맞춤형 핵심 유형 마스터

나래 PM

정답과 해설

고등 수학 (상)

01 다항식의 연산

핵심 유형

유형01 $-x^2-5xy+7y^2$　　유형02 ③
유형03 ④　　유형04 $x^4+4x^3+3x^2-2x-2$
유형05 ⑤　　유형06 ②　　유형07 $\frac{5}{6}$　　유형08 ③
유형09 22　　유형10 $x-4$　　유형11 ①
유형12 $a=-2,\ b=3,\ c=0,\ d=4,\ e=1$

핵심 유형 완성하기

001 $-10x^2+9xy-13y^2$　　002 ⑤　　003 ②
004 ④　　005 11　　006 ①　　007 ③　　008 -2
009 -1　　010 ④　　011 ⑤　　012 x^4+4x^2+16
013 ①　　014 ②　　015 ⑤　　016 ②　　017 ②
018 9　　019 ④　　020 ②　　021 ①　　022 ⑤
023 ①　　024 ④　　025 $10\sqrt{13}$　　026 ①　　027 ④
028 ⑤　　029 ④　　030 11　　031 14　　032 ②
033 ④　　034 ③　　035 ①　　036 9　　037 ②
038 ④　　039 ②　　040 ②　　041 ③　　042 ①
043 $5\sqrt{2}$　　044 ②　　045 270　　046 ④　　047 1
048 ⑤　　049 ⑤　　050 ③
051 몫: $3x+7$, 나머지: 7　　052 ①　　053 ④
054 -3　　055 $x-4$　　056 몫: x^2-x+3, 나머지: 5
057 137

핵심 유형 최종 점검하기

1 ④　　2 ②　　3 ③　　4 $x^2-y^2-z^2-2yz$
5 ④　　6 -12　　7 ②　　8 ⑤　　9 ②
10 1　　11 48　　12 ①
13 몫: $\frac{1}{3}Q(x)$, 나머지: R　　14 ①

핵심 유형　8~10쪽

유형01 답 $-x^2-5xy+7y^2$

$2X-A=3A-2B$에서 $2X=4A-2B$

$\therefore X=2A-B=2(x^2-2xy+3y^2)-(3x^2+xy-y^2)$
$=2x^2-4xy+6y^2-3x^2-xy+y^2$
$=-x^2-5xy+7y^2$

유형02 답 ③

$(x^2+3x-2)(2x^2-x+6)$의 전개식에서 x^2항은

$x^2\times6+3x\times(-x)+(-2)\times2x^2=6x^2-3x^2-4x^2=-x^2$

따라서 x^2의 계수는 -1이다.

유형03 답 ④

④ $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)=a^3-(2b)^3=a^3-8b^3$

유형04 답 $x^4+4x^3+3x^2-2x-2$

$x^2+2x=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}(x^2+2x+1)(x^2+2x-2)&=(X+1)(X-2)\\&=X^2-X-2\\&=(x^2+2x)^2-(x^2+2x)-2\\&=x^4+4x^3+4x^2-x^2-2x-2\\&=x^4+4x^3+3x^2-2x-2\end{aligned}$$

유형05 답 ⑤

$(x-y)^2=x^2+y^2-2xy$에서

$2^2=20-2xy$　　$\therefore xy=8$

$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$=2^3+3\times8\times2=56$

유형06 답 ②

$x^2+3x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x+3+\frac{1}{x}=0$　　$\therefore x+\frac{1}{x}=-3$

$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=(-3)^3-3\times(-3)=-18$

유형07 답 $\frac{5}{6}$

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$14=2^2-2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=-5$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{-5}{-6}=\frac{5}{6}$

유형08 답 ③

$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$
$=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$
$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$
$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)$
$=(2^8-1)(2^8+1)$
$=2^{16}-1$

유형09 답 22

직육면체의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b, 높이를 c라고 하면
직육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 24이므로

$4(a+b+c)=24$　　$\therefore a+b+c=6$

또 대각선의 길이가 $\sqrt{14}$이므로

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{14}$　　$\therefore a^2+b^2+c^2=14$

이때 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$14=6^2-2(ab+bc+ca)$　　$\therefore 2(ab+bc+ca)=22$

따라서 구하는 직육면체의 겉넓이는

$2(ab+bc+ca)=22$

유형10 답 $x-4$

다항식 x^3-2x^2+5x-3을 다항식 A로 나누었을 때의 몫이 $x^2+2x+13$이고 나머지가 49이므로

$x^3-2x^2+5x-3=A(x^2+2x+13)+49$

$A(x^2+2x+13)=x^3-2x^2+5x-52$

$\therefore A=(x^3-2x^2+5x-52)\div(x^2+2x+13)$

$$\begin{array}{r|l} & x-4 \\ \hline x^2+2x+13 & x^3-2x^2+5x-52 \\ & x^3+2x^2+13x \\ \hline & -4x^2-8x-52 \\ & -4x^2-8x-52 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\therefore A=x-4$

유형11 답 ①

다항식 $f(x)$를 $x-\frac{3}{2}$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)Q(x)+R$

$\quad=(2x-3)\times\frac{1}{2}Q(x)+R$

따라서 다항식 $f(x)$를 $2x-3$으로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{2}Q(x)$, 나머지는 R이다.

유형12 답 $a=-2$, $b=3$, $c=0$, $d=4$, $e=1$

조립제법을 이용하여 다항식 x^3+3x^2-1을 $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ & & -2 & -2 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{3} \end{array}$$

$\therefore a=-2$, $b=3$, $c=0$, $d=4$, $e=1$

핵심 유형 **완성**하기 11~19쪽

001 답 $-10x^2+9xy-13y^2$

$2X-A=3(X-2B)$에서 $2X-A=3X-6B$

$\therefore X=-A+6B$

$\quad=-(4x^2-3xy+y^2)+6(-x^2+xy-2y^2)$

$\quad=-4x^2+3xy-y^2-6x^2+6xy-12y^2$

$\quad=-10x^2+9xy-13y^2$

002 답 ⑤

$2A-B-3(A-C)=2A-B-3A+3C$

$=-A-B+3C$

$=-(2x^3-3x+4)-(-3x^2+2x)+3(2x^3-x^2+1)$

$=-2x^3+3x-4+3x^2-2x+6x^3-3x^2+3$

$=4x^3+x-1$

003 답 ②

$\langle x+2y-1,\ 3x-4y+1\rangle=2(x+2y-1)-(3x-4y+1)+3$

$=2x+4y-2-3x+4y-1+3$

$=-x+8y$

004 답 ④

$A+2B=x^3+6x^2-5x+3$ …… ㉠

$A-B=4x^3-9x^2+4x-3$ …… ㉡

㉠－㉡을 하면

$3B=-3x^3+15x^2-9x+6$

$\therefore B=-x^3+5x^2-3x+2$

따라서 ㉡에서

$A=B+(4x^3-9x^2+4x-3)$

$\quad=(-x^3+5x^2-3x+2)+(4x^3-9x^2+4x-3)$

$\quad=3x^3-4x^2+x-1$

$\therefore A+B=(3x^3-4x^2+x-1)+(-x^3+5x^2-3x+2)$

$\quad=2x^3+x^2-2x+1$

005 답 11

$(x^3+4x-1)(2x^2-x+3)$의 전개식에서 x^3항은

$x^3\times3+4x\times2x^2=3x^3+8x^3=11x^3$

따라서 x^3의 계수는 11이다.

006 답 ①

$(x-2y-3)(4x+5y-6)$의 전개식에서 xy항은

$x\times5y+(-2y)\times4x=5xy-8xy=-3xy$

따라서 xy의 계수는 -3이다.

007 답 ③

$(2x^2+x-3)(x^2-5x+k)$의 전개식에서 x^2항은

$2x^2\times k+x\times(-5x)+(-3)\times x^2=2kx^2-5x^2-3x^2$

$=(2k-8)x^2$

따라서 x^2의 계수는 $2k-8$이므로

$2k-8=-6 \quad \therefore k=1$

008 답 -2

두 다항식 A, B에서 x^3의 계수를 각각 a, b라고 하면 $A-2B$에서 x^3의 계수는 $a-2b$이다.

$(x-1)(x^3-3x^2+1)$의 전개식에서 x^3항은

$x\times(-3x^2)+(-1)\times x^3=-3x^3-x^3=-4x^3$

즉, 다항식 A에서 x^3의 계수는 -4이므로

$a=-4$

$(2x^2-x+1)(x^3-x-2)$의 전개식에서 x^3항은

$2x^2\times(-x)+1\times x^3=-2x^3+x^3=-x^3$

즉, 다항식 B에서 x^3의 계수는 -1이므로

$b=-1$

따라서 다항식 $A-2B$의 x^3의 계수는

$a-2b=-4-2\times(-1)=-2$

009 답 -1

$(1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots+x^{50})^2$

$=(1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots+x^{50})(1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots+x^{50})$

이므로 주어진 다항식의 전개식에서 x^4항은

$1\times x^4+(-x)\times(-x^3)+x^2\times x^2+(-x^3)\times(-x)+x^4\times 1$

$=x^4+x^4+x^4+x^4+x^4$

$=5x^4$

$\therefore a=5$

또 주어진 다항식의 전개식에서 x^5항은

$1\times(-x^5)+(-x)\times x^4+x^2\times(-x^3)+(-x^3)\times x^2$
$+x^4\times(-x)+(-x^5)\times 1$

$=-x^5-x^5-x^5-x^5-x^5-x^5$

$=-6x^5$

$\therefore b=-6$

$\therefore a+b=-1$

010 답 ④

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$ 중 임의의 4개의 일차식에서 x만 뽑아 곱하면 x^4이 되고, 여기에 남은 일차식의 상수항을 곱하면 x^4의 계수가 되므로

$x^4+2x^4+3x^4+4x^4+5x^4=15x^4$

따라서 x^4의 계수는 15이다.

011 답 ⑤

① $(a-b-1)^2$
$=a^2+(-b)^2+(-1)^2+2\times a\times(-b)+2\times(-b)\times(-1)$
$+2\times(-1)\times a$
$=a^2+b^2-2ab-2a+2b+1$

② $(a+2b)^3=a^3+3\times a^2\times 2b+3\times a\times(2b)^2+(2b)^3$
$=a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$

③ $(x+1)(x^2-x+1)=(x+1)(x^2-x\times 1+1^2)$
$=x^3+1$

④ $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$
$=(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$
$=(x^4-y^4)(x^4+y^4)$
$=x^8-y^8$

012 답 x^4+4x^2+16

$(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)=(x^2+x\times 2+2^2)(x^2-x\times 2+2^2)$
$=x^4+x^2\times 2^2+2^4$
$=x^4+4x^2+16$

013 답 ①

$(2x-3)^3=(2x)^3-3\times(2x)^2\times 3+3\times 2x\times 3^2-3^3$
$=8x^3-36x^2+54x-27$

따라서 $a=-36$, $b=54$, $c=-27$이므로

$a+b+c=-9$

014 답 ②

$(x-y+z)(x^2+y^2+z^2+xy+yz-zx)$

$=\{x+(-y)+z\}$
$\times\{x^2+(-y)^2+z^2-x\times(-y)-(-y)\times z-z\times x\}$

$=x^3+(-y)^3+z^3-3\times x\times(-y)\times z$

$=x^3-y^3+z^3+3xyz$

015 답 ⑤

$(a+b-2c)^2$

$=a^2+b^2+(-2c)^2+2\times a\times b+2\times b\times(-2c)+2\times(-2c)\times a$

$=a^2+b^2+4c^2+2(ab-2bc-2ca)$

$=41+2\times(-16)=9$

016 답 ②

$(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$=\{(x+y)(x^2-xy+y^2)\}\{(x-y)(x^2+xy+y^2)\}$

$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)=x^6-y^6$

017 답 ②

$x+y+z=2$에서

$x+y=2-z$, $y+z=2-x$, $z+x=2-y$

$\therefore (x+y)(y+z)(z+x)$
$=(2-z)(2-x)(2-y)$
$=2^3-2^2(x+y+z)+2(xy+yz+zx)-xyz$
$=8-4\times 2+2\times(-1)-(-2)=0$

018 답 9

$x^2-3x=X$로 놓으면

$(x^2-3x+1)(x^2-3x-4)+2=(X+1)(X-4)+2$
$=X^2-3X-2$
$=(x^2-3x)^2-3(x^2-3x)-2$
$=x^4-6x^3+9x^2-3x^2+9x-2$
$=x^4-6x^3+6x^2+9x-2$

따라서 $a=-6$, $b=6$, $c=9$이므로

$a+b+c=9$

019 답 ④

$x+y=X$로 놓으면

$(x+y+z)(x+y-z)=(X+z)(X-z)=X^2-z^2$
$=(x+y)^2-z^2=x^2+2xy+y^2-z^2$

020 답 ②

$(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)=\{(x-1)(x+5)\}\{(x+1)(x+3)\}$
$=(x^2+4x-5)(x^2+4x+3)$

$x^2+4x=X$로 놓으면

$(x^2+4x-5)(x^2+4x+3)=(X-5)(X+3)=X^2-2X-15$
$=(x^2+4x)^2-2(x^2+4x)-15$
$=x^4+8x^3+16x^2-2x^2-8x-15$
$=x^4+8x^3+14x^2-8x-15$

021 답 ①

$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-3x^2+1)$

$=(x^4+x^2+1)(x^4-3x^2+1)$

$x^4+1=X$로 놓으면

$(x^4+x^2+1)(x^4-3x^2+1)=(X+x^2)(X-3x^2)$

$=X^2-2x^2X-3x^4$

$=(x^4+1)^2-2x^2(x^4+1)-3x^4$

$=x^8+2x^4+1-2x^6-2x^2-3x^4$

$=x^8-2x^6-x^4-2x^2+1$

따라서 $a=1$, $b=-2$, $c=-1$, $d=-2$이므로

$abcd=-4$

022 답 ⑤

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$에서

$1^2=5+2xy \qquad \therefore\ xy=-2$

$\therefore\ x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=1^3-3\times(-2)\times1=7$

023 답 ①

$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}$

$=\dfrac{4^2-2\times(-2)}{-2}=-10$

024 답 ④

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$에서

$-9=(-3)^3+3xy\times(-3) \qquad \therefore\ xy=-2$

$\therefore\ x^2-xy+y^2=(x-y)^2+xy$

$=(-3)^2+(-2)=7$

025 답 $10\sqrt{13}$

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$에서

$3^2=11+2xy \qquad \therefore\ xy=-1$

$\therefore\ (x-y)^2=(x+y)^2-4xy$

$=3^2-4\times(-1)=13$

그런데 $x>y$이므로 $x-y=\sqrt{13}$

$\therefore\ x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=(\sqrt{13})^3+3\times(-1)\times\sqrt{13}$

$=13\sqrt{13}-3\sqrt{13}=10\sqrt{13}$

026 답 ①

$x+y=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$

$xy=(1+\sqrt{2})\times(1-\sqrt{2})=-1$

$\therefore\ \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{x^3+y^3}{xy}$

$=\dfrac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}$

$=\dfrac{2^3-3\times(-1)\times2}{-1}=-14$

027 답 ④

$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=-2$에서 $\dfrac{x-y}{xy}=2$

$\dfrac{2}{xy}=2 \qquad \therefore\ xy=1$

$\therefore\ x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$=\{(x-y)^2+2xy\}^2-2(xy)^2$

$=(2^2+2\times1)^2-2\times1^2=34$

028 답 ⑤

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서

$7=1^3-3xy\times1 \qquad \therefore\ xy=-2$

$\therefore\ x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=1^2-2\times(-2)=5$

$(x^3+y^3)(x^2+y^2)=x^5+x^3y^2+x^2y^3+y^5$이므로

$x^5+y^5=(x^3+y^3)(x^2+y^2)-x^2y^2(x+y)$

$=7\times5-(-2)^2\times1=31$

029 답 ④

$x^2-x-1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-1-\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore\ x-\dfrac{1}{x}=1$

