쎈

정답 및 풀이

Ⅰ 지수함수와 로그함수

Ⅱ 삼각함수

Ⅲ 수열

→ 정답을 확인하려 할 때에는 「**빠른 정답 찾기**」를 이용하면 편리합니다.

01 지수

0001 $x^2=-4$라 하면　　$x=\pm 2i$　　답 $-2i$, $2i$

0002 $x^3=27$이라 하면　　$x^3-27=0$

$(x-3)(x^2+3x+9)=0$

$\therefore$ $x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm 3\sqrt{3}i}{2}$　　답 3, $\dfrac{-3\pm 3\sqrt{3}i}{2}$

0003 $x^3=-8$이라 하면　　$x^3+8=0$

$(x+2)(x^2-2x+4)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$　　답 -2, $1\pm\sqrt{3}i$

0004 $x^4=81$이라 하면　　$x^4-81=0$

$(x^2+9)(x^2-9)=0$

$(x^2+9)(x+3)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=\pm 3i$ 또는 $x=\pm 3$　　답 $-3i$, $3i$, -3, 3

0005 $x^2=9$라 하면　　$x=\pm 3$

따라서 9의 제곱근 중 실수인 것은 -3, 3이다.　　답 -3, 3

0006 $x^3=0.008$이라 하면

$x^3-0.008=0$,　　$(x-0.2)(x^2+0.2x+0.04)=0$

$\therefore$ $x=0.2$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{10}$

따라서 0.008의 세제곱근 중 실수인 것은 0.2이다.　　답 0.2

0007 $x^4=(-2)^4$, 즉 $x^4=16$이라 하면

$x^4-16=0$,　　$(x^2+4)(x^2-4)=0$

$(x^2+4)(x+2)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=\pm 2i$ 또는 $x=\pm 2$

따라서 $(-2)^4$의 네제곱근 중 실수인 것은 -2, 2이다.

답 -2, 2

0008 $x^4=\dfrac{81}{16}$이라 하면

$x^4-\dfrac{81}{16}=0$,　　$\left(x^2+\dfrac{9}{4}\right)\left(x^2-\dfrac{9}{4}\right)=0$

$\left(x^2+\dfrac{9}{4}\right)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=0$

$\therefore$ $x=\pm\dfrac{3}{2}i$ 또는 $x=\pm\dfrac{3}{2}$

따라서 $\dfrac{81}{16}$의 네제곱근 중 실수인 것은 $-\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{3}{2}$이다.

답 $-\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{3}{2}$

0009 $\sqrt[4]{256}=\sqrt[4]{4^4}=4$　　답 4

0010 $\sqrt[3]{0.027}=\sqrt[3]{0.3^3}=0.3$　　답 0.3

0011 $\sqrt[6]{(-2)^6}=\sqrt[6]{2^6}=2$　　답 2

0012 $\sqrt[3]{-\dfrac{8}{125}}=\sqrt[3]{\left(-\dfrac{2}{5}\right)^3}=-\dfrac{2}{5}$　　답 $-\dfrac{2}{5}$

0013 $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{4\times 16}=\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$　　답 4

0014 $\dfrac{\sqrt[4]{3125}}{\sqrt[4]{5}}=\sqrt[4]{\dfrac{3125}{5}}=\sqrt[4]{625}=\sqrt[4]{5^4}=5$　　답 5

0015 $(\sqrt[6]{9})^3=\sqrt[6]{9^3}=\sqrt[6]{(3^2)^3}=\sqrt[6]{3^6}=3$　　답 3

0016 $\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}=\sqrt[9]{512}=\sqrt[9]{2^9}=2$　　답 2

0017 $\sqrt[12]{9^4}\times\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$　　답 3

0018 답 1

0019 답 1

0020 $2^{-3}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$　　답 $\dfrac{1}{8}$

0021 $\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{-2}=\dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{16}}=16$　　답 16

0022 답 $a^{\frac{1}{4}}$

0023 답 $a^{\frac{3}{5}}$

0024 $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}=\dfrac{1}{a^{\frac{3}{4}}}=a^{-\frac{3}{4}}$　　답 $a^{-\frac{3}{4}}$

0025 $\dfrac{1}{\sqrt[6]{a^{-2}}}=\dfrac{1}{a^{-\frac{2}{6}}}=\dfrac{1}{a^{-\frac{1}{3}}}=a^{\frac{1}{3}}$　　답 $a^{\frac{1}{3}}$

0026 $100^{0.25}=(10^2)^{\frac{1}{4}}=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$　　답 $\sqrt{10}$

0027 $8^{\frac{5}{6}}=(2^3)^{\frac{5}{6}}=2^{\frac{5}{2}}=2^{2+\frac{1}{2}}=2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}}=4\sqrt{2}$　　답 $4\sqrt{2}$

0028 $27^{-\frac{1}{6}}=(3^3)^{-\frac{1}{6}}=3^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　답 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

0029 $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{9}}=(2^{-3})^{-\frac{1}{9}}=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$　　답 $\sqrt[3]{2}$

0030 $(2^{\frac{9}{4}})^2 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{9}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{9}{2}+\frac{1}{2}} = 2^5 = 32$ 답 32

0031 $(3^{\frac{3}{4}})^2 \times \sqrt{3} \div (3^{\frac{1}{3}})^6 = 3^{\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} \div 3^2$

$= 3^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-2} = 3^0 = 1$ 답 1

0032 $(\sqrt[9]{a^6} \times \sqrt[4]{b^2})^6 = (a^{\frac{2}{3}} \times b^{\frac{1}{2}})^6 = a^4b^3$ 답 a^4b^3

0033 $(a^2b^3)^{\frac{1}{6}} \times (a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{4}})^2 = a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{2}}$

$= a^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} \times b^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = ab^2$ 답 ab^2

0034 $2^{\sqrt{12}} \times 2^{\sqrt{3}} = 2^{2\sqrt{3}+\sqrt{3}} = 2^{3\sqrt{3}}$ 답 $2^{3\sqrt{3}}$

0035 $5^{\sqrt{32}} \div 5^{\sqrt{18}} \times 5^{\sqrt{8}} = 5^{4\sqrt{2}-3\sqrt{2}+2\sqrt{2}} = 5^{3\sqrt{2}}$ 답 $5^{3\sqrt{2}}$

0036 $(a^{\sqrt{5}})^{\sqrt{20}} = a^{\sqrt{100}} = a^{10}$ 답 a^{10}

0037 $(a^{\frac{1}{\sqrt{6}}} \times b^{\sqrt{\frac{2}{3}}})^{\sqrt{6}} = (a^{\frac{1}{\sqrt{6}}} \times b^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}})^{\sqrt{6}} = ab^2$ 답 ab^2

유형 01 거듭제곱근 본책 10쪽

(1) a의 n제곱근 ➡ 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 x
(2) 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	2	1	0
n이 홀수	1	1	1

0038 ① 64의 세제곱근은 방정식 $x^3=64$의 근이므로 3개이다.
② -8의 세제곱근 중 실수인 것은 -2이다.
③ 8의 네제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[4]{8}$이다.
④ n이 홀수일 때, 3의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{3}$의 한 개이다.
⑤ n이 짝수일 때, -4의 n제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않는다.
답 ④

0039 $\sqrt{(-2)^2}+\sqrt[3]{(-3)^3}+\sqrt[4]{(-4)^4}+\cdots+\sqrt[10]{(-10)^{10}}$

$=2+(-3)+4+(-5)+\cdots+10$

$=(-1)\times 4+10=6$ 답 6

0040 ㄱ. -36의 네제곱근은 방정식 $x^4=-36$의 근이므로 4개이다.
ㄴ. $\sqrt{64}=8$이고 8의 세제곱근 중 실수인 것은 2이다.
ㄷ. -125의 세제곱근은 3개이고 그중 실수인 것은 -5의 1개이므로 허수인 것은 2개이다.
ㄹ. $x^4=16$이라 하면 $x^4-16=0$

$(x^2+4)(x^2-4)=0$, $(x^2+4)(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=\pm 2i$ 또는 $x=\pm 2$

따라서 실수인 것은 ± 2이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ②

0041 $a=\sqrt{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[3]{2}$

$b=\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^3\times 2}=2\sqrt[3]{2}$

$\therefore a+b=\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{2}$ 답 ③

0042 $B=\{2, 3\}$이므로 ··· ❶

(i) $b=2$일 때,

$\sqrt{-3}$, $\sqrt{-2}$는 실수가 아니고, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$은 실수이다. ··· ❷

(ii) $b=3$일 때,

$\sqrt[3]{-3}$, $\sqrt[3]{-2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$은 모두 실수이다. ··· ❸

(i), (ii)에서

$C=\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{-3}, \sqrt[3]{-2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}\}$

이므로 집합 C의 원소의 개수는 6이다. ··· ❹

답 6

채점 기준	비율
❶ 집합 B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	10 %
❷ $b=2$일 때의 집합 C의 원소를 구할 수 있다.	40 %
❸ $b=3$일 때의 집합 C의 원소를 구할 수 있다.	40 %
❹ 집합 C의 원소의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0043 10의 10제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt[10]{10}$이므로

$R(10, 10)=2$

$\sqrt{10}$의 5제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[5]{\sqrt{10}}$이므로

$R(\sqrt{10}, 5)=1$

$-\sqrt{10}$의 5제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[5]{-\sqrt{10}}$이므로

$R(-\sqrt{10}, 5)=1$

-10의 10제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않으므로

$R(-10, 10)=0$

$\therefore R(10, 10)+R(\sqrt{10}, 5)+R(-\sqrt{10}, 5)+R(-10, 10)$

$=2+1+1+0=4$ 답 4

유형 02 거듭제곱근의 계산 본책 11쪽

(i) 근호 안의 수를 소인수분해한다.
(ii) 거듭제곱근의 성질을 이용한다.

➡ $a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때,

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$, $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$,

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$, $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

0044 ① $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{2^4}\times\sqrt[12]{2^3}=\sqrt[12]{2^4\times 2^3}=\sqrt[12]{2^7}$

② $\sqrt[3]{-\sqrt{64}}=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$

③ $\sqrt[3]{\sqrt[5]{8}}=\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^3}}=\sqrt[5]{2}$

④ $\dfrac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{-8}}=\dfrac{\sqrt[3]{(-3)^3}}{\sqrt[3]{(-2)^3}}=\dfrac{-3}{-2}=\dfrac{3}{2}$, $\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^3}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore \dfrac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{-8}}=\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}$

⑤ $\left(\sqrt[3]{7}\times\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^6=\left(\sqrt[6]{7^2}\times\dfrac{1}{\sqrt[6]{7^3}}\right)^6=\left(\dfrac{1}{\sqrt[6]{7}}\right)^6=\dfrac{1}{7}$

답 ⑤

0045 $(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9})$

$=(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2})$

$=(\sqrt[3]{4})^3+(\sqrt[3]{3})^3$

$=4+3=7$

답 7

0046 $\dfrac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[6]{36}}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2}+\sqrt{\sqrt[3]{9}}}=\dfrac{\sqrt[3]{2^3\times2}+\sqrt[6]{6^2}}{\sqrt[3]{2^3}+\sqrt[6]{3^2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}}{2+\sqrt[3]{3}}$

$=\dfrac{\sqrt[3]{2}(2+\sqrt[3]{3})}{2+\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{2}$

답 ①

0047 정육면체의 한 모서리의 길이는 $\sqrt[3]{\sqrt{3}}=\sqrt[6]{3}$

정삼각형 AFC의 한 변의 길이는

$\sqrt[6]{3}\times\sqrt{2}$ ··· ❶

이므로 △AFC의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt[6]{3}\times\sqrt{2})^2=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}}{2}=\dfrac{\sqrt[6]{3^3}\times\sqrt[6]{3^2}}{2}=\dfrac{\sqrt[6]{3^5}}{2}$ ··· ❷

따라서 $m=5$, $n=6$이므로

$m+n=11$ ··· ❸

답 11

채점 기준	비율
❶ 삼각형 AFC의 한 변의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❷ 삼각형 AFC의 넓이를 구할 수 있다.	50 %
❸ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0048 $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{81}}{81}}+\sqrt{\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt[3]{81}}}=\dfrac{\sqrt[12]{3^4}}{\sqrt[4]{3^4}}+\dfrac{\sqrt[4]{3^4}}{\sqrt[6]{3^4}}=\dfrac{\sqrt[3]{3}}{3}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{3^2}}$

$=\dfrac{\sqrt[3]{3^3}+9}{3\sqrt[3]{3^2}}=\dfrac{12}{3\sqrt[3]{9}}=\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}}$

답 ⑤

유형 03 문자를 포함한 거듭제곱근의 계산

본책 11쪽

거듭제곱근의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다. 이때 근호가 여러 개인 경우는 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$임을 이용하여 근호를 하나로 변형한다.

0049 $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}}\times\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}}=\dfrac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[8]{x}}\times\dfrac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[12]{x}}\times\dfrac{\sqrt[8]{x}}{\sqrt[6]{x}}$

$=1$

답 1

0050 $\sqrt[4]{4ab^2}\times\sqrt[12]{a^5b^4}\div\sqrt[6]{8a^3b}=\dfrac{\sqrt[12]{4^3a^3b^6}\times\sqrt[12]{a^5b^4}}{\sqrt[12]{8^2a^6b^2}}$

$=\sqrt[12]{\dfrac{64a^8b^{10}}{64a^6b^2}}$

$=\sqrt[12]{a^2b^8}=\sqrt[6]{ab^4}$

답 ④

0051 $\dfrac{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a}}}}{\sqrt[5]{a\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}}}=\dfrac{\sqrt[3]{a}\times\sqrt[12]{a}\times\sqrt[60]{a}}{\sqrt[5]{a}\times\sqrt[20]{a}\times\sqrt[60]{a}}=\dfrac{\sqrt[60]{a^{20}\times a^5\times a}}{\sqrt[60]{a^{12}\times a^3\times a}}$

$=\sqrt[60]{\dfrac{a^{26}}{a^{16}}}=\sqrt[60]{a^{10}}=\sqrt[6]{a}$

따라서 $m=1$, $n=6$이므로 $m+n=7$

답 7

0052 ㄱ. $R(2,\ 4)=\sqrt[4]{2}=\sqrt{\sqrt{2}}=R(\sqrt{2},\ 2)$

ㄴ. $R(a,\ 3)R(a,\ 3)R(a,\ 3)=\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}=a$, $R(3a,\ 3)=\sqrt[3]{3a}$이므로

$R(a,\ 3)R(a,\ 3)R(a,\ 3)\neq R(3a,\ 3)$

ㄷ. $R(R(a,\ n),\ n)=\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n^2]{a}$, $R(a,\ 2n)=\sqrt[2n]{a}$이므로

$R(R(a,\ n),\ n)\neq R(a,\ 2n)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

유형 04 거듭제곱근의 대소 비교

본책 12쪽

① $0<A<B$이면 $\sqrt[k]{A}<\sqrt[k]{B}$임을 이용하여 대소를 비교한다.
(단, k는 2 이상의 정수)

② $(\sqrt[m]{A})^k<(\sqrt[n]{B})^k$이면 $\sqrt[m]{A}<\sqrt[n]{B}$임을 이용하여 대소를 비교한다.
(단, $A>0$, $B>0$, k, m, n은 2 이상의 정수)

0053 3, 4, 6의 최소공배수가 12이므로

$\sqrt[3]{5}=\sqrt[12]{5^4}=\sqrt[12]{625}$, $\sqrt[4]{10}=\sqrt[12]{10^3}=\sqrt[12]{1000}$,

$\sqrt[6]{20}=\sqrt[12]{20^2}=\sqrt[12]{400}$

$\sqrt[12]{400}<\sqrt[12]{625}<\sqrt[12]{1000}$이므로

$\sqrt[6]{20}<\sqrt[3]{5}<\sqrt[4]{10}$

답 ④

다른 풀이 $(\sqrt[3]{5})^{12}=\sqrt[3]{5^{12}}=5^4=625$, $(\sqrt[4]{10})^{12}=\sqrt[4]{10^{12}}=10^3=1000$, $(\sqrt[6]{20})^{12}=\sqrt[6]{20^{12}}=20^2=400$이므로

$\sqrt[6]{20}<\sqrt[3]{5}<\sqrt[4]{10}$

0054 $\sqrt{3\sqrt[3]{3}}=\sqrt{\sqrt[3]{3^3\times3}}=\sqrt[6]{81}$, $\sqrt{4\sqrt[3]{2}}=\sqrt{\sqrt[3]{4^3\times2}}=\sqrt[6]{128}$,

$\sqrt[3]{5\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\sqrt{5^2\times5}}=\sqrt[6]{125}$에서

$\sqrt[6]{81}<\sqrt[6]{125}<\sqrt[6]{128}$

∴ $a=\sqrt[6]{81}$, $b=\sqrt[6]{128}$

따라서 부등식 $\sqrt[6]{81}<\sqrt[6]{n}<\sqrt[6]{128}$을 만족시키는 자연수 n은 82, 83, 84, ⋯, 127의 46개이다.

답 ⑤

0055 (i) $A-B=(2\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})-(\sqrt[3]{3}+2\sqrt{2})$

$=\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}=\sqrt[6]{9}-\sqrt[6]{8}>0$

∴ $A>B$ ··· ❶

(ii) $C-D=(3\sqrt{2}-2\sqrt[3]{3})-(3\sqrt[3]{3}-2\sqrt{2})$

$=5(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3})=5(\sqrt[6]{8}-\sqrt[6]{9})<0$

∴ $C<D$ ··· ❷

(iii) $B-D=(\sqrt[3]{3}+2\sqrt{2})-(3\sqrt[3]{3}-2\sqrt{2})$

$=4\sqrt{2}-2\sqrt[3]{3}=2(\sqrt{8}-\sqrt[3]{3})$

$=2(\sqrt[6]{512}-\sqrt[6]{9})>0$

∴ $B>D$ ··· ❸

이상에서 $C<D<B<A$이므로 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합은

$A+C=(2\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})+(3\sqrt{2}-2\sqrt[3]{3})=4\sqrt{2}$ ···· ❹

답 $4\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ A와 B의 대소를 비교할 수 있다.	30 %
❷ C와 D의 대소를 비교할 수 있다.	30 %
❸ B와 D의 대소를 비교할 수 있다.	30 %
❹ 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합을 구할 수 있다.	10 %

SSEN 특강

두 수 또는 두 식의 대소 관계의 판정

① 차의 부호를 조사한다. ➡ $A-B>0 \Longleftrightarrow A>B$

② 제곱의 차의 부호를 조사한다.

➡ $A>0$, $B>0$일 때,

$A^2-B^2>0 \Longleftrightarrow A^2>B^2 \Longleftrightarrow A>B$

③ 비를 조사한다.

➡ $A>0$, $B>0$일 때, $\frac{A}{B}>1 \Longleftrightarrow A>B$

유형 05 지수가 음의 정수인 식의 계산 본책 13쪽

$a\neq 0$이고 n이 양의 정수일 때

① $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

② $a^{-n}+a^{-n+1}=a^{-n}(1+a)$

0056 $\frac{3^{-5}+27^{-2}}{4}=\frac{3^{-5}+(3^3)^{-2}}{4}=\frac{3^{-5}+3^{-6}}{4}=\frac{3^{-6}(3+1)}{4}=3^{-6}$

$\frac{9}{4^3+8^3}=\frac{9}{(2^2)^3+(2^3)^3}=\frac{9}{2^6+2^9}=\frac{9}{2^6(1+2^3)}=\frac{1}{2^6}=2^{-6}$

$\therefore$ (주어진 식)$=3^{-6}\times 2^{-6}=(3\times 2)^{-6}=6^{-6}$

답 ②

0057 $N=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

$=2^4+3^3+5^2=68$ ···· ❶

$68=2^2\times 17$이므로 N의 양의 약수의 개수는

$(2+1)\times(1+1)=6$ ···· ❷

답 6

채점 기준	비율
❶ N의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ N의 양의 약수의 개수를 구할 수 있다.	50 %

0058 $4^{-3}\div(4^{-6}\div 2^{-5})^{-4}=\frac{1}{4^3}\div\left(\frac{1}{4^6}\div\frac{1}{2^5}\right)^{-4}$

$=\frac{1}{2^6}\div\left(\frac{1}{2^{12}}\times 2^5\right)^{-4}$

$=\frac{1}{2^6}\div\left(\frac{1}{2^7}\right)^{-4}=\frac{1}{2^6}\div 2^{28}$

$=\frac{1}{2^6}\times\frac{1}{2^{28}}=\frac{1}{2^{34}}=2^{-34}$

$\therefore n=-34$

답 ②

0059 $\frac{1}{2^{-4}+1}+\frac{1}{2^{-2}+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^4+1}$

$=\frac{2^4}{1+2^4}+\frac{2^2}{1+2^2}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^4+1}$

$=\frac{2^4+1}{2^4+1}+\frac{2^2+1}{2^2+1}=1+1=2$

답 2

다른 풀이 (주어진 식)$=\left(\frac{1}{2^{-4}+1}+\frac{1}{2^4+1}\right)+\left(\frac{1}{2^{-2}+1}+\frac{1}{2^2+1}\right)$

$=\frac{2^4+1+2^{-4}+1}{(2^{-4}+1)(2^4+1)}+\frac{2^2+1+2^{-2}+1}{(2^{-2}+1)(2^2+1)}$

$=\frac{2^4+2^{-4}+2}{1+2^{-4}+2^4+1}+\frac{2^2+2^{-2}+2}{1+2^{-2}+2^2+1}$

$=1+1=2$

0060 $\frac{a^{-2}+a^{-4}+a^{-6}+a^{-8}+a^{-10}}{a^2+a^4+a^6+a^8+a^{10}}$

$=\frac{a^{-10}(a^8+a^6+a^4+a^2+1)}{a^2(1+a^2+a^4+a^6+a^8)}$

$=\frac{a^{-10}}{a^2}=a^{-12}$

$=(\sqrt[6]{2-\sqrt{3}})^{-12}=(2-\sqrt{3})^{-2}$

$=\frac{1}{(2-\sqrt{3})^2}=\frac{1}{7-4\sqrt{3}}$

$=\frac{7+4\sqrt{3}}{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})}=7+4\sqrt{3}$

답 ⑤

유형 06 지수가 실수인 식의 계산 본책 13쪽

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

① $a^xa^y=a^{x+y}$ ② $a^x\div a^y=a^{x-y}$

③ $(a^x)^y=a^{xy}$ ④ $(ab)^x=a^xb^x$

0061 $\left\{\left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{5}{4}}\right\}^{\frac{2}{5}}\times\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{4}{3}}=\left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{5}{4}\times\frac{2}{5}}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}}$

$=\left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

$=\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\times(3^{-1})^{-2}$

$=\frac{3}{5}\times 3^2=\frac{27}{5}$

답 $\frac{27}{5}$

0062 $3^{\frac{3}{4}}2^{-\frac{4}{3}}\times(3^{-\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{4}}2^{-\frac{4}{3}}\times 3^{\frac{1}{4}}2^{-\frac{1}{6}}$

$=3^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\times 2^{-\frac{4}{3}+\left(-\frac{1}{6}\right)}$

$=3\times 2^{-\frac{3}{2}}=\frac{3}{2\times 2^{\frac{1}{2}}}$

$=\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

답 ②

0063 $(a^{\sqrt{3}})^{\sqrt{12}+1}\times(a^{\sqrt{5}})^{2\sqrt{5}-\sqrt{15}}\div(a^4)^{2-\sqrt{3}}$

$=a^{\sqrt{3}(\sqrt{12}+1)}\times a^{\sqrt{5}(2\sqrt{5}-\sqrt{15})}\div a^{4(2-\sqrt{3})}$

$=a^{6+\sqrt{3}}\times a^{10-5\sqrt{3}}\div a^{8-4\sqrt{3}}$

$=a^{6+\sqrt{3}+10-5\sqrt{3}-(8-4\sqrt{3})}=a^8$

$\therefore\ k=8$ 답 8

0064 $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{a}{6}}=(2^{-3})^{\frac{a}{6}}=2^{-\frac{a}{2}}$

$=(2^a)^{-\frac{1}{2}}=9^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$ 답 ③

유형 07~08 거듭제곱근을 지수를 사용하여 나타내기 본책 14쪽

$a>0$이고 m, n이 2 이상의 정수일 때

① $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ ② $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=a^{\frac{1}{mn}}$

0065 $\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\times\sqrt[4]{\frac{1}{4}}\times\sqrt[6]{\frac{1}{6}}$

$=2^{-\frac{1}{2}}\times3^{-\frac{1}{3}}\times4^{-\frac{1}{4}}\times6^{-\frac{1}{6}}$

$=2^{-\frac{1}{2}}\times3^{-\frac{1}{3}}\times2^{-\frac{1}{2}}\times2^{-\frac{1}{6}}\times3^{-\frac{1}{6}}$

$=2^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}\times3^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}$

$=2^{-\frac{7}{6}}\times3^{-\frac{1}{2}}$

따라서 $p=-\frac{7}{6}$, $q=-\frac{1}{2}$이므로

$p+q=-\frac{5}{3}$ 답 ⑤

0066 $\sqrt[3]{a}=3$에서 $a^{\frac{1}{3}}=3$ $\therefore\ a=3^3$

$\sqrt[4]{b}=5$에서 $b^{\frac{1}{4}}=5$ $\therefore\ b=5^4$

$\therefore\ \sqrt[6]{ab}=a^{\frac{1}{6}}\times b^{\frac{1}{6}}=(3^3)^{\frac{1}{6}}\times(5^4)^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{2}}\times5^{\frac{2}{3}}$

따라서 $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{2}{3}$이므로 $pq=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0067 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=-\frac{7}{2}$ ··· ❶

따라서 $\sqrt[3]{5^\alpha}\times\sqrt[3]{5^\beta}=5^{\frac{\alpha}{3}}\times5^{\frac{\beta}{3}}=5^{\frac{\alpha+\beta}{3}}=5^{\frac{3}{3}}=5$,

$(25^\alpha)^\beta=25^{\alpha\beta}=(5^2)^{-\frac{7}{2}}=5^{-7}$이므로

$\frac{\sqrt[3]{5^\alpha}\times\sqrt[3]{5^\beta}}{(25^\alpha)^\beta}=\frac{5}{5^{-7}}=5^8$ ··· ❷

답 5^8

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 식의 값을 구할 수 있다.	70 %

0068 조건 (가)에서 $a^2=\sqrt[3]{b}$이므로

$a=b^{\frac{1}{6}}$

조건 (나)에서 $b^3=\sqrt{c}$이므로

$c=b^6$

따라서 $ac=b^{\frac{1}{6}}\times b^6=b^{\frac{37}{6}}$이므로

$k=\frac{37}{6}$ 답 $\frac{37}{6}$

0069 $(\sqrt[3]{5^{10}})^{\frac{1}{3}}$이 자연수 N의 n제곱근이라 하면

$\left\{(\sqrt[3]{5^{10}})^{\frac{1}{3}}\right\}^n=(5^{\frac{10}{3}})^{\frac{n}{3}}=5^{\frac{10n}{9}}=N$

따라서 $5^{\frac{10n}{9}}$이 자연수가 되려면 $10n$이 9의 배수이어야 하므로 n이 9의 배수이어야 한다.

이때 $2\le n\le100$이므로 n은 9, 18, 27, ⋯, 99의 11개이다.

답 ④

0070 $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}}=\sqrt[16]{a}=a^{\frac{1}{16}}$, $\sqrt[4]{\sqrt[4]{\sqrt[4]{a}}}=\sqrt[64]{a}=a^{\frac{1}{64}}$이므로

(주어진 식)$=a^{\frac{1}{16}}\times a^{\frac{1}{64}}=a^{\frac{1}{16}+\frac{1}{64}}=a^{\frac{5}{64}}$

$\therefore\ k=\frac{5}{64}$ 답 ②

0071 $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}=\sqrt{a}\times\sqrt[4]{a}\times\sqrt[8]{a}\times\sqrt[16]{a}$

$=a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{8}}\times a^{\frac{1}{16}}$

$=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}=a^{\frac{15}{16}}$

$\therefore\ k=\frac{15}{16}$ 답 $\frac{15}{16}$

0072 $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}\div\sqrt{a^3\sqrt{a^k}}\times\sqrt[4]{a^3}=(a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{3}}\div(a^{3+\frac{k}{2}})^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{3}{4}}$

$=a^{\frac{4}{9}-\frac{3}{2}-\frac{k}{4}+\frac{3}{4}}$

$=a^{-\frac{11}{36}-\frac{k}{4}}$

즉 $-\frac{11}{36}-\frac{k}{4}=0$이므로 $\frac{k}{4}=-\frac{11}{36}$ $\therefore\ k=-\frac{11}{9}$

답 ②

0073 $\sqrt[3]{a\sqrt{a}\sqrt[4]{a^3}}=\sqrt[3]{a}\times\sqrt[6]{a}\times\sqrt[12]{a^3}=a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}\times a^{\frac{3}{12}}$

$=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}}=a^{\frac{3}{4}}$ ··· ❶

$\sqrt[6]{a\sqrt{a^m}}=\sqrt[6]{a}\times\sqrt[12]{a^m}=a^{\frac{1}{6}}\times a^{\frac{m}{12}}=a^{\frac{1}{6}+\frac{m}{12}}=a^{\frac{2+m}{12}}$ ··· ❷

따라서 $\frac{3}{4}=\frac{2+m}{12}$이므로

$m+2=9$ $\therefore\ m=7$ ··· ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ 좌변을 a^r 꼴로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 우변을 a^r 꼴로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ m의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 09 거듭제곱을 주어진 문자로 나타내기 본책 15쪽

$a>0$, $k>0$이고 x가 0이 아닌 정수일 때

$a^x=k \Longleftrightarrow a=k^{\frac{1}{x}}$

0074 $3^4=a$에서 $3=a^{\frac{1}{4}}$

$8^2=b$에서 $(2^3)^2=b$, $2^6=b$ $\therefore\ 2=b^{\frac{1}{6}}$

$\therefore\ 12^{11}=(2^2\times3)^{11}=2^{22}\times3^{11}$

$=(b^{\frac{1}{6}})^{22}\times(a^{\frac{1}{4}})^{11}=a^{\frac{11}{4}}b^{\frac{11}{3}}$ 답 ④

0075 $a=9^3=(3^2)^3=3^6$이므로 $\quad 3=a^{\frac{1}{6}}$

$\therefore\ 27^7=(3^3)^7=3^{21}$

$=(a^{\frac{1}{6}})^{21}=a^{\frac{7}{2}}$

답 ④

0076 $a=\sqrt{5}$에서 $\quad a^2=5$

$b=\sqrt[3]{3}$에서 $\quad b^3=3$

$\therefore\ 15^{\frac{1}{6}}=(3\times5)^{\frac{1}{6}}=(a^2\times b^3)^{\frac{1}{6}}$

$=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$

답 ③

유형 10 a^r이 자연수가 되도록 하는 미지수 구하기 본책 15쪽

자연수 a가 소수일 때, $a^{\frac{n}{m}}$이 자연수이려면 n이 m의 배수이어야 한다.
(단, m, n은 자연수이다.)

0077 $\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{n}}=64^{\frac{1}{n}}=(2^6)^{\frac{1}{n}}=2^{\frac{6}{n}}$이 자연수가 되도록 하는 정수 n은 6의 양의 약수이다.
따라서 모든 정수 n의 값의 합은

$1+2+3+6=12$

답 12

0078 $a^2=3$, $b^5=7$, $c^6=11$에서

$a=3^{\frac{1}{2}}$, $b=7^{\frac{1}{5}}$, $c=11^{\frac{1}{6}}$

$\therefore\ (abc)^n=(3^{\frac{1}{2}}\times7^{\frac{1}{5}}\times11^{\frac{1}{6}})^n=3^{\frac{n}{2}}\times7^{\frac{n}{5}}\times11^{\frac{n}{6}}$ ⋯ ❶

따라서 $(abc)^n$이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 값은 2, 5, 6의 공배수이므로 자연수 n의 최솟값은 30이다. ⋯ ❷

답 30

채점 기준	비율
❶ $(abc)^n$을 지수를 사용하여 나타낼 수 있다.	50 %
❷ n의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

0079 $\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$이 자연수이려면

$n=2k^2$ (k는 자연수)

꼴이어야 하고, $\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$이 자연수이려면

$n=3l^3$ (l은 자연수)

꼴이어야 한다.
즉 $n=2k^2=3l^3$에서 k는 3의 배수, l은 2의 배수이어야 하므로

$k=3p$, $l=2q$ (p, q는 자연수)

로 놓을 수 있다.
$n=2k^2$에서

$n=2\times(3p)^2=2\times3^2\times p^2$

$n=3l^3$에서

$n=3\times(2q)^3=2^3\times3\times q^3$

따라서 $p=2\times3$, $q=3$일 때 n의 값이 최소이므로 구하는 n의 최솟값은

$2^3\times3^4=648$

답 648

유형 11 곱셈 공식을 이용한 식의 계산 본책 16쪽

$a>0$, $b>0$이고 r, s가 유리수일 때
① $(a^r+b^s)(a^r-b^s)=a^{2r}-b^{2s}$
② $(a^r\pm b^s)^2=a^{2r}\pm2a^rb^s+b^{2s}$ (복호동순)
③ $(a^r\pm b^s)^3=a^{3r}\pm3a^{2r}b^s+3a^rb^{2s}\pm b^{3s}$ (복호동순)

0080 $(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})$

$=(a^{\frac{1}{2}})^2+2a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}+(a^{-\frac{1}{2}})^2-\{(a^{\frac{1}{2}})^2-(a^{-\frac{1}{2}})^2\}$

$=a+2+a^{-1}-(a-a^{-1})$

$=2a^{-1}+2$

답 ④

0081 $3^{\frac{1}{3}}=A$, $3^{-\frac{2}{3}}=B$로 놓으면

(주어진 식)

$=(A+B)^3+(A-B)^3$

$=(A^3+3A^2B+3AB^2+B^3)+(A^3-3A^2B+3AB^2-B^3)$

$=2(A^3+3AB^2)$

$=2\{(3^{\frac{1}{3}})^3+3\cdot3^{\frac{1}{3}}\cdot(3^{-\frac{2}{3}})^2\}$

$=2(3+3^{1+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}})$

$=2(3+1)=8$

답 ④

0082 $x=3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}$이므로

$x^3=(3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}})^3$

$=3+3^{-1}+3(3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}})$

$=\frac{10}{3}+3x$

$\therefore\ x^3-3x-2=\frac{10}{3}-2=\frac{4}{3}$

답 $\frac{4}{3}$

0083 (주어진 식)

$=(x^{\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(x+x^{-1})$

$=(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(x+x^{-1})$

$=(x-x^{-1})(x+x^{-1})$

$=x^2-x^{-2}=x^2-\frac{1}{x^2}$

$=2^2-\frac{1}{2^2}=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$

답 $\frac{15}{4}$

0084 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로

$22=18+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca=2$ ⋯ ❶

$\therefore\ (2^a)^{b+c}\times(2^b)^{c+a}\times(2^c)^{a+b}=2^{ab+ac}\times2^{bc+ba}\times2^{ca+cb}$

$=2^{2(ab+bc+ca)}$

$=2^4=16$ ⋯ ❷

답 16

채점 기준	비율
❶ $ab+bc+ca$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	60 %

유형 12 a^x+a^{-x} 꼴의 식의 값 구하기 본책 16쪽

양수 x에 대하여

① $(x^{\frac{1}{2}}\pm x^{-\frac{1}{2}})^2=x+x^{-1}\pm 2$ (복호동순)

② $(x^{\frac{1}{3}}\pm x^{-\frac{1}{3}})^3=x\pm x^{-1}\pm 3(x^{\frac{1}{3}}\pm x^{-\frac{1}{3}})$ (복호동순)

0085 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=4$의 양변을 제곱하면

$x+x^{-1}+2=16 \quad \therefore x+x^{-1}=14$

위의 식의 양변을 제곱하면

$x^2+x^{-2}+2=196 \quad \therefore x^2+x^{-2}=194$ 답 194

0086 $3^x+3^{1-x}=10$의 양변을 제곱하면

$9^x+9^{1-x}+2\cdot 3=100$

$\therefore 9^x+9^{1-x}=94$ 답 ④

다른 풀이 $3^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $3^{1-x}=\dfrac{3}{t}$이므로

$$\begin{aligned}9^x+9^{1-x}&=(3^x)^2+(3^{1-x})^2\\&=t^2+\frac{9}{t^2}=\left(t+\frac{3}{t}\right)^2-6\\&=10^2-6=94\end{aligned}$$

0087 $$\begin{aligned}a\sqrt{a}+\frac{1}{a\sqrt{a}}&=(\sqrt{a})^3+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^3\\&=\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^3-3\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\\&=3^3-3\cdot 3=18\end{aligned}$$ 답 18

다른 풀이 $\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}=3$의 양변을 제곱하면

$a+\dfrac{1}{a}+2=9 \quad \therefore a+\dfrac{1}{a}=7$

이때 $\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(a+\dfrac{1}{a}\right)=a\sqrt{a}+\dfrac{1}{a\sqrt{a}}+\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}$에서

$3\cdot 7=a\sqrt{a}+\dfrac{1}{a\sqrt{a}}+3$

$\therefore a\sqrt{a}+\dfrac{1}{a\sqrt{a}}=18$

0088 $(x+x^{-1})^2=x^2+x^{-2}+2=34+2=36$에서

$x+x^{-1}=6\ (\because x+x^{-1}>0)$ ··· ❶

또 $(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+x^{-1}+2=6+2=8$에서

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}\ (\because x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}>0)$ ··· ❷

$\therefore \dfrac{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}}{x+x^{-1}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{6}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ ··· ❸

답 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

채점 기준	비율
❶ $x+x^{-1}$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

0089 $x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}=2+\sqrt{3}$의 양변을 세제곱하면

$x+x^{-1}+3(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})=26+15\sqrt{3}$

$\therefore x+x^{-1}=26+15\sqrt{3}-3(2+\sqrt{3})$

$=20+12\sqrt{3}$

따라서 $a=20$, $b=12$이므로

$a-b=8$ 답 ④

0090 $$\begin{aligned}&\frac{a^3+a^2}{a+1}-\frac{a^{-3}+a^{-2}}{a^{-1}+1}\\&=\frac{a^2(a+1)}{a+1}-\frac{a^{-2}(a^{-1}+1)}{a^{-1}+1}\\&=a^2-a^{-2}=(a+a^{-1})(a-a^{-1})\quad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

$\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}=2$의 양변을 제곱하면

$a+\dfrac{1}{a}-2=4 \quad \therefore a+a^{-1}=6$ ······ ㉡

한편 $(a-a^{-1})^2=(a+a^{-1})^2-4$이므로

$(a-a^{-1})^2=6^2-4=32$

그런데 $\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}>0$에서 $a>1$이므로 $a-a^{-1}>0$

$\therefore a-a^{-1}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ ······ ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면 구하는 식의 값은

$6\cdot 4\sqrt{2}=24\sqrt{2}$ 답 ⑤

유형 13 $\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ 꼴의 식의 값 구하기 본책 17쪽

주어진 식의 값을 이용할 수 있도록 구하는 식의 분모와 분자에 $a^x\,(a>0)$을 곱한다.

0091 구하는 식의 분모, 분자에 a^x을 곱하면

$$\begin{aligned}\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}&=\frac{a^x(a^x-a^{-x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}\\&=\frac{3-1}{3+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$ 답 $\dfrac{1}{2}$

0092 $5^{\frac{1}{x}}=9$에서 $9^x=5 \quad \therefore 3^{2x}=5$

구하는 식의 분모, 분자에 3^x을 곱하면

$$\begin{aligned}\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}&=\frac{3^x(3^x+3^{-x})}{3^x(3^x-3^{-x})}=\frac{3^{2x}+1}{3^{2x}-1}\\&=\frac{5+1}{5-1}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$ 답 ③

0093 $a^{4x}=(a^{2x})^2=(3+2\sqrt{2})^2=17+12\sqrt{2}$

구하는 식의 분모, 분자에 a^x을 곱하면

$$\begin{aligned}\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}&=\frac{a^x(a^{3x}+a^{-3x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\frac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}+1}\\&=\frac{a^{4x}+\frac{1}{a^{2x}}}{a^{2x}+1}=\frac{17+12\sqrt{2}+\frac{1}{3+2\sqrt{2}}}{(3+2\sqrt{2})+1}\end{aligned}$$

$=\dfrac{17+12\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{10(2+\sqrt{2})}{2(2+\sqrt{2})}=5$ 답 ④

0094 $\dfrac{a^m-a^{-m}}{a^m+a^{-m}}=\dfrac{3}{5}$의 좌변의 분모, 분자에 a^m을 곱하면

$\dfrac{a^m(a^m-a^{-m})}{a^m(a^m+a^{-m})}=\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{a^{2m}-1}{a^{2m}+1}=\dfrac{3}{5}$ ⋯ ❶

$5a^{2m}-5=3a^{2m}+3$, $2a^{2m}=8$ $\therefore a^{2m}=4$ ⋯ ❷

$\therefore a^{6m}=(a^{2m})^3=4^3=64$ ⋯ ❸

답 64

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변의 분모, 분자에 a^m을 곱하여 정리할 수 있다.	40 %
❷ a^{2m}의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a^{6m}의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 14~15 $a^x=k$ 또는 $a^x=b^y$의 조건이 주어진 경우 식의 값 구하기

본책 18쪽

$a^x=k$, $b^y=k$ $(a>0,\ b>0,\ xy\neq0)$일 때

➡ $a=k^{\frac{1}{x}}$, $b=k^{\frac{1}{y}}$

➡ $ab=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$, $\dfrac{a}{b}=k^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$

0095 $5^m=8$에서 $5=8^{\frac{1}{m}}=(2^3)^{\frac{1}{m}}=2^{\frac{3}{m}}$ ⋯⋯ ㉠

$40^n=32$에서 $40=32^{\frac{1}{n}}=(2^5)^{\frac{1}{n}}=2^{\frac{5}{n}}$ ⋯⋯ ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\dfrac{5}{40}=2^{\frac{3}{m}}\div2^{\frac{5}{n}}$

$\therefore 2^{\frac{3}{m}-\frac{5}{n}}=\dfrac{1}{8}=2^{-3}$

$\therefore \dfrac{3}{m}-\dfrac{5}{n}=-3$ 답 -3

0096 $5^x=10$에서 $5=10^{\frac{1}{x}}$ ⋯⋯ ㉠

$2^y=10$에서 $2=10^{\frac{1}{y}}$ ⋯⋯ ㉡

㉠×㉡을 하면 $10=10^{\frac{1}{x}}\times10^{\frac{1}{y}}=10^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$ 답 ①

0097 $\left(\dfrac{1}{10}\right)^x=9$에서 $\dfrac{1}{10}=9^{\frac{1}{x}}=(3^2)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{2}{x}}$ ⋯⋯ ㉠

$20^y=27$에서 $20=27^{\frac{1}{y}}=(3^3)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{3}{y}}$ ⋯⋯ ㉡

㉠×㉡을 하면 $\dfrac{1}{10}\times20=3^{\frac{2}{x}}\times3^{\frac{3}{y}}$

$\therefore 3^{\frac{2}{x}+\frac{3}{y}}=2$ 답 2

0098 $a^x=3$에서 $a=3^{\frac{1}{x}}$ ⋯⋯ ㉠

$(ab)^y=3^2$에서 $ab=3^{\frac{2}{y}}$ ⋯⋯ ㉡

$(abc)^z=3^3$에서 $abc=3^{\frac{3}{z}}$ ⋯⋯ ㉢

㉠×㉡÷㉢을 하면

$a\times ab\div abc=3^{\frac{1}{x}}\times3^{\frac{2}{y}}\div3^{\frac{3}{z}}$

$\therefore 3^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}}=\dfrac{a\times ab}{abc}=\dfrac{a}{c}$ 답 ④

0099 $4^x=2^{2x}=k$에서 $2=k^{\frac{1}{2x}}$ ⋯⋯ ㉠

$7^y=k$에서 $7=k^{\frac{1}{y}}$ ⋯⋯ ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\dfrac{2}{7}=k^{\frac{1}{2x}}\div k^{\frac{1}{y}}$

$\therefore k^{\frac{1}{2x}-\frac{1}{y}}=\dfrac{2}{7}$

즉 $k^{-1}=\dfrac{2}{7}$이므로 $k=\dfrac{7}{2}$ 답 $\dfrac{7}{2}$

0100 $a^x=64$에서 $a=64^{\frac{1}{x}}$ ⋯⋯ ㉠

$b^y=64$에서 $b=64^{\frac{1}{y}}$ ⋯⋯ ㉡

$c^z=64$에서 $c=64^{\frac{1}{z}}$ ⋯⋯ ㉢

㉠×㉡×㉢을 하면

$abc=64^{\frac{1}{x}}\times64^{\frac{1}{y}}\times64^{\frac{1}{z}}=64^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ ⋯ ❶

$abc=8$이므로 $64^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=8$

$8^{2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}=8$, $2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=1$

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$ ⋯ ❷

$\dfrac{yz+zx+xy}{xyz}=\dfrac{1}{2}$ $\therefore \dfrac{xyz}{xy+yz+zx}=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ abc를 64^r 꼴로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\dfrac{xyz}{xy+yz+zx}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0101 $3^x=4^y=12^z=k$ $(k>0)$로 놓으면 $xyz\neq0$에서 $k\neq1$

$3^x=k$에서 $3=k^{\frac{1}{x}}$ ⋯⋯ ㉠

$4^y=k$에서 $4=k^{\frac{1}{y}}$ ⋯⋯ ㉡

$12^z=k$에서 $12=k^{\frac{1}{z}}$ ⋯⋯ ㉢

㉠×㉡÷㉢을 하면

$3\times4\div12=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}\div k^{\frac{1}{z}}$ $\therefore k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}=1$

그런데 $k\neq1$이므로 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=0$ 답 0

0102 $x^y=y^x$에서 $x=y^{\frac{x}{y}}=y^{\frac{2}{3}}$

이때 $\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3}$에서 $x=\dfrac{2}{3}y$이므로 $\dfrac{2}{3}y=y^{\frac{2}{3}}$

$\dfrac{y}{y^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{3}{2}$, $y^{\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore y=\left(\dfrac{3}{2}\right)^3=\dfrac{27}{8}$ 답 ③

0103 $a^x=b^y=3^z=k(k>0)$로 놓으면 $xyz\neq0$에서 $k\neq1$

$a^x=k$에서 $\quad a=k^{\frac{1}{x}}$

$b^y=k$에서 $\quad b=k^{\frac{1}{y}}$

$3^z=k$에서 $\quad 3=k^{\frac{1}{z}}$ ··· ❶

이때 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{z}$이므로

$ab=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=k^{\frac{4}{z}}=(k^{\frac{1}{z}})^4$ ··· ❷

$=3^4=81$ ··· ❸

답 81

채점 기준	비율
❶ a, b, 3을 k^r 꼴로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ ab를 k에 대한 식으로 변형할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0104 $2^x=3^{-y}=k\ (k>0)$로 놓으면 $xyz\neq0$에서 $k\neq1$

$2^x=k$에서 $\quad 2=k^{\frac{1}{x}}$ ······ ㉠

$3^{-y}=k$에서 $\quad 3=k^{-\frac{1}{y}}$ ······ ㉡

㉠×㉡을 하면 $\quad 6=k^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$ ······ ㉢

한편 $3^{-y}=k$에서 $9^y=(3^{-y})^{-2}=k^{-2}$이므로

$6^z=k^{-2} \qquad \therefore 6=k^{-\frac{2}{z}}$ ······ ㉣

㉢, ㉣에서 $k^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}=k^{-\frac{2}{z}}$이고 $k\neq1$이므로

$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=-\dfrac{2}{z}$

답 ①

유형 16 지수의 실생활에의 활용

본책 19쪽

① 식이 주어진 경우 ➡ 주어진 식에 알맞은 값을 대입한다.
② 식이 주어지지 않은 경우 ➡ 주어진 상황을 식으로 나타낸다.

0105 3년 후 방사성 물질의 양이 $\dfrac{1}{2}m_0$이므로

$\dfrac{1}{2}m_0=m_0\cdot a^{-3} \qquad \therefore a^{-3}=\dfrac{1}{2}$

따라서 12년 후의 방사성 물질의 양은

$m_{12}=m_0\cdot a^{-12}=m_0\cdot(a^{-3})^4=m_0\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{16}m_0$

$\therefore k=\dfrac{1}{16}$

답 $\dfrac{1}{16}$

0106 어떤 음보다 반음 1개만큼 높은 음의 진동수가 어떤 음의 진동수의 x배라 하면

$x^{12}=2 \qquad \therefore x=\sqrt[12]{2}$

따라서 '미'음의 진동수는 '도'음의 진동수의

$(\sqrt[12]{2})^4=\sqrt[3]{2}$(배)

답 $\sqrt[3]{2}$

0107 $G=\dfrac{H-65}{14}\times1.05^T$에서

$H=80$, $T=30$일 때, $\quad G_1=\dfrac{80-65}{14}\times1.05^{30}$

$H=75$, $T=15$일 때, $\quad G_2=\dfrac{75-65}{14}\times1.05^{15}$

$\therefore \dfrac{G_1}{G_2}=\dfrac{\frac{15}{14}\times1.05^{30}}{\frac{10}{14}\times1.05^{15}}=\dfrac{3}{2}\times1.05^{15}=\dfrac{3}{2}\times2=3$

답 3

0108 원본의 글자 크기를 a라 하면 6번째 복사본의 글자 크기가 원본의 2배이므로

$a\left(\dfrac{r}{100}\right)^6=2a \qquad \therefore \left(\dfrac{r}{100}\right)^6=2$

8번째 복사본의 글자 크기는 $a\left(\dfrac{r}{100}\right)^8$이므로

$a\left(\dfrac{r}{100}\right)^8\div a\left(\dfrac{r}{100}\right)^6=\left(\dfrac{r}{100}\right)^2=\left\{\left(\dfrac{r}{100}\right)^6\right\}^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}$

따라서 $p=3$, $q=1$이므로

$p+q=4$

답 4

0109 전략 △AQB에서 $\overline{PQ}$가 ∠AQB의 이등분선임을 이용한다.

풀이 한 원에서 길이가 같은 현에 대한 원주각의 크기는 같으므로

∠PQA=∠PQB

따라서 $\overline{PQ}$는 ∠AQB의 이등분선이므로 △AQB에서

$\overline{AQ}:\overline{BQ}=\overline{AR}:\overline{BR}$

$=4\sqrt[3]{3}:3\sqrt[3]{3}$

$=4:3$

△AQB는 ∠AQB=90°인 직각삼각형이므로 $\overline{AQ}=4k$, $\overline{BQ}=3k\ (k>0)$로 놓으면

$\overline{AB}=\sqrt{(4k)^2+(3k)^2}=5k$

또 $\overline{AB}=\overline{AR}+\overline{BR}=4\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}=7\sqrt[3]{3}$이므로

$5k=7\sqrt[3]{3} \qquad \therefore k=\dfrac{7}{5}\sqrt[3]{3}$

$\therefore \dfrac{5}{7}\overline{BQ}=\dfrac{5}{7}\cdot3k=\dfrac{5}{7}\cdot3\cdot\dfrac{7}{5}\sqrt[3]{3}$

$=3\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{81}$

답 ①

0110 전략 $n=3, 4, 5, \cdots, 10$일 때, $a^n<121<(a+1)^n$을 만족시키는 자연수 a의 값을 각각 구한다.

풀이 $11^2=121$이므로 $\quad [\sqrt{121}]=[11]=11$

$64=4^3<121<5^3=125$이므로

$4<\sqrt[3]{121}<5 \qquad \therefore [\sqrt[3]{121}]=4$

$81=3^4<121<4^4=256$이므로

$3<\sqrt[4]{121}<4 \qquad \therefore [\sqrt[4]{121}]=3$

$32=2^5<121<3^5=243$이므로

$2<\sqrt[5]{121}<3 \qquad \therefore [\sqrt[5]{121}]=2$

$64=2^6<121<3^6=729$이므로

$2<\sqrt[6]{121}<3 \qquad \therefore [\sqrt[6]{121}]=2$

$2^7=128$이므로 $\quad [\sqrt[7]{121}]=[\sqrt[8]{121}]=[\sqrt[9]{121}]=[\sqrt[10]{121}]=1$

$\therefore [\sqrt{121}]+[\sqrt[3]{121}]+[\sqrt[4]{121}]+\cdots+[\sqrt[10]{121}]$

$=11+4+3+2+2+4\cdot1=26$

답 26

0111 전략 $x+y$, xy의 값을 먼저 구한다.

풀이 $x=3+\sqrt{6}$, $y=3-\sqrt{6}$에서

$x+y=6$, $xy=9-6=3$

$\therefore \dfrac{\{(a^5)^x\}^y}{\sqrt{a^x a^y}}=\dfrac{a^{5xy}}{\sqrt{a^{x+y}}}=\dfrac{a^{5\cdot3}}{a^{6\cdot\frac{1}{2}}}=\dfrac{a^{15}}{a^3}=a^{12}$

따라서 $a^{12}=10$이므로 $a=10^{\frac{1}{12}}$ $(\because a>0)$

답 ①

0112 전략 금덩이의 부피의 합을 지수를 사용하여 나타낸다.

풀이 두 금덩이의 부피의 합은

$\sqrt[3]{2^{14}}+\sqrt[3]{2^{17}}=2^{\frac{14}{3}}+2^{\frac{17}{3}}=2^{\frac{14}{3}}+2^{\frac{14}{3}+1}$

$=2^{\frac{14}{3}}(1+2)=3\cdot2^{\frac{14}{3}}$

한 모서리의 길이가 $\sqrt[9]{2^8}$인 정육면체 1개의 부피는

$(\sqrt[9]{2^8})^3=(2^{\frac{8}{9}})^3=2^{\frac{8}{3}}$

이므로 $3\cdot2^{\frac{14}{3}}\ge2^{\frac{8}{3}}n$

$\therefore n\le\dfrac{3\cdot2^{\frac{14}{3}}}{2^{\frac{8}{3}}}=3\cdot2^{\frac{14}{3}-\frac{8}{3}}=3\cdot2^2=12$

따라서 정육면체 모양의 금덩이를 최대 12개 만들 수 있다.

답 12

0113 전략 거듭제곱근을 지수를 사용하여 나타내어 m, n의 조건을 찾는다.

풀이 $\sqrt[7]{\dfrac{5^{n+1}}{3^{m-1}}}=\dfrac{5^{\frac{n+1}{7}}}{3^{\frac{m-1}{7}}}$이 유리수이려면 $m-1$, $n+1$이 모두 7의 배수이어야 하고, $\sqrt[9]{\dfrac{9^{n-2}}{7^m}}=\dfrac{3^{\frac{2n-4}{9}}}{7^{\frac{m}{9}}}$이 유리수이려면 m, $2n-4$가 모두 9의 배수이어야 한다.

m은 9의 배수, $m-1$은 7의 배수이므로 m의 최솟값은 36이다.

$n+1=7l$ (l은 자연수)이라 하면

$2n-4=2(7l-1)-4=14l-6$

$l=3$일 때 $14l-6=36$, 즉 9의 배수이므로 n의 최솟값은

$7\cdot3-1=20$

따라서 $m+n$의 최솟값은

$36+20=56$

답 ③

0114 전략 $m=1, 2, 3, 4$일 때, $\sqrt[4]{n^m}$이 자연수가 되도록 하는 n의 값을 구한다.

풀이 (i) $m=1$일 때, $\sqrt[4]{n}=n^{\frac{1}{4}}$이 자연수가 되려면 n은 어떤 자연수의 네제곱이어야 하므로

$n=1$ 또는 $n=16$

(ii) $m=2$일 때, $\sqrt[4]{n^2}=n^{\frac{1}{2}}$이 자연수가 되려면 n은 어떤 자연수의 제곱이어야 하므로

$n=1, 4, 9, 16$

(iii) $m=3$일 때, $\sqrt[4]{n^3}=n^{\frac{3}{4}}$이 자연수가 되려면 n은 어떤 자연수의 네제곱이어야 하므로

$n=1$ 또는 $n=16$

(iv) $m=4$일 때, $\sqrt[4]{n^4}=n$이므로

$n=1, 2, 3, \cdots, 16$

이상에서 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$2+4+2+16=24$

답 ③

0115 전략 직선의 기울기를 이용하여 $\overline{OB}$의 길이를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\overline{AB}=2^{2a+1}$이므로 $\overline{OB}=8^a-2^a$

직각삼각형 AOB에서

$\overline{AO}=\sqrt{(8^a-2^a)^2+(2^{2a+1})^2}=\sqrt{8^{2a}+2^{2a}+2^{4a+1}}$

$=\sqrt{(8^a+2^a)^2}=8^a+2^a$

$\triangle AOB \backsim \triangle ABH$이므로

$\overline{AO}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{AH}$ $\quad\therefore \overline{AH}=\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{AO}}=\dfrac{(2^{2a+1})^2}{8^a+2^a}$

$\therefore \dfrac{\overline{OH}}{\overline{AH}}=\dfrac{\overline{AO}-\overline{AH}}{\overline{AH}}=\dfrac{(8^a+2^a)-\dfrac{(2^{2a+1})^2}{8^a+2^a}}{\dfrac{(2^{2a+1})^2}{8^a+2^a}}$

$=\dfrac{(8^a+2^a)^2-(2^{2a+1})^2}{(2^{2a+1})^2}$

$=\dfrac{(2^{3a}+2^a)^2-(2^{2a+1})^2}{(2^{2a+1})^2}$

$=\dfrac{2^{6a}+2^{4a+1}+2^{2a}-2^{4a+2}}{2^{4a+2}}$

$=\dfrac{2^{6a}+2^{2a}-2^{4a+1}}{2^{4a+2}}=\dfrac{4^a+4^{-a}-2}{4}$

답 ③

0116 전략 먼저 $x=\sqrt[4]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$의 양변을 제곱한다.

풀이 $x=\sqrt[4]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$, 즉 $x=2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}}$의 양변을 제곱하면

$x^2=2^{\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}+2$

$\therefore x^2-4=2^{\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}-2=(2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}})^2$

$\therefore 2(x+\sqrt{x^2-4})=2\left\{2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}}+\sqrt{(2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}})^2}\right\}$

$=2(2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}})$

$=2\cdot2\cdot2^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{9}{4}}$

답 ⑤

0117 전략 곱셈 공식과 인수분해 공식을 이용한다.

풀이 $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}+\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}$

$=\dfrac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-1+a^{-2x})}{a^x+a^{-x}}+\dfrac{(a^x-a^{-x})(a^{2x}+1+a^{-2x})}{a^x-a^{-x}}$

$=(a^{2x}-1+a^{-2x})+(a^{2x}+1+a^{-2x})$

$=2(a^{2x}+a^{-2x})$

즉 $2(a^{2x}+a^{-2x})=12$이므로 $a^{2x}+a^{-2x}=6$ ⋯⋯ ㉠

$(a^x+a^{-x})^2-2=6$, $(a^x+a^{-x})^2=8$

$a^x+a^{-x}>0$이므로 $a^x+a^{-x}=2\sqrt{2}$

또 ㉠에서 $(a^x-a^{-x})^2+2=6$, $(a^x-a^{-x})^2=4$

$a^x>1$, $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}<1$에서 $a^x-a^{-x}>0$ 이므로

$a^x-a^{-x}=2$

$\therefore a^{2x}-a^{-2x}=(a^{x}+a^{-x})(a^{x}-a^{-x})$
$=2\sqrt{2}\cdot 2$
$=4\sqrt{2}$

답 $4\sqrt{2}$

0118 전략 $2^{a}=3^{b}=6^{c}=k\,(k>0)$로 놓고 k와 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $2^{a}=3^{b}=6^{c}=k\,(k>0)$로 놓으면 $abc\neq 0$에서
$k\neq 1$

$2^{a}=k$에서 $\quad 2=k^{\frac{1}{a}}$ ⋯⋯ ㉠

$3^{b}=k$에서 $\quad 3=k^{\frac{1}{b}}$ ⋯⋯ ㉡

$6^{c}=k$에서 $\quad 6=k^{\frac{1}{c}}$ ⋯⋯ ㉢

㉠×㉡÷㉢을 하면

$2\times 3\div 6=k^{\frac{1}{a}}\times k^{\frac{1}{b}}\div k^{\frac{1}{c}}$

$\therefore k^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}=1$

그런데 $k\neq 1$이므로 $\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0$ ⋯⋯ ㉣

이때 $(a-4)(b-4)=16$에서

$ab-4a-4b+16=16,\quad ab-4a-4b=0$

$ab\neq 0$이므로 양변을 ab로 나누면

$1-\frac{4}{b}-\frac{4}{a}=0,\quad \frac{4}{a}+\frac{4}{b}=1$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{4}$

이것을 ㉣에 대입하면

$\frac{1}{4}-\frac{1}{c}=0 \quad \therefore c=4$

답 4

0119 전략 주어진 식에 A, B지역의 값을 각각 대입한다.

풀이 A지역에서 지면으로부터 12 m인 높이에서 풍속이 2 m/s이고, 36 m인 높이에서 풍속이 8 m/s이므로

$8=2\times\left(\frac{36}{12}\right)^{\frac{2}{2-k}}$

$\therefore 4=3^{\frac{2}{2-k}}$ ⋯⋯ ㉠

B지역에서 지면으로부터 10 m인 높이에서 풍속이 a m/s이고, 90 m인 높이에서 풍속이 b m/s이므로

$b=a\times\left(\frac{90}{10}\right)^{\frac{2}{2-k}}$

$\therefore \frac{b}{a}=9^{\frac{2}{2-k}}=(3^{\frac{2}{2-k}})^{2}=4^{2}=16\ (\because ㉠)$

답 ③

0120 전략 n이 홀수이면 $f_n(x)=1$이고, n이 짝수이고 x가 음수이면 $f_n(x)=0$임을 이용한다.

풀이 $f_3(\sqrt[5]{(-1)^{5}})=f_3(-1)=1$ ⋯ ❶

$f_4\left(\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}\right)=f_4\left(\sqrt[3]{\left(-\frac{3}{2}\right)^{3}}\right)=f_4\left(-\frac{3}{2}\right)=0$ ⋯ ❷

$f_5\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{4}\right)=f_5\left(\frac{1}{81}\right)=1$ ⋯ ❸

$\therefore$ (주어진 식)$=1+0+1=2$ ⋯ ❹

답 2

채점 기준	비율
❶ $f_3(\sqrt[5]{(-1)^{5}})$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f_4\left(\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}\right)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f_5\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{4}\right)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	10 %

0121 전략 삼차방정식의 근과 계수의 관계와 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

풀이 삼차방정식 $x^{3}+2x+22=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\ \alpha\beta\gamma=-22$ ⋯ ❶

$\alpha^{3}+\beta^{3}+\gamma^{3}=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^{2}+\beta^{2}+\gamma^{2}-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$에서 $\alpha+\beta+\gamma=0$이므로

$\alpha^{3}+\beta^{3}+\gamma^{3}=3\alpha\beta\gamma=3\cdot(-22)$
$=-66$ ⋯ ❷

$\therefore \sqrt[3]{\alpha^{3}+\beta^{3}+\gamma^{3}+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}=\sqrt[3]{-66+2}$
$=\sqrt[3]{-64}=\sqrt[3]{(-4)^{3}}$
$=-4$ ⋯ ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.	30 %
❷ $\alpha^{3}+\beta^{3}+\gamma^{3}$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

0122 전략 주어진 식의 양의 n제곱근을 지수를 사용하여 나타낸다.

풀이 $36^{7}\times(8\times 3^{k})^{-2}\div 48^{-4}$
$=(2^{2}\times 3^{2})^{7}\times(2^{3}\times 3^{k})^{-2}\div(2^{4}\times 3)^{-4}$
$=2^{14-6+16}\times 3^{14-2k+4}$
$=2^{24}\times 3^{18-2k}$

$2^{24}\times 3^{18-2k}$의 양의 n제곱근은

$\sqrt[n]{2^{24}\times 3^{18-2k}}=2^{\frac{24}{n}}\times 3^{\frac{18-2k}{n}}$ ⋯ ❶

이 값이 자연수가 되려면 $\frac{24}{n}$가 자연수이고 $\frac{18-2k}{n}$가 음이 아닌 정수이어야 하므로 $18-2k\geq 0$이고 n은 24와 $18-2k$의 공약수이어야 한다.

이때 $18-2k$는 0 또는 16 이하의 짝수인 자연수이고, 24와 $18-2k$의 공약수인 $n\,(n\geq 2)$의 개수가 3이어야 하므로 24와 $18-2k$의 최대공약수의 약수가 4개이어야 한다.

24의 약수 중에서 약수가 4개인 수는 6과 8이므로 24와 $18-2k$의 최대공약수가 6 또는 8이어야 한다.

즉 $18-2k=6$ 또는 $18-2k=8$ 또는 $18-2k=16$이므로

$k=1$ 또는 $k=5$ 또는 $k=6$ ⋯ ❷

따라서 모든 k의 값의 합은

$1+5+6=12$ ⋯ ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 양의 n제곱근을 지수의 꼴로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 조건을 만족시키는 k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ k의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

참고 n은 24와 $18-2k$의 공약수이므로

$k=1$일 때, 24와 16의 최대공약수는 8이므로

$n=2,\ 4,\ 8$

$k=2$일 때, 24와 14의 최대공약수는 2이므로 $n=2$

$k=3$일 때, 24와 12의 최대공약수는 12이므로

$n=2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12$

$k=4$일 때, 24와 10의 최대공약수는 2이므로 $n=2$

$k=5$일 때, 24와 8의 최대공약수는 8이므로

$n=2,\ 4,\ 8$

$k=6$일 때, 24와 6의 최대공약수는 6이므로

$n=2,\ 3,\ 6$

$k=7$일 때, 24와 4의 최대공약수는 4이므로 $n=2,\ 4$

$k=8$일 때, 24와 2의 최대공약수는 2이므로 $n=2$

0123 전략 a, b를 3^r 꼴로 나타내고 지수법칙을 이용하여 $\left(\frac{a}{b}\right)^n$을 구한다.

풀이 $a=\sqrt{\sqrt[4]{3}}=\sqrt[8]{3}=3^{\frac{1}{8}}$, $b=\sqrt[7]{\sqrt{3}}=\sqrt[14]{3}=3^{\frac{1}{14}}$이므로

$\frac{a}{b}=3^{\frac{1}{8}}\div3^{\frac{1}{14}}=3^{\frac{1}{8}-\frac{1}{14}}=3^{\frac{3}{56}}$

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^n=3^{\frac{3n}{56}}$ ··· ❶

$3^{\frac{3n}{56}}$이 자연수이려면 $\frac{3n}{56}$이 자연수이어야 하므로

$3n=56k$ (k는 자연수) ······ ㉠

$3^4=81$, $3^5=243$이므로 $3^{\frac{3n}{56}}$이 100보다 큰 자연수이려면

$\frac{3n}{56}\geq5 \qquad \therefore 3n\geq56\cdot5$ ······ ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡에서 $k=6$일 때 n의 값이 최소이므로 구하는 최솟값은

$\frac{56\cdot6}{3}=112$ ··· ❸

답 112

채점 기준	비율
❶ $\left(\frac{a}{b}\right)^n$을 3^r 꼴로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ n의 조건을 알 수 있다.	40 %
❸ n의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0124 전략 인수분해 공식을 이용하여 $x+y$, $x-y$를 간단히 한다.

풀이 $x+y=(a+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}})+(b+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}})$

$=(a^{\frac{1}{3}})^3+3(a^{\frac{1}{3}})^2b^{\frac{1}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}(b^{\frac{1}{3}})^2+(b^{\frac{1}{3}})^3$

$=(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})^3$ ··· ❶

$x-y=(a+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}})-(b+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}})$

$=(a^{\frac{1}{3}})^3-3(a^{\frac{1}{3}})^2b^{\frac{1}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}(b^{\frac{1}{3}})^2-(b^{\frac{1}{3}})^3$

$=(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})^3$ ··· ❷

$\therefore (x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}$

$=\{(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})^3\}^{\frac{2}{3}}+\{(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})^3\}^{\frac{2}{3}}$

$=(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})^2+(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})^2$

$=a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$

$=2(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})=2\cdot2=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ $x+y$를 인수분해할 수 있다.	30 %
❷ $x-y$를 인수분해할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

0125 전략 거듭제곱근을 지수를 사용하여 나타내어 p, q, r에 대한 식을 세운다.

풀이 $\sqrt[p]{a}=\sqrt[q]{b^2}=\sqrt[r]{c^3}=8$에서

$a=8^p$, $b=8^{\frac{q}{2}}$, $c=8^{\frac{r}{3}}$

$\sqrt[3]{abc}=1024$에서

$abc=1024^3=(2^{10})^3=2^{30}$

즉 $8^p\cdot8^{\frac{q}{2}}\cdot8^{\frac{r}{3}}=2^{30}$이므로

$2^{3p+\frac{3}{2}q+r}=2^{30}$

$\therefore 6p+3q+2r=60$ ··· ❶

이때 $6p+3q+2r$의 값이 짝수이므로 $3q$는 짝수이어야 한다.

즉 q는 2의 배수이다.

또 $2r=60-(6p+3q)$에서 $6p$, $3q$가 모두 6의 배수이고 60도 6의 배수이므로 r는 3의 배수이어야 한다.

따라서 $q=2k$, $r=3l$ (k, l은 자연수)로 놓으면

$6p+3q+2r=6p+6k+6l=60$

이므로

$p+k+l=10 \qquad \therefore p=10-k-l$

$\therefore p+q+r=(10-k-l)+2k+3l$

$=k+2l+10$

따라서 $k=1$, $l=1$일 때 $p+q+r$의 값이 최소이므로 구하는 최솟값은

$1+2+10=13$ ··· ❷

답 13

채점 기준	비율
❶ p, q, r에 대한 등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ $p+q+r$의 최솟값을 구할 수 있다.	60 %

02 로그

0126 답 $2=\log_4 16$

0127 답 $-2=\log_2 0.25$

0128 답 $\frac{1}{2}=\log_{100} 10$

0129 답 $0=\log_3 1$

0130 답 $2^5=32$

0131 답 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}=81$

0132 답 $(\sqrt{3})^4=9$

0133 답 $4^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{8}$

0134 진수의 조건에서 $x-5>0$ $\quad\therefore x>5$ 답 $x>5$

0135 진수의 조건에서 $-x^2+4x>0$

$x^2-4x<0,\quad x(x-4)<0\quad \therefore 0<x<4$ 답 $0<x<4$

0136 밑의 조건에서 $x-3>0,\ x-3\neq 1$

$x>3,\ x\neq 4\quad \therefore 3<x<4$ 또는 $x>4$

답 $3<x<4$ 또는 $x>4$

0137 밑의 조건에서 $x+4>0,\ x+4\neq 1$

$x>-4,\ x\neq -3$

$\therefore -4<x<-3$ 또는 $x>-3$ …… ㉠

진수의 조건에서 $(x-2)^2>0$

$\therefore x\neq 2$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-4<x<-3$ 또는 $-3<x<2$ 또는 $x>2$

답 $-4<x<-3$ 또는 $-3<x<2$ 또는 $x>2$

0138 $\log_5 25=x$라 하면 로그의 정의에 의하여

$5^x=25=5^2\quad \therefore x=2$

$\therefore \log_5 25=2$ 답 2

0139 $\log_2 \frac{1}{8}=x$라 하면 로그의 정의에 의하여

$2^x=\frac{1}{8}=2^{-3}\quad \therefore x=-3$

$\therefore \log_2 \frac{1}{8}=-3$ 답 -3

0140 $\log_{\frac{1}{3}} 9=x$라 하면 로그의 정의에 의하여

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=9,\quad 3^{-x}=3^2\quad \therefore x=-2$

$\therefore \log_{\frac{1}{3}} 9=-2$ 답 -2

0141 $\log_{\frac{1}{10}} \frac{1}{10000}=x$라 하면 로그의 정의에 의하여

$\left(\frac{1}{10}\right)^x=\frac{1}{10000},\quad 10^{-x}=10^{-4}\quad \therefore x=4$

$\therefore \log_{\frac{1}{10}} \frac{1}{10000}=4$ 답 4

0142 $\log_3 x=-3$에서 $\quad x=3^{-3}=\frac{1}{27}$ 답 $\frac{1}{27}$

0143 $\log_{\sqrt{5}} x=4$에서 $\quad x=(\sqrt{5})^4=25$ 답 25

0144 $\log_x 81=3$에서 $\quad x^3=81\quad \therefore x=\sqrt[3]{81}=3^{\frac{4}{3}}$ 답 $3^{\frac{4}{3}}$

0145 $\log_x 4=\frac{1}{2}$에서 $\quad \sqrt{x}=4\quad \therefore x=16$ 답 16

0146 $\log_5 5-\log_3 1-\log_2 \frac{1}{2}=\log_5 5-\log_3 1+\log_2 2$

$=1-0+1=2$ 답 2

0147 $\log_2 8+\log_5 125-\log_3 \sqrt{3}=\log_2 2^3+\log_5 5^3-\log_3 3^{\frac{1}{2}}$

$=3\log_2 2+3\log_5 5-\frac{1}{2}\log_3 3$

$=3+3-\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$ 답 $\frac{11}{2}$

0148 $\log_3 72+3\log_3 \frac{3}{2}$

$=\log_3 (2^3\cdot 3^2)+3(\log_3 3-\log_3 2)$

$=3\log_3 2+2\log_3 3+3\log_3 3-3\log_3 2$

$=2+3=5$ 답 5

0149 $\log_8 32=\log_{2^3} 2^5=\frac{5}{3}\log_2 2=\frac{5}{3}$ 답 $\frac{5}{3}$

0150 $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt[3]{100}=\log_{10^{-1}} 10^{\frac{2}{3}}=-\frac{2}{3}\log_{10} 10=-\frac{2}{3}$

답 $-\frac{2}{3}$

0151 $\log_3 8\cdot\log_2 3=3\log_3 2\cdot\frac{1}{\log_3 2}=3$ 답 3

0152 $\log_3 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 3=\frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3}\cdot\frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 5}\cdot\frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 7}$

$=1$ 답 1

0153 $2^{\log_2 3}=3^{\log_2 2}=3$ 답 3

0154 $3^{\log_9 5}=5^{\log_9 3}=5^{\frac{1}{2}\log_3 3}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{5}$

0155 $\log 1000=\log 10^3=3$ 답 3

0156 $\log\sqrt[3]{100}=\log\sqrt[3]{10^2}=\log 10^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

0157 $\log\frac{1}{\sqrt[5]{1000}}=\log\frac{1}{\sqrt[5]{10^3}}=\log 10^{-\frac{3}{5}}=-\frac{3}{5}$

답 $-\frac{3}{5}$

0158 $\log\frac{1}{50}+\log\frac{1}{20}=\log\frac{1}{1000}=\log 10^{-3}=-3$

답 -3

0159 (1) $\log 25.4=\log(2.54\times 10)=\log 2.54+\log 10$
$=0.4048+1=1.4048$

(2) $\log 25400=\log(2.54\times 10^4)=\log 2.54+\log 10^4$
$=0.4048+4=4.4048$

(3) $\log 0.0254=\log(2.54\times 10^{-2})=\log 2.54+\log 10^{-2}$
$=0.4048-2=-1.5952$

(4) $\log 0.254=\log(2.54\times 10^{-1})=\log 2.54+\log 10^{-1}$
$=0.4048-1=-0.5952$

답 (1) 1.4048 (2) 4.4048 (3) -1.5952 (4) -0.5952

유형 01 로그의 정의

본책 26쪽

$a>0$, $a\neq 1$, $N>0$일 때,
$a^x=N \Longleftrightarrow x=\log_a N$

0160 $\log_a 3=2$에서 $a^2=3$ ······ ㉠
$\log_3 5=b$에서 $3^b=5$ ······ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $(a^2)^b=5$
$(a^b)^2=5$ $\therefore a^b=\sqrt{5}$ $(\because a>0)$

답 ②

0161 $\log_2\{\log_3(\log_4 n)\}=0$에서
$\log_3(\log_4 n)=2^0=1$ ··· ❶
$\log_4 n=3^1=3$ ··· ❷
$\therefore n=4^3=64$ ··· ❸

답 64

채점 기준	비율
❶ $\log_3(\log_4 n)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\log_4 n$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ n의 값을 구할 수 있다.	30 %

0162 $x=\log_3(\sqrt{3}+\sqrt{2})$에서
$3^x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$
$\therefore 3^x-3^{-x}=3^x-\frac{1}{3^x}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
$=(\sqrt{3}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
$=2\sqrt{2}$

답 ③

유형 02 로그의 밑과 진수의 조건

본책 26쪽

$\log_{f(x)}g(x)$가 정의되려면
① $f(x)>0$, $f(x)\neq 1$
② $g(x)>0$

0163 밑의 조건에서 $x-1>0$, $x-1\neq 1$
$x>1$, $x\neq 2$ $\therefore 1<x<2$ 또는 $x>2$ ······ ㉠
진수의 조건에서 $-x^2+6x-5>0$
$x^2-6x+5<0$, $(x-1)(x-5)<0$
$\therefore 1<x<5$ ······ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x<2$ 또는 $2<x<5$
따라서 정수 x는 3, 4이므로 구하는 합은
$3+4=7$

답 ②

0164 밑의 조건에서 $a-2>0$, $a-2\neq 1$
$a>2$, $a\neq 3$ $\therefore 2<a<3$ 또는 $a>3$ ······ ㉠
진수의 조건에서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+2a>0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+ax+2a=0$의 판별식을 D라 하면
$D=a^2-4\cdot 2a<0$, $a(a-8)<0$
$\therefore 0<a<8$ ······ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2<a<3$ 또는 $3<a<8$
따라서 정수 a는 4, 5, 6, 7의 4개이다.

답 ②

유형 03~04 로그의 성질

본책 26, 27쪽

$a>0$, $a\neq 1$, $M>0$, $N>0$일 때
① $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$
② $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$
③ $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$
④ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

0165 $\log_2 4\sqrt{3}+\log_2 6-\frac{3}{2}\log_2 3$
$=\log_2 4\sqrt{3}+\log_2 6-\log_2 3^{\frac{3}{2}}$
$=\log_2 4\sqrt{3}+\log_2 6-\log_2 3\sqrt{3}$
$=\log_2\frac{4\sqrt{3}\cdot 6}{3\sqrt{3}}=\log_2 8$
$=\log_2 2^3=3$

답 ④

0166 $\log_{12}x+\log_{12}2y+\log_{12}3z=1$에서
$\log_{12}(x\cdot 2y\cdot 3z)=1$, $\log_{12}6xyz=1$
$6xyz=12$ $\therefore xyz=2$

답 2

0167 (주어진 식)
$=\log_2\frac{1}{2}+\log_2\frac{2}{3}+\log_2\frac{3}{4}+\cdots+\log_2\frac{31}{32}$
$=\log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{31}{32}\right)=\log_2\frac{1}{32}$
$=\log_2 2^{-5}=-5$

답 -5

0168 $216=6^3$이므로 216의 양의 약수를 작은 수부터 차례대로 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{16}$이라 하면

$a_1a_{16}=a_2a_{15}=\cdots=a_8a_9=6^3$

$\therefore \log_6 a_1+\log_6 a_2+\log_6 a_3+\cdots+\log_6 a_{16}$

$=\log_6 a_1a_2a_3\cdots a_{16}$

$=\log_6\{(a_1a_{16})(a_2a_{15})\cdots(a_8a_9)\}$

$=\log_6(6^3)^8=\log_6 6^{24}=24$ 답 24

0169 $\log_2(x+y)=3$에서 $x+y=2^3=8$

$\log_2 x+\log_2 y=3$에서 $\log_2 xy=3$ $\therefore xy=2^3=8$

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=8^3-3\cdot8\cdot8=320$ 답 320

0170 만두 1인분의 가격은

$200\log_7(7\cdot7^2\cdot7^3\cdot7^4\cdot7^5)=200\log_7 7^{1+2+3+4+5}$

$=200\cdot15=3000$(원) ⋯ ❶

음료수 1잔의 가격은

$100\log_5 125\cdot\log_3 81=100\log_5 5^3\cdot\log_3 3^4$

$=100\cdot3\cdot4=1200$(원) ⋯ ❷

따라서 만두 3인분과 음료수 2잔의 가격의 합은

$3\cdot3000+2\cdot1200=11400$(원) ⋯ ❸

답 11400원

채점 기준	비율
❶ 만두 1인분의 가격을 구할 수 있다.	40 %
❷ 음료수 1잔의 가격을 구할 수 있다.	40 %
❸ 지불해야 하는 금액을 구할 수 있다.	20 %

0171 $\log_2 x$가 자연수이려면 $x=2^p$ (p는 자연수)

$\therefore A=\{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$

$\log_3 x$가 자연수이려면 $x=3^q$ (q는 자연수)

$\therefore B=\{3, 9, 27, 81\}$

이때 $A\cap B=\varnothing$이므로

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)=6+4=10$ 답 ⑤

0172 삼각형의 내각의 이등분선의 성질에 의하여

$\log_3 x^2:\log_3 y=\overline{AB}:\overline{AC}=3:2$ ⋯ ❶

$4\log_3 x=3\log_3 y$, $\log_3 x=\dfrac{3}{4}\log_3 y$

$\therefore x=y^{\frac{3}{4}}$ ⋯ ❷

$\therefore k=\dfrac{3}{4}$ ⋯ ❸

답 $\dfrac{3}{4}$

채점 기준	비율
❶ 삼각형의 내각의 이등분선의 성질을 이용할 수 있다.	40 %
❷ x를 y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	10 %

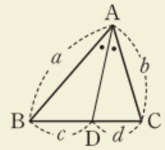
sSEN 특강

삼각형의 내각의 이등분선의 성질

오른쪽 그림과 같은 △ABC에서

∠BAD=∠CAD이면

$a:b=c:d$



0173 $\log_c(a+b)+\log_c(a-b)=2$에서

$\log_c(a+b)(a-b)=2$ $\therefore \log_c(a^2-b^2)=2$

로그의 정의에 의하여

$c^2=a^2-b^2$ $\therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 △ABC는 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

답 ④

유형 05 로그의 밑의 변환

본책 28쪽

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $c>0$, $c\neq1$일 때

① $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

② $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ (단, $b\neq1$)

③ $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$ (단, m, n은 실수, $m\neq0$)

0174 $\log_2 6\cdot\log_3 6-\log_2 3-\log_3 2$

$=\log_2(2\cdot3)\cdot\log_3(2\cdot3)-\log_2 3-\log_3 2$

$=(\log_2 2+\log_2 3)(\log_3 2+\log_3 3)-\log_2 3-\log_3 2$

$=(1+\log_2 3)(\log_3 2+1)-\log_2 3-\log_3 2$

$=\log_3 2+1+\log_2 3\cdot\log_3 2+\log_2 3-\log_2 3-\log_3 2$

$=1+\log_2 3\cdot\log_3 2$

$=1+\log_2 3\cdot\dfrac{1}{\log_2 3}$

$=1+1=2$ 답 2

0175 $\dfrac{1}{\log_2 x}+\dfrac{1}{\log_3 x}+\dfrac{1}{\log_4 x}=\log_x 2+\log_x 3+\log_x 4$

$=\log_x(2\cdot3\cdot4)=\log_x 24$

$\therefore k=24$ 답 24

0176 $\log_b 8=\dfrac{\log_a 8}{\log_a b}=\dfrac{3\log_a 2}{\log_a b}$

즉 $\dfrac{3\cdot5}{\log_a b}=-1$이므로 $\log_a b=-15$

$\therefore \log_a 4b=\log_a 4+\log_a b$

$=2\log_a 2+\log_a b$

$=2\cdot5-15=-5$ 답 ①

다른 풀이 $\log_b 8=-1$에서 $b^{-1}=8$ $\therefore b=\dfrac{1}{8}$

$\therefore \log_a 4b=\log_a\left(4\cdot\dfrac{1}{8}\right)=\log_a 2^{-1}$

$=-\log_a 2=-5$

0177 $\left(\log_2\sqrt{3}+\frac{3}{4}\log_{\sqrt{2}}3\right)\cdot\log_9 2\sqrt{2}$

$=\left(\log_2 3^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{4}\log_{2^{\frac{1}{2}}}3\right)\cdot\log_{3^2}2^{\frac{3}{2}}$

$=\left(\frac{1}{2}\log_2 3+\frac{3}{2}\log_2 3\right)\cdot\frac{3}{4}\log_3 2$

$=2\log_2 3\cdot\frac{3}{4}\log_3 2=\frac{3}{2}$

답 ③

0178 $(\log_3 5+\log_{27}25)(\log_5 3+\log_{25}27)$

$=(\log_3 5+\log_{3^3}5^2)(\log_5 3+\log_{5^2}3^3)$

$=\left(\log_3 5+\frac{2}{3}\log_3 5\right)\left(\log_5 3+\frac{3}{2}\log_5 3\right)$

$=\frac{5}{3}\log_3 5\cdot\frac{5}{2}\log_5 3=\frac{25}{6}$

답 ⑤

0179 (주어진 식)

$=\log_5(\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\cdots\cdot\log_{32}31)$

$=\log_5\left(\log_3 2\cdot\frac{\log_3 3}{\log_3 4}\cdot\frac{\log_3 4}{\log_3 5}\cdot\cdots\cdot\frac{\log_3 31}{\log_3 32}\right)$

$=\log_5\left(\frac{\log_3 2}{\log_3 32}\right)=\log_5(\log_{32}2)$

$=\log_5(\log_{2^5}2)$

$=\log_5\frac{1}{5}=-1$

답 -1

0180 $(\log_a\sqrt{b})^2+(\log_b a)^2=\left(\frac{1}{2}\log_a b\right)^2+\left(\frac{1}{\log_a b}\right)^2$

$=\frac{1}{4}(\log_a b)^2+\frac{1}{(\log_a b)^2}$

이때 $\frac{1}{4}(\log_a b)^2>0$, $\frac{1}{(\log_a b)^2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{4}(\log_a b)^2+\frac{1}{(\log_a b)^2}\geq 2\sqrt{\frac{1}{4}(\log_a b)^2\cdot\frac{1}{(\log_a b)^2}}=1$$

(단, 등호는 $(\log_a b)^2=2$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 1이다.

답 1

> **SSEN 특강**
>
> **산술평균과 기하평균의 관계**
>
> $a>0$, $b>0$일 때,
>
> $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

유형 06 로그의 여러 가지 성질

본책 29쪽

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$일 때

① $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$ (단, $c>0$, $c\neq1$)

② $a^{\log_a b}=b$

0181 $2\log_3 5-3\log_{\frac{1}{3}}4-2\log_3 20=\log_3 5^2+\log_3 4^3-\log_3 20^2$

$=\log_3\frac{5^2\cdot4^3}{20^2}=\log_3 4$

$\therefore$ (주어진 식) $=9^{\log_3 4}=4^{\log_3 9}=4^{2\log_3 3}$

$=4^2=16$

답 16

0182 $x=\log_9 4+\log_3 6=\log_{3^2}2^2+\log_3 6$

$=\log_3 2+\log_3 6$

$=\log_3(2\cdot6)=\log_3 12$

$\therefore 3^x=3^{\log_3 12}=12$

답 ②

0183 $\log_3 4+\log_3 2=\log_3(4\cdot2)=\log_3 8$

$\therefore$ (주어진 식) $=(3^{\log_3 8})^2+(2^{\log_3 8})^{\log_2 3}$

$=8^2+2^{3\log_3 2\cdot\log_2 3}$

$=64+2^3$

$=72$

답 ③

0184 $A=5^{\log_5 9-\log_5 6}=5^{\log_5\frac{9}{6}}=5^{\log_5\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$ ⋯ ❶

$B=\log_4 2+\log_9 3=\log_{2^2}2+\log_{3^2}3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ ⋯ ❷

$C=\log_8(\log_{\sqrt{2}}4)=\log_8(\log_{2^{\frac{1}{2}}}2^2)=\log_8 4=\log_{2^3}2^2=\frac{2}{3}$ ⋯ ❸

$\therefore C<B<A$ ⋯ ❹

답 $C<B<A$

채점 기준	비율
❶ A의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ B의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ C의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ A, B, C의 대소를 비교할 수 있다.	10 %

유형 07 로그에 대한 증명

본책 29쪽

로그의 정의와 성질을 이용하여 빈칸에 알맞은 식을 구한다.

0185 $\log_a x=r$로 놓으면 로그의 정의에 의하여 $x=a^r$이므로

$x^n=(a^r)^n=\boxed{a^{nr}}$

따라서 $x^n=a^{nr}$에서 로그의 정의에 의하여

$\log_a x^n=\boxed{nr}$

이므로

$\log_a x^n=n\log_a x$

답 ③

0186 $x=a^{\log_b c}$으로 놓고 양변에 b를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_b x=\log_b a^{\log_b c}=\log_b c\cdot\boxed{\log_b a}$

$=\log_b a\cdot\log_b c=\log_b c^{\boxed{\log_b a}}$

즉 $x=c^{\boxed{\log_b a}}$이므로 $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$이다.

답 $\log_b a$

02 로그

0187 $\log_{20}5$가 $\boxed{\text{유리수}}$라 가정하면 서로소인 두 자연수 m, n $(m<n)$에 대하여 $\log_{20}5=\frac{m}{n}$으로 나타내어진다.

로그의 정의에 의하여 $\quad 20^{\frac{m}{n}}=5,\quad 20^m=5^n$

$$\frac{20^m}{5^m}=\frac{5^n}{5^m}\qquad \therefore \boxed{4^m}=5^{n-m}$$

이때 4^m은 $\boxed{\text{짝수}}$이고 5^{n-m}은 홀수이므로 4^m과 5^{n-m}은 항상 같지 않다.

따라서 $\log_{20}5$는 무리수이다.

$\therefore$ (가) 유리수 (나) 4^m (다) 짝수

답 (가) 유리수 (나) 4^m (다) 짝수

유형 08 로그의 정수 부분과 소수 부분 본책 30쪽

$a>1$이고 양수 M과 정수 n에 대하여 $a^n\le M<a^{n+1}$일 때,

$\log_a a^n\le\log_a M<\log_a a^{n+1}\qquad\therefore n\le\log_a M<n+1$

➡ $\log_a M$의 정수 부분은 n, 소수 부분은 $\log_a M-n$이다.

0188 $\log_3 9=2$, $\log_3 27=3$이므로 $\quad\log_3 20=2.\cdots$

즉 $\log_3 20$의 정수 부분이 2이므로

$$a=2,\ b=\log_3 20-2=\log_3\frac{20}{9}$$

$$\therefore 9(2^a+3^b)=9(2^2+3^{\log_3\frac{20}{9}})=9\left(4+\frac{20}{9}\right)=56$$

답 ④

0189 $\log_2 8=3$, $\log_2 16=4$이므로 $\quad\log_2 12=3.\cdots$

즉 $\log_2 12$의 정수 부분이 3이므로

$$a=\log_2 12-3=\log_2\frac{12}{8}=\log_2\frac{3}{2}$$

$$\therefore 4^a=2^{2\log_2\frac{3}{2}}=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

답 ④

0190 $\log 10=1$, $\log 100=2$, $\log 1000=3$이므로

$f(2)=f(3)=\cdots=f(9)=0$,

$f(10)=f(11)=\cdots=f(99)=1$,

$f(100)=f(101)=\cdots=f(111)=2$

$\therefore f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(111)=1\cdot 90+2\cdot 12=114$

답 ③

0191 $\log 10=1$, $\log 100=2$이므로 $\quad\log 40=1.\cdots$

즉 $\log 40$의 정수 부분이 1이므로

$$n=1,\ a=\log 40-1=\log 4$$

$$\therefore \frac{10^n+10^a}{10^n-10^a}=\frac{10+10^{\log 4}}{10-10^{\log 4}}=\frac{10+4}{10-4}=\frac{7}{3}$$

답 ⑤

0192 밑의 조건에서 $\quad x-3>0,\ x-3\ne 1$

$x>3,\ x\ne 4\qquad\therefore 3<x<4$ 또는 $x>4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

진수의 조건에서 $\quad -x^2+8x-12>0$

$x^2-8x+12<0,\qquad (x-2)(x-6)<0$

$\therefore 2<x<6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$3<x<4$ 또는 $4<x<6$

이므로 자연수 x의 값은 5이다. $\quad\cdots$ ❶

$\log_2 4=2$, $\log_2 8=3$이므로 $\quad\log_2 5=2.\cdots$

즉 $\log_2 5$의 정수 부분이 2이므로

$a=2,\ b=\log_2 5-2$ $\quad\cdots$ ❷

$a-b=4-\log_2 5=\log_2\frac{16}{5}$이므로

$$2^{a-b}=2^{\log_2\frac{16}{5}}=\frac{16}{5}$$ $\quad\cdots$ ❸

답 $\frac{16}{5}$

채점 기준	비율
❶ 밑의 조건과 진수의 조건을 만족시키는 자연수 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 2^{a-b}의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 09~10 로그의 성질의 활용 본책 31쪽

(i) 주어진 식과 구하는 식의 밑을 통일한다.

