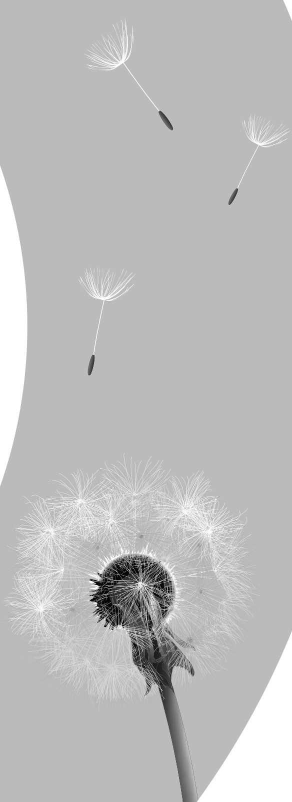
라이트 쎈

정답 및 풀이

확률과 통계



● 정답을 확인하려고 할 때에는 〈빠른 정답 찾기〉를 이용하면 편리합니다.

Ⅰ. 순열과 조합

01 순열

0001 $5+2=7$ 답 7

0002 $12+10=22$ 답 22

0003 6의 배수가 적힌 공은 6, 12, 18의 3개
7의 배수가 적힌 공은 7, 14의 2개
두 사건은 동시에 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는
$3+2=5$ 답 5

0004 4의 배수가 적힌 공은 4, 8, 12, 16, 20의 5개
5의 배수가 적힌 공은 5, 10, 15, 20의 4개
4와 5의 최소공배수인 20의 배수가 적힌 공은 20의 1개
따라서 구하는 경우의 수는 $5+4-1=8$ 답 8

0005 소수의 눈이 나오는 경우는 2, 3, 5의 3가지
짝수의 눈이 나오는 경우는 2, 4, 6의 3가지
따라서 구하는 경우의 수는 $3\cdot3=9$ 답 9

0006 $7\cdot8=56$ 답 56

0007 A지점에서 B지점까지 가는 방법의 수는 2
B지점에서 C지점까지 가는 방법의 수는 2
따라서 구하는 방법의 수는 $2\cdot2=4$ 답 4

0008 A지점에서 D지점까지 가는 방법의 수는 2
D지점에서 C지점까지 가는 방법의 수는 3
따라서 구하는 방법의 수는 $2\cdot3=6$ 답 6

0009 $3!=3\cdot2\cdot1=6$ 답 6

0010 $5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ 답 120

0011 $0!=1$ 답 1

0012 $1!=1$ 답 1

0013 ${}_{10}\mathrm{P}_4=\dfrac{10!}{(10-4)!}=\dfrac{10!}{6!}$ $\therefore \square=6$ 답 6

0014 ${}_7\mathrm{P}_\square=\dfrac{7!}{(7-\square)!}=\dfrac{7!}{2!}$이므로
$7-\square=2$ $\therefore \square=5$ 답 5

0015 ${}_4\mathrm{P}_2=4\cdot3=12$ 답 12

0016 ${}_8\mathrm{P}_0=1$ 답 1

0017 ${}_5\mathrm{P}_1=5$ 답 5

0018 ${}_3\mathrm{P}_3=3!=3\cdot2\cdot1=6$ 답 6

0019 ${}_n\mathrm{P}_2=n(n-1)$이므로
$n(n-1)=56=8\cdot7$ $\therefore n=8$ 답 8

0020 ${}_n\mathrm{P}_n=n!$이므로 $24=4\cdot3\cdot2\cdot1$에서
$n!=4\cdot3\cdot2\cdot1$ $\therefore n=4$ 답 4

0021 ${}_n\mathrm{P}_1=n$이므로 $r=1$ 답 1

0022 ${}_n\mathrm{P}_0=1$이므로 $r=0$ 답 0

0023 $120=6\cdot5\cdot4$이므로 ${}_6\mathrm{P}_3=120$
$\therefore r=3$ 답 3

0024 $336=8\cdot7\cdot6$이므로 ${}_8\mathrm{P}_3=336$
$\therefore r=3$ 답 3

0025 $6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$ 답 720

0026 4장의 카드에서 3장을 뽑는 순열의 수이므로
${}_4\mathrm{P}_3=4\cdot3\cdot2=24$ 답 24

0027 10명의 학생 중에서 2명을 뽑는 순열의 수이므로
${}_{10}\mathrm{P}_2=10\cdot9=90$ 답 90

0028 6권의 책 중에서 4권을 뽑는 순열의 수이므로
${}_6\mathrm{P}_4=6\cdot5\cdot4\cdot3=360$ 답 360

0029 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 눈의 수의 합이 5가 되는 경우는
(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지
(ii) 눈의 수의 합이 6이 되는 경우는
(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지
두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$4+5=9$ 답 ④

0030 1부터 34까지의 자연수 중에서 소수는
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31의 11개
8의 배수는 8, 16, 24, 32의 4개
두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$11+4=15$ 답 15

0031 뽑힌 카드에 적힌 세 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 적힌 세 수의 곱이 2가 되는 경우는
(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)의 3가지
(ii) 적힌 세 수의 곱이 4가 되는 경우는
(1, 1, 4), (1, 4, 1), (4, 1, 1),
(1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)의 6가지
두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$3+6=9$ 답 ③

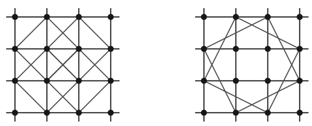
0032 가장 가까운 두 점 사이의 간격을 1이라 하면
(ⅰ) 한 변의 길이가 1인 정사각형은 9개
(ⅱ) 한 변의 길이가 2인 정사각형은 4개
(ⅲ) 한 변의 길이가 3인 정사각형은 1개 ⇨ ❶
(ⅳ) 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형은 4개 ⇨ ❷
(ⅴ) 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$인 정사각형은 2개 ⇨ ❸
모든 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 정사각형의 개수는

$9+4+1+4+2=20$ ⇨ ❹

답 20

채점 기준	비율
❶ 한 변의 길이가 1, 2, 3인 정사각형의 개수를 구할 수 있다.	30%
❷ 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형의 개수를 구할 수 있다.	30%
❸ 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$인 정사각형의 개수를 구할 수 있다.	30%
❹ 모든 정사각형의 개수를 구할 수 있다.	10%

참고 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$인 정사각형은 다음 그림과 같이 각각 4개, 2개이다.



0033 100개의 공 중에서 4의 배수가 적힌 공은 25개, 6의 배수가 적힌 공은 16개, 4와 6의 최소공배수인 12의 배수가 적힌 공은 8개이므로 4의 배수 또는 6의 배수가 적힌 공의 개수는

$25+16-8=33$

따라서 구하는 경우의 수는 33

답 ①

0034 모든 원소의 곱이 6의 배수가 되기 위해서는 3을 반드시 원소로 갖고 2 또는 4를 원소로 가져야 한다.
(ⅰ) 2, 3을 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

(ⅱ) 3, 4를 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

(ⅲ) 2, 3, 4를 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{5-3}=4$

이상에서 구하는 부분집합의 개수는

$8+8-4=12$

답 12

다른풀이 (ⅰ) 3을 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{5-1}=2^4=16$

(ⅱ) 3을 원소로 갖고 2, 4를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{5-1-2}=2^2=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 부분집합의 개수는

$16-4=12$

라쎈 특강 부분집합의 개수

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여
① 집합 A의 부분집합의 개수: 2^n
② 집합 A의 특정한 원소 r $(r\le n)$개를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수: 2^{n-r}
③ 집합 A의 특정한 원소 k $(k\le n)$개를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수: 2^{n-k}

0035 $36=2^2\times3^2$이므로 36과 서로소인 수는 2의 배수도 아니고, 3의 배수도 아닌 수이다. 36개의 공 중에서 2의 배수가 적힌 공은 18개, 3의 배수가 적힌 공은 12개, 2와 3의 최소공배수인 6의 배수가 적힌 공은 6개이므로 2의 배수 또는 3의 배수가 적힌 공은

$18+12-6=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$36-24=12$

답 12

0036 (ⅰ) $x=1$일 때, $y+z=6$이므로 순서쌍 (y, z)는

$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$의 5개

(ⅱ) $x=2$일 때, $y+z=4$이므로 순서쌍 (y, z)는

$(1, 3), (2, 2), (3, 1)$의 3개

(ⅲ) $x=3$일 때, $y+z=2$이므로 순서쌍 (y, z)는

$(1, 1)$의 1개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$5+3+1=9$

답 9

0037 $x=0$일 때, $y=\dfrac{52}{3}$
$x=1$일 때, $y=16$
$x=2$일 때, $y=\dfrac{44}{3}$
$x=3$일 때, $y=\dfrac{40}{3}$
$x=4$일 때, $y=12$
⋮
따라서 구하는 순서쌍 (x, y)는

$(1, 16), (4, 12), (7, 8), (10, 4), (13, 0)$

의 5개이다.

답 5

0038 x, y가 자연수이므로 $x+4y\le9$를 만족시키는 경우는

$x+4y=5$, $x+4y=6$, $x+4y=7$, $x+4y=8$, $x+4y=9$

(ⅰ) $x+4y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$의 1개
(ⅱ) $x+4y=6$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(2, 1)$의 1개
(ⅲ) $x+4y=7$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(3, 1)$의 1개
(ⅳ) $x+4y=8$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(4, 1)$의 1개
(ⅴ) $x+4y=9$일 때, 순서쌍 (x, y)는 $(5, 1), (1, 2)$의 2개
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$1+1+1+1+2=6$

답 ④

다른풀이 (ⅰ) $y=1$일 때, $x+4\le9$, 즉 $x\le5$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)$의 5개

(ⅱ) $y=2$일 때, $x+8\le9$, 즉 $x\le1$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(1, 2)$의 1개

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 순서쌍의 개수는 $5+1=6$

0039 100원, 200원, 400원짜리 초콜릿을 각각 x개, y개, z개 산다고 하면

$100x+200y+400z=1500$

$\therefore x+2y+4z=15$ (단, x, y, z는 자연수)

(ⅰ) $z=1$일 때, $x+2y+4=15$, 즉 $x+2y=11$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(9, 1), (7, 2), (5, 3), (3, 4), (1, 5)$의 5개

(ⅱ) $z=2$일 때, $x+2y+8=15$, 즉 $x+2y=7$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(5, 1), (3, 2), (1, 3)$의 3개

(iii) $z=3$일 때, $x+2y+12=15$, 즉 $x+2y=3$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(1, 1)$의 1개
이상에서 구하는 방법의 수는
$5+3+1=9$ 답 ④

0040 a가 될 수 있는 것은 $1, 2, 3, 4$의 4개
b가 될 수 있는 것은 $-1, 0, 1$의 3개
따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 $4\cdot3=12$이므로
$n(C)=12$ 답 ④

0041 십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
6, 7, 8, 9의 4개
일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
0, 2, 4, 6, 8의 5개
따라서 구하는 짝수의 개수는 $4\cdot5=20$ 답 20
다른풀이 60 이상의 두 자리 자연수의 개수는 $99-60+1=40$
따라서 짝수의 개수는 $40\div2=20$

0042 $3\cdot4\cdot5=60$ 답 ③

0043 (i) A조에서 경찰관 1명, B조에서 소방관 1명을 뽑는 경우
$4\cdot2=8$ ⇨ ❶
(ii) A조에서 소방관 1명, B조에서 경찰관 1명을 뽑는 경우
$3\cdot5=15$ ⇨ ❷
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 $8+15=23$ ⇨ ❸
답 23

채점 기준	비율
❶ (i)의 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ (ii)의 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 경찰관 1명, 소방관 1명을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%

0044 세 눈의 수의 곱이 짝수인 경우의 수는
(전체 경우의 수)$-$(세 눈의 수의 곱이 홀수인 경우의 수)
이때 3개의 주사위를 던져 나올 수 있는 모든 경우의 수는
$6\cdot6\cdot6=216$
또 세 눈의 수의 곱이 홀수인 경우의 수는
$3\cdot3\cdot3=27$
따라서 구하는 경우의 수는
$216-27=189$ 답 ⑤

0045 $(x+y+z)(a+b+c+d)$에서 x, y, z에 곱해지는 항이 각각 a, b, c, d의 4개이므로 항의 개수는
$3\cdot4=12$ 답 ②

0046 $(x+y)(a+b)^2=(x+y)(a^2+2ab+b^2)$에서 x, y에 곱해지는 항이 각각 a^2, $2ab$, b^2의 3개이므로 항의 개수는
$2\cdot3=6$ 답 6

0047 $(a-b)^2(x+y)=(a^2-2ab+b^2)(x+y)$에서 a^2, $-2ab$, b^2에 곱해지는 항이 각각 x, y의 2개이므로 항의 개수는
$3\cdot2=6$
$(c+d-e)(z+w)$에서 c, d, $-e$에 곱해지는 항이 각각 z, w의 2개이므로 항의 개수는 $3\cdot2=6$
$(a-b)^2(x+y)$와 $(c+d-e)(z+w)$의 전개식에 동류항이 없으므로 구하는 항의 개수는 $6+6=12$ 답 ②

0048 $54=2\cdot3^3$이므로 54의 양의 약수는
$2^m\cdot3^n$ $(m=0, 1, n=0, 1, 2, 3)$
으로 나타낼 수 있다. 이때 m, n을 택하는 방법의 수가 각각 2, 4이므로 $a=2\cdot4=8$
$90=2\cdot3^2\cdot5$이므로 90의 양의 약수는
$2^p\cdot3^q\cdot5^r$ $(p=0, 1, q=0, 1, 2, r=0, 1)$
으로 나타낼 수 있다. 이때 p, q, r를 택하는 방법의 수가 각각 2, 3, 2이므로 $b=2\cdot3\cdot2=12$
$\therefore a+b=20$ 답 20

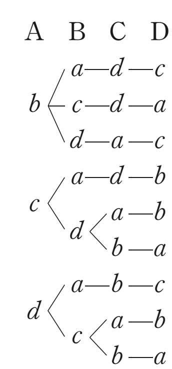
0049 ① $3^2\times5$의 양의 약수의 개수는 $3\cdot2=6$
② $3^2\times7$의 양의 약수의 개수는 $3\cdot2=6$
③ $3^2\times11$의 양의 약수의 개수는 $3\cdot2=6$
④ $3^2\times15=3^3\times5$의 양의 약수의 개수는 $4\cdot2=8$
⑤ $3^2\times27=3^5$의 양의 약수의 개수는 6 답 ④

0050 $108=2^2\cdot3^3$이므로 ⇨ ❶
108의 양의 약수 중 짝수는
$2^m\cdot3^n$ $(m=1, 2, n=0, 1, 2, 3)$
으로 나타낼 수 있다. 이때 m, n을 택하는 방법의 수가 각각 2, 4이므로 구하는 짝수의 개수는
$2\cdot4=8$ ⇨ ❷
답 8

채점 기준	비율
❶ 108을 소인수분해할 수 있다.	30%
❷ 108의 양의 약수 중 짝수의 개수를 구할 수 있다.	70%

0051 $168=2^3\cdot3\cdot7$과 $252=2^2\cdot3^2\cdot7$의 최대공약수는 $84=2^2\cdot3\cdot7$이므로 168과 252의 양의 공약수의 개수는 84의 양의 약수의 개수와 같다.
84의 양의 약수는
$2^m\cdot3^n\cdot7^l$ $(m=0, 1, 2, n=0, 1, l=0, 1)$
으로 나타낼 수 있다. 이때 m, n, l을 택하는 방법의 수가 각각 3, 2, 2이므로 구하는 공약수의 개수는
$3\cdot2\cdot2=12$ 답 ⑤

0052 모든 자물쇠가 열리지 않는 경우는 오른쪽과 같다.
따라서 구하는 경우의 수는 9이다.
답 ⑤



0053 $a_1 \neq 1$이므로 a_1이 2, 3인 경우에 대하여 $a_2 \neq 2$, $a_3 \neq 3$인 a_2, a_3을 각각 구해 보면 오른쪽과 같다.

a_1 a_2 a_3
2—3—1
3—1—2

따라서 구하는 정수의 개수는 2이다.

답 ①

0054 a, b, b, c를 같은 문자끼리 이웃하지 않도록 일렬로 나열하는 방법은 오른쪽과 같다.

a—b—c—b
b — a — b—c
b — a — c—b
b — c — a—b
b — c — b—a
c—b—a—b

따라서 구하는 방법의 수는 6이다.

답 ②

0055 100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개의 2가지
50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개의 3가지
10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지
이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는
$2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 = 23$

답 ③

0056 500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개의 3가지 ⇨ ❶
100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지 ⇨ ❷
50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지 ⇨ ❸
이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는
$3 \cdot 4 \cdot 4 - 1 = 47$ ⇨ ❹

답 47

채점 기준	비율
❶ 500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%
❷ 100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%
❸ 50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%
❹ 동전의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%

0057 500원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 1000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 1000원짜리 지폐 2장을 500원짜리 동전 4개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 7개, 100원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.
500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 500원, 1000원, …, 3500원의 8가지
100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 100원, 200원, 300원의 4가지
이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는
$8 \cdot 4 - 1 = 31$

답 31

0058 5000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액과 10000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액이 같고, 1000원짜리 지폐 5장으로 지불할 수 있는 금액과 5000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액이 같다.
따라서 10000원짜리 지폐 2장과 5000원짜리 지폐 3장을 1000원짜리 지폐 35장으로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 1000원짜리 지폐 41장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.
1000원짜리 지폐로 지불하는 금액은
0원, 1000원, 2000원, …, 41000원의 42가지
이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는
$42 - 1 = 41$

답 41

0059 (i) A → B → C로 가는 방법의 수는 $2 \cdot 4 = 8$
(ii) A → D → C로 가는 방법의 수는 $3 \cdot 2 = 6$
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$8 + 6 = 14$

답 14

0060 (i) 매표소 → 정상 → 약수터 → 매표소로 가는 방법의 수는
$3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$
(ii) 매표소 → 약수터 → 정상 → 매표소로 가는 방법의 수는
$4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$24 + 24 = 48$

답 ③

0061 (i) 공원 → A → 서점으로 가는 방법의 수는
$3 \cdot 2 = 6$
(ii) 공원 → B → 서점으로 가는 방법의 수는
$2 \cdot 1 = 2$
(iii) 공원 → A → B → 서점으로 가는 방법의 수는
$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
(iv) 공원 → B → A → 서점으로 가는 방법의 수는
$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
이상에서 구하는 방법의 수는
$6 + 2 + 6 + 8 = 22$

답 22

0062 B에 칠할 수 있는 색은 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지, A에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지이다.
따라서 구하는 방법의 수는 $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$

답 48

0063 B에 칠할 수 있는 색은 4가지, A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.
따라서 구하는 방법의 수는 $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

답 ⑤

0064 (i) A와 C가 같은 색인 경우
A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 방법의 수는
$4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 = 36$ ⇨ ❶

(ⅱ) A와 C가 다른 색인 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 방법의 수는

$4\cdot3\cdot2\cdot2=48$ ⇨ ❷

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는 $36+48=84$ ⇨ ❸

답 84

채점 기준	비율
❶ A와 C에 같은 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ A와 C에 다른 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%

0065 구하는 방법의 수는 10명의 회원 중에서 3명을 택하여 일렬로 세우는 방법의 수와 같으므로

$_{10}P_3=10\cdot9\cdot8=720$

답 ⑤

0066 구하는 방법의 수는 5명의 선수를 일렬로 세우는 방법의 수와 같으므로

$5!=120$

답 120

0067 $_nP_2=72$이므로

$n(n-1)=72=9\cdot8 \quad \therefore n=9$

답 ④

0068 $_nP_2 : {_nP_3}=1:7$에서 $7\cdot{_nP_2}={_nP_3}$

$7n(n-1)=n(n-1)(n-2)$

$_nP_3$에서 $n\geq3$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$7=n-2 \quad \therefore n=9$

답 9

0069 $_nP_2+3\cdot{_nP_1}=35$에서 $n(n-1)+3n=35$ ⇨ ❶

$n^2+2n-35=0, \quad (n+7)(n-5)=0$

$\therefore n=5\ (\because n\geq2)$ ⇨ ❷

답 5

채점 기준	비율
❶ n에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	50%
❷ n의 값을 구할 수 있다.	50%

0070 $_7P_r\leq2\cdot{_7P_{r-2}}$에서

$$\frac{7!}{(7-r)!}\leq2\cdot\frac{7!}{\{7-(r-2)\}!}$$

$$\frac{1}{(7-r)!}\leq2\cdot\frac{1}{(9-r)!}, \quad (9-r)!\leq2(7-r)!$$

$(9-r)(8-r)\leq2, \quad r^2-17r+70\leq0$

$(r-7)(r-10)\leq0 \quad \therefore 7\leq r\leq10$

그런데 $2\leq r\leq7$이므로 $r=7$

따라서 조건을 만족시키는 r의 개수는 1이다.

답 ①

참고 $_7P_r$에서 $r\leq7$ …… ㉠

$_7P_{r-2}$에서 $0\leq r-2\leq7$

$\therefore 2\leq r\leq9$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2\leq r\leq7$

0071 선생님 3명을 한 사람으로 생각하여 총 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $5!=120$

선생님 3명이 자리를 바꾸는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$120\cdot6=720$

답 ①

0072 A와 D를 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!=6$

A와 D가 자리를 바꾸는 방법의 수는 2

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot2=12$

답 ②

0073 4쌍의 부부를 각각 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 앉히는 방법의 수는 $4!=24$

4쌍의 부부가 각각 부부끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2\cdot2\cdot2\cdot2=16$

따라서 구하는 방법의 수는

$24\cdot16=384$

답 ④

0074 배우 2명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $2!=2$

배우 사이사이 및 양 끝의 3개의 자리에 가수 2명을 세우는 방법의 수는 $_3P_2=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$2\cdot6=12$

답 ②

0075 4개의 모음 o, u, i, e를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$4!=24$ ⇨ ❶

모음의 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 3개의 자음 t, s, d를 나열하는 방법의 수는

$_5P_3=60$ ⇨ ❷

따라서 구하는 방법의 수는

$24\cdot60=1440$ ⇨ ❸

답 1440

채점 기준	비율
❶ 4개의 모음을 일렬로 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
❷ 모음 사이사이 및 양 끝에 자음을 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	50%
❸ 모든 방법의 수를 구할 수 있다.	20%

0076 3개의 의자에만 학생이 앉으므로 빈 의자는 4개이다.

빈 의자들의 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 학생이 앉은 의자 3개를 놓으면 되므로 구하는 방법의 수는

$_5P_3=60$

답 60

0077 (ⅰ) 남자, 여자의 순서로 번갈아 세우는 방법의 수는

$3!\cdot3!=36$

(ii) 여자, 남자의 순서로 번갈아 세우는 방법의 수는

$3!\cdot3!=36$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$36+36=72$ 답 ⑤

0078 빨간색 꽃은 4송이, 노란색 꽃은 3송이이므로 빨간색 꽃 4송이를 일렬로 심은 뒤 그 사이사이에 노란색 꽃 3송이를 심으면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는

$4!\cdot3!=24\cdot6=144$ 답 ③

0079 남학생은 4명이므로 양 끝에 남학생이 오도록 세우는 방법의 수는 ${}_4P_2=12$

양 끝의 남학생 2명을 제외한 나머지 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$12\cdot24=288$

답 ③

0080 구하는 방법의 수는 A를 제외한 나머지 4개의 문자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

${}_4P_2=12$

답 ②

0081 2개의 모음 i, e를 세 군데의 홀수 번째 자리 중 두 군데에 나열하는 방법의 수는

${}_3P_2=6$ ⇨ ❶

나머지 빈 세 자리에 자음 3개를 나열하는 방법의 수는

$3!=6$ ⇨ ❷

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot6=36$ ⇨ ❸

답 36

채점 기준	비율
❶ 모음을 홀수 번째 자리에 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ 자음을 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 문자를 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%

0082 지수와 미영이 사이에 2명이 앉는 방법의 수는

$2!\cdot{}_4P_2=24$

이 묶음과 나머지 2명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$24\cdot6=144$

답 ④

0083 A와 B 사이에 C가 들어가도록 나열하는 방법의 수는

$2!=2$

이 묶음과 나머지 D를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$2\cdot2=4$ 답 4

0084 d와 m 사이에 3개의 문자가 들어가도록 나열하는 방법의 수는

$2!\cdot{}_5P_3=120$

이 묶음과 나머지 2개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$120\cdot6=720$ 답 720

0085 5권의 책을 나란히 꽂는 방법의 수는

$5!=120$

양 끝에 만화책을 꽂는 방법의 수는

${}_3P_2\cdot3!=36$

따라서 구하는 방법의 수는

$120-36=84$ 답 ④

0086 (1) 구하는 방법의 수는 8명의 선수 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수와 같으므로

${}_8P_2=56$ ⇨ ❶

(2) 구하는 방법의 수는 농구 선수 3명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수와 같으므로

${}_3P_2=6$ ⇨ ❷

(3) 구하는 방법의 수는 모든 방법의 수에서 대표, 부대표 모두 농구 선수를 뽑는 방법의 수를 뺀 것과 같으므로

$56-6=50$ ⇨ ❸

답 (1) 56 (2) 6 (3) 50

채점 기준	비율
❶ 모든 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ 대표, 부대표 모두 농구 선수를 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 적어도 한 명은 야구 선수를 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%

0087 7명의 학생을 일렬로 세우는 방법의 수는

$7!=5040$

여학생이 이웃하지 않는 방법의 수는 남학생 4명을 일렬로 세우고 남학생들 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 여학생 3명을 세우는 방법의 수와 같으므로

$4!\cdot{}_5P_3=1440$

따라서 구하는 방법의 수는

$5040-1440=3600$ 답 3600

0088 홀수이려면 일의 자리의 숫자가 1 또는 3 또는 5이어야 한다.
일의 자리의 숫자가 1인 경우 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는 4개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

${}_4P_3=24$

일의 자리의 숫자가 3, 5인 경우도 이와 같으므로 구하는 홀수의 개수는

$3\cdot24=72$ 답 ②

0089 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 4개, 십의 자리, 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리에 온 숫자를 제외한 4개 중 2개이므로 ${}_4P_2=12$

따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$4\cdot12=48$

답 48

0090 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

0을 제외한 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

${}_5P_3=60$ ⇨ ❶

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 5를 제외한 4개, 백의 자리, 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4개 중 2개이므로

${}_4P_2=12$

따라서 일의 자리의 숫자가 5인 네 자리 자연수의 개수는

$4\cdot12=48$ ⇨ ❷

(i), (ii)에서 5의 배수의 개수는

$60+48=108$ ⇨ ❸

답 108

채점 기준	비율
❶ 일의 자리의 숫자가 0인 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	40%
❷ 일의 자리의 숫자가 5인 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	40%
❸ 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	20%

0091 백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 7개의 숫자로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$6\cdot{}_6P_2=180$

양 끝이 모두 홀수인 자연수의 개수는

${}_3P_2\cdot5=30$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$180-30=150$

답 ④

0092 a로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$

ba로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

bc로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

bd로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

bea로 시작하는 것의 개수는 $2!=2$

bec로 시작하는 것은 순서대로

$becad$, $becda$의 2개

따라서 $becda$까지의 개수는

$24+6+6+6+2+2=46$

이므로 $becda$는 46번째에 온다.

답 46번째

0093 320보다 작은 자연수는 1□□, 2□□, 30□, 31□ 꼴이다.

1□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_2=20$ ⇨ ❶

2□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_2=20$ ⇨ ❷

30□ 꼴인 자연수의 개수는 4 ⇨ ❸

31□ 꼴인 자연수의 개수는 4 ⇨ ❹

따라서 구하는 자연수의 개수는

$20+20+4+4=48$ ⇨ ❺

답 48

채점 기준	비율
❶ 1□□ 꼴인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20%
❷ 2□□ 꼴인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20%
❸ 30□ 꼴인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20%
❹ 31□ 꼴인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20%
❺ 320보다 작은 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20%

0094 a, n, s, w, e, r를 사전식으로 나열하면 a, e, n, r, s, w의 순이다.

a로 시작하는 것의 개수는 $5!=120$

e로 시작하는 것의 개수는 $5!=120$

na로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$

ne로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$

nra로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

따라서 a로 시작하는 것부터 nra로 시작하는 것까지의 총 개수는

$120+120+24+24+6=294$

이므로 295번째에 오는 것은

nreasw

답 ③

0095 전략 먼저 부등식을 만족시키는 $x+y$의 값을 구한다.

풀이 x, y가 자연수이므로 $x+y$도 자연수이다.

따라서 $x+y$의 값은 3, 4, 5이다.

(i) $x+y=3$일 때, x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(1, 2)$, $(2, 1)$의 2개

(ii) $x+y=4$일 때, x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 3개

(iii) $x+y=5$일 때, x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$의 4개

이상에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$2+3+4=9$

답 ④

0096 전략 한 자리 소수의 개수와 한 자리 3의 배수의 개수를 구한 후 곱의 법칙을 이용한다.

풀이 십의 자리에 올 수 있는 수는 2, 3, 5, 7의 4개

일의 자리에 올 수 있는 수는 3, 6, 9의 3개

따라서 구하는 두 자리 자연수의 개수는

$4\cdot3=12$

답 12

0097 전략 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면 A, B가 잇달아 일어나는 경우의 수는 $m\times n$임을 이용한다.

풀이 $3\cdot n\cdot5=60$

$\therefore n=4$

답 ①

0098 전략 자연수 N이 $N=x^a y^b z^c$ (x, y, z는 서로 다른 소수, a, b, c는 자연수) 꼴로 소인수분해될 때, N의 양의 약수의 개수는 $(a+1)(b+1)(c+1)$이다.

풀이 $2^3\times3^3\times5^n$의 양의 약수의 개수는

$(3+1)(3+1)(n+1)=16(n+1)$ ⇨ ❶

따라서 $16(n+1)=48$이므로 $n+1=3$

$\therefore n=2$ ⇨ ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ $2^3\times3^3\times5^n$의 양의 약수의 개수를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	80%
❷ n의 값을 구할 수 있다.	20%

0099 전략 동시에 갈 수 없는 길이면 합의 법칙을, 이어지는 길이면 곱의 법칙을 이용한다.

풀이 A도시에서 출발하여 C도시를 갔다 돌아올 때, B도시를 한 번만 지나는 방법은

$A \to B \to C \to A$, $A \to C \to B \to A$

의 두 가지 경우가 있다.

(i) $A \to B \to C \to A$로 가는 방법의 수는

$2\cdot3\cdot3=18$

(ii) $A \to C \to B \to A$로 가는 방법의 수는

$3\cdot3\cdot2=18$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$18+18=36$

답 36

0100 전략 먼저 양 끝에 소수가 오는 경우의 수를 구한다.

풀이 소수는 2, 3, 5의 3개이므로 양 끝에 소수가 오는 경우의 수는

${}_3P_2=6$

양 끝에 온 2개의 숫자를 제외한 나머지 3개의 숫자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\cdot6=36$

답 ②

0101 전략 한 개의 주사위를 두 번 던져 나오는 눈의 수의 곱으로 만들 수 있는 6의 배수는 6, 12, 18, 24, 30, 36이다.

풀이 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 곱이 6이 되는 경우는

(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)의 4개

(ii) 눈의 수의 곱이 12가 되는 경우는

(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)의 4개

(iii) 눈의 수의 곱이 18이 되는 경우는

(3, 6), (6, 3)의 2개

(iv) 눈의 수의 곱이 24가 되는 경우는

(4, 6), (6, 4)의 2개

(v) 눈의 수의 곱이 30이 되는 경우는

(5, 6), (6, 5)의 2개

(vi) 눈의 수의 곱이 36이 되는 경우는

(6, 6)의 1개

모든 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$4+4+2+2+2+1=15$

답 ③

0102 전략 두 자연수의 합이 짝수이면 두 자연수가 모두 짝수이거나 두 자연수가 모두 홀수이다.

풀이 십의 자리의 숫자를 a, 일의 자리의 숫자를 b라 할 때, $a+b=$(짝수)인 경우는 (a, b)가

(짝수, 0) 또는 (짝수, 짝수) 또는 (홀수, 홀수)

(i) (짝수, 0)인 경우

a가 될 수 있는 숫자는 2, 4, 6, 8의 4개

$\therefore 4$

(ii) (짝수, 짝수)인 경우

a가 될 수 있는 숫자는 2, 4, 6, 8의 4개

b가 될 수 있는 숫자는 2, 4, 6, 8의 4개

$\therefore 4\cdot4=16$ ⇨ ❶

(iii) (홀수, 홀수)인 경우

a가 될 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7, 9의 5개

b가 될 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7, 9의 5개

$\therefore 5\cdot5=25$ ⇨ ❷

세 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 자연수의 개수는

$4+16+25=45$ ⇨ ❸

답 45

채점 기준	비율
❶ 십의 자리의 숫자가 짝수이고, 일의 자리의 숫자가 0 또는 짝수인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40%
❷ 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자가 모두 홀수인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40%
❸ 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자의 합이 짝수인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20%

0103 전략 각각의 추는 사용하거나 사용하지 않는 2가지의 경우가 있다.

풀이 각각의 추는 사용하거나 사용하지 않는 2가지의 경우가 있으므로 모든 경우의 수는

$2\cdot2\cdot2\cdot2=16$

이때 0 g을 재는 것을 제외하므로 구하는 경우의 수는

$16-1=15$

답 15

0104 전략 각 항의 문자가 모두 다를 때, 전개식의 항의 개수는 곱해지는 각 다항식의 항의 개수의 곱과 같음을 이용한다.

풀이 $(a^2+a-1)(b^2-b+2)$에서 a^2, a, -1에 곱해지는 항이 각각 b^2, $-b$, 2의 3개이므로 항의 개수는

$3\cdot3=9$ $\therefore A=9$

$(l+m)(x+y)(p-q+r)$에서 l, m에 곱해지는 항이 각각 x, y의 2개, p, $-q$, r의 3개이므로 항의 개수는

$2\cdot2\cdot3=12$ $\therefore B=12$

$\therefore A+B=21$

답 ③

0105 전략 먼저 450을 소인수분해한 후 약수가 홀수가 되는 경우를 생각한다.

풀이 450을 소인수분해하면

$450=2\cdot3^2\cdot5^2$

이때 450의 양의 약수 중 홀수는

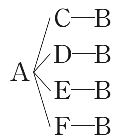
$3^m\cdot5^n$ $(m=0, 1, 2, n=0, 1, 2)$

으로 나타낼 수 있다. 이때 m, n을 택하는 방법의 수가 각각 3, 3이므로 구하는 홀수의 개수는

$3\cdot 3=9$ 답 ②

0106 전략 이동한 거리가 2인 경우와 3인 경우로 나누어 이동 경로를 수형도로 나타내어 본다.

풀이 (i) 이동한 거리가 2인 경우에 이동하는 경로는 오른쪽과 같이 4가지이다. ⇨ ❶

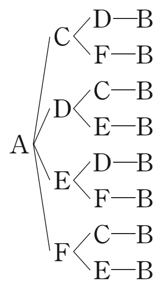


(ii) 이동한 거리가 3인 경우에 이동하는 경로는 오른쪽과 같이 8가지이다. ⇨ ❷

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$4+8=12$ ⇨ ❸

답 12



채점 기준	비율
❶ 이동한 거리가 2인 경우의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ 이동한 거리가 3인 경우의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 이동한 거리가 3 이하인 경우의 수를 구할 수 있다.	20%

0107 전략 A지점에서 B지점으로 가는 경우와 B지점에서 A지점으로 돌아오는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 A지점에서 B지점으로 가는 방법의 수는

$5\cdot 7=35$

B지점에서 P지점을 거쳐 A지점으로 가는 방법의 수는

$7\cdot 1=7$

따라서 구하는 방법의 수는

$35\cdot 7=245$

답 ⑤

0108 전략 A와 E에 다른 색을 칠하는 경우와 같은 색을 칠하는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) A와 E가 다른 색인 경우

A, E, B, C, D에 칠할 수 있는 색은 차례대로 4, 3, 2, 1, 1가지이므로

$4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1=24$ ⇨ ❶

(ii) A와 E가 같은 색인 경우

A, E, B, C, D에 칠할 수 있는 색은 차례대로 4, 1, 3, 2, 2가지이므로

$4\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 2=48$ ⇨ ❷

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$24+48=72$ ⇨ ❸

답 72

채점 기준	비율
❶ A와 E가 다른 색인 경우의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ A와 E가 같은 색인 경우의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%

0109 전략 D, E는 제외하고 A, B를 한 묶음으로 생각하여 먼저 나열한다.

풀이 A와 B를 한 묶음으로 생각하여 A, B, C, F를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$3!=6$

A와 B가 자리를 바꾸는 방법의 수는 2

위에서 나열한 문자 A, B의 묶음과 C, F의 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 D, E를 나열하는 방법의 수는

${}_4P_2=12$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot 2\cdot 12=144$ 답 ③

0110 전략 모든 경우의 수에서 양 끝에 자음이 오는 경우의 수를 뺀다.

풀이 8개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$8!=40320$

자음은 c, m, p, t, r의 5개이므로 양 끝에 자음을 나열하는 경우의 수는

${}_5P_2\cdot 6!=14400$

따라서 구하는 경우의 수는

$40320-14400=25920$ 답 25920

0111 전략 어떤 자연수가 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

풀이 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 3개를 택하였을 때, 그 합이 3의 배수가 되는 경우는

1, 2, 3 또는 1, 3, 5 또는 2, 3, 4 또는 3, 4, 5 ⇨ ❶

이때 각각에 대하여 세 자리 자연수가 되는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 3의 배수의 개수는

$4\cdot 6=24$ ⇨ ❷

답 24

채점 기준	비율
❶ 3장의 카드를 뽑았을 때, 3의 배수가 되는 경우를 구할 수 있다.	40%
❷ 3의 배수의 개수를 구할 수 있다.	60%

0112 전략 천의 자리, 백의 자리를 기준으로 나누어 생각한다.

풀이 2400보다 큰 자연수는 24□□, 3□□□, 4□□□ 꼴이다.

24□□ 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$

3□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

4□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$2+6+6=14$ 답 ②

다른풀이 모든 네 자리 자연수의 개수는 $4!=24$

1□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

21□□ 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$

23□□ 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$24-(6+2+2)=14$

0113 전략 3과 5로 모두 나누어떨어지지 않는 자연수는 3의 배수도 5의 배수도 아님을 이용한다.

풀이 1부터 100까지의 자연수 중에서 3의 배수는 33개, 5의 배수는 20개, 3과 5의 최소공배수인 15의 배수는 6개이므로 3의 배수 또는 5의 배수의 개수는

$33+20-6=47$

따라서 3과 5로 모두 나누어떨어지지 않는 자연수의 개수는

$100-47=53$

답 ③

0114 전략 이차방정식이 실근을 가지려면 판별식이 0보다 크거나 같아야 함을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 하면 $D\geq 0$이어야 하므로

$a^2-4b\geq 0 \qquad \therefore a^2\geq 4b$

이때 $a\in A$, $b\in A$이므로

(i) $a=0$일 때, $b=0$ ➡ 1개

(ii) $a=1$일 때, $b=0$ ➡ 1개

(iii) $a=2$일 때, $b=0, 1$ ➡ 2개

(iv) $a=3$일 때, $b=0, 1, 2$ ➡ 3개

(v) $a=4$일 때, $b=0, 1, 2, 3, 4$ ➡ 5개

(vi) $a=5$일 때, $b=0, 1, 2, 3, 4, 5$ ➡ 6개

이상에서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$1+1+2+3+5+6=18$

답 ④

0115 전략 사다리꼴의 윗변의 길이가 a, 아랫변의 길이가 b, 높이가 h일 때, 넓이는 $\frac{1}{2}(a+b)h$임을 이용한다.

풀이 사다리꼴의 윗변과 아랫변의 길이를 각각 a, b라 하면 넓이는 $\frac{1}{2}(a+b)\cdot 1=2$이므로

$a+b=4$

(i) $a=1$, $b=3$일 때,

$a=1$인 경우는 4가지, $b=3$인 경우는 2가지이므로

$4\cdot 2=8$(개)

(ii) $a=3$, $b=1$일 때,

$a=3$인 경우는 2가지, $b=1$인 경우는 4가지이므로

$2\cdot 4=8$(개)

(i), (ii)에서 평행사변형이 아닌 사다리꼴의 개수는

$8+8=16$

답 16

0116 전략 약수의 개수를 구하는 공식을 이용한다.

풀이 7장의 카드에 적혀 있는 숫자를 곱하여 만들 수 있는 자연수는

$2\cdot 3^3\cdot 5^2$

의 양의 약수이다.

$2\cdot 3^3\cdot 5^2$의 양의 약수는

$2^m\cdot 3^n\cdot 5^l$ $(m=0, 1, n=0, 1, 2, 3, l=0, 1, 2)$

으로 나타낼 수 있다. 이때 m, n, l을 택하는 방법의 수가 각각 2, 4, 3이고 2장 이상의 카드를 뽑아야 하므로 1은 만들 수 없다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

$2\cdot 4\cdot 3-1=23$

답 ①

0117 전략 부모가 두 좌석이 이웃한 자리에 앉는 경우와 세 좌석이 이웃한 자리에 앉는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) 부모가 두 좌석이 이웃한 자리에 앉을 때

부모가 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2!=2$

나머지 3명이 앉는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 부모가 두 좌석이 이웃한 자리에 앉는 방법의 수는

$2\cdot 6=12$

(ii) 부모가 세 좌석이 이웃한 자리에 앉을 때

부모를 한 사람으로 생각하여 자리에 앉히는 방법의 수는 2

부모가 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2!=2$

나머지 3명이 앉는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 부모가 세 좌석이 이웃한 자리에 앉는 방법의 수는

$2\cdot 2\cdot 6=24$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$12+24=36$

답 36

0118 전략 6개의 문자를 일렬로 나열하는 모든 방법의 수에서 3개의 문자 a, b, c 중에서 어느 것도 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수를 뺀다.

풀이 6개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$6!=720$ ⇨ ❶

3개의 문자 a, b, c 중에서 어느 것도 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수는 d, e, f를 일렬로 나열하고 d, e, f의 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 a, b, c를 나열하는 방법의 수와 같으므로

$3!\cdot {}_4P_3=144$ ⇨ ❷

따라서 구하는 방법의 수는

$720-144=576$ ⇨ ❸

답 576

채점 기준	비율
❶ 6개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
❷ a, b, c 중에서 어느 것도 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	50%
❸ a, b, c 중에서 적어도 2개가 이웃하도록 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%

Ⅰ. 순열과 조합

02 여러 가지 순열

0119 $(6-1)!=5!=120$ 답 120

0120 $2+3=5$이므로 5명의 학생을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$(5-1)!=4!=24$ 답 24

0121 구하는 방법의 수는 4가지 색을 원형으로 배열하는 방법의 수와 같으므로

$(4-1)!=3!=6$ 답 6

0122 (i) 서로 다른 7개의 문자 중에서 4개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수는

$_{\boxed{7}}P_{\boxed{4}}$

(ii) (i)에서 선택한 4개의 문자를 일렬로 나열하는 모든 경우를 원형으로 배열하면 같은 것이 $\boxed{4}$가지씩 있다.

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$\dfrac{_{\boxed{7}}P_{\boxed{4}}}{\boxed{4}}=\dfrac{840}{4}=\boxed{210}$

∴ (가) 7 (나) 4 (다) 4 (라) 210 답 풀이 참조

0123 $\dfrac{_8P_3}{3}=\dfrac{336}{3}=112$ 답 112

0124 $\dfrac{_6P_5}{5}=\dfrac{720}{5}=144$ 답 144

0125 $\dfrac{_7P_5}{5}=\dfrac{2520}{5}=504$ 답 504

0126 8명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(\boxed{8}-1)!=\boxed{7}!$

정사각형 모양의 탁자에 둘러앉았을 때, 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 서로 다른 경우가 $\boxed{2}$가지씩 있다.

따라서 구하는 방법의 수는 $\boxed{7}!\cdot\boxed{2}$

∴ (가) 8 (나) 7 (다) 2 답 풀이 참조

0127 $_4\Pi_2=4^2=16$ 답 16

0128 $_2\Pi_5=2^5=32$ 답 32

0129 $_3\Pi_3=3^3=27$ 답 27

0130 $_7\Pi_1=7^1=7$ 답 7

0131 $_n\Pi_3=64$이므로 $n^3=64=4^3$

∴ $n=4$ 답 4

0132 $_5\Pi_r=125$이므로 $5^r=125=5^3$

∴ $r=3$ 답 3

0133 구하는 두 자리 자연수의 개수는 1, 2, 3의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_3\Pi_2=3^2=9$ 답 9

0134 구하는 방법의 수는 참, 거짓의 2개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_2\Pi_5=2^5=32$ 답 32

0135 5개의 숫자 중 5가 2개 있으므로 구하는 방법의 수는

$\dfrac{5!}{2!}=60$ 답 60

0136 6개의 문자 중 c가 2개, s가 2개 있으므로 구하는 방법의 수는

$\dfrac{6!}{2!\cdot 2!}=180$ 답 180

0137 A에서 B까지 최단 거리로 가려면 오른쪽으로 $\boxed{3}$칸, 위쪽으로 $\boxed{2}$칸 이동해야 한다.

오른쪽으로 1칸 가는 것을 a, 위쪽으로 1칸 가는 것을 b로 나타내면 최단 거리로 가는 방법의 수는 a, a, a, $\boxed{b}$, b를 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로 구하는 방법의 수는

$\dfrac{\boxed{5}!}{3!\cdot\boxed{2}!}=\boxed{10}$

∴ (가) 3 (나) 2 (다) b (라) 5 (마) 2 (바) 10 답 풀이 참조

0138 어른 2명을 한 사람으로 생각하여 5명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(5-1)!=4!=24$

어른끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는 $24\cdot 2=48$ 답 ①

0139 D, E, F, G의 4명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$ ⇨ ❶

D, E, F, G의 사이사이의 4개의 자리에 A, B, C의 3명이 앉는 방법의 수는 $_4P_3=24$ ⇨ ❷

따라서 구하는 방법의 수는 $6\cdot 24=144$ ⇨ ❸

답 144

채점 기준	비율
❶ D, E, F, G의 4명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ A, B, C가 이웃하지 않게 앉는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 7명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%

0140 남자 4명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$

남자들 사이사이의 4개의 자리에 여자 4명을 앉히는 방법의 수는

$4!=24$

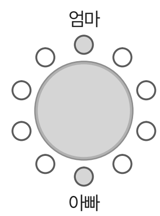
따라서 구하는 방법의 수는 $6\cdot 24=144$ 답 144

0141 유진이 아버지의 자리가 결정되면 어머니의 자리는 마주 보는 자리에 고정되므로 구하는 방법의 수는 9명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수와 같다.