$\therefore\ x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

$=1^3+3\times1=4$

030 답 11

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=3^2+2=11$

031 답 14

$x^2-4x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-4+\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore\ x+\dfrac{1}{x}=4$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$

$=4^2-2=14$

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=4^3-3\times4=52$

$\therefore\ x^3-2x^2-10-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}=x^3+\dfrac{1}{x^3}-2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-10$

$=52-2\times14-10=14$

032 답 ②

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$에서

$7=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2 \qquad \therefore\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=9$

그런데 $x>0$이므로 $x+\dfrac{1}{x}=3$

$\therefore\ x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=3^3-3\times3=18$

033 답 ④

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+4=(-2\sqrt{3})^2+4=16$

그런데 $x^2>0$이므로 $x^2+\frac{1}{x^2}=4$

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$에서

$4=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2 \qquad \therefore \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=6$

그런데 $x>0$이므로 $x+\frac{1}{x}=\sqrt{6}$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{x^6+x^4+x^2+1}{x^3}&=x^3+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\\&=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)\\&=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)\\&=(\sqrt{6})^3-3\times\sqrt{6}+\sqrt{6}=4\sqrt{6}\end{aligned}$$

034 답 ③

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\&=4^2-2\times5=6\end{aligned}$$

$\therefore \frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}=\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}=\frac{6}{2}=3$

035 답 ①

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$21=(-1)^2-2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=-10$

$$\begin{aligned}\therefore a^3+b^3+c^3&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc\\&=(-1)\times\{21-(-10)\}+3\times(-8)=-55\end{aligned}$$

036 답 9

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$에서

$6=2^2-2(xy+yz+zx)$

$\therefore xy+yz+zx=-1$

$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$에서

$8=2\times\{6-(-1)\}+3xyz$

$\therefore xyz=-2$

$$\begin{aligned}\therefore x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2&=(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2\\&=(xy+yz+zx)^2-2(xy^2z+yz^2x+zx^2y)\\&=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)\\&=(-1)^2-2\times(-2)\times2=9\end{aligned}$$

037 답 ②

$a-b=5$, $b-c=-2$를 변끼리 더하면 $a-c=3$

$$\begin{aligned}\therefore\ & a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\\&=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)\\&=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\}\\&=\frac{1}{2}\{5^2+(-2)^2+3^2\}\\&=19\end{aligned}$$

038 답 ④

$$\begin{aligned}(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)&=(3-2)(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)\\&=(3^2-2^2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)\\&=(3^4-2^4)(3^4+2^4)\\&=3^8-2^8\end{aligned}$$

039 답 ②

$2018=a$로 놓으면

$$\begin{aligned}\frac{2018^2}{2017(2018^2+2019)+1}&=\frac{a^2}{(a-1)(a^2+a+1)+1}\\&=\frac{a^2}{a^3-1+1}=\frac{a^2}{a^3}\\&=\frac{1}{a}=\frac{1}{2018}\end{aligned}$$

040 답 ②

$100=a$로 놓으면

$$\begin{aligned}99^3+101^3&=(a-1)^3+(a+1)^3\\&=(a^3-3a^2+3a-1)+(a^3+3a^2+3a+1)\\&=2a^3+6a\\&=2\times100^3+6\times100\\&=2000600\end{aligned}$$

따라서 구하는 각 자리의 숫자의 합은

$2+6=8$

041 답 ③

$$\begin{aligned}\frac{3\times5\times17\times257+1}{32}&=\frac{(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)+1}{2^5}\\&=\frac{(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)+1}{2^5}\\&=\frac{(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)+1}{2^5}\\&=\frac{(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)+1}{2^5}\\&=\frac{(2^8-1)(2^8+1)+1}{2^5}\\&=\frac{2^{16}-1+1}{2^5}\\&=\frac{2^{16}}{2^5}=2^{11}\end{aligned}$$

042 답 ①

$10=x$로 놓으면 $10.3=10+\frac{3}{10}=x+\frac{3}{x}$이므로

$$\begin{aligned}10.3^3&=\left(x+\frac{3}{x}\right)^3=x^3+\frac{27}{x^3}+3\times x\times\frac{3}{x}\left(x+\frac{3}{x}\right)\\&=x^3+\frac{27}{x^3}+9x+\frac{27}{x}\\&=10^3+\frac{27}{10^3}+9\times10+\frac{27}{10}\\&=1092.727\end{aligned}$$

따라서 소수점 아래 첫째 자리의 숫자는 7, 둘째 자리의 숫자는 2이므로 $a=7$, $b=2$

$\therefore a+b=9$

043 답 $5\sqrt{2}$

직육면체의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b, 높이를 c라고 하면 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 48이므로

$4(a+b+c)=48 \qquad \therefore a+b+c=12$

또 겉넓이가 94이므로 $2(ab+bc+ca)=94$

$$\begin{aligned}\therefore a^2+b^2+c^2&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\&=12^2-94=50\end{aligned}$$

따라서 구하는 대각선의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

044 답 ②

직사각형 ABCD의 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y라고 하면 직사각형의 둘레의 길이가 16이므로

$2(x+y)=16 \qquad \therefore x+y=8$

또 직사각형 ABCD가 반지름의 길이가 3인 원에 내접하므로 대각선의 길이는 원의 지름인 6이다.

이때 피타고라스 정리에 의하여 $x^2+y^2=6^2$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$36=8^2-2xy \qquad \therefore xy=14$

따라서 구하는 직사각형의 넓이는 14이다.

045 답 270

두 정육면체의 한 모서리의 길이를 각각 x, y라고 하면

$x+y=9$, $x^3+y^3=243$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서

$243=9^3-3xy\times 9 \qquad \therefore xy=18$

따라서 구하는 두 정육면체의 겉넓이의 합은

$$\begin{aligned}6(x^2+y^2)&=6\{(x+y)^2-2xy\}\\&=6\times(9^2-2\times 18)=270\end{aligned}$$

046 답 ④

다항식 $2x^3+3x^2-x+2$를 다항식 A로 나누었을 때의 몫이 $2x+1$이고 나머지가 3이므로

$2x^3+3x^2-x+2=A(2x+1)+3$

$A(2x+1)=2x^3+3x^2-x-1$

$\therefore A=(2x^3+3x^2-x-1)\div(2x+1)$

$$\begin{array}{r}
x^2+x-1\\
2x+1\,\overline{)\,2x^3+3x^2-x-1}\\
\underline{2x^3+x^2}\\
2x^2-x\\
\underline{2x^2+x}\\
-2x-1\\
\underline{-2x-1}\\
0
\end{array}$$

$\therefore A=x^2+x-1$

047 답 1

$a=2$, $b=-7$, $c=6$이므로 $a+b+c=1$

048 답 ⑤

다항식 $3x^3-2x^2+10$을 x^2-x+5로 나누면

$$\begin{array}{r}
3x+1\\
x^2-x+5\,\overline{)\,3x^3-2x^2+10}\\
\underline{3x^3-3x^2+15x}\\
x^2-15x+10\\
\underline{x^2-x+5}\\
-14x+5
\end{array}$$

따라서 몫은 $3x+1$, 나머지는 $-14x+5$이므로

$a=3$, $b=1$, $c=-14$, $d=5$

$\therefore ad+bc=15-14=1$

049 답 ⑤

다항식 $x^4-x^3+6x^2+2x+11$을 x^2+1로 나누면

$$\begin{array}{r}
x^2-x+5\\
x^2+1\,\overline{)\,x^4-x^3+6x^2+2x+11}\\
\underline{x^4+x^2}\\
-x^3+5x^2+2x\\
\underline{-x^3-x}\\
5x^2+3x+11\\
\underline{5x^2+5}\\
3x+6
\end{array}$$

따라서 $Q(x)=x^2-x+5$, $R(x)=3x+6$이므로

$Q(1)-R(-1)=5-3=2$

050 답 ③

다항식 x^3-4x^2+ax-5를 x^2+x+b로 나누면

$$\begin{array}{r}
x-5\\
x^2+x+b\,\overline{)\,x^3-4x^2+ax-5}\\
\underline{x^3+x^2+bx}\\
-5x^2+(a-b)x-5\\
\underline{-5x^2-5x-5b}\\
(a-b+5)x-5+5b
\end{array}$$

이때 나머지가 0이므로 $(a-b+5)x-5+5b=0$

따라서 $a-b+5=0$, $-5+5b=0$이므로

$a=-4$, $b=1 \qquad \therefore a+b=-3$

051 답 몫: $3x+7$, 나머지: 7

다항식 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫이 $3x-5$이고 나머지가 3이므로

$f(x)=(x+2)(3x-5)+3=3x^2+x-7$

$f(x)$를 $x-2$로 나누면

$$\begin{array}{r}
3x+7\\
x-2\,\overline{)\,3x^2+x-7}\\
\underline{3x^2-6x\phantom{-7}}\\
7x-7\\
\underline{7x-14}\\
7
\end{array}$$

따라서 구하는 몫은 $3x+7$, 나머지는 7이다.

052 답 ①

다항식 $f(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+R$$
$$=(2x+1)\times\frac{1}{2}Q(x)+R$$

따라서 다항식 $f(x)$를 $2x+1$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{2}Q(x)$, 나머지는 R이다.

053 답 ④

다항식 $f(x)$를 $3x-2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$$f(x)=(3x-2)Q(x)+R$$
$$=\left(x-\frac{2}{3}\right)\times 3Q(x)+R$$

따라서 다항식 $f(x)$를 $x-\frac{2}{3}$로 나누었을 때의 몫은 $3Q(x)$, 나머지는 R이다.

054 답 -3

조립제법을 이용하여 다항식 x^3+2x-3을 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면

-1	1	0	2	-3
		-1	1	-3
	1	-1	3	-6

$\therefore a=-1,\ b=0,\ c=1,\ d=3,\ e=-6$

$\therefore a+b+c+d+e=-3$

055 답 $x-4$

오른쪽과 같이 조립제법을 이용하면 다항식 x^3-3x^2-6x+9를 $x+2$로 나누었을 때의 몫은 x^2-5x+4이므로

$Q(x)=x^2-5x+4$

따라서 $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫은 $x-4$이다.

-2	1	-3	-6	9
		-2	10	-8
1	1	-5	4	1
		1	-4	
	1	-4	0	

056 답 몫: x^2-x+3, 나머지: 5

다항식 $f(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫이 $2x^2-2x+6$, 나머지가 5이므로

$$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-2x+6)+5$$
$$=(2x-1)(x^2-x+3)+5$$

따라서 다항식 $f(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 x^2-x+3, 나머지는 5이다.

057 답 137

주어진 조립제법은 다항식 $6x^3+2ax^2+2bx+6$을 $x-\frac{2}{3}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하는 과정이다.

□ 안에 들어갈 수를 각각 p, q라고 하면

$\frac{2}{3}$	6	$2a$	$2b$	6
		4	8	-4
	6	p	q	2

$\frac{2}{3}p=8,\ \frac{2}{3}q=-4$에서

$p=12,\ q=-6$

또 $2a+4=p,\ 2b+8=q$에서

$a=4,\ b=-7$

$$\therefore 6x^3+8x^2-14x+6=\left(x-\frac{2}{3}\right)(6x^2+12x-6)+2$$
$$=(3x-2)(2x^2+4x-2)+2$$

$6x^3+8x^2-14x+6=(3x-2)(2x^2+4x-2)+2$의 양변을 2로 나누면

$3x^3+4x^2-7x+3=(3x-2)(x^2+2x-1)+1$

따라서 $Q(x)=x^2+2x-1,\ R=1$이므로

$$aQ(b)+R=4Q(-7)+1$$
$$=4\times 34+1=137$$

핵심 유형 **최종 점검하기** • 20~21쪽

1 답 ④

유형 01 다항식의 덧셈과 뺄셈

$3(A-B)+2(B+C)$

$=3A-3B+2B+2C$

$=3A-B+2C$

$=3(2x^3-x^2-x+6)-(x^3-2x)+2(3x^3-x^2)$

$=6x^3-3x^2-3x+18-x^3+2x+6x^3-2x^2$

$=11x^3-5x^2-x+18$

2 답 ②

유형 02 다항식의 전개식에서 계수

$(x^2-2x+1)(2x^3-x+3)$의 전개식에서

x^3항은 $x^2\times(-x)+1\times 2x^3=x^3 \quad \therefore a=1$

x^2항은 $x^2\times 3+(-2x)\times(-x)=5x^2 \quad \therefore b=5$

$\therefore a+b=6$

3 답 ③

유형 03 곱셈 공식을 이용한 식의 전개

$(x+y)(x^2-xy+y^2)+(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

$=x^3+y^3+x^3-8y^3$

$=2x^3-7y^3$

4 답 $x^2-y^2-z^2-2yz$

유형 04 공통부분이 있는 식의 전개

$(x+y+z)(x-y-z)=\{x+(y+z)\}\{x-(y+z)\}$

$y+z=X$로 놓으면

$$\{x+(y+z)\}\{x-(y+z)\}=(x+X)(x-X)$$
$$=x^2-X^2=x^2-(y+z)^2$$
$$=x^2-y^2-z^2-2yz$$

5 답 ④

유형 04 공통부분이 있는 식의 전개

$(x-4y)(x-2y)(x-y)(x+y)$

$=\{(x-4y)(x+y)\}\{(x-2y)(x-y)\}$

$=(x^2-3xy-4y^2)(x^2-3xy+2y^2)$

$x^2-3xy=X$로 놓으면

$(x^2-3xy-4y^2)(x^2-3xy+2y^2)$

$=(X-4y^2)(X+2y^2)$

$=X^2-2y^2X-8y^4$

$=(x^2-3xy)^2-2y^2(x^2-3xy)-8y^4$

$=x^4-6x^3y+9x^2y^2-2x^2y^2+6xy^3-8y^4$

$=x^4-6x^3y+7x^2y^2+6xy^3-8y^4$

6 답 -12

유형 05 곱셈 공식의 변형 – $x^n \pm y^n$의 값

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$에서

$(-2)^2=6+2xy \qquad \therefore\ xy=-1$

$\therefore\ x^3+y^3-2xy=(x+y)^3-3xy(x+y)-2xy$

$\qquad\qquad =(-2)^3-3\times(-1)\times(-2)-2\times(-1)=-12$

7 답 ②

유형 06 곱셈 공식의 변형 – $x^n \pm \frac{1}{x^n}$의 값

$x^2-3x-1=0$에서 $x\neq 0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-3-\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore\ x-\frac{1}{x}=3$

$\therefore\ \frac{x^4+1}{x^2}-\frac{x^6-1}{x^3}=x^2+\frac{1}{x^2}-\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)$

$\qquad =\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2-\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)\right\}$

$\qquad =3^2+2-(3^3+3\times3)=-25$

8 답 ⑤

유형 07 곱셈 공식의 변형 – $a^n+b^n+c^n$의 값

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$에서 $\frac{ab+bc+ca}{abc}=1$

$\frac{ab+bc+ca}{-4}=1 \qquad \therefore\ ab+bc+ca=-4$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$\qquad =1^2-2\times(-4)=9$

9 답 ②

유형 07 곱셈 공식의 변형 – $a^n+b^n+c^n$의 값

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$12=2^2-2(ab+bc+ca) \qquad \therefore\ ab+bc+ca=-4$

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$에서

$8=2\times\{12-(-4)\}+3abc \qquad \therefore\ abc=-8$

10 답 1

유형 08 곱셈 공식을 이용한 수의 계산

$1004=a$로 놓으면

$\frac{1002\times1006+4}{1004^2}=\frac{(a-2)(a+2)+4}{a^2}$

$\qquad =\frac{a^2-4+4}{a^2}=1$

11 답 48

유형 09 곱셈 공식의 도형에의 활용

직사각형의 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y라고 하면 직사각형의 둘레의 길이가 28이므로

$2(x+y)=28$

$\therefore\ x+y=14$

직사각형의 대각선의 길이는 반지름의 길이 10과 같으므로 피타고라스 정리에 의하여

$x^2+y^2=10^2$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$100=14^2-2xy$

$\therefore\ xy=48$

따라서 구하는 직사각형의 넓이는 48이다.