(ii) 구하는 식의 진수를 곱의 형태로 바꾸고, 로그의 합으로 나타낸다.

(iii) (ii)의 식에 주어진 식을 대입한다.

0193 $\log_3 2=a$, $\log_3 5=\frac{1}{b}$이므로

$$\log_{150}180=\frac{\log_3 180}{\log_3 150}=\frac{\log_3(2^2\cdot 3^2\cdot 5)}{\log_3(2\cdot 3\cdot 5^2)}=\frac{2\log_3 2+2\log_3 3+\log_3 5}{\log_3 2+\log_3 3+2\log_3 5}=\frac{2a+2+\frac{1}{b}}{a+1+\frac{2}{b}}=\frac{2ab+2b+1}{ab+b+2}$$

답 $\frac{2ab+2b+1}{ab+b+2}$

0194 $\log 15=\log 3+\log 5=\log 3+\log\frac{10}{2}$

$=\log 3+(1-\log 2)$

$=1-a+b$

답 $1-a+b$

0195 $\log_2 15=a$에서 $\quad\log_2 3+\log_2 5=a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\log_2\frac{9}{5}=b$에서 $\quad\log_2 3^2-\log_2 5=b$

$\therefore 2\log_2 3-\log_2 5=b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면 $\quad 3\log_2 3=a+b\qquad\therefore\log_2 3=\frac{a+b}{3}$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\frac{a+b}{3}+\log_2 5=a\qquad\therefore\log_2 5=\frac{2a-b}{3}$$

$$\therefore\log_2 75=\log_2(3\cdot 5^2)=\log_2 3+2\log_2 5=\frac{a+b}{3}+2\cdot\frac{2a-b}{3}=\frac{5a-b}{3}$$

답 ①

0196 $\log_3 2=\frac{1}{a}$이고, $\log_5 7=\frac{\log_3 7}{\log_3 5}$에서

$\log_3 7=\log_3 5\cdot\log_5 7=bc$

$\therefore \log_{14}105=\frac{\log_3 105}{\log_3 14}=\frac{\log_3(3\cdot5\cdot7)}{\log_3(2\cdot7)}$

$=\frac{\log_3 3+\log_3 5+\log_3 7}{\log_3 2+\log_3 7}$

$=\frac{1+b+bc}{\frac{1}{a}+bc}=\frac{a+ab+abc}{1+abc}$

답 $\frac{a+ab+abc}{1+abc}$

0197 $3^a=x,\ 3^b=y,\ 3^c=z$에서

$\log_3 x=a,\ \log_3 y=b,\ \log_3 z=c$

$\therefore \log_{xy}y^2z^3=\frac{\log_3 y^2z^3}{\log_3 xy}=\frac{2\log_3 y+3\log_3 z}{\log_3 x+\log_3 y}$

$=\frac{2b+3c}{a+b}$ 답 ③

다른 풀이 $xy=3^a\cdot3^b=3^{a+b},\ y^2z^3=3^{2b}\cdot3^{3c}=3^{2b+3c}$이므로

$\log_{xy}y^2z^3=\log_{3^{a+b}}3^{2b+3c}=\frac{2b+3c}{a+b}$

0198 $5^a=3,\ 5^b=8$에서

$\log_5 3=a,\ \log_5 8=3\log_5 2=b$

$\therefore \log_5 3=a,\ \log_5 2=\frac{1}{3}b$

$\therefore \log_6 18=\frac{\log_5 18}{\log_5 6}=\frac{\log_5(2\cdot3^2)}{\log_5(2\cdot3)}=\frac{\log_5 2+2\log_5 3}{\log_5 2+\log_5 3}$

$=\frac{2a+\frac{1}{3}b}{a+\frac{1}{3}b}=\frac{6a+b}{3a+b}$ 답 ③

0199 $a^m=b^n=5$에서 $\log_a 5=m,\ \log_b 5=n$

$\therefore \log_5 a=\frac{1}{m},\ \log_5 b=\frac{1}{n}$

$\therefore \log_{ab}b^2=\frac{\log_5 b^2}{\log_5 ab}=\frac{2\log_5 b}{\log_5 a+\log_5 b}$

$=\frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=\frac{\frac{2}{n}}{\frac{m+n}{mn}}=\frac{2m}{m+n}$ 답 $\frac{2m}{m+n}$

유형 11 조건을 이용하여 식의 값 구하기 본책 32쪽

주어진 조건을 변형하여 문자 사이의 관계식을 구한 다음 값을 구하려는 식에 대입한다.

0200 $a^3b^2=1$의 양변에 a를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_a a^3b^2=\log_a 1,\quad \log_a a^3+\log_a b^2=0$

$3+2\log_a b=0\quad \therefore \log_a b=-\frac{3}{2}$

$\therefore \log_a a^5b^3=\log_a a^5+\log_a b^3=5+3\log_a b$

$=5+3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}$ 답 ①

다른 풀이 $a^3b^2=1$에서 $b^2=a^{-3}\quad \therefore b=a^{-\frac{3}{2}}$

$\therefore \log_a a^5b^3=\log_a a^5\cdot(a^{-\frac{3}{2}})^3=\log_a a^5\cdot a^{-\frac{9}{2}}=\log_a a^{5-\frac{9}{2}}$

$=\log_a a^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

0201 $\log_2 x+\log_4 y^2=2$에서

$\log_2 x+\log_{2^2}y^2=2,\quad \log_2 x+\log_2 y=2$ ...... ㉠

$\therefore 4^{\log_2 x}\cdot2^{\log_{\sqrt{2}}y}=2^{2\log_2 x}\cdot2^{2\log_2 y}$

$=2^{2(\log_2 x+\log_2 y)}=2^{2\cdot2}\ (\because ㉠)$

$=16$ 답 16

0202 $a^2=b^3$에서 $b=a^{\frac{2}{3}}\quad \therefore A=\log_a b=\log_a a^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$

$b^3=c^5$에서 $c=b^{\frac{3}{5}}\quad \therefore B=\log_b c=\log_b b^{\frac{3}{5}}=\frac{3}{5}$

$a^2=c^5$에서 $a=c^{\frac{5}{2}}\quad \therefore C=\log_c a=\log_c c^{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}$

$\therefore B<A<C$ 답 ③

0203 $\log_a b:\log_c b=1:3$에서

$\log_c b=3\log_a b,\quad \frac{1}{\log_b c}=\frac{3}{\log_b a}$

$\log_b a=3\log_b c\quad \therefore a=c^3$

$\therefore \log_a c+\log_c a=\log_{c^3}c+\log_c c^3$

$=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$ 답 $\frac{10}{3}$

0204 $\log_x a=\frac{1}{2},\ \log_x b=\frac{1}{3},\ \log_x c=\frac{1}{5}$이므로 ··· ❶

$\log_x a+\log_x b+\log_x c=\frac{31}{30}$

따라서 $\log_x abc=\frac{31}{30}$이므로 ··· ❷

$\log_{abc}x=\frac{30}{31}$ ··· ❸

답 $\frac{30}{31}$

채점 기준	비율
❶ $\log_x a,\ \log_x b,\ \log_x c$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\log_x abc$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\log_{abc}x$의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 12 이차방정식과 로그 본책 32쪽

이차방정식 $px^2+qx+r=0$의 두 근이 $\log_a\alpha,\ \log_a\beta$이면

① $\log_a\alpha+\log_a\beta=\log_a\alpha\beta=-\frac{q}{p}$

② $\log_a\alpha\cdot\log_a\beta=\frac{r}{p}$

0205 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 a+\log_2 b=5,\ \log_2 a\cdot\log_2 b=1$

$$\therefore \log_a b+\log_b a=\frac{\log_2 b}{\log_2 a}+\frac{\log_2 a}{\log_2 b}=\frac{(\log_2 a)^2+(\log_2 b)^2}{\log_2 a\cdot\log_2 b}$$
$$=\frac{(\log_2 a+\log_2 b)^2-2\log_2 a\cdot\log_2 b}{\log_2 a\cdot\log_2 b}$$
$$=\frac{5^2-2\cdot 1}{1}=23$$
답 23

0206 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=2$

$\therefore \log_3(\alpha+1)+\log_3(\beta+1)$

$=\log_3(\alpha+1)(\beta+1)=\log_3(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)$

$=\log_3 9=2$

답 2

0207 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2\log_5 2,\ \alpha\beta=1-\log_5 10$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$
$$=1-\log_5 10-2\log_5 2+1$$
$$=1-(1+\log_5 2)-2\log_5 2+1$$
$$=1-3\log_5 2=\log_5 5-\log_5 2^3$$
$$=\log_5\frac{5}{8}$$

$\therefore k=\frac{5}{8}$

답 ④

0208 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+\log_2 5=-a,\ 1\cdot\log_2 5=b$

이므로 $a=-(\log_2 2+\log_2 5)=-\log_2 10,\ b=\log_2 5$

$\therefore \frac{b}{a}=-\frac{\log_2 5}{\log_2 10}=-\log 5$

답 ③

0209 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=\frac{9}{2}$ ⋯ ❶

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=6^2-2\cdot\frac{9}{2}=27$ ⋯ ❷

$\therefore \log_{\alpha^2+\beta^2}2\alpha+\log_{\alpha^2+\beta^2}\beta=\log_{\alpha^2+\beta^2}2\alpha\beta=\log_{27}\left(2\cdot\frac{9}{2}\right)$

$=\log_{3^3}3^2=\frac{2}{3}$ ⋯ ❸

답 $\frac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

유형 13 상용로그의 값

본책 33쪽

양수 A에 대하여 n은 실수, $\log A=k$일 때

① $\log A^n=n\log A=nk$

② $\log(10^n\times A)=\log 10^n+\log A=n+k$

0210 $\log 5+\log 72=\log\frac{10}{2}+\log(2^3\cdot 3^2)$
$$=\log 10-\log 2+\log 2^3+\log 3^2$$
$$=1-\log 2+3\log 2+2\log 3$$
$$=1+2\log 2+2\log 3$$
$$=1+2\times 0.3010+2\times 0.4771$$
$$=2.5562$$

답 ③

0211 ③ $\log 0.761=\log(76.1\times 10^{-2})=\log 76.1+\log 10^{-2}$

$=1.8814-2=-0.1186$

답 ③

0212 $\log\sqrt{x}+\log x^2=\frac{1}{2}\log x+2\log x=\frac{5}{2}\log x$

$=\frac{5}{2}\times 0.8=2$

답 2

0213 $\log 60.4-\log x=1.7810+0.2190$

$=2=\log 100$

즉 $\log\frac{60.4}{x}=\log 100$이므로

$\frac{60.4}{x}=100 \qquad \therefore x=\frac{60.4}{100}=0.604$

답 0.604

유형 14 상용로그의 활용

본책 33쪽

$0<p<x<q$이면

$\log p<\log x<\log q$

0214 $\log x^2-\log\sqrt{x}=2\log x-\frac{1}{2}\log x=\frac{3}{2}\log x$

$1<x<100$에서 $\quad 0<\log x<2 \quad \therefore 0<\frac{3}{2}\log x<3$

이때 $\frac{3}{2}\log x$가 정수이므로 $\quad \frac{3}{2}\log x=1,\ 2$

$\log x=\frac{2}{3},\ \frac{4}{3}$

$\therefore x=10^{\frac{2}{3}},\ 10^{\frac{4}{3}}$

따라서 구하는 곱은

$10^{\frac{2}{3}}\cdot 10^{\frac{4}{3}}=10^2=100$

답 100

0215 $\log x+\log x^2=\log x+2\log x=3\log x$

$10<x<1000$에서 $\quad 1<\log x<3$

$\therefore 3<3\log x<9$

이때 $3\log x$가 정수이므로 $\quad 3\log x=4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$

$\log x=\frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ 2,\ \frac{7}{3},\ \frac{8}{3}$

$\therefore x=10^{\frac{4}{3}},\ 10^{\frac{5}{3}},\ 10^2,\ 10^{\frac{7}{3}},\ 10^{\frac{8}{3}}$

따라서 조건을 만족시키는 x의 개수는 5이다.

답 5

0216 $\log A=p\log 2+q\log 3=\log 2^p+\log 3^q=\log(2^p\cdot 3^q)$

이때 $1<\log A<2$에서 $10<A<100$이므로 정수 A는

3^3, 3^4, $2\cdot3^2$, $2\cdot3^3$, $2^2\cdot3$, $2^2\cdot3^2$,
$2^3\cdot3$, $2^3\cdot3^2$, 2^4, $2^4\cdot3$, 2^5, $2^5\cdot3$, 2^6
의 13개이다.

답 13

유형 15 상용로그의 실생활에의 활용 ; 관계식이 주어질 때

본책 34쪽

(i) 주어진 관계식에 알맞은 문자 또는 값을 대입한다.
(ii) (i)의 관계식에서 로그의 정의 및 성질을 이용한다.

0217 규모가 5인 지진의 에너지를 E_1, 규모가 4인 지진의 에너지를 E_2라 하면

$\log E_1=11.8+1.5\times5=19.3 \qquad \therefore E_1=10^{19.3}$

$\log E_2=11.8+1.5\times4=17.8 \qquad \therefore E_2=10^{17.8}$

$\therefore \dfrac{E_1}{E_2}=\dfrac{10^{19.3}}{10^{17.8}}=10^{1.5}=10\sqrt{10}$

답 ③

0218 $I=400$일 때 $S=0.5$이므로

$0.5=k\log400$

$\therefore k=\dfrac{0.5}{\log400}=\dfrac{0.5}{\log(2^2\cdot10^2)}=\dfrac{0.5}{2+2\log2}=\dfrac{5}{26}$

따라서 $I=20$일 때의 감각의 세기는

$\dfrac{5}{26}\log20=\dfrac{5}{26}(1+\log2)=\dfrac{5}{26}\times1.3=0.25$

답 ④

다른 풀이 $I=20$일 때의 감각의 세기는

$k\log20=\dfrac{1}{2}k\log400$

$=\dfrac{1}{2}\times0.5=0.25$

0219 2등급인 별의 밝기를 I_1, 5등급인 별의 밝기를 I_2라 하면

$2=-\dfrac{5}{2}\log I_1+C$ …… ㉠

$5=-\dfrac{5}{2}\log I_2+C$ …… ㉡

㉠－㉡을 하면

$-3=-\dfrac{5}{2}(\log I_1-\log I_2), \qquad \log\dfrac{I_1}{I_2}=\dfrac{6}{5}$

$\therefore \dfrac{I_1}{I_2}=10^{\frac{6}{5}}=(10^{\frac{2}{5}})^3=\left(\dfrac{5}{2}\right)^3=\dfrac{125}{8}$

답 ②

0220 $t=15$일 때 $P=P_1$, $t=45$일 때 $P=P_2$이므로

$\log P_1=8.11-\dfrac{1750}{15+235}=1.11 \qquad \therefore P_1=10^{1.11}$

$\log P_2=8.11-\dfrac{1750}{45+235}=1.86 \qquad \therefore P_2=10^{1.86}$

$\therefore \dfrac{P_2}{P_1}=\dfrac{10^{1.86}}{10^{1.11}}=10^{0.75}=10^{\frac{3}{4}}$

답 ③

0221 초기 온도가 30 °C이므로

$T_x=30+k\log(8x+1)$

$x=\dfrac{9}{8}$일 때 $T_x=240$이므로

$30+k\log\left(8\cdot\dfrac{9}{8}+1\right)=240, \qquad 30+k=240$

$\therefore k=210$ ··· ❶

따라서 화재가 발생한 지 a분 후의 온도를 450 °C라 하면

$30+210\log(8a+1)=450, \qquad \log(8a+1)=2$

$8a+1=10^2=100 \qquad \therefore a=\dfrac{99}{8}$

따라서 화재가 발생한 후 온도가 450 °C가 되는 데 $\dfrac{99}{8}$분이 걸린다. ··· ❷

답 $\dfrac{99}{8}$

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 450 °C가 되는 데 걸리는 시간을 구할 수 있다.	50 %

유형 16 상용로그의 실생활에의 활용; 일정하게 증가할 때

본책 35쪽

올해의 양이 A이고 매년 a %씩 증가할 때, k년 후의 양은
$A\left(1+\dfrac{a}{100}\right)^k$

0222 올해 산유량을 A, 산유량이 매년 a %씩 증가한다고 하면

$A\left(1+\dfrac{a}{100}\right)^{20}=2A \qquad \therefore \left(1+\dfrac{a}{100}\right)^{20}=2$

양변에 상용로그를 취하면

$20\log\left(1+\dfrac{a}{100}\right)=\log2$

$\therefore \log\left(1+\dfrac{a}{100}\right)=\dfrac{1}{20}\log2=\dfrac{1}{20}\times0.3=0.015$

이때 $\log1.035=0.015$이므로

$1+\dfrac{a}{100}=1.035 \qquad \therefore a=3.5$

따라서 산유량을 매년 3.5 %씩 증가시켜야 한다.

답 ④

0223 15년 전 매출액을 A원, 매출액이 매년 a %씩 증가했다고 하면

$A\left(1+\dfrac{a}{100}\right)^{15}=3A \qquad \therefore \left(1+\dfrac{a}{100}\right)^{15}=3$

양변에 상용로그를 취하면

$15\log\left(1+\dfrac{a}{100}\right)=\log3$

$\log\left(1+\dfrac{a}{100}\right)=\dfrac{1}{15}\log3=\dfrac{1}{15}\times0.48=0.032$

이때 $\log1.077=0.032$이므로

$1+\dfrac{a}{100}=1.077 \qquad \therefore a=7.7$

따라서 매출액은 매년 7.7 %씩 증가했다.

답 7.7

유형 17 상용로그의 실생활에의 활용; a^k의 값 구하기
본책 35쪽

(i) $\log a^k$의 값을 구한다. ➡ $\log a^k = t$

(ii) $\log A = t$인 A의 값을 구한다. ➡ $a^k = A$

0224 10마리의 세균을 3시간, 즉 180분 동안 배양하면 전체 세균의 수는 $10 \cdot 2^{18}$마리이다.

$10 \cdot 2^{18}$에 상용로그를 취하면

$$\log(10 \cdot 2^{18}) = 1 + 18\log 2 = 1 + 18 \times 0.3 = 6.4$$

$$\therefore 10 \cdot 2^{18} = 10^{6.4}$$

따라서 3시간 후의 세균의 수는 $10^{6.4}$마리이므로

$k = 6.4$ 　　답 6.4

0225 처음 빛의 밝기를 A라 하면 유리를 5장 통과한 빛의 밝기는

$A\left(1 - \frac{19}{100}\right)^5 = A \times 0.81^5$ 　　⋯ ❶

0.81^5에 상용로그를 취하면

$$\log 0.81^5 = 5\log 0.81 = 5\log(81 \times 10^{-2})$$
$$= 5(4\log 3 - 2) = 5(4 \times 0.48 - 2)$$
$$= -0.4$$
⋯ ❷

$\log 3.99 - \log 0.81^5 = 0.6 + 0.4 = 1$이므로

$$\log \frac{3.99}{0.81^5} = \log 10$$

즉 $\frac{3.99}{0.81^5} = 10$이므로 　　$0.81^5 = 0.399$ 　　⋯ ❸

따라서 유리를 5장 통과한 빛의 밝기는 $0.399A$이므로 처음 밝기의 $39.9\ \%$이다. 　　⋯ ❹

답 39.9

채점 기준	비율
❶ 식을 세울 수 있다.	20 %
❷ $\log 0.81^5$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $0.81^5 = 0.399$임을 알 수 있다.	40 %
❹ 답을 구할 수 있다.	10 %

0226 현재의 인구는

$$A(1-0.1)^5(1+0.1)^5 = A \times 0.99^5$$

0.99^5에 상용로그를 취하면

$$\log 0.99^5 = 5\log 0.99 = 5\log(9.9 \times 10^{-1})$$
$$= 5(0.996 - 1) = -0.02$$

$\log 9.55 - \log 0.99^5 = 0.98 + 0.02 = 1$이므로

$$\log \frac{9.55}{0.99^5} = \log 10$$

즉 $\frac{9.55}{0.99^5} = 10$이므로 　　$0.99^5 = 0.955$

$\therefore k = 0.955$ 　　답 0.955

0227 전략 두 집합 A, B의 원소는 모두 자연수임을 이용한다.

풀이 집합 B의 원소가 모두 자연수이므로 a, b, c, d는 모두 2^k (k는 자연수) 꼴이다.

이때 $a + b = 12$이므로 　　$a = 4$, $b = 8$ ($\because a < b$)

따라서 $A = \{4, 8, c, d\}$, $B = \{\underbrace{2, 3}_{\log_2 4 = 2,\ \log_2 8 = 3}, \log_2 c, \log_2 d\}$이고

$A \cap B = \{4, 8\}$이므로 　　$\log_2 c = 4$, $\log_2 d = 8$

$\therefore c = 2^4 = 16$, $d = 2^8 = 256$

$\therefore d - c = 240$ 　　답 240

0228 전략 조건 (나)를 이용하여 m, n 사이의 관계식을 구한다.

풀이 조건 (나)에 의하여

$$\log_m n = \frac{q}{p}\ (p,\ q\text{는 서로 다른 자연수})$$

라 하면 로그의 정의에 의하여

$n = m^{\frac{q}{p}}$ 　　$\therefore n^p = m^q$ 　　⋯⋯ ㉠

m, n이 자연수이므로 ㉠을 만족시키는 m, n은

$m = l^p$, $n = l^q$ (l은 1보다 큰 자연수)

꼴이다. 이때 조건 (가)에서 $mn < 200$이므로

$$l^p l^q = l^{p+q} < 200$$

(i) $l = 2$일 때,

$3 \le p + q \le 7$이므로

$p + q = 3$일 때, 순서쌍 (p, q)는 　$(1, 2)$, $(2, 1)$

$p + q = 4$일 때, 순서쌍 (p, q)는 　$(1, 3)$, $(3, 1)$

$p + q = 5$일 때, 순서쌍 (p, q)는

$(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$

$p + q = 6$일 때, 순서쌍 (p, q)는

$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$

$p + q = 7$일 때, 순서쌍 (p, q)는

$(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$

따라서 순서쌍 (p, q)의 개수는

$2 + 2 + 4 + 4 + 6 = 18$

(ii) $l = 3$일 때,

$3 \le p + q \le 4$이므로 순서쌍 (p, q)의 개수는

$2 + 2 = 4$

(iii) $l = 5$일 때,

$p + q = 3$이므로 순서쌍 (p, q)의 개수는

2

(iv) $l \ge 6$일 때,

조건 (가)를 만족시키는 p, q는 존재하지 않는다.

이상에서 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$18 + 4 + 2 = 24$ 　　답 ②

참고 $l = 2$일 때 순서쌍 (p, q)가 $(1, 2)$이면 $m = 2$, $n = 4$이고, $l = 3$일 때 순서쌍 (p, q)가 $(1, 2)$이면 $m = 3$, $n = 9$이다.
따라서 순서쌍 (m, n)의 개수는 위에서 구한 순서쌍 (p, q)의 개수와 같다.
또 $4 = 2^2$이므로 $l = 4$인 경우는 (i)에 포함된다.

0229 전략 눈금 4에서 눈금 8까지의 거리와 눈금 y에서 눈금 4까지의 거리가 서로 같음을 이용한다.

풀이 $\log 8 - \log 4 = \log 4 - \log y$에서

$\log \frac{8}{4} = \log \frac{4}{y}$, 　　$2 = \frac{4}{y}$ 　　$\therefore y = 2$

$\log 8 - \log x = \log 4 - \log 3$에서

$\log \frac{8}{x} = \log \frac{4}{3}$, 　　$\frac{8}{x} = \frac{4}{3}$ 　　$\therefore x = 6$

$\therefore x + y = 8$ 　　답 8

0230 전략 주어진 등식을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $\log_5 a-2\log_5 b=\log_5 a-\log_5 b^2$

$=\log_5 \dfrac{a}{b^2}$

즉 $\log_5 \dfrac{a}{b^2}=2$에서 $\dfrac{a}{b^2}=5^2$

$\therefore a=25b^2$

이때 $100\le a<1000$이므로

$100\le 25b^2<1000$

$\therefore 4\le b^2<40$ …… ㉠

부등식 ㉠을 만족시키는 자연수 b의 값은

$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

이므로 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 5이다.

답 ②

0231 전략 주어진 식의 양변에 2를 반복하여 곱한다.

풀이 $\log_5 2=\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\dfrac{a_3}{2^3}+\dfrac{a_4}{2^4}+\cdots$ …… ㉠

㉠의 양변에 2를 곱하면

$2\log_5 2=a_1+\dfrac{a_2}{2}+\dfrac{a_3}{2^2}+\dfrac{a_4}{2^3}+\cdots$

$\therefore \log_5 4=a_1+\dfrac{a_2}{2}+\dfrac{a_3}{2^2}+\dfrac{a_4}{2^3}+\cdots$ …… ㉡

이때 $0<\log_5 4<1$이므로 $a_1=0$

㉡의 양변에 2를 곱하면

$2\log_5 4=a_2+\dfrac{a_3}{2}+\dfrac{a_4}{2^2}+\cdots$

$\therefore \log_5 16=a_2+\dfrac{a_3}{2}+\dfrac{a_4}{2^2}+\cdots$

이때 $1<\log_5 16<2$이므로 $a_2=1$

즉 $\log_5 16=1+\dfrac{a_3}{2}+\dfrac{a_4}{2^2}+\cdots$이므로

$\log_5 16-1=\dfrac{a_3}{2}+\dfrac{a_4}{2^2}+\cdots$

$\therefore \log_5 \dfrac{16}{5}=\dfrac{a_3}{2}+\dfrac{a_4}{2^2}+\cdots$ …… ㉢

㉢의 양변에 2를 곱하면

$2\log_5 \dfrac{16}{5}=a_3+\dfrac{a_4}{2}+\cdots$

$\therefore \log_5 \dfrac{256}{25}=a_3+\dfrac{a_4}{2}+\cdots$

이때 $1<\log_5 \dfrac{256}{25}<2$이므로 $a_3=1$

$\therefore a_1+a_2+a_3=0+1+1=2$

답 2

0232 전략 $\log_4 x-\log_2 k$를 간단히 한 후 이 값이 자연수가 되기 위한 조건을 찾는다.

풀이 $\log_4 x-\log_2 k=\log_2\sqrt{x}-\log_2 k=\log_2\dfrac{\sqrt{x}}{k}$

$\log_2\dfrac{\sqrt{x}}{k}$의 값이 자연수가 되려면 $\dfrac{\sqrt{x}}{k}=2^l\ (l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 꼴이어야 한다.

ㄱ. $\dfrac{\sqrt{4}}{k}=2^l$에서 $k=2^{1-l}$

이때 l, k는 모두 자연수이므로 $l=1,\ k=1$

$\therefore f(4)=1$

ㄴ. $\dfrac{\sqrt{x}}{k}=2^l$에서 $k=\dfrac{\sqrt{x}}{2^l}$

이때 자연수 k의 값이 존재하려면 $\sqrt{x}$가 2의 배수이어야 하므로

$\sqrt{x}=2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10$

$\therefore x=4,\ 16,\ 36,\ 64,\ 100$

즉 $f(x)\ne 0$을 만족시키는 x의 값이 5개이므로 주어진 집합의 원소의 개수는 95이다.

ㄷ. $x=16$일 때, $k=\dfrac{4}{2^l}$이므로 $k=1$ 또는 $k=2$

$\therefore f(16)=2$

$x=36$일 때, $k=\dfrac{6}{2^l}$이므로 $k=3$

$\therefore f(36)=1$

$x=64$일 때, $k=\dfrac{8}{2^l}$이므로 $k=1,\ 2,\ 4$

$\therefore f(64)=3$

$x=100$일 때, $k=\dfrac{10}{2^l}$이므로 $k=5$

$\therefore f(100)=1$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 3이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

0233 전략 연산 $*$의 정의를 이용하여 좌변과 우변을 비교한다.

풀이 ㄱ. $a*1=a^{\log_2 1}=a^0=1$

ㄴ. $a*b=a^{\log_2 b}=b^{\log_2 a}=b*a$

ㄷ. $(a*b)*c=a^{\log_2 b}*c=(a^{\log_2 b})^{\log_2 c}=a^{\log_2 b\log_2 c}$

$a*(b*c)=a*(b^{\log_2 c})=a^{\log_2 b^{\log_2 c}}=a^{\log_2 c\log_2 b}$

$\therefore (a*b)*c=a*(b*c)$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

0234 전략 $f(x)$의 값을 먼저 구한다.

풀이 $\log_3 1=0$이므로 $f(1)=0$

$\log_3\dfrac{1}{2}=-\log_3 2$이고 $\underline{-1<-\log_3 2<0}$이므로 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1$

$0<\log_3 2<1$이므로 $-1<-\log_3 2<0$

$\log_3\dfrac{1}{3}=-1$이므로 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=-1$

$\log_3\dfrac{1}{4}=-\log_3 4$이고 $\underline{-2<-\log_3 4<-1}$이므로 $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=-2$

$1<\log_3 4<2$이므로 $-2<-\log_3 4<-1$

$\log_3\dfrac{1}{5}=-\log_3 5$이고 $-2<-\log_3 5<-1$이므로 $f\left(\dfrac{1}{5}\right)=-2$

$\log_3 x=f(x)+g(x)$에서 $g(x)-f(x)=\log_3 x-2f(x)$이므로

$g(1)-f(1)=\log_3 1-2f(1)=0$

$g\left(\dfrac{1}{2}\right)-f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\log_3\dfrac{1}{2}-2f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\log_3\dfrac{1}{2}-2\cdot(-1)$

$=\log_3\dfrac{1}{2}+2=\log_3\dfrac{9}{2}$

$g\left(\dfrac{1}{3}\right)-f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\log_3\dfrac{1}{3}-2f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\log_3\dfrac{1}{3}-2\cdot(-1)=1$

02 로그

$$g\left(\frac{1}{4}\right)-f\left(\frac{1}{4}\right)=\log_3\frac{1}{4}-2f\left(\frac{1}{4}\right)=\log_3\frac{1}{4}-2\cdot(-2)$$
$$=\log_3\frac{1}{4}+4=\log_3\frac{81}{4}$$
$$g\left(\frac{1}{5}\right)-f\left(\frac{1}{5}\right)=\log_3\frac{1}{5}-2f\left(\frac{1}{5}\right)=\log_3\frac{1}{5}-2\cdot(-2)$$
$$=\log_3\frac{1}{5}+4=\log_3\frac{81}{5}$$

따라서 구하는 값은

$$1\cdot3^0+2\cdot3^{\log_3\frac{9}{2}}+3\cdot3^1+4\cdot3^{\log_3\frac{81}{4}}+5\cdot3^{\log_3\frac{81}{5}}$$
$$=1+2\cdot\frac{9}{2}+9+4\cdot\frac{81}{4}+5\cdot\frac{81}{5}$$
$$=1+9+9+81+81=181$$

답 181

0235 전략 주어진 등식을 $\log_3 a$와 $\log_3 b$에 대한 식으로 변형한다.

풀이 $\frac{b}{a}=9$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3\frac{b}{a}=\log_3 9 \qquad \therefore \log_3 b-\log_3 a=2$$

$a^{\log_3 b}=\sqrt[3]{3}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 a^{\log_3 b}=\log_3\sqrt[3]{3} \qquad \therefore \log_3 a\cdot\log_3 b=\frac{1}{3}$$
$$\therefore (\log_3 a)^3-(\log_3 b)^3$$
$$=(\log_3 a-\log_3 b)^3+3\log_3 a\cdot\log_3 b\cdot(\log_3 a-\log_3 b)$$
$$=(-2)^3+3\cdot\frac{1}{3}\cdot(-2)$$
$$=-8-2=-10$$

답 -10

0236 전략 시간이 지나도 환기량 Q는 일정함을 이용한다.

풀이 $t=1$, $c(0)=0.83$, $c(1)=0.43$을 주어진 식에 대입하면

$$Q=k\times\frac{V}{1}\log\frac{0.83-0.03}{0.43-0.03}=kV\log 2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$c(0)=0.83$, $c(t)=0.08$을 주어진 식에 대입하면

$$Q=k\times\frac{V}{t}\log\frac{0.83-0.03}{0.08-0.03}=\frac{kV}{t}\log 16 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 환기량 Q는 일정하므로

$$kV\log 2=\frac{kV}{t}\log 16, \qquad \log 2=\frac{4}{t}\log 2$$
$$\therefore t=4$$

답 ②

0237 전략 A가 매년 $r\%$씩 증가할 때, n년 후에는 $A\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$이 된다.

풀이 올해 신생아의 수를 A라 하면 10년 후 전체 신생아의 수에 대한 남자 신생아의 비율은

$$\frac{\frac{1}{2}A(1+0.1)^{10}}{A(1+0.07)^{10}}=\frac{1.1^{10}}{2\times1.07^{10}}$$

$\frac{1.1^{10}}{1.07^{10}}=k$로 놓고 양변에 상용로그를 취하면

$$\log k=10\log 1.1-10\log 1.07$$
$$=10\times0.0414-10\times0.0294$$
$$=0.12$$

이때 $\log 1.32=0.12$이므로 $\qquad k=1.32$

따라서 $\frac{1.1^{10}}{2\times1.07^{10}}=\frac{1}{2}\times1.32=0.66$이므로 10년 후 신생아 100명 중 남자 신생아는 66명이다.

답 66

0238 전략 $\log_a b=k$이면 $a^k=b$임을 이용한다.

풀이 $\log_2(n-a)^2=\log_2(n+b)^2=k$ (k는 자연수)라 하면

$$(n-a)^2=(n+b)^2=2^k \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 ㉠을 만족시키는 k의 값은 짝수이다.

(i) $n=1$일 때,

$k=2$이면 $\quad (1-a)^2=(1+b)^2=2^2$

이를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $\quad (3, 1)$

$k=4$이면 $\quad (1-a)^2=(1+b)^2=2^4=4^2$

이를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $\quad (5, 3)$

이때 $5+3>4$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$\therefore f(1)=1$ ··· ❶

(ii) $n=2$일 때,

$k=4$이면 $\quad (2-a)^2=(2+b)^2=2^4=4^2$

이를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $\quad (6, 2)$

$k=6$이면 $\quad (2-a)^2=(2+b)^2=2^6=8^2$

이를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $\quad (10, 6)$

$k=8$이면 $\quad (2-a)^2=(2+b)^2=2^8=16^2$

이를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $\quad (18, 14)$

이때 $18+14>4^2$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$\therefore f(2)=2$ ··· ❷

(iii) $n=4$일 때,

$k=6$이면 $\quad (4-a)^2=(4+b)^2=2^6=8^2$

이를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $\quad (12, 4)$

$k=8$이면 $\quad (4-a)^2=(4+b)^2=2^8=16^2$

이를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $\quad (20, 12)$

$k=10$이면 $\quad (4-a)^2=(4+b)^2=2^{10}=32^2$

이를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $\quad (36, 28)$

$k=12$이면 $\quad (4-a)^2=(4+b)^2=2^{12}=64^2$

이를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $\quad (68, 60)$

$k=14$이면 $\quad (4-a)^2=(4+b)^2=2^{14}=128^2$

이를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $\quad (132, 124)$

$k=16$이면 $\quad (4-a)^2=(4+b)^2=2^{16}=256^2$

이를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $\quad (260, 252)$

이때 $260+252>4^4$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$\therefore f(4)=5$ ··· ❸

이상에서 $\quad f(1)+f(2)+f(4)=1+2+5=8$ ··· ❹

답 8

채점 기준	비율
❶ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(4)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $f(1)+f(2)+f(4)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0239 전략 로그의 성질 $\log_a x^n = n\log_a x$, $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$를 이용한다.

풀이 조건 (가)의 $a\log_{500}2 + b\log_{500}5 = c$에서

$$\log_{500}2^a + \log_{500}5^b = c$$

$$\log_{500}2^a \cdot 5^b = c, \qquad 2^a \cdot 5^b = 500^c$$

이때 $500^c = (2^2 \cdot 5^3)^c = 2^{2c} \cdot 5^{3c}$이므로

$$a = 2c,\ b = 3c \qquad \cdots ❶$$

a, b, c, 즉 $2c, 3c, c$의 최대공약수는 c이므로 조건 (나)에 의하여

$$c = 2$$

따라서 $a=4$, $b=6$, $c=2$이므로

$$a+b+c = 12 \qquad \cdots ❷$$

답 12

채점 기준	비율
❶ a, b를 각각 c에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0240 전략 $\log_5\sqrt{2} = 0.abc\cdots$의 양변에 10을 곱한다.

풀이 $\log_5\sqrt{2} = 0.abc\cdots$의 양변에 10을 곱하면

$$10\log_5\sqrt{2} = a.bc\cdots \qquad \cdots ❶$$

이때 $10\log_5\sqrt{2} = \log_5(\sqrt{2})^{10} = \log_5 2^5 = \log_5 32$이고, $\log_5 25 = 2$, $\log_5 125 = 3$이므로

$$\log_5 32 = 2.\cdots \qquad \cdots ❷$$

$$\therefore a = 2 \qquad \cdots ❸$$

답 2

채점 기준	비율
❶ $10\log_5\sqrt{2} = a.bc\cdots$로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $10\log_5\sqrt{2}$의 정수 부분을 구할 수 있다.	50 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

0241 전략 원뿔과 구의 부피를 구하는 공식을 이용하여 식을 세운 다음 양변에 상용로그를 취한다.

풀이 원뿔의 부피는 $\dfrac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 10 = \dfrac{160}{3}\pi$

구의 부피는 $\dfrac{4}{3}\pi r^3$이므로

$$\frac{160}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \therefore r^3 = 40 \qquad \cdots ❶$$

양변에 상용로그를 취하면

$$3\log r = \log 40 = \log(2^2 \times 10) = 2\log 2 + 1$$

$$\therefore \log r = \frac{1}{3}(2 \times 0.3010 + 1) = 0.5340 \qquad \cdots ❷$$

이때 $\log 3.42 = 0.5340$이므로

$$r = 3.42 \qquad \cdots ❸$$

답 3.42

채점 기준	비율
❶ r^3의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\log r$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ r의 값을 구할 수 있다.	20 %

0242 전략 주어진 조건을 이용하여 등식을 세운다.

풀이 주어진 조건에서

$$\log N(2k) = \log A - \alpha\log 2k \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\log N(k) = \log A - \alpha\log k \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$$\log N(4k) = \log A - \alpha\log 4k \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉠－㉡을 하면

$$\log N(2k) - \log N(k) = \alpha(\log k - \log 2k)$$

$$\therefore \log\frac{N(2k)}{N(k)} = \alpha\log\frac{1}{2} = \log 2^{-\alpha}$$

이때 $\dfrac{N(2k)}{N(k)} = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$이므로 $\quad 2^{-\alpha} = \dfrac{\sqrt{2}}{8} = 2^{-\frac{5}{2}}$

$$\therefore \alpha = \frac{5}{2} \qquad \cdots ❶$$

㉢－㉡을 하면

$$\log N(4k) - \log N(k) = \alpha(\log k - \log 4k)$$

$$\therefore \log\frac{N(4k)}{N(k)} = \frac{5}{2}\log\frac{1}{4} = \frac{5}{2}\log 2^{-2} = \log 2^{-5} \qquad \cdots ❷$$

즉 $\dfrac{N(4k)}{N(k)} = 2^{-5} = \dfrac{1}{32}$이므로

$$p = 32 \qquad \cdots ❸$$

답 32

채점 기준	비율
❶ α의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\log\dfrac{N(4k)}{N(k)}$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ p의 값을 구할 수 있다.	20 %

0243 전략 보험료의 인상률이 p일 때, 사고를 n번 내면 보험료는 처음 보험료의 $(1+p)^n$배가 된다.

풀이 처음 보험료를 P원, 사고를 낼 때마다의 보험료 인상률을 p라 하면 5번 사고를 낸 A의 보험료는 처음 보험료의 2배이므로

$$P(1+p)^5 = 2P \qquad \therefore (1+p)^5 = 2$$

양변에 상용로그를 취하면

$$5\log(1+p) = \log 2$$

$$\therefore \log(1+p) = \frac{1}{5}\log 2 = \frac{1}{5} \times 0.3 = 0.06 \qquad \cdots ❶$$

B의 보험료는 $P(1+p)^3$원이므로 $(1+p)^3 = k$로 놓고 양변에 상용로그를 취하면

$$\log k = 3\log(1+p) = 3 \times 0.06 = 0.18$$

이때 $\log 1.51 = 0.18$이므로

$$k = 1.51 \qquad \cdots ❷$$

따라서 B의 보험료는 처음 보험료의 151 %이다. $\cdots$ ❸

답 151

채점 기준	비율
❶ $\log(1+p)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $(1+p)^3$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 답을 구할 수 있다.	20 %

03 지수함수

0244 답 ㄴ, ㄷ

0245 (1) $f(0)=2^0=1$

(2) $f(2)=2^2=4$

(3) $f\left(\frac{3}{2}\right)=2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$

(4) $f(-4)f(3)=2^{-4}\cdot2^3=2^{-1}=\frac{1}{2}$

답 (1) 1 (2) 4 (3) $2\sqrt{2}$ (4) $\frac{1}{2}$

0246 (1) $f(0)=\left(\frac{1}{5}\right)^0=1$

(2) $f(3)=\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{125}$

(3) $f(-4)=\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}=5^4=625$

(4) $f(-1)f(2)=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{5}$

답 (1) 1 (2) $\frac{1}{125}$ (3) 625 (4) $\frac{1}{5}$

0247 ㄱ. $f(x)=a^x$은 일대일함수이므로 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이다. 즉 $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다.
ㄴ. 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$이다.
ㄹ. 정의역은 실수 전체의 집합이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㅁ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㅁ

0248 $\sqrt[4]{3^3}=3^{\frac{3}{4}}$, $\sqrt[3]{3^4}=3^{\frac{4}{3}}$이고, $\frac{3}{4}<\frac{4}{3}$이다.
이때 함수 $y=3^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로
$3^{\frac{3}{4}}<3^{\frac{4}{3}}$, 즉 $\sqrt[4]{3^3}<\sqrt[3]{3^4}$

답 $\sqrt[4]{3^3}<\sqrt[3]{3^4}$

0249 $-1<2$이고, 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}>\left(\frac{1}{3}\right)^2$

답 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}>\left(\frac{1}{3}\right)^2$

0250 $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2^{\frac{3}{2}}$이고, $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{3}{2}$이다.
이때 함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로
$2^{\frac{1}{3}}<2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{3}{2}}$, 즉 $\sqrt[3]{2}<\sqrt{2}<\sqrt{8}$

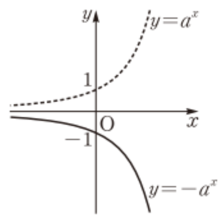
답 $\sqrt[3]{2}<\sqrt{2}<\sqrt{8}$

0251 $\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^3=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$이고, $-0.2<1<\frac{3}{2}$이다.
이때 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로
$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}<\frac{1}{5}<\left(\frac{1}{5}\right)^{-0.2}$, 즉 $\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^3<\frac{1}{5}<\left(\frac{1}{5}\right)^{-0.2}$

답 $\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^3<\frac{1}{5}<\left(\frac{1}{5}\right)^{-0.2}$

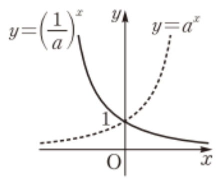
0252 $y=-a^x$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



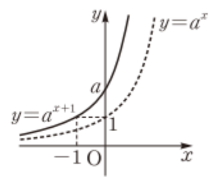
0253 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x=a^{-x}$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



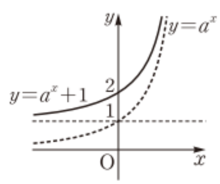
0254 $y=a^{x+1}$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조

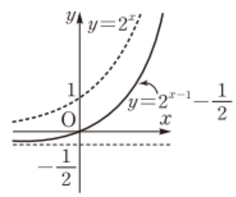


0255 $y=a^x+1$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



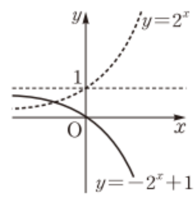
0256 $y=2^{x-1}-\frac{1}{2}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\left\{y\,\middle|\,y>-\frac{1}{2}\right\}$
점근선의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}$

답 풀이 참조

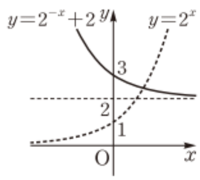
0257 $y=-2^x+1$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y\,|\,y<1\}$
점근선의 방정식은 $y=1$

답 풀이 참조

0258 $y=2^{-x}+2$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y|y>2\}$

점근선의 방정식은 $y=2$

답 풀이 참조

0259 함수 $y=5^x$에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $-1\le x\le 2$에서

$x=2$일 때 최대이고 최댓값은 $5^2=25$

$x=-1$일 때 최소이고 최솟값은 $5^{-1}=\dfrac{1}{5}$

답 최댓값: 25, 최솟값: $\dfrac{1}{5}$

0260 함수 $y=10^{-x}=\left(\dfrac{1}{10}\right)^x$에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $-3\le x\le 2$에서

$x=-3$일 때 최대이고 최댓값은 $10^3=1000$

$x=2$일 때 최소이고 최솟값은 $10^{-2}=\dfrac{1}{100}$

답 최댓값: 1000, 최솟값: $\dfrac{1}{100}$

0261 함수 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x+1$에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $-2\le x\le 2$에서

$x=-2$일 때 최대이고 최댓값은 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}+1=10$

$x=2$일 때 최소이고 최솟값은 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+1=\dfrac{10}{9}$

답 최댓값: 10, 최솟값: $\dfrac{10}{9}$

0262 함수 $y=2^{x+2}-3$에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $1\le x\le 3$에서

$x=3$일 때 최대이고 최댓값은 $2^{3+2}-3=29$

$x=1$일 때 최소이고 최솟값은 $2^{1+2}-3=5$

답 최댓값: 29, 최솟값: 5

0263 $8^x=128$에서 $2^{3x}=2^7$이므로

$3x=7 \qquad \therefore x=\dfrac{7}{3}$

답 $x=\dfrac{7}{3}$

0264 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-x}=2\sqrt{2}$에서 $2^{x-1}=2^{\frac{3}{2}}$이므로

$x-1=\dfrac{3}{2} \qquad \therefore x=\dfrac{5}{2}$

답 $x=\dfrac{5}{2}$

0265 $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x=81\cdot 3^x$에서 $3^{-2x}=3^{4+x}$이므로

$-2x=4+x, \qquad 3x=-4 \qquad \therefore x=-\dfrac{4}{3}$

답 $x=-\dfrac{4}{3}$

0266 $4^{2x}-4^x-12=0$에서 $(4^x)^2-4^x-12=0$

$4^x=t\,(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$\boxed{t^2-t-12}=0, \qquad (t+3)(t-4)=0$

$\therefore t=\boxed{4}\ (\because t>0)$

즉 $4^x=4$이므로 $x=\boxed{1}$

$\therefore$ (가) t^2-t-12 (나) 4 (다) 1

답 풀이 참조

0267 $3^{2x}-12\cdot 3^x+27=0$에서

$(3^x)^2-12\cdot 3^x+27=0$

$3^x=t\,(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-12t+27=0, \qquad (t-3)(t-9)=0$

$\therefore t=3$ 또는 $t=9$

즉 $3^x=3$ 또는 $3^x=9$이므로

$x=1$ 또는 $x=2$

답 $x=1$ 또는 $x=2$

0268 $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x-2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-1}-27=0$에서

$\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right\}^2-6\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-27=0$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=t\,(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-6t-27=0, \qquad (t+3)(t-9)=0$

$\therefore t=9\ (\because t>0)$

즉 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=9$이므로 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$

$\therefore x=-2$

답 $x=-2$

0269 $5^{2x-1}>25\sqrt{5}$에서 $5^{2x-1}>5^{\frac{5}{2}}$

밑이 1보다 크므로 $2x-1>\dfrac{5}{2}$

$2x>\dfrac{7}{2} \qquad \therefore x>\dfrac{7}{4}$

답 $x>\dfrac{7}{4}$

0270 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x+2}\le 2^{x-1}$에서 $2^{-3x-2}\le 2^{x-1}$

밑이 1보다 크므로 $-3x-2\le x-1$

$-4x\le 1 \qquad \therefore x\ge -\dfrac{1}{4}$

답 $x\ge -\dfrac{1}{4}$

0271 $2^{3-x}\ge(\sqrt{2})^{3x}$에서 $2^{3-x}\ge 2^{\frac{3}{2}x}$

밑이 1보다 크므로 $3-x\ge\dfrac{3}{2}x$

$-\dfrac{5}{2}x\ge -3 \qquad \therefore x\le\dfrac{6}{5}$

답 $x\le\dfrac{6}{5}$

0272 $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x^2}<\left(\dfrac{4}{3}\right)^{2x-3}$에서 $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x^2}<\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2x+3}$

밑이 1보다 작으므로 $x^2>-2x+3$

$x^2+2x-3>0, \qquad (x+3)(x-1)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>1$

답 $x<-3$ 또는 $x>1$

03 지수함수

0273 $\left(\frac{1}{9}\right)^x-4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+3\le0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+3\le0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\,(t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$\boxed{t^2-4t+3}\le0,\qquad (t-1)(t-3)\le0$

$\therefore \boxed{1}\le t\le\boxed{3}$

즉 $1\le\left(\frac{1}{3}\right)^x\le3$이므로

$\left(\frac{1}{3}\right)^0\le\left(\frac{1}{3}\right)^x\le\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

밑이 1보다 작으므로 $\boxed{-1}\le x\le\boxed{0}$

$\therefore$ (가) t^2-4t+3 (나) 1 (다) 3 (라) -1 (마) 0

답 풀이 참조

0274 $5^{2x}-30\cdot5^x+125<0$에서

$(5^x)^2-30\cdot5^x+125<0$

$5^x=t\,(t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2-30t+125<0,\qquad (t-5)(t-25)<0$

$\therefore 5<t<25$

즉 $5<5^x<5^2$이고 밑이 1보다 크므로

$1<x<2$

답 $1<x<2$

0275 $\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-8\le0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-8\le0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\,(t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2+2t-8\le0,\qquad (t+4)(t-2)\le0$

$\therefore -4\le t\le2$

이때 $t>0$이므로 $\quad 0<t\le2$

즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$이고 밑이 1보다 작으므로

$x\ge-1$

답 $x\ge-1$

유형 01 지수함수의 함숫값 본책 44쪽

지수함수 $f(x)=a^x(a>0,\ a\ne1)$에서 $f(p)$의 값을 구할 때에는 $f(x)$에 x 대신 p를 대입하고 지수법칙을 이용한다.

0276 ㄱ. $f(-x)=a^{-x}=\frac{1}{a^x}=\frac{1}{f(x)}$

ㄴ. $f(nx)=a^{nx}=(a^x)^n=\{f(x)\}^n$

ㄷ. $f(xy)=a^{xy}$, $f(x)+f(y)=a^x+a^y$이므로

$f(xy)\ne f(x)+f(y)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

0277 $f(p)=q$에서 $\quad 2^p=q$

$\therefore f\left(\frac{p}{2}\right)+f\left(-\frac{p}{2}\right)=2^{\frac{p}{2}}+2^{-\frac{p}{2}}=(2^p)^{\frac{1}{2}}+(2^p)^{-\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{q}+\frac{1}{\sqrt{q}}$

답 ④

0278 $f(1)+f(-1)=4$에서 $a+a^{-1}=4$이므로

$(a-a^{-1})^2=(a+a^{-1})^2-4=4^2-4=12$

$\therefore a-a^{-1}=2\sqrt{3}\ (\because a>a^{-1})$

$\therefore f(2)-f(-2)=a^2-a^{-2}=(a+a^{-1})(a-a^{-1})$

$=4\cdot2\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

답 $8\sqrt{3}$

0279 $f(0)=a^n=5$, $f(2)=a^{2m+n}=20$이므로

$5a^{2m}=20,\qquad a^{2m}=4\qquad \therefore a^m=2\ (\because a^m>0)$

$\therefore f(1)=a^{m+n}=a^m\cdot a^n=2\cdot5=10$

답 10

0280 $f(a+b)=\left(\frac{1}{2}\right)^{a+b}=\left(\frac{1}{2}\right)^a\left(\frac{1}{2}\right)^b$

이때 $p=f(-a)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-a}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^a\right\}^{-1}$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^a=\frac{1}{p}$

또 $q=f(b)=\left(\frac{1}{2}\right)^b$이므로

$f(a+b)=\left(\frac{1}{2}\right)^a\left(\frac{1}{2}\right)^b=\frac{q}{p}$

답 $\frac{q}{p}$

유형 02 지수함수의 성질 본책 44쪽

지수함수 $y=a^x(a>0,\ a\ne1)$에 대하여

① 정의역: 실수 전체의 집합

치역: 양의 실수 전체의 집합

② $a>1$일 때, $\quad x$의 값이 증가 ➡ y의 값도 증가

$0<a<1$일 때, $\quad x$의 값이 증가 ➡ y의 값은 감소

③ 그래프의 점근선: 직선 $y=0$(x축)

0281 $f(2)=a^2=\frac{1}{9}$에서 $\quad a=\frac{1}{3}\ (\because a>0)$

$\therefore f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

ㄱ. $f(-4)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}=3^4=81$

ㄹ. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$에서 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

0282 $a<b$일 때 $f(a)<f(b)$를 만족시키는 함수는 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하는 함수이다. 이때

$f(x)=\left(\frac{5}{4}\right)^{-x}=\left(\frac{4}{5}\right)^x$, $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}=3^x$

이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ③이다.

답 ③

0283 $y=(a^2+a+1)^x$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하려면

$0<a^2+a+1<1$ ⋯ ❶

(i) $0<a^2+a+1$에서

$$a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

이므로 항상 성립한다.

(ii) $a^2+a+1<1$에서 $a^2+a<0$

$a(a+1)<0$ $\quad\therefore -1<a<0$

(i), (ii)에서 $-1<a<0$ ⋯ ❷

답 $-1<a<0$

채점 기준	비율
❶ a^2+a+1의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	70 %

유형 03 지수함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동 본책 45쪽

지수함수 $y=a^x(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를

① x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동 ➡ $y=a^{x-m}+n$

② x축에 대하여 대칭이동 ➡ $y=-a^x$

③ y축에 대하여 대칭이동 ➡ $y=a^{-x}$

④ 원점에 대하여 대칭이동 ➡ $y=-a^{-x}$

0284 $y=4^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-n=4^{2(x-m)}$ $\quad\therefore y=4^{-2m}\cdot4^{2x}+n$

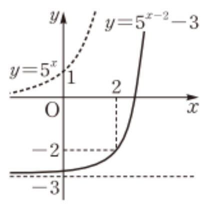
이 식이 $y=16\cdot4^{2x}+16$과 일치하므로

$4^{-2m}=16=4^2$, $n=16$

따라서 $m=-1$, $n=16$이므로 $m+n=15$

답 15

0285 $y=5^{x-2}-3$의 그래프는 $y=5^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



④ 점근선의 방정식은 $y=-3$이다.

답 ④

0286 $y=3^{-x+a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=b$이므로

$b=-2$ ⋯ ❶

또 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=3^a-2$, $\quad 3^a=3$

$\therefore a=1$ ⋯ ❷

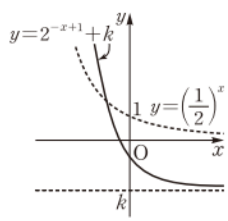
$\therefore ab=-2$ ⋯ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0287 $y=2^{-x+1}+k=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+k$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프가 제 1 사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+k\leq0$ $\quad\therefore k\leq-2$

따라서 k의 최댓값은 -2이다.

답 ①

0288 ㄱ. $y=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-3}=a^{-(x-3)}$이므로 $y=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-3}$의 그래프와 겹쳐진다.

ㄴ. $y=a^{2x+4}=a^{2(x+2)}$이므로 $y=a^x$의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여 $y=a^{2x+4}$의 그래프와 겹쳐질 수 없다.

ㄷ. $a^k=\sqrt{3}$(k는 상수)이라 하면

$y=\sqrt{3}\cdot a^x+1=a^{x+k}+1$

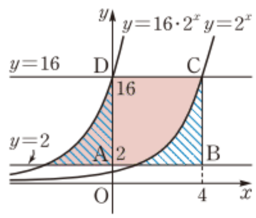
이므로 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-k$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $y=\sqrt{3}\cdot a^x+1$의 그래프와 겹쳐진다.

이상에서 $y=a^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0289 $y=16\cdot2^x=2^{x+4}$이므로 $y=16\cdot2^x$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 두 함수 $y=2^x$, $y=16\cdot2^x$의 그래프와 두 직선 $y=2$, $y=16$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.



따라서 구하는 넓이는

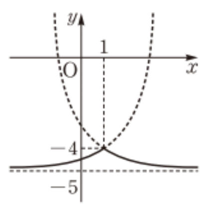
$\overline{AD}\cdot\overline{CD}=14\cdot4=56$

답 56

0290 $x\geq1$이면 $\quad y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-5$

$x<1$이면 $\quad y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1}-5=2^{x-1}-5$ ⋯ ❶

따라서 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}-5$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$가 그래프와 만나지 않으려면



$k\leq-5$ 또는 $k>-4$ ⋯ ❷

답 $k\leq-5$ 또는 $k>-4$

채점 기준	비율
❶ $x\geq1$, $x<1$로 나누어 함수식을 정리할 수 있다.	30 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	70 %

03 지수함수

유형 04 지수함수의 그래프 위의 점 본책 46쪽

지수함수 $y=a^x(a>0, a\neq 1)$의 그래프가 점 (m, n)을 지난다.
$\Rightarrow n=a^m$

0291 그래프가 두 점 (a, p), (b, q)를 지나므로

$p=3^a$, $q=3^b$

이때 $pq=27$이므로 $\quad 3^a\cdot 3^b=27, \quad 3^{a+b}=3^3$

$\therefore a+b=3$

답 ②

0292 $a=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$, $b=2^a=2^{\sqrt{2}}$이므로

$b^a=(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=2^2=4$

답 ④

0293 $\mathrm{A}(a, 3^a)$, $\mathrm{B}(b, 3^b)$에서

$\dfrac{3^b-3^a}{b-a}=3 \qquad \therefore b-a=\dfrac{1}{3}(3^b-3^a)$ …… ㉠

또 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}$에서 $\quad (b-a)^2+(3^b-3^a)^2=(2\sqrt{5})^2$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$\dfrac{1}{9}(3^b-3^a)^2+(3^b-3^a)^2=20$

$(3^b-3^a)^2=18 \qquad \therefore 3^b-3^a=3\sqrt{2}\,(\because 3^a<3^b)$

답 $3\sqrt{2}$

0294 점 P의 좌표를 $(a, 4^a)$이라 하면 $\overline{\mathrm{OP}}$를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{a}{1+3}, \dfrac{4^a}{1+3}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{a}{4}, 4^{a-1}\right)$

이 점이 함수 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$의 그래프 위에 있으므로

$4^{a-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{a}{4}}, \qquad 2^{2(a-1)}=2^{-\frac{a}{4}}$

$2(a-1)=-\dfrac{a}{4}, \qquad 8a-8=-a, \qquad 9a=8$

$\therefore a=\dfrac{8}{9}$

답 ④

0295 점 A의 좌표가 $(k, 2^k)$이고 두 점 A, C의 y좌표가 같으므로 $4^x=2^k$에서 $\quad 2^{2x}=2^k \qquad \therefore x=\dfrac{k}{2}$

따라서 $\mathrm{C}\left(\dfrac{k}{2}, 2^k\right)$이므로 $\quad \overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{k}{2}$ … ❶

점 B의 좌표가 $(k, 4^k)$이고 두 점 B, D의 y좌표가 같으므로

$2^x=4^k$에서 $\quad 2^x=2^{2k} \qquad \therefore x=2k$

따라서 $\mathrm{D}(2k, 4^k)$이므로 $\quad \overline{\mathrm{BD}}=k$ … ❷

$\therefore \dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\dfrac{k}{\frac{k}{2}}=2$ … ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $\overline{\mathrm{AC}}$의 길이를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $\overline{\mathrm{BD}}$의 길이를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ $\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0296 두 삼각형 ACB, ADC의 높이가 $\overline{\mathrm{AB}}$로 같으므로 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

$\therefore \overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{CD}}=\triangle\mathrm{ACB}:\triangle\mathrm{ADC}=2:1$

따라서 $\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{BD}}=2:3$이므로 두 점 C, D의 x좌표를 각각 $2b$, $3b$ $(b>0)$로 놓으면

$2^{2b}=a^{3b}=k, \qquad 4^b=(a^3)^b$

$4=a^3 \qquad \therefore a=\sqrt[3]{4}$

답 $\sqrt[3]{4}$

유형 05 지수함수를 이용한 수의 대소 비교 본책 47쪽

주어진 수의 밑을 같게 한 후 다음과 같은 지수함수의 성질을 이용한다.

① $a>1$일 때, $\quad m<n \Longleftrightarrow a^m<a^n$

② $0<a<1$일 때, $\quad m<n \Longleftrightarrow a^m>a^n$

0297 $A=\sqrt{2^3}=2^{\frac{3}{2}}$, $B=0.5^{-\frac{1}{3}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}$,

$C=\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}}$

이때 $\dfrac{1}{3}<\dfrac{2}{3}<\dfrac{3}{2}$이고 밑이 1보다 크므로

$2^{\frac{1}{3}}<2^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{3}{2}}$, 즉 $B<C<A$

답 ③

0298 $\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4}}=(2^3\cdot 2^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{11}{12}}$,

$\left(\dfrac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{4}}=(2^{-6})^{-\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{2}}$,

$(2^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{6}}=(2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{15}{2}})^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{47}{36}}$,

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}}=(2^8)^{\frac{1}{16}}=2^{\frac{1}{2}}$ … ❶

이때 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{11}{12}<\dfrac{47}{36}<\dfrac{3}{2}$이고 밑이 1보다 크므로

$2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{11}{12}}<2^{\frac{47}{36}}<2^{\frac{3}{2}}$ … ❷

따라서 가장 큰 수는 $2^{\frac{3}{2}}$이고, 가장 작은 수는 $2^{\frac{1}{2}}$이므로 구하는 곱은

$2^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2^2=4$ … ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 주어진 네 수의 밑을 같게 할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 네 수의 대소를 비교할 수 있다.	30 %
❸ 가장 큰 수와 가장 작은 수의 곱을 구할 수 있다.	20 %

0299 $A=a^{\frac{n+1}{n}}$, $B=a^{\frac{n+2}{n+1}}$, $C=a^{\frac{n+3}{n+2}}$

$\dfrac{n+1}{n}=1+\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{n+2}{n+1}=1+\dfrac{1}{n+1}$, $\dfrac{n+3}{n+2}=1+\dfrac{1}{n+2}$이고 n이 자연수이므로

$\dfrac{1}{n+2}<\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}$

따라서 $1+\dfrac{1}{n+2}<1+\dfrac{1}{n+1}<1+\dfrac{1}{n}$, 즉 $\dfrac{n+3}{n+2}<\dfrac{n+2}{n+1}<\dfrac{n+1}{n}$

이고 $a>1$이므로

$a^{\frac{n+3}{n+2}}<a^{\frac{n+2}{n+1}}<a^{\frac{n+1}{n}}$, 즉 $C<B<A$

답 $C<B<A$

0300 $0<a<1$일 때 $y=a^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $0<a<1$에서

$a^1<a^a<a^0$, 즉 $a<a^a<1$

마찬가지로 $0<a<1$이므로 $a<a^a<1$에서

$a^1<a^{a^a}<a^a$, 즉 $a<a^{a^a}<a^a$

답 ②

유형 06 지수함수의 최대·최소; $y=a^{px+q}+r$ 꼴

본책 48쪽

정의역이 $\{x|m\le x\le n\}$인 지수함수 $f(x)=a^{px+q}+r(p>0)$에 대하여
① $a>1$일 때 ➡ 최댓값: $f(n)$, 최솟값: $f(m)$
② $0<a<1$일 때 ➡ 최댓값: $f(m)$, 최솟값: $f(n)$

0301 $y=2^{x+1}+k$에서 $x=1$일 때 최대이고 최댓값은

$2^{1+1}+k=k+4$

즉 $k+4=1$이므로 $k=-3$

답 ①

0302 $y=5^{-x}\cdot 3^x=\left(\frac{3}{5}\right)^x$이므로 $x=-3$일 때 최대이고 최댓값은

$M=\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$

$x=1$일 때 최소이고 최솟값은

$m=\frac{3}{5}$

$\therefore Mm=\left(\frac{3}{5}\right)^{-3+1}=\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$

답 $\frac{25}{9}$

0303 (i) $a>1$일 때,
최댓값은 $f(3)$, 최솟값은 $f(0)$이므로

$f(3)=8f(0)$, $a^4=8a$

$a^3=8$ $\therefore a=2$ ··· ❶

(ii) $0<a<1$일 때,
최댓값은 $f(0)$, 최솟값은 $f(3)$이므로

$f(0)=8f(3)$, $a=8a^4$

$a^3=\frac{1}{8}$ $\therefore a=\frac{1}{2}$ ··· ❷

(i), (ii)에서 모든 양수 a의 값의 합은

$\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$ ··· ❸

답 $\frac{5}{2}$

채점 기준	비율
❶ $a>1$일 때 a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $0<a<1$일 때 a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 양수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0304 $f(x)=|x-1|+2$로 놓으면 $-1\le x\le 2$에서

$-2\le x-1\le 1$, $0\le |x-1|\le 2$

$\therefore 2\le |x-1|+2\le 4$, 즉 $2\le f(x)\le 4$

(i) $a>1$일 때,
$y=a^{f(x)}$은 $f(x)=4$일 때 최댓값을 가지므로

$a^4=\frac{1}{4}$

$\therefore a=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\because a>0)$

그런데 이것은 $a>1$을 만족시키지 않는다.

(ii) $0<a<1$일 때,
$y=a^{f(x)}$은 $f(x)=2$일 때 최댓값을 가지므로

$a^2=\frac{1}{4}$ $\therefore a=\frac{1}{2}$ $(\because a>0)$

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{2}$이고, $f(x)=4$일 때 최소이므로 최솟값은

$\left(\frac{1}{2}\right)^4=2^{-4}$

답 ②

유형 07 지수함수의 최대·최소; $y=a^{px^2+qx+r}$ 꼴

본책 48쪽

지수함수 $y=a^{px^2+qx+r}$에 대하여 $f(x)=px^2+qx+r$로 놓고 주어진 범위에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한 후 a의 값의 범위에 따라 다음을 이용한다.
① $a>1$일 때
➡ $f(x)$가 최대일 때 y도 최대, $f(x)$가 최소일 때 y도 최소
② $0<a<1$일 때
➡ $f(x)$가 최대일 때 y는 최소, $f(x)$가 최소일 때 y는 최대

0305 $f(x)=x^2-4x+1$로 놓으면

$f(x)=(x-2)^2-3$

$f(-1)=6$, $f(2)=-3$, $f(3)=-2$이므로 $-1\le x\le 3$에서

$-3\le f(x)\le 6$

$y=2^{x^2-4x+1}=2^{f(x)}$에서 밑이 1보다 크므로 함수 $y=2^{f(x)}$은 $f(x)=6$, 즉 $x=-1$일 때 최댓값 $2^6=64$를 갖는다.

따라서 $a=-1$, $b=64$이므로 $a+b=63$

답 ④

0306 $f(x)=-x^2+4x-2$로 놓으면

$f(x)=-(x-2)^2+2$ $\therefore f(x)\le 2$

$y=a^{-x^2+4x-2}=a^{f(x)}$에서 $0<a<1$이므로 함수 $y=a^{f(x)}$은 $f(x)=2$일 때 최솟값 $\frac{1}{4}$을 갖는다.

즉 $a^2=\frac{1}{4}$이므로 $a=\frac{1}{2}(\because a>0)$

답 ④

0307 $f(x)=x^2-8x+15$로 놓으면

$f(x)=(x-4)^2-1$

$f(2)=3$, $f(4)=-1$, $f(5)=0$이므로 $2\le x\le 5$에서

$-1\le f(x)\le 3$ ··· ❶

$y=3^{x^2-8x+15}=3^{f(x)}$에서 밑이 1보다 크므로 함수 $y=3^{f(x)}$은 $f(x)=3$일 때 최대이고 최댓값은 $3^3=27$

$f(x)=-1$일 때 최소이고 최솟값은 $3^{-1}=\frac{1}{3}$ ··· ❷

따라서 구하는 곱은 $27\cdot\frac{1}{3}=9$ ··· ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ $y=3^{f(x)}$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 최댓값과 최솟값의 곱을 구할 수 있다.	10 %

0308 $f(x)=x^2-4x+b$로 놓으면

$f(x)=(x-2)^2+b-4$

$f(2)=b-4$, $f(3)=b-3$이므로 $2\le x\le 3$에서

$b-4\le f(x)\le b-3$

$y=a^{x^2-4x+b}=a^{f(x)}$에서 $0<a<1$이므로 함수 $y=a^{f(x)}$은

$f(x)=b-4$일 때 최댓값 81을 가지므로

$a^{b-4}=81$ ...... ㉠

$f(x)=b-3$일 때 최솟값 9를 가지므로

$a^{b-3}=9$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면 $a^{b-3-(b-4)}=\frac{9}{81}$ $\therefore a=\frac{1}{9}$

$a=\frac{1}{9}$을 ㉡에 대입하면 $\left(\frac{1}{9}\right)^{b-3}=9$

$9^{-b+3}=9$, $-b+3=1$ $\therefore b=2$

$\therefore ab=\frac{2}{9}$ 답 $\frac{2}{9}$

유형 08 지수함수의 최대·최소; a^x 꼴이 반복되는 경우 본책 49쪽

함수 $y=pa^{2x}+qa^x+r$의 최대·최소는 $a^x=t$로 치환하여 나타낸 t에 대한 이차함수 $y=pt^2+qt+r$의 최대·최소를 이용하여 구한다.

0309 $y=4^x-2^{x+1}+3=(2^x)^2-2\cdot 2^x+3$

$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $-1\le x\le 2$에서 $\frac{1}{2}\le t\le 4$

이때 주어진 함수는 $y=t^2-2t+3=(t-1)^2+2$

이므로 $t=4$, 즉 $x=2$일 때 최대이고 최댓값은 11

$t=1$, 즉 $x=0$일 때 최소이고 최솟값은 2

따라서 $a=2$, $b=11$, $c=0$, $d=2$이므로

$a+b+c-d=11$ 답 ①

0310 $y=1+2^{x-a}-4^x=1+2^{-a}\cdot 2^x-(2^x)^2$

$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면 주어진 함수는

$y=-t^2+2^{-a}\cdot t+1=-(t-2^{-a-1})^2+2^{-2a-2}+1$

따라서 $t=2^{-a-1}$일 때 최댓값 $2^{-2a-2}+1$을 가지므로

$2^{-2a-2}+1=\frac{129}{128}$, $2^{-2a-2}=\frac{1}{128}=2^{-7}$

$-2a-2=-7$ $\therefore a=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

0311 $y=3^{-2x}-2\cdot 3^{-x}-1=(3^{-x})^2-2\cdot 3^{-x}-1$

$3^{-x}=t\,(t>0)$로 놓으면 $-2\le x\le 3$에서 $\frac{1}{27}\le t\le 9$

이때 주어진 함수는 $y=t^2-2t-1=(t-1)^2-2$

이므로 $t=9$일 때 최대이고 최댓값은 $M=62$

$t=1$일 때 최소이고 최솟값은 $m=-2$

$\therefore M+m=60$ 답 60

유형 09 지수함수의 최대·최소 ; 산술평균과 기하평균의 관계 이용 본책 49쪽

함수 $y=a^x+a^{-x}(a>0,\ a\ne 1)$의 최대·최소

➡ 모든 실수 x에 대하여 $a^x>0$, $a^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^x+a^{-x}\ge 2\sqrt{a^x\cdot a^{-x}}=2$

임을 이용한다. (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

0312 $3^x+3^{-x}=t$로 놓으면 $3^x>0$, $3^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=3^x+3^{-x}\ge 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

이때 $9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2=t^2-2$이므로 주어진 함수는

$y=6t-(t^2-2)=-t^2+6t+2$

$=-(t-3)^2+11\,(t\ge 2)$

따라서 주어진 함수는 $t=3$일 때 최댓값 11을 갖는다. 답 ④

0313 $4^x>0$, $4^{-x+4}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4^x+4^{-x+4}\ge 2\sqrt{4^x\cdot 4^{-x+4}}$

$=2\sqrt{4^4}=2\cdot 4^2=32$

이때 등호는 $4^x=4^{-x+4}$일 때 성립하므로

$x=-x+4$ $\therefore x=2$

따라서 $a=2$, $b=32$이므로 $a+b=34$ 답 ②

0314 $5^x+5^{-x}=t$로 놓으면 $5^x>0$, $5^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=5^x+5^{-x}\ge 2\sqrt{5^x\cdot 5^{-x}}=2$(단, 등호는 $x=0$일 때 성립) ⋯ ❶

이때 $25^x+25^{-x}=(5^x+5^{-x})^2-2=t^2-2$이므로 주어진 함수는

$y=(t^2-2)+2t-3=t^2+2t-5$

$=(t+1)^2-6\,(t\ge 2)$ ⋯ ❷

따라서 $t=2$일 때, 즉 $x=0$일 때 최솟값 3을 가지므로

$a=0$, $b=3$ $\therefore a-b=-3$ ⋯ ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ t의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ 주어진 함수를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0315 $x+2y-4=0$에서 $x=4-2y$이므로

$7^x+49^y=7^{4-2y}+7^{2y}$

$7^{4-2y}>0$, $7^{2y}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$7^{4-2y}+7^{2y}\ge 2\sqrt{7^{4-2y}\cdot 7^{2y}}$

$=2\sqrt{7^4}=2\cdot 7^2=98$

이때 등호는 $7^{4-2y}=7^{2y}$일 때 성립하므로

$4-2y=2y$ $\therefore y=1$

$y=1$을 $x=4-2y$에 대입하면 $x=2$

따라서 7^x+49^y은 $x=2,\ y=1$일 때 최솟값 98을 가지므로

$\alpha=2,\ \beta=1,\ \gamma=98$

$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma=101$

답 ②

유형 10 지수방정식; 밑을 같게 할 수 있는 경우

본책 49쪽

방정식의 각 항의 밑을 같게 한 다음

$a^{f(x)}=a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x)=g(x)\ (a>0,\ a\neq1)$

임을 이용한다.

0316 $8^x-2^{x^2-4}=0$에서 $2^{3x}=2^{x^2-4}$이므로

$3x=x^2-4,\qquad x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0\qquad \therefore\ x=-1$ 또는 $x=4$

따라서 모든 실근의 합은

$-1+4=3$

답 ③

0317 $(2^x-8)(3^{2x}-9)=0$에서

$2^x=8$ 또는 $3^{2x}=9$

$2^x=8$에서 $\quad 2^x=2^3\qquad \therefore\ x=3$

$3^{2x}=9$에서 $\quad 9^x=9\qquad \therefore\ x=1$

따라서 주어진 방정식의 두 실근이 1, 3이므로

$\alpha^2+\beta^2=1^2+3^2=10$

답 10

0318 $(3\sqrt{3})^{x^2}=9^{x+1}$에서 $3^{\frac{3}{2}x^2}=3^{2x+2}$이므로

$\frac{3}{2}x^2=2x+2,\qquad 3x^2-4x-4=0$

$(3x+2)(x-2)=0\qquad \therefore\ x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

그런데 x는 정수이므로 $\quad x=2$

답 ⑤

0319 $\dfrac{9^{x^2+1}}{3^{x+4}}=81$에서 $\dfrac{(3^2)^{x^2+1}}{3^{x+4}}=3^4$이므로

$3^{2x^2+2}=3^{x+8}$ ···· ❶

따라서 $2x^2+2=x+8$이므로 $\quad 2x^2-x-6=0$

$(2x+3)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=2$ ···· ❷

따라서 모든 실근의 곱은 $\quad \left(-\frac{3}{2}\right)\cdot2=-3$ ···· ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 $3^{f(x)}=3^{g(x)}$ 꼴로 변형할 수 있다.	40 %
❷ x의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 모든 실근의 곱을 구할 수 있다.	10 %

유형 11 지수방정식; a^x 꼴이 반복되는 경우

본책 50쪽

지수방정식 $pa^{2x}+qa^x+r=0$의 해는 $a^x=t\,(t>0)$로 치환하여 나타낸 t에 대한 이차방정식 $pt^2+qt+r=0$의 해를 이용하여 구한다.

0320 $4^x+4^{2-x}=10$의 양변에 4^x을 곱하면

$(4^x)^2+4^2=10\cdot4^x\qquad \therefore\ (4^x)^2-10\cdot4^x+16=0$

$4^x=t\,(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-10t+16=0,\qquad (t-2)(t-8)=0$

$\therefore\ t=2$ 또는 $t=8$

즉 $4^x=2$ 또는 $4^x=8$이므로 $\qquad 2^{2x}=2$ 또는 $2^{2x}=2^3$

$2x=1$ 또는 $2x=3\qquad \therefore\ x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

따라서 $\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=\frac{3}{2}$이므로 $\qquad \beta-\alpha=1$

답 ①

0321 $2^x+2^{-x}=t\,(t\geq2)$로 놓으면

$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$

이므로 주어진 방정식은

$(t^2-2)+t-4=0,\qquad t^2+t-6=0$

$(t+3)(t-2)=0\qquad \therefore\ t=2\ (\because\ t\geq2)$

따라서 $2^x+2^{-x}=2$이므로 $\qquad x=0$

답 $x=0$

0322 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+1)=3^{2x+1}$,

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3^x)=2\cdot3^x+1$이므로 방정식

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$는

$3^{2x+1}=2\cdot3^x+1\qquad \therefore\ 3\cdot(3^x)^2-2\cdot3^x-1=0$ ···· ❶

$3^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$3t^2-2t-1=0,\qquad (3t+1)(t-1)=0$

$\therefore\ t=1\ (\because\ t>0)$ ···· ❷

즉 $3^x=1$이므로 $\qquad x=0$ ···· ❸

답 $x=0$

채점 기준	비율
❶ x에 대한 지수방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ t의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 방정식의 해를 구할 수 있다.	20 %

0323 $81^x-9^{x+2}+64=0$에서 $\qquad (9^x)^2-81\cdot9^x+64=0$

$9^x=t\,(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-81t+64=0$

이 방정식의 두 근이 $9^\alpha,\ 9^\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$9^\alpha\cdot9^\beta=64,\qquad 3^{2(\alpha+\beta)}=8^2$

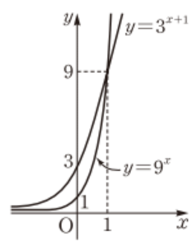
$\therefore\ 3^{\alpha+\beta}=8\ (\because\ 3^{\alpha+\beta}>0)$

답 ③

0324 $9^x=3^{x+1}$에서 $\qquad 3^{2x}=3^{x+1}$

$2x=x+1\qquad \therefore\ x=1$

따라서 두 함수 $y=9^x,\ y=3^{x+1}$의 그래프의 교점의 x좌표는 1이므로 주어진 두 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$A(k,\ 9^k),\ B(k,\ 3^{k+1})$이므로

(i) $k>1$인 경우

$\overline{AB}=9^k-3^{k+1}=54$이므로 $3^k=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2-3t-54=0$, $(t+6)(t-9)=0$

$\therefore t=9\ (\because t>0)$

즉 $3^k=9$이므로 $k=2$

(ii) $k<1$인 경우

$\overline{AB}=3^{k+1}-9^k=54$이므로 $3^k=t\ (t>0)$로 놓으면

$3t-t^2=54$ $\therefore t^2-3t+54=0$ ······㉠

이때 t에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot 54=-207<0$

이므로 방정식 ㉠은 실근을 갖지 않는다.

따라서 $\overline{AB}=54$를 만족시키는 상수 k가 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $k=2$

답 2

유형 12 지수방정식; 연립방정식 본책 51쪽

(i) $a^x=X$, $b^y=Y\ (X>0,\ Y>0)$로 치환하여 X, Y에 대한 연립방정식을 푼다.

(ii) $a^x=X$, $b^y=Y$에서 x, y의 값을 구한다.

0325 $\begin{cases} 2^{x-1}+3^{y+1}=11 \\ 2^{x+2}-3^{y-1}=15 \end{cases}$에서 $\begin{cases} \frac{1}{2}\cdot 2^x+3\cdot 3^y=11 \\ 4\cdot 2^x-\frac{1}{3}\cdot 3^y=15 \end{cases}$

$2^x=X$, $3^y=Y\ (X>0,\ Y>0)$로 놓으면

$\begin{cases} \frac{1}{2}X+3Y=11 \\ 4X-\frac{1}{3}Y=15 \end{cases}$

이 연립방정식을 풀면

$X=4$, $Y=3$

즉 $2^x=4$, $3^y=3$이므로 $x=2$, $y=1$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=1$이므로 $\alpha\beta=2$

답 ⑤

0326 $\begin{cases} 2^{x+1}+2^{y+1}=24 \\ 2^{x+y-2}=8 \end{cases}$에서 $\begin{cases} 2\cdot 2^x+2\cdot 2^y=24 \\ \frac{1}{4}\cdot 2^x\cdot 2^y=8 \end{cases}$

$2^x=X$, $2^y=Y\ (X>0,\ Y>0)$로 놓으면

$\begin{cases} 2X+2Y=24 \\ \frac{1}{4}XY=8 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} X+Y=12 \\ XY=32 \end{cases}$ ··· ❶

이 연립방정식을 풀면

$X=4$, $Y=8$ 또는 $X=8$, $Y=4$ ··· ❷

즉 $2^x=4$, $2^y=8$ 또는 $2^x=8$, $2^y=4$이므로

$x=2$, $y=3$ 또는 $x=3$, $y=2$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=2^2+3^2=13$ ··· ❸

답 13

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 X, Y에 대한 방정식으로 정리할 수 있다.	40 %
❷ X, Y의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 13 지수방정식; 밑에 미지수가 있는 경우 본책 51쪽

① $\{h(x)\}^{f(x)}=\{g(x)\}^{f(x)}$ 꼴의 방정식

➡ $h(x)=g(x)$ 또는 $f(x)=0$의 해를 구한다.

(단, $h(x)>0$, $g(x)>0$)

② $\{h(x)\}^{f(x)}=\{h(x)\}^{g(x)}$ 꼴의 방정식

➡ $h(x)=1$ 또는 $f(x)=g(x)$의 해를 구한다. (단, $h(x)>0$)

0327 $x^x\cdot x^8=(x^x)^2$에서 $x^{x+8}=x^{2x}$

(i) $x=1$일 때, 주어진 방정식은 $1^9=1^2$이므로 성립한다.

(ii) $x\neq 1$일 때, $x+8=2x$에서 $x=8$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은 $1+8=9$

답 ④

0328 (i) $x-5=0$, 즉 $x=5$일 때, 주어진 방정식은 $3^0=6^0=1$이므로 성립한다.

(ii) $x-5\neq 0$일 때, $x-2=6$이므로 $x=8$

(i), (ii)에서 모든 근의 곱은 $5\cdot 8=40$

답 40

0329 $x^{x^2-8}=x^{2x+7}$에서

(i) $x=1$일 때, 주어진 방정식은 $1^{-7}=1^9$이므로 성립한다.

(ii) $x\neq 1$일 때, $x^2-8=2x+7$에서 $x^2-2x-15=0$

$(x+3)(x-5)=0$ $\therefore x=5\left(\because x>\frac{1}{2}\right)$

(i), (ii)에서 $a=1+5=6$ ··· ❶

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^{3-2x}=3^{3-2x}$에서

(iii) $3-2x=0$, 즉 $x=\frac{3}{2}$일 때, 주어진 방정식은 $1^0=3^0=1$이므로 성립한다.

(iv) $3-2x\neq 0$일 때, $x-\frac{1}{2}=3$이므로 $x=\frac{7}{2}$

(iii), (iv)에서 $b=\frac{3}{2}+\frac{7}{2}=5$ ··· ❷

$\therefore ab=30$ ··· ❸

답 30

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 14 지수방정식의 근의 조건 본책 51쪽

방정식 $pa^{2x}+qa^x+r=0$의 두 근이 α, β이면 $a^x=t\ (t>0)$로 치환하여 나타낸 t에 대한 이차방정식 $pt^2+qt+r=0$의 두 근이 a^α, a^β임을 이용한다.

0330 $3^{2x}-3^{x+1}=a$에서 $(3^x)^2-3\cdot 3^x-a=0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-3t-a=0$ ······㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 할 때,

$D=(-3)^2-4\cdot(-a)>0$

$9+4a>0 \qquad \therefore a>-\dfrac{9}{4}$

(ii) 이차방정식 ㉠의 (두 근의 합)$=3>0$

(iii) 이차방정식 ㉠의 (두 근의 곱)$=-a>0 \qquad \therefore a<0$

이상에서 $-\dfrac{9}{4}<a<0$이므로 $\quad m=-\dfrac{9}{4},\ n=0$

$\therefore m+n=-\dfrac{9}{4}$

답 $-\dfrac{9}{4}$

sSEN 특강

이차방정식의 실근의 부호

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

① 두 근이 모두 양수 $\Longleftrightarrow D\ge0,\ -\dfrac{b}{a}>0,\ \dfrac{c}{a}>0$

② 두 근이 모두 음수 $\Longleftrightarrow D\ge0,\ -\dfrac{b}{a}<0,\ \dfrac{c}{a}>0$

③ 두 근이 서로 다른 부호 $\Longleftrightarrow \dfrac{c}{a}<0$

0331 $9^x-2\cdot3^{x+2}+k=0$에서

$(3^x)^2-18\cdot3^x+k=0$

$3^x=t\,(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-18t+k=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

주어진 방정식의 서로 다른 두 실근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$\alpha+\beta=2$

이고 방정식 ㉠의 두 근은 $3^\alpha,\ 3^\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$k=3^\alpha\cdot3^\beta=3^{\alpha+\beta}=3^2=9$

답 9

0332 $4^{2x}+a\cdot4^{x+1}+44-4a=0$에서

$(4^x)^2+4a\cdot4^x+44-4a=0$

$4^x=t\,(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2+4at+44-4a=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

주어진 방정식의 두 근을 $m,\ 2m\,(m\ne0)$이라 하면 방정식 ㉠의 두 근은 $4^m,\ 4^{2m}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$4^m+4^{2m}=-4a,\ 4^m\cdot4^{2m}=44-4a$

$4^m=k\,(k>0)$로 놓으면

$k+k^2=-4a,\ k^3=44-4a$

따라서 $k^3=44+k+k^2$이므로 $\quad k^3-k^2-k-44=0$

$(k-4)(k^2+3k+11)=0 \qquad \therefore k=4\ (\because k^2+3k+11>0)$

따라서 $k+k^2=-4a$에서 $\quad -4a=4+4^2=20$

$\therefore a=-5$

답 ①

0333 $4^x+4^{-x}-2^{1+x}-2^{1-x}+k=0$에서

$4^x+4^{-x}-2(2^x+2^{-x})+k=0$

$2^x+2^{-x}=t\,(t\ge2)$로 놓으면

$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$

이므로 주어진 방정식은

$(t^2-2)-2t+k=0$

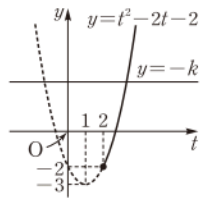
$\therefore t^2-2t-2=-k \qquad \cdots\cdots$ ㉠

주어진 방정식이 적어도 하나의 실근을 가지려면 $t\ge2$에서 방정식 ㉠이 적어도 하나의 실근을 가져야 한다.

이때 $t\ge2$에서 함수

$y=t^2-2t-2=(t-1)^2-3$

의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로



$-k\ge-2$

$\therefore k\le2$

답 $k\le2$

유형 15 지수부등식; 밑을 같게 할 수 있는 경우 본책 52쪽

부등식의 각 항의 밑을 같게 한 후 다음을 이용한다.

① $a>1$일 때, $\quad a^{f(x)}>a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x)>g(x)$

② $0<a<1$일 때, $\quad a^{f(x)}>a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x)<g(x)$

0334 $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{2x+1}<\left(\dfrac{1}{36}\right)^{3-2x}$에서

$\left(\dfrac{1}{6}\right)^{2x+1}<\left(\dfrac{1}{6}\right)^{6-4x}$

밑이 1보다 작으므로 $\quad 2x+1>6-4x$

$6x>5 \qquad \therefore x>\dfrac{5}{6}$

답 ②

0335 $10^{-f(x)}>10^{-g(x)}$에서 밑이 1보다 크므로

$-f(x)>-g(x)$

$\therefore f(x)<g(x)$

주어진 그래프에서 부등식 $f(x)<g(x)$의 해는

$-4<x<0$

답 $-4<x<0$

0336 $3^{2x+1}>(\sqrt{27})^x$에서 $\quad 3^{2x+1}>3^{\frac{3}{2}x}$

밑이 1보다 크므로 $\quad 2x+1>\dfrac{3}{2}x$

$\dfrac{1}{2}x>-1 \qquad \therefore x>-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠ $\quad \cdots$ ❶

$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x^2+1}\ge\left(\dfrac{4}{3}\right)^{3x-5}$에서 $\quad \left(\dfrac{3}{4}\right)^{x^2+1}\ge\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-3x+5}$

밑이 1보다 작으므로 $\quad x^2+1\le-3x+5$

$x^2+3x-4\le0, \quad (x+4)(x-1)\le0$

$\therefore -4\le x\le1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡ $\quad \cdots$ ❷

㉠, ㉡의 공통 범위는 $\quad -2<x\le1 \quad \cdots$ ❸

답 $-2<x\le1$

채점 기준	비율
❶ $3^{2x+1}>(\sqrt{27})^x$의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x^2+1}\ge\left(\dfrac{4}{3}\right)^{3x-5}$의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %

03 지수함수

0337 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+5} \le 2^{x^2-1} \le \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+5} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2}$

밑이 1보다 작으므로 $\quad x+5 \ge -x^2+1 \ge 2x-2$

(i) $x+5 \ge -x^2+1$에서 $\quad x^2+x+4 \ge 0$

이때 $x^2+x+4=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$이므로 이 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $-x^2+1 \ge 2x-2$에서 $\quad x^2+2x-3 \le 0$

$(x+3)(x-1) \le 0 \quad \therefore -3 \le x \le 1$

(i), (ii)에서 구하는 해는 $\quad -3 \le x \le 1$

답 $-3 \le x \le 1$

0338 $\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2} > 3^{ax}$에서 $\quad 3^{-2x^2} > 3^{ax}$

밑이 1보다 크므로 $\quad -2x^2 > ax$

$2x^2+ax<0, \quad x(2x+a)<0$

$\therefore -\frac{a}{2}<x<0$ ($\because a$는 자연수)

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 4이므로

$-5 \le -\frac{a}{2} < -4 \quad \therefore 8<a \le 10$

따라서 자연수 a는 9, 10이므로 구하는 합은

$9+10=19$

답 ②

0339 $10^{(x-2)^2} \le \sqrt{10^{5-x}}$에서 $\quad 10^{(x-2)^2} \le 10^{\frac{5-x}{2}}$

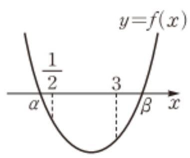
밑이 1보다 크므로 $\quad (x-2)^2 \le \frac{5-x}{2}$

$2(x^2-4x+4) \le 5-x, \quad 2x^2-7x+3 \le 0$

$(2x-1)(x-3) \le 0 \quad \therefore \frac{1}{2} \le x \le 3$

$\therefore A=\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{2} \le x \le 3\right\}$ ⋯ ❶

집합 B에서 $f(x)=x^2+ax+6$으로 놓고 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다. ⋯ ❷



$f\left(\frac{1}{2}\right) \le 0$에서 $\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{2}a+6 \le 0$

$\frac{1}{2}a \le -\frac{25}{4} \quad \therefore a \le -\frac{25}{2}$ ⋯⋯ ㉠

$f(3) \le 0$에서 $\quad 9+3a+6 \le 0$

$3a \le -15 \quad \therefore a \le -5$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $A \subset B$를 만족시키는 a의 값의 범위는

$a \le -\frac{25}{2}$ ⋯ ❸

답 $a \le -\frac{25}{2}$

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ $A \subset B$를 만족시키는 $y=x^2+ax+6$의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.	30 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

유형 16 지수부등식; a^x 꼴이 반복되는 경우

본책 53쪽

지수부등식 $pa^{2x}+qa^x+r>0$의 해는 $a^x=t(t>0)$로 치환하여 나타낸 t에 대한 이차부등식 $pt^2+qt+r>0$의 해를 이용하여 구한다.