$\therefore (9-1)!=8!$ 답 ③

다른풀이 유진이네 부모님이 마주 보도록 원탁에 앉은 다음, 나머지 8개의 자리에 8명을 앉히면 되므로 구하는 방법의 수는

$_8P_8=8!$



0142 가운데 삼각형을 칠하는 방법의 수는 4이고, 나머지 3개의 삼각형을 칠하는 방법의 수는

$(3-1)!=2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는 $4\cdot 2=8$ 답 ②

0143 서로 다른 6가지 색을 바람개비의 각 날개에 칠하는 방법의 수는

$(6-1)!=5!=120$ 답 120

0144 가운데 사각형을 칠하는 방법의 수는 5이고, 나머지 4개의 사각형을 칠하는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는 $5\cdot 6=30$ 답 ⑤

0145 정사각뿔의 밑면을 칠하는 방법의 수는 5이고, 4개의 옆면을 칠하는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는 $5\cdot 6=30$ 답 ④

0146 정삼각뿔의 밑면을 칠하는 방법의 수는 4이고, 밑면을 제외한 3개의 옆면을 칠하는 방법의 수는

$(3-1)!=2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는 $4\cdot 2=8$ 답 8

0147 정육면체의 한 밑면에 한 가지 색을 칠하면 다른 밑면을 칠하는 방법의 수는 5이고, 옆면을 칠하는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$

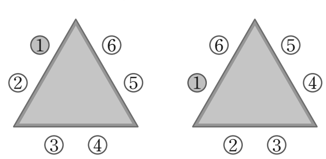
따라서 구하는 방법의 수는

$5\cdot 6=30$ 답 ④

0148 6명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$(6-1)!=5!=120$

이때 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 정삼각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 구하는 방법의 수는

$120\cdot 2=240$ 답 ④

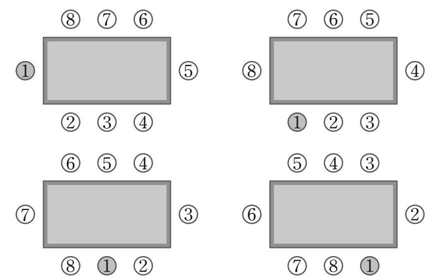
타쎈 특강 정다각형 모양의 탁자에 둘러앉는 방법의 수

정다각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우, 회전시켰을 때 겹치지 않는 자리의 수는 정다각형의 한 변에 앉는 사람의 수와 같다.

0149 8명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$(8-1)!=7!$

이때 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 4가지씩 존재한다.



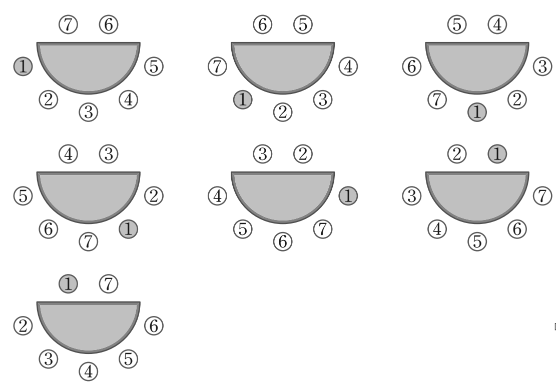
따라서 구하는 방법의 수는

$7!\cdot 4$ 답 ④

0150 7명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$(7-1)!=6!$ ⇨ ❶

이때 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 반원 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 7가지씩 존재한다.



⇨ ❷

따라서 구하는 방법의 수는 $6!\cdot 7=5040$ ⇨ ❸

답 5040

채점 기준	비율
❶ 7명을 원형으로 배열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ 회전시켰을 때 겹치지 않는 자리의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 반원 모양의 탁자에 7명이 둘러앉는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%

다른풀이 주어진 반원 모양의 탁자에 7명이 둘러 앉을 때, 회전하여 일치하는 경우가 없으므로 구하는 방법의 수는 7명을 일렬로 나열하는 방법의 수와 같다.

$\therefore 7!=5040$

0151 구하는 방법의 수는 서로 다른 3개의 여행 상품에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_3\Pi_5=3^5=243$ 답 ⑤

0152 구하는 방법의 수는 서로 다른 5개의 상자에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_5\Pi_3=5^3=125$ 답 125

0153 수현이가 시장에 들어가는 방법의 수는 2, 승민이와 준호가 시장에 들어가는 방법의 수는 서로 다른 6개의 입구에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_6\Pi_2=36$

따라서 구하는 방법의 수는

$2\cdot36=72$ 답 ③

0154 a, b, c에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수는

$_3\Pi_3=3^3=27$

(i) a를 두 번 연속하여 나열하는 방법의 수는

aab, aac, baa, caa의 4

(ii) a를 세 번 연속하여 나열하는 방법의 수는

aaa의 1

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$27-(4+1)=22$ 답 22

0155 점검표에 ○, ×, △가 표시되는 경우의 수는 ○, ×, △에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_3\Pi_5=3^5=243$ ➡ ❶

(i) ×가 0개 표시되는 경우

5개의 식당에 ○ 또는 △가 표시되는 경우의 수는

$_2\Pi_5=2^5=32$ ➡ ❷

(ii) ×가 1개 표시되는 경우

5개의 식당 중 1개는 ×가 표시되고, 4개의 식당에 ○ 또는 △가 표시되는 경우의 수는

$5\cdot{}_2\Pi_4=5\cdot2^4=80$ ➡ ❸

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$243-(32+80)=131$ ➡ ❹

답 131

채점 기준	비율
❶ 전체 경우의 수를 구할 수 있다.	20%
❷ ×가 0개 표시되는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
❸ ×가 1개 표시되는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
❹ ×가 2개 이상 표시되는 경우의 수를 구할 수 있다.	20%

0156 전구 5개를 각각 켜거나 꺼서 만들 수 있는 신호의 개수는

$_2\Pi_5=2^5=32$

이때 모든 전구가 꺼진 경우는 제외해야 하므로 구하는 신호의 개수는 $32-1=31$ 답 31

0157 두 기호를 10번 이용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$_2\Pi_{10}=2^{10}=1024$ 답 ⑤

0158 세 고대 문자를 1번 이용하여 만들 수 있는 암호의 개수는

$_3\Pi_1=3$

세 고대 문자를 2번 이용하여 만들 수 있는 암호의 개수는

$_3\Pi_2=3^2$

세 고대 문자를 3번 이용하여 만들 수 있는 암호의 개수는

$_3\Pi_3=3^3$

같은 방법으로 4번, 5번 이용하여 만들 수 있는 암호의 개수는 각각 $_3\Pi_4=3^4$, $_3\Pi_5=3^5$이므로 구하는 암호의 개수는

$3+3^2+3^3+3^4+3^5=\dfrac{3(3^5-1)}{3-1}=363$ 답 ④

타쌤 특강 등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq1)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은

$\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

0159 깃발을 한 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$_2\Pi_1=2$

깃발을 두 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$_2\Pi_2=2^2$

같은 방법으로 깃발을 세 번, 네 번, ⋯, n번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 각각 $_2\Pi_3$, $_2\Pi_4$, ⋯, $_2\Pi_n$이므로 n번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$2+2^2+2^3+\cdots+2^n=\dfrac{2(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-2$ ➡ ❶

따라서 $2^{n+1}-2\geq200$이어야 하므로 $2^{n+1}\geq202$

이때 $2^7=128$, $2^8=256$이므로

$n+1\geq8$ $\therefore n\geq7$

따라서 n의 최솟값은 7이다. ➡ ❷

답 7

채점 기준	비율
❶ 깃발을 n번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수를 구할 수 있다.	80%
❷ n의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

0160 마지막 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 3, 5의 3개

첫 번째 자리, 두 번째 자리, 세 번째 자리의 숫자를 택하는 방법의 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 비밀번호의 개수는

$3\cdot125=375$ 답 ④

0161 백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 2, 3의 3개

십의 자리의 숫자, 일의 자리의 숫자를 택하는 방법의 수는 0, 1, 2, 3의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_4\Pi_2=4^2=16$

따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$3\cdot16=48$ 답 ②

0162 천의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

$1, 2, 3, \cdots, 9$의 9개

일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

$0, 2, 4, 6, 8$의 5개

백의 자리의 숫자, 십의 자리의 숫자를 택하는 방법의 수는 $0, 1, 2, \cdots, 9$의 10개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_{10}\Pi_2=10^2=100$

따라서 구하는 짝수의 개수는

$9\cdot5\cdot100=4500$ 답 4500

0163 다섯 개의 숫자 $0, 1, 2, 3, 4$로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$4\cdot{}_5\Pi_3=4\cdot5^3=500$ ⇨ ❶

3을 제외한 4개의 숫자 $0, 1, 2, 4$로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$3\cdot{}_4\Pi_3=3\cdot4^3=192$ ⇨ ❷

따라서 구하는 자연수의 개수는

$500-192=308$ ⇨ ❸

답 308

채점 기준	비율
❶ $0, 1, 2, 3, 4$로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40%
❷ $0, 1, 2, 4$로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40%
❸ 3이 포함된 네 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20%

0164 한 자리 자연수의 개수는 4

두 자리 자연수의 개수는 $_4\Pi_2=4^2=16$

백의 자리의 숫자가 2 또는 3인 세 자리 자연수의 개수는

$2\cdot{}_4\Pi_2=2\cdot4^2=32$

백의 자리의 숫자가 4, 십의 자리의 숫자가 2인 자연수 중 423보다 작은 수는 422의 1개이다.

따라서 423보다 작은 자연수의 개수는

$4+16+32+1=53$

이므로 423은 54번째 수이다. 답 54번째

0165 X에서 Y로의 함수는 Y의 원소 $1, 2, 3$의 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 X의 원소 a, b, c, d에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

$_3\Pi_4=3^4=81$ 답 ②

0166 $f(3)=-1$이므로 Y의 원소 $-2, -1, 0, 1, 2$의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 X의 원소 1, 2에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는

$_5\Pi_2=5^2=25$ 답 ③

0167 X에서 Y로의 함수의 개수는 Y의 원소 a, b의 2개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_2\Pi_4=2^4=16$ ⇨ ❶

(i) 치역이 $\{a\}$인 경우의 함수의 개수는 1 ⇨ ❷

(ii) 치역이 $\{b\}$인 경우의 함수의 개수는 1 ⇨ ❸

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$16-(1+1)=14$ ⇨ ❹

답 14

채점 기준	비율
❶ X에서 Y로의 함수의 개수를 구할 수 있다.	50%
❷ 치역이 $\{a\}$인 경우의 함수의 개수를 구할 수 있다.	20%
❸ 치역이 $\{b\}$인 경우의 함수의 개수를 구할 수 있다.	20%
❹ 공역과 치역이 일치하는 함수의 개수를 구할 수 있다.	10%

0168 $f(b)\neq7$이므로 $f(b)$의 값이 될 수 있는 수는 7을 제외한 4개이고, $f(d)\neq1$이므로 $f(d)$의 값이 될 수 있는 수는 1을 제외한 4개이다.

또 Y의 원소 $1, 3, 5, 7, 9$의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 X의 원소 a, c에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

$4\cdot4\cdot{}_5\Pi_2=4^2\cdot5^2=400$ 답 400

다른풀이 X에서 Y로의 함수의 개수는

$_5\Pi_4=5^4=625$

$f(b)=7$ 또는 $f(d)=1$을 만족시키는 함수의 개수는

$_5\Pi_3+{}_5\Pi_3-{}_5\Pi_2=5^3+5^3-5^2=225$

따라서 구하는 함수의 개수는 $625-225=400$

0169 양 끝에 2개의 r를 나열하고 2개의 r를 제외한 6개의 문자 t, e, e, a, s, u를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{6!}{2!}=360$ 답 ③

0170 모음 a, a, i를 한 문자 A로 생각하여 7개의 문자 A, s, s, s, t, t, n을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{7!}{3!\cdot2!}=420$

이때 모음끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는

$\dfrac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 방법의 수는

$420\cdot3=1260$ 답 ④

0171 (i) y와 y 사이에 2개의 문자가 놓이는 경우

ⓘ y, x, x, y를 한 문자 A로 생각하여 A, x, z를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!=6$

ⓘⓘ y, x, z, y를 한 문자 A로 생각하여 A, x, x를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\dfrac{3!}{2!}=3$

이때 y와 y 사이의 x, z가 자리를 바꾸는 방법의 수는 2이므로 $3\cdot2=6$

ⓘ, ⓘⓘ에서 y와 y 사이에 2개의 문자가 놓이도록 나열하는 방법의 수는 $6+6=12$

(ii) y와 y 사이에 4개의 문자가 놓이는 경우

y와 y 사이에 x, x, x, z를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{4!}{3!}=4$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$12+4=16$ 답 ②

다른풀이 x, x, x, z의 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

x, x, x, z를

❶ x ❷ x ❸ x ❹ z ❺

와 같이 나열한 후 ❶, ❷, ❸, ❹, ❺의 5개의 자리 중 y와 y 사이에 짝수 개의 문자가 놓이도록 y가 놓일 두 자리를 선택하는 경우는

❶과 ❸, ❶과 ❺, ❷와 ❹, ❸과 ❺의 4가지

따라서 구하는 방법의 수는 $4\cdot4=16$

0172 (i) o끼리 이웃하는 경우

2개의 o를 한 문자 A로 생각하여 6개의 문자 A, p, i, i, n, n을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{6!}{2!\cdot2!}=180$

(ii) n끼리 이웃하는 경우

2개의 n을 한 문자 B로 생각하여 6개의 문자 B, o, o, p, i, i를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{6!}{2!\cdot2!}=180$

(iii) o끼리, n끼리 이웃하는 경우

2개의 o, 2개의 n을 각각 한 문자 A, B로 생각하여 5개의 문자 A, B, p, i, i를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

이상에서 구하는 방법의 수는

$180+180-60=300$ 답 300

0173 (i) 맨 앞자리의 숫자가 1인 경우

5개의 숫자 0, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

(ii) 맨 앞자리의 숫자가 2인 경우

5개의 숫자 0, 1, 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

(iii) 맨 앞자리의 숫자가 3인 경우

5개의 숫자 0, 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{2!\cdot2!}=30$

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$60+60+30=150$ 답 ④

다른풀이 6개의 숫자 0, 1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\frac{6!}{2!\cdot2!}=180$

이때 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 5개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$\frac{5!}{2!\cdot2!}=30$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$180-30=150$

0174 (i) 일의 자리의 숫자가 2인 경우

4개의 숫자 1, 2, 3, 4를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$4!=24$

(ii) 일의 자리의 숫자가 4인 경우

4개의 숫자 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$24+12=36$ 답 ②

0175 십만의 자리, 천의 자리, 십의 자리에 소수 2, 2, 5를 나열하는 방법의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

나머지 자리에 1, 1, 1, 4를 나열하는 방법의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

따라서 구하는 경우의 수는 $3\cdot4=12$ 답 12

0176 5개의 숫자 5, 7, 7, 9, 9에서 4개를 택하는 서로 다른 경우는

5, 7, 7, 9 또는 5, 7, 9, 9 또는 7, 7, 9, 9

(i) 5, 7, 7, 9를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$ ⇨ ❶

(ii) 5, 7, 9, 9를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$ ⇨ ❷

(iii) 7, 7, 9, 9를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{4!}{2!\cdot2!}=6$ ⇨ ❸

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$12+12+6=30$ ⇨ ❹

답 30

채점 기준	비율
❶ 5, 7, 7, 9로 만들 수 있는 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30%
❷ 5, 7, 9, 9로 만들 수 있는 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30%
❸ 7, 7, 9, 9로 만들 수 있는 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30%
❹ 모든 자연수의 개수를 구할 수 있다.	10%

0177 c, a의 순서가 정해져 있으므로 c, a를 모두 x로 생각하여 4개의 문자 x, b, x, d를 일렬로 나열한 후 첫 번째 x는 c, 두 번째 x는 a로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$ 답 ③

0178 모음 e, e, i를 한 문자로 생각하고, 자음 g, r, t, n, g를 다른 한 문자로 생각하였을 때, 모음이 자음보다 앞에 오도록 나열하는 방법의 수는 1

이때 모음끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

또 자음끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $\frac{5!}{2!}=60$

따라서 구하는 방법의 수는

$1\cdot3\cdot60=180$ 답 ②

0179 s, m과 d, w의 순서가 각각 정해져 있으므로 s, m을 모두 x로, d, w를 모두 y로 생각하여 6개의 문자 y, i, x, y, o, x를 일렬로 나열한 후 첫 번째 x는 s, 두 번째 x는 m, 첫 번째 y는 d, 두 번째 y는 w로 바꾸면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는

$\dfrac{6!}{2!\cdot 2!}=180$

답 180

0180 2, 3, 4의 순서가 정해져 있으므로 2, 3, 4를 모두 0으로 생각하여 6개의 숫자 1, 1, 0, 0, 0, 5를 일렬로 나열한 후, 첫 번째 0은 4, 두 번째 0은 3, 세 번째 0은 2로 바꾸면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는

$\dfrac{6!}{2!\cdot 3!}=60$

답 ②

0181 A에서 P까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

P에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}=10$

따라서 A에서 P를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$6\cdot 10=60$

답 ②

참고 오른쪽으로 한 칸 움직이는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 움직이는 것을 b라 하면 A에서 P까지 최단 거리로 가는 방법의 수는 a, a, b, b를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같다.

0182 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\dfrac{7!}{4!\cdot 3!}=35$

답 ③

0183 A에서 P까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\dfrac{6!}{4!\cdot 2!}=15$ ⇨ ❶

$\overline{PQ}$를 거치는 방법의 수는 1

Q에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\dfrac{4!}{3!}=4$ ⇨ ❷

따라서 구하는 방법의 수는

$15\cdot 1\cdot 4=60$ ⇨ ❸

답 60

채점 기준	비율
❶ A에서 P까지 최단 거리로 가는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ Q에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ $\overline{PQ}$를 거쳐 가는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%

0184 (i) A에서 P까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

(ii) P에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\dfrac{6!}{3!\cdot 3!}=20$

P에서 Q를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$2\cdot \dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=12$

이므로 P에서 Q를 거치지 않고 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

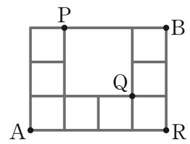
$20-12=8$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$6\cdot 8=48$

답 ①

0185 오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법은



A → P → B, A → Q → B,
A → R → B

(i) A → P → B로 가는 방법의 수: $\dfrac{4!}{3!}\cdot 1=4$

(ii) A → Q → B로 가는 방법의 수: $\dfrac{4!}{3!}\cdot\dfrac{3!}{2!}=4\cdot 3=12$

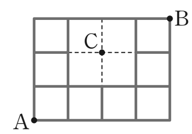
(iii) A → R → B로 가는 방법의 수: $1\cdot 1=1$

이상에서 구하는 방법의 수는

$4+12+1=17$

답 ②

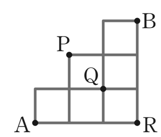
다른풀이 오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하고 지점 C를 잡으면 구하는 방법의 수는 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수에서 A에서 C를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수를 뺀 것과 같다.



$\therefore \dfrac{7!}{4!\cdot 3!}-\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\dfrac{3!}{2!}$

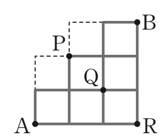
$=35-6\cdot 3=17$

0186 오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법은



A → P → B, A → Q → B,
A → R → B

(i) A → P → B로 가는 방법의 수
: 오른쪽 그림과 같이 길을 점선으로 연결하여 생각하면



$\left(\dfrac{3!}{2!}-1\right)\left(\dfrac{3!}{2!}-1\right)=4$

(ii) A → Q → B로 가는 방법의 수: $\dfrac{3!}{2!}\cdot\dfrac{3!}{2!}=9$

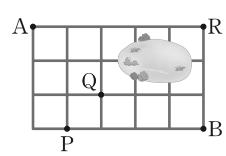
(iii) A → R → B로 가는 방법의 수: $1\cdot 1=1$

이상에서 구하는 방법의 수는

$4+9+1=14$

답 14

0187 오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법은



A → P → B, A → Q → B,
A → R → B

(i) A → P → B로 가는 방법의 수: $\dfrac{4!}{3!}\cdot 1=4$

(ii) A → Q → B로 가는 방법의 수: $\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\dfrac{4!}{3!}=24$

(iii) A → R → B로 가는 방법의 수: $1\cdot 1=1$

이상에서 구하는 방법의 수는

$4+24+1=29$

답 ③

0188 전략 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는 ${}_n\Pi_r$임을 이용한다.

풀이 구하는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$ 답 ④

0189 전략 5의 배수의 일의 자리의 숫자는 0 또는 5이다.

풀이 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

0, 5의 2개

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 방법의 수는 5개의 숫자 0, 2, 3, 5, 7로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수와 같으므로

$4\cdot{}_5\Pi_2=4\cdot5^2=100$

따라서 구하는 방법의 수는

$2\cdot100=200$ 답 ⑤

0190 전략 5개의 숫자 중 같은 것이 몇 개씩 있는지 알아본다.

풀이 5개의 숫자 4, 4, 5, 6, 6을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{5!}{2!\cdot2!}=30$ 답 30

0191 전략 한 쌍의 부부를 한 사람으로 생각한다.

풀이 세 쌍의 부부를 각각 한 사람으로 생각하여 3명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(3-1)!=2!=2$

각 부부의 남녀끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2!\cdot2!\cdot2!=8$

따라서 구하는 방법의 수는

$2\cdot8=16$ 답 ③

0192 전략 먼저 기준이 되는 영역을 칠하는 방법의 수를 구한다.

풀이 작은 원을 칠하는 방법의 수는 6이고, 나머지 5개의 영역을 칠하는 방법의 수는

$(5-1)!=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot24=144$ 답 ④

0193 전략 먼저 두 밑면을 칠하는 방법의 수를 구한다.

풀이 정오각뿔대의 두 밑면을 칠하는 방법의 수는

${}_7P_2=42$ ⇨ ❶

두 밑면에 칠한 2가지 색을 제외한 5가지의 색을 옆면에 칠하는 방법의 수는

$(5-1)!=4!=24$ ⇨ ❷

따라서 구하는 방법의 수는

$42\cdot24=1008$ ⇨ ❸

답 1008

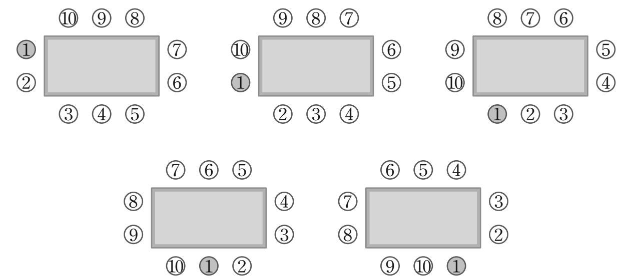
채점 기준	비율
❶ 두 밑면을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
❷ 옆면을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 정오각뿔대의 각 면을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%

0194 전략 원형으로 배열한 후, 서로 구별되는 자리의 수를 세어 본다.

풀이 10명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

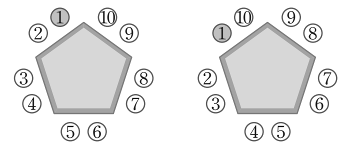
$(10-1)=9!$

이때 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 5가지씩 존재한다.



$\therefore\ a=9!\cdot5$

한편 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 정오각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



$\therefore\ b=9!\cdot2$

따라서 구하는 값은

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{9!\cdot2}{9!\cdot5}=\dfrac{2}{5}$

답 $\dfrac{2}{5}$

0195 전략 네 자리 중 첫 번째 자리를 제외한 나머지 세 자리를 정하는 방법의 수는 중복순열의 수를 이용한다.

풀이 첫 번째 자리에 올 수 있는 것은

2, 4, 6의 3개

나머지 자리를 정하는 방법의 수는 2, 4, 6, a, b의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 암호의 개수는

$3\cdot125=375$

답 375

0196 전략 함수의 개수는 중복순열의 수, 일대일함수의 개수는 순열의 수를 이용한다.

풀이 집합 A에서 집합 B로의 함수의 개수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$ $\quad\therefore\ m=64$ ⇨ ❶

일대일함수의 개수는

${}_4P_3=24$ $\quad\therefore\ n=24$ ⇨ ❷

$\therefore\ m+n=88$ ⇨ ❸

답 88

채점 기준	비율
❶ m의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	20%

0197 전략 자음과 모음을 각각 한 문자로 생각한다.

풀이 자음 h, p, p, n, s, s를 한 문자로 생각하고, 모음 a, i, e를 다른 한 문자로 생각하였을 때, 자음이 모음보다 앞에 오도록 나열하는 방법의 수는 1

이때 자음끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는

$\frac{6!}{2!\cdot 2!}=180$

또 모음끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$1\cdot 180\cdot 6=1080$ 답 ②

0198 전략 홀수가 홀수 번째에 나열되면 짝수는 짝수 번째에 나열된다.

풀이 다음 그림에서 짝수 2, 4, 4는 △의 자리에, 홀수 3, 3, 5, 7은 ○의 자리에 놓이게 된다.

○△○△○△○

이때 3개의 숫자 2, 4, 4를 △의 자리에 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

4개의 숫자 3, 3, 5, 7을 ○의 자리에 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

따라서 구하는 방법의 수는

$3\cdot 12=36$ 답 36

0199 전략 A에서 P까지 최단 거리로 가는 방법의 수와 P에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수를 각각 구한 후, 곱의 법칙을 이용한다.

풀이 A에서 P까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

P에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

따라서 A에서 P를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$3\cdot 6=18$ 답 ②

0200 전략 세 문자에서 중복을 허용하여 3, 4, 5, 6개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수를 각각 구한다.

풀이 (i) 세 문자에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수는

${}_3\Pi_3=3^3$

(ii) 세 문자에서 4개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수는

${}_3\Pi_4=3^4$

같은 방법으로 5, 6개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수는 각각

${}_3\Pi_5=3^5$, ${}_3\Pi_6=3^6$

이므로 구하는 방법의 수는

$3^3+3^4+3^5+3^6=\frac{3^3(3^4-1)}{3-1}=\frac{3^7-3^3}{2}$ 답 ①

0201 전략 3개의 숫자 1, 2, 3에서 중복을 허용하여 4개를 택할 때, 2와 3이 모두 포함되는 경우를 나누어 생각해 본다.

풀이 3개의 숫자 1, 2, 3에서 중복을 허용하여 4개를 택할 때, 2와 3이 모두 포함되는 경우는

1, 1, 2, 3 또는 1, 2, 2, 3 또는 1, 2, 3, 3

또는 2, 2, 3, 3 또는 2, 2, 2, 3 또는 2, 3, 3, 3

(i) 1, 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

(ii) 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

(iii) 1, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

(iv) 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

(v) 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$

(vi) 2, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$

이상에서 구하는 방법의 수는

$12+12+12+6+4+4=50$ 답 ④

다른풀이 3개의 숫자 1, 2, 3으로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는 ${}_3\Pi_4=3^4=81$

1과 2로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는 ${}_2\Pi_4=2^4=16$

1과 3으로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는 ${}_2\Pi_4=2^4=16$

이때 1로만 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는 1이므로 구하는 자연수의 개수는

$81-(16+16-1)=50$

0202 전략 전체 경우의 수에서 양 끝에 서로 같은 문자를 나열하는 경우의 수를 뺀다.

풀이 7개의 문자 A, A, A, B, B, C, D를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{7!}{3!\cdot 2!}=420$

(i) 양 끝에 A가 놓이는 경우

나머지 문자 A, B, B, C, D를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

(ii) 양 끝에 B가 놓이는 경우

나머지 문자 A, A, A, C, D를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

따라서 구하는 방법의 수는

$420-(60+20)=340$ 답 340

0203 전략 먼저 1 또는 2의 합으로 5가 되는 경우를 찾는다.

풀이 1 또는 2의 합으로 5가 되는 경우는

2, 2, 1 또는 2, 1, 1, 1 또는 1, 1, 1, 1, 1

(i) 2칸, 2칸, 1칸을 올라가는 경우

3개의 숫자 2, 2, 1을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

(ii) 2칸, 1칸, 1칸, 1칸을 올라가는 경우

4개의 숫자 2, 1, 1, 1을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

(iii) 1칸, 1칸, 1칸, 1칸, 1칸을 올라가는 경우

5개의 숫자 1, 1, 1, 1, 1을 일렬로 나열하는 방법의 수는 1

이상에서 구하는 방법의 수는

$3+4+1=8$ 답 8

I. 순열과 조합

03 조합

0204 ${}_4C_2=\dfrac{{}_4P_2}{2!}=\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$ 답 6

0205 ${}_7C_3=\dfrac{{}_7P_3}{3!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$ 답 35

0206 ${}_5C_0=1$ 답 1

0207 ${}_{10}C_{10}=1$ 답 1

0208 ${}_nC_2=10$에서 $\dfrac{n(n-1)}{2\cdot1}=10$
$n(n-1)=5\cdot4$ $\therefore n=5$ 답 5

0209 ${}_nC_3=4$에서 $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=4$
$n(n-1)(n-2)=4\cdot3\cdot2$ $\therefore n=4$ 답 4

0210 ${}_6C_r=20$에서 $\dfrac{6!}{r!(6-r)!}=20$
$6!=20\cdot r!(6-r)!,$ $6\cdot3\cdot2\cdot1=r!(6-r)!$
$3!3!=r!(6-r)!$ $\therefore r=3$ 답 3

0211 ${}_8C_r=56$에서 $\dfrac{8!}{r!(8-r)!}=56$
$8!=56\cdot r!(8-r)!,$ $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=r!(8-r)!$
$5!3!=r!(8-r)!$ $\therefore r=3$ 또는 $r=5$
답 3 또는 5

0212 ${}_nC_7={}_nC_5$에서 $5=n-7$
$\therefore n=12$ 답 12

0213 ${}_nC_9={}_nC_6$에서 $6=n-9$
$\therefore n=15$ 답 15

0214 ${}_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$ 답 10

0215 ${}_8C_3=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$ 답 56

0216 ${}_7C_4={}_7C_3=\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$ 답 35

0217 ${}_6C_3=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$ 답 20

0218 2, 4, 6, 8, 10의 짝수가 각각 하나씩 적힌 5장의 카드 중에서 3장의 카드를 뽑으면 되므로 구하는 방법의 수는

${}_5C_3=\dfrac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}=10$ 답 10

0219 ${}_5H_2={}_6C_2=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$ 답 15

0220 ${}_4H_6={}_9C_6={}_9C_3=\dfrac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$ 답 84

0221 ${}_7H_0={}_6C_0=1$ 답 1

0222 ${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$ 답 10

0223 ${}_9H_4={}_{12}C_4$이므로 $n=12$ 답 12

0224 ${}_2H_6={}_7C_6={}_7C_1$이므로 $n=7$ 답 7

0225 ${}_5H_r={}_{5+r-1}C_r={}_{4+r}C_r$이므로
${}_{4+r}C_r={}_7C_3$ $\therefore r=3$ 답 3

0226 ${}_3H_r={}_{3+r-1}C_r={}_{2+r}C_r$이므로
${}_{2+r}C_r={}_6C_2={}_6C_4$
$\therefore r=4$ 답 4

0227 4명의 학생에게 7자루의 펜을 나누어 주는 방법의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4H_7={}_{10}C_7={}_{10}C_3=120$ 답 120

0228 3종류의 주스 중 5개의 주스를 고르는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$ 답 21

0229 모양이 서로 다른 6개의 상자에 3개의 같은 물건을 넣는 방법의 수는 서로 다른 6개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_6H_3={}_8C_3=56$ 답 56

0230 주어진 방정식의 음이 아닌 정수인 해를 (x, y, z)라 하자. 이때
$(1, 2, 2) \longrightarrow xyyzz$
$\boxed{(1, 3, 1)} \longrightarrow xyyyz$
$(0, 4, 1) \longrightarrow yyyyz$
와 같은 대응을 생각하면 구하는 해의 개수는 3개의 문자 x, y, z 중에서 중복을 허용하여 $\boxed{5}$개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
$\therefore {}_{\boxed{3}}H_{\boxed{5}}={}_7C_5={}_7C_2=\boxed{21}$
$\therefore$ (가) $(1, 3, 1)$ (나) 5 (다) 3 (라) 5 (마) 21
답 풀이 참조

0231 플루트 연주자 5명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는
${}_5C_3={}_5C_2=10$
바이올린 연주자 6명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는
${}_6C_2=15$
따라서 구하는 방법의 수는 $10\cdot15=150$
답 ②

0232 배우 10명 중에서 주연 1명을 뽑는 방법의 수는

$_{10}C_1=10$

나머지 배우 9명 중에서 조연 3명을 뽑는 방법의 수는

$_9C_3=84$

따라서 구하는 방법의 수는

$10\cdot84=840$ 답 840

0233 디자이너 5명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$

교사 n명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 $_nC_3$

따라서 $10+{}_nC_3=66$이므로 $_nC_3=56$

$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=56$

$n(n-1)(n-2)=8\cdot7\cdot6$

$\therefore n=8$ 답 ①

0234 세 수의 합이 홀수가 되기 위해서는 세 수 모두 홀수이거나 하나는 홀수, 두 개는 짝수이어야 한다.

(i) 세 수 모두 홀수인 경우

1, 3, 5, 7, 9가 적힌 5장의 카드 중에서 3장을 뽑는 경우의 수는

$_5C_3=10$ ⇨ ❶

(ii) 하나는 홀수, 두 개는 짝수인 경우

1, 3, 5, 7, 9가 적힌 5장의 카드 중에서 1장을 뽑고 2, 4, 6, 8이 적힌 4장의 카드 중에서 2장을 뽑는 경우의 수는

$_5C_1\cdot{}_4C_2=30$ ⇨ ❷

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$10+30=40$ ⇨ ❸

답 40

채점 기준	비율
❶ 홀수가 적힌 카드 3장을 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ 홀수가 적힌 카드 1장, 짝수가 적힌 카드 2장을 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 카드에 적힌 수의 총합이 홀수가 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	20%

0235 $_nC_2+{}_{n-1}C_2={}_{n+2}C_2$에서

$\frac{n(n-1)}{2\cdot1}+\frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot1}=\frac{(n+2)(n+1)}{2\cdot1}$

$n(n-1)+(n-1)(n-2)=(n+2)(n+1)$

$(n-1)(n+n-2)=(n+2)(n+1)$

$(n-1)(2n-2)=(n+2)(n+1)$

$2n^2-4n+2=n^2+3n+2$

$n^2-7n=0,\quad n(n-7)=0$

$\therefore n=7$ ($\because$ n은 자연수) 답 ②

0236 $_8C_r={}_8C_{r-4}$에서

$r=r-4$ 또는 $r+r-4=8$

(i) $r=r-4$에서 $0\neq-4$이므로 r의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $r+r-4=8$에서 $2r=12$

$\therefore r=6$

(i), (ii)에서 자연수 r의 값은 6이다. 답 6

0237 $_{11}C_5+{}_{11}C_6=\frac{11!}{5!6!}+\frac{11!}{6!5!}=2\cdot\frac{11!}{5!6!}$

$=2\cdot\frac{6\cdot11!}{6\cdot5!6!}=\frac{12!}{6!6!}$

$={}_{12}C_6$

답 ⑤

0238 $_nC_r=\frac{_nP_r}{r!}$이므로

$35=\frac{210}{r!},\quad r!=6=3\cdot2\cdot1$

$\therefore r=3$

또 $_nP_3=210=7\cdot6\cdot5$에서 $n=7$

$\therefore n+r=10$ 답 ③

0239 $_nC_{n-r}=\frac{n!}{(n-r)!\{n-(\boxed{n-r})\}!}$

$=\frac{n!}{(n-r)!\boxed{r!}}$

$={}_nC_r$

$\therefore {}_nC_r={}_nC_{n-r}$

$\therefore$ (가) $n-r$ (나) $r!$ 답 풀이 참조

0240 $n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}=n\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$=n\cdot\frac{\boxed{(n-1)!}}{(r-1)!(n-r)!}$

$=\frac{\boxed{n!}}{(r-1)!(n-r)!}$

$=\frac{r\cdot n!}{r(r-1)!(n-r)!}$

$=\frac{r\cdot n!}{\boxed{r!}(n-r)!}$

$=r\cdot{}_nC_r$

$\therefore$ (가) $(n-1)!$ (나) $n!$ (다) $r!$ 답 ④

0241 구하는 방법의 수는 3학년 선수를 제외한 6명의 선수 중에서 3명을 뽑는 방법의 수와 같으므로

$_6C_3=20$ 답 ③

0242 구하는 방법의 수는 특정한 남학생 1명을 제외한 3명의 남학생 중에서 2명을 뽑고, 특정한 여학생 2명을 제외한 4명의 여학생 중에서 2명을 뽑는 방법의 수와 같으므로

$_3C_2\cdot{}_4C_2=3\cdot6=18$ 답 18

0243 구하는 경우의 수는 A, B, C를 제외한 7명의 학생 중에서 5명의 위원을 선출하는 경우의 수와 같으므로

$_7C_5={}_7C_2=21$ 답 ③

0244 구하는 경우의 수는 민정이와 지훈이를 제외한 7명의 회원 중에서 3명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$_7C_3=35$ 답 35

0245 녹차 아이스크림과 딸기 아이스크림 중에서 한 가지 아이스크림을 고르는 방법의 수는

$_{2}C_{1}=2$

녹차와 딸기 아이스크림을 제외한 6가지 아이스크림 중에서 4가지 아이스크림을 고르는 방법의 수는

$_{6}C_{4}={_{6}C_{2}}=15$

따라서 구하는 방법의 수는 $2\cdot 15=30$

답 ③

0246 9명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는

$_{9}C_{4}=126$

안전 요원만 4명을 뽑는 방법의 수는 $_{4}C_{4}=1$

어린이만 4명을 뽑는 방법의 수는 $_{5}C_{4}={_{5}C_{1}}=5$

따라서 구하는 방법의 수는 $126-1-5=120$

답 120

0247 10가지 종류의 제품 중에서 4가지를 택하는 방법의 수는

$_{10}C_{4}=210$ ⇨ ❶

(i) B회사 제품이 하나도 포함되지 않은 경우

A회사, C회사 제품 중에서 4가지를 택하는 방법의 수는

$_{5}C_{4}={_{5}C_{1}}=5$ ⇨ ❷

(ii) B회사 제품이 1가지 포함되는 경우

B회사 제품 중에서 1가지를 택하고 A회사, C회사 제품 중에서 3가지를 택하는 방법의 수는

$_{5}C_{1}\cdot{_{5}C_{3}}=50$ ⇨ ❸

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$210-(5+50)=155$ ⇨ ❹

답 155

채점 기준	비율
❶ 10가지 제품 중에서 4가지를 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%
❷ A회사, C회사 제품 중에서 4가지를 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
❸ B회사 제품 중에서 1가지, A회사, C회사 제품 중에서 3가지를 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
❹ B회사 제품이 적어도 2가지 포함되도록 하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%

0248 12명의 무용수 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

$_{12}C_{3}=220$

남자 무용수를 n명이라 하면 남자 무용수만 3명을 뽑는 방법의 수는

$_{n}C_{3}$

이때 여자 무용수를 적어도 한 명 포함하도록 뽑는 방법의 수가 210이므로

$220-{_{n}C_{3}}=210,\quad {_{n}C_{3}}=10$

$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}=10$

$n(n-1)(n-2)=5\cdot 4\cdot 3\quad \therefore n=5$

따라서 남자 무용수가 5명이므로 여자 무용수는

$12-5=7$(명)

답 ⑤

0249 5개의 실내 놀이기구 중에서 3개를 고르는 방법의 수는

$_{5}C_{3}={_{5}C_{2}}=10$

4개의 야외 놀이기구 중에서 2개를 고르는 방법의 수는

$_{4}C_{2}=6$

5개의 놀이기구를 타는 방법의 수는 $5!=120$

따라서 구하는 방법의 수는

$10\cdot 6\cdot 120=7200$

답 ④

0250 6가지 과일 중에서 3가지를 뽑는 방법의 수는

$_{6}C_{3}=20$

3개를 일렬로 진열하는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는 $20\cdot 6=120$

답 ⑤

다른풀이 6가지 과일 중에서 3가지를 뽑아 일렬로 진열하는 방법의 수는

$_{6}P_{3}=6\cdot 5\cdot 4=120$

0251 3, 6을 제외한 4개의 숫자 중에서 3개를 택하는 방법의 수는 $_{4}C_{3}={_{4}C_{1}}=4$

4개를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $4\cdot 24=96$

답 96

0252 8명 중 4명을 뽑는 방법의 수는 $_{8}C_{4}=70$

4명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는 $70\cdot 6=420$

답 ④

0253 7가지 색 중에서 5가지 색을 고르는 방법의 수는

$_{7}C_{5}={_{7}C_{2}}=21$ ⇨ ❶

5가지 색 중에서 가운데 사각형에 칠할 색을 고르는 방법의 수는

$_{5}C_{1}=5$

가운데 사각형에 칠한 색을 제외한 4가지 색으로 4개의 삼각형을 칠하는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$ ⇨ ❷

따라서 구하는 방법의 수는 $21\cdot 5\cdot 6=630$ ⇨ ❸

답 630

채점 기준	비율
❶ 영역에 색칠할 5가지 색을 고르는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
❷ 5개의 영역에 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	60%
❸ 도형을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	10%

다른풀이 7가지 색 중에서 가운데 사각형에 칠할 색을 고르는 방법의 수는

$_{7}C_{1}=7$

나머지 6가지 색 중에서 4가지 색을 고르는 방법의 수는

$_{6}C_{4}={_{6}C_{2}}=15$

4가지 색으로 4개의 삼각형을 칠하는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는 $7\cdot 15\cdot 6=630$

0254 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는 8개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수와 같으므로

$_8C_2=28$ 답 ①

0255 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수와 같으므로

$_5C_2=10$

답 10

0256 10개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_{10}C_2=45$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_5C_2=10$

이때 한 직선 위에 5개의 점이 있는 직선은 2개이므로 구하는 직선의 개수는

$45-2\cdot10+2=27$

답 ②

다른풀이 두 직선 위의 점을 하나씩 택하여 연결하면 한 개의 직선을 만들 수 있으므로

$_5C_1\cdot{}_5C_1=25$

또 주어진 직선 위의 5개의 점으로 만들 수 있는 서로 다른 직선은 각각 한 개이므로 구하는 직선의 개수는

$25+2=27$

참고 한 직선 위에 있는 서로 다른 n개의 점으로 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는 1임에 유의한다.

0257 구하는 대각선의 개수는 9개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 방법의 수에서 구각형의 변의 개수인 9를 뺀 것과 같으므로

$_9C_2-9=27$

답 ②

0258 n각형의 대각선의 개수는 n개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 방법의 수에서 변의 개수인 n을 뺀 것과 같으므로

$_nC_2-n=54,\quad \dfrac{n(n-1)}{2\cdot1}-n=54$

$n^2-3n-108=0,\quad (n+9)(n-12)=0$

$\therefore n=12\ (\because n\geq3)$

따라서 십이각형의 꼭짓점의 개수는 12이다.

답 ③

0259 7개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_7C_3=35$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_4C_3={}_4C_1=4$

이때 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$35-4=31$ 답 31

0260 주어진 8개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 구하는 삼각형의 개수는 8개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수와 같다.

$\therefore {}_8C_3=56$

답 ③

0261 직선 l 위의 3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_3C_2=3$

직선 m 위의 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_4C_2=6$

따라서 구하는 사각형의 개수는 $3\cdot6=18$ 답 ⑤

다른풀이 7개의 점 중에서 4개를 택하는 방법의 수는

$_7C_4=35$

직선 l 위의 점 중에서 3개를 택하고, 직선 m 위의 점 중에서 1개를 택하는 방법의 수는

$_3C_3\cdot{}_4C_1=4$

직선 m 위의 점 중에서 3개를 택하고, 직선 l 위의 점 중에서 1개를 택하는 방법의 수는

$_4C_3\cdot{}_3C_1=12$

직선 m 위의 점 중에서 4개를 택하는 방법의 수는

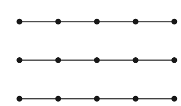
$_4C_4=1$

따라서 구하는 방법의 수는

$35-(4+12+1)=18$

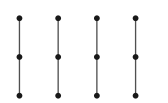
0262 15개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_{15}C_3=455$



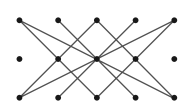
(i) 오른쪽 그림과 같이 가로 방향의 한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$3\cdot{}_5C_3=30$



(ii) 오른쪽 그림과 같이 세로 방향의 한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$5\cdot{}_3C_3=5$



(iii) 오른쪽 그림과 같이 대각선 방향의 한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$8\cdot{}_3C_3=8$

이상에서 구하는 삼각형의 개수는

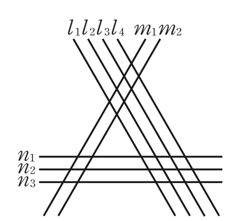
$455-(30+5+8)=412$ 답 ④

0263 가로로 나열된 5개의 평행한 직선 중에서 2개, 세로로 나열된 3개의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 결정된다.

따라서 구하는 평행사변형의 개수는

$_5C_2\cdot{}_3C_2=10\cdot3=30$ 답 ②

0264 오른쪽 그림과 같이 평행한 직선을 l_i, m_j, n_k ($i=1, 2, 3, 4$, $j=1, 2$, $k=1, 2, 3$)라 하자.



(i) l_1, l_2, l_3, l_4 중에서 2개를 택하고, m_1, m_2를 택하는 경우

$_4C_2\cdot{}_2C_2=6\cdot1=6$ ⇨ ❶

(ii) m_1, m_2를 택하고, n_1, n_2, n_3 중에서 2개를 택하는 경우

$_2C_2\cdot{}_3C_2=1\cdot3=3$ ⇨ ❷

(iii) n_1, n_2, n_3 중에서 2개를 택하고, l_1, l_2, l_3, l_4 중에서 2개를 택하는 경우

$_3C_2\cdot{}_4C_2=3\cdot6=18$ ⇨ ❸

이상에서 구하는 평행사변형의 개수는

$6+3+18=27$ ⇨ ❹

답 27

채점 기준	비율
❶ 4개의 평행한 직선과 2개의 평행한 직선으로 만들어지는 평행사변형의 개수를 구할 수 있다.	30%
❷ 2개의 평행한 직선과 3개의 평행한 직선으로 만들어지는 평행사변형의 개수를 구할 수 있다.	30%
❸ 3개의 평행한 직선과 4개의 평행한 직선으로 만들어지는 평행사변형의 개수를 구할 수 있다.	30%
❹ 모든 평행사변형의 개수를 구할 수 있다.	10%

0265 가로로 나열된 4개의 평행한 직선 중에서 2개, 세로로 나열된 6개의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 결정되므로 직사각형의 총 개수는

$_4C_2 \cdot {_6C_2}=6 \cdot 15=90$

(ⅰ) 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는 15

(ⅱ) 한 변의 길이가 2인 정사각형의 개수는 8

(ⅲ) 한 변의 길이가 3인 정사각형의 개수는 3

이상에서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$90-(15+8+3)=64$

답 64

0266 구하는 방법의 수는 서로 다른 4개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_6={_9C_6}={_9C_3}=84$

답 ③

0267 구하는 항의 개수는 3개의 문자 a, b, c 중에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_8={_{10}C_8}={_{10}C_2}=45$

답 45

0268 (1) 구하는 방법의 수는 서로 다른 2개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_2H_7={_8C_7}={_8C_1}=8$ ⇨ ❶

(2) 구하는 방법의 수는 서로 다른 2개에서 7개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_2\Pi_7=2^7=128$ ⇨ ❷

답 (1) 8 (2) 128

채점 기준	비율
❶ 무기명으로 투표하는 방법의 수를 구할 수 있다.	50%
❷ 기명으로 투표하는 방법의 수를 구할 수 있다	50%

라쎈 특강 무기명으로 투표하는 방법의 수

무기명 투표는 어느 유권자가 어느 후보를 뽑았는지 알 수 없으므로 후보 중에서 중복을 허용하여 택하는 중복조합으로 생각할 수 있다.