12 답 ①

유형 10 다항식의 나눗셈

다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 x^2-3이고 나머지가 -1이므로

$f(x)=(x-2)(x^2-3)-1$

$\qquad =x^3-2x^2-3x+5$

$f(x)$를 x^2-1로 나누면

$$\begin{array}{r}
x-2 \\
x^2-1\,\overline{)\,x^3-2x^2-3x+5} \\
\underline{x^3 \qquad\quad -x \qquad} \\
-2x^2-2x+5 \\
\underline{-2x^2 \qquad\quad +2} \\
-2x+3
\end{array}$$

따라서 나머지가 $-2x+3$이므로

$a=-2$

13 답 몫: $\frac{1}{3}Q(x)$, 나머지: R

유형 11 몫과 나머지의 변형

다항식 $f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$f(x)=(x+3)Q(x)+R$

$\qquad =(3x+9)\times\frac{1}{3}Q(x)+R$

따라서 다항식 $f(x)$를 $3x+9$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{3}Q(x)$, 나머지는 R이다.

14 답 ①

유형 12 조립제법

조립제법을 이용하여 다항식 x^3-3x+a를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & 0 & -3 & a \\
 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline
 & 1 & 1 & -2 & \boxed{-1}
\end{array}$$

$\therefore\ b=1,\ c=0,\ d=1,\ e=-2$

이때 $a-2=-1$이므로 $a=1$

02 나머지정리와 인수분해

핵심 유형

	유형01 ①	유형02 -2	유형03 5
유형04 ②	유형05 20	유형06 ⑤	유형07 8
유형08 $-x+2$		유형09 4	유형10 1
유형11 ①	유형12 2	유형13 ④	유형14 ③
유형15 ④	유형16 ⑤	유형17 ③	유형18 -2
유형19 ④	유형20 ③	유형21 ⑤	유형22 ①

핵심 유형 완성하기

001 3	002 2	003 6	004 ②	005 ⑤
006 -6	007 ①	008 ④	009 ①	010 1
011 ④	012 ③	013 ②	014 ⑤	015 ⑤
016 ②	017 ②	018 -3	019 ③	020 -6
021 12	022 14	023 ③	024 ①	
025 $4x-5$		026 ④	027 $2x$	028 ④
029 $-x^2+2x-1$		030 $2x^2+5x+1$		031 ①
032 4	033 ①	034 18	035 ②	
036 -12	037 6	038 ①	039 2	040 ⑤
041 -10	042 ③	043 -2	044 ③	045 ①
046 ②	047 3	048 ④	049 ⑤	
050 $(x+y)^2(x-y)^2$		051 ⑤	052 $x(x-3y)^3$	
053 $(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$				054 ③
055 ②	056 $(a+b-1)(a+b-2)$			057 ①
058 ③	059 -13	060 ②	061 ③	062 ⑤
063 ①	064 ③	065 ④		
066 $(x-y+1)(x^2-x-y+1)$			067 ④	
068 ㄴ, ㄷ	069 14	070 $(x+1)(x+2)(x-3)$		
071 ⑤	072 ④	073 2	074 ②	075 ②
076 ④	077 ③	078 정삼각형		079 ⑤
080 ③	081 ④	082 ②	083 417	084 ④
085 ①	086 ③			

핵심 유형 최종 점검하기

1 ③	2 ①	3 ②	4 64	5 ③
6 11	7 7	8 -5	9 ⑤	10 ⑤
11 12	12 24	13 ④	14 ⑤	
15 $2x^2+10x-6$		16 ③	17 ④	
18 $(x-y-z)(x+y-z-1)$			19 2	20 -5
21 ⑤	22 12	23 ②		

핵심 유형 24~26쪽

유형01 탑 ①

주어진 등식에서 좌변을 정리하면

$x^3+(a-9)x+3a=x^3+bx-18$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a-9=b,\ 3a=-18$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-6,\ b=-15$

$\therefore a+b=-21$

유형02 탑 -2

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$2=-2c \qquad \therefore c=-1$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a+3=0 \qquad \therefore a=-3$

주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$6-2a=6b,\ 12=6b \qquad \therefore b=2$

$\therefore a+b+c=-2$

유형03 탑 5

주어진 이차방정식에 $x=1$을 대입하면

$1-(k+1)+(k-3)a-b+1=0$

$\therefore (a-1)k-3a-b+1=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$a-1=0,\ -3a-b+1=0$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-2$

$\therefore a^2+b^2=1+4=5$

유형04 탑 ②

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$1=a_0$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_6$

$$\begin{aligned}\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6&=(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_6)-a_0\\&=0-1=-1\end{aligned}$$

유형05 탑 20

다항식 x^3+ax^2+b를 x^2-x+2로 나누었을 때의 몫을 $x+c$(c는 상수)라고 하면

$$\begin{aligned}x^3+ax^2+b&=(x^2-x+2)(x+c)-6x+4\\&=x^3+(c-1)x^2-(c+4)x+2c+4\end{aligned}$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=c-1,\ 0=c+4,\ b=2c+4$

세 식을 연립하여 풀면

$a=-5,\ b=-4,\ c=-4$

$\therefore ab=20$

유형06 답 ⑤

다음과 같이 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & 1 & -1 & 4 \\
 & & 2 & 6 & 10 \\ \hline
2 & 1 & 3 & 5 & \boxed{14} \\
 & & 2 & 10 & \\ \hline
2 & 1 & 5 & \boxed{15} & \\
 & & 2 & & \\ \hline
 & 1 & \boxed{7} & &
\end{array}$$

따라서 $a=1$, $b=7$, $c=15$, $d=14$이므로 $a+b-c+d=7$

유형07 답 8

$f(x)=x^3+ax^2+bx-5$라고 하면 나머지정리에 의하여

$f(1)=2$, $f(-2)=-1$

$f(1)=2$에서 $1+a+b-5=2$, $a+b=6$ …… ㉠

$f(-2)=-1$에서 $-8+4a-2b-5=-1$, $2a-b=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=2$

$\therefore ab=8$

유형08 답 $-x+2$

나머지정리에 의하여 $f(-2)=4$, $f(3)=-1$

$f(x)$를 x^2-x-6으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$(a, b는 상수)라고 하면

$f(x)=(x^2-x-6)Q(x)+ax+b$

$\quad=(x+2)(x-3)Q(x)+ax+b$

$f(-2)=4$에서 $-2a+b=4$ …… ㉠

$f(3)=-1$에서 $3a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$

따라서 구하는 나머지는 $-x+2$

유형09 답 4

나머지정리에 의하여 $f(-3)=4$

따라서 $f(-4x+9)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(-4\times3+9)=f(-3)=4$

유형10 답 1

$f(x)=x^3-3x^2+6$이라고 하면 $f(1)=4$이므로

$f(x)=(x-1)Q(x)+4$ …… ㉠

이때 $f(-1)=2$이고 $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(-1)$이므로 ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$2=-2Q(-1)+4 \quad \therefore Q(-1)=1$

유형11 답 ①

x^{100}을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 하면

$x^{100}=(x+1)Q(x)+R$

양변에 $x=-1$을 대입하면 $R=1$

$x^{100}=(x+1)Q(x)+1$의 양변에 $x=19$를 대입하면

$19^{100}=20Q(19)+1$

따라서 구하는 나머지는 1이다.

유형12 답 2

$f(x)=ax^3-5x^2+bx+2$라고 하면 $f(x)$가 $x-1$, $x-2$로 각각 나누어떨어지므로

$f(1)=0$, $f(2)=0$

$f(1)=0$에서 $a-5+b+2=0$, $a+b=3$ …… ㉠

$f(2)=0$에서 $8a-20+2b+2=0$, $4a+b=9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

$\therefore ab=2$

유형13 답 ④

$f(x)=2x^3-5x^2+ax+b$라고 하면 $f(x)$가 x^2-x-6, 즉 $(x+2)(x-3)$으로 나누어떨어지므로

$f(-2)=0$, $f(3)=0$

$f(-2)=0$에서 $-16-20-2a+b=0$

$2a-b=-36$ …… ㉠

$f(3)=0$에서 $54-45+3a+b=0$

$3a+b=-9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-9$, $b=18$

$\therefore a+b=9$

핵심 유형 **완성**하기 27~33쪽

001 답 3

주어진 등식에서 우변을 정리하면

$x^3-2x^2+ax-32=x^3+(b+c)x^2+(bc-16)x-16b$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$-2=b+c$, $a=bc-16$, $-32=-16b$

세 식을 연립하여 풀면

$a=-24$, $b=2$, $c=-4$

$\therefore \dfrac{a}{bc}=\dfrac{-24}{2\times(-4)}=3$

002 답 2

주어진 등식을 k에 대하여 정리하면

$(x+y-3)k+2x-3y+4=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x+y-3=0$, $2x-3y+4=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=2$

$\therefore xy=2$

003 답 6

주어진 등식에서 좌변을 x, y에 대하여 정리하면

$(a+b)x+(a-2b)y+c=4x+y+2$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a+b=4$ …… ㉠, $a-2b=1$ …… ㉡, $c=2$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=1$

$\therefore abc=6$

004 답 ②

주어진 식의 일정한 값을 k라고 하면

$\frac{6x+3a}{2x+4}=k \qquad \therefore 6x+3a=2kx+4k$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$6=2k,\ 3a=4k$

두 식을 연립하여 풀면 $k=3,\ a=4$

005 답 ⑤

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-2b=-4 \qquad \therefore b=2$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$3c=-3 \qquad \therefore c=-1$

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$6a=6 \qquad \therefore a=1$

$\therefore a+b+c=2$

006 답 -6

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$c=3$

주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$9=-3b+c,\ 9=-3b+3 \qquad \therefore b=-2$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$5=-2a-2b+c,\ 5=-2a+4+3 \qquad \therefore a=1$

$\therefore abc=-6$

007 답 ①

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=1+a+b,\ a+b=-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

주어진 등식의 양변에 $x^2=2$를 대입하면

$0=4+2a+b,\ 2a+b=-4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=2$

$\therefore ab=-6$

008 답 ④

주어진 이차방정식에 $x=1$을 대입하면

$a-b(k+2)+a(k-1)=4$

$\therefore (a-b)k-2b-4=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$a-b=0,\ -2b-4=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=-2$

$\therefore ab=4$

009 답 ①

$x-y=-1$에서 $x=y-1$을 주어진 등식에 대입하면

$(y-1)^2-2(y-1)=ay^2+by+c$

$y^2-4y+3=ay^2+by+c$

이 등식이 y에 대한 항등식이므로

$a=1,\ b=-4,\ c=3 \qquad \therefore abc=-12$

010 답 1

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-1=a_0$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_5$

$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_5)-a_0$

$=0-(-1)=1$

011 답 ④

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(1+1-1)^7=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{14}$

$\therefore a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{14}=1$

012 답 ③

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^{10}=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{10} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면 $2^{10}=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10})$

$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}=2^9=512$

013 답 ②

$(3x-5)^5(x^3-4x^2+3x-1)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{23}x^{23}$

($a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{23}$은 상수)

이라 하고 양변에 $x=1$을 대입하면

$-32=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{23}$

따라서 상수항을 포함한 모든 계수의 합은 -32이다.

014 답 ⑤

다항식 x^3+ax^2+b를 x^2-x+3으로 나누었을 때의 몫을

$x+c$(c는 상수)라고 하면

$x^3+ax^2+b=(x^2-x+3)(x+c)+2$

$=x^3+(c-1)x^2+(-c+3)x+3c+2$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=c-1,\ 0=-c+3,\ b=3c+2$

세 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=11,\ c=3$

$\therefore a+b=13$

015 답 ⑤

다항식 x^3+ax^2+bx+6을 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 몫을

$x+c$(c는 상수)라고 하면

$x^3+ax^2+bx+6=(x^2-4x+3)(x+c)$

$=x^3+(c-4)x^2+(-4c+3)x+3c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=c-4,\ b=-4c+3,\ 6=3c$

세 식을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=-5,\ c=2$

$\therefore ab=10$

016 답 ②

다항식 $x^4+2x^3+4x^2+4$를 x^2+ax+b로 나누었을 때의 몫이 x^2+1이고 나머지가 $-2x+1$이므로

$$\begin{aligned}x^4+2x^3+4x^2+4&=(x^2+ax+b)(x^2+1)-2x+1\\&=x^4+ax^3+(b+1)x^2+(a-2)x+b+1\end{aligned}$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$2=a$, $4=b+1$, $0=a-2$, $4=b+1$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로 $a-b=-1$

017 답 ②

다음과 같이 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & 3 & -2 & 1\\
 & & 1 & 4 & 2\\ \hline
1 & 1 & 4 & 2 & \boxed{3}\\
 & & 1 & 5 & \\ \hline
1 & 1 & 5 & \boxed{7} & \\
 & & 1 & & \\ \hline
 & 1 & \boxed{6} & &
\end{array}$$

따라서 $a=6$, $b=7$, $c=3$이므로

$a-b+c=2$

018 답 -3

$p-1=2$에서 $p=3$

$q-2=-1$에서 $q=1$

주어진 조립제법에서 $a=1$, $b=1$, $c=-1$이므로

$abcpq=-3$

019 답 ③

$x^3+8x^2+21x+21=(x+2)^3+a(x+2)^2+b(x+2)+c$이므로

다음과 같이 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 1 & 8 & 21 & 21\\
 & & -2 & -12 & -18\\ \hline
-2 & 1 & 6 & 9 & \boxed{3}\\
 & & -2 & -8 & \\ \hline
-2 & 1 & 4 & \boxed{1} & \\
 & & -2 & & \\ \hline
 & 1 & \boxed{2} & &
\end{array}$$

따라서 $a=2$, $b=1$, $c=3$이므로

$f(x)=(x+2)^3+2(x+2)^2+(x+2)+3$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(98)&=100^3+2\times100^2+100+3\\&=1000000+20000+100+3\\&=1020103\end{aligned}$$

이때 각 자리의 숫자의 합은

$1+2+1+3=7$

020 답 -6

$f(x)=x^3+2x^2+ax+b$라고 하면 나머지정리에 의하여

$f(-1)=1$, $f(-3)=-3$

$f(-1)=1$에서 $-1+2-a+b=1$

$a-b=0$ …… ㉠

$f(-3)=-3$에서 $-27+18-3a+b=-3$

$3a-b=-6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-3$

$\therefore\ a+b=-6$

021 답 12

나머지정리에 의하여 $f(2)=4$

따라서 $(x+1)f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$(2+1)f(2)=3\times4=12$

022 답 14

나머지정리에 의하여 $f(-1)=2$이므로

$-1+a+5=2$ $\quad\therefore\ a=-2$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+5$이므로 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(3)=14$

023 답 ③

$f(x)=x^3+2x^2-ax+1$이라고 하면 나머지정리에 의하여

$f(-2)=f(3)$이므로 $2a+1=-3a+46$ $\quad\therefore\ a=9$

024 답 ①

나머지정리에 의하여 $f(3)=3$, $g(3)=-2$

따라서 $f(x)g(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(3)g(3)=-6$

025 답 $4x-5$

나머지정리에 의하여 $f(1)=-1$, $f(2)=3$

$f(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$(a, b는 상수)라고 하면

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b\\&=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b\end{aligned}$$

$f(1)=-1$에서 $a+b=-1$ …… ㉠

$f(2)=3$에서 $2a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-5$

따라서 구하는 나머지는 $4x-5$

026 답 ④

나머지정리에 의하여 $f(-2)=1$, $f(2)=5$

$x^2f(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$(a, b는 상수)라고 하면

$$\begin{aligned}x^2f(x)&=(x^2-4)Q(x)+ax+b\\&=(x+2)(x-2)Q(x)+ax+b\end{aligned}$$

양변에 $x=-2$를 대입하면 $4\times1=-2a+b$ …… ㉠

양변에 $x=2$를 대입하면 $4\times5=2a+b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=12$

