}\right)^n$은 반드시 수렴한다고 할 수 없다.

이상에서 반드시 수렴하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

10 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\beta$라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+3b_n)=16$에서

$2\sum_{n=1}^{\infty} a_n+3\sum_{n=1}^{\infty} b_n=16$

$\therefore 2\alpha+3\beta=16 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-2b_n)=11$에서

$3\sum_{n=1}^{\infty} a_n-2\sum_{n=1}^{\infty} b_n=11$

$\therefore 3\alpha-2\beta=11 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad \alpha=5,\ \beta=2$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$=\alpha+\beta=7$

답 7

11 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$a_n=\frac{5^n-2^n}{10^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{5}\right)^n$

두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$은 각각 수렴하므로

$\frac{5-2}{10}+\frac{5^2-2^2}{10^2}+\frac{5^3-2^3}{10^3}+\cdots$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$

$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}$

$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

답 ①

12 ㄱ. $a_n+b_n=c_n$이라 하면

$b_n=c_n-a_n$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n=\beta$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$

$=\sum_{n=1}^{\infty} c_n-\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$=\beta-\alpha$

ㄴ. [반례] $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $b_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$이면

$\alpha=\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2,$

$\beta=\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$

이때 $a_nb_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{6}}=\frac{6}{5}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n\ne\alpha\beta$

ㄷ. [반례] $a_n=2^n$, $b_n=4^n$이면

$\frac{a_n}{b_n}=\frac{2^n}{4^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$은 수렴하지만 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 모두 발산한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

13 $0.2\dot{6}=0.2+0.06+0.006+0.0006+\cdots$

첫째항이 0.06, 공비가 0.1인 등비급수

$=0.2+\frac{0.06}{1-0.1}$

$=\frac{1}{5}+\frac{1}{15}=\frac{4}{15}$

$0.1\dot{3}=0.1+0.03+0.003+0.0003+\cdots$

첫째항이 0.03, 공비가 0.1인 등비급수

$=0.1+\frac{0.03}{1-0.1}$

$=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}=\frac{2}{15}$

첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$ar=\frac{4}{15},\ ar^2=\frac{2}{15}$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{8}{15},\ r=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 등비급수의 합은

$\frac{\frac{8}{15}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{16}{15}=1.0\dot{6}$

답 ⑤

14 첫째항이 $0.\dot{5}=\frac{5}{9}$, 공비가 r인 등비급수의 합은

$\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{1-r}$이므로

$$\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{1-r}=\frac{67}{99},\qquad \frac{1}{1-r}=\frac{67}{55}$$

$$1-r=\frac{55}{67}\qquad \therefore r=\frac{12}{67}$$

답 ②

$0.\dot{6}\dot{7}=\frac{67}{99}$

15 $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=7$, $a_4=5$, $a_5=1$, $\cdots$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}=\frac{1}{10^1}+\frac{3}{10^2}+\frac{7}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\frac{1}{10^5}+\cdots$$

$$=0.1+0.03+0.007+0.0005+0.00001+\cdots$$

$$=0.\dot{1}37\dot{5}$$

답 ②

$n=1$이면 $7^1+4=11$이므로 $a_1=1$
$n=2$이면 $7^2+4=53$이므로 $a_2=3$
$n=3$이면 $7^3+4=347$이므로 $a_3=7$
$n=4$이면 $7^4+4=2405$이므로 $a_4=5$
$n=5$이면 $7^5+4=16811$이므로 $a_5=1$
⋮
따라서 수열 $\{a_n\}$은 1, 3, 7, 5가 이 순서대로 반복된다.

16 $\overline{\mathrm{PP_1}}=\overline{\mathrm{OP}}\sin 60°=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{P_1P_2}}=\overline{\mathrm{PP_1}}\cos 60°=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{\mathrm{P_2P_3}}=\overline{\mathrm{P_1P_2}}\cos 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

⋮

$$\therefore \overline{\mathrm{PP_1}}+\overline{\mathrm{P_1P_2}}+\overline{\mathrm{P_2P_3}}+\cdots$$

$$=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\cdots$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}$$

답 $2\sqrt{3}$

첫째항이 $\sqrt{3}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비급수

17 $\triangle\mathrm{OP_1Q_2}$에서

$$\overline{\mathrm{OQ_2}}=\overline{\mathrm{OP_1}}\cos 30°=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

이므로

$$\overline{\mathrm{Q_2Q_1}}=4-2\sqrt{3}$$

또 $\overline{\mathrm{P_1Q_2}}=\overline{\mathrm{OP_1}}\sin 30°=4\cdot\frac{1}{2}=2$이므로

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot(4-2\sqrt{3})\cdot 2=4-2\sqrt{3}$$

$\triangle\mathrm{P_2Q_3Q_2}$에서

$$\overline{\mathrm{P_2Q_3}}=\overline{\mathrm{OP_2}}\sin 30°=\overline{\mathrm{OQ_2}}\sin 30°$$

$$=2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{3}$$

이므로 $\triangle\mathrm{P_1Q_2Q_1}$과 $\triangle\mathrm{P_2Q_3Q_2}$의 닮음비는

$$\overline{\mathrm{P_1Q_2}}:\overline{\mathrm{P_2Q_3}}=2:\sqrt{3}$$

따라서 넓이의 비가 $4:3$이므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $4-2\sqrt{3}$, 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비수열이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{4-2\sqrt{3}}{1-\frac{3}{4}}=16-8\sqrt{3}$$

답 ⑤

1등급을 위한 고난도 문제

본책 21~25쪽

01 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+2}-a_n}{a_na_{n+2}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+2}-a_k}{a_ka_{k+2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_4}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_{n+2}=\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{6}{7}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+2}}=\frac{7}{6}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+2}-a_n}{a_na_{n+2}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{7}{6}-\frac{7}{6}$$

$$=-\frac{3}{2}$$

답 ①

02 $a_1=S_1=\frac{1\cdot 3}{1\cdot 3}=1$이고

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(2n+1)}{n(n+2)}=4$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_{n+1}=\lim_{n\to\infty}S_n=4$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k+a_{k+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(S_n+S_{n+1}-a_1)$$

$$=\lim_{n\to\infty}S_n+\lim_{n\to\infty}S_{n+1}-a_1$$

$$=4+4-1=7$$

답 7

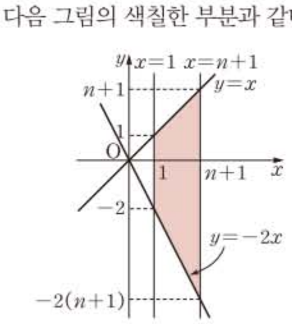
1등급 비밀노트

$$\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}=a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-a_1$$

$$=S_{n+1}-a_1$$

03 네 직선 $x=1$, $x=n+1$, $y=x$, $y=-2x$로 둘러싸인 사각형은 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



$$\therefore S_n=\frac{1}{2}\{3+3(n+1)\}\cdot n=\frac{3n(n+2)}{2} \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{30}{S_n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{30\cdot 2}{3n(n+2)}$$

$$=10\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=10\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=10\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=10\cdot\frac{3}{2}=15 \quad \cdots ❷$$

답 15

채점 기준	비율
❶ S_n을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{30}{S_n}$의 값을 구할 수 있다.	70 %

04 주어진 수열은 첫째항이 1, 제$(n+2)$항이 5인 등차수열이므로

$$5=1+(n+1)d_n \qquad \therefore d_n=\frac{4}{n+1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}d_nd_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n+1}\cdot\frac{4}{n+2}$$

$$=16\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=16\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=16\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=16\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=16\cdot\frac{1}{2}=8$$

답 8

05 급수 $a_1+a_2+a_3+\cdots$이 -4에 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=-4$$

또 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\quad \lim_{n\to\infty}a_n=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n^2=0$$

$\lim_{n\to\infty}a_n^2=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}a_n$
$=0\cdot0=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}+a_n^2}{S_n}=\frac{-4+0}{-4}=1$$

답 1

06 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}+2\right)$가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}+2\right)=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{a_n}{n}+2\right)-2\right\}$$

$$=0-2=-2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{na_n+4n^2-3}{6n^2+2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n}+4-\frac{3}{n^2}}{6+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$$=\frac{-2+4}{6}=\frac{1}{3}$$

답 ①

07 주어진 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{n^3}{1^2+2^2+\cdots+n^2}\right)=0$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$은 수렴한다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2}{2n^2+3n+1}$$

$$=3$$

답 3

08 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r\,(-1<r<1)$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3$에서 $\quad \frac{a}{1-r}=3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cdot(-1)^n\}=-1$에서 $\quad \frac{-a}{1-(-r)}=-1$

수열 $\{a_n\cdot(-1)^n\}$은 첫째항이 $-a$, 공비가 $-r$인 등비수열이다.

$\therefore \frac{a}{1+r}=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{3}{2},\ r=\frac{1}{2}$

㉠에서
$a+3r=3 \quad \cdots$ ㉢
㉡에서
$a-r=1 \quad \cdots$ ㉣
㉢$-$㉣을 하면
$4r=2 \quad \therefore r=\frac{1}{2}$
$r=\frac{1}{2}$을 ㉣에 대입하면
$a=\frac{3}{2}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=a_2+a_4+a_6+\cdots$$

$$=ar+ar^3+ar^5+\cdots$$

$$=\frac{ar}{1-r^2}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$$

답 ③

09 $2^{n-1}a_n=b_n$이라 하면

$$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=3n+5$$

$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=S_n$이라 하면

$$b_1=S_1=8$$

$n\ge2$일 때,

$$b_n=S_n-S_{n-1}=3n+5-\{3(n-1)+5\}=3$$

따라서 $a_1=b_1=8$, $a_n=\frac{b_n}{2^{n-1}}=\frac{3}{2^{n-1}}\ (n\ge2)$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{2^{n-1}}$$

첫째항이 $\frac{3}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비급수

$$=8+\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}}=11$$

답 ④

10 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\sin\theta<1$, $0<\cos\theta<1$이므로

$$0<1-\sin\theta<1,\ 0<1-\cos\theta<1$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(1-\sin\theta)^n-\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\theta)^n$

$=\frac{1-\sin\theta}{1-(1-\sin\theta)}-\frac{1-\cos\theta}{1-(1-\cos\theta)}$

$=\frac{1-\sin\theta}{\sin\theta}-\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{(1-\sin\theta)\cos\theta-(1-\cos\theta)\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

따라서 $\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\sqrt{3}$이므로

$\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$

양변을 제곱하면

$1-2\sin\theta\cos\theta=3(\sin\theta\cos\theta)^2$

이때 $\sin\theta\cos\theta=x$로 놓으면

$3x^2+2x-1=0,\quad (x+1)(3x-1)=0$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<x\le\frac{1}{2}$이므로 $\quad x=\frac{1}{3}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$ 답 ②

참고 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\sin\theta<1$이고 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$이므로

$\sin\theta\cos\theta=\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$=\sqrt{\sin^2\theta-\sin^4\theta}$

$=\sqrt{-\left(\sin^2\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$

따라서 $\sin\theta\cos\theta$는 $\sin^2\theta=\frac{1}{2}$, 즉 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 최댓값 $\frac{1}{2}$을 가지므로

$0<\sin\theta\cos\theta\le\frac{1}{2}$

11 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\ (-1<r<1)$라 하면 $a_n=9r^{n-1}$이므로

$\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k=\sum_{k=n+1}^{\infty}9r^{k-1}=\frac{9r^n}{1-r}$

$a_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k$에서 $\quad 9r^{n-1}=\frac{9r^n}{1-r}$

이때 $r\neq0$이므로 $\quad 1=\frac{r}{1-r}$

$1-r=r\qquad \therefore r=\frac{1}{2}$ ⋯ ❶

따라서 $a_n=9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{81}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{81}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$

$=\frac{81}{2}\cdot\frac{4}{3}=54$ ⋯ ❷

답 54

채점 기준	비율
❶ 수열 $\{a_n\}$의 공비를 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}$의 값을 구할 수 있다.	60 %

$a_1=\sum_{k=2}^{\infty}a_k$, 즉 $\sum_{k=2}^{\infty}a_k=9$이므로 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$는 수렴한다.

첫째항이 $9r^n$, 공비가 r인 등비급수

$r=0$이면 수열 $\{a_n\}$은 $9, 0, 0, 0, \cdots$

이때 $a_1=9$, $\sum_{k=2}^{\infty}a_k=0$이므로

$a_1\neq\sum_{k=2}^{\infty}a_k$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}>\left(\frac{1}{2}\right)^{11}>\left(\frac{1}{2}\right)^{12}>\cdots$

12 ㄱ. $P(x)-S_3(x)$

$=(x+x^2+x^3+\cdots)-(x^3+x^4+x^5+\cdots)$

$=x+x^2$

ㄴ. $S_n\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}+\cdots$

$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

이므로 $\quad S_n\left(\frac{1}{2}\right)\le1$

ㄷ. $S_n\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$S_{11}\left(\frac{1}{2}\right)>S_{12}\left(\frac{1}{2}\right)>S_{13}\left(\frac{1}{2}\right)>\cdots$

즉 $n>10$일 때,

$S_n\left(\frac{1}{2}\right)\le S_{11}\left(\frac{1}{2}\right)$

$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$이므로

$P\left(\frac{1}{2}\right)-S_n\left(\frac{1}{2}\right)\ge P\left(\frac{1}{2}\right)-S_{11}\left(\frac{1}{2}\right)$

$=1-\frac{1}{2^{10}}$

$=\frac{1023}{1024}>\frac{999}{1000}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

13 조건 (가)에 의하여

$a_n=3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-6\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

조건 (나)에 의하여 $n\ge2$일 때,

$a_nb_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_kb_k$

$=-\frac{1}{4^n}-\left(-\frac{1}{4^{n-1}}\right)$

$=\frac{3}{4^n}$

따라서 $n\ge2$일 때,

$-6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot b_n=\frac{3}{4^n}$

이므로

$b_n=\frac{3}{4^n}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot(-2)^n$

$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

한편 $a_1=3$이고 조건 (나)에서 $a_1b_1=-\frac{1}{4}$이므로

$3b_1=-\frac{1}{4}\qquad \therefore b_1=-\frac{1}{12}$

즉 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $-\frac{1}{12}$, 제 2 항이 $-\frac{1}{8}$이고 제 2 항부터 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n$$
$$= -\frac{1}{12} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$
$$= -\frac{1}{12} + \frac{-\frac{1}{8}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$= -\frac{1}{12} - \frac{1}{12}$$
$$= -\frac{1}{6}$$

답 ②

이차부등식이 항상 성립할 조건은 다음과 같다.
① $ax^2+bx+c>0$
$\iff a>0,\ D<0$
② $ax^2+bx+c<0$
$\iff a<0,\ D<0$
(단, $D=b^2-4ac$)

14 $a_n = 8\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$이므로

$$S_n = \frac{1}{2}\,\overline{P_nQ_n}\cdot\overline{Q_nQ_{n+1}} = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot\left|-\frac{1}{4}\right|^{n-1}\cdot 1$$
$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} \quad \cdots❶$$

$\overline{P_nQ_n} = |a_n| = 8\cdot\left|-\frac{1}{4}\right|^{n-1}$, $\overline{Q_nQ_{n+1}} = 1$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{4}{1-\frac{1}{4}} = \frac{16}{3} \quad \cdots❷$$

따라서 $p=3$, $q=16$이므로
$p+q=19$ ⋯ ❸

답 19

채점 기준	비율
❶ S_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

15 $0<x<1$이므로

$$y = 1+x+x^2+x^3+\cdots = \frac{1}{1-x}$$
$$\therefore y>1$$

$0<x<1$에서
$-1<-x<0$
$0<1-x<1$
$\therefore \frac{1}{1-x}>1$, 즉 $y>1$

$$z = 1+\frac{2}{y}+\frac{3}{y^2}+\frac{4}{y^3}+\frac{5}{y^4}+\cdots \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $\frac{1}{y}$을 곱하면

$$\frac{z}{y} = \frac{1}{y}+\frac{2}{y^2}+\frac{3}{y^3}+\frac{4}{y^4}+\frac{5}{y^5}+\cdots \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠−㉡을 하면

$$\left(1-\frac{1}{y}\right)z = 1+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{y^4}+\cdots$$
$$= \frac{1}{1-\frac{1}{y}} \quad \left(\because 0<\frac{1}{y}<1\right)$$
$$\therefore z = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{y}\right)^2}$$

이때 $y=\frac{1}{1-x}$이므로

$$z = \frac{1}{\{1-(1-x)\}^2} = \frac{1}{x^2}$$
$$\therefore x^2z = 1$$

답 ④

16 주어진 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < \frac{\sqrt{30}x}{x^2+a} < 1$$

이때 $x^2+a>0$이므로

$$-(x^2+a) < \sqrt{30}x < x^2+a$$

(i) $-(x^2+a)<\sqrt{30}x$에서
$$x^2+\sqrt{30}x+a>0$$
위의 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+\sqrt{30}x+a=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$$D_1 = 30-4a<0 \qquad \therefore a>\frac{15}{2}$$

(ii) $\sqrt{30}x<x^2+a$에서
$$x^2-\sqrt{30}x+a>0$$
위의 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-\sqrt{30}x+a=0$의 판별식을 D_2라 하면
$$D_2 = 30-4a<0 \qquad \therefore a>\frac{15}{2}$$

(i), (ii)에서 $\quad a>\frac{15}{2}$

따라서 한 자리 자연수 a는 8, 9이므로 구하는 합은
$8+9=17$

답 17

17
$$\frac{(1+2^n)(3^n+4^n)}{12^n} = \frac{3^n+4^n+6^n+8^n}{12^n}$$
$$= \left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$
$$\frac{(1-2^n)(3^n-4^n)}{12^n} = \frac{3^n-4^n-6^n+8^n}{12^n}$$
$$= \left(\frac{1}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

이므로 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+2^n)(3^n+4^n)}{12^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-2^n)(3^n-4^n)}{12^n}$은 모두 수렴한다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+2^n)(3^n+4^n)}{12^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-2^n)(3^n-4^n)}{12^n}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(1+2^n)(3^n+4^n)}{12^n}+\frac{(1-2^n)(3^n-4^n)}{12^n}\right\}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\left(\frac{1}{4}\right)^n+2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$
$$= 2\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}+2\cdot\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}$$
$$= \frac{2}{3}+4 = \frac{14}{3}$$

답 ③

18 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$라 하고 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면 $\quad \lim_{n\to\infty}S_n=S$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$의 제 n항까지의 부분합을 T_n이라 하면
$T_n=S_{n+1}-a_1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}T_n = \lim_{n\to\infty}(S_{n+1}-a_1) = \lim_{n\to\infty}S_{n+1}-a_1$$
$$= S-a_1$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1} = S-a_1$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$도 수렴한다.

ㄴ. [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, 0, ⋯이면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = 0+0+0+\cdots=0$$

그러나 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

ㄷ. [반례] $a_n=(-1)^{n+1}$이면 $b_n=0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 수렴하지만 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

19 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = S$라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{S}{4}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$은 수렴한다.

ㄴ. $\frac{2}{2n-1} > \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$이 발산하므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1}$도 발산한다.

ㄷ. $\frac{n^2+n}{n^3} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n}$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$이 발산하므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{n^3}$도 발산한다.

이상에서 발산하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

모든 자연수 n에 대하여 $0 < a_n \le b_n$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 발산한다.

20 $a_1{}^2=\frac{1}{2}$, $a_2{}^2=1$, $a_3{}^2=\frac{1}{2}$, $a_4{}^2=0$, $a_5{}^2=\frac{1}{2}$, $a_6{}^2=1$, $a_7{}^2=\frac{1}{2}$, $a_8{}^2=0$, ⋯

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n{}^2}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{\frac{1}{2}}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{\frac{1}{2}}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{\frac{1}{2}}{2^7} + \frac{0}{2^8} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^{10}} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{16}}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{4}{15} = \frac{3}{5}$$

첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비급수

첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 $\frac{1}{16}$인 등비급수

따라서 $p=5$, $q=3$이므로

$p+q=8$ 답 ②

21 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면 $S_{n-1}=4a_n$

$n\ge 2$일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 4a_{n+1} - 4a_n$$

이므로

$$a_{n+1} = \frac{5}{4}a_n$$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제2항부터 공비가 $\frac{5}{4}$인 등비수열이다. ⋯ ❶

또 $a_1=1$, $4a_2=a_1$이므로 $a_2=\frac{1}{4}$

따라서 수열 $\{a_n\}$이

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{4},\ \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2,\ \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^3,\ \cdots$$

이므로 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은

$$1,\ 4,\ 4\cdot\frac{4}{5},\ 4\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2,\ 4\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3,\ \cdots$$ ⋯ ❷

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 일반항은 $\frac{1}{a_1}=1$, $\frac{1}{a_n}=4\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}$ $(n\ge 2)$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$은 수렴한다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9a_n + a_{2n}}{a_n a_{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{a_{2n}} + \frac{1}{a_n}\right)$$

$$= 9\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$$

$$= 9\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n}} + \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{a_n}$$

$$= 9\cdot\frac{4}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} + 1 + \frac{4}{1-\frac{4}{5}}$$

$$= 100 + 1 + 20$$

$$= 121$$ ⋯ ❸

첫째항이 $\frac{1}{a_2}=4$, 공비가 $\left(\frac{4}{5}\right)^2$인 등비급수

답 121

채점 기준	비율
❶ 수열 $\{a_n\}$이 제 2 항부터 등비수열임을 알 수 있다.	30 %
❷ 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$을 구할 수 있다.	30 %
❸ 답을 구할 수 있다.	40 %

22 $0.\dot{a} = \frac{a}{10} + \frac{a}{100} + \frac{a}{1000} + \cdots = \frac{\frac{a}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{a}{9}$

$$0.3\dot{b} = \frac{3}{10} + \frac{b}{100} + \frac{b}{1000} + \frac{b}{10000} + \cdots$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{\frac{b}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{10} + \frac{b}{90} = \frac{27+b}{90}$$ ⋯ ❶

따라서 첫째항이 $\frac{a}{9}$, 공비가 $\frac{3}{7}$인 등비급수의 합이 $\frac{27+b}{90}$이므로

$$\frac{\frac{a}{9}}{1-\frac{3}{7}} = \frac{27+b}{90},\quad \frac{7a}{36} = \frac{27+b}{90}$$

$\therefore 35a = 54 + 2b$ ⋯ ❷

$b=\frac{35}{2}a-27$에서 $0<\frac{35}{2}a-27<10$

$\therefore \frac{54}{35}<a<\frac{74}{35}$

따라서 자연수 a는 2뿐이다.

a, b는 한 자리 자연수이므로

$a=2$, $b=8$

$\therefore a+b=10$ ⋯ ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ 순환소수를 각각 분수로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	30 %

23 $\dfrac{83}{330}=0.2\dot{5}15\dot{1}51\cdots$이므로

> $a_1=2,\ a_2=5,\ a_3=1,\ a_4=5,\ a_5=1,\ \cdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\frac{2}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots$$
$$=1+\left(\frac{5}{2^2}+\frac{5}{2^4}+\frac{5}{2^6}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\cdots\right)$$
$$=1+\frac{\frac{5}{4}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}}$$
$$=1+\frac{5}{3}+\frac{1}{6}=\frac{17}{6}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12a_n}{2^n}=12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=12\cdot\frac{17}{6}=34$$

답 ②

24 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 x좌표는

$\overline{\mathrm{OP}_1}-\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}\cos 60°-\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}\cos 60°+\overline{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4}-\overline{\mathrm{P}_4\mathrm{P}_5}\cos 60°-\overline{\mathrm{P}_5\mathrm{P}_6}\cos 60°+\overline{\mathrm{P}_6\mathrm{P}_7}-\cdots$

> $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\left(\frac{4}{5}\right)^n$

$$=1-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}-\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{4}{5}\right)^3-\left(\frac{4}{5}\right)^4\cdot\frac{1}{2}-\left(\frac{4}{5}\right)^5\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{4}{5}\right)^6-\cdots$$
$$=\left\{1+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{5}\right)^6+\cdots\right\}-\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^4+\cdots\right\}-\frac{1}{2}\cdot\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^5+\cdots\right\}$$
$$=\frac{1}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^3}-\frac{\frac{2}{5}}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^3}-\frac{\frac{8}{25}}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^3}$$
$$=\frac{35}{61}$$

답 $\dfrac{35}{61}$

1등급 비밀노트

급수가 수렴하는 경우에는 등비급수가 되도록 적당한 항끼리 묶어서 그 합을 각각 계산한다.

25 두 점 P_n, Q_n이 한없이 가까워지는 점을 각각 $\mathrm{P}(x_p, y_p)$, $\mathrm{Q}(x_q, y_q)$라 하자.

> 점 P_n은 제 1 사분면 위의 점이므로
> $x_p>0,\ y_p>0$
> 점 Q_n은 제 4 사분면 위의 점이므로
> $x_q>0,\ y_q<0$

(i) $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OP}_1}+\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}+\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}+\cdots$
$$=\sqrt{5}+\sqrt{5}\cdot\frac{3}{4}+\sqrt{5}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{1-\frac{3}{4}}$$
$$=4\sqrt{5}$$

이때 $\overline{\mathrm{OP}}$와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 α라 하면

$$x_p=\overline{\mathrm{OP}}\cos\alpha=4\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=4$$
$$y_p=\overline{\mathrm{OP}}\sin\alpha=4\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=8$$

(ii) $\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OQ}_1}+\overline{\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2}+\overline{\mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_3}+\cdots$
$$=\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\frac{5}{6}+\sqrt{2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+\cdots$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{5}{6}}=6\sqrt{2}$$

이때 $\overline{\mathrm{OQ}}$와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 β라 하면

$$x_q=\overline{\mathrm{OQ}}\cos\beta=6\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=6$$
$$y_q=\overline{\mathrm{OQ}}\sin\beta=6\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-6$$

(i), (ii)에서

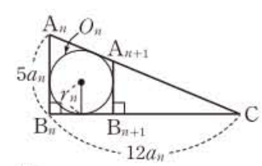
$\mathrm{P}(4,\ 8)$, $\mathrm{Q}(6,\ -6)$

따라서 점 M_n이 한없이 가까워지는 점을 M이라 하면 점 M은 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점이므로

$$\mathrm{M}\left(\frac{4+6}{2},\ \frac{8-6}{2}\right),\ \text{즉 } \mathrm{M}(5,\ 1)$$

답 ③

26 원 O_n의 반지름의 길이를 r_n, $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=5a_n$, $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}}=12a_n$이라 하면 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}}=13a_n$이므로



> 원 O_n의 중심은 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}$의 내심이다.

$$(5a_n-r_n)+(12a_n-r_n)=13a_n$$
$$17a_n-2r_n=13a_n$$
$$\therefore r_n=2a_n \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}}=\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}}-\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}$이므로

$$12a_{n+1}=12a_n-2r_n=12a_n-4a_n=8a_n$$
$$\therefore a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$$

> 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이다.

$a_1=1$이므로 $\quad a_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ ⋯ ❶

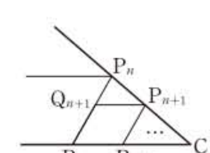
이것을 ㉠에 대입하면

$$r_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$
$$\therefore l_n=2\pi r_n=4\pi\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \cdots ❷$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{4\pi}{1-\frac{2}{3}}=12\pi \quad \cdots ❸$$

답 12π

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	50 %
❷ l_n을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\sum_{n=1}^{\infty}l_n$의 값을 구할 수 있다.	30 %

27 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n}=a_n$이라 하면



$$\overline{\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{R}_n}=\overline{\mathrm{R}_n\mathrm{R}_{n+1}}=\overline{\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1}}=\overline{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{R}_{n+1}}=a_{n+1}$$
$$\therefore \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n+1}}=a_n-a_{n+1}$$

이때 △ABC와 $\triangle P_nQ_{n+1}P_{n+1}$은 닮음이므로

$(a_n-a_{n+1}):a_{n+1}=2:3$

$\therefore a_{n+1}=\frac{3}{5}a_n$

따라서 n 번째 마름모의 넓이를 S_n이라 하면

$S_{n+1}=\frac{9}{25}S_n$

한편 △ABC와 $\triangle AQ_1P_1$은 닮음이므로

$(2-a_1):a_1=2:3 \quad \therefore a_1=\frac{6}{5}$

$\therefore S_1=\left(\frac{6}{5}\right)^2\cdot\sin 60°=\frac{36}{25}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{18\sqrt{3}}{25}$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{18\sqrt{3}}{25}$, 공비가 $\frac{9}{25}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{18\sqrt{3}}{25}}{1-\frac{9}{25}}=\frac{9\sqrt{3}}{8}$$

답 $\frac{9\sqrt{3}}{8}$

참고 닮음인 두 도형의 닮음비가 $m:n$일 때, 넓이의 비는 $m^2:n^2$이다. 즉 만들어지는 모든 마름모는 닮음이고,

$a_{n+1}:a_n=\frac{3}{5}a_n:a_n=3:5$

이므로

$S_{n+1}:S_n=3^2:5^2=9:25$

28 그림 R_1에서 △ABM과 △EBF는 닮음이므로

$\overline{AM}:\overline{AB}=\overline{EF}:\overline{EB}$

즉 $1:2=\overline{EF}:(2-\overline{EF})$이므로

$2\overline{EF}=2-\overline{EF} \quad \therefore \overline{EF}=\frac{2}{3}$

$\therefore S_1=\square ABCD-\triangle MBC-2\square AEFG$

$=\frac{1}{2}\square ABCD-2\square AEFG$

$=\frac{1}{2}\cdot 2^2-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$=\frac{10}{9}$

$\triangle MBC=\frac{1}{2}\square ABCD$

한편 두 정사각형 ABCD와 AEFG의 닮음비는 $2:\frac{2}{3}=3:1$이므로 넓이의 비는 $9:1$이다.

$\therefore S_2=S_1+2\cdot\frac{1}{9}S_1$

R_1의 가장 작은 정사각형의 개수

이때 $R_{n-1}\ (n\ge 2)$의 가장 작은 정사각형의 개수가 2^{n-1}이므로

$S_n=S_1+2\cdot\frac{1}{9}S_1+2^2\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2\cdot S_1$

$+\cdots+2^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\cdot S_1$

$=S_1+\frac{2}{9}S_1+\left(\frac{2}{9}\right)^2S_1+\cdots+\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}S_1$

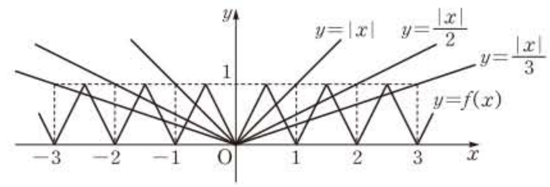
$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{S_1}{1-\frac{2}{9}}=\frac{\frac{10}{9}}{\frac{7}{9}}$

$=\frac{10}{7}$

답 $\frac{10}{7}$

사고력 강화를 위한 수능형 문제 본책 26쪽

01 직선 $y=\frac{|x|}{n}$와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



위의 그림에서

$a_1=3,\ a_2=7,\ a_3=11,\ \cdots$

이므로 $a_n=4n-1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{180}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{180}{(4n-1)(4n+3)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{180}{(4k-1)(4k+3)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}45\left(\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k+3}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}45\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}45\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4n+3}\right)$

$=45\cdot\frac{1}{3}=15$

답 15

02 $a_n=1+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2}$이므로

$y_n=\frac{9a_n+3}{3a_n-1}=\frac{9\cdot\frac{n+1}{2}+3}{3\cdot\frac{n+1}{2}-1}=\frac{9n+15}{3n+1}$

y_n은 직선 $x=a_n$과 곡선 $y=\frac{9x+3}{3x-1}$이 만나는 점의 y좌표이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\frac{9n+15}{3n+1}=3$

한편 $y_1=\frac{9+15}{3+1}=6$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(\log_2 y_{n+1}-\log_2 y_n)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\log_2 y_{k+1}-\log_2 y_k)$

$=\lim_{n\to\infty}\{(\log_2 y_2-\log_2 y_1)+(\log_2 y_3-\log_2 y_2)$

$+\cdots+(\log_2 y_{n+1}-\log_2 y_n)\}$

$=\lim_{n\to\infty}(\log_2 y_{n+1}-\log_2 y_1)$

$\lim_{n\to\infty}y_{n+1}=\lim_{n\to\infty}y_n=3$

$=\log_2 3-\log_2 6=\log_2\frac{1}{2}$

$=-1$

답 ②

03 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}\right)^n$이 수렴하므로

$-1<\frac{r}{2}<1 \quad \therefore -2<r<2$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r^2+2r+a}{10}\right)^n$이 수렴하려면

$$-1<\frac{r^2+2r+a}{10}<1$$

이어야 한다.

(i) $-1<\frac{r^2+2r+a}{10}$에서

$$r^2+2r+a+10>0$$
$$\therefore (r+1)^2+a+9>0$$

$f(r)=(r+1)^2+a+9$라 하면 $-2<r<2$에서 $f(r)$의 최솟값은

$$f(-1)=a+9$$

$f(r)>0$이려면 $\quad a+9>0$

$$\therefore a>-9$$

(ii) $\frac{r^2+2r+a}{10}<1$에서

$$r^2+2r+a-10<0$$
$$\therefore (r+1)^2+a-11<0$$

$g(r)=(r+1)^2+a-11$이라 하면 $-2<r<2$에서

$$g(r)<g(2)=a-2$$

$g(r)<0$이려면 $\quad a-2\le 0$

$$\therefore a\le 2$$

(i), (ii)에서 $\quad -9<a\le 2$

따라서 정수 a는 -8, -7, $\cdots$, 2의 11개이다.

답 11

1등급 비밀노트

이차함수 $f(x)=a(x-m)^2+n\,(a>0)$에 대하여 $\alpha\le x\le\beta$일 때,

① $m>\beta$인 경우
➡ $f(x)$의 최댓값은 $f(\alpha)$, 최솟값은 $f(\beta)$이다.

② $\alpha\le m\le\beta$인 경우
➡ $f(x)$의 최솟값은 $f(m)=n$, 최댓값은 $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이다.

③ $m<\alpha$인 경우
➡ $f(x)$의 최댓값은 $f(\beta)$, 최솟값은 $f(\alpha)$이다.

04 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(p^n-q^n)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}(p^n-q^n)=0 \quad\cdots\cdots ㉠$$

ㄱ. [반례] $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{3}$일 때,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(p^n-q^n)=\sum_{n=1}^{\infty}p^n-\sum_{n=1}^{\infty}q^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$$
$$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

즉 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(p^n-q^n)$은 수렴하지만 $\sum_{n=1}^{\infty}p^n=1$, $\sum_{n=1}^{\infty}q^n=\frac{1}{2}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}p^n\ne\sum_{n=1}^{\infty}q^n$$

ㄴ. $-1<p<1$이면 $\quad\lim_{n\to\infty}p^n=0$

㉠에서 $p^n-q^n=r_n$으로 놓으면 $\lim_{n\to\infty}r_n=0$이고 $q^n=p^n-r_n$이므로

$$\lim_{n\to\infty}q^n=\lim_{n\to\infty}(p^n-r_n)=0$$
$$\therefore -1<q<1$$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(p^n+q^n)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}(p^n+q^n)=0 \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

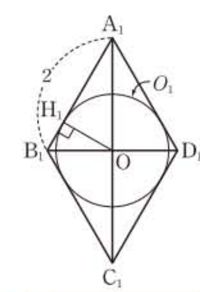
$$\lim_{n\to\infty}(p^n-q^n)+\lim_{n\to\infty}(p^n+q^n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(p^n-q^n+p^n+q^n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}2p^n=0$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}p^n=0$$

따라서 $-1<p<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}p^n$도 수렴한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

05 마름모 $A_1B_1C_1D_1$의 두 대각선의 교점을 O, 마름모 $A_1B_1C_1D_1$과 원 O_1의 한 접점을 H_1이라 하자.



$\triangle A_1B_1O$에서

$$\overline{B_1O}=2\cos 60°=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

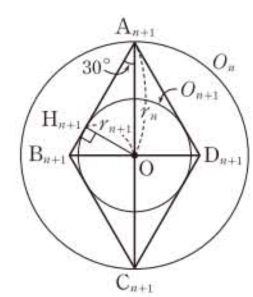
또 $\triangle B_1OH_1$에서

$$\overline{OH_1}=\overline{OB_1}\sin 60°$$

원의 접선은 그 접점을 지나는 원의 반지름과 서로 수직이므로
$\overline{OH_1}\perp\overline{A_1B_1}$

$$=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\therefore S_1=\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}\pi$$

오른쪽 그림과 같이 마름모 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$과 원 O_{n+1}의 한 접점을 H_{n+1}, 원 O_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하자.



$\triangle A_{n+1}OH_{n+1}$에서 $\overline{OH_{n+1}}=\overline{OA_{n+1}}\sin 30°$이므로

$$r_{n+1}=r_n\sin 30°=\frac{r_n}{2}$$
$$\therefore S_{n+1}=\pi r_{n+1}{}^2$$
$$=\pi\left(\frac{r_n}{2}\right)^2$$
$$=\frac{\pi}{4}r_n{}^2$$
$$=\frac{1}{4}S_n$$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{3}{4}\pi$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{3}{4}\pi}{1-\frac{1}{4}}=\pi$$

답 ③

만점 도전을 위한 실전 마무리 문제

본책 27~30쪽

01 전략 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. [반례] $a_n=n$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이지만

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$

ㄴ. [반례] $\{a_n\}$: $1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \cdots$

$\{b_n\}$: $0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots$

이면 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모두 발산하지만

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$이므로 수열 $\{a_nb_n\}$은 수렴한다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\beta$라 하면

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)+\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\right\}$$
$$=\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\right\}$$
$$=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

따라서 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모두 수렴한다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

02 전략 극한값을 구하는 식을 극한값이 주어진 식과 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\lim_{n\to\infty}\frac{20n+5}{a_n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+3}{(n+2)a_n}\cdot\frac{(20n+5)(n+2)}{n^2+2n+3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+3}{(n+2)a_n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{20n^2+45n+10}{n^2+2n+3}$$
$$=\frac{1}{4}\cdot 20=5$$

답 ②

03 전략 로그의 성질을 이용하여 식을 변형한 후 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한을 계산한다.

풀이 $a_n=3\cdot 2^{n-1}$, $b_n=5\cdot 8^{n-1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\log_{a_n}b_n=\lim_{n\to\infty}\log_{3\cdot 2^{n-1}}(5\cdot 8^{n-1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(5\cdot 8^{n-1})}{\log(3\cdot 2^{n-1})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\log 5+(n-1)\log 8}{\log 3+(n-1)\log 2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\log 5}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\log 8}{\frac{\log 3}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\log 2}$$
$$=\frac{\log 8}{\log 2}=3$$

답 ④

$a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$, $N>0$일 때, $\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$

04 전략 분모를 유리화한다.

풀이 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{kn+1}}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{kn+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{k+\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}{2}$$
$$=\sqrt{k}$$

따라서 $\sqrt{k}=5$이므로 $k=25$ 답 ⑤

05 전략 $\sqrt{n^2+6n+3}$의 값의 범위를 이용하여 a_n, b_n을 구한다.

풀이 $\sqrt{n^2+4n+4}<\sqrt{n^2+6n+3}<\sqrt{n^2+6n+9}$

이므로

$\sqrt{(n+2)^2}<\sqrt{n^2+6n+3}<\sqrt{(n+3)^2}$

$\therefore\ n+2<\sqrt{n^2+6n+3}<n+3$

즉 $a_n=n+2$, $b_n=\sqrt{n^2+6n+3}-(n+2)$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\{\sqrt{n^2+6n+3}-(n+2)\}}{n}$$

$\sqrt{n^2+6n+3}+(n+2)$를 분자, 분모에 곱한다.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\{n^2+6n+3-(n+2)^2\}}{n(\sqrt{n^2+6n+3}+n+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(2n-1)}{n(\sqrt{n^2+6n+3}+n+2)}$$

n^2으로 분자, 분모를 나눈다.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{6}{n}+\frac{3}{n^2}}+1+\frac{2}{n}}$$
$$=\frac{1\cdot 2}{1+1}=1$$

답 ③

06 전략 $|x|>1$, $|x|=1$, $|x|<1$일 때로 범위를 나누어 $f(x)$를 각각 구한다.

풀이 (i) $|x|>1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(x^{2n}-1)}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x^{2n}}\right)}{1+\frac{1}{x^{2n}}}$$
$$=x$$

(ii) $x=\pm 1$일 때,

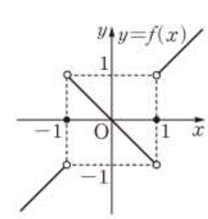
$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$이므로 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(x^{2n}-1)}{x^{2n}+1}=0$

(iii) $|x|<1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(x^{2n}-1)}{x^{2n}+1}=-x$$

이상에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $-1<x<1$일 때,

$f(x)=-x$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

ㄴ. [반례] $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{1}{2}$이면 $x_1<x_2$이지만

$f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$이므로

$f(x_1)>f(x_2)$

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점은 없으므로 방정식 $f(x)=1$은 실근을 갖지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

07

전략 $3+2\cos\theta$의 값의 범위를 나누어 등비수열의 극한을 계산한다.

풀이 $0\le\theta\le\pi$에서 $-1\le\cos\theta\le1$이므로

$1\le 3+2\cos\theta\le5$

$1\le3+2\cos\theta<4$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3^{n+1}}{(3+2\cos\theta)^{n+1}}=\infty$

$4<3+2\cos\theta\le5$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3^{n+1}}{(3+2\cos\theta)^{n+1}}=0$

따라서 0이 아닌 극한값이 존재하려면 $3+2\cos\theta=4$이어야 한다.

즉 $\cos\theta=\frac{1}{2}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{3}$ ($\because 0\le\theta\le\pi$)

$$\begin{aligned}\therefore a&=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3^{n+1}}{(3+2\cos\theta)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3^{n+1}}{4^{n+1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+3\left(\frac{3}{4}\right)^n}{4}\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$\therefore a\theta=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{12}$ 답 ②

08

전략 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{k+2}=\lim_{n\to\infty}(S_{n+2}-a_1-a_2)$임을 이용한다.

풀이
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n-2}{2n^2+3n+4}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}-\frac{2}{n^2}}{2+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+2})&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k+a_{k+2})\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}a_{k+2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}(S_n+S_{n+2}\underbrace{-a_1-a_2}_{-(a_1+a_2)=-S_2})\\&=\lim_{n\to\infty}(S_n+S_{n+2}-S_2)\end{aligned}$$

이때

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{n+2}=\frac{3}{2}$, $S_2=\frac{3\cdot2^2+4\cdot2-2}{2\cdot2^2+3\cdot2+4}=1$

이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+2})&=\lim_{n\to\infty}(S_n+S_{n+2}-S_2)\\&=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-1\\&=2\end{aligned}$$

답 ③

09

전략 주어진 식을 수열 $\{a_n\}$의 극한으로 나타낸다.

풀이
$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}{}^2-a_n{}^2)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}{}^2-a_k{}^2)\\&=\lim_{n\to\infty}\{(a_2{}^2-a_1{}^2)+(a_3{}^2-a_2{}^2)+\cdots+(a_{n+1}{}^2-a_n{}^2)\}\\&=\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}{}^2-a_1{}^2)\end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n+5}-n)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}+1}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

이므로

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{2}$

또 $a_1=\sqrt{1^2+3+5}-1=2$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)&=\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}{}^2-4)\\&=\left(\frac{3}{2}\right)^2-4=-\frac{7}{4}\end{aligned}$$

답 ②

10

전략 $\overline{\mathrm{OB}_n}$의 길이, 점 A_n과 직선 $y=\frac{1}{3}x$ 사이의 거리를 이용하여 S_n을 구한다.

점 B_n과 직선 $y=3x$ 사이의 거리를 이용할 수도 있다.

풀이 자연수 n에 대하여 $\mathrm{A}_n(n,\ 3n)$, $\mathrm{B}_n(3n,\ n)$이고

$\overline{\mathrm{OB}_n}=\sqrt{9n^2+n^2}=\sqrt{10}\,n$

또 점 A_n과 직선 $y=\frac{1}{3}x$, 즉 $x-3y=0$ 사이의 거리가

$\frac{|n-9n|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{8n}{\sqrt{10}}$

이므로 삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$의 넓이는

$S_n=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\,n\cdot\frac{8n}{\sqrt{10}}=4n^2$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{S_nS_{n+2}}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2\cdot4(n+2)^2}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n(n+2)}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k(k+2)}\\&=\frac{1}{8}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\frac{1}{8}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\\&=\frac{1}{8}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{16}\end{aligned}$$

답 ②

11 전략 등비급수의 합을 이용하여 수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비를 구한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=2$에서 $\quad \frac{a}{1-r}=2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2=12$에서 $\quad \frac{a^2}{1-r^2}=12$

$\therefore \frac{a^2}{(1+r)(1-r)}=12 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=3,\ r=-\frac{1}{2}$

따라서 수열 $\{a_n^3\}$은 첫째항이 $a^3=27$, 공비가 $r^3=-\frac{1}{8}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3=\frac{27}{1-\left(-\frac{1}{8}\right)}=24$$

답 ③

㉠을 ㉡에 대입하면

$2\cdot\frac{a}{1+r}=12$

$a=6(1+r)$

$\therefore a-6r=6 \quad \cdots$ ㉢

㉠에서 $\quad a=2(1-r)$

$\therefore a+2r=2 \quad \cdots$ ㉣

㉢−㉣을 하면

$-8r=4$

$\therefore r=-\frac{1}{2}$

$r=-\frac{1}{2}$을 ㉢에 대입하면 $\quad a=3$

12 전략 각 항이 양수인 등비수열의 급수가 수렴하면 $0<$(공비)<1임을 이용한다.

풀이 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 r, s라 하자.

ㄱ. 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 각 항이 양수이고, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하므로

$0<r<1,\ 0<s<1$

이때 수열 $\{a_nb_n\}$은 공비가 rs인 등비수열이고 $0<rs<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$은 수렴한다.

ㄴ. [반례] $r=\frac{1}{2}$, $s=2$라 하면 수열 $\{a_nb_n\}$은 공비가 1인 등비수열이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$은 발산하지만 수열 $\{a_n\}$은 0에 수렴한다.

ㄷ. 주어진 명제의 대우는

'$\lim_{n\to\infty} a_n\neq0$이고 $\lim_{n\to\infty} b_n\neq0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$은 발산한다.'

이다. $\lim_{n\to\infty} a_n\neq0$, $\lim_{n\to\infty} b_n\neq0$에서

$r\geq1,\ s\geq1$

이때 수열 $\{a_nb_n\}$은 공비가 rs인 등비수열이고 $rs\geq1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$은 발산한다.

따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

13 전략 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $\quad \lim_{n\to\infty} a_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_{2n-1}=0$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} A_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이고,

$\lim_{n\to\infty} A_{2n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n} a_k=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이므로

$\lim_{n\to\infty} A_n=\lim_{n\to\infty} A_{2n}$

ㄷ. 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(0<r<1)$라 하면

$a_n>0$이므로 공비는 양수이다.

$$\lim_{n\to\infty} A_n=\frac{a_1}{1-r}$$

한편 $\{a_{2n-1}\}$: a_1, a_3, a_5, a_7, $\cdots$이므로 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 a_1, 공비가 r^2인 등비수열이다.

$a_1,\ a_1r^2,\ a_1r^4,\ a_1r^6,\ \cdots$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} B_n=\frac{a_1}{1-r^2}=\frac{a_1}{1-r}\cdot\frac{1}{1+r}$$

이때 $\frac{1}{2}<\frac{1}{1+r}<1$이므로

$\frac{a_1}{1-r}\cdot\frac{1}{1+r}<\frac{a_1}{1-r}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} B_n<\lim_{n\to\infty} A_n$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

참고 ㄷ. $0<r<1$에서 $\quad 1<1+r<2$

$\therefore \frac{1}{2}<\frac{1}{1+r}<1$

14 전략 등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 r이면 수열 $\{a_{2n}\}$, $\{a_n^2\}$은 모두 공비가 r^2인 등비수열이다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(-1<r<1)$라 하자.

조건 (가)에서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $-1<r<1$이다.

조건 (가)에서

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{a}{1-r}=p \quad \cdots\cdots$ ㉠

수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $a_2=ar$, 공비가 r^2인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}=\frac{ar}{1-r^2}=\frac{ar}{(1-r)(1+r)}=\frac{r}{1+r}p\ (\because ㉠)$$

조건 (나)에서 $\frac{r}{1+r}p=\frac{1}{4}p$이므로

$4r=1+r \quad \therefore r=\frac{1}{3}$

수열 $\{a_n^2\}$은 첫째항이 a^2, 공비가 r^2인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2=\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{a^2}{(1-r)(1+r)}=\frac{a}{1+r}p\ (\because ㉠)$$

조건 (다)에서 $\frac{a}{1+r}p=\frac{9}{8}p$이므로

$a=\frac{9}{8}(1+r)=\frac{9}{8}\cdot\frac{4}{3}=\frac{3}{2}$

$a=\frac{3}{2}$, $r=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$$p=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{9}{4}$$

답 ③

15 전략 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\pm\sum_{n=1}^{\infty} b_n$임을 이용한다.

풀이 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=B$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)=5$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3b_n)=3$

에서 $\quad A-2B=5,\ A-3B=3$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)$
$=\sum_{n=1}^{\infty} a_n-2\sum_{n=1}^{\infty} b_n$
$=A-2B$

앞의 식을 연립하여 풀면

$A=9,\ B=2$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=A+B=11$ 답 ②

16 전략 수열 $\{b_n\}$의 각 항을 차례대로 구한다.

풀이 $\{a_n\}$: 1, 11, 111, 1111, 11111, ⋯

이므로 수열 $\{b_n\}$은 다음과 같다.