0269 빨간색 공, 노란색 공, 파란색 공을 각각 1개씩 꺼내고, 나머지 5개의 공을 꺼내면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_5={_7C_5}={_7C_2}=21$

답 ②

0270 먼저 4명의 학생에게 구슬을 각각 2개씩 나누어 주고, 남은 구슬 7개를 4명의 학생에게 나누어 주면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는 서로 다른 4개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_7={_{10}C_7}={_{10}C_3}=120$

답 120

0271 먼저 레몬 맛 사탕을 3개, 포도 맛 사탕을 2개 사고 나머지 8개의 사탕을 사면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는 서로 다른 4개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_8={_{11}C_8}={_{11}C_3}=165$

답 ②

0272 a의 값은 3개의 문자 x, y, z에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$a={_3H_8}={_{10}C_8}={_{10}C_2}=45$

한편 $x-1=X$, $y-1=Y$, $z-1=Z$로 놓으면

$x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$

$x+y+z=8$에서 $(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=8$

$\therefore X+Y+Z=5$

즉 b의 값은 방정식 $X+Y+Z=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수와 같으므로 3개의 문자 X, Y, Z에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore b={_3H_5}={_7C_5}={_7C_2}=21$

따라서 구하는 값은 $a+b=66$

답 66

0273 구하는 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_6={_9C_6}={_9C_3}=84$

답 ②

0274 x, y, z가 음이 아닌 정수이므로

$x+y+z=0$ 또는 $x+y+z=1$ 또는 $x+y+z=2$ 또는 $x+y+z=3$

(ⅰ) 방정식 $x+y+z=0$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$_3H_0={_2C_0}=1$ ⇨ ❶

(ⅱ) 방정식 $x+y+z=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$_3H_1={_3C_1}=3$ ⇨ ❷

(ⅲ) 방정식 $x+y+z=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$_3H_2={_4C_2}=6$ ⇨ ❸

(ⅳ) 방정식 $x+y+z=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$_3H_3={_5C_3}={_5C_2}=10$ ⇨ ❹

이상에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$1+3+6+10=20$ ⇨ ❺

답 20

채점 기준	비율
❶ 방정식 $x+y+z=0$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구할 수 있다.	20%
❷ 방정식 $x+y+z=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구할 수 있다.	20%
❸ 방정식 $x+y+z=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구할 수 있다.	20%
❹ 방정식 $x+y+z=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구할 수 있다.	20%
❺ 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구할 수 있다.	20%

0275 방정식 $x+y+z=n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 n개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_{3}H_{n}=55$

이때 $_{3}H_{n}={}_{n+2}C_{n}={}_{n+2}C_{2}$이므로

$_{n+2}C_{2}=55$

$\dfrac{(n+2)(n+1)}{2\cdot1}=55$

$(n+2)(n+1)=11\cdot10$

$\therefore n=9$

답 ①

0276 $a-2=A$, $b-1=B$, $c-3=C$로 놓으면 주어진 방정식은

$(A+2)+(B+1)+(C+3)=13$

$\therefore A+B+C=7$

즉 구하는 순서쌍의 개수는 방정식 $A+B+C=7$의 음이 아닌 정수 A, B, C의 순서쌍 (A, B, C)의 개수와 같으므로

$_{3}H_{7}={}_{9}C_{7}={}_{9}C_{2}=36$

답 ②

0277 주어진 조건을 만족시키려면 집합 Y의 10개의 원소 중에서 4개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 되므로 함수 f의 개수는

$_{10}C_{4}=210$

답 ②

타센 특강 함수의 개수

집합 $X=\{1, 2, 3, \cdots, r\}$에서 집합 $Y=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$으로의 함수 중에서

① 일대일함수의 개수
 ➲ 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수 ➲ $_{n}P_{r}$ (단, $n\ge r$)

② 함수의 개수
 ➲ 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수 ➲ $_{n}\Pi_{r}$

③ $a<b$이면 $f(a)<f(b)$를 만족시키는 함수 f의 개수
 ➲ 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수 ➲ $_{n}C_{r}$ (단, $n\ge r$)

④ $a<b$이면 $g(a)\le g(b)$를 만족시키는 함수 g의 개수
 ➲ 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수 ➲ $_{n}H_{r}$

0278 주어진 조건을 만족시키려면 집합 Y의 5개의 원소 중에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 작거나 같은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 되므로 함수 f의 개수는

$_{5}H_{3}={}_{7}C_{3}=35$

답 35

0279 전략 먼저 10개의 팀이 다른 모든 팀과 한 번씩 경기를 하는 방법의 수를 구한다.

풀이 10개 팀이 다른 모든 팀과 한 번씩 경기를 하는 방법의 수는

$_{10}C_{2}=45$

이때 각 팀이 다른 팀과 경기를 4번씩 하므로 전체 경기 수는

$45\cdot4=180$

답 180

0280 전략 먼저 주머니에 짝수가 적힌 공, 홀수가 적힌 공이 각각 몇 개씩 들어 있는지 세어 본다.

풀이 주머니에는 짝수가 적힌 공이 2, 4, 6, 8의 4개, 홀수가 적힌 공이 1, 3, 5, 7, 9의 5개가 들어 있다. 짝수가 적힌 공 4개 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는

$_{4}C_{2}=6$

홀수가 적힌 공 5개 중에서 1개를 뽑는 경우의 수는

$_{5}C_{1}=5$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\cdot5=30$

답 ③

0281 전략 6개의 꼭짓점 중 4개의 점을 택하면 사각형이 만들어진다.

풀이 6개의 꼭짓점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 구하는 사각형의 개수는 6개의 점 중에서 4개를 택하는 방법의 수와 같다.

$\therefore {}_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=15$

답 15

0282 전략 주어진 4개의 숫자가 소수임을 이용한다.

풀이 구하는 정수의 개수는 4개의 소수 2, 3, 5, 7에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_{4}H_{10}={}_{13}C_{10}={}_{13}C_{3}=286$

답 286

0283 전략 합의 법칙을 이용한다.

풀이 (i) 빨간 구슬을 3개 꺼내는 경우의 수는

$_{3}C_{3}=1$

(ii) 파란 구슬을 3개 꺼내는 경우의 수는

$_{4}C_{3}={}_{4}C_{1}=4$

(iii) 노란 구슬을 3개 꺼내는 경우의 수는

$_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=10$

이상에서 구하는 경우의 수는

$1+4+10=15$

답 ③

0284 전략 $_{n}C_{r}=\dfrac{_{n}P_{r}}{r!}$임을 이용한다.

풀이 $_{n}C_{3}:{}_{n+1}C_{4}=4:9$에서

$9\cdot{}_{n}C_{3}=4\cdot{}_{n+1}C_{4}$

$9\cdot\frac{_nP_3}{3!}=4\cdot\frac{_{n+1}P_4}{4!}$

$9\cdot{}_nP_3={}_{n+1}P_4$

$9n(n-1)(n-2)=(n+1)n(n-1)(n-2)$

$9=n+1 \quad \therefore n=8$

답 ②

0285 전략 집합 A는 2, 10을 원소로 갖고, 2보다 크고 10보다 작은 수 중에서 4개를 원소로 갖는다.

풀이 집합 A의 가장 작은 원소가 2, 가장 큰 원소가 10이고 $n(A)=6$이므로 3 이상 9 이하의 자연수 중에서 4개의 원소를 택하면 된다. 따라서 집합 A의 개수는

$_7C_4={}_7C_3=35$

답 ③

0286 전략 A, B를 제외한 5명 중에서 3명을 뽑은 후, A, B를 한 사람으로 생각하고 4명을 일렬로 세운다.

풀이 A, B를 제외한 5명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$ ⇨ ❶

A, B를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4!=24$이고, 이때 A, B끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$이므로 A, B를 이웃하도록 세우는 방법의 수는

$24\cdot2=48$ ⇨ ❷

따라서 구하는 방법의 수는

$10\cdot48=480$ ⇨ ❸

답 480

채점 기준	비율
❶ A, B를 제외한 5명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ A, B를 이웃하도록 세우는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 모든 방법의 수를 구할 수 있다.	20%

0287 전략 짝이 맞는 1켤레의 신발을 뽑는 경우의 수와 나머지 10짝의 신발 중에서 짝이 맞지 않도록 2짝을 뽑는 경우의 수를 구한 후 곱의 법칙을 이용한다.

풀이 6켤레의 신발 중에서 짝이 맞는 1켤레의 신발을 뽑는 경우의 수는

$_6C_1=6$

나머지 5켤레의 신발 중에서 2짝을 뽑는 경우의 수는 $_{10}C_2=45$이고 이 중에서 짝이 맞는 신발 1켤레를 뽑는 경우의 수는 $_5C_1=5$이므로 짝이 맞지 않는 2짝을 뽑는 경우의 수는

$45-5=40$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot40=240$

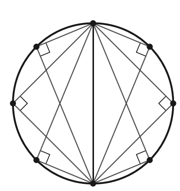
답 ④

0288 전략 원에서 지름에 대한 원주각의 크기는 90°임을 이용하여 직각삼각형의 개수를 구한다.

풀이 8개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_8C_3=56$

8개의 점으로 만들 수 있는 지름은 4개이고, 오른쪽 그림과 같이 1개의 지름에 대하여 6개의 직각삼각형을 만들 수 있으므로 만들 수 있는 직각삼각형의 개수는



$4\cdot6=24$

따라서 직각삼각형이 아닌 삼각형의 개수는

$56-24=32$

답 32

0289 전략 $(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m)^n$의 전개식에서 항의 개수는 $_mH_n$임을 이용한다.

풀이 전개식의 항의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w 중에서 n개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_n=84$

이때 $_4H_n={}_{n+3}C_n={}_{n+3}C_3$이므로

$_{n+3}C_3=84$

$\frac{_{n+3}P_3}{3!}=84$

$(n+3)(n+2)(n+1)=9\cdot8\cdot7$

$\therefore n=6$

답 ①

0290 전략 조건에 맞는 함수의 개수를 생각한다.

풀이 (1) 집합 Y의 5개의 원소 중에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_5\Pi_4=5^4=625$ ⇨ ❶

(2) 집합 Y의 5개의 원소 중에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$_5P_4=120$ ⇨ ❷

(3) 집합 Y의 5개의 원소 중에서 4개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 -1, 0, 1, 2에 대응시키면 되므로 함수 f의 개수는

$_5C_4={}_5C_1=5$ ⇨ ❸

(4) 집합 Y의 5개의 원소 중에서 중복을 허용하여 4개를 택한 후 작거나 같은 수부터 차례대로 정의역의 원소 -1, 0, 1, 2에 대응시키면 되므로 함수 f의 개수는

$_5H_4={}_8C_4=70$ ⇨ ❹

답 (1) 625 (2) 120 (3) 5 (4) 70

채점 기준	비율
❶ 함수의 개수를 구할 수 있다.	20%
❷ 일대일함수의 개수를 구할 수 있다.	20%
❸ $f(-1)<f(0)<f(1)<f(2)$인 함수의 개수를 구할 수 있다.	30%
❹ $f(-1)\le f(0)\le f(1)\le f(2)$인 함수의 개수를 구할 수 있다.	30%

0291 전략 같은 문자가 적힌 공의 개수에 따라 나누어 생각한다.

풀이 (i) 3개의 공에 모두 같은 문자가 적힌 경우

AAA, BBB의 2가지이므로 경우의 수는 2 ⇨ ❶

(ii) 같은 문자가 적힌 공이 2개인 경우

같은 문자가 적힌 공은 A, B, C, D, E에서 1종류를 고르고, 나머지 1개의 공은 위에서 선택한 종류를 제외한 나머지 7종류에서 1개를 꺼내는 경우와 같으므로 경우의 수는

$_5C_1\cdot{}_7C_1=35$ ⇨ ❷

(iii) 3개의 공에 모두 다른 문자가 적힌 경우

A, B, C, D, E, F, G, H에서 3개를 꺼내는 경우와 같으므로 경우의 수는 $_8C_3=56$ ⇨ ❸

이상에서 구하는 경우의 수는

$2+35+56=93$ ⇨ ❹

답 93

채점 기준	비율
❶ 3개의 공에 모두 같은 문자가 적힌 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
❷ 같은 문자가 적힌 공이 2개인 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
❸ 3개의 공에 모두 다른 문자가 적힌 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
❹ 모든 경우의 수를 구할 수 있다.	10%

0292 전략 '적어도' 조건이 있는 조합의 수는 모든 경우의 수에서 사건이 일어나지 않는 경우의 수를 빼서 구한다.

풀이 (i) A조의 5명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$

B조의 6명 중에서 1명을 뽑는 방법의 수는

$_6C_1=6$

$\therefore\ a=10\cdot6=60$

(ii) 전체 11명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는

$_{11}C_4=330$

A조의 5명 중에서만 4명을 뽑는 방법의 수는

$_5C_4={}_5C_1=5$

B조의 6명 중에서만 4명을 뽑는 방법의 수는

$_6C_4={}_6C_2=15$

$\therefore\ b=330-(5+15)=310$

(iii) A조의 특정한 2명을 제외한 나머지 9명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

$c={}_9C_2=36$

이상에서 $c<a<b$

답 ③

0293 전략 한 직선 위에 있지 않은 n개의 점으로 만들 수 있는 삼각형의 개수는 $_nC_3$임을 이용한다.

풀이 10개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_{10}C_3=120$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_4C_3={}_4C_1=4$

이때 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없고 이러한 직선은 5개가 있으므로 구하는 삼각형의 개수는

$120-4\cdot5=100$

답 100

0294 전략 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 각각 x, y, z라 하고 조건을 식으로 나타내어 본다.

풀이 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 각각 x, y, z라 하면 $x+y+z=10$ (x, y, z는 $1\le x\le9$, $0\le y\le9$, $0\le z\le9$인 정수)을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)를 구하는 것과 같다. $x-1=w$로 놓으면 $x=w+1$이고 $x+y+z=10$에서

$(w+1)+y+z=10$

$\therefore\ w+y+z=9$

즉 구하는 자연수의 개수는 방정식 $w+y+z=9$의 음이 아닌 정수인 w, y, z의 순서쌍 (w, y, z)의 개수와 같으므로

$_3H_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$

이때 $x=w+1\le9$, 즉 $w\le8$이므로 $w=9$, $y=0$, $z=0$인 경우는 제외해야 한다.

따라서 구하는 경우의 수는

$55-1=54$

답 54

Ⅰ. 순열과 조합

04 이항정리와 분할

0295 $(x+y)^5$

$={}_5C_0x^5+{}_5C_1x^4y+{}_5C_2x^3y^2+{}_5C_3x^2y^3+{}_5C_4xy^4+{}_5C_5y^5$

$=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$

답 $x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$

0296 $(a+1)^6$

$={}_6C_0a^6+{}_6C_1a^5+{}_6C_2a^4+{}_6C_3a^3+{}_6C_4a^2+{}_6C_5a+{}_6C_6$

$=a^6+6a^5+15a^4+20a^3+15a^2+6a+1$

답 $a^6+6a^5+15a^4+20a^3+15a^2+6a+1$

0297 $(2a-b)^4$

$={}_4C_0(2a)^4+{}_4C_1(2a)^3(-b)+{}_4C_2(2a)^2(-b)^2$
$\quad+{}_4C_3(2a)(-b)^3+{}_4C_4(-b)^4$

$=16a^4-32a^3b+24a^2b^2-8ab^3+b^4$

답 $16a^4-32a^3b+24a^2b^2-8ab^3+b^4$

0298 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$

$={}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3\left(\frac{1}{x}\right)+{}_4C_2x^2\left(\frac{1}{x}\right)^2+{}_4C_3x\left(\frac{1}{x}\right)^3+{}_4C_4\left(\frac{1}{x}\right)^4$

$=x^4+4x^2+6+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}$

답 $x^4+4x^2+6+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}$

0299 $(x+2)^6$의 전개식의 일반항은 $\quad {}_6C_r\,x^{6-r}2^r$

$x^{6-r}=x^5$에서 $\quad 6-r=5 \quad \therefore\ r=1$

따라서 x^5의 계수는 $\quad {}_6C_1\cdot2=12$

답 12

0300 $(a-3)^7$의 전개식의 일반항은 $\quad {}_7C_r\,a^{7-r}(-3)^r$

$a^{7-r}=a^4$에서 $\quad 7-r=4 \quad \therefore\ r=3$

따라서 a^4의 계수는

$_7C_3\cdot(-3)^3=-945$

답 -945

0301 $(2x-3y)^5$의 전개식의 일반항은

$_5C_r(2x)^{5-r}(-3y)^r={}_5C_r\,2^{5-r}(-3)^rx^{5-r}y^r$

$x^{5-r}y^r=x^3y^2$에서 $\quad r=2$

따라서 x^3y^2의 계수는 $\quad {}_5C_2\cdot2^3\cdot(-3)^2=720$

답 720

0302 $\left(x+\frac{2}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$_6C_r\,x^{6-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r={}_6C_r\,x^{6-r}\cdot2^r\cdot x^{-r}={}_6C_r\,2^rx^{\boxed{6-2r}}$

x^2항은 $\boxed{6-2r}=\boxed{2}$일 때이므로 $\quad r=\boxed{2}$

따라서 x^2의 계수는 $\quad {}_6C_{\boxed{2}}2^{\boxed{2}}=15\cdot4=\boxed{60}$

$\therefore$ (가) $6-2r$ (나) 2 (다) 2 (라) 2 (마) 60

답 풀이 참조

0303 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5\mathrm{C}_r\, x^{5-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_5\mathrm{C}_r(-1)^r x^{5-2r}$$

$x^{5-2r}=\dfrac{1}{x}$, 즉 $x^{5-2r}=x^{-1}$에서 $\quad 5-2r=-1 \quad \therefore r=3$

따라서 $\dfrac{1}{x}$의 계수는 $\quad {}_5\mathrm{C}_3\cdot(-1)^3=-10$ 답 -10

0304 $\left(a^2+\dfrac{1}{a}\right)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4\mathrm{C}_r(a^2)^{4-r}\left(\frac{1}{a}\right)^r={}_4\mathrm{C}_r\, a^{8-3r}$$

$a^{8-3r}=a^2$에서 $\quad 8-3r=2 \quad \therefore r=2$

따라서 a^2의 계수는 $\quad {}_4\mathrm{C}_2=6$ 답 6

0305 $\left(x^2-\dfrac{3}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6\mathrm{C}_r(x^2)^{6-r}\left(-\frac{3}{x}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r(-3)^r x^{12-3r}$$

$x^{12-3r}=x^6$에서 $\quad 12-3r=6 \quad \therefore r=2$

따라서 x^6의 계수는 $\quad {}_6\mathrm{C}_2\cdot(-3)^2=135$ 답 135

0306 오른쪽 파스칼의 삼각형에서

$(x+y)^4$

$=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

답 풀이 참조

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \boxed{2} & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & \boxed{3} & & 1 & \\
1 & & \boxed{4} & & \boxed{6} & & 4 & & 1
\end{array}$$

0307 오른쪽 파스칼의 삼각형에서

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2$

$+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

답 풀이 참조

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \boxed{3} & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & \boxed{6} & & \boxed{4} & & 1 & \\
1 & & 5 & & \boxed{10} & & \boxed{10} & & \boxed{5} & & 1
\end{array}$$

0308 ${}_5\mathrm{C}_4+{}_5\mathrm{C}_5={}_6\mathrm{C}_5$ 답 ${}_6\mathrm{C}_5$

0309 ${}_6\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_3={}_7\mathrm{C}_3$ 답 ${}_7\mathrm{C}_3$

0310 ${}_6\mathrm{C}_0+{}_6\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_2+\cdots+{}_6\mathrm{C}_6=2^6=64$

답 64

0311 ${}_5\mathrm{C}_0+{}_5\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2+\cdots+{}_5\mathrm{C}_5=2^5$이므로

${}_5\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2+\cdots+{}_5\mathrm{C}_5=2^5-1=31$ 답 31

0312 ${}_5\mathrm{C}_0-{}_5\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2-{}_5\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_4-{}_5\mathrm{C}_5=0$ 답 0

0313 ${}_7\mathrm{C}_1+{}_7\mathrm{C}_3+{}_7\mathrm{C}_5+{}_7\mathrm{C}_7=2^{7-1}=2^6=64$ 답 64

0314 $5=5$

$=\boxed{4}+1=\boxed{3}+2$

$=\boxed{3}+1+1=\boxed{2}+2+1$

$=\boxed{2}+1+1+1$

$=\boxed{1}+\boxed{1}+1+1+1$

답 풀이 참조

0315 답 $6=5+1=4+2=3+3$

0316 답 $6=4+1+1=3+2+1=2+2+2$

0317 (1) 7을 2개의 자연수로 분할하는 방법의 수는

$P(7,\ 2)$

(2) $7=6+1=5+2=4+3$이므로

$P(7,\ 2)=3$

답 (1) $P(7,\ 2)$ (2) 3

0318 $7=7$이므로

$P(7,\ 1)=1$ 답 1

0319 8을 2개의 자연수로 분할하면

$8=7+1=6+2=5+3=4+4$

$\therefore P(8,\ 2)=4$ 답 4

0320 6을 4개의 자연수로 분할하면

$6=3+1+1+1=2+2+1+1$

$\therefore P(6,\ 4)=2$ 답 2

0321 8을 7개의 자연수로 분할하면

$8=2+1+1+1+1+1+1$

$\therefore P(8,\ 7)=1$ 답 1

0322 8을 8개의 자연수로 분할하면

$8=1+1+1+1+1+1+1+1$

$\therefore P(8,\ 8)=1$ 답 1

0323 (1) $4=4$

$=3+1=2+2$

$=2+1+1$

$=1+1+1+1$

(2) $P(4,\ 1)=1,\ P(4,\ 2)=2,\ P(4,\ 3)=1,\ P(4,\ 4)=1$

(3) 4의 분할의 수는

$P(4,\ 1)+P(4,\ 2)+P(4,\ 3)+P(4,\ 4)$

$=1+2+1+1=5$

답 풀이 참조

0324 $6=6$

$=5+1=4+2=3+3$

$=4+1+1=3+2+1=2+2+2$

$=3+1+1+1=2+2+1+1$

$=2+1+1+1+1$

$=1+1+1+1+1+1$

따라서 6의 분할의 수는

$P(6,\ 1)+P(6,\ 2)+P(6,\ 3)+P(6,\ 4)+P(6,\ 5)+P(6,\ 6)$

$=1+3+3+2+1+1=11$

답 11

0325 $\{1,\ 2,\ 3\}\cap\{3,\ 4\}=\{3\}\neq\varnothing$, 즉 두 집합 $\{1,\ 2,\ 3\}$, $\{3,\ 4\}$는 서로소가 아니므로 집합 A의 분할이 아니다. 답 ×

0326 $\{2, 3\}, \{4\}, \{1\}$은 서로소이고,
$\{2, 3\}\cup\{4\}\cup\{1\}=\{1, 2, 3, 4\}$
이므로 집합 A의 분할이다. 답 ○

0327 $\{3\}\cup\{2, 4\}\neq\{1, 2, 3, 4\}$이므로 집합 A의 분할이 아니다.
답 ×

0328 $\{2\}, \{1, 3, 4\}$는 서로소이고,
$\{2\}\cup\{1, 3, 4\}=\{1, 2, 3, 4\}$
이므로 집합 A의 분할이다. 답 ○

0329 답 $\{a\}\cup\{b, c, d\}$, $\{b\}\cup\{a, c, d\}$, $\{c\}\cup\{a, b, d\}$, $\{d\}\cup\{a, b, c\}$

0330 답 $\{a, b\}\cup\{c, d\}$, $\{a, c\}\cup\{b, d\}$, $\{a, d\}\cup\{b, c\}$

0331 답 $\{a\}\cup\{b\}\cup\{c, d\}$, $\{a\}\cup\{c\}\cup\{b, d\}$, $\{a\}\cup\{d\}\cup\{b, c\}$, $\{b\}\cup\{c\}\cup\{a, d\}$, $\{b\}\cup\{d\}\cup\{a, c\}$, $\{c\}\cup\{d\}\cup\{a, b\}$

0332 원소의 개수가 7인 집합을 1개의 부분집합으로 분할하는 방법은 1가지이므로
$S(7,\ 1)=1$ 답 1

0333 네 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 1개, 2개인 경우의 수는
$${}_5C_1\cdot{}_4C_1\cdot{}_3C_1\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!}=5\cdot4\cdot3\cdot1\cdot\frac{1}{6}=10$$
$\therefore S(5, 4)=10$ 답 10

0334 (i) 두 집합의 원소가 각각 1개, 5개인 경우의 수는
${}_6C_1\cdot{}_5C_5=6\cdot1=6$
(ii) 두 집합의 원소가 각각 2개, 4개인 경우의 수는
${}_6C_2\cdot{}_4C_4=15\cdot1=15$
(iii) 두 집합의 원소가 각각 3개, 3개인 경우의 수는
$${}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{2!}=20\cdot1\cdot\frac{1}{2}=10$$
이상에서 $S(6, 2)=6+15+10=31$ 답 31

0335 원소의 개수가 7인 집합을 7개의 부분집합으로 분할하는 방법은 1가지이므로
$S(7,\ 7)=1$ 답 1

0336 서로 다른 책 6권을 1권, 2권, 3권으로 나누는 방법의 수는
${}_6C_1\cdot{}_5C_2\cdot{}_3C_3=6\cdot10\cdot1=60$ 답 60

0337 서로 다른 책 6권을 3권, 3권으로 나누는 방법의 수는
$${}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{2!}=20\cdot1\cdot\frac{1}{2}=10$$ 답 10

0338 $(x+ay)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5C_r\,x^{5-r}(ay)^r={}_5C_r\,a^r x^{5-r}y^r$
$x^{5-r}y^r=x^2y^3$에서 $r=3$
이때 x^2y^3의 계수가 270이므로
${}_5C_3\cdot a^3=270,\quad a^3=27$
$\therefore a=3\ (\because a$는 실수$)$ 답 ③

0339 $(x-a)^6$의 전개식의 일반항은
${}_6C_r\,x^{6-r}(-a)^r={}_6C_r(-a)^r x^{6-r}$
$x^{6-r}=x^4$에서 $6-r=4\quad\therefore r=2$
따라서 x^4의 계수는 ${}_6C_2(-a)^2=15a^2$
또 $x^{6-r}=x^3$에서 $6-r=3\quad\therefore r=3$
따라서 x^3의 계수는 ${}_6C_3(-a)^3=-20a^3$
이때 x^4의 계수가 x^3의 계수의 2배이므로
$15a^2=2\cdot(-20a^3)\quad\therefore a=-\frac{3}{8}\ (\because a\neq0)$ 답 $-\frac{3}{8}$

0340 $\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^5$의 전개식의 일반항은
$${}_5C_r(x^3)^{5-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r={}_5C_r\,x^{15-5r}$$
$x^{15-5r}=x^5$에서 $15-5r=5\quad\therefore r=2$
$\therefore a={}_5C_2=10$
$\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^7$의 전개식의 일반항은
$${}_7C_s(x^3)^{7-s}\left(-\frac{2}{x}\right)^s={}_7C_s(-2)^s x^{21-4s}$$
$x^{21-4s}=x^5$에서 $21-4s=5\quad\therefore s=4$
$\therefore b={}_7C_4\cdot(-2)^4=560$
따라서 구하는 값은
$a+b=10+560=570$ 답 570

0341 $(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^7$ …… ㉠
㉠은 첫째항이 $1+x$, 공비가 $1+x$인 등비수열의 첫째항부터 제7항까지의 합이므로
$$\frac{(1+x)\{(1+x)^7-1\}}{(1+x)-1}=\frac{(1+x)^8-(1+x)}{x}\quad\cdots\cdots ㉡$$
㉠의 전개식에서 x의 계수는 ㉡의 $(1+x)^8$의 전개식에서 x^2의 계수와 같다.
$(1+x)^8$의 전개식의 일반항은 ${}_8C_r\,x^r$
$x^r=x^2$에서 $r=2$
따라서 구하는 계수는 ${}_8C_2=28$ 답 ④

0342 $(1-x)\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^4=\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^4-x\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^4$
$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은
$${}_4C_r(x^2)^{4-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_4C_r\,x^{8-3r}\quad\cdots\cdots ㉠$$
이때 $(1-x)\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 상수항은 1과 ㉠의 상수항, $-x$와 ㉠의 $\frac{1}{x}$항이 곱해질 때 나타난다.
(i) $x^{8-3r}=1$에서 $8-3r=0\quad\therefore r=\frac{8}{3}$
그런데 r는 $0\le r\le4$인 정수이므로 ㉠의 상수항은 존재하지 않는다.
(ii) $x^{8-3r}=\frac{1}{x}$에서 $8-3r=-1\quad\therefore r=3$
따라서 ㉠의 $\frac{1}{x}$항은 ${}_4C_3\,x^{-1}=\frac{4}{x}$

04 이항정리와 분할

(i), (ii)에서 구하는 상수항은

$(-x)\cdot\frac{4}{x}=-4$ 답 ②

0343 $(ax^2+3)\left(x-\frac{1}{x}\right)^5=ax^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^5+3\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r\,x^{5-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_5C_r(-1)^r x^{5-2r}$ …… ㉠ ⇨ ❶

이때 $(ax^2+3)\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 x항은 ax^2과 ㉠의 $\frac{1}{x}$항, 3과 ㉠의 x항이 곱해질 때 나타난다.

(i) $x^{5-2r}=\frac{1}{x}$에서 $5-2r=-1$ $\therefore r=3$

따라서 ㉠의 $\frac{1}{x}$항은 ${}_5C_3(-1)^3x^{-1}=-\frac{10}{x}$

(ii) $x^{5-2r}=x$에서 $5-2r=1$ $\therefore r=2$

따라서 ㉠의 x항은 ${}_5C_2(-1)^2x=10x$

(i), (ii)에서 x항은 $ax^2\cdot\left(-\frac{10}{x}\right)+3\cdot 10x=(-10a+30)x$

⇨ ❷

이때 x의 계수가 25이므로 $-10a+30=25$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ ⇨ ❸

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항을 구할 수 있다.	20%
❷ $(ax^2+3)\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 x항을 구할 수 있다.	60%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20%

0344 $(1+x)^5$의 전개식의 일반항은 ${}_5C_r\,x^r$

$(1-x)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_s(-x)^s={}_4C_s(-1)^sx^s$

따라서 $(1+x)^5(1-x)^4$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r\,x^r\cdot{}_4C_s(-1)^sx^s={}_5C_r\cdot{}_4C_s(-1)^sx^{r+s}$

$r+s=2$를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$

이므로 x^2의 계수는

${}_5C_0\cdot{}_4C_2(-1)^2+{}_5C_1\cdot{}_4C_1(-1)+{}_5C_2\cdot{}_4C_0$

$=6-20+10=-4$

답 ④

타쎈 특강 $(a+x)^p(b+x)^q$의 전개식에서 x^k의 계수 구하기

$(a+x)^p(b+x)^q$의 전개식에서 x^k의 계수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $(a+x)^p$, $(b+x)^q$의 전개식에서 일반항을 각각 구한다.

➡ ${}_pC_r\,a^{p-r}x^r$, ${}_qC_s\,b^{q-s}x^s$

(ii) $(a+x)^p(b+x)^q$의 전개식에서 일반항을 구한다.

➡ ${}_pC_r\cdot{}_qC_s\,a^{p-r}b^{q-s}x^{r+s}$

(iii) $r+s=k$ $(r=0, 1, 2, \cdots, p,\ s=0, 1, 2, \cdots, q)$를 만족시키는 r, s의 값을 구한다.

(iv) (iii)의 값을 (ii)의 식에 대입하여 x^k의 계수를 구한다.

0345 $(a+x)^3$의 전개식의 일반항은 ${}_3C_r\,a^{3-r}x^r$

$(1+x)^6$의 전개식의 일반항은 ${}_6C_s\,x^s$

따라서 $(a+x)^3(1+x)^6$의 전개식의 일반항은

${}_3C_r\,a^{3-r}x^r\cdot{}_6C_s\,x^s={}_3C_r\cdot{}_6C_s\,a^{3-r}x^{r+s}$

$r+s=1$을 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$(0, 1)$, $(1, 0)$

이므로 x의 계수는

${}_3C_0\cdot{}_6C_1\cdot a^3+{}_3C_1\cdot{}_6C_0\cdot a^2=6a^3+3a^2$

이때 x의 계수가 -3이므로

$6a^3+3a^2=-3$, $2a^3+a^2+1=0$

$(a+1)(2a^2-a+1)=0$

$\therefore a=-1$ ($\because a$는 실수) 답 ①

참고 이차방정식 $2a^2-a+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\cdot 2\cdot 1=-7$

이므로 이 방정식은 허근을 갖는다.

0346 $(x^2-x+2)^5$의 전개식의 일반항은

$\frac{5!}{p!q!r!}(x^2)^p(-x)^q2^r=\frac{5!}{p!q!r!}(-1)^q2^rx^{2p+q}$

(단, $p+q+r=5$, $p\ge0$, $q\ge0$, $r\ge0$)

$x^{2p+q}=x^5$에서 $2p+q=5$이므로 이를 만족시키는 p, q, r의 순서쌍 (p, q, r)는

$(0, 5, 0)$, $(1, 3, 1)$, $(2, 1, 2)$

따라서 x^5의 계수는

$\frac{5!}{0!\cdot5!\cdot0!}\cdot(-1)^5+\frac{5!}{1!\cdot3!\cdot1!}\cdot(-1)^3\cdot2$

$+\frac{5!}{2!\cdot1!\cdot2!}\cdot(-1)\cdot2^2$

$=-1-40-120$

$=-161$ 답 -161

0347 $\left(x^3+1+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

$\frac{4!}{p!q!r!}(x^3)^p\cdot1^q\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^r=\frac{4!}{p!q!r!}x^{3p-r}$

(단, $p+q+r=4$, $p\ge0$, $q\ge0$, $r\ge0$)

$x^{3p-r}=x^4$에서 $3p-r=4$이므로 이를 만족시키는 p, q, r의 순서쌍 (p, q, r)는

$(2, 0, 2)$

따라서 x^4의 계수는 $\frac{4!}{2!\cdot0!\cdot2!}=6$ 답 ③

0348 $(ax^2+x-1)^6$의 전개식의 일반항은

$\frac{6!}{p!q!r!}(ax^2)^px^q(-1)^r=\frac{6!}{p!q!r!}(-1)^ra^px^{2p+q}$

(단, $p+q+r=6$, $p\ge0$, $q\ge0$, $r\ge0$) ⇨ ❶

$x^{2p+q}=x^3$에서 $2p+q=3$이므로 이를 만족시키는 p, q, r의 순서쌍 (p, q, r)는

$(0, 3, 3)$, $(1, 1, 4)$ ⇨ ❷

따라서 x^3의 계수는

$\frac{6!}{0!\cdot3!\cdot3!}\cdot(-1)^3+\frac{6!}{1!\cdot1!\cdot4!}\cdot(-1)^4\cdot a=-20+30a$ ⇨ ❸

이때 x^3의 계수가 -10이므로

$-20+30a=-10 \qquad \therefore a=\frac{1}{3}$ ⇨ ❹

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ $(ax^2+x-1)^6$의 전개식의 일반항을 구할 수 있다.	30%
❷ 순서쌍 (p, q, r)를 구할 수 있다.	30%
❸ x^3의 계수를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❹ a의 값을 구할 수 있다.	10%

0349 $\underline{{}_2C_0+{}_2C_1}+{}_3C_2+{}_4C_3=\underline{{}_3C_1+{}_3C_2}+{}_4C_3$
$={}_4C_2+{}_4C_3$
$={}_5C_3$

답 ②

0350 ${}_1C_1={}_2C_2$이므로

${}_1C_1+{}_2C_1+{}_3C_1+{}_4C_1+{}_5C_1+{}_6C_1$
$={}_2C_2+{}_2C_1+{}_3C_1+{}_4C_1+{}_5C_1+{}_6C_1$
$={}_3C_2+{}_3C_1+{}_4C_1+{}_5C_1+{}_6C_1$
$={}_4C_2+{}_4C_1+{}_5C_1+{}_6C_1$
$={}_5C_2+{}_5C_1+{}_6C_1$
$={}_6C_2+{}_6C_1$
$={}_7C_2$

답 ③

0351 ${}_1C_0={}_2C_0$이므로

${}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+\cdots+{}_8C_7$
$={}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+\cdots+{}_8C_7$
$={}_3C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_8C_7$
$={}_4C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_8C_7$
$\vdots$
$={}_8C_6+{}_8C_7={}_9C_7$

답 ③

0352 구하는 값을 A라 하면

${}_4C_0+A={}_4C_0+{}_4C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+{}_7C_4$
$={}_5C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+{}_7C_4$
$={}_6C_2+{}_6C_3+{}_7C_4$
$={}_7C_3+{}_7C_4$
$={}_8C_4$
$=70$

$\therefore A=70-{}_4C_0=70-1=69$

답 69

0353 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$

따라서 주어진 부등식은

$1000<2^n-1<2000 \qquad \therefore 1001<2^n<2001$

이때 $2^9=512,\ 2^{10}=1024,\ 2^{11}=2048$이므로

$n=10$

답 10

0354 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$에서

$2^n=128 \qquad \therefore n=7$

답 7

0355 ${}_{15}C_0+{}_{15}C_2+{}_{15}C_4+\cdots+{}_{15}C_{14}=2^{14}$이므로

$\log_2({}_{15}C_0+{}_{15}C_2+{}_{15}C_4+\cdots+{}_{15}C_{14})=\log_2 2^{14}=14$

답 ②

타쎈 특강 로그의 성질

$a>0,\ a\neq1$이고 $M>0,\ N>0$일 때
① $\log_a 1=0,\ \log_a a=1$
② $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$
③ $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$
④ $\log_a N^k=k\log_a N$ (단, k는 실수)

0356 원소의 개수가 1인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_1$
원소의 개수가 3인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_3$
원소의 개수가 5인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_5$
원소의 개수가 7인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_7$
원소의 개수가 9인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_9$
따라서 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수는

${}_{10}C_1+{}_{10}C_3+{}_{10}C_5+{}_{10}C_7+{}_{10}C_9=2^9=512$

답 ③

0357 주어진 식은 $(1+x)^5(1+x)^5$, 즉 $(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^5의 계수와 같다.
$(1+x)^{10}$의 전개식의 일반항은 ${}_{10}C_r x^r$이므로 구하는 값은

${}_{10}C_5=252$

답 252

타쎈 특강 $(1+x)^{2n}$의 전개식에서 x^n의 계수

$(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$이므로 $(1+x)^{2n}$의 전개식에서 x^n의 계수는

${}_nC_0\cdot{}_nC_n+{}_nC_1\cdot{}_nC_{n-1}+{}_nC_2\cdot{}_nC_{n-2}+\cdots+{}_nC_n\cdot{}_nC_0$
$=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\cdot{}_nC_{n-k}$

이때 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로

${}_nC_0\cdot{}_nC_n+{}_nC_1\cdot{}_nC_{n-1}+{}_nC_2\cdot{}_nC_{n-2}+\cdots+{}_nC_n\cdot{}_nC_0$
$={}_nC_0\cdot{}_nC_0+{}_nC_1\cdot{}_nC_1+{}_nC_2\cdot{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n\cdot{}_nC_n=\sum_{k=0}^{n}({}_nC_k)^2$

0358 9를 3개 이하의 자연수로 분할하면

$9=9$
$=8+1=7+2=6+3=5+4$
$=7+1+1=6+2+1=5+3+1=5+2+2$
$=4+4+1=4+3+2=3+3+3$

따라서 구하는 방법의 수는

$P(9,\ 1)+P(9,\ 2)+P(9,\ 3)=1+4+7=12$

답 ④

0359 7을 4개 또는 5개의 자연수로 분할하면

$7=4+1+1+1=3+2+1+1=2+2+2+1$
$=3+1+1+1+1=2+2+1+1+1$

따라서 $P(7,\ 4)=3,\ P(7,\ 5)=2$이므로

$P(7,\ 4)+P(7,\ 5)=5$

답 5

0360 8을 홀수로만 이루어지도록 분할하면

$8=7+1=5+3$
$=5+1+1+1=3+3+1+1$
$=3+1+1+1+1+1$
$=1+1+1+1+1+1+1+1$

따라서 구하는 분할의 개수는 $2+2+1+1=6$

답 ②

0361 $P(n, 3)=P(n-3, 1)+P(n-3, 2)+P(n-3, 3)$이므로 $n-3=3$ $\therefore n=6$

답 6

0362 $P(11, 3)=P(8, 1)+P(8, 2)+P(8, 3)$
$=a+b+c$

답 ②

0363 구하는 방법의 수는 6을 4개의 자연수로 분할하는 방법의 수와 같다.
6을 4개의 자연수로 분할하면
$6=3+1+1+1=2+2+1+1$
따라서 구하는 방법의 수는 $P(6, 4)=2$

답 2

0364 구하는 방법의 수는 7을 3개 이하의 자연수로 분할하는 방법의 수와 같다. ➩ ❶
7을 3개 이하의 자연수로 분할하면
$7=7$
$=6+1=5+2=4+3$
$=5+1+1=4+2+1=3+3+1=3+2+2$ ➩ ❷
따라서 구하는 방법의 수는
$P(7, 1)+P(7, 2)+P(7, 3)=1+3+4=8$ ➩ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 구하는 방법의 수를 자연수의 분할로 해석할 수 있다.	20%
❷ 7을 3개 이하의 자연수로 분할할 수 있다.	50%
❸ 구슬 7개를 유리병 3개에 나누어 넣는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%

참고 $P(7, 1)$, $P(7, 2)$는 각각 빈 유리병이 2개, 1개 있는 경우이다.

0365 각 필통에 2자루 이상의 볼펜이 들어가려면 3개의 필통에 펜을 각각 한 자루씩 넣은 후, 남은 6자루의 펜을 3개의 필통에 빈 필통이 없도록 나누어 담으면 된다.
6을 3개의 자연수로 분할하면
$6=4+1+1=3+2+1=2+2+2$
따라서 구하는 방법의 수는 $P(6, 3)=3$

답 ②

다른풀이 각 필통에 펜을 두 자루씩 넣은 후, 남은 3자루의 펜을 3개 이하의 필통에 넣으면 된다.
3을 3개 이하의 자연수로 분할하면
$3=3=2+1=1+1+1$
따라서 구하는 방법의 수는
$P(3, 1)+P(3, 2)+P(3, 3)=1+1+1=3$

0366 집합 A를 원소의 개수가 같은 3개의 집합으로 분할하면 각 집합의 원소는 2개씩이다.
따라서 구하는 방법의 수는
$${}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!}=15\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{6}=15$$

답 ②

0367 ㄱ. $\{1, 5\}\cup\{2\}\cup\{3\}\neq\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로 집합 X의 분할이 아니다.
ㄹ. $\{2, 3, 5\}\cap\{5\}=\{5\}\neq\varnothing$이므로 두 집합 $\{2, 3, 5\}$, $\{5\}$는 서로소가 아니다. 따라서 집합 X의 분할이 아니다.
이상에서 집합 X의 분할인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

0368 집합 A를 원소의 개수가 각각 2, 2, 3인 집합으로 분할하는 방법의 수는 ${}_7C_2\cdot{}_5C_2\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{2!}=105$

답 ③

0369 (i) 3개의 집합으로 분할하는 경우
6을 3개의 자연수로 분할하면
$6=4+1+1=3+2+1=2+2+2$
이므로 원소가 6개인 집합을 3개의 집합으로 분할하는 방법의 수는 다음과 같다.
세 집합의 원소의 개수가 각각 1, 1, 4인 경우의 수는
$${}_6C_1\cdot{}_5C_1\cdot{}_4C_4\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot5\cdot1\cdot\frac{1}{2}=15$$
세 집합의 원소의 개수가 각각 1, 2, 3인 경우의 수는
$${}_6C_1\cdot{}_5C_2\cdot{}_3C_3=6\cdot10\cdot1=60$$
세 집합의 원소의 개수가 각각 2, 2, 2인 경우의 수는
$${}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!}=15\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{6}=15$$
$\therefore S(6, 3)=15+60+15=90$ ➩ ❶

(ii) 4개의 집합으로 분할하는 경우
6을 4개의 자연수로 분할하면
$6=3+1+1+1=2+2+1+1$
이므로 원소가 6개인 집합을 4개의 집합으로 분할하는 방법의 수는 다음과 같다.
네 집합의 원소의 개수가 각각 1, 1, 1, 3인 경우의 수는
$${}_6C_1\cdot{}_5C_1\cdot{}_4C_1\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{3!}=6\cdot5\cdot4\cdot1\cdot\frac{1}{6}=20$$
네 집합의 원소의 개수가 각각 1, 1, 2, 2인 경우의 수는
$${}_6C_1\cdot{}_5C_1\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot5\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=45$$
$\therefore S(6, 4)=20+45=65$ ➩ ❷

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 $90+65=155$ ➩ ❸

답 155

채점 기준	비율
❶ $S(6, 3)$을 구할 수 있다.	40%
❷ $S(6, 4)$를 구할 수 있다.	40%
❸ 3개 또는 4개의 집합으로 분할하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%

0370 구하는 방법의 수는 집합 $\{2, 3, 5, 7\}$을 원소의 개수가 각각 2, 1, 1인 3개의 집합으로 분할하는 방법의 수와 같으므로
$${}_4C_2\cdot{}_2C_1\cdot{}_1C_1\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot2\cdot1\cdot\frac{1}{2}=6$$

답 ②

참고 210을 1보다 큰 세 자연수의 곱으로 나타내는 방법은 다음과 같다.
$210=6\cdot5\cdot7=10\cdot3\cdot7=14\cdot3\cdot5$
$=15\cdot2\cdot7=21\cdot2\cdot5=35\cdot2\cdot3$

0371 $S(5, 4)=S(4, 3)+4\cdot S(4, 4)$
$=S(4, 3)+4\cdot1$
따라서 $a=1$, $b=4$이므로 $a+b=5$

답 5

0372 $S(7, 3)=S(6, 2)+3\cdot S(6, 3)$
$=S(6, 2)+3\{S(5, 2)+3\cdot S(5, 3)\}$
$=S(6, 2)+3\cdot S(5, 2)+9\cdot S(5, 3)$
$=31+3\cdot15+9\cdot25=301$

답 ⑤

0373 $a={}_8C_4\cdot{}_4C_4\cdot\frac{1}{2!}=70\cdot1\cdot\frac{1}{2}=35$

$b={}_8C_5\cdot{}_3C_3=56\cdot1=56$

$\therefore a+b=91$ 답 91

0374 3명씩 두 조로 나눌 때, 여자 2명이 같은 조에 속해야 하므로 남자 4명 중 1명이 여자 2명과 한 조를 이루면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는 남자 4명을 1명, 3명으로 나누는 방법의 수와 같으므로

${}_4C_1\cdot{}_3C_3=4\cdot1=4$ 답 4

0375 8명을 4명, 4명으로 나누는 방법의 수는

${}_8C_4\cdot{}_4C_4\cdot\frac{1}{2!}=70\cdot1\cdot\frac{1}{2}=35$

학생 5명 중에서 4명이 같은 조가 되는 방법의 수는

${}_5C_4=5$

따라서 구하는 방법의 수는

$35-5=30$ 답 ③

0376 $6=5+1=4+2=3+3$이므로 동전 6개를 똑같은 주머니 2개에 나누어 담는 방법은 다음과 같다.
(i) 6개를 1개, 5개로 나누는 방법의 수는

${}_6C_1\cdot{}_5C_5=6\cdot1=6$

(ii) 6개를 2개, 4개로 나누는 방법의 수는

${}_6C_2\cdot{}_4C_4=15\cdot1=15$

(iii) 6개를 3개, 3개로 나누는 방법의 수는

${}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{2!}=20\cdot1\cdot\frac{1}{2}=10$

이상에서 구하는 방법의 수는

$6+15+10=31$

답 31

0377 5개의 사탕을 2개, 2개, 1개로 나누는 방법의 수는

${}_5C_2\cdot{}_3C_2\cdot{}_1C_1\cdot\frac{1}{2!}=10\cdot3\cdot1\cdot\frac{1}{2}=15$

3개의 묶음을 3명의 학생에게 나누어 주는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$15\cdot6=90$ 답 ②

0378 9장의 포토카드를 3장, 3장, 3장으로 나누는 방법의 수는

${}_9C_3\cdot{}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{3!}=84\cdot20\cdot1\cdot\frac{1}{6}=280$ ⇨ ❶

3개의 묶음을 3명의 학생에게 나누어 주는 방법의 수는

$3!=6$ ⇨ ❷

따라서 구하는 방법의 수는 $280\cdot6=1680$ ⇨ ❸

답 1680

채점 기준	비율
❶ 3장씩 3개의 묶음으로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ 3개의 묶음을 3명의 학생에게 나누어 주는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 9장을 3명의 학생에게 나누어 주는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%

0379 6명을 2명, 2명, 1명, 1명으로 나누는 방법의 수는

${}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_1\cdot{}_1C_1\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2!}=15\cdot6\cdot2\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=45$

4개의 조를 2층부터 5층까지 4개의 층에 분배하는 방법의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$45\cdot24=1080$ 답 1080

0380 7을 5개의 자연수로 분할하는 방법은

$7=3+1+1+1+1=2+2+1+1+1$

(i) 7개를 1개, 1개, 1개, 1개, 3개로 나누는 방법의 수는

${}_7C_1\cdot{}_6C_1\cdot{}_5C_1\cdot{}_4C_1\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{4!}=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot1\cdot\frac{1}{24}=35$

(ii) 7개를 1개, 1개, 1개, 2개, 2개로 나누는 방법의 수는

${}_7C_1\cdot{}_6C_1\cdot{}_5C_1\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2!}=7\cdot6\cdot5\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=105$

(i), (ii)에서 7개의 상품을 5개의 묶음으로 나누는 방법의 수는

$35+105=140$

5개의 묶음을 5명에게 분배하는 방법의 수는 $5!=120$

따라서 구하는 방법의 수는

$140\cdot120=16800$ 답 ⑤

0381 구하는 방법의 수는 먼저 5개의 학급을 2개, 3개의 두 조로 나눈 후, 3개인 조에서 부전승으로 올라가는 한 학급을 택하는 방법의 수와 같으므로

$({}_5C_2\cdot{}_3C_3)\cdot{}_3C_1=10\cdot1\cdot3=30$ 답 30

0382 구하는 방법의 수는 먼저 6명을 2명, 2명, 2명의 세 조로 나눈 후, 부전승으로 올라가는 한 조를 택하는 방법의 수와 같으므로

$\left({}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!}\right)\cdot{}_3C_1=15\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{6}\cdot3=45$ 답 ①

0383 전략 $(ax+by)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r(ax)^{n-r}(by)^r$임을 이용한다.

