정답을 확인하려 할 때에는 「빠른 정답 찾기」를 이용하면 편리합니다.

쎈 정답 및 풀이

I 도형의 방정식

II 집합과 명제

III 함수

01 평면좌표

0001 $\overline{AB}=|6-1|=5$ 답 5

0002 $\overline{AB}=|5-(-3)|=8$ 답 8

0003 $\overline{OA}=|-4|=4$ 답 4

0004 $\overline{AB}=\sqrt{(3-2)^2+\{2-(-1)\}^2}=\sqrt{10}$ 답 $\sqrt{10}$

0005 $\overline{AB}=\sqrt{\{1-(-4)\}^2+\{-1-(-2)\}^2}=\sqrt{26}$ 답 $\sqrt{26}$

0006 $\overline{OA}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$ 답 5

0007 $\frac{1\cdot(-2)+2\cdot 6}{1+2}=\frac{10}{3}$ 답 $\frac{10}{3}$

0008 $\frac{4\cdot(-2)+3\cdot 6}{4+3}=\frac{10}{7}$ 답 $\frac{10}{7}$

0009 $\frac{6-2}{2}=2$ 답 2

0010 $\frac{2\cdot 3+1\cdot 5}{2+1}=\frac{11}{3}$, $\frac{2\cdot(-6)+1\cdot 2}{2+1}=-\frac{10}{3}$

$\therefore \left(\frac{11}{3}, -\frac{10}{3}\right)$ 답 $\left(\frac{11}{3}, -\frac{10}{3}\right)$

0011 $\frac{3\cdot 3+5\cdot 5}{3+5}=\frac{17}{4}$, $\frac{3\cdot(-6)+5\cdot 2}{3+5}=-1$

$\therefore \left(\frac{17}{4}, -1\right)$ 답 $\left(\frac{17}{4}, -1\right)$

0012 $\frac{5+3}{2}=4$, $\frac{2-6}{2}=-2$

$\therefore (4, -2)$ 답 $(4, -2)$

0013 답 (가) $\frac{y_2+y_3}{2}$ (나) 1 (다) $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ (라) $\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$

0014 $\frac{2-1+3}{3}=\frac{4}{3}$, $\frac{1+0-4}{3}=-1$

$\therefore \left(\frac{4}{3}, -1\right)$ 답 $\left(\frac{4}{3}, -1\right)$

0015 $\frac{-2+4+1}{3}=1$, $\frac{3-5+8}{3}=2$

$\therefore (1, 2)$ 답 $(1, 2)$

유형 01 두 점 사이의 거리

집중공략 본책 10쪽

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는
$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

0016 $\overline{AB}=5\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(a+1-3)^2+(-2-3)^2}=5\sqrt{2}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$(a-2)^2+25=50$, $\quad a^2-4a-21=0$

$(a+3)(a-7)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=7$

따라서 모든 a의 값의 합은

$-3+7=4$ 답 ②

0017 $\overline{AB}=2\overline{CD}$에서 $\overline{AB}^2=4\overline{CD}^2$이므로

$(a-1)^2+(-1+a)^2=4\{2^2+(-2)^2\}$

$2a^2-4a+2=32$, $\quad a^2-2a-15=0$

$(a+3)(a-5)=0$

$\therefore a=5$ ($\because a>0$) 답 5

0018 $\overline{OB}=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$

정사각형 OABC의 한 변의 길이를 a라 하면

$a^2+a^2=(\sqrt{26})^2 \quad \therefore a^2=13$

따라서 구하는 넓이는 $\quad a^2=13$ 답 13

다른 풀이 정사각형의 두 대각선은 서로를 수직이등분하고 그 길이가 같으므로

$\overline{AC}=\overline{OB}=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$

$\therefore \square OABC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{26}\cdot\sqrt{26}=13$

0019 $0\le\overline{AB}\le 4$에서 $\overline{AB}^2\le 4^2$이므로

$(t-3)^2+(7-t)^2\le 16$, $\quad t^2-10t+21\le 0$

$(t-3)(t-7)\le 0 \quad \therefore 3\le t\le 7$

따라서 정수 t는 3, 4, 5, 6, 7의 5개이다. 답 5

0020 두 점 A, B가 동시에 출발한 지 t초 후의 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(0, 10-3t)$, $(4t, 0)$이므로 ⋯ ❶

$\overline{AB}=\sqrt{(4t)^2+(-10+3t)^2}$

$=\sqrt{25t^2-60t+100}$

$=\sqrt{25\left(t-\frac{6}{5}\right)^2+64}$ ⋯ ❷

따라서 두 점 A, B 사이의 거리는 $t=\frac{6}{5}$일 때 최솟값 $\sqrt{64}=8$을 갖는다. ⋯ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ t초 후의 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ 두 점 A, B 사이의 거리를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ 두 점 A, B 사이의 거리의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

유형 02 같은 거리에 있는 점

집중 공략 본책 10쪽

두 점 A, B로부터 같은 거리에 있는 점 P의 좌표는

$\overline{AP}=\overline{BP}$, 즉 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$

임을 이용하여 구한다. 이때 점 P의 위치에 따라 좌표를 다음과 같이 놓는다.

① x축 위의 점 ➡ $(a, 0)$
② y축 위의 점 ➡ $(0, b)$
③ 직선 $y=mx+n$ 위의 점 ➡ $(a, am+n)$

0021 점 $P(a, b)$가 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로

$b=a+1$ …… ㉠

또 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-1)^2+(b+2)^2=(a-5)^2+(b-2)^2$

$a^2-2a+b^2+4b+5=a^2-10a+b^2-4b+29$

$\therefore a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=2$

$\therefore a^2+b^2=5$

답 ①

0022 $P(0, a)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(-2)^2+(a-2)^2=1^2+(a-1)^2$

$a^2-4a+8=a^2-2a+2$

$-2a=-6 \qquad \therefore a=3$

따라서 점 P의 y좌표는 3이다.

답 ⑤

0023 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$a^2+(b-5)^2=a^2+(b-9)^2$

$a^2+b^2-10b+25=a^2+b^2-18b+81$

$8b=56 \qquad \therefore b=7$

한편 $\overline{OP}=10$에서 $\overline{OP}^2=100$이므로

$a^2+b^2=100$

위의 식에 $b=7$을 대입하면

$a^2+49=100 \qquad \therefore a^2=51$

$\therefore a^2-b^2=2$

답 ②

0024 △ABC의 외심을 $P(a, b)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$이므로

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$

$\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$에서

$(a-2)^2+(b-1)^2=a^2+(b+3)^2$

$a^2-4a+b^2-2b+5=a^2+b^2+6b+9$

$\therefore a+2b=-1$ …… ㉠

$\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$에서

$(a+2)^2+(b-3)^2=a^2+(b+3)^2$

$a^2+4a+b^2-6b+13=a^2+b^2+6b+9$

$\therefore a-3b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1, b=0$

따라서 $P(-1, 0)$이므로 $\underbrace{\text{외접원의 반지름의 길이는}}_{\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}}$

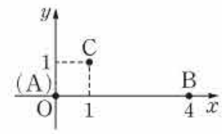
$\overline{CP}=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$

답 ⑤

SSEN 특강 삼각형의 외심

① 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점이다.
② 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

0025 오른쪽 그림과 같이 A 지점이 원점, B 지점이 x축 위에 오도록 좌표평면을 잡으면



$A(0, 0), B(4, 0), C(1, 1)$

분수대를 만든 지점을 $P(a, b)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$이므로

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$에서 $a^2+b^2=(a-4)^2+b^2$

$a^2+b^2=a^2-8a+16+b^2$

$8a=16 \qquad \therefore a=2$

$\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$에서 $2^2+b^2=(2-1)^2+(b-1)^2$

$4+b^2=b^2-2b+2$

$2b=-2 \qquad \therefore b=-1$

따라서 $P(2, -1)$이므로 $\underbrace{\text{분수대와 각 지점 사이의 거리는}}_{\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}}$

$\overline{AP}=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$ (km)

답 $\sqrt{5}$ km

유형 03 두 점 사이의 거리의 활용; 식의 값

본책 11쪽

a, b, x, y가 실수일 때, $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$은 두 점 (a, b), (x, y) 사이의 거리임을 이용하여 주어진 식의 최솟값을 구한다.

0026 $O(0, 0)$, $P(a, b)$, $Q(1, 3)$이라 하면

$\sqrt{a^2+b^2}=\overline{OP}$, $\sqrt{(a-1)^2+(b-3)^2}=\overline{PQ}$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b-3)^2}&=\overline{OP}+\overline{PQ}\\&\ge\overline{OQ}=\sqrt{1^2+3^2}\\&=\sqrt{10}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{10}$이다.

답 ②

0027 $P(2, -1)$, $Q(x, y)$, $R(5, k)$라 하면

$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=\overline{PQ}$, $\sqrt{(x-5)^2+(y-k)^2}=\overline{QR}$

$\therefore \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-k)^2}$

$=\overline{PQ}+\overline{QR}$ ··· ❶

$\ge\overline{PR}=\sqrt{(5-2)^2+(k+1)^2}$

$=\sqrt{k^2+2k+10}$ ··· ❷

따라서 $\sqrt{k^2+2k+10}=5$이므로 양변을 제곱하면

$k^2+2k+10=25, \qquad k^2+2k-15=0$

$(k+5)(k-3)=0$

$\therefore k=3$ ($\because k>0$) ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 두 선분의 길이의 합으로 표현할 수 있다.	40 %
❷ 최솟값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0028 O(0, 0), P(a, b), Q(3, 4), R(6, -2), S(1, -2)라 하면

$\sqrt{a^2+b^2}=\overline{\mathrm{OP}}$, $\sqrt{(a-3)^2+(b-4)^2}=\overline{\mathrm{PQ}}$,

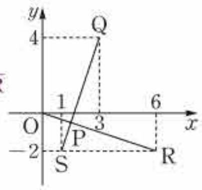
$\sqrt{(a-6)^2+(b+2)^2}=\overline{\mathrm{PR}}$, $\sqrt{(a-1)^2+(b+2)^2}=\overline{\mathrm{PS}}$

이므로 주어진 식은 $\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{PS}}$이다.

$\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{PS}}$의 값이 최소이려면 오른쪽 그림과 같이 점 P가 $\overline{\mathrm{OR}}$ 위에 있으면서 $\overline{\mathrm{QS}}$ 위에 있어야 한다.

$\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PR}}\ge\overline{\mathrm{OR}}$

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PS}}\ge\overline{\mathrm{QS}}$



$\therefore\ \overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{PS}}$

$\ge\overline{\mathrm{OR}}+\overline{\mathrm{QS}}$

$=\sqrt{6^2+(-2)^2}+\sqrt{(1-3)^2+(-2-4)^2}$

$=2\sqrt{10}+2\sqrt{10}=4\sqrt{10}$ 답 $4\sqrt{10}$

유형 04 두 점 사이의 거리의 활용 ; 선분의 길이의 제곱의 합의 최솟값 본책 11쪽

두 점 A, B의 좌표가 주어질 때, $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 점 P의 좌표를 (a, b)라 하고, 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$을 a 또는 b에 대한 이차식으로 나타낸다.
(ii) (i)에서 구한 이차식을 완전제곱식을 포함한 꼴로 변형하여 최솟값을 구한다.

0029 P(a, 0)이라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=(a-4)^2+(-1)^2+(a+2)^2+(-5)^2$

$=2a^2-4a+46$

$=2(a-1)^2+44$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$은 $a=1$일 때 최솟값 44를 갖는다. 답 44

0030 P(a, $a-1$)이라 하면 점 P는 직선 $y=x-1$ 위의 점

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=(a-3)^2+(a+3)^2+(a-4)^2+(a-10)^2$

$=4a^2-28a+134$

$=4\left(a-\frac{7}{2}\right)^2+85$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값은 $a=\frac{7}{2}$일 때 최소이므로 점 P의 x좌표는 $\frac{7}{2}$이다. 답 ①

0031 P(a, b)라 하면

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$

$=(a+1)^2+(b-2)^2+(a-4)^2+(b-6)^2+a^2+(b-1)^2$

$=3a^2-6a+3b^2-18b+58$

$=3(a-1)^2+3(b-3)^2+28$

이때 a, b가 실수이므로 $(a-1)^2\ge0$, $(b-3)^2\ge0$

따라서 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$의 값은 $(a-1)^2=0$, $(b-3)^2=0$, 즉 $a=1$, $b=3$일 때 최소이므로

P(1, 3) 답 (1, 3)

유형 05 두 점 사이의 거리의 활용; 삼각형의 모양 본책 12쪽

삼각형의 세 꼭짓점의 좌표가 주어지면 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 세 변의 길이 a, b, c를 구한 후 다음을 이용하여 삼각형의 모양을 결정한다.
① $a=b=c$ ➡ 정삼각형
② $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ ➡ 이등변삼각형
③ $a^2+b^2=c^2$ ➡ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

0032 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-3-1)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(3+3)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{10}$

$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(1-3)^2+(-1-3)^2}=2\sqrt{5}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CA}}$, $\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2$

따라서 $\triangle$ABC는 $\angle$A$=90°$인 직각이등변삼각형이다.

답 ③

0033 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$이므로

$(1-2)^2+(a-5)^2=(1+1)^2+(a-4)^2$

$a^2-10a+26=a^2-8a+20$

$-2a=-6\qquad\therefore\ a=3$ 답 ⑤

0034 C(x, y)($x>0$, $y<0$)라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$에서 점 C는 제4사분면 위의 점

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$이므로

$(-1-1)^2+(-2-2)^2=(x+1)^2+(y+2)^2$

$\therefore\ x^2+2x+y^2+4y=15$ ······ ㉠

또 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2$이므로

$(-1-1)^2+(-2-2)^2=(x-1)^2+(y-2)^2$

$\therefore\ x^2-2x+y^2-4y=15$ ······ ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $4x+8y=0\qquad\therefore\ x=-2y$

㉠에 $x=-2y$를 대입하면

$4y^2-4y+y^2+4y=15$

$y^2=3\qquad\therefore\ y=\pm\sqrt{3}$

그런데 $y<0$이므로 $y=-\sqrt{3}$

따라서 $x=-2\cdot(-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$이므로

C($2\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$) 답 ($2\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$)

0035 (1) $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{a^2+b^2}$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{(a+b)-a\}^2+\{(b-a)-b\}^2}=\sqrt{a^2+b^2}$

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{(a+b)^2+(b-a)^2}=\sqrt{2a^2+2b^2}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{OB}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2$ ··· ❶

따라서 $\triangle$OAB는 $\angle$A$=90°$인 직각이등변삼각형이다. ··· ❷

(2) $\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ ··· ❸

답 (1) $\angle$A$=90°$인 직각이등변삼각형 (2) $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$

채점 기준	비율
❶ 삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\triangle$OAB가 어떤 삼각형인지 말할 수 있다.	20 %
❸ $\triangle$OAB의 넓이를 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %

유형 06 좌표를 이용하여 도형의 성질 확인하기 본책 13쪽

좌표를 이용하여 도형의 성질을 확인할 때에는 다음과 같은 순서로 한다.
(i) 도형의 한 변이 좌표축 위에 오도록 도형을 좌표평면 위에 놓는다.
(ii) 도형의 꼭짓점에 해당하는 점의 좌표를 문자를 사용하여 나타낸다.
(iii) 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 주어진 등식이 성립함을 확인한다.

0036 직선 BC를 x축으로 하고, 점 M을 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 $\boxed{\mathrm{M}}$은 원점이다.
이때 △ABC의 두 꼭짓점 A, C의 좌표를 각각 (a, b), $(c, 0)$이라 하면 꼭짓점 B의 좌표는 $\boxed{(-c, 0)}$이므로

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}$$
$$=2a^2+2b^2+2c^2=2(\boxed{a^2+b^2+c^2})$$

또 $\overline{AM}^2=a^2+b^2$, $\overline{BM}^2=\boxed{c^2}$이므로

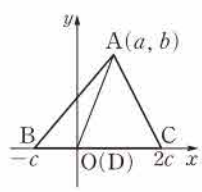
$$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=a^2+b^2+\boxed{c^2}$$
$$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$

∴ (가) M (나) $(-c, 0)$ (다) $a^2+b^2+c^2$ (라) c^2

답 (가) M (나) $(-c, 0)$ (다) $a^2+b^2+c^2$ (라) c^2

참고 이와 같은 삼각형의 성질을 파푸스(Pappus) 정리 또는 중선 정리라 한다.

0037 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 D는 원점이다.



이때 △ABC의 세 꼭짓점의 좌표를 각각 A(a, b), B$(-c, 0)$, C$(2c, 0)$이라 하면 ··· ❶

$$2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-2c)^2+b^2\}$$
$$=3a^2+3b^2+6c^2$$
$$=3(a^2+b^2+2c^2) \quad \cdots ❷$$

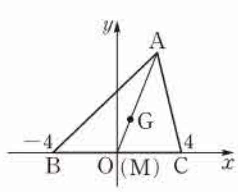
또 $\overline{AD}^2=a^2+b^2$, $\overline{BD}^2=c^2$이므로

$$\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2=a^2+b^2+2c^2 \quad \cdots ❸$$
$$\therefore 2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=3(\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2) \quad \cdots ❹$$

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ △ABC를 좌표평면 위에 놓고 세 점 A, B, C의 좌표를 정할 수 있다.	30 %
❷ $2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$을 a, b, c에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ $\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2$을 a, b, c에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❹ $2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=3(\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2)$이 성립함을 확인할 수 있다.	10 %

0038 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 점 M을 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 M은 원점이고 B$(-4, 0)$, C$(4, 0)$이다.



점 G는 △ABC의 무게중심이므로

$$\overline{AM}=3\overline{MG}=3\sqrt{5}$$

즉 $\overline{AM}^2=45$이므로 A(a, b)라 하면

$$a^2+b^2=45 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{AB}=9$에서 $\overline{AB}^2=81$이므로

$$(a+4)^2+b^2=81$$
$$\therefore a^2+8a+b^2=65 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{5}{2}$, $b=\pm\dfrac{\sqrt{155}}{2}$

따라서 A$\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{\sqrt{155}}{2}\right)$ 또는 A$\left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{\sqrt{155}}{2}\right)$이므로

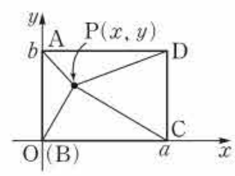
$$\overline{AC}=\sqrt{\left(4-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\pm\frac{\sqrt{155}}{2}\right)^2}=\sqrt{41}$$

답 ②

다른 풀이 $\overline{AM}=3\overline{MG}=3\sqrt{5}$, $\overline{BM}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=4$이고, 파푸스 정리에 의하여 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이므로

$$9^2+\overline{AC}^2=2\{(3\sqrt{5})^2+4^2\}$$
$$81+\overline{AC}^2=122, \quad \overline{AC}^2=41 \quad \therefore \overline{AC}=\sqrt{41}$$

0039 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이다.



이때 나머지 세 꼭짓점의 좌표를 각각 A$(0, b)$, C$(a, 0)$, D(a, b)라 하고 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\{x^2+(y-b)^2\}+\{(x-a)^2+y^2\},$$
$$\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=(x^2+y^2)+\{(x-a)^2+(y-b)^2\}$$
$$=\{x^2+(y-b)^2\}+\{(x-a)^2+y^2\}$$
$$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$$

답 풀이 참조

유형 07 선분의 내분점 (1) 집중 공략 본책 13쪽

좌표평면 위의 두 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)를 이은 선분 AB를 $m:n\,(m>0, n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

0040 $\dfrac{3\cdot(-2)+2\cdot 8}{3+2}=2$, $\dfrac{3\cdot 7+2\cdot 2}{3+2}=5$이므로

P$(2, 5)$

따라서 $\overline{OP}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2}{2}, \frac{5}{2}\right), \text{ 즉 } \left(1, \frac{5}{2}\right)$$

답 $\left(1, \dfrac{5}{2}\right)$

0041 A(a), B(b)라 하면 $\overline{AB}$의 중점의 좌표가 2이므로

$$\frac{a+b}{2}=2 \quad \therefore a+b=4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{AB}$를 3 : 1로 내분하는 점의 좌표가 3이므로

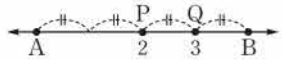
$$\frac{3b+a}{3+1}=3 \quad \therefore a+3b=12 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=4$

따라서 A(0), B(4)이므로

$\overline{AB}=|0-4|=4$ 답 4

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$의 중점을 P, $\overline{AB}$를 3 : 1로 내분하는 점을 Q라 하면



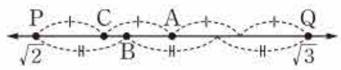
$\overline{AB}=4\overline{PQ}=4\cdot|3-2|=4$

0042 수직선 위의 두 점 $P(\sqrt{2})$, $Q(\sqrt{3})$에 대하여 점 A는 $\overline{PQ}$의 중점이다.

$B\left(\dfrac{1\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}}{1+2}\right)$이므로 점 B는 $\overline{PQ}$를 1 : 2로 내분하는 점이다.

$C\left(\dfrac{1\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{2}}{1+3}\right)$이므로 점 C는 $\overline{PQ}$를 1 : 3으로 내분하는 점이다.

따라서 세 점 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 왼쪽에 있는 것부터 차례대로 나열하면 C, B, A이다.



답 C, B, A

0043 $\overline{AB}$를 $3:b$로 내분하는 점의 좌표가 $(2, -1)$이므로

$\dfrac{3\cdot12+b\cdot(-4)}{3+b}=2$, $\dfrac{3\cdot a+b\cdot8}{3+b}=-1$

$36-4b=6+2b$, $3a+8b=-3-b$

$\therefore a=-16$, $b=5$ ⋯ ❶

$\therefore B(12, -16)$, $C(\underbrace{6}_{-(-16)-2\cdot5=6}, 5)$ ⋯ ❷

따라서 $\overline{BC}$를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\cdot6+1\cdot12}{2+1}, \dfrac{2\cdot5+1\cdot(-16)}{2+1}\right)$, 즉 $(8, -2)$ ⋯ ❸

답 $(8, -2)$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 두 점 B, C의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸ $\overline{BC}$를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %

0044 점 $P(a, b)$는 $\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점이므로

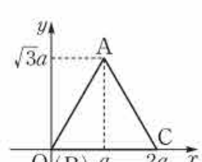
$a=\dfrac{1\cdot9+2\cdot(-3)}{1+2}=1$, $b=\dfrac{1\cdot8+2\cdot2}{1+2}=4$

점 $Q(c, d)$는 $\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$c=\dfrac{2\cdot9+1\cdot(-3)}{2+1}=5$, $d=\dfrac{2\cdot8+1\cdot2}{2+1}=6$

$\therefore ac-bd=5-24=-19$ 답 ①

0045 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 점 B를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이다.



정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 $2a$라 하면

$A(a, \underbrace{\sqrt{3}a}_{\text{한 변의 길이가 }2a\text{인 정삼각형의 높이는 }\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot2a=\sqrt{3}a})$, $C(2a, 0)$

$\overline{BC}$ 위의 점 P의 좌표를 $(k, 0)$ $(0\le k\le 2a)$이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(k-a)^2+(-\sqrt{3}a)^2+k^2$

$=2k^2-2ak+4a^2$

$=2\left(k-\dfrac{1}{2}a\right)^2+\dfrac{7}{2}a^2$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값은 $k=\dfrac{1}{2}a$일 때 최소이므로

$\overline{BP}:\underbrace{\overline{CP}}_{\overline{CP}=2a-\frac{1}{2}a=\frac{3}{2}a}=\dfrac{1}{2}a:\dfrac{3}{2}a=1:3$

즉 점 P는 $\overline{BC}$를 1 : 3으로 내분하는 점이므로

$m=1$, $n=3$

$\therefore m+n=4$ 답 ①

유형 08 선분의 내분점 (2)

본책 14쪽

두 점을 이은 선분의 내분점이
① x축 위에 있다. ➡ y좌표가 0이다.
　y축 위에 있다. ➡ x좌표가 0이다.
② 어느 사분면 위에 있다.
　➡ x좌표와 y좌표의 부호를 확인한다.
③ 직선 $y=f(x)$ 위에 있다.
　➡ 내분점의 좌표를 $y=f(x)$에 대입하면 등식이 성립한다.

0046 $\overline{AB}$를 $a:(1-a)$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{6a-3(1-a)}{a+(1-a)}, \dfrac{-2a+5(1-a)}{a+(1-a)}\right)$

$\therefore (9a-3, -7a+5)$

이 점이 제1사분면 위에 있으므로

$9a-3>0$, $-7a+5>0$

$\therefore \dfrac{1}{3}<a<\dfrac{5}{7}$ 답 $\dfrac{1}{3}<a<\dfrac{5}{7}$

0047 $\overline{PQ}$를 $k:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2k-9}{k+3}, \dfrac{4k-3}{k+3}\right)$

이 점이 직선 $x+2y=1$ 위에 있으므로

$\dfrac{2k-9}{k+3}+2\cdot\dfrac{4k-3}{k+3}=1$, $10k-15=k+3$

$\therefore k=2$ 답 2

0048 $\overline{AB}$를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2m-5n}{m+n}, \dfrac{8m-n}{m+n}\right)$ ⋯ ❶

이 점이 y축 위에 있으므로

$\dfrac{2m-5n}{m+n}=0$, $2m-5n=0$

$2m=5n$

$\therefore m:n=5:2$ ⋯ ❷

이때 m, n은 서로소인 자연수이므로

$m=5$, $n=2$

$\therefore mn=10$ ⋯ ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ $m:n$을 구할 수 있다.	40 %
❸ mn의 값을 구할 수 있다.	20 %

0049 $\overline{AB}$를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{4m+an}{m+n}, \frac{-4m+bn}{m+n}\right)$$

이 점이 x축 위에 있으므로

$$\frac{-4m+bn}{m+n}=0, \qquad -4m+bn=0$$

$$\therefore m=\frac{1}{4}bn \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{AC}$를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{-2m+an}{m+n}, \frac{2m+bn}{m+n}\right)$$

이 점이 y축 위에 있으므로

$$\frac{-2m+an}{m+n}=0, \qquad -2m+an=0$$

$$\therefore m=\frac{1}{2}an \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{4}bn=\frac{1}{2}an$

$\therefore b=2a$ ($\because n>0$)

이때 a, b는 10 이하의 자연수이므로 점 A는

$(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$, $(4, 8)$, $(5, 10)$

의 5개이고 만들 수 있는 $\triangle ABC$의 개수도 5이다.

답 ③

유형 09 선분의 내분점의 활용 본책 15쪽

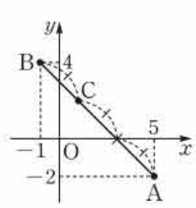
두 점 A, B를 지나는 직선 위의 점 C가 $\overline{AB}:\overline{BC}=m:n$을 만족시킨다.

➡ 점 C가 $\overline{AB}$ 위의 점인 경우와 $\overline{AB}$의 연장선 위의 점인 경우로 나누어 이를 만족시키는 세 점 A, B, C의 위치를 그림으로 나타낸다.

0050 $\overline{AB}=3\overline{BC}$에서 $\quad \overline{AB}:\overline{BC}=3:1$

(i) 점 C가 $\overline{AB}$ 위의 점일 때,

점 C는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점이므로 점 C의 좌표는

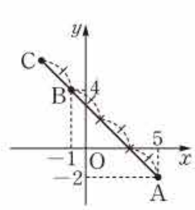


$$\left(\frac{2\cdot(-1)+1\cdot 5}{2+1}, \frac{2\cdot 4+1\cdot(-2)}{2+1}\right)$$

$\therefore (1, 2)$

(ii) 점 C가 $\overline{AB}$의 연장선 위의 점일 때,

점 B는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$를 3 : 1로 내분하는 점이므로 C(a, b)라 하면



$$\frac{3a+5}{3+1}=-1, \ \frac{3b-2}{3+1}=4$$

$3a+5=-4$, $3b-2=16$

$\therefore a=-3$, $b=6$

$\therefore$ C$(-3, 6)$

(i), (ii)에서 점 C의 좌표는 $(-3, 6)$, $(1, 2)$이다.

답 $(-3, 6)$, $(1, 2)$

SSEN 특강

두 점 A, B를 지나는 직선 위의 점 C에 대하여

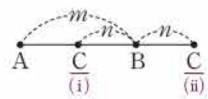
$\overline{AB}:\overline{BC}=m:n$

을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

① $m>n$일 때

(i) 점 C는 $\overline{AB}$를 $(m-n):n$으로 내분하는 점

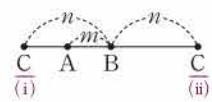
(ii) 점 B는 $\overline{AC}$를 $m:n$으로 내분하는 점



② $m<n$일 때

(i) 점 A는 $\overline{CB}$를 $(n-m):m$으로 내분하는 점

(ii) 점 B는 $\overline{AC}$를 $m:n$으로 내분하는 점

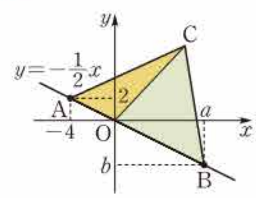


0051 $\triangle OBC$의 넓이가 $\triangle AOC$의 넓이의 2배이므로

높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

$\overline{AO}:\overline{BO}=1:2$

$a>0$에서 원점 O는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점이므로



$$\frac{a+2\cdot(-4)}{1+2}=0, \ \frac{b+2\cdot 2}{1+2}=0$$

$\therefore a=8$, $b=-4$

$\therefore a+b=4$

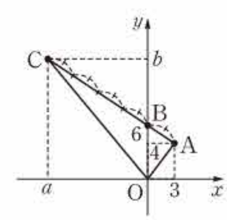
답 ⑤

0052 $\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3=9$이므로

$\triangle OAB:\triangle OAC=9:45=1:5$

$\therefore \overline{AB}:\overline{AC}=1:5$

$a<0$에서 점 B는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$를 1 : 4로 내분하는 점이므로



$$\frac{a+4\cdot 3}{1+4}=0, \ \frac{b+4\cdot 4}{1+4}=6$$

$\therefore a=-12$, $b=14$

$\therefore -2a+b=38$

답 ③

유형 10 삼각형의 무게중심 집중 공략 본책 15쪽

좌표평면 위의 세 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

0053 $\triangle ABC$의 무게중심의 좌표가 $(2, -2)$이므로

$$\frac{3+a+2b+3}{3}=2, \ \frac{-2-3b+a+1}{3}=-2$$

$\therefore a+2b=0,\ a-3b=-5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-2,\ b=1$

$\therefore ab=-2$ 답 -2

0054 $\triangle$OAB의 무게중심의 좌표가 (6, 4)이므로

$$\frac{0+x_1+x_2}{3}=6,\ \frac{0+y_1+y_2}{3}=4$$

$x_1+x_2=18,\ y_1+y_2=12$

$$\therefore \frac{x_1+x_2}{2}=9,\ \frac{y_1+y_2}{2}=6$$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는 (9, 6)이다. 답 ③

0055 $\triangle$ABC의 무게중심을 G, $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 M이라 하면 점 G는 $\overline{\mathrm{CM}}$을 2 : 1로 내분하는 점이다.

이때 C(a, b)라 하면

$$\frac{2\cdot2+a}{2+1}=4,\ \frac{2\cdot5+b}{2+1}=2$$

$4+a=12,\ 10+b=6$

$\therefore a=8,\ b=-4$

따라서 점 C의 좌표는 $(8, -4)$이다. 답 $(8, -4)$

다른 풀이 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표가 (2, 5)이므로

$$\frac{x_1+x_2}{2}=2,\ \frac{y_1+y_2}{2}=5$$

$\therefore x_1+x_2=4,\ y_1+y_2=10$

C(a, b)라 하면 $\triangle$ABC의 무게중심의 좌표가 (4, 2)이므로

$$\frac{x_1+x_2+a}{3}=4,\ \frac{y_1+y_2+b}{3}=2$$

$4+a=12,\ 10+b=6$

$\therefore a=8,\ b=-4 \qquad \therefore \mathrm{C}(8, -4)$

0056 세 점 D, E, F는

$$\mathrm{D}\left(\frac{2\cdot(-2)+1\cdot4}{2+1},\ \frac{2\cdot1+1\cdot10}{2+1}\right),\ \text{즉 } \mathrm{D}(0, 4)$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{2\cdot7+1\cdot(-2)}{2+1},\ \frac{2\cdot(-5)+1\cdot1}{2+1}\right),\ \text{즉 } \mathrm{E}(4, -3)$$

$$\mathrm{F}\left(\frac{2\cdot4+1\cdot7}{2+1},\ \frac{2\cdot10+1\cdot(-5)}{2+1}\right),\ \text{즉 } \mathrm{F}(5, 5)$$

따라서 $\triangle$DEF의 무게중심의 좌표는

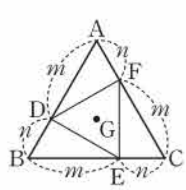
$$\left(\frac{0+4+5}{3},\ \frac{4-3+5}{3}\right),\ \text{즉 } (3, 2)$$ 답 ③

다른 풀이 $\triangle$DEF의 무게중심은 $\triangle$ABC의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{4-2+7}{3},\ \frac{10+1-5}{3}\right),\ \text{즉 } (3, 2)$$

SSEN 특강 삼각형의 무게중심의 성질

$\triangle$ABC의 세 변 AB, BC, CA를 $m : n\,(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 각각 D, E, F라 할 때, $\triangle$ABC와 $\triangle$DEF의 무게중심은 일치한다.



0057 P(x, y)라 하면

$$\begin{aligned}&\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2\\&=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2\\&\quad+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2\\&=3x^2-2(x_1+x_2+x_3)x+x_1^2+x_2^2+x_3^2\\&\quad+3y^2-2(y_1+y_2+y_3)y+y_1^2+y_2^2+y_3^2\\&=3\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2\\&\quad+y_1^2+y_2^2+y_3^2-\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3}-\frac{(y_1+y_2+y_3)^2}{3}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$의 값은 $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$일 때 최소이므로 점 P는 $\triangle$ABC의 무게중심이다.

답 풀이 참조

유형 11 평행사변형과 마름모의 성질 본책 16쪽

(1) 평행사변형
두 대각선은 서로를 이등분한다.
➡ 두 대각선의 중점이 일치한다.

(2) 마름모
① 네 변의 길이가 모두 같다.
② 두 대각선은 서로를 수직이등분한다.
➡ 두 대각선의 중점이 일치한다.

0058 D(a, b)라 하면 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{-1+8}{2}=\frac{5+a}{2},\ \frac{4+4}{2}=\frac{0+b}{2}$$

$\therefore a=2,\ b=8$

따라서 꼭짓점 D의 좌표는 (2, 8)이다. 답 (2, 8)

0059 C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)라 하면 두 대각선 AC, BD의 교점은 $\overline{\mathrm{AC}}$와 $\overline{\mathrm{BD}}$의 각각의 중점이다. ⋯ ❶

$\overline{\mathrm{AC}}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2+x_1}{2},\ \frac{4+y_1}{2}\right)$이므로

$$\frac{2+x_1}{2}=8,\ \frac{4+y_1}{2}=2$$

$\therefore x_1=14,\ y_1=0$

$\therefore \mathrm{C}(14, 0)$ ⋯ ❷

또 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-2+x_2}{2},\ \frac{-4+y_2}{2}\right)$이므로

$$\frac{-2+x_2}{2}=8,\ \frac{-4+y_2}{2}=2$$

$\therefore x_2=18,\ y_2=8$

$\therefore \mathrm{D}(18, 8)$ ⋯ ❸

답 C(14, 0), D(18, 8)

채점 기준	비율
❶ 두 대각선 AC, BD의 교점이 $\overline{\mathrm{AC}}$와 $\overline{\mathrm{BD}}$의 각각의 중점임을 알 수 있다.	20 %
❷ 점 C의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ 점 D의 좌표를 구할 수 있다.	40 %

0060 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로 중점의 x좌표에서

$\dfrac{a+5}{2}=\dfrac{2+b}{2}$　　$\therefore b=a+3$　　…… ㉠

또 $\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(2-a)^2+(4-1)^2=(5-2)^2+(1-4)^2$

$a^2-4a-5=0,\quad (a+1)(a-5)=0$

$\therefore a=-1\ (\because a\neq 5)$ — $a=5$이면 점 A와 점 C가 일치하므로 □ABCD가 만들어지지 않는다.

㉠에 $a=-1$을 대입하면　$b=2$

$\therefore a+b=1$　　답 1

다른 풀이 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로

$\dfrac{a+5}{2}=\dfrac{2+b}{2}$, $b=2$ — 직선 AC와 직선 BD가 수직이고 직선 AC의 방정식이 $y=1$이므로 직선 BD의 방정식은 $x=2$

$\therefore a=-1,\ b=2$

$\therefore a+b=1$

0061 $C(a, b)$라 하면 △ABC의 무게중심의 좌표가 (5, 3)이므로

$\dfrac{5+3+a}{3}=5,\ \dfrac{1+5+b}{3}=3$

$\therefore a=7,\ b=3$

$\therefore C(7, 3)$

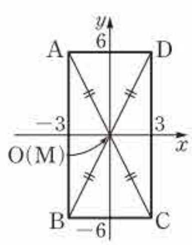
$D(c, d)$라 하면 □ABCD에서 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\dfrac{5+7}{2}=\dfrac{3+c}{2},\ \dfrac{1+3}{2}=\dfrac{5+d}{2}$

$\therefore c=9,\ d=-1$

따라서 꼭짓점 D의 좌표는 $(9, -1)$이다.　　답 $(9, -1)$

0062 오른쪽 그림과 같이 점 M을 지나고 두 직선 AB, AD에 수직인 직선을 각각 x축, y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 M은 원점이고 $A(-3, 6)$, $B(-3, -6)$, $C(3, -6)$, $D(3, 6)$이므로



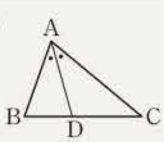
$G\left(\dfrac{-3-3+3}{3}, \dfrac{6-6-6}{3}\right)$,

$G'\left(\dfrac{3+3+0}{3}, \dfrac{-6+6+0}{3}\right)$

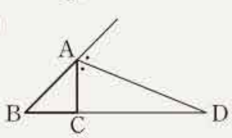
$\therefore G(-1, -2),\ G'(2, 0)$

$\therefore \overline{GG'}=\sqrt{(2+1)^2+2^2}=\sqrt{13}$　　답 ②

유형 12 각의 이등분선의 성질　　본책 17쪽

①


$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$
➡ 점 D는 $\overline{BC}$를 $\overline{AB}:\overline{AC}$로 내분하는 점이다.

②


$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$
➡ 점 C는 $\overline{BD}$를 $(\overline{AB}-\overline{AC}):\overline{AC}$로 내분하는 점이다.

0063 $\overline{AD}$는 ∠A의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

$\overline{AB}=\sqrt{(-4-1)^2+(-7-5)^2}=13$,

$\overline{AC}=\sqrt{(5-1)^2+(2-5)^2}=5$이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=13:5$

따라서 점 D는 $\overline{BC}$를 $13:5$로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$\left(\dfrac{13\cdot5+5\cdot(-4)}{13+5}, \dfrac{13\cdot2+5\cdot(-7)}{13+5}\right)$

$\therefore \left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$　　답 $\left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

0064 $\triangle ABD:\triangle ACD=p:q$에서

$\overline{BD}:\overline{CD}=p:q$

이때 $\overline{AD}$는 ∠A의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

$\overline{AB}=\sqrt{(-6-2)^2+(3+3)^2}=10$,

$\overline{AC}=\sqrt{(10-2)^2+(12+3)^2}=17$이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=10:17$

따라서 $p=10,\ q=17$이므로

$q-p=7$　　답 ③

0065 점 I는 △ABC의 내심이므로 직선 AI는 ∠A의 이등분선이다.

$\therefore \overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

$\overline{AB}=\sqrt{(-1+4)^2+(-9)^2}=3\sqrt{10}$,

$\overline{AC}=\sqrt{(2+4)^2+(7-9)^2}=2\sqrt{10}$이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=3\sqrt{10}:2\sqrt{10}=3:2$

따라서 점 D는 $\overline{BC}$를 $3:2$로 내분하는 점이므로

$a=\dfrac{3\cdot2+2\cdot(-1)}{3+2}=\dfrac{4}{5},\ b=\dfrac{3\cdot7+2\cdot0}{3+2}=\dfrac{21}{5}$

$\therefore a+b=5$　　답 ⑤

SSEN 특강 삼각형의 내심

① 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점이다.
② 삼각형의 내심에서 세 변에 이르는 거리는 같다.

0066 $\overline{AC}$는 ∠A의 외각의 이등분선이므로

$\overline{AO}:\overline{AB}=\overline{OC}:\overline{BC}$　　… ❶

$\overline{AO}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$, $\overline{AB}=\sqrt{(2-3)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{5}$이므로

$\overline{OC}:\overline{BC}=\sqrt{10}:\sqrt{5}=\sqrt{2}:1$　　… ❷

따라서 점 B는 $\overline{OC}$를 $(\sqrt{2}-1):1$로 내분하는 점이므로

$\dfrac{(\sqrt{2}-1)a}{\sqrt{2}-1+1}=2,\ \dfrac{(\sqrt{2}-1)b}{\sqrt{2}-1+1}=-1$

$\therefore a=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=4+2\sqrt{2},\ b=\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=-2-\sqrt{2}$　　… ❸

$\therefore a-b=6+3\sqrt{2}$　　… ❹

답 $6+3\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AO}:\overline{AB}=\overline{OC}:\overline{BC}$임을 알 수 있다.	30 %
❷ $\overline{OC}:\overline{BC}$를 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 13 자취의 방정식; 점의 자취

본책 17쪽

어떤 조건을 만족시키는 점들이 도형을 이룰 때 이 도형을 주어진 조건을 만족시키는 점들의 자취라 하고, 자취의 방정식을 구할 때에는 다음을 이용한다.

① 점 $P(a, b)$가 직선 $y=mx+n$ 위를 움직인다.
 ➡ $b=ma+n$

② 점 P가 어떤 등식을 만족시킨다.
 ➡ $P(x, y)$로 놓고 좌표를 어떤 등식에 대입한다.

0067 $P(a, b)$라 하면 점 P는 직선 $2x-y-4=0$ 위의 점이므로

$2a-b-4=0$ …… ㉠

$Q(x, y)$라 하면 점 Q는 $\overline{AP}$를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$x=\dfrac{a+2\cdot 2}{1+2}=\dfrac{a+4}{3}$, $y=\dfrac{b+2\cdot 4}{1+2}=\dfrac{b+8}{3}$

$\therefore a=3x-4$, $b=3y-8$ …… ㉡

㉠에 ㉡을 대입하면 $2(3x-4)-(3y-8)-4=0$

$\therefore 6x-3y-4=0$

답 $6x-3y-4=0$

0068 $P(x, y)$라 하면 $\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=3$이므로

$(x-1)^2+(y-1)^2-\{(x-3)^2+(y-2)^2\}=3$

$x^2-2x+y^2-2y+2-(x^2-6x+y^2-4y+13)=3$

$4x+2y-11=3$

$\therefore 2x+y-7=0$

답 $2x+y-7=0$

0069 두 점 A, B로부터 같은 거리에 있는 점을 $P(x, y)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(x-8)^2+(y+5)^2=(x-4)^2+(y-1)^2$

$x^2-16x+y^2+10y+89=x^2-8x+y^2-2y+17$

$-8x+12y+72=0$

$\therefore 2x-3y-18=0$

답 $2x-3y-18=0$

0070 1st 점 A_3의 좌표를 구한다.

$\square A_3A_4B_4C_4$는 한 변의 길이가 18인 정사각형이므로 점 A_3의 좌표는

$(\underline{12}, 0)$ ← (점 B_4의 x좌표)$-$($\square A_3A_4B_4C_4$의 한 변의 길이)

2nd 두 점 B_1, B_3의 좌표를 구한다.

정사각형 $OA_1B_1C_1$, $A_1A_2B_2C_2$, $A_2A_3B_3C_3$의 넓이의 비가 $1:4:9$이므로 한 변의 길이의 비는

$\overline{OA_1}:\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}=1:2:3$

이때 $\overline{OA_3}=12$이므로 $\overline{OA_1}+\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}=12$

$\overline{OA_1}+2\overline{OA_1}+3\overline{OA_1}=12$ $\therefore \overline{OA_1}=2$

즉 $\overline{A_1A_2}=4$, $\overline{A_2A_3}=6$이므로

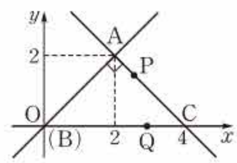
$B_1(2, 2)$, $B_3(12, 6)$

3rd $\overline{B_1B_3}^2$의 값을 구한다.

$\overline{B_1B_3}^2=(12-2)^2+(6-2)^2=116$

답 116

0071 1st 도로를 좌표평면 위에 나타낸 후 세 점 A, B, C의 좌표를 구한다.



오른쪽 그림과 같이 두 지점 B, C를 연결한 도로를 x축으로 하고, B 지점을 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 B 지점은 원점이고 $C(4, 0)$, $\overline{OA}=2\sqrt{2}$이므로 $A(2, 2)$

2nd t시간 후의 민아와 승우의 위치를 좌표로 나타낸다.

t시간 후의 민아와 승우의 위치를 각각 P, Q라 하면 $\overline{AP}=\sqrt{2}t$, $\overline{QC}=2t$이므로

$P(2+t, 2-t)$, $Q(4-2t, 0)$

3rd 두 사람 사이의 직선 거리의 최솟값을 구한다.

t시간 후의 두 사람 사이의 직선 거리는

$\overline{PQ}=\sqrt{\{(4-2t)-(2+t)\}^2+\{-(2-t)\}^2}$

$=\sqrt{10t^2-16t+8}$

$=\sqrt{10\left(t-\dfrac{4}{5}\right)^2+\dfrac{8}{5}}$

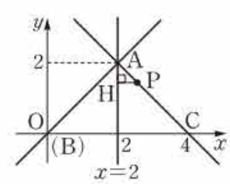
따라서 두 사람 사이의 직선 거리는 $\dfrac{4}{5}$시간 후에 최소가 되고, 그때의 거리는 $\sqrt{\dfrac{8}{5}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$ (km)이다.

답 ②

참고 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 직선 $x=2$에 내린 수선의 발을 H라 하면 △AHP에서 $\overline{AP}=\sqrt{2}t$이므로

$\overline{AH}=\overline{HP}=t$

$\therefore P(2+t, 2-t)$



0072 1st 주어진 방정식을 (일차식)×(일차식)=(정수) 꼴로 변형한다.

$xy-3x+y-8=0$에서

$x(y-3)+(y-3)-5=0$ $\therefore (x+1)(y-3)=5$

2nd 조건을 만족시키는 순서쌍 (x, y)를 구한다.

x, y가 정수이므로

(i) $x+1=-5$, $y-3=-1$일 때, $x=-6$, $y=2$

(ii) $x+1=-1$, $y-3=-5$일 때, $x=-2$, $y=-2$

(iii) $x+1=1$, $y-3=5$일 때, $x=0$, $y=8$

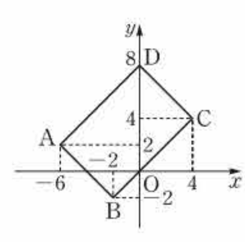
(iv) $x+1=5$, $y-3=1$일 때, $x=4$, $y=4$

이상에서 순서쌍 (x, y)는

$(-6, 2)$, $(-2, -2)$, $(0, 8)$, $(4, 4)$ … ❶

3rd 다각형의 둘레의 길이를 구한다.

$A(-6, 2)$, $B(-2, -2)$, $C(4, 4)$, $D(0, 8)$이라 하면



$\overline{AB}=\sqrt{(-2+6)^2+(-2-2)^2}$

$=4\sqrt{2}$,

$\overline{BC}=\sqrt{(4+2)^2+(4+2)^2}=6\sqrt{2}$,

$\overline{CD}=\sqrt{(-4)^2+(8-4)^2}=4\sqrt{2}$,

$\overline{DA}=\sqrt{(-6)^2+(2-8)^2}=6\sqrt{2}$

따라서 구하는 둘레의 길이는

$4\sqrt{2}+6\sqrt{2}+4\sqrt{2}+6\sqrt{2}=20\sqrt{2}$ ⋯ ❷

답 $20\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 순서쌍 (x, y)를 구할 수 있다.	50 %
❷ 둘레의 길이를 구할 수 있다.	50 %

0073

실수 k에 대하여 ❶이차함수 $y=(x-k)^2-2$의 그래프와 직선 $y=2$는 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. ❷삼각형 AOB가 이등변삼각형이 되도록 하는 서로 다른 k의 개수를 n, k의 최댓값을 M이라 하자. $n+M$의 값은? (단, O는 원점이고, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.)

두 점 A, B의 x좌표는 이차방정식 $(x-k)^2-2=2$의 두 실근이고, y좌표는 2이다.

$\overline{OA}=\overline{OB}$ 또는 $\overline{OA}=\overline{AB}$ 또는 $\overline{OB}=\overline{AB}$

이차방정식 $(x-k)^2-2=2$의 두 실근 중 작은 것이 점 A의 x좌표이다.

① $7+\sqrt{3}$ ② $7+2\sqrt{3}$ ③ $7+3\sqrt{3}$
④ $9+2\sqrt{3}$ ⑤ $9+3\sqrt{3}$

❶을 이용하여 두 점 A, B의 x좌표를 k에 대한 식으로 나타낸 후 ❷를 만족시키는 경우를 나누어 k의 값을 구한다.

1st 두 점 A, B의 좌표를 k에 대한 식으로 나타낸다.

이차함수 $y=(x-k)^2-2$의 그래프와 직선 $y=2$가 만나는 점의 x좌표는 $(x-k)^2-2=2$에서

$(x-k)^2=4,\quad x-k=\pm 2$

$\therefore x=k-2$ 또는 $x=k+2$

이때 점 A의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 작으므로

$A(k-2, 2)$, $B(k+2, 2)$

2nd △AOB가 이등변삼각형이 되도록 하는 조건을 찾고, 그때의 k의 값을 각각 구한다.

△AOB가 이등변삼각형이 되려면

$\overline{OA}=\overline{OB}$ 또는 $\overline{OA}=\overline{AB}$ 또는 $\overline{OB}=\overline{AB}$

이어야 한다.

(i) $\overline{OA}=\overline{OB}$일 때,

$\overline{OA}^2=\overline{OB}^2$이므로

$(k-2)^2+2^2=(k+2)^2+2^2$

$8k=0 \quad \therefore k=0$

(ii) $\overline{OA}=\overline{AB}$일 때,

$\overline{OA}^2=\overline{AB}^2$이므로

$(k-2)^2+2^2=\{(k+2)-(k-2)\}^2$

$k^2-4k-8=0 \quad \therefore k=2\pm 2\sqrt{3}$

(iii) $\overline{OB}=\overline{AB}$일 때,

$\overline{OB}^2=\overline{AB}^2$이므로

$(k+2)^2+2^2=\{(k+2)-(k-2)\}^2$

$k^2+4k-8=0 \quad \therefore k=-2\pm 2\sqrt{3}$

3rd $n+M$의 값을 구한다.

이상에서 $n=5$, $M=2+2\sqrt{3}$이므로

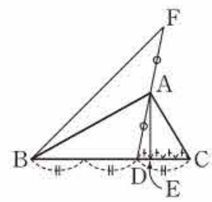
$n+M=7+2\sqrt{3}$

답 ②

0074

1st △ABC에서 조건을 만족시키는 세 점 D, E, F를 그린다.

△ABC에서 주어진 조건을 만족시키는 세 점 D, E, F를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



2nd △ABE, △FBD의 넓이를 각각 △ADE의 넓이를 이용하여 나타낸다.

$\overline{DC}=4\overline{DE}$, $\overline{BD}=2\overline{DC}$이므로

$\overline{BE}=\overline{BD}+\overline{DE}=8\overline{DE}+\overline{DE}=9\overline{DE}$

$\therefore$ △ABE$=9$△ADE ⋯⋯ ㉠

$\overline{BD}=8\overline{DE}$이므로 △ABD$=8$△ADE

$\overline{DF}=2\overline{DA}$이므로

△FBD$=2$△ABD$=16$△ADE ⋯⋯ ㉡

3rd k의 값을 구한다.

△FBD$=k$△ABE에서

16△ADE$=k\cdot 9$△ADE ($\because$ ㉠, ㉡)

$9k=16 \quad \therefore k=\frac{16}{9}$

답 $\frac{16}{9}$

0075

1st 평행선 사이의 선분의 길이의 비를 이용하여 $\overline{BC}$와 $\overline{CP}$의 길이의 비를 구한다.

△ABP에서 $\overline{AP}/\!/\overline{DC}$이므로

$\overline{BD}:\overline{DA}=\overline{BC}:\overline{CP}$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(-5)^2+(-9-3)^2}=13$,

$\overline{DA}=\overline{AC}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$이므로

$\overline{BD}=13-5=8$

$\therefore \overline{BC}:\overline{CP}=8:5$

2nd 점 P의 좌표를 구한다.

$P(a, b)$라 하면 점 C는 $\overline{BP}$를 $8:5$로 내분하는 점이므로

$\frac{8a+5\cdot(-5)}{8+5}=4,\quad \frac{8b+5\cdot(-9)}{8+5}=0$

$8a-25=52$, $8b-45=0$

$\therefore a=\frac{77}{8}$, $b=\frac{45}{8}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{77}{8}, \frac{45}{8}\right)$이다.

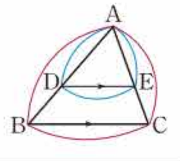
답 ⑤

SSEN 특강 평행선 사이의 선분의 길이의 비

△ABC에서 두 점 D, E가 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 위의 점일 때, $\overline{BC}/\!/\overline{DE}$이면

① $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}=\overline{BC}:\overline{DE}$

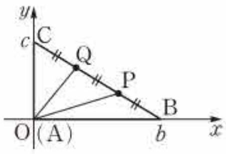
② $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$



0076

1st 점 A가 원점에 오도록 직각삼각형 ABC를 좌표평면 위에 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 직선 AB를 x축으로 하고, 직선 AC를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 A는 원점이다.



2nd 두 점 P, Q의 좌표를 두 점 B, C의 좌표를 이용하여 나타낸다.

△ABC의 두 꼭짓점 B, C의 좌표를 각각 $(b,\ 0)$, $(0,\ c)$라 하면 점 P는 $\overline{BC}$를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$$P\left(\frac{1\cdot0+2b}{1+2},\ \frac{c+2\cdot0}{1+2}\right),\ 즉\ P\left(\frac{2b}{3},\ \frac{c}{3}\right)$$

또 점 Q는 $\overline{BC}$를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$Q\left(\frac{2\cdot0+b}{2+1},\ \frac{2c+1\cdot0}{2+1}\right),\ 즉\ Q\left(\frac{b}{3},\ \frac{2c}{3}\right)$$ ··· ❶

3rd l을 두 점 B, C의 좌표를 이용하여 나타낸다.

$$l=\overline{AB}^2+\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2+\overline{AC}^2$$
$$=b^2+\left\{\left(\frac{2b}{3}\right)^2+\left(\frac{c}{3}\right)^2\right\}+\left\{\left(\frac{b}{3}\right)^2+\left(\frac{2c}{3}\right)^2\right\}+c^2$$
$$=\frac{14}{9}(b^2+c^2)$$ ··· ❷

4th $3l$의 값을 구한다.

$\overline{BC}=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{6}$이므로 $b^2+c^2=6$

$$\therefore\ 3l=3\cdot\frac{14}{9}\cdot6=28$$ ··· ❸

답 28

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q의 좌표를 두 점 B, C의 좌표를 이용하여 나타낼 수 있다.	40 %
❷ l을 두 점 B, C의 좌표를 이용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❸ $3l$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0077

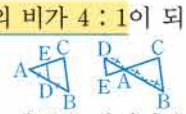
좌표평면 위에 세 점 A(2, 3), B(7, 1), C(4, 5)가 있다. 직선 AB 위의 점 D에 대하여 점 D를 지나고 직선 BC와 평행한 직선이 직선 AC와 만나는 점을 E라 하자.

$\overline{BC}\,/\!/\,\overline{DE}$이므로 △ABC∽△ADE이다.

❶ 삼각형 ABC와 삼각형 ADE의 넓이의 비가 4 : 1이 되

△ABC와 △ADE의 닮음비가 2 : 1이다.

도록 하는 모든 ❷ 점 D의 y좌표의 곱은?



(단, 점 D는 점 A도 아니고 점 B도 아니다.)

① 8　② $\frac{17}{2}$　③ 9　④ $\frac{19}{2}$　⑤ 10

❶을 만족시키는 점 D의 위치에 따라 경우를 나누어 점 D의 좌표를 구한 후 ❷를 구한다.

1st 직선 BC와 직선 DE가 평행함을 이용하여 $\overline{AB}$와 $\overline{AD}$의 길이의 비를 구한다.

직선 BC와 직선 DE가 평행하고 두 직선 AB, AC가 점 A에서 만나므로

△ABC∽△ADE (AA 닮음)

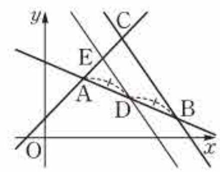
이때 △ABC와 △ADE의 넓이의 비가 4 : 1이므로

$\overline{AB}:\overline{AD}=2:1$

2nd 점 D의 위치에 따라 경우를 나누어 점 D의 좌표를 구한다.

(i) 점 D가 $\overline{AB}$ 위의 점일 때,

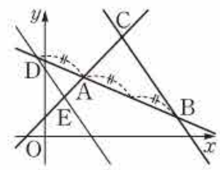
점 D는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$의 중점이므로



$$D\left(\frac{2+7}{2},\ \frac{3+1}{2}\right)$$
$$\therefore\ D\left(\frac{9}{2},\ 2\right)$$

(ii) 점 D가 $\overline{AB}$의 연장선 위의 점일 때,

점 A는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{DB}$를 1 : 2로 내분하는 점이므로 $D(a,\ b)$라 하면



$$\frac{7+2a}{1+2}=2,\ \frac{1+2b}{1+2}=3$$
$$2a+7=6,\ 2b+1=9$$
$$\therefore\ a=-\frac{1}{2},\ b=4\qquad\therefore\ D\left(-\frac{1}{2},\ 4\right)$$

3rd 모든 점 D의 y좌표의 곱을 구한다.

(i), (ii)에서 모든 점 D의 y좌표의 곱은

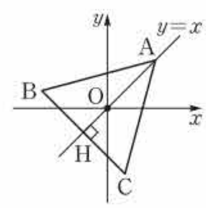
$2\cdot4=8$

답 ①

0078

1st △ABC를 좌표평면 위에 나타낸다.

점 A가 직선 $y=x$ 위에 있고 △ABC의 무게중심이 원점이므로 △ABC를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



2nd △ABC의 넓이를 이용하여 한 변의 길이를 구한다.

△ABC의 한 변의 길이를 $a\,(a>0)$라 하면 넓이가 $36\sqrt{3}$이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=36\sqrt{3},\qquad a^2=144$$
$$\therefore\ a=12\ (\because\ a>0)$$ ··· ❶

3rd 삼각형의 무게중심은 세 중선을 꼭짓점으로부터 각각 2 : 1로 내분함을 이용하여 $\overline{AO}$의 길이를 구한다.

점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot12=6\sqrt{3}$이므로

$$\overline{AO}=\frac{2}{3}\overline{AH}=\frac{2}{3}\cdot6\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$ ··· ❷

4th 점 A의 x좌표와 y좌표의 곱을 구한다.

$A(k,\ k)$라 하면

$$\sqrt{k^2+k^2}=4\sqrt{3},\qquad 2k^2=48\qquad\therefore\ k^2=24$$

따라서 점 A의 x좌표와 y좌표의 곱은

$k^2=24$ ··· ❸

$k=\pm2\sqrt{6}$이므로 점 A의 좌표는 $(-2\sqrt{6},\ -2\sqrt{6})$ 또는 $(2\sqrt{6},\ 2\sqrt{6})$

답 24

채점 기준	비율
❶ △ABC의 한 변의 길이를 구할 수 있다.	20 %
❷ $\overline{AO}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❸ 점 A의 x좌표와 y좌표의 곱을 구할 수 있다.	50 %

0079 1st A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)라 하고, 주어진 조건을 이용하여 x_1+x_2, y_1+y_2의 값을 구한다.

A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)라 하면 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$는 △OAB의 중선이므로 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$의 교점은 △OAB의 무게중심이다. 즉

$$\frac{x_1+x_2}{3}=8,\ \frac{y_1+y_2}{3}=10$$

$$\therefore x_1+x_2=24,\ y_1+y_2=30$$

2nd 두 점 C, D의 좌표를 x_1, x_2, y_1, y_2를 이용하여 나타낸다.

두 점 C, D는 각각 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$의 중점이므로

$$C\left(\frac{x_1}{2},\ \frac{y_1}{2}\right),\ D\left(\frac{x_2}{2},\ \frac{y_2}{2}\right)$$

3rd △OCD의 무게중심의 좌표를 구한다.

△OCD의 무게중심의 좌표를 $(p,\ q)$라 하면

$$p=\frac{1}{3}\left(\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}\right)=\frac{x_1+x_2}{6}=4,$$

$$q=\frac{1}{3}\left(\frac{y_1}{2}+\frac{y_2}{2}\right)=\frac{y_1+y_2}{6}=5$$

따라서 △OCD의 무게중심의 좌표는 (4, 5)이다.

답 (4, 5)

SSEN 특강 삼각형의 무게중심

① 삼각형의 세 중선의 교점이다.
② 세 중선의 길이를 각 꼭짓점으로부터 각각 2 : 1로 나눈다.
③ 삼각형의 무게중심과 꼭짓점을 이어서 생기는 세 삼각형의 넓이는 모두 같다.

0080 1st 두 점 A, B의 좌표를 구한다.

△OAC, △ABC, △BOC의 넓이가 모두 같으므로 점 C(13, 11)은 △OAB의 무게중심이다. ··· ❶

$A\left(a,\ \frac{1}{3}a\right)$, B($b$, $2b$)라 하면

$$\frac{a+b}{3}=13,\ \frac{\frac{1}{3}a+2b}{3}=11$$

$$a+b=39,\ a+6b=99$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=27$, $b=12$

$\therefore$ A(27, 9), B(12, 24) ··· ❷

2nd k의 값을 구한다.

직선 $y=-x+k$가 점 A(27, 9)를 지나므로

$9=-27+k$ $\quad\therefore k=36$ ··· ❸

└ 직선 $y=-x+k$가 점 B(12, 24)를 지남을 이용하여 k의 값을 구할 수도 있다.

답 36

채점 기준	비율
❶ 점 C가 △OAB의 무게중심임을 알 수 있다.	20 %
❷ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	60 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0081 1st A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)이라 하고, 주어진 조건을 이용하여 $x_1+x_2+x_3$, $y_1+y_2+y_3$의 값을 구한다.

A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)이라 하면 $\overline{AB}$의 중점의 좌표가 (1, 2)이므로

$$\frac{x_1+x_2}{2}=1,\ \frac{y_1+y_2}{2}=2$$

$\therefore x_1+x_2=2,\ y_1+y_2=4$ ······ ㉠

$\overline{BC}$의 중점의 좌표가 (5, 3)이므로

$$\frac{x_2+x_3}{2}=5,\ \frac{y_2+y_3}{2}=3$$

$\therefore x_2+x_3=10,\ y_2+y_3=6$ ······ ㉡

$\overline{CA}$의 중점의 좌표가 (3, 7)이므로

$$\frac{x_3+x_1}{2}=3,\ \frac{y_3+y_1}{2}=7$$

$\therefore x_3+x_1=6,\ y_3+y_1=14$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$$2(x_1+x_2+x_3)=18,\ 2(y_1+y_2+y_3)=24$$

$$\therefore x_1+x_2+x_3=9,\ y_1+y_2+y_3=12$$

2nd $a+b$의 값을 구한다.

△ABC의 무게중심의 좌표가 $(a,\ b)$이므로

$$a=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=3,\ b=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=4$$

$\therefore a+b=7$

답 7

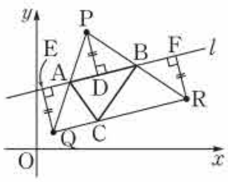
다른 풀이 D(1, 2), E(5, 3), F(3, 7)이라 하면 △ABC의 무게중심은 △DEF의 무게중심과 일치하므로

$$a=\frac{1+5+3}{3}=3,\ b=\frac{2+3+7}{3}=4$$

$\therefore a+b=7$

0082 1st 세 점 P, Q, R에서 직선 l에 이르는 거리가 같음을 이용하여 합동인 삼각형을 찾는다.

오른쪽 그림과 같이 세 점 P, Q, R에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하면



△ADP≡△AEQ (ASA 합동),
△BDP≡△BFR (ASA 합동)

$\therefore \overline{AP}=\overline{AQ}$, $\overline{BP}=\overline{BR}$

2nd 세 점 A, B, C의 좌표를 구한다.

점 A는 $\overline{PQ}$의 중점이므로

$$A\left(\frac{3+1}{2},\ \frac{7+1}{2}\right),\ 즉\ A(2,\ 4)$$

점 B는 $\overline{PR}$의 중점이므로

$$B\left(\frac{3+9}{2},\ \frac{7+3}{2}\right),\ 즉\ B(6,\ 5)$$

한편 점 C는 $\overline{QR}$를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$$C\left(\frac{1\cdot 9+2\cdot 1}{1+2},\ \frac{1\cdot 3+2\cdot 1}{1+2}\right),\ 즉\ C\left(\frac{11}{3},\ \frac{5}{3}\right)$$ ··· ❶

3rd $9(a+b)$의 값을 구한다.

△ABC의 무게중심의 좌표가 $(a,\ b)$이므로

$$a=\frac{1}{3}\left(2+6+\frac{11}{3}\right)=\frac{35}{9},\ b=\frac{1}{3}\left(4+5+\frac{5}{3}\right)=\frac{32}{9}$$

$\therefore 9(a+b)=67$ ··· ❷

답 67

채점 기준	비율
❶ 세 점 A, B, C의 좌표를 구할 수 있다.	70 %
❷ $9(a+b)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0083

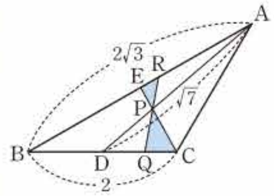
❶ $\overline{AB}=2\sqrt{3}$, $\overline{BC}=2$인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 D라 할 때, $\overline{AD}=\sqrt{7}$

$\overline{BD}=\overline{DC}=\frac{1}{2}\overline{BC}=1$

이다. ❷ 각 ACB의 이등분선이 선분 AB와 만나는 점을 E, 선분 CE와 선분 AD가 만나는 점을 P, ❸ 각 APE의 이등분선이 선분 AB와 만나는 점을 R, 선분 PR의 연장선이 선분 BC와 만나는 점을 Q라 하자. ❹ 삼각형 PRE의 넓이를 S_1, ❺ 삼각형 PQC의 넓이를 S_2라 할 때,

$\overline{CA}:\overline{CB}=\overline{AE}:\overline{BE}$

$\overline{PA}:\overline{PE}=\overline{AR}:\overline{ER}$, $\overline{PD}:\overline{PC}=\overline{DQ}:\overline{CQ}$



$\dfrac{S_2}{S_1}=a+b\sqrt{7}$이다. ab의 값은?

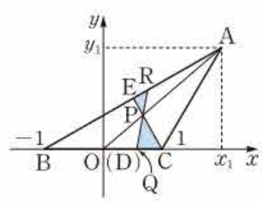
(단, a, b는 유리수이다.)

① -16 ② -14 ③ -12 ④ -10 ⑤ -8

△ABC를 좌표평면 위에 놓고 ❶을 이용하여 점 A의 좌표를 구한다. $\overline{AC}$의 길이를 구한 후 ❷, ❸에서 각의 이등분선의 성질을 이용하여 ❹, ❺를 구하기 위해 필요한 여러 가지 선분의 길이와 길이의 비를 구한다.

1st $\overline{AC}$의 길이를 구하여 △ABC가 어떤 삼각형인지 판별한다.

오른쪽 그림과 같이 점 D를 원점, 직선 BC를 x축으로 하고, 점 A가 제1사분면 위에 오도록 좌표평면을 잡으면 B$(-1,\ 0)$, C$(1,\ 0)$이다.



A$(x_1,\ y_1)$ $(x_1>0,\ y_1>0)$이라 하면

$\overline{AB}=2\sqrt{3}$, $\overline{AD}=\sqrt{7}$이므로

$\sqrt{(x_1+1)^2+{y_1}^2}=2\sqrt{3}$, $\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}=\sqrt{7}$

${x_1}^2+2x_1+{y_1}^2=11$, ${x_1}^2+{y_1}^2=7$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x_1=2$, $y_1=\sqrt{3}$ $(\because y_1>0)$

$\therefore$ A$(2,\ \sqrt{3})$

따라서 $\overline{AC}=\sqrt{(1-2)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$이므로 △ABC는 $\overline{AC}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다.

2nd $\overline{CE}$의 길이를 구한다.

이등변삼각형 ABC에서 $\overline{CE}$는 ∠ACB의 이등분선이므로 $\overline{CE}$는 $\overline{AB}$의 수직이등분선이다.

즉 $\angle BEC=90°$, $\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{3}$이므로 직각삼각형 CEB에서

$\overline{CE}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$

3rd 점 P가 △ABC의 무게중심임을 이용하여 $\overline{AP}$, $\overline{PD}$, $\overline{CP}$, $\overline{PE}$의 길이를 구한다.

$\overline{AD}$, $\overline{CE}$는 △ABC의 중선이므로 점 P는 △ABC의 무게중심이다.

$\overline{AP}:\overline{PD}=2:1$에서 $\overline{AP}=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$, $\overline{PD}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

$\overline{CP}:\overline{PE}=2:1$에서 $\overline{CP}=\dfrac{2}{3}$, $\overline{PE}=\dfrac{1}{3}$

4th △ABC의 넓이를 S라 하고, 각의 이등분선의 성질을 이용하여 S_1, S_2의 넓이를 S를 이용하여 나타낸다.

△ABC$=S$라 하면

△PAE$=$△PDC$=\dfrac{S}{6}$

△PAE에서 $\overline{PR}$가 ∠APE의 이등분선이므로

$\overline{AR}:\overline{ER}=\overline{AP}:\overline{PE}=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}:\dfrac{1}{3}=2\sqrt{7}:1$

따라서 △PAE : △PRE$=(2\sqrt{7}+1):1$이므로

$\dfrac{S}{6}:S_1=(2\sqrt{7}+1):1$ $\quad\therefore S_1=\dfrac{S}{6(2\sqrt{7}+1)}$

△PDC에서 $\overline{PQ}$가 ∠CPD의 이등분선이므로

$\overline{DQ}:\overline{CQ}=\overline{PD}:\overline{CP}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}:\dfrac{2}{3}=\sqrt{7}:2$

따라서 △PDC : △PQC$=(\sqrt{7}+2):2$이므로

$\dfrac{S}{6}:S_2=(\sqrt{7}+2):2$ $\quad\therefore S_2=\dfrac{S}{3(\sqrt{7}+2)}$

5th ab의 값을 구한다.

$\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{S}{3(\sqrt{7}+2)}\cdot\dfrac{6(2\sqrt{7}+1)}{S}=\dfrac{2(2\sqrt{7}+1)}{\sqrt{7}+2}=8-2\sqrt{7}$

따라서 $a=8$, $b=-2$이므로

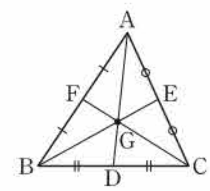
$ab=-16$

답 ①

SSEN 특강 삼각형의 무게중심과 넓이

점 G가 △ABC의 무게중심이면 세 중선에 의하여 나누어지는 6개의 삼각형의 넓이는 모두 같다.

➡ △GAF$=$△GFB$=$△GBD
$=$△GDC$=$△GCE
$=$△GEA
$=\dfrac{1}{6}$△ABC

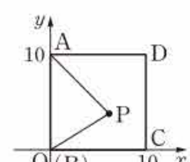


0084

1st 점 B가 원점에 오도록 정사각형 ABCD를 좌표평면 위에 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면

A$(0,\ 10)$, B$(0,\ 0)$



2nd P$(x,\ y)$라 하고 자취의 방정식을 구한다.

P$(x,\ y)$라 하면 $\overline{AP}^2-\overline{BP}^2=20$에서

$\{x^2+(y-10)^2\}-(x^2+y^2)=20$

$-20y+100=20$ $\quad\therefore y=4$

따라서 점 P의 자취는 ①과 같다.

답 ①

Ⅰ. 도형의 방정식

02 직선의 방정식

0085 $y-10=-2\{x-(-3)\}$ $\therefore y=-2x+4$

답 $y=-2x+4$

0086 답 $x=-9$

0087 답 $y=2$

0088 $y-1=\dfrac{-5-1}{4-1}(x-1)$ $\therefore y=-2x+3$

답 $y=-2x+3$

0089 $y-(-7)=\dfrac{-4-(-7)}{1-(-2)}\{x-(-2)\}$

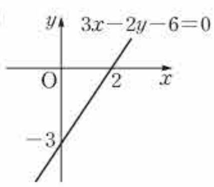
$\therefore y=x-5$ 답 $y=x-5$

0090 두 점의 x좌표가 모두 3이므로 $x=3$ 답 $x=3$

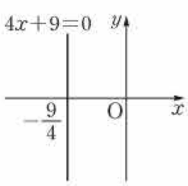
0091 답 (가) a (나) b (다) a (라) $\dfrac{b}{a}$

0092 답 $\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{6}=1$

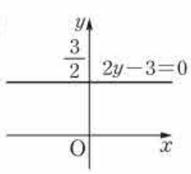
0093 답



0094 답 $4x+9=0$



0095 답

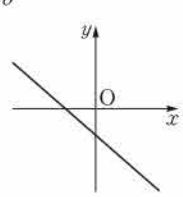


0096 $b\neq0$이므로 $ax+by+c=0$에서

$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$

이때 $a>0$, $b>0$, $c>0$에서 $-\dfrac{a}{b}<0$, $-\dfrac{c}{b}<0$

따라서 주어진 직선의 기울기와 y절편이 모두 음수이므로 주어진 직선은 오른쪽 그림과 같이 제1사분면을 지나지 않는다.



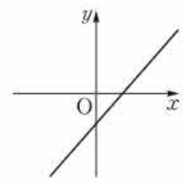
답 제1사분면

0097 $b\neq0$이므로 $ax+by+c=0$에서

$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$

이때 $a>0$, $b<0$, $c<0$에서 $-\dfrac{a}{b}>0$, $-\dfrac{c}{b}<0$

따라서 주어진 직선의 기울기가 양수, y절편이 음수이므로 주어진 직선은 오른쪽 그림과 같이 제2사분면을 지나지 않는다.



답 제2사분면

0098 주어진 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+2y+4=0$, $3x-y-9=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=-3$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(2, -3)$ 답 $(2, -3)$

0099 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+1)k+y-1=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+1=0$, $y-1=0$ $\therefore x=-1$, $y=1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-1, 1)$ 답 $(-1, 1)$

0100 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$3x-2y+3+k(x-3y-3)=0$ (k는 실수) …… ㉠

이라 하면 이 직선이 원점을 지나므로

$3-3k=0$ $\therefore k=1$

㉠에 $k=1$을 대입하면

$3x-2y+3+(x-3y-3)=0$

$\therefore 4x-5y=0$ 답 $4x-5y=0$

0101 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x-y+2+k(2x+y+1)=0$ (k는 실수) …… ㉠

이라 하면 이 직선이 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$-1+k=0$ $\therefore k=1$

㉠에 $k=1$을 대입하면

$x-y+2+(2x+y+1)=0$, $3x+3=0$

$\therefore x=-1$ 답 $x=-1$

0102 $2m+1=-2$이므로

$m=-\dfrac{3}{2}$ 답 $-\dfrac{3}{2}$

0103 $-2(2m+1)=-1$이므로

$2m+1=\dfrac{1}{2}$ $\therefore m=-\dfrac{1}{4}$ 답 $-\dfrac{1}{4}$

0104 ㄴ. $\dfrac{1}{2}=\dfrac{-3}{-6}\neq\dfrac{4}{-1}$이므로 직선 $x-3y+4=0$과 평행하다.

ㄷ. $1\cdot3+(-3)\cdot1=0$이므로 직선 $x-3y+4=0$과 수직이다.

답 평행한 직선: ㄴ, 수직인 직선: ㄷ

0105 $\frac{a}{1}=\frac{3}{-(a+4)}\neq\frac{-1}{1}$에서

$a^2+4a+3=0$, $a\neq-1$

$(a+3)(a+1)=0$, $a\neq-1$ $\quad\therefore a=-3$ 답 -3

0106 $a\cdot1+3\{-(a+4)\}=0$에서

$2a=-12$ $\quad\therefore a=-6$ 답 -6

0107 직선 $y=\frac{1}{3}x-2$에 수직인 직선의 기울기는 -3이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-(-3)=-3\{x-(-5)\}$ $\quad\therefore y=-3x-18$

답 $y=-3x-18$

0108 $2x-5y+3=0$에서 $\quad y=\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}$

이 직선과 평행한 직선의 기울기는 $\frac{2}{5}$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-(-2)=\frac{2}{5}(x-10)$ $\quad\therefore y=\frac{2}{5}x-6$

답 $y=\frac{2}{5}x-6$

0109 $6x-3y+4=0$에서 $\quad y=2x+\frac{4}{3}$

이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $\quad-\frac{1}{2}$

따라서 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 점 $(-4, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

x절편이 -4

$y=-\frac{1}{2}\{x-(-4)\}$ $\quad\therefore y=-\frac{1}{2}x-2$

답 $y=-\frac{1}{2}x-2$

0110 주어진 두 직선의 기울기는 -3으로 같고 y절편은 다르므로 두 직선은 평행하다.

따라서 주어진 두 직선의 교점의 개수는 0이다. 답 0

0111 $\frac{4}{4}\neq\frac{3}{2}$이므로 주어진 두 직선의 교점의 개수는 1이다.

답 1

0112 $\frac{|3\cdot(-1)+4\cdot5-8|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{9}{5}$ 답 $\frac{9}{5}$

0113 $\frac{|2\cdot7-3+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{15}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$ 답 $3\sqrt{5}$

0114 $y=\frac{1}{3}x+2$에서 $\quad x-3y+6=0$

따라서 구하는 거리는

$\frac{|2-3\cdot(-4)+6|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{20}{\sqrt{10}}=2\sqrt{10}$ 답 $2\sqrt{10}$

0115 $\frac{|20|}{\sqrt{1^2+7^2}}=\frac{20}{5\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

0116 $|6-(-3)|=9$ 답 9

SSEN 특강 점과 직선 $x=p$ 또는 $y=q$ 사이의 거리

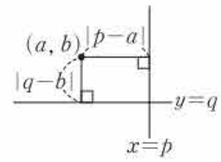
점 (a, b)와

① 직선 $x=p$ 사이의 거리

➡ $|p-a|$

② 직선 $y=q$ 사이의 거리

➡ $|q-b|$



0117 $|-2-1|=3$ 답 3

0118 두 직선 $2x+3y=0$, $2x+3y-13=0$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x+3y=0$ 위의 한 점 $(0, 0)$과 직선 $2x+3y-13=0$ 사이의 거리와 같다.

$\therefore \frac{|-13|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$ 답 $\sqrt{13}$

0119 두 직선 $3x+4y-3=0$, $6x+8y+5=0$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x+4y-3=0$ 위의 한 점 $(1, 0)$과 직선 $6x+8y+5=0$ 사이의 거리와 같다.

$\therefore \frac{|6\cdot1+8\cdot0+5|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{11}{10}$ 답 $\frac{11}{10}$

유형 01 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식

집중 공략 본책 26쪽

점 (a, b)를 지나고

① 기울기가 m인 직선의 방정식은 $\quad y-b=m(x-a)$

② x축에 평행한 직선의 방정식은 $\quad y=b$ (단, $b\neq0$)

y축에 수직인 직선

③ y축에 평행한 직선의 방정식은 $\quad x=a$ (단, $a\neq0$)

x축에 수직인 직선

④ x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\theta\,(0^\circ\leq\theta<90^\circ)$인 직선의 방정식은 $\quad y-b=\tan\theta\cdot(x-a)$

0120 두 점 $(-3, 1)$, $(5, 7)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{1+7}{2}\right)$, 즉 $(1, 4)$

따라서 점 $(1, 4)$를 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y-4=2(x-1)$ $\quad\therefore y=2x+2$ 답 $y=2x+2$

0121 직선 $4x-3y+5=0$의 기울기는 $\frac{4}{3}$이므로 기울기가 $\frac{4}{3}$이고 점 $(2, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{4}{3}(x-2)$, $\quad y=\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$

$\therefore 4x-3y+1=0$

따라서 $a=4$, $b=-3$이므로

$ab=-12$ 답 -12

0122 △ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-1+2+5}{3}, \frac{3-2+2}{3}\right)$, 즉 $(2, 1)$ ··· ❶

따라서 점 $(2, 1)$을 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은

$y=1$ ··· ❷

답 $y=1$

채점 기준	비율
❶ △ABC의 무게중심의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 직선의 방정식을 구할 수 있다.	60 %

0123 점 $(2, -1)$을 지나고 기울기가 $\tan 60°=\sqrt{3}$인 직선의 방정식은

$y-(-1)=\sqrt{3}(x-2)$

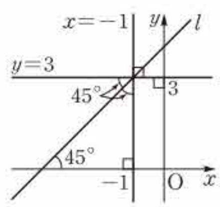
$\therefore \sqrt{3}x-y-1-2\sqrt{3}=0$

따라서 $a=-1$, $b=-1-2\sqrt{3}$이므로

$a+b=-2-2\sqrt{3}$

답 ①

0124 두 직선 $x=-1$, $y=3$은 서로 수직이고 점 $(-1, 3)$에서 만난다.



오른쪽 그림과 같이 직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45°이므로 직선 l의 기울기는

$\tan 45°=1$

이때 직선 l은 점 $(-1, 3)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$y-3=1\cdot\{x-(-1)\}$ $\therefore y=x+4$

따라서 직선 l의 x절편, y절편이 각각 -4, 4이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4=8$

답 ③

유형 02 두 점을 지나는 직선의 방정식

집중 공략 본책 26쪽

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식은

$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ (단, $x_1\neq x_2$)

0125 두 점 $(3, 3)$, $(-1, -5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{-5-3}{-1-3}(x-3)$ $\therefore y=2x-3$

두 점 $(a, -7)$, $(5, b)$가 직선 $y=2x-3$ 위에 있으므로

$-7=2a-3$, $b=2\cdot 5-3$

따라서 $a=-2$, $b=7$이므로 $b-a=9$

답 ⑤

0126 직선 AC의 방정식은 $y=\frac{6-0}{1-5}(x-5)$

$\therefore y=-\frac{3}{2}x+\frac{15}{2}$ ······ ㉠

직선 OB의 방정식은 $y=x$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=3$

따라서 두 대각선의 교점의 좌표는 $(3, 3)$이다.

답 ④

0127 $\overline{AB}$를 $2:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\cdot 3+3\cdot 8}{2+3}, \frac{2\cdot(-7)+3\cdot(-2)}{2+3}\right)$, 즉 $(6, -4)$

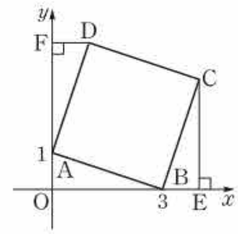
따라서 두 점 $(6, -4)$, $(4, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-(-4)=\frac{2-(-4)}{4-6}(x-6)$

$\therefore y=-3x+14$

답 $y=-3x+14$

0128 오른쪽 그림과 같이 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 E, 점 D에서 y축에 내린 수선의 발을 F라 하면



△AOB≡△BEC≡△DFA

(RHA 합동)

즉 $\overline{BE}=\overline{DF}=1$, $\overline{CE}=\overline{AF}=3$이므로

$C(3+1, 3)$, $D(1, 1+3)$

$\therefore C(4, 3)$, $D(1, 4)$ ··· ❶

따라서 직선 CD의 방정식은

$y-3=\frac{4-3}{1-4}(x-4)$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{13}{3}$ ··· ❷

이므로 구하는 x절편은 13이다. ··· ❸

$y=0$일 때 x의 값

답 13

채점 기준	비율
❶ 두 점 C, D의 좌표를 구할 수 있다.	50 %
❷ 직선 CD의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ 직선 CD의 x절편을 구할 수 있다.	20 %

0129 (i) 세 점 A, B, P가 삼각형을 이룰 때,

$\overline{AP}<\overline{AB}+\overline{BP}$이므로 $\overline{AP}-\overline{BP}<\overline{AB}$

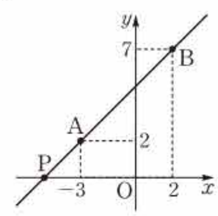
$\overline{BP}<\overline{AB}+\overline{AP}$이므로 $-\overline{AB}<\overline{AP}-\overline{BP}$

$\therefore |\overline{AP}-\overline{BP}|<\overline{AB}$

삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크다.

(ii) 세 점 A, B, P가 한 직선 위에 있을 때,

오른쪽 그림과 같이 점 P는 직선 AB와 x축의 교점이므로



$|\overline{AP}-\overline{BP}|=\overline{BP}-\overline{AP}$

$=\overline{AB}$

(i), (ii)에서 $|\overline{AP}-\overline{BP}|\leq\overline{AB}$이므로

$|\overline{AP}-\overline{BP}|$의 값은 세 점 A, B, P가 한 직선 위에 있을 때 최대이다.

직선 AB의 방정식은

$y-2=\frac{7-2}{2-(-3)}(x+3)$ $\therefore y=x+5$

따라서 $|\overline{AP}-\overline{BP}|$의 값은 $P(-5, 0)$일 때 최대이므로

$\overline{BP}=\sqrt{(-5-2)^2+(-7)^2}=7\sqrt{2}$

답 ③

유형 03 x절편과 y절편이 주어진 직선의 방정식

본책 27쪽

x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (단, $a\neq 0$, $b\neq 0$)

0130 x절편이 -3, y절편이 -4인 직선의 방정식은

$$-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$$

이 직선이 점 $(k,\ -2k)$를 지나므로

$$-\frac{k}{3}+\frac{2k}{4}=1, \qquad \frac{k}{6}=1$$

$\therefore k=6$

답 ③

0131 직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$의 x절편이 2이므로

P(2, 0)

직선 $\underline{\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=2,\ 즉\ \frac{x}{6}-\frac{y}{8}=1}$의 y절편이 -8이므로

└ 우변이 1이 되도록 양변을 2로 나눈다.

Q(0, -8)

따라서 직선 PQ의 방정식은

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{8}=1$$

답 $\frac{x}{2}-\frac{y}{8}=1$

0132 y절편을 $a\,(a\neq0)$라 하면 x절편은 $2a$이므로 직선 l의 방정식은 $\quad \frac{x}{2a}+\frac{y}{a}=1$

이 직선이 점 $(2,\ 3)$을 지나므로

$$\frac{2}{2a}+\frac{3}{a}=1, \qquad \frac{4}{a}=1 \qquad \therefore a=4$$

따라서 직선 l의 방정식은

$$\frac{x}{8}+\frac{y}{4}=1$$

답 $\frac{x}{8}+\frac{y}{4}=1$

0133 $ax+y=3a$에서 $\quad \frac{x}{3}+\frac{y}{3a}=1$

이 직선과 x축, y축의 교점을 각각 A, B라 하면

A(3, 0), B(0, $3a$)

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=6$이므로 $\quad \sqrt{(-3)^2+(3a)^2}=6$

양변을 제곱하면 $\quad 9+9a^2=36$

$a^2=3 \qquad \therefore a=\sqrt{3}\ (\because a>0)$

답 $\sqrt{3}$

유형 04 세 점이 한 직선 위에 있을 조건 본책 27쪽

세 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)이 한 직선 위에 있다.
➡ (직선 AB의 기울기) = (직선 BC의 기울기)
= (직선 AC의 기울기)
➡ $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$ (단, $x_1\neq x_2$, $x_2\neq x_3$, $x_1\neq x_3$)

0134 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AC와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{11-k}{5-1}=\frac{11-7}{5-k},\ 즉\ \frac{11-k}{4}=\frac{4}{5-k}$$

$(11-k)(5-k)=16, \qquad k^2-16k+39=0$

$(k-3)(k-13)=0 \qquad \therefore k=3$ 또는 $k=13$

따라서 모든 k의 값의 합은

$3+13=16$

답 ⑤

참고 세 직선 AB, BC, AC 중 두 직선의 기울기가 같음을 이용하여 식을 세울 때에는 문자가 없는 점을 지나는 직선을 선택하면 계산이 편리하다.

0135 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{a+1}{1+1}=\frac{-5+1}{-a+1},\ 즉\ \frac{a+1}{2}=\frac{4}{a-1} \quad \cdots\cdots ㉠ \quad ⋯ ❶$$

$(a+1)(a-1)=8, \qquad a^2=9$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$ ⋯ ❷

㉠에서 직선 l의 기울기는 $\frac{3+1}{2}=2$이고 점 A$(-1,\ -1)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$y+1=2(x+1) \qquad \therefore y=2x+1$ ⋯ ❸

답 $y=2x+1$

채점 기준	비율
❶ 기울기를 이용하여 a에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	30 %

0136 세 점 A, B, C가 삼각형을 이루지 않으려면 세 점이 한 직선 위에 있어야 한다.

즉 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{3}{a-4}=\frac{a+3}{6}, \qquad (a-4)(a+3)=18$$

$a^2-a-30=0, \qquad (a+5)(a-6)=0$

$\therefore a=6\ (\because a>0)$

답 ④

유형 05 도형의 넓이를 분할하는 직선 본책 28쪽

① △ABC의 꼭짓점 A를 지나면서 그 넓이를 이등분하는 직선
➡ $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 지난다.
② 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선
➡ 두 대각선의 교점을 지난다.

0137 직선 l이 △ABC의 넓이를 이등분하려면 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 지나야 한다.

이때 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{8+0}{2},\ \frac{-6+2}{2}\right),\ 즉\ (4,\ -2)$$

따라서 직선 l은 두 점 $(1,\ 4)$, $(4,\ -2)$를 지나므로 직선 l의 방정식은

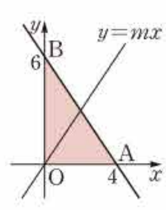
$$y-4=\frac{-2-4}{4-1}(x-1) \qquad \therefore y=-2x+6$$

답 ②

0138 직선 $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$과 x축, y축의 교점을 각각 A, B라 하면

A(4, 0), B(0, 6)

직선 $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $y=mx$가 이등분하려면 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=mx$가 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 지나야 한다.



이때 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4+0}{2},\ \frac{0+6}{2}\right),\ 즉\ (2,\ 3)$$

$y=mx$에 $x=2$, $y=3$을 대입하면

$$3=2m \qquad \therefore m=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

0139 두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 각 직사각형의 대각선의 교점을 모두 지나야 한다. ⋯➊

두 직사각형의 대각선의 교점의 좌표는 각각

$$\left(\frac{-1-3}{2},\ \frac{-1-2}{2}\right),\ \left(\frac{1+3}{2},\ \frac{1+4}{2}\right)$$

$$\therefore \left(-2,\ -\frac{3}{2}\right),\ \left(2,\ \frac{5}{2}\right)$$ ⋯➋

따라서 두 점 $\left(-2,\ -\frac{3}{2}\right)$, $\left(2,\ \frac{5}{2}\right)$를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\frac{5}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)}{2-(-2)}=1$$ ⋯➌

답 1

채점 기준	비율
➊ 조건을 만족시키는 직선은 각 직사각형의 대각선의 교점을 모두 지나야 함을 알 수 있다.	40 %
➋ 두 직사각형의 대각선의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
➌ 직선의 기울기를 구할 수 있다.	30 %

0140 $\underline{\triangle ABD : \triangle ADC=2 : 1}$이므로

높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

$\overline{BD} : \overline{DC}=2 : 1$

즉 점 D는 $\overline{BC}$를 $2 : 1$로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot5+1\cdot(-4)}{2+1},\ \frac{2\cdot(-4)+1\cdot(-1)}{2+1}\right),\ \text{즉 } (2,\ -3)$$

따라서 두 점 $A(1,\ 3)$, $D(2,\ -3)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=\frac{-3-3}{2-1}(x-1)$$

$$\therefore y=-6x+9$$

답 $y=-6x+9$

유형 06 직선의 개형 본책 28쪽

직선 $ax+by+c=0\,(b\neq0)$의 개형은 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ 꼴로 변형한 후 기울기 $-\frac{a}{b}$와 y절편 $-\frac{c}{b}$의 부호를 구하여 그린다.

0141 $b\neq0$이므로 $ax+by+c=0$에서

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

이때 $ac>0$, $bc<0$에서 a, b의 부호가 서로 다르므로

$a>0,\ c>0,\ b<0$ 또는 $a<0,\ c<0,\ b>0$

$$-\frac{a}{b}>0,\ -\frac{c}{b}>0$$

따라서 주어진 직선의 기울기와 y절편이 모두 양수이므로 직선의 개형은 ①이다.

답 ①

0142 직선 $ax+by+c=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 기울기가 양수, y절편이 음수이므로

$$-\frac{a}{b}>0,\ -\frac{c}{b}<0$$ ⋯⋯ ㉠

$a>0,\ b<0,\ c<0$ 또는 $a<0,\ b>0,\ c>0$

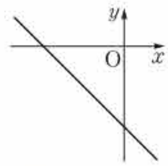
한편 $c\neq0$이므로 $bx+cy-a=0$에서

$$y=-\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}$$

이때 ㉠에서 a, c의 부호가 서로 다르므로

$$-\frac{b}{c}<0,\ \frac{a}{c}<0$$

따라서 직선 $bx+cy-a=0$의 기울기와 y절편이 모두 음수이므로 직선 $bx+cy-a=0$은 오른쪽 그림과 같이 제1사분면을 지나지 않는다.



답 제1사분면

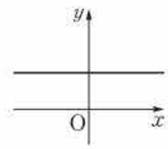
0143 직선 $ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이면

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$ ⋯⋯ ㉠

ㄱ. $a=0$, $bc<0$이면

$$-\frac{a}{b}=0,\ -\frac{c}{b}>0$$ 기울기는 0, y절편은 양수

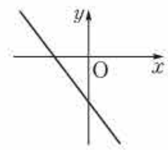
따라서 직선 ㉠은 오른쪽 그림과 같이 제3사분면과 제4사분면을 지나지 않는다.



ㄴ. $ab>0$, $bc>0$이면

$$-\frac{a}{b}<0,\ -\frac{c}{b}<0$$ 기울기와 y절편이 모두 음수

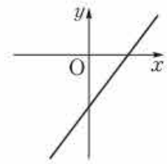
따라서 직선 ㉠은 오른쪽 그림과 같이 제1사분면을 지나지 않는다.



ㄷ. $ab<0$, $c<0$에서 $a>0$, $b<0$, $c<0$이면

$$-\frac{a}{b}>0,\ -\frac{c}{b}<0$$ 기울기는 양수, y절편은 음수

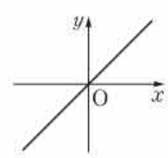
따라서 직선 ㉠은 오른쪽 그림과 같이 제4사분면을 지난다.



ㄹ. $ab<0$, $c=0$이면

$$-\frac{a}{b}>0,\ -\frac{c}{b}=0$$ 기울기는 양수, y절편은 0

따라서 직선 ㉠은 오른쪽 그림과 같이 제1사분면과 제3사분면을 지난다.



이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄹ

유형 07 정점을 지나는 직선 본책 29쪽

직선 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표

➡ 연립방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$의 해

0144 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$$(2x+y+3)k+(-x+2y-4)=0$$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$2x+y+3=0,\ -x+2y-4=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=-2,\ y=1$

따라서 P$(-2,\ 1)$이므로 점 P와 원점 사이의 거리는

$\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$ 답 ③

0145 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+3y-4)k+(x-y-a)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+3y-4=0,\ x-y-a=0$

이때 점 $(b,\ 2)$가 위의 두 직선의 교점이므로

$b+6-4=0,\ b-2-a=0$

따라서 $a=-4,\ b=-2$이므로

$a+b=-6$ 답 -6

0146 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x-y+5)k+(4x-y+3)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x-y+5=0,\ 4x-y+3=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=7$

따라서 P$(1,\ 7)$이므로 기울기가 4이고 점 P를 지나는 직선의 방정식은

$y-7=4(x-1)$ $\therefore\ y=4x+3$ 답 $y=4x+3$

0147 ㄱ. 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+4y+3)k+(-5x+10)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+4y+3=0,\ -5x+10=0$

$\therefore\ x=2,\ y=-\frac{5}{4}$

따라서 주어진 직선은 k의 값에 관계없이 항상 점 $\left(2,\ -\frac{5}{4}\right)$를 지난다.

ㄴ. $k=0$일 때,

$-5x+10=0$ $\therefore\ x=2$

따라서 주어진 직선은 y축에 평행하다.

ㄷ. 두 점 $(-2,\ -1)$, $(2,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{3+1}{2+2}(x-2)$ $\therefore\ y=x+1$ …… ㉠

$(k-5)x+4ky+3k+10=0$에서 $k\neq0$이면

$y=\frac{5-k}{4k}x-\frac{3k+10}{4k}$ …… ㉡

$\frac{5-k}{4k}=1$, 즉 $k=1$이면 두 직선 ㉠, ㉡은 만나지 않는다.

└ 두 직선 ㉠, ㉡은 평행하다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

0148 직선 $x-3y+1=0$이 점 $(a,\ b)$를 지나므로

$a-3b+1=0$ $\therefore\ a=3b-1$

$ax-by=2$에 $a=3b-1$을 대입하면

$(3b-1)x-by=2$

이 식을 b에 대하여 정리하면

$(3x-y)b-x-2=0$

이 식이 b의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$3x-y=0,\ -x-2=0$

$\therefore\ x=-2,\ y=-6$

따라서 직선 $ax-by=2$는 항상 점 $(-2,\ -6)$을 지나므로

$p=-2,\ q=-6$

$\therefore\ p-q=4$ 답 4

유형 08 정점을 지나는 직선의 활용

집중 공략 본책 30쪽

직선 $(x-a)m+(y-b)=0$

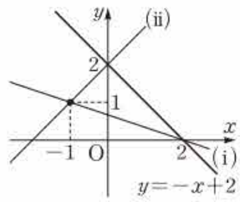
➡ m의 값에 관계없이 항상 점 $(a,\ b)$를 지난다.

0149 $mx-y+m+1=0$에서

$(x+1)m-(y-1)=0$ …… ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 1)$을 지난다.

한편 $x+y-2=0$에서 $y=-x+2$이므로 오른쪽 그림에서



(ⅰ) 직선 ㉠이 점 $(2,\ 0)$을 지날 때,

$3m+1=0$ $\therefore\ m=-\frac{1}{3}$

(ⅱ) 직선 ㉠이 점 $(0,\ 2)$를 지날 때,

$m-1=0$ $\therefore\ m=1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 m의 값의 범위는

$-\frac{1}{3}<m<1$ 답 $-\frac{1}{3}<m<1$

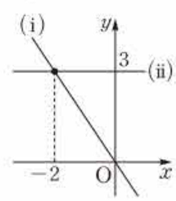
0150 $(m+1)x+y-(1-2m)=0$에서

$(x+2)m+(x+y-1)=0$ …… ㉠

$x+2=0,\ x+y-1=0$에서 $x=-2,\ y=3$

즉 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 3)$을 지난다.

오른쪽 그림에서



(ⅰ) 직선 ㉠이 원점을 지날 때,

$2m-1=0$ $\therefore\ m=\frac{1}{2}$

(ⅱ) 직선 ㉠이 점 $(0,\ 3)$을 지날 때,

$2m+2=0$ └ 직선 ㉠은 x축에 평행하므로 제3사분면을 지나지 않는다.

$\therefore\ m=-1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 m의 값의 범위는

$-1\le m\le\frac{1}{2}$

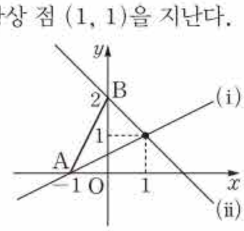
따라서 정수 m은 -1, 0의 2개이다. 답 ②

0151 $y=mx-m+1$에서

$(x-1)m-(y-1)=0$ …… ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ 1)$을 지난다.

오른쪽 그림에서



(ⅰ) 직선 ㉠이 점 A$(-1,\ 0)$을 지날 때,

$-2m+1=0$ $\therefore\ m=\frac{1}{2}$

(ⅱ) 직선 ㉠이 점 B$(0,\ 2)$를 지날 때,

$-m-1=0$ $\therefore\ m=-1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 m의 값의 범위는

$$-1\le m\le \frac{1}{2}$$

따라서 $a=-1$, $b=\frac{1}{2}$이므로

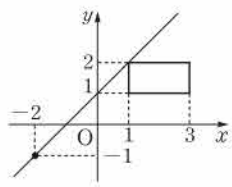
$$ab=-\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

0152 $mx-y+2m-1=0$에서

$(x+2)m-(y+1)=0$ ...... ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ -1)$을 지난다. ··· ❶



m의 값은 직선 ㉠의 기울기이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 점 $(1,\ 2)$를 지날 때 최대이다.

즉 $3m-3=0$에서

$m=1$

따라서 m의 최댓값은 1이다. ··· ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ 직선 $mx-y+2m-1=0$이 m의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ m의 최댓값을 구할 수 있다.	60 %

참고 직선 ㉠이 점 $(3,\ 1)$을 지날 때, $5m-2=0$ $\therefore m=\frac{2}{5}$

따라서 직선 ㉠이 주어진 직사각형과 만나도록 하는 m의 값의 범위는

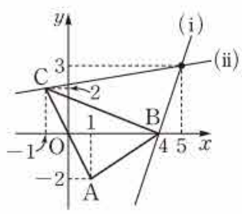
$\frac{2}{5}\le m\le 1$

0153 $mx-y-5m+3=0$에서

$(x-5)m-(y-3)=0$ ...... ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(5,\ 3)$을 지난다.

오른쪽 그림에서



(ⅰ) 직선 ㉠이 점 B$(4,\ 0)$을 지날 때,

$-m+3=0$ $\therefore m=3$

(ⅱ) 직선 ㉠이 점 C$(-1,\ 2)$를 지날 때,

$-6m+1=0$ $\therefore m=\frac{1}{6}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 m의 값의 범위는

$m<\frac{1}{6}$ 또는 $m>3$

답 ②

참고 직선 ㉠이 △ABC와 만나도록 하는 m의 값의 범위는 $\frac{1}{6}\le m\le 3$이다.

0154 직선 $y=mx+3m+2$가 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하려면 대각선 AC의 중점을 지나야 한다.

C$(a,\ b)$라 하면 $\overline{AC}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{3+b}{2}\right)$이므로

$\frac{3+b}{2}=m\cdot\frac{1+a}{2}+3m+2$

$3+b=m+am+6m+4$

$\therefore (a+7)m-(b-1)=0$

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$a+7=0$, $b-1=0$ $\therefore a=-7$, $b=1$

따라서 점 C의 좌표는 $(-7,\ 1)$이다.

답 ①

다른 풀이 $y=mx+3m+2$에서

$(x+3)m-(y-2)=0$

즉 주어진 직선은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-3,\ 2)$를 지나므로 이 점이 대각선 AC의 중점이어야 한다.

C$(a,\ b)$라 하면

$\frac{1+a}{2}=-3$, $\frac{3+b}{2}=2$ $\therefore a=-7$, $b=1$

$\therefore$ C$(-7,\ 1)$

유형 09 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식 본책 31쪽

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점과 점 $(p,\ q)$를 지나는 직선의 방정식

➡ $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$ (k는 실수)이라 하고 $x=p$, $y=q$를 대입하여 k의 값을 구한다.

0155 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x+y-4+k(2x-3y+4)=0$ (k는 실수) ...... ㉠

이라 하면 이 직선이 점 $(4,\ -1)$을 지나므로

$3+15k=0$ $\therefore k=-\frac{1}{5}$

㉠에 $k=-\frac{1}{5}$을 대입하면

$2x+y-4-\frac{1}{5}(2x-3y+4)=0$

$\frac{8}{5}x+\frac{8}{5}y-\frac{24}{5}=0$ $\therefore x+y-3=0$

따라서 $a=1$, $b=1$이므로

$2a+b=3$

답 ④

다른 풀이 $2x+y-4=0$, $2x-3y+4=0$을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=2$

따라서 주어진 두 직선의 교점의 좌표는 $(1,\ 2)$이므로 두 점 $(1,\ 2)$, $(4,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{-1-2}{4-1}(x-1)$ $\therefore x+y-3=0$

0156 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x-3y+7+k(3x-2y-1)=0$ (k는 실수) ...... ㉠

이라 하면 이 직선이 점 $(6,\ -4)$를 지나므로

$25+25k=0$ $\therefore k=-1$

㉠에 $k=-1$을 대입하면

$x-3y+7-(3x-2y-1)=0$

$\therefore -2x-y+8=0$ ··· ❶

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$-2x+8=0$ $\therefore x=4$

$\therefore$ A$(4,\ 0)$

또 $x=0$을 대입하면

$-y+8=0$ $\therefore y=8$

$\therefore$ B(0, 8) ⋯→ ❷

$\therefore$ $\overline{AB}=\sqrt{(-4)^2+8^2}=4\sqrt{5}$ ⋯→ ❸

답 $4\sqrt{5}$

채점 기준	비율
❶ 두 직선의 교점과 점 (6, −4)를 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	60 %
❷ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	20 %

0157 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$(a+4)x+(3a+1)y-2+k(x+ay+1)=0$ (k는 실수) ⋯⋯ ㉠

이라 하면 이 직선이 원점을 지나므로

$-2+k=0$ $\quad\therefore k=2$

㉠에 $k=2$를 대입하면

$(a+4)x+(3a+1)y-2+2(x+ay+1)=0$

$\therefore (a+6)x+(5a+1)y=0$

이 직선의 기울기가 $\frac{5}{4}$이므로

$-\frac{a+6}{5a+1}=\frac{5}{4}$, $\quad 25a+5=-4a-24$

$29a=-29$ $\quad\therefore a=-1$

답 ⑤

유형 10 두 직선의 평행과 수직

본책 31쪽

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ $(abc\neq0,\ a'b'c'\neq0)$이

① 평행하다. ➡ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

② 수직이다. ➡ $aa'+bb'=0$

0158 두 직선 $(k-2)x+3y-1=0$, $kx-y+3=0$이

(i) 평행하려면 $\quad\frac{k-2}{k}=\frac{3}{-1}\neq\frac{-1}{3}$

$-k+2=3k$ $\quad\therefore k=\frac{1}{2}$

(ii) 수직이려면 $\quad(k-2)k+3\cdot(-1)=0$

$k^2-2k-3=0$, $\quad(k+1)(k-3)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=3$

(i), (ii)에서 $\quad\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=3$ ($\because \beta>0$)

$\therefore \alpha\beta=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

0159 두 직선 $y=ax+b$, $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$이 수직이므로

$\frac{1}{2}a=-1$ $\quad\therefore a=-2$

따라서 직선 $y=-2x+b$가 점 (1, 2)를 지나므로

$2=-2+b$ $\quad\therefore b=4$

$\therefore a-b=-6$

답 ②

0160 두 직선 $ax-y+b=0$, $bx-3y+a=0$이 만나지 않으면 평행하므로

$\frac{a}{b}=\frac{-1}{-3}\neq\frac{b}{a}$ $\quad\therefore b=3a$

$bx+ay=0$에 $b=3a$를 대입하면

$3ax+ay=0$, $\quad ay=-3ax$

$\therefore y=-3x$ ($\because a\neq0$)

따라서 구하는 기울기는 -3이다.

답 ②

0161 직선 $3x+ay+1=0$이 점 (1, −2)를 지나므로

$3-2a+1=0$ $\quad\therefore a=2$

직선 $bx+cy-8=0$도 점 (1, −2)를 지나므로

$b-2c-8=0$ ⋯⋯ ㉠

두 직선 $3x+2y+1=0$, $bx+cy-8=0$이 수직이므로

$3b+2c=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad b=2$, $c=-3$

$\therefore a+b-c=7$

답 ④

0162 두 직선 $x+ay+1=0$, $2x-by+1=0$이 수직이므로

$1\cdot2+a\cdot(-b)=0$ $\quad\therefore ab=2$ ⋯→ ❶

또 두 직선 $x+ay+1=0$, $x-(b-3)y-1=0$이 평행하므로

$\frac{1}{1}=\frac{a}{-(b-3)}\neq\frac{1}{-1}$

$a=-b+3$ $\quad\therefore a+b=3$ ⋯→ ❷

$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=3^3-3\cdot2\cdot3=9$ ⋯→ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ ab의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a^3+b^3의 값을 구할 수 있다.	20 %

0163 ㄱ. $a=0$일 때,

l: $-y+1=0$, 즉 $y=1$

m: $3x+3=0$, 즉 $x=-1$

따라서 두 직선 l, m은 각각 x축, y축에 평행하므로 수직이다.

ㄴ. $ax-y-2a+1=0$에서

$(x-2)a-(y-1)=0$

이므로 직선 l은 a의 값에 관계없이 항상 점 (2, 1)을 지난다.

ㄷ. (i) $a=0$일 때,

두 직선 l, m은 수직이다. ($\because$ ㄱ)

(ii) $a\neq0$일 때,

두 직선 l, m이 평행하려면

$\frac{a}{3}=\frac{-1}{-a}\neq\frac{-2a+1}{2a+3}$

$a^2=3$ $\quad\therefore a=-\sqrt{3}$ 또는 $a=\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 두 직선 l, m이 평행하도록 하는 a의 값은 2개이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

유형 11 세 직선의 위치 관계 본책 32쪽

서로 다른 세 직선에 대하여
① 세 직선이 모두 평행하다.
⇒ 세 직선의 기울기가 모두 같다.
② 세 직선 중 두 직선이 평행하다.
⇒ 두 직선의 기울기는 같고, 다른 한 직선의 기울기는 다르다.
③ 세 직선이 한 점에서 만난다.
⇒ 세 직선의 기울기가 모두 다르고, 두 직선의 교점을 다른 한 직선이 지난다.
④ 세 직선이 삼각형을 이룬다.
⇒ 세 직선의 기울기가 모두 다르고, 두 직선의 교점을 다른 한 직선이 지나지 않는다.

0164 주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.
(i) 직선 $y=ax+2$가 직선 $y=-x$ 또는 $y=x-2$와 평행할 때,
$a=-1$ 또는 $a=1$
(ii) 직선 $y=ax+2$가 두 직선 $y=-x$, $y=x-2$의 교점을 지날 때,
$y=-x$, $y=x-2$를 연립하여 풀면 $x=1$, $y=-1$
직선 $y=ax+2$가 점 $(1, -1)$을 지나므로
$-1=a+2$ $\therefore a=-3$
(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은
$-1+1+(-3)=-3$

답 ④

0165 주어진 세 직선이 한 점에서 만나려면 직선 $ax-2y+1=0$이 두 직선 $3x-y+5=0$, $x+2y-3=0$의 교점을 지나야 한다.
$3x-y+5=0$, $x+2y-3=0$을 연립하여 풀면
$x=-1$, $y=2$
직선 $ax-2y+1=0$이 점 $(-1, 2)$를 지나므로
$-a-4+1=0$ $\therefore a=-3$

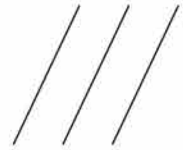
답 -3

0166 두 직선 $4x-3y+2=0$, $2x-y+1=0$이 한 점에서 만나므로 주어진 세 직선에 의하여 생기는 교점이 2개가 되려면 직선 $ax-y+5=0$은 나머지 두 직선 중 하나와 평행해야 한다. ··· ❶
(i) 두 직선 $4x-3y+2=0$, $ax-y+5=0$이 평행할 때,
$\frac{4}{a}=\frac{-3}{-1}\neq\frac{2}{5}$
$\therefore a=\frac{4}{3}$
(ii) 두 직선 $2x-y+1=0$, $ax-y+5=0$이 평행할 때,
$\frac{2}{a}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{1}{5}$
$\therefore a=2$ ··· ❷
(i), (ii)에서 정수 a의 값은 2이다. ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 세 직선에 의하여 생기는 교점이 2개일 때의 조건을 알 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 a의 값을 구할 수 있다.	20 %

0167 주어진 세 직선이 좌표평면을 4개의 영역으로 나누려면 오른쪽 그림과 같이 세 직선은 모두 평행해야 한다.



두 직선 $ax+y+1=0$, $2x+y+5=0$이 평행하려면
$\frac{a}{2}=\frac{1}{1}\neq\frac{1}{5}$ $\therefore a=2$
두 직선 $x+by+3=0$, $2x+y+5=0$이 평행하려면
$\frac{1}{2}=\frac{b}{1}\neq\frac{3}{5}$ $\therefore b=\frac{1}{2}$
$\therefore a+b=\frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

$3\cdot1+1\cdot2\neq0$

0168 두 직선 $3x+y-6=0$, $x+2y-4=0$은 수직이 아니므로 주어진 세 직선으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형이 되려면 직선 $ax-y+1=0$은 나머지 두 직선 중 하나와 수직이어야 한다.
(i) 두 직선 $3x+y-6=0$, $ax-y+1=0$이 수직일 때,
$3a+1\cdot(-1)=0$ $\therefore a=\frac{1}{3}$
(ii) 두 직선 $x+2y-4=0$, $ax-y+1=0$이 수직일 때,
$a+2\cdot(-1)=0$ $\therefore a=2$
(i), (ii)에서 정수 a의 개수는 1이다.

답 ②

유형 12 수직 또는 평행 조건이 주어진 직선의 방정식 (집중 공략) 본책 33쪽

① 수직인 두 직선 ⇒ 기울기의 곱이 -1이다.
② 평행한 두 직선 ⇒ 기울기는 같고, y절편은 다르다.