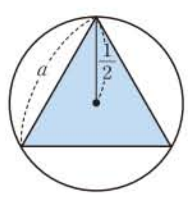
$\{b_n\}$: 1, 2, 0, 1, 2, 0, ⋯

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{10^n}&=\frac{1}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{0}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{2}{10^5}\\&\quad+\frac{0}{10^6}+\frac{1}{10^7}+\frac{2}{10^8}+\frac{0}{10^9}+\cdots\\&=\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^7}+\cdots\right)\\&\quad+\left(\frac{2}{10^2}+\frac{2}{10^5}+\frac{2}{10^8}+\cdots\right)\\&=\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10^3}}+\frac{\frac{2}{10^2}}{1-\frac{1}{10^3}}\\&=\frac{1000}{999}\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{10^2}\right)\\&=\frac{40}{333}\end{aligned}$$

답 ③

17 전략 원에 내접하는 정삼각형의 넓이를 구하고, 두 삼각형의 닮음비를 구한다.

풀이 R_1에서 그린 작은 원의 지름의 길이가 1이므로 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$인 원에 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이를 a라 하면



$\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore a=\frac{\sqrt{3}}{2}$

원의 중심은 정삼각형의 무게중심과 일치하므로 원의 반지름의 길이는 정삼각형의 높이의 $\frac{2}{3}$이다.

$\therefore S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3\sqrt{3}}{16}$

한편 R_n에서 새로 만들어진 작은 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하면 R_{n+1}에서 새로 만들어진 작은 원의 반지름의 길이 r_{n+1}은

$r_{n+1}=2r_n\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}r_n$

R_n에서 새로 만들어진 큰 원의 반지름의 길이

따라서 R_n에서 새로 색칠한 정삼각형과 R_{n+1}에서 새로 색칠한 정삼각형의 닮음비는

$r_n : r_{n+1}=r_n : \frac{2}{3}r_n=3:2$

이므로 넓이의 비는 9 : 4이다. 즉

$S_n=\frac{3\sqrt{3}}{16}+\frac{3\sqrt{3}}{16}\cdot\frac{4}{9}+\frac{3\sqrt{3}}{16}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2+\cdots+\frac{3\sqrt{3}}{16}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$

이므로 S_n은 첫째항이 $\frac{3\sqrt{3}}{16}$, 공비가 $\frac{4}{9}$인 등비급수의 제 n항까지의 부분합이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{16}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{27\sqrt{3}}{80}$ 답 ③

18 전략 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$임을 이용한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha\ (\alpha\ge 0)$라 하면

$a_n>0$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n\ge 0$

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$ ⋯ ❶

$a_{n+1}=\sqrt{8a_n+9}$에서 $a_{n+1}{}^2=8a_n+9$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}{}^2=\lim_{n\to\infty}(8a_n+9)$

$\alpha^2=8\alpha+9,\quad \alpha^2-8\alpha-9=0$

$(\alpha+1)(\alpha-9)=0\quad \therefore \alpha=9\ (\because \alpha\ge 0)$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=9$이므로 ⋯ ❷

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{9}=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}$임을 알 수 있다.	30 %
❷ $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

19 전략 점 P_n의 좌표를 구한 후 $\infty-\infty$ 꼴의 극한을 계산한다.

풀이 $nx=\frac{1}{x}$에서 $\quad x^2=\frac{1}{n}$

$x>0$이므로 $\quad x=\frac{1}{\sqrt{n}}$

따라서 점 P_n의 좌표가 $\left(\frac{1}{\sqrt{n}},\ \sqrt{n}\right)$이므로

$a_n=\overline{\mathrm{OP}_n}=\sqrt{\frac{1}{n}+n}=\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n}}$

$$\begin{aligned}\therefore &\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}\,a_{n+2}-\sqrt{n}\,a_n)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}\cdot\frac{\sqrt{(n+2)^2+1}}{\sqrt{n+2}}-\sqrt{n}\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+5}-\sqrt{n^2+1})\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n+5-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+4n+5}+\sqrt{n^2+1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+4}{\sqrt{n^2+4n+5}+\sqrt{n^2+1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{4}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\\&=\frac{4}{1+1}=2\end{aligned}$$

답 2

20 전략 부등식의 각 변을 n^2으로 나누어 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값을 구한다.

풀이 $|a_n-4n^2-3n|<12$에서

$4n^2+3n-12<a_n<4n^2+3n+12$

각 변을 n^2으로 나누면

$$4+\frac{3}{n}-\frac{12}{n^2}<\frac{a_n}{n^2}<4+\frac{3}{n}+\frac{12}{n^2}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{3}{n}-\frac{12}{n^2}\right)=4$, $\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{3}{n}+\frac{12}{n^2}\right)=4$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=4$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+5n^2}{a_n-3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n^2}+5}{\frac{a_n}{n^2}-3}=\frac{4+5}{4-3}=9$$

답 9

21 전략 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$임을 이용한다.

풀이 점 $P_n(2^n, -1)$에서의 접선의 방정식은

$$2^nx-y=4^n+1$$

$$\therefore y=2^nx-4^n-1 \quad \cdots ❶$$

따라서 $A_n(2^n+2^{-n}, 0)$, $B_n(0, -4^n-1)$이므로

$$S_n=\frac{1}{2}(2^n+2^{-n})(4^n+1)=\frac{1}{2}(8^n+2^{n+1}+2^{-n}) \quad \cdots ❷$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8^{n+1}+2^{n+2}+2^{-n-1}}{8^n+2^{n+1}+2^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{8+4\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^n}{1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{16}\right)^n}=8 \quad \cdots ❸$$

답 8

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❷ S_n을 구할 수 있다.	30%
❸ $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}$의 값을 구할 수 있다.	40%

22 전략 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$임을 이용하여 식을 정리한다.

풀이 $\frac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\frac{S_{n+1}-S_n}{S_nS_{n+1}}=\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)$$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $S_1=a$이고

$$S_{n+1}=\frac{(n+1)(2a+nd)}{2}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n+1)(2a+nd)}=0$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)=\frac{1}{S_1}=\frac{1}{a}$$

따라서 $\frac{1}{a}=\frac{1}{4}$이므로 $a=4$

답 4

23 전략 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n$임을 이용한다.

풀이 $2^{2n}\cdot5^nx^2-(2^{2n+1}+3\cdot5^n)x+6=0$에서

$$(4^nx-3)(5^nx-2)=0$$

$$\therefore x=\frac{3}{4^n} \text{ 또는 } x=\frac{2}{5^n}$$

따라서 $l_n=\frac{3}{4^n}-\frac{2}{5^n}$이므로 ⋯ ❶

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4^n}-\frac{2}{5^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^n}=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}}-\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{5}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \quad \cdots ❷$$

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ l_n을 구할 수 있다.	50%
❷ $\sum_{n=1}^{\infty}l_n$의 값을 구할 수 있다.	50%

24 전략 선분 OA_1과 직선 l이 수직임을 이용한다.

풀이 직선 l의 기울기가 $-\frac{3}{4}$이므로 직선 l과 기울기가 $\frac{4}{3}$인 직선은 수직이다.

따라서 $\overline{OA_1}$, $\overline{B_1A_2}$, $\overline{B_2A_3}$, ⋯을 반지름으로 하는 원은 각각 직선 l에 접하고 점 A_1, A_2, A_3, ⋯은 접점이다.

$\overline{OA_1}=\frac{|-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$이므로 점 B_1의 좌표는 $(2, 0)$이고

$$\overline{B_1A_2}=\frac{|6-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{4}{5}$$

즉 점 B_2의 좌표가 $\left(\frac{14}{5}, 0\right)$이고

$$\overline{B_2A_3}=\frac{\left|\frac{42}{5}-10\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{8}{25}$$

따라서 중심이 각각 B_1, B_2인 두 원의 닮음비가 $\frac{4}{5}:\frac{8}{25}=5:2$이므로 두 삼각형 $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$의 넓이의 비는 $25:4$이다.

직선 OA_1의 방정식은 $y=\frac{4}{3}x$, 즉 $4x-3y=0$이고 $\overline{A_1A_2}$의 길이는 점 B_1과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{A_1A_2}=\frac{|8|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{8}{5}$$

주어진 이차함수의 그래프와 x축이 만나는 두 점의 좌표는 $\left(\frac{3}{4^n}, 0\right)$, $\left(\frac{2}{5^n}, 0\right)$

$y=2^nx-4^n-1$에 $y=0$을 대입하면 $x=\frac{4^n+1}{2^n}=2^n+2^{-n}$

$3x+4y-10=0$에서 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$

$\overline{A_1O}\,/\!/\,\overline{A_2B_1}$이므로 $\angle A_1OB_1=\angle A_2B_1B_2$ (동위각)
따라서 두 이등변삼각형 OA_1B_1, $B_1A_2B_2$에서 $\angle OA_1B_1=\angle B_1A_2B_2$이므로 $\angle B_1A_1A_2=\angle B_2A_2A_3$
또 $\angle A_1A_2B_1=\angle A_2A_3B_2$이므로 $\triangle A_1B_1A_2 \backsim \triangle A_2B_2A_3$

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은 $\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

따라서 수열 $\{S_n\}$은

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{5}=\frac{16}{25}$$

이고 공비가 $\frac{4}{25}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{16}{25}}{1-\frac{4}{25}}=\frac{16}{21}$$

답 $\frac{16}{21}$

최상위로 가는 최고 수준 문제

본책 31쪽

01

해결 단계

❶ 부채꼴의 중심각의 크기 θ_n에 대한 관계식을 구한다.
❷ $\lim_{n\to\infty}\theta_n$의 값을 구한다.
❸ $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값을 구한다.

풀이 ❶ 부채꼴 P_0OP_n의 중심각의 크기를 θ_n이라 하면 $\overset{\frown}{P_nP_0}=\theta_n$이므로

$$\theta_1=\frac{\pi}{2}$$

$$\theta_2=\theta_1-\frac{1}{3}\theta_1+\frac{\pi}{2}=\frac{2}{3}\theta_1+\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{2}{3}\right)$$

$$\theta_3=\frac{2}{3}\theta_2+\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}$$

$$\theta_4=\frac{2}{3}\theta_3+\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3\right\}$$

$$\vdots$$

$$\theta_n=\frac{\pi}{2}\left\{1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{3}{2}\pi\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

❷ $\therefore \lim_{n\to\infty}\theta_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\pi\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$

$$=\frac{3}{2}\pi$$

❸ $S_n=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\theta_n=\frac{1}{2}\theta_n$이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\theta_n$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\pi=\frac{3}{4}\pi$$

답 $\frac{3}{4}\pi$

일품 BOX

중심각의 크기가 θ이고, 반지름의 길이가 r인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면
$l=r\theta$
$S=\frac{1}{2}r^2\theta$

코사인법칙
삼각형 ABC에서
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

1등급 비밀노트

$a_{n+1}=pa_n+q$ 꼴로 주어진 수열은

$$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)\ \left(단,\ \alpha=\frac{q}{1-p}\right)$$

꼴로 변형하여 등비수열 $\{a_n-\alpha\}$를 이용하여 일반항을 구할 수도 있다.

즉 앞의 문제에서 $\theta_{n+1}=\frac{2}{3}\theta_n+\frac{\pi}{2}$이므로

$$\theta_{n+1}-\frac{3}{2}\pi=\frac{2}{3}\left(\theta_n-\frac{3}{2}\pi\right)$$

따라서 수열 $\left\{\theta_n-\frac{3}{2}\pi\right\}$는 첫째항이 $\theta_1-\frac{3}{2}\pi=\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\pi=-\pi$이고, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로

$$\theta_n-\frac{3}{2}\pi=-\pi\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \theta_n=\frac{3}{2}\pi-\pi\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{3}{2}\pi\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

02

해결 단계

❶ 삼각형 AB_nC_n의 넓이 S_n을 구한다.
❷ 코사인법칙을 이용하여 a_n을 구한다.
❸ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n+S_n}{a_{2n}}\right)^2$의 값을 구한다.

풀이 ❶ 삼각형 AB_nC_n의 넓이는

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot2^n\cdot2^{n+2}\cdot\sin60°$$

$$=\sqrt{3}\cdot4^n$$

❷ $a_n^2=(2^n)^2+(2^{n+2})^2-2\cdot2^n\cdot2^{n+2}\cdot\cos60°$

$$=4^n+16\cdot4^n-4\cdot4^n$$

$$=13\cdot4^n$$

이므로 $a_n=\sqrt{13}\cdot2^n$

❸ $\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+S_n}{a_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{13}\cdot2^n+\sqrt{3}\cdot4^n}{\sqrt{13}\cdot4^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{13}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

$$=\frac{\sqrt{39}}{13}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n+S_n}{a_{2n}}\right)^2=\frac{\sqrt{39}}{13}\cdot\frac{\sqrt{39}}{13}$$

$$=\frac{3}{13}$$

답 $\frac{3}{13}$

03

해결 단계

❶ 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 r, s라 하고, rs의 값을 구한다.
❷ r, s의 값을 구한다.
❸ $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)^2$의 값을 구한다.
❹ $p+q$의 값을 구한다.

풀이 ❶ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 조건 (다)에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$도 수렴한다.
등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 r, s라 하면
$-1<r<1$, $-1<s<1$이고

$$a_n=r^{n-1},\ b_n=s^{n-1},\ a_nb_n=(rs)^{n-1}$$

조건 (가)에서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{1}{1-rs} = \frac{9}{10}$

이므로 $1-rs = \frac{10}{9}$ $\quad \therefore rs = -\frac{1}{9}$ …… ㉠

❷ 조건 (나)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-s} = \frac{9}{4}$$

이므로 $\frac{2-r-s}{1-r-s+rs} = \frac{9}{4}$

$4(2-r-s) = 9\left(1-r-s-\frac{1}{9}\right)$ ($\because$ ㉠)

$8-4(r+s) = 8-9(r+s)$

$r+s=0 \quad \therefore s=-r$

이를 ㉠에 대입하면 $r^2 = \frac{1}{9}$

$\therefore r=\frac{1}{3}, s=-\frac{1}{3}$ 또는 $r=-\frac{1}{3}, s=\frac{1}{3}$

조건 (다)에서 $a_n \ge b_n$이므로

$r=\frac{1}{3}, s=-\frac{1}{3}$

❸ $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)^2$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 - \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n b_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

$$= \frac{1}{1-r} - \frac{1}{1-s} + \frac{1}{1-r^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n + \frac{1}{1-s^2}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{1}{1+\frac{1}{3}} + \frac{1}{1-\frac{1}{9}} - 2\cdot\frac{9}{10} + \frac{1}{1-\frac{1}{9}}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{3}{4} + \frac{9}{8} - \frac{9}{5} + \frac{9}{8}$$

$$= \frac{6}{5}$$

❹ 따라서 $p=5$, $q=6$이므로

$p+q=11$

답 11

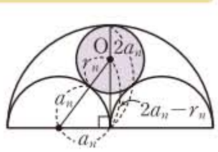
참고 수렴하는 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n q_n \ne \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sum_{n=1}^{\infty} q_n$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)^2 \ne \left\{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)\right\}^2$이다.

04

해결 단계

❶ R_n에서 그린 반원의 반지름의 길이를 n에 대한 식으로 나타낸다.
❷ R_n에서 색칠한 원의 반지름의 길이를 n에 대한 식으로 나타낸다.
❸ $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값을 구한다.
❹ $p+q$의 값을 구한다.

풀이 ❶ 오른쪽 그림과 같이 그림 R_n에서 새로 그린 반원의 반지름의 길이를 a_n, 새로 색칠한 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하면



R_n

$a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$

$\therefore a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ …… ㉠

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

❷ 이때 $(a_n+r_n)^2 = a_n^2 + (2a_n-r_n)^2$이므로

$4a_n^2 - 6a_n r_n = 0$, $\quad 2a_n(2a_n-3r_n)=0$

$a_n \ne 0$이므로 $\quad 2a_n - 3r_n = 0$

$\therefore r_n = \frac{2}{3}a_n = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ($\because$ ㉠)

❸ $r_1 = \frac{2}{3}$이므로

$S_1 = \pi r_1^2 = \frac{4}{9}\pi$

그림 R_n에서 새로 색칠한 원의 개수는 2^{n-1}이므로

$$S_n = S_{n-1} + 2^{n-1}\pi r_n^2 = S_{n-1} + 2^{n-1}\pi\left\{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^2 = S_{n-1} + \frac{4}{9}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

위의 식의 n에 2, 3, 4, …, n을 차례대로 대입하면

$$S_2 = S_1 + \frac{4}{9}\pi\cdot\frac{1}{2} = \frac{4}{9}\pi + \frac{4}{9}\pi\cdot\frac{1}{2} = \frac{4}{9}\pi\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$S_3 = S_2 + \frac{4}{9}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{9}\pi\left\{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$$

$$S_4 = S_3 + \frac{4}{9}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{9}\pi\left\{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}$$

⋮

$$S_n = \frac{4}{9}\pi\left\{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} = \frac{4}{9}\pi\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{4}{9}\pi\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8}{9}\pi\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{8}{9}\pi\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \frac{8}{9}\pi$$

❹ 따라서 $p=9$, $q=8$이므로

$p+q=17$

답 17

Ⅱ 미분법

Ⅱ-1. 지수함수와 로그함수의 미분

개념 & 핵심 기출

본책 34~35쪽

01 $a>4$에서 $0<\frac{4}{a}<1$ 이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^{x+1}+2a^x+4^x}{a^{x+1}-4a^{x-1}-4^{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+2+\left(\frac{4}{a}\right)^x}{a-\frac{4}{a}-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{a}\right)^x}$$

$$=\frac{a+2}{a-\frac{4}{a}}=\frac{a(a+2)}{a^2-4}$$

$$=\frac{a(a+2)}{(a-2)(a+2)}=\frac{a}{a-2}$$

즉 $\frac{a}{a-2}=\frac{3}{2}$이므로 $2a=3a-6$

$\therefore a=6$

답 6

함수의 극한값의 계산

① $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴: 분모에서 밑이 가장 큰 항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

② $\infty-\infty$ 꼴: 밑이 가장 큰 항으로 묶는다.

02 $-x=t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4^{x+1}-3^{x+a}}{4^x-3^x}=\lim_{t\to\infty}\frac{4^{-t+1}-3^{-t+a}}{4^{-t}-3^{-t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{4}{4^t}-\frac{3^a}{3^t}}{\frac{1}{4^t}-\frac{1}{3^t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{4\cdot3^t-3^a\cdot4^t}{4^t\cdot3^t}}{\frac{3^t-4^t}{4^t\cdot3^t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4\cdot3^t-3^a\cdot4^t}{3^t-4^t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^t-3^a}{\left(\frac{3}{4}\right)^t-1}$$

$$=3^a$$

즉 $3^a=9$이므로 $a=2$

답 ④

03 $\lim_{x\to\infty}\{\log_4(2^{2x+a}-2^x)-\log_4(2^{2x+1}+2^x)\}$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_4\left(\frac{2^{2x+a}-2^x}{2^{2x+1}+2^x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_4\left(\frac{2^a\cdot4^x-2^x}{2\cdot4^x+2^x}\right)$$

$$=\log_4\left[\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{2^a-\left(\frac{1}{2}\right)^x}{2+\left(\frac{1}{2}\right)^x}\right\}\right]$$

$$=\log_4\frac{2^a}{2}=\log_{2^2}2^{a-1}$$

$$=\frac{a-1}{2}$$

즉 $\frac{a-1}{2}=\frac{3}{2}$이므로 $a=4$

답 4

04 $x-2=t$로 놓으면 $x\to2$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2-x}}=\lim_{t\to0}\left(\frac{t+2}{2}\right)^{-\frac{1}{t}}$$

$$=\lim_{t\to0}\left\{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{2}{t}}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

답 ④

05 $x-3=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-3}\right)^{2(x-2)}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2(t+1)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right\}^2\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^2$$

$$=e^2\cdot1^2=e^2$$

답 e^2

06 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{ax}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{2x}}{1+\frac{1}{2x}}\right)^{ax}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left\{\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{-2x}\right\}^{-\frac{a}{2}}}{\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right\}^{\frac{a}{2}}}$$

$$=\frac{e^{-\frac{a}{2}}}{e^{\frac{a}{2}}}=e^{-a}$$

즉 $e^{-a}=\frac{1}{e}$이므로 $a=1$

답 1

07 $\lim_{x\to\infty}x\{\ln(x+3)-\ln(x+1)\}$

$$=\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{x+3}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{2}{x+1}\right)$$

$\frac{2}{x+1}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{2}{x+1}\right)=\lim_{t\to0+}\frac{2-t}{t}\cdot\ln(1+t)$$

$$=\lim_{t\to0+}(2-t)\cdot\frac{\ln(1+t)}{t}$$

$$=2\cdot1=2$$

답 ②

$\frac{2}{x+1}=t$에서

$\frac{2}{t}=x+1$

$\therefore x=\frac{2}{t}-1=\frac{2-t}{t}$

08 $y=\ln(2x+1)$로 놓으면

$2x+1=e^y,\quad x=\frac{e^y-1}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{e^x-1}{2}$

따라서 $g(x)=\frac{e^x-1}{2}$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2\ln(2x+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{2x}{\ln(2x+1)}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

09 $\lim_{x\to0}\frac{(\ln 9)^x-(\ln 3)^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(2\ln 3)^x-(\ln 3)^x}{x}$

$=\lim_{x\to0}(\ln 3)^x\cdot\frac{2^x-1}{x}$

$=1\cdot\ln 2=\ln 2$

답 ①

$(2\ln 3)^x-(\ln 3)^x$
$=2^x\cdot(\ln 3)^x-(\ln 3)^x$
$=(\ln 3)^x(2^x-1)$

다른 풀이 $\lim_{x\to0}\frac{(\ln 9)^x-(\ln 3)^x}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\{(\ln 9)^x-1\}-\{(\ln 3)^x-1\}}{x}$

$=\ln(\ln 9)-\ln(\ln 3)$

$=\ln\left(\frac{\ln 9}{\ln 3}\right)$

$=\ln 2$

10 $f(x)=(x^2-1)2^{3x-2}=\frac{1}{4}(x^2-1)8^x$에서

$f'(x)=\frac{1}{4}\{2x\cdot8^x+(x^2-1)\cdot8^x\ln 8\}$

$=\frac{8^x}{4}\{2x+(x^2-1)\ln 8\}$

$\therefore f'(2)=16(4+3\ln 8)$

$=64+144\ln 2$

따라서 $a=64$, $b=144$이므로

$b-a=80$

답 80

11 $f(x)=x\ln(ex)=x(1+\ln x)$에서

$f'(x)=1+\ln x+x\cdot\frac{1}{x}$

$=\ln x+2$

$f'(x)=4$에서 $\ln x=2$

$\therefore x=e^2$

답 ④

12 $f(x)=6\log_2 x$에서 $f(1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$

$=\frac{1}{2}f'(1)$

이때 $f'(x)=\frac{6}{x\ln 2}$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\frac{1}{2}f'(1)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{\ln 2}=\frac{3}{\ln 2}$

답 ③

다른 풀이 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{6\log_2 x}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$

$x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로 위의 식은

$\lim_{t\to0}6\cdot\frac{\log_2(t+1)}{t}\cdot\frac{1}{t+2}=6\cdot\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{\ln 2}$

1등급을 위한 고난도 문제

본책 36~38쪽

01 $x\to0+$일 때 $\frac{1}{x}\to\infty$이므로

$a=\lim_{x\to0+}5^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=0$

$c=\lim_{x\to0+}\frac{5^x-5^{\frac{1}{x}}}{5^x+5^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0+}\frac{\frac{5^x}{5^{\frac{1}{x}}}-1}{\frac{5^x}{5^{\frac{1}{x}}}+1}$

$=\frac{0-1}{0+1}=-1$

$\lim_{x\to0+}5^x=1$, $\lim_{x\to0+}5^{\frac{1}{x}}=\infty$

$x\to0-$일 때 $\frac{1}{x}\to-\infty$이므로

$b=\lim_{x\to0-}\frac{5^x}{1+5^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{1+0}=1$

$\lim_{x\to0-}5^{\frac{1}{x}}=0$

$\therefore c<a<b$

답 ④

02 $a_n=128\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{-n+8}$

$a_n=128\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
$=2^7\cdot(2^{-1})^{n-1}$
$=2^7\cdot2^{-n+1}$
$=2^{-n+8}$

(i) $a_n>1$, 즉 $n=1, 2, 3, \cdots, 7$일 때

$\lim_{x\to\infty}(a_n)^x=\infty$이므로

$b_n=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+(a_n)^x}=0$

(ii) $a_n=1$, 즉 $n=8$일 때

$\lim_{x\to\infty}(a_n)^x=1$이므로

$b_n=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+(a_n)^x}=\frac{1}{2}$

(iii) $0<a_n<1$, 즉 $n=9, 10, \cdots$일 때

$\lim_{x\to\infty}(a_n)^x=0$이므로

$b_n=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+(a_n)^x}=1$

이상에서

$\sum_{n=1}^{10}a_nb_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{10}b_{10}$

$=a_8b_8+a_9b_9+a_{10}b_{10}$

$=1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot1+\frac{1}{4}\cdot1$

$=\frac{5}{4}$

답 $\frac{5}{4}$

03 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x^{2a})-f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(ax)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\log_5 x^{2a}-\log_5\frac{1}{x}}{\log_5 ax}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2a\log_5 x+\log_5 x}{\log_5 a+\log_5 x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2a+1}{\frac{\log_5 a}{\log_5 x}+1}$

$=\frac{2a+1}{0+1}=2a+1$

$\lim_{x\to\infty}\log_5 x=\infty$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_5 a}{\log_5 x}=0$

따라서 $2a+1=\frac{5}{2}$이므로 $a=\frac{3}{4}$

답 ③

일품 BOX

04 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_2(7^x+8^x)}{\log_3(8^x+9^x)}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_2\left[8^x\left\{\left(\frac{7}{8}\right)^x+1\right\}\right]}{\log_3\left[9^x\left\{\left(\frac{8}{9}\right)^x+1\right\}\right]}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_2 8^x+\log_2\left\{\left(\frac{7}{8}\right)^x+1\right\}}{\log_3 9^x+\log_3\left\{\left(\frac{8}{9}\right)^x+1\right\}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+\log_2\left\{\left(\frac{7}{8}\right)^x+1\right\}}{2x+\log_3\left\{\left(\frac{8}{9}\right)^x+1\right\}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$

답 $\dfrac{3}{2}$

$\log_2 8^x=\log_2 2^{3x}=3x$
$\log_3 9^x=\log_3 3^{2x}=2x$

$\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\left\{\left(\frac{7}{8}\right)^x+1\right\}$
$=\log_2 1=0,$
$\lim\limits_{x\to\infty}\log_3\left\{\left(\frac{8}{9}\right)^x+1\right\}$
$=\log_3 1=0$

05 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\frac{a}{x}}{1-\frac{a}{x}}\right)^x$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left\{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right\}^a}{\left\{\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-\frac{x}{a}}\right\}^{-a}}$

$=\dfrac{e^a}{e^{-a}}=e^{2a}$

즉 $e^{2a}=e^{20}$이므로 $a=10$

답 ④

$\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$
(단, $A\neq B$)

06 ㄱ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+2^x}{e^x-2^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\left(\frac{2}{e}\right)^x}{1-\left(\frac{2}{e}\right)^x}=1$

$0<\dfrac{2}{e}<1$이므로
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{e}\right)^x=0$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{1}{x}=-\infty$이므로 $\lim\limits_{x\to 0-}e^{\frac{1}{x}}=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{e^x}{e-e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{e-0}=\dfrac{1}{e}$

ㄷ. $x-1=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t+1}{t}\right)^{t+1}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\dfrac{1}{t}\right)$

$=e\cdot 1=e$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

07 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+(2\sqrt{2})^x+4^x+(4\sqrt{2})^x+8^x-5}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{2^x-1}{x}+\dfrac{(2\sqrt{2})^x-1}{x}+\dfrac{4^x-1}{x}+\dfrac{(4\sqrt{2})^x-1}{x}+\dfrac{8^x-1}{x}\right\}$

$=\ln 2+\ln 2\sqrt{2}+\ln 4+\ln 4\sqrt{2}+\ln 8$

$=\ln 2+\dfrac{3}{2}\ln 2+2\ln 2+\dfrac{5}{2}\ln 2+3\ln 2$

$=10\ln 2$

답 $10\ln 2$

다른 풀이 $f(x)=2^x+(2\sqrt{2})^x+4^x+(4\sqrt{2})^x+8^x$이라 하면 $f(0)=5$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+(2\sqrt{2})^x+4^x+(4\sqrt{2})^x+8^x-5}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$

한편

$f'(x)=2^x\ln 2+(2\sqrt{2})^x\ln 2\sqrt{2}+4^x\ln 4+(4\sqrt{2})^x\ln 4\sqrt{2}+8^x\ln 8$

이므로 구하는 값은

$f'(0)=\ln 2+\ln 2\sqrt{2}+\ln 4+\ln 4\sqrt{2}+\ln 8$
$=10\ln 2$

08 $S_n=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{1}{x}\ln(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)\right\}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}\{\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\cdots+\ln(1+nx)\}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot 2+\cdots+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+nx)}{nx}\cdot n$

$=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ··· ❶

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{S_n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n(n+1)}$

$=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=2\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$

$=2\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=2\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=2$ ··· ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ S_n을 간단히 할 수 있다.	60 %
❷ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{S_n}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

09 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\ln(1+2x)$

$=\lim\limits_{x\to 0}f(x)\ln(1+3x)\cdot\dfrac{\ln(1+2x)}{\ln(1+3x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}f(x)\ln(1+3x)\cdot\dfrac{\frac{\ln(1+2x)}{x}}{\frac{\ln(1+3x)}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}f(x)\ln(1+3x)\cdot\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot 2}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot 3}$

$=5\cdot\dfrac{1\cdot 2}{1\cdot 3}=\dfrac{10}{3}$

답 ③

10 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-ax^2}{1-x}=b \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$x\longrightarrow 1$일 때 (분모)$\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}(e^{x-1}-ax^2)=0$이므로 $\quad 1-a=0$

$$\therefore a=1 \quad \cdots ❶$$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-x^2}{1-x}=b$$

$x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 1$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$b=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-x^2}{1-x}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-(t+1)^2}{-t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-(t^2+2t+1)}{-t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{e^t-1}{t}+t+2\right)$$
$$=-1+2=1 \quad \cdots ❷$$
$$\therefore a+b=2 \quad \cdots ❸$$

답 2

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

11 $a>1$, $x>1$, $a\neq x$이므로

$\log_a x>0$, $\log_a x\neq 1$

$$\therefore f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(\log_a x)^h-1}{h}$$
$$=\ln(\log_a x) \quad \cdots ❶$$

따라서 $f(x^n)-f(x^2)=2\ln 3$에서

$$\ln(\log_a x^n)-\ln(\log_a x^2)=2\ln 3$$
$$\ln(n\log_a x)-\ln(2\log_a x)=2\ln 3$$
$$\ln\frac{n\log_a x}{2\log_a x}=\ln 9$$
$$\frac{n}{2}=9 \qquad \therefore n=18 \quad \cdots ❷$$

답 18

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	60 %

12 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax^2}-1}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax^2}-1}{ax^2}\cdot\frac{ax^2}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax^2}-1}{ax^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{ax^2}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax^2}{f(x)}$$

$x\neq a$에서 연속인 함수 $g(x)$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\neq a) \\ k & (x=a)\end{cases}$$

가 모든 실수 x에서 연속이면

$$\lim_{x\to a} g(x)=k$$

(단, k는 상수)

$x\to a$일 때,

① (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재

➡ (분자)$\to 0$

② (분자)$\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재

➡ (분모)$\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\log_2(1+ax)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\log_2(1+ax)}{ax}}=\frac{1}{\frac{1}{\ln 2}}=\ln 2$$

$y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 서로 바뀌는 경우에도 답은 같다.

함수의 극한의 대소 관계

$f(x)\le h(x)\le g(x)$이고, $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\alpha$ (α는 실수)이면

$$\lim_{x\to a} h(x)=\alpha$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax^2}-1}{ax^2}=1$$

즉 $\lim_{x\to 0}\frac{ax^2}{f(x)}=2$이므로 $\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{f(x)}=\frac{2}{a}$

따라서

$$b=\lim_{x\to 0}\frac{8^{x^2}-1}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{8^{x^2}-1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{8^{x^2}-1}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{f(x)}$$
$$=(\ln 8)\cdot\frac{2}{a}$$
$$\therefore ab=2\ln 8=6\ln 2$$
$$\therefore k=6$$

답 6

13 $f(x)\log_2(1+ax)+1=2^x$에서 $x\neq 0$일 때

$$f(x)=\frac{2^x-1}{\log_2(1+ax)}$$

함수 $f(x)$가 $x>-\frac{1}{2}$에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

이때

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\log_2(1+ax)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}\cdot\frac{ax}{\log_2(1+ax)}\cdot\frac{1}{a}$$
$$=\ln 2\cdot\ln 2\cdot\frac{1}{a}$$
$$=\frac{(\ln 2)^2}{a}$$

이므로 $\quad \frac{(\ln 2)^2}{a}=(\ln 2)^2$

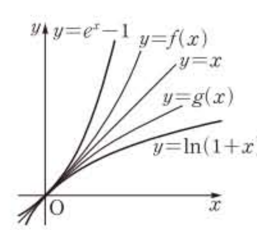
$$\therefore a=1$$

따라서 $x\neq 0$일 때 $f(x)=\frac{2^x-1}{\log_2(1+x)}$이므로

$$f(a)=f(1)=\frac{2-1}{\log_2(1+1)}=1$$

답 ③

14 두 함수 $y=\ln(1+x)$와 $y=e^x-1$, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수 관계이므로 네 함수의 그래프를 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다.



따라서 $\ln(1+x)\le g(x)\le e^x-1$이므로 $x>0$일 때

$$\frac{\ln(1+x)}{x}\le\frac{g(x)}{x}\le\frac{e^x-1}{x}$$

이때 $\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1}{x}=1$이므로

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)}{x}=1$$

$2x=t$로 놓으면 $x \to 0+$일 때 $t \to 0+$이므로

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(2x)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{g(2x)}{2x}\cdot 2$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{g(t)}{t}\cdot 2$$
$$=1\cdot 2=2$$

답 2

15 점 A의 x좌표는 $3^{x-1}=a$에서

$x-1=\log_3 a \qquad \therefore x=\log_3 a+1$

점 B의 x좌표는 $9^{x-1}=a$에서

$x-1=\log_9 a \qquad \therefore x=\log_9 a+1$

이때 $0<a<1$이므로 $\log_9 a+1>\log_3 a+1$

$$\therefore \overline{AB}=(\log_9 a+1)-(\log_3 a+1)$$
$$=\log_9 a-\log_3 a$$
$$=\frac{1}{2}\log_3 a-\log_3 a$$
$$=-\frac{1}{2}\log_3 a \quad \cdots ❶$$

따라서 $\lim_{a\to 1-}\frac{\overline{AB}}{a-1}=\lim_{a\to 1-}\frac{-\frac{1}{2}\log_3 a}{a-1}$에서 $a-1=t$로 놓으면 $a \to 1-$일 때 $t \to 0-$이므로

$$\lim_{a\to 1-}\frac{-\frac{1}{2}\log_3 a}{a-1}=\lim_{t\to 0-}\frac{-\frac{1}{2}\log_3(t+1)}{t}$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\ln 3}=-\frac{1}{2\ln 3} \quad \cdots ❷$$

답 $-\frac{1}{2\ln 3}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$의 길이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $\lim_{a\to 1-}\frac{\overline{AB}}{a-1}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

16 점 P의 좌표를 $(t, \ln\sqrt{t})$라 하면 $\quad Q(t, 0)$

$\therefore \overline{PQ}=\ln\sqrt{t}, \ \overline{AQ}=t-1$

점 P가 제1사분면 위의 점이므로 $\quad t>1$

$\therefore \overline{AQ}=t-1$

점 P가 점 A$(1, 0)$에 한없이 가까워질 때 $t \to 1+$이므로 구하는 극한값은

$$\lim_{t\to 1+}\frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}}=\lim_{t\to 1+}\frac{\ln\sqrt{t}}{t-1}$$

$t-1=h$로 놓으면 $t \to 1+$일 때 $h \to 0+$이므로

$$\lim_{t\to 1+}\frac{\ln\sqrt{t}}{t-1}=\lim_{h\to 0+}\frac{\frac{1}{2}\ln(1+h)}{h}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

답 ③

17 $f(x)=\ln(x-a)+\ln 2$이고, $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\ln(-a)+\ln 2, \qquad \ln(-a)=-\ln 2=\ln\frac{1}{2}$

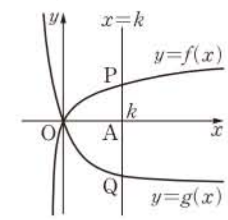
$\therefore a=-\frac{1}{2}$

$$\therefore f(x)=\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)+\ln 2$$
$$=\ln(2x+1) \quad \cdots ❶$$

$g(x)=e^{-(x-b)}-3$이고, $y=g(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$0=e^b-3 \qquad \therefore b=\ln 3$

$$\therefore g(x)=e^{-(x-\ln 3)}-3$$
$$=e^{-x}\cdot e^{\ln 3}-3=3(e^{-x}-1) \quad \cdots ❷$$



$k>0$일 때, $\overline{AP}=\ln(2k+1)$,

$\overline{AQ}=-3(e^{-k}-1)$이므로

$$\lim_{k\to 0+}\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}$$
$$=\lim_{k\to 0+}\frac{\ln(2k+1)}{-3(e^{-k}-1)}$$
$$=\lim_{k\to 0+}\frac{\ln(1+2k)}{2k}\cdot\frac{-k}{e^{-k}-1}\cdot\frac{2}{3}$$
$$=1\cdot 1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$k<0$일 때에도 $\lim_{k\to 0-}\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}=\frac{2}{3}$이므로

$$\lim_{k\to 0-}\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}$$
$$=\lim_{k\to 0-}\frac{-\ln(2k+1)}{3(e^{-k}-1)}$$
$$=\lim_{k\to 0-}\left\{\frac{\ln(2k+1)}{2k}\cdot\frac{-k}{e^{-k}-1}\cdot\frac{2}{3}\right\}$$
$$=1\cdot 1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{k\to 0}\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}=\frac{2}{3} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $g(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\lim_{k\to 0}\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

18 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-2h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)-\{f(-2h)-f(0)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(-2h)-f(0)}{-2h}\cdot 2$$
$$=f'(0)+2f'(0)$$
$$=3f'(0) \quad \cdots ❶$$

이때 $f(x)=(e^x+x)(e^{2x}+2x)$에서

$(e^{2x}+2x)'$
$=(e^x\cdot e^x+2x)'$
$=e^x\cdot e^x+e^x\cdot e^x+2$
$=2e^{2x}+2$

$$f'(x)=(e^x+1)(e^{2x}+2x)+(e^x+x)(2e^{2x}+2) \quad \cdots ❷$$

$$\therefore 3f'(0)=3\cdot(2\cdot 1+1\cdot 4)=18 \quad \cdots ❸$$

답 18

채점 기준	비율
❶ 구하는 극한값을 $f'(x)$의 함숫값으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ 극한값을 구할 수 있다.	20 %

19 점 A$(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)$이고

$$f'(t)=(2t-a)e^t+(t^2-at+2)e^t$$
$$=\{t^2+(2-a)t+2-a\}e^t$$

이때 $e^t>0$이므로 기울기가 항상 양수이려면

$t^2+(2-a)t+2-a>0$이어야 한다.

t에 대한 이차방정식 $t^2+(2-a)t+2-a=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(2-a)^2-4(2-a)<0$$
$$a^2-4<0, \qquad (a+2)(a-2)<0$$
$$\therefore\ -2<a<2$$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1의 3개이다. 답 3

1등급 비밀노트

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 이차방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수와 같다.
즉 이차함수 $y=f(x)$에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이면 이차방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재하지 않는다는 뜻이고, $f(x)=0$의 판별식을 D라 할 때 $D<0$임을 뜻한다.

20 조건 (가)에서 $x\to1$일 때 (분자) $\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to0$이다.
즉 $\lim_{x\to1}\{f(x)-1\}=0$이므로 $\qquad f(1)=1$

> $\lim_{x\to1}f(x)=1$이고 $f(x)$가 $x>0$에서 미분가능하므로 연속이다.
> $\therefore f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$
> $=1$

이때 $h(x)=\ln x$라 하면 $h'(x)=\frac{1}{x}$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{f(x)-1}=\lim_{x\to1}\frac{h(x)}{f(x)-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{f(x)-f(1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}\cdot\frac{x-1}{f(x)-f(1)}$$
$$=h'(1)\cdot\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{f'(1)}$$
$$(\because h'(1)=1)$$

> $h(1)=0$

따라서 $\frac{1}{f'(1)}=2$이므로 $\qquad f'(1)=\frac{1}{2}$

조건 (나)에서

$$f(1)g(1)=e \qquad \therefore g(1)=e$$

조건 (나)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=e^x+\frac{1}{x}$$

위의 식에 $x=1$을 대입하면

$$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=e+1$$
$$\frac{1}{2}\cdot e+1\cdot g'(1)=e+1$$
$$\therefore g'(1)=\frac{e+2}{2}$$

답 $\frac{e+2}{2}$

21 $f(x)=x^2\ln x^3=3x^2\ln x$에서

$$f'(x)=6x\ln x+3x^2\cdot\frac{1}{x}$$
$$=6x\ln x+3x$$
$$\therefore \lim_{x\to0}\left\{\frac{f'(e^x)}{3e^x}\right\}^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left(\frac{6xe^x+3e^x}{3e^x}\right)^{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0}(2x+1)^{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\{(2x+1)^{\frac{1}{2x}}\}^2$$
$$=e^2$$

답 ③

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 39쪽

01 $3ax=t$로 놓으면 $a\to0$일 때 $t\to0$이므로

$$f(x)=\lim_{a\to0}(1+3ax)^{\frac{2x}{a}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{6x^2}{t}}$$
$$=\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{6x^2}=e^{6x^2}$$

> $3ax=t$에서 $a=\frac{t}{3x}$
> $\therefore \lim_{a\to0}(1+3ax)^{\frac{2x}{a}}$
> $=\lim_{t\to0}(1+t)^{2x\cdot\frac{3x}{t}}$
> $=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{6x^2}{t}}$

즉 $\ln f(x)=\ln e^{6x^2}=6x^2$이므로 $6x^2\le100$에서

$$x^2\le\frac{50}{3}=16.\cdots$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 x는 1, 2, 3, 4의 4개이다. 답 4

02 1회 이율이 $\frac{r}{n}\%=\frac{r}{100n}$이므로

> A원을 연이율 $r\%$로 n년 동안 복리로 예금할 때의 원리합계
> ➡ $A\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$원

$$f(n)=10^6\left(1+\frac{r}{100n}\right)^n$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}f(n)=\lim_{n\to\infty}10^6\left(1+\frac{r}{100n}\right)^n$$
$$=10^6\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{r}{100n}\right)^{\frac{100n}{r}}\right\}^{\frac{r}{100}}$$
$$=10^6e^{\frac{r}{100}}$$

답 ①

03 $f(x)=nx^n(x-1)=nx^{n+1}-nx^n$에서

$$f'(x)=n(n+1)x^n-n^2x^{n-1}$$
$$=n(n+1)x^{n-1}\left(x-\frac{n}{n+1}\right)$$

> n은 자연수이므로
> $n(n+1)>0$,
> $0<\frac{n}{n+1}<1$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=0$ 또는 $x=\frac{n}{n+1}$

x	0	$\cdots$	$\frac{n}{n+1}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	극소	↗	0

즉 $0\le x\le1$에서 $f(x)$는 $x=\frac{n}{n+1}$일 때 극소이면서 최소이므로

$$g(n)=f\left(\frac{n}{n+1}\right)=n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{n}{n+1}-1\right)$$
$$=-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}g(n)=\lim_{n\to\infty}\left\{-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right\}$$
$$=-\frac{1}{e\cdot1}=-\frac{1}{e}$$

답 ④

04 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=b$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{f(x)}{x}=b$$

이다.

Ⅱ 미분법

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{\log_2(x+4)-2}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{\log_2(x+4)-\log_2 4}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{\log_2\left(1+\frac{x}{4}\right)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{\log_2\left(1+\frac{x}{4}\right)}{\frac{x}{4}}\cdot\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{4\ln2}$$

이므로 $b=\frac{1}{4\ln2}$

$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{a^x-1}{2x}=\frac{1}{2}\ln a$, 즉 $\frac{1}{4\ln2}=\frac{1}{2}\ln a$

이므로 $\ln a=\frac{1}{2\ln2}$

$$\therefore b\ln a=\frac{1}{4\ln2}\cdot\frac{1}{2\ln2}=\frac{1}{8(\ln2)^2}$$
$$\therefore p=8$$

답 8

05 직선 l은 기울기가 $-\frac{t}{\ln t}$이고 $\overline{\mathrm{OP}}$의 중점 $\left(\frac{t}{2},\ \frac{\ln t}{2}\right)$를 지나므로 직선 l의 방정식은

$$y-\frac{\ln t}{2}=-\frac{t}{\ln t}\left(x-\frac{t}{2}\right)$$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$$-\frac{\ln t}{2}=-\frac{t}{\ln t}\left(x-\frac{t}{2}\right),\qquad x-\frac{t}{2}=\frac{(\ln t)^2}{2t}$$
$$\therefore x=\frac{t}{2}+\frac{(\ln t)^2}{2t}$$
$$\therefore \mathrm{A}\left(\frac{t}{2}+\frac{(\ln t)^2}{2t},\ 0\right)$$

이때 두 삼각형 PAB와 PCA는 높이가 같으므로

$$\frac{S(t)}{T(t)}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{CP}}}=\frac{1}{t}\left\{t-\frac{t}{2}-\frac{(\ln t)^2}{2t}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{(\ln t)^2}{2t^2}$$
$$\therefore \lim_{t\to1+}\frac{1}{t-1}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{S(t)}{T(t)}}$$
$$=\lim_{t\to1+}\frac{1}{t-1}\sqrt{\frac{1}{2}-\left\{\frac{1}{2}-\frac{(\ln t)^2}{2t^2}\right\}}$$
$$=\lim_{t\to1+}\frac{1}{t-1}\cdot\frac{\ln t}{\sqrt{2}t}\ (\because t>1)$$

$t-1=s$로 놓으면 $t\to1+$일 때 $s\to0+$이므로

$$\lim_{t\to1+}\frac{1}{t-1}\cdot\frac{\ln t}{\sqrt{2}t}$$
$$=\lim_{s\to0+}\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\ln(s+1)}{s+1}$$
$$=\lim_{s\to0+}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\ln(1+s)}{s}\cdot\frac{1}{s+1}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot1\cdot1=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 ②

$g(3)=e^3f(3)=e^2$이므로 $f(3)=\frac{1}{e}$

$\overline{\mathrm{OP}}$의 기울기가 $\frac{\ln t}{t}$이므로 직선 l의 기울기는 $-\frac{t}{\ln t}$이다.

$S(t):T(t)=\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{CP}}$

06 $g(x)=e^xf(x)$로 놓으면

$$\lim_{x\to3}\frac{e^xf(x)-e^2}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{g(x)-e^2}{x^2-9}=\frac{e-e^2}{6}$$

에서 $x\to3$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}\{g(x)-e^2\}=0$이므로 $g(3)=e^2$

$$\therefore f(3)=\frac{1}{e}$$

이때

$$\lim_{x\to3}\frac{g(x)-e^2}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}\cdot\frac{1}{x+3}$$
$$=\frac{1}{6}g'(3)$$

이므로 $\frac{1}{6}g'(3)=\frac{e-e^2}{6}$

$$\therefore g'(3)=e-e^2$$

한편 $g(x)=e^xf(x)$에서 $g'(x)=e^xf(x)+e^xf'(x)$이므로

$$g'(3)=e^3f(3)+e^3f'(3)$$
$$=e^2+e^3f'(3)$$

즉 $e^2+e^3f'(3)=e-e^2$이므로

$$f'(3)=\frac{e-2e^2}{e^3}=\frac{1-2e}{e^2}$$

답 ⑤

Ⅱ-2. 삼각함수의 미분

개념&핵심 기출

본책 40~42쪽

01 점 P는 원 $x^2+y^2=25$와 직선 $y=-\frac{3}{4}x$의 교점이므로

$x^2+\left(-\frac{3}{4}x\right)^2=25, \quad x^2=16$

$\therefore x=-4$ ($\because x<0$)

따라서 점 P의 좌표는 $(-4, 3)$이고 $\overline{OP}=5$이므로

$\csc\theta=\frac{5}{3}, \cot\theta=-\frac{4}{3}$

$\therefore \csc\theta+\cot\theta=\frac{1}{3}$

답 ②

$\tan\theta$는 직선 $y=-\frac{3}{4}x$의 기울기와 같으므로 $\tan\theta=-\frac{3}{4}$

02 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4} \qquad \therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$\therefore \tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\frac{8}{3}$

답 $-\frac{8}{3}$

03 $\frac{4\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}=3$에서

$4\sin x-\cos x=3\sin x+6\cos x$

$\sin x=7\cos x$이므로 $\quad \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=7$

$\therefore \sec^2x=\tan^2x+1=50$

답 50

04 $\frac{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}{2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}$

$=\frac{\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}-\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)}$

$=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)}$

$=\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta}$

$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$

$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\cot\theta}$

따라서 $a=b=\sqrt{3}$이므로

$a^2+b^2=6$

답 6

$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{3}$에서 $\sin\theta\neq0$이므로 $\sin\theta$로 분자, 분모를 나눌 수 있다.

05 $\overline{BD}=\sqrt{5^2-3^2}=4$, $\overline{CD}=\sqrt{(3\sqrt{10})^2-3^2}=9$이므로

$\sin B=\frac{3}{5}, \cos B=\frac{4}{5}$

$\sin C=\frac{1}{\sqrt{10}}, \cos C=\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\therefore \cos(B-C)=\cos B\cos C+\sin B\sin C$

$=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}$

$=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

답 ⑤

06 두 직선 $y=x+3$, $y=2x-3$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=1, \tan\beta=2$

$\therefore \tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$

$=\frac{2-1}{1+2\cdot1}=\frac{1}{3}$

$\therefore \tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}$

$=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

07 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

$\therefore \sin2\alpha-\cos2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha-(1-2\sin^2\alpha)$

$=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}-1+2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2$

$=\frac{17}{25}$

답 ④

α가 제1사분면의 각이므로 $\sin\alpha>0$이다.