0340 $3^{2x+1}-28 \cdot 3^x+9<0$에서

$3 \cdot (3^x)^2-28 \cdot 3^x+9<0$

$3^x=t(t>0)$로 놓으면 $\quad 3t^2-28t+9<0$

$(3t-1)(t-9)<0 \quad \therefore \frac{1}{3}<t<9$

즉 $3^{-1}<3^x<3^2$이고 밑이 1보다 크므로

$-1<x<2$

따라서 정수 x는 0, 1이므로 구하는 합은

$0+1=1$

답 ③

0341 $\left(\frac{1}{49}\right)^x-56 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^x+343 \le 0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{7}\right)^x\right\}^2-56 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^x+343 \le 0$

$\left(\frac{1}{7}\right)^x=t(t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-56t+343 \le 0$

$(t-7)(t-49) \le 0 \quad \therefore 7 \le t \le 49$

즉 $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1} \le \left(\frac{1}{7}\right)^x \le \left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$이고 밑이 1보다 작으므로

$-2 \le x \le -1$

따라서 $M=-1$, $m=-2$이므로

$M-m=1$

답 1

유형 17 지수부등식; 밑에 미지수가 있는 경우

본책 53쪽

$x^{f(x)}>x^{g(x)}(x>0)$ 꼴의 부등식은 다음과 같은 순서로 푼다.

(i) $x=1$일 때, 주어진 부등식이 성립하지 않음을 보인다.

(ii) $0<x<1$일 때, $f(x)<g(x)$를 만족시키는 x의 값의 범위를 구한다.

(iii) $x>1$일 때, $f(x)>g(x)$를 만족시키는 x의 값의 범위를 구한다.

(iv) (ii), (iii)에서 구한 해의 합집합이 주어진 부등식의 해이다.

0342 $x^{3x-2}>x^{x+4}$에서 $x=1$일 때 $1^1=1^5$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(i) $0<x<1$일 때, $3x-2<x+4$이므로 $\quad x<3$

그런데 $0<x<1$이므로 $\quad 0<x<1$

(ii) $x>1$일 때, $3x-2>x+4$이므로 $\quad x>3$

그런데 $x>1$이므로 $\quad x>3$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$0<x<1$ 또는 $x>3$

답 $0<x<1$ 또는 $x>3$

0343 $x^{x^2-8}<x^{2x}$에서 $x=1$일 때 $1^{-7}=1^2$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(i) $0<x<1$일 때, $x^2-8>2x$이므로 $\quad x^2-2x-8>0$

$(x+2)(x-4)>0 \quad \therefore x<-2$ 또는 $x>4$

그런데 $0<x<1$이므로 부등식을 만족시키는 x가 존재하지 않는다.

(ii) $x>1$일 때, $x^2-8<2x$이므로 $x^2-2x-8<0$
$(x+2)(x-4)<0$ $\therefore -2<x<4$
그런데 $x>1$이므로 $1<x<4$
(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $1<x<4$이므로
$\alpha+\beta=1+4=5$ 답 ⑤

0344 (i) $x^2-2x+1=1$이면 $1=1$이므로 주어진 부등식은 성립하지 않는다.
따라서 $x^2-2x+1\neq1$에서 $x^2-2x\neq0$, $x(x-2)\neq0$
$\therefore x\neq0,\ x\neq2$
(ii) $0<x^2-2x+1<1$일 때,
$0<(x-1)^2<1$에서 $-1<x-1<0$ 또는 $0<x-1<1$
$\therefore 0<x<1$ 또는 $1<x<2$ …… ㉠
주어진 부등식 $(x^2-2x+1)^{x-1}<(x^2-2x+1)^0$에서 밑이 1보다 작으므로
$x-1>0$ $\therefore x>1$
그런데 ㉠이므로 $1<x<2$
(iii) $x^2-2x+1>1$일 때,
$x(x-2)>0$에서 $x<0$ 또는 $x>2$ …… ㉡
주어진 부등식 $(x^2-2x+1)^{x-1}<(x^2-2x+1)^0$에서 밑이 1보다 크므로
$x-1<0$ $\therefore x<1$
그런데 ㉡이므로 $x<0$
이상에서 $S=\{x|x<0$ 또는 $1<x<2\}$이므로 집합 S의 원소가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

유형 18 지수부등식이 항상 성립할 조건 본책 53쪽

모든 실수 x에 대하여 지수부등식 $pa^{2x}+qa^x+r>0$이 성립하려면
$a^x=t(t>0)$로 치환하여 나타낸 t에 대한 부등식 $pt^2+qt+r>0$이 $t>0$에서 항상 성립해야 한다.

0345 $4^x-2^{x+2}+k\geq0$에서 $(2^x)^2-4\cdot2^x+k\geq0$
$2^x=t(t>0)$로 놓으면 $t^2-4t+k\geq0$
$\therefore (t-2)^2+k-4\geq0$
위의 부등식이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면
$k-4\geq0$ $\therefore k\geq4$
따라서 k의 최솟값은 4이다. 답 4

0346 $9^x-2a\cdot3^x+9\geq0$에서 $(3^x)^2-2a\cdot3^x+9\geq0$
$3^x=t(t>0)$로 놓으면 $t^2-2at+9\geq0$
$\therefore (t-a)^2-a^2+9\geq0$ …… ㉠ ··· ❶
부등식 ㉠이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면
(i) $a>0$일 때,
$-a^2+9\geq0$에서 $a^2-9\leq0$
$(a+3)(a-3)\leq0$ $\therefore -3\leq a\leq3$
그런데 $a>0$이므로 $0<a\leq3$ ··· ❷
(ii) $a\leq0$일 때,
$t=0$이면 ㉠에서 $9\geq0$이므로 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다. ··· ❸
(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는 $a\leq3$이므로 a의 최댓값은 3이다. ··· ❹
답 3

채점 기준	비율
❶ $3^x=t(t>0)$로 놓고 t에 대한 부등식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $a>0$일 때의 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ $a\leq0$일 때의 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ a의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

유형 19 지수방정식과 지수부등식의 실생활에의 활용 본책 54쪽

처음의 양을 p, 일정한 비율 a로 x시간 후 변화된 양을 y라 하면
➡ $y=pa^x$

0347 50마리의 박테리아가 4시간 후에 4050마리가 되므로
$50a^4=4050$, $a^4=81=3^4$
$\therefore a=3(\because a>0)$
따라서 한 마리의 박테리아가 x시간 후에 3^x마리가 되므로
$50\cdot3^x=36450$, $3^x=729=3^6$
$\therefore x=6$
즉 6시간 후에 36450마리가 된다. 답 6

0348 구매 후 x년이 지났을 때의 자동차의 중고 가격이 686만 원 이하가 되려면
$2000\times0.7^x\leq686$
$\therefore 0.7^x\leq\frac{686}{2000}=\frac{343}{1000}=0.7^3$
이때 밑이 1보다 작으므로 $x\geq3$
따라서 자동차의 중고 가격이 처음으로 686만 원 이하가 되는 것은 구매 후 3년이 지났을 때이다. 답 3

0349 수면에서의 빛의 밝기가 I_0 cd일 때, 수심이 x m인 곳에서의 빛의 밝기는 $\frac{1}{64}I_0$ cd이므로
$\frac{1}{64}I_0=I_0\cdot4^{-0.2x}$, $4^{-0.2x}=\frac{1}{64}=4^{-3}$
$-0.2x=-3$ $\therefore x=15$
따라서 수심은 15 m이다. 답 ③

0350 처음 빛의 양을 1이라 하면 필름을 n장 붙일 때 통과하는 빛의 양은 $\left(\frac{1}{4}\right)^n$이므로
$\left(\frac{1}{4}\right)^n\leq\frac{1}{512}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^9$
밑이 1보다 작으므로 $2n\geq9$
$\therefore n\geq4.5$
이때 n은 자연수이므로 n의 최솟값은 5이다.
즉 최소 5장을 붙여야 한다.
답 ③

0351 처음 ^{14}C의 양이 1 kg, 즉 1000 g일 때 x년 후에 남아 있는 ^{14}C의 양은 62.5 g이므로

$$1000\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}=62.5$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}=\frac{62.5}{1000}=\frac{1}{16}=\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$$

$$\frac{x}{5730}=4 \qquad \therefore x=22920$$

따라서 22920년 전의 유물이다. 답 22920

0352 두 비커 A, B에 들어 있는 소금물의 처음 농도를 a %라 하자. 갑이 작업을 1회 시행했을 때 소금의 양은 $\frac{1}{8}$로 줄고 소금물의 양은 변하지 않으므로 소금물의 농도는 $\frac{1}{8}a$ %가 된다.

따라서 갑이 작업을 12회 시행한 후 비커 A의 소금물의 농도는

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{12}a(\%)$$ ··· ❶

한편 을이 작업을 1회 시행했을 때 소금의 양은 $\frac{1}{4}$로 줄고 소금물의 양은 변하지 않으므로 소금물의 농도는 $\frac{1}{4}a$ %가 된다.

따라서 을이 작업을 n회 시행한 후 비커 B의 소금물의 농도는

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n}a(\%)$$ ··· ❷

두 소금물의 농도가 같으므로 $\left(\frac{1}{8}\right)^{12}a=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}a$에서

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{36}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}, \qquad 36=2n \qquad \therefore n=18$$ ··· ❸

답 18

채점 기준	비율
❶ 비커 A의 소금물의 농도를 구할 수 있다.	30 %
❷ 비커 B의 소금물의 농도를 구할 수 있다.	30 %
❸ n의 값을 구할 수 있다.	40 %

0353 전략 1을 기준으로 a, b의 값의 범위를 나누어 생각한다.

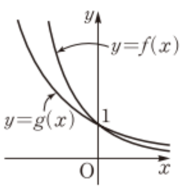
풀이 ㄱ. $g(-1)<1$에서 $\quad b^{-1}<b^{0} \quad \therefore b>1$

$f(-1)>1$에서 $\quad a^{-1}>a^{0} \quad \therefore 0<a<1$

$\therefore a<1<b$

ㄴ. $a<b<1$일 때, $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x>0$에서 $\quad f(x)<g(x)$

$\therefore f(a)<g(a)$



ㄷ. $ab=1$이면 $a=\frac{1}{b}$이고 $f(a)=a^{a}$,

$g(-b)=b^{-b}=\left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{1}{a}}=a^{\frac{1}{a}}$이므로

(i) $0<a<1$일 때,

$a<\frac{1}{a}$이므로 $\quad a^{a}>a^{\frac{1}{a}} \quad \therefore f(a)>g(-b)$

(ii) $a>1$일 때,

$a>\frac{1}{a}$이므로 $\quad a^{a}>a^{\frac{1}{a}} \quad \therefore f(a)>g(-b)$

(i), (ii)에서 $\quad f(a)>g(-b)$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

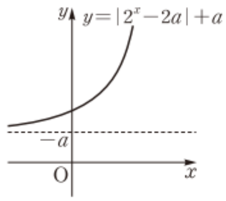
0354 전략 $a\le0$인 경우와 $a>0$인 경우로 나누어 그래프를 그린 후 직선 $y=10$과의 교점의 개수를 생각한다.

풀이 (i) $a\le0$일 때,

$2^{x}>2a$이므로

$y=|2^{x}-2a|+a=2^{x}-a$

따라서 $y=|2^{x}-2a|+a$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 $f(a)=2$를 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.



(ii) $a>0$일 때,

$2^{x}-2a=0$을 만족시키는 x의 값을 t라 하면

$t=\log_2 2a=1+\log_2 a$

$x\ge1+\log_2 a$이면

$y=|2^{x}-2a|+a=2^{x}-a$

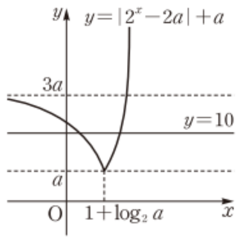
$x<1+\log_2 a$이면

$y=|2^{x}-2a|+a=-2^{x}+3a$

따라서 $y=|2^{x}-2a|+a$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 $f(a)=2$이려면

$a<10$, $3a>10$

$\therefore \frac{10}{3}<a<10$



(i), (ii)에서 $f(a)=2$를 만족시키는 정수 a는 4, 5, 6, 7, 8, 9이므로 구하는 합은

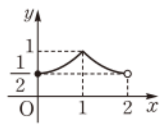
$4+5+6+7+8+9=39$ 답 39

0355 전략 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

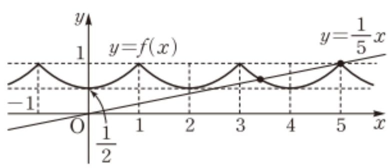
풀이 조건 (나)에서

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x-1} & (0\le x<1) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} & (1\le x<2) \end{cases}$$

따라서 $0\le x<2$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 조건 (가)에 의하여 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{5}x$는 두 점에서 만나므로 구하는 교점의 개수는 2이다. 답 2

0356 전략 $f(5k)=72$로 놓고 k를 p, q에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 두 점 A$(p,\ 2)$, B$(q,\ 3)$이 함수 $f(x)=a^{x}$의 그래프 위의 점이므로

$a^{p}=2$, $a^{q}=3$ ······ ㉠

$f(5k)=72$라 하면 $\quad g(f(5k))=g(72)=k$

$f(5k)=72$에서 $72=2^3\cdot 3^2$이므로 $\quad a^{5k}=2^3\cdot 3^2$

㉠에서 $2^3=a^{3p}$, $3^2=a^{2q}$이므로

$$a^{5k}=a^{3p}\cdot a^{2q}=a^{3p+2q}$$

즉 $5k=3p+2q$이므로 $\quad k=\frac{3p+2q}{5}$

따라서 $g(72)=\frac{3p+2q}{5}$이므로 $g(72)$의 값은 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점의 x좌표와 같다. 답 ④

0357 전략 $\overline{AC}=6$임을 이용하여 세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 구한다.

풀이 $a^{2x}=t$에서 $\quad 2x=\log_a t$

$$\therefore x=\frac{1}{2}\log_a t \qquad \therefore A\left(\frac{1}{2}\log_a t,\ t\right)$$

$a^{\frac{x}{2}}=t$에서 $\quad \frac{x}{2}=\log_a t$

$$\therefore x=2\log_a t \qquad \therefore C(2\log_a t,\ t)$$

따라서 $\overline{AC}=2\log_a t-\frac{1}{2}\log_a t=\frac{3}{2}\log_a t$이므로

$$\frac{3}{2}\log_a t=6, \qquad \log_a t=4$$

$$\therefore t=a^4$$

$$\therefore A(2,\ a^4),\quad C(8,\ a^4)$$

한편 점 B는 $y=a^x$의 그래프와 직선 $y=a^4$의 교점이므로

$$B(4,\ a^4)$$

이때 $D(2,\ a^2)$이고, 삼각형 ADB의 넓이가 6이므로

$$\frac{1}{2}\cdot(4-2)\cdot(a^4-a^2)=6$$

$$a^4-a^2-6=0, \qquad (a^2+2)(a^2-3)=0$$

$$\therefore a^2=3\ (\because a^2>0)$$

$E(8,\ a^8)$이므로 삼각형 BCE의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot(8-4)\cdot(a^8-a^4)=2\{(a^2)^4-(a^2)^2\}$$

$$=2(81-9)=144$$

답 144

0358 전략 함수의 그래프의 평행이동을 이용한다.

풀이 함수 $y=3^{-x+2}$의 그래프는 $y=3^{-x-2}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로

$$\overline{PQ}=4$$

$3^{-q+2}=k$에서 $-q+2=\log_3 k$이므로

$$q=2-\log_3 k$$

$3^{r-2}=k$에서 $r-2=\log_3 k$이므로

$$r=2+\log_3 k$$

$\overline{QR}=4$에서

$$(2+\log_3 k)-(2-\log_3 k)=4, \qquad \log_3 k=2$$

$$\therefore k=3^2=9$$

답 9

다른 풀이 두 함수 $y=3^{-x-2}$, $y=3^{x-2}$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $\overline{PQ}=\overline{QR}$를 만족시키는 점 Q는 y축 위의 점이다.

즉 $y=3^{-x+2}$의 그래프가 점 $(0,\ k)$를 지나야 하므로

$$k=3^2=9$$

0359 전략 $a>b>1$이고 $m>0$이면 $a^m>b^m$임을 이용한다.

풀이 $\sqrt{2}<\sqrt{3}$이므로 $\quad (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}<(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$

$$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}<(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}\cdot(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}=(\sqrt{6})^{\sqrt{3}}$$

$\therefore b<c$ $\qquad$ …… ㉠

한편

$$\frac{a}{b}=\frac{(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}\cdot(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}}{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}}=(\sqrt{2})^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{3})^{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

에서 $0<\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}<1$이고 $\sqrt{3}-\sqrt{2}>0$이므로

$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}<1 \qquad \therefore a<b$ $\qquad$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad a<b<c$

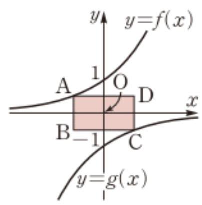
답 $a<b<c$

0360 전략 함수 $y=a^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=-a^{-x}$임을 이용한다.

풀이 함수 $y=2^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=-2^{-x}$이므로

$$g(x)=-2^{-x}$$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



사각형 ABCD는 직사각형이고 $\beta-\alpha=2$, 즉 $\beta=\alpha+2$이므로

$$\overline{AB}=f(\alpha)-g(\beta)=2^\alpha-(-2^{-\beta})$$

$$=2^\alpha+2^{-\beta}$$

$$=2^\alpha+2^{-\alpha-2}$$

이때 $2^\alpha>0$, $2^{-\alpha-2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2^\alpha+2^{-\alpha-2}\geq 2\sqrt{2^\alpha\cdot 2^{-\alpha-2}}$$

$$=2\sqrt{2^{-2}}=2\cdot\frac{1}{2}$$

$=1$(단, 등호는 $\alpha=-1$일 때 성립)

따라서 $\overline{AB}$의 길이의 최솟값이 1이므로 사각형 ABCD의 넓이의 최솟값은

$$\overline{AB}\cdot\overline{AD}=1\cdot 2=2$$

답 ②

0361 전략 세 점 D, E, C의 좌표를 각각 a로 나타낸다.

풀이 점 A의 좌표가 $(a,\ 8^a)$이므로

$$D(0,\ 8^a)$$

점 B의 좌표가 $(a,\ 4^a)$이고 점 E는 점 B와 y좌표가 같으므로

$8^x=4^a$에서 $\quad 2^{3x}=2^{2a} \quad \therefore x=\frac{2}{3}a$

$$\therefore E\left(\frac{2}{3}a,\ 4^a\right)$$

이때 세 점 D, E, C가 한 직선 위에 있으면 두 직선 DE, EC의 기울기가 서로 같으므로

$$\frac{4^a-8^a}{\frac{2}{3}a}=\frac{-4^a}{a-\frac{2}{3}a}, \qquad \frac{4^a-8^a}{2}=-4^a$$

$$3\cdot 4^a=8^a, \qquad 2^{\log_2 3}\cdot 2^{2a}=2^{3a}$$

$$\therefore 2^{2a+\log_2 3}=2^{3a}$$

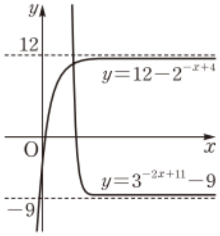
따라서 $2a+\log_2 3=3a$이므로 $\quad a=\log_2 3$

답 $\log_2 3$

0362 전략 두 그래프와 점근선 사이의 거리를 이용한다.

풀이 $y=3^{-2x+11}-9$

$=\left(\frac{1}{9}\right)^{x-\frac{11}{2}}-9$



에서 $y=3^{-2x+11}-9$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{11}{2}$만큼, y축의 방향으로 -9만큼 평행이동한 것이다.

또 $y=12-2^{-x+4}=-2^{-(x-4)}+12$에서 $y=12-2^{-x+4}$의 그래프는 $y=-2^{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 12만큼 평행이동한 것이다.

이때 $f(n)=f(n+1)$이 성립하려면 두 점 A_n, B_n과 각각의 그래프의 점근선 사이의 거리가 1 이하이어야 하므로

$3^{-2n+11}-9\le-8$, $12-2^{-n+4}\ge11$

$3^{-2n+11}\le1$, $2^{-n+4}\le1$

즉 $-2n+11\le0$, $-n+4\le0$이므로

$n\ge\frac{11}{2}$

따라서 자연수 n의 최솟값은 6이다. 답 ④

0363 전략 주어진 부등식의 각 항의 밑을 $\frac{1}{2}$로 통일한다.

풀이 $-2\le x\le2$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^2\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$\therefore \frac{1}{4}\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le4$ …… ㉠

(i) $a\cdot2^{-x}\le2^{-2x+1}$에서 $a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x\le2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$

양변을 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$으로 나누면 $a\le2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$, 즉 $\frac{a}{2}\le\left(\frac{1}{2}\right)^x$

㉠에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 최솟값이 $\frac{1}{4}$이므로 위의 부등식이 성립하려면

$\frac{a}{2}\le\frac{1}{4}$ $\therefore a\le\frac{1}{2}$

(ii) $2^{-2x+1}\le b\cdot8^{-x}$에서 $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}\le b\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$

양변을 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$으로 나누면 $2\le b\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$

$b\le0$이면 부등식이 성립하지 않으므로 $b>0$

양변을 b로 나누면 $\frac{2}{b}\le\left(\frac{1}{2}\right)^x$

㉠에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 최솟값이 $\frac{1}{4}$이므로 위의 부등식이 성립하려면

$\frac{2}{b}\le\frac{1}{4}$ $\therefore b\ge8$

(i), (ii)에서 $b-a\ge8-\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$ 답 ②

0364 전략 먼저 주어진 식에 $t=15$, $W_0=w_0$, $W=3w_0$을 대입하여 지수방정식을 푼다.

풀이 $t=15$일 때 $W_0=w_0$, $W=3w_0$이므로

$3w_0=\frac{w_0}{2}10^{15a}(1+10^{15a})$, $10^{30a}+10^{15a}=6$

$\therefore 10^{30a}+10^{15a}-6=0$

$10^{15a}=X(X>0)$로 놓으면

$X^2+X-6=0$, $(X+3)(X-2)=0$

$\therefore X=2$ ($\because X>0$)

$\therefore 10^{15a}=2$

$t=30$일 때의 기대자산은

$\frac{w_0}{2}10^{30a}(1+10^{30a})=\frac{w_0}{2}(10^{15a})^2\{1+(10^{15a})^2\}$

$=\frac{w_0}{2}\cdot2^2(1+2^2)$

$=10w_0$

$\therefore k=10$

답 ②

0365 전략 $\overline{A_kB_{k+1}}$, $\overline{A_{k+1}B_{k+1}}$의 길이를 k에 대한 식으로 나타내어 $S(k)$를 구한다.

풀이 $A_k(k, 2^k)$, $B_{k+1}(k+1, 2^k)$, $A_{k+1}(k+1, 2^{k+1})$에서

$\overline{A_kB_{k+1}}=(k+1)-k=1$, $\overline{A_{k+1}B_{k+1}}=2^{k+1}-2^k=2^k$

$\therefore S(k)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2^k=2^{k-1}$ ··· ❶

$\therefore S(1)S(2)S(3)\cdots S(10)=2^0\cdot2^1\cdot2^2\cdot\cdots\cdot2^9$

$=2^{1+2+\cdots+9}=2^{45}$ ··· ❷

따라서 $f(a)=2^{45}$이므로 $a=45$ ··· ❸

답 45

채점 기준	비율
❶ $S(k)$를 지수함수로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $S(1)S(2)S(3)\cdots S(10)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

0366 전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭임을 이용하여 m의 값을 구한다.

풀이 $y=a^x$과 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프는 직선 $x=0$에 대하여 대칭이므로 두 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 $y=a^{x-m}$과 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-m}$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

$\therefore m=3$ ··· ❶

따라서 $f(x)=a^{x-3}$, $g(x)=a^{3-x}$이므로

$f(2)=a^{2-3}=\frac{1}{a}$, $g(2)=a$

즉 $P\left(2, \frac{1}{a}\right)$, $Q(2, a)$이고 $\overline{PQ}=\frac{3}{2}$이므로

$a-\frac{1}{a}=\frac{3}{2}$, $2a^2-3a-2=0$

$(2a+1)(a-2)=0$ $\therefore a=2$($\because a>1$) ··· ❷

$\therefore am=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ m의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ am의 값을 구할 수 있다.	10 %

0367 전략 주어진 식과 $f(1)$의 값을 이용하여 $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{x}{3}\right)$, $f\left(\frac{x}{6}\right)$를 각각 구한다.

풀이 $f(x)$의 치역이 양의 실수 전체의 집합이므로 $f(x)>0$
$f(1)=64$이고 $f(ab)=\{f(b)\}^a$이므로

$f(x)=f(1\cdot x)=\{f(1)\}^x=64^x=2^{6x}$

따라서 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{6\cdot\frac{1}{2}}=2^3=8$, $f\left(\frac{x}{3}\right)=2^{6\cdot\frac{x}{3}}=2^{2x}$,

$f\left(\frac{x}{6}\right)=2^{6\cdot\frac{x}{6}}=2^x$이므로 주어진 방정식은

$8\cdot 2^{2x}-2^x=0$ ··· ❶

$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$8t^2-t=0,\quad t(8t-1)=0\quad \therefore t=\frac{1}{8}\,(\because t>0)$

즉 $2^x=\frac{1}{8}$이므로 $x=-3$ ··· ❷

답 $x=-3$

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 밑이 2인 지수방정식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ 방정식의 해를 구할 수 있다.	40 %

0368 전략 점 P_k의 좌표를 이용하여 $\triangle OP_kQ_k$의 넓이를 k에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 점 P_k는 곡선 $y=3^{x-2}$과 직선 $x=k$의 교점이므로

$P_k(k,\ 3^{k-2})$

$y=3^{x-2}$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$\overline{P_kQ_k}=2$

$\therefore S_k=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3^{k-2}=3^{k-2}$ ··· ❶

$S_kS_{k+1}>S_{10}$에서

$3^{k-2}\cdot 3^{k-1}>3^{10-2},\quad 3^{2k-3}>3^8$

밑이 1보다 크므로

$2k-3>8,\quad 2k>11\quad \therefore k>\frac{11}{2}$ ··· ❷

따라서 자연수 k의 최솟값은 6이다. ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ S_k를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 자연수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

0369 전략 해가 $a<x<b$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-a)(x-b)<0$임을 이용한다.

풀이 $4^x+a\cdot 2^x+b<0$에서 $(2^x)^2+a\cdot 2^x+b<0$

$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $t^2+at+b<0$ ······ ㉠

이때 $-1<x<0$에서 $2^{-1}<2^x<2^0$, 즉 $\frac{1}{2}<t<1$이고 이것이 ㉠의 해와 같으므로

$a=-\left(\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$ ··· ❶

따라서 $\left(\frac{1}{4}\right)^x+3a\left(\frac{1}{2}\right)^x+4b<0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+2<0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=s\,(s>0)$로 놓으면

$s^2-\frac{9}{2}s+2<0$ ··· ❷

$2s^2-9s+4<0,\quad (2s-1)(s-4)<0$

$\therefore \frac{1}{2}<s<4$

즉 $\frac{1}{2}<\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$이고 밑이 1보다 작으므로

$-2<x<1$ ··· ❸

답 $-2<x<1$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\left(\frac{1}{4}\right)^x+3a\left(\frac{1}{2}\right)^x+4b<0$을 이차부등식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ 부등식 $\left(\frac{1}{4}\right)^x+3a\left(\frac{1}{2}\right)^x+4b<0$의 해를 구할 수 있다.	20 %

0370 전략 $2x$시간 후의 세균 수를 거듭제곱으로 나타낸 후 세균 수의 합을 이용하여 지수부등식을 세운다.

풀이 배양액 A에 있는 세균 수는 1시간마다 3배가 되므로 2시간마다 9배가 된다.
$2x$시간 후 배양액 A, B에 있는 세균 수는 각각

$10\cdot 9^x,\ 90\cdot 3^x$

이때 세균 수의 합이 1620마리 이상이 되려면

$10\cdot 9^x+90\cdot 3^x\geq 1620$ ··· ❶

$\therefore (3^x)^2+9\cdot 3^x-162\geq 0$

$3^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $t^2+9t-162\geq 0$ ··· ❷

$(t+18)(t-9)\geq 0\quad \therefore t\geq 9\,(\because t>0)$

즉 $3^x\geq 9$에서 $x\geq 2$

따라서 최소 4시간이 지나야 한다. ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 지수부등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 지수부등식을 이차부등식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ 최소 몇 시간이 지나야 하는지 구할 수 있다.	40 %

04 로그함수

0371 답 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$

0372 답 $y=3^x$

0373 (1) $f(1)=\log_2 1=0$ (2) $f(2)=\log_2 2=1$

(3) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_2\frac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1$

(4) $f(\sqrt{2})=\log_2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

답 (1) 0 (2) 1 (3) -1 (4) $\frac{1}{2}$

0374 (1) $f(1)=\log_{\frac{1}{3}}1=0$ (2) $f\left(\frac{1}{3}\right)=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}=1$

(3) $f(3)=\log_{\frac{1}{3}}3=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=-1$

(4) $f(\sqrt{3})=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$

답 (1) 0 (2) 1 (3) -1 (4) $-\frac{1}{2}$

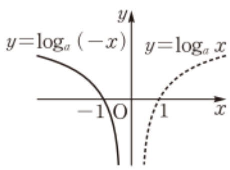
0375 ㄱ. 정의역은 양의 실수 전체의 집합이다.
ㄷ. $y=\log_3 x$의 그래프는 점 $(3,\ 1)$을 지난다.
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ이다. 답 ㄴ, ㄹ, ㅁ

0376 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

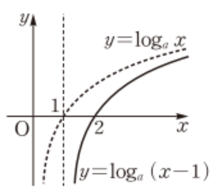
$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$ 답 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$

0377 $\log_4 25=\log_{2^2}5^2=\log_2 5$
이때 함수 $y=\log_2 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로
$\log_2 5<\log_2 12$, 즉 $\log_4 25<\log_2 12$ 답 $\log_4 25<\log_2 12$

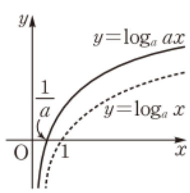
0378 $y=\log_a(-x)$의 그래프는
$y=\log_a x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
답 풀이 참조



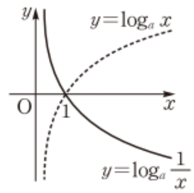
0379 $y=\log_a(x-1)$의 그래프는
$y=\log_a x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. 답 풀이 참조



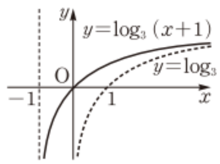
0380 $y=\log_a ax=\log_a a+\log_a x$
$=1+\log_a x$
따라서 $y=\log_a ax$의 그래프는 $y=\log_a x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
답 풀이 참조



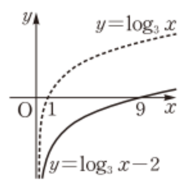
0381 $y=\log_a\frac{1}{x}=\log_a x^{-1}=-\log_a x$
따라서 $y=\log_a\frac{1}{x}$의 그래프는 $y=\log_a x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
답 풀이 참조



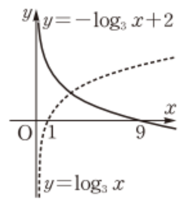
0382 $y=\log_3(x+1)$의 그래프는
$y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 정의역은 $\{x|x>-1\}$
점근선의 방정식은 $x=-1$
답 풀이 참조



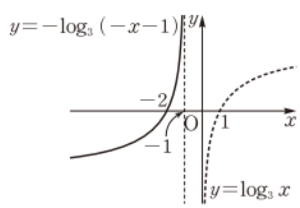
0383 $y=\log_3 x-2$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 정의역은 $\{x|x>0\}$
점근선의 방정식은 $x=0$
답 풀이 참조



0384 $y=-\log_3 x+2$의 그래프는
$y=\log_3 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 정의역은 $\{x|x>0\}$
점근선의 방정식은 $x=0$
답 풀이 참조



0385 $y=-\log_3(-x-1)=-\log_3\{-(x+1)\}$
에서 $y=-\log_3(-x-1)$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 정의역은 $\{x|x<-1\}$
점근선의 방정식은 $x=-1$
답 풀이 참조



0386 함수 $y=\log_2 x$에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $2\le x\le 128$에서
$x=128$일 때 최대이고 최댓값은 $\log_2 128=\log_2 2^7=7$
$x=2$일 때 최소이고 최솟값은 $\log_2 2=1$
답 최댓값: 7, 최솟값: 1

0387 함수 $y=\log x$에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로
$\frac{1}{10}\le x\le 1000$에서

$x=1000$일 때 최대이고 최댓값은 $\log 1000=\log 10^3=3$

$x=\frac{1}{10}$일 때 최소이고 최솟값은 $\log \frac{1}{10}=\log 10^{-1}=-1$

답 최댓값: 3, 최솟값: -1

0388 함수 $y=-\log_5(x-1)=\log_{\frac{1}{5}}(x-1)$에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $6\le x\le 126$에서

$x=6$일 때 최대이고 최댓값은 $-\log_5 5=-1$

$x=126$일 때 최소이고 최솟값은 $-\log_5 125=-\log_5 5^3=-3$

답 최댓값: -1, 최솟값: -3

0389 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}3x+1$에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $\frac{1}{3}\le x\le \frac{8}{3}$에서

$x=\frac{1}{3}$일 때 최대이고 최댓값은 $\log_{\frac{1}{2}}1+1=0+1=1$

$x=\frac{8}{3}$일 때 최소이고 최솟값은 $\log_{\frac{1}{2}}8+1=-3+1=-2$

답 최댓값: 1, 최솟값: -2

0390 진수의 조건에서

$2x-1>0 \quad \therefore x>\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\log_2(2x-1)=3$에서 $2x-1=2^3 \quad \therefore x=\frac{9}{2}$

$x=\frac{9}{2}$는 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다. 답 $x=\frac{9}{2}$

0391 밑의 조건에서 $2x>0,\ 2x\ne 1$

$\therefore x>0,\ x\ne\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\log_{2x}16=2$에서 $16=(2x)^2,\quad 2x=\pm 4$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

이때 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=2$ 답 $x=2$

0392 진수의 조건에서

$5x-1>0,\ 2x+3>0 \quad \therefore x>\frac{1}{5}$ …… ㉠

$\log_3(5x-1)=\log_3(2x+3)$에서

$5x-1=2x+3,\quad 3x=4 \quad \therefore x=\frac{4}{3}$

$x=\frac{4}{3}$는 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다. 답 $x=\frac{4}{3}$

0393 진수의 조건에서

$2-x>0,\ 2x+5>0 \quad \therefore -\frac{5}{2}<x<2$ …… ㉠

$\log(2-x)=1-\log(2x+5)$에서

$\log(2-x)+\log(2x+5)=1$

$\therefore \log(2-x)(2x+5)=\log 10$

즉 $(2-x)(2x+5)=10$이므로

$-2x^2-x+10=10,\quad 2x^2+x=0$

$x(2x+1)=0 \quad \therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=0$

$x=-\frac{1}{2}$, $x=0$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

답 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=0$

0394 진수의 조건에서

$x+1>0,\ 3x+7>0 \quad \therefore x>-1$ …… ㉠

$2\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=\log_{\frac{1}{3}}(3x+7)$에서

$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)^2=\log_{\frac{1}{3}}(3x+7)$

즉 $(x+1)^2=3x+7$이므로 $x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=3$

이때 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=3$ 답 $x=3$

0395 진수의 조건에서

$3x+1>0,\ x+5>0 \quad \therefore x>-\frac{1}{3}$ …… ㉠

$\log_2(3x+1)=\log_4(x+5)$에서

$\log_2(3x+1)=\frac{1}{2}\log_2(x+5)$

$2\log_2(3x+1)=\log_2(x+5)$

$\therefore \log_2(3x+1)^2=\log_2(x+5)$

즉 $(3x+1)^2=x+5$이므로 $9x^2+5x-4=0$

$(x+1)(9x-4)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{4}{9}$

이때 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=\frac{4}{9}$ 답 $x=\frac{4}{9}$

0396 $(\log x)^2-\log x^4=0$에서 $(\log x)^2-4\log x=0$

$\log x=t$로 놓으면

$t^2-4t=0,\quad t(t-4)=0 \quad \therefore t=0$ 또는 $t=4$

따라서 $\log x=0$ 또는 $\log x=4$이므로

$x=1$ 또는 $x=10^4=10000$

답 $x=1$ 또는 $x=10000$

0397 $\log_3 x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$(t+1)(t-3)=5,\quad t^2-2t-8=0$

$(t+2)(t-4)=0 \quad \therefore t=-2$ 또는 $t=4$

따라서 $\log_3 x=-2$ 또는 $\log_3 x=4$이므로

$x=3^{-2}=\frac{1}{9}$ 또는 $x=3^4=81$

답 $x=\frac{1}{9}$ 또는 $x=81$

0398 진수의 조건에서

$2x+1>0,\ 5x-2>0 \quad \therefore x>\frac{2}{5}$ …… ㉠

$\log_2(2x+1)<\log_2(5x-2)$에서 밑이 1보다 크므로

$2x+1<5x-2,\quad 3x>3$

$\therefore x>1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x>1$ 답 $x>1$

0399 진수의 조건에서

$x>0,\ 2-x>0 \quad \therefore 0<x<2$ …… ㉠

04 로그함수

$\log_{\frac{1}{2}} x \ge \log_{\frac{1}{2}} (2-x)$에서 밑이 1보다 작으므로

$x \le 2-x, \quad 2x \le 2 \quad \therefore x \le 1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0 < x \le 1$ 답 $0 < x \le 1$

0400 진수의 조건에서

$x+1>0,\ 2x+5>0 \quad \therefore x>-1$ …… ㉠

$2\log_3(x+1) \ge \log_3(2x+5)$에서

$\log_3(x+1)^2 \ge \log_3(2x+5)$

밑이 1보다 크므로 $(x+1)^2 \ge 2x+5$

$x^2-4 \ge 0, \quad (x+2)(x-2) \ge 0$

$\therefore x \le -2$ 또는 $x \ge 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x \ge 2$ 답 $x \ge 2$

0401 진수의 조건에서

$12-2x>0,\ x-3>0 \quad \therefore 3<x<6$ …… ㉠

$\log_5(12-2x) \ge -\log_{\frac{1}{5}}(x-3)$에서

$\log_5(12-2x) \ge \log_5(x-3)$

밑이 1보다 크므로 $12-2x \ge x-3$

$3x \le 15 \quad \therefore x \le 5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $3<x\le 5$ 답 $3<x\le 5$

0402 진수의 조건에서

$3x+1>0 \quad \therefore x>-\dfrac{1}{3}$ …… ㉠

$\log_4(3x+1)<\dfrac{1}{2}$에서 $\log_4(3x+1)<\log_4 2$

밑이 1보다 크므로

$3x+1<2 \quad \therefore x<\dfrac{1}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{3}$

답 $-\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{3}$

0403 진수의 조건에서 $x^2>0$이므로 $x \ne 0$ …… ㉠

$\log_5 x^2<1$에서 $\log_5 x^2<\log_5 5$

밑이 1보다 크므로

$x^2<5 \quad \therefore -\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-\sqrt{5}<x<0$ 또는 $0<x<\sqrt{5}$

답 $-\sqrt{5}<x<0$ 또는 $0<x<\sqrt{5}$

0404 $x^2+x+3=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}>0$이므로 진수는 항상 양수이다.

$\log_{\frac{1}{3}}(x^2+x+3)>-2$에서 $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+x+3)>\log_{\frac{1}{3}} 9$

밑이 1보다 작으므로

$x^2+x+3<9, \quad x^2+x-6<0$

$(x+3)(x-2)<0 \quad \therefore -3<x<2$ 답 $-3<x<2$

0405 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$\log x=t$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2-t\le 12, \quad t^2-t-12\le 0$

$(t+3)(t-4)\le 0 \quad \therefore -3\le t\le 4$

즉 $-3\le \log x\le 4$이므로

$\log\dfrac{1}{10^3}\le \log x\le \log 10^4$

밑이 1보다 크므로 $\dfrac{1}{1000}\le x\le 10000$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\dfrac{1}{1000}\le x\le 10000$ 답 $\dfrac{1}{1000}\le x\le 10000$

0406 진수의 조건에서

$x>0,\ x^3>0 \quad \therefore x>0$ …… ㉠

$(\log_2 x)^2-\log_2 x^3>0$에서 $(\log_2 x)^2-3\log_2 x>0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2-3t>0, \quad t(t-3)>0 \quad \therefore t<0$ 또는 $t>3$

즉 $\log_2 x<0$ 또는 $\log_2 x>3$이므로

$\log_2 x<\log_2 1$ 또는 $\log_2 x>\log_2 2^3$

밑이 1보다 크므로 $x<1$ 또는 $x>8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<1$ 또는 $x>8$ 답 $0<x<1$ 또는 $x>8$

유형 01 로그함수의 함숫값

본책 62쪽

로그함수 $f(x)=\log_a x\ (a>0,\ a\ne 1)$에서 $f(p)$의 값을 구할 때에는 $f(x)$에 x 대신 p를 대입하고

$\log_a p=q \Longleftrightarrow a^q=p$

와 로그의 성질을 이용한다.

0407 $f(9)=f(81)$에서

$\log_3 9+k\log_9 9=\log_3 81+k\log_{81} 9$

$\log_3 3^2+k=\log_3 3^4+k\log_{3^4} 3^2$

$2+k=4+\dfrac{k}{2}, \quad \dfrac{k}{2}=2 \quad \therefore k=4$ 답 ④

0408 $f(-3)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-3}=(2^{-2})^{-3}=2^6$이므로

$(g\circ f)(-3)=g(f(-3))=g(2^6)=\log_2 2^6=6$ 답 ③

0409 $a=\log_3 6,\ b=\log_3 9$이므로

$f(k)=\dfrac{a+b}{3}=\dfrac{\log_3 6+\log_3 9}{3}=\dfrac{1}{3}\log_3 54$

즉 $\log_3 k=\dfrac{1}{3}\log_3 54$이므로

$k=\sqrt[3]{54}=3\sqrt[3]{2}$ 답 ②

0410 $f(2)=\log_a 4+1=5$이므로 $\log_a 4=4, \quad a^4=4$

$\therefore a=\sqrt{2}\ (\because a>0)$ ··· ❶

따라서 $f(x)=\log_{\sqrt{2}}(x+2)+1$이므로

$f(14)=\log_{\sqrt{2}} 16+1=\log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^4+1=2\cdot 4+1=9$ ··· ❷

답 9

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(14)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0411 $f(x)=\log_2\left(1-\frac{1}{x+1}\right)=\log_2\frac{x}{x+1}$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$

$=\log_2\frac{1}{2}+\log_2\frac{2}{3}+\log_2\frac{3}{4}+\cdots+\log_2\frac{n}{n+1}$

$=\log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n+1}\right)$

$=\log_2\frac{1}{n+1}$

즉 $\log_2\frac{1}{n+1}=-5$이므로 $\quad 2^{-5}=\frac{1}{n+1}$

$\therefore n=31$ 답 31

0412 $f_2(x)=f_1(x^3)+f_1(x)=\log_2 x^3+\log_2 x$

$=3\log_2 x+\log_2 x=4\log_2 x$

$f_3(x)=f_2(x^3)+f_2(x)=4\log_2 x^3+4\log_2 x$

$=12\log_2 x+4\log_2 x=16\log_2 x$

$f_4(x)=f_3(x^3)+f_3(x)$

$=16\log_2 x^3+16\log_2 x$

$=48\log_2 x+16\log_2 x=64\log_2 x$ ⋯ ❶

$\therefore \log_4\{f_4(16)\}=\log_4(64\log_2 16)=\log_4(64\cdot 4)$

$=\log_4 4^4=4$ ⋯ ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ $f_4(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ $\log_4\{f_4(16)\}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

유형 02 로그함수의 성질 본책 63쪽

로그함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$에 대하여
① 정의역: 양의 실수 전체의 집합
  치역: 실수 전체의 집합
② $a>1$일 때, x의 값이 증가 ➡ y의 값도 증가
  $0<a<1$일 때, x의 값이 증가 ➡ y의 값은 감소
③ 그래프의 점근선: 직선 $x=0$(y축)

0413 ⑤ $y=\log_{\frac{1}{a}} x=-\log_a x$이므로 $y=\log_a x$의 그래프와 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이다. 답 ⑤

0414 ㄱ. 일대일함수이므로 $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다.
ㄴ. 밑이 1보다 크므로 $x_1>x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다.
ㄷ. $y=-\log\frac{1}{x}=-\log x^{-1}=\log x$이고 정의역이 같으므로 두 함수의 그래프는 일치한다.
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0415 $y=\log(25-x^2)$에서 $25-x^2>0$이므로

$x^2<25, \qquad -5<x<5$

$\therefore A=\{x\mid -5<x<5\}$

$y=\log(\log x)$에서 $x>0$이고 $\log x>0$이므로

$x>1 \qquad \therefore B=\{x\mid x>1\}$

$\therefore A\cap B=\{x\mid 1<x<5\}$

따라서 $1<x<5$를 만족시키는 정수는 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$2+3+4=9$

답 9

0416 $y=\log_a bx$의 그래프에서 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로 $\quad a>1$

또 $x=1$일 때 $y<0$이므로

$\log_a b<0 \qquad \therefore 0<b<1$

따라서 함수 $y=\log_b ax$는 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하고, $x=1$일 때 $y=\log_b a<0$이므로 그래프의 개형은 ②와 같다.

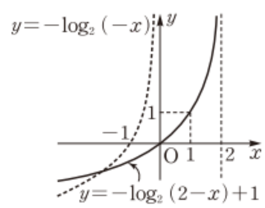
답 ②

유형 03~04 로그함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동 본책 63, 64쪽

로그함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$의 그래프를
① x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동
  ➡ $y=\log_a(x-m)+n$
② x축에 대하여 대칭이동 ➡ $y=-\log_a x$
③ y축에 대하여 대칭이동 ➡ $y=\log_a(-x)$
④ 원점에 대하여 대칭이동 ➡ $y=-\log_a(-x)$
⑤ 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동 ➡ $y=a^x$

0417 $y=-\log_2(2-x)+1=-\log_2\{-(x-2)\}+1$의 그래프는 $y=-\log_2(-x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y=-\log_2(-x)$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 $y=-\log_2(2-x)+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



④ x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가한다.

답 ④

0418 $g(x)=\log_2(x-3)+2$이므로

$g(19)=\log_2 16+2=4+2=6$ 답 ⑤

0419 ㄱ. $y=\log_{\frac{1}{10}} x=-\log x$의 그래프는 $y=\log x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.
ㄴ. $y=\log\frac{10}{x}=\log 10-\log x=1-\log x$의 그래프는 $y=\log x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

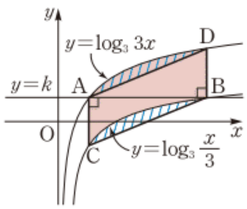
04 로그함수

ㄷ. $y=\log x^2=2\log|x|$의 그래프는 $y=\log x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

ㄹ. $y=\log_{\frac{1}{10}}(2-x)=-\log(2-x)=-\log\{-(x-2)\}$의 그래프는 $y=\log x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 $y=\log x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

0420 $y=\log_3 3x=\log_3\left(9\cdot\frac{x}{3}\right)=2+\log_3\frac{x}{3}$이므로 $y=\log_3 3x$의 그래프는 $y=\log_3\frac{x}{3}$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. 즉 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 넓이는 평행사변형 ACBD의 넓이와 같다. 따라서 구하는 넓이는



$\overline{AC}\cdot\overline{AB}=2\cdot 5=10$ 답 10

0421 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-2$이므로 $a=2$

또 이 그래프가 점 $(1, 0)$을 지나므로

$0=\log_3(1+2)+b$ $\therefore b=-1$

$\therefore a+b=1$ 답 1

0422 $y=\log_2(x+a)+b$의 그래프가 두 점 $(-1, 0)$, $(1, 2)$를 지나므로

$\log_2(a-1)+b=0$ ······ ㉠

$\log_2(a+1)+b=2$ ······ ㉡

㉠−㉡을 하면 $\log_2\frac{a-1}{a+1}=-2$

즉 $\frac{a-1}{a+1}=\frac{1}{4}$이므로 $4a-4=a+1$ $\therefore a=\frac{5}{3}$

따라서 $y=\log_2\left(x+\frac{5}{3}\right)+b$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\frac{5}{3}$ 답 $x=-\frac{5}{3}$

참고 $a=\frac{5}{3}$를 ㉠에 대입하면 $\log_2\frac{2}{3}+b=0$

$\therefore b=-\log_2\frac{2}{3}$

0423 $y=\log_5 ax$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\log_5 ax-2$ $\therefore y=\log_5\frac{ax}{25}$ ··· ❶

$y=\log_5\frac{a}{25}x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=-\log_5\frac{ax}{25}$ $\therefore y=\log_5\frac{25}{ax}$ ··· ❷

따라서 $\frac{25}{a}=\frac{5}{2}$이므로 $a=10$ ··· ❸

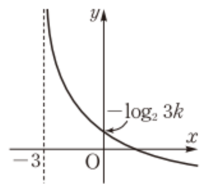
답 10

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	50 %
❷ 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	10 %

0424 $y=-\log_2 k(x+3)=-\log_2(x+3)-\log_2 k$

이 함수의 그래프는 $y=-\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 $-\log_2 k$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$-\log_2 3k\ge 0$, $\log_2\frac{1}{3k}\ge\log_2 1$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{3k}\ge 1$

$\therefore k\le\frac{1}{3}$ ($\because k>0$)

따라서 k의 최댓값은 $\frac{1}{3}$이다. 답 ②

유형 05 로그함수의 그래프 위의 점 본책 65쪽

로그함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$의 그래프가 점 (m, n)을 지난다.

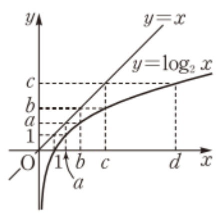
➡ $n=\log_a m \iff a^n=m$

0425 $\log_2 c=b$, $\log_2 b=a$이므로

$a-b=\log_2 b-\log_2 c=\log_2\frac{b}{c}$

따라서 $2^{a-b}=\frac{b}{c}$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{a-b}=\frac{c}{b}$ 답 ②



다른 풀이 $\log_2 a=1$이므로 $a=2$

$\log_2 b=a=2$이므로 $b=2^2=4$

$\log_2 c=b=4$이므로 $c=2^4=16$

$\log_2 d=c=16$이므로 $d=2^{16}$

$\therefore\left(\frac{1}{2}\right)^{a-b}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2-4}=4=\frac{c}{b}$

0426 $y=5^x$의 그래프가 점 $B(1, b)$를 지나므로 $b=5$

$y=\log_5 x$의 그래프가 점 $A(a, 5)$를 지나므로

$5=\log_5 a$ $\therefore a=5^5$

$\therefore\log_5 ab=\log_5(5^5\cdot 5)=6$ 답 6

0427 점 A의 좌표를 (a, b)라 하면 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 3이므로 $b=3$

즉 $3=\log_2 a$에서 $a=2^3=8$

따라서 $A(8, 3)$이므로 $D(11, 3)$ 답 $(11, 3)$

0428 $\overline{OP}=\log_{\sqrt{3}}p$, $\overline{OQ}=\log_3 q$이므로 $\overline{OP}:\overline{OQ}=3:2$에서

$\log_{\sqrt{3}}p:\log_3 q=3:2$, $2\log_3 p:\log_3 q=3:2$

$4\log_3 p=3\log_3 q$,　　$\log_3 p^4=\log_3 q^3$

$\therefore p^4=q^3$

답 ⑤

0429 $y=\log_{\frac{1}{8}} x=-\frac{1}{3}\log_2 x$에서

$x=\frac{1}{4}$일 때, $y=-\frac{1}{3}\log_2 \frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\log_2 2^{-2}=\frac{2}{3}$이므로

$A\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right)$

$x=2$일 때, $y=-\frac{1}{3}\log_2 2=-\frac{1}{3}$이므로　$C\left(2, -\frac{1}{3}\right)$ ··· ❶

$y=\log_{\sqrt{2}} x=2\log_2 x$에서

$x=\frac{1}{4}$일 때, $y=2\log_2 \frac{1}{4}=2\log_2 2^{-2}=-4$이므로　$B\left(\frac{1}{4}, -4\right)$

$x=2$일 때, $y=2\log_2 2=2$이므로　$D(2, 2)$ ··· ❷

이때 사각형 ABCD는 사다리꼴이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{14}{3}+\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{7}{4}=\frac{49}{8}$ ··· ❸

답 $\frac{49}{8}$

채점 기준	비율
❶ 두 점 A, C의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 두 점 B, D의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ □ABCD의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

0430 세 점 A, B, C의 좌표는 각각

$(3, \log_a 3)$, $(3, \log_b 3)$, $(3, -\log_a 3)$

$\overline{AB}:\overline{BC}=1:4$에서 $4\overline{AB}=\overline{BC}$이므로

$4(\log_a 3-\log_b 3)=\log_b 3+\log_a 3$

$3\log_a 3=5\log_b 3$

$\frac{3}{\log_3 a}=\frac{5}{\log_3 b}$,　$\frac{\log_3 a}{\log_3 b}=\frac{3}{5}$

$\log_b a=\frac{3}{5}$　$\therefore g(a)=\frac{3}{5}$

답 ③

유형 06 로그함수의 역함수

본책 66쪽

① $y=\log_a(x-p)+q$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 역함수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) x를 y에 대하여 푼다. ➡ $x=a^{y-q}+p$

(ii) x와 y를 바꾼다. ➡ $y=a^{x-q}+p$

② 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때　$f(p)=q \Longleftrightarrow g(q)=p$

0431 $y=\log_4(x-2)+3$에서　$y-3=\log_4(x-2)$

$x-2=4^{y-3}$　$\therefore x=4^{y-3}+2$

x와 y를 서로 바꾸면　$y=4^{x-3}+2=2^{2x-6}+2$

따라서 $a=2$, $b=-6$, $c=2$이므로

$a+b+c=-2$

답 -2

0432 $f(x)$는 $y=\log_3(x+a)$의 역함수이고 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(3, 4)$를 지나므로 $y=\log_3(x+a)$의 그래프는 점 $(4, 3)$을 지난다.

즉 $3=\log_3(4+a)$이므로

$4+a=3^3$　$\therefore a=23$

답 ①

다른 풀이 $f(x)$는 $y=\log_3(x+a)$의 역함수이다.

$y=\log_3(x+a)$에서　$x+a=3^y$　$\therefore x=3^y-a$

따라서 $f(x)=3^x-a$이고 $f(3)=4$이므로

$3^3-a=4$　$\therefore a=23$

0433 $(g\circ f)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

따라서 $g(2)=k$로 놓으면 $f(k)=2$이므로

$\log_3(k^3+1)=2$,　$k^3+1=3^2$

$k^3=8$　$\therefore k=2$ ··· ❶

즉 $g(2)=2$이므로

$(g\circ g\circ g)(2)=g(g(g(2)))$

$=g(g(2))$

$=g(2)=2$ ··· ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ $g(2)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $(g\circ g\circ g)(2)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0434 $g(x)$는 $y=\log_2 x$의 역함수이므로　$g(x)=2^x$

점 A는 $y=g(x)$의 그래프와 y축의 교점이므로　$A(0, 1)$

점 B의 y좌표가 1이므로 $1=\log_2 x$에서　$x=2$

따라서 $B(2, 1)$이므로　$\overline{AB}=2$

점 C의 x좌표가 2이므로　$C(2, 2^2)$, 즉 $C(2, 4)$

점 D의 y좌표가 4이므로 $4=\log_2 x$에서　$x=16$

따라서 $D(16, 4)$이므로　$\overline{CD}=16-2=14$

$\therefore \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}=\frac{14}{2}=7$

답 7

0435 $y=\log_5 x+2$에서　$y-2=\log_5 x$

$\therefore x=5^{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면　$y=5^{x-2}$

$\therefore g(x)=5^{x-2}$

① $g(a)+g(-a)=5^{a-2}+5^{-a-2}=5^{-2}(5^a+5^{-a})$

② $g(a)-g(-a)=5^{a-2}-5^{-a-2}=5^{-2}(5^a-5^{-a})$

③ $g(a)+g\left(\frac{1}{a}\right)=5^{a-2}+5^{\frac{1}{a}-2}=5^{-2}(5^a+5^{\frac{1}{a}})$

④ $g(a)g\left(\frac{1}{a}\right)=5^{a-2}\cdot 5^{\frac{1}{a}-2}=5^{a+\frac{1}{a}-4}$

⑤ $g(a)g(-a)=5^{a-2}\cdot 5^{-a-2}=5^{-4}$

따라서 a의 값에 관계없이 값이 일정한 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0436 함수 $y=\log_a x+b$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 $y=\log_a x+b$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

이때 두 교점의 x좌표가 1, 2이므로 $y=\log_a x+b$의 그래프는 두 점 $(1, 1)$, $(2, 2)$를 지난다.

$1=\log_a 1+b$에서　　$b=1$

$2=\log_a 2+1$에서　　$1=\log_a 2$　　$\therefore a=2$

$\therefore ab=2$

답 2

유형 07 로그함수를 이용한 수의 대소 비교

본책 66쪽

주어진 수의 밑을 같게 한 후 다음과 같은 로그함수의 성질을 이용한다.

① $a>1$일 때,　　$m<n \Longleftrightarrow \log_a m<\log_a n$

② $0<a<1$일 때,　　$m<n \Longleftrightarrow \log_a m>\log_a n$

0437 $A=2\log_5 3=\log_5 9$

$B=3=\log_5 5^3=\log_5 125$

$C=\log_{25}115=\log_{5^2}115=\frac{1}{2}\log_5 115=\log_5\sqrt{115}$

이때 $9<\sqrt{115}<125$이고 밑이 1보다 크므로

$\log_5 9<\log_5\sqrt{115}<\log_5 125$, 즉 $A<C<B$

답 ②

0438 ㄱ. $0<a<1$이므로　　$a^a>a^b$

ㄴ. $b>1$이고 $a>a^2$이므로

$\log_b a>\log_b a^2$

ㄷ. $\log_a b-\log_b a=\frac{\log b}{\log a}-\frac{\log a}{\log b}$

$=\frac{(\log b)^2-(\log a)^2}{\log a\log b}$

$=\frac{(\log b+\log a)(\log b-\log a)}{\log a\log b}$

이때 $\log a<0<\log b<-\log a$이므로

$\log b+\log a<0$, $\log b-\log a>0$, $\log a\log b<0$

$\therefore \log_a b-\log_b a>0$, 즉 $\log_a b>\log_b a$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ㄷ

0439 $a<b<1$의 각 변에 밑이 a인 로그를 취하면

$\log_a 1<\log_a b<\log_a a$　　$\therefore 0<\log_a b<1$　　$\cdots\cdots$ ㉠

또 $a<b<1$의 각 변에 밑이 b인 로그를 취하면

$\log_b 1<\log_b b<\log_b a$　　$\therefore 0<1<\log_b a$

$\log_a\frac{b}{a}=\log_a b-\log_a a=\log_a b-1$이고 ㉠에서

$-1<\log_a b-1<0$　　$\therefore -1<\log_a\frac{b}{a}<0$

$\log_a\frac{a}{b}=\log_a a-\log_a b=1-\log_a b$이고 ㉠에서

$-1<-\log_a b<0$,　　$0<1-\log_a b<1$

$\therefore 0<\log_a\frac{a}{b}<1$

따라서 가장 큰 값은 $\log_b a$, 가장 작은 값은 $\log_a\frac{b}{a}$이다.

답 ②

0440 $1<x<4$의 각 변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 1<\log_2 x<\log_2 4$　　$\therefore 0<\log_2 x<2$

(i) $A-B=\log_2 x^2-(\log_2 x)^2=2\log_2 x-(\log_2 x)^2$

$=\log_2 x(2-\log_2 x)>0$

$\therefore A>B$

(ii) $0<\log_2 x\le 1$일 때,

$0<(\log_2 x)^2\le 1$, $\log_2(\log_2 x)\le 0$

$\therefore (\log_2 x)^2>\log_2(\log_2 x)$　　$\cdots\cdots$ ㉠

$1<\log_2 x<2$일 때,

$1<(\log_2 x)^2<4$, $0<\log_2(\log_2 x)<1$

$\therefore (\log_2 x)^2>\log_2(\log_2 x)$　　$\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서　　$B>C$

(i), (ii)에서　　$A>B>C$

답 ①

유형 08 로그함수의 최대·최소 ; $y=\log_a(px^2+qx+r)$ 꼴

본책 67쪽

로그함수 $y=\log_a(px^2+qx+r)$에 대하여 $f(x)=px^2+qx+r$로 놓고 주어진 범위에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한 후 a의 값의 범위에 따라 다음을 이용한다.

① $a>1$일 때

⇒ $f(x)$가 최대일 때 y도 최대, $f(x)$가 최소일 때 y도 최소

② $0<a<1$일 때

⇒ $f(x)$가 최대일 때 y는 최소, $f(x)$가 최소일 때 y는 최대

0441 $f(x)=-x^2+2x+7$로 놓으면

$f(x)=-(x-1)^2+8$

$f(-1)=4$, $f(1)=8$, $f(2)=7$이므로 $-1\le x\le 2$에서

$4\le f(x)\le 8$

$y=\log_2 f(x)$에서 밑이 1보다 크므로 함수 $y=\log_2 f(x)$는

$f(x)=8$일 때 최대이고 최댓값은　　$\log_2 8=3$

$f(x)=4$일 때 최소이고 최솟값은　　$\log_2 4=2$

따라서 구하는 곱은　　$3\cdot 2=6$

답 ③

0442 진수의 조건에서　　$3-x>0$, $x+5>0$

$\therefore -5<x<3$

$y=\log_{\frac{1}{2}}(3-x)+\log_{\frac{1}{2}}(x+5)=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2-2x+15)$이므로

$f(x)=-x^2-2x+15$로 놓으면

$f(x)=-(x+1)^2+16$

$f(-1)=16$이므로 $-5<x<3$에서 $f(x)$의 최댓값은 16이다.

$y=\log_{\frac{1}{2}}f(x)$에서 밑이 1보다 작으므로 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}f(x)$는 $f(x)=16$일 때 최소이다.

따라서 구하는 최솟값은

$\log_{\frac{1}{2}}16=\log_{2^{-1}}2^4=-4$

답 -4

0443 $f(x)=x^2-3x+4$로 놓으면　　$f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

$f(-1)=8$, $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{7}{4}$, $f(4)=8$이므로 $-1\le x\le 4$에서

$\frac{7}{4}\le f(x)\le 8$　　$\cdots$ ❶

$y=\log_a f(x)$에서 $0<a<1$이므로 함수 $y=\log_a f(x)$는 $f(x)=8$일 때 최솟값 -3을 갖는다.

즉 $\log_a 8=-3$이므로

$a^{-3}=8 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$ ⋯ ❷

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %

0444 $x+y=8$에서 $\quad y=8-x\ (0<x<8)$

$$\begin{aligned}\therefore \log_2 x+\log_2 y&=\log_2 xy=\log_2 x(8-x)\\&=\log_2(-x^2+8x)\\&=\log_2\{-(x-4)^2+16\}\end{aligned}$$

밑이 1보다 크므로 주어진 식은 $-(x-4)^2+16$의 값이 최대일 때 최댓값을 갖는다.

$-(x-4)^2+16$은 $x=4$일 때 최댓값 16을 가지므로

$a=4,\ M=\log_2 16=4$

$\therefore a+M=8$

답 8

다른 풀이 $\log_2 x+\log_2 y=\log_2 xy$에서 밑이 1보다 크므로 $\log_2 xy$의 값은 xy의 값이 최대일 때 최댓값을 갖는다.

$x>0,\ y>0$이므로 $\quad x+y\ge 2\sqrt{xy}$

즉 $8\ge 2\sqrt{xy}$이므로 $\quad xy\le 16$

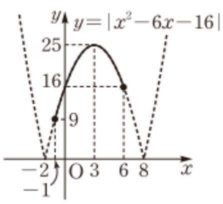
이때 등호는 $x=y=4$일 때 성립하므로 $\quad a=4,\ M=\log_2 16=4$

$\therefore a+M=8$

0445 $f(x)=|x^2-6x-16|$으로 놓으면

$f(x)=|(x+2)(x-8)|=|(x-3)^2-25|$

따라서 $-1\le x\le 6$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$9\le f(x)\le 25$

$y=\log_5 f(x)$에서 밑이 1보다 크므로 함수 $y=\log_5 f(x)$는 $f(x)=25$일 때 최대이고 최댓값은 $\quad \log_5 25=2$

답 ④

유형 09 로그함수의 최대·최소; $\log_a x$ 꼴이 반복되는 경우 본책 68쪽

함수 $y=p(\log_a x)^2+q\log_a x+r$의 최대·최소는 $\log_a x=t$로 치환하여 나타낸 t에 대한 이차함수 $y=pt^2+qt+r$의 최대·최소를 이용하여 구한다.

0446 $\log_2 x=t$로 놓으면 $1\le x\le 16$에서

$\log_2 1\le \log_2 x\le \log_2 16 \qquad \therefore 0\le t\le 4$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t+3=(t-1)^2+2$

이므로 $t=4$일 때 최대이고 최댓값은 $\quad M=11$

$t=1$일 때 최소이고 최솟값은 $\quad m=2$

$\therefore M-m=9$

답 ④

0447 $y=(\log_3 x)^2+a\log_{\frac{1}{3}} x+b$에서

$y=(\log_3 x)^2-a\log_3 x+b$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $\quad y=t^2-at+b$ ⋯ ❶

$x=\frac{1}{9}$, 즉 $t=\log_3\frac{1}{9}=-2$에서 최솟값 -1을 갖는 t에 대한 이차함수는

$y=(t+2)^2-1=t^2+4t+3$ ⋯ ❷

따라서 $a=-4,\ b=3$이므로

$ab=-12$ ⋯ ❸

답 -12

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수를 t에 대한 이차함수로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 주어진 조건을 만족시키는 t에 대한 이차함수를 세울 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0448 $y=\log_5 25x\cdot\log_5\frac{x}{5}=(\log_5 x+2)(\log_5 x-1)$

$=(\log_5 x)^2+\log_5 x-2$

$\log_5 x=t$로 놓으면 $\frac{1}{5}\le x\le 125$에서

$\log_5\frac{1}{5}\le\log_5 x\le\log_5 125 \qquad \therefore -1\le t\le 3$

이때 주어진 함수는

$y=t^2+t-2=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

이므로 $t=3$일 때 최대이고 최댓값은 $\quad 10$

$t=-\frac{1}{2}$일 때 최소이고 최솟값은 $\quad -\frac{9}{4}$

따라서 구하는 합은 $\quad 10+\left(-\frac{9}{4}\right)=\frac{31}{4}$

답 ①

유형 10 로그함수의 최대·최소; $y=x^{f(x)}$ 꼴 본책 68쪽

$y=x^{f(x)}$ 꼴의 함수의 최대·최소는 양변에 로그를 취하여 구한다.

0449 $y=x^{-4+\log_2 x}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log_2 y&=\log_2 x^{-4+\log_2 x}=(-4+\log_2 x)\log_2 x\\&=(\log_2 x)^2-4\log_2 x\end{aligned}$$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $1\le x\le 8$에서

$\log_2 1\le\log_2 x\le\log_2 8 \qquad \therefore 0\le t\le 3$

이때 주어진 함수는 $\quad \log_2 y=t^2-4t=(t-2)^2-4$

따라서 $\log_2 y$는 $t=0$일 때 최댓값 0, $t=2$일 때 최솟값 -4를 가지므로

$\log_2 y=0$에서 $\quad y=1 \qquad \therefore M=1$

$\log_2 y=-4$에서 $\quad y=2^{-4}=\frac{1}{16} \qquad \therefore m=\frac{1}{16}$

$\therefore Mm=\frac{1}{16}$

답 $\frac{1}{16}$

0450 $y=\frac{x^2}{x^{\log x}}=x^{2-\log x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log y&=\log x^{2-\log x}=(2-\log x)\log x\\&=-(\log x)^2+2\log x\end{aligned}$$

04 로그함수

$\log x=t$로 놓으면 주어진 함수는

$\log y=-t^2+2t=-(t-1)^2+1$

따라서 $\log y$는 $t=1$일 때 최댓값 1을 가지므로

$\log x=1$에서 $\quad x=10 \quad \therefore a=10$

$\log y=1$에서 $\quad y=10 \quad \therefore b=10$

$\therefore a+b=20$

답 20

유형 11 로그함수의 최대·최소 ; 산술평균과 기하평균의 관계 이용

본책 68쪽

함수 $y=\log_a b+\log_b a$ $(\log_a b>0,\ \log_b a>0)$의 최대·최소

➡ 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log_a b+\log_b a\ge 2\sqrt{\log_a b\cdot\log_b a}=2$

임을 이용한다. (단, 등호는 $\log_a b=\log_b a$일 때 성립)

0451 $y=\log_4 x+\log_x 256=\log_4 x+\dfrac{1}{\log_{256}x}$

$=\log_4 x+\dfrac{4}{\log_4 x}$

이때 $x>1$에서 $\log_4 x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log_4 x+\dfrac{4}{\log_4 x}\ge 2\sqrt{\log_4 x\cdot\dfrac{4}{\log_4 x}}$

$=4$ (단, 등호는 $\log_4 x=2$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

답 ③

0452 $\dfrac{1}{4}<x<25$에서 $\log 4x>0$, $\log\dfrac{25}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log 4x+\log\dfrac{25}{x}\ge 2\sqrt{\log 4x\cdot\log\dfrac{25}{x}}$

이때 $\log 4x+\log\dfrac{25}{x}=\log\left(4x\cdot\dfrac{25}{x}\right)=\log 100=2$이므로

$2\ge 2\sqrt{\log 4x\cdot\log\dfrac{25}{x}}, \quad \sqrt{\log 4x\cdot\log\dfrac{25}{x}}\le 1$

$\therefore 0<\log 4x\cdot\log\dfrac{25}{x}\le 1$

즉 $\log 4x\cdot\log\dfrac{25}{x}$의 최댓값은 1이므로 $\quad b=1$ ··· ❶

한편 등호는 $\log 4x=\log\dfrac{25}{x}$, 즉 $4x=\dfrac{25}{x}$일 때 성립하므로

$x^2=\dfrac{25}{4} \quad \therefore x=\dfrac{5}{2}\ \left(\because \dfrac{1}{4}<x<25\right)$

따라서 $a=\dfrac{5}{2}$이므로 ··· ❷

$a+b=\dfrac{7}{2}$ ··· ❸

답 $\dfrac{7}{2}$

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 12 로그방정식; 밑을 같게 할 수 있는 경우

본책 68쪽

방정식의 각 항의 밑을 같게 한 다음

$\log_a f(x)=\log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x)=g(x)$

$(a>0,\ a\ne1,\ f(x)>0,\ g(x)>0)$

임을 이용한다.

0453 진수의 조건에서

$x>0,\ (x+2)^2>0 \quad \therefore x>0$ ······ ㉠

$\log_2 x+\log_4(x+2)^2=3$에서

$\log_2 x+\log_2(x+2)=3$

$\therefore \log_2(x^2+2x)=\log_2 8$

즉 $x^2+2x-8=0$이므로 $\quad (x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

이때 ㉠에 의하여 $\quad x=2$

답 $x=2$

0454 진수의 조건에서

$5x+5>0,\ 3x-1>0 \quad \therefore x>\dfrac{1}{3}$ ······ ㉠

$\log\sqrt{5x+5}=1-\dfrac{1}{2}\log(3x-1)$에서

$\dfrac{1}{2}\log(5x+5)+\dfrac{1}{2}\log(3x-1)=1$

$\log(5x+5)(3x-1)=2$

$\therefore \log(15x^2+10x-5)=\log 100$

즉 $15x^2+10x-5=100$이므로 $\quad 3x^2+2x-21=0$

$(x+3)(3x-7)=0 \quad \therefore x=-3$ 또는 $x=\dfrac{7}{3}$

이때 ㉠에 의하여 $\quad x=\dfrac{7}{3}$

따라서 $a=\dfrac{7}{3}$이므로 $\quad 3a=7$

답 ④

0455 밑과 진수의 조건에서

$x^2-4x+4>0,\ x^2-4x+4\ne1,\ 2-x>0$

$\therefore x<1$ 또는 $1<x<2$ ······ ㉠ ··· ❶

(i) $x^2-4x+4=9$일 때,

$x^2-4x-5=0, \quad (x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

이때 ㉠에 의하여 $\quad x=-1$ ··· ❷

(ii) $2-x=1$일 때,

$x=1$

$x=1$은 ㉠을 만족시키지 않는다. ··· ❸

(i), (ii)에서 $\quad x=-1$ ··· ❹

답 $x=-1$

채점 기준	비율
❶ 밑과 진수의 조건을 이용하여 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ 밑이 같을 때의 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 진수가 1일 때의 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ 해를 구할 수 있다.	10 %

0456 $\log_2\{\log_5(x^2+y^2)\}=1$에서

$\log_5(x^2+y^2)=2 \qquad \therefore x^2+y^2=25$ ······ ㉠

$\log_{x^2}y^2=1$에서 $\qquad y^2=x^2$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2x^2=25, \qquad x^2=\frac{25}{2} \qquad \therefore x=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$

㉡에서 $\qquad y^2=x^2=\frac{25}{2} \qquad \therefore y=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$

따라서 주어진 연립방정식의 해 (x, y)는

$\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ 또는 $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ 또는

$\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ 또는 $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

의 4개이다.

답 ④

0457 $\log_2 x+\log_3 y=6$에서 $\qquad \frac{\log x}{\log 2}+\frac{\log y}{\log 3}=6$

$\log_3 x\cdot\log_2 y=8$에서

$\frac{\log x}{\log 3}\cdot\frac{\log y}{\log 2}=8$, 즉 $\frac{\log x}{\log 2}\cdot\frac{\log y}{\log 3}=8$

$\frac{\log x}{\log 2}=X$, $\frac{\log y}{\log 3}=Y$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} X+Y=6 \\ XY=8 \end{cases}$

이 연립방정식을 풀면 $\qquad X=2, Y=4$ 또는 $X=4, Y=2$

이때 $x>y$이면 $X>Y$이므로 $\qquad X=4, Y=2$

즉 $\frac{\log x}{\log 2}=4$, $\frac{\log y}{\log 3}=2$이므로

$\log x=4\log 2$, $\log y=2\log 3$

$\therefore x=2^4=16, y=3^2=9$

따라서 $\alpha=16, \beta=9$이므로

$\alpha+\beta=25$

답 25

유형 13~14 로그방정식; $\log_a x$ 꼴이 반복되는 경우 본책 69, 70쪽

(1) $\log_a x$ 꼴이 반복되는 로그방정식은 $\log_a x=t$로 치환하여 t에 대한 방정식을 푼다.

(2) 방정식 $p(\log_a x)^2+q\log_a x+r=0$의 두 근이 α, β일 때, $\log_a x=t$로 치환하여 나타낸 t에 대한 이차방정식 $pt^2+qt+r=0$의 두 근이 $\log_a\alpha$, $\log_a\beta$임을 이용한다.

0458 $\log_4 x^2+\log_x 4-3=0$에서

$2\log_4 x+\frac{1}{\log_4 x}-3=0$

$\log_4 x=t\ (t\neq0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$2t+\frac{1}{t}-3=0, \qquad 2t^2-3t+1=0$

$(2t-1)(t-1)=0 \qquad \therefore t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=1$

즉 $\log_4 x=\frac{1}{2}$ 또는 $\log_4 x=1$이므로

$x=4^{\frac{1}{2}}=2$ 또는 $x=4$

따라서 두 근의 곱은 $\qquad 2\cdot4=8$

답 ④

0459 $\log_{\frac{1}{3}}x^3+(\log_3 x)^2-10=0$에서

$(\log_3 x)^2-3\log_3 x-10=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $\qquad t^2-3t-10=0$

$(t+2)(t-5)=0 \qquad \therefore t=-2$ 또는 $t=5$ ··· ❶

즉 $\log_3 x=-2$ 또는 $\log_3 x=5$이므로

$x=3^{-2}$ 또는 $x=3^5$ ··· ❷

$\therefore \log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha=\log_{3^{-2}}3^5+\log_{3^5}3^{-2}$

$=-\frac{5}{2}-\frac{2}{5}=-\frac{29}{10}$ ··· ❸

답 $-\frac{29}{10}$

채점 기준	비율
❶ t에 대한 방정식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❷ x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0460 $2^{\log x}=x^{\log 2}$이므로 주어진 방정식은

$(2^{\log x})^2-2^{\log x}-12=0$

$2^{\log x}=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-t-12=0, \qquad (t+3)(t-4)=0$

$\therefore t=4\ (\because t>0)$

즉 $2^{\log x}=4=2^2$이므로 $\qquad \log x=2$

$\therefore x=10^2=100$

답 ⑤

0461 $\log_3\frac{x}{y}=(\log_3 x-\log_3 y)^2$에서

$\log_3\frac{x}{y}=\left(\log_3\frac{x}{y}\right)^2 \qquad \therefore \log_3\frac{x}{y}\left(\log_3\frac{x}{y}-1\right)=0$

이때 $x\neq y$에서 $\log_3\frac{x}{y}\neq0$이므로

$\log_3\frac{x}{y}-1=0, \qquad \frac{x}{y}=3$

$\therefore x=3y$

$x=3y$를 $x^2+y^2=40$에 대입하면 $\qquad 9y^2+y^2=40$

$10y^2=40, \qquad y^2=4$

$\therefore y=\pm2$

이때 진수의 조건에서 $x>0, y>0$이므로 $\qquad y=2$

$\therefore x=3\cdot2=6$

답 $x=6, y=2$

0462 $(\log_3 9x)^2-3\log_3 9x^2=0$에서

$(2+\log_3 x)^2-3(2+2\log_3 x)=0$ ······ ㉠

$\log_3 x=t$로 놓으면 $\qquad (2+t)^2-3(2+2t)=0$

$\therefore t^2-2t-2=0$ ······ ㉡

방정식 ㉠의 두 근을 α, β라 하면 방정식 ㉡의 두 근은 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=2$

즉 $\log_3\alpha\beta=2$이므로

$\alpha\beta=3^2=9$ 답 ③

0463 $\log\frac{x}{4}\cdot\log\frac{x}{3}=1$에서

$(\log x-\log 4)(\log x-\log 3)=1$

$(\log x)^2-(\log 3+\log 4)\log x+\log 4\cdot\log 3-1=0$

$\therefore (\log x)^2-\log 12\cdot\log x+\log 4\cdot\log 3-1=0$

$\log x=t$로 놓으면

$t^2-t\log 12+\log 4\cdot\log 3-1=0$

이 이차방정식의 두 근이 $\log\alpha$, $\log\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log\alpha+\log\beta=\log 12$, $\quad\log\alpha\beta=\log 12$

$\therefore \alpha\beta=12$ 답 12

0464 $\log_2 x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-4t-6=0$

이 방정식의 두 근이 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta=4$, $\log_2\alpha\cdot\log_2\beta=-6$

$\therefore (\log_\alpha 2)^2+(\log_\beta 2)^2$

$=\frac{1}{(\log_2\alpha)^2}+\frac{1}{(\log_2\beta)^2}$

$=\frac{(\log_2\alpha)^2+(\log_2\beta)^2}{(\log_2\alpha)^2(\log_2\beta)^2}$

$=\frac{(\log_2\alpha+\log_2\beta)^2-2\log_2\alpha\cdot\log_2\beta}{(\log_2\alpha\cdot\log_2\beta)^2}$

$=\frac{4^2-2\cdot(-6)}{(-6)^2}=\frac{7}{9}$ 답 $\frac{7}{9}$

0465 주어진 방정식의 두 근을 α, β라 하면 $\quad\alpha\beta=3$

$\log_3 x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2+kt-6=0$

이 방정식의 해는 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=-k$, $\quad\log_3\alpha\beta=-k$

$\therefore k=-\log_3 3=-1$ 답 -1

유형 15 양변에 로그를 취하는 방정식 본책 70쪽

(1) $x^{\log_a f(x)}=g(x)$ 꼴: 양변에 밑이 a인 로그를 취한다.

➡ $\log_a f(x)\cdot\log_a x=\log_a g(x)$

(2) $a^{f(x)}=b^{g(x)}$ 꼴$(a\neq b)$: 양변에 밑이 c인 로그를 취한다.

➡ $f(x)\log_c a=g(x)\log_c b$

0466 $x^{\log x}=\frac{100}{x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}=\log\frac{100}{x}$, $\quad(\log x)^2=\log 100-\log x$

$\therefore (\log x)^2+\log x-2=0$

$\log x=t$로 놓으면

$t^2+t-2=0$, $\quad(t+2)(t-1)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=1$

즉 $\log x=-2$ 또는 $\log x=1$이므로

$x=10^{-2}=\frac{1}{100}$ 또는 $x=10$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 곱은

$\frac{1}{100}\cdot 10=\frac{1}{10}$ 답 $\frac{1}{10}$

0467 $5^{2x}=2^{4-2x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$2x\log 5=(4-2x)\log 2$, $\quad 2x(\log 5+\log 2)=4\log 2$

$2x\log 10=4\log 2$ $\quad\therefore x=2\log 2=\log 4$ 답 ①

0468 $x^{\log_2 x}-8x^2=0$, 즉 $x^{\log_2 x}=8x^2$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2 8x^2$, $\quad(\log_2 x)^2=\log_2 8+\log_2 x^2$

$\therefore (\log_2 x)^2-2\log_2 x-3=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-2t-3=0$, $\quad(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

즉 $\log_2 x=-1$ 또는 $\log_2 x=3$이므로

$x=2^{-1}=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2^3=8$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$\frac{1}{2}+8=\frac{17}{2}$ 답 ④

0469 $(4x)^{\log 4}-(3x)^{\log 3}=0$, 즉 $(4x)^{\log 4}=(3x)^{\log 3}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 4\cdot\log 4x=\log 3\cdot\log 3x$

$\log 4(\log 4+\log x)=\log 3(\log 3+\log x)$

$(\log 4)^2+\log 4\cdot\log x=(\log 3)^2+\log 3\cdot\log x$

$(\log 4-\log 3)\log x=(\log 3)^2-(\log 4)^2$

$\therefore \log x=\frac{-(\log 4+\log 3)(\log 4-\log 3)}{\log 4-\log 3}$

$=-(\log 4+\log 3)=-\log 12=\log\frac{1}{12}$

$\therefore x=\frac{1}{12}$ 답 $x=\frac{1}{12}$

유형 16 로그부등식; 밑을 같게 할 수 있는 경우 본책 71쪽

부등식의 각 항의 밑을 같게 한 후 다음을 이용한다.

① $a>1$일 때, $\quad\log_a f(x)>\log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x)>g(x)>0$

② $0<a<1$일 때, $\quad\log_a f(x)>\log_a g(x) \Longleftrightarrow 0<f(x)<g(x)$

0470 진수의 조건에서

$x+3>0$, $1-x>0$ $\quad\therefore -3<x<1$ ⋯⋯ ㉠

$\log_2(x+3)-\log_2(1-x)-1>0$에서

$\log_2(x+3)>\log_2(1-x)+1$

$\therefore \log_2(x+3)>\log_2 2(1-x)$

밑이 1보다 크므로 $x+3>2(1-x)$, $3x>-1$

$\therefore x>-\frac{1}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-\frac{1}{3}<x<1$

따라서 $\alpha=-\frac{1}{3}$, $\beta=1$이므로 $\alpha+\beta=\frac{2}{3}$

답 ②

0471 진수의 조건에서

$x+1>0$, $x+6>0$ $\therefore x>-1$ …… ㉠

$\log_{0.5}(x+1)+\log_{0.5}(x+6)>\log_{0.5}14$에서

$\log_{0.5}(x+1)(x+6)>\log_{0.5}14$

$\therefore \log_{0.5}(x^2+7x+6)>\log_{0.5}14$

밑이 1보다 작으므로 $x^2+7x+6<14$

$x^2+7x-8<0$, $(x+8)(x-1)<0$

$\therefore -8<x<1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-1<x<1$

답 ③

0472 $\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-1}\ge\left(\frac{4}{3}\right)^{x-3}$에서 $\left(\frac{4}{3}\right)^{1-3x}\ge\left(\frac{4}{3}\right)^{x-3}$

밑이 1보다 크므로 $1-3x\ge x-3$

$4x\le4$ $\therefore x\le1$ …… ㉠ ⋯ ❶

$\log_2(x^2-2x+5)<3$에서 $x^2-2x+5=(x-1)^2+4>0$

즉 모든 실수 x가 진수의 조건을 만족시킨다.

$\log_2(x^2-2x+5)<\log_2 8$에서 밑이 1보다 크므로

$x^2-2x+5<8$, $x^2-2x-3<0$

$(x+1)(x-3)<0$ $\therefore -1<x<3$ …… ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-1<x\le1$ ⋯ ❸

답 $-1<x\le1$

채점 기준	비율
❶ 지수부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ 로그부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %

0473 조건 ㈎의 진수의 조건에서

$2^x-13>0$, $2^x>13$

$\therefore x>\log_2 13$ …… ㉠

$\log_3(2^x-13)<5$에서 $\log_3(2^x-13)<\log_3 243$

밑이 1보다 크므로 $2^x-13<243$

$2^x<256$, $2^x<2^8$ $\therefore x<8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\log_2 13<x<8$

조건 ㈏의 진수의 조건에서

$x>0$, $x-3>0$ $\therefore x>3$ …… ㉢

$\log_2 x+\log_2(x-3)\ge2$에서 $\log_2 x(x-3)\ge\log_2 4$

밑이 1보다 크므로 $x(x-3)\ge4$

$x^2-3x-4\ge0$, $(x+1)(x-4)\ge0$

$\therefore x\le-1$ 또는 $x\ge4$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면 $x\ge4$

따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는 $4\le x<8$이므로 정수 x는 4, 5, 6, 7의 4개이다.

답 4

0474 $3^{x(x-2)}\le3^{2x-3}$에서 밑이 1보다 크므로

$x(x-2)\le2x-3$, $x^2-4x+3\le0$

$(x-1)(x-3)\le0$ $\therefore 1\le x\le3$

$\therefore A=\{x\,|\,1\le x\le3\}$

$\log_2(x^2+ax+b)\le\log_2 2x$에서 밑이 1보다 크므로

$x^2+ax+b\le2x$

$\therefore x^2+(a-2)x+b\le0$ …… ㉠

부등식 ㉠의 해가 $1\le x\le3$이어야 하므로

$a-2=-4$, $b=3$ $\therefore a=-2$, $b=3$

$\therefore ab=-6$

답 -6

유형 17 로그부등식; 진수에 로그가 있는 경우 (본책 71쪽)

$\log_a(\log_b x)>k$ ($a>0$, $a\ne1$, $b>0$, $b\ne1$) 꼴의 부등식은 다음을 이용하여 푼다.

① 진수의 조건에서 $\log_b x>0$

② $a>1$일 때 ➡ $\log_b x>a^k$

$0<a<1$일 때 ➡ $\log_b x<a^k$

0475 진수의 조건에서

$x>0$, $\log_3 x>0$ $\therefore x>1$ …… ㉠

$\log_2(\log_3 x)\le1$에서 $\log_2(\log_3 x)\le\log_2 2$

밑이 1보다 크므로 $\log_3 x\le2$ $\therefore x\le9$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x\le9$

답 ④

0476 진수의 조건에서

$x>0$, $\log_3 x>0$, $\log_4(\log_3 x)>0$

$\log_4(\log_3 x)>\log_4 1$에서 $\log_3 x>1$

$\therefore x>3$ …… ㉠ ⋯ ❶

$\log_{\frac{1}{2}}\{\log_4(\log_3 x)\}>0$에서

$\log_{\frac{1}{2}}\{\log_4(\log_3 x)\}>\log_{\frac{1}{2}}1$

밑이 1보다 작으므로 $\log_4(\log_3 x)<1$

밑이 1보다 크므로 $\log_3 x<4$

$\therefore x<81$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $3<x<81$ ⋯ ❷

따라서 정수 x는 4, 5, 6, ⋯, 80의 77개이다. ⋯ ❸

답 77

채점 기준	비율
❶ 진수의 조건을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ 로그부등식을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 x의 개수를 구할 수 있다.	20 %

유형 18 로그부등식; $\log_a x$ 꼴이 반복되는 경우 (본책 71쪽)

로그부등식 $p(\log_a x)^2+q\log_a x+r>0$의 해는 $\log_a x=t$로 치환하여 나타낸 t에 대한 이차부등식 $pt^2+qt+r>0$의 해를 이용하여 구한다.

0477 진수의 조건에서 $x>0$ ······ ㉠

$\log_{\frac{1}{5}} 125x \cdot \log_5 \frac{x}{5} \geq 0$에서

$(\log_{\frac{1}{5}} 125 + \log_{\frac{1}{5}} x)(\log_5 x - \log_5 5) \geq 0$

$\therefore (-3-\log_5 x)(\log_5 x - 1) \geq 0$

$\log_5 x = t$로 놓으면 $(-3-t)(t-1) \geq 0$

$(t+3)(t-1) \leq 0$ $\therefore -3 \leq t \leq 1$

즉 $-3 \leq \log_5 x \leq 1$이므로 $\log_5 5^{-3} \leq \log_5 x \leq \log_5 5$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{125} \leq x \leq 5$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{125} \leq x \leq 5$

따라서 $\alpha = \frac{1}{125}$, $\beta = 5$이므로 $\alpha\beta = \frac{1}{25}$

답 $\frac{1}{25}$

0478 진수의 조건에서 $x>0$ ······ ㉠

$\log_2 x = t$로 놓으면 $t^2+t-2 \geq 0$

$(t+2)(t-1) \geq 0$ $\therefore t \leq -2$ 또는 $t \geq 1$

즉 $\log_2 x \leq -2$ 또는 $\log_2 x \geq 1$이므로

$\log_2 x \leq \log_2 2^{-2}$ 또는 $\log_2 x \geq \log_2 2$

밑이 1보다 크므로 $x \leq \frac{1}{4}$ 또는 $x \geq 2$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0 < x \leq \frac{1}{4}$ 또는 $x \geq 2$

답 ④

0479 $\log_{\frac{1}{4}} x = t$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2+at+b<0$ ······ ㉠

$\frac{1}{16} < x < 16$에서

$\log_{\frac{1}{4}} 16 < \log_{\frac{1}{4}} x < \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{16}$, 즉 $-2 < \log_{\frac{1}{4}} x < 2$

$\therefore -2 < t < 2$

해가 $-2<t<2$이고 t^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(t+2)(t-2)<0$ $\therefore t^2-4<0$

이 부등식이 ㉠과 일치해야 하므로 $a=0$, $b=-4$

$\therefore a+b=-4$

답 ①

0480 진수의 조건에서 $x>0$ ······ ㉠

$[\log_3 x] = t$ (t는 정수)로 놓으면 $t^2-t-6<0$

$(t+2)(t-3)<0$ $\therefore -2<t<3$

이때 t는 정수이므로 $t=-1, 0, 1, 2$ ··· ❶

$[\log_3 x]=-1$일 때, $-1 \leq \log_3 x < 0$ $\therefore \frac{1}{3} \leq x < 1$

$[\log_3 x]=0$일 때, $0 \leq \log_3 x < 1$ $\therefore 1 \leq x < 3$

$[\log_3 x]=1$일 때, $1 \leq \log_3 x < 2$ $\therefore 3 \leq x < 9$

$[\log_3 x]=2$일 때, $2 \leq \log_3 x < 3$ $\therefore 9 \leq x < 27$

$\therefore \frac{1}{3} \leq x < 27$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{3} \leq x < 27$ ··· ❷

답 $\frac{1}{3} \leq x < 27$

채점 기준	비율
❶ t의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 부등식의 해를 구할 수 있다.	70 %

유형 19 양변에 로그를 취하는 부등식 본책 72쪽

(1) $x^{\log_a f(x)} > g(x)$ 꼴: 양변에 밑이 a인 로그를 취한다.

① $a>1$일 때 ➡ $\log_a f(x) \cdot \log_a x > \log_a g(x)$

② $0<a<1$일 때 ➡ $\log_a f(x) \cdot \log_a x < \log_a g(x)$

(2) $a^{f(x)} > b^{g(x)}$ 꼴 $(a \neq b)$: 양변에 밑이 c인 로그를 취한다.