0169 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는
$\frac{-5-(-2)}{2-(-4)}=-\frac{1}{2}$
이므로 직선 AB에 수직인 직선의 기울기는 2이다.
한편 $\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{1\cdot2+2\cdot(-4)}{1+2}, \frac{1\cdot(-5)+2\cdot(-2)}{1+2}\right)$, 즉 $(-2, -3)$
따라서 기울기가 2이고 점 $(-2, -3)$을 지나는 직선의 방정식은
$y+3=2(x+2)$
$\therefore y=2x+1$

답 $y=2x+1$

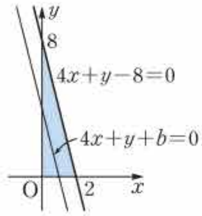
0170 주어진 두 직선이 x축에서 만나므로 두 직선의 x절편은 같다.
$2x+(5k+1)y+6=0$에 $y=0$을 대입하면
$2x+6=0$ $\therefore x=-3$
따라서 두 점 $(-3, 0)$, $(0, 5)$를 지나는 직선 $-\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$과 직선 $2x+(5k+1)y+6=0$이 수직이므로
$2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+(5k+1)\cdot\frac{1}{5}=0$
$-\frac{2}{3}+k+\frac{1}{5}=0$ $\therefore k=\frac{7}{15}$

답 ②

0171 두 직선 $4x+y-8=0$과 $ax+y+b=0$이 평행하므로

$$\frac{4}{a}=\frac{1}{1}\neq\frac{-8}{b} \qquad \therefore a=4,\ b\neq-8$$

오른쪽 그림에서 직선 $4x+y+b=0$의 x절편은 $-\frac{b}{4}$, y절편은 $-b$이고 이 직선이 색칠한 부분의 넓이를 이등분하므로



$$\frac{1}{2}\cdot\left|-\frac{b}{4}\right|\cdot|-b|=\left(\frac{1}{2}\cdot2\cdot8\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{b^2}{8}=4 \qquad \therefore b^2=32$$

$$\therefore a^2+b^2=48$$

답 ①

0172 $\angle OAB=\angle OCA$에서

$$\angle BAC=\angle OAB+\angle OAC$$
$$=\underline{\angle OCA+\angle OAC=90°}$$

└ △AOC에서 ∠AOC=90°이므로 $\angle OCA+\angle OAC=180°-90°=90°$

이므로 두 직선 l, m은 수직이다.

이때 직선 l의 기울기는

$$\frac{0-4}{6-0}=-\frac{2}{3}$$

이므로 직선 m의 기울기는 $\frac{3}{2}$이다.

따라서 직선 m은 기울기가 $\frac{3}{2}$이고 점 A$(6,\ 0)$을 지나므로 그 방정식은

$$y=\frac{3}{2}(x-6) \qquad \therefore y=\frac{3}{2}x-9$$

답 $y=\frac{3}{2}x-9$

0173 직선 $x+2y-2=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+1$의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 AH의 기울기는 2이다.

따라서 직선 AH의 방정식은

$$y-\frac{5}{2}=2(x-2) \qquad \therefore 4x-2y-3=0$$

$\underline{x+2y-2=0,\ 4x-2y-3=0}$을 연립하여 풀면

└ 수선의 발 H는 직선 $x+2y-2=0$과 직선 AH의 교점이다.

$$x=1,\ y=\frac{1}{2}$$

즉 점 H의 좌표는 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$이다.

답 ③

다른 풀이 H$(a,\ b)$라 하면 점 H는 직선 $x+2y-2=0$ 위의 점이므로

$$a+2b-2=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 $x+2y-2=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+1$의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 AH의 기울기는 2이다.

즉 $\dfrac{b-\frac{5}{2}}{a-2}=2$이므로 $\quad 2a-4=b-\frac{5}{2} \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=\frac{1}{2}$

$$\therefore H\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$$

0174 직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점의 좌표는

└ $(\overline{AC}$의 중점$)=(\overline{BD}$의 중점$)$

$$\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{6+3}{2}\right),\ 즉\ \left(3,\ \frac{9}{2}\right)$$

직선 $y=mx$가 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하려면 점 $\left(3,\ \frac{9}{2}\right)$를 지나야 하므로

$$\frac{9}{2}=3m \qquad \therefore m=\frac{3}{2} \qquad \cdots ❶$$

따라서 직선 $y=\frac{3}{2}x$와 직선 $y=ax+b$가 수직이므로

$$a=-\frac{2}{3}$$

이때 직선 $y=-\frac{2}{3}x+b$가 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하려면 점 $\left(3,\ \frac{9}{2}\right)$를 지나야 하므로

$$\frac{9}{2}=-2+b \qquad \therefore b=\frac{13}{2} \qquad \cdots ❷$$

$$\therefore a+b+m=\frac{22}{3} \qquad \cdots ❸$$

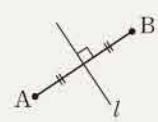
답 $\frac{22}{3}$

채점 기준	비율
❶ m의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b+m$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 13 수직이등분선의 방정식

본책 34쪽

$\overline{AB}$의 수직이등분선을 l이라 하면
① 직선 l은 $\overline{AB}$의 중점을 지난다.
② 직선 l과 직선 AB의 기울기의 곱은 -1이다.



0175 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-4+2}{2},\ \frac{3-1}{2}\right),\ 즉\ (-1,\ 1)$$

직선 AB의 기울기는 $\quad \frac{-1-3}{2-(-4)}=-\frac{2}{3}$

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 기울기가 $\frac{3}{2}$이고 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로 그 방정식은

$$y-1=\frac{3}{2}(x+1) \qquad \therefore 3x-2y+5=0$$

즉 $a=3$, $b=-2$이므로 $\quad a+b=1$

답 1

0176 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{a+b}{2}\right),\ 즉\ \left(3,\ \frac{a+b}{2}\right)$$

직선 $x-3y=0$이 이 점을 지나므로

$$3-3\cdot\frac{a+b}{2}=0 \qquad \therefore a+b=2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 직선 $x-3y=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x$의 기울기가 $\frac{1}{3}$이므로 직선 AB의 기울기는 -3이다.

즉 $\frac{b-a}{5-1}=-3$이므로 $\quad a-b=12 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=7,\ b=-5$

$$\therefore ab=-35$$

답 ①

0177 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{6-1}{2},\ \frac{1+2}{2}\right),\ 즉\ \left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$

직선 AB의 기울기는 $\quad \dfrac{2-1}{-1-6}=-\dfrac{1}{7}$

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 기울기가 7이고 점 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$을 지나므로 그 방정식은

$$y-\frac{3}{2}=7\left(x-\frac{5}{2}\right) \qquad \therefore 7x-y-16=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는 $\quad \left(\frac{6+2}{2},\ \frac{1+3}{2}\right)$, 즉 $(4,\ 2)$

직선 AC의 기울기는 $\quad \dfrac{3-1}{2-6}=-\dfrac{1}{2}$

따라서 $\overline{AC}$의 수직이등분선은 기울기가 2이고 점 $(4,\ 2)$를 지나므로 그 방정식은

$$y-2=2(x-4) \qquad \therefore 2x-y-6=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad x=2,\ y=-2$

따라서 $D(2,\ -2)$이므로 $\quad a=2,\ b=-2$

$\therefore a+b=0$

답 ③

참고 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점(외심)에서 만나므로 두 변의 수직이등분선의 교점을 구하면 된다.

0178 $\overline{AC}=13$이므로 $\quad \sqrt{(n-1)^2+(-5)^2}=13$

위의 식의 양변을 제곱하면 $\quad n^2-2n+26=169$

$$n^2-2n-143=0, \qquad (n+11)(n-13)=0$$

$$\therefore n=13\ (\because n>1) \qquad \therefore C(13,\ 0)$$

□ABCD가 마름모이므로 직선 l은 $\overline{AC}$의 수직이등분선이다.
└ 두 대각선이 서로를 수직이등분한다.

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는 $\quad \left(\frac{1+13}{2},\ \frac{5}{2}\right)$, 즉 $\left(7,\ \frac{5}{2}\right)$

직선 AC의 기울기는 $\quad \dfrac{0-5}{13-1}=-\dfrac{5}{12}$

따라서 직선 l은 기울기가 $\frac{12}{5}$이고 점 $\left(7,\ \frac{5}{2}\right)$를 지나므로 그 방정식은

$$y-\frac{5}{2}=\frac{12}{5}(x-7) \qquad \therefore 24x-10y-143=0$$

답 $24x-10y-143=0$

유형 14 점과 직선 사이의 거리

집중공략 본책 34쪽

점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

0179 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$$y=m(x+1) \qquad \therefore mx-y+m=0$$

점 $(0,\ 2)$와 직선 l 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$$\frac{|-2+m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}, \qquad |m-2|=\sqrt{5(m^2+1)}$$

위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$4m^2+4m+1=0$$

$$(2m+1)^2=0 \qquad \therefore m=-\frac{1}{2}$$

따라서 직선 l의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

답 ①

0180 $\dfrac{|3\cdot(-5)+a+1|}{\sqrt{3^2+a^2}}=2$이므로

$$|a-14|=2\sqrt{9+a^2}$$

위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$3a^2+28a-160=0, \qquad (3a+40)(a-4)=0$$

$$\therefore a=4\ (\because a는\ 정수)$$

답 ⑤

0181 △OAB의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{0+3+6}{3},\ \frac{0+6+2}{3}\right),\ 즉\ \left(3,\ \frac{8}{3}\right) \quad \cdots ❶$$

직선 AB의 방정식은

$$y-6=\frac{2-6}{6-3}(x-3) \qquad \therefore 4x+3y-30=0 \quad \cdots ❷$$

직선 $4x+3y-30=0$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{PG}$의 길이의 최솟값은 점 $G\left(3,\ \frac{8}{3}\right)$과 직선 $4x+3y-30=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{\left|4\cdot 3+3\cdot\frac{8}{3}-30\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{10}{5}=2 \quad \cdots ❸$$

답 2

채점 기준	비율
❶ 점 G의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❷ 직선 AB의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\overline{PG}$의 길이의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

0182 직선 $x+7y-1=0$, 즉 $y=-\frac{1}{7}x+\frac{1}{7}$에 수직인 직선의 기울기는 7이므로 구하는 직선의 방정식을 $y=7x+a$, 즉 $7x-y+a=0$ (a는 상수)이라 하자.

원점과 이 직선 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이므로

$$\frac{|a|}{\sqrt{7^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}, \qquad |a|=\sqrt{100}=10$$

$$\therefore a=\pm 10$$

따라서 제2사분면을 지나지 않는 직선의 방정식은 $y=7x-10$이다.
└ y절편이 음수이어야 한다.

답 $y=7x-10$

0183 점 $(0,\ k)$에서 두 직선 $x+2y-5=0$, $2x-y-2=0$에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|2k-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|-k-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}, \qquad |2k-5|=|k+2|$$

$$2k-5=-(k+2)\ 또는\ 2k-5=k+2$$

$$\therefore k=1\ 또는\ k=7$$

따라서 모든 k의 값의 합은 $\quad 1+7=8$

답 ⑤

0184 $(2k-1)x+(k-1)y+(5k-1)=0$에서

$$(2x+y+5)k-(x+y+1)=0$$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$2x+y+5=0,\ x+y+1=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=-4,\ y=3$

$$\therefore \mathrm{A}(-4,\ 3)$$

직선 $ax-y+b=0$이 점 A를 지나므로

$$-4a-3+b=0 \qquad \therefore b=4a+3$$

즉 직선 $ax-y+4a+3=0$과 원점 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$$\frac{|4a+3|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}, \qquad |4a+3|=\sqrt{5(a^2+1)}$$

위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$11a^2+24a+4=0, \qquad (a+2)(11a+2)=0$$

$$\therefore a=-2\ (\because a\text{는 정수})$$

따라서 $b=4\cdot(-2)+3=-5$이므로

$a+b=-7$ 답 -7

유형 15 점과 직선 사이의 거리의 최댓값 본책 35쪽

점 P와 직선 사이의 거리를 $f(k)$라 할 때,

$$f(k)=\frac{|a|}{g(k)}\ (a\text{는 상수})$$

꼴이면 $f(k)$는 $g(k)$가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

0185 $x+3y-4+k(x-y)=0$에서

$$(k+1)x+(3-k)y-4=0$$

이므로

$$f(k)=\frac{|-4|}{\sqrt{(k+1)^2+(3-k)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2k^2-4k+10}}$$

$f(k)$는 $\sqrt{2k^2-4k+10}$의 값이 최소일 때 최대이고

$$\sqrt{2k^2-4k+10}=\sqrt{2(k-1)^2+8}$$

분수는 분모의 값이 작을수록 크다.

이므로 $f(k)$의 최댓값은

$f(1)=\dfrac{4}{\sqrt{8}}=\sqrt{2}$ 답 $\sqrt{2}$

다른 풀이 $x+3y-4=0,\ x-y=0$을 연립하여 풀면

$$x=1,\ y=1$$

이므로 직선 $x+3y-4+k(x-y)=0$은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ 1)$을 지난다.

따라서 주어진 직선과 원점 사이의 거리의 최댓값은 점 $(1,\ 1)$과 원점 사이의 거리와 같으므로

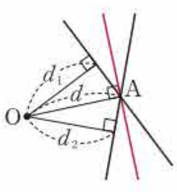
$$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

SSEN 특강 점과 직선 사이의 거리의 최댓값

오른쪽 그림에서

$$d_1<d,\ d_2<d$$

이므로 점 O와 점 A를 지나는 임의의 직선 사이의 거리의 최댓값은 점 O로부터 $\overline{\mathrm{OA}}$와 수직인 직선에 이르는 거리 d, 즉 두 점 O, A 사이의 거리와 같다.



0186 점 $(2,\ 3)$과 직선 $kx+2y-2k+4=0$ 사이의 거리를 $f(k)$라 하면

$$f(k)=\frac{|2k+6-2k+4|}{\sqrt{k^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{k^2+4}}$$

$f(k)$는 $\sqrt{k^2+4}$의 값이 최소일 때 최대이므로 최댓값은

$$f(0)=\frac{10}{\sqrt{4}}=5$$

따라서 $a=0,\ b=5$이므로 $\quad a+b=5$ 답 5

0187 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$x+y-2+k(2x-y-4)=0\ (k\text{는 실수})$$

이라 하면

$$(1+2k)x+(1-k)y-2-4k=0$$

점 $(1,\ -2)$와 이 직선 사이의 거리를 $f(k)$라 하면

$$f(k)=\frac{|1+2k-2+2k-2-4k|}{\sqrt{(1+2k)^2+(1-k)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5k^2+2k+2}}$$

$f(k)$는 $\sqrt{5k^2+2k+2}$의 값이 최소일 때 최대이고

$$\sqrt{5k^2+2k+2}=\sqrt{5\left(k+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{9}{5}}$$

이므로 $f(k)$의 최댓값은

$f\left(-\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{3}{\sqrt{\dfrac{9}{5}}}=\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{5}$

유형 16 삼각형의 넓이 본책 36쪽

세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 △ABC의 넓이는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이를 구한다.
(ii) 직선 AB의 방정식을 구한 후 점 C와 직선 AB 사이의 거리 h를 구한다.
(iii) $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot h$

0188 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-2-2)^2+(-1-7)^2}=4\sqrt{5}$

직선 AB의 방정식은

$$y-7=\frac{-1-7}{-2-2}(x-2) \qquad \therefore 2x-y+3=0$$

점 C$(4,\ -3)$과 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|8+3+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{14}{\sqrt{5}}=\frac{14\sqrt{5}}{5}$$

$\therefore \triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot4\sqrt{5}\cdot\dfrac{14\sqrt{5}}{5}=28$ 답 ③

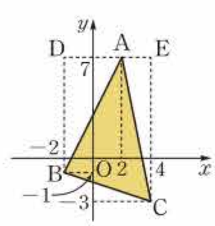
다른 풀이 오른쪽 그림에서

$\triangle\mathrm{ABC}$

$=\square\mathrm{DBCE}-(\triangle\mathrm{ACE}+\triangle\mathrm{ADB})$

$=\dfrac{1}{2}\cdot(8+10)\cdot6-\left(\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot10+\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot8\right)$

$=54-26=28$



0189 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(0-2)^2+(-2-5)^2}=\sqrt{53}$ ⋯ ❶

직선 AB의 방정식은

$$y-5=\frac{-2-5}{0-2}(x-2) \qquad \therefore 7x-2y-4=0$$

점 C$(a,\ 0)$과 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|7a-4|}{\sqrt{7^2+(-2)^2}}=\frac{|7a-4|}{\sqrt{53}}$$ ⋯ ❷

$\triangle ABC$의 넓이가 12이므로

$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{53}\cdot\frac{|7a-4|}{\sqrt{53}}=12, \quad |7a-4|=24$

$7a-4=-24$ 또는 $7a-4=24$

$\therefore a=4$ ($\because a$는 정수) ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	20 %
❷ 점 C와 직선 AB 사이의 거리를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ 정수 a의 값을 구할 수 있다.	40 %

0190 $\overline{AC}=\sqrt{(-1-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{13}$

직선 AC의 방정식은

$y-3=\frac{1-3}{-1-2}(x-2) \quad \therefore 2x-3y+5=0$

점 B(1, 4)와 직선 AC 사이의 거리는

$$\frac{|2-12+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{5}{\sqrt{13}}=\frac{5\sqrt{13}}{13}$$

따라서 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{5\sqrt{13}}{13}=\frac{5}{2}$이므로

$\square OABC=2\underbrace{\triangle ABC}_{\triangle ABC\equiv\triangle COA}=5$

답 5

0191 $\begin{cases} x-y+1=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+7y+9=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ 3x+y-13=0 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는

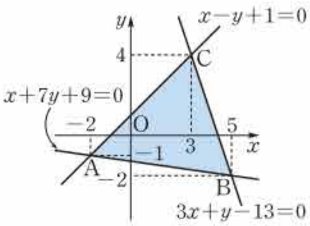
$(-2, -1)$

두 직선 ㉡, ㉢의 교점의 좌표는

$(5, -2)$

두 직선 ㉠, ㉢의 교점의 좌표는

$(3, 4)$



A$(-2, -1)$, B$(5, -2)$, C$(3, 4)$라 하면

$\overline{AC}=\sqrt{(3+2)^2+(4+1)^2}=5\sqrt{2}$

점 B$(5, -2)$와 직선 $x-y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|5+2+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot5\sqrt{2}\cdot4\sqrt{2}=20$

답 20

유형 17 평행한 두 직선 사이의 거리

집중공략 본책 36쪽

평행한 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 직선 l_1 위의 한 점의 좌표 (x_1, y_1)을 구한다.
(ii) 점 (x_1, y_1)과 직선 l_2 사이의 거리를 구한다.

0192 주어진 두 직선이 평행하므로 직선 $3x+y=8$ 위의 한 점 $(0, 8)$과 직선 $3x+y=k$, 즉 $3x+y-k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이다.

따라서 $\frac{|8-k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10}$이므로 $\quad |8-k|=10$

$8-k=-10$ 또는 $8-k=10$

$\therefore k=18$ ($\because k>0$)

답 ③

0193 두 직선 l, l'이 평행하므로 $\overline{AB}$의 길이의 최솟값은 두 직선 l, l' 사이의 거리와 같다.

직선 $l: 2x-y+6=0$ 위의 한 점 $(0, 6)$과 직선 $l': 2x-y-9=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-6-9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{15}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$$

따라서 $\overline{AB}$의 길이의 최솟값은 $3\sqrt{5}$이다.

답 $3\sqrt{5}$

0194 주어진 두 직선이 평행하므로

$$\frac{m}{1}=\frac{-2}{1-m}\neq\frac{m+3}{2-m}$$

$\frac{m}{1}=\frac{-2}{1-m}$에서 $\quad m(m-1)=2$

$m^2-m-2=0, \quad (m+1)(m-2)=0$

$\therefore m=-1$ ($\because m<0$)

따라서 주어진 두 직선의 방정식은 $x+2y-2=0$, $x+2y+3=0$이므로 직선 $x+2y-2=0$ 위의 한 점 $(0, 1)$과 직선 $x+2y+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

답 ②

0195 주어진 두 직선이 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 정사각형 ABCD의 한 변의 길이와 같다.

직선 $4x+3y-3=0$ 위의 한 점 $(0, 1)$과 직선 $4x+3y+7=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3+7|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{10}{5}=2$$

따라서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 2이므로 구하는 넓이는

$2\cdot2=4$

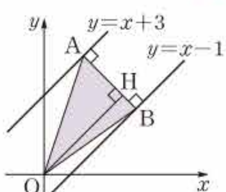
답 4

0196 직선 $y=x+3$ 위의 한 점 $(0, 3)$과 직선 $y=x-1$, 즉 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-3-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

$\therefore \overline{AB}=2\sqrt{2}$ ⋯ ❶

오른쪽 그림과 같이 점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle AOB$의 넓이가 6이므로



$\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot\overline{OH}=6$

$\therefore \overline{OH}=3\sqrt{2}$ ⋯ ❷

이때 직선 AB는 직선 $y=x+3$과 수직이므로 그 방정식을 $y=-x+k$, 즉 $x+y-k=0$ (k는 상수)이라 하자.

직선 AB와 원점 사이의 거리가 $\overline{OH}=3\sqrt{2}$이므로

$$\frac{|-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}, \qquad |k|=6$$

$\therefore k=\pm 6$

그런데 두 점 A, B가 제1사분면 위의 점이므로 직선 AB의 y절편은 양수이다.

$\therefore k=6$

따라서 직선 AB의 방정식은

$y=-x+6$ ··· ❸

답 $y=-x+6$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\overline{OH}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❸ 직선 AB의 방정식을 구할 수 있다.	40 %

유형 18 자취의 방정식; 점과 직선 사이의 거리

본책 37쪽

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하고 점 P와 주어진 직선 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 점 P의 자취의 방정식을 구한다.

0197 $P(x,\ y)$라 하면 점 P는 주어진 두 직선으로부터 같은 거리에 있으므로

$$\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2x+y+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$|x+2y-1|=|2x+y+1|$

$x+2y-1=\pm(2x+y+1)$

$\therefore x-y+2=0$ 또는 $x+y=0$

따라서 원점을 지나는 점 P의 자취의 방정식은

$x+y=0$

답 ②

0198 주어진 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점을 $P(x,\ y)$라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|3x-4y+9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|4x+3y+12|}{\sqrt{4^2+3^2}}$$

$|3x-4y+9|=|4x+3y+12|$

$3x-4y+9=\pm(4x+3y+12)$

$\therefore x+7y+3=0$ 또는 $7x-y+21=0$

따라서 주어진 두 직선이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

0199 $P(x,\ y)$라 하면 $d=2d'$이므로

$$\frac{|2x-y-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\cdot\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

$|2x-y-1|=2|x+2y-1|$

$2x-y-1=\pm 2(x+2y-1)$

$\therefore y=\frac{1}{5}$ 또는 $4x+3y-3=0$

답 $y=\frac{1}{5}$ 또는 $4x+3y-3=0$

0200 $\overline{AB}=\sqrt{(5-2)^2+(3+1)^2}=5$

△ABP에서 $\overline{AB}$를 밑변으로 하고 높이를 h라 하면 △ABP의 넓이가 20이므로

$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot h=20 \qquad \therefore h=8$

즉 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 8이므로 점 P의 자취는 직선 AB와 평행하고 직선 AB와의 거리가 8인 직선이다.

이때 직선 AB의 방정식은

$y+1=\frac{3+1}{5-2}(x-2) \qquad \therefore 4x-3y-11=0$

점 P의 자취의 방정식을 $4x-3y+k=0\,(k\neq -11)$이라 하면 이 직선과 점 $A(2,\ -1)$ 사이의 거리가 8이므로

$$\frac{|8+3+k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=8, \qquad |k+11|=40$$

$k+11=-40$ 또는 $k+11=40$

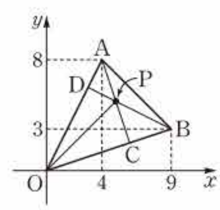
$\therefore k=-51$ 또는 $k=29$

따라서 점 P의 자취의 방정식은

$4x-3y-51=0$ 또는 $4x-3y+29=0$

답 $4x-3y-51=0$ 또는 $4x-3y+29=0$

0201 1st △PAO와 △PBA의 넓이의 비를 이용하여 직선 AP가 $\overline{OB}$와 만나는 점의 좌표를 구한다.



오른쪽 그림과 같이 직선 AP가 $\overline{OB}$와 만나는 점을 C라 하면

△PAO : △PBA $=2:1$이므로

$\overline{OC}:\overline{BC}=$△POC : △PBC

$=2:1$

즉 점 C는 $\overline{OB}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$C\left(\frac{2\cdot 9+1\cdot 0}{2+1},\ \frac{2\cdot 3+1\cdot 0}{2+1}\right)$, 즉 $C(6,\ 2)$ ··· ❶

2nd △POB와 △PBA의 넓이의 비를 이용하여 직선 BP가 $\overline{OA}$와 만나는 점의 좌표를 구한다.

직선 BP가 $\overline{OA}$와 만나는 점을 D라 하면

△POB : △PBA $=3:1$이므로

$\overline{OD}:\overline{AD}=$△POD : △PAD $=3:1$

즉 점 D는 $\overline{OA}$를 $3:1$로 내분하는 점이므로

$D\left(\frac{3\cdot 4+1\cdot 0}{3+1},\ \frac{3\cdot 8+1\cdot 0}{3+1}\right)$, 즉 $D(3,\ 6)$ ··· ❷

3rd 두 직선 AC, BD의 교점이 P임을 이용하여 점 P의 좌표를 구한다.

직선 AC의 방정식은 $\quad y-8=\frac{2-8}{6-4}(x-4)$

$\therefore 3x+y-20=0$ ······ ㉠

직선 BD의 방정식은 $\quad y-3=\frac{6-3}{3-9}(x-9)$

$\therefore x+2y-15=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad x=5,\ y=5$

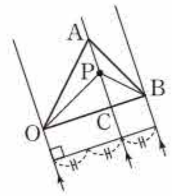
$\therefore P(5,\ 5)$ ··· ❸

답 $(5,\ 5)$

채점 기준	비율
❶ 점 C의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ 점 D의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	40 %

참고 $\triangle$PAO와 $\triangle$PBA의 밑변을 $\overline{PA}$라 하면 두 삼각형의 높이의 비는 넓이의 비와 같으므로 2 : 1이다.
따라서 $\triangle$POC와 $\triangle$PBC의 밑변을 $\overline{PC}$라 하면 두 삼각형의 높이의 비는 2 : 1이므로

$\triangle POC : \triangle PBC = 2 : 1$

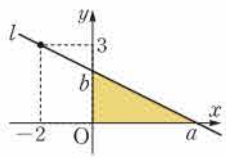


0202 1st 직선 l의 개형을 파악하고 x절편과 y절편의 부호를 구한다.

직선 l의 x절편을 a, y절편을 b라 하면 직선 l의 방정식은

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 직선 l은 점 $(-2,\ 3)$을 지나고 제3사분면을 지나지 않으므로 직선 l의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore a>0,\ b>0$ ⋯ ❶

2nd 직선 l이 점 $(-2,\ 3)$을 지나고 직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 4임을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

직선 l이 점 $(-2,\ 3)$을 지나므로

$$\frac{-2}{a}+\frac{3}{b}=1 \qquad \therefore -2b+3a=ab \quad \cdots\cdots ㉡$$

위의 그림의 색칠한 부분의 넓이가 4이므로

$$\frac{1}{2}ab=4 \qquad \therefore ab=8 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉡에 ㉢을 대입하면

$$-2b+3a=8 \qquad \therefore b=\frac{3}{2}a-4$$

㉢에 $b=\frac{3}{2}a-4$를 대입하면

$$a\left(\frac{3}{2}a-4\right)=8, \qquad 3a^2-8a-16=0$$

$$(3a+4)(a-4)=0 \qquad \therefore a=-\frac{4}{3} \text{ 또는 } a=4$$

그런데 $a>0$이므로 $\quad a=4$

$$\therefore b=\frac{3}{2}\cdot 4-4=2$$ ⋯ ❷

3rd 직선 l의 방정식을 구한다.

㉠에서 직선 l의 방정식은 $\quad \frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$ ⋯ ❸

답 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$

채점 기준	비율
❶ 직선 l의 x절편과 y절편의 부호를 구할 수 있다.	30 %
❷ 직선 l의 x절편과 y절편을 구할 수 있다.	60 %
❸ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	10 %

0203 1st 주어진 조건을 이용하여 점 P의 위치를 파악한다.

조건 (가)에 의하여 직선 l이 $\triangle$OAB의 꼭짓점 O를 지나므로 조건 (나), (다)에 의하여 점 P는 $\overline{AB}$를 2 : 1 또는 1 : 2로 내분하는 점이다.

2nd 점 P가 $\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점일 때의 두 직선 l, m의 기울기의 합을 구한다.

(i) 점 P가 $\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점일 때,

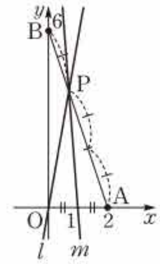
점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot 0+1\cdot 2}{2+1},\ \frac{2\cdot 6+1\cdot 0}{2+1}\right),\ 즉 \left(\frac{2}{3},\ 4\right)$$

이고, $\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$이므로

$\triangle APO : \triangle PBO = 2 : 1$

즉 조건 (나), (다)에 의하여 직선 m은 점 P를 지나면서 $\triangle$APO의 넓이를 이등분하므로 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$의 중점 $(1,\ 0)$을 지난다.



따라서 직선 l은 두 점 $O(0,\ 0)$, $P\left(\frac{2}{3},\ 4\right)$를 지나고, 직선 m은 두 점 $(1,\ 0)$, $P\left(\frac{2}{3},\ 4\right)$를 지나므로 두 직선 l, m의 기울기의 합은

$$\frac{4-0}{\frac{2}{3}-0}+\frac{4-0}{\frac{2}{3}-1}=6+(-12)=-6$$

3rd 점 P가 $\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점일 때의 두 직선 l, m의 기울기의 합을 구한다.

(ii) 점 P가 $\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점일 때,

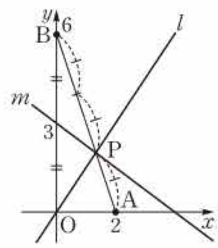
점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot 0+2\cdot 2}{1+2},\ \frac{1\cdot 6+2\cdot 0}{1+2}\right),$$

$$즉 \left(\frac{4}{3},\ 2\right)$$

이고, $\overline{AP}:\overline{PB}=1:2$이므로

$\triangle APO : \triangle PBO = 1 : 2$



즉 조건 (나), (다)에 의하여 직선 m은 점 P를 지나면서 $\triangle$PBO의 넓이를 이등분하므로 위의 그림과 같이 $\overline{OB}$의 중점 $(0,\ 3)$을 지난다.

따라서 직선 l은 두 점 $O(0,\ 0)$, $P\left(\frac{4}{3},\ 2\right)$를 지나고, 직선 m은 두 점 $(0,\ 3)$, $P\left(\frac{4}{3},\ 2\right)$를 지나므로 두 직선 l, m의 기울기의 합은

$$\frac{2-0}{\frac{4}{3}-0}+\frac{2-3}{\frac{4}{3}-0}=\frac{3}{2}+\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$$

4th 두 직선 l, m의 기울기의 합의 최댓값을 구한다.

(i), (ii)에서 두 직선 l, m의 기울기의 합의 최댓값은 $\frac{3}{4}$이다.

답 ①

0204 1st 두 직선 AD, BC의 방정식을 구한다.

직선 AD의 방정식은

$$y=\frac{8-0}{5-1}(x-1) \qquad \therefore y=2x-2$$

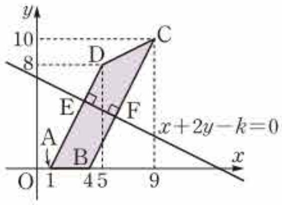
직선 BC의 방정식은

$$y=\frac{10-0}{9-4}(x-4) \qquad \therefore y=2x-8$$

2nd 직선 $x+2y-k=0$이 □ABCD의 넓이를 이등분하는 조건을 찾는다.

직선 $x+2y-k=0$의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 두 직선 AD, BC와 각각 수직이다.

오른쪽 그림과 같이 직선 $x+2y-k=0$과 두 직선 AD, BC가 만나는 점을 각각 E, F라 하면 직선 $x+2y-k=0$이 □ABCD의 넓이를 이등분하므로



$\underline{□ABCD=2□ABFE}$ ⌐ $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이므로 □ABCD와 □ABFE는 모두 사다리꼴이다.

$\frac{1}{2}\cdot(\overline{AD}+\overline{BC})\cdot\overline{EF}=2\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot(\overline{AE}+\overline{BF})\cdot\overline{EF}\right\}$

$\therefore \overline{AD}+\overline{BC}=2(\overline{AE}+\overline{BF})$ ······ ㉠

3rd k의 값을 구한다.

$\overline{AD}=\sqrt{(5-1)^2+8^2}=4\sqrt{5}$, $\overline{BC}=\sqrt{(9-4)^2+10^2}=5\sqrt{5}$이고

$\overline{AE}=\frac{|1-k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{(k-1)\sqrt{5}}{5}$, — 점 A와 직선 $x+2y-k=0$ 사이의 거리

$\overline{BF}=\frac{|4-k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{(k-4)\sqrt{5}}{5}$ — 점 B와 직선 $x+2y-k=0$ 사이의 거리

이므로 ㉠에 대입하면

$9\sqrt{5}=2\cdot\frac{(2k-5)\sqrt{5}}{5}$, $\quad 45=4k-10$

$\therefore k=\frac{55}{4}$ 답 $\frac{55}{4}$

참고 직선 $x+2y-k=0$이 □ABCD의 넓이를 이등분하려면 $\overline{BC}$와 만나야 하므로

$k\ge4 \quad \therefore 1-k<0,\ 4-k\le0$

0205

좌표평면 위의 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 ❶삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하고, 변 AB, 변 BC, 변 CA의 중점의 좌표를 각각 L(2, 1), M(4, −1),

점 G는 세 중선 $\overline{AM}$, $\overline{BN}$, $\overline{CL}$의 교점이고, 세 중선을 꼭짓점으로부터 각각 2 : 1로 내분한다.

N(a, b)라 하자. ❷직선 BN과 직선 LM이 서로 수직이

$\overline{BN}\perp\overline{LM}$이고 ❶에서 $\overline{LM}/\!/\overline{AC}$이므로 $\overline{BN}\perp\overline{AC}$이다.

고, ❸점 G에서 직선 LM까지의 거리가 $4\sqrt{2}$일 때, ab의 값은? (단, ❹무게중심 G는 제1사분면에 있다.)

① 60 ② 90 ③ 120 ④ 150 ⑤ 180

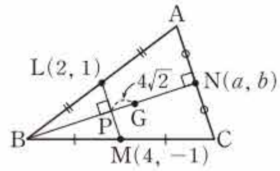
❶, ❷를 이용하여 두 직선 BN, LM의 교점의 좌표를 구한 후 삼각형의 무게중심의 성질과 ❸, ❹를 이용하여 a, b의 값을 구한다.

1st 두 직선 BN, LM의 교점의 좌표를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 두 직선 BN, LM의 교점을 P라 하면

$\overline{BN}\perp\overline{LM}$이고 $\overline{LM}/\!/\overline{AC}$이므로

$\overline{BN}\perp\overline{AC}$



이때 $\overline{AN}=\overline{CN}$이므로

$\underline{\overline{LP}=\overline{MP}}$ ⌐ $\overline{LP}=\frac{1}{2}\overline{AN}=\frac{1}{2}\overline{CN}=\overline{MP}$

즉 점 P가 $\overline{LM}$의 중점이므로 점 P의 좌표는

$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{1-1}{2}\right)$, 즉 $(3, 0)$

2nd 삼각형의 무게중심의 성질과 $\overline{BN}\perp\overline{LM}$임을 이용하여 a, b에 대한 식을 세운다.

△ABC에서 $\overline{BG}:\overline{GN}=2:1$이므로

$(\overline{BP}+4\sqrt{2}):(\overline{NP}-4\sqrt{2})=2:1$

$2\overline{NP}-8\sqrt{2}=\overline{BP}+4\sqrt{2}$

이때 $\overline{BP}=\overline{NP}$이므로 $\quad \overline{NP}=12\sqrt{2}$

즉 $\sqrt{(a-3)^2+b^2}=12\sqrt{2}$이므로 양변을 제곱하면

$(a-3)^2+b^2=288$ ······ ㉠

한편 $\overline{LM}\perp\overline{NP}$이므로

$\frac{-1-1}{4-2}\cdot\frac{b-0}{a-3}=-1$, $\quad \frac{b}{a-3}=1$

$\therefore a-3=b$ ······ ㉡

3rd ab의 값을 구한다.

㉠에 ㉡을 대입하여 정리하면

$b^2=144 \quad \therefore b=\pm12$

그런데 무게중심 G는 제1사분면 위에 있으므로

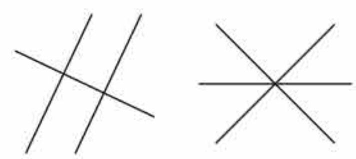
$b=12$

따라서 $a=12+3=15$이므로

$ab=180$ 답 ⑤

0206 1st 세 직선이 좌표평면을 6개의 영역으로 나누는 경우를 파악한다.

주어진 세 직선이 좌표평면을 6개의 영역으로 나누는 경우는 다음과 같다.



2nd 세 직선 중 두 직선이 평행할 때, a의 값을 구한다.

(i) 직선 $x+ay=4$가 직선 $x-y=1$ 또는 $x+y=3$과 평행할 때,

$a=-1$ 또는 $a=1$

3rd 세 직선이 한 점에서 만날 때, a의 값을 구한다.

(ii) 직선 $x+ay=4$가 두 직선 $x-y=1$, $x+y=3$의 교점을 지날 때,

$x-y=1$, $x+y=3$을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=1$

직선 $x+ay=4$가 점 $(2, 1)$을 지나므로

$2+a=4 \quad \therefore a=2$

4th 모든 실수 a의 값의 곱을 구한다.

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 곱은

$(-1)\cdot1\cdot2=-2$ 답 ①

0207 1st 직선 AP의 기울기를 이용하여 직선 l의 방정식을 t에 대한 식으로 나타낸 후 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

직선 AP의 기울기는

$$\frac{0-1}{t-0}=-\frac{1}{t}$$

따라서 직선 l의 기울기는 t이므로 직선 l의 방정식은

$$y=t(x-t) \qquad \therefore y=tx-t^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

ㄱ. $t=1$일 때, 직선 l의 기울기는 1이다.

2nd ㉠에 $x=3$, $y=2$를 대입하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. ㉠에 $x=3$, $y=2$를 대입하면

$$2=3t-t^2, \qquad (t-1)(t-2)=0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=2$$

따라서 점 (3, 2)를 지나는 직선 l은 $y=x-1$, $y=2x-4$의 2개이다.

3rd $y\le ax^2$에 ㉠을 대입하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $y\le ax^2$에 ㉠을 대입하면

$$tx-t^2\le ax^2$$

$$\therefore ax^2-tx+t^2\ge 0$$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$$a>0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

또 x에 대한 이차방정식 $ax^2-tx+t^2=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(-t)^2-4at^2\le 0, \qquad t^2(1-4a)\le 0$$

$$1-4a\le 0 \ (\because t^2>0)$$

$$\therefore a\ge \frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢에서 $a\ge\frac{1}{4}$이므로 실수 a의 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0208 **1st** 직선 OA의 기울기를 이용하여 직선 OB의 방정식을 구한다.

직선 OA의 기울기는 $\frac{3}{4}$이므로 직선 OB의 기울기는 $-\frac{4}{3}$이다.

따라서 직선 OB의 방정식은 $\quad y=-\frac{4}{3}x$

2nd $\overline{OB}=\overline{OA}$임을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

점 B는 직선 OB 위에 있으므로

$$b=-\frac{4}{3}a \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $\overline{OB}=\overline{OA}$에서 $\overline{OB}^2=\overline{OA}^2$이므로

$$a^2+\left(-\frac{4}{3}a\right)^2=4^2+3^2$$

$$a^2=9 \qquad \therefore a=\pm 3$$

그런데 점 B가 제2사분면 위에 있으므로

$$a=-3$$

㉠에 $a=-3$을 대입하면 $\quad b=4$ ⋯ ❶

3rd □OACB가 정사각형임을 이용하여 c, d의 값을 구한다.

□OACB는 정사각형이므로 두 대각선의 중점이 일치한다.

이때 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$이고 $\overline{OC}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{c}{2}, \frac{d}{2}\right)$이므로

$$\frac{1}{2}=\frac{c}{2}, \ \frac{7}{2}=\frac{d}{2} \qquad \therefore c=1, \ d=7$$ ⋯ ❷

4th $ab+cd$의 값을 구한다.

$ab+cd=-5$ ⋯ ❸

답 -5

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ c, d의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $ab+cd$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0209 **1st** $P(a, b)$라 하고 점 P가 △ABC의 내심임을 이용하여 a, b에 대한 식을 세운다.

점 P가 △ABC의 내심이므로 점 P에서 세 직선 AB, BC, CA에 이르는 거리는 같다.

직선 AB의 방정식은

$$\frac{x}{6}-\frac{y}{3}=1 \qquad \therefore x-2y-6=0$$

직선 BC의 방정식은

$$y+3=\frac{-8+3}{10-0}x \qquad \therefore x+2y+6=0$$

직선 CA의 방정식은

$$y=\frac{0+8}{6-10}(x-6) \qquad \therefore 2x+y-12=0$$

이때 $P(a, b)$라 하면

$$\frac{|a-2b-6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|a+2b+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2a+b-12|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$\therefore |a-2b-6|=|a+2b+6|=|2a+b-12|$$

2nd 점 P의 좌표를 구하여 $\overline{OP}$의 길이를 구한다.

$|a-2b-6|=|a+2b+6|$에서

$$a-2b-6=\pm(a+2b+6)$$

$$\therefore a=0 \text{ 또는 } b=-3$$

그런데 $0<a<10$이므로 $\quad b=-3$

$|a+2b+6|=|2a+b-12|$에서 $b=-3$이므로

$$|a|=|2a-15|, \qquad a=\pm(2a-15)$$

$$\therefore a=5 \text{ 또는 } a=15$$

그런데 $0<a<10$이므로 $\quad a=5$

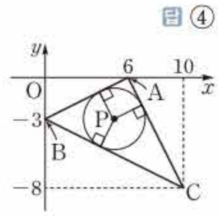
따라서 $P(5, -3)$이므로

$$\overline{OP}=\sqrt{5^2+(-3)^2}=\sqrt{34}$$

답 ④

참고 점 $P(a, b)$가 △ABC의 내심이므로 오른쪽 그림에서

$$0<a<10, \ -8<b<0$$



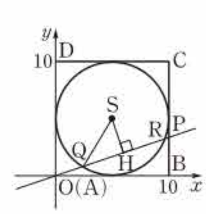
0210 **1st** 정사각형 ABCD를 좌표평면 위에 나타낸 후 직선 AP의 방정식을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 직선 AB를 x축으로 하고, 직선 AD를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 A는 원점이고

$$\overline{AB}:\overline{BP}=\overline{BC}:\overline{BP}=3:1$$

이므로 직선 AP의 방정식은

$$y=\frac{1}{3}x$$



2nd 원의 중심과 직선 AP 사이의 거리를 구한다.

원의 중심을 S라 하면 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 10이므로

$$S(5,\ 5)$$

점 S에서 직선 $y=\frac{1}{3}x$, 즉 $x-3y=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{SH}=\frac{|5-15|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

3rd $\overline{QR}$의 길이를 구한다.

$\overline{SQ}=5$이므로 직각삼각형 SQH에서

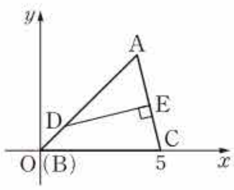
$$\overline{QH}=\sqrt{\overline{SQ}^2-\overline{SH}^2}=\sqrt{5^2-(\sqrt{10})^2}=\sqrt{15}$$

$$\therefore\ \underline{\overline{QR}=2\overline{QH}}=2\sqrt{15}$$ 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.

답 ⑤

0211 **1st** △ABC를 좌표평면 위에 나타낸 후 점 A의 좌표를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 점 B를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이고 C(5, 0)이다.



점 A가 제1사분면 위에 오도록 △ABC를 놓고 $A(a,\ b)\ (a>0,\ b>0)$라 하면

$$\overline{AB}^2=a^2+b^2=32 \quad \cdots\cdots \ ㉠$$

$$\overline{CA}^2=(a-5)^2+b^2=17$$

$$\therefore\ a^2+b^2-10a=-8 \quad \cdots\cdots \ ㉡$$

㉠−㉡을 하면

$$10a=40 \qquad \therefore\ a=4$$

㉠에 $a=4$를 대입하면

$$16+b^2=32, \qquad b^2=16$$

$$\therefore\ b=4\ (\because\ b>0) \qquad \therefore\ A(4,\ 4)$$

2nd 점 D의 좌표와 직선 AC의 방정식을 구한다.

점 D는 $\overline{AB}$를 3 : 1로 내분하는 점이므로

$$D\left(\frac{3\cdot 0+1\cdot 4}{3+1},\ \frac{3\cdot 0+1\cdot 4}{3+1}\right),\ 즉\ D(1,\ 1)$$

두 점 A(4, 4), C(5, 0)을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{0-4}{5-4}(x-5) \qquad \therefore\ 4x+y-20=0$$

3rd $\overline{DE}$의 길이를 구한다.

$$\underbrace{\overline{DE}=\frac{|4+1-20|}{\sqrt{4^2+1^2}}}_{점\ D와\ 직선\ AC\ 사이의\ 거리}=\frac{15}{\sqrt{17}}=\frac{15\sqrt{17}}{17}$$

답 $\frac{15\sqrt{17}}{17}$

0212 **1st** 정삼각형의 성질을 이용하여 직선 BC의 기울기를 구한다.

원점을 O라 하면 정삼각형의 외심, 내심, 무게중심이 일치하므로 점 O는 정삼각형 ABC의 외심이다.

외심은 세 변의 수직이등분선의 교점이므로 직선 AO가 $\overline{BC}$와 만나는 점을 D라 하면

$$\overline{AD}\perp\overline{BC}$$

이때 $\underbrace{직선\ AD의\ 기울기}_{직선\ AO의\ 기울기와\ 같다.}$가 2이므로 직선 BC의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다. ⋯ ❶

2nd 삼각형의 무게중심의 성질을 이용하여 직선 BC의 방정식을 구한다.

직선 BC의 방정식을

$$y=-\frac{1}{2}x+k,\ 즉\ x+2y-2k=0\ (k는\ 상수)$$

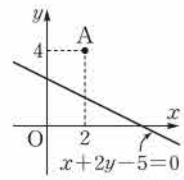
이라 하면 $\overline{OA} : \overline{OD}=2 : 1$에서

$$\overline{OA}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5},\ \underbrace{\overline{OD}=\frac{|-2k|}{\sqrt{1^2+2^2}}}_{점\ O와\ 직선\ BC\ 사이의\ 거리}=\frac{|2k|}{\sqrt{5}}$$

이므로 $\quad 2\sqrt{5} : \frac{|2k|}{\sqrt{5}}=2 : 1$

$$|2k|=5 \qquad \therefore\ k=\pm\frac{5}{2}$$ ⋯ ❷

그런데 $k=\frac{5}{2}$이면 직선 BC의 방정식이 $x+2y-5=0$이므로 오른쪽 그림과 같이 원점이 △ABC의 외부에 존재한다.



따라서 $k=-\frac{5}{2}$이므로 구하는 직선의 방정식은

$$x+2y+5=0$$ ⋯ ❸

답 $x+2y+5=0$

채점 기준	비율
❶ 직선 BC의 기울기를 구할 수 있다.	30 %
❷ 직선 BC의 방정식을 $y=-\frac{1}{2}x+k$ (k는 상수)라 하고 k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 직선 BC의 방정식을 구할 수 있다.	30 %

0213 **1st** 주어진 조건을 만족시키는 도형을 구한다.

$xy+2x+2y+1=0$에서

$$x(y+2)+2(y+2)-3=0 \qquad \therefore\ (x+2)(y+2)=3$$

x, y가 정수이므로

(i) $x+2=-3$, $y+2=-1$일 때, $\quad x=-5$, $y=-3$

(ii) $x+2=-1$, $y+2=-3$일 때, $\quad x=-3$, $y=-5$

(iii) $x+2=1$, $y+2=3$일 때, $\quad x=-1$, $y=1$

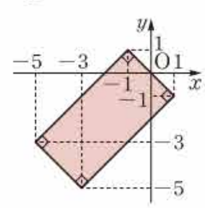
(iv) $x+2=3$, $y+2=1$일 때, $\quad x=1$, $y=-1$

이상에서 조건을 만족시키는 도형은 오른쪽 그림과 같이 네 점

$(-5,\ -3)$, $(-3,\ -5)$,

$(-1,\ 1)$, $(1,\ -1)$

을 꼭짓점으로 하는 직사각형이다.



2nd 직선 l이 직사각형의 대각선의 교점을 지나야 함을 이용하여 직선 l과 점 (1, 1) 사이의 거리의 최댓값을 구한다.

직선 l이 직사각형의 넓이를 이등분하려면 직사각형의 대각선의 교점을 지나야 한다.

이때 직사각형의 대각선의 교점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+(-3)}{2},\ \frac{1+(-5)}{2}\right),\ 즉\ (-2,\ -2)$$

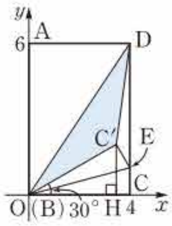
이므로 직선 l은 기울기에 관계없이 항상 점 $(-2,\ -2)$를 지난다.
따라서 직선 l과 점 $(1,\ 1)$ 사이의 거리의 최댓값은 두 점 $(-2,\ -2)$, $(1,\ 1)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(1+2)^2+(1+2)^2}=3\sqrt{2}$$

답 $3\sqrt{2}$

0214 1st 직사각형 모양의 종이 ABCD를 좌표평면 위에 나타낸 후 점 C′의 좌표를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이다.



이때 $\overline{BC'}=\overline{BC}=4$이고

$$\angle C'BC=15°+15°=30°$$

이므로 점 C′에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 C′BH에서

$$\overline{BH}=4\cos 30°=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3},$$

$$\overline{C'H}=4\sin 30°=4\cdot\frac{1}{2}=2$$

$$\therefore C'(2\sqrt{3},\ 2)$$

2nd 직선 BD의 방정식을 구하고, 점 C′과 직선 BD 사이의 거리를 구한다.

B(0, 0), D(4, 6)이므로 직선 BD의 방정식은

$$y=\frac{3}{2}x$$

점 $C'(2\sqrt{3},\ 2)$와 직선 $y=\frac{3}{2}x$, 즉 $3x-2y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6\sqrt{3}-4|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{6\sqrt{3}-4}{\sqrt{13}}$$

3rd △BC′D의 넓이를 구한다.

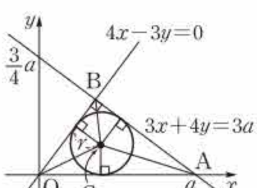
$\overline{BD}=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$이므로

$$\triangle BC'D=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{13}\cdot\frac{6\sqrt{3}-4}{\sqrt{13}}=6\sqrt{3}-4$$

답 $6\sqrt{3}-4$

0215 1st 세 직선으로 둘러싸인 삼각형의 각 변의 길이를 a에 대한 식으로 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 직선 $3x+4y=3a$가 x축과 만나는 점을 A, 두 직선 $4x-3y=0$과 $3x+4y=3a$의 교점을 B라 하자.
$y=0$



$A(a,\ 0)$이므로

$$\overline{OA}=a$$

두 직선 $4x-3y=0$과 $3x+4y=3a$는 수직이므로 원점과 직선 $3x+4y=3a$, 즉 $3x+4y-3a=0$ 사이의 거리는
$4\cdot 3+(-3)\cdot 4=0$ 이므로 두 직선은 수직이다.

$$\overline{OB}=\frac{|-3a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{3}{5}a\ (\because a>0)$$

또 점 $A(a,\ 0)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\frac{|4a|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{4}{5}a\ (\because a>0)$$

2nd 삼각형의 넓이와 내접원의 반지름의 길이를 이용하여 a의 값을 구한다.

△OAB에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 넓이가 4π이므로

$$\pi r^2=4\pi \qquad \therefore r=2\ (\because r>0)$$

내접원의 중심을 C라 하면

$$\triangle OAB=\triangle OAC+\triangle ABC+\triangle BOC$$

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{AB}=\frac{1}{2}r(\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{OB})$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}a\cdot\frac{4}{5}a=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(a+\frac{4}{5}a+\frac{3}{5}a\right)$$

$$a^2=10a, \qquad a(a-10)=0$$

$$\therefore a=10\ (\because a>0)$$

답 ③

0216 1st 이차함수의 그래프에 접하고 주어진 직선과 평행한 직선의 방정식을 구한다.

이차함수 $y=x^2+2x+3$의 그래프에 접하고 직선 $y=2x+a$와 평행한 직선의 방정식을 $y=2x+k$ (k는 상수)라 하자.
이차방정식 $x^2+2x+3=2x+k$, 즉 $x^2+3-k=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=0^2-4(3-k)=0 \qquad \therefore k=3$$

따라서 접선의 방정식은 $\quad y=2x+3$

2nd 접선 $y=2x+3$과 직선 $y=2x+a$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

접선 $y=2x+3$과 직선 $y=2x+a$는 평행하므로 접선 $y=2x+3$ 위의 한 점 $(0,\ 3)$과 직선 $y=2x+a$, 즉 $2x-y+a=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이어야 한다.

즉 $\dfrac{|-3+a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$이므로

$$|a-3|=5, \qquad a-3=-5 \text{ 또는 } a-3=5$$

$$\therefore a=-2 \text{ 또는 } a=8$$

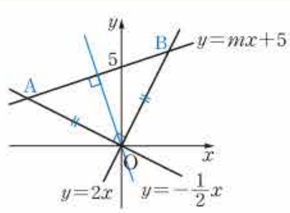
그런데 $a=8$이면 이차함수 $y=x^2+2x+3$의 그래프와 직선 $y=2x+a$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 거리의 최솟값이 0이 된다.

$$\therefore a=-2$$

답 -2

0217

좌표평면에서 세 직선
❶ $y=2x$, $y=-\dfrac{1}{2}x$,
두 직선은 수직이다.
$y=mx+5$ $(m>0)$로 둘러싸인 도형이 이등변삼각형일 때, ❷ m의 값은?
꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분한다.

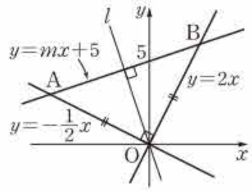


① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{5}$ ③ $\dfrac{7}{15}$ ④ $\dfrac{8}{15}$ ⑤ $\dfrac{3}{5}$

❶은 ∠AOB=90°인 직각이등변삼각형이므로 ∠AOB의 이등분선이 직선 $y=mx+5$와 수직임을 이용하여 ❷를 구한다.

1st 주어진 세 직선으로 둘러싸인 삼각형이 어떤 삼각형인지 구한다.

오른쪽 그림과 같이 직선 $y=mx+5$와 두 직선 $y=-\frac{1}{2}x$, $y=2x$의 교점을 각각 A, B라 하면 두 직선 $y=-\frac{1}{2}x$, $y=2x$가 수직이므로 △AOB는 ∠AOB=90°인 직각이등변삼각형이다.



2nd ∠AOB를 이등분하는 직선의 방정식을 구한다.

∠AOB를 이등분하는 직선을 l이라 하면 직선 l과 직선 $y=mx+5$는 수직이다.

따라서 직선 l 위의 한 점을 $P(x, y)$라 하면 점 P에서 두 직선 $y=-\frac{1}{2}x$와 $y=2x$, 즉 $x+2y=0$과 $2x-y=0$에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x+2y|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2x-y|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}, \qquad x+2y=\pm(2x-y)$$

$$\therefore y=\frac{1}{3}x \text{ 또는 } y=-3x$$

이때 $m>0$에서 직선 l의 기울기는 음수이므로 직선 l의 방정식은

└ $m\cdot$(직선 l의 기울기)$=-1$

$$y=-3x$$

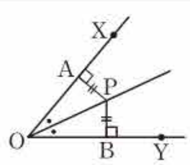
3rd m의 값을 구한다.

$-3m=-1$이므로 $\qquad m=\frac{1}{3}$ 답 ①

SSEN 특강 각의 이등분선의 성질

각의 이등분선 위의 임의의 점은 그 각의 두 변에서 같은 거리에 있다.

➡ ∠XOP=∠YOP이면
$\overline{PA}=\overline{PB}$



I. 도형의 방정식

03 원의 방정식

0218 답 $x^2+y^2=9$

0219 답 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$

0220 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+4)^2=r^2$

이 원이 원점을 지나므로

$r^2=(-3)^2+4^2=25$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+4)^2=25$ 답 $(x-3)^2+(y+4)^2=25$

0221 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x+3)^2+(y-2)^2=r^2$

이 원이 점 $(-2, 0)$을 지나므로

$r^2=1^2+(-2)^2=5$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+3)^2+(y-2)^2=5$ 답 $(x+3)^2+(y-2)^2=5$

0222 $\overline{AB}$의 중점이 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\frac{5-1}{2}, \frac{-2+4}{2}\right)$, 즉 $(2, 1)$

또 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(-1-5)^2+(4+2)^2}=3\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-1)^2=18$ 답 $(x-2)^2+(y-1)^2=18$

0223 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a-3)^2+b^2=(a+3)^2+(b-2)^2$

$\therefore 3a-b+1=0$ …… ㉠

$\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a-3)^2+b^2=(a-1)^2+(b-4)^2$

$\therefore a-2b+2=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\qquad a=0, b=1$

따라서 원의 중심은 $P(0, 1)$이고 반지름의 길이는

└ $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$

이므로 구하는 원의 방정식은

$x^2+(y-1)^2=10$ 답 $x^2+(y-1)^2=10$

0224 반지름의 길이는 $|(\text{중심의 } y\text{좌표})|=|2|=2$이므로 구하는 원의 방정식은

$(x+5)^2+(y-2)^2=4$ 답 $(x+5)^2+(y-2)^2=4$

0225 반지름의 길이는 |(중심의 x좌표)|$=|4|=4$이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y-1)^2=16$ 　 답 $(x-4)^2+(y-1)^2=16$

0226 반지름의 길이는 $\underbrace{|(\text{중심의 } x\text{좌표})|=|7|}_{|(\text{중심의 } y\text{좌표})|=|-7|=7}=7$이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-7)^2+(y+7)^2=49$ 　 답 $(x-7)^2+(y+7)^2=49$

0227 $x^2+y^2-10y-11=0$에서

$x^2+(y-5)^2=36$

따라서 중심의 좌표는 $(0,\ 5)$, 반지름의 길이는 6이다.

답 $(0,\ 5)$, 6

0228 $x^2+y^2+6x-4y+12=0$에서

$(x+3)^2+(y-2)^2=1$

따라서 중심의 좌표는 $(-3,\ 2)$, 반지름의 길이는 1이다.

답 $(-3,\ 2)$, 1

0229 $2x^2+2y^2+6x-2y+1=0$에서

$2(x^2+3x)+2(y^2-y)+1=0$, 　 $2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=4$

$\therefore \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=2$

따라서 중심의 좌표는 $\left(-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

답 $\left(-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $\sqrt{2}$

0230 $x^2+y^2+6x-2y+k=0$에서

$(x+3)^2+(y-1)^2=10-k$

이 방정식이 원을 나타내려면

$10-k>0$ 　 $\therefore k<10$ 　 답 $k<10$

0231 $x^2+y^2-4x+2ky+7=0$에서

$(x-2)^2+(y+k)^2=k^2-3$

이 방정식이 원을 나타내려면

$k^2-3>0$ 　 $\therefore k<-\sqrt{3}$ 또는 $k>\sqrt{3}$

답 $k<-\sqrt{3}$ 또는 $k>\sqrt{3}$

0232 구하는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+4x-3-(x^2+y^2-2x+10y+10)=0$

$\therefore 6x-10y-13=0$ 　 답 $6x-10y-13=0$

0233 구하는 현의 방정식은

$x^2+y^2+8x-2y+14-(x^2+y^2+4x-6y+9)=0$

$\therefore 4x+4y+5=0$ 　 답 $4x+4y+5=0$

0234 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2-8x+2y-5+k(x^2+y^2+2x-4y+2)=0$ $(k\neq-1)$

이라 하면 이 원이 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$3+2k=0$ 　 $\therefore k=-\frac{3}{2}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2-8x+2y-5-\frac{3}{2}(x^2+y^2+2x-4y+2)=0$

$-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2-11x+8y-8=0$

$\therefore x^2+y^2+22x-16y+16=0$

답 $x^2+y^2+22x-16y+16=0$

0235 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $2x+y-5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원 O와 직선 l은 한 점에서 만난다.(접한다.) 　 답 한 점에서 만난다.(접한다.)

0236 원의 중심 $(3,\ -2)$와 직선 $3x-y-1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|9+2-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$이고 $\sqrt{10}>\sqrt{6}$이므로 원 O와 직선 l은 만나지 않는다. 　 답 만나지 않는다.

0237 $x^2+y^2+10x+2y+17=0$에서

$(x+5)^2+(y+1)^2=9$

원의 중심 $(-5,\ -1)$과 직선 $x+2y+3=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-5-2+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

원의 반지름의 길이가 3이고 $\frac{4\sqrt{5}}{5}<3$이므로 원 O와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다.

답 서로 다른 두 점에서 만난다.

0238 $x-2y+1=0$에서 　 $x=2y-1$

$x^2+y^2+4x-3y-6=0$에 $x=2y-1$을 대입하면

$(2y-1)^2+y^2+4(2y-1)-3y-6=0$

$\therefore 5y^2+y-9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot5\cdot(-9)=181>0$

따라서 원 O와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다.

답 서로 다른 두 점에서 만난다.

0239 $x-y-3=0$에서 　 $y=x-3$

$x^2+y^2+2x-4y-13=0$에 $y=x-3$을 대입하면

$x^2+(x-3)^2+2x-4(x-3)-13=0$

$\therefore x^2-4x+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot4=0$

따라서 원 O와 직선 l은 한 점에서 만난다.(접한다.)

답 한 점에서 만난다.(접한다.)

0240 $2x+y-4=0$에서 $\quad y=-2x+4$

$(x-1)^2+(y+4)^2=5$에 $y=-2x+4$를 대입하면

$(x-1)^2+(-2x+8)^2=5$

$\therefore 5x^2-34x+60=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-17)^2-5\cdot60=-11<0$

따라서 원 O와 직선 l은 만나지 않는다.

답 만나지 않는다.

0241 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<\underbrace{3}_{\text{원의 반지름의 길이}}, \quad |k|<3\sqrt{2}$

$\therefore -3\sqrt{2}<k<3\sqrt{2}$

(2) 한 점에서 만나려면

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}=3, \quad |k|=3\sqrt{2}$

$\therefore k=\pm3\sqrt{2}$

(3) 만나지 않으려면

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}>3, \quad |k|>3\sqrt{2}$

$\therefore k<-3\sqrt{2}$ 또는 $k>3\sqrt{2}$

답 풀이 참조

0242 원의 중심 $(3, -1)$과 직선 $x+y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3-1+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|k+2|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{|k+2|}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}, \quad |k+2|<4$

$-4<k+2<4 \quad \therefore -6<k<2$

답 $-6<k<2$

0243 $y=x\pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{1^2+1}$에서

$y=x\pm2$

답 $y=x\pm2$

0244 $y=-3x\pm\sqrt{10}\cdot\sqrt{(-3)^2+1}$에서

$y=-3x\pm10$

답 $y=-3x\pm10$

0245 접선의 방정식을 $y=-x+k$(k는 상수)라 하면 원의 중심 $(0, 1)$과 직선 $y=-x+k$, 즉 $x+y-k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|1-k|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|1-k|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}, \quad |1-k|=4$

$1-k=\pm4 \quad \therefore k=-3$ 또는 $k=5$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=-x-3, y=-x+5$

답 $y=-x-3, y=-x+5$

0246 답 $2x-y=5$

0247 $-2x+4y=20$에서

$x-2y=-10$

답 $x-2y=-10$

0248 원의 중심 $(-1, 0)$과 점 $(0, \sqrt{3})$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{\sqrt{3}-0}{0-(-1)}=\sqrt{3}$

점 $(0, \sqrt{3})$에서의 접선은 원의 중심 $(-1, 0)$과 점 $(0, \sqrt{3})$을 지나는 직선과 수직이므로 기울기가 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$

답 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$

0249 (1) $x_1x+y_1y=2$

(2) 직선 $x_1x+y_1y=2$가 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2y_1=2 \quad \therefore y_1=1$

점 $(x_1, 1)$이 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점이므로

$x_1^2+1^2=2, \quad x_1^2=1 \quad \therefore x_1=\pm1$

$\therefore x_1=-1, y_1=1$ 또는 $x_1=1, y_1=1$

(3) $x_1=-1, y_1=1$일 때, $\quad -x+y=2$

$x_1=1, y_1=1$일 때, $\quad x+y=2$

답 풀이 참조

0250 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=5$

이 직선이 점 $(3, -1)$을 지나므로

$3x_1-y_1=5 \quad \therefore y_1=3x_1-5$

점 $(x_1, 3x_1-5)$가 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로

$x_1^2+(3x_1-5)^2=5, \quad x_1^2-3x_1+2=0$

$(x_1-1)(x_1-2)=0 \quad \therefore x_1=1$ 또는 $x_1=2$

$\therefore x_1=1, y_1=-2$ 또는 $x_1=2, y_1=1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$x-2y=5, 2x+y=5$

답 $x-2y=5, 2x+y=5$

다른 풀이 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y+1=m(x-3) \quad \therefore mx-y-3m-1=0$

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $mx-y-3m-1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5} \quad \therefore |3m+1|=\sqrt{5m^2+5}$

위의 식의 양변을 제곱하면 $\quad 9m^2+6m+1=5m^2+5$

$2m^2+3m-2=0, \quad (m+2)(2m-1)=0$

$\therefore m=-2$ 또는 $m=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$-2x-y+5=0,\ \frac{1}{2}x-y-\frac{5}{2}=0$

$\therefore 2x+y=5,\ x-2y=5$

유형 01 중심의 좌표가 주어진 원의 방정식

집중공략 본책 46쪽

중심이 점 (a, b)이고 점 (x_1, y_1)을 지나는 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$이라 하고 $x=x_1$, $y=y_1$을 대입하여 r^2의 값을 구한다.

0251 $\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\cdot4+1\cdot1}{2+1}, \frac{2\cdot5+1\cdot(-4)}{2+1}\right)$, 즉 $(3, 2)$

이므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-2)^2=r^2$

이 원이 점 A$(1, -4)$를 지나므로

$r^2=4+36=40$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-2)^2=40$

답 $(x-3)^2+(y-2)^2=40$

0252 원 $(x-1)^2+(y+3)^2=4$의 중심의 좌표는 $(1, -3)$, 원 $(x+5)^2+(y-2)^2=9$의 반지름의 길이는 3이므로 주어진 조건을 만족시키는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y+3)^2=9$

이 원이 점 $(4, k)$를 지나므로

$9+(k+3)^2=9$

$(k+3)^2=0\qquad \therefore k=-3$

답 ①

0253 직선 $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각

$(4, 0), (0, 3)$

중심의 좌표가 $(4, 0)$이므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-4)^2+y^2=r^2$

이 원이 점 $(0, 3)$을 지나므로

$r^2=16+9=25$

$\therefore (x-4)^2+y^2=25$ ··· ❶

이 원이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$(a-4)^2=25,\qquad a-4=\pm5$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=9$ ··· ❷

따라서 모든 a의 값의 합은

$-1+9=8$ ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 원의 방정식을 구할 수 있다.	60 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 모든 a의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

0254 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$

$\therefore x^2+y^2-4x+6y+13-r^2=0$

이 식이 $x^2+y^2-4x-ay+2a=0$과 일치하므로

$6=-a,\ 13-r^2=2a$

$\therefore a=-6,\ r^2=25$

따라서 주어진 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+3)^2=25$

⑤ $(x-2)^2+(y+3)^2=25$에 $x=5$, $y=1$을 대입하면

$(5-2)^2+(1+3)^2=25$

이므로 점 $(5, 1)$은 원 위의 점이다.

답 ⑤

0255 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-2+6}{2}\right)$, 즉 $(1, 2)$

직선 AB의 기울기는 $\frac{6-(-2)}{3-(-1)}=2$

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 점 $(1, 2)$를 지나므로 그 방정식은

$y-2=-\frac{1}{2}(x-1)\qquad \therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

이 식에 $y=0$을 대입하면

$-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}=0\qquad \therefore x=5$

즉 $\overline{AB}$의 수직이등분선과 x축의 교점의 좌표가 $(5, 0)$이므로 이 점을 중심으로 하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$(x-5)^2+y^2=r^2$

이 원이 원점을 지나므로

$r^2=5^2=25$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\pi r^2=25\pi$

답 25π

유형 02 중심이 직선 위에 있는 원의 방정식

본책 46쪽

① 중심이 x축 위에 있는 원의 방정식 ➡ $(x-a)^2+y^2=r^2$
② 중심이 y축 위에 있는 원의 방정식 ➡ $x^2+(y-b)^2=r^2$
③ 중심이 $y=f(x)$의 그래프 위에 있는 원의 방정식
➡ $(x-a)^2+\{y-f(a)\}^2=r^2$

0256 원의 중심의 좌표를 $(0, a)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$x^2+(y-a)^2=r^2$

이 원이 점 $(-4, 1)$을 지나므로

$16+(1-a)^2=r^2$

$\therefore a^2-2a+17=r^2$ ······ ㉠

또 점 $(3, 0)$을 지나므로

$9+(-a)^2=r^2$

$\therefore a^2+9=r^2$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ r^2=25$

따라서 주어진 원의 방정식은 $x^2+(y-4)^2=25$

ㄱ. $4^2+(7-4)^2=25$이므로 주어진 원은 점 $(4,\ 7)$을 지난다.
ㄷ. 원의 반지름의 길이가 5이므로 둘레의 길이는 10π이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

다른 풀이 원의 중심을 $A(0,\ a)$라 하고 $B(-4,\ 1)$, $C(3,\ 0)$이라 하면 $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로

$$\sqrt{(-4)^2+(1-a)^2}=\sqrt{3^2+(-a)^2}$$

위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$-2a+8=0 \qquad \therefore a=4$$

따라서 원의 중심은 $A(0,\ 4)$이고 반지름의 길이는

$$\overline{AC}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$$

이므로 주어진 원의 방정식은

$$x^2+(y-4)^2=25$$

0257 원의 중심의 좌표를 $(a,\ a-2)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-a+2)^2=r^2$$

이 원이 점 $(0,\ -4)$를 지나므로

$$(-a)^2+(-a-2)^2=r^2$$

$$\therefore 2a^2+4a+4=r^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 점 $(4,\ 0)$을 지나므로

$$(4-a)^2+(-a+2)^2=r^2$$

$$\therefore 2a^2-12a+20=r^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ r^2=10$
따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다. 답 ③

0258 원의 중심의 좌표를 $(a,\ 0)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2+y^2=r^2$$

이 원이 점 $(2,\ 7)$을 지나므로

$$(2-a)^2+49=r^2$$

$$\therefore a^2-4a+53=r^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 점 $(8,\ -5)$를 지나므로

$$(8-a)^2+25=r^2$$

$$\therefore a^2-16a+89=r^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ r^2=50$
즉 주어진 원의 방정식은

$$(x-3)^2+y^2=50 \qquad \cdots ❶$$

원의 방정식에 $x=4$를 대입하면

$$y^2=49 \qquad \therefore y=\pm 7$$

따라서 $A(4,\ -7)$, $B(4,\ 7)$ 또는 $A(4,\ 7)$, $B(4,\ -7)$이므로 ⋯ ❷

$$\overline{AB}=|7-(-7)|=14 \qquad \cdots ❸$$

답 14

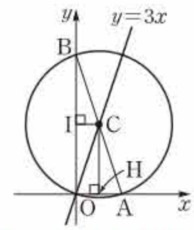
채점 기준	비율
❶ 원의 방정식을 구할 수 있다.	60 %
❷ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	10 %

0259 원의 중심을 $C(a,\ 3a)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-3a)^2=r^2$$

이 원이 원점을 지나므로

$$r^2=a^2+9a^2=10a^2$$



오른쪽 그림과 같이 원의 중심 C에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면

$$H(a,\ 0),\ I(0,\ 3a)$$

△COA와 △CBO는 모두 이등변삼각형이므로

$$\overline{OH}=\overline{HA},\ \overline{OI}=\overline{IB}$$

이등변삼각형의 꼭지각의 꼭짓점에서 밑변에 그은 수선은 밑변의 중점을 지난다.

$$\therefore A(2a,\ 0),\ B(0,\ 6a)$$

이때 $\overline{OB}-\overline{OA}=8$이므로

$$6a-2a=8 \qquad \therefore a=2$$

따라서 $r^2=10\cdot 2^2=40$이므로 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{10}$이다.
답 ②

다른 풀이 $\angle AOB=90°$이므로 $\overline{AB}$는 원의 지름이다.
$A(t,\ 0)$이라 하면 $B(0,\ t+8)$이고, $\overline{AB}$의 중점이 원의 중심이므로 그 좌표는
(점 B의 y좌표)$=\overline{OB}=\overline{OA}+8=t+8$

$$\left(\frac{t}{2},\ \frac{t+8}{2}\right)$$

이때 원의 중심이 직선 $y=3x$ 위에 있으므로

$$\frac{t+8}{2}=\frac{3}{2}t, \qquad t+8=3t \qquad \therefore t=4$$

따라서 원의 중심의 좌표가 $(2,\ 6)$이고, 이 원이 원점을 지나므로 반지름의 길이는

$$\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$$

유형 03 **지름의 양 끝 점이 주어진 원의 방정식** 본책 47쪽

두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원
➡ (원의 중심)=($\overline{AB}$의 중점), (반지름의 길이)$=\frac{1}{2}\overline{AB}$

0260 $\overline{AB}$의 중점이 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심이므로

$$a=\frac{-1+5}{2}=2,\ b=\frac{-7+1}{2}=-3$$

또 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(5+1)^2+(1+7)^2}=5$$

$$\therefore r=5$$

$$\therefore a+b+r=4$$

답 ②

0261 $x^2+y^2+4x-12y+11=0$에서

$$(x+2)^2+(y-6)^2=29$$

따라서 $\overline{AB}$의 중점의 좌표가 $(-2,\ 6)$이므로

$$\frac{a-7}{2}=-2,\ \frac{b+4}{2}=6$$

$$\therefore a=3,\ b=8$$

$$\therefore ab=24$$

답 24

0262 P(8, 0), Q(0, 8)이고 $\overline{PQ}$의 중점이 두 점 P, Q를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\frac{8}{2}, \frac{8}{2}\right)$, 즉 (4, 4) ···· ❶

또 $\overline{PQ}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{1}{2}\sqrt{(-8)^2+8^2}=4\sqrt{2}$ ···· ❷

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y-4)^2=32$ ···· ❸

답 $(x-4)^2+(y-4)^2=32$

채점 기준	비율
❶ 원의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40 %
❸ 원의 방정식을 구할 수 있다.	20 %

0263 $x^2+y^2-6x-2y-15=0$에서

$(x-3)^2+(y-1)^2=25$

$x^2+y^2-10x+2y+22=0$에서

$(x-5)^2+(y+1)^2=4$

A(3, 1), B(5, −1)이라 하고, 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원을 O라 하면 $\overline{AB}$의 중점이 원 O의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\frac{3+5}{2}, \frac{1-1}{2}\right)$, 즉 (4, 0)

또 $\overline{AB}$가 원 O의 지름이므로 원 O의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(5-3)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{2}$

따라서 원 O의 방정식은

$(x-4)^2+y^2=2 \quad \therefore x^2+y^2-8x+14=0$

즉 $a=-8$, $b=0$, $c=14$이므로

$a+b+c=6$

답 6

유형 04 세 점을 지나는 원의 방정식 본책 48쪽

세 점 A, B, C를 지나는 원의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 원의 중심을 P(a, b)라 한다.

(ii) $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$임을 이용하여 a, b에 대한 방정식을 세운다.

(iii) (ii)의 방정식을 연립하여 a, b의 값을 구한다.

(iv) 반지름의 길이는 $\overline{PA}$의 길이와 같음을 이용하여 반지름의 길이를 구한다. ⬅ $\overline{PB}$, $\overline{PC}$의 길이를 이용할 수도 있다.

0264 원의 중심을 P(a, b)라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a+3)^2+(b+2)^2=(a-1)^2+b^2$

$\therefore 2a+b+3=0$ ······ ㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a+2)^2+(b-1)^2=(a-1)^2+b^2$

$\therefore 3a-b+2=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-1$

따라서 원의 중심은 P(−1, −1)이고 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{(-1+3)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{5}$

이므로 구하는 원의 넓이는 5π이다.

답 ④

0265 세 집의 위치를 좌표로 나타내면

A(−3, 3), B(−2, 4), C(1, 1)

공원의 위치를 P(a, b)라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a+3)^2+(b-3)^2=(a+2)^2+(b-4)^2$

$\therefore a+b-1=0$ ······ ㉠

$\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a+3)^2+(b-3)^2=(a-1)^2+(b-1)^2$

$\therefore 2a-b+4=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$

따라서 공원의 위치를 좌표로 나타내면 (−1, 2)이다.

답 ③

0266 원의 중심을 P(a, b)라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a+4)^2+b^2=(a+2)^2+(b+4)^2$

$\therefore a-2b-1=0$ ······ ㉠

$\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a+4)^2+b^2=(a-5)^2+(b-3)^2$

$\therefore 3a+b-3=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=0$

즉 원의 중심은 P(1, 0)이고 반지름의 길이는

$\overline{PA}=|1-(-4)|=5$

이므로 원의 방정식은 $(x-1)^2+y^2=25$

이 원이 점 (1, k)를 지나므로

$k^2=25 \quad \therefore k=\pm 5$

따라서 모든 k의 값의 곱은 −25이다.

답 −25

0267 $\begin{cases} x+3y-10=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 7x+y-30=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ 2x+y-5=0 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

두 직선 ㉠, ㉡의 교점을 A, 두 직선 ㉡, ㉢의 교점을 B, 두 직선 ㉠, ㉢의 교점을 C라 하면

A(4, 2), B(5, −5), C(1, 3)

△ABC의 외접원의 중심을 P(a, b)라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a-4)^2+(b-2)^2=(a-5)^2+(b+5)^2$

$\therefore a-7b-15=0$ ······ ㉣

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a-5)^2+(b+5)^2=(a-1)^2+(b-3)^2$

$\therefore a-2b-5=0$ ······ ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-2$

따라서 △ABC의 외접원의 중심은 P(1, −2)이고 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{(1-4)^2+(-2-2)^2}=5$

이므로 구하는 외접원의 방정식은

$(x-1)^2+(y+2)^2=25$ 　　답 $(x-1)^2+(y+2)^2=25$

유형 05 원의 방정식이 되기 위한 조건 　본책 48쪽

방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 원을 나타낸다.
➡ 주어진 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=c$ 꼴로 변형하면 $c>0$이다.

0268 $x^2+y^2-2ax+4ay+5=0$에서

$(x-a)^2+(y+2a)^2=5(a^2-1)$

이 방정식이 원을 나타내려면

$a^2-1>0,\quad (a+1)(a-1)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>1$ 　　답 ④

0269 ① $x^2+y^2+x+y-1=0$에서

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$

② $x^2+y^2+2x+y+1=0$에서 　$(x+1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

③ $x^2+y^2+2x+2y+1=0$에서 　$(x+1)^2+(y+1)^2=1$

④ $x^2+y^2+4x-2y+5=0$에서 　$(x+2)^2+(y-1)^2=0$

⑤ $x^2+y^2+4x+4y+4=0$에서 　$(x+2)^2+(y+2)^2=4$

따라서 원의 방정식이 아닌 것은 ④이다. 　　답 ④

참고 ④ 방정식 $(x+2)^2+(y-1)^2=0$은 점 $(-2, 1)$을 나타낸다.

0270 $x^2+y^2-2y+k^2-8k+13=0$에서

$x^2+(y-1)^2=-k^2+8k-12$ 　··· ❶

이 방정식이 원을 나타내려면

$-k^2+8k-12>0,\quad k^2-8k+12<0$

$(k-2)(k-6)<0\quad \therefore 2<k<6$ 　··· ❷

원의 넓이는 반지름의 길이가 최대일 때 최대이고, 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{-k^2+8k-12}=\sqrt{-(k-4)^2+4}$

이므로 $2<k<6$에서 $k=4$일 때 최대이다.

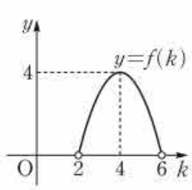
따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 2이다. 　··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 꼴로 변형할 수 있다.	20 %
❷ 원의 방정식이 되기 위한 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 넓이가 최대인 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40 %

참고 원의 반지름의 길이를 $r=\sqrt{-k^2+8k-12}$, $f(k)=-k^2+8k-12$라 하면 $2<k<6$에서 함수 $y=f(k)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 원의 반지름의 길이의 범위는

$0<r\le\sqrt{4}$, 즉 $0<r\le2$



0271 $x^2+y^2+8x-10y+3k+15=0$에서

$(x+4)^2+(y-5)^2=-3k+26$

이 방정식이 원을 나타내려면

$-3k+26>0\quad \therefore k<\frac{26}{3}$ 　······ ㉠

한편 원 위의 모든 점이 제2사분면 위에 있으려면 원의 반지름의 길이가 4보다 작아야 하므로

$\sqrt{-3k+26}<4$

$-3k+26<16\quad \therefore k>\frac{10}{3}$ 　······ ㉡

㉠, ㉡에서 　$\frac{10}{3}<k<\frac{26}{3}$

따라서 정수 k는 4, 5, 6, 7, 8의 5개이다. 　　답 5

유형 06 x축 또는 y축에 접하는 원의 방정식 　집중공략 　본책 49쪽

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$이
① x축에 접할 때
➡ (반지름의 길이) = |(중심의 y좌표)| = $|b|$
➡ $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
② y축에 접할 때
➡ (반지름의 길이) = |(중심의 x좌표)| = $|a|$
➡ $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$

0272 $x^2+y^2-4x+ky+9=0$에서

$(x-2)^2+\left(y+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{4}-5$

원의 중심 $\left(2, -\frac{k}{2}\right)$가 제1사분면 위에 있으므로

$-\frac{k}{2}>0\quad \therefore k<0$

또 원이 y축에 접하므로 　$\sqrt{\frac{k^2}{4}-5}=|2|$

위의 식의 양변을 제곱하면 　$\frac{k^2}{4}-5=4$

$k^2=36\quad \therefore k=\pm6$

그런데 $k<0$이므로 　$k=-6$ 　　답 ①

0273 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 넓이가 16π이므로

$\pi r^2=16\pi\quad \therefore r=4\ (\because r>0)$

이 원이 점 $(-5, 0)$에서 x축에 접하고, 중심이 제3사분면 위에 있으므로 원의 중심의 좌표는 $(-5, -4)$이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+5)^2+(y+4)^2=16$ 　　답 $(x+5)^2+(y+4)^2=16$

0274 원 $x^2+y^2+2ax-2y+b=0$이 점 $(3, -2)$를 지나므로

$6a+b=-17$ 　······ ㉠ 　··· ❶

$x^2+y^2+2ax-2y+b=0$에서

$(x+a)^2+(y-1)^2=a^2-b+1$ 　··· ❷

이 원이 y축에 접하므로 　$\sqrt{a^2-b+1}=|-a|$

위의 식의 양변을 제곱하면 　$a^2-b+1=a^2\quad \therefore b=1$

㉠에 $b=1$을 대입하면

$6a+1=-17 \qquad \therefore a=-3$ ⋯ ❸

$\therefore a+b=-2$ ⋯ ❹

답 -2

채점 기준	비율
❶ a, b에 대한 방정식을 세울 수 있다.	30 %
❷ 주어진 원의 방정식을 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ 꼴로 변형할 수 있다.	20 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0275 원의 방정식을 $\underbrace{(x-a)^2+(y-b)^2=a^2}_{y\text{축에 접하는 원의 방정식}}$이라 하면 이 원이 점 $(4, 2)$를 지나므로

$(4-a)^2+(2-b)^2=a^2$

$\therefore b^2-8a-4b+20=0$ ⋯⋯ ㉠

또 점 $(2, 0)$을 지나므로 $\qquad (2-a)^2+(-b)^2=a^2$

$b^2-4a+4=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}b^2+1$ ⋯⋯ ㉡

㉠에 ㉡을 대입하여 정리하면

$b^2+4b-12=0, \qquad (b+6)(b-2)=0$

$\therefore b=-6$ 또는 $b=2$

㉡에 $b=-6$을 대입하면 $\qquad a=10$

㉡에 $b=2$를 대입하면 $\qquad a=2$

따라서 두 $\underbrace{\text{원의 반지름의 길이}}_{|a|}$의 합은

$10+2=12$

답 ④

0276 $\underbrace{\text{원의 중심의 좌표를 } (a,\ 2a-1)}_{}$이라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+\{y-(2a-1)\}^2=(2a-1)^2$

원의 중심이 직선 $2x-y-1=0$, 즉 $y=2x-1$ 위에 있다.

이 원이 점 $(2, -2)$를 지나므로

$(2-a)^2+(-1-2a)^2=(2a-1)^2$

$a^2+4a+4=0, \qquad (a+2)^2=0 \qquad \therefore a=-2$

따라서 $\underbrace{\text{원의 반지름의 길이}}_{|2a-1|}$는 $|2\cdot(-2)-1|=5$이므로 구하는 원의 넓이는

$\pi\cdot5^2=25\pi$

답 25π

0277 $\triangle$ABC에서

$\overline{AB}=|1-(-1)|=2$, $\overline{BC}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$,

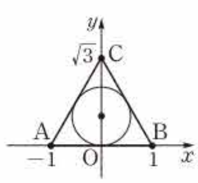
$\overline{CA}=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

이므로 $\triangle$ABC는 정삼각형이다. ⋯ ❶

정삼각형의 내심은 무게중심과 일치하므로 $\triangle$ABC의 내심의 좌표는

$\left(\frac{-1+1+0}{3}, \frac{0+0+\sqrt{3}}{3}\right)$, 즉 $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ⋯ ❷

오른쪽 그림과 같이 내접원이 x축에 접하므로 구하는 내접원의 방정식은



$x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$

$\therefore x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$ ⋯ ❸

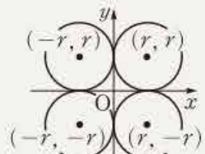
답 $x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ $\triangle$ABC가 정삼각형임을 알 수 있다.	30 %
❷ $\triangle$ABC의 내심의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ 내접원의 방정식을 구할 수 있다.	40 %

유형 07 x축, y축에 동시에 접하는 원의 방정식

집중 공략 본책 50쪽

x축, y축에 동시에 접하고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은



① 중심이 제1사분면 위에 있으면
➡ $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

② 중심이 제2사분면 위에 있으면
➡ $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

③ 중심이 제3사분면 위에 있으면 ➡ $(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$

④ 중심이 제4사분면 위에 있으면 ➡ $(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$

0278 원의 방정식을 $\underbrace{(x-a)^2+(y-a)^2=a^2\ (a>0)}_{\text{두 원의 중심은 모두 제1사분면 위에 있다.}}$이라 하면 이 원이 점 $(4, 2)$를 지나므로

$(4-a)^2+(2-a)^2=a^2, \qquad a^2-12a+20=0$

$(a-2)(a-10)=0 \qquad \therefore a=2$ 또는 $a=10$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 $(2, 2)$, $(10, 10)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(10-2)^2+(10-2)^2}=8\sqrt{2}$

답 $8\sqrt{2}$

0279 $x^2+y^2-6x+2ay-2+b=0$에서

$(x-3)^2+(y+a)^2=a^2-b+11$

이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

$\sqrt{a^2-b+11}=3=|-a|$

$|-a|=3$에서 $\qquad a=3\ (\because a>0)$

$\sqrt{a^2-b+11}=3$에서

$9-b+11=9 \qquad \therefore b=11$

$\therefore b-a=8$

답 8

0280 원의 중심이 제1사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 (r, r)이다.

이때 원의 중심 (r, r)가 직선 $3x+2y=10$ 위에 있으므로

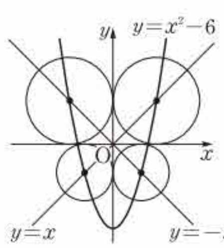
$3r+2r=10 \qquad \therefore r=2$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-2)^2=4$

답 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

0281 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 $y=-x$ 위에 있으므로 주어진 원의 중심은 곡선 $y=x^2-6$과 직선 $y=x$ 또는 $y=-x$의 교점이다.



(i) $x^2-6=x$에서

$x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=3$

(ii) $x^2-6=-x$에서

$$x^2+x-6=0, \qquad (x+3)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=2$$

(i), (ii)에서 $\quad m=4$

또 네 원의 중심의 좌표는 각각 직선 $y=x$ 위의 점

$(-2,\ -2),\ (3,\ 3),\ (-3,\ 3),\ (2,\ -2)$

이므로 반지름의 길이는 각각 2, 3, 3, 2이다. 직선 $y=-x$ 위의 점

따라서 네 원의 넓이의 합은

$$\pi\cdot2^2+\pi\cdot3^2+\pi\cdot3^2+\pi\cdot2^2=26\pi$$

이므로 $\quad n=26$

$$\therefore m+n=30$$

답 ③

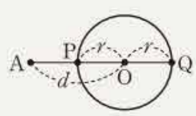
유형 08 원 밖의 한 점과 원 위의 점 사이의 거리

본책 50쪽

원 밖의 한 점 A와 원의 중심 O 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 할 때, 점 A와 원 위의 점 사이의 거리의

① 최댓값 ➡ $\overline{AO}+\overline{OQ}=d+r$

② 최솟값 ➡ $\overline{AO}-\overline{OP}=d-r$



0282 $x^2+y^2+2x-2y-7=0$에서

$$(x+1)^2+(y-1)^2=9$$

이므로 원의 중심의 좌표는 $(-1,\ 1)$이다.

점 $A(-3,\ -5)$와 원의 중심 $(-1,\ 1)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(-1+3)^2+(1+5)^2}=2\sqrt{10}$$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로

$$M=2\sqrt{10}+3,\ m=2\sqrt{10}-3$$

$$\therefore Mm=(2\sqrt{10}+3)(2\sqrt{10}-3)=31$$

답 31

0283 $x^2+y^2-8x-14y+49=0$에서

$$(x-4)^2+(y-7)^2=16$$

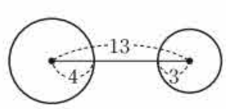
$x^2+y^2+2x+10y+17=0$에서

$$(x+1)^2+(y+5)^2=9$$

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(4,\ 7)$, $(-1,\ -5)$이므로 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(-1-4)^2+(-5-7)^2}=13$$

이때 두 원의 반지름의 길이가 각각 4, 3이므로 주어진 두 원 위의 점 사이의 거리의 최댓값은 $13+4+3=20$, 최솟값은 $13-4-3=6$이다.



따라서 구하는 곱은

$$20\cdot6=120$$

답 ⑤

0284 (1) 점 M의 좌표는

$$\left(\frac{0+4}{2},\ \frac{3+0}{2}\right),\ 즉 \left(2,\ \frac{3}{2}\right)$$

$\cdots$ ❶

(2) 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 점 M은 $\overline{PQ}$의 중점이다.

$$\therefore \overline{PQ}=2\overline{MP}$$

$\cdots$ ❷

이때 점 $M\left(2,\ \frac{3}{2}\right)$과 원의 중심 $O(0,\ 0)$ 사이의 거리는

$$\overline{OM}=\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$$

이고 원의 반지름의 길이가 1이므로 $\overline{MP}$의 길이의 최댓값은

$\frac{5}{2}+1=\frac{7}{2}$, 최솟값은 $\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$이다.

따라서 $\overline{PQ}$의 길이의 최댓값은 $2\cdot\frac{7}{2}=7$, 최솟값은 $2\cdot\frac{3}{2}=3$이다. $\cdots$ ❸

답 (1) $\left(2,\ \frac{3}{2}\right)$ (2) 최댓값: 7, 최솟값: 3

채점 기준	비율
❶ 점 M의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❷ $\overline{PQ}=2\overline{MP}$임을 알 수 있다.	20 %
❸ $\overline{PQ}$의 길이의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	60 %

유형 09 자취의 방정식

본책 51쪽

조건을 만족시키는 점의 좌표를 $(x,\ y)$라 하고 주어진 조건을 이용하여 x, y에 대한 방정식을 세운다.

0285 $P(a,\ b)$라 하고, $\overline{AP}$의 중점을 $Q(x,\ y)$라 하면

$$x=\frac{2+a}{2},\ y=\frac{4+b}{2}$$

$$\therefore a=2(x-1),\ b=2(y-2) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

점 $P(a,\ b)$가 원 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2-4a-2b+1=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에 ㉠을 대입하면

$$4(x-1)^2+4(y-2)^2-8(x-1)-4(y-2)+1=0$$

$$x^2+y^2-4x-5y+\frac{37}{4}=0$$

$$\therefore (x-2)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=1$$

따라서 점 Q의 자취는 중심이 점 $\left(2,\ \frac{5}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 자취의 길이는

$$2\pi\cdot1=2\pi$$

답 ④

0286 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=10$에서

$$(a+2)^2+b^2+(a-2)^2+b^2=10$$

$$2a^2+2b^2=2$$

$$\therefore a^2+b^2=1$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원이다.

이때 $(a-6)^2+(b+8)^2$은 두 점 $P(a,\ b)$, $(6,\ -8)$ 사이의 거리의 제곱과 같으므로 구하는 최댓값은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점과 점 $(6,\ -8)$ 사이의 거리의 최댓값의 제곱과 같다.

점 $(6,\ -8)$과 원의 중심 $(0,\ 0)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{6^2+(-8)^2}=10$$

이고 원의 반지름의 길이가 1이므로 구하는 최댓값은

$$(10+1)^2=11^2=121$$

답 121

0287 $P(\alpha, \beta)$, $G(x, y)$라 하면

$$x=\frac{10+8+\alpha}{3},\ y=\frac{0+9+\beta}{3}$$

$\therefore\ \alpha=3(x-6),\ \beta=3(y-3)$ ...... ㉠

점 $P(\alpha, \beta)$가 원 $x^2+y^2=36$ 위의 점이므로

$\alpha^2+\beta^2=36$ ...... ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$9(x-6)^2+9(y-3)^2=36$

$\therefore\ (x-6)^2+(y-3)^2=4$

따라서 무게중심 G의 자취는 중심이 점 $(6, 3)$이고 반지름의 길이가 2인 원이므로

$a=6,\ b=3,\ r=2$

$\therefore\ a+b+r=11$ 답 11

0288 직각삼각형 POA에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{OA}^2=\overline{OP}^2+\overline{AP}^2$

$P(x, y)$라 하면

$4^2=x^2+y^2+(x-4)^2+y^2,\quad x^2+y^2-4x=0$

$\therefore\ (x-2)^2+y^2=4$

이때 세 점 O, A, P가 삼각형을 이루려면 세 점이 한 직선 위에 있지 않아야 하므로

$y\neq0$ ← 두 점 O, A를 지나는 직선의 방정식이 $y=0$이다.

따라서 점 P의 자취의 방정식은

$(x-2)^2+y^2=4\ (y\neq0)$ 답 ③

다른 풀이 $\angle OPA=90°$이므로 점 $P(x, y)$는 $\overline{OA}$를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

$\overline{OA}$의 중점의 좌표는 $(2, 0)$이고 $\frac{1}{2}\overline{OA}=2$이므로 점 P의 자취의 방정식은

$(x-2)^2+y^2=4\ (y\neq0)$

0289 $P(x, y)$라 하면 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$이므로

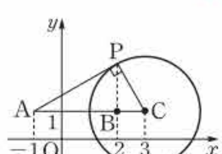
$\overline{AP}=2\overline{BP},\quad \overline{AP}^2=4\overline{BP}^2$

$(x+1)^2+(y-1)^2=4\{(x-2)^2+(y-1)^2\}$

$x^2+y^2-6x-2y+6=0$

$\therefore\ (x-3)^2+(y-1)^2=4$ ⋯➊

따라서 점 P는 중심이 점 $(3, 1)$이고 반지름의 길이가 2인 원 위를 움직이므로 $\angle PAB$의 크기는 오른쪽 그림과 같이 직선 AP가 원에 접할 때 최대이다.



이때 원의 중심을 C라 하면 직각삼각형 PAC에서 ← $\overline{AP}\perp\overline{CP}$

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{PC}^2}$

$=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$ ⋯➋

답 $2\sqrt{3}$

채점 기준	비율
➊ 점 P의 자취의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
➋ $\angle PAB$의 크기가 최대일 때 $\overline{AP}$의 길이를 구할 수 있다.	50 %

유형 10 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식

본책 51쪽

두 점에서 만나는 두 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(a-a')x+(b-b')y+c-c'=0$

0290 $x^2+(y+a)^2=4$에서 $\quad x^2+y^2+2ay+a^2-4=0$

$(x+1)^2+y^2=9$에서 $\quad x^2+y^2+2x-8=0$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+2ay+a^2-4-(x^2+y^2+2x-8)=0$

$\therefore\ 2x-2ay-a^2-4=0$

이 직선이 직선 $2x+y=1$과 수직이므로

$2\cdot2+(-2a)\cdot1=0\quad \therefore\ a=2$ 답 ④

SSEN 특강 두 직선이 수직일 조건

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 수직이면

$aa'+bb'=0$

0291 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+ax+y-1-(x^2+y^2-x+ay+1)=0$

$\therefore\ (a+1)x+(1-a)y-2=0$

이 직선이 점 $(2, 3)$을 지나므로

$2(a+1)+3(1-a)-2=0$

$-a+3=0\quad \therefore\ a=3$ 답 3

0292 원 $x^2+y^2+3ax+2y+a=0$이 원 $x^2+y^2+6x-2y+6=0$의 둘레를 이등분하려면 두 원의 공통인 현이 원 $x^2+y^2+6x-2y+6=0$의 지름이어야 한다.

두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2+3ax+2y+a-(x^2+y^2+6x-2y+6)=0$

$\therefore\ (3a-6)x+4y+a-6=0$ ...... ㉠

$x^2+y^2+6x-2y+6=0$에서

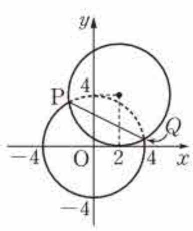
$(x+3)^2+(y-1)^2=4$ ...... ㉡

직선 ㉠이 원 ㉡의 중심 $(-3, 1)$을 지나야 하므로

$-3(3a-6)+4+a-6=0$

$-8a+16=0\quad \therefore\ a=2$ 답 2

0293 $\overset{\frown}{PQ}$는 오른쪽 그림과 같이 점 $(2, 0)$에서 x축에 접하고 반지름의 길이가 4인 원의 일부이므로 그 원의 방정식은



$(x-2)^2+(y-4)^2=16$

$\therefore\ x^2+y^2-4x-8y+4=0$

이때 $\overline{PQ}$는 두 원 $x^2+y^2=16$, $x^2+y^2-4x-8y+4=0$의 공통인 현이므로 직선 PQ의 방정식은

$x^2+y^2-16-(x^2+y^2-4x-8y+4)=0$

$\therefore\ x+2y-5=0$

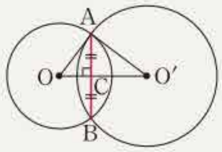
위의 식에 $y=0$을 대입하면 $\quad x=5$

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편은 5이다. 답 5

유형 11 공통인 현의 길이

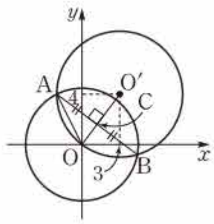
본책 52쪽

두 원 O, O'의 교점을 A, B, $\overline{OO'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라 할 때, $\overline{AB}$의 길이는 다음과 같은 순서로 구한다.



(i) 직선 AB의 방정식을 구한다.
(ii) 점과 직선 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 $\overline{OC}$ 또는 $\overline{O'C}$의 길이를 구한다.
(iii) 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{AC}$의 길이를 구한다.
(iv) $\overline{AB}=2\overline{AC}$임을 이용하여 $\overline{AB}$의 길이를 구한다.

0294 오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=20$, $(x-3)^2+(y-4)^2=25$의 중심을 각각 O, O′이라 하고, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{OO'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라 하자.



$(x-3)^2+(y-4)^2=25$에서

$x^2+y^2-6x-8y=0$

이므로 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-20-(x^2+y^2-6x-8y)=0$

$\therefore\ 3x+4y-10=0$

이 직선과 점 O 사이의 거리는

$$\overline{OC}=\frac{|-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$

직각삼각형 OCA에서

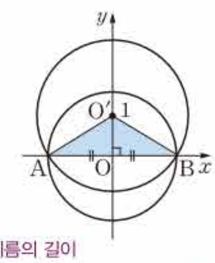
$$\overline{AC}=\sqrt{\underbrace{\overline{OA}^2}_{\text{원 } x^2+y^2=20\text{의 반지름의 길이}}-\overline{OC}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$$

따라서 공통인 현의 길이는

$\overline{AB}=2\overline{AC}=8$

답 ④

0295 $x^2+(y-1)^2=4$에서



$x^2+y^2-2y-3=0$

이므로 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-3-(x^2+y^2-2y-3)=0$

$\therefore\ y=0$ ⋯ ❶

따라서 $\overline{AB}=2\underbrace{\overline{AO}}_{\text{원 } O\text{의 반지름의 길이}}=2\sqrt{3}$이므로

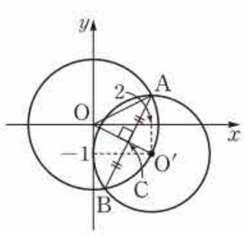
$\triangle O'AB=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{OO'}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot1=\sqrt{3}$ ⋯ ❷

답 $\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ 공통인 현의 방정식을 구할 수 있다.	60 %
❷ $\triangle O'AB$의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

0296 두 원의 교점을 지나는 원의 넓이는 공통인 현이 지름일 때 최소이다.

오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=5$, $(x-2)^2+(y+1)^2=4$의 중심을 각각 O, O′이라 하고, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{OO'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라 하자.



$(x-2)^2+(y+1)^2=4$에서

$x^2+y^2-4x+2y+1=0$

이므로 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-5-(x^2+y^2-4x+2y+1)=0$

$\therefore\ 2x-y-3=0$

이 직선과 점 O 사이의 거리는

$$\overline{OC}=\frac{|-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

직각삼각형 OCA에서

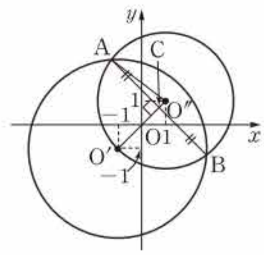
$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OC}^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

따라서 $\underbrace{\text{넓이가 최소인 원의 반지름의 길이}}_{\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{AC}}$가 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$이므로 구하는 넓이는

$$\pi\cdot\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2=\frac{16}{5}\pi$$

답 ③

0297 오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2+2x+2y+k=0$, $x^2+y^2-2x-2y-6=0$의 중심을 각각 O′, O″이라 하고, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{O'O''}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라 하자.



$x^2+y^2-2x-2y-6=0$에서

$(x-1)^2+(y-1)^2=8$

$\therefore\ O''(1, 1)$, $\overline{O''A}=2\sqrt{2}$

이때 $\overline{AB}=2\sqrt{6}$이므로 $\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{6}$

직각삼각형 O″AC에서

$$\overline{O''C}=\sqrt{\overline{O''A}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{2}$$

한편 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2+2x+2y+k-(x^2+y^2-2x-2y-6)=0$

$\therefore\ 4x+4y+k+6=0$

이 직선과 점 O″ 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이므로

$$\frac{|4+4+k+6|}{\sqrt{4^2+4^2}}=\sqrt{2},\qquad |14+k|=8$$

$14+k=\pm8$ $\therefore\ k=-22$ 또는 $k=-6$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 -28이다.

답 ②

유형 12 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식

본책 53쪽

두 원 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$, $x^2+y^2+A'x+B'y+C'=0$의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2+Ax+By+C+k(x^2+y^2+A'x+B'y+C')=0 \quad (k\neq-1)$$

이라 하고 원이 지나는 점의 좌표를 대입하여 k의 값을 구한다.

0298 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2-4x-6y+8+k(x^2+y^2-2x)=0\ (k\neq-1)$ ⋯⋯ ㉠

이라 하면 이 원이 점 $(0, 1)$을 지나므로

$3+k=0$ $\therefore\ k=-3$

㉠에 $k=-3$을 대입하여 정리하면

$$x^2+y^2-x+3y-4=0$$

$$\therefore \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$$

따라서 구하는 원의 둘레의 길이는

$$2\pi\cdot\sqrt{\frac{13}{2}}=\sqrt{26}\pi$$

답 $\sqrt{26}\pi$

0299 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2+2x-4+k(x^2+y^2+ax-4y+4)=0\ (k\neq-1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이라 하면 이 원이 원점을 지나므로

$$-4+4k=0 \qquad \therefore k=1$$

㉠에 $k=1$을 대입하여 정리하면

$$x^2+y^2+\frac{2+a}{2}x-2y=0$$

$$\therefore \left(x+\frac{2+a}{4}\right)^2+(y-1)^2=\frac{a^2+4a+20}{16} \quad \cdots ❶$$

이 원의 넓이가 5π이므로

$$\frac{a^2+4a+20}{16}=5, \qquad a^2+4a-60=0$$

$$(a+10)(a-6)=0 \qquad \therefore a=6\ (\because a>0) \quad \cdots ❷$$

답 6

채점 기준	비율
❶ 주어진 두 원의 교점과 원점을 지나는 원의 방정식을 구할 수 있다.	60 %
❷ 양수 a의 값을 구할 수 있다.	40 %

0300 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2-8x+k(x^2+y^2+4x+2y-4)=0\ (k\neq-1)$$

이라 하면

$$(k+1)x^2+(k+1)y^2+(4k-8)x+2ky-4k=0$$

이때 $k\neq-1$이므로

$$x^2+y^2+\frac{4k-8}{k+1}x+\frac{2k}{k+1}y-\frac{4k}{k+1}=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 원의 중심이 y축 위에 있으므로 원의 중심의 x좌표는 0이다.
즉 ㉠의 x의 계수가 0이어야 하므로

$$\frac{4k-8}{k+1}=0, \qquad 4k-8=0 \qquad \therefore k=2$$

㉠에 $k=2$를 대입하면

$$x^2+y^2+\frac{4}{3}y-\frac{8}{3}=0 \qquad \therefore x^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{28}{9}$$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\frac{28}{9}\pi$이다.

답 ④

유형 13 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만날 때

본책 53쪽

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면
① 반지름의 길이가 r인 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d라 할 때
⇒ $d<r$
② 원의 방정식과 직선의 방정식에서 한 문자를 소거하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 ⇒ $D>0$

0301 원의 중심 $(3,\ 0)$과 직선 $y=-2x+k$, 즉 $2x+y-k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|6-k|}{\sqrt{5}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|6-k|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}, \qquad |6-k|<5$$

$$-5<6-k<5 \qquad \therefore 1<k<11$$

따라서 정수 k는 2, 3, 4, ⋯, 10의 9개이다.

답 9

다른 풀이 $(x-3)^2+y^2=5$에 $y=-2x+k$를 대입하면

$$(x-3)^2+(-2x+k)^2=5$$

$$\therefore 5x^2-2(2k+3)x+k^2+4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$$\frac{D}{4}=\{-(2k+3)\}^2-5(k^2+4)>0$$

$$k^2-12k+11<0, \qquad (k-1)(k-11)<0$$

$$\therefore 1<k<11$$

0302 원의 중심 $(3,\ 2)$와 직선 $3x+4y+5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|9+8+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{22}{5}$$

원의 반지름의 길이가 r이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$r>\frac{22}{5}$$

따라서 자연수 r의 최솟값은 5이다.

답 ③

0303 원의 중심 $(a,\ 1)$과 직선 $3x-4y-a=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3a-4-a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|2a-4|}{5}$$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|2a-4|}{5}<2, \qquad |2a-4|<10$$

$$-10<2a-4<10 \qquad \therefore -3<a<7 \quad \cdots ❶$$

따라서 정수 a는 -2, -1, 0, ⋯, 6이므로 구하는 합은

$$-2+(-1)+0+\cdots+6=18 \quad \cdots ❷$$

답 18

채점 기준	비율
❶ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	70 %
❷ 모든 정수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	30 %

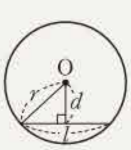
유형 14 현의 길이

집중 공략

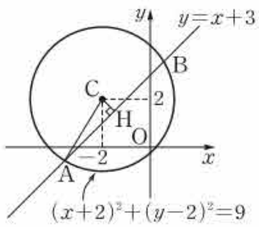
본책 53쪽

반지름의 길이가 r인 원의 중심에서 d만큼 떨어진 현의 길이를 l이라 하면

$$l=2\sqrt{r^2-d^2}$$



0304 오른쪽 그림과 같이 주어진 원의 중심을 C$(-2,\ 2)$라 하고, 점 C에서 직선 $y=x+3$, 즉 $x-y+3=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{|-2-2+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

직각삼각형 CAH에서

$$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\underbrace{\overline{\mathrm{AC}}^2}_{\text{원의 반지름의 길이}}-\overline{\mathrm{CH}}^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{34}$ 답 ②

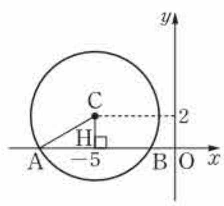
SSEN 특강 **현의 성질**

① 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.
또 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.
② 한 원 또는 합동인 두 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다.
또 한 원 또는 합동인 두 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.

0305 $x^2+y^2+10x-4y+9=0$에서

$(x+5)^2+(y-2)^2=20$

오른쪽 그림과 같이 이 원의 중심을 C$(-5,\ 2)$, 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고, 원과 x축의 교점을 A, B라 하면



$\overline{\mathrm{CH}}=2$

직각삼각형 CAH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{CH}}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$

따라서 구하는 현의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=8$ 답 8

다른 풀이 $x^2+y^2+10x-4y+9=0$에 $y=0$을 대입하면

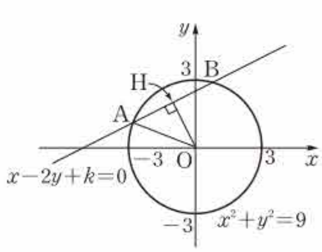
$x^2+10x+9=0,\qquad (x+9)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-9$ 또는 $x=-1$

따라서 주어진 원과 x축의 교점의 좌표가 $(-9,\ 0)$, $(-1,\ 0)$이므로 구하는 현의 길이는

$|-1-(-9)|=8$

0306 오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하고, 원의 중심 O에서 직선 $x-2y+k=0$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{\mathrm{AB}}=4$이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=2$

직각삼각형 OHA에서

$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$ ··· ❶

따라서 점 O와 직선 $x-2y+k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

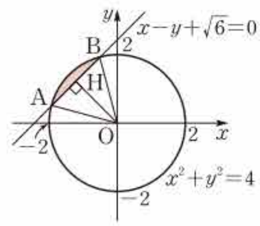
$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5},\qquad |k|=5$

$\therefore\ k=5\ (\because\ k>0)$ ··· ❷

답 5

채점 기준	비율
❶ 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	50 %
❷ 양수 k의 값을 구할 수 있다.	50 %

0307 $\widehat{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{AB}}$로 둘러싸인 부분 중 원점 O를 포함하지 않는 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



원의 중심 O에서 직선 $x-y+\sqrt{6}=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{|\sqrt{6}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{3}$$

직각삼각형 OHA에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=2$

이때 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=2$이므로 △OBA는 정삼각형이다.

따라서 구하는 둘레의 길이는

$$\widehat{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AB}}=2\pi\cdot2\cdot\overbrace{\frac{60}{360}}^{\triangle\mathrm{OBA}\text{가 정삼각형이므로 }\angle\mathrm{AOB}=60^\circ}+2$$

$=\frac{2}{3}\pi+2$ 답 $\frac{2}{3}\pi+2$

0308 $x^2+y^2-8y=0$에서

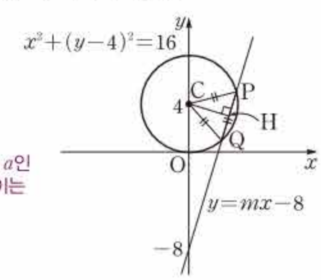
$x^2+(y-4)^2=16$

원의 반지름의 길이가 4이므로

$\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{CQ}}=4$

즉 △CPQ가 정삼각형이려면 $\overline{\mathrm{PQ}}=4$이어야 한다.

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 C$(0,\ 4)$에서 $\overline{\mathrm{PQ}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{\mathrm{CH}}=\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot4}_{\text{한 변의 길이가 }a\text{인 정삼각형의 높이는 }\frac{\sqrt{3}}{2}a}$$

$=2\sqrt{3}$

따라서 점 C와 직선 $y=mx-8$, 즉 $mx-y-8=0$ 사이의 거리가 $2\sqrt{3}$이므로

$\frac{|-4-8|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\sqrt{3},\qquad 6=\sqrt{3m^2+3}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$36=3m^2+3,\qquad m^2=11$

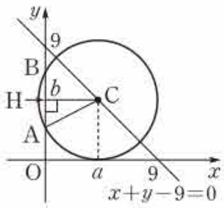
$\therefore\ m=\sqrt{11}\ (\because\ m>0)$ 답 $\sqrt{11}$

0309 원 C가 x축에 접하므로 원의 방정식을

$\underbrace{(x-a)^2+(y-b)^2=b^2\ (a>0,\ b>0)}_{\text{중심 C가 제1사분면 위에 있다.}}$

이라 하자.