$\cos2\alpha$
$=2\cos^2\alpha-1$
$=2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{7}{25}$
로 계산할 수도 있다.

08 $2\sin\theta+2\cos\theta=\sqrt{6}$에서

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{2}$

양변을 제곱하면

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{2}, \qquad 2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore \sin2\theta=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2$
$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$
$=1+2\sin\theta\cos\theta$

09 $\cos\theta\cos2\theta\cos4\theta=\frac{2\sin\theta\cos\theta\cos2\theta\cos4\theta}{2\sin\theta}$

$=\frac{\sin2\theta\cos2\theta\cos4\theta}{2\sin\theta}$

$=\frac{\sin4\theta\cos4\theta}{4\sin\theta}=\frac{\sin8\theta}{8\sin\theta}$

$=\frac{\sin(9\theta-\theta)}{8\sin\theta}=\frac{\sin(2\pi-\theta)}{8\sin\theta}$

$=\frac{-\sin\theta}{8\sin\theta}=-\frac{1}{8}$

답 ②

10 $f(x)=a\sin x+4\cos x=\sqrt{a^2+16}\sin(x+\alpha)$

$\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{4}{\sqrt{a^2+16}}, \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+16}}\right)$

이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\sqrt{a^2+16}$이다.

Ⅱ 미분법

즉 $\sqrt{a^2+16}=8$이므로 $\quad a^2+16=64$

$a^2=48 \quad \therefore a=4\sqrt{3}\ (\because a>0)$ 답 $4\sqrt{3}$

11 $f(x)=\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\left(\sin x\cos\frac{2}{3}\pi+\cos x\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

$+\left(\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=\left(-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$

$+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)$

$=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$

$=2\left(-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$

$=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi\sin x+\sin\frac{2}{3}\pi\cos x\right)$

$=2\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$

$0\le x\le\pi$에서 $\frac{2}{3}\pi\le x+\frac{2}{3}\pi\le\frac{5}{3}\pi$이므로 함수 $f(x)$는 $x+\frac{2}{3}\pi=\frac{3}{2}\pi$, 즉 $x=\frac{5}{6}\pi$일 때 최솟값 -2를 갖는다.

따라서 $a=\frac{5}{6}\pi$, $b=-2$이므로

$ab=-\frac{5}{3}\pi$ 답 ①

12 $f(x)=3\sin x+4\cos x+2$

$=5\sin(x+\alpha)+2$

$\left(단,\ \sin\alpha=\frac{4}{5},\ \cos\alpha=\frac{3}{5}\right)$

ㄱ, ㄴ. $y=5\sin(x+\alpha)+2$의 그래프는 $y=5\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\alpha$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 함수 $f(x)$의 주기는 2π이다.

ㄷ. $-1\le\sin(x+\alpha)\le1$이므로

$-5\le5\sin(x+\alpha)\le5$

$\therefore -3\le5\sin(x+\alpha)+2\le7$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 7이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

1등급 비밀노트

$y=a\sin(bx+c)+d$의 그래프는 $y=a\sin bx$의 그래프를 평행이동한 것이고, 그래프를 평행이동하여도 함수의 주기는 변하지 않으므로 $y=a\sin(bx+c)+d$의 주기는 $y=a\sin bx$의 주기와 같다.

13 $\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x\tan^2x}{x^2\sin x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2\cdot\frac{x}{\sin x}$

$=1^2\cdot1=1$ 답 ④

14 $x-2=t$로 놓으면 $x\to2$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{\sin\pi x}=\lim_{t\to0}\frac{(t+2)^2-4}{\sin\pi(t+2)}$

$=\lim_{t\to0}\frac{t(t+4)}{\sin\pi t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{\pi t}{\sin\pi t}\cdot\frac{t+4}{\pi}$

$=1\cdot\frac{4}{\pi}=\frac{4}{\pi}$ 답 ⑤

15 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}\tan(ax+b)=0$이므로

$\tan b=0 \quad \therefore b=0\ (\because 0\le b<\pi)$

$b=0$을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{ax}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot a$

$=1\cdot1\cdot a=a$

즉 $a=3$이므로 $\quad a+b=3$ 답 3

16 $f(\pi)=\sin\pi+2\pi\cos\pi=-2\pi$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+3h)+2\pi}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+3h)-f(\pi)}{2h}$

$=\frac{3}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+3h)-f(\pi)}{3h}$

$=\frac{3}{2}f'(\pi)$

$f'(x)=\cos x+2\cos x-2x\sin x$

$=3\cos x-2x\sin x$

이므로

$\frac{3}{2}f'(\pi)=\frac{3}{2}\cdot(-3)=-\frac{9}{2}$ 답 ⑤

17 $f(x)=\frac{\cos^2x}{1+\sin x}$

$=\frac{1-\sin^2x}{1+\sin x}$

$=\frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{1+\sin x}$

$=1-\sin x\ (\sin x\ne-1)$

에서 $\quad f'(x)=-\cos x$

$\therefore f'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-\cos\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{2}$ 답 ⑤

18 $f(x)=\sin^2x=\sin x\sin x$에서

$f'(x)=\cos x\sin x+\sin x\cos x$

$=2\sin x\cos x$

$\therefore \lim_{x\to\pi}\frac{f'(x)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin x\cos x}{x-\pi}$

$x-\pi=t$로 놓으면 $x\to\pi$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin x\cos x}{x-\pi}=\lim_{t\to0}\frac{2\sin(\pi+t)\cos(\pi+t)}{t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{2(-\sin t)(-\cos t)}{t}$

$=2\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\cdot\cos t$

$=2\cdot1\cdot1=2$ 답 2

일품 BOX

$\sin\pi(t+2)$
$=\sin(\pi t+2\pi)$
$=\sin\pi t$

$\cos\alpha=-\frac{1}{2}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$
이므로 $\quad\alpha=\frac{2}{3}\pi$

$\sin(\pi\pm\theta)=\mp\sin\theta$
$\cos(\pi\pm\theta)=-\cos\theta$
(복호동순)

1등급을 위한 고난도 문제

본책 43~46쪽

01 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$$\csc\theta=\frac{1}{y}=\frac{1}{\overline{PQ}},\ \sec\theta=\frac{1}{x}=-\frac{1}{\overline{OQ}}$$

직각삼각형 OPQ의 넓이에 대하여

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{OQ}\cdot\overline{PQ}=\frac{1}{2}\cdot\overline{OP}\cdot\overline{QR}$$

이므로 $\overline{OQ}\cdot\overline{PQ}=\overline{QR}$

$$\therefore \csc\theta\sec\theta=-\frac{1}{\overline{PQ}\cdot\overline{OQ}}=-\frac{1}{\overline{QR}}$$

답 ⑤

> $\overline{OP}$는 원 $x^2+y^2=1$의 반지름이므로 $\overline{OP}=1$

02 $\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1+\cos\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\cos\theta}$

$$=\left(\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}\right)+\left(\frac{1}{1+\cos\theta}+\frac{1}{1-\cos\theta}\right)$$

$$=\frac{2}{1-\sin^2\theta}+\frac{2}{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{2}{\cos^2\theta}+\frac{2}{\sin^2\theta}$$

$$=2\sec^2\theta+2\csc^2\theta$$

$$=2(\tan^2\theta+1)+2(\cot^2\theta+1)$$

$$=2(4-2\sqrt{2})+2(4+2\sqrt{2})$$

$$=8-4\sqrt{2}+8+4\sqrt{2}=16$$

답 16

> $\tan^2\theta+1$
> $=(\sqrt{2}-1)^2+1$
> $=4-2\sqrt{2}$
>
> $\cot\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$
> 이므로
> $\cot^2\theta+1$
> $=(\sqrt{2}+1)^2+1$
> $=4+2\sqrt{2}$

03 $\tan\alpha+\cot 2\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

$$=\frac{\sin\alpha\sin 2\alpha+\cos\alpha\cos 2\alpha}{\cos\alpha\sin 2\alpha}$$

$$=\frac{\cos(2\alpha-\alpha)}{\cos\alpha\sin 2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha\sin 2\alpha}$$

$$=\frac{1}{\sin 2\alpha} \quad \cdots ❶$$

즉 $\dfrac{1}{\sin 2\alpha}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$이므로 $\sin 2\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$2\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ $\quad\therefore \alpha=\dfrac{\pi}{6}$ $\quad\cdots ❷$

$$\therefore \tan\alpha\cot 2\alpha=\tan\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3} \quad\cdots ❸$$

답 $\dfrac{1}{3}$

> $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$에서
> $0<2\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\tan\alpha+\cot 2\alpha$를 간단히 할 수 있다.	40 %
❷ α의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\tan\alpha\cot 2\alpha$의 값을 구할 수 있다.	20 %

04 $\angle BAC=\angle B'AC'=60°$이므로

$\angle PAC'=\angle B'AB=45°$

$\triangle PAC'$에서 $\angle C'=60°$이므로

$\angle APB'=45°+60°$

$\therefore \sin(\angle APB')$

$=\sin(45°+60°)$

$=\sin 45°\cos 60°+\cos 45°\sin 60°$

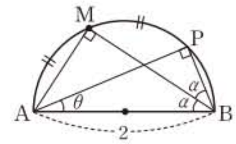
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

답 $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

> **사인법칙**
> $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면
> $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

05 $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MP}$이므로



$\angle ABM=\angle PBM$

$\angle ABM=\angle PBM=\alpha$로 놓으면 직각삼각형 ABP에서

$\theta+2\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ $\quad\therefore \alpha=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}$

한편 직각삼각형 ABM에서 $\overline{AM}=2\sin\alpha$, $\overline{BM}=2\cos\alpha$이므로

$\overline{AM}+\overline{BM}$

$=2\sin\alpha+2\cos\alpha$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=2\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$+2\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}+\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}+\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$=2\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

답 ⑤

> 한 원에서 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같다.

06 $\overline{AH}=x$라 하고 $\angle BAH=\alpha$, $\angle CAH=\beta$라 하면

$\tan\alpha=\dfrac{5}{x}$, $\tan\beta=\dfrac{2}{x}$이므로

$\tan(\angle BAC)=\tan(\alpha+\beta)$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{5}{x}+\frac{2}{x}}{1-\frac{5}{x}\cdot\frac{2}{x}}=\frac{7x}{x^2-10}$$

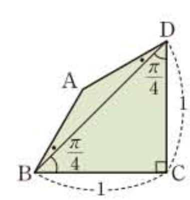
따라서 $\dfrac{7x}{x^2-10}=\dfrac{14}{3}$이므로

$2x^2-3x-20=0$, $\quad(x-4)(2x+5)=0$

$\therefore x=4\ (\because x>0)$

답 4

07 오른쪽 그림에서 $\triangle BCD$가 직각이등변삼각형이므로



$\angle ABD=\angle ADB$

$$=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$$

$$\angle BAD=2\pi-\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{5}{6}\pi,$$

$\overline{BD}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로 $\triangle ABD$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{5}{6}\pi}=\frac{\overline{AB}}{\sin\frac{\pi}{12}} \quad \therefore \overline{AB}=\sqrt{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{5}{6}\pi}$$

이때

$$\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},$$

일품 BOX

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

이므로 $\overline{AB}=\sqrt{2}\cdot2\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\sqrt{3}-1$

$\therefore \square ABCD=\triangle BCD+\triangle ABD$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BD}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$
$$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

답 ③

두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인각의 크기가 θ인 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$

08 $g\left(\frac{1}{3}\right)=\alpha$, $g\left(\frac{1}{2}\right)=\beta$라 하면

$$f(\alpha)=\frac{1}{3},\ f(\beta)=\frac{1}{2}$$

즉 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$, $\tan\beta=\frac{1}{2}$이므로

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}=1$$

이때 $0<\alpha+\beta<\pi$이므로 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$이므로 $0<\alpha+\beta<\pi$

따라서 $\theta=g\left(\frac{1}{3}\right)+g\left(\frac{1}{2}\right)=\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\cos\theta=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

다른 풀이 $g\left(\frac{1}{3}\right)=\alpha$, $g\left(\frac{1}{2}\right)=\beta$라 하면 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$, $\tan\beta=\frac{1}{2}$이므로

$$\sec^2\alpha=\left(\frac{1}{3}\right)^2+1=\frac{10}{9},\ \sec^2\beta=\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=\frac{5}{4}$$

이때 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$이므로

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}},\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}},$$
$$\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \cos\theta=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\sin\beta=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

09 $y=\cos2x+2\sin x+k$

$$=-2\sin^2x+2\sin x+k+1$$

이때 $\sin x=t$로 놓으면 $0<x\le\frac{\pi}{2}$에서 $0<t\le1$이고

$$y=-2t^2+2t+k+1$$
$$=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+k+\frac{3}{2}$$

따라서 $t=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $k+\frac{3}{2}$을 가지므로

$$k+\frac{3}{2}=1\qquad\therefore k=-\frac{1}{2}$$ ❶

$t=\frac{1}{2}$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$이므로

$$x=\frac{\pi}{6}\ \left(\because 0<x\le\frac{\pi}{2}\right)\qquad\therefore \alpha=\frac{\pi}{6}$$ ❷

$$\therefore k\alpha=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{12}$$ ❸

답 $-\frac{\pi}{12}$

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ α의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $k\alpha$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1등급 비밀노트

각 x, $2x$의 삼각함수를 포함한 식의 최대·최소는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 배각의 공식을 이용하여 삼각함수의 각을 x로 통일한다.

(ii) $f(x)=a\sin^2x+b\sin x+c$ 또는 $f(x)=a\cos^2x+b\cos x+c$ 꼴인 경우는 이차함수의 최대·최소를 이용하고, $f(x)=a\sin x+b\cos x$ 꼴인 경우는 삼각함수의 합성을 이용하여 최대·최소를 구한다.

10 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(3, -4)$에서의 접선의 방정식은

$$3x-4y=25,\ 즉\ y=\frac{3}{4}x-\frac{25}{4}$$
$$\therefore \tan\theta=\frac{3}{4}$$

$\tan\theta=\tan\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right)=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$이므로 $\tan\frac{\theta}{2}=t$라 하면

$$\frac{2t}{1-t^2}=\frac{3}{4},\qquad 3t^2+8t-3=0$$
$$(t+3)(3t-1)=0\qquad\therefore t=\frac{1}{3}\ (\because t>0)$$

답 $\frac{1}{3}$

11 $$\frac{\tan\theta-\tan^3\theta}{1+2\tan^2\theta+\tan^4\theta}=\frac{\tan\theta(1-\tan^2\theta)}{(\tan^2\theta+1)^2}$$
$$=\frac{\tan\theta(1-\tan^2\theta)}{\sec^4\theta}$$
$$=\tan\theta(1-\tan^2\theta)\cos^4\theta$$
$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)\cdot\cos^4\theta$$
$$=\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$
$$=\frac{1}{2}\sin2\theta\cos2\theta=\frac{1}{4}\sin4\theta$$
$$=\frac{1}{4}\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2}$$
$$=\frac{1}{4}$$

답 ③

12 $\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{MC}}=a$라 하면 $\tan 2\theta=a$, $\tan 3\theta=2a$이므로

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\tan(3\theta-2\theta)\\&=\frac{\tan 3\theta-\tan 2\theta}{1+\tan 3\theta\tan 2\theta}\\&=\frac{2a-a}{1+2a\cdot a}=\frac{a}{1+2a^2}\end{aligned}$$

이때 $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$에서

$$a=\frac{2\cdot\dfrac{a}{1+2a^2}}{1-\left(\dfrac{a}{1+2a^2}\right)^2},\quad a=\frac{2a(1+2a^2)}{(1+2a^2)^2-a^2}$$

$$4a^4+3a^2+1=4a^2+2$$

$$\therefore 4a^4-a^2-1=0$$

$a^2>0$이므로 $\quad a^2=\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{\mathrm{AC}}^2&=(2a)^2=4a^2\\&=4\cdot\frac{1+\sqrt{17}}{8}=\frac{1+\sqrt{17}}{2}\end{aligned}$$

답 ⑤

13
$$\begin{aligned}f(x)&=2(\sin x+\cos x)\\&=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)\\&=2\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)\\&=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

$0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$에서 $\dfrac{\pi}{4}\le x+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{3}{4}\pi$이므로

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$$

$$2\le 2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 2\sqrt{2}$$

$\therefore 2\le f(x)\le 2\sqrt{2}$ ⋯ ❶

$(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$$(g\circ f)(x)=g(t)=1+4\log_2 t$$

$2\le t\le 2\sqrt{2}$에서 $1\le\log_2 t\le\dfrac{3}{2}$이므로

$$4\le 4\log_2 t\le 6\qquad\therefore 5\le 1+4\log_2 t\le 7$$

즉 $5\le(g\circ f)(x)\le 7$이므로 ⋯ ❷

$M=7$, $m=5$

$\therefore M+m=12$ ⋯ ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ $(g\circ f)(x)$의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ $M+m$의 값을 구할 수 있다.	10 %

14 $f(x)=a\sin x+\cos x=\sqrt{a^2+1}\sin(x+\alpha)$

$$\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}},\ \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\right)$$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\sqrt{a^2+1}$이므로

$\sqrt{a^2+1}=3,\quad a^2=8\quad\therefore a=2\sqrt{2}\ (\because a>0)$

또 주기는 2π이므로

$2(c-b)=2\pi\quad\therefore c-b=\pi$

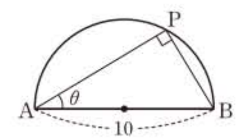
$\therefore a(c-b)=2\sqrt{2}\pi$

답 $2\sqrt{2}\pi$

$y=a\sin(bx+c)+d$의 주기 ➡ $\dfrac{2\pi}{|b|}$

15 $\angle\mathrm{APB}=90°$이므로

$\angle\mathrm{PAB}=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면



반원에 대한 원주각의 크기는 $90°$이다.

$\overline{\mathrm{AP}}=10\cos\theta$,

$\overline{\mathrm{BP}}=10\sin\theta$ ⋯ ❶

$$\begin{aligned}\therefore 2\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}&=20\cos\theta+10\sin\theta\\&=10\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\theta\right)\\&=10\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)\end{aligned}$$

$\left(\text{단, }\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ ⋯ ❷

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\dfrac{2}{\sqrt{5}}<1$에서 $\sin\dfrac{\pi}{4}<\sin\alpha<\sin\dfrac{\pi}{2}$이므로

$$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\dfrac{\pi}{4}<\theta+\alpha<\pi$이므로 $2\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$는

$\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$일 때 최대이며 최댓값은 $10\sqrt{5}$이다. ⋯ ❸

답 $10\sqrt{5}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{\mathrm{AP}}$, $\overline{\mathrm{BP}}$의 길이를 삼각함수로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $2\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 값을 삼각함수의 합성을 이용하여 나타낼 수 있다.	50 %
❸ $2\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

16 $\angle\mathrm{PBD}=\theta$라 하면 $\triangle\mathrm{BPD}$에서 $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{BD}}=1$이므로

$$\triangle\mathrm{BPD}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta$$

$\triangle\mathrm{QBE}$에서 $\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{BM}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{BE}}=1$, $\angle\mathrm{QBE}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

이므로

$\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{ME}}=1$이고 $\triangle\mathrm{BEM}$이 직각이등변삼각형이므로 $\quad\overline{\mathrm{BM}}=\sqrt{2}$

$$\triangle\mathrm{QBE}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 1\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta$$

$$\begin{aligned}&\therefore \triangle\mathrm{BPD}+\triangle\mathrm{QBE}\\&=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos\theta\right)\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta+\alpha)\ \left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}<1$에서 $\sin\dfrac{\pi}{4}<\sin\alpha<\sin\dfrac{\pi}{2}$이므로

$$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$에서 $\dfrac{\pi}{4}<\theta+\alpha<\dfrac{3}{4}\pi$이므로

점 P가 $\overset{\frown}{\mathrm{DF}}$ 위의 점이므로 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$이다.

$\triangle\mathrm{BPD}+\triangle\mathrm{QBE}$는 $\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$일 때 최대이며 최댓값은 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다.

답 ④

Ⅱ 미분법

17 $x \to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(a-6\cos x)=a-6=0$이므로 $\quad a=6$

$$\therefore b=\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos x}{x\sin 3x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{6(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin 3x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{6(1-\cos^2 x)}{x\sin 3x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin^2 x}{x\sin 3x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}6\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\sin 3x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}6\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$
$$=6\cdot 1\cdot\frac{1}{1\cdot 3}\cdot\frac{1}{2}=1$$

$\therefore a+b=7$

답 ②

18 두 점 A, B의 좌표는 각각 A$(t, \tan 3t)$, B$(t, \tan 2t)$이므로

$$\overline{\mathrm{OA}}^2=t^2+\tan^2 3t,\ \overline{\mathrm{OB}}^2=t^2+\tan^2 2t$$
$$\therefore \lim_{t\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{OB}}^2}{\overline{\mathrm{OA}}^2}=\lim_{t\to 0+}\frac{t^2+\tan^2 2t}{t^2+\tan^2 3t}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{1+\left(\frac{\tan 2t}{t}\right)^2}{1+\left(\frac{\tan 3t}{t}\right)^2}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{1+\left(\frac{\tan 2t}{2t}\right)^2\cdot 4}{1+\left(\frac{\tan 3t}{3t}\right)^2\cdot 9}$$
$$=\frac{1+1^2\cdot 4}{1+1^2\cdot 9}$$
$$=\frac{1}{2}$$

답 ①

19 $\angle\mathrm{PAT}=\theta$, $\angle\mathrm{OAT}=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\angle\mathrm{OAP}=\frac{\pi}{2}-\theta$$

$\triangle$AOP는 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OP}}$인 이등변삼각형이므로

$$\angle\mathrm{AOP}=\pi-2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2\theta$$

$\triangle$OAQ에서 $\quad \overline{\mathrm{AQ}}=4\tan 2\theta$

또 $\triangle$AOP에서

$$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{4^2+4^2-2\cdot 4\cdot 4\cdot\cos 2\theta}$$
$$=\sqrt{32(1-\cos 2\theta)}$$
$$=\sqrt{32\{1-(1-2\sin^2\theta)\}}$$
$$=\sqrt{64\sin^2\theta}$$
$$=8\sin\theta\ (\because \sin\theta>0)$$
$$\therefore \overline{\mathrm{AT}}=2\overline{\mathrm{AP}}=16\sin\theta$$

일품 BOX

a^3-b^3
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

코사인법칙
$\triangle$ABC에서
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
$b^2=c^2+a^2-2ac\cos B$
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$,
$\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로
$-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$
$=\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{AT}}}{\overline{\mathrm{AQ}}}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{16\sin\theta}{4\tan 2\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}2\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{2\theta}{\tan 2\theta}$$
$$=2\cdot 1\cdot 1=2$$

답 2

20 $\overline{\mathrm{OP_1}}=1$이므로 직각삼각형 $\mathrm{OP_1H_1}$에서

$\overline{\mathrm{OH_1}}=\cos\theta$, $\overline{\mathrm{P_1H_1}}=\sin\theta$

$\overline{\mathrm{OP_2}}=\overline{\mathrm{OH_1}}=\cos\theta$이므로 직각삼각형 $\mathrm{OP_2H_2}$에서

$\overline{\mathrm{OH_2}}=\cos\theta\cos\theta=\cos^2\theta$

$\overline{\mathrm{OP_3}}=\overline{\mathrm{OH_2}}=\cos^2\theta$이므로 직각삼각형 $\mathrm{OP_3H_3}$에서

$\overline{\mathrm{OH_3}}=\cos^2\theta\cos\theta=\cos^3\theta$

$\therefore \overline{\mathrm{AH_3}}=\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OH_3}}=1-\cos^3\theta$

또 $l=\overline{\mathrm{OP_1}}\cdot\theta=\theta$이므로 ⋯ ❶

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{AH_3}}\cdot\overline{\mathrm{P_1H_1}}}{\overline{\mathrm{OH_1}}}\cdot\frac{1}{l^3}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{1-\cos^3\theta}{\theta^3}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta+\cos^2\theta)}{\theta^3}\cdot\tan\theta$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}\cdot\frac{\tan\theta}{\theta}\times(1+\cos\theta+\cos^2\theta)\right\}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}\cdot\frac{\tan\theta}{\theta}\cdot(1+\cos\theta+\cos^2\theta)$$
$$=1^2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3=\frac{3}{2}$$ ⋯ ❷

따라서 $p=2$, $q=3$이므로

$p+q=5$ ⋯ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $\overline{\mathrm{OH_1}}$, $\overline{\mathrm{P_1H_1}}$, $\overline{\mathrm{AH_3}}$, l을 θ에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 극한값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	10 %

21 $2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-4\sin x$

$$=2\sqrt{3}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)-4\sin x$$
$$=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)-4\sin x$$
$$=3\sin x+\sqrt{3}\cos x-4\sin x$$
$$=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$$
$$=2\left(-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$$
$$=2\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$$ ⋯ ❶

이때 $x+\frac{2}{3}\pi=t$로 놓으면 $x\to -\frac{2}{3}\pi$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to-\frac{2}{3}\pi}\frac{2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-4\sin x}{x+\frac{2}{3}\pi}$$

$$=\lim_{x\to-\frac{2}{3}\pi}\frac{2\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)}{x+\frac{2}{3}\pi}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{2\sin t}{t}$$

$$=2\cdot1=2 \quad \cdots ❷$$

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 분자를 간단히 할 수 있다.	50 %
❷ 극한값을 구할 수 있다.	50 %

22 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=0$이므로 $\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

따라서 $f(x)=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-k)$ (k는 상수)라 하자.

$x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(2x-\pi)}{f(x)}=\lim_{t\to0}\frac{\sin^2 2t}{f\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin 2t}{2t}\right)^2\cdot\frac{4t^2}{f\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin 2t}{2t}\right)^2=1$

$$=\lim_{t\to0}\frac{4t^2}{f\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{4t^2}{t\left(t+\frac{\pi}{2}-k\right)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{4t}{t+\frac{\pi}{2}-k}$$

이때 $\lim_{t\to0}\frac{4t}{t+\frac{\pi}{2}-k}=4$에서 $t\to0$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$이다.

즉 $\lim_{t\to0}\left(t+\frac{\pi}{2}-k\right)=0$이므로 $\quad \frac{\pi}{2}-k=0$

$\therefore k=\frac{\pi}{2}$

따라서 $f(x)=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2$이므로

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=(-\pi)^2=\pi^2$$

답 ⑤

23 $f(\theta)f(-\theta)=\frac{1-\sin\theta}{1-\sin3\theta}\cdot\frac{1+\sin\theta}{1+\sin3\theta}$

$f(-\theta)=\frac{1-\sin(-\theta)}{1-\sin(-3\theta)}=\frac{1+\sin\theta}{1+\sin3\theta}$

$$=\frac{1-\sin^2\theta}{1-\sin^2 3\theta}$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\cos^2 3\theta} \quad \cdots ❶$$

$\theta-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $\theta\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}f(\theta)f(-\theta)=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta}{\cos^2 3\theta}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\cos^2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^2 3\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$\cos\left(3t+\frac{3}{2}\pi\right)=\sin 3t$

$$=\lim_{t\to0}\frac{(-\sin t)^2}{\sin^2 3t}$$

$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{\sin 3t}\right)^2$$

$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{3t}{\sin3t}\cdot\frac{1}{3}\right)^2$$

$$=\left(1\cdot1\cdot\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9} \quad \cdots ❷$$

답 $\frac{1}{9}$

채점 기준	비율
❶ $f(\theta)f(-\theta)$를 간단히 할 수 있다.	40 %
❷ $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}f(\theta)f(-\theta)$의 값을 구할 수 있다.	60 %

24 $\cos(x+h)+\cos(x-h)$

$=(\cos x\cos h-\sin x\sin h)$

$\quad+(\cos x\cos h+\sin x\sin h)$

$=2\cos x\cos h$

이므로

$$f(x)=\lim_{h\to0}\frac{2\cos x\cos h-2\cos x}{2h\sin h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\cos x(\cos h-1)}{h\sin h}$$

$$=-\cos x\lim_{h\to0}\frac{(1-\cos h)(1+\cos h)}{h\sin h(1+\cos h)}$$

$$=-\cos x\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h(1+\cos h)}$$

$$=-\cos x\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{1}{1+\cos h}$$

$$=-\cos x\cdot1\cdot\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}\cos x$$

따라서 $f'(x)=\frac{1}{2}\sin x$이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

25 $f(x)=\begin{cases} ax+\sin x & (0\le x\le\pi) \\ -ax-\sin x & (-\pi\le x<0)\end{cases}$ 이므로

$$f'(x)=\begin{cases} a+\cos x & (0<x<\pi) \\ -a-\cos x & (-\pi<x<0)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to0+}(a+\cos x)=\lim_{x\to0-}(-a-\cos x)$$

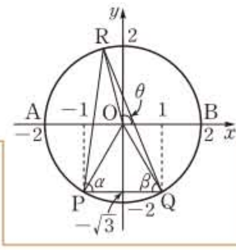
즉 $a+1=-a-1$이므로 $\quad a=-1$

답 ②

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 47쪽

01 A$(-2,\ 0)$, B$(2,\ 0)$이라 하면



$\angle AOP=\angle BOQ=\frac{\pi}{3}$

> $\tan(\angle AOP)=\frac{|-\sqrt{3}|}{|-1|}=\sqrt{3}$
> 이므로 $\angle AOP=\frac{\pi}{3}$
> $\tan(\angle BOQ)=\frac{|-\sqrt{3}|}{|1|}=\sqrt{3}$
> 이므로 $\angle BOQ=\frac{\pi}{3}$

이므로

$\angle ROP=(\pi-\theta)+\frac{\pi}{3}$

$=\frac{4}{3}\pi-\theta,$

$\angle ROQ=\frac{\pi}{3}+\theta$

$\therefore\ \alpha=\frac{\pi}{6}+\frac{\theta}{2},\ \beta=\frac{2}{3}\pi-\frac{\theta}{2}$

> $\angle QPR$는 $\overset{\frown}{QR}$에 대한 원주각이므로
> $\alpha=\frac{1}{2}\angle ROQ$
> $\angle PQR$는 $\overset{\frown}{PR}$에 대한 원주각이므로
> $\beta=\frac{1}{2}\angle ROP$

이것을 $\sqrt{3}\sin\alpha=2\sin\beta$에 대입하면

$\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\theta}{2}\right)=2\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\theta}{2}\right)$

$\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

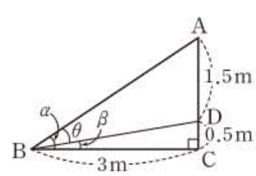
$\therefore\ \tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{3}$

> $\cos\frac{\theta}{2}\neq 0$이므로 양변을 $\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}$로 나누면
> $\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{3}$

이때 $0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$이므로 $\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{3}$

$\therefore\ \theta=\frac{2}{3}\pi$ 답 ④

02 오른쪽 그림과 같이 액자의 위 끝을 A, 아래 끝을 D, 사람의 눈의 위치를 B, 사람의 시선이 벽에 수직으로 닿는 지점을 C라 하자.



$\angle ABC=\alpha,\ \angle DBC=\beta$라 하면

$\theta=\alpha-\beta$

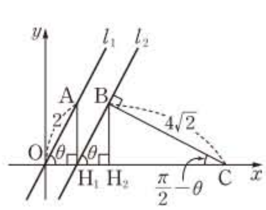
$\tan\alpha=\frac{2}{3},\ \tan\beta=\frac{0.5}{3}=\frac{1}{6}$이므로

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}}=\frac{9}{20}$

$\therefore\ 20\tan\theta=9$ 답 9

03 오른쪽 그림에서



$\overline{AH_1}=2\sin\theta$

$\angle BCH_2=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$\triangle BH_2C$에서

$\overline{BH_2}=4\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=4\sqrt{2}\cos\theta$

$\therefore\ \overline{AH_1}+\overline{BH_2}=2\sin\theta+4\sqrt{2}\cos\theta$

$=6\left(\frac{1}{3}\sin\theta+\frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\theta\right)$

$=6\sin(\theta+\alpha)$

$\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3},\ \cos\alpha=\frac{1}{3}\right)$

$\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{2\sqrt{2}}{3}<1$에서 $\sin\frac{\pi}{4}<\sin\alpha<\sin\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\pi}{4}<\theta+\alpha<\pi$이므로 $\overline{AH_1}+\overline{BH_2}$의 값은 $\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$일 때 최대이다. 즉 $\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$이므로

$\sin\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\frac{1}{3}$ 답 ①

04 $\overline{OP}=1,\ \angle OQP=\pi-\frac{5}{3}\theta$이므로 $\triangle POQ$에서 사인법칙에 의하여

$\frac{1}{\sin\left(\pi-\frac{5}{3}\theta\right)}=\frac{\overline{OQ}}{\sin\frac{2}{3}\theta}$

$\therefore\ \overline{OQ}=\frac{\sin\frac{2}{3}\theta}{\sin\left(\pi-\frac{5}{3}\theta\right)}=\frac{\sin\frac{2}{3}\theta}{\sin\frac{5}{3}\theta}$

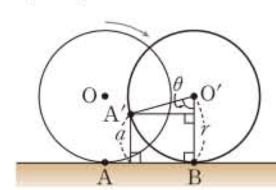
따라서 $S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{\sin\frac{2}{3}\theta}{\sin\frac{5}{3}\theta}\cdot\sin\theta$이므로

$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin\frac{2}{3}\theta}{\sin\frac{5}{3}\theta}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin\frac{2}{3}\theta}{\frac{2}{3}\theta}\cdot\frac{\frac{5}{3}\theta}{\sin\frac{5}{3}\theta}\cdot\frac{\frac{2}{3}\theta}{\frac{5}{3}\theta}$

$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot1\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$ 답 ⑤

05 오른쪽 그림에서



$\overline{AB}=\overset{\frown}{A'B}=r\theta$

$a=r-r\cos\theta$

$=r(1-\cos\theta)$

이므로

$\lim_{\theta\to0+}\frac{ar}{\overline{AB}^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{r^2(1-\cos\theta)}{(r\theta)^2}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}$

$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}$

$=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 답 ①

Ⅱ-3. 여러 가지 미분법

개념&핵심 기출 본책 48~50쪽

01 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$

이때 $f(x)=\frac{2x}{x+1}$에서

$$f'(x)=\frac{2(x+1)-2x\cdot1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\therefore f'(1)=\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

> 함수 $f(x)$에 대하여
> $f'(a)$
> $=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

02 $f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}+\cdots+\frac{1}{x^{20}}$

$=x^{-2}+x^{-4}+x^{-6}+\cdots+x^{-20}$

에서 $f'(x)=-2x^{-3}-4x^{-5}-6x^{-7}-\cdots-20x^{-21}$

$\therefore f'(-1)=2+4+6+\cdots+20$

$=\sum_{k=1}^{10}2k$

$=2\cdot\frac{10\cdot11}{2}=110$

답 110

> $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$
> $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

03 $f(x)=\frac{\tan x}{x}$에서

$$f'(x)=\frac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}$$

$$\therefore f'(\pi)=\frac{\pi\cdot(-1)^2-0}{\pi^2}=\frac{1}{\pi}$$

답 ④

04 $y=f(g(x))$에서 $y'=f'(g(x))g'(x)$이므로

$y=f(g(x))$의 $x=2$에서의 미분계수는

$f'(g(2))g'(2)=f'(4)g'(2)=6g'(2)$

즉 $6g'(2)=-30$이므로

$g'(2)=-5$ 답 -5

05 $f(x)=3^{x^2+x+3}$에서

$f'(x)=3^{x^2+x+3}\cdot\ln3\cdot(x^2+x+3)'$

$=3^{x^2+x+3}\cdot\ln3\cdot(2x+1)$

$\therefore f'(1)=3^5\cdot\ln3\cdot3=3^6\ln3$

답 ①

> **지수함수의 도함수**
> ① $y=e^x$이면 $y'=e^x$
> ② $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$ 이면 $y'=a^x\ln a$

06 $f(x)=\ln(2\sin x)$에서 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\ln\left(2\sin\frac{\pi}{6}\right)=0$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{6}+\frac{h}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{6}+\frac{h}{2}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{h}{2}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

이때 $f'(x)=\frac{2\cos x}{2\sin x}=\cot x$이므로

$\frac{1}{2}f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

07 $\frac{dx}{dt}=3t^2$, $\frac{dy}{dt}=2t+a$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t+a}{3t^2}\ (t\neq0)$$

$t=1$일 때 접선의 기울기가 -2이므로

$\frac{2+a}{3}=-2$

$\therefore a=-8$ 답 ②

08 $\frac{dx}{dt}=1+\frac{1}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{t^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^2}}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

$t=a$일 때 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{a^2-1}{a^2+1}=\frac{1}{2}$, $2a^2-2=a^2+1$

$a^2=3$ $\therefore a=\sqrt{3}$ ($\because a>0$) 답 $\sqrt{3}$

다른 풀이 $x^2=t^2+\frac{1}{t^2}-2$, $y^2=t^2+\frac{1}{t^2}+2$이므로

$y^2=x^2+4$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2y\frac{dy}{dx}=2x$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}=\frac{t-\frac{1}{t}}{t+\frac{1}{t}}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

따라서 $\frac{a^2-1}{a^2+1}=\frac{1}{2}$이므로

$a=\sqrt{3}$ ($\because a>0$)

09 $\frac{dx}{dt}=5-2\cos2t$, $\frac{dy}{dt}=n\sin t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{n\sin t}{5-2\cos2t}$$

$t=\frac{\pi}{6}$일 때 접선의 기울기가 $f(n)$이므로

$$f(n)=\frac{n\sin\frac{\pi}{6}}{5-2\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{n}{2}}{5-2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{n}{8}$$

즉 부등식 $\frac{1}{2}<\frac{n}{8}<1$에서

$4<n<8$

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$5+6+7=18$ 답 18

일품 BOX

10 $2\sqrt{x}+\sqrt{y}=7$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 -3이므로

$$-\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-3$$

$$\therefore 3\sqrt{a}-2\sqrt{b}=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편 점 $(a,\ b)$가 곡선 $2\sqrt{x}+\sqrt{y}=7$ 위의 점이므로

$$2\sqrt{a}+\sqrt{b}=7 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=9$

$$\therefore ab=36$$

답 36

$2\sqrt{x}=2x^{\frac{1}{2}}$이므로
$(2\sqrt{x})'=2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$
$=x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$

㉠+㉡×2를 하면
$7\sqrt{a}=14$
$\sqrt{a}=2 \quad \therefore a=4$
$a=4$를 ㉡에 대입하면
$2\cdot2+\sqrt{b}=7$
$\sqrt{b}=3 \quad \therefore b=9$

11 $x^2+y^2+axy+b=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x+2y\frac{dy}{dx}+ay+ax\frac{dy}{dx}=0$$

$$(ax+2y)\frac{dy}{dx}=-(2x+ay)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2x+ay}{ax+2y}\ (ax\neq-2y)$$

점 $(2,\ 1)$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값이 $-\frac{7}{8}$이므로

$$-\frac{4+a}{2a+2}=-\frac{7}{8}, \qquad 32+8a=14a+14$$

$$6a=18 \qquad \therefore a=3$$

한편 점 $(2,\ 1)$이 곡선 $x^2+y^2+3xy+b=0$ 위의 점이므로

$$4+1+6+b=0 \qquad \therefore b=-11$$

$$\therefore a+b=-8$$

답 ①

12 $e^{2x-3}+\ln(y+2)=e$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2e^{2x-3}+\frac{1}{y+2}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-2(y+2)e^{2x-3}$$

따라서 점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 기울기는

$$-2(-1+2)e^{2\cdot2-3}=-2e$$

답 ②

13 $y=\sqrt[4]{x}$에서 $\quad x=\boxed{y^4}$

양변을 y에 대하여 미분하면 $\quad \frac{dx}{dy}=\boxed{4y^3}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{4y^3}=\frac{1}{4(\sqrt[4]{x})^3}=\boxed{\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}}$$

$\therefore$ (가) y^4 (나) $4y^3$ (다) $\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

답 풀이 참조

14 $\lim_{x\to2}\frac{g(x)-3}{x-2}=6$에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}\{g(x)-3\}=0$이므로 $\quad g(2)=3$

$$\therefore f(3)=2$$

또

$$\lim_{x\to2}\frac{g(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)$$

이므로

$$g'(2)=6$$

$$\therefore f'(3)=\frac{1}{g'(f(3))}=\frac{1}{g'(2)}=\frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

15 $g\left(\frac{1}{4}\right)=a$라 하면 $\quad f(a)=\sin^2 a=\frac{1}{4}$

이때 $0<a<\frac{\pi}{2}$이므로

$$\sin a=\frac{1}{2} \qquad \therefore a=\frac{\pi}{6}$$

또 $f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$이므로

$$g'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

답 ⑤

16 $f(x)=2x\ln(\cos x)$에서

$$f'(x)=2\ln(\cos x)+2x\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}$$
$$=2\ln(\cos x)-2x\tan x$$

$f'(0)=2\ln1-0=0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=f''(0)$$

이때

$$f''(x)=-2\tan x-(2\tan x+2x\sec^2 x)$$
$$=-4\tan x-2x\sec^2 x$$

$$\therefore f''(0)=0$$

답 ③

$(\ln(\cos x))'$
$=\frac{(\cos x)'}{\cos x}=\frac{-\sin x}{\cos x}$
$=-\tan x$

17 $f(x)=xe^{ax+1}$에서

$$f'(x)=e^{ax+1}+axe^{ax+1}=(1+ax)e^{ax+1}$$
$$f''(x)=ae^{ax+1}+a(1+ax)e^{ax+1}$$
$$=(2a+a^2x)e^{ax+1}$$

$f''(0)=8e$에서 $\quad 2ae=8e$

$$\therefore a=4$$

답 ②

18 $y=e^x\sin 2x$에서

$$y'=e^x\sin2x+2e^x\cos2x=e^x(\sin2x+2\cos2x)$$
$$y''=e^x(\sin2x+2\cos2x)+e^x(2\cos2x-4\sin2x)$$
$$=e^x(-3\sin2x+4\cos2x)$$

$2y''+ay'+by=0$에서

$$(-6\sin2x+8\cos2x+a\sin2x$$
$$+2a\cos2x+b\sin2x)e^x=0$$

$\therefore \{(a+b-6)\sin 2x+(2a+8)\cos 2x\}e^x=0$

위의 등식이 임의의 실수 x에 대하여 성립하므로

$a+b-6=0,\ 2a+8=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-4,\ b=10$

$\therefore ab=-40$

답 ③

모든 실수 x에 대하여 $Af(x)+Bg(x)=0$ 이려면 $A=0,\ B=0$

1등급을 위한 고난도 문제

본책 51~54쪽

01 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(0)-\{f(-2h)-f(0)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(0)}{2h}\cdot 2+\lim_{h\to 0}\dfrac{f(-2h)-f(0)}{-2h}\cdot 2$

$=2f'(0)+2f'(0)=4f'(0)$

이므로 $4f'(0)=16$

$\therefore f'(0)=4$ ···· ❶

이때 $f(x)=\dfrac{ax+1}{x^2+3}$에서

$f'(x)=\dfrac{a(x^2+3)-(ax+1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$

$=\dfrac{-ax^2-2x+3a}{(x^2+3)^2}$ ···· ❷

이므로 $f'(0)=\dfrac{a}{3}=4$

$\therefore a=12$ ···· ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ $f'(0)$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20%

02 $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$에서

$f'(x)=\dfrac{\cos x(\sin x+\cos x)-\sin x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}$

$=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}$

$=\dfrac{1}{1+\sin 2x}$

① $\sin^2 x+\cos^2 x=1$
② $2\sin x\cos x=\sin 2x$

$f'(\alpha)=\dfrac{2}{3}$에서 $\dfrac{1}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{2}{3}$

$1+\sin 2\alpha=\dfrac{3}{2}$ $\quad\therefore \sin 2\alpha=\dfrac{1}{2}$

$0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$에서 $0\le 2\alpha\le\pi$이므로

$2\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $2\alpha=\dfrac{5}{6}\pi$

$\therefore \alpha=\dfrac{\pi}{12}$ 또는 $\alpha=\dfrac{5}{12}\pi$

따라서 모든 α의 값의 합은

$\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{5}{12}\pi=\dfrac{\pi}{2}$

답 ⑤

03 $\lim_{x\to 2}\dfrac{2f(x)-1}{x-2}=2$에서 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2}\{2f(x)-1\}=0$이므로 $2f(2)-1=0$

$\therefore f(2)=\dfrac{1}{2}$

또

$\lim_{x\to 2}\dfrac{2f(x)-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{2\left\{f(x)-\frac{1}{2}\right\}}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\dfrac{2\{f(x)-f(2)\}}{x-2}$

$=2f'(2)$

이므로 $f'(2)=1$

이때 $g(x)=\dfrac{f(x)}{1+xf(x)}$에서

$g'(x)=\dfrac{f'(x)\{1+xf(x)\}-f(x)\{f(x)+xf'(x)\}}{\{1+xf(x)\}^2}$

$=\dfrac{f'(x)-\{f(x)\}^2}{\{1+xf(x)\}^2}$

이므로

$g'(2)=\dfrac{f'(2)-\{f(2)\}^2}{\{1+2f(2)\}^2}$

$=\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{(1+1)^2}=\dfrac{3}{16}$

답 ①

04 $f(3x+4)=g(1-2x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3f'(3x+4)=-2g'(1-2x)$ ······ ㉠

$f'(1),\ g'(5)$의 값을 이용할 수 있도록 적당한 수를 ㉠에 대입한다.

㉠에 $x=-1$을 대입하면

$3f'(1)=-2g'(3)$

$\therefore g'(3)=-\dfrac{3}{2}f'(1)=-\dfrac{3}{2}\cdot 4=-6$

㉠에 $x=-2$를 대입하면

$3f'(-2)=-2g'(5)$

$\therefore f'(-2)=-\dfrac{2}{3}g'(5)$

$=-\dfrac{2}{3}\cdot(-9)=6$

$\therefore f'(-2)+g'(3)=6-6=0$

답 ①

05 두 점 A$(1,\ 4)$, B$(4,\ -2)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(1)=4,\ f(4)=-2$

Ⅱ 미분법

또 두 점 A$(1,\ 4)$, B$(4,\ -2)$에서의 접선의 기울기가 각각 2, 4이므로

$$f'(1)=2,\ f'(4)=4$$

$F(x)=f(f(x))$라 하면

$$F(1)=f(f(1))=f(4)=-2$$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(f(x))+2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=F'(1)$$

이때 $F'(x)=f'(f(x))f'(x)$이므로

$$F'(1)=f'(f(1))f'(1)=f'(4)f'(1)=4\cdot2=8$$

답 ④

06 $f(x)=2\sec\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}$에서

$$f'(x)=2\cdot\frac{1}{2}\sec\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$$

$$=\sec\frac{x}{2}\left(\tan\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sec\frac{x}{2}\right)$$ ··· ❶

$\sec\frac{x}{2}\neq0$이므로 $f'(x)=0$에서

$$\tan\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sec\frac{x}{2}=\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\therefore \sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$$

$0<x<\pi$에서 $0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}$이므로

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}\qquad \therefore x=\frac{\pi}{3}$$

즉 $\alpha=\frac{\pi}{3}$이므로 ··· ❷

$$f(\alpha)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sec\frac{\pi}{6}-\tan\frac{\pi}{6}$$

$$=2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$ ··· ❸

답 $\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ α의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $f(\alpha)$의 값을 구할 수 있다.	20%

07 $f(x)=\sin^2x$라 하면

$$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$$

두 점 $(\alpha,\ \sin^2\alpha)$, $(\beta,\ \sin^2\beta)$에서의 접선의 기울기는 각각

$$f'(\alpha)=\sin2\alpha,\ f'(\beta)=\sin2\beta$$

이고 두 접선이 서로 수직이므로

$$\sin2\alpha\sin2\beta=-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$에서 $0<2\alpha<\pi<2\beta<2\pi$이므로

$$0<\sin2\alpha\le1,\ -1\le\sin2\beta<0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\sin2\alpha=1,\ \sin2\beta=-1$

일품 BOX

$\sin2\beta=-\frac{1}{\sin2\alpha}$이므로

$-1\le-\frac{1}{\sin2\alpha}<0$에서

$0<\frac{1}{\sin2\alpha}\le1$

$\therefore \sin2\alpha\ge1$

따라서 $\sin2\alpha=1$이고 $\sin2\beta=-1$이다.