풀이 $(x-a)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r\,x^{5-r}(-a)^r={}_5C_r(-a)^r x^{5-r}$

$x^{5-r}=x$에서 $5-r=1$ $\therefore r=4$

따라서 x의 계수는 ${}_5C_4\cdot(-a)^4=5a^4$이므로

$5a^4=20,\quad a^4=4$

$\therefore a=\sqrt{2}\ (\because a>0)$ 답 ②

0384 전략 ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$임을 이용한다.

풀이 색칠한 부분의 모든 수의 합은

$({}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_8)+({}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_{10}C_9)$

$=({}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_8)+({}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+\cdots+{}_{10}C_9)$
$\quad-{}_3C_0$

$=({}_4C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_8)+({}_3C_1+{}_3C_2+\cdots+{}_{10}C_9)-{}_3C_0$

$=({}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_8)+({}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_9)-{}_3C_0$

$\vdots$

$={}_{11}C_8+{}_{11}C_9-{}_3C_0$

$={}_{12}C_9-1$

$=220-1=219$ 답 ③

0385 전략 ${}_{n}C_0+{}_{n}C_1+{}_{n}C_2+\cdots+{}_{n}C_n=2^n$임을 이용한다.

풀이 ${}_{n}C_0+{}_{n}C_1+{}_{n}C_2+\cdots+{}_{n}C_n=2^n$이므로

${}_{n}C_1+{}_{n}C_2+\cdots+{}_{n}C_n=2^n-1$

$2^n-1=511$에서 $\quad 2^n=512$

$512=2^9$이므로 $\quad n=9$

답 9

0386 전략 n을 k개의 자연수로 분할할 때, 먼저 $n=(n-k+1)+\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{(k-1)\text{개}}$로 나타낸다.

풀이 $7=5+1+1=4+2+1=3+3+1=3+2+2$

따라서 7을 3개의 자연수로 분할하는 방법의 수는

$P(7,\ 3)=4$

답 ③

0387 전략 먼저 5를 2개의 자연수로 분할한다.

풀이 5를 2개의 자연수로 분할하면

$5=4+1=3+2$

이므로 원소의 개수가 5인 집합을 2개의 집합으로 분할하는 방법의 수는 다음과 같다.

(i) 두 집합의 원소의 개수가 각각 1, 4인 경우의 수는

${}_{5}C_1\cdot{}_{4}C_4=5\cdot1=5$

(ii) 두 집합의 원소의 개수가 각각 2, 3인 경우의 수는

${}_{5}C_2\cdot{}_{3}C_3=10\cdot1=10$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$S(5,\ 2)=5+10=15$

답 15

0388 전략 $(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_{n}C_r\,x^r$임을 이용한다.

풀이 $(1+x)^n$의 전개식의 일반항은

${}_{n}C_r\,x^r$

이므로 x, x^2, x^3의 계수는 각각

${}_{n}C_1,\ {}_{n}C_2,\ {}_{n}C_3$ ⇨ ❶

${}_{n}C_1,\ {}_{n}C_2,\ {}_{n}C_3$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\cdot{}_{n}C_2={}_{n}C_1+{}_{n}C_3$

$2\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}=n+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ ⇨ ❷

$6n(n-1)=6n+n(n-1)(n-2)$

$n^3-9n^2+14n=0,\qquad n(n-2)(n-7)=0$

$\therefore\ n=7\ (\because\ n\ge3)$ ⇨ ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ x, x^2, x^3의 계수를 구할 수 있다.	30%
❷ n에 대한 방정식을 세울 수 있다.	40%
❸ n의 값을 구할 수 있다.	30%

0389 전략 $(1+x)^n$의 전개식을 이용한다.

풀이 $(1+x)^n={}_{n}C_0+{}_{n}C_1x+{}_{n}C_2x^2+\cdots+{}_{n}C_nx^n$이므로 이 식에 $x=3$, $n=20$을 대입하면

$4^{20}={}_{20}C_0+3\cdot{}_{20}C_1+3^2\cdot{}_{20}C_2+\cdots+3^{20}\cdot{}_{20}C_{20}$

답 ④

0390 전략 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$에서 $1+x+x^2$의 각 항과 곱하여 x가 되는 항을 생각한다.

풀이 $(1+x+x^2)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$

$=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6+x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^6+x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^6$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_{6}C_r\,x^{6-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_{6}C_r\,x^{6-2r}$ …… ㉠

이때 $(1+x+x^2)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 x항은 1과 ㉠의 x항, x와 ㉠의 상수항, x^2과 ㉠의 $\dfrac{1}{x}$항이 곱해질 때 나타난다.

(i) $x^{6-2r}=x$에서 $\quad 6-2r=1\quad \therefore\ r=\dfrac{5}{2}$

그런데 r는 $0\le r\le6$인 정수이므로 ㉠의 x항은 존재하지 않는다.

(ii) 상수항은 $6-2r=0$일 때이므로 $\quad r=3$

따라서 ㉠의 상수항은 $\quad {}_{6}C_3$

(iii) $x^{6-2r}=\dfrac{1}{x}$에서 $\quad 6-2r=-1\quad \therefore\ r=\dfrac{7}{2}$

그런데 r는 $0\le r\le6$인 정수이므로 ㉠의 $\dfrac{1}{x}$항은 존재하지 않는다.

이상에서 x항은 ${}_{6}C_3\,x$이므로 x의 계수는

${}_{6}C_3=20$

답 ⑤

0391 전략 ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_{n}C_r$임을 이용한다.

풀이 ${}_{2}C_2={}_{3}C_3$이므로

${}_{2}C_2+{}_{3}C_2+{}_{4}C_2+{}_{5}C_2+\cdots+{}_{10}C_2$

$={}_{3}C_3+{}_{3}C_2+{}_{4}C_2+{}_{5}C_2+\cdots+{}_{10}C_2$

$={}_{4}C_3+{}_{4}C_2+{}_{5}C_2+\cdots+{}_{10}C_2$

$={}_{5}C_3+{}_{5}C_2+\cdots+{}_{10}C_2$

$\vdots$

$={}_{10}C_3+{}_{10}C_2$

$={}_{11}C_3$

답 ③

0392 전략 ${}_{n}C_1+{}_{n}C_3+{}_{n}C_5+\cdots=2^{n-1}$임을 이용한다.

풀이 $\displaystyle\sum_{k=1}^{50}{}_{99}C_{2k-1}={}_{99}C_1+{}_{99}C_3+\cdots+{}_{99}C_{99}=2^{98}$

$\displaystyle\therefore\ \log_2\left(\sum_{k=1}^{50}{}_{99}C_{2k-1}\right)=\log_2 2^{98}=98$

답 98

0393 전략 ${}_{n}C_r={}_{n}C_{n-r}$임을 이용한다.

풀이 $(1+x)^{20}=(1+x)^{10}(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^{10}의 계수는

${}_{10}C_0\cdot{}_{10}C_{10}+{}_{10}C_1\cdot{}_{10}C_9+{}_{10}C_2\cdot{}_{10}C_8+\cdots+{}_{10}C_{10}\cdot{}_{10}C_0$

$={}_{10}C_0\cdot{}_{10}C_0+{}_{10}C_1\cdot{}_{10}C_1+{}_{10}C_2\cdot{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_{10}\cdot{}_{10}C_{10}$

$\displaystyle=\sum_{k=0}^{10}({}_{10}C_k)^2$

답 ③

0394 전략 $P(7,\ 5)$, $P(7,\ 6)$, $P(7,\ 7)$을 구한다.

풀이 $7=3+1+1+1+1=2+2+1+1+1$

$=2+1+1+1+1+1$

$=1+1+1+1+1+1+1$

따라서 구하는 방법의 수는

$P(7,\ 5)+P(7,\ 6)+P(7,\ 7)=2+1+1=4$

답 ①

0395 전략 $S(8,\ 2)$를 구한다.

풀이 $8=7+1=6+2=5+3=4+4$

이므로 8송이를 2개의 꽃병에 꽂는 방법의 수는 다음과 같다.

(i) 두 꽃병에 꽂는 꽃의 수가 각각 1, 7인 방법의 수는

$${}_8C_1\cdot{}_7C_7=8$$

(ii) 두 꽃병에 꽂는 꽃의 수가 각각 2, 6인 방법의 수는

$${}_8C_2\cdot{}_6C_6=28$$

(iii) 두 꽃병에 꽂는 꽃의 수가 각각 3, 5인 방법의 수는

$${}_8C_3\cdot{}_5C_5=56$$

(iv) 두 꽃병에 꽂는 꽃의 수가 각각 4, 4인 방법의 수는

$${}_8C_4\cdot{}_4C_4\cdot\frac{1}{2!}=35$$

이상에서 구하는 방법의 수는

$$S(8,\ 2)=8+28+56+35$$
$$=127$$

답 127

0396 전략 먼저 7명을 한 조에 최대 4명이 되도록 세 조로 나눈다.

풀이 $7=4+2+1=3+3+1=3+2+2$

이므로 7명을 한 조에 최대 4명이 되도록 세 조로 나누는 방법은 다음과 같다.

(i) 7명을 1명, 2명, 4명으로 나누는 방법의 수는

$${}_7C_1\cdot{}_6C_2\cdot{}_4C_4=7\cdot15\cdot1=105$$

(ii) 7명을 1명, 3명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$${}_7C_1\cdot{}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{2!}=7\cdot20\cdot1\cdot\frac{1}{2}=70$$

(iii) 7명을 2명, 2명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$${}_7C_2\cdot{}_5C_2\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{2!}=21\cdot10\cdot1\cdot\frac{1}{2}=105$$

이상에서 7명을 세 조로 나누는 방법의 수는

$105+70+105=280$ ⇨ ❶

세 조를 3개의 의자에 분배하는 방법의 수는

$3!=6$ ⇨ ❷

따라서 구하는 방법의 수는

$280\cdot6=1680$ ⇨ ❸

답 1680

채점 기준	비율
❶ 7명을 세 조로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	50%
❷ 세 조를 3개의 의자에 분배하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
❸ 7명을 3개의 의자에 앉히는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%

0397 전략 6명을 3명, 3명의 두 조로 나눈 후, 각 조에서 부전승으로 올라가는 선수를 뽑는다.

풀이 6명을 3명, 3명의 두 조로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{2!}=20\cdot1\cdot\frac{1}{2}=10$$

각 조에서 부전승으로 올라갈 선수를 뽑는 방법의 수는

$${}_3C_1\cdot{}_3C_1=3\cdot3=9$$

따라서 구하는 방법의 수는

$10\cdot9=90$

답 ③

0398 전략 전개식의 일반항에서 $(\sqrt[3]{2})^r$이 유리수가 되는 r의 값을 찾는다.

풀이 $(1+\sqrt[3]{2}x)^{20}$의 전개식의 일반항은

$${}_{20}C_r(\sqrt[3]{2}x)^r={}_{20}C_r\,2^{\frac{r}{3}}x^r$$

이때 항의 계수가 유리수이려면 2의 지수 $\frac{r}{3}$가 정수이어야 하므로 r는 0 또는 3의 배수이어야 한다.

이때 $0\le r\le20$이므로 r의 값은

0, 3, 6, 9, $\cdots$, 18의 7개

따라서 계수가 유리수인 항은 7개이다.

답 ③

0399 전략 첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq1)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은 $\frac{a(r^n-1)}{r-1}$임을 이용한다.

풀이 $(1+x^2)+(1+x^2)^2+\cdots+(1+x^2)^6$ …… ㉠

㉠은 첫째항이 $1+x^2$, 공비가 $1+x^2$인 등비수열의 첫째항부터 제6항까지의 합이므로

$$\frac{(1+x^2)\{(1+x^2)^6-1\}}{(1+x^2)-1}=\frac{(1+x^2)^7-(1+x^2)}{x^2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠의 전개식에서 x^6의 계수는 ㉡의 $(1+x^2)^7$의 전개식에서 x^8의 계수와 같다.

$(1+x^2)^7$의 전개식의 일반항은 ${}_7C_r(x^2)^r={}_7C_r\,x^{2r}$

$x^{2r}=x^8$에서 $r=4$

따라서 ${}_7C_4=35$이므로 구하는 계수는 35이다.

답 35

다른풀이 $(1+x^2)^n={}_nC_0+{}_nC_1x^2+{}_nC_2x^4+\cdots+{}_nC_nx^{2n}$이므로 x^6의 계수는 ${}_nC_3$이다.

따라서 주어진 다항식을 전개하였을 때, x^6의 계수는

$${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3$$
$$=1+4+10+20=35$$

0400 전략 $(1+x)^{11}$의 전개식에 $x=20$을 대입한다.

풀이 이항정리를 이용하여 $(1+x)^{11}$을 전개하면

$$(1+x)^{11}={}_{11}C_0+{}_{11}C_1x+{}_{11}C_2x^2+\cdots+{}_{11}C_{11}x^{11}$$

이 식에 $x=20$을 대입하면

$$21^{11}={}_{11}C_0+{}_{11}C_1\cdot20+{}_{11}C_2\cdot20^2+\cdots+{}_{11}C_{11}\cdot20^{11}$$

이때 우변에서 세 번째 항부터는 모두 400으로 나누어떨어지므로 21^{11}을 400으로 나눈 나머지는

$${}_{11}C_0+{}_{11}C_1\cdot20=1+11\cdot20=221$$

을 400으로 나눈 나머지와 같다.

따라서 구하는 나머지는 221이다.

답 ③

0401 전략 분자의 전개식에서 x^2의 계수를 찾는다.

풀이 $\frac{(1-x)^3(2x+1)^4}{x}$의 전개식에서 x의 계수는

$(1-x)^3(2x+1)^4$의 전개식에서 x^2의 계수와 같다. ⇨ ❶

$(1-x)^3$의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r(-x)^r={}_3C_r(-1)^rx^r$$

$(2x+1)^4$, 즉 $(1+2x)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_s(2x)^s={}_4C_s\,2^sx^s$$

따라서 $(1-x)^3(2x+1)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r(-1)^rx^r\cdot{}_4C_s\,2^sx^s={}_3C_r\cdot{}_4C_s(-1)^r2^sx^{r+s}$$ ⇨ ❷

04 이항정리와 분할

$r+s=2$를 만족시키는 r, s의 순서쌍 $(r,\ s)$는

$(0,\ 2),\ (1,\ 1),\ (2,\ 0)$ ⇨ ❸

이므로 구하는 x의 계수는

$${}_3C_0\cdot{}_4C_2\,2^2+{}_3C_1\cdot{}_4C_1(-1)\cdot 2+{}_3C_2\cdot{}_4C_0(-1)^2$$
$$=24-24+3=3$$ ⇨ ❹

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 전개식에서 x의 계수는 분자의 전개식에서 x^2의 계수와 같음을 알 수 있다.	10%
❷ $(1-x)^3(2x+1)^4$의 전개식의 일반항을 구할 수 있다.	50%
❸ 순서쌍 $(r,\ s)$를 구할 수 있다.	20%
❹ x의 계수를 구할 수 있다.	20%

0402 전략 먼저 각 쇼핑백에 티셔츠를 한 벌씩 넣는다.

풀이 티셔츠를 2개의 쇼핑백에 한 벌씩 넣은 후, 남은 8벌의 티셔츠를 2개의 쇼핑백에 빈 쇼핑백이 없도록 나누어 담으면 된다. 이때

$8=7+1=6+2=5+3=4+4$

이므로 구하는 방법의 수는

$P(8,\ 2)=4$

답 ①

다른풀이 티셔츠를 각 쇼핑백에 2벌씩 넣은 후, 남은 6벌의 티셔츠를 1개 또는 2개의 쇼핑백에 나누어 담으면 된다. 이때

$6=6$

$\quad=5+1=4+2=3+3$

이므로 구하는 방법의 수는

$P(6,\ 1)+P(6,\ 2)=1+3=4$

0403 전략 먼저 330을 소인수분해한다.

풀이 $330=2\cdot3\cdot5\cdot11$

이므로 구하는 방법의 수는 집합 $\{2,\ 3,\ 5,\ 11\}$을 2개의 집합으로 분할하는 방법의 수와 같다.

(i) 원소의 개수가 1, 3인 집합으로 분할하는 방법의 수는

$${}_4C_1\cdot{}_3C_3=4\cdot1=4$$

(ii) 원소의 개수가 2, 2인 집합으로 분할하는 방법의 수는

$${}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot1\cdot\frac{1}{2}=3$$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$4+3=7$

답 ②

0404 전략 2대의 자동차에 탈 사람을 나눈 후 자리를 배정한다.

풀이 2대의 자동차를 각각 A, B라 하자.

운전할 수 있는 두 사람이 A, B 2대의 자동차에 나누어 타는 방법의 수는 $2!=2$

운전자를 제외한 4명을 2명, 2명으로 나누는 방법의 수는

$${}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}=3$$

2개의 조를 A, B 2대의 자동차에 배정하는 방법의 수는

$2!=2$

A자동차에서 운전자를 제외한 2명이 자리에 앉는 방법의 수는

${}_4P_2=12$

마찬가지로 B자동차에서 자리에 앉는 방법의 수는 12이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$2\cdot3\cdot2\cdot12\cdot12=1728$

답 ⑤

Ⅱ. 확률

05 확률의 뜻과 활용

0405 답 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

0406 답 $\{2,\ 4,\ 6\}$

0407 답 $\{2,\ 3,\ 5\}$

0408 답 $\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

0409 답 $\{\mathrm{HH},\ \mathrm{HT},\ \mathrm{TH},\ \mathrm{TT}\}$

0410 답 $\{\mathrm{HT},\ \mathrm{TH}\}$

0411 답 $\{\mathrm{HH},\ \mathrm{TT}\}$

0412 $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, $B=\{5,\ 10\}$이므로

$A\cup B=\{2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10\}$ 답 $\{2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10\}$

0413 답 $\{10\}$

0414 답 $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

0415 답 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

0416 $A\cap B=\varnothing$이므로 A와 B는 서로 배반사건이다.

$B\cap C=\{2\}$이므로 B와 C는 서로 배반사건이 아니다.

$A\cap C=\varnothing$이므로 A와 C는 서로 배반사건이다.

답 A와 B, A와 C

0417 $A=\{3,\ 6\}$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0418 $B=\{4,\ 5,\ 6\}$이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0419 $C=\{1,\ 3,\ 5\}$이므로 $\mathrm{P}(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0420 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\cdot6=36$

두 눈의 수가 같은 경우는

$(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (6,\ 6)$의 6가지

이므로 구하는 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ 답 $\frac{1}{6}$

0421 두 눈의 수의 합이 10인 경우는

$(4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (6,\ 4)$의 3가지

이므로 구하는 확률은 $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$ 답 $\frac{1}{12}$

0422 두 눈의 수의 차가 3인 경우는

$(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)$의 6가지

이므로 구하는 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ 답 $\frac{1}{6}$

0423 (1) 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4!=24$

(2) 광수를 가장 앞에 세우는 방법의 수는 $3!=6$

(3) $\mathrm{P}(A)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$

답 (1) 24 (2) 6 (3) $\frac{1}{4}$

0424 어떤 독감 환자에게 약을 투여할 때, 독감이 치료될 확률은

$\frac{150}{500}=\frac{3}{10}$ 답 $\frac{3}{10}$

0425 9칸 중에서 빨간색이 칠해진 칸은 2칸이므로 구하는 확률은

$\frac{(\text{빨간색이 칠해진 영역의 넓이})}{(\text{전체 과녁의 넓이})}=\frac{2}{9}$ 답 $\frac{2}{9}$

0426 답 $\frac{2}{5}$

0427 꺼낸 공이 흰 공 또는 검은 공인 사건은 반드시 일어나므로 구하는 확률은 1이다. 답 1

0428 꺼낸 공이 빨간 공인 사건은 절대로 일어날 수 없으므로 구하는 확률은 0이다. 답 0

0429 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

0430 $\mathrm{P}(A)=0.6$, $\mathrm{P}(B)=0.7$, $\mathrm{P}(A\cup B)=0.9$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$0.9=0.6+0.7-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=0.4$ 답 0.4

0431 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 20\}$,

$A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$,

$B=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

(1) $\mathrm{P}(A)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$

(2) $\mathrm{P}(B)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

(3) $A\cap B=\{6, 12, 18\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{20}$

(4) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}-\frac{3}{20}=\frac{13}{20}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{10}$ (3) $\frac{3}{20}$ (4) $\frac{13}{20}$

0432 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$ 답 $\frac{5}{7}$

0433 (1) $\mathrm{P}(A)=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$

(2) $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ 답 (1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{4}{5}$

0434 표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $A=\{4, 8\}$, $B=\{6, 8, 10\}$

② $A\cup B=\{4, 6, 8, 10\}$

③ $A\cap B=\{8\}$

④ $A^C=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$이므로 $n(A^C)=8$

⑤ $A^C\cap B=\{6, 10\}$ 답 ④

0435 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타낼 때,

뒷면이 2개 나오는 경우는

{HTT, THT, TTH}의 3가지

뒷면이 3개 나오는 경우는

{TTT}의 1가지

따라서 $A=$ {HTT, THT, TTH, TTT}이므로

$n(A)=4$ 답 4

0436 표본공간을 S라 하면

$S=$ {WWB, WBW, BWW, WBB, BWB, BBW, BBB}

① $P=$ {WWB, WBW, WBB}

② $Q=$ {WBW, WBB, BBW, BBB}

③ $P\cup Q=$ {WWB, WBW, WBB, BBW, BBB}

④ $P\cap Q=$ {WBW, WBB}

⑤ $R=P\cap Q$이므로

$R^C=$ {WWB, BWW, BWB, BBW, BBB}

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0437 보기의 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ의 사건을 각각 A, B, C, D라 하면

$A=\{1, 3, 4, 7, 9, 10\}$, $B=\{1, 3, 7, 9\}$,

$C=\{3, 7\}$, $D=\{1, 4\}$

이므로

$A\cap B=\{1, 3, 7, 9\}$, $A\cap C=\{3, 7\}$, $A\cap D=\{1, 4\}$,

$B\cap C=\{3, 7\}$, $B\cap D=\{1\}$, $C\cap D=\varnothing$

따라서 보기의 사건 중 서로 배반사건인 것끼리 짝지어진 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0438 $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, $C=\{1, 5\}$이므로 ⇨ ❶

$A\cap B=\{2\}$, $B\cap C=\{5\}$, $A\cap C=\varnothing$ ⇨ ❷

따라서 사건 A와 사건 C는 서로 배반사건이다. ⇨ ❸

답 ㄷ

채점 기준	비율
❶ 세 사건 A, B, C를 구할 수 있다.	30%
❷ $A\cap B$, $B\cap C$, $A\cap C$를 구할 수 있다.	40%
❸ 서로 배반사건인 것을 찾을 수 있다.	30%

0439 주어진 벤 다이어그램에서

$A=\{1, 5, 7\}$, $B=\{2, 6, 7\}$, $C=\{3, 6\}$,

$B\cap C=\{6\}$, $B\cup C=\{2, 3, 6, 7\}$

이때 $A\cap C=\varnothing$, $A\cap(B\cap C)=\varnothing$, $A\cap(B\cup C)=\{7\}$이므로 사건 A와 서로 배반사건인 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0440 사건 A와 배반사건인 것은 A^C의 부분집합이고, 사건 B와 배반사건인 것은 B^C의 부분집합이므로 A, B와 모두 배반사건인 것은 $A^C\cap B^C$의 부분집합이다.

$A^C\cap B^C=\{3, 4, 5, 7\}\cap\{1, 4, 5, 6\}=\{4, 5\}$

이므로 구하는 사건의 개수는 $2^2-1=3$ 답 3

0441 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\cdot6=36$

(i) 두 눈의 수의 합이 4인 경우

$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 3가지

(ii) 두 눈의 수의 합이 8인 경우

$(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$의 5가지

(iii) 두 눈의 수의 합이 12인 경우

$(6, 6)$의 1가지

이상에서 두 눈의 수의 합이 4의 배수인 경우의 수는

$3+5+1=9$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$ 답 ③

0442 A에서 B를 거쳐 C로 가는 방법의 수는 $2\cdot3=6$

이때 X를 지나가는 방법의 수는 $2\cdot1=2$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ 답 ④

0443 집합 A의 부분집합의 개수는 $2^6=64$

집합 A의 부분집합 중 원소 1, 5를 모두 포함하는 집합의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{16}{64}=\dfrac{1}{4}$ 답 ④

0444 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\cdot6=36$ ➡ ❶

이차방정식 $x^2-2ax+b=0$이 중근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=(-a)^2-b=0 \quad \therefore a^2=b$ ➡ ❷

$a^2=b$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$, $(2, 4)$의 2개 ➡ ❸

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$ ➡ ❹

답 $\dfrac{1}{18}$

채점 기준	비율
❶ 모든 경우의 수를 구할 수 있다.	10%
❷ a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30%
❸ ❷의 관계식을 만족시키는 순서쌍 (a, b)를 구할 수 있다.	30%
❹ 확률을 구할 수 있다.	30%

0445 6명의 학생이 일렬로 줄을 서는 방법의 수는

$6!=720$

남학생 2명을 한 명으로 생각하여 5명이 일렬로 줄을 서는 방법의 수는 $5!=120$이고, 남학생 2명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$이므로 남학생 2명이 이웃하여 줄을 서는 방법의 수는

$120\cdot2=240$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{240}{720}=\dfrac{1}{3}$ 답 $\dfrac{1}{3}$

0446 5개의 음료수를 나란히 넣는 방법의 수는

$5!=120$

우유 3개 중에서 2개를 양 끝에 넣는 방법의 수는 ${}_3P_2=6$이고, 양 끝에 오지 않은 우유 1개와 주스 2개를 나란히 넣는 방법의 수는 $3!=6$이므로 양 끝에 우유를 넣는 방법의 수는

$6\cdot6=36$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$ 답 ②

0447 6개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$6!=720$

s와 g를 포함한 4개의 문자를 한 문자로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!=6$, s와 g 사이에 들어가는 2개의 문자를 선택하여 일렬로 나열하는 방법의 수는 ${}_4P_2=12$이고 이때 s와 g가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$이므로 s와 g 사이에 2개의 문자가 있도록 나열하는 방법의 수는

$6\cdot12\cdot2=144$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{144}{720}=\dfrac{1}{5}$ 답 $\dfrac{1}{5}$

0448 네 개의 숫자로 세 자리 자연수를 만드는 방법의 수는

${}_4P_3=24$

이때 세 자리 자연수가 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

(i) 각 자리의 숫자가 1, 2, 3인 경우

세 자리 자연수는 $3!=6$(개)

(ii) 각 자리의 숫자가 2, 3, 4인 경우

세 자리 자연수는 $3!=6$(개)

(i), (ii)에서 세 자리 자연수가 3의 배수인 경우의 수는

$6+6=12$

이므로 그 확률은 $\dfrac{12}{24}=\dfrac{1}{2}$

따라서 $p=2$, $q=1$이므로 $p+q=3$ 답 3

0449 5명의 학생이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(5-1)!=4!=24$

A와 B를 한 사람으로 생각하여 4명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는 $(4-1)!=3!=6$이고, A와 B가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$이므로 A와 B가 이웃하게 앉는 방법의 수는

$6\cdot2=12$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{12}{24}=\dfrac{1}{2}$ 답 ⑤

0450 6명의 대표가 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(6-1)!=5!=120$

아시아 대표 3명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는 $(3-1)!=2!=2$이고, 아시아 대표 사이사이의 3개의 자리에 유럽 대표 3명이 앉는

방법의 수는 $3!=6$이므로 아시아 대표와 유럽 대표가 번갈아 가며 앉는 방법의 수는 $2\cdot6=12$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$ 답 ③

0451 8가지 음식을 구절판에 모두 담는 방법의 수는

$(8-1)!=7!=5040$ ⇨ ❶

애호박나물을 담은 맞은편에 달걀지단을 담고 나머지 6가지 음식을 6개의 칸에 담는 방법의 수는

${}_6P_6=6!=720$ ⇨ ❷

따라서 구하는 확률은 $\frac{720}{5040}=\frac{1}{7}$ ⇨ ❸

답 $\frac{1}{7}$

채점 기준	비율
❶ 8가지 음식을 담는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
❷ 애호박나물의 맞은편에 달걀지단을 담는 방법의 수를 구할 수 있다.	50%
❸ 확률을 구할 수 있다.	20%

0452 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

이때 짝수의 개수는 ${}_4\Pi_2\cdot2=4^2\cdot2=32$

따라서 구하는 확률은 $\frac{32}{64}=\frac{1}{2}$ 답 ④

0453 집합 X에서 집합 X로의 함수 f의 개수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

이때 일대일 대응의 개수는 ${}_3P_3=3!=6$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$ 답 ③

라쎈 특강 함수의 개수

집합 $X=\{1, 2, 3, \cdots, r\}$에서 $Y=\{1, 2, 3, \cdots, n\}(r\le n)$으로의 함수 f에 대하여

① 함수 f의 개수 ${}_n\Pi_r$

② 일대일함수의 개수 ${}_nP_r$

③ 일대일 대응의 개수 ${}_nP_r$(단, $n=r$)

0454 4명의 학생이 도서전시회가 열리는 7일 중 참가할 날을 택하는 방법의 수는 ${}_7\Pi_4=7^4=2401$

서로 다른 날을 택하는 방법의 수는

${}_7P_4=840$

따라서 구하는 확률은 $\frac{840}{2401}=\frac{120}{343}$ 답 $\frac{120}{343}$

0455 6개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{6!}{2!\cdot2!}=180$

2개의 O를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

따라서 구하는 확률은 $\frac{60}{180}=\frac{1}{3}$ 답 ③

0456 5개의 숫자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{2!\cdot2!}=30$ ⇨ ❶

맨 앞에 1을 나열하고, 나머지 숫자 1, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$ ⇨ ❷

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$ ⇨ ❸

답 $\frac{2}{5}$

채점 기준	비율
❶ 5개의 숫자를 일렬로 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ 1이 맨 앞에 오도록 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 확률을 구할 수 있다.	20%

0457 집합 A에서 집합 B로의 함수 f의 개수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

$f(a)+f(b)+f(c)=4$를 만족시키는 함수 f의 개수는 $1+1+2=4$에서 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$\frac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{8}$ 답 ⑤

0458 7개의 공 중에서 3개의 공을 꺼내는 방법의 수는

${}_7C_3=35$

흰 공 3개 중에서 1개, 검은 공 4개 중에서 2개를 꺼내는 방법의 수는

${}_3C_1\cdot{}_4C_2=3\cdot6=18$

따라서 구하는 확률은 $\frac{18}{35}$ 답 $\frac{18}{35}$

0459 6명 중에서 3명의 대표를 뽑는 방법의 수는

${}_6C_3=20$

B와 C는 포함되고 E는 포함되지 않는 방법의 수는 B, C, E를 제외한 나머지 3명 중에서 1명을 뽑고 B와 C를 포함시키는 방법의 수와 같으므로 ${}_3C_1=3$

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{20}$ 답 ①

0460 5개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 방법의 수는

${}_5C_3=10$ ⇨ ❶

만들어진 삼각형이 직각삼각형이려면 직각삼각형의 빗변이 지름이어야 하므로 직각삼각형이 되는 경우의 수는

${}_3C_1=3$ ⇨ ❷

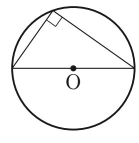
따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{10}$ ⇨ ❸

답 $\frac{3}{10}$

채점 기준	비율
❶ 5개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ 직각삼각형이 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 확률을 구할 수 있다.	20%

타센 특강 원에 내접하는 직각삼각형

반원에 대한 원주각의 크기는 90°이므로 원의 지름의 양 끝 점과 원 위의 다른 한 점을 택하면 직각삼각형을 만들 수 있다.



0461 상자에 들어 있는 당첨제비의 개수를 n이라 하면

$$\frac{{}_{n}\mathrm{C}_{2}}{{}_{10}\mathrm{C}_{2}}=\frac{2}{15}$$

$$\frac{n(n-1)}{10\cdot 9}=\frac{2}{15},\qquad n^2-n-12=0$$

$$(n+3)(n-4)=0\qquad \therefore n=4\ (\because n\ge 2)$$

따라서 상자에 들어 있는 당첨제비의 개수는 4이다. 답 ③

0462 귤, 참외, 사과, 배 중 중복을 허용하여 5개를 구입하는 방법의 수는 서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{4}\mathrm{H}_{5}={}_{8}\mathrm{C}_{5}=56$$

귤이 2개 포함되는 경우의 수는 참외, 사과, 배 중에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{3}\mathrm{H}_{3}={}_{5}\mathrm{C}_{3}=10$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{10}{56}=\frac{5}{28}$ 답 ①

0463 7명의 유권자가 3명의 후보에게 무기명으로 투표하는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{3}\mathrm{H}_{7}={}_{9}\mathrm{C}_{7}=36$$ ⇨ ❶

A후보가 한 표도 받지 못하는 경우는 7명의 유권자가 B, C 중 한 명에게 투표하는 경우이므로 그 경우의 수는 서로 다른 2개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 즉

$${}_{2}\mathrm{H}_{7}={}_{8}\mathrm{C}_{7}=8$$ ⇨ ❷

따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$ ⇨ ❸

답 $\frac{2}{9}$

채점 기준	비율
❶ 7명의 유권자가 3명의 후보 중 한 명에게 무기명으로 투표하는 방법의 수를 구할 수 있다.	40%
❷ A후보가 한 표도 받지 못하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40%
❸ 확률을 구할 수 있다.	20%

0464 조사한 전체 학생 수는

$$80+110+85+125=400$$

이므로 한 명을 택했을 때, 그 학생이 D사의 스마트폰을 사용할 확률은

$$\frac{125}{400}=\frac{5}{16}$$ 답 $\frac{5}{16}$

0465 양궁 선수가 9점을 맞힌 횟수는 47, 10점을 맞힌 횟수는 25이므로 9점 이상을 맞히는 경우의 수는

$$47+25=72$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{72}{200}=\frac{9}{25}$ 답 ③

0466 주머니에 들어 있는 노란 구슬의 개수를 n이라 하면

$$\frac{{}_{n}\mathrm{C}_{1}\cdot{}_{7-n}\mathrm{C}_{1}}{{}_{7}\mathrm{C}_{2}}=\frac{4}{7}$$

$$\frac{n(7-n)}{21}=\frac{4}{7},\qquad n(7-n)=12$$

$$n^2-7n+12=0,\ (n-3)(n-4)=0$$

$$\therefore n=4\ (\because n\ge 4)$$

따라서 노란 구슬은 4개 들어 있다고 볼 수 있다. 답 4개

0467 작은 원부터 세 동심원의 넓이는 각각 π, 4π, 9π이므로 색칠한 부분의 넓이는

$$9\pi-4\pi=5\pi$$

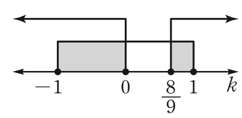
따라서 총알이 색칠한 부분에 맞을 확률은 $\frac{5\pi}{9\pi}=\frac{5}{9}$ 답 ④

0468 이차방정식 $2x^2-3kx+k=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 실근을 가지려면

$$D=(-3k)^2-4\cdot 2\cdot k\ge 0$$ ⇨ ❶

$$k(9k-8)\ge 0\qquad \therefore k\le 0 \text{ 또는 } k\ge\frac{8}{9}$$ ⇨ ❷

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 확률은



$$\frac{\{0-(-1)\}+\left(1-\frac{8}{9}\right)}{1-(-1)}=\frac{5}{9}$$ ⇨ ❸

답 $\frac{5}{9}$

채점 기준	비율
❶ $D\ge 0$임을 알 수 있다.	20%
❷ $D\ge 0$을 만족시키는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 확률을 구할 수 있다.	40%

0469 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=0.8$, $\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=0.5$이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$$0.9=0.8+0.5-\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=0.4$$ 답 ③

0470 $S=A\cup B$이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)=1$

A, B가 서로 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$$1=\frac{2}{5}+\mathrm{P}(B)\qquad \therefore \mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}$$ 답 ④

0471 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$$ ⇨ ❶

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$$ ⇨ ❷

$$=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$ ⇨ ❸

답 $\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(A\cup B)$를 구할 수 있다.	40%
❷ $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$임을 알 수 있다.	40%
❸ $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$를 구할 수 있다.	20%

0472 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$에서 $\frac{3}{4}=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

즉 $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}-\mathrm{P}(A)$이고, $\frac{1}{6}\le\mathrm{P}(A)\le\frac{1}{2}$에서

$$-\frac{1}{2}\le-\mathrm{P}(A)\le-\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{4}\le\frac{3}{4}-\mathrm{P}(A)\le\frac{7}{12}$$

$$\therefore \frac{1}{4}\le\mathrm{P}(B)\le\frac{7}{12}$$

따라서 $\mathrm{P}(B)$의 최댓값은 $\frac{7}{12}$이다. 답 ⑤

0473 두 주사위를 동시에 한 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$4\cdot6=24$

정사면체 모양의 주사위의 바닥에 놓인 면에 적힌 수와 정육면체 모양의 주사위에서 나온 수를 각각 a, b라 하고 순서쌍 (a, b)로 나타낼 때, 두 수의 합이 8 이상인 사건을 A, 4의 배수인 사건을 B라 하면

$A=\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (3, 6), (4, 5), (4, 6)\}$,

$B=\{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (2, 6), (3, 5), (4, 4)\}$

$\therefore A\cap B=\{(2, 6), (3, 5), (4, 4)\}$

따라서

$$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(B)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4},$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$$

이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

답 ②

0474 펜션을 운영하는 가구를 택하는 사건을 A, 식당을 운영하는 가구를 택하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.45$, $\mathrm{P}(B)=0.33$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.12$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=0.45+0.33-0.12$$
$$=0.66$$

답 0.66

0475 A가 적힌 카드를 뽑는 사건을 A, H가 적힌 카드를 뽑는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{3}{8},\ \mathrm{P}(B)=\frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{3}{8},$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_6\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{3}{28}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}-\frac{3}{28}=\frac{9}{14}$$

답 ②

0476 뽑힌 2명이 모두 여자인 사건을 A, 뽑힌 2명이 모두 남자인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{5}{18},\ \mathrm{P}(B)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$$

A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{5}{18}+\frac{1}{6}=\frac{4}{9}$$

답 $\frac{4}{9}$

0477 두 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\cdot6=36$

눈의 수의 합이 3인 사건을 A, 눈의 수의 차가 3인 사건을 B라 하면

$A=\{(1, 2), (2, 1)\}$,

$B=\{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)\}$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18},\ \mathrm{P}(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{18}+\frac{1}{6}=\frac{2}{9}$$

답 ④

0478 5장의 카드에서 2장의 카드를 뽑는 모든 방법의 수는

${}_5\mathrm{C}_2=10$ ⇨ ❶

카드에 적힌 숫자의 합이 5, 7, 11인 사건을 각각 A, B, C라 하면

5 ➡ 2와 3의 1가지

7 ➡ 2와 5, 3과 4의 2가지

11 ➡ 5와 6의 1가지 ⇨ ❷

$$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{10},\ \mathrm{P}(B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5},\ \mathrm{P}(C)=\frac{1}{10}$$ ⇨ ❸

A, B, C는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$$
$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{2}{5}$$ ⇨ ❹

답 $\frac{2}{5}$

채점 기준	비율
❶ 일어나는 모든 경우의 수를 구할 수 있다.	20%
❷ 카드에 적힌 숫자의 합이 소수가 되는 사건 A, B, C를 구할 수 있다.	30%
❸ $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(C)$를 구할 수 있다.	20%
❹ $\mathrm{P}(A\cup B\cup C)$를 구할 수 있다.	30%

0479 뽑힌 대표 중에서 적어도 한 명이 여학생인 사건을 A라 하면 A^C는 세 명이 모두 남학생인 사건이므로 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{2}{7}$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

답 ②

0480 주어진 정육면체 모양의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는 $6\cdot6=36$

8의 약수가 적어도 한 번 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 두 번 모두 8의 약수가 나오지 않는 사건이다.

1, 2, 4, 6, 8, 10 중에서 8의 약수가 아닌 것은 6, 10이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{2\cdot2}{36}=\frac{1}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

답 ⑤

0481 카드에 적힌 수가 3의 배수인 사건을 A, 5의 배수인 사건을 B라 하면 3의 배수도 5의 배수도 아닌 사건은
$A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$이다.
이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$이고, $A\cap B$는 15의 배수인 사건이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{20}$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{3}{10}+\frac{1}{5}-\frac{1}{20}=\frac{9}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$$
$$=1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}$$

답 $\frac{11}{20}$

0482 한 개의 주사위를 세 번 던질 때, 모든 경우의 수는
$6\cdot6\cdot6=216$
$(a-b)(b-c)(c-a)=0$에서
$a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$
따라서 주사위를 세 번 던질 때 적어도 두 번은 주사위의 눈이 같아야 한다. 위의 사건을 A라 하면 주사위를 세 번 던질 때 주사위의 눈이 모두 다른 사건은 A^C이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_6\mathrm{P}_3}{216}=\frac{5}{9}$$
$$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$$

답 $\frac{4}{9}$

0483 두 문제 이상 맞히는 사건을 A라 하면 A^C는 한 문제를 맞히거나 한 문제도 못 맞히는 사건이다.
(i) 한 문제를 맞힐 확률은 $\frac{{}_5\mathrm{C}_1}{{}_2\Pi_5}=\frac{5}{32}$
(ii) 한 문제도 못 맞힐 확률은 $\frac{{}_5\mathrm{C}_0}{{}_2\Pi_5}=\frac{1}{32}$
(i), (ii)에서 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{3}{16}$
따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$$

답 ①

0484 8개의 구슬 중에서 3개를 꺼낼 때, 빨간 구슬이 2개 이하인 사건을 A라 하면 A^C는 빨간 구슬이 3개인 사건이다. ⇨ ❶

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{1}{14}$$ ⇨ ❷

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{14}=\frac{13}{14}$$ ⇨ ❸

답 $\frac{13}{14}$

채점 기준	비율
❶ A^C인 사건을 알 수 있다.	30%
❷ $\mathrm{P}(A^C)$를 구할 수 있다.	50%
❸ $\mathrm{P}(A)$를 구할 수 있다.	20%

0485 네 개의 숫자 중에서 서로 다른 세 개의 숫자로 세 자리 정수를 만들 때, 330 이하인 사건을 A라 하면 A^C는 331 이상인 사건이다. 이때 331 이상인 정수는 34□ 꼴 또는 4□□ 꼴이다.
(i) 34□ 꼴일 확률은 $\frac{{}_2\mathrm{P}_1}{{}_4\mathrm{P}_3}=\frac{1}{12}$
(ii) 4□□ 꼴일 확률은 $\frac{{}_3\mathrm{P}_2}{{}_4\mathrm{P}_3}=\frac{1}{4}$
(i), (ii)에서 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$
따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

0486 ㄱ. 임의의 사건 A에 대하여
$0\le \mathrm{P}(A)\le 1$
ㄴ. $\mathrm{P}(S)=1$, $\mathrm{P}(\varnothing)=0$이므로 $\mathrm{P}(S)+\mathrm{P}(\varnothing)=1$
ㄷ. $\varnothing\subset(A\cap B)\subset S$이므로 $\mathrm{P}(\varnothing)\le\mathrm{P}(A\cap B)\le\mathrm{P}(S)$
$\therefore 0\le\mathrm{P}(A\cap B)\le 1$
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0487 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 3, 5, 7, 9\}$
$A=\{1\}$, $B=\varnothing$, $C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $D=\varnothing$
이므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(B)=0$, $\mathrm{P}(C)=1$, $\mathrm{P}(D)=0$
따라서 확률이 0인 사건은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

0488 ㄱ. A와 A^C는 서로 배반사건이므로
$\mathrm{P}(A\cup A^C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)$
$\therefore \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)=1$
ㄴ. [반례] $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$이면
$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=1$이지만 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq 0$이므로 A와 B는 서로 배반사건이 아니다.
ㄷ. $0\le\mathrm{P}(A)\le1$, $0\le\mathrm{P}(B)\le1$이므로
$0\le\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\le2$
이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

0489 전략 두 집합 A, B가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$이다.
풀이 $A=\{3, 7\}$, $B=\{4, 6, 10\}$, $C=\{10\}$이므로
$A\cap B=\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$, $B\cap C=\{10\}$
따라서 사건 A와 사건 B, 사건 A와 사건 C는 서로 배반사건이다.