오른쪽 그림과 같이 원 C와 y축의 두 교점을 A, B라 하고, 원의 중심 C에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AB}=6$이므로



$$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=3$$

직각삼각형 ACH에서

$$b^2=a^2+9 \quad \overline{AC}^2=\overline{CH}^2+\overline{AH}^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 점 $C(a, b)$가 직선 $x+y-9=0$ 위에 있으므로

$$a+b-9=0 \qquad \therefore b=9-a \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에 ㉡을 대입하여 정리하면

$$81-18a+a^2=a^2+9$$

$$18a=72 \qquad \therefore a=4$$

㉡에 $a=4$를 대입하면 $\quad b=9-4=5$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 5이다. 답 ①

유형 15 원과 직선이 접할 때

집중 공략 본책 54쪽

원과 직선이 접하려면 (한 점에서 만나려면)

① 반지름의 길이가 r인 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d라 할 때 ➡ $d=r$

② 원의 방정식과 직선의 방정식에서 한 문자를 소거하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 ➡ $D=0$

0310 원의 중심 $(1, -3)$과 직선 $x+3y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1-9+k|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|k-8|}{\sqrt{10}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|k-8|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}, \qquad |k-8|=10$$

$$k-8=\pm10 \qquad \therefore k=18 \ (\because k>0)$$

답 ⑤

다른 풀이 $(x-1)^2+(y+3)^2=10$에 $x=-3y-k$를 대입하면

$$(-3y-k-1)^2+(y+3)^2=10$$

$$\therefore 10y^2+6(k+2)y+k^2+2k=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 접하므로

$$\frac{D}{4}=\{3(k+2)\}^2-10(k^2+2k)=0$$

$$k^2-16k-36=0, \qquad (k+2)(k-18)=0$$

$$\therefore k=18 \ (\because k>0)$$

0311 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=x+2\sqrt{2}$, 즉 $x-y+2\sqrt{2}=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2$$

원의 반지름의 길이가 r이므로 원과 직선이 한 점에서 만나려면

$$r=2$$

답 2

0312 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\pi r^2=12\pi \qquad \therefore r=2\sqrt{3} \ (\because r>0)$$

원의 중심 $(1, -3)$과 직선 $x+y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1-3+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|k-2|}{\sqrt{2}}$$

이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|k-2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{3}, \qquad |k-2|=2\sqrt{6}$$

$$k-2=\pm2\sqrt{6} \qquad \therefore k=2\pm2\sqrt{6}$$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$$(2-2\sqrt{6})+(2+2\sqrt{6})=4$$

답 ⑤

0313 원의 중심이 제4사분면 위에 있고 x축, y축에 동시에 접하므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 중심의 좌표는 $(r, -r)$이다. ⋯➊

원의 중심 $(r, -r)$와 직선 $3x-4y-6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3r+4r-6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|7r-6|}{5}$$

이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|7r-6|}{5}=r, \qquad |7r-6|=5r$$

$$7r-6=\pm5r \qquad \therefore r=\frac{1}{2} \text{ 또는 } r=3 \qquad ⋯➋$$

따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은

$$\frac{1}{2}+3=\frac{7}{2} \qquad ⋯➌$$

답 $\frac{7}{2}$

채점 기준	비율
➊ 원의 반지름의 길이를 이용하여 중심의 좌표를 나타낼 수 있다.	30 %
➋ 두 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	50 %
➌ 두 원의 반지름의 길이의 합을 구할 수 있다.	20 %

0314 직선 $y=mx+n$, 즉 $mx-y+n=0$이 원 $x^2+y^2=16$에 접하려면

중심: $(0, 0)$
반지름의 길이: 4

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=4$$

$$\therefore |n|=4\sqrt{m^2+1} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 직선 $mx-y+n=0$이 원 $(x+5)^2+y^2=4$에 접하려면

중심: $(-5, 0)$
반지름의 길이: 2

$$\frac{|-5m+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

$$\therefore |-5m+n|=2\sqrt{m^2+1} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\quad |n|=2|-5m+n|$

$$\therefore n=\pm(-10m+2n)$$

(i) $n=-10m+2n$, 즉 $n=10m$일 때,

㉠에 $n=10m$을 대입하면

$$|10m|=4\sqrt{m^2+1}, \qquad |5m|=2\sqrt{m^2+1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$25m^2=4m^2+4, \qquad m^2=\frac{4}{21}$$

$$\therefore m=\pm\frac{2\sqrt{21}}{21}, \ n=\pm\frac{20\sqrt{21}}{21} \ (\text{복호동순})$$

(ii) $n=10m-2n$, 즉 $n=\dfrac{10}{3}m$일 때,

㉠에 $n=\dfrac{10}{3}m$을 대입하면

$$\left|\frac{10}{3}m\right|=4\sqrt{m^2+1}, \qquad |5m|=6\sqrt{m^2+1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$25m^2=36m^2+36, \qquad m^2=-\frac{36}{11}$$

이를 만족시키는 실수 m의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서

$$m=\pm\frac{2\sqrt{21}}{21},\ n=\pm\frac{20\sqrt{21}}{21}\ (\text{복호동순})$$

$\therefore\ 63mn=120$ 답 120

0315 a, b는 0 또는 1 또는 2이므로 $a+b=3$이려면

$a=1$, $b=2$ 또는 $a=2$, $b=1$ ← 원과 직선이 세 점에서 만나는 경우는 존재하지 않는다.

이어야 한다.

(i) $a=1$, $b=2$일 때,

직선 $y=-x+k$, 즉 $x+y-k=0$이 원 $(x-1)^2+y^2=1$에 접해야 하므로 (중심: $(1, 0)$ 반지름의 길이: 1)

$$\frac{|1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1, \qquad |1-k|=\sqrt{2}$$

$$1-k=\pm\sqrt{2} \qquad \therefore\ k=1\pm\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 직선 $x+y-k=0$이 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$과 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 (중심: $(-1, 1)$ 반지름의 길이: 1)

$$\frac{|-1+1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}<1, \qquad |k|<\sqrt{2}$$

$$\therefore\ -\sqrt{2}<k<\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $k=1-\sqrt{2}$

(ii) $a=2$, $b=1$일 때,

직선 $x+y-k=0$이 원 $(x-1)^2+y^2=1$과 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$$\frac{|1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}<1, \qquad |1-k|<\sqrt{2}$$

$$\therefore\ 1-\sqrt{2}<k<1+\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

또 직선 $x+y-k=0$이 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$에 접해야 하므로

$$\frac{|-1+1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1, \qquad |k|=\sqrt{2}$$

$$\therefore\ k=\pm\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots ㉣$$

㉢, ㉣에서 $k=\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 합은

$(1-\sqrt{2})+\sqrt{2}=1$ 답 1

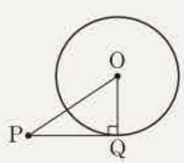
유형 16 접선의 길이

본책 55쪽

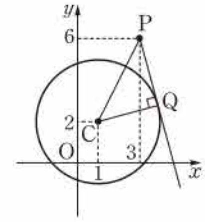
원 밖의 한 점 P에서 원에 그은 접선의 접점을 Q라 하면

⇒ 직각삼각형 OPQ에서

$$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OQ}^2}$$



0316 원의 중심을 C(1, 2)라 하면



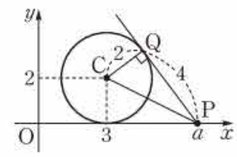
$$\overline{CP}=\sqrt{(3-1)^2+(6-2)^2}=2\sqrt{5}$$

직각삼각형 CQP에서

$$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CQ}^2}$$
$$=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-3^2}=\sqrt{11}$$

답 ②

0317 $x^2+y^2-6x-4y+9=0$에서



$(x-3)^2+(y-2)^2=4$

원의 중심을 C(3, 2)라 하면

$$\overline{CP}=\sqrt{(a-3)^2+(-2)^2}$$
$$=\sqrt{a^2-6a+13}$$

접점을 Q라 하면 직각삼각형 CPQ에서 $\overline{CP}^2=\overline{CQ}^2+\overline{PQ}^2$이므로

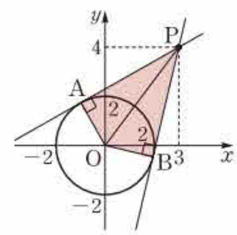
$$a^2-6a+13=2^2+4^2, \qquad a^2-6a-7=0$$

$$(a+1)(a-7)=0 \qquad \therefore\ a=7\ (\because\ a>0)$$ 답 7

다른 풀이 R(3, 0)이라 하면 $\overline{PR}=4$이므로

$$|a-3|=4, \qquad a-3=\pm4 \qquad \therefore\ a=7\ (\because\ a>0)$$

0318 원의 중심이 O(0, 0)이므로



$$\overline{OP}=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

직각삼각형 OPA에서

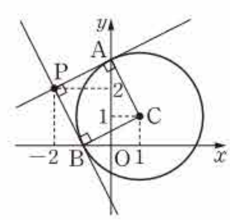
$$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}$$
$$=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$$

이때 $\triangle$OPA$\equiv\triangle$OPB (RHS 합동)이므로

$$\square\text{AOBP}=2\triangle\text{OPA}$$
$$=2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{21}\right)=2\sqrt{21}$$

답 ②

0319 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 주어진 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 하고 원의 중심을 C(1, 1)이라 하면 두 접선이 수직이므로 $\square$APBC는 정사각형이다.



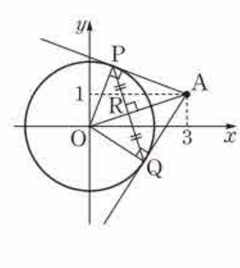
이때 $\square$APBC의 한 변의 길이는 r이고,

$$\overline{CP}=\sqrt{(-2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{10}$$

이므로

$$\sqrt{2}r=\sqrt{10} \qquad \therefore\ r=\sqrt{5}$$ 답 $\sqrt{5}$

0320 원의 중심이 O(0, 0)이고 반지름의 길이가 2이므로



$$\overline{OP}=2,\ \overline{OA}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

직각삼각형 OAP에서

$$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OP}^2}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{10})^2-2^2}=\sqrt{6} \quad \cdots ❶$$

$\overline{OA}$와 $\overline{PQ}$의 교점을 R라 하면 $\overline{OA}\perp\overline{PQ}$이므로 $\triangle$OAP의 넓이에서 ($\triangle$APR$\equiv\triangle$AQR (SAS 합동)이므로 $\angle$ARP$=\angle$ARQ$=90^\circ$)

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{AP}\cdot\overline{OP}=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{PR}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 2=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\overline{PR} \qquad \therefore \overline{PR}=\frac{2\sqrt{15}}{5}$$

$$\therefore \overline{PQ}=2\overline{PR}=\frac{4\sqrt{15}}{5}$$ ⋯ ❷

답 $\frac{4\sqrt{15}}{5}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AP}$의 길이를 구할 수 있다.	40 %
❷ $\overline{PQ}$의 길이를 구할 수 있다.	60 %

유형 17 원과 직선이 만나지 않을 때

본책 56쪽

원과 직선이 만나지 않으려면
① 반지름의 길이가 r인 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d라 할 때 ➡ $d>r$
② 원의 방정식과 직선의 방정식에서 한 문자를 소거하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 ➡ $D<0$

0321 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=k(x-3)$, 즉 $kx-y-3k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-3k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{|3k|}{\sqrt{k^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|3k|}{\sqrt{k^2+1}}>1, \qquad |3k|>\sqrt{k^2+1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$9k^2>k^2+1, \qquad k^2>\frac{1}{8}$$

$$\therefore k<-\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ 또는 } k>\frac{\sqrt{2}}{4}$$

답 $k<-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $k>\frac{\sqrt{2}}{4}$

다른 풀이 $x^2+y^2=1$에 $y=k(x-3)$을 대입하면

$$x^2+k^2(x-3)^2=1$$

$$\therefore (1+k^2)x^2-6k^2x+9k^2-1=0$$

이 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 만나지 않으므로

$$\frac{D}{4}=(-3k^2)^2-(1+k^2)(9k^2-1)<0$$

$$-8k^2+1<0, \qquad k^2>\frac{1}{8}$$

$$\therefore k<-\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ 또는 } k>\frac{\sqrt{2}}{4}$$

0322 원의 중심 $(0,\ k)$와 직선 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-k-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k+1|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|k+1|}{\sqrt{2}}>3\sqrt{2}, \qquad |k+1|>6$$

$$k+1<-6 \text{ 또는 } k+1>6$$

$$\therefore k<-7 \text{ 또는 } k>5$$

따라서 $\alpha=-7$, $\beta=5$이므로 $\alpha^2+\beta^2=74$

답 ④

0323 두 점 $(0,\ -3)$, $(4,\ 1)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{4}{2},\ \frac{-3+1}{2}\right), \text{ 즉 } (2,\ -1)$$

이고 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(1+3)^2}=2\sqrt{2}$$ ⋯ ❶

원의 중심 $(2,\ -1)$과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2+1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k+3|}{\sqrt{2}}$$ ⋯ ❷

이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|k+3|}{\sqrt{2}}>2\sqrt{2}, \qquad |k+3|>4$$

$$k+3<-4 \text{ 또는 } k+3>4$$

$$\therefore k<-7 \text{ 또는 } k>1$$

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다. ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40 %
❷ 원의 중심과 직선 사이의 거리를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ 자연수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

0324 원 $(x+2)^2+(y-3)^2=1$의 중심 $(-2,\ 3)$과 직선 $3x+4y-a=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-6+12-a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|6-a|}{5}$$

이고 원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 만나려면
서로 다른 두 점에서 만나거나 접한다.

$$\frac{|6-a|}{5}\le 1, \qquad |6-a|\le 5$$

$$-5\le 6-a\le 5$$

$$\therefore 1\le a\le 11 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

원 $(x-2)^2+(y+1)^2=1$의 중심 $(2,\ -1)$과 직선 $3x+4y-a=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6-4-a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|2-a|}{5}$$

이고 원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|2-a|}{5}>1, \qquad |2-a|>5$$

$$2-a<-5 \text{ 또는 } 2-a>5$$

$$\therefore a<-3 \text{ 또는 } a>7 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $7<a\le 11$

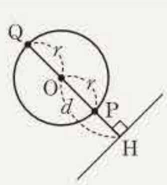
따라서 정수 a는 8, 9, 10, 11의 4개이다.

답 4

유형 18 원 위의 점과 직선 사이의 거리

집중 공략 본책 56쪽

원의 중심 O와 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 할 때, 원 위의 점과 직선 사이의 거리의
① 최댓값 ➡ $\overline{OH}+\overline{OQ}=d+r$
② 최솟값 ➡ $\overline{OH}-\overline{OP}=d-r$



0325 $x^2+y^2-2x+4y-11=0$에서

$(x-1)^2+(y+2)^2=16$

원의 중심 $(1,\ -2)$와 직선 $3x-4y+14=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|3+8+14|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5$

원의 반지름의 길이가 4이므로

$M=5+4=9,\ m=5-4=1$

$\therefore\ Mm=9$

답 ③

0326 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $4x-3y+k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{|k|}{5}$

원의 반지름의 길이가 5이므로 원 위의 점 P와 직선 $4x-3y+k=0$ 사이의 거리의 최댓값이 11이려면

$\dfrac{|k|}{5}+5=11,\qquad |k|=30$

$\therefore\ k=30\ (\because\ k>0)$

답 30

0327 $x^2+y^2-6x+4y=0$에서

$(x-3)^2+(y+2)^2=13$

원의 중심 $(3,\ -2)$와 직선 $2x-3y+14=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|6+6+14|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=2\sqrt{13}$ ··· ❶

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$이므로 원 위의 점 P와 직선 $2x-3y+14=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$2\sqrt{13}-\sqrt{13}\le d\le 2\sqrt{13}+\sqrt{13}$

$\therefore\ \sqrt{13}\le d\le 3\sqrt{13}$ ··· ❷

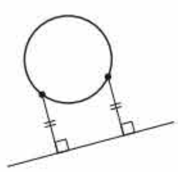
따라서 정수 d는 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10이고 각각의 거리에 해당하는 점 P가 2개씩 있으므로 구하는 점 P의 개수는 14이다.

··· ❸

답 14

채점 기준	비율
❶ 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %
❷ 점 P와 직선 사이의 거리의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 점 P의 개수를 구할 수 있다.	30 %

참고 오른쪽 그림과 같이 원 위의 점과 직선 사이의 거리가 최대일 때와 최소일 때를 제외하면 직선에서 같은 거리에 있는 원 위의 점은 2개씩 존재한다.



0328 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=-x-4$, 즉 $x+y+4=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 점 A와 직선 BC 사이의 거리의 최솟값과 최댓값은 각각

$2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

따라서 정삼각형 ABC의 넓이는 높이가 $\sqrt{2}$일 때 최소이고, 높이가 $3\sqrt{2}$일 때 최대이므로 구하는 넓이의 비는

$(\sqrt{2})^2:(3\sqrt{2})^2=1:9$

닮은 두 도형의 닮음비가 $m:n$이면 넓이의 비는 $m^2:n^2$이다.

답 ②

다른 풀이 높이가 $\sqrt{2}$인 정삼각형의 한 변의 길이를 a라 하면

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\sqrt{2}\qquad \therefore\ a=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

이 정삼각형의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

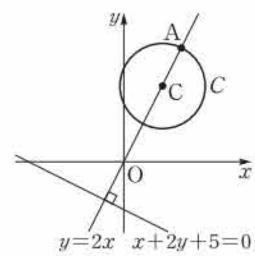
같은 방법으로 하면 높이가 $3\sqrt{2}$인 정삼각형의 넓이는

$6\sqrt{3}$

따라서 정삼각형 ABC의 넓이의 최솟값과 최댓값의 비는

$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}:6\sqrt{3}=1:9$

0329 두 직선 $y=2x$, $x+2y+5=0$이 수직이므로 점 P와 직선 $x+2y+5=0$ 사이의 거리는 오른쪽 그림과 같이 점 P가 원 C와 직선 $y=2x$의 교점 중 하나인 점 A와 같을 때 최대이다.



$\mathrm{A}(a,\ 2a)\ (a>0)$라 하면 점 A와 직선 $x+2y+5=0$ 사이의 거리가 $4\sqrt{5}$이므로

점 C가 제1사분면 위에 있으므로 점 A도 제1사분면 위에 있다.

$\dfrac{|a+4a+5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=4\sqrt{5}$

이때 $a>0$이므로 $\qquad 5a+5=20\qquad \therefore\ a=3$

$\therefore\ \mathrm{A}(3,\ 6)$

한편 $\mathrm{C}(c,\ 2c)$라 하면 원 C는 점 $(4,\ 5)$를 지나므로 원 C의 방정식은

원 C의 반지름의 길이는 점 C와 점 $(4,\ 5)$ 사이의 거리와 같다.

$(x-c)^2+(y-2c)^2=(c-4)^2+(2c-5)^2$

점 $\mathrm{A}(3,\ 6)$이 이 원 위에 있으므로

$(3-c)^2+(6-2c)^2=(c-4)^2+(2c-5)^2$

$5c^2-30c+45=5c^2-28c+41$

$2c=4\qquad \therefore\ c=2$

$\therefore\ \mathrm{C}(2,\ 4)$

따라서 원 C의 반지름의 길이는

$\sqrt{(2-4)^2+(4-5)^2}=\sqrt{5}$

이므로 원 C의 넓이는 5π이다.

답 5π

0330 원점과의 거리가 최대인 직선 l은 원점과 점 $(3,\ 4)$를 지나는 직선과 수직이고, 원점과 점 $(3,\ 4)$를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{4}{3}$이므로 직선 l의 방정식은

$y-4=-\dfrac{3}{4}(x-3)\qquad \therefore\ 3x+4y-25=0$

따라서 원의 중심 $(7,\ 5)$와 직선 l: $3x+4y-25=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|21+20-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{16}{5}$

이고, 원의 반지름의 길이가 1이므로 원 위의 점 P와 직선 l 사이의 거리의 최솟값은

$\dfrac{16}{5}-1=\dfrac{11}{5}$

답 $\dfrac{11}{5}$

유형 19 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식 (집중공략) 본책 57쪽

① 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식
➡ $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$
② 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\ (r>0)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식
➡ 접선의 방정식을 $y=mx+k$ (k는 상수)라 하고 이 직선과 원의 중심 $(a,\ b)$ 사이의 거리가 반지름의 길이 r와 같음을 이용한다.

0331 직선 $x+2y+1=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$에 수직인 직선의 기울기는 2이고, 원 $x^2+y^2=5$의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{5}\cdot\sqrt{2^2+1}$

$\therefore y=2x\pm5$

답 $y=2x\pm5$

0332 직선 $y=3x-2$에 평행한 직선의 기울기는 3이고, 원 $x^2+y^2=10$의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이므로 접선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{10}\cdot\sqrt{3^2+1}$

$\therefore y=3x\pm10$

따라서 두 직선이 y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(0,\ 10)$, $(0,\ -10)$이므로

$\overline{PQ}=|10-(-10)|=20$

답 20

0333 접선의 방정식을 $y=2x+k$ (k는 상수)라 하면 원의 중심 $(-1,\ 4)$와 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-2-4+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k-6|}{\sqrt{5}}$$

원의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|k-6|}{\sqrt{5}}=3,\qquad |k-6|=3\sqrt{5}$

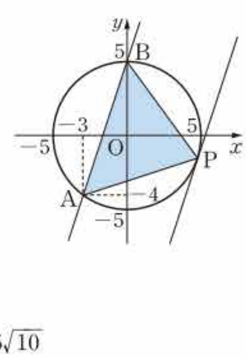
$k-6=\pm3\sqrt{5}\qquad \therefore k=6\pm3\sqrt{5}$

따라서 두 직선의 y절편은 각각 $6+3\sqrt{5}$, $6-3\sqrt{5}$이므로 구하는 곱은

$(6+3\sqrt{5})(6-3\sqrt{5})=-9$

답 ③

0334 △ABP의 넓이는 오른쪽 그림과 같이 점 P에서의 접선이 직선 AB와 평행하면서 y절편이 음수일 때 최대이다.



직선 AB의 기울기는

$$\frac{5-(-4)}{0-(-3)}=3$$

이므로 기울기가 3인 접선의 방정식은

$y=3x\pm5\sqrt{3^2+1}\qquad \therefore y=3x\pm5\sqrt{10}$

즉 점 P를 지나는 접선의 방정식은 $y=3x-5\sqrt{10}$이고 점 B$(0,\ 5)$와 직선 $3x-y-5\sqrt{10}=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-5-5\sqrt{10}|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{5+5\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}+5$$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{3^2+(5+4)^2}=3\sqrt{10}$이므로 △ABP의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{10}\cdot\left(\frac{\sqrt{10}}{2}+5\right)=\frac{15}{2}+\frac{15}{2}\sqrt{10}$$

따라서 $a=\frac{15}{2}$, $b=\frac{15}{2}$이므로

$a+b=15$

답 15

유형 20 원 위의 점에서의 접선의 방정식 (집중공략) 본책 58쪽

① 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식
➡ $x_1x+y_1y=r^2$
② 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식
➡ 원의 접선이 두 점 $(a,\ b)$, $(x_1,\ y_1)$을 지나는 직선과 수직임을 이용한다.

0335 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=20$

$\therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{20}{b}$

이 접선의 기울기가 2이므로

$-\frac{a}{b}=2\qquad \therefore a=-2b$ ······ ㉠

한편 점 $(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=20$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=-2$ 또는 $a=-4,\ b=2$

$\therefore ab=-8$

답 -8

0336 원 $x^2+y^2=34$ 위의 점 $(3,\ 5)$에서의 접선의 방정식은

$3x+5y=34\qquad \therefore y=-\frac{3}{5}x+\frac{34}{5}$

이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{5}{3}$이므로 기울기가 $\frac{5}{3}$이고 원 $x^2+y^2=34$에 접하는 직선의 방정식은

$y=\frac{5}{3}x\pm\sqrt{34}\cdot\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2+1}\qquad \therefore y=\frac{5}{3}x\pm\frac{34}{3}$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=\frac{5}{3}x+\frac{34}{3}$이다.

답 $y=\frac{5}{3}x+\frac{34}{3}$

0337 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$x+2y=5$

$\therefore x+2y-5=0$ ······ ㉠ ··· ❶

$x^2+y^2+2x+4y+k=0$에서

$(x+1)^2+(y+2)^2=5-k$ ······ ㉡

원 ㉡의 중심 $(-1,\ -2)$와 직선 ㉠ 사이의 거리는

$$\frac{|-1-4-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$$ ··· ❷

이때 직선 ㉠과 원 ㉡이 접하므로

$5-k=(2\sqrt{5})^2\qquad \therefore k=-15$ ··· ❸

답 -15

03 원의 방정식

채점 기준	비율
❶ 원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	50 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0338 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 P(3, 1)에서의 접선의 방정식은

$3x+y=10$ …… ㉠

원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 Q(−1, 3)에서의 접선의 방정식은

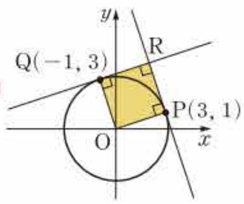
$-x+3y=10$ …… ㉡

이때 $3\cdot(-1)+1\cdot3=0$이므로 두 직선 ㉠, ㉡은 수직이다.

따라서 오른쪽 그림과 같이

□OPRQ는 한 변의 길이가 $\underbrace{\sqrt{10}}_{\text{반지름의 길이}}$인 정사각형이므로 구하는 넓이는

$\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=10$



답 ⑤

0339 $x^2+y^2-4x+2y-5=0$에서

$(x-2)^2+(y+1)^2=10$

원의 중심 (2, −1)과 점 (5, 0)을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{0-(-1)}{5-2}=\frac{1}{3}$

따라서 점 (5, 0)에서의 접선의 기울기는 −3이므로 접선의 방정식은

$y=-3(x-5)$ $\quad\therefore y=-3x+15$

이 직선이 점 $(a, 9)$를 지나므로

$9=-3a+15$ $\quad\therefore a=2$

답 ②

0340 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $P(a, b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=4$

$\therefore Q\left(\frac{4}{a}, 0\right), R\left(0, \frac{4}{b}\right)$

$\overline{QR}=8$에서 $\overline{QR}^2=64$이므로

$\left(-\frac{4}{a}\right)^2+\left(\frac{4}{b}\right)^2=64,\quad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=4$

$\therefore a^2+b^2=4a^2b^2$ …… ㉠

한편 점 $P(a, b)$가 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=4$ …… ㉡

㉠에 ㉡을 대입하여 정리하면 $\quad a^2b^2=1$

$\therefore ab=1\ (\because a>0, b>0)$

답 ③

유형 21 원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선의 방정식 집중공략 본책 59쪽

원 밖의 점 (a, b)에서 원에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y-b=m(x-a)$, 즉 $mx-y-ma+b=0$ …… ㉠

이므로 원의 중심과 직선 ㉠ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용하여 m의 값을 구한다.

0341 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 (2, 5)를 지나는 직선의 방정식은

$y-5=m(x-2)$ $\quad\therefore mx-y-2m+5=0$

원의 중심의 좌표가 (−1, 4), 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 이 직선이 접하려면

$\frac{|-m-4-2m+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5},\quad |-3m+1|=\sqrt{5m^2+5}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$9m^2-6m+1=5m^2+5$

$2m^2-3m-2=0,\quad (2m+1)(m-2)=0$

$\therefore m=-\frac{1}{2}$ 또는 $m=2$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$-\frac{1}{2}\cdot2=-1$

답 ②

0342 직선 l이 원 O'의 넓이를 이등분하므로 직선 l은 원 O'의 중심 (−2, 0)을 지난다.

직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$y=m(x+2)$ $\quad\therefore mx-y+2m=0$

원 O의 중심의 좌표가 (0, 0), 반지름의 길이가 1이므로 원 O와 직선 l이 접하려면

$\frac{|2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1,\quad |2m|=\sqrt{m^2+1}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4m^2=m^2+1,\quad m^2=\frac{1}{3}$

$\therefore m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 직선 l의 방정식은

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3},\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

답 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3},\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

0343 (1) 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 P(3, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=m(x-3)$

$\therefore mx-y-3m+2=0$

원의 중심의 좌표가 (0, 0), 반지름의 길이가 2이므로 원과 이 직선이 접하려면

$\frac{|-3m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2,\quad |-3m+2|=2\sqrt{m^2+1}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$9m^2-12m+4=4m^2+4$

$5m^2-12m=0,\quad m(5m-12)=0$

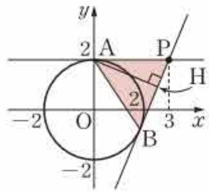
$\therefore m=0$ 또는 $m=\frac{12}{5}$

따라서 접선의 방정식은

$-y+2=0,\ \frac{12}{5}x-y-\frac{26}{5}=0$

$\therefore y=2,\ 12x-5y-26=0$ ⋯ ❶

(2) 직선 BP의 방정식이 $12x-5y-26=0$이므로 점 A$(0,\ 2)$에서 직선 BP에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{AH}=\frac{|-10-26|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}$$
$$=\frac{36}{13} \quad \cdots ❷$$

(3) $\overline{BP}=\overline{AP}=3$이므로

원 밖에 한 점에서 두 접점까지의 거리는 같다.

$$\triangle ABP=\frac{1}{2}\cdot\overline{BP}\cdot\overline{AH}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot\frac{36}{13}=\frac{54}{13} \quad \cdots ❸$$

답 (1) $y=2$, $12x-5y-26=0$ (2) $\frac{36}{13}$ (3) $\frac{54}{13}$

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❷ 점 A와 직선 BP 사이의 거리를 구할 수 있다.	20 %
❸ △ABP의 넓이를 구할 수 있다.	30 %

0344 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(0,\ a)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=mx+a$

$\therefore mx-y+a=0$

원의 중심의 좌표가 $(0,\ 1)$, 반지름의 길이가 3이므로 원과 이 직선이 접하려면

$\frac{|-1+a|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3$, $\quad |a-1|=3\sqrt{m^2+1}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$a^2-2a+1=9m^2+9$

$\therefore 9m^2-(a^2-2a-8)=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

m에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근을 m_1, m_2라 하면 두 접선이 수직이므로

$m_1m_2=-1$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{a^2-2a-8}{9}=-1$, $\quad a^2-2a-8=9$

$a^2-2a-17=0 \quad \therefore a=1\pm3\sqrt{2}$

따라서 모든 a의 값의 합은

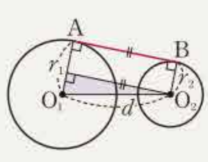
$(1+3\sqrt{2})+(1-3\sqrt{2})=2$

답 2

유형 22 두 원에 동시에 접하는 접선의 길이 본책 59쪽

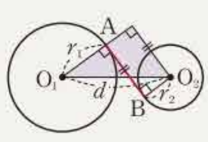
① 두 원 O_1, O_2의 반지름의 길이가 각각 r_1, $r_2\ (r_1>r_2)$이고, $\overline{O_1O_2}=d$일 때,

$\overline{AB}=\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}$

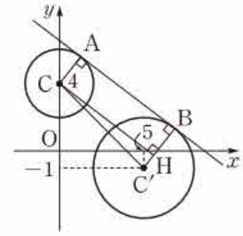


② 두 원 O_1, O_2의 반지름의 길이가 각각 r_1, r_2이고, $\overline{O_1O_2}=d$일 때,

$\overline{AB}=\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}$



0345 두 원 $x^2+(y-4)^2=4$, $(x-5)^2+(y+1)^2=9$의 중심을 각각 C$(0,\ 4)$, C$'(5,\ -1)$이라 하면



$\overline{CC'}=\sqrt{5^2+(-1-4)^2}=5\sqrt{2}$

점 C에서 $\overline{C'B}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{C'H}=3-2=1$ — $\overline{C'H}=\overline{C'B}-\overline{HB}=\overline{C'B}-\overline{CA}$

직각삼각형 CC$'$H에서

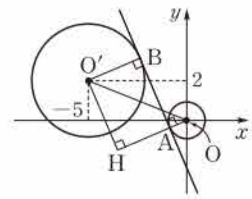
$\overline{AB}=\overline{CH}=\sqrt{\overline{CC'}^2-\overline{C'H}^2}$

$=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-1^2}$

$=7$

답 ①

0346 두 원 O, O'의 중심 O, O$'$의 좌표는



O$(0,\ 0)$, O$'(-5,\ 2)$

$\therefore \overline{OO'}=\sqrt{(-5)^2+2^2}=\sqrt{29}$

점 O$'$에서 $\overline{OA}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=r+1$ ($\because r>0$)

$\overline{O'H}=\overline{AB}=\sqrt{13}$이므로 직각삼각형 OO$'$H에서

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{O'H}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{29})^2-(\sqrt{13})^2}=4$

따라서 $r+1=4$이므로

$r=3$

답 3

0347 $x^2+y^2-8x+10y+32=0$에서

$(x-4)^2+(y+5)^2=9$

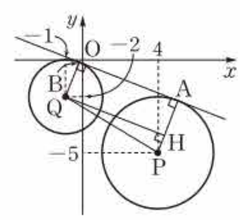
$x^2+y^2+2x+4y+1=0$에서

$(x+1)^2+(y+2)^2=4$

두 원의 중심을 각각 P$(4,\ -5)$, Q$(-1,\ -2)$라 하면

$\overline{PQ}=\sqrt{(-1-4)^2+(-2+5)^2}=\sqrt{34}$

점 Q에서 $\overline{PA}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{PH}=3-2=1$

직각삼각형 QPH에서

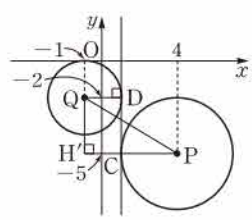
$\overline{AB}=\overline{QH}$

$=\sqrt{\overline{PQ}^2-\overline{PH}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{34})^2-1^2}$

$=\sqrt{33}$

한편 점 Q에서 $\overline{PC}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H$'$이라 하면



$\overline{PH'}=3+2=5$

직각삼각형 QH$'$P에서

$\overline{CD}=\overline{QH'}=\sqrt{\overline{PQ}^2-\overline{PH'}^2}$

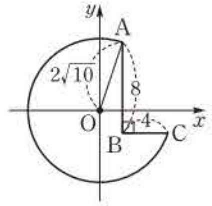
$=\sqrt{(\sqrt{34})^2-5^2}$

$=3$

답 $\sqrt{33}$, 3

0348 (1st) 원 O의 중심이 원점에 오도록 좌표평면 위에 놓고 원의 방정식을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 원 O의 중심을 원점으로 하고, 점 O를 지나고 직선 AB와 평행한 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 원 O의 방정식은



$x^2+y^2=(2\sqrt{10})^2$

$\therefore\ x^2+y^2=40$

(2nd) A$(a,\ b)$ $(a>0,\ b>0)$라 하고 두 점 A, C가 원 위의 점임을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

A$(a,\ b)$ $(a>0,\ b>0)$라 하면 점 A가 원 O 위의 점이므로

$a^2+b^2=40$ ...... ㉠

한편 $\overline{AB}=8$이므로 B$(a,\ b-8)$이고, $\overline{BC}=4$이므로 C$(a+4,\ b-8)$이다.

이때 점 C가 원 O 위의 점이므로

$(a+4)^2+(b-8)^2=40$

$a^2+b^2+8a-16b+80=40$

$8a-16b+80=0$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ a=2b-10$ ...... ㉡

㉠에 ㉡을 대입하면

$(2b-10)^2+b^2=40,\quad b^2-8b+12=0$

$(b-2)(b-6)=0\quad \therefore\ b=2$ 또는 $b=6$

㉡에 $b=2$를 대입하면 $\quad a=-6$

㉡에 $b=6$을 대입하면 $\quad a=2$

그런데 $a>0$, $b>0$이므로 $\quad a=2,\ b=6$

(3rd) 점 B의 좌표를 구한 후 $3l^2$의 값을 구한다.

B$(2,\ -2)$이므로 $\quad l^2=\overline{OB}^2=2^2+(-2)^2=8$

$\therefore\ 3l^2=24$

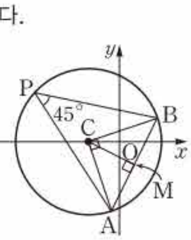
답 24

0349 (1st) 주어진 원의 반지름의 길이를 구한다.

$\angle APB=45°$이므로

$\angle ACB=90°$ (중심각의 크기) $=2\times$(원주각의 크기)

따라서 $\triangle ABC$는 $\overline{CA}=\overline{CB}$인 직각이등변삼각형이다.



이때

$\overline{AB}=\sqrt{(5+1)^2+(3+9)^2}=6\sqrt{5}$

이므로 원의 반지름의 길이는

$\overline{AC}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\overline{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 6\sqrt{5}=3\sqrt{10}$

(2nd) 점 C가 $\overline{AB}$의 수직이등분선 위에 있음을 이용하여 점 C의 좌표를 구한다.

$\overline{AB}$의 중점을 M이라 하면

$M\left(\frac{-1+5}{2},\ \frac{-9+3}{2}\right)$, 즉 M$(2,\ -3)$

직선 CM은 $\overline{AB}$의 수직이등분선이고 직선 AB의 기울기가

$\frac{3-(-9)}{5-(-1)}=2$이므로 직선 CM의 방정식은

기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 점 M$(2,\ -3)$을 지나는 직선

$y+3=-\frac{1}{2}(x-2)$

$\therefore\ y=-\frac{1}{2}x-2$

즉 점 C가 직선 $y=-\frac{1}{2}x-2$ 위의 점이므로 C$(2a,\ -a-2)$라 하면 주어진 원의 방정식은

$(x-2a)^2+(y+a+2)^2=90$ $\quad \overline{AC}^2=(3\sqrt{10})^2=90$

점 B$(5,\ 3)$이 이 원 위의 점이므로

$(5-2a)^2+(3+a+2)^2=90$

$a^2-2a-8=0,\quad (a+2)(a-4)=0$

$\therefore\ a=-2$ 또는 $a=4$

$\therefore$ C$(-4,\ 0)$ 또는 C$(8,\ -6)$

(3rd) k의 최솟값을 구한다.

C$(-4,\ 0)$일 때, $\quad \overline{OC}=4$

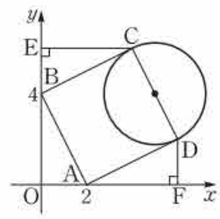
C$(8,\ -6)$일 때, $\quad \overline{OC}=\sqrt{8^2+(-6)^2}=10$

따라서 k의 최솟값은 4이다.

답 ②

0350 (1st) $\triangle OAB$와 합동인 삼각형을 찾아 두 점 C, D의 좌표를 구한다.

점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 E, 점 D에서 x축에 내린 수선의 발을 F라 하면



$\triangle OAB\equiv\triangle EBC\equiv\triangle FDA$

(RHA 합동)

이므로

$\overline{EB}=\overline{FD}=\overline{OA}=2,\ \overline{EC}=\overline{FA}=\overline{OB}=4$

$\therefore$ C$(4,\ 6)$, D$(6,\ 2)$ ··· ❶

(2nd) $\overline{CD}$를 지름으로 하는 원의 방정식을 구한다.

$\overline{CD}$의 중점은 $\overline{CD}$를 지름으로 하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\frac{4+6}{2},\ \frac{6+2}{2}\right)$, 즉 $(5,\ 4)$

또 $\overline{CD}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{1}{2}\sqrt{(6-4)^2+(2-6)^2}=\sqrt{5}$ ··· ❷

따라서 $\overline{CD}$를 지름으로 하는 원의 방정식은

$(x-5)^2+(y-4)^2=5$

$\therefore\ x^2+y^2-10x-8y+36=0$

(3rd) $a+b+c$의 값을 구한다.

$a=-10,\ b=-8,\ c=36$이므로 ··· ❸

$a+b+c=18$ ··· ❹

답 18

채점 기준	비율
❶ 두 점 C, D의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0351 (1st) 주어진 조건을 만족시키는 원의 중심의 좌표를 구한다.

점 P가 제4사분면 위의 점이므로 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 중심은 제4사분면 위에 있어야 한다.

이때 반지름의 길이가 r이므로 원의 중심의 좌표는

$(r,\ -r)$

2nd r에 대한 부등식을 세운다.
점 P$(3,\ -5)$가 주어진 원의 내부에 있으려면 원의 중심 $(r,\ -r)$와 점 P 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 r보다 작아야 하므로

$\sqrt{(3-r)^2+(-5+r)^2}<r$ ...... ㉠

3rd 자연수 r의 개수를 구한다.
㉠의 양변을 제곱하면

$(3-r)^2+(-5+r)^2<r^2,\quad r^2-16r+34<0$

$\therefore 8-\sqrt{30}<r<8+\sqrt{30}$

이때 $5<\sqrt{30}<6$이므로 자연수 r는 3, 4, 5, ⋯, 13의 11개이다.

답 ④

0352 1st C$(x,\ y)(x>0,\ y>0)$라 하고 각의 이등분선의 성질을 이용하여 x, y에 대한 방정식을 세운다.
$\overline{AO}=3$, $\overline{BO}=2$이고, $\overline{OC}$는 $\angle$C의 이등분선이므로

$\overline{CA}:\overline{CB}=\overline{AO}:\overline{BO}=3:2$

$2\overline{CA}=3\overline{CB}$

$\therefore 4\overline{CA}^2=9\overline{CB}^2$

C$(x,\ y)(x>0,\ y>0)$라 하면

$4\{(x+3)^2+y^2\}=9\{(x-2)^2+y^2\}$

$x^2+y^2-12x=0\qquad \therefore (x-6)^2+y^2=36$

2nd 점 C가 나타내는 도형의 길이를 구한다.
점 C가 나타내는 도형은 중심이 점 $(6,\ 0)$이고 반지름의 길이가 6인 원에서 $\underline{x>0,\ y>0}$인 부분이므로 구하는 길이는
└점 C는 제1사분면 위에 있다.

$\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 6=6\pi$

답 ②

0353 1st 주어진 조건을 이용하여 점 P의 자취의 방정식을 구한다.
$\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$에서 $2\overline{AP}=\overline{BP}$이므로

$4\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$

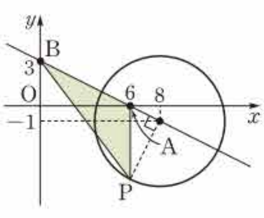
P$(x,\ y)$라 하면

$4\{(x-6)^2+y^2\}=x^2+(y-3)^2$

$x^2+y^2-16x+2y+45=0$

$\therefore (x-8)^2+(y+1)^2=20$ ...... ㉠ ⋯➊

2nd △ABP의 넓이의 최댓값을 구한다.
점 P는 중심이 점 $(8,\ -1)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$인 원 위를 움직인다.



이때 직선 AB의 방정식은 $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$이고 원 ㉠의 중심 $(8,\ -1)$이 이 직선 위의 점이므로 △ABP의 넓이는 직선 AB와 점 P 사이의 거리가 원 ㉠의 반지름의 길이인 $2\sqrt{5}$와 같을 때 최대이다. ⋯➋

따라서 $\overline{AB}=\sqrt{(-6)^2+3^2}=3\sqrt{5}$이므로 △ABP의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}=15$ ⋯➌

답 15

채점 기준	비율
➊ 점 P의 자취의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
➋ △ABP의 넓이가 최대일 때를 알 수 있다.	30 %
➌ △ABP의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

0354 1st 두 원의 중심을 지나는 직선이 두 원의 공통인 현을 수직이등분함을 이용하여 원 C_1의 넓이를 구한다.

$x+2y=10$에서 $\quad y=-\frac{1}{2}x+5$

이 직선이 $\overline{AB}$를 수직이등분하므로 직선 AB의 기울기는 2이다.

즉 $\frac{b-a}{3-1}=2$이므로 $\quad b-a=4$

$\therefore \overline{C_1B}=\frac{1}{2}\overline{AB}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(3-1)^2+(b-a)^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{5}$

따라서 원 C_1의 넓이는 5π이다. ⋯➊

2nd $\triangle BC_1C_2$가 직각이등변삼각형임을 이용하여 원 C_2의 넓이를 구한다.

$\triangle BC_1C_2$는 $\overline{C_1B}=\overline{C_1C_2}=\sqrt{5}$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{BC_2}=\sqrt{2}\cdot\overline{C_1B}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{10}$

따라서 원 C_2의 넓이는 10π이다. ⋯➋

3rd 두 원 C_1, C_2의 넓이의 합을 구한다.
두 원 C_1, C_2의 넓이의 합은

$5\pi+10\pi=15\pi$ ⋯➌

답 15π

채점 기준	비율
➊ 원 C_1의 넓이를 구할 수 있다.	50 %
➋ 원 C_2의 넓이를 구할 수 있다.	40 %
➌ 두 원 C_1, C_2의 넓이의 합을 구할 수 있다.	10 %

0355 1st 원의 방정식에 직선의 방정식을 대입하여 얻은 x에 대한 이차방정식을 이용하여 $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$의 길이를 구한다.
$x^2+y^2+2ax+2by-16=0$에 $y=mx$를 대입하여 정리하면

$(1+m^2)x^2+2(a+bm)x-16=0$ ...... ㉠

P$(x_1,\ y_1)$, Q$(x_2,\ y_2)$라 하면 x_1, x_2는 x에 대한 이차방정식 ㉠의 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1x_2=-\frac{16}{1+m^2}$ ...... ㉡

한편 두 점 P, Q는 직선 $y=mx$ 위에 있으므로

$y_1=mx_1,\ y_2=mx_2$

$\therefore \overline{OP}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{x_1^2+m^2x_1^2}=\sqrt{1+m^2}\,|x_1|,$

$\overline{OQ}=\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\sqrt{x_2^2+m^2x_2^2}=\sqrt{1+m^2}\,|x_2|$

2nd $\overline{OP}\cdot\overline{OQ}$의 값을 구한다.

$\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=(1+m^2)|x_1x_2|$

$=(1+m^2)\cdot\left|-\frac{16}{1+m^2}\right|\ (\because ㉡)$

$=(1+m^2)\cdot\frac{16}{1+m^2}=16$

답 ③

0356 1st 두 점 P, Q가 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원 위에 있음을 이해하고, $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원의 방정식을 구한다.

$\angle APB = \angle AQB = 90^\circ$이므로 두 점 P, Q는 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원 위에 있다.

$\overline{AB}$의 중점을 C라 하면 점 C는 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\frac{4-2}{2}, \frac{5-3}{2}\right)$, 즉 $(1, 1)$

또 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

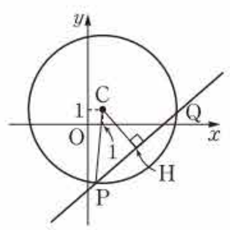
$\frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{(-2-4)^2+(-3-5)^2} = 5$

따라서 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-1)^2=25$

2nd $\overline{PQ}$의 길이를 구한다.

점 C에서 직선 $y=x-5$, 즉 $x-y-5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{CH} = \frac{|1-1-5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

직각삼각형 CPH에서

$\overline{PH} = \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \overline{PQ} = 2\overline{PH} = 5\sqrt{2}$

답 $5\sqrt{2}$

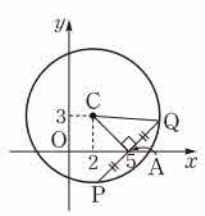
0357 1st $\overline{PQ}$의 길이의 최댓값을 구한다.

$x^2+y^2-4x-6y-17=0$에서 $(x-2)^2+(y-3)^2=30$

$\overline{PQ}$의 길이는 $\overline{PQ}$가 원의 지름일 때 최대이므로 $\overline{PQ}$의 길이의 최댓값은 $2\sqrt{30}$ …… ㉠ ⋯ ❶

2nd $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값을 구한다.

원의 중심을 C(2, 3)이라 하면 $\overline{PQ}$의 길이는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{PQ}$와 점 C와의 거리가 최대일 때, 즉 $\overline{CA} \perp \overline{PQ}$일 때 최소이고



$\overline{CA} = \sqrt{(5-2)^2+(-3)^2} = 3\sqrt{2}$,

$\overline{CQ} = \sqrt{30}$

이므로 직각삼각형 CAQ에서

$\overline{AQ} = \sqrt{\overline{CQ}^2 - \overline{CA}^2} = \sqrt{(\sqrt{30})^2 - (3\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3}$

따라서 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은

$2\overline{AQ} = 4\sqrt{3}$ …… ㉡ ⋯ ❷

3rd $M+m$의 값을 구한다.

㉠, ㉡에서 $4\sqrt{3} \le \overline{PQ} \le 2\sqrt{30}$

이때 $6 < 4\sqrt{3} < 7$, $10 < 2\sqrt{30} < 11$이므로

$M=10$, $m=7$ $\therefore M+m=17$ ⋯ ❸

답 17

채점 기준	비율
❶ $\overline{PQ}$의 길이의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $M+m$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0358

❶ 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점을 중심으로 하고 y축에 접하는 원 중에서 직선 $y=\sqrt{3}x-2$와 접하는 원은 2개이다. ❷ 두 원의 반지름의 길이를 각각 a, b라 할 때, $100ab$의 값을 구하시오.

원의 중심의 좌표를 (n, n^2)이라 하면 반지름의 길이는 $|n|$이다.

원의 중심과 직선 $y=\sqrt{3}x-2$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같다.

원의 중심의 좌표를 (n, n^2)이라 하고 ❶을 이용하여 n에 대한 방정식을 세운 후 ❷에서 이 방정식의 두 양의 실근이 a, b임을 이용하여 ab의 값을 구한다.

1st 원의 중심의 좌표를 (n, n^2)이라 하고 원과 직선이 접함을 이용하여 n에 대한 방정식을 세운다.

원의 중심이 $y=x^2$의 그래프 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 (n, n^2)이라 하면 이 원은 y축에 접하므로 반지름의 길이가 $|n|$이다.

원의 중심 (n, n^2)과 직선 $y=\sqrt{3}x-2$, 즉 $\sqrt{3}x-y-2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|\sqrt{3}n-n^2-2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}} = \frac{|n^2-\sqrt{3}n+2|}{2}$

이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|n^2-\sqrt{3}n+2|}{2} = |n|$, $|n^2-\sqrt{3}n+2| = 2|n|$

$\therefore n^2-\sqrt{3}n+2 = \pm 2n$

2nd 서로 다른 두 실근을 갖는 이차방정식을 찾는다.

(i) $n^2-\sqrt{3}n+2=-2n$, 즉 $n^2+(2-\sqrt{3})n+2=0$일 때,

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(2-\sqrt{3})^2-4\cdot 2=-1-4\sqrt{3}<0$

이므로 실근을 갖지 않는다. 직선 $y=\sqrt{3}x-2$와 접하는 원이 존재하지 않는다.

(ii) $n^2-\sqrt{3}n+2=2n$, 즉 $n^2-(2+\sqrt{3})n+2=0$일 때,

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=\{-(2+\sqrt{3})\}^2-4\cdot 2=-1+4\sqrt{3}>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 서로 다른 두 실근을 갖는 이차방정식은

$n^2-(2+\sqrt{3})n+2=0$ …… ㉠

3rd $100ab$의 값을 구한다.

이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 양의 실근을 가지므로 이 두 근이 a, b이다.

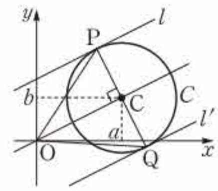
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $ab=2$

$\therefore 100ab=200$

답 200

0359 1st 원의 중심과 원점을 지나는 직선의 방정식을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

원 C의 중심을 C(a, b)라 하면 평행한 두 직선 l, l'이 원 C의 접선이므로 $\overline{PQ}$는 원 C의 지름이고 점 C(a, b)는 $\overline{PQ}$의 중점이다.



이때 $\triangle POQ$가 정삼각형이므로 직선

OC는 $\overline{PQ}$를 수직이등분한다.

즉 $\overline{OC}\perp\overline{PQ}$이고 $l\perp\overline{PQ}$이므로 직선 OC는 직선 l과 평행하다.
└ 두 직선 OC, l의 기울기가 같다.

따라서 직선 OC의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}x \qquad \therefore\ x-2y=0$$

점 C는 이 직선 위의 점이므로

$$a-2b=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

2nd △POQ가 정삼각형임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

원 C의 반지름의 길이는 점 C와 직선 l 사이의 거리와 같으므로

$$r=\frac{|a-2b+5\sqrt{5}|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|5\sqrt{5}|}{\sqrt{5}}=5\ (\because ㉠)$$

즉 정삼각형 POQ의 한 변의 길이가 10이므로

$$\overline{OC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 10=5\sqrt{3}$$

한편 $\overline{OC}=\sqrt{a^2+b^2}$이므로

$$\sqrt{a^2+b^2}=5\sqrt{3}$$

$$\therefore\ a^2+b^2=75 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

3rd abr의 값을 구한다.

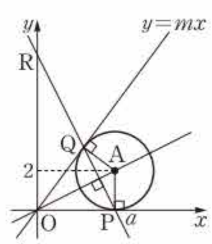
㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=2\sqrt{15},\ b=\sqrt{15}\ (\because a>0,\ b>0)$$

$$\therefore\ abr=150$$

답 150

0360 **1st** P$(a,\ 0)$ $(a>0)$이라 하고 직선 PQ의 방정식을 a를 이용하여 나타낸다.



오른쪽 그림과 같이 주어진 원의 중심을 A라 하고 P$(a,\ 0)$ $(a>0)$이라 하면 원의 반지름의 길이가 2이므로

$$A(a,\ 2)$$

따라서 직선 OA의 방정식은

$$y=\frac{2}{a}x$$

이 직선이 직선 PQ와 수직이므로 직선 PQ의 방정식은

$$y=-\frac{a}{2}(x-a) \qquad \therefore\ y=-\frac{a}{2}x+\frac{a^2}{2}$$

2nd △ROP의 넓이를 이용하여 a의 값을 구한다.

$R\left(0,\ \frac{a^2}{2}\right)$이고, △ROP의 넓이가 16이므로

$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a^2}{2}=16, \qquad a^3=64$$

$$\therefore\ a=4$$

3rd $60m$의 값을 구한다.

점 A$(4,\ 2)$와 직선 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2와 같으므로

$$\frac{|4m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2, \qquad |2m-1|=\sqrt{m^2+1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$4m^2-4m+1=m^2+1$$

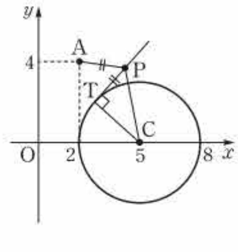
$$3m^2-4m=0, \qquad m(3m-4)=0$$

$$\therefore\ m=\frac{4}{3}\ (\because m>0)$$

$$\therefore\ 60m=80$$

답 80

0361 **1st** P$(x,\ y)$라 하고 $\overline{PT}^2$을 x, y에 대한 식으로 나타낸다.



$x^2+y^2-10x+16=0$에서

$$(x-5)^2+y^2=9$$

원의 중심을 C$(5,\ 0)$이라 하고

P$(x,\ y)$라 하면 직각삼각형 PTC에서

$$\overline{PT}^2=\overline{PC}^2-\overline{CT}^2$$

$$=\{(x-5)^2+y^2\}-9$$

$$=x^2+y^2-10x+16$$

2nd $\overline{PT}=\overline{PA}$임을 이용하여 점 P의 자취의 방정식을 구한다.

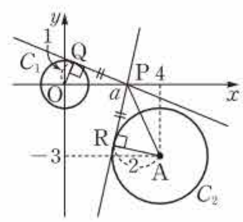
$\overline{PT}=\overline{PA}$에서 $\overline{PT}^2=\overline{PA}^2$이므로

$$x^2+y^2-10x+16=(x-2)^2+(y-4)^2$$

$$\therefore\ 3x-4y+2=0$$

답 $3x-4y+2=0$

0362 **1st** P$(a,\ 0)$이라 하고 $\overline{PQ}^2$, $\overline{PR}^2$을 a에 대한 식으로 나타낸다.



P$(a,\ 0)$이라 하면 $\overline{OQ}\perp\overline{PQ}$이므로

직각삼각형 OPQ에서

$$\overline{PQ}^2=\overline{OP}^2-\overline{OQ}^2=a^2-1$$

$x^2+y^2-8x+6y+21=0$에서

$$(x-4)^2+(y+3)^2=4$$

원 C_2의 중심을 A$(4,\ -3)$이라 하면

$\overline{AR}\perp\overline{PR}$이므로 직각삼각형 APR에서

$$\overline{PR}^2=\overline{AP}^2-\overline{AR}^2=\{(a-4)^2+3^2\}-4$$

$$=a^2-8a+21$$

2nd $\overline{PQ}=\overline{PR}$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

$\overline{PQ}=\overline{PR}$에서 $\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2$이므로

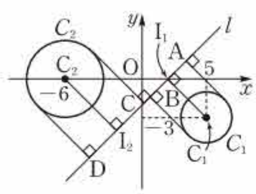
$$a^2-1=a^2-8a+21, \qquad 8a=22$$

$$\therefore\ a=\frac{11}{4}$$

따라서 점 P의 x좌표는 $\frac{11}{4}$이다.

답 ④

0363 **1st** $\overline{H_1H_2}$의 길이의 최댓값, 최솟값과 같은 선분의 길이를 각각 찾는다.



오른쪽 그림과 같이 직선 l과 수직이면서 두 원 C_1, C_2에 각각 접하는 4개의 직선과 직선 l의 교점을 각각 A, B, C, D라 하면 $\overline{H_1H_2}$의 길이의 최댓값은 $\overline{AD}$의 길이와 같고, $\overline{H_1H_2}$의 길이의 최솟값은 $\overline{BC}$의 길이와 같다.

2nd 두 원의 중심에서 직선 l에 각각 내린 두 수선의 발 사이의 거리를 구한다.

두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 $C_1(5,\ -3)$, $C_2(-6,\ 0)$이라 하고, 두 점 C_1, C_2에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각

$$\underbrace{I_1(a,\ a-2),\ I_2(b,\ b-2)}_{\text{직선 } l:\ x-y-2=0 \text{ 위의 점}}$$

라 하면 두 직선 C_1I_1, C_2I_2는 각각 직선 l과 수직이므로

$$\frac{a-2-(-3)}{a-5}=-1,\ \frac{b-2}{b-(-6)}=-1$$

$\therefore a=2,\ b=-2$

즉 $I_1(2,\ 0),\ I_2(-2,\ -4)$이므로

$$\overline{I_1I_2}=\sqrt{(-2-2)^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}$$

3rd 두 원의 반지름의 길이와 $\overline{I_1I_2}$의 길이를 이용하여 Mm의 값을 구한다.

$\overline{AI_1}=\overline{I_1B}=2,\ \overline{CI_2}=\overline{I_2D}=3$이므로

$$\overline{AD}=\overline{AI_1}+\overline{I_1I_2}+\overline{I_2D}=2+4\sqrt{2}+3=4\sqrt{2}+5,$$

$$\overline{BC}=\overline{I_1I_2}-(\overline{I_1B}+\overline{CI_2})=4\sqrt{2}-(2+3)=4\sqrt{2}-5$$

따라서 $M=4\sqrt{2}+5,\ m=4\sqrt{2}-5$이므로

$$Mm=(4\sqrt{2}+5)(4\sqrt{2}-5)=7$$

답 7

0364 **1st** 직선 AC의 방정식을 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 직선 AC의 방정식은

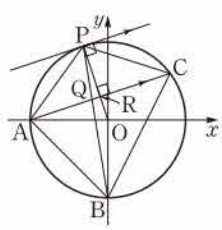
$$y=\frac{3}{4-(-5)}(x+5) \qquad \therefore x-3y+5=0$$

따라서 점 B와 직선 AC 사이의 거리는

$$\frac{|15+5|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=2\sqrt{10}$$

2nd □PABC의 넓이가 최대일 때를 구하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. □PABC=△ABC+△PAC이므로 □PABC의 넓이는 오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 P에서의 접선이 직선 AC와 평행할 때 최대이다.
└ △PAC의 넓이가 최대일 때



$\overline{AC}$와 $\overline{PB}$, $\overline{PO}$가 만나는 점을 각각 Q, R라 하면 $\overline{AC}\perp\overline{PO}$이므로

△PQR에서

$$\angle PQR<90°$$

따라서 직선 PB와 직선 AC는 수직이 아니다.

3rd ㄱ, ㄴ을 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $\overline{AC}=\sqrt{(4+5)^2+3^2}=3\sqrt{10}$이고 ㄱ에서 점 B와 직선 AC 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$이므로

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{10}=30$$

△PAC의 넓이가 최대일 때, ㄴ에서

$$\overline{PR}=\overline{OP}-\overline{OR}=5-\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=5-\frac{\sqrt{10}}{2}$$

└ 원점과 직선 AC 사이의 거리

이므로 △PAC의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{10}\cdot\left(5-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)=\frac{15(\sqrt{10}-1)}{2}$$

따라서 □PABC의 넓이의 최댓값은

$$30+\frac{15(\sqrt{10}-1)}{2}=\frac{15(3+\sqrt{10})}{2}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

0365 **1st** 직선 OP의 방정식을 구하여 점 P의 좌표를 구한다.

직선 OP의 기울기는 $\tan 45°=1$이므로 직선 OP의 방정식은

$$y=x$$

$P(p,\ p)\ (p>0)$라 하면 점 P는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$$p^2+p^2=1, \qquad p^2=\frac{1}{2} \qquad \therefore p=\frac{\sqrt{2}}{2}\ (\because p>0)$$

$$\therefore P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

2nd 점 P에서의 접선의 방정식을 구하여 두 점 A, B의 좌표를 구한다.

점 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y=1 \qquad \therefore x+y-\sqrt{2}=0$$

$$\therefore A(\sqrt{2},\ 0),\ B(0,\ \sqrt{2})$$

3rd a^2+b^2+2b+1의 기하적 의미를 파악하여 M, m의 값을 구한다.

$a^2+b^2+2b+1=k$라 하면 $\qquad a^2+(b+1)^2=k$

즉 k는 $\overline{AB}$ 위의 점 $(a,\ b)$와 점 $(0,\ -1)$ 사이의 거리의 제곱과 같다.

따라서 k의 최솟값은 직선 $x+y-\sqrt{2}=0$과 점 $(0,\ -1)$ 사이의 거리의 제곱과 같으므로

$$m=\left(\frac{|-1-\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+1^2}}\right)^2=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$$

또 k의 최댓값은 점 B와 점 $(0,\ -1)$ 사이의 거리의 제곱과 같으므로

$$M=\{\sqrt{2}-(-1)\}^2=3+2\sqrt{2}$$

4th $\frac{m}{M}$의 값을 구한다.

$$\frac{m}{M}=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

답 ②

0366 **1st** 점 P에서의 접선의 방정식을 구하여 점 Q의 좌표를 구한 후 $\overline{PQ}$의 길이를 구한다.

원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $P(4,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$$4x+3y=25 \quad \cdots ❶$$

이 식에 $y=0$을 대입하면

$$4x=25 \qquad \therefore x=\frac{25}{4}$$

즉 $Q\left(\frac{25}{4},\ 0\right)$이므로

$$\overline{PQ}=\sqrt{\left(\frac{25}{4}-4\right)^2+(-3)^2}=\frac{15}{4} \quad \cdots ❷$$

2nd 점 R의 좌표를 구한 후 $\overline{QH}$가 $\overline{PR}$를 수직이등분함을 이용하여 $\overline{PH}$의 길이를 구한다.

$\overline{PQ}=\overline{QR}$이므로 점 R의 좌표는

$$\left(\frac{25}{4}-\frac{15}{4},\ 0\right),\ 즉 \left(\frac{5}{2},\ 0\right) \quad \cdots ❸$$

$\overline{QH}$는 $\overline{PR}$를 수직이등분하므로

$$\overline{PH}=\frac{1}{2}\overline{PR}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5}{2}-4\right)^2+(-3)^2}$$

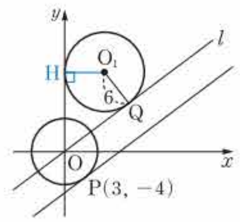
$$=\frac{3\sqrt{5}}{4} \quad \cdots ❹$$

답 $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

채점 기준	비율
❶ 점 P에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	20 %
❷ $\overline{PQ}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❸ 점 R의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❹ $\overline{PH}$의 길이를 구할 수 있다.	20 %

0367

오른쪽 그림과 같이 ❶원 $O: x^2+y^2=25$ 위의 점
중심: (0, 0), 반지름의 길이: 5
P(3, −4)에서의 접선과 평행하고 원점을 지나는 직선을 l이라 하자. ❷직선 l과 y축에 동시에 접하고 반지름의 길이가 6인
$\overline{O_1H}=6$이므로 점 O_1의 x좌표는 6이다.
원 O_1이 직선 l과 만나는 점을 Q라 할 때, ❸선분 OQ의 길이는? (단, 원 O_1의 중심 O_1은 제1사분면 위에 있다.)
$\overline{OQ}=\overline{OH}=$(점 O_1의 y좌표)



① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

❶에서 직선 l의 방정식을 구한 후 ❷를 이용하여 점 O_1의 y좌표를 구하면 ❸을 구할 수 있다.

1st 평행한 두 직선의 기울기가 같음을 이용하여 직선 l의 방정식을 구한다.

원 O 위의 점 P(3, −4)에서의 접선의 방정식은

$$3x-4y=25 \qquad \therefore y=\frac{3}{4}x-\frac{25}{4}$$

이 직선과 직선 l이 평행하므로 직선 l의 방정식은

$$y=\frac{3}{4}x \qquad \therefore 3x-4y=0$$

2nd 원 O_1과 직선 l이 접함을 이용하여 점 O_1의 좌표를 구한다.

원 O_1은 y축에 접하므로 중심의 좌표를 $O_1(6, a)$ $(a>0)$라 하면 원 O_1과 직선 $3x-4y=0$이 접하므로

$$\frac{|18-4a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=6, \qquad |18-4a|=30$$

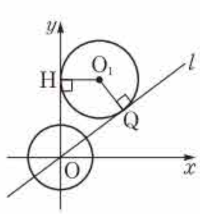
$$18-4a=\pm30 \qquad \therefore a=-3 \text{ 또는 } a=12$$

그런데 $a>0$이므로 $a=12$

$$\therefore O_1(6, 12)$$

3rd $\overline{OQ}$의 길이를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 점 O_1에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{OH}=12$이므로
점 O_1의 y좌표



$$\overline{OQ}=\overline{OH}=12$$

답 ④

0368

1st 원의 중심에서 접선에 이르는 거리는 원의 반지름의 길이와 같음을 이용하여 직선 l의 방정식을 구한다.

직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$$y=mx+2$$

원 $(x-1)^2+y^2=1$과 직선 $y=mx+2$, 즉 $mx-y+2=0$이 접하므로

$$\frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1, \qquad |m+2|=\sqrt{m^2+1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면 $m^2+4m+4=m^2+1$

$$4m+3=0 \qquad \therefore m=-\frac{3}{4}$$

따라서 직선 l의 방정식은

$$-\frac{3}{4}x-y+2=0 \qquad \therefore 3x+4y-8=0$$ ⋯ ❶

2nd 두 원의 반지름의 길이를 구한다.

x축과 y축에 동시에 접하면서 중심이 제1사분면 위에 있는 원의 중심의 좌표를 (r, r) $(r>0)$라 하면 이 원과 직선 l이 접하므로

$$\frac{|3r+4r-8|}{\sqrt{3^2+4^2}}=r, \qquad |7r-8|=5r$$

$$7r-8=\pm5r \qquad \therefore r=4 \text{ 또는 } r=\frac{2}{3}$$ ⋯ ❷

3rd 두 원의 중심 사이의 거리를 구한다.

두 원의 중심의 좌표는 $(4, 4)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{\left(\frac{2}{3}-4\right)^2+\left(\frac{2}{3}-4\right)^2}=\frac{10\sqrt{2}}{3}$$ ⋯ ❸

답 $\frac{10\sqrt{2}}{3}$

채점 기준	비율
❶ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 두 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40 %
❸ 두 원의 중심 사이의 거리를 구할 수 있다.	20 %

03 원의 방정식

04 도형의 이동

0369 답 $(-2,\ 3)$

0370 답 $(2,\ -14)$

0371 답 $(4,\ -6)$

0372 답 $(6,\ 0)$

0373 $x-5=-5,\ y+5=8$이므로
$x=0,\ y=3$ $\therefore (0,\ 3)$ 답 $(0,\ 3)$

0374 $x-5=2,\ y+5=-11$이므로
$x=7,\ y=-16$ $\therefore (7,\ -16)$ 답 $(7,\ -16)$

0375 $-2+m=3,\ 5+n=8$이므로
$m=5,\ n=3$ 답 $m=5,\ n=3$

0376 $(x-3)-5(y+1)+1=0$
$\therefore x-5y-7=0$ 답 $x-5y-7=0$

0377 $(x-5)^2+\{(y+4)-5\}^2=9$
$\therefore (x-5)^2+(y-1)^2=9$
답 $(x-5)^2+(y-1)^2=9$

0378 $5(x+1)-2(y-3)+1=0$
$\therefore 5x-2y+12=0$ 답 $5x-2y+12=0$

0379 $y-3=-(x+1)^2+6(x+1)+7$
$\therefore y=-x^2+4x+15$ 답 $y=-x^2+4x+15$

0380 구하는 직선은 주어진 직선을 x축의 방향으로 -6만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로
$3(x+6)-2(y-2)-4=0$
$\therefore 3x-2y+18=0$ 답 $3x-2y+18=0$

0381 주어진 평행이동은 도형을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동하는 것이다.
따라서 구하는 원은 주어진 원을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이므로
$\{(x-3)+4\}^2+\{(y+5)-3\}^2=4$
$\therefore (x+1)^2+(y+2)^2=4$
답 $(x+1)^2+(y+2)^2=4$

0382 답 $(2,\ 3)$

0383 답 $(-2,\ -3)$

0384 답 $(-2,\ 3)$

0385 답 $(-3,\ 2)$

0386 답 $(3,\ -2)$

0387 $3x-2\cdot(-y)+4=0$
$\therefore 3x+2y+4=0$ 답 $3x+2y+4=0$

0388 $3\cdot(-x)-2y+4=0$
$\therefore 3x+2y-4=0$ 답 $3x+2y-4=0$

0389 $3\cdot(-x)-2\cdot(-y)+4=0$
$\therefore 3x-2y-4=0$ 답 $3x-2y-4=0$

0390 $3y-2x+4=0$
$\therefore 2x-3y-4=0$ 답 $2x-3y-4=0$

0391 $-y=-4x+5$
$\therefore y=4x-5$ 답 $y=4x-5$

0392 $-y=2x^2-7x+3$
$\therefore y=-2x^2+7x-3$ 답 $y=-2x^2+7x-3$

0393 $y=-(-x)^2+7$
$\therefore y=-x^2+7$ 답 $y=-x^2+7$

0394 $(-x)^2+y^2-4\cdot(-x)+4y-12=0$
$\therefore x^2+y^2+4x+4y-12=0$
답 $x^2+y^2+4x+4y-12=0$

0395 $-y=(-x)^2-(-x)+2$
$\therefore y=-x^2-x-2$ 답 $y=-x^2-x-2$

0396 $(-x+3)^2+(-y-1)^2=5$
$\therefore (x-3)^2+(y+1)^2=5$ 답 $(x-3)^2+(y+1)^2=5$

0397 $x=-2y+3$
$\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 답 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

0398 답 $(x-2)^2+(y+3)^2=9$

0399 $-x=\frac{4}{3}\cdot(-y)+2$
$\therefore y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$ 답 $y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$

0400 $(-y)^2+(-x)^2-2\cdot(-y)-4\cdot(-x)+4=0$
$\therefore x^2+y^2+4x+2y+4=0$ 답 $x^2+y^2+4x+2y+4=0$

0401 주어진 두 점을 이은 선분의 중점이 점 P이므로
$P\left(\frac{4-6}{2},\ \frac{3+9}{2}\right)$ $\therefore P(-1,\ 6)$ 답 $(-1,\ 6)$

0402 구하는 점의 좌표를 (p, q)라 하면

$\frac{-2+p}{2}=1$, $\frac{-5+q}{2}=-1$

$\therefore p=4,\ q=3$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(4, 3)$이다. 답 $(4, 3)$

0403 (1) 두 점 (a, b), (p, q)를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(3, -7)$이므로

$\frac{a+p}{2}=3$, $\frac{b+q}{2}=-7$

$\therefore a=6-p,\ b=-14-q$ …… ㉠

(2) 점 (a, b)가 직선 $3x+4y+5=0$ 위의 점이므로

$3a+4b+5=0$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$3(6-p)+4(-14-q)+5=0$

$\therefore 3p+4q+33=0$

따라서 점 (p, q)는 직선 $3x+4y+33=0$ 위의 점이므로 구하는 도형의 방정식은

$3x+4y+33=0$

답 (1) $a=6-p,\ b=-14-q$ (2) $3x+4y+33=0$

0404 (1) $\left(\frac{-4+p}{2}, \frac{3+q}{2}\right)$

(2) 직선 AB는 직선 $3x+y+4=0$과 수직이고 직선 $3x+y+4=0$의 기울기가 -3이므로 직선 AB의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.

(3) $\overline{AB}$의 중점 $\left(\frac{-4+p}{2}, \frac{3+q}{2}\right)$가 직선 $3x+y+4=0$ 위의 점이므로

$3\cdot\frac{-4+p}{2}+\frac{3+q}{2}+4=0$

$\therefore 3p+q-1=0$ …… ㉠

또 직선 AB의 기울기가 $\frac{1}{3}$이므로

$\frac{q-3}{p+4}=\frac{1}{3}$ $\therefore p-3q+13=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=-1,\ q=4$

$\therefore B(-1, 4)$

답 (1) $\left(\frac{-4+p}{2}, \frac{3+q}{2}\right)$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $(-1, 4)$

유형 01 점의 평행이동

본책 68쪽

점 (x, y)를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표
➡ $(x+m, y+n)$

0405 점 (a, b)를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a+3, b-5)$

따라서 $a+3=4$, $b-5=2$이므로

$a=1,\ b=7$ $\therefore a-b=-6$ 답 -6

0406 점 $(3, a)$가 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(3-4, a+5)$, 즉 $(-1, a+5)$

이 점이 직선 $y=3x+10$ 위의 점이므로

$a+5=3\cdot(-1)+10$ $\therefore a=2$ 답 ②

0407 주어진 평행이동을 $(x, y) \longrightarrow (x+a, y+b)$라 하면

$-2+a=3,\ 4+b=1$ $\therefore a=5,\ b=-3$

구하는 점의 좌표를 (m, n)이라 하면

$m+5=2,\ n-3=5$ $\therefore m=-3,\ n=8$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-3, 8)$ 답 ④

0408 주어진 평행이동을 $(x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$이라 하면

$a+m=4,\ 2+n=5,\ -3+m=-7,\ b+n=1$

$\therefore a=8,\ b=-2,\ m=-4,\ n=3$

따라서 점 $(-2, 8)$이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(-2-4, 8+3)$, 즉 $(-6, 11)$ 답 $(-6, 11)$

0409 점 $A(4, 2)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 점을 A'이라 하면

$A'(4+a, 2-6)$, 즉 $A'(a+4, -4)$

이때 $\overline{OA'}=2\overline{OA}$에서 $\overline{OA'}^2=4\overline{OA}^2$이므로

$(a+4)^2+(-4)^2=4\cdot(4^2+2^2)$

$a^2+8a-48=0$, $(a+12)(a-4)=0$

$\therefore a=4\ (\because a>0)$ 답 ②

0410 점 $(20, 4)$가 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$\left(20-\frac{4}{3}b, 4+\frac{1}{2}a\right)$

따라서 $20-\frac{4}{3}b=12$, $4+\frac{1}{2}a=9$이므로

$a=10,\ b=6$

$\therefore a+b=16$ 답 ③

0411 도형을 평행이동해도 그 모양은 변하지 않으므로 △OAB는 정삼각형이다. ··· ❶

이때 $ab>0$이고 $A(2, 0)$이므로 점 B는 제1사분면 위의 점이다.

$\therefore a>0,\ b>0$

정삼각형 OAB의 한 변의 길이는 $\overline{OA}=2$이므로

$a=\frac{1}{2}\cdot 2=1$, $b=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\sqrt{3}$

$\therefore B(1, \sqrt{3})$ ··· ❷

따라서 $1+m=3$, $\sqrt{3}+n=2\sqrt{3}$이므로

$m=2,\ n=\sqrt{3}$

$\therefore mn=2\sqrt{3}$ ··· ❸

답 $2\sqrt{3}$

04 도형의 이동

채점 기준	비율
❶ $\triangle OAB$가 정삼각형임을 알 수 있다.	20 %
❷ 점 B의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ mn의 값을 구할 수 있다.	40 %

유형 02 도형의 평행이동; 직선

집중 공략 본책 69쪽

직선 $y=mx+n$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선의 방정식
➡ $y-b=m(x-a)+n$, 즉 $y=mx-ma+n+b$

0412 평행이동한 직선의 방정식은

$x-a+3(y+a)=-4$

$\therefore x+3y+2a+4=0$

이 직선이 원 $(x-2)^2+(y+4)^2=25$의 넓이를 이등분하므로 원의 중심 $(2, -4)$를 지난다.

즉 $2-12+2a+4=0$이므로 $a=3$

답 ③

0413 평행이동한 직선의 방정식은

$k(x-m)-(y-3)+k-1=0$

$\therefore kx-y-km+k+2=0$

이 직선이 직선 $2x-y+1=0$과 일치하므로

$k=2$, $-km+k+2=1$

따라서 $k=2$, $m=\frac{3}{2}$이므로 $k+m=\frac{7}{2}$

답 ④

0414 평행이동한 직선의 방정식은

$y-b=2(x-a)-5$

$\therefore y=2x-2a+b-5$ ··· ❶

이 직선이 처음 직선과 일치하므로

$-2a+b-5=-5$, $b=2a$

$\therefore \frac{b}{a}=2$ ($\because a\neq0$) ··· ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\frac{b}{a}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0415 평행이동한 직선의 방정식은

$3(x-k)-2y=0$

$\therefore 3x-2y-3k=0$ ······ ㉠

세 직선 ㉠, $3x+y-4=0$, $x+2y-3=0$의 기울기가 모두 다르므로 삼각형을 이루지 않으려면 직선 ㉠이 나머지 두 직선의 교점을 지나야 한다.

$3x+y-4=0$, $x+2y-3=0$을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=1$

따라서 직선 ㉠이 점 $(1, 1)$을 지나야 하므로

$3-2-3k=0$ $\therefore k=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

0416 주어진 평행이동을 $(x, y) \longrightarrow (x+a, y+b)$라 하면

$1+a=-4$, $2+b=4$ $\therefore a=-5$, $b=2$

직선 $4x+3y-6=0$을 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$4(x+5)+3(y-2)-6=0$

$\therefore 4x+3y+8=0$

따라서 $p=3$, $q=8$이므로 $p+q=11$

답 11

0417 직선 l'의 방정식은

$y-5=a(x+1)+b$ $\therefore y=ax+a+b+5$

직선 l'은 직선 $y=-\frac{1}{3}x+4$와 y축 위의 점에서 수직으로 만나므로 기울기는 3이고, y절편은 4이다.

따라서 $a=3$, $a+b+5=4$이므로

$a=3$, $b=-4$ $\therefore a-b=7$

답 7

유형 03 도형의 평행이동; 원

집중 공략 본책 69쪽

① 원 $x^2+y^2=r^2$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원의 방정식
➡ $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$

② 원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동으로 생각할 수 있다.

0418 $x^2+y^2-10x+4y+4=0$에서

$(x-5)^2+(y+2)^2=25$

이 원을 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a-5)^2+(y-b+2)^2=25$

이 원의 중심이 원점이므로

$-a-5=0$, $-b+2=0$ $\therefore a=-5$, $b=2$

$\therefore a+b=-3$

답 ③

다른 풀이 $x^2+y^2-10x+4y+4=0$에서

$(x-5)^2+(y+2)^2=25$

이므로 중심의 좌표는 $(5, -2)$이다.

따라서 점 $(5, -2)$가 평행이동에 의하여 원점으로 옮겨졌으므로

$5+a=0$, $-2+b=0$ $\therefore a=-5$, $b=2$

0419 $x^2+y^2+2x-8y+1=0$에서

$(x+1)^2+(y-4)^2=16$

이 원을 평행이동한 원 C_2의 방정식은

$(x-4+1)^2+(y-k-4)^2=16$

$\therefore (x-3)^2+(y-k-4)^2=16$ ··· ❶

두 원 C_1, C_2의 중심의 좌표가 각각 $(-1, 4)$, $(3, k+4)$이므로

$\sqrt{(3+1)^2+(k+4-4)^2}=5$

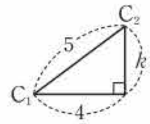
$16+k^2=25$, $k^2=9$

$\therefore k=3$ ($\because k>0$) ··· ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ 원 C_2의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❷ 양수 k의 값을 구할 수 있다.	50 %

다른 풀이 두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{C_2}$라 하면 점 $\mathrm{C_1}$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 점이 점 $\mathrm{C_2}$이고 두 점 $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{C_2}$ 사이의 거리가 5이므로 오른쪽 그림에서



$$4^2+k^2=5^2,\qquad k^2=9\qquad \therefore\ k=3\ (\because\ k>0)$$

0420 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-3)^2+(y-a)^2=20$$

이 원이 직선 $4x+2y-7=0$과 접하므로 원의 중심 $(3,\ a)$와 직선 $4x+2y-7=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{20}$과 같다. 즉

$$\frac{|12+2a-7|}{\sqrt{4^2+2^2}}=\sqrt{20},\qquad |2a+5|=20$$

$$2a+5=\pm20\qquad \therefore\ a=\frac{15}{2}\ (\because\ a>0)$$

답 ⑤

SSEN 특강 **원과 직선의 위치 관계**

반지름의 길이가 r인 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d라 하면 원과 직선의 위치 관계는
① $d<r$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다.
② $d=r$ ➡ 한 점에서 만난다. (접한다.)
③ $d>r$ ➡ 만나지 않는다.

0421 $x^2+y^2+2x-4y-11=0$에서

$$(x+1)^2+(y-2)^2=16$$

이 원을 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-m+1)^2+(y-n-2)^2=16$$

이 원의 중심 $(m-1,\ n+2)$가 제1사분면 위에 있으면서 이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

$$\underbrace{m-1=4,\ n+2=4}_{\text{원의 반지름의 길이는 }\sqrt{16}=4}\qquad \therefore\ m=5,\ n=2$$

$$\therefore\ m-n=3$$

답 ⑤

0422 $x^2+y^2-2x-2y+a=0$에서

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2-a$$

주어진 평행이동에 의하여 이 원이 옮겨지는 원의 방정식은

$$(x+1-1)^2+(y-3-1)^2=2-a$$

x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한다.

$$\therefore\ x^2+(y-4)^2=2-a$$

따라서 중심의 좌표가 $(0,\ 4)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{2-a}$이므로

$$b=0,\ \sqrt{2-a}=2\qquad \therefore\ a=-2,\ b=0$$

$$\therefore\ a+b=-2$$

답 ②

0423 원 C의 방정식은 $(x-5)^2+(y-2)^2=25$이므로

$$C_1:\ (x+2a-5)^2+(y-2)^2=25,$$

$$C_2:\ (x-5)^2+(y-a-2)^2=25$$

두 원 C_1, C_2가 서로 만나려면 두 원의 중심 $(-2a+5,\ 2)$, $(5,\ a+2)$ 사이의 거리가 두 원의 반지름의 길이의 합인 10보다 작거나 같아야 하므로

$$\sqrt{\{5-(-2a+5)\}^2+(a+2-2)^2}\le10$$

$$\sqrt{5a^2}\le10,\qquad a^2\le20$$

$$\therefore\ -2\sqrt{5}\le a\le2\sqrt{5}$$

따라서 $\alpha=-2\sqrt{5}$, $\beta=2\sqrt{5}$이므로

$$\alpha\beta=-20$$

답 -20

유형 04 **도형의 평행이동; 포물선** 본책 70쪽

① 포물선 $y=ax^2+bx+c$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식
➡ $y-n=a(x-m)^2+b(x-m)+c$
② 포물선의 평행이동은 꼭짓점의 평행이동으로 생각할 수 있다.

0424 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-1=(x+3)^2+4(x+3)-5$$

$$y=x^2+10x+17\qquad \therefore\ y=(x+5)^2-8$$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-5,\ -8)$이므로

$$a=-5,\ b=-8\qquad \therefore\ ab=40$$

답 40

다른 풀이 포물선 $y=x^2+4x-5$, 즉 $y=(x+2)^2-9$의 꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ -9)$이므로

$$a=-2-3=-5,\ b=-9+1=-8$$

0425 포물선 $y=x^2-6x+1$, 즉 $y=(x-3)^2-8$을 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-b=(x-a-3)^2-8$$

$$\therefore\ y=(x-a-3)^2-8+b$$

이 포물선이 포물선 $y=x^2$과 일치하므로

$$-a-3=0,\ -8+b=0\qquad \therefore\ a=-3,\ b=8$$

$$\therefore\ b-a=11$$

답 11

0426 포물선 $y=-2x^2+8x-3$, 즉 $y=-2(x-2)^2+5$를 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-a=-2(x-a-4-2)^2+5$$

$$\therefore\ y=-2(x-a-6)^2+5+a \quad \cdots\ ❶$$

이 포물선의 꼭짓점 $(a+6,\ 5+a)$가 x축 위에 있으므로

$$5+a=0\qquad \therefore\ a=-5 \quad \cdots\ ❷$$

따라서 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 0)$이다. ⋯ ❸

답 $(1,\ 0)$

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 포물선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.	20 %

0427 포물선 $y=x^2+2x$, 즉 $y=(x+1)^2-1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-n=(x-m+1)^2-1$$

$$\therefore\ y=(x-m+1)^2-1+n$$

이 포물선이 포물선 $y=x^2+8x+11$, 즉 $y=(x+4)^2-5$와 일치하려면

$-m+1=4,\ -1+n=-5$

$\therefore m=-3,\ n=-4$

직선 l: $x-2y+1=0$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 직선 l'의 방정식은

$(x+3)-2(y+4)+1=0$

$\therefore x-2y-4=0$

따라서 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 점 $(-1, 0)$과 직선 l' 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|-1-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ 답 ⑤

유형 05 점의 대칭이동

집중공략 본책 71쪽

점 (x, y)를 다음에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

① x축 ➡ y좌표의 부호를 바꾼다. ➡ $(x, -y)$

② y축 ➡ x좌표의 부호를 바꾼다. ➡ $(-x, y)$

③ 원점 ➡ x좌표, y좌표의 부호를 모두 바꾼다. ➡ $(-x, -y)$

④ 직선 $y=x$ ➡ x좌표와 y좌표를 서로 바꾼다. ➡ (y, x)

⑤ 직선 $y=-x$

➡ x좌표, y좌표의 부호를 모두 바꾼 후 이들을 서로 바꾼다.

➡ $(-y, -x)$

0428 Q$(3, -2)$, R$(2, 3)$이므로 △PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{3+3+2}{3}, \dfrac{2-2+3}{3}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{8}{3}, 1\right)$ 답 ⑤

0429 점 (a, b)를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a, b)$

이 점이 제3사분면 위에 있으므로

$-a<0,\ b<0 \quad \therefore a>0,\ b<0$ …… ㉠ ··· ❶

점 $(a-b, ab)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a+b, -ab)$

이 점을 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a-b, -ab)$

이때 ㉠에서 $a-b>0$, $-ab>0$이므로 점 $(a-b, -ab)$는 제1사분면 위에 있다. ··· ❷

답 제1사분면

채점 기준	비율
❶ a, b의 부호를 구할 수 있다.	40 %
❷ 대칭이동한 점이 어느 사분면 위에 있는지 구할 수 있다.	60 %

0430 점 $P_1(-4, 5)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점 P_2의 좌표는

$(4, -5)$

점 $P_2(4, -5)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 P_3의 좌표는

$(-5, 4)$

점 $P_3(-5, 4)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점 P_4의 좌표는

$(5, -4)$

점 $P_4(5, -4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 P_5의 좌표는

$(-4, 5)$ ← 점 P_1의 좌표와 같다.

즉 점 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, …는 4개의 점 $(-4, 5)$, $(4, -5)$, $(-5, 4)$, $(5, -4)$가 이 순서대로 반복된다.

이때 $2025=4\cdot506+1$이므로 점 P_{2025}의 좌표는 점 P_1의 좌표인 $(-4, 5)$와 같다.

따라서 $a=-4$, $b=5$이므로

$a+b=1$ 답 1

0431 포물선 $y=x^2-3x$ 위의 한 점의 좌표를 (a, a^2-3a)라 하면 이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

(a^2-3a, a)

이 점이 포물선 $y=x^2-3x$ 위의 점이므로

$a=(a^2-3a)^2-3(a^2-3a)$

$a^4-6a^3+6a^2+8a=0$

$a(a-4)(a^2-2a-2)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=4$ 또는 $a=1\pm\sqrt{3}$

$a=0$ 또는 $a=4$이면 두 점 (a, a^2-3a), (a^2-3a, a)는 서로 같은 점이므로

$a=1\pm\sqrt{3}$

따라서 두 점의 좌표는 $(1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$, $(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$이므로 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{\{1-\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})\}^2+\{1+\sqrt{3}-(1-\sqrt{3})\}^2}=2\sqrt{6}$

답 ②

0432 조건 ㈎에 의하여

$\dfrac{5-0}{1-0}\cdot\dfrac{3-0}{a-0}=-1 \quad \therefore a=-15$

$\therefore$ B$(-15, 3)$ └ 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

조건 ㈏에 의하여 C$(-15, -3)$이므로 직선 AC의 방정식은

$y-5=\dfrac{-3-5}{-15-1}(x-1) \quad \therefore y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{9}{2}$

이 식에 $y=0$을 대입하면

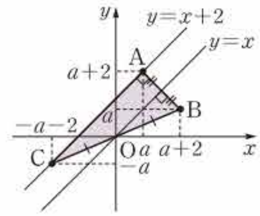
$0=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{9}{2} \quad \therefore x=-9$

따라서 직선 AC의 x절편은 -9이다. 답 ①

0433 A$(a, a+2)$ $(a>0)$라 하면

B$(a+2, a)$, C$(-a-2, -a)$

점 C는 직선 $y=x+2$ 위의 점이고, △ABC는 ∠A$=90°$인 직각삼각형이므로



$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}=16$

이때

$\overline{AB}=\sqrt{(a+2-a)^2+\{a-(a+2)\}^2}=2\sqrt{2}$,

$\overline{AC}=\sqrt{(-a-2-a)^2+\{-a-(a+2)\}^2}$

$=\sqrt{8(a+1)^2}=2\sqrt{2}(a+1)$ $(\because a>0)$

이므로

$\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}(a+1)=16$

$a+1=4 \quad \therefore a=3$

따라서 점 A의 좌표는 $(3, 5)$이다. 답 $(3, 5)$

유형 06~08 도형의 대칭이동 본책 72, 73쪽

도형 $f(x, y)=0$을 다음에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은
① x축 ➡ y 대신 $-y$를 대입한다. ➡ $f(x, -y)=0$
② y축 ➡ x 대신 $-x$를 대입한다. ➡ $f(-x, y)=0$
③ 원점 ➡ x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입한다.
➡ $f(-x, -y)=0$
④ 직선 $y=x$ ➡ x 대신 y, y 대신 x를 대입한다.
➡ $f(y, x)=0$
⑤ 직선 $y=-x$ ➡ x 대신 $-y$, y 대신 $-x$를 대입한다.
➡ $f(-y, -x)=0$

0434 직선 $ax+y-4=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$ax-y-4=0$

이 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-ax-(-y)-4=0 \qquad \therefore ax-y+4=0$

이 직선이 점 $(3, -5)$를 지나므로

$3a+5+4=0 \qquad \therefore a=-3$

답 ③

0435 직선 l_1의 방정식은

$-y=-3x-2 \qquad \therefore y=3x+2$ ⋯ ❶

직선 l_2의 방정식은

$x=3y+2 \qquad \therefore x-3y-2=0$ ⋯ ❷

이 식에 $y=0$을 대입하여 정리하면 $x=2$

따라서 직선 l_2의 x절편은 2이다. ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 직선 l_1의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 직선 l_2의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ 직선 l_2의 x절편을 구할 수 있다.	20 %

0436 직선 $y=-x+1$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=-(-x)+1 \qquad \therefore y=x+1$

이 직선과 수직인 직선의 기울기는 -1이므로 구하는 직선의 방정식을 $y=-x+a$, 즉 $x+y-a=0$ (a는 상수)이라 하자.

이 직선과 원점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이므로

$\frac{|-a|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}, \qquad |a|=2 \qquad \therefore a=\pm 2$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$x+y+2=0$ 또는 $x+y-2=0$

답 ①

0437 직선 $ax+(b-3)y-6=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-ax-(b-3)y-6=0 \qquad \therefore ax+(b-3)y+6=0$

이 직선이 직선 $(b+2)x-(a+1)y+6=0$과 일치하므로

$a=b+2, \ b-3=-(a+1)$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=0$

$\therefore 2a+b=4$

답 ④

0438 직선 $5x+y+k=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$5x-y+k=0$

이때 □OABC는 정사각형이고 직선 $5x-y+k=0$이 □OABC의 넓이를 이등분하므로 직선 $5x-y+k=0$은 □OABC의 대각선의 중점을 지난다.

따라서 □OABC의 대각선의 중점의 좌표는 ($\overline{\mathrm{OB}}$의 중점)$=$($\overline{\mathrm{AC}}$의 중점)

$\left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+4}{2}\right)$, 즉 $(2, 2)$

이므로

$10-2+k=0 \qquad \therefore k=-8$

답 -8

0439 원 $x^2+y^2-6x+8y-16=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$x^2+y^2+8x-6y-16=0$

이 원이 y축과 만나는 점의 y좌표는 원의 방정식에 $x=0$을 대입한다.

$y^2-6y-16=0, \qquad (y+2)(y-8)=0$

$\therefore y=-2$ 또는 $y=8$

따라서 두 점의 좌표는 $(0, -2)$, $(0, 8)$이므로 두 점 사이의 거리는

$|8-(-2)|=10$

답 ③

0440 중심의 좌표가 $(-2, 3)$이고 반지름의 길이가 k인 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-3)^2=k^2$

이 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+2)^2+(-y-3)^2=k^2 \qquad \therefore (x+2)^2+(y+3)^2=k^2$

이 원이 점 $(-3, -3)$을 지나므로

$(-3+2)^2+(-3+3)^2=k^2$

$k^2=1 \qquad \therefore k=1 \ (\because k>0)$

답 ④

0441 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$에서

$(x-2)^2+(y+1)^2=4$

이 원을 원점에 대하여 대칭이동한 원 O'의 방정식은

$(-x-2)^2+(-y+1)^2=4 \qquad \therefore (x+2)^2+(y-1)^2=4$

$\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이의 최솟값은 두 원 O, O'의 중심 $(2, -1)$, $(-2, 1)$을 이은 선분의 길이에서 두 원의 반지름의 길이의 합을 뺀 것이므로

$\sqrt{(-2-2)^2+(1+1)^2}-(2+2)=2\sqrt{5}-4$

답 $2\sqrt{5}-4$

0442 $x^2+y^2+2x-6y=0$에서

$(x+1)^2+(y-3)^2=10$

이 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x+1)^2+(y-3)^2=10$

$\therefore (x-1)^2+(y-3)^2=10$ ⋯ ❶

이 원이 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$과 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심 $(1, 3)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{10}$보다 작아야 하므로

$\frac{|1-3+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}<\sqrt{10}$,　　$|k-2|<2\sqrt{5}$

$-2\sqrt{5}<k-2<2\sqrt{5}$

$\therefore 2-2\sqrt{5}<k<2+2\sqrt{5}$ ⋯ ❷

따라서 $a=2-2\sqrt{5}$, $b=2+2\sqrt{5}$이므로

$ab=(2-2\sqrt{5})(2+2\sqrt{5})=-16$ ⋯ ❸

답 -16

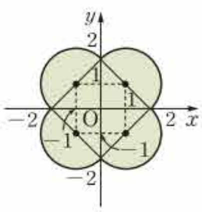
채점 기준	비율
❶ 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0443 원 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 각각

$(x+1)^2+(y-1)^2=2$,

$(x-1)^2+(y+1)^2=2$,

$(x-1)^2+(y-1)^2=2$



따라서 구하는 넓이는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$\underbrace{2\cdot\pi\cdot(\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}_{2\times(\text{원의 넓이})+(\text{정사각형의 넓이})}=4\pi+8$

답 $4\pi+8$

0444 포물선 $y=x^2-2ax+3$, 즉 $y=(x-a)^2+3-a^2$을 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=(-x-a)^2+3-a^2$　　$\therefore y=(x+a)^2+3-a^2$

이 포물선의 꼭짓점 $(-a, 3-a^2)$이 직선 $y=x-3$ 위에 있으므로

$3-a^2=-a-3$,　　$a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0$　　$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

답 ③

0445 포물선 $y=x^2+4x-3$을 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=x^2+4x-3$　　$\therefore y=-x^2-4x+3$

이 포물선이 점 $(1, a)$를 지나므로

$a=-1-4+3=-2$

답 -2

0446 포물선 $y=x^2+ax+b$를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=(-x)^2-ax+b$,　　$y=-x^2+ax-b$

$\therefore y=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-b$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(-2, 3)$이므로

$\frac{a}{2}=-2$, $\frac{a^2}{4}-b=3$　　$\therefore a=-4$, $b=1$

$\therefore b-a=5$

답 ④

0447 포물선 $y=-2x^2-x+k$를 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=-2x^2-x+k$　　$\therefore y=2x^2+x-k$

이 포물선을 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=2\cdot(-x)^2-x-k$　　$\therefore y=2x^2-x-k$ ⋯ ❶

이 포물선과 직선 $y=3x-1$이 접하려면 이차방정식 $2x^2-x-k=3x-1$, 즉 $2x^2-4x-k+1=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-2(-k+1)=0$

$2k+2=0$　　$\therefore k=-1$ ⋯ ❷

답 -1

채점 기준	비율
❶ 대칭이동한 포물선의 방정식을 구할 수 있다.	60 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40 %

참고 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 것은 원점에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

유형 09 점과 도형의 평행이동과 대칭이동

집중공략 본책 74쪽

점 또는 도형의 평행이동과 대칭이동을 연달아 할 때에는 이동하는 순서에 주의하여 점의 좌표 또는 도형의 방정식을 구한다.

0448 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$y-3=m(x+6)$　　$\therefore y=mx+6m+3$

이 직선을 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+4=mx+6m+3$　　$\therefore y=mx+6m-1$

이 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=-mx+6m-1$　　$\therefore y=mx-6m+1$

이 직선이 점 $(9, -5)$를 지나므로

$-5=9m-6m+1$　　$\therefore m=-2$

답 ④

0449 점 $(a, -5)$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는　$(5, -a)$

이 점을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는　$(4, -a+2)$

이 점이 점 $(4, b)$와 일치하므로

$-a+2=b$　　$\therefore a+b=2$

답 2

0450 원 $(x-4)^2+(y+1)^2=16$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-4)^2=16$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

원 $(x-4)^2+(y+1)^2=16$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a-4)^2+(y-b+1)^2=16$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡이 일치하므로

$-a-4=1$, $-b+1=-4$

$\therefore a=-5$, $b=5$

$\therefore ab=-25$ ⋯ ❸

답 -25

채점 기준	비율
❶ 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 평행이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0451 포물선 $y=2x^2+4x+a$를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=2\cdot(-x)^2-4x+a \qquad \therefore y=-2x^2+4x-a$

이 포물선을 y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-5=-2x^2+4x-a \qquad \therefore y=-2x^2+4x+5-a$

이 포물선의 y절편이 4이므로

$5-a=4 \qquad \therefore a=1$ 답 ①

0452 직선 l을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+1=a(x-4)+3 \qquad \therefore y=ax-4a+2$

이 직선을 x축에 대하여 대칭이동한 직선 l'의 방정식은

$-y=ax-4a+2 \qquad \therefore y=-ax+4a-2$

두 직선 l, l'이 y축 위의 점 $(0,\ \underbrace{3}_{\text{직선 } l\text{의 } y\text{절편}})$에서 만나므로

$3=4a-2 \qquad \therefore a=\frac{5}{4}$ 답 $\frac{5}{4}$

0453 중심이 점 $(-1,\ -2)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y+2)^2=r^2$

이 원을 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+3+1)^2+(y+2)^2=r^2$

$\therefore (x+4)^2+(y+2)^2=r^2$

이 원을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-y+4)^2+(-x+2)^2=r^2$

$\therefore (x-2)^2+(y-4)^2=r^2$

이 원과 직선 $3x-4y+5=0$이 만나지 않으려면 원의 중심 $(2,\ 4)$와 직선 $3x-4y+5=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 r보다 커야 하므로

$\frac{|6-16+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}>r$

$\therefore 0<r<1\ (\because r>0)$ 답 $0<r<1$

유형 10 **도형 $f(x,\ y)=0$의 평행이동과 대칭이동** 집중공략 본책 75쪽

주어진 방정식이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 어떻게 평행이동 또는 대칭이동했는지 찾는다.

예 방정식 $f(y,\ x-1)=0$이 나타내는 도형

(i) x, y의 위치가 바뀌었으므로 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한다.

➡ $f(y,\ x)=0$

(ii) x가 $x-1$로 바뀌었으므로 (i)의 방정식이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한다.

➡ $f(y,\ x-1)=0$

따라서 방정식 $f(y,\ x-1)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

0454 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $\quad f(y,\ x)=0$

방정식 $f(y,\ x)=0$이 나타내는 도형을 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 $\quad f(y+1,\ x)=0$

따라서 방정식 $f(y+1,\ x)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 ③이다. 답 ③

다른 풀이 주어진 도형은 네 직선

$x=1,\ x=3,\ y=1,\ y=2$ …… ㉠

로 둘러싸인 도형이다.

㉠에 x 대신 $y+1$, y 대신 x를 각각 대입하면

$y+1=1,\ y+1=3,\ x=1,\ x=2$

$\therefore x=1,\ x=2,\ y=0,\ y=2$

따라서 방정식 $f(y+1,\ x)=0$이 나타내는 도형은 ③이다.

0455 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $\quad f(y,\ x)=0$

방정식 $f(y,\ x)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면 $\quad f(-y,\ x)=0$

따라서 방정식 $f(-y,\ x)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 ①이다. 답 ①

다른 풀이 주어진 도형은 세 직선

$y=x,\ x=1,\ y=0$ …… ㉠

으로 둘러싸인 도형이다.

㉠에 x 대신 $-y$, y 대신 x를 각각 대입하면

$x=-y,\ -y=1,\ x=0$

$\therefore y=-x,\ y=-1,\ x=0$

따라서 방정식 $f(-y,\ x)=0$이 나타내는 도형은 ①이다.

0456 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $g(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

방정식 $g(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면

$g(x,\ -y)=0$

방정식 $g(x,\ -y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$g(x+5,\ -(y+1))=0$

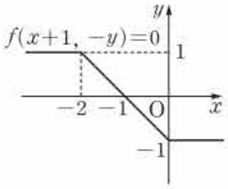
$\therefore g(x+5,\ -y-1)=0$ 답 ①

0457 ㄱ. 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면 $\quad f(x,\ -y)=0$

방정식 $f(x,\ -y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$f(x+1,\ -y)=0$

따라서 이 방정식이 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같다.



04 도형의 이동

ㄴ. 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면 $\quad f(x, -y)=0$

방정식 $f(x, -y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $\quad f(x-1, -y)=0$

따라서 이 방정식이 나타내는 도형은 [그림 2]와 같다.

ㄷ. 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동하면 $\quad f(-x, y)=0$

방정식 $f(-x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$$f(-(x-1), y)=0 \qquad \therefore f(1-x, y)=0$$

따라서 이 방정식이 나타내는 도형은 [그림 2]와 같다.

이상에서 [그림 2]와 같은 도형을 나타내는 방정식인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

유형 11 점에 대한 대칭이동 본책 76쪽

점 P를 점 A에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라 하면 점 A는 $\overline{PP'}$의 중점이다.

0458 $x^2+y^2-6x+8=0$에서

$$(x-3)^2+y^2=1$$

이 원의 중심 $(3, 0)$을 점 $(-1, 4)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$$\frac{3+a}{2}=-1, \ \frac{b}{2}=4$$

$$\therefore a=-5, \ b=8$$

원은 대칭이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 대칭이동한 원은 중심의 좌표가 $(-5, 8)$이고 반지름의 길이가 1이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+5)^2+(y-8)^2=1$$

답 ②

0459 $\frac{a-3}{2}=4, \ \frac{5+b}{2}=3$이므로 $\quad a=11, \ b=1$

$$\therefore ab=11$$

답 ⑤

0460 포물선 $y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$의 꼭짓점의 좌표는 $(1, 2)$

포물선 $y=-x^2+6x-11=-(x-3)^2-2$의 꼭짓점의 좌표는 $(3, -2)$ ··· ❶

두 포물선이 점 (α, β)에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점도 점 (α, β)에 대하여 대칭이다.

따라서 두 꼭짓점을 이은 선분의 중점의 좌표가 (α, β)이므로

$$\alpha=\frac{1+3}{2}=2, \ \beta=\frac{2-2}{2}=0$$ ··· ❷

$$\therefore \alpha+\beta=2$$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 두 포물선의 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ α, β의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\alpha+\beta$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0461 포물선 $y=x^2-ax$ 위의 임의의 점 $P(x, y)$를 점 $(2, 1)$에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$이라 하면 점 $(2, 1)$은 $\overline{PP'}$의 중점이므로

$$\frac{x+x'}{2}=2, \ \frac{y+y'}{2}=1$$

$$\therefore x=4-x', \ y=2-y'$$

$y=x^2-ax$에 위의 식을 대입하면

$$2-y'=(4-x')^2-a(4-x')$$

$$\therefore y'=-x'^2-(a-8)x'+4a-14$$

따라서 점 $P'(x', y')$은 포물선 $y=-x^2-(a-8)x+4a-14$ 위의 점이므로 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$y=-x^2-(a-8)x+4a-14$$

이 포물선과 직선 $y=2x$가 만나는 두 점이 원점에 대하여 대칭이므로 이차방정식 $-x^2-(a-8)x+4a-14=2x$, 즉 $x^2+(a-6)x-4a+14=0$의 두 실근의 합이 0이다.

즉 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-(a-6)=0 \qquad \therefore a=6$$

답 ④

유형 12 직선에 대한 대칭이동 본책 76쪽

점 P를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라 하면
① $\overline{PP'}$의 중점은 직선 l 위의 점이다.
② 직선 PP′은 직선 l과 수직이다.

0462 두 점 $(2, -3)$, $(-4, 5)$를 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2-4}{2}, \ \frac{-3+5}{2}\right), \text{ 즉 } (-1, 1)$$

이 점이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$$1=-a+b \quad \cdots\cdots \ ㉠$$

또 두 점 $(2, -3)$, $(-4, 5)$를 지나는 직선이 직선 $y=ax+b$와 수직이므로

$$\underbrace{\frac{5-(-3)}{-4-2}\cdot a=-1}_{\text{수직인 두 직선의 기울기의 곱은 }-1\text{이다.}} \qquad \therefore a=\frac{3}{4}$$

㉠에 $a=\frac{3}{4}$을 대입하면

$$1=-\frac{3}{4}+b \qquad \therefore b=\frac{7}{4}$$

$$\therefore a+b=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

0463 점 $(7, 5)$를 직선 $y=3x-1$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면 두 점 $(7, 5)$, (a, b)를 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{7+a}{2}, \ \frac{5+b}{2}\right)$$

이 점이 직선 $y=3x-1$ 위의 점이므로

$$\frac{5+b}{2}=3\cdot\frac{7+a}{2}-1 \qquad \therefore 3a-b=-14 \quad \cdots\cdots \ ㉠$$

또 두 점 $(7, 5)$, (a, b)를 지나는 직선이 직선 $y=3x-1$과 수직이므로

$$\frac{b-5}{a-7}\cdot 3=-1 \qquad \therefore a+3b=22 \quad \cdots\cdots \ ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-2,\ b=8$

따라서 대칭이동한 점의 좌표는 $(-2,\ 8)$이다. 답 $(-2,\ 8)$

0464 $x^2+y^2-4x-10y+28=0$에서

$$(x-2)^2+(y-5)^2=1$$

$x^2+y^2-8x-6y+c=0$에서

$$(x-4)^2+(y-3)^2=25-c$$

두 원의 반지름의 길이가 같으므로

$$1=\sqrt{25-c} \qquad \therefore c=24$$

두 원의 중심 $(2,\ 5)$, $(4,\ 3)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{5+3}{2}\right),\ \text{즉 } (3,\ 4)$$

이 점이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$$4=3a+b \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

또 두 점 $(2,\ 5)$, $(4,\ 3)$을 지나는 직선이 직선 $y=ax+b$와 수직이므로

$$\frac{3-5}{4-2}\cdot a=-1 \qquad \therefore a=1$$

㉠에 $a=1$을 대입하면

$$4=3+b \qquad \therefore b=1$$

$$\therefore a+b+c=26$$

답 ③

0465 $\mathrm{C}(a,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+a}{2},\ \frac{1+b}{2}\right)$$

이 점이 직선 $y=2x+1$ 위의 점이므로

$$\frac{1+b}{2}=2\cdot\frac{2+a}{2}+1 \qquad \therefore 2a-b=-5 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

또 직선 BC가 직선 $y=2x+1$과 수직이므로

$$\frac{b-1}{a-2}\cdot 2=-1 \qquad \therefore a+2b=4 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-\frac{6}{5},\ b=\frac{13}{5}$

$$\therefore \mathrm{C}\left(-\frac{6}{5},\ \frac{13}{5}\right)$$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=2-(-1)=3$이고 점 C와 $\underbrace{\text{직선 AB}}_{y=1}$ 사이의 거리가 $\frac{13}{5}-1=\frac{8}{5}$이므로

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{8}{5}=\frac{12}{5}$$

답 $\frac{12}{5}$

0466 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$의 중심 $(1,\ 2)$를 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 두 점 $(1,\ 2)$, $(a,\ b)$를 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{2+b}{2}\right)$$

이 점이 직선 $y=x-1$ 위의 점이므로

$$\frac{2+b}{2}=\frac{1+a}{2}-1 \qquad \therefore a-b=3 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

또 두 점 $(1,\ 2)$, $(a,\ b)$를 지나는 직선이 직선 $y=x-1$과 수직이므로

$$\frac{b-2}{a-1}\cdot 1=-1 \qquad \therefore a+b=3 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=3,\ b=0$

원은 대칭이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 대칭이동한 원은 중심의 좌표가 $(3,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1이다.

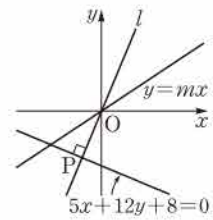
이 원이 직선 $x+ky+3=0$과 접하므로

$$\frac{|3+3|}{\sqrt{1^2+k^2}}=1, \qquad 6=\sqrt{1+k^2}, \qquad k^2+1=36$$

$$k^2=35 \qquad \therefore k=\sqrt{35}\ (\because k>0)$$

답 ②

0467 직선 $\overbrace{y=0}^{x\text{축}}$을 직선 $y=mx$에 대하여 대칭이동한 직선을 l이라 하면 $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이는 오른쪽 그림과 같이 직선 l이 직선 $5x+12y+8=0$과 수직일 때 최소이다.



직선 $5x+12y+8=0$, 즉

$y=-\frac{5}{12}x-\frac{2}{3}$의 기울기는 $-\frac{5}{12}$이므로

직선 l의 방정식은 $\quad y=\frac{12}{5}x$

이때 직선 $y=mx$는 두 직선 $y=0$, $y=\frac{12}{5}x$가 이루는 각의 이등분선이므로 직선 $y=mx$ 위의 점 $(1,\ m)$에서 두 직선 $y=0$, $y=\frac{12}{5}x$에 이르는 거리가 같다.

따라서 $|m|=\frac{|12-5m|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}$이므로 점 $(1,\ m)$과 직선 $y=\frac{12}{5}x$, 즉 $12x-5y=0$ 사이의 거리

$$13|m|=|12-5m|, \qquad 13m=\pm(12-5m)$$

$$\therefore m=\frac{2}{3}\ (\because m>0)$$

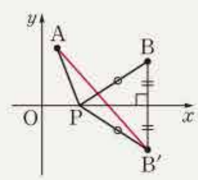
답 $\frac{2}{3}$

참고 직선 $y=mx$ 위의 임의의 점에서 두 직선 $y=0$, $y=\frac{12}{5}x$에 이르는 거리가 같으므로 $\underbrace{\text{점 }(1,\ m)}_{(-1,\ -m),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{m}{2}\right)\text{ 등}}$이 아닌 다른 점을 택하여 문제를 해결할 수도 있다.

유형 13 대칭이동을 이용한 거리의 최솟값

집중공략 본책 77쪽

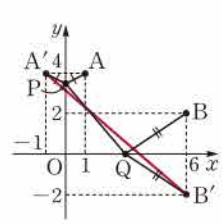
두 점 A, B와 x축(또는 y축 또는 직선 $y=x$) 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.



(i) 점 B를 x축(또는 y축 또는 직선 $y=x$)에 대하여 대칭이동한 점 B′의 좌표를 구한다.

(ii) $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}\geq\overline{\mathrm{AB'}}$이므로 구하는 최솟값은 $\overline{\mathrm{AB'}}$의 길이와 같음을 이용한다.