① $c>1$일 때 ➡ $f(x)\log_c a > g(x)\log_c b$

② $0<c<1$일 때 ➡ $f(x)\log_c a < g(x)\log_c b$

0481 진수의 조건에서 $x>0$ ······ ㉠

$x^{\log_{\frac{1}{2}} x} > 4x^3$의 양변에 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{2}} x^{\log_{\frac{1}{2}} x} < \log_{\frac{1}{2}} 4x^3$

$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 < \log_{\frac{1}{2}} 4 + 3\log_{\frac{1}{2}} x$

$\therefore (\log_{\frac{1}{2}} x)^2 - 3\log_{\frac{1}{2}} x + 2 < 0$

$\log_{\frac{1}{2}} x = t$로 놓으면

$t^2-3t+2<0$, $(t-1)(t-2)<0$

$\therefore 1<t<2$

즉 $1 < \log_{\frac{1}{2}} x < 2$이므로 $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2$

밑이 1보다 작으므로 $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$

따라서 $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{1}{2}$이므로 $\alpha+\beta = \frac{3}{4}$

답 $\frac{3}{4}$

0482 진수의 조건에서 $x>0$ ······ ㉠

$x^{\log x} < x$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x} < \log x$ $\therefore (\log x)^2 < \log x$

$\log x = t$로 놓으면 $t^2 < t$

$t^2-t<0$, $t(t-1)<0$ $\therefore 0<t<1$

즉 $0 < \log x < 1$이므로 $\log 1 < \log x < \log 10$

밑이 1보다 크므로 $1<x<10$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x<10$

따라서 정수 x는 $2, 3, 4, \cdots, 9$의 8개이다.

답 ①

0483 $2^{2x+1} > 5^{4-x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$(2x+1)\log 2 > (4-x)\log 5$

$\therefore (2\log 2 + \log 5)x > 4\log 5 - \log 2$

이때 $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1-0.3 = 0.7$이므로

$(2 \times 0.3 + 0.7)x > 4 \times 0.7 - 0.3$

$1.3x > 2.5$ $\therefore x > \frac{2.5}{1.3} = 1.9\cdots$

따라서 가장 작은 정수 x의 값은 2이다.

답 2

유형 20 로그방정식과 로그부등식의 활용; 판별식 본책 72쪽

(1) 로그를 포함한 이차방정식의 근에 대한 조건이 주어진 경우
➡ 이차방정식의 판별식을 이용하여 로그방정식 또는 로그부등식을 세운다.
(2) 로그방정식 또는 로그부등식의 근에 대한 조건이 주어진 경우
➡ $\log_a x = t$로 치환하여 나타낸 t에 대한 이차방정식 또는 이차부등식의 근의 조건으로 바꾸어 생각한다.

0484 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(1+\log_3 a)^2-4(1+\log_3 a)<0$

$\therefore (\log_3 a)^2-2\log_3 a-3<0$

$\log_3 a=t$로 놓으면 $t^2-2t-3<0$

$(t+1)(t-3)<0$ $\therefore -1<t<3$

즉 $-1<\log_3 a<3$이므로 $\log_3 3^{-1}<\log_3 a<\log_3 3^3$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{3}<a<27$ 답 ③

0485 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(\log a+1)^2-(\log a+3)=0$

$\therefore (\log a)^2+\log a-2=0$

$\log a=t$로 놓으면

$t^2+t-2=0$, $(t+2)(t-1)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=1$

즉 $\log a=-2$ 또는 $\log a=1$이므로

$a=10^{-2}=\frac{1}{100}$ 또는 $a=10$

따라서 구하는 곱은 $\frac{1}{100}\cdot 10=\frac{1}{10}$ 답 $\frac{1}{10}$

0486 주어진 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+2(2-\log a)x+\log a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2-\log a)^2-\log a<0$

$\therefore (\log a)^2-5\log a+4<0$

$\log a=t$로 놓으면 $t^2-5t+4<0$

$(t-1)(t-4)<0$ $\therefore 1<t<4$

즉 $1<\log a<4$이므로 $\log 10<\log a<\log 10^4$

밑이 1보다 크므로 $10<a<10000$

따라서 정수 a는 11, 12, 13, …, 9999의 9989개이다.

답 9989

0487 $(\log x+\log 2)(\log x+\log 8)=-(\log k)^2$에서

$(\log x)^2+(\log 2+\log 8)\log x+\log 2\cdot\log 8+(\log k)^2=0$

$\therefore (\log x)^2+4\log 2\cdot\log x+3(\log 2)^2+(\log k)^2=0$

$\log x=t$로 놓으면 $t^2+4t\log 2+3(\log 2)^2+(\log k)^2=0$

위의 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2\log 2)^2-\{3(\log 2)^2+(\log k)^2\}>0$

$(\log k)^2-(\log 2)^2<0$

$(\log k+\log 2)(\log k-\log 2)<0$

$\therefore -\log 2<\log k<\log 2$

즉 $\log 2^{-1}<\log k<\log 2$이고 밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{2}<k<2$

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=2$이므로 $\alpha\beta=1$ 답 1

0488 $(\log x)^2-\log x+k>0$에서 $\log x=t$로 놓으면

$t^2-t+k>0$

$x>0$에서 주어진 부등식이 성립하려면 모든 실수 t에 대하여 위의 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2-t+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4k<0$ $\therefore k>\frac{1}{4}$ 답 $k>\frac{1}{4}$

유형 21 로그방정식과 로그부등식의 실생활에의 활용 본책 73쪽

주어진 조건에 맞게 방정식 또는 부등식을 세운 다음 양변에 상용로그를 취하여 해를 구한다.

0489 n년 후의 휴대 전화의 가격은

$800000\times(1-0.15)^n=0.85^n\times 800000$(원)

이므로 n년 후에 휴대 전화의 가격이 8만 원 이하가 된다고 하면

$0.85^n\times 800000\le 80000$ $\therefore 0.85^n\le\frac{1}{10}$

양변에 상용로그를 취하면

$n\log 0.85\le -1$

$n(\log 8.5-1)\le -1$, $n(0.9294-1)\le -1$

$-0.0706n\le -1$ $\therefore n\ge 14.\cdots$

따라서 15년 후인 2034년에 휴대 전화의 가격이 처음으로 8만 원 이하가 된다. 답 ⑤

0490 사업을 시작할 때의 자본을 K원이라 하면 n년 후의 두 회사 A, B의 자본은 각각

$K(1+0.1)^n=K\times 1.1^n$(원), $K(1+0.2)^n=K\times 1.2^n$(원)

n년 후에 B회사의 자본이 A회사의 자본의 10배 이상이 된다고 하면

$K\times 1.2^n\ge 10\times K\times 1.1^n$ $\therefore 1.2^n\ge 10\times 1.1^n$

양변에 상용로그를 취하면

$n\log 1.2\ge\log 10+n\log 1.1$

$0.079n\ge 1+0.041n$, $0.038n\ge 1$

$\therefore n\ge 26.\cdots$

따라서 사업을 시작한 지 27년 후에 B회사의 자본이 처음으로 A회사의 자본의 10배 이상이 된다. 답 ②

0491 여과기를 1개 설치하면 불순물의 $\frac{4}{5}$가 여과기를 통과하므로 n개 설치하면 불순물의 $\left(\frac{4}{5}\right)^n$이 여과기를 통과한다.

즉 $\left(\frac{4}{5}\right)^n=\frac{1}{10}$이어야 하므로 양변에 상용로그를 취하면

$n\log\frac{4}{5}=\log\frac{1}{10}$

이때 $\log\frac{4}{5}=\log\frac{8}{10}=3\log 2-1=3\times0.3-1=-0.1$이므로

$n\times(-0.1)=-1 \qquad \therefore n=\frac{1}{0.1}=10$

따라서 필요한 여과기의 개수는 10이다. 답 10

0492 현재의 미세 먼지 농도를 a라 할 때 n년 후의 미세 먼지 농도는 $\quad a\times(1+0.05)^n=a\times1.05^n$

n년 후에 미세 먼지 농도가 현재의 2배 이상이 된다고 하면

$a\times1.05^n\geq 2a \qquad \therefore 1.05^n\geq 2$

양변에 상용로그를 취하면 $\quad n\log 1.05\geq\log 2$

$0.02n\geq 0.3 \qquad \therefore n\geq\frac{0.3}{0.02}=15$

따라서 최소 15년 후이다. 답 15

0493 전략 합성함수 $f\circ g$, $g\circ f$를 구한다.

풀이 $(f\circ g)(n)=f(g(n))=f(\log_4 n)=2^{\log_4 n}=\sqrt{n}$

$\sqrt{n}$의 값이 자연수가 되도록 하는 100 이하의 자연수는

$1^1,\ 2^2,\ 3^2,\ \cdots,\ 10^2$ …… ㉠

$(g\circ f)(n)=g(f(n))=g(2^n)=\log_4 2^n=\frac{n}{2}$

$\frac{n}{2}$의 값이 자연수가 되도록 하는 100 이하의 자연수는

$2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 100$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 n의 값은

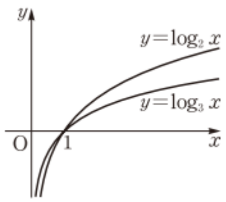
$2^2,\ 4^2,\ 6^2,\ 8^2,\ 10^2$

이므로 그 합은

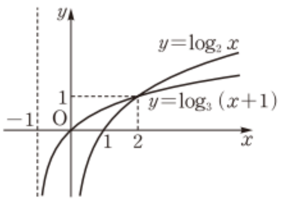
$4+16+36+64+100=220$ 답 220

0494 전략 지수함수, 로그함수의 그래프를 그려서 해결한다.

풀이 ㄱ. $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x>1$이면 $\log_2 x>\log_3 x$이다.



ㄴ. $y=\log_3(x+1)$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 $y=\log_2 x$, $y=\log_3(x+1)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

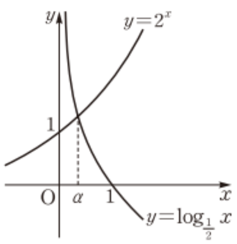


따라서 $0<x<2$이면 $\quad \log_2 x<\log_3(x+1)$

ㄷ. $2^x+\log_2 x=0$에서

$2^x=\log_{\frac{1}{2}} x$

$y=2^x$의 그래프와 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$0<x<a$일 때, $\quad 2^x<\log_{\frac{1}{2}} x$

$x>a$일 때, $\quad 2^x>\log_{\frac{1}{2}} x$

그런데 $x=\frac{1}{2}$일 때

$2^{\frac{1}{2}}>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$

이므로 $\quad a<\frac{1}{2}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

0495 전략 함수 $y=\log_a(x-m)+n\ (a>0,\ a\neq1)$의 그래프는 $y=\log_a x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것임을 이용한다.

풀이 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는

$\log_a(bx-1)=0, \qquad bx-1=1$

$\therefore x=\frac{2}{b}$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 좌표는

$\left(\frac{2}{b},\ 0\right)$

$y=g(x)$에서

$y=\log_b(ax-1)=\log_b a\left(x-\frac{1}{a}\right)=\log_b\left(x-\frac{1}{a}\right)+\log_b a$

이므로 곡선 $y=g(x)$는 함수 $y=\log_b x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{a}$만큼, y축의 방향으로 $\log_b a$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식은

$x=\frac{1}{a}$

이때 점 $\left(\frac{2}{b},\ 0\right)$이 직선 $x=\frac{1}{a}$ 위에 있어야 하므로

$\frac{2}{b}=\frac{1}{a} \qquad \therefore b=2a$

한편 $b>1$에서 $a>\frac{1}{2}$이므로 $\quad \frac{1}{2}<a<1$ 답 ③

0496 전략 점 P의 좌표를 $(a,\ a)$로 놓고 두 점 Q, R의 좌표를 a를 이용하여 나타낸다.

풀이 직선 $y=x$ 위의 점 P를 $\mathrm{P}(a,\ a)$라 하자.

직선 $y=a$와 곡선 $y=\log_4\left(x-\frac{1}{4}\right)$의 교점 Q의 x좌표는

$\log_4\left(x-\frac{1}{4}\right)=a$에서 $\qquad x-\frac{1}{4}=4^a \qquad \therefore x=4^a+\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{Q}\left(4^a+\frac{1}{4},\ a\right)$

직선 $x=a$와 곡선 $y=2^x$의 교점 R의 좌표는 $(a,\ 2^a)$이고, $\triangle$PQR가 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$인 직각이등변삼각형이므로

$4^a+\frac{1}{4}-a=2^a-a \qquad \therefore 4^a-2^a+\frac{1}{4}=0$

$2^a=t\ (t>0)$로 놓으면 $\qquad t^2-t+\frac{1}{4}=0$

$\left(t-\frac{1}{2}\right)^2=0 \qquad \therefore t=\frac{1}{2}$

즉 $2^a=\frac{1}{2}=2^{-1}$이므로 $\qquad a=-1$

따라서 $\mathrm{P}(-1,\ -1)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$, $\mathrm{R}\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$이므로

$$\triangle PQR=\frac{1}{2}\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{PR}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{9}{8}$$

답 ③

0497 전략 선분 PQ의 중점과 원 C의 중심이 일치함을 이용한다.

풀이 $P(p,\ \log_a p)$, $Q(q,\ \log_a q)\ (p>q)$로 놓으면 선분 PQ의 중점이 원의 중심 $\left(\frac{5}{4},\ 0\right)$과 일치하므로

$\frac{p+q}{2}=\frac{5}{4}$에서 $\quad p+q=\frac{5}{2}$ ······ ㉠

$\frac{\log_a p+\log_a q}{2}=0$에서 $\quad \log_a pq=0$

$\therefore pq=1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$p=2,\ q=\frac{1}{2}\ (\because p>q)$

$\therefore P(2,\ \log_a 2),\ Q\left(\frac{1}{2},\ -\log_a 2\right)$

한편 선분 PQ의 길이가 원의 지름의 길이와 같으므로

$$\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\{\log_a 2-(-\log_a 2)\}^2=\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$$

$4(\log_a 2)^2=1 \quad \therefore \log_a 2=\pm\frac{1}{2}$

이때 $a>1$이므로 $\quad \log_a 2=\frac{1}{2},\quad \sqrt{a}=2$

$\therefore a=4$

답 ③

0498 전략 네 점 A, B, C, D의 좌표를 k를 이용하여 나타낸다.

풀이 $A(k,\ 4)$, $B(k,\ 3)$, $C(k,\ -4)$, $D(k,\ -(4+n))$이므로

$\log_a k=4$에서 $\quad a^4=k \quad \therefore a=k^{\frac{1}{4}}$

$\log_b k=3$에서 $\quad b^3=k \quad \therefore b=k^{\frac{1}{3}}$

$\log_c k=-4$에서 $\quad c^{-4}=k \quad \therefore c=k^{-\frac{1}{4}}$

$\log_d k=-(4+n)$에서 $\quad d^{-(4+n)}=k \quad \therefore d=k^{-\frac{1}{4+n}}$

$b\sqrt{c}=k^{\frac{1}{3}}\cdot(k^{-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}=k^{\frac{5}{24}}$, $ad^2=k^{\frac{1}{4}}\cdot(k^{-\frac{1}{4+n}})^2=k^{\frac{1}{4}-\frac{2}{4+n}}$이므로

$b\sqrt{c}>ad^2$에서 $\quad k^{\frac{5}{24}}>k^{\frac{1}{4}-\frac{2}{4+n}}$

$k>1$이므로 $\quad \frac{5}{24}>\frac{1}{4}-\frac{2}{4+n},\quad \frac{2}{4+n}>\frac{1}{24}$

$4+n<48 \quad \therefore n<44$

따라서 자연수 n의 최댓값은 43이다.

답 ②

0499 전략 먼저 두 점 O, A를 평행이동한 점의 좌표를 구한다.

풀이 원점 $O(0,\ 0)$과 점 $A(1,\ 0)$을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점을 각각 O', A'이라 하면

$O'(5,\ 3)$, $A'(6,\ 3)$

$y=\log_2(x+a)$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 것이므로 그래프가 점 O'을 지날 때 a의 값이 최대이고, 점 A'을 지날 때 a의 값이 최소이다.

그래프가 점 O'을 지날 때, $\log_2(5+a)=3$이므로

$5+a=2^3 \quad \therefore a=3$

그래프가 점 A'을 지날 때, $\log_2(6+a)=3$이므로

$6+a=2^3 \quad \therefore a=2$

따라서 a의 최댓값은 3, 최솟값은 2이므로 구하는 합은

$3+2=5$

답 5

0500 전략 $\log_2 x=t$로 놓고 $\log_2\frac{x^2}{y}$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 $\log_2 x=t$로 놓으면 $1\le x\le 8$에서 $0\le t\le 3$이고

$$\log_2\frac{x^2}{y}=2\log_2 x-\log_2 y$$
$$=2\log_2 x-(\log_2 x)^2$$
$$=2t-t^2=-(t-1)^2+1$$

따라서 $\log_2\frac{x^2}{y}$은 $t=1$일 때 최댓값 1, $t=3$일 때 최솟값 -3을 갖는다.

즉 $-3\le\log_2\frac{x^2}{y}\le 1$이므로 $\quad \log_2 2^{-3}\le\log_2\frac{x^2}{y}\le\log_2 2$

밑이 1보다 크므로 $\quad \frac{1}{8}\le\frac{x^2}{y}\le 2$

따라서 구하는 합은 $\quad 2+\frac{1}{8}=\frac{17}{8}$

답 $\frac{17}{8}$

0501 전략 $a>1$일 때와 $0<a<1$일 때로 나누어 생각한다.

풀이 진수의 조건에서

$5-x>0,\ x+3>0 \quad \therefore -3<x<5$ ······ ㉠

$\log_a(5-x)<\log_a(x+3)+1$에서

$\log_a(5-x)<\log_a a(x+3)$

(i) $a>1$일 때,

$5-x<a(x+3),\quad (a+1)x>5-3a$

$\therefore x>\frac{5-3a}{a+1}\ (\because a+1>0)$ ······ ㉡

이때 ㉠, ㉡의 공통 범위가 $-1<x<5$이어야 하므로

$\frac{5-3a}{a+1}=-1,\quad 5-3a=-a-1$

$\therefore a=3$

(ii) $0<a<1$일 때,

$5-x>a(x+3),\quad (a+1)x<5-3a$

$\therefore x<\frac{5-3a}{a+1}\ (\because a+1>0)$ ······ ㉢

이때 ㉠, ㉢의 공통 범위가 $-1<x<5$가 되도록 하는 a의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $\quad a=3$

답 3

0502 전략 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은 $ax+by=r^2$임을 이용한다.

풀이 원 $x^2+y^2=2\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^n$과 직선 $y=x$의 교점을 $(a,\ a)\ (a>0)$라 하면 $a^2+a^2=2\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^n$에서

$2a^2=2\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^n,\quad a^2=\left(\frac{9}{4}\right)^n=\left(\frac{3}{2}\right)^{2n}$

$\therefore a=\left(\frac{3}{2}\right)^n\ (\because a>0)$

04 로그함수

따라서 원 $x^2+y^2=2\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^n$ 위의 점 $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n, \left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$에서의 접선의 방정식은 $\left(\frac{3}{2}\right)^n x+\left(\frac{3}{2}\right)^n y=2\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^n$

$\therefore\ x+y=2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n$

따라서 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n=2\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^n$

이고 넓이가 20 이상이므로 $2\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^n\geq 20$에서 $\left(\frac{9}{4}\right)^n\geq 10$

양변에 상용로그를 취하면 $\log\left(\frac{9}{4}\right)^n\geq 1$

$\therefore\ n(2\log 3-2\log 2)\geq 1$

이때 $2\log 3-2\log 2=2\times 0.48-2\times 0.30=0.36$이므로

$\therefore\ n\geq\frac{1}{0.36}=2.7\cdots$

따라서 자연수 n의 최솟값은 3이다. 답 3

0503 전략 x^2의 계수가 0일 때와 0이 아닐 때로 나누어 생각한다.

풀이 (i) $1-\log_3 a=0$, 즉 $a=3$일 때,

주어진 부등식은 $1>0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $1-\log_3 a\neq 0$, 즉 $a\neq 3$일 때,

모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면

$1-\log_3 a>0$에서 $\log_3 a<1$

$\therefore\ a<3$ ⋯⋯ ㉠

이차방정식 $(1-\log_3 a)x^2-2(1-\log_3 a)x+\log_3 a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(1-\log_3 a)^2-(1-\log_3 a)\log_3 a<0$

$\therefore\ 2(\log_3 a)^2-3\log_3 a+1<0$

$\log_3 a=t$로 놓으면 $2t^2-3t+1<0$

$(2t-1)(t-1)<0$ $\therefore\ \frac{1}{2}<t<1$

즉 $\frac{1}{2}<\log_3 a<1$이므로 $\sqrt{3}<a<3$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\sqrt{3}<a<3$

(i), (ii)에서 $\sqrt{3}<a\leq 3$

따라서 자연수 a의 값의 합은

$2+3=5$ 답 5

0504 전략 두 선수 A, B의 n년 후의 연봉을 각각 구하여 비교한다.

풀이 n년 후에 A의 연봉이 B의 연봉을 초과한다고 하면

$6\times 1.28^n>8\times 1.2^n$, 즉 $3\times 1.28^n>4\times 1.2^n$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 3+n\log 1.28>2\log 2+n\log 1.2$

$n(\log 1.28-\log 1.2)>2\log 2-\log 3$

$n\log\frac{32}{30}>2\log 2-\log 3$

$n(5\log 2-\log 3-1)>2\log 2-\log 3$

$\therefore\ n>\frac{2\log 2-\log 3}{5\log 2-\log 3-1}=\frac{0.1249}{0.0279}=4.4\cdots$

따라서 5년 후, 즉 2024년에 A의 연봉이 처음으로 B의 연봉을 초과한다. 답 ⑤

0505 전략 두 점 A, C의 y좌표가 일치함을 이용한다.

풀이 두 점 A, C의 y좌표가 같으므로

$\log_2(n-k)=\log_4(x+56)$에서 $x+56=(n-k)^2$

$\therefore\ x=(n-k)^2-56$

즉 점 C의 x좌표가 $(n-k)^2-56$이므로

$S(k)=\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}$

$=\log_2(n-k)\cdot\{k-(n-k)^2+56\}$ ⋯ ❶

이때 n, k는 자연수이므로 $\overline{\mathrm{AC}}$의 길이는 자연수이다.

따라서 $S(k)$의 값이 자연수가 되려면 $\log_2(n-k)$의 값이 자연수가 되어야 하므로

$n-k=2,\ n-k=4,\ n-k=8,\ n-k=16,\ \cdots$

$\therefore\ k=n-2,\ n-4,\ n-8,\ n-16,\ \cdots$

이때 $k>\alpha$를 만족시키는 자연수 k의 개수가 3이려면

$n-16\leq\alpha$ $\therefore\ n\leq\alpha+16$ ⋯ ❷

즉 n의 최댓값은 $\alpha+16$이다.

$n=\alpha+16$일 때, 두 곡선의 교점이 $\mathrm{P}(\alpha, \beta)$이므로

$\log_2(\alpha+16-\alpha)=\log_4(\alpha+56)$

에서 $\log_4(\alpha+56)=\log_2 16=4$

$\alpha+56=256$ $\therefore\ \alpha=200$ ⋯ ❸

따라서 n의 최댓값은

$\alpha+16=216$ ⋯ ❹

답 216

채점 기준	비율
❶ $S(k)$의 값을 n, k를 이용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❷ n의 값의 범위를 α를 이용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❸ α의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ n의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

0506 전략 두 점 A, G가 함수 $y=\log_4 x$의 그래프 위의 점임을 이용하여 두 점 A, G의 좌표를 구한다.

풀이 $\mathrm{B}(a, 0)$, $\mathrm{C}(b, 0)$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\log_4 a$, $\overline{\mathrm{GC}}=\log_4 b$

조건 (가)에 의하여 $\overline{\mathrm{DG}}=\log_4 b-\log_4 a=1$이므로

$\log_4\frac{b}{a}=\log_4 4$ $\therefore\ b=4a$

따라서 $\overline{\mathrm{BC}}=b-a=3a$이므로 조건 (가)에 의하여 $\overline{\mathrm{CE}}=4a$

$\therefore\ c=\overline{\mathrm{OB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CE}}=a+3a+4a=8a$ ⋯ ❶

조건 (나)에 의하여

$\overline{\mathrm{GC}}\cdot\overline{\mathrm{CE}}=4\,\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}$

$\log_4 4a\cdot 4a=4\cdot\log_4 a\cdot 3a$

$1+\log_4 a=3\log_4 a,$ $\log_4 a=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a=\sqrt{4}=2$ ⋯ ❷

따라서 $b=4\cdot 2=8$, $c=8\cdot 2=16$이므로

$a+b+c=26$ ⋯ ❸

답 26

채점 기준	비율
❶ b, c를 a로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0507 전략 먼저 주어진 범위에서 $f(x)$의 값의 범위를 구한 후 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$임을 이용한다.

풀이 $1\le x\le 9$에서 $0\le \log_3 x\le 2$이므로

$0\le 2\log_3 x\le 4$, $\quad -1\le 2\log_3 x-1\le 3$

$\therefore -1\le f(x)\le 3$ ··· ❶

$f(x)=t$로 놓으면

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(t)$$
$$=t^2-4t+a$$
$$=(t-2)^2+a-4$$

이때 $-1\le t\le 3$이므로 $g(t)$는 $t=-1$일 때 최댓값 $5+a$를 갖는다. ··· ❷

즉 $5+a=4$이므로 $\quad a=-1$ ··· ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ $(g\circ f)(x)$의 최댓값을 a로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	10 %

0508 전략 $\log_x y=t$로 놓고 t에 대한 이차방정식의 해를 구한다.

풀이 $2\log_x y-2\log_y x+3=0$에서

$$2\log_x y-\frac{2}{\log_x y}+3=0$$

$\log_x y=t$로 놓으면 $x>1$, $y>1$에서 $t>0$이고

$2t-\frac{2}{t}+3=0$, $\quad 2t^2+3t-2=0$

$(t+2)(2t-1)=0$ $\quad \therefore t=\frac{1}{2}$ $(\because t>0)$ ··· ❶

즉 $\log_x y=\frac{1}{2}$이므로 $\quad y=\sqrt{x}$ ··· ❷

$y=\sqrt{x}$를 $4y^2-x^2$에 대입하면

$$4x-x^2=-(x-2)^2+4$$

따라서 $4y^2-x^2$은 $x=2$일 때 최댓값 4를 갖는다. ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ $\log_x y=t$로 치환한 이차방정식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ x, y 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❸ $4y^2-x^2$의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

0509 전략 a의 값의 범위를 나누어 주어진 로그부등식을 푼다.

풀이 (i) $a\ge 5$일 때,

주어진 부등식은 $\quad \log_2 a-\log_2 5+\log_2 b\le 2$

$\log_2 \frac{ab}{5}\le \log_2 4$, $\quad \frac{ab}{5}\le 4$

$\therefore ab\le 20$

$a=5$이면 $\quad b=1, 2, 3, 4$

$a=6$이면 $\quad b=1, 2, 3$

$a=7$이면 $\quad b=1, 2$

$a=8$이면 $\quad b=1, 2$

$a=9$이면 $\quad b=1, 2$

$a=10$이면 $\quad b=1, 2$

$11\le a\le 20$이면 $\quad b=1$

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$4+3+2\cdot 4+1\cdot 10=25$ ··· ❶

(ii) $0<a<5$일 때,

주어진 부등식은 $\quad -\log_2 a+\log_2 5+\log_2 b\le 2$

$\log_2 \frac{5b}{a}\le \log_2 4$, $\quad \frac{5b}{a}\le 4$ $\quad \therefore b\le \frac{4}{5}a$

$a=1$이면 이를 만족시키는 자연수 b는 존재하지 않는다.

$a=2$이면 $\quad b=1$

$a=3$이면 $\quad b=1, 2$

$a=4$이면 $\quad b=1, 2, 3$

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$1+2+3=6$ ··· ❷

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b)의 개수는 $\quad 25+6=31$ ··· ❸

답 31

채점 기준	비율
❶ $a\ge 5$일 때 순서쌍 (a, b)의 개수를 구할 수 있다.	50 %
❷ $0<a<5$일 때 순서쌍 (a, b)의 개수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 순서쌍 (a, b)의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0510 전략 주어진 부등식을 이차부등식으로 변형한다.

풀이 진수의 조건에서 $\quad 3x+3>0$

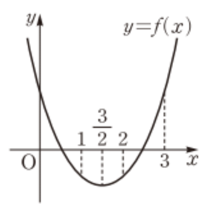
$\therefore x>-1$ ······ ㉠

$\log_2(3x+3)\ge \log_2(x^2+k)$에서 밑이 1보다 크므로

$3x+3\ge x^2+k$

$\therefore x^2-3x+k-3\le 0$ ······ ㉡ ··· ❶

$f(x)=x^2-3x+k-3$이라 할 때, ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x의 개수가 2이려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f(0)>0$, $f(1)\le 0$,

$f(2)\le 0$, $f(3)>0$ ··· ❷

$f(0)=f(3)=k-3$이므로 $k-3>0$에서

$k>3$

$f(1)=f(2)=k-5$이므로 $k-5\le 0$에서

$k\le 5$

$\therefore 3<k\le 5$ ··· ❸

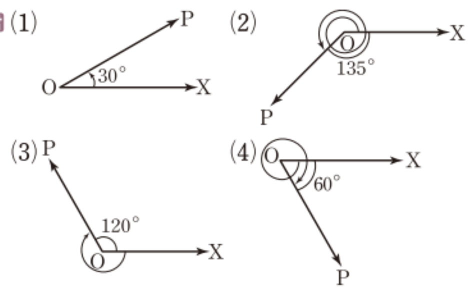
답 $3<k\le 5$

채점 기준	비율
❶ x에 대한 부등식을 세울 수 있다.	30 %
❷ 조건을 만족시키는 함숫값의 부호를 구할 수 있다.	50 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

04 로그함수

05 삼각함수

0511 답



0512 답 (1) $360° \times n + 135°$
(2) $360° \times n + 315°$

0513 (1) $630° = 360° \times 1 + 270°$이므로
$360° \times n + 270°$
(2) $1140° = 360° \times 3 + 60°$이므로
$360° \times n + 60°$
(3) $-855° = 360° \times (-3) + 225°$이므로
$360° \times n + 225°$
(4) $-1200° = 360° \times (-4) + 240°$이므로
$360° \times n + 240°$

답 풀이 참조

0514 (1) $650° = 360° \times 1 + 290°$
따라서 $650°$는 제 4 사분면의 각이다.
(2) $1280° = 360° \times 3 + 200°$
따라서 $1280°$는 제 3 사분면의 각이다.
(3) $-705° = 360° \times (-2) + 15°$
따라서 $-705°$는 제 1 사분면의 각이다.
(4) $-945° = 360° \times (-3) + 135°$
따라서 $-945°$는 제 2 사분면의 각이다.

답 (1) 제 4 사분면 (2) 제 3 사분면
(3) 제 1 사분면 (4) 제 2 사분면

0515 (1) $135° = 135 \cdot \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{3}{4}\pi$
(2) $-210° = (-210) \cdot \dfrac{\pi}{180} = -\dfrac{7}{6}\pi$
(3) $\dfrac{3}{5}\pi = \dfrac{3}{5}\pi \cdot \dfrac{180°}{\pi} = 108°$
(4) $-\dfrac{5}{4}\pi = \left(-\dfrac{5}{4}\pi\right) \cdot \dfrac{180°}{\pi} = -225°$

답 (1) $\dfrac{3}{4}\pi$ (2) $-\dfrac{7}{6}\pi$ (3) $108°$ (4) $-225°$

0516 (3) $\dfrac{7}{2}\pi = 2\pi + \dfrac{3}{2}\pi$이므로 $2n\pi + \dfrac{3}{2}\pi$
(4) $-\dfrac{5}{4}\pi = -2\pi + \dfrac{3}{4}\pi$이므로 $2n\pi + \dfrac{3}{4}\pi$

답 (1) $2n\pi + \dfrac{1}{3}$ (2) $2n\pi + \dfrac{\pi}{3}$ (3) $2n\pi + \dfrac{3}{2}\pi$ (4) $2n\pi + \dfrac{3}{4}\pi$

0517 $30° = 30 \cdot \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\pi}{6}$이므로
$l = 4 \cdot \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2}{3}\pi,\ S = \dfrac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{4}{3}\pi$

답 $l = \dfrac{2}{3}\pi,\ S = \dfrac{4}{3}\pi$

0518 $r \cdot \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3}{4}\pi$이므로 $r = 3$
$\therefore S = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot \dfrac{3}{4}\pi = \dfrac{9}{8}\pi$

답 $r = 3,\ S = \dfrac{9}{8}\pi$

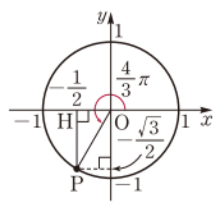
0519 $\dfrac{1}{2} r \cdot 8 = 12$이므로 $r = 3$
$3\theta = 8$이므로 $\theta = \dfrac{8}{3}$

답 $r = 3,\ \theta = \dfrac{8}{3}$

0520 $\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$이므로
(1) $\sin\theta = \dfrac{12}{13}$
(2) $\cos\theta = -\dfrac{5}{13}$
(3) $\tan\theta = -\dfrac{12}{5}$

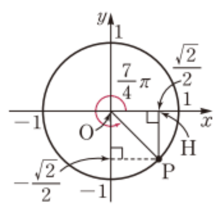
답 풀이 참조

0521 (1) 오른쪽 그림과 같이 각 $\dfrac{4}{3}\pi$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{\mathrm{OP}} = 1$이고, $\angle\mathrm{POH} = \dfrac{\pi}{3}$이므로
$\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\therefore \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\theta = -\dfrac{1}{2},\ \tan\theta = \sqrt{3}$

(2) 오른쪽 그림과 같이 각 $\dfrac{7}{4}\pi$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{\mathrm{OP}} = 1$이고, $\angle\mathrm{POH} = \dfrac{\pi}{4}$이므로
$\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\therefore \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \tan\theta = -1$

답 풀이 참조

0522 $\theta=380°=360°\times1+20°$에서 θ는 제 1 사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$

답 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$

0523 $\theta=-\frac{17}{6}\pi=2\pi\times(-2)+\frac{7}{6}\pi$에서 θ는 제 3 사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

답 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

0524 $\theta=-560°=360°\times(-2)+160°$에서 θ는 제 2 사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

답 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

0525 $\theta=\frac{18}{5}\pi=2\pi\times1+\frac{8}{5}\pi$에서 θ는 제 4 사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

답 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

0526 $\cos\theta<0$이므로 θ는 제 2 사분면 또는 제 3 사분면의 각이고, $\tan\theta>0$이므로 θ는 제 1 사분면 또는 제 3 사분면의 각이다.
따라서 θ는 제 3 사분면의 각이다.

답 제 3 사분면

0527 $\sin\theta\cos\theta<0$에서

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$

따라서 θ는 제 2 사분면 또는 제 4 사분면의 각이다.

답 제 2 사분면 또는 제 4 사분면

0528 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

이때 θ가 제 4 사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$$\therefore \sin\theta=-\frac{3}{5},\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$$

답 $\sin\theta=-\frac{3}{5}$, $\tan\theta=-\frac{3}{4}$

0529 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

이때 θ가 제 3 사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

$$\therefore \cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3},\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

답 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

0530 (1) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}\qquad \therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$$

(2) $$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{-\frac{4}{9}}=-\frac{9}{4}$$

답 (1) $-\frac{4}{9}$ (2) $-\frac{9}{4}$

0531 (1) $\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$$

$$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\qquad \therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$$

(2) $$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=1+2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$$

답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{3}{2}$

0532 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서 $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$이므로

$$(1-\sin^2\theta)(1+\tan^2\theta)=\cos^2\theta\left(1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

답 1

0533 $$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$
$$=\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)-\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$$
$$=\frac{\cos\theta-\cos\theta\sin\theta-\cos\theta-\cos\theta\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$$
$$=\frac{-2\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta}=-2\tan\theta$$

답 $-2\tan\theta$

유형 01 동경의 위치

본책 82쪽

$\theta=360°\times n+\alpha°$ (n은 정수, $0°\le\alpha°<360°$)이면 각 $\alpha°$를 나타내는 동경과 각 θ를 나타내는 동경은 일치한다.

0534 ① $420°=360°\times1+60°$ ⇒ 제 1 사분면
② $870°=360°\times2+150°$ ⇒ 제 2 사분면
③ $1560°=360°\times4+120°$ ⇒ 제 2 사분면
④ $-750°=360°\times(-3)+330°$ ⇒ 제 4 사분면
⑤ $-1610°=360°\times(-5)+190°$ ⇒ 제 3 사분면

답 ⑤

0535 ㄱ. $-970°=360°\times(-3)+110°$
ㄴ. $-620°=360°\times(-2)+100°$
ㄷ. $-170°=360°\times(-1)+190°$

ㄹ. $460° = 360° \times 1 + 100°$
ㅁ. $1180° = 360° \times 3 + 100°$
이상에서 동경이 $100°$를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ 이다.

답 ㄴ, ㄹ, ㅁ

0536 $131°$를 나타내는 동경 OP가 주어진 조건을 만족시키며 회전한 후 나타내는 각의 크기를 θ라 하면

$\theta = 131° - 705° + 240° = -334°$

$-334° = 360° \times (-1) + 26°$이므로 동경 OP는 제 1 사분면에 있다.

답 제 1 사분면

유형 02 사분면의 일반각

본책 82쪽

① α가 제 1 사분면의 각 ➡ $360° \times n < \alpha < 360° \times n + 90°$
② α가 제 2 사분면의 각 ➡ $360° \times n + 90° < \alpha < 360° \times n + 180°$
③ α가 제 3 사분면의 각 ➡ $360° \times n + 180° < \alpha < 360° \times n + 270°$
④ α가 제 4 사분면의 각 ➡ $360° \times n + 270° < \alpha < 360° \times n + 360°$
(단, n은 정수)

0537 α가 제 2 사분면의 각이므로

$360° \times n + 90° < \alpha < 360° \times n + 180°$ (n은 정수)

$\therefore 360° \times \frac{n}{3} + 30° < \frac{\alpha}{3} < 360° \times \frac{n}{3} + 60°$

(i) $n = 3k$ (k는 정수)일 때,

$360° \times k + 30° < \frac{\alpha}{3} < 360° \times k + 60°$

따라서 $\frac{\alpha}{3}$는 제 1 사분면의 각이다.

(ii) $n = 3k + 1$ (k는 정수)일 때,

$360° \times k + 150° < \frac{\alpha}{3} < 360° \times k + 180°$

따라서 $\frac{\alpha}{3}$는 제 2 사분면의 각이다.

(iii) $n = 3k + 2$ (k는 정수)일 때,

$360° \times k + 270° < \frac{\alpha}{3} < 360° \times k + 300°$

따라서 $\frac{\alpha}{3}$는 제 4 사분면의 각이다.

이상에서 $\frac{\alpha}{3}$는 제 1 사분면 또는 제 2 사분면 또는 제 4 사분면의 각이므로 $\frac{\alpha}{3}$를 나타내는 동경은 제 3 사분면에 존재할 수 없다.

답 제 3 사분면

0538 2θ가 제 3 사분면의 각이므로

$360° \times n + 180° < 2\theta < 360° \times n + 270°$ (n은 정수)

$\therefore 360° \times \frac{n}{2} + 90° < \theta < 360° \times \frac{n}{2} + 135°$ ⋯ ❶

(i) $n = 2k$ (k는 정수)일 때,

$360° \times k + 90° < \theta < 360° \times k + 135°$

따라서 θ는 제 2 사분면의 각이다. ⋯ ❷

(ii) $n = 2k + 1$ (k는 정수)일 때,

$360° \times k + 270° < \theta < 360° \times k + 315°$

따라서 θ는 제 4 사분면의 각이다. ⋯ ❸

(i), (ii)에서 θ는 제 2 사분면 또는 제 4 사분면의 각이다. ⋯ ❹

답 제 2 사분면 또는 제 4 사분면

채점 기준	비율
❶ θ를 n에 대한 부등식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $n=2k$일 때 θ가 제몇 사분면의 각인지 말할 수 있다.	30 %
❸ $n=2k+1$일 때 θ가 제몇 사분면의 각인지 말할 수 있다.	30 %
❹ θ가 제몇 사분면의 각인지 말할 수 있다.	10 %

0539 θ가 제 1 사분면의 각이므로

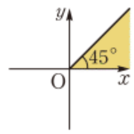
$360° \times n < \theta < 360° \times n + 90°$ (n은 정수)

$\therefore 360° \times \frac{n}{2} < \frac{\theta}{2} < 360° \times \frac{n}{2} + 45°$

(i) $n = 2k$ (k는 정수)일 때,

$360° \times k < \frac{\theta}{2} < 360° \times k + 45°$

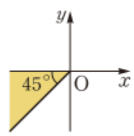
따라서 $\frac{\theta}{2}$를 나타내는 동경이 속하는 영역은 오른쪽 그림과 같다. (단, 경계선 제외)



(ii) $n = 2k + 1$ (k는 정수)일 때,

$360° \times k + 180° < \frac{\theta}{2} < 360° \times k + 225°$

따라서 $\frac{\theta}{2}$를 나타내는 동경이 속하는 영역은 오른쪽 그림과 같다. (단, 경계선 제외)



(i), (ii)에서 $\frac{\theta}{2}$를 나타내는 동경이 속하는 모든 영역은 ③과 같다.

답 ③

유형 03 육십분법과 호도법

본책 83쪽

① 육십분법의 각을 호도법의 각으로 나타내려면
➡ (육십분법의 각) $\times \frac{\pi}{180}$
② 호도법의 각을 육십분법의 각으로 나타내려면
➡ (호도법의 각) $\times \frac{180°}{\pi}$

0540 ㄱ. $50° = 50 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{18}\pi$

ㄹ. $240° = 240 \times \frac{\pi}{180} = \frac{4}{3}\pi$

ㅂ. $\frac{4}{5}\pi = \frac{4}{5}\pi \cdot \frac{180°}{\pi} = 144°$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㅁ이다.

답 ㄴ, ㄷ, ㅁ

0541 ㄱ. $1 = \frac{180°}{\pi}$이므로 $2 = \frac{360°}{\pi}$

ㄴ. $-220° = 360° \times (-1) + 140°$이므로 $-220°$는 제 2 사분면의 각이다.

ㄷ. $\frac{21}{5}\pi=2\pi\times2+\frac{\pi}{5}$, $-\frac{19}{5}\pi=2\pi\times(-2)+\frac{\pi}{5}$이므로 $\frac{\pi}{5}$,

$\frac{21}{5}\pi$, $-\frac{19}{5}\pi$를 나타내는 동경은 모두 일치한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

0542 ① $-1120°=360°\times(-4)+320°$ ➡ 제 4 사분면
② $-790°=360°\times(-3)+290°$ ➡ 제 4 사분면
③ $693°=360°\times1+333°$ ➡ 제 4 사분면
④ $-\frac{25}{3}\pi=2\pi\times(-5)+\frac{5}{3}\pi$ ➡ 제 4 사분면
⑤ $\frac{13}{4}\pi=2\pi\times1+\frac{5}{4}\pi$ ➡ 제 3 사분면

답 ⑤

유형 04 두 동경의 위치 관계 ; 일치 또는 원점에 대하여 대칭

본책 83쪽

두 각 α, β를 나타내는 동경이
① 일치한다. ➡ $\alpha-\beta=2n\pi$ (n은 정수)
② 원점에 대하여 대칭이다. ➡ $\alpha-\beta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

0543 각 θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 일치하므로 $6\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$5\theta=2n\pi \quad \therefore \theta=\frac{2n}{5}\pi \quad \cdots\cdots$ ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{2n}{5}\pi<\pi$이므로 $0<n<\frac{5}{2}$

n은 정수이므로 $n=1$ 또는 $n=2$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{2}{5}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{5}\pi$

답 $\frac{2}{5}\pi$, $\frac{4}{5}\pi$

0544 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$5\theta-\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$4\theta=(2n+1)\pi \quad \therefore \theta=\frac{2n+1}{4}\pi \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{2n+1}{4}\pi<\pi$이므로

$2<2n+1<4 \quad \therefore \frac{1}{2}<n<\frac{3}{2}$

n은 정수이므로 $n=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{3}{4}\pi$

답 $\frac{3}{4}\pi$

0545 각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 일치하므로 $4\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$3\theta=2n\pi \quad \therefore \theta=\frac{2n}{3}\pi \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{2n}{3}\pi<\pi$이므로 $\frac{3}{4}<n<\frac{3}{2}$

n은 정수이므로 $n=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{2}{3}\pi$이므로

$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

0546 각 θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$7\theta-\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$6\theta=(2n+1)\pi \quad \therefore \theta=\frac{2n+1}{6}\pi \quad \cdots\cdots$ ㉠ ··· ❶

$0<\theta<2\pi$에서 $0<\frac{2n+1}{6}\pi<2\pi$이므로

$0<2n+1<12 \quad \therefore -\frac{1}{2}<n<\frac{11}{2}$

n은 정수이므로 $n=0, 1, 2, 3, 4, 5$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi$ ··· ❷

따라서 구하는 모든 각 θ의 크기의 합은

$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\frac{5}{6}\pi+\frac{7}{6}\pi+\frac{3}{2}\pi+\frac{11}{6}\pi=6\pi$ ··· ❸

답 6π

채점 기준	비율
❶ θ를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ θ의 크기를 구할 수 있다.	50 %
❸ θ의 크기의 합을 구할 수 있다.	20 %

유형 05 두 동경의 위치 관계; 직선에 대하여 대칭

본책 84쪽

두 각 α, β를 나타내는 동경이
① x축에 대하여 대칭이다. ➡ $\alpha+\beta=2n\pi$ (n은 정수)
② y축에 대하여 대칭이다. ➡ $\alpha+\beta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)
③ 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. ➡ $\alpha+\beta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

0547 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$\theta+5\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$6\theta=(2n+1)\pi \quad \therefore \theta=\frac{2n+1}{6}\pi \quad \cdots\cdots$ ㉠

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\frac{2n+1}{6}\pi<\frac{\pi}{2}$이므로

$0<2n+1<3 \quad \therefore -\frac{1}{2}<n<1$

n은 정수이므로 $n=0$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{\pi}{6}$

답 ②

0548 각 3θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$3\theta+5\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$8\theta=2n\pi \qquad \therefore \theta=\frac{n}{4}\pi$ ······ ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{n}{4}\pi<\pi$이므로 $\quad 0<n<4$

n은 정수이므로 $\quad n=1$ 또는 $n=2$ 또는 $n=3$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{4}$ 또는 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 또는 $\theta=\frac{3}{4}\pi$

따라서 구하는 모든 각 θ의 크기의 합은

$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$

답 $\frac{3}{2}\pi$

0549 각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+4\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

$5\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2} \qquad \therefore \theta=\frac{2n}{5}\pi+\frac{\pi}{10}$ ··· ❶

$0<\theta<2\pi$에서 $0<\frac{2n}{5}\pi+\frac{\pi}{10}<2\pi$이므로

$-\frac{1}{10}<\frac{2n}{5}<\frac{19}{10} \qquad \therefore -\frac{1}{4}<n<\frac{19}{4}$ ··· ❷

n은 정수이므로 $\quad n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

따라서 구하는 각 θ의 개수는 5이다. ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ θ를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ n의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ θ의 개수를 구할 수 있다.	20 %

참고 $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$를 $\theta=\frac{2n}{5}\pi+\frac{\pi}{10}$에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{10},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{9}{10}\pi,\ \frac{13}{10}\pi,\ \frac{17}{10}\pi$

유형 06 부채꼴의 호의 길이와 넓이

본책 84쪽

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴에서

(호의 길이)$=r\theta$, (넓이)$=\frac{1}{2}r^2\theta$

0550 반지름의 길이가 a, 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴의 호의 길이가 4π이므로

$a\cdot\frac{2}{3}\pi=4\pi \qquad \therefore a=6$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot6\cdot4\pi=12\pi \qquad \therefore b=12$

$\therefore a+b=18$

답 18

0551 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 호의 길이는 $\frac{3}{4}r$이므로 부채꼴의 둘레의 길이는

$r+r+\frac{3}{4}r=22, \qquad \frac{11}{4}r=22 \qquad \therefore r=8$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot8^2\cdot\frac{3}{4}=24$

답 24

0552 $\angle COD=\theta$라 하면 $\overset{\frown}{CD}=20\pi$ cm이므로

$24\theta=20\pi \qquad \therefore \theta=\frac{5}{6}\pi$

따라서 구하는 종이의 넓이는

(부채꼴 OCD의 넓이)$-$(부채꼴 OAB의 넓이)

$=\frac{1}{2}\cdot24\cdot20\pi-\frac{1}{2}\cdot6^2\cdot\frac{5}{6}\pi$

$=240\pi-15\pi=225\pi\,(\text{cm}^2)$

답 $225\pi\ \text{cm}^2$

0553 원을 세 바퀴 굴렸더니 처음의 위치로 되돌아왔으므로 부채꼴의 둘레의 길이는 원의 둘레의 길이의 3배와 같다.

원의 둘레의 길이는 $2\pi\cdot1=2\pi$이고, 부채꼴의 둘레의 길이는

$6+6+6\theta=12+6\theta$

이므로 $\quad 12+6\theta=2\pi\cdot3, \qquad 6\theta=6\pi-12$

$\therefore \theta=\pi-2$

답 ②

0554 (1) $120°=\frac{2}{3}\pi$이므로 호 AB의 길이는 $\quad 6\cdot\frac{2}{3}\pi=4\pi$

$\overline{OC}=3$, $\angle COD=\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}$이므로 호 CD의 길이는

$3\cdot\frac{\pi}{3}=\pi$

$\overline{OE}=\frac{3}{2}$, $\angle EOF=\frac{2}{3}\pi$이므로 호 EF의 길이는

$\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\pi=\pi$

$\overline{OG}=\frac{3}{4}$, $\angle GOH=\frac{\pi}{3}$이므로 호 GH의 길이는

$\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}$ ··· ❶

따라서 구하는 호의 길이의 합은

$4\pi+\pi+\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{25}{4}\pi$ ··· ❷

(2) $\overline{AC}=\overline{OC}=3$, $\overline{DE}=\overline{OE}=\frac{3}{2}$, $\overline{FG}=\overline{OG}=\frac{3}{4}$이고

$\overline{BH}=\overline{OB}-\overline{OH}=\overline{OB}-\overline{FG}$

$=6-\frac{3}{4}=\frac{21}{4}$ ··· ❸

따라서 색칠한 도형의 둘레의 길이는

$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{EF}+\overset{\frown}{GH}+\overline{AC}+\overline{DE}+\overline{FG}+\overline{BH}$

$=\frac{25}{4}\pi+3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{21}{4}$

$=\frac{25}{4}\pi+\frac{21}{2}$ ··· ❹

답 (1) $\frac{25}{4}\pi$ (2) $\frac{25}{4}\pi+\frac{21}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{EF}$, $\overset{\frown}{GH}$의 길이를 구할 수 있다.	60 %
❷ $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{EF}+\overset{\frown}{GH}$의 값을 구할 수 있다.	10 %
❸ $\overline{AC}$, $\overline{DE}$, $\overline{FG}$, $\overline{BH}$의 길이를 구할 수 있다.	20 %
❹ 색칠한 도형의 둘레의 길이를 구할 수 있다.	10 %

0555 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ라 하면 반지름의 길이와 호의 길이가 같으므로 $r=r\theta$ $\quad\therefore \theta=1$

$\therefore \overline{BH}=r\sin 1$, $\overline{OH}=r\cos 1$

이때 삼각형 BOH의 넓이가 4이므로

$$\frac{1}{2}\cdot r\cos 1\cdot r\sin 1=4 \qquad \therefore \frac{1}{2}r^2=\frac{4}{\sin 1\cos 1}$$

따라서 부채꼴 OAB의 넓이는

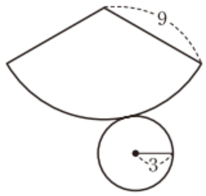
$$\frac{1}{2}r^2\cdot 1=\frac{4}{\sin 1\cos 1}$$

답 ④

유형 07 부채꼴의 호의 길이와 넓이의 활용 본책 85쪽

원뿔의 전개도에서 옆면인 부채꼴의 호의 길이와 밑면인 원의 둘레의 길이가 같음을 이용한다.

0556 원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 부채꼴의 호의 길이는



$$2\pi\cdot 3=6\pi$$

이므로 옆면인 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 6\pi=27\pi$$

또 밑면인 원의 넓이는 $\quad \pi\cdot 3^2=9\pi$

이므로 구하는 원뿔의 겉넓이는

$$27\pi+9\pi=36\pi$$

답 36π

0557 부채꼴의 호의 길이가 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$$10\theta=2\pi r \qquad \therefore \theta=\frac{\pi}{5}r \quad \cdots ❶$$

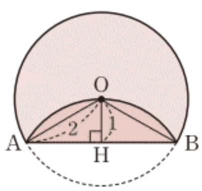
$$\therefore a=\frac{\pi}{5}\cdot 1=\frac{\pi}{5},\ b=\frac{\pi}{5}\cdot 3=\frac{3}{5}\pi \quad \cdots ❷$$

$$\therefore b-a=\frac{2}{5}\pi \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{2}{5}\pi$

채점 기준	비율
❶ θ를 r에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0558 오른쪽 그림과 같이 접힌 선분의 양 끝 점을 A, B라 하고 원의 중심 O에서 현 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 OAH에서



$$\cos(\angle AOH)=\frac{\overline{OH}}{\overline{OA}}=\frac{1}{2}$$

이므로 $\quad \angle AOH=\frac{\pi}{3}\left(\because 0<\angle AOH<\frac{\pi}{2}\right)$

$$\therefore \angle AOB=2\angle AOH=\frac{2}{3}\pi$$

접힌 활꼴의 호의 길이는 $\overset{\frown}{AB}$의 길이와 같으므로

$$2\cdot\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi$$

따라서 $p=3$, $q=4$이므로

$pq=12$

답 12

유형 08 부채꼴의 둘레의 길이와 넓이의 최대 · 최소 본책 85쪽

반지름의 길이가 r, 둘레의 길이가 a인 부채꼴의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}r(a-2r)$$

➡ 이차함수의 최대 · 최소를 이용하여 S의 최댓값을 구한다.

0559 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 둘레의 길이가 10이므로 호의 길이는 $10-2r$이다.

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}r(10-2r)=-r^2+5r$$

$$=-\left(r-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}\ (0<r<5)$$

따라서 $r=\frac{5}{2}$일 때 S가 최대이므로 넓이가 최대인 부채꼴의 반지름의 길이는 $\frac{5}{2}$이다.

답 ⑤

0560 부채꼴의 반지름의 길이를 r m라 하면 둘레의 길이가 200 m이므로 호의 길이는 $(200-2r)$m이다.

화단의 넓이를 S m^{2}라 하면

$$S=\frac{1}{2}r(200-2r)=-r^2+100r$$

$$=-(r-50)^2+2500\ (0<r<100)$$

따라서 $r=50$일 때 S의 최댓값이 2500이므로 화단의 넓이의 최댓값은 2500 m^{2}이다.

답 2500 m^2

0561 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 넓이가 9이므로

$$\frac{1}{2}rl=9 \qquad \therefore l=\frac{18}{r}$$

따라서 부채꼴의 둘레의 길이는

$$l+2r=\frac{18}{r}+2r \quad \cdots ❶$$

이때 $\frac{18}{r}>0$, $2r>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{18}{r}+2r\geq 2\sqrt{\frac{18}{r}\cdot 2r}$$

$$=2\cdot 6=12\ (\text{단, 등호는 } r=3\text{일 때 성립})$$

즉 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값은 12이다. $\cdots$ ❷

답 12

채점 기준	비율
❶ 부채꼴의 둘레의 길이를 r에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

유형 09 삼각함수

본책 86쪽

중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 r인 원 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 동경 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

① $r=\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{x^2+y^2}$

② $\sin\theta=\frac{y}{r}$, $\cos\theta=\frac{x}{r}$, $\tan\theta=\frac{y}{x}\,(x\neq 0)$

0562 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{6^2+(-8)^2}=10$이므로

$$\sin\theta=-\frac{8}{10}=-\frac{4}{5},\ \cos\theta=\frac{6}{10}=\frac{3}{5},\ \tan\theta=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}$$

$$\therefore 5\sin\theta-5\cos\theta+3\tan\theta=-4-3-4=-11$$

답 ①

0563 점 $\mathrm{P}(-2\sqrt{3},\ a)$에서 $\tan\theta=\frac{a}{-2\sqrt{3}}$이므로

$$\frac{a}{-2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\qquad \therefore a=-2$$

따라서 점 P의 좌표가 $(-2\sqrt{3},\ -2)$이므로

$$r=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=4$$

$$\therefore a+r=2$$

답 ②

0564 θ가 제 2 사분면의 각이므로 각 θ를 나타내는 동경을 OP라 할 때, $\tan\theta=\frac{1}{-3}$에서 점 P의 좌표를 $(-3,\ 1)$로 놓을 수 있다.

이때 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$이므로

$$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10},\ \cos\theta=\frac{-3}{\sqrt{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

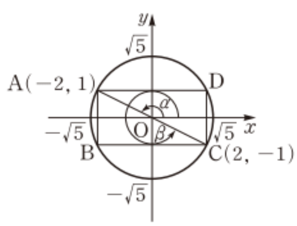
$$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

답 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

0565 $\overline{\mathrm{AD}}=4$, $\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로

$\mathrm{A}(-2,\ 1)$

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{5}$이므로



$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$$

⋯ ❶

두 점 A, C가 원점에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{C}(2,\ -1)$

$\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{5}$이므로

$$\sin\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

⋯ ❷

$$\therefore \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$$

⋯ ❸

답 $\frac{4}{5}$

채점 기준	비율
❶ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sin\beta$, $\cos\beta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0566 $y=\frac{1}{3}x$를 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$$x^2+\frac{x^2}{9}=1,\qquad x^2=\frac{9}{10}\qquad \therefore x=\frac{3\sqrt{10}}{10}\ (\because x>0)$$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{3\sqrt{10}}{10},\ \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$

$$\therefore \sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$y=-3x$를 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$$x^2+9x^2=1,\qquad x^2=\frac{1}{10}$$

$$\therefore x=-\frac{\sqrt{10}}{10}\ (\because x<0)$$

$$\therefore \cos\beta=-\frac{\sqrt{10}}{10}$$

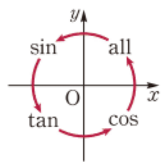
$$\therefore \sin\alpha\cos\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}\cdot\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=-\frac{1}{10}$$

답 $-\frac{1}{10}$

유형 10 삼각함수의 값의 부호

본책 86쪽

각 사분면에서 값이 양수인 삼각함수는 오른쪽 그림과 같다.



① $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$

➡ θ는 제 1 사분면의 각

② $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

➡ θ는 제 2 사분면의 각

③ $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$ ➡ θ는 제 3 사분면의 각

④ $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$ ➡ θ는 제 4 사분면의 각

0567 (i) $\sin\theta\cos\theta<0$일 때,

$\sin\theta$와 $\cos\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로 θ는 제 2 사분면 또는 제 4 사분면의 각이다.

(ii) $\cos\theta\tan\theta<0$일 때,

$\cos\theta$와 $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로 θ는 제 3 사분면 또는 제 4 사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제 4 사분면의 각이다.

답 제 4 사분면

0568 θ가 제 3 사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$ ⋯ ❶

$\therefore$ (주어진 식)

$=\cos\theta+\sin\theta+\tan\theta-\cos\theta-\sin\theta+\tan\theta$

$=2\tan\theta$ ⋯ ❷

답 $2\tan\theta$

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값의 부호를 알 수 있다.	50 %
❷ 식을 간단히 할 수 있다.	50 %

0569 $\dfrac{\sqrt{\tan\theta}}{\sqrt{\cos\theta}}=-\sqrt{\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}}$, $\sin\theta\neq0$이므로

$\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 $\sin\theta<0$

ㄴ. $\sin\theta\cos\theta>0$

ㄷ. $\dfrac{\tan\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta}<0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

> SSEN 특강
>
> **음수의 제곱근의 성질**
>
> 실수 a, b에 대하여
>
> ① $a<0$, $b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$
>
> 그 외에는 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
>
> ② $a>0$, $b<0$이면 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$
>
> 그 외에는 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (단, $b\neq0$)

0570 θ가 제 2 사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

따라서 $\cos\theta-\sin\theta<0$, $1-\cos\theta>0$이므로

$|\sin\theta|-\sqrt{(\cos\theta-\sin\theta)^2}+\sqrt{(1-\cos\theta)^2}$

$=\sin\theta-\{-(\cos\theta-\sin\theta)\}+1-\cos\theta$

$=1$

답 1

0571 $\sin\theta<0$, $\tan\theta<0$이므로 θ는 제 4 사분면의 각이다.

이때 $0<\theta<2\pi$이므로 $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

① $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$이므로 $\sin\theta\cos\theta<0$

② $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$이므로 $\cos\theta\tan\theta<0$

③ $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $\dfrac{3}{4}\pi<\dfrac{\theta}{2}<\pi$

즉 $\dfrac{\theta}{2}$는 제 2 사분면의 각이므로 $\cos\dfrac{\theta}{2}<0$

④ $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $3\pi<2\theta<4\pi$

즉 2θ는 제 3 사분면 또는 제 4 사분면의 각이므로 $\sin2\theta<0$

⑤ $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $\pi<\theta-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{3}{2}\pi$

즉 $\theta-\dfrac{\pi}{2}$는 제 3 사분면의 각이므로 $\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)>0$

답 ③

유형 11~12 삼각함수 사이의 관계 본책 87, 88쪽

① $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

② $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

0572 $\left(1+\tan\theta+\dfrac{1}{\cos\theta}\right)\left(1+\dfrac{1}{\tan\theta}-\dfrac{1}{\sin\theta}\right)$

$=\dfrac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta}\cdot\dfrac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}$

$=\dfrac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2$

답 2

0573 ㄱ. $\cos^4\theta-\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$=\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-\sin^2\theta-\sin^2\theta$

$=1-2\sin^2\theta$

ㄴ. $\dfrac{\tan\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{\tan\theta}{1-\cos\theta}$

$=\dfrac{\tan\theta(1-\cos\theta)+\tan\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2\tan\theta}{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2\tan\theta}{\sin^2\theta}$

$=2\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1}{\sin^2\theta}$

$=\dfrac{2}{\sin\theta\cos\theta}$

ㄷ. $\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}+\dfrac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}$

$=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}+\dfrac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+1}$

$=\dfrac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}+\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$

$=\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$

$=0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

0574 $A(0,\ 1)$이고 $B(\cos\theta,\ \sin\theta)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(\cos\theta)^2+(\sin\theta-1)^2}$

$=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin\theta+1}$

$=\sqrt{2-2\sin\theta}$

답 ③

0575 $\sqrt{4-8\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{4+8\sin\theta\cos\theta}$

$=\sqrt{4(1-2\sin\theta\cos\theta)}-\sqrt{4(1+2\sin\theta\cos\theta)}$

$=\sqrt{4(\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)}$

$\quad-\sqrt{4(\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)}$

$=\sqrt{2^2(\sin\theta-\cos\theta)^2}-\sqrt{2^2(\sin\theta+\cos\theta)^2}$

$=|2(\sin\theta-\cos\theta)|-|2(\sin\theta+\cos\theta)|$

$=2\sin\theta-2\cos\theta-(2\sin\theta+2\cos\theta)$ ($\because 0<\cos\theta<\sin\theta$)

$=-4\cos\theta$

답 ②

0576 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{8}{17}\right)^2=\frac{225}{289}$

이때 θ가 제 3 사분면의 각이므로 $\quad \sin\theta=-\frac{15}{17}$

$$\therefore \frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$=\frac{1-\frac{8}{17}}{-\frac{15}{17}}=-\frac{3}{5}$$

답 ②

0577 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\quad \cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$$

$$\therefore \sqrt{2}\cos\theta-2\tan\theta=\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-2\cdot(-1)=1$$

답 1

0578 $\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=2-\sqrt{3}$에서

$1+\tan\theta=(2-\sqrt{3})(1-\tan\theta)$

$(3-\sqrt{3})\tan\theta=1-\sqrt{3}$

$$\therefore \tan\theta=\frac{1-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$이므로

$\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{3}, \quad 3-3\cos^2\theta=\cos^2\theta$

$\cos^2\theta=\frac{3}{4} \quad \therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\because \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi\right)$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

0579 $\frac{1}{1+\cos\theta}+\frac{1}{1-\cos\theta}=\frac{1-\cos\theta+(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$
$$=\frac{2}{\sin^2\theta}$$

따라서 $\frac{2}{\sin^2\theta}=\frac{5}{2}$이므로 $\quad \sin^2\theta=\frac{4}{5}$

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$이므로

$\sin\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\because \pi<\theta<\frac{3}{2}\pi\right)$

$$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{2\sqrt{5}}{5}}{-\frac{\sqrt{5}}{5}}=2$$

답 2

0580 $|\sin\theta|=|\cos\theta|$이고 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$2\sin^2\theta=1, \quad \sin^2\theta=\frac{1}{2}$

이때 θ가 제 2 사분면의 각이므로

$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⋯ ❶

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-1$이므로 ⋯ ❷

$\sin\theta\cos\theta+\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+(-1)=-\frac{3}{2}$ ⋯ ❸

답 $-\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\sin\theta\cos\theta+\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0581 $\frac{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\frac{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta+\cos^2\theta+(1-\sin^2\theta)}$
$$=\frac{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta}$$
$$=\frac{\sin\theta(1+2\cos\theta)}{\cos\theta(1+2\cos\theta)}$$
$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

따라서 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=2$, 즉 $\sin\theta=2\cos\theta$이고 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$5\cos^2\theta=1 \quad \therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}, \sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$

답 ③

유형 13 삼각함수 사이의 관계 ; $\sin\theta\pm\cos\theta$, $\sin\theta\cos\theta$ 이용

본책 89쪽

$\sin\theta\pm\cos\theta$의 값 또는 $\sin\theta\cos\theta$의 값이 주어진 경우에는 양변을 제곱하여

$(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=\sin^2\theta\pm2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$
$=1\pm2\sin\theta\cos\theta$ (복호동순)

임을 이용한다.

0582 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2} \quad \therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\therefore (1+\sin^2\theta)(1+\cos^2\theta)=1+\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta$
$$=1+1+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{33}{16}$$

답 $\frac{33}{16}$

0583 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$
$$=1-2\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{4}$$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로　　$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

따라서 $\sin\theta-\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}$　　답 $\frac{\sqrt{7}}{2}$

0584 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$　　$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$\therefore \sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{8}\right)=\frac{11}{16}$　　답 ④

0585 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$　　$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$　　··· ❶

이때

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)=\frac{17}{9}$

이고 θ가 제 4 사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$에서

$\sin\theta-\cos\theta<0$　　$\therefore \sin\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{17}}{3}$　　··· ❷

$\therefore \sin^2\theta-\cos^2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)$

$=\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{17}}{3}\right)=\frac{\sqrt{17}}{9}$　　··· ❸

답 $\frac{\sqrt{17}}{9}$

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sin\theta-\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\sin^2\theta-\cos^2\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 14 삼각함수와 이차방정식

본책 89쪽

이차방정식의 두 근이 삼각함수로 주어진 경우
➡ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

0586 $2x^2+x+a=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$(\cos\theta+\sin\theta)+(\cos\theta-\sin\theta)=-\frac{1}{2}$　　······ ㉠

$(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)=\frac{a}{2}$　　······ ㉡

㉠에서　$2\cos\theta=-\frac{1}{2}$　　$\therefore \cos\theta=-\frac{1}{4}$

㉡의 좌변을 간단히 하면

$(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)$

$=2\cos^2\theta-1$

즉 $2\cos^2\theta-1=\frac{a}{2}$이므로 $\cos\theta=-\frac{1}{4}$을 대입하면

$\frac{1}{8}-1=\frac{a}{2}$　　$\therefore a=-\frac{7}{4}$　　답 $-\frac{7}{4}$

0587 $x^2-px+q=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$p=\tan\alpha+\tan\beta$, $q=\tan\alpha\tan\beta$

또 $x^2-rx+s=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$r=\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta}=\frac{p}{q}$

$s=\frac{1}{\tan\alpha}\cdot\frac{1}{\tan\beta}=\frac{1}{\tan\alpha\tan\beta}=\frac{1}{q}$

$\therefore rs=\frac{p}{q}\cdot\frac{1}{q}=\frac{p}{q^2}$

답 ③

0588 $2x^2-\sqrt{2}x+k=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$　　··· ❶

위의 식의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$　　··· ❷

$\therefore (\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$

이때 $\sin\theta>\cos\theta$이므로　　$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{2}$　　··· ❸

답 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta+\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\sin\theta-\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0589 $8x^2-4x+a=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$　　$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$\tan\theta$와 $\frac{1}{\tan\theta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 3인 이차방정식은

$3\left\{x^2-\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)x+\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}\right\}=0$

이때

$$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\frac{8}{3}$$

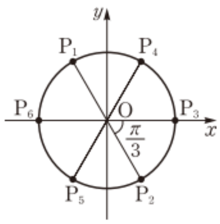
이므로 구하는 이차방정식은

$$3\left\{x^2-\left(-\frac{8}{3}\right)x+1\right\}=0 \qquad \therefore 3x^2+8x+3=0$$

답 $3x^2+8x+3=0$

0590 전략 일반각의 성질을 이용하여 동경 OP_n의 규칙성을 찾는다.

풀이 동경 OP_n이 나타내는 각의 크기를 θ_n이라 하면



$$\theta_1=3\pi-\frac{\pi}{3}=2\pi+\frac{2}{3}\pi$$

$$\theta_2=5\pi+\frac{2}{3}\pi=4\pi+\frac{5}{3}\pi$$

$$\theta_3=7\pi-\pi=6\pi$$

$$\theta_4=9\pi+\frac{4}{3}\pi=10\pi+\frac{\pi}{3}$$

$$\theta_5=11\pi-\frac{5}{3}\pi=8\pi+\frac{4}{3}\pi$$

$$\theta_6=13\pi+2\pi=14\pi+\pi$$

$$\theta_7=15\pi-\frac{7}{3}\pi=12\pi+\frac{2}{3}\pi$$

$$\theta_8=17\pi+\frac{8}{3}\pi=18\pi+\frac{5}{3}\pi$$

$$\vdots$$

이상에서 동경 OP_n이 동경 OP_1과 일치하려면

$n=6m+1$ (m은 자연수)

꼴이어야 하므로

$n=7,\ 13,\ 19,\ \cdots,\ 97$

따라서 구하는 동경의 개수는 16이다.

답 16

0591 전략 $\frac{n}{5}\pi$와 $\frac{n}{7}\pi$를 일반각에 대한 부등식으로 나타낸다.

풀이 $\frac{n}{5}\pi$가 제 2 사분면의 각이려면

$$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{n}{5}\pi<2k\pi+\pi \ (\text{단, } k\text{는 음이 아닌 정수})$$

$$\therefore 10k+\frac{5}{2}<n<10k+5$$

n은 자연수이므로 $\quad n=10k+3$ 또는 $n=10k+4$

따라서 $k=0$일 때 n의 값이 최소이므로 $\quad m=3$

$\frac{n}{7}\pi$가 제 3 사분면의 각이려면

$$2t\pi+\pi<\frac{n}{7}\pi<2t\pi+\frac{3}{2}\pi \ (\text{단, } t\text{는 음이 아닌 정수})$$

$$\therefore 14t+7<n<14t+\frac{21}{2}$$

n은 자연수이므로

$n=14t+8$ 또는 $n=14t+9$ 또는 $n=14t+10$

따라서 $t=6$일 때 100 이하의 자연수 n의 값이 최대이므로

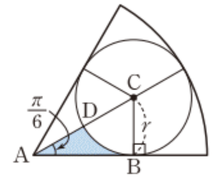
$M=94$

$\therefore M-m=91$

답 ①

0592 전략 6등분 한 부채꼴의 중심각의 크기를 이용하여 내접원의 반지름의 길이를 구한다.

풀이 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 오른쪽 그림과 같이 부채꼴의 중심각의 크기가 $2\pi\cdot\frac{1}{6}=\frac{\pi}{3}$인 부채꼴에서



$$\angle\mathrm{CAB}=\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \overline{\mathrm{AC}}=2r,\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}r$$

큰 원의 반지름의 길이가 6이므로

$2r+r=6 \qquad \therefore r=2$

위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

(△ABC의 넓이)−(부채꼴 BCD의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot2-\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$$

따라서 색칠한 부분의 넓이 S는

$$S=12\left(2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi\right)=24\sqrt{3}-8\pi$$

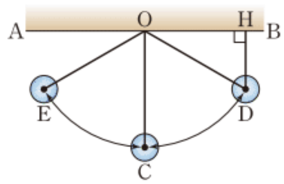
이므로 $\quad p=24,\ q=-8$

$\therefore p+q=16$

답 16

0593 전략 추의 중심이 움직인 도형이 부채꼴의 호임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 추를 매단 줄의 끝 부분을 O라 하고 추가 멈춰있을 때의 추의 중심을 C, 추가 가장 높이 올라갔을 때의 추의 중심을 각각 D, E라 하자.



직선 AB와 추의 중심 사이의 거리는 추의 중심이 C일 때 최대이고, 추의 중심이 D 또는 E일 때 최소이므로 점 D에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{OC}}=12,\ \overline{\mathrm{DH}}=6$

따라서 직각삼각형 DOH에서

$$\sin(\angle\mathrm{DOH})=\frac{\overline{\mathrm{DH}}}{\overline{\mathrm{OD}}}=\frac{1}{2}$$

이므로 $\quad \angle\mathrm{DOH}=\frac{\pi}{6}\ \left(\because 0<\angle\mathrm{DOH}<\frac{\pi}{2}\right)$

$$\therefore \angle\mathrm{DOE}=2\left(\frac{\pi}{2}-\angle\mathrm{DOH}\right)=\frac{2}{3}\pi$$

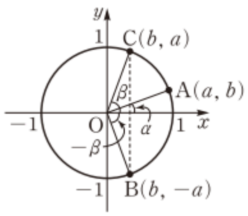
따라서 추가 1회 왕복하는 동안 추의 중심이 움직인 거리는 반지름의 길이가 12이고 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴의 호의 길이의 2배와 같으므로

$$2\cdot12\cdot\frac{2}{3}\pi=16\pi$$

답 ③

0594 전략 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$에 대하여 동경 OA가 나타내는 각의 크기를 α라 할 때, $\cos\alpha=\frac{a}{\overline{\mathrm{OA}}},\ \sin\alpha=\frac{b}{\overline{\mathrm{OA}}}$임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 $A(a,\ b)$에 대하여 $\sin\alpha=\frac{b}{1}$이므로



$$b=\frac{1}{3}$$

점 $A\left(a,\ \frac{1}{3}\right)$은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$$a^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=1,\quad a^2=\frac{8}{9}$$

$$\therefore a=\frac{2\sqrt{2}}{3}\ (\because a>0)$$

각 $-\beta$를 나타내는 동경과 원의 교점이 $B(b,\ -a)$이므로 각 β를 나타내는 동경과 원의 교점을 C라 하면 점 C는 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점이다.

따라서 $C(b,\ a)$, 즉 $C\left(\frac{1}{3},\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$이므로

$$\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

답 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

0595 전략 θ가 제1, 2, 3, 4 사분면의 각인 경우로 나누어 각각 $f(\sin\theta)+f(\cos\theta)+2f(\tan\theta)$의 값을 구해 본다.

풀이 (i) θ가 제 1 사분면의 각일 때,

$$f(\sin\theta)+f(\cos\theta)+2f(\tan\theta)=1+1+2\cdot1=4$$

(ii) θ가 제 2 사분면의 각일 때,

$$f(\sin\theta)+f(\cos\theta)+2f(\tan\theta)=1-1+2\cdot(-1)$$
$$=-2$$

(iii) θ가 제 3 사분면의 각일 때,

$$f(\sin\theta)+f(\cos\theta)+2f(\tan\theta)=-1-1+2\cdot1=0$$

(iv) θ가 제 4 사분면의 각일 때,

$$f(\sin\theta)+f(\cos\theta)+2f(\tan\theta)=-1+1+2\cdot(-1)$$
$$=-2$$

이상에서 주어진 식을 만족시키는 θ는 제 3 사분면의 각이다.

답 제 3 사분면

0596 전략 로그의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 $\log_2\cos\alpha+\log_2\tan\alpha=\log_2\left(\cos\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$

$$=\log_2\sin\alpha$$

$\log_2\sin\alpha=-2$에서 $\sin\alpha=2^{-2}=\frac{1}{4}$

이때 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로

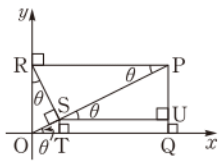
$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\therefore \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{15}$$

답 ⑤

0597 전략 직각삼각형의 변의 길이를 이용하여 $\overline{ST}$, $\overline{SU}$의 길이를 삼각함수로 나타낸다.

풀이 직선 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면



$$\overline{PQ}=r\sin\theta,\ \overline{OQ}=r\cos\theta$$

$\triangle ORS$에서 $\angle ORS=\theta$이므로

$$\overline{OS}=\overline{OR}\sin\theta=\overline{PQ}\sin\theta=r\sin^2\theta$$

$\triangle OST$에서

$$\overline{ST}=\overline{OS}\sin\theta=r\sin^3\theta$$

따라서 $r\sin^3\theta=1$이므로

$$\sin^3\theta=\frac{1}{r}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

한편 $\overline{OQ}=r\cos\theta$이므로 $\triangle SPR$에서

$$\overline{PS}=\overline{RP}\cos\theta=\overline{OQ}\cos\theta=r\cos^2\theta$$

$\triangle SUP$에서 $\overline{SU}=\overline{PS}\cos\theta=r\cos^3\theta$

따라서 $r\cos^3\theta=8$이므로

$$\cos^3\theta=\frac{8}{r}\qquad\cdots\cdots ㉡$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 ㉠, ㉡에서

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{8}{r}\right)^{\frac{2}{3}}=1,\quad \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{2}{3}}+4\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

$$5\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{2}{3}}=1\quad \therefore \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{5}$$

즉 $r^{\frac{2}{3}}=5$이므로 $r=5^{\frac{3}{2}}=5\sqrt{5}$

답 ⑤

0598 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 $x^2-ax+2a=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin\theta+\cos\theta=a,\ \sin\theta\cos\theta=2a$$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$이므로

$$a^2=1+4a,\quad a^2-4a-1=0$$

$$\therefore a=2-\sqrt{5}\ (\because a<0)$$

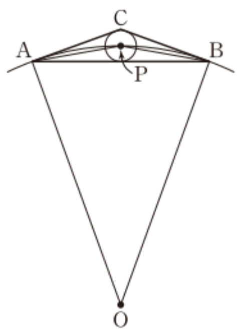
따라서 $\sin\theta+\cos\theta=2-\sqrt{5}$, $\sin\theta\cos\theta=4-2\sqrt{5}$이므로

$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$$
$$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$$
$$=(2-\sqrt{5})(-3+2\sqrt{5})$$
$$=7\sqrt{5}-16$$

답 $7\sqrt{5}-16$

0599 전략 삼각형의 내심의 성질을 이용하여 $\angle APB$의 크기를 구한다.

풀이 삼각형의 내심의 성질에 의하여



$$\angle APB=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{9}\pi$$
$$=\frac{8}{9}\pi\qquad\cdots ❶$$

세 점 A, P, B를 지나는 원의 중심을 O라 하면

$$\angle AOB=2\pi-2\cdot\frac{8}{9}\pi$$
$$=\frac{2}{9}\pi\qquad\cdots ❷$$

$$\therefore \overset{\frown}{AB}=3\cdot\frac{2}{9}\pi=\frac{2}{3}\pi\qquad\cdots ❸$$

답 $\frac{2}{3}\pi$

채점 기준	비율
❶ ∠APB의 크기를 구할 수 있다.	30 %
❷ ∠AOB의 크기를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\widehat{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %

SSEN 특강

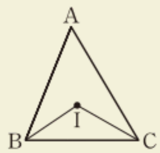
삼각형의 내심의 성질

$\triangle ABC$의 내심 I에 대하여

① $\angle BIC=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\angle A$

② $\angle IBA=\angle IBC$

$\angle ICA=\angle ICB$



0600 전략 y축에 대하여 대칭인 점들을 짝 지어 본다.

풀이 주어진 그림에서 점 P_1과 점 P_6, 점 P_2와 점 P_5, 점 P_3과 점 P_4, 점 P_7과 점 P_{10}, 점 P_8과 점 P_9는 각각 y축에 대하여 대칭이므로 이 점들의 x좌표는 절댓값이 같고 부호가 서로 반대이다. ⋯ ❶

이때 삼각함수의 정의에 의하여 점 P_2의 x좌표는 $\cos\theta$, 점 P_5의 x좌표는 $\cos 4\theta$이므로

$\cos\theta+\cos 4\theta=0$

같은 방법으로 하면

$\cos 2\theta+\cos 3\theta=0$, $\cos 6\theta+\cos 9\theta=0$,

$\cos 7\theta+\cos 8\theta=0$, $\cos 5\theta+\cos 10\theta=0$ ⋯ ❷

$\therefore \cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos 10\theta=0$ ⋯ ❸

답 0

채점 기준	비율
❶ y축에 대하여 대칭인 점끼리 짝 지을 수 있다.	40 %
❷ 합이 0인 $\cos n\theta$끼리 더할 수 있다.	50 %
❸ $\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos 10\theta$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0601 전략 $ab\neq 0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면 $a<0$, $b<0$임을 이용한다.

풀이 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$에서 $\sin\theta=\cos\theta\tan\theta$이므로

$\sqrt{\cos\theta}\sqrt{\tan\theta}=-\sqrt{\sin\theta}=-\sqrt{\cos\theta\tan\theta}$

따라서 $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$이므로 θ는 제 2 사분면의 각이다. ⋯ ❶

$|\tan\theta|=\sqrt{3}$에서 $\tan\theta=-\sqrt{3}$

$\tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=3$이므로

$1-\cos^2\theta=3\cos^2\theta$

$\cos^2\theta=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore \cos\theta=-\frac{1}{2}$ $(\because \cos\theta<0)$

$\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⋯ ❷

$\therefore \sin\theta+\cos\theta+\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-\sqrt{3}$

$=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ ⋯ ❸

답 $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$

채점 기준	비율
❶ θ가 제몇 사분면의 각인지 알 수 있다.	30 %
❷ $\tan\theta$, $\cos\theta$, $\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $\sin\theta+\cos\theta+\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0602 전략 $\sin\theta+\cos\theta$의 값을 구한 후 $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 각각 구한다.

풀이 $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=2$

$1-2\sin\theta\cos\theta=2$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}$ ⋯ ❶

이때

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

이므로

$\sin\theta+\cos\theta=0$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⋯ ❸

$\therefore \frac{1}{\sin^{10}\theta}+\frac{1}{\cos^{10}\theta}=(\sqrt{2})^{10}+(-\sqrt{2})^{10}$

$=32+32=64$ ⋯ ❹

답 64

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\sin\theta+\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $\frac{1}{\sin^{10}\theta}+\frac{1}{\cos^{10}\theta}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

Ⅱ. 삼각함수

06 삼각함수의 그래프

0603 함수 $f(x)$의 주기가 3이므로

$f(x+3)=f(x)$

$\therefore f(10)=f(7)=f(4)=f(1)=1$

답 1

0604 함수 $f(x)$의 주기가 2이므로

$f(x+2)=f(x)$

$\therefore f(9)=f(7)=f(5)=f(3)=f(1)$

$0\le x<2$에서 $f(x)=x^2$이므로

$f(9)=f(1)=1$

답 1

0605 답 (가) 실수 전체의 집합 (나) $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$ (다) $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$ (라) y축에 대하여 대칭 (마) 2π (바) 2π

0606 (1) $-1\le \sin x\le 1$에서

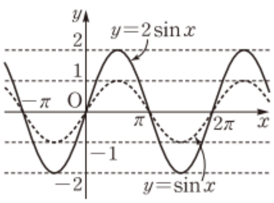
$-2\le 2\sin x\le 2$이므로 치역은

$\{y\,|\,-2\le y\le 2\}$

(2) $2\sin x=2\sin(x+2\pi)$이므로

주기는 2π이다.

(3) 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 원점에 대하여 대칭이다.



답 (1) $\{y\,|\,-2\le y\le 2\}$ (2) 2π (3) 원점

0607 (1) $-1\le \cos 2x\le 1$이므로 치역은

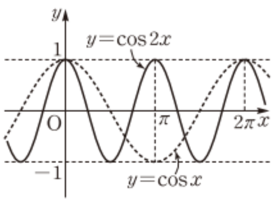
$\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$

(2) $\cos 2x=\cos(2x+2\pi)$

$=\cos 2(x+\pi)$

이므로 주기는 π이다.

(3) 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 y축에 대하여 대칭이다.



답 (1) $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$ (2) π (3) y축

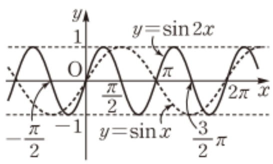
0608 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$이고,

$\sin 2x=\sin(2x+2\pi)$

$=\sin 2(x+\pi)$

이므로 주기는 π이다.

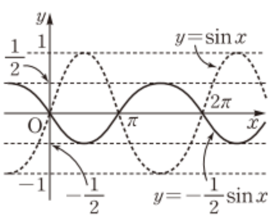
따라서 $y=\sin 2x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0609 치역은 $\left\{y\,\middle|\,-\frac{1}{2}\le y\le \frac{1}{2}\right\}$이고, $-\frac{1}{2}\sin x=-\frac{1}{2}\sin(x+2\pi)$이므로 주기는 2π이다.

따라서 $y=-\frac{1}{2}\sin x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



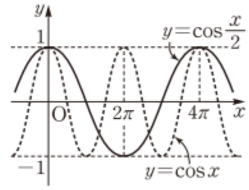
답 풀이 참조

0610 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$이고,

$\cos\frac{x}{2}=\cos\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)$

$=\cos\frac{1}{2}(x+4\pi)$

이므로 주기는 4π이다. 따라서 $y=\cos\frac{x}{2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



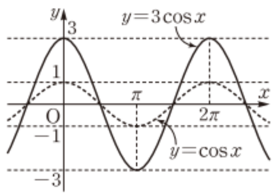
답 풀이 참조

0611 치역은 $\{y\,|\,-3\le y\le 3\}$이고,

$3\cos x=3\cos(x+2\pi)$

이므로 주기는 2π이다.

따라서 $y=3\cos x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0612 (2) $\tan\frac{x}{2}=\tan\left(\frac{x}{2}+\pi\right)=\tan\frac{1}{2}(x+2\pi)$

이므로 주기는 2π이다.

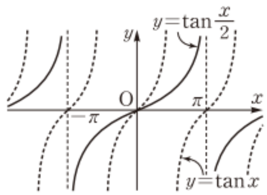
(3) 점근선의 방정식은 $\frac{x}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$

에서

$x=2n\pi+\pi=(2n+1)\pi$

(n은 정수)

(4) 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 원점에 대하여 대칭이다.