답 ㄱ, ㄴ

0490 전략 한 사람이 낼 수 있는 것은 가위, 바위, 보의 3가지이다.
풀이 세 사람이 가위바위보를 한 번 할 때, 모든 경우의 수는
${}_3\Pi_3=3^3=27$
이기는 한 명을 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$이고, 이기는 한 명이 가위, 바위, 보 중에서 어느 하나를 내는 경우의 수도 ${}_3\mathrm{C}_1=3$이다.
이때 지는 두 명이 내는 것은 정해져 있으므로 한 명이 이기는 경우의 수는
$3\cdot3=9$
따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$

답 ⑤

0491 전략 n개의 수의 곱이 홀수이려면 n개의 수가 모두 홀수이어야 한다.

풀이 5장의 카드 중에서 3장을 꺼내는 방법의 수는

$_5C_3=10$

카드에 적힌 세 숫자의 곱이 홀수이려면 세 숫자가 모두 홀수이어야 하므로 홀수가 적힌 3장의 카드 중에서 3장을 뽑는 방법의 수는

$_3C_3=1$

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{10}$ 답 ②

0492 전략 n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, …, r개씩 있을 때, n개를 모두 일렬로 나열하는 순열의 수는 $\frac{n!}{p!q!\cdots r!}(p+q+\cdots+r=n)$임을 이용한다.

풀이 7개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{7!}{2!\cdot 2!}=1260$

1개의 E를 제외한 6개의 문자를 일렬로 나열하고 가운데에 E를 나열하는 방법의 수는

$\frac{6!}{2!}=360$

따라서 구하는 확률은 $\frac{360}{1260}=\frac{2}{7}$ 답 $\frac{2}{7}$

0493 전략 먼저 조사한 전체 학생 수를 구한다.

풀이 조사한 전체 학생 수는

$42+68+104+61+25=300$

따라서 300명 중 임의로 한 학생을 택할 때, 매우 만족한 학생일 확률은

$\frac{42}{300}=\frac{7}{50}$ 답 $\frac{7}{50}$

0494 전략 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$임을 이용한다.

풀이 한 개의 동전을 5회 던질 때, 모든 경우의 수는

$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=32$ ⇨ ❶

한 개의 동전을 5회 던질 때 앞면이 3회 나오는 사건을 A, 앞면이 4회 나오는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{_5C_3}{2^5}=\frac{5}{16}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{_5C_4}{2^5}=\frac{5}{32}$ ⇨ ❷

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{5}{16}+\frac{5}{32}=\frac{15}{32}$ ⇨ ❸

답 $\frac{15}{32}$

채점 기준	비율
❶ 한 개의 동전을 5회 던질 때 나오는 모든 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
❷ $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$를 구할 수 있다.	40%
❸ 확률을 구할 수 있다.	30%

0495 전략 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$임을 이용한다.

풀이 두 주사위의 눈의 수가 다른 사건을 A라 하면 A^C는 두 눈의 수가 같은 사건이다.

두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\cdot6=36$

두 눈의 수가 같은 경우의 수는 6이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ 답 $\frac{5}{6}$

0496 전략 앞면과 뒷면의 개수가 처음과 같으려면 앞면과 뒷면이 보이는 동전을 각각 1개씩 뒤집어야 한다.

풀이 7개의 동전 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_7C_2=21$

앞면과 뒷면의 개수가 처음과 같으려면 앞면이 보이는 동전 1개, 뒷면이 보이는 동전 1개를 뒤집어야 한다.

앞면과 뒷면이 보이는 동전을 각각 1개씩 택하는 방법의 수는

$_4C_1\cdot{}_3C_1=12$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$ 답 ③

0497 전략 서로 다른 n개의 숫자를 한 번씩 이용하여 만들 수 있는 n자리 자연수의 개수는 $n!$임을 이용한다.

풀이 1, 2, 3, 4를 한 번씩 이용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는 $4!=24$

이때 4의 배수는 □□12 꼴 또는 □□24 꼴 또는 □□32 꼴이다.

(i) □□12 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$

(ii) □□24 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$

(iii) □□32 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$

이상에서 4의 배수의 개수는 $2+2+2=6$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

0498 전략 서로 다른 n개의 숫자에서 중복을 허용하여 만든 r자리 자연수의 개수는 $_n\Pi_r=n^r$임을 이용한다.

풀이 1, 2, 3, 4에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$_4\Pi_4=4^4=256$

이때 3300보다 큰 자연수는 33□□ 꼴 또는 34□□ 꼴 또는 4□□□ 꼴이다.

(i) 33□□ 꼴인 자연수의 개수는 $_4\Pi_2=4^2=16$

(ii) 34□□ 꼴인 자연수의 개수는 $_4\Pi_2=4^2=16$

(iii) 4□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $_4\Pi_3=4^3=64$

이상에서 3300보다 큰 자연수의 개수는 $16+16+64=96$

따라서 구하는 확률은 $\frac{96}{256}=\frac{3}{8}$ 답 ⑤

0499 전략 문자의 배열 순서가 정해진 경우에 문자를 나열할 때에는 순서가 정해진 문자를 같은 문자로 생각한다.

풀이 7개의 문자 b, l, a, n, k, e, t를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $7!=5040$ ⇨ ❶

a, n, k를 이 순서로 배열하는 방법의 수는 a, n, k를 같은 문자로 생각하고 나열하는 방법의 수와 같으므로

$\frac{7!}{3!}=840$ ⇨ ❷

따라서 구하는 확률은 $\frac{840}{5040}=\frac{1}{6}$ ⇨ ❸

답 $\frac{1}{6}$

채점 기준	비율
❶ 7개의 문자를 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30%
❷ a, n, k를 이 순서로 배열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	50%
❸ 확률을 구할 수 있다.	20%

0500 전략 두 직선 l, m에서 각각 점을 몇 개씩 택하면 삼각형이 되는지 생각해 본다.

풀이 6개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$_6C_3=20$

이 중에서 삼각형이 되는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 l에서 2개의 점을 택하고, 직선 m에서 1개의 점을 택하는 경우의 수는 $\quad {}_2C_2\cdot{}_4C_1=4$

(ii) 직선 l에서 1개의 점을 택하고, 직선 m에서 2개의 점을 택하는 경우의 수는 $\quad {}_2C_1\cdot{}_4C_2=12$

(i), (ii)에서 삼각형이 되는 경우의 수는 $\quad 4+12=16$

따라서 구하는 확률은 $\quad \dfrac{16}{20}=\dfrac{4}{5}$ 답 ⑤

다른풀이 3개의 점을 택하여 선분으로 이을 때, 삼각형이 되는 사건을 A라 하면 A^C는 삼각형이 되지 않는 사건이다.

직선 m 위의 3개의 점을 택하는 경우 삼각형이 되지 않으므로

$$P(A^C)=\frac{{}_4C_3}{{}_6C_3}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

0501 전략 주머니에서 한 번 구슬을 꺼낼 때 흰 구슬이 나올 확률은 $\dfrac{(\text{흰 구슬이 나온 횟수})}{(\text{전체 시행 횟수})}$임을 이용한다.

풀이 주머니에서 한 번 구슬을 꺼낼 때 흰 구슬이 나올 확률은

$$\frac{200}{1000}=\frac{1}{5}$$

따라서 $\dfrac{1}{5}=\dfrac{n}{n+28}$이므로 $\quad n+28=5n$

$\therefore n=7$ 답 ①

0502 전략 먼저 주어진 두 식을 연립하여 $P(A)$를 구한다.

풀이 $P(B)=P(A)-\dfrac{1}{6}$, $P(A)P(B)=\dfrac{1}{6}$에서

$$P(A)\left\{P(A)-\frac{1}{6}\right\}=\frac{1}{6}$$

$$\{P(A)\}^2-\frac{1}{6}P(A)-\frac{1}{6}=0$$

$$6\{P(A)\}^2-P(A)-1=0$$

$$\{2P(A)-1\}\{3P(A)+1\}=0$$

$P(A)>0$이므로 $\quad P(A)=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore P(B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

이때 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

답 ⑤

0503 전략 세 사건 A, B, C가 서로 배반사건이면 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$이다.

풀이 전체 12명의 학생 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

$_{12}C_2=66$ ⇨ ❶

1학년 학생 중에서 2명을 뽑는 사건을 A, 2학년 학생 중에서 2명을 뽑는 사건을 B, 3학년 학생 중에서 2명을 뽑는 사건을 C라 하면

$$P(A)=\frac{{}_2C_2}{{}_{12}C_2}=\frac{1}{66},$$

$$P(B)=\frac{{}_6C_2}{{}_{12}C_2}=\frac{5}{22},$$

$$P(C)=\frac{{}_4C_2}{{}_{12}C_2}=\frac{1}{11}$$ ⇨ ❷

세 사건 A, B, C가 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{1}{66}+\frac{5}{22}+\frac{1}{11}=\frac{1}{3}$$ ⇨ ❸

답 $\dfrac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ 전체에서 대표 2명을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	20%
❷ $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$를 구할 수 있다.	40%
❸ $P(A\cup B\cup C)$를 구할 수 있다.	40%

0504 전략 먼저 두 눈의 수의 합이 6과 서로소인 경우를 찾는다.

풀이 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\cdot6=36$

두 눈의 수의 합이 5, 7, 11인 경우 6과 서로소이므로 두 눈의 수의 합이 5, 7, 11인 사건을 각각 A, B, C라 하자.

(i) 두 눈의 수의 합이 5인 경우

(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지

$$\therefore P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

(ii) 두 눈의 수의 합이 7인 경우

(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)의 6가지

$$\therefore P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

(iii) 두 눈의 수의 합이 11인 경우

(5, 6), (6, 5)의 2가지

$$\therefore P(C)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

따라서 세 사건 A, B, C가 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{1}{3}$$

답 ①

0505 전략 여사건의 확률을 이용한다.

풀이 주황색 공이 적어도 2개 포함되는 사건을 A라 하면 A^C는 주황색 공이 1개이거나 0개인 사건이다.

(i) 주황색 공이 1개일 확률은 $\quad \dfrac{{}_4C_1\cdot{}_4C_3}{{}_8C_4}=\dfrac{8}{35}$

(ii) 주황색 공이 0개일 확률은 $\quad \dfrac{{}_4C_4}{{}_8C_4}=\dfrac{1}{70}$

(i), (ii)에서 $\quad P(A^C)=\dfrac{8}{35}+\dfrac{1}{70}=\dfrac{17}{70}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{17}{70}=\frac{53}{70}$$

답 ⑤

0506 전략 두 수의 곱이 짝수인 사건은 두 수의 곱이 홀수인 사건의 여사건임을 이용한다.

풀이 두 원소의 곱이 짝수인 사건을 A라 하면 A^C는 두 원소의 곱이 홀수인 사건이므로

$$P(A^C)=\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{10}{45}=\frac{2}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

답 $\frac{7}{9}$

0507 전략 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'x+c'=0$이 평행할 조건은 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$임을 이용한다.

풀이 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\cdot6=36$

두 직선 $ax+6y-2=0$, $x+by+1=0$이 평행할 조건은

$\frac{a}{1}=\frac{6}{b}\neq\frac{-2}{1}$, 즉 $ab=6$, $a\neq-2$, $b\neq-3$

이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(1, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$의 4개

따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

답 $\frac{1}{9}$

0508 전략 D와 E가 세 좌석이 연결된 자리에서 이웃하게 앉는 경우와 두 좌석이 연결된 자리에서 이웃하게 앉는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 5명이 좌석에 앉는 경우의 수는 $5!=120$

(i) D와 E가 G_1, G_2 또는 G_2, G_3에 앉는 경우

D와 E가 G_1, G_2 또는 G_2, G_3에 앉고, A, B, C가 나머지 세 자리에 앉는 경우의 수는 $2\cdot2!\cdot3!=24$

(ii) D와 E가 G_4, G_5에 앉는 경우

D와 E가 G_4, G_5에 앉고, A, B, C가 나머지 세 자리에 앉는 경우의 수는 $2!\cdot3!=12$

(i), (ii)에서 D와 E가 이웃하게 앉는 경우의 수는

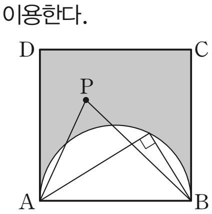
$24+12=36$

따라서 구하는 확률은 $\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$

답 ②

0509 전략 선분 AB를 지름으로 하는 반원을 그린 후 점 P가 반원 위에 있을 때 삼각형 PAB는 직각삼각형이 됨을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 P가 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 반원 위에 있을 때 삼각형 PAB는 직각삼각형이 되므로 이 반원의 외부에 점 P를 잡으면 삼각형 PAB는 예각삼각형이 된다.



색칠한 부분의 넓이는 $16-\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot2^2=16-2\pi$

정사각형 ABCD의 넓이는 16이므로 구하는 확률은

$$\frac{16-2\pi}{16}=\frac{8-\pi}{8}$$

답 ②

0510 전략 두 사건 A, B에 대하여 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$임을 이용한다.

풀이 P에서 Q까지 최단 거리로 갈 때, A를 지나는 사건을 A, B를 지나는 사건을 B라 하자.

P → Q로 가는 방법의 수는

$$\frac{7!}{4!\cdot3!}=35$$

이고, P → A → Q로 가는 방법의 수는

$$\frac{3!}{2!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot2!}=18$$

이므로 $P(A)=\frac{18}{35}$

P → B → Q로 가는 방법의 수는

$$\frac{5!}{3!\cdot2!}\cdot2=20$$

이므로 $P(B)=\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$

P → A → B → Q로 가는 방법의 수는

$$\frac{3!}{2!}\cdot2\cdot2=12$$

이므로 $P(A\cap B)=\frac{12}{35}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{18}{35}+\frac{4}{7}-\frac{12}{35}=\frac{26}{35}$$

답 ③

0511 전략 대표 2명이 모두 남학생인 사건과 모두 여학생인 사건은 서로 배반사건이다.

풀이 15명의 회원 중 대표 2명을 뽑는 방법의 수는

${}_{15}C_2=105$ ⇨ ❶

여학생 수를 x라 하면 15명 중에서 대표 2명을 뽑을 때, 2명이 모두 남학생일 확률은

$$\frac{{}_{15-x}C_2}{{}_{15}C_2}=\frac{(15-x)(14-x)}{210} \quad \cdots\cdots ㉠$$

모두 여학생일 확률은

$$\frac{{}_xC_2}{{}_{15}C_2}=\frac{x(x-1)}{210} \quad \cdots\cdots ㉡$$ ⇨ ❷

㉠, ㉡에서

$$\frac{(15-x)(14-x)}{210}+\frac{x(x-1)}{210}=\frac{7}{15}$$ ⇨ ❸

$x^2-15x+56=0$, $(x-7)(x-8)=0$

이때 여학생 수가 남학생 수보다 많으므로

$x=8$

따라서 여학생 수는 8이다. ⇨ ❹

답 8

채점 기준	비율
❶ 대표 2명을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	10%
❷ 2명 모두 남학생이거나 여학생일 확률을 구할 수 있다.	50%
❸ x에 대한 방정식을 세울 수 있다.	20%
❹ 여학생의 수를 구할 수 있다.	20%

Ⅱ. 확률

06 조건부확률

0512 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{5}$ 답 $\dfrac{2}{5}$

0513 $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{1}{3}$ 답 $\dfrac{1}{3}$

0514 $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 3, 5\}$에서

(1) $\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

(2) $A\cap B=\{3, 5\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

(3) $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$

답 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $\dfrac{1}{3}$ (3) $\dfrac{2}{3}$

0515 $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{1, 2, 5, 10\}$에서

(1) $\mathrm{P}(B)=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

(2) $A\cap B=\{2, 10\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$

(3) $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}=\dfrac{1}{2}$

답 (1) $\dfrac{2}{5}$ (2) $\dfrac{1}{5}$ (3) $\dfrac{1}{2}$

0516 $\mathrm{P}(A)=0.5$, $\mathrm{P}(B)=0.4$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.3$이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{0.3}{0.5}=0.6$

답 0.6

0517 동전의 뒷면이 1개 나오는 사건을 A, 10원짜리 동전의 뒷면이 나오는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{8}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}}=\dfrac{1}{3}$ 답 $\dfrac{1}{3}$

다른풀이 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고 동전의 순서쌍을 (100원, 100원, 10원)으로 나타내면 뒷면이 1개 나오는 사건은

{(T, H, H), (H, T, H), (H, H, T)}

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{1}{3}$

0518 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(\boxed{A})\mathrm{P}(B|A)$

$=0.4\times0.2=\boxed{0.08}$

이므로

$\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(\boxed{A\cap B})}{\mathrm{P}(\boxed{B})}=\dfrac{0.08}{0.5}=\boxed{0.16}$

∴ (가) A (나) 0.08 (다) $A\cap B$ (라) B (마) 0.16

답 풀이 참조

0519 (1) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$

$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

(2) $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{4}$ 답 (1) $\dfrac{1}{6}$ (2) $\dfrac{1}{4}$

0520 (1) $\mathrm{P}(A)=\dfrac{4}{7}$

(2) 첫 번째에 검은 공을 꺼냈으므로 주머니 안에는 검은 공 3개와 흰 공 3개가 남아 있다.

따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

(3) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{7}$

답 (1) $\dfrac{4}{7}$ (2) $\dfrac{1}{2}$ (3) $\dfrac{2}{7}$

0521 (1) $\mathrm{P}(A)=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

(2) 첫 번째에 당첨권을 뽑았으므로 상자 안에는 행운권 9장 중 당첨권이 5장 들어 있다.

따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{5}{9}$

(2) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5}{9}=\dfrac{1}{3}$

답 (1) $\dfrac{3}{5}$ (2) $\dfrac{5}{9}$ (3) $\dfrac{1}{3}$

0522 첫 번째에 꺼낸 CD가 가요 CD인 사건을 A, 두 번째에 꺼낸 CD가 가요 CD인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{7}{11}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{7}{11}=\dfrac{14}{33}$ 답 $\dfrac{14}{33}$

0523 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{3}$ 답 $\dfrac{2}{3}$

0524 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{1}{2}$

0525 (1) 첫 번째에 노란 공을 뽑았으므로 주머니 안에는 빨간 공 2개와 노란 공 3개가 들어 있다.

따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{2}{5}$

(2) (i) 첫 번째에 노란 공, 두 번째에 빨간 공을 꺼낼 확률은

$\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$

(ii) 첫 번째에 빨간 공, 두 번째에 빨간 공을 꺼낼 확률은

$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$

(i), (ii)에서 $\quad \mathrm{P}(B)=\frac{4}{15}+\frac{1}{15}=\frac{1}{3}$

(3) $\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$에서

$\mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다. 답 풀이 참조

0526 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.25\times0.2=0.05$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.05$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 독립이다. 답 독립

0527 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.4\times0.5=0.2$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.1$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다. 답 종속

0528 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.3\times0.6=0.18$ 답 0.18

0529 두 사건 A, B^C가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=0.3\times(1-0.6)=0.12$

답 0.12

0530 두 사건 A^C, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C|B)=\mathrm{P}(A^C)=1-0.3=0.7$ 답 0.7

0531 (1) 두 사건 A, B는 서로 일어날 확률에 영향을 주지 않으므로 서로 독립이다.

(2) 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

답 (1) 독립 (2) $\frac{1}{4}$

0532 A, B가 시험에 합격하는 사건을 각각 A, B라 하면 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.5\times0.7=0.35$ 답 0.35

0533 한 개의 동전을 한 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 사건을 A라 하면 $\quad \mathrm{P}(A)=\boxed{\frac{1}{2}}$

각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

${}_4\mathrm{C}_3\left(\boxed{\frac{1}{2}}\right)^3\left(\boxed{\frac{1}{2}}\right)^1=\boxed{\frac{1}{4}}$

$\therefore$ (가) $\frac{1}{2}$ (나) $\frac{1}{2}$ (다) $\frac{1}{2}$ (라) $\frac{1}{4}$ 답 풀이 참조

0534 (1) $A=\{3, 6\}$이므로 $\quad \mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(2) 각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{9}$ 답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{9}$

0535 (1) $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$

(2) 각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{128}$ 답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{27}{128}$

0536 자유투를 한 번 하는 시행에서 성공하는 사건을 A라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$

각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^1=\frac{54}{125}$ 답 $\frac{54}{125}$

0537 사격 선수가 목표물을 한 번 쏘는 시행에서 맞히는 사건을 A라 하면 $\quad \mathrm{P}(A)=0.7$

각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

${}_5\mathrm{C}_0(0.7)^0(0.3)^5=0.00243$ 답 0.00243

0538 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$

$=1-0.2=0.8$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$0.8=0.4+0.5-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=0.1$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0.1}{0.5}=0.2$ 답 0.2

0539 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{3}{4}=\frac{1}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{12} \qquad \therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(B^C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

이므로

$\mathrm{P}(A^C|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$ 답 ⑤

0540 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-0.2=0.8$이므로

$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A^C)}{\mathrm{P}(A^C)}=\frac{\mathrm{P}(B\cap A^C)}{0.8}=0.5$

$\therefore \mathrm{P}(B\cap A^C)=0.4$

$\mathrm{P}(A^C|B)=0.8$에서

$\mathrm{P}(A^C|B)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0.4}{\mathrm{P}(B)}=0.8$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{0.4}{0.8}=0.5$ 답 0.5

0541 $\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ ⇨ ❶

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$A\cap B=\varnothing \qquad \therefore A\subset B^C$

따라서 $A\cap B^C=A$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$ ⇨ ❷

$\therefore \mathrm{P}(A|B^C)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{5}}=\dfrac{5}{8}$ ⇨ ❸

답 $\dfrac{5}{8}$

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(B^C)$를 구할 수 있다.	20%
❷ $\mathrm{P}(A\cap B^C)$를 구할 수 있다.	50%
❸ $\mathrm{P}(A|B^C)$를 구할 수 있다.	30%

0542 마라톤 대회에 참가한 학생을 택하는 사건을 A, 여학생을 택하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{19}{34},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{7}{34}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{7}{34}}{\frac{19}{34}}=\dfrac{7}{19}$ 답 ②

0543 여학생을 택하는 사건을 A, 안경을 쓴 학생을 택하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.45,\ \mathrm{P}(A\cap B)=0.15$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{0.15}{0.45}=\dfrac{1}{3}$ 답 ③

0544 흰색 카드를 꺼내는 사건을 A, 홀수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{5}{8}$ ⇨ ❶

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{3}{8}$ ⇨ ❷

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}}=\dfrac{3}{5}$ ⇨ ❸

답 $\dfrac{3}{5}$

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(A)$를 구할 수 있다.	20%
❷ $\mathrm{P}(A\cap B)$를 구할 수 있다.	30%
❸ $\mathrm{P}(B|A)$를 구할 수 있다.	50%

0545 첫 번째에 뽑힌 사람이 남자인 사건을 A, 두 번째에 뽑힌 사람이 남자인 사건을 B라 하면 $25-11=14$에서

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{14}{25},\ \mathrm{P}(B|A)=\dfrac{13}{24}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\dfrac{14}{25}\cdot\dfrac{13}{24}=\dfrac{91}{300}$ 답 ③

0546 초콜릿이 들어 있는 도넛을 먹는 사건을 A, 딸기잼이 들어 있는 도넛을 먹는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5},\ \mathrm{P}(B|A)=\dfrac{4}{9}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{4}{9}=\dfrac{4}{15}$ 답 $\dfrac{4}{15}$

0547 B선물세트를 택하는 사건을 B, 파란 펜을 꺼내는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2},\ \mathrm{P}(E|B)=\dfrac{3}{4}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(E\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{8}$ 답 $\dfrac{3}{8}$

0548 첫 번째에 빨간 공이 나오는 사건을 A, 두 번째에 흰 공이 나오는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{5}{n+5},\ \mathrm{P}(B|A)=\dfrac{n}{n+4}$ ⇨ ❶

따라서 첫 번째에는 빨간 공, 두 번째에는 흰 공이 나올 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\dfrac{5}{n+5}\cdot\dfrac{n}{n+4}$

$=\dfrac{5n}{(n+5)(n+4)}$

이므로 $\dfrac{5n}{(n+5)(n+4)}=\dfrac{5}{21}$

$(n+5)(n+4)=21n$ ⇨ ❷

$n^2-12n+20=0,\quad (n-2)(n-10)=0$

$\therefore n=2\ (\because n<5)$ ⇨ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B|A)$를 구할 수 있다.	40%
❷ n에 대한 이차방정식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ n의 값을 구할 수 있다.	20%

0549 갑이 흰 바둑돌을 꺼내는 사건을 A, 을이 검은 바둑돌을 꺼내는 사건을 E라 하면 갑이 검은 바둑돌을 꺼내는 사건은 A^C이므로

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{7},\ \mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{3}{7}=\dfrac{4}{7},$

$\mathrm{P}(E|A)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3},\ \mathrm{P}(E|A^C)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)$

$=\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{4}{7}$ 답 ②

0550 이번 주 토요일에 비가 오는 사건을 A, 공연 관람권이 매진되는 사건을 E라 하면 이번 주 토요일에 비가 오지 않는 사건은 A^C이므로

$P(A)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$, $P(A^C)=\frac{3}{5}$,

$P(E|A)=\frac{1}{2}$, $P(E|A^C)=\frac{4}{5}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(E)&=P(A\cap E)+P(A^C\cap E)\\&=P(A)P(E|A)+P(A^C)P(E|A^C)\\&=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}\\&=\frac{17}{25}\end{aligned}$$

답 ①

0551 A반 학생을 뽑는 사건을 A, B반 학생을 뽑는 사건을 B, 영어를 신청한 학생을 뽑는 사건을 E라 하면

$P(A)=\frac{20}{45}=\frac{4}{9}$, $P(B)=\frac{25}{45}=\frac{5}{9}$,

$P(E|A)=\frac{1}{10}$, $P(E|B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(E)&=P(A\cap E)+P(B\cap E)\\&=P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)\\&=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{10}+\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{5}\\&=\frac{7}{45}\end{aligned}$$

답 ①

0552 A주머니를 택하는 사건을 A, B주머니를 택하는 사건을 B, 흰 구슬 1개, 검은 구슬 1개를 꺼내는 사건을 E라 하면

$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_2C_1\cdot{}_4C_1}{{}_6C_2}=\frac{4}{15}$

$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_3C_1\cdot{}_3C_1}{{}_6C_2}=\frac{3}{10}$

$$\begin{aligned}\therefore P(E)&=P(A\cap E)+P(B\cap E)\\&=\frac{4}{15}+\frac{3}{10}=\frac{17}{30}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{17}{30}}=\frac{8}{17}$$

답 $\frac{8}{17}$

0553 A기계에서 생산된 제품을 택하는 사건을 A, B기계에서 생산된 제품을 택하는 사건을 B, 불량품인 사건을 E라 하면

$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=0.6\times0.02=0.012$

$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)=0.4\times0.04=0.016$

$$\begin{aligned}\therefore P(E)&=P(A\cap E)+P(B\cap E)\\&=0.012+0.016=0.028\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{0.012}{0.028}=\frac{3}{7}$$

답 ④

0554 카드 A를 택하는 사건을 A, 카드 B를 택하는 사건을 B, 카드 C를 택하는 사건을 C, 보이는 면에 ♥가 그려져 있는 사건을 E라 하면

$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=\frac{1}{3}\cdot1=\frac{1}{3}$

$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

$P(C\cap E)=P(C)P(E|C)=\frac{1}{3}\cdot0=0$

$\therefore P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)+P(C\cap E)=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|E)=\frac{P(B\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

0555 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 10원짜리 동전, 100원짜리 동전을 차례대로 나타낼 때, 표본공간은 {HH, HT, TH, TT}이고

$A=\{TH, TT\}$, $B=\{HH, TH\}$, $C=\{HH, TT\}$

$\therefore A\cap B=\{TH\}$, $B\cap C=\{HH\}$, $A\cap C=\{TT\}$

ㄱ. $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

따라서 A와 B는 서로 독립이다.

ㄴ. $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{2}$, $P(B\cap C)=\frac{1}{4}$이므로

$P(B\cap C)=P(B)P(C)$

따라서 B와 C는 서로 독립이다.

ㄷ. $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{2}$, $P(A\cap C)=\frac{1}{4}$이므로

$P(A\cap C)=P(A)P(C)$

따라서 A와 C는 서로 독립이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 서로 독립인 사건이다. 답 ⑤

0556 8개의 문자 T, R, U, E, B, O, O, K 중에서 모음은 U, E, O, O의 4개이므로

$P(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ ⇨ ❶

빨간색 카드는 T, R, O, K의 4장이므로

$P(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ ⇨ ❷

빨간색 카드 중 모음이 적힌 카드는 O의 1장이므로

$P(A\cap B)=\frac{1}{8}$ ⇨ ❸

따라서 $P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 종속이다. ⇨ ❹

답 종속

채점 기준	비율
❶ $P(A)$를 구할 수 있다.	20%
❷ $P(B)$를 구할 수 있다.	20%
❸ $P(A\cap B)$를 구할 수 있다.	20%
❹ 두 사건 A, B가 종속임을 알 수 있다.	40%

0557 $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 4, 6\}$, $C=\{5, 6\}$이므로

$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{3}$

또 $A\cap B=\varnothing$, $B\cap C=\{6\}$, $A\cap C=\{5\}$이므로

$P(A\cap B)=0$, $P(B\cap C)=\frac{1}{6}$, $P(A\cap C)=\frac{1}{6}$

ㄱ. $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로 두 사건 A, B는 서로 배반사건이다.
ㄴ. $\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$이므로 두 사건 B, C는 서로 독립이다.
ㄷ. $\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$이므로 두 사건 A, C는 서로 독립이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

0558 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A|B^C)=\mathrm{P}(A)$
$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A|B^C)$
ㄴ. $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$
이때 두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)$
따라서 $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A^C, B는 서로 독립이다.
ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$
이때 $\mathrm{P}(A)\neq0$, $\mathrm{P}(B)\neq0$이면
$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이 아니다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

타센 특강 배반사건과 독립사건의 관계

$\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$인 두 사건 A, B에 대하여
① A, B가 서로 배반사건이면 A, B는 서로 종속이다.
② A, B가 서로 독립이면 A, B는 서로 배반사건이 아니다.

0559 두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$
$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B^C)&=\mathrm{P}((A\cup B)^C)\\&=1-\boxed{\mathrm{P}(A\cup B)}\\&=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}\\&=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\boxed{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}\}\\&=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\{1-\mathrm{P}(A)\}-\mathrm{P}(B)\{1-\mathrm{P}(A)\}\\&=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\end{aligned}$$
따라서 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립이다.
$\therefore$ (가) $\mathrm{P}(A\cup B)$ (나) $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ 답 ④

0560 두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)$$
이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로
$$\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)$$
$$\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3} \qquad \therefore \mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$$
답 $\frac{2}{3}$

0561 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{5}$이고 두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$$
따라서 구하는 확률은
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{2}{3}+\frac{1}{5}-\frac{2}{15}=\frac{11}{15}\end{aligned}$$
답 $\frac{11}{15}$

0562 두 사건 A, C가 서로 배반사건이므로
$\mathrm{P}(A\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(C)$에서 $\frac{3}{4}=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{4}$
$$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$$
두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서
$$\frac{2}{5}=\frac{1}{2}\mathrm{P}(B) \qquad \therefore \mathrm{P}(B)=\frac{4}{5}$$
답 $\frac{4}{5}$

0563 A상자에서 노란색 깃발을 꺼내는 사건을 A, B상자에서 노란색 깃발을 꺼내는 사건을 B라 하면, 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 구하는 확률은
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{10}\end{aligned}$$
답 $\frac{3}{10}$

0564 윤호와 하빈이가 시험에 합격하는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 윤호만 합격할 확률은
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\\&=\frac{1}{5}\cdot(1-p)=\frac{1-p}{5}\end{aligned}$$
따라서 $\frac{1-p}{5}=\frac{3}{20}$이므로
$$1-p=\frac{3}{4} \qquad \therefore p=\frac{1}{4}$$
답 ③

타센 특강 두 사건 A, B가 독립일 때, 서로 독립인 사건

두 사건 A, B가 서로 독립이면
① A와 B^C가 서로 독립 ➡ $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$
② A^C와 B가 서로 독립 ➡ $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$
③ A^C와 B^C가 서로 독립 ➡ $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$

0565 내일과 모레에 비가 오는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 이틀 중 적어도 하루는 비가 올 확률은
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=1-\mathrm{P}((A\cup B)^C)\\&=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)\\&=1-\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\\&=1-(1-0.5)(1-0.4)\\&=1-0.5\times0.6=0.7\end{aligned}$$
답 ⑤

0566 영화 DVD 중에서 임의로 한 개를 택하였을 때, 국내 영화, 코미디 영화인 사건을 각각 A, B라 하면
$$\mathrm{P}(A)=\frac{130}{400}=\frac{13}{40},\ \mathrm{P}(B)=\frac{160}{400}=\frac{2}{5}$$
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{x}{400}$$
이때 두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$$\frac{x}{400}=\frac{13}{40}\cdot\frac{2}{5} \qquad \therefore x=52$$
답 ④

0567 두 수의 합이 홀수이려면 두 수 중에서 한 개는 홀수이고 다른 한 개는 짝수이어야 한다. 두 상자 A, B에서 홀수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로

(i) A상자에서 홀수, B상자에서 짝수가 적힌 카드를 꺼낼 확률은

$$P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C)$$
$$=\frac{3}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$$ ⇨ ❶

(ii) A상자에서 짝수, B상자에서 홀수가 적힌 카드를 꺼낼 확률은

$$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B)$$
$$=\left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$ ⇨ ❷

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$ ⇨ ❸

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $P(A\cap B^C)$를 구할 수 있다.	40%
❷ $P(A^C\cap B)$를 구할 수 있다.	40%
❸ 두 수의 합이 홀수일 확률을 구할 수 있다.	20%

0568 자유투를 한 번 이상 성공하는 사건을 A라 하면 자유투를 한 번도 성공하지 못하는 사건은 A^C이므로

$$P(A^C)={}_4C_0\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{1}{256}$$
$$\therefore P(A)=1-P(A^C)$$
$$=1-\frac{1}{256}=\frac{255}{256}$$

답 ⑤

0569 정사면체를 한 번 던질 때 바닥에 놓인 면에 적힌 숫자가 1일 확률은 $\frac{1}{4}$이므로 정사면체를 3번 던져서 1이 2번 나올 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{9}{64}$$

답 $\frac{9}{64}$

0570 한 번의 경기에서 A팀이 이길 확률을 p라 하면 B팀이 이길 확률은 $1-p$이다.

3번의 경기를 할 때, A팀이 모두 이길 확률이 $\frac{1}{64}$이므로

$${}_3C_3\,p^3(1-p)^0=\frac{1}{64}$$
$$p^3=\left(\frac{1}{4}\right)^3 \qquad \therefore p=\frac{1}{4}$$

따라서 한 번의 경기에서 A팀이 이길 확률은 $\frac{1}{4}$이고, B팀이 이길 확률은 $\frac{3}{4}$이므로 구하는 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{27}{64}$$

답 ①

0571 5의 약수의 눈이 x번, 그 외의 눈이 y번 나온다고 하면

$$x+y=4,\ x-y=-2$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=1,\ y=3$$

따라서 구하는 확률은 5의 약수의 눈이 1번, 그 이외의 눈이 3번 나올 확률과 같고, 한 개의 주사위를 던져서 5의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로

$${}_4C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$$

답 $\frac{32}{81}$

0572 (i) 주사위의 홀수의 눈이 나오고, 동전을 2번 던져서 2번 모두 앞면이 나올 확률은

$$\frac{1}{2}\cdot{}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{8}$$

(ii) 주사위의 짝수의 눈이 나오고, 동전을 3번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$$\frac{1}{2}\cdot{}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{16}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{16}=\frac{5}{16}$$

답 ④

0573 연재가 한 문제를 맞힐 확률은 $\frac{3}{4}$

(i) 5문제 중 4문제를 맞힐 확률은

$${}_5C_4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{405}{1024}$$

(ii) 5문제를 모두 맞힐 확률은

$${}_5C_5\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^0=\frac{243}{1024}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{405}{1024}+\frac{243}{1024}=\frac{81}{128}$$

답 ④

0574 5개의 공 중에서 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 2개가 모두 흰 공일 확률은

$$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$$

(i) 3회의 시행 중 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공인 경우가 0회일 확률은

$${}_3C_0\left(\frac{3}{10}\right)^0\left(\frac{7}{10}\right)^3=\frac{343}{1000}$$

(ii) 3회의 시행 중 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공인 경우가 1회일 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{3}{10}\right)^1\left(\frac{7}{10}\right)^2=\frac{441}{1000}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{343}{1000}+\frac{441}{1000}=\frac{98}{125}$$

답 ⑤

0575 5번째 경기에서 우승팀이 결정되려면 4번째 경기까지 3번 이긴 팀이 5번째 경기에서 이겨야 한다.

(i) 5번째 경기에서 A팀이 우승할 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1\cdot\frac{3}{4}=\frac{81}{256}$$ ⇨ ❶

(ii) 5번째 경기에서 B팀이 우승할 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^1\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{256}$$ ⇨ ❷

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\frac{81}{256}+\frac{3}{256}=\frac{21}{64}$$ ⇨ ❸

답 $\frac{21}{64}$

채점 기준	비율
❶ 5번째 경기에서 A팀이 우승할 확률을 구할 수 있다.	40%
❷ 5번째 경기에서 B팀이 우승할 확률을 구할 수 있다.	40%
❸ 5번째 경기에서 우승팀이 결정될 확률을 구할 수 있다.	20%

0576 전략 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$임을 이용한다.

풀이 $\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이므로

$$\mathrm{P}(A|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{10}$$

답 $\frac{3}{10}$

0577 전략 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$임을 이용한다.

풀이 조사에 참여한 사람 중에서 임의로 뽑은 한 명이 50대인 사건을 A, 관광을 목적으로 온 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=0.18,\ \mathrm{P}(A\cap B)=0.12$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0.12}{0.18}=\frac{2}{3}$$ 답 ④

0578 전략 $\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$임을 이용한다.

풀이 L 야구팀이 치르는 경기가 홈 경기인 사건을 A, L 야구팀이 승리하는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)$$
$$=0.4\times0.6=0.24$$
$$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)$$
$$=(1-0.4)\times0.5=0.3$$ ⇨ ❶
$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$$
$$=0.24+0.3=0.54$$ ⇨ ❷

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{0.24}{0.54}=\frac{4}{9}$$ ⇨ ❸

답 $\frac{4}{9}$

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(A\cap E)$, $\mathrm{P}(A^C\cap E)$를 구할 수 있다.	40%
❷ $\mathrm{P}(E)$를 구할 수 있다.	30%
❸ $\mathrm{P}(A|E)$를 구할 수 있다.	30%

0579 전략 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립임을 이용한다.

풀이 두 선수 A, B가 페널티킥을 성공하는 사건을 각각 A, B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=0.8,\ \mathrm{P}(B)=0.7$$

이때 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$$
$$=0.8\times(1-0.7)+(1-0.8)\times0.7$$
$$=0.24+0.14$$
$$=0.38$$ 답 0.38

0580 전략 1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은
${}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r}$ $(r=0, 1, 2, \cdots, n)$임을 이용한다.

풀이 1회의 시행에서 빨간 공이 나올 확률이 $\frac{4}{7}$이고 각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

$${}_7\mathrm{C}_3\left(\frac{4}{7}\right)^3\left(\frac{3}{7}\right)^4$$ 답 ④

0581 전략 확률의 덧셈정리와 조건부확률을 이용한다.

풀이 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{1}{2}$에서

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(B) \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\mathrm{P}(A^C|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{1-\mathrm{P}(A\cup B)}{1-\mathrm{P}(B)}=\frac{2}{3}$에서

$$1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{3}(1-\mathrm{P}(B))$$
$$1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)$$
$$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)+\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots ㉡$$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로 ㉠, ㉡에서

$$\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)+\frac{1}{3}=\frac{5}{12}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)$$
$$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$$ 답 ⑤

0582 전략 확률의 곱셈정리와 조건부확률을 이용한다.

풀이 첫 번째에 붉은 금붕어가 나오는 사건 A, 두 번째에 검은 금붕어가 나오는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{13},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{7}{12}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$$
$$=\frac{6}{13}\cdot\frac{7}{12}=\frac{7}{26}$$ 답 $\frac{7}{26}$

0583 전략 두 사건 A, E에 대하여
$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)$임을 이용한다.

풀이 은진이가 3점짜리 문제를 고르는 사건을 A, 정답을 맞히는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5},\ \mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5},$$
$$\mathrm{P}(E|A)=\frac{4}{5},\ \mathrm{P}(E|A^C)=\frac{3}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(E\cap A)+\mathrm{P}(E\cap A^C)$$
$$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)$$
$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$$ 답 ③

0584 전략 $\mathrm{P}(A|E)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)}$ 임을 이용한다.

풀이 컴퓨터 A를 구입한 고객을 택하는 사건을 A, 1년 이내에 고장 수리를 요청하는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{70}{100}\cdot\frac{10}{100}=\frac{7}{100}$$

$$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{30}{100}\cdot\frac{5}{100}=\frac{3}{200}$$ ⇨ ❶

$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{7}{100}+\frac{3}{200}=\frac{17}{200}$$ ⇨ ❷

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{7}{100}}{\frac{17}{200}}=\frac{14}{17}$$ ⇨ ❸

답 $\dfrac{14}{17}$

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(A\cap E)$, $\mathrm{P}(A^C\cap E)$를 구할 수 있다.	40%
❷ $\mathrm{P}(E)$를 구할 수 있다.	30%
❸ $\mathrm{P}(A|E)$를 구할 수 있다.	30%

0585 전략 두 사건 A, B가 서로 독립일 필요충분조건은 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이다.

풀이 $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{3, 6, 9\}$, $C=\{5, 10\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{3}{10},\ \mathrm{P}(C)=\frac{1}{5}$$

이때 $A\cap B=\{6\}$, $B\cap C=\varnothing$, $A\cap C=\{10\}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{10},\ \mathrm{P}(B\cap C)=0,\ \mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{10}$$

ㄱ. $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

ㄴ. $\mathrm{P}(B\cap C)\neq\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$이므로 두 사건 B, C는 서로 종속이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$이므로 두 사건 A, C는 서로 독립이다.

이상에서 서로 독립인 사건은 ㄷ뿐이다.

답 ㄷ

0586 전략 두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이고, 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$에서

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=0,$$

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=0$$

$$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(B|A)$$

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

이때 $\mathrm{P}(A)\neq0$, $\mathrm{P}(B)\neq0$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)\neq0$$

따라서 두 사건 A, B는 서로 배반사건이 아니다.

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\end{aligned}$$

따라서 두 사건 A, B^C는 서로 독립이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0587 전략 전기가 흐르기 위해서는 스위치 a가 닫혀 있어야 한다.

풀이 스위치 a, b, c가 닫혀 있는 사건을 각각 A, B, C라 하면 전기가 흐르는 경우는 $A\cap(B\cup C)$이다. 이때 세 사건 A, B, C는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B\cup C)&=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B\cap C)\\&=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap(B\cup C))=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B\cup C)=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{9}=\frac{5}{27}$$

답 ①

0588 전략 나온 눈의 수의 최댓값이 6이 되려면 적어도 한 번은 6의 눈이 나와야 함을 이용한다.

풀이 주사위를 3번 던져서 나온 눈의 수의 최댓값이 6이 되려면 3번 중 적어도 한 번은 6의 눈이 나와야 한다. 6의 눈이 한 번 이상 나오는 사건을 A라 하면 6의 눈이 한 번도 나오지 않는 사건은 A^C이므로

$$\mathrm{P}(A^C)={}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$$ ⇨ ❶

$$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$$ ⇨ ❷

답 $\dfrac{91}{216}$

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(A^C)$를 구할 수 있다.	50%
❷ $\mathrm{P}(A)$를 구할 수 있다.	50%

0589 전략 4번째 경기에서 A팀이 우승하려면 3번째 경기까지는 A팀이 2번 이겨야 한다.

풀이 4번째 경기에서 A팀이 우승하려면 3번째 경기까지는 A팀이 2번 이기고, 4번째 경기에서 A팀이 이기면 된다.

따라서 구하는 확률은

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^1\cdot\frac{2}{5}=\frac{72}{625}$$

답 ①

0590 전략 홀수가 적힌 공과 짝수가 적힌 공을 꺼내는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) 상자에서 홀수가 적힌 공을 꺼내고, 주사위를 4번 던져서 짝수의 눈이 2번 나올 확률은

$$\frac{2}{3}\cdot{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

(ii) 상자에서 짝수가 적힌 공을 꺼내고, 주사위를 3번 던져서 짝수의 눈이 2번 나올 확률은

$$\frac{1}{3}\cdot{}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{8}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

답 $\frac{3}{8}$

0591 전략 $P(B\cap A^C)=P(B)P(A^C|B)$임을 이용한다.

풀이 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{3}$이므로

$$P(A\cap B)=\frac{1}{3}P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$ ⇨ ❶

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{4}$이므로

$$P(A\cap B)=\frac{1}{4}P(B)$$

$$\therefore P(B)=4P(A\cap B)=4\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$ ⇨ ❷

$P(A|B)+P(A^C|B)=1$이므로

$$P(A^C|B)=1-P(A|B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$ ⇨ ❸

따라서 구하는 확률은

$$P(B\cap A^C)=P(B)P(A^C|B)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$$ ⇨ ❹

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $P(A\cap B)$를 구할 수 있다.	20%
❷ $P(B)$를 구할 수 있다.	20%
❸ $P(A^C\|B)$를 구할 수 있다.	30%
❹ $P(B\cap A^C)$를 구할 수 있다.	30%

0592 전략 두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$임을 이용한다.

풀이 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{8} \quad\cdots\cdots ㉠$$

이때 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$$\frac{5}{8}=P(A)+P(B)-\frac{1}{8}$$

$$\therefore P(A)+P(B)=\frac{3}{4} \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉡에서 $P(B)=\frac{3}{4}-P(A)$이므로 이를 ㉠에 대입하면

$$P(A)\left\{\frac{3}{4}-P(A)\right\}=\frac{1}{8}$$

$$8\{P(A)\}^2-6P(A)+1=0$$

$$\{2P(A)-1\}\{4P(A)-1\}=0$$

$$\therefore P(A)=\frac{1}{2} \text{ 또는 } P(A)=\frac{1}{4}$$

그런데 $P(A)<P(B)$이므로 $P(A)=\frac{1}{4}$

답 ③

0593 전략 먼저 한 상자에서 3개의 탁구공을 동시에 꺼낼 때, 'Lucky'라고 쓰여 있는 탁구공이 포함될 확률을 구한다.

풀이 한 상자에서 3개의 탁구공을 동시에 꺼낼 때 'Lucky'라고 쓰여 있는 탁구공이 포함되어 있을 확률은

$$\frac{{}_1C_1\cdot{}_7C_2}{{}_8C_3}=\frac{21}{56}=\frac{3}{8}$$ ⇨ ❶

따라서 구하는 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{3}{8}\right)^1\left(\frac{5}{8}\right)^2=\frac{225}{512}$$ ⇨ ❷

답 $\frac{225}{512}$

채점 기준	비율
❶ 3개의 탁구공을 동시에 꺼낼 때, 'Lucky'라고 쓰여 있는 공이 포함되어 있을 확률을 구할 수 있다.	40%
❷ 세 상자를 구입할 때, 탁구공을 1개 더 받을 확률을 구할 수 있다.	60%

0594 전략 A에 도착하려면 동전의 앞면과 뒷면이 각각 몇 번씩 나와야 하는지 구한다.

풀이 O에서 출발하여 A에 도착하려면 동쪽으로 3칸, 북쪽으로 3칸 이동해야 하므로 동전의 앞면과 뒷면이 모두 3번씩 나와야 한다.