0468 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′, 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면



$$\mathrm{A'}(-1,\ 4),\ \mathrm{B'}(6,\ -2)$$

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$, $\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{QB'}}$이므로

$$\begin{aligned}&\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}\\&=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB'}}\\&\geq\overline{\mathrm{A'B'}}\\&=\sqrt{(6+1)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{85}\end{aligned}$$

답 $\sqrt{85}$

04 도형의 이동

0469 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

$A'(3,\ 2)$

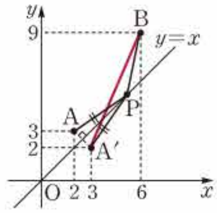
$\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq \overline{A'B}$

$=\sqrt{(6-3)^2+(9-2)^2}$

$=\sqrt{58}$



답 ③

0470 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

$A'(-1,\ 2)$

$\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq \overline{A'B}$ ··· ❶

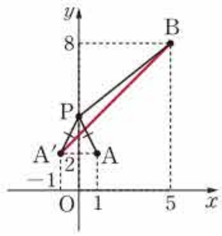
직선 A′B의 방정식은

$y-2=\dfrac{8-2}{5+1}(x+1)$

$\therefore\ y=x+3$ ··· ❷

따라서 점 P의 좌표는 $(0,\ 3)$이다. ··· ❸

$\overline{AP}+\overline{BP}$는 직선 A′B가 y축과 만나는 점이 P일 때 최소이다.



답 $(0,\ 3)$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값이 $\overline{A'B}$의 길이임을 알 수 있다.	50 %
❷ 직선 A′B의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	20 %

0471 점 A(8, 6)을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′, x축에 대하여 대칭이동한 점을 A″이라 하면

$A'(6,\ 8)$, $A''(8,\ -6)$

$\overline{AB}=\overline{A'B}$, $\overline{CA}=\overline{CA''}$이므로

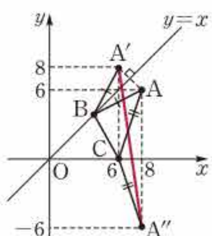
$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$

$=\overline{A'B}+\overline{BC}+\overline{CA''}$

$\geq \overline{A'A''}$

따라서 △ABC의 둘레의 길이의 최솟값은

$\overline{A'A''}=\sqrt{(8-6)^2+(-6-8)^2}=10\sqrt{2}$

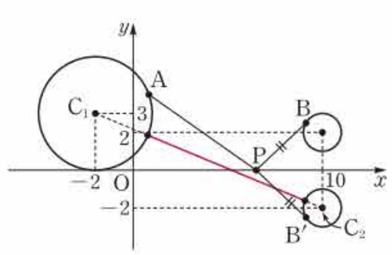


답 $10\sqrt{2}$

0472 원 $(x-10)^2+(y-2)^2=1$을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-10)^2+(y+2)^2=1$

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 점 B′은 원 $(x-10)^2+(y+2)^2=1$ 위의 점이고, $\overline{BP}=\overline{B'P}$이다.



두 원 $(x+2)^2+(y-3)^2=9$, $(x-10)^2+(y+2)^2=1$의 중심을 각각 $C_1(-2,\ 3)$, $C_2(10,\ -2)$라 하면 $\overline{AP}+\overline{BP}$는 세 점 A, P, B′이 $\overline{C_1C_2}$ 위에 있을 때 최소이다.

이때 $\overline{C_1C_2}=\sqrt{(10+2)^2+(-2-3)^2}=13$이므로 구하는 최솟값은

$\overline{C_1C_2}$의 길이에서 두 원의 반지름의 길이의 합을 뺀 값

$13-(3+1)=9$

답 ②

0473 1st 점 P(1, 1)이 이동한 점의 좌표를 a, b를 이용하여 나타낸다.

동전의 앞면이 a회, 뒷면이 b회 나왔으므로 점 P(1, 1)이 이동한 점의 좌표는

$(1+a-b,\ 1-a+3b)$ ······ ㉠

2nd a, b의 값을 구한다.

점 ㉠이 점 (5, 3)과 일치하므로

$1+a-b=5$, $1-a+3b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=7$, $b=3$

3rd $a-b+n$의 값을 구한다.

$n=a+b=10$이므로

$a-b+n=14$

답 14

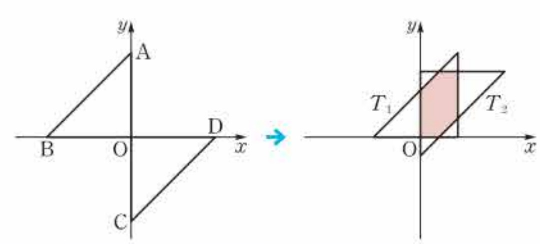
0474

좌표평면 위에 세 점 O(0, 0), A(0, 1), B(−1, 0)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB와 세 점 O(0, 0), C(0, −1), D(1, 0)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OCD가 있다. 양의 실수 t에 대하여 ❶삼각형 OAB를 x축의 방향으로 t만큼 평행이동한 삼각형을 T_1, 삼각형 OCD를 y축의 방향으로 $2t$만큼 평행이동한 삼각형을 T_2라 하자. ❷두 삼각형 T_1, T_2의 내부의 공통부분이 육각형 모양이 되도록 하는 모든 t의 값의 범위는 $\dfrac{1}{3}<t<a$이고, 이때 ❸육각형의 넓이의 최댓값은 M이다. $a+M$의 값은?

세 점 O, A, B의 x좌표가 t만큼 커진다.

세 점 O, C, D의 y좌표가 $2t$만큼 커진다.

① $\dfrac{11}{14}$ ② $\dfrac{23}{28}$ ③ $\dfrac{6}{7}$ ④ $\dfrac{25}{28}$ ⑤ $\dfrac{13}{14}$



❶에서 두 삼각형 T_1, T_2의 꼭짓점과 T_1, T_2의 교점의 좌표를 t를 이용하여 나타낸 후 ❷를 만족시키는 각 점의 위치를 이용하여 a의 값을 구한다. 또 ❸을 t에 대한 식으로 나타낸 후 t의 값의 범위에서 최댓값을 구한다.

1st 평행이동한 점의 좌표를 구하고, 두 삼각형 T_1, T_2의 내부의 공통부분이 육각형 모양이 되도록 하는 조건을 찾는다.

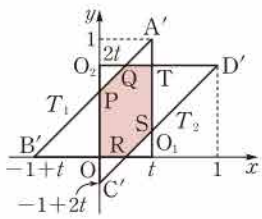
세 점 O, A, B를 x축의 방향으로 t만큼 평행이동한 점을 각각 O_1, A', B'이라 하면

$O_1(t,\ 0)$, $A'(t,\ 1)$, $B'(-1+t,\ 0)$

세 점 O, C, D를 y축의 방향으로 $2t$만큼 평행이동한 점을 각각 O_2, C', D'이라 하면

$O_2(0,\ 2t)$, $C'(0,\ -1+2t)$, $D'(1,\ 2t)$

두 삼각형 T_1, T_2의 내부의 공통부분이 육각형 모양이 되려면 오른쪽 그림과 같이 $\overline{A'B'}$이 $\overline{O_2C'}$, $\overline{O_2D'}$과 두 점 A', B'이 아닌 점에서 각각 만나야 하고, $\overline{C'D'}$이 $\overline{O_1B'}$, $\overline{O_1A'}$과 두 점 C', D'이 아닌 점에서 각각 만나야 한다.



2nd 두 삼각형 T_1, T_2가 만나서 생기는 점의 좌표를 t를 이용하여 나타낸다.

$\overline{A'B'}$이 $\overline{O_2C'}$, $\overline{O_2D'}$과 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, $\overline{C'D'}$이 $\overline{O_1B'}$, $\overline{O_1A'}$과 만나는 점을 각각 R, S라 하자.

직선 $A'B'$의 방정식은

$$y-1=\frac{0-1}{-1+t-t}(x-t) \qquad \therefore y=x+1-t$$

이때 두 직선 O_2C', O_2D'의 방정식은 각각 $x=0$, $y=2t$이므로

$\mathrm{P}(0,\ 1-t)$, $\mathrm{Q}(\underbrace{3t-1}_{2t=x+1-t\text{에서 } x=3t-1},\ 2t)$

직선 $C'D'$의 방정식은

$$y-(-1+2t)=\{2t-(-1+2t)\}x$$

$$\therefore y=x+2t-1$$

이때 두 직선 O_1B', O_1A'의 방정식은 각각 $y=0$, $x=t$이므로

$\mathrm{R}(1-2t,\ 0)$, $\mathrm{S}(t,\ 3t-1)$

3rd 조건을 만족시키는 t의 값의 범위를 구하여 a의 값을 구한다.

두 삼각형 T_1, T_2의 내부의 공통부분이 육각형 모양이 되려면 (점 P의 y좌표)<(점 O_2의 y좌표)<(점 A'의 y좌표)이어야 하므로

$$1-t<2t<1 \qquad \therefore \frac{1}{3}<t<\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 (점 C'의 y좌표)<(점 O_1의 y좌표)<(점 S의 y좌표)이어야 하므로

$$-1+2t<0<3t-1 \qquad \therefore \frac{1}{3}<t<\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{3}<t<\frac{1}{2}$ $\quad \therefore a=\frac{1}{2}$

4th $a+M$의 값을 구한다.

$\overline{O_1A'}$, $\overline{O_2D'}$의 교점을 $\mathrm{T}(t,\ 2t)$라 하면 육각형의 넓이는

$$\square OO_1TO_2-\triangle O_1SR-\triangle O_2PQ$$

$$=\overline{OO_1}\cdot\overline{O_1T}-\frac{1}{2}\cdot\overline{O_1R}\cdot\overline{O_1S}-\frac{1}{2}\cdot\overline{O_2P}\cdot\overline{O_2Q}$$

$\overline{O_1R}=t-(1-2t)=3t-1$, $\overline{O_2P}=2t-(1-t)=3t-1$

$$=t\cdot 2t-\frac{1}{2}(3t-1)^2-\frac{1}{2}(3t-1)^2$$

$$=-7t^2+6t-1$$

$$=-7\left(t-\frac{3}{7}\right)^2+\frac{2}{7}\ \left(\frac{1}{3}<t<\frac{1}{2}\right)$$

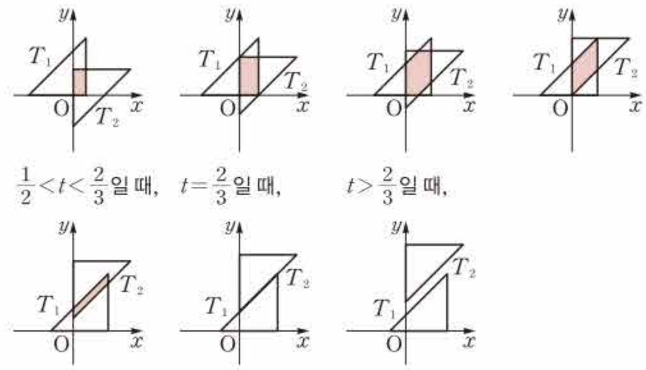
이므로 $t=\frac{3}{7}$일 때 최댓값 $\frac{2}{7}$를 갖는다.

즉 $M=\frac{2}{7}$이므로 $\quad a+M=\frac{11}{14}$ 답 ①

참고 양의 실수 t의 값의 범위에 따른 두 삼각형 T_1, T_2의 위치는 다음과 같다.

$0<t<\frac{1}{3}$일 때, $t=\frac{1}{3}$일 때, $\frac{1}{3}<t<\frac{1}{2}$일 때, $t=\frac{1}{2}$일 때,

$\frac{1}{2}<t<\frac{2}{3}$일 때, $t=\frac{2}{3}$일 때, $t>\frac{2}{3}$일 때,



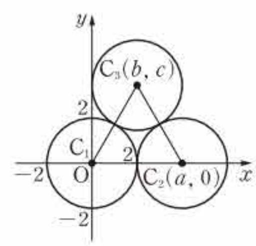
0475

1st 세 원 C_1, C_2, C_3의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구한다.

세 원 C_1, C_2, C_3의 중심을 각각 $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{C_2}$, $\mathrm{C_3}$이라 하면

$\mathrm{C_1}(0,\ 0)$, $\mathrm{C_2}(a,\ 0)$, $\mathrm{C_3}(b,\ c)$

또 원은 평행이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 세 원 C_1, C_2, C_3의 반지름의 길이는 모두 2이다.



2nd 외접하는 두 원의 중심 사이의 거리는 반지름의 길이의 합과 같음을 이용하여 a, b, c에 대한 방정식을 세운다.

두 원 C_1, C_2가 외접하므로

$$|a|=4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

두 원 C_1, C_3이 외접하므로 $\quad \sqrt{b^2+c^2}=4$

$$\therefore b^2+c^2=16 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

두 원 C_2, C_3이 외접하므로 $\quad \sqrt{(b-a)^2+c^2}=4$

$$\therefore (b-a)^2+c^2=16 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

3rd $|abc|$의 값을 구한다.

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$|a|=4$, $|b|=2$, $|c|=2\sqrt{3}$

$\therefore |abc|=|a||b||c|=16\sqrt{3}$ 답 $16\sqrt{3}$

다른 풀이 $\overline{C_1C_2}=\overline{C_2C_3}=\overline{C_3C_1}=4$이므로 $\triangle C_1C_2C_3$은 정삼각형이다.

$\therefore |a|=4$, $|b|=\frac{1}{2}\cdot 4=2$, $|c|=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4=2\sqrt{3}$

0476

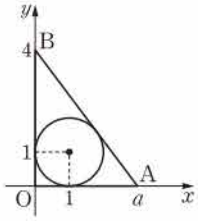
1st 평행이동해도 도형의 모양이 변하지 않음을 이용하여 △OAB의 내접원의 중심과 직선 AB 사이의 거리를 구한다.

$x^2+y^2-10x-12y+60=0$에서

$(x-5)^2+(y-6)^2=1$

즉 $\triangle O'A'B'$의 내접원의 반지름의 길이가 1이므로 △OAB의 내접원의 반지름의 길이도 1이다.

오른쪽 그림과 같이 $\triangle$OAB의 내접원은 중심의 좌표가 (1, 1)이고, 직선 AB에 접하므로 내접원의 중심 (1, 1)과 직선 AB 사이의 거리는 내접원의 반지름의 길이인 1과 같다.



2nd 점 A의 좌표를 구한다.

직선 AB의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{4}=1$, 즉 $4x+ay-4a=0$이므로

$$\frac{|4+a-4a|}{\sqrt{4^2+a^2}}=1, \qquad |4-3a|=\sqrt{16+a^2}$$

위의 식의 양변을 제곱하면 $\quad 16-24a+9a^2=16+a^2$

$$a^2-3a=0, \qquad a(a-3)=0$$

$\therefore a=3\ (\because a>0) \qquad \therefore$ A(3, 0) ⋯ ❶

3rd 점 A′의 좌표를 구한다.

점 (1, 1)을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표를 $\underbrace{(5,\ 6)}_{\triangle\text{O}'\text{A}'\text{B}'\text{의 내접원의 중심}}$이라 하면

$1+m=5,\ 1+n=6 \qquad \therefore m=4,\ n=5$

따라서 점 A′의 좌표는

$(3+4,\ 0+5)$, 즉 (7, 5) ⋯ ❷

답 (7, 5)

채점 기준	비율
❶ 점 A의 좌표를 구할 수 있다.	70 %
❷ 점 A′의 좌표를 구할 수 있다.	30 %

0477 **1st** 원의 중심의 좌표와 직선 l 사이의 거리를 이용하여 자연수 m의 값을 구한다.

원 C의 중심의 좌표가 (2, 3)이므로 원 C_1의 중심의 좌표는

$(2+m,\ 3)$

조건 (가)에 의하여 점 $(2+m,\ 3)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리가 원 C_1의 반지름의 길이인 3보다 작으므로

$$\frac{|4(2+m)-9|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3, \qquad |4m-1|<15$$

$$-15<4m-1<15 \qquad \therefore -\frac{7}{2}<m<4$$

따라서 자연수 m의 값은 1, 2, 3이다.

2nd m의 값에 따라 경우를 나누고, 각 경우에 해당하는 $m+n$의 최댓값을 구한다.

(i) $m=1$일 때,

원 C_2의 중심의 좌표는 $(3,\ 3+n)$이고, 조건 (나)에 의하여 점 $(3,\ 3+n)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리가 원 C_2의 반지름의 길이인 3보다 작으므로

$$\frac{|12-3(3+n)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3, \qquad |-3n+3|<15$$

$$-15<-3n+3<15 \qquad \therefore \underbrace{-4<n<6}_{n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5}$$

따라서 $m+n$의 최댓값은 $\quad 1+5=6$

(ii) $m=2$일 때,

원 C_2의 중심의 좌표는 $(4,\ 3+n)$이고, 조건 (나)에 의하여 점 $(4,\ 3+n)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리가 원 C_2의 반지름의 길이인 3보다 작으므로

$$\frac{|16-3(3+n)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3, \qquad |-3n+7|<15$$

$$-15<-3n+7<15 \qquad \therefore \underbrace{-\frac{8}{3}<n<\frac{22}{3}}_{n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7}$$

따라서 $m+n$의 최댓값은 $\quad 2+7=9$

(iii) $m=3$일 때,

원 C_2의 중심의 좌표는 $(5,\ 3+n)$이고, 조건 (나)에 의하여 점 $(5,\ 3+n)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리가 원 C_2의 반지름의 길이인 3보다 작으므로

$$\frac{|20-3(3+n)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3, \qquad |-3n+11|<15$$

$$-15<-3n+11<15 \qquad \therefore \underbrace{-\frac{4}{3}<n<\frac{26}{3}}_{n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8}$$

따라서 $m+n$의 최댓값은 $\quad 3+8=11$

3rd $m+n$의 최댓값을 구한다.

이상에서 $m+n$의 최댓값은 11이다.

답 11

0478 **1st** 평행이동한 포물선의 방정식을 구한다.

평행이동한 포물선의 방정식은

$y-2=(x+3)^2-4(x+3) \qquad \therefore y=x^2+2x-1$ ⋯ ❶

2nd 평행이동한 포물선의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 두 실근이 두 점 P, Q의 x좌표임을 이용하여 a의 값을 구한다.

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 p, q라 하면 p, q는 이차방정식

$x^2+2x-1=ax$, 즉 $x^2+(2-a)x-1=0$

의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$p+q=a-2$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❷

$\overline{\text{PQ}}$의 중점이 원점이므로

$\frac{p+q}{2}=0 \qquad \therefore p+q=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad a-2=0 \qquad \therefore a=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 포물선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 두 점 P, Q의 x좌표의 합을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

0479 **1st** 원 O'의 방정식을 구한다.

원 O'의 방정식은

$(x+1)^2+(y+1-1)^2=1 \qquad \therefore (x+1)^2+y^2=1$ ⋯ ❶

2nd 현 AB의 방정식을 구한다.

두 원 O, O'의 공통인 현 AB의 방정식은

$x^2+(y-1)^2-1-\{(x+1)^2+y^2-1\}=0$

$\therefore y=-x$ ⋯ ❷

3rd $a+b$의 값을 구한다.

점 (6, 2)를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(-2,\ -6)$이므로

$a=-2,\ b=-6$ ⋯ ❸

$\therefore a+b=-8$ ⋯ ❹

답 −8

채점 기준	비율
❶ 원 O'의 방정식을 구할 수 있다.	20 %
❷ 직선 AB의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0480 1st 두 점 A, C의 좌표를 구한다.

$A(a, b)\ (a>0,\ b>0)$라 하면 점 C는 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로

$C(b, a)$

점 C가 직선 $y=2x$ 위의 점이므로 $a=2b$

즉 $A(2b, b)$이고 $\overline{OA}=2\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{(2b)^2+b^2}=2\sqrt{5}$, $\sqrt{5b^2}=2\sqrt{5}$

$b^2=4$ $\therefore b=2\ (\because b>0)$

$\therefore A(4, 2),\ C(2, 4)$

2nd 두 점 B, D의 좌표를 구한다.

$B(0, c)\ (c>0)$라 하면 $\overline{AB}=2\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{(-4)^2+(c-2)^2}=2\sqrt{5}$

위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면 $c^2-4c=0$

$c(c-4)=0$ $\therefore c=4\ (\because c>0)$ $\therefore B(0, 4)$

직선 AB의 방정식은

$$y-4=\frac{2-4}{4-0}x \qquad \therefore y=-\frac{1}{2}x+4$$

점 D는 직선 AB와 직선 $y=x$의 교점이므로 $-\frac{1}{2}x+4=x$에서

$x=\frac{8}{3}$ $\therefore D\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$

3rd $9k^2$의 값을 구한다.

두 직선의 기울기의 곱이 -1이다.

직선 AB와 직선 $y=2x$는 수직이므로 $\triangle ODE$는 $\angle OED=90°$인 직각삼각형이고, $\triangle ODE$의 외접원의 지름의 길이는 $\overline{OD}$의 길이와 같다.

직각삼각형의 외심은 빗변의 중점이다.

이때

$$\overline{OD}=\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

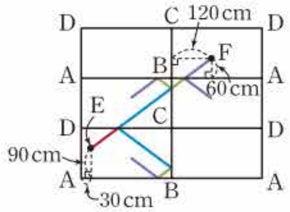
이므로 $\triangle ODE$의 외접원의 둘레의 길이는 $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

따라서 $k=\frac{8\sqrt{2}}{3}$이므로 $9k^2=128$

답 128

0481 1st 당구대의 각 변에 대한 대칭이동을 이용하여 공이 움직인 거리와 길이가 같은 선분을 찾는다.

오른쪽 그림과 같이 □ABCD를 변 BC와 변 DC에 대하여 대칭이동하여 나타내면 노란 공이 움직인 거리는 $\overline{EF}$의 길이와 같다.



2nd 노란 공이 움직인 거리를 구한다.

노란 공이 움직인 거리는

$$\overline{EF}=\sqrt{(\underbrace{240+120}_{270-30})^2+(\underbrace{60+150+60}_{150-90})^2}=\sqrt{360^2+270^2}=450\,(\text{cm})$$

답 ②

0482 1st 주어진 규칙에 따라 점 P_2, P_3, P_4, …의 좌표를 차례대로 구하여 규칙을 찾는다.

점 $P_1(3, 2)$에서 $3\cdot2=6>0$, $3>2$이므로 규칙 (가)에 의하여 점 P_1을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 P_2의 좌표는

$(2, 3)$

점 $P_2(2, 3)$에서 $2\cdot3=6>0$, $2<3$이므로 규칙 (나)에 의하여 점 P_2를 x축에 대하여 대칭이동한 점 P_3의 좌표는

$(2, -3)$

점 $P_3(2, -3)$에서 $2\cdot(-3)=-6<0$이므로 규칙 (다)에 의하여 점 P_3을 y축에 대하여 대칭이동한 점 P_4의 좌표는

$(-2, -3)$

점 $P_4(-2, -3)$에서 $(-2)\cdot(-3)=6>0$, $-2>-3$이므로 규칙 (가)에 의하여 점 P_4를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 P_5의 좌표는 $(-3, -2)$

점 $P_5(-3, -2)$에서 $(-3)\cdot(-2)=6>0$, $-3<-2$이므로 규칙 (나)에 의하여 점 P_5를 x축에 대하여 대칭이동한 점 P_6의 좌표는 $(-3, 2)$

점 $P_6(-3, 2)$에서 $(-3)\cdot2=-6<0$이므로 규칙 (다)에 의하여 점 P_6을 y축에 대하여 대칭이동한 점 P_7의 좌표는

$(3, 2)$ ← 점 P_1의 좌표와 같다.

즉 점 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, …은 6개의 점 $(3, 2)$, $(2, 3)$, $(2, -3)$, $(-2, -3)$, $(-3, -2)$, $(-3, 2)$가 이 순서대로 반복된다.

2nd $10x_{50}+y_{50}$의 값을 구한다.

$50=6\cdot8+2$에서 점 P_{50}의 좌표는 점 P_2의 좌표인 $(2, 3)$과 같으므로 $x_{50}=2$, $y_{50}=3$

$\therefore 10x_{50}+y_{50}=23$

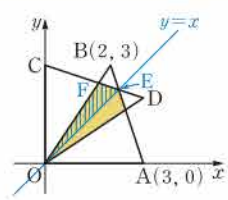
답 23

0483

오른쪽 그림과 같이 ❶두 점 $A(3, 0)$, $B(2, 3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 각각 C, D라 할 때, ❷색칠한 부분의 넓이를 구하시오.

두 직선 AB, CD는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

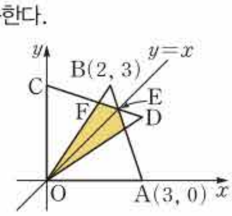
$\triangle OEF$의 넓이의 2배와 같다.



❶을 이용하여 세 직선 AB, CD, OB의 방정식을 구한다. 직선 AB의 방정식과 $y=x$, 직선 CD와 OB의 방정식을 각각 연립하여 두 점 E, F의 좌표를 구한 후 ❷를 구한다.

1st 세 직선 AB, CD, OB의 방정식을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$와 직선 $y=x$의 교점을 E, $\overline{OB}$와 $\overline{CD}$의 교점을 F라 하면 색칠한 부분의 넓이는 $\triangle OEF$의 넓이의 2배와 같다.



직선 AB의 방정식은

$$y=\frac{0-3}{3-2}(x-3) \qquad \therefore y=-3x+9 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 CD는 직선 AB를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 그 방정식은

$$x=-3y+9 \qquad \therefore\ y=-\frac{1}{3}x+3 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

직선 OB의 방정식은 $\quad y=\frac{3}{2}x \qquad \cdots\cdots \text{㉢}$

2nd $\overline{\mathrm{OE}}$의 길이를 구한다.

㉠과 $y=x$를 연립하여 풀면 $\quad x=\frac{9}{4},\ y=\frac{9}{4}$

즉 $\mathrm{E}\left(\frac{9}{4},\ \frac{9}{4}\right)$이므로 $\quad \overline{\mathrm{OE}}=\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2+\left(\frac{9}{4}\right)^2}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$

3rd 점 F와 직선 $y=x$ 사이의 거리를 구한다.

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $\quad x=\frac{18}{11},\ y=\frac{27}{11}$

즉 $\mathrm{F}\left(\frac{18}{11},\ \frac{27}{11}\right)$이므로 점 F와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|\frac{18}{11}-\frac{27}{11}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{9\sqrt{2}}{22}$$

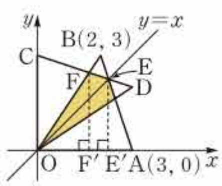
4th 색칠한 부분의 넓이를 구한다.

색칠한 부분의 넓이는

$$2\triangle\mathrm{OEF}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{9\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{9\sqrt{2}}{22}\right)=\frac{81}{44}$$

답 $\frac{81}{44}$

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 두 점 E, F에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 E′, F′이라 하면 두 점 E, F의 x좌표가 각각 $\frac{9}{4}$, $\frac{18}{11}$이므로



$$\triangle\mathrm{OEC}:\triangle\mathrm{OEF}=\overline{\mathrm{EC}}:\overline{\mathrm{EF}}$$
$$=\overline{\mathrm{E'O}}:\overline{\mathrm{E'F'}}$$
$$=\frac{9}{4}:\left(\frac{9}{4}-\frac{18}{11}\right)$$
$$=11:3$$

$$\therefore\ \triangle\mathrm{OEF}=\frac{3}{11}\triangle\mathrm{OEC}=\frac{3}{11}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\underbrace{3}_{\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{OA}}=3}\cdot\frac{9}{4}\right)=\frac{81}{88}$$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$$2\triangle\mathrm{OEF}=2\cdot\frac{81}{88}=\frac{81}{44}$$

0484

❷ 원 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$과
중심: (2, 2), 반지름의 길이: 1
원 $(x-4)^2+(y-2)^2=4$ 위의 점 $(x_2,\ y_2)$에 대하여
중심: (4, 2), 반지름의 길이: 2
❶ $\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값을 구하시오.
$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{y_1-(-y_2)}{x_1-(-x_2)}$의 값은 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(-x_2,\ -y_2)$를 지나는 직선의 기울기이다.

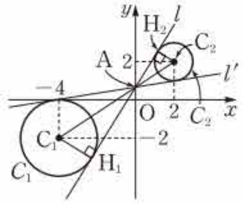
❶의 값의 의미를 파악한 후 ❷를 그림으로 나타내어 ❶의 값이 최대일 때와 최소일 때가 어떤 경우인지 생각해 본다.

1st $\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$의 값의 의미를 파악하여 최대·최소인 경우를 생각한다.

$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{y_1-(-y_2)}{x_1-(-x_2)}$이므로 이 값은 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(-x_2,\ -y_2)$를 지나는 직선의 기울기이다.

이때 점 $(-x_2,\ -y_2)$는 점 $(x_2,\ y_2)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점이므로 원 $(x-4)^2+(y-2)^2=4$를 원점에 대하여 대칭이동한 원 $(x+4)^2+(y+2)^2=4$ 위의 점이다.

따라서 C_1: $(x+4)^2+(y+2)^2=4$, C_2: $(x-2)^2+(y-2)^2=1$이라 하고 오른쪽 그림과 같이 두 원 C_1, C_2의 공통인 두 접선을 각각 l, l'이라 하면 $\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$의 최댓값과 최솟값은 각각 직선 l의 기울기와 직선 l'의 기울기와 같다.



2nd 두 직선 l, l'의 교점의 좌표를 구한다.

두 직선 l, l'의 교점을 A, 두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 $\mathrm{C_1}(-4,\ -2)$, $\mathrm{C_2}(2,\ 2)$라 하고, 두 점 $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{C_2}$에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하면

$$\triangle\mathrm{AC_1H_1}\backsim\triangle\mathrm{AC_2H_2}\ (\text{AA 닮음})$$

이므로

$$\overline{\mathrm{C_1A}}:\overline{\mathrm{C_2A}}=\overline{\mathrm{C_1H_1}}:\overline{\mathrm{C_2H_2}}=2:1$$

즉 점 A는 $\overline{\mathrm{C_1C_2}}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$$\mathrm{A}\left(\frac{2\cdot2+1\cdot(-4)}{2+1},\ \frac{2\cdot2+1\cdot(-2)}{2+1}\right),\ \text{즉 }\mathrm{A}\left(0,\ \frac{2}{3}\right)$$

3rd Mm의 값을 구한다.

점 $\left(0,\ \frac{2}{3}\right)$를 지나고 두 원 C_1, C_2에 각각 접하는 직선의 방정식을

$$y=ax+\frac{2}{3},\ \text{즉 } 3ax-3y+2=0\ (a\text{는 상수})$$

이라 하면 이 직선과 점 $\mathrm{C_2}(2,\ 2)$ 사이의 거리가 원 C_2의 반지름의 길이인 1과 같으므로

$$\frac{|6a-6+2|}{\sqrt{(3a)^2+(-3)^2}}=1, \qquad |6a-4|=\sqrt{9a^2+9}$$

위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$27a^2-48a+7=0$$

따라서 이 이차방정식의 두 실근 중 큰 근이 M, 작은 근이 m이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$Mm=\frac{7}{27}$$

답 $\frac{7}{27}$

다른 풀이 점 $\left(0,\ \frac{2}{3}\right)$를 지나고 두 원 C_1, C_2에 각각 접하는 직선의 방정식을

$$y=ax+\frac{2}{3},\ \text{즉 } 3ax-3y+2=0\ (a\text{는 상수})$$

이라 하면 이 직선과 점 $\mathrm{C_1}(-4,\ -2)$ 사이의 거리가 원 C_1의 반지름의 길이인 2와 같으므로

$$\frac{|-12a+6+2|}{\sqrt{(3a)^2+(-3)^2}}=2, \qquad |8-12a|=2\sqrt{9a^2+9}$$

위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면 $\quad 27a^2-48a+7=0$

0485 **1st** 방정식 $f(-x,\ -y+1)=0$이 나타내는 도형을 좌표평면 위에 나타낸다.

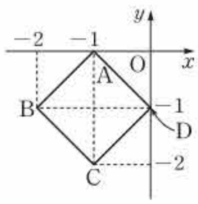
방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$f(x, y+1)=0$

방정식 $f(x, y+1)=0$이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동하면

$f(-x, -y+1)=0$

따라서 방정식 $f(-x, -y+1)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 후 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



2nd 최댓값과 최솟값의 곱을 구한다.

위의 그림의 도형 위의 점과 원점 사이의 거리의 최댓값은 원점과 점 B 또는 점 C 사이의 거리이므로

$\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

또 최솟값은 원점과 직선 AD 사이의 거리이고 직선 AD의 방정식은 $x+y+1=0$이므로

$\dfrac{x}{-1}+\dfrac{y}{-1}=1$에서 $x+y+1=0$

$$\frac{|1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 구하는 곱은 $\sqrt{5}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ 답 $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

0486 **1st** 점 A를 원 위의 임의의 점 P에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 할 때, $\overline{AA'}$의 중점이 점 P임을 이용하여 자취의 방정식을 구한다.

원 위의 임의의 점을 $P(a, b)$, 점 $A(-2, 0)$을 점 P에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(x, y)$라 하면

$a=\dfrac{x-2}{2}$, $b=\dfrac{y}{2}$ …… ㉠

이때 점 $P(a, b)$가 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=1$

위의 식에 ㉠을 대입하면 구하는 자취의 방정식은

$$\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1$$

$\therefore (x-2)^2+y^2=4$ 답 ④

0487 **1st** 점 A를 접은 선에 대하여 대칭이동한 점이 점 B임을 이용하여 접은 선의 방정식을 구한다.

점 A를 접은 선에 대하여 대칭이동한 점이 점 B이므로 접은 선은 $\overline{AB}$의 중점을 지나고 직선 AB와 수직이다.

이때 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $(3, 1)$이고, 직선 AB의 기울기는 $-\dfrac{1}{3}$이므로 접은 선의 방정식은

$y-1=3(x-3)$ $\quad\therefore y=3x-8$ ⋯ ❶

2nd m, n의 값을 구한다.

점 C를 직선 $y=3x-8$에 대하여 대칭이동한 점이 점 D이므로 $\overline{CD}$의 중점 $\left(\dfrac{m+3}{2}, \dfrac{n+2}{2}\right)$가 직선 $y=3x-8$ 위의 점이다. 즉

$\dfrac{n+2}{2}=3\cdot\dfrac{m+3}{2}-8$ $\quad\therefore 3m-n=9$ …… ㉠

또 직선 CD가 직선 $y=3x-8$과 수직이므로

$\dfrac{n-2}{m-3}\cdot 3=-1$ $\quad\therefore m+3n=9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=\dfrac{18}{5}$, $n=\dfrac{9}{5}$ ⋯ ❷

3rd $\dfrac{m}{n}$의 값을 구한다.

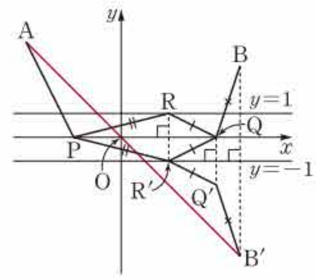
$\dfrac{m}{n}=\dfrac{18}{5}\cdot\dfrac{5}{9}=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 접은 선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ m, n의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\dfrac{m}{n}$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0488 **1st** 점을 대칭이동하여 $\overline{AP}+\overline{PR}+\overline{RQ}+\overline{QB}$의 최솟값과 길이가 같은 선분을 찾는다.

점 R는 직선 $y=1$ 위에 있으므로 점 R를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 R′이라 하면 오른쪽 그림과 같이 점 R′은 직선 $y=-1$ 위에 있다.



두 점 B, Q를 직선 $y=-1$에 대하여 대칭이동한 점을 각각 B′, Q′이라 하면 $\overline{PR}=\overline{PR'}$,

$\overline{RQ}=\overline{R'Q}=\overline{R'Q'}$, $\overline{QB}=\overline{Q'B'}$이므로

$$\overline{AP}+\overline{PR}+\overline{RQ}+\overline{QB}=\overline{AP}+\overline{PR'}+\overline{R'Q'}+\overline{Q'B'}$$
$$\geq\overline{AB'}$$

2nd 점 B′의 좌표를 구하여 주어진 길이의 합의 최솟값을 구한다.

$B'(5, a)$라 하면 $\overline{BB'}$의 중점이 직선 $y=-1$ 위에 있으므로

$\dfrac{3+a}{2}=-1$ $\quad\therefore a=-5$

따라서 $B'(5, -5)$이므로 구하는 최솟값은

$\overline{AB'}=\sqrt{(5+4)^2+(-5-4)^2}=9\sqrt{2}$ 답 ④

05 집합의 뜻과 표현

Ⅱ. 집합과 명제

0489 답 $\times$

0490 답 ○

0491 답 $\times$

0492 답 ○

0493 답 1, 2, 3, 4, 6, 12

0494 답 $\in$

0495 답 $\not\in$

0496 답 $\in$

0497 답 $\in$

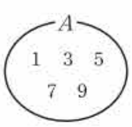
0498 답 $\{4, 8, 12, 16, \cdots\}$

0499 답 $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

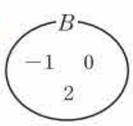
0500 답 $\{x|x$는 자연수$\}$

0501 답 $\{x|x$는 100 이하의 10의 양의 배수$\}$

0502 답



0503 답



0504 답 무

0505 답 유

0506 답 유, 공

0507 답 무

0508 답 3

0509 실수 x에 대하여 $x^2\ge 0$이므로 $x^2+1=0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다.
따라서 $A=\varnothing$이므로 $\quad n(A)=0$ 답 0

0510 $x^2-3<0$에서 $\quad (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})<0$
$\therefore -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$
이때 x는 정수이므로 x는 -1, 0, 1이다.
따라서 $A=\{-1, 0, 1\}$이므로
$n(A)=3$ 답 3

0511 $X=\{3, 6, 9, \cdots\}$, $Y=\{6, 12, 18, \cdots\}$이므로
$Y\subset X$ 답 $Y\subset X$

0512 모든 정사각형은 마름모이므로
$X\subset Y$ 답 $X\subset Y$

0513 $x^2=4$에서 $\quad x=\pm 2$
따라서 $X=\{-2, 2\}$이므로
$Y\subset X$ 답 $Y\subset X$

0514 $X=\varnothing$
$|y|\le 1$에서 $\quad -1\le y\le 1$
이때 y는 정수이므로 y는 -1, 0, 1이다.
따라서 $Y=\{-1, 0, 1\}$이므로
$X\subset Y$ 답 $X\subset Y$

0515 답 $\varnothing$

0516 답 $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$

0517 답 $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$

0518 답 $\{a, b, c\}$

0519 답 $\varnothing$, $\{\varnothing\}$

0520 답 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$

0521 $A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
ㄱ. $2\in A$
ㄷ. 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\quad \varnothing\subset A$
ㄹ. $4\not\in A$이므로 $\quad \{4, 15\}\not\subset A$
ㅁ. $1\not\in A$이므로 $\quad \{1, 13, 19\}\not\subset A$
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄹ

0522 답 $A=B$

0523 $x^2-3x=0$에서 $\quad x(x-3)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=3$
따라서 $A=\{0, 3\}$이므로
$A\ne B$ 답 $A\ne B$

0524 $A=\{8, 16, 24, 32, \cdots\}$이므로
$A=B$ 답 $A=B$

0525 9의 양의 약수는 1, 3, 9이므로 집합 $\{1, 3, 9\}$의 진부분집합은
$\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{9\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 9\}$, $\{3, 9\}$
답 풀이 참조

0526 $n(A)=5$이므로 부분집합의 개수는
$2^5=32$ 답 32

0527 $n(A)=5$이므로 진부분집합의 개수는
$2^5-1=31$ 답 31

0528 2를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{5-1}=2^4=16$ ← 집합 $\{1, 3, 4, 5\}$의 부분집합의 개수와 같다. 답 16

0529 1, 3을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$ ← 집합 $\{2, 4, 5\}$의 부분집합의 개수와 같다. 답 8

유형 01 집합과 원소 (집중공략) 본책 86쪽

① 대상을 분명히 정할 수 있다. ➡ 집합이다.
  대상을 분명히 정할 수 없다. ➡ 집합이 아니다.
② a가 집합 A의 원소이다. ➡ $a\in A$
  b가 집합 A의 원소가 아니다. ➡ $b\notin A$

0530 '훌륭한', '가까운', '작은', '잘 어울리는'은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

답 ④

0531 $x^3+2x^2-3x=0$에서

$x(x^2+2x-3)=0, \quad x(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 $0\in A$, $1\in A$, $2\notin A$, $3\notin A$이므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ①

0532 ① $\sqrt{2}$는 실수이므로 $\quad \sqrt{2}\in R$

② i는 허수이므로 $\quad i\notin R$

③ $i^4=1$은 실수이므로 $\quad i^4\in R$

④ $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$은 무리수이므로 $\quad \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\notin Q$

⑤ $\sqrt{9}=3$은 유리수이므로 $\quad \sqrt{9}\in Q$

답 ③

0533 (i) $i=j$일 때,

$a_{11}=-a_{11}$, $a_{22}=-a_{22}$에서

$a_{11}=0$, $a_{22}=0$

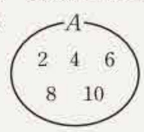
(ii) $i\neq j$일 때, $\quad a_{12}=-a_{21}$

(i), (ii)에서 집합 A의 원소는 $\begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$ (k는 상수) 꼴이어야 하므로 집합 A의 원소인 것은 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

유형 02 집합의 표현 방법 본책 86쪽

집합을 나타내는 방법에는 원소나열법, 조건제시법, 벤 다이어그램이 있다.

예 10 이하의 짝수인 자연수의 집합을 A라 할 때
① 원소나열법: $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$
② 조건제시법: $A=\{x\,|\,x$는 10 이하의 짝수인 자연수$\}$
③ 벤 다이어그램:



0534 ① $A=\{1, 5\}$

② $A=\{1, 2, 5, 10\}$

③ $A=\{1, 3, 5, 15\}$

④ $A=\{3, 6, 9, 12, 15\}$

⑤ $A=\{5, 10, 15\}$

답 ③

0535 ④ $\{2, 3, 4, \cdots, 9\}$ 답 ④

0536 □보다 작은 5의 양의 배수가 5, 10, 15, 20, 25이므로 □ 안에 들어갈 수 있는 자연수는 26, 27, 28, 29, 30의 5개이다. 답 5

참고 집합 $\{x\,|\,x$는 □보다 작은 5의 양의 배수$\}$를 원소나열법으로 나타내면

□$=25$일 때, $\quad \{5, 10, 15, 20\}$

□$=31$일 때, $\quad \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$

유형 03 유한집합과 무한집합 본책 87쪽

① 유한집합 ➡ 원소가 유한개인 집합
② 무한집합 ➡ 원소가 무수히 많은 집합
③ 공집합 ➡ 원소가 하나도 없는 집합

0537 ② $\{1, 4, 7, 10, \cdots\}$ ➡ 무한집합

③ $\{1\}$ ➡ 유한집합

④ $\left\{\cdots, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots\right\}$ ➡ 무한집합

⑤ $\{a+b\,|\,0<a+b<2\}$ ➡ 무한집합

답 ③

0538 ① 원소가 1개 있으므로 공집합이 아니다.

③ $\{x\,|\,-1<x<1\}$이므로 공집합이 아니다.

④ $\{1\}$이므로 공집합이 아니다.

⑤ $\{-1\}$이므로 공집합이 아니다.

답 ②

0539 6의 양의 약수는 1, 2, 3, 6이므로 집합 A가 공집합이 되려면 $1\notin A$, $2\notin A$, $3\notin A$, $6\notin A$이어야 한다.

따라서 k의 값이 될 수 있는 자연수는 6, 7, 8, 9이므로 구하는 합은

$6+7+8+9=30$ 답 30

참고 $k=5$일 때, $A=\{x\,|\,x$는 $5<x<10$인 6의 양의 약수$\}$이므로

$A=\{6\}$

$k=6$일 때, $A=\{x\,|\,x$는 $6<x<10$인 6의 양의 약수$\}$이므로 $\quad A=\varnothing$

0540 $x-15+3a=2bx-3x$에서

$(2b-4)x=3a-15$ ··· ❶

집합 S가 무한집합이 되려면 위의 방정식의 해가 무수히 많아야 하므로

$2b-4=0$, $3a-15=0 \quad \therefore a=5, b=2$ ··· ❷

$\therefore a^2+b^2=29$ ··· ❸

답 29

채점 기준	비율
❶ $x-15+3a=2bx-3x$를 $Ax=B$ 꼴로 정리할 수 있다.	20 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 04 유한집합의 원소의 개수

집중 공략 본책 87쪽

① $n(A)$ ➡ 유한집합 A의 원소의 개수
예 $n(\varnothing)=0$, $n(\{\varnothing\})=1$, $n(\{1, 2\})=2$
② 집합 A가 조건제시법으로 주어지면 집합 A를 원소나열법으로 나타낸 후 $n(A)$를 구한다.

0541 $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{11, 22, 33, \cdots, 99\}$
$x^2+2\le 0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로
$C=\varnothing$
따라서 $n(A)=5$, $n(B)=9$, $n(C)=0$이므로
$n(B)+n(C)-n(A)=4$

답 ①

0542 ① $n(\{1, 2, 3\})=n(\{4, 5, 6\})=3$
② $A=\{0\}$이면 $n(A)=1$이다.
③ $n(A)=0$이면 $A=\varnothing$이다.
④ $n(\{\varnothing\})-n(\varnothing)=1-0=1$
⑤ $n(\{60\})-n(\{55\})=1-1=0$

답 ④

0543 x, y가 정수이면 x^2, y^2도 정수이므로 $x^2+y^2=1$에서
$x^2=1$, $y^2=0$ 또는 $x^2=0$, $y^2=1$
$\therefore x=\pm1$, $y=0$ 또는 $x=0$, $y=\pm1$
즉 $A=\{(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)\}$이므로
$n(A)=4$ ⋯ ❶
$B=\{1, 2, 3, \cdots, k\}$이므로 $n(B)=k$
따라서 $n(A)+n(B)=11$에서
$4+k=11$ $\therefore k=7$ ⋯ ❷

답 7

채점 기준	비율
❶ $n(A)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	50 %

0544 이차방정식 $x^2+3x+4=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$D_1=3^2-4\cdot4=-7<0$
이므로 이차방정식 $x^2+3x+4=0$은 실근을 갖지 않는다.
$\therefore n(A)=0$
이때 $n(A)=n(B)$가 되려면 $n(B)=0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2-2kx+7k=0$은 실근을 갖지 않아야 한다.
이차방정식 $x^2-2kx+7k=0$의 판별식을 D_2라 하면
$\frac{D_2}{4}=(-k)^2-7k<0$
$k(k-7)<0$ $\therefore 0<k<7$
따라서 정수 k는 $1, 2, 3, \cdots, 6$의 6개이다.

답 ①

0545 $\sqrt{16}$ 이하의 자연수는 1, 2, 3, 4의 4개이므로
$n(A_{16})=4$ $\sqrt{16}=4$
$\sqrt{27}$ 이하의 자연수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이므로
$n(A_{27})=5$ $5<\sqrt{27}<6$
$\therefore n(A_k)=n(A_{16})+n(A_{27})=9$
즉 $\sqrt{k}$ 이하의 자연수가 9개이어야 하므로
$9\le\sqrt{k}<10$
$\therefore 81\le k<100$ $0<a<b$이면 $a^2<b^2$
따라서 자연수 k는 $81, 82, 83, \cdots, 99$의 19개이다.

답 ④

유형 05 새로운 집합 구하기

본책 88쪽

주어진 집합의 원소를 이용하여 새로운 집합을 만들 때에는 표를 이용하여 원소를 구하는 것이 편리하다. 이때 같은 원소는 중복하여 나열하지 않고, 원소를 빠짐없이 구해야 함에 주의한다.

0546 집합 A의 두 원소 a, b에 대하여 ab의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

a \ b	-1	0	2
-1	1	0	-2
0	0	0	0
2	-2	0	4

$X=\{-2, 0, 1, 4\}$
따라서 집합 X의 모든 원소의 합은
$-2+0+1+4=3$

답 3

0547 $B=\{2, 3, 5, 7\}$
$x\in A$, $y\in B$인 x, y에 대하여 $y-x$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	2	3	5	7
1	1	2	4	6
2	0	1	3	5
3	-1	0	2	4

$C=\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$\therefore n(C)=8$

답 ④

0548 $x\in A$, $y\in B$인 x, y에 대하여 $2x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	2	4	6
1	4	6	8
2	6	8	10
3	8	10	12
a	$2a+2$	$2a+4$	$2a+6$

$4, 6, 8, 10, 12, 2a+2,$
$2a+4, 2a+6$ ⋯ ❶
이때 $n(X)=7$이 되려면
$2a+2$, $2a+4$, $2a+6$ 중 하나만 4, 6, 8, 10, 12 중 하나와 같아야 한다.
한편 a는 자연수이므로
$4\le 2a+2<2a+4<2a+6$
즉 $2a+2$만 4, 6, 8, 10, 12 중 하나와 같아야 하므로
$4\le 2a+2\le 12$, $2a+4>12$
$\therefore 4<a\le 5$
따라서 자연수 a의 값은 5이다. ⋯ ❷

답 5

채점 기준	비율
❶ $2x+y$의 값을 모두 구할 수 있다.	40 %
❷ 자연수 a의 값을 구할 수 있다.	60 %

0549 집합 A의 두 원소 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같다.

x \ y	a	b	c
a	$2a$	$a+b$	$a+c$
b	$a+b$	$2b$	$b+c$
c	$a+c$	$b+c$	$2c$

이때 $a<b<c$이므로

$2a<a+b<a+c$,

$a+b<2b<b+c$,

$a+c<b+c<2c$

그런데 $a+c$와 $2b$의 대소 관계는 알 수 없다.
└ $a+b<a+c<b+c$, $a+b<2b<b+c$인 것만 알 수 있다.

(i) $a+c=2b$일 때,

$B=\{2a,\ a+b,\ a+c,\ b+c,\ 2c\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은

$2a+(a+b)+(a+c)+(b+c)+2c=40$

$4(a+c)+2b=40$, $\quad 8b+2b=40$

$10b=40 \quad \therefore b=4$

즉 $a+c=8$이고 $a<b<c$이므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(1,\ 4,\ 7)$, $(2,\ 4,\ 6)$, $(3,\ 4,\ 5)$의 3개

(ii) $a+c\neq 2b$일 때,

$B=\{2a,\ a+b,\ a+c,\ 2b,\ b+c,\ 2c\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은

$2a+(a+b)+(a+c)+2b+(b+c)+2c=40$

$4(a+b+c)=40 \quad \therefore a+b+c=10$

이때 $a<b<c$이므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(1,\ 2,\ 7)$, $(1,\ 3,\ 6)$, $(1,\ 4,\ 5)$, $(2,\ 3,\ 5)$의 4개

(i), (ii)에서 구하는 집합 A의 개수는
└ 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수와 같다.

$3+4=7$

답 7

유형 06 기호 ∈, ⊂의 사용 본책 89쪽

① 원소와 집합 사이의 관계
➡ ∈, ∉를 사용하여 나타낸다.
② 집합과 집합 사이의 포함 관계
➡ ⊂, ⊄를 사용하여 나타낸다.

0550 ① a는 집합 A의 원소이므로 $\quad \{a\}\subset A$ 또는 $a\in A$

② $\{b\}$는 집합 A의 원소가 아니므로 $\quad \{b\}\notin A$

③ $\{b,\ c\}$는 집합 A의 원소이므로 $\quad \{b,\ c\}\in A$

④ $b\notin A$이므로 $\quad \{a,\ b\}\not\subset A$

⑤ $b\notin A$, $c\notin A$이므로 $\quad \{a,\ b,\ c\}\not\subset A$

답 ③

SSEN 특강 집합을 원소로 갖는 집합

집합 $A=\{a,\ \{b,\ c\}\}$는 집합을 원소로 갖는 집합이다. 집합 A의 원소는 a와 $\{b,\ c\}$이고, 집합 $\{a\}$와 집합 $\{\{b,\ c\}\}$는 집합 A의 부분집합이다. 즉

$a\in A$, $\{b,\ c\}\in A$, $\{a\}\subset A$, $\{\{b,\ c\}\}\subset A$

0551 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

③ $\{1,\ 2,\ 3\}\subset B$

답 ③

0552 ③ $2\notin A$이므로 $\quad \{1,\ 2\}\not\subset A$

④ $1\in A$, $\varnothing\in A$이므로 $\quad \{1,\ \varnothing\}\subset A$

⑤ $\varnothing\in A$, $\{\varnothing\}\in A$이므로 $\quad \{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}\subset A$

답 ③

유형 07 집합 사이의 포함 관계 본책 89쪽

집합 사이의 포함 관계는 각 집합을 원소나열법으로 나타내어 두 집합의 모든 원소를 비교하여 판단한다.
➡ 집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속하면 $A\subset B$이다.

0553 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{0\}$, $Z=\{0,\ 1\}$이므로
$|0|=0$ ┘ └ $|-1|=|1|=1$

$Y\subset Z\subset X$

답 ④

0554 주어진 벤 다이어그램에서 두 집합 A, B 사이의 포함 관계는 $A\subset B$이다.

① $A\not\subset B$, $B\not\subset A$

② $B\subset A$

③ $A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9\}$이므로

$B\subset A$

④ $A=\{3,\ 6,\ 9\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$이므로

$A\not\subset B$, $B\not\subset A$

⑤ $A\subset B$
└ 공집합은 모든 집합의 부분집합이다.

답 ⑤

0555 집합 A의 두 원소 x, y에 대하여 $x-2y$, $x-y$의 값을 구하면 각각 다음 [표 1], [표 2]와 같다.

x \ y	0	1	2
0	0	-2	-4
1	1	-1	-3
2	2	0	-2

[표 1]

x \ y	0	1	2
0	0	-1	-2
1	1	0	-1
2	2	1	0

[표 2]

따라서 $B=\{-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$,

$C=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$이므로

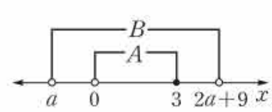
$A\subset C\subset B$

답 ②

유형 08 집합 사이의 포함 관계가 성립하도록 하는 상수 구하기 집중 공략 본책 90쪽

집합 사이의 포함 관계가 성립하도록 하는 상수를 구할 때에는
① 각 집합을 원소나열법으로 나타내어 각 원소를 비교한다.
➡ $A\subset B$이면 집합 A의 원소는 모두 집합 B의 원소이다.
② 집합을 수직선에 나타내어 포함 관계가 성립할 조건을 찾는다.

0556 $A\subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

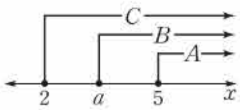


$a\le 0$, $2a+9>3$

$2a+9>3$에서 $a>-3$이므로 $\quad -3<a\le 0$

따라서 정수 a는 -2, -1, 0의 3개이다. 답 3

0557 $A\subset B\subset C$가 성립하도록 세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$2\le a\le 5$

따라서 정수 a는 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$2+3+4+5=14$ 답 14

0558 $x^2+x-6=0$에서 $\quad (x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

$\therefore A=\{-3, 2\}$ ···➊

$A\subset B$이려면 $\quad a>2$ ···➋

따라서 정수 a의 최솟값은 3이다. ···➌

답 3

채점 기준	비율
➊ 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	30 %
➋ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
➌ 정수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0559 $A\subset B$이므로 $4\in A$에서 $\quad 4\in B$

$\therefore 2-a=4$ 또는 $b+6=4$

(i) $2-a=4$, 즉 $a=-2$일 때,

$A=\{-3, 4\}$, $B=\{1, 4, b+6\}$이므로 $A\subset B$이려면

$b+6=-3 \quad \therefore b=-9$

$\therefore a+b=-11$

(ii) $b+6=4$, 즉 $b=-2$일 때,

$A=\{4, a-1\}$, $B=\{1, 2-a, 4\}$이므로 $A\subset B$이려면

$a-1=1$ 또는 $a-1=2-a$

$\therefore a=2$ 또는 $a=\dfrac{3}{2}$

$\therefore a+b=0$ 또는 $a+b=-\dfrac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $M=0$, $m=-11$이므로

$M-m=11$ 답 ⑤

유형 09 부분집합 구하기

본책 90쪽

원소의 개수가 n인 집합의 부분집합을 모두 구할 때에는 부분집합의 원소가 0개, 1개, 2개, ···, n개인 경우로 나누어 구한다.

0560 n은 2, 3, 5이므로 주어진 집합은 $\quad \{4, 7, 13\}$

따라서 구하는 부분집합은

$\varnothing$, $\{4\}$, $\{7\}$, $\{13\}$, $\{4, 7\}$, $\{4, 13\}$, $\{7, 13\}$, $\{4, 7, 13\}$

답 풀이 참조

0561 집합 $P(A)$는 집합 A의 부분집합을 원소로 갖는 집합이므로 $\quad P(A)=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

ㄱ. 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\quad \varnothing\subset P(A)$

ㄴ. $\varnothing$은 $P(A)$의 원소이므로

$\varnothing\in P(A)$ 또는 $\{\varnothing\}\subset P(A)$

ㄹ. $\{1, 2\}$는 $P(A)$의 원소이므로

$\{1, 2\}\in P(A)$ 또는 $\{\{1, 2\}\}\subset P(A)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

0562 집합 A의 부분집합 중에서 모든 원소의 합이 20 이상이려면 원소가 3개 이상이어야 한다.

(i) 원소가 3개일 때,

$\{2, 8, 10\}$, $\{4, 6, 10\}$, $\{4, 8, 10\}$, $\{6, 8, 10\}$의 4개이다. ···➊

(ii) 원소가 4개일 때,

$\{2, 4, 6, 8\}$, $\{2, 4, 6, 10\}$, $\{2, 4, 8, 10\}$,

$\{2, 6, 8, 10\}$, $\{4, 6, 8, 10\}$의 5개이다. ···➋

(iii) 원소가 5개일 때,

$\{2, 4, 6, 8, 10\}$의 1개이다. ···➌

이상에서 구하는 부분집합의 개수는

$4+5+1=10$ ···➍

답 10

채점 기준	비율
➊ 원소가 3개일 때의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	30 %
➋ 원소가 4개일 때의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	30 %
➌ 원소가 5개일 때의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	30 %
➍ 모든 원소의 합이 20 이상인 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	10 %

유형 10 서로 같은 집합

집중 공략 본책 91쪽

$A\subset B$, $B\subset A$ ➡ $A=B$ ➡ 두 집합 A, B의 모든 원소가 같다.

0563 $A=B$이므로 $\quad a^2-2a=3$

$a^2-2a-3=0$, $\quad (a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

(i) $a=-1$일 때,

$A=\{-2, 3, 4\}$, $B=\{-2, 3, 4\}$이므로

$A=B$

(ii) $a=3$일 때,

$A=\{3, 6, 8\}$, $B=\{-2, 3, 4\}$이므로

$A\ne B$

(i), (ii)에서 $\quad a=-1$ 답 -1

0564 $A\subset B$, $B\subset A$이므로 $\quad A=B$

이때 $x-2<x+1<x+3$이므로

$x-2=3$, $x+1=6$, $x+3=8$

$\therefore x=5$ 답 ③

0565 ㄱ. $\{2, 4\}$ ㄴ. $\{1, 2, 4\}$

ㄷ. $\{2, 4, 6\}$ ㄹ. $\{2, 4\}$

이상에서 집합 A와 서로 같은 집합인 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ②

0566 $A=B$이므로

$a^2=9$, $b^2-4b=5$ ⋯ ❶

$a^2=9$에서 $a=-3$ 또는 $a=3$

$b^2-4b=5$에서 $b^2-4b-5=0$

$(b+1)(b-5)=0$

$\therefore b=-1$ 또는 $b=5$ ⋯ ❷

따라서 $a=-3$, $b=-1$일 때 $a+b$의 값이 최소이므로 구하는 최솟값은

$-3+(-1)=-4$ ⋯ ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ a, b에 대한 두 방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0567 $A=B$이므로

$2x-1=x+3$ 또는 $2x-1=3x+3$

(i) $2x-1=x+3$, 즉 $x=4$일 때,

$A=\{4,\ 7,\ 15\}$, $B=\{4,\ 7,\ 15\}$이므로

$A=B$

(ii) $2x-1=3x+3$, 즉 $x=-4$일 때,

$A=\{-9,\ -4,\ 15\}$, $B=\{-9,\ -4,\ -1\}$이므로

$A\neq B$

(i), (ii)에서 $A=\{4,\ 7,\ 15\}$이므로 구하는 합은

$4+7+15=26$

답 ①

유형 11 부분집합의 개수

본책 91쪽

집합 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n\}$에 대하여

① A의 부분집합의 개수 ➡ 2^n

② A의 진부분집합의 개수

➡ 부분집합 중에서 자기 자신을 제외한 집합의 개수

➡ 2^n-1

0568 $n(A)=a$, $n(B)=b$라 하면

$2^a=64$, $2^b-1=127$

$2^a=64=2^6$에서 $a=6$

$2^b=128=2^7$에서 $b=7$

$\therefore n(A)+n(B)=13$

답 ③

0569 $x^3-3x^2-x+3=0$에서

$(x^2-1)(x-3)=0$, $(x+1)(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$ ⋯ ❶

$\therefore A=\{-1,\ 1,\ 3\}$ ⋯ ❷

이때 집합 X는 집합 A의 진부분집합 중에서 공집합을 제외한 것이므로 집합 X의 개수는

$\underbrace{(2^3-1)}_{\text{진부분집합의 개수}}-\underbrace{1}_{\text{공집합의 개수}}=6$ ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 방정식 $x^3-3x^2-x+3=0$의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	40 %

참고 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 x^3-3x^2-x+3을 인수분해할 수도 있다.

➡ x^3-3x^2-x+3

$=(x+1)(x-1)(x-3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & -1 & 3 \\ & & -1 & 4 & -3 \\ \hline 1 & 1 & -4 & 3 & \boxed{0} \\ & & 1 & -3 & \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

0570 집합 A의 원소 중에서 12의 약수는

1, 2, 3, 4, 6, 12

구하는 부분집합의 개수는 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$의 부분집합 중에서 공집합을 제외한 집합의 개수이므로

$2^6-1=63$

답 63

유형 12 특정한 원소를 갖거나 갖지 않는 부분집합의 개수

집중공략

본책 92쪽

집합 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n\}$에 대하여

① 집합 A의 특정한 원소 k $(k<n)$개를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수 ➡ 2^{n-k}

② 집합 A의 특정한 원소 l $(l<n)$개를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수 ➡ 2^{n-l}

③ 집합 A의 원소 중에서 k개는 반드시 원소로 갖고, l개는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수 ➡ 2^{n-k-l} (단, $k+l<n$)

0571 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$

집합 X는 집합 A의 진부분집합이고, 1, 2를 반드시 원소로 가지므로 집합 X의 개수는 ← 집합 $\{3,\ 6,\ 9,\ 18\}$의 진부분집합의 개수와 같다.

$2^{6-2}-1=2^4-1=15$

답 15

0572 2, 3을 반드시 원소로 갖고 7을 원소로 갖지 않는 부분집합 X의 개수는

$2^{7-2-1}=2^4=16$

답 ④

0573 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

집합 A의 원소 중에서 4의 약수는 1, 2, 4이므로 이를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{9-3}=2^6=64$

답 64

0574 홀수인 원소가 2개이려면 집합 A의 홀수인 원소 1, 5, 7 중에서 1, 5 또는 1, 7 또는 5, 7만을 원소로 가져야 한다. ⋯ ❶

1, 5를 반드시 원소로 갖고 7을 원소로 갖지 않는 집합 A의 부분집합의 개수는 ← 1, 5, 7 중에서 1, 5만을 원소로 갖는 부분집합

$2^{7-2-1}=2^4=16$

마찬가지로 1, 5, 7 중에서 1, 7 또는 5, 7만을 원소로 갖는 집합 A의 부분집합의 개수도 각각 16이므로 구하는 부분집합의 개수는 $16\cdot3=48$ ⋯ ❷

답 48

채점 기준	비율
❶ 홀수인 원소가 2개인 부분집합의 조건을 알 수 있다.	30 %
❷ 홀수인 원소가 2개인 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	70 %

0575 $n(A)=k$이고 집합 A의 부분집합 중에서 가장 작은 원소가 5인 집합은 5를 반드시 원소로 갖고 1, 2, 3, 4를 원소로 갖지 않아야 하므로

$2^{k-1-4}=32=2^5$, $\quad k-5=5$

$\therefore k=10$ 답 10

유형 13 $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수 본책 92쪽

$A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수
➡ 집합 B의 부분집합 중에서 집합 A의 모든 원소를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수

0576 $x^2-7x+10=0$에서 $\quad (x-2)(x-5)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=5$

$\therefore A=\{2, 5\}$

$x^2-4x-5\le 0$에서 $\quad (x+1)(x-5)\le 0$

$\therefore -1\le x\le 5$

$\therefore B=\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

따라서 집합 X의 개수는 집합 B의 부분집합 중에서 2, 5를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{7-2}=2^5=32$ 답 ④

0577 구하는 집합의 개수는 집합 B의 부분집합 중에서 a, b, f를 반드시 원소로 갖고 d를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{6-3-1}=2^2=4$ 답 ②

0578 집합 X의 개수는 집합 A의 부분집합 중에서 1, 2, 4를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{n-3}=16=2^4$, $\quad n-3=4$

$\therefore n=7$ 답 7

0579 $X=\{1, 2, 4\}$ 4의 양의 약수의 집합 ⋯ ❶

이때 $A\subset B\subset X$, $X\neq B$이므로 집합 B는 집합 X의 진부분집합이다. ⋯ ❷

(i) 집합 B의 원소가 0개일 때,
두 집합 A, B가 모두 공집합이어야 하므로 순서쌍 (A, B)의 개수는

1

(ii) 집합 B의 원소가 1개일 때,
집합 B는 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$의 3개이고, 각각의 집합 B에 대하여 집합 A의 개수는 $2^1=2$이므로 순서쌍 (A, B)의 개수는

$3\cdot 2=6$

(iii) 집합 B의 원소가 2개일 때,
집합 B는 $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$의 3개이고, 각각의 집합 B에 대하여 집합 A의 개수는 $2^2=4$이므로 순서쌍 (A, B)의 개수는

$3\cdot 4=12$

이상에서 순서쌍 (A, B)의 개수는

$1+6+12=19$ ⋯ ❸

답 19

채점 기준	비율
❶ 집합 X를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ 집합 B가 집합 X의 진부분집합임을 알 수 있다.	20 %
❸ 순서쌍 (A, B)의 개수를 구할 수 있다.	60 %

유형 14 여러 가지 부분집합의 개수 본책 93쪽

① (특정한 원소 k개 중에서 적어도 한 개를 원소로 갖는 부분집합의 개수)
=(전체 부분집합의 개수)
−(특정한 원소 k개를 제외한 집합의 부분집합의 개수)
② (a 또는 b를 원소로 갖는 부분집합의 개수)
=(전체 부분집합의 개수)
−(a, b를 제외한 집합의 부분집합의 개수)

0580 $A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

구하는 부분집합의 개수는 집합 A의 부분집합의 개수에서 집합 $\{9, 12, 15, 18\}$의 부분집합의 개수를 빼면 되므로

$2^6-2^4=64-16=48$ 답 ①

다른 풀이 3 또는 6을 원소로 갖는 집합은 집합 $\{9, 12, 15, 18\}$의 부분집합에 3만 추가하거나 6만 추가하거나 3, 6을 모두 추가하면 된다.

따라서 구하는 부분집합의 개수는 $\quad 2^4\cdot 3=48$

0581 $A=\{5, 10, 15, 20, 25\}$

구하는 부분집합의 개수는 집합 A의 부분집합의 개수에서 집합 $\{10, 20\}$의 부분집합의 개수를 빼면 되므로

$2^5-2^2=32-4=28$ 답 28

0582 $M(X)\ge 4$를 만족시키려면 집합 X는 4, 5, 6 중 적어도 하나를 원소로 가져야 한다.

따라서 집합 X의 개수는 집합 B의 부분집합의 개수에서 집합 $\{1, 2, 3\}$의 부분집합의 개수를 빼면 되므로

$2^6-2^3=64-8=56$ 답 ③

유형 15 조건을 만족시키는 집합의 개수 집중 공략 본책 93쪽

집합 A가 '$a\in A$이면 $b\in A$'임을 만족시킨다.
➡ a가 집합 A의 원소이면 b도 반드시 집합 A의 원소이다.

0583 조건 (가), (나)를 모두 만족시키려면 집합 A의 원소는 18의 양의 약수이어야 한다.

이때 18의 양의 약수는 1, 2, 3, 6, 9, 18이고 조건 (나)에 의하여 1과 18, 2와 9, 3과 6은 어느 하나가 집합 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 집합 A의 원소이다.
따라서 공집합이 아닌 집합 A의 개수는 집합 $\{1, 2, 3\}$의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같으므로

$2^3-1=7$ 답 ③

참고 집합 A를 구하면 다음과 같다.
$\{1, 18\}$, $\{2, 9\}$, $\{3, 6\}$, $\{1, 2, 9, 18\}$, $\{1, 3, 6, 18\}$,
$\{2, 3, 6, 9\}$, $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

0584 조건 (가), (나)에 의하여 x와 $8-x$가 모두 자연수이므로

$x\geq 1$, $8-x\geq 1$ $\quad\therefore 1\leq x\leq 7$

즉 집합 B의 원소가 될 수 있는 것은

$1, 2, 3, \cdots, 7$

이때 조건 (나)에 의하여 1과 7, 2와 6, 3과 5는 어느 하나가 집합 B의 원소이면 나머지 하나도 반드시 집합 B의 원소이다.
(i) $n(B)=1$일 때,
집합 B는 $\{4\}$이므로 $\quad a_1=1$
(ii) $n(B)=3$일 때,
집합 B는 $\{1, 4, 7\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{3, 4, 5\}$이므로 $\quad a_3=3$
(i), (ii)에서 $\quad a_1+a_3=4$ 답 4

0585 조건 (가), (나)를 모두 만족시키려면 집합 A의 원소는 100의 양의 약수이어야 한다.
이때 100의 양의 약수는 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100이고 조건 (나)에 의하여 1과 100, 2와 50, 4와 25, 5와 20은 어느 하나가 집합 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 집합 A의 원소이다.
따라서 $n(A)$가 홀수가 되는 집합 A의 개수는 집합 $\{1, 2, 4, 5, 10\}$의 부분집합 중에서 10을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{5-1}=2^4=16$ 답 16

0586 조건 (가)에서 $2\in A$이고, $\underbrace{4}_{2\cdot 2}\in U$이므로 조건 (나)에 의하여

$4\in A$

또 $\underbrace{8}_{2\cdot 4}\in U$이므로 조건 (나)에 의하여

$8\in A$

이와 같이 계속하면

$\{2, 4, 8, 16, 32\}\subset A$ ⋯⋯ ㉠

한편 조건 (가)에서 $5\in A$이고, $\underbrace{10}_{2\cdot 5}\in U$이므로 조건 (나)에 의하여

$10\in A$

또 $\underbrace{20}_{2\cdot 10}\in U$이므로 조건 (나)에 의하여

$20\in A$

이와 같이 계속하면

$\{5, 10, 20, 40\}\subset A$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$\{2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40\}\subset A$

이므로 원소의 개수가 최소인 집합 A는

$A=\{2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40\}$

따라서 $n(A)$의 최솟값은 9이다. 답 ①

유형 16 **부분집합의 원소의 합과 곱** 본책 94쪽

집합 A의 부분집합의 모든 원소의 합 또는 곱을 구할 때에는 집합 A의 각 원소를 반드시 포함하는 부분집합의 개수를 이용한다.
예 집합 $A=\{a, b, c\}$에 대하여 a를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는
$2^{3-1}=2^2=4$
마찬가지로 b, c를 각각 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수도 4이다.
① 집합 A의 부분집합을 각각 A_k $(k=1, 2, 3, \cdots, 8)$라 하고 집합 A_k의 모든 원소의 합을 p_k라 할 때,
$p_1+p_2+\cdots+p_8=4(a+b+c)$
② 집합 A의 공집합이 아닌 부분집합을 각각 B_k $(k=1, 2, 3, \cdots, 7)$라 하고 집합 B_k의 모든 원소의 곱을 q_k라 할 때,
$q_1\times q_2\times\cdots\times q_7=a^4\times b^4\times c^4$

0587 $1\notin X$, $3\in X$인 집합 X의 개수는

$2^{6-1-1}=2^4=16$

한편 16개의 집합 중에서 2를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는 $1\notin X$, $2\in X$, $3\in X$인 집합 X의 개수와 같으므로

$2^{6-1-2}=2^3=8$

마찬가지로 4, 5, 6을 각각 반드시 원소로 갖는 집합의 개수도 8이므로 구하는 $S(X)$의 합은

$16\cdot 3+8(2+4+5+6)=184$ 답 184

0588 집합 B_k 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합은

$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$

의 4개이다.
마찬가지로 2, 3, 4, 5를 각각 반드시 원소로 갖는 집합의 개수도 4이므로

$$\begin{aligned} S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{10}&=4(1+2+3+4+5)\\ &=60 \end{aligned}$$ 답 ②

0589 집합 A_k 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$2^{4-1}=2^3=8$

마찬가지로 3, 5, 7을 각각 반드시 원소로 갖는 집합의 개수도 8이므로

$$\begin{aligned} a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{16}&=8(1+3+5+7)\\ &=128 \end{aligned}$$ 답 ⑤

0590 집합 B_k 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$2^{5-1}=2^4=16$

마찬가지로 2, 4, 8, 16을 각각 반드시 원소로 갖는 집합의 개수도 16이므로

$$\begin{aligned} b_1\times b_2\times b_3\times\cdots\times b_{31}&=1^{16}\cdot 2^{16}\cdot 4^{16}\cdot 8^{16}\cdot 16^{16}\\ &=2^{16}\cdot(2^2)^{16}\cdot(2^3)^{16}\cdot(2^4)^{16}\\ &=2^{16}\cdot 2^{32}\cdot 2^{48}\cdot 2^{64}\\ &=2^{16+32+48+64}\\ &=2^{160} \end{aligned}$$

$\therefore a=160$ 답 160

0591 1st 집합 S를 원소나열법으로 나타내고, 주어진 조건을 이용하여 나머지 원소를 구한다.

집합 S의 원소가 3개이므로 $S=\{0,\ 5,\ a\}$ $(a\neq0,\ a\neq5)$라 하자.
조건 (나)에 의하여 $5+a\in S$이므로

$5+a=0$ 또는 $5+a=5$

$\therefore\ a=-5$ 또는 $a=0$

그런데 $a\neq0$이므로 $a=-5$

따라서 $S=\{-5,\ 0,\ 5\}$이므로 0과 5를 제외한 집합 S의 나머지 원소는 -5이다.

답 -5

0592 1st 행렬의 덧셈을 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $P=\begin{pmatrix}3\cdot1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}3\cdot2 & 0\\ 0 & 2^3\end{pmatrix}$이라 하면

$$P+Q=\begin{pmatrix}3\cdot3 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}$$

이때 10은 2의 거듭제곱이 아니므로 $P+Q\notin A$

2nd 행렬의 곱셈을 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. 자연수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대하여 $P=\begin{pmatrix}3a & 0\\ 0 & 2^b\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}3c & 0\\ 0 & 2^d\end{pmatrix}$

이라 하면

$$PQ=\begin{pmatrix}3a & 0\\ 0 & 2^b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3c & 0\\ 0 & 2^d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot3ac & 0\\ 0 & 2^{b+d}\end{pmatrix}$$

이때 $3ac,\ b+d$는 모두 자연수이므로 $PQ\in A$

3rd 행렬의 곱셈과 실수배를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $P\in A$이므로 $P^k\in A$ (k는 자연수) ($\because$ ㄴ)

자연수 $a,\ b$에 대하여 $P^k=\begin{pmatrix}3a & 0\\ 0 & 2^b\end{pmatrix}$이라 하면

$$kP^k=\begin{pmatrix}3\cdot ak & 0\\ 0 & k\cdot2^b\end{pmatrix}$$

따라서 $kP^k\in A$이려면 k가 1이거나 2의 거듭제곱이어야 하므로 k는 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64의 7개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

0593

집합 $U=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 30\}$의 공집합이 아닌 부분집합 A에 대하여 집합 B는

❶ $B=\{b\,|\,b$는 a^2+1을 3으로 나누었을 때의 나머지, $a\in A\}$

a를 3으로 나누었을 때의 나머지가 0, 1, 2인 경우로 나누어 생각한다.

이다. ❷ $n(B)=1$이 되도록 하는 ❸ 집합 A 중에서 원소의 개수가 가장 많은 집합을 X라 할 때, $n(X)$를 구하시오.

집합 B의 원소가 1개이다.

3으로 나누었을 때의 나머지에 따라 경우를 나누어 ❶의 원소가 될 수 있는 것을 구한다. ❷를 만족시키는 집합 B에 대하여 집합 A의 원소가 될 수 있는 것을 찾아 ❸을 구한다.

1st a가 $3k,\ 3k+1,\ 3k+2$ (k는 음이 아닌 정수)일 때로 나누어 집합 B의 원소가 될 수 있는 것을 구한다.

음이 아닌 정수 k에 대하여

(i) $a=3k$일 때,

$a^2+1=(3k)^2+1=9k^2+1$
$=3\cdot3k^2+1$

이므로 a^2+1을 3으로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

(ii) $a=3k+1$일 때,

$a^2+1=(3k+1)^2+1=9k^2+6k+2$
$=3(3k^2+2k)+2$

이므로 a^2+1을 3으로 나누었을 때의 나머지는 2이다.

(iii) $a=3k+2$일 때,

$a^2+1=(3k+2)^2+1=9k^2+12k+5$
$=3(3k^2+4k+1)+2$

이므로 a^2+1을 3으로 나누었을 때의 나머지는 2이다.

이상에서 집합 B의 원소가 될 수 있는 것은 1, 2이다. ⋯ ❶

2nd $n(B)=1$인 집합 B에 대하여 집합 A의 원소가 될 수 있는 것을 찾는다.

$n(B)=1$에서 $B=\{1\}$ 또는 $B=\{2\}$

$B=\{1\}$이려면 집합 A의 모든 원소가 $3k$ 꼴이어야 하므로 집합 A의 원소가 될 수 있는 것은

0, 3, 6, ⋯, 30

$B=\{2\}$이려면 집합 A의 모든 원소가 $3k+1$ 또는 $3k+2$ 꼴이어야 하므로 집합 A의 원소가 될 수 있는 것은

1, 4, 7, ⋯, 28, ← $3k+1$ 꼴

2, 5, 8, ⋯, 29 ← $3k+2$ 꼴 ⋯ ❷

3rd 집합 A 중에서 원소의 개수가 가장 많은 집합 X에 대하여 $n(X)$를 구한다.

집합 A 중에서 원소의 개수가 가장 많은 집합은

$X=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ \cdots,\ 28,\ 29\}$

이므로 $n(X)=20$ ⋯ ❸

$n(U)-n(\{0,\ 3,\ 6,\ \cdots,\ 30\})=31-11=20$

답 20

채점 기준	비율
❶ 집합 B의 원소가 될 수 있는 것을 구할 수 있다.	40 %
❷ $n(B)=1$인 집합 B에 대하여 집합 A의 원소가 될 수 있는 것을 구할 수 있다.	40 %
❸ $n(X)$를 구할 수 있다.	20 %

0594 1st 20과 8의 최대공약수를 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $A_4(20)=\{x\,|\,G(20,\ x)=4\}$이고, $G(20,\ 8)=4$이므로

$8\in A_4(20)$

2nd 최대공약수의 성질을 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. 집합 $A_3(6)=\{x\,|\,G(6,\ x)=3\}$의 원소는 3을 인수로 갖고 2를 인수로 갖지 않는 100 이하의 자연수이다.

또 집합 $A_3(12)=\{x\,|\,G(12,\ x)=3\}$의 원소는 3을 인수로 갖고 2를 인수로 갖지 않는 100 이하의 자연수이다.

$\therefore\ A_3(6)=A_3(12)$

3rd $G(n,\ x)=1$이면 $n,\ x$는 서로소임을 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. 집합 $A_1(7)=\{x\,|\,G(7,\ x)=1\}$의 원소는 7과 서로소인 100 이하의 자연수이다.

이때 7과 서로소가 아닌 자연수는 7의 배수뿐이고 100 이하의 자연수 중에서 7의 배수는 14개이므로 집합 $A_1(7)$의 원소의 개수는

$100-14=86$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0595 **1st** 집합의 포함 관계를 이용하여 조건 (가), (다)를 만족시키는 집합 X의 원소에 대한 조건을 구한다.

조건 (가)에서 $\{3, 5, 7\}\subset X$이므로

$3\in X,\ 5\in X,\ 7\in X$ …… ㉠

또 $\{2, 4, 5\}\not\subset X$이므로

$2\notin X$ 또는 $4\notin X$ …… ㉡

조건 (다)에서 $n(X)=6$이므로 ㉠에 의하여 집합 X는 집합 A의 원소 중 3, 5, 7을 제외한 3개의 원소를 더 갖는다. ⋯➊

2nd 조건 (나)를 만족시키는 집합 X의 원소에 대한 조건을 구한다.

$3+5+7=15$는 홀수이고 조건 (나)에서 $S(X)$의 값이 짝수이므로 나머지 3개의 원소의 합은 홀수이다.

이때 집합 A의 원소 중 3, 5, 7을 제외한 홀수는 1, 9의 2개이므로 집합 X의 나머지 3개의 원소 중 2개는 짝수, 1개는 홀수이다. ⋯➋

3rd $S(X)$의 최솟값을 구한다.

㉡에 의하여 $S(X)$는 집합 X의 나머지 3개의 원소가 1, 2, 6일 때, 즉 $X=\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$일 때 최소이므로 $S(X)$의 최솟값은 $1+2+3+5+6+7=24$ ⋯➌

답 24

채점 기준	비율
➊ 조건 (가), (다)를 만족시키기 위한 조건을 구할 수 있다.	30 %
➋ 조건 (나)를 만족시키기 위한 조건을 구할 수 있다.	40 %
➌ $S(X)$의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

0596 **1st** 두 집합 A_{25}, A_{125}를 원소나열법으로 나타낸다.

$A_{25}=\{x\,|\,x$는 $\sqrt{25}$ 이하의 홀수$\}=\{1, 3, 5\}$

$A_{125}=\{x\,|\,x$는 $\sqrt{125}$ 이하의 홀수$\}=\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

2nd 집합의 포함 관계를 이용하여 n의 값의 범위를 구한다.

$A_{25}\subset A_n\subset A_{125}$이려면 $5\in A_n$, $13\notin A_n$이어야 하므로

$5\le\sqrt{n}<13$ $\therefore 25\le n<169$

3rd n의 최댓값과 최솟값의 합을 구한다.

자연수 n의 최댓값은 168, 최솟값은 25이므로 구하는 합은

$168+25=193$ 답 193

0597 **1st** 어떤 두 원소의 곱도 6의 배수가 아닌 수들로만 이루어진 집합의 원소에 대한 조건을 구한다.

주어진 조건을 만족시키는 부분집합을 X라 하면 집합 X의 어떤 두 원소의 곱도 6의 배수가 아니므로 집합 X는 다음을 만족시킨다.

(가) 6과 서로소인 수들은 모두 집합 X의 원소가 될 수 있다.

(나) 2의 배수가 집합 X의 원소이면 3의 배수는 집합 X의 원소가 될 수 없고, 3의 배수가 집합 X의 원소이면 2의 배수는 집합 X의 원소가 될 수 없다.

2nd 모든 원소의 곱이 짝수임을 이용하여 집합 X의 원소가 될 수 있는 것을 찾는다.

집합 X의 모든 원소의 곱이 짝수이므로 집합 X는 짝수를 반드시 원소로 가져야 한다.

이때 (가), (나)에 의하여 집합 X의 원소가 될 수 있는 것은 집합 $\{1, 2, 3, 4, \cdots, 10\}$의 원소 중 3의 배수를 제외한 나머지 원소 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10이다.

3rd 모든 원소의 합이 짝수임을 이용하여 홀수인 원소의 조건을 찾고, 집합 X의 개수를 구한다.

모든 원소의 합이 짝수이려면 집합 X의 원소 중 홀수의 개수는 0 또는 짝수이어야 한다.

이때 집합 X의 원소가 될 수 있는 홀수는 1, 5, 7이므로

(i) 집합 X의 원소 중 홀수가 없을 때,

집합 X의 개수는 2, 4, 8, 10의 4개 중에서 2개 이상을 택하는 경우의 수와 같으므로

$_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4=6+4+1=11$

(ii) 집합 X의 원소 중 홀수가 2개일 때,

집합 X의 개수는 1, 5, 7의 3개 중에서 2개를 택하고, 2, 4, 8, 10의 4개 중에서 1개 이상을 택하는 경우의 수와 같으므로

$_3C_2\cdot({}_4C_1+{}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4)$

$=3\cdot(4+6+4+1)=45$

(i), (ii)에서 구하는 집합의 개수는

$11+45=56$ 답 56

SSEN 특강

집합 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 k $(0\le k\le n)$인 집합의 개수는 서로 다른 n개에서 k개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$_nC_k$

0598

집합 ➊$U=\{x\,|\,x$는 3의 배수가 아닌 30 이하의 자연수$\}$의
30 이하의 자연수 중에서 3의 배수를 제외한 수
부분집합 A에 대하여 ➋$n(A)=4$이고 집합 A의 모든 원소의 합은 100이다. 집합 A의 모든 원소를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 x_1, x_2, x_3, x_4라 할 때,
30 이하인 서로 다른 4개의 자연수의 합이 100이다.
➌$x_4-x_3+x_2-x_1$의 최댓값을 구하시오.

➊을 원소나열법으로 나타낸 후 ➋를 만족시키는 경우를 나누어 집합 A를 구한다. 각 경우에서 ➌의 값을 구하여 최댓값을 구한다.

1st 집합 A에 반드시 속해야 하는 원소를 찾는다.

$U=\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 28, 29\}$

$n(A)=4$이고 집합 A의 모든 원소의 합이 100이므로 집합 A에는 25 이상인 원소가 2개 또는 3개 속해야 한다.

2nd 집합 A에 25 이상인 원소가 3개 속하는 경우의 $x_4-x_3+x_2-x_1$의 값을 구한다.

집합 U에서 25 이상인 원소는 25, 26, 28, 29의 4개이다.

(i) 집합 A에 25 이상인 원소가 3개 속할 때,

ⓘ 원소 25, 26, 28이 속할 때, $100-(25+26+28)=21$
나머지 한 원소는 21이고 21은 3의 배수이므로 주어진 조건을 만족시키는 집합 A가 존재하지 않는다.

ⓘⓘ 원소 25, 26, 29가 속할 때,
$A=\{20, 25, 26, 29\}$이므로 $100-(25+26+29)=20$
$x_4-x_3+x_2-x_1=29-26+25-20=8$

ⓘⓘⓘ 원소 25, 28, 29가 속할 때, $100-(25+28+29)=18$
나머지 한 원소는 18이고 18은 3의 배수이므로 주어진 조건을 만족시키는 집합 A가 존재하지 않는다.

ⓘⓥ 원소 26, 28, 29가 속할 때,
$A=\{17, 26, 28, 29\}$이므로 $100-(26+28+29)=17$
$x_4-x_3+x_2-x_1=29-28+26-17=10$

3rd 집합 A에 25 이상인 원소가 2개 속하는 경우의 $x_4-x_3+x_2-x_1$의 값을 구한다.

(ii) 집합 A에 25 이상인 원소가 2개 속할 때,
25보다 작은 집합 U의 원소 중 가장 큰 두 원소의 합은
$22+23=45$
따라서 네 원소의 합이 100이 되려면 25 이상인 두 원소의 합이 55 이상이어야 한다.
$25+26=51$, $25+28=53$, $25+29=54$, $26+28=54$, $26+29=55$, $28+29=57$

ⓘ 원소 26, 29가 속할 때,
$A=\{22, 23, 26, 29\}$이므로 나머지 두 원소의 합이 45인 경우
$x_4-x_3+x_2-x_1=29-26+23-22=4$

ⓘⓘ 원소 28, 29가 속할 때,
$A=\{20, 23, 28, 29\}$이므로 나머지 두 원소의 합이 43인 경우
$x_4-x_3+x_2-x_1=29-28+23-20=4$

4th $x_4-x_3+x_2-x_1$의 최댓값을 구한다.

(i), (ii)에서 $x_4-x_3+x_2-x_1$의 최댓값은 10이다. 답 10

다른 풀이 $x_1+x_2+x_3+x_4=100$에서
$x_1+x_3=100-(x_2+x_4)$
$\therefore x_4-x_3+x_2-x_1=x_4+x_2-(x_1+x_3)$
$=x_4+x_2-\{(100-(x_2+x_4)\}$
$=2(x_2+x_4)-100$
이 값이 최대이려면 x_2+x_4의 값이 최대이어야 하므로
$x_4=29$
$x_4>x_3>x_2$에서
$x_3=28$, $x_2=26$
따라서 구하는 최댓값은
$2\cdot(26+29)-100=10$

0599 **1st** 집합 B를 원소나열법으로 나타낸다.

$x^2-x-6=0$에서 $(x+2)(x-3)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$
$\therefore B=\{-2, 3\}$

2nd $A=B$임을 이용하여 x^3+ax^2+bx+c를 구한다.

$A=B$이므로 방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$은 -2, 3을 근으로 가져야 하고, 두 근 중 하나는 중근이어야 한다.

(i) -2를 중근으로 가질 때,
$x^3+ax^2+bx+c=(x+2)^2(x-3)$에서
$c=-12$
이므로 $c<0$을 만족시킨다.

(ii) 3을 중근으로 가질 때,
$x^3+ax^2+bx+c=(x+2)(x-3)^2$에서
$c=18$
이므로 $c<0$을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서
$x^3+ax^2+bx+c=(x+2)^2(x-3)$

3rd $Q(100)$의 값을 구한다.

$x^3+ax^2+bx+c=(x+2)^2(x-3)=(x^2-x-6)(x+2)$이므로
$Q(x)=x+2$
$\therefore Q(100)=102$ 답 102

0600 **1st** 두 집합 A_3, B_3을 원소나열법으로 나타내어 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $A_3=\{x|x$는 3 이하의 소수$\}=\{2, 3\}$
$B_3=\{x|x$는 3의 양의 약수$\}=\{1, 3\}$
$\therefore n(A_3)+n(B_3)=2+2=4$

2nd $a\in B_m$이면 m은 a의 배수임을 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $A_6=\{x|x$는 6 이하의 소수$\}=\{2, 3, 5\}$
$A_6\subset B_m$이려면 m은 2, 3, 5의 공배수이어야 하므로 m의 최솟값은 2, 3, 5의 최소공배수인 30이다.

3rd 집합의 원소의 개수가 많을수록 부분집합의 개수도 많음을 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $m=12$일 때,
$A_{12}=\{2, 3, 5, 7, 11\}$, $B_{12}=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
따라서 두 집합 A_{12}, B_{12}의 부분집합의 개수는 각각 $2^5=32$, $2^6=64$이므로 집합 A_{12}의 부분집합의 개수가 집합 B_{12}의 부분집합의 개수보다 적다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

0601 **1st** 특정한 원소를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수를 이용해 $f(n)$을 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

$f(n)$은 n을 반드시 원소로 갖고 n보다 작은 자연수를 원소로 갖지 않는 집합 X의 부분집합의 개수이므로 $(n-1)$개
$f(n)=2^{10-1-(n-1)}=2^{10-n}$ (단, $1\le n<10$)
ㄱ. $f(8)=2^{10-8}=2^2=4$

2nd $a<b$이지만 $f(a)>f(b)$인 경우를 찾아 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $a=7$, $b=8$일 때, $7\in X$, $8\in X$이고 $7<8$이지만
$f(7)=2^{10-7}=2^3=8$, $f(8)=2^{10-8}=2^2=4$
이므로
$f(7)>f(8)$

3rd $f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)$의 값을 구하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)$

$=2^{10-1}+2^{10-3}+2^{10-5}+2^{10-7}+2^{10-9}$

$=2^9+2^7+2^5+2^3+2=682$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

참고 $n=10$일 때, 10을 최소의 원소로 갖는 집합은 $\{10\}$뿐이므로

$f(10)=1$

0602 **1st** 집합 X가 반드시 갖는 원소와 집합 X의 가장 큰 원소를 구한다.

$A \ll X$이므로 집합 X는 집합 A의 가장 큰 원소인 4를 반드시 원소로 갖는다.

또 $X \ll B$이므로 집합 B는 집합 X의 가장 큰 원소를 반드시 원소로 갖는다.

따라서 집합 X의 가장 큰 원소는 6 또는 8이다. ⋯ ❶

2nd 집합 X의 가장 큰 원소가 6일 때와 8일 때의 집합 X의 개수를 각각 구한다.

(i) 집합 X의 가장 큰 원소가 6일 때,

집합 X는 6 이하의 자연수 중 4, 6을 반드시 원소로 가지므로 집합 X의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$ ⋯ ❷

(ii) 집합 X의 가장 큰 원소가 8일 때,

집합 X는 8 이하의 자연수 중 4, 8을 반드시 원소로 가지므로 집합 X의 개수는

$2^{8-2}=2^6=64$ ⋯ ❸

3rd 조건을 만족시키는 집합 X의 개수를 구한다.

(i), (ii)에서 구하는 집합 X의 개수는

$16+64=80$ ⋯ ❹

답 80

채점 기준	비율
❶ 집합 X가 반드시 갖는 원소와 집합 X의 가장 큰 원소를 구할 수 있다.	30 %
❷ 집합 X의 가장 큰 원소가 6일 때, 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ 집합 X의 가장 큰 원소가 8일 때, 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0603 **1st** 집합 X가 6을 원소로 가질 때, 집합 X의 개수를 구한다.

(i) 집합 X가 6을 원소로 가질 때,

조건 (가)에서 $n(X)\geq 2$이므로 집합 X는 6 이외의 원소를 가져야 한다.

즉 집합 X의 개수는 집합 $\{3, 4, 5, 7\}$의 부분집합 중에서 공집합이 아닌 집합의 개수와 같으므로

$2^4-1=15$

2nd 집합 X가 6을 원소로 갖지 않을 때, 집합 X의 개수를 구한다.

(ii) 집합 X가 6을 원소로 갖지 않을 때,

조건 (나)를 만족시키려면 집합 X는 3과 4를 반드시 원소로 가져야 한다.

└ 조건 (가)도 만족시킨다.

즉 집합 X의 개수는 집합 $\{3, 4, 5, 7\}$의 부분집합 중에서 3, 4를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{4-2}=4$

3rd 조건을 만족시키는 집합 X의 개수를 구한다.

(i), (ii)에서 구하는 집합 X의 개수는

$15+4=19$ 답 ②

0604 **1st** 조건 (가)를 만족시키는 집합 A의 부분집합이 될 수 있는 집합을 찾는다.

조건 (가)에 의하여 1과 9, 2와 8, 3과 7, 4와 6은 어느 하나가 집합 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 집합 A의 원소이다.

또 $A=\{5\}$이면 조건 (가)를 만족시킨다.

따라서 집합 A는 집합

$\{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{5\}$

중에서 일부 또는 전부를 부분집합으로 갖는다. ⋯ ❶

2nd 조건 (나)를 만족시키는 집합 A의 부분집합이 될 수 있는 집합을 찾는다.

네 집합 $\{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}$은 원소의 합이 모두 10이고 조건 (나)에서 집합 A의 모든 원소의 합은 20보다 크고 30보다 작으므로 집합 A는 네 집합

$\{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}$

중에서 2개와 집합 $\{5\}$를 부분집합으로 갖는다. ⋯ ❷

3rd 집합 A의 모든 원소의 곱의 최솟값을 구한다.

네 집합 $\{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}$의 각 집합의 원소의 곱은 9, 16, 21, 24이므로 집합 A의 모든 원소의 곱이 최소일 때의 집합 A는

$A=\{1, 2, 5, 8, 9\}$

따라서 집합 A의 모든 원소의 곱의 최솟값은

$1\cdot 2\cdot 5\cdot 8\cdot 9=720$ ⋯ ❸

답 720

채점 기준	비율
❶ 조건 (가)를 만족시키는 집합 A의 조건을 구할 수 있다.	40 %
❷ 조건 (나)를 만족시키는 집합 A의 조건을 구할 수 있다.	40 %
❸ 집합 A의 모든 원소의 곱의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0605 **1st** 집합 U의 각 원소를 제곱한 수의 일의 자릿수가 같은 것을 찾는다.

집합 U의 원소 1, 2, 3, ⋯, 9를 제곱한 수의 일의 자릿수는 각각

1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1

즉 1과 9, 2와 8, 3과 7, 4와 6은 어느 하나가 집합 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 집합 A의 원소이다.

2nd 공집합이 아닌 집합 A의 개수를 구한다.

공집합이 아닌 집합 A의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같으므로

$2^4-1=15$ 답 15

참고 $5\in A$인 경우는 $m\in A$이면 $n\in A\ (m\neq n)$인 조건을 만족시키지 않으므로 $5\notin A$

0606 1st 가장 작은 원소에 따라 경우를 나누어 집합 A_i의 개수를 구한다.

(i) 가장 작은 원소가 2일 때,

집합 A_i의 개수는 집합 $\{2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 2 이상인 집합의 개수와 같으므로

$$2^5-\underbrace{{}_5C_0}_{\text{원소의 개수가 0인 부분집합의 개수}}-\underbrace{{}_5C_1}_{\text{원소의 개수가 1인 부분집합의 개수}}=32-1-5=26$$

(ii) 가장 작은 원소가 2^2일 때,

집합 A_i의 개수는 집합 $\{2^3, 2^4, 2^5, 2^6\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 2 이상인 집합의 개수와 같으므로

$$2^4-{}_4C_0-{}_4C_1=16-1-4=11$$

(iii) 가장 작은 원소가 2^3일 때,

집합 A_i의 개수는 집합 $\{2^4, 2^5, 2^6\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 2 이상인 집합의 개수와 같으므로

$$2^3-{}_3C_0-{}_3C_1=8-1-3=4$$

(iv) 가장 작은 원소가 2^4일 때,

집합 A_i는 $\{2^4, 2^5, 2^6\}$의 1개이다.

2nd 가장 작은 원소를 모두 더한 값을 구한다.

이상에서 구하는 값은

$$2\cdot26+2^2\cdot11+2^3\cdot4+2^4\cdot1=52+44+32+16=144$$

답 144

0607 1st 원소의 개수에 따라 경우를 나누고, 각 경우에 해당하는 집합 A_n의 모든 원소의 평균의 합을 구한다.

집합 A_n은 집합 U의 공집합이 아닌 진부분집합이므로

$$n(A_n)=1 \text{ 또는 } n(A_n)=2 \text{ 또는 } n(A_n)=3$$

(i) $n(A_n)=1$일 때,

집합 A_n은 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$이므로 각 집합의 모든 원소의 평균의 합은

$$1+2+3+4=10$$

(ii) $n(A_n)=2$일 때,

1을 원소로 갖는 집합 A_n은

$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$의 3개

마찬가지로 2, 3, 4를 각각 원소로 갖는 집합 A_n의 개수도 3이므로 각 집합의 모든 원소의 평균의 합은

$$\frac{3\cdot(1+2+3+4)}{2}=15$$

(iii) $n(A_n)=3$일 때,

1을 원소로 갖는 집합 A_n은

$\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$의 3개

마찬가지로 2, 3, 4를 각각 원소로 갖는 집합 A_n의 개수도 3이므로 각 집합의 모든 원소의 평균의 합은

$$\frac{3\cdot(1+2+3+4)}{3}=10$$

2nd $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{14}$의 값을 구한다.

이상에서

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{14}=10+15+10=35$$

답 ④

0608 1st a_n이 될 수 있는 원소를 구한다.

집합 A_n의 원소는 2개 이상이므로

$$a_n\ge4$$

따라서 a_n이 될 수 있는 원소는

4, 6, 8, 10 ··· ❶

2nd a_n의 값에 따라 경우를 나누고, 각 경우에 해당하는 집합 A_n의 개수를 구한다.

(i) $a_n=10$일 때,

집합 A_n은 10을 반드시 원소로 가져야 하므로 그 개수는

$$2^{5-1}-\underbrace{1}_{\text{10을 원소로 갖는 부분집합 중에서 원소의 개수가 1인 집합 \{10\}을 제외해야 한다.}}=2^4-1=15$$

(ii) $a_n=8$일 때,

집합 A_n은 10을 원소로 갖지 않고 8을 반드시 원소로 가져야 하므로 그 개수는

$$2^{5-1-1}-1=2^3-1=7$$

(iii) $a_n=6$일 때,

집합 A_n은 8, 10을 원소로 갖지 않고 6을 반드시 원소로 가져야 하므로 그 개수는

$$2^{5-2-1}-1=2^2-1=3$$

(iv) $a_n=4$일 때,

집합 A_n은 6, 8, 10을 원소로 갖지 않고 4를 반드시 원소로 가져야 하므로 $\{2, 4\}$의 1개이다. ··· ❷

3rd $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{26}$의 값을 구한다.

이상에서

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{26}=10\cdot15+8\cdot7+6\cdot3+4\cdot1=228$$

··· ❸

답 228

채점 기준	비율
❶ a_n이 될 수 있는 원소를 구할 수 있다.	20 %
❷ a_n의 값이 각각 10, 8, 6, 4인 경우의 집합 A_n의 개수를 구할 수 있다.	60 %
❸ $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{26}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

Ⅱ. 집합과 명제

06 집합의 연산

0609 답 $\{a, b, c, d, e\}$

0610 답 $\{x \mid x$는 자연수$\}$

0611 $A=\{3, 6, 9, \cdots, 99\}$, $B=\{6, 12, 18, \cdots, 96\}$이므로

$A \cup B=\underbrace{\{3, 6, 9, \cdots, 99\}}_{\{x \mid x\text{는 100 이하의 3의 양의 배수}\}}$ 답 $\{3, 6, 9, \cdots, 99\}$

0612 답 $\{x, y, z\}$

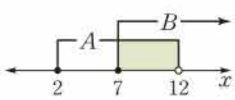
0613 $A=\{2, 3, 4, 5\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$이므로

$A \cap B=\{2, 3\}$ 답 $\{2, 3\}$

0614 오른쪽 그림에서

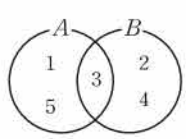
$A \cap B=\{x \mid 7 \leq x<12\}$

답 $\{x \mid 7 \leq x<12\}$



0615 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$B=\{2, 3, 4\}$ 답 $\{2, 3, 4\}$



0616 ㄴ. $A=\{1, 3, 9\}$, $B=\{3, 6, 9\}$이므로

$A \cap B=\{3, 9\}$

따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.

ㄷ. $A=\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$, $B=\{\underbrace{-2, 2}_{x^2=4\text{에서 } x=\pm 2}\}$이므로

$A \cap B=\varnothing$

따라서 두 집합 A, B는 서로소이다.

이상에서 두 집합 A, B가 서로소인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

0617 $C=\{0, 2, 4, 6\}$이므로

$A \cap(B \cap C)=(A \cap B) \cap C$ ⬅ 결합법칙

$=\{1, 2, 3, 4\} \cap\{0, 2, 4, 6\}$

$=\{2, 4\}$ 답 $\{2, 4\}$

0618 $(A \cup B) \cap(A \cup C)=A \cup(B \cap C)$ ⬅ 분배법칙

$=\{1, 2\} \cup\{5\}$

$=\{1, 2, 5\}$ 답 $\{1, 2, 5\}$

다른 풀이 $(A \cup B) \cap(A \cup C)=\{1, 2, 4, 5\} \cap\{1, 2, 3, 5\}$

$=\{1, 2, 5\}$

0619 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$이므로

$A^{C}=\{1, 2, 6, 7, 8\}$ 답 $\{1, 2, 6, 7, 8\}$

0620 $B=\{2, 4, 6, 8\}$이므로

$B^{C}=\{1, 3, 5, 7\}$ 답 $\{1, 3, 5, 7\}$

0621 답 $\{b, c\}$

0622 $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로

$A-B=\varnothing$ 답 $\varnothing$

0623 답 $\{3, 5, 6, 7, 8, 9\}$

0624 답 $\{1, 4\}$

0625 답 $\{3, 8, 9\}$

0626 답 $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

0627 답 A

0628 답 U

0629 답 $\varnothing$

0630 답 A

0631 답 $\varnothing$

0632 답 U

0633 $A \cap B^{C}=A-B=\{1\}$ 답 $\{1\}$

0634 $A^{C} \cap B=B \cap A^{C}=B-A=\{7, 8\}$ 답 $\{7, 8\}$

0635 $A-B^{C}=A \cap(B^{C})^{C}=A \cap B=\{2, 4\}$ 답 $\{2, 4\}$

0636 $B-A^{C}=B \cap(A^{C})^{C}=B \cap A=\{2, 4\}$ 답 $\{2, 4\}$

0637 답 (가) 드모르간의 법칙 (나) 결합법칙

0638 $A^{C} \cap B^{C}=(A \cup B)^{C}$이고 $A \cup B=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$ 이므로

$A^{C} \cap B^{C}=\{4, 8, 10\}$ 답 $\{4, 8, 10\}$

0639 $(A^{C}-B)^{C}=(A^{C} \cap B^{C})^{C}=A \cup B$

$=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$

답 $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$

0640 $n(A \cap B)=n(A)+n(B)-n(A \cup B)$

$=5+4-7=2$ 답 2

0641 $n(A^{C})=n(U)-n(A)$

$=50-32=18$ 답 18

0642 $n(B-A)=n(B)-n(A \cap B)$

$=18-6=12$ 답 12

0643 $n(A\cap B^C)=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$=32-6=26$ 답 26

0644 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=32+18-6=44$ 답 44

0645 $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$

$=n(U)-n(A\cup B)$

$=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}$

$=50-(35+23-10)$

$=2$ 답 2

0646 $n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)$

$=n(U)-n(A\cap B)$

$=50-10=40$ 답 40

0647 $n(X\cup Y\cup Z)$

$=n(X)+n(Y)+n(Z)-n(X\cap Y)-n(Y\cap Z)$

$-n(Z\cap X)+n(X\cap Y\cap Z)$

$=20+5+13-3-2-10+2$

$=25$ 답 25

0648 힙합을 좋아하는 학생의 집합을 A, 발라드를 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(A)=22,\ n(B)=16,\ n(A\cap B)=9$

이므로

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=22+16-9=29$

따라서 힙합 또는 발라드를 좋아하는 학생 수는 29이다.

답 29

유형 01 합집합과 교집합 본책 102쪽

각 집합을 원소나열법으로 나타낸 후 주어진 집합의 합집합과 교집합을 구한다.

① $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 또는 $x\in B\}$

➡ 두 집합 A, B 중 적어도 어느 한쪽에 속하는 원소를 모두 택한다.

② $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 그리고 $x\in B\}$

➡ 두 집합 A, B에 공통으로 속하는 원소를 모두 택한다.

0649 $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{1, 2, 5, 10\}$, $C=\{1, 2, 4\}$ 이므로

$(A\cup B)\cap C=\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}\cap\{1, 2, 4\}$

$=\{1, 2\}$ 답 ①

0650 $C=\{1, 2, 4, 8\}$

③ $A\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$ 답 ③

0651 집합 B는 b, d를 반드시 원소로 갖고, a, c를 원소로 갖지 않아야 하므로 집합 B가 될 수 있는 것은 ④이다.

답 ④

유형 02 서로소인 집합 본책 102쪽

두 집합 A, B가 서로소 ➡ $A\cap B=\varnothing$

➡ 공통인 원소가 하나도 없다.

0652 ① $A\cap B=\{8\}$

② $x^2+4x+3=0$에서 $(x+3)(x+1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-1$

$\therefore A=\{-3, -1\}$

$x^2=1$에서 $x=\pm1$

$\therefore B=\{-1, 1\}$

$\therefore A\cap B=\{-1\}$

③ $A=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$, $B=\{1, 2, 3, \cdots\}$이므로

$A\cap B=\{1, 2, 3, \cdots\}$

④ $A=\{2, 3, 5, 7, \cdots\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$이므로

$A\cap B=\{3, 5, 7, \cdots\}$

답 ⑤

0653 ㄱ. $\{2, 4, 6, \cdots\}$ ㄴ. $\{1, 3, 5, \cdots\}$

ㄷ. $\{3, 6, 9, \cdots\}$ ㄹ. $\varnothing$

ㅁ. $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ ㅂ. $\{1, 3, 5, 15\}$

이상에서 집합 $\{2, 4, 6\}$과 서로소인 집합은 ㄴ, ㄹ, ㅂ의 3개이다. 답 ③

참고 ㄹ. $x^2+2x=0$에서 $x(x+2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-2$

따라서 $x^2+2x=0$을 만족시키는 자연수 x는 존재하지 않으므로 주어진 집합은 공집합이다.

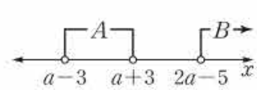
0654 구하는 집합의 개수는 집합 A의 부분집합 중 a, b를 원소로 갖지 않는 집합의 개수와 같다.

집합 $\{c, d, e\}$의 부분집합의 개수와 같다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$ 답 8

0655 두 집합 A, B가 서로소이므로 두 집합을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다. ··· ❶



따라서 $a+3\le 2a-5$에서

$a\ge 8$ ··· ❷

이므로 a의 최솟값은 8이다. ··· ❸

답 8

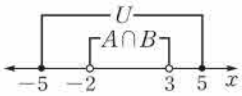
채점 기준	비율
❶ 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타낼 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ a의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

유형 03 여집합과 차집합
본책 103쪽

각 집합을 원소나열법으로 나타낸 후 주어진 집합의 여집합과 차집합을 구한다. 이때 원소나열법으로 나타내기 어려운 경우에는 수직선을 이용한다.
① $A^C=\{x|x\in U$ 그리고 $x\notin A\}$
➡ 전체집합 U에서 집합 A의 원소를 제외한다.
② $A-B=\{x|x\in A$ 그리고 $x\notin B\}$
➡ 집합 A에서 집합 B의 원소를 제외한다.

0656 $A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{2, 4, 6\}$이므로
$B^C=\{1, 3, 5\}$
$\therefore A-B^C=\{1, 2, 3, 6\}-\{1, 3, 5\}=\{2, 6\}$
따라서 집합 $A-B^C$의 모든 원소의 합은
$2+6=8$
답 8

0657 $A\cap B=\{x|-2<x<3\}$이므로 오른쪽 그림에서



$(A\cap B)^C$
$=\{x|-5\le x\le -2$ 또는 $3\le x\le 5\}$
답 ④

0658 $A\cup B=\{a, b, c, d, e\}$, $(\underbrace{A-B}_{A-B=\{a,\ b\}})^C=\{c, d, e, f, g\}$이므로
$(A\cup B)\cap(A-B)^C=\{c, d, e\}$
답 $\{c, d, e\}$

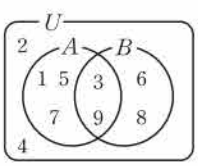
0659 $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{1, 4, 7, 10\}$이므로 ··· ❶
$A\cup B=\{1, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$, $A\cap B=\{1, 7\}$ ··· ❷
$\therefore (A\cup B)-(A\cap B)=\{3, 4, 5, 9, 10\}$ ··· ❸
답 $\{3, 4, 5, 9, 10\}$

채점 기준	비율
❶ 두 집합 A, B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 두 집합 $A\cup B$, $A\cap B$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 집합 $(A\cup B)-(A\cap B)$를 구할 수 있다.	30 %

유형 04 조건을 만족시키는 집합 구하기
본책 103쪽

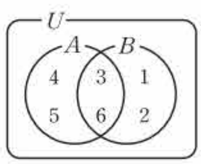
주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내어 구하려는 집합을 찾는다.

0660 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
$B=\{3, 6, 8, 9\}$



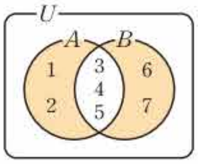
답 ⑤

0661 $B=\{1, 2, 3, 6\}$, $A\cap B=\{3, 6\}$, $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로 오른쪽 벤 다이어그램에서
$A=\{3, 4, 5, 6\}$



답 $\{3, 4, 5, 6\}$

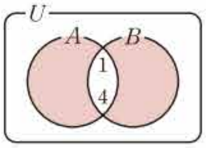
0662 집합 $(A-B)\cup(B-A)$는 오른쪽 벤 다이어그램의 색칠한 부분과 같고 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로



$A-B=\{1, 2\}$, $B-A=\{6, 7\}$
$\therefore B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$ ··· ❶
따라서 집합 B의 모든 원소의 합은
$3+4+5+6+7=25$ ··· ❷
답 25

채점 기준	비율
❶ 집합 B를 구할 수 있다.	70 %
❷ 집합 B의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	30 %

0663 $A\cap B=\{1, 4\}$, $A\cup B=\{1, 4, 5, 7, 8\}$이므로 오른쪽 벤 다이어그램의 색칠한 부분에 들어갈 원소는 5, 7, 8이다.



$\therefore S(A-B)+S(B-A)$
$=5+7+8=20$ ······ ㉠
$2S(A)=S(B)$에서
$2\{S(A-B)+\underbrace{S(A\cap B)}_{1+4=5}\}=S(B-A)+S(A\cap B)$
$2S(A-B)+10=S(B-A)+5$
$\therefore 2S(A-B)-S(B-A)=-5$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $S(A-B)=5$, $S(B-A)=15$
따라서 $A-B=\{5\}$, $B-A=\{7, 8\}$이므로 집합 $B-A$의 가장 큰 원소는 8이다.
답 8

다른 풀이 $S(A)+S(B)=S(A\cup B)+S(A\cap B)$
$=(1+4+5+7+8)+(1+4)=30$
이때 $2S(A)=S(B)$이므로
$3S(A)=30$ $\therefore S(A)=10$
$\therefore S(B)=2\cdot 10=20$
따라서 $A=\{1, 4, 5\}$, $B=\{1, 4, 7, 8\}$이므로
$B-A=\{7, 8\}$

유형 05 집합의 연산을 이용하여 미지수 구하기
집중 공략 본책 104쪽

두 집합 A, B와 그 합집합, 교집합, 차집합 등의 원소에 미지수가 있는 경우 미지수의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) $a\in(A\cap B)$이면 $a\in A$이고 $a\in B$
$a\in(A-B)$이면 $a\in A$이고 $a\notin B$
임을 이용하여 미지수의 값을 모두 구한다.
(ii) 미지수의 값을 대입하여 각 집합의 원소를 구한다.
(iii) 구한 집합이 주어진 조건을 만족시키는지 확인한다.