따라서 $2\alpha=\frac{\pi}{2}$, $2\beta=\frac{3}{2}\pi$이므로

$$\alpha=\frac{\pi}{4},\ \beta=\frac{3}{4}\pi$$

$$\therefore \sin\alpha\cos\beta=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{3}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

08 $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서

$$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$$

$$\therefore h'(1)=g'(f(1))f'(1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

$f(x)=(\sqrt{3x+1}-3)^5$에서

$$f'(x)=5(\sqrt{3x+1}-3)^4\cdot\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

일품 BOX

$(\sqrt{3x+1}-3)'$

$=\{(3x+1)^{\frac{1}{2}}-3\}'$

$=\frac{1}{2}(3x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(3x+1)'$

$=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

$$\therefore f(1)=-1,\ f'(1)=\frac{15}{4}$$

㉠에서 $h'(1)=g'(-1)\cdot\frac{15}{4}$이므로

$$g'(-1)\cdot\frac{15}{4}=3$$

$$\therefore g'(-1)=\frac{4}{5}$$

답 $\frac{4}{5}$

09 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$에서

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$g(x)=\frac{\tan x}{\sqrt{3}}$에서 $\quad g'(x)=\frac{\sec^2x}{\sqrt{3}}$

$h(x)=f(g(x))$에서 $\quad h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$$\therefore h'\left(\frac{\pi}{6}\right)=f'\left(g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=f'\left(\frac{1}{3}\right)g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

일품 BOX

$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}$

$g'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sec^2\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{4}{3}$

$f'\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{4}{3}$$

$$=-\frac{\sqrt{6}}{9}$$

답 ④

10 $f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$에서

$f_{n+1}{}'(x)=f'(f_n(x))f_n{}'(x)$이므로

$$g'(x)=f_{10}{}'(x)=f'(f_9(x))\cdot f_9{}'(x)$$

$$=f'(f_9(x))\cdot f'(f_8(x))\cdot f_8{}'(x)$$

$$=\cdots$$

$$=f'(f_9(x))\cdot f'(f_8(x))\cdot f'(f_7(x))\cdots\cdots f'(f_1(x))\cdot f_1{}'(x)$$

한편 $f(1)=1$이므로

$$f_1(1)=1$$

$$f_2(1)=f(f_1(1))=f(1)=1$$

$$f_3(1)=f(f_2(1))=f(1)=1$$

$$\vdots$$

$$f_9(1)=1$$

$\therefore g'(1)$

$$=f'(f_9(1))\cdot f'(f_8(1))\cdots\cdots f'(f_1(1))\cdot f_1{}'(1)$$

$$=\underbrace{f'(1)\cdot f'(1)\cdots\cdots f'(1)}_{9\text{개}}\cdot f'(1)$$

$$=\underbrace{2\cdot2\cdots\cdots2\cdot2}_{10\text{개}}=2^{10}=1024$$

답 1024

11 주어진 함수의 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=\ln\left|\frac{(x+2)^2\sqrt{(x+1)^3}}{x^2+1}\right|$$
$$=2\ln|x+2|+\frac{3}{2}\ln|x+1|-\ln|x^2+1|$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x+2}+\frac{3}{2(x+1)}-\frac{2x}{x^2+1}$$
$$\therefore f'(x)=f(x)\left\{\frac{2}{x+2}+\frac{3}{2(x+1)}-\frac{2x}{x^2+1}\right\}$$
$$\therefore f'(0)=4\left(1+\frac{3}{2}\right)=10$$

답 10

1등급 비밀노트

$y=\frac{f(x)}{g(x)}$ 꼴의 함수의 도함수를 몫의 미분법을 이용하여 구하기 어려울 때에는 다음과 같이 로그함수의 미분을 이용하여 구한다.

(i) 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취한다.
➡ $\ln|y|=\ln|f(x)|-\ln|g(x)|$

(ii) (i)의 식의 양변을 x에 대하여 미분한다.
➡ $\frac{y'}{y}=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{g'(x)}{g(x)}$

(iii) (ii)의 식을 y'에 대하여 정리한다.

12 $f(x)=(\ln x)^x$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=\ln|(\ln x)^x|=x\ln(\ln x)\ (\because \ln x>0)$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln(\ln x)+x\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$
$$=\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}$$
$$\therefore f'(x)=f(x)\left\{\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right\}$$
$$=(\ln x)^x\left\{\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right\}$$
$$\therefore f'(e)=(\ln e)^e\left\{\ln(\ln e)+\frac{1}{\ln e}\right\}$$
$$=1\cdot(0+1)=1$$

답 1

1등급 비밀노트

$y=\{f(x)\}^{g(x)}\ (f(x)>0)$ 꼴의 함수의 도함수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 주어진 식의 양변에 자연로그를 취한다.
➡ $\ln y=g(x)\ln f(x)$

(ii) (i)의 식의 양변을 x에 대하여 미분한다.
➡ $\frac{y'}{y}=g'(x)\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}$

(iii) (ii)의 식을 y'에 대하여 정리한다.

13 $\frac{dx}{dt}=1-e^t$, $\frac{dy}{dt}=1-\cos t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\cos t}{1-e^t}\ (t\neq 0)$$

$$\therefore \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\frac{1-\cos t}{1-e^t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos^2 t}{t(1+\cos t)(1-e^t)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t^2(1+\cos t)\cdot\frac{1-e^t}{t}}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t^2}\cdot\frac{1}{1+\cos t}\cdot\frac{t}{1-e^t}$$
$$=1\cdot\frac{1}{2}\cdot(-1)=-\frac{1}{2}$$

$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$

$\lim_{t\to 0}\frac{t}{1-e^t}$
$=\lim_{t\to 0}\frac{-1}{\frac{e^t-1}{t}}=-1$

답 $-\frac{1}{2}$

14 $\frac{dx}{dt}=\frac{2}{(t+1)^2}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{t^2+2t+2}{(t+1)^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{t^2+2t+2}{(t+1)^2}}{\frac{2}{(t+1)^2}}=\frac{t^2+2t+2}{2}$$

따라서 $t=n$일 때 접선의 기울기는

$$f(n)=\frac{n^2+2n+2}{2} \quad \cdots ❶$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{8}f(n)=\sum_{n=1}^{8}\frac{n^2+2n+2}{2}$$
$$=\sum_{n=1}^{8}\left(\frac{1}{2}n^2+n+1\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{8\cdot 9\cdot 17}{6}+\frac{8\cdot 9}{2}+8$$
$$=102+36+8$$
$$=146 \quad \cdots ❷$$

답 146

채점 기준	비율
❶ $f(n)$을 구할 수 있다.	60 %
❷ $\sum_{n=1}^{8}f(n)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

15 $\frac{dx}{dt}=e^t+2e^{2t}+3e^{3t}+\cdots+ne^{nt}$,

$\frac{dy}{dt}=e^t+3e^{3t}+5e^{5t}+\cdots+(2n-1)e^{(2n-1)t}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t+3e^{3t}+5e^{5t}+\cdots+(2n-1)e^{(2n-1)t}}{e^t+2e^{2t}+3e^{3t}+\cdots+ne^{nt}}$$

따라서 $t=0$일 때 접선의 기울기는

$$g(n)=\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{1+2+3+\cdots+n}$$
$$=\frac{n^2}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2n}{n+1}$$

$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$
$=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n$
$=n^2$

$g(n)=\frac{9}{5}$에서

$$\frac{2n}{n+1}=\frac{9}{5},\qquad 10n=9n+9$$
$$\therefore n=9$$

답 ①

II 미분법

16 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{3}{t+1}$, $\dfrac{dy}{dt}=3t^2-3t+3$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2-3t+3}{\frac{3}{t+1}}$$

$$=(t+1)(t^2-t+1)=t^3+1 \quad \cdots ❶$$

접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

접선의 기울기는 $\tan\frac{\pi}{4}=1$

$t^3+1=1$에서 $t=0$이므로 ⋯ ❷

$a=1$, $b=3$

$\therefore a+b=4$ ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ $\frac{dy}{dx}$를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 조건을 만족시키는 t의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

17 $x^2-2xy+2y^2-5=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x-2y-2x\frac{dy}{dx}+4y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2(x-2y)\frac{dy}{dx}=2(x-y)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x-2y}\ (x\neq 2y)$$

곡선 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 기울기가 2일 때,

$$\frac{x_1-y_1}{x_1-2y_1}=2, \quad x_1-y_1=2x_1-4y_1$$

$\therefore x_1=3y_1$

점 (x_1, y_1)이 곡선 $x^2-2xy+2y^2-5=0$ 위에 있으므로

$$x_1^2-2x_1y_1+2y_1^2-5=0$$

$x_1=3y_1$을 위의 식에 대입하면

$$9y_1^2-6y_1^2+2y_1^2-5=0$$

$$5y_1^2=5 \quad \therefore y_1=\pm 1$$

즉 두 점 A, B의 좌표는 $(3, 1)$, $(-3, -1)$이고 직선 m의 방정식을

$y+1=2(x+3)$, 즉 $2x-y+5=0$

이라 하면 두 직선 l, m 사이의 거리는 직선 l 위의 점 A$(3, 1)$과 직선 $2x-y+5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|6-1+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

답 ②

18 $ax^2+bxy+x^3\sqrt{y}=3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2ax+by+bx\frac{dy}{dx}+3x^2\sqrt{y}+x^3\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기가 -4이므로

$\frac{dy}{dx}=-4$

$$2a+b-4b+3-2=0$$

$\therefore 2a-3b=-1$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

점 $(1, 1)$이 곡선 $ax^2+bxy+x^3\sqrt{y}=3$ 위에 있으므로

$a+b+1=3$ $\quad \therefore a+b=2$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=1$

$\therefore a^2+b^2=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 접선의 기울기를 이용하여 a, b에 대한 식을 세울 수 있다.	50 %
❷ 곡선 위의 점을 이용하여 a, b에 대한 식을 세울 수 있다.	20 %
❸ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	30 %

19 점 $(2, 1)$이 곡선 $y^3+yf(x)+f(3x-4)=3$ 위의 점이므로

$1+f(2)+f(2)=3 \quad \therefore f(2)=1$

$y^3+yf(x)+f(3x-4)=3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$3y^2\frac{dy}{dx}+f(x)\frac{dy}{dx}+yf'(x)+3f'(3x-4)=0$$

점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기가 -2이므로

$\frac{dy}{dx}=-2$

$$-6-2+f'(2)+3f'(2)=0$$

$4f'(2)=8 \quad \therefore f'(2)=2$

답 ②

20 $g(6)=a$라 하면 $f(a)=6$이므로

$a\sqrt{a+1}=6$

양변을 제곱하면

$a^3+a^2=36$, $\quad a^3+a^2-36=0$

$h(a)=a^3+a^2-36$이라 하면 $h(3)=0$이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 1 & 0 & -36 \\ & & 3 & 12 & 36 \\ \hline & 1 & 4 & 12 & 0 \end{array}$$

$\therefore h(a)=(a-3)(a^2+4a+12)$

$(a-3)(a^2+4a+12)=0$

$\therefore a=3\ (\because a^2+4a+12>0)$

$\therefore g(6)=3$ ⋯ ❶

또 $f(x)=x\sqrt{x+1}$에서

$$f'(x)=\sqrt{x+1}+\frac{x}{2\sqrt{x+1}}$$

이므로 $\quad f'(3)=2+\dfrac{3}{2\cdot 2}=\dfrac{11}{4}$ ⋯ ❷

$$\therefore g'(6)=\frac{1}{f'(g(6))}=\frac{1}{f'(3)}=\frac{4}{11} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{4}{11}$

채점 기준	비율
❶ $g(6)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f'(g(6))$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $g'(6)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

21 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선의 기울기는 $\quad g'(2)=\dfrac{1}{f'(g(2))}$

$g(2)=a$라 하면 $f(a)=2$이므로

$e^{2a}-e^a=2$, $\quad e^{2a}-e^a-2=0$

$(e^a-2)(e^a+1)=0$, $\quad e^a=2\ (\because e^a>1)$

$\therefore a=\ln 2$

즉 $g(2)=\ln 2$이고 $f'(x)=2e^{2x}-e^{x}$이므로

$$g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(\ln 2)}=\frac{1}{2e^{2\ln 2}-e^{\ln 2}}=\frac{1}{2\cdot 4-2}=\frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

22 $g\left(f\left(\frac{x+1}{4}\right)\right)=x$이므로 이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'\left(f\left(\frac{x+1}{4}\right)\right)\cdot\frac{1}{4}f'\left(\frac{x+1}{4}\right)=1$$

$$\therefore g'\left(f\left(\frac{x+1}{4}\right)\right)=\frac{4}{f'\left(\frac{x+1}{4}\right)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$f\left(\frac{x+1}{4}\right)=3$을 만족시키는 x의 값을 구하면 $f(2)=3$이므로

$f'(x)>0$에서 $f(x)$는 일대일대응이므로 $f\left(\frac{x+1}{4}\right)=3$을 만족시키는 x는 오직 하나만 존재한다.

$$\frac{x+1}{4}=2 \qquad \therefore x=7$$

이때 $f'(2)=4$이므로 ㉠에 $x=7$을 대입하면

$$\therefore g'(f(2))=\frac{4}{f'(2)}$$

$$\therefore g'(3)=\frac{4}{4}=1$$

답 1

다른 풀이 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

$f(x)$의 역함수를 $h(x)$라 하면 $f(2)=3$이므로

$$h(3)=2$$

또 $f'(2)=4$이므로

$$h'(3)=\frac{1}{f'(h(3))}=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{4}$$

$y=f\left(\frac{x+1}{4}\right)$에서 x와 y를 서로 바꾸면

$$x=f\left(\frac{y+1}{4}\right) \qquad \therefore f^{-1}(x)=\frac{y+1}{4}$$

즉 $h(x)=\frac{y+1}{4}$이므로 $\quad y=4h(x)-1$

$$\therefore g(x)=4h(x)-1$$

따라서 $g'(x)=4h'(x)$이므로

$$g'(3)=4h'(3)=4\cdot\frac{1}{4}=1$$

23 $f(2g(x)+x^3+4x-7)=x$에서

$f(h(x))=x$이면 $h(x)=f^{-1}(x)$

$$g(x)=2g(x)+x^3+4x-7$$

$$\therefore g(x)=-x^3-4x+7$$

$f(2)=a$라 하면 $g(a)=2$이므로

$$-a^3-4a+7=2, \qquad a^3+4a-5=0$$

$$(a-1)(a^2+a+5)=0$$

$$\therefore a=1\ (\because a^2+a+5>0)$$

$$\therefore f(2)=1$$

또 $g'(x)=-3x^2-4$이므로

$$f'(2)=\frac{1}{g'(f(2))}=\frac{1}{g'(1)}=-\frac{1}{7}$$

답 $-\frac{1}{7}$

24 $h(x)=(g\circ g)(x)=g(g(x))$에서

$h'(x)=g'(g(x))g'(x)$이므로

$$h'(2)=g'(g(2))g'(2)$$

$g(2)=a$라 하면 $f(a)=2$이므로

$$\sqrt{a^3+2a+1}=2, \qquad a^3+2a+1=4$$

$$a^3+2a-3=0, \qquad (a-1)(a^2+a+3)=0$$

$$\therefore a=1(\because a^2+a+3>0)$$

즉 $g(2)=1$이고 $f'(x)=\frac{3x^2+2}{2\sqrt{x^3+2x+1}}$이므로

$$g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{4}{5}$$

$f'(1)=\frac{3+2}{2\cdot 2}=\frac{5}{4}$

또 $g(1)=b$라 하면 $f(b)=1$이므로

$$\sqrt{b^3+2b+1}=1, \qquad b^3+2b+1=1$$

$$b(b^2+2)=0$$

$$\therefore b=0(\because b^2+2>0)$$

즉 $g(1)=0$이므로

$$g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'(0)}=1$$

$$\therefore h'(2)=g'(g(2))g'(2)=g'(1)\cdot g'(2)=\frac{4}{5}$$

답 ④

25 $f(x)=x^x$의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x)=x\ln x$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$$

$$\therefore f'(x)=f(x)(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$$

즉 $(x^x)'=x^x(\ln x+1)$이므로

$$f''(x)=(x^x)'(\ln x+1)+x^x(\ln x+1)'=x^x(\ln x+1)(\ln x+1)+x^x\cdot\frac{1}{x}=x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}$$

$$\therefore f''(1)=2$$

답 ③

26 $$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}f''(1) \quad \cdots ❶$$

이때 $f(x)=e^{x^2+2x-3}$에서

$$f'(x)=e^{x^2+2x-3}\cdot(2x+2)$$

$$f''(x)=e^{x^2+2x-3}\cdot(2x+2)^2+e^{x^2+2x-3}\cdot 2=2e^{x^2+2x-3}(2x^2+4x+3) \quad \cdots ❷$$

이므로 $\quad f''(1)=2\cdot1\cdot9=18$

$$\therefore \frac{1}{2}f''(1)=\frac{1}{2}\cdot18=9 \quad \cdots ❸$$

답 9

채점 기준	비율
❶ 극한값을 구하는 식을 간단히 할 수 있다.	40 %
❷ $f''(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ 극한값을 구할 수 있다.	20 %

27 $f'(x)$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{e^{x+h}\{(x+h)^2-x^2\}+ax^2(e^{x+h}-e^x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\left\{e^{x+h}\cdot\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\right\}+ax^2\lim_{h\to0+}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}e^{x+h}\cdot\lim_{h\to0+}(2x+h)+ax^2\lim_{h\to0+}e^x\cdot\frac{e^h-1}{h}$$

$$=e^x\cdot2x+ax^2\cdot e^x\cdot1$$

$$=e^x(ax^2+2x)$$

$$\therefore f''(x)=e^x(ax^2+2x)+e^x(2ax+2)$$

$$=e^x(ax^2+2x+2ax+2)$$

$f''(1)=e$에서 $(3a+4)e=e$

$\therefore a=-1$

(미분계수)

$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}$ (평균변화율)

답 ②

28 $f(x)=10e^{\frac{3}{5}x}$이므로

$$f^{(1)}(x)=f'(x)=10\cdot\frac{3}{5}e^{\frac{3}{5}x}$$

$$f^{(2)}(x)=\frac{d}{dx}f^{(1)}(x)=10\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2e^{\frac{3}{5}x}$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{d}{dx}f^{(2)}(x)=10\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3e^{\frac{3}{5}x}$$

$$\vdots$$

$$\therefore f^{(n)}(x)=10\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^ne^{\frac{3}{5}x}\ (n\ge1)$$ ··· ❶

따라서 $f^{(n)}(5)=10\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^ne^3$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}f^{(n)}(5)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{10\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^ne^3\right\}$$

$$=10e^3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$=10e^3\cdot\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}$$

$$=10e^3\cdot\frac{3}{2}=15e^3$$ ··· ❷

첫째항이 $\frac{3}{5}$이고 공비가 $\frac{3}{5}$인 등비급수이다.

답 $15e^3$

채점 기준	비율
❶ $f^{(n)}(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $\sum_{n=1}^{\infty}f^{(n)}(5)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 55쪽

01 $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^{\frac{n}{2}}-(1+\ln x)\cdot\frac{n}{2}x^{\frac{n}{2}-1}}{x^n}$이므로

$$a_n=f'(1)=1-\frac{n}{2}$$

$$\therefore \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{n}{2}\right)\left(1-\frac{n+1}{2}\right)}$$

$$=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\frac{2-n}{2}\cdot\frac{1-n}{2}}$$

$$=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4}{(n-2)(n-1)}$$

$$=4\lim_{n\to\infty}\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k-1}\right)$$

$$=4\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)\right\}$$

$$=4\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)=4$$

답 ⑤

02 $x\ne0$일 때,

$$f'(x)=nx^{n-1}\sin\frac{1}{x^2}+x^n\cos\frac{1}{x^2}\cdot\frac{-2}{x^3}$$

$$=nx^{n-1}\sin\frac{1}{x^2}-2x^{n-3}\cos\frac{1}{x^2}$$

이때 $\lim_{x\to0}x^{n-1}\sin\frac{1}{x^2}$의 값이 존재하려면 $n\ge2$이어야 하고, $\lim_{x\to0}x^{n-3}\cos\frac{1}{x^2}$의 값이 존재하려면 $n\ge4$이어야 하므로 $\lim_{x\to0}f'(x)$의 값이 존재하려면 $n\ge4$이어야 한다.

$\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x^2}$이 발산하므로 $\lim_{x\to0}x^{n-1}=0$이어야 한다.

즉 $n\ge4$일 때 $\lim_{x\to0}f'(x)=0$이고

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^n\sin\frac{1}{x^2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}x^{n-1}\sin\frac{1}{x^2}=0$$

이므로 $\lim_{x\to0}f'(x)=f'(0)$

따라서 $n\ge4$이면 $f'(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 n의 최솟값은 4이다.

답 4

03 $f(x)=\ln\frac{a^x+b^x}{2}$이라 하면

$$f(0)=\ln\frac{1+1}{2}=0$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$=f'(0)$$

이때 $f'(x)=\dfrac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}$이므로

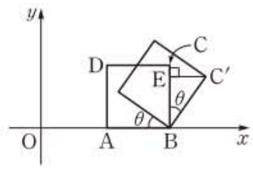
$f(x)=\ln\frac{a^x+b^x}{2}$
$=\ln(a^x+b^x)-\ln2$
이므로
$f'(x)=\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}$

$$f'(0)=\frac{\ln a+\ln b}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln ab=\ln\sqrt{ab}$$

답 ④

04 오른쪽 그림과 같이 점 C′에서 $\overline{CB}$에 내린 수선의 발을 E라 하면 점 C′의 x좌표는



$$x=2+\overline{C'E}$$
$$=2+\overline{C'B}\sin\theta$$
$$=2+\sin\theta$$

점 C′의 y좌표는

$$y=\overline{BE}=\overline{C'B}\cos\theta=\cos\theta$$

따라서 $\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta}=-\sin\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

한편 $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$일 때

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\ \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

이므로 $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$일 때 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$$-\frac{\dfrac{1}{3}}{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

즉 $p=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$이므로

$$\frac{1}{p^2}=8$$

답 8

05 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{g(1+2h)-g(1-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{g(1+2h)-g(1)}{2h}\cdot2+\frac{g(1-h)-g(1)}{-h}\right\}$$
$$=2g'(1)+g'(1)$$
$$=3g'(1)$$

$g(1)=a$라 하면 $f(2a-1)=1$이므로

$\{(2a-1)^3+2\}^3=1,\quad (2a-1)^3+2=1$

$(2a-1)^3=-1,\quad 2a-1=-1$

$\therefore a=0\quad \therefore f(-1)=1$

$g(f(2x-1))=x$이므로 이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(f(2x-1))\cdot2\cdot f'(2x-1)=1$$
$$\therefore g'(f(2x-1))=\frac{1}{2f'(2x-1)}$$

$f'(x)=3(x^3+2)^2\cdot3x^2$이므로 위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(-1)=9$

$$g'(f(-1))=\frac{1}{2f'(-1)}\qquad \therefore g'(1)=\frac{1}{18}$$

따라서 구하는 값은

$$3g'(1)=3\cdot\frac{1}{18}=\frac{1}{6}$$

답 ③

06 $f(x)=e^x\cos2x$에서

$$f'(x)=e^x\cos2x-2e^x\sin2x$$
$$=e^x(\cos2x-2\sin2x)$$
$$f''(x)=e^x(\cos2x-2\sin2x)$$
$$+e^x(-2\sin2x-4\cos2x)$$
$$=e^x(-3\cos2x-4\sin2x)$$

$f'(\alpha)=f''(\alpha)$에서

$$e^\alpha(\cos2\alpha-2\sin2\alpha)=e^\alpha(-3\cos2\alpha-4\sin2\alpha)$$

모든 실수 x에 대하여 $e^x>0$이므로 $e^\alpha\neq0$

$$\cos2\alpha-2\sin2\alpha=-3\cos2\alpha-4\sin2\alpha$$
$$4\cos2\alpha+2\sin2\alpha=0$$
$$\therefore 2\cos2\alpha+\sin2\alpha=0$$

$\cos2\alpha\neq0$이므로 양변을 $\cos2\alpha$로 나누면

$\cos2\alpha=0$이면 $\sin2\alpha\neq0$이므로 $2\cos2\alpha+\sin2\alpha\neq0$ 따라서 $\cos2\alpha\neq0$이다.

$$2+\tan2\alpha=0$$
$$\therefore \tan2\alpha=-2$$

$\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-2$에서

$$\tan\alpha=-1+\tan^2\alpha$$
$$\therefore \tan^2\alpha-\tan\alpha-1=0$$

$\tan\alpha\neq0$이므로 양변을 $\tan\alpha$로 나누면

$\tan\alpha=0$이면 $\tan^2\alpha-\tan\alpha-1\neq0$이므로 $\tan\alpha\neq0$이다.

$$\tan\alpha-1-\frac{1}{\tan\alpha}=0$$
$$\therefore \tan\alpha-\frac{1}{\tan\alpha}=1$$

답 1

Ⅱ-4. 도함수의 활용

개념&핵심 기출 본책 56~59쪽

01 $f(x)=x+\frac{k}{x}$라 하면

$f'(x)=1-\frac{k}{x^2}$

점 $(1,\ 1+k)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1-k$이므로 접선의 방정식은

$y-(1+k)=(1-k)(x-1)$,

즉 $y=(1-k)x+2k$

이 접선의 x절편, y절편은 각각 $\frac{2k}{k-1}$, $2k$이므로 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\frac{2k}{k-1}\cdot 2k=9$, $\quad \frac{2k^2}{k-1}=9$

$2k^2-9k+9=0$, $\quad (2k-3)(k-3)=0$

$\therefore k=\frac{3}{2}$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$\frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}$ 답 $\frac{9}{2}$

02 $f(x)=x\ln x+x$라 하면

$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1=\ln x+2$

접점의 좌표를 $(a,\ a\ln a+a)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 3이므로

$f'(a)=\ln a+2=3$, $\quad \ln a=1$

$\therefore a=e$

접점의 좌표가 $(e,\ 2e)$이므로 접선의 방정식은

$y-2e=3(x-e)$, 즉 $y=3x-e$

따라서 구하는 y절편은 $-e$이다. 답 ②

03 $\frac{dx}{dt}=2e^{2t-1}$,

$\frac{dy}{dt}=(2t+1)e^t+(t^2+t-1)e^t=(t^2+3t)e^t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(t^2+3t)e^t}{2e^{2t-1}}=\frac{t^2+3t}{2e^{t-1}}$$

$t=1$일 때,

$x=e$, $y=(1^2+1-1)e=e$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1^2+3\cdot1}{2\cdot1}=2$

이므로 $t=1$에 대응하는 곡선 위의 점 $(e,\ e)$에서의 접선의 방정식은

$y-e=2(x-e)$, 즉 $y=2x-e$

따라서 구하는 x절편은 $\frac{e}{2}$이다. 답 $\frac{e}{2}$

$0=2x-e$에서

$2x=e \quad \therefore x=\frac{e}{2}$

04 $g(x)=\ln x$라 하면 $\quad g'(x)=\frac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(a,\ \ln a)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $g'(a)=\frac{1}{a}$이므로 접선의 방정식은

$y-\ln a=\frac{1}{a}(x-a)$ ······ ㉠

점 $(p,\ q)$가 직선 $y=f(x)$ 위의 점이면 $q=f(p)$

이 직선이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1-\ln a=\frac{1}{a}\cdot(-a)$

$\ln a=2 \quad \therefore a=e^2$

$a=e^2$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y-\ln e^2=\frac{1}{e^2}(x-e^2)$, 즉 $y=\frac{1}{e^2}x+1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{e^2}x+1$이므로

$f(e)=\frac{1}{e}+1=\frac{1+e}{e}$ 답 ④

05 $f(x)=e^{x-2}$이라 하면 $\quad f'(x)=e^{x-2}$

접점의 좌표를 $(a,\ e^{a-2})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=e^{a-2}$이므로 접선의 방정식은

$y-e^{a-2}=e^{a-2}(x-a)$ ······ ㉠

이 직선이 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$-e^{a-2}=e^{a-2}(2-a)$, $\quad e^{a-2}(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because e^{a-2}>0$)

$a=3$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y-e=e(x-3)$, 즉 $y=ex-2e$

따라서 y절편은 $-2e$이다. 답 ①

06 $f(x)=a-\cos^2 x$, $g(x)=\sin x-1$이라 하면

$f'(x)=2\sin x\cos x$, $g'(x)=\cos x$

$f'(x)$
$=-2\cos x\cdot(\cos x)'$
$=-2\cos x\cdot(-\sin x)$
$=2\sin x\cos x$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 접한다고 하면

$f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$

$f'(t)=g'(t)$에서

$2\sin t\cos t=\cos t$

$0<t<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos t\neq0$이므로

$2\sin t=1$, $\quad \sin t=\frac{1}{2}$

$\therefore t=\frac{\pi}{6}$ $\left(\because 0<t<\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=g\left(\frac{\pi}{6}\right)$이므로

$a-\cos^2\frac{\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{6}-1$

$a-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2} \quad \therefore a=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

07 $f(x)=2\sin x-x$에서

$f'(x)=2\cos x-1$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{5}{3}\pi, 2\pi\right]$에서 증가한다. 답 ⑤

08 $f(x)=e^{2x}-8x$에서 $f'(x)=2e^{2x}-8$

$f'(x)=0$에서 $e^{2x}=4$

$2x=\ln 4=2\ln 2$ $\therefore x=\ln 2$

$x\le\ln 2$에서 $f'(x)\le 0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

따라서 a의 최댓값은 $\ln 2$이다. 답 ③

09 $f(x)=x^2-4x+a\ln x$에서

$$f'(x)=2x-4+\frac{a}{x}=\frac{2x^2-4x+a}{x}$$

함수 $f(x)$가 구간 $(0, \infty)$에서 증가하려면 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로

$2x^2-4x+a\ge 0$ ($\because x>0$)

$\therefore 2(x-1)^2+a-2\ge 0$

따라서 $a-2\ge 0$이어야 하므로

$a\ge 2$ 답 $a\ge 2$

$y=2(x-1)^2+a-2$로 놓으면 $x=1$일 때 최솟값 $a-2$를 갖는다.

10 $f(x)=\frac{2x}{x^2+a}$에서

$$f'(x)=\frac{2(x^2+a)-2x\cdot 2x}{(x^2+a)^2}=-\frac{2(x^2-a)}{(x^2+a)^2}$$

$f(x)$, $g(x)$ $(g(x)\ne 0)$가 미분가능할 때, $y=\frac{f(x)}{g(x)}$이면 $y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

$f'(x)=0$에서 $x^2-a=0$

$x^2=a$ $\therefore x=\pm\sqrt{a}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{a}$에서 극댓값을 가지므로

$\sqrt{a}=2$ $\therefore a=4$

극댓값은 $f(2)$이므로

$$b=f(2)=\frac{4}{4+4}=\frac{1}{2}$$

$\therefore a+b=\frac{9}{2}$ 답 $\frac{9}{2}$

11 $f(x)=(x-a)\sin x+\cos x$에서

$f'(x)=\sin x+(x-a)\cos x-\sin x$

$=(x-a)\cos x$

$f'(x)=0$에서 $x-a=0$ 또는 $\cos x=0$

$\therefore x=a$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

그런데 $x=\pi$에서 극대이므로 $a=\pi$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3}{2}\pi$에서 극소이므로

$$\frac{b+c}{a}=\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi}{\pi}=2$$ 답 ④

12 $f(x)=ax+\frac{1}{x}+2\ln x$에서

$$f'(x)=a-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}=\frac{ax^2+2x-1}{x^2}$$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 $a\ne 0$이고, 이차방정식 $ax^2+2x-1=0$이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $ax^2+2x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1+a>0$ $\therefore a>-1$

(ii) 두 근의 합이 양수이어야 하므로

$-\frac{2}{a}>0$ $\therefore a<0$

(iii) 두 근의 곱이 양수이어야 하므로

$-\frac{1}{a}>0$ $\therefore a<0$

이상에서 a의 값의 범위는

$-1<a<0$ 답 ②

이차방정식 $ax^2+2x-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 (두 근의 합)$=-\frac{2}{a}$, (두 근의 곱)$=-\frac{1}{a}$

13 $f(x)=(x^2+x)e^x$이라 하면

$f'(x)=(2x+1)e^x+(x^2+x)e^x$

$=(x^2+3x+1)e^x$

$f''(x)=(2x+3)e^x+(x^2+3x+1)e^x$

$=(x^2+5x+4)e^x$

곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로

$x^2+5x+4<0$, $(x+4)(x+1)<0$

$\therefore -4<x<-1$

따라서 $b-a$의 최댓값은 $-1-(-4)=3$ 답 3

14 $f(x)=\cos^2 x$라 하면

$f'(x)=2\cos x\cdot(-\sin x)=-\sin 2x$

$f''(x)=-2\cos 2x$

$f''(x)=0$에서 $-2\cos 2x=0$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ $\left(\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 $0\le 2x\le\pi$이므로 $2x=\frac{\pi}{2}$ $\therefore x=\frac{\pi}{4}$

$0\le x<\frac{\pi}{4}$일 때 $f''(x)<0$, $\frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{2}$일 때 $f''(x)>0$

이므로 $x=\frac{\pi}{4}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀐다.

따라서 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$이고, 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$이므로 접선의 방정식은

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos^2\frac{\pi}{4}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

$y-\frac{1}{2}=-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, 즉 $y=-x+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

이 접선이 점 $\left(\frac{1}{2}, a\right)$를 지나므로

$a=\frac{\pi}{4}$ 답 $\frac{\pi}{4}$

15 $f(x)=ax^2+x+4\sin x$라 하면

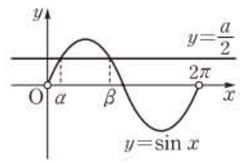
$f'(x)=2ax+1+4\cos x$

$f''(x)=2a-4\sin x$

곡선 $y=f(x)$가 $0<x<2\pi$에서 두 개의 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 서로 다른 두 실근 α, β를 갖고, $x=\alpha$, $x=\beta$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$2a-4\sin x=0$이므로 $\sin x=\frac{a}{2}$

$0<x<2\pi$에서 $y=\sin x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=\frac{a}{2}$가 $y=\sin x$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나려면



$$-1<\frac{a}{2}<0 \text{ 또는 } 0<\frac{a}{2}<1$$

$$\therefore -2<a<0 \text{ 또는 } 0<a<2$$

따라서 정수 a는 -1, 1의 2개이다. 답 ②

참고 $a=-1$이면 곡선 $y=-x^2+x+4\sin x$는 $x=\frac{7}{6}\pi$, $x=\frac{11}{6}\pi$에서 변곡점을 갖고, $a=1$이면 곡선 $y=x^2+x+4\sin x$는 $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{5}{6}\pi$에서 변곡점을 갖는다.

$\sin x=-\frac{1}{2}$

$\sin x=\frac{1}{2}$

16 $f(x)=xe^{-x}$에서

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

$f''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

$f''(x)=0$에서 $x=2$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	−	−
$f''(x)$	−	−	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{2}{e^2}$	↘

또 $\lim_{x\to-\infty} xe^{-x}=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 ①과 같다. 답 ①

17 $f(x)=x-2\ln(x^2+3)$에서

$$f'(x)=1-2\cdot\frac{2x}{x^2+3}=\frac{x^2-4x+3}{x^2+3}$$

$f'(x)=0$에서

$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		+	0	−	0
$f(x)$	$-1-2\ln 4$	↗	$1-2\ln 4$	↘	$3-2\ln 12$

$$\begin{aligned}f(3)-f(-1)&=3-2\ln 12-(-1-2\ln 4)\\&=4-2(\ln 12-\ln 4)=4-2\ln 3\\&=2(2-\ln 3)>0\end{aligned}$$

$2=\ln e^2$이고 $e^2>3$이므로 $2>\ln 3$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 $1-2\ln 4$를 갖고, $x=-1$일 때 최솟값 $-1-2\ln 4$를 갖는다.

즉 $M=1-2\ln 4$, $m=-1-2\ln 4$이므로

$$\begin{aligned}Mm&=(1-2\ln 4)(-1-2\ln 4)\\&=-1+(2\ln 4)^2\\&=-1+16(\ln 2)^2\end{aligned}$$

$(2\ln 4)^2=(4\ln 2)^2=16(\ln 2)^2$

$\therefore a+b=-1+16=15$ 답 15

18 $e^x-x+n-10=0$에서

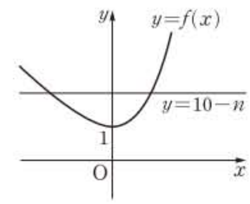
$e^x-x=10-n$ …… ㉠

$f(x)=e^x-x$라 하면 $f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$에서 $e^x=1$ $\therefore x=0$

또 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	1	↗



방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=10-n$이 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$10-n>1$ $\therefore n<9$

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$1+2+3+\cdots+8=36$ 답 36

$\sum_{k=1}^{8} k=\frac{8\cdot 9}{2}=36$

19 $x^2e^{-x^2}+a=0$에서

$x^2e^{-x^2}=-a$ …… ㉠

$f(x)=x^2e^{-x^2}$이라 하면

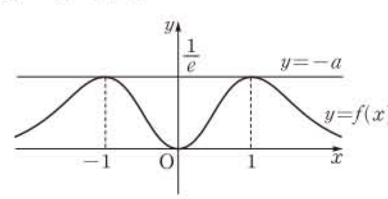
$$\begin{aligned}f'(x)&=2xe^{-x^2}+x^2e^{-x^2}\cdot(-2x)=2xe^{-x^2}(1-x^2)\\&=-2x(x+1)(x-1)e^{-x^2}\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘

또 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-a$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$-a=\frac{1}{e}$ $\therefore a=-\frac{1}{e}$ 답 ⑤

20 $x\ln x\geq x+k$에서

$x\ln x-x\geq k$ …… ㉠

$f(x)=x\ln x-x$라 하면

$$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1=\ln x$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	-1	↗

함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)=-1$이므로 부등식 ㉠이 항상 성립하려면

$k\le -1$

따라서 k의 최댓값은 -1이다. 답 ②

21 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=f'(t)=3-\dfrac{2}{(t+1)^2}$

$a=f''(t)=\dfrac{2\cdot2(t+1)}{(t+1)^4}=\dfrac{4}{(t+1)^3}$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는 각각

$f'(1)=3-\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$, $f''(1)=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{5}{2}$, $\dfrac{1}{2}$

22 $\dfrac{dx}{dt}=1-2\sin 2t$, $\dfrac{dy}{dt}=-2\cos 2t$에서

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-4\cos 2t$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=4\sin 2t$

이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(-4\cos 2t,\ 4\sin 2t)$

따라서 $t=\dfrac{3}{4}\pi$에서의 점 P의 가속도는 $(0,\ -4)$이다.

답 ④

23 $\dfrac{dx}{dt}=3at^2+5$, $\dfrac{dy}{dt}=-4t$에서

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=6at$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-4$

이므로 $t=2$에서의 점 P의 가속도는 $(12a,\ -4)$

이때 가속도의 크기가 $4\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(12a)^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}$

$144a^2+16=32$, $a^2=\dfrac{1}{9}$

$\therefore a=\dfrac{1}{3}$ $(\because a>0)$ 답 $\dfrac{1}{3}$

1등급을 위한 고난도 문제

본책 60~64쪽

01 $y=\dfrac{f(x)}{x}$에서

$y'=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

곡선 $y=\dfrac{f(x)}{x}$ 위의 점 $(1,\ f(1))$, 즉 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)-f(1)=-3$ ··· ❶

따라서 곡선 $y=\dfrac{f(x)}{x}$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

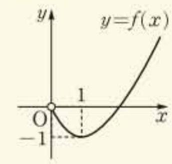
$y-3=-3(x-1)$, 즉 $y=-3x+6$ ··· ❷

이 접선이 점 $(a,\ 6)$을 지나므로

$6=-3a+6$ $\quad\therefore a=0$ ··· ❸

답 0

$y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$\cos x-\sin x$

$=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)$

$=\sqrt{2}\left(\sin\dfrac{3}{4}\pi\cos x+\cos\dfrac{3}{4}\pi\sin x\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ & & 1 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$f'(1)=3-2+2=3$

채점 기준	비율
❶ 접선의 기울기를 구할 수 있다.	40 %
❷ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

02 $f(x)=\sin x+\cos x$라 하면

$f'(x)=\cos x-\sin x$

$=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)$

접점의 좌표를 $(a,\ \sin a+\cos a)$ $(0<a<\pi)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 -1이므로

$\sqrt{2}\sin\left(a+\dfrac{3}{4}\pi\right)=-1$

$\therefore \sin\left(a+\dfrac{3}{4}\pi\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0<a<\pi$에서 $\dfrac{3}{4}\pi<a+\dfrac{3}{4}\pi<\dfrac{7}{4}\pi$이므로

$a+\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{5}{4}\pi$ $\quad\therefore a=\dfrac{\pi}{2}$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 1\right)$이므로 직선 l의 방정식은

$y-1=-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$, 즉 $x+y-1-\dfrac{\pi}{2}=0$

따라서 원점 O와 직선 l 사이의 거리는

$\dfrac{\left|-1-\dfrac{\pi}{2}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 답 ④

03 $g(4)=k$로 놓으면 $f(k)=4$이므로

$k^3-k^2+2k+2=4$, $\quad k^3-k^2+2k-2=0$

$(k-1)(k^2+2)=0$

$\therefore k=1$ $(\because k^2+2>0)$

즉 $g(4)=1$이고 $f'(x)=3x^2-2x+2$이므로 직선 l의 기울기는

$g'(4)=\dfrac{1}{f'(g(4))}=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{3}$

따라서 직선 l의 방정식은

$y-1=\dfrac{1}{3}(x-4)$, 즉 $y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}$

따라서 구하는 y절편은 $-\dfrac{1}{3}$이다. 답 ②

04 점 $(-2,\ a)$가 곡선 $x^3-xy^2=10$ 위의 점이므로

$-8+2a^2=10$, $\quad a^2=9$

$\therefore a=3$ $(\because a>0)$

$x^3-xy^2=10$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2-\left(y^2+x\cdot 2y\cdot\dfrac{dy}{dx}\right)=0$

$2xy\cdot\dfrac{dy}{dx}=3x^2-y^2$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2-y^2}{2xy}$ $(xy\ne0)$

따라서 점 $(-2,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{3\cdot4-9}{2\cdot(-2)\cdot3}=-\dfrac{1}{4}$

이므로 접선의 방정식은

$y-3=-\frac{1}{4}(x+2)$, 즉 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{2}$

이 직선의 x절편, y절편이 각각 10, $\frac{5}{2}$이므로

$S=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\frac{5}{2}=\frac{25}{2}$

$\therefore a+S=3+\frac{25}{2}=\frac{31}{2}$ 답 ①

05 $f(x)=e^{x+1}$이라 하면

$f'(x)=e^{x+1}$

접점의 좌표를 (a, e^{a+1})이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=e^{a+1}$이므로 접선의 방정식은

$y-e^{a+1}=e^{a+1}(x-a)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-e^{a+1}=-ae^{a+1}$

$e^{a+1}(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because e^{a+1}>0$)

$\therefore A(1, e^2)$ ⋯ ❶

한편 $y=\ln x-1$은 $y=e^{x+1}$의 역함수이므로 두 곡선은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$y=e^{x+1}$에서
$x+1=\ln y$
$\therefore x=\ln y-1$
x와 y를 서로 바꾸면
$y=\ln x-1$

$\therefore B(e^2, 1)$ ⋯ ❷

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(e^2-1)^2+(1-e^2)^2}$

$=\sqrt{2}(e^2-1)$ ⋯ ❸

답 $\sqrt{2}(e^2-1)$

채점 기준	비율
❶ 점 A의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❷ 점 B의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❸ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	20%

참고 $g(x)=\ln x-1$이라 하면 $g'(x)=\frac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(b, \ln b-1)$이라 하면 $g'(b)=\frac{1}{b}$이므로 접선의 방정식은

$y-(\ln b-1)=\frac{1}{b}(x-b)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-\ln b+1=-1$, $\ln b=2$ $\therefore b=e^2$

따라서 점 B의 좌표는 $(e^2, 1)$이다.

06 $f(x)=(x-7)e^x$이라 하면

$f'(x)=e^x+(x-7)e^x=(x-6)e^x$

접점의 좌표를 $(t, (t-7)e^t)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=(t-6)e^t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t-7)e^t=(t-6)e^t(x-t)$,

즉 $y=(t-6)e^tx-(t^2-7t+7)e^t$

이 직선이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$0=(t-6)e^ta-(t^2-7t+7)e^t$

$\therefore \{t^2-(a+7)t+6a+7\}e^t=0$

$e^t>0$이므로

$t^2-(a+7)t+6a+7=0$ ⋯⋯ ㉠

두 개의 접선을 그을 수 있으려면 t에 대한 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(a+7)^2-4(6a+7)>0$

$a^2-10a+21>0$, $(a-3)(a-7)>0$

$\therefore a<3$ 또는 $a>7$

따라서 모든 한 자리 자연수 a의 값의 합은

$1+2+8+9=20$ 답 20

07 $f(x)=e^x$이라 하면 $f'(x)=e^x$

점 $(\ln 2, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(\ln 2)=2$이므로

$f'(\ln 2)=e^{\ln 2}=2$

접선의 방정식은

$y-2=2(x-\ln 2)$,

즉 $y=2x-2\ln 2+2$ ⋯⋯ ㉠

직선 ㉠과 곡선 $y=2\ln x+a$의 접점의 좌표를 $(t, 2\ln t+a)$라 하고 $g(x)=2\ln x+a$라 하면

$g'(x)=\frac{2}{x}$이므로 접선의 방정식은

$y-(2\ln t+a)=\frac{2}{t}(x-t)$,

즉 $y=\frac{2}{t}x-2+2\ln t+a$ ⋯⋯ ㉡

두 직선 ㉠, ㉡이 일치하므로

$2=\frac{2}{t}$, $-2\ln 2+2=-2+2\ln t+a$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$t=1$, $a=4-2\ln 2$ 답 ④

08 $f(x)=\sin x(\cos x+1)$에서

$f'(x)=\cos x(\cos x+1)+\sin x(-\sin x)$

$=\cos^2 x+\cos x-\sin^2 x$

$\sin^2 x=1-\cos^2 x$이므로
$\cos^2 x+\cos x-\sin^2 x$
$=\cos^2 x+\cos x$
$-(1-\cos^2 x)$
$=2\cos^2 x+\cos x-1$

$=2\cos^2 x+\cos x-1$

$=(\cos x+1)(2\cos x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=-1$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

$\cos x=-1$에서
$x=\pi$
$\cos x=\frac{1}{2}$에서
$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

x	0	⋯	$\frac{\pi}{3}$	⋯	π	⋯	$\frac{5}{3}\pi$	⋯	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗	

ㄱ. 구간 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$에서 $f'(x)\ge 0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

ㄴ. 구간 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$에서 $f'(x)\le 0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 구간 $\left[\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{3}\pi\right]$에서 감소하고, 구간 $\left[\frac{5}{3}\pi, 2\pi\right]$에서 증가한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

09 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하려면 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

$f(x)=(a+2)\sin x-a\cos x-10x$에서

$$f'(x)=(a+2)\cos x+a\sin x-10$$
$$=\sqrt{2a^2+4a+4}\sin(x+\alpha)-10$$
$$\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{a+2}{\sqrt{2a^2+4a+4}},\ \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{2a^2+4a+4}}\right)$$
··· ❶

$f'(x)\le 0$에서

$\sqrt{2a^2+4a+4}\sin(x+\alpha)\le 10$ ······ ㉠

$-1\le\sin(x+\alpha)\le 1$이므로 ㉠을 만족시키려면

$\sqrt{2a^2+4a+4}\le 10$

$2a^2+4a+4\le 100,\quad a^2+2a-48\le 0$

$(a+8)(a-6)\le 0\quad \therefore -8\le a\le 6$ ··· ❷

따라서 정수 a는 $-8,\ -7,\ \cdots,\ 5,\ 6$의 15개이다. ··· ❸

답 15

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	20 %

10 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

$f(x)=(x^2+ax+b)e^x$에서

$$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+b)e^x$$
$$=\{x^2+(a+2)x+a+b\}e^x$$

$f'(x)\ge 0$이어야 하므로

$\{x^2+(a+2)x+a+b\}e^x\ge 0$

$\therefore x^2+(a+2)x+a+b\ge 0\ (\because e^x>0)$

이차방정식 $x^2+(a+2)x+a+b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a+2)^2-4(a+b)\le 0$

$a^2-4b+4\le 0$

$\therefore b\ge\frac{1}{4}a^2+1$

$a=1$일 때, $b\ge\frac{5}{4}$이므로 $\quad b=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

$a=2$일 때, $b\ge 2$이므로 $\quad b=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

$a=3$일 때, $b\ge\frac{13}{4}$이므로 $\quad b=4,\ 5,\ 6$

$a=4$일 때, $b\ge 5$이므로 $\quad b=5,\ 6$

$a=5$ 또는 $a=6$일 때, 조건을 만족시키는 b는 없다.

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$5+5+3+2=15$

답 15

11 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값 -2를 가지므로

$f(0)=-2$에서 $\quad -b=-2$

$\therefore b=2$

$f(x)=ax+\frac{2}{x-1}$에서

$f'(x)=a-\frac{2}{(x-1)^2}$

$f'(0)=0$에서 $\quad a=2$

따라서 $f'(x)=2-\frac{2}{(x-1)^2}$이므로 $f'(x)=0$에서

$(x-1)^2=1,\quad x-1=\pm 1$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-2	↘		↘	6	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 6을 갖는다.

$f(2)=2\cdot 2+2=6$

답 6

12 $f'(x)=\sin x(2\cos x-1)$에서

$$f''(x)=\cos x(2\cos x-1)+\sin x(-2\sin x)$$
$$=2(\cos^2x-\sin^2x)-\cos x$$
$$=2\cos 2x-\cos x$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$0<x<4\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ 2\pi,\ \frac{7}{3}\pi,\ 3\pi,\ \frac{11}{3}\pi$

$\sin x=0$에서
$x=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi$
$\cos x=\frac{1}{2}$에서
$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{7}{3}\pi,\ \frac{11}{3}\pi$

위에서 구한 x의 값에 대하여 $f''(x)$의 부호를 조사하면

$f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\frac{2}{3}\pi-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{3}{2}<0$

$f''(\pi)=2\cos 2\pi-\cos\pi=3>0$

$f''\left(\frac{5}{3}\pi\right)=2\cos\frac{10}{3}\pi-\cos\frac{5}{3}\pi=-\frac{3}{2}<0$

$f''(2\pi)=2\cos 4\pi-\cos 2\pi=1>0$

$f''\left(\frac{7}{3}\pi\right)=2\cos\frac{14}{3}\pi-\cos\frac{7}{3}\pi=-\frac{3}{2}<0$

$f''(3\pi)=2\cos 6\pi-\cos 3\pi=3>0$

$f''\left(\frac{11}{3}\pi\right)=2\cos\frac{22}{3}\pi-\cos\frac{11}{3}\pi=-\frac{3}{2}<0$

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{7}{3}\pi,\ \frac{11}{3}\pi$에서 극대이므로 극대가 되는 점은 4개이다.