따라서 $R(x)=4x+12$이므로 $R(1)=16$

027 답 $2x$

$f(x)$를 x^2+x-6으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라고 하면

$f(x)=(x^2+x-6)Q_1(x)+4$
$\quad=(x+3)(x-2)Q_1(x)+4$

$\therefore f(2)=4$

$f(x)$를 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라고 하면

$f(x)=(x^2-2x-3)Q_2(x)+x-1$
$\quad=(x+1)(x-3)Q_2(x)+x-1$

$\therefore f(-1)=-2$

$f(x)$를 x^2-x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$(a, b는 상수)라고 하면

$f(x)=(x^2-x-2)Q(x)+ax+b$
$\quad=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$

$f(-1)=-2$에서 $-a+b=-2$ ...... ㉠

$f(2)=4$에서 $2a+b=4$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=0$

따라서 구하는 나머지는 $2x$

028 답 ④

$x^{10}+x^7+x^5+x^2$을 x^3-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c(a, b, c는 상수)라고 하면

$x^{10}+x^7+x^5+x^2=(x^3-x)Q(x)+ax^2+bx+c$
$\quad=x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$

양변에 $x=0$을 대입하면

$0=c$ ...... ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=a-b+c$ ...... ㉡

양변에 $x=1$을 대입하면

$4=a+b+c$ ...... ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=2$, $c=0$

따라서 구하는 나머지는 $2x^2+2x$

029 답 $-x^2+2x-1$

$f(x)$를 $x(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라고 하면

$f(x)=x(x+1)Q_1(x)+3x-1$

$\therefore f(0)=-1$, $f(-1)=-4$

$f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라고 하면

$f(x)=(x+1)(x-2)Q_2(x)+x-3$

$\therefore f(2)=-1$

$f(x)$를 $x(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c(a, b, c는 상수)라고 하면

$f(x)=x(x+1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$

$f(0)=-1$에서 $c=-1$ ...... ㉠

$f(-1)=-4$에서 $a-b+c=-4$ ...... ㉡

$f(2)=-1$에서 $4a+2b+c=-1$ ...... ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$, $c=-1$

따라서 구하는 나머지는 $-x^2+2x-1$

030 답 $2x^2+5x+1$

$f(x)$를 $(x+1)^2(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c(a, b, c는 상수)라고 하면

$f(x)=(x+1)^2(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$ ...... ㉠

$f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x-1$이므로 ㉠에서 ax^2+bx+c를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x-1$이다.

$\therefore ax^2+bx+c=a(x+1)^2+x-1$

이를 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x+1)^2(x+2)Q(x)+a(x+1)^2+x-1$

한편 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 -1이므로

$f(-2)=-1$에서 $a-3=-1$ $\therefore a=2$

따라서 구하는 나머지는

$2(x+1)^2+x-1=2x^2+5x+1$

031 답 ①

나머지정리에 의하여 $f(-1)=-2$

따라서 $f(x+6)$을 $x+7$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-7+6)=f(-1)=-2$

032 답 4

$f(x)$를 $(x+2)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$f(x)=(x+2)(x-1)Q(x)+x+3$

$\therefore f(1)=4$

따라서 $f(3x-5)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(3\times2-5)=f(1)=4$

033 답 ①

$f(x)$를 x^2+5x+6으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$f(x)=(x^2+5x+6)Q(x)+3x+2$
$\quad=(x+3)(x+2)Q(x)+3x+2$

$\therefore f(-2)=-4$

따라서 $(4x^2-1)f(2x-5)$를 $2x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$\left(4\times\frac{9}{4}-1\right)f\left(2\times\frac{3}{2}-5\right)=8f(-2)$
$\quad=8\times(-4)=-32$

034 답 18

$f(x)=x^3-x-5$라고 하면 $f(2)=1$이므로

$x^3-x-5=(x-2)Q(x)+1$ ...... ㉠

이때 $Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 $Q(3)$이므로 ㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$19=Q(3)+1$ $\therefore Q(3)=18$

035 답 ②

$f(x)=(x+3)Q(x)+2$ ...... ㉠

이때 나머지정리에 의하여 $f(2)=-3$이고 $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(2)$이므로 ㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$-3=5Q(2)+2$ $\therefore Q(2)=-1$

036 답 -12

$f(x)=(x-1)Q(x)+3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 나머지정리에 의하여 $Q(-2)=5$이고 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 $f(-2)$이므로 ㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$f(-2)=-3Q(-2)+3=-3\times5+3=-12$

037 답 6

$f(x)=(x^2-2x+4)Q(x)+3x+2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$Q(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라고 하면

$Q(x)=(x+2)Q'(x)+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x^2-2x+4)\{(x+2)Q'(x)+1\}+3x+2$

$\quad=(x^3+8)Q'(x)+x^2+x+6$

따라서 $R(x)=x^2+x+6$이므로

$R(-1)=6$

038 답 ①

x^{50}을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 하면

$x^{50}=(x-1)Q(x)+R$

양변에 $x=1$을 대입하면 $R=1$

$x^{50}=(x-1)Q(x)+1$의 양변에 $x=9$를 대입하면

$9^{50}=8Q(9)+1$

따라서 구하는 나머지는 1이다.

039 답 2

$2x^{50}$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 하면

$2x^{50}=(x+1)Q(x)+R$

양변에 $x=-1$을 대입하면 $R=2$

$2x^{50}=(x+1)Q(x)+2$의 양변에 $x=3$을 대입하면

$2\times3^{50}=4Q(3)+2$

따라서 구하는 나머지는 2이다.

040 답 ⑤

$2^{2018}=(2^5)^{403}\times2^3=8\times32^{403}$

$8x^{403}$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 하면

$8x^{403}=(x-1)Q(x)+R$

양변에 $x=1$을 대입하면 $R=8$

$8x^{403}=(x-1)Q(x)+8$의 양변에 $x=32$를 대입하면

$8\times32^{403}=31Q(32)+8$

$\therefore$ $2^{2018}=31Q(32)+8$

따라서 구하는 나머지는 8이다.

041 답 -10

$f(x)=x^3+ax^2+bx-15$라고 하면 $f(x)$가 $x+1$, $x-3$으로 각각 나누어떨어지므로

$f(-1)=0$, $f(3)=0$

$f(-1)=0$에서 $-1+a-b-15=0$

$a-b=16$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(3)=0$에서 $27+9a+3b-15=0$

$3a+b=-4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-13$

$\therefore$ $a+b=-10$

042 답 ③

$f(x)=2x^4-3x^3+kx^2-x+7$이라고 하면 $f(x)$가 $x-1$을 인수로 가지므로 $f(1)=0$에서

$2-3+k-1+7=0$ $\quad\therefore$ $k=-5$

043 답 -2

$f(x+1)$이 $x+2$로 나누어떨어지므로

$f(-2+1)=f(-1)=0$

$-2+a+3+1=0$ $\quad\therefore$ $a=-2$

044 답 ③

$f(-1)=-1$, $f(1)=1$, $f(2)=2$에서

$f(-1)+1=0$, $f(1)-1=0$, $f(2)-2=0$

즉, $f(x)-x$는 $x+1$, $x-1$, $x-2$로 나누어떨어진다.

이때 $f(x)$는 x^3의 계수가 1인 삼차식이므로

$f(x)-x=(x+1)(x-1)(x-2)$

$\therefore$ $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)+x$

따라서 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(3)=(3+1)(3-1)(3-2)+3=11$

045 답 ①

$f(x)=x^3+x^2+ax+b$라고 하면 $f(x)$가 x^2-x-2, 즉 $(x+1)(x-2)$로 나누어떨어지므로

$f(-1)=0$, $f(2)=0$

$f(-1)=0$에서 $-1+1-a+b=0$

$a-b=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(2)=0$에서 $8+4+2a+b=0$

$2a+b=-12$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=-4$

$\therefore$ $a+b=-8$

046 답 ②

$f(x)=2x^3-11x^2+ax+b$가 x^2-5x+6, 즉 $(x-2)(x-3)$으로 나누어떨어지므로

$f(2)=0$, $f(3)=0$

$f(2)=0$에서 $16-44+2a+b=0$

$2a+b=28$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(3)=0$에서 $54-99+3a+b=0$

$3a+b=45$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=17$, $b=-6$

$\therefore$ $f(x)=2x^3-11x^2+17x-6$

따라서 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(1)=2$

047 답 3

$f(x)-3$이 x^2-1, 즉 $(x+1)(x-1)$로 나누어떨어지므로

$f(-1)-3=0$, $f(1)-3=0$

$\therefore f(-1)=3$, $f(1)=3$

$f(x+2)$를 x^2+4x+3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$(a, b는 상수)라고 하면

$$\begin{aligned} f(x+2)&=(x^2+4x+3)Q(x)+ax+b \\ &=(x+3)(x+1)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

양변에 $x=-3$을 대입하면 $3=-3a+b$ …… ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면 $3=-a+b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=3$

따라서 구하는 나머지는 3이다.

핵심 유형 34~36쪽

유형14 답 ③

③ $a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$

$=a^2+b^2+(-c)^2+2\times a\times b+2\times b\times(-c)+2\times(-c)\times a$

$=(a+b-c)^2$

유형15 답 ④

$(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)+6$

$=\{(x-1)(x+3)\}\{(x-2)(x+4)\}+6$

$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)+6$

$x^2+2x=X$로 놓으면

$$\begin{aligned} (x^2+2x-3)(x^2+2x-8)+6&=(X-3)(X-8)+6 \\ &=X^2-11X+30 \\ &=(X-5)(X-6) \\ &=(x^2+2x-5)(x^2+2x-6) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ④이다.

유형16 답 ⑤

$x^2=X$로 놓으면

$$\begin{aligned} x^4-10x^2+9&=X^2-10X+9 \\ &=(X-1)(X-9) \\ &=(x^2-1)(x^2-9) \\ &=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3) \end{aligned}$$

$\therefore a^2+b^2+c^2+d^2=1^2+(-1)^2+3^2+(-3)^2=20$

유형17 답 ③

x에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned} x^2-xy-2y^2+2x+5y-3&=x^2+(-y+2)x-2y^2+5y-3 \\ &=x^2+(-y+2)x-(2y-3)(y-1) \\ &=\{x+(y-1)\}\{x-(2y-3)\} \\ &=(x+y-1)(x-2y+3) \end{aligned}$$

유형18 답 -2

$f(x)=x^3+2x^2-x-2$라고 할 때, $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	2	-1	-2
		1	3	2
	1	3	2	0

$$\begin{aligned} x^3+2x^2-x-2&=(x-1)(x^2+3x+2) \\ &=(x-1)(x+1)(x+2) \end{aligned}$$

이때 $a<b<c$이므로 $a=-1$, $b=1$, $c=2$

$\therefore a+b-c=-2$

유형19 답 ④

$$\begin{aligned} x^4+2x^3-x^2+2x+1&=x^2\left(x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right) \\ &=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\right\} \\ &=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3\right\} \\ &=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\right\}\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\right\} \\ &=(x^2+3x+1)(x^2-x+1) \end{aligned}$$

유형20 답 ③

주어진 등식의 좌변을 a에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$a^2b+ab^2+b^2c-bc^2-c^2a-ca^2$

$=(b-c)a^2+(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$

$=(b-c)a^2+(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a+b)(a+c)$

$\therefore (b-c)(a+b)(a+c)=0$

그런데 $a+b\neq0$, $a+c\neq0$이므로

$b-c=0$ $\quad\therefore b=c$

따라서 주어진 조건을 만족하는 삼각형은 $b=c$인 이등변삼각형이다.

유형21 답 ⑤

$$\begin{aligned} x^4+x^2y^2+y^4&=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) \\ &=\{(x-y)^2+3xy\}\{(x-y)^2+xy\} \\ &=(4+3)(4+1) \\ &=35 \end{aligned}$$

유형22 답 ①

$2018=a$로 놓으면

$$\begin{aligned} \frac{2018^3-1}{2018\times2019+1}&=\frac{a^3-1}{a(a+1)+1} \\ &=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1} \\ &=a-1 \\ &=2017 \end{aligned}$$

핵심 유형 **완성하기** 37~42쪽

048 답 ④

④ $a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc+4ca$

$=a^2+(-b)^2+(2c)^2+2\times a\times(-b)+2\times(-b)\times 2c+2\times 2c\times a$

$=(a-b+2c)^2$

049 답 ⑤

$x^2-x+xy-y=x(x-1)+y(x-1)$

$=(x+y)(x-1)$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ⑤이다.

050 답 $(x+y)^2(x-y)^2$

$(x^2+y^2)^2-4x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(2xy)^2$

$=(x^2+y^2+2xy)(x^2+y^2-2xy)$

$=(x+y)^2(x-y)^2$

051 답 ⑤

$x^3+125=x^3+5^3=(x+5)(x^2-5x+25)$

따라서 $a=5$, $b=-5$, $c=25$이므로

$a+b+c=25$

052 답 $x(x-3y)^3$

$x^4-9x^3y+27x^2y^2-27xy^3=x(x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3)$

$=x(x-3y)^3$

053 답 $(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$(x-y)(x^4+y^4)+x^3y^2-x^2y^3$

$=(x-y)(x^4+y^4)+x^2y^2(x-y)$

$=(x-y)(x^4+y^4+x^2y^2)$

$=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

054 답 ③

$x^3-8y^3-7xy(x-2y)$

$=(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)-7xy(x-2y)$

$=(x-2y)(x^2-5xy+4y^2)$

$=(x-2y)(x-y)(x-4y)$

따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ③이다.

055 답 ②

$(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)+4$

$=\{(x-3)(x+2)\}\{(x-2)(x+1)\}+4$

$=(x^2-x-6)(x^2-x-2)+4$

$x^2-x=X$로 놓으면

$(x^2-x-6)(x^2-x-2)+4=(X-6)(X-2)+4$

$=X^2-8X+16=(X-4)^2$

$=(x^2-x-4)^2$

따라서 $a=-1$, $b=-4$이므로

$a^2+b^2=1+16=17$

056 답 $(a+b-1)(a+b-2)$

$a+b=X$로 놓으면

$(a+b+1)(a+b-4)+6=(X+1)(X-4)+6$

$=X^2-3X+2$

$=(X-1)(X-2)$

$=(a+b-1)(a+b-2)$

057 답 ①

$x^2-2x=X$로 놓으면

$(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3=X^2-2X-3$

$=(X+1)(X-3)$

$=(x^2-2x+1)(x^2-2x-3)$

$=(x-1)^2(x+1)(x-3)$

$\therefore a+bc=-1+1\times(-3)=-4$

058 답 ③

$x^2+3x=X$로 놓으면

$(x^2+3x-1)(x^2+3x-3)-15$

$=(X-1)(X-3)-15$

$=X^2-4X-12$

$=(X+2)(X-6)$

$=(x^2+3x+2)(x^2+3x-6)$

$=(x+1)(x+2)(x^2+3x-6)$

따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ③이다.

059 답 -13

$(x^2-4x+3)(x^2+6x+8)+21$

$=(x-1)(x-3)(x+4)(x+2)+21$

$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+21$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+21$

$x^2+x=X$로 놓으면

$(x^2+x-2)(x^2+x-12)+21$

$=(X-2)(X-12)+21$

$=X^2-14X+45$

$=(X-5)(X-9)$

$=(x^2+x-5)(x^2+x-9)$

$\therefore a+b+c=1+(-5)+(-9)=-13$

060 답 ②

$x^2=X$로 놓으면

$x^4-13x^2+36=X^2-13X+36$

$=(X-4)(X-9)$

$=(x^2-4)(x^2-9)$

$=(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$

이때 $a<b<c<d$이므로

$a=-3$, $b=-2$, $c=2$, $d=3$

$\therefore ab-cd=6-6=0$

061 답 ③

$x^2=X$, $y^2=Y$로 놓으면

$$\begin{aligned}x^4-2x^2y^2-8y^4&=X^2-2XY-8Y^2\\&=(X+2Y)(X-4Y)\\&=(x^2+2y^2)(x^2-4y^2)\\&=(x+2y)(x-2y)(x^2+2y^2)\end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ③이다.