따라서 구하는 확률은

$${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$$

답 $\frac{5}{16}$

0595 전략 타자 A가 투수의 공에 안타를 3번 치는 경우를 나누어 생각한다.

풀이 (i) 투수 B가 던진 공에만 안타를 3번 칠 확률은

$${}_3C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0\times{}_2C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{108}$$

(ii) 투수 B, C가 던진 공에 각각 안타를 2번, 1번 칠 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1\times{}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{9}$$

(iii) 투수 B, C가 던진 공에 각각 안타를 1번, 2번 칠 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2\times{}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{9}$$

이상에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{108}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{25}{108}$$

답 ②

Ⅲ. 통계

07 확률분포

0596 이산확률변수는 확률변수가 가질 수 있는 값을 셀 수 있어야 하므로 보기에서 이산확률변수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

0597 답 0, 1, 2, 3

0598 답 0, 1, 2, 3, 4, 5

0599 답 0, 1, 2

0600 답 $\frac{1}{3}$

0601 답 $\frac{1}{8}$

0602 (1) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2

(2) 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 3의 배수의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{3}$, 3의 배수가 아닌 수의 눈이 나올 확률이 $\frac{2}{3}$이므로

$$P(X=0)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9},$$
$$P(X=1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{9},$$
$$P(X=2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

(3)

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

답 풀이 참조

0603 (1) 5개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 방법의 수는

$_5C_2$

꺼낸 2개의 공 중에 흰 공이 x개 포함되는 경우의 수는

$_2C_x\cdot{}_3C_{2-x}$

따라서 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\frac{_2C_{\boxed{x}}\cdot{}_3C_{\boxed{2-x}}}{_5C_2}\ (x=0,\ 1,\ 2)$$

(2) $P(X=0)=\frac{_2C_0\cdot{}_3C_2}{_5C_2}=\frac{3}{10}$,

$$P(X=1)=\frac{_2C_1\cdot{}_3C_1}{_5C_2}=\frac{3}{5},$$
$$P(X=2)=\frac{_2C_2\cdot{}_3C_0}{_5C_2}=\frac{1}{10}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

답 풀이 참조

0604 한 개의 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$, 뒷면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$이므로

$$P(X=0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8},$$
$$P(X=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8},$$
$$P(X=2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8},$$
$$P(X=3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

따라서 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{8}\ (x=0,\ 3)\\ \frac{3}{8}\ (x=1,\ 2)\end{cases}$$

답 풀이 참조

0605 7개의 사탕 중에서 3개의 사탕을 꺼내는 방법의 수는

$_7C_3$

꺼낸 3개의 사탕 중에 사과 맛 사탕이 x개 포함되는 경우의 수는

$_4C_x\cdot{}_3C_{3-x}$

따라서 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\frac{_4C_x\cdot{}_3C_{3-x}}{_7C_3}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

답 풀이 참조

0606 확률의 총합은 1이므로 $b=1$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+a+\frac{1}{2}=1\quad\therefore\ a=\frac{1}{8}$

답 $a=\frac{1}{8}$, $b=1$

0607 $P(X=0$ 또는 $X=2)=P(X=0)+P(X=2)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

답 $\frac{3}{8}$

0608 $P(1\le X\le 2)=P(X=1)+P(X=2)$

$=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

0609 $P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

답 $\frac{3}{8}$

0610 $P(X\ge 2)=P(X=2)+P(X=3)$

$=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$

답 $\frac{5}{8}$

0611 $E(X)=10\cdot\frac{1}{5}+20\cdot\frac{1}{2}+30\cdot\frac{3}{10}$

$=21$

$V(X)=(10-21)^2\cdot\frac{1}{5}+(20-21)^2\cdot\frac{1}{2}+(30-21)^2\cdot\frac{3}{10}$

$=49$

$\sigma(X)=\sqrt{49}=7$

답 풀이 참조

다른풀이 $E(X^2)=10^2\cdot\frac{1}{5}+20^2\cdot\frac{1}{2}+30^2\cdot\frac{3}{10}$

$=490$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=490-21^2=49$

0612 (1) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 50, 100, 150이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8},$$
$$P(X=50)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8},$$
$$P(X=100)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8},$$
$$P(X=150)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	50	100	150	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

(2) $$E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+50\cdot\frac{3}{8}+100\cdot\frac{3}{8}+150\cdot\frac{1}{8}$$
$$=75$$
$$V(X)=(0-75)^2\cdot\frac{1}{8}+(50-75)^2\cdot\frac{3}{8}$$
$$+(100-75)^2\cdot\frac{3}{8}+(150-75)^2\cdot\frac{1}{8}$$
$$=1875$$
$$\sigma(X)=\sqrt{1875}=25\sqrt{3}$$

답 풀이 참조

다른풀이 (2) $$E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{8}+50^2\cdot\frac{3}{8}+100^2\cdot\frac{3}{8}+150^2\cdot\frac{1}{8}$$
$$=7500$$

이므로
$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=7500-75^2=1875$$

0613 $E(-X+5)=-E(X)+5=-6+5=-1$
$V(-X+5)=(-1)^2V(X)=1\cdot3=3$
$\sigma(-X+5)=|-1|\sigma(X)=\sqrt{3}$

답 풀이 참조

0614 (1) $$E(X)=0\cdot\frac{1}{10}+1\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{2}{5}+3\cdot\frac{1}{5}=\frac{17}{10}$$
$$E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{10}+1^2\cdot\frac{3}{10}+2^2\cdot\frac{2}{5}+3^2\cdot\frac{1}{5}=\frac{37}{10}$$

이므로
$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{37}{10}-\left(\frac{17}{10}\right)^2=\frac{81}{100}$$
$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{81}{100}}=\frac{9}{10}$$

(2) $$E(5X-8)=5E(X)-8=5\cdot\frac{17}{10}-8=\frac{1}{2}$$
$$V(5X-8)=5^2V(X)=25\cdot\frac{81}{100}=\frac{81}{4}$$
$$\sigma(5X-8)=|5|\sigma(X)=5\cdot\frac{9}{10}=\frac{9}{2}$$

답 풀이 참조

0615 한 개의 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$이므로 앞면이 나오는 동전의 개수 X는 이항분포 $B\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

답 $B\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$

0616 한 번의 경기에서 이길 확률이 0.75이므로 바둑 기사가 이기는 횟수 X는 이항분포 $B(30,\ 0.75)$를 따른다.

답 $B(30,\ 0.75)$

0617 제비를 2개 뽑을 때 처음 1개를 뽑는 시행과 다음에 1개를 뽑는 시행은 서로 독립이 아니므로 이항분포를 따르지 않는다.

답 이항분포를 따르지 않는다.

0618 한 문제를 맞힐 확률이 $\frac{1}{5}$이므로 맞히는 문제의 개수 X는 이항분포 $B\left(25,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

답 $B\left(25,\ \frac{1}{5}\right)$

0619 (1) $$P(X=x)={}_8C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{8-x}$$
$$={}_8C_x\left(\frac{1}{2}\right)^8\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$$

(2) $$P(X=3)={}_8C_3\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{7}{32}$$

답 풀이 참조

0620 $E(X)=100\cdot\frac{1}{5}=20$
$V(X)=100\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=16$
$\sigma(X)=\sqrt{16}=4$

답 풀이 참조

0621 $E(X)=180\cdot\frac{2}{3}=120$
$V(X)=180\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=40$
$\sigma(X)=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

답 풀이 참조

0622 $E(X)=960\cdot\frac{3}{8}=360$
$V(X)=960\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}=225$
$\sigma(X)=\sqrt{225}=15$

답 풀이 참조

0623 뽑힌 카드에 적힌 두 수를 a, b $(a<b)$라 하면 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여 두 수의 차가
2인 경우 (1, 3), (3, 5), (5, 7)의 3개
4인 경우 (1, 5), (3, 7)의 2개
6인 경우 (1, 7)의 1개
이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 4, 6이고 그 확률은 각각

$$P(X=2)=\frac{3}{{}_4C_2}=\frac{1}{2},\ P(X=4)=\frac{2}{{}_4C_2}=\frac{1}{3},$$
$$P(X=6)=\frac{1}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

답 풀이 참조

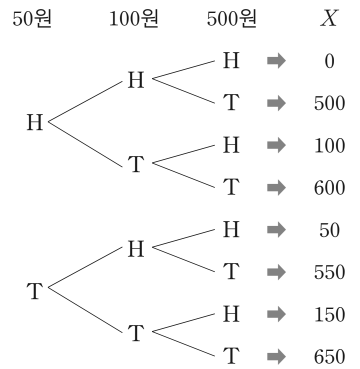
0624 확률변수 X가 가질 수 있는 값은

$0,\ 50,\ 100,\ 150,\ 500,\ 550,\ 600,\ 650$

이므로 X가 가질 수 있는 값이 아닌 것은 ③이다.

답 ③

참고 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하자. 50원, 100원, 500원짜리 동전을 동시에 던질 때 나오는 각각의 경우와 그때의 확률변수 X의 값을 구하면 다음과 같다.



0625 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_2C_2}{{}_5C_3}=\frac{3}{10},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_2C_1}{{}_5C_3}=\frac{3}{5},$$

$$P(X=3)=\frac{{}_3C_3\cdot{}_2C_0}{{}_5C_3}=\frac{1}{10}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

따라서 X의 확률분포를 그래프로 바르게 나타낸 것은 ②이다.

답 ②

0626 확률의 총합은 1이므로

$c=1$

$a+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+b+\frac{1}{12}=1$에서 $\quad a+b=\frac{5}{12}$

$\therefore\ a+b+c=\frac{5}{12}+1=\frac{17}{12}$

답 ②

0627 확률의 총합은 1이므로

$a^2+\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}=1$ ⇨ ❶

$3a^2+2a-1=0,\quad (a+1)(3a-1)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

$0\le P(X=x)\le 1$이므로 $\quad a=\frac{1}{3}$ ⇨ ❷

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ 확률의 총합은 1임을 이용하여 a에 대한 식을 세울 수 있다.	50%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50%

0628 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

$k\cdot 2+k\cdot 3+k\cdot 4=1$

$9k=1 \qquad \therefore\ k=\frac{1}{9}$

답 ⑤

0629 확률의 총합은 1이므로

$a+3a+2a=1,\qquad 6a=1$

$\therefore\ a=\frac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$P(X\le 0)=P(X=-1)+P(X=0)$

$=a+3a=4a=4\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

답 ④

0630 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$

$\frac{k}{6}+\frac{k}{6}\cdot 2+k\left(1-\frac{3}{6}\right)+k\left(1-\frac{4}{6}\right)=1$

$\frac{4}{3}k=1 \qquad \therefore\ k=\frac{3}{4}$

$$\therefore\ P(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{8}x & (x=1,\ 2)\\ \frac{3}{4}\left(1-\frac{x}{6}\right) & (x=3,\ 4)\end{cases}$$ ⇨ ❶

따라서 구하는 확률은

$P(2\le X\le 3)=P(X=2)+P(X=3)$

$=\frac{1}{8}\cdot 2+\frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{6}\right)=\frac{5}{8}$ ⇨ ❷

답 $\frac{5}{8}$

채점 기준	비율
❶ 확률질량함수를 구할 수 있다.	70%
❷ $P(2\le X\le 3)$을 구할 수 있다.	30%

0631 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=19)=1$

$\frac{a}{1\cdot 2}+\frac{a}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{a}{19\cdot 20}=1$

$a\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{20}\right)\right\}=1$

$a\left(1-\frac{1}{20}\right)=1,\qquad \frac{19}{20}a=1 \qquad \therefore\ a=\frac{20}{19}$

$\therefore\ P(X=x)=\frac{20}{19x(x+1)}\ (x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 19)$

따라서 구하는 확률은

$P(X=1$ 또는 $X=9)=P(X=1)+P(X=9)$

$=\frac{20}{19\cdot 1\cdot 2}+\frac{20}{19\cdot 9\cdot 10}$

$=\frac{92}{171}$

답 ③

타쎈 특강 부분분수로의 변형

① $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$(단, $A\ne B$)

② $\frac{1}{ABC}=\frac{1}{C-A}\left(\frac{1}{AB}-\frac{1}{BC}\right)$(단, $A\ne C$)

0632 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_4C_0\cdot{}_3C_3}{{}_7C_3}=\frac{1}{35},$$
$$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\cdot{}_3C_2}{{}_7C_3}=\frac{12}{35},$$
$$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\cdot{}_3C_1}{{}_7C_3}=\frac{18}{35},$$
$$P(X=3)=\frac{{}_4C_3\cdot{}_3C_0}{{}_7C_3}=\frac{4}{35}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

따라서 구하는 확률은

$$P(1\le X\le 2)=P(X=1)+P(X=2)$$
$$=\frac{12}{35}+\frac{18}{35}=\frac{6}{7}$$

답 $\frac{6}{7}$

0633 바닥에 놓인 면에 적힌 두 수를 a, b라 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여 두 수의 합이

4인 경우 (1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3개

5인 경우 (2, 3), (3, 2)의 2개

6인 경우 (3, 3)의 1개

이므로 그 확률은 각각

$$P(X=4)=\frac{3}{16},\ P(X=5)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8},$$
$$P(X=6)=\frac{1}{16}$$
$$\therefore P(X\ge 4)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)$$
$$=\frac{3}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{3}{8}$$

답 ①

참고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	5	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

0634 $P(X=3)=\frac{{}_5C_3\cdot{}_7C_1}{{}_{12}C_4}=\frac{14}{99}$, $P(X=4)=\frac{{}_5C_4\cdot{}_7C_0}{{}_{12}C_4}=\frac{1}{99}$

이므로

$$P(X\ge 3)=P(X=3)+P(X=4)$$
$$=\frac{14}{99}+\frac{1}{99}=\frac{5}{33}$$

답 $\frac{5}{33}$

참고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{7}{99}$	$\frac{35}{99}$	$\frac{14}{33}$	$\frac{14}{99}$	$\frac{1}{99}$	1

0635 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{1}{5}+a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{10}$$
$$\therefore E(X)=0\cdot\frac{2}{5}+1\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{1}{10}=1$$

$E(X^2)=0^2\cdot\frac{2}{5}+1^2\cdot\frac{3}{10}+2^2\cdot\frac{1}{5}+3^2\cdot\frac{1}{10}=2$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=2-1^2=1$$
$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{1}=1$$

답 1

0636 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{16}+3\cdot\frac{3}{16}+5\cdot\frac{5}{16}+7\cdot\frac{7}{16}=\frac{21}{4}$$
$$E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{16}+3^2\cdot\frac{3}{16}+5^2\cdot\frac{5}{16}+7^2\cdot\frac{7}{16}=31$$
$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=31-\left(\frac{21}{4}\right)^2=\frac{55}{16}$$

답 ②

0637 확률의 총합은 1이므로

$$a+\frac{1}{2}+b=1$$
$$\therefore a+b=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$E(X)=\frac{9}{2}$이므로 $2\cdot a+4\cdot\frac{1}{2}+6\cdot b=\frac{9}{2}$

$$\therefore a+3b=\frac{5}{4} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{8}$, $b=\frac{3}{8}$

$$\therefore b-a=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

0638 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\cdot{}_6C_2}{{}_9C_2}=\frac{5}{12},$$
$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_6C_1}{{}_9C_2}=\frac{1}{2},$$
$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_6C_0}{{}_9C_2}=\frac{1}{12}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\cdot\frac{5}{12}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$$
$$E(X^2)=0^2\cdot\frac{5}{12}+1^2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{1}{12}=\frac{5}{6}$$
$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{5}{6}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{7}{18}$$

답 ③

0639 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_2\mathrm{C}_0\cdot{}_8\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{7}{15}$,

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_8\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{7}{15}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2\cdot{}_8\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{15}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{7}{15}+1\cdot\frac{7}{15}+2\cdot\frac{1}{15}=\frac{3}{5}$ 답 ②

0640 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다. 또 한 개의 주사위를 던질 때 6의 약수의 눈이 나올 확률이 $\frac{2}{3}$이므로 확률변수 X가 각 값을 가질 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$,

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$,

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	1

확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{27}+1\cdot\frac{2}{9}+2\cdot\frac{4}{9}+3\cdot\frac{8}{27}=2$ 답 2

0641 뽑힌 카드에 적힌 두 수를 a, b $(a<b)$라 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여 두 수 중 작은 수가

1인 경우 (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)의 4개

2인 경우 (2, 3), (2, 4), (2, 5)의 3개

3인 경우 (3, 4), (3, 5)의 2개

4인 경우 (4, 5)의 1개

이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$,

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

⇨ ❶

확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{10}=2$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\cdot\frac{2}{5}+2^2\cdot\frac{3}{10}+3^2\cdot\frac{1}{5}+4^2\cdot\frac{1}{10}=5$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=5-2^2=1$ ⇨ ❷

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{1}=1$ ⇨ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ X의 확률분포를 구할 수 있다.	50%
❷ $\mathrm{V}(X)$를 구할 수 있다.	40%
❸ $\sigma(X)$를 구할 수 있다.	10%

0642 1장의 행운권으로 받을 수 있는 상금을 X원이라 할 때, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	5000	100000	1000000	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{389}{500}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{500}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{389}{500}+5000\cdot\frac{1}{5}+100000\cdot\frac{1}{50}+1000000\cdot\frac{1}{500}$

$=5000$

따라서 구하는 기댓값은 5000원이다. 답 5000원

0643 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고, 100원짜리 동전 2개와 500원짜리 동전 1개를 동시에 던져서 나오는 결과를 표로 나타내면 다음과 같다.

100원	100원	500원	받는 금액(원)
H	H	H	700
H	H	T	200
H	T	H	600
H	T	T	100
T	H	H	600
T	H	T	100
T	T	H	500
T	T	T	0

한 번의 게임에서 받을 수 있는 금액을 X원이라 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 100, 200, 500, 600, 700이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(X=100)=\frac{1}{4}$,

$\mathrm{P}(X=200)=\frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(X=500)=\frac{1}{8}$,

$\mathrm{P}(X=600)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(X=700)=\frac{1}{8}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	100	200	500	600	700	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1

확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{8}+100\cdot\frac{1}{4}+200\cdot\frac{1}{8}$

$+500\cdot\frac{1}{8}+600\cdot\frac{1}{4}+700\cdot\frac{1}{8}$

$=350$

따라서 구하는 기댓값은 350원이다. 답 ③

0644 한 번의 게임에서 받을 수 있는 금액을 X원이라 할 때, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-500	1000	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\dfrac{x}{2+x}$	$\dfrac{2}{2+x}$	1

이 게임을 한 번 해서 받을 수 있는 금액의 기댓값이 -200원이므로

$-500\cdot\dfrac{x}{2+x}+1000\cdot\dfrac{2}{2+x}=-200$

$-500x+2000=-200(2+x)$

$300x=2400 \qquad \therefore x=8$ 　답 8

0645 $\mathrm{E}(Y)=-2$에서

$\mathrm{E}(aX+b)=-2, \qquad a\mathrm{E}(X)+b=-2$

$\mathrm{E}(X)=1$이므로

$a+b=-2$ …… ㉠

또 $\mathrm{V}(Y)=36$에서

$\mathrm{V}(aX+b)=36, \qquad a^2\mathrm{V}(X)=36$

$\mathrm{V}(X)=4$이므로

$4a^2=36, \qquad a^2=9$

$\therefore a=3\,(\because a>0)$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=-5$

$\therefore a-b=8$ 　답 8

0646 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=125-10^2=25$이므로

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(2X+1)=2^2\mathrm{V}(X)=4\cdot25=100$

$\therefore \sigma(Y)=\sqrt{\mathrm{V}(Y)}=\sqrt{100}=10$ 　답 ②

0647 $\mathrm{E}(X)=m$, $\sigma(X)=\sigma$이므로

$\mathrm{E}(T)=\mathrm{E}\left(20\left(\dfrac{X-m}{\sigma}\right)+100\right)$

$=\dfrac{20}{\sigma}\mathrm{E}(X)-\dfrac{20m}{\sigma}+100$

$=\dfrac{20}{\sigma}m-\dfrac{20m}{\sigma}+100=100$

$\sigma(X)=\sigma\left(20\left(\dfrac{X-m}{\sigma}\right)+100\right)=\left|\dfrac{20}{\sigma}\right|\sigma(X)$

$=\dfrac{20}{\sigma}\cdot\sigma=20$

따라서 표준 점수 T의 평균은 100점, 표준편차는 20점이다.

답 평균: 100점, 표준편차: 20점

0648 확률의 총합은 1이므로

$a+\dfrac{2}{5}+a=1, \qquad 2a=\dfrac{3}{5} \qquad \therefore a=\dfrac{3}{10}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\cdot\dfrac{3}{10}+1\cdot\dfrac{2}{5}+2\cdot\dfrac{3}{10}=1$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\dfrac{3}{10}+1^2\cdot\dfrac{2}{5}+2^2\cdot\dfrac{3}{10}=\dfrac{8}{5}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\dfrac{8}{5}-1=\dfrac{3}{5}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$이므로

$\sigma(5X+3)=5\sigma(X)=5\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{5}=\sqrt{15}$ 　답 ④

0649 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=-2\cdot\dfrac{1}{4}+0\cdot\dfrac{3}{8}+2\cdot\dfrac{1}{4}+4\cdot\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{2}$ ⇨ ❶

$\mathrm{E}(X^2)=(-2)^2\cdot\dfrac{1}{4}+0^2\cdot\dfrac{3}{8}+2^2\cdot\dfrac{1}{4}+4^2\cdot\dfrac{1}{8}=4$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=4-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{15}{4}$ ⇨ ❷

$\mathrm{E}(Y)=7$에서

$\mathrm{E}(aX+b)=7, \qquad a\mathrm{E}(X)+b=7$

$\therefore \dfrac{a}{2}+b=7$ …… ㉠

또 $\mathrm{V}(Y)=60$에서

$\mathrm{V}(aX+b)=60, \qquad a^2\mathrm{V}(X)=60$

$a^2\cdot\dfrac{15}{4}=60, \qquad a^2=16$

$\therefore a=-4\,(\because a<0)$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=9$ ⇨ ❸

$\therefore a+b=5$ ⇨ ❹

답 5

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{E}(X)$를 구할 수 있다.	20%
❷ $\mathrm{V}(X)$를 구할 수 있다.	20%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

0650 확률의 총합은 1이므로

$\dfrac{2}{5}+a+2a+3a=1, \qquad 6a=\dfrac{3}{5}$

$\therefore a=\dfrac{1}{10}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=1\cdot\dfrac{2}{5}+2\cdot\dfrac{1}{10}+3\cdot\dfrac{2}{10}+4\cdot\dfrac{3}{10}=\dfrac{12}{5}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\cdot\dfrac{2}{5}+2^2\cdot\dfrac{1}{10}+3^2\cdot\dfrac{2}{10}+4^2\cdot\dfrac{3}{10}=\dfrac{37}{5}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\dfrac{37}{5}-\left(\dfrac{12}{5}\right)^2=\dfrac{41}{25}$

$\therefore \mathrm{V}\left(\dfrac{1}{a}X+2\right)=\dfrac{1}{a^2}\mathrm{V}(X)=10^2\mathrm{V}(X)$

$=100\cdot\dfrac{41}{25}=164$ 　답 164

0651 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)=1$

$k+4k+9k+16k+25k=1$

$55k=1 \qquad \therefore k=\dfrac{1}{55}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=1\cdot\dfrac{1^2}{55}+2\cdot\dfrac{2^2}{55}+3\cdot\dfrac{3^2}{55}+4\cdot\dfrac{4^2}{55}+5\cdot\dfrac{5^2}{55}=\dfrac{45}{11}$

이므로

$\mathrm{E}(11X-15)=11\mathrm{E}(X)-15$

$=11\cdot\dfrac{45}{11}-15=30$ 　답 30

0652 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{1}{8}\ (x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8)$$

이므로 확률변수 X에 대하여

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=1\cdot\frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{8}+3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{8}\\&\quad+5\cdot\frac{1}{8}+6\cdot\frac{1}{8}+7\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{1}{8}\\&=\frac{9}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=1^2\cdot\frac{1}{8}+2^2\cdot\frac{1}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}+4^2\cdot\frac{1}{8}\\&\quad+5^2\cdot\frac{1}{8}+6^2\cdot\frac{1}{8}+7^2\cdot\frac{1}{8}+8^2\cdot\frac{1}{8}\\&=\frac{51}{2}\end{aligned}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{51}{2}-\left(\frac{9}{2}\right)^2=\frac{21}{4}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{E}(-2X+3)&=-2\mathrm{E}(X)+3\\&=-2\cdot\frac{9}{2}+3=-6\end{aligned}$$

$$\mathrm{V}(-2X+3)=(-2)^2\mathrm{V}(X)=4\cdot\frac{21}{4}=21$$

답 ⑤

0653 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\cdot{}_5\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{5}{14},$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{15}{28},$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_5\mathrm{C}_0}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{3}{28}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{5}{14}+1\cdot\frac{15}{28}+2\cdot\frac{3}{28}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore\ \mathrm{E}(4X-1)=4\mathrm{E}(X)-1=4\cdot\frac{3}{4}-1=2$$

답 ②

0654 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_5\mathrm{C}_0\cdot{}_4\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{1}{21},$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{5}{14},$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{10}{21},$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3\cdot{}_4\mathrm{C}_0}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{5}{42}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{42}$	1

⇨ ❶

따라서 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{21}+1\cdot\frac{5}{14}+2\cdot\frac{10}{21}+3\cdot\frac{5}{42}=\frac{5}{3}$$

$$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{21}+1^2\cdot\frac{5}{14}+2^2\cdot\frac{10}{21}+3^2\cdot\frac{5}{42}=\frac{10}{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\frac{10}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{5}{9}\end{aligned}$$

⇨ ❷

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$이므로 ⇨ ❸

$$\sigma(6X+2)=6\sigma(X)=6\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=2\sqrt{5}$$

⇨ ❹

답 $2\sqrt{5}$

채점 기준	비율
❶ X의 확률분포를 구할 수 있다.	40%
❷ $\mathrm{V}(X)$를 구할 수 있다.	20%
❸ $\sigma(X)$를 구할 수 있다.	20%
❹ $\sigma(6X+2)$를 구할 수 있다.	20%

0655 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_9\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{9-x}={}_9\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^9\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$$

이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 2)&=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)\\&={}_9\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^9+{}_9\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^9+{}_9\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{23}{256}\end{aligned}$$

답 ①

0656 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_4\mathrm{C}_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{4-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

이므로 $\mathrm{P}(X=1)=k\mathrm{P}(X=2)$에서

$${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=k\cdot{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\frac{8}{81}=\frac{8}{27}k\qquad\therefore\ k=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

0657 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_xp^x(1-p)^{5-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$$

이므로 $\mathrm{P}(X=5)=\frac{1}{1024}$에서

$${}_5\mathrm{C}_5p^5(1-p)^0=\frac{1}{1024},\qquad p^5=\left(\frac{1}{4}\right)^5$$

$$\therefore\ p=\frac{1}{4}$$

답 ②

0658 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(5,\ \frac{3}{5}\right)$을 따르므로 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_x\left(\frac{3}{5}\right)^x\left(\frac{2}{5}\right)^{5-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 1)&=1-\mathrm{P}(X=0)\\&=1-{}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{3}{5}\right)^0\left(\frac{2}{5}\right)^5\\&=1-\left(\frac{2}{5}\right)^5\end{aligned}$$

답 ④

0659 (1) 1개의 문항에 임의로 답할 때 맞힐 확률이 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.
따라서 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{10-x}$$
$$={}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$

(2) $\mathrm{P}(X=8)={}_{10}\mathrm{C}_8\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{45}{1024}$

답 풀이 참조

0660 싹이 튼 씨앗의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(4,\ \frac{4}{5}\right)$를 따르므로 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_4\mathrm{C}_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{4-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X\geq 3)=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$$
$$={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^1+{}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{4}{5}\right)^4\left(\frac{1}{5}\right)^0$$
$$=\frac{512}{625}$$

답 ⑤

0661 $\mathrm{E}(X)=5$에서

$20p=5 \qquad \therefore p=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(20,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{V}(X)=20\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$$

답 ③

0662 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(50,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{V}(X)=50p(1-p)$

$\mathrm{V}(X)=12$에서

$50p(1-p)=12, \qquad 25p^2-25p+6=0$

$(5p-2)(5p-3)=0 \qquad \therefore p=\frac{2}{5}\left(\because p<\frac{1}{2}\right)$

답 $\frac{2}{5}$

0663 $\mathrm{E}(X)=30,\ \mathrm{V}(X)=5^2=25$이므로

$\mathrm{E}(X)=np=30$ …… ㉠
$\mathrm{V}(X)=np(1-p)=25$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad 30(1-p)=25$

$1-p=\frac{5}{6} \qquad \therefore p=\frac{1}{6}$

$p=\frac{1}{6}$을 ㉠에 대입하면 $\qquad \frac{1}{6}n=30$

$\therefore n=180$

답 ④

0664 (1) $\mathrm{P}(X=x)={}_{40}\mathrm{C}_x\frac{7^x}{8^{40}}$

$$={}_{40}\mathrm{C}_x\left(\frac{7}{8}\right)^x\left(\frac{1}{8}\right)^{40-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 40)$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(40,\ \frac{7}{8}\right)$을 따른다. ⇨ ❶

(2) $\mathrm{E}(X)=40\cdot\frac{7}{8}=35$ ⇨ ❷

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ X가 따르는 이항분포를 기호로 나타낼 수 있다.	60%
❷ $\mathrm{E}(X)$를 구할 수 있다.	40%

0665 $\sigma(X)=\sqrt{15p(1-p)}=\sqrt{-15\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}$

이므로 $\sigma(X)$는 $p=\frac{1}{2}$일 때, 최댓값 $\frac{\sqrt{15}}{2}$를 갖는다.

답 $\frac{\sqrt{15}}{2}$

0666 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 4 이하의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(90,\ \frac{2}{3}\right)$를 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=90\cdot\frac{2}{3}=60,\ \mathrm{V}(X)=90\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=20$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$
$=20+60^2=3620$

답 3620

0667 한 번의 시행에서 다크초콜릿 1개와 화이트초콜릿 2개가 나올 확률은

$\frac{{}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{3}{14}$ ⇨ ❶

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(70,\ \frac{3}{14}\right)$을 따르므로 ⇨ ❷

$\mathrm{E}(X)=70\cdot\frac{3}{14}=15$ ⇨ ❸

답 15

채점 기준	비율
❶ 한 번의 시행에서 사건이 일어날 확률을 구할 수 있다.	30%
❷ X가 따르는 이항분포를 구할 수 있다.	30%
❸ $\mathrm{E}(X)$를 구할 수 있다.	40%

0668 윷가락 한 개를 던질 때 등이 나올 확률이 $\frac{1}{3}$, 배가 나올 확률이 $\frac{2}{3}$이므로 윷가락 네 개를 동시에 던져 개가 나올 확률은

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(243,\ \frac{8}{27}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{V}(X)=243\cdot\frac{8}{27}\cdot\frac{19}{27}=\frac{152}{3}$$

답 ③

0669 한 개의 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(25,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=25\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{25}{4}$

$\therefore \mathrm{V}(-4X+10)=(-4)^2\,\mathrm{V}(X)$
$=16\cdot\frac{25}{4}=100$

답 ⑤

0670 사격 선수가 한 발을 쏘아 명중시킬 확률은 $\frac{4}{5}$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(50,\ \frac{4}{5}\right)$를 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=50\cdot\frac{4}{5}=40$$

$$\therefore\ \mathrm{E}(5X+4)=5\mathrm{E}(X)+4=5\cdot40+4=204$$

답 204

0671 $\mathrm{E}(X)=45p,\ \mathrm{V}(X)=45p(1-p)$이고
$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

이므로

$$45p(1-p)+(45p)^2=235$$
$$396p^2+9p-47=0$$
$$(132p+47)(3p-1)=0$$
$$\therefore\ p=\frac{1}{3}\ (\because\ 0\le p\le 1)$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(45,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{V}(X)=45\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=10$$

$$\therefore\ \mathrm{V}(3X-1)=3^2\mathrm{V}(X)=9\cdot10=90$$

답 ④

0672 전략 바닥에 놓인 면에 적힌 두 수의 합을 구한 후 두 수의 평균을 구한다.

풀이 바닥에 놓인 면에 적힌 두 수의 합은

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$$

이므로 X가 가질 수 있는 모든 값은

$$1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ 3,\ \frac{7}{2},\ 4$$

따라서 구하는 합은

$$\frac{2+3+4+5+6+7+8}{2}=\frac{35}{2}$$

답 $\frac{35}{2}$

0673 전략 확률의 총합이 1임을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$$a+a^2+a+2a^2=1,\qquad 3a^2+2a-1=0$$

$$(a+1)(3a-1)=0\qquad \therefore\ a=\frac{1}{3}\ (\because\ 0\le a\le 1)$$

따라서

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(X=3)=\frac{4}{9},\ \mathrm{P}(X=5)=\frac{2}{9}$$

이므로

$$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{4}{9}+5\cdot\frac{2}{9}=\frac{25}{9}$$

답 $\frac{25}{9}$

0674 전략 한 번의 게임에서 받을 수 있는 금액을 X원이라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내어 본다.

풀이 한 번의 게임에서 받을 수 있는 금액을 X원이라 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 200, 600, 1000이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=200)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(X=600)=\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{P}(X=1000)=\frac{1}{4}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	200	600	1000	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$$\therefore\ \mathrm{E}(X)=200\cdot\frac{1}{4}+600\cdot\frac{1}{2}+1000\cdot\frac{1}{4}=600$$

따라서 구하는 기댓값은 600원이다.

답 ②

0675 전략 상수 $a,\ b$의 값을 구한 후 $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$임을 이용한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$$a+b+\frac{1}{4}=1\qquad \therefore\ a+b=\frac{3}{4}\qquad \cdots\cdots\ ㉠$$

$\mathrm{E}(X)=\frac{3}{4}$에서 $\quad 0\cdot a+1\cdot b+2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$$\therefore\ b=\frac{1}{4}$$

$b=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면 $\quad a=\frac{1}{2}$ ⇨ ❶

따라서

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=0^2\cdot\frac{1}{2}+1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{11}{16}$$ ⇨ ❷

이므로

$$\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{11}{16}=\frac{11}{64}$$ ⇨ ❸

답 $\frac{11}{64}$

채점 기준	비율
❶ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $\mathrm{V}(X)$를 구할 수 있다.	40%
❸ $\mathrm{V}(aX+b)$를 구할 수 있다.	30%

0676 전략 먼저 확률변수 X의 확률질량함수를 구한다.

풀이 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{5-x}$$
$$={}_5\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^5\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X\ge4)=\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)$$
$$={}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5$$
$$=\frac{3}{16}$$

답 ③

0677 전략 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, $\mathrm{V}(X)=np(1-p)$임을 이용한다.

풀이 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(800,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{V}(X)=800\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=150$$

$$\therefore\ \mathrm{V}(-2X-5)=(-2)^2\mathrm{V}(X)=4\cdot150=600$$

답 600

0678 전략 확률의 총합이 1임을 이용하여 k의 값을 구한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)=1$$

$\frac{2}{k}+\frac{3}{k}+\frac{4}{k}+\frac{5}{k}=1,\quad \frac{14}{k}=1$

$\therefore k=14$

$\therefore \mathrm{P}(X=2)=\frac{2+1}{14}=\frac{3}{14}$

답 ③

0679 전략 먼저 $\mathrm{P}(X^2-5X+6=0)$이 나타내는 확률을 찾는다.

풀이 $X^2-5X+6=0$에서 $\quad (X-2)(X-3)=0$

$\therefore X=2$ 또는 $X=3$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X^2-5X+6=0)=\mathrm{P}(X=2 \text{ 또는 } X=3)$

한편 두 눈의 수를 a, b라 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여 두 수 중 크지 않은 수가

2인 경우는

$(2, 2), (2, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 2),$
$(2, 5), (5, 2), (2, 6), (6, 2)$의 9개

3인 경우는

$(3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3),$
$(3, 6), (6, 3)$의 7개

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X^2-5X+6=0)&=\mathrm{P}(X=2 \text{ 또는 } X=3)\\&=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)\\&=\frac{9}{36}+\frac{7}{36}=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

답 ①

0680 전략 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 $0, 1, 2, 3$이므로 $\mathrm{P}(X\geq1)=1-\mathrm{P}(X=0)$임을 이용한다.

풀이 $\mathrm{P}(X\geq1)=1-\mathrm{P}(X=0)$이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_4\mathrm{C}_0\cdot{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(X\geq1)=1-\mathrm{P}(X=0)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

답 $\frac{5}{6}$

0681 전략 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$임을 이용한다.

풀이 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$\mathrm{V}(X)=4a+7-a^2=-(a-2)^2+11$

따라서 $\mathrm{V}(X)$는 $a=2$일 때 최댓값 11을 갖는다.

답 ②

0682 전략 확률변수 X의 확률분포를 구한다.

풀이 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 $-1, 0, 1$이고 확률변수 X가 각 값을 가질 확률은

$\mathrm{P}(X=-1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5},$

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5},$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}+\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{5}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

⇨ ❶

확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=-1\cdot\frac{2}{5}+0\cdot\frac{2}{5}+1\cdot\frac{1}{5}=-\frac{1}{5}$ ⇨ ❷

답 $-\frac{1}{5}$

채점 기준	비율
❶ X의 확률분포를 구할 수 있다.	60%
❷ $\mathrm{E}(X)$를 구할 수 있다.	40%

0683 전략 확률변수 X를 Y에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $Y=3X+6$에서 $\quad 3X=Y-6$

$\therefore X=\frac{1}{3}Y-2$

$\mathrm{E}(Y)=12$, $\mathrm{E}(Y^2)=180$이므로

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2=180-12^2=36$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{V}(X)&=\mathrm{V}\left(\frac{1}{3}Y-2\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2\mathrm{V}(Y)\\&=\frac{1}{9}\cdot36=4\end{aligned}$$

답 ③

0684 전략 $\mathrm{E}(Z)=\mathrm{E}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}\mathrm{E}(X)-\frac{m}{\sigma}$, $\mathrm{V}(Z)=\mathrm{V}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma^2}\mathrm{V}(X)$임을 이용한다.

풀이 $\mathrm{E}(X)=m$, $\sigma(X)=\sigma$이므로

$\mathrm{E}(Z)=\mathrm{E}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}\mathrm{E}(X)-\frac{m}{\sigma}=\frac{1}{\sigma}\cdot m-\frac{m}{\sigma}=0$

$\mathrm{V}(Z)=\mathrm{V}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma^2}\mathrm{V}(X)=\frac{1}{\sigma^2}\cdot\sigma^2=1$

답 평균: 0, 분산: 1

0685 전략 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낸 후 $\mathrm{V}(X)$를 구한다.

풀이 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 $0, 1, 2, 3$이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\cdot{}_4\mathrm{C}_4}{{}_7\mathrm{C}_4}=\frac{1}{35},$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_4}=\frac{12}{35},$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_4}=\frac{18}{35},$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_4}=\frac{4}{35}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{35}+1\cdot\frac{12}{35}+2\cdot\frac{18}{35}+3\cdot\frac{4}{35}=\frac{12}{7}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{35}+1^2\cdot\frac{12}{35}+2^2\cdot\frac{18}{35}+3^2\cdot\frac{4}{35}=\frac{24}{7}$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\frac{24}{7}-\left(\frac{12}{7}\right)^2=\frac{24}{49}\end{aligned}$$

$\mathrm{V}(-7X+1)=(-7)^2\,\mathrm{V}(X)=49\cdot\frac{24}{49}=24$이므로

$$\begin{aligned}\sigma(-7X+1)&=\sqrt{\mathrm{V}(-7X+1)}\\&=\sqrt{24}=2\sqrt{6}\end{aligned}$$

답 ④

0686 전략 먼저 확률변수 X의 확률질량함수를 구한다.

풀이 확률변수 X가 이항분포 $B\left(4,\ \frac{2}{5}\right)$를 따르므로 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_4C_x\left(\frac{2}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{4-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\ge3)&=P(X=3)+P(X=4)\\&={}_4C_3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^1+{}_4C_4\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^0\\&=\frac{112}{625}\end{aligned}$$

답 $\frac{112}{625}$

0687 전략 먼저 $V(X)=6$임을 이용하여 p의 값을 구한다.

풀이 $V(X)=24p(1-p)=6$에서

$4p^2-4p+1=0,\quad (2p-1)^2=0\quad \therefore p=\frac{1}{2}$

$\therefore E(X)=24\cdot\frac{1}{2}=12$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=6+12^2=150$

답 ③

0688 전략 한 번의 시행에서 빨간 공이 나올 확률을 구한 후 확률변수 X가 따르는 이항분포를 구한다.

풀이 한 번의 시행에서 빨간 공이 나올 확률은

$$\frac{{}_2C_1}{{}_5C_1}=\frac{2}{5}$$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n,\ \frac{2}{5}\right)$를 따른다.

$\therefore E(X)=n\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5}n$

$V(X)=n\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{25}n$이므로 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$\frac{6}{25}n=\frac{26}{5}-\frac{4}{25}n^2,\quad 2n^2+3n-65=0$

$(2n+13)(n-5)=0\quad \therefore n=5$ ($\because$ n은 자연수)

답 5

0689 전략 확률변수 X가 따르는 이항분포를 구한다.

풀이 예약한 사람이 실제로 여행을 갈 확률은 $\frac{9}{10}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(200,\ \frac{9}{10}\right)$를 따른다.

따라서

$$\sigma(X)=\sqrt{200\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}}=3\sqrt{2}$$

이므로

$$\sigma\left(\frac{1}{3}X+1\right)=\frac{1}{3}\sigma(X)=\frac{1}{3}\cdot3\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

0690 전략 확률의 총합은 1임을 이용하여 a, b에 대한 식을 세운다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$

$\frac{1}{a}+\frac{2}{a}+b+b=1$

$\therefore \frac{3}{a}+2b=1$ …… ㉠

$P(X=1)=2P(X=3)$에서

$\frac{1}{a}=2b$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$3\cdot2b+2b=1\quad \therefore b=\frac{1}{8}$

$b=\frac{1}{8}$을 ㉡에 대입하면 $\quad\frac{1}{a}=2\cdot\frac{1}{8}\quad \therefore a=4$

$\therefore ab=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

0691 전략 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내고 a, b, c에 대한 식을 세운다.

풀이 $a+b+c=8$에서 $\quad c=8-a-b$ …… ㉠

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{a}{8}$	$\frac{b}{8}$	$\frac{8-a-b}{8}$	1

$E(X)=\frac{9}{4}$에서

$1\cdot\frac{a}{8}+2\cdot\frac{b}{8}+3\cdot\frac{8-a-b}{8}=\frac{9}{4}$

$\therefore 2a+b=6$ …… ㉡

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{7}{16}$에서

$1^2\cdot\frac{a}{8}+2^2\cdot\frac{b}{8}+3^2\cdot\frac{8-a-b}{8}-\left(\frac{9}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$

$\therefore 8a+5b=28$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=4$

$a=1,\ b=4$를 ㉠에 대입하면 $\quad c=3$

$\therefore a+b-c=2$

답 ②

0692 전략 먼저 6의 눈이 나오는 주사위의 개수를 확률변수 X로 놓는다.

풀이 서로 다른 5개의 주사위를 동시에 던질 때 6의 눈이 나오는 주사위의 개수를 확률변수 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(5,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{5-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$$

$$\begin{aligned}\therefore E(25^X)&=\sum_{x=0}^{5}25^x{}_5C_x\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{5-x}\\&=\sum_{x=0}^{5}{}_5C_x\left(\frac{25}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{5-x}\\&=\left(\frac{25}{6}+\frac{5}{6}\right)^5=5^5=3125\end{aligned}$$

따라서 구하는 기댓값은 3125원이다.

답 ③

다쎈 특강 이항정리

n이 자연수일 때,

$$\begin{aligned}&\sum_{r=0}^{n}{}_nC_ra^{n-r}b^r\\&={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b^1+\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_nC_nb^n\\&=(a+b)^n\end{aligned}$$

0693 전략 확률변수 X의 확률질량함수가 $P(X=x)={}_nC_xp^x(1-p)^{n-x}(x=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$이면 X는 이항분포 $B(n,\ p)$를 따른다.

풀이 확률변수 X의 확률질량함수가

$$P(X=x)={}_{18}C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{18-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 18)$$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(18,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다. ⇨ ❶

이때

$$E(X)=18\cdot\frac{1}{3}=6,\ V(X)=18\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=4$$ ⇨ ❷

이므로

$$\sum_{k=0}^{18}k^2P(X=k)=E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$$
$$=4+6^2=40$$ ⇨ ❸

답 40

채점 기준	비율
❶ 확률변수가 X가 이항분포 $B\left(18,\ \frac{1}{3}\right)$을 따름을 알 수 있다.	30%
❷ $E(X)$, $V(X)$를 구할 수 있다.	40%
❸ $\sum_{k=0}^{18}k^2P(X=k)$의 값을 구할 수 있다.	30%

0694 **전략** 확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따를 때, 주어진 평균과 분산을 이용하여 n, p의 값을 먼저 구한다.

풀이 확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따른다고 하면 $E(X)=8$, $V(X)=4$에서

$np=8$ …… ㉠

$np(1-p)=4$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $8(1-p)=4,\quad 1-p=\frac{1}{2}$

$\therefore\ p=\frac{1}{2}$

㉠에서 $n=16$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(16,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$P(X=3)={}_{16}C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{13}=\frac{35}{2^{12}}$$

답 ②

0695 **전략** 장난감이 불량품이 아닐 확률과 상자가 불량품이 아닐 확률을 이용하여 장난감과 상자가 모두 불량품이 아닐 확률을 구한다.

풀이 장난감이 불량품이 아닐 확률은

$$1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

상자가 불량품이 아닐 확률은

$$1-\frac{2}{50}=\frac{24}{25}$$

장난감과 상자가 모두 불량품이 아닐 확률은

$$\frac{9}{10}\cdot\frac{24}{25}=\frac{108}{125}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(500,\ \frac{108}{125}\right)$을 따르므로

$$E(X)=500\cdot\frac{108}{125}=432$$

$\therefore\ E(2X+1)=2E(X)+1=865$

답 865

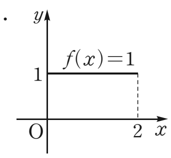
Ⅲ. 통계

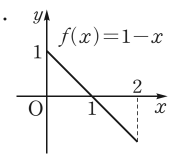
08 정규분포

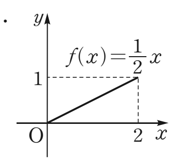
0696 연속확률변수는 어떤 범위에 속하는 모든 실수 값을 가질 수 있으므로 보기에서 연속확률변수인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

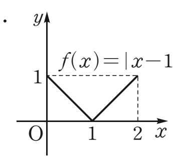
답 ㄱ, ㄹ

0697 보기의 함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)\ (0\le x\le 2)$의 그래프는 각각 다음과 같다.

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


ㄹ.


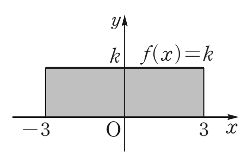
ㄱ. $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이 아니므로 확률밀도함수가 아니다.

ㄴ. $1<x\le 2$에서 $f(x)<0$이므로 확률밀도함수가 아니다.