0664 $A\cap B=\{-1, 2\}$이므로 $2\in A$
즉 $a^2+a-4=2$이므로 $a^2+a-6=0$
$(a+3)(a-2)=0$ $\therefore a=-3$ 또는 $a=2$
(i) $a=-3$일 때,
$A=\{-1, 0, 2\}$, $B=\{2, 6, 9\}$이므로 $A\cap B=\{2\}$
따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=2$일 때,

$A=\{-1,\ 0,\ 2\}$, $B=\{-1,\ 1,\ 2\}$이므로

$A\cap B=\{-1,\ 2\}$

(i), (ii)에서 $a=2$

답 2

0665 $A-B=\{5\}$이므로 1, 4, $3a-b$는 집합 B의 원소이다.

이때 $B=\{1,\ 7,\ a-2b\}$이므로

$3a-b=7,\ a-2b=4$ ··· ❶

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-1$ ··· ❷

$\therefore a+b=1$ ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ a, b에 대한 두 방정식을 세울 수 있다.	60 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0666 $A\cup B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$이고 $B=\{2,\ 3,\ a-1\}$이므로

$a-1=0$ 또는 $a-1=1$

$\therefore a=1$ 또는 $a=2$

(i) $a=1$일 때,

$A=\{-1,\ 1,\ 3\}$, $B=\{0,\ 2,\ 3\}$이므로

$A\cup B=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=2$일 때,

$A=\{0,\ 2,\ 3\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3\}$이므로

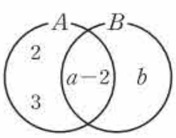
$A\cup B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

(i), (ii)에서 $A=\{0,\ 2,\ 3\}$이므로 집합 A의 모든 원소의 합은

$0+2+3=5$

답 5

0667 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 $a-2$는 집합 B의 원소이다.



이때 $a-2\neq a+4$이므로

$a-2=a^2-4a-8$

$a^2-5a-6=0,\qquad (a+1)(a-6)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=6$

(i) $a=-1$일 때,

$A=\{-3,\ 2,\ 3\}$, $B=\{-3,\ 3\}$이므로

$(A-B)\cup(B-A)=\{2\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=6$일 때,

$A=\{2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{4,\ 10\}$이므로

$(A-B)\cup(B-A)=\{2,\ 3,\ 10\}$

(i), (ii)에서 $a=6$, $b=10$이므로

$a+b=16$

답 16

유형 06 집합의 연산의 성질 본책 104쪽

(1) 집합의 연산 법칙

① 교환법칙: $A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A$

② 결합법칙: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C,$
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$

③ 분배법칙: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(2) 집합의 연산의 성질

① $A\cup A=A,\ A\cap A=A$ ② $A\cup\varnothing=A,\ A\cap\varnothing=\varnothing$

③ $A\cup U=U,\ A\cap U=A$ ④ $U^C=\varnothing,\ \varnothing^C=U$

⑤ $(A^C)^C=A$ ⑥ $A\cup A^C=U,\ A\cap A^C=\varnothing$

⑦ $A-B=A\cap B^C$

0668 ① $U-A^C=A$

③ $(A\cup B)\subset U$

④ $U^C=\varnothing$이므로 $U^C\subset A$

⑤ $U\cap B^C=B^C$

답 ②

0669 ① $(A^C)^C=A$

② $A\cup\varnothing=A$

③ $A\cup A^C=U$

④ $A^C\cap B=B-A$

답 ⑤

0670 ① $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$

② $A\cap(U-B^C)=A\cap B$

③ $B-A^C=B\cap(A^C)^C=A\cap B$

④ $A\cap(\varnothing\cup B^C)=A\cap B^C=A-B$

⑤ $(A\cap B)\cup(A\cap A^C)=(A\cap B)\cup\varnothing=A\cap B$

답 ④

유형 07 집합의 연산의 성질 ; 포함 관계가 있는 두 집합 집중공략 본책 105쪽

(1) $A\subset B$이면

① $A\cup B=B,\ A\cap B=A$ ② $A-B=\varnothing,\ A\cap B^C=\varnothing$

③ $A^C\cup B=U$ ④ $B^C\subset A^C$

(2) $A\cap B=\varnothing$이면

① $A-B=A,\ B-A=B$ ② $A\subset B^C,\ B\subset A^C$

0671 $A\cap B=A$이므로 $A\subset B$

②, ③ $A\subset B$이므로 $B^C\subset A^C$

$\therefore A^C\cap B^C=B^C$

⑤ $B\cap A^C=B-A$에서 $A\subset B$이고 $A\neq B$이므로

$B-A\neq\varnothing$

답 ⑤

0672 $A^C\subset B^C$이므로 $B\subset A$

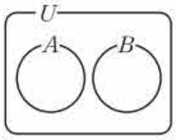
① $A\cup B=A$

② $A\cap(A\cup B)=A\cap A=A$

③ $(A\cap B)\cup B=B\cup B=B$
④ $A\cup(B-A)=A\cup\varnothing=A$
⑤ $(A\cup B)\cup(A\cap B)=A\cup B=A$

답 ③

0673 $A-B=A$이므로 $\quad A\cap B=\varnothing$
이를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$\quad B-A=B,\ B\subset A^C$
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ⑤

0674 $(A\cap B^C)\cup(B\cap A^C)=(A-B)\cup(B-A)=\varnothing$이므로
$\quad A-B=\varnothing,\ B-A=\varnothing$
따라서 $A\subset B,\ B\subset A$이므로
$\quad A=B$

답 ①

유형 08 집합의 연산과 집합의 개수

집중 공략 본책 105쪽

주어진 조건을 만족시키는 집합 X의 개수는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 집합 X에 반드시 속하는 원소 또는 속하지 않는 원소를 찾는다.
(ii) (i)을 만족시키는 집합 X의 개수를 구한다.

0675 $(B-A)\cup X=X$이므로
$\quad (B-A)\subset X$
$\quad \therefore \{-1\}\subset X \quad \cdots\cdots ㉠$
$A\cup X=X$이므로 $\quad A\subset X \quad \cdots\cdots ㉡$
㉠, ㉡에서 집합 X는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1$을 반드시 원소로 가져야 하므로 집합 X의 개수는
$\quad 2^{6-4}=2^2=4$

답 4

0676 $A\cup B=U$이므로 집합 B는 집합 A^C의 원소
$\quad -3,\ -1,\ 1,\ 3$
을 반드시 원소로 가져야 한다.
따라서 집합 B의 개수는
$\quad 2^{7-4}=2^3=8$

답 ①

0677 $A-X\neq A$이므로
$\quad A\cap X\neq\varnothing$ ··· ❶
즉 집합 X는 a 또는 d를 원소로 가져야 한다. ··· ❷
따라서 집합 X의 개수는 집합 U의 부분집합의 개수에서 집합 $\{b,\ c,\ e\}$의 부분집합의 개수를 빼면 되므로
$\quad 2^5-2^3=32-8=24$ ··· ❸

답 24

채점 기준	비율
❶ $A\cap X\neq\varnothing$임을 알 수 있다.	30 %
❷ 집합 X가 ❶을 만족시키기 위한 조건을 구할 수 있다.	40 %
❸ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	30 %

0678 집합 U의 부분집합 X가
$\quad \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}\cup X=\{2,\ 3,\ 8,\ 9\}\cup X$
를 만족시키려면 집합 X는 두 집합 $\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $\{2,\ 3,\ 8,\ 9\}$의 공통인 원소 2, 8을 제외한 나머지 원소 1, 3, 4, 9를 반드시 원소로 가져야 한다.
따라서 집합 X의 개수는
$\quad 2^{9-4}=2^5=32$

답 ④

0679 $x^2-6x+5=0$에서 $\quad (x-1)(x-5)=0$
$\quad \therefore x=1$ 또는 $x=5$
$\quad \therefore B=\{1,\ 5\}$
이때 $X-(A-B)=\varnothing$이므로
$\quad X\subset(A-B)$
$A-B=\{2,\ 6,\ 8,\ 14\}$이고 $n(X)=2$이므로 집합 X의 개수는 집합 $\{2,\ 6,\ 8,\ 14\}$의 부분집합 중 원소가 2개인 집합의 개수와 같다.
$\quad \therefore {}_4C_2=6$

답 6

0680 $A\cup X=X$이므로 $\quad A\subset X \quad \cdots\cdots ㉠$
$B-A=\{1,\ 3,\ 6\}$이고 $(B-A)\cap X=\{1,\ 6\}$이므로
$\quad 1\in X,\ 3\notin X,\ 6\in X \quad \cdots\cdots ㉡$
㉠, ㉡에서 집합 X는 1, 2, 4, 6을 반드시 원소로 갖고 3을 원소로 갖지 않아야 하므로 집합 X의 개수는
$\quad 2^{7-4-1}=2^2=4$

답 4

0681 조건 (나)의 $\{(A\cup B)-(A\cap B)\}\subset(A-B)$에서
$\quad \{(A-B)\cup(B-A)\}\subset(A-B)$
$\quad \therefore B-A=\varnothing$
$\quad \therefore B\subset A$
조건 (가)에서 $A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$이고, 집합 B는 공집합이 아닌 집합 A의 진부분집합이므로 집합 B의 개수는
$\quad 2^4-1-1=14$

답 14

유형 09 드모르간의 법칙

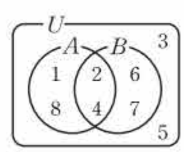
본책 106쪽

전체집합 U의 두 부분집합 $A,\ B$에 대하여
$\quad (A\cup B)^C=A^C\cap B^C,\ (A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

0682 $(A\cup B)\cup(A^C\cup B^C)^C=\underline{(A\cup B)\cup(A\cap B)}$ $\llcorner (A\cap B)\subset(A\cup B)$
$\quad =A\cup B$
$\quad =\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$
따라서 구하는 원소의 개수는 6이다.

답 ④

0683 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{3,\ 5\}$이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\quad \therefore B=\{2,\ 4,\ 6,\ 7\}$

답 $\{2,\ 4,\ 6,\ 7\}$

0684 $A\cap(B^c\cup C^c)=A\cap(B\cap C)^c$

$=A-(B\cap C)$

이므로 $A-(B\cap C)=\{1,\ 4,\ 5,\ 8\}$

이때 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9\}$이므로

$2\in(B\cap C),\ 9\in(B\cap C)$ 답 ②

0685 $A\cup B=A^c\cup B^c$에서 $A\cup B=(A\cap B)^c$이므로

$A\cap B=\varnothing,\ A\cup B=U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

따라서 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은

$1+2+3+4+5+6=21$ 답 ⑤

유형 10 집합의 연산을 간단히 하기

본책 107쪽

집합의 연산이 복잡하게 주어지면 집합의 연산 법칙이나 연산의 성질을 이용하여 간단히 한다.
특히 차집합이 주어지면 $A-B=A\cap B^c$임을 이용한다.

0686 $(A-B)-(A-C)$

$=(A\cap B^c)\cap(A\cap C^c)^c$

$=(A\cap B^c)\cap(A^c\cup C)$

$=\{(A\cap B^c)\cap A^c\}\cup\{(A\cap B^c)\cap C\}$

$=\{\underbrace{(A\cap A^c)}_{A\cap A^c=\varnothing}\cap B^c\}\cup\{(A\cap C)\cap B^c\}$

$=\varnothing\cup\{(A\cap C)\cap B^c\}$

$=(A\cap C)-B$ 답 ⑤

0687 ㄱ. $(A\cup B)\cup(A^c\cap B^c)=(A\cup B)\cup(A\cup B)^c$

$=U$

ㄴ. $A-(B\cap C)=A\cap(B\cap C)^c$

$=A\cap(B^c\cup C^c)$

$=(A\cap B^c)\cup(A\cap C^c)$

$=(A-B)\cup(A-C)$

ㄷ. $(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)^c$

$=(A\cap B)\cap(A^c\cup C^c)$

$=\{(A\cap B)\cap A^c\}\cup\{(A\cap B)\cap C^c\}$

$=\{(A\cap A^c)\cap B\}\cup\{(A\cap B)\cap C^c\}$

$=\varnothing\cup\{(A\cap B)\cap C^c\}$

$=(A\cap B)-C$

ㄹ. $(A-B)\cup(A\cap C)=(A\cap B^c)\cup(A\cap C)$

$=A\cap(B^c\cup C)$

$=A\cap(B\cap C^c)^c$

$=A-(B-C)$

이상에서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄹ

0688 $(A\cup B^c)\cap(A^c\cup B)$

$=\{(A\cup B^c)\cap A^c\}\cup\{(A\cup B^c)\cap B\}$

$=\{(A\cap A^c)\cup(B^c\cap A^c)\}\cup\{(A\cap B)\cup(B^c\cap B)\}$

$=\{\varnothing\cup(B^c\cap A^c)\}\cup\{(A\cap B)\cup\varnothing\}$

$=(A^c\cap B^c)\cup(A\cap B)$

이때 $A-B=\varnothing$에서 $A\subset B,\ B^c\subset A^c$이므로

$A^c\cap B^c=B^c,\ A\cap B=A$

$\therefore\ (A^c\cap B^c)\cup(A\cap B)=B^c\cup A$

$=A\cup B^c$ 답 ②

0689 조건 (가)에서 $A^c\cup B^c=(A\cap B)^c$이므로

$(A\cap B)^c=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$

$\therefore\ A\cap B=\{4\}$ ...... ㉠ ⋯➊

조건 (나)에서

$(B-A)^c\cap\{A\cap(A\cap B)^c\}$

$=(B-A)^c\cap\{A\cap(A^c\cup B^c)\}$

$=(B\cap A^c)^c\cap\{(A\cap A^c)\cup(A\cap B^c)\}$

$=(B^c\cup A)\cap\{\varnothing\cup(A\cap B^c)\}$

$=\underbrace{(A\cup B^c)\cap(A\cap B^c)}_{(A\cap B^c)\subset(A\cup B^c)}$

$=A\cap B^c$

$=A-B$

$\therefore\ A-B=\{1\}$ ...... ㉡ ⋯➋

㉠, ㉡에서 $A=\{1,\ 4\}$ ⋯➌

따라서 집합 A의 모든 원소의 합은

$1+4=5$ ⋯➍

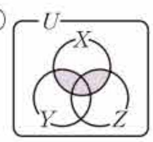
답 5

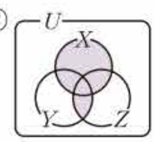
채점 기준	비율
➊ 집합 $A\cap B$를 구할 수 있다.	20 %
➋ $(B-A)^c\cap\{A\cap(A\cap B)^c\}$를 간단히 할 수 있다.	50 %
➌ 집합 A를 구할 수 있다.	20 %
➍ 집합 A의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	10 %

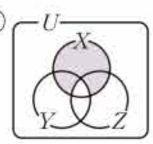
유형 11 벤 다이어그램과 집합

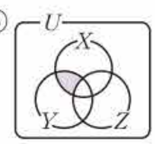
본책 108쪽

① 벤 다이어그램의 색칠한 부분이 나타내는 집합을 찾을 때
➡ 각 집합을 벤 다이어그램으로 나타낸 후 주어진 벤 다이어그램과 비교한다.
② 주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타낼 때
➡ 집합의 연산 법칙이나 연산의 성질을 이용하여 주어진 집합을 간단히 한 후 벤 다이어그램으로 나타낸다.

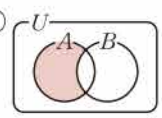
0690 ①


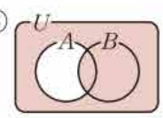
②


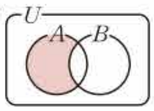
③


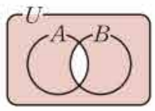
⑤


답 ④

0691 ①


③


④ 

⑤ 

답 ②

0692 $(B-A)\cup(B-C)=(B\cap A^C)\cup(B\cap C^C)$
$=B\cap(A^C\cup C^C)$
$=B\cap(A\cap C)^C$
$=B-(A\cap C)$
따라서 집합 $(B-A)\cup(B-C)$를 벤 다이어그램으로 바르게 나타낸 것은 ④이다. 답 ④

0693 ㄱ. $(A\cup B)\cap(A\cap B)^C=(A\cup B)-(A\cap B)$
ㄴ. $(A^C-B^C)\cup(B^C-A^C)=(A^C\cap B)\cup(B^C\cap A)$
$=(B-A)\cup(A-B)$
ㄷ. $A\cap(A\cup B^C)^C=A\cap(A^C\cap B)$
$=(A\cap A^C)\cap B$
$=\varnothing\cap B=\varnothing$
이상에서 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합과 항상 같은 집합인 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

유형 12 배수와 약수의 집합의 연산 본책 109쪽

두 자연수 m, n의 최대공약수를 G, 최소공배수를 L이라 할 때
① 자연수 p의 양의 배수를 원소로 하는 집합을 A_p라 하면
$A_m\cap A_n$ ➡ m과 n의 양의 공배수의 집합 ➡ A_L
② 자연수 q의 양의 약수를 원소로 하는 집합을 B_q라 하면
$B_m\cap B_n$ ➡ m과 n의 양의 공약수의 집합 ➡ B_G

0694 $A_3\cap(A_4\cup A_6)=(A_3\cap A_4)\cup(A_3\cap A_6)$
$=A_{12}\cup A_6$
$=A_6$
전체집합 U의 원소 중 6의 배수는 16개이므로 구하는 원소의 개수는 16이다. 답 16

SSEN 특강 **배수와 약수의 집합**

① 자연수 k의 양의 배수의 집합을 A_k라 할 때, 자연수 m이 자연수 n의 배수이면 $A_m\subset A_n$이므로
$A_m\cap A_n=A_m$, $A_m\cup A_n=A_n$
예 4는 2의 배수이므로
$A_4\subset A_2$ ➡ $A_4\cap A_2=A_4$, $A_4\cup A_2=A_2$
② 자연수 k의 양의 약수의 집합을 B_k라 할 때, 자연수 m이 자연수 n의 약수이면 $B_m\subset B_n$이므로
$B_m\cap B_n=B_m$, $B_m\cup B_n=B_n$
예 2는 4의 약수이므로
$B_2\subset B_4$ ➡ $B_2\cap B_4=B_2$, $B_2\cup B_4=B_4$

0695 집합 $A_{18}\cap A_{24}\cap A_{30}$은 18, 24, 30의 양의 공약수의 집합이고, 18, 24, 30의 최대공약수는 6이므로
$A_{18}\cap A_{24}\cap A_{30}=A_6$
$\therefore k=6$ 답 6

0696 $(A_4\cup A_8)\cap(A_3\cup A_{12})=A_4\cap A_3=A_{12}$ 답 ④

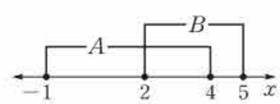
0697 $A_6\cap A_9=A_{18}$이므로 $A_p\subset(A_6\cap A_9)$에서
$A_p\subset A_{18}$
즉 p는 18의 양의 배수이어야 하므로 자연수 p의 최솟값은 18이다. ··· ❶
$p=18, 36, 54, \cdots$
또 $B_{12}\cap B_{18}=B_6$이므로 $B_q\subset(B_{12}\cap B_{18})$에서
$B_q\subset B_6$
즉 q는 6의 양의 약수이어야 하므로 자연수 q의 최댓값은 6이다. ··· ❷
$q=1, 2, 3, 6$
따라서 구하는 합은 $18+6=24$ ··· ❸
답 24

채점 기준	비율
❶ 자연수 p의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 자연수 q의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 자연수 p의 최솟값과 자연수 q의 최댓값의 합을 구할 수 있다.	20 %

유형 13 방정식 또는 부등식의 해의 집합의 연산 집중공략 본책 109쪽

방정식 또는 부등식의 해의 집합의 교집합은 연립방정식 또는 연립부등식의 해의 집합임을 이용한다. 이때 부등식에 대한 문제는 수직선을 이용하면 편리하다.

0698 $x^2-3x-4\le 0$에서 $(x+1)(x-4)\le 0$
$\therefore -1\le x\le 4$
$\therefore A=\{x\mid -1\le x\le 4\}$
$A\cap B=\{x\mid 2\le x\le 4\}$,
$A\cup B=\{x\mid -1\le x\le 5\}$이려면 집합 B는 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$B=\{x\mid 2\le x\le 5\}$
$=\{x\mid (x-2)(x-5)\le 0\}$
$=\{x\mid x^2-7x+10\le 0\}$
따라서 $p=-7$, $q=10$이므로
$q-p=17$ 답 17

0699 $A\cap B=\{3\}$이므로 $3\in A$, $3\in B$
$3\in A$에서 $9-6+a=0$
$x=3$은 방정식 $x^2-2x+a=0$의 해이다.
$\therefore a=-3$
$x^2-2x-3=0$에서 $(x+1)(x-3)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$
$\therefore A=\{-1, 3\}$ ······ ㉠ ··· ❶
$3\in B$에서 $27+3b+12=0$
$x=3$은 방정식 $x^3+bx+12=0$의 해이다.
$\therefore b=-13$

$x^3-13x+12=0$에서 $(x+4)(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

$\therefore B=\{-4, 1, 3\}$ …… ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡에서 $A\cup B=\{-4, -1, 1, 3\}$ ⋯ ❸

답 $\{-4, -1, 1, 3\}$

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 구할 수 있다.	40 %
❷ 집합 B를 구할 수 있다.	40 %
❸ 집합 $A\cup B$를 구할 수 있다.	20 %

0700 $(x-4)(x-20)\ge 0$에서

$x\le 4$ 또는 $x\ge 20$

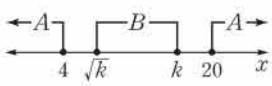
$\therefore A=\{x\mid x\le 4$ 또는 $x\ge 20\}$

$(x-\sqrt{k})(x-k)\le 0$에서 $\sqrt{k}\le k$이므로

$\sqrt{k}\le x\le k$

$\therefore B=\{x\mid \sqrt{k}\le x\le k\}$

$A\cap B=\varnothing$이 되려면 집합 B는 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\sqrt{k}>4$, $k<20$

이때 $\sqrt{k}>4$에서 $k>16$이므로

$16<k<20$

따라서 자연수 k는 17, 18, 19의 3개이다. 답 ③

0701 $A\cup B=A$이므로 $B\subset A$

(i) $B=\varnothing$일 때,

방정식 $ax+1=x$, 즉 $(a-1)x=-1$의 해가 존재하지 않아야 하므로

$a-1=0$ $\therefore a=1$

(ii) $B\neq\varnothing$일 때,

$-1\in B$ 또는 $2\in B$이어야 하므로

$-a+1=-1$ 또는 $2a+1=2$

$\therefore a=2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$ 또는 $a=2$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

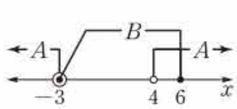
$\frac{1}{2}+1+2=\frac{7}{2}$ 답 $\frac{7}{2}$

0702 $x^2-x-12>0$에서 $(x+3)(x-4)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>4$

$\therefore A=\{x\mid x<-3$ 또는 $x>4\}$

$A\cup B=R$, $A\cap B=\{x\mid 4<x\le 6\}$이려면 집합 B는 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$B=\{x\mid -3\le x\le 6\}$

$=\{x\mid (x+3)(x-6)\le 0\}$

$=\{x\mid x^2-3x-18\le 0\}$

따라서 $a=-3$, $-b=-18$이므로 $a=-3$, $b=18$

$\therefore a+b=15$ 답 ③

유형 14 새로운 집합의 연산 본책 110쪽

새로운 집합의 연산이 주어지면 집합의 연산 법칙을 이용하여 간단한 연산으로 정리한다.

0703 ① $U\diamond A=(U-A)\cup(A-U)=A^C\cup\varnothing=A^C$

② $\varnothing\diamond A=(\varnothing-A)\cup(A-\varnothing)=\varnothing\cup A=A$

③ $A\diamond A=(A-A)\cup(A-A)=\varnothing$

④ $U\diamond\varnothing=(U-\varnothing)\cup(\varnothing-U)=U\cup\varnothing=U$

⑤ $A\diamond B=(A-B)\cup(B-A)$

$=(B-A)\cup(A-B)=B\diamond A$

답 ③

0704 $A\triangleright B=(A\cup B)\cap(A^C\cup B)$

$=(A\cap A^C)\cup B$

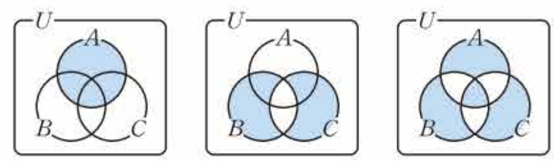
$=\varnothing\cup B=B$

$\therefore (A\triangleright B)\triangleright B=B\triangleright B=B$ 답 ②

0705 $A\circledcirc B=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$

$=(A\cup B)-(A\cap B)$

이므로 집합 $A\circledcirc(B\circledcirc C)$를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



A $\circledcirc$ $B\circledcirc C$ $=$ $A\circledcirc(B\circledcirc C)$

답 ③

유형 15 유한집합의 원소의 개수 집중공략 본책 110쪽

① $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$,
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

② $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

③ $n(A^C)=n(U)-n(A)$

④ $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=n(A\cup B)-n(B)$

0706 $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로

$4=30-n(A\cup B)$ $\therefore n(A\cup B)=26$

$\therefore n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=20+15-26=9$ 답 ④

0707 $A\subset B^C$이므로 $A\cap B=\varnothing$

따라서 $n(A\cap B)=0$이므로

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

$=7+13=20$ 답 20

0708 $n((A-B)\cup(B-A))=n((A\cup B)-(A\cap B))$

$=n(A\cup B)-n(A\cap B)$

이므로

$56=63-n(A\cap B)$ $\quad\therefore n(A\cap B)=7$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$63=n(A)+42-7$ $\quad\therefore n(A)=28$ 답 ④

다른 풀이 두 집합 $A-B$, $B-A$가 서로소이므로

$n((A-B)\cup(B-A))=n(A-B)+n(B-A)$

이때

$n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)=63-42=21$,

$n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)=63-n(A)$

이므로

$56=21+63-n(A)$ $\quad\therefore n(A)=28$

0709 $A=\{2, 4, 6, \cdots, 100\}$이므로 $\quad n(A)=50$

$B=\{11, 22, 33, \cdots, 99\}$이므로 $\quad n(B)=9$

$A\cap B=\{22, 44, 66, 88\}$이므로 $\quad n(A\cap B)=4$

$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=50+9-4=55$ 답 55

0710 $n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$이므로

$25=30-n(A\cap B)$ $\quad\therefore n(A\cap B)=5$ ⋯ ❶

이때 $n(A)=n(U)-n(A^C)=30-16=14$이므로 ⋯ ❷

$n(A\cap B^C)=n(A-B)$

$=n(A)-n(A\cap B)$

$=14-5=9$ ⋯ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ $n(A\cap B)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $n(A)$를 구할 수 있다.	20 %
❸ $n(A\cap B^C)$를 구할 수 있다.	40 %

0711 두 집합 A와 C가 서로소이므로

$A\cap C=\varnothing$, $A\cap B\cap C=\varnothing$

$\therefore n(A\cap C)=0$, $n(A\cap B\cap C)=0$

이때

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=6+5-9=2$,

$n(B\cap C)=n(B)+n(C)-n(B\cup C)=5+4-6=3$

이므로

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=6+5+4-2-3-0+0$

$=10$ 답 ②

유형 16 유한집합의 원소의 개수의 최댓값과 최솟값 본책 111쪽

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $n(B)<n(A)$일 때

① $n(A\cap B)$가 최대인 경우

⇨ $n(A\cup B)$가 최소일 때, 즉 $B\subset A$일 때이다.

② $n(A\cap B)$가 최소인 경우

⇨ $n(A\cup B)$가 최대일 때, 즉 $A\cap B=\varnothing$이거나 $A\cup B=U$ 일 때이다.

0712 $n(X\cap Y)$는 $Y\subset X$일 때 최대이므로

$M=n(Y)=8$

$n(X\cap Y)$는 $X\cup Y=U$일 때 최소이므로

$n(X\cap Y)=n(X)+n(Y)-n(X\cup Y)$에서

$m=14+8-20=2$

$\therefore M-m=6$ 답 6

다른 풀이 $n(X\cap Y)=n(X)+n(Y)-n(X\cup Y)$

$=14+8-n(X\cup Y)$

$=22-n(X\cup Y)$

$X\subset(X\cup Y)$, $Y\subset(X\cup Y)$이므로

$n(X)\le n(X\cup Y)$, $n(Y)\le n(X\cup Y)$ ⋯⋯ ㉠

$(X\cup Y)\subset U$이므로 $\quad n(X\cup Y)\le n(U)$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $14\le n(X\cup Y)\le 20$이므로

$-20\le -n(X\cup Y)\le -14$

$2\le 22-n(X\cup Y)\le 8$ $\quad\therefore 2\le n(X\cap Y)\le 8$

따라서 $M=8$, $m=2$이므로 $\quad M-m=6$

0713 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=6+9-n(A\cap B)$

$=15-n(A\cap B)$ ⋯ ❶

한편 $(A\cap B)\subset A$, $(A\cap B)\subset B$이므로

$n(A\cap B)\le n(A)$, $n(A\cap B)\le n(B)$

이때 $n(A\cap B)\ge 3$이므로 └ $n(A)=6$, $n(B)=9$이므로 $n(A\cap B)\le 6$

$3\le n(A\cap B)\le 6$ ⋯ ❷

$-6\le -n(A\cap B)\le -3$, $\quad 9\le 15-n(A\cap B)\le 12$

$\therefore 9\le n(A\cup B)\le 12$ ⋯ ❸

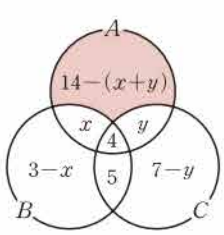
따라서 $n(A\cup B)$의 최댓값은 12, 최솟값은 9이므로 구하는 합은

$12+9=21$ ⋯ ❹

답 21

채점 기준	비율
❶ $n(A\cup B)$를 $n(A\cap B)$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	10 %
❷ $n(A\cap B)$의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ $n(A\cup B)$의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❹ $n(A\cup B)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	10 %

0714 $n((A\cap B)-C)=x$, $n((A\cap C)-B)=y$라 하고 각 부분에 속하는 원소의 개수를 오른쪽 그림과 같이 벤 다이어그램으로 나타내면 집합 $A-(B\cup C)$는 색칠한 부분과 같으므로 $n(A-(B\cup C))$는 $x+y$가 최대일 때 최소이고, $x+y$가 최소일 때 최대이다.



$x\ge 0$, $y\ge 0$, $3-x\ge 0$, $7-y\ge 0$에서

$0\le x\le 3$, $0\le y\le 7$ └ 집합의 원소의 개수는 항상 0보다 크거나 같다.

$\therefore 0\le x+y\le 10$

따라서 $n(A-(B\cup C))$의 최댓값과 최솟값은 각각

$14-0=14$, $14-10=4$

이므로 구하는 곱은 $\quad 14\cdot 4=56$ 답 ②

유형 17~18 유한집합의 원소의 개수의 활용 집중공략 본책 111, 112쪽

주어진 조건을 전체집합 U와 그 부분집합 A, B로 나타낸 후 다음을 이용한다.
- 둘 다 ~하는 ➡ $A\cap B$
- 둘 중 어느 것도 ~하지 않는 ➡ $A^C\cap B^C$
- ~만 ~하는 ➡ $A-B$ 또는 $B-A$
- 둘 중 하나만 ~하는 ➡ $(A-B)\cup(B-A)$

0715 학생 전체의 집합을 U, A 은행의 통장을 갖고 있는 학생의 집합을 A, B 은행의 통장을 갖고 있는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=40$, $n(A)=28$, $n(B)=16$, $n(A^C\cap B^C)=4$

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$에서

$4=40-n(A\cup B)$ $\quad\therefore n(A\cup B)=36$

따라서 A 은행과 B 은행의 통장을 모두 갖고 있는 학생 수는

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=28+16-36=8$

답 8

0716 회원 전체의 집합을 U, 야구를 좋아하는 회원의 집합을 A, 축구를 좋아하는 회원의 집합을 B라 하면

$n(U)=50$, $n(A)=24$, $n(B)=32$,

$n(A^C\cap B^C)=5$ ··· ❶

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$에서

$5=50-n(A\cup B)$

$\therefore n(A\cup B)=45$ ··· ❷

따라서 축구만 좋아하는 회원 수는

$n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)$

$=45-24=21$ ··· ❸

답 21

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 집합으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $n(A\cup B)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 축구만 좋아하는 회원 수를 구할 수 있다.	40 %

0717 학생 전체의 집합을 U, 수학 강의를 수강하는 학생의 집합을 A, 과학 강의를 수강하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=50$, $n(A)=32$, $n(A-B)=13$, $n(A^C\cap B^C)=10$

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$에서

$13=32-n(A\cap B)$ $\quad\therefore n(A\cap B)=19$

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$에서

$10=50-n(A\cup B)$ $\quad\therefore n(A\cup B)=40$

이때 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$40=32+n(B)-19$ $\quad\therefore n(B)=27$

따라서 과학 강의를 수강하는 학생 수는 27이다.

답 ⑤

0718 학생 전체의 집합을 U, 세 문제 A, B, C를 맞힌 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$\underline{n(U)=n(A\cup B\cup C)}=40$, 한 문제도 맞히지 못한 학생은 없으므로 $U=A\cup B\cup C$

$n(A)=16$, $n(B)=20$, $n(C)=22$,

$n(A\cap B\cap C)=3$

세 문제 중 두 문제만 맞힌 학생 수는

$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-3\times n(A\cap B\cap C)$ ······ ㉠

이때

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

이므로

$40=16+20+22-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+3$

$\therefore n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=21$

따라서 ㉠에서 구하는 학생 수는

$21-3\cdot 3=12$

답 12

0719 입장객 전체의 집합을 U, 범퍼카를 이용한 입장객의 집합을 A, 롤러코스터를 이용한 입장객의 집합을 B라 하면

$n(U)=85$, $n(A)=46$, $n(B)=53$

범퍼카와 롤러코스터를 모두 이용한 입장객 수는 $n(A\cap B)$이고, $n(A\cap B)$는 $A\subset B$일 때 최대이다.

$\therefore M=n(A)=46$

또 $n(A\cap B)$는 $A\cup B=U$일 때 최소이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$에서

$m=46+53-85=14$

$\therefore M-m=32$

답 ③

0720 주부 전체의 집합을 U, A 통조림을 구입해 본 주부의 집합을 A, B 통조림을 구입해 본 주부의 집합을 B라 하면

$n(U)=40$, $n(A)=23$, $n(B)=27$

B 통조림만 구입해 본 주부 수는

$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$

$=27-n(A\cap B)$ ······ ㉠

이므로 $n(A\cap B)$가 최소일 때 최대이다.

$n(A\cap B)$는 $A\cup B=U$일 때 최소이므로 $n(A\cap B)$의 최솟값을 m이라 하면 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$에서

$m=23+27-40=10$

따라서 ㉠에서 구하는 최댓값은

$27-10=17$

답 ④

0721 고객 전체의 집합을 U, 반지를 착용한 고객의 집합을 A, 목걸이를 착용한 고객의 집합을 B라 하면

$n(U)=35$, $n(A)=12$, $n(B)=18$

반지와 목걸이 중 어느 것도 착용하지 않은 고객 수는

$a=n(A^C\cap B^C)$

$=n((A\cup B)^C)$

$=n(U)-n(A\cup B)$

$=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}$

$=35-12-18+n(A\cap B)$

$=5+n(A\cap B)$ ······ ㉠

이므로 $n(A\cap B)$가 최대일 때 최대이고, $n(A\cap B)$가 최소일 때 최소이다.
한편 $n(A\cap B)$는 $A\subset B$일 때 최대이고, $A\cap B=\varnothing$일 때 최소이므로 $n(A\cap B)$의 최댓값과 최솟값은 각각

$n(A)=12$, $n(\varnothing)=0$

따라서 ㉠에서 a의 최댓값과 최솟값은 각각

$5+12=17$, $5+0=5$

이므로 구하는 합은

$17+5=22$ 답 22

참고 $n(A)+n(B)=30$, $n(U)=35$이므로
$n(A\cup B)<n(U)$
$\therefore A\cup B\neq U$
따라서 $n(A\cap B)$는 $A\cap B=\varnothing$일 때 최소이다.

0722 1st 어떤 자연수를 10으로 나누었을 때의 나머지는 그 수의 일의 자리의 숫자와 같음을 이용하여 두 집합 A, B를 원소나열법으로 나타낸다.

8^n-1, 7^n을 10으로 나누었을 때의 나머지는 각각 8^n-1, 7^n의 일의 자리의 숫자와 같다.
$n=1, 2, 3, 4, \cdots$일 때 8^n의 일의 자리의 숫자는 8, 4, 2, 6이 이 순서대로 반복되므로 8^n-1의 일의 자리의 숫자는 7, 3, 1, 5가 이 순서대로 반복된다.

$\therefore A=\{1, 3, 5, 7\}$ ⋯ ❶

$n=1, 2, 3, 4, \cdots$일 때 7^n의 일의 자리의 숫자는 7, 9, 3, 1이 이 순서대로 반복되므로

$B=\{1, 3, 7, 9\}$ ⋯ ❷

2nd 집합 $A-B$의 부분집합의 개수를 구한다.
$A-B=\{5\}$이므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^1=2$ ⋯ ❸

답 2

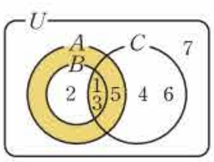
채점 기준	비율
❶ 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 집합 B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ 집합 $A-B$의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	20 %

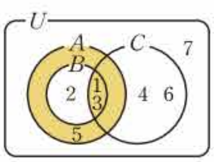
참고 집합 $\{5\}$의 부분집합은 $\varnothing$, $\{5\}$의 2개이다.

0723 1st 집합 $(A\cup C)^C$를 구한다.
$U=\{1, 2, 3, \cdots, 7\}$이고 $A\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로

$(A\cup C)^C=\{7\}$

2nd 벤 다이어그램을 이용하여 집합 $A\cap(B^C\cup C)$를 구한다.
주어진 조건을 만족시키는 집합 U, A, B, C를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 두 가지 중 하나이고, 집합 $A\cap(B^C\cup C)$는 색칠한 부분과 같다.





$\therefore A\cap(B^C\cup C)=\{1, 3, 5\}$

답 ④

0724

전체집합 $U=\{x|x$는 자연수$\}$의 부분집합 ❶A는 원소의 개수가 4이고 모든 원소의 합이 20이다. 상수 k에 대하여 집합 B가 ❸$B=\{x+k|x\in A\}$일 때, 다음 조건을 모두 만족시키는 ❺집합 A의 모든 원소의 곱을 구하시오.
❷에서 $A=\{4, 7, a, b\}$라 하면 $4+7+a+b=20$이다.
$B=\{4+k, 7+k, a+k, b+k\}$

(가) ❷$A\cap B=\{4, 7\}$
(나) ❹집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합이 41이다.
(집합 A의 모든 원소의 합)+(집합 B의 모든 원소의 합)
−(집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합)

❶, ❷에서 $A=\{4, 7, a, b\}$라 하고 ❸을 구한다. ❹를 이용하여 k의 값을 구한 후 ❷를 만족시키는 a, b의 값을 구하여 ❺를 구한다.

1st $A=\{4, 7, a, b\}$라 하고 집합 A의 모든 원소의 합이 20임을 이용하여 $a+b$의 값을 구한다.
조건 (가)에서 $A\cap B=\{4, 7\}$이므로

$A=\{4, 7, a, b\}$ (a, b는 자연수)

라 하면 집합 A의 모든 원소의 합이 20이므로

$4+7+a+b=20$
$\therefore a+b=9$ ⋯⋯ ㉠

2nd 조건 (나)를 만족시키는 상수 k의 값을 구한다.
$B=\{x+k|x\in A\}$이므로

$B=\{4+k, 7+k, a+k, b+k\}$

조건 (나)에서 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합이 41이고, 집합 B의 모든 원소의 합은 $20+4k$이므로

(집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합)
=(집합 A의 모든 원소의 합)+(집합 B의 모든 원소의 합)
−(집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합)

에서

$41=20+(20+4k)-11$
$4k=12$ $\therefore k=3$

3rd 집합 A의 모든 원소의 곱을 구한다.
$B=\{7, 10, a+3, b+3\}$에서 $A\cap B=\{4, 7\}$이므로 $a+3$, $b+3$ 중 어느 하나는 4이어야 한다.

$\therefore a=1, b=8$ 또는 $a=8, b=1$ ($\because$ ㉠)

따라서 $A=\{1, 4, 7, 8\}$이므로 집합 A의 모든 원소의 곱은

$1\cdot4\cdot7\cdot8=224$ 답 224

0725 1st 약수와 배수의 관계를 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
ㄱ. $A\cap B=\{2, 5\}$이므로 $2\in A$, $5\in A$
2와 5가 k의 양의 약수이려면 k는 10의 양의 배수이면서 18 이하의 자연수이어야 하므로
2, 5의 최소공배수
$k=10$

2nd a가 k의 약수이면 a의 약수도 k의 약수임을 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $6\in A$이면 $2\in A$이므로 $n(A\cap B)=2$인 집합 $A\cap B$는

$\{2,\ 5\}$ 또는 $\{2,\ 6\}$

따라서 $A\cap B=\{5,\ 6\}$을 만족하는 k는 존재하지 않는다.

3rd $n(A\cap B)=2$가 되는 경우를 나누어 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. (i) $A\cap B=\{2,\ 5\}$일 때,

ㄱ에서 $k=10$이므로 $\qquad A=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$

$\therefore A-B=\{1,\ 10\}$

따라서 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은

$1+10=11$

(ii) $A\cap B=\{2,\ 6\}$일 때,

2와 6이 k의 양의 약수이려면 k는 6의 양의 배수이면서 18 이하의 자연수이어야 하므로

$k=6$ 또는 $k=12$ 또는 $k=18$

ⓘ $k=6$일 때,

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이므로 집합 $A-B=\{1,\ 3\}$의 모든 원소의 합은 $\qquad 1+3=4$

ⓘⓘ $k=12$일 때,

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$이므로 집합

$A-B=\{1,\ 3,\ 4,\ 12\}$의 모든 원소의 합은

$1+3+4+12=20$

ⓘⓘⓘ $k=18$일 때,

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$이므로 집합

$A-B=\{1,\ 3,\ 9,\ 18\}$의 모든 원소의 합은

$1+3+9+18=31$

(i), (ii)에서 집합 $A-B$의 모든 원소의 합이 홀수가 되는 k의 값은 10, 18이므로 그 합은

$10+18=28$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0726

1st 집합의 연산 법칙을 이용하여 집합 B를 구한다.

$$(A^C\cup B)\cap(A\cup B)=(A^C\cap A)\cup B$$
$$=\varnothing\cup B=B$$

$\therefore B=\{3,\ 8,\ 9\}$ ··· ❶

2nd 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합이 최대, 최소인 경우를 찾아 $M+m$의 값을 구한다.

$3\in A$이므로 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합은 $A\cap B=B$일 때 최대이고, $A\cap B=\{3\}$일 때 최소이다.

따라서 $M=3+8+9=20$, $m=3$이므로 ··· ❷

$M+m=23$ ··· ❸

답 23

채점 기준	비율
❶ 집합 B를 구할 수 있다.	30 %
❷ M, m의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $M+m$의 값을 구할 수 있다.	10 %

다른 풀이 $(A\cup B)-(A^C\cup B)=(A\cup B)\cap(A^C\cup B)^C$

$=(A\cup B)\cap(A\cap B^C)$

$=\underbrace{(A\cup B)\cap(A-B)}_{(A-B)\subset(A\cup B)}$

$=A-B$

이므로 $\qquad A-B=\{4,\ 6\}$

$\therefore B=(A\cup B)-(A-B)=\{3,\ 8,\ 9\}$

0727

1st 두 집합 $X-A$, $A-X$는 서로소임을 이용하여 두 집합 X, A의 포함 관계를 파악한다.

두 집합 $X-A$, $A-X$는 서로소이므로 조건 (가)에서

$(X-A)\subset(A-X)$이려면

$X-A=\varnothing \qquad \therefore X\subset A$

2nd 조건 (나)를 만족시키는 집합 X의 개수를 구한다.

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$이고 조건 (나)에 의하여

$15\in X$ ⌐ $1+3+5=9$이므로 집합 X의 모든 원소의 합이 10 이상이려면 15가 집합 X의 원소이어야 한다.

즉 집합 X는 집합 A의 부분집합 중 15를 반드시 원소로 갖는 집합이므로 그 개수는

$2^{4-1}=2^3=8$ 답 8

0728

두 집합

$A=\{x\,|\,x$는 100 이하의 자연수$\}$,

$B=\{x\,|\,x$는 50과 서로소인 자연수$\}$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오.

(가) ❸ $X\subset A$, $X\neq\varnothing$

집합 X는 집합 A의 공집합이 아닌 부분집합이다.

(나) ❶ $X\cap B=\varnothing$

집합 X의 모든 원소는 50과 서로소가 아니다.

(다) ❷ 집합 X의 모든 원소는 12와 서로소이다.

$12=2^2\cdot3$이므로 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니다.

❶, ❷에서 집합 X의 원소가 될 수 있는 수를 찾은 후 ❸을 만족시키는 집합 X의 개수를 구한다.

1st 집합 X의 원소가 될 수 있는 수를 찾는다.

조건 (나)에서 $X\cap B=\varnothing$이므로 집합 X의 모든 원소는 50과 서로소가 아니다.

이때 $50=2\cdot5^2$이므로 집합 X의 모든 원소는 2 또는 5의 배수이다.

또 조건 (다)에서 $12=2^2\cdot3$이므로 집합 X의 모든 원소는 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니다.

따라서 집합 X의 모든 원소는 100 이하의 5의 배수 중에서 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 자연수이므로 집합 X의 원소가 될 수 있는 수는

5, 25, 35, 55, 65, 85, 95

2nd 집합 X의 개수를 구한다.

조건 (가)에서 $X\neq\varnothing$이므로 집합 X는 집합

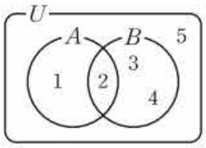
$\{5,\ 25,\ 35,\ 55,\ 65,\ 85,\ 95\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 그 개수는

$2^7-1=127$ 답 127

0729 **1st** 주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타낸다.

주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같고

$A\cap B=\{2\}$



2nd $2\in X$일 때, 집합 X의 개수를 구한다.

(i) $2\in X$일 때,

$X\cap A\neq\varnothing$, $X\cap B\neq\varnothing$이므로 집합 X의 개수는 집합 U의 부분집합 중에서 2를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{5-1}=2^4=16$

3rd $2\notin X$일 때, 집합 X의 개수를 구한다.

(ii) $2\notin X$일 때,

2를 제외한 집합 A의 원소는 1이고, 2를 제외한 집합 B의 원소는 3, 4이므로 $X\cap A\neq\varnothing$, $X\cap B\neq\varnothing$이려면

집합 X는 1을 반드시 원소로 갖고 3 또는 4를 원소로 가져야 한다.

$1\in X$, $3\in X$, $4\notin X$

또는 $1\in X$, $3\notin X$, $4\in X$

또는 $1\in X$, $3\in X$, $4\in X$

이때 각 경우에서 집합 X는 집합 $(A\cup B)^C$의 원소인 5를 원소로 갖거나 갖지 않을 수 있으므로 집합 X의 개수는

$3\cdot 2=6$

4th 집합 X의 개수를 구한다.

(i), (ii)에서 집합 X의 개수는 $16+6=22$

답 22

0730 **1st** 세 집합 A, B, C의 포함 관계를 파악한다.

$(A-B)\cup(A-C)=\varnothing$에서 $A-B=\varnothing$, $A-C=\varnothing$

$\therefore A\subset B$, $A\subset C$

2nd 집합의 포함 관계와 집합의 연산 법칙을 이용하여 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $A\subset B$, $A\subset C$이므로 $A\subset(B\cup C)$

ㄴ. $A\subset(B\cup C)$에서 $(B\cup C)^C\subset A^C$

이때 $(B\cup C)^C=B^C\cap C^C$이므로

$(B^C\cap C^C)\subset A^C$

ㄷ. $(B-A^C)\cup(X-A^C)=(B\cap A)\cup(X\cap A)$

$=(B\cup X)\cap A$

이때 $\{(B\cup X)\cap A\}\subset A$이고 $A\subset C$이므로

$\{(B-A^C)\cup(X-A^C)\}\subset C$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0731 **1st** 집합 $A_n\cap A_2$의 의미를 파악하여 자연수 n의 조건을 구한다.

조건 (가)에서 집합 $A_n\cap A_2$는 n과 2의 공배수의 집합이므로

$A_n\cap A_2=A_{2n}$이면 n과 2의 최소공배수가 $2n$이다.

즉 n과 2는 서로소이므로 n은 홀수이다. ··· ❶

2nd 조건 (나)를 만족시키는 자연수 n의 조건을 구한다.

A_2는 짝수의 집합이고 n은 홀수이므로

$A_n-A_2=\{n, 3n, 5n, 7n, \cdots\}$ ··· ❷

(i) n이 3의 배수일 때,

$A_n-A_3=\varnothing$이므로 $(A_n-A_3)\subset(A_n-A_2)$

(ii) n이 3의 배수가 아닐 때,

$A_n-A_3=\{n, 2n, 4n, 5n, 7n, \cdots\}$이므로

$(A_n-A_3)\not\subset(A_n-A_2)$

(i), (ii)에서 n은 3의 배수이다. ··· ❸

3rd 자연수 n의 개수를 구한다.

주어진 조건을 모두 만족시키는 n은 50 이하의 자연수 중 홀수인 3의 배수이므로 자연수 n은 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45의 8개이다. ··· ❹

답 8

채점 기준	비율
❶ 조건 (가)를 만족시키는 n의 조건을 구할 수 있다.	20 %
❷ 집합 A_n-A_2를 n을 이용하여 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ 조건 (나)를 만족시키는 n의 조건을 구할 수 있다.	40 %
❹ 자연수 n의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0732 **1st** $n(A\cap B)=2$를 만족시키는 정수 a의 값을 구한다.

$n(A\cap B)=2$이므로 원 $x^2+y^2=4$와 직선 $x+2y=a$는 서로 다른 두 점에서 만난다. 즉

(원의 중심과 직선 사이의 거리) < (원의 반지름의 길이)

$\frac{|-a|}{\sqrt{1^2+2^2}}<2$, $|a|<2\sqrt{5}$ $\therefore -2\sqrt{5}<a<2\sqrt{5}$

따라서 정수 a는 -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4이다.

2nd $n(A\cap C)=1$을 만족시키는 정수 b의 값을 구한다.

$n(A\cap C)=1$이므로 두 원 $x^2+y^2=4$, $(x-b)^2+(y+3)^2=9$는 한 점에서 만난다. 즉

(두 원의 중심 사이의 거리) = (두 원의 반지름의 길이의 합)

$\sqrt{b^2+(-3)^2}=2+3$, $b^2+9=25$

$b^2=16$ $\therefore b=-4$ 또는 $b=4$

3rd $a+b$의 최댓값을 구한다.

$a+b$는 $a=4$, $b=4$일 때 최대이므로 구하는 최댓값은

$4+4=8$

답 8

0733 **1st** 집합의 연산 법칙을 이용하여 $A*B$를 간단히 한다.

$A*B=(A-B)^C\cap(B-A)^C$

$=(A\cap B^C)^C\cap(B\cap A^C)^C$

$=(A^C\cup B)\cap(B^C\cup A)$

$=\{(A^C\cup B)\cap B^C\}\cup\{(A^C\cup B)\cap A\}$

$=\{(A^C\cap B^C)\cup(B\cap B^C)\}\cup\{(A^C\cap A)\cup(B\cap A)\}$

$=\{(A^C\cap B^C)\cup\varnothing\}\cup\{\varnothing\cup(A\cap B)\}$

$=(A\cup B)^C\cup(A\cap B)$

2nd $\{1, 2\}*\{2, 3\}$을 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $\{1, 2\}\cup\{2, 3\}=\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2\}\cap\{2, 3\}=\{2\}$이므로

$\{1, 2\}*\{2, 3\}=\{4, 5, 6\}\cup\{2\}$

$=\{2, 4, 5, 6\}$

3rd 집합의 연산 법칙을 이용하여 A^C*B^C를 간단히 하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $A^C*B^C=(A^C\cup B^C)^C\cup(A^C\cap B^C)$

$=(A\cap B)\cup(A\cup B)^C$

$=(A\cup B)^C\cup(A\cap B)$

$=A*B$

4th $X\cup Y=\varnothing$이면 $X=\varnothing$, $Y=\varnothing$임을 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $A*B=(A\cup B)^C\cup(A\cap B)=\varnothing$에서

$(A\cup B)^C=\varnothing$, $A\cap B=\varnothing$

즉 $A\cup B=U$, $A\cap B=\varnothing$이므로 $\quad B=A^C$

따라서 $A*B=\varnothing$을 만족시키는 집합 A가 정해지면 집합 B도 정해지므로 순서쌍 (A, B)의 개수는 전체집합 U의 부분집합 A의 개수와 같다.

$\therefore 2^6=64$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0734 1st 집합 B의 원소가 모두 자연수임을 이용하여 a, b, c의 조건을 구한다.

$B\subset U$에서 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$가 모두 자연수이므로 a, b, c는 모두 자연수의 제곱인 수이다.

2nd 조건을 만족시키는 a, b, c의 값을 구한다.

조건 (나)에서 $a<b<c$, $a+c=53$이므로

$a=4$, $c=49$

$\therefore A=\{4, b, 49\}$, $B=\{2, \sqrt{b}, 7\}$

또 $n(A)=3$, $n(B)=3$이고, 조건 (가)에서 $n(A\cup B)=5$이므로

$n(A\cap B)=3+3-5=1$

이때 $4<b<49$, $2<\sqrt{b}<7$이므로

$b=7$ 또는 $\sqrt{b}=4 \qquad \therefore b=7$ 또는 $b=16$

그런데 $\sqrt{b}$가 자연수이므로

$b=16$

3rd 집합 B의 모든 원소의 합을 구한다.

$B=\{2, 4, 7\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은

$2+4+7=13$ 답 ③

참고 $a<c$, $a+c=53$이므로 $\quad \dfrac{53}{2}<c<53$

이때 c는 자연수의 제곱인 수이므로 $\quad c=36$ 또는 $c=49$

(ⅰ) $c=36$일 때, $a+c=53$에서 $\quad a=17$

(ⅱ) $c=49$일 때, $a+c=53$에서 $\quad a=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 a는 자연수의 제곱인 수이므로 $\quad a=4$, $c=49$

0735 1st 각 집합이 갖는 원소의 특징을 파악하여 $n(A)$, $n(B)$, $n(A\cap B)$를 각각 구한다.

집합 A는 a를 반드시 원소로 갖는 집합 U의 부분집합을 원소로 가지므로

$n(A)=2^{4-1}=2^3=8$ ⋯ ❶

집합 B는 b를 반드시 원소로 갖는 집합 U의 부분집합을 원소로 가지므로

$n(B)=2^{4-1}=2^3=8$ ⋯ ❷

집합 $A\cap B$는 a, b를 반드시 원소로 갖는 집합 U의 부분집합을 원소로 가지므로

$n(A\cap B)=2^{4-2}=2^2=4$ ⋯ ❸

2nd $n(A\cup B)$를 구한다.

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=8+8-4=12$ ⋯ ❹

답 12

채점 기준	비율
❶ $n(A)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $n(B)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $n(A\cap B)$를 구할 수 있다.	30 %
❹ $n(A\cup B)$를 구할 수 있다.	10 %

0736 1st $s(A)=2^{n(A)}$임을 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $s(A)=4$이면 $\quad 2^{n(A)}=4=2^2$

$\therefore n(A)=2$

따라서 $n(A^C)=n(U)-n(A)=5-2=3$이므로

$s(A^C)=2^3=8$

2nd 집합의 포함 관계를 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $A^C\subset B^C$이면 $B\subset A$이므로

$n(B)\le n(A)$

$\therefore s(B)\le s(A)$

3rd $A\cap B=\varnothing$이면 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$임을 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $n(A)=2$, $n(B)=3$, $\underbrace{A\cap B=\varnothing}_{n(A\cap B)=0}$이면

$s(A)+s(B)=2^2+2^3=12$

이때 $n(A\cup B)=2+3=5$이므로

$s(A\cup B)=2^5=32$

$\therefore s(A\cup B)\ne s(A)+s(B)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ④

0737 1st 주어진 조건을 집합의 연산 법칙을 이용하여 간단히 정리한다.

조건 (나)에서

$A\cap(A^C\cup B)=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)$

$=\varnothing\cup(A\cap B)$

$=A\cap B$

이므로 $\quad A\cap B\ne\varnothing$

$\therefore n(A\cap B)\ge 1$

2nd 조건 (나), (다)를 이용하여 $n(A)$의 범위를 구한 후 조건 (가)를 이용하여 $n(B-A)$의 최댓값을 구한다.

조건 (다)에서 $n(A-B)=11$이므로

$n(A)=n(A-B)+n(A\cap B)$

$\ge 11+1=12$

조건 (가)에서 $n(U)=25$이므로

$n(U)\ge n(A)+n(B-A)$

$\therefore n(B-A)\le n(U)-n(A)$

$\le 25-12=13$

따라서 $n(B-A)$의 최댓값은 13이다. 답 13

0738 1st 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 고객의 수를 구한다.

은행 A를 이용하는 고객의 집합을 A, 은행 B를 이용하는 고객의 집합을 B라 하면 조사에 참여한 전체 고객의 수는

$35+30=65$이므로

$n(A\cup B)=65$

조건 (가)에서 $n(A)+n(B)=82$이므로

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=82-65=17$$

두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 고객의 수는

$$\begin{aligned}n((A-B)\cup(B-A))&=n((A\cup B)-(A\cap B))\\&=n(A\cup B)-n(A\cap B)\\&=65-17=48\end{aligned}$$

2nd 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 여자 고객의 수를 이용하여 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수를 구한다.

조건 (나)에 의하여 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 여자 고객의 수는

$$\frac{1}{2}\cdot 48=24$$

이므로 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는

$30-24=6$ 답 ②

0739 1st 주어진 조건을 집합을 이용하여 나타낸다.

학생 전체의 집합을 U, 인문학 특강을 신청한 학생의 집합을 A, 자연 과학 특강을 신청한 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=120$ …… ㉠

$n(A)=n(B)-16$ …… ㉡

$n(A\cup B)=n(A^C\cap B^C)+80$ …… ㉢ ··· ❶

2nd $n(B-A)$를 $n(A\cap B)$에 대한 식으로 나타낸다.

㉢에서 $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로

$n(A\cup B)=n(U)-n(A\cup B)+80$

$2\times n(A\cup B)=120+80$ ($\because$ ㉠)

$\therefore n(A\cup B)=100$ ··· ❷

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$100=n(B)-16+n(B)-n(A\cap B)$ ($\because$ ㉡)

$\therefore n(B)=\frac{1}{2}\times n(A\cap B)+58$

자연 과학 특강만 신청한 학생 수는

$$\begin{aligned}n(B-A)&=n(B)-n(A\cap B)\\&=\frac{1}{2}\times n(A\cap B)+58-n(A\cap B)\\&=58-\frac{1}{2}\times n(A\cap B)\end{aligned}$$ ··· ❸

3rd $n(A\cap B)$를 이용하여 $n(B-A)$의 최댓값을 구한다.

$n(B-A)$는 $n(A\cap B)$가 최소일 때 최대이고, $\underbrace{n(A\cap B)\text{의 최솟값은 }0}_{A\cap B=\varnothing}$이므로 $n(B-A)$의 최댓값은 58

따라서 자연 과학 특강만 신청한 학생 수의 최댓값은 58이다. ··· ❹

답 58

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 집합으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $n(A\cup B)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $n(B-A)$를 $n(A\cap B)$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❹ 자연 과학 특강만 신청한 학생 수의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

참고 $n(A)=n(B)-16$에서 $n(A)<n(B)$이므로 $n(A\cap B)$는 $A\cap B=A$일 때 최대이다.
또 $n(A\cup B)=100<120=n(U)$에서 $A\cup B\neq U$이므로 $n(A\cap B)$는 $A\cap B=\varnothing$일 때 최소이다.

Ⅱ. 집합과 명제

07 명제

0740 답 참인 명제: ㄷ, ㅂ
거짓인 명제: ㄱ, ㄹ

0741 답 ㄱ, ㄹ

0742 $x^2+3x-4=0$에서

$(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

따라서 조건 p의 진리집합은

$\{-4, 1\}$ 답 $\{-4, 1\}$

0743 10보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7이므로 조건 q의 진리집합은

$\{2, 3, 5, 7\}$ 답 $\{2, 3, 5, 7\}$

0744 답 $\underbrace{\sqrt{4}}_{\sqrt{4}=2}$는 무리수가 아니다. (참)

0745 답 1은 합성수이거나 소수이다. (거짓)

0746 답 $x\neq1$이고 $x\neq2$

0747 답 $x<-2$ 또는 $x\geq3$

0748 조건 p의 진리집합을 P라 하면 $P=\{1, 2, 5, 10\}$이므로 조건 ~p의 진리집합은

$P^C=\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ 답 $\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

0749 조건 q의 진리집합을 Q라 하면 $Q=\{2, 4, 6, 8, 10\}$이므로 조건 ~q의 진리집합은

$Q^C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 답 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

0750 조건 'p 또는 q'의 진리집합은

$P\cup Q=\{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10\}$

답 $\{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10\}$

0751 조건 'p 그리고 q'의 진리집합은

$P\cap Q=\{2, 10\}$ 답 $\{2, 10\}$

0752 조건 '~p 또는 q'의 진리집합은

$P^C\cup Q=\{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$

답 $\{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$

0753 조건 'p 그리고 ~q'의 진리집합은

$P\cap Q^C=\{1, 5\}$ 답 $\{1, 5\}$

0754 답 가정: 18의 약수이다.
결론: 9의 약수이다.

0755 답 가정: $ab=0$이다.
결론: $a=0$ 또는 $b=0$이다.

0756 [반례] $x=1$, $y=3$이면 $x+y=4$이므로 $x+y$는 짝수이지만 x, y는 모두 홀수이다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다.
답 거짓

0757 $xy\neq0$이면 $\underbrace{x\neq0,\ y\neq0}_{x^2>0,\ y^2>0\text{이므로}\quad x^2+y^2>0}$이므로 $x^2+y^2\neq0$이다.
따라서 주어진 명제는 참이다. 답 참

0758 [반례] $x=0$이면 $|x|=0$이므로 주어진 명제는 거짓이다.
답 거짓

0759 $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로 주어진 명제는 참이다.
답 참

0760 $x=0$이면 $x^2=0$이므로 주어진 명제는 참이다.
답 참

0761 $\sqrt{x}<0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 주어진 명제는 거짓이다. 답 거짓

0762 답 어떤 실수 x에 대하여 $x^2<0$이다. (거짓)

0763 답 모든 실수 x에 대하여 $x^2+1\neq0$이다. (참)

0764 답 역: $x=1$이면 $x^2=1$이다.
대우: $x\neq1$이면 $x^2\neq1$이다.

0765 답 역: $x=0$이고 $y=0$이면 $x^2+y^2=0$이다.
대우: $x\neq0$ 또는 $y\neq0$이면 $x^2+y^2\neq0$이다.

0766 답 역: $a>0$ 또는 $b>0$이면 $a+b>0$이다.
대우: $a\leq0$이고 $b\leq0$이면 $a+b\leq0$이다.

0767 명제 $q \longrightarrow p$가 참이므로 그 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$도 항상 참이다.
이상에서 항상 참인 명제인 것은 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

0768 답 (1) x, y가 모두 유리수이면 $x+y$는 유리수이다.
(2) 참 (3) 참

참고 x, y가 실수이므로 무리수가 아니면 유리수이다.

0769 ㄴ. 명제 $r \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim r$도 항상 참이다.
ㄷ. 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$도 항상 참이다.
이상에서 항상 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

0770 $|x|<1$에서 $\quad -1<x<1$
따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
답 충분조건

0771 $x>0$, $y>0$이면 $\quad x+y>0$, $xy>0$
$x+y>0$, $xy>0$이면 $\quad x>0$, $y>0$
따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
답 필요충분조건

0772 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $Q=\{1, 2, 3, 6\}$
이므로 $\quad Q\subset P$
따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
답 필요조건

0773 모든 정수는 유리수이므로 $p \Longrightarrow q$이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다. 답 충분조건

0774 $a^2+b^2=0 \Longleftrightarrow a=0,\ b=0$
(1) $ab=0 \Longleftrightarrow a=0$ 또는 $b=0$
따라서 $ab=0$은 $a^2+b^2=0$이기 위한 필요조건이다.
(2) $a+b=0 \Longleftrightarrow a=-b$
따라서 $a+b=0$은 $a^2+b^2=0$이기 위한 필요조건이다.
(3) $|a|+|b|=0 \Longleftrightarrow a=0,\ b=0$
따라서 $|a|+|b|=0$은 $a^2+b^2=0$이기 위한 필요충분조건이다.
답 (1) 필요조건 (2) 필요조건 (3) 필요충분조건

0775 답 (가) $=$ (나) $=$

0776 답 (가) $\geq$ (나) $\geq$

0777 $a^2+2b^2-2ab=a^2-2ab+b^2+b^2$
$=(\boxed{a-b})^2+b^2$
a, b가 실수이므로 $(a-b)^2\geq0$, $b^2\geq0$에서
$(a-b)^2+b^2\geq0$
$\therefore\ a^2+2b^2\boxed{\geq}2ab$
$(a-b)^2=0$, $b^2=0$에서 $a-b=0$, $b=0$
이때 등호는 $a-b=0$, $b=0$, 즉 $a=b=\boxed{0}$일 때 성립한다.
$\therefore$ (가) $a-b$ (나) $\geq$ (다) 0 답 (가) $a-b$ (나) $\geq$ (다) 0

0778 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2=a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b}-(a+b)$
$=\boxed{2\sqrt{ab}}>0$

$\therefore (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \boxed{>} (\sqrt{a+b})^2$

그런데 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$, $\sqrt{a+b}>0$이므로

$\sqrt{a}+\sqrt{b} \boxed{>} \sqrt{a+b}$

$\therefore$ (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $>$ (다) $>$ 　　답 (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $>$ (다) $>$

참고 $a>0$, $b>0$일 때 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$이다.

0779 $a^2+ab+b^2=\left(a^2+ab+\frac{b^2}{4}\right)+\frac{3}{4}b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$

a, b가 실수이므로 $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2\ge 0$, $\frac{3}{4}b^2\ge 0$에서

$\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\ge 0$

$\therefore a^2+ab+b^2\ge 0$ (단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립)

답 풀이 참조

참고 $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2\ge 0$에서 $a+\frac{b}{2}=0$일 때 등호가 성립하고, $\frac{3}{4}b^2\ge 0$에서 $b=0$일 때 등호가 성립한다.
따라서 $a=b=0$일 때 $a^2+ab+b^2=0$이 성립한다.

0780 $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})$

$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2\}$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0$

$\therefore \frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

답 풀이 참조

0781 $x>0$, $\frac{1}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+\frac{1}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$ (단, 등호는 $x=1$일 때 성립)

$x=\frac{1}{x}$에서 $x^2=1$
$\therefore x=1$ ($\because x>0$)

따라서 $x+\frac{1}{x}$의 최솟값은 2이다.

답 2

0782 $4x>0$, $\frac{9}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4x+\frac{9}{x}\ge 2\sqrt{4x\cdot\frac{9}{x}}$

$=2\cdot 6=12$ $\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{3}{2}\text{일 때 성립}\right)$

$4x=\frac{9}{x}$에서 $x^2=\frac{9}{4}$
$\therefore x=\frac{3}{2}$ ($\because x>0$)

따라서 $4x+\frac{9}{x}$의 최솟값은 12이다. 　　답 12

0783 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$

$=b^2x^2-2abxy+a^2y^2$

$=(\boxed{bx-ay})^2\ge 0$

$\therefore (a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$

이때 등호는 $bx-ay=0$, 즉 $\frac{x}{a}=\boxed{\frac{y}{b}}$일 때 성립한다.

$\therefore$ (가) $bx-ay$ (나) $\frac{y}{b}$ 　　답 (가) $bx-ay$ (나) $\frac{y}{b}$

참고 (가)에 $ay-bx$를 써넣어도 된다.

유형 01 명제
본책 122쪽

① 명제인 것 ➡ {참인 문장 또는 식, 거짓인 문장 또는 식}
② 명제가 아닌 것 ➡ 참, 거짓을 판별할 수 없는 문장 또는 식

0784 ① x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
②, ④, ⑤ 참인 명제이다.
③ 거짓인 명제이다.

답 ①

0785 ㄱ. 거짓인 명제이다.
ㄴ. $x-3=x+5$에서 $-3=5$이므로 거짓인 명제이다.
ㄷ. $3x=x+2x$에서 $3x=3x$이므로 참인 명제이다.
ㄹ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
이상에서 명제인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 　　답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0786 ① 참인 명제이다.
② 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
③ 거짓인 명제이다.
④ x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
⑤ $-x+3\ge 1-x$에서 $3\ge 1$이므로 참인 명제이다.

답 ③

유형 02 명제와 조건의 부정
본책 122쪽

① '$a\le x\le b$'의 부정 ➡ '$x<a$ 또는 $x>b$'
② '$x=a$'의 부정 ➡ '$x\ne a$'
③ '또는'의 부정 ➡ '그리고'
④ '그리고'의 부정 ➡ '또는'

0787 'p 또는 $\sim q$'의 부정은 '$\sim p$ 그리고 q'
$\sim p$: $x\le -2$ 또는 $x>3$, q: $-3\le x<5$이므로 '$\sim p$ 그리고 q'는
$-3\le x\le -2$ 또는 $3<x<5$ 　　답 ④

0788 각 명제의 부정과 그 참, 거짓은 다음과 같다.
① 3은 소수가 아니다. (거짓)
② $6\le 2$ (거짓)
③ $\underbrace{(-1)^5+1}_{-1+1=0}\ne\underbrace{-1^5+1}_{-1+1=0}$ (거짓)
④ 4는 18의 약수가 아니다. (참)
⑤ $\varnothing\not\subset\{1, 2, 3, 4\}$ (거짓) ⬅ 공집합은 모든 집합의 부분집합이다.

답 ④

다른 풀이 명제가 거짓이면 그 부정은 참이다.
주어진 명제 중 ①, ②, ③, ⑤는 참이고, ④는 거짓이므로 명제의 부정이 참인 것은 ④이다.

0789 '$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$'의 부정은
'$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ne 0$'

이므로

$(a-b)^2\neq0$ 또는 $(b-c)^2\neq0$ 또는 $(c-a)^2\neq0$

$\therefore a\neq b$ 또는 $b\neq c$ 또는 $c\neq a$

즉 a, b, c 중 서로 다른 것이 적어도 하나 있다. 답 ⑤

유형 03 진리집합

본책 123쪽

전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때

① $\sim p$의 진리집합 ➡ P^C

② 'p 또는 q'의 진리집합 ➡ $P\cup Q$

③ 'p 그리고 q'의 진리집합 ➡ $P\cap Q$

0790 $U=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, 2, 3\}$, $Q=\{2, 3, 4, 6\}$

① 조건 $\sim p$의 진리집합은 $P^C=\{4, 6, 12\}$이므로

$n(P^C)=3$

② 조건 $\sim q$의 진리집합은 $Q^C=\{1, 12\}$이므로

$n(Q^C)=2$

③ 조건 'p 그리고 q'의 진리집합은 $P\cap Q=\{2, 3\}$이므로

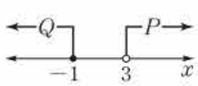
$n(P\cap Q)=2$

④ 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합은 $P^C\cup Q=\{2, 3, 4, 6, 12\}$이므로 $n(P^C\cup Q)=5$

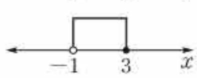
⑤ 조건 'p 또는 $\sim q$'의 진리집합은 $P\cup Q^C=\{1, 2, 3, 12\}$이므로 $n(P\cup Q^C)=4$

답 ④

0791 두 진리집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



또 조건 '$-1<x\leq3$'의 진리집합을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 집합은



$P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C$ 답 ⑤

참고 ① $P\cap Q=\varnothing$ ② $P\cup Q^C=\{x|x>-1\}$

③ $P^C\cup Q=\{x|x\leq3\}$ ④ $(P\cap Q)^C=\varnothing^C$

0792 $U=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$x^3-x=0$에서 $x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

조건 p의 진리집합을 P라 하면 $P=\{-1, 0, 1\}$ ··· ❶

$x^2+2x-3=0$에서 $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

조건 q의 진리집합을 Q라 하면 $Q=\{-3, 1\}$ ··· ❷

이때 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합은 $P^C\cup Q$이고

$P^C=\{-3, -2, 2, 3\}$이므로

$P^C\cup Q=\{-3, -2, 1, 2, 3\}$ ··· ❸

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$-3+(-2)+1+2+3=1$ ··· ❹

답 1

채점 기준	비율
❶ 조건 p의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❷ 조건 q의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❸ 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❹ 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	10 %

0793 $|x-a|<2$에서 $-2<x-a<2$

$\therefore a-2<x<a+2$

$\therefore P=\{x|a-2<x<a+2\}$

$x^2+3x-10\leq0$에서 $(x+5)(x-2)\leq0$

$\therefore -5\leq x\leq2$

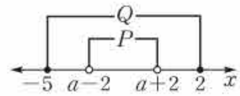
$\therefore Q=\{x|-5\leq x\leq2\}$

조건 'p 그리고 q'의 진리집합이 P가 되려면

$P\cap Q=P$

$\therefore P\subset Q$

즉 오른쪽 그림에서



$a-2\geq-5$, $a+2\leq2$

$\therefore -3\leq a\leq0$

따라서 정수 a는 -3, -2, -1, 0의 4개이다. 답 4

유형 04 명제의 참, 거짓

집중 공략 본책 123쪽

(1) 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때

① $P\subset Q$이면 명제 $p\longrightarrow q$는 참이다.

② $P\not\subset Q$이면 명제 $p\longrightarrow q$는 거짓이다.

(2) 어떤 명제가 거짓임을 보이려면 명제의 반례를 찾는다.

0794 ① [반례] $x=-1$이면 $x^2+x=0$이지만 $x<0$이다.

② [반례] $x=-2$, $y=-1$, $z=1$이면 $x<y<z$이지만 $\underbrace{xy>yz}_{2>-1}$이다.

④ [반례] $x=1$, $y=0$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $y=0$이다.

⑤ [반례] $x=0$, $y=1$이면 $xy=0$이지만 $x^2+y^2\neq0$이다.

답 ③

0795 ㄱ. 두 조건 p, q를

p: x는 4의 양의 약수이다.

q: x는 8의 양의 약수이다.

라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, 2, 4\}$, $Q=\{1, 2, 4, 8\}$

따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄴ. [반례] $a=\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$이면 a, b는 모두 무리수이지만 $a+b=0$이므로 $a+b$는 유리수이다.

ㄷ. 삼각형 ABC가 정삼각형이면

$\angle A=\angle B=\angle C=60°$

따라서 $\angle B=\angle C$이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄹ. $(a-2)(b-3)=0$이면 $a-2=0$ 또는 $b-3=0$

$\therefore a=2$ 또는 $b=3$

따라서 주어진 명제는 참이다.

이상에서 거짓인 명제는 ㄴ의 1개이다. 답 1

0796 $x^2-4\le 0$에서 $\quad (x+2)(x-2)\le 0$

$\therefore\ -2\le x\le 2$

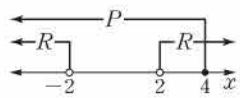
$|x|>2$에서 $\quad x<-2$ 또는 $x>2$

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x|x\le 4\}$, $Q=\{x|-2\le x\le 2\}$,

$R=\{x|x<-2$ 또는 $x>2\}$

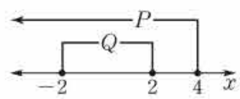
ㄱ. 두 진리집합 P, R를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$P\not\subset R$

따라서 명제 $p\longrightarrow r$는 거짓이다.

ㄴ. 두 진리집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$Q\subset P$

따라서 명제 $q\longrightarrow p$는 참이다.

ㄷ. $Q^C=\{x|x<-2$ 또는 $x>2\}$이므로

$Q^C=R$

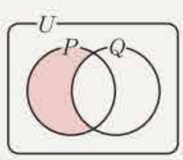
따라서 $R\subset Q^C$이므로 명제 $r\longrightarrow \sim q$는 참이다.

이상에서 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

다른 풀이 ㄱ. [반례] $x=0$이면 $x\le 4$이지만 $|x|\le 2$이다.

유형 05 거짓인 명제의 반례 본책 124쪽

전체집합 U에서 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $p\longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 오른쪽 벤 다이어그램에서 색칠한 부분에 속하는 원소, 즉 집합 $P-Q=P\cap Q^C$의 원소이다.



0797 명제 'p이면 $\sim q$이다.'가 거짓임을 보이려면 집합 P의 원소 중에서 집합 Q^C의 원소가 아닌 것, 즉 집합 $P\cap(Q^C)^C$의 원소를 찾으면 된다.

이때 $P\cap(Q^C)^C=P\cap Q$이므로 구하는 원소는 b이다. 답 ②

0798 두 조건 p, q를

p: n은 2의 배수이다.

q: n은 3의 배수이다.

라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{2, 4, 6, \cdots, 18\}$, $Q=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

이때 명제 $p\longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 집합 P에는 속하고 집합 Q에는 속하지 않는 집합 $P\cap Q^C$의 원소이다.

따라서 구하는 반례는 2, 4, 8, 10, 14, 16이다.

답 2, 4, 8, 10, 14, 16

0799 명제 '$\sim p$이면 $\sim q$이고 r이다.'가 거짓임을 보이는 원소는 집합 P^C에는 속하고 집합 $Q^C\cap R$에는 속하지 않는다.

따라서 구하는 집합은

$P^C\cap(Q^C\cap R)^C=P^C\cap(Q\cup R^C)=(Q\cup R^C)-P$

답 ④

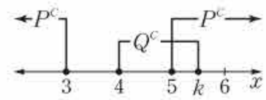
0800 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|3<x<5\}$, $Q=\{x|x<4$ 또는 $x>k\}$

이때 명제 $\sim p\longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 집합 P^C에는 속하고 집합 Q에는 속하지 않는 집합 $P^C\cap Q^C$의 원소이다.

$P^C=\{x|x\le 3$ 또는 $x\ge 5\}$,

$Q^C=\{x|4\le x\le k\}$이므로 집합 $P^C\cap Q^C$의 정수인 원소가 5뿐이려면 오른쪽 그림에서



$5\le k<6$

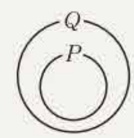
답 $5\le k<6$

유형 06 명제의 참, 거짓과 진리집합 본책 124쪽

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때

① 명제 $p\longrightarrow q$가 참 ⇒ $P\subset Q$

② $P\subset Q$ ⇒ 명제 $p\longrightarrow q$가 참

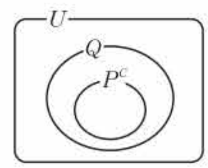


0801 명제 $\sim p\longrightarrow q$가 참이므로

$P^C\subset Q$

따라서 오른쪽 그림에서

$P\cup Q=U$ 답 ④



0802 주어진 벤 다이어그램에서 $Q\subset P$, $Q\subset R$이므로 두 명제

$q\longrightarrow p$, $q\longrightarrow r$

가 모두 참이다.

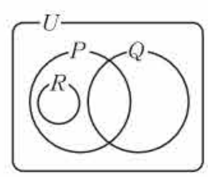
또한 $P^C\subset Q^C$, $R^C\subset Q^C$이므로 두 명제

$\sim p\longrightarrow \sim q$, $\sim r\longrightarrow \sim q$

도 모두 참이다.

그러나 $P^C\not\subset R^C$이므로 명제 $\sim p\longrightarrow \sim r$는 거짓이다. 답 ④

0803 $R\subset(P-Q)$를 만족시키도록 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 $Q\subset R^C$, $R\subset P$, $R\subset Q^C$이므로 세 명제 $q\longrightarrow \sim r$, $r\longrightarrow p$, $r\longrightarrow \sim q$는 모두 참이다.

이상에서 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ이다. 답 ④

0804 명제 $\sim p\longrightarrow q$가 참이 되려면 $\quad P^C\subset Q$

이때 $P=\{2, 4, 6, 8\}$이므로 $\quad P^C=\{1, 3, 5, 7\}$

따라서 집합 Q는 집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$의 부분집합 중 1, 3, 5, 7을 반드시 원소로 가져야 하므로 집합 Q의 개수는

$2^{8-4}=2^4=16$ 답 16

유형 07 명제가 참이 되도록 하는 상수 구하기 집중공략 본책 125쪽

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $p\longrightarrow q$가 참이 되도록 하는 상수를 구하려면 $P\subset Q$가 되도록 두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타낸다.

0805 $|x-k|<3$에서 $\quad -3<x-k<3$

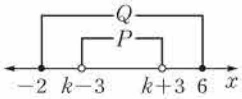
$\therefore k-3<x<k+3$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|k-3<x<k+3\}$,

$Q=\{x|-2\le x\le 6\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$k-3\ge -2$, $k+3\le 6$

$\therefore 1\le k\le 3$

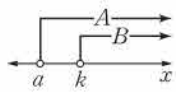
따라서 자연수 k는 1, 2, 3의 3개이다.

답 3

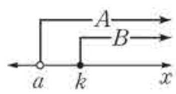
SSEN 특강

두 집합 A, B에 대하여 $B\subset A$가 되도록 하는 a의 값의 범위는 다음과 같다.

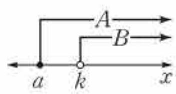
① $A=\{x|x>a\}$, $B=\{x|x>k\}$일 때, $a\le k$



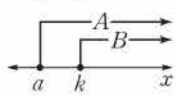
② $A=\{x|x>a\}$, $B=\{x|x\ge k\}$일 때, $a<k$



③ $A=\{x|x\ge a\}$, $B=\{x|x>k\}$일 때, $a\le k$



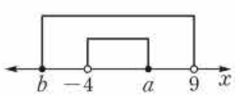
④ $A=\{x|x\ge a\}$, $B=\{x|x\ge k\}$일 때, $a\le k$



0806 주어진 명제가 참이 되려면

$\{x|-4<x\le a\}\subset\{x|b\le x<9\}$

이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a<9$, $b\le -4$

따라서 $a+b$는 $a=8$, $b=-4$일 때 최대이므로 구하는 최댓값은

$8+(-4)=4$

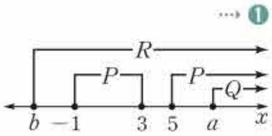
답 4

0807 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x|-1\le x\le 3$ 또는 $x\ge 5\}$,

$Q=\{x|x\ge a\}$, $R=\{x|x\ge b\}$ ⋯ ❶

두 명제 $q \longrightarrow p$, $p \longrightarrow r$가 모두 참이 되려면



$Q\subset P$, $P\subset R$

이어야 하므로 위의 그림에서

$a\ge 5$, $b\le -1$ ⋯ ❷

따라서 a의 최솟값은 5, b의 최댓값은 -1이므로 구하는 합은

$5+(-1)=4$ ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 세 조건 p, q, r의 진리집합을 구할 수 있다.	20 %
❷ a, b의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
❸ a의 최솟값과 b의 최댓값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0808 $|x-1|\ge k$에서 k는 양수이므로

$x-1\le -k$ 또는 $x-1\ge k$

$\therefore x\le -k+1$ 또는 $x\ge k+1$

q: $x^2+4x-12<0$에서 $\sim q$: $x^2+4x-12\ge 0$이므로

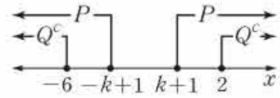
$(x+6)(x-2)\ge 0 \quad \therefore x\le -6$ 또는 $x\ge 2$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|x\le -k+1$ 또는 $x\ge k+1\}$,

$Q^C=\{x|x\le -6$ 또는 $x\ge 2\}$

명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q^C\subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-k+1\ge -6$, $k+1\le 2$

$\therefore 0<k\le 1$ ($\because k>0$)

따라서 k의 최댓값은 1이다.

답 1

유형 08 '모든'이나 '어떤'이 있는 명제

본책 125쪽

① '모든 x에 대하여 p이다.'가 참이면

➡ 전체집합의 원소 중 한 개도 빠짐없이 p를 만족시킨다.

② '어떤 x에 대하여 p이다.'가 참이면

➡ 전체집합의 원소 중 한 개 이상이 p를 만족시킨다.

0809 ① 2는 소수이고, 짝수이다.

③ $x=\frac{1}{2}$이면 $x^2=\frac{1}{4}$이므로 $\quad x^2<x$

④ $x=0$이면 $\quad x^2+x=0$

⑤ [반례] $x=1+\sqrt{2}$이면 $x^2=3+2\sqrt{2}$는 무리수이다.

답 ⑤

0810 ① [반례] $x=1$이면 $2x=2$이고 $2\notin U$이다.

② [반례] $x=0$이면 $x^2=0$이다.

③ -1, 0, 1은 모두 $x-1>0$을 만족시키지 않으므로 거짓이다.

④ $x=0$이면 $x^2=0$이므로 참이다.

⑤ [반례] $x=1$, $y=-1$이면 $x^2+y^2=2$이다.

답 ④

0811 주어진 명제의 부정은

'어떤 실수 x에 대하여 $x^2+4kx+8\le 0$이다.'

이다. ⋯ ❶

위의 명제가 참이므로 이차방정식 $x^2+4kx+8=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-8\ge 0, \quad k^2-2\ge 0$

$(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})\ge 0$

$\therefore k\ge\sqrt{2}$ ($\because k>0$)

따라서 양수 k의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다. ⋯ ❷

답 $\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 부정을 구할 수 있다.	40 %
❷ 양수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	60 %

0812 $f(x)=x^2-6x+n$이라 하면 $2\le x\le 5$인 어떤 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이어야 하므로 $2\le x\le 5$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 0 이상이어야 한다.

$f(x)=x^2-6x+n=(x-3)^2+n-9$이고

$f(2)=n-8,\ f(3)=n-9,\ f(5)=n-5$

이므로 $2\le x\le 5$에서 함수 $f(x)$는 $x=5$일 때 최댓값 $n-5$를 갖는다.

따라서 $n-5\ge 0$이어야 하므로 $n\ge 5$

즉 자연수 n의 최솟값은 5이다. 답 5

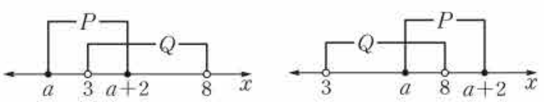
0813 두 조건 $p,\ q$를

p: $a\le x\le a+2$, q: $3<x<8$

이라 하고 두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면

$P=\{x\mid a\le x\le a+2\},\ Q=\{x\mid 3<x<8\}$

주어진 명제가 참이 되려면 $P\cap Q\ne\varnothing$이어야 하므로 다음 그림과 같아야 한다.



즉 $a+2>3$, $a<8$이어야 하므로

$1<a<8$ 답 $1<a<8$

유형 09 명제와 역, 대우의 참, 거짓

집중 공략 본책 126쪽

(1) 명제 $p \longrightarrow q$에서
① 역: $q \longrightarrow p$ ② 대우: $\sim q \longrightarrow \sim p$
(2) 명제가 참이면 그 대우도 참이고, 명제가 거짓이면 그 대우도 거짓이다.

0814 ① 역: $xy=0$이면 $x=0$이다.
[반례] $x=3,\ y=0$이면 $xy=0$이지만 $x\ne 0$이다.
② 역: $x>2$이면 $3x-7>0$이다.
[반례] $x=\frac{7}{3}$이면 $x>2$이지만 $3x-7=0$이다.
③ 역: xy가 짝수이면 $x,\ y$는 짝수이다.
[반례] $x=2,\ y=3$이면 $xy=6$은 짝수이지만 y는 홀수이다.
④ 역: $x+y>0$이면 $x>0$이고 $y>0$이다.
[반례] $x=5,\ y=-4$이면 $x+y>0$이지만 $x>0,\ y<0$이다.
⑤ 역: $x=0$이고 $y=0$이면 $|x|+|y|=0$이다. (참)
답 ⑤

0815 명제 $p \longrightarrow \sim q$의 역 $\sim q \longrightarrow p$가 참이므로 그 대우 $\sim p \longrightarrow q$도 항상 참이다. 답 ②

0816 ㄱ. 명제: [반례] $a=\sqrt{3},\ b=-\sqrt{3}$이면 $ab=-3$은 유리수이지만 $a,\ b$는 유리수가 아니다.
주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.
ㄴ. 명제: [반례] $a=-2,\ b=-3$이면 $ab=6>0$이지만 $a<0$, $b<0$이다.
주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.
ㄷ. 대우: $\underbrace{a^2-4a+3<0}_{(a-1)(a-3)<0\ \therefore\ 1<a<3}$이면 $-1\le a<3$이다. (참)
이상에서 대우가 거짓인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ이다.
답 ㄱ, ㄴ

0817 ① 역: $x>1$이면 $x>0$이다. (참)
명제: [반례] $x=\frac{1}{2}$이면 $x>0$이지만 $x<1$이다.
주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.
② 역: $\underbrace{x+1=0}_{x=-1}$이면 $x^2=1$이다. (참)
명제: [반례] $x=1$이면 $x^2=1$이지만 $x+1=2$이다.
주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.
③ 역: $x(x-2)=0$이면 $x=2$이다.
[반례] $x=0$이면 $x(x-2)=0$이지만 $x\ne 2$이다.
또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
④ 역: $ac=bc$이면 $a=b$이다.
[반례] $a=1,\ b=2,\ c=0$이면 $ac=bc=0$이지만 $a\ne b$이다.
또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
⑤ 역: $A\cap B=A$이면 $A\subset B$이다. (참)
또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
따라서 그 역과 대우가 모두 참인 명제는 ⑤이다.
답 ⑤

0818 두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면

$P=\{x\mid a<x<a+4\},\ Q=\{x\mid b+2<x<ab\}$

명제 $p \longrightarrow q$의 역 $q \longrightarrow p$가 참이므로

$Q\subset P$

또 명제 $p \longrightarrow q$의 대우가 참이면 명제 $p \longrightarrow q$도 참이므로

$P\subset Q$

따라서 $P=Q$이므로

$a=b+2,\ a+4=ab$

$a+4=ab$에 $a=b+2$를 대입하면

$b+6=(b+2)b,\quad b^2+b-6=0$

$(b+3)(b-2)=0 \quad \therefore b=2\ (\because b>0)$

$a=b+2$에 $b=2$를 대입하면 $a=4$

$\therefore a+b=6$ 답 6

유형 10 명제의 대우를 이용하여 상수 구하기

본책 127쪽

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되도록 하는 상수를 구할 때, 두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 구하는 것보다 $\sim p,\ \sim q$의 진리집합을 구하는 것이 쉬운 경우에는 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이 되도록 하는 상수를 구한다.

0819 주어진 명제가 참이므로 그 대우

'$a\ge k$이고 $b\ge -1$이면 $a+b\ge 4$이다.'

도 참이다.

$a\ge k,\ b\ge -1$에서 $a+b\ge k-1$이므로

$k-1\ge 4 \quad \therefore k\ge 5$

따라서 k의 최솟값은 5이다. 답 5

0820 주어진 명제가 참이므로 그 대우

'$x-a=0$이면 $x^2-8x+15=0$이다.'

도 참이다.

이때 $x^2-8x+15=0$에 $x-a=0$, 즉 $x=a$를 대입하면

$a^2-8a+15=0, \quad (a-3)(a-5)=0$

$\therefore a=3$ 또는 $a=5$

따라서 구하는 합은

$3+5=8$ 답 8

0821 명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 그 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이 되어야 한다. ··· ❶

$\sim p$: $|x-1|<2$이므로 $\quad -2<x-1<2$

$\therefore -1<x<3$ ··· ❷

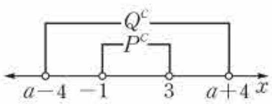
$\sim q$: $|x-a|<4$이므로 $\quad -4<x-a<4$

$\therefore a-4<x<a+4$ ··· ❸

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P^C=\{x|-1<x<3\}$, $Q^C=\{x|a-4<x<a+4\}$

명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 $P^C \subset Q^C$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a-4 \le -1$, $a+4 \ge 3$

$\therefore -1 \le a \le 3$ ··· ❹

답 $-1 \le a \le 3$

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 대우가 참이 되어야 함을 알 수 있다.	10 %
❷ 조건 $\sim p$가 참이 되는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❸ 조건 $\sim q$가 참이 되는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❹ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %

다른 풀이 $|x-1| \ge 2$에서 $\quad x-1 \le -2$ 또는 $x-1 \ge 2$

$\therefore x \le -1$ 또는 $x \ge 3$

$|x-a| \ge 4$에서 $\quad x-a \le -4$ 또는 $x-a \ge 4$

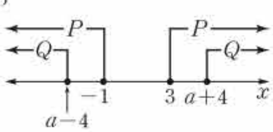
$\therefore x \le a-4$ 또는 $x \ge a+4$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|x \le -1$ 또는 $x \ge 3\}$,

$Q=\{x|x \le a-4$ 또는 $x \ge a+4\}$

명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q \subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a-4 \le -1$, $a+4 \ge 3$

$\therefore -1 \le a \le 3$

유형 11 **삼단논법** 본책 127쪽

세 조건 p, q, r에 대하여 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 모두 참이면 명제 $p \longrightarrow r$가 참이다.

0822 두 명제 $\sim p \longrightarrow q$, $p \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 각각의 대우 $\sim q \longrightarrow p$, $r \longrightarrow \sim p$도 모두 참이다.

또 두 명제 $r \longrightarrow \sim p$, $\sim p \longrightarrow q$가 모두 참이므로 명제 $r \longrightarrow q$가 참이고, 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 $r \longrightarrow \sim q$이다.

답 ⑤

0823 ㄱ. 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow \sim p$도 참이지만 명제 $q \longrightarrow p$의 참, 거짓은 추론할 수 없다.

ㄴ. 두 명제 $s \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 모두 참이므로 명제 $s \longrightarrow r$가 참이지만 명제 $r \longrightarrow s$의 참, 거짓은 추론할 수 없다.

ㄷ. 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow \sim s$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim s$가 참이다. $s \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim s$도 참이다.

이상에서 항상 참인 명제인 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

0824 명제 $\sim r \longrightarrow \sim s$가 참이므로 그 대우 $s \longrightarrow r$도 참이다.

두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $s \longrightarrow r$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow r$가 참이려면 명제 $\sim q \longrightarrow s$가 참이어야 한다.

따라서 명제 $\sim q \longrightarrow s$가 참이면 그 대우 $\sim s \longrightarrow q$도 참이므로 명제 $p \longrightarrow r$가 참임을 보이기 위해 필요한 참인 명제는 $\sim s \longrightarrow q$이다. 답 ⑤

유형 12 **삼단논법과 명제의 추론** 본책 127쪽

주어진 문장에서 조건 p, q를 찾아 $p \longrightarrow q$ 꼴로 나타낸 후 명제가 참이면 그 대우도 참임과 삼단논법을 이용하여 참인 명제를 찾는다.

0825 세 조건 p, q, r를

p: 음악을 좋아한다.

q: 미술을 좋아한다.

r: 체육을 좋아한다.

라 하면 두 명제 $p \longrightarrow q$, $\sim p \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 각각의 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$, $r \longrightarrow p$도 모두 참이다.

또 두 명제 $r \longrightarrow p$, $p \longrightarrow q$가 모두 참이므로 명제 $r \longrightarrow q$가 참이고, 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ④이다. 답 ④

참고 주어진 명제를 p, q, r로 나타내면 다음과 같다.

① $p \longrightarrow r$ ② $q \longrightarrow r$ ③ $\sim p \longrightarrow \sim q$

④ $r \longrightarrow q$ ⑤ $r \longrightarrow \sim p$

0826 (i) A가 남학생일 때,

(다)에 의하여 C가 남학생이므로 (나)에 의하여 B도 남학생이다.

즉 A, B, C 모두 남학생이므로 (가)에 모순이다. ··· ❶

(ii) A가 여학생일 때,

(다)에 의하여 C는 여학생이므로 (라)에 의하여 B도 여학생이다.

즉 A, B, C 모두 여학생이다. ··· ❷

(i), (ii)에서 A, B, C 모두 여학생이다. ··· ❸

답 A, B, C

채점 기준	비율
❶ A가 남학생일 때, 모순임을 알 수 있다.	50 %
❷ A가 여학생일 때, B, C의 성별을 알 수 있다.	40 %
❸ 여학생을 모두 고를 수 있다.	10 %

0827 A와 B는 지유가 우산을 잃어버린 장소에 대해 반대되는 말을 하였으므로 한 사람은 진실, 한 사람은 거짓을 말하였다. 이때 진실을 말한 사람은 단 한 명이므로 C는 거짓을 말하였다. 따라서 진실을 말한 사람은 B이고, 지유는 빵집에서 우산을 잃어버렸다. 답 B, 빵집

유형 13 충분조건, 필요조건, 필요충분조건 (집중공략) 본책 128쪽

① $p \underset{\times}{\overset{\Longrightarrow}{\Longleftarrow}} q$ ➡ p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
② $p \underset{\Longleftarrow}{\overset{\times}{\Longrightarrow}} q$ ➡ p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.
③ $p \underset{\Longleftarrow}{\overset{\Longrightarrow}{}} q$ ➡ p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

0828 ① $x^2+y^2=0$이면 $x=0$, $y=0$이고, $xy=0$이면 $x=0$ 또는 $y=0$이므로 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
② $z>0$이므로 $x>y \Longleftrightarrow xz>yz$, 즉 $p \Longleftrightarrow q$이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
③ $xy=|xy|$이면 $xy \ge 0$이므로
$x>0$, $y>0$ 또는 $x<0$, $y<0$ 또는 $x=0$ 또는 $y=0$
따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
④ $x^2=x$이면 $x=0$ 또는 $x=1$이므로 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
⑤ $x^2=y^2$이면 $x=y$ 또는 $x=-y$이므로 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
답 ③

0829 ① $x=-1$, $y=-1$이면 $|x+y|=|x|+|y|$이지만 $x<0$, $y<0$이다.
$\therefore p \not\Longrightarrow q$
$x \ge 0$, $y \ge 0$이면 $|x+y|=|x|+|y|$이므로 $q \Longrightarrow p$
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.
② $x \ge 0$, $y \ge 0$이면 $xy \ge 0$이므로 $p \Longrightarrow q$
$x=-1$, $y=-1$이면 $xy \ge 0$이지만 $x<0$, $y<0$이다.
$\therefore q \not\Longrightarrow p$
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
③ p: $x^2>y^2 \Longleftrightarrow q$: $|x|>|y|$
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
④ $x=2$, $y=-4$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $x+y<0$이다.
$\therefore p \not\Longrightarrow q$
$x+y>0$이면 $x \ne 0$ 또는 $y \ne 0$이므로 $x^2+y^2>0$이다.
$\therefore q \Longrightarrow p$
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.
⑤ $x=1$, $y=2$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $xy>0$이다.
$\therefore p \not\Longrightarrow q$
$xy<0$이면 $x \ne 0$, $y \ne 0$이므로 $x^2+y^2>0$이다.
$\therefore q \Longrightarrow p$
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.
답 ③

0830 ㄱ. $a=b=c=0$이면
$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$
이므로 $p \Longrightarrow q$
$\underbrace{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0}_{a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0}$이면 $a=b=c$이므로
$q \not\Longrightarrow p$
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
ㄴ. $a-c>b-c$의 양변에 c를 더하면 $a>b$이므로
$p \Longrightarrow q$
$a>b$의 양변에 $-c$를 더하면 $a-c>b-c$이므로
$q \Longrightarrow p$
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
ㄷ. $a=-2$, $b=-1$이면 $ab+1>2$이지만 $a \le 1$, $b \le 1$이다.
$\therefore p \not\Longrightarrow q$
$a>1$, $b>1$이면 $ab>1$이므로 $ab+1>2$이다.
$\therefore q \Longrightarrow p$
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.
이상에서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

0831 p: $|a|+|b|=0$에서 $a=0$, $b=0$
q: $a^2-2ab+b^2=0$에서 $(a-b)^2=0$ $\therefore a=b$
r: $|a+b|=|a-b|$에서 $a+b=\pm(a-b)$
$\therefore a=0$ 또는 $b=0$
ㄱ. $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
ㄴ. $\sim p$: $a \ne 0$ 또는 $b \ne 0$, $\sim r$: $a \ne 0$, $b \ne 0$
따라서 $\sim p \not\Longrightarrow \sim r$, $\sim r \Longrightarrow \sim p$이므로 $\sim p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.
ㄷ. q이고 r: $a=0$, $b=0$
따라서 (q이고 r) $\Longleftrightarrow p$이므로 q이고 r는 p이기 위한 필요충분조건이다.
이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

유형 14 충분·필요조건과 명제의 참, 거짓 본책 129쪽

① p가 q이기 위한 충분조건 ➡ 명제 $p \longrightarrow q$가 참이다. ➡ $p \Longrightarrow q$
② p가 q이기 위한 필요조건 ➡ 명제 $q \longrightarrow p$가 참이다. ➡ $q \Longrightarrow p$

0832 $q \Longrightarrow p$, $r \Longrightarrow q$이므로 $r \Longrightarrow p$
$q \Longrightarrow p$이므로 $\sim p \Longrightarrow \sim q$
이상에서 참인 명제인 것은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

0833 ① $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
② $\sim r \Longrightarrow \sim p$이므로 $p \Longrightarrow r$
$q \Longrightarrow p$, $p \Longrightarrow r$이므로 $q \Longrightarrow r$
따라서 q는 r이기 위한 충분조건이다.

③ $p \Longrightarrow r$이므로 r는 p이기 위한 필요조건이다.
④ $q \Longrightarrow p$이므로 $\quad \sim p \Longrightarrow \sim q$
따라서 $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.
⑤ $q \Longrightarrow r$이므로 $\quad \sim r \Longrightarrow \sim q$
따라서 $\sim r$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.

답 ⑤

유형 15 충분·필요·필요충분조건과 진리집합

본책 129쪽

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때
① $P\cap Q=P \Rightarrow P\subset Q \Rightarrow p \Longrightarrow q \Rightarrow p$는 q이기 위한 충분조건
② $P\cup Q=P \Rightarrow Q\subset P \Rightarrow q \Longrightarrow p \Rightarrow p$는 q이기 위한 필요조건
③ $P\subset Q$, $Q\subset P \Rightarrow P=Q \Rightarrow p \Longleftrightarrow q$
$\Rightarrow p$는 q이기 위한 필요충분조건

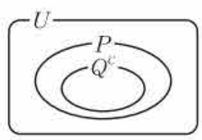
0834 p는 q이기 위한 충분조건이므로 $\quad P\subset Q$
r는 q이기 위한 필요조건이므로 $\quad Q\subset R$
따라서 $P\subset Q\subset R$이므로 항상 옳은 것은 ②이다.

답 ②

0835 ① $R\subset P$이므로 p는 r이기 위한 필요조건이다.
② $R^C\not\subset P$이므로 p는 $\sim r$이기 위한 필요조건이 아니다.
③ $Q\subset P$이므로 q는 p이기 위한 충분조건이다.
④ $P^C\neq Q$이므로 $\sim p$는 q이기 위한 필요충분조건이 아니다.
⑤ $P^C\subset R^C$이므로 $\sim r$는 $\sim p$이기 위한 필요조건이다.

답 ③

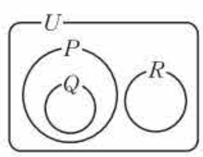
0836 $\sim q$가 p이기 위한 충분조건이므로
$Q^C\subset P$
따라서 두 집합 P, Q 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



①, ④ $P-Q=P\cap Q^C=Q^C$
② $Q-P=Q\cap P^C=P^C$
⑤ $P\cup Q^C=P$ $\quad Q^C\subset P$에서 $\;P^C\subset Q$

답 ③

0837 $(P-R^C)\cup(Q-P)=\varnothing$이므로
$P-R^C=\varnothing$, $Q-P=\varnothing$ $\quad P-R^C=P\cap(R^C)^C=P\cap R$
$\therefore P\cap R=\varnothing$, $Q\subset P$
따라서 세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $Q\subset P$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
② $R\not\subset P$이므로 p는 r이기 위한 필요조건이 아니다.
③ $R\not\subset Q$이므로 r는 q이기 위한 충분조건이 아니다.
④ $Q\subset R^C$이므로 q는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.
⑤ $R\subset Q^C$이므로 r는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.

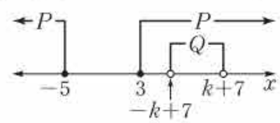
답 ④

유형 16 충분·필요·필요충분조건이 되도록 하는 상수 구하기

집중 공략 본책 130쪽

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때
① p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건 $\Rightarrow P\subset Q$
② p는 q이기 위한 필요충분조건 $\Rightarrow P=Q$
임을 이용하여 조건을 만족시키는 상수를 구한다.

0838 $(x-3)(x+5)\geq 0$에서 $\quad x\leq -5$ 또는 $x\geq 3$
또 $|x-7|<k$에서 k는 양수이므로
$-k<x-7<k \quad \therefore -k+7<x<k+7$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x\,|\,x\leq -5$ 또는 $x\geq 3\}$, $Q=\{x\,|\,-k+7<x<k+7\}$
p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 $Q\subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-k+7\geq 3 \quad \therefore k\leq 4$
따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

답 4

0839 p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 명제 '$4x^2-4x-3\neq 0$이면 $2x+a\neq 0$이다.'가 참이어야 하고, 이 명제의 대우 '$2x+a=0$이면 $4x^2-4x-3=0$이다.'도 참이어야 한다. ⋯ ❶

$4x^2-4x-3=0$에 $2x+a=0$, 즉 $x=-\dfrac{a}{2}$를 대입하면
$$4\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)-3=0$$
$a^2+2a-3=0, \quad (a+3)(a-1)=0$
$\therefore a=-3$ 또는 $a=1$ ⋯ ❷
따라서 모든 실수 a의 값의 합은
$-3+1=-2$ ⋯ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ p가 q이기 위한 충분조건임을 이용하여 참인 명제를 찾을 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 모두 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

0840 $x+1=2x-1$에서 $\quad x=2$
이때 $x+1=2x-1$이 $x^2-ax+b=0$이기 위한 필요충분조건이므로 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 해는 $x=2$뿐이다.
중근 $x=2$를 갖고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-2)^2=0 \quad \therefore x^2-4x+4=0$
따라서 $a=4$, $b=4$이므로 $\quad a+b=8$

답 8

0841 p는 q이기 위한 충분조건이므로
$P\subset Q$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
또 r는 p이기 위한 필요조건이므로
$P\subset R$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠에서 $4\in Q$이므로
$1-a=4$ 또는 $b^2=4$

(ⅰ) $1-a=4$, 즉 $a=-3$일 때,

$Q=\{4,\ b^2\}$, $R=\{-2,\ 2b-2\}$

㉡에서 $4\in R$이므로

$2b-2=4 \qquad \therefore\ b=3$

$\therefore\ a+b=0$

(ⅱ) $b^2=4$, 즉 $b=\pm2$일 때,

$Q=\{1-a,\ 4\}$, $R=\{1+a,\ 2\}$

또는 $Q=\{1-a,\ 4\}$, $R=\{1+a,\ -6\}$

㉡에서 $4\in R$이므로

$1+a=4 \qquad \therefore\ a=3$

$\therefore\ a+b=5$ 또는 $a+b=1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a+b$의 최댓값은 5이다. 답 ④

0842 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x\mid -1<x<0$ 또는 $x\geq3\}$,

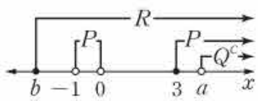
$Q=\{x\mid x\leq a\}$, $R=\{x\mid x\geq b\}$

이때 $\sim p$는 q이기 위한 충분조건이고 $\sim p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이므로

$P^C\subset Q$, $R^C\subset P^C$

즉 $Q^C\subset P$, $P\subset R$이므로 $\underbrace{Q^C}_{Q^C=\{x\mid x>a\}}\subset P\subset R$

오른쪽 그림에서 $a\geq3$, $b\leq-1$이므로



$a\geq3$, $-b\geq1$

$\therefore\ a-b\geq4$

따라서 $a-b$의 최솟값은 4이다. 답 4

유형 17 집합의 연산과 필요충분조건 본책 130쪽

집합의 연산 법칙이나 연산의 성질을 이용하여 주어진 조건을 간단히 한 후 다음을 이용하여 필요충분조건을 찾는다.
➡ $A\subset B \Longleftrightarrow A\cap B=A \Longleftrightarrow A\cup B=B$
$\Longleftrightarrow A-B=\varnothing \Longleftrightarrow B^C\subset A^C$

0843 $(A\cup B)\cap(B-A)^C=(A\cup B)\cap(B\cap A^C)^C$

$=(A\cup B)\cap(B^C\cup A)$

$=A\cup(B\cap B^C)$

$=A\cup\varnothing=A$

따라서 $A\cup B=A$가 성립하기 위한 필요충분조건은 $B\subset A$이다.

답 ②

0844 ㄱ. $A-B=\varnothing$이면 $\qquad A\subset B$

따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄴ. $A\cap(B\cup C)=B\cup C$이면 $\qquad (B\cup C)\subset A$

$A\cup(B\cup C)=A$이면 $\qquad (B\cup C)\subset A$

따라서 $p\Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. $A^C\cup B^C=U$이면 $\qquad (A\cap B)^C=U \qquad \therefore\ A\cap B=\varnothing$

$A=\{1,\ 3\}$, $B=\{1,\ 5\}$이면 $A\not\subset B$, $B\not\subset A$이지만

$A\cap B=\{1\}$이므로 $A^C\cup B^C\neq U$이다.

따라서 $p\Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

이상에서 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

유형 18 대우를 이용한 명제의 증명 본책 131쪽

명제 'p이면 q이다.'의 대우 '$\sim q$이면 $\sim p$이다.'가 참임을 이용하여 주어진 명제가 참임을 증명한다.

0845 $n=3k-2$ 또는 $n=\boxed{3k-1}$ (k는 자연수)이라 하면

k가 자연수이므로 $n=3k+1$ 또는 $n=3k+2$라 하면 1, 2가 포함되지 않는다.

(ⅰ) $n=3k-2$일 때,

$n^2=(3k-2)^2=9k^2-12k+4$

$=3(\boxed{3k^2-4k+1})+1$

(ⅱ) $n=3k-1$일 때,

$n^2=(3k-1)^2=9k^2-6k+1$

$=3(3k^2-2k)+\boxed{1}$

따라서 $f(k)=3k-1$, $g(k)=3k^2-4k+1$, $a=1$이므로

$f(3a)+g(a)=f(3)+g(1)=8+0=8$ 답 8

0846 주어진 명제의 대우는

'$a\neq0$ 또는 $b\neq0$이면 $a^2+b^2\neq0$이다.'

(ⅰ) $a\neq0$일 때,

$a^2>0$이고 $b^2\geq0$이므로 $a^2+b^2>0$, 즉 $a^2+b^2\neq0$이다.

(ⅱ) $b\neq0$일 때,

$a^2\geq0$이고 $b^2>0$이므로 $a^2+b^2>0$, 즉 $a^2+b^2\neq0$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

0847 (1) 주어진 명제의 대우는

'a, b가 모두 홀수이면 ab도 홀수이다.' ··· ❶

(2) $a=2m-1$, $b=2n-1$ (m, n은 자연수)이라 하면

$ab=(2m-1)(2n-1)$

$=4mn-2m-2n+1$

$=2(2mn-m-n)+1$

이때 $2mn-m-n$은 0 또는 자연수이므로 ab는 홀수이다. ··· ❷

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. ··· ❸

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 대우를 말할 수 있다.	30 %
❷ 주어진 명제의 대우가 참임을 보일 수 있다.	50 %
❸ 주어진 명제가 참임을 알 수 있다.	20 %

참고 $2mn-m-n=mn-m+mn-n=m(n-1)+n(m-1)$

m, n이 자연수이므로

$m\geq1$, $n\geq1$, $n-1\geq0$, $m-1\geq0$

즉 $m(n-1)\geq0$, $n(m-1)\geq0$이므로

$m(n-1)+n(m-1)\geq0$

$\therefore\ 2mn-m-n\geq0$ (단, 등호는 $m=1$, $n=1$일 때 성립)

유형 19 귀류법 본책 131쪽

명제 또는 명제의 결론을 부정한 다음 모순이 생김을 보여 주어진 명제가 참임을 증명한다.

0848 $\sqrt{5}$가 $\boxed{\text{유리수}}$라고 가정하면

$\sqrt{5}=\frac{a}{b}$ (a, b는 $\boxed{\text{서로소}}$인 자연수)

로 나타낼 수 있다.

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2=5b^2$ …… ㉠

이때 a^2이 $\boxed{5\text{의 배수}}$이므로 a도 5의 배수이다.

$a=5k$ (k는 자연수)로 놓으면 ㉠에서

$25k^2=5b^2$

$\therefore b^2=5k^2$

따라서 b^2이 5의 배수이므로 b도 5의 배수이다.

이것은 a, b가 서로소라는 가정에 모순이므로 $\sqrt{5}$는 무리수이다.

$\therefore$ (가) 유리수 (나) 서로소 (다) 5의 배수

답 ③

0849 $b\neq0$이라 가정하면 $a+b\sqrt{2}=0$에서

$\sqrt{2}=-\frac{a}{b}$

이때 a, b가 유리수이므로 $-\frac{a}{b}$, 즉 $\sqrt{2}$가 유리수이다.