062 답 ⑤

$$\begin{aligned}x^4+x^2+25&=(x^4+10x^2+25)-9x^2\\&=(x^2+5)^2-(3x)^2\\&=(x^2+3x+5)(x^2-3x+5)\end{aligned}$$

따라서 $a=3$, $b=5$, $c=5$이므로

$a+b-c=3$

063 답 ①

$$\begin{aligned}x^4-7x^2+9&=(x^4-6x^2+9)-x^2\\&=(x^2-3)^2-x^2\\&=(x^2+x-3)(x^2-x-3)\end{aligned}$$

따라서 구하는 합은

$(x^2+x-3)+(x^2-x-3)=2x^2-6$

064 답 ③

x에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned}x^2+3xy+2y^2-x-3y-2&=x^2+(3y-1)x+2y^2-3y-2\\&=x^2+(3y-1)x+(y-2)(2y+1)\\&=\{x+(y-2)\}\{x+(2y+1)\}\\&=(x+y-2)(x+2y+1)\end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=1$이므로

$a+b+c=4$

065 답 ④

차수가 가장 낮은 c에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned}a^2-abc+ab-b^2c&=-(ab+b^2)c+a^2+ab\\&=-(a+b)bc+a(a+b)\\&=(a+b)(a-bc)\end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ④이다.

066 답 $(x-y+1)(x^2-x-y+1)$

차수가 가장 낮은 y에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned}x^3-x^2y+y^2-2y+1&=y^2-(x^2+2)y+x^3+1\\&=y^2-(x^2+2)y+(x+1)(x^2-x+1)\\&=\{y-(x+1)\}\{y-(x^2-x+1)\}\\&=(y-x-1)(y-x^2+x-1)\\&=(x-y+1)(x^2-x-y+1)\end{aligned}$$

067 답 ④

a에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned}&ab(a-b)-bc(b+c)+ca(a+c)\\&=a^2b-ab^2-b^2c-bc^2+ca^2+c^2a\\&=(b+c)a^2-(b^2-c^2)a-b^2c-bc^2\\&=(b+c)a^2-(b+c)(b-c)a-bc(b+c)\\&=(b+c)\{a^2-(b-c)a-bc\}\\&=(b+c)(a-b)(a+c)\end{aligned}$$

068 답 ㄴ, ㄷ

a에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned}&a^2(b-c)-b^2(c+a)-c^2(a-b)+2abc\\&=a^2(b-c)-b^2c-b^2a-c^2a+c^2b+2abc\\&=(b-c)a^2-(b^2-2bc+c^2)a-b^2c+bc^2\\&=(b-c)a^2-(b-c)^2a-bc(b-c)\\&=(b-c)\{a^2-(b-c)a-bc\}\\&=(b-c)(a-b)(a+c)\end{aligned}$$

따라서 보기 중 주어진 식의 인수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

069 답 14

$f(x)=x^3+2x^2-5x-6$이라고 할 때, $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}-1 & 1 & 2 & -5 & -6\\ & & -1 & -1 & 6\\\hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0}\end{array}$$

$$\begin{aligned}x^3+2x^2-5x-6&=(x+1)(x^2+x-6)\\&=(x+1)(x+3)(x-2)\end{aligned}$$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=1^2+3^2+(-2)^2=14$

070 답 $(x+1)(x+2)(x-3)$

다항식 $f(x)=x^3+ax-6$이 $x+1$로 나누어떨어지므로

$f(-1)=0$에서 $-1-a-6=0$ $\quad\therefore\ a=-7$

따라서 $f(x)=x^3-7x-6$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}-1 & 1 & 0 & -7 & -6\\ & & -1 & 1 & 6\\\hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0}\end{array}$$

$$\begin{aligned}x^3-7x-6&=(x+1)(x^2-x-6)\\&=(x+1)(x+2)(x-3)\end{aligned}$$

071 답 ⑤

$f(x)=x^4-2x^3-2x^2+3x+2$라고 할 때, $f(-1)=0$, $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}-1 & 1 & -2 & -2 & 3 & 2\\ & & -1 & 3 & -1 & -2\\\hline 2 & 1 & -3 & 1 & 2 & \boxed{0}\\ & & 2 & -2 & -2 & \\\hline & 1 & -1 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$x^4-2x^3-2x^2+3x+2=(x+1)(x-2)(x^2-x-1)$

따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ⑤이다.

072 답 ④

$f(x)=x^4-x^3-2x^2-2x+4$라고 할 때, $f(1)=0$, $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 & 4 \\ & & 1 & 0 & -2 & -4 \\ \hline 2 & 1 & 0 & -2 & -4 & \boxed{0} \\ & & 2 & 4 & 4 & \\ \hline & 1 & 2 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$x^4-x^3-2x^2-2x+4=(x-1)(x-2)(x^2+2x+2)$

따라서 $a=-2$, $b=2$, $c=2$이므로 $a+b+c=2$

073 답 2

$f(x)=x^3-(a+1)x^2-a(2a-1)x+2a^2$이라고 할 때, $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -a-1 & -2a^2+a & 2a^2 \\ & & 1 & -a & -2a^2 \\ \hline & 1 & -a & -2a^2 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-(a+1)x^2-a(2a-1)x+2a^2=(x-1)(x^2-ax-2a^2)$

$=(x-1)(x+a)(x-2a)$

이때 세 일차식의 상수항의 합이 -3이므로

$-1+a-2a=-3$ $\quad\therefore a=2$

074 답 ②

$f(x)=x^4+3x^3+ax^2+bx+2$라고 하면 $f(x)$가 $x-1$, $x+2$를 인수로 가지므로 $f(1)=0$, $f(-2)=0$

$f(1)=0$에서 $1+3+a+b+2=0$, $a+b=-6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(-2)=0$에서 $16-24+4a-2b+2=0$, $2a-b=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-5$

$f(x)=x^4+3x^3-x^2-5x+2$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 3 & -1 & -5 & 2 \\ & & 1 & 4 & 3 & -2 \\ \hline -2 & 1 & 4 & 3 & -2 & \boxed{0} \\ & & -2 & -4 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$x^4+3x^3-x^2-5x+2=(x-1)(x+2)(x^2+2x-1)$

따라서 $Q(x)=x^2+2x-1$이므로 $Q(-2)=-1$

075 답 ②

$$\begin{aligned} x^4-5x^3+6x^2-5x+1 &= x^2\left(x^2-5x+6-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right) \\ &= x^2\left\{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6\right\} \\ &= x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+4\right\} \\ &= x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\right\}\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)-4\right\} \\ &= (x^2-x+1)(x^2-4x+1) \end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=-4$, $c=1$이므로 $a+b+c=-2$

076 답 ④

$$\begin{aligned} x^4-4x^3+5x^2-4x+1 &= x^2\left(x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right) \\ &= x^2\left\{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5\right\} \\ &= x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\right\} \\ &= x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\right\}\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)-3\right\} \\ &= (x^2-x+1)(x^2-3x+1) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ④이다.

077 답 ③

주어진 등식의 좌변을 차수가 가장 낮은 a에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned} b^2+c^2+ab-2bc-ac &= (b-c)a+b^2+c^2-2bc \\ &= (b-c)a+(b-c)^2 \\ &= (b-c)(a+b-c) \end{aligned}$$

$\therefore (b-c)(a+b-c)=0$

그런데 $a+b-c\neq0$이므로

$b-c=0$ $\quad\therefore b=c$

따라서 주어진 조건을 만족하는 삼각형은 $b=c$인 이등변삼각형이다.

078 답 정삼각형

주어진 등식의 좌변을 인수분해하면

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \end{aligned}$$

$\therefore (a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

그런데 $a+b+c\neq0$이므로

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\therefore a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$ $\quad\therefore a=b=c$

따라서 주어진 조건을 만족하는 삼각형은 정삼각형이다.

079 답 ⑤

주어진 등식의 좌변을 차수가 가장 낮은 b에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$a^3-ab^2+ac^2+a^2c-b^2c+c^3$

$=-(a+c)b^2+a^3+a^2c+ac^2+c^3$

$=-(a+c)b^2+a^2(a+c)+c^2(a+c)$

$=(a+c)(a^2-b^2+c^2)$

$\therefore (a+c)(a^2-b^2+c^2)=0$

그런데 $a+c\neq0$이므로 $a^2-b^2+c^2=0$ $\quad\therefore a^2+c^2=b^2$

따라서 주어진 조건을 만족하는 삼각형은 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다.

080 답 ③

$$\begin{aligned} a^4+a^2b^2+b^4 &= (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2) \\ &= \{(a+b)^2-ab\}\{(a+b)^2-3ab\} \\ &= (4+2)(4+6)=60 \end{aligned}$$

081 답 ④

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$에서

$a+b+c=0$이므로

$a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$\therefore a^3+b^3+c^3=3abc$

$\therefore \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{3abc}{abc}=3$

082 답 ②

$a-b=2-\sqrt{3}$, $c-a=2+\sqrt{3}$을 변끼리 더하면

$c-b=4 \qquad \therefore b-c=-4$

$$\begin{aligned}\therefore\ & ab^2-a^2b+bc^2-b^2c-ac^2+a^2c\\&=-(b-c)a^2+(b^2-c^2)a+bc^2-b^2c\\&=-(b-c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b-c)\\&=-(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\&=-(b-c)(a-b)(a-c)\\&=(a-b)(b-c)(c-a)\\&=(2-\sqrt{3})\times(-4)\times(2+\sqrt{3})\\&=-4\end{aligned}$$

083 답 417

$416=a$로 놓으면

$$\begin{aligned}\frac{416^3+1}{416^2-416+1}&=\frac{a^3+1}{a^2-a+1}\\&=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}\\&=a+1=417\end{aligned}$$

084 답 ④

$86=a$, $14=b$로 놓으면

$$\begin{aligned}\frac{86^3+14^3}{86\times72+14^2}&=\frac{a^3+b^3}{a(a-b)+b^2}\\&=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2-ab+b^2}\\&=a+b=100\end{aligned}$$

085 답 ①

$20=a$로 놓으면

$$\begin{aligned}18\times19\times20\times21+1&=(a-2)(a-1)a(a+1)+1\\&=\{(a-2)(a+1)\}\{a(a-1)\}+1\\&=(a^2-a-2)(a^2-a)+1\end{aligned}$$

$a^2-a=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}(a^2-a-2)(a^2-a)+1&=(X-2)X+1\\&=X^2-2X+1\\&=(X-1)^2\\&=(a^2-a-1)^2\\&=(400-20-1)^2\\&=379^2\end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{18\times19\times20\times21+1}=\sqrt{379^2}=379$

086 답 ③

$f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|rrrr} 1 & 1 & 5 & 3 & -9 \\ & & 1 & 6 & 9 \\ \hline & 1 & 6 & 9 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-1)(x^2+6x+9)\\&=(x-1)(x+3)^2\end{aligned}$$

$\therefore f(97)=96\times100^2=960000$

핵심 유형 **최종 점검**하기 • 43～45쪽

1 답 ③

유형 01 미정계수법 – 계수비교법

주어진 등식을 k에 대하여 정리하면

$(x+2y+5)k+2x-3y-4=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x+2y+5=0$, $2x-3y-4=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=-2$

$\therefore xy=2$

2 답 ①

유형 02 미정계수법 – 수치대입법

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$1+5+3=a \qquad \therefore a=9$

3 답 ②

유형 02 미정계수법 – 수치대입법

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=-6c \qquad \therefore c=0$

주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$15=15b \qquad \therefore b=1$

주어진 등식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$30=10a \qquad \therefore a=3$

$\therefore a+b+c=4$

4 답 64

유형 04 항등식에서 계수의 합

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^6=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{12} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$2^6=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{12} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2\times2^6=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{12})$

$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{12}=2^6=64$

5 답 ③

유형 05 다항식의 나눗셈과 항등식

다항식 x^3+ax^2+bx+1을 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$x^3+ax^2+bx+1=(x^2+x-2)Q(x)+2x+3$

$=(x+2)(x-1)Q(x)+2x+3$

양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+b+1=5$, $a+b=3$ …… ㉠

양변에 $x=-2$를 대입하면

$-8+4a-2b+1=-1$, $2a-b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

$\therefore a-b=1$

6 답 11

유형 07 나머지정리 – 일차식으로 나누는 경우

$f(x)=x^3-3x^2+ax+b$라고 하면 나머지정리에 의하여

$f(1)=3$, $f(3)=-1$

$f(1)=3$에서 $1-3+a+b=3$

$a+b=5$ …… ㉠

$f(3)=-1$에서 $27-27+3a+b=-1$

$3a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=8$

$\therefore b-a=11$

7 답 7

유형 08 나머지정리 – 이차식 또는 삼차식으로 나누는 경우

나머지정리에 의하여 $f(0)=1$, $f(1)=3$, $f(-2)=3$

$f(x)$를 x^3+x^2-2x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$(a, b, c는 상수)라고 하면

$f(x)=(x^3+x^2-2x)Q(x)+ax^2+bx+c$

$=x(x-1)(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$

$f(0)=1$에서 $c=1$ …… ㉠

$f(1)=3$에서 $a+b+c=3$ …… ㉡

$f(-2)=3$에서 $4a-2b+c=3$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=1$, $c=1$

따라서 $R(x)=x^2+x+1$이므로

$R(2)=7$

8 답 −5

유형 09 $f(ax+b)$를 $x-a$로 나누는 경우

$f(x)$를 $2x^2+x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$f(x)=(2x^2+x-1)Q(x)+3x-2$

$=(2x-1)(x+1)Q(x)+3x-2$

$\therefore f(-1)=-5$

따라서 $f(2x+3)$을 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2\times(-2)+3)=f(-1)=-5$

9 답 ⑤

유형 10 몫 $Q(x)$를 $x-a$로 나누는 경우

$x^3+ax^2-11x+7=(x-1)Q(x)-1$

양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a-11+7=-1$ $\therefore a=2$

$x^3+2x^2-11x+7=(x-1)Q(x)-1$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$8+8-22+7=Q(2)-1$ $\therefore Q(2)=2$

따라서 $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 2이다.

10 답 ⑤

유형 11 나머지정리를 이용한 수의 나눗셈

x^{15}을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 하면

$x^{15}=(x+1)Q(x)+R$

양변에 $x=-1$을 대입하면 $R=-1$

$x^{15}=(x+1)Q(x)-1$의 양변에 $x=46$을 대입하면

$46^{15}=47Q(46)-1$

이때 46^{15}을 47로 나누었을 때의 나머지를 r라고 하면 $0\le r<47$이므로

$46^{15}=47Q(46)-1$

$=47\{Q(46)-1\}+47-1$

$=47\{Q(46)-1\}+46$

따라서 구하는 나머지는 46이다.

11 답 12

유형 12 인수정리 – 일차식으로 나누는 경우

$f(x)=x^3-2x^2+ax+b$라고 하면 $f(x)$가 $x-1$, $x+2$를 인수로 가지므로

$f(1)=0$, $f(-2)=0$

$f(1)=0$에서 $1-2+a+b=0$, $a+b=1$ …… ㉠

$f(-2)=0$에서 $-8-8-2a+b=0$, $2a-b=-16$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=6$

따라서 $g(x)=x^2-5x+6$이라고 하면 $g(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$g(-1)=12$

12 답 24

유형 13 인수정리 – 이차식으로 나누는 경우

$f(x+2)$가 x^2+2x-3, 즉 $(x+3)(x-1)$로 나누어떨어지므로

$f(-3+2)=0$, $f(1+2)=0$

$\therefore f(-1)=0$, $f(3)=0$

$f(-1)=0$에서 $-2-3-a+b=0$, $a-b=-5$ …… ㉠

$f(3)=0$에서 $54-27+3a+b=0$, $3a+b=-27$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-8$, $b=-3$

$\therefore ab=24$

13 답 ④

유형 14 인수분해 공식

④ $x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

14 답 ⑤

유형 14 인수분해 공식

$a^3+1+(a^2-1)a=(a+1)(a^2-a+1)+(a+1)(a-1)a$

$=(a+1)(a^2-a+1+a^2-a)$

$=(a+1)(2a^2-2a+1)$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ⑤이다.