이상에서 확률밀도함수인 것은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄷ, ㄹ

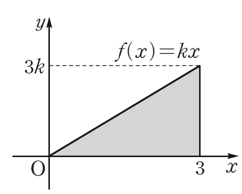
0698 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-3$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$6\cdot k=1\qquad \therefore\ k=\frac{1}{6}$

답 $\frac{1}{6}$

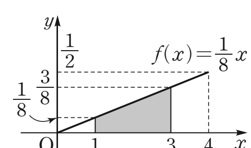
0699 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3k=1\qquad \therefore\ k=\frac{2}{9}$

답 $\frac{2}{9}$

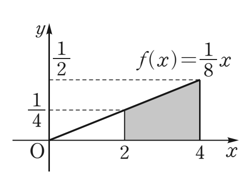
0700 $P(1\le X\le 3)$은 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$$P(1\le X\le 3)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\right)\cdot 2$$
$$=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0701 $P(X\ge 2)$는 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$$P(X\ge 2)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot 2$$
$$=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

다른풀이 $\mathrm{P}(X\ge2)=1-\mathrm{P}(0\le X\le2)$
$=1-\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{1}{4}$
$=\frac{3}{4}$

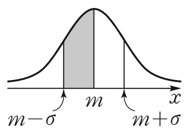
0702 평균이 5, 분산이 $4=2^2$이므로
$\mathrm{N}(5,\ 2^2)$ 답 $\mathrm{N}(5,\ 2^2)$

0703 평균이 -3, 분산이 $16=4^2$이므로
$\mathrm{N}(-3,\ 4^2)$ 답 $\mathrm{N}(-3,\ 4^2)$

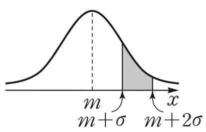
0704 답 ㈏

0705 답 ㈎

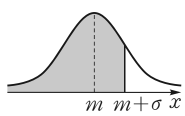
0706 $\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)$
$=\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=a$ 답 a



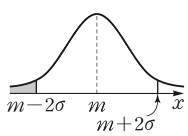
0707 $\mathrm{P}(m+\sigma\le X\le m+2\sigma)$
$=\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)$
$-\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=b-a$ 답 $b-a$



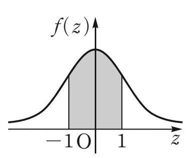
0708 $\mathrm{P}(X\le m+\sigma)$
$=\mathrm{P}(X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=0.5+a$ 답 $0.5+a$



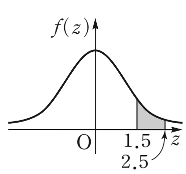
0709 $\mathrm{P}(X\le m-2\sigma)$
$=\mathrm{P}(X\ge m+2\sigma)$
$=\mathrm{P}(X\ge m)-\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)$
$=0.5-b$ 답 $0.5-b$



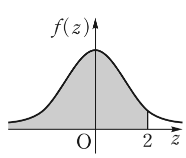
0710 $\mathrm{P}(-1\le Z\le1)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le1)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(0\le Z\le1)$
$=0.3413+0.3413$
$=0.6826$ 답 0.6826



0711 $\mathrm{P}(1.5\le Z\le2.5)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$
$=0.4938-0.4332$
$=0.0606$
답 0.0606

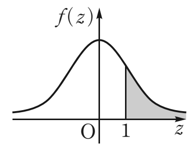


0712 $\mathrm{P}(Z\le2)$
$=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)$
$=0.5+0.4772$
$=0.9772$



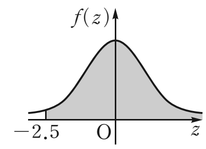
답 0.9772

0713 $\mathrm{P}(Z\ge1)=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)$
$=0.5-0.3413$
$=0.1587$



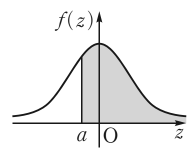
답 0.1587

0714 $\mathrm{P}(Z\ge-2.5)$
$=\mathrm{P}(-2.5\le Z\le0)+\mathrm{P}(Z\ge0)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)+\mathrm{P}(Z\ge0)$
$=0.4938+0.5$
$=0.9938$



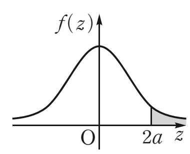
답 0.9938

0715 $\mathrm{P}(Z\ge a)=0.8413$에서
$\mathrm{P}(a\le Z\le0)+\mathrm{P}(Z\ge0)=0.8413$
$\mathrm{P}(0\le Z\le -a)+0.5=0.8413$
$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le -a)=0.3413$
따라서 $-a=1$이므로 $a=-1$ 답 -1

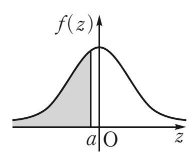


참고 $\mathrm{P}(Z\ge a)=0.8413>0.5$이므로 $a<0$이다.

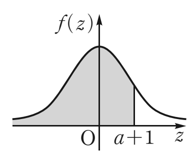
0716 $\mathrm{P}(Z\ge2a)=0.0228$에서
$\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le2a)=0.0228$
$0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le2a)=0.0228$
$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le2a)=0.4772$
따라서 $2a=2$이므로 $a=1$ 답 1



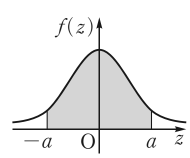
0717 $\mathrm{P}(Z\le a)=0.3085$에서
$\mathrm{P}(Z\le0)-\mathrm{P}(a\le Z\le0)=0.3085$
$0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le -a)=0.3085$
$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le -a)=0.1915$
따라서 $-a=0.5$이므로 $a=-0.5$ 답 -0.5



0718 $\mathrm{P}(Z\le a+1)=0.9332$에서
$\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le a+1)=0.9332$
$0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le a+1)=0.9332$
$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le a+1)=0.4332$
따라서 $a+1=1.5$이므로 $a=0.5$ 답 0.5



0719 $\mathrm{P}(-a\le Z\le a)=0.9544$에서
$\mathrm{P}(-a\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le a)=0.9544$
$2\mathrm{P}(0\le Z\le a)=0.9544$
$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le a)=0.4772$
$\therefore\ a=2$



답 2

0720 답 $Z=\frac{X-35}{6}$

0721 답 $Z=\frac{X-120}{15}$

0722 답 $Z=\frac{X-600}{10}$

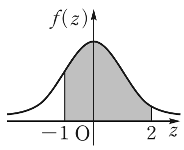
0723 답 $Z=\dfrac{X+8}{2}$

0724 (1) X의 평균이 45, 표준편차가 3이므로 X를

$Z=\boxed{\dfrac{X-45}{3}}$로 표준화하면

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(42\le X\le 51)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{42-45}{3}\le Z\le\frac{51-45}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(\boxed{-1}\le Z\le\boxed{2})\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{P}(42\le X\le 51)$



$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=0.3413+0.4772$
$=0.8185$

답 (1) $\dfrac{X-45}{3}$, -1, 2 (2) 0.8185

0725 $\mathrm{E}(X)=192\cdot\dfrac{1}{4}=48$,

$\mathrm{V}(X)=192\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{4}=36$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(48,\ 6^2)$을 따른다.

답 $\mathrm{N}(48,\ 6^2)$

0726 $\mathrm{E}(X)=600\cdot\dfrac{2}{5}=240$,

$\mathrm{V}(X)=600\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=144$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(240,\ 12^2)$을 따른다.

답 $\mathrm{N}(240,\ 12^2)$

0727 (1) $\mathrm{E}(X)=144\cdot\dfrac{1}{2}=72$,

$\mathrm{V}(X)=144\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=36$

이므로 X의 평균은 72, 분산은 $36=6^2$이다.
따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(72,\ 6^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-72}{6}$

(2) $$\begin{aligned}\mathrm{P}(78\le X\le 81)&=\mathrm{P}\left(\frac{78-72}{6}\le Z\le\frac{81-72}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(1\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.4332-0.3413\\&=0.0919\end{aligned}$$

답 (1) $Z=\dfrac{X-72}{6}$ (2) 0.0919

0728 ① $0\le x<\dfrac{2}{3}$에서 $f(x)<0$이다.

②, ③ $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이 아니다.

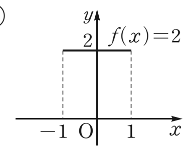
④ $1\le x\le 2$에서 $f(x)<0$이다.

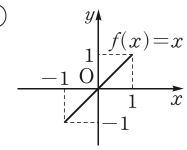
⑤ $0\le x\le 2$에서 $f(x)\ge 0$이고, $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

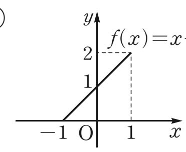
$\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=1$

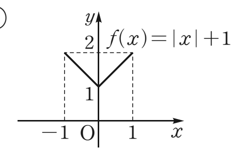
답 ⑤

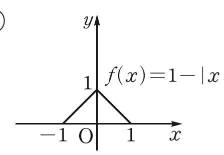
0729 보기의 함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$ $(-1\le x\le 1)$의 그래프는 각각 다음과 같다.

①


②


③


④


⑤


①, ④ $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이 아니다.

② $-1\le x<0$에서 $f(x)<0$이다.

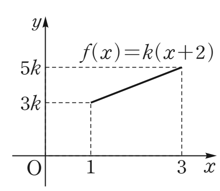
③ $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이 아니다.

⑤ $-1\le x\le 1$에서 $f(x)\ge 0$이고 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=1$

답 ⑤

0730 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $f(x)=k(x+2)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\dfrac{1}{2}\cdot(3k+5k)\cdot 2=1$

$8k=1$ $\therefore k=\dfrac{1}{8}$

답 ①

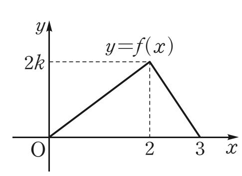
참고 $y=k(x+2)$의 그래프는 k의 값에 관계없이 점 $(-2,\ 0)$을 지난다. 따라서 $k<0$이면 $1\le x\le 3$에서 $f(x)<0$이므로 $k<0$인 경우는 생각하지 않는다.

0731 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로 $\dfrac{1}{2}\cdot(1+4)\cdot k=1$, $\dfrac{5}{2}k=1$

$\therefore k=\dfrac{2}{5}$

답 $\dfrac{2}{5}$

0732 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ⇨ ❶



$y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

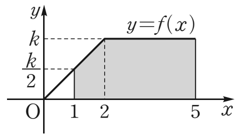
$\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 2k=1$

$3k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{3}$ ➪ ❷

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	40%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	60%

0733 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=5$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$\frac{1}{2}\cdot(3+5)\cdot k=1$$

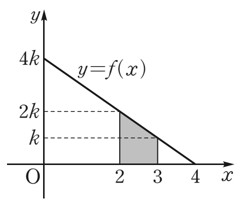
$$4k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{4}$$

이때 $\mathrm{P}(X\geq1)$은 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$\mathrm{P}(X\geq1)=1-\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{8}=\frac{15}{16}$$

답 $\frac{15}{16}$

0734 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=0$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$\frac{1}{2}\cdot4\cdot4k=1$$

$$8k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{8}$$

이때 $\mathrm{P}(2\leq X\leq3)$은 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$\mathrm{P}(2\leq X\leq3)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\cdot1=\frac{3}{16}$$

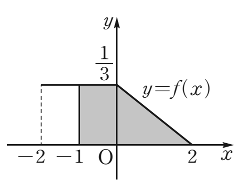
답 ②

0735 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=-2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$2\cdot k+\frac{1}{2}\cdot2\cdot k=1, \qquad 2k+k=1$$

$$3k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{3}$$

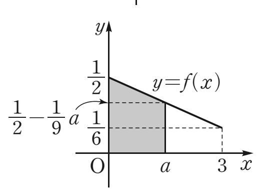
$\mathrm{P}(X\geq-1)$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$$1-1\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

답 ④

0736 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ➪ ❶



$\mathrm{P}(X\leq a)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로 $\mathrm{P}(X\leq a)=\frac{5}{8}$에서

$$\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{9}a\right)\right\}\cdot a=\frac{5}{8}$$ ➪ ❷

$$4a^2-36a+45=0$$

$$(2a-3)(2a-15)=0$$

$$\therefore a=\frac{3}{2}\ (\because 0\leq a\leq3)$$ ➪ ❸

답 $\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
❶ $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	30%
❷ a에 대한 식을 세울 수 있다.	40%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30%

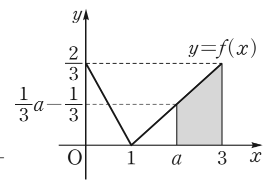
0737 $\mathrm{P}(0\leq X\leq1)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$이므로 $1\leq a\leq3$이다.

$1\leq x\leq3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(1,\ 0)$, $\left(3,\ \frac{2}{3}\right)$를 지나는 직선이므로

$$y=\frac{\frac{2}{3}-0}{3-1}(x-1), \qquad y=\frac{1}{3}(x-1)$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\ (1\leq x\leq3)$$

$\mathrm{P}(a\leq X\leq3)$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(a\leq X\leq3)=\frac{1}{2}$에서

$$\frac{1}{2}\cdot\left\{\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}\right\}\cdot(3-a)=\frac{1}{2}$$

$$a^2-2a=0, \qquad a(a-2)=0$$

$$\therefore a=2\ (\because 1\leq a\leq3)$$

답 2

0738 ④ m의 값이 일정할 때, σ의 값이 클수록 그래프의 폭이 넓어진다.

답 ④

0739 ㄱ. 확률변수 X_1의 정규분포 곡선의 대칭축이 확률변수 X_2의 정규분포 곡선의 대칭축보다 왼쪽에 있으므로

$$\mathrm{E}(X_1)<\mathrm{E}(X_2)$$

ㄴ. 확률변수 X_1의 정규분포 곡선의 가운데 부분의 높이가 확률변수 X_2의 정규분포 곡선의 가운데 부분의 높이보다 높으므로

$$\sigma(X_1)<\sigma(X_2)$$

ㄷ. $\mathrm{P}(X_1\geq a)<\mathrm{P}(X_2\geq a)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

0740 정규분포 곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고, $\mathrm{P}(X\leq4)=\mathrm{P}(X\geq10)$이므로

$$m=\frac{4+10}{2}=7$$

답 7

0741 확률변수 X의 평균이 20이므로 X의 확률밀도함수는 $x=20$에서 최댓값을 갖고, 정규분포 곡선은 직선 $x=20$에 대하여 대칭이다. ➪ ❶

따라서 $\mathrm{P}(k\leq X\leq k+4)$가 최대가 되려면

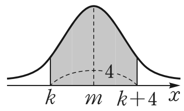
$$\frac{k+(k+4)}{2}=20, \qquad 2k+4=40$$

$$\therefore k=18$$ ➪ ❷

답 18

채점 기준	비율
❶ X의 확률밀도함수의 성질을 알 수 있다.	40%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	60%

참고 $\mathrm{P}(k\le X\le k+4)$에서 $(k+4)-k=4$로 일정하므로 오른쪽 그림과 같이 $\dfrac{k+(k+4)}{2}=m$일 때 $\mathrm{P}(k\le X\le k+4)$가 최대이다.



0742 $m=70$, $\sigma=4$이므로

$\mathrm{P}(66\le X\le 78)$
$=\mathrm{P}(70-4\le X\le 70+2\cdot 4)$
$=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+2\sigma)$
$=\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)$
$=0.3413+0.4772=0.8185$ 답 0.8185

0743 $\mathrm{P}(X\le m+\sigma)=0.8413$에서

$\mathrm{P}(X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=0.8413$
$0.5+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=0.8413$
$\therefore\ \mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=0.3413$
$\therefore\ \mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)$
$=2\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=0.6826$ 답 0.6826

0744 $\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)=a$에서

$2\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=a$
$\therefore\ \mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=\dfrac{a}{2}$

$\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m+2\sigma)=b$에서

$2\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)=b$
$\therefore\ \mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)=\dfrac{b}{2}$
$\therefore\ \mathrm{P}(m+\sigma\le X\le m+2\sigma)$
$=\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)-\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$
$=\dfrac{b}{2}-\dfrac{a}{2}=\dfrac{b-a}{2}$ 답 ④

0745 $\mathrm{P}(X\ge a)=0.0228$에서

$\mathrm{P}(X\ge m)-\mathrm{P}(m\le X\le a)=0.0228$
$0.5-\mathrm{P}(m\le X\le a)=0.0228$
$\therefore\ \mathrm{P}(m\le X\le a)=0.4772$ ⇨ ❶

이때 $\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)=0.4772$이므로

$a=m+2\sigma=15+2\cdot 3=21$ ⇨ ❷

답 21

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{P}(m\le X\le a)$를 구할 수 있다.	40%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	60%

0746 $\mathrm{P}(|X-7|\le 2)=0.6826$에서

$\mathrm{P}(-2\le X-7\le 2)=0.6826$
$\therefore\ \mathrm{P}(5\le X\le 9)=0.6826$

확률변수 X의 평균이 7이므로

$\mathrm{P}(5\le X\le 7)+\mathrm{P}(7\le X\le 9)=0.6826$
$2\mathrm{P}(7\le X\le 9)=0.6826$
$\therefore\ \mathrm{P}(7\le X\le 9)=0.3413$

$Y=2X+3$이므로

$\mathrm{P}(Y\ge 21)=\mathrm{P}(2X+3\ge 21)$
$=\mathrm{P}(X\ge 9)$
$=\mathrm{P}(X\ge 7)-\mathrm{P}(7\le X\le 9)$
$=0.5-0.3413$
$=0.1587$ 답 ③

0747 $\mathrm{P}(|Z|\le 1.5)=0.8664$에서

$\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 1.5)=0.8664$
$2\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.8664$
$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$
$\therefore\ \mathrm{P}(Z\le -1.5)$
$=\mathrm{P}(Z\le 0)-\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 0)$
$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$
$=0.5-0.4332$
$=0.0668$ 답 ①

다른풀이 $\mathrm{P}(|Z|\le 1.5)=0.8664$에서

$\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 1.5)=0.8664$
$\therefore\ \mathrm{P}(Z\le -1.5)=\dfrac{1}{2}\{1-\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 1.5)\}$
$=\dfrac{1}{2}(1-0.8664)$
$=0.0668$

0748 $\mathrm{P}(Z\ge a)=0.8849$에서

$\mathrm{P}(a\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)=0.8849$
$\mathrm{P}(a\le Z\le 0)+0.5=0.8849$
$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le -a)=0.3849$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.2)=0.3849$이므로

$-a=1.2$ $\quad\therefore\ a=-1.2$

$\mathrm{P}(-a\le Z\le b)=0.0792$에서

$\mathrm{P}(0\le Z\le b)-\mathrm{P}(0\le Z\le -a)=0.0792$
$\mathrm{P}(0\le Z\le b)-0.3849=0.0792$
$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le b)=0.4641$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.8)=0.4641$이므로 $\quad b=1.8$

$\therefore\ ab=-2.16$ 답 -2.16

0749 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(8,\ 3^2)$, $\mathrm{N}(12,\ 4^2)$을 따르므로

$Z_X=\dfrac{X-8}{3}$, $Z_Y=\dfrac{Y-12}{4}$

로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge 14)=\mathrm{P}(Y\ge k)$에서

$\mathrm{P}\left(Z_X\ge \dfrac{14-8}{3}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge \dfrac{k-12}{4}\right)$
$\therefore\ \mathrm{P}(Z_X\ge 2)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge \dfrac{k-12}{4}\right)$

따라서 $\dfrac{k-12}{4}=2$이므로

$k-12=8$ $\quad\therefore\ k=20$ 답 20

0750 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(86,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-86}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 $\frac{X-86}{\sigma}=\frac{X-m}{9}$이므로

$m=86$, $\sigma=9$

$\therefore m+\sigma=95$ 답 ④

0751 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(129,\ 8^2)$, $\mathrm{N}(120,\ 4^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-129}{8}$, $Z_Y=\frac{Y-120}{4}$으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 즉

$a=\mathrm{P}\left(Z_X\le\frac{137-129}{8}\right)=\mathrm{P}(Z_X\le1)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z_X\le1)$

$b=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{122-120}{4}\right)=\mathrm{P}(Z_Y\ge0.5)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z_Y\le0.5)$

$c=\mathrm{P}(Z\ge-1.5)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$

이므로 $b<a<c$ 답 ③

0752 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 4^2)$, $\mathrm{N}(m,\ 6^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-10}{4}$, $Z_Y=\frac{Y-m}{6}$

으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$2\mathrm{P}(10\le X\le14)=\mathrm{P}(14\le Y\le2m-14)$에서

$2\mathrm{P}\left(\frac{10-10}{4}\le Z_X\le\frac{14-10}{4}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{14-m}{6}\le Z_Y\le\frac{2m-14-m}{6}\right)$

$2\mathrm{P}(0\le Z_X\le1)=\mathrm{P}\left(-\frac{m-14}{6}\le Z_Y\le\frac{m-14}{6}\right)$

$\therefore \mathrm{P}(0\le Z_X\le1)=\mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le\frac{m-14}{6}\right)$

따라서 $\frac{m-14}{6}=1$이므로

$m-14=6$ $\therefore m=20$ 답 20

0753 $Z=\frac{X-35}{4}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(|X-37|\le4)=\mathrm{P}(-4\le X-37\le4)$

$=\mathrm{P}(33\le X\le41)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{33-35}{4}\le Z\le\frac{41-35}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le1.5)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$

$=0.1915+0.4332$

$=0.6247$ 답 0.6247

0754 $Z=\frac{X-24}{6}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

① $\mathrm{P}(24\le X\le36)=\mathrm{P}\left(\frac{24-24}{6}\le Z\le\frac{36-24}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le2)$

$=0.4772$

② $\mathrm{P}(12\le X\le24)=\mathrm{P}\left(\frac{12-24}{6}\le Z\le\frac{24-24}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le0)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le2)$

$=0.4772$

③ $\mathrm{P}(X\le36)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{36-24}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le2)$

$=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)$

$=0.5+0.4772$

$=0.9772$

④ $\mathrm{P}(X\le12)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{12-24}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le-2)$

$=\mathrm{P}(Z\le0)-\mathrm{P}(-2\le Z\le0)$

$=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le2)$

$=0.5-0.4772$

$=0.0228$

⑤ $\mathrm{P}(X\ge12)=1-\mathrm{P}(X\le12)$

$=1-0.0228=0.9772$ 답 ③

0755 $\mathrm{E}(X)=60$, $\sigma(X)=8$에서

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(4X-5)=4\mathrm{E}(X)-5=4\cdot60-5=235$

$\sigma(Y)=\sigma(4X-5)=4\sigma(X)=4\cdot8=32$

이때 X가 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 8^2)$을 따르므로 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(235,\ 32^2)$을 따른다.

$Z=\frac{Y-235}{32}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(Y\le203)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{203-235}{32}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le-1)=\mathrm{P}(Z\ge1)$

$=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)$

$=0.5-0.3413$

$=0.1587$

답 0.1587

다른풀이 $Y=4X-5$이므로

$\mathrm{P}(Y\le203)=\mathrm{P}(4X-5\le203)$

$=\mathrm{P}(X\le52)$

$Z=\frac{X-60}{8}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(Y\le203)=\mathrm{P}(X\le52)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{52-60}{8}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le-1)=\mathrm{P}(Z\ge1)$

$=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)$

$=0.5-0.3413$

$=0.1587$

0756 $Z=\frac{X-75}{10}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(X\ge83)=0.2119$에서

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{83-75}{10}\right)=0.2119$ ⇨ ❶

$P(Z \geq 0.8) = 0.2119$
$P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 0.8) = 0.2119$
$0.5 - P(0 \leq Z \leq 0.8) = 0.2119$
$\therefore P(0 \leq Z \leq 0.8) = 0.2881$ ⇨ ❷

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(67 \leq X \leq 83) &= P\left(\frac{67-75}{10} \leq Z \leq \frac{83-75}{10}\right) \\ &= P(-0.8 \leq Z \leq 0.8) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 0.8) \\ &= 0.5762 \end{aligned}$$ ⇨ ❸

답 0.5762

채점 기준	비율
❶ X를 표준화할 수 있다.	20%
❷ $P(0 \leq Z \leq 0.8)$을 구할 수 있다.	40%
❸ $P(67 \leq X \leq 83)$을 구할 수 있다.	40%

0757 $Z = \frac{X-15}{3}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(a \leq X \leq 21) = 0.9104$에서

$P\left(\frac{a-15}{3} \leq Z \leq \frac{21-15}{3}\right) = 0.9104$

$P\left(\frac{a-15}{3} \leq Z \leq 2\right) = 0.9104$

$P\left(\frac{a-15}{3} \leq Z \leq 0\right) + P(0 \leq Z \leq 2) = 0.9104$

$P\left(0 \leq Z \leq \frac{15-a}{3}\right) + 0.4772 = 0.9104$

$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{15-a}{3}\right) = 0.4332$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$이므로

$\frac{15-a}{3} = 1.5, \quad 15-a = 4.5$

$\therefore a = 10.5$ 답 10.5

0758 $Z = \frac{X-m}{2}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(X \geq 38) = 0.1587$에서

$P\left(Z \geq \frac{38-m}{2}\right) = 0.1587$ ⇨ ❶

$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{38-m}{2}\right) = 0.1587$

$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{38-m}{2}\right) = 0.1587$

$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{38-m}{2}\right) = 0.3413$ ⇨ ❷

이때 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$이므로

$\frac{38-m}{2} = 1, \quad 38-m = 2 \quad \therefore m = 36$ ⇨ ❸

답 36

채점 기준	비율
❶ X를 표준화할 수 있다.	20%
❷ $P(X \geq 38) = 0.1587$을 변형할 수 있다.	40%
❸ m의 값을 구할 수 있다.	40%

0759 $Z = \frac{X-56}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(X \leq 56-k) = 0.0062$에서

$P\left(Z \leq \frac{56-k-56}{5}\right) = 0.0062$

$P\left(Z \leq -\frac{k}{5}\right) = 0.0062$

$P(Z \leq 0) - P\left(-\frac{k}{5} \leq Z \leq 0\right) = 0.0062$

$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k}{5}\right) = 0.0062$

$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k}{5}\right) = 0.4938$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2.5) = 0.4938$이므로

$\frac{k}{5} = 2.5 \quad \therefore k = 12.5$ 답 ④

0760 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(m-k\sigma \leq X \leq m+k\sigma) = 0.9974$에서

$P\left(\frac{m-k\sigma-m}{\sigma} \leq Z \leq \frac{m+k\sigma-m}{\sigma}\right) = 0.9974$
$P(-k \leq Z \leq k) = 0.9974$
$2P(0 \leq Z \leq k) = 0.9974$
$\therefore P(0 \leq Z \leq k) = 0.4987$

이때 $P(0 \leq Z \leq 3) = 0.4987$이므로
$k = 3$ 답 3

0761 2학년 전체 학생의 국어, 수학, 영어 점수를 각각 X_A점, X_B점, X_C점이라 하면 확률변수 X_A, X_B, X_C는 각각 정규분포
$N(60, 20^2)$, $N(30, 25^2)$, $N(50, 24^2)$
을 따르므로

$Z_A = \frac{X_A-60}{20}, \ Z_B = \frac{X_B-30}{25}, \ Z_C = \frac{X_C-50}{24}$

으로 놓으면 Z_A, Z_B, Z_C는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
다른 학생들이 서연이보다 국어, 수학, 영어 점수가 낮을 확률은 각각

$P(X_A < 80) = P\left(Z_A < \frac{80-60}{20}\right) = P(Z_A < 1)$,

$P(X_B < 75) = P\left(Z_B < \frac{75-30}{25}\right) = P(Z_B < 1.8)$,

$P(X_C < 86) = P\left(Z_C < \frac{86-50}{24}\right) = P(Z_C < 1.5)$

이때 $P(Z_A < 1) < P(Z_C < 1.5) < P(Z_B < 1.8)$이므로
$P(X_A < 80) < P(X_C < 86) < P(X_B < 75)$
따라서 서연이가 상대적으로 성적이 좋은 과목부터 순서대로 나열하면 수학, 영어, 국어이다. 답 수학, 영어, 국어

0762 $Z_W = \frac{W-42}{4}, \ Z_X = \frac{X-45}{5}, \ Z_Y = \frac{Y-48}{6}$로 놓으면
Z_W, Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$\therefore a = P(W \leq 48) = P\left(Z_W \leq \frac{48-42}{4}\right) = P(Z_W \leq 1.5)$

$b = P(X \leq 54) = P\left(Z_X \leq \frac{54-45}{5}\right) = P(Z_X \leq 1.8)$

$$c=\mathrm{P}(Y\ge 39)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge \frac{39-48}{6}\right)=\mathrm{P}(Z_Y\ge -1.5)$$

이때 $\mathrm{P}(Z_W\le 1.5)=\mathrm{P}(Z_Y\ge -1.5)<\mathrm{P}(Z_X\le 1.8)$이므로

$a=c<b$ 답 ⑤

0763 학생들의 일일 TV 시청 시간을 X분이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 12^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-50}{12}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(X\ge 68)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{68-50}{12}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.43\\&=0.07\end{aligned}$$

따라서 일일 TV 시청 시간이 68분 이상인 학생은 전체의 7 %이다. 답 ①

0764 제품의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-70}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. ⇨ ❶

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X\le 64)+\mathrm{P}(X\ge 78)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{64-70}{4}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{78-70}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -1.5)+\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)+\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)+\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.43+0.5-0.48\\&=0.09\end{aligned}$$

⇨ ❷

답 0.09

채점 기준	비율
❶ 확률변수 X를 정하고 표준화할 수 있다.	40%
❷ 불량품일 확률을 구할 수 있다.	60%

0765 민주가 등교하는 데 걸리는 시간을 X시간이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(45,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-45}{10}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

학교에 8시 20분 이내에 도착하면, 즉 $X\le 27$이면 지각하지 않으므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 27)&=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{27-45}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -1.8)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.8)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.8)\\&=0.5-0.4641\\&=0.0359\end{aligned}$$

답 0.0359

0766 사과의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(240,\ 15^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-240}{15}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(210\le X\le 270)&=\mathrm{P}\left(\frac{210-240}{15}\le Z\le \frac{270-240}{15}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.96\end{aligned}$$

따라서 무게가 210 g 이상 270 g 이하인 사과의 개수는

$0.96\times 1000=960$ 답 ⑤

0767 학생들의 국어 시험 성적을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(72,\ 8^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-72}{8}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(X\ge 84)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{84-72}{8}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.43\\&=0.07\end{aligned}$$

따라서 국어 성적이 84점 이상인 학생 수는

$0.07\times 400=28$ 답 ③

0768 사원들의 수축기 혈압을 X mmHg이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(125,\ 20^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-125}{20}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(X\ge 175)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{175-125}{20}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 2.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)\\&=0.5-0.49\\&=0.01\end{aligned}$$

따라서 재검진 대상인 사원 수는

$0.01\times 300=3$ 답 3

0769 응시자들의 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(72,\ 15^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-72}{15}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

합격자의 최저 점수를 a점이라 하면

$$\mathrm{P}(X\ge a)=\frac{45}{150}=0.3$$

$$\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{a-72}{15}\right)=0.3$$

$$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-72}{15}\right)=0.3$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-72}{15}\right)=0.3$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-72}{15}\right)=0.2$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.52)=0.2$이므로

$\frac{a-72}{15}=0.52,\qquad a-72=7.8$

$\therefore\ a=79.8$

따라서 합격자의 최저 점수는 79.8점이다. 답 ②

0770 응시자들의 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(100,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-100}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
상위 10 %에 속하는 응시자의 최저 점수를 a점이라 하면

$$P(X\geq a)=\frac{10}{100}=0.1$$
$$P\left(Z\geq\frac{a-100}{5}\right)=0.1$$
$$P(Z\geq0)-P\left(0\leq Z\leq\frac{a-100}{5}\right)=0.1$$
$$0.5-P\left(0\leq Z\leq\frac{a-100}{5}\right)=0.1$$
$$\therefore\ P\left(0\leq Z\leq\frac{a-100}{5}\right)=0.4$$

이때 $P(0\leq Z\leq1.3)=0.4$이므로

$$\frac{a-100}{5}=1.3,\qquad a-100=6.5$$
$$\therefore\ a=106.5$$

따라서 상위 10 %에 속하는 응시자의 최저 점수는 106.5점이다.

답 ④

0771 학생들의 키를 X cm라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(172,\ 14^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-172}{14}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
키가 작은 쪽에서 50번째인 학생의 키를 a cm라 하면

$$P(X\leq a)=\frac{50}{1000}=0.05$$
$$P\left(Z\leq\frac{a-172}{14}\right)=0.05$$
$$P\left(Z\geq\frac{172-a}{14}\right)=0.05$$
$$P(Z\geq0)-P\left(0\leq Z\leq\frac{172-a}{14}\right)=0.05$$
$$0.5-P\left(0\leq Z\leq\frac{172-a}{14}\right)=0.05$$
$$\therefore\ P\left(0\leq Z\leq\frac{172-a}{14}\right)=0.45$$

이때 $P(0\leq Z\leq1.65)=0.45$이므로

$$\frac{172-a}{14}=1.65,\qquad 172-a=23.1$$
$$\therefore\ a=148.9$$

따라서 키가 작은 쪽에서 50번째인 학생의 키는 148.9 cm이다.

답 148.9 cm

0772 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=432\cdot\frac{3}{4}=324,$$
$$V(X)=432\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=81$$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(324,\ 9^2)$을 따르므로
$Z=\frac{X-324}{9}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\therefore\ P(X\leq297)+P(X\leq333)$$
$$=P\left(Z\leq\frac{297-324}{9}\right)+P\left(Z\leq\frac{333-324}{9}\right)$$
$$=P(Z\leq-3)+P(Z\leq1)$$
$$=P(Z\geq3)+P(Z\leq1)$$
$$=P(Z\geq0)-P(0\leq Z\leq3)+P(Z\leq0)+P(0\leq Z\leq1)$$
$$=0.5-0.4987+0.5+0.3413$$
$$=0.8426$$

답 ⑤

0773 확률변수 X에 대하여

$$E(X)=150\cdot\frac{2}{5}=60,\ V(X)=150\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=36$$

이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(60,\ 6^2)$을 따른다.
$\therefore\ m=60,\ \sigma=6$ ⇨ ❶
또 $Z=\frac{X-60}{6}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$P(X\leq72)=P\left(Z\leq\frac{72-60}{6}\right)$$
$$=P(Z\leq2)$$

따라서 $a=2$이므로 구하는 값은 ⇨ ❷
$m+\sigma+a=60+6+2=68$ ⇨ ❸

답 68

채점 기준	비율
❶ $m,\ \sigma$의 값을 구할 수 있다.	60%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $m+\sigma+a$의 값을 구할 수 있다.	10%

0774 확률변수 X는 이항분포 $B\left(450,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$E(X)=450\cdot\frac{1}{3}=150,\ V(X)=450\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=100$$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(150,\ 10^2)$을 따르므로
$Z=\frac{X-150}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\therefore\ P(X\geq165)=P\left(Z\geq\frac{165-150}{10}\right)$$
$$=P(Z\geq1.5)$$
$$=P(Z\geq0)-P(0\leq Z\leq1.5)$$
$$=0.5-0.4332$$
$$=0.0668$$

답 ②

타쎈 특강 이항분포를 따르는 확률변수의 확률질량함수

확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따를 때 X의 확률질량함수는
$P(X=x)={}_{n}C_{x}p^{x}(1-p)^{n-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

0775 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(900,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$E(X)=900\cdot\frac{1}{2}=450,\ V(X)=900\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=225$$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(450,\ 15^2)$을 따르므로
$Z=\frac{X-450}{15}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore$ $\mathrm{P}(435 \le X \le 480)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{435-450}{15} \le Z \le \frac{480-450}{15}\right)$
$=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 2)$
$=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$
$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$
$=0.34+0.48$
$=0.82$ 답 0.82

0776 치료되는 환자의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(2500,\ 0.8)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=2500\times0.8=2000,\ \mathrm{V}(X)=2500\times0.8\times0.2=400$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(2000,\ 20^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-2000}{20}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore$ $\mathrm{P}(X \ge 2020)=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{2020-2000}{20}\right)$
$=\mathrm{P}(Z \ge 1)$
$=\mathrm{P}(Z \ge 0)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$
$=0.5-0.34$
$=0.16$ 답 ①

0777 예약을 취소하는 손님의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(400,\ 0.2)$를 따르므로 ⇨ ❶

$\mathrm{E}(X)=400\times0.2=80,\ \mathrm{V}(X)=400\times0.2\times0.8=64$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 8^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-80}{8}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. ⇨ ❷

비행기를 타러 온 모든 손님이 비행기를 타려면 예약을 취소하는 손님이 $400-340=60$(명) 이상이어야 하므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X \ge 60)=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{60-80}{8}\right)$
$=\mathrm{P}(Z \ge -2.5)$
$=\mathrm{P}(-2.5 \le Z \le 0)+\mathrm{P}(Z \ge 0)$
$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.5)+0.5$
$=0.9938$ ⇨ ❸

답 0.9938

채점 기준	비율
❶ 확률변수 X를 정하고 X가 따르는 이항분포를 구할 수 있다.	30%
❷ X를 표준화할 수 있다.	30%
❸ 확률을 구할 수 있다.	40%

0778 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(1200,\ \frac{3}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=1200\cdot\frac{3}{4}=900,\ \mathrm{V}(X)=1200\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=225$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(900,\ 15^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-900}{15}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X \le a)=0.35$에서

$\mathrm{P}\left(Z \le \frac{a-900}{15}\right)=0.35,\qquad \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{900-a}{15}\right)=0.35$

$\mathrm{P}(Z \ge 0)-\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{900-a}{15}\right)=0.35$

$0.5-\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{900-a}{15}\right)=0.35$

$\therefore$ $\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{900-a}{15}\right)=0.15$

이때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.38)=0.15$이므로

$\frac{900-a}{15}=0.38,\qquad 900-a=5.7$

$\therefore$ $a=894.3$ 답 894.3

0779 성공한 자유투의 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(600,\ \frac{3}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=600\cdot\frac{3}{5}=360,\ \mathrm{V}(X)=600\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=144$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(360,\ 12^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-360}{12}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X \ge k)=0.98$에서

$\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{k-360}{12}\right)=0.98$

$\mathrm{P}\left(\frac{k-360}{12} \le Z \le 0\right)+\mathrm{P}(Z \ge 0)=0.98$

$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{360-k}{12}\right)+0.5=0.98$

$\therefore$ $\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{360-k}{12}\right)=0.48$

이때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)=0.48$이므로

$\frac{360-k}{12}=2,\qquad 360-k=24$

$\therefore$ $k=336$ 답 ④

0780 X는 이항분포 $\mathrm{B}(7600,\ 0.95)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=7600\times0.95=7220,$
$\mathrm{V}(X)=7600\times0.95\times0.05=361$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(7220,\ 19^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-7220}{19}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(|X-7220| \ge k)=0.32$에서

$\mathrm{P}(X-7220 \le -k)+\mathrm{P}(X-7220 \ge k)=0.32$
$\mathrm{P}(X \le -k+7220)+\mathrm{P}(X \ge k+7220)=0.32$

$\mathrm{P}\left(Z \le \frac{-k+7220-7220}{19}\right)+\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{k+7220-7220}{19}\right)=0.32$

$\mathrm{P}\left(Z \le -\frac{k}{19}\right)+\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{k}{19}\right)=0.32$

$2\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{k}{19}\right)=0.32$

$\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{k}{19}\right)=0.16$

$\mathrm{P}(Z \ge 0)-\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{k}{19}\right)=0.16$

$0.5-\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{k}{19}\right)=0.16$

$\therefore$ $\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{k}{19}\right)=0.34$

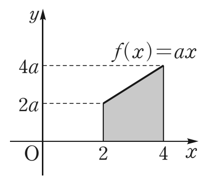
이때 $P(0\le Z\le 1)=0.34$이므로

$$\frac{k}{19}=1 \qquad \therefore k=19$$

답 ③

0781 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$\frac{1}{2}\cdot(2a+4a)\cdot 2=1$$

$$6a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{6}$$

답 ②

0782 전략 확률변수 X가 정규분포를 따르고 $P(X\le a)>0.5$이므로 $P(X\le a)=P(X\le m)+P(m\le X\le a)$임을 이용한다.

풀이 $P(X\le a)=0.9332$에서

$P(X\le m)+P(m\le X\le a)=0.9332$

$0.5+P(m\le X\le a)=0.9332$

$\therefore P(m\le X\le a)=0.4332$

$\therefore P(X\ge a)=P(X\ge m)-P(m\le X\le a)$

$=0.5-0.4332$

$=0.0668$

이때 $P(X\ge m+1.5\sigma)=0.0668$이므로

$a=m+1.5\sigma=35+1.5\times 8=47$ 답 47

다른풀이 $m=35$, $\sigma=8$이므로 $P(X\ge m+1.5\sigma)=0.0668$에서

$P(X\ge 35+1.5\times 8)=0.0668$

$\therefore P(X\ge 47)=0.0668$

$P(X\le a)=0.9332$이므로

$P(X\ge a)=1-0.9332=0.0668$

$\therefore a=47$

0783 전략 확률변수 Z가 표준정규분포를 따르고 $P(Z\le 1)>0.5$이므로 $P(Z\le 1)=0.5+P(0\le Z\le 1)$임을 이용한다.

풀이 $P(Z\le 1)=0.8413$에서

$P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 1)=0.8413$

$0.5+P(0\le Z\le 1)=0.8413$

$\therefore P(0\le Z\le 1)=0.3413$

따라서 구하는 확률은

$P(|Z|\ge 1)=P(Z\le -1)+P(Z\ge 1)$

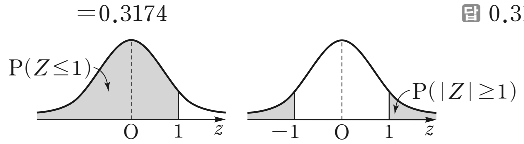
$=2P(Z\ge 1)$

$=2\{P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1)\}$

$=2(0.5-0.3413)$

$=0.3174$ 답 0.3174

다른풀이



위의 그림에서 구하는 확률은

$P(|Z|\ge 1)=2\{1-P(Z\le 1)\}=2(1-0.8413)=0.3174$

0784 전략 맞히는 문제의 개수를 확률변수 X라 하고, X가 따르는 이항분포를 구한다.

풀이 맞히는 문제의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로 ⇨ ❶

$$E(X)=100\cdot\frac{1}{5}=20,\ V(X)=100\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=16$$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(20, 4^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-20}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다. ⇨ ❷

$\therefore P(X\ge 30)=P\left(Z\ge\frac{30-20}{4}\right)$

$=P(Z\ge 2.5)$

$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2.5)$

$=0.5-0.4938$

$=0.0062$ ⇨ ❸

답 0.0062

채점 기준	비율
❶ 확률변수 X를 정하고 X가 따르는 이항분포를 구할 수 있다.	30%
❷ X를 표준화할 수 있다.	30%
❸ 확률을 구할 수 있다.	40%

0785 전략 먼저 확률밀도함수의 성질을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=0$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

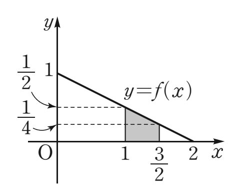
$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot a=1 \qquad \therefore a=1$$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(2, 0)$, $(0, 1)$을 지나는 직선이므로

$$y=\frac{1-0}{0-2}(x-2), \qquad y=-\frac{1}{2}x+1$$

$$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}x+1$$

따라서 $P\left(1\le X\le\frac{3}{2}\right)$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$$P\left(1\le X\le\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}-1\right)=\frac{3}{16}$$

답 ④

0786 전략 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고, m의 값이 일정할 때 σ의 값이 클수록 가운데 부분의 높이가 낮아진다.

풀이 ④ B학교의 정규분포 곡선이 C학교의 정규분포 곡선보다 가운데 부분의 높이가 더 높으므로 B학교 학생들의 성적이 C학교 학생들의 성적보다 더 고르다. 답 ④

0787 전략 확률변수 X, Y를 각각 표준화한 후 주어진 조건을 만족시키는 k의 값을 구한다.

풀이 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(45, 5^2)$, $N(50, 10^2)$을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-45}{5},\ Z_Y=\frac{Y-50}{10}$$

으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
$\mathrm{P}(X\le 41)=\mathrm{P}(Y\ge k)$에서

$$\mathrm{P}\left(Z_X\le\frac{41-45}{5}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{k-50}{10}\right)$$

$$\mathrm{P}(Z_X\le -0.8)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{k-50}{10}\right)$$

$$\mathrm{P}(Z_X\ge 0.8)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{k-50}{10}\right)$$

따라서 $\frac{k-50}{10}=0.8$이므로

$k-50=8\qquad\therefore\ k=58$ 답 ④

0788 전략 세 반 학생들의 키를 확률변수로 놓고 각각 표준화한다.

풀이 1반, 2반, 3반 학생들의 키를 각각 X_1 cm, X_2 cm, X_3 cm 라 하면 확률변수 X_1, X_2, X_3은 각각 정규분포 $\mathrm{N}(169,\ 8^2)$, $\mathrm{N}(171,\ 4^2)$, $\mathrm{N}(172,\ 5^2)$을 따르므로

$$Z_1=\frac{X_1-169}{8},\ Z_2=\frac{X_2-171}{4},\ Z_3=\frac{X_3-172}{5}$$

로 놓으면 Z_1, Z_2, Z_3은 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
⇨ ❶

각 반의 학생의 키가 165 cm보다 작을 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X_1<165)=\mathrm{P}\left(Z_1<\frac{165-169}{8}\right)=\mathrm{P}(Z_1<-0.5),$$

$$\mathrm{P}(X_2<165)=\mathrm{P}\left(Z_2<\frac{165-171}{4}\right)=\mathrm{P}(Z_2<-1.5),$$

$$\mathrm{P}(X_3<165)=\mathrm{P}\left(Z_3<\frac{165-172}{5}\right)=\mathrm{P}(Z_3<-1.4)$$ ⇨ ❷

이때 $\mathrm{P}(Z_2<-1.5)<\mathrm{P}(Z_3<-1.4)<\mathrm{P}(Z_1<-0.5)$이므로

$$\mathrm{P}(X_2<165)<\mathrm{P}(X_3<165)<\mathrm{P}(X_1<165)$$

따라서 자기 반에서 상대적으로 키가 큰 학생부터 순서대로 나열하면 A, C, B이다. ⇨ ❸

답 A, C, B

채점 기준	비율
❶ 세 반 학생들의 키를 각각 표준화할 수 있다.	30%
❷ 각 반 학생들의 키가 165 cm보다 작을 확률을 Z에 대한 확률로 나타낼 수 있다.	30%
❸ 상대적으로 키가 큰 학생부터 나열할 수 있다.	40%

0789 전략 먼저 건전지의 수명이 86시간 이상일 확률을 구한다.

풀이 건전지의 수명을 X시간이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-80}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(X\ge 86)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{86-80}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.43\\&=0.07\end{aligned}$$

따라서 수명이 86시간 이상인 건전지의 개수는

$0.07\times 500=35$ 답 ③

0790 전략 400명 중 100등 안에 들 확률은 $\frac{100}{400}$임을 이용한다.

풀이 학생들의 수학 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(64,\ 15^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-64}{15}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
100등인 학생의 수학 점수를 a점이라 하면

$$\mathrm{P}(X\ge a)=\frac{100}{400}=0.25$$

$$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-64}{15}\right)=0.25$$

$$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-64}{15}\right)=0.25$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-64}{15}\right)=0.25$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-64}{15}\right)=0.25$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.68)=0.25$이므로

$\frac{a-64}{15}=0.68,\qquad a-64=10.2$

$\therefore\ a=74.2$

따라서 100등인 학생의 수학 점수는 74.2점이다. 답 ⑤

0791 전략 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르는 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ np(1-p))$를 따른다.