답 ④

13 $f(x)=e^{-x}(\sin x+\cos x)$에서

$$f'(x)=-e^{-x}(\sin x+\cos x)+e^{-x}(\cos x-\sin x)$$
$$=-2e^{-x}\sin x$$
··· ❶

$f'(x)=0$에서 $\quad \sin x=0\ (\because e^{-x}>0)$

$\therefore x=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots$

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π	$\cdots$	3π	$\cdots$	4π	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	$-e^{-\pi}$	↗	$e^{-2\pi}$	↘	$-e^{-3\pi}$	↗	$e^{-4\pi}$	↘

따라서 $f(x)$는 $x=2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\ \cdots$에서 극댓값을 갖는다.

$f(2\pi)=e^{-2\pi},\ f(4\pi)=e^{-4\pi},\ f(6\pi)=e^{-6\pi},\ \cdots$이므로

$a_1=e^{-2\pi},\ a_2=e^{-4\pi},\ a_3=e^{-6\pi},\ \cdots$ ··· ❷

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{e^{2\pi}} + \frac{1}{e^{4\pi}} + \frac{1}{e^{6\pi}} + \cdots$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{2\pi}}\right)^n$

$= \frac{\frac{1}{e^{2\pi}}}{1-\frac{1}{e^{2\pi}}} = \frac{1}{e^{2\pi}-1}$ ⋯ ❸

첫째항이 $\frac{1}{e^{2\pi}}$, 공비가 $\frac{1}{e^{2\pi}}$인 등비급수이다.

답 $\frac{1}{e^{2\pi}-1}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30%
❷ a_1, a_2, a_3, ⋯의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값을 구할 수 있다.	30%

14 $f'(x) = -2e^{2x}\sin 2x + 2f(x)$에서

$f''(x) = -4e^{2x}\sin 2x - 4e^{2x}\cos 2x + 2f'(x)$

$= -4e^{2x}\sin 2x - 4e^{2x}\cos 2x$

$+2\{-2e^{2x}\sin 2x + 2f(x)\}$

$= -8e^{2x}\sin 2x - 4e^{2x}\cos 2x + 4f(x)$

이므로

$4e^{2x} = -4e^{2x}\cos 2x + 4f(x)$

$\therefore f(x) = e^{2x} + e^{2x}\cos 2x$ ⋯ ❶

즉 $f'(x) = 2e^{2x}(-\sin 2x + 1 + \cos 2x)$이므로 $f'(x)=0$에서

$\sin 2x - \cos 2x = 1$, $\quad \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\sin 2x - \cos 2x$
$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x\right)$
$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin 2x - \sin\frac{\pi}{4}\cos 2x\right)$
$= \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$0 < x < \pi$에서 $-\frac{\pi}{4} < 2x - \frac{\pi}{4} < \frac{7}{4}\pi$이므로

$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ 또는 $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$

$\therefore x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{\pi}{2}$ ⋯ ❷

$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4e^{\frac{\pi}{2}} < 0$, $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4e^{\pi} > 0$이므로 구하는 극댓값은 $\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$ ⋯ ❸

답 $e^{\frac{\pi}{2}}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	40%
❷ $f'(x)=0$일 때의 x의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 극댓값을 구할 수 있다.	20%

15 $f(x) = (x^n + x^{n+1})e^{-x}$에서

$f'(x) = \{nx^{n-1} + (n+1)x^n\}e^{-x} - (x^n + x^{n+1})e^{-x}$

$= (nx^{n-1} + nx^n - x^{n+1})e^{-x}$

$= -x^{n-1}\cdot e^{-x}(x^2 - nx - n)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x = \frac{n \pm \sqrt{n^2+4n}}{2}$

$(\because e^{-x} > 0)$

(i) n이 홀수일 때,

x의 값에 관계없이 $x^{n-1} > 0$

x	⋯	$\frac{n-\sqrt{n^2+4n}}{2}$	⋯	0	⋯	$\frac{n+\sqrt{n^2+4n}}{2}$	⋯
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘

(ii) n이 짝수일 때,

$x > 0$이면 $\quad x^{n-1} > 0$
$x < 0$이면 $\quad x^{n-1} < 0$

x	⋯	$\frac{n-\sqrt{n^2+4n}}{2}$	⋯	0	⋯	$\frac{n+\sqrt{n^2+4n}}{2}$	⋯
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

ㄱ. $0 < n < \frac{n+\sqrt{n^2+4n}}{2}$이므로 구간 $[0, n]$에서

$f'(x) > 0$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[0, n]$에서 증가한다.

ㄴ. n이 홀수이면 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

ㄷ. n이 홀수일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은

$f\left(\frac{n-\sqrt{n^2+4n}}{2}\right)$이다.

이때 $f\left(\frac{n-\sqrt{n^2+4n}}{2}\right) < f(0) = 0$이므로

$f\left(\frac{n-\sqrt{n^2+4n}}{2}\right) < 0$

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 음수이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

16 $f(x) = \frac{1}{n}x^2 + \ln(x+2)$라 하면

$f'(x) = \frac{2}{n}x + \frac{1}{x+2}$

$f''(x) = \frac{2}{n} - \frac{1}{(x+2)^2}$

$= \frac{2(x+2)^2 - n}{n(x+2)^2}$

곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x) < 0$이어야 하므로 구간 $(-1, 1)$에서 $2(x+2)^2 - n < 0$이어야 한다.

이때 $g(x) = 2(x+2)^2 - n$이라 하면 구간 $(-1, 1)$에서

$g(x) < 0$

따라서 $g(1) \le 0$이어야 하므로

$g(-1) < g(1)$

$18 - n \le 0$

$\therefore n \ge 18$

즉 자연수 n의 최솟값은 18이다.

답 ⑤

17 $f(x) = \frac{a}{\sqrt{2}}x^2 + \sin x + \cos x$라 하면

$f'(x) = \sqrt{2}ax + \cos x - \sin x$

$f''(x) = \sqrt{2}a - \sin x - \cos x$

$= \sqrt{2}a - \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ⋯ ❶

$-\sin x - \cos x$
$= -\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$
$= -\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)$
$= -\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$f''(x)=0$에서 $\sqrt{2}a-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$

$\therefore a=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ …… ㉠

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖고, 그 근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

이때 $-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$이므로 ㉠에서

$-1\le a\le 1$ ⋯ ❷

$a=-1$이면 $f''(x)=-\sqrt{2}\left\{1+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}\le 0$

$a=1$이면 $f''(x)=\sqrt{2}\left\{1-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}\ge 0$

이므로 $a=-1$ 또는 $a=1$이면 $f''(x)=0$이 되는 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않는다.

따라서 구하는 a의 값의 범위는

$-1<a<1$ ⋯ ❸

답 $-1<a<1$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$, $f''(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖는 a의 조건을 구할 수 있다.	30 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

18 $f(x)=x^n\left(\ln x-\frac{1}{n}\right)$이라 하면

$f'(x)=nx^{n-1}\left(\ln x-\frac{1}{n}\right)+x^n\cdot\frac{1}{x}=nx^{n-1}\ln x$

$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}\ln x+nx^{n-1}\cdot\frac{1}{x}$

$=nx^{n-2}\{(n-1)\ln x+1\}$

$f''(x)=0$에서 $(n-1)\ln x+1=0$ ($\because x>0$)

$\therefore x=e^{\frac{1}{1-n}}$

$x>e^{\frac{1}{1-n}}$일 때, $f''(x)>0$

$x<e^{\frac{1}{1-n}}$일 때, $f''(x)<0$

$x=e^{\frac{1}{1-n}}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로

$a_n=e^{\frac{1}{1-n}}$, $b_n=e^{\frac{n}{1-n}}\left(\frac{1}{1-n}-\frac{1}{n}\right)$

이때

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{1-n}}=1$,

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n}{1-n}}\left(\frac{1}{1-n}-\frac{1}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n}{1-n}}\cdot\frac{2n-1}{n-n^2}=0$

이므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=1+0=1$ 답 ④

기울기가 -3인 직선에 수직인 직선의 기울기

$x=-1$

$3x^2-4x+3=0$에서 $x=\frac{2\pm\sqrt{5}i}{3}$

$(n-1)\ln x+1=0$에서 $\ln x=\frac{1}{1-n}$ $\therefore x=e^{\frac{1}{1-n}}$

$b=\sqrt{112-a^3}$에서 $112-a^3>0$이므로 $0<a<\sqrt[3]{112}$

$\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n}{1-n}}=e^{-1}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n-n^2}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n}{1-n}}\cdot\frac{2n-1}{n-n^2}=0$

19 $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$에서

$f'(x)=2x-\frac{1}{x^2}$, $f''(x)=2+\frac{2}{x^3}$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$

x	⋯	-1	⋯	0
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↘	0	↘	

ㄱ. 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-1, 0)$에서 위로 볼록하다.

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 $\mathrm{P}(-1, 0)$이고 점 P에서의 접선 l의 기울기는

$f'(-1)=-2-1=-3$

ㄷ. 점 $\mathrm{P}(-1, 0)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{3}$인 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{3}(x+1)$, 즉 $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ …… ㉠

이 직선과 곡선 $y=x^2+\frac{1}{x}$의 교점의 x좌표는

$\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}=x^2+\frac{1}{x}$에서

$x^2+x=3x^3+3$

$3x^3-x^2-x+3=0$

$\therefore (x+1)(3x^2-4x+3)=0$ …… ㉡

방정식 ㉡은 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지므로 직선 ㉠은 곡선 $y=f(x)$와 점 P 이외의 점에서 만나지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

20 $a^3+b^2=112$에서 $b=\sqrt{112-a^3}$이므로 직육면체의 부피를 $f(a)$라 하면

$f(a)=a^2b=a^2\sqrt{112-a^3}$

$\therefore f'(a)=2a\sqrt{112-a^3}+a^2\cdot\frac{-3a^2}{2\sqrt{112-a^3}}$

$=\frac{4a(112-a^3)-3a^4}{2\sqrt{112-a^3}}$

$=\frac{-7a^4+448a}{2\sqrt{112-a^3}}$

$=\frac{-7a(a-4)(a^2+4a+16)}{2\sqrt{112-a^3}}$

$f'(a)=0$에서 $-7a(a-4)(a^2+4a+16)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a^2+4a+16>0$)

a	0	⋯	4	⋯	$\sqrt[3]{112}$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		↗	극대	↘	

따라서 $f(a)$는 $a=4$일 때 극대이면서 최대이다.

이때 $b=\sqrt{112-4^3}=4\sqrt{3}$이므로

$ab=16\sqrt{3}$ 답 ⑤

21 $f(x)=e^{-2x}$이라 하면 $f'(x)=-2e^{-2x}$

점 (t, e^{-2t})에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-2e^{-2t}$

일품 BOX

따라서 접선의 방정식은

$y-e^{-2t}=-2e^{-2t}(x-t)$,

즉 $y=-2e^{-2t}x+(2t+1)e^{-2t}$ ··· ❶

이 직선의 x절편, y절편은 각각 $\frac{2t+1}{2}$, $(2t+1)e^{-2t}$이므로 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2t+1}{2}\cdot(2t+1)e^{-2t}$$

$$=\frac{1}{4}(2t+1)^2e^{-2t} \quad \cdots ❷$$

$$\therefore S'(t)=(2t+1)e^{-2t}-\frac{1}{2}(2t+1)^2e^{-2t}$$

$$=\frac{1}{2}e^{-2t}(2t+1)(1-2t)$$

$S'(t)=0$에서 $\quad t=\frac{1}{2}$ ($\because t>0$)

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

$S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\cdot 2^2\cdot e^{-1}$
$=\frac{1}{e}$

따라서 $S(t)$는 $t=\frac{1}{2}$일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{e}$이다. ··· ❸

답 $\frac{1}{e}$

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 넓이를 t에 대한 함수로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

22 원 $(x-1)^2+y^2=\frac{1}{4}$의 중심을 C(1, 0)이라 하면

$\overline{PQ}+\overline{QC}\ge\overline{PC}$

$\therefore \overline{PQ}\ge\overline{PC}-\overline{QC}=\overline{PC}-\frac{1}{2}$

따라서 $\overline{PC}$의 길이가 최소일 때 $\overline{PQ}$의 길이가 최소이므로 $\overline{PC}$와 원의 교점을 점 Q로 잡으면 된다.

점 P의 좌표를 (t, e^t)이라 하면

$\overline{PC}^2=(t-1)^2+(e^t)^2=e^{2t}+t^2-2t+1$

$f(t)=e^{2t}+t^2-2t+1$이라 하면

$f'(t)=2e^{2t}+2t-2=2(e^{2t}+t-1)$

$f'(t)=0$에서 $\quad e^{2t}+t-1=0 \quad \therefore t=0$

따라서 $f(t)$는 $t=0$일 때 극소이면서 최소이다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

즉 $\overline{PC}^2\ge 2$이므로

$\overline{PC}\ge\sqrt{2}$

$\therefore \overline{PQ}\ge\overline{PC}-\frac{1}{2}\ge\sqrt{2}-\frac{1}{2}$

따라서 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$이다.

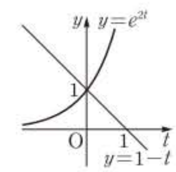
답 ③

1등급 비밀노트

$e^{2t}+t-1=0$에서 $\quad e^{2t}=1-t$

방정식 $e^{2t}=1-t$의 실근은 곡선 $y=e^{2t}$과 직선 $y=1-t$의 교점의 t좌표와 같다.

두 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 (0, 1)에서 만나므로 방정식 $e^{2t}+t-1=0$의 실근은 $t=0$이다.



23 $\sqrt{1+x^2}=a(x+1)$에서 $\quad \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}=a$ ··· ❶

$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}$이라 하면

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot(x+1)-\sqrt{1+x^2}}{(x+1)^2}$$

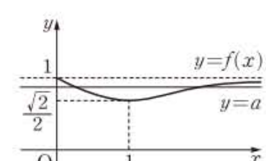
$$=\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}(x+1)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$

또 $\lim_{x\to\infty}f(x)=1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

$\lim_{x\to\infty}f(x)$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{1+\frac{1}{x}}$
$=1$



··· ❷

주어진 방정식이 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$가 만나야 하므로 a의 값의 범위는

$\frac{\sqrt{2}}{2}\le a\le 1$

$x\ge 0$에서 방정식 $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}=a$의 서로 다른 실근의 개수는

(i) $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, 1

(ii) $\frac{\sqrt{2}}{2}<a<1$일 때, 2

(iii) $a=1$일 때, 1

따라서 a의 최솟값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다. ··· ❸

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 $f(x)=a$ 꼴로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	50 %
❸ a의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

24 $f(1)=0$, $f'(1)=0$이므로

$f(x)=(x-1)^2(x-a)$ $(a>1)$

라 하면

$f(x)$가 $x=1$에서 극댓값을 가지므로 $a>1$이다.

$g(x)=e^xf(x)=e^x(x-1)^2(x-a)$

ㄱ. $g'(x)=e^x(x-1)^2(x-a)+2e^x(x-1)(x-a)$
$\qquad +e^x(x-1)^2$
$=e^x(x-1)\{(x-1)(x-a)+2(x-a)+x-1\}$
$=e^x(x-1)\{x^2+(2-a)x-(a+1)\}$

$i(x)=x^2+(2-a)x-(a+1)$이라 하고, 이차방정식 $i(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2-a)^2+4(a+1)=a^2+8>0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 $i(1)=2(1-a)\neq0$이므로 방정식 $g'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

ㄴ. 이차방정식 $i(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

$i(1)=2(1-a)<0$ $(\because a>1)$

이므로 $\alpha<1<\beta$

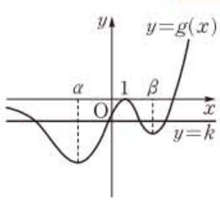
$g'(x)=0$에서 $x=\alpha$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\beta$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	1	$\cdots$	β	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

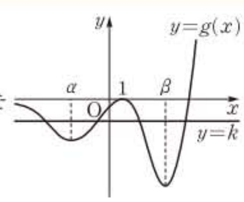
따라서 함수 $g(x)$의 극댓값은

$g(1)=0$

ㄷ. $\lim_{x\to-\infty}g(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$이므로 함수 $g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



또는



방정식 $g(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같으므로

$\lim_{k\to0-}h(k)=4$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

> $x=1$은 이차방정식 $i(x)=0$의 근이 아니다.

> $i(\alpha)=i(\beta)=0$, $i(1)<0$이고 함수 $i(x)$의 그래프는 아래로 볼록하므로
> $\alpha<1<\beta$

> $x^2+(2-a)x-(a+1)=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
> $\alpha\beta=-(a+1)<0$
> 이므로 α, β는 서로 다른 부호를 갖는다.

25 $g(x)=\ln(\sin x+3)$이라 하면

$g'(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x+3}$

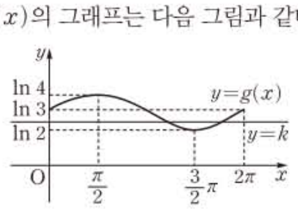
$g'(x)=0$에서 $\cos x=0$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$ $(\because 0\le x\le2\pi)$

> $g'(x)=\dfrac{(\sin x+3)'}{\sin x+3}=\dfrac{\cos x}{\sin x+3}$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\ln3$	↗	$\ln4$	↘	$\ln2$	↗	$\ln3$

따라서 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



방정식 $\ln(\sin x+3)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같으므로

(i) $k<\ln2$일 때, $f(k)=0$

(ii) $k=\ln2$일 때, $f(k)=1$

(iii) $\ln2<k<\ln3$일 때, $f(k)=2$

(iv) $k=\ln3$일 때, $f(k)=3$

(v) $\ln3<k<\ln4$일 때, $f(k)=2$

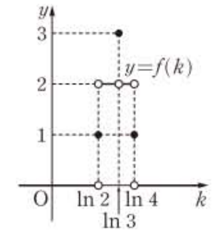
(vi) $k=\ln4$일 때, $f(k)=1$

(vii) $k>\ln4$일 때, $f(k)=0$

따라서 $y=f(k)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(k)$가 불연속이 되는 k의 값은

$\ln2$, $\ln3$, $\ln4$

의 3개이다. 답 ③



26 $f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2-x-a$라 하면

$f'(x)=e^x-x-1$, $f''(x)=e^x-1$

$x>0$에서 $f''(x)>0$이므로 $f'(x)$는 $x>0$에서 증가한다.

이때 $f'(0)=0$이므로 $f'(x)>0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x>0$에서 증가하므로 $f(x)>0$이려면

$f(0)=1-a\ge0$ $\therefore a\le1$

따라서 a의 최댓값은 1이다. 답 1

27 $f(x)=k\ln x-2\sqrt{x}$라 하면

$f'(x)=\dfrac{k}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{k-\sqrt{x}}{x}$

$f'(x)=0$에서 $k-\sqrt{x}=0$ $\therefore x=k^2$

x	0	$\cdots$	k^2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=k^2$에서 극대이면서 최대이다.

$x>0$에서 주어진 부등식이 성립하려면 $f(k^2)<0$이어야 하므로

$f(k^2)=k\ln k^2-2k<0$, $2k(\ln k-1)<0$

$k>0$이므로 $\ln k<1$

$\therefore 0<k<e$ 답 $0<k<e$

28 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도는 각각

$f'(t)=e^t-1$

$g'(t)=2(t-4)e^t+(t-4)^2e^t$

$=e^t(t-2)(t-4)$ ··· ❶

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이려면 $f'(t)g'(t)<0$이어야 한다.

그런데 $t>0$에서 $f'(t)>0$이므로 $g'(t)<0$

$\therefore 2<t<4$ ··· ❷

한편 $2<t<4$에서 점 Q는 방향을 바꾸지 않으므로 점 Q가 움직인 거리는

$|g(4)-g(2)|=4e^2$ ··· ❸

답 $4e^2$

> $2<t<4$에서 $g'(t)<0$이므로 함수 $g(t)$는 이 구간에서 감소한다.

채점 기준	비율
❶ $f'(t)$, $g'(t)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ t의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 점 Q가 움직인 거리를 구할 수 있다.	30 %

29 점 P의 x좌표가 매초 1씩 증가하므로 점 P의 시각 t에서의 위치를 (x, y)라 하면

$x=t,\ y=8e^{-t}$

이때 $\dfrac{dx}{dt}=1,\ \dfrac{dy}{dt}=-8e^{-t}$이므로

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=0,\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=8e^{-t}$

따라서 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도는 각각

$(1,\ -8e^{-t}),\ (0,\ 8e^{-t})$

점 P의 위치가 $(\ln 4,\ 2)$일 때, 즉 $t=\ln 4$에서의 속도와 가속도는 각각

$(1,\ -2),\ (0,\ 2)$

따라서 속력과 가속도의 크기는 각각

$\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5},\ \sqrt{0^2+2^2}=2$ 답 ⑤

일품 BOX: $e^x y=8$에서 $y=\dfrac{8}{e^x}=8e^{-x}$ $x=t$이므로 $y=8e^{-t}$

30 $\dfrac{dx}{dt}=3(1-\cos t),\ \dfrac{dy}{dt}=3\sin t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속력은

$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\{3(1-\cos t)\}^2+(3\sin t)^2}$

$=3\sqrt{2-2\cos t}$ ⋯ ❶

$\cos t=-1$일 때, 즉 $t=\pi$일 때 점 P의 속력이 최대이고, 시각 $t=\pi$에서의 점 P의 위치는 $(3\pi,\ 6)$이므로

$a=3\pi,\ b=6$ ⋯ ❷

$\therefore \dfrac{ab}{\pi}=\dfrac{3\pi\cdot 6}{\pi}=18$ ⋯ ❸

답 18

일품 BOX: $\sqrt{2-2\cos t}$의 값이 최대이려면 $\cos t$의 값이 최소이어야 하므로 $\cos t=-1$일 때이다.

채점 기준	비율
❶ 시각 t에서의 속력을 구할 수 있다.	50 %
❷ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\dfrac{ab}{\pi}$의 값을 구할 수 있다.	10 %

31 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치를 (x, y)라 하면

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$

이때 원점과 점 P 사이의 거리 r는 매초 3씩 증가하므로 $r=3t$이고, 직선 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각 θ는 매초 2라디안씩 증가하므로 $\theta=2t$이다.

즉 $x=3t\cos 2t,\ y=3t\sin 2t$이므로

$\dfrac{dx}{dt}=3\cos 2t-6t\sin 2t,$

$\dfrac{dy}{dt}=3\sin 2t+6t\cos 2t$

따라서 점 P의 시각 t에서의 속력은

$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$

$=\sqrt{(3\cos 2t-6t\sin 2t)^2+(3\sin 2t+6t\cos 2t)^2}$

$=\sqrt{36t^2+9}$

이므로 점 P가 원점을 출발한 지 1초 후의 속력은

$\sqrt{36+9}=3\sqrt{5}$ 답 ④

32 점 P의 좌표를 $(x,\ e^x)$이라 하면

$Q(x,\ 0)$

$y=e^x$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\dfrac{dy}{dt}=e^x\dfrac{dx}{dt}$

이므로 점 P의 속력은

$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+e^{2x}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2}$

$=\sqrt{1+e^{2x}}\,\dfrac{dx}{dt}$

이때 점 P의 속력이 1이므로

$\sqrt{1+e^{2x}}\,\dfrac{dx}{dt}=1 \quad \therefore \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

점 Q의 속력은

$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

일품 BOX: 점 Q는 x축 위를 움직이므로 $\dfrac{dy}{dt}=0$

따라서 $x=1$일 때 점 Q의 속력은

$\dfrac{1}{\sqrt{1+e^2}}$ 답 $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^2}}$

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 65쪽

01 $g(t)=1$이면 $f(1)=t$이므로 $t=1$

$\therefore A(1,\ 1)$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{f'(t)}{g'(t)}$이므로 점 A(1, 1)에서 그은 접선의 기울기는 $\dfrac{f'(1)}{g'(1)}$

$f'(t)=2te^{t-1}+t^2e^{t-1}=(t^2+2t)e^{t-1}$이므로

$f'(1)=3,$

$g'(1)=\dfrac{1}{f'(g(1))}=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{3}$

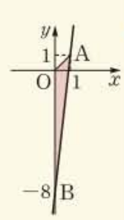
점 A(1, 1)에서 그은 접선의 기울기가 $\dfrac{f'(1)}{g'(1)}=\dfrac{3}{\frac{1}{3}}=9$

이므로 접선의 방정식은

$y-1=9(x-1)$, 즉 $y=9x-8$

따라서 점 B의 좌표가 $(0,\ -8)$이므로

$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 1=4$ 답 ②



02 $f(x)=e^{x^2}$이라 하면 $f'(x)=2xe^{x^2}$

접점의 좌표를 $(t,\ e^{t^2})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2te^{t^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-e^{t^2}=2te^{t^2}(x-t)$

이 직선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$-e^{t^2}=2te^{t^2}(1-t)$

$\therefore e^{t^2}(2t^2-2t-1)=0$

▶▶ 본책 64~65쪽

이때 $e^{t^2} \neq 0$이므로 $2t^2-2t-1=0$의 해가 접점의 x좌표이다.

따라서 $2t^2-2t-1=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-2\cdot(-1)$
$=3>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-\frac{1}{2}$$

두 접선의 기울기 m_1, m_2는 $2\alpha e^{\alpha^2}$, $2\beta e^{\beta^2}$이므로

$$\begin{aligned} m_1m_2 &= 2\alpha e^{\alpha^2}\cdot 2\beta e^{\beta^2} \\ &= 4\alpha\beta e^{\alpha^2+\beta^2} \\ &= 4\alpha\beta e^{\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}} \\ &= 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{\left\{1^2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}} \\ &= -2e^2 \end{aligned}$$

답 ①

03 ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

따라서 $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$이므로 $g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

$y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$이다.

ㄴ. $x\neq a$일 때,

$$g'(x)=\frac{f'(x)(x-a)-\{f(x)-f(a)\}}{(x-a)^2}$$

$h(x)=f'(x)(x-a)-f(x)+f(a)$로 놓으면

$$\begin{aligned} h'(x) &= f''(x)(x-a)+f'(x)-f'(x) \\ &= f''(x)(x-a) \end{aligned}$$

$h'(x)=0$에서 $\quad x=a\ (\because f''(x)>0)$

$h(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖고, $h(a)=0$이므로 $x\neq a$일 때, $h(x)>0$이다.

즉 $x\neq a$일 때, $g'(x)>0$이다.

따라서 $x\neq a$일 때, $g(x)$는 증가하고 ㄱ에서 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 $g(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다.

ㄷ. ㄴ에서 $g'(x)>0$이므로 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

04 $f(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x)=-(\ln x)^2$$

$f(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln x}$에서
$f(x)=x^{-\ln x}$
위의 식의 양변에 자연로그를 취하면
$\ln f(x)=-\ln x\cdot\ln x$
$=-(\ln x)^2$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{2\ln x}{x}$$

$$\therefore f'(x)=-\frac{2f(x)\ln x}{x}$$

$$\begin{aligned} &f''(x) \\ &= -2\left\{f'(x)\cdot\frac{\ln x}{x}+f(x)\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}\right\} \\ &= -2\left\{-\frac{2f(x)\ln x}{x}\cdot\frac{\ln x}{x}+\frac{f(x)(1-\ln x)}{x^2}\right\} \\ &= \frac{2f(x)}{x^2}\{2(\ln x)^2+\ln x-1\} \\ &= \frac{2f(x)}{x^2}(\ln x+1)(2\ln x-1) \end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=0\ (\because f(x)>0)$

$\therefore x=1$

$f''(x)=0$에서 $\quad \ln x=-1$ 또는 $\ln x=\frac{1}{2}$

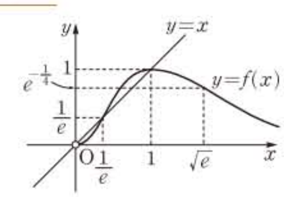
$\therefore x=\frac{1}{e}$ 또는 $x=\sqrt{e}$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		+	+	+	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		+	0	$-$	$-$	$-$	0	+
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↗	1	↘	$e^{-\frac{1}{4}}$	↘

또 $\lim_{x\to 0+}\ln f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}\ln f(x)=-\infty$이므로

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=0,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 오른쪽 그림에서 함수 $f(x)$의 치역은 $\{y\,|\,0<y\leq 1\}$이다.

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=x$, 즉 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$, $(\sqrt{e}, e^{-\frac{1}{4}})$이고, $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 1을 가지므로 세 점 $\mathrm{A}(1, 1)$, $\mathrm{B}\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$, $\mathrm{C}(\sqrt{e}, e^{-\frac{1}{4}})$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(1-\frac{1}{e}\right)^2+\left(1-\frac{1}{e}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}(e-1)}{e}$$

$\triangle$ABC의 밑변을 $\overline{\mathrm{AB}}$라 하면 높이는 점 C와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리와 같으므로

점 A, B가 직선 $y=x$ 위에 있다.

$$\frac{\left|\sqrt{e}-e^{-\frac{1}{4}}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{e}-e^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore S &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}(e-1)}{e}\cdot\frac{\sqrt{e}-e^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{(e-1)(\sqrt{e}-e^{-\frac{1}{4}})}{2e} \end{aligned}$$

$\sqrt{e}<e$, $e^{-\frac{1}{4}}>0$이므로
$\sqrt{e}-e^{-\frac{1}{4}}<e$

$\sqrt{e}-e^{-\frac{1}{4}}<e$이므로 $\frac{\sqrt{e}-e^{-\frac{1}{4}}}{e}<1$에서

$$S<\frac{e-1}{2}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

05 $a^x=x^a$의 양변에 자연로그를 취하면

$$x\ln a=a\ln x \qquad \therefore \frac{\ln x}{x}=\frac{\ln a}{a}$$

주어진 방정식의 근의 개수는 곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$와 직선 $y=\frac{\ln a}{a}$의 교점의 개수와 같다.

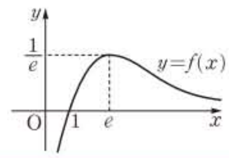
$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$라 하면 $\quad f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad 1-\ln x=0 \quad \therefore x=e$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\dfrac{1}{e}$	↘

또 $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(1)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지난다.

ㄱ. $0<a\le 1$일 때, $\dfrac{\ln a}{a}\le 0$이므로 곡선 $y=\dfrac{\ln x}{x}$와 직선

$y=\dfrac{\ln a}{a}$는 한 점에서 만난다.

$\therefore N(a)=1$

ㄴ. $1<a<e$일 때, $0<\dfrac{\ln a}{a}<\dfrac{1}{e}$이므로 곡선 $y=\dfrac{\ln x}{x}$와

직선 $y=\dfrac{\ln a}{a}$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

$\therefore N(a)=2$

ㄷ. $a>e$일 때, $0<\dfrac{\ln a}{a}<\dfrac{1}{e}$이므로 곡선 $y=\dfrac{\ln x}{x}$와 직

선 $y=\dfrac{\ln a}{a}$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

$\therefore N(a)=2$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

1등급 비밀노트

함수 $y=\dfrac{\ln x}{x}$의 그래프에서 $1<x<e$ 또는 $x>e$일 때 $0<y<\dfrac{1}{e}$이므로 $1<a<e$ 또는 $a>e$일 때 $0<\dfrac{\ln a}{a}<\dfrac{1}{e}$임을 알 수 있다.

06 점 P가 시곗바늘이 도는 반대 방향으로 매초 $\dfrac{\pi}{4}$만큼 씩 회전하므로 t초 후의 점 P의 위치 $(x,\ y)$는

8초에 1바퀴씩 회전하므로 1초에 $\dfrac{2\pi}{8}=\dfrac{\pi}{4}$만큼 회전한다.

$x=2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}t\right)=-2\sin\dfrac{\pi}{4}t$

$y=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}t\right)=2\cos\dfrac{\pi}{4}t$

이때 $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{4}t,\ \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{4}t$이므로

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{\pi^2}{8}\sin\dfrac{\pi}{4}t,\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=-\dfrac{\pi^2}{8}\cos\dfrac{\pi}{4}t$

따라서 점 P의 가속도의 크기는

$$\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\dfrac{\pi^2}{8}\sin\dfrac{\pi}{4}t\right)^2+\left(-\dfrac{\pi^2}{8}\cos\dfrac{\pi}{4}t\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\dfrac{\pi^2}{8}\right)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$$

$\therefore n=8$

답 8

만점 도전을 위한 실전 마무리 문제

본책 66~70쪽

01 전략 곱의 미분법과 로그함수의 도함수를 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=x\log_2 ax^3$에서 $f(1)=\log_2 a$이므로

$$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-\log_2 a}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f'(1)$$

이때 $f(x)=x\log_2 ax^3=x(\log_2 a+3\log_2 x)$이므로

함수의 곱의 미분법
미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여
$\{f(x)g(x)\}'$
$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$$f'(x)=\log_2 a+3\log_2 x+x\cdot\dfrac{3}{x\ln 2}$$
$$=\log_2 ax^3+\dfrac{3}{\ln 2}$$

$f'(1)=2$이므로

$$\log_2 a+\dfrac{3}{\ln 2}=2$$

$\dfrac{3}{\ln 2}=3\cdot\dfrac{1}{\log_e 2}=3\log_2 e$

$$\log_2 a+3\log_2 e=2$$

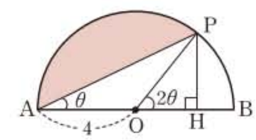
$$\log_2 ae^3=\log_2 4,\quad ae^3=4$$

$$\therefore a=\dfrac{4}{e^3}$$

답 ⑤

02 전략 $S(\theta)$를 θ에 대한 삼각함수로 나타낸 후 $S'(\theta)$를 구한다.

풀이 반원의 중심을 O라 하면 오른쪽 그림에서



$\overline{OP}=4,\ \angle POB=2\theta$

$\angle PAB$는 $\widehat{PB}$에 대한 원주각, $\angle POB$는 $\widehat{PB}$에 대한 중심각이므로
$\angle POB=2\angle PAB$
$=2\theta$

점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{PH}=\overline{OP}\sin 2\theta=4\sin 2\theta$$

$S(\theta)$
$=$(부채꼴 AOP의 넓이)
$-$(△OAP의 넓이)

$$\therefore S(\theta)=\dfrac{1}{2}\cdot 4^2\cdot(\pi-2\theta)-\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\sin 2\theta$$
$$=8\pi-16\theta-8\sin 2\theta$$

따라서 $S'(\theta)=-16-16\cos 2\theta$이므로

$$S'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-16-16\cos\dfrac{\pi}{2}=-16$$

답 ④

03 전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\ln(\log_3 x)$에서

$$f'(x)=\dfrac{(\log_3 x)'}{\log_3 x}=\dfrac{\dfrac{1}{x\ln 3}}{\log_3 x}=\dfrac{\dfrac{1}{x\ln 3}}{\dfrac{\ln x}{\ln 3}}=\dfrac{1}{x\ln x}$$

$$\therefore \lim_{x\to1+}x(x-1)f'(x)=\lim_{x\to1+}x(x-1)\cdot\dfrac{1}{x\ln x}$$
$$=\lim_{x\to1+}\dfrac{x-1}{\ln x}$$

$x-1=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to1+}\dfrac{x-1}{\ln x}=\lim_{t\to0+}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=1$$

답 ③

04 전략 $2^{f(x)}=g(x)$라 하고 주어진 극한을 $g'(x)$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\lim_{x\to\ln 2}\frac{2^{f(x)}-4}{2x-\ln 4}=\frac{1}{3}$에서 $x\to\ln 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to\ln 2}\{2^{f(x)}-4\}=0$이므로

$2^{f(\ln 2)}=4=2^2$

$\therefore f(\ln 2)=2$

$g(x)=2^{f(x)}$이라 하면 $g(\ln 2)=2^{f(\ln 2)}=4$이고

$g'(x)=2^{f(x)}\cdot\ln 2\cdot f'(x)$이므로

$$\lim_{x\to\ln 2}\frac{2^{f(x)}-4}{2x-\ln 4}=\lim_{x\to\ln 2}\frac{g(x)-g(\ln 2)}{2(x-\ln 2)}$$
$$=\frac{1}{2}g'(\ln 2)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2^{f(\ln 2)}\cdot\ln 2\cdot f'(\ln 2)$$
$$=2\ln 2\cdot f'(\ln 2)$$

따라서 $2\ln 2\cdot f'(\ln 2)=\frac{1}{3}$이므로

$$f'(\ln 2)=\frac{1}{6\ln 2}=\frac{1}{\ln 64}$$

답 ⑤

05

전략 합성함수의 미분법을 이용하여 $f'(x^3-1)$을 구한다.

풀이 $f(x^3-1)=\frac{x^2+3}{x+1}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x^3-1)\cdot 3x^2=\frac{2x(x+1)-(x^2+3)}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

이때 $x>0$이므로

$$f'(x^3-1)=\frac{x^2+2x-3}{3x^2(x+1)^2}$$

$x^3-1=7$에서 $x^3-8=0$

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=2$ ($\because x^2+2x+4>0$)

$$\therefore f'(7)=\frac{4+4-3}{3\cdot 4\cdot 9}=\frac{5}{108}$$

답 ①

06

전략 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$임을 이용하여 $f(n)$을 구한다.

풀이 $\frac{dx}{dt}=2t+n$, $\frac{dy}{dt}=3t^2+2nt+3$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+2nt+3}{2t+n}$$

따라서 $f(n)=\frac{3n^2+2n^2+3}{2n+n}=\frac{5n^2+3}{3n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3}{3n^2}=\frac{5}{3}$$

답 ⑤

07

전략 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 점 $(a, 0)$이 곡선 $\sin(xy)+x\cos y=4$ 위의 점이므로 $\sin 0+a\cos 0=4$

$\therefore a=4$

$\sin(xy)+x\cos y=4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$y\cos(xy)+x\cos(xy)\cdot\frac{dy}{dx}+\cos y-x\sin y\frac{dy}{dx}=0$$
$$\{x\cos(xy)-x\sin y\}\frac{dy}{dx}=-\{\cos y+y\cos(xy)\}$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\cos y+y\cos(xy)}{x\cos(xy)-x\sin y}$$

따라서 점 $(4, 0)$에서의 접선의 기울기는

$$b=-\frac{\cos 0}{4\cos 0-4\sin 0}=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{a}{b}=-16$$

답 ①

08

전략 역함수의 미분법을 이용하여 보기의 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ㄱ. $f(g(x))=x$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$

따라서 $f'(g(2))g'(2)=1$이고 $g'(2)\neq 0$이므로

$$f'(g(2))=\frac{1}{g'(2)}$$

ㄴ. $f(2)=2$이므로 $g(2)=2$

ㄱ에서 $f'(g(2))g'(2)=1$이므로

$f'(2)g'(2)=1$

ㄷ. [반례] $f(x)=x+1$이면 $g(x)=x-1$이므로

$f'(x)=1$, $g'(x)=1$

따라서 $f'(2)g'(2)=1\cdot 1=1$이지만

$f(2)=3$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

$y=x+1$로 놓으면
$x=y-1$
x와 y를 서로 바꾸면
$y=x-1$
$\therefore g(x)=x-1$

09

전략 직선 l의 방정식과 $y=\frac{1}{x^2+1}$을 연립하여 점 B의 좌표를 구한다.

풀이 $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$이라 하면

$$f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

점 $\mathrm{A}\left(1, \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-\frac{1}{2}$이므로 접선 l의 방정식은

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(x-1),\ 즉\ y=-\frac{1}{2}x+1$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식
➡ $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

곡선 $y=\frac{1}{x^2+1}$과 직선 $y=-\frac{1}{2}x+1$의 교점의 x좌표는

$\frac{1}{x^2+1}=-\frac{1}{2}x+1$에서

$-x^3+2x^2-x+2=2$, $x(x-1)^2=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 점 B의 좌표는 $(0, 1)$이므로 두 점 A, B 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

답 ③

10 전략 점 P의 좌표를 a에 대한 식으로 나타낸 후 접선 l의 방정식을 이용하여 $S(a)$를 구한다.

풀이 ㄱ. 점 P의 x좌표는 $xe^{-x}=ax$에서

$e^{-x}=a$ ($\because x>0$)

$-x=\ln a \qquad \therefore x=-\ln a$

$x>0$이므로 $\quad -\ln a>0, \quad \ln a<0$

$\therefore 0<a<1$

ㄴ. $f(x)=xe^{-x}$이라 하면

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

점 P의 좌표는 $(-\ln a,\ -a\ln a)$이므로 점 P에서의 접선의 기울기는

$f'(-\ln a)=a(1+\ln a)$

따라서 접선 l의 방정식은

$y+a\ln a=a(1+\ln a)(x+\ln a)$,

즉 $y=a(1+\ln a)x+a(\ln a)^2$

접선 l과 직선 $y=ax$ 및 y축으로 둘러싸인 도형은 세 점 $(0,\ 0)$, $(0,\ a(\ln a)^2)$, $(-\ln a,\ -a\ln a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형이므로 그 넓이는

접선 l과 y축의 교점의 좌표

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot a(\ln a)^2\cdot(-\ln a)$$

$$=-\frac{1}{2}a(\ln a)^3$$

$$\therefore S\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e}\cdot(-1)^3=\frac{1}{2e}$$

ㄷ. $S'(a)=-\frac{1}{2}(\ln a)^3-\frac{3}{2}a(\ln a)^2\cdot\frac{1}{a}$

$=-\frac{1}{2}(\ln a)^3-\frac{3}{2}(\ln a)^2$

$\therefore S'\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{2}\cdot(-1)^3-\frac{3}{2}\cdot(-1)^2$

$=-1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

11 전략 기울기가 2임을 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

풀이 $f(x)=e^{2x}$이라 하면 $\quad f'(x)=2e^{2x}$

접점의 좌표를 $(a,\ e^{2a})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(a)=2$에서

$2e^{2a}=2 \qquad \therefore a=0$

따라서 곡선 $y=e^{2x}$과 직선 l_1의 접점의 좌표는 $\quad (0,\ 1)$

$g(x)=2\ln x$라 하면 $\quad g'(x)=\frac{2}{x}$

접점의 좌표를 $(b,\ 2\ln b)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 2이므로 $g'(b)=2$에서

$\frac{2}{b}=2 \qquad \therefore b=1$

따라서 곡선 $y=2\ln x$와 직선 l_2의 접점의 좌표는 $(1,\ 0)$이므로 접선 l_2의 방정식은

$y=2(x-1)$, 즉 $2x-y-2=0$

두 직선 l_1, l_2 사이의 거리는 점 $(0,\ 1)$과 직선 $2x-y-2=0$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 거리는

평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 한 점과 직선 l' 사이의 거리와 같다.

$$\frac{|-1-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

답 ③

일품 BOX

12 전략 접점의 좌표를 $(t,\ (t+2)e^{-t})$으로 놓고 세운 접선의 방정식에 점 $(2,\ k)$의 좌표를 대입한다.

풀이 $f(x)=(x+2)e^{-x}$이라 하면

$f'(x)=e^{-x}-(x+2)e^{-x}=-(x+1)e^{-x}$

접점의 좌표를 $(t,\ (t+2)e^{-t})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-(t+1)e^{-t}$이므로 접선의 방정식은

$y-(t+2)e^{-t}=-(t+1)e^{-t}(x-t)$

이 직선이 점 $(2,\ k)$를 지나므로

$k-(t+2)e^{-t}=-(t+1)e^{-t}(2-t)$

$\therefore k=t^2e^{-t}$ …… ㉠

점 $(2,\ k)$에서 곡선 $y=(x+2)e^{-x}$에 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있으려면 방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$g(t)=t^2e^{-t}$이라 하면

$g'(t)=2te^{-t}-t^2e^{-t}=-t(t-2)e^{-t}$

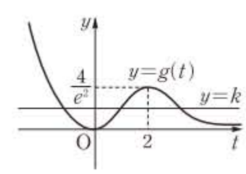
$g'(t)=0$에서 $\quad t=0$ 또는 $t=2$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↘	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘

$\lim_{t\to\infty}g(t)=0$, $\lim_{t\to-\infty}g(t)=\infty$

$\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}=0$이므로 $\lim_{t\to\infty}g(t)=0$ 이고 $\lim_{t\to-\infty}g(t)=\lim_{s\to\infty}s^2e^s=\infty$

이므로 $y=g(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=g(t)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 k의 값의 범위는

$0<k<\frac{4}{e^2}$

이므로 $b-a$의 최댓값은 $\quad \frac{4}{e^2}$

답 ②

13 전략 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 증가하면 그 구간에서 $f'(x)\ge0$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=a\ln x+x^2-6x$에서

$$f'(x)=\frac{a}{x}+2x-6=\frac{2x^2-6x+a}{x}$$

함수 $f(x)$가 $x>0$에서 증가하려면 $f'(x)\ge0$이어야 하므로

$$\frac{2x^2-6x+a}{x}\ge0$$

$\therefore 2x^2-6x+a\ge0$ ($\because x>0$)

$g(x)=2x^2-6x+a$라 하면

$$g(x)=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+a-\frac{9}{2}$$

이므로 $x>0$에서 $g(x)$의 최솟값은 $a-\frac{9}{2}$이다.

$a-\frac{9}{2}\ge0$에서 $\qquad a\ge\frac{9}{2}$

따라서 a의 최솟값은 $\frac{9}{2}$이다.

답 ⑤

14 전략 $f(x)$가 극값을 가지려면 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌는 a의 값이 존재함을 이용한다.

풀이 $f(x)=x-\ln(5x^2+n)$에서

$$f'(x)=1-\frac{10x}{5x^2+n}=\frac{5x^2-10x+n}{5x^2+n}$$

$5x^2+n>0$이므로 함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $5x^2-10x+n=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

> $f'(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$에서 $h(x)$가 이차식이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x)>0$일 때
> ① $f(x)$가 극값을 갖는다.
> ➡ $h(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.
> ② $f(x)$가 극값을 갖지 않는다.
> ➡ $h(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖는다.

이차방정식 $5x^2-10x+n=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=25-5n>0 \qquad \therefore n<5$$

따라서 자연수 n의 값은 $1, 2, 3, 4$이므로 구하는 합은

$1+2+3+4=10$ 답 ②

15 전략 이계도함수를 이용하여 함수 $f(x)$가 극댓값을 갖는지 판정한다.

풀이 ㄱ. $f(x)=\sin(\ln x)$에서

$$f'(x)=\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$$

$1<x<e^{\frac{\pi}{2}}$일 때, $0<\cos(\ln x)<1$이므로

$f'(x)>0$

> $1<x<e^{\frac{\pi}{2}}$일 때
> $0<\ln x<\frac{\pi}{2}$
> $\therefore 0<\cos(\ln x)<1$

즉 함수 $f(x)$는 구간 $(1, e^{\frac{\pi}{2}})$에서 증가한다.

ㄴ. $f''(x)=-\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}+\cos(\ln x)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$$=-\frac{1}{x^2}\{\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\}$$

$$\therefore f''(e^{\pi})=-\frac{1}{e^{2\pi}}(\sin\pi+\cos\pi)=\frac{1}{e^{2\pi}}>0$$

ㄷ. $f'(e^{\frac{\pi}{2}})=\cos\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}=0$

$$f''(e^{\frac{\pi}{2}})=-\frac{1}{e^{\pi}}\left(\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{e^{\pi}}<0$$

> 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때
> ① $f''(a)<0$
> ➡ $f(x)$는 $x=a$에서 극대
> ② $f''(a)>0$
> ➡ $f(x)$는 $x=a$에서 극소

이므로 함수 $f(x)$는 $x=e^{\frac{\pi}{2}}$에서 극댓값을 갖는다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

16 전략 $a>-4$, $a<-4$인 경우로 나누어 보기의 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ㄱ. $f'(x)=\frac{2x(x-2)-(x^2+a)}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-a}{(x-2)^2}$

이차방정식 $x^2-4x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=4+a$$

$a<-4$이면 $D<0$이므로 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

> $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가함수이다.

ㄴ. $f''(x)=\frac{(2x-4)(x-2)^2-2(x^2-4x-a)(x-2)}{(x-2)^4}$

$$=\frac{8+2a}{(x-2)^3}$$

(i) $a>-4$일 때,

$x>2$에서 $f''(x)>0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다.

> $8+2a>0$, $x-2>0$이므로
> $f''(x)>0$

(ii) $a<-4$일 때,

$x>2$에서 $f''(x)<0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다.

> $8+2a<0$, $x-2>0$이므로
> $f''(x)<0$

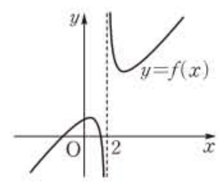
(i), (ii)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 구간 $(2, \infty)$에서 항상 아래로 볼록한 것은 아니다.

ㄷ. $f''(x)\neq0$이므로 $y=f(x)$의 그래프의 변곡점은 존재하지 않는다.

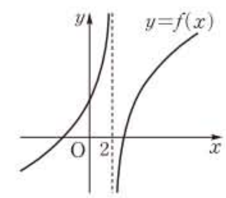
이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

참고 a의 값에 따라 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

(i) $a>-4$일 때



(ii) $a<-4$일 때



17 전략 $f''(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌는 점을 찾는다.

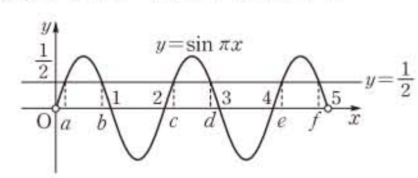
풀이 $f(x)=x^2+3x+\frac{4}{\pi^2}\sin\pi x$라 하면

$$f'(x)=2x+3+\frac{4}{\pi}\cos\pi x$$

$$f''(x)=2-4\sin\pi x$$

$f''(x)=0$에서 $\sin\pi x=\frac{1}{2}$

다음 그림과 같이 구간 $(0, 5)$에서 함수 $y=\sin\pi x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$은 6개의 점에서 만난다. 이때 6개의 점의 x좌표를 작은 것부터 순서대로 a, b, c, d, e, f라 하면 $x=a$, $x=b$, $x=c$, $x=d$, $x=e$, $x=f$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점이다.