15 답 $2x^2+10x-6$

유형 15 공통부분이 있는 식의 인수분해

$x^2+5x=X$로 놓으면

$(x^2+5x-1)(x^2+5x-5)+3=(X-1)(X-5)+3$

$=X^2-6X+8$

$=(X-2)(X-4)$

$=(x^2+5x-2)(x^2+5x-4)$

따라서 구하는 합은

$(x^2+5x-2)+(x^2+5x-4)=2x^2+10x-6$

16 답 ③

유형 16 x^4+ax^2+b 꼴의 인수분해

$x^2=X$로 놓으면

$x^4-8x^2+16=X^2-8X+16=(X-4)^2$

$=(x^2-4)^2=(x+2)^2(x-2)^2$

따라서 $a=2$, $b=-2$이므로 $a-b=4$

17 답 ④

유형 16 x^4+ax^2+b 꼴의 인수분해

$x^4+3x^2y^2+4y^4=x^4+4x^2y^2+4y^4-x^2y^2$

$=(x^2+2y^2)^2-(xy)^2$

$=(x^2+xy+2y^2)(x^2-xy+2y^2)$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ④이다.

18 답 $(x-y-z)(x+y-z-1)$

유형 17 문자가 여러 개인 식의 인수분해

x에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$x^2-y^2+z^2-2xz-x+y+z$

$=x^2-(2z+1)x-y^2+z^2+y+z$

$=x^2-(2z+1)x-(y+z)(y-z)+(y+z)$

$=x^2-(2z+1)x-(y+z)(y-z-1)$

$=\{x-(y+z)\}\{x+(y-z-1)\}$

$=(x-y-z)(x+y-z-1)$

19 답 2

유형 18 인수정리를 이용한 인수분해

$f(x)=x^3+2x^2+ax-4$라고 하면 $f(x)$가 $x-1$을 인수로 가지므로

$f(1)=0$에서 $1+2+a-4=0$ $\quad\therefore a=1$

$f(x)=x^3+2x^2+x-4$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	2	1	−4
		1	3	4
	1	3	4	0

$x^3+2x^2+x-4=(x-1)(x^2+3x+4)$

따라서 $Q(x)=x^2+3x+4$이므로

$Q(-1)=2$

20 답 −5

유형 19 계수가 대칭인 사차식의 인수분해

$x^4-2x^3-5x^2+2x+1=x^2\left(x^2-2x-5+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x-\frac{1}{x}\right)-5\right\}$

$=x^2\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{x}\right)-3\right\}$

$=x^2\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)+1\right\}\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)-3\right\}$

$=(x^2+x-1)(x^2-3x-1)$

따라서 $a=-1$, $b=-3$, $c=-1$이므로

$a+b+c=-5$

21 답 ⑤

유형 20 삼각형의 모양 판단하기

주어진 등식의 좌변을 인수분해하면

$a^4+b^4-c^4+2a^2b^2=(a^2+b^2)^2-(c^2)^2$

$=(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)$

$\therefore (a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)=0$

그런데 $a^2+b^2+c^2\neq0$이므로

$a^2+b^2-c^2=0$ $\quad\therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 주어진 조건을 만족하는 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

22 답 12

유형 21 식의 값 구하기

$x+y=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$

$xy=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$

$\therefore x^3+x^2y+xy^2+y^3=x^2(x+y)+y^2(x+y)$

$=(x+y)(x^2+y^2)$

$=(x+y)\{(x+y)^2-2xy\}$

$=2\times\{2^2-2\times(-1)\}$

$=12$

23 답 ②

유형 22 인수분해를 이용한 수의 계산

$f(-1)=0$, $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

−1	1	−5	6	4	−8
		−1	6	−12	8
2	1	−6	12	−8	0
		2	−8	8	
	1	−4	4	0	

$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2-4x+4)$

$=(x+1)(x-2)^3$

$\therefore f(2.1)=(2.1+1)(2.1-2)^3$

$=3.1\times0.1^3$

$=0.0031$

03 복소수

핵심 유형

	유형01 ⑤	유형02 $5+6i$	유형03 12
유형04 -3	유형05 ①	유형06 3	
유형07 ㄱ, ㄷ	유형08 10	유형09 $6+8i$	유형10 ③
유형11 ②	유형12 -4	유형13 $-b$	

핵심 유형 완성하기

001 ③	002 ②	003 3	004 $4+i$	005 ④
006 ①	007 ②	008 4	009 ①	010 2
011 ③	012 ②	013 0	014 7	015 ⑤
016 -3	017 0	018 ①	019 -1	020 -6
021 ④	022 16	023 $-\frac{2}{5}$	024 10	
025 ㄱ, ㄴ, ㄷ		026 ⑤	027 ②	028 3
029 25	030 $3-9i$	031 $-2i$	032 ④	033 ②
034 $1\pm\sqrt{2}i$		035 ③	036 ③	037 0
038 0	039 12	040 -2	041 ①	
042 $-1+i$		043 ㄱ, ㄷ	044 $-\sqrt{3}+\sqrt{5}i$	
045 ⑤	046 ⑤	047 $x=\frac{1}{4}$, $y=-\frac{1}{2}$		
048 $2a+2b$		049 ④	050 ①	

핵심 유형 최종 점검하기

1 ⑤	2 ⑤	3 4	4 ④	5 -13
6 ④	7 ①	8 ③	9 ②	10 $4-2i$
11 ③	12 1	13 24	14 $b+c$	

핵심 유형 48~50쪽

유형01 답 ⑤

⑤ $\sqrt{2}-i$의 실수부분은 $\sqrt{2}$, 허수부분은 -1이다.

유형02 답 $5+6i$

$$(3-i)(1+2i)-\frac{1-i}{1+i}=3+6i-i-2i^2-\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}$$
$$=3+5i+2-\frac{1-2i+i^2}{1-i^2}$$
$$=5+5i-\frac{1-2i-1}{1+1}$$
$$=5+5i+i$$
$$=5+6i$$

유형03 답 12

$z=x(1-2i)+3(i-4)$

$\quad=(x-12)+(-2x+3)i$

z^2이 음의 실수가 되려면 z의 실수부분은 0이고 허수부분은 0이 아니어야 하므로

$x-12=0$, $-2x+3\neq0$ $\quad\therefore x=12$

유형04 답 -3

$x(5+i)-y(4+3i)=3+5i$에서

$(5x-4y)+(x-3y)i=3+5i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$5x-4y=3$, $x-3y=5$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=-2$

$\therefore x+y=-3$

유형05 답 ①

$x=2+\sqrt{6}i$에서 $x-2=\sqrt{6}i$

양변을 제곱하면 $x^2-4x+4=-6$, $x^2-4x=-10$

$\therefore x^2-4x+5=-10+5=-5$

유형06 답 3

$\bar{z}=1-i$이므로

$$\frac{z+1}{z}+\frac{\bar{z}+1}{\bar{z}}=\frac{2+i}{1+i}+\frac{2-i}{1-i}$$
$$=\frac{(2+i)(1-i)+(2-i)(1+i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\frac{(2-2i+i+1)+(2+2i-i+1)}{1+1}$$
$$=\frac{(3-i)+(3+i)}{2}=3$$

유형07 답 ㄱ, ㄷ

$z=a+bi$(a, b는 실수)라고 하면 $\bar{z}=a-bi$

ㄱ. $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ (실수)

ㄴ. $\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{a+bi}+\frac{1}{a-bi}$

$\quad=\frac{a-bi+a+bi}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{2a}{a^2+b^2}$ (실수)

ㄷ. $z=-\bar{z}$이면 $a+bi=-a+bi$에서 $a=-a$

따라서 $a=0$이므로 $z=bi$ $(b\neq0)$는 순허수이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

유형08 답 10

$$\alpha\bar{\alpha}+\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta+\beta\bar{\beta}=\alpha(\bar{\alpha}+\bar{\beta})+\beta(\bar{\alpha}+\bar{\beta})$$
$$=(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})$$
$$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$$

이때 $\alpha+\beta=(2-5i)+(-1+2i)=1-3i$이므로

$\overline{\alpha+\beta}=1+3i$

$$\therefore \alpha\bar{\alpha}+\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta+\beta\bar{\beta}=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$$
$$=(1-3i)(1+3i)$$
$$=1+9=10$$

유형09 답 $\mathbf{6+8i}$

$z=a+bi$(a, b는 실수)라고 하면 $\overline{z}=a-bi$

$(2i-3)z+5i\overline{z}=6+18i$에서

$(2i-3)(a+bi)+5i(a-bi)=6+18i$

$(-3a+3b)+(7a-3b)i=6+18i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$-3a+3b=6$, $7a-3b=18$

두 식을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=8$

$\therefore z=6+8i$

유형10 답 ③

$i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$이므로

$$\begin{aligned}&1+i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{200}\\&=1+(i+i^2+i^3+i^4)+(i^5+i^6+i^7+i^8)\\&\qquad+\cdots+(i^{197}+i^{198}+i^{199}+i^{200})\\&=1+(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots+i^{196}(i+i^2+i^3+i^4)\\&=1+0+0+\cdots+0=1\end{aligned}$$

유형11 답 ②

$(1+i)^2=2i$, $(1-i)^2=-2i$이므로

$$\begin{aligned}(1+i)^{120}-(1-i)^{120}&=\{(1+i)^2\}^{60}-\{(1-i)^2\}^{60}\\&=(2i)^{60}-(-2i)^{60}\\&=2^{60}i^{60}-2^{60}i^{60}\\&=0\end{aligned}$$

유형12 답 $\mathbf{-4}$

$$\begin{aligned}\sqrt{-2}\sqrt{-8}+\sqrt{-6}\sqrt{2}+\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{-2}}&=\sqrt{2}i\sqrt{8}i+\sqrt{6}i\sqrt{2}+\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}i}\\&=-4+2\sqrt{3}i+\frac{\sqrt{12}i}{i^2}\\&=-4+2\sqrt{3}i-2\sqrt{3}i\\&=-4\end{aligned}$$

유형13 답 $\mathbf{-b}$

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서 $a<0$, $b<0$이므로 $a+b<0$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{(a+b)^2}-|a|&=-(a+b)-(-a)\\&=-a-b+a\\&=-b\end{aligned}$$

핵심 유형 **완성**하기 51~57쪽

001 답 ③

① 0은 실수인 복소수이다.

② $b=0$이어도 a가 허수이면 $a+bi$는 허수이다.

④ $\frac{2-5i}{3}$의 허수부분은 $-\frac{5}{3}$이다.

⑤ $\sqrt{3}i$의 실수부분은 0, 허수부분은 $\sqrt{3}$이다.

002 답 ②

$\frac{5i-1}{2}$의 실수부분은 $-\frac{1}{2}$, $2-i$의 허수부분은 -1이므로

$a=-\frac{1}{2}$, $b=-1$ $\qquad \therefore a+b=-\frac{3}{2}$

003 답 3

허수는 $8+\sqrt{-1}$, $-i$, $\sqrt{5}-9i$의 3개이다.

004 답 $\mathbf{4+i}$

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)-\frac{1-2i}{2+i}&=3+1-\frac{(1-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}\\&=4-\frac{2-i-4i-2}{4+1}\\&=4-\frac{-5i}{5}=4+i\end{aligned}$$

005 답 ④

④ $(5-i)^2=25-10i-1=24-10i$

006 답 ①

$$\begin{aligned}(2+3i)\circledcirc(3+2i)&=(2+3i)(3+2i)-(2+3i)-(3+2i)\\&=6+4i+9i-6-2-3i-3-2i\\&=-5+8i\end{aligned}$$

007 답 ②

$$\begin{aligned}z+\frac{2}{z}&=1-i+\frac{2}{1-i}=1-i+\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}\\&=1-i+\frac{2(1+i)}{1+1}=1-i+(1+i)=2\end{aligned}$$

$\therefore \left(z+\frac{2}{z}\right)^2=2^2=4$

008 답 4

$z_1=(1+i)^2=1+2i-1=2i$

$$\begin{aligned}z_2&=\frac{\sqrt{2}+2i}{\sqrt{2}-2i}=\frac{(\sqrt{2}+2i)^2}{(\sqrt{2}-2i)(\sqrt{2}+2i)}\\&=\frac{2+4\sqrt{2}i-4}{2+4}=\frac{-1+2\sqrt{2}i}{3}\end{aligned}$$

$\therefore z_1z_2=2i\times\frac{-1+2\sqrt{2}i}{3}=-\frac{4\sqrt{2}+2i}{3}$

따라서 실수부분은 $-\frac{4\sqrt{2}}{3}$, 허수부분은 $-\frac{2}{3}$이므로

$a=-\frac{4\sqrt{2}}{3}$, $b=-\frac{2}{3}$ $\qquad \therefore a^2+b^2=\frac{32}{9}+\frac{4}{9}=4$

009 답 ①

$z=2(3+5i)-x(4i-1)=(x+6)+(-4x+10)i$

z^2이 음의 실수가 되려면 z의 실수부분은 0이고 허수부분은 0이 아니어야 하므로

$x+6=0$, $-4x+10\neq0$ $\qquad \therefore x=-6$

010 답 2

$x(i-x)+1-2i=(-x^2+1)+(x-2)i$

이 복소수가 실수가 되려면 허수부분이 0이어야 하므로

$x-2=0$ $\qquad \therefore x=2$

011 답 ③

$(1+i)(1-i)a^2+(2i-3)a+1-2i=(2a^2-3a+1)+(2a-2)i$

이 복소수가 순허수가 되려면 실수부분은 0이고 허수부분은 0이 아니어야 하므로

$2a^2-3a+1=0$, $2a-2\neq0$

$2a^2-3a+1=0$에서 $(2a-1)(a-1)=0$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$ …… ㉠

$2a-2\neq0$에서 $a\neq1$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $a=\frac{1}{2}$

012 답 ②

$z=x(x+4+i)-5(1-i)=(x^2+4x-5)+(x+5)i$

z^2이 실수가 되려면 z의 실수부분이 0이거나 허수부분이 0이어야 하므로

$x^2+4x-5=0$ 또는 $x+5=0$ $\therefore x=-5$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 x의 값의 합은 $-5+1=-4$

013 답 0

$z=(a+4i)(a-3i)+a^2(i-2)-11=(-a^2+1)+(a^2+a)i$

z^2이 양의 실수가 되려면 z의 실수부분은 0이 아니고 허수부분은 0이어야 하므로

$-a^2+1\neq0$, $a^2+a=0$

$-a^2+1\neq0$에서 $(1-a)(1+a)\neq0$

$\therefore a\neq-1$이고 $a\neq1$ …… ㉠

$a^2+a=0$에서 $a(a+1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=0$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $a=0$

014 답 7

$x(1+i)-2y(3-i)=1+9i$에서

$(x-6y)+(x+2y)i=1+9i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x-6y=1$, $x+2y=9$

두 식을 연립하여 풀면 $x=7$, $y=1$

$\therefore xy=7$

015 답 ⑤

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x-2=0$, $3x+y-5=0$

따라서 $x=2$, $y=-1$이므로 $x-y=3$

016 답 −3

$x(2-i)^2-y(3+i)=3y+(5-2x)i$에서

$3(x-y)-(4x+y)i=3y-(2x-5)i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x-y=y$, $4x+y=2x-5$ $\therefore x-2y=0$, $2x+y=-5$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=-1$

$\therefore x+y=-3$

017 답 0

$\frac{x}{1+3i}+\frac{y}{1-3i}=\frac{6}{1-i}$에서

$\frac{x(1-3i)+y(1+3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{6(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$\frac{(x+y)-3(x-y)i}{10}=3+3i$

$(x+y)-3(x-y)i=30+30i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=30$, $x-y=-10$

두 식을 연립하여 풀면 $x=10$, $y=20$

$\therefore 2x-y=20-20=0$

018 답 ①

$x=3-4i$에서 $x-3=-4i$

양변을 제곱하면

$x^2-6x+9=-16$, $x^2-6x=-25$

$\therefore x^2-6x+10=-25+10=-15$

019 답 −1

$a+b=(2+2\sqrt{3}i)+(2-2\sqrt{3}i)=4$

$ab=(2+2\sqrt{3}i)(2-2\sqrt{3}i)=16$

$$\therefore \frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}=\frac{4^2-2\times16}{16}=-1$$

020 답 −6

$a=\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$,

$b=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+i$이므로

$a+b=(1-i)+(1+i)=2$

$ab=(1-i)(1+i)=2$

$$\therefore a^3+b^3-ab=(a+b)^3-3ab(a+b)-ab=2^3-3\times2\times2-2=-6$$

021 답 ④

$x=\frac{1}{2+i}=\frac{2-i}{(2+i)(2-i)}=\frac{2-i}{5}$

$x=\frac{2-i}{5}$에서 $5x-2=-i$

양변을 제곱하면

$25x^2-20x+4=-1$, $5x^2-4x+1=0$

$$\therefore 5x^3-4x^2+6x-2=x(5x^2-4x+1)+5x-2=5x-2=5\times\frac{2-i}{5}-2=-i$$

022 답 16

$z=\frac{10}{3-i}=\frac{10(3+i)}{(3-i)(3+i)}=3+i$

따라서 $\bar{z}=3-i$이므로

$$z+\bar{z}+z\bar{z}=(3+i)+(3-i)+(3+i)(3-i)=6+10=16$$

023 답 $-\frac{2}{5}$

$\bar{z}=4-2i$이므로

$$\frac{1-\bar{z}}{z}=\frac{1-(4-2i)}{4+2i}=\frac{-3+2i}{4+2i}$$
$$=\frac{(-3+2i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}=-\frac{2}{5}+\frac{7}{10}i$$

따라서 구하는 실수부분은 $-\frac{2}{5}$이다.