풀이 응답한 조사자의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(4800,\ 0.25)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=4800\times 0.25=1200,$
$\mathrm{V}(X)=4800\times 0.25\times 0.75=900$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(1200,\ 30^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-1200}{30}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
$\mathrm{P}(X\ge a)=0.99$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-1200}{30}\right)=0.99$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{a-1200}{30}\le Z\le 0\right)+\mathrm{P}(Z\ge 0)=0.99$$

$$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{1200-a}{30}\right)+0.5=0.99$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{1200-a}{30}\right)=0.49$$

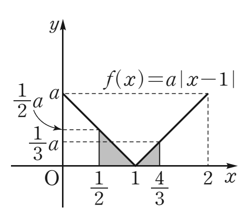
이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)=0.49$이므로

$\frac{1200-a}{30}=2.5,\qquad 1200-a=75$

$\therefore\ a=1125$ 답 1125

0792 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후 a의 값을 구한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로



$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot a+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot a=1$$

$\therefore\ a=1$

이때 $P\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{4}{3}\right)$는 앞의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$P\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{4}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}-1\right)\cdot\frac{1}{3}$$
$$=\frac{13}{72}$$

답 ②

0793 전략 153을 m, σ를 사용하여 나타낸 후, 주어진 확률밀도함수의 그래프를 이용한다.

풀이 $m=165$, $\sigma=4$일 때

$153=165-3\cdot 4=m-3\sigma$

또 주어진 그래프에서

$P(m-3\sigma \le X \le m+3\sigma)=0.9974$

$2P(m \le X \le m+3\sigma)=0.9974$

$\therefore P(m \le X \le m+3\sigma)=0.4987$

$\therefore P(X \ge 153)=P(X \ge m-3\sigma)$
$=P(m-3\sigma \le X \le m)+P(X \ge m)$
$=P(m \le X \le m+3\sigma)+P(X \ge m)$
$=0.4987+0.5$
$=0.9987$

따라서 키가 153 cm 이상인 학생은 전체의 99.87 %이다. 답 ⑤

0794 전략 먼저 합격할 확률, 즉 점수가 75점 이상일 확률을 구한다.

풀이 응시자들의 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(65,\ 5^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-65}{5}$로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore P(X \ge 75)=P\left(Z_X \ge \frac{75-65}{5}\right)$
$=P(Z_X \ge 2)$
$=P(Z_X \ge 0)-P(0 \le Z_X \le 2)$
$=0.5-0.48$
$=0.02$ ⇨ ❶

따라서 2500명의 응시자 중 합격자의 수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $B(2500,\ 0.02)$를 따르므로

$E(Y)=2500\times 0.02=50$,

$V(Y)=2500\times 0.02\times 0.98=49$

따라서 Y는 근사적으로 정규분포 $N(50,\ 7^2)$을 따르므로 $Z=\frac{Y-50}{7}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다. ⇨ ❷

$\therefore P(Y \ge 57)=P\left(Z \ge \frac{57-50}{7}\right)$
$=P(Z \ge 1)$
$=P(Z \ge 0)-P(0 \le Z \le 1)$
$=0.5-0.34$
$=0.16$ ⇨ ❸

답 0.16

채점 기준	비율
❶ 응시자가 합격할 확률을 구할 수 있다.	30%
❷ 합격자의 수가 따르는 정규분포를 구하고, 이를 표준화할 수 있다.	40%
❸ 합격자가 57명 이상일 확률을 구할 수 있다.	30%

Ⅲ. 통계

09 통계적 추정

0795 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

0796 4장의 카드에서 2장을 뽑는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_2=4^2=16$ 답 16

0797 모집단 $\{1,\ 2,\ 3\}$에서 크기가 2인 표본을 복원추출하는 방법의 수는 ${}_3\Pi_2=3^2=9$

$\overline{X}=2$인 경우는

$(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$의 3가지

이므로 $P(\overline{X}=2)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0798 (1) $m=1\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{4}+5\cdot\frac{1}{4}+7\cdot\frac{1}{4}=4$

$\sigma^2=1^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{1}{4}+5^2\cdot\frac{1}{4}+7^2\cdot\frac{1}{4}-4^2$
$=21-16=5$
$\therefore \sigma=\sqrt{5}$

(2) $\overline{X}=\frac{1}{2}(1+5)=3$

$S^2=\frac{1}{2-1}\{(1-3)^2+(5-3)^2\}=8$
$\therefore S=2\sqrt{2}$

답 (1) $m=4$, $\sigma=\sqrt{5}$ (2) $\overline{X}=3$, $S=2\sqrt{2}$

0799 (1) 표본이 $(0,\ 0)$일 때, $\overline{X}=\frac{0+0}{2}=0$

표본이 $(0,\ 2),\ (2,\ 0)$일 때, $\overline{X}=\frac{0+2}{2}=1$

표본이 $(0,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 0)$일 때,
$\overline{X}=\frac{0+4}{2}=\frac{2+2}{2}=2$

표본이 $(2,\ 4),\ (4,\ 2)$일 때, $\overline{X}=\frac{2+4}{2}=3$

표본이 $(4,\ 4)$일 때, $\overline{X}=\frac{4+4}{2}=4$

따라서 $\overline{X}$가 가질 수 있는 값은

$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

(2)

$\overline{X}$	0	1	2	3	4	합계
$P(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(3) $E(\overline{X})=0\cdot\frac{1}{9}+1\cdot\frac{2}{9}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{2}{9}+4\cdot\frac{1}{9}=2$

$V(\overline{X})=0^2\cdot\frac{1}{9}+1^2\cdot\frac{2}{9}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{2}{9}+4^2\cdot\frac{1}{9}-2^2=\frac{4}{3}$

$\therefore \sigma(\overline{X})=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

답 풀이 참조

0800 $E(\overline{X})=80$, $V(\overline{X})=\frac{6^2}{3}=12$, $\sigma(\overline{X})=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

답 $E(\overline{X})=80$, $V(\overline{X})=12$, $\sigma(\overline{X})=2\sqrt{3}$

0801 $E(\overline{X})=450$, $V(\overline{X})=\dfrac{15^2}{25}=9$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{15}{\sqrt{25}}=3$

답 $E(\overline{X})=450$, $V(\overline{X})=9$, $\sigma(\overline{X})=3$

0802 $E(\overline{X})=120$, $V(\overline{X})=\dfrac{8^2}{100}=\dfrac{16}{25}$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{8}{\sqrt{100}}=\dfrac{4}{5}$

답 $E(\overline{X})=120$, $V(\overline{X})=\dfrac{16}{25}$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{4}{5}$

0803 (1) $E(\overline{X})=300$, $V(\overline{X})=\dfrac{16^2}{64}=4$

(2) $N(300,\ 2^2)$

(3) $Z=\dfrac{\overline{X}-300}{2}$

(4) $P(\overline{X}\le 302)=P\left(Z\le\dfrac{302-300}{2}\right)$

$=P(Z\le 1)$

$=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 1)$

$=0.5+0.3413$

$=0.8413$

답 풀이 참조

0804 $E(\overline{X})=250$, $V(\overline{X})=\dfrac{40^2}{100}=16$이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $N(250,\ 4^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-250}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$P(\overline{X}\ge 260)=P\left(Z\ge\dfrac{260-250}{4}\right)$

$=P(Z\ge 2.5)$

$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2.5)$

$=0.5-0.4938$

$=0.0062$

답 0.0062

0805 $P(242\le\overline{X}\le 244)$

$=P\left(\dfrac{242-250}{4}\le Z\le\dfrac{244-250}{4}\right)$

$=P(-2\le Z\le -1.5)$

$=P(1.5\le Z\le 2)$

$=P(0\le Z\le 2)-P(0\le Z\le 1.5)$

$=0.4772-0.4332$

$=0.044$

답 0.044

0806 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$60-1.96\times\dfrac{8}{\sqrt{16}}\le m\le 60+1.96\times\dfrac{8}{\sqrt{16}}$

$\therefore 56.08\le m\le 63.92$

답 $56.08\le m\le 63.92$

0807 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$65-1.96\times\dfrac{8}{\sqrt{4}}\le m\le 65+1.96\times\dfrac{8}{\sqrt{4}}$

$\therefore 57.16\le m\le 72.84$

답 $57.16\le m\le 72.84$

0808 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$240-2.58\times\dfrac{14}{\sqrt{49}}\le m\le 240+2.58\times\dfrac{14}{\sqrt{49}}$

$\therefore 234.84\le m\le 245.16$

답 $234.84\le m\le 245.16$

0809 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$200-2.58\times\dfrac{14}{\sqrt{196}}\le m\le 200+2.58\times\dfrac{14}{\sqrt{196}}$

$\therefore 197.42\le m\le 202.58$

답 $197.42\le m\le 202.58$

0810 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$90-1.96\times\dfrac{3}{\sqrt{144}}\le m\le 90+1.96\times\dfrac{3}{\sqrt{144}}$

$\therefore 89.51\le m\le 90.49$

답 $89.51\le m\le 90.49$

0811 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$90-2.58\times\dfrac{3}{\sqrt{144}}\le m\le 90+2.58\times\dfrac{3}{\sqrt{144}}$

$\therefore 89.355\le m\le 90.645$

답 $89.355\le m\le 90.645$

0812 모평균의 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times 1.96\times\dfrac{4}{\sqrt{16}}=3.92$

답 3.92

0813 모평균의 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times 2.58\times\dfrac{4}{\sqrt{16}}=5.16$

답 5.16

0814 (1) $p=\dfrac{900}{1500}=\dfrac{3}{5}$

(2) $\hat{p}=\dfrac{21}{30}=\dfrac{7}{10}$

답 (1) $\dfrac{3}{5}$ (2) $\dfrac{7}{10}$

0815 (1) $E(\hat{p})=\dfrac{3}{4}$

(2) $V(\hat{p})=\dfrac{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}}{75}=\dfrac{1}{400}$

(3) $\sigma(\hat{p})=\sqrt{\dfrac{1}{400}}=\dfrac{1}{20}$

답 (1) $\dfrac{3}{4}$ (2) $\dfrac{1}{400}$ (3) $\dfrac{1}{20}$

0816 (1) $E(\hat{p})=\dfrac{1}{3}$, $V(\hat{p})=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{200}=\dfrac{1}{900}$

(2) $N\left(\dfrac{1}{3},\ \left(\dfrac{1}{30}\right)^2\right)$

(3) $Z=\dfrac{\hat{p}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{30}}$

(4) $P\left(\hat{p}\ge\dfrac{2}{5}\right)=P\left(Z\ge\dfrac{\frac{2}{5}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{30}}\right)$

$=P(Z\ge 2)$

$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.4772$

$=0.0228$

답 풀이 참조

0817 $\mathrm{E}(\hat{p})=\frac{1}{2}$, $\mathrm{V}(\hat{p})=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{100}=\frac{1}{400}$ 이므로 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{20}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\hat{p}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{20}}$로 놓으면 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\hat{p}\le\frac{23}{40}\right)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{\frac{23}{40}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{20}}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)\\&=0.5+0.4332\\&=0.9332\end{aligned}$$

답 0.9332

0818 $\mathrm{P}\left(\frac{19}{40}\le\hat{p}\le\frac{11}{20}\right)$

$$\begin{aligned}&=\mathrm{P}\left(\frac{\frac{19}{40}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{20}}\le Z\le\frac{\frac{11}{20}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{20}}\right)\\&=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le1)\\&=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=0.1915+0.3413\\&=0.5328\end{aligned}$$

답 0.5328

0819 모비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.5-1.96\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{400}}\le p\le0.5+1.96\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{400}}$

$0.5-0.049\le p\le0.5+0.049$

$\therefore\ 0.451\le p\le0.549$

답 $0.451\le p\le0.549$

0820 모비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.2-1.96\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{100}}\le p\le0.2+1.96\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{100}}$

$0.2-0.0784\le p\le0.2+0.0784$

$\therefore\ 0.1216\le p\le0.2784$

답 $0.1216\le p\le0.2784$

0821 모비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.1-1.96\sqrt{\frac{0.1(1-0.1)}{1600}}\le p\le0.1+1.96\sqrt{\frac{0.1(1-0.1)}{1600}}$

$0.1-0.0147\le p\le0.1+0.0147$

$\therefore\ 0.0853\le p\le0.1147$

답 $0.0853\le p\le0.1147$

0822 모비율 p의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$0.25-2.58\sqrt{\frac{0.25(1-0.25)}{300}}\le p\le0.25+2.58\sqrt{\frac{0.25(1-0.25)}{300}}$

$0.25-0.0645\le p\le0.25+0.0645$

$\therefore\ 0.1855\le p\le0.3145$

답 $0.1855\le p\le0.3145$

0823 모비율 p의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$0.7-2.58\sqrt{\frac{0.7(1-0.7)}{2100}}\le p\le0.7+2.58\sqrt{\frac{0.7(1-0.7)}{2100}}$

$0.7-0.0258\le p\le0.7+0.0258$

$\therefore\ 0.6742\le p\le0.7258$

답 $0.6742\le p\le0.7258$

0824 모비율 p의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$0.75-2.58\sqrt{\frac{0.75(1-0.75)}{675}}\le p\le0.75+2.58\sqrt{\frac{0.75(1-0.75)}{675}}$

$0.75-0.043\le p\le0.75+0.043$

$\therefore\ 0.707\le p\le0.793$

답 $0.707\le p\le0.793$

0825 (1) 600명 중 보수공사를 찬성하는 주민의 비율, 즉 표본비율 $\hat{p}$은

$\hat{p}=\frac{\boxed{360}}{600}=\boxed{0.6}$

표본의 크기 $\boxed{600}$은 충분히 크므로 모비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.6-1.96\sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{600}}\le p\le0.6+1.96\sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{600}}$

$0.6-0.0392\le p\le0.6+0.0392$

$\therefore\ \boxed{0.5608}\le p\le\boxed{0.6392}$

(2) $0.6-2.58\sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{600}}\le p\le0.6+2.58\sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{600}}$

$0.6-0.0516\le p\le0.6+0.0516$

$\therefore\ 0.5484\le p\le0.6516$

답 (1) 360, 0.6, 600, 0.5608, 0.6392
(2) $0.5484\le p\le0.6516$

0826 모평균이 5, 모분산이 $3^2=9$, 표본의 크기가 6이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=5,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2=\frac{3}{2}+5^2=\frac{53}{2}$

답 ①

0827 모평균이 70, 모표준편차가 12, 표본의 크기가 16이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=70,\ \sigma(\overline{X})=\frac{12}{\sqrt{16}}=3$

$\therefore\ \mathrm{E}(\overline{X})+\sigma(\overline{X})=73$

답 73

0828 모표준편차가 7, 표본의 크기가 n이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{7}{\sqrt{n}}$

$\sigma(\overline{X})=1.4$이므로 $\frac{7}{\sqrt{n}}=1.4$

$\sqrt{n}=5\qquad\therefore\ n=25$

답 ④

0829 모표준편차가 6, 표본의 크기가 n이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{6}{\sqrt{n}}$

$\sigma(\overline{X})\le0.3$이므로 $\frac{6}{\sqrt{n}}\le0.3$

$\sqrt{n}\ge20\qquad\therefore\ n\ge400$

따라서 n의 최솟값은 400이다.

답 400

0830 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{5}+a+\frac{2}{5}+\frac{1}{10}=1 \qquad \therefore a=\frac{3}{10}$

따라서 모집단의 평균은

$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{5}+1\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{2}{5}+3\cdot\frac{1}{10}=\frac{7}{5}$

$\therefore \mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=\frac{7}{5}$ 답 $\frac{7}{5}$

0831 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=2\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{6}+8\cdot\frac{1}{6}+10\cdot\frac{1}{3}=6$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=2^2\cdot\frac{1}{3}+4^2\cdot\frac{1}{6}+8^2\cdot\frac{1}{6}+10^2\cdot\frac{1}{3}-6^2$

$=48-36=12$ ⇨ ❶

표본의 크기가 n일 때 $\mathrm{V}(\overline{X})=3$이므로

$\frac{12}{n}=3 \qquad \therefore n=4$ ⇨ ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ $\mathrm{V}(X)$를 구할 수 있다.	60%
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40%

0832 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{1}{5}=\frac{8}{5}$

$\mathrm{V}(X)=1^2\cdot\frac{3}{5}+2^2\cdot\frac{1}{5}+3^2\cdot\frac{1}{5}-\left(\frac{8}{5}\right)^2$

$=\frac{16}{5}-\frac{64}{25}=\frac{16}{25}$

이때 표본의 크기가 2이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{8}{5},\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{16}{25}}{2}=\frac{8}{25}$

답 $\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{8}{5},\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{8}{25}$

0833 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}$

$=\frac{7}{2}$

$\mathrm{V}(X)=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{1}{6}+5^2\cdot\frac{1}{6}$

$+6^2\cdot\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2$

$=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{35}{12}$

이때 표본의 크기가 2이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{35}{12}}{2}=\frac{35}{24}$ 답 ①

0834 상자에서 임의로 1장의 카드를 꺼낼 때, 카드에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	7	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

⇨ ❶

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{4}+5\cdot\frac{1}{4}+7\cdot\frac{1}{4}=4$

$\mathrm{V}(X)=1^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{1}{4}+5^2\cdot\frac{1}{4}+7^2\cdot\frac{1}{4}-4^2$

$=21-16=5$ ⇨ ❷

표본의 크기가 n일 때 $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{4}$이므로

$\frac{5}{n}=\frac{1}{4} \qquad \therefore n=20$ ⇨ ❸

답 20

채점 기준	비율
❶ X의 확률분포를 구할 수 있다.	20%
❷ $\mathrm{V}(X)$를 구할 수 있다.	40%
❸ n의 값을 구할 수 있다.	40%

0835 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ \sigma^2)$을 따르고 표본의 크기가 49이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(80,\ \frac{\sigma^2}{49}\right)$을 따른다.

이때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(a,\ 4)$를 따르므로

$80=a,\ \frac{\sigma^2}{49}=4$

$\therefore a=80,\ \sigma=14\ (\because \sigma>0)$ 답 ②

0836 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(240,\ 60)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(240,\ \frac{60}{n}\right)$을 따른다.

이때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(240,\ 2^2)$을 따르므로

$\frac{60}{n}=4 \qquad \therefore n=15$ 답 15

0837 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(72,\ 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(72,\ \frac{12^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(72,\ 3^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-72}{3}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(69\le\overline{X}\le78)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{69-72}{3}\le Z\le\frac{78-72}{3}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)$

$=0.3413+0.4772$

$=0.8185$ 답 ②

타쎈 특강 표준정규분포에서의 확률

확률변수 Z가 표준정규분포를 따를 때, $a<b$인 두 양수 a, b에 대하여
① $P(0\le Z\le a)=P(-a\le Z\le 0)$
② $P(a\le Z\le b)=P(0\le Z\le b)-P(0\le Z\le a)$
③ $P(Z\ge a)=0.5-P(0\le Z\le a)$
④ $P(Z\le a)=0.5+P(0\le Z\le a)$
⑤ $P(-a\le Z\le b)=P(-a\le Z\le 0)+P(0\le Z\le b)$
$=P(0\le Z\le a)+P(0\le Z\le b)$

0838 모집단이 정규분포 $N(45,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(45,\ \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $N(45,\ 2^2)$을 따른다.
$Z=\frac{\overline{X}-45}{2}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\le 42)&=P\left(Z\le\frac{42-45}{2}\right)\\&=P(Z\le -1.5)\\&=P(Z\ge 1.5)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.43\\&=0.07\end{aligned}$$

답 0.07

0839 모집단이 정규분포 $N(m,\ 6^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \frac{6^2}{16}\right)$, 즉 $N\left(m,\ \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)$을 따른다. ⇨ ❶
$Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{3}{2}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&P(|m-\overline{X}|\le 1.5)\\&=P(m-1.5\le\overline{X}\le m+1.5)\\&=P\left(\frac{m-1.5-m}{\frac{3}{2}}\le Z\le\frac{m+1.5-m}{\frac{3}{2}}\right)\\&=P(-1\le Z\le 1)\\&=2P(0\le Z\le 1)\\&=2\times 0.34\\&=0.68\end{aligned}$$

⇨ ❷

답 0.68

채점 기준	비율
❶ $\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구할 수 있다.	40%
❷ $P(\lvert m-\overline{X}\rvert\le 1.5)$를 구할 수 있다.	60%

0840 모집단이 정규분포 $N(60,\ 8^2)$을 따르고 표본의 크기가 256이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(60,\ \frac{8^2}{256}\right)$, 즉 $N\left(60,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.
$Z=\frac{\overline{X}-60}{\frac{1}{2}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로
$P(\overline{X}\ge k)\ge 0.12$에서

$$P\left(Z\ge\frac{k-60}{\frac{1}{2}}\right)\ge 0.12$$
$$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{k-60}{\frac{1}{2}}\right)\ge 0.12$$
$$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{k-60}{\frac{1}{2}}\right)\ge 0.12$$
$$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{k-60}{\frac{1}{2}}\right)\le 0.38$$

이때 $P(0\le Z\le 1.2)=0.38$이므로

$$\frac{k-60}{\frac{1}{2}}\le 1.2\qquad\therefore\ k\le 60.6$$

따라서 k의 최댓값은 60.6이다.

답 60.6

0841 모집단이 정규분포 $N(200,\ 24^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(200,\ \frac{24^2}{n}\right)$을 따른다.
$Z=\frac{\overline{X}-200}{\frac{24}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로
$P(\overline{X}\le 194)=0.1587$에서

$$P\left(Z\le\frac{194-200}{\frac{24}{\sqrt{n}}}\right)=0.1587$$
$$P\left(Z\le -\frac{\sqrt{n}}{4}\right)=0.1587$$
$$P\left(Z\ge\frac{\sqrt{n}}{4}\right)=0.1587$$
$$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{4}\right)=0.1587$$
$$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{4}\right)=0.1587$$
$$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{4}\right)=0.3413$$

이때 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{4}=1,\qquad\sqrt{n}=4\qquad\therefore\ n=16$$

답 ③

0842 모집단이 정규분포 $N(m,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \frac{10^2}{n}\right)$을 따른다.
$Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{10}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르고 표본평균과 모평균의 차가 5 이하일 확률이 0.98이므로

$$P(|\overline{X}-m|\le 5)=0.98$$
$$P(m-5\le\overline{X}\le m+5)=0.98$$
$$P\left(\frac{m-5-m}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{m+5-m}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right)=0.98$$
$$P\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.98$$

$2\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.98$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.49$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)=0.49$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{2}=2.5,\quad \sqrt{n}=5\quad \therefore n=25$ 답 ④

0843 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(1000,\ 60^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(1000,\ \frac{60^2}{n}\right)$을 따른다. ⇨ ❶

$Z=\dfrac{\overline{X}-1000}{\frac{60}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(967\le \overline{X}\le 1033)=0.9$에서

$\mathrm{P}\left(\dfrac{967-1000}{\frac{60}{\sqrt{n}}}\le Z\le \dfrac{1033-1000}{\frac{60}{\sqrt{n}}}\right)=0.9$

$\mathrm{P}\left(-\frac{11\sqrt{n}}{20}\le Z\le \frac{11\sqrt{n}}{20}\right)=0.9$

$2\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{11\sqrt{n}}{20}\right)=0.9$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{11\sqrt{n}}{20}\right)=0.45$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.65)=0.45$이므로

$\frac{11\sqrt{n}}{20}=1.65,\quad 11\sqrt{n}=33,\quad \sqrt{n}=3$

$\therefore n=9$ ⇨ ❷

답 9

채점 기준	비율
❶ $\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구할 수 있다.	30%
❷ n의 값을 구할 수 있다.	70%

0844 표본평균이 450, 모표준편차가 16, 표본의 크기가 400이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$450-1.96\times\frac{16}{\sqrt{400}}\le m\le 450+1.96\times\frac{16}{\sqrt{400}}$

$450-1.568\le m\le 450+1.568$

$\therefore 448.432\le m\le 451.568$

답 $448.432\le m\le 451.568$

0845 표본평균이 30, 모표준편차가 8, 표본의 크기가 4이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$30-2.58\times\frac{8}{\sqrt{4}}\le m\le 30+2.58\times\frac{8}{\sqrt{4}}$

$30-10.32\le m\le 30+10.32$

$\therefore 19.68\le m\le 40.32$

따라서 $a=19.68,\ \beta=40.32$이므로

$4a-\beta=38.4$ 답 ③

0846 표본평균이 65, 모표준편차가 15, 표본의 크기가 25이므로 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 할 때, 모평균 m의 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$65-k\cdot\frac{15}{\sqrt{25}}\le m\le 65+k\cdot\frac{15}{\sqrt{25}}$

$\therefore 65-3k\le m\le 65+3k$

이것이 $60.05\le m\le 69.95$와 같으므로

$65-3k=60.05,\ 65+3k=69.95$

$\therefore k=1.65$

이때 $\mathrm{P}(|Z|\le 1.65)=0.9$이므로

$\frac{\alpha}{100}=0.9\quad \therefore \alpha=90$ 답 90

0847 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 하면 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이것이 $29.68\le m\le 50.32$와 같으므로

$\overline{x}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=29.68,$

$\overline{x}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=50.32$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\overline{x}=40,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=4$

따라서 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$40-1.96\times 4\le m\le 40+1.96\times 4$

$40-7.84\le m\le 40+7.84$

$\therefore 32.16\le m\le 47.84$ 답 $32.16\le m\le 47.84$

0848 표본의 크기 100이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 10을 사용할 수 있고, 표본평균이 35이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$35-2.58\times\frac{10}{\sqrt{100}}\le m\le 35+2.58\times\frac{10}{\sqrt{100}}$

$35-2.58\le m\le 35+2.58$

$\therefore 32.42\le m\le 37.58$ 답 $32.42\le m\le 37.58$

0849 표본의 크기 64가 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 1을 사용할 수 있고, 표본평균이 3.8이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$3.8-2\cdot\frac{1}{\sqrt{64}}\le m\le 3.8+2\cdot\frac{1}{\sqrt{64}}$

$3.8-0.25\le m\le 3.8+0.25$

$\therefore 3.55\le m\le 4.05$

따라서 $a=3.55,\ \beta=4.05$이므로

$3a-\beta=6.6$ 답 ④

0850 표본의 크기 400이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 12를 사용할 수 있고, 표본평균이 820이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$820-1.96\times\frac{12}{\sqrt{400}}\le m\le 820+1.96\times\frac{12}{\sqrt{400}}$

$820-1.176\le m\le 820+1.176$

$\therefore 818.824\le m\le 821.176$ ⇨ ❶

따라서 신뢰구간에 속하는 정수는 819, 820, 821의 3개이다. ⇨ ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있다.	80%
❷ 신뢰구간에 속하는 정수의 개수를 구할 수 있다.	20%

0851 표본평균이 320, 모표준편차가 5이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$320-1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le 320+1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}$$

이것이 $319.3\le m\le 320.7$과 같으므로

$$320-1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}=319.3,$$

$$320+1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}=320.7$$

따라서 $1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}=0.7$이므로

$\sqrt{n}=14 \quad \therefore n=196$ 답 196

0852 표본평균이 225, 모표준편차가 24이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$225-2.58\times\frac{24}{\sqrt{n}}\le m\le 225+2.58\times\frac{24}{\sqrt{n}}$$ ⇨ ❶

이것이 $219.84\le m\le 230.16$과 같으므로

$$225-2.58\times\frac{24}{\sqrt{n}}=219.84,$$

$$225+2.58\times\frac{24}{\sqrt{n}}=230.16$$

따라서 $2.58\times\frac{24}{\sqrt{n}}=5.16$이므로

$\sqrt{n}=12 \quad \therefore n=144$ ⇨ ❷

답 144

채점 기준	비율
❶ 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있다.	50%
❷ n의 값을 구할 수 있다.	50%

0853 모표준편차가 45, 표본의 크기가 225이므로 신뢰도 99 %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$$2\times 2.58\times\frac{45}{\sqrt{225}}=15.48$$ 답 ⑤

0854 $P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하고 신뢰도 α %로 추정한 각각의 모평균의 신뢰구간의 길이를 구하면

① $2k\cdot\frac{6}{\sqrt{36}}=2k$ ② $2k\cdot\frac{12}{\sqrt{36}}=4k$

③ $2k\cdot\frac{6}{\sqrt{64}}=\frac{3}{2}k$ ④ $2k\cdot\frac{12}{\sqrt{64}}=3k$

⑤ $2k\cdot\frac{24}{\sqrt{64}}=6k$

따라서 신뢰구간의 길이가 가장 긴 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0855 모표준편차가 3, 표본의 크기가 36이므로 신뢰도 95 %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$$a=2\times 1.96\times\frac{3}{\sqrt{36}}=1.96$$ ⇨ ❶

또 신뢰도 99 %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$$b=2\times 2.58\times\frac{3}{\sqrt{36}}=2.58$$ ⇨ ❷

$\therefore b-a=2.58-1.96=0.62$ ⇨ ❸

답 0.62

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	20%

0856 모표준편차가 3, 표본의 크기가 n이므로 신뢰도 95 %로 모평균을 추정할 때 신뢰구간의 길이가 2 이하가 되려면

$2\cdot 2\cdot\frac{3}{\sqrt{n}}\le 2, \quad \sqrt{n}\ge 6$

$\therefore n\ge 36$

따라서 n의 최솟값은 36이다. 답 ②

0857 모표준편차를 σ, $P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하고 표본의 크기가 n일 때, 신뢰도 α %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ ⇨ ❶

표본의 크기가 100일 때, 신뢰도 α %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$$2k\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=\frac{\sigma}{5}k$$ ⇨ ❷

$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2\cdot\frac{\sigma}{5}k$이므로

$\sqrt{n}=5 \quad \therefore n=25$ ⇨ ❸

답 25

채점 기준	비율
❶ 표본의 크기가 n일 때 신뢰구간의 길이를 구할 수 있다.	40%
❷ 표본의 크기가 100일 때 신뢰구간의 길이를 구할 수 있다.	40%
❸ n의 값을 구할 수 있다.	20%

0858 모표준편차를 σ라 하면 표본의 크기가 144일 때, 신뢰도 95 %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$$2\cdot 2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{144}}=\frac{\sigma}{3}$$

또 표본의 크기가 n일 때, 신뢰도 99 %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$$2\cdot 3\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{6\sigma}{\sqrt{n}}$$

두 신뢰구간의 길이가 같으므로

$\frac{\sigma}{3}=\frac{6\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \sqrt{n}=18$

$\therefore n=324$ 답 ③

0859 모표준편차가 5, 표본의 크기가 64이므로 $P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 신뢰도 α %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$2\cdot k\cdot\frac{5}{\sqrt{64}}=2.35 \quad \therefore k=1.88$

이때 $P(0\le Z\le 1.88)=0.470$, 즉 $P(|Z|\le 1.88)=0.94$이므로

$\alpha=100\times 0.94=94$ 답 ②

0860 모표준편차가 30, 표본의 크기가 625이므로

$P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 신뢰도 α %로 추정한 모평균 m의 신뢰구간의 길이는

$2\cdot k\cdot\frac{30}{\sqrt{625}}=3.96 \qquad \therefore k=1.65$

이때 $P(|Z|\le 1.65)=0.9$이므로

$\alpha=100\times0.9=90$ 답 90

0861 모표준편차가 15, 표본의 크기가 900이므로 신뢰도 95 %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이 l은

$l=2\cdot2\cdot\frac{15}{\sqrt{900}}=2$

$P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 신뢰도 α %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이가 $\frac{l}{2}$이므로

$2\cdot k\cdot\frac{15}{\sqrt{900}}=1 \qquad \therefore k=1$

이때 $P(|Z|\le 1)=0.68$이므로

$\alpha=100\times0.68=68$ 답 68

0862 표본평균이 $\overline{X}$, 모표준편차가 35일 때 표본의 크기를 n이라 하면 신뢰도 95 %로 추정한 모평균 m의 신뢰구간은

$\overline{X}-2\cdot\frac{35}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+2\cdot\frac{35}{\sqrt{n}}$

$-\frac{70}{\sqrt{n}}\le m-\overline{X}\le\frac{70}{\sqrt{n}}$

$\therefore |m-\overline{X}|\le\frac{70}{\sqrt{n}}$

모평균 m과 표본평균 $\overline{X}$의 차가 10 이하이어야 하므로

$\frac{70}{\sqrt{n}}\le10, \qquad \sqrt{n}\ge7 \qquad \therefore n\ge49$

따라서 최소 49개의 표본을 조사해야 한다. 답 ②

0863 표본평균이 $\overline{X}$, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n일 때 신뢰도 99 %로 추정한 모평균 m의 신뢰구간은

$\overline{X}-3\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+3\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$-\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}\le m-\overline{X}\le\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$

$\therefore |m-\overline{X}|\le\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$ ⇨ ❶

모평균 m과 표본평균 $\overline{X}$의 차가 $\frac{1}{8}\sigma$ 이하이어야 하므로

$\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}\le\frac{\sigma}{8}, \qquad \sqrt{n}\ge24 \qquad \therefore n\ge576$

따라서 n의 최솟값은 576이다. ⇨ ❷

답 576

채점 기준	비율
❶ 모평균과 표본평균의 차의 범위를 구할 수 있다.	60%
❷ n의 최솟값을 구할 수 있다.	40%

0864 정규분포 $N(m, \sigma^2)(\sigma>0)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 신뢰도 α %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\text{단, } P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

ㄱ. 표본의 크기가 일정할 때, 신뢰도를 낮추면 k의 값이 작아지므로 신뢰구간의 길이는 작아진다.

ㄴ. n 대신 $2n$을 대입하면 신뢰구간의 길이는

$2k\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

즉 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기가 2배가 되면 신뢰구간의 길이는 $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$배가 된다.

ㄷ. 신뢰도를 높이면 k의 값이 커지고, 표본의 크기를 작게 하면 $\sqrt{n}$의 값이 작아지므로 신뢰구간의 길이는 커진다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

0865 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (k는 상수)

이므로 n 대신 $4n$을 대입하면 신뢰구간의 길이는

$2k\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}=k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

따라서 표본의 크기가 4배가 되면 신뢰구간의 길이는 $\frac{1}{2}$배가 되므로

$a=\frac{1}{2}$ 답 ②

0866 임의추출한 부품 400개 중에서 불량품의 개수의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N\left(0.1, \frac{0.1\times0.9}{400}\right)$, 즉 $N(0.1, 0.015^2)$을 따르므로 $Z=\frac{\hat{p}-0.1}{0.015}$로 놓으면 Z는 근사적으로 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P\left(\hat{p}\ge\frac{52}{400}\right)&=P(\hat{p}\ge0.13)\\&=P\left(Z\ge\frac{0.13-0.1}{0.015}\right)\\&=P(Z\ge2)\\&=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

답 ①

0867 임의추출한 이용객 100명 중에서 서비스에 만족한 이용객의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포

$N\left(0.64, \frac{0.64\times0.36}{100}\right)$, 즉 $N(0.64, 0.048^2)$을 따르므로

$Z=\frac{\hat{p}-0.64}{0.048}$로 놓으면 Z는 근사적으로 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&P(0.616\le\hat{p}\le0.664)\\&=P\left(\frac{0.616-0.64}{0.048}\le Z\le\frac{0.664-0.64}{0.048}\right)\\&=P(-0.5\le Z\le0.5)\\&=2P(0\le Z\le0.5)\\&=2\times0.19\\&=0.38\end{aligned}$$

답 ②

0868 임의추출한 학생 400명 중에서 헌혈을 한 적이 있는 학생의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.2,\ \frac{0.2\times0.8}{400}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(0.2,\ 0.02^2)$을 따르므로 $Z=\frac{\hat{p}-0.2}{0.02}$로 놓으면 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left(\frac{60}{400}\le\hat{p}\le\frac{96}{400}\right)\\&=\mathrm{P}(0.15\le\hat{p}\le0.24)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{0.15-0.2}{0.02}\le Z\le\frac{0.24-0.2}{0.02}\right)\\&=\mathrm{P}(-2.5\le Z\le2)\\&=\mathrm{P}(-2.5\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=0.4938+0.4772\\&=0.971\end{aligned}$$

답 0.971

0869 표본의 크기가 100, 표본비율이 $\hat{p}=\frac{36}{100}=0.36$이므로 지지율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.36-2\sqrt{\frac{0.36\times0.64}{100}}\le p\le0.36+2\sqrt{\frac{0.36\times0.64}{100}}$$
$$0.36-0.096\le p\le0.36+0.096$$
$$0.264\le p\le0.456$$

답 $0.264\le p\le0.456$

0870 표본비율이 $\hat{p}=0.1$이므로 표본의 크기가 n일 때 시청률 p의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$0.1-3\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}}\le p\le0.1+3\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}}$$
$$\therefore\ 0.1-\frac{0.9}{\sqrt{n}}\le p\le0.1+\frac{0.9}{\sqrt{n}}$$ ⇨ ❶

이것이 $0.07\le p\le0.13$과 같으므로

$$0.1-\frac{0.9}{\sqrt{n}}=0.07,\ 0.1+\frac{0.9}{\sqrt{n}}=0.13$$
$$\sqrt{n}=30\qquad\therefore\ n=900$$ ⇨ ❷

답 900

채점 기준	비율
❶ 시청률의 신뢰구간을 구할 수 있다.	60%
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40%

0871 표본비율이 $\hat{p}=\frac{40}{50}=0.8$이므로 표본의 크기를 n이라 하면

$$2\cdot2\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}\le0.08$$
$$\sqrt{n}\ge20\qquad\therefore\ n\ge400$$

따라서 최소 400개의 씨앗을 심어야 한다.

답 ④

0872 전략 모평균과 표본평균 $\overline{X}$의 평균이 같음을 이용한다.

풀이 모평균이 15이므로
$$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\overline{X})=15$$
$$\therefore\ \mathrm{E}(2\overline{X}+3)=2\mathrm{E}(\overline{X})+3=2\cdot15+3=33$$

답 33

0873 전략 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

풀이 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(32,\ 9^2)$을 따르고 표본의 크기가 36이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(32,\ \frac{9^2}{36}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(32,\ \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)$을 따른다.
따라서 $a=32,\ b=\frac{9}{4}$이므로
$$ab=72$$

답 ③

0874 전략 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 신뢰도 α %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다. $\left(\text{단, }\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

풀이 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 7^2)$을 따르고 표본의 크기가 196이므로 신뢰도 α %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는
$$2\times1.28\times\frac{7}{\sqrt{196}}=1.28$$

답 ③

0875 전략 먼저 표본비율이 따르는 정규분포를 구한다.

풀이 임의추출한 상품 10000개 중에서 반품되는 상품의 개수의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.02,\ \frac{0.02\times0.98}{10000}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(0.02,\ 0.0014^2)$을 따르므로 $Z=\frac{\hat{p}-0.02}{0.0014}$로 놓으면 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\hat{p}\ge\frac{228}{10000}\right)&=\mathrm{P}(\hat{p}\ge0.0228)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{0.0228-0.02}{0.0014}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

답 0.0228

0876 전략 모집단이 근사적으로 따르는 정규분포를 구한 후 표본평균이 따르는 정규분포를 구한다.

풀이 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로
$$\mathrm{E}(X)=400\cdot\frac{1}{5}=80,$$
$$\mathrm{V}(X)=400\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=64$$
따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 8^2)$을 따른다. ⇨ ❶
모평균이 80, 모분산이 64, 표본의 크기가 16이므로
$$\mathrm{E}(\overline{X})=80,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{64}{16}=4$$ ⇨ ❷
$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$이므로
$$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2=4+80^2=6404$$ ⇨ ❸

답 6404

채점 기준	비율
❶ 모집단이 따르는 정규분포를 구할 수 있다.	40%
❷ $\mathrm{E}(\overline{X}),\ \mathrm{V}(\overline{X})$를 구할 수 있다.	30%
❸ $\mathrm{E}(\overline{X}^2)$을 구할 수 있다.	30%

타쎈 특강 이항분포의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따를 때,
$E(X)=np,\ V(X)=np(1-p),\ \sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

0877 전략 먼저 확률의 총합이 1임을 이용하여 a의 값을 구한 후 모집단의 평균, 분산을 구한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{5}{16}+a+\frac{3}{16}+\frac{5}{16}=1 \qquad \therefore a=\frac{3}{16}$$

따라서 모집단의 평균은

$$E(X)=1\cdot\frac{5}{16}+2\cdot\frac{3}{16}+3\cdot\frac{3}{16}+4\cdot\frac{5}{16}=\frac{5}{2}$$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$$V(X)=1^2\cdot\frac{5}{16}+2^2\cdot\frac{3}{16}+3^2\cdot\frac{3}{16}+4^2\cdot\frac{5}{16}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{31}{4}-\frac{25}{4}=\frac{3}{2}$$

표본의 크기가 8이므로

$$V(\overline{X})=\frac{\frac{3}{2}}{8}=\frac{3}{16}$$

답 ③

0878 전략 한 묶음의 무게를 이용하여 표본평균을 구한다.

풀이 모집단이 정규분포 $N(60,\ 5^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(60,\ \frac{5^2}{25}\right)$, 즉 $N(60,\ 1)$을 따른다. ⇨ ❶

$Z=\overline{X}-60$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르고 한 상자의 무게가 1425 g이면 달걀 한 개의 무게는 $\frac{1425}{25}=57(\text{g})$이므로 구하는 확률은 $P(\overline{X}<57)$이다. ⇨ ❷

$$\begin{aligned}\therefore P(\overline{X}<57)&=P(Z<57-60)\\&=P(Z<-3)\\&=P(Z\ge 3)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 3)\\&=0.5-0.4987\\&=0.0013\end{aligned}$$
⇨ ❸

답 0.0013

채점 기준	비율
❶ 표본평균이 따르는 정규분포를 구할 수 있다.	30%
❷ 구하는 확률을 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ 확률을 구할 수 있다.	40%

0879 전략 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 값이 $\overline{x}$이면 모평균 m의 신뢰도 α %의 신뢰구간은 $\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다.
$\left(\text{단, } P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

풀이 표본평균이 58, 모표준편차가 12, 표본의 크기가 64이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$58-1.96\times\frac{12}{\sqrt{64}}\le m\le 58+1.96\times\frac{12}{\sqrt{64}}$$

$$58-2.94\le m\le 58+2.94$$

$$\therefore 55.06\le m\le 60.94$$

따라서 신뢰구간에 속하는 정수는 56, 57, 58, 59, 60의 5개이다.

답 5

0880 전략 먼저 모평균 m의 신뢰구간을 구한다.

풀이 표본평균이 24, 모표준편차가 40, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$24-2\cdot\frac{40}{\sqrt{n}}\le m\le 24+2\cdot\frac{40}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore 24-\frac{80}{\sqrt{n}}\le m\le 24+\frac{80}{\sqrt{n}}$$

이때 위의 신뢰구간이 $19\le m\le 29$에 포함되어야 하므로

$$24-\frac{80}{\sqrt{n}}\ge 19,\ 24+\frac{80}{\sqrt{n}}\le 29$$

$$\sqrt{n}\ge 16 \qquad \therefore n\ge 256$$

따라서 n의 최솟값은 256이다.

답 ⑤

0881 전략 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 신뢰도 α %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다. $\left(\text{단, } P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

풀이 모표준편차가 16, 표본의 크기가 64이므로 신뢰도 99%로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$$2\times 2.58\times\frac{16}{\sqrt{64}}=10.32$$

답 10.32

0882 전략 모평균 m의 신뢰구간이 $a\le m\le a+5$이므로 신뢰구간의 길이는 5임을 이용한다.

풀이 표본의 크기 324가 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 25를 사용할 수 있다.

$P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 α %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$$2k\cdot\frac{25}{\sqrt{324}}=\frac{25}{9}k$$
⇨ ❶

이때 신뢰구간 $a\le m\le a+5$에서 신뢰구간의 길이는

$$(a+5)-a=5$$

이므로 $\frac{25}{9}k=5 \qquad \therefore k=1.8$ ⇨ ❷

이때 $P(|Z|\le 1.8)=0.92$이므로

$$\alpha=100\times 0.92=92$$
⇨ ❸

답 92

채점 기준	비율
❶ 신뢰구간의 길이를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ α의 값을 구할 수 있다.	30%

0883 전략 표본비율을 $\hat{p}$이라 할 때, 모비율 p의 신뢰도 α %의 신뢰구간은 $\hat{p}-k\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\le p\le\hat{p}+k\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$이다.
$\left(\text{단, } P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

09 통계적 추정

풀이 표본의 크기가 600, 표본비율이 $\hat{p}=\frac{360}{600}=0.6$이므로 찬성율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.6-2\sqrt{\frac{0.6\times0.4}{600}}\le p\le 0.6+2\sqrt{\frac{0.6\times0.4}{600}}$$

$$0.6-0.04\le p\le 0.6+0.04$$

$$\therefore\ 0.56\le p\le 0.64$$

답 $0.56\le p\le 0.64$

0884 전략 먼저 표본평균이 따르는 정규분포를 구한다.

풀이 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(500,\ 5^2)$을 따르고 표본의 크기가 225이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(500,\ \frac{5^2}{225}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(500,\ \left(\frac{1}{3}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-500}{\frac{1}{3}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\le a)\ge 0.9332$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a-500}{\frac{1}{3}}\right)\ge 0.9332$$

$$\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-500}{\frac{1}{3}}\right)\ge 0.9332$$

$$0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-500}{\frac{1}{3}}\right)\ge 0.9332$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-500}{\frac{1}{3}}\right)\ge 0.4332$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$$\frac{a-500}{\frac{1}{3}}\ge 1.5 \qquad \therefore\ a\ge 500.5$$

따라서 a의 최솟값은 500.5이다.

답 ①

0885 전략 먼저 표본평균이 따르는 정규분포를 구한다.

풀이 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{9}{8},\ 9^2\right)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{9}{8},\ \frac{9^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-\frac{9}{8}}{\frac{9}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}\left(\overline{X}\le 2.75\times\frac{9}{\sqrt{n}}\right)=0.9878$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{2.75\times\frac{9}{\sqrt{n}}-\frac{9}{8}}{\frac{9}{\sqrt{n}}}\right)=0.9878$$

$$\mathrm{P}\left(Z\le 2.75-\frac{\sqrt{n}}{8}\right)=0.9878$$

$$\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le 2.75-\frac{\sqrt{n}}{8}\right)=0.9878$$

$$0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le 2.75-\frac{\sqrt{n}}{8}\right)=0.9878$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le 2.75-\frac{\sqrt{n}}{8}\right)=0.4878$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.25)=0.4878$이므로

$$2.75-\frac{\sqrt{n}}{8}=2.25, \qquad \sqrt{n}=4$$

$$\therefore\ n=16$$

답 ①

0886 전략 모비율 p의 신뢰구간을 이용하여 모비율 p와 표본비율 $\hat{p}$의 차를 나타낸다.

풀이 구하는 표본의 크기를 n이라 하면 표본비율이

$$\hat{p}=\frac{90}{100}=0.9$$

이므로 모비율 p의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$0.9-2.58\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{n}}\le p\le 0.9+2.58\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{n}}$$

$$-2.58\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{n}}\le p-0.9\le 2.58\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{n}}$$

$$\therefore\ |p-0.9|\le 2.58\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{n}}$$

이때 모비율과 표본비율의 차가 5 % 이하가 되어야 하므로

$$2.58\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{n}}\le 0.05$$

$$\sqrt{n}\ge\frac{2.58\times0.3}{0.05}, \qquad \sqrt{n}\ge 15.48$$

$$\therefore\ n\ge 239.6304$$

따라서 최소 240명의 환자를 대상으로 투약해야 한다.

답 ④