이것은 $\sqrt{2}$가 무리수라는 사실에 모순이므로 $b=0$이다.

$a+b\sqrt{2}=0$에 $b=0$을 대입하면

$a=0$

따라서 유리수 a, b에 대하여 $a+b\sqrt{2}=0$이면 $a=b=0$이다.

답 풀이 참조

0850 a, b가 모두 홀수라고 가정하자. ⋯ ❶

이차방정식 $x^2+ax-b=0$의 자연수인 해를 $x=m$이라 하면

$m^2+am=b$

(i) m이 홀수일 때,

m^2, am이 모두 홀수이므로 m^2+am, 즉 b가 짝수이다.

이것은 b가 홀수라는 가정에 모순이다.

(ii) m이 짝수일 때,

m^2, am이 모두 짝수이므로 m^2+am, 즉 b가 짝수이다.

이것은 b가 홀수라는 가정에 모순이다. ⋯ ❷

(i), (ii)에서 이차방정식 $x^2+ax-b=0$이 자연수인 해를 가지면 a, b 중 적어도 하나는 짝수이다. ⋯ ❸

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 결론의 부정을 구할 수 있다.	20 %
❷ 가정에 모순이 생김을 보일 수 있다.	60 %
❸ 주어진 명제가 참임을 알 수 있다.	20 %

참고 (홀수)×(홀수)=(홀수), (홀수)×(짝수)=(짝수), (짝수)×(짝수)=(짝수), (홀수)+(홀수)=(짝수), (홀수)+(짝수)=(홀수), (짝수)+(짝수)=(짝수)

유형 20 실수의 성질을 이용한 절대부등식의 증명 본책 132쪽

실수 A, B에 대하여 다음이 성립함을 이용하여 절대부등식을 증명한다.

① $A\geq B \Longleftrightarrow A-B\geq0$

② $A^2\geq0$, $A^2+B^2\geq0$ (단, 등호는 $A=0$, $B=0$일 때 성립)

0851 $a^2+b^2-ab=\left(a^2-ab+\frac{b^2}{4}\right)+\frac{3}{4}b^2=\left(a-\boxed{\frac{b}{2}}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$

a, b가 실수이므로 $\left(a-\frac{b}{2}\right)^2\geq0$, $\frac{3}{4}b^2\geq0$에서

$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geq0 \quad \therefore a^2+b^2\geq ab$

이때 등호는 $a-\frac{b}{2}=0$, $\frac{3}{4}b^2=0$, 즉 $a=b=\boxed{0}$일 때 성립한다.

$\therefore$ (가) $\frac{b}{2}$ (나) 0

답 (가) $\frac{b}{2}$ (나) 0

0852 ㄱ. $x=5$이면 $x^2+25=10x$

따라서 $x^2+25>10x$는 절대부등식이 아니다.

ㄴ. $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

x가 실수이므로 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\geq0$에서

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0 \quad \therefore x^2+x+1>0$

ㄷ. $(x+4y)^2-8xy=x^2+8xy+16y^2-8xy$

$=x^2+16y^2$

x, y가 실수이므로 $x^2\geq0$, $16y^2\geq0$에서

$x^2+16y^2\geq0$

$\therefore (x+4y)^2\geq8xy$ (단, 등호는 $x=y=0$일 때 성립)

이상에서 절대부등식인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

0853 $A-B=(ab-1)^2-(a^2-1)(b^2-1)$

$=a^2b^2-2ab+1-(a^2b^2-a^2-b^2+1)$

$=a^2-2ab+b^2$

$=(a-b)^2$

a, b가 실수이므로 $(a-b)^2\geq0$

$\therefore A\geq B$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

답 ②

0854 $(a^2+b^2+1)-(ab+a+b)$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2-2ab-2a-2b)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\}$

a, b가 실수이므로 $(a-b)^2\geq0$, $(a-1)^2\geq0$, $(b-1)^2\geq0$에서

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\}\geq0$

$\therefore a^2+b^2+1\geq ab+a+b$ ⋯ ❶

이때 등호는 $a-b=0$, $a-1=0$, $b-1=0$, 즉 $a=b=1$일 때 성립한다. ⋯ ❷

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ $a^2+b^2+1\geq ab+a+b$임을 증명할 수 있다.	70 %
❷ 등호가 성립하는 경우를 구할 수 있다.	30 %

유형 21 절댓값 기호를 포함한 절대부등식 본책 132쪽

실수 A, B, C에 대하여
① $|A|\geq 0$, $|B|\geq 0$이므로
$$|A|\geq|B| \Longleftrightarrow |A|^2\geq|B|^2 \Longleftrightarrow |A|^2-|B|^2\geq 0$$
② $|A|+|B|\geq 0$, $|C|\geq 0$이므로
$$|A|+|B|\geq|C| \Longleftrightarrow (|A|+|B|)^2\geq|C|^2 \Longleftrightarrow (|A|+|B|)^2-|C|^2\geq 0$$

0855 $(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$
$=(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)-(a+b)^2$
$=(a^2+2|ab|+b^2)-(a^2+2ab+b^2)$
$=2(\boxed{|ab|-ab})\geq 0$ ($\because$ $|ab|\geq ab$) └ 모든 실수 A에 대하여 $|A|\geq A$
$\therefore$ $(|a|+|b|)^2\geq|a+b|^2$
그런데 $|a|+|b|\geq 0$, $|a+b|\geq 0$이므로
$|a|+|b|\geq|a+b|$
(단, 등호는 $|ab|=ab$, 즉 $\boxed{ab\geq 0}$일 때 성립)
$\therefore$ (가) $|ab|-ab$ (나) $ab\geq 0$

답 ④

0856 ㄱ. $(|a|+|b|)^2-|a-b|^2$
$=(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)-(a-b)^2$
$=(a^2+2|ab|+b^2)-(a^2-2ab+b^2)$
$=2(|ab|+ab)\geq 0$ ($\because$ $|ab|\geq -ab$)
$\therefore$ $(|a|+|b|)^2\geq|a-b|^2$
그런데 $|a|+|b|\geq 0$, $|a-b|\geq 0$이므로
$|a|+|b|\geq|a-b|$
(단, 등호는 $|ab|=-ab$, 즉 $ab\leq 0$일 때 성립)
ㄴ. $a=1$, $b=-1$이면 — $|a+b|^2-|a-b|^2=4ab$의 부호는 알 수 없으므로 ㄱ과 같은 방법으로 증명하기 어렵다.
$|a+b|=0$, $|a-b|=2$
$\therefore$ $|a+b|<|a-b|$
ㄷ. (i) $|a|\geq|b|$일 때,
$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2$
$=(a-b)^2-(|a|^2-2|a||b|+|b|^2)$
$=a^2-2ab+b^2-(a^2-2|ab|+b^2)$
$=2(|ab|-ab)\geq 0$ ($\because$ $|ab|\geq ab$)
$\therefore$ $|a-b|^2\geq(|a|-|b|)^2$
그런데 $|a-b|\geq 0$, $|a|-|b|\geq 0$이므로
$|a-b|\geq|a|-|b|$
(ii) $|a|<|b|$일 때,
$|a-b|>0$, $|a|-|b|<0$이므로
$|a-b|>|a|-|b|$
(i), (ii)에서
$|a-b|\geq|a|-|b|$
(단, 등호는 $|a|\geq|b|$, $|ab|=ab$일 때 성립)
이상에서 절대부등식인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

유형 22 산술평균과 기하평균의 관계 ; 곱의 최솟값 구하기 본책 133쪽

곱으로 주어진 식은 전개하여 양수 a, b에 대하여
$(상수)+a+b$
꼴로 변형한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.
이때 세 양수 a, b, c에 대해서도 다음이 성립한다.
$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}=8abc$$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

0857 $x>0$, $y>0$에서 $xy>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{8}{x}\right)=xy+8+2+\frac{16}{xy}$$
$$\geq 10+2\sqrt{xy\cdot\frac{16}{xy}}$$
$$=10+2\cdot 4=18$$
└ $xy>0$이므로 $\frac{16}{xy}>0$이다.
등호는 $xy=\frac{16}{xy}$일 때 성립하므로 $(xy)^2=16$에서
$xy=4$ ($\because$ $xy>0$)
따라서 $\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{8}{x}\right)$은 $xy=4$일 때 최솟값 18을 가지므로
$a=4$, $b=18$
$\therefore$ $a+b=22$

답 ③

SSEN 특강

$x+\frac{2}{y}\geq 2\sqrt{\frac{2x}{y}}$ ⋯ ㉠, $y+\frac{8}{x}\geq 2\sqrt{\frac{8y}{x}}$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡을 변끼리 곱하면
$$\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{8}{x}\right)\geq 4\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{8y}{x}}=16$$
따라서 위와 같이 $\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{8}{x}\right)$의 최솟값을 16이라 하면 잘못된 풀이이다.
㉠에서 등호가 성립하는 것은 $x=\frac{2}{y}$일 때이고 ㉡에서 등호가 성립하는 것은 $y=\frac{8}{x}$일 때인데 ㉠, ㉡의 등호가 동시에 성립하도록 하는 양수 x, y가 존재하지 않기 때문이다.

0858 $a>0$에서 $a^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a-\frac{4}{a}\right)=a^2-4-1+\frac{4}{a^2}$$
$$\geq -5+2\sqrt{a^2\cdot\frac{4}{a^2}}$$
$$=-5+2\cdot 2=-1$$
등호는 $a^2=\frac{4}{a^2}$일 때 성립하므로 $a^4=4$에서
$a^2=2$ ($\because$ $a^2>0$)
$\therefore$ $a=\sqrt{2}$ ($\because$ $a>0$)

답 $\sqrt{2}$

0859 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}}\cdot 2\sqrt{\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}\cdot 2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}}$$
$$=8\sqrt{\frac{a}{c}}\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{c}{b}}$$
$=8$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

따라서 주어진 식의 최솟값은 8이다. 답 ④

참고 등호는 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$일 때 성립하므로

$b^2=ac$ … ㉠, $c^2=ab$ … ㉡, $a^2=bc$ … ㉢

㉠÷㉡을 하면 $\frac{b^2}{c^2}=\frac{c}{b}$, $b^3=c^3$ $\therefore b=c$

㉡÷㉢을 하면 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{a}{c}$, $a^3=c^3$ $\therefore a=c$

$\therefore a=b=c$

SSEN 특강

이 문제에서는 세 식 $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}}$, $\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 2\sqrt{\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}$, $\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}}$의 등호가 성립할 조건이 동시에 성립할 수 있으므로 **0857**번과 다르게 위와 같이 풀 수 있다.

0860 $a>0$, $b>0$, $c>0$에서 $\frac{a}{b+c}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)=\{a+(b+c)\}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)$$
$$=1+\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{a}+1$$
$$=2+\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{a} \quad \cdots ❶$$
$$\geq 2+2\sqrt{\frac{a}{b+c}\cdot\frac{b+c}{a}}$$
$=4$ (단, 등호는 $a=b+c$일 때 성립)

따라서 주어진 식의 최솟값은 4이다. … ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	60 %
❷ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 주어진 식의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

참고 등호는 $\frac{a}{b+c}=\frac{b+c}{a}$일 때 성립하므로 $a^2=(b+c)^2$에서

$a=b+c$ ($\because a>0$, $b+c>0$)

유형 23 산술평균과 기하평균의 관계 ; 합의 최솟값 구하기 집중공략 본책 133쪽

$f(x)+\frac{1}{f(x)}$ $(f(x)>0)$ 꼴을 포함하도록 식을 변형한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.
이때 세 양수 a, b, c에 대하여 다음이 성립한다.

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}$$
$=4$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

0861 $x>-1$에서 $x+1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$9x+\frac{9}{x+1}=9(x+1)+\frac{9}{x+1}-9$$
$$\geq 2\sqrt{9(x+1)\cdot\frac{9}{x+1}}-9$$
$$=2\cdot 9-9=9$$

등호는 $9(x+1)=\frac{9}{x+1}$일 때 성립하므로 $(x+1)^2=1$에서

$x+1=1$ ($\because x+1>0$) $\therefore x=0$

따라서 $9x+\frac{9}{x+1}$는 $x=0$일 때 최솟값 9를 가지므로

$m=9$, $n=0$ $\therefore m+n=9$ 답 9

0862 $x>0$, $y>0$, $z>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}$$
$$=\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}$$
$$=\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}+2\sqrt{\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{z}}+2\sqrt{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{z}}$$
$=2+2+2=6$ (단, 등호는 $x=y=z$일 때 성립)

$\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$, $\frac{z}{y}=\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}=\frac{x}{z}$에서
$x^2=y^2=z^2$
$\therefore x=y=z$
($\because x>0$, $y>0$, $z>0$)

따라서 주어진 식의 최솟값은 6이다. 답 ③

0863 $|x|=x$, $x\neq 0$에서 $x>0$, $x^2+1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+\frac{1}{x}+\frac{4x}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x}+\frac{4x}{x^2+1}$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{4x}{x^2+1}}$$
$$=2\cdot 2$$
$=4$ (단, 등호는 $x=1$일 때 성립)

따라서 $x+\frac{1}{x}+\frac{4x}{x^2+1}$의 최솟값은 4이다. 답 ④

참고 등호는 $\frac{x^2+1}{x}=\frac{4x}{x^2+1}$일 때 성립하므로 $(x^2+1)^2=4x^2$에서

$x^4-2x^2+1=0$, $(x^2-1)^2=0$

$x^2=1$ $\therefore x=1$ ($\because x>0$)

0864 $x=a+\frac{2}{b}$, $y=b+\frac{2}{a}$이고, $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+y^2=\left(a+\frac{2}{b}\right)^2+\left(b+\frac{2}{a}\right)^2$$
$$=\left(a^2+\frac{4a}{b}+\frac{4}{b^2}\right)+\left(b^2+\frac{4b}{a}+\frac{4}{a^2}\right)$$
$$=\left(a^2+\frac{4}{a^2}\right)+\left(\frac{4a}{b}+\frac{4b}{a}\right)+\left(b^2+\frac{4}{b^2}\right)$$
$$\geq 2\sqrt{a^2\cdot\frac{4}{a^2}}+2\sqrt{\frac{4a}{b}\cdot\frac{4b}{a}}+2\sqrt{b^2\cdot\frac{4}{b^2}}$$
$$=2\cdot 2+2\cdot 4+2\cdot 2=16$$

등호는 $a^2=\frac{4}{a^2}$, $\frac{4a}{b}=\frac{4b}{a}$, $b^2=\frac{4}{b^2}$일 때 성립하므로

$a^4=4,\ a^2=b^2,\ b^4=4 \qquad \therefore\ a=b=\sqrt{2}\ (\because\ a>0,\ b>0)$

따라서 x^2+y^2은 $a=b=\sqrt{2}$일 때 최솟값 16을 가지므로

$\alpha=16,\ \beta=\sqrt{2},\ \gamma=\sqrt{2}$

$\therefore\ \dfrac{\alpha}{\beta\gamma}=\dfrac{16}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=8$ 　답 8

다른 풀이 $x^2>0,\ y^2>0,\ a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+y^2\ge 2\sqrt{x^2\cdot y^2} \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$=2xy$$
$$=2\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right)$$
$$=2\left(ab+\frac{4}{ab}+4\right)$$
$$\ge 2\left(2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}+4\right) \quad \cdots\cdots ㉡$$
$$=2(2\cdot2+4)=16$$

㉠에서 등호는 $x=y$일 때, ㉡에서 등호는 $ab=2$일 때 성립한다.

$x=y$에서 　$a+\dfrac{2}{b}=b+\dfrac{2}{a}$

$\dfrac{ab+2}{b}=\dfrac{ab+2}{a} \qquad \therefore\ a=b$

이때 $ab=2$이므로 등호는 $a=b=\sqrt{2}$일 때 성립한다.

유형 24 산술평균과 기하평균의 관계 ; 합 또는 곱이 일정할 때

집중 공략 본책 134쪽

$a>0,\ b>0$일 때, $a+b\ge 2\sqrt{ab}$가 항상 성립하므로
➡ $a+b$가 일정하면 ab는 $a=b$일 때 최댓값을 갖는다.
➡ ab가 일정하면 $a+b$는 $a=b$일 때 최솟값을 갖는다.

0865 $x>0,\ y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+3y\ge 2\sqrt{2x\cdot3y}=2\sqrt{6xy}$

그런데 $2x+3y=6$이므로

$6\ge 2\sqrt{6xy}, \quad 3\ge\sqrt{6xy}$

위의 식의 양변을 제곱하면 　$9\ge 6xy$

$\therefore\ xy\le\dfrac{3}{2}$

이때 등호는 $2x=3y$일 때 성립하고 $2x+3y=6$이므로

$2x=3,\ 3y=3 \qquad \therefore\ x=\dfrac{3}{2},\ y=1$

따라서 xy는 $x=\dfrac{3}{2},\ y=1$일 때 최댓값 $\dfrac{3}{2}$을 가지므로

$\alpha=\dfrac{3}{2},\ \beta=\dfrac{3}{2},\ \gamma=1$

$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma=4$ 　답 ②

0866 $a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4a+2b\ge 2\sqrt{4a\cdot2b}=2\sqrt{8ab}$

그런데 $ab=18$이므로

$4a+2b\ge 2\sqrt{8\cdot18}$

$=24$ (단, 등호는 $2a=b$일 때 성립)

따라서 $4a+2b$의 최솟값은 24이다. 　답 24

다른 풀이 $ab=18$에서 $a>0$이므로 　$b=\dfrac{18}{a}$

$$\therefore\ 4a+2b=4a+2\cdot\frac{18}{a}=4a+\frac{36}{a}$$
$$\ge 2\sqrt{4a\cdot\frac{36}{a}}$$
$$=2\cdot12$$
$$=24\ (\text{단, 등호는 } a=3\text{일 때 성립})$$

$4a=\dfrac{36}{a}$에서 $a^2=9$
$\therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$

0867 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{4}{ab}$ 　$\cdots\cdots$ ㉠

한편 $a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\ge 2\sqrt{ab}$

그런데 $a+b=4$이므로

$4\ge 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

위의 식의 양변을 제곱하면 　$16\ge 4ab$

$\therefore\ \dfrac{4}{ab}\ge 1\ (\because\ ab>0)$

따라서 ㉠에서 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$의 최솟값은 1이다. 　답 1

0868 $x^2>0,\ y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4x^2+9y^2\ge 2\sqrt{4x^2\cdot9y^2}=12|xy|$ 　$\cdots$ ❶

그런데 $4x^2+9y^2=48$이므로

$48\ge 12|xy|, \quad |xy|\le 4$

$\therefore\ -4\le xy<0$ 또는 $0<xy\le 4$

$x\ne0,\ y\ne0$ (단, 등호는 $2|x|=3|y|$일 때 성립) 　$\cdots$ ❷

$4x^2=9y^2$에서
$(2x)^2=(3y)^2$
$\therefore\ 2|x|=3|y|$

따라서 xy의 최댓값은 4, 최솟값은 -4이므로 구하는 곱은

$4\cdot(-4)=-16$ 　$\cdots$ ❸

답 -16

채점 기준	비율
❶ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있다.	50 %
❷ xy의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ xy의 최댓값과 최솟값의 곱을 구할 수 있다.	20 %

0869 두 직선 $y=\dfrac{a}{3}x+2,\ y=\dfrac{1}{b}x-5$가 평행하므로

$\dfrac{a}{3}=\dfrac{1}{b} \qquad \therefore\ ab=3$

$\therefore\ (a+1)(b+3)=ab+3a+b+3=6+3a+b$

$a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$6+3a+b\ge 6+2\sqrt{3ab}$

그런데 $ab=3$이므로

$6+3a+b\ge 6+2\sqrt{3\cdot3}=12$ (단, 등호는 $3a=b$일 때 성립)

따라서 $(a+1)(b+3)$의 최솟값은 12이다. 　답 ②

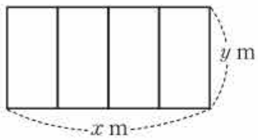
유형 25 산술평균과 기하평균의 관계 ; 도형에서의 활용

본책 134쪽

도형에서 두 선분의 길이를 각각 $x,\ y$로 놓고 주어진 값 또는 구하는 값을 $x+y,\ xy$로 나타낸다.

07 명제

0870 오른쪽 그림과 같이 바깥쪽 직사각형의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라 하면 줄의 전체 길이가 100 m이므로



$$2x+5y=100$$

이때 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2x+5y\geq 2\sqrt{2x\cdot 5y}=2\sqrt{10xy} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 등호는 $2x=5y$일 때 성립하고 이때 구역의 전체 넓이 xy가 최대가 되므로 $2x+5y=100$에서

$$2x=50,\ 5y=50 \qquad \therefore x=25,\ y=10$$

따라서 바깥쪽 직사각형의 둘레의 길이는

$$2(25+10)=70\,(\text{m})$$

답 70 m

다른 풀이 $2x+5y=100$에서 $y=20-\frac{2}{5}x$이므로 구역의 전체 넓이를 S라 하면

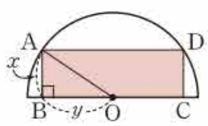
$$S=x\left(20-\frac{2}{5}x\right)=-\frac{2}{5}(x-25)^2+250\ (0<x<50)$$

따라서 S는 $x=25$일 때 최댓값 250을 갖는다.

$2x+5y=100$에 $x=25$를 대입하면

$$50+5y=100 \qquad \therefore y=10$$

0871 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=x$, $\overline{BO}=y$라 하면 직사각형의 넓이는



$$\overline{AB}\cdot\overline{BC}=x\cdot 2y=2xy$$

한편 직각삼각형 ABO에서

$$x^2+y^2=100$$

이때 $x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2\cdot y^2}=2xy$$

그런데 $x^2+y^2=100$이므로

$$2xy\leq 100 \text{ (단, 등호는 } x=y\text{일 때 성립)}$$

따라서 직사각형의 넓이의 최댓값은 100이다.

답 ③

0872 $\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=y$라 하면 펜스의 설치 비용은

$$\frac{1}{2}x+(x+2y)=\frac{3}{2}x+2y$$

에 비례한다.

또 텃밭의 넓이가 2700이므로

$$xy=2700 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{3}{2}x+2y\geq 2\sqrt{\frac{3}{2}x\cdot 2y}=2\sqrt{3xy} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에서 등호는 $\frac{3}{2}x=2y$, 즉 $y=\frac{3}{4}x$일 때 성립하고 이때 펜스의 설치 비용이 최소가 되므로 ㉠에 $y=\frac{3}{4}x$를 대입하면

$$x\cdot\frac{3}{4}x=2700, \qquad x^2=3600$$

$$\therefore x=60\ (\because x>0)$$

따라서 A 지점에서 B 지점까지의 펜스의 길이는 60이다.

답 60

0873 직선 OP의 기울기는 $\frac{b}{a}$이므로 점 P를 지나고 직선 OP에 수직인 직선의 방정식은

$$y-b=-\frac{a}{b}(x-a) \qquad \therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{a^2}{b}+b$$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$$0=-\frac{a}{b}x+\frac{a^2}{b}+b \qquad \therefore x=a+\frac{b^2}{a}$$

즉 $Q\left(a+\frac{b^2}{a},\ 0\right)$이므로 $\triangle$OQR의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\left(a+\frac{b^2}{a}\right)\cdot\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}$$

$\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$에서 $a^2=b^2$
$\therefore a=b$ ($\because a>0,\ b>0$)

$$=1 \text{ (단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립)}$$

따라서 $\triangle$OQR의 넓이의 최솟값은 1이다.

답 1

유형 26~28 코시-슈바르츠 부등식

본책 135, 136쪽

① $a,\ b,\ x,\ y$가 실수일 때,

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$$

$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{a}=\frac{y}{b}\text{일 때 성립}\right)$$

② $a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z$가 실수일 때,

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(ax+by+cz)^2$$

$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\text{일 때 성립}\right)$$

0874 $x,\ y$가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(2^2+3^2)(x^2+y^2)\geq(2x+3y)^2$$

그런데 $x^2+y^2=52$이므로

$$13\cdot 52\geq(2x+3y)^2, \qquad 13^2\cdot 2^2\geq(2x+3y)^2$$

$$\therefore -26\leq 2x+3y\leq 26$$

등호는 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$, 즉 $y=\frac{3}{2}x$일 때 성립하므로 $x^2+y^2=52$에 $y=\frac{3}{2}x$를 대입하면

$$x^2+\left(\frac{3}{2}x\right)^2=52, \qquad x^2=16$$

$$\therefore x=\pm4,\ y=\pm6 \text{ (복호동순)}$$

따라서 $2x+3y$는 $x=4$, $y=6$일 때 최댓값 26을 가지므로

$$\alpha=26,\ \beta=4,\ \gamma=6$$

$$\therefore \alpha+\beta+\gamma=36$$

답 36

0875 $x,\ y$가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2+2^2)(x^2+y^2)\geq(x+2y)^2$$

그런데 $x^2+y^2=5$이므로

$$25\geq(x+2y)^2$$

$$\therefore -5\leq x+2y\leq 5\ \left(\text{단, 등호는 } x=\frac{y}{2}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $x+2y$의 최댓값은 5, 최솟값은 -5이므로 구하는 곱은

$$5\cdot(-5)=-25$$

답 ①

0876 x, y, z가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$\{1^2+(-2)^2+3^2\}(x^2+y^2+z^2)\ge(x-2y+3z)^2$$

그런데 $x^2+y^2+z^2=2$이므로

$$28\ge(x-2y+3z)^2$$

$$\therefore\ -2\sqrt{7}\le x-2y+3z\le 2\sqrt{7}$$

$$\left(\text{단, 등호는 } x=-\frac{y}{2}=\frac{z}{3}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $x-2y+3z$의 최솟값은 $-2\sqrt{7}$이다. 답 ①

0877 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(3^2+1^2)(x^2+y^2)\ge(3x+y)^2$$

그런데 $x^2+y^2=a$이므로

$$10a\ge(3x+y)^2$$

$$\therefore\ -\sqrt{10a}\le 3x+y\le\sqrt{10a}\ \left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{3}=y\text{일 때 성립}\right)$$

… ❶

따라서 $3x+y$의 최댓값은 $\sqrt{10a}$, 최솟값은 $-\sqrt{10a}$이고 그 차가 20이므로

$$2\sqrt{10a}=20,\quad 10a=100\quad \therefore\ a=10$$

… ❷

답 10

채점 기준	비율
❶ $3x+y$의 값의 범위를 a를 이용하여 나타낼 수 있다.	60 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

0878 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1^2\right\}\{(2\sqrt{2}x)^2+y^2\}\ge(2x+y)^2$$

그런데 $8x^2+y^2=24$이므로

$$36\ge(2x+y)^2$$

이때 $x>0$, $y>0$이므로

$\dfrac{2\sqrt{2}x}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{y}{1}$에서 $4x=y$

$$0<2x+y\le 6\ (\text{단, 등호는 } 4x=y\text{일 때 성립})\ \cdots\cdots\ ㉠$$

또 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1^2\right\}\{(\sqrt{2x})^2+(\sqrt{y})^2\}\ge(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$$

$$\therefore\ \frac{3}{2}(2x+y)\ge(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$$

㉠에서 $0<\dfrac{3}{2}(2x+y)\le 9$이므로

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\le 9$$

$\dfrac{\sqrt{2x}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{y}}{1}$에서 $2\sqrt{x}=\sqrt{y}$ $\therefore\ 4x=y$

이때 $x>0$, $y>0$이므로

$$0<\sqrt{x}+\sqrt{y}\le 3\ (\text{단, 등호는 } 4x=y\text{일 때 성립})$$

따라서 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$의 최댓값은 3이다. 답 3

0879 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(3^2+4^2)(x^2+y^2)\ge(3x+4y)^2$$

그런데 $3x+4y=5$이므로

$$25(x^2+y^2)\ge 25$$

$$\therefore\ x^2+y^2\ge 1\ \left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{3}=\frac{y}{4}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 1이다. 답 ①

0880 a, b가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}(a^2+b^2)\ge\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)^2$$

그런데 $\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}=\sqrt{13}$이므로

$$\frac{13}{36}(a^2+b^2)\ge 13$$

$$\therefore\ a^2+b^2\ge 36\ (\text{단, 등호는 } 2a=3b\text{일 때 성립})$$

따라서 a^2+b^2의 최솟값은 36이다. 답 36

0881 ㄱ. $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+y\ge 2\sqrt{xy}$$

그런데 $x+y=9$이므로 $\quad 9\ge 2\sqrt{xy}$

$$\therefore\ \sqrt{xy}\le\frac{9}{2}\ (\text{단, 등호는 } x=y\text{일 때 성립})$$

ㄴ. x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2+1^2)(x^2+y^2)\ge(x+y)^2$$

그런데 $x+y=9$이므로

$$2(x^2+y^2)\ge 81$$

$$\therefore\ x^2+y^2\ge\frac{81}{2}\ (\text{단, 등호는 } x=y\text{일 때 성립})$$

ㄷ. $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2+1^2)\{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2\}\ge(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$$

그런데 $x+y=9$이므로

$$2\cdot 9\ge(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$$

이때 $x>0$, $y>0$이므로

$$0<\sqrt{x}+\sqrt{y}\le 3\sqrt{2}\ (\text{단, 등호는 } \sqrt{x}=\sqrt{y}\text{일 때 성립})$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0882 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y라 하면 원의 지름이 직사각형의 대각선이므로

$$x^2+y^2=2^2$$

한편 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2+1^2)(x^2+y^2)\ge(x+y)^2$$

$$2\cdot 4\ge(x+y)^2\quad \therefore\ (x+y)^2\le 8$$

이때 $x>0$, $y>0$이므로

$$0<x+y\le 2\sqrt{2}\ (\text{단, 등호는 } x=y\text{일 때 성립})$$

직사각형의 둘레의 길이는 $2(x+y)$이므로

$$0<2(x+y)\le 4\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최댓값은 $4\sqrt{2}$이다. 답 ④

0883 직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하면 직육면체의 대각선의 길이는

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=3\sqrt{3}$$

$$\therefore\ a^2+b^2+c^2=27$$

… ❶

한편 a, b, c가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2$$

$$3\cdot 27\ge(a+b+c)^2$$

$$\therefore\ (a+b+c)^2\le 81$$

이때 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로

$0<a+b+c\le 9$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립) ⋯ ❷

직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은 $4(a+b+c)$이므로

$0<4(a+b+c)\le 36$

따라서 구하는 최댓값은 36이다. ⋯ ❸

답 36

채점 기준	비율
❶ $a^2+b^2+c^2$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $a+b+c$의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

0884 세 원 O_1, O_2, O_3의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2, r_3이라 하면 $\overline{O_1O_3}=6$이므로

$r_1+2r_2+r_3=6$ ⋯⋯ ㉠

한편 r_1, r_2, r_3이 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+2^2+1^2)(r_1^2+r_2^2+r_3^2)\ge(r_1+2r_2+r_3)^2$

$6(r_1^2+r_2^2+r_3^2)\ge 36$ $\quad\therefore r_1^2+r_2^2+r_3^2\ge 6$

세 원의 넓이의 합은 $\pi(r_1^2+r_2^2+r_3^2)$이므로

$\pi(r_1^2+r_2^2+r_3^2)\ge 6\pi$

등호는 $r_1=\dfrac{r_2}{2}=r_3$일 때 성립하므로 ㉠에 $r_1=\dfrac{r_2}{2}$, $r_3=\dfrac{r_2}{2}$를 대입하면

$\dfrac{r_2}{2}+2r_2+\dfrac{r_2}{2}=6,\quad 3r_2=6\quad\therefore r_2=2$

따라서 세 원의 넓이의 합은 $r_1=1$, $r_2=2$, $r_3=1$일 때 최소이므로 구하는 반지름의 길이의 합은

$1+2+1=4$

답 4

0885 1st $a=0$일 때, 조건 p를 만족시키는 실수 x의 값을 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $a=0$일 때, $a(x-1)(x-2)<0$에서

$0\cdot(x-1)(x-2)<0$

위의 부등식을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로

$P=\varnothing$

2nd $a>0$, $b=0$일 때, 두 진리집합 P, Q를 각각 구하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $a>0$일 때, $a(x-1)(x-2)<0$에서

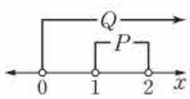
$(x-1)(x-2)<0\quad\therefore 1<x<2$

$\therefore P=\{x|1<x<2\}$

$b=0$일 때, $x>b$에서 $\quad x>0$

$\therefore Q=\{x|x>0\}$

따라서 오른쪽 그림에서



$P\subset Q$

3rd $a<0$, $b=3$일 때, 두 진리집합 P, Q 사이의 포함 관계를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $a<0$일 때, $a(x-1)(x-2)<0$에서

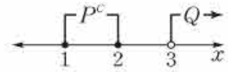
$(x-1)(x-2)>0\quad\therefore x<1$ 또는 $x>2$

$\therefore P=\{x|x<1$ 또는 $x>2\}$

$b=3$일 때, $x>b$에서 $\quad x>3$

$\therefore Q=\{x|x>3\}$

이때 $P^C=\{x|1\le x\le 2\}$이므로 오른쪽 그림에서



$P^C\not\subset Q$

따라서 명제 '$\sim p$이면 q이다.'는 거짓이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

0886 1st 명제의 참, 거짓과 진리집합의 관계를 이용하여 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $P\subset Q^C$이므로 명제 $p\longrightarrow\sim q$는 참이다.

$\therefore p\Rightarrow q$

ㄴ. $P\not\subset R$이므로 명제 $p\longrightarrow r$는 거짓이다.

$\therefore p\not\Rightarrow\sim r$

ㄷ. $Q\subset R$이므로 $\quad R^C\subset Q^C$

따라서 명제 $\sim r\longrightarrow\sim q$는 참이다.

$\therefore\sim r\Rightarrow q$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

0887

좌표평면 위에 두 점 A(1, 4), B(−3, 0)과 직선 ❷l: $y=-3x+k$가 있다. ❶명제 '직선 l 위의 어떤 점 P에 대하여 $\angle\text{APB}=90°$이다.'가 참이 되도록 하는 ❸정수 k의 개수를 구하시오. (단, 점 P는 두 점 A, B가 아니다.)

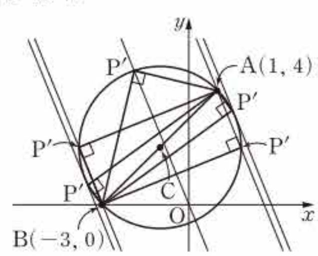
점 P는 지름이 $\overline{\text{AB}}$인 원 위에 있다.

❶이 참이 되려면 ❷가 $\overline{\text{AB}}$를 지름으로 하는 원과 만나는 점이 점 P이어야 함을 이용하여 k의 값의 범위를 구한 후 ❸을 구한다.

1st 주어진 명제가 참이 되는 경우를 이해한다.

주어진 명제가 참이 되려면 $\angle\text{APB}=90°$를 만족시키는 직선 l 위의 점 P가 적어도 하나 존재하면 된다.

$\overline{\text{AB}}$를 지름으로 하는 원을 C라 하면 원 C 위의 점 중에서 A, B를 제외한 모든 점 P′에 대하여 $\angle\text{AP}'\text{B}=90°$이다.



따라서 주어진 명제가 참이 되려면 원 C와 직선 l이 두 점 A, B가 아닌 어떤 점에서 만나야 한다. ⋯ ❶

2nd 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 k의 값의 범위를 구한다.

원 C의 중심을 C라 하면 점 C는 $\overline{\text{AB}}$의 중점이므로

$\text{C}\left(\dfrac{1-3}{2}, \dfrac{4+0}{2}\right)$, 즉 C(−1, 2)

원 C의 반지름의 길이는

$\dfrac{1}{2}\overline{\text{AB}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-3-1)^2+(-4)^2}=2\sqrt{2}$

이때 원 C와 직선 l이 만나려면 원의 중심 C(−1, 2)와 직선 $y=-3x+k$, 즉 $3x+y-k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $2\sqrt{2}$보다 작거나 같아야 하므로

$$\frac{|-3+2-k|}{\sqrt{3^2+1^2}} \le 2\sqrt{2}$$

$|-k-1| \le 4\sqrt{5}$, $\quad -4\sqrt{5} \le k+1 \le 4\sqrt{5}$

$\therefore -4\sqrt{5}-1 \le k \le 4\sqrt{5}-1$ ⋯ ❷

3rd 정수 k의 개수를 구한다.

$7 < 4\sqrt{5}-1 < 8$, $-10 < -4\sqrt{5}-1 < -9$이므로 정수 k는 -9, -8, -7, ⋯, 6, 7의 17개이다. ⋯ ❸

답 17

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제가 참이 되는 경우를 알 수 있다.	30 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
❸ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	10 %

참고 직선 l이 점 A(또는 점 B)를 지날 때에는 원 C와 두 점에서 만나므로 두 점 중 점 A(또는 점 B)가 아닌 점이 점 P가 된다.

0888 **1st** 명제 $p \longrightarrow q$의 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이 되도록 하는 조건을 구한다.

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이 되어야 한다.

$\sim q$: $x^2+2x-3 \ge 0$에서 $\quad (x+3)(x-1) \ge 0$

$\therefore x \le -3$ 또는 $x \ge 1$

$\sim p$: $(x^2-mx+m)(x^2+2x-3) \ge 0$

명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이 되려면 $x \le -3$ 또는 $x \ge 1$에서 $\underline{x^2-mx+m \ge 0}$이어야 한다. $x \le -3$ 또는 $x \ge 1$에서 $x^2+2x-3 \ge 0$이므로 $x^2-mx+m \ge 0$이어야 한다.

즉 $f(x)=x^2-mx+m$이라 할 때, $x \le -3$ 또는 $x \ge 1$에서 $f(x) \ge 0$이어야 한다.

2nd 실수 m의 값의 범위를 구한다.

이차방정식 $x^2-mx+m=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-m)^2-4m=m(m-4)$

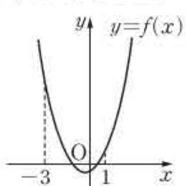
(i) $D \le 0$, 즉 $0 \le m \le 4$일 때,

모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이다.

(ii) $D > 0$, 즉 $m < 0$ 또는 $m > 4$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

이때 $x \le -3$ 또는 $x \ge 1$에서 $f(x) \ge 0$이려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



ⓘ $f(-3)=9+4m \ge 0$에서

$m \ge -\frac{9}{4}$

ⓘⓘ $f(1)=1 \ge 0$

ⓘⓘⓘ $-3 < \frac{m}{2} < 1$에서 $\quad -6 < m < 2$

$y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{m}{2}$이다.

이상에서 $\quad -\frac{9}{4} \le m < 2$

이때 $m < 0$ 또는 $m > 4$이므로 $\quad -\frac{9}{4} \le m < 0$

(i), (ii)에서 $\quad -\frac{9}{4} \le m \le 4$

3rd ab의 값을 구한다.

$a=4$, $b=-\frac{9}{4}$이므로 $\quad ab=-9$

답 -9

0889 **1st** 진호가 1등일 때, 나머지 학생의 말에 모순이 없는지 확인한다.

(i) 진호가 1등일 때,

A가 말한 것 중 하나는 틀리므로 재환이는 2등이 아니다.

또 C가 말한 것 중 진호가 3등인 것은 틀렸으므로 성민이는 4등이다.

따라서 B가 말한 것 중 성민이가 2등인 것은 틀렸으므로 소희도 4등이 되어 같은 등수의 선수는 없다는 조건에 모순이다. ⋯ ❶

2nd 재환이가 2등일 때, 나머지 학생의 말에 모순이 없는지 확인한다.

(ii) 재환이가 2등일 때,

A가 말한 것 중 하나는 틀리므로 진호는 1등이 아니다.

또 B가 말한 것 중 성민이가 2등인 것은 틀렸으므로 소희는 4등이다.

따라서 C가 말한 것 중 성민이가 4등인 것은 틀렸으므로 진호는 3등이다.

이때 같은 등수의 선수는 없으므로 성민이는 1등이다. ⋯ ❷

3rd 1등을 한 선수와 3등을 한 선수를 구한다.

(i), (ii)에서 1등을 한 선수는 성민이고, 3등을 한 선수는 진호이다. ⋯ ❸

답 성민, 진호

채점 기준	비율
❶ 진호가 1등일 때 모순이 없는지 확인할 수 있다.	40 %
❷ 재환이가 2등일 때 모순이 없는지 확인할 수 있다.	40 %
❸ 1등을 한 선수와 3등을 한 선수를 차례대로 나열할 수 있다.	20 %

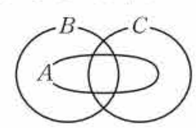
0890 **1st** 집합의 연산의 성질을 이용하여 ㄱ, ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. p: $A \cap B = A$에서 $\quad A \subset B$

q: $A - B = \varnothing$에서 $\quad A \subset B$

따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄴ. 세 집합 A, B, C가 오른쪽 벤 다이어그램과 같으면 $A \subset (B \cup C)$이지만 $A \not\subset B$, $A \not\subset C$이다.



$\therefore p \not\Longrightarrow q$

$A \subset B$ 또는 $A \subset C$이면 $A \subset (B \cup C)$이므로

$q \Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

2nd 두 점 사이의 거리를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $a=2$, $b=1$, $c=4$이면 $|a-b| < |a-c|$이지만 $b < a < c$이므로

$p \not\Longrightarrow q$

$|a-b|$는 수직선 위에서 a를 나타내는 점과 b를 나타내는 점 사이의 거리이므로 $a < b < c$이면 $|a-b| < |a-c|$이다.

$\therefore q \Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

3rd 실수의 성질을 이용하여 ㄹ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄹ. $a^2+b^2-ab=0 \Longleftrightarrow \underbrace{\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2=0}_{a-\frac{1}{2}b=0,\ b=0}$

$\Longleftrightarrow a=b=0$

따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

이상에서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ③

0891 1st 두 조건 p, q의 진리집합의 포함 관계를 구한다.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 p가 q이기 위한 필요조건이 되어야 하므로

$Q \subset P$

2nd 경우를 나누어 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구한다.

$(x-1)^2 \le 0$에서 $x=1$이므로 $P=\{1\}$

(i) $Q=\{1\}$일 때,

이차방정식 $2x^2-(3k+7)x+2=0$이 $x=1$을 중근으로 가지므로

$2x^2-(3k+7)x+2=\underbrace{2(x-1)^2}_{2x^2-4x+2}$

$3k+7=4 \qquad \therefore k=-1$

(ii) $Q=\varnothing$일 때,

이차방정식 $2x^2-(3k+7)x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(3k+7)\}^2-4\cdot2\cdot2<0$

$3k^2+14k+11<0, \qquad (3k+11)(k+1)<0$

$\therefore -\frac{11}{3}<k<-1$

3rd 모든 정수 k의 값의 합을 구한다.

(i), (ii)에서 $-\frac{11}{3}<k\le-1$

따라서 정수 k는 -3, -2, -1이므로 구하는 합은

$-3+(-2)+(-1)=-6$ 답 ②

0892 1st 이차부등식이 항상 성립할 조건을 이용하여 정수 a의 값을 구한다.

실수 전체의 집합을 U라 하고, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

명제 '모든 실수 x에 대하여 p이다.'가 참이 되려면 $P=U$이어야 하므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+1\ge0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+2ax+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-1\le0, \qquad (a+1)(a-1)\le0$

$\therefore -1\le a\le1$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1이다.

2nd 진리집합의 포함 관계를 이용하여 정수 b의 값을 구한다.

명제 'p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.'가 참이 되려면 $P\subset Q^C$이어야 하고, $P=U$이므로 $U\subset Q^C$, 즉 $Q^C=U$이어야 한다.

즉 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2bx+9>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+2bx+9=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=b^2-9<0, \qquad (b+3)(b-3)<0$

$\therefore -3<b<3$

따라서 정수 b는 -2, -1, 0, 1, 2이다.

3rd 순서쌍 (a, b)의 개수를 구한다.

정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 $3\cdot5=15$ 답 ①

0893 1st 귀류법을 이용하여 $\sqrt{n^2-1}$이 무리수임을 증명한다.

$p^2(n^2-1)=q^2$에서 p는 q^2의 약수이고 p, q는 서로소인 자연수이므로 $p=1$이다.

따라서 $1^2\cdot(n^2-1)=q^2$이므로 $n^2=\boxed{q^2+1}$

자연수 k에 대하여

(i) $q=2k$일 때, $n^2=(2k)^2+1=4k^2+1$이고

$(2k)^2<4k^2+1<\underbrace{(2k+1)^2}_{4k^2+4k+1}$

이므로

$(2k)^2<n^2<\boxed{(2k+1)^2}$

$\therefore 2k<n<2k+1$ — $2k$, $2k+1$은 연속하는 두 자연수이므로 그 사이에 자연수가 존재하지 않는다.

이때 위의 부등식을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ii) $q=2k+1$일 때, $n^2=(2k+1)^2+1=4k^2+4k+2$이고

$(2k+1)^2<4k^2+4k+2<\underbrace{(2k+2)^2}_{4k^2+8k+4}$

이므로

$(2k+1)^2<n^2<(2k+2)^2$

$\therefore 2k+1<n<2k+2$

이때 위의 부등식을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $\sqrt{n^2-1}$은 무리수이다.

2nd $f(q)$, $g(k)$를 구하여 $f(2)+g(3)$의 값을 구한다.

$f(q)=q^2+1$, $g(k)=(2k+1)^2$이므로

$f(2)+g(3)=5+49=54$ 답 ③

0894 1st 실수의 성질을 이용하여 ㄱ, ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $(a+b)^2-3ab=a^2-ab+b^2=\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\ge0$

$\therefore (a+b)^2\ge3ab$ (단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립)

ㄴ. $a^2+b^2+1-2(a+b-ab)$

$=a^2+b^2+(-1)^2+2a\cdot(-1)+2b\cdot(-1)+2ab$

$=(a+b-1)^2\ge0$

$\therefore a^2+b^2+1\ge2(a+b-ab)$

(단, 등호는 $a+b=1$일 때 성립)

2nd 제곱의 차를 이용하여 ㄷ, ㄹ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $(\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|})^2-\{\sqrt{2(|a|+|b|)}\}^2$

$=|a|+2\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}+|b|-2(|a|+|b|)$

$=-(|a|-2\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}+|b|)$

$=-\{(\sqrt{|a|})^2-2\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}+(\sqrt{|b|})^2\}$

$=-(\sqrt{|a|}-\sqrt{|b|})^2\le0$

$\therefore (\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|})^2\le\{\sqrt{2(|a|+|b|)}\}^2$

그런데 $\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|}\ge0$, $\sqrt{2(|a|+|b|)}\ge0$이므로

$\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|}\le\sqrt{2(|a|+|b|)}$

(단, 등호는 $\underbrace{|a|=|b|}$일 때 성립)

$\sqrt{|a|}-\sqrt{|b|}=0$에서 $\sqrt{|a|}=\sqrt{|b|}$ $\therefore |a|=|b|$

ㄹ. $(|a|+|b|)^2-(\sqrt{a^2+b^2})^2$

$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a^2+b^2)$

$=a^2+2|ab|+b^2-a^2-b^2$

$=2|ab|\ge0$

$\therefore (|a|+|b|)^2 \ge (\sqrt{a^2+b^2})^2$

그런데 $|a|+|b| \ge 0$, $\sqrt{a^2+b^2} \ge 0$이므로

$|a|+|b| \ge \sqrt{a^2+b^2}$ (단, 등호는 $ab=0$일 때 성립)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ③

0895 1st 부등식의 좌변을 전개하여 변형한다.

$$(x-y)\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{y}\right)=1-\frac{4x}{y}-\frac{y}{x}+4$$

$$=5-\left(\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}\right) \quad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ❶$$

2nd 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $(x-y)\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{y}\right)$의 값의 범위를 구한다.

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{4x}{y}+\frac{y}{x} \ge 2\sqrt{\frac{4x}{y}\cdot\frac{y}{x}}$$

$$=2\cdot 2$$

$$=4 \text{ (단, 등호는 } 2x=y\text{일 때 성립)}$$

$\frac{4x}{y}=\frac{y}{x}$에서 $4x^2=y^2$

$\therefore 2x=y$ ($\because x>0$, $y>0$)

㉠에서

$$5-\left(\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}\right) \le 5-4=1$$

이므로

$$(x-y)\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{y}\right) \le 1 \quad \cdots ❷$$

3rd k의 최솟값을 구한다.

$(x-y)\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{y}\right) \le k$가 항상 성립하려면 $k \ge 1$이어야 하므로 k의 최솟값은 1이다. ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식의 좌변을 변형할 수 있다.	30 %
❷ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $(x-y)\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{y}\right)$의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
❸ k의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

0896 1st 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 ㄱ, ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $f(2)g(2)=(a_1+a_2)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)$

$$=2+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}$$

$$\ge 2+2\sqrt{\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}}$$

$$=4 \text{ (단, 등호는 } a_1=a_2\text{일 때 성립)}$$

ㄴ. $f(n)+g(n)=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$

$$=\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)+\cdots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$$

$$\ge 2\sqrt{a_1\cdot\frac{1}{a_1}}+2\sqrt{a_2\cdot\frac{1}{a_2}}+\cdots+2\sqrt{a_n\cdot\frac{1}{a_n}}$$

$$=\underbrace{2+2+\cdots+2}_{n\text{개}}=2n$$

(단, 등호는 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$일 때 성립)

2nd ㄴ을 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $f(n)$, $g(n)$이 모두 n보다 작다고 가정하면

$$f(n)+g(n)<2n$$

이것은 ㄴ에 모순이다.

따라서 $f(n)$, $g(n)$ 중 적어도 하나는 n보다 크거나 같다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

0897

그림과 같이 ❶ $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=3$, $\angle A=30°$인 삼각형 ABC

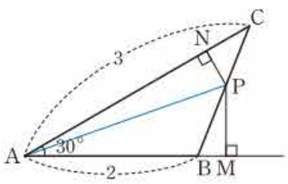
$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin A$

의 변 BC 위의 점 P에서 두 직선 AB, AC 위에 내린

$\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle APC=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{PM}+\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{PN}$

수선의 발을 각각 M, N이라 하자. ❷ $\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}$의 최솟값이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

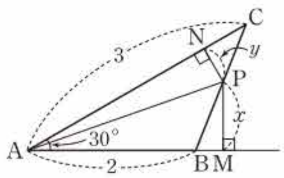


❶을 이용하여 $\overline{PM}$, $\overline{PN}$ 사이의 관계식을 구한 후 ❷의 최솟값을 구할 수 있도록 식을 변형한다. 이때 $\overline{PM}>0$, $\overline{PN}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

1st $\overline{PM}=x$, $\overline{PN}=y$라 하고 $\triangle ABC$의 넓이를 이용하여 x, y 사이의 관계식을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{PM}=x$, $\overline{PN}=y$라 하면

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}=\frac{2}{x}+\frac{3}{y}$$



$\overline{AP}$를 그으면

$\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle APC$이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\sin 30°=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot y$$

$$\therefore 2x+3y=3$$

2nd 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}$의 최솟값을 구한다.

$$(2x+3y)\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)=4+\frac{6x}{y}+\frac{6y}{x}+9$$

$$=13+\frac{6x}{y}+\frac{6y}{x} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\frac{x}{y}>0$, $\frac{y}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{6x}{y}+\frac{6y}{x} \ge 2\sqrt{\frac{6x}{y}\cdot\frac{6y}{x}}$$

$$=2\cdot 6=12$$

이때 $2x+3y=3$이므로 ㉠에서

$3\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)\geq 13+12=25$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

$\therefore \frac{2}{x}+\frac{3}{y}\geq\frac{25}{3}$

$\frac{6x}{y}=\frac{6y}{x}$에서 $x^2=y^2$
$\therefore x=y\ (\because x>0,\ y>0)$

따라서 $\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}$의 최솟값은 $\frac{25}{3}$이다.

3rd $p+q$의 값을 구한다.

$p=3,\ q=25$이므로

$p+q=28$ 답 28

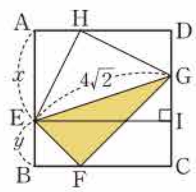
0898 **1st** $\triangle$EFG의 넓이를 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

$\triangle EFG=\square EBCG-\triangle EBF-\triangle GFC$

$=\frac{1}{2}(x+y)^2-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2$

$=xy$

2nd 피타고라스 정리를 이용하여 x, y 사이의 관계식을 구한다.



오른쪽 그림과 같이 점 E에서 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{EI}=\overline{BC}=x+y$,

$\overline{IG}=\overline{CG}-\overline{BE}=x-y$

이므로 직각삼각형 EIG에서

$(x+y)^2+(x-y)^2=(4\sqrt{2})^2$

$2x^2+2y^2=32 \qquad \therefore x^2+y^2=16$

3rd 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $\triangle$EFG의 넓이의 최댓값을 구한다.

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2y^2}=2xy$

이때 $x^2+y^2=16$이므로

$2xy\leq 16$

$\therefore xy\leq 8$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

따라서 $\triangle$EFG의 넓이의 최댓값은 8이다. 답 ②

참고 $x=y$이면 $\triangle$EIG가 만들어지지 않지만 $x+y=4\sqrt{2}$에서 $x=y=2\sqrt{2}$이므로 $x^2+y^2=16$을 만족시킨다.

0899 **1st** x 이외의 문자들을 x에 대한 식으로 나타낸다.

$x+y+z=1$에서

$y+z=1-x$ ...... ㉠

$x^2+y^2+z^2=3$에서

$y^2+z^2=3-x^2$ ...... ㉡

구하는 것이 x의 최댓값, 최솟값이므로 x 이외의 문자들을 x에 대한 식으로 나타낸다.

2nd 코시-슈바르츠 부등식을 이용하여 x의 값의 범위를 구한다.

y, z는 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(y^2+z^2)\geq(y+z)^2$ ...... ㉢

㉢에 ㉠, ㉡을 대입하면

$2(3-x^2)\geq(1-x)^2, \qquad 3x^2-2x-5\leq 0$

$(x+1)(3x-5)\leq 0$

$\therefore -1\leq x\leq\frac{5}{3}$ (단, 등호는 $y=z$일 때 성립)

3rd $3M+m$의 값을 구한다.

$M=\frac{5}{3}$, $m=-1$이므로 $\qquad 3M+m=4$ 답 4

다른 풀이 $x+y+z=1$에서

$y+z=1-x$ ...... ㉠

$x^2+y^2+z^2=3$에서

$y^2+z^2=3-x^2$ ...... ㉡

$(y+z)^2=y^2+z^2+2yz$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$(1-x)^2=3-x^2+2yz$

$\therefore yz=x^2-x-1$ ...... ㉢

㉠, ㉢에서 y, z는 t에 대한 이차방정식

$t^2-(y+z)t+yz=0$, 즉 $t^2-(1-x)t+x^2-x-1=0$

의 두 실근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(1-x)\}^2-4(x^2-x-1)\geq 0$

등호는 중근을 가질 때, 즉 $y=z$일 때 성립한다.

$3x^2-2x-5\leq 0, \qquad (x+1)(3x-5)\leq 0$

$\therefore -1\leq x\leq\frac{5}{3}$

0900 **1st** 직각삼각형 ABC의 넓이를 이용하여 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

$\triangle ABC=\triangle PAB+\triangle PBC+\triangle PCA$이므로

$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot a+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot b+\frac{1}{2}\cdot 8\cdot c$

$\therefore 5a+3b+4c=24$

2nd 코시-슈바르츠 부등식을 이용하여 $\frac{5}{a}+\frac{3}{b}+\frac{4}{c}$의 최솟값을 구한다.

a, b, c는 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$\{(\sqrt{5a})^2+(\sqrt{3b})^2+(\sqrt{4c})^2\}\left\{\left(\sqrt{\frac{5}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{4}{c}}\right)^2\right\}$

$\geq(5+3+4)^2$

이때 $5a+3b+4c=24$이므로

$24\left(\frac{5}{a}+\frac{3}{b}+\frac{4}{c}\right)\geq 144$

$\therefore \frac{5}{a}+\frac{3}{b}+\frac{4}{c}\geq 6$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

따라서 $\frac{5}{a}+\frac{3}{b}+\frac{4}{c}$의 최솟값은 6이다. 답 6

참고 등호는 $\frac{\sqrt{\frac{5}{a}}}{\sqrt{5a}}=\frac{\sqrt{\frac{3}{b}}}{\sqrt{3b}}=\frac{\sqrt{\frac{4}{c}}}{\sqrt{4c}}$일 때 성립하므로

$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c} \qquad \therefore a=b=c$

Ⅲ. 함수

08 함수

0901 X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 4, 5의 2개이므로 함수가 아니다. 답 함수가 아니다.

0902 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.
$\therefore$ 정의역: $\{1, 3, 5, 7\}$, 공역: $\{1, 2\}$, 치역: $\{1, 2\}$
답 풀이 참조

0903 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.
$\therefore$ 정의역: $\{-1, 0, 1\}$, 공역: $\{1, 3, 5, 7\}$, 치역: $\{1, 5, 7\}$
답 풀이 참조

0904 X의 원소 2, 4에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다. 답 함수가 아니다.

0905 답 정의역: 실수 전체의 집합, 치역: 실수 전체의 집합

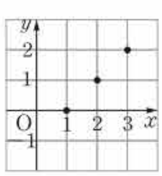
0906 답 정의역: 실수 전체의 집합, 치역: $\{y \mid y \le 4\}$

0907 답 정의역: $\{x \mid x \ne 0$인 실수$\}$, 치역: $\{y \mid y \ne 0$인 실수$\}$

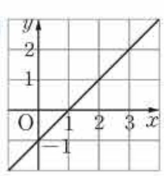
0908 $f(-1)=g(-1)=1$, $f(1)=g(1)=1$이므로
$f=g$ 답 서로 같은 함수이다.

0909 $f(-1)=g(-1)=-1$이지만 $f(1)=1$, $g(1)=-1$에서 $f(1) \ne g(1)$이므로
$f \ne g$ 답 서로 같은 함수가 아니다.

0910 답



0911 답



0912 답 ○

0913 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 그래프가 만나지 않거나 두 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다. 답 ×

0914 답 ㄴ, ㄹ

0915 답 ㄴ, ㄹ

0916 답 ㄹ

0917 답 ㄱ

0918 답 ㄱ, ㄷ

0919 답 ㄱ, ㄷ

0920 답 ㄷ

0921 답 ㄴ

0922 $(g \circ f)(6)=g(f(6))=g(a)=6$ 답 6

0923 $(g \circ f)(8)=g(f(8))=g(d)=6$ 답 6

0924 $(f \circ g)(b)=f(g(b))=f(8)=d$ 답 d

0925 $(f \circ g)(c)=f(g(c))=f(2)=b$ 답 b

0926 $(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(3x-1)$
$=(3x-1)^2=9x^2-6x+1$
답 $(g \circ f)(x)=9x^2-6x+1$

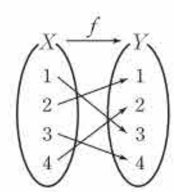
0927 $(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=3x^2-1$
답 $(f \circ g)(x)=3x^2-1$

0928 $(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(3x-1)$
$=3(3x-1)-1=9x-4$
답 $(f \circ f)(x)=9x-4$

0929 $(g \circ g)(x)=g(g(x))=g(x^2)=(x^2)^2=x^4$
답 $(g \circ g)(x)=x^4$

0930 $(f \circ g)(x)=f(2x-1)=(2x-1)+1=2x$이므로
$((f \circ g) \circ h)(x)=(f \circ g)(x^2)=2x^2$
$(g \circ h)(x)=g(x^2)=2x^2-1$이므로
$(f \circ (g \circ h))(x)=f(2x^2-1)=(2x^2-1)+1=2x^2$
따라서 $(f \circ g) \circ h=f \circ (g \circ h)$가 성립한다. 답 풀이 참조

0931 (1) 함수 f의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하므로 대응 관계를 완성하면 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f(2)=1$, $f^{-1}(2)=4$이므로
$f(2)+f^{-1}(2)=5$
(3) $f^{-1}(3)=1$이므로 $f^{-1}(a)+1=3$에서
$f^{-1}(a)=2 \quad \therefore a=1$
답 풀이 참조

0932 $f^{-1}(3)=a$에서 $f(a)=3$이므로
$-a+4=3 \quad \therefore a=1$ 답 1

0933 $f^{-1}(a)=5$에서 $f(5)=a$이므로
$a=-5+4=-1$ 답 -1

0934 함수 $y=2x+3$은 실수 전체의 집합 R에서 R로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=2x+3$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$2x=y-3 \quad \therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ 답 $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

0935 함수 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$은 실수 전체의 집합 R에서 R로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$\frac{1}{2}x=y+\frac{1}{4} \quad \therefore x=2y+\frac{1}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=2x+\frac{1}{2}$ 답 $y=2x+\frac{1}{2}$

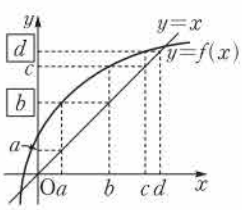
0936 답 3

0937 $(f^{-1})^{-1}(3)=f(3)=1$ 답 1

0938 $(f\circ f^{-1})(5)=f(f^{-1}(5))=f(2)=5$ 답 5

0939 $(f^{-1}\circ f)(4)=f^{-1}(f(4))=f^{-1}(7)=4$ 답 4

0940 답



0941 $f^{-1}(c)=k$라 하면 $f(k)=c$이므로

$k=b \quad \therefore f^{-1}(c)=b$ 답 b

0942 $f^{-1}(d)=l$이라 하면 $f(l)=d$이므로

$l=c \quad \therefore f^{-1}(d)=c$ 답 c

0943 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같으므로 $4x+6=x$에서

$3x=-6 \quad \therefore x=-2$

따라서 구하는 교점의 좌표는

$(-2, -2)$ 답 $(-2, -2)$

교점은 직선 $y=x$ 위의 점이므로 x좌표와 y좌표가 같다.

0944 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같으므로 $-2x+3=x$에서

$3x=3 \quad \therefore x=1$

따라서 구하는 교점의 좌표는

$(1, 1)$ 답 $(1, 1)$

0945 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같으므로 $-\frac{2}{3}x+5=x$에서

$\frac{5}{3}x=5 \quad \therefore x=3$

따라서 구하는 교점의 좌표는

$(3, 3)$ 답 $(3, 3)$

0946 (1) $x\ge-2$일 때, $x+2\ge0$이므로

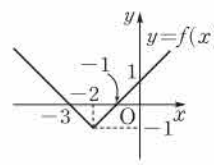
$f(x)=x+2-1=x+1$

(2) $x<-2$일 때, $x+2<0$이므로

$f(x)=-(x+2)-1=-x-3$

(3) $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 치역은 $\{y|y\ge-1\}$이다.

답 풀이 참조



0947 $|x|+|y|=1$에서

(i) $x\ge0$, $y\ge0$일 때, $x+y=1 \quad \therefore y=-x+1$

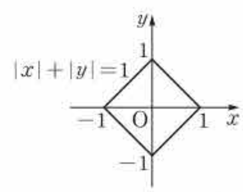
(ii) $x\ge0$, $y<0$일 때, $x-y=1 \quad \therefore y=x-1$

(iii) $x<0$, $y\ge0$일 때, $-x+y=1 \quad \therefore y=x+1$

(iv) $x<0$, $y<0$일 때, $-x-y=1 \quad \therefore y=-x-1$

이상에서 $|x|+|y|=1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



참고 $|x|+|y|=1$의 그래프는 $x+y=1\,(x\ge0,\ y\ge0)$의 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동하여 그릴 수도 있다.

0948 $|x|-|y|=2$에서

(i) $x\ge0$, $y\ge0$일 때, $x-y=2 \quad \therefore y=x-2$

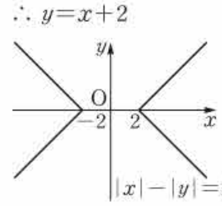
(ii) $x\ge0$, $y<0$일 때, $x+y=2 \quad \therefore y=-x+2$

(iii) $x<0$, $y\ge0$일 때, $-x-y=2 \quad \therefore y=-x-2$

(iv) $x<0$, $y<0$일 때, $-x+y=2 \quad \therefore y=x+2$

이상에서 $|x|-|y|=2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



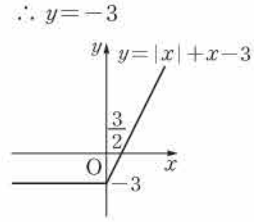
0949 $y=|x|+x-3$에서

(i) $x\ge0$일 때, $y=x+x-3 \quad \therefore y=2x-3$

(ii) $x<0$일 때, $y=-x+x-3 \quad \therefore y=-3$

(i), (ii)에서 $y=|x|+x-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



0950 $y=|x+2|+|x-1|$에서

(i) $x<-2$일 때, $x+2<0$, $x-1<0$이므로

$y=-(x+2)-(x-1)$ $\quad\therefore y=-2x-1$

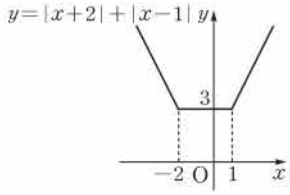
(ii) $-2\le x<1$일 때, $x+2\ge0$, $x-1<0$이므로

$y=x+2-(x-1)$ $\quad\therefore y=3$

(iii) $x\ge1$일 때, $x+2>0$, $x-1\ge0$이므로

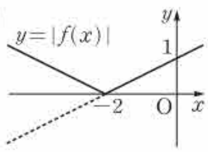
$y=x+2+x-1$ $\quad\therefore y=2x+1$

이상에서 $y=|x+2|+|x-1|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

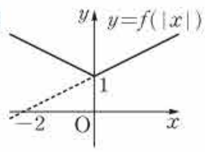


답 풀이 참조

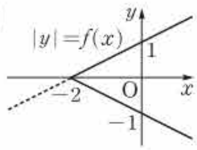
0951 답



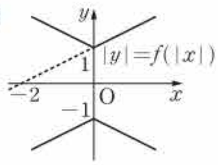
0952 답



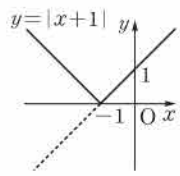
0953 답



0954 답

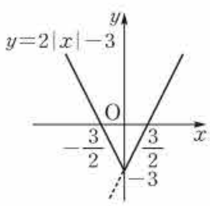


0955 $y=|x+1|$의 그래프는 $y=x+1$의 그래프에서 $y\ge0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

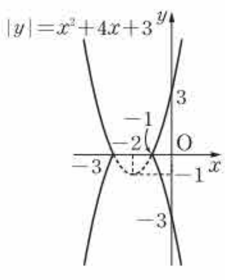


답 풀이 참조

0956 $y=2|x|-3$의 그래프는 $y=2x-3$의 그래프에서 $x\ge0$인 부분만 남기고, $x<0$인 부분은 $x\ge0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. 답 풀이 참조



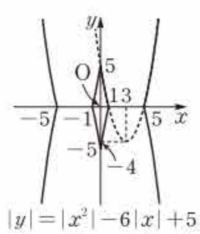
0957 $|y|=x^2+4x+3$의 그래프는 $y=x^2+4x+3=(x+2)^2-1$의 그래프에서 $y\ge0$인 부분만 남기고, $y<0$인 부분은 $y\ge0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. 답 풀이 참조



0958 $|y|=|x^2|-6|x|+5$
$=|x|^2-6|x|+5$

의 그래프는

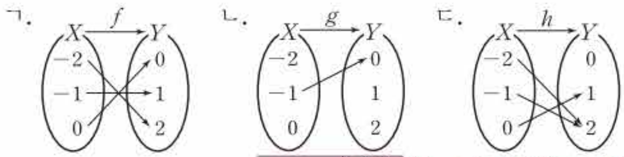
$y=x^2-6x+5=(x-3)^2-4$의 그래프에서 $x\ge0$, $y\ge0$인 부분만 남기고, 이 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. 답 풀이 참조



유형 01 함수의 뜻 본책 148쪽

두 집합 X, Y에 대하여
① X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응한다.
➡ X에서 Y로의 함수이다.
② X의 각 원소에 대응하는 Y의 원소가 없거나 2개 이상이다.
➡ X에서 Y로의 함수가 아니다.

0959 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



이상에서 함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다. └ X의 원소 -2와 0에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

답 ③

0960 ㄱ, ㄹ. 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.

ㄴ. 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 그래프가 만나지 않거나 무수히 많은 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

ㄷ. 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 그래프가 만나지 않거나 두 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

이상에서 함수의 그래프인 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄹ

0961 ① $-1\le x\le1$에서 $\quad 0\le x+1\le2$

$\therefore 0\le f(x)\le2$

② $-1\le x\le1$에서 $\quad -2\le-2x\le2$

$-1\le-2x+1\le3$ $\quad\therefore -1\le f(x)\le3$

③ $-1\le x\le1$에서 $\quad -2\le x-1\le0$

$0\le|x-1|\le2$, $\quad 0\le\frac{1}{2}|x-1|\le1$

$\therefore 0\le f(x)\le1$

④ $-1\le x\le1$에서 $\quad 0\le x^2\le1$

$2\le x^2+2\le3$ $\quad\therefore 2\le f(x)\le3$

⑤ $-1\le x\le1$에서 $\quad 0\le x+1\le2$

$0\le(x+1)^2\le4$, $\quad -2\le(x+1)^2-2\le2$

$\therefore \underline{-2\le f(x)\le2}$ ┌ $f(x)$의 치역이 Y에 포함되지 않는다.

따라서 X에서 Y로의 함수가 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

유형 02 함숫값 본책 148쪽

① 함수 $f(x)$에서 $f(k)$의 값 구하기
➡ x 대신 k를 대입한다.
② 함수 $f(ax+b)$에서 $f(k)$의 값 구하기
➡ $ax+b=k$를 만족시키는 x의 값을 구하여 x 대신 그 수를 대입한다.

0962 $f(3)=3+1=4$

$f(29)=f(29-4)=f(25-4)=\cdots=f(5-4)=f(1)=1+1=2$

$\therefore f(3)+f(29)=6$ 답 6

0963 $\frac{x+1}{3}=2$에서 $\quad x+1=6 \qquad \therefore x=5$

따라서 $f\left(\frac{x+1}{3}\right)=x^2-5$에 $x=5$를 대입하면

$f(2)=5^2-5=20$

답 ④

0964 $x^2+6x-3=0$에서 $x=-3\pm2\sqrt{3}$이므로 α, β는 무리수이다. ⋯ ❶

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-6$, $\underline{\alpha\beta=-3}$ ← $\alpha\beta$는 유리수이다. ⋯ ❷

$\therefore f(\alpha)+f(\beta)-f(\alpha\beta)=-\alpha-\beta-(\alpha\beta+1)$
$=-(\alpha+\beta)-\alpha\beta-1$
$=-(-6)-(-3)-1$
$=8$ ⋯ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ α, β가 무리수임을 알 수 있다.	20 %
❷ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(\alpha)+f(\beta)-f(\alpha\beta)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0965 주어진 그림에서 $f(1)=3$, $f(2)=2$, $f(3)=2$이므로

$a_{11}=0$, $a_{12}=0$, $a_{13}=1$, $a_{21}=0$, $a_{22}=1$, $a_{23}=0$,
$a_{31}=0$, $a_{32}=1$, $a_{33}=0$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

0966 $x^{2025}=(x^{2024}-x)x+x^2$이므로 x^{2025}을 $x^{2024}-x$로 나누었을 때의 나머지는 x^2이다.

즉 $f(x)=x^2$이므로

$f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(10)$
$=4+9+16+25+36+49+64+81+100$
$=384$

답 384

유형 03 조건을 이용하여 함숫값 구하기 　본책 149쪽

$f(x+y)=f(x)f(y)$ 또는 $f(x+y)=f(x)+f(y)$의 조건이 주어졌을 때, $f(a)$의 값 구하기
➡ 적당한 값을 x, y에 대입하여 $f(a)$의 값을 유도한다.

0967 주어진 식의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(1+1)=f(1)f(1)=2\cdot2=4 \qquad \therefore f(2)=4$

주어진 식의 양변에 $x=1$, $y=2$를 대입하면

$f(1+2)=f(1)f(2)=2\cdot4=8 \qquad \therefore f(3)=8$

주어진 식의 양변에 $x=1$, $y=3$을 대입하면

$f(1+3)=f(1)f(3)=2\cdot8=16 \qquad \therefore f(4)=16$

주어진 식의 양변에 $x=3$, $y=4$를 대입하면

$f(3+4)=f(3)f(4)=8\cdot16=128$

$\therefore f(7)=128$

답 ③

0968 $f(252)=f(2^2\cdot3^2\cdot7)=f(2^2\cdot3^2)+f(7)$
$=\underline{f(2^2)}+f(3^2)+f(7)$
$=2f(2)+2f(3)+f(7)$ ← $f(2^2)=f(2\cdot2)=f(2)+f(2)=2f(2)$
$=2\cdot2+2\cdot3+7=17$

답 17

0969 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ ⋯⋯ ㉠

ㄱ. ㉠의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0$

ㄴ. ㉠의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(2)=f(1)+f(1)$

$4=2f(1) \qquad \therefore f(1)=2$

㉠의 양변에 $x=-1$, $y=1$을 대입하면

$f(0)=f(-1)+f(1)$

$0=f(-1)+2 \qquad \therefore f(-1)=-2$

ㄷ. $f(2x)=f(x+x)=f(x)+f(x)=2f(x)$

$f(3x)=f(x+2x)=f(x)+f(2x)=f(x)+2f(x)=3f(x)$

$f(4x)=f(x+3x)=f(x)+f(3x)=f(x)+3f(x)=4f(x)$

⋮

$\therefore f(nx)=f(x+(n-1)x)=f(x)+f((n-1)x)$
$=f(x)+(n-1)f(x)=nf(x)$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

유형 04 함수의 정의역, 공역, 치역 　본책 149쪽

함수 $f: X \longrightarrow Y$에 대하여
➡ 정의역: X, 공역: Y, 치역: $\{f(x)|x\in X\}$

0970 (i) $\underline{a>0}$일 때, ← x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.

$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 같으므로

$f(-1)=-1$, $f(3)=3$

$-a+b=-1$, $3a+b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=1$, $b=0$

그런데 $ab=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\underline{a<0}$일 때, ← x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소한다.

$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 같으므로

$f(-1)=3$, $f(3)=-1$

$-a+b=3$, $3a+b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-1$, $b=2$

$\therefore ab=-2$

(i), (ii)에서 $\quad ab=-2$

답 -2

0971 $f(-1)=k-2$, $f(0)=-2$, $f(1)=k-2$, $f(2)=4k-2$

$k=0$이면 치역은 $\{-2\}$이므로 모든 원소의 합은 -2이다.

따라서 $k\neq0$이므로 치역은 $\{k-2, -2, 4k-2\}$이다. ⋯ ❶

이때 치역의 모든 원소의 합이 9이므로

$k-2+(-2)+4k-2=9$

$5k=15 \qquad \therefore k=3$ ⋯ ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ 치역을 구할 수 있다.	50 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	50 %

0972 $f(x)$의 치역과 공역이 같으려면 정의역의 4개의 원소 중 3개는 5, 6, 7에 각각 하나씩 대응하고 나머지 1개는 5, 6, 7 중 하나에 대응하면 된다.
따라서 $f(1)+f(2)+f(3)$의 값이 최대이려면 1, 2, 3 중 2개가 7에 대응하고 나머지 하나는 6에 대응하고 4는 5에 대응하면 되므로 구하는 최댓값은

$7+7+6=20$ 답 20

0973 (i) $a>0$일 때,
치역은 $\{y|a+1\le y\le 2a+1\}$이므로

$a+1\ge 2,\ 2a+1\le 6 \qquad \therefore 1\le a\le \frac{5}{2}$ ⋯ ❶

(ii) $a<0$일 때,
치역은 $\{y|2a+1\le y\le a+1\}$이므로

$2a+1\ge 2,\ a+1\le 6 \qquad \therefore \frac{1}{2}\le a\le 5$

그런데 $a<0$이므로 실수 a의 값은 존재하지 않는다. ⋯ ❷
(i), (ii)에서 구하는 a의 값의 범위는

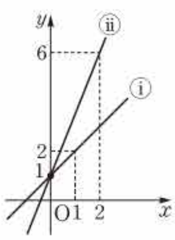
$1\le a\le \frac{5}{2}$ ⋯ ❸

답 $1\le a\le \frac{5}{2}$

채점 기준	비율
❶ $a>0$일 때, a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ $a<0$일 때, a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

참고 $y=ax+1$은 일차함수이므로 $a\ne 0$

다른 풀이 일차함수 $y=ax+1$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 1)$을 지나는 직선이므로 정의역이 $\{x|1\le x\le 2\}$, 공역이 $\{y|2\le y\le 6\}$이려면 직선 $y=ax+1$의 기울기는 오른쪽 그림과 같이 직선 ⓘ의 기울기보다 크거나 같고 직선 ⓘⓘ의 기울기보다 작거나 같아야 한다.



직선 ⓘ의 방정식은 $y=x+1$, 직선 ⓘⓘ의 방정식은 $y=\frac{5}{2}x+1$이므로 구하는 a의 값의 범위는

$1\le a\le \frac{5}{2}$

0974 $f(x)=x^2-2ax+7$이라 하면 $f(x)=(x-a)^2+7-a^2$이므로 정의역이 $\{x|a\le x\le 3\}$, 치역이 $\{y|6\le y\le b\}$이려면

$f(a)=6,\ f(3)=b$

$f(a)=6$에서 $\quad 7-a^2=6, \quad a^2=1$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$

$f(3)=b$에서 $\quad b=3^2-2\cdot1\cdot3+7=10$

$\therefore a+b=11$ 답 ①

유형 05 서로 같은 함수 본책 150쪽

두 함수 f, g가 서로 같은 함수이다.
➡ ① 정의역과 공역이 각각 같다.
② 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $\quad f(x)=g(x)$

0975 $f(-1)=g(-1)$에서 $\quad -a+b=-5$ ⋯⋯ ㉠
$f(1)=g(1)$에서 $\quad a+b=1$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=3,\ b=-2$
$\therefore ab=-6$ 답 ③

0976 ㄱ. $f(1)=1,\ g(1)=-1$이므로 $\quad f(1)\ne g(1)$
$\therefore f\ne g$
ㄴ. $f(-1)=-1,\ g(-1)=1$이므로 $\quad f(-1)\ne g(-1)$
$\therefore f\ne g$
ㄷ. $f(-1)=g(-1)=-1,\ f(0)=g(0)=0,\ f(1)=g(1)=1$이므로 $\quad f=g$
이상에서 $f=g$인 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

0977 $f(1)=g(1)$에서 $\quad 1+2a+3b=-a+b$
$\therefore 3a+2b=-1$ ⋯⋯ ㉠
$f(2)=g(2)$에서 $\quad 8+8a+3b=-2a+b$
$\therefore 5a+b=-4$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-1,\ b=1$
즉 $f(x)=x^3-2x^2+3$이므로
$f(1)=2,\ f(2)=3$
따라서 함수 f의 치역은 $\quad \{2, 3\}$ 답 $\{2, 3\}$

0978 $x^2=4x-3$에서 $\quad x^2-4x+3=0$
$(x-1)(x-3)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=3$ ⋯ ❶
따라서 집합 X는 집합 $\{1, 3\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로
$\{1\},\ \{3\},\ \{1, 3\}$ ⋯ ❷
답 $\{1\},\ \{3\},\ \{1, 3\}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)=g(x)$를 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 집합 X를 모두 구할 수 있다.	50 %

유형 06 일대일함수와 일대일대응 본책 151쪽

① 함수 $f: X \longrightarrow Y$가 일대일함수
➡ $x_1\ne x_2$이면 $\quad f(x_1)\ne f(x_2)\ (x_1\in X,\ x_2\in X)$
➡ $f(x_1)=f(x_2)$이면 $\quad x_1=x_2\ (x_1\in X,\ x_2\in X)$
② 함수 $f: X \longrightarrow Y$가 일대일대응
➡ 일대일함수이고 (치역)=(공역) $\{f(x)|x\in X\}=Y$

0979 ㄱ. $f(x)=\frac{1}{2}$이라 하면 $x_1=1,\ x_2=2$일 때 $x_1\ne x_2$이지만

$f(x_1)=\frac{1}{2}$, $f(x_2)=\frac{1}{2}$ $\quad \therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=\frac{1}{2}$은 일대일대응이 아니다.

ㄷ. $f(x)=x+|x|$라 하면 $x_1=-1$, $x_2=-2$일 때 $x_1 \neq x_2$이지만

$f(x_1)=0$, $f(x_2)=0$ $\quad \therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=x+|x|$는 일대일대응이 아니다.

ㄹ. $f(x)=-x^2+2x$라 하면 $x_1=0$, $x_2=2$일 때 $x_1 \neq x_2$이지만

$f(x_1)=0$, $f(x_2)=0$ $\quad \therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=-x^2+2x$는 일대일대응이 아니다.

이상에서 일대일대응인 것은 ㄴ, ㅁ이다.

답 ㄴ, ㅁ

0980 ㄱ, ㅁ. 양수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 두 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

ㄴ, ㅂ. 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일대응이다.

ㄷ. 양수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수이다. 그런데 치역이 $\{y|y>0\}$이므로 일대일대응은 아니다.

ㄹ. 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 2개 이상의 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

이상에서 일대일함수의 그래프인 것은 ㄴ, ㄷ, ㅂ의 3개, 일대일대응의 그래프인 것은 ㄴ, ㅂ의 2개이므로

$a=3$, $b=2$ $\quad \therefore a+b=5$

답 5

0981 $f(1)+f(3)=10$이고 $f(x)$가 일대일대응이므로

$f(1)=4$, $f(3)=6$ 또는 $f(1)=6$, $f(3)=4$

(i) $f(1)=4$, $f(3)=6$일 때,

$f(2)+f(3)=9$에서 $\quad f(2)+6=9$

$\therefore f(2)=3$

이때 $3 \notin Y$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(1)=6$, $f(3)=4$일 때,

$f(2)+f(3)=9$에서 $\quad f(2)+4=9$

$\therefore f(2)=5$

(i), (ii)에서 $f(1)=6$, $f(2)=5$, $f(3)=4$이므로

$f(1)+f(2)-f(3)=7$

답 7

유형 07 일대일대응이 되기 위한 조건

집중 공략 본책 151쪽

정의역의 원소 x가 범위로 주어진 경우 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면

① x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 증가하거나 감소해야 한다.

② 정의역의 양 끝 값의 함숫값이 공역의 양 끝 값이어야 한다.

0982 $a>0$이므로 함수 f가 일대일대응이려면

$f(-3)=1$, $f(3)=13$

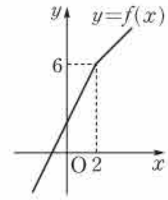
$-3a+b=1$, $3a+b=13$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=2$, $b=7$

$\therefore a+b=9$

답 ④

0983 함수 f가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 직선 $y=2x+a$가 점 $(2, 6)$을 지나야 하므로

$f(2)=2+4=6$

$6=4+a$ $\quad \therefore a=2$

답 ④

0984 $f(x)=x^2-4x-1=(x-2)^2-5$이므로 함수 f가 일대일대응이려면 $a \geq 2$이어야 한다.

이때 함수 f의 치역이 $\{y|y \geq f(a)\}$이므로 $b=f(a)$에서

$\{y|y \geq f(a)\}=Y$에서 $b=f(a)$

$$\begin{aligned} a-b &= a-f(a) \\ &= a-(a^2-4a-1) \\ &= -a^2+5a+1 \\ &= -\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{29}{4} \ (a \geq 2) \end{aligned}$$

따라서 $a-b$는 $a=\frac{5}{2}$일 때 최댓값 $\frac{29}{4}$를 갖는다.

답 $\frac{29}{4}$

0985 (i) $x \geq 3$일 때,

$f(x)=a(x-3)+2x-1=(a+2)x-3a-1$

(ii) $x<3$일 때,

$f(x)=-a(x-3)+2x-1=(2-a)x+3a-1$ ⋯ ❶

(i), (ii)에서 함수 f가 일대일대응이려면 $x \geq 3$일 때와 $x<3$일 때의 직선 $y=f(x)$의 기울기의 부호가 같아야 한다.

$a+2>0$, $2-a>0$ 또는 $a+2<0$, $2-a<0$

따라서 $(a+2)(2-a)>0$이므로

$(a+2)(a-2)<0$ $\quad \therefore -2<a<2$ ⋯ ❷

답 $-2<a<2$

채점 기준	비율
❶ $x \geq 3$일 때와 $x<3$일 때로 나누어 $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %

유형 08 항등함수와 상수함수

본책 152쪽

① 항등함수: 정의역의 각 원소에 그 자신이 대응하는 함수

➡ 함수 $f: X \longrightarrow X$에서 $\quad f(x)=x \ (x \in X)$

② 상수함수: 정의역의 모든 원소에 공역의 오직 하나의 원소가 대응하는 함수

➡ 함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 $\quad f(x)=c \ (x \in X, c \in Y)$

0986 함수 f는 항등함수이므로 $\quad f(2)=2$, $f(5)=5$

$f(2)+g(-1)=5$이므로

$2+g(-1)=5$ $\quad \therefore g(-1)=3$

함수 g는 상수함수이므로 $\quad g(4)=g(-1)=3$

$\therefore f(5)+g(4)=8$

답 8

0987 함수 f가 항등함수이려면 $f(x)=x$이어야 하므로

$x^2-12=x$, $\quad x^2-x-12=0$

$(x+3)(x-4)=0$ $\quad \therefore x=-3$ 또는 $x=4$

따라서 집합 X는 집합 $\{-3, 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 그 개수는

$2^2-1=3$

답 3

0988 함수 f는 상수함수이므로

$f(1)=f(2)=f(3)$

$f(1)=f(2)$에서 $1=4+2a+b$

$\therefore 2a+b=-3$ …… ㉠

$f(1)=f(3)$에서 $1=9+3a+b$

$\therefore 3a+b=-8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=7$

$\therefore a+b=2$

답 2

0989 함수 g는 항등함수이므로

$g(-1)=-1$, $g(1)=1$ ··· ❶

$f(-1)=g(1)=h(0)$에서 $f(-1)=h(0)=1$

$f(-1)+f(1)=f(0)$에서 $1+f(1)=f(0)$

이때 함수 f는 일대일대응이므로

$f(0)=0$, $f(1)=-1$ ··· ❷

$f(0)=-1$, $f(1)=0$이면 $1+f(1)\neq f(0)$

또 함수 h는 상수함수이므로

$h(-1)=h(0)=1$ ··· ❸

$\therefore f(1)g(-1)h(-1)=-1\cdot(-1)\cdot 1=1$ ··· ❹

답 1

채점 기준	비율
❶ $g(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $h(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $f(1)g(-1)h(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0990 함수 f가 항등함수이므로

$f(x)=x$

(i) $x<2$일 때, $x=1$

(ii) $2\le x<6$일 때,

$3x-8=x$, $2x=8$ $\therefore x=4$

(iii) $x\ge 6$일 때,

$x^2-8x+14=x$, $x^2-9x+14=0$

$(x-2)(x-7)=0$ $\therefore x=7$ ($\because x\ge 6$)

이상에서 $X=\{1, 4, 7\}$이므로

$a+b+c=1+4+7=12$

답 12

유형 09 함수의 개수

본책 152쪽

집합 X의 원소의 개수가 n, 집합 Y의 원소의 개수가 m일 때

① X에서 Y로의 함수의 개수 ➡ m^n

② X에서 Y로의 일대일함수의 개수 ➡ ${}_m\mathrm{P}_n$ (단, $m\ge n$)

③ X에서 X로의 일대일대응의 개수 ➡ $n!$

④ X에서 Y로의 상수함수의 개수 ➡ m

0991 X에서 X로의 일대일대응의 개수는

$3!=6$

또 항등함수는 1개, 상수함수는 3개이므로

$p=6$, $q=1$, $r=3$

$\therefore p+q+r=10$

답 10

다른 풀이 일대일대응을 $f: X \longrightarrow X$라 하면

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3 중 하나이므로 3개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3 중 $f(1)$의 값을 제외한 2개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3 중 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 1개

따라서 일대일대응의 개수는

$3\cdot 2\cdot 1=6$

0992 구하는 함수의 개수는 X에서 Y로의 함수의 개수에서 상수함수의 개수를 뺀 것과 같으므로

$2^3-2=6$

답 6

0993 주어진 조건을 만족시키려면 공역의 원소 중에서 서로 다른 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 3, 4, 5에 대응시키면 된다.

즉 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 방법의 수는

${}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

이때 $f(1)$, $f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 각각 1, 2, 3, 4, 5 중 하나이므로 함수 f의 개수는

$10\cdot 5\cdot 5=250$

답 ⑤

SSEN 특강

두 집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 n, m $(m\ge n)$일 때, X에서 Y로의 함수 f 중에서 X의 임의의 원소 a, b에 대하여 $a<b$이면 $f(a)<f(b)$를 만족시키는 함수의 개수는 공역의 원소 중에서 정의역의 원소의 개수만큼 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_m\mathrm{C}_n$

0994 조건 (가)에서 함수 f는 일대일함수이고, 조건 (나)에서 $f(x)$의 값이 될 수 있는 것은 -2, -1, 0, 1, 2이다.

따라서 -2, -1, 0, 1, 2의 5개의 원소 중에서 서로 다른 4개를 택하여 정의역의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 되므로 함수 f의 개수는

${}_5\mathrm{P}_4=120$

답 ④

0995 (i) x가 홀수일 때,

$x+f(x)$가 홀수이려면 $f(x)$가 짝수이어야 하므로

$f(1)=2$, $f(3)=4$ 또는 $f(1)=4$, $f(3)=2$

(ii) x가 짝수일 때,

$x+f(x)$가 홀수이려면 $f(x)$가 홀수이어야 하므로

$f(2)=1$, $f(4)=3$ 또는 $f(2)=3$, $f(4)=1$

(i), (ii)에서 함수 f의 개수는 $2\cdot 2=4$

답 ③

0996 $f(x)-f(-x)=0$에서 $f(x)=f(-x)$

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 -3, 0, 3 중 하나이므로 3개

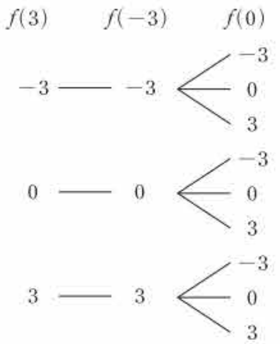
$f(-3)=f(3)$에서 $f(-3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(3)$의 값과 같으므로 1개

$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 $-3,\ 0,\ 3$ 중 하나이므로 3개

따라서 함수 f의 개수는

$3\cdot1\cdot3=9$ 답 9

참고 주어진 조건을 만족시키는 $f(3),\ f(-3),\ f(0)$의 값을 수형도로 나타내면 다음과 같다.



유형 10 합성함수의 함숫값 구하기

집중공략 본책 153쪽

두 함수 $f,\ g$에 대하여 $(f\circ g)(a)$의 값 구하기

➡ [방법 1] 합성함수 $(f\circ g)(x)$를 구한 후 x 대신 a를 대입한다.

[방법 2] $(f\circ g)(a)=f(g(a))$이므로 $g(a)$의 값을 구한 후 $f(x)$의 x 대신 $g(a)$의 값을 대입한다.

즉 $g(a)=m,\ f(m)=n$이면

$(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(m)=n$

0997 $g(-1)=-3$이므로

$(f\circ g)(-1)=f(g(-1))=f(-3)$

$=-3\cdot(-3)+1=10$

또 $f(2)=4$이므로

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(4)=12$

$\therefore\ (f\circ g)(-1)-(g\circ f)(2)=-2$ 답 ①

0998 $f(3)=1$이고

$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(1)=2,$

$(f\circ f\circ f)(3)=f((f\circ f)(3))=f(2)=4$

이므로 (주어진 식)$=1+2+4=7$ 답 ②

0999 $f(4)=a$이므로

$(f\circ f)(4)=f(f(4))=f(a)$

$=a^2-4a+a=a^2-3a$ ⋯ ❶

$f(6)=a+12$이므로

$(f\circ f)(6)=f(f(6))=f(a+12)$

$=(a+12)^2-4(a+12)+a$

$=a^2+21a+96$ ⋯ ❷

$(f\circ f)(4)=(f\circ f)(6)$에서

$a^2-3a=a^2+21a+96$

$24a=-96\qquad \therefore\ a=-4$ ⋯ ❸

따라서 $f(x)=x^2-4x-4$이므로

$f(2)=-8$ ⋯ ❹

답 -8

채점 기준	비율
❶ $(f\circ f)(4)$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $(f\circ f)(6)$을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1000 $\underline{(h\circ(g\circ f))(a)=((h\circ g)\circ f)(a)}$ 합성함수에서는 결합법칙이 성립한다.

$=(h\circ g)(f(a))$

$=(h\circ g)(a+2)$

$=7(a+2)-6$

$=7a+8$

즉 $7a+8=-6$이므로

$7a=-14\qquad \therefore\ a=-2$ 답 -2

1001 $f(3)=g(2)=1$이므로

$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(1)=2,$

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(1)=2$

이때 두 함수 $f,\ g$는 모두 일대일대응이므로

$f(2)=3,\ g(3)=3$

$\therefore\ f(2)+g(3)=6$ 답 ⑤

유형 11 $f\circ g=g\circ f$인 경우

본책 154쪽

합성함수 $f\circ g$와 $g\circ f$를 각각 구하여 동류항의 계수를 비교한다.

➡ $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면

$a=a',\ b=b',\ c=c'$

1002 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=a(-x-2)+1=-ax-2a+1$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=-(ax+1)-2=-ax-3$

$f\circ g=g\circ f$에서 $-ax-2a+1=-ax-3$

$-2a=-4\qquad \therefore\ a=2$ 답 ②

1003 주어진 그림에서

$f(1)=4,\ f(2)=1,\ f(3)=2,\ f(4)=3$

$f\circ g=g\circ f$에서 $f(g(x))=g(f(x))$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(g(1))=g(f(1))$

$f(3)=g(4)\qquad \therefore\ g(4)=2$

㉠의 양변에 $x=4$를 대입하면 $f(g(4))=g(f(4))$

$f(2)=g(3)\qquad \therefore\ g(3)=1$

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면 $f(g(3))=g(f(3))$

$f(1)=g(2)\qquad \therefore\ g(2)=4$

$\therefore\ g(2)-g(4)=2$ 답 ④

1004 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=2(ax+b)+3$

$=2ax+2b+3$ ⋯ ❶

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=a(2x+3)+b$

$=2ax+3a+b$ ⋯ ❷

$f\circ g=g\circ f$에서 $2ax+2b+3=2ax+3a+b$

$\therefore\ b=3a-3$

따라서 $g(x)=ax+b$에 $b=3a-3$을 대입하면

$g(x)=ax+3a-3=a(x+3)-3$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-3,\ -3)$을 지난다. ⋯ ❸

답 $(-3,\ -3)$

채점 기준	비율
❶ $(f\circ g)(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $(g\circ f)(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %

유형 12 $f\circ g$에 대한 조건이 주어진 경우

본책 154쪽

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미지수를 포함한 식으로 주어지고 함수 $f\circ g$에 대한 조건이 주어진 경우
➡ $(f\circ g)(x)$를 미지수를 포함한 식으로 나타낸 후 주어진 조건을 만족시키는 미지수의 값 또는 범위를 구한다.

1005 $f(2)=3$에서 $2+a=3$ $\quad\therefore a=1$

또 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=bx+c+1$에서 $bx+c+1=4x-2$이므로

$b=4,\ c+1=-2$ $\quad\therefore b=4,\ c=-3$

$\therefore abc=-12$

답 -12

1006 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=(x^2-a)^2-a$

$=x^4-2ax^2+a^2-a$

$(f\circ f)(x)$가 $x-2$로 나누어떨어지므로

$(f\circ f)(2)=0,\quad 16-8a+a^2-a=0$

$\therefore a^2-9a+16=0$ (판별식)>0이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 9이다.

답 ⑤

1007 $(g\circ f)(x)$가 항등함수이므로

$(g\circ f)(1)=1,\ (g\circ f)(2)=2$

$f(1)=a-2a=-a$이므로

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(-a)=1$

$\therefore a^2-2a+b-1=0$ ⋯⋯ ㉠

$f(2)=2a-2a=0$이므로

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(0)=2$

$\therefore b=2$

㉠에 $b=2$를 대입하면 $a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore a+b=3$

답 3

1008 $g(x)=(f\circ f\circ f)(x)=f(f(f(x)))$

$=f(f(-2x+a))=f(-2(-2x+a)+a)$

$=f(4x-a)=-2(4x-a)+a$

$=-8x+3a$ (기울기)<0이므로 오른쪽 아래로 향하는 직선이다. ⋯ ❶

함수 $g(x)$는 x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값은 감소하므로 $x=4$일 때 최솟값 -17을 갖는다.

즉 $g(4)=-17$이므로

$-8\cdot 4+3a=-17,\quad 3a=15$

$\therefore a=5$ ⋯ ❷

따라서 $g(x)=-8x+15$이고 $x=b$일 때 최댓값 7을 가지므로

$g(b)=7$에서 $-8b+15=7$

$8b=8$ $\quad\therefore b=1$ ⋯ ❸

$\therefore ab=5$ ⋯ ❹

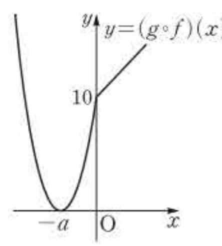
답 5

채점 기준	비율
❶ $g(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

1009 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases} x^2+2ax+10 & (x<0) \\ x+10 & (x\ge 0)\end{cases}$

$a<0$이면 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역이 $\{y\mid y\ge 10\}$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a>0$이고, 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역이 $\{y\mid y\ge 0\}$이려면 오른쪽 그림과 같이 함수



$y=x^2+2ax+10$

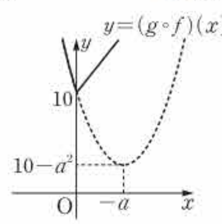
$=(x+a)^2+10-a^2$

의 그래프의 꼭짓점의 y좌표가 0이어야 하므로

$10-a^2=0$ $\quad\therefore a=\sqrt{10}\ (\because a>0)$

답 $\sqrt{10}$

참고 $a<0$이면 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 치역은 $\{y\mid y\ge 10\}$이다.



유형 13 $f\circ g=h$를 만족시키는 함수 f 또는 g 구하기

집중공략

본책 155쪽

① 두 함수 $f(x)$, $h(x)$가 주어진 경우
➡ $f(g(x))=h(x)$임을 이용하여 $g(x)$를 구한다.
② 두 함수 $g(x)$, $h(x)$가 주어진 경우
➡ $f(g(x))=h(x)$이므로 $g(x)=t$로 치환하여 $f(t)$를 구한다.

1010 $(g\circ h)(x)=g(h(x))=2h(x)-3$

따라서 $2h(x)-3=2x^2+1$이므로

$2h(x)=2x^2+4$ $\quad\therefore h(x)=x^2+2$

답 ③

1011 $(h\circ g\circ f)(x)=((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))$

$=-2f(x)+5$

따라서 $-2f(x)+5=4x+3$이므로 $2f(x)=-4x+2$

$\therefore f(x)=-2x+1$

$\therefore f(-2)=5$

답 5

다른 풀이 $(h \circ g \circ f)(-2)=(h \circ g)(f(-2))$이므로

$4\cdot(-2)+3=-2f(-2)+5$

$2f(-2)=10 \qquad \therefore f(-2)=5$

1012 (1) $(f \circ h)(x)=f(h(x))=3h(x)-2$

따라서 $3h(x)-2=-x+1$이므로 $\quad 3h(x)=-x+3$

$\therefore h(x)=-\dfrac{1}{3}x+1$ ⋯ ❶

(2) $(k \circ f)(x)=k(f(x))=k(3x-2)$이므로

$k(3x-2)=-x+1$

$3x-2=t$로 놓으면 $x=\dfrac{1}{3}t+\dfrac{2}{3}$이므로

$k(t)=-\left(\dfrac{1}{3}t+\dfrac{2}{3}\right)+1=-\dfrac{1}{3}t+\dfrac{1}{3}$

$\therefore k(x)=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$ ⋯ ❷

답 (1) $h(x)=-\dfrac{1}{3}x+1$ (2) $k(x)=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ $h(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $k(x)$를 구할 수 있다.	60 %

1013 $(g \circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\dfrac{2x+1}{3}\right)$이므로

$g\left(\dfrac{2x+1}{3}\right)=-2x+1$

$\dfrac{2x+1}{3}=t$로 놓으면 $\quad 2x+1=3t \quad \therefore x=\dfrac{3}{2}t-\dfrac{1}{2}$

따라서 $g(t)=-2\left(\dfrac{3}{2}t-\dfrac{1}{2}\right)+1=-3t+2$이므로

$g(3)=-7$ 답 ②

다른 풀이 $g\left(\dfrac{2x+1}{3}\right)=-2x+1$ ⋯⋯ ㉠

$\dfrac{2x+1}{3}=3$에서 $\quad 2x+1=9 \quad \therefore x=4$

㉠에 $x=4$를 대입하면 $\quad g(3)=-2\cdot4+1=-7$

유형 14 f^n 꼴의 합성함수

집중 공략 본책 155쪽

함수 f에 대하여 $f^n=f \circ f^{n-1}$일 때, $f^n(a)$의 값 구하기

➡ [방법 1] $f^2(x)$, $f^3(x)$, $f^4(x)$, ⋯를 직접 구하여 $f^n(x)$를 추정한 다음 x 대신 a를 대입한다.

[방법 2] $f(a)$, $f^2(a)$, $f^3(a)$, ⋯에서 규칙을 찾아 $f^n(a)$의 값을 추정한다.

1014 $f^1(2)=f(2)=1$이고

$f^2(2)=f(f(2))=f(1)=4$

$f^3(2)=f(f^2(2))=f(4)=3$

$f^4(2)=f(f^3(2))=f(3)=2$

$f^5(2)=f(f^4(2))=f(2)=1$

⋮

즉 $f^n(2)$는 1, 4, 3, 2가 이 순서대로 반복된다.

이때 $50=4\cdot12+2$이므로

$f^{50}(2)=f^2(2)=4$ 답 4

1015 $f^1(1)=f(1)=3$이고

$f^2(1)=(f \circ f)(1)=f(f(1))=f(3)=2$

$f^3(1)=(f \circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(2)=1$

$f^4(1)=(f \circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(1)=3$

⋮

즉 $f^n(1)$은 3, 2, 1이 이 순서대로 반복된다.

이때 $2025=3\cdot675$이므로 $\quad f^{2025}(1)=f^3(1)=1$

한편 $f^1(2)=f(2)=1$이고

$f^2(2)=(f \circ f)(2)=f(f(2))=f(1)=3$

$f^3(2)=(f \circ f^2)(2)=f(f^2(2))=f(3)=2$

$f^4(2)=(f \circ f^3)(2)=f(f^3(2))=f(2)=1$

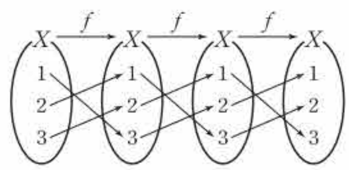
⋮

즉 $f^n(2)$는 1, 3, 2가 이 순서대로 반복된다.

이때 $2026=3\cdot675+1$이므로 $\quad f^{2026}(2)=f^1(2)=1$

$\therefore f^{2025}(1)-f^{2026}(2)=0$ 답 ③

다른 풀이 f^1, f^2, f^3의 대응 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



즉 $f^3(x)=x$이므로

$f^{2025}(1)=f^{3\cdot675}(1)=f^3(1)=1$

$f^{2026}(2)=f^{3\cdot675+1}(2)=f^1(2)=1$

$\therefore f^{2025}(1)-f^{2026}(2)=0$

1016 $f_1(x)=f(x)=-x+2$이고

$f_2(x)=(f \circ f)(x)=-(-x+2)+2=x$ ⋯ ❶

따라서 $f_3(x)=f(x)$, $f_4(x)=f_2(x)$, ⋯이므로

$f_n(x)=\begin{cases} -x+2 & (n\text{은 홀수}) \\ x & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$ ⋯ ❷

답 $f_n(x)=\begin{cases} -x+2 & (n\text{은 홀수}) \\ x & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$

채점 기준	비율
❶ $f_1(x)$, $f_2(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $f_n(x)$를 구할 수 있다.	60 %

1017 $f^{n+1}=f^n \circ f=f \circ f^n$이고

$f^1(100)=f(100)=\dfrac{100}{2}=50$이므로

$f^2(100)=(f \circ f)(100)=f(f(100))$

$=f(50)=\dfrac{50}{2}=25$

$f^3(100)=(f \circ f^2)(100)=f(f^2(100))$

$=f(25)=\dfrac{25+1}{2}=13$

$f^4(100)=(f\circ f^3)(100)=f(f^3(100))$

$=f(13)=\dfrac{13+1}{2}=7$

$f^5(100)=(f\circ f^4)(100)=f(f^4(100))$

$=f(7)=\dfrac{7+1}{2}=4$

$f^6(100)=(f\circ f^5)(100)=f(f^5(100))$

$=f(4)=\dfrac{4}{2}=2$

$f^7(100)=(f\circ f^6)(100)=f(f^6(100))$

$=f(2)=\dfrac{2}{2}=1$

따라서 자연수 n의 최솟값은 7이다. 답 ③

SSEN 특강

일반적으로 합성함수에서 교환법칙은 성립하지 않지만 결합법칙은 성립하므로

$f^n\circ f=(f\circ f\circ f\circ\cdots\circ f)\circ f$

$=f\circ(f\circ f\circ\cdots\circ f\circ f)$

$=f\circ f^n$

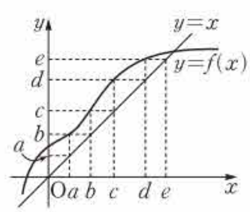
따라서 $f^{n+1}=f^n\circ f=f\circ f^n$이 성립한다.

유형 15 그래프가 주어질 때 합성함수의 함숫값 구하기 본책 156쪽

함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 (a, b), (b, c)를 지나면

$(f\circ f)(a)=f(f(a))=f(b)=c$

1018 오른쪽 그림에서



$(f\circ f\circ f)(b)=f(f(f(b)))$

$=f(f(c))$

$=f(d)$

$=e$

답 ⑤

1019 $f(a)=b$라 하면 $(f\circ f)(a)=4$에서

$f(f(a))=f(b)=4$

주어진 그래프에서 $f(b)=4$를 만족시키는 b의 값은

$b=2$ 또는 $b=4$

이므로 $f(a)=2$ 또는 $f(a)=4$

(i) $f(a)=2$일 때, $a=3$

(ii) $f(a)=4$일 때, $a=2$ 또는 $a=4$

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$2+3+4=9$ 답 ④

1020 $f^1(0)=f(0)=1$이고

$f^2(0)=(f\circ f)(0)=f(f(0))=f(1)=3$

$f^3(0)=(f\circ f^2)(0)=f(f^2(0))=f(3)=0$

$f^4(0)=(f\circ f^3)(0)=f(f^3(0))=f(0)=1$

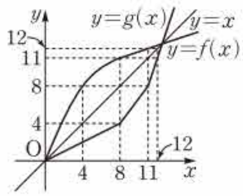
$\vdots$

즉 $f^n(0)$은 1, 3, 0이 이 순서대로 반복된다.

이때 $100=3\cdot 33+1$이므로

$f^{100}(0)=f^1(0)=1$ 답 1

1021 $g(a)=t$라 하면



$(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(t)$

이므로 $f(t)=8$에서 $t=4$

즉 $g(a)=4$이므로 $a=8$

한편

$(g\circ f\circ g)(11)=g(f(g(11)))$

$=g(f(8))=g(11)=8$

이므로 $b=8$

$\therefore a+b=16$ 답 16

유형 16 합성함수의 그래프 그리기 집중공략 본책 157쪽

두 함수 f, g의 식이 x의 값의 범위에 따라 다르게 정의된 함수일 때, 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 다음과 같은 순서로 그린다.

(i) 두 함수 f, g의 식의 경계가 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 $g\circ f$의 식을 구한다.

(ii) 각 범위에서 (i)의 식의 그래프를 그린다.

1022 $f(x)=\begin{cases}-x^2 & (-1\le x<0)\\ x & (0\le x\le 1)\end{cases}$에서

$(f\circ f)(x)=\begin{cases}-\{f(x)\}^2 & (-1\le f(x)<0)\\ f(x) & (0\le f(x)\le 1)\end{cases}$

(i) $-1\le x<0$일 때, $f(x)=-x^2$이고 $-1\le f(x)<0$이므로

$(f\circ f)(x)=-(-x^2)^2=-x^4$

(ii) $0\le x\le 1$일 때, $f(x)=x$이고 $0\le f(x)\le 1$이므로

$(f\circ f)(x)=x$

(i), (ii)에서 $(f\circ f)(x)=\begin{cases}-x^4 & (-1\le x<0)\\ x & (0\le x\le 1)\end{cases}$이므로 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ③이다.

답 ③

1023 $f(x)=\begin{cases}2x & (0\le x<1)\\ -2x+4 & (1\le x\le 2)\end{cases}$이므로

$f(f(x))=\begin{cases}2f(x) & (0\le f(x)<1)\\ -2f(x)+4 & (1\le f(x)\le 2)\end{cases}$

(i) $0\le x<\dfrac{1}{2}$일 때, $f(x)=2x$이고 $0\le f(x)<1$이므로

$f(f(x))=2\cdot 2x=4x$

(ii) $\dfrac{1}{2}\le x<1$일 때, $f(x)=2x$이고 $1\le f(x)<2$이므로

$f(f(x))=-2\cdot 2x+4=-4x+4$

(iii) $1\le x\le\dfrac{3}{2}$일 때, $f(x)=-2x+4$이고 $1\le f(x)\le 2$이므로

$f(f(x))=-2(-2x+4)+4=4x-4$

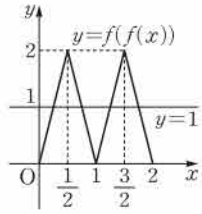
(iv) $\dfrac{3}{2}<x\le 2$일 때, $f(x)=-2x+4$이고 $0\le f(x)<1$이므로

$f(f(x))=2(-2x+4)=-4x+8$

이상에서

$$f(f(x))=\begin{cases} 4x & \left(0\le x<\frac{1}{2}\right) \\ -4x+4 & \left(\frac{1}{2}\le x<1\right) \\ 4x-4 & \left(1\le x\le \frac{3}{2}\right) \\ -4x+8 & \left(\frac{3}{2}<x\le 2\right) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(f(x))$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $f(f(x))=1$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(f(x))$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 개수와 같으므로 4이다.

답 4

다른 풀이 $f(f(x))=1$에서

$2f(x)=1$ 또는 $-2f(x)+4=1$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}$ 또는 $f(x)=\frac{3}{2}$

(i) $f(x)=\frac{1}{2}$일 때,

$2x=\frac{1}{2}$ 또는 $-2x+4=\frac{1}{2}$이므로

$x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}$

(ii) $f(x)=\frac{3}{2}$일 때,

$2x=\frac{3}{2}$ 또는 $-2x+4=\frac{3}{2}$이므로

$x=\frac{3}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}$

(i), (ii)에서 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

1024 $f(x)=\begin{cases} -2x+2 & (0\le x<1) \\ x-1 & (1\le x\le 4) \end{cases}$,

$g(x)=\begin{cases} 2x & (0\le x<1) \\ -x+3 & (1\le x<2) \\ 1 & (2\le x<3) \\ 3x-8 & (3\le x\le 4) \end{cases}$이므로

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases} -2g(x)+2 & (0\le g(x)<1) \\ g(x)-1 & (1\le g(x)\le 4) \end{cases}$$

(i) $0\le x<\frac{1}{2}$일 때, $g(x)=2x$이고 $0\le g(x)<1$이므로

$(f\circ g)(x)=-2\cdot 2x+2=-4x+2$

(ii) $\frac{1}{2}\le x<1$일 때, $g(x)=2x$이고 $1\le g(x)<2$이므로

$(f\circ g)(x)=2x-1$

(iii) $1\le x<2$일 때, $g(x)=-x+3$이고 $1<g(x)\le 2$이므로

$(f\circ g)(x)=-x+3-1=-x+2$

(iv) $2\le x<3$일 때, $g(x)=1$이므로

$(f\circ g)(x)=1-1=0$

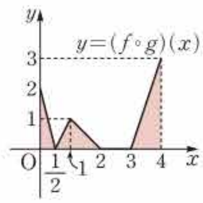
(v) $3\le x\le 4$일 때, $g(x)=3x-8$이고 $1\le g(x)\le 4$이므로

$(f\circ g)(x)=3x-8-1=3x-9$

이상에서

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases} -4x+2 & \left(0\le x<\frac{1}{2}\right) \\ 2x-1 & \left(\frac{1}{2}\le x<1\right) \\ -x+2 & (1\le x<2) \\ 0 & (2\le x<3) \\ 3x-9 & (3\le x\le 4) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ⋯ ❶



따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3$

$=\frac{11}{4}$ ⋯ ❷

답 $\frac{11}{4}$

채점 기준	비율
❶ $y=(f\circ g)(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	70 %
❷ 넓이를 구할 수 있다.	30 %

유형 17 역함수와 함숫값

집중 공략 본책 157쪽

함수 f의 역함수가 f^{-1}일 때

$f(x)=y \Longleftrightarrow f^{-1}(y)=x$

1025 $f^{-1}(4)=2$에서 $f(2)=4$이므로

$2a+b=4$ ⋯⋯ ㉠

$f^{-1}(-5)=-1$에서 $f(-1)=-5$이므로

$-a+b=-5$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-2$

$\therefore a^2+b^2=13$

답 13

1026 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\ne 0$, a, b, c는 상수)라 하면

$f(0)=0$에서 $c=0$

$\therefore f(x)=ax^2+bx$

$f^{-1}(-10)=-2$에서 $f(-2)=-10$이므로

$4a-2b=-10$ $\therefore 2a-b=-5$ ⋯⋯ ㉠

$f^{-1}(32)=4$에서 $f(4)=32$이므로

$16a+4b=32$ $\therefore 4a+b=8$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}$, $b=6$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+6x$이므로

$f(2)=14$

답 ③

1027 $f(x)=ax+b$ ($a\ne 0$, a, b는 상수)라 하면

$f^{-1}(3)=2$에서 $f(2)=3$이므로

$2a+b=3$ ⋯⋯ ㉠

$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(3)$이므로 $f(3)=2$

$\therefore 3a+b=2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=5$

따라서 $f(x)=-x+5$이므로 $\quad f(1)=4$

한편 $f^{-1}(6)=k$라 하면 $f(k)=6$이므로

$-k+5=6 \qquad \therefore k=-1$

$\therefore f(1)+f^{-1}(6)=4+(-1)=3$

답 3

1028 $\dfrac{3-x}{2}=t$로 놓으면 $\quad 3-x=2t \qquad \therefore x=-2t+3$

따라서 $f(t)=4(-2t+3)+1=-8t+13$이므로

$f(x)=-8x+13$ ··· ❶

$f^{-1}(-3)=k$라 하면 $f(k)=-3$이므로

$-8k+13=-3 \qquad \therefore k=2$

$\therefore f^{-1}(-3)=2$ ··· ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $f^{-1}(-3)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

1029 $x<5$일 때, $\quad f(x)=x+3<8$

$x\ge5$일 때, $\quad f(x)=2x-2\ge8$

$f^{-1}(6)=m$이라 하면 $\underline{f(m)=6}$이므로

$\quad$ └ $6<8$이므로 $f(x)=x+3$에 대입한다.