024 답 10

$\bar{\alpha}=2-i$, $\bar{\beta}=3+4i$이므로

$$(\bar{\alpha}-\beta)(\alpha-\bar{\beta})=\{(2-i)-(3-4i)\}\{(2+i)-(3+4i)\}$$
$$=(-1+3i)(-1-3i)=10$$

025 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$z=a+bi$(a, b는 실수)라고 하면 $\bar{z}=a-bi$

ㄱ. $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ (실수)

ㄴ. $z\bar{z}=0$이면 $(a+bi)(a-bi)=0$

$a^2+b^2=0$ $\quad\therefore a=0,\ b=0$ $\quad\therefore z=0$

ㄷ. $z=\bar{z}$이면 $a+bi=a-bi$에서 $b=-b$ $\quad\therefore b=0$

$\therefore z=a$ (실수)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

026 답 ⑤

$z=\bar{z}$이면 z는 실수이므로 ⑤이다.

027 답 ②

$z=a+bi$(a, b는 실수)라고 하면 $\bar{z}=a-bi$

ㄱ. $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ (실수)

ㄴ. $z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$

ㄷ. $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ (실수)

ㄹ. $\frac{z}{\bar{z}}=\frac{a+bi}{a-bi}=\frac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}i$

ㅁ. $\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{a+bi}+\frac{1}{a-bi}=\frac{2a}{a^2+b^2}$ (실수)

따라서 보기 중 실수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㅁ이다.

028 답 3

$z=2(1+2i)x^2-7x+3-i=(2x^2-7x+3)+(4x^2-1)i$

$z=-\bar{z}$이면 z는 순허수이므로

$2x^2-7x+3=0$, $4x^2-1\neq0$

$2x^2-7x+3=0$에서 $(2x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$4x^2-1\neq0$에서 $(2x+1)(2x-1)\neq0$

$\therefore x\neq-\frac{1}{2}$이고 $x\neq\frac{1}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $x=3$

029 답 25

$$\alpha\bar{\alpha}-\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+\beta\bar{\beta}=\alpha(\bar{\alpha}-\bar{\beta})-\beta(\bar{\alpha}-\bar{\beta})$$
$$=(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})$$

이때 $\alpha-\beta=(4+i)-(7-3i)=-3+4i$이므로

$\overline{\alpha-\beta}=-3-4i$

$$\therefore \alpha\bar{\alpha}-\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+\beta\bar{\beta}=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})$$
$$=(-3+4i)(-3-4i)=25$$

030 답 $3-9i$

$\bar{z_2}-\bar{z_1}=\overline{z_2-z_1}=-1-4i$이므로 $z_2-z_1=-1+4i$

$\bar{z_1}\cdot\bar{z_2}=\overline{z_1z_2}=5+i$이므로 $z_1z_2=5-i$

$$\therefore (z_1-2)(z_2+2)=z_1z_2-2(z_2-z_1)-4$$
$$=(5-i)-2(-1+4i)-4=3-9i$$

031 답 $-2i$

$\bar{\alpha}\beta=1$에서 $\frac{1}{\beta}=\bar{\alpha}$이므로

$\bar{\beta}+\frac{1}{\beta}=\bar{\beta}+\bar{\alpha}=\overline{\alpha+\beta}=2i$

$\therefore \alpha+\beta=-2i$

또 $\bar{\alpha}\beta=1$에서 $\frac{1}{\bar{\alpha}}=\beta$이므로

$\alpha+\frac{1}{\bar{\alpha}}=\alpha+\beta=-2i$

032 답 ④

$\bar{\alpha}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$이므로

$\alpha+\bar{\alpha}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$

$\alpha\bar{\alpha}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$

$$\therefore z\bar{z}=\frac{\alpha+2}{\alpha-1}\times\overline{\left(\frac{\alpha+2}{\alpha-1}\right)}=\frac{\alpha+2}{\alpha-1}\times\frac{\bar{\alpha}+2}{\bar{\alpha}-1}$$
$$=\frac{\alpha\bar{\alpha}+2(\alpha+\bar{\alpha})+4}{\alpha\bar{\alpha}-(\alpha+\bar{\alpha})+1}$$
$$=\frac{1+2+4}{1-1+1}=7$$

033 답 ②

$z=a+bi$(a, b는 실수)라고 하면 $\bar{z}=a-bi$

$2z-(i+2)\bar{z}=9i-2$에서

$2(a+bi)-(i+2)(a-bi)=9i-2$

$(-a+4b)i-b=9i-2$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$-a+4b=9$, $-b=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$

$\therefore z=-1+2i$

034 답 $1\pm\sqrt{2}i$

$z=a+bi$(a, b는 실수)라고 하면 $\bar{z}=a-bi$

$z+\bar{z}=2$에서 $(a+bi)+(a-bi)=2$

$2a=2$ $\quad\therefore a=1$

$z\bar{z}=3$에서 $(a+bi)(a-bi)=3$

$a^2+b^2=3$, $b^2=2$ $\quad\therefore b=\pm\sqrt{2}$

$\therefore z=1\pm\sqrt{2}i$

035 답 ③

$z=a+bi$(a, b는 실수)라고 하면 $\bar{z}=a-bi$

이때 z는 실수가 아닌 복소수이므로 $b\neq0$

$$\bar{z}-\frac{1}{z}=(a-bi)-\frac{1}{a+bi}$$
$$=(a-bi)-\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}$$
$$=a\left(1-\frac{1}{a^2+b^2}\right)-b\left(1-\frac{1}{a^2+b^2}\right)i$$

$\bar{z}-\frac{1}{z}$이 실수이려면 허수부분이 0이어야 하므로

$$b\left(1-\frac{1}{a^2+b^2}\right)=0$$

그런데 $b\neq0$이므로 $\frac{1}{a^2+b^2}=1$ $\quad\therefore a^2+b^2=1$

$\therefore z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=1$

036 답 ③

$-i+i^2-i^3+i^4=-i-1+i+1=0$이므로

$1-i+i^2-i^3+i^4-\cdots+i^{120}$

$=1+(-i+i^2-i^3+i^4)+i^4(-i+i^2-i^3+i^4)$
$\qquad+\cdots+i^{116}(-i+i^2-i^3+i^4)$

$=1+0+0+\cdots+0=1$

037 답 0

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1=0$이므로

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\cdots+\frac{1}{i^{100}}$

$=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^4}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)$
$\qquad+\cdots+\frac{1}{i^{96}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)$

$=0+0+\cdots+0=0$

038 답 0

$i+2i^2+3i^3+4i^4+\cdots+59i^{59}+60i^{60}$

$=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)+\cdots+(57i-58-59i+60)$

$=(2-2i)+(2-2i)+\cdots+(2-2i)$

$=15(2-2i)=30-30i$

따라서 $a=30$, $b=-30$이므로 $a+b=0$

039 답 12

$f(1)=i+(-i)=0$

$f(2)=i^2+(-i)^2=-1-1=-2$

$f(3)=i^3+(-i)^3=-i+i=0$

$f(4)=i^4+(-i)^4=1+1=2$

$f(5)=i^5+(-i)^5=i-i=0$

$f(6)=i^6+(-i)^6=-1-1=-2$

$\vdots$

따라서 $f(n)=2$를 만족하는 자연수 n은 $4k$($k=1, 2, 3, \cdots$) 꼴이므로 50 이하의 자연수 n은 4, 8, 12, 16, $\cdots$, 48의 12개이다.

040 답 -2

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-i$,

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=i$이므로

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50}=(-i)^{50}+i^{50}$$
$$=i^{4\times12+2}+i^{4\times12+2}$$
$$=-1-1$$
$$=-2$$

041 답 ①

$z^2=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=-i$이므로

$z^2+z^4+z^6+\cdots+z^{100}$

$=-i+(-i)^2+(-i)^3+\cdots+(-i)^{50}$

$=-i+i^2-i^3+\cdots+i^{50}$

이때 $-i+i^2-i^3+i^4=-i-1+i+1=0$이므로

$z^2+z^4+z^6+\cdots+z^{100}$

$=-i+i^2-i^3+\cdots+i^{50}$

$=(-i+i^2-i^3+i^4)+i^4(-i+i^2-i^3+i^4)$
$\qquad+\cdots+i^{44}(-i+i^2-i^3+i^4)-i^{49}+i^{50}$

$=0+0+\cdots+0-i^{4\times12+1}+i^{4\times12+2}$

$=-1-i$

042 답 $-1+i$

$n=2k+1$(k는 음이 아닌 정수)이라고 하면

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2n+1}=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4k+2}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{4k+3}$$
$$=i^{4k+2}+(-i)^{4k+3}$$
$$=-1+i$$

043 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $z^2=\left(\frac{\sqrt{2}i}{1-i}\right)^2=\frac{2i^2}{(1-i)^2}$
$\qquad=\frac{-2}{-2i}=\frac{i}{i^2}=-i$

ㄴ. ㄱ에서 $z^2=-i$이므로
$\quad z^6=(z^2)^3=(-i)^3=-i^3=i$
$\quad\therefore z^6\neq z^2$

ㄷ. $z^8=z^6\times z^2=i\times(-i)=1$이므로
$\quad z^{n+8}=z^n\times z^8=z^n$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

044 답 $-\sqrt{3}+\sqrt{5}i$

$$\sqrt{-2}\sqrt{-6}-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{-2}}+\frac{\sqrt{-21}}{\sqrt{-7}}=\sqrt{2}i\sqrt{6}i-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}i}+\frac{\sqrt{21}i}{\sqrt{7}i}$$
$$=-2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{5}i}{i^2}+\sqrt{3}$$
$$=-2\sqrt{3}+\sqrt{5}i+\sqrt{3}$$
$$=-\sqrt{3}+\sqrt{5}i$$

045 답 ⑤

① $\sqrt{2}\sqrt{-5}=\sqrt{2}\sqrt{5}i=\sqrt{10}i=\sqrt{-10}$

② $\sqrt{-2}\sqrt{-5}=\sqrt{2}i\sqrt{5}i=-\sqrt{10}$

③ $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}i}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{2}{5}}i=\sqrt{-\dfrac{2}{5}}$

④ $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-5}}=\dfrac{\sqrt{2}i}{\sqrt{5}i}=\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-5}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}i}=\dfrac{\sqrt{2}i}{\sqrt{5}i^2}=-\sqrt{\dfrac{2}{5}}i=-\sqrt{-\dfrac{2}{5}}$

046 답 ⑤

$z=\dfrac{3+\sqrt{-9}}{3-\sqrt{-9}}=\dfrac{3+3i}{3-3i}=\dfrac{1+i}{1-i}$

$=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}=i$

$\therefore z+\dfrac{1}{z}=i+\dfrac{1}{-i}=i-\dfrac{i}{i^2}=i+i=2i$

047 답 $x=\frac{1}{4}$, $y=-\frac{1}{2}$

$\dfrac{8x}{1+\sqrt{-3}}+\dfrac{4y}{1-\sqrt{-3}}=\dfrac{8x}{1+\sqrt{3}i}+\dfrac{4y}{1-\sqrt{3}i}$

$=\dfrac{8x(1-\sqrt{3}i)+4y(1+\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$

$=(2x+y)+\sqrt{3}(-2x+y)i$

이때 -3의 제곱근은 $\pm\sqrt{3}i$이므로

(i) $(2x+y)+\sqrt{3}(-2x+y)i=\sqrt{3}i$일 때

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2x+y=0$, $-2x+y=1$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-\dfrac{1}{4}$, $y=\dfrac{1}{2}$

(ii) $(2x+y)+\sqrt{3}(-2x+y)i=-\sqrt{3}i$일 때

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2x+y=0$, $-2x+y=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $x=\dfrac{1}{4}$, $y=-\dfrac{1}{2}$

그런데 $x>y$이므로 $x=\dfrac{1}{4}$, $y=-\dfrac{1}{2}$

048 답 $2a+2b$

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이므로 $a>0$, $b<0$

이때 $a>b$이므로 $a-b>0$

$\therefore \sqrt{(a-b)^2}+|a|-3\sqrt{b^2}=(a-b)+a-3(-b)$

$=a-b+a+3b$

$=2a+2b$

049 답 ④

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 $a<0$, $b<0$

① $\sqrt{-a}\sqrt{b}=\sqrt{-a}\sqrt{-b}i=\sqrt{ab}i=\sqrt{-ab}$

② $\sqrt{ab^2}=\sqrt{-ab^2}i=-b\sqrt{-a}i=-b\sqrt{a}$

③ $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{-b}i}{\sqrt{-a}i}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

④ $\dfrac{\sqrt{-b}}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-a}i}=-\dfrac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-a}}i=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}i=-\sqrt{-\dfrac{b}{a}}$

⑤ $|a+b|=-(a+b)=-a-b=|a|+|b|$

050 답 ①

(가)에서 $a<0$, $b>0$이므로 $a<b$

(나)에서 $a+c=0$, $2a+3b=0$

$a+c=0$에서 $c=-a>0$

$2a+3b=0$에서 $-a=\dfrac{3}{2}b$이므로 $c=-a=\dfrac{3}{2}b$

이때 $b>0$, $c>0$이고 $c=\dfrac{3}{2}b$이므로 $b<c$

$\therefore a<b<c$

핵심 유형 최종 점검하기 • 58～59쪽

1 답 ⑤

유형 01 복소수의 뜻과 분류

⑤ $1+\sqrt{3}$의 허수부분은 0이다.