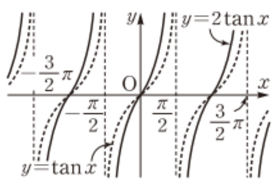


답 (1) 실수 (2) 2π (3) $(2n+1)\pi$ (4) 원점

0613 치역은 실수 전체의 집합이고,

$2\tan x=2\tan(x+\pi)$

이므로 주기는 π이다. 또 점근선의 방정식은 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$(n은 정수)이므로 $y=2\tan x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

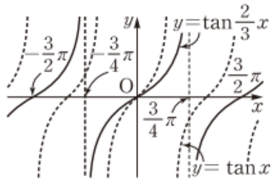
0614 치역은 실수 전체의 집합이고,

$\tan\frac{2}{3}x=\tan\left(\frac{2}{3}x+\pi\right)=\tan\frac{2}{3}\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)$

이므로 주기는 $\frac{3}{2}\pi$이다. 또 점근선의 방정식은 $\frac{2}{3}x=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서

$x=\frac{3}{2}n\pi+\frac{3}{4}\pi$($n$은 정수)

이므로 $y=\tan\frac{2}{3}x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0615 $y=2\sin(2x+\pi)$에서

최댓값: $|2|=2$, 최솟값: $-|2|=-2$, 주기: $\frac{2\pi}{2}=\pi$

답 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: π

0616 $y=-\frac{1}{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$에서

최댓값: $\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\left|-\frac{1}{2}\right|=-\frac{1}{2}$, 주기: $\frac{2}{3}\pi$

답 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\frac{1}{2}$, 주기: $\frac{2}{3}\pi$

0617 $y=-\cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right)$에서

최댓값: $|-1|=1$, 최솟값: $-|-1|=-1$, 주기: $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

답 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: $\frac{\pi}{3}$

0618 $y=2\cos\left(\frac{x}{2}-\pi\right)-1$에서

최댓값: $|2|-1=1$, 최솟값: $-|2|-1=-3$,

주기: $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$ 답 최댓값: 1, 최솟값: -3, 주기: 4π

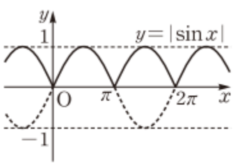
0619 $y=\tan 4\pi x+2$에서 최댓값, 최솟값은 없고,

주기: $\frac{\pi}{4\pi}=\frac{1}{4}$ 답 최댓값, 최솟값은 없다., 주기: $\frac{1}{4}$

0620 $y=2\tan\left(-3x-\frac{\pi}{2}\right)+1$에서 최댓값, 최솟값은 없고,

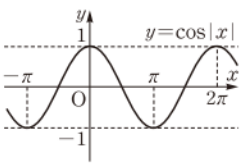
주기: $\frac{\pi}{|-3|}=\frac{\pi}{3}$ 답 최댓값, 최솟값은 없다., 주기: $\frac{\pi}{3}$

0621 $y=|\sin x|$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



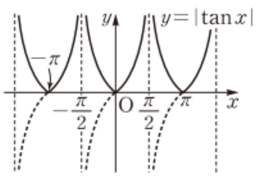
따라서 $y=|\sin x|$의 주기는 π이다. 답 π

0622 $y=\cos|x|$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프에서 $x\geq 0$인 부분만 그리고 $x\geq 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=\cos|x|$의 주기는 2π이다. 답 2π

0623 $y=|\tan x|$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=|\tan x|$의 주기는 π이다. 답 π

0624 ㄴ. $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

ㄹ. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

ㅁ. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$

ㅂ. $\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

0625 (1) $\sin\frac{19}{3}\pi=\sin\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos\frac{17}{4}\pi=\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\tan 405°=\tan(360°+45°)=\tan 45°=1$

(4) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

(5) $\cos 300°=\cos(360°-60°)=\cos(-60°)=\cos 60°=\frac{1}{2}$

(6) $\tan\frac{23}{6}\pi=\tan\left(4\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

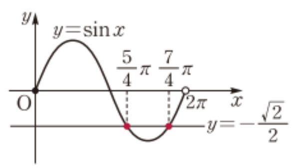
(7) $\sin\frac{5}{4}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(8) $\cos\frac{5}{6}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(9) $\tan 225°=\tan(180°+45°)=\tan 45°=1$

답 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) 1 (4) $-\frac{1}{2}$ (5) $\frac{1}{2}$
(6) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (7) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (8) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (9) 1

0626 오른쪽 그림과 같이 $0\leq x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$이므로

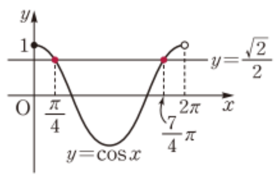


$x=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

답 $x=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

0627 $2\cos x-\sqrt{2}=0$에서 $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

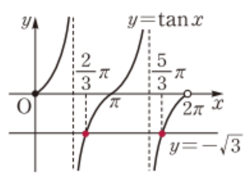
오른쪽 그림과 같이 $0\leq x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7}{4}\pi$이므로



$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

답 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

0628 오른쪽 그림과 같이 $0\leq x<2\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=-\sqrt{3}$의 교점의 x좌표가 $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$이므로

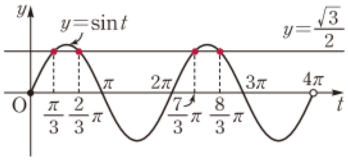


$x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

답 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

0629 $2\sin 2x=\sqrt{3}$에서 $\quad \sin 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$2x=t$로 놓으면 $\quad 0\le t<4\pi$



위의 그림과 같이 $0\le t<4\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 t좌표가 $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2}{3}\pi$, $\dfrac{7}{3}\pi$, $\dfrac{8}{3}\pi$이므로

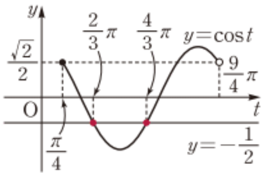
$2x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $2x=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $2x=\dfrac{7}{3}\pi$ 또는 $2x=\dfrac{8}{3}\pi$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$

답 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$

0630 $x+\dfrac{\pi}{4}=t$로 놓으면 $\quad \dfrac{\pi}{4}\le t<\dfrac{9}{4}\pi$

오른쪽 그림과 같이 $\dfrac{\pi}{4}\le t<\dfrac{9}{4}\pi$에서 함수 $y=\cos t$의 그래프와 직선 $y=-\dfrac{1}{2}$의 교점의 t좌표가 $\dfrac{2}{3}\pi$, $\dfrac{4}{3}\pi$이므로

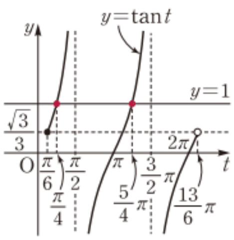


$x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{4}{3}\pi$

$\therefore x=\dfrac{5}{12}\pi$ 또는 $x=\dfrac{13}{12}\pi$ $\qquad$ 답 $x=\dfrac{5}{12}\pi$ 또는 $x=\dfrac{13}{12}\pi$

0631 $x+\dfrac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $\quad \dfrac{\pi}{6}\le t<\dfrac{13}{6}\pi$

오른쪽 그림과 같이 $\dfrac{\pi}{6}\le t<\dfrac{13}{6}\pi$에서 함수 $y=\tan t$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 t좌표가 $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{5}{4}\pi$이므로



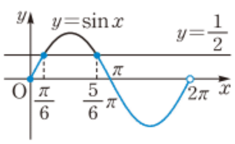
$x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5}{4}\pi$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{12}$ 또는 $x=\dfrac{13}{12}\pi$

답 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 또는 $x=\dfrac{13}{12}\pi$

0632 부등식 $\sin x\le\dfrac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\dfrac{1}{2}$과 만나는 부분 또는 직선보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서

$0\le x\le\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $\dfrac{5}{6}\pi\le x<2\pi$

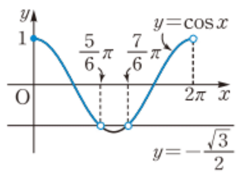


답 $0\le x\le\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $\dfrac{5}{6}\pi\le x<2\pi$

0633 $2\cos x>-\sqrt{3}$에서 $\quad \cos x>-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

부등식 $\cos x>-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서

$0\le x<\dfrac{5}{6}\pi$ 또는 $\dfrac{7}{6}\pi<x<2\pi$

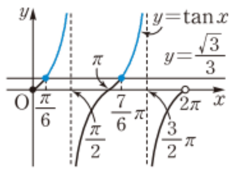


답 $0\le x<\dfrac{5}{6}\pi$ 또는 $\dfrac{7}{6}\pi<x<2\pi$

0634 $\sqrt{3}\tan x-1\ge 0$에서 $\quad \tan x\ge\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

부등식 $\tan x\ge\dfrac{\sqrt{3}}{3}$의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$과 만나는 부분 또는 직선보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서

$\dfrac{\pi}{6}\le x<\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\dfrac{7}{6}\pi\le x<\dfrac{3}{2}\pi$



답 $\dfrac{\pi}{6}\le x<\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\dfrac{7}{6}\pi\le x<\dfrac{3}{2}\pi$

유형 01 주기함수

본책 96쪽

① 함수 $f(x)$는 주기가 p인 주기함수이다.
➡ $f(x)=f(x+p)=f(x+2p)=f(x+3p)=\cdots$

② 함수 $f(x)$는 주기가 $2a$인 주기함수이다.
➡ $f(x)=f(x+2a)\Longleftrightarrow f(x-a)=f(x+a)$

0635 함수 $f(x)$의 주기가 p이므로 모든 실수 x에 대하여

$f(x+p)=f(x)$

$\therefore f(p)=f(0)=\sin 0+\cos 0+1=2$

답 ④

0636 조건 ㈎에 의하여

$f(20)=f(17)=f(14)=\cdots=f(2)=f(-1)$

조건 ㈏에 의하여 $\quad f(-1)=\cos(-\pi)=-1$

이므로 $\quad f(20)=-1$

답 ①

0637 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x-1)$이 성립하므로 위의 식의 양변에 x 대신 $x+1$을 대입하면

$f(x+2)=f(x)$ ··· ❶

따라서 함수 $f(x)$는 주기함수이므로

$f(2020)=f(2018)=f(2016)=\cdots=f(0)=1$,

$f(2019)=f(2017)=f(2015)=\cdots=f(1)=-2$

$\therefore f(2018)+f(2019)+f(2020)=1-2+1=0$ ··· ❷

답 0

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$가 주기함수임을 알 수 있다.	50 %
❷ $f(2018)+f(2019)+f(2020)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

유형 02 삼각함수의 값의 대소 비교

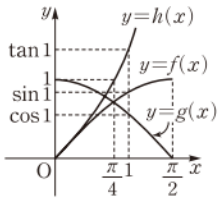
본책 96쪽

삼각함수의 그래프를 이용하여 대소를 비교한다.

0638 $\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{2}$이므로 오른쪽 그림에서

$\cos 1<\sin 1<\tan 1$

$\therefore g(1)<f(1)<h(1)$



답 ③

0639 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 x의 값이 증가하면 $\sin x$의 값도 증가한다.

이때 $\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{3}$이므로 $\quad \frac{\sqrt{2}}{2}<\sin 1<\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{2}<x<\pi$에서 x의 값이 증가하면 $\sin x$의 값은 감소한다.

이때 $\frac{\pi}{2}<2<\frac{2}{3}\pi$이므로 $\quad \frac{\sqrt{3}}{2}<\sin 2<1$

또 $\frac{3}{4}\pi<3<\pi$이므로 $\quad 0<\sin 3<\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \sin 3<\sin 1<\sin 2$

답 ⑤

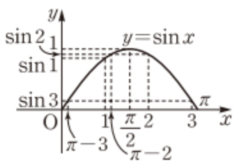
다른 풀이 $0<x<\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프는 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로

$\sin 2=\sin(\pi-2)$, $\sin 3=\sin(\pi-3)$

$0<(\pi-3)<1<(\pi-2)<\frac{\pi}{2}$이고 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 x의 값이 증가하면 $\sin x$의 값도 증가하므로

$\sin(\pi-3)<\sin 1<\sin(\pi-2)$,

즉 $\sin 3<\sin 1<\sin 2$



0640 $A-B=x\sin y+y\sin x-(x\cos x+y\cos y)$

$=x(\sin y-\cos x)+y(\sin x-\cos y)$

$0<x<\frac{\pi}{4}$, $0<y<\frac{\pi}{4}$인 모든 x, y $(x\neq y)$에 대하여

$\sin y<\cos x$, $\sin x<\cos y$

$\therefore \sin y-\cos x<0$, $\sin x-\cos y<0$

따라서 $x(\sin y-\cos x)+y(\sin x-\cos y)<0$이므로

$A-B<0 \qquad \therefore A<B$

답 $A<B$

유형 03 삼각함수의 그래프의 대칭성

본책 97쪽

① $f(x)=\sin x$ $(0\leq x\leq\pi)$에서 $f(a)=f(b)=k$이면
➡ $\frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{2}$ ➡ $a+b=\pi$ (단, $a\neq b$)

② $f(x)=\cos x$ $(0\leq x\leq 2\pi)$에서 $f(a)=f(b)=k$이면
➡ $\frac{a+b}{2}=\pi$ ➡ $a+b=2\pi$ (단, $a\neq b$)

③ $f(x)=\tan x$에서 $f(a)=f(b)=k$이면
➡ $a-b=n\pi$ (단, n은 정수)

0641 $y=\cos x$의 그래프에서 $\frac{a+4b}{2}=\pi$, $\frac{4b+5b}{2}=2\pi$이므로

$a+4b=2\pi$, $9b=4\pi$

$\therefore b=\frac{4}{9}\pi$, $a=2\pi-4b=2\pi-4\cdot\frac{4}{9}\pi=\frac{2}{9}\pi$

$\therefore \cos(a+b)=\cos\left(\frac{2}{9}\pi+\frac{4}{9}\pi\right)=\cos\frac{2}{3}\pi$

$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}$

$=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

0642 $y=\sin x$의 그래프에서

$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\qquad x_1+x_2=\pi$

$\frac{x_3+x_4}{2}=2\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{5}{2}\pi$이므로 $\qquad x_3+x_4=5\pi$

$\frac{x_5+x_6}{2}=4\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{9}{2}\pi$이므로 $\qquad x_5+x_6=9\pi$

$\vdots$

$\frac{x_{11}+x_{12}}{2}=10\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{21}{2}\pi$이므로 $\qquad x_{11}+x_{12}=21\pi$

답 ③

0643 $y=\sin x$의 그래프에서

$\frac{a+c}{2}=\frac{\pi}{2}$

$\therefore a+c=\pi$ ··· ❶

$y=\cos x$의 그래프에서

$\frac{b+d}{2}=\pi$

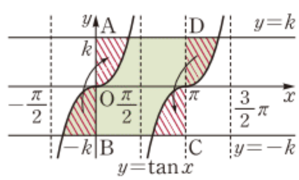
$\therefore b+d=2\pi$ ··· ❷

$\therefore \tan(a+b+c+d)=\tan 3\pi=0$ ··· ❸

답 0

채점 기준	비율
❶ $a+c$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $b+d$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\tan(a+b+c+d)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0644 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이가 모두 같으므로 $y=\tan x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi\right)$의 그래프와 두 직선 $y=k$, $y=-k$로 둘러싸인 도형의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.



$\overline{AB}=2k$, $\overline{AD}=\pi$이므로 사각형 ABCD의 넓이는

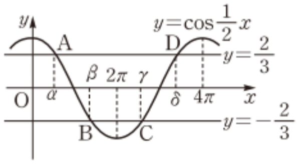
$2k\pi$

즉 $2k\pi=4\pi$이므로

$k=2$

답 2

0645 함수 $y=\cos\frac{1}{2}x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$ ··· ❶



두 점 A, D는 직선 $x=2\pi$에 대하여 대칭이므로

$\dfrac{\alpha+\delta}{2}=2\pi$ $\quad\therefore\ \alpha+\delta=4\pi$

두 점 B, C는 직선 $x=2\pi$에 대하여 대칭이므로

$\dfrac{\beta+\gamma}{2}=2\pi$ $\quad\therefore\ \beta+\gamma=4\pi$ ··· ❷

$\therefore\ \alpha+2\beta+2\gamma+\delta=\alpha+\delta+2(\beta+\gamma)$
$=4\pi+2\cdot4\pi=12\pi$ ··· ❸

답 12π

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=\cos\frac{1}{2}x$의 주기를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\alpha+\delta$, $\beta+\gamma$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\alpha+2\beta+2\gamma+\delta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 두 점 A, B는 점 $(\pi,\ 0)$에 대하여 대칭이므로

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\pi$ $\quad\therefore\ \alpha+\beta=2\pi$

두 점 C, D는 점 $(3\pi,\ 0)$에 대하여 대칭이므로

$\dfrac{\gamma+\delta}{2}=3\pi$ $\quad\therefore\ \gamma+\delta=6\pi$

두 점 B, C는 직선 $x=2\pi$에 대하여 대칭이므로

$\dfrac{\beta+\gamma}{2}=2\pi$ $\quad\therefore\ \beta+\gamma=4\pi$

$\therefore\ \alpha+2\beta+2\gamma+\delta=(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)+(\beta+\gamma)$
$=2\pi+6\pi+4\pi=12\pi$

유형 04 삼각함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

본책 97쪽

$y=a\sin(bx+c)+d=a\sin b\left(x+\frac{c}{b}\right)+d$의 그래프는 $y=a\sin bx$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{c}{b}$만큼, y축의 방향으로 d만큼 평행이동한 것이다.

0646 $y=2\cos(\pi x-\pi)-2=2\cos\pi(x-1)-2$의 그래프는 $y=2\cos\pi x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=1$, $n=-2$이므로

$m+n=-1$

답 -1

0647 $y=-\cos3x+1$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=-\cos3x+1$, 즉 $y=\cos3x-1$ ··· ❶

위의 식의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y+3=\cos3x-1$ $\quad\therefore\ y=\cos3x-4$ ··· ❷

따라서 $a=1$, $b=-4$이므로

$a+b=-3$ ··· ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

SSEN 특강

평행이동·대칭이동한 도형의 방정식

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을

① x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동
➡ $f(x-a,\ y-b)=0$

② x축에 대하여 대칭이동 ➡ $f(x,\ -y)=0$

③ y축에 대하여 대칭이동 ➡ $f(-x,\ y)=0$

④ 원점에 대하여 대칭이동 ➡ $f(-x,\ -y)=0$

0648 ㄱ. $y=2\sin2x-3$의 그래프는 $y=\sin2x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 후 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄴ. $y=\sin(2x+\pi)+1=\sin2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$의 그래프는 $y=\sin2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄷ. $y=-\sin2x+5$의 그래프는 $y=\sin2x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄹ. $y=\sin(2x-3\pi)=\sin2\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)$의 그래프는 $y=\sin2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}\pi$만큼 평행이동한 것과 같다.

이상에서 $y=\sin2x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ⑤

유형 05 삼각함수의 최대·최소와 주기

본책 98쪽

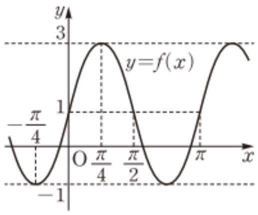
삼각함수	최댓값	최솟값	주기
$y=a\sin(bx+c)+d$	$\lvert a\rvert+d$	$-\lvert a\rvert+d$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$
$y=a\cos(bx+c)+d$	$\lvert a\rvert+d$	$-\lvert a\rvert+d$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$
$y=a\tan(bx+c)+d$	없다.	없다.	$\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$

0649 ① $f(x)=2\sin2x+1$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이고,

$g(x)=\tan2x$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

② 최댓값은 $2+1=3$, 최솟값은 $-2+1=-1$이다.

③ $f(x)=2\sin 2x+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $0\le x\le\frac{\pi}{4}$에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.



④ $f(0)+f(\pi)=1+1=2$

⑤ $f(-x)=2\sin(-2x)+1$
$=-2\sin 2x+1$

따라서 $-f(-x)=2\sin 2x-1$이므로
$f(x)\neq -f(-x)$

답 ④

0650 $y=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+1$에서

$a=3+1=4,\ b=-3+1=-2,\ c=\frac{2\pi}{2}=\pi$

$\therefore a+b+c=2+\pi$

답 ③

0651 $y=2\cos\frac{\pi}{3}x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2\cos\left\{\frac{\pi}{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right\}-4$ ⋯ ❶

이므로 $a=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6,\ b=2-4=-2$ ⋯ ❷

$\therefore ab=-12$ ⋯ ❸

답 -12

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0652 $y=\sin\pi x+1$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$

ㄱ. $y=2\cos\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$

ㄴ. $y=\sin\pi x-3$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$

ㄷ. $y=\tan\left(2\pi x-\frac{\pi}{4}\right)$의 주기는 $\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$

ㄹ. $y=\tan\frac{\pi}{2}x+1$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$

이상에서 $y=\sin\pi x+1$과 주기가 같은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ⑤

0653 ㄱ. 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}}=3$

ㄴ. $f(3)=-2\tan 2\pi+1=1$이므로 그래프는 점 $(3,\ 1)$을 지난다.

ㄷ. 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 존재하지 않는다.

ㄹ. 그래프의 점근선의 방정식은

$\frac{\pi}{3}x+\pi=n\pi+\frac{\pi}{2}\qquad\therefore x=3n-\frac{3}{2}$ (n은 정수)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ③

0654 ① $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$

$\therefore f(x+4)=f(x)$

② $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{3}{2}\pi}=\frac{4}{3}$

$\therefore f(x+4)=f\left(x+\frac{8}{3}\right)=f\left(x+\frac{4}{3}\right)=f(x)$

③ $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{5}{2}\pi}=\frac{4}{5}$

$\therefore f(x+4)=f\left(x+\frac{16}{5}\right)=f\left(x+\frac{12}{5}\right)=\cdots=f(x)$

④ $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{8}{3}\pi}=\frac{3}{4}$

이때 $\frac{3}{4}n=4$를 만족시키는 자연수 n이 존재하지 않으므로

$f(x+4)\neq f(x)$

⑤ $f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x+4)=f\left(x+\frac{7}{2}\right)=f(x+3)=\cdots=f(x)$

답 ④

유형 06 삼각함수의 미정계수의 결정; 조건이 주어진 경우 본책 99쪽

① $y=a\sin bx+c$, $y=a\cos bx+c$
➡ a, c: 삼각함수의 최대·최소 또는 함숫값을 이용하여 결정
b: 삼각함수의 주기를 이용하여 결정

② $y=a\tan bx+c$
➡ a, c: 함숫값을 이용하여 결정
b: 삼각함수의 주기 또는 점근선의 방정식을 이용하여 결정

0655 조건 (나)에서 $f(x)=a\sin bx+c$의 주기가 4π이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=4\pi\qquad\therefore b=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=a\sin\frac{x}{2}+c$

조건 (가)에서 $f(x)$의 최솟값이 -1이고 $a>0$이므로

$-a+c=-1$ ⋯⋯ ㉠

조건 (다)에서 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{7}{2}$이므로

$a\sin\frac{\pi}{6}+c=\frac{7}{2}\qquad\therefore \frac{a}{2}+c=\frac{7}{2}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ c=2$

$\therefore a+b+c=\frac{11}{2}$

답 $\frac{11}{2}$

0656 $f(x)=a\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+k$의 최댓값이 2이고 $a<0$이므로

$-a+k=2$ ······ ㉠

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$이므로 $a\cos\frac{\pi}{2}+k=\frac{1}{2}$ $\therefore k=\frac{1}{2}$

이것을 ㉠에 대입하면 $-a+\frac{1}{2}=2$ $\therefore a=-\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{3}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}$이므로 $f(x)$의 최솟값은

$-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=-1$

답 ③

0657 $y=2\tan(ax-b)+3$의 주기가 3π이고 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{a}=3\pi$ $\therefore a=\frac{1}{3}$

따라서 함수 $y=2\tan\left(\frac{1}{3}x-b\right)+3$의 그래프의 점근선의 방정식은

$\frac{1}{3}x-b=n\pi+\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{3}x=n\pi+\frac{\pi}{2}+b$

$\therefore x=3n\pi+\frac{3}{2}\pi+3b$ (n은 정수)

이 방정식이 $x=3n\pi$와 일치하므로 $\frac{3}{2}\pi+3b=3k\pi$ (k는 정수)

이때 $-\pi<b<0$이므로 $b=-\frac{\pi}{2}$

$\therefore ab=-\frac{\pi}{6}$

답 ①

0658 조건 (가)에서 $f(x)$의 주기가 $\frac{\pi}{2}$이고 $b>0$이므로

$\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore b=2$ ··· ❶

$\therefore f(x)=a\tan(2x+c)+d=a\tan2\left(x+\frac{c}{2}\right)+d$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 $y=a\tan2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{c}{2}$만큼, y축의 방향으로 d만큼 평행이동한 것이므로 조건 (나)에서

$-\frac{c}{2}=\frac{\pi}{6}$, $d=-1$

$\therefore c=-\frac{\pi}{3}$, $d=-1$ ··· ❷

조건 (다)에서 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}-1$이므로

$a\tan\frac{\pi}{3}-1=2\sqrt{3}-1$

$a\sqrt{3}-1=2\sqrt{3}-1$ $\therefore a=2$ ··· ❸

$\therefore abcd=2\cdot2\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot(-1)=\frac{4}{3}\pi$ ··· ❹

답 $\frac{4}{3}\pi$

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ c, d의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $abcd$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 07 삼각함수의 미정계수의 결정; 그래프가 주어진 경우 본책 100쪽

주어진 그래프에서 주기, 최댓값, 최솟값을 구한 후 삼각함수의 미정계수를 결정한다.

0659 주어진 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -2이고 $a>0$이므로

$a=2$

또 주기가 $\frac{5}{6}\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi$ $\therefore b=2$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=2\sin(2x-c)$이고, 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$을 지나므로

$0=2\sin\left(\frac{2}{3}\pi-c\right)$ $\therefore \sin\left(\frac{2}{3}\pi-c\right)=0$

이때 $0<c<\pi$에서 $-\frac{\pi}{3}<\frac{2}{3}\pi-c<\frac{2}{3}\pi$이므로

$\frac{2}{3}\pi-c=0$ $\therefore c=\frac{2}{3}\pi$

$\therefore abc=\frac{8}{3}\pi$

답 $\frac{8}{3}\pi$

0660 주어진 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -4이고 $a>0$이므로

$a+b=2$, $-a+b=-4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=3\cos\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)-1$이고 그래프의 주기가 $2\left(c-\frac{1}{2}\right)$이므로

$\frac{2\pi}{\pi}=2\left(c-\frac{1}{2}\right)$ $\therefore c=\frac{3}{2}$

$\therefore a+2b-2c=3-2-3=-2$

답 ②

0661 $f(x)=a\sin bx+c$ 또는 $f(x)=a\cos bx+c$ $(a>0,\ b>0)$로 놓으면 $f(x)$의 최댓값이 1, 최솟값이 -3이고 $a>0$이므로

$a+c=1$, $-a+c=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $c=-1$

주어진 그래프의 주기가 $\frac{2}{3}\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{2}{3}\pi$ $\therefore b=3$

$\therefore f(x)=2\sin3x-1$ 또는 $f(x)=2\cos3x-1$

그런데 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 구하는 함수 $f(x)$는 ④이다.

답 ④

0662 주어진 그래프의 주기가 $\frac{\pi}{2}$이고 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore a=2$

따라서 주어진 함수는 $y=\tan(2x-b)$이고, 이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$을 지나므로 $\tan\left(\frac{\pi}{2}-b\right)=0$

이때 $0<b<\pi$에서 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-b<\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{\pi}{2}-b=0$ $\quad\therefore b=\frac{\pi}{2}$

$\therefore ab=\pi$

답 ⑤

0663 $f(x)$의 최댓값이 5, 최솟값이 1이고 $a>0$이므로

$a+c=5,\ -a+c=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ c=3$ ··· ❶

또 주기가 $2\{1-(-2)\}=6$이고, $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=6 \quad \therefore b=\frac{\pi}{3}$ ··· ❷

따라서 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)+3$이고 $f(x_1)=f(0)$이므로 삼각함수의 그래프의 대칭성에 의하여

$\frac{x_1+0}{2}=-2 \quad \therefore x_1=-4$

또 주기가 6이므로 $\quad x_2=1+6=7$ ··· ❸

$\therefore abc(x_1+x_2)=2\cdot\frac{\pi}{3}\cdot3\cdot(-4+7)=6\pi$ ··· ❹

답 6π

채점 기준	비율
❶ a, c의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ x_1, x_2의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $abc(x_1+x_2)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0664 주어진 그래프에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각 6, -6이고, 함수 $g(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각 2, -2이다.
이때 두 함수의 주기가 모두 16이므로 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{1}{3}$배 한 후 x축의 방향으로 $16n+5$(n은 정수)만큼 평행이동한 것과 같다.

$\therefore a=\frac{1}{3},\ b=16n+5$ (n은 정수)

그런데 $-8<b<8$이므로 $\quad b=5$

$\therefore a+b=\frac{16}{3}$

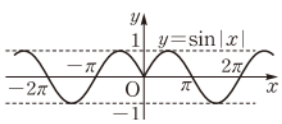
답 ②

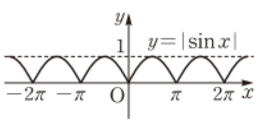
유형 08 절댓값 기호를 포함한 삼각함수의 그래프 본책 101쪽

① $y=f(|x|)$의 그래프
⇨ $y=f(x)$의 그래프에서 $x\ge0$인 부분만 그린 후 $x\ge0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한다.

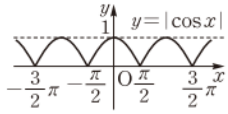
② $y=|f(x)|$의 그래프
⇨ $y=f(x)$의 그래프에서 $y\ge0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한다.

0665 ㄱ. $y=\sin|x|$, $y=|\sin x|$의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.

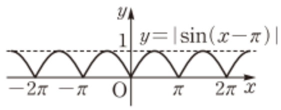


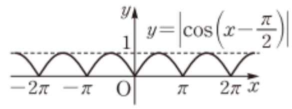


ㄴ. $y=|\cos x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄷ. $y=|\sin(x-\pi)|$의 그래프는 $y=|\sin x|$의 그래프를 x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 것이고, $y=\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right|$의 그래프는 $y=|\cos x|$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 두 함수의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.

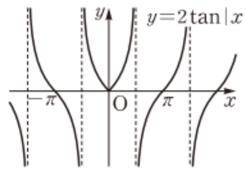




이상에서 두 함수의 그래프가 일치하는 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

0666 $y=2\tan|x|$의 그래프는 $y=2\tan x$의 그래프에서 $x\ge0$인 부분만 그리고 $x\ge0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



① 주기함수가 아니다.
② 최솟값, 최댓값이 존재하지 않는다.
③ 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
⑤ 정의역은 $x\ne n\pi+\frac{\pi}{2}$(n은 정수)인 실수 전체의 집합이다.

답 ④

0667 함수 $f(x)=2|\cos3(x-\pi)|+1$의 주기는 $y=|\cos3x|$의 주기와 같으므로 $\quad a=\frac{\pi}{3}$

$0\le|\cos3(x-\pi)|\le1$이므로 $\quad 0\le2|\cos3(x-\pi)|\le2$

$\therefore 1\le2|\cos3(x-\pi)|+1\le3$

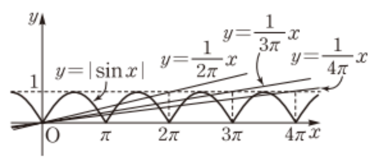
따라서 최댓값은 3, 최솟값은 1이므로 $\quad b=3,\ c=1$

$\therefore abc=\pi$

답 ①

> **SSEN 특강**
> **절댓값 기호를 포함한 삼각함수의 주기**
> ① $y=|\sin x|$의 주기가 π이므로 $y=|\sin bx|$의 주기는 $\frac{\pi}{|b|}$이다.
> ② $y=|\cos x|$의 주기가 π이므로 $y=|\cos bx|$의 주기는 $\frac{\pi}{|b|}$이다.
> ③ $y=|\tan x|$의 주기가 π이므로 $y=|\tan bx|$의 주기는 $\frac{\pi}{|b|}$이다.

0668



위의 그림에서 두 함수 $y=|\sin x|$, $y=\frac{1}{2\pi}x$의 그래프의 교점의

개수는 4이므로 $f(2)=4$

두 함수 $y=|\sin x|$, $y=\frac{1}{3\pi}x$의 그래프의 교점의 개수는 6이므로

$f(3)=6$

두 함수 $y=|\sin x|$, $y=\frac{1}{4\pi}x$의 그래프의 교점의 개수는 8이므로

$f(4)=8$

$\therefore f(2)+f(3)+f(4)=18$

답 18

유형 09~11 여러 가지 각의 삼각함수 본책 101~103쪽

$\frac{n}{2}\pi\pm\theta$ 또는 $90°\times n\pm\theta$(n은 정수) 꼴의 삼각함수의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) n이 짝수일 때, $\sin \Rightarrow \sin$, $\cos \Rightarrow \cos$, $\tan \Rightarrow \tan$

n이 홀수일 때, $\sin \Rightarrow \cos$, $\cos \Rightarrow \sin$, $\tan \Rightarrow \frac{1}{\tan}$

(ii) θ를 예각으로 생각하여 $\frac{n}{2}\pi\pm\theta$ 또는 $90°\times n\pm\theta$를 나타내는 동경이 존재하는 사분면에서의 삼각함수의 부호를 조사한다.

0669 $\sin\frac{2}{3}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\frac{5}{6}\pi=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cos\left(-\frac{13}{3}\pi\right)=\cos\frac{13}{3}\pi=\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$\tan\frac{7}{4}\pi=\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{2}\cdot(-1)=-1$

답 ②

0670 $\sin 100°=\sin(90°\times1+10°)=\cos 10°=0.9848$,

$\cos 250°=\cos(90°\times3-20°)=-\sin 20°=-0.3420$

$\therefore \sin 100°+\cos 250°=0.9848-0.3420$

$=0.6428$

답 ④

0671 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

$\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

0672 ㄱ. $\sin 330°=\sin(90°\times3+60°)=-\cos 60°=-\frac{1}{2}$

$\cos 570°=\cos(90°\times6+30°)=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 495°=\tan(90°\times5+45°)=-\frac{1}{\tan 45°}=-1$

$\therefore \sin 330°-\sqrt{3}\cos 570°+\tan 495°$

$=-\frac{1}{2}-\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+(-1)=0$

ㄴ. $\cos\frac{10}{3}\pi=\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$\sin\frac{11}{6}\pi=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

$\tan\frac{5}{4}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

$\therefore \cos\frac{10}{3}\pi-\sin\frac{11}{6}\pi+\tan\frac{5}{4}\pi=-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)+1$

$=1$

ㄷ. $\tan 55°=\tan(90°-35°)=\frac{1}{\tan 35°}$

$\tan 125°=\tan(90°+35°)=-\frac{1}{\tan 35°}$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\left(\tan 35°+\frac{1}{\tan 35°}\right)^2-\left(\tan 35°-\frac{1}{\tan 35°}\right)^2$

$=4$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

0673 $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+1$

$=-\cos x+1$ ··· ❶

$\therefore f(\pi+x)-f(\pi-x)$

$=-\cos(\pi+x)+1-\{-\cos(\pi-x)+1\}$

$=\cos x+1-(\cos x+1)=0$ ··· ❷

답 0

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(\pi+x)-f(\pi-x)$를 간단히 할 수 있다.	60 %

0674 $\sin 10°=\sin(90°-80°)=\cos 80°$

$\sin 20°=\sin(90°-70°)=\cos 70°$

$\sin 30°=\sin(90°-60°)=\cos 60°$

$\sin 40°=\sin(90°-50°)=\cos 50°$

$\therefore \sin^2 10°+\sin^2 20°+\cdots+\sin^2 80°+\sin^2 90°$

$=(\sin^2 10°+\sin^2 80°)+(\sin^2 20°+\sin^2 70°)$

$+(\sin^2 30°+\sin^2 60°)+(\sin^2 40°+\sin^2 50°)+\sin^2 90°$

$=(\cos^2 80°+\sin^2 80°)+(\cos^2 70°+\sin^2 70°)$

$+(\cos^2 60°+\sin^2 60°)+(\cos^2 50°+\sin^2 50°)+\sin^2 90°$

$=4+1=5$

답 ⑤

0675 $\tan 89°=\tan(90°-1°)=\frac{1}{\tan 1°}$

$\tan 88°=\tan(90°-2°)=\frac{1}{\tan 2°}$

$\vdots$

$\tan 46°=\tan(90°-44°)=\frac{1}{\tan 44°}$

$\therefore \tan 1° \times \tan 2° \times \cdots \times \tan 88° \times \tan 89°$
$= \tan 1° \times \tan 2° \times \cdots \times \tan 44° \times \tan 45°$
$\times \dfrac{1}{\tan 44°} \times \cdots \times \dfrac{1}{\tan 2°} \times \dfrac{1}{\tan 1°}$
$= \tan 45° = 1$

답 1

0676 $6\theta = \dfrac{\pi}{2}$에서 $3\theta = \dfrac{\pi}{4}$이고

$\cos\theta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 5\theta\right) = \sin 5\theta$,

$\cos 2\theta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 4\theta\right) = \sin 4\theta$

$\therefore$ (주어진 식)
$= \sin^2 5\theta + \sin^2 4\theta + \cos^2 3\theta + \cos^2 4\theta + \cos^2 5\theta$
$= (\sin^2 5\theta + \cos^2 5\theta) + (\sin^2 4\theta + \cos^2 4\theta) + \cos^2 \dfrac{\pi}{4}$
$= 1 + 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$

답 ③

0677 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 $\angle C = 90°$

$\therefore \alpha + \beta = 90°$

$\triangle ABC$에서

$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{7})^2} = 4$

$\therefore \cos(\alpha + 2\beta) = \cos(90° + \beta) = -\sin\beta$
$= -\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = -\dfrac{3}{4}$

답 $-\dfrac{3}{4}$

0678 $\triangle ABC$는 $\overline{AB} = \overline{AC}$인 이등변삼각형이므로

$A + B + C = \pi$, $B = C$

ㄱ. $A + 2B = \pi$에서
$\sin A = \sin(\pi - 2B) = \sin 2B$

ㄴ. $A + 2B = \pi$에서
$\cos\dfrac{A}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - B\right) = \sin B$

ㄷ. $A + 2C = \pi$에서
$\tan A = \tan(\pi - 2C) = -\tan 2C$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0679 $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$이므로 주어진 식은

$\sin^2\alpha + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + \tan^2\alpha = 4$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \tan^2\alpha = 4$

$1 + \tan^2\alpha = 4,\quad \tan^2\alpha = 3$

$\therefore \tan\alpha = \sqrt{3}\ \left(\because 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$

즉 $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$이므로

$\overline{OA} = \cos\alpha = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

답 $\dfrac{1}{2}$

0680 $\cos\alpha = \dfrac{2}{3} > 0$에서 α는 예각이므로

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ⋯ ❶

한편 사각형 ABCD가 원에 내접하므로 $\alpha + \beta = \pi$

$\therefore \tan^2\alpha + \sin^2\beta = \tan^2\alpha + \sin^2(\pi - \alpha)$
$= \tan^2\alpha + \sin^2\alpha$
$= \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \dfrac{65}{36}$ ⋯ ❷

따라서 $m = 36$, $n = 65$이므로

$m + n = 101$ ⋯ ❸

답 101

채점 기준	비율
❶ $\tan\alpha$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\tan^2\alpha + \sin^2\beta$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $m + n$의 값을 구할 수 있다.	10 %

참고 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 $180°$이다.

유형 12 삼각함수를 포함한 함수의 최대·최소 ; 일차식의 꼴

본책 103쪽

① 두 종류 이상의 삼각함수를 포함한 함수의 최대·최소
➡ 한 종류의 삼각함수로 통일한다.

② 절댓값 기호를 포함한 함수의 최대·최소
➡ $0 \le |\sin x| \le 1$, $0 \le |\cos x| \le 1$임을 이용한다.

0681 $-1 \le \cos x \le 1$이므로 $\cos x - 2 < 0$

$\therefore y = \cos x - 2 + k$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $1 - 2 + k = -1 + k$

최솟값은 $-1 - 2 + k = -3 + k$

따라서 $(-1 + k) + (-3 + k) = 0$이므로

$k = 2$

답 2

0682 $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$이므로

$y = 2\sin x - \sin x - 1 = \sin x - 1$

$-1 \le \sin x \le 1$이므로 $-2 \le \sin x - 1 \le 0$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 0, 최솟값은 -2이므로

$M = 0$, $m = -2$

$\therefore M - m = 2$

답 2

0683 $-1 \le \sin 3x \le 1$이므로 $\sin 3x - 5 < 0$

$\therefore y = -a\sin 3x + 5a + b$

$a > 0$이므로 주어진 함수의 최댓값은 $a + 5a + b = 6a + b$

최솟값은 $-a + 5a + b = 4a + b$

따라서 $6a + b = 6$, $4a + b = 2$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a = 2$, $b = -6$

$\therefore a - b = 8$

답 ④

유형 13~14 삼각함수를 포함한 함수의 최대·최소 ; 분수식 또는 이차식의 꼴

본책 104쪽

(i) 주어진 식에 포함된 삼각함수를 t로 치환한다.
(ii) t의 값의 범위를 구한다.
(iii) 그래프를 이용하여 (ii)의 범위에서 최댓값과 최솟값을 구한다.

0684 $y=\dfrac{-\sin x+2}{\sin x+3}$에서 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$$y=\frac{-t+2}{t+3}=\frac{-(t+3)+5}{t+3}=\frac{5}{t+3}-1$$

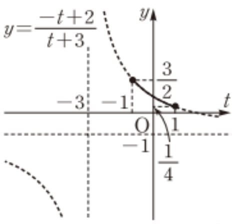
오른쪽 그림에서

$t=-1$일 때 최댓값은 $\dfrac{3}{2}$,

$t=1$일 때 최솟값은 $\dfrac{1}{4}$

이므로 $M=\dfrac{3}{2}$, $m=\dfrac{1}{4}$

$\therefore M+m=\dfrac{7}{4}$



답 ③

0685 $y=\dfrac{2\tan x-1}{\tan x+2}$에서 $\tan x=t$로 놓으면 $0\le t\le 1$이고

$$y=\frac{2t-1}{t+2}=\frac{2(t+2)-5}{t+2}=\frac{-5}{t+2}+2$$

오른쪽 그림에서 $t=1$일 때 최댓값 $\dfrac{1}{3}$을 가지므로

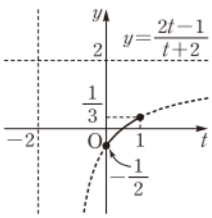
$b=\dfrac{1}{3}$

한편 $t=1$, 즉 $\tan x=1$에서

$x=\dfrac{5}{4}\pi\left(\because \pi\le x\le\dfrac{5}{4}\pi\right)$

이므로 $a=\dfrac{5}{4}\pi$

$\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{5}{4}\pi\cdot 3=\dfrac{15}{4}\pi$



답 $\dfrac{15}{4}\pi$

0686 $y=\dfrac{\cos x+a}{\cos x-2}$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

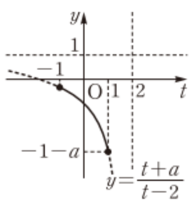
$$y=\frac{t+a}{t-2}=\frac{(t-2)+a+2}{t-2}=\frac{a+2}{t-2}+1$$

이때 $a>-2$에서 $a+2>0$이므로

$y=\dfrac{t+a}{t-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $t=1$일 때 최솟값 $-1-a$를 가지므로 $-1-a=-3$

$\therefore a=2$



답 ④

0687 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$이므로

$$y=\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin x+2}=\frac{-2\sin x}{\sin x+2}$$ ⋯ ❶

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$$y=\frac{-2t}{t+2}=\frac{-2(t+2)+4}{t+2}=\frac{4}{t+2}-2$$

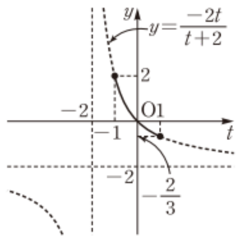
오른쪽 그림에서

$t=-1$일 때 최댓값은 2,

$t=1$일 때 최솟값은 $-\dfrac{2}{3}$ ⋯ ❷

이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$2+\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4}{3}$ ⋯ ❸



답 $\dfrac{4}{3}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수를 $\sin x$에 대한 함수로 변형할 수 있다.	30 %
❷ 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	60 %
❸ 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	10 %

0688 $y=\cos^2 x+2\sin x+1$

$=(1-\sin^2 x)+2\sin x+1$

$=-\sin^2 x+2\sin x+2$

$\sin x=t$로 놓으면 $-\pi\le x\le\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고

$y=-t^2+2t+2=-(t-1)^2+3$

오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최솟값 -1을 가지므로

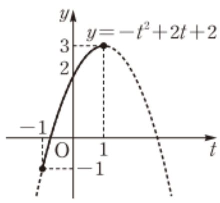
$b=-1$

한편 $t=-1$, 즉 $\sin x=-1$에서

$x=-\dfrac{\pi}{2}\,(\because -\pi\le x\le\pi)$

이므로 $a=-\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore ab=\dfrac{\pi}{2}$



답 ①

0689 $y=\cos^2 x-\cos x$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=t^2-t=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$

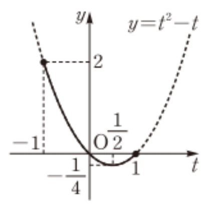
오른쪽 그림에서

$t=-1$일 때 최댓값은 2,

$t=\dfrac{1}{2}$일 때 최솟값은 $-\dfrac{1}{4}$

이므로 $M=2$, $m=-\dfrac{1}{4}$

$\therefore Mm=-\dfrac{1}{2}$



답 $-\dfrac{1}{2}$

0690 $y=2a\sin^2 x+2a\cos x-b$

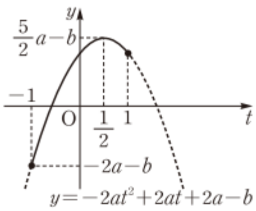
$=2a(1-\cos^2 x)+2a\cos x-b$

$=-2a\cos^2 x+2a\cos x+2a-b$ ⋯ ❶

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-2at^2+2at+2a-b=-2a\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{2}a-b$

$a>0$이므로 오른쪽 그림에서



$t=\frac{1}{2}$일 때 최댓값은 $\frac{5}{2}a-b$,

$t=-1$일 때 최솟값은 $-2a-b$ ··· ❷

이므로

$\frac{5}{2}a-b=8$, $-2a-b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

$\therefore a+b=-1$ ··· ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수를 $\cos x$에 대한 함수로 변형할 수 있다.	20 %
❷ 최댓값과 최솟값을 a, b로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	30 %

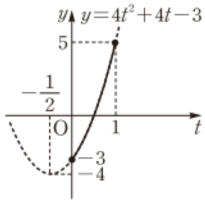
0691 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$, $\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$이므로

$$y=\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)-3\cos^2\theta-4\sin(\theta+\pi)$$
$$=\sin^2\theta-3\cos^2\theta+4\sin\theta$$
$$=\sin^2\theta-3(1-\sin^2\theta)+4\sin\theta$$
$$=4\sin^2\theta+4\sin\theta-3$$

$\sin\theta=t$로 놓으면 $0\le\theta<\pi$에서 $0\le t\le1$이고

$$y=4t^2+4t-3=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-4$$

따라서 오른쪽 그림에서



$t=1$일 때 최댓값은 5,

$t=0$일 때 최솟값은 -3

이므로 $M=5$, $m=-3$

$\therefore M-m=8$

답 ④

0692 $y=\cos^2x+2k\sin x-1+4k$

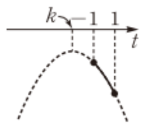
$$=(1-\sin^2x)+2k\sin x-1+4k$$
$$=-\sin^2x+2k\sin x+4k$$

$\sin x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-1\le t\le1$이고

$$y=-t^2+2kt+4k=-(t-k)^2+k^2+4k$$

$f(t)=-(t-k)^2+k^2+4k$로 놓으면

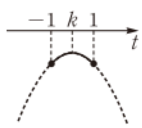
(i) $k<-1$일 때, $f(t)$의 최댓값은 $f(-1)$이므로



$-1+2k=-4$

$\therefore k=-\frac{3}{2}$

(ii) $-1\le k\le1$일 때, $f(t)$의 최댓값은 $f(k)$이므로

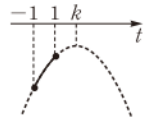


$k^2+4k=-4$, $(k+2)^2=0$

$\therefore k=-2$

그런데 $k=-2$는 $-1\le k\le1$을 만족시키지 않는다.

(iii) $k>1$일 때, $f(t)$의 최댓값은 $f(1)$이므로



$-1+6k=-4$

$\therefore k=-\frac{1}{2}$

그런데 $k=-\frac{1}{2}$은 $k>1$을 만족시키지 않는다.

이상에서 $k=-\frac{3}{2}$이고 $f(t)$는 $t=-1$, 즉 $\sin x=-1$일 때 최댓값을 가지므로

$x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0\le x<2\pi$)

$\therefore a=\frac{3}{2}\pi$

답 $a=\frac{3}{2}\pi$, $k=-\frac{3}{2}$

유형 15 삼각방정식; 일차식의 꼴

본책 105쪽

(i) 주어진 방정식을 $\sin x=k$(또는 $\cos x=k$ 또는 $\tan x=k$) 꼴로 변형한다.

(ii) 함수 $y=\sin x$(또는 $y=\cos x$ 또는 $y=\tan x$)의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표를 구한다.

0693 $2x+\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\le x<\pi$에서 $\frac{\pi}{3}\le t<\frac{7}{3}\pi$이고, 주어진 방정식은 $\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore t=\frac{11}{6}\pi$ 또는 $t=\frac{13}{6}\pi$

즉 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{11}{6}\pi$ 또는 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{13}{6}\pi$이므로

$x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{12}\pi$

따라서 모든 근의 합은

$\frac{3}{4}\pi+\frac{11}{12}\pi=\frac{5}{3}\pi$

답 $\frac{5}{3}\pi$

0694 $2\log\cos x$, $2\log\sin x$에서 로그의 진수의 조건에 의하여

$\cos x>0$, $\sin x>0$

$\therefore 0<x<\frac{\pi}{2}$ ($\because 0<x<2\pi$) ··· ❶

$2\log\cos x-2\log\sin x=\log 3$에서

$2\log\frac{\cos x}{\sin x}=\log 3$

따라서 $\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2=3$이므로 $\tan^2x=\frac{1}{3}$

$\therefore \tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\left(\because 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ ··· ❷

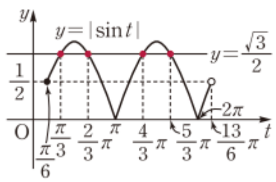
$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ ··· ❸

답 $x=\frac{\pi}{6}$

채점 기준	비율
❶ 로그의 진수의 조건을 이용하여 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\tan x$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 방정식의 해를 구할 수 있다.	20 %

0695 $x+\frac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $\quad \frac{\pi}{6}\le t<\frac{13}{6}\pi$

$\frac{\pi}{6}\le t<\frac{13}{6}\pi$에서 $y=|\sin t|$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$은 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $|\sin t|=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 근은



$$t=\frac{\pi}{3}\text{ 또는 }t=\frac{2}{3}\pi\text{ 또는 }t=\frac{4}{3}\pi\text{ 또는 }t=\frac{5}{3}\pi$$

즉 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{5}{3}\pi$이므로

$$x=\frac{\pi}{6}\text{ 또는 }x=\frac{\pi}{2}\text{ 또는 }x=\frac{7}{6}\pi\text{ 또는 }x=\frac{3}{2}\pi$$

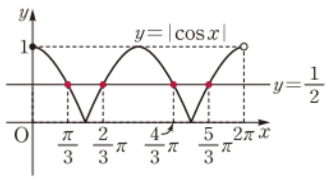
따라서 모든 근의 곱은

$$\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{7}{6}\pi\cdot\frac{3}{2}\pi=\frac{7}{48}\pi^4$$

$$\therefore p-q=48-7=41$$

답 ④

0696 $0\le x<2\pi$에서 $y=|\cos x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$은 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $|\cos x|=\frac{1}{2}$의 근은



$$x=\frac{\pi}{3}\text{ 또는 }x=\frac{2}{3}\pi\text{ 또는 }x=\frac{4}{3}\pi\text{ 또는 }x=\frac{5}{3}\pi \quad \cdots ㉠$$

$x-\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{3}\le t<\frac{5}{3}\pi$이고, 방정식 $2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$에서 $\quad 2\sin t=\sqrt{3}$, $\quad \sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore t=\frac{\pi}{3}\text{ 또는 }t=\frac{2}{3}\pi$$

즉 $x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$이므로

$$x=\frac{2}{3}\pi\text{ 또는 }x=\pi \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 주어진 연립방정식의 해는

$$x=\frac{2}{3}\pi$$

답 $x=\frac{2}{3}\pi$

0697 $\sin^2 x+(|\cos x|+1)^2=3$에서

$$\sin^2 x+\cos^2 x+2|\cos x|+1=3$$

$$|\cos x|=\frac{1}{2}\quad (\because \sin^2 x+\cos^2 x=1)$$

$$\therefore \cos x=\pm\frac{1}{2}$$

$\cos x=\frac{1}{2}$이면 $\quad x=\frac{\pi}{3}\ (\because 0\le x<\pi)$

$\cos x=-\frac{1}{2}$이면 $\quad x=\frac{2}{3}\pi\ (\because 0\le x<\pi)$

따라서 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$이므로

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi=\pi$$

답 ③

0698 $\pi\sin x=t$로 놓으면 $0\le x<\pi$에서

$$0\le\sin x\le 1 \quad \therefore 0\le t\le\pi$$

이때 주어진 방정식은 $\cos t=0$이므로 $\quad t=\frac{\pi}{2}$

즉 $\pi\sin x=\frac{\pi}{2}$이므로 $\quad \sin x=\frac{1}{2}$

$$\therefore x=\frac{\pi}{6}\text{ 또는 }x=\frac{5}{6}\pi$$

따라서 두 근의 차는

$$\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$$

답 $\frac{2}{3}\pi$

유형 16 삼각방정식; 이차식의 꼴

본책 106쪽

(i) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$임을 이용하여 한 종류의 삼각함수에 대한 방정식으로 고친다.
(ii) 삼각함수를 t로 치환하여 t에 대한 이차방정식으로 변형한다.
(iii) (ii)의 해를 구한 다음 치환한 식에 대입하여 x의 값을 구한다.

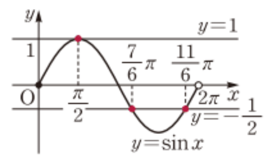
0699 $2\cos^2 x+\sin x=1$에서

$$2(1-\sin^2 x)+\sin x-1=0$$

$$\therefore 2\sin^2 x-\sin x-1=0$$

$\sin x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고, 주어진 방정식은 $\quad 2t^2-t-1=0$, $\quad (2t+1)(t-1)=0$

$$\therefore t=-\frac{1}{2}\text{ 또는 }t=1$$



(i) $t=-\frac{1}{2}$, 즉 $\sin x=-\frac{1}{2}$일 때,
$0\le x<2\pi$이므로

$$x=\frac{7}{6}\pi\text{ 또는 }x=\frac{11}{6}\pi$$

(ii) $t=1$, 즉 $\sin x=1$일 때,
$0\le x<2\pi$이므로 $\quad x=\frac{\pi}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 모든 근의 합은

$$\frac{7}{6}\pi+\frac{11}{6}\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{7}{2}\pi$$

답 $\frac{7}{2}\pi$

0700 $4\sin^2 A+4\cos A=5$에서

$$4(1-\cos^2 A)+4\cos A=5$$

$$4\cos^2 A-4\cos A+1=0,\quad (2\cos A-1)^2=0$$

$$\therefore \cos A=\frac{1}{2}$$

$0<A<\pi$이므로 $\quad A=\frac{\pi}{3}$ ··· ❶

이때 $A+B+C=\pi$이므로

$$B+C-2\pi=(\pi-A)-2\pi=-\pi-\frac{\pi}{3}=-\frac{4}{3}\pi \quad \cdots ❷$$

$$\therefore \sin\frac{B+C-2\pi}{2}=\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=\sin\left(-\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots ❸$$

답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

채점 기준	비율
❶ A의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $B+C-2\pi$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\sin\frac{B+C-2\pi}{2}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0701 $\sqrt{\cos\theta+1}=2\sin\theta$의 양변을 제곱하면

$\cos\theta+1=4\sin^2\theta,\quad \cos\theta+1=4(1-\cos^2\theta)$

$4\cos^2\theta+\cos\theta-3=0,\quad (\cos\theta+1)(4\cos\theta-3)=0$

$\therefore \cos\theta=-1$ 또는 $\cos\theta=\frac{3}{4}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\cos\theta<1$이므로 $\quad \cos\theta=\frac{3}{4}$

$\therefore \sin\theta=\frac{1}{2}\sqrt{\cos\theta+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

답 ③

0702 $\sin x-\cos x=1$에서 $\quad \sin x=1+\cos x$

위의 식의 양변을 제곱하면 $\quad \sin^2 x=1+2\cos x+\cos^2 x$

$1-\cos^2 x=1+2\cos x+\cos^2 x$

$2\cos^2 x+2\cos x=0,\quad \cos x(\cos x+1)=0$

$\therefore \cos x=-1$ 또는 $\cos x=0$

$0\le x<\pi$에서 $-1<\cos x\le 1$이므로

$\cos x=0 \quad \therefore x=\frac{\pi}{2}$ ⋯ ❶

따라서 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ ⋯ ❷

답 $\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ 방정식의 해를 구할 수 있다.	70 %
❷ $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0703 $\tan x\neq 0$이므로 $\tan x+\frac{\sqrt{3}}{\tan x}=1+\sqrt{3}$의 양변에 $\tan x$를 곱하여 정리하면

$\tan^2 x-(1+\sqrt{3})\tan x+\sqrt{3}=0$

$\tan x=t$로 놓으면

$t^2-(1+\sqrt{3})t+\sqrt{3}=0,\quad (t-1)(t-\sqrt{3})=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=\sqrt{3}$

(i) $t=1$, 즉 $\tan x=1$일 때,

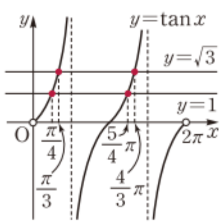
$0<x<2\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

(ii) $t=\sqrt{3}$, 즉 $\tan x=\sqrt{3}$일 때,

$0<x<2\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$



(i), (ii)에서 $x_1=\frac{\pi}{4},\ x_2=\frac{\pi}{3},\ x_3=\frac{5}{4}\pi,\ x_4=\frac{4}{3}\pi$이므로

$x_2+x_4-(x_1+x_3)=\frac{\pi}{3}+\frac{4}{3}\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi\right)=\frac{\pi}{6}$

답 ①

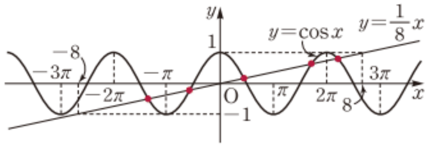
유형 17 삼각방정식; 그래프 이용

본책 106쪽

방정식 $f(x)=g(x)$의 실근

➡ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

0704 방정식 $\cos x=\frac{1}{8}x$의 실근은 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{8}x$의 교점의 x좌표와 같다.



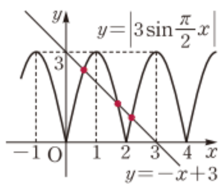
위의 그림에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{8}x$의 교점의 개수는 5이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

답 ①

참고 $y=\frac{1}{8}x$에서 $x>8$이면 $y>1$, $x<-8$이면 $y<-1$이므로 $x>8$ 또는 $x<-8$에서 직선 $y=\frac{1}{8}x$는 $y=\cos x$의 그래프와 만나지 않는다.

0705 방정식 $\left|3\sin\frac{\pi}{2}x\right|=-x+3$의 실근은 함수 $y=\left|3\sin\frac{\pi}{2}x\right|$의 그래프와 직선 $y=-x+3$의 교점의 x좌표와 같다.

오른쪽 그림에서 함수 $y=\left|3\sin\frac{\pi}{2}x\right|$의 그래프와 직선 $y=-x+3$의 교점의 개수는 3이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

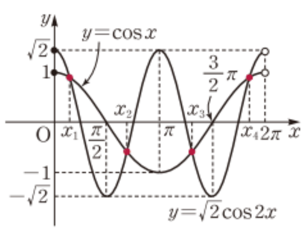


답 ①

0706 $\sqrt{2}\cos 2x-\cos x=0$에서 $\quad \sqrt{2}\cos 2x=\cos x$

방정식 $\sqrt{2}\cos 2x=\cos x$의 실근은 두 함수 $y=\sqrt{2}\cos 2x$, $y=\cos x$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 두 함수 $y=\sqrt{2}\cos 2x$, $y=\cos x$의 그래프의 교점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 x_1, x_2, x_3, x_4라 하면



$\frac{x_1+x_4}{2}=\pi,\quad \frac{x_2+x_3}{2}=\pi$

$\therefore x_1+x_4=2\pi,\ x_2+x_3=2\pi$

따라서 모든 근의 합은

$x_1+x_2+x_3+x_4=2\pi+2\pi=4\pi$

답 ⑤

0707 $f(x)=|\cos x|-\cos x$라 하면 주어진 방정식은

$f(x)=\frac{1}{2}$

(i) $\cos x\ge 0$, 즉 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi\le x<2\pi$일 때,

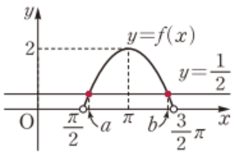
$f(x)=\cos x-\cos x=0$

이므로 방정식 $f(x)=\frac{1}{2}$의 해는 존재하지 않는다.

(ii) $\cos x<0$, 즉 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$일 때

$f(x)=-2\cos x$

이므로 방정식 $f(x)=\frac{1}{2}$의 두 근을 a, b라 하면



$\frac{a+b}{2}=\pi$ ∴ $a+b=2\pi$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 근의 합은 2π이다. 답 2π

유형 18 삼각방정식의 근의 조건

본책 107쪽

(i) 주어진 방정식을 $f(x)=k$ 꼴로 변형한다.
(ii) $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나도록 하는 k의 값의 범위를 구한다.

0708 $4\sin^2 x+4\cos x-a=0$에서

$4(1-\cos^2 x)+4\cos x=a$

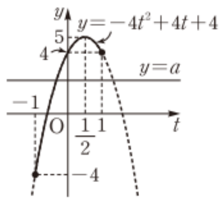
∴ $-4\cos^2 x+4\cos x+4=a$

따라서 주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=-4\cos^2 x+4\cos x+4$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점이 존재해야 한다.

$y=-4\cos^2 x+4\cos x+4$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-4t^2+4t+4$

$=-4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+5$



따라서 오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 실근을 가지려면 $-4\le a\le 5$ 답 ②

0709 $\sin(x+\pi)=-\sin x$이므로 주어진 방정식은

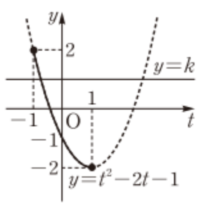
$(1-\sin^2 x)-2(-\sin x)+k=0$

∴ $k=\sin^2 x-2\sin x-1$

따라서 주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=\sin^2 x-2\sin x-1$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 존재해야 한다.

$y=\sin^2 x-2\sin x-1$에서 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=t^2-2t-1=(t-1)^2-2$



따라서 오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 실근을 가지려면

$-2\le k\le 2$

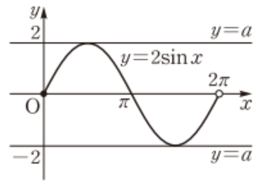
이어야 하므로 k의 최댓값은 2이다. 답 2

0710 $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$이므로 주어진 방정식은

$\sin x=-\sin x+a$ ∴ $2\sin x=a$

따라서 주어진 방정식이 하나의 실근을 가지려면 함수 $y=2\sin x$의 그래프와 직선 $y=a$가 한 점에서 만나야 한다. ··· ❶

$0\le x<2\pi$에서 함수 $y=2\sin x$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 $y=2\sin x$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점이 1개이려면



$a=-2$ 또는 $a=2$ ··· ❷

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$-2\cdot 2=-4$ ··· ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ 두 그래프의 교점에 대한 조건으로 생각할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ a의 값의 곱을 구할 수 있다.	10 %

유형 19 삼각부등식; 일차식의 꼴

본책 107쪽

① $\sin x>k$ (또는 $\cos x>k$ 또는 $\tan x>k$)
➡ $y=\sin x$ (또는 $y=\cos x$ 또는 $y=\tan x$)의 그래프가 직선 $y=k$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위

② $\sin x<k$ (또는 $\cos x<k$ 또는 $\tan x<k$)
➡ $y=\sin x$ (또는 $y=\cos x$ 또는 $y=\tan x$)의 그래프가 직선 $y=k$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위

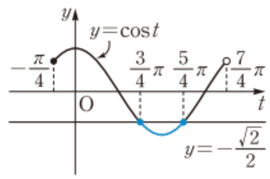
0711 $x-\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{4}\le t<\frac{7}{4}\pi$이고, 주어진 부등식은 $\cos t\le -\frac{\sqrt{2}}{2}$

오른쪽 그림에서 t의 값의 범위는

$\frac{3}{4}\pi\le t\le \frac{5}{4}\pi$이므로

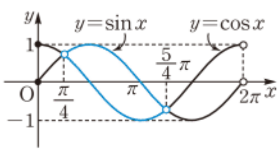
$\frac{3}{4}\pi\le x-\frac{\pi}{4}\le \frac{5}{4}\pi$

∴ $\pi\le x\le \frac{3}{2}\pi$



따라서 주어진 부등식의 해가 아닌 것은 ①이다. 답 ①

0712 부등식 $\sin x>\cos x$의 해는 $y=\sin x$의 그래프가 $y=\cos x$의 그래프보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위와 같으므로 오른쪽 그림에서



$\frac{\pi}{4}<x<\frac{5}{4}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{5}{4}\pi$이므로 $\alpha+\beta=\frac{3}{2}\pi$ 답 $\frac{3}{2}\pi$

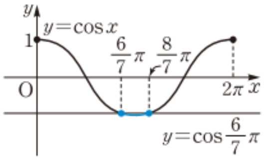
0713 $v_1=300000$, $v_2=200000$을 $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}$에 대입하면

$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{3}{2}$

$\sin\theta_1=\frac{3}{2}\sin\theta_2\le\frac{3\sqrt{2}}{4}$이므로 $\sin\theta_2\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

∴ $0<\theta_2\le\frac{\pi}{4}$ $\left(\because 0<\theta_2<\frac{\pi}{2}\right)$ 답 $0<\theta_2\le\frac{\pi}{4}$

0714 부등식 $\cos x \le \cos \frac{6}{7}\pi$의 해는



$$\frac{6}{7}\pi \le x \le \frac{8}{7}\pi$$

$$\therefore\ \frac{\pi}{4} \le \frac{7}{24}x \le \frac{\pi}{3}$$

따라서 $\sin\frac{7}{24}x$의 값의 범위는 $\sin\frac{\pi}{4} \le \sin\frac{7}{24}x \le \sin\frac{\pi}{3}$

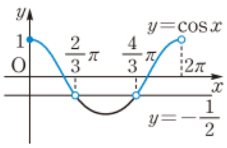
$$\therefore\ \frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin\frac{7}{24}x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$

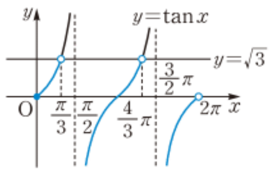
즉 $M=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$$Mm=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

답 $\frac{\sqrt{6}}{4}$

0715





위의 그림에서

$$A=\left\{x \,\middle|\, 0\le x<\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{4}{3}\pi<x<2\pi\right\}$$

$$B=\left\{x \,\middle|\, 0\le x<\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2}<x<\frac{4}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi<x<2\pi\right\}$$

$$\therefore\ A\cap B=\left\{x \,\middle|\, 0\le x<\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2}<x<\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi<x<2\pi\right\}$$

따라서 집합 $A\cap B$의 원소가 아닌 것은 ③이다.

답 ③

0716 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$에서 $3\alpha+3\beta=\frac{3}{2}\pi$이므로

$$3\beta=\frac{3}{2}\pi-3\alpha$$

$3\cos 3\alpha+\sin 3\beta \le 1$에서

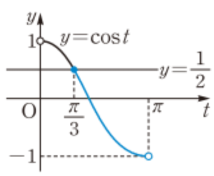
$$3\cos 3\alpha+\sin\left(\frac{3}{2}\pi-3\alpha\right)\le 1,\qquad 3\cos 3\alpha-\cos 3\alpha\le 1$$

$$2\cos 3\alpha \le 1 \qquad \therefore\ \cos 3\alpha \le \frac{1}{2}$$ ···➊

$3\alpha=t$로 놓으면 $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$에서 $0<t<\pi$이고 주어진 부등식은

$$\cos t \le \frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 t의 값의 범위는



$\frac{\pi}{3}\le t<\pi$이므로

$$\frac{\pi}{3}\le 3\alpha<\pi$$

$$\therefore\ \frac{\pi}{9}\le \alpha<\frac{\pi}{3}$$ ···➋

따라서 α의 최솟값은 $\frac{\pi}{9}$이다. ···➌

답 $\frac{\pi}{9}$

채점 기준	비율
➊ 한 종류의 삼각함수에 대한 부등식으로 변형할 수 있다.	50 %
➋ α의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
➌ α의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

유형 20 삼각부등식; 이차식의 꼴

본책 108쪽

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$임을 이용하여 한 종류의 삼각함수에 대한 삼각부등식으로 고친 후 그래프를 이용하여 해를 구한다.

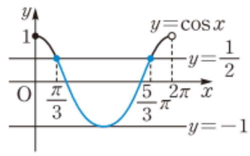
0717 $2\sin^2 x-\cos x-1\ge 0$에서

$$2(1-\cos^2 x)-\cos x-1\ge 0$$

$$2\cos^2 x+\cos x-1\le 0,\qquad (\cos x+1)(2\cos x-1)\le 0$$

$$\therefore\ -1\le \cos x\le \frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 x의 값의 범위는



$$\frac{\pi}{3}\le x\le \frac{5}{3}\pi$$

이므로 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{5}{3}\pi$

$$\therefore\ \beta-\alpha=\frac{4}{3}\pi$$

답 ④

0718 $\cos^2\theta-4\sin\theta\le 2a$에서

$$(1-\sin^2\theta)-4\sin\theta\le 2a$$

$$\therefore\ \sin^2\theta+4\sin\theta+2a-1\ge 0$$

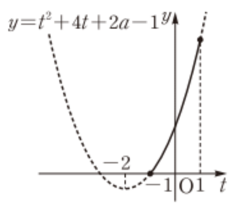
$\sin\theta=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고, 주어진 부등식은

$$t^2+4t+2a-1\ge 0$$

$y=t^2+4t+2a-1$이라 하면

$$y=(t+2)^2+2a-5$$

$-1\le t\le 1$에서 $t=-1$일 때 최솟값 $2a-4$를 갖는다.



이때 부등식이 항상 성립하려면 $2a-4\ge 0$이어야 하므로

$$a\ge 2$$

따라서 a의 최솟값은 2이다.

답 ⑤

0719 $\sin\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)=-\cos x$이므로 주어진 부등식은

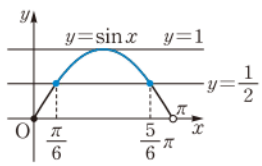
$$2\cos^2 x+3\sin x-3\ge 0$$

$$2(1-\sin^2 x)+3\sin x-3\ge 0,\qquad 2\sin^2 x-3\sin x+1\le 0$$

$$(2\sin x-1)(\sin x-1)\le 0$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\le \sin x\le 1$$

오른쪽 그림에서 x의 값의 범위는



$$\frac{\pi}{6}\le x\le \frac{5}{6}\pi$$

답 $\frac{\pi}{6}\le x\le \frac{5}{6}\pi$

유형 21 삼각방정식과 삼각부등식의 활용 (본책 109쪽)

a, b, c가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $D=b^2-4ac$라 하면
① $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 실근
② $D=0 \Longleftrightarrow$ 중근
③ $D<0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 허근

0720 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하면 이차방정식 $x^2-2(2\sin\theta+1)x+4=0$이 실근을 갖지 않으므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(2\sin\theta+1)^2-4<0, \qquad 4\sin^2\theta+4\sin\theta-3<0$$

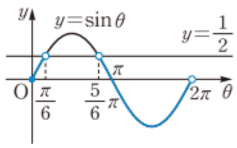
$$\therefore (2\sin\theta+3)(2\sin\theta-1)<0$$

$0\le\theta<2\pi$에서 $2\sin\theta+3>0$이므로

$$2\sin\theta-1<0 \qquad \therefore \sin\theta<\frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는

$$0\le\theta<\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{5}{6}\pi<\theta<2\pi$$



답 $0\le\theta<\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<\theta<2\pi$

0721 이차방정식 $x^2+2x+5-4\tan\theta=0$의 판별식을 D라 하면

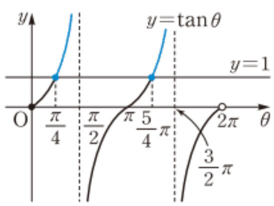
$$\frac{D}{4}=1-(5-4\tan\theta)\ge0$$

$$4\tan\theta-4\ge0 \qquad \therefore \tan\theta\ge1$$

오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{4}\le\theta<\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{5}{4}\pi\le\theta<\frac{3}{2}\pi$$

이므로 조건을 만족시키지 않는 θ의 값은 ④이다.



답 ④

0722 주어진 이차함수의 그래프가 x축에 접하면 이차방정식 $x^2-2x\cos\theta+1-\frac{3}{2}\cos\theta=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-\cos\theta)^2-\left(1-\frac{3}{2}\cos\theta\right)=0 \quad \cdots ❶$$

$$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2=0, \qquad (\cos\theta+2)(2\cos\theta-1)=0$$

$0<\theta<2\pi$에서 $-1\le\cos\theta<1$이므로 $\qquad \cos\theta=\frac{1}{2}$

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \theta=\frac{5}{3}\pi \quad \cdots ❷$$

따라서 $\theta_1=\frac{\pi}{3}$, $\theta_2=\frac{5}{3}\pi$이므로 $\qquad \theta_2-\theta_1=\frac{4}{3}\pi \quad \cdots ❸$

답 $\frac{4}{3}\pi$

채점 기준	비율
❶ 판별식을 이용하여 θ에 대한 방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 방정식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❸ $\theta_2-\theta_1$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0723 $y=x^2+2x\sin\theta+\cos^2\theta$

$$=(x+\sin\theta)^2-\sin^2\theta+\cos^2\theta$$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $\quad (-\sin\theta,\ -\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

이 점이 직선 $y=5x+3$ 위에 있으려면

$$-\sin^2\theta+\cos^2\theta=5(-\sin\theta)+3$$

$$-\sin^2\theta+(1-\sin^2\theta)=-5\sin\theta+3$$

$$2\sin^2\theta-5\sin\theta+2=0$$

$$(2\sin\theta-1)(\sin\theta-2)=0$$

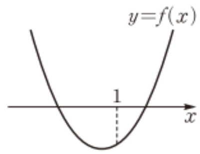
$$\therefore \sin\theta=\frac{1}{2} \ (\because -1\le\sin\theta\le1)$$

$0<\theta<2\pi$에서 $\sin\theta=\frac{1}{2}$을 만족시키는 θ의 값은

$$\theta=\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \theta=\frac{5}{6}\pi$$

답 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$

0724 $f(x)=x^2-4x\sin\theta+1$이라 하면 방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 1이 있어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



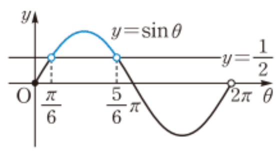
따라서 $f(1)<0$이어야 하므로

$$1-4\sin\theta+1<0, \qquad -4\sin\theta<-2$$

$$\therefore \sin\theta>\frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 구하는 θ의 조건은

$$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5}{6}\pi$$



답 ③

0725 전략 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x-p)=f(x+p)$이면 $f(x)=f(x+2p)$임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $f(x-2)=f(x+2)$이므로 x 대신 $x+2$를 대입하면 $\qquad f(x)=f(x+4)$

따라서 $f(x-1)=f(x+3)$이므로

$$g(x)=\frac{f(x-1)+f(x+3)}{2}$$

$$=\frac{2f(x-1)}{2}=f(x-1)$$

즉 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

이때 $f(1)=f(5)=f(9)=\cdots=2$이므로

$$g(6)=f(5)=2$$

$f(3)=f(7)=f(11)=\cdots=-2$이므로

$$g(8)=f(7)=-2$$

따라서 조건 (나)에 의하여 $g(x)$는 $x=6$에서 최댓값 2, $x=8$에서 최솟값 -2를 가지므로

$$a=6,\ b=2,\ c=8,\ d=-2$$

$$\therefore ad+bc=6\cdot(-2)+2\cdot8=4$$

답 ②

참고 $g(x)=\frac{f(x-1)+f(x+3)}{2}=\frac{2f(x+3)}{2}=f(x+3)$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것으로 생각할 수도 있다.

이때 $g(6)=f(9)=2$, $g(8)=f(11)=-2$이므로

$a=6$, $b=2$, $c=8$, $d=-2$

0726 전략 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 α, β, γ 사이의 관계식을 세운다.

풀이 함수 $f(x)=\sin \pi x\ (x\geq 0)$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\pi}=2$

주어진 그림에서 $\beta=1-\alpha$, $\gamma=2+\alpha$이므로

$$f(\alpha+\beta+\gamma+1)=f(4+\alpha)=f(\alpha)=\frac{2}{3},$$

$$f\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\sin\frac{3}{2}\pi=-1$$

$$\therefore f(\alpha+\beta+\gamma+1)+f\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}+(-1)=-\frac{1}{3}$$

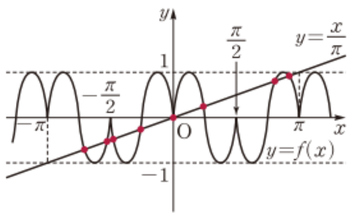
답 ②

0727 전략 주어진 조건을 이용하여 함수 $f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 두 조건 (나), (다)에서

$$f(x)=\begin{cases}\sin 4x & \left(0\leq x\leq \dfrac{\pi}{2}\right)\\ -\sin 4x & \left(\dfrac{\pi}{2}<x\leq \pi\right)\end{cases}$$

조건 (가)에서 $f(x+\pi)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 직선 $y=\dfrac{x}{\pi}$는 두 점 $(\pi,\ 1)$, $(-\pi,\ -1)$을 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{x}{\pi}$가 만나는 점의 개수는 8이다.

답 ⑤

0728 전략 먼저 곡선 $y=4\sin\dfrac{1}{4}(x-\pi)$와 직선 $y=2$의 교점의 x좌표를 구한다.

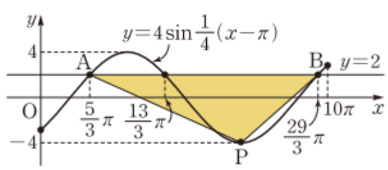
풀이 $4\sin\dfrac{1}{4}(x-\pi)=2$에서

$$\sin\frac{1}{4}(x-\pi)=\frac{1}{2}$$

이때 $0\leq x\leq 10\pi$에서 $-\dfrac{\pi}{4}\leq\dfrac{1}{4}(x-\pi)\leq\dfrac{9}{4}\pi$이므로

$$\frac{1}{4}(x-\pi)=\frac{\pi}{6}\ \text{또는}\ \frac{1}{4}(x-\pi)=\frac{5}{6}\pi\ \text{또는}\ \frac{1}{4}(x-\pi)=\frac{13}{6}\pi$$

$$\therefore x=\frac{5}{3}\pi\ \text{또는}\ x=\frac{13}{3}\pi\ \text{또는}\ x=\frac{29}{3}\pi$$



따라서 세 점 A, B, P의 위치가 앞의 그림과 같을 때 △PAB의 넓이가 최대이므로 △PAB의 넓이의 최댓값은

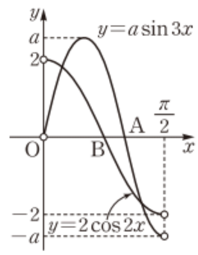
$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{29}{3}\pi-\frac{5}{3}\pi\right)\cdot\{2-(-4)\}=24\pi$$

$\therefore k=24$

답 24

0729 전략 두 점 A, B의 좌표를 구하여 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이를 구한다.

풀이 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 두 함수 $y=a\sin 3x$, $y=2\cos 2x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$a\sin 3x=0$에서 $3x=\pi$이므로

$$x=\frac{\pi}{3}\qquad\therefore \mathrm{A}\left(\frac{\pi}{3},\ 0\right)$$

$2\cos 2x=0$에서 $2x=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$$x=\frac{\pi}{4}\qquad\therefore \mathrm{B}\left(\frac{\pi}{4},\ 0\right)$$

$$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$$

점 P는 함수 $y=a\sin 3x$의 그래프 위의 점이므로 삼각형 ABP의 넓이가 최대일 때의 점 P의 y좌표는 a이다.

이때 △ABP의 넓이가 $\dfrac{1}{3}$이므로

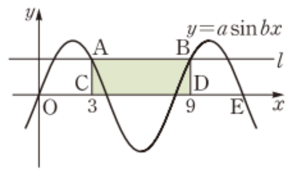
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{12}\cdot a=\frac{1}{3},\qquad \frac{\pi}{24}a=\frac{1}{3}$$

$$\therefore a=\frac{8}{\pi}$$

답 $\dfrac{8}{\pi}$

0730 전략 주어진 그래프를 이용하여 함수 $y=a\sin bx$의 주기를 구한다.

풀이 오른쪽 그림에서 $\mathrm{C}(3,\ 0)$, $\mathrm{D}(9,\ 0)$이라 하고 $x\geq 9$에서 그래프와 x축의 첫 번째 교점을 E라 하면 $\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{DE}}$이므로 점 E의 x좌표는 $9+3=12$



따라서 $y=a\sin bx$의 주기는 $12\cdot\dfrac{2}{3}=8$이고 $b>0$이므로

$$\frac{2\pi}{b}=8\qquad\therefore b=\frac{\pi}{4}$$

즉 $y=a\sin\dfrac{\pi}{4}x$이므로

$$\overline{\mathrm{AC}}=a\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

직사각형 ACDB의 넓이가 $48\sqrt{2}$이므로

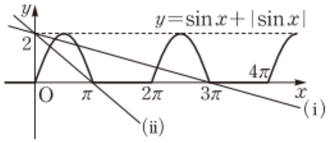
$$6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a=48\sqrt{2}\qquad\therefore a=16$$

$$\therefore \frac{a}{b}=\frac{16}{\frac{\pi}{4}}=\frac{64}{\pi}$$

답 $\dfrac{64}{\pi}$

0731 전략 $\sin x\geq 0$, $\sin x<0$인 경우로 나누어 $y=\sin x+|\sin x|$의 그래프를 그린다.

풀이 $y=\sin x+|\sin x|=\begin{cases}2\sin x & (\sin x\geq 0)\\ 0 & (\sin x<0)\end{cases}$이고, 직선 $y=ax+2$는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 2)$를 지난다.



위의 그림에서 $y=\sin x+|\sin x|$의 그래프와 직선 $y=ax+2$ $(a<0)$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 직선이 (i)과 (ii) 사이에 있어야 한다.

(i) 직선 $y=ax+2$가 점 $(3\pi,\ 0)$을 지날 때,

$$0=3\pi a+2 \qquad \therefore\ a=-\frac{2}{3\pi}$$

(ii) 직선 $y=ax+2$가 점 $(\pi,\ 0)$을 지날 때,

$$0=\pi a+2 \qquad \therefore\ a=-\frac{2}{\pi}$$

(i), (ii)에서 $\quad -\frac{2}{\pi}<a<-\frac{2}{3\pi}$ 답 $-\frac{2}{\pi}<a<-\frac{2}{3\pi}$

0732 전략 두 각 α, β를 나타내는 동경이 일치하면 $\alpha-\beta=2n\pi$임을 이용한다. (단, n은 정수)

풀이 각 θ를 나타내는 동경과 각 9θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$9\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$8\theta=2n\pi \qquad \therefore\ \theta=\frac{n\pi}{4}$

이때 $\frac{\pi}{8}<\theta<\frac{3}{8}\pi$이므로 $\qquad \theta=\frac{\pi}{4}$

즉 $4\theta=\pi$이므로

$\cos 5\theta=\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$,

$\cos 6\theta=\cos(\pi+2\theta)=-\cos 2\theta$,

$\cos 7\theta=\cos(\pi+3\theta)=-\cos 3\theta$,

$\cos 8\theta=\cos(\pi+4\theta)=-\cos 4\theta$

$\therefore\ \cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos 9\theta$

$=(\cos\theta+\cos 5\theta)+(\cos 2\theta+\cos 6\theta)+(\cos 3\theta+\cos 7\theta)$
$\quad+(\cos 4\theta+\cos 8\theta)+\cos 9\theta$

$=(\cos\theta-\cos\theta)+(\cos 2\theta-\cos 2\theta)+(\cos 3\theta-\cos 3\theta)$
$\quad+(\cos 4\theta-\cos 4\theta)+\cos(2\pi+\theta)$

$=\cos\theta=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 ③

0733 전략 세 점 Q, R, S의 좌표를 θ에 대한 삼각함수로 나타낸다.

풀이 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$이므로

$\mathrm{Q}(-\sin\theta,\ \cos\theta) \qquad \therefore\ f(\theta)=-\sin\theta$

사각형 PQRS가 평행사변형이므로

$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{PS}}=\sin\theta$

$\therefore\ g(\theta)=\cos\theta-\sin\theta$

$\overline{\mathrm{PS}}$를 평행사변형의 밑변이라 하면 높이는 $\cos\theta+\sin\theta$이므로

$s(\theta)=\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)$

$$\therefore\ \frac{s(\theta)}{f(\theta)g(\theta)}=\frac{\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)}{-\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)}=-\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

즉 $-\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=-2$이므로

$\cos\theta+\sin\theta=2\cos\theta-2\sin\theta, \qquad \cos\theta=3\sin\theta$

$\therefore\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{3}$ 답 ①

0734 전략 주어진 조건을 m, L, t에 대입하여 방정식을 세운다.

풀이 $m=144$, $L=10$, $t=2$일 때

$h=20-10\cos\frac{4\pi}{\sqrt{144}}=20-10\cos\frac{\pi}{3}$

$\quad=20-10\cdot\frac{1}{2}=15$ ⋯⋯ ㉠

$m=a$, $L=5\sqrt{2}$, $t=2$일 때

$h=20-5\sqrt{2}\cos\frac{4\pi}{\sqrt{a}}$ ⋯⋯ ㉡

㉠과 ㉡이 같으므로

$20-5\sqrt{2}\cos\frac{4\pi}{\sqrt{a}}=15, \qquad 5\sqrt{2}\cos\frac{4\pi}{\sqrt{a}}=5$

$\therefore\ \cos\frac{4\pi}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ⋯⋯ ㉢

$a\geq 100$에서 $0<\frac{1}{\sqrt{a}}\leq\frac{1}{10}$이므로 $\qquad 0<\frac{4\pi}{\sqrt{a}}\leq\frac{2}{5}\pi$

따라서 ㉢에서 $\qquad \frac{4\pi}{\sqrt{a}}=\frac{\pi}{4}$

$\sqrt{a}=16 \qquad \therefore\ a=256$ 답 256

0735 전략 함수 f의 역함수를 f^{-1}라 하면 $f(x)=y$일 때 $f^{-1}(y)=x$임을 이용한다.

풀이 $f^{-1}(x)=t$로 놓으면 $0\leq t<\pi$이고, 주어진 방정식은

$g(f^{-1}(x))=g(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

즉 $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\qquad t=\frac{\pi}{3}$ 또는 $t=\frac{2}{3}\pi$ ($\because\ 0\leq t<\pi$)

(i) $t=\frac{\pi}{3}$, 즉 $f^{-1}(x)=\frac{\pi}{3}$일 때,

$x=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

(ii) $t=\frac{2}{3}\pi$, 즉 $f^{-1}(x)=\frac{2}{3}\pi$일 때,

$x=f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$

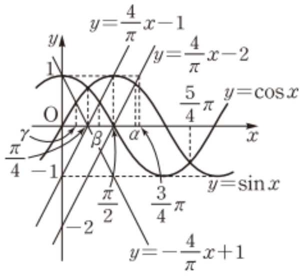
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$이므로

$\alpha^2+\beta^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0736 전략 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

풀이 ㄱ. α는 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=\frac{4}{\pi}x-2$의 교점의 x좌표이므로 오른쪽 그림에서

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3}{4}\pi$



ㄴ. β는 방정식 $\cos x=\frac{4}{\pi}x-1$의 해이므로

$\cos\beta=\frac{4}{\pi}\beta-1$

위의 그림에서 $\cos\beta<\cos\frac{\pi}{4}$이므로

$\frac{4}{\pi}\beta-1<\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \frac{4}{\pi}\beta<\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \beta<\dfrac{2+\sqrt{2}}{8}\pi$

ㄷ. $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{4}{\pi}x-1$에서 $\quad -\sin x=\dfrac{4}{\pi}x-1$

$\therefore\ \sin x=-\dfrac{4}{\pi}x+1$

즉 γ는 방정식 $\sin x=-\dfrac{4}{\pi}x+1$의 실근이다.

이때 두 직선 $y=\dfrac{4}{\pi}x-1$, $y=-\dfrac{4}{\pi}x+1$은 직선 $x=\dfrac{\pi}{4}$에 대하여 대칭이고, $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$에서 두 곡선 $y=\cos x$, $y=\sin x$도 직선 $x=\dfrac{\pi}{4}$에 대하여 대칭이므로 두 점 $(\beta,\ 0)$, $(\gamma,\ 0)$은 직선 $x=\dfrac{\pi}{4}$에 대하여 대칭이다.

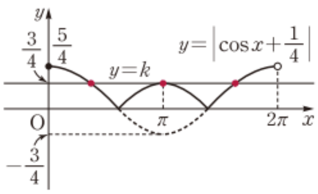
따라서 $\dfrac{\beta+\gamma}{2}=\dfrac{\pi}{4}$이므로 $\quad \beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0737 전략 $y=\left|\cos x+\dfrac{1}{4}\right|$의 그래프를 그려 본다.

풀이 방정식 $\left|\cos x+\dfrac{1}{4}\right|=k$가 서로 다른 3개의 실근을 가지려면 함수 $y=\left|\cos x+\dfrac{1}{4}\right|$의 그래프와 직선 $y=k$가 세 점에서 만나야 한다.

$0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\left|\cos x+\dfrac{1}{4}\right|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$와의 교점이 3개이려면



$k=\dfrac{3}{4}$

따라서 $a=\dfrac{3}{4}$이므로 $\quad 40a=40\cdot\dfrac{3}{4}=30$ 답 30

0738 전략 점 Q의 x좌표와 y좌표 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $\mathrm{P}(t,\ \cos t)$라 하면 $\quad \mathrm{Q}\left(\dfrac{t+\pi}{2},\ \dfrac{\cos t+1}{2}\right)$

$x=\dfrac{t+\pi}{2}$, $y=\dfrac{\cos t+1}{2}$이라 하면 $t=2x-\pi$에서

$$y=\frac{\cos(2x-\pi)+1}{2}=\frac{\cos(\pi-2x)+1}{2}$$

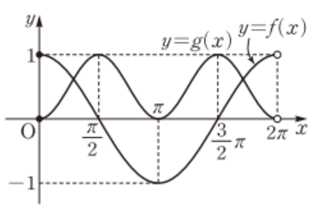
$$=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$$

ㄱ. 함수 $g(x)$의 주기는 $\quad \dfrac{2\pi}{2}=\pi$

ㄴ. 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\quad \left|-\dfrac{1}{2}\right|+\dfrac{1}{2}=1$

ㄷ. $0\le x<2\pi$에서 두 함수 $f(x)=\cos x$, $g(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 부등식 $f(x)g(x)<0$의 해는 $\quad \dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ 또는 $\pi<x<\dfrac{3}{2}\pi$

이므로 자연수 x의 값은 2, 3, 4이다.

마찬가지로 $2\pi\le x<4\pi$에서 부등식 $f(x)g(x)<0$의 해는

$\dfrac{5}{2}\pi<x<3\pi$ 또는 $3\pi<x<\dfrac{7}{2}\pi$

이므로 자연수 x의 값은 8, 9, 10이다.

따라서 부등식 $f(x)g(x)<0$을 만족시키는 10 이하의 자연수 x의 값의 합은 $\quad 2+3+4+8+9+10=36$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

0739 전략 방정식 $f(x)=0$의 두 근이 -1보다 크고 1보다 작을 조건을 이용한다.

풀이 (i) 방정식 $f(x)=0$의 근이 존재해야 하므로 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=\cos^2\theta-4(\sin\theta-1)\ge 0$$

$$(1-\sin^2\theta)-4\sin\theta+4\ge 0$$

$$\therefore\ -(\sin\theta+2)^2+9\ge 0$$

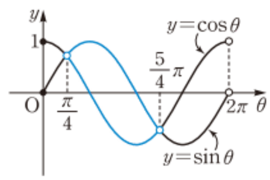
이때 $1\le\sin\theta+2\le 3$이므로 모든 θ에 대하여 부등식이 성립한다.

(ii) $f(-1)=-\cos\theta+\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta>\cos\theta$

오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는

$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{5}{4}\pi$



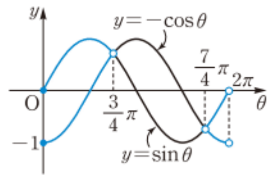
(iii) $f(1)=\cos\theta+\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta>-\cos\theta$

오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는

$0\le\theta<\dfrac{3}{4}\pi$

또는 $\dfrac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$



(iv) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $\quad x=-\dfrac{\cos\theta}{2}$

$-\dfrac{1}{2}\le-\dfrac{\cos\theta}{2}\le\dfrac{1}{2}$이므로 θ의 값에 관계없이 축은 직선 $x=-1$과 직선 $x=1$ 사이에 있다.

이상에서 $\quad \dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{3}{4}\pi$ 답 $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{3}{4}\pi$

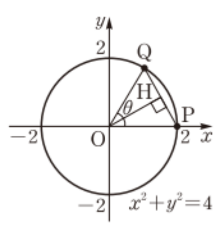
0740 전략 $f(x)$를 x에 대한 삼각함수로 나타낸다.

풀이 동경 OQ가 나타내는 각의 크기를 θ라 하면 원의 반지름의 길이가 2이므로

$x=2\theta \quad \therefore\ \theta=\dfrac{x}{2}$

점 O에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\quad \angle\mathrm{POH}=\dfrac{\theta}{2}$

이므로 직각삼각형 POH에서



$\overline{\mathrm{PH}}=2\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$

$\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{PH}}=4\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|=4\left|\sin\dfrac{x}{4}\right|$이므로

$f(x)=2\overline{\mathrm{PQ}}+1=8\left|\sin\dfrac{x}{4}\right|+1$ ⋯ ❶

따라서 함수 $f(x)$의 주기는 $\dfrac{\pi}{\frac{1}{4}}=4\pi$

$\therefore\ a=4$

$0\le\left|\sin\dfrac{x}{4}\right|\le1$이므로 $0\le8\left|\sin\dfrac{x}{4}\right|\le8$

$\therefore\ 1\le8\left|\sin\dfrac{x}{4}\right|+1\le9$, 즉 $1\le f(x)\le9$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 9, 최솟값은 1이므로

$b=9,\ c=1$ ⋯ ❷

$\therefore\ a+b-c=12$ ⋯ ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 x에 대한 삼각함수로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $a,\ b,\ c$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b-c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

참고 $\pi<\theta<2\pi$일 때 $\angle\text{POH}=\dfrac{1}{2}(2\pi-\theta)=\pi-\dfrac{\theta}{2}$이므로

$\overline{\text{PH}}=2\left|\sin\left(\pi-\dfrac{\theta}{2}\right)\right|=2\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$

따라서 $\pi<\theta<2\pi$일 때에도 $f(x)=8\left|\sin\dfrac{x}{4}\right|+1$이 성립한다.

0741 전략 점 A_k의 x좌표를 이용하여 선분 A_kB_k의 길이를 삼각함수로 나타낸다.

풀이 $\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{8}=\dfrac{\pi}{16}$이므로 점 A_k의 x좌표는 차례대로

$\dfrac{\pi}{16},\ \dfrac{\pi}{8},\ \dfrac{3}{16}\pi,\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{16}\pi,\ \dfrac{3}{8}\pi,\ \dfrac{7}{16}\pi$ ⋯ ❶

따라서

$\overline{\text{A}_1\text{B}_1}=\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{16}=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{7}{16}\pi\right)=\sqrt{2}\cos\dfrac{7}{16}\pi,$

$\overline{\text{A}_2\text{B}_2}=\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3}{8}\pi\right)=\sqrt{2}\cos\dfrac{3}{8}\pi,$

$\overline{\text{A}_3\text{B}_3}=\sqrt{2}\sin\dfrac{3}{16}\pi=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{5}{16}\pi\right)=\sqrt{2}\cos\dfrac{5}{16}\pi$

⋯ ❷

이므로

$$\begin{aligned}&\overline{\text{A}_1\text{B}_1}^2+\overline{\text{A}_2\text{B}_2}^2+\overline{\text{A}_3\text{B}_3}^2+\cdots+\overline{\text{A}_7\text{B}_7}^2\\&=\left(\sqrt{2}\cos\dfrac{7}{16}\pi\right)^2+\left(\sqrt{2}\cos\dfrac{3}{8}\pi\right)^2+\left(\sqrt{2}\cos\dfrac{5}{16}\pi\right)^2\\&\quad+\left(\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^2+\left(\sqrt{2}\sin\dfrac{5}{16}\pi\right)^2+\left(\sqrt{2}\sin\dfrac{3}{8}\pi\right)^2\\&\quad+\left(\sqrt{2}\sin\dfrac{7}{16}\pi\right)^2\\&=2\left(\cos^2\dfrac{7}{16}\pi+\sin^2\dfrac{7}{16}\pi\right)+2\left(\cos^2\dfrac{3}{8}\pi+\sin^2\dfrac{3}{8}\pi\right)\\&\quad+2\left(\cos^2\dfrac{5}{16}\pi+\sin^2\dfrac{5}{16}\pi\right)+2\sin^2\dfrac{\pi}{4}\\&=2+2+2+1=7\end{aligned}$$

⋯ ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ 점 A_k의 x좌표를 차례대로 구할 수 있다.	20 %
❷ $\overline{\text{A}_1\text{B}_1},\ \overline{\text{A}_2\text{B}_2},\ \overline{\text{A}_3\text{B}_3}$의 길이를 코사인함수로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 식의 값을 구할 수 있다.	50 %

0742 전략 $f(x)$를 한 종류의 삼각함수에 대한 식으로 나타낸 후 삼각함수를 t로 치환한다.