$m+3=6 \qquad \therefore m=3$

$f^{-1}(12)=n$이라 하면 $\underline{f(n)=12}$이므로

$\quad$ └ $12\ge8$이므로 $f(x)=2x-2$에 대입한다.

$2n-2=12 \qquad \therefore n=7$

$\therefore f^{-1}(6)+f^{-1}(12)=3+7=10$

답 ②

유형 18 역함수가 존재하기 위한 조건

본책 158쪽

함수 f의 역함수 f^{-1}가 존재한다.

➡ f가 일대일대응이다.

➡ ① 정의역의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여

$x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$

② 치역과 공역이 서로 같다.

1030 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이다.

$\underline{y=f(x)\text{의 그래프의 기울기가 양수}}$이므로

$f(2)=a,\ f(6)=b$ $\quad$ └ x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

이때 $f(2)=4,\ f(6)=16$이므로

$a=4,\ b=16 \qquad \therefore a+b=20$

답 ③

1031 $f(x)=x^2-2x-40=(x-1)^2-41$이고, 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이므로

$a\ge1,\ f(a)=a$

$f(a)=a$에서 $\quad a^2-2a-40=a$

$a^2-3a-40=0, \qquad (a+5)(a-8)=0$

$\therefore a=8\ (\because a\ge1)$

답 8

1032 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이므로

$f(1)+2f(2)=9$에서

$f(1)=1,\ f(2)=4$

$\therefore f^{-1}(1)=1,\ f^{-1}(4)=2$

$f^{-1}(1)-f^{-1}(2)=-2$에서

$1-f^{-1}(2)=-2 \qquad \therefore f^{-1}(2)=3$

즉 $f(3)=2$이고, f가 일대일대응이므로

$f(4)=3$

$\therefore f(4)+f^{-1}(4)=5$

답 5

1033 $f(x)=kx+|x-1|+2$에서

(i) $x\ge1$일 때,

$f(x)=kx+x-1+2=(k+1)x+1$

(ii) $x<1$일 때,

$f(x)=kx-(x-1)+2=(k-1)x+3$

(i), (ii)에서 함수 f의 역함수가 존재하려면 f가 일대일대응이어야 하므로 $x\ge1$일 때와 $x<1$일 때의 직선 $y=f(x)$의 기울기의 부호가 같아야 한다.

따라서 $(k+1)(k-1)>0$이므로

$k<-1$ 또는 $k>1$

답 $k<-1$ 또는 $k>1$

1034 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이므로

$3+a=3\cdot3-1 \qquad \therefore a=5$

$x<3$일 때, $\quad f(x)=x+5<8$

$x\ge3$일 때, $\quad f(x)=3x-1\ge8$

$f^{-1}(11)=m$이라 하면 $\underline{f(m)=11}$이므로

$\quad$ └ $11\ge8$이므로 $f(x)=3x-1$에 대입한다.

$3m-1=11 \qquad \therefore m=4$

$f^{-1}(4)=n$이라 하면 $\underline{f(n)=4}$이므로

$\quad$ └ $4<8$이므로 $f(x)=x+5$에 대입한다.

$n+5=4 \qquad \therefore n=-1$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(11)=f^{-1}(f^{-1}(11))$

$=f^{-1}(4)=-1$

답 ⑤

유형 19 역함수 구하기

본책 159쪽

일차함수 $y=ax+b$의 역함수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) x를 y에 대한 식으로 나타낸다. ➡ $x=\dfrac{1}{a}y-\dfrac{b}{a}$

(ii) x와 y를 서로 바꾼다. ➡ $y=\dfrac{1}{a}x-\dfrac{b}{a}$

1035 $y=ax-6$이라 하면 $\quad ax=y+6$

$\therefore x=\dfrac{1}{a}y+\dfrac{6}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{1}{a}x+\dfrac{6}{a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{1}{a}x+\dfrac{6}{a}$

따라서 $\dfrac{1}{a}x+\dfrac{6}{a}=\dfrac{1}{2}x+b$이므로

$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{6}{a}=b \qquad \therefore a=2,\ b=3$

$\therefore a-b=-1$

답 ②

1036 $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=-(2x+8)-3=-2x-11$ ⋯ ❶

$y=-2x-11$이라 하면 $\quad 2x=-y-11$

$\therefore x=-\frac{1}{2}y-\frac{11}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=-\frac{1}{2}x-\frac{11}{2}$

$\therefore h^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{11}{2}$ ⋯ ❷

답 $h^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{11}{2}$

채점 기준	비율
❶ $h(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $h^{-1}(x)$를 구할 수 있다.	50 %

1037 $y=ax-1$이라 하면 $\quad ax=y+1$

$\therefore x=\frac{1}{a}y+\frac{1}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$

$f=f^{-1}$에서 $ax-1=\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$이므로

$a=\frac{1}{a},\ -1=\frac{1}{a} \qquad \therefore a=-1$ 답 ②

다른 풀이 $f=f^{-1}$이므로 $\quad (f\circ f)(x)=x$

$(f\circ f)(x)=(f\circ f^{-1})(x)=x$

$f(x)=ax-1$에서

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=a(ax-1)-1=a^2x-a-1$

따라서 $a^2x-a-1=x$이므로 $\quad a^2=1,\ -a-1=0$

$\therefore a=-1$

1038 $2x-1=t$로 놓으면 $\quad 2x=t+1 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$

따라서 $f(t)=4\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)+3=2t+5$이므로

$f(x)=2x+5$

$y=2x+5$라 하면 $\quad 2x=y-5 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{5}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

따라서 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 x절편은 5, y절편은 $-\frac{5}{2}$이므로 구하는 합은

$5+\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

다른 풀이 $f(x)=2x+5$에서 $y=f(x)$의 그래프의 x절편은 $-\frac{5}{2}$, y절편은 5이므로 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 x절편은 5, y절편은 $-\frac{5}{2}$이다.

$y=f(x)$의 그래프가 두 점 $\left(-\frac{5}{2},\ 0\right)$, $(0,\ 5)$를 지나므로 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 두 점 $\left(0,\ -\frac{5}{2}\right)$, $(5,\ 0)$을 지난다.

따라서 구하는 합은 $\quad 5+\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}$

유형 20 합성함수와 역함수

본책 159쪽

두 함수 f, g의 역함수가 각각 f^{-1}, g^{-1}일 때

① $(f^{-1}\circ g)(a)$의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $g(a)$의 값을 구한다.

(ii) $f^{-1}(g(a))=k$로 놓으면 $f(k)=g(a)$이므로 이를 만족시키는 k의 값을 구한다.

② $(f\circ g^{-1})(a)$의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $g^{-1}(a)=k$로 놓으면 $g(k)=a$이므로 이를 만족시키는 k의 값을 구한다.

(ii) $f(x)$에 x 대신 k의 값을 대입한다.

1039 $(f^{-1}\circ g)(a)=f^{-1}(g(a))=1$에서

$f(1)=g(a),\quad 1=a-1 \qquad \therefore a=2$ 답 ⑤

1040 $(f\circ g^{-1})(1)=f(g^{-1}(1))$

이때 $g(2)=1$이므로 $\quad g^{-1}(1)=2$

$\therefore (f\circ g^{-1})(1)=f(2)=4$ 답 ⑤

1041 $(f\circ g^{-1}\circ f)(2)=f(g^{-1}(f(2)))=5$에서

$g^{-1}(f(2))=k$라 하면 $f(k)=5$이므로

$2k+3=5 \qquad \therefore k=1$

따라서 $g^{-1}(f(2))=1$에서 $g(1)=f(2)$이므로

$a+4=7 \qquad \therefore a=3$ 답 3

1042 $x\geq 0$일 때, $\quad f(x)=x^2-2\geq -2$

$x<0$일 때, $\quad f(x)=2x-2<-2$

$g(2)=7$이므로

$(f^{-1}\circ g)(2)=f^{-1}(g(2))=f^{-1}(7)$

$f^{-1}(7)=k$라 하면 $f(k)=7$이므로

7≥−2이므로 $f(x)=x^2-2$에 대입한다.

$k^2-2=7,\quad k^2=9$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=3$

그런데 $k\geq 0$이므로 $\quad k=3$ 답 3

1043 (1) $g^{-1}(3)=2$에서 $g(2)=3$이므로

$\frac{2}{3}+b=3 \qquad \therefore b=\frac{7}{3}$

따라서 $g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$이므로

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=a\left(\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}\right)-3$

$=\frac{a}{3}x+\frac{7}{3}a-3$

즉 $\frac{a}{3}x+\frac{7}{3}a-3=x+c$이므로

$\frac{a}{3}=1,\ \frac{7}{3}a-3=c \qquad \therefore a=3,\ c=4$

$\therefore a+b+c=\frac{28}{3}$ ⋯ ❶

(2) $g^{-1}(f(-1))=k$라 하면 $\quad g(k)=f(-1)$

이때 $f(x)=3x-3$에서 $f(-1)=-6$이므로

$g(k)=-6$

즉 $g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$에서 $\quad \frac{1}{3}k+\frac{7}{3}=-6$

$\therefore k=-25$

$\therefore g^{-1}(f(-1))=-25$ ⋯ ❷

답 (1) $\frac{28}{3}$ (2) -25

채점 기준	비율
❶ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $g^{-1}(f(-1))$의 값을 구할 수 있다.	50 %

유형 21 역함수의 성질

집중공략 본책 160쪽

두 함수 f, g의 역함수가 각각 f^{-1}, g^{-1}일 때
① $(f^{-1})^{-1}=f$
② $(f^{-1}\circ f)(x)=x$, $(f\circ f^{-1})(y)=y$
③ $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}\neq g^{-1}\circ f^{-1}$

1044 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(8)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(8)$

$=(g^{-1}\circ f)(8)$

$=g^{-1}(f(8))$

$=g^{-1}(-23)$

$g^{-1}(-23)=k$라 하면 $g(k)=-23$이므로

$4k+1=-23 \quad \therefore k=-6$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(8)=-6$

답 -6

1045 $(g\circ f)^{-1}(2)+(f^{-1}\circ g^{-1})(2)$

$=(f^{-1}\circ g^{-1})(2)+(f^{-1}\circ g^{-1})(2)$

$=2(f^{-1}\circ g^{-1})(2)=2f^{-1}(g^{-1}(2))$

$g^{-1}(2)=a$라 하면 $g(a)=2$이므로

$a-1=2 \quad \therefore a=3$

$f^{-1}(3)=b$라 하면 $f(b)=3$이므로

$b^2-1=3, \quad b^2=4 \quad \therefore b=2\ (\because b\geq 0)$

$\therefore$ (주어진 식)$=2f^{-1}(g^{-1}(2))=2f^{-1}(3)=2\cdot 2=4$

답 ①

1046 $f(1)=2$, $g(3)=2$이고, 두 함수 f, g의 역함수가 모두 존재하므로

$f^{-1}(2)=1$, $g^{-1}(2)=3$

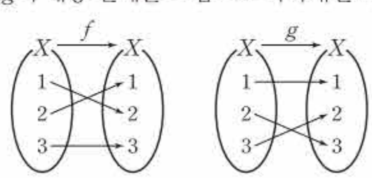
$(g\circ f^{-1})(2)=1$이므로

$g(f^{-1}(2))=1 \quad \therefore g(1)=1$

$(g\circ f^{-1})^{-1}(2)=3$에서 $(f\circ g^{-1})(2)=3$이므로

$f(g^{-1}(2))=3 \quad \therefore f(3)=3$

두 함수 f, g의 역함수가 모두 존재하면 f, g는 모두 일대일대응이므로 f, g의 대응 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



$\therefore f(2)+g^{-1}(3)=1+2=3$

답 3

1047 $g^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ g)^{-1}$이고

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2(-3x+4)=-6x+8$

$y=-6x+8$이라 하면 $\quad x=-\frac{1}{6}y+\frac{4}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=-\frac{1}{6}x+\frac{4}{3}$

$\therefore (f\circ g)^{-1}(x)=-\frac{1}{6}x+\frac{4}{3}$

$\therefore (g^{-1}\circ f^{-1}\circ h)(x)=(f\circ g)^{-1}(h(x))$

$=-\frac{1}{6}h(x)+\frac{4}{3}$

즉 $-\frac{1}{6}h(x)+\frac{4}{3}=2x$이므로 $\quad h(x)=-12x+8$

$\therefore h(1)=-4$

답 ②

다른 풀이 $((f\circ g)^{-1}\circ h)(x)=f(x)$에서

$((f\circ g)\circ(f\circ g)^{-1}\circ h)(x)=(f\circ g\circ f)(x)$

$\therefore h(x)=(f\circ g\circ f)(x)$

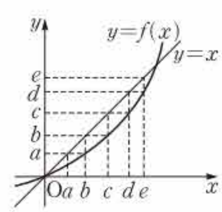
$\therefore h(1)=f(g(f(1)))=f(g(2))=f(-2)=-4$

유형 22 그래프가 주어질 때 역함수의 함숫값 구하기

집중공략 본책 160쪽

함수 f와 역함수 f^{-1}에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 점 (a, b)를 지난다.
➡ $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 (b, a)를 지난다.
➡ $f^{-1}(b)=a$

1048 $f^{-1}(c)=k$라 하면 $f(k)=c$이므로



$k=d$

$f^{-1}(d)=l$이라 하면 $f(l)=d$이므로

$l=e$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))$

$=f^{-1}(d)=e$

답 ⑤

1049 $f^{-1}(3)=a$, $f^{-1}(5)=b$라 하면

$f(a)=3$, $f(b)=5$

함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이므로

$a=3$, $b=4$ 또는 $a=4$, $b=3$

$\therefore f^{-1}(3)+f^{-1}(5)=a+b=7$

답 7

1050 $f^{-1}(c)=q$이므로 $\quad f(q)=c$

$\therefore (f\circ f)(q)=f(f(q))=f(c)=s$

한편 $f(a)=r$이므로 $\quad f^{-1}(r)=a$

$\therefore (f\circ f)^{-1}(r)=(f^{-1}\circ f^{-1})(r)$

$=f^{-1}(f^{-1}(r))$

$=f^{-1}(a)=0$

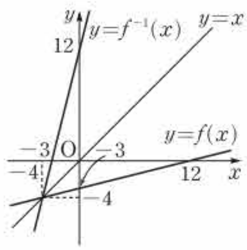
$\therefore (f\circ f)(q)+(f\circ f)^{-1}(r)=s$

답 s

유형 23 역함수의 그래프의 성질 본책 161쪽

함수 f와 역함수 f^{-1}에 대하여
① $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
② $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이다.

1051 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같으므로 $\frac{1}{4}x-3=x$에서



$$-\frac{3}{4}x=3 \qquad \therefore x=-4$$

따라서 교점의 좌표는 $(-4,\ -4)$이므로

교점은 직선 $y=x$ 위의 점이므로 x좌표와 y좌표가 같다.

$a=-4$, $b=-4$

$\therefore a+b=-8$ 답 ③

1052 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(7,\ a)$를 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(a,\ 7)$을 지난다.

즉 $f(a)=7$이므로

$-2a+5=7 \qquad \therefore a=-1$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(b,\ -1)$을 지나므로

$-2b+5=-1 \qquad \therefore b=3$

$\therefore a+b=2$ 답 2

다른 풀이 $y=-2x+5$라 하면 $\qquad x=-\frac{1}{2}y+\frac{5}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\qquad y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

따라서 $g(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$이므로 $g(7)=a$에서

$$a=-\frac{1}{2}\cdot 7+\frac{5}{2}=-1$$

1053 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근은 방정식 $f(x)=x$의 근과 같으므로 $x^2-4x+6=x$에서

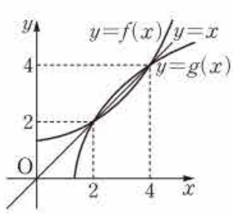
$x^2-5x+6=0, \qquad (x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

따라서 모든 근의 합은 $\qquad 2+3=5$ 답 ②

참고 함수 f는 집합 $X=\{x\,|\,x\geq 2\}$에서 정의되므로 2, 3 모두 근이 된다.

1054 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같으므로 $\frac{1}{6}(x^2+8)=x$에서 $\qquad x^2-6x+8=0$



$(x-2)(x-4)=0 \qquad \therefore x=2$ 또는 $x=4$ ⋯ ❶

따라서 두 교점의 좌표는 $(2,\ 2)$, $(4,\ 4)$이므로 구하는 거리는

$\sqrt{(4-2)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{2}$ ⋯ ❷

답 $2\sqrt{2}$

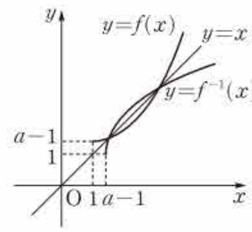
채점 기준	비율
❶ 두 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	70 %
❷ 두 교점 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %

SSEN 특강 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

① 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는
$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
② 원점 O와 점 $A(x_1,\ y_1)$ 사이의 거리는
$\overline{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

1055 $f(x)=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1\ (x\geq 1)$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



따라서 이차방정식 $x^2-2x+a=x$, 즉 $x^2-3x+a=0$이 1보다 크거나 같은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$g(x)=x^2-3x+a$라 하자.

(i) 이차방정식 $g(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(-3)^2-4a>0 \qquad \therefore a<\frac{9}{4}$$

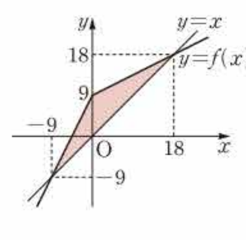
(ii) $g(1)=1-3+a\geq 0 \qquad \therefore a\geq 2$

(iii) 이차함수 $y=g(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{3}{2}$이므로

$$\frac{3}{2}>1$$

이상에서 $\qquad 2\leq a<\frac{9}{4}$ 답 $2\leq a<\frac{9}{4}$

1056 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.



$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

(i) $x\geq 0$일 때,

$\frac{1}{2}x+9=x$에서 $\qquad x=18$

(ii) $x<0$일 때,

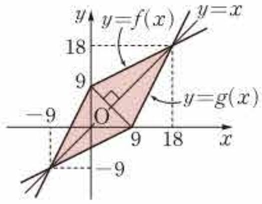
$2x+9=x$에서 $\qquad x=-9$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 넓이는

$$2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 9+\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 18\right)=243$$

답 243

다른 풀이 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형은 마름모이므로 구하는 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(9-0)^2+(0-9)^2}\cdot\sqrt{(18+9)^2+(18+9)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 9\sqrt{2}\cdot 27\sqrt{2}=243$$

참고 두 대각선의 길이가 a, b인 마름모의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이다.

유형 24 절댓값 기호를 포함한 식의 그래프 ; 대칭이동 이용

본책 162쪽

① $y=|f(x)|$의 그래프
➡ $y=f(x)$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한다.
② $y=f(|x|)$의 그래프
➡ $y=f(x)$의 그래프에서 $x\geq 0$인 부분만 남긴 후 그 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한다.
③ $|y|=f(x)$의 그래프
➡ $y=f(x)$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분만 남긴 후 그 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한다.
④ $|y|=f(|x|)$의 그래프
➡ $y=f(x)$의 그래프에서 $x\geq 0$, $y\geq 0$인 부분만 남긴 후 그 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한다.

1057 $y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그 개형은 ④와 같다. 답 ④

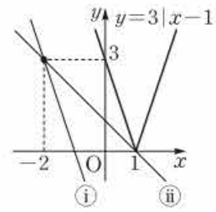
1058 $y=f(|x|)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\geq 0$인 부분만 남기고, $x<0$인 부분은 $x\geq 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그 개형은 ㄴ과 같다.
$|y|=f(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분만 남기고, $y<0$인 부분은 $y\geq 0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그 개형은 ㄱ과 같다.
따라서 구하는 그래프의 개형은 차례대로 ㄴ, ㄱ이다. 답 ㄴ, ㄱ

유형 25 절댓값 기호를 포함한 식의 그래프 ; 범위를 나누는 경우

본책 162쪽

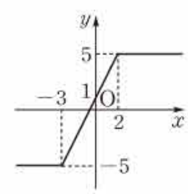
절댓값 기호를 포함한 식의 그래프는 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 모든 x의 값을 경계로 범위를 나눈 다음 각 범위에서 그래프를 그린다.
① $y=|x-k|$
➡ $x\geq k$, $x<k$일 때로 나누어 그래프를 그린다.
② $y=|x-a|+|x-b|$ $(a<b)$
➡ $x<a$, $a\leq x<b$, $x\geq b$일 때로 나누어 그래프를 그린다.

1059 $y=3|x-1|$에서
(ⅰ) $x<1$일 때,
$y=-3(x-1)=-3x+3$
(ⅱ) $x\geq 1$일 때,
$y=3(x-1)=3x-3$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $y=3|x-1|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
한편 직선
$y=m(x+2)+3$ ...... ㉠
은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, 3)$을 지난다.

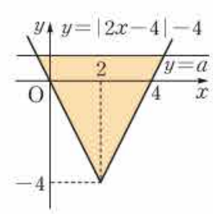


ⓘ 직선 ㉠이 직선 $y=-3x+3$과 평행할 때,
$m=-3$
ⓘⓘ 직선 ㉠이 점 $(1, 0)$을 지날 때,
$0=3m+3$ $\therefore m=-1$
ⓘ, ⓘⓘ에서 주어진 함수의 그래프와 직선 ㉠이 만나려면
$m<-3$ 또는 $m\geq -1$
따라서 m의 값이 아닌 것은 ②이다. 답 ②

1060 $y=|x+3|-|x-2|$에서
(ⅰ) $x<-3$일 때, $y=-(x+3)+x-2=-5$
(ⅱ) $-3\leq x<2$일 때, $y=x+3+x-2=2x+1$
(ⅲ) $x\geq 2$일 때, $y=x+3-(x-2)=5$
이상에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
$M=5$, $m=-5$
$\therefore Mm=-25$ 답 -25



1061 $y=|2x-4|-4$에서
(ⅰ) $x<2$일 때,
$y=-(2x-4)-4=-2x$
(ⅱ) $x\geq 2$일 때,
$y=2x-4-4=2x-8$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $y=|2x-4|-4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ➊
이 그래프와 직선 $y=a$ $(a>0)$의 교점의 x좌표는 $|2x-4|-4=a$에서



$|2x-4|=a+4$
$2x-4=\pm(a+4)$
$\therefore x=\frac{1}{2}a+4$ 또는 $x=-\frac{1}{2}a$ ➋
이때 색칠한 부분의 넓이가 18이므로
$$\frac{1}{2}\underbrace{\left\{\frac{1}{2}a+4-\left(-\frac{1}{2}a\right)\right\}}_{a>0\text{이므로 }\frac{1}{2}a+4>-\frac{1}{2}a}\{a-(-4)\}=18$$
$(a+4)^2=36$, $a+4=\pm 6$
$\therefore a=-10$ 또는 $a=2$
그런데 $a>0$이므로 $a=2$ ➌
답 2

채점 기준	비율
❶ $y=\|2x-4\|-4$의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
❷ $y=\|2x-4\|-4$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

참고 $y=|2x-4|-4$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4=8$이므로 이 함수의 그래프와 직선 $y=a$로 둘러싸인 도형의 넓이가 18이려면 $a>0$이어야 한다.

1062 $y=|x+1|+|x-5|+|x-7|$에서

(i) $x<-1$일 때,

$$y=-(x+1)-(x-5)-(x-7)$$
$$=-3x+11$$

(ii) $-1\le x<5$일 때,

$$y=x+1-(x-5)-(x-7)$$
$$=-x+13$$

(iii) $5\le x<7$일 때,

$$y=x+1+x-5-(x-7)$$
$$=x+3$$

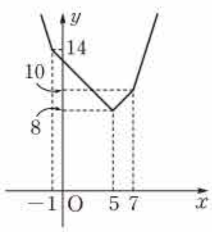
(iv) $x\ge 7$일 때,

$$y=x+1+x-5+x-7$$
$$=3x-11$$

이상에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=5$일 때 최솟값 8을 갖는다.

따라서 $a=5$, $b=8$이므로

$$a+b=13$$



답 ②

1063 1st 공역의 원소 중 치역의 원소가 아닌 원소를 m이라 하고 조건 (나)를 이용하여 m, n 사이의 관계식을 구한다.

조건 (가)에서 함수 f의 치역의 원소의 개수가 7이므로 집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b에 대하여 $f(a)=f(b)=n$을 만족시키는 집합 X의 원소 n의 개수는 1이다.

공역의 원소 중 치역의 원소가 아닌 원소를 m이라 하면

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(8)=\underbrace{36}_{\text{1부터 8까지의 합}}+n-m$$

즉 조건 (나)에 의하여 $36+n-m=42$이므로

$$n-m=6$$

이때 $n\in X$, $m\in X$이므로

$$n=8,\ m=2 \text{ 또는 } n=7,\ m=1$$

2nd 조건 (다)를 이용하여 n의 값을 구한다.

(i) $n=8$, $m=2$일 때, — 치역: $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

치역의 원소의 최댓값은 8, 최솟값은 1이므로 최댓값과 최솟값의 차는 7이다.

즉 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ii) $n=7$, $m=1$일 때, — 치역: $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

치역의 원소의 최댓값은 8, 최솟값은 2이므로 최댓값과 최솟값의 차는 6이다.

(i), (ii)에서 $n=7$

답 7

1064

두 실수 a, b와 두 함수

$$\underbrace{f(x)=-x^2-2x+1}_{f(x)=-(x+1)^2+2},\ \underbrace{g(x)=x^2-2x-1}_{g(x)=(x-1)^2-2}$$

에 대하여 함수 $h(x)$를

❶ $$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ g(x+b) & (x\ge a)\end{cases}$$ — $g(x)$에 x 대신 $x+b$를 대입한다.

라 하자. ❷함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이 되도록 하는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)만을 원소로 하는 집합을 A라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $(0, k)\in A$를 만족시키는 실수 k는 존재하지 않는다.

ㄴ. $(-1, 4)\in A$

ㄷ. 집합 $\{m+b\,|\,$❸$(m, b)\in A$이고 m은 정수$\}$의 모든 원소의 합은 $5+\sqrt{3}$이다. — 집합 A의 원소 중 a가 정수인 경우

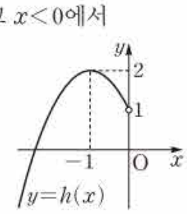
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

❶의 그래프를 그려 ㄱ, ㄴ의 참 거짓을 판별한다. ❷를 만족시키는 조건을 이용하여 ❸에서 정수 m의 값을 구한 후 그때의 b의 값을 구하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

1st $a=0$일 때, $h(x)$가 일대일대응이 되는지 확인하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $a=0$일 때,

$f(x)=-x^2-2x+1=-(x+1)^2+2$이고 $x<0$에서 $h(x)=f(x)$이므로 $x<0$에서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $h(x)$는 일대일대응이 아니므로 $(0, k)\in A$를 만족시키는 실수 k는 존재하지 않는다.

2nd $a=-1$, $b=4$일 때, $h(x)$가 일대일대응이 되는지 확인하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $a=-1$, $b=4$일 때,

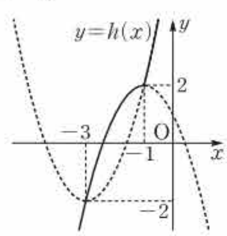
$g(x)=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$이므로

$$g(x+4)=(x+4-1)^2-2=(x+3)^2-2$$

$$\therefore h(x)=\begin{cases} -(x+1)^2+2 & (x<-1) \\ (x+3)^2-2 & (x\ge -1)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $h(x)$는 일대일대응이다.

$$\therefore (-1, 4)\in A$$



3rd $a=m$일 때, $h(x)$가 일대일대응이 되도록 하는 조건을 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $a=m$일 때,

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<m) \\ g(x+b) & (x\ge m)\end{cases}=\begin{cases} -(x+1)^2+2 & (x<m) \\ (x+b-1)^2-2 & (x\ge m)\end{cases}$$

이므로 함수 $h(x)$가 일대일대응이려면

$m\le -1,\ 1-b\le m$ …… ㉠

이어야 한다.

또 $x<m$에서 $h(x)<f(m)$, $x\ge m$에서 $h(x)\ge g(m+b)$ 이므로

$\underline{f(m)=g(m+b)}$ 함수 $h(x)$의 치역과 공역이 같아야 한다. …… ㉡

이때 $g(m+b)\ge -2$이므로 $f(m)\ge -2$

$-m^2-2m+1\ge -2,\quad m^2+2m-3\le 0$

$(m+3)(m-1)\le 0\quad \therefore -3\le m\le 1$

그런데 $m\le -1$이므로 $-3\le m\le -1$

따라서 정수 m의 값은 $-3, -2, -1$이다.

(i) $m=-3$일 때,

㉠에서 $1-b\le -3$이므로 $b\ge 4$

㉡에서 $f(-3)=g(-3+b)$이므로

$-2=(b-4)^2-2,\quad (b-4)^2=0$

$\therefore b=4\quad \therefore m+b=1$

(ii) $m=-2$일 때,

㉠에서 $1-b\le -2$이므로 $b\ge 3$

㉡에서 $f(-2)=g(-2+b)$이므로

$1=(b-3)^2-2,\quad b^2-6b+6=0$

$\therefore b=3\pm\sqrt{3}$

그런데 $b\ge 3$이므로 $b=3+\sqrt{3}$

$\therefore m+b=1+\sqrt{3}$

(iii) $m=-1$일 때,

㉠에서 $1-b\le -1$이므로 $b\ge 2$

㉡에서 $f(-1)=g(-1+b)$이므로

$2=(b-2)^2-2,\quad b^2-4b=0$

$b(b-4)=0\quad \therefore b=0$ 또는 $b=4$

그런데 $b\ge 2$이므로 $b=4$

$\therefore m+b=3$

이상에서

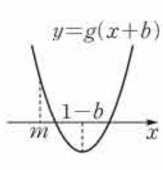
$\{m+b\,|\,(m,\ b)\in A$이고 m은 정수$\}=\{1,\ 1+\sqrt{3},\ 3\}$이므로 모든 원소의 합은

$1+(1+\sqrt{3})+3=5+\sqrt{3}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

SSEN 특강

$g(x+b)=(x+b-1)^2-2$에서 $y=g(x+b)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $m<1-b$이면 $x\ge m$에서 $g(x+b)$가 일대일대응이 아니므로 $1-b\le m$이어야 한다.



1065 1st 함수 f가 일대일함수이려면 $n(A)\le n(B)$이어야 함을 이용하여 $n(A)$, $n(B)$를 구한다.

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$n(A)+n(B)=n(A\cup B)+n(A\cap B)=4+1=5$

이때 함수 f가 일대일함수이므로

$\underline{n(A)\le n(B)}$ $n(A)>n(B)$이면 집합 A의 서로 다른 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)$인 x_1, x_2가 존재한다.

$\therefore n(A)=1,\ n(B)=4$

또는 $n(A)=2,\ n(B)=3$ ➜ ❶

2nd 각 경우의 함수 f의 개수를 구한다.

(i) $n(A)=1$, $n(B)=4$일 때,

$A\cap B=\{1\}$이면 $A=\{1\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이므로 함수 f의 개수는 $\underline{4}$이다. $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 4개이다.

집합 $A\cap B$가 $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$인 경우도 함수 f는 각각 4개씩 있으므로 함수 f의 개수는

$4\cdot 4=16$ ➜ ❷

(ii) $n(A)=2$, $n(B)=3$일 때,

$A\cap B=\{1\}$이면

$A=\{1,\ 2\}$, $B=\{1,\ 3,\ 4\}$

또는 $A=\{1,\ 3\}$, $B=\{1,\ 2,\ 4\}$

또는 $A=\{1,\ 4\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3\}$

의 3가지이고, 위의 각각의 경우에 대하여 함수 f는 ${}_3\mathrm{P}_2=6$개씩 있으므로 함수 f의 개수는

$3\cdot 6=18$

집합 $A\cap B$가 $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$인 경우도 함수 f는 각각 18개씩 있으므로 함수 f의 개수는

$4\cdot 18=72$ ➜ ❸

3rd 함수 f의 개수를 구한다.

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$16+72=88$ ➜ ❹

답 88

채점 기준	비율
❶ 함수 f가 일대일함수가 되는 $n(A)$, $n(B)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $n(A)=1$, $n(B)=4$일 때, 함수 f의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ $n(A)=2$, $n(B)=3$일 때, 함수 f의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❹ 함수 f의 개수를 구할 수 있다.	10 %

1066 1st 주어진 정의에 따라 a_{ij}를 구하여 행렬 A를 구한다.

$a_{11}=(f_1\circ f_2)(1)=f_1(f_2(1))=f_1(0)=1$

$a_{12}=(f_2\circ f_1)(2)=f_2(f_1(2))=f_2(1)=0$

$a_{21}=(f_3\circ f_2)(1)=f_3(f_2(1))=f_3(0)=|1-0|=1$

$a_{22}=(f_2\circ f_3)(2)=f_2(\underbrace{f_3(2)}_{|1-2|=1})=f_2(1)=0$

$\therefore A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

2nd A^2, A^3, …을 구하여 규칙을 찾아 행렬 A^{100}의 모든 성분의 합을 구한다.

$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=A$

$A^3=A^2A=AA=A^2=A$

⋮

$\therefore A^{100}=A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^{100}의 모든 성분의 합은 2이다. 답 2

1067 **1st** $(f\circ g)(2)$의 값을 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $g(2)=2$이므로

$$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(2)=-2$$

2nd $x>2$, $-2\le x\le 2$, $x<-2$일 때로 나누어 $(g\circ f)(-x)$, $(g\circ f)(x)$를 구하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $(g\circ f)(-x)=g(f(-x))$에서

(i) $x>2$일 때, $-x<-2$이므로

$$f(-x)=2$$
$$\therefore g(f(-x))=g(2)=2$$

(ii) $-2\le x\le 2$일 때, $-2\le -x\le 2$이므로

$$f(-x)=-(-x)=x$$
$$\therefore g(f(-x))=g(x)=x^2-2$$

(iii) $x<-2$일 때, $-x>2$이므로

$$f(-x)=-2$$
$$\therefore g(f(-x))=g(-2)=2$$

또 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서

ⓘ $x>2$일 때,

$$g(f(x))=g(-2)=2$$

ⓘⓘ $-2\le x\le 2$일 때,

$$g(f(x))=g(-x)=x^2-2$$

ⓘⓘⓘ $x<-2$일 때,

$$g(f(x))=g(2)=2$$
$$\therefore (g\circ f)(-x)=(g\circ f)(x)$$

3rd $x>2$, $-2\le x\le 2$, $x<-2$일 때로 나누어 $(f\circ g)(x)$를 구하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서

(i) $x>2$일 때, $x^2-2>2$이므로

$$f(g(x))=f(x^2-2)=-2$$

(ii) $-2\le x\le 2$일 때, $-2\le x^2-2\le 2$이므로

$$f(g(x))=f(x^2-2)=-(x^2-2)=-x^2+2$$

(iii) $x<-2$일 때, $x^2-2>2$이므로

$$f(g(x))=f(x^2-2)=-2$$
$$\therefore (f\circ g)(x)=-(g\circ f)(x)\ (\because\ ㄴ)$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

다른 풀이 ㄴ. $f(-x)=-f(x)$이므로

$$\begin{aligned}(g\circ f)(-x)&=g(f(-x))\\&=\{f(-x)\}^2-2\\&=\{-f(x)\}^2-2\\&=\{f(x)\}^2-2\end{aligned}$$

이때

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\{f(x)\}^2-2$$

이므로

$$(g\circ f)(-x)=(g\circ f)(x)$$

1068 **1st** $(g\circ f)(x)$를 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. f, g가 모두 항등함수이면 $f(x)=x$, $g(x)=x$이므로

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x)=x$$

따라서 $g\circ f$는 항등함수이다.

2nd 귀류법을 이용하여 ㄴ이 참임을 보인다.

ㄴ. $g\circ f$가 항등함수이면 $g\circ f$는 일대일함수이다.

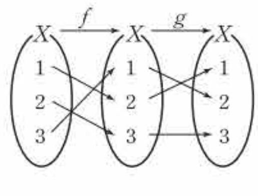
f가 일대일함수가 아니라고 가정하면 집합 X의 서로 다른 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)$인 x_1, x_2가 존재한다.

이때 $g(f(x_1))=g(f(x_2))$, 즉 $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$이므로 $g\circ f$가 일대일함수라는 사실에 모순이다.

따라서 f는 일대일함수이다.

3rd 반례를 이용하여 ㄷ이 거짓임을 보인다.

ㄷ. [반례] 두 함수 f, g가 오른쪽 그림과 같으면 $g\circ f$는 일대일함수이지만 f, g는 모두 항등함수가 아니다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

1069 **1st** 함수 f의 치역의 원소가 2개일 때의 순서쌍 (f, g)의 개수를 구한다.

(i) 함수 f의 치역의 원소가 2개일 때,

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 3 중 하나이므로 2개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값을 제외한 1개

따라서 함수 f의 개수는 $2\cdot1=2$

$g(2)$의 값이 될 수 있는 것은 0, 1 중 하나이므로 2개

$g(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $g(2)$의 값과 같으므로 1개

따라서 함수 f에 대하여 함수 g의 개수는 $2\cdot1=2$

따라서 순서쌍 (f, g)의 개수는

$2\cdot2=4$ ⋯ ❶

2nd 함수 f의 치역의 원소가 1개일 때의 순서쌍 (f, g)의 개수를 구한다.

(ii) 함수 f의 치역의 원소가 1개일 때,

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 3 중 하나이므로 2개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값과 같으므로 1개

따라서 함수 f의 개수는 $2\cdot1=2$

$g(2)$의 값이 될 수 있는 것은 0, 1 중 하나이므로 2개

$g(3)$의 값이 될 수 있는 것은 0, 1 중 하나이므로 2개

따라서 함수 f에 대하여 함수 g의 개수는 $2\cdot2=4$

따라서 순서쌍 (f, g)의 개수는

$2\cdot4=8$ ⋯ ❷

3rd 순서쌍 (f, g)의 개수를 구한다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (f, g)의 개수는

$4+8=12$ ⋯ ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ 함수 f의 치역의 원소가 2개일 때, 순서쌍 (f, g)의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 함수 f의 치역의 원소가 1개일 때, 순서쌍 (f, g)의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 순서쌍 (f, g)의 개수를 구할 수 있다.	20 %

참고 (ii)에서 $f(1)=2$, $f(2)=2$이고 $g(2)=0$이라 하면 $g(3)=1$이어도 $(g\circ f)(x)=0$이므로 $g\circ f$는 상수함수이다.

1070 1st $(g\circ f)(1)$을 a에 대한 식으로 나타낸다.

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=\underbrace{g(1+a)}_{1+a>a\text{이므로 } g(x)=x^2\text{에 대입한다.}}=(1+a)^2$

2nd $a>4$일 때와 $a\le4$일 때로 나누어 $(f\circ g)(4)$를 a에 대한 식으로 나타낸 후 a의 값을 구한다.

(i) $a>4$일 때,

$g(4)=2\cdot4-6=2$이므로

$(f\circ g)(4)=f(g(4))=f(2)=2+a$

$\therefore (g\circ f)(1)+(f\circ g)(4)=(1+a)^2+2+a$
$=a^2+3a+3$

즉 $a^2+3a+3=57$에서

$a^2+3a-54=0,\quad (a+9)(a-6)=0$

$\therefore a=-9$ 또는 $a=6$

그런데 $a>4$이므로

$a=6$

(ii) $a\le4$일 때,

$g(4)=4^2=16$이므로

$(f\circ g)(4)=f(g(4))=f(16)=16+a$

$\therefore (g\circ f)(1)+(f\circ g)(4)=(1+a)^2+16+a$
$=a^2+3a+17$

즉 $a^2+3a+17=57$에서

$a^2+3a-40=0,\quad (a+8)(a-5)=0$

$\therefore a=-8$ 또는 $a=5$

그런데 $a\le4$이므로

$a=-8$

3rd a의 값의 합을 구한 후 $10S^2$의 값을 구한다.

(i), (ii)에서 a의 값은 -8, 6이므로

$S=-8+6=-2$

$\therefore 10S^2=40$

답 40

1071 1st 방정식 $(f\circ g)(x)=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되는 경우를 구한다.

$(f\circ g)(x)=f(x)$, 즉 $f(g(x))=f(x)$에서

$\{g(x)\}^2+2g(x)+3=x^2+2x+3$

$\underbrace{\{g(x)\}^2-x^2}_{\{g(x)\}^2-x^2=\{g(x)-x\}\{g(x)+x\}}+2\{g(x)-x\}=0$

$\{g(x)-x\}\{g(x)+x+2\}=0$

$\therefore g(x)=x$ 또는 $g(x)=-x-2$

$g(x)=x$, 즉 $x^2-2x+a=x$이면

$x^2-3x+a=0$ …… ㉠

$g(x)=-x-2$, 즉 $x^2-2x+a=-x-2$이면

$x^2-x+a+2=0$ …… ㉡

따라서 방정식 $(f\circ g)(x)=f(x)$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠만 서로 다른 두 실근을 갖거나 이차방정식 ㉠, ㉡이 각각 중근을 갖거나 이차방정식 ㉡만 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

2nd 판별식을 이용하여 각각의 경우의 a의 값의 범위를 구한다.

이차방정식 ㉠, ㉡의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$D_1=9-4a$,

$D_2=1-4(a+2)=-4a-7$

(i) 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖고 이차방정식 ㉡은 실근을 갖지 않으려면 $D_1>0$, $D_2<0$이어야 하므로

$a<\frac{9}{4}$, $a>-\frac{7}{4}$

$\therefore -\frac{7}{4}<a<\frac{9}{4}$

(ii) 이차방정식 ㉠, ㉡이 각각 중근을 가지려면 $D_1=0$, $D_2=0$이어야 하는데 이를 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(iii) 이차방정식 ㉠은 실근을 갖지 않고 이차방정식 ㉡은 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D_1<0$, $D_2>0$이어야 하므로

$a>\frac{9}{4}$, $a<-\frac{7}{4}$

그런데 이를 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

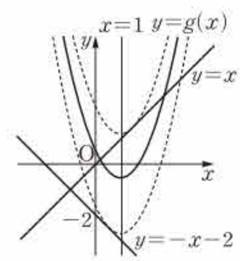
3rd a의 값의 범위를 구한다.

이상에서 구하는 a의 값의 범위는

$-\frac{7}{4}<a<\frac{9}{4}$

답 $-\frac{7}{4}<a<\frac{9}{4}$

SSEN 특강



주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 $y=g(x)$의 그래프가 두 직선 $y=x$, $y=-x+2$와 만나는 점의 개수가 2이어야 하므로 오른쪽 그림과 같이 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=x$와 서로 다른 두 점에서 만나고 직선 $y=-x-2$와는 만나지 않아야 한다. 즉 방정식 ㉠의 실근의 개수가 2, 방정식 ㉡의 실근의 개수가 0이어야 한다.

1072 1st $f(x)$를 구한 후 x의 값의 범위를 나누어 $(f\circ f)(x)$를 구한다.

$f(x)=\begin{cases}-3x+3 & (0\le x<1)\\ x-1 & (1\le x\le3)\end{cases}$이므로

$(f\circ f)(x)=\begin{cases}-3f(x)+3 & (0\le f(x)<1)\\ f(x)-1 & (1\le f(x)\le3)\end{cases}$

(i) $0\le x\le\frac{2}{3}$일 때, $f(x)=-3x+3$이고 $1\le f(x)\le3$이므로

$(f\circ f)(x)=-3x+3-1=-3x+2$

(ii) $\frac{2}{3}<x<1$일 때, $f(x)=-3x+3$이고 $0<f(x)<1$이므로

$(f\circ f)(x)=-3(-3x+3)+3=9x-6$

(iii) $1\le x<2$일 때, $f(x)=x-1$이고 $0\le f(x)<1$이므로

$(f\circ f)(x)=-3(x-1)+3=-3x+6$

(iv) $2\le x\le3$일 때, $f(x)=x-1$이고 $1\le f(x)\le2$이므로

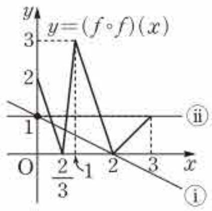
$(f\circ f)(x)=x-1-1=x-2$

이상에서

$(f\circ f)(x)=\begin{cases}-3x+2 & \left(0\le x\le\frac{2}{3}\right)\\ 9x-6 & \left(\frac{2}{3}<x<1\right)\\ -3x+6 & (1\le x<2)\\ x-2 & (2\le x\le3)\end{cases}$ ⋯ ❶

2nd $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=kx+1$을 그려 조건을 만족시키는 k의 값의 범위를 구한다.

함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $(f\circ f)(x)=kx+1$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되려면 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=kx+1$의 교점의 개수가 4이어야 한다.
└ k의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 1)$을 지난다.



ⓘ 직선 $y=kx+1$이 점 $(2, 0)$을 지날 때,

$$0=2k+1 \qquad \therefore k=-\frac{1}{2}$$

ⓘⓘ 직선 $y=kx+1$이 점 $(3, 1)$을 지날 때,

$$1=3k+1 \qquad \therefore k=0$$

ⓘ, ⓘⓘ에서 방정식 $(f\circ f)(x)=kx+1$의 서로 다른 실근이 4개가 되도록 하는 k의 값의 범위는

$$-\frac{1}{2}<k<0 \ (\because k\neq 0)$$ ⋯ ❷

3rd $b-a$의 값을 구한다.

$a=-\frac{1}{2}$, $b=0$이므로 $\qquad b-a=\frac{1}{2}$ ⋯ ❸

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ 함수 $(f\circ f)(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ 조건을 만족시키는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1073 1st $a<b$임과 합성함수의 정의를 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $a<b$이므로 조건 (나)에 의하여

$f(a)>f(b)$

$\therefore f(f(a))<f(f(b))$, 즉 $(f\circ f)(a)<(f\circ f)(b)$

2nd 함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여 $f(x)=y$이면 $f^{-1}(y)=x$임을 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$라 하면 $x_1<x_2$일 때,

$y_1>y_2$ ⋯⋯ ㉠

이때 $f^{-1}(y_1)=x_1$, $f^{-1}(y_2)=x_2$이므로

$f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $y_2<y_1$이면 $f^{-1}(y_2)>f^{-1}(y_1)$임을 알 수 있다.

따라서 $a<b$이므로

$f^{-1}(a)>f^{-1}(b)$

3rd ㄴ과 합성함수의 정의를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. ㄴ에서 $f^{-1}(a)>f^{-1}(b)$이므로

$f^{-1}(f^{-1}(a))<f^{-1}(f^{-1}(b))$,

즉 $(f^{-1}\circ f^{-1})(a)<(f^{-1}\circ f^{-1})(b)$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

1074 1st 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응임을 이용하여 a의 값을 구한다.

함수 f의 역함수가 존재하므로 f는 일대일대응이다.

이때 $f(1)=1$, $f(2)=4$, $f(3)=3+a$, $f(4)=4+a$이므로

$f(3)=2$, $f(4)=3$ └ $3+a<4+a$이므로 $f(3)<f(4)$

$\therefore a=-1$

2nd $g^1(2)$, $g^2(2)$, $g^3(2)$, ⋯의 값을 구하여 규칙을 찾아 $a+g^{10}(2)+g^{11}(2)$의 값을 구한다.

$g(1)=1$, $g(2)=3$, $g(3)=4$, $g(4)=2$이므로

$g^1(2)=g(2)=3$

$g^2(2)=g(g^1(2))=g(3)=4$

$g^3(2)=g(g^2(2))=g(4)=2$

$g^4(2)=g(g^3(2))=g(2)=3$

⋮

따라서 $g^n(2)$는 3, 4, 2가 이 순서대로 반복된다.

이때 $10=3\cdot 3+1$, $11=3\cdot 3+2$이므로

$g^{10}(2)=g^1(2)=3$, $g^{11}(2)=g^2(2)=4$

$\therefore a+g^{10}(2)+g^{11}(2)=6$ 답 ③

1075

집합 ❶$S=\{n\,|\,1\le n\le 100,\ n$은 11의 배수$\}$의 공집합이
$S=\{11, 22, 33, \cdots, 99\}$
아닌 부분집합 X와 집합 ❷$Y=\{0, 1, 2, 3, 4\}$에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow Y$를

$f(n)=(n$을 5로 나누었을 때의 나머지$)$
0, 1, 2, 3, 4 중 하나이다.

로 정의하자. ❸함수 $f(n)$의 역함수가 존재하도록 하는 집합 X의 개수를 구하시오.
└ 함수 $f(n)$은 일대일대응이다.

❶의 원소를 5로 나누었을 때의 나머지를 각각 구한 후 ❷, ❸에서 $n(X)=5$이고 Y의 각 원소에 대응되는 X의 원소는 오직 하나임을 이용하여 집합 X의 개수를 구한다.

1st 집합 S를 원소나열법으로 나타낸다.

집합 S를 원소나열법으로 나타내면

$S=\{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$

2nd 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응임을 이용하여 집합 X의 개수를 구한다.

집합 S의 원소에서

5로 나누었을 때의 나머지가 0인 것은 55

5로 나누었을 때의 나머지가 1인 것은 11, 66

5로 나누었을 때의 나머지가 2인 것은 22, 77

5로 나누었을 때의 나머지가 3인 것은 33, 88

5로 나누었을 때의 나머지가 4인 것은 44, 99

함수 f의 역함수가 존재하려면 f는 일대일대응이어야 하므로 집합 X는 55를 반드시 원소로 갖고, 11과 66 중 1개, 22와 77 중 1개, 33과 88 중 1개, 44와 99 중 1개를 반드시 원소로 가져야 한다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=16$ 답 16

1076 1st $y=f^{-1}(x)$의 식을 이용하여 $y=g(4x+3)$의 식을 구한 후 $y=g(x)$의 식을 구한다.

$f(x)=2x+4$에서 $y=2x+4$라 하면

$2x=y-4 \quad \therefore x=\frac{1}{2}y-2$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{1}{2}x-2$

즉 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-2$이므로

$g(4x+3)=\frac{1}{2}x-2$ ⋯ ❶

이때 $4x+3=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{4}t-\frac{3}{4}$이므로

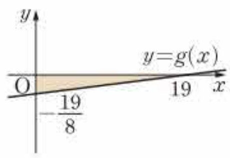
$g(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}t-\frac{3}{4}\right)-2=\frac{1}{8}t-\frac{19}{8}$

$\therefore g(x)=\frac{1}{8}x-\frac{19}{8}$ ⋯ ❷

2nd 도형의 넓이를 구한다.

함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot19\cdot\frac{19}{8}=\frac{361}{16}$ ⋯ ❸



답 $\frac{361}{16}$

채점 기준	비율
❶ $g(4x+3)$을 구할 수 있다.	40 %
❷ $g(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 도형의 넓이를 구할 수 있다.	30 %

1077 **1st** $(g\circ f)^{-1}(a)=k$이면 $(g\circ f)(k)=a$임을 이용하여 합성함수의 값을 구한다.

$(g\circ f)^{-1}(7)=3$, $(g\circ f)^{-1}(8)=1$, $(g\circ f)^{-1}(9)=2$이므로

$(g\circ f)(1)=8$, $(g\circ f)(2)=9$, $(g\circ f)(3)=7$

2nd 두 함수 f, g가 모두 일대일대응임을 이용하여 $f(2)$, $f(3)$의 값을 구한다.

$g(6)=9$이고 함수 g가 일대일대응이므로

$f(2)=6$ $(g\circ f)(2)=g(6)$

또 $f(1)=4$이고 함수 f가 일대일대응이므로

$f(3)=5$

3rd $g(5)$의 값을 구한 후 $f(2)+g(5)$의 값을 구한다.

$(g\circ f)(3)=7$에서 $f(3)=5$이므로 $\quad g(5)=7$

$\therefore f(2)+g(5)=13$

답 ③

1078 **1st** 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용하여 세 점 A, B, C의 좌표를 구한다.

함수 $f(x)=x^2-2\ (x\ge0)$의 그래프가 y축과 점 $(0,\ -2)$에서 만나므로 $\quad$A$(0,\ -2)$

함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 x축과 점 $(-2,\ 0)$에서 만난다.

$\therefore$ B$(-2,\ 0)$

$y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같으므로

$x^2-2=x$에서 $\quad x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=2$

그런데 $x\ge0$이므로 $\quad x=2$

$\therefore$ C$(2,\ 2)$ ⋯ ❶

2nd △ABC의 넓이를 구한다.

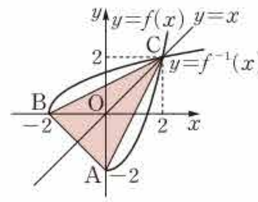
오른쪽 그림에서

△ABC

$=$△AOB$+\underbrace{\text{△BOC}+\text{△COA}}_{\text{△BOC}=\text{△COA}}$

$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2+2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\right)$

$=6$ ⋯ ❷



답 6

채점 기준	비율
❶ 세 점 A, B, C의 좌표를 구할 수 있다.	70 %
❷ △ABC의 넓이를 구할 수 있다.	30 %

1079 **1st** $x<-1$, $-1\le x<2$, $x\ge2$일 때로 나누어 주어진 함수의 그래프를 그린다.

$y=|x+1|-|x-2|$에서

(i) $x<-1$일 때,

$y=-(x+1)+x-2=-3$

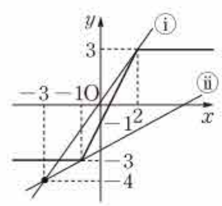
(ii) $-1\le x<2$일 때,

$y=x+1+x-2=2x-1$

(iii) $x\ge2$일 때,

$y=x+1-(x-2)=3$

이상에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



2nd 직선 $mx-y+3m-4=0$이 주어진 함수의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구한다.

$mx-y+3m-4=0$에서

$y=m(x+3)-4$ ⋯⋯ ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-3,\ -4)$를 지난다.

ⓘ 직선 ㉠이 점 $(2,\ 3)$을 지날 때,

$3=5m-4 \quad \therefore m=\frac{7}{5}$

ⓘⓘ 직선 ㉠이 점 $(-1,\ -3)$을 지날 때,

$-3=2m-4 \quad \therefore m=\frac{1}{2}$

ⓘ, ⓘⓘ에서 직선 ㉠이 $y=|x+1|-|x-2|$의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만나려면

$\frac{1}{2}<m<\frac{7}{5}$

답 $\frac{1}{2}<m<\frac{7}{5}$

09 유리식과 유리함수

1080 답 ㄴ, ㄷ

1081 답 ㄱ, ㄹ, ㅁ

1082 $\frac{b}{2a^2xy}$, $\frac{1}{3abx^2}$의 분모의 최소공배수는 $6a^2bx^2y$이므로

두 식을 통분하면 $\frac{3b^2x}{6a^2bx^2y}$, $\frac{2ay}{6a^2bx^2y}$

답 $\frac{3b^2x}{6a^2bx^2y}$, $\frac{2ay}{6a^2bx^2y}$

1083 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, $x^2-4=(x+2)(x-2)$이므로 두 식을 통분하면

$$\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)(x+2)},\ \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)(x+2)}$$

답 $\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)(x+2)}$, $\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)(x+2)}$

1084 답 $\frac{3z}{4y}$

1085 $\frac{x^3-2x^2-8x}{x^2-4x}=\frac{x(x+2)(x-4)}{x(x-4)}=x+2$ 답 $x+2$

1086 $\frac{1}{x+2}-\frac{3}{x+5}=\frac{x+5-3(x+2)}{(x+2)(x+5)}$

$=\frac{-2x-1}{(x+2)(x+5)}$

답 $\frac{-2x-1}{(x+2)(x+5)}$

1087 $\frac{x-3}{x-1}+\frac{5x+3}{x^2+2x-3}=\frac{x-3}{x-1}+\frac{5x+3}{(x+3)(x-1)}$

$=\frac{(x+3)(x-3)+5x+3}{(x+3)(x-1)}$

$=\frac{x^2+5x-6}{(x+3)(x-1)}$

$=\frac{(x+6)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$

$=\frac{x+6}{x+3}$ 답 $\frac{x+6}{x+3}$

1088 $\frac{6x^2+7x+2}{x^2-x-6}\times\frac{x-3}{3x^2-4x-4}$

$=\frac{(2x+1)(3x+2)}{(x+2)(x-3)}\times\frac{x-3}{(3x+2)(x-2)}$

$=\frac{2x+1}{(x+2)(x-2)}$ 답 $\frac{2x+1}{(x+2)(x-2)}$

1089 $\frac{3x^2+2x-8}{2x^2+x-1}\div\frac{3x^2+5x-12}{x^2-1}$

$=\frac{(x+2)(3x-4)}{(x+1)(2x-1)}\times\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(3x-4)}$

$=\frac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(2x-1)}$ 답 $\frac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(2x-1)}$

1090 $\frac{x+2}{x-3}-\frac{x-1}{x-2}=\frac{(x-3)+5}{x-3}-\frac{(x-2)+1}{x-2}$

(분자의 차수) < (분모의 차수)가 되도록 변형한다.

$=1+\frac{5}{x-3}-\left(1+\frac{1}{x-2}\right)$

$=\frac{5}{x-3}-\frac{1}{x-2}=\frac{5(x-2)-(x-3)}{(x-3)(x-2)}$

$=\frac{4x-7}{(x-3)(x-2)}$ 답 $\frac{4x-7}{(x-3)(x-2)}$

1091 $x^2+4x+7=x(x+1)+3(x+1)+4$

$=(x+1)(x+3)+4$

$x^2+2x-2=x(x-1)+3(x-1)+1$

$=(x-1)(x+3)+1$

$\therefore \frac{x^2+4x+7}{x+1}-\frac{x^2+2x-2}{x-1}$

$=\frac{(x+1)(x+3)+4}{x+1}-\frac{(x-1)(x+3)+1}{x-1}$

$=x+3+\frac{4}{x+1}-(x+3)-\frac{1}{x-1}$

$=\frac{4}{x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{4(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{3x-5}{(x+1)(x-1)}$ 답 $\frac{3x-5}{(x+1)(x-1)}$

1092 $\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$

$=\frac{1}{(x+2)-(x+1)}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)$

$+\frac{1}{(x+3)-(x+2)}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)$

$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$

$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{x+3-(x+1)}{(x+1)(x+3)}$

$=\frac{2}{(x+1)(x+3)}$ 답 $\frac{2}{(x+1)(x+3)}$

1093 $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{2}{(x+1)(x+3)}$

$=\frac{1}{(x+1)-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$

$+\frac{2}{(x+3)-(x+1)}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}$

$=\frac{x+3-x}{x(x+3)}=\frac{3}{x(x+3)}$ 답 $\frac{3}{x(x+3)}$

1094 $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{\dfrac{x-1}{x}}=\dfrac{x}{x-1}$ 　　답 $\dfrac{x}{x-1}$

1095 $\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x+1}{x}}=\dfrac{\dfrac{x^2-1}{x}}{\dfrac{x+1}{x}}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1}=x-1$ 　　답 $x-1$

└분자, 분모에 각각 x를 곱한다.

1096 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=k\ (k\neq0)$라 하면 　$x=2k,\ y=3k$

$\therefore\ \dfrac{2x-y}{x+y}=\dfrac{4k-3k}{2k+3k}=\dfrac{k}{5k}=\dfrac{1}{5}$ 　　답 $\dfrac{1}{5}$

1097 $a:b=3:4$이므로 　$\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{4}$

$\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{4}=k\ (k\neq0)$라 하면 　$a=3k,\ b=4k$

$\therefore\ \dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{9k^2-12k^2+16k^2}{9k^2+16k^2}=\dfrac{13k^2}{25k^2}=\dfrac{13}{25}$

답 $\dfrac{13}{25}$

1098 답 ㄱ, ㄹ 　　**1099** 답 ㄴ, ㄷ, ㅁ

1100 $2x+3=0$에서 　$x=-\dfrac{3}{2}$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\left\{x\,\middle|\,x\neq-\dfrac{3}{2}\text{인 실수}\right\}$ 　　답 $\left\{x\,\middle|\,x\neq-\dfrac{3}{2}\text{인 실수}\right\}$

1101 $x-5=0$에서 　$x=5$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\neq5\text{인 실수}\}$ 　　답 $\{x\,|\,x\neq5\text{인 실수}\}$

1102 $x^2-4=0$에서 　$x=\pm2$

따라서 주어진 함수의 정의역은

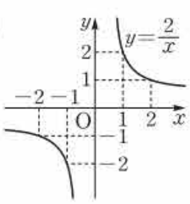
$\{x\,|\,x\neq\pm2\text{인 실수}\}$ 　　답 $\{x\,|\,x\neq\pm2\text{인 실수}\}$

1103 $x^2+1>0$이므로 주어진 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

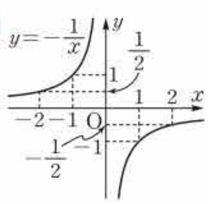
└주어진 함수의 분모를 0으로 만드는 실수 x의 값이 존재하지 않는다.

답 실수 전체의 집합

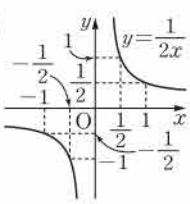
1104 답



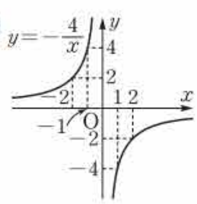
1105 답



1106 답



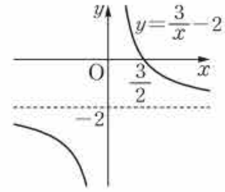
1107 답



1108 답 $y=\dfrac{1}{x-1}+2$

1109 답 $y=-\dfrac{2}{x+2}-1$

1110 $y=\dfrac{3}{x}-2$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

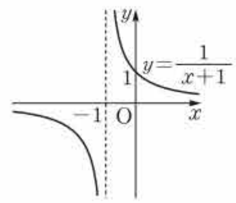


정의역: $\{x\,|\,x\neq0\text{인 실수}\}$,

치역: $\{y\,|\,y\neq-2\text{인 실수}\}$

답 풀이 참조

1111 $y=\dfrac{1}{x+1}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

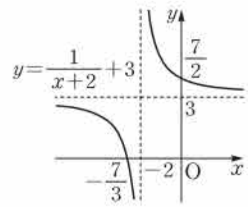


정의역: $\{x\,|\,x\neq-1\text{인 실수}\}$,

치역: $\{y\,|\,y\neq0\text{인 실수}\}$

답 풀이 참조

1112 $y=\dfrac{1}{x+2}+3$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

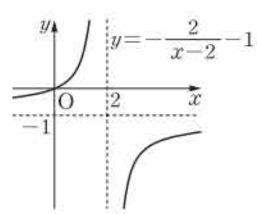


정의역: $\{x\,|\,x\neq-2\text{인 실수}\}$,

치역: $\{y\,|\,y\neq3\text{인 실수}\}$

답 풀이 참조

1113 $y=-\dfrac{2}{x-2}-1$의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고



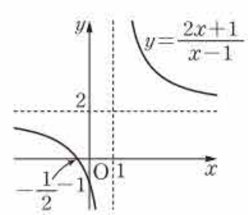
정의역: $\{x\,|\,x\neq2\text{인 실수}\}$,

치역: $\{y\,|\,y\neq-1\text{인 실수}\}$

답 풀이 참조

1114 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+3}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}+2$

따라서 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고 점근선의 방정식은



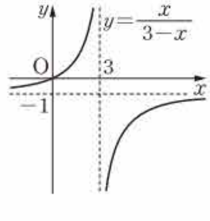
$x=1,\ y=2$

답 풀이 참조

09 유리식과 유리함수

1115 $y=\dfrac{x}{3-x}=\dfrac{-x}{x-3}=\dfrac{-(x-3)-3}{x-3}=-\dfrac{3}{x-3}-1$

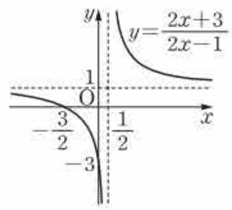
따라서 $y=\dfrac{x}{3-x}$의 그래프는 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고 점근선의 방정식은



$x=3$, $y=-1$ 답 풀이 참조

1116 $y=\dfrac{2x+3}{2x-1}=\dfrac{(2x-1)+4}{2x-1}=\dfrac{2}{x-\frac{1}{2}}+1$

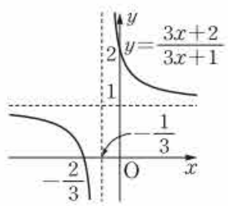
따라서 $y=\dfrac{2x+3}{2x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고 점근선의 방정식은



$x=\dfrac{1}{2}$, $y=1$ 답 풀이 참조

1117 $y=\dfrac{3x+2}{3x+1}=\dfrac{(3x+1)+1}{3x+1}=\dfrac{1}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}+1$

따라서 $y=\dfrac{3x+2}{3x+1}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{1}{3}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고 점근선의 방정식은



$x=-\dfrac{1}{3}$, $y=1$ 답 풀이 참조

유형 01 유리식의 덧셈과 뺄셈 본책 170쪽

유리식의 덧셈과 뺄셈은 분모를 통분하여 분자끼리 계산한다.

1118 $\dfrac{x-1}{x^2-x+1}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3}{\underbrace{x^3+1}_{x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)}}$

$=\dfrac{(x+1)(x-1)-(x^2-x+1)+3}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\dfrac{x^2-1-x^2+x-1+3}{(x+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\dfrac{1}{x^2-x+1}$ 답 $\dfrac{1}{x^2-x+1}$

1119 $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$

$=\dfrac{-a(b-c)-b(c-a)-c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\dfrac{-ab+ac-bc+ab-ac+bc}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0$ 답 ③

1120 $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}$

$=\underbrace{\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+1}\right)+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}\right)}_{\text{식이 간단해지도록 적당히 두 개씩 묶어서 계산한다.}}$

$=\dfrac{x+1-(x-2)}{(x+1)(x-2)}+\dfrac{x+3-x}{x(x+3)}$

$=\dfrac{3}{(x+1)(x-2)}+\dfrac{3}{x(x+3)}$

$=\dfrac{3x(x+3)+3(x+1)(x-2)}{x(x+3)(x+1)(x-2)}$

$=\dfrac{3x^2+9x+3x^2-3x-6}{x(x+3)(x+1)(x-2)}$

$=\dfrac{6x^2+6x-6}{x(x+3)(x+1)(x-2)}$

답 $\dfrac{6x^2+6x-6}{x(x+3)(x+1)(x-2)}$

유형 02 유리식의 곱셈과 나눗셈 본책 170쪽

유리식의 곱셈과 나눗셈은 다음과 같은 순서로 계산한다.
(i) 각 유리식의 분자, 분모를 인수분해한다.
(ii) 분자와 분모에 공통인 인수가 있을 때에는 분자, 분모를 약분하여 간단히 한다.
(iii) 유리식의 곱셈, 나눗셈을 한다.

1121 $\dfrac{a^2-6a}{a^2+a-2}\times\dfrac{a^2+5a+6}{a+1}\div\dfrac{a^2-3a-18}{a-1}$

$=\dfrac{a(a-6)}{(a+2)(a-1)}\times\dfrac{(a+3)(a+2)}{a+1}\times\dfrac{a-1}{(a+3)(a-6)}$

$=\dfrac{a}{a+1}$ 답 $\dfrac{a}{a+1}$

1122 $\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\dfrac{2(a^2+b^2)}{(a-b)(a+b)}$

$\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\dfrac{4ab}{(a-b)(a+b)}$

$\therefore \left(\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}\right)\div\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right)$

$=\dfrac{2(a^2+b^2)}{(a-b)(a+b)}\times\dfrac{(a-b)(a+b)}{4ab}$

$=\dfrac{a^2+b^2}{2ab}=\dfrac{5}{6}$ 답 $\dfrac{5}{6}$

1123 $A\div\dfrac{x^3+1}{x^4+x^2+1}\times\dfrac{x^2+2x}{x^3-1}$

$=A\times\dfrac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}\times\dfrac{x(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=A\times\dfrac{x(x+2)}{(x+1)(x-1)}$ ⋯ ❶

따라서 $A\times\dfrac{x(x+2)}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{x}{x+1}$이므로

$A=\dfrac{x}{x+1}\times\dfrac{(x+1)(x-1)}{x(x+2)}=\dfrac{x-1}{x+2}$ ⋯ ❷

답 $\dfrac{x-1}{x+2}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	50 %
❷ A를 구할 수 있다.	50 %

유형 03 유리식과 항등식

집중 공략 본책 170쪽

주어진 유리식이 항등식일 때에는 양변에 적절한 식을 곱하여 정리한 후 동류항의 계수를 비교한다.

1124 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$이므로 주어진 식의 양변에 x^3+1을 곱하여 정리하면

$x+7=a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)$

$\therefore x+7=(a+b)x^2+(-a+b+c)x+a+c$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=0,\ -a+b+c=1,\ a+c=7$

$a+b=0$에서 $b=-a$, $a+c=7$에서 $c=7-a$이므로

$-a+(-a)+(7-a)=1,\quad 3a=6\quad \therefore a=2$

따라서 $a=2$, $b=-2$, $c=5$이므로

$abc=-20$ 답 ③

SSEN 특강 항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식
$\iff a=b=c=0$

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식
$\iff a=a',\ b=b',\ c=c'$

③ $ax+by+c=0$이 x, y에 대한 항등식
$\iff a=b=c=0$

1125 주어진 식의 양변에 $x(x+1)^2$을 곱하여 정리하면

$1=a(x+1)^2+bx(x+1)+cx$

$\therefore 1=(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=0,\ 2a+b+c=0,\ a=1$

$a+b=0$에 $a=1$을 대입하면 $\quad 1+b=0\quad \therefore b=-1$

$2a+b+c=0$에 $a=1$, $b=-1$을 대입하면

$2-1+c=0\quad \therefore c=-1$

$\therefore a-b+c=1$ 답 1

1126 $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{4}{x^4+1}$

$=\dfrac{x+1-(x-1)}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{4}{x^4+1}$

$=\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{4}{x^4+1}$

$=\dfrac{2(x^2+1)-2(x^2-1)}{(x^2+1)(x^2-1)}-\dfrac{4}{x^4+1}$

$=\dfrac{4}{x^4-1}-\dfrac{4}{x^4+1}$

$=\dfrac{4(x^4+1)-4(x^4-1)}{(x^4+1)(x^4-1)}=\dfrac{8}{x^8-1}$ ··· ❶

따라서 $\dfrac{8}{x^8-1}=\dfrac{a}{x^b-1}$이고, 이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a=8,\ b=8$ ··· ❷

$\therefore ab=64$ ··· ❸

답 64

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	60 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

1127 주어진 식의 양변에 $(x-1)^{10}$을 곱하여 정리하면

$x^9+1=a_1(x-1)^9+a_2(x-1)^8+\cdots+a_9(x-1)+a_{10}$

이 식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^9+1=a_1+a_2+\cdots+a_{10}$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{10}=513$ 답 ②

유형 04 (분자의 차수)≥(분모의 차수)인 유리식

본책 171쪽

(분자의 차수)≥(분모의 차수)인 유리식은 분자를 분모로 나누어 (분자의 차수)<(분모의 차수)가 되도록 변형한다.

1128 $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2x+3}{x+1}-\dfrac{x+3}{x+2}-\dfrac{2x-3}{x-2}$

$=\dfrac{(x-1)+1}{x-1}+\dfrac{2(x+1)+1}{x+1}-\dfrac{(x+2)+1}{x+2}-\dfrac{2(x-2)+1}{x-2}$

$=1+\dfrac{1}{x-1}+2+\dfrac{1}{x+1}-\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)-\left(2+\dfrac{1}{x-2}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}\right)+\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-2}\right)$

$=\dfrac{x+2-(x-1)}{(x+2)(x-1)}+\dfrac{x-2-(x+1)}{(x+1)(x-2)}$

$=\dfrac{3}{(x+2)(x-1)}+\dfrac{-3}{(x+1)(x-2)}$

$=\dfrac{3(x^2-x-2)-3(x^2+x-2)}{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}$

$=\dfrac{\boxed{-6x}}{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}$ 답 ①

1129 $\dfrac{3x^2+3x+5}{x^2+x}-\dfrac{9x^2-3x+4}{3x^2-x}$

$=\dfrac{3(x^2+x)+5}{x^2+x}-\dfrac{3(3x^2-x)+4}{3x^2-x}$

$=3+\dfrac{5}{x^2+x}-\left(3+\dfrac{4}{3x^2-x}\right)$

$=\dfrac{5}{x^2+x}-\dfrac{4}{3x^2-x}$

$=\dfrac{5}{x(x+1)}-\dfrac{4}{x(3x-1)}$

$=\dfrac{5(3x-1)-4(x+1)}{x(x+1)(3x-1)}$

$=\dfrac{11x-9}{x(x+1)(3x-1)}$ 답 $\dfrac{11x-9}{x(x+1)(3x-1)}$

1130 $\dfrac{2x^2+2x+3}{x+1}-\dfrac{2x^2-4x-1}{x-2}$

$=\dfrac{2x(x+1)+3}{x+1}-\dfrac{2x(x-2)-1}{x-2}$

$=2x+\dfrac{3}{x+1}-\left(2x-\dfrac{1}{x-2}\right)$

$=\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{1}{x-2}$

$=\dfrac{3(x-2)+(x+1)}{(x+1)(x-2)}$

$=\dfrac{4x-5}{(x+1)(x-2)}$

따라서 $f(x)=4x-5$이므로

$f(1)=-1$ 　　답 -1

1131 $x^3=x(x^2+x+1)-(x^2+x+1)+1$

$=(x^2+x+1)(x-1)+1$

이므로 $\dfrac{x^3}{x^2+x+1}=x-1+\dfrac{1}{x^2+x+1}$

$x^3=x(x^2-x+1)+(x^2-x+1)-1$

$=(x^2-x+1)(x+1)-1$

이므로 $\dfrac{x^3}{x^2-x+1}=x+1-\dfrac{1}{x^2-x+1}$

$\therefore \dfrac{x^3}{x^2+x+1}+\dfrac{x^3}{x^2-x+1}-2x$

$=x-1+\dfrac{1}{x^2+x+1}+x+1-\dfrac{1}{x^2-x+1}-2x$

$=\dfrac{1}{x^2+x+1}-\dfrac{1}{x^2-x+1}$

$=\dfrac{x^2-x+1-(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$

$=\dfrac{-2x}{x^4+x^2+1}$ 　　답 $\dfrac{-2x}{x^4+x^2+1}$

유형 05 부분분수로의 변형

집중 공략 본책 172쪽

$\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

1132 $\dfrac{2}{x(x+2)}+\dfrac{3}{(x+2)(x+5)}+\dfrac{4}{(x+5)(x+9)}$

$=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}\right)+\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+5}\right)+\left(\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{x+9}\right)$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+9}=\dfrac{9}{x(x+9)}$

따라서 $\dfrac{9}{x(x+9)}=\dfrac{a}{x(x+b)}$이고, 이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a=9,\ b=9$

$\therefore a+b=18$ 　　답 18

1133 $f(n)=\dfrac{1}{(x+n)(x+n+1)}=\dfrac{1}{x+n}-\dfrac{1}{x+n+1}$

이므로

$f(3)+f(4)+f(5)+\cdots+f(10)$

$=\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}\right)+\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x+5}\right)+\left(\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{x+6}\right)$

$+\cdots+\left(\dfrac{1}{x+10}-\dfrac{1}{x+11}\right)$

$=\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+11}$

$=\dfrac{8}{(x+3)(x+11)}$

따라서 $\dfrac{8}{(x+3)(x+11)}=\dfrac{c}{(x+a)(x+b)}$이고, 이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a=3,\ b=11,\ c=8$ 또는 $a=11,\ b=3,\ c=8$

$\therefore a+b-c=6$ 　　답 6

1134 $\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{48}+\cdots+\dfrac{1}{440}$

$=\dfrac{1}{2\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot6}+\dfrac{1}{6\cdot8}+\cdots+\dfrac{1}{20\cdot22}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}\right)+\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{20}-\dfrac{1}{22}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{22}\right)=\dfrac{5}{22}$ 　　답 ③

1135 $\dfrac{1}{x^2+2x}+\dfrac{1}{x^2+6x+8}+\dfrac{1}{x^2+10x+24}$

$=\dfrac{1}{x(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+4)}+\dfrac{1}{(x+4)(x+6)}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}\right)+\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+4}\right)+\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x+6}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+6}\right)$

$=\dfrac{3}{x(x+6)}$

따라서 $\dfrac{3}{x(x+6)}=\dfrac{1}{24}$이므로 　$x(x+6)=72$

$x^2+6x-72=0,\quad (x+12)(x-6)=0$

$\therefore x=6\ (\because x>0)$ 　　답 6

1136 $f(x)=4x^2-1=(2x-1)(2x+1)$이므로

$\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{(2x-1)(2x+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{1}{2x+1}\right)$ ⋯ ❶

$\therefore \dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(2)}+\dfrac{1}{f(3)}+\cdots+\dfrac{1}{f(49)}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{97}-\dfrac{1}{99}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{99}\right)=\dfrac{49}{99}$ ⋯ ❷

답 $\dfrac{49}{99}$

채점 기준	비율
❶ $\dfrac{1}{f(x)}$을 부분분수로 변형할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	60 %

유형 06 분모 또는 분자가 분수식인 유리식 본책 172쪽

분모 또는 분자가 분수식인 유리식은 분자에 분모의 역수를 곱하여 계산한다.

➡ $\dfrac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{D}{C}=\dfrac{AD}{BC}$

1137 $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}}}=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\frac{x-1}{x}}}}$

$=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\frac{x}{x-1}}}$

$=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\frac{-1}{x-1}}}$

$=1-\dfrac{1}{1+x-1}$

$=1-\dfrac{1}{x}$

$=\dfrac{x-1}{x}$ 답 $\dfrac{x-1}{x}$

1138 $f(x)=1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=1+\dfrac{1}{\frac{x+2}{1+x}}$

$=1+\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{2x+3}{x+2}$

따라서 $f(k)=\dfrac{11}{6}$에서 $\dfrac{2k+3}{k+2}=\dfrac{11}{6}$

$12k+18=11k+22$ $\therefore k=4$ 답 ④

1139 $\dfrac{\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+5}}{\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+8}}=\dfrac{\frac{3}{(n+2)(n+5)}}{\frac{3}{(n+5)(n+8)}}$

$=\dfrac{n+8}{n+2}=\dfrac{(n+2)+6}{n+2}$

$=1+\dfrac{6}{n+2}$

위의 식이 자연수가 되려면 $n+2$가 6의 양의 약수이어야 하므로

$n+2=1, 2, 3, 6$

따라서 정수 n은 $-1, 0, 1, 4$의 4개이다. 답 4

다른 풀이 (주어진 식)$=\dfrac{n+8}{n+2}=k$ (k는 자연수)라 하면

$n+8=k(n+2)$, $(k-1)n=-2k+8$ ← $k=1$이면 $0\cdot n=6$이므로 $k\neq1$

$\therefore n=\dfrac{-2k+8}{k-1}=\dfrac{-2(k-1)+6}{k-1}$

$=-2+\dfrac{6}{k-1}$

n이 정수이려면 $k-1$이 6의 양의 약수이어야 하므로

$k-1=1, 2, 3, 6$ $\therefore k=2, 3, 4, 7$

따라서 정수 n은 $4, 1, 0, -1$의 4개이다.

1140 $\dfrac{43}{19}=2+\dfrac{5}{19}=2+\dfrac{1}{\frac{19}{5}}=2+\dfrac{1}{3+\frac{4}{5}}$

$=2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{\frac{5}{4}}}=2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{1+\frac{1}{4}}}$

따라서 $a=2$, $b=3$, $c=1$, $d=4$이므로

$abcd=24$ 답 ④

1141 $x^2+5x-1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면 ← $x^2+5x-1=0$에 $x=0$을 대입하면 $-1\neq0$ $\therefore x\neq0$

$x+5-\dfrac{1}{x}=0$, $x+5=\dfrac{1}{x}$

$\therefore \dfrac{1}{x+5}=x$

$\therefore 5+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{5+\frac{1}{5+x}}}}=5+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{5+\frac{1}{5+x}}}$

$=5+\dfrac{1}{5+\frac{1}{5+x}}$

$=5+\dfrac{1}{5+x}$

$=5+x=\dfrac{1}{x}$ 답 ③

유형 07 유리식의 값; 비례식이 주어질 때 본책 173쪽

조건이 비례식으로 주어지면 다음과 같이 비례상수 k를 이용하여 각 문자를 k에 대한 식으로 나타낸 후 유리식에 대입하여 식의 값을 구한다.

① $x:y=a:b \Longleftrightarrow \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$

$\Longleftrightarrow x=ak,\ y=bk$ (단, $k\neq0$)

② $x:y:z=a:b:c \Longleftrightarrow \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$

$\Longleftrightarrow x=ak,\ y=bk,\ z=ck$ (단, $k\neq0$)

1142 $\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{y+z}{4}=\dfrac{z+x}{5}=k$ $(k\neq0)$라 하면

$x+y=3k$, $y+z=4k$, $z+x=5k$ …… ㉠

위의 세 식을 변끼리 더하면 $2(x+y+z)=12k$

$\therefore x+y+z=6k$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x=2k$, $y=k$, $z=3k$

$\therefore \dfrac{xyz}{x^3+y^3+z^3}=\dfrac{6k^3}{8k^3+k^3+27k^3}=\dfrac{6k^3}{36k^3}=\dfrac{1}{6}$ 답 $\dfrac{1}{6}$

1143 $x=4k$, $y=7k$, $z=8k$ $(k\neq0)$라 하면

$\dfrac{-2x+3y-z}{x-y+z}=\dfrac{-8k+21k-8k}{4k-7k+8k}=\dfrac{5k}{5k}=1$ 답 1

1144 $2x=3y$, $4y=5z$에서 $x=\dfrac{3}{2}y$, $z=\dfrac{4}{5}y$

$\therefore x:y:z=\dfrac{3}{2}y:y:\dfrac{4}{5}y=15:10:8$ ⋯ ❶

$x=15k,\ y=10k,\ z=8k\ (k\neq0)$라 하면

$$\frac{3x-y-3z}{x+y+z}=\frac{45k-10k-24k}{15k+10k+8k}=\frac{11k}{33k}=\frac{1}{3}\quad\cdots ❷$$

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ $x:y:z$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $\frac{3x-y-3z}{x+y+z}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

다른 풀이 $x=\frac{3}{2}y,\ z=\frac{4}{5}y$이므로

$$\frac{3x-y-3z}{x+y+z}=\frac{\frac{9}{2}y-y-\frac{12}{5}y}{\frac{3}{2}y+y+\frac{4}{5}y}=\frac{\frac{11}{10}y}{\frac{33}{10}y}=\frac{1}{3}$$

1145 $\frac{y+z}{x}=\frac{z+x}{y}=\frac{x+y}{z}=k\ (k\neq0)$라 하면

$y+z=kx,\ z+x=ky,\ x+y=kz \quad\cdots\cdots ㉠$

위의 세 식을 변끼리 더하면

$2(x+y+z)=k(x+y+z)$

$(k-2)(x+y+z)=0$

$\therefore k=2$ 또는 $x+y+z=0$

(ⅰ) $k=2$일 때,

㉠에서 $y+z=2x,\ z+x=2y,\ x+y=2z$이므로

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}=\frac{2z\cdot2x\cdot2y}{xyz}=8$$

$\therefore p=8$

(ⅱ) $x+y+z=0$일 때,

$x+y=-z,\ y+z=-x,\ z+x=-y$이므로

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}=\frac{(-z)\cdot(-x)\cdot(-y)}{xyz}=-1$$

$\therefore p=-1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 p의 값의 합은

$8+(-1)=7$

답 7

유형 08 유리함수의 정의역과 치역

본책 174쪽

유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}\ (ad-bc\neq0,\ c\neq0)$의 정의역과 치역은 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형하여 구한다.

➡ 정의역: $\{x\mid x\neq p$인 실수$\}$, 치역: $\{y\mid y\neq q$인 실수$\}$

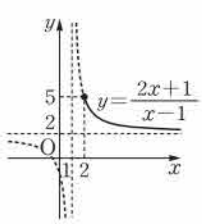
1146 $y=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}+2$이므로

$y=\frac{2x+1}{x-1}$의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $x\geq2$에서 $y=\frac{2x+1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 치역은

$\{y\mid 2<y\leq5\}$

답 ③



1147 $y=\frac{bx+4}{a-x}=\frac{-b(a-x)+ab+4}{a-x}=\frac{ab+4}{a-x}-b$

따라서 정의역은 $\{x\mid x\neq a$인 실수$\}$, 치역은 $\{y\mid y\neq -b$인 실수$\}$이므로

$a=1,\ b=4\qquad \therefore ab=4$

답 4

1148 $y=\frac{2x-3}{x+3}=\frac{2(x+3)-9}{x+3}=-\frac{9}{x+3}+2$이므로

$y=\frac{2x-3}{x+3}$의 그래프는 $y=-\frac{9}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

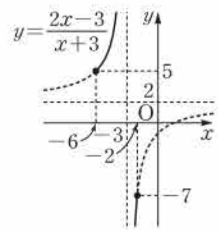
따라서 $y\leq-7$ 또는 $y\geq5$에서 $y=\frac{2x-3}{x+3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역은

$\{x\mid -6\leq x<-3$ 또는 $-3<x\leq-2\}$이고, 정의역에 속하는 정수는

$-6,\ -5,\ -4,\ -2$

의 4개이다.

답 4



유형 09 유리함수의 그래프의 평행이동

집중 공략 본책 174쪽

① 함수 $y=\frac{k}{x}\ (k\neq0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식

➡ $y=\frac{k}{x-p}+q$

② 함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}\ (ad-bc\neq0,\ c\neq0)$의 그래프

➡ $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한 후 이 그래프는 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것임을 이용한다.

1149 $y=\frac{bx+7}{x+a}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\frac{b(x-3)+7}{(x-3)+a}-2$$
$$=\frac{b(x-3+a)+7-ab}{x-3+a}-2$$
$$=\frac{7-ab}{x-3+a}+b-2$$

이 함수의 그래프가 $y=\frac{1}{x}$의 그래프와 일치하므로

$-3+a=0,\ b-2=0,\ 7-ab=1$

$\therefore a=3,\ b=2$

$\therefore a+b=5$

답 5

다른 풀이 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\frac{1}{x+3}+2=\frac{1+2(x+3)}{x+3}=\frac{2x+7}{x+3}$$

이 함수의 그래프가 $y=\frac{bx+7}{x+a}$의 그래프와 일치하므로

$a=3,\ b=2\qquad \therefore a+b=5$

1150 $y=-\frac{6}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=-\frac{6}{x+2}-5 \quad \cdots❶$$

이 함수의 그래프가 점 $(1, k)$를 지나므로

$$k=-\frac{6}{1+2}-5=-7 \quad \cdots❷$$

답 -7

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	60 %

1151 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\frac{3}{x-a}+b=\frac{3+b(x-a)}{x-a}=\frac{bx-ab+3}{x-a}$$

이 함수의 그래프가 $y=\frac{2x-7}{x-5}$의 그래프와 일치하므로

$a=5$, $b=2$, $-ab+3=-7$

$\therefore a-b=3$

답 3

1152 ㄱ. $y=\frac{1}{5x-5}=\frac{1}{5(x-1)}$

따라서 $y=\frac{1}{5x-5}$의 그래프는 $y=\frac{1}{5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\frac{10x+1}{5x}=\frac{2\cdot5x+1}{5x}=\frac{1}{5x}+2$

따라서 $y=\frac{10x+1}{5x}$의 그래프는 $y=\frac{1}{5x}$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\frac{10x+3}{5x+5}=\frac{2(5x+5)-7}{5x+5}=-\frac{7}{5(x+1)}+2$

따라서 $y=\frac{10x+3}{5x+5}$의 그래프는 $y=-\frac{7}{5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=\frac{x-2}{5-5x}=\frac{(x-1)-1}{-5(x-1)}=\frac{1}{5(x-1)}-\frac{1}{5}$

따라서 $y=\frac{x-2}{5-5x}$의 그래프는 $y=\frac{1}{5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 $-\frac{1}{5}$만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 평행이동에 의하여 $y=\frac{1}{5x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

유형 10 유리함수의 그래프의 점근선

집중 공략 본책 175쪽

유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq0,\ c\neq0)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형하여 구한다.

➡ 그래프의 점근선의 방정식: $x=p$, $y=q$

1153 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=2$이므로 주어진 함수의 식을

$$y=\frac{k}{x+1}+2\ (k\neq0)$$

라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(2, 1)$을 지나므로

$$1=\frac{k}{2+1}+2 \qquad \therefore k=-3$$

$$\therefore y=\frac{-3}{x+1}+2=\frac{-3+2(x+1)}{x+1}=\frac{2x-1}{x+1}$$

따라서 $a=2$, $b=-1$, $c=1$이므로

$a^2+b^2+c^2=6$

답 ②

다른 풀이 $y=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{a(x+c)-ac+b}{x+c}=\frac{-ac+b}{x+c}+a$이므로 점근선의 방정식은

$x=-c$, $y=a$ $\qquad \therefore c=1$, $a=2$

$y=\frac{2x+b}{x+1}$의 그래프가 점 $(2, 1)$을 지나므로

$1=\frac{4+b}{3}$ $\qquad \therefore b=-1$

$\therefore a^2+b^2+c^2=6$

1154 $y=\frac{3x-2}{-x+2}=\frac{-3(-x+2)+4}{-x+2}=\frac{4}{-x+2}-3$이므로 점근선의 방정식은

$$x=2,\ y=-3 \quad \cdots❶$$

$y=\frac{bx-1}{2x+a}=\frac{\frac{b}{2}(2x+a)-\frac{ab}{2}-1}{2x+a}=\frac{-\frac{ab}{2}-1}{2x+a}+\frac{b}{2}$이므로 점근선의 방정식은

$$x=-\frac{a}{2},\ y=\frac{b}{2} \quad \cdots❷$$

따라서 $-\frac{a}{2}=2$, $\frac{b}{2}=-3$이므로

$a=-4$, $b=-6$

$$\therefore ab=24 \quad \cdots❸$$

답 24

채점 기준	비율
❶ $y=\frac{3x-2}{-x+2}$의 그래프의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ $y=\frac{bx-1}{2x+a}$의 그래프의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

1155 $y=\frac{k}{x-2}-1$에 $y=0$을 대입하면

$0=\frac{k}{x-2}-1$, $\qquad x-2=k$

$\therefore x=k+2$ $\qquad \therefore \mathrm{A}(k+2, 0)$

$y=\frac{k}{x-2}-1$에 $x=0$을 대입하면

$y=-\frac{k}{2}-1$ $\qquad \therefore \mathrm{B}\left(0, -\frac{k}{2}-1\right)$

함수 $y=\frac{k}{x-2}-1$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=2$, $y=-1$

이므로 $\qquad \mathrm{C}(2, -1)$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$$\frac{-1-0}{2-(k+2)}=\frac{-1-\left(-\frac{k}{2}-1\right)}{2-0}$$

(직선 AC의 기울기)=(직선 BC의 기울기)

$\frac{1}{k}=\frac{k}{4}$, $\quad k^2=4$

$\therefore k=2\ (\because k>0)$ 답 2

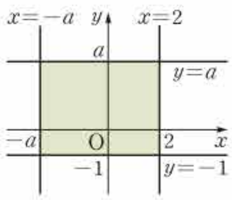
1156 $y=-\frac{x}{x+a}=-\frac{(x+a)-a}{x+a}=\frac{a}{x+a}-1$이므로 점근선의 방정식은

$x=-a,\ y=-1$

$y=\frac{ax+1}{x-2}=\frac{a(x-2)+2a+1}{x-2}=\frac{2a+1}{x-2}+a$이므로 점근선의 방정식은

$x=2,\ y=a$

따라서 두 함수의 그래프의 점근선은 오른쪽 그림과 같고, 색칠한 부분의 넓이가 20이므로



$(a+2)(a+1)=20$

$a^2+3a-18=0$

$(a+6)(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$ 답 3

유형 11 유리함수의 그래프의 대칭성 본책 175쪽

유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$의 그래프

① 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이다.

② 점 $(p,\ q)$를 지나고 기울기가 ± 1인 직선에 대하여 각각 대칭이다.

1157 주어진 함수의 그래프가 점 $\left(-1,\ -\frac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭이므로 점근선의 방정식은

$x=-1,\ y=-\frac{1}{2}$

주어진 함수의 식을 $y=\frac{k}{x+1}-\frac{1}{2}\ (k\neq 0)$이라 하면 이 함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표가 1이므로

이 함수의 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

$1=k-\frac{1}{2}\qquad \therefore k=\frac{3}{2}$

$$\therefore y=\frac{\frac{3}{2}}{x+1}-\frac{1}{2}=\frac{3-(x+1)}{2(x+1)}=\frac{-x+2}{2x+2}$$

따라서 $a=-1,\ b=1,\ c=2$이므로

$a+b+c=2$ 답 2

다른 풀이 주어진 함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표가 1이므로

$1=\frac{2b}{c}\qquad \therefore c=2b$

$y=\frac{ax+2b}{2x+c}$에 $c=2b$를 대입하면

$$y=\frac{ax+2b}{2x+2b}=\frac{\frac{a}{2}x+b}{x+b}$$

$$=\frac{\frac{a}{2}(x+b)+b-\frac{ab}{2}}{x+b}$$

$$=\frac{b-\frac{ab}{2}}{x+b}+\frac{a}{2}$$

이 함수의 그래프가 점 $\left(-1,\ -\frac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭이므로

$-b=-1,\ \frac{a}{2}=-\frac{1}{2}\qquad \therefore a=-1,\ b=1,\ c=2$

1158 $y=\frac{4x-3}{2x+1}=\frac{2(2x+1)-5}{2x+1}=-\frac{5}{2x+1}+2$이므로 점근선의 방정식은

$x=-\frac{1}{2},\ y=2$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $\left(-\frac{1}{2},\ 2\right)$에 대하여 대칭이므로

$a=-\frac{1}{2},\ b=2$

또 점 $\left(-\frac{1}{2},\ 2\right)$는 직선 $y=x+c$ 위의 점이므로

$2=-\frac{1}{2}+c\qquad \therefore c=\frac{5}{2}$

$\therefore abc=-\frac{5}{2}$ 답 ②

1159 $y=\frac{bx+2}{x+a}=\frac{b(x+a)-ab+2}{x+a}=\frac{-ab+2}{x+a}+b$이므로 점근선의 방정식은

$x=-a,\ y=b$

이때 점 $(-a,\ b)$는 두 직선 $y=x+3,\ y=-x-2$의 교점이므로

$b=-a+3,\ b=a-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{5}{2},\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore 2b-a=-\frac{3}{2}$ 답 $-\frac{3}{2}$

1160 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{2}{x-a}+3$

이므로 점근선의 방정식은 $\quad x=a,\ y=3$

이때 점 $(a,\ 3)$은 직선 $y=x+2$ 위의 점이므로

$3=a+2\qquad \therefore a=1$

따라서 $y=\frac{2}{x-1}+3$의 그래프는 점 $(1,\ 3)$을 지나고 기울기가 -1인 직선에 대하여 대칭이다.

점 $(1,\ 3)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-3=-(x-1)\qquad \therefore y=-x+4$

이 직선이 직선 $y=mx+n$과 일치하므로

$m=-1,\ n=4$

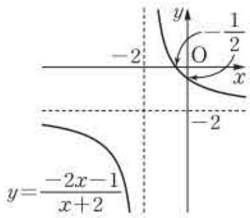
$\therefore a-m+n=6$ 답 ⑤

유형 12 유리함수의 그래프가 지나는 사분면 본책 176쪽

유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0,\ c\neq 0)$의 그래프가 지나는 사분면은 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그려서 찾는다.

1161 $y=\frac{-2x-1}{x+2}=\frac{-2(x+2)+3}{x+2}=\frac{3}{x+2}-2$

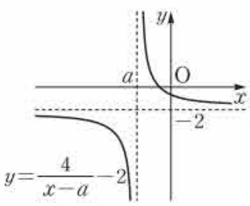
따라서 $y=\frac{-2x-1}{x+2}$의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. 즉 그래프가 지나지 않는 사분면은 제1사분면이다.



답 제1사분면

1162 $y=\frac{4}{x-a}-2$의 그래프는 $y=\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\frac{4}{x-a}-2$의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $a<0$이고 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 작거나 같아야 하므로



$-\frac{4}{a}-2\leq 0,\qquad -2\leq\frac{4}{a}$

$-2a\geq 4\qquad \therefore a\leq -2$ ← $a<0$이므로 부등호의 방향이 바뀐다.

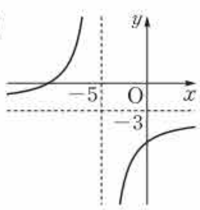
답 $a\leq -2$

참고 $a\geq 0$이면 $y=\frac{4}{x-a}-2$의 그래프는 제1사분면을 지나므로 $a<0$

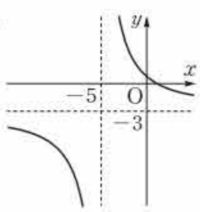
1163 $y=\frac{-3x+k-4}{x+5}=\frac{-3(x+5)+k+11}{x+5}=\frac{k+11}{x+5}-3$

따라서 $y=\frac{-3x+k-4}{x+5}$의 그래프는 $y=\frac{k+11}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

(i)



(ii)



(i) $k+11<0$일 때,

그래프는 k의 값에 관계없이 항상 제1사분면을 지나지 않는다.

(ii) $k+11>0$일 때,

그래프가 모든 사분면을 지나려면 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 커야 하므로

└ 함숫값이 0보다 작거나 같으면 제1사분면을 지나지 않는다.

$\frac{k-4}{5}>0\qquad \therefore k>4$

(i), (ii)에서 $\quad k>4$

답 $k>4$

참고 $k+11=0$이면 주어진 함수는 $y=-3$이므로 제1사분면과 제2사분면을 지나지 않는다.

유형 13 그래프를 이용하여 유리함수의 식 구하기 집중공략 본책 176쪽

점근선의 방정식이 $x=p$, $y=q$이고, 점 $(a,\ b)$를 지나는 유리함수의 식

➡ $y=\frac{k}{x-p}+q$ $(k\neq 0)$로 놓고 $x=a$, $y=b$를 대입하여 상수 k의 값을 구한다.

1164 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=1$이므로 주어진 함수의 식을

$y=\frac{k}{x+2}+1$ $(k>0)$

이라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=\frac{k}{2}+1\qquad \therefore k=2$

$\therefore y=\frac{2}{x+2}+1=\frac{2+x+2}{x+2}=\frac{x+4}{x+2}$

따라서 $a=1$, $b=4$, $c=2$이므로

$abc=8$

답 8

1165 $y=\frac{k}{x+a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=2$이므로

$a=-3,\ b=2$

따라서 $y=\frac{k}{x-3}+2$의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{1-3}+2\qquad \therefore k=4$

$\therefore a+b+k=3$

답 ②

1166 $y=\frac{b}{x-a}+c$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=a,\ y=c$

이므로 주어진 그래프에서

$a>0,\ c<0$

또 $y=\frac{b}{x}$의 그래프가 제2사분면과 제4사분면을 지나므로

$b<0$

ㄱ. $a>0$, $c<0$이므로 $\quad a-c>0$

ㄴ. $y=\frac{b}{x-a}+c$의 그래프가 원점을 지나므로

$-\frac{b}{a}+c=0,\qquad -b+ac=0\qquad \therefore b=ac$

ㄷ. $\frac{b}{a}<0$, $\frac{a}{c}<0$이므로 $\quad \frac{b}{a}+\frac{a}{c}<0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

유형 14 유리함수의 그래프의 성질 집중공략 본책 177쪽

유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$ $(k\neq 0)$의 그래프

① $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

② 정의역: $\{x\,|\,x\neq p$인 실수$\}$, 치역: $\{y\,|\,y\neq q$인 실수$\}$

③ 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이다.

④ 점근선의 방정식: $x=p$, $y=q$

1167 $y=\dfrac{-3x-5}{x+2}=\dfrac{-3(x+2)+1}{x+2}=\dfrac{1}{x+2}-3$

① 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=-3$이므로 그래프는 점 $(-2,\ -3)$에 대하여 대칭이다.

② $x+2=0$에서 $\quad x=-2$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\neq-2$인 실수$\}$이다.

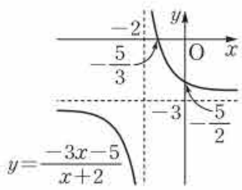
③ $y=\dfrac{-3x-5}{x+2}$에 $y=0$을 대입하면

$0=\dfrac{-3x-5}{x+2}, \qquad -3x-5=0$

$\therefore x=-\dfrac{5}{3}$

따라서 그래프와 x축의 교점의 좌표는 $\left(-\dfrac{5}{3},\ 0\right)$이다.

④ 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2, 3, 4사분면을 지난다.



⑤ 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

답 ④

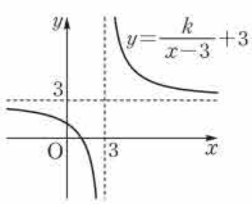
1168 ㄴ. $y=f(x)$의 그래프는 점 $(3,\ 3)$을 지나고 기울기가 1인 직선, 즉 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

ㄷ. (i) $k>0$, $f(0)\geq0$일 때,

$f(0)=-\dfrac{k}{3}+3\geq0$에서

$k\leq9$

즉 $0<k\leq9$이면 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.

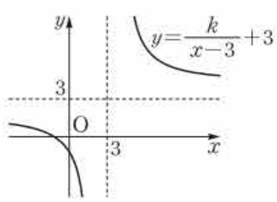


(ii) $k>0$, $f(0)<0$일 때,

$f(0)=-\dfrac{k}{3}+3<0$에서

$k>9$

즉 $k>9$이면 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 모든 사분면을 지난다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

1169 $y=\dfrac{a}{x}$, $y=\dfrac{b}{x}$의 그래프는 제2사분면을 지나므로

$a<0,\ b<0$

이때 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프가 $y=\dfrac{b}{x}$의 그래프보다 원점으로부터 멀리 떨어져 있으므로

$|a|>|b| \qquad \therefore a<b<0$ ⋯ ❶

음수끼리는 절댓값이 클수록 작다.

$y=\dfrac{c}{x}$, $y=\dfrac{d}{x}$의 그래프는 제1사분면을 지나므로

$c>0,\ d>0$

이때 $y=\dfrac{d}{x}$의 그래프가 $y=\dfrac{c}{x}$의 그래프보다 원점으로부터 멀리 떨어져 있으므로

$|d|>|c| \qquad \therefore 0<c<d$ ⋯ ❷

양수끼리는 절댓값이 클수록 크다.

$\therefore a<b<c<d$ ⋯ ❸

답 $a<b<c<d$

채점 기준	비율
❶ $a<b<0$임을 알 수 있다.	40 %
❷ $0<c<d$임을 알 수 있다.	40 %
❸ a, b, c, d의 대소를 비교할 수 있다.	20 %

유형 15 유리함수의 최대 · 최소

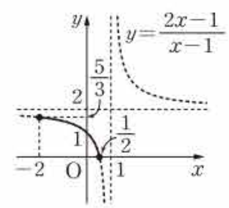
본책 177쪽

유리함수 $y=f(x)$의 정의역이 주어졌을 때
➡ 주어진 정의역에서 $y=f(x)$의 그래프를 그리고, y의 최댓값과 최솟값을 구한다.

1170 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+2$이므로

$y=\dfrac{2x-1}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-2\leq x\leq\dfrac{1}{2}$에서 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-2$일 때 최댓값 $\dfrac{5}{3}$,

$x=\dfrac{1}{2}$일 때 최솟값 0

을 갖는다.

즉 $a=\dfrac{5}{3}$, $b=0$이므로 $\qquad a+b=\dfrac{5}{3}$

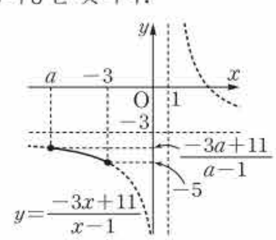
답 $\dfrac{5}{3}$

1171 $y=\dfrac{-3x+11}{x-1}=\dfrac{-3(x-1)+8}{x-1}=\dfrac{8}{x-1}-3$이므로

$y=\dfrac{-3x+11}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{8}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a\leq x\leq-3$에서

$y=\dfrac{-3x+11}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=a$일 때 최댓값 $\dfrac{-3a+11}{a-1}$,

$x=-3$일 때 최솟값 -5

를 갖는다.

즉 $\dfrac{-3a+11}{a-1}=-4$이므로

$-3a+11=-4a+4 \qquad \therefore a=-7$

이때 $m=-5$이므로 $\qquad am=35$

답 ⑤

1172 조건 (가)에서 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=1$이므로

$f(x)=\dfrac{k}{x-3}+1\ (k\neq0)$

이라 하자.

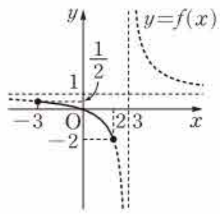
이때 조건 (나)에서 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\dfrac{k}{-3}+1 \qquad \therefore k=3$

$\therefore f(x)=\dfrac{3}{x-3}+1$ ⋯ ❶

$y=f(x)$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-3\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-3$일 때 최댓값 $\dfrac{1}{2}$,

$x=2$일 때 최솟값 -2

를 갖는다.

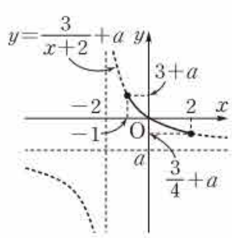
즉 구하는 곱은 $\dfrac{1}{2}\cdot(-2)=-1$ ⋯ ❷

답 -1

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ 최댓값과 최솟값의 곱을 구할 수 있다.	40 %

1173 $y=\dfrac{3}{x+2}+a$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x\le 2$에서 $y=\dfrac{3}{x+2}+a$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-1$일 때 최댓값 $3+a$,

$x=2$일 때 최솟값 $\dfrac{3}{4}+a$

를 갖는다.

이때 최댓값과 최솟값의 합이 2이므로

$(3+a)+\left(\dfrac{3}{4}+a\right)=2,\qquad 2a=-\dfrac{7}{4}$

$\therefore a=-\dfrac{7}{8}$

답 $-\dfrac{7}{8}$

유형 16 유리함수의 그래프와 직선의 위치 관계

본책 178쪽

유리함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 위치 관계에 대한 문제는

① $f(x)=g(x)$를 변형한 방정식이 이차방정식이면 판별식을 이용한다.

② $y=f(x)$의 그래프를 그리고 주어진 조건을 만족시키도록 직선 $y=g(x)$를 움직여 본다.

1174 함수 $y=\dfrac{x-2}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=kx+1$이 한 점에서 만나므로 $\dfrac{x-2}{x+1}=kx+1$에서

$x-2=(kx+1)(x+1)\qquad \therefore kx^2+kx+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-12k=0,\qquad k(k-12)=0$

$\therefore k=12\ (\because k>0)$

답 12

1175 함수 $y=\dfrac{x}{x-2}$의 그래프와 직선 $y=mx-2m$이 만나지 않으므로 $\dfrac{x}{x-2}=mx-2m$에서

$x=m(x-2)^2\qquad \therefore mx^2-(4m+1)x+4m=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(4m+1)\}^2-4\cdot m\cdot 4m<0$

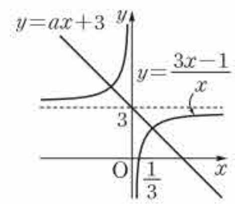
$8m+1<0\qquad \therefore m<-\dfrac{1}{8}$

따라서 정수 m의 최댓값은 -1이다.

답 -1

1176 $A\cap B\ne\varnothing$이므로 $y=\dfrac{3x-1}{x}$의 그래프와 직선 $y=ax+3$이 만난다.

$y=\dfrac{3x-1}{x}$, 즉 $y=-\dfrac{1}{x}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=ax+3$은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 3)$을 지나므로 $y=\dfrac{3x-1}{x}$의 그래프와 직선 $y=ax+3$이 만나려면

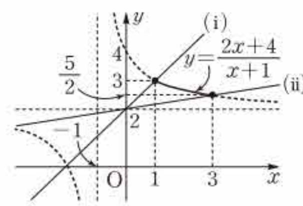


$a<0$

답 $a<0$

1177 $y=\dfrac{2x+4}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+2}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}+2$

$1\le x\le 3$에서 $y=\dfrac{2x+4}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=ax+2$는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 2)$를 지난다.



(i) 직선 $y=ax+2$가 점 $(1, 3)$을 지날 때,

$3=a+2\qquad \therefore a=1$

(ii) 직선 $y=ax+2$가 점 $\left(3, \dfrac{5}{2}\right)$를 지날 때,

$\dfrac{5}{2}=3a+2\qquad \therefore a=\dfrac{1}{6}$

(i), (ii)에서 $y=\dfrac{2x+4}{x+1}\ (1\le x\le 3)$의 그래프와 직선 $y=ax+2$가 한 점에서 만나려면

$\dfrac{1}{6}\le a\le 1$

따라서 a의 최댓값은 1, 최솟값은 $\dfrac{1}{6}$이므로 구하는 합은

$1+\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{6}$

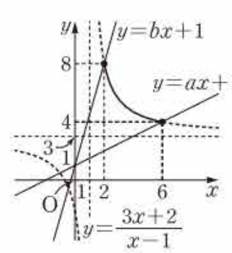
답 ③

1178 $y=\dfrac{3x+2}{x-1}$라 하면

$y=\dfrac{3x+2}{x-1}=\dfrac{3(x-1)+5}{x-1}=\dfrac{5}{x-1}+3$

$2\le x\le 6$에서 $y=\dfrac{3x+2}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ⋯ ❶

이때 두 직선 $y=ax+1$, $y=bx+1$은 a, b의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 1)$을 지난다.



(i) 직선 $y=ax+1$이 점 $(6, 4)$를 지날 때,

$4=6a+1 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 $ax+1\le\frac{3x+2}{x-1}$이려면 $\qquad a\le\frac{1}{2}$ ··· ❷

(ii) 직선 $y=bx+1$이 점 $(2,\ 8)$을 지날 때,

$8=2b+1 \qquad \therefore b=\frac{7}{2}$

따라서 $\frac{3x+2}{x-1}\le bx+1$이려면 $\qquad b\ge\frac{7}{2}$ ··· ❸

(i), (ii)에서 $\underbrace{a-b\text{의 최댓값은}}_{(a\text{의 최댓값})-(b\text{의 최솟값})}$

$\frac{1}{2}-\frac{7}{2}=-3$ ··· ❹

답 -3

채점 기준	비율
❶ $y=\frac{3x+2}{x-1}$의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ b의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ $a-b$의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

유형 17 유리함수의 그래프의 활용

본책 178쪽

유리함수의 그래프의 활용 문제는 주어진 유리함수의 그래프 위의 한 점의 좌표를 한 문자를 이용하여 나타낸 후 도형의 길이 또는 넓이를 그 문자에 대한 식으로 나타낸다.
이때 도형의 길이 또는 넓이의 최솟값을 구하는 경우 양수 조건이 있으면 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.
➡ $a>0,\ b>0$일 때,
$a+b\ge2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

1179 $\mathrm{P}\left(k,\ \frac{9}{k-1}+3\right)$ $(k>1)$이라 하면

$\mathrm{Q}(k,\ 3),\ \mathrm{R}\left(1,\ \frac{9}{k-1}+3\right)$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\left(\frac{9}{k-1}+3\right)-3=\frac{9}{k-1}$, $\overline{\mathrm{PR}}=k-1$이고 $k>1$에서

$k-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}&=\frac{9}{k-1}+k-1\\&\ge2\sqrt{\frac{9}{k-1}\cdot(k-1)}\\&=2\cdot3\\&=6\ (\text{단, 등호는 } k=4\text{일 때 성립})\end{aligned}$$

$\frac{9}{k-1}=k-1$에서 $(k-1)^2=9$
$k-1=\pm3 \quad \therefore k=4\ (\because k>1)$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}$의 최솟값은 6이다.