$\therefore n=6$

또 $a+f=b+e=c+d=5$이므로

$k=15$

$\therefore n+k=21$ 답 ④

18 전략 구간 $(0, 2\ln2)$에서의 극값, $f(0)$, $f(2\ln2)$의 값을 비교한다.

풀이 $f(x)=e^{2x}-8e^x+6x$에서

$$f'(x)=2e^{2x}-8e^x+6$$

$f'(x)=0$에서 $2(e^{2x}-4e^x+3)=0$

$2(e^x-1)(e^x-3)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=\ln3$

x	0	$\cdots$	$\ln3$	$\cdots$	$2\ln2$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-7	↘	극소	↗	$12\ln2-16$

> $f(2\ln2)$
> $=e^{4\ln2}-8e^{2\ln2}+12\ln2$
> $=e^{\ln16}-8e^{\ln4}+12\ln2$
> $=16-32+12\ln2$
> $=12\ln2-16$

Ⅱ 미분법

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\ln 3$에서 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은

$$f(\ln 3)=e^{2\ln 3}-8e^{\ln 3}+6\ln 3=e^{\ln 9}-8e^{\ln 3}+6\ln 3$$
$$=9-8\cdot 3+6\ln 3=-15+6\ln 3$$

답 ⑤

19 전략 $y=|2x-\tan x|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수를 이용한다.

풀이 $f(x)=2x-\tan x$라 하면

$$f'(x)=2-\sec^2 x$$

$f'(x)=0$에서

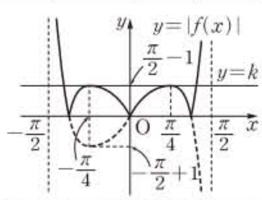
$$\sec^2 x=2,\quad \cos^2 x=\frac{1}{2}$$

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore x=-\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x=\frac{\pi}{4}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	$-\frac{\pi}{2}+1$	↗	$\frac{\pi}{2}-1$	↘	

또 $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} f(x)=-\infty$이고, $f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=|f(x)|$와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 k의 값은 $\frac{\pi}{2}-1$이다.

답 ②

20 전략 $y=\frac{x^3}{(x-1)^2}$의 최솟값을 이용한다.

풀이 $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$이라 하면

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-1)^2-x^3\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$$
$$=\frac{x^2\{3(x-1)-2x\}}{(x-1)^3}=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

$f'(x)=0$에서 $x=3$ ($\because x>1$)

따라서 $f(x)$의 최솟값은

$$f(3)=\frac{27}{4}$$

x	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$\frac{27}{4}$	↗

이므로 $f(x)\ge a$가 항상 성립하려면

$$a\le\frac{27}{4}$$

즉 a의 최댓값은 $\frac{27}{4}$이다.

답 ③

21 전략 위치 $x=f(t)$를 미분하여 속도를 구한다.

풀이 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$$v=f'(t)=e^{-t}-(t-1)e^{-t}=(2-t)e^{-t}$$

따라서 $g(t)=(2-t)e^{-t}$이므로

$$g'(t)=-e^{-t}-(2-t)e^{-t}=(t-3)e^{-t}$$

$g'(t)=0$에서 $t=3$

t	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		↘	극소	↗

따라서 $g(t)$는 $t=3$에서 극소이면서 최소이므로 이때 점 P의 위치는

$$f(3)=2e^{-3}=\frac{2}{e^3}$$

답 ③

22 전략 점 Q의 위치가 $(f(t),\ g(t))$일 때, 시각 t에서의 점 Q의 속력은 $\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$임을 이용한다.

풀이 시각 t에서의 점 P의 좌표는 $(2t,\ 0)$이므로 두 점 P, A를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2t}+\frac{y}{6}=1,\ \text{즉 } y=-\frac{3}{t}x+6$$

x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
(단, $ab\ne 0$)

직선 PA와 직선 $y=\frac{1}{2}x+2$의 교점이 Q이므로 점 Q의 x좌표는

$$-\frac{3}{t}x+6=\frac{1}{2}x+2\text{에서}\quad \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{t}\right)x=4$$
$$\therefore x=\frac{8t}{t+6}$$

이를 $y=\frac{1}{2}x+2$에 대입하면 $y=\frac{4t}{t+6}+2$

$$\therefore \mathrm{Q}\left(\frac{8t}{t+6},\ \frac{4t}{t+6}+2\right)$$

점 Q의 좌표를 $(f(t),\ g(t))$라 하면

$$\frac{dx}{dt}=f'(t)=\frac{8(t+6)-8t}{(t+6)^2}=\frac{48}{(t+6)^2}$$
$$\frac{dy}{dt}=g'(t)=\frac{4(t+6)-4t}{(t+6)^2}=\frac{24}{(t+6)^2}$$

이므로 점 Q의 시각 t에서의 속도는

$$\left(\frac{48}{(t+6)^2},\ \frac{24}{(t+6)^2}\right)$$

따라서 $t=6$에서의 속도가 $\left(\frac{48}{12^2},\ \frac{24}{12^2}\right)$, 즉 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{6}\right)$이므로 구하는 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{6}$$

답 ①

다른 풀이 $x=\frac{8t}{t+6}$에서

$$\frac{dx}{dt}=\frac{8(t+6)-8t}{(t+6)^2}=\frac{48}{(t+6)^2}$$

그런데 $y=\frac{1}{2}x+2$에서 $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\cdot\frac{dx}{dt}$이므로 점 Q의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{dx}{dt}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{24\sqrt{5}}{(t+6)^2}$$

따라서 출발한 지 6초 후의 점 Q의 속력은

$$\frac{24\sqrt{5}}{12^2}=\frac{\sqrt{5}}{6}$$

$y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동하여 그린다.

23 전략 구하는 극한값을 $f'(x)$에 대한 식으로 변형한다.

풀이 $\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(\pi+h)-f(\pi)\}-\{f(\pi-h)-f(\pi)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(\pi-h)-f(\pi)}{-h}$

$=f'(\pi)+f'(\pi)=2f'(\pi)$

$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x$이므로

$2f'(\pi)=2\cdot(-e^\pi)=-2e^\pi$

답 $-2e^\pi$

24 전략 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이고 $f'(1)$이 존재함을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to1+}\ln\pi x=\lim_{x\to1-}(a\tan\pi x+b)=f(1)$

$\ln\pi=a\tan\pi+b \qquad \therefore b=\ln\pi$ ⋯ ❶

또 $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (x>1)\\ a\pi\sec^2\pi x & \left(\frac{1}{2}<x<1\right)\end{cases}$ 에서 $f'(1)$이 존재해야 하므로

$\lim_{x\to1+}\frac{1}{x}=\lim_{x\to1-}a\pi\sec^2\pi x$

$1=a\pi\sec^2\pi, \qquad a\pi=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{\pi}$ ⋯ ❷

$\therefore \frac{b}{a}=\pi\ln\pi$ ⋯ ❸

답 $\pi\ln\pi$

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\frac{b}{a}$의 값을 구할 수 있다.	10 %

25 전략 양변에 자연로그를 취한 후 미분한다.

풀이 $f(x)=x^{1+\ln x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=(1+\ln x)\ln x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x}\ln x+(1+\ln x)\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\ln x+1}{x}$

$\therefore f'(x)=f(x)\cdot\frac{2\ln x+1}{x}$

$f''(x)$

$=f'(x)\cdot\frac{2\ln x+1}{x}+f(x)\cdot\frac{\frac{2}{x}\cdot x-(2\ln x+1)}{x^2}$

$=f'(x)\cdot\frac{2\ln x+1}{x}+f(x)\cdot\frac{1-2\ln x}{x^2}$

$f(e)=e^2$, $f'(e)=f(e)\cdot\frac{3}{e}=3e$이므로

$f''(e)=f'(e)\cdot\frac{3}{e}+f(e)\cdot\left(-\frac{1}{e^2}\right)$

$=3e\cdot\frac{3}{e}+e^2\cdot\left(-\frac{1}{e^2}\right)$

$=9-1=8$

답 8

26 전략 $f'(x)$, $f''(x)$를 구한 후 $x=0$을 대입한다.

풀이 $f(x)=ax\ln(2x+b)$에서

$f'(x)=a\ln(2x+b)+ax\cdot\frac{2}{2x+b}$

$=a\ln(2x+b)+\frac{2ax}{2x+b}$

$f''(x)=\frac{2a}{2x+b}+\frac{2a(2x+b)-2ax\cdot2}{(2x+b)^2}$

$=\frac{2a}{2x+b}+\frac{2ab}{(2x+b)^2}$ ⋯ ❶

$f'(0)=\ln8$에서 $\quad a\ln b=\ln8$ ⋯⋯ ㉠

$f''(0)=a$에서 $\quad \frac{2a}{b}+\frac{2ab}{b^2}=a$

주어진 조건에서 $ab\neq0$이므로

$a\neq0$이고 $b\neq0$

$\therefore \frac{2ab}{b^2}=\frac{2a}{b}$

$\frac{4a}{b}=a \qquad \therefore b=4$ ⋯ ❷

$b=4$를 ㉠에 대입하면 $\quad a\ln4=\ln8$

$2a\ln2=3\ln2 \qquad \therefore a=\frac{3}{2}$ ⋯ ❸

$\therefore ab=6$ ⋯ ❹

답 6

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$, $f''(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

$\ln\pi x=\ln\pi+\ln x$에서

$(\ln\pi x)'=\frac{1}{x}$

27 전략 접점의 좌표를 구한 후 접선의 기울기와 $\tan\theta$의 관계를 이용한다.

풀이 $f(x)=\frac{x}{x+1}$라 하면

$f'(x)=\frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$ ⋯ ❶

접점의 좌표를 $\left(a, \frac{a}{a+1}\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=\frac{1}{(a+1)^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{a}{a+1}=\frac{1}{(a+1)^2}(x-a)$

이 직선이 점 $(2, 2)$를 지나므로

$2-\frac{a}{a+1}=\frac{1}{(a+1)^2}(2-a)$

$2(a+1)^2-a(a+1)=2-a$

$a^2+4a=0, \qquad a(a+4)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=0$

따라서 접점의 좌표는 $\left(-4, \frac{4}{3}\right)$, $(0, 0)$이다. ⋯ ❷

각 점에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α, β라 하면 $\quad \tan\alpha=\frac{1}{9}$, $\tan\beta=1$

$f'(-4)=\frac{1}{9}$, $f'(0)=1$

$\therefore \tan\theta = |\tan(\alpha-\beta)|$

$$= \left|\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$= \left|\frac{\frac{1}{9}-1}{1+\frac{1}{9}\cdot 1}\right| = \frac{4}{5} \qquad \cdots ❸$$

답 $\frac{4}{5}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ 접점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %

28 전략 b를 a에 대한 식으로 나타낸 후 $f'(2)>0$, $f''(2)=0$임을 이용한다.

풀이 점 P$(2, \ln 2)$가 곡선 $y=\ln(x^2+ax+b)$ 위의 점이므로 $\quad \ln 2 = \ln(4+2a+b)$

$\therefore b=-2a-2 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$f(x)=\ln(x^2+ax-2a-2)$라 하면

$$f'(x)=\frac{2x+a}{x^2+ax-2a-2}$$

$$f''(x)=\frac{2(x^2+ax-2a-2)-(2x+a)^2}{(x^2+ax-2a-2)^2}$$

$$=\frac{-2x^2-2ax-a^2-4a-4}{(x^2+ax-2a-2)^2}$$

$f'(2)>0$에서 $\quad \frac{4+a}{2}>0$

$\therefore a>-4 \qquad \cdots\cdots ㉡$

$f''(2)=0$에서 $\quad \frac{-a^2-8a-12}{4}=0$

$a^2+8a+12=0, \quad (a+6)(a+2)=0$

$\therefore a=-2$ ($\because$ ㉡)

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=2$

$\therefore a^2+b^2=4+4=8$

답 8

29 전략 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않도록 하는 상수 a의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=(x^2+ax+a)e^{-x}$에서

$f'(x)=(2x+a)e^{-x}-(x^2+ax+a)e^{-x}$

$\quad =-\{x^2+(a-2)x\}e^{-x}$

$f(x)$가 극값을 갖지 않으므로 이차방정식 $x^2+(a-2)x=0$의 판별식을 D라 하면

$(a-2)^2 \le 0 \qquad \therefore a=2$

즉 $f(x)=(x^2+2x+2)e^{-x}$, $f'(x)=-x^2e^{-x}$이므로

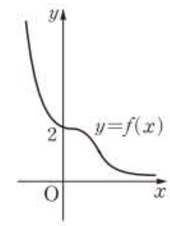
$f''(x)=-2xe^{-x}+x^2e^{-x}$

$\quad =x(x-2)e^{-x}$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2	↘	$\frac{10}{e^2}$	↘

또 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $f(0)=2$이므로 $y=f(x)$의 그래프의 y절편은 2이다.

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프의 변곡점은 $(0, f(0))$, $(2, f(2))$의 2개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

일품 BOX

두 직선 l, m이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 각각 α, β일 때, 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\tan\theta$

$=|\tan(\alpha-\beta)|$

$=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$\lim_{x\to-\infty}(x^2+2x+2)e^{-x}$

$=\lim_{t\to\infty}(t^2-2t+2)e^t$

$=\infty$

$a>0$, $b>0$일 때,

$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$x=\frac{50}{x}$에서 $\quad x^2=50$

$\therefore x=5\sqrt{2}$ ($\because x>0$)

30 전략 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$일 때, $\tan\theta$의 값이 최대이면 θ의 크기도 최대임을 이용한다.

풀이 $\angle APO=\alpha$, $\angle BPO=\beta$라 하면

$\tan\alpha=\frac{5}{x}$, $\tan\beta=\frac{10}{x}$

$\therefore \tan(\angle APB)=\tan(\beta-\alpha)$

$$=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{\frac{10}{x}-\frac{5}{x}}{1+\frac{10}{x}\cdot\frac{5}{x}}$$

$$=\frac{\frac{5}{x}}{\frac{x^2+50}{x^2}}=\frac{5x}{x^2+50} \qquad \cdots ❶$$

$f(x)=\frac{5x}{x^2+50}$라 하면

$$f'(x)=\frac{5(x^2+50)-5x\cdot 2x}{(x^2+50)^2}=\frac{-5(x^2-50)}{(x^2+50)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=5\sqrt{2}$ ($\because x>0$)

따라서 $f(x)$는 $x=5\sqrt{2}$일 때 극대이자 최대이다. $\cdots$ ❷

x	0	$\cdots$	$5\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

즉 $x=5\sqrt{2}$일 때 $\tan(\angle APB)$의 값이 최대이고, 이때 $\angle APB$의 크기도 최대이므로

$\overline{OP}^2=x^2=(5\sqrt{2})^2=50 \qquad \cdots ❸$

답 50

채점 기준	비율
❶ $\tan(\angle APB)$를 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\tan(\angle APB)$가 최대일 때의 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\angle APB$의 크기가 최대일 때 $\overline{OP}^2$의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $\tan(\angle APB)=\frac{\frac{5}{x}}{1+\frac{50}{x^2}}=\frac{5}{x+\frac{50}{x}}$에서

$x>0$, $\frac{50}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+\frac{50}{x} \ge 2\sqrt{x\cdot\frac{50}{x}}=10\sqrt{2}$$

이때 등호는 $x=5\sqrt{2}$일 때 성립하므로 $x=5\sqrt{2}$일 때 $\tan(\angle APB)$의 값이 최대이고, 이때 $\angle APB$의 크기도 최대이다.

따라서 구하는 값은

$\overline{OP}^2 = x^2 = (5\sqrt{2})^2 = 50$

31 전략 $y=\dfrac{e^x}{x-3}$의 그래프와 직선 $y=(-1)^n \cdot e^n$의 교점의 개수를 이용한다.

풀이 $f(x)=\dfrac{e^x}{x-3}$이라 하면

$$f'(x)=\frac{e^x(x-3)-e^x}{(x-3)^2}=\frac{e^x(x-4)}{(x-3)^2}$$

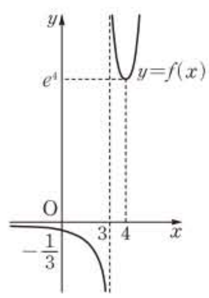
$f'(x)=0$에서 $x=4$

x	$\cdots$	3	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	e^4	↗

또 $\lim_{x\to3-} f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to3+} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$,

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



n이 홀수일 때 $(-1)^n=-1$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-e^n$은 한 점에서 만난다.

$\therefore a_n=1\ (n=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9)$

n이 짝수일 때 $(-1)^n=1$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=e^2$과는 만나지 않고, 직선 $y=e^4$과는 접한다. 또 직선 $y=e^6$, $y=e^8$, $y=e^{10}$과는 서로 다른 두 점에서 만나므로

$$a_n=\begin{cases}0\ (n=2)\\1\ (n=4)\\2\ (n=6,\ 8,\ 10)\end{cases}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n=\sum_{n=1}^{5} a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{5} a_{2n}$$
$$=5\cdot1+(0+1+3\cdot2)=12$$

답 12

1등급 비밀노트

$f(x)=\dfrac{e^x}{x-3}$에 대하여 다음과 같이 극한값을 생각할 수 있다.

① $x\to3-$일 때, $e^x\to e^3$, $(x-3)\to0-$이므로 $\lim_{x\to3-} f(x)=-\infty$

② $x\to3+$일 때, $e^x\to e^3$, $(x-3)\to0+$이므로 $\lim_{x\to3+} f(x)=\infty$

32 전략 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때 점 P의 속력은 $\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$임을 이용한다.

풀이 $\dfrac{dx}{dt}=\cos t$

$$\frac{dy}{dt}=-2\cos t\sin t+2\sin 2t$$
$$=-2\sin t\cos t+4\sin t\cos t$$
$$=2\sin t\cos t$$

따라서 점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\cos^2 t+4\sin^2 t\cos^2 t}$$
$$=\sqrt{\cos^2 t+4(1-\cos^2 t)\cos^2 t}$$
$$=\sqrt{-4\cos^4 t+5\cos^2 t}$$
$$=\sqrt{-4\left(\cos^2 t-\frac{5}{8}\right)^2+\frac{25}{16}}$$

이므로 점 P의 속력은 $\cos^2 t=\dfrac{5}{8}$일 때 최댓값 $\dfrac{5}{4}$를 갖는다.

답 $\dfrac{5}{4}$

최상위로 가는 최고 수준 문제

본책 71쪽

01

해결 단계

① R, R_1, R_2 사이의 관계식을 세운다.
② ①의 식을 t에 대하여 미분한다.
③ $\dfrac{dR}{dt}$의 값을 구한다.

풀이 ① $R_1\,\Omega$, $10\,\Omega$인 저항을 병렬연결한 전체 저항을 $r\,\Omega$이라 하면

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{10}\qquad \therefore r=\frac{10R_1}{10+R_1}$$

$$\therefore R=r+R_2=\frac{10R_1}{R_1+10}+R_2$$

② 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dR}{dt}=\frac{10(R_1+10)-10R_1}{(R_1+10)^2}\cdot\frac{dR_1}{dt}+\frac{dR_2}{dt}$$

$\dfrac{dR_1}{dt}=2$, $\dfrac{dR_2}{dt}=1$을 대입한다.

$$=\frac{200}{(R_1+10)^2}+1$$

③ 따라서 $R_1=20$일 때의 $\dfrac{dR}{dt}$의 값은

$$\frac{200}{(20+10)^2}+1=\frac{11}{9}$$

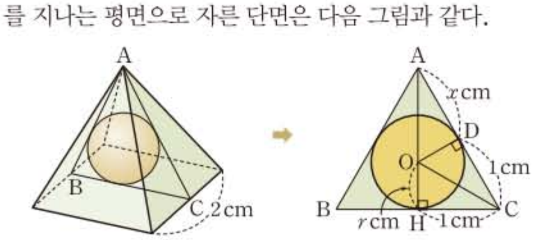
답 $\dfrac{11}{9}$

02

해결 단계

① 사각뿔의 꼭짓점과 구의 중심을 지나는 단면을 이용하여 식을 세운다.
② $\overline{AD}=x$를 r에 대한 식으로 나타낸다.
③ $\dfrac{dx}{dt}$를 r에 대한 식으로 나타낸다.
④ 사각뿔의 한 옆면의 넓이의 변화율을 구한다.

풀이 ① 사각뿔의 꼭짓점을 A, 밑면의 평행한 두 모서리의 중점을 각각 B, C라 할 때, 사각뿔을 세 점 A, B, C를 지나는 평면으로 자른 단면은 다음 그림과 같다.



구의 중심을 O, 구의 반지름의 길이를 r cm $(0.1\le r\le 0.9)$라 하고 단면에서 원과 변 AC, 변 BC가 만나는 점을 각각 D, H, 선분 AD의 길이를 x cm라 하자.
△AOD∽△ACH이므로

$\overline{AD}:\overline{AH}=\overline{DO}:\overline{HC}$, 즉 $x:(\sqrt{x^2+r^2}+r)=r:1$

$\overline{AH}=\overline{AO}+\overline{OH}$
$=\sqrt{x^2+r^2}+r$(cm)
이고, 사각뿔의 밑면의 크기는 변하지 않으므로
$\overline{CH}=1$ cm

❷ $x=r\sqrt{x^2+r^2}+r^2,\quad x-r^2=r\sqrt{x^2+r^2}$

양변을 제곱하면

$x^2-2r^2x+r^4=r^2(x^2+r^2)$

$(1-r^2)x^2-2r^2x=0\quad \therefore x\{(1-r^2)x-2r^2\}=0$

$x>0$이므로 $\quad x=\dfrac{2r^2}{1-r^2}$

❸ $\therefore \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dx}{dr}\cdot\dfrac{dr}{dt}$

구의 반지름의 길이가 매초 0.1 cm씩 증가하므로
$\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{1}{10}$

$$=\frac{4r(1-r^2)-2r^2\cdot(-2r)}{(1-r^2)^2}\cdot\frac{1}{10}$$

$$=\frac{2r}{5(1-r^2)^2}$$

❹ 사각뿔의 한 옆면의 넓이를 S cm²라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot(x+1)=x+1$

$\overline{AC}$의 길이

$\therefore \dfrac{dS}{dt}=\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2r}{5(1-r^2)^2}$

따라서 $t=4$일 때 $r=0.1+0.1\times 4=0.5=\dfrac{1}{2}$이므로 옆면의 넓이의 변화율은

$$\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{5\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{16}{45}\ (\text{cm}^2/\text{s})$$

답 ⑤

03

해결 단계

❶ 점 A의 좌표를 접점의 좌표 x_1, y_1에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 점 P의 좌표를 접점의 좌표 x_1, y_1에 대한 식으로 나타낸다.
❸ $S(a)$를 구한다.
❹ $\dfrac{S(4)}{S(4\sqrt{2})}$의 값을 구한다.

풀이 ❶ $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

따라서 곡선 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4$ 위의 점 (x_1, y_1) $(x_1>0, y_1>0)$에서의 접선의 방정식은

$y-y_1=-\left(\dfrac{y_1}{x_1}\right)^{\frac{1}{3}}(x-x_1)\quad\cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 점 A$(a, 0)$을 지나므로

$-y_1=-\left(\dfrac{y_1}{x_1}\right)^{\frac{1}{3}}(a-x_1)$

$a-x_1=\left(\dfrac{x_1}{y_1}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot y_1$

$\therefore a=x_1+x_1^{\frac{1}{3}}y_1^{\frac{2}{3}}=x_1^{\frac{1}{3}}\left(x_1^{\frac{2}{3}}+y_1^{\frac{2}{3}}\right)=4x_1^{\frac{1}{3}}$

$\therefore$ A$\left(4x_1^{\frac{1}{3}}, 0\right)$

❷ 한편 ㉠에 $x=0$을 대입하면

$y-y_1=\left(\dfrac{y_1}{x_1}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot x_1$

이므로

$y=x_1^{\frac{2}{3}}y_1^{\frac{1}{3}}+y_1=y_1^{\frac{1}{3}}\left(x_1^{\frac{2}{3}}+y_1^{\frac{2}{3}}\right)=4y_1^{\frac{1}{3}}$

$\therefore$ P$\left(0, 4y_1^{\frac{1}{3}}\right)$

❸ 따라서 △AOP의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot 4x_1^{\frac{1}{3}}\cdot 4y_1^{\frac{1}{3}}=8x_1^{\frac{1}{3}}y_1^{\frac{1}{3}}$

$=8x_1^{\frac{1}{3}}\sqrt{4-x_1^{\frac{2}{3}}}\ \left(\because y_1^{\frac{2}{3}}=4-x_1^{\frac{2}{3}}\right)$

이때 $a=4x_1^{\frac{1}{3}}$에서 $x_1^{\frac{1}{3}}=\dfrac{a}{4}$이므로

$S(a)=8\cdot\dfrac{a}{4}\sqrt{4-\dfrac{a^2}{16}}=2a\sqrt{4-\dfrac{a^2}{16}}$

❹ $\therefore \dfrac{S(4)}{S(4\sqrt{2})}=\dfrac{2\cdot 4\cdot\sqrt{4-1}}{2\cdot 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{4-2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

답 ③

04

해결 단계

❶ □PROQ의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낸다.
❷ $S'(a)$를 이용하여 $S(a)$가 감소함수임을 보인다.
❸ □PROQ의 넓이의 최댓값을 구한다.

풀이 ❶ $f(x)=e^{-x^2+1}$에서

$f'(x)=-2xe^{-x^2+1}$

점 P(a, e^{-a^2+1})에서의 접선의 기울기는
$f'(a)=-2ae^{-a^2+1}$이므로 접선의 방정식은

$y-e^{-a^2+1}=-2ae^{-a^2+1}(x-a)$

$y=0$일 때 $-e^{-a^2+1}=-2ae^{-a^2+1}(x-a)$에서

$1=2a(x-a)\qquad \therefore x=\dfrac{1}{2a}+a$

$\therefore$ Q$\left(\dfrac{1}{2a}+a, 0\right)$

따라서 □PROQ의 넓이를 $S(a)$라 하면

□PROQ는 사다리꼴이다.

$S(a)=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{2a}+a\right)\cdot e^{-a^2+1}$

$=\left(a+\dfrac{1}{4a}\right)e^{-a^2+1}$

❷ $S'(a)=\left(1-\dfrac{1}{4a^2}\right)e^{-a^2+1}+\left(a+\dfrac{1}{4a}\right)e^{-a^2+1}\cdot(-2a)$

$=e^{-a^2+1}\left(1-\dfrac{1}{4a^2}-2a^2-\dfrac{1}{2}\right)$

$=-e^{-a^2+1}\left(2a^2+\dfrac{1}{4a^2}-\dfrac{1}{2}\right)$

이때 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2a^2+\dfrac{1}{4a^2}-\dfrac{1}{2}\ge 2\sqrt{2a^2\cdot\dfrac{1}{4a^2}}-\dfrac{1}{2}$

$=\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}>0$

즉 $a\ge 1$에서 $S'(a)<0$이므로 $S(a)$는 감소한다.

❸ 따라서 $S(a)$는 $a=1$일 때 최대이고, 최댓값은

$S(1)=\left(1+\dfrac{1}{4}\right)e^0=\dfrac{5}{4}$

답 ①

Ⅲ 적분법

Ⅲ-1. 여러 가지 적분법

개념&핵심 기출

본책 74~77쪽

01 $f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int \frac{(2x+1)^2}{x^2}dx$

$=\int \frac{4x^2+4x+1}{x^2}dx$

$=\int\left(4+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=4x+4\ln|x|-\frac{1}{x}+C$

$f(1)=2$이므로 $\quad 4-1+C=2 \quad \therefore C=-1$

따라서 $f(x)=4x+4\ln|x|-\frac{1}{x}-1$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=2+4\ln\frac{1}{2}-2-1=-4\ln 2-1$

답 ④

02 $F(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$F'(x)=f'(x)-g'(x)$

$=\frac{\sqrt{x}(x-1)-(1-x)}{x+\sqrt{x}}$

$=\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$

$=\frac{x-1}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$

이므로

$F(x)=\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

유리수 지수로 변형하여 부정적분을 구하는 것이 쉽다.

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+C$

$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C$

$F(1)=f(1)-g(1)=0$이므로

$\frac{2}{3}-2+C=0 \quad \therefore C=\frac{4}{3}$

따라서 $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+\frac{4}{3}$이므로

$f(4)-g(4)=F(4)$

$=\frac{2}{3}\cdot 8-2\cdot 2+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

답 ④

03 $F(x)=xf(x)+5\ln x+\frac{4}{x}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2}$

$xf'(x)=-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}$

$\therefore f'(x)=-\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^3}$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(-\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)dx$

$=\int(-5x^{-2}+4x^{-3})dx$

$=5x^{-1}-2x^{-2}+C$

$=\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}+C$

$f(1)=1$이므로 $\quad 3+C=1 \quad \therefore C=-2$

즉 $f(x)=\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}-2$이므로 $f(x)=0$에서

$\frac{5x-2-2x^2}{x^2}=0, \quad 2x^2-5x+2=0$

$(2x-1)(x-2)=0 \quad \therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 합은 $\quad \frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

04 $f(x)=\int 4^{x+1}\ln 2\,dx=4\ln 2\int 4^x dx$

$=4\ln 2\cdot\frac{4^x}{\ln 4}+C$

$=2\cdot 4^x+C$

$f(1)=8$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=2\cdot 4^x$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 4^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비급수

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{6}$

답 $\frac{1}{6}$

05 $y=\ln x^3-e$로 놓으면 $\quad \frac{y+e}{3}=\ln x$

$\therefore x=e^{\frac{y+e}{3}}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=e^{\frac{x+e}{3}}$

$\therefore g(x)=e^{\frac{x+e}{3}}$

$\therefore G(x)=\int g(x)dx=\int e^{\frac{x+e}{3}}dx$

$\int e^{\frac{x+e}{3}}dx$

$=e^{\frac{e}{3}}\int e^{\frac{x}{3}}dx$

$=e^{\frac{e}{3}}\int(e^{\frac{1}{3}})^x dx$

$=e^{\frac{e}{3}}\cdot\frac{1}{\ln e^{\frac{1}{3}}}(e^{\frac{1}{3}})^x+C$

$=3e^{\frac{x+e}{3}}+C$

$=3e^{\frac{x+e}{3}}+C$

$G(-e)=0$이므로 $\quad 3+C=0 \quad \therefore C=-3$

따라서 $G(x)=3e^{\frac{x+e}{3}}-3$이므로

$G(3-e)=3e-3$

답 $3e-3$

06 $f'(x)=\tan^2 x$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int \tan^2 x\,dx$

삼각함수 사이의 관계
① $\sin^2 x+\cos^2 x=1$
② $\tan^2 x+1=\sec^2 x$, $1+\cot^2 x=\csc^2 x$

$=\int(\sec^2 x-1)dx=\tan x-x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$을 지나므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$

$1-\frac{\pi}{4}+C=0 \quad \therefore C=\frac{\pi}{4}-1$

따라서 $f(x)=\tan x-x+\frac{\pi}{4}-1$이므로

$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-2$

답 $\frac{\pi}{2}-2$

Ⅲ 적분법

07 $\sin^n x\sin 2x=\sin^n x\cdot 2\sin x\cos x=2\sin^{n+1}x\cos x$ 이므로

$$f_n(x)=2\int \sin^{n+1}x\cos x\,dx$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\quad \dfrac{dt}{dx}=\cos x$

$$\therefore f_n(x)=2\int t^{n+1}\,dt=\frac{2}{n+2}t^{n+2}+C$$
$$=\frac{2}{n+2}\sin^{n+2}x+C$$

$f_n(0)=0$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f_n(x)=\dfrac{2}{n+2}\sin^{n+2}x$이므로

$$f_n\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{n+2}$$

$\sin^{n+2}\dfrac{\pi}{2}=1$

$f_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<\dfrac{1}{10}$에서 $\quad \dfrac{2}{n+2}<\dfrac{1}{10}$

$$\therefore n>18$$

따라서 자연수 n의 최솟값은 19이다. 답 19

08 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\cdot 2=2f'(x)$$

이므로

도함수의 정의
$f'(x)$
$=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{2-\cos x}$$
$$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{2-\cos x}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{(2-\cos x)'}{2-\cos x}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\ln(2-\cos x)+C\ (\because 2-\cos x>0)$$

$f(0)=0$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln(2-\cos x)$이므로

$$f(\pi)=\frac{1}{2}\ln 3$$

답 $\dfrac{1}{2}\ln 3$

09 $\dfrac{x}{x^2+3x+2}=\dfrac{x}{(x+1)(x+2)}$

$\dfrac{x}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+2}$로 놓으면

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)}=\frac{(A+B)x+2A+B}{(x+1)(x+2)}$$

위의 식은 x에 대한 항등식이므로

$$A+B=1,\ 2A+B=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad A=-1,\ B=2$

$$\therefore \int\frac{x}{x^2+3x+2}\,dx$$
$$=\int\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}\right)dx$$
$$=-\ln|x+1|+2\ln|x+2|+C$$
$$=\ln\frac{(x+2)^2}{|x+1|}+C$$

답 ②

$\displaystyle\int\frac{b}{x+a}\,dx$
$=b\ln|x+a|+C$

1등급 비밀노트

분수식의 모양에 따라 다음과 같이 부분분수로 나타낸 다음 항등식의 성질을 이용하여 상수 A, B, C의 값을 각각 구한다.

① $\dfrac{px+q}{(x+a)(x+b)}=\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{B}{x+b}$

② $\dfrac{px^2+qx+r}{(x+a)(x^2+bx+c)}=\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{Bx+C}{x^2+bx+c}$

10 $f(x)+xf'(x)=\{xf(x)\}'=x\ln x$이므로

$$xf(x)=\int x\ln x\,dx$$

(다항함수)×(로그함수) 꼴일 때에는 로그함수를 $u(x)$로, 다항함수를 $v'(x)$로 놓는다.

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=x$로 놓으면

$$u'(x)=\frac{1}{x},\ v(x)=\frac{1}{2}x^2$$
$$\therefore xf(x)=\int x\ln x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}x^2\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$$

$f(1)=-\dfrac{1}{4}$이므로

$$-\frac{1}{4}+C=-\frac{1}{4}\qquad \therefore C=0$$

따라서 $xf(x)=\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2$이므로

$$f(x)=\frac{1}{2}x\ln x-\frac{1}{4}x\ (\because x>0)$$
$$\therefore f(2)=\ln 2-\frac{1}{2}$$

답 ④

11 $u(x)=x-2$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$$u'(x)=1,\ v(x)=e^x$$
$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(x-2)e^x\,dx$$
$$=(x-2)e^x-\int e^x\,dx$$
$$=(x-2)e^x-e^x+C$$
$$=(x-3)e^x+C$$

한편 $f'(x)=0$에서

$x=2\ (\because e^x>0)$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

즉 $f(2)=4-e^2$이므로

$$-e^2+C=4-e^2$$
$$\therefore C=4$$

따라서 $f(x)=(x-3)e^x+4$이므로

$$f(0)=-3+4=1$$

답 1

부분적분법을 한 번 적용하여 부정적분을 구할 수 없을 때는 부분적분법을 한 번 더 적용한다.

12 $f(x)=\cos x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$$f'(x)=-\sin x,\ g(x)=e^x$$
$$\therefore \int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx \quad\cdots\cdots ㉠$$

$\displaystyle\int e^x\sin x\,dx$에서 $u(x)=\sin x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$$u'(x)=\cos x,\ v(x)=e^x$$

$\therefore \int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx$$

$$2\int e^x \cos x\,dx = e^x(\sin x + \cos x) + C_1$$

$$\therefore \int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$$

$F(0)=\frac{1}{2}$이므로 $\quad \frac{1}{2}+C=\frac{1}{2} \quad \therefore C=0$

따라서 $F(x)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$이므로

$$F\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

답 ②

13 $\int_0^{\pi} f(t)dt=a$ (a는 상수) ...... ㉠

로 놓으면 $\quad f(x)=\sin x+\cos x+a$

이를 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{\pi}(\sin t+\cos t+a)dt=a$$

$$\Big[-\cos t+\sin t+at\Big]_0^{\pi}=a$$

$$2+a\pi=a \quad \therefore a=\frac{2}{1-\pi}$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin x+\cos x+\frac{2}{1-\pi}\right)dx$$

$$=2\int_0^{\pi}\left(\cos x+\frac{2}{1-\pi}\right)dx$$

$$=2\left[\sin x+\frac{2}{1-\pi}x\right]_0^{\pi}$$

$$=2\cdot\frac{2\pi}{1-\pi}=\frac{4\pi}{1-\pi}$$

답 $\frac{4\pi}{1-\pi}$

14 $-1\le x\le 2$에서 $\frac{x-2}{x+2}\le 0$, $2\le x\le 4$에서 $\frac{x-2}{x+2}\ge 0$이므로

$$\int_{-1}^{4}\left|\frac{x-2}{x+2}\right|dx$$

$$=-\int_{-1}^{2}\frac{x-2}{x+2}dx+\int_2^4\frac{x-2}{x+2}dx$$

$$=-\int_{-1}^{2}\left(1-\frac{4}{x+2}\right)dx+\int_2^4\left(1-\frac{4}{x+2}\right)dx$$

$$=-\Big[x-4\ln|x+2|\Big]_{-1}^{2}+\Big[x-4\ln|x+2|\Big]_2^4$$

$$=-3+4\ln 4+2-4\ln 6+4\ln 4$$

$$=12\ln 2-4\ln 3-1$$

따라서 $a=12$, $b=-4$, $c=-1$이므로

$a+b+c=7$ 답 7

1등급 비밀노트

절댓값 기호를 포함한 함수는 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값을 경계로 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.

$2x-1=t^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2=2t\frac{dt}{dx}$

$\therefore \frac{dt}{dx}=\frac{1}{t}$

$1=2\sin\theta$에서 $\sin\theta=\frac{1}{2}$이므로 $\quad \theta=\frac{\pi}{6}$

$\ln 6=\ln 2+\ln 3$

15 $\sqrt{2x-1}=t$로 놓으면 $2x-1=t^2$이므로

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{t}$$

$x=1$일 때 $t=1$, $x=\frac{5}{2}$일 때 $t=2$이므로

$$\int_1^{\frac{5}{2}} x\sqrt{2x-1}\,dx=\int_1^2\frac{t^2+1}{2}\cdot t\cdot t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2(t^4+t^2)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{128}{15}=\frac{64}{15}$$

답 $\frac{64}{15}$

16 $\ln x=t$로 놓으면 $\quad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

$$a_n=\int_1^e\frac{(\ln x)^n}{x}dx=\int_0^1 t^n\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

답 ②

17 $x=2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos\theta}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos\theta}{2\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}1\,d\theta$$

$$=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$$

답 ①

18 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=\frac{1}{x^2}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=-\frac{1}{x}$$

$$\therefore \int_1^2\frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^2+\int_1^2\frac{1}{x^2}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\ln 2+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2$$

$$=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(1-\ln 2)$$

답 ①

Ⅲ 적분법

19 $\int_0^{\pi} x|\cos x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos x\,dx$

$f(x)=x,\ g'(x)=\cos x$로 놓으면

$f'(x)=1,\ g(x)=\sin x$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos x\,dx$

$=\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$

$-\Big[x\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\,dx$

$=\frac{\pi}{2}-\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}+\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$=\pi-1+1=\pi$

답 ④

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 $\cos x\ge0$

$\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$에서 $\cos x\le0$

20 $\int_0^{\ln 2}(e^{2x}+x)^2dx-\int_0^{\ln 2}(e^{2x}-x)^2dx$

$=\int_0^{\ln 2}\{(e^{2x}+x)^2-(e^{2x}-x)^2\}dx$

$=\int_0^{\ln 2}4xe^{2x}dx$

$f(x)=4x,\ g'(x)=e^{2x}$으로 놓으면

$f'(x)=4,\ g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

$\therefore \int_0^{\ln 2}4xe^{2x}dx$

$=\Big[4x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\Big]_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2}4\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx$

$=8\ln 2-\Big[e^{2x}\Big]_0^{\ln 2}$

$=-3+8\ln 2$

따라서 $a=-3,\ b=8$이므로

$a+b=5$

답 5

$e^{2\ln 2}-e^0=e^{\ln 4}-1$

$=4-1$

$=3$

$f'(a)$

$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

21 $f(x)=\int_0^x(x^2-t^2)\cos t\,dt$

$=x^2\int_0^x\cos t\,dt-\int_0^x t^2\cos t\,dt$

이므로

$f'(x)=2x\int_0^x\cos t\,dt+x^2\cos x-x^2\cos x$

$=2x\Big[\sin t\Big]_0^x=2x\sin x$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cdot\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$

답 ②

22 $xf(x)=2x+\int_e^x f(t)dt$ ······ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=2+f(x)$

이므로

$f'(x)=\frac{2}{x}$ ($\because x>0$)

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{2}{x}dx$

$=2\ln x+C$

㉠의 양변에 $x=e$를 대입하면

$ef(e)=2e$ $\quad\therefore f(e)=2$

즉 $2\ln e+C=2+C=2$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=2\ln x$이므로

$f(e^2)=2\ln e^2=4$

답 ④

23 $f(t)=t\cos\frac{\pi}{4}t$로 놓고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x t\cos\frac{\pi}{4}t\,dt$

$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt$

$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\Big[F(t)\Big]_1^x$

$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$

$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)$

$=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

답 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

1등급을 위한 고난도 문제

본책 78~80쪽

01 $f'(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{x^2}=x^{-\frac{3}{2}}+x^{-2}$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^{-\frac{3}{2}}+x^{-2})dx$

$=-2x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1}+C_1$

$f(1)=0$이므로 $\quad -3+C_1=0\quad\therefore C_1=3$

따라서 $f(x)=-2x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1}+3$이므로 ··· ❶

$\int f(x)dx=\int(-2x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1}+3)dx$

$=-4x^{\frac{1}{2}}-\ln|x|+3x+C$

$=-4\sqrt{x}-\ln|x|+3x+C$ ··· ❷

따라서 $p=-4,\ q=-1,\ r=3$이므로

$p+q+r=-2$ ··· ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $\int f(x)dx$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $p+q+r$의 값을 구할 수 있다.	20 %

02 $\dfrac{f(x)}{x}+f'(x)=\dfrac{x-1}{x\sqrt{x}+x}$의 양변에 x를 곱하면

$$f(x)+xf'(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$$

우변의 분모를 유리화하면

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=\frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}=\sqrt{x}-1$$

이때 $\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$이므로

$$xf(x)=\int(\sqrt{x}-1)dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x+C$$

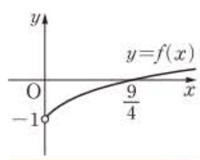
$f(1)=-\dfrac{1}{3}$이므로

$$\frac{2}{3}-1+C=-\frac{1}{3}\qquad \therefore C=0$$

즉 $xf(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}-x$이므로

$$f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x}-1$$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $1\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은



$$f(4)=\frac{2}{3}\cdot 2-1=\frac{1}{3}$$

함수 $f(x)$는 증가함수이므로 x의 값이 클수록 $f(x)$의 값도 커진다.

답 $\dfrac{1}{3}$

03 $f'(x)=\dfrac{e^{2x}-4^x}{e^x+2^x}=\dfrac{(e^x+2^x)(e^x-2^x)}{e^x+2^x}=e^x-2^x$

이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(e^x-2^x)dx$$
$$=e^x-\frac{2^x}{\ln 2}+C$$

$f(0)=1$이므로

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $f(0)=1$

$$1-\frac{1}{\ln 2}+C=1\qquad \therefore C=\frac{1}{\ln 2}$$

$$\therefore f(x)=e^x-\frac{2^x-1}{\ln 2}$$

한편 $f'(x)=0$에서 $x=0$

$f'(x)=e^x-2^x=0$에서 $e^x=2^x$, $\left(\dfrac{e}{2}\right)^x=1$ $\therefore x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

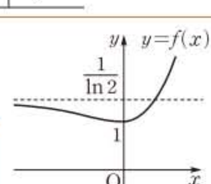
또 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$,

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^x-\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 2}\right)=\lim_{x\to\infty}e^x\left\{1-\frac{1}{\ln 2}\cdot\left(\frac{2}{e}\right)^x+\frac{1}{\ln 2\cdot e^x}\right\}=\infty$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{1}{\ln 2}$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}e^x=0,\ \lim_{x\to-\infty}2^x=0$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(e^x-\frac{2^x-1}{\ln 2}\right)=\frac{1}{\ln 2}$

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $f(1)=e-\dfrac{1}{\ln 2}$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 극소이면서 최소이므로

$f(x)\ge f(0)=1$

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\dfrac{1}{\ln 2}$의 교점은 1개이므로

방정식 $f(x)=\dfrac{1}{\ln 2}$의 서로 다른 실근은 1개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

04 조건 (가)에서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-\{f(x-h)-f(x)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$
$$=f'(x)+f'(x)$$
$$=2f'(x)$$

따라서 $2f'(x)=a+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=a+\cos x$이므로

$$f'(x)=\frac{1}{2}(a+\cos x)\qquad\cdots\cdots ㉠$$

조건 (나)에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉 $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(2x)=0$이므로

$f(0)=0$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)}{2x}\cdot 2$$
$$=2f'(0)$$

따라서 $2f'(0)=3$이므로

$$f'(0)=\frac{3}{2}$$

㉠에 $x=0$을 대입하면 $f'(0)=\dfrac{1}{2}(a+1)$이므로

$$\frac{1}{2}(a+1)=\frac{3}{2},\qquad a+1=3$$

$\therefore a=2$

따라서 $f'(x)=\dfrac{1}{2}(2+\cos x)$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{1}{2}(2+\cos x)dx$$
$$=x+\frac{\sin x}{2}+C$$

$f(0)=0$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=x+\dfrac{\sin x}{2}$이므로

$$f(a\pi)=f(2\pi)=2\pi$$

답 ④

05 $x^2+4=t$로 놓으면 $\quad \dfrac{dt}{dx}=2x$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$$
$$=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{t}+C$$
$$=\sqrt{x^2+4}+C$$

$f(0)=-2$이므로 $\quad 2+C=-2\qquad \therefore C=-4$

$\therefore f(x)=\sqrt{x^2+4}-4$ ⋯ ❶

곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점의 x좌표는

$\sqrt{x^2+4}-4=0$에서 $\quad \sqrt{x^2+4}=4$

$x^2+4=16,\qquad x^2=12$

$\therefore x=\pm 2\sqrt{3}$ ⋯ ❷

따라서 곡선 $y=f(x)$는 x축과 두 점 $(-2\sqrt{3},\ 0)$, $(2\sqrt{3},\ 0)$에서 만나므로

$\overline{AB}=4\sqrt{3}$ ⋯ ❸

답 $4\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	20 %

06 $f(x)=\int_1^x \frac{2}{\ln t+1}dt$에서 $f(1)=0$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{2}{\ln x+1}$$

$$\therefore \int_1^a \frac{2f(x)}{\ln x+1}dx=\int_1^a f(x)f'(x)dx$$

$f(x)=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dx}=f'(x)$

$x=1$일 때 $s=0$, $x=a$일 때 $s=e$이므로

$$\int_1^a f(x)f'(x)dx=\int_0^e s\,ds=\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^e$$
$$=\frac{e^2}{2}$$

답 ④

07 조건 (가)에서 $1+\sin x=t$로 놓으면

$$\frac{dt}{dx}=\cos x$$

$$\therefore f(x)=\int(1+\sin x)^3\cos x\,dx=\int t^3dt$$
$$=\frac{1}{4}t^4+C=\frac{1}{4}(1+\sin x)^4+C$$

이때 $f'(x)=(1+\sin x)^3\cos x$이므로 $f'(x)=0$에서

$$x=\frac{\pi}{2}\ (\because 0<x<\pi)$$

x	0	⋯	$\frac{\pi}{2}$	⋯	π
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	극대	↘	

조건 (나)에 의하여 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=8$이므로

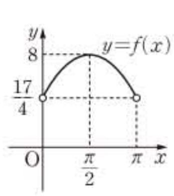
$$\frac{1}{4}\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)^4+C=4+C=8$$

$\therefore C=4$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}(1+\sin x)^4+4$이고

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to\pi-}f(x)=\frac{17}{4}$$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같으므로

$g(2)=g(4)=0$, $g(6)=2$, $g(8)=1$

$2<4<\frac{17}{4}<6<8$

$\therefore g(2)+g(4)+g(6)+g(8)=3$

답 3

08 $F(x)=xf(x)-(4x^3+x^2)\ln x$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$F(1)=f(1)$ $\quad\therefore f(1)=4$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+xf'(x)$$
$$-(12x^2+2x)\ln x-(4x^3+x^2)\cdot\frac{1}{x}$$

$$\therefore xf'(x)=(12x^2+2x)\ln x+4x^2+x$$

$x>0$이므로

$f'(x)=(12x+2)\ln x+4x+1$ ⋯ ❶

$$\therefore f(x)=\int\{(12x+2)\ln x+4x+1\}dx$$
$$=\int(12x+2)\ln x\,dx+\int(4x+1)dx$$

$\int(12x+2)\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=12x+2$로 놓으면 $u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=6x^2+2x$이므로

$$\int(12x+2)\ln x\,dx$$
$$=\ln x\cdot(6x^2+2x)-\int\frac{1}{x}(6x^2+2x)dx$$
$$=(6x^2+2x)\ln x-\int(6x+2)dx$$
$$=(6x^2+2x)\ln x-3x^2-2x+C_1$$

또 $\int(4x+1)dx=2x^2+x+C_2$이므로

$$f(x)=(6x^2+2x)\ln x-x^2-x+C$$

$f(1)=4$이므로

$-2+C=4$ $\quad\therefore C=6$

$\therefore f(x)=(6x^2+2x)\ln x-x^2-x+6$ ⋯ ❷

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$F(2)=2f(2)-36\ln2$$
$$=2\cdot28\ln2-36\ln2$$
$$=20\ln2$$ ⋯ ❸

답 $20\ln2$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $F(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

09 $I_m=\int\sin^m x\,dx=\int\sin^{m-1}x\sin x\,dx$

$f(x)=\sin^{m-1}x$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=(m-1)\sin^{m-2}x\cos x$, $g(x)=-\cos x$

$\therefore I_m$

$$=\int\sin^{m-1}x\sin x\,dx$$
$$=-\cos x\sin^{m-1}x+(m-1)\int\sin^{m-2}x\cos^2x\,dx$$
$$=-\cos x\sin^{m-1}x+(m-1)\int\sin^{m-2}x(1-\sin^2x)dx$$
$$=-\cos x\sin^{m-1}x+(m-1)\int\sin^{m-2}x\,dx$$
$$-(m-1)\int\sin^m x\,dx$$
$$=-\cos x\sin^{m-1}x+(m-1)I_{m-2}-(m-1)I_m$$

$mI_m=-\cos x\sin^{m-1}x+(m-1)I_{m-2}$이므로

$$I_m=\frac{-\cos x\sin^{m-1}x}{m}+\frac{m-1}{m}I_{m-2}$$

$$\therefore k=\frac{m-1}{m}$$

답 ④

1등급 비밀노트

I_m과 I_{m-2}의 관계식을 구해야 하므로 $\int \sin^{m-2}x\,dx$를 유도할 수 있도록 $f(x)$, $g'(x)$를 정하는 것이 중요하다.