풀이 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\dfrac{\sin^2x+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}\\&=\dfrac{\sin^2x+\sin^2x+1}{\sin x}\\&=2\sin x+\dfrac{1}{\sin x}\end{aligned}$$

⋯ ❶

이때 $\sin x=t$로 놓으면 $0<x<\pi$에서 $0<t\le1$이고

$$\begin{aligned}f(x)&=2t+\dfrac{1}{t}\\&\ge2\sqrt{2t\cdot\dfrac{1}{t}}\\&=2\sqrt{2}\ \left(\text{단, 등호는 } t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{일 때 성립}\right)\end{aligned}$$

따라서 $f(x)$의 최솟값은 $2\sqrt{2}$이다. ⋯ ❷

답 $2\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 한 종류의 삼각함수에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $f(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

0743 전략 주어진 방정식을 $\sin x$에 대한 방정식으로 변형한다.

풀이 $2\cos^2x+(2k+1)\sin x-k-2=0$에서

$2(1-\sin^2x)+(2k+1)\sin x-k-2=0$

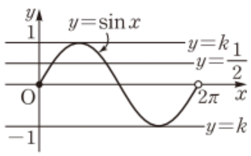
$2\sin^2x-(2k+1)\sin x+k=0$

$(2\sin x-1)(\sin x-k)=0$

$\therefore\ \sin x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $\sin x=k$ ⋯ ❶

주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 오른쪽 그림에서

$k=-1$ 또는 $k=1$ ⋯ ❷



답 $-1,\ 1$

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 만족시키는 $\sin x$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40 %

0744 전략 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하여 꼭짓점의 좌표를 구한 후 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용한다.

풀이 $$\begin{aligned}y&=x^2-2x\sin\theta-\cos^2\theta\\&=(x-\sin\theta)^2-\sin^2\theta-\cos^2\theta\\&=(x-\sin\theta)^2-1\end{aligned}$$

이므로 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(\sin\theta,\ -1)$이다. ⋯ ❶

점 $(\sin\theta,\ -1)$과 직선 $y=2x$, 즉 $2x-y=0$ 사이의 거리가 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$이므로

06 삼각함수의 그래프

$$\frac{|2\sin\theta+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5},\qquad |2\sin\theta+1|=2$$

$2\sin\theta+1=\pm2$

$\therefore \sin\theta=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin\theta=-\frac{3}{2}$

그런데 $-1\le\sin\theta\le1$이므로 $\quad \sin\theta=\frac{1}{2}$ ⋯ ❷

$\therefore \theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\frac{5}{6}\pi$ $(\because 0\le\theta<2\pi)$

따라서 구하는 합은 $\quad \frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi=\pi$ ⋯ ❸

답 π

채점 기준	비율
❶ 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ 주어진 조건을 만족시키는 $\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 θ의 값의 합을 구할 수 있다.	30 %

0745 전략 $x\sin\theta+y\cos\theta=2$, $y=-x^2+2$를 연립하여 얻은 이차방정식이 해를 가질 조건을 구한다.

풀이 $y=-x^2+2$를 $x\sin\theta+y\cos\theta=2$에 대입하면

$x\sin\theta+(-x^2+2)\cos\theta=2$

$\therefore x^2\cos\theta-x\sin\theta+2-2\cos\theta=0$ ⋯⋯ ㉠

주어진 직선과 곡선이 만나려면 이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 한다. ⋯ ❶

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(-\sin\theta)^2-4\cos\theta(2-2\cos\theta)\ge0$

$\sin^2\theta-8\cos\theta+8\cos^2\theta\ge0$

$(1-\cos^2\theta)-8\cos\theta+8\cos^2\theta\ge0$

$7\cos^2\theta-8\cos\theta+1\ge0$

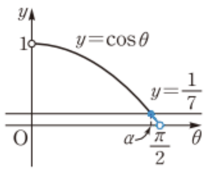
$\therefore (7\cos\theta-1)(\cos\theta-1)\ge0$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\theta-1<0$이므로

$7\cos\theta-1\le0 \qquad \therefore \cos\theta\le\frac{1}{7}$ ⋯ ❷

따라서 오른쪽 그림에서 $\alpha\le\theta<\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos\alpha=\frac{1}{7}$ ⋯ ❸



답 $\frac{1}{7}$

채점 기준	비율
❶ 이차방정식이 실근을 가질 조건으로 변형할 수 있다.	30 %
❷ 이차방정식의 판별식을 이용하여 $\cos\theta$의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ $\cos\alpha$의 값을 구할 수 있다.	20 %

07 삼각함수의 활용

0746 사인법칙에 의하여 $\frac{c}{\sin45^\circ}=\frac{5}{\sin60^\circ}$이므로

$c\sin60^\circ=5\sin45^\circ$

$\therefore c=5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{6}}{3}$ 답 $\frac{5\sqrt{6}}{3}$

0747 $A+B+C=180^\circ$이므로

$C=180^\circ-(120^\circ+30^\circ)=30^\circ$

사인법칙에 의하여 $\frac{12}{\sin120^\circ}=\frac{c}{\sin30^\circ}$이므로

$c\sin120^\circ=12\sin30^\circ$

$\therefore c=12\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$ 답 $4\sqrt{3}$

0748 사인법칙에 의하여 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin120^\circ}=\frac{2}{\sin B}$이므로

$2\sqrt{3}\sin B=2\sin120^\circ \qquad \therefore \sin B=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$

그런데 $A+B<180^\circ$이므로 $\quad B=30^\circ$ 답 30°

0749 사인법칙에 의하여 $\frac{5}{\sin30^\circ}=\frac{5\sqrt{2}}{\sin C}$이므로

$5\sin C=5\sqrt{2}\sin30^\circ \qquad \therefore \sin C=5\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0^\circ<C<180^\circ$이므로 $\quad C=45^\circ$ 또는 $C=135^\circ$

$A=180^\circ-(B+C)$이므로 $\quad A=105^\circ$ 또는 $A=15^\circ$

답 15° 또는 105°

0750 사인법칙에 의하여 $\quad \frac{20}{\sin30^\circ}=2R$

$\therefore R=\frac{20}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}=20$ 답 20

0751 $A+B+C=180^\circ$이므로

$C=180^\circ-(35^\circ+100^\circ)=45^\circ$

사인법칙에 의하여 $\quad \frac{3}{\sin45^\circ}=2R$

$\therefore R=\frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

0752 코사인법칙에 의하여

$a^2=3^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot3\cdot\sqrt{2}\cos45^\circ$

$=9+2-2\cdot3\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=5$

$a>0$이므로 $\quad a=\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{5}$

0753 코사인법칙에 의하여

$b^2=4^2+5^2-2\cdot4\cdot5\cos60^\circ$

$=16+25-2\cdot4\cdot5\cdot\frac{1}{2}=21$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{21}$ 답 $\sqrt{21}$

0754 코사인법칙에 의하여
$\cos C=\dfrac{6^2+7^2-8^2}{2\cdot6\cdot7}=\dfrac{1}{4}$ 답 $\dfrac{1}{4}$

0755 코사인법칙에 의하여
$\cos A=\dfrac{7^2+8^2-13^2}{2\cdot7\cdot8}=-\dfrac{1}{2}$
$0°<A<180°$이므로 $A=120°$ 답 $120°$

0756 $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot10\cdot6\cdot\sin45°$
$=\dfrac{1}{2}\cdot10\cdot6\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=15\sqrt{2}$ 답 $15\sqrt{2}$

0757 $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot5\cdot\sin150°$
$=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot5\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$ 답 $\dfrac{5}{2}$

0758 (1) 코사인법칙에 의하여
$\cos A=\dfrac{3^2+(\sqrt{7})^2-2^2}{2\cdot3\cdot\sqrt{7}}=\dfrac{12}{6\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$
(2) $\sin^2A+\cos^2A=1$에서
$\sin^2A=1-\cos^2A=1-\left(\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\right)^2=1-\dfrac{4}{7}=\dfrac{3}{7}$
$\therefore \sin A=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ $(\because 0°<A<180°)$
(3) $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot\sqrt{7}\cdot\dfrac{\sqrt{21}}{7}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$
답 (1) $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ (2) $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ (3) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

0759 $\square ABCD=6\cdot9\cdot\sin120°$
$=6\cdot9\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=27\sqrt{3}$ 답 $27\sqrt{3}$

0760 $A=C=135°$이므로
$\square ABCD=3\cdot4\cdot\sin135°=3\cdot4\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$ 답 $6\sqrt{2}$

0761 $C+D=180°$이므로 $C=180°-60°=120°$
$\therefore \square ABCD=2\sqrt{3}\cdot8\cdot\sin120°$
$=2\sqrt{3}\cdot8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=24$ 답 24

0762 $\square ABCD=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot11\cdot\sin150°$
$=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot11\cdot\dfrac{1}{2}=11$ 답 11

유형 01 사인법칙

본책 116쪽

삼각형 ABC에서
$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

0763 사인법칙에 의하여 $\dfrac{5}{\sin60°}=\dfrac{4}{\sin B}$이므로
$\sin B=4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{5}=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$
$\therefore \cos^2B=1-\sin^2B=1-\dfrac{12}{25}=\dfrac{13}{25}$ 답 ⑤

0764 $\triangle ABC$에서 $A+B+C=\pi$이므로
$a\sin(A+B)=a\sin(\pi-C)=a\sin C$
사인법칙에 의하여
$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$이므로 $a\sin C=c\sin A$
$\therefore a\sin(A+B)=a\sin C=c\sin A$
$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$이므로 $\sin C=\dfrac{c\sin B}{b}$
$\therefore a\sin(A+B)=a\sin C=\dfrac{ac\sin B}{b}$
이상에서 항상 같은 것은 ㄱ, ㄴ이다.
답 ③

0765 $C=180°-(75°+60°)=45°$이므로 $\triangle APC$에서 사인법칙에 의하여
$\dfrac{\overline{CP}}{\sin(\angle CAP)}=\dfrac{\overline{AP}}{\sin45°}=\sqrt{2}\,\overline{AP}$ ...... ㉠ ··· ❶
따라서 $\overline{AP}$의 길이가 최소일 때 ㉠의 값이 최소이다.
$\overline{AP}\perp\overline{BC}$일 때 $\overline{AP}$의 길이가 최소이므로
$\overline{AP}\ge6\sqrt{3}\sin60°=9$ ··· ❷
따라서 ㉠의 최솟값은 $9\sqrt{2}$이다. ··· ❸
답 $9\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 $\overline{AP}$로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\overline{AP}$의 길이의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 식의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0766 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\triangle ABH$에서 $\overline{BH}=4\sqrt{2}\cdot\cos30°=2\sqrt{6}$
$\triangle AHC$에서 $\overline{CH}=4\cdot\cos45°=2\sqrt{2}$
$\therefore \overline{BC}=2\sqrt{6}+2\sqrt{2}$
$\angle A=180°-(30°+45°)=105°$이므로 사인법칙에 의하여
$\dfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{\sin105°}=\dfrac{4}{\sin30°}$
$\therefore \sin105°=\dfrac{1}{4}\cdot(2\sqrt{2}+2\sqrt{6})\cdot\sin30°$
$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ 답 ⑤

0767 $\angle EAC=90°-\angle ACE=\angle BCD$
$\angle EAC=\theta$라 하면 $\triangle EAC$에서 $\overline{EC}=2\sin\theta$이므로
$\overline{BD}=\overline{EC}=2\sin\theta$
$\triangle BCD$에서 사인법칙에 의하여
$\dfrac{\overline{BC}}{\sin(\angle BDC)}=\dfrac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)}$

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 120°}=\frac{2\sin\theta}{\sin\theta}$$

$\therefore \overline{BC}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ 답 $\sqrt{3}$

유형 02 사인법칙과 삼각형의 외접원 본책 116쪽

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\frac{a}{\sin A}=2R$$

➡ $\sin A=\frac{a}{2R}$, $a=2R\sin A$

0768 △ABD와 △ACD의 외접원이 같으므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{2}{\sin(\angle DAC)}=\frac{5}{\sin(\angle DAB)}$$

$$\therefore \sin(\angle DAC)=\frac{2}{5}\sin(\angle DAB)$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{10}=\frac{7}{25}$$

답 $\frac{7}{25}$

0769 △ABC의 외접원의 반지름의 길이가 4이므로 사인법칙에 의하여

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a}{2\cdot 4}+\frac{b}{2\cdot 4}+\frac{c}{2\cdot 4}$$

$$=\frac{a+b+c}{2\cdot 4}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

답 ③

0770 △ABC의 외접원의 반지름의 길이가 10이므로 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin 120°}=2\cdot 10$

$\therefore \overline{BC}=2\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$ 답 $10\sqrt{3}$

0771 △ABC에서 $A+B+C=\pi$이므로

$\cos(B+C)=\cos(\pi-A)=-\cos A$ ··· ❶

$4\cos A\cos(B+C)=-3$에서 $4\cos A(-\cos A)=-3$

$-4\cos^2 A=-3$, $\cos^2 A=\frac{3}{4}$

$\therefore \sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

$\therefore \sin A=\frac{1}{2}$ ($\because 0<A<\pi$) ··· ❷

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$2R=\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{3}{\frac{1}{2}}=6$$

$\therefore R=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $\cos(B+C)$를 $\cos A$로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $\sin A$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	30 %

0772 △ABC의 외접원 O의 반지름의 길이가 6이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 45°}=\frac{\overline{AC}}{\sin 60°}=2\cdot 6$$

$$\therefore \overline{BC}=12\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$$

$$\overline{AC}=12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

꼭짓점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

△BCH에서 $\overline{BH}=\overline{BC}\cos 60°=6\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=3\sqrt{2}$

△ACH에서 $\overline{AH}=\overline{AC}\cos 45°=6\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{6}$

$\therefore \overline{AB}=\overline{BH}+\overline{AH}=3\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$ 답 ⑤

0773 $\angle BDC=\angle BAC=45°$ ($\because \widehat{BC}$에 대한 원주각)이므로

△BCD에서 $\angle BCD=180°-(15°+45°)=120°$

또 $\angle ABD=\angle ACD=75°$ ($\because \widehat{AD}$에 대한 원주각)이므로

$\angle ABC=75°+15°=90°$

따라서 현 AC는 원의 지름이므로 △BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$2R=\overline{AC}=8\sqrt{6}$

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BD}}{\sin 120°}=8\sqrt{6}$

$\therefore \overline{BD}=8\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{2}$ 답 $12\sqrt{2}$

SSEN 특강

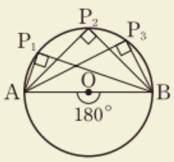
중심각과 원주각

원 O에서 $\overline{AB}$가 지름이면 $\widehat{AB}$에 대한 중심각의 크기는 180°이다.

따라서 $\widehat{AB}$에 대한 원주각의 크기는

$\angle AP_1B=\angle AP_2B$

$=\angle AP_3B=90°$



유형 03 사인법칙의 변형 본책 117쪽

삼각형 ABC에서

$\sin A : \sin B : \sin C=a : b : c$

0774 $\frac{a+b}{5}=\frac{b+c}{6}=\frac{c+a}{7}=k$ $(k>0)$라 하면

$a+b=5k$, $b+c=6k$, $c+a=7k$ ······ ㉠

위의 세 식을 변끼리 더하면

$2a+2b+2c=18k$ $\therefore a+b+c=9k$ ······ ㉡

㉡에서 ㉠의 각 식을 빼면

$a=3k$, $b=2k$, $c=4k$

$\therefore \sin A : \sin B : \sin C=a : b : c=3k : 2k : 4k$

$=3 : 2 : 4$ 답 $3 : 2 : 4$

0775 $ab : bc : ca=4 : 3 : 6$에서 $ab=4k^2$, $bc=3k^2$, $ca=6k^2$ $(k>0)$으로 놓으면

$ab \cdot bc \cdot ca = 4k^2 \cdot 3k^2 \cdot 6k^2$

$(abc)^2 = 72k^6 \quad \therefore abc = 6\sqrt{2}k^3 \ (\because abc > 0)$

$\therefore a = \dfrac{abc}{bc} = \dfrac{6\sqrt{2}k^3}{3k^2} = 2\sqrt{2}k,$

$b = \dfrac{abc}{ca} = \dfrac{6\sqrt{2}k^3}{6k^2} = \sqrt{2}k,$

$c = \dfrac{abc}{ab} = \dfrac{6\sqrt{2}k^3}{4k^2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}k$

$\therefore \sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$

$= 2\sqrt{2}k : \sqrt{2}k : \dfrac{3\sqrt{2}}{2}k$

$= 4 : 2 : 3$

답 ④

유형 04 삼각형의 결정 (1)

본책 118쪽

$\triangle$ABC에서 $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$에 대한 관계식이 주어지면

$\sin A = \dfrac{a}{2R}$, $\sin B = \dfrac{b}{2R}$, $\sin C = \dfrac{c}{2R}$

(단, R는 외접원의 반지름의 길이)

임을 이용하여 a, b, c에 대한 관계식으로 변형하여 삼각형을 결정한다.

0776 $\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 $\quad \sin A = \dfrac{a}{2R}$, $\sin B = \dfrac{b}{2R}$

이를 주어진 식에 대입하면

$a \cdot \dfrac{a}{2R} = b \cdot \dfrac{b}{2R} \quad \therefore a^2 = b^2$

a, b는 양수이므로 $\quad a = b$

따라서 삼각형 ABC는 $a = b$인 이등변삼각형이다.

답 ①

0777 $\triangle$ABC에서 $A + B + C = 180°$이므로

$\sin(A+B) = \sin(180° - C) = \sin C$ ⋯ ❶

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A = \dfrac{a}{2R}$, $\sin B = \dfrac{b}{2R}$, $\sin C = \dfrac{c}{2R}$

이를 $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$에 대입하면

$\dfrac{a^2}{4R^2} + \dfrac{b^2}{4R^2} = \dfrac{c^2}{4R^2} \quad \therefore a^2 + b^2 = c^2$ ⋯ ❷

따라서 삼각형 ABC는 $C = 90°$인 직각삼각형이다. ⋯ ❸

답 $C = 90°$인 직각삼각형

채점 기준	비율
❶ $\sin(A+B) = \sin C$임을 알 수 있다.	30 %
❷ a, b, c 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\triangle$ABC를 결정할 수 있다.	20 %

0778 주어진 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4} = \{2\sqrt{b}\sin(B+C)\}^2 - 4a\sin^2 A = 0$

$4b\sin^2(B+C) - 4a\sin^2 A = 0$

$4b\sin^2(\pi - A) - 4a\sin^2 A = 0$

$4b\sin^2 A - 4a\sin^2 A = 0, \quad 4(b-a)\sin^2 A = 0$

$\therefore a = b$ 또는 $\sin^2 A = 0$

이때 $0° < A < 180°$이므로 $\quad \sin A \neq 0$

따라서 $\triangle$ABC는 $a = b$인 이등변삼각형이다.

답 ③

유형 05 사인법칙의 활용

본책 118쪽

주어진 상황에서 삼각형의 각의 크기, 변의 길이, 외접원의 반지름의 길이 등을 알아내어 사인법칙에 대입한다.

0779 드론의 위치를 C라 하면

$\angle ACB = 180° - (45° + 75°) = 60°$

$\triangle$ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{30}{\sin 60°} = \dfrac{\overline{BC}}{\sin 45°}$

$\therefore \overline{BC} = 30 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{6}$ (m)

답 ③

0780 $C = 180° - (55° + 65°) = 60°$

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R cm라 하면 사인법칙에 의하여

$2R = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sin 60°} = \dfrac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8$

$\therefore R = 4$

따라서 물통의 부피는

$\pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 96\pi (\mathrm{cm}^3)$

답 96π cm^3

유형 06 코사인법칙

본책 119쪽

삼각형에서 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어질 때

➡ 코사인법칙을 이용하여 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있다.

➡ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

0781 $\triangle$ABC에서 $\quad \overline{AC} = \dfrac{2}{\sin 30°} = 4$

$\triangle$CDE에서 $\quad \overline{CE} = \dfrac{3}{\sin 30°} = 6$

$\angle ACE = 180° - (30° + 30°) = 120°$이므로 $\triangle$ACE에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AE}^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 120°$

$= 76$

$\therefore \overline{AE} = 2\sqrt{19}$

답 $2\sqrt{19}$

0782 □ABCD가 원에 내접하므로

$B + D = 180°$

즉 $D = 180° - B$이므로

$\cos D = \cos(180° - B) = -\cos B = -\dfrac{1}{9}$

따라서 $\triangle$DAC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \left(-\dfrac{1}{9}\right) = 49$

$\therefore \overline{AC} = 7$

답 ②

07 삼각함수의 활용

0783 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=(2x)^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2-2\cdot 2x\cdot\frac{1}{x}\cdot\cos 60^\circ$$
$$=4x^2+\frac{1}{x^2}-2 \quad \cdots ❶$$

$4x^2>0$, $\frac{1}{x^2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4x^2+\frac{1}{x^2}\ge 2\sqrt{4x^2\cdot\frac{1}{x^2}}=4\ \left(\text{단, 등호는 } 4x^2=\frac{1}{x^2}\text{일 때 성립}\right) \quad \cdots ❷$$

$$\therefore\ \overline{AC}^2=4x^2+\frac{1}{x^2}-2$$
$$\ge 4-2=2$$

따라서 $\overline{AC}$의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다. ⋯ ❸

답 $\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AC}^2$의 값을 x로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있다.	40 %
❸ $\overline{AC}$의 길이의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

유형 07 코사인법칙의 변형

본책 119쪽

삼각형에서 세 변의 길이가 주어지면 코사인법칙의 변형을 이용하여 세 각의 크기를 구할 수 있다.

➡ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

0784 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{5^2+9^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 9}=\frac{19}{30}$$

△ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2=5^2+6^2-2\cdot 5\cdot 6\cdot\frac{19}{30}=23$$
$$\therefore\ \overline{AD}=\sqrt{23}$$

답 $\sqrt{23}$

0785 가장 짧은 변의 대각의 크기가 가장 작으므로 그 크기를 θ라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{3^2+(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot 3\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$0^\circ<\theta<180^\circ$이므로 $\theta=45^\circ$

답 45°

0786 $5a^2=5b^2+6bc+5c^2$에서

$$5b^2+5c^2-5a^2=-6bc \qquad \therefore\ b^2+c^2-a^2=-\frac{6bc}{5}$$

따라서 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

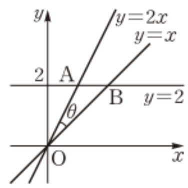
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{-\frac{6bc}{5}}{2bc}=-\frac{3}{5}$$

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$이므로

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=-\frac{4}{3}$$

답 ①

0787 오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y=2x$, $y=x$와 직선 $y=2$의 교점을 각각 A, B라 하면



$\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(2,\ 2)$

$\therefore\ \overline{OA}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$,

$\overline{OB}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$,

$\overline{AB}=1$

따라서 △AOB에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{2})^2-1}{2\cdot\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

답 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

0788 정육각형의 한 내각의 크기는

$$\frac{180^\circ\times(6-2)}{6}=120^\circ \quad \cdots ❶$$

$\overline{MF}=4$이므로 △AMF에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AM}^2=8^2+4^2-2\cdot 8\cdot 4\cdot\cos 120^\circ$$
$$=112$$
$$\therefore\ \overline{AM}=4\sqrt{7} \quad \cdots ❷$$
$$\therefore\ \cos\theta=\frac{4^2+(4\sqrt{7})^2-8^2}{2\cdot 4\cdot 4\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

채점 기준	비율
❶ ∠F의 크기를 구할 수 있다.	20 %
❷ $\overline{AM}$의 길이를 구할 수 있다.	50 %
❸ $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0789 $\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=2:3$이므로 $\overline{BD}=2x$, $\overline{CD}=3x$ $(x>0)$라 하고 $\angle BAD=\theta$라 하면

△ABD에서 $\cos\theta=\frac{10^2+(4\sqrt{6})^2-(2x)^2}{2\cdot 10\cdot 4\sqrt{6}}=\frac{196-4x^2}{80\sqrt{6}}$

△ACD에서 $\cos\theta=\frac{(4\sqrt{6})^2+15^2-(3x)^2}{2\cdot 4\sqrt{6}\cdot 15}=\frac{321-9x^2}{120\sqrt{6}}$

따라서 $\frac{196-4x^2}{80\sqrt{6}}=\frac{321-9x^2}{120\sqrt{6}}$이므로

$98-2x^2=107-3x^2$, $\quad x^2=9$

$\therefore\ x=3\ (\because\ x>0)$

$\therefore\ \overline{BD}=2x=6$

답 ①

0790 세 원 A, B, C의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2, r_3이라 하면 세 원의 넓이의 비가 $1:2:8$이므로

$\pi r_1^2:\pi r_2^2:\pi r_3^2=1:2:8$

$\therefore\ r_1:r_2:r_3=1:\sqrt{2}:2\sqrt{2}$

$r_1=k$, $r_2=\sqrt{2}k$, $r_3=2\sqrt{2}k$ $(k>0)$라 하면

$\overline{AB}=r_1+r_2=(1+\sqrt{2})k$,

$\overline{BC}=r_2+r_3=3\sqrt{2}k$,

$\overline{CA}=r_3+r_1=(2\sqrt{2}+1)k$

따라서 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{\{(1+\sqrt{2})k\}^2+(3\sqrt{2}k)^2-\{(2\sqrt{2}+1)k\}^2}{2\cdot(1+\sqrt{2})k\cdot 3\sqrt{2}k}$$
$$=\frac{6-\sqrt{2}}{6+3\sqrt{2}}=\frac{7-4\sqrt{2}}{3}$$

답 $\frac{7-4\sqrt{2}}{3}$

유형 08 사인법칙과 코사인법칙 본책 120쪽

① 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어질 때
➡ 코사인법칙과 사인법칙 이용
② 세 변의 길이가 주어질 때
➡ 코사인법칙의 변형 이용

0791 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cdot\cos60°=13$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{13}$

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\sqrt{13}}{\sin60°}=2R$

$\therefore R=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{39}}{3}$ 답 $\frac{\sqrt{39}}{3}$

0792 사인법칙에 의하여

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$

따라서 $a=k$, $b=\sqrt{2}k$, $c=\sqrt{3}k\ (k>0)$로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{(\sqrt{3}k)^2+k^2-(\sqrt{2}k)^2}{2\cdot\sqrt{3}k\cdot k}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

0793 코사인법칙에 의하여

$b^2=2^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-2\cdot2\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot\cos45°=8$

$\therefore b=2\sqrt{2}\ (\because b>0)$ ··· ❶

사인법칙에 의하여 $\frac{2\sqrt{2}}{\sin45°}=\frac{2}{\sin C}$

$\therefore \sin C=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

$0°<C<180°$이므로 $C=30°$ 또는 $C=150°$

그런데 $B+C<180°$이므로 $C=30°$ ··· ❷

이때 $A+B+C=180°$이므로

$A=180°-(45°+30°)=105°$ ··· ❸

답 $105°$

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ ∠C의 크기를 구할 수 있다.	50 %
❸ ∠A의 크기를 구할 수 있다.	20 %

0794 길이가 9인 변의 대각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta=\frac{7^2+8^2-9^2}{2\cdot7\cdot8}=\frac{2}{7}$

$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{3\sqrt{5}}{7}\ (\because 0°<\theta<180°)$

삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{9}{\sin\theta}=2R \qquad \therefore R=\frac{1}{2}\cdot9\cdot\frac{7}{3\sqrt{5}}=\frac{21\sqrt{5}}{10}$

따라서 구하는 외접원의 넓이는

$\pi R^2=\pi\left(\frac{21\sqrt{5}}{10}\right)^2=\frac{441}{20}\pi$ 답 ③

유형 09 삼각형의 결정 (2) 본책 121쪽

$\triangle ABC$의 세 각 A, B, C에 대한 관계식이 주어질 때
① 사인에 대한 식
➡ $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$임을 이용하여 a, b, c에 대한 식으로 나타낸다. (단, R는 외접원의 반지름의 길이)
② 코사인에 대한 식
➡ 코사인법칙의 변형을 이용하여 a, b, c에 대한 식으로 나타낸다.

0795 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

이를 주어진 식에 대입하면

$\frac{a}{2R}=2\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$a^2=a^2+b^2-c^2, \qquad b^2=c^2$

$\therefore b=c$

따라서 $\triangle ABC$는 $b=c$인 이등변삼각형이다.

답 ②

0796 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$이므로 주어진 식에 대입하면

$b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=a\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$b^2+c^2-a^2=c^2+a^2-b^2, \qquad a^2=b^2$

$\therefore a=b$

따라서 $\triangle ABC$는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

답 $a=b$인 이등변삼각형

0797 $b^2\tan A=a^2\tan B$에서

$b^2\cdot\frac{\sin A}{\cos A}=a^2\cdot\frac{\sin B}{\cos B}$

$\therefore b^2\sin A\cos B=a^2\sin B\cos A$ ······ ㉠

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$,

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

이므로 ㉠에 대입하면

$b^2\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=a^2\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$b^2(c^2+a^2-b^2)=a^2(b^2+c^2-a^2)$

$a^2b^2+b^2c^2-b^4=a^2b^2+a^2c^2-a^4$

$a^4-b^4-a^2c^2+b^2c^2=0$

$(a^2+b^2)(a^2-b^2)-c^2(a^2-b^2)=0$

$(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2)=0$

$(a^2+b^2-c^2)(a+b)(a-b)=0$

$\therefore a^2+b^2=c^2$ 또는 $a=b\ (\because a\neq -b)$

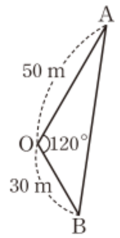
따라서 $C=90°$인 직각삼각형 또는 $a=b$인 이등변삼각형이므로 $\triangle ABC$가 될 수 있는 것은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ④

유형 10 코사인법칙의 활용 본책 121쪽

주어진 상황에서 삼각형의 각의 크기, 변의 길이 등을 알아내어 코사인법칙에 대입한다.

0798 10초 후의 두 자전거의 위치를 각각 A, B라 하면



$\overline{OA}=10\cdot5=50\ (\text{m})$

$\overline{OB}=10\cdot3=30\ (\text{m})$

$\triangle$OAB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=50^2+30^2-2\cdot50\cdot30\cdot\cos120^\circ$

$=4900$

$\therefore\ \overline{AB}=70\ (\text{m})$

따라서 두 자전거 사이의 거리는 70 m이다. 답 70 m

0799 $\triangle$ACD에서 $\overline{AC}=\dfrac{20}{\sin30^\circ}=40\ (\text{m})$

$\triangle$BCE에서 $\overline{BC}=\dfrac{15\sqrt{2}}{\sin45^\circ}=30\ (\text{m})$

$\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=40^2+30^2-2\cdot40\cdot30\cdot\cos60^\circ=1300$

$\therefore\ \overline{AB}=10\sqrt{13}\ (\text{m})$ 답 ⑤

0800 $\angle ACB=\pi-\theta$이므로 $\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\pi-\theta)=\dfrac{6^2+12^2-(6\sqrt{7})^2}{2\cdot6\cdot12}=-\dfrac{1}{2}$

$-\cos\theta=-\dfrac{1}{2}\qquad\therefore\ \cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{3}\ (\because\ 0<\theta<\pi)$ 답 $\dfrac{\pi}{3}$

유형 11 삼각형의 넓이 본책 122쪽

두 변의 길이 a, b와 그 끼인각의 크기 C가 주어진 $\triangle$ABC의 넓이

➡ $\dfrac{1}{2}ab\sin C$

0801 $\triangle$ABC의 넓이가 $10\sqrt{3}$이므로

$\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\sin C=10\sqrt{3}\qquad\therefore\ \sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $\angle C$가 예각이므로 $C=60^\circ$

따라서 코사인법칙에 의하여

$c^2=5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\cdot\cos60^\circ=49$

$\therefore\ c=7$ 답 ④

0802 $\overline{BD}=x$라 하면 $\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle BCD$이므로

$\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot4\cdot\sin60^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot x\cdot\sin30^\circ+\dfrac{1}{2}\cdot x\cdot4\cdot\sin30^\circ$

$6\sqrt{3}=\dfrac{3}{2}x+x,\qquad\dfrac{5}{2}x=6\sqrt{3}$

$\therefore\ x=\dfrac{12\sqrt{3}}{5}$ 답 ⑤

0803 코사인법칙에 의하여

$a^2=8^2+7^2-2\cdot8\cdot7\cdot\cos120^\circ=169$

$\therefore\ a=13$ ··· ❶

$\triangle$ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\cdot8\cdot7\cdot\sin120^\circ=14\sqrt{3}$ ··· ❷

내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$S=\dfrac{1}{2}r(13+8+7)=14\sqrt{3}\qquad\therefore\ r=\sqrt{3}$ ··· ❸

답 $\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\triangle$ABC의 넓이를 구할 수 있다.	30 %
❸ 내접원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40 %

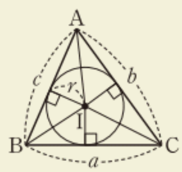
SSEN 특강

삼각형 ABC의 내심을 I, 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\triangle ABC=\triangle IBC+\triangle ICA+\triangle IAB$

$=\dfrac{1}{2}ar+\dfrac{1}{2}br+\dfrac{1}{2}cr$

$=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$



0804 $\overline{BC}=3\overline{AD}$에서 $\overline{BC}:\overline{AD}=3:1$이므로

$\triangle ABC:\triangle ACD=3:1$

즉 $\triangle ABC=3\triangle ACD$이므로

$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin\alpha=3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{CD}\cdot\sin\beta$

$\therefore\ \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{3\overline{CD}}{\overline{AB}}$ 답 ③

0805 코사인법칙에 의하여

$4^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos60^\circ$

$\therefore\ 16=a^2+b^2-ab$ ······ ㉠

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$이므로

$a^2+b^2=5^2-2ab=25-2ab$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$16=25-3ab$

$\therefore\ ab=3$

따라서 $\triangle$ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot ab\cdot\sin60^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ 답 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

0806 $\overline{AP}=x$, $\overline{AQ}=y$라 하면 $\triangle ABC=4\triangle APQ$에서

$\dfrac{1}{2}\cdot9\cdot12\cdot\sin60^\circ=4\left(\dfrac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot\sin60^\circ\right)$

$\therefore\ xy=27$

코사인법칙에 의하여

$\overline{PQ}^2 = x^2+y^2-2xy\cos 60° = x^2+y^2-xy$
$= (x-y)^2+xy$
$\geq xy = 27$ (단, 등호는 $x=y=3\sqrt{3}$일 때 성립)
$\therefore \overline{PQ} \geq \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$
따라서 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 $3\sqrt{3}$이다. 답 $3\sqrt{3}$

0807 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$이므로
$\triangle APR = \frac{1}{2}\overline{AP}\cdot\overline{AR}\cdot\sin A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3c}{5}\cdot\frac{2b}{5}\cdot\sin A$
$= \frac{6}{25}\left(\frac{1}{2}bc\sin A\right) = \frac{6}{25}S$
같은 방법으로
$\triangle BQP = \frac{6}{25}S,\ \triangle CRQ = \frac{6}{25}S$
$\therefore S' = \triangle ABC - (\triangle APR + \triangle BQP + \triangle CRQ)$
$= S - \left(\frac{6}{25}S + \frac{6}{25}S + \frac{6}{25}S\right) = \frac{7}{25}S$
$\therefore \frac{S'}{S} = \frac{7}{25}$ 답 $\frac{7}{25}$

유형 12 외접원의 반지름의 길이와 삼각형의 넓이 본책 123쪽

세 각의 크기와 외접원의 반지름의 길이 R가 주어진 $\triangle ABC$의 넓이
➡ $2R^2\sin A\sin B\sin C$

0808 $B=C=30°$이므로
$A = 180° - (30°+30°) = 120°$
$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이가 5이므로 사인법칙에 의하여
$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2\cdot 5 \qquad \therefore b = 10\sin B,\ c = 10\sin C$
따라서 $\triangle ABC$의 넓이는
$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\cdot 10\sin B\cdot 10\sin C\cdot\sin A$
$= 50\sin A\sin B\sin C$
$= 50\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$ 답 $\frac{25\sqrt{3}}{4}$

0809 $\widehat{BC} : \widehat{CA} : \widehat{AB} = 3:4:5$이므로 삼각형 ABC에서
$A = 180°\times\frac{3}{12} = 45°,\ B = 180°\times\frac{4}{12} = 60°,$
$C = 180°\times\frac{5}{12} = 75°$
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 20이므로
$\triangle ABC = 2\cdot 20^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$= 100(3+\sqrt{3})$ 답 $100(3+\sqrt{3})$

유형 13 헤론의 공식 본책 123쪽

세 변의 길이가 주어진 $\triangle ABC$의 넓이
➡ $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $\left(단,\ s=\frac{a+b+c}{2}\right)$

0810 $\overline{AC} = \sqrt{(2\sqrt{11})^2+(2\sqrt{5})^2} = 8$
$\overline{AF} = \sqrt{(2\sqrt{11})^2+(\sqrt{5})^2} = 7$
$\overline{CF} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2} = 5$
헤론의 공식에서 $s = \frac{8+7+5}{2} = 10$
따라서 삼각형 AFC의 넓이는
$\sqrt{10(10-8)(10-7)(10-5)} = 10\sqrt{3}$ 답 $10\sqrt{3}$

다른 풀이 $\triangle AFC$에서 코사인법칙에 의하여
$\cos A = \frac{7^2+8^2-5^2}{2\cdot 7\cdot 8} = \frac{11}{14}$
$\therefore \sin A = \sqrt{1-\left(\frac{11}{14}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$
따라서 $\triangle AFC$의 넓이는
$\frac{1}{2}\cdot\overline{AF}\cdot\overline{AC}\cdot\sin A = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8\cdot\frac{5\sqrt{3}}{14} = 10\sqrt{3}$

0811 헤론의 공식에서
$s = \frac{9+10+11}{2} = 15$
따라서 구하는 삼각형의 넓이는
$\sqrt{15(15-9)(15-10)(15-11)} = 30\sqrt{2}$
답 $30\sqrt{2}$

0812 $a:b:c = \sin A : \sin B : \sin C = 8:13:15$
$a=8k,\ b=13k,\ c=15k\ (k>0)$라 하면 헤론의 공식에서
$s = \frac{8k+13k+15k}{2} = 18k$
$\triangle ABC$의 넓이는
$\sqrt{18k(18k-8k)(18k-13k)(18k-15k)} = 30\sqrt{3}k^2$ ⋯ ❶
즉 $30\sqrt{3}k^2 = \frac{15\sqrt{3}}{2}$이므로 $k^2 = \frac{1}{4}$
$\therefore k = \frac{1}{2}\ (\because k>0)$ ⋯ ❷
따라서 $\triangle ABC$의 둘레의 길이는
$8k+13k+15k = 36k = 18$ ⋯ ❸
답 18

채점 기준	비율
❶ $\triangle ABC$의 넓이를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\triangle ABC$의 둘레의 길이를 구할 수 있다.	20 %

0813 삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크므로
$3+(x+2) > 5-x$ ⋯⋯ ㉠
$3+(5-x) > x+2$ ⋯⋯ ㉡
$(x+2)+(5-x) > 3$ ⋯⋯ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $0<x<3$
헤론의 공식에서
$\frac{3+(x+2)+(5-x)}{2} = 5$
이므로 주어진 삼각형의 넓이를 S라 하면

$S=\sqrt{5(5-3)\{5-(x+2)\}\{5-(5-x)\}}$
$=\sqrt{-10x^2+30x}$
$=\sqrt{-10\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{45}{2}}$

따라서 $0<x<3$에서 $x=\frac{3}{2}$일 때 S의 최댓값은 $\frac{3\sqrt{10}}{2}$이다.

답 ③

유형 14 삼각형의 넓이의 최대·최소 본책 124쪽

두 변의 길이 a, b가 주어진 삼각형 ABC의 넓이 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$의 최대·최소
➡ $\sin C$의 값에 따라 결정된다.

0814 △ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot 4\cdot\sin B=2\sqrt{5}\sin B$

이므로 S는 $B=90°$일 때 최대이다.
따라서 △ABC의 넓이의 최댓값은

$2\sqrt{5}\cdot\sin 90°=2\sqrt{5}$

이고 피타고라스 정리에 의하여

$x^2=(\sqrt{5})^2+4^2=21 \qquad \therefore x=\sqrt{21}$

답 ③

0815 △ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ac\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}ac$

이때 양수 a, c에 대하여 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+c\geq 2\sqrt{ac}$, 즉 $16\geq 2\sqrt{ac}$ (단, 등호는 $a=c$일 때 성립)

$\sqrt{ac}\leq 8$에서 $\qquad ac\leq 64$

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{4}ac\leq 16\sqrt{2}$

따라서 △ABC의 넓이의 최댓값은 $16\sqrt{2}$이다.

답 $16\sqrt{2}$

유형 15 사각형의 넓이; 삼각형 이용 본책 124쪽

(i) 사각형을 두 개의 삼각형으로 나눈다.
(ii) 각각의 삼각형의 넓이를 구한다.
(iii) 삼각형의 넓이의 합으로 사각형의 넓이를 구한다.

0816 $\overline{AC}=x$라 하면 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$x^2=8^2+6^2-2\cdot 8\cdot 6\cdot\cos 60°=52$

$\therefore x=2\sqrt{13}$

$\overline{AD}=y$라 하면 △ACD에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{13})^2=8^2+y^2-2\cdot 8\cdot y\cdot\cos 60°$

$52=64+y^2-8y, \qquad y^2-8y+12=0$

$(y-2)(y-6)=0 \qquad \therefore y=2$ 또는 $y=6$

그런데 $y>2$이므로 $\qquad y=6$

$\therefore$ □ABCD=△ABC+△ACD=2△ABC

$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot\sin 60°=24\sqrt{3}$

답 $24\sqrt{3}$

0817 $\angle BCD=180°-\angle BAD=120°$이므로 사각형 ABCD의 넓이는

△ABD+△BCD

$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 8\cdot\sin 60°+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{7}\cdot\sin 120°$

$=6\sqrt{3}+\frac{7\sqrt{3}}{2}=\frac{19\sqrt{3}}{2}$

답 $\frac{19\sqrt{3}}{2}$

0818 $\overline{BD}=x$라 하면 피타고라스 정리에 의하여

$x^2=6^2+8^2=100 \qquad \therefore x=10$

△ABD에서 헤론의 공식에 의하여 $\qquad s=\frac{5+9+10}{2}=12$

$\therefore$ △ABD$=\sqrt{12(12-5)(12-9)(12-10)}=6\sqrt{14}$

△BCD$=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24$이므로

□ABCD$=24+6\sqrt{14}$

답 ④

0819 $\overline{AC}=x$라 하면 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$x^2=6^2+(4\sqrt{3})^2-2\cdot 6\cdot 4\sqrt{3}\cdot\cos 30°$

$=12$

$\therefore x=2\sqrt{3}$

$\overline{AC}=\overline{CD}$이고 $\angle ADC=45°$이므로 △ACD는 $\angle ACD=90°$인 직각이등변삼각형이다.

$\therefore$ □ABCD=△ABC+△ACD

$=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\sqrt{3}\cdot\sin 30°+\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}$

$=6\sqrt{3}+6$

답 ③

유형 16 평행사변형의 넓이 본책 124쪽

이웃하는 두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인각의 크기가 θ인 평행사변형의 넓이
➡ $ab\sin\theta$

0820 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{5^2+3^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 3}=-\frac{1}{2}$

$0°<B<180°$이므로 $\qquad B=120°$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\sin 120°=5\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{2}$

답 $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

0821 $\overline{AD}=\overline{BC}=8$이므로

$7\cdot 8\cdot\sin A=28\sqrt{3} \qquad \therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$90°<A<180°$이므로 $\qquad A=120°$

답 $120°$

0822 $a=3\cdot 6\cdot\sin 60°=3\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$ ··· ❶

△ABC에서 코사인법칙에 의하여

$b^2=3^2+6^2-2\cdot 3\cdot 6\cdot\cos 60°=27$

$\therefore b=3\sqrt{3}$ ··· ❷

$\therefore a+b=12\sqrt{3}$ ⋯ ❸

답 $12\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 17 사각형의 넓이; 대각선 이용

본책 125쪽

두 대각선의 길이가 p, q이고 두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ인 사각형의 넓이

➡ $\frac{1}{2}pq\sin\theta$

0823 △BCD에서

$$\overline{BD}=\frac{\overline{CD}}{\tan 30^\circ}=3\sqrt{3}$$

$$\therefore \square ABCD=\frac{1}{2}\cdot5\cdot3\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot5\cdot3\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{45}{4}$$

답 ①

0824 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\ (\because 0^\circ<\theta<180^\circ)$$ ⋯ ❶

$$\therefore \square ABCD=\frac{1}{2}\cdot4\cdot9\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=12\sqrt{2}$$ ⋯ ❷

답 $12\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ □ABCD의 넓이를 구할 수 있다.	50 %

0825 사각형 ABCD의 넓이가 $2\sqrt{2}$이므로

$$\frac{1}{2}ab\sin 45^\circ=2\sqrt{2}$$

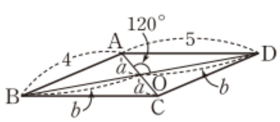
$$\frac{\sqrt{2}}{4}ab=2\sqrt{2}\qquad \therefore ab=8$$

$$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

$$=6^3-3\cdot8\cdot6=72$$

답 ⑤

0826 평행사변형 ABCD의 대각선 AC와 BD의 교점을 O라 하자.



평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{AC}=2a$, $\overline{BD}=2b$라 하면 △ABO에서 코사인법칙에 의하여

$$4^2=a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ$$

$$\therefore 16=a^2+b^2-ab \quad \cdots\cdots ㉠$$

△AOD에서 코사인법칙에 의하여

$$5^2=a^2+b^2-2ab\cos 120^\circ$$

$$\therefore 25=a^2+b^2+ab \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡－㉠을 하면 $\quad 9=2ab\qquad \therefore ab=\frac{9}{2}$

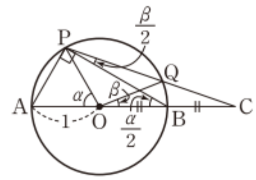
따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot2a\cdot2b\sin 60^\circ=2\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

답 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

0827 전략 $\overline{BP}$를 그어 직각삼각형을 만들고 원주각과 중심각 사이의 관계를 이용한다.



풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BP}$를 그으면 △ABP는 직각삼각형이다.

$\overset{\frown}{AP}$에 대한 중심각의 크기가 α이므로

$$\angle ABP=\frac{\alpha}{2}$$

$\overset{\frown}{BQ}$에 대한 중심각의 크기가 β이므로

$$\angle BPQ=\frac{\beta}{2}$$

△BCP에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CP}}{\sin(\angle CBP)}=\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BPC)}$$

즉 $\dfrac{\overline{CP}}{\sin\left(\pi-\frac{\alpha}{2}\right)}=\dfrac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}$이므로

$$\overline{CP}=\frac{\sin\left(\pi-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

답 ②

0828 전략 △AHB에서 $\cos(\angle HAB)$의 값을 구한다.

풀이 점 H는 △BCD의 무게중심이므로

$$\overline{BH}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

△ABH에서 $\quad \overline{AH}=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

∠BAH$=\theta$라 하면

$$\cos\theta=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\therefore \overline{AP}=\overline{AH}\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{2}{3}$$

$\overline{CQ}=\overline{AP}=\frac{2}{3}$에서 $\overline{AQ}=\frac{1}{3}$이므로 △AHQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{QH}^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\cos\theta$$

$$=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \overline{QH}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

0829 전략 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$는 $\angle POQ=\frac{\pi}{3}$일 때 선분 OQ의 길이임을 이용한다.

풀이 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=a$라 하면 △POQ에서 코사인법칙에 의하여

$$(2\sqrt{7})^2=2^2+a^2-2\cdot2\cdot a\cdot\cos\frac{\pi}{3}$$

$$28=4+a^2-2a,\qquad a^2-2a-24=0$$

$(a+4)(a-6)=0 \qquad \therefore a=6(\because a>0)$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right)=6$ 답 6

0830 전략 선분 CP의 길이의 최댓값과 최솟값을 이용한다.

풀이 점 P가 점 O 또는 점 D의 위치에 있을 때 $\overline{CP}$의 길이가 가장 길고, $\overline{CP}\perp\overline{OD}$일 때 $\overline{CP}$의 길이가 가장 짧다.

이때 삼각형 OCD가 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\le\overline{CP}\le 2,\text{ 즉 } 3\le\overline{CP}^2\le 4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편 △CDA에서 $\overline{CA}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$\overline{AP}=\overline{CP}=x$라 하면 △CPA에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{x^2+x^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot x\cdot x}=1-\frac{4}{x^2}$$

㉠에서 $\frac{1}{4}\le\frac{1}{x^2}\le\frac{1}{3}, \quad -\frac{4}{3}\le-\frac{4}{x^2}\le-1$

$$-\frac{1}{3}\le 1-\frac{4}{x^2}\le 0$$

즉 $-\frac{1}{3}\le\cos\theta\le 0$이므로 $\cos\theta$의 최댓값과 최솟값의 합은

$0+\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$ 답 $-\frac{1}{3}$

0831 전략 사인법칙을 이용하여 두 외접원의 반지름의 길이를 구한다.

풀이 두 정삼각형 ACQ, ABR의 외접원의 반지름의 길이를 각각 R_1, R_2라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 60^\circ}=2R_1,\ \frac{\overline{AB}}{\sin 60^\circ}=2R_2$$

$$\therefore R_1=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3},$$

$$R_2=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

한편 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 8}=\frac{1}{2}$$

이므로 $A=60^\circ$

따라서 $\angle O_1AO_2=30^\circ+60^\circ+30^\circ=120^\circ$이므로 삼각형 O_1AO_2에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{O_1O_2}^2=\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2-2\cdot\frac{5\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{8\sqrt{3}}{3}\cos 120^\circ$$

$$=\frac{25}{3}+\frac{64}{3}+\frac{40}{3}=43$$ 답 ④

0832 전략 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 변의 길이를 θ에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 ㄱ. $\angle BGF=\theta$이므로 $\quad \angle BFG=60^\circ-\theta$

$\therefore \angle BFE=\angle BFG+\angle EFG$

$=(60^\circ-\theta)+30^\circ=90^\circ-\theta$

ㄴ. △EFG에서

$$\overline{FG}=2\overline{EF}\cos 30^\circ=2\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

이므로 △BGF에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{FG}}{\sin 120^\circ}=\frac{\overline{BF}}{\sin\theta}$$

$$\therefore \overline{BF}=2\sqrt{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sin\theta=4\sin\theta$$

ㄷ. △EFB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BE}^2=\overline{BF}^2+\overline{EF}^2-2\overline{BF}\cdot\overline{EF}\cdot\cos(90^\circ-\theta)$

$=(4\sin\theta)^2+2^2-2\cdot 4\sin\theta\cdot 2\cdot\sin\theta$

$=4$

따라서 $\overline{BE}=2$로 항상 일정하다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0833 전략 삼각형의 넓이 공식을 이용하여 육각형의 넓이를 구한다.

풀이 □APQB, □BRSC, □CTUA의 넓이는 각각 c^2, a^2, b^2이고, △ABC, △TCS의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이다.

한편 $\angle BAC=\theta$라 하면 $\angle PAU=180^\circ-\theta$이므로

$$\triangle PAU=\frac{1}{2}\overline{AU}\cdot\overline{AP}\sin(180^\circ-\theta)$$

$$=\frac{1}{2}bc\sin\theta=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{a}{c}=\frac{1}{2}ab$$

또 $\angle QBR=180^\circ-(90^\circ-\theta)=90^\circ+\theta$이므로

$$\triangle QBR=\frac{1}{2}\overline{BQ}\cdot\overline{BR}\cdot\sin(90^\circ+\theta)$$

$$=\frac{1}{2}ac\cos\theta=\frac{1}{2}ac\cdot\frac{b}{c}=\frac{1}{2}ab$$

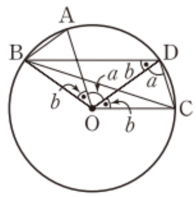
따라서 육각형 PQRSTU의 넓이는

$$c^2+a^2+b^2+4\cdot\frac{1}{2}ab=a^2+b^2+c^2+2ab$$

$$=2(c^2+ab)(\because a^2+b^2=c^2)$$

답 ③

0834 전략 $\overline{OB}$, $\overline{OD}$를 그어 △BOD와 넓이가 같은 삼각형을 찾는다.



풀이 오른쪽 그림과 같이 $\angle ODC=a$, $\angle COD=b$라 하면

$\angle AOD=\angle ODC=a$,

$\angle BDO=\angle COD=b$

$\overline{AB}=\overline{CD}$이므로

$\angle AOB=\angle COD=b$

$\therefore \angle BOD=\angle BDC=a+b$

△BOD와 △BCD는 밑변이 $\overline{BD}$로 같고 높이도 같으므로 넓이가 서로 같다.

따라서 $\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\sin(a+b)=\frac{1}{2}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{BD}\sin(a+b)$이므로

$\overline{CD}\cdot\overline{BD}=9$

$\therefore \overline{AB}\cdot\overline{BD}=\overline{CD}\cdot\overline{BD}=9$ 답 9

0835 전략 헤론의 공식으로 구한 △ABC의 넓이와 반원의 반지름을 이용하여 구한 △ABC의 넓이가 같음을 이용한다.

풀이 △ABC에서 헤론의 공식에 의하여

$$s=\frac{10+12+14}{2}=18$$

△ABC의 넓이를 S라 하면

$$S=\sqrt{18(18-10)(18-12)(18-14)}=24\sqrt{6}$$

반원의 반지름의 길이를 r라 하면

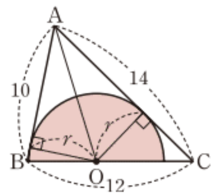
$S=\triangle ABO+\triangle AOC$에서

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot r+\frac{1}{2}\cdot 14\cdot r=24\sqrt{6}$$

$$12r=24\sqrt{6} \qquad \therefore r=2\sqrt{6}$$

따라서 반원의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(2\sqrt{6})^2=12\pi$$



답 ④

0836 전략 $\square ACBD=\triangle ACB+\triangle ADB=\triangle ADC+\triangle DCB$임을 이용한다.

풀이 $\triangle ACB$는 $\angle ACB=90°$인 직각삼각형이므로

$$\overline{BC}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$$

또 $\triangle ADB$에서 $\angle ADB=90°$, $\angle DAB=\angle DBA=45°$이므로

$$\overline{AD}=\overline{BD}=4\cdot\sin 45°=4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \square ACBD&=\triangle ACB+\triangle ADB\\&=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\\&=2\sqrt{3}+4 \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

같은 호에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$$\angle ADC=\angle ABC=30°$$

$\overline{CD}=x$라 하면

$$\begin{aligned}\square ACBD&=\triangle ADC+\triangle DCB\\&=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot x\cdot\sin 30°+\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot x\cdot\sin 60°\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{6}}{2}x \qquad \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}x=2(\sqrt{3}+2)$

$$\therefore x=\frac{4(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\sqrt{2}+\sqrt{6}$$

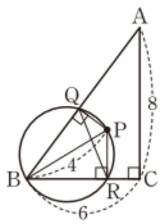
답 $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

0837 전략 두 점 Q, R가 지름이 $\overline{BP}$인 원 위의 점임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BP}$를 지름으로 하는 원을 그리면 $\angle BQP=\angle BRP=90°$이므로 두 점 Q, R는 모두 원 위의 점이다. ➊

따라서 $\triangle BRQ$의 외접원의 지름의 길이가 4이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{QR}}{\sin B}=4 \qquad \therefore \overline{QR}=4\sin B \quad ➋$$



한편 직각삼각형 ABC에서

$$\sin B=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{8}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{4}{5}$$

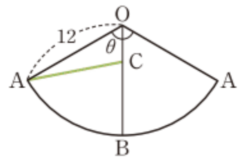
$$\therefore \overline{QR}=4\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{5} \quad ➌$$

답 $\dfrac{16}{5}$

채점 기준	비율
➊ $\triangle BQR$의 외접원을 그릴 수 있다.	30 %
➋ $\overline{QR}$의 길이를 $\sin B$를 이용하여 나타낼 수 있다.	40 %
➌ $\overline{QR}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %

0838 전략 원뿔의 옆면의 전개도에서 최단 거리를 찾는다.

풀이 원뿔의 전개도에서 부채꼴의 호의 길이 l은 원뿔의 밑면의 둘레의 길이와 같으므로



$$l=2\pi\cdot 4=8\pi$$

$\overline{OA}=12$이므로 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면

$$l=12\theta \qquad \therefore \theta=\frac{8\pi}{12}=\frac{2}{3}\pi \quad ➊$$

$\triangle OAC$에서 $\angle AOC=\frac{1}{2}\theta=\frac{\pi}{3}$이고 점 C는 선분 OB를 $1:2$로 내분하므로

$$\overline{OC}=12\cdot\frac{1}{3}=4$$

점 P가 움직인 최단 거리는 선분 AC의 길이와 같으므로 ➋

$\triangle OAC$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=12^2+4^2-2\cdot 12\cdot 4\cdot\cos\frac{\pi}{3}=112$$

$$\therefore \overline{AC}=4\sqrt{7} \quad ➌$$

답 $4\sqrt{7}$

채점 기준	비율
➊ 전개도에서 부채꼴의 중심각의 크기를 구할 수 있다.	20 %
➋ 전개도에서 점 P가 움직인 최단 거리를 알 수 있다.	30 %
➌ 점 P가 움직인 최단 거리를 구할 수 있다.	50 %

0839 전략 $\triangle ABP$와 $\triangle ACQ$에서 l^2, m^2을 각각 b, c, n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\triangle ABC$에서

$$\cos B=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{c}{3n},\ \cos C=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{b}{3n}$$

$\triangle ABP$에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}l^2&=n^2+c^2-2n\cdot c\cdot\cos B\\&=n^2+c^2-2nc\cdot\frac{c}{3n}\\&=n^2+c^2-\frac{2}{3}c^2=n^2+\frac{1}{3}c^2 \quad ➊\end{aligned}$$

$\triangle ACQ$에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}m^2&=n^2+b^2-2n\cdot b\cdot\cos C\\&=n^2+b^2-2nb\cdot\frac{b}{3n}\\&=n^2+b^2-\frac{2}{3}b^2=n^2+\frac{1}{3}b^2 \quad ➋\end{aligned}$$

$\triangle ABC$가 직각삼각형이므로

$$b^2+c^2=(3n)^2$$

$$\begin{aligned}\therefore l^2+m^2&=\left(n^2+\frac{1}{3}c^2\right)+\left(n^2+\frac{1}{3}b^2\right)\\&=2n^2+\frac{1}{3}(b^2+c^2)\\&=2n^2+\frac{1}{3}\cdot(3n)^2=5n^2\end{aligned}$$

$$\therefore k=5 \quad ➌$$

답 5

채점 기준	비율
❶ l^2을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ m^2을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	40 %

0840 전략 △ABD에서 코사인법칙을 이용하여 $\cos B$의 값을 구한 후 △ABC에서 사인법칙을 이용한다.

풀이 $\overline{AD}=2k$라 하면 조건 (가)에 의하여 $\overline{AB}=\overline{BD}=\sqrt{3}k$이므로 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{(\sqrt{3}k)^2+(\sqrt{3}k)^2-(2k)^2}{2\cdot\sqrt{3}k\cdot\sqrt{3}k}=\frac{1}{3} \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \cdots ❷$$

조건 (나)에 의하여 $\overline{AC}=4k$이므로 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여 $\frac{4k}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}k}{\sin C}$

$$\therefore \sin C=\sqrt{3}k\cdot\frac{1}{4k}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{6} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{\sqrt{6}}{6}$

채점 기준	비율
❶ $\cos B$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sin B$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\sin C$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0841 전략 주어진 식을 삼각형의 변의 길이로 나타낸다.

풀이 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 a, b, c라 하고, 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R},$$

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}=\frac{a}{2R}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) \quad \cdots ❶$$

$$b+c=\frac{a^2b+bc^2-b^3+a^2c+b^2c-c^3}{2bc}$$

$$b^3+b^2c+(c^2-a^2)b+c(c^2-a^2)=0$$

$$b^2(b+c)+(c^2-a^2)(b+c)=0$$

$$\therefore (b^2+c^2-a^2)(b+c)=0$$

이때 $b+c>0$이므로

$$b^2+c^2-a^2=0 \qquad \therefore a^2=b^2+c^2 \quad \cdots ❷$$

즉 삼각형 ABC는 $A=90°$인 직각삼각형이므로

$$\frac{1}{2}bc=4 \qquad \therefore bc=8$$

따라서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}a+b+c&=\sqrt{b^2+c^2}+b+c\\&\ge\sqrt{2bc}+2\sqrt{bc}\ (\text{단, 등호는 } b=c\text{일 때 성립})\\&=4(\sqrt{2}+1)\end{aligned}$$

따라서 둘레의 길이의 최솟값은 $4(\sqrt{2}+1)$ ⋯ ❸

답 $4(\sqrt{2}+1)$

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 삼각형의 변의 길이로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a, b, c 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❸ 둘레의 길이의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

0842 전략 원기둥 모양의 용기에서 물이 담긴 부분의 밑면의 넓이를 구한다.

풀이 원뿔 모양의 용기에 담긴 물의 부피는

$$\frac{1}{3}\pi\cdot3^2\cdot3-\frac{1}{3}\pi\cdot2^2\cdot2=\frac{19}{3}\pi \quad \cdots ❶$$

원기둥 모양의 용기에서 물이 담긴 밑면의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{11}{6}\pi+\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{11}{3}\pi+1$$

즉 $\left(\frac{11}{3}\pi+1\right)h=\frac{19}{3}\pi$이므로

$$h=\frac{\frac{19}{3}\pi}{\frac{11}{3}\pi+1}=\frac{19\pi}{11\pi+3} \quad \cdots ❷$$

따라서 $a=11$, $b=3$, $c=19$이므로

$$a+b+c=33 \quad \cdots ❸$$

답 33

채점 기준	비율
❶ 물의 부피를 구할 수 있다.	30 %
❷ h의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

참고 원뿔 모양의 용기의 빈 부분은 밑면의 반지름의 길이가 2, 높이가 2인 원뿔 모양이다.

Ⅲ. 수열

08 등차수열과 등비수열

0843 $a_n=8n-7$에 $n=1, 2, 3, 4, 5$를 차례대로 대입하면
$a_1=8\cdot1-7=1$, $a_2=8\cdot2-7=9$, $a_3=8\cdot3-7=17$,
$a_4=8\cdot4-7=25$, $a_5=8\cdot5-7=33$
답 1, 9, 17, 25, 33

0844 $a_n=\dfrac{n+5}{2n}$에 $n=1, 2, 3, 4, 5$를 차례대로 대입하면
$a_1=\dfrac{1+5}{2\cdot1}=3$, $a_2=\dfrac{2+5}{2\cdot2}=\dfrac{7}{4}$, $a_3=\dfrac{3+5}{2\cdot3}=\dfrac{4}{3}$,
$a_4=\dfrac{4+5}{2\cdot4}=\dfrac{9}{8}$, $a_5=\dfrac{5+5}{2\cdot5}=1$
답 $3, \dfrac{7}{4}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{9}{8}, 1$

0845 답 $a_n=(-1)^n\cdot n$

0846 답 $a_n=\dfrac{n}{n+2}$

0847 답 $a_n=n(n+1)$

0848 $4-1=3$에서 공차가 3이므로 주어진 수열은
$1, 4, \boxed{7}, \boxed{10}, 13, \cdots$
답 7, 10

0849 $14-16=-2$에서 공차가 -2이므로 주어진 수열은
$20, \boxed{18}, 16, 14, \boxed{12}, \cdots$
답 18, 12

0850 $a_n=15+(n-1)\cdot(-3)$
$=-3n+18$
답 $a_n=-3n+18$

0851 첫째항이 2, 공차가 -4이므로
$a_n=2+(n-1)\cdot(-4)=-4n+6$
답 $a_n=-4n+6$

0852 (1) 첫째항이 72, 공차가 -6이므로
$a_n=72+(n-1)\cdot(-6)=-6n+78$
$\therefore a_7=-6\cdot7+78=36$
(2) -18을 제 n 항이라 하면
$-18=-6n+78$, $6n=96$ $\therefore n=16$
따라서 -18은 제 16 항이다.
답 (1) 36 (2) 제 16 항

0853 공차를 d라 하면 $a_8=35$에서
$7+7d=35$, $7d=28$
$\therefore d=4$
답 4

0854 공차를 d라 하면 $a_{10}=-5$에서
$13+9d=-5$, $9d=-18$
$\therefore d=-2$
답 -2

0855 $x=\dfrac{3+(-5)}{2}=-1$
답 -1

0856 $\dfrac{12\{(-2)+40\}}{2}=228$
답 228

0857 $\dfrac{20\{2\cdot11+(20-1)\cdot(-2)\}}{2}=-160$
답 -160

0858 3, 12, 21, $\cdots$, 93은 첫째항이 3, 공차가 9인 등차수열이므로 일반항 a_n은
$a_n=3+(n-1)\cdot9=9n-6$
93을 제 n 항이라 하면
$93=9n-6$, $9n=99$ $\therefore n=11$
$\therefore 3+12+21+\cdots+93=\dfrac{11(3+93)}{2}=528$
답 528

0859 64, 59, 54, $\cdots$, -16은 첫째항이 64, 공차가 -5인 등차수열이므로 일반항 a_n은
$a_n=64+(n-1)\cdot(-5)=-5n+69$
-16을 제 n 항이라 하면
$-16=-5n+69$, $5n=85$ $\therefore n=17$
$\therefore 64+59+54+\cdots+(-16)=\dfrac{17\{64+(-16)\}}{2}$
$=408$
답 408

0860 $a_{10}=S_{10}-S_9$
$=(3\cdot10^2+10)-(3\cdot9^2+9)=58$
답 58

0861 (i) $n=1$일 때,
$a_1=S_1=2\cdot1^2+3\cdot1=5$
(ii) $n\geq2$일 때,
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=2n^2+3n-\{2(n-1)^2+3(n-1)\}$
$=2n^2+3n-(2n^2-n-1)$
$=4n+1$ $\cdots\cdots$ ㉠
이때 $a_1=5$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로
$a_n=4n+1$
답 $a_n=4n+1$

0862 (i) $n=1$일 때,
$a_1=S_1=1^2-3\cdot1+1=-1$
(ii) $n\geq2$일 때,
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(n^2-3n+1)-\{(n-1)^2-3(n-1)+1\}$
$=(n^2-3n+1)-(n^2-5n+5)$
$=2n-4$
(i), (ii)에서 구하는 수열의 일반항은
$a_1=-1$, $a_n=2n-4\ (n\geq2)$
답 $a_1=-1$, $a_n=2n-4\ (n\geq2)$

0863 $\frac{4}{2}=2$에서 공비가 2이므로 주어진 수열은

$2,\ 4,\ \boxed{8},\ \boxed{16},\ 32,\ \cdots$ 답 $8,\ 16$

0864 $-\frac{1}{27}\div\frac{1}{9}=-\frac{1}{3}$에서 공비가 $-\frac{1}{3}$이므로 주어진 수열은

$1,\ \boxed{-\frac{1}{3}},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{27},\ \boxed{\frac{1}{81}},\ \cdots$ 답 $-\frac{1}{3},\ \frac{1}{81}$

0865 답 $a_n=5^{n-1}$

0866 첫째항이 4, 공비가 $\frac{1}{2}$이므로

$a_n=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 답 $a_n=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

0867 첫째항이 3, 공비가 -1이므로

$a_n=3\cdot(-1)^{n-1}$ 답 $a_n=3\cdot(-1)^{n-1}$

0868 (1) 첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공비가 $\sqrt{3}$이므로

$a_n=\frac{1}{3}\cdot(\sqrt{3})^{n-1}=(\sqrt{3})^{-2}\cdot(\sqrt{3})^{n-1}=(\sqrt{3})^{n-3}$

$\therefore a_5=(\sqrt{3})^{5-3}=3$

(2) 81이 제 n 항이라 하면

$81=(\sqrt{3})^{n-3},\quad (\sqrt{3})^8=(\sqrt{3})^{n-3}$

$n-3=8\quad \therefore n=11$

따라서 81은 제 11 항이다. 답 (1) 3 (2) 제 11 항

0869 공비를 r라 하면 $a_4=1$에서

$8\cdot r^3=1,\quad r^3=\frac{1}{8}\quad \therefore r=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0870 공비를 r라 하면 $a_5=80$에서

$5\cdot r^4=80,\quad r^4=16\quad \therefore r=\pm2$ 답 -2 또는 2

0871 $x^2=3\cdot12=36\quad \therefore x=\pm6$ 답 -6 또는 6

0872 $\dfrac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}=\frac{255}{128}$ 답 $\frac{255}{128}$

0873 첫째항이 1, 공비가 -2인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이므로

$\dfrac{1\cdot\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\frac{1}{3}\{1-(-2)^n\}$ 답 $\frac{1}{3}\{1-(-2)^n\}$

0874 첫째항이 0.1, 공비가 0.1인 등비수열의 제 n 항을 0.00000001이라 하면

$0.1\times0.1^{n-1}=0.00000001,\quad 0.1^n=0.1^8$

따라서 $n=8$이므로

$0.1+0.01+0.001+\cdots+0.00000001$

$=\dfrac{0.1\times(1-0.1^8)}{1-0.1}=\frac{1}{9}(1-0.1^8)$ 답 $\frac{1}{9}(1-0.1^8)$

0875 (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=3^1-1=2$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^n-1)-(3^{n-1}-1)$

$=3^{n-1}(3-1)=2\cdot3^{n-1}$ …… ㉠

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2\cdot3^{n-1}$ 답 $a_n=2\cdot3^{n-1}$

0876 (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2^2-5=-1$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^{n+1}-5)-(2^n-5)$

$=2^n(2-1)=2^n$

(i), (ii)에서 구하는 수열의 일반항은

$a_1=-1,\ a_n=2^n\ (n\geq2)$ 답 $a_1=-1,\ a_n=2^n\ (n\geq2)$

유형 01 등차수열의 공차

본책 134쪽

① 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 d이면

➡ $d=a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=\cdots$

② 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_m=p$이면

➡ $a_1+(m-1)d=p$

0877 공차를 d라 하면 제 5 항이 $13+9\sqrt{2}$이므로

$(1+\sqrt{2})+4d=13+9\sqrt{2}$

$4d=12+8\sqrt{2}$

$\therefore d=3+2\sqrt{2}$ 답 ④

0878 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_{100}-a_{99}=d$

$\therefore a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{99}-a_{100}$

$=-\{(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{100}-a_{99})\}$

$=-50d$

즉 $-50d=250$이므로 $\quad d=-5$ 답 -5

0879 등차수열 $\{a_{2n}\}$은 $a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots$이고 공차가 8이므로

$a_4-a_2=8$

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$(a+3d)-(a+d)=8$

$2d=8\quad \therefore d=4$

등차수열 $\{a_{3n+1}\}$은 $a_4,\ a_7,\ a_{10},\ \cdots$이므로 구하는 공차는

$a_7-a_4=(a+6d)-(a+3d)$

$=3d=3\cdot4=12$ 답 12

0880 $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{12}}+\sqrt{a_{13}}}$

$=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{a_3-a_2}+\cdots+\frac{\sqrt{a_{13}}-\sqrt{a_{12}}}{a_{13}-a_{12}}$

이때 수열 $\{a_n\}$은 공차가 2인 등차수열이므로

$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_{13}-a_{12}=2$

$\therefore$ (주어진 식) $=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{2}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{2}+\cdots+\frac{\sqrt{a_{13}}-\sqrt{a_{12}}}{2}$

$=\frac{\sqrt{a_{13}}-\sqrt{a_1}}{2}$

$a_{13}=1+12\cdot 2=25$이므로 주어진 식의 값은

$\frac{\sqrt{25}-1}{2}=2$ 답 ④

유형 02 등차수열의 일반항 본책 134쪽

등차수열 $\{a_n\}$에서 일반항 구하기

(i) 첫째항을 a, 공차를 d라 하고 주어진 조건을 이용하여 방정식을 세운다.

(ii) (i)의 방정식을 연립하여 풀어 a, d의 값을 구한다.

(iii) $a_n=a+(n-1)d$에 a, d의 값을 대입하여 일반항을 구한다.

0881 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3+a_{10}=(a+2d)+(a+9d)$

$=2a+11d=63$ ...... ㉠

$a_6+a_{15}=(a+5d)+(a+14d)$

$=2a+19d=103$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $d=5$

따라서 $a_n=4+(n-1)\cdot 5=5n-1$이므로

$a_{27}=5\cdot 27-1=134$ 답 ⑤

0882 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+d=\log_2 9$ ...... ㉠

$a_5=a+4d=\log_2 243$ ...... ㉡

㉡−㉠을 하면 $3d=\log_2 243-\log_2 9=\log_2 27$

$\therefore d=\frac{1}{3}\log_2 27=\log_2 3$

이를 ㉠에 대입하면 $a=\log_2 9-\log_2 3=\log_2 3$

$\therefore a_n=\log_2 3+(n-1)\log_2 3=n\log_2 3$ 답 $a_n=n\log_2 3$

0883 왼쪽 창가의 좌석 번호를 뒤에서부터 차례대로 나열한 수열을 $\{a_n\}$이라 하면 $\{a_n\}$은

$89, 85, 81, \cdots, 5, 1$

즉 첫째항이 89, 공차가 -4인 등차수열이므로

$a_n=89+(n-1)\cdot(-4)=-4n+93$

따라서 구하는 좌석 번호는

$a_7=-4\cdot 7+93=65$ 답 65

0884 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 $a_2+a_7=0$이므로 $(a+d)+(a+6d)=0$

$\therefore 2a+7d=0$ ...... ㉠

또 $a_4=-2$이므로 $a+3d=-2$ ...... ㉡ ··· ❶

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-14$, $d=4$ ··· ❷

$\therefore a_n=-14+(n-1)\cdot 4=4n-18$ ··· ❸

답 $a_n=4n-18$

채점 기준	비율
❶ a, d에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a, d의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a_n을 구할 수 있다.	30 %

0885 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$(a_2+a_4):(a_3+a_7)=1:5$에서

$\{(a_1+d)+(a_1+3d)\}:\{(a_1+2d)+(a_1+6d)\}=1:5$

$(2a_1+4d):(2a_1+8d)=1:5$

$5(2a_1+4d)=2a_1+8d$, $8a_1+12d=0$

$\therefore d=-\frac{2}{3}a_1$

$\therefore a_{16}=a_1+15d=a_1+15\cdot\left(-\frac{2}{3}a_1\right)=-9a_1$ 답 ③

0886 첫 번째 시행에서 만들어지는 수열은

$1, 3, 5, 7, \cdots$

이므로 공차가 2인 등차수열이다.

두 번째 시행에서 만들어지는 수열은

$1, 5, 9, 13, \cdots$

이므로 공차가 $4=2^2$인 등차수열이다.

세 번째 시행에서 만들어지는 수열은

$1, 9, 17, 25, \cdots$

이므로 공차가 $8=2^3$인 등차수열이다.

따라서 7번째 시행에서 만들어지는 수열은 첫째항이 1, 공차가 $2^7=128$인 등차수열이므로 제 n 항은

$1+(n-1)\cdot 128=128n-127$

따라서 제 3 항은

$128\cdot 3-127=257$ 답 257

유형 03 조건을 만족시키는 등차수열의 항 본책 135쪽

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에서

① 처음으로 양수가 되는 항

➡ $a+(n-1)d>0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

② 처음으로 음수가 되는 항

➡ $a+(n-1)d<0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

③ $a_k=p$를 만족시키는 항

➡ $a+(k-1)d=p$를 만족시키는 자연수 k의 값을 구한다.

0887 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_7=a+6d=29$ ...... ㉠

$a_{10}=a+9d=20$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=47$, $d=-3$

$\therefore a_n=47+(n-1)\cdot(-3)=-3n+50$

$-3n+50<0$에서 $\quad 3n>50$

$\therefore n>\dfrac{50}{3}=16.\cdots$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제 17 항이다. 답 ③

0888 $a_n=1005+(n-1)\cdot(-4)=-4n+1009$

$-4n+1009<10$에서 $\quad 4n>999$

$\therefore n>249.75$

따라서 처음으로 10보다 작아지는 항은 제 250 항이다.

답 제 250 항

0889 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_9=3a_6$에서 $\quad a+8d=3(a+5d)$

$\therefore 2a+7d=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$a_4+a_7=-4$에서 $\quad (a+3d)+(a+6d)=-4$

$\therefore 2a+9d=-4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=7,\ d=-2$

$\therefore a_n=7+(n-1)\cdot(-2)=-2n+9$

-31을 제 n 항이라 하면

$-2n+9=-31,\quad 2n=40$

$\therefore n=20$ 답 ②

0890 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 6, 공차가 -2인 등차수열이므로

$a_n=6+(n-1)\cdot(-2)=-2n+8$

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 8, 공차가 -1인 등차수열이므로

$b_n=8+(n-1)\cdot(-1)=-n+9$

$a_k\le 3b_k$에서 $\quad -2k+8\le 3(-k+9)$

$-2k+8\le -3k+27 \quad \therefore k\le 19$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, $\cdots$, 19의 19개이다. 답 ⑤

0891 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_{23}=a+22\cdot 4=23 \quad \therefore a=-65$

$\therefore a_n=-65+(n-1)\cdot 4=4n-69$ $\cdots$ ❶

$4n-69=0$에서 $\quad n=17.25$

이때 $a_{17}=4\cdot 17-69=-1$, $a_{18}=4\cdot 18-69=3$이므로

$|a_{17}|<|a_{18}|$

따라서 구하는 자연수 n의 값은 17이다. $\cdots$ ❷

답 17

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\lvert a_n\rvert$의 값이 최소가 되는 n의 값을 구할 수 있다.	50 %

0892 $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \cdots\}$,

$B=\{4, 7, 10, 13, 16, \cdots\}$

이므로 $\quad A\cap B=\{4, 10, 16, \cdots\}$

따라서 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 4, 공차가 6인 등차수열이므로

$c_n=4+(n-1)\cdot 6=6n-2$

$6n-2\ge 100$에서 $\quad 6n\ge 102 \quad \therefore n\ge 17$

따라서 구하는 n의 값은 17이다. 답 17

유형 04 두 수 사이에 수를 넣어서 만든 등차수열
본책 136쪽

두 수 a, b 사이에 n개의 수를 넣어서 등차수열을 만들면

➡ a는 첫째항이고, b는 제 $(n+2)$ 항이다.

➡ $b=a+(n+1)d$ (단, d는 공차)

0893 주어진 등차수열의 공차를 d라 하면 첫째항이 1, 제 21 항이 101이므로

$1+20d=101,\quad 20d=100 \quad \therefore d=5$

이때 a_8은 이 수열의 제 9 항이므로

$1+8\cdot 5=41$ 답 41

0894 첫째항이 -3, 공차가 $\dfrac{3}{2}$인 등차수열의 제 $(n+2)$ 항이 15이므로

$-3+(n+1)\cdot\dfrac{3}{2}=15$

$\dfrac{3}{2}(n+1)=18,\quad n+1=12 \quad \therefore n=11$ 답 11

0895 주어진 등차수열의 공차를 d라 하자.

수열 4, a_1, a_2, $\cdots$, a_m, 16에서 16은 제$(m+2)$항이므로

$4+(m+1)d=16 \quad \therefore d=\dfrac{12}{m+1}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 수열 16, b_1, b_2, $\cdots$, b_n, 40에서 16을 첫째항으로 생각하면 40은 제 $(n+2)$ 항이므로

$16+(n+1)d=40 \quad \therefore d=\dfrac{24}{n+1}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{12}{m+1}=\dfrac{24}{n+1}$이므로 $\quad n+1=2(m+1)$

$\therefore n=2m+1$ 답 ②

유형 05 등차중항
본책 136쪽

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

➡ $b=\dfrac{a+c}{2}$, 즉 $2b=a+c$

0896 세 수 $2a$, a^2+2a, 4가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(a^2+2a)=2a+4,\quad a^2+a-2=0$

$(a+2)(a-1)=0 \quad \therefore a=-2$ 또는 $a=1$

따라서 모든 a의 값의 합은 -1이다. 답 ②

참고 $a=-2$일 때, 주어진 세 수는 -4, 0, 4이므로 공차가 4인 등차수열을 이루고, $a=1$일 때, 주어진 세 수는 2, 3, 4이므로 공차가 1인 등차수열을 이룬다.

0897 $P(x)=ax^2-x+3$이라 하면 $P(x)$를 $x+1$, $x-2$, $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 각각

$P(-1)=a+1+3=a+4$

$P(2)=4a-2+3=4a+1$

$P(3)=9a-3+3=9a$

즉 세 수 $a+4$, $4a+1$, $9a$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(4a+1)=(a+4)+9a,\quad 2a=-2$

$\therefore a=-1$ 답 -1

0898 네 개의 수 $\log_3 4$, a, $\log_3 36$, b가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$a=\frac{\log_3 4+\log_3 36}{2}=\frac{\log_3 144}{2}=\frac{2\log_3 12}{2}=\log_3 12$$

$2\log_3 36=a+b$에서 $2\log_3 36=\log_3 12+b$

$\therefore b=2\log_3 36-\log_3 12=\log_3 108$ ⋯ ❶

또 다섯 개의 수 10, c, 2, d, -6이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$c=\frac{10+2}{2}=6,\ d=\frac{2+(-6)}{2}=-2$$ ⋯ ❷

$$\therefore a-b-c+d=\log_3 12-\log_3 108-6-2$$
$$=\log_3\frac{1}{9}-8=-2-8=-10$$ ⋯ ❸

답 -10

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ c, d의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a-b-c+d$의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $a-b=\log_3 4-\log_3 36=\log_3\frac{1}{9}=-2$,

$c-d=10-2=8$

$$\therefore a-b-c+d=a-b-(c-d)$$
$$=-2-8=-10$$

0899 α, β가 이차방정식 $x^2-4x-8=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-8$

이때 m은 α, β의 등차중항이므로 $m=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{4}{2}=2$

또 n은 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$의 등차중항이므로

$$n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}=\frac{4}{2\cdot(-8)}=-\frac{1}{4}$$

$\therefore mn=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

0900 세 수 a, b, 14가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$b=\frac{a+14}{2}$$

세 수 a, 6, e가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a+e=2\cdot 6$ $\therefore e=12-a$

세 수 e, 0, f가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$f=-e=a-12$

세 수 14, d, f가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$d=\frac{14+f}{2}=\frac{a+2}{2}$$

$$\therefore a+b-d-f=a+\frac{a+14}{2}-\frac{a+2}{2}-(a-12)$$
$$=6+12=18$$

답 ④

유형 06 등차수열을 이루는 수 본책 137쪽

등차수열을 이루는
- 세 수는 ➡ $a-d$, a, $a+d$
- 네 수는 ➡ $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$
- 다섯 수는 ➡ $a-2d$, $a-d$, a, $a+d$, $a+2d$

로 놓고 식을 세운다.

0901 세 수를 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면

$(a-d)+a+(a+d)=21$ ⋯⋯ ㉠

$(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=165$ ⋯⋯ ㉡

㉠에서 $3a=21$ $\therefore a=7$

$a=7$을 ㉡에 대입하면

$(7-d)^2+7^2+(7+d)^2=165$

$2d^2+147=165$, $d^2=9$ $\therefore d=\pm 3$

따라서 세 수는 4, 7, 10이므로 세 수의 곱은

$4\cdot 7\cdot 10=280$ 답 280

0902 삼차방정식의 세 실근을 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=15$

$3a=15$ $\therefore a=5$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 5이므로 방정식에 $x=5$를 대입하면

$5^3-15\cdot 5^2+5k-105=0$, $5k=355$

$\therefore k=71$ 답 ③

0903 네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$로 놓으면

$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=12$ ⋯ ㉠

$(a-3d)(a+3d)=-135$ ⋯ ㉡ ⋯ ❶

㉠에서 $4a=12$ $\therefore a=3$

$a=3$을 ㉡에 대입하면

$(3-3d)(3+3d)=-135$

$9-9d^2=-135$, $9d^2=144$, $d^2=16$

$\therefore d=\pm 4$ ⋯ ❷

따라서 네 수는 -9, -1, 7, 15이므로 가장 큰 수는 15이다. ⋯ ❸

답 15

채점 기준	비율
❶ a, d에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a, d의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 네 수 중 가장 큰 수를 구할 수 있다.	20 %

0904 직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 모든 모서리의 길이의 합이 84이므로

$4\{(a-d)+a+(a+d)\}=84$, $3a=21$

$\therefore a=7$

또 겉넓이가 244이므로

$2\{a(a-d)+(a+d)(a-d)+a(a+d)\}=244$

$3a^2-d^2=122$

$a=7$을 앞의 식에 대입하면 $147-d^2=122$

$d^2=25$ $\therefore d=\pm 5$

따라서 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이는 각각 2, 7, 12 또는 12, 7, 2이므로 구하는 부피는

$2\cdot 7\cdot 12=168$ 답 168

0905 갑, 을, 병, 정, 무, 기, 경의 몫을 차례대로

$a+3d,\ a+2d,\ a+d,\ a,\ a-d,\ a-2d,\ a-3d$

로 놓으면

$(a+3d)+(a+2d)=100$, 즉 $2a+5d=100$ ⋯⋯ ㉠

$(a-d)+(a-2d)+(a-3d)=96$,

즉 $a-2d=32$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=40,\ d=4$

따라서 병의 몫은

$a+d=40+4=44$(냥) 답 44냥

유형 07~08 등차수열의 합 본책 137, 138쪽

첫째항이 a, 제 n 항이 l, 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 할 때

① 첫째항과 제 n 항이 주어지면 ➡ $S_n=\dfrac{n(a+l)}{2}$

② 첫째항과 공차가 주어지면 ➡ $S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

0906 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+d=4$ ⋯⋯ ㉠

$a_5=a+4d=22$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ d=6$

따라서 첫째항부터 제 20 항까지의 합은

$\dfrac{20\{2\cdot(-2)+(20-1)\cdot 6\}}{2}=1100$ 답 ④

0907 $a_1=3\cdot 1-6=-3$, $a_9=3\cdot 9-6=21$이므로 첫째항부터 제 9 항까지의 합은

$\dfrac{9(-3+21)}{2}=81$ 답 81

0908 n일째 공부 시간을 a_n이라 하면

$a_n=1+\dfrac{1}{4}(n-1)=\dfrac{1}{4}n+\dfrac{3}{4}$

공부 시간이 3시간 30분, 즉 $\dfrac{7}{2}$시간인 날은

$\dfrac{1}{4}n+\dfrac{3}{4}=\dfrac{7}{2},\quad \dfrac{1}{4}n=\dfrac{11}{4}\quad \therefore n=11$

따라서 공부한 시간의 총합은

$\dfrac{11\cdot\left(1+\dfrac{7}{2}\right)}{2}=\dfrac{99}{4}$(시간) 답 $\dfrac{99}{4}$시간

0909 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d, d'이라 하면

$a_1+b_1=4,\ d+d'=2$

$\therefore (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15})+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{15})$

$=\dfrac{15(2a_1+14d)}{2}+\dfrac{15(2b_1+14d')}{2}$

$=\dfrac{15\{2(a_1+b_1)+14(d+d')\}}{2}$

$=\dfrac{15(2\cdot 4+14\cdot 2)}{2}=270$ 답 ④

다른 풀이 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 4, 공차가 2인 등차수열이므로

(주어진 식)$=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_{15}+b_{15})$

$=\dfrac{15\{2\cdot 4+(15-1)\cdot 2\}}{2}=270$

0910 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10}=50+9d=23,\quad 9d=-27\quad \therefore d=-3$

$\therefore a_n=50+(n-1)\cdot(-3)=-3n+53$

$a_n<0$에서 $-3n+53<0$

$\therefore n>\dfrac{53}{3}=17.\cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제 17 항까지 양수이고, 제 18 항부터 음수이다.

$a_{17}=2,\ a_{18}=-1,\ a_{30}=-37$이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{30}|$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{17})-(a_{18}+a_{19}+a_{20}+\cdots+a_{30})$

$=\dfrac{17(50+2)}{2}-\dfrac{13\{-1+(-37)\}}{2}$

$=442+247=689$ 답 ⑤

0911 첫째항이 50, 제 n 항이 -10인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 220이므로

$\dfrac{n\{50+(-10)\}}{2}=220,\quad 20n=220$

$\therefore n=11$

즉 $a_{11}=-10$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$50+10d=-10,\quad 10d=-60$

$\therefore d=-6$ 답 -6

0912 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 -40, 공차가 6이므로

$S_n=\dfrac{n\{2\cdot(-40)+(n-1)\cdot 6\}}{2}=3n^2-43n$ ⋯ ❶

$S_n>0$에서 $3n^2-43n>0,\quad n(3n-43)>0$

$\therefore n>\dfrac{43}{3}=14.\cdots$ ⋯ ❷

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 15이다. ⋯ ❸

답 15

채점 기준	비율
❶ S_n을 구할 수 있다.	50%
❷ n의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❸ n의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

0913 $S_{10}+T_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}+\frac{10(b_1+b_{10})}{2}$
$=5(a_1+a_{10})+5(b_1+b_{10})$
$=5\{(a_1+b_1)+(a_{10}+b_{10})\}$
$=5\{(a_1+b_1)+42\}$
즉 $5\{(a_1+b_1)+42\}=160$이므로
$(a_1+b_1)+42=32$ $\quad\therefore a_1+b_1=-10$ 답 ①

유형 09 두 수 사이에 수를 넣어서 만든 등차수열의 합 본책 138쪽

두 수 a, b 사이에 n개의 수를 넣어서 만든 등차수열의 합을 S라 하면
➡ S는 첫째항이 a, 끝항이 b, 항수가 $n+2$인 등차수열의 합이다.
➡ $S=\frac{(n+2)(a+b)}{2}$

0914 첫째항이 4, 끝항이 56, 항수가 $n+2$인 등차수열의 합이 660이므로
$\frac{(n+2)(4+56)}{2}=660$, $\quad n+2=22$
$\therefore n=20$ 답 ③

0915 첫째항이 -3, 끝항이 33, 항수가 30인 등차수열의 합은
$\frac{30(-3+33)}{2}=450$
따라서 $-3+x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{28}+33=450$이므로
$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{28}=420$ 답 420

0916 $10+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+(-24)=10-91-24$
$=-105$
즉 첫째항이 10, 끝항이 -24, 항수가 $n+2$인 등차수열의 합이 -105이므로
$\frac{(n+2)(10-24)}{2}=-105$, $\quad n+2=15$
$\therefore n=13$ 답 13

유형 10 부분의 합이 주어진 등차수열 본책 139쪽

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면
$\begin{cases} S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2} \\ S_{2n}=\frac{2n\{2a+(2n-1)d\}}{2} \end{cases}$
➡ 두 식을 연립하여 a, d의 값을 구한다.