답 ③

1180 $y=\frac{x-4}{x+1}=\frac{(x+1)-5}{x+1}=-\frac{5}{x+1}+1$이므로

$\mathrm{P}\left(k,\ -\frac{5}{k+1}+1\right)$ $(k\ne-1)$이라 하면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}&=\sqrt{(k+1)^2+\left(-\frac{5}{k+1}+1-1\right)^2}\\&=\sqrt{(k+1)^2+\frac{25}{(k+1)^2}}\end{aligned}$$

이때 $k\ne-1$에서 $(k+1)^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}(k+1)^2+\frac{25}{(k+1)^2}&\ge2\sqrt{(k+1)^2\cdot\frac{25}{(k+1)^2}}\\&=2\cdot5\\&=10\end{aligned}$$

$(k+1)^2=\frac{25}{(k+1)^2}$에서
$(k+1)^2=5 \quad \therefore k=-1\pm\sqrt{5}$

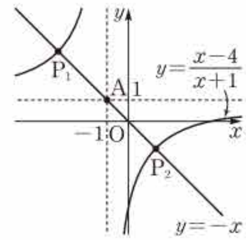
(단, 등호는 $k=-1\pm\sqrt{5}$일 때 성립)

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이의 최솟값은 $\sqrt{10}$이다.

답 $\sqrt{10}$

다른 풀이 $y=\frac{x-4}{x+1}=-\frac{5}{x+1}+1$이므로 점근선의 방정식은 $x=-1,\ y=1$이다.

즉 점 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$은 두 점근선의 교점이고 $y=\frac{x-4}{x+1}$의 그래프가 직선 $\underbrace{y-1=-(x+1)}_{\text{점 A를 지나고 기울기가 }-1\text{인 직선}}$, 즉 $y=-x$에 대하여 대칭이므로 $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이는 오른쪽 그림과 같이 점 P가 $y=\frac{x-4}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=-x$의 교점인 $\mathrm{P_1}$ 또는 $\mathrm{P_2}$일 때 최소이다.



$\frac{x-4}{x+1}=-x$에서 $\qquad x-4=-x(x+1)$

$x^2+2x-4=0 \qquad \therefore x=-1\pm\sqrt{5}$

따라서 $\mathrm{P_1}(-1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5}),\ \mathrm{P_2}(-1+\sqrt{5},\ 1-\sqrt{5})$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}$의 길이의 최솟값은

$\sqrt{(-1+\sqrt{5}+1)^2+(1-\sqrt{5}-1)^2}=\sqrt{10}$

1181 $\mathrm{P}\left(a,\ \frac{6}{a}\right),\ \mathrm{Q}\left(-b,\ -\frac{6}{b}\right)$ $(a>0,\ b>0)$이라 하면

$\mathrm{A}(a,\ 0),\ \mathrm{B}\left(0,\ \frac{6}{a}\right),\ \mathrm{C}(-b,\ 0),\ \mathrm{D}\left(0,\ -\frac{6}{b}\right)$

육각형 APBCQD의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}S&=\square\mathrm{OAPB}+\square\mathrm{OCQD}+\triangle\mathrm{OBC}+\triangle\mathrm{ODA}\\&=a\cdot\frac{6}{a}+b\cdot\frac{6}{b}+\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{6}{a}+\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{6}{b}\\&=12+3\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\end{aligned}$$

이때 $a>0,\ b>0$에서 $\frac{b}{a}>0,\ \frac{a}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}S&=12+3\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\\&\ge12+3\cdot2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}\\&=12+3\cdot2=18\ (\text{단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립})\end{aligned}$$

$\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$에서 $a^2=b^2$
$\therefore a=b\ (\because a>0,\ b>0)$

따라서 육각형 APBCQD의 넓이의 최솟값은 18이다.

답 18

1182 $\mathrm{A}\left(a,\ \frac{1}{a}\right)$ $(a>0)$이라 하면 점 B의 y좌표가 $\frac{1}{a}$이므로

$\frac{1}{a}=\frac{k}{x}$에서

$x=ak \qquad \therefore \mathrm{B}\left(ak,\ \frac{1}{a}\right)$

또 점 C의 x좌표가 a이므로 점 C의 좌표는 $\quad \left(a,\ \frac{k}{a}\right)$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=ak-a=a(k-1),\ \overline{\mathrm{AC}}=\frac{k}{a}-\frac{1}{a}=\frac{k-1}{a}$

이때 $\triangle ABC$의 넓이가 72이므로

$\frac{1}{2}\cdot a(k-1)\cdot\frac{k-1}{a}=72, \qquad (k-1)^2=144$

$k-1=\pm12 \qquad \therefore k=13\ (\because k>1)$

답 ④

유형 18 유리함수의 합성

집중 공략 본책 179쪽

유리함수 f에 대하여 $f^n=f\circ f^{n-1}$일 때 $f^n(a)$의 값 구하기
➡ [방법 1] $f^2(x),\ f^3(x),\ f^4(x),\ \cdots$를 직접 구하여 $f^n(x)$를 추정한 다음 x 대신 a를 대입한다.
[방법 2] $f(a),\ f^2(a),\ f^3(a),\ \cdots$에서 규칙을 찾아 $f^n(a)$의 값을 추정한다.

1183 $f(x)=\frac{x-1}{x}$에서

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}=\frac{-1}{x-1}$$

$$f^3(x)=(f^2\circ f)(x)=f^2(f(x))=\frac{-1}{\frac{x-1}{x}-1}=x$$

따라서 함수 $f^{3n}(x)$ (n은 자연수)는 항등함수이므로

$f^{100}(x)=f^{3\cdot33+1}(x)=f(x)$

$\therefore f^{100}(8)=f(8)=\frac{8-1}{8}=\frac{7}{8}$

답 $\frac{7}{8}$

참고 $f^1(8)=\frac{7}{8},\ f^2(8)=-\frac{1}{7},\ f^3(8)=8,\ f^4(8)=\frac{7}{8},\ \cdots$이므로 $f^n(8)$은 $\frac{7}{8},\ -\frac{1}{7},\ 8$이 이 순서대로 반복된다.

1184 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}=x$

즉 $(f\circ f)(k)=\frac{1}{k}$에서 $\qquad k=\frac{1}{k}$

$k^2=1 \qquad \therefore k=-1\ (\because k\neq1)$

$f(x)$의 정의역이 $\{x\mid x\neq1$인 실수$\}$이므로 $k\neq1$

답 ③

1185 $f(x)=\frac{x}{1-x}$에서

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x} \qquad \cdots ❶$$

$$f^3(x)=(f\circ f\circ f)(x)=f((f\circ f)(x))=\frac{\frac{x}{1-2x}}{1-\frac{x}{1-2x}}=\frac{x}{1-3x} \qquad \cdots ❷$$

같은 방법으로 하면 $\quad f^{10}(x)=\frac{x}{1-10x}$ $\qquad\cdots$ ❸

따라서 $a=1,\ b=0,\ c=-10$이므로

$a+b+c=-9$ $\qquad\cdots$ ❹

답 -9

채점 기준	비율
❶ $f^2(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f^3(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $f^{10}(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

참고 $f^n(x)=\frac{x}{1-nx}$ (단, n은 자연수)

1186 주어진 그래프에서

$f^1(0)=f(0)=1,\ f^1(1)=f(1)=0$

이므로

$f^2(1)=(f\circ f^1)(1)=f(f^1(1))=f(0)=1$
$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(1)=0$
$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(0)=1$
$f^5(1)=(f\circ f^4)(1)=f(f^4(1))=f(1)=0$
$\vdots$

$$\therefore f^n(1)=\begin{cases}0 & (n\text{은 홀수})\\ 1 & (n\text{은 짝수})\end{cases}$$

$\therefore f^{2025}(1)=0$

답 0

다른 풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=2$이므로 $f(x)=\frac{k}{x-2}+2\ (k>0)$라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$-k+2=0 \qquad \therefore k=2$

즉 $f(x)=\frac{2}{x-2}+2$이므로

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{2}{\frac{2}{x-2}+2-2}+2=x$$

따라서 함수 $f^{2n}(x)$ (n은 자연수)는 항등함수이므로

$f^{2025}(x)=f^{2\cdot1012+1}(x)=f(x)$

$\therefore f^{2025}(1)=f(1)=0$

유형 19 유리함수의 역함수

집중 공략 본책 180쪽

유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq0,\ c\neq0)$의 역함수는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) x를 y에 대한 식으로 나타낸다. ➡ $x=\frac{dy-b}{-cy+a}$
(ii) x와 y를 서로 바꾼다. ➡ $y=\frac{dx-b}{-cx+a}$

1187 $y=\frac{ax}{2x+3}$라 하면 $\qquad y(2x+3)=ax$

$(2y-a)x=-3y \qquad \therefore x=\frac{-3y}{2y-a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\qquad y=\frac{-3x}{2x-a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{-3x}{2x-a}$

$f=f^{-1}$이므로 $\qquad \frac{ax}{2x+3}=\frac{-3x}{2x-a}$

$\therefore a=-3$

답 ①

다른 풀이 $f=f^{-1}$이므로 $\quad (f\circ f)(x)=x$

$f(x)=\dfrac{ax}{2x+3}$에서

$$f(f(x))=\dfrac{a\cdot\dfrac{ax}{2x+3}}{2\cdot\dfrac{ax}{2x+3}+3}=\dfrac{a^2x}{2(a+3)x+9}$$

따라서 $\dfrac{a^2x}{2(a+3)x+9}=x$이므로

$2(a+3)x^2+9x=a^2x$

$\therefore 2(a+3)x^2+(9-a^2)x=0$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a+3=0,\ 9-a^2=0$

$\therefore a=-3$

1188 $y=\dfrac{4x-3}{x+a}$이라 하면 $\quad y(x+a)=4x-3$

$(y-4)x=-ay-3 \qquad \therefore x=\dfrac{-ay-3}{y-4}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{-ax-3}{x-4}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-ax-3}{x-4}$

따라서 $\dfrac{-ax-3}{x-4}=\dfrac{2x+b}{x+c}$이므로

$a=-2,\ b=-3,\ c=-4$

$\therefore abc=-24$

답 -24

1189 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-2}$의 그래프가 점 $(3,\ -2)$를 지나므로

$3a+b=-2$ ...... ㉠

또 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-2}$의 역함수의 그래프가 점 $(3,\ -2)$를 지나므로 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-2}$의 그래프는 점 $(-2,\ 3)$을 지난다. 즉

$3=\dfrac{-2a+b}{-4} \qquad \therefore 2a-b=12$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ b=-8$

$\therefore a+b=-6$

답 ③

SSEN 특강 **함수와 그 역함수의 그래프 사이의 관계**

함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$가 존재할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 임의의 점을 $(a,\ b)$라 하면

$b=f(a) \Longleftrightarrow a=f^{-1}(b)$

가 성립한다.

1190 유리함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 직선 $y=x+5$, $y=-x-3$에 대하여 대칭이므로 그 역함수의 그래프는 두 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 두 직선

$x=y+5,\ x=-y-3$, 즉 $y=x-5,\ y=-x-3$

에 대하여 대칭이다.

$\therefore a+b+c+d=1+(-5)+(-1)+(-3)=-8$

답 -8

유형 20 유리함수의 합성함수와 역함수 본책 180쪽

두 함수 $f(x)$, $g(x)$와 그 역함수 $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$에 대하여

① $(g\circ f^{-1})(x)=g(f^{-1}(x))$

② $(g^{-1}\circ f)^{-1}(x)=(f^{-1}\circ g)(x)=f^{-1}(g(x))$

1191 $f^{-1}\circ f=I$(항등함수)이므로

$(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(5)=(I\circ f^{-1})(5)=f^{-1}(5)$

$f^{-1}(5)=k$라 하면 $f(k)=5$이므로

$\dfrac{2k-3}{k-3}=5, \qquad 2k-3=5k-15$

$\therefore k=4$

답 ④

1192 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$g(3)=k$라 하면 $f(k)=3$이므로

$\dfrac{2k-4}{k-1}=3, \qquad 2k-4=3k-3$

$\therefore k=-1$ ··· ❶

$g(-1)=t$라 하면 $f(t)=-1$이므로

$\dfrac{2t-4}{t-1}=-1, \qquad 2t-4=-t+1$

$\therefore t=\dfrac{5}{3}$ ··· ❷

$\therefore (g\circ g)(3)=g(g(3))=g(-1)=\dfrac{5}{3}$ ··· ❸

답 $\dfrac{5}{3}$

채점 기준	비율
❶ $g(3)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $g(-1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $(g\circ g)(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $y=\dfrac{2x-4}{x-1}$라 하면 $\quad y(x-1)=2x-4$

$(y-2)x=y-4 \qquad \therefore x=\dfrac{y-4}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{x-4}{x-2}$

$\therefore g(x)=\dfrac{x-4}{x-2}$

따라서 $g(3)=\dfrac{3-4}{3-2}=-1$, $g(-1)=\dfrac{-1-4}{-1-2}=\dfrac{5}{3}$이므로

$(g\circ g)(3)=g(g(3))=g(-1)=\dfrac{5}{3}$

1193 $(f^{-1}\circ g)^{-1}(3)=(g^{-1}\circ f)(3)$

$=g^{-1}(f(3))$

$=g^{-1}(3)$ $\quad f(3)=\dfrac{2\cdot3}{3-1}=\dfrac{6}{2}=3$

$g^{-1}(3)=k$라 하면 $g(k)=3$이므로

$\dfrac{2k-1}{k}=3, \qquad 2k-1=3k$

$\therefore k=-1$

$\therefore (f^{-1}\circ g)^{-1}(3)=-1$

답 -1

1194 **1st** $\dfrac{-4x+6y+a}{3x-by+2}=k$ (k는 실수)로 놓고 식을 변형한다.

$\dfrac{-4x+6y+a}{3x-by+2}=k$ (k는 실수)라 하면

$-4x+6y+a=k(3x-by+2)$

$\therefore (3k+4)x-(bk+6)y+2k-a=0$ …… ㉠ ··· ❶

2nd 항등식의 성질을 이용하여 a, b, k의 값을 구한 후 $a+b$의 값을 구한다.

㉠이 x, y에 대한 항등식이므로

$3k+4=0$, $bk+6=0$, $2k-a=0$

$\therefore k=-\dfrac{4}{3}$, $a=-\dfrac{8}{3}$, $b=\dfrac{9}{2}$ ··· ❷

$\therefore a+b=\dfrac{11}{6}$ ··· ❸

답 $\dfrac{11}{6}$

채점 기준	비율
❶ $\dfrac{-4x+6y+a}{3x-by+2}=k$ (k는 실수)로 놓고 식을 변형할 수 있다.	40 %
❷ a, b, k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1195 **1st** $f(n)f(101-n)=1$임을 이용하여 $\dfrac{1}{1+f(n)}$을 변형한다.

$f(n)f(101-n)=1$이므로 $f(n)=\dfrac{1}{f(101-n)}$

$$\therefore \frac{1}{1+f(n)}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{f(101-n)}}=\frac{f(101-n)}{1+f(101-n)}$$

2nd 주어진 식의 값을 구한다.

$\dfrac{1}{1+f(n)}+\dfrac{1}{1+f(101-n)}=\dfrac{f(101-n)+1}{1+f(101-n)}=1$이므로

$$\frac{1}{1+f(1)}+\frac{1}{1+f(2)}+\frac{1}{1+f(3)}+\cdots+\frac{1}{1+f(100)}$$

$$=\left\{\frac{1}{1+f(1)}+\frac{1}{1+f(100)}\right\}+\left\{\frac{1}{1+f(2)}+\frac{1}{1+f(99)}\right\}$$

$$+\cdots+\left\{\frac{1}{1+f(50)}+\frac{1}{1+f(51)}\right\}$$

$$=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{50\text{개}}=50$$

답 50

1196 **1st** $ad-bc=0$을 변형하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $ad-bc=0$에서 $bc=ad$이므로 양변을 ac로 나누면

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$

2nd $\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}=k$ $(k>0)$로 놓고 $b=ak$, $d=ck$임을 이용하여 ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. ㄱ에서 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}=k$ $(k>0)$라 하면 $b=ak$, $d=ck$이므로

$$\frac{a^2+c^2}{ab+cd}=\frac{a^2+c^2}{a\cdot ak+c\cdot ck}=\frac{a^2+c^2}{(a^2+c^2)k}=\frac{1}{k},$$

$$\frac{2ac}{ad+bc}=\frac{2ac}{a\cdot ck+ak\cdot c}=\frac{2ac}{2ack}=\frac{1}{k}$$

$$\therefore \frac{a^2+c^2}{ab+cd}=\frac{2ac}{ad+bc}$$

ㄷ. ㄴ에서 $b=ak$, $d=ck$이므로

$$\frac{b^3+d^3}{a^3+c^3}=\frac{a^3k^3+c^3k^3}{a^3+c^3}=\frac{(a^3+c^3)k^3}{a^3+c^3}=k^3,$$

$$\frac{(b+d)^3}{(a+c)^3}=\frac{(ak+ck)^3}{(a+c)^3}=\frac{(a+c)^3k^3}{(a+c)^3}=k^3$$

$$\therefore \frac{b^3+d^3}{a^3+c^3}=\frac{(b+d)^3}{(a+c)^3}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

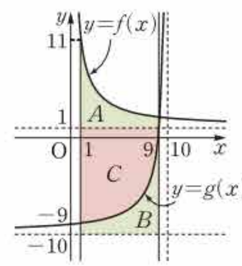
답 ⑤

1197 **1st** 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 그린다.

$y=\dfrac{10}{x}+1$의 그래프는 $y=\dfrac{10}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

또 $y=\dfrac{10}{10-x}-10$의 그래프는 $y=\dfrac{10}{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 10만큼, y축의 방향으로 -10만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ··· ❶



2nd 넓이가 같은 부분을 찾은 후 도형의 넓이를 구한다.

위의 그림에서

(A의 넓이)$=$(B의 넓이) ··· ❷

이므로 구하는 넓이는

(A의 넓이)$+$(C의 넓이)$=$(B의 넓이)$+$(C의 넓이)

$=(9-1)\cdot\{1-(-10)\}$

$=8\cdot 11=88$ ··· ❸

답 88

채점 기준	비율
❶ 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	40 %
❷ (A의 넓이)$=$(B의 넓이)임을 알 수 있다.	30 %
❸ 도형의 넓이를 구할 수 있다.	30 %

1198

함수 $f(x)=\dfrac{a}{x-6}+b$에 대하여 ❶ 함수 $y=\left|f(x+a)+\dfrac{a}{2}\right|$의 그래프가 ❷ y축에 대하여 대칭일 때, $f(b)$의 값은?

점근선의 방정식은 $x=6$, $y=b$이다.

$y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 $\dfrac{a}{2}$만큼 평행이동한 후 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 그래프

(단, a, b는 상수이고, $a\neq 0$이다.)

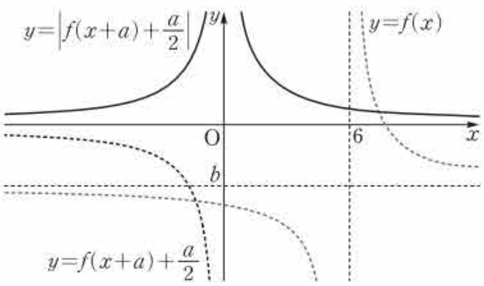
① $-\dfrac{25}{6}$ ② -4 ③ $-\dfrac{23}{6}$ ④ $-\dfrac{11}{3}$ ⑤ $-\dfrac{7}{2}$

❶이 ❷를 만족시키도록 그래프의 개형을 그리고 그래프가 평행이동하면 점근선도 평행이동함을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

1st $y=\left|f(x+a)+\frac{a}{2}\right|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭일 때의 조건을 생각하여 그래프의 개형을 그린다.

$y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 $\frac{a}{2}$만큼 평행이동한 것이고, $y=\left|f(x+a)+\frac{a}{2}\right|$의 그래프는 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 $y=\left|f(x+a)+\frac{a}{2}\right|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이려면 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 그래프의 점근선의 방정식은 다음 그림과 같이 $x=0$, $y=0$이어야 한다.



2nd $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

$f(x)=\frac{a}{x-6}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=6$, $y=b$이므로 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=6-a$, $y=b+\frac{a}{2}$

$y=f(x)$의 그래프가 평행이동한 만큼 점근선도 평행이동한다.

이 점근선의 방정식이 $x=0$, $y=0$이어야 하므로

$6-a=0$, $b+\frac{a}{2}=0$ $\quad\therefore a=6,\ b=-3$

3rd $f(b)$의 값을 구한다.

$f(x)=\frac{6}{x-6}-3$이므로

$f(b)=f(-3)=\frac{6}{-3-6}-3=-\frac{11}{3}$

답 ④

1199 1st 두 점 P, Q가 어떤 직선에 대하여 대칭인지 구한다.

$y=\frac{2x+k}{x-2}=\frac{2(x-2)+4+k}{x-2}=\frac{4+k}{x-2}+2$이므로 점근선의 방정식은

$x=2$, $y=2$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $(2, 2)$를 지나고 기울기가 1인 직선에 대하여 대칭이다.

점 $(2, 2)$를 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y-2=x-2 \quad \therefore y=x$

이때 직선 $x+y=12$도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 직선 $x+y=12$와 함수 $y=\frac{2x+k}{x-2}$의 그래프의 두 교점 P, Q는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

2nd $\overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}$의 값을 구한다.

P(a, b)라 하면 Q(b, a)

두 점 P, Q의 x좌표의 곱이 21이므로

$ab=21$

또 두 점 P, Q가 직선 $x+y=12$ 위의 점이므로

$a+b=12$

따라서 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{a^2+b^2}$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=12^2-2\cdot21=102$

답 102

다른 풀이 두 점 P, Q의 x좌표는 방정식 $\frac{2x+k}{x-2}=12-x$의 두 근이므로

$2x+k=(12-x)(x-2)$

$\therefore x^2-12x+k+24=0$ ······ ㉠

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$k+24=21 \quad \therefore k=-3$

㉠에 $k=-3$을 대입하면 $\quad x^2-12x+21=0$

$\therefore x=6\pm\sqrt{15}$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $(6-\sqrt{15},\ 6+\sqrt{15})$, $(6+\sqrt{15},\ 6-\sqrt{15})$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OP}}^2=(6-\sqrt{15})^2+(6+\sqrt{15})^2=102$

1200 1st 평행이동한 그래프의 식을 구한다.

$y=\frac{3x-10}{x-4}=\frac{3(x-4)+2}{x-4}=\frac{2}{x-4}+3$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{2}{x-m-4}+3+n$ ······ ㉠ ··· ❶

2nd 점근선의 방정식을 이용하여 m, n의 값을 구한 후 mn의 값을 구한다.

㉠의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=m+4$, $y=3+n$

이고, ㉠의 그래프는 y축과 만나지 않으므로

직선 $x=0$이 점근선이다.

$m+4=0 \quad \therefore m=-4$ ··· ❷

또 점 $(m+4,\ 3+n)$, 즉 $(0,\ 3+n)$이 직선 $y=x-3$ 위의 점이므로

$3+n=-3 \quad \therefore n=-6$ ··· ❸

$\therefore mn=24$ ··· ❹

답 24

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	30 %
❷ m의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ n의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ mn의 값을 구할 수 있다.	10 %

1201 1st $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식을 구한다.

$f(x)=\frac{x+a-b}{x-a}=\frac{(x-a)+2a-b}{x-a}=\frac{2a-b}{x-a}+1$이므로 점근선의 방정식은

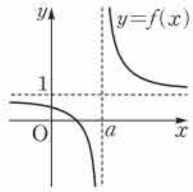
$f(x)$는 상수함수가 아니므로 $2a-b\neq0$

$x=a$, $y=1$

2nd $2a-b>0$일 때와 $2a-b<0$일 때로 나누어 a의 값의 범위를 구한다.

(i) $2a-b>0$일 때,

$y=f(x)$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$a>0,\ f(0)\ge 0$

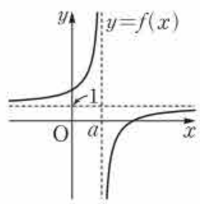
이때 $f(0)=\dfrac{a-b}{-a}=-1+\dfrac{b}{a}$이므로

$-1+\dfrac{b}{a}\ge 0,\qquad \dfrac{b}{a}\ge 1\qquad \therefore b\ge a\ (\because a>0)$

그런데 $2a-b>0$, 즉 $a>\dfrac{b}{2}$이므로 $\qquad \dfrac{b}{2}<a\le b$

(ii) $2a-b<0$일 때,

$y=f(x)$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$a\ge 0$

그런데 $2a-b<0$, 즉 $a<\dfrac{b}{2}$이므로

$0\le a<\dfrac{b}{2}$

(i), (ii)에서 $\quad 0\le a<\dfrac{b}{2}$ 또는 $\dfrac{b}{2}<a\le b \quad$ ⋯⋯ ㉠

3rd 정수 a의 개수가 6일 때의 정수 b의 값을 모두 구하여 더한다.

㉠을 만족시키는 정수 a의 개수가 6이려면

$b=5$ 또는 $b=6$

따라서 모든 정수 b의 값의 합은

$5+6=11$ 답 11

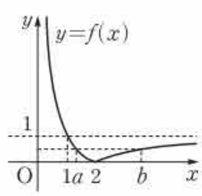
참고 $b=5$일 때, 정수 a는 $\quad 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$의 6개

$b=6$일 때, 정수 a는 $\quad 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6$의 6개

1202 **1st** $y=f(x)$의 그래프를 그려 $f(a)=f(b)$를 만족시키는 a, b의 값의 범위를 찾아 ㄱ, ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

$f(x)=\left|\dfrac{2-x}{x}\right|=\left|\dfrac{2}{x}-1\right|$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $f(a)=f(b)$이려면

$1<a<2,\ b>2$

ㄴ. 오른쪽 그림에서 $\quad 0<f(b)<1$

2nd $f(a)$, $f(b)$의 값을 구하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $1<a<2,\ b>2$에서 $2-a>0,\ 2-b<0$이므로

$$\begin{aligned}f(a)+f(b)&=\frac{2-a}{a}+\frac{b-2}{b}\\&=\frac{2b-ab+ab-2a}{ab}\\&=\frac{2(b-a)}{ab}\end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

1203 **1st** 주어진 함수를 $y=\dfrac{a}{x-p}+q$ 꼴로 나타낸 후 k의 조건을 구한다.

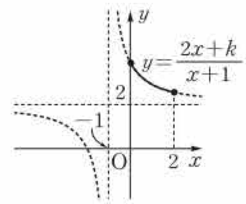
$y=\dfrac{2x+k}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+k-2}{x+1}=\dfrac{k-2}{x+1}+2$ ⋯ ❶

$k=2$이면 $y=\dfrac{2x+k}{x+1}=2$의 최댓값이 1이 아니므로 $\qquad k\ne 2$

2nd $k>2$, $k<2$인 경우로 나누어 k의 값을 구한다.

(i) $k>2$일 때,

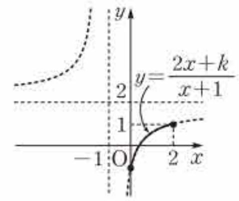
주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $0\le x\le 2$에서 $x=0$일 때 최대이므로 $\qquad k=1$



그런데 $k>2$이어야 하므로 모순이다. ⋯ ❷

(ii) $k<2$일 때,

주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $0\le x\le 2$에서 $x=2$일 때 최대이므로



$\dfrac{4+k}{3}=1$

$\therefore k=-1$ ⋯ ❸

(i), (ii)에서 $\qquad k=-1$ ⋯ ❹

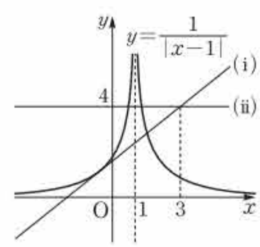
답 -1

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수를 $y=\dfrac{a}{x-p}+q$ 꼴로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $k>2$일 때, k의 값이 존재하지 않음을 알 수 있다.	30 %
❸ $k<2$일 때, k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

1204 **1st** $y=\dfrac{1}{|x-1|}$의 그래프를 그리고, 주어진 직선이 항상 지나는 점을 구한다.

$y=\dfrac{1}{|x-1|}=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & (x>1)\\ -\dfrac{1}{x-1} & (x<1)\end{cases}$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



⋯ ❶

이때 직선 $y=kx+4-3k$, 즉

$y=k(x-3)+4$는 k의 값에 관계없이 항상 점 $(3,\ 4)$를 지난다.

2nd 경우를 나누어 조건을 만족시키는 k의 값을 구한다.

(i) 함수 $y=-\dfrac{1}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=kx+4-3k$가 접할 때,

$-\dfrac{1}{x-1}=kx+4-3k$에서

$(kx+4-3k)(x-1)=-1$

$\therefore kx^2+4(1-k)x-3(1-k)=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\{2(1-k)\}^2+3k(1-k)=0$

$(1-k)\{4(1-k)+3k\}=0$

$(1-k)(4-k)=0 \qquad \therefore k=1$ 또는 $k=4$

이때 직선 $y=kx+4-3k$의 $\underbrace{y\text{절편은 }0\text{보다 크므로}}_{4-3k>0\text{에서 }k<\frac{4}{3}}$

$k=1$ ⋯ ❷

(ii) 직선 $y=kx+4-3k$가 x축에 평행할 때,

$k=0$ ⋯ ❸

09 유리식과 유리함수

3rd k의 값의 합을 구한다.

(i), (ii)에서 모든 k의 값의 합은

$1+0=1$ ⋯ ❹

답 1

채점 기준	비율
❶ $y=\frac{1}{\lvert x-1\rvert}$의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
❷ $y=-\frac{1}{x-1}$의 그래프와 직선이 접할 때 k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 직선이 x축에 평행할 때 k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 모든 k의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

1205

함수 $f(x)=\frac{bx}{x-a}$ $(a>0,\ b\neq 0)$에 대하여 함수 $g(x)$를

점근선의 방정식은 $x=a$, $y=b$이다. $b>0$ 또는 $b<0$

❶

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ f(x+2a)+a & (x\geq a)\end{cases}$$

$x<a$에서 $g(x)$의 그래프는 $f(x)$의 그래프와 일치한다.

$x\geq a$에서 $g(x)$의 그래프는 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-2a$만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

라 하자. 실수 t에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수를 $h(t)$라 하면, 상수 k에 대하여

❷ $\{t\mid h(t)=1\}=\{t\mid -9\leq t\leq -8\}\cup\{t\mid t\geq k\}$

$y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1인 t의 값의 집합

이다. ❸ $a\times b\times g(-k)$의 값을 구하시오.

(단, a, b는 상수이다.)

$b>0$, $b<0$인 경우로 나누어 ❶의 그래프를 그린 후 ❷를 만족시키는 경우를 찾아 a, b, k의 값을 구하여 ❸을 구한다.

1st 주어진 집합의 의미를 파악한다.

$h(t)=1$이면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이므로

$\{t\mid h(t)=1\}=\{t\mid -9\leq t\leq -8\}\cup\{t\mid t\geq k\}$ ⋯⋯ ㉠

는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되도록 하는 실수 t의 값의 범위가 $-9\leq t\leq -8$ 또는 $t\geq k$임을 의미한다.

2nd 두 함수 $y=f(x)$와 $y=f(x+2a)+a$의 그래프의 점근선의 방정식을 구한다.

$f(x)=\frac{bx}{x-a}=\frac{b(x-a)+ab}{x-a}=\frac{ab}{x-a}+b$이므로 점근선의 방정식은

$x=a$, $y=b$

이때 $y=f(x+2a)+a$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-2a$만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은

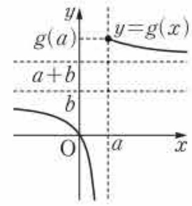
$x=a-2a$, $y=b+a$, 즉 $x=-a$, $y=a+b$

3rd $b>0$, $b<0$인 경우로 나누어 a, b, k의 값을 구한다.

(i) $b>0$일 때,

$a>0$이므로 $\quad ab>0$, $0<b<a+b$

$y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되도록 하는 실수 t의 값의 범위는



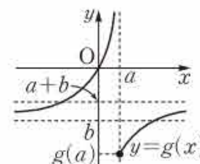
$t<b$ 또는 $a+b<t\leq g(a)$

따라서 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $b<0$일 때,

$a>0$이므로 $\quad ab<0$, $b<a+b$

㉠을 만족시키려면 $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$b>g(a)$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되도록 하는 실수 t의 값의 범위는

$g(a)\leq t\leq b$ 또는 $t\geq a+b$

이므로 ㉠에서

$g(a)=-9$, $b=-8$, $a+b=k$

$g(a)=f(3a)+a=\frac{3ab}{3a-a}+a=\frac{3}{2}b+a$이므로

$\frac{3}{2}\cdot(-8)+a=-9 \qquad \therefore a=3$

$\therefore k=3+(-8)=-5$

4th $a\times b\times g(-k)$의 값을 구한다.

(i), (ii)에서

$$g(x)=\begin{cases} \frac{-8x}{x-3} & (x<3) \\ \underbrace{\frac{-8(x+6)}{x+3}+3}_{f(x+6)+3} & (x\geq 3)\end{cases}$$

이므로

$g(-k)=g(5)=\frac{-8\cdot(5+6)}{5+3}+3=-8$

$\therefore a\times b\times g(-k)=192$

답 192

1206

1st 직선 AB의 방정식을 구한다.

두 점 $\mathrm{A}(-1,\ -1)$, $\mathrm{B}\left(a,\ \frac{1}{a}\right)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y+1=\frac{\frac{1}{a}-(-1)}{a-(-1)}(x+1)$$

$\therefore y=\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}-1$

2nd 두 점 P, Q의 좌표를 구하여 S_1, S_2를 구한다.

$\mathrm{P}(a-1,\ 0)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{1}{a}-1\right)$이므로

$\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}-1=0$에서 $\frac{1}{a}x=1-\frac{1}{a} \quad \therefore x=a-1$

$\overline{\mathrm{OP}}=a-1$, $\overline{\mathrm{OQ}}=1-\frac{1}{a}$,

$\overline{\mathrm{PB'}}=a-(a-1)=1$, $\overline{\mathrm{BB'}}=\frac{1}{a}$

$\therefore S_1=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\cdot(a-1)\cdot\left(1-\frac{1}{a}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(a-1-1+\frac{1}{a}\right)=\frac{a}{2}-1+\frac{1}{2a}$,

$S_2=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{PB'}}\cdot\overline{\mathrm{BB'}}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{2a}$

3rd S_1+S_2의 최솟값을 구한다.

$$S_1+S_2=\frac{a}{2}-1+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}$$
$$=\frac{a}{2}+\frac{1}{a}-1$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{a}}-1$$

$\frac{a}{2}>0$, $\frac{1}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$$=\sqrt{2}-1 \text{ (단, 등호는 } a=\sqrt{2}\text{일 때 성립)}$$

따라서 S_1+S_2의 최솟값은 $\sqrt{2}-1$이다. 답 ⑤

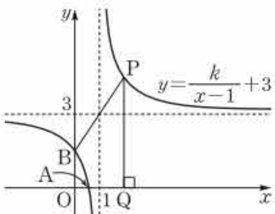
$\frac{a}{2}=\frac{1}{a}$에서 $a^2=2$ $\therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>1$)

1207

그림과 같이 ❶함수 $y=\frac{k}{x-1}+3$ $(0<k<3)$의 그래프와 x축, y축과의 교점을 각각 A, B라 하자. ❷이 그래프의 두 점근선의 교점과 점 B를 지나는 직선이 이 그래프와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

점 (1, 3)

두 점 B, P는 점 (1, 3)에 대하여 대칭이다.



보기

ㄱ. $k=1$일 때, ❸점 P의 좌표는 (2, 4)이다.

ㄴ. $0<k<3$인 실수 k에 대하여 ❹직선 AB의 기울기와 직선 AP의 기울기의 합은 0이다.

ㄷ. ❺사각형 PBAQ의 넓이가 자연수일 때, ❻직선 BP의 기울기는 0과 1 사이의 값이다.

□PBOQ−△OAB

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

❶에서 두 점 A, B의 좌표를 k로 나타내고 ❷를 이용하여 점 P의 좌표를 k로 나타낸 후 ❸, ❹를 구하여 ㄱ, ㄴ의 참, 거짓을 판별한다. ❺, ❻을 k로 나타낸 후 ❺가 자연수일 때의 k의 값을 구하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

1st 세 점 A, B, P의 좌표를 k로 나타낸다.

$y=\frac{k}{x-1}+3$에 $y=0$을 대입하면

$0=\frac{k}{x-1}+3$, $x-1=-\frac{k}{3}$

$\therefore x=\frac{3-k}{3}$ $\therefore A\left(\frac{3-k}{3}, 0\right)$

$y=\frac{k}{x-1}+3$에 $x=0$을 대입하면

$y=3-k$ $\therefore B(0, 3-k)$

두 점근선의 교점을 R라 하면 R(1, 3)이고 $\overline{BP}$의 중점이 R이므로 P(a, b)라 하면

$\frac{0+a}{2}=1$, $\frac{3-k+b}{2}=3$ $\therefore a=2, b=3+k$

$\therefore P(2, 3+k)$

2nd $k=1$일 때, 점 P의 좌표를 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $k=1$이면 P(2, 4)

3rd 두 직선 AB, AP의 기울기를 구하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. 직선 AB의 기울기는

$$\frac{0-(3-k)}{\frac{3-k}{3}-0}=-3$$

직선 AP의 기울기는

$$\frac{0-(3+k)}{\frac{3-k}{3}-2}=3$$

따라서 두 기울기의 합은

$-3+3=0$

4th □PBAQ의 넓이를 k로 나타내어 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. □PBAQ=□PBOQ−△OAB

$$=\frac{1}{2}\cdot\{(3-k)+(3+k)\}\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot\frac{3-k}{3}\cdot(3-k)$$
$$=6-\frac{(3-k)^2}{6}$$

$\overline{OA}<1$, $\overline{OB}<3$이므로 $\triangle OAB<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3=\frac{3}{2}$

이때 △OAB의 넓이는 $\frac{3}{2}$보다 작고, □PBAQ의 넓이가 자연수이므로 △OAB의 넓이는 1이어야 한다.

즉 $\frac{(3-k)^2}{6}=1$이므로 $(3-k)^2=6$

$\therefore k=3-\sqrt{6}$ ($\because 0<k<3$)

따라서 직선 BP의 기울기는

$$\frac{(3+k)-(3-k)}{2-0}=k$$

이고 $0<k=3-\sqrt{6}<1$이므로 직선 BP의 기울기는 0과 1 사이의 값이다.

$2<\sqrt{6}<3$이므로 $0<3-\sqrt{6}<1$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

1208

1st $ab=-6$일 때 $f(x)$를 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $ab=-6$이면 $b=-\frac{6}{a}$이므로

$$f(x)=\frac{ax+6}{x-b}=\frac{a\left(x+\frac{6}{a}\right)}{x+\frac{6}{a}}=a$$

따라서 함수 $f(x)$는 상수함수이므로

$(f\circ f)(x)=a$

$\therefore ab\neq -6$

2nd $(f\circ f)(x)=x$이면 $f(x)=f^{-1}(x)$임을 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $(f\circ f)(x)=x$이므로 $f(x)=f^{-1}(x)$

$y=\frac{ax+6}{x-b}$이라 하면 $(x-b)y=ax+6$

$(y-a)x=by+6$ $\therefore x=\frac{by+6}{y-a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{bx+6}{x-a}$

따라서 $f^{-1}(x)=\frac{bx+6}{x-a}$이므로 $f(x)=f^{-1}(x)$에서

$\frac{ax+6}{x-b}=\frac{bx+6}{x-a}$ $\therefore a=b$

3rd a, b의 값의 범위에 따라 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $f(x)=\frac{ax+6}{x-b}=\frac{a(x-b)+ab+6}{x-b}=\frac{ab+6}{x-b}+a$이므로

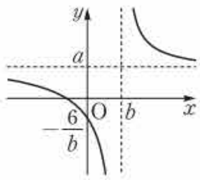
$y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=b$, $y=a$이고 y절편은 $-\frac{6}{b}$이다.

한편 ㄴ에서 $a=b$이므로

$ab+6=a^2+6>0$

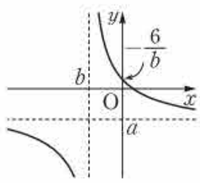
(i) $a>0$, $b>0$일 때,

$-\frac{6}{b}<0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 모든 사분면을 지난다.



(ii) $a<0$, $b<0$일 때,

$-\frac{6}{b}>0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 모든 사분면을 지난다.



(i), (ii)에서 $y=f(x)$의 그래프는 모든 사분면을 지난다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

1209 **1st** 도형의 평행이동을 이용하여 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표를 구한다.

$f(x)=\frac{2x+b}{x-a}=\frac{2(x-a)+2a+b}{x-a}=\frac{2a+b}{x-a}+2$이므로

$y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=2$이고 두 점근선의 교점의 좌표는 $(a, 2)$이다.

이때 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a, 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 그 좌표는 $(2, a)$이다.

2nd 함수 $y=f(x-4)-4$의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표를 구한 후 조건 (가)를 이용하여 a의 값을 구한다.

$y=f(x-4)-4$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(a+4, 2-4)$, 즉 $(a+4, -2)$이다.

이때 조건 (가)에 의하여 점 $(2, a)$와 점 $(a+4, -2)$가 같으므로

$a=-2$

3rd 조건 (나)를 이용하여 b의 값을 구한 후 $a+b$의 값을 구한다.

$y=f(x)$의 그래프는 $y=\frac{2a+b}{x}$의 그래프를 평행이동한 그래프와 일치하고 조건 (나)에서 $y=f(x)$의 그래프를 평행이동하면 $y=\frac{3}{x}$의 그래프와 일치하므로

$2a+b=3,\quad -4+b=3\quad \therefore b=7$

$\therefore a+b=5$ 답 ⑤

다른 풀이 $y=\frac{2x+b}{x-a}$라 하면 $(x-a)y=2x+b$

$(y-2)x=ay+b\quad \therefore x=\frac{ay+b}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{ax+b}{x-2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{ax+b}{x-2}$

$y=\frac{2x+b}{x-a}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\frac{2(x-4)+b}{(x-4)-a}-4$$
$$=\frac{2(x-4)+b-4(x-4-a)}{x-4-a}$$
$$=\frac{-2x+4a+8+b}{x-4-a}$$

조건 (가)에 의하여

$$\frac{ax+b}{x-2}=\frac{-2x+4a+8+b}{x-4-a}$$

이므로

$a=-2$, $b=4a+8+b$, $-2=-4-a$

따라서

$$f(x)=\frac{2x+b}{x+2}=\frac{2(x+2)+b-4}{x+2}$$
$$=\frac{b-4}{x+2}+2$$

이므로 조건 (나)에 의하여

$b-4=3\quad \therefore b=7$

$\therefore a+b=5$

Ⅲ. 함수

10 무리식과 무리함수

1210 $x+2\geq 0$이므로 $\quad x\geq -2$ 답 $x\geq -2$

1211 $x-1\geq 0$, $x+4\geq 0$이므로 $\quad x\geq 1$, $x\geq -4$

$\therefore x\geq 1$ 답 $x\geq 1$

1212 $x-2\geq 0$, $\underline{3-x>0}$이므로 $\quad x\geq 2$, $x<3$

└ (근호 안의 식의 값)≥ 0, (분모)$\neq 0$

$\therefore 2\leq x<3$ 답 $2\leq x<3$

1213 $x\geq 0$, $6x+6>0$이므로 $\quad x\geq 0$, $x>-1$

$\therefore x\geq 0$ 답 $x\geq 0$

1214 $x+1\geq 0$, $5-x>0$이므로 $\quad x\geq -1$, $x<5$

$\therefore -1\leq x<5$ 답 $-1\leq x<5$

1215 $a>0$, $2b<0$, $a-b>0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2}+\sqrt{4b^2}+\sqrt{(a-b)^2}&=|a|+|2b|+|a-b|\\&=a-2b+a-b\\&=2a-3b\end{aligned}$$

답 $2a-3b$

1216 $x-1>0$, $x-2<0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}&=|x-1|+|x-2|\\&=x-1-(x-2)\\&=1\end{aligned}$$

답 1

1217
$$\begin{aligned}(\sqrt{x-1}+3)(\sqrt{x-1}-3)&=(\sqrt{x-1})^2-3^2\\&=x-1-9\\&=x-10\end{aligned}$$

답 $x-10$

1218
$$\begin{aligned}(\sqrt{x-2}+\sqrt{x})(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})&=(\sqrt{x-2})^2-(\sqrt{x})^2\\&=x-2-x\\&=-2\end{aligned}$$

답 -2

1219 $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})$
$$\begin{aligned}&=(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x-1})^2\\&=x+1-(x-1)\\&=2\end{aligned}$$

답 2

1220
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}&=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}\\&=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x}\\&=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\end{aligned}$$

답 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

1221 $\dfrac{4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$
$$\begin{aligned}&=\frac{4(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}\\&=\frac{4(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}{x+2-(x-2)}\\&=\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\end{aligned}$$

답 $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}$

1222
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}&=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\\&=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b}$

1223
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}&=\frac{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}\\&=\frac{x-1+2\sqrt{x(x-1)}+x}{x-1-x}\\&=-2x+1-2\sqrt{x(x-1)}\end{aligned}$$

답 $-2x+1-2\sqrt{x(x-1)}$

1224
$$\begin{aligned}\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}&=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2}{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}\\&=\frac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1}{x^2-(x^2-1)}\\&=2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}\end{aligned}$$

답 $2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}$

1225
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}&=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\\&=\frac{2\sqrt{a}}{a-b}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{2\sqrt{a}}{a-b}$

1226 $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$
$$\begin{aligned}&=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{3})+\sqrt{3}(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})(\sqrt{x}-\sqrt{3})}\\&=\frac{x-\sqrt{3x}+\sqrt{3x}+3}{x-3}\\&=\frac{x+3}{x-3}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{x+3}{x-3}$

1227 $\dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}+1}-\dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}-1}$
$$\begin{aligned}&=\frac{(x-1)(\sqrt{x+1}-1)-(x+1)(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)}\\&=\frac{-2x-2\sqrt{x+1}}{x+1-1}\\&=\frac{-2(x+\sqrt{x+1})}{x}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{-2(x+\sqrt{x+1})}{x}$

1228 $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+6}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x}-\sqrt{x+2})}$

$\quad+\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4})}$

$\quad+\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+6}}{(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+6})(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+6})}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{x-(x+2)}+\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4}}{x+2-(x+4)}+\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+6}}{x+4-(x+6)}$

$=-\dfrac{1}{2}(\sqrt{x}-\sqrt{x+2})-\dfrac{1}{2}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4})$

$\quad-\dfrac{1}{2}(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+6})$

$=\dfrac{-\sqrt{x}+\sqrt{x+6}}{2}$ 　　답 $\dfrac{-\sqrt{x}+\sqrt{x+6}}{2}$

1229 $\underbrace{\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}=\dfrac{1-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}=\dfrac{2}{1-x}}$

└ 먼저 주어진 식을 간단히 한다.

$\dfrac{2}{1-x}$에 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$를 대입하면

$\dfrac{2}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{4}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{4(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=2(2+\sqrt{2})$

답 $2(2+\sqrt{2})$

1230 ㄴ. $y=-\sqrt{3}x$는 다항함수이다.
ㄹ. $y=\sqrt{(x+2)^2}$, 즉 $y=|x+2|$는 무리함수가 아니다.
이상에서 무리함수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㅁ, ㅂ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㅁ, ㅂ

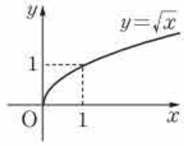
1231 $x+1\geq 0$에서 　$x\geq -1$
따라서 주어진 함수의 정의역은
$\{x|x\geq -1\}$ 　　답 $\{x|x\geq -1\}$

1232 $-x\geq 0$에서 　$x\leq 0$
따라서 주어진 함수의 정의역은
$\{x|x\leq 0\}$ 　　답 $\{x|x\leq 0\}$

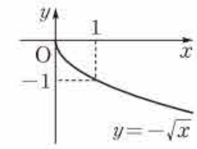
1233 $2x-3\geq 0$에서 　$x\geq \dfrac{3}{2}$
따라서 주어진 함수의 정의역은
$\left\{x\middle|x\geq \dfrac{3}{2}\right\}$ 　　답 $\left\{x\middle|x\geq \dfrac{3}{2}\right\}$

1234 $4-x^2\geq 0$에서 　$x^2-4\leq 0$
$(x+2)(x-2)\leq 0$ 　$\therefore -2\leq x\leq 2$
따라서 주어진 함수의 정의역은
$\{x|-2\leq x\leq 2\}$ 　　답 $\{x|-2\leq x\leq 2\}$

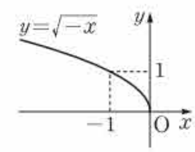
1235 $y=\sqrt{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고
정의역: $\{x|x\geq 0\}$, 치역: $\{y|y\geq 0\}$
답 풀이 참조



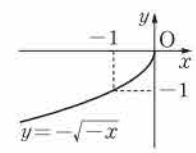
1236 $y=-\sqrt{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고
정의역: $\{x|x\geq 0\}$, 치역: $\{y|y\leq 0\}$
답 풀이 참조



1237 $y=\sqrt{-x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고
정의역: $\{x|x\leq 0\}$, 치역: $\{y|y\geq 0\}$
답 풀이 참조



1238 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고
정의역: $\{x|x\leq 0\}$, 치역: $\{y|y\leq 0\}$
답 풀이 참조



1239 y 대신 $-y$를 대입하면
$-y=\sqrt{-3x}$ 　$\therefore y=-\sqrt{-3x}$ 　　답 $y=-\sqrt{-3x}$

1240 x 대신 $-x$를 대입하면
$y=\sqrt{-3(-x)}$ 　$\therefore y=\sqrt{3x}$ 　　답 $y=\sqrt{3x}$

1241 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면
$-y=\sqrt{-3(-x)}$ 　$\therefore y=-\sqrt{3x}$ 　　답 $y=-\sqrt{3x}$

1242 답 $y=\sqrt{x-3}-2$

1243 $y=\sqrt{-4\{x-(-1)\}}+5=\sqrt{-4x-4}+5$
답 $y=\sqrt{-4x-4}+5$

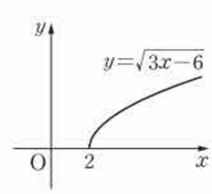
1244 $y=-\sqrt{7\{x-(-6)\}}-4=-\sqrt{7x+42}-4$
답 $y=-\sqrt{7x+42}-4$

1245 답 $y=\sqrt{4(x+2)}-6$

1246 답 $y=-\sqrt{-5\left(x-\dfrac{3}{5}\right)}+1$

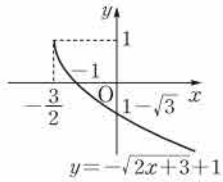
1247 $y=\sqrt{4-2x}+2=\sqrt{-2(x-2)}+2$
따라서 $y=\sqrt{4-2x}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
$\therefore a=2,\ b=2$ 　　답 $a=2,\ b=2$

1248 $y=\sqrt{3x-6}=\sqrt{3(x-2)}$
따라서 $y=\sqrt{3x-6}$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고
정의역: $\{x|x\geq 2\}$, 치역: $\{y|y\geq 0\}$
답 풀이 참조



1249 $y=-\sqrt{2x+3}+1=-\sqrt{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}+1$

따라서 $y=-\sqrt{2x+3}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

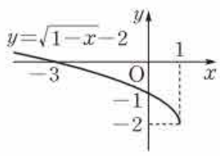


정의역: $\left\{x \middle| x\geq -\frac{3}{2}\right\}$,

치역: $\{y|y\leq 1\}$ 답 풀이 참조

1250 $y=\sqrt{1-x}-2=\sqrt{-(x-1)}-2$

따라서 $y=\sqrt{1-x}-2$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

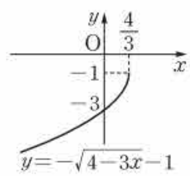


정의역: $\{x|x\leq 1\}$,

치역: $\{y|y\geq -2\}$ 답 풀이 참조

1251 $y=-\sqrt{4-3x}-1=-\sqrt{-3\left(x-\frac{4}{3}\right)}-1$

따라서 $y=-\sqrt{4-3x}-1$의 그래프는 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{4}{3}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고



정의역: $\left\{x \middle| x\leq \frac{4}{3}\right\}$,

치역: $\{y|y\leq -1\}$ 답 풀이 참조

유형 01 무리식의 값이 실수가 되기 위한 조건 본책 188쪽

① $\sqrt{A}$의 값이 실수이려면 $A\geq 0$

② $\frac{1}{\sqrt{A}}$의 값이 실수이려면 $A>0$

1252 $6x^2+5x-4\geq 0$이므로 $(3x+4)(2x-1)\geq 0$

$\therefore x\leq -\frac{4}{3}$ 또는 $x\geq \frac{1}{2}$ 답 $x\leq -\frac{4}{3}$ 또는 $x\geq \frac{1}{2}$

1253 $|x-4|-4\geq 0$이므로 $|x-4|\geq 4$

$x-4\leq -4$ 또는 $x-4\geq 4$

$\therefore x\leq 0$ 또는 $x\geq 8$ …… ㉠

$9-|x+1|\geq 0$이므로 $|x+1|\leq 9$

$-9\leq x+1\leq 9$

$\therefore -10\leq x\leq 8$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\sqrt{|x-4|-4}+\sqrt{9-|x+1|}$의 값이 실수가 되도록 하는 x의 값의 범위는

$-10\leq x\leq 0$ 또는 $x=8$

따라서 정수 x는 $-10, -9, -8, \cdots, 0, 8$의 12개이다.

답 12

1254 $x+3\geq 0$이므로 $x\geq -3$ …… ㉠

$3-x>0$이므로 $x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{3-x}}$의 값이 실수가 되도록 하는 x의 값의 범위는

$-3\leq x<3$ ··· ❶

$-3\leq x<3$일 때, $\overset{-6\leq 2x<6이므로\ -13\leq 2x-7<-1}{2x-7<0}$, $x-4<0$이므로

$|2x-7|-\sqrt{x^2-8x+16}=|2x-7|-\sqrt{(x-4)^2}$

$=|2x-7|-|x-4|$

$=-(2x-7)+(x-4)$

$=-x+3$ ··· ❷

답 $-x+3$

채점 기준	비율
❶ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	60 %

1255 $n+x\geq 0$이므로 $x\geq -n$ …… ㉠

$n-x\geq 0$이므로 $x\leq n$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\sqrt{n+x}-\sqrt{n-x}$의 값이 실수가 되도록 하는 x의 값의 범위는

$-n\leq x\leq n$

$n=3$일 때 x의 값의 범위는 $-3\leq x\leq 3$이므로 $f(3)=7$

$n=4$일 때 x의 값의 범위는 $-4\leq x\leq 4$이므로 $f(4)=9$

$\therefore f(3)+f(4)=16$ 답 ⑤

참고 $-n\leq x\leq n$을 만족시키는 정수 x는

$\underbrace{-n, -(n-1), \cdots, -1}_{n개}, 0, \underbrace{1, \cdots, n-1, n}_{n개}$의 $(2n+1)$개이므로

$f(n)=2n+1$

1256 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{kx^2-kx+2}$의 값이 실수이려면 $kx^2-kx+2\geq 0$이어야 한다.

(i) $k=0$일 때,

$kx^2-kx+2=2>0$이므로 $\sqrt{kx^2-kx+2}$의 값은 실수이다.

(ii) $k\neq 0$일 때,

모든 실수 x에 대하여 $kx^2-kx+2\geq 0$이려면

$k>0$ …… ㉠

이차방정식 $kx^2-kx+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4\cdot k\cdot 2\leq 0$

$k(k-8)\leq 0$ $\therefore 0\leq k\leq 8$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $0<k\leq 8$

(i), (ii)에서 $0\leq k\leq 8$

따라서 실수 k의 최댓값은 8, 최솟값은 0이므로 구하는 합은

$8+0=8$ 답 ③

유형 02 무리식의 계산 본책 188쪽

무리식의 계산은 제곱근의 성질과 분모의 유리화를 이용한다.
이때 분모에 근호를 포함한 수 또는 식은

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$

임을 이용하여 분모를 유리화한다.

1257 $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}$

$=\dfrac{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})+(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}$

$=\dfrac{2\sqrt{x-1}}{x-1-x}=-2\sqrt{x-1}$ 답 ⑤

1258 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$에서 $a>0,\ b<0$ ··· ❶

따라서 $a-b>0$이므로

$\sqrt{a^2-2ab+b^2}+2|a|-\sqrt{b^2}=\sqrt{(a-b)^2}+2|a|-\sqrt{b^2}$

$=|a-b|+2|a|-|b|$

$=(a-b)+2a+b$

$=3a$ ··· ❷

답 $3a$

채점 기준	비율
❶ a, b의 부호를 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	60 %

1259 $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$

$=\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$ ······ ㉠

이때

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=12-8=4$

이므로 $x-y=2\ (\because x>y)$

따라서 ㉠에서

$\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 답 ③

1260 $\sqrt{5}-2=\dfrac{1}{4+a_1}$에서

$4+a_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\dfrac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\sqrt{5}+2$

$\therefore a_1=\sqrt{5}+2-4=\sqrt{5}-2$

$a_1=\dfrac{1}{4+a_2}$, 즉 $\sqrt{5}-2=\dfrac{1}{4+a_2}$에서

$4+a_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2$

$\therefore a_2=\sqrt{5}-2$

$a_2=\dfrac{1}{4+a_3}$, 즉 $\sqrt{5}-2=\dfrac{1}{4+a_3}$에서

$4+a_3=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2$

$\therefore a_3=\sqrt{5}-2$

⋮

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\sqrt{5}-2$

$\therefore a_7+a_8=(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{5}-2)=2\sqrt{5}-4$ 답 ②

1261 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2}<\sqrt{n^2+n}<\sqrt{\underbrace{n^2+2n+1}_{(n+1)^2}}$이므로

$n<\sqrt{n^2+n}<n+1$

따라서 $\sqrt{n^2+n}$의 정수 부분이 n이므로

$f(n)=\sqrt{n^2+n}-n$

$\therefore \dfrac{n}{f(n)}=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}-n}=\dfrac{n(\sqrt{n^2+n}+n)}{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}$

$=\dfrac{n(\sqrt{n^2+n}+n)}{n^2+n-n^2}$

$=\sqrt{n^2+n}+n$

즉 $\dfrac{n}{f(n)}$의 정수 부분은 $n+n=2n$이다. 답 ④

유형 03 무리식의 값 구하기

집중 공략

본책 189쪽

주어진 무리식을 간단히 한 후 미지수의 값을 대입한다.

1262 $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{(\sqrt{x}+1)^2+(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$ ⬅ 통분한다.

$=\dfrac{x+2\sqrt{x}+1+x-2\sqrt{x}+1}{x-1}$

$=\dfrac{2(x+1)}{x-1}$

이때 $x=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=3+2\sqrt{2}$이므로

$\dfrac{2(x+1)}{x-1}=\dfrac{2(3+2\sqrt{2}+1)}{3+2\sqrt{2}-1}=\dfrac{4+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{1+\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

1263 $\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}=\dfrac{(\sqrt{1-x})^2+(\sqrt{1+x})^2}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}$

$=\dfrac{(1-x)+(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ ⬅ $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$을 대입한다.

$=\dfrac{2}{\sqrt{1-\dfrac{3}{4}}}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{2}}=4$ 답 ④

1264 $\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}}$ ⬅ 분모를 유리화하여 식을 간단히 한다.

$=\dfrac{(\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x})^2}{(\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x})(\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x})}$

$=\dfrac{3+x+3-x-2\sqrt{9-x^2}}{3+x-(3-x)}$

$=\dfrac{6-2\sqrt{9-x^2}}{2x}=\dfrac{3-\sqrt{9-x^2}}{x}$ ⬅ $x=\sqrt{5}$를 대입한다.

$=\dfrac{3-\sqrt{4}}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 답 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

1265 $\sqrt{x+2}=2$의 양변을 제곱하면

$x+2=4 \quad \therefore x=2$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}-(\sqrt{2}+1)}=-1$$

답 ③

1266 $f(n)=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})}$

$=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ ⋯ ❶

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$

$=(1-0)+(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

$=\sqrt{n}$ ⋯ ❷

이때 $\sqrt{n}>9$이므로 $\quad n>81$

따라서 자연수 n의 최솟값은 82이다. ⋯ ❸

답 82

채점 기준	비율
❶ $f(n)$을 간단히 할 수 있다.	40 %
❷ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$을 간단히 할 수 있다.	30 %
❸ 자연수 n의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

유형 04 무리식의 값 구하기 ; $x=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $y=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 꼴

본책 190쪽

$x=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $y=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 꼴로 주어지면
➡ $x+y$, $x-y$, xy의 값을 구한 후 이 값을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

1267 $x+y=2\sqrt{3}$, $xy=1$이므로

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\frac{x+y}{\sqrt{xy}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1}}=2\sqrt{3}$$

답 ③

1268 $x=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=3+2\sqrt{2}$,

$y=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=3-2\sqrt{2}$이므로

$x+y=6$, $xy=1$ ⋯ ❶

$\therefore (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=x+y-2\sqrt{xy}=6-2=4$

이때 $x>y>0$에서 $\sqrt{x}>\sqrt{y}$이므로

$\sqrt{x}-\sqrt{y}>0$ $\quad 3+2\sqrt{2}>3-2\sqrt{2}>0$

$\therefore \sqrt{x}-\sqrt{y}=2$ ⋯ ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ $x+y$, xy의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sqrt{x}-\sqrt{y}$의 값을 구할 수 있다.	60 %

1269 $x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$,

$y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$이므로

$x+y=\sqrt{6}$, $x-y=\sqrt{2}$

$$\therefore \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$$

$$=\frac{2(x+y)}{x-y}=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$$

$$=2\sqrt{3}$$

답 $2\sqrt{3}$

유형 05 무리함수의 정의역과 치역

본책 190쪽

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a>0)$에 대하여
정의역: $\left\{x \,\middle|\, x\ge -\dfrac{b}{a}\right\}$, 치역: $\{y\,|\,y\ge c\}$

1270 $-2x+2\ge 0$에서 $\quad 2x\le 2 \quad \therefore x\le 1$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\{x\,|\,x\le 1\}$이므로

$a=1$

또 함수 $y=\sqrt{-2x+2}+b$의 치역은 $\{y\,|\,y\ge b\}$이므로

$b=3$

$\therefore ab=3$

답 ④

1271 함수 $y=-\sqrt{x-a}+a+4$의 그래프가 점 $(a,\ -a)$를 지나므로

$-a=-\sqrt{a-a}+a+4, \quad 2a=-4$

$\therefore a=-2$

따라서 $y=-\sqrt{x+2}-2+4$, 즉 $y=-\sqrt{x+2}+2$이므로 이 함수의 치역은 $\{y\,|\,y\le 2\}$이다.

답 ③

1272 $ax+2a\ge 0$에서 $\quad ax\ge -2a$

이때 주어진 함수의 정의역이 $\{x\,|\,x\ge -2\}$이므로

$a>0$

주어진 함수의 치역이 $\{y\,|\,y\ge 1\}$이므로

$b=1$

즉 $y=\sqrt{ax+2a}+1$의 그래프의 y절편이 3이므로

$3=\sqrt{2a}+1, \quad \sqrt{2a}=2$

$2a=4 \quad \therefore a=2$

$\therefore a+b=3$

답 ④

1273 $-4x-6\ge 0$에서 $\quad 4x\le -6 \quad \therefore x\le -\dfrac{3}{2}$

$\therefore A=\left\{x\,\middle|\,x\le -\dfrac{3}{2}\right\}$

$3x+17\ge 0$에서 $\quad 3x\ge -17 \quad \therefore x\ge -\dfrac{17}{3}$

$\therefore B=\left\{x\,\middle|\,x\ge -\dfrac{17}{3}\right\}$

따라서 $A\cap B=\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{17}{3}\le x\le -\dfrac{3}{2}\right\}$이므로 집합 $A\cap B$의 정수인 원소는 -5, -4, -3, -2의 4개이다.

답 ④

1274 $y=\dfrac{4x+13}{x+5}=\dfrac{4(x+5)-7}{x+5}=-\dfrac{7}{x+5}+4$이므로 점근선의 방정식은

$x=-5,\ y=4$

$\therefore a=-5,\ b=4$ ⋯ ❶

$f(x)=\sqrt{-5x+4}+c$에서 $f(0)=1$이므로

$2+c=1 \quad \therefore c=-1$ ⋯ ❷

따라서 $f(x)=\sqrt{-5x+4}-1$이므로 함수 $y=f(x)$의 정의역은

$\left\{x \,\middle|\, x\le\frac{4}{5}\right\}$이고, 치역은 $\{y|y\ge-1\}$이다. ⋯ ❸

$-5x+4\ge0$에서 $x\le\frac{4}{5}$

답 정의역: $\left\{x \,\middle|\, x\le\frac{4}{5}\right\}$, 치역: $\{y|y\ge-1\}$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ c의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ 함수 $y=f(x)$의 정의역과 치역을 구할 수 있다.	40 %

1275 $y=\frac{ax+3}{x+b}=\frac{a(x+b)+3-ab}{x+b}=\frac{3-ab}{x+b}+a$이고, 점근선의 방정식이 $x=4$, $y=-1$이므로

$a=-1,\ b=-4$

따라서 함수 $y=\sqrt{-4x-1}$의 정의역은 $\left\{x \,\middle|\, x\le-\frac{1}{4}\right\}$이므로 구하는 정수의 최댓값은 -1이다.

답 ②

유형 06~07 무리함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동 본책 191, 192쪽

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a\ne0)$의 그래프의 평행이동과 대칭이동

① $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형

➡ $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

② x축에 대하여 대칭이동 ➡ $y=-\sqrt{ax+b}-c$

y축에 대하여 대칭이동 ➡ $y=\sqrt{-ax+b}+c$

원점에 대하여 대칭이동 ➡ $y=-\sqrt{-ax+b}-c$

1276 $y=\sqrt{a(x-1)}+3$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x-b-1)}+3+c$

이 함수의 그래프가

$y=\sqrt{6-3x}=\sqrt{-3(x-2)}$

의 그래프와 일치하므로

$a=-3,\ -b-1=-2,\ 3+c=0$

따라서 $a=-3$, $b=1$, $c=-3$이므로

$abc=9$

답 9

1277 ㄱ. $y=-\sqrt{x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다. $y=-\sqrt{x}=-\sqrt{-(-x)}$

ㄷ. $y=-\sqrt{3-x}=-\sqrt{-(x-3)}$

따라서 $y=-\sqrt{3-x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄹ. $y=\frac{1}{2}\sqrt{4x-3}+1=\sqrt{\frac{1}{4}(4x-3)}+1=\sqrt{x-\frac{3}{4}}+1$

따라서 $y=\frac{1}{2}\sqrt{4x-3}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\frac{3}{4}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 $y=\sqrt{-x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ④

1278 $y=-\sqrt{x+a}+2$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=-\sqrt{x+a}+2 \quad \therefore y=\sqrt{x+a}-2$

따라서 $y=\sqrt{x+a}-2$의 그래프가 점 $(4,\ 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{4+a}-2, \quad \sqrt{4+a}=3$

$4+a=9 \quad \therefore a=5$

또 $y=\sqrt{x+5}-2$의 그래프가 점 $(b,\ 0)$을 지나므로

$0=\sqrt{b+5}-2, \quad \sqrt{b+5}=2$

$b+5=4 \quad \therefore b=-1$

$\therefore ab=-5$

답 -5

1279 $y=\sqrt{-x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{-(x-2)+1}-1=\sqrt{-x+3}-1$ ⋯ ❶

이 함수의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{x+3}-1$ ⋯ ❷

따라서 $a=1$, $b=3$, $c=-1$이므로

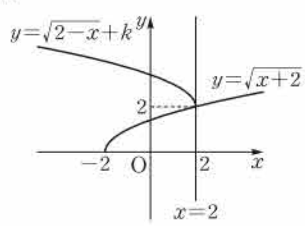
$a+b+c=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1280 $y=\sqrt{x+2}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이고, $y=\sqrt{2-x}+k=\sqrt{-(x-2)}+k$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y=\sqrt{x+2}$의 그래프와 직선 $x=2$의 교점의 좌표가 $(2,\ 2)$이므로 k의 값은 오른쪽 그림과 같이 $y=\sqrt{2-x}+k$의 그래프가 점 $(2,\ 2)$를 지날 때 최대이다.



즉 $2=\sqrt{2-2}+k$에서 $\quad k=2$

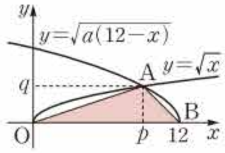
따라서 k의 최댓값은 2이다.

답 ④

참고 $y=\sqrt{2-x}+k$의 그래프가 점 $(-2,\ 0)$을 지날 때 $k=-2$이므로 두 함수의 그래프가 만나도록 하는 k의 값의 범위는 $\quad -2\le k\le2$

1281 $y=\sqrt{a(12-x)}=\sqrt{-a(x-12)}$이므로 $y=\sqrt{a(12-x)}$의 그래프는 $y=\sqrt{-ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 12만큼 평행이동한 것이다.

오른쪽 그림과 같이 점 A의 좌표를 $(p,\ q)\ (p>0,\ q>0)$라 하면 $\overline{OB}=12$이고 $\triangle AOB$의 넓이가 18이므로



$\frac{1}{2}\cdot 12\cdot q=18 \qquad \therefore q=3$

이때 $y=\sqrt{x}$의 그래프가 점 $A(p,\ 3)$을 지나므로

$3=\sqrt{p} \qquad \therefore p=9 \qquad \therefore A(9,\ 3)$

따라서 $y=\sqrt{a(12-x)}$의 그래프가 점 $A(9,\ 3)$을 지나므로

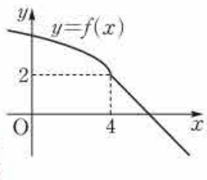
$3=\sqrt{3a}, \qquad 3a=9 \qquad \therefore a=3$

답 3

1282 $x\le 4$에서 함수 $y=\sqrt{4-x}+a=\sqrt{-(x-4)}+a$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

이때 조건 (가), (나)에 의하여 함수 $f(x)$는 일대일대응이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 $(4,\ 2)$를 지나야 한다.

$y=-x+6$에 $x=4$를 대입하면 $y=-4+6=2$



즉 $\sqrt{4-4}+a=2$이므로

$a=2$

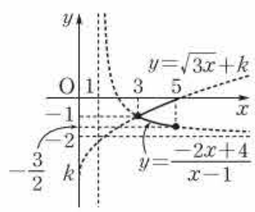
답 ②

1283 $y=\dfrac{-2x+4}{x-1}=\dfrac{-2(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}-2$이므로

$y=\dfrac{-2x+4}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

또 $y=\sqrt{3x}+k$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

따라서 k의 값은 오른쪽 그림과 같이 $y=\sqrt{3x}+k$의 그래프가 점 $(3,\ -1)$을 지날 때 최대이다.



즉 $-1=\sqrt{3\cdot 3}+k$에서

$k=-4$

따라서 k의 최댓값은 -4이다.

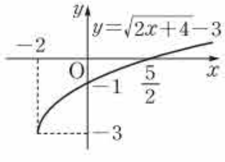
답 -4

유형 08 무리함수의 그래프가 지나는 사분면 본책 193쪽

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a\neq 0)$의 그래프가 지나는 사분면은 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그려서 찾는다.

1284 $y=\sqrt{2x+4}-3=\sqrt{2(x+2)}-3$이므로 $y=\sqrt{2x+4}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\sqrt{2x+4}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 3, 4사분면을 지난다.

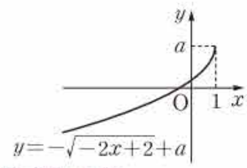


답 ⑤

1285 $y=-\sqrt{-2x+2}+a=-\sqrt{-2(x-1)}+a$이므로 $y=-\sqrt{-2x+2}+a$의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=-\sqrt{-2x+2}+a$의 그래프가 제1, 2, 3사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$일 때 $y>0$이어야 하므로

$y\le 0$이면 제2사분면을 지나지 않는다.



$-\sqrt{2}+a>0 \qquad \therefore a>\sqrt{2}$

즉 정수 a의 최솟값은 2이다.

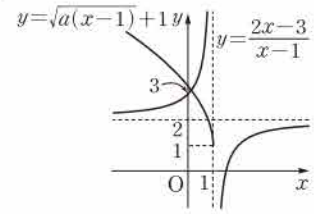
답 2

1286 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x-1)}+1$

$y=\dfrac{2x-3}{x-1}=\dfrac{2(x-1)-1}{x-1}=-\dfrac{1}{x-1}+2$이므로 $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\sqrt{a(x-1)}+1$의 그래프가 $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$의 그래프와 제1사분면에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$일 때 $y>3$이어야 하므로



$\sqrt{-a}+1>3, \qquad \sqrt{-a}>2$

$-a>4 \qquad \therefore a<-4$

답 ①

유형 09 그래프를 이용하여 무리함수의 식 구하기 집중공략 본책 193쪽

함수식이 미지수가 포함된 무리식으로 주어지고 그 함수의 그래프가 주어지면 그래프의 모양, 그래프가 지나는 점의 좌표 등을 이용하여 미지수의 값을 구한다.

1287 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x+1)}-1$ ······ ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{a}-1, \qquad \sqrt{a}=2 \qquad \therefore a=4$

㉠에 $a=4$를 대입하면

$y=\sqrt{4(x+1)}-1=\sqrt{4x+4}-1$

따라서 $a=4,\ b=4,\ c=-1$이므로

$a+b+c=7$

답 7

1288 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x-p)}+q$ ··· ❶

이 함수가 $y=\sqrt{a(x+b)}+c$와 같으므로

$b=-p,\ c=q$ ··· ❷

이때 $p>0,\ q<0$이므로

$a<0,\ b<0,\ c<0$ ··· ❸

답 $a<0,\ b<0,\ c<0$

10 무리식과 무리함수

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수의 그래프의 식을 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ b, c를 p, q에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ a, b, c의 부호를 구할 수 있다.	30 %

참고 주어진 함수의 정의역이 $\{x|x\le p\}$이므로 $a<0$임을 알 수 있다.

1289 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=-2$이므로 함수의 식을 $y=\dfrac{k}{x-3}-2\ (k>0)$라 하자.

이 함수의 그래프가 점 $(4,\ 0)$을 지나므로

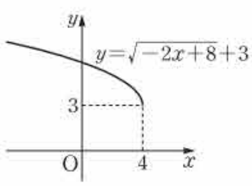
$0=\dfrac{k}{4-3}-2 \qquad \therefore k=2$

즉 $y=\dfrac{2}{x-3}-2=\dfrac{-2x+8}{x-3}$이므로

$a=-2,\ b=8,\ c=-3$

$y=\sqrt{-2x+8}+3=\sqrt{-2(x-4)}+3$이므로 $y=\sqrt{-2x+8}+3$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\sqrt{-2x+8}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2사분면을 지난다. 답 ①



1290 $y=\dfrac{b}{x+a}+c$의 그래프의 모양에서 $b>0$이고, 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=c$이므로

$-a<0,\ c<0 \qquad \therefore a>0,\ c<0$

$y=\sqrt{ax-b}+c=\sqrt{a\left(x-\dfrac{b}{a}\right)}+c$이므로 $y=\sqrt{ax-b}+c$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a>0$, $\dfrac{b}{a}>0$, $c<0$이므로 함수 $y=\sqrt{ax-b}+c$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ④이다. 답 ④

$a>0$, $b>0$이므로 $\dfrac{b}{a}>0$

유형 10 무리함수의 그래프의 성질 본책 194쪽

무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q\ (a\ne0)$의 그래프
① $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.
② $a>0$이면 정의역은 $\{x|x\ge p\}$, 치역은 $\{y|y\ge q\}$이다.
$a<0$이면 정의역은 $\{x|x\le p\}$, 치역은 $\{y|y\ge q\}$이다.

1291 ① $6-2x\ge0$에서 $\quad x\le3$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\le3\}$이다.

② $\sqrt{6-2x}\ge0$에서 $\quad \sqrt{6-2x}-1\ge-1$

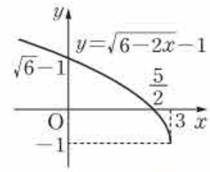
따라서 주어진 함수의 치역은 $\{y|y\ge-1\}$이다.

③ $y=\sqrt{6-2x}-1$에 $x=3$을 대입하면 $\quad y=-1$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $(3,\ 1)$을 지나지 않는다.

④ $y=\sqrt{6-2x}-1=\sqrt{-2(x-3)}-1$이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

⑤ 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



답 ④

1292 ㄱ. $2-x\ge0$에서 $x\le2$이므로 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\le2\}$이다.

또 $\sqrt{2-x}\ge0$에서 $\quad -\sqrt{2-x}\le0$

$\therefore -\sqrt{2-x}+2\le2$

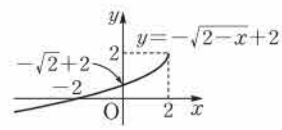
따라서 주어진 함수의 치역은 $\{y|y\le2\}$이다.

ㄴ. $y=-\sqrt{2-x}+2$에 $x=0$을 대입하면 $\quad y=-\sqrt{2}+2$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $(0,\ 2)$를 지나지 않는다.

ㄷ. $y=-\sqrt{2-x}+2=-\sqrt{-(x-2)}+2$이므로 $y=-\sqrt{2-x}+2$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2, 3사분면을 지난다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

1293 ㄱ. $a>0$, $b<0$이면 정의역이 $\{x|x\le0\}$, 치역이 $\{y|y\ge0\}$이므로 그래프는 제2사분면을 지난다.

ㄷ. 그래프는 $y=-a\sqrt{bx}$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

유형 11 무리함수의 최대 · 최소 본책 194쪽

정의역이 $\{x|p\le x\le q\}$인 함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}+c$의 최대·최소는 다음과 같다.
① $a>0$일 때, 최솟값은 $f(p)$, 최댓값은 $f(q)$이다.
② $a<0$일 때, 최솟값은 $f(q)$, 최댓값은 $f(p)$이다.

1294 $y=-\sqrt{2x+k}+3=-\sqrt{2\left(x+\dfrac{k}{2}\right)}+3$이므로

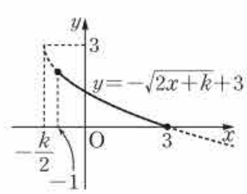
$y=-\sqrt{2x+k}+3$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{k}{2}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x\le3$에서 $y=-\sqrt{2x+k}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=-1$일 때 최댓값 $-\sqrt{-2+k}+3$,

$x=3$일 때 최솟값 $-\sqrt{6+k}+3$

을 갖는다.



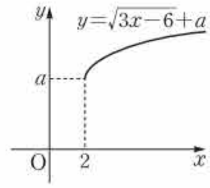
즉 $-\sqrt{6+k}+3=0$이므로 $\quad\sqrt{6+k}=3$

$6+k=9 \quad \therefore k=3$

따라서 구하는 최댓값은 $\quad -\sqrt{-2+3}+3=2$ 답 2

1295 $y=\sqrt{3x-6}+a=\sqrt{3(x-2)}+a$이므로 $y=\sqrt{3x-6}+a$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\sqrt{3x-6}+a$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=2$일 때 최솟값 a를 갖는다.



$\therefore a=4$

즉 $y=\sqrt{3x-6}+4$의 그래프가 점 $(b, 7)$을 지나므로

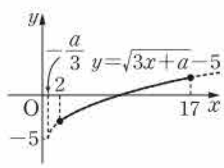
$\sqrt{3b-6}+4=7, \quad \sqrt{3b-6}=3$

$3b-6=9 \quad \therefore b=5$

$\therefore a+b=9$ 답 ③

1296 $y=\sqrt{3x+a}-5=\sqrt{3\left(x+\frac{a}{3}\right)}-5$이므로 $y=\sqrt{3x+a}-5$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{a}{3}$만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2\le x\le 17$에서 $y=\sqrt{3x+a}-5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=17$일 때 최댓값 $\sqrt{51+a}-5$,

$x=2$일 때 최솟값 $\sqrt{6+a}-5$

를 갖는다.

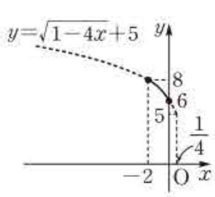
즉 $\sqrt{51+a}-5=2$이므로 $\quad\sqrt{51+a}=7$

$51+a=49 \quad \therefore a=-2$

따라서 구하는 최솟값은 $\quad\sqrt{6-2}-5=-3$ 답 ③

1297 $y=\sqrt{1-4x}+5=\sqrt{-4\left(x-\frac{1}{4}\right)}+5$이므로 $y=\sqrt{1-4x}+5$의 그래프는 $y=\sqrt{-4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-2\le x\le a$에서 $y=\sqrt{1-4x}+5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-2$일 때 최댓값 8,

$x=a$일 때 최솟값 $\sqrt{1-4a}+5$

를 갖는다.

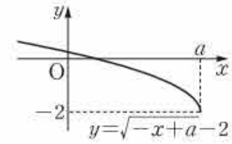
즉 $b=8$이고 $\sqrt{1-4a}+5=6$이므로

$\sqrt{1-4a}=1, \quad 1-4a=1 \quad \therefore a=0$

$\therefore a+b=8$ 답 8

1298 $y=\sqrt{-x+a}-2=\sqrt{-(x-a)}-2$이므로 $y=\sqrt{-x+a}-2$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

$y=\sqrt{-x+a}-2$의 그래프가 제1사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $a>0$이고 $x=0$일 때 $y>0$이어야 하므로



$\sqrt{a}-2>0, \quad \sqrt{a}>2$

$\therefore a>4$

따라서 정수 a의 최솟값은 5이므로 $\quad k=5$ ··· ❶

즉 $4\le x\le 11$에서 함수 $y=\sqrt{x+5}+1$은

$x=11$일 때 최댓값 $\sqrt{16}+1=5$,

$x=4$일 때 최솟값 $\sqrt{9}+1=4$

를 가지므로 구하는 곱은

$5\cdot 4=20$ ··· ❷

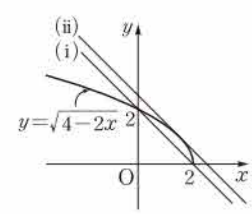
답 20

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ 최댓값과 최솟값의 곱을 구할 수 있다.	40 %

유형 12 무리함수의 그래프와 직선의 위치 관계 집중공략 본책 195쪽

① 무리함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 위치 관계
➡ 그래프를 직접 그려 본다.
② 무리함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접할 때
➡ 이차방정식 $\{f(x)\}^2=\{g(x)\}^2$의 판별식을 D라 하면 $D=0$

1299 $y=\sqrt{4-2x}=\sqrt{-2(x-2)}$이므로 $y=\sqrt{4-2x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k인 직선이다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(2, 0)$을 지날 때,

$0=-2+k \quad \therefore k=2$

(ii) 함수 $y=\sqrt{4-2x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 접할 때,

$\sqrt{4-2x}=-x+k$의 양변을 제곱하면

$4-2x=x^2-2kx+k^2$

$\therefore x^2-2(k-1)x+k^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

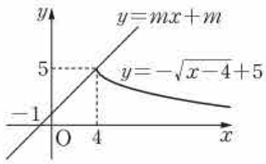
$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-(k^2-4)=0$

$-2k+5=0 \quad \therefore k=\frac{5}{2}$

(i), (ii)에서 $\quad 2\le k<\frac{5}{2}$ 답 ⑤

1300 $y=-\sqrt{x-4}+5$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=mx+m$, 즉 $y=m(x+1)$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 0)$을 지난다.

따라서 m의 값은 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=mx+m$이 점 $(4,\ 5)$를 지날 때 최대이다.



즉 $5=4m+m$에서

$m=1$

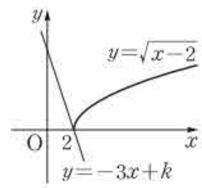
따라서 m의 최댓값은 1이다.

답 1

1301 $y=\sqrt{x-2}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-3x+k$는 기울기가 -3이고 y절편이 k인 직선이다.

이때 $A\cap B\neq\varnothing$이므로 $y=\sqrt{x-2}$의 그래프와 직선 $y=-3x+k$가 만나야 한다.

따라서 k의 값은 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-3x+k$가 점 $(2,\ 0)$을 지날 때 최소이다.

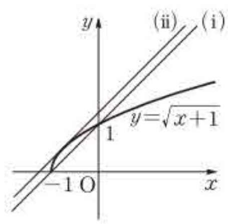


즉 $0=-6+k$에서 $\quad k=6$

따라서 k의 최솟값은 6이다.

답 ④

1302 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k인 직선이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때,

$0=-1+k \quad \therefore k=1$ ⋯ ❶

(ii) 함수 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때,

$\sqrt{x+1}=x+k$의 양변을 제곱하면

$x+1=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+(2k-1)x+k^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2-1)=0$

$-4k+5=0 \quad \therefore k=\dfrac{5}{4}$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서

$$f(k)=\begin{cases}0 & \left(k>\dfrac{5}{4}\right)\\ 1 & \left(k=\dfrac{5}{4}\ \text{또는}\ k<1\right)\\ 2 & \left(1\le k<\dfrac{5}{4}\right)\end{cases}$$ ⋯ ❸

$\therefore f\left(\dfrac{1}{4}\right)+f(1)+f\left(\dfrac{5}{4}\right)+f(2)=1+2+1+0$

$=4$ ⋯ ❹

답 4

채점 기준	비율
❶ 직선 $y=x+k$가 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때 k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 주어진 함수의 그래프와 직선이 접할 때 k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(k)$를 구할 수 있다.	20 %
❹ $f\left(\frac{1}{4}\right)+f(1)+f\left(\frac{5}{4}\right)+f(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 13 무리함수의 역함수

본책 196쪽

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a\neq0)$의 역함수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) x를 y에 대한 식으로 나타낸다.

➡ $y-c=\sqrt{ax+b}$의 양변을 제곱하면

$(y-c)^2=ax+b$

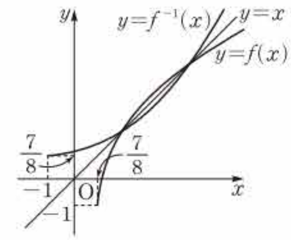
$\therefore x=\dfrac{1}{a}\{(y-c)^2-b\}$

(ii) x와 y를 서로 바꾼다.

➡ $y=\dfrac{1}{a}\{(x-c)^2-b\}$

(iii) $y=\sqrt{ax+b}+c$의 치역이 $\{y\,|\,y\ge c\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge c\}$이다.

1303 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같다.



$\sqrt{8x-7}-1=x$에서 $\quad \sqrt{8x-7}=x+1$

위의 식의 양변을 제곱하면

$8x-7=x^2+2x+1, \quad x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0 \quad \therefore x=2$ 또는 $x=4$

따라서 두 교점의 좌표는 $(2,\ 2)$, $(4,\ 4)$이므로 구하는 거리는

$\sqrt{(4-2)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{2}$

답 ②

1304 $y=\sqrt{4-x}+4\ (y\ge4)$라 하면

$y-4=\sqrt{4-x}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$(y-4)^2=4-x \quad \therefore x=-(y-4)^2+4$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=-(x-4)^2+4$

$\therefore g(x)=-(x-4)^2+4\ (x\ge4)$

이때 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동하면 $y=-x^2$의 그래프의 일부와 겹쳐지므로

$a=-1,\ p=-4,\ q=-4$

$\therefore a+p+q=-9$

답 -9

1305 $y=\sqrt{ax+b}+1$의 그래프가 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$3=\sqrt{a+b}+1, \quad \sqrt{a+b}=2$

$\therefore a+b=4$ ⋯⋯ ㉠

역함수의 그래프가 점 $(1,\ 3)$을 지나므로 $y=\sqrt{ax+b}+1$의 그래프는 점 $(3,\ 1)$을 지난다. 즉

$1=\sqrt{3a+b}+1, \quad \sqrt{3a+b}=0$

$\therefore 3a+b=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-2,\ b=6$

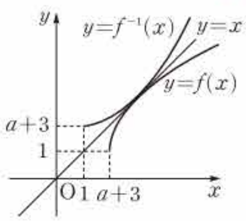
$\therefore ab=-12$

답 ①

1306 $y=2\sqrt{x-3}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2\sqrt{x-a-3}+1$ ··· ➊

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 접하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 접한다. ··· ➋



$2\sqrt{x-a-3}+1=x$에서 $\quad 2\sqrt{x-a-3}=x-1$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4(x-a-3)=x^2-2x+1$

$\therefore x^2-6x+4a+13=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(4a+13)=0$

$-4a-4=0 \quad \therefore a=-1$ ··· ➌

답 -1

채점 기준	비율
➊ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	20 %
➋ $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 접함을 알 수 있다.	30 %
➌ a의 값을 구할 수 있다.	50 %

1307 함수 $y=\frac{x^2}{7}+\frac{k}{7}\ (x\ge0)$는 집합 $\{x|x\ge0\}$에서 집합 $\left\{y\middle|y\ge\frac{k}{7}\right\}$로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=\frac{x^2}{7}+\frac{k}{7}$에서 $\quad x^2=7y-k$

$\therefore x=\sqrt{7y-k}\ (\because x\ge0)$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\sqrt{7x-k}$

즉 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

이때 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같다.

따라서 이차방정식 $\frac{x^2}{7}+\frac{k}{7}=x$, 즉 $x^2-7x+k=0$이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2-7x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-7)^2-4k>0 \quad \therefore k<\frac{49}{4}$

(ii) (두 근의 합)$=7>0$

(iii) (두 근의 곱)≥0에서 $\quad k\ge0$

이상에서 $0\le k<\frac{49}{4}$이므로 정수 k는 $0, 1, 2, \cdots, 12$의 13개이다.

답 ④

1308 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 두 점 $(3, 4)$, $(5, 0)$을 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(4, 3)$, $(0, 5)$를 지난다.

또 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 정의역이 $\{x|x\ge3\}$, 치역이 $\{y|y\le4\}$이므로 함수 $y=f(x)$의 정의역은 $\{x|x\le4\}$, 치역은 $\{y|y\ge3\}$이다.

즉 $y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식이므로

$\frac{b}{a}=-4,\ c=3$

또 $y=\sqrt{ax+b}+3$의 그래프가 점 $(0, 5)$를 지나므로

$5=\sqrt{b}+3, \quad \sqrt{b}=2 \quad \therefore b=4$

$\frac{b}{a}=-4$에 $b=4$를 대입하면

$\frac{4}{a}=-4 \quad \therefore a=-1$

$\therefore a+b+c=6$

답 ①

다른 풀이 $f^{-1}(x)=k(x-3)^2+4\ (k<0,\ x\ge3)$라 하면

꼭짓점의 좌표가 $(3, 4)$이고 위로 볼록한 이차함수의 그래프 중 $x\ge3$인 부분이다.

$y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(5, 0)$을 지나므로

$k(5-3)^2+4=0, \quad 4k=-4$

$\therefore k=-1$

$\therefore f^{-1}(x)=-(x-3)^2+4\ (x\ge3)$

$y=-(x-3)^2+4$라 하면 $\quad (x-3)^2=-y+4$

$x-3=\sqrt{-y+4}\ (\because x\ge3) \quad \therefore x=\sqrt{-y+4}+3$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\sqrt{-x+4}+3$

$\therefore f(x)=\sqrt{-x+4}+3$

따라서 $a=-1$, $b=4$, $c=3$이므로 $\quad a+b+c=6$

참고 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a\ne0,\ y\ge c)$라 하면 $\quad y-c=\sqrt{ax+b}$

$(y-c)^2=ax+b \quad \therefore x=\frac{1}{a}\{(y-c)^2-b\}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{1}{a}\{(x-c)^2-b\}$

즉 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a\ne0)$의 역함수는

$y=\frac{1}{a}(x-c)^2-\frac{b}{a}\ (x\ge c)$

이므로 주어진 함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}+c$의 역함수를 $f^{-1}(x)=k(x-3)^2+4\ (k<0,\ x\ge3)$로 놓을 수 있다.

유형 14 무리함수의 합성함수와 역함수

본책 197쪽

두 함수 $f(x)$, $g(x)$와 그 역함수 $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$에 대하여

① $(g\circ f^{-1})(x)=g(f^{-1}(x))$

② $(g^{-1}\circ f)^{-1}(x)=(f^{-1}\circ g)(x)=f^{-1}(g(x))$

③ $g^{-1}(f(a))=k$이면 $\quad g(k)=f(a)$

1309 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(3)$

$=(g^{-1}\circ f)(3)$

$=g^{-1}(f(3))$

$=g^{-1}(2)$ $\quad f(3)=\frac{3+1}{3-1}=2$

$g^{-1}(2)=k$라 하면 $g(k)=2$이므로

$\sqrt{3k-2}=2, \quad 3k-2=4 \quad \therefore k=2$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=2$

답 2

1310 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$g(4)=k$라 하면 $f(k)=4$이므로

$\sqrt{2k-4}=4, \quad 2k-4=16 \quad \therefore k=10$

$g(10)=t$라 하면 $f(t)=10$이므로

$\sqrt{2t-4}=10,\quad 2t-4=100\quad \therefore t=52$

$\therefore (g\circ g)(4)=g(g(4))=g(10)=52$ 답 ③

1311 $f^{-1}(g(x))=2x$에서

$f(f^{-1}(g(x)))=f(2x)$

$\therefore g(x)=f(2x)$

$\therefore g(4)=f(8)=\sqrt{3\cdot 8-12}=2\sqrt{3}$ 답 ⑤

다른 풀이 $y=\sqrt{3x-12}\ (y\ge 0)$라 하면

$y^2=3x-12\quad \therefore x=\frac{1}{3}y^2+4$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{3}x^2+4$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x^2+4\ (x\ge 0)$

$f^{-1}(g(x))=2x$에서 $\frac{1}{3}\{g(x)\}^2+4=2x$

$\therefore \{g(x)\}^2=6x-12$

이때 $x\ge 2$에서 $g(x)\ge 0$이므로

$g(x)=\sqrt{6x-12}\quad \therefore g(4)=2\sqrt{3}$

1312 $(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=16$에서

$(f\circ f)^{-1}(a)=16$

$\therefore (f\circ f)(16)=a$ ⋯ ❶

이때 $f(16)=1-\sqrt{16}=-3$, $f(-3)=\sqrt{1-(-3)}=2$이므로

$a=(f\circ f)(16)=f(f(16))$

$=f(-3)=2$ ⋯ ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ $(f\circ f)(16)=a$임을 알 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	60 %

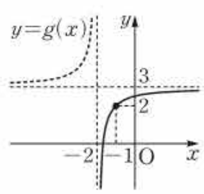
1313 $x>-2$에서 $x+2>0$

$\sqrt{x+2}>0\quad \therefore \sqrt{x+2}-1>-1$

즉 함수 $y=f(x)$의 치역은 $\{y\mid y>-1\}$이다.

한편 $g(x)=\frac{3x+5}{x+2}=\frac{3(x+2)-1}{x+2}=-\frac{1}{x+2}+3$이므로

$x>-2$에서 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x>-1$에서

$\underbrace{2}_{g(-1)=2}<g(x)<3$

이므로 $x>-2$에서 정의된 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 치역은

$\{y\mid 2<y<3\}$ 답 $\{y\mid 2<y<3\}$

1314 1st 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식과 x절편, y절편을 구한다.

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)-\frac{ad}{c}+b}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{\frac{-ad+bc}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}+\frac{a}{c}$$

이므로 점근선의 방정식은

$x=-\frac{d}{c},\ y=\frac{a}{c}$

이고 x절편은 $-\frac{b}{a}$, y절편은 $\frac{b}{d}$이다.

2nd 주어진 그래프를 이용하여 $ad-bc$, $\frac{c}{b}$, $\frac{b}{c}$의 부호를 구한다.

주어진 그래프에서

$-\frac{d}{c}>0,\ \frac{a}{c}>0,\ -\frac{b}{a}>0,\ \frac{b}{d}>0,\ \frac{-ad+bc}{c^2}>0$

이므로

$cd<0,\ ac>0,\ ab<0,\ bd>0,\ ad-bc<0$

$\therefore a>0,\ b<0,\ c>0,\ d<0,\ ad-bc<0$

또는 $a<0,\ b>0,\ c<0,\ d>0,\ ad-bc<0$

$\therefore ad-bc<0,\ \frac{c}{b}<0,\ \frac{b}{c}<0$

3rd 주어진 식을 간단히 한다.

$\sqrt{(ad-bc)^2}+\sqrt{\frac{c}{b}}\sqrt{\frac{b}{c}}=|ad-bc|-\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}$

$=-(ad-bc)-1$ └ $p<0,\ q<0$이면 $\sqrt{p}\sqrt{q}=-\sqrt{pq}$

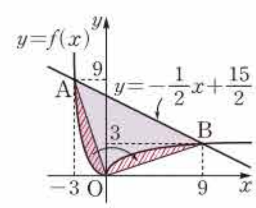
$=bc-ad-1$

답 $bc-ad-1$

1315 1st $\overline{OA}$, $\overline{OB}$를 긋고 넓이가 같은 두 부분을 찾는다.

$y=\sqrt{x}$의 그래프는 $y=x^2\ (x\le 0)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프와 일치하므로 점 A는 점 B로 이동한다.

즉 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이는 서로 같으므로 색칠한 부분의 넓이는 △AOB의 넓이와 같다. ⋯ ❶



2nd 색칠한 부분의 넓이를 구한다.

△AOB에서 밑변을 $\overline{AB}$라 하면 높이는 원점 O와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}$, 즉 $x+2y-15=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|-15|}{\sqrt{1^2+2^2}}=3\sqrt{5}$

따라서 $\overline{AB}=\sqrt{(9+3)^2+(3-9)^2}=6\sqrt{5}$이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5}=45$ ⋯ ❷

답 45

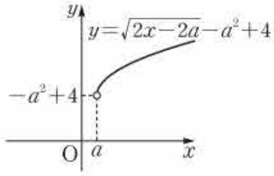
채점 기준	비율
❶ 색칠한 부분의 넓이가 △AOB의 넓이와 같음을 알 수 있다.	30 %
❷ 색칠한 부분의 넓이를 구할 수 있다.	70 %

SSEN 특강

점 A$(-3, 9)$를 y축에 대하여 대칭이동하면 점 $(3, 9)$로 옮겨지고 이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 점 $(9, 3)$으로 옮겨지므로 점 B와 일치한다. 따라서 대칭이동에 의하여 $y=x^2\ (x\le 0)$의 그래프 위의 점 A$(-3, 9)$가 $y=\sqrt{x}$의 그래프 위의 점 B$(9, 3)$으로 이동함을 알 수 있다.

1316 (1st) 무리함수의 그래프가 오직 하나의 사분면을 지나도록 하는 a의 값의 범위를 구한다.

정의역이 $\{x|x>a\}$인 함수 $y=\sqrt{2x-2a}-a^2+4$의 그래프가 오직 하나의 사분면을 지나려면 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같아야 한다. ⋯ ❶



따라서 $a\ge 0$이고 $-a^2+4\ge 0$이어야 한다.

$-a^2+4\ge 0$에서 $a^2\le 4$ $\therefore -2\le a\le 2$

$\therefore 0\le a\le 2$ ⋯ ❷

(2nd) $M-m$의 값을 구한다.

$M=2$, $m=0$이므로 $M-m=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 조건을 만족시키는 그래프의 개형을 그릴 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ $M-m$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1317

좌표평면에서 두 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-5$, $g(x)=\sqrt{x+1}$

점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=-5$이다.

의 그래프에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. ❶곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=-5$와 만나지 않는다.

ㄴ. ❷$0\le x\le 8$일 때, 곡선 $y=g(x)$ 위에 있는 점 중에서 y좌표가 정수인 점의 개수는 3이다.

$\sqrt{x+1}$이 정수이면 $x+1$은 정수의 제곱이다.

ㄷ. ❸두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=0$, $x=8$로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 ❹x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 61이다.

0, 1, 2, ⋯, 8

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

❶의 점근선의 방정식을 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다. ❷를 만족시키는 점의 x좌표를 구하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다. ❸을 좌표평면 위에 나타낸 후 x좌표가 0, 1, 2, ⋯, 8일 때 ❹를 각각 구하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

(1st) 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식을 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-5$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=-5$이므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=-5$와 만나지 않는다.

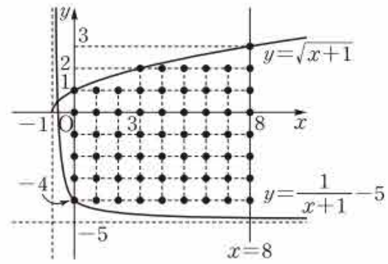
(2nd) $\sqrt{x+1}$이 정수가 되도록 하는 x의 값을 구하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $0\le x\le 8$일 때, 곡선 $y=\sqrt{x+1}$은 $x=0$, 3, 8일 때만 y좌표가 각각 1, 2, 3으로 정수이다.

따라서 y좌표가 정수인 점의 개수는 3이다.

(3rd) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $0\le x\le 8$에서 곡선 $y=\dfrac{1}{x+1}-5$는 $x=0$일 때만 y좌표가 -4로 정수이고, 곡선 $y=\sqrt{x+1}$은 $x=0$, 3, 8일 때만 y좌표가 각각 1, 2, 3으로 정수이다.



위의 그림에서 두 곡선 $y=\dfrac{1}{x+1}-5$, $y=\sqrt{x+1}$과 두 직선 $x=0$, $x=8$로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는

$x=0$, 1, 2일 때 각각 6

$x=3$, 4, 5, 6, 7일 때 각각 7

$x=8$일 때 8

따라서 조건을 만족시키는 점의 개수는

$3\cdot 6+5\cdot 7+1\cdot 8=61$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

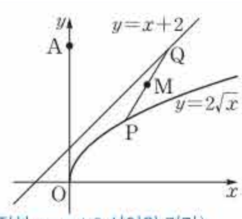
답 ⑤

1318

그림과 같이 함수 ❶$y=2\sqrt{x}$의 그래프 위를 움직이는 점 P와 ❷직선 $y=x+2$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여 ❸선분 PQ의 중점을 M이라 하자. ❹점 M과 점 A(0, 8) 사이의 거리의 최솟값은?

P$(a, 2\sqrt{a})$로 놓을 수 있다.

(점 P와 직선 $y=x+2$ 사이의 거리) $=2\times$(점 M과 직선 $y=x+2$ 사이의 거리)

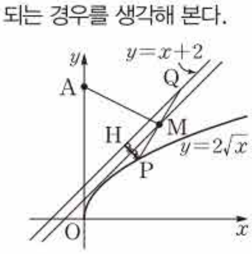


① $\dfrac{13\sqrt{2}}{4}$ ② $\dfrac{27\sqrt{2}}{8}$ ③ $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ ④ $\dfrac{29\sqrt{2}}{8}$ ⑤ $\dfrac{15\sqrt{2}}{4}$

❶을 고정했을 때, ❷에 대하여 ❸이 어떤 도형 위를 움직이는지 찾은 후 ❹인 경우를 생각해 본다. 이때 ❸의 좌표를 구하는 것은 어려우므로 점 P와 직선 $y=x+2$ 사이의 거리를 이용한다.

(1st) 두 점 M, A 사이의 거리가 최소가 되는 경우를 생각해 본다.

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 직선 $y=x+2$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{PQ}$의 중점 M은 $\overline{PH}$의 수직이등분선 위의 점이므로 두 점 M, A 사이의 거리의 최솟값은 점 A와 $\overline{PH}$의 수직이등분선 사이의 거리의 최솟값과 같다.



2nd $P(a,\ 2\sqrt{a})$라 하고 직선 $y=x+2$와 $\overline{PH}$의 수직이등분선 사이의 거리의 최솟값을 구한다.

$P(a,\ 2\sqrt{a})$라 하면 점 P와 직선 $y=x+2$, 즉 $x-y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|a-2\sqrt{a}+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{(\sqrt{a}-1)^2+1}{\sqrt{2}}$$

이므로 점 P와 직선 $y=x+2$ 사이의 거리는 $a=1$일 때 최솟값 $\frac{\sqrt{2}}{2}$를 갖는다.

따라서 $\underbrace{\text{직선 } y=x+2\text{와 } \overline{PH}\text{의 수직이등분선 사이의 거리의 최솟값}}_{\frac{1}{2}\times(\text{점 P와 직선 } y=x+2 \text{ 사이의 거리})}$은

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

3rd 두 점 M, A 사이의 거리의 최솟값을 구한다.

점 $A(0,\ 8)$과 직선 $y=x+2$, 즉 $x-y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0-8+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$$

이므로 두 점 M, A 사이의 거리의 최솟값은

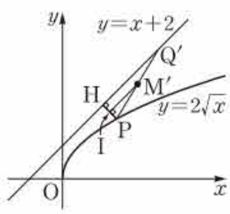
$$\frac{\sqrt{2}}{4}+3\sqrt{2}=\frac{13\sqrt{2}}{4}$$

답 ①

참고 직선 $y=x+2$ 위의 한 점 Q′에 대하여 $\overline{PQ'}$의 중점을 M′이라 하자.

(ⅰ) 점 Q′이 점 H와 같을 때, 점 M′은 $\overline{PH}$의 중점이다.

(ⅱ) 점 Q′이 점 H와 같지 않을 때,
오른쪽 그림과 같이 점 M′에서 $\overline{PH}$에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\triangle PMI \backsim \triangle PQ'H$이고 $\overline{PM'}=\overline{M'Q'}$이므로 $\overline{PI}=\overline{IH}$이다.
즉 점 M′은 $\overline{PH}$의 수직이등분선 위의 점이다.

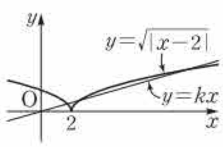


(ⅰ), (ⅱ)에서 점 P가 고정되었을 때 직선 $y=x+2$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\overline{PQ}$의 중점 M은 $\overline{PH}$의 수직이등분선 위의 점이다.

1319

1st 무리함수의 그래프와 직선이 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 조건을 생각해 본다.

$y=\sqrt{|x-2|}$의 그래프와 직선 $y=kx$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 $y=\sqrt{x-2}$의 그래프와 직선 $y=kx$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



2nd $y=\sqrt{x-2}$의 그래프와 직선 $y=kx$가 접할 때의 k의 값을 구한다.

$k>0$이어야 하고 $y=\sqrt{x-2}$의 그래프와 직선 $y=kx$가 접할 때,

$\sqrt{x-2}=kx$에서

$$x-2=k^2x^2$$

$$\therefore\ k^2x^2-x+2=0$$

이 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(-1)^2-4\cdot k^2\cdot 2=0,\qquad 1-8k^2=0$$

$$k^2=\frac{1}{8}\qquad \therefore\ k=\frac{\sqrt{2}}{4}\ (\because\ k>0)$$

3rd 조건을 만족시키는 실수 k의 값의 범위를 구한다.

$n(A\cap B)=3$을 만족시키는 k의 값의 범위는

$$0<k<\frac{\sqrt{2}}{4}$$

답 ③

참고 $k\le 0$ 또는 $k>\frac{\sqrt{2}}{4}$일 때, $\quad n(A\cap B)=1$

$k=\frac{\sqrt{2}}{4}$일 때, $\quad n(A\cap B)=2$

1320

1st $\triangle ABP$의 넓이는 점 P가 직선 AB와 평행한 접선의 접점일 때 최대임을 이용한다.

$\triangle ABP$의 넓이는 점 P가 직선 AB와 평행하고 주어진 함수의 그래프에 접하는 직선의 접점일 때 최대이다. ⋯ ❶

직선 AB의 방정식은

$$y=\frac{3-0}{4-1}(x-1),\ \text{즉}\ y=x-1$$

이므로 직선 AB와 평행한 접선의 방정식을 $y=x+k$ (k는 상수)라 하면 $\sqrt{3x-3}=x+k$에서

$$3x-3=x^2+2kx+k^2$$

$$\therefore\ x^2+(2k-3)x+k^2+3=0$$

이 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(2k-3)^2-4(k^2+3)=0$$

$$-12k-3=0\qquad \therefore\ k=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ y=x-\frac{1}{4}$$ ⋯ ❷

2nd $\triangle ABP$의 넓이의 최댓값을 구한다.

$\triangle ABP$에서 밑변을 $\overline{AB}$라 하면 높이는 두 직선 $y=x-1$, $y=x-\frac{1}{4}$ 사이의 거리, 즉 직선 $y=x-1$ 위의 점 $(1,\ 0)$과 직선 $\underbrace{y=x-\frac{1}{4}}_{4x-4y-1=0}$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|4-1|}{\sqrt{4^2+(-4)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

따라서 $\overline{AB}=\sqrt{(4-1)^2+3^2}=3\sqrt{2}$이므로 $\triangle ABP$의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{8}=\frac{9}{8}$$ ⋯ ❸

답 $\frac{9}{8}$

채점 기준	비율
❶ $\triangle ABP$의 넓이가 최대일 때의 점 P의 위치를 알 수 있다.	20 %
❷ 직선 AB와 평행한 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\triangle ABP$의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

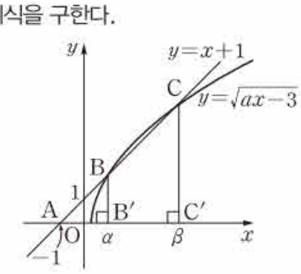
1321

1st a의 값의 부호를 구한다.

함수 $y=\sqrt{ax-3}$의 그래프와 직선 $y=x+1$이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $\quad a>0$

2nd 두 점 B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 $B'(\alpha,\ 0)$, $C'(\beta,\ 0)$이라 하고 α, β 사이의 관계식을 구한다.

$y=\sqrt{ax-3}$의 그래프와 직선 $y=x+1$은 오른쪽 그림과 같고 두 점 B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 $B'(\alpha,\ 0)$, $C'(\beta,\ 0)$이라 하자.



$A(-1,\ 0)$이고 점 B가 $\overline{AC}$를

2 : 3으로 내분하므로

$\overline{AB'} : \overline{B'C'} = \overline{AB} : \overline{BC} = 2 : 3$

즉 $(\alpha+1) : (\beta-\alpha) = 2 : 3$이므로

$2(\beta-\alpha)=3(\alpha+1)$, $\quad 2\beta-2\alpha=3\alpha+3$

$\therefore \beta=\dfrac{5\alpha+3}{2}$ …… ㉠

3rd y를 소거하여 얻은 x에 대한 이차방정식에서 근과 계수의 관계를 이용하여 a의 값을 구한다.

직선 $y=x+1$과 $y=\sqrt{ax-3}$의 그래프가 만나는 점의 x좌표는 $\sqrt{ax-3}=x+1$에서

$ax-3=x^2+2x+1$

$\therefore x^2+(2-a)x+4=0$

이 이차방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a-2$ …… ㉡

$\alpha\beta=4$ …… ㉢

㉢에 ㉠을 대입하면 $\quad \alpha\cdot\dfrac{5\alpha+3}{2}=4$

$5\alpha^2+3\alpha-8=0$, $\quad (5\alpha+8)(\alpha-1)=0$

$\therefore \alpha=1\ (\because \alpha>0)$

4th β의 값을 구한 후 a의 값을 구한다.

㉢에 $\alpha=1$을 대입하면 $\beta=4$이므로 ㉡에서

$1+4=a-2 \quad \therefore a=7$

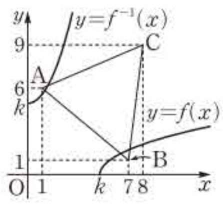
답 7

참고 $y=\sqrt{ax-3}$에서 $a>0$이므로 정의역은

$\left\{x \,\middle|\, x\ge\dfrac{3}{a}\right\} \quad \therefore a\ge\dfrac{3}{a}>0$

1322 1st 곡선 $y=f(x)$가 어떤 점을 지날 때 k의 값이 최대이면서 △ABC와 만나는지 파악한다.

$f(x)=\sqrt{x-k}$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 △ABC와 만나도록 하는 실수 k의 값은 $y=f(x)$의 그래프가 점 B(7, 1)을 지날 때 최대이다.



$1=\sqrt{7-k}$에서 $\quad 1=7-k$

$\therefore k=6$

즉 $k>6$이면 $y=f(x)$의 그래프와 △ABC는 만나지 않는다.

2nd 함수 $f(x)$의 역함수의 그래프가 어떤 점을 지날 때 k의 값이 최대이면서 △ABC와 만나는지 파악한다.

$y=\sqrt{x-k}\ (y\ge0)$라 하면 $\quad y^2=x-k$

$\therefore x=y^2+k$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=x^2+k$

$\therefore f^{-1}(x)=x^2+k\ (x\ge0)$

따라서 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 △ABC와 만나도록 하는 실수 k의 값은 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 A(1, 6)을 지날 때 최대이다.

$6=1+k$에서 $\quad k=5$

즉 $k>5$이면 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 △ABC는 만나지 않는다.

3rd 실수 k의 최댓값을 구한다.

곡선 $y=f(x)$와 함수 $f(x)$의 역함수의 그래프가 △ABC와 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은 5이다.

답 ②

1323 1st 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 서로 역함수 관계임을 이용하여 점 A의 좌표를 구한다.

$y=\sqrt{3x+4}\ (y\ge0)$라 하면 $\quad y^2=3x+4$

$\therefore x=\dfrac{1}{3}y^2-\dfrac{4}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{4}{3}\ (x\ge0)$

즉 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

따라서 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같다.

$\sqrt{3x+4}=x$에서 $\quad 3x+4=x^2$

$x^2-3x-4=0$, $\quad (x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=4\ (\because x\ge0)$

$\therefore$ A(4, 4)

2nd 점 C의 좌표를 구한 후 $\overline{BC}$의 길이를 구한다.

점 B와 점 C는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

└ 직선 l이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$C\left(3,\ \dfrac{5}{3}\right)$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{\left(3-\dfrac{5}{3}\right)^2+\left(\dfrac{5}{3}-3\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

3rd 직선 l의 방정식을 구한 후 점 A와 직선 l 사이의 거리를 구한다.

직선 l은 기울기가 -1이고 점 B를 지나므로 직선 l의 방정식은

$y-3=-\left(x-\dfrac{5}{3}\right) \quad \therefore 3x+3y-14=0$

점 A(4, 4)와 직선 l 사이의 거리는

$\dfrac{|12+12-14|}{\sqrt{3^2+3^2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$

4th △ABC의 넓이를 구한다.

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{5\sqrt{2}}{3}=\dfrac{20}{9}$

답 ③

10 무리식과 무리함수

MEMO