10 $f'(x)=\begin{cases}6x & (x>0)\\ \sin x & (x<0)\end{cases}$에서

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+C_1 & (x>0)\\ -\cos x+C_2 & (x<0)\end{cases}$$

$f(1)=6$이므로

$3+C_1=6 \qquad \therefore C_1=3$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0+}(3x^2+3)=\lim_{x\to 0-}(-\cos x+C_2)$$

$3=-1+C_2 \qquad \therefore C_2=4$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}3x^2+3 & (x\ge 0)\\ -\cos x+4 & (x\le 0)\end{cases}$$ ⋯ ❶

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{2}f(x)dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(-\cos x+4)dx+\int_0^2(3x^2+3)dx$$

$$=\Big[-\sin x+4x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\Big[x^3+3x\Big]_0^2$$

$$=-(1-2\pi)+14$$

$$=13+2\pi$$ ⋯ ❷

답 $13+2\pi$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ 정적분의 값을 구할 수 있다.	40 %

11 $f(x)=e^{|x|}+kx^2$에서

$f(-x)=e^{|-x|}+k(-x)^2=e^{|x|}+kx^2=f(x)$

이므로

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=2\int_0^1 f(x)dx$$

$$=2\int_0^1(e^x+kx^2)dx$$

$$=2\Big[e^x+\frac{k}{3}x^3\Big]_0^1$$

$$=2\Big(e+\frac{k}{3}-1\Big)$$

따라서 $2\Big(e+\frac{k}{3}-1\Big)=2e+1$이므로

$2e+\frac{2}{3}k-2=2e+1, \qquad \frac{2}{3}k=3$

$$\therefore k=\frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

첫째항이 4이고 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제9 항까지의 합

$x=t^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$1=2t\frac{dt}{dx}$

$\therefore \frac{dt}{dx}=\frac{1}{2t}$

$\int_a^b f(x)dx$

$=-\int_b^a f(x)dx$

$f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로

$\int_{-a}^{a}f(x)dx$

$=2\int_0^a f(x)dx$

$0\le x\le 1$에서

$e^{|x|}+kx^2=e^x+kx^2$

12 $(\{f(x)\}^2)'=2f(x)f'(x)$이므로 함수 $f(x)f'(x)$의 한 부정적분은 $\frac{1}{2}\{f(x)\}^2$이다.

$$\therefore \int_n^{n+1}f(x)f'(x)dx=\Big[\frac{1}{2}\{f(x)\}^2\Big]_n^{n+1}$$

$$=\frac{1}{2}[\{f(n+1)\}^2-\{f(n)\}^2]$$

즉 $\frac{1}{2}[\{f(n+1)\}^2-\{f(n)\}^2]=2^n$이므로

$\{f(n+1)\}^2-\{f(n)\}^2=2^{n+1}$

$\therefore \{f(n+1)\}^2=\{f(n)\}^2+2^{n+1}$

위의 식의 양변에 $n=1, 2, 3, \cdots, 9$를 차례대로 대입하면

$\{f(2)\}^2=\{f(1)\}^2+2^2=1+2^2$

$\{f(3)\}^2=\{f(2)\}^2+2^3=1+2^2+2^3$

$\{f(4)\}^2=\{f(3)\}^2+2^4=1+2^2+2^3+2^4$

$\vdots$

$\therefore \{f(10)\}^2=\{f(9)\}^2+2^{10}$

$=1+2^2+2^3+\cdots+2^{10}$

$=1+\frac{4\cdot(2^9-1)}{2-1}$

$=2045$

답 2045

13 $\sqrt{x}=t$로 놓으면 $x=t^2$이므로

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2t}$$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^1\sqrt{1-\sqrt{x}}\,dx=\int_0^1\sqrt{1-t}\cdot 2t\,dt$$

$\sqrt{1-t}=s$로 놓으면 $t=1-s^2$이므로

$$\frac{ds}{dt}=-\frac{1}{2s}$$

$t=0$일 때 $s=1$, $t=1$일 때 $s=0$이므로

$$\int_0^1\sqrt{1-t}\cdot 2t\,dt=2\int_1^0 s(1-s^2)\cdot(-2s)ds$$

$$=4\int_0^1(s^2-s^4)ds$$

$$=4\Big[\frac{1}{3}s^3-\frac{1}{5}s^5\Big]_0^1$$

$$=\frac{8}{15}$$

답 ③

다른 풀이 $1-\sqrt{x}=u$로 놓으면 $x=(1-u)^2$이므로

$$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{2(1-u)}$$

$x=0$일 때 $u=1$, $x=1$일 때 $u=0$이므로

$$\int_0^1\sqrt{1-\sqrt{x}}\,dx=\int_1^0\sqrt{u}\cdot\{-2(1-u)\}du$$

$$=2\int_0^1(\sqrt{u}-u\sqrt{u})du$$

$$=2\int_0^1(u^{\frac{1}{2}}-u^{\frac{3}{2}})du$$

$$=2\Big[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\Big]_0^1$$

$$=\frac{8}{15}$$

14 $f(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=e^{x^2}$

한편 $\int_0^a e^{x^2-f(x)}dx$에서 $f(x)=u$로 놓으면

$\frac{du}{dx}=f'(x)=e^{x^2}$

$x=0$일 때 $u=f(0)=0$, $x=a$일 때 $u=f(a)=\ln 3$이므로

$$\int_0^a e^{x^2-f(x)}dx=\int_0^a e^{x^2}\cdot e^{-f(x)}dx=\int_0^{\ln 3}e^{-u}du=\left[-e^{-u}\right]_0^{\ln 3}=-e^{-\ln 3}+1=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

15 $\sqrt{3+2x-x^2}=\sqrt{4-(x-1)^2}$이므로

$x-1=2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$

$x=1$일 때 $\theta=0$, $x=2$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\int_1^2\sqrt{3+2x-x^2}\,dx=\int_1^2\sqrt{4-(x-1)^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4\cos^2\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}4\cos^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2+2\cos 2\theta)d\theta=\left[2\theta+\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$이므로
$4\cos^2\theta=2(1+\cos 2\theta)=2+2\cos 2\theta$

따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$이므로

$a+b=\frac{5}{6}$

답 ⑤

16 $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}kx\cos x\,dx=k\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}x\cos x\,dx$

에서 $f(x)=x$, $g'(x)=\cos x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\sin x$

$$\therefore \int_{(k-1)\pi}^{k\pi}x\cos x\,dx=\left[x\sin x\right]_{(k-1)\pi}^{k\pi}-\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\sin x\,dx$$

k가 자연수이면 $\sin k\pi=0$이므로 $\left[x\sin x\right]_{(k-1)\pi}^{k\pi}=0$

$$=\left[\cos x\right]_{(k-1)\pi}^{k\pi}=\cos k\pi-\cos(k-1)\pi=\begin{cases}-2 & (k=1,\ 3,\ 5,\ \cdots)\\ 2 & (k=2,\ 4,\ 6,\ \cdots)\end{cases}$$ ··· ❶

$$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}k\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}x\cos x\,dx=1\cdot(-2)+2\cdot 2+3\cdot(-2)+4\cdot 2+\cdots+n\cdot(-1)^n\cdot 2=\begin{cases}-n-1 & (n\text{이 홀수})\\ n & (n\text{이 짝수})\end{cases}$$ ··· ❷

(i) n이 홀수일 때,
$S_n=2\{(-1+2)+(-3+4)+\cdots+(-n+2+n-1)-n\}=2(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\frac{n-1}{2}\text{개}}-n)=2\cdot\frac{-n-1}{2}=-n-1$

(ii) n이 짝수일 때,
$S_n=2\{(-1+2)+(-3+4)+\cdots+(-n+1+n)\}=2(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\frac{n}{2}\text{개}})=2\cdot\frac{n}{2}=n$

따라서 $S_n=-20$에서

$-n-1=-20$

$\therefore n=19$ ··· ❸

답 19

채점 기준	비율
❶ $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}x\cos x\,dx$를 구할 수 있다.	50 %
❷ S_n을 구할 수 있다.	30 %
❸ n의 값을 구할 수 있다.	20 %

17 $u(x)=x$, $v'(x)=f(x)f'(x)$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\frac{1}{2}\{f(x)\}^2$

$$\therefore \int_0^2 xf(x)f'(x)dx=\left[\frac{1}{2}x\{f(x)\}^2\right]_0^2-\int_0^2\frac{1}{2}\{f(x)\}^2dx=\{f(2)\}^2-\frac{1}{2}\int_0^2\{f(x)\}^2dx=3^2-\frac{1}{2}\cdot 2=8$$

답 8

18 조건 ㈎에서 $f(-x)=-f(x)$에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=0$

양변을 x에 대하여 미분하면

$-f'(-x)=-f'(x)$, 즉 $f'(-x)=f'(x)$

이므로 $f'(x)$는 우함수이다.

조건 ㈏에서

$$\int_{-2}^{2}f'(x)\{g(x)-h(x)\}dx=\int_{-2}^{2}f'(x)g(x)dx-\int_{-2}^{2}f'(x)h(x)dx$$

$f'(x)g(x)$는 우함수, $f'(x)h(x)$는 기함수이다.

$$=2\int_0^2 f'(x)g(x)dx$$

$f(0)=0$이므로 $f(0)g(0)=0$

$$=2\left[f(x)g(x)\right]_0^2-2\int_0^2 f(x)g'(x)dx=2f(2)g(2)-2\int_0^2 f(x)g'(x)dx=8-2\int_0^2 f(x)g'(x)dx$$

즉 $8-2\int_0^2 f(x)g'(x)dx=20$이므로

$$\int_0^2 f(x)g'(x)dx=-6$$

답 ③

1등급 비밀노트

① (우함수)×(우함수)=(우함수)
② (우함수)×(기함수)=(기함수)
③ (기함수)×(기함수)=(우함수)
④ (우함수)′=(기함수)
⑤ (기함수)′=(우함수)

19 $\int_a^{2x} f(t)dt=\frac{1}{10}x^2-\ln x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2f(2x)=\frac{1}{5}x-\frac{1}{x}$$

$$\therefore f(2x)=\frac{x}{10}-\frac{1}{2x}$$

$2x=t$로 놓으면 $\quad f(t)=\frac{t}{20}-\frac{1}{t}$

$$\therefore \int_1^e f(t)dt=\int_1^e\left(\frac{t}{20}-\frac{1}{t}\right)dt$$
$$=\left[\frac{1}{40}t^2-\ln|t|\right]_1^e$$
$$=\frac{e^2-41}{40}$$

답 ⑤

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면
$\int_a^{2x} f(t)dt$
$=F(2x)-F(a)$
이므로
$\frac{d}{dx}\left\{\int_a^{2x} f(t)dt\right\}$
$=F'(2x)\cdot 2$
$=2f(2x)$

20 $x-t=s$로 놓으면 $\quad \frac{ds}{dt}=-1$

$t=0$일 때 $s=x$, $t=x$일 때 $s=0$이므로

$$\int_0^x tf(x-t)dt=\int_x^0 (x-s)f(s)(-ds)$$
$$=\int_0^x (x-s)f(s)ds$$
$$=x\int_0^x f(s)ds-\int_0^x sf(s)ds$$

따라서 $x\int_0^x f(s)ds-\int_0^x sf(s)ds=4\cos 2x+ax-4$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(s)ds+xf(x)-xf(x)=-8\sin 2x+a$$

$$\therefore \int_0^x f(s)ds=-8\sin 2x+a \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $\quad a=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=-16\cos 2x$$

$$\therefore f(a)=f(0)=-16$$

답 -16

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 81쪽

01 $\ln x=t$로 놓으면 $\quad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

$$\therefore f(x)=\int\frac{1}{x}\sin(\ln x)\,dx=\int\sin t\,dt$$
$$=-\cos t+C=-\cos(\ln x)+C$$

$f(1)=-2$이므로

$$-1+C=-2 \qquad \therefore C=-1$$

$$\therefore f(x)=-\cos(\ln x)-1$$

$f(x)=0$에서 $\quad \cos(\ln x)=-1$

$\therefore \ln x=2k\pi+\pi=(2k+1)\pi$ (단, k는 정수)

이때 $0<x\le 1$이므로 $\quad \ln x\le 0$

따라서 $\ln x=-\pi,\ -3\pi,\ -5\pi,\ \cdots$이므로

$$a_1=e^{-\pi},\ a_2=e^{-3\pi},\ a_3=e^{-5\pi},\ \cdots$$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $e^{-\pi}$, 공비가 $e^{-2\pi}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{e^{-\pi}}{1-e^{-2\pi}}=\frac{e^{\pi}}{e^{2\pi}-1}$$

답 ②

02 조건 (가)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

$y=f(x)$는 우함수이다.

조건 (나)에서 $1-x=t$로 놓으면 $\quad \frac{dt}{dx}=-1$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=-1$이므로

$$\int_1^2 f(1-x)dx=\int_0^{-1} f(t)(-dt)=\int_{-1}^0 f(t)dt=3$$

$$\therefore \int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx=3$$

조건 (다)에서 $x-1=s$로 놓으면 $\quad \frac{ds}{dx}=1$

$x=0$일 때 $s=-1$, $x=3$일 때 $s=2$이므로

$$\int_0^3 xf(x-1)dx$$
$$=\int_{-1}^2 (s+1)f(s)ds$$
$$=\int_{-1}^2 sf(s)ds+\int_{-1}^2 f(s)ds$$
$$=\int_{-1}^1 sf(s)ds+\int_1^2 sf(s)ds+\int_{-1}^1 f(s)ds+\int_1^2 f(s)ds$$
$$=\int_1^2 sf(s)ds+\int_1^2 f(s)ds+2\int_0^1 f(s)ds$$
$$=\int_1^2 (s+1)f(s)ds+6$$

$y=x$는 기함수, $y=f(x)$는 우함수이므로 $xf(x)$는 기함수이다.
$\therefore \int_{-1}^1 xf(x)dx=0$

따라서 $\int_1^2 (x+1)f(x)dx+6=4$이므로

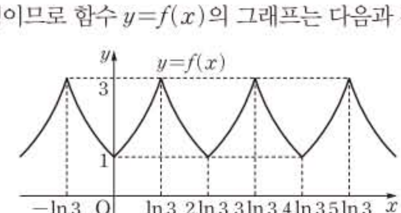
$$\int_1^2 (x+1)f(x)dx=-2$$

답 ②

03 모든 실수 x에 대하여 $f(\ln 3+x)=f(\ln 3-x)$가 성립하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\ln 3$에 대하여 대칭이다.

모든 실수 x에 대하여
$f(p+x)=f(p-x)$
➡ 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=p$에 대하여 대칭이다.

또 $f(-x)=f(x)$에서 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



Ⅲ 적분법

따라서 모든 실수 x에 대하여

$f(x+2\ln 3)=f(x)$

이므로

$$\int_0^{\ln 81} f(x)dx=\int_0^{4\ln 3} f(x)dx$$
$$=2\int_0^{2\ln 3} f(x)dx$$
$$=2\left\{\int_0^{\ln 3} f(x)dx+\int_{\ln 3}^{2\ln 3} f(x)dx\right\}$$
$$=4\int_0^{\ln 3} e^x dx$$
$$=4\Big[e^x\Big]_0^{\ln 3}$$
$$=4\cdot(3-1)=8$$

답 8

04 $f(n)=I_n+I_{n+2}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(1+\tan^2 x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\sec^2 x\,dx$$

$\tan x=t$로 놓으면

$$\frac{dt}{dx}=\sec^2 x$$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=1$이므로

$$f(n)=\int_0^1 t^n dt=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} f(n)f(n+2)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=\frac{5}{12}$$

따라서 $p=12$, $q=5$이므로

$p+q=17$

답 17

05 $\int_0^{\pi} g(t)dt=a$, $\int_{\pi}^{4\pi} f(t)dt=b$로 놓으면

$f(x)=\sin x+a$, $g(x)=\cos x+b$

이므로

$$a=\int_0^{\pi} g(t)dt=\int_0^{\pi}(\cos t+b)dt$$
$$=\Big[\sin t+bt\Big]_0^{\pi}$$
$$=b\pi \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$b=\int_{\pi}^{4\pi} f(t)dt=\int_{\pi}^{4\pi}(\sin t+a)dt$$
$$=\Big[-\cos t+at\Big]_{\pi}^{4\pi}$$
$$=-2+3a\pi \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=\frac{2\pi}{3\pi^2-1},\ b=\frac{2}{3\pi^2-1}$$

$$\therefore f(x)=\sin x+\frac{2\pi}{3\pi^2-1},\ g(x)=\cos x+\frac{2}{3\pi^2-1}$$

따라서 함수 $f(x)g(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}\int_{\pi}^{x} f(t)g(t)dt$$
$$=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}\Big[F(t)\Big]_{\pi}^{x}$$
$$=\lim_{x\to\pi}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}$$
$$=F'(\pi)=f(\pi)g(\pi)$$
$$=\frac{2\pi}{3\pi^2-1}\cdot\left(-1+\frac{2}{3\pi^2-1}\right)$$
$$=\frac{2\pi}{3\pi^2-1}\cdot\frac{-3\pi^2+3}{3\pi^2-1}$$
$$=\frac{-6\pi^3+6\pi}{(3\pi^2-1)^2}$$

따라서 $p=-6$, $q=6$이므로

$q-p=12$

답 12

일품 BOX

$f(\ln 3+x)=f(\ln 3-x)$에 x 대신 $x+\ln 3$을 대입하면

$f(x+2\ln 3)$
$=f(\ln 3-x-\ln 3)$
$=f(-x)$
$=f(x)$

$y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=\ln 3$에 대하여 대칭이므로

$\int_0^{\ln 3} f(x)dx$
$=\int_{\ln 3}^{2\ln 3} f(x)dx$

㉠을 ㉡에 대입하면

$b=-2+3b\pi^2$
$(3\pi^2-1)b=2$
$\therefore b=\frac{2}{3\pi^2-1}$

이를 ㉠에 대입하면

$a=\frac{2\pi}{3\pi^2-1}$

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

Ⅲ-2. 정적분의 활용

개념&핵심 기출

본책 82~84쪽

01 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$

$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$

$=\Big[\ln|1+x|\Big]_0^1=\ln 2$ 답 $\ln 2$

$\frac{k}{n}$를 x로, $\frac{1}{n}$을 dx로 나타낼 때,
$k=1$이고 $n\to\infty$이면 $x=0$
$k=n$이면 $x=1$

02 ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{2n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$

$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{2n}\right)^2\cdot\frac{1}{2n}$

$=2\int_1^2 x^2dx$

$1+\frac{k}{2n}$를 x로, $\frac{1}{2n}$을 dx로 나타낼 때,
$k=1$이고 $n\to\infty$이면 $x=1$
$k=2n$이면 $x=2$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{2k}{2n}\right)^2\cdot\frac{2}{2n}$

에서 $2n=m$으로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $m\to\infty$이므로

$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\left(1+\frac{2k}{m}\right)^2\cdot\frac{2}{m}=\int_0^2(1+x)^2dx$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{4n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{2n}\right)^2\cdot\frac{1}{2n}$

$=2\int_0^1\left(1+\frac{1}{2}x\right)^2dx$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

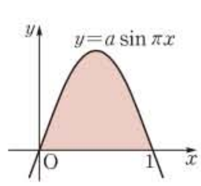
참고 ㄷ. $\frac{k}{4n}$를 x로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{4n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=4\int_0^{\frac{1}{2}}(1+x)^2dx$

$1+\frac{k}{4n}$를 x로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{4n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=4\int_1^{\frac{3}{2}}x^2dx$

03 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$\int_0^1 a\sin\pi x\,dx$

$=\left[-\frac{a}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1$

$=\frac{a}{\pi}-\left(-\frac{a}{\pi}\right)$

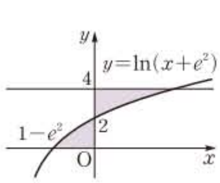
$=\frac{2a}{\pi}$

따라서 $\frac{2a}{\pi}=2$이므로 $a=\pi$ 답 π

04 $y=\ln(x+e^2)$에서

$x=e^y-e^2$

따라서 구하는 넓이는



$\int_0^4|e^y-e^2|dy$

$=\int_0^2(e^2-e^y)dy+\int_2^4(e^y-e^2)dy$

$=\Big[e^2y-e^y\Big]_0^2+\Big[e^y-e^2y\Big]_2^4$

$=(e^2+1)+(e^4-3e^2)$

$=e^4-2e^2+1$

$=(e^2-1)^2$ 답 ①

05 $x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$

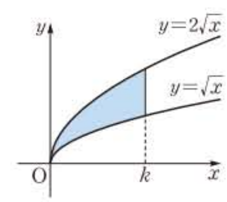
$x=1$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=4$이고 구간 $[1, 2]$에서 $xe^{x^2}>0$이므로 구하는 넓이는

$\int_1^2 xe^{x^2}dx=\int_1^4\frac{1}{2}e^tdt$

$=\left[\frac{1}{2}e^t\right]_1^4$

$=\frac{e^4-e}{2}$ 답 $\frac{e^4-e}{2}$

06 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$\int_0^k(2\sqrt{x}-\sqrt{x})dx$

$=\int_0^k\sqrt{x}\,dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^k$

$=\frac{2}{3}k^{\frac{3}{2}}$

따라서 $\frac{2}{3}k^{\frac{3}{2}}=18$이므로

$k^{\frac{3}{2}}=27$ $\therefore k=9$ 답 9

$k^{\frac{3}{2}}=27=3^3$에서
$(k^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}$
$\therefore k=3^2=9$

07 $\sin x=\sin 2x$에서 $\sin x=2\sin x\cos x$

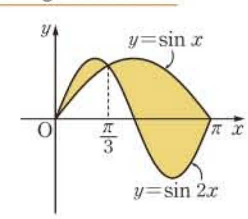
$\sin x(1-2\cos x)=0$

$\therefore \sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$0\le x\le\pi$이므로 $x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$

$\sin x=0$에서
$x=0$ 또는 $x=\pi$
$\cos x=\frac{1}{2}$에서
$x=\frac{\pi}{3}$

따라서 구하는 넓이는



$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)dx$

$+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$+\left[-\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$

$=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{5}{2}$ 답 ②

08 $A=\int_0^k(e^x-e^{-x})dx$

$=\Big[e^x+e^{-x}\Big]_0^k=e^k+e^{-k}-2$

$B=\int_0^k e^{-x}dx=\Big[-e^{-x}\Big]_0^k=-e^{-k}+1$

Ⅲ 적분법

$A=B$이므로 $e^k+e^{-k}-2=-e^{-k}+1$에서

$$e^k-3+2e^{-k}=0$$

양변에 e^k을 곱하면

$$e^{2k}-3e^k+2=0, \qquad (e^k-1)(e^k-2)=0$$

이때 $k>0$이므로 $\quad e^k>1$

따라서 $e^k=2$이므로 $\quad k=\ln 2$

답 $\ln 2$

09 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^{\pi} S(x)dx=\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx=\int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x+\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi}$$
$$=\frac{\pi}{2}$$

답 ②

10 점 P의 x좌표를 x라 하면 $\overline{\text{PH}}=2^{1-x}$이므로 $\overline{\text{PH}}$를 지름으로 하는 반원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{\text{PH}}=\frac{1}{2}\cdot 2^{1-x}=2^{-x}$$

이때 x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(2^{-x})^2=\frac{\pi}{2}\cdot 4^{-x}$$

이므로 입체도형의 부피는

$$\int_0^2 S(x)dx=\int_0^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot 4^{-x}\right)dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[-4^{-x}\cdot\frac{1}{\ln 4}\right]_0^2$$
$$=\frac{\pi}{2\ln 4}(-4^{-2}+1)$$
$$=\frac{15}{64\ln 2}\pi$$

따라서 $a=64$, $b=15$이므로 $\quad a-b=49$

답 49

11 시각 $t=a\ (a>0)$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^a 2\sin\frac{t}{2}\,dt=\left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^a$$
$$=-4\cos\frac{a}{2}+4$$

점 P가 원점을 지날 때 위치가 0이므로

$$-4\cos\frac{a}{2}+4=0, \qquad \cos\frac{a}{2}=1$$
$$\frac{a}{2}=2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\ \cdots\ (\because a>0)$$
$$\therefore a=4\pi,\ 8\pi,\ 12\pi,\ \cdots$$

따라서 출발 후 처음으로 원점을 지나는 시각은 4π이다.

답 4π

12 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도가 0이므로 $v(t)=0$에서

$$2t=3\sqrt{t}$$

양변을 제곱하면 $4t^2=9t$이므로

$$t=\frac{9}{4}\ (\because t>0)$$

따라서 구하는 거리는

$$\int_0^{\frac{9}{4}}|3\sqrt{t}-2t|dt=\int_0^{\frac{9}{4}}(3\sqrt{t}-2t)dt$$
$$=\left[2t\sqrt{t}-t^2\right]_0^{\frac{9}{4}}$$
$$=\frac{27}{16}$$

답 $\frac{27}{16}$

13 $\frac{dx}{dt}=\sqrt{3}\cos t-\sin t$, $\frac{dy}{dt}=-\sqrt{3}\sin t-\cos t$

이므로 $t=0$에서 $t=\frac{5}{2}\pi$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{5}{2}\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$
$$=\int_0^{\frac{5}{2}\pi}\sqrt{(\sqrt{3}\cos t-\sin t)^2+(-\sqrt{3}\sin t-\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{5}{2}\pi}2\,dt=\Big[2t\Big]_0^{\frac{5}{2}\pi}=5\pi$$

답 5π

14 $\frac{dx}{dt}=6t$, $\frac{dy}{dt}=3-3t^2$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^3\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^3\sqrt{(6t)^2+(3-3t^2)^2}\,dt$$
$$=\int_0^3\sqrt{9(t^2+1)^2}\,dt$$
$$=3\int_0^3(t^2+1)dt$$
$$=3\left[\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^3$$
$$=36$$

답 36

15 $\frac{dx}{dt}=e^t(\cos t-\sin t)$, $\frac{dy}{dt}=e^t(\sin t+\cos t)$

이므로 $0\le t\le a$에서 곡선의 길이는

$$\int_0^a\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^a e^t\sqrt{(\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^a\sqrt{2}e^t dt=\left[\sqrt{2}e^t\right]_0^a=\sqrt{2}(e^a-1)$$

따라서 $\sqrt{2}(e^a-1)=3\sqrt{2}$이므로 $\quad e^a=4$

$$\therefore a=\ln 4=2\ln 2$$

답 ④

16 $f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_{-2}^2\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx=\int_{-2}^2\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_{-2}^2\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$$
$$=2\int_0^2\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$$
$$=\left[e^x-e^{-x}\right]_0^2$$
$$=e^2-\frac{1}{e^2}$$

답 ③

$0<t<\frac{9}{4}$에서
$3\sqrt{t}>2t$

$\cos 2x=2\cos^2 x-1$이므로
$2\cos^2 x=1+\cos 2x$
$\therefore \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$은 우함수이다.

1등급을 위한 고난도 문제 본책 85~88쪽

01 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_1^2 f(x)dx$,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n} f\left(2+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n} f\left(2+\frac{2k}{2n}\right)\cdot\frac{2}{2n}$$
$$=\int_2^4 f(x)dx$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n} f\left(2+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx=\int_1^4 f(x)dx$$
$$=\int_1^4\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int_1^4\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4$$
$$=\frac{16}{3}+4-\left(\frac{2}{3}+2\right)=\frac{20}{3}$$

답 ③

> $2n=m$으로 놓으면
> $\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m} f\left(2+\frac{2k}{m}\right)\cdot\frac{2}{m}$
> $2+\frac{2k}{m}$를 x로, $\frac{2}{m}$를 dx로 나타낼 때,
> $k=1$이고 $m\to\infty$이면 $x=2$
> $k=m$이면 $x=4$

02 $y=\ln(x+1)$에서 $y'=\frac{1}{x+1}$이므로 점 P_k에서의 접선의 방정식은

$$y-\ln\left(\frac{k}{n}+1\right)=\frac{1}{\frac{k}{n}+1}\left(x-\frac{k}{n}\right)$$
$$\therefore Q_k\left(\frac{k}{n}-\left(\frac{k}{n}+1\right)\ln\left(\frac{k}{n}+1\right),\ 0\right)$$

> $y=0$을 대입했을 때 x의 값

따라서 $\overline{OQ_k}=\left(\frac{k}{n}+1\right)\ln\left(\frac{k}{n}+1\right)-\frac{k}{n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{OQ_k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{k}{n}+1\right)\ln\left(\frac{k}{n}+1\right)-\frac{k}{n}\right\}$$
$$=\int_1^2\{x\ln x-(x-1)\}dx$$
$$=\int_1^2 x\ln x\,dx-\int_1^2(x-1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{2}x\,dx-\int_1^2(x-1)dx$$
$$=2\ln 2-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^2-\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2$$
$$=2\ln 2-\frac{5}{4}$$

답 $2\ln 2-\frac{5}{4}$

> $\frac{k}{n}+1$을 x로, $\frac{1}{n}$을 dx로 나타낼 때,
> $k=1$이고 $n\to\infty$이면 $x=1$
> $k=n$이면 $x=2$

03 $\angle AOP_k=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n}$이므로

$$S_k=\frac{1}{2}\cdot 2^2\sin\frac{k\pi}{2n}=2\sin\frac{k\pi}{2n} \quad \cdots ❶$$

> 두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인각의 크기가 θ인 삼각형의 넓이
> ➡ $\frac{1}{2}ab\sin\theta$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}2\sin\frac{k\pi}{2n}$$
$$=4\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$
$$=4\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=4 \quad \cdots ❷$$

답 4

> $\frac{k\pi}{2n}$를 x로, $\frac{\pi}{2n}$를 dx로 나타낼 때,
> $k=1$이고 $n\to\infty$이면 $x=0$
> $k=n-1$이고 $n\to\infty$이면 $x=\frac{\pi}{2}$

채점 기준	비율
❶ S_k를 구할 수 있다.	40 %
❷ 극한값을 구할 수 있다.	60 %

04 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left|\cos\frac{2xk}{n}\right|\right)\cdot\frac{x}{n}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left|\cos\frac{2xk}{n}\right|\right)\cdot\frac{2x}{n}$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2x}\ln|\cos t|\,dt \quad \cdots ❶$$

> $\frac{2xk}{n}$를 t로, $\frac{2x}{n}$를 dt로 나타낼 때,
> $k=1$이고 $n\to\infty$이면 $t=0$
> $k=n$이면 $t=2x$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|\cdot(2x)'=\ln|\cos 2x|$$

이고, 다시 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f''(x)=\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}=-2\tan 2x \quad \cdots ❷$$

$\lim_{h\to 0}\frac{f'\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-a}{h}=b$에서 $h\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉 $\lim_{h\to 0}\left\{f'\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-a\right\}=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)-a=\ln\frac{1}{2}-a=0$이므로

$$a=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$$
$$\therefore b=\lim_{h\to 0}\frac{f'\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h}=f''\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=-2\tan\frac{\pi}{3}$$
$$=-2\sqrt{3} \quad \cdots ❸$$
$$\therefore ab=2\sqrt{3}\ln 2 \quad \cdots ❹$$

답 $2\sqrt{3}\ln 2$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 정적분으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $f'(x)$, $f''(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

05 $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$라 하면

$$f(-x)=\frac{2\cdot(-x)}{(-x)^2+1}=-\frac{2x}{x^2+1}=-f(x)$$

이고, $x>0$일 때 $f(x)>0$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|dx$$
$$=\int_{-\sqrt{2}}^{0}\left(-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx+\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{2x}{x^2+1}dx$$
$$=\int_0^{\sqrt{2}}\frac{2x}{x^2+1}dx+\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{2x}{x^2+1}dx$$
$$=\left[\ln|x^2+1|\right]_0^{\sqrt{2}}+\left[\ln|x^2+1|\right]_0^{2\sqrt{2}}$$
$$=\ln 3+\ln 9=3\ln 3$$

답 ④

Ⅲ 적분법

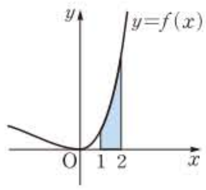
06 $f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$

이므로 $f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$k-1$	↗

즉 곡선 $y=f(x)$가 x축에 접하기 위해서는 $k-1=0$이어야 하므로

$k=1$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^2\{(x-1)e^x+1\}dx$$
$$=\int_1^2 xe^x dx+\int_1^2(1-e^x)dx$$
$$=\Big[xe^x\Big]_1^2-\int_1^2 e^x dx+\int_1^2(1-e^x)dx$$
$$=2e^2-e-\Big[e^x\Big]_1^2+\Big[x-e^x\Big]_1^2=e+1$$

답 ③

$u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면
$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$
이므로
$\int_1^2 xe^x dx$
$=\Big[xe^x\Big]_1^2-\int_1^2 e^x dx$

07 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$에서

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$
$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}$$
$$=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad 1-\ln x=0 \quad \therefore x=e$

$f''(x)=0$에서 $\quad -3+2\ln x=0$

$\therefore x=e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	$e\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	극대	↘	변곡점	↘

변곡점의 판정
함수 $f(x)$에서 $f''(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a, f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

따라서 $a=e$, $b=e\sqrt{e}$이고 $x>1$일 때 $f(x)>0$이므로 구하는 넓이는

$$\int_e^{e\sqrt{e}}\frac{\ln x}{x}dx$$

$\ln x=t$로 놓으면 $\quad \dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$

$x=e$일 때 $t=1$, $x=e\sqrt{e}$일 때 $t=\dfrac{3}{2}$이므로

$$\int_e^{e\sqrt{e}}\frac{\ln x}{x}dx=\int_1^{\frac{3}{2}}t\,dt=\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_1^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{9}{8}-\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$$

답 $\dfrac{5}{8}$

08 곡선 $y=(2x^2-a)\sin x\,(0\le x\le\pi)$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\int_0^\pi(2x^2-a)\sin x\,dx=0$$

이때 $f(x)=2x^2-a$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=4x$, $g(x)=-\cos x$

$$\therefore \int_0^\pi(2x^2-a)\sin x\,dx$$
$$=\Big[-(2x^2-a)\cos x\Big]_0^\pi+\int_0^\pi 4x\cos x\,dx$$
$$=(2\pi^2-a)-a+\Big[4x\sin x\Big]_0^\pi-\int_0^\pi 4\sin x\,dx$$
$$=2\pi^2-2a+\Big[4\cos x\Big]_0^\pi$$
$$=2\pi^2-2a-8$$

$u(x)=4x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면 $u'(x)=4$, $v(x)=\sin x$이므로
$\int_0^\pi 4x\cos x\,dx$
$=\Big[4x\sin x\Big]_0^\pi$
$\quad -\int_0^\pi 4\sin x\,dx$

따라서 $2\pi^2-2a-8=0$이므로

$a=\pi^2-4$

답 ④

09 곡선 $y=\dfrac{4}{x+1}$와 두 선분 AP, BP로 둘러싸인 도형의 넓이의 합이 최소가 되려면 삼각형 APB의 넓이가 최대가 되어야 한다.

곡선 $y=\dfrac{4}{x+1}$ 위의 점 P에서의 접선이 선분 AB와 평행할 때 삼각형 APB의 넓이가 최대가 되므로 곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 -1이어야 한다.

직선 AB의 기울기는
$\dfrac{1-4}{3-0}=-1$

$y=\dfrac{4}{x+1}$에서 $\quad y'=-\dfrac{4}{(x+1)^2}$

$-\dfrac{4}{(t+1)^2}=-1$에서 $\quad (t+1)^2=4$

$\therefore t=1\ (\because 0<t<3)$

따라서 점 P의 좌표는 $\quad (1, 2)$ ··· ❶

직선 AB의 방정식은

$y=-x+4$, 즉 $x+y-4=0$

이므로 점 P와 직선 $x+y-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1+2-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\overline{AB}=\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$이므로 삼각형 APB의 넓이의 최댓값은 $\quad \dfrac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3}{2}$ ··· ❷

따라서 곡선 $y=\dfrac{4}{x+1}$와 두 선분 AP, BP로 둘러싸인 도형의 넓이의 합의 최솟값은

$$\int_0^3\Big(-x+4-\frac{4}{x+1}\Big)dx-\frac{3}{2}$$
$$=\Big[-\frac{1}{2}x^2+4x-4\ln|x+1|\Big]_0^3-\frac{3}{2}$$
$$=-\frac{9}{2}+12-4\ln 4-\frac{3}{2}=6-8\ln 2$$ ··· ❸

곡선 $y=\dfrac{4}{x+1}$와 직선 AB로 둘러싸인 도형의 넓이

이므로 $\quad a=6$, $b=-8$

$\therefore a+b=-2$ ··· ❹

답 -2

채점 기준	비율
❶ △APB의 넓이가 최대일 때의 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ △APB의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %
❸ 곡선 $y=\dfrac{4}{x+1}$와 두 선분 AP, BP로 둘러싸인 도형의 넓이의 합의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

10 $f(x)=\sin\sqrt{3}x$에서 $\quad f'(x)=\sqrt{3}\cos\sqrt{3}x$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=f'(x)$의 교점의 x좌표는

$\sin\sqrt{3}x=\sqrt{3}\cos\sqrt{3}x$에서

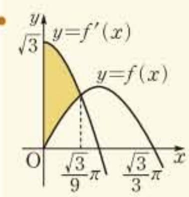
$$\frac{\sin\sqrt{3}x}{\cos\sqrt{3}x}=\sqrt{3}\ (\because \cos\sqrt{3}x\neq 0)$$

$$\therefore \tan\sqrt{3}x=\sqrt{3}$$

따라서 $\sqrt{3}x=\frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi, \frac{7}{3}\pi, \cdots$이므로

$$x=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi, \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi, \frac{7\sqrt{3}}{9}\pi, \cdots$$

따라서 $a=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$이므로 구하는 넓이는



$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{9}\pi}(\sqrt{3}\cos\sqrt{3}x-\sin\sqrt{3}x)\,dx$$

$$=\left[\sin\sqrt{3}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\sqrt{3}x\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{9}\pi}$$

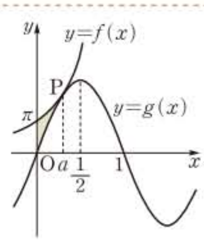
$$=\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{\pi}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

11 오른쪽 그림과 같이 점 P의 x좌표를 a라 하면



$$0<a<\frac{1}{2}$$

$f(x)=\pi e^{\pi x}$에서

$$f'(x)=\pi^2 e^{\pi x}$$

$g(x)=k\pi\sin\pi x$에서

$$g'(x)=k\pi^2\cos\pi x$$

$f(a)=g(a)$에서 $\quad \pi e^{\pi a}=k\pi\sin\pi a \quad \cdots$ ㉠

$f'(a)=g'(a)$에서 $\quad \pi^2 e^{\pi a}=k\pi^2\cos\pi a \quad \cdots$ ㉡

> 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$에서 공통인 접선을 가지면
> $f(t)=g(t)$
> $f'(t)=g'(t)$

㉠÷㉡을 하면 $\quad \frac{1}{\pi}=\frac{\sin\pi a}{\pi\cos\pi a}$

$$\tan\pi a=1, \quad \pi a=\frac{\pi}{4}$$

> $0<a<\frac{1}{2}$이므로
> $0<\pi a<\frac{\pi}{2}$
> 따라서 $\tan\pi a=1$에서
> $\pi a=\frac{\pi}{4}$

$$\therefore a=\frac{1}{4}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\pi e^{\frac{\pi}{4}}=k\pi\sin\frac{\pi}{4} \qquad \therefore k=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$$

따라서 $g(x)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\pi\sin\pi x$이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{1}{4}}(\pi e^{\pi x}-\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\pi\sin\pi x)\,dx$$

$$=\left[e^{\pi x}+\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\cos\pi x\right]_0^{\frac{1}{4}}$$

$$=(e^{\frac{\pi}{4}}+e^{\frac{\pi}{4}})-(1+\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}})$$

$$=(2-\sqrt{2})e^{\frac{\pi}{4}}-1$$

답 ①

12 $f(x)=e^{-x}$에서 $\quad f'(x)=-e^{-x}$

점 (x_n, e^{-x_n})에서의 접선의 기울기는

$$f'(x_n)=-e^{-x_n}$$

이므로 직선 l_n의 방정식은

$$y-e^{-x_n}=-e^{-x_n}(x-x_n) \quad \cdots ❶$$

$y=0$을 대입하면

$$-e^{-x_n}=-e^{-x_n}(x-x_n)$$

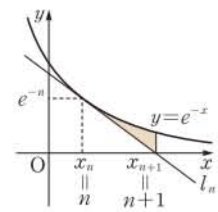
$$\therefore x=x_n+1$$

직선 l_n의 x절편이 x_{n+1}이므로

$$x_{n+1}=x_n+1,\ x_1=1$$

$$\therefore x_n=n\ (n=1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots ❷$$

오른쪽 그림에서



$$S_n=\int_n^{n+1}e^{-x}dx-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot e^{-n}$$

> 직선 l_n과 x축 및 직선 $x=n$으로 둘러싸인 도형의 넓이

$$=\left[-e^{-x}\right]_n^{n+1}-\frac{1}{2e^n}$$

$$=-\frac{1}{e^{n+1}}+\frac{1}{e^n}-\frac{1}{2e^n}$$

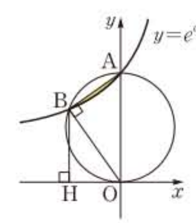
$$=\frac{1}{2e^n}\left(1-\frac{2}{e}\right) \quad \cdots ❸$$

$$\therefore \frac{S_{10}}{S_9}=\frac{e^9}{e^{10}}=\frac{1}{e} \quad \cdots ❹$$

답 $\frac{1}{e}$

채점 기준	비율
❶ 직선 l_n의 방정식을 구할 수 있다.	20%
❷ x_n을 구할 수 있다.	20%
❸ S_n을 구할 수 있다.	40%
❹ $\frac{S_{10}}{S_9}$의 값을 구할 수 있다.	20%

13 $\overline{AB}=\frac{1}{2}$, $\overline{OA}=1$이고



$\angle ABO=90°$이므로

> 반원에 대한 원주각의 크기는 90°이다.

$$\overline{OB}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

또 $\angle BOA=30°$이므로 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\angle BOH=60°$$

$$\therefore \overline{OH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 60°=\frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\overline{BH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 60°=\frac{3}{4}$$

따라서 $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}\right)$이고 점 B가 곡선 $y=e^{ax}$ 위에 있으므로

$$\frac{3}{4}=e^{-\frac{\sqrt{3}}{4}a}, \qquad -\frac{\sqrt{3}}{4}a=\ln\frac{3}{4}$$

$$\therefore a=-\frac{4}{\sqrt{3}}\ln\frac{3}{4}$$

위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}+1\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}-\int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^0 e^{ax}dx$$

> 사다리꼴 ABHO의 넓이

$$=\frac{7\sqrt{3}}{32}-\left[\frac{1}{a}e^{ax}\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^0$$

$$=\frac{7\sqrt{3}}{32}-\frac{1}{a}+\frac{1}{a}e^{-\frac{\sqrt{3}}{4}a}=\frac{7\sqrt{3}}{32}+\frac{1}{a}\left(e^{-\frac{\sqrt{3}}{4}a}-1\right)$$

$=\dfrac{7\sqrt{3}}{32}-\dfrac{1}{4a}$

$\dfrac{1}{a}=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{1}{\ln\frac{3}{4}}$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\log_{\frac{3}{4}}e$

$=\dfrac{7\sqrt{3}}{32}+\dfrac{\sqrt{3}}{16}\log_{\frac{3}{4}}e$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{32}(7+2\log_{\frac{3}{4}}e)$

따라서 $m=7$, $n=2$이므로

$mn=14$

답 14

14 $A+B=\displaystyle\int_{-2}^{2}(-x^2+4)dx$

$=2\displaystyle\int_{0}^{2}(-x^2+4)dx$

$=2\left[-\dfrac{1}{3}x^3+4x\right]_0^2$

$=\dfrac{32}{3}$

$A:B=3:1$이므로

$B=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{32}{3}=\dfrac{8}{3}$

두 곡선 $y=k\sqrt{x}$, $y=-x^2+4$의 교점의 x좌표가 α이므로

$\displaystyle\int_0^{\alpha}k\sqrt{x}\,dx+\int_{\alpha}^{2}(-x^2+4)dx=\dfrac{8}{3}$

$\left[\dfrac{2k}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\alpha}+\left[-\dfrac{1}{3}x^3+4x\right]_{\alpha}^{2}=\dfrac{8}{3}$

$\dfrac{2k}{3}\alpha^{\frac{3}{2}}+\left(-\dfrac{8}{3}+8\right)-\left(-\dfrac{1}{3}\alpha^3+4\alpha\right)=\dfrac{8}{3}$

$\therefore\ \dfrac{2k}{3}\alpha\sqrt{\alpha}+\dfrac{1}{3}\alpha^3-4\alpha+\dfrac{8}{3}=0$

이때 $k\sqrt{\alpha}=-\alpha^2+4$이므로

$x=\alpha$는 방정식 $k\sqrt{x}=-x^2+4$의 실근이다.

$\dfrac{2}{3}\alpha(-\alpha^2+4)+\dfrac{1}{3}\alpha^3-4\alpha+\dfrac{8}{3}=0$

$-\dfrac{1}{3}\alpha^3-\dfrac{4}{3}\alpha+\dfrac{8}{3}=0$

$\alpha^3+4\alpha-8=0$

$\therefore\ \alpha^3+4\alpha=8$

답 8

1등급 비밀노트

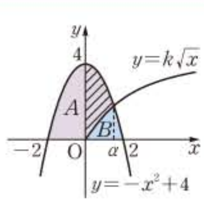
$A+B=4B$이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는

$\dfrac{A+B}{2}-B=2B-B=B$

따라서

$\displaystyle\int_0^{\alpha}\{(-x^2+4)-k\sqrt{x}\}dx=\dfrac{8}{3}$

임을 이용하여 풀 수도 있다.