0917 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면
$S_{10}=\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=140$
$\therefore 2a+9d=28$ ⋯⋯ ㉠
$S_{20}=\frac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}=480$
$\therefore 2a+19d=48$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=5$, $d=2$
$\therefore S_{30}=\frac{30\{2\cdot5+(30-1)\cdot2\}}{2}=1020$ 답 ④

0918 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$S_5=\frac{5\{2a+(5-1)d\}}{2}=160$
$\therefore a+2d=32$ ⋯⋯ ㉠
$S_{15}=\frac{15\{2a+(15-1)d\}}{2}=630$
$\therefore a+7d=42$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=28$, $d=2$
$\therefore a_6+a_7+a_8+\cdots+a_{40}=S_{40}-S_5$
$=\frac{40\{2\cdot28+(40-1)\cdot2\}}{2}-160$
$=2680-160=2520$ 답 ③

0919 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1, 공차가 $\frac{1}{4}$이므로
$S_5=\frac{5\left\{2\cdot1+(5-1)\cdot\frac{1}{4}\right\}}{2}=\frac{15}{2}$
$S_{n+3}=\frac{(n+3)\left\{2\cdot1+(n+3-1)\cdot\frac{1}{4}\right\}}{2}=\frac{(n+3)(n+10)}{8}$
$S_{2n}=\frac{2n\left\{2\cdot1+(2n-1)\cdot\frac{1}{4}\right\}}{2}=\frac{n(2n+7)}{4}$
이때 S_5, S_{n+3}, S_{2n}이 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2S_{n+3}=S_5+S_{2n}$
$2\cdot\frac{(n+3)(n+10)}{8}=\frac{15}{2}+\frac{n(2n+7)}{4}$
$n^2+13n+30=30+2n^2+7n$
$n^2-6n=0$, $\quad n(n-6)=0$
$\therefore n=6$ ($\because n$은 자연수) 답 ②

유형 11 등차수열의 합의 최대·최소 본책 139쪽

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때
① $a_k>0$, $a_{k+1}<0$
➡ 제$(k+1)$항부터 음수 ➡ S_n의 최댓값: S_k
② $a_k<0$, $a_{k+1}>0$
➡ 제$(k+1)$항부터 양수 ➡ S_n의 최솟값: S_k

0920 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_5=a+4d=8$ ⋯⋯ ㉠
$a_{13}=a+12d=-16$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=20$, $d=-3$
$\therefore a_n=20+(n-1)\cdot(-3)=-3n+23$
$-3n+23<0$에서 $\quad n>\frac{23}{3}=7.\cdots$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제 8 항부터 음수이므로 첫째항부터 제 7 항까지의 합이 최대이다.
이때 $a_7=-3\cdot7+23=2$이므로 구하는 최댓값은

$$S_7=\frac{7(20+2)}{2}=77$$

답 77

0921 $a_n\geq0$에서 $100-n\log_2 5\geq0$

$$\therefore n\leq\frac{100}{\log_2 5}=\frac{100}{\frac{\log 5}{\log 2}}=\frac{100\log 2}{1-\log 2}=\frac{100\times0.3}{1-0.3}$$

$$=\frac{30}{0.7}=42.\cdots$$

따라서 첫째항부터 제 42 항까지의 합이 최대이다.

답 42

0922 주어진 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$$\frac{4(2a+3d)}{2}=24,\ \frac{10(2a+9d)}{2}=0$$

$\therefore 2a+3d=12,\ 2a+9d=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=9,\ d=-2$

$\therefore a_n=9+(n-1)\cdot(-2)=-2n+11$ ··· ❶

$-2n+11>0$에서 $n<5.5$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제 6 항부터 음수이므로 첫째항부터 제 5 항까지의 합이 최대이다.

$\therefore p=5$ ··· ❷

$a_5=1$이므로 $q=\frac{5(9+1)}{2}=25$ ··· ❸

$\therefore p+q=30$ ··· ❹

답 30

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ p의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ q의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0923 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$S_3=\frac{3\{2\cdot(-4)+2d\}}{2}=3d-12$$

$$S_8=\frac{8\{2\cdot(-4)+7d\}}{2}=28d-32$$

$S_3=S_8$에서 $3d-12=28d-32$

$25d=20 \quad \therefore d=\frac{4}{5}$

$$\therefore a_n=-4+(n-1)\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{5}n-\frac{24}{5}$$

$\frac{4}{5}n-\frac{24}{5}>0$에서 $n>6$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제 7 항부터 양수이므로 첫째항부터 제 6 항까지의 합이 최소이다.

따라서 $a_6=\frac{4}{5}\cdot6-\frac{24}{5}=0$이므로 구하는 최솟값은

$$S_6=\frac{6\{(-4)+0\}}{2}=-12$$

답 ④

0924 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_n=112+(n-1)d$

이때 S_8의 값이 임의의 S_n의 값보다 크려면 $a_8>0,\ a_9<0$

$a_8=112+7d>0$에서 $d>-16$

$a_9=112+8d<0$에서 $d<-14$

$\therefore -16<d<-14$

이때 d는 정수이므로 $d=-15$

답 -15

유형 12 나머지가 같은 자연수의 합

본책 140쪽

① 자연수 d의 양의 배수를 작은 것부터 차례대로 나열하면
$d,\ 2d,\ 3d,\ \cdots$
➡ 첫째항과 공차가 d인 등차수열

② 자연수 d로 나누었을 때의 나머지가 $a(0<a<d)$인 자연수를 작은 것부터 차례대로 나열하면
$a,\ a+d,\ a+2d,\ \cdots$
➡ 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열

0925 100 이하의 자연수 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \cdots,\ 97,\ 100$

이때 $100=1+3\cdot33$에서 구하는 값은 첫째항이 1, 끝항이 100, 항수가 34인 등차수열의 합이므로

$$\frac{34(1+100)}{2}=1717$$

답 ④

0926 100과 200 사이에 있는 7의 배수는

$105,\ 112,\ 119,\ \cdots,\ 196$

이때 $196=105+7\cdot13$에서 구하는 값은 첫째항이 105, 끝항이 196, 항수가 14인 등차수열의 합이므로

$$\frac{14(105+196)}{2}=2107$$

답 ②

0927 50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 3의 배수는

$51,\ 54,\ 57,\ \cdots,\ 99$ ······ ㉠

이때 $99=51+3\cdot16$이므로 ㉠은 첫째항이 51, 끝항이 99, 항수가 17인 등차수열이다.

따라서 그 합은 $\frac{17(51+99)}{2}=1275$ ··· ❶

50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 5의 배수는

$55,\ 60,\ 65,\ \cdots,\ 95$ ······ ㉡

이때 $95=55+5\cdot8$이므로 ㉡은 첫째항이 55, 끝항이 95, 항수가 9인 등차수열이다.

따라서 그 합은 $\frac{9(55+95)}{2}=675$ ··· ❷

한편 50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 15의 배수는

$60,\ 75,\ 90$ ······ ㉢

이므로 ㉢의 세 수의 합은

$60+75+90=225$ ··· ❸

따라서 50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 3 또는 5로 나누어떨어지는 수의 총합은

$1275+675-225=1725$ ⋯ ④

답 1725

채점 기준	비율
① 50보다 크고 100보다 작은 3의 배수의 합을 구할 수 있다.	30 %
② 50보다 크고 100보다 작은 5의 배수의 합을 구할 수 있다.	30 %
③ 50보다 크고 100보다 작은 15의 배수의 합을 구할 수 있다.	20 %
④ 답을 구할 수 있다.	20 %

0928 4로 나누었을 때의 나머지가 3인 자연수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19,\ 23,\ 27,\ 31,\ 35,\ 39,\ 43,\ 47,\ \cdots$

5로 나누었을 때의 나머지가 2인 자연수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ 32,\ 37,\ 42,\ 47,\ \cdots$

즉 $\{a_n\}$: 7, 27, 47, ⋯에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 7이고 공차가 20인 등차수열이므로 구하는 합은

$$\frac{10\{2\cdot7+(10-1)\cdot20\}}{2}=970$$

답 ①

유형 13 등차수열의 합의 활용 본책 140쪽

주어진 상황에서 등차수열을 찾아 등차수열의 합에 대한 식을 세운다.

0929 연속하는 20개의 자연수 중에서 가장 작은 수를 a라 하면 20개의 자연수는 첫째항이 a, 공차가 1인 등차수열을 이루므로

$$\frac{20\{2a+(20-1)\cdot1\}}{2}=530,\qquad 2a+19=53$$

$2a=34\qquad \therefore a=17$

따라서 구하는 가장 큰 수는 $\quad 17+19=36$

답 ④

0930 $a_1=1+2+2+3=8$

$a_2=3+4+4+5=16$

$a_3=5+6+6+7=24$

⋮

즉 $\{a_n\}$: 8, 16, 24, ⋯에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 8이고 공차가 8인 등차수열이므로

$$a_1+a_2+\cdots+a_8=\frac{8(2\cdot8+7\cdot8)}{2}=288$$

답 288

0931 n각형의 내각의 크기의 합은

$180°(n-2)=180°\times n-360°$ ⋯ ①

첫째항이 $40°$, 공차가 $20°$, 항수가 n인 등차수열의 합은

$$\frac{n\{2\times40°+(n-1)\times20°\}}{2}=10°\times n^2+30°\times n$$ ⋯ ②

따라서 $10°\times n^2+30°\times n=180°\times n-360°$이므로

$n^2-15n+36=0,\qquad (n-3)(n-12)=0$

$\therefore n=3$ 또는 $n=12$

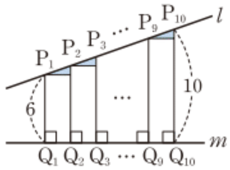
이때 $n=12$이면 가장 큰 내각의 크기가 $40°+11\times20°=260°$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore n=3$ ⋯ ③

답 3

채점 기준	비율
① n각형의 내각의 크기의 합을 알 수 있다.	20 %
② 등차수열의 합의 공식을 이용하여 n각형의 내각의 크기의 합을 구할 수 있다.	40 %
③ n의 값을 구할 수 있다.	40 %

0932 오른쪽 그림에서 색칠한 직각삼각형은 모두 합동이므로



$\overline{P_2Q_2}-\overline{P_1Q_1}$

$=\overline{P_3Q_3}-\overline{P_2Q_2}$

⋮

$=\overline{P_{10}Q_{10}}-\overline{P_9Q_9}$

즉 선분 P_1Q_1, P_2Q_2, ⋯, $P_{10}Q_{10}$의 길이는 이 순서대로 등차수열을 이루므로 이 수열의 공차를 d라 하면

$\overline{P_2Q_2}=6+d,\ \overline{P_9Q_9}=10-d$

$$\therefore \overline{P_2Q_2}+\overline{P_3Q_3}+\overline{P_4Q_4}+\cdots+\overline{P_9Q_9}=\frac{8\{(6+d)+(10-d)\}}{2}$$

$=64$

답 ⑤

유형 14 등차수열의 합과 일반항 사이의 관계 본책 141쪽

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n 항까지의 합 S_n이 주어진 경우

① (i) $a_1=S_1$

(ii) $n\ge2$일 때, $\quad a_n=S_n-S_{n-1}$

임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

② $a_k=S_k-S_{k-1}$ (단, $k\ge2$)

0933 $S_n=n^2+2n$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2+2\cdot1=3$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=2n+1$ ⋯⋯ ㉠

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n+1$

따라서 $a_1=3$, $a_{99}=199$이므로

$$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=\frac{50(3+199)}{2}=5050$$

답 5050

0934 $a_1=S_1=2\cdot1^2+2\cdot1-4=0$이므로 $\qquad k\ne1$

$\therefore a_k=S_k-S_{k-1}$

$=2k^2+2k-4-\{2(k-1)^2+2(k-1)-4\}$

$=4k$

즉 $4k=48$이므로 $\qquad k=12$

답 ③

0935 $S_n=2\cdot(-n)^2-12\cdot(-n)=2n^2+12n$이므로

$a_4=S_4-S_3$
$=(2\cdot4^2+12\cdot4)-(2\cdot3^2+12\cdot3)=26$

$a_8=S_8-S_7$
$=(2\cdot8^2+12\cdot8)-(2\cdot7^2+12\cdot7)=42$

$\therefore a_4+a_8=68$ 답 ①

다른 풀이 $S_n=2n^2+12n$이므로

(i) $n=1$일 때,
$a_1=S_1=2\cdot1^2+12\cdot1=14$

(ii) $n\geq2$일 때,
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=2n^2+12n-\{2(n-1)^2+12(n-1)\}$
$=4n+10$ …… ㉠

이때 $a_1=14$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로
$a_n=4n+10$
$\therefore a_4+a_8=(4\cdot4+10)+(4\cdot8+10)=68$

0936 $S_n=n^2+kn+2$, $S_n'=2n^2-3n$이라 하면

$a_{10}=S_{10}-S_9=(10^2+10k+2)-(9^2+9k+2)=19+k$

$b_{10}=S_{10}'-S_9'=(2\cdot10^2-3\cdot10)-(2\cdot9^2-3\cdot9)=35$

이때 $a_{10}=b_{10}$이므로
$19+k=35$ $\therefore k=16$ 답 16

0937 $S_n=n^2-6n$에서

(i) $n=1$일 때,
$a_1=S_1=1^2-6\cdot1=-5$

(ii) $n\geq2$일 때,
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=n^2-6n-\{(n-1)^2-6(n-1)\}$
$=2n-7$ …… ㉠

이때 $a_1=-5$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로
$a_n=2n-7$

$1\leq a_n\leq40$에서 $1\leq2n-7\leq40$
$8\leq2n\leq47$ $\therefore 4\leq n\leq23.5$

따라서 자연수 n은 4, 5, 6, …, 23의 20개이다. 답 ③

유형 15 등비수열의 일반항 본책 142쪽

등비수열 $\{a_n\}$에서 일반항 구하기

(i) 첫째항을 a, 공비를 r라 하고 주어진 조건을 이용하여 방정식을 세운다.

(ii) (i)의 방정식을 연립하여 풀어 a, r의 값을 구한다.

(iii) $a_n=ar^{n-1}$에 a, r의 값을 대입하여 일반항을 구한다.

0938 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=2$ …… ㉠

$a_5=ar^4=54$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=27$ $\therefore r=3$

$r=3$을 ㉠에 대입하면 $a=\frac{2}{3}$

따라서 $a_n=\frac{2}{3}\cdot3^{n-1}$이므로

$a_6=\frac{2}{3}\cdot3^5=162$ 답 ④

0939 $a_n=\frac{3}{4^{2n-1}}$에서

$a_1=\frac{3}{4}$, $a_2=\frac{3}{4^3}=\frac{3}{64}$

$\therefore \frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{64}\div\frac{3}{4}=\frac{1}{16}$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 $\frac{3}{4}$, 공비는 $\frac{1}{16}$이다.

답 첫째항: $\frac{3}{4}$, 공비: $\frac{1}{16}$

0940 $a=r$, $b=r^2$, $c=r^3$이므로 $\log_3 r^2=\log_r r^3$

$2\log_3 r=3$, $\log_3 r=\frac{3}{2}$ $\therefore r=3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}$

$\therefore a=r=3\sqrt{3}$ 답 $3\sqrt{3}$

0941 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3=6$에서 $a_1+a_1r+a_1r^2=6$

$\therefore a_1(1+r+r^2)=6$ …… ㉠

$a_4+a_5+a_6=48$에서 $a_1r^3+a_1r^4+a_1r^5=48$

$\therefore a_1r^3(1+r+r^2)=48$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$ $\therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $7a_1=6$ $\therefore a_1=\frac{6}{7}$

$\therefore a_2+a_4+a_6=a_1r+a_1r^3+a_1r^5=a_1r(1+r^2+r^4)$
$=\frac{6}{7}\cdot2\cdot21=36$ 답 36

0942 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이므로 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=10$ …… ㉠

$a_4=ar^3=100$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=10$ $\therefore r=\sqrt{10}$ ($\because r>0$)

$r=\sqrt{10}$을 ㉠에 대입하면 $\sqrt{10}a=10$ $\therefore a=\sqrt{10}$

따라서 $a_n=\sqrt{10}\cdot(\sqrt{10})^{n-1}=(\sqrt{10})^n$이므로

$a_1a_3a_5\cdots a_{19}=\sqrt{10}\cdot(\sqrt{10})^3\cdot(\sqrt{10})^5\cdot\cdots\cdot(\sqrt{10})^{19}$
$=10^{\frac{1+3+5+\cdots+19}{2}}=10^{\frac{10(1+19)}{4}}$
$=10^{50}$ 답 ①

0943 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\frac{a_{15}}{a_5}=\frac{a_{16}}{a_6}=\frac{a_{17}}{a_7}=\cdots=\frac{a_{34}}{a_{24}}=r^{10}$

이므로 주어진 식은

$r^{10}+r^{10}+r^{10}+\cdots+r^{10}=60$

$20r^{10}=60$ $\therefore r^{10}=3$

$\therefore \frac{a_{25}}{a_5}=r^{20}=(r^{10})^2=3^2=9$ 답 9

유형 16 조건을 만족시키는 등비수열의 항 본책 142쪽

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에서 제 n 항이 k 이상이다.
➡ $ar^{n-1} \ge k$를 만족시키는 n의 값을 구한다.

0944 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3 = ar^2 = 3$ …… ㉠

$a_5 = ar^4 = 9$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2 = 3$ $\therefore r = \sqrt{3}$ ($\because r > 0$)

$r = \sqrt{3}$을 ㉠에 대입하면 $3a = 3$ $\therefore a = 1$

따라서 $a_n = (\sqrt{3})^{n-1}$이므로

$a_n^{\ 2} = 3^{n-1}$

$a_n^{\ 2} > 1000$, 즉 $3^{n-1} > 1000$에서 $3^6 = 729$, $3^7 = 2187$이므로

$n - 1 \ge 7$ $\therefore n \ge 8$

따라서 자연수 n의 최솟값은 8이다. 답 ③

0945 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_3 = 5 \cdot r^2 = \frac{5}{4}$, $r^2 = \frac{1}{4}$

$\therefore r = \frac{1}{2}$ ($\because r > 0$) ··· ❶

따라서 $a_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{200}$ ··· ❷

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{1000}$, $2^{n-1} > 1000$

이때 $2^9 = 512$, $2^{10} = 1024$이므로

$n - 1 \ge 10$ $\therefore n \ge 11$

따라서 구하는 항은 제 11 항이다. ··· ❸

답 제 11 항

채점 기준	비율
❶ r의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 부등식을 세울 수 있다.	20 %
❸ 답을 구할 수 있다.	40 %

0946 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\log a_2 = \frac{1}{2}$에서 $a_2 = ar = 10^{\frac{1}{2}}$ …… ㉠

$\log a_5 = 2$에서 $a_5 = ar^4 = 10^2$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3 = 10^{\frac{3}{2}}$ $\therefore r = 10^{\frac{1}{2}}$

$r = 10^{\frac{1}{2}}$을 ㉠에 대입하면 $a = 1$

따라서 $a_n = 10^{\frac{n-1}{2}}$이므로 $100 < a_n < 10000$에서

$10^2 < 10^{\frac{n-1}{2}} < 10^4$, $2 < \frac{n-1}{2} < 4$

$4 < n - 1 < 8$ $\therefore 5 < n < 9$

n은 자연수이므로 6, 7, 8의 3개이다. 답 3

유형 17 두 수 사이에 수를 넣어서 만든 등비수열 본책 143쪽

두 수 a, b 사이에 n개의 수를 넣어서 등비수열을 만들면
➡ a는 첫째항이고, b는 제 $(n+2)$ 항이다.
➡ $b = ar^{n+1}$ (단, r는 공비)

0947 주어진 등비수열의 공비를 r $(r > 0)$라 하면 첫째항이 2, 제 5 항이 162이므로

$2r^4 = 162$, $r^4 = 81$

$\therefore r = 3$ ($\because r > 0$)

따라서 $a = 6$, $b = 18$, $c = 54$이므로

$a + b + c = 78$ 답 78

0948 주어진 등비수열의 첫째항이 81, 공비가 $\frac{2}{3}$, 제 $(n+2)$ 항이 $\frac{128}{27}$이므로

$81 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \frac{128}{27}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^7$

$n + 1 = 7$ $\therefore n = 6$ 답 ④

0949 주어진 등비수열의 공비를 r $(r > 0)$라 하면 첫째항이 2, 제 11 항이 64이므로

$2 \cdot r^{10} = 64$, $r^{10} = 32 = 2^5 = (\sqrt{2})^{10}$

$\therefore r = \sqrt{2}$ ($\because r > 0$)

따라서 $x_n = 2 \cdot (\sqrt{2})^n = 2^{1+\frac{n}{2}}$이므로

$\log_2 x_n = 1 + \frac{n}{2}$

$\therefore$ (주어진 식) $= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{2}{2}\right) + \left(1 + \frac{3}{2}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{9}{2}\right)$

$= 9 + \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + 9}{2} = \frac{63}{2}$ 답 $\frac{63}{2}$

유형 18 등비중항 본책 143쪽

0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
➡ $b^2 = ac$

0950 x, $x+12$, $9x$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(x+12)^2 = x \cdot 9x$, $8x^2 - 24x - 144 = 0$

$x^2 - 3x - 18 = 0$, $(x+3)(x-6) = 0$

$\therefore x = 6$ ($\because x > 0$) 답 6

0951 $\sin\theta$, $\frac{\sqrt{6}}{6}$, $\cos 60°$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \sin\theta \cdot \frac{1}{2}$ $\therefore \sin\theta = \frac{1}{3}$

$\therefore \sin\theta + \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$ 답 ③

0952 2, a, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2=2b$ ...... ㉠

a, b, 12가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2b=a+12$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2=a+12,\quad a^2-a-12=0$

$(a+3)(a-4)=0\quad \therefore a=4\ (\because a>0)$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $\quad 16=2b\quad \therefore b=8$

$\therefore a+b=12$

답 12

0953 함수 $f(x)=x^2+2x+a$에 대하여

$f(-1)=a-1,\ f(1)=a+3,\ f(2)=a+8$ ⋯➊

따라서 $a-1$, $a+3$, $a+8$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(a+3)^2=(a-1)(a+8)$

$a^2+6a+9=a^2+7a-8\quad \therefore a=17$ ⋯➋

즉 $f(x)=x^2+2x+17$이므로

$f(-2)=17$ ⋯➌

답 17

채점 기준	비율
➊ $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$를 a로 나타낼 수 있다.	30 %
➋ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
➌ $f(-2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0954 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$b^2=ac$

$$\therefore \frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_c x}=\log_x a+\log_x c$$
$$=\log_x ac=\log_x b^2$$
$$=2\log_x b=\frac{2}{\log_b x}$$

답 ③

0955 $0.\dot{a}=\frac{a}{9}$, $0.0\dot{b}=\frac{b}{90}$, $0.00\dot{c}=\frac{c}{900}$에서 $\frac{a}{9}$, $\frac{b}{90}$, $\frac{c}{900}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\left(\frac{b}{90}\right)^2=\frac{a}{9}\cdot\frac{c}{900}\quad \therefore b^2=ac$

이때 a, b, c는 서로 다른 한 자리 자연수이므로 순서쌍 (a, b, c)는

$(1, 2, 4)$, $(1, 3, 9)$, $(2, 4, 8)$, $(4, 6, 9)$

의 4개이다.

답 4

유형 19 등비수열을 이루는 수

본책 144쪽

등비수열을 이루는 세 수를 a, ar, ar^2으로 놓고 식을 세운다.

0956 세 실수를 a, ar, ar^2으로 놓으면

$a+ar+ar^2=7\quad \therefore a(1+r+r^2)=7$ ...... ㉠

$a\cdot ar\cdot ar^2=8\quad \therefore (ar)^3=8$ ...... ㉡

㉡에서 $\quad ar=2\quad \therefore a=\frac{2}{r}$

$a=\frac{2}{r}$를 ㉠에 대입하면

$\frac{2}{r}(1+r+r^2)=7$

양변에 r를 곱하여 정리하면

$2r^2-5r+2=0,\quad (2r-1)(r-2)=0$

$\therefore r=\frac{1}{2}$ 또는 $r=2$

$r=\frac{1}{2}$일 때 $a=4$, $r=2$일 때 $a=1$이므로 세 실수는 1, 2, 4이다.

따라서 가장 큰 수는 4이다.

답 4

0957 삼차방정식의 세 실근을 a, ar, ar^2으로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=p$

$a\cdot ar+ar\cdot ar^2+ar^2\cdot a=156$ ...... ㉠

$a\cdot ar\cdot ar^2=216$ ...... ㉡

㉡에서 $\quad (ar)^3=216\quad \therefore ar=6$

㉠에서 $ar(a+ar+ar^2)=156$이므로

$6p=156\quad \therefore p=26$

답 ②

0958 네 자연수를 a, ar, ar^2, ar^3 (a, r는 자연수, $r>1$)으로 놓으면

$ar^3\le 100$

(i) $r=2$일 때, $a\le\frac{100}{8}=12.5$에서

$a=1, 2, 3, \cdots, 12$

(ii) $r=3$일 때, $a\le\frac{100}{27}=3.\cdots$에서

$a=1, 2, 3$

(iii) $r=4$일 때, $a\le\frac{100}{64}=1.5625$에서

$a=1$

(iv) $r\ge5$일 때, $ar^3\le100$을 만족시키는 자연수 a는 존재하지 않는다.

이상에서 구하는 경우의 수는

$12+3+1=16$

답 16

유형 20 등비수열과 도형

본책 144쪽

도형의 길이, 넓이, 부피 등이 일정한 비율로 변할 때

➡ 처음 몇 개의 항을 나열하여 규칙성을 파악한다.

0959 1회의 시행으로 남아 있는 정삼각형의 한 변의 길이는 $\frac{1}{2}$배가 되고, 개수는 각각 3배가 되므로 1회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(4\cdot\frac{1}{2}\right)^2\cdot3=4\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4}$

2회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^2\cdot3^2=4\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

⋮

n회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(4\cdot\frac{1}{2^n}\right)^2\cdot3^n=4\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

따라서 10회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$$4\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

답 ③

0960 주어진 정사각형의 넓이가 8이므로 한 변의 길이는

$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

따라서 정사각형 T_1의 한 변의 길이는

$\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$

정사각형 T_2의 한 변의 길이는

$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

정사각형 T_3의 한 변의 길이는

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$$ ··· ❶

⋮

따라서 정사각형 T_n의 한 변의 길이는

$$2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}=2^{\frac{3-n}{2}}$$ ··· ❷

즉 $f(n)=\dfrac{3-n}{2}$이므로 $f(99)=-48$ ··· ❸

답 -48

채점 기준	비율
❶ 정사각형 T_1, T_2, T_3의 한 변의 길이를 구할 수 있다.	40 %
❷ 정사각형 T_n의 한 변의 길이를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(99)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0961 $\cos 45°=\dfrac{\overline{\mathrm{P_1P_2}}}{\overline{\mathrm{OP_1}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$$\overline{\mathrm{P_1P_2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\mathrm{OP_1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\overline{\mathrm{P_2P_3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\mathrm{P_1P_2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

⋮

$$\therefore \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}=\left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{10}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20}$에서 $n=20$

따라서 구하는 선분은 $\overline{\mathrm{P_{20}P_{21}}}$이다.

답 ④

유형 21 등비수열의 활용

본책 145쪽

처음의 양을 a, 매시간(또는 매년) 일정한 증가율을 r라 하면

➡ n시간(또는 n년) 후의 양은 $a(1+r)^n$

0962 1월의 데이터 사용량을 a MB, 매월 데이터 사용량의 증가율을 r라 하자.

1월부터 n개월 후의 데이터 사용량은

$a(1+r)^n$

5개월 후인 6월의 데이터 사용량이 1월의 3배이므로

$a(1+r)^5=3a$ $\therefore (1+r)^5=3$

10개월 후인 11월의 데이터 사용량이 $a(1+r)^{10}$이므로 5개월 동안 증가한 데이터 사용량은

$$a(1+r)^{10}-a(1+r)^5=a(1+r)^5\{(1+r)^5-1\}$$
$$=3a(3-1)=6a$$

즉 $6a=2400$이므로 $\therefore a=400$

따라서 1월의 데이터 사용량은 400 MB이다.

답 400 MB

0963 처음 식염수의 농도를 a라 하면 A, B가 각각 p번, q번 시행을 반복하여 얻은 식염수의 농도는 각각

$a\left(\dfrac{1}{2}\right)^p$, $a\left(\dfrac{1}{4}\right)^q$ ··· ❶

$a\left(\dfrac{1}{2}\right)^p=a\left(\dfrac{1}{4}\right)^q=a\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2q}$에서 $p=2q$

$\therefore p:q=2:1$ ··· ❷

답 $2:1$

채점 기준	비율
❶ A, B가 각각 p번, q번 시행을 반복하여 얻은 식염수의 농도를 구할 수 있다.	60 %
❷ $p:q$를 가장 간단한 자연수의 비로 나타낼 수 있다.	40 %

유형 22 등비수열의 합

본책 145쪽

(i) 주어진 조건을 이용하여 첫째항 a와 공비 r의 값을 구한다.

(ii) $S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$에 a, r의 값을 대입한다. (단, $r\neq1$)

0964 일반항이 $a_n=2^{2n-1}$이므로

$a_1=2$, $a_2=2^3$, $a_3=2^5$, ⋯

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 4인 등비수열이므로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\frac{2(4^{10}-1)}{4-1}=\frac{2(2^{20}-1)}{3}$$
$$=\frac{2^{21}-2}{3}$$

$\therefore p=21$

답 ⑤

0965 주어진 수열은 첫째항이 -2, 공비가 -3인 등비수열이므로

$$S_n=\frac{-2\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}=-\frac{1}{2}\{1-(-3)^n\}$$

$S_k=364$에서 $-\dfrac{1}{2}\{1-(-3)^k\}=364$

$1-(-3)^k=-728$, $(-3)^k=729=(-3)^6$

$\therefore k=6$

답 6

0966 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2+a_4=ar+ar^3=10$ ······ ㉠

$a_4+a_6=ar^3+ar^5=r^2(ar+ar^3)=40$ ······ ㉡ ··· ❶

㉠을 ㉡에 대입하면 $r^2=4$ $\therefore r=2$ $(\because r>0)$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $2a+8a=10$ $\therefore a=1$ ··· ❷

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제 10 항까지의 합은

$$\frac{1\cdot(2^{10}-1)}{2-1}=1023$$ ··· ❸

답 1023

채점 기준	비율
❶ a, r에 대한 식을 세울 수 있다.	30 %
❷ a, r의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 첫째항부터 제 10 항까지의 합을 구할 수 있다.	40 %

0967 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_3=a_1r^2=6$ ······ ㉠

$a_7=a_1r^6=24$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^4=4$

r는 실수이므로 $r^2=2$

$r^2=2$를 ㉠에 대입하면 $2a_1=6$ $\therefore a_1=3$

따라서 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{10}^2$은 첫째항이 $a_1^2=9$, 공비가 $r^2=2$인 등비수열의 첫째항부터 제 10 항까지의 합과 같으므로

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{10}^2=\frac{9(2^{10}-1)}{2-1}=9(2^{10}-1)$$

답 ④

0968 첫째항이 2, 공비가 5인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{2(5^n-1)}{5-1}=\frac{1}{2}(5^n-1)$$

$S_n\geq 10^8$에서 $\frac{1}{2}(5^n-1)\geq 10^8$

$\therefore 5^n\geq 2\cdot10^8+1$

즉 $5^n>2\cdot10^8$이므로 양변에 상용로그를 취하면

$\log 5^n>\log(2\cdot10^8)$, $n\log 5>8+\log 2$

$$\therefore n>\frac{8+\log 2}{\log 5}=\frac{8+0.3}{1-0.3}=11.\cdots$$

따라서 첫째항부터 제 12 항까지의 합이 처음으로 10^8 이상이 된다.

답 12

0969 주어진 수열의 첫째항부터 제 10 항까지의 합은

$3+33+333+\cdots+33\cdots3$

$=\frac{1}{3}(9+99+999+\cdots+99\cdots9)$

$=\frac{1}{3}\{(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^{10}-1)\}$

$=\frac{1}{3}\{(10+10^2+10^3+\cdots+10^{10})-10\}$

$=\frac{1}{3}(10^2+10^3+\cdots+10^{10})$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{100(10^9-1)}{10-1}$

$=\frac{100}{27}(10^9-1)$

답 ④

유형 23 부분의 합이 주어진 등비수열

본책 146쪽

첫째항이 a, 공비가 $r(r\neq1)$인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하면

$$\begin{cases} S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1} \\ S_{2n}=\frac{a(r^{2n}-1)}{r-1}=\frac{a(r^n-1)(r^n+1)}{r-1} \end{cases}$$

➡ $S_{2n}\div S_n=r^n+1$

0970 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=30$ ······ ㉠

$S_{2n}=\frac{a(r^{2n}-1)}{r-1}=\frac{a(r^n-1)(r^n+1)}{r-1}=50$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^n+1=\frac{5}{3}$ $\therefore r^n=\frac{2}{3}$

$\therefore S_{3n}=\frac{a(r^{3n}-1)}{r-1}=\frac{a(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)}{r-1}$

$=30\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}+1\right\}$

$=30\cdot\frac{19}{9}=\frac{190}{3}$

답 $\frac{190}{3}$

0971 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\frac{a(r^3-1)}{r-1}=21$ ······ ㉠

$\frac{a(r^6-1)}{r-1}=\frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=-147$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $21(r^3+1)=-147$

$r^3+1=-7$, $r^3=-8$

$\therefore r=-2$

$r=-2$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$3a=21$ $\therefore a=7$

따라서 $a_n=7\cdot(-2)^{n-1}$이므로

$a_5=7\cdot(-2)^4=112$

답 ⑤

0972 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\frac{a_1(r^{10}-1)}{r-1}=12$ ······ ㉠

수열 a_1, a_3, a_5, $\cdots$의 공비는 r^2이므로

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=\frac{a_1\{(r^2)^5-1\}}{r^2-1}$

$=\frac{a_1(r^{10}-1)}{(r+1)(r-1)}=8$ ······ ㉡

㉠÷㉡을 하면

$r+1=\frac{3}{2}$ $\therefore r=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

0973 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}$$
$$=r+r^3+r^5+\cdots+r^{2k-1}$$
$$=\frac{r\{(r^2)^k-1\}}{r^2-1}=\frac{r(r^{2k}-1)}{r^2-1}=170 \quad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ❶$$

$$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1}$$
$$=1+r^2+r^4+\cdots+r^{2k-2}$$
$$=\frac{1\cdot\{(r^2)^k-1\}}{r^2-1}=\frac{r^{2k}-1}{r^2-1}=85 \quad \cdots\cdots ㉡ \quad \cdots ❷$$

㉠÷㉡을 하면 $\quad r=2$ $\quad \cdots$ ❸

$r=2$를 ㉡에 대입하면 $\quad \frac{4^k-1}{4-1}=85$

$4^k-1=255, \quad 4^k=256=4^4$

$\therefore k=4$ $\quad \cdots$ ❹

답 4

채점 기준	비율
❶ $a_2+a_4+\cdots+a_{2k}$를 r, k로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $a_1+a_3+\cdots+a_{2k-1}$을 r, k로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ r의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0974 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$도 등비수열이다.

등비수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$$S_3=\frac{a(r^3-1)}{r-1}=\frac{1}{27} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$S_6=\frac{a(r^6-1)}{r-1}=\frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=3 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡÷㉠을 하면 $\quad r^3+1=81 \quad \therefore r^3=80$

$$\therefore S_{12}=\frac{a(r^{12}-1)}{r-1}=\frac{a(r^6-1)(r^6+1)}{r-1}$$
$$=3\cdot(80^2+1)=19203$$

답 19203

유형 24 등비수열의 합의 활용 (본책 147쪽)

처음의 양을 a, 매시간(또는 매년) 일정한 증가율을 r라 하면

➡ $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=k \quad \therefore \frac{a(1-r^n)}{1-r}=k$

0975 1998년의 전입자 수를 a라 하고, 매년 전입자 수가 전년도의 전입자 수의 r배라 하면 1998년부터 2017년까지의 전입자 수가 50만 명이므로

$$\frac{a(1-r^{20})}{1-r}=500000 \quad \cdots\cdots ㉠$$

2008년부터 2017년까지의 전입자 수가 10만 명이므로

$$\frac{ar^{10}(1-r^{10})}{1-r}=100000 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠÷㉡을 하면

$$\frac{1-r^{20}}{r^{10}(1-r^{10})}=\frac{(1+r^{10})(1-r^{10})}{r^{10}(1-r^{10})}=5$$

$$\frac{1+r^{10}}{r^{10}}=5, \quad 1+r^{10}=5r^{10} \quad \therefore r^{10}=\frac{1}{4}$$

따라서 2018년의 전입자 수는

$$ar^{20}=a(r^{10})^2=a\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}a$$

이므로 1998년의 전입자 수의 $\frac{1}{16}$배이다.

답 ⑤

0976 V석의 구역은 1개이고 등급에 따라 구역의 개수가 4배씩 늘어나므로 전체 구역의 개수는

$$1+1\cdot4+1\cdot4^2+1\cdot4^3+1\cdot4^4=\frac{4^5-1}{4-1}=341$$

이때 한 구역의 좌석이 30개이므로 전체 좌석의 개수는

$341\cdot30=10230$

답 10230

0977 처음 4 km 구간을 달리는 데 걸린 시간은 $\frac{4}{8}$시간이고, 일정한 속력으로 1 km를 달리는 데 걸린 시간은 $\frac{1}{8}$시간이다.

이후 1 km를 달리는 데 걸린 시간은 $\frac{1}{8}$시간에서 10 %씩 증가하므로 전체 걸린 시간은

$$\frac{4}{8}+\frac{1}{8}\times1.1+\frac{1}{8}\times1.1^2+\cdots+\frac{1}{8}\times1.1^6$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{8}\times1.1\times(1.1^6-1)}{1.1-1}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{8}\times1.1\times0.8}{0.1}=\frac{8}{5}$$

따라서 완주하는 데 걸린 시간은 $\frac{8}{5}$시간, 즉 1시간 36분이다.

답 ④

유형 25 등비수열의 합과 일반항 사이의 관계 (본책 147쪽)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=pr^n+q$일 때

(i) $a_1=S_1$

(ii) $a_n=S_n-S_{n-1}=(pr^n+q)-(pr^{n-1}+q)=pr^{n-1}(r-1)\ (n\geq2)$

➡ 수열 $\{a_n\}$은 공비가 r인 등비수열

0978 $S_n+100=10^{n+2}$에서 $\quad S_n=10^{n+2}-100$

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=10^3-100=900$

(ii) $n\geq2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=10^{n+2}-100-(10^{n+1}-100)$$
$$=10^{n+1}(10-1)=9\cdot10^{n+1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=900$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=9\cdot10^{n+1}$

따라서 $p=9$, $q=10$이므로 $\quad p-q=-1$

답 -1

0979 ㄱ. $a_1=S_1=5^1-2=3$,

$a_3=S_3-S_2=123-23=100$

$\therefore a_1+a_3=103$

ㄴ. $a_n=S_n-S_{n-1}=5^n-2-(5^{n-1}-2)$
$=5^{n-1}(5-1)=4\cdot5^{n-1}\ (n\ge2)$ …… ㉠
이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 다르므로
$a_1=3,\ a_n=4\cdot5^{n-1}\ (n\ge2)$
ㄷ. 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 공비가 5인 등비수열을 이루므로 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $a_2=4\cdot5^{2-1}=20$, 공비가 $5^2=25$인 등비수열이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0980 $S_n=2\cdot3^{n+1}+k$에서
(i) $n=1$일 때,
$a_1=S_1=2\cdot3^2+k=18+k$ …… ㉠
(ii) $n\ge2$일 때,
$a_n=S_n-S_{n-1}=2\cdot3^{n+1}+k-(2\cdot3^n+k)$
$=2\cdot3^n(3-1)=4\cdot3^n$ …… ㉡
이 수열이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉡에 $n=1$을 대입한 것과 ㉠이 같아야 하므로
$12=18+k\qquad \therefore k=-6$ 답 ①

0981 $S_n=2^{n+1}-2$에서
(i) $n=1$일 때,
$a_1=S_1=2^2-2=2$ ··· ❶
(ii) $n\ge2$일 때,
$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n+1}-2-(2^n-2)$
$=2^n(2-1)=2^n$ …… ㉠ ··· ❷
이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로
$a_n=2^n$ ··· ❸
$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=2+2^3+2^5+2^7+2^9$
$=\dfrac{2\{(2^2)^5-1\}}{2^2-1}=682$ ··· ❹
답 682

채점 기준	비율
❶ a_1을 구할 수 있다.	10 %
❷ $n\ge2$일 때, a_n을 구할 수 있다.	30 %
❸ a_n을 구할 수 있다.	20 %
❹ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

0982 $S_n=p^n+q$에서
(i) $n=1$일 때,
$a_1=S_1=p+q$
(ii) $n\ge2$일 때,
$a_n=S_n-S_{n-1}=p^n+q-(p^{n-1}+q)$
$=(p-1)p^{n-1}$ ··· ❶
이때 등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 4이므로 $\quad p=4$
또 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면
$p+q=p-1\qquad \therefore q=-1$ ··· ❷
$\therefore p^2+q^2=4^2+(-1)^2=17$ ··· ❸
답 17

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ $p,\ q$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ p^2+q^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 26 원리합계

본책 148쪽

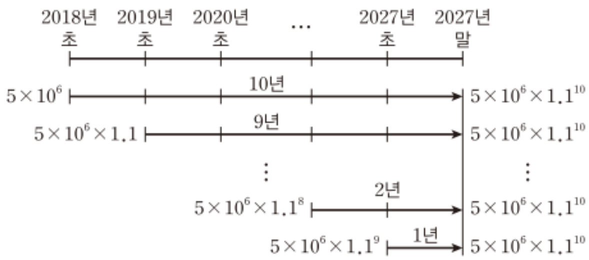
연이율 r의 복리로 매년 초에 a원씩 n년 동안 적립할 때, n년째 말의 원리합계 S_n은
$$S_n=a(1+r)^n+a(1+r)^{n-1}+\cdots+a(1+r)$$
$$=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}\ (\text{원})$$

0983 구하는 원리합계는
$100(1+0.04)+100(1+0.04)^2+\cdots+100(1+0.04)^5$
$=\dfrac{100\times1.04\times(1.04^5-1)}{1.04-1}$
$=\dfrac{100\times1.04\times0.2}{0.04}=520(\text{만 원})$ 답 520만 원

0984 매년 초에 적립하는 금액을 a만 원이라 하면 3년째 말의 원리합계는
$a(1+0.05)+a(1+0.05)^2+a(1+0.05)^3$
$=\dfrac{a\times1.05\times(1.05^3-1)}{1.05-1}=\dfrac{a\times1.05\times0.16}{0.05}$
$=3.36a\ (\text{만 원})$
$3.36a=420$이므로 $\qquad a=125$
따라서 매년 초에 125만 원씩 적립해야 한다. 답 ④

0985 지우와 민석이가 각각 24개월, 12개월째 말에 받는 금액을 A만 원, B만 원이라 하면
$A=10(1+0.003)+10(1+0.003)^2+\cdots+10(1+0.003)^{24}$
$=\dfrac{10\times1.003\times(1.003^{24}-1)}{1.003-1}$
$=\dfrac{10030(1.003^{24}-1)}{3}$
$B=20(1+0.003)+20(1+0.003)^2+\cdots+20(1+0.003)^{12}$
$=\dfrac{20\times1.003\times(1.003^{12}-1)}{1.003-1}$
$=\dfrac{20060(1.003^{12}-1)}{3}$
$\therefore \dfrac{A}{B}=\dfrac{10030(1.003^{24}-1)}{3}\cdot\dfrac{3}{20060(1.003^{12}-1)}$
$=\dfrac{1.003^{12}+1}{2}=\dfrac{1.04+1}{2}=1.02$
따라서 지우가 받는 금액은 민석이가 받는 금액의 1.02배이다.
답 ①

0986 매년 초 적립금의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 2027년 말의 적립금의 원리합계는

$$5\times10^6\times1.1^{10}\times10=5\times1.1^{10}\times10^7$$
$$=5\times2.6\times10^7$$
$$=13\times10^7(\text{원})$$

답 1억 3천만 원

0987 전략 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$임을 이용하여 주어진 이차방정식의 해를 구한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 세 수 a_n, a_{n+1}, a_{n+2}는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

$\therefore 2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ ...... ㉠

㉠을 주어진 이차방정식에 대입하면

$a_nx^2-(a_n+a_{n+2})x+a_{n+2}=0$

$(x-1)(a_nx-a_{n+2})=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=\dfrac{a_{n+2}}{a_n}$

그런데 $b_n\neq1$이므로 $\qquad b_n=\dfrac{a_{n+2}}{a_n}$

$$\therefore \frac{b_n+1}{b_n-1}=\frac{\frac{a_{n+2}}{a_n}+1}{\frac{a_{n+2}}{a_n}-1}=\frac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+2}-a_n}=\frac{2a_{n+1}}{a_{n+2}-a_n}\ (\because ㉠)$$

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$\frac{b_n+1}{b_n-1}=\frac{2a_1+2nd}{2d}=n+\frac{a_1}{d}=\left(\frac{a_1}{d}+1\right)+(n-1)\cdot1$$

따라서 등차수열 $\left\{\dfrac{b_n+1}{b_n-1}\right\}$의 공차는 1이다.

답 1

0988 전략 등차수열을 이루는 세 수를 $\alpha-d$, α, $\alpha+d$로 놓는다.

풀이 두 곡선 $y=x^3+a^2x+2a$, $y=6x^2+8$의 세 교점의 x좌표는 방정식

$x^3+a^2x+2a=6x^2+8$, 즉 $x^3-6x^2+a^2x+2(a-4)=0$

의 세 실근과 같다.

이 방정식의 세 실근을 $\alpha-d$, α, $\alpha+d$로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha-d)+\alpha+(\alpha+d)=6$ ...... ㉠

$(\alpha-d)\alpha+\alpha(\alpha+d)+(\alpha+d)(\alpha-d)=a^2$ ...... ㉡

$(\alpha-d)\alpha(\alpha+d)=-2(a-4)$ ...... ㉢

㉠에서 $\qquad 3\alpha=6 \qquad \therefore \alpha=2$

$\alpha=2$를 ㉡에 대입하면

$(2-d)\cdot2+2(2+d)+(2+d)(2-d)=a^2$

$\therefore 12-d^2=a^2$ ...... ㉣

$\alpha=2$를 ㉢에 대입하면

$(2-d)\cdot2\cdot(2+d)=-2(a-4)$

$\therefore a=d^2$ ...... ㉤

㉤을 ㉣에 대입하면 $\qquad 12-d^2=d^4$

$d^4+d^2-12=0, \qquad (d^2+4)(d^2-3)=0$

$d^2+4>0$이므로 $\qquad d^2=3$

$\therefore d=\sqrt{3}\ (\because d>0)$

답 ②

0989 전략 수열 $\{a_n\}$의 각 항의 부호를 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $a_5<0$, $a_6>0$이므로

$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<0<a_6<a_7<\cdots$

$\therefore T_5=|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+|a_5|$

$=-a_1-a_2-a_3-a_4-a_5$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $d>0$이고 조건 (나)에서 $T_5=S_5+70$이므로

$-a_1-a_2-a_3-a_4-a_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+70$

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-35$

$\dfrac{5(2a_1+4d)}{2}=-35 \qquad \therefore a_1+2d=-7$, 즉 $a_3=-7$

$a_5=a_3+2d<0$에서 $\qquad -7+2d<0 \qquad \therefore d<\dfrac{7}{2}$

$a_6=a_3+3d>0$에서 $\qquad -7+3d>0 \qquad \therefore d>\dfrac{7}{3}$

즉 $\dfrac{7}{3}<d<\dfrac{7}{2}$이고 d는 정수이므로 $\qquad d=3$

$a_1+2d=-7$에서

$a_1=-7-2d=-7-2\cdot3=-13$

$$\therefore S_{10}=\frac{10(2a_1+9d)}{2}=\frac{10\{2\cdot(-13)+9\cdot3\}}{2}=5$$

조건 (나)에서 $T_{10}=S_{10}+70=75$이므로

$S_{10}+T_{10}=5+75=80$

답 ①

0990 전략 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 이용하여 주어진 식을 m, k, d에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 30이고 공차가 $-d$이므로

$a_n=30+(n-1)\cdot(-d)=30-(n-1)d$

$\therefore a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}$

$$=\frac{(k+1)\{30-(m-1)d+30-(m+k-1)d\}}{2}$$

$$=\frac{(k+1)\{60-(2m+k-2)d\}}{2}=0$$

$k+1>0$이므로

$(2m+k-2)d=60 \qquad \therefore 2m+k=2+\dfrac{60}{d}$

위의 식을 만족시키는 두 자연수 m, k가 존재하려면 d는 60의 양의 약수이어야 한다.

이때 $60=2^2\cdot3\cdot5$이므로 구하는 d의 개수는

$(2+1)(1+1)(1+1)=12$

답 ②

0991 전략 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은 $\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$임을 이용한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 a이고 공차가 -4이므로

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)\cdot(-4)\}}{2}=-2n^2+(a+2)n$$

$S_n<200$에서 $\quad 2n^2-(a+2)n+200>0$

$$2\left(n-\frac{a+2}{4}\right)^2-\frac{(a+2)^2}{8}+200>0$$

모든 자연수 n에 대하여 부등식이 성립하려면

$$-\frac{(a+2)^2}{8}+200>0, \qquad (a+2)^2<1600$$

$$-40<a+2<40 \qquad \therefore -42<a<38$$

따라서 자연수 a의 최댓값은 37이다.

답 37

다른 풀이 모든 자연수 n에 대하여 $S_n<200$이어야 하므로

$$-2n^2+(a+2)n<200, \qquad 2n^2+200>(a+2)n$$

$n>0$이므로 $\qquad 2n+\frac{200}{n}>a+2 \qquad \cdots\cdots ㉠$

이때 $n>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2n+\frac{200}{n}\geq 2\sqrt{2n\cdot\frac{200}{n}}=2\cdot 20=40$$

(단, 등호는 $n=10$일 때 성립)

따라서 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립하려면

$a+2<40$, 즉 $a<38$

이어야 하므로 구하는 자연수 a의 최댓값은 37이다.

0992 전략 수열 $\{b_n\}$의 공차를 이용하여 수열 $\{a_n\}$의 공차를 구한다.

풀이 $b_n=a_n+nk$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$$b_{n+1}-b_n=\{a_{n+1}+(n+1)k\}-(a_n+nk)$$
$$=a_{n+1}-a_n+k$$

조건 (가)에 의하여 수열 $\{b_n\}$의 공차를 d(d는 자연수)라 하면

$$a_{n+1}-a_n+k=d \qquad \therefore a_{n+1}-a_n=d-k$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 $d-k$이다.

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\frac{10\{2\cdot 1+9(d-k)\}}{2}=10+45d-45k,$$

$$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=\frac{5\{2(1+k)+4d\}}{2}=5+5k+10d$$

이므로 조건 (나)에 의하여

$$10+45d-45k=2(5+5k+10d)$$

$$25d=55k \qquad \therefore d=\frac{11}{5}k$$

d와 k는 자연수이므로 k는 5의 배수이어야 한다.

따라서 100 이하의 자연수 k의 개수는 20이다.

답 20

0993 전략 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은 $\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$임을 이용한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$$S_{10}=\frac{10(2a+9d)}{2}=430$$

$\therefore 2a+9d=86 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$$S_{20}=\frac{20(2a+19d)}{2}=660$$

$\therefore 2a+19d=66 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\qquad a=52,\ d=-2$

$$\therefore a_n=52+(n-1)\cdot(-2)=-2n+54$$

따라서 $a_{2n}=-4n+54=50+(n-1)\cdot(-4)$에서 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 50이고 공차가 -4인 등차수열이므로

$$|a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}|=\left|\frac{n\{2\cdot 50+(n-1)\cdot(-4)\}}{2}\right|$$
$$=|-2n^2+52n|$$

$|-2n^2+52n|$의 값이 최소이려면 $\qquad -2n^2+52n=0$

$$n(n-26)=0$$

$\therefore n=26$ ($\because n$은 자연수)

답 26

0994 전략 주어진 조건을 이용하여 수열 $\{a_n\}$의 공차를 구한다.

풀이 $b_n=2^{a_n}$이므로 $b_1=\frac{1}{16}b_5$에서

$$2^{a_1}=\frac{1}{16}\cdot 2^{a_5}, \qquad 2^{a_1+4}=2^{a_5}$$

즉 $a_1+4=a_5$이므로 $\qquad a_5-a_1=4$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$(a_1+4d)-a_1=4$$

$$4d=4 \qquad \therefore d=1$$

따라서 $b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=124$에서

$$2^{a_1}+2^{a_2}+2^{a_3}+2^{a_4}+2^{a_5}=124$$
$$2^{a_1}+2^{a_1+1}+2^{a_1+2}+2^{a_1+3}+2^{a_1+4}=124$$
$$2^{a_1}(1+2^1+2^2+2^3+2^4)=124$$
$$2^{a_1}\cdot\frac{2^5-1}{2-1}=124, \qquad 2^{a_1}=4 \qquad \therefore a_1=2$$

$$\therefore a_9=a_1+8d=2+8=10$$

답 10

0995 전략 a_n과 a_{n+1} 사이의 규칙을 찾는다.

풀이 ㄱ. $a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2^2}$, $a_3=\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2^4}$,

$a_4=\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{2^4}=\frac{1}{2^8}$, $a_5=\frac{1}{2^8}\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{1}{2^{16}}$

ㄴ. ㄱ에서 $a_{n+1}={a_n}^2$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$$\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}+\frac{a_4}{a_3}+\frac{a_5}{a_4}+\frac{a_6}{a_5}=\frac{{a_1}^2}{a_1}+\frac{{a_2}^2}{a_2}+\frac{{a_3}^2}{a_3}+\frac{{a_4}^2}{a_4}+\frac{{a_5}^2}{a_5}$$
$$=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$$

ㄷ. $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{a_n}{{a_n}^2}=\frac{1}{a_n}$이므로

$$b_n=\log_2\frac{a_n}{a_{n+1}}=\log_2\frac{1}{a_n}$$

이라 하면

$$b_1=\log_2 2=1,\ b_2=\log_2 2^2=2,\ b_3=\log_2 2^4=4,\ \cdots$$

즉 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열이므로

$$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10}=\frac{2^{10}-1}{2-1}=1023$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0996 전략 $N=p^l\cdot q^m$ (p, q는 서로 다른 소수, l, m은 자연수)일 때, N의 양의 약수의 총합은 $(1+p+\cdots+p^l)(1+q+\cdots+q^m)$임을 이용한다.

풀이 $ab=2^{10}\cdot3^{10}$의 양의 약수의 총합은

$$(1+2^1+2^2+\cdots+2^{10})(1+3^1+3^2+\cdots+3^{10})$$
$$=\frac{2^{11}-1}{2-1}\cdot\frac{3^{11}-1}{3-1}=(2^{11}-1)\cdot\frac{3^{11}-1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(2\cdot2^{10}-1)(3\cdot3^{10}-1)$$
$$=\frac{1}{2}(2a-1)(3b-1)$$

답 ①

0997 전략 주어진 조건을 이용하여 수열 $\{a_{2n-1}\}$의 일반항을 구하고 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용한다.

풀이 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 $a_1=1$이고 공비가 2인 등비수열이므로 $\quad a_{2n-1}=2^{n-1}$

수열 $\{S_{2n-1}\}$은 첫째항이 $S_1=a_1=1$이고 공비가 -2인 등비수열이므로 $\quad S_{2n-1}=(-2)^{n-1}$

이때 $S_{17}-S_{15}=a_{16}+a_{17}$이므로

$$a_{16}=S_{17}-S_{15}-a_{17}$$
$$=(-2)^8-(-2)^7-2^8$$
$$=2^8+2^7-2^8=128$$

답 128

0998 전략 $(2008+n)$년 초에 통장에 남아 있는 금액을 a_n원이라 하고 a_{10}의 값을 구한다.

풀이 $(2008+n)$년 초에 통장에 남아 있는 금액을 a_n원이라 하면

$$a_1=10^8\times1.05-10^7$$
$$a_2=a_1\times1.05-10^7=10^8\times1.05^2-10^7(1.05+1)$$
$$a_3=a_2\times1.05-10^7=10^8\times1.05^3-10^7(1.05^2+1.05+1)$$
$$\vdots$$
$$\therefore a_{10}=a_9\times1.05-10^7$$
$$=10^8\times1.05^{10}-10^7(1.05^9+\cdots+1.05+1)$$
$$=10^8\times1.05^{10}-10^7\times\frac{1.05^{10}-1}{1.05-1}$$
$$=10^8\times1.63-10^7\times\frac{1.63-1}{0.05}=3.7\times10^7$$

따라서 2018년 초에 통장에 남아 있는 금액은 3700만 원이다.

답 3700만 원

0999 전략 수열 $\{b_n\}$의 홀수 번째 항의 합과 짝수 번째 항의 합을 각각 구한 다음 $a_2-a_1=a_4-a_3=a_6-a_5=(\text{공차})$임을 이용한다.

풀이
$$b_1+b_3+b_5=a_1+(a_1-2a_3)+(a_1-2a_3+3a_5)$$
$$=3a_1-4a_3+3a_5$$
$$b_2+b_4+b_6=-a_2+(-a_2+2a_4)+(-a_2+2a_4-3a_6)$$
$$=-3a_2+4a_4-3a_6$$ ··· ❶

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6$$
$$=3a_1-4a_3+3a_5-3a_2+4a_4-3a_6$$
$$=-3(a_2-a_1)+4(a_4-a_3)-3(a_6-a_5)$$
$$=-3d+4d-3d=-2d$$

즉 $-2d=10$이므로 $\qquad d=-5$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 공차는 -5이다. ··· ❷

답 -5

채점 기준	비율
❶ $b_1+b_3+b_5$, $b_2+b_4+b_6$을 a_n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ 수열 $\{a_n\}$의 공차를 구할 수 있다.	50 %

1000 전략 5개의 삼각형의 넓이를 $a-2d$, $a-d$, a, $a+d$, $a+2d$로 놓는다.

풀이 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5를 차례대로

$$a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d\ (d>0)$$

라 하면 5개의 삼각형의 넓이의 합은 정삼각형의 넓이와 같으므로

$$5a=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot10^2\qquad\therefore a=a_3=5\sqrt{3}$$ ··· ❶

$a_5=1.5a_1$, 즉 $a+2d=\frac{3}{2}(a-2d)$이므로

$$5d=\frac{a}{2}\qquad\therefore d=\frac{a}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$ ··· ❷

$$\therefore a_2a_4=(a-d)(a+d)=a^2-d^2$$
$$=(5\sqrt{3})^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{297}{4}$$ ··· ❸

답 $\frac{297}{4}$

채점 기준	비율
❶ a_3의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ d의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a_2a_4의 값을 구할 수 있다.	30 %

1001 전략 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례대로 대입하여 수열 $\{b_n\}$을 찾는다.

풀이 수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19,\ \cdots$$

$a_k=1$이면 $k=1$이므로 $\qquad b_1=2\cdot1-1=1$

$a_k=2$인 k가 존재하지 않으므로 $\qquad b_2=(-1)^2\cdot2=2$

$a_k=3$인 k가 존재하지 않으므로 $\qquad b_3=(-1)^3\cdot3=-3$

$a_k=4$이면 $k=2$이므로 $\qquad b_4=2\cdot2-1=3$

$a_k=5$인 k가 존재하지 않으므로 $\qquad b_5=(-1)^5\cdot5=-5$

$a_k=6$인 k가 존재하지 않으므로 $\qquad b_6=(-1)^6\cdot6=6$

$a_k=7$이면 $k=3$이므로 $\qquad b_7=2\cdot3-1=5$

$\vdots$

따라서 자연수 m에 대하여

$$b_{3m-2}=1+(m-1)\cdot2=2m-1,$$
$$b_{3m-1}+b_{3m}=(-1)^m$$ ··· ❶
$$\therefore b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{50}$$
$$=(b_1+b_4+b_7+\cdots+b_{49})$$
$$\quad+\{(b_2+b_3)+(b_5+b_6)+\cdots+(b_{47}+b_{48})\}+b_{50}$$
$$=(1+3+5+\cdots+33)$$
$$\quad+\{(-1)+1+(-1)+1+\cdots+(-1)+1\}+50$$
$$=\frac{17(1+33)}{2}+0+50=339$$ ··· ❷

답 339

채점 기준	비율
❶ $\{b_{3m-2}\}$와 $\{b_{3m-1}+b_{3m}\}$의 일반항을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 50 항까지의 합을 구할 수 있다.	50 %

1002 전략 등차수열의 합의 공식을 이용하여 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$을 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2, 공차가 5이므로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{n\{2\cdot2+(n-1)\cdot5\}}{2}$$

$$=\frac{n(5n-1)}{2}$$

$$\therefore \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}=\frac{5n-1}{2} \quad \cdots❶$$

$b_n=\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}$으로 놓으면

$$b_{2n-1}=\frac{5(2n-1)-1}{2}=5n-3$$

따라서 수열 $\{b_{2n-1}\}$은 첫째항이 2, 공차가 5인 등차수열이므로

$$(\text{주어진 식})=b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{25}$$

$$=\frac{13(b_1+b_{25})}{2}$$

$$=\frac{13(2+62)}{2}=416 \quad \cdots❷$$

답 416

채점 기준	비율
❶ $\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}$을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	60 %

다른 풀이 $a_n=2+(n-1)\cdot5=5n-3$이고

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n-1}=\frac{(2n-1)(a_1+a_{2n-1})}{2}$$

이때 a_n은 a_1과 a_{2n-1}의 등차중항이므로

$$a_n=\frac{a_1+a_{2n-1}}{2}$$

$$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n-1}=(2n-1)a_n$$

$$\therefore (\text{주어진 식})=a_1+\frac{3a_2}{3}+\frac{5a_3}{5}+\cdots+\frac{25a_{13}}{25}$$

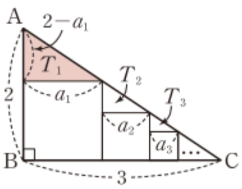
$$=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{13}$$

$$=\frac{13(a_1+a_{13})}{2}$$

$$=\frac{13(2+62)}{2}=416$$

1003 전략 삼각형의 닮음비를 이용하여 수열 $\{a_n\}$이 등비수열임을 알고, 공비를 구한다.

풀이 오른쪽 그림의 색칠한 삼각형 T_1과 삼각형 ABC는 닮음이므로



$$(2-a_1) : a_1=2 : 3$$

$$6-3a_1=2a_1$$

$$\therefore a_1=\frac{6}{5} \quad \cdots❶$$

삼각형 T_2와 삼각형 ABC도 닮음이므로 $(a_1-a_2) : a_2=2 : 3$에서

$$3a_1-3a_2=2a_2$$

$$\therefore a_2=\frac{3}{5}a_1=\frac{3}{5}\cdot\frac{6}{5}$$

같은 방법으로 $(a_2-a_3) : a_3=2 : 3$이므로

$$3a_2-3a_3=2a_3$$

$$\therefore a_3=\frac{3}{5}a_2=\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{6}{5}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{6}{5}$, 공비가 $\frac{3}{5}$인 등비수열이므로

$$a_n=\frac{6}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \quad \cdots❷$$

$$\therefore \frac{1}{2}a_9=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^8=\left(\frac{3}{5}\right)^9 \quad \cdots❸$$

답 $\left(\frac{3}{5}\right)^9$

채점 기준	비율
❶ a_1을 구할 수 있다.	30 %
❷ a_n을 구할 수 있다.	60 %
❸ $\frac{1}{2}a_9$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1004 전략 등차수열과 등비수열의 성질을 이용한다.

풀이 각 행의 등차수열의 공차를 d라 하면 $a_{20}=a_{14}+6d$이므로

$$13=11+6d \qquad \therefore d=\frac{1}{3} \quad \cdots❶$$

$a_{14}=a_{11}+3d$이므로 $\qquad a_{11}=11-3\cdot\frac{1}{3}=10$

또 $a_{37}=a_{31}+6d$이므로 $\qquad a_{31}=22-6\cdot\frac{1}{3}=20$

등비수열 a_1, a_{11}, a_{21}, $\cdots$, a_{91}의 공비를 $r(r>0)$라 하면 $a_{31}=a_{11}r^2$이므로

$$20=10\cdot r^2, \qquad r^2=2 \qquad \therefore r=\sqrt{2}\ (\because r>0) \quad \cdots❷$$

따라서 $a_{11}=a_1r$에서 $\qquad 10=\sqrt{2}a_1 \qquad \therefore a_1=5\sqrt{2}$

$$\therefore a_1+a_{12}+a_{23}+a_{34}+\cdots+a_{100}$$

$$=a_1+(a_1r+d)+(a_1r^2+2d)+(a_1r^3+3d)+\cdots+(a_1r^9+9d)$$

$$=a_1(1+r+r^2+\cdots+r^9)+45d$$

$$=\frac{a_1(r^{10}-1)}{r-1}+45\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\frac{5\sqrt{2}\{(\sqrt{2})^{10}-1\}}{\sqrt{2}-1}+15$$

$$=\frac{155\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}+15=155\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+15$$

$$=325+155\sqrt{2}$$

따라서 $p=325$, $q=155$이므로

$$p+q=480 \quad \cdots❸$$

답 480

채점 기준	비율
❶ 공차를 구할 수 있다.	20 %
❷ 공비를 구할 수 있다.	30 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	50 %

Ⅲ. 수열

09 수열의 합

1005 $\sum_{k=1}^{5}3k=3\cdot1+3\cdot2+3\cdot3+3\cdot4+3\cdot5$
$=3+6+9+12+15$
답 $3+6+9+12+15$

1006 $\sum_{n=1}^{7}2^n=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^7$
$=2+4+8+\cdots+128$
답 $2+4+8+\cdots+128$

1007 $\sum_{i=1}^{n}(4i+3)=(4\cdot1+3)+(4\cdot2+3)+(4\cdot3+3)$
$+\cdots+(4n+3)$
$=7+11+15+\cdots+(4n+3)$
답 $7+11+15+\cdots+(4n+3)$

1008 $\sum_{j=1}^{n}j(j+2)=1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots+n(n+2)$
$=3+8+15+\cdots+n(n+2)$
답 $3+8+15+\cdots+n(n+2)$

1009 답 $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$

1010 답 $\sum_{k=1}^{n}3^k$

1011 주어진 수열의 제 k 항을 a_k라 하면
$a_k=\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}=\left(-\frac{1}{3}\right)^k$
$\frac{1}{729}=\left(-\frac{1}{3}\right)^6$이므로
$-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{729}=\sum_{k=1}^{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$
답 $\sum_{k=1}^{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$

1012 $\sum_{k=1}^{10}(-a_k+3b_k)=-\sum_{k=1}^{10}a_k+3\sum_{k=1}^{10}b_k$
$=-4+3\cdot7=17$
답 17

1013 $\sum_{k=1}^{10}4(2a_k-5b_k)=\sum_{k=1}^{10}(8a_k-20b_k)$
$=8\sum_{k=1}^{10}a_k-20\sum_{k=1}^{10}b_k$
$=8\cdot4-20\cdot7=-108$
답 -108

1014 $\sum_{k=1}^{10}(k^2+3)-\sum_{k=1}^{10}(k^2-2)=\sum_{k=1}^{10}\{(k^2+3)-(k^2-2)\}$
$=\sum_{k=1}^{10}5=5\cdot10=50$
답 50

1015 $\sum_{k=1}^{8}(k-2)^2-\sum_{k=1}^{8}(k^2-4k)=\sum_{k=1}^{8}\{(k-2)^2-(k^2-4k)\}$
$=\sum_{k=1}^{8}\{(k^2-4k+4)-(k^2-4k)\}$
$=\sum_{k=1}^{8}4=4\cdot8=32$
답 32

1016 $\sum_{k=1}^{10}(k^2-k+1)=\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1$
$=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-\frac{10\cdot11}{2}+1\cdot10$
$=385-55+10=340$
답 340

1017 $\sum_{k=1}^{10}k(k-1)(2k+1)=\sum_{k=1}^{10}(2k^3-k^2-k)$
$=2\sum_{k=1}^{10}k^3-\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}k$
$=2\cdot\left(\frac{10\cdot11}{2}\right)^2-\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-\frac{10\cdot11}{2}$
$=6050-385-55=5610$
답 5610

1018 $4^2+5^2+6^2+\cdots+20^2=\sum_{k=4}^{20}k^2=\sum_{k=1}^{20}k^2-\sum_{k=1}^{3}k^2$
$=\frac{20\cdot21\cdot41}{6}-\frac{3\cdot4\cdot7}{6}$
$=2870-14=2856$
답 2856

다른 풀이 • 주어진 수열의 제 k 항을 a_k라 하면
$a_k=(k+3)^2$
$(k+3)^2=20^2$에서 $k=17$
$\therefore$ (주어진 식)$=\sum_{k=1}^{17}(k+3)^2=\sum_{k=1}^{17}(k^2+6k+9)$
$=\sum_{k=1}^{17}k^2+6\sum_{k=1}^{17}k+\sum_{k=1}^{17}9$
$=\frac{17\cdot18\cdot35}{6}+6\cdot\frac{17\cdot18}{2}+9\cdot17$
$=1785+918+153=2856$

1019 $3\cdot6+5\cdot10+7\cdot14+\cdots+21\cdot42$
$=\sum_{k=1}^{10}(2k+1)(4k+2)$
$=\sum_{k=1}^{10}(8k^2+8k+2)=8\sum_{k=1}^{10}k^2+8\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}2$
$=8\cdot\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+8\cdot\frac{10\cdot11}{2}+2\cdot10$
$=3080+440+20$
$=3540$
답 3540

1020 (주어진 식)$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$
$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$
$+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$
$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$
답 $\frac{n}{n+1}$

1021 (주어진 식)$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{n}{2n+1}$ 답 $\frac{n}{2n+1}$

1022 (주어진 식)$=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$=2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$

$=2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=2\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$

$=2(\sqrt{n+1}-1)$ 답 $2(\sqrt{n+1}-1)$

1023 $\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=\frac{29}{45}$ 답 $\frac{29}{45}$

1024 $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+3}}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+3}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+3})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+3})}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+1})$

$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{6}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{12}-\sqrt{10})+(\sqrt{13}-\sqrt{11})\}$

$=\frac{1}{2}(-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{12}+\sqrt{13})$

$=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{13}}{2}$ 답 $\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{13}}{2}$

유형 01 합의 기호 Σ 본책 154쪽

① $\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

② $\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}$

③ $\sum_{k=1}^{n}ka_k=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n$

④ $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}a_k$

1025 $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$

$=\sum_{k=1}^{2n}a_k$

이므로 $\sum_{k=1}^{2n}a_k=4n^2$

$\therefore \sum_{k=1}^{20}a_k=4\cdot 10^2=400$ 답 ③

1026 $\sum_{k=1}^{18}f(k+2)-\sum_{k=3}^{20}f(k-1)$

$=\{f(3)+f(4)+f(5)+\cdots+f(20)\}$
$-\{f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(19)\}$

$=f(20)-f(2)=30-4=26$ 답 26

1027 ㄱ. $\sum_{k=1}^{10}a_k=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_9+a_{10}$

$=(a_1+a_3+\cdots+a_9)+(a_2+a_4+\cdots+a_{10})$

$=\sum_{k=1}^{5}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{5}a_{2k}$

ㄴ. $1-1+1-1+1-1=\sum_{k=1}^{6}(-1)^{k-1}$

ㄷ. $\sum_{k=2}^{11}(k-1)^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3=\sum_{k=1}^{10}k^3$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

1028 $\sum_{k=1}^{30}(a_k+a_{k+1})$

$=(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{30}+a_{31})$

$=a_1+2(a_2+a_3+\cdots+a_{30})+a_{31}$

$=60$ ...... ㉠

$\sum_{k=1}^{15}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{29}+a_{30})$

$=40$ ...... ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{30}+a_{31}=20$

즉 $a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{30}=20-a_{31}$을 ㉠에 대입하면

$a_1+2(20-a_{31})+a_{31}=60$

$\therefore a_1-a_{31}=20$ 답 20

1029 $\sum_{k=0}^{9}(2k+1)^2+\sum_{k=1}^{10}(2k)^2$

$=(1^2+3^2+5^2+\cdots+19^2)+(2^2+4^2+6^2+\cdots+20^2)$

$=1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2$

$=\sum_{k=1}^{20}k^2=\sum_{k=0}^{19}(k+1)^2$ 답 ②

1030 $a_8=S_8-S_7$

$=\left\{\sum_{k=1}^{9}(2k+1)^2-\sum_{k=1}^{8}(2k-1)^2\right\}$
$-\left\{\sum_{k=1}^{8}(2k+1)^2-\sum_{k=1}^{7}(2k-1)^2\right\}$

$=\left\{\sum_{k=1}^{9}(2k+1)^2-\sum_{k=1}^{8}(2k+1)^2\right\}$
$-\left\{\sum_{k=1}^{8}(2k-1)^2-\sum_{k=1}^{7}(2k-1)^2\right\}$

$=(2\cdot9+1)^2-(2\cdot8-1)^2=19^2-15^2$

$=361-225=136$ 답 136

다른 풀이 $S_n=\sum_{k=1}^{n+1}(2k+1)^2-\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$

$=\{3^2+5^2+\cdots+(2n+3)^2\}$

$\quad-\{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2\}$

$=(2n+1)^2+(2n+3)^2-1^2$

$=8n^2+16n+9$

$\therefore a_8=S_8-S_7$

$=8\cdot8^2+16\cdot8+9-(8\cdot7^2+16\cdot7+9)=136$

유형 02 Σ와 등차수열, 등비수열 본책 154쪽

① 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열일 때

$$a_n=a+(n-1)d,\ \sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

② 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열일 때

$$a_n=ar^{n-1},\ \sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

1031 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$\sum_{k=1}^{100}a_{2k}-\sum_{k=1}^{100}a_{2k+1}=(a_2+a_4+\cdots+a_{200})$

$\quad-(a_3+a_5+\cdots+a_{201})$

$=(a_2-a_3)+(a_4-a_5)+\cdots+(a_{200}-a_{201})$

$=-d-d-\cdots-d$

$=-100d$

이때 $a_3=1$, $a_7=-7$이므로

$a_1+2d=1$ …… ㉠

$a_1+6d=-7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a_1=5$, $d=-2$

따라서 구하는 값은 $-100d=200$ 답 200

1032 다항식 $P(x)=x^{2n-1}(x-2)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는 $P(5)$이므로

$a_n=5^{2n-1}\cdot3=\frac{3}{5}\cdot25^n$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{3}{5}\sum_{k=1}^{n}25^k=\frac{3}{5}\cdot\frac{25(25^n-1)}{25-1}$

$=\frac{5(25^n-1)}{8}$ 답 ②

1033 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 $a_4+a_9=5a_5$에서

$(a+3d)+(a+8d)=5(a+4d)$

$2a+11d=5a+20d$, $3a+9d=0$

$\therefore a+3d=0$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{10}a_k=-15$에서 $\frac{10(2a+9d)}{2}=-15$

$\therefore 2a+9d=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 풀면 $a=3$, $d=-1$

따라서 $a_n=3-(n-1)=-n+4$이므로

$a_6=-6+4=-2$ 답 ②

1034 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 $a_3a_5=a_9$에서 $ar^2\cdot ar^4=ar^8$

$\therefore a=r^2$ …… ㉠

$a_2=8$에서 $ar=8$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $r^3=8$ $\therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $a=4$

$\therefore a_n=4\cdot2^{n-1}$ …❶

$\sum_{k=1}^{n}a_k=252$에서

$\frac{4(2^n-1)}{2-1}=4(2^n-1)=252$

$2^n-1=63$, $2^n=64$

$\therefore n=6$ …❷

답 6

채점 기준	비율
❶ 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구할 수 있다.	50 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	50 %

유형 03 특정한 값이 반복되는 수열의 합 본책 155쪽

수열 $\{a_n\}$의 각 항이 특정한 값이 반복되어 나타날 때, $\sum_{k=1}^{n}a_k$는 같은 값을 갖는 항의 개수를 이용하여 구한다.

1035 자연수 k에 대하여

(i) $n=2k-1$일 때,

$n^2=(2k-1)^2=4(k^2-k)+1$이므로

$a_{2k-1}=1$

(ii) $n=2k$일 때,

$n^2=(2k)^2=4k^2$이므로 $a_{2k}=0$

$\therefore \sum_{n=1}^{2000}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{1999}+a_{2000}$

$=\underbrace{1+0+1+\cdots+1+0}_{1\text{이 }1000\text{개, }0\text{이 }1000\text{개}}$

$=1\cdot1000=1000$ 답 ③

1036 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 중 1이 a개, 2가 b개 있다고 하면

$\sum_{i=1}^{n}x_i=1\cdot a+2\cdot b=13$

$\therefore a+2b=13$ …… ㉠

$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1^2\cdot a+2^2\cdot b=23$

$\therefore a+4b=23$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=5$

$\therefore \sum_{i=1}^{n}x_i^5=1^5\cdot3+2^5\cdot5=163$ 답 163

1037 $x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2x-1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면 $4x^2-4x+1=-3$, $x^2-x+1=0$

양변에 $x+1$을 곱하면

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

$x^3+1=0$ $\therefore x^3=-1$

따라서 k가 3의 배수일 때 x^k이 실수이므로

$f(1)=f(2)=0$,
$f(3)=f(4)=f(5)=1$,
$f(6)=f(7)=f(8)=2$,
$f(9)=f(10)=f(11)=3$,
⋮
$f(27)=f(28)=f(29)=9$,
$f(30)=10$

$\therefore \sum_{n=1}^{30} f(n)=3\cdot1+3\cdot2+3\cdot3+\cdots+3\cdot9+10$
$=3(1+2+3+\cdots+9)+10$
$=3\cdot45+10=145$

답 145

유형 04 Σ의 성질 본책 155쪽

① $\sum_{k=1}^{n}(pa_k+qb_k)=p\sum_{k=1}^{n}a_k+q\sum_{k=1}^{n}b_k$ (단, p, q는 상수)
② $\sum_{k=1}^{n}(a_k+c)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2c\sum_{k=1}^{n}a_k+c^2n$ (단, c는 상수)

1038 $\sum_{k=1}^{10}(3a_k-1)^2=\sum_{k=1}^{10}(9a_k^2-6a_k+1)$
$=9\sum_{k=1}^{10}a_k^2-6\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1$
$=9\cdot8-6\cdot4+1\cdot10=58$

답 ②

1039 $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+2a_kb_k+b_k^2)$
$=\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$ ··· ❶

이므로 $\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)+2\cdot30=100$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)=40$ ··· ❷

답 40

채점 기준	비율
❶ $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2$을 변형할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	50 %

1040 $\sum_{k=1}^{n}a_k=7n$, $\sum_{k=1}^{n}b_k=-3n^2$에 $n=10$을 각각 대입하면

$\sum_{k=1}^{10}a_k=7\cdot10=70$, $\sum_{k=1}^{10}b_k=-3\cdot10^2=-300$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k+6)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}6$
$=2\cdot70-(-300)+6\cdot10$
$=500$

답 500

1041 $\sum_{k=11}^{20}(3b_k-2a_k)=3\sum_{k=11}^{20}b_k-2\sum_{k=11}^{20}a_k$
$=3\left(\sum_{k=1}^{20}b_k-\sum_{k=1}^{10}b_k\right)-2\left(\sum_{k=1}^{20}a_k-\sum_{k=1}^{10}a_k\right)$
$=3(60-20)-2(42-12)$
$=120-60=60$

답 60

1042 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1+a_k-1}{1+a_k}=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{1+a_k}\right)$
$=\sum_{k=1}^{n}1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}$
$=n-(n^2+n)=-n^2$

답 $-n^2$

유형 05 자연수의 거듭제곱의 합 본책 156쪽

① $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$
② $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
③ $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

1043 $\sum_{k=1}^{30}\frac{1+2+3+\cdots+k}{k}=\sum_{k=1}^{30}\frac{\frac{k(k+1)}{2}}{k}$
$=\sum_{k=1}^{30}\frac{k+1}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{30}(k+1)$
$=\frac{1}{2}\left(\frac{30\cdot31}{2}+30\right)$
$=\frac{495}{2}$

답 ③

1044 $\sum_{k=1}^{n-1}(4k+3)=4\cdot\frac{(n-1)n}{2}+3(n-1)$
$=2n^2+n-3$

따라서 $2n^2+n-3=52$이므로 $2n^2+n-55=0$
$(2n+11)(n-5)=0$
$\therefore n=5$ ($\because$ n은 자연수)

답 5

1045 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha_k+\beta_k=k$, $\alpha_k\beta_k=-k$

이므로
$\alpha_k^3+\beta_k^3=(\alpha_k+\beta_k)^3-3\alpha_k\beta_k(\alpha_k+\beta_k)$
$=k^3-3\cdot(-k)\cdot k=k^3+3k^2$

$\therefore \sum_{k=1}^{6}(\alpha_k^3+\beta_k^3)=\sum_{k=1}^{6}(k^3+3k^2)$
$=\left(\frac{6\cdot7}{2}\right)^2+3\cdot\frac{6\cdot7\cdot13}{6}$
$=441+273=714$

답 ②

1046 직선 $y=-x+a_n$이 원의 중심 $(n,\ -2n^3+3n)$을 지나야 하므로 $-2n^3+3n=-n+a_n$
$\therefore a_n=-2n^3+4n$
$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(-2k^3+4k)$
$=-2\cdot\left(\frac{10\cdot11}{2}\right)^2+4\cdot\frac{10\cdot11}{2}$
$=-6050+220=-5830$

답 -5830

1047 $\sum_{k=1}^{10}(k-c)^2=\sum_{k=1}^{10}(k^2-2ck+c^2)$

$=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-2c\cdot\frac{10\cdot11}{2}+c^2\cdot10$

$=10c^2-110c+385$

$=10\left(c-\frac{11}{2}\right)^2+\frac{165}{2}$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}(k-c)^2$의 값이 최소가 되도록 하는 c의 값은 $\frac{11}{2}$이다.

답 ④

1048 $\sum_{k=1}^{7}k^2+\sum_{k=2}^{7}k^2+\sum_{k=3}^{7}k^2+\cdots+\sum_{k=7}^{7}k^2$

$=(1^2+2^2+3^2+\cdots+7^2)+(2^2+3^2+4^2+\cdots+7^2)$
$+(3^2+4^2+5^2+6^2+7^2)+\cdots+(6^2+7^2)+7^2$

$=1^2\cdot1+2^2\cdot2+3^2\cdot3+\cdots+7^2\cdot7$

$=1^3+2^3+3^3+\cdots+7^3$

$=\sum_{k=1}^{7}k^3=\left(\frac{7\cdot8}{2}\right)^2$

$=784$

답 784

유형 06 Σ를 여러 개 포함한 식

본책 157쪽

Σ를 여러 개 포함한 식은 상수인 것과 상수가 아닌 것을 구별하여 계산한다.

① $\sum_{k=1}^{n}(k+n)=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}n=\frac{n(n+1)}{2}+n\cdot n$

② $\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l}kl\right)=\sum_{l=1}^{n}\left(l\sum_{k=1}^{l}k\right)=\sum_{l=1}^{n}l\cdot\frac{l(l+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}(l^3+l^2)$

$=\frac{1}{2}\left[\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

1049 $\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{l}6\right)\right\}=\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}6l\right)$

$=\sum_{m=1}^{n}\left\{6\cdot\frac{m(m+1)}{2}\right\}=3\sum_{m=1}^{n}(m^2+m)$

$=3\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot(2n+1+3)$

$=n(n+1)(n+2)$

답 ①

1050 $\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{n}(i+j)\right\}=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}i+\sum_{j=1}^{n}j\right)$

$=\sum_{i=1}^{m}\left\{in+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$=n\sum_{i=1}^{m}i+\sum_{i=1}^{m}\frac{n(n+1)}{2}$

$=n\cdot\frac{m(m+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\cdot m$

$=\frac{mn(m+n+2)}{2}$

$=\frac{40\cdot15}{2}=300$

답 ⑤

1051 $\sum_{n=1}^{5}\left(\sum_{m=1}^{n}mn\right)=\sum_{n=1}^{5}\left(n\sum_{m=1}^{n}m\right)=\sum_{n=1}^{5}\left\{n\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right\}$ ··· ❶

$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5}(n^3+n^2)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5\cdot6}{2}\right)^2+\frac{5\cdot6\cdot11}{6}\right\}=140$ ··· ❷

답 140

채점 기준	비율
❶ $\sum_{m=1}^{n}mn$을 구할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	50 %

1052 $\sum_{n=1}^{4}\left(\sum_{k=1}^{n}2^{k+n}\right)=\sum_{n=1}^{4}\left(2^n\sum_{k=1}^{n}2^k\right)=\sum_{n=1}^{4}\left\{2^n\cdot\frac{2(2^n-1)}{2-1}\right\}$

$=\sum_{n=1}^{4}2^n(2^{n+1}-2)=\sum_{n=1}^{4}(2^{2n+1}-2^{n+1})$

$=2\sum_{n=1}^{4}4^n-2\sum_{n=1}^{4}2^n$

$=2\cdot\frac{4(4^4-1)}{4-1}-2\cdot\frac{2(2^4-1)}{2-1}$

$=680-60=620$

답 ①

참고 $\sum_{k=1}^{n}r^k$은 첫째항이 r, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합과 같으므로

$\sum_{k=1}^{n}r^k=\frac{r(r^n-1)}{r-1}$ (단, $r\neq1$)

유형 07 일반항이 다항식인 수열의 합

본책 157쪽

(i) 주어진 수열의 제k항 a_k를 구한다.
(ii) Σ의 성질을 이용하여 수열의 합을 구한다.

1053 수열 $1\cdot3,\ 2\cdot5,\ 3\cdot7,\ \cdots,\ 12\cdot25$의 제$k$항을 a_k라 하면

$a_k=k(2k+1)=2k^2+k$

$\therefore$ (주어진 식)$=\sum_{k=1}^{12}a_k=\sum_{k=1}^{12}(2k^2+k)$

$=2\cdot\frac{12\cdot13\cdot25}{6}+\frac{12\cdot13}{2}$

$=1300+78=1378$

답 ②

1054 $a_n=3n-2$에서 $a_{2k}=3\cdot2k-2=6k-2$

$\therefore \sum_{k=1}^{2n}a_{2k}=\sum_{k=1}^{2n}(6k-2)$

$=6\cdot\frac{2n(2n+1)}{2}-2\cdot2n$

$=12n^2+2n$

답 ④

1055 주어진 수열의 제k항을 a_k라 하면

$a_k=2k(k+1)^2=2k^3+4k^2+2k$ ··· ❶

이므로

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k^3+4k^2+2k)$

$=2\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

09 수열의 합

$$=\frac{n(n+1)}{6}\{3n(n+1)+4(2n+1)+6\}$$

$$=\frac{n(n+1)}{6}(3n^2+11n+10)$$ ⋯ ❷

따라서 $f(n)=3n^2+11n+10$이므로

$f(5)=3\cdot5^2+11\cdot5+10=140$ ⋯ ❸

답 140

채점 기준	비율
❶ 주어진 수열의 제 k 항을 구할 수 있다.	30 %
❷ S_n을 구할 수 있다.	50 %
❸ $f(5)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1056 $a_n=-2-3(n-1)=-3n+1$,

$b_n=4+2(n-1)=2n+2$이므로 ⋯ ❶

$$\sum_{k=1}^{10}a_kb_k=\sum_{k=1}^{10}(-3k+1)(2k+2)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(-6k^2-4k+2)$$
$$=-6\cdot\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-4\cdot\frac{10\cdot11}{2}+2\cdot10$$
$$=-2310-220+20=-2510$$ ⋯ ❷

답 -2510

채점 기준	비율
❶ a_n, b_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sum_{k=1}^{10}a_kb_k$의 값을 구할 수 있다.	60 %

1057 주어진 수열의 제 n 항을 a_n이라 하면

$$a_n=1\cdot n+2\cdot n+3\cdot n+\cdots+n\cdot n$$
$$=\sum_{k=1}^{n}kn=n\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=n\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^3+n^2}{2}$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}\frac{k^3+k^2}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{10\cdot11}{2}\right)^2+\frac{10\cdot11\cdot21}{6}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}(3025+385)=1705$$

답 1705

1058 7층 탑의 위에서부터 k번째 층에 놓이는 정육면체의 개수는

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k^2+k}{2}$$

따라서 7층 탑을 쌓는 데 필요한 정육면체의 개수는

$$\sum_{k=1}^{7}\frac{k^2+k}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{7\cdot8\cdot15}{6}+\frac{7\cdot8}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(140+28)=84$$

답 ③

유형 08 Σ로 표현된 수열의 합과 일반항

본책 158쪽

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n 항까지의 합을 S_n이라 하면

(ⅰ) $S_1=a_1$

(ⅱ) $a_n=S_n-S_{n-1}=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k$ $(n\ge2)$

임을 이용하여 a_n을 구한다.

1059 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=n^2+n$

(ⅰ) $n=1$일 때, $a_1=S_1=2$

(ⅱ) $n\ge2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=n^2+n-\{(n-1)^2+(n-1)\}$$
$$=2n \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n$

따라서 $a_{2k-1}=2(2k-1)=4k-2$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{10}(4k-2)=4\cdot\frac{10\cdot11}{2}-2\cdot10$$
$$=220-20=200$$

답 200

1060 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n 항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=3\cdot4^n-3$

(ⅰ) $n=1$일 때, $a_1=S_1=9$

(ⅱ) $n\ge2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=3\cdot4^n-3-(3\cdot4^{n-1}-3)$$
$$=3\cdot4^{n-1}(4-1)=9\cdot4^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=9$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=9\cdot4^{n-1}$

따라서 $\frac{1}{a_k}=\frac{1}{9\cdot4^{k-1}}=\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$이므로

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$
$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{15}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{27}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{15}\right\}$$

답 ③

1061 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$$\sum_{k=1}^{5}a_{4k+1}=a_5+a_9+a_{13}+a_{17}+a_{21}$$
$$=(a+4d)+(a+8d)+(a+12d)$$
$$+(a+16d)+(a+20d)$$
$$=5a+60d=70$$
$$\therefore a+12d=14 \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$\sum_{k=1}^{5}a_{4k+2}=a_6+a_{10}+a_{14}+a_{18}+a_{22}$$
$$=(a+5d)+(a+9d)+(a+13d)$$
$$+(a+17d)+(a+21d)$$
$$=5a+65d=80$$

$\therefore a+13d=16$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-10,\ d=2$

$\therefore a_n=-10+2(n-1)=2n-12$

따라서 $a_{3k}=2\cdot 3k-12=6k-12$이므로

$$\sum_{k=1}^{15} a_{3k}=\sum_{k=1}^{15}(6k-12)=6\cdot\frac{15\cdot 16}{2}-12\cdot 15$$
$$=720-180=540$$

답 ③

1062 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=n^2-2n$

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=-1$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-2n-\{(n-1)^2-2(n-1)\}$$
$$=2n-3 \quad ⋯⋯ ㉠$$

이때 $a_1=-1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-3$ ⋯ ❶

$$\therefore S=\sum_{n=1}^{5}2^{a_n}=\sum_{n=1}^{5}2^{2n-3}=\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{5}4^n$$
$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{4(4^5-1)}{4-1}=\frac{341}{2}$$

$\therefore 2S=341$ ⋯ ❷

답 341

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	50 %
❷ $2S$의 값을 구할 수 있다.	50 %

유형 09 일반항이 k, n에 대한 식인 수열의 합 (본책 159쪽)

(i) 주어진 수열의 제 k 항 a_k를 k와 n에 대한 식으로 나타낸다.

(ii) $\sum_{k=1}^{n}a_k$에서 n은 상수임에 유의하여 수열의 합을 구한다.

1063 수열 $1\cdot n,\ 2\cdot(n-1),\ 3\cdot(n-2),\ \cdots,\ n\cdot 1$의 제 k 항을 a_k라 하면

$a_k=k\{n-(k-1)\}=-k^2+(n+1)k$

이므로 주어진 식은

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\{-k^2+(n+1)k\}$$
$$=-\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

답 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

1064 수열 $\left(\frac{n+1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{n+2}{n}\right)^2,\ \left(\frac{n+3}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \left(\frac{2n}{n}\right)^2$의 제 k 항을 a_k라 하면

$$a_k=\left(\frac{n+k}{n}\right)^2=\left(1+\frac{k}{n}\right)^2=1+\frac{2k}{n}+\frac{k^2}{n^2}$$

이므로 주어진 식은

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)=\sum_{k=1}^{n}1+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=n+\frac{2}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{(2n+1)(7n+1)}{6n}$$

답 $\frac{(2n+1)(7n+1)}{6n}$

1065 수열 $1\cdot(2n-1),\ 2\cdot(2n-3),\ 3\cdot(2n-5),\ \cdots,\ n\cdot 1$의 제 k 항을 a_k라 하면

$a_k=k\{2n-(2k-1)\}=(2n+1)k-2k^2$

주어진 식의 좌변은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\{(2n+1)k-2k^2\}$$
$$=(2n+1)\sum_{k=1}^{n}k-2\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=(2n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}-2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

따라서 $a=2,\ b=1$이므로 $a+2b=4$

답 ②

유형 10 로그가 포함된 수열의 합 (본책 159쪽)

$a>0,\ a\neq 1$이고 $x>0,\ y>0$일 때

① $\log_a x+\log_a y=\log_a xy$

② $\log_a x^n=n\log_a x$ (단, n은 실수)

1066 $a_k=3\cdot 9^{k-1}=3\cdot 3^{2k-2}=3^{2k-1}$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\log_3 a_k=\sum_{k=1}^{10}\log_3 3^{2k-1}=\sum_{k=1}^{10}(2k-1)$$
$$=2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-10=100$$

답 ③

1067
$$\sum_{n=1}^{10}\log a_n=\sum_{n=1}^{5}\log a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{5}\log a_{2n}$$
$$=\sum_{n=1}^{5}\log 2^n+\sum_{n=1}^{5}\log 5^n$$
$$=\sum_{n=1}^{5}n\log 2+\sum_{n=1}^{5}n\log 5$$
$$=\log 2\sum_{n=1}^{5}n+\log 5\sum_{n=1}^{5}n$$
$$=(\log 2+\log 5)\sum_{n=1}^{5}n$$
$$=\log 10\cdot\frac{5\cdot 6}{2}=15$$

답 ②

다른 풀이 $\sum_{n=1}^{10}\log a_n$

$$=\log a_1+\log a_2+\log a_3+\cdots+\log a_{10}$$
$$=\log(a_1a_2a_3\cdots a_{10})$$
$$=\log\{(a_1a_3a_5a_7a_9)(a_2a_4a_6a_8a_{10})\}$$
$$=\log\{(2^1\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot 2^4\cdot 2^5)(5^1\cdot 5^2\cdot 5^3\cdot 5^4\cdot 5^5)\}$$
$$=\log(2^{1+2+3+4+5}\cdot 5^{1+2+3+4+5})$$
$$=\log(2^{15}\cdot 5^{15})=\log 10^{15}=15$$

1068 $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\log\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

$$=\sum_{k=2}^{n}\log\frac{k^2-1}{k^2}=\sum_{k=2}^{n}\log\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

$$=\log\frac{1\cdot3}{2^2}+\log\frac{2\cdot4}{3^2}+\log\frac{3\cdot5}{4^2}+\cdots+\log\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$=\log\left\{\frac{1\cdot3}{2\cdot2}\cdot\frac{2\cdot4}{3\cdot3}\cdot\frac{3\cdot5}{4\cdot4}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}\right\}$$

$$=\log\frac{n+1}{2n}$$

한편 $\log 51-2=\log 51-\log 100=\log\frac{51}{100}$이므로

$$\frac{n+1}{2n}=\frac{51}{100}$$

$\therefore n=50$ 답 50

1069 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\log\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=\log 3$

(ii) $n\geq2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

$$=\log\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\log\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\log\left\{\frac{(n+1)(n+2)}{2}\cdot\frac{2}{n(n+1)}\right\}$$

$$=\log\frac{n+2}{n} \quad\cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=\log 3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=\log\frac{n+2}{n}$$

따라서 $a_{2k}=\log\frac{2k+2}{2k}=\log\frac{k+1}{k}$이므로

$$p=\sum_{k=1}^{20}\log\frac{k+1}{k}$$

$$=\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\cdots+\log\frac{21}{20}$$

$$=\log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{21}{20}\right)$$

$$=\log 21$$

$\therefore 10^p=10^{\log 21}=21$

답 ②

유형 11 분수의 꼴인 수열의 합

본책 160쪽

(i) 수열 $\{a_n\}$의 제 k 항 a_k를 부분분수로 변형한다.

➡ $\frac{1}{(k+a)(k+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{k+a}-\frac{1}{k+b}\right)$ (단, $a\neq b$)

(ii) $k=1, 2, 3, \cdots, n$을 차례대로 대입하여 주어진 식을 간단히 한다.

1070 수열 $\frac{1}{3^2-1}, \frac{1}{5^2-1}, \frac{1}{7^2-1}, \cdots, \frac{1}{25^2-1}$의 제 k 항을 a_k라 하면

$$a_k=\frac{1}{(2k+1)^2-1}=\frac{1}{4k^2+4k}$$

$$=\frac{1}{4k(k+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

이므로 주어진 수열의 합은

$$\sum_{k=1}^{12}a_k=\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{13}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{13}\right)=\frac{3}{13}$$

따라서 $p=13$, $q=3$이므로 $p+q=16$ 답 16

1071 $\displaystyle a_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{k(k+1)}$$

$$=3\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=3\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=3\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3n}{n+1}$$

따라서 $a_m=\frac{3m}{m+1}=\frac{120}{41}$이므로

$41m=40(m+1)$ $\therefore m=40$ 답 40

1072 $\displaystyle a_n=\frac{n^3+n^2+3}{n^2+n}=\frac{n^2(n+1)+3}{n(n+1)}$

$$=n+\frac{3}{n(n+1)}=n+3\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\left\{k+3\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}k+3\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{10\cdot11}{2}+3\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$

$$=55+3\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{635}{11}$$

답 ③

1073 $(g\circ f)(n)=g(f(n))=g(n+1)$

$$=(2n+2-1)(2n+2+1)$$

$$=(2n+1)(2n+3) \quad\cdots ❶$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{15}\frac{12}{(g\circ f)(n)}=\sum_{n=1}^{15}\frac{12}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=6\sum_{n=1}^{15}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right) \quad\cdots ❷$$

$$=6\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{31}-\frac{1}{33}\right)\right\}$$
$$=6\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{33}\right)$$
$$=\frac{20}{11}$$ ··· ❸

답 $\frac{20}{11}$

채점 기준	비율
❶ $(g\circ f)(n)$을 간단히 할 수 있다.	30 %
❷ 부분분수로 변형할 수 있다.	20 %
❸ 답을 구할 수 있다.	50 %

1074 $S_n=n^2+2n$에서

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=3$

(ii) $n\geq2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$$
$$=2n+1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=2n+1$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{n}{3(2n+3)}$$

답 ⑤

1075 자연수 k에 대하여

$$f(k^2)=\frac{1}{k^2+\sqrt{4k^2}}=\frac{1}{k^2+2k}=\frac{1}{k(k+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

이므로

$$f(1)+f(4)+f(9)+\cdots+f(64)$$
$$=\sum_{k=1}^{8}f(k^2)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{58}{45}=\frac{29}{45}$$

답 $\frac{29}{45}$

유형 12 근호가 포함된 수열의 합 (본책 161쪽)

(i) 수열 $\{a_n\}$의 제k항 a_k의 분모를 유리화한다.

$$\Rightarrow a_k=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+c}}=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+c}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+c})(\sqrt{k}-\sqrt{k+c})}$$
$$=\frac{1}{c}(\sqrt{k+c}-\sqrt{k}) \text{ (단, } c\neq0)$$

(ii) $k=1, 2, 3, \cdots, n$을 차례대로 대입하여 주어진 식을 간단히 한다.

1076 수열 $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{48}+\sqrt{49}}$의 제$k$항을 a_k라 하면

$$a_k=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}$$
$$=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2})}$$
$$=\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}$$

주어진 식은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 47 항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{47}a_k=\sum_{k=1}^{47}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$$
$$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{48})$$
$$=\sqrt{49}-\sqrt{2}=7-\sqrt{2}$$

답 ②

1077 $a_n=9+2(n-1)=2n+7$이므로

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}=\sum_{k=1}^{20}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{(\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k})(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})}$$
$$=\sum_{k=1}^{20}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}$$
$$=\sum_{k=1}^{20}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})+(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2})+\cdots+(\sqrt{a_{21}}-\sqrt{a_{20}})\}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{a_{21}}-\sqrt{a_1})$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2\cdot21+7}-\sqrt{9})$$
$$=\frac{1}{2}(7-3)=2$$

답 ②

1078 $a_k=\sqrt{k+2}+\sqrt{k}$이므로 ··· ❶

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{2(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$$
$$=-1-\sqrt{2}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$$ ··· ❷

따라서 $-1-\sqrt{2}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}=2+\sqrt{2}$이므로

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}=3+2\sqrt{2}=\sqrt{9}+\sqrt{8}$$
$$\therefore n=7$$ ··· ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ a_k를 구할 수 있다.	20 %
❷ $\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{a_k}$를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❸ n의 값을 구할 수 있다.	20 %

1079 $P_k(k,\ \sqrt{k+1})$, $Q_k(k,\ -\sqrt{k})$에서

$\overline{P_kQ_k}=\sqrt{k+1}+\sqrt{k}$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{48}\frac{1}{\overline{P_kQ_k}}&=\sum_{k=1}^{48}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\\&=\sum_{k=1}^{48}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}\\&=\sum_{k=1}^{48}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\\&=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{48})\\&=\sqrt{49}-1=7-1=6\end{aligned}$$

답 6

유형 13~14 수열의 항을 묶어 규칙 찾기

본책 161, 162쪽

(i) 주어진 수열을 규칙성을 갖도록 묶는다.
(ii) 각 묶음의 항의 개수와 규칙성을 조사한다.

1080 주어진 수열을

$(1),\ (-2,\ -1),\ (3,\ 2,\ 1),\ (-4,\ -3,\ -2,\ -1),$
$(5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1),\ \cdots$

과 같이 묶으면 처음으로 나타나는 20은 21번째 묶음의 2번째 항이다. 이때 n번째 묶음의 항의 개수는 n이므로 첫 번째 묶음부터 20번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{20}k=\frac{20\cdot21}{2}=210$$

따라서 $210+2=212$이므로 처음으로 나타나는 20은 제 212 항이다.

답 ②

1081 주어진 수열을

$(11),\ (101,\ 110),\ (1001,\ 1010,\ 1100),\ \cdots$

과 같이 묶으면 n번째 묶음은 $(n+1)$자리 수이므로 10010000은 7번째 묶음의 5번째 항이다.
이때 n번째 묶음의 항의 개수는 n이므로 첫 번째 묶음부터 6번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{6}k=\frac{6\cdot7}{2}=21$$

따라서 $21+5=26$이므로 10010000은 제 26 항이다.

답 제 26 항

1082 주어진 수열을

$$\left(\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right),\ \left(\frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4}\right),\ \left(\frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right),\ \cdots$$

와 같이 분모가 같은 항끼리 묶으면 n번째 묶음의 항의 개수는 n이므로 첫 번째 묶음부터 n번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

$n=11$일 때, $\frac{11\cdot12}{2}=66$이므로 제 64 항은 11번째 묶음의 끝에서 3번째 항이다.
이때 11번째 묶음은 $\frac{1}{12},\ \frac{2}{12},\ \frac{3}{12},\ \cdots,\ \frac{9}{12},\ \frac{10}{12},\ \frac{11}{12}$이므로 제 64 항은 $\frac{9}{12}$이다.

답 $\frac{9}{12}$

1083 주어진 수열을

$\{(1,\ 1)\},\ \{(1,\ 2),\ (2,\ 1)\},\ \{(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)\},$
$\{(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)\},\ \cdots$

과 같이 두 수의 합이 같은 순서쌍끼리 묶으면 n번째 묶음의 순서쌍의 두 수의 합은 $n+1$이므로 $(10,\ 11)$은 20번째 묶음의 10번째 항이다.
이때 n번째 묶음의 항의 개수는 n이므로 첫 번째 묶음부터 19번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{19}k=\frac{19\cdot20}{2}=190$$

따라서 $190+10=200$이므로 $(10,\ 11)$은 제 200 항이다.

답 ③

1084 위에서 k번째 줄에 나열된 수들은 첫째항이 k이고 공차가 k, 항수가 k인 등차수열을 이루므로 위에서 k번째 줄에 나열된 수의 합은

$$\frac{k\{2k+(k-1)k\}}{2}=\frac{k^3+k^2}{2}$$

따라서 첫 번째 줄부터 10번째 줄까지 나열된 모든 수의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}\frac{k^3+k^2}{2}&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{10\cdot11}{2}\right)^2+\frac{10\cdot11\cdot21}{6}\right\}\\&=\frac{1}{2}(3025+385)=1705\end{aligned}$$

답 1705

1085 위에서 m번째 줄의 왼쪽에서 n번째에 있는 수는 mn이고 400은 대각선 위의 수이므로 $400=20^2$에서 400은 20번째 줄의 왼쪽에서 20번째에 있는 수이다.
따라서 a는 19번째 줄의 왼쪽에서 19번째에 있는 수, b는 19번째 줄의 왼쪽에서 20번째에 있는 수, c는 20번째 줄의 왼쪽에서 19번째에 있는 수이므로

$a=19^2=361,\ b=19\cdot20=380,\ c=20\cdot19=380$

$$\begin{aligned}\therefore b+c-a&=380+380-361\\&=399\end{aligned}$$

답 ⑤

다른 풀이 위에서 m번째 줄에 나열된 수들은 첫째항이 m이고, 공차가 m인 등차수열이다.
이때 c와 400은 20번째 줄에 차례대로 나열되었으므로

$400-c=20 \qquad \therefore c=380$

$a,\ b$는 19번째 줄에 차례대로 나열되었으므로

$b-a=19$

$\therefore b+c-a=19+380=399$

1086 위에서 k번째 줄에 나열된 수의 개수는 $2k-1$이므로 위에서 14번째 줄까지 나열된 수의 개수는

$$\sum_{k=1}^{14}(2k-1)=2\cdot\frac{14\cdot15}{2}-14=196$$

이때 $196=5\cdot39+1$이므로 위에서 15번째 줄에 나열된 수는 4, 6, 8, 10, 2의 순서로 반복된다.
한편 위에서 15번째 줄에 나열된 수의 개수는 $2\cdot15-1=29$이고 $29=5\cdot5+4$이므로 나열된 모든 수의 합은

$$(4+6+8+10+2)\cdot5+(4+6+8+10)=178$$

답 178

1087 전략 먼저 $\sqrt{n}$이 자연수가 되는 n의 값을 구한다.

풀이 $\sqrt{n}$이 자연수가 되는 n의 값은 1, 4, 9, 16, $\cdots$이므로

$$a_1=1,\ a_4=2,\ a_9=3,\ a_{16}=4,\ \cdots$$

이고 나머지 항들은 모두 0이다. 즉

$$\sum_{k=1}^{1}a_k=\sum_{k=1}^{2}a_k=\sum_{k=1}^{3}a_k=1$$
$$\sum_{k=1}^{4}a_k=\sum_{k=1}^{5}a_k=\cdots=\sum_{k=1}^{8}a_k=1+2$$
$$\sum_{k=1}^{9}a_k=\sum_{k=1}^{10}a_k=\cdots=\sum_{k=1}^{15}a_k=1+2+3$$
$$\vdots$$

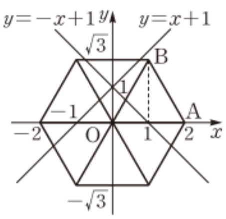
따라서 i가 50 이하의 자연수일 때 $\sum_{k=1}^{i}a_k<\sum_{k=1}^{i+1}a_k$를 만족시키는 i의 최댓값은 48이므로 $m=48$

$$\therefore \sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{48}a_k=1+2+3+4+5+6=21$$
$$\therefore m+\sum_{k=1}^{m}a_k=69$$

답 69

1088 전략 정삼각형의 한 내각의 크기는 60°이므로 정삼각형을 6번 회전시킨 정삼각형은 정삼각형 OAB와 일치한다.

풀이 정삼각형 OAB를 원점 O를 중심으로 시곗바늘이 도는 반대 방향으로 $60^\circ\times n$만큼 회전시킨 정삼각형과 직선 $y=(-1)^nx+1$은 오른쪽 그림과 같다.



즉

$$a_1=2,\ a_2=2,\ a_3=0,\ a_4=0,$$
$$a_5=2,\ a_6=0,\ \cdots$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{50}a_n=8(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)+a_{49}+a_{50}$$
$$=8\cdot6+2+2=52$$

답 52

1089 전략 $\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)$임을 이용한다.

풀이 $(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+(a_5-a_6)+\cdots+(a_{39}-a_{40})$

$$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{39})-(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{40})$$
$$=\sum_{k=1}^{20}(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)-\sum_{k=1}^{20}(-1)^{k}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{20}(-1)^{k+1}\left\{\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)+\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{20}(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{21}\right)$$
$$=1-\frac{1}{21}=\frac{20}{21}$$

따라서 $p=21$, $q=20$이므로

$$p+q=41$$

답 41

1090 전략 $n=2, 3, 4, \cdots$일 때 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 조건 (나)에서 두 점 $(0, 1)$, (a, n^a)을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{n^a-1}{a}$이므로 $\quad \frac{n^a-1}{a}>4$

조건 (가)에서 $a\geq2$이므로 $\quad n^a>4a+1$

(ⅰ) $n=2$일 때, $2^a>4a+1$에서
$\quad a\geq5 \quad \therefore f(2)=5$

(ⅱ) $n=3$일 때, $3^a>4a+1$에서
$\quad a\geq3 \quad \therefore f(3)=3$

(ⅲ) $n\geq4$일 때,
$\quad n^2>4\cdot2+1$이므로 $\quad f(n)=2$

$$\therefore \sum_{n=2}^{40}f(n)=f(2)+f(3)+\sum_{n=4}^{40}f(n)$$
$$=5+3+\sum_{n=4}^{40}2$$
$$=8+2\cdot37=82$$

답 82

1091 전략 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항은 $a+(n-1)d$임을 이용한다.

풀이 $a_n=a+a(n-1)=an$이고

$$\sum_{k=1}^{n}3(k^2+k)=3\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$=3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6}$$
$$=n(n+1)(n+2)$$

이므로 $a_n+nb_n=\sum_{k=1}^{n}3(k^2+k)$에서

$$a_n+nb_n=n(n+1)(n+2),\qquad nb_n=n(n+1)(n+2)-an$$
$$\therefore b_n=(n+1)(n+2)-a$$
$$=n^2+3n+2-a$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{10}b_k=\sum_{k=1}^{10}(k^2+3k+2-a)$$
$$=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+3\cdot\frac{10\cdot11}{2}+10(2-a)$$
$$=570-10a$$

따라서 $570-10a=170$에서 $\quad 10a=400 \quad \therefore a=40$
즉 $a_n=an=40n$이므로 $a_n\leq1000$에서

$$40n\leq1000 \qquad \therefore n\leq25$$

따라서 자연수 n의 최댓값은 25이다.

답 25

1092 전략 두 점 (a, b), (c, d)를 지나는 직선의 방정식은 $y=\frac{d-b}{c-a}(x-a)+b$임을 이용한다.

풀이 두 점 $B(1, 0)$, $C(2^m, m)$을 지나는 직선의 방정식은

09 수열의 합

$y=\frac{m}{2^m-1}(x-1)$

이므로 점 D의 좌표는 $\left(2^n, \frac{m(2^n-1)}{2^m-1}\right)$

$\triangle$ABD의 넓이가 $\frac{m}{2}$보다 작거나 같으므로

$\frac{1}{2}(2^n-1)\cdot\frac{m(2^n-1)}{2^m-1}\le\frac{m}{2}$

$\therefore (2^n-1)^2\le 2^m-1$

(i) $n=1$일 때,

$1\le 2^m-1,\quad 2^m\ge 2$

즉 $m\ge 1$이므로 $a_1=1$

(ii) $n=2$일 때,

$3^2\le 2^m-1,\quad 2^m\ge 10$

즉 $m\ge 4$이므로 $a_2=4$

(iii) $n=3$일 때,

$7^2\le 2^m-1,\quad 2^m\ge 50$

즉 $m\ge 6$이므로 $a_3=6$

(iv) $n=4$일 때,

$15^2\le 2^m-1,\quad 2^m\ge 226$

즉 $m\ge 8$이므로 $a_4=8$

이상에서 $a_1=1,\ a_n=2n\ (n\ge 2)$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}a_n=1+\sum_{n=2}^{10}2n=1+\sum_{n=1}^{10}2n-2$

$=2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-1=109$

답 ①

1093 전략 주어진 등식의 좌변을 Σ를 사용하여 나타낸 후 $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2$임을 이용한다.

풀이 $(1^3-2)+(2^3-4)+(3^3-6)+\cdots+(n^3-2n)$

$=\sum_{k=1}^{n}(k^3-2k)=\sum_{k=1}^{n}k^3-2\sum_{k=1}^{n}k=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2-2\sum_{k=1}^{n}k$

이므로 $\sum_{k=1}^{n}k=t$로 놓으면 주어진 등식은

$t^2-2t=44^2-1,\quad t^2-2t-(44-1)(44+1)=0$

$(t+43)(t-45)=0\quad \therefore t=45\ (\because t>0)$

$\sum_{k=1}^{n}k=45$에서 $\frac{n(n+1)}{2}=45$

$n(n+1)=90,\quad n^2+n-90=0$

$(n+10)(n-9)=0$

$\therefore n=9\ (\because n$은 자연수$)$

답 9

1094 전략 $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$일 때 $f(n)$의 값을 구하여 규칙을 찾는다.

풀이 $n=2$일 때, $\{3,\ 3^3\}$이므로

$S=\{3^4\}\quad \therefore f(2)=1$

$n=3$일 때, $\{3,\ 3^3,\ 3^5\}$이므로

$S=\{3^4,\ 3^6,\ 3^8\}\quad \therefore f(3)=3$

$n=4$일 때, $\{3,\ 3^3,\ 3^5,\ 3^7\}$이므로

$S=\{3^4,\ 3^6,\ 3^8,\ 3^{10},\ 3^{12}\}\quad \therefore f(4)=5$

$\vdots$

$n=k$일 때, $\{3,\ 3^3,\ 3^5,\ \cdots,\ 3^{2k-1}\}$이므로

$S=\{3^4,\ 3^6,\ 3^8,\ \cdots,\ 3^{4(k-1)}\}$

$\therefore f(k)=2(k-1)-1=2k-3\ (k\ge 2)$

$\therefore \sum_{n=2}^{11}f(n)=\sum_{n=2}^{11}(2n-3)=\sum_{n=1}^{10}(2n-1)$

$=2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-10=100$

답 100

1095 전략 $\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k=a_n\ (n\ge 2)$임을 이용한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{n}(2a_k+b_k)=n^3+2n^2+n$에서

(i) $n=1$일 때, $2a_1+b_1=4$

(ii) $n\ge 2$일 때,

$2a_n+b_n$

$=\sum_{k=1}^{n}(2a_k+b_k)-\sum_{k=1}^{n-1}(2a_k+b_k)$

$=n^3+2n^2+n-\{(n-1)^3+2(n-1)^2+(n-1)\}$

$=3n^2+n$ …… ㉠

이때 $2a_1+b_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$2a_n+b_n=3n^2+n$ …… ㉡

$\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=-2n^2-2n$에서

(iii) $n=1$일 때, $a_1-b_1=-4$

(iv) $n\ge 2$일 때,

$a_n-b_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)-\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-b_k)$

$=-2n^2-2n-\{-2(n-1)^2-2(n-1)\}$

$=-4n$ …… ㉢

이때 $a_1-b_1=-4$는 ㉢에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n-b_n=-4n$ …… ㉣

㉡, ㉣을 연립하여 풀면

$a_n=n^2-n,\ b_n=n^2+3n$

$\therefore \sum_{k=1}^{5}(b_k^2-a_k^2)=\sum_{k=1}^{5}\{(k^2+3k)^2-(k^2-k)^2\}$

$=\sum_{k=1}^{5}(8k^3+8k^2)$

$=8\cdot\left(\frac{5\cdot 6}{2}\right)^2+8\cdot\frac{5\cdot 6\cdot 11}{6}$

$=1800+440=2240$

답 ③

1096 전략 $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 63$을 대입한 후 로그의 성질을 이용하여 계산한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{63}(-1)^k\log_4\frac{1}{k(k+1)}$

$=-\log_4\frac{1}{1\cdot 2}+\log_4\frac{1}{2\cdot 3}-\log_4\frac{1}{3\cdot 4}+\log_4\frac{1}{4\cdot 5}$

$-\cdots+\log_4\frac{1}{62\cdot 63}-\log_4\frac{1}{63\cdot 64}$

$=\log_4(1\cdot 2)+\log_4\frac{1}{2\cdot 3}+\log_4(3\cdot 4)+\log_4\frac{1}{4\cdot 5}$

$+\cdots+\log_4\frac{1}{62\cdot 63}+\log_4(63\cdot 64)$

$=\log_4\left(1\cdot2\cdot\frac{1}{2\cdot3}\cdot3\cdot4\cdot\frac{1}{4\cdot5}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{62\cdot63}\cdot63\cdot64\right)$

$=\log_4 64=3$ 답 ⑤

1097 전략 두 점 P_n, Q_n의 좌표를 이용하여 a_n을 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 점 P_n은 직선 $x=n$과 함수 $y=x^2-2x$의 그래프의 교점이므로 $P_n(n,\ n^2-2n)$

따라서 점 Q_n의 y좌표가 n^2-2n이고, 점 Q_n은 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프 위의 점이므로 $n^2-2n=\frac{2}{x}$에서

$$x=\frac{2}{n^2-2n} \qquad \therefore a_n=\frac{2}{n(n-2)}$$

$$\therefore \sum_{n=3}^{12}a_n=\sum_{n=3}^{12}\frac{2}{n(n-2)}=\sum_{n=3}^{12}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)$$
$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}=\frac{175}{132}$$

답 $\frac{175}{132}$

1098 전략 주어진 수열에서 분모가 같은 것끼리 묶는다.

풀이 주어진 수열을

$$\left(\frac{1}{2^2}, \frac{3}{2^2}\right), \left(\frac{1}{2^3}, \frac{3}{2^3}, \frac{5}{2^3}, \frac{7}{2^3}\right),$$
$$\left(\frac{1}{2^4}, \frac{3}{2^4}, \frac{5}{2^4}, \cdots, \frac{15}{2^4}\right), \cdots$$

와 같이 분모가 같은 것끼리 묶으면 n번째 묶음의 항의 개수는 2^n이므로 첫 번째 묶음부터 n번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{n}2^k=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-2$$

$n=6$일 때 $2^7-2=126$이므로 첫 번째 묶음부터 6번째 묶음까지의 항의 개수가 126이다. 즉 구하는 합은 첫 번째 묶음부터 6번째 묶음까지의 합이다.

n번째 묶음의 분자의 합은

$$\sum_{k=1}^{2^n}(2k-1)=2\cdot\frac{2^n(2^n+1)}{2}-2^n=2^{2n}$$

이므로 n번째 묶음의 항의 합은

$$\frac{2^{2n}}{2^{n+1}}=\frac{2^n\cdot2^n}{2^n\cdot2}=\frac{2^n}{2}=2^{n-1}$$

따라서 구하는 합은

$$\sum_{n=1}^{6}2^{n-1}=\frac{2^6-1}{2-1}=63$$

답 63

1099 전략 주어진 식에 n 대신 $n-1$을 대입한다.

풀이 $na_1+(n-1)a_2+(n-2)a_3+\cdots+2a_{n-1}+a_n$
$=n^3-n^2+n$ …… ㉠

㉠에 n 대신 $n-1$을 대입하면

$(n-1)a_1+(n-2)a_2+(n-3)a_3+\cdots+2a_{n-2}+a_{n-1}$
$=(n-1)^3-(n-1)^2+(n-1)\ (n\ge2)$ …… ㉡ ⋯ ❶

㉠−㉡을 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n=3n^2-5n+3\ (n\ge2)$ ⋯ ❷

이때 $a_1=1$이므로 $\sum_{k=1}^{n}a_k=3n^2-5n+3$

$\therefore \sum_{k=1}^{20}a_k=3\cdot20^2-5\cdot20+3=1103$ ⋯ ❸

답 1103

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식에 n 대신 $n-1$을 대입할 수 있다.	30 %
❷ $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ $\sum_{k=1}^{20}a_k$의 값을 구할 수 있다.	30 %

1100 전략 $10\in A_n$을 만족시키는 n의 값의 범위를 구하여 n의 값에 따른 a_n을 구한다.

풀이 $(x-\sqrt{n})(x-n^2)\le0$에서 $\sqrt{n}\le x\le n^2$

$\therefore A_n=\{x\,|\,\sqrt{n}\le x\le n^2,\ n$은 자연수$\}$

$10\in A_n$인 n의 값의 범위를 구하면

$\sqrt{n}\le10\le n^2$ ⋯ ❶

$10\le n^2$에서 $n\ge4$ ($\because$ n은 자연수)

$\sqrt{n}\le10$에서 $n\le100$

$$\therefore a_n=\begin{cases}1 & (4\le n\le100)\\ -1 & (1\le n\le3 \text{ 또는 } n\ge101)\end{cases}$$ ⋯ ❷

따라서 S_n은 $n=100$일 때 최대이고 최댓값은

$-1\cdot3+1\cdot97=94$ ⋯ ❸

답 94

채점 기준	비율
❶ $10\in A_n$일 조건을 구할 수 있다.	30 %
❷ a_n을 구할 수 있다.	30 %
❸ S_n의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

1101 전략 $n>m$일 때, $a_m+a_{m+1}+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{m-1}a_k$임을 이용한다.

풀이 $f(n)=\sum_{k=1}^{n}a_k$이므로

$$a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{20}=\sum_{k=m}^{20}a_k$$
$$=\sum_{k=1}^{20}a_k-\sum_{k=1}^{m-1}a_k$$
$$=f(20)-f(m-1)$$ ⋯ ❶

$f(20)-f(m-1)>0$에서 $f(20)=0$이므로

$f(m-1)<0$

주어진 그래프에서 $4<m-1<20$

$\therefore 5<m<21$

따라서 자연수 m의 최솟값은 6이므로

$p=6$ ⋯ ❷

또 $f(m-1)$의 값이 최소일 때 $f(20)-f(m-1)$의 값이 최대이므로 주어진 그래프에서 $f(20)-f(m-1)$의 최댓값은

$f(20)-f(12)=-f(12)$

즉 $m-1=12$에서 $m=13$이므로　　$q=13$ ··· ❸

$\therefore p+q=19$ ··· ❹

답 19

채점 기준	비율
❶ $a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{20}$의 값을 함숫값으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ p의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ q의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1102 전략 $n=1, 2, 3, \cdots$일 때 a_n, b_n의 지수의 규칙을 찾는다.

풀이 $1+\dfrac{n(n+1)}{2}$의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면 그 값은

$$2,\ 4,\ 7,\ 11,\ 16,\ 22,\ 29,\ 37,\ \cdots$$

이므로 수열 $\{a_n\}$은

$$1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ \cdots$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{20} ka_k &= (1+2-3-4)+(5+6-7-8)\\ &\quad +\cdots+(17+18-19-20)\\ &=(-4)+(-4)+(-4)+(-4)+(-4)\\ &=-20\end{aligned}$$ ··· ❶

$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면 그 값은

$$1,\ 5,\ 14,\ 30,\ 55,\ 91,\ 140,\ 204,\ \cdots$$

이므로 수열 $\{b_n\}$은

$$-1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ \cdots$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{20} k^2b_k &= (-1^2-2^2+3^2+4^2)+(-5^2-6^2+7^2+8^2)\\ &\quad +\cdots+(-17^2-18^2+19^2+20^2)\\ &=(3+1)(3-1)+(4+2)(4-2)\\ &\quad +(7+5)(7-5)+(8+6)(8-6)\\ &\quad +\cdots+(19+17)(19-17)+(20+18)(20-18)\\ &=2(1+2+3+\cdots+20)\\ &=2\cdot\frac{20\cdot 21}{2}=420\end{aligned}$$ ··· ❷

$$\therefore \sum_{k=1}^{20}(ka_k+k^2b_k)=-20+420=400$$ ··· ❸

답 400

채점 기준	비율
❶ $\sum\limits_{k=1}^{20} ka_k$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sum\limits_{k=1}^{20} k^2b_k$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\sum\limits_{k=1}^{20}(ka_k+k^2b_k)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1103 전략 수열의 제 10 항의 분자, 분모를 각각 구한다.

풀이 제 10 항의 분자는 $1+3+5+\cdots+21$이므로

$$\sum_{k=1}^{11}(2k-1)=2\cdot\frac{11\cdot 12}{2}-11=121$$ ··· ❶

제 10 항의 분모는 $21+23+25+\cdots+41$이므로

$$\sum_{k=1}^{11}(2k+19)=2\cdot\frac{11\cdot 12}{2}+19\cdot 11=341$$ ··· ❷

따라서 제 10 항은 $\dfrac{121}{341}=\dfrac{11}{31}$이므로

$p=31$, $q=11$　　$\therefore p+q=42$ ··· ❸

답 42

채점 기준	비율
❶ 제10항의 분자를 구할 수 있다.	40 %
❷ 제10항의 분모를 구할 수 있다.	40 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

참고 제 n 항의 분자는 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제$(n+1)$항까지의 합이므로

$$\frac{(n+1)\{2\cdot 1+(n+1-1)\cdot 2\}}{2}=(n+1)^2$$

제 n 항의 분모는 첫째항이 $2n+1$, 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제$(n+1)$항까지의 합이므로

$$\frac{(n+1)\{2(2n+1)+(n+1-1)\cdot 2\}}{2}=(n+1)(3n+1)$$

1104 전략 수열의 일반항을 부분분수로 변형하여 나타낸다.

풀이 수열 $\dfrac{1}{4\cdot 1^2-1}$, $\dfrac{1}{4\cdot 2^2-1}$, $\dfrac{1}{4\cdot 3^2-1}$, …의 제 k 항을 a_k라 하면

$$\begin{aligned}a_k&=\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\end{aligned}$$ ··· ❶

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{n}a_k&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\right.\\ &\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}\\ &=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}\end{aligned}$$ ··· ❷

주어진 부등식에서

$$\frac{n}{2n+1}>0.49,\qquad \frac{n}{2n+1}>\frac{49}{100}$$

$$100n>98n+49,\qquad 2n>49$$

$$\therefore n>24.5$$

따라서 자연수 n의 최솟값은 25이다. ··· ❸

답 25

채점 기준	비율
❶ a_k를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$를 구할 수 있다.	40 %
❸ n의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

Ⅲ. 수열

10 수학적 귀납법

1105 $a_{n+1}=a_n+(-1)^n$에서
$a_2=a_1+(-1)=10-1=9$
$a_3=a_2+(-1)^2=9+1=10$
$a_4=a_3+(-1)^3=10-1=9$
$\therefore a_5=a_4+(-1)^4=9+1=10$
답 10

1106 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$에서
$a_3=a_2+a_1=2+1=3$
$a_4=a_3+a_2=3+2=5$
$\therefore a_5=a_4+a_3=5+3=8$
답 8

1107 $a_{n+2}=a_{n+1}a_n$에서
$a_3=a_2a_1=3\cdot(-1)=-3$
$a_4=a_3a_2=(-3)\cdot3=-9$
$\therefore a_5=a_4a_3=(-9)\cdot(-3)=27$
답 27

1108 $a_{n+1}-a_n=-1$에서 주어진 수열은 공차가 -1인 등차수열이다. 이때 첫째항이 $a_1=2$이므로
$a_n=2+(n-1)\cdot(-1)=-n+3$
답 $a_n=-n+3$

1109 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 주어진 수열은 등차수열이고,
$a_1=1,\ a_2-a_1=3-1=2$
이므로 첫째항이 1, 공차가 2이다.
$\therefore a_n=1+(n-1)\cdot2=2n-1$
답 $a_n=2n-1$

1110 $a_{n+1}=-5a_n$에서 주어진 수열은 공비가 -5인 등비수열이다. 이때 첫째항이 $a_1=2$이므로
$a_n=2\cdot(-5)^{n-1}$
답 $a_n=2\cdot(-5)^{n-1}$

1111 ${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$에서 주어진 수열은 등비수열이고,
$a_1=1,\ a_2\div a_1=4\div1=4$
이므로 첫째항이 1, 공비가 4이다.
$\therefore a_n=1\cdot4^{n-1}=4^{n-1}$
답 $a_n=4^{n-1}$

1112 $a_{n+1}=a_n+n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 9를 차례대로 대입하면
$a_2=a_1+1$
$a_3=a_2+2=a_1+1+2$
$a_4=a_3+3=a_1+1+2+3$
⋮
$a_{10}=a_9+9=a_1+1+2+\cdots+9$
$=1+45=46$
답 46

1113 $a_{n+1}-a_n=3^n$, 즉 $a_{n+1}=a_n+3^n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 9를 차례대로 대입하면
$a_2=a_1+3$
$a_3=a_2+3^2=a_1+3+3^2$
$a_4=a_3+3^3=a_1+3+3^2+3^3$
⋮
$a_{10}=a_9+3^9=a_1+3+3^2+\cdots+3^9$
$=3+\dfrac{3(3^9-1)}{3-1}=\dfrac{3^{10}+3}{2}$
답 $\dfrac{3^{10}+3}{2}$

1114 $a_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 9를 차례대로 대입하면
$a_2=\dfrac{1}{2}a_1$
$a_3=\dfrac{2}{3}a_2=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}a_1=\dfrac{1}{3}a_1$
$a_4=\dfrac{3}{4}a_3=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{3}a_1=\dfrac{1}{4}a_1$
⋮
$a_{10}=\dfrac{9}{10}a_9=\dfrac{1}{10}a_1=\dfrac{2}{5}$
답 $\dfrac{2}{5}$

1115 $a_{n+1}=2^na_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 9를 차례대로 대입하면
$a_2=2a_1$
$a_3=2^2a_2=2^2\cdot2a_1$
$a_4=2^3a_3=2^3\cdot2^2\cdot2a_1$
⋮
$a_{10}=2^9a_9=2^9\cdot2^8\cdot2^7\cdot\cdots\cdot2a_1$
$=2^{1+2+3+\cdots+9}=2^{45}$
답 2^{45}

1116 명제 $p(n)$이 $n=2,\ 4,\ 8,\ \cdots,\ 2^m,\ \cdots$ (m은 자연수)일 때 성립함을 보이려면
(i) $n=\boxed{2}$일 때, $p(n)$이 성립함을 보인다.
(ii) $4=2\cdot2,\ 8=2\cdot4,\ 16=2\cdot8,\ \cdots,\ 2^m=2\cdot2^{m-1}$이므로 $n=k$ $(k\geq2)$일 때 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=\boxed{2k}$일 때도 $p(n)$이 성립함을 보인다.
답 (가) 2 (나) $2k$

1117 (ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$
위의 식의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$
$=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$
$=\dfrac{(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}}{6}$
$=\dfrac{(k+1)(\boxed{2k^2+7k+6})}{6}$
$=\dfrac{\boxed{(k+1)(k+2)(2k+3)}}{6}$
따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
답 (가) $2k^2+7k+6$ (나) $(k+1)(k+2)(2k+3)$

1118 (i) $n=1$일 때,
(좌변)$=1$, (우변)$=1^2=1$
따라서 주어진 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$

앞의 식의 양변에 $2k+1$을 더하면

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1$$
$$=(k+1)^2$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

답 풀이 참조

유형 01 등차수열의 귀납적 정의 본책 168쪽

수열 $\{a_n\}$에서

$a_{n+1}-a_n=d$ 또는 $a_{n+1}=a_n+d$ 또는 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

➡ 수열 $\{a_n\}$은 등차수열

1119 $a_{n+1}-a_n=-3$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 -3인 등차수열이다. 이때 첫째항이 $a_1=100$이므로

$a_n=100+(n-1)\cdot(-3)=-3n+103$

$a_k=13$에서 $\quad -3k+103=13$

$3k=90 \qquad \therefore k=30$

답 ③

1120 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$, 즉 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$a_8=a+7d=17 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-4,\ d=3$

$\therefore a_n=-4+(n-1)\cdot 3=3n-7$

$3n-7>100$에서 $\quad 3n>107$

$\therefore n>35.\cdots$

따라서 구하는 n의 최솟값은 36이다.

답 ⑤

1121 $(a_{n+1}+a_n)^2=4a_na_{n+1}+25$에서

$a_{n+1}^{\ 2}+2a_na_{n+1}+a_n^{\ 2}=4a_na_{n+1}+25$

$a_{n+1}^{\ 2}-2a_na_{n+1}+a_n^{\ 2}=25$

$(a_{n+1}-a_n)^2=25$

이때 $a_n<a_{n+1}$이므로

$a_{n+1}-a_n=5 \qquad$ ··· ❶

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 10, 공차가 5인 등차수열이므로

$a_n=10+(n-1)\cdot 5=5n+5 \qquad$ ··· ❷

$\therefore a_{20}=5\cdot 20+5=105 \qquad$ ··· ❸

답 105

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	40 %
❷ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❸ a_{20}을 구할 수 있다.	20 %

1122 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$, 즉 $2a_{n+1}=a_{n+2}+a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고

$a_1=-62,\ a_2-a_1=-58-(-62)=4$

이므로 첫째항이 -62, 공차가 4이다.

$\therefore a_n=-62+(n-1)\cdot 4=4n-66$

$4n-66>0$에서 $\quad n>16.5$

따라서 제 17 항부터 양수이므로 첫째항부터 제 16 항까지의 합이 최소가 된다.
└ 음수인 항만 더한 것이다.

답 ②

유형 02 등비수열의 귀납적 정의 본책 168쪽

수열 $\{a_n\}$에서

$a_{n+1}\div a_n=r$ 또는 $a_{n+1}=ra_n$ 또는 $a_{n+1}^{\ 2}=a_na_{n+2}$

➡ 수열 $\{a_n\}$은 등비수열

1123 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

이때 $a_1=2$이므로

$a_n=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-2}}$

따라서 $a_{100}=\frac{1}{2^{98}}$이므로 $\qquad k=98$

답 98

1124 $a_{n+1}=\sqrt{a_na_{n+2}}$, 즉 $a_{n+1}^{\ 2}=a_na_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고 첫째항이 $a_1=1$이므로 공비를 r라 하면

$a_4=1\cdot r^3=125 \qquad \therefore r=5$

따라서 $\frac{a_{10}}{a_6}=\frac{a_{11}}{a_7}=\frac{a_{12}}{a_8}=\frac{a_{13}}{a_9}=r^4=625$이므로

$\frac{a_{10}}{a_6}+\frac{a_{11}}{a_7}+\frac{a_{12}}{a_8}+\frac{a_{13}}{a_9}=4\cdot 625=2500$

답 2500

1125 이차방정식 $a_nx^2+2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a_{n+1}^{\ 2}-a_na_{n+2}=0$

$\therefore a_{n+1}^{\ 2}=a_na_{n+2} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

따라서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고

$a_1=2,\ \frac{a_2}{a_1}=\frac{6}{2}=3$

이므로 첫째항이 2, 공비가 3이다.

한편 주어진 이차방정식에서 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-a_{n+1}\pm\sqrt{a_{n+1}^{\ 2}-a_na_{n+2}}}{a_n}$

$=-\frac{a_{n+1}}{a_n}\ (\because ㉠)$

$=-3$ (중근)

즉 $b_n=-3$이므로

$\sum_{k=1}^{10}b_k=\sum_{k=1}^{10}(-3)=-3\cdot 10=-30$

답 ①

1126 $\log_2 a_{n+1}=\log_2 a_n-2$에서

$\log_2 a_{n+1}=\log_2\frac{a_n}{4} \qquad \therefore a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이다. $\qquad$ ··· ❶

이때 $a_1=8^8$이므로

$a_n=8^8\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=(2^3)^8\cdot\left(\frac{1}{2^2}\right)^{n-1}=2^{26-2n} \qquad$ ··· ❷

$a_k=\frac{1}{8^8}=2^{-24}$에서

$26-2k=-24,\qquad 2k=50$

$\therefore\ k=25$ ⋯ ③

답 25

채점 기준	비율
① 수열 $\{a_n\}$이 등비수열임을 알 수 있다.	40 %
② a_n을 구할 수 있다.	30 %
③ k의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 03 $a_{n+1}=a_n+f(n)$

본책 169쪽

$a_{n+1}=a_n+f(n)$ 또는 $a_{n+1}-a_n=f(n)$의 n에 1, 2, 3, ⋯을 차례대로 대입하여 규칙을 찾는다.

➡ $a_n=a_1+f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n-1)$

1127 $a_{n+1}=a_n+3n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 10을 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+3\cdot1$

$a_3=a_2+3\cdot2=a_1+3\cdot1+3\cdot2$

$a_4=a_3+3\cdot3=a_1+3\cdot1+3\cdot2+3\cdot3$

⋮

$a_{11}=a_{10}+3\cdot10=a_1+3\cdot1+3\cdot2+\cdots+3\cdot10$

$=a_1+\sum_{k=1}^{10}3k$

$=1+3\cdot\frac{10\cdot11}{2}=166$

답 166

1128 $a_n-a_{n-1}=2^{n-1}$, 즉 $a_n=a_{n-1}+2^{n-1}$의 n에 2, 3, 4, ⋯를 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+2$

$a_3=a_2+2^2=a_1+2+2^2$

$a_4=a_3+2^3=a_1+2+2^2+2^3$

⋮

$\therefore\ a_n=a_1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$

$=1+\frac{2\cdot(2^{n-1}-1)}{2-1}$

$=2^n-1$

$a_k=1023$에서 $\qquad 2^k-1=1023$

$2^k=1024=2^{10}$

$\therefore\ k=10$

답 10

1129 $a_{n+1}=a_n+f(n)$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 49를 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+f(1)$

$a_3=a_2+f(2)=a_1+f(1)+f(2)$

$a_4=a_3+f(3)=a_1+f(1)+f(2)+f(3)$

⋮

$a_{50}=a_{49}+f(49)=a_1+f(1)+f(2)+\cdots+f(49)$

$=a_1+\sum_{k=1}^{49}f(k)=2+49^2-2=49^2$

답 ①

1130 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$에서

$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

위의 식의 n에 1, 2, 3, ⋯을 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+1-\frac{1}{2}$

$a_3=a_2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=a_1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$=a_1+1-\frac{1}{3}$

$a_4=a_3+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=a_1+1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

$=a_1+1-\frac{1}{4}$

⋮

$\therefore\ a_n=a_1+1-\frac{1}{n}=3-\frac{1}{n}$

$\therefore\ a_{30}-a_5=\left(3-\frac{1}{30}\right)-\left(3-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{6}$

답 $\frac{1}{6}$

유형 04 $a_{n+1}=a_n f(n)$

본책 169쪽

$a_{n+1}=a_nf(n)$의 n에 1, 2, 3, ⋯을 차례대로 대입하여 규칙을 찾는다.

➡ $a_n=a_1f(1)f(2)\cdots f(n-1)$

1131 $a_{n+1}=3^na_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 9를 차례대로 대입하면

$a_2=3a_1$

$a_3=3^2a_2=3^2\cdot3a_1$

$a_4=3^3a_3=3^3\cdot3^2\cdot3a_1$

⋮

$a_{10}=3^9a_9=3^9\cdot3^8\cdot\ \cdots\ \cdot3a_1$

$=3^{1+2+\cdots+9}\cdot3=3^{46}$

$\therefore\ \log_3 a_{10}=\log_3 3^{46}=46$

답 ④

1132 $\sqrt{n+1}\,a_{n+1}=\sqrt{n}\,a_n$에서 $\qquad a_{n+1}=\sqrt{\frac{n}{n+1}}\,a_n$

위의 식의 n에 1, 2, 3, ⋯, 48을 차례대로 대입하면

$a_2=\sqrt{\frac{1}{2}}\,a_1$

$a_3=\sqrt{\frac{2}{3}}\,a_2=\sqrt{\frac{1}{3}}\,a_1$

$a_4=\sqrt{\frac{3}{4}}\,a_3=\sqrt{\frac{1}{4}}\,a_1$

⋮

$a_{49}=\sqrt{\frac{48}{49}}\,a_{48}=\sqrt{\frac{1}{49}}\,a_1=\frac{1}{7}$

답 $\frac{1}{7}$

1133 $a_n=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)a_{n-1}$

$=\frac{n^2-1}{n^2}a_{n-1}$

$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}a_{n-1}$ ⋯ ①

앞의 식의 n에 2, 3, 4, ⋯를 차례대로 대입하면

$$a_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}a_1$$
$$a_3=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}a_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}a_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}a_1$$
$$a_4=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}a_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}a_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}a_1$$
$$\vdots$$
$$\therefore a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}a_1=\frac{2(n+1)}{n}$$ ⋯ ❷

$a_k=\frac{21}{10}$에서 $\frac{2(k+1)}{k}=\frac{21}{10}$

$21k=20k+20$ $\therefore k=20$ ⋯ ❸

답 20

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	30 %
❷ a_n을 구할 수 있다.	50 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

1134 $a_{n+1}=(n+1)a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 2017을 차례대로 대입하면

$$a_2=2\cdot a_1$$
$$a_3=3\cdot a_2=3\cdot 2\cdot a_1$$
$$a_4=4\cdot a_3=4\cdot 3\cdot 2\cdot a_1$$
$$\vdots$$
$$a_{2018}=2018\cdot a_{2017}=2018\cdot 2017\cdot\ \cdots\ \cdot 2a_1$$

이때 $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$이므로 a_5, a_6, ⋯, a_{2018}은 모두 120으로 나누어떨어진다.

즉 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2018}$을 120으로 나누었을 때의 나머지는 $a_1+a_2+a_3+a_4$를 120으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

이때 $a_1+a_2+a_3+a_4=1+2+6+24=33$이므로 구하는 나머지는 33이다. 답 33

유형 05 여러 가지 수열의 귀납적 정의 본책 170쪽

수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구할 수 없는 경우 주어진 식의 n에 1, 2, 3, ⋯을 차례대로 대입하여 항을 구한다.

1135 $a_{n+1}=-3a_n+2$의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입하면

$$a_2=-3a_1+2=-1$$
$$a_3=-3a_2+2=5$$
$$a_4=-3a_3+2=-13$$
$$a_5=-3a_4+2=41$$
$$\therefore a_6=-3a_5+2=-121$$

답 ④

1136 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$의 n에 1, 2, 3, ⋯을 차례대로 대입하면

$$a_2=\frac{a_1}{2a_1+1}=\frac{1}{2\cdot1+1}=\frac{1}{3}$$
$$a_3=\frac{a_2}{2a_2+1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}+1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{1}{5}$$
$$a_4=\frac{a_3}{2a_3+1}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}+1}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}}=\frac{1}{7}$$
$$\vdots$$
$$\therefore a_n=\frac{1}{2n-1}$$

$a_k=\frac{1}{93}$에서 $\frac{1}{2k-1}=\frac{1}{93}$ $\therefore k=47$ 답 ②

1137 $a_n+a_{n+1}=n+1$의 n에 1, 3, 5, ⋯, 49를 차례대로 대입하면

$$a_1+a_2=2$$
$$a_3+a_4=4$$
$$a_5+a_6=6$$
$$\vdots$$
$$a_{49}+a_{50}=50$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{50}a_k=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{49}+a_{50})$$
$$=2+4+6+\cdots+50$$
$$=\sum_{k=1}^{25}2k=2\cdot\frac{25\cdot26}{2}=650$$

답 ⑤

1138 $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}\frac{a_k}{a_{k+1}a_{k+2}}=\sum_{k=1}^{8}\frac{a_{k+2}-a_{k+1}}{a_{k+1}a_{k+2}}$

$$=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\left(\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_5}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{a_9}-\frac{1}{a_{10}}\right)$$
$$=\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{10}}$$

이때 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례대로 나열하면

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ⋯

이므로 구하는 값은

$$1-\frac{1}{55}=\frac{54}{55}$$

답 $\frac{54}{55}$

유형 06 같은 수가 반복되는 수열 본책 170쪽

주어진 식의 n에 1, 2, 3, ⋯을 차례대로 대입하여 같은 수가 반복되는 규칙을 찾는다.

1139 $a_{n+1}=a_n+(-1)^n$의 n에 1, 2, 3, ⋯을 차례대로 대입하면

$$a_2=a_1+(-1)=5-1=4$$
$$a_3=a_2+(-1)^2=4+1=5$$
$$a_4=a_3+(-1)^3=5-1=4$$
$$\vdots$$

따라서 $a_n=\begin{cases}5 & (n\text{은 홀수})\\ 4 & (n\text{은 짝수})\end{cases}$이므로

$a_{100}=4$ 답 4

1140 조건 ㈎에서 $a_{n+1}=2a_n-1$의 n에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$a_2=2a_1-1=2\cdot3-1=5$
$a_3=2a_2-1=2\cdot5-1=9$
$a_4=2a_3-1=2\cdot9-1=17$ ⋯ ❶

조건 ㈏에서 $a_{n+4}=a_n$이므로

$$a_n=\begin{cases}3 & (n=4k-3)\\5 & (n=4k-2)\\9 & (n=4k-1)\\17 & (n=4k)\end{cases}\ (\text{단, }k\text{는 자연수})$$ ⋯ ❷

$$\therefore \sum_{k=1}^{30}a_k=7(a_1+a_2+a_3+a_4)+a_1+a_2$$
$$=7(3+5+9+17)+3+5=246$$ ⋯ ❸

답 246

채점 기준	비율
❶ a_2, a_3, a_4를 구할 수 있다.	30 %
❷ a_n을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\sum_{k=1}^{30}a_k$의 값을 구할 수 있다.	40 %

1141 $a_1=3$에서

$a_2=(27$을 7로 나누었을 때의 나머지$)=6$
$a_3=(54$를 7로 나누었을 때의 나머지$)=5$
$a_4=(45$를 7로 나누었을 때의 나머지$)=3$
⋮

$$\therefore a_n=\begin{cases}3 & (n=3k-2)\\6 & (n=3k-1)\\5 & (n=3k)\end{cases}\ (\text{단, }k\text{는 자연수})$$

이때 $98=3\cdot33-1$, $99=3\cdot33$, $100=3\cdot34-2$이므로

$a_{98}-a_{99}+a_{100}=6-5+3=4$

답 ②

1142 $a_1+a_2+a_3=a_2+a_3+a_4=10$이므로 $a_1=a_4$

$a_2+a_3+a_4=a_3+a_4+a_5=10$이므로 $a_2=a_5$

$a_3+a_4+a_5=a_4+a_5+a_6=10$이므로 $a_3=a_6$

⋮

$$\therefore a_n=\begin{cases}a_1 & (n=3k-2)\\a_2 & (n=3k-1)\\a_3 & (n=3k)\end{cases}\ (\text{단, }k\text{는 자연수})$$

이때 $7=3\cdot3-2$, $12=3\cdot4$이므로

$a_1=a_7=3$, $a_3=a_{12}=5$

$a_1+a_2+a_3=10$에서

$a_2=10-a_1-a_3=10-3-5=2$

$101=3\cdot34-1$, $106=3\cdot36-2$이므로

$a_{101}a_{106}=a_2a_1=2\cdot3=6$

답 6

유형 07 a_n과 S_n 사이의 관계식이 주어진 수열

본책 171쪽

$a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge2)$임을 이용하여 주어진 등식을 a_n 또는 S_n에 대한 식으로 변형한다.

1143 $S_n=4a_n-9$에서

$S_{n+1}=4a_{n+1}-9$

한편 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$a_{n+1}=4a_{n+1}-9-(4a_n-9)$

$3a_{n+1}=4a_n \qquad \therefore a_{n+1}=\frac{4}{3}a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=3$, 공비가 $\frac{4}{3}$인 등비수열이므로

$a_n=3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore a_{100}=3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{99}=\frac{4^{99}}{3^{98}}$

답 ④

1144 $S_{n+1}=2S_n+3$의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입하면

$S_2=2S_1+3=2\cdot1+3=5$
$S_3=2S_2+3=2\cdot5+3=13$
$S_4=2S_3+3=2\cdot13+3=29$
$S_5=2S_4+3=2\cdot29+3=61$
$S_6=2S_5+3=2\cdot61+3=125$
$\therefore a_6=S_6-S_5=125-61=64$

답 64

1145 $S_n=2a_n+n$에서

$S_{n+1}=2a_{n+1}+n+1$

한편 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$a_{n+1}=2a_{n+1}+n+1-(2a_n+n)$

$\therefore a_{n+1}=2a_n-1$

위의 식의 n에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$a_2=2a_1-1=-2-1=-3$
$a_3=2a_2-1=-6-1=-7$
$a_4=2a_3-1=-14-1=-15$
$\therefore a_5=2a_4-1=-30-1=-31$

답 ③

1146 ㄱ. $S_n=\frac{a_na_{n+1}}{3}$에 $n=1$을 대입하면

$S_1=\frac{a_1a_2}{3}$

$S_1=a_1$이므로 $a_2=3$

ㄴ. $S_n=\frac{a_na_{n+1}}{3}$에서

$3S_n=a_na_{n+1}$ ⋯⋯ ㉠
$\therefore 3S_{n+1}=a_{n+1}a_{n+2}$ ⋯⋯ ㉡

㉡$-$㉠을 하면

$3(S_{n+1}-S_n)=a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)$
$3a_{n+1}=a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)$
$\therefore a_{n+2}-a_n=3\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

ㄷ. $a_{n+2}-a_n=3$, 즉 $a_{n+2}=a_n+3$의 n에 1, 2, 3, 4, ⋯를 차례대로 대입하면

$a_3=a_1+3=\frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}$

$a_4=a_2+3=3+3=6$

$a_5=a_3+3=\frac{9}{2}+3=\frac{15}{2}$

$a_6=a_4+3=6+3=9$

$\vdots$

즉 수열 $\{a_n\}$은 공차가 $\frac{3}{2}$인 등차수열이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

유형 08~09 수열의 귀납적 정의의 활용 본책 172쪽

(ⅰ) 제 n 항과 제 $(n+1)$항 사이의 관계를 식으로 나타낸다.
(ⅱ) (ⅰ)의 식을 이용하거나 n에 1, 2, 3, ⋯을 대입한다.

1147 n개의 직선에 1개의 직선을 추가하면 이 직선은 기존의 n개의 직선과 각각 한 번씩 만나므로 $(n+1)$개의 새로운 평면이 생긴다. 즉 $(n+1)$개의 직선에 의하여 분할된 평면은 n개의 직선에 의하여 분할된 평면보다 $(n+1)$개가 많으므로

$a_{n+1}=a_n+n+1$

이때 $a_3=7$이므로

$a_4=a_3+3+1=7+3+1=11$

$a_5=a_4+4+1=11+4+1=16$

$\therefore a_6=a_5+5+1=16+5+1=22$

답 ③

1148 시행을 한 번 하면 전체 끈의 길이의 $\frac{2}{3}$가 남으므로

$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$ ⋯ ❶

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=\frac{2}{3}\cdot 81=54$, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로 $a_n=54\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ⋯ ❷

$\therefore a_8=54\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^7=\frac{256}{81}$ ⋯ ❸

답 $\frac{256}{81}$

채점 기준	비율
❶ a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❷ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❸ a_8을 구할 수 있다.	20 %

1149 주어진 그림에서

$a_1=4$

$a_2=a_1+6$

$a_3=a_2+8$

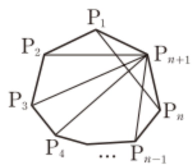
$\vdots$

$\therefore a_{n+1}=a_n+2(n+2)$

$=a_n+2n+4$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

답 $a_{n+1}=a_n+2n+4$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

1150 오른쪽 그림과 같이 n각형의 꼭짓점을 각각 $P_1, P_2, \cdots, P_n$이라 하고 두 꼭짓점 P_1과 P_n 사이에 꼭짓점 P_{n+1}을 추가하여 $(n+1)$각형을 만들면 추가되는 대각선은



$\overline{P_1P_n}, \overline{P_2P_{n+1}}, \overline{P_3P_{n+1}}, \cdots, \overline{P_{n-1}P_{n+1}}$

의 $(n-1)$개이므로

$a_{n+1}=a_n+n-1$ $(n=4, 5, 6, \cdots)$

따라서 $f(n)=n-1$이므로 $f(11)=10$ 답 10

1151 n주 후 어항의 물의 양을 a_n L라 하면

$a_{n+1}=\frac{4}{5}a_n+\frac{4}{5}a_n\cdot\frac{1}{5}=\frac{24}{25}a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=\frac{24}{25}\cdot 25=24$, 공비가 $\frac{24}{25}$인 등비수열이므로

$a_n=24\cdot\left(\frac{24}{25}\right)^{n-1}$

$\therefore a_{10}=24\cdot\left(\frac{24}{25}\right)^9=\frac{24^{10}}{5^{18}}$

즉 $a=24$, $b=10$일 때 $a+b$의 값이 최소이므로 구하는 최솟값은

$24+10=34$ 답 ⑤

1152 $a_{n+1}=3(a_n-4)=3a_n-12$

$a_1=3\cdot(20-4)=48$이므로

$a_2=3\cdot(48-4)=132$

답 $a_2=132$, $a_{n+1}=3a_n-12$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

1153 a_n %의 소금물 150 g에 들어 있는 소금의 양은

$\frac{a_n}{100}\times 150=\frac{3}{2}a_n$ (g)

10 %의 소금물 50 g에 들어 있는 소금의 양은

$\frac{10}{100}\times 50=5$ (g)

$\therefore a_{n+1}=\frac{\frac{3}{2}a_n+5}{200}\times 100=\frac{3}{4}a_n+\frac{5}{2}$

따라서 $p=\frac{3}{4}$, $q=\frac{5}{2}$이므로

$pq=\frac{15}{8}$ 답 $\frac{15}{8}$

1154 n회 시행 후 그릇 A에 담긴 밀가루의 양이 a_n kg이면 그릇 B에 담긴 밀가루의 양은 $(2-a_n)$ kg이므로

$a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{2}\left\{(2-a_n)+\frac{1}{4}a_n\right\}$

$=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{2}\left(2-\frac{3}{4}a_n\right)$

$=\frac{3}{8}a_n+1$

따라서 $p=\frac{3}{8}$, $q=1$이므로 $p-q=-\frac{5}{8}$ 답 ⑤

1155 각 층의 정육면체의 개수를 위에서부터 차례대로 a_1, a_2, a_3, $\cdots$이라 하면

$a_1=1$

$a_2=a_1+4$

$a_3=a_2+4\cdot2=a_1+4+4\cdot2$

$a_4=a_3+4\cdot3=a_1+4+4\cdot2+4\cdot3$

$\vdots$

$$\begin{aligned}\therefore a_n&=a_1+4+4\cdot2+4\cdot3+\cdots+4\cdot(n-1)\\&=1+4\{1+2+\cdots+(n-1)\}\\&=1+4\cdot\frac{n(n-1)}{2}\\&=2n^2-2n+1\end{aligned}$$ ··· ❶

따라서 10층 탑을 쌓을 때 필요한 정육면체의 개수는

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}a_k&=\sum_{k=1}^{10}(2k^2-2k+1)\\&=2\cdot\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-2\cdot\frac{10\cdot11}{2}+10\\&=770-110+10=670\end{aligned}$$ ··· ❷

답 670

채점 기준	비율
❶ n층의 정육면체의 개수를 구할 수 있다.	60 %
❷ 필요한 정육면체의 개수를 구할 수 있다.	40 %

유형 10 수학적 귀납법

본책 173쪽

모든 자연수 n에 대하여 명제 $p(n)$이

① $p(1)$이 참이다.

② $p(k)$가 참이면 $p(k+n)$이 참이다.

를 모두 만족시키면

⇒ $p(1)$, $p(1+n)$, $p(1+2n)$, $\cdots$이 모두 참이다.

1156 주어진 조건에 의하여 음이 아닌 정수 a, b에 대하여 $p(2^a\times3^b)$은 참이다.

① $p(42)=p(2\cdot3\cdot7)$ ② $p(45)=p(3^2\cdot5)$

③ $p(66)=p(2\cdot3\cdot11)$ ④ $p(108)=p(2^2\cdot3^3)$

⑤ $p(120)=p(2^3\cdot3\cdot5)$

따라서 반드시 참인 명제는 $p(108)$이다. 답 ④

1157 ㄱ. $p(1)$이 참이면 주어진 조건에 의하여

$p(4)$, $p(7)$, $p(10)$, $\cdots$, $p(3l+1)$ (l은 자연수)

이 모두 참이지만 $p(3l)$이 참인지는 알 수 없다.

ㄴ. $p(3)$이 참이면 주어진 조건에 의하여

$p(6)$, $p(9)$, $\cdots$, $p(3l)$ (l은 자연수)

이 모두 참이므로 모든 3의 양의 배수 k에 대하여 $p(k)$가 참이다.

ㄷ. $p(1)$이 참이면 ㄱ에서 $p(3l+1)$ (l은 자연수)이 참이다.

또 $p(2)$가 참이면 주어진 조건에 의하여

$p(5)$, $p(8)$, $p(11)$, $\cdots$, $p(3l+2)$

가 참이다. 그러나 $p(3l)$이 참인지는 알 수 없다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

1158 ㄱ. $p(1)$이 참이면

$p(3)$, $p(5)$, $p(7)$, $\cdots$, $p(2l+1)$ (l은 자연수)

이 참이므로 $p(31)=p(2\cdot15+1)$도 참이다.

ㄴ. $p(1)$이 참이면

$p(2)$, $p(2^2)$, $\cdots$, $p(2^l)$ (l은 자연수)

은 참이지만 31은 2의 거듭제곱의 꼴이 아니므로 $p(31)$이 참인지는 알 수 없다.

ㄷ. 대우 '$p(k)$가 참이면 $p(2k+1)$도 참이다.'에 의하여 $p(1)$이 참이면

$p(2\cdot1+1)=p(3)$, $p(2\cdot3+1)=p(7)$,

$p(2\cdot7+1)=p(15)$, $p(2\cdot15+1)=p(31)$, $\cdots$

도 참이다.

이상에서 (나)의 조건이 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

유형 11 수학적 귀납법; 등식의 증명

본책 174쪽

모든 자연수 n에 대하여 등식이 성립함을 증명할 때에는

(i) $n=1$일 때, 등식이 성립함을 확인한다.

(ii) $n=k$일 때 등식이 성립한다고 가정한다.

(iii) (ii)의 등식의 양변에 적당한 식을 더하여 $n=k+1$일 때도 등식이 성립함을 보인다.

1159 (ii) $n=k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$

위의 식의 양변에 $\boxed{2^k}$을 더하면

$$\begin{aligned}1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k&=2^k-1+2^k\\&=2\cdot2^k-1\\&=\boxed{2^{k+1}-1}\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

∴ (가) 2^k (나) $2^{k+1}-1$

즉 $f(k)=2^k$, $g(k)=2^{k+1}-1$이므로

$f(3)+g(4)=8+31=39$ 답 39

1160 (i) $n=1$일 때,

$$(\text{좌변})=\frac{1}{1\cdot3}=\frac{1}{3},\ (\text{우변})=\frac{1}{2\cdot1+1}=\frac{1}{3}$$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

위의 식의 양변에 $\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$을 더하면

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\\&\quad+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\frac{k+1}{2k+3}=\frac{k+1}{2(k+1)+1}\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

답 풀이 참조

1161 $\left(\frac{1}{k+1}\right)^2-\left(\frac{2}{k+1}\right)^2+\left(\frac{3}{k+1}\right)^2$

$-\cdots+(-1)^{k+2}\cdot\left(\frac{k+1}{k+1}\right)^2$

$=\boxed{\frac{k^2}{(k+1)^2}}\left\{\left(\frac{1}{k}\right)^2-\left(\frac{2}{k}\right)^2+\left(\frac{3}{k}\right)^2\right.$

$\left.-\cdots+(-1)^{k+1}\cdot\left(\frac{k}{k}\right)^2+(-1)^{k+2}\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^2\right\}$

$=\frac{k^2}{(k+1)^2}\left\{(-1)^{k+1}\cdot\frac{k+1}{2k}+(-1)^{k+2}\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^2\right\}$

$=\frac{k^2}{(k+1)^2}\cdot(-1)^{k+2}\cdot\frac{k+1}{k}\left(\frac{k+1}{k}-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{k^2}{(k+1)^2}\cdot(-1)^{k+2}\cdot\frac{k+1}{k}\cdot\boxed{\frac{k+2}{2k}}$

$=(-1)^{k+2}\cdot\frac{k+2}{2(k+1)}$

$=(-1)^{(k+1)+1}\cdot\frac{(k+1)+1}{2(k+1)}$

$\therefore$ (가) $\frac{k^2}{(k+1)^2}$ (나) $\frac{k+2}{2k}$

즉 $f(k)=\frac{k^2}{(k+1)^2}$, $g(k)=\frac{k+2}{2k}$이므로

$f(4)g(8)=\frac{16}{25}\cdot\frac{10}{16}=\frac{2}{5}$

답 $\frac{2}{5}$

유형 12 수학적 귀납법; 배수의 증명 본책 175쪽

$n\ge a$인 자연수 n에 대하여 $f(n)$이 l의 배수임을 증명할 때에는

(i) $f(a)$가 l의 배수임을 확인한다. (단, a는 자연수)

(ii) $f(k)$ $(k\ge a)$가 l의 배수라 가정한다.

(iii) $f(k+1)=l(■+▲)$ 꼴로 정리하여 $f(k+1)$도 l의 배수임을 보인다.

1162 (ii) $n=k$ $(k\ge2)$일 때 8^n-7n-1이 49의 배수라 가정하면

$8^k-7k-1=49N$ (N은 자연수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$8^{k+1}-7(k+1)-1=8\cdot8^k-7k-7-1$

$=\boxed{8\cdot8^k}-7k-8$

$=8(8^k-7k-1)+\boxed{49k}$

$=8\cdot49N+49k$

$=49(\boxed{8N+k})$

이므로 $n=k+1$일 때도 8^n-7n-1이 49의 배수이다.

$\therefore$ (가) $8\cdot8^k$ (나) $49k$ (다) $8N+k$

답 ⑤

1163 (ii) $n=k$일 때 n^3+5n이 6의 배수라 가정하면

$k^3+5k=6N$(N은 자연수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$(k+1)^3+5(k+1)=k^3+3k^2+\boxed{8k+6}$

$=\boxed{k^3+5k}+6+3k(k+1)$

$=6(N+1)+3k(k+1)$

이고, k 또는 $k+1$이 2의 배수이므로 $3k(k+1)$은 $\boxed{6}$의 배수이다. 따라서 $n=k+1$일 때도 n^3+5n이 6의 배수이다.

$\therefore f(k)=8k+6,\ g(k)=k^3+5k,\ a=6$

$\therefore \frac{g(a)}{f(a)}=\frac{246}{54}=\frac{41}{9}$

따라서 $p=9$, $q=41$이므로 $p+q=50$

답 ③

1164 (ii) $n=k$일 때 $2^{n+1}+3^{2n-1}$이 7의 배수라 가정하면

$2^{k+1}+3^{2k-1}=7N$ (N은 자연수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$2^{k+2}+3^{2k+1}=2\cdot2^{k+1}+\boxed{9}\cdot3^{2k-1}$

$=2\cdot2^{k+1}+2\cdot3^{2k-1}+7\cdot3^{2k-1}$

$=2(2^{k+1}+3^{2k-1})+7\cdot3^{2k-1}$

$=2\cdot\boxed{7N}+7\cdot\boxed{3^{2k-1}}$

$=7(2N+3^{2k-1})$

이므로 $n=k+1$일 때도 $2^{n+1}+3^{2n-1}$이 7의 배수이다.

$\therefore$ (가) 9 (나) $7N$ (다) 3^{2k-1}

답 ③

유형 13 수학적 귀납법; 부등식의 증명 본책 176쪽

$n\ge a$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식이 성립함을 증명할 때에는

(i) $n=a$일 때, 부등식이 성립함을 확인한다. (단, a는 자연수)

(ii) $n=k$ $(k\ge a)$일 때 부등식이 성립한다고 가정한다.

(iii) $A>B$, $B>C$이면 $A>C$임을 이용하여 $n=k+1$일 때도 부등식이 성립함을 보인다.

1165 (ii) $n=k$ $(k\ge5)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $2^k>k^2$

위의 식의 양변에 2를 곱하면

$2^{k+1}>2k^2$ ...... ㉠

그런데 $k\ge5$이면

$k^2-2k-1=\boxed{(k-1)^2}-2>0$

이므로 $k^2>2k+1$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$2^{k+1}>2k^2=k^2+k^2>k^2+2k+1=\boxed{(k+1)^2}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

$\therefore$ (가) $(k-1)^2$ (나) $(k+1)^2$

답 ④

1166 (ii) $n=k$ $(k\ge2)$일 때 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$을 더하면

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}$

$<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$ ...... ㉡

이때

$$\left\{2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}-\left(\boxed{2-\frac{1}{k+1}}\right)$$
$$=-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{k+1}$$
$$=\frac{-(k+1)^2+k+k(k+1)}{k(k+1)^2}$$
$$=-\frac{1}{k(k+1)^2}<\boxed{0}$$
$$\therefore 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1} \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢에서

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 부등식 ㉠이 성립한다.

즉 $f(k)=2-\frac{1}{k+1}$, $a=0$이므로

$f(a)=1$ 답 1

1167 (ii) $n=k\ (k\geq 6)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\left(\frac{k}{2}\right)^k>k(k-1)(k-2)\cdot\cdots\cdot 1 \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$\therefore \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}=\frac{(k+1)^{k+1}}{2^{k+1}}=\frac{(k+1)(k+1)^k}{2^{k+1}}$$
$$=\frac{k+1}{2^{k+1}}\cdot\frac{(k+1)^k}{k^k}\cdot k^k$$
$$=\frac{k+1}{2}\cdot\frac{1}{2^k}\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\cdot k^k$$
$$=\frac{k+1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\cdot\boxed{\left(\frac{k}{2}\right)^k} \quad \cdots\cdots ㉡$$

그런데 $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k>2$이므로 ㉠, ㉡에서

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}>\frac{k+1}{2}\cdot 2\cdot k(k-1)(k-2)\cdot\cdots\cdot 1$$
$$=\frac{k+1}{2}\cdot\boxed{2k(k-1)(k-2)\cdot\cdots\cdot 1}$$
$$=(k+1)k(k-1)\cdot\cdots\cdot 1$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

$\therefore$ (가) $\left(\frac{k}{2}\right)^k$ (나) $2k(k-1)(k-2)\cdot\cdots\cdot 1$

즉 $f(k)=\left(\frac{k}{2}\right)^k$, $g(k)=2k(k-1)(k-2)\cdot\cdots\cdot 1$이므로

$f(4)+g(3)=2^4+2\cdot 3\cdot 2\cdot 1=28$ 답 ⑤

1168 전략 $a_{n+1}=a_n+d$이면 수열 $\{a_n\}$은 등차수열, $a_{n+1}=ra_n$이면 수열 $\{a_n\}$은 등비수열임을 이용한다.

풀이 조건 (가), (나)에 의하여

$a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=5,\ a_4=7,\ a_5=9$

조건 (다)에 의하여

$$a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)$$
$$a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}=2(a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10})$$
$$=2^2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)$$
$$a_{16}+a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=2(a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15})$$
$$=2^3(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)$$
$$\vdots$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{40}a_k=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)(1+2+2^2+2^3+\cdots+2^7)$$
$$=(1+3+5+7+9)\cdot\frac{2^8-1}{2-1}$$
$$=25\cdot 255$$
$$=6375$$

답 6375

1169 전략 수열 $\{a_n+b_n\}$의 일반항을 구한다.

풀이 $\begin{cases} a_{n+1}=3a_n+2b_n & \cdots\cdots ㉠ \\ b_{n+1}=2a_n+3b_n & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n)$

따라서 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 $a_1+b_1=2$, 공비가 5인 등비수열이므로

$a_n+b_n=2\cdot 5^{n-1}$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$$a_{n+1}=3a_n+2b_n=a_n+2(a_n+b_n)$$
$$=a_n+4\cdot 5^{n-1}$$

$a_{n+1}=a_n+4\cdot 5^{n-1}$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 9를 차례대로 대입하면

$$a_2=a_1+4\cdot 1$$
$$a_3=a_2+4\cdot 5=a_1+4\cdot 1+4\cdot 5$$
$$a_4=a_3+4\cdot 5^2=a_1+4\cdot 1+4\cdot 5+4\cdot 5^2$$
$$\vdots$$
$$a_{10}=a_9+4\cdot 5^8=a_1+4\cdot 1+4\cdot 5+\cdots+4\cdot 5^8$$
$$=2+4(1+5+\cdots+5^8)$$
$$=2+4\cdot\frac{5^9-1}{5-1}=5^9+1$$

답 ②

1170 전략 a_n과 b_n을 각각 구한 후 n의 값에 따라 a_n과 b_n의 크기를 비교한다.

풀이 $a_{n+1}=3a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다. 이때 첫째항이 1이므로

$a_n=3^{n-1}$

한편 $b_{n+1}=(n+1)b_n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$을 차례대로 대입하면

$$b_2=2b_1$$
$$b_3=3b_2=3\cdot 2b_1$$
$$b_4=4b_3=4\cdot 3\cdot 2b_1$$
$$\vdots$$
$$\therefore b_n=n(n-1)\cdot\cdots\cdot 2b_1$$
$$=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n$$

$1\leq n\leq 4$일 때, $a_n\geq b_n$이므로

$c_n=b_n$

$n\geq 5$일 때, $a_n<b_n$이므로

$c_n=a_n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{50}2c_n=2\left\{\sum_{n=1}^{4}(1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n)+\sum_{n=5}^{50}3^{n-1}\right\}$$
$$=2\left\{1+2+6+24+\frac{3^4(3^{46}-1)}{3-1}\right\}$$
$$=3^{50}-15$$

답 ③

10 수학적 귀납법

1171 전략 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례대로 대입하여 두 수열 $\{a_{2n+1}\}$, $\{a_{2n}\}$의 일반항을 구한다.

풀이 $a_na_{n+1}=3\cdot2^n$에서 $a_{n+1}=\frac{3\cdot2^n}{a_n}$

위의 식의 n에 $1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots$을 차례대로 대입하면

$$a_2=\frac{3\cdot2}{a_1}$$
$$a_3=\frac{3\cdot2^2}{a_2}=\frac{3\cdot2^2}{3\cdot2}\cdot a_1=2a_1$$
$$a_4=\frac{3\cdot2^3}{a_3}=\frac{3\cdot2^3}{2a_1}=\frac{3\cdot2^2}{a_1}$$
$$a_5=\frac{3\cdot2^4}{a_4}=\frac{3\cdot2^4}{3\cdot2^2}\cdot a_1=2^2a_1$$
$$a_6=\frac{3\cdot2^5}{a_5}=\frac{3\cdot2^5}{2^2a_1}=\frac{3\cdot2^3}{a_1}$$
$$a_7=\frac{3\cdot2^6}{a_6}=\frac{3\cdot2^6}{3\cdot2^3}\cdot a_1=2^3a_1$$
$$\vdots$$
$$\therefore \begin{cases} a_{2n+1}=2^na_1=2^n \\ a_{2n}=\dfrac{3\cdot2^n}{a_1}=3\cdot2^n \end{cases} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

따라서 $a_{32}=3\cdot2^{16}$, $a_{21}=2^{10}$이므로

$$\frac{a_{32}}{a_{21}}=\frac{3\cdot2^{16}}{2^{10}}=3\cdot2^6=192$$

답 192

1172 전략 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례대로 대입하여 수열 $\{a_{3n}\}$의 일반항을 구한다.

풀이 $a_1=a$이므로

$$a_2=a_1+(-1)\cdot2=a-2$$
$$a_3=a_2+(-1)^2\cdot2=a$$
$$a_4=a_3+1=a+1$$
$$a_5=a_4+(-1)^4\cdot2=a+3$$
$$a_6=a_5+(-1)^5\cdot2=a+1$$
$$a_7=a_6+1=a+2$$
$$a_8=a_7+(-1)^7\cdot2=a$$
$$a_9=a_8+(-1)^8\cdot2=a+2$$
$$\vdots$$

이므로 $a_{3n}=a+(n-1)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

따라서 $a_{15}=a+4=43$이므로 $a=39$

답 ⑤

1173 전략 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례대로 대입하여 수열 $\{a_n\}$의 규칙을 찾는다.

풀이 $a_1=31$이므로

$$a_2=1+\frac{31+1}{2}=17$$
$$a_3=1+\frac{17+1}{2}=10$$
$$a_4=3+\frac{10}{2}=8$$
$$a_5=3+\frac{8}{2}=7$$
$$a_6=1+\frac{7+1}{2}=5$$
$$a_7=1+\frac{5+1}{2}=4$$
$$a_8=3+\frac{4}{2}=5$$
$$\vdots$$
$$\therefore a_n=\begin{cases} 4 & (n\text{은 홀수}) \\ 5 & (n\text{은 짝수}) \end{cases} \quad (n=6, 7, 8, \cdots)$$

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=31+17+10+8+7=73$이고

$200-73=127=9\cdot14+1$

이때 $(a_6+a_7)+(a_8+a_9)+\cdots+(a_{32}+a_{33})=(5+4)\times14$이므로

$$\sum_{k=1}^{33}a_k=73+126=199,\ \sum_{k=1}^{34}a_k=199+5=204$$

따라서 $\sum_{k=1}^{n}a_k>200$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 34이다.

답 ④

1174 전략 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례대로 대입하여 수열 $\{a_n\}$의 규칙을 찾는다.

풀이 $a_{n+2}+a_{n+1}+a_n=0$, 즉 $a_{n+2}=-a_{n+1}-a_n$에서

$$a_3=-a_2-a_1=-1-(-1)=0$$
$$a_4=-a_3-a_2=0-1=-1$$
$$a_5=-a_4-a_3=-(-1)-0=1$$
$$a_6=-a_5-a_4=-1-(-1)=0$$
$$\vdots$$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 $-1, 1, 0$이 이 순서대로 반복된다.

ㄱ. $a_{121}=a_{3\cdot40+1}=a_1=-1$

ㄴ. $a_{100}=a_{3\cdot33+1}=a_1=-1$, $a_{200}=a_{3\cdot66+2}=a_2=1$이므로

$a_{100}+a_{200}=0$

ㄷ. $S_{3n}=S_{3n-1}+a_{3n}$이고 $a_{3n}=0$이므로

$S_{3n-1}=S_{3n}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

1175 전략 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례대로 대입하여 수열 $\{a_n\}$의 규칙을 찾는다.

풀이 $a_{n+1}=(-1)^na_n+3$에서

$$a_2=-a_1+3=2$$
$$a_3=a_2+3=5$$
$$a_4=-a_3+3=-2$$
$$a_5=a_4+3=1$$
$$\vdots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 $1, 2, 5, -2$가 이 순서대로 반복된다. 이때

$a_1+a_2+a_3+a_4=6$이고

$$\begin{aligned}62&=6\cdot9+8=6\cdot9+1+2+5\\&=9(a_1+a_2+a_3+a_4)+a_1+a_2+a_3\\&=\sum_{k=1}^{36}a_k+a_{37}+a_{38}+a_{39}\\&=\sum_{k=1}^{39}a_k\end{aligned}$$

$\therefore n=39$

답 39

1176 전략 $f(n)=a_n$, $\sum_{k=1}^{n} f(k)=S_n$으로 놓고 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$임을 이용하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구한다.

풀이 $f(n)=a_n$이라 하면 $\sum_{k=1}^{n} f(k)=n^2 f(n)$에서

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=n^2 a_n$$

$\sum_{k=1}^{n} a_k=S_n$이라 하면

$$S_n=n^2a_n \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$S_{n+1}=(n+1)^2a_{n+1} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡−㉠을 하면

$$S_{n+1}-S_n=(n+1)^2a_{n+1}-n^2a_n$$
$$a_{n+1}=(n+1)^2a_{n+1}-n^2a_n$$
$$n(n+2)a_{n+1}=n^2a_n$$
$$\therefore a_{n+1}=\frac{n}{n+2}a_n$$

$a_{n+1}=\frac{n}{n+2}a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 99를 차례대로 대입하면

$$a_2=\frac{1}{3}a_1$$
$$a_3=\frac{2}{4}a_2=\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}a_1$$
$$a_4=\frac{3}{5}a_3=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}a_1$$
$$\vdots$$
$$a_{100}=\frac{99}{101}a_{99}=\frac{99}{101}\cdot\frac{98}{100}\cdot\frac{97}{99}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{3}a_1$$
$$=\frac{2}{100\cdot 101}=\frac{1}{5050}$$

따라서 $f(100)$의 값은 $\frac{1}{5050}$이다.

답 $\frac{1}{5050}$

1177 전략 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구한다.

풀이 $b_n=\frac{S_{n+1}}{S_n}$이라 하면 $b_1=2$이고

$$b_n=b_{n-1}+2n\ (n\geq 2)$$

위의 식의 n에 2, 3, 4, ⋯를 차례대로 대입하면

$$b_2=b_1+2\cdot 2$$
$$b_3=b_2+2\cdot 3=b_1+2\cdot 2+2\cdot 3$$
$$b_4=b_3+2\cdot 4=b_1+2\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot 4$$
$$\vdots$$
$$\therefore b_n=b_1+2\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+2n$$
$$=2+2(2+3+\cdots+n)=2(1+2+3+\cdots+n)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}2k=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\boxed{n}(n+1)\ (n\geq 1)$$

즉 $\frac{S_{n+1}}{S_n}=n(n+1)$이므로

$$S_{n+1}=n(n+1)S_n\ (n\geq 1)$$

위의 식의 n에 1, 2, 3, ⋯을 차례대로 대입하면

$$S_2=1\cdot 2\cdot S_1$$
$$S_3=2\cdot 3\cdot S_2=1\cdot 2^2\cdot 3\cdot S_1$$
$$S_4=3\cdot 4\cdot S_3=1\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4\cdot S_1$$
$$\vdots$$
$$\therefore S_n=1\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot\cdots\cdot(n-1)^2\cdot nS_1$$
$$=n\{(n-1)!\}^2\ (n\geq 1)$$

따라서 $a_1=1$이고, $n\geq 2$일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=n\{(n-1)!\}^2-(n-1)\{(n-2)!\}^2$$
$$=n(n-1)^2\{(n-2)!\}^2-(n-1)\{(n-2)!\}^2$$
$$=\{(n-2)!\}^2\{n(n-1)^2-(n-1)\}$$
$$=\boxed{(n^3-2n^2+1)}\{(n-2)!\}^2$$

∴ (가) n (나) n^3-2n^2+1

즉 $f(n)=n$, $g(n)=n^3-2n^2+1$이므로

$$f(10)+g(6)=10+145=155$$

답 ④

1178 전략 부등식의 우변을 $n=k+1$일 때의 식으로 변형한다.

풀이 (i) $n=1$일 때,

$$(\text{우변})=3\cdot 2\cdot 1=\boxed{6}$$

(ii) $n=k$일 때 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\{k(k-1)(k-2)\cdot\cdots\cdot 1\}^3\cdot 27^k$$
$$>3k(3k-1)(3k-2)\cdot\cdots\cdot 1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변에 $\boxed{27(k+1)^3}$을 곱하면

$$\{(k+1)k(k-1)\cdot\cdots\cdot 1\}^3\cdot 27^{k+1}$$
$$>27(k+1)^3\cdot 3k(3k-1)(3k-2)\cdot\cdots\cdot 1$$
$$=3^3\cdot(k+1)^3\cdot 3k(3k-1)(3k-2)\cdot\cdots\cdot 1$$
$$=(3k+3)^3\cdot 3k(3k-1)(3k-2)\cdot\cdots\cdot 1$$
$$>(3k+3)\cdot\boxed{(3k+2)(3k+1)}\cdot 3k\cdot\cdots\cdot 1$$

이므로 $n=k+1$일 때도 부등식 ㉠이 성립한다.

따라서 $a=6$, $f(k)=27(k+1)^3$, $g(k)=(3k+2)(3k+1)$이므로

$$a+f(1)+g(2)=6+216+56=278$$

답 278

1179 전략 $a_{n+1}=a_n+d$이면 수열 $\{a_n\}$은 등차수열, $a_{n+1}=ra_n$이면 수열 $\{a_n\}$은 등비수열임을 이용한다.

풀이 조건 (나), (다)에서 a가 $a\geq 3$인 자연수이므로 수열 $\{b_n\}$은

$$a,\ \frac{1}{2}a,\ \frac{1}{4}a,\ \cdots,\ 3,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{3}{16},\ \frac{3}{32},\ \cdots$$

조건 (가)에서 수열 $\{a_n\}$은

$$a,\ a-\frac{1}{4},\ a-\frac{1}{2},\ a-\frac{3}{4},\ a-1,\ \cdots,\ 1,\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ 0,\ \cdots$$

따라서 수열 $\{b_n\}$에서 $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$과 모든 자연수인 항은 수열 $\{a_n\}$과 공통인 항이 될 수 있다. ⋯ ❶

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공통인 항이 8개이려면 공통인 항은 작은 것부터 차례대로

$$\frac{3}{4},\ \frac{3}{2},\ 3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96$$

이어야 하므로 $a=96$ ⋯ ❷

답 96

채점 기준	비율
❶ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공통인 항의 꼴을 알 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	60 %

1180 전략 식을 변형한 후 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례대로 대입한다.

풀이 $a_{n+1}-a_n=(-1)^n\cdot\dfrac{2n+1}{n(n+1)}=(-1)^n\cdot\dfrac{n+(n+1)}{n(n+1)}$

$=(-1)^n\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)$ ··· ❶

즉 $a_{n+1}=a_n+(-1)^n\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)$이므로 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 29를 차례대로 대입하면

$a_2=a_1-1-\dfrac{1}{2}$

$a_3=a_2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=a_1-1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$

$=a_1-1+\dfrac{1}{3}$

$a_4=a_3-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=a_1-1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}$

$=a_1-1-\dfrac{1}{4}$

$\vdots$

$a_{30}=a_{29}-\dfrac{1}{29}-\dfrac{1}{30}=a_1-1+\dfrac{1}{29}-\dfrac{1}{29}-\dfrac{1}{30}$

$=a_1-1-\dfrac{1}{30}=3-1-\dfrac{1}{30}$

$=\dfrac{59}{30}$ ··· ❷

따라서 $p=30$, $q=59$이므로 $p+q=89$ ··· ❸

답 89

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	30 %
❷ a_{30}을 구할 수 있다.	60 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1181 전략 $a_n=S_n-S_{n-1}\,(n\ge2)$임을 이용하여 주어진 식을 S_n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $a_n=S_n-S_{n-1}\,(n\ge2)$이므로 $S_n=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$에서

$S_n=\dfrac{1}{2}\left(S_n-S_{n-1}+\dfrac{1}{S_n-S_{n-1}}\right)$

$\therefore S_n^2-S_{n-1}^2=1\ (n\ge2)$

또 $a_1=S_1$이므로

$S_1=\dfrac{1}{2}\left(S_1+\dfrac{1}{S_1}\right)\qquad\therefore S_1^2=1$

즉 수열 $\{S_n^2\}$은 첫째항이 1, 공차가 1인 등차수열이므로

$S_n^2=1+(n-1)\cdot1=n$

$\therefore S_n=\sqrt{n}\ (\because a_n>0)$ ··· ❶

$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\ (n\ge2)$ ······ ㉠

$a_1=S_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ ··· ❷

따라서 $a_{50}=\sqrt{50}-\sqrt{49}=5\sqrt{2}-7$이므로

$p=5$, $q=7$

$\therefore pq=35$ ··· ❸

답 35

채점 기준	비율
❶ S_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❸ pq의 값을 구할 수 있다.	20 %

1182 전략 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$의 길이를 n에 대한 식으로 나타내어 S_n을 구한다.

풀이 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=a_n$이라 하면

$a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{n}{n+2}a_n$

$a_{n+1}=\dfrac{n}{n+2}a_n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$을 차례대로 대입하면

$a_2=\dfrac{1}{3}a_1$

$a_3=\dfrac{2}{4}a_2=\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{3}a_1$

$a_4=\dfrac{3}{5}a_3=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{3}a_1$

$\vdots$

$\therefore a_n=\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{n-2}{n}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{3}a_1$

$=\dfrac{2}{n(n+1)}$ ··· ❶

이때 점 R_n은 선분 $\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}$의 중점이므로

$\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\dfrac{1}{2}a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$

$\therefore S_n=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}+\dfrac{2}{n(n+1)}\right\}\cdot1=\dfrac{3}{2n(n+1)}$ ··· ❷

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{20}S_n=\sum_{n=1}^{20}\dfrac{3}{2n(n+1)}=\dfrac{3}{2}\sum_{n=1}^{20}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=\dfrac{3}{2}\left\{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{20}-\dfrac{1}{21}\right)\right\}$

$=\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{21}\right)=\dfrac{10}{7}$ ··· ❸

답 $\dfrac{10}{7}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	50 %
❷ S_n을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\displaystyle\sum_{n=1}^{20}S_n$의 값을 구할 수 있다.	30 %