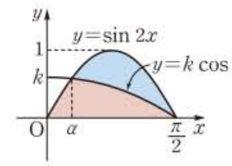


15 곡선 $y=\sin 2x\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx=\left[-\dfrac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=1$

오른쪽 그림에서 두 곡선 $y=\sin 2x$, $y=k\cos x$의 교점의 x좌표를 α라 하면



$\displaystyle\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-k\cos x)dx$

$=\dfrac{1}{2}$

$\left[-\dfrac{1}{2}\cos 2x-k\sin x\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{1}{2}$

$\left(\dfrac{1}{2}-k\right)-\left(-\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha-k\sin\alpha\right)=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha-k+k\sin\alpha=0$

$\dfrac{1}{2}(1-2\sin^2\alpha)-k+k\sin\alpha=0$

$\therefore\ -\sin^2\alpha+k\sin\alpha-k+\dfrac{1}{2}=0$ …… ㉠

이때 $\sin 2\alpha=k\cos\alpha$이므로

$2\sin\alpha\cos\alpha=k\cos\alpha$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha\neq 0$이므로

$2\sin\alpha=k$

$\therefore\ \sin\alpha=\dfrac{k}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$-\left(\dfrac{k}{2}\right)^2+k\cdot\dfrac{k}{2}-k+\dfrac{1}{2}=0$

$k^2-4k+2=0$

$\therefore\ k=2\pm\sqrt{2}$

이때 ㉡에서 $0<k<2$이므로

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$에서

$0<\sin\alpha<1$

즉 $0<\dfrac{k}{2}<1$이므로

$0<k<2$

$k=2-\sqrt{2}$

답 ④

16 $g(x)=\begin{cases}e^x-1 & (0\le x\le 1)\\ e^{-x+2}-1 & (1\le x\le 2)\\ e^{x-2}-1 & (2\le x\le 3)\end{cases}$

$f(x-2)=\begin{cases}e^{x-2}-1 & (2\le x\le 3)\\ e^{-x+4}-1 & (3\le x\le 4)\end{cases}$

이라 하면 $S_1+S_3=S_2$에서 $S_1+S_3-S_2=0$이므로

$\displaystyle\int_0^3\{g(x)-mx\}dx=0$

즉

$\displaystyle\int_0^1(e^x-1-mx)dx+\int_1^2(e^{-x+2}-1-mx)dx$

$\displaystyle+\int_2^3(e^{x-2}-1-mx)dx=0$

이므로

$\left[e^x-x-\dfrac{m}{2}x^2\right]_0^1+\left[-e^{-x+2}-x-\dfrac{m}{2}x^2\right]_1^2$

$+\left[e^{x-2}-x-\dfrac{m}{2}x^2\right]_2^3=0$

$3e-6-\dfrac{9}{2}m=0$

$\dfrac{9}{2}m=3e-6$

$\therefore\ m=\dfrac{2(e-2)}{3}$

답 ⑤

17 $\overline{PQ}=6t-t^2$, $\overline{QR}=t$이므로 $\angle PQR=30°$일 때 삼각형 PQR의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot(6t-t^2)\cdot t\cdot\sin 30°$$
$$=\frac{1}{4}(6t^2-t^3)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^6 S(t)dt=\int_0^6\frac{1}{4}(6t^2-t^3)dt$$
$$=\frac{1}{4}\left[2t^3-\frac{1}{4}t^4\right]_0^6$$
$$=\frac{1}{4}\cdot(432-324)=27$$

답 ②

18 단면인 이등변삼각형의 높이가 x이고 밑변의 길이는 $2\sqrt{10^2-x^2}$이므로 이등변삼각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{100-x^2}\cdot x$$
$$=x\sqrt{100-x^2} \quad \cdots ❶$$

따라서 입체도형의 부피는

$$2\int_0^{10}S(x)dx=2\int_0^{10}x\sqrt{100-x^2}dx$$

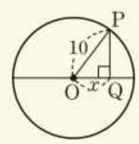
$100-x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-2x$

$x=0$일 때 $t=100$, $x=10$일 때 $t=0$이므로

$$2\int_0^{10}x\sqrt{100-x^2}\,dx=2\int_{100}^{0}\sqrt{t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt$$
$$=\int_0^{100}\sqrt{t}\,dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^{100}=\frac{2000}{3} \quad \cdots ❷$$

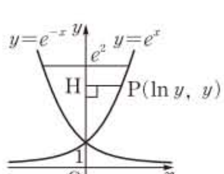
답 $\frac{2000}{3}$

채점 기준	비율
❶ $S(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ 입체도형의 부피를 구할 수 있다.	60 %



위의 그림에서
$\overline{PQ}=\sqrt{10^2-x^2}$

19 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=e^x$ 위의 점 $P(\ln y,\ y)$ $(1\le y\le e^2)$에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{PH}=\ln y$

이때 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{-x}$은 y축에 대하여 대칭이므로 y좌표가 y인 점을 지나고 y축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(y)$라 하면

$$S(y)=(2\overline{PH})^2=4(\ln y)^2$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_1^{e^2}S(y)dy$$
$$=\int_1^{e^2}4(\ln y)^2\,dy=4\int_1^{e^2}(\ln y)^2dy$$

$f(y)=(\ln y)^2$, $g'(y)=1$로 놓으면 $f'(y)=2\ln y\cdot\frac{1}{y}$, $g(y)=y$이므로

$$\int_1^{e^2}(\ln y)^2dy$$
$$=\left[y(\ln y)^2\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}2\ln y\cdot\frac{1}{y}\cdot y\,dy$$

$$=4\left[y(\ln y)^2\right]_1^{e^2}-4\int_1^{e^2}2\ln y\,dy$$
$$=16e^2-8\left(\left[y\ln y\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}1\,dy\right)$$
$$=16e^2-8\left(2e^2-\left[y\right]_1^{e^2}\right)$$
$$=16e^2-8(e^2+1)=8e^2-8$$

답 ④

20 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 단면인 정사각형의 넓이는

$$(\sqrt{x\cos x})^2=x\cos x$$

이므로 이 구간에서 입체도형의 부피는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx=\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$
$$=\frac{\pi}{2}-\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{2}-1$$

곡선 $y=\sqrt{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x}$는 곡선 $y=\sqrt{x\cos x}$를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 구하는 부피는

$y=\sqrt{x\cos x}$를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동하면

$$y=\sqrt{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$$
$$=\sqrt{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x}$$

$$2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\pi-2$$

답 $\pi-2$

21 물을 넣기 시작한 지 a초 후의 수면의 높이는

$$\int_0^a\frac{1}{\sqrt{1+t}}dt=\left[2\sqrt{1+t}\right]_0^a$$
$$=2\sqrt{1+a}-2 \quad \cdots ❶$$

$2\sqrt{1+a}-2=16$이므로

$\sqrt{1+a}=9$, $\quad 1+a=81$

$\therefore\ a=80$

따라서 수면의 높이가 16 cm가 되는 것은 물을 넣기 시작한 지 80초 후이다. $\cdots$ ❷

답 80초

채점 기준	비율
❶ 수면의 높이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ 답을 구할 수 있다.	40 %

22 자동차가 출발한 지 2초 후의 속도는

$v(2)=e$ (m/s)

정지하기 전 2초 동안의 가속도를 a m/s^{2}이라 하고 속도를 $v(t)=at+b$ (a, b는 상수)라 하면 $v(18)=e$, $v(20)=0$이므로

$18a+b=e$, $20a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$b=-20a$를 $18a+b=e$에 대입하면

$-2a=e$

$\therefore\ a=-\frac{e}{2}$

$\therefore\ b=-20\cdot\left(-\frac{e}{2}\right)$

$=10e$

$$a=-\frac{e}{2},\ b=10e$$

$$\therefore\ v(t)=-\frac{e}{2}t+10e$$

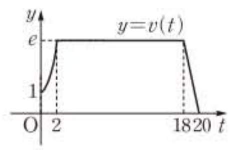
따라서 구하는 거리는

$$\int_0^2 e^{\frac{t}{2}}dt+\int_2^{18} e\,dt+\int_{18}^{20}\left(-\frac{e}{2}t+10e\right)dt$$
$$=\left[2e^{\frac{t}{2}}\right]_0^2+\left[et\right]_2^{18}+\left[-\frac{e}{4}t^2+10et\right]_{18}^{20}$$
$$=(2e-2)+16e+e$$
$$=19e-2(\mathrm{m})$$

답 ①

1등급 비밀노트

속도 $v(t)$를 미분한 $v'(t)$가 가속도이므로 가속도의 한 부정적분이 속도이다.
따라서 가속도가 일정하면, 즉 가속도가 상수이면 속도는 일차함수이므로 시각 t에 따른 속도 $v(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



23 $\sin t=1-\cos t$에서 $\sin t+\cos t=1$

$\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=1$ $\quad\therefore \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

> **일품 BOX**
> $\sin t+\cos t$
> $=\sqrt{2}\left(\sin t\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos t\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
> $=\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{\pi}{4}\le t+\frac{\pi}{4}\le\frac{9}{4}\pi$이므로

$t+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi$

따라서 $t=0,\ \frac{\pi}{2},\ 2\pi$이므로

$a=\frac{\pi}{2},\ b=2\pi$

즉 $t=\frac{\pi}{2}$에서 $t=2\pi$까지 두 점 P, Q가 움직인 거리는 각각

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}|\sin t|\,dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin t\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin t)dt$$
$$=\left[-\cos t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\left[\cos t\right]_{\pi}^{2\pi}$$
$$=1+2=3$$
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}|1-\cos t|\,dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}(1-\cos t)dt$$
$$=\left[t-\sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}$$
$$=\frac{3}{2}\pi+1$$

따라서 구하는 합은

$$3+\left(\frac{3}{2}\pi+1\right)=\frac{3}{2}\pi+4$$

답 ②

24 $\frac{dx}{dt}=2t\sin t+t^2\cos t,\ \frac{dy}{dt}=2t\cos t-t^2\sin t$이므로 구간 $[0,\ \sqrt{5}]$에서 곡선의 길이는

$$\int_0^{\sqrt{5}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\sqrt{5}}\sqrt{(2t\sin t+t^2\cos t)^2+(2t\cos t-t^2\sin t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\sqrt{5}}\sqrt{4t^2+t^4}\,dt$$
$$=\int_0^{\sqrt{5}}t\sqrt{4+t^2}\,dt$$

$4+t^2=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dt}=2t$

$t=0$일 때 $s=4$, $t=\sqrt{5}$일 때 $s=9$이므로

$$\int_0^{\sqrt{5}}t\sqrt{4+t^2}\,dt=\int_4^9\frac{1}{2}\sqrt{s}\,ds$$
$$=\left[\frac{1}{3}s^{\frac{3}{2}}\right]_4^9$$
$$=\frac{1}{3}\cdot(27-8)=\frac{19}{3}$$

답 ⑤

25 $y'=x-\frac{1}{4x}$이므로 곡선의 길이는

$$\int_1^a\sqrt{1+\left(x-\frac{1}{4x}\right)^2}\,dx=\int_1^a\sqrt{x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^2}}\,dx$$
$$=\int_1^a\sqrt{\left(x+\frac{1}{4x}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^a\left(x+\frac{1}{4x}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\ln|x|\right]_1^a$$
$$=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}\ln a-\frac{1}{2}$$

즉 $\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}\ln a-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}$이므로

$\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}\ln a=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{4}$

$\therefore a=e$

> $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\ln x$라 하면 $x>0$이므로
> $f'(x)=x+\frac{1}{4x}>0$
> 따라서 $f(x)$는 증가함수이므로 방정식 $f(x)=k$의 실근은 하나뿐이다.

답 ③

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 89쪽

01 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 x축 및 두 직선 $x=a_n$, $x=a_{n+1}$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{x}dx=\left[\ln|x|\right]_{a_n}^{a_{n+1}}$$
$$=\ln a_{n+1}-\ln a_n$$
$$=\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$에서 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\sqrt{e}$

$\therefore a_{n+1}=\sqrt{e}a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고, 공비가 $\sqrt{e}$인 등비수열이므로

$a_n=(\sqrt{e})^{n-1}$

이때

$a_na_{n+1}=(\sqrt{e})^{n-1}(\sqrt{e})^n=\frac{1}{\sqrt{e}}\cdot e^n$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{e}}{e^n}=\frac{\frac{\sqrt{e}}{e}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{\sqrt{e}}{e-1}$$

> 첫째항이 $\frac{\sqrt{e}}{e}$이고 공비가 $\frac{1}{e}$인 등비급수

답 ②

02 ㄱ. 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x+k$와 직선 $y=k$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^2\left(\sin\frac{\pi}{2}x+k-k\right)dx=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^2$$
$$=\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}=\frac{4}{\pi}$$

ㄴ. 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}$과 x축의 교점의 x좌표는

$\sin\frac{\pi}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$에서

$$\sin\frac{\pi}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0\le x\le 2$에서 $0\le\frac{\pi}{2}x\le\pi$이므로

$$\frac{\pi}{2}x=\frac{\pi}{3}\text{ 또는 }\frac{\pi}{2}x=\frac{2}{3}\pi$$
$$\therefore x=\frac{2}{3}\text{ 또는 }x=\frac{4}{3}$$
$$\therefore B=\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}}\left(\sin\frac{\pi}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}}$$
$$=\left(\frac{1}{\pi}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)-\left(-\frac{1}{\pi}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$
$$=\frac{2}{\pi}-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ㄷ. 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x+k$는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $2A=B$이면

$$\int_0^1\left(\sin\frac{\pi}{2}x+k\right)dx=0$$
$$\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x+kx\right]_0^1=0$$
$$k+\frac{2}{\pi}=0\qquad\therefore k=-\frac{2}{\pi}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

> $f(1+x)$
> $=\sin\frac{\pi}{2}(1+x)+k$
> $=\cos\frac{\pi}{2}x+k,$
> $f(1-x)$
> $=\sin\frac{\pi}{2}(1-x)+k$
> $=\cos\frac{\pi}{2}x+k$
> $\therefore f(1+x)=f(1-x)$

03 $f(x)=e^{-x}$에서 $\quad f'(x)=-e^{-x}$

점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 -1이므로 접선 l의 방정식은

$$y=-x+1$$

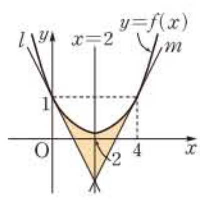
한편 등식 $f(x)=f(4-x)$에서 x 대신에 $2+x$를 대입하면 $\quad f(2+x)=f(2-x)$

이므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 점 $(0,\ 1)$, $(4,\ 1)$에서의 접선 l, m은 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

> 점 $(0,\ 1)$과 직선 $x=2$에 대하여 대칭인 점을 $(a,\ 1)$이라 하면
> $\frac{a}{2}=2\quad\therefore a=4$

따라서 구하는 넓이는



$$2\int_0^2\{e^{-x}-(-x+1)\}dx$$
$$=2\left[-e^{-x}+\frac{1}{2}x^2-x\right]_0^2$$
$$=2\left(-\frac{1}{e^2}+1\right)$$
$$=2-\frac{2}{e^2}$$

답 ④

04 곡선 $x=f(\theta)$, $y=g(\theta)$ 위의 점 $(f(\theta),\ g(\theta))$에서의 접선의 방정식은

$$y=-\tan\theta\cdot x+\sin\theta$$

점 $(f(\theta),\ g(\theta))$가 이 직선 위에 있으므로

$$g(\theta)=-\tan\theta\cdot f(\theta)+\sin\theta$$

위의 식의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$$g'(\theta)=-\sec^2\theta\cdot f(\theta)-\tan\theta\cdot f'(\theta)+\cos\theta$$

$\frac{g'(\theta)}{f'(\theta)}=-\tan\theta$에서 $g'(\theta)=-\tan\theta\cdot f'(\theta)$이므로

> $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{g'(\theta)}{f'(\theta)}$

$$\sec^2\theta\cdot f(\theta)=\cos\theta$$
$$\therefore f(\theta)=\cos^3\theta$$

따라서 $g(\theta)=-\tan\theta\cdot\cos^3\theta+\sin\theta=\sin^3\theta$이므로 구하는 곡선의 길이는

> $-\tan\theta\cdot\cos^3\theta+\sin\theta$
> $=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos^3\theta+\sin\theta$
> $=\sin\theta(1-\cos^2\theta)$
> $=\sin\theta\cdot\sin^2\theta$
> $=\sin^3\theta$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\{f'(\theta)\}^2+\{g'(\theta)\}^2}\,d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{(-3\cos^2\theta\sin\theta)^2+(3\sin^2\theta\cos\theta)^2}\,d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}3\sqrt{\cos^4\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}3\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\,d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}3\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$
$$=\frac{3}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin 2\theta\,d\theta$$
$$=\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$$

답 ⑤

일품 BOX

만점 도전을 위한 실전 마무리 문제

본책 90~93쪽

01 전략 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 $f'(1)$의 값을 구한다.

풀이 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=4$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $\quad f(1)=0$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$f'(1)=4$

따라서 $k\cdot2^0=4$이므로 $\quad k=4$

$f'(x)=4\cdot2^{x-1}=2^{x+1}$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int 2^{x+1}dx$

$=\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+C$

$f(1)=0$이므로 $\quad \frac{4}{\ln 2}+C=0$

$\therefore C=-\frac{4}{\ln 2}$

따라서 $f(x)=\frac{2^{x+1}}{\ln 2}-\frac{4}{\ln 2}$이므로

$f(2)=\frac{4}{\ln 2}$ 답 ⑤

02 전략 $f(x)+1=t$로 치환하여 치환적분법을 이용한다.

풀이 $f(x)+1=t$로 놓으면 $\quad \frac{dt}{dx}=f'(x)$

$x=1$일 때 $t=f(1)+1=1$, $x=2$일 때 $t=f(2)+1=4$이므로

$\int_1^2 g'(f(x)+1)\cdot f'(x)\,dx=\int_1^4 g'(t)dt$

$=g(4)-g(1)$

한편 조건 (나)에 의하여

$\frac{g(4)-g(1)}{4-1}=2$

이므로 $\quad g(4)-g(1)=6$

$\therefore \int_1^2 g'(f(x)+1)\cdot f'(x)\,dx=g(4)-g(1)$

$=6$

답 ④

03 전략 $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{x^3+3x}{x^2+2}dx$

$=\int\frac{x(x^2+2)+x}{x^2+2}dx$

$=\int\left(x+\frac{x}{x^2+2}\right)dx$

$=\int x\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+2}dx$

$=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+C$

$f(0)=\frac{1}{2}\ln 2$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\ln(x^2+2)$이므로

$f(\sqrt{e-2})=\frac{1}{2}(e-2)+\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}(e-1)$

답 ②

04 전략 몫의 미분법과 로그함수의 미분법을 이용하여 $f(x)$와 $f'(x)$ 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$,

$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{d}{dx}\{2x-\ln g(x)\}=\frac{f(x)}{g(x)}\left\{2-\frac{g'(x)}{g(x)}\right\}$

$=\frac{2f(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

$g(x)\neq0$이므로

$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=2f(x)g(x)-f(x)g'(x)$

$f'(x)g(x)=2f(x)g(x)$, $\quad f'(x)=2f(x)$

$\therefore \frac{f'(x)}{f(x)}=2$ ($\because f(x)\neq0$)

$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int 2dx$이므로 $\quad \ln f(x)=2x+C$

$\therefore f(x)=e^{2x+C}$

$f(0)=1$이므로 $\quad e^C=1 \quad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=e^{2x}$이므로

$f(\ln\sqrt{5})=e^{2\ln\sqrt{5}}=e^{\ln 5}=5$ 답 ②

05 전략 부분적분법을 이용하여 $f'(x)$의 부정적분을 구한 후 $f(x)$의 최댓값을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 $f'(x)=0$에서 $\quad x\cos x=0$

$x=0$ 또는 $\cos x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0\leq x\leq\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $0\leq x\leq\pi$에서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$일 때 극대이면서 최대이므로 $\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$

한편 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int x\cos x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\sin x$

$\therefore f(x)=x\sin x-\int\sin x\,dx$

$=x\sin x+\cos x+C$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{\pi}{2}+C=\frac{\pi}{2} \quad \therefore C=0$

함수 $f(x)$가 미분가능하고 $f(x)\neq0$일 때 $y=\ln|f(x)|$이면 $y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$

지수함수의 부정적분

$\int e^x\,dx=e^x+C$

$\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$

(단, $a>0$, $a\neq1$)

평균변화율

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\int\frac{2x}{x^2+2}dx$에서 $(x^2+2)'=2x$이므로

$\int\frac{2x}{x^2+2}dx$

$=\ln(x^2+2)+C$

($\because x^2+2>0$)

따라서 $f(x)=x\sin x+\cos x$이므로 방정식

$f(x)=\cos x+\frac{x}{2}$에서

$$x\sin x+\cos x=\cos x+\frac{x}{2}$$

$$x\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)=0, \qquad x=0 \text{ 또는 } \sin x=\frac{1}{2}$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x=\frac{5}{6}\pi\ (\because 0\le x\le 2\pi)$$

따라서 서로 다른 실근의 개수는 3이다. 답 ③

06 전략 치환적분법을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\quad \frac{dt}{dx}=\cos x$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{6}$일 때 $t=\frac{1}{2}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-t^2}dt$$

$$=-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(t-1)(t+1)}dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{2}\Big[\ln|t-1|-\ln|t+1|\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$$

$$=\ln\sqrt{3}$$

답 ②

07 전략 치환적분법을 이용하여 주어진 정적분을 간단히 한 후 부분적분법을 이용한다.

풀이 $f(x)=t$로 놓으면 $\quad \frac{dt}{dx}=f'(x)$

$x=0$일 때 $t=\tan 0=0$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=\tan\frac{\pi}{4}=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)f'(x)e^{f(x)}dx=\int_0^1 te^t\,dt$$

이때 $u(t)=t$, $v'(t)=e^t$으로 놓으면 $u'(t)=1$, $v(t)=e^t$이므로

$$\int_0^1 te^t\,dt=\Big[te^t\Big]_0^1-\int_0^1 e^t\,dt$$

$$=e-\Big[e^t\Big]_0^1=1$$

답 ③

08 전략 부분적분법을 이용하여 정적분을 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\displaystyle\int_1^2 e^x\ln x\,dx$에서 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int_1^2 e^x\ln x\,dx=\Big[\ln x\cdot e^x\Big]_1^2-\int_1^2\frac{e^x}{x}dx$$

$$=e^2\ln 2-\int_1^2\frac{e^x}{x}dx$$

$\displaystyle\int_1^2 e^x\ln x\,dx+\int_1^2\frac{e^x}{x}dx=e^2\ln 2$이므로

$$\int_1^2\left(e^x\ln x+\frac{e^x+a}{x}\right)dx$$

$$=\int_1^2 e^x\ln x\,dx+\int_1^2\frac{e^x}{x}dx+\int_1^2\frac{a}{x}dx$$

$$=e^2\ln 2+a\Big[\ln|x|\Big]_1^2$$

$$=e^2\ln 2+a\ln 2$$

따라서 $e^2\ln 2+a\ln 2=0$이므로 $\quad a=-e^2$ 답 ②

09 전략 부분적분법을 이용하여 P, Q, R 사이의 관계를 식으로 나타낸다.

풀이 $\displaystyle\int_0^{\pi}xe^x\,dx$에서 $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$

$$\therefore Q=\int_0^{\pi}xe^x\,dx=\Big[xe^x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\,dx$$

$$=\pi e^{\pi}-P$$

$$\therefore P+Q=\pi e^{\pi} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\displaystyle\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx$에서 $h(x)=\sin x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$h'(x)=\cos x$, $g(x)=e^x$

$$\therefore R=\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx$$

$$=\Big[e^x\sin x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx$$

$$=-\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx$$

$\displaystyle\int_0^{\pi}xe^x\sin x\,dx$에서 $u(x)=x\sin x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=\sin x+x\cos x$, $g(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^{\pi}xe^x\sin x\,dx$$

$$=\Big[xe^x\sin x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x(\sin x+x\cos x)dx$$

$$\Big[xe^x\sin x\Big]_0^{\pi}=\pi e^{\pi}\sin\pi-0=0$$

$$=-\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx-\int_0^{\pi}xe^x\cos x\,dx$$

$$=-R-\int_0^{\pi}xe^x\cos x\,dx \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$\displaystyle\int_0^{\pi}xe^x\cos x\,dx$에서 $v(x)=x\cos x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$v'(x)=\cos x-x\sin x$, $g(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^{\pi}xe^x\cos x\,dx$$

$$=\Big[xe^x\cos x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(e^x\cos x-xe^x\sin x)dx$$

$$=-\pi e^{\pi}+R+\int_0^{\pi}xe^x\sin x\,dx \qquad \cdots\cdots ㉢$$

Ⅲ 적분법

ⓒ을 ⓛ에 대입하여 정리하면

$$2\int_0^{\pi} xe^x \sin x\,dx = -2R + \pi e^{\pi}$$

$$= P + Q - 2R \ (\because ㉠)$$

$$\therefore \int_0^{\pi} xe^x \sin x\,dx = \frac{P+Q-2R}{2}$$

답 ②

1등급 비밀노트

P, Q, R의 값을 각각 구하여 $\int_0^{\pi} xe^x \sin x\,dx$의 값과 비교할 수도 있지만 각각의 값을 모두 구하는 것은 계산이 복잡하다.
풀이와 같이 식을 계산하는 과정에서 P, Q, R에 해당하는 식이 나오면 계산하지 않고 P, Q, R를 이용하여 나타내는 것이 편리하다.

10 전략 치환적분법을 이용하여 주어진 정적분을 간단히 한다.

풀이 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=f(0)-2 \qquad \therefore f(0)=2$

또 주어진 등식의 좌변에서 $x-t=s$로 놓으면

$$\frac{ds}{dt}=-1$$

$t=-x$일 때 $s=2x$, $t=x$일 때 $s=0$이므로

$$\int_{-x}^{x}(x+t)f'(x-t)dt$$
$$=\int_{2x}^{0}(2x-s)f'(s)(-ds)$$
$$=\int_0^{2x}(2x-s)f'(s)ds$$
$$=2x\int_0^{2x}f'(s)ds-\int_0^{2x}sf'(s)ds$$

즉 $2x\int_0^{2x}f'(s)ds-\int_0^{2x}sf'(s)ds=f(2x)-2x-2$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2\int_0^{2x}f'(s)ds+4xf'(2x)-4xf'(2x)$$
$$=2f'(2x)-2$$
$$\therefore \int_0^{2x}f'(s)ds=f'(2x)-1$$

양변에 $x=0$을 대입하면

$0=f'(0)-1 \qquad \therefore f'(0)=1$

$\therefore f(0)+f'(0)=3$

답 ③

11 전략 정적분으로 정의된 함수의 극한을 이용한다.

풀이 $f(t)=e^{2t}-\cos \pi t$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}(e^{2t}-\cos \pi t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}f(t)dt=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\Big[F(t)\Big]_1^{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)$$
$$=2F'(1)=2f(1)$$
$$=2(e^2+1)$$

답 ①

일품 BOX

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$$

어떤 구간에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)>0$ ➡ $f(x)$는 이 구간에서 증가

$e^{1-x}-1=0$에서
$e^{1-x}=1, \quad 1-x=0$
$\therefore x=1$

$y=e^{1-x}=e\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^x$이므로 감소함수이다.
$x=0$일 때 $y=e$,
$x=1$일 때 $y=1$
이므로 $0\le x\le 1$에서
$1\le y\le e$
$\therefore xe^{1-x}\ge x$

12 전략 주어진 식을 $\sum$를 이용하여 나타낸 후 급수와 정적분의 관계를 이용한다.

풀이 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4}+\sqrt{8}+\sqrt{12}+\cdots+\sqrt{4n}}{n\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\sqrt{\frac{3}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\sqrt{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=2\int_0^1\sqrt{x}\,dx=2\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$=\frac{4}{3}$$

답 ③

13 전략 정적분의 성질을 이용하여 식을 변형한 후 등식의 양변을 미분하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=x+1+\int_0^x(t-x)\cos t\,dt$의 양변에 $x=0$을 대입하면 $\quad f(0)=1$

$f(x)=x+1+\int_0^x(t-x)\cos t\,dt$에서

$$f(x)=x+1+\int_0^x t\cos t\,dt-x\int_0^x\cos t\,dt$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=1+x\cos x-\int_0^x\cos t\,dt-x\cos x$$
$$=1-\Big[\sin t\Big]_0^x=1-\sin x$$
$$\therefore f(x)=\int(1-\sin x)dx$$
$$=x+\cos x+C$$

이때 $f(0)=1$이므로 $\quad C=0$

$\therefore f(x)=x+\cos x$

그런데 $f'(x)=1-\sin x\ge 0$이고 $f(0)=1$이므로

$f(x)\ge 1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\cos x)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi^2}{8}+1$$

답 ③

14 전략 교점의 x좌표를 구한 후 두 곡선의 위치를 파악한다.

풀이 곡선 $y=xe^{1-x}$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$xe^{1-x}=x$에서 $\quad x(e^{1-x}-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

$0\le x\le 1$일 때, $xe^{1-x}\ge x$이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^1(xe^{1-x}-x)\,dx=\int_0^1 xe^{1-x}dx-\int_0^1 x\,dx$$

이때 $f(x)=x$, $g'(x)=e^{1-x}$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-e^{1-x}$

$$\therefore \int_0^1 xe^{1-x}dx-\int_0^1 x\,dx$$
$$=\Big[-xe^{1-x}\Big]_0^1+\int_0^1 e^{1-x}dx-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$=-1+\left[-e^{1-x}\right]_0^1-\frac{1}{2}$

$=-1-1+e-\frac{1}{2}=e-\frac{5}{2}$ 답 ①

15 전략 접선의 방정식을 구한 후 접선과 곡선의 위치 관계를 파악한다.

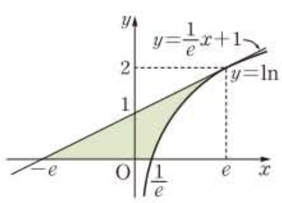
풀이 $f(x)=\ln x+1$이라 하면 $f'(x)=\frac{1}{x}$

점 $(e, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(e)=\frac{1}{e}$이므로 접선 l의 방정식은

$y-2=\frac{1}{e}(x-e)$, 즉 $y=\frac{1}{e}x+1$

곡선 $y=\ln x+1$과 접선 l이 x축과 만나는 점의 좌표는 각각 $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$, $(-e, 0)$이므로 곡선 $y=\ln x+1$과 직선 $y=\frac{1}{e}x+1$은 다음 그림과 같다.

$0=\ln x+1$에서
$\ln x=-1$
$\therefore x=e^{-1}=\frac{1}{e}$



따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 2e\cdot 2-\int_{\frac{1}{e}}^{e}(\ln x+1)dx=2e-\left[x\ln x-x+x\right]_{\frac{1}{e}}^{e}$

$=2e-\left[x\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{e}$

$=2e-\left(e+\frac{1}{e}\right)$

$=e-\frac{1}{e}$ 답 ③

1등급 비밀노트

$\int \ln x dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$

$\therefore \int \ln x dx=x\ln x-\int 1dx=x\ln x-x+C$

따라서 $\int_a^b \ln x dx=\left[x\ln x-x\right]_a^b$임을 기억해 두면 풀이 시간을 단축할 수 있다.

16 전략 함수 $y=g(x)$를 직접 구한 후 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 좌표를 구한다.

풀이 $y=e^{1-x}$으로 놓으면

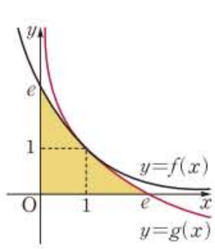
$1-x=\ln y$

$\therefore x=1-\ln y$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=1-\ln x$

$\therefore g(x)=1-\ln x$



$f(1)=1$이므로 $g(1)=1$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 위의 그림과 같으므로 구하는 넓이는

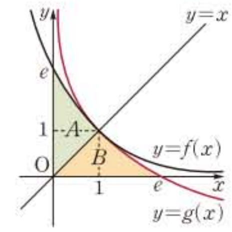
$\int_0^1 e^{1-x}dx+\int_1^e(1-\ln x)dx$

$=\left[-e^{1-x}\right]_0^1+\left[x-x\ln x+x\right]_1^e$

$=(-1+e)+(e-2)$

$=2e-3$ 답 ③

다른 풀이 오른쪽 그림에서 $A=B$이므로 구하는 넓이는



$2\int_0^1(e^{1-x}-x)dx$

$=2\left[-e^{1-x}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=2\left(e-\frac{3}{2}\right)=2e-3$

17 전략 $\triangle AP_bP_c \backsim \triangle ABC$임을 이용하여 $\overline{P_bP_c}$의 길이를 $\overline{AP}$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\overline{AP}=x$라 하면 $\triangle AP_bP_c \backsim \triangle ABC$이므로

$\overline{AP}:\overline{P_bP_c}=\overline{AM}:\overline{BC}$

$x:\overline{P_bP_c}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4\right):4$

$\therefore \overline{P_bP_c}=\frac{2}{\sqrt{3}}x$

$\overline{P_bP_c}$를 지름으로 하는 반원의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{\pi}{6}x^2$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$\int_0^{2\sqrt{3}}S(x)dx=\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}x^2dx$

$=\frac{\pi}{6}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$ 답 ③

18 전략 $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$를 각각 구한다.

풀이 $\frac{dx}{dt}=-2\sin t$, $\frac{dy}{dt}=-2\cos t$이므로 $t=0$에서 $t=\pi$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$

$=\int_0^{\pi}\sqrt{(-2\sin t)^2+(-2\cos t)^2}dt$

$=\int_0^{\pi}2dt=\left[2t\right]_0^{\pi}=2\pi$ 답 ②

19 전략 곱의 미분법을 이용하여 함수 $f(x)g(x)$의 도함수를 구한다.

풀이 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=2\tan^2 x-1$에서

$\{f(x)g(x)\}'=2\tan^2 x-1$

$\therefore f(x)g(x)=\int(2\tan^2 x-1)dx$

$2\tan^2 x-1$
$=2(\sec^2 x-1)-1$
$=2\sec^2 x-3$

$=\int(2\sec^2 x-3)dx$

$=2\tan x-3x+C$

$f(0)g(0)=0$이므로 $C=0$

Ⅲ 적분법

따라서 $f(x)g(x)=2\tan x-3x$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)g\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\tan\frac{\pi}{4}-3\cdot\frac{\pi}{4}=2-\frac{3}{4}\pi$$

답 $2-\frac{3}{4}\pi$

20

전략 $\cos x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int f'(x)dx$

$$=\int \sin^3 x\cos^4 x\,dx$$

$$=\int (1-\cos^2 x)\cos^4 x\sin x\,dx$$

$\cos x=t$로 놓으면

$$\frac{dt}{dx}=-\sin x$$

$$\therefore f(x)=\int (1-t^2)t^4(-dt)$$

$$=\int (t^6-t^4)dt$$

$$=\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{5}t^5+C$$

$$=\frac{1}{7}\cos^7 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C \quad \cdots ❶$$

$f(\pi)=1$이므로

$$-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}+C=1 \qquad \therefore C=\frac{33}{35}$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{7}\cos^7 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{33}{35}$이므로 ⋯ ❷

$$f(0)=\frac{1}{7}-\frac{1}{5}+\frac{33}{35}=\frac{31}{35}$$

즉 곡선 $y=f(x)$의 y절편은 $\frac{31}{35}$이다. ⋯ ❸

답 $\frac{31}{35}$

채점 기준	비율
❶ 접선의 기울기를 이용하여 $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	60 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❸ y절편을 구할 수 있다.	20 %

1등급 비밀노트

$\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$$f(x)=\begin{cases}\int t^3(1-t^2)\sqrt{1-t^2}\,dt & (\cos x\ge 0)\\ \int t^3(t^2-1)\sqrt{1-t^2}\,dt & (\cos x<0)\end{cases}$$

따라서 $\sin x=t$로 치환하였을 때 $f(x)$의 식이 간단하지 않으므로 $\cos x=t$로 치환하여 풀어야 한다.

21

전략 x의 값의 범위를 나누어 $f(x)$를 구한 후 치환적분법을 이용한다.

풀이 $f(x)=\begin{cases}-x+3 & (0\le x\le 2)\\ 2x-3 & (2\le x\le 3)\\ -3x+12 & (3\le x\le 4)\end{cases}$

$2x+1=t$로 놓으면 $\quad \frac{dt}{dx}=2$

일품 BOX

$(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$이므로 $\sin^n x\cos^m x$ 꼴의 함수를 적분할 때는 $\sin x$ 또는 $\cos x$를 한 문자로 치환하는 것이 편리하다.

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=3$이므로

$$\int_0^1 f(2x+1)dx$$

$$=\int_1^3 f(t)\cdot\frac{1}{2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_1^2 f(t)dt+\int_2^3 f(t)dt\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_1^2(-t+3)dt+\int_2^3(2t-3)dt\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left[-\frac{1}{2}t^2+3t\right]_1^2+\left[t^2-3t\right]_2^3\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}+2\right)=\frac{7}{4}$$

답 $\frac{7}{4}$

22

전략 $\int_1^e f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓고 주어진 식에 대입한다.

풀이 $\int_1^e f(t)dt=k$ (k는 상수) ⋯⋯ ㉠

로 놓으면 $\quad f(x)=1+\ln x-\frac{k}{x}$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_1^e\left(1+\ln t-\frac{k}{t}\right)dt=k$$

$$\Big[t+t\ln t-t-k\ln|t|\Big]_1^e=k$$

$$\Big[(t-k)\ln t\Big]_1^e=k, \qquad e-k=k$$

$$\therefore k=\frac{e}{2}$$

따라서 $f(x)=1+\ln x-\frac{e}{2x}$이므로

$$f(e)=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

23

전략 먼저 곡선 $y=a^x+b$가 지나는 두 점의 좌표를 이용하여 a, b의 값을 구한다.

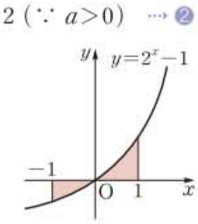
풀이 곡선 $y=a^x+b$가 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$$0=1+b \qquad \therefore b=-1 \quad \cdots ❶$$

곡선 $y=a^x-1$이 점 $(2,\ 3)$을 지나므로

$$3=a^2-1, \qquad a^2=4 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0) \quad \cdots ❷$$

따라서 곡선 $y=2^x-1$과 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\int_{-1}^1|2^x-1|\,dx$$

$$=\int_{-1}^0(1-2^x)dx+\int_0^1(2^x-1)dx$$

$$=\left[x-\frac{2^x}{\ln 2}\right]_{-1}^0+\left[\frac{2^x}{\ln 2}-x\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{\ln 2}-\left(-1-\frac{1}{2\ln 2}\right)+\left(\frac{2}{\ln 2}-1\right)-\frac{1}{\ln 2}$$

$$=\frac{1}{2\ln 2} \quad \cdots ❸$$

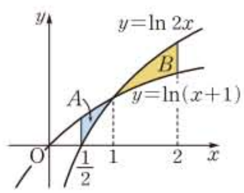
답 $\frac{1}{2\ln 2}$

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ 도형의 넓이를 구할 수 있다.	60 %

24 전략 두 곡선의 교점의 x좌표를 구한 후 두 곡선의 위치 관계를 파악한다.

풀이 두 곡선 $y=\ln(x+1)$, $y=\ln 2x$의 교점의 x좌표는 $\ln(x+1)=\ln 2x$에서

$x+1=2x \quad \therefore x=1$



$A=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\{\ln(x+1)-\ln 2x\}dx$

에서 $f(x)=\ln(x+1)-\ln 2x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$, $g(x)=x$

$$\begin{aligned}\therefore A&=\Big[\{\ln(x+1)-\ln 2x\}x\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)x\,dx\\&=-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x+1}dx\end{aligned}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{x}{x+1}-1\right)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x-x-1}{x+1}dx=-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x+1}dx$$

$$\begin{aligned}&=-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}+\Big[\ln|x+1|\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}\\&=-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}+\left(\ln 2-\ln\frac{3}{2}\right)\\&=-\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}+\ln 2\end{aligned}$$

$$-\frac{3}{2}(\ln 3-\ln 2)+\ln 2=-\frac{3}{2}\ln 3+\frac{3}{2}\ln 2+\ln 2=\frac{5}{2}\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3$$

$=\frac{5}{2}\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3$ ⋯ ❶

$$\begin{aligned}B&=\int_{1}^{2}\{\ln 2x-\ln(x+1)\}dx\\&=\Big[\{\ln 2x-\ln(x+1)\}x\Big]_{1}^{2}-\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)x\,dx\\&=2(\ln 4-\ln 3)-\int_{1}^{2}\frac{1}{x+1}dx\\&=4\ln 2-2\ln 3-\Big[\ln|x+1|\Big]_{1}^{2}\\&=4\ln 2-2\ln 3-(\ln 3-\ln 2)\\&=5\ln 2-3\ln 3\end{aligned}$$ ⋯ ❷

따라서 $2A=5\ln 2-3\ln 3=B$이므로

$\frac{B}{A}=\frac{2A}{A}=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ A의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ B의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\frac{B}{A}$의 값을 구할 수 있다.	10 %

25 전략 두 로봇 A, B의 위치를 a에 대한 함수로 나타낸다.

풀이 A, B의 출발 위치를 각각 0, 30이라 하고, 출발한 지 a초 후의 A, B의 위치를 각각 $f(a)$, $g(a)$라 하면

$f(a)=\int_{0}^{a}te^t dt=\Big[te^t\Big]_{0}^{a}-\int_{0}^{a}e^t dt$

$u(t)=t$, $v'(t)=e^t$으로 놓으면 $u'(t)=1$, $v(t)=e^t$이므로

$\int_{0}^{a}te^t dt=\Big[te^t\Big]_{0}^{a}-\int_{0}^{a}e^t dt$

$=ae^a-\Big[e^t\Big]_{0}^{a}=ae^a-e^a+1$

$g(a)=30+\int_{0}^{a}29e^t dt=30+\Big[29e^t\Big]_{0}^{a}$

$=30+(29e^a-29)=29e^a+1$

$f(a)=g(a)$에서 $ae^a-e^a+1=29e^a+1$

$(a-30)e^a=0 \quad \therefore a=30$

답 30

최상위로 가는 최고 수준 문제

본책 94쪽

01

해결 단계

❶ 조건 (가)에서 $f(3)$, $f'(3)$의 값을 구한다.
❷ 조건 (나)의 식을 미분한 후 함수 $f(x)$의 차수를 구한다.
❸ $f(x)$를 구한다.
❹ 부분적분법을 이용하여 $g(0)$의 값을 구한다.

풀이 ❶ 조건 (가)에서

$f(3)=2$, $f'(3)=2$

❷ 조건 (나)에서 등식 $(x+2)f(x)=\int\{2f(x)+8\}dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+(x+2)f'(x)=2f(x)+8$ ⋯⋯ ㉠

$f(x)$의 차수를 n $(n\ge 1)$이라 하고 x^n의 계수를 a $(a\ne 0)$라 하면

$f(x)=ax^n+\cdots$, $f'(x)=nax^{n-1}+\cdots$

이므로 ㉠의 좌변에서 x^n의 계수는 $a+na$

$$\begin{aligned}&f(x)+(x+2)f'(x)\\&=ax^n+\cdots\\&\quad+(x+2)(nax^{n-1}+\cdots)\\&=(a+na)x^n+\cdots\end{aligned}$$

㉠의 우변에서 x^n의 계수는 $2a$

따라서 $a+na=2a$이므로

$n+1=2 \quad \therefore n=1$

❸ 즉 $f(x)$는 일차함수이므로 $f(x)=ax+b$라 하면

$f'(x)=a$

$f'(3)=2$에서 $a=2$

또 $f(3)=3a+b=2$에서 $6+b=2 \quad \therefore b=-4$

$\therefore f(x)=2x-4$

❹ $g(x)=\int g'(x)dx=\int f(x)e^x dx$이므로

$g(x)=\int(2x-4)e^x dx$

$u(x)=2x-4$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=2$, $v(x)=e^x$

$$\begin{aligned}\therefore g(x)&=(2x-4)e^x-\int 2e^x dx\\&=(2x-4)e^x-2e^x+C\\&=(2x-6)e^x+C\end{aligned}$$

$g(3)=4$이므로 $C=4$

따라서 $g(x)=(2x-6)e^x+4$이므로

$g(0)=-2$

답 ④

일품 BOX

02

해결 단계

❶ x의 값의 범위를 나누어 $f(x)$를 구한다.
❷ 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.
❸ $a+b$의 값을 구한다.

풀이 ❶ (i) $0\le x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+2}=0$이므로

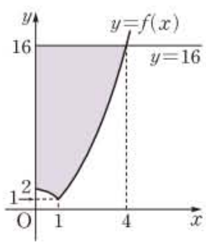
$$f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x+1$$

(ii) $x=1$일 때, $\quad f(1)=\frac{0+1+1}{1+1}=1$

(iii) $x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^n}\cos\frac{\pi}{2}x+x^2+\frac{1}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}}=x^2$$

❷ 따라서 곡선 $y=f(x)$는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=16$으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$4\cdot16-\int_0^4 f(x)\,dx$$

$$=64-\left\{\int_0^1\left(\cos\frac{\pi}{2}x+1\right)dx+\int_1^4 x^2\,dx\right\}$$

$$=64-\left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x+x\right]_0^1-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^4$$

$$=64-\left(\frac{2}{\pi}+1\right)-\left(\frac{64}{3}-\frac{1}{3}\right)$$

$$=42-\frac{2}{\pi}$$

❸ 따라서 $a=42$, $b=-2$이므로

$a+b=40$ 　　답 40

03

해결 단계

❶ 두 곡선이 만나는 점에서의 접선이 서로 수직임을 이용하여 k의 값을 구한다.
❷ 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분으로 나타낸다.
❸ 삼각함수를 이용한 치환적분법을 이용하여 넓이를 구한다.

풀이 ❶ $y=\frac{3}{x^2+3}$에서 $\quad y'=-\frac{6x}{(x^2+3)^2}$

$y=x^2+k$에서 $\quad y'=2x$

이때 주어진 두 곡선이 만나는 점을 $(p,\ q)$라 하면 두 곡선에 각각 접하는 접선이 서로 수직이므로

$$-\frac{6p}{(p^2+3)^2}\cdot2p=-1,\qquad p^4-6p^2+9=0$$

$$(p^2-3)^2=0\qquad\therefore\ p=-\sqrt{3}\ \text{또는}\ p=\sqrt{3}$$

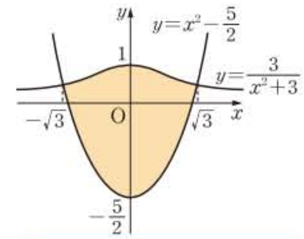
따라서 $q=\frac{3}{(\sqrt{3})^2+3}=\frac{1}{2}$이므로 교점의 좌표는

$$\left(-\sqrt{3},\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\sqrt{3},\ \frac{1}{2}\right)$$

곡선 $y=x^2+k$가 이 교점을 지나므로

$$\frac{1}{2}=(\pm\sqrt{3})^2+k\qquad\therefore\ k=-\frac{5}{2}$$

❷ 두 곡선 $y=\frac{3}{x^2+3}$, $y=x^2-\frac{5}{2}$로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는



$f(x)=\frac{3}{x^2+3}$이라 하면
$f'(x)=-\frac{6x}{(x^2+3)^2}$
$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	1	↘

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left\{\frac{3}{x^2+3}-\left(x^2-\frac{5}{2}\right)\right\}dx$$

$$=2\int_0^{\sqrt{3}}\frac{3}{x^2+3}dx-2\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$=2\int_0^{\sqrt{3}}\frac{3}{x^2+3}dx+3\sqrt{3}$$

❸ $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{3}{x^2+3}dx$에서 $x=\sqrt{3}\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\quad\frac{dx}{d\theta}=\sqrt{3}\sec^2\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\sqrt{3}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$2\int_0^{\sqrt{3}}\frac{3}{x^2+3}dx+3\sqrt{3}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{3}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\sqrt{3}\sec^2\theta\,d\theta+3\sqrt{3}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{3}\,d\theta+3\sqrt{3}$$

$$=2\Big[\sqrt{3}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+3\sqrt{3}$$

$$=\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2}+3\right)$$

답 ③

04

해결 단계

❶ 곡선과 두 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 이용하여 영역 A의 넓이를 구한다.
❷ 직선 $y=kx$와 곡선 $y=\frac{4}{x}$의 교점의 좌표를 구한다.
❸ k^3의 값을 구한다.

풀이 ❶ 곡선 $y=\frac{4}{x}$와 두 직선 $y=4x$, $y=\frac{1}{4}x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot1\cdot4+\int_1^4\frac{4}{x}dx-\frac{1}{2}\cdot4\cdot1=\int_1^4\frac{4}{x}dx$$

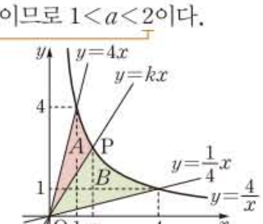
$$=\Big[4\ln|x|\Big]_1^4$$

$$=4\ln4=8\ln2$$

$A:B=1:2$이므로 $\qquad A=\frac{1}{3}\cdot8\ln2=\frac{8}{3}\ln2$

❷ 한편 직선 $y=kx$와 곡선 $y=\frac{4}{x}$의 교점을 $\mathrm{P}\left(a,\ \frac{4}{a}\right)$라 하면 $1<k<4$이므로 $1<a<2$이다.

$k=1$일 때, 즉 직선 $y=x$와 곡선 $y=\frac{4}{x}$ $(x>0)$의 교점의 x좌표는 $x=\frac{4}{x}$에서
$x^2=4$
$\therefore\ x=2\ (\because\ x>0)$



$\therefore A=\frac{1}{2}\cdot1\cdot4+\int_1^a\frac{4}{x}\,dx-\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{4}{a}$

$=\int_1^a\frac{4}{x}\,dx=\Big[4\ln|x|\Big]_1^a$

$=4\ln a$

$4\ln a=\frac{8}{3}\ln2$에서

$\ln a=\frac{2}{3}\ln2=\ln2^{\frac{2}{3}}$

$\therefore a=2^{\frac{2}{3}}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(2^{\frac{2}{3}},\ \frac{4}{2^{\frac{2}{3}}}\right)$, 즉 $(2^{\frac{2}{3}},\ 2^{\frac{4}{3}})$이다.

$\frac{4}{2^{\frac{2}{3}}}=2^{2-\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{3}}$

❸ 직선 $y=kx$가 점 P를 지나므로

$2^{\frac{4}{3}}=k\cdot2^{\frac{2}{3}}\qquad\therefore k=\frac{2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}}=2^{\frac{2}{3}}$

$\therefore k^3=(2^{\frac{2}{3}})^3=2^2=4$ 답 4

다른 풀이 곡선 $y=\frac{4}{x}$와 직선 $y=kx$의 교점을 P라 하면

$kx=\frac{4}{x}$에서

$x^2=\frac{4}{k}\qquad\therefore \mathrm{P}\left(\frac{2}{\sqrt{k}},\ 2\sqrt{k}\right)$

$A=\int_0^1(4x-kx)dx+\int_1^{\frac{2}{\sqrt{k}}}\left(\frac{4}{x}-kx\right)dx$

$=\Big[2x^2-\frac{k}{2}x^2\Big]_0^1+\Big[4\ln|x|-\frac{k}{2}x^2\Big]_1^{\frac{2}{\sqrt{k}}}$

$=4\ln\frac{2}{\sqrt{k}}$

$B=\int_0^{\frac{2}{\sqrt{k}}}\left(kx-\frac{1}{4}x\right)dx+\int_{\frac{2}{\sqrt{k}}}^4\left(\frac{4}{x}-\frac{1}{4}x\right)dx$

$=\Big[\frac{k}{2}x^2-\frac{1}{8}x^2\Big]_0^{\frac{2}{\sqrt{k}}}+\Big[4\ln|x|-\frac{1}{8}x^2\Big]_{\frac{2}{\sqrt{k}}}^4$

$=8\ln2-4\ln\frac{2}{\sqrt{k}}$

$A:B=1:2$에서 $B=2A$이므로

$8\ln2-4\ln\frac{2}{\sqrt{k}}=8\ln\frac{2}{\sqrt{k}}$

$12\ln\frac{2}{\sqrt{k}}=8\ln2,\qquad\left(\frac{2}{\sqrt{k}}\right)^{12}=2^8$

$\frac{2^{12}}{k^6}=2^8,\qquad k^6=2^4$

$\therefore k^3=2^2=4$

Ⅲ 적분법

MEMO