2 답 ⑤

유형 02 복소수의 사칙연산

① $(5+3i)+(2-11i)=7-8i$

② $(6-i)-(3-2i)=6-i-3+2i=3+i$

③ $(2-i)(3+2i)=6+4i-3i+2=8+i$

④ $(2-7i)+(2-3i)-(i-4)=2-7i+2-3i-i+4$

$=8-11i$

⑤ $\dfrac{1}{1+2i}-\dfrac{1}{1-2i}=\dfrac{1-2i-(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)}=-\dfrac{4}{5}i$

3 답 4

유형 03 복소수가 실수가 되는 조건

$z=x^2+(i-4)x+i-5=(x^2-4x-5)+(x+1)i$

z가 실수가 되려면 $x+1=0$　　$\therefore x=-1$　　$\therefore a=-1$

z^2이 음의 실수가 되려면 z가 순허수이어야 하므로

$x^2-4x-5=0$, $x+1\neq0$

$x^2-4x-5=0$에서 $(x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$　　…… ㉠

$x+1\neq0$에서 $x\neq-1$　　…… ㉡

㉠, ㉡에서 $x=5$　　$\therefore b=5$

$\therefore a+b=4$

4 답 ④

유형 04 복소수가 서로 같을 조건

$(2+i)x-2(1-i)y=\overline{2-7i}$에서

$2(x-y)+(x+2y)i=2+7i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x-y=1$, $x+2y=7$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=2$

$\therefore x+y=5$

5 답 -13

유형 05 복소수가 주어질 때의 식의 값

$a+b=(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)+(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)=2\sqrt{3}$

$ab=(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)=5$

$\therefore a^2+b^2-3ab=(a+b)^2-5ab$

$=(2\sqrt{3})^2-5\times5=-13$

6 답 ④

유형 05 복소수가 주어질 때의 식의 값

$x=\frac{1-3i}{1+i}=\frac{(1-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$=\frac{-2-4i}{2}=-1-2i$

$x+1=-2i$의 양변을 제곱하면

$x^2+2x+1=-4,\ x^2+2x+5=0$

$\therefore x^3+2x^2+5x+2=x(x^2+2x+5)+2=2$

7 답 ①

유형 06 켤레복소수의 계산

$\bar{z}=1-\sqrt{3}i$이므로 $z+\bar{z}=2,\ z\bar{z}=4$

$\therefore z^3+\bar{z}^3=(z+\bar{z})^3-3z\bar{z}(z+\bar{z})$

$=2^3-3\times4\times2=-16$

8 답 ③

유형 07 켤레복소수의 성질

$z=a+bi$(a, b는 실수)라고 하면 $\bar{z}=a-bi$

ㄱ. $z\bar{z}=0$이므로 $(a+bi)(a-bi)=0$

$a^2+b^2=0 \qquad \therefore a=0,\ b=0$

$\therefore z=\bar{z}=0$

ㄴ. $\overline{z\bar{z}}=\overline{(a+bi)(a-bi)}$

$=\overline{a^2+b^2}=a^2+b^2$ (실수)

ㄷ. $z=0$이면 $z=-\bar{z}$이지만 z는 순허수가 아니다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

9 답 ②

유형 08 켤레복소수의 성질을 이용한 계산

$\alpha\bar{\alpha}+2\alpha\bar{\beta}+2\bar{\alpha}\beta+4\beta\bar{\beta}=\alpha(\bar{\alpha}+2\bar{\beta})+2\beta(\bar{\alpha}+2\bar{\beta})$

$=(\alpha+2\beta)(\bar{\alpha}+2\bar{\beta})$

$=(\alpha+2\beta)(\overline{\alpha+2\beta})$

이때 $\alpha+2\beta=(1+3i)+2(3-2i)=7-i$이므로

$\overline{\alpha+2\beta}=7+i$

$\therefore \alpha\bar{\alpha}+2\alpha\bar{\beta}+2\bar{\alpha}\beta+4\beta\bar{\beta}=(\alpha+2\beta)(\overline{\alpha+2\beta})$

$=(7-i)(7+i)=50$

10 답 $4-2i$

유형 09 조건을 만족하는 복소수 구하기

$z=a+bi$(a, b는 실수)라고 하면 $\bar{z}=a-bi$

$\frac{z}{3+i}+\frac{\bar{z}}{2}=3$에서 $\frac{a+bi}{3+i}+\frac{a-bi}{2}=3$

$2(a+bi)+(a-bi)(3+i)=6(3+i)$

$(5a+b)+(a-b)i=18+6i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$5a+b=18,\ a-b=6$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=-2$

$\therefore z=4-2i$

11 답 ③

유형 10 허수단위 i의 거듭제곱

$i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$이므로

$i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{102}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)$

$+\cdots+i^{96}(i+i^2+i^3+i^4)+i^{101}+i^{102}$

$=0+0+\cdots+0+i^{4\times25+1}+i^{4\times25+2}$

$=-1+i$

따라서 $a=-1,\ b=1$이므로

$a+b=0$

12 답 1

유형 11 복소수의 거듭제곱

$z^2=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=i$이므로

$\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^6}-\frac{1}{z^8}+\cdots+\frac{1}{z^{30}}=\frac{1}{i}-\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^4}+\cdots+\frac{1}{i^{15}}$

이때 $\frac{1}{i}-\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^4}=\frac{1}{i}+1-\frac{1}{i}-1=0$이므로

$\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^6}-\frac{1}{z^8}+\cdots+\frac{1}{z^{30}}$

$=\frac{1}{i}-\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^4}+\cdots+\frac{1}{i^{15}}$

$=\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^4}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^4}\right)$

$+\frac{1}{i^8}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^{13}}-\frac{1}{i^{14}}+\frac{1}{i^{15}}$

$=0+0+0+\frac{1}{i^{4\times3+1}}-\frac{1}{i^{4\times3+2}}+\frac{1}{i^{4\times3+3}}$

$=\frac{1}{i}+1-\frac{1}{i}=1$

13 답 24

유형 12 음수의 제곱근의 계산

$\sqrt{-27}\sqrt{-9}+\frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{-6}}+\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{-3}}=\sqrt{27}i\sqrt{9}i+\frac{\sqrt{18}i}{\sqrt{6}i}+\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}i}$

$=-9\sqrt{3}+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}i}{i^2}$

$=-8\sqrt{3}-\sqrt{3}i$

따라서 $a=-8\sqrt{3},\ b=-\sqrt{3}$이므로

$ab=24$

14 답 $b+c$

유형 13 음수의 제곱근의 성질

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서 $a<0,\ b<0$

$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{c}{b}}$에서 $b<0,\ c>0$

따라서 $a+b<0$이므로

$\sqrt{a^2}-|a+b|+\sqrt{c^2}=-a+(a+b)+c$

$=b+c$

04 이차방정식

핵심 유형

	유형01 ②	유형02 -3	유형03 ③
유형04 ⑤	유형05 서로 다른 두 실근		유형06 ⑤
유형07 $\frac{5}{4}$	유형08 20	유형09 ②	유형10 4
유형11 17	유형12 $x^2-x-4=0$		유형13 ③
유형14 $(x-2-i)(x-2+i)$		유형15 5	유형16 ①

핵심 유형 완성하기

001 ③	002 ②	003 5	004 1	005 ①
006 ①	007 4	008 ②	009 ①	
010 $x=-3$ 또는 $x=3$		011 ⑤	012 $k<-4$	
013 ③	014 ②	015 ②	016 ③	017 ①
018 서로 다른 두 허근		019 서로 다른 두 실근		
020 빗변의 길이가 a인 직각삼각형			021 ③	022 ②
023 ①	024 ⑤	025 ②	026 22	027 ①
028 ④	029 9	030 ④	031 ②	032 $\frac{1}{2}$
033 ①	034 -3	035 ③	036 -3	037 ⑤
038 ④	039 10	040 ②	041 ④	042 ③
043 $x^2+x+4=0$		044 1	045 ⑤	
046 $5x^2-7x+1=0$		047 ③	048 -2	049 ④
050 ②	051 ②	052 ②	053 ①	054 ⑤
055 ②	056 ⑤			

핵심 유형 최종 점검하기

1 ④	2 ①	3 ③	4 ③	5 ⑤
6 서로 다른 두 실근		7 ③	8 1	9 2
10 ①	11 ③	12 ③	13 ④	14 ②
15 $x^2-x+3=0$		16 ④	17 ③	
18 $6x^2+x-1=0$				

핵심 유형 62~63쪽

유형01 답 ②

$x^2+3x-1=0$에서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$$
$$=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$$

따라서 $a=-3$, $b=13$이므로 $a+b=10$

유형02 답 -3

주어진 방정식의 한 근이 -2이므로 $x=-2$를 대입하면

$4-2k+6=0$ $\quad\therefore k=5$

즉, 주어진 방정식은 $x^2+5x+6=0$이므로

$(x+3)(x+2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-2$

따라서 다른 한 근은 -3이다.

유형03 답 ③

(i) $x<-3$일 때

$|x+3|=-(x+3)$이므로

$x^2-(x+3)-9=0$, $x^2-x-12=0$

$(x+3)(x-4)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=4$

그런데 $x<-3$이므로 이를 만족하는 해는 없다.

(ii) $x\geq-3$일 때

$|x+3|=x+3$이므로

$x^2+(x+3)-9=0$, $x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에 의하여 $x=-3$ 또는 $x=2$

따라서 방정식의 모든 근의 곱은 $-3\times2=-6$

유형04 답 ⑤

$x^2-2kx+k^2=-4x+5$에서

$x^2-2(k-2)x+k^2-5=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D<0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(k-2)^2-1\times(k^2-5)$$
$$=-4k+9<0$$

$\therefore k>\frac{9}{4}$

유형05 답 서로 다른 두 실근

$b-ac=2$에서 $ac=b-2$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=b^2-4ac=b^2-4(b-2)$

$=b^2-4b+8=(b-2)^2+4>0$

따라서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

유형06 답 ⑤

이차방정식 $x^2-2ax+b^2+c^2=0$의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-1\times(b^2+c^2)$$
$$=a^2-b^2-c^2=0$$

$\therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

유형07 답 $\frac{5}{4}$

$x^2+(2k+1)x+k^2+2k-1$이 완전제곱식이 되려면 이차방정식

$x^2+(2k+1)x+k^2+2k-1=0$이 중근을 가져야 한다.

따라서 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이어야 하므로

$D=(2k+1)^2-4\times1\times(k^2+2k-1)$

$\quad=-4k+5=0$

$\therefore\ k=\frac{5}{4}$

핵심 유형 **완성**하기 64~67쪽

001 답 ③

$x^2+4x+2=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-2\pm\sqrt{2^2-1\times2}=-2\pm\sqrt{2}$

따라서 $a=-2$, $b=2$이므로

$a+b=0$

002 답 ②

$x(x+3)=3(x^2-1)-2x$에서

$2x^2-5x-3=0$, $(2x+1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$

003 답 5

$\{x◎(x+2)\}+\{(x-1)◎2\}=7$에서

$\{x(x+2)-x+(x+2)\}+\{(x-1)\times2-(x-1)+2\}-7=0$

$(x^2+2x+2)+(x+1)-7=0$

$x^2+3x-4=0$, $(x+4)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-4$ 또는 $x=1$

따라서 $\alpha=-4$, $\beta=1$ 또는 $\alpha=1$, $\beta=-4$이므로

$|\alpha|+|\beta|=|-4|+|1|=5$

004 답 1

주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{2}+1$을 곱하면

$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)x^2-(\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{2})x+(\sqrt{2}+1)\times3=0$

$x^2-(4+3\sqrt{2})x+3+3\sqrt{2}=0$

$(x-1)(x-3-3\sqrt{2})=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=3+3\sqrt{2}$

따라서 유리수인 근은 1이다.

005 답 ①

주어진 방정식의 한 근이 $-\frac{1}{2}$이므로 $x=-\frac{1}{2}$을 대입하면

$1-4+k=0 \qquad \therefore\ k=3$

즉, 주어진 방정식은 $4x^2+8x+3=0$이므로

$(2x+3)(2x+1)=0$

$\therefore\ x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

따라서 다른 한 근은 $-\frac{3}{2}$이다.

006 답 ①

주어진 방정식의 한 근이 -1이므로 $x=-1$을 대입하면

$1-(2k+1)+k+3=0$

$-k+3=0 \qquad \therefore\ k=3$

즉, 주어진 방정식은 $x^2+7x+6=0$이므로

$(x+6)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-6$ 또는 $x=-1$

따라서 $\alpha=-6$이므로

$\frac{\alpha}{k}=\frac{-6}{3}=-2$

007 답 4

$x^2+(a+1)x+2a=0$의 한 근이 -4이므로 $x=-4$를 대입하면

$16-4(a+1)+2a=0$

$-2a+12=0 \qquad \therefore\ a=6$

$x^2-3bx+b-5=0$의 한 근이 1이므로 $x=1$을 대입하면

$1-3b+b-5=0$, $-2b-4=0 \qquad \therefore\ b=-2$

$\therefore\ a+b=4$

008 답 ②

$x^2+x-a=0$의 한 근이 1이므로 $x=1$을 대입하면

$1+1-a=0 \qquad \therefore\ a=2$

$3x^2+bx+a=0$의 한 근이 1이므로 $x=1$을 대입하면

$3+b+a=0$, $b+5=0 \qquad \therefore\ b=-5$

$\therefore\ ab=-10$

009 답 ①

(i) $x<-1$일 때

$|x+1|=-(x+1)$이므로

$x^2+(x+1)-1=0$

$x^2+x=0$, $x(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=0$

그런데 $x<-1$이므로 이를 만족하는 해는 없다.

(ii) $x\geq-1$일 때

$|x+1|=x+1$이므로

$x^2-(x+1)-1=0$

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에 의하여 $x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 방정식의 모든 근의 합은

$-1+2=1$

010 답 $x=-3$ 또는 $x=3$

(i) $x<0$일 때

$x^2+x-6=0$, $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=2$

그런데 $x<0$이므로 $x=-3$

(ii) $x\geq 0$일 때

$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=3$

그런데 $x\geq 0$이므로 $x=3$

(i), (ii)에 의하여 방정식의 해는

$x=-3$ 또는 $x=3$

다른 풀이 $x^2=|x|^2$이므로

$|x|^2-|x|-6=0$, $(|x|+2)(|x|-3)=0$

$\therefore$ $|x|=-2$ 또는 $|x|=3$

그런데 $|x|\geq 0$이므로 $|x|=3$

$\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=3$

011 답 ⑤

$\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$이므로

$x^2-8x+4\sqrt{x^2-6x+9}=0$에서

$x^2-8x+4|x-3|=0$

(i) $x<3$일 때

$|x-3|=-(x-3)$이므로

$x^2-8x-4(x-3)=0$

$x^2-12x+12=0$

$\therefore$ $x=6\pm 2\sqrt{6}$

그런데 $x<3$이므로 $x=6-2\sqrt{6}$

(ii) $x\geq 3$일 때

$|x-3|=x-3$이므로

$x^2-8x+4(x-3)=0$

$x^2-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=6$

그런데 $x\geq 3$이므로 $x=6$

(i), (ii)에 의하여 $x=6-2\sqrt{6}$ 또는 $x=6$

따라서 $\alpha=6-2\sqrt{6}$, $\beta=6$이므로

$\frac{\beta-\alpha}{2}=\frac{6-(6-2\sqrt{6})}{2}=\sqrt{6}$

012 답 $k<-4$

$x^2+2kx+k^2=2x-9$에서

$x^2+2(k-1)x+k^2+9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-1\times(k^2+9)$

$=-2k-8>0$

$\therefore$ $k<-4$

013 답 ③

ㄱ. $x^2+x+4=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$D_1=1^2-4\times 1\times 4=-15<0$

즉, 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ㄴ. $x^2+3x-2=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$D_2=3^2-4\times 1\times(-2)=17>0$

즉, 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. $x^2-4x+5=0$의 판별식을 D_3이라고 하면

$\frac{D_3}{4}=(-2)^2-1\times 5=-1<0$

즉, 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ㄹ. $x^2+6x+9=0$의 판별식을 D_4라고 하면

$\frac{D_4}{4}=3^2-1\times 9=0$

즉, 주어진 이차방정식은 중근을 갖는다.

따라서 보기 중 허근을 갖는 이차방정식은 ㄱ, ㄷ이다.

014 답 ②

$x^2+4kx+3k=2kx-4$에서

$x^2+2kx+3k+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=k^2-1\times(3k+4)$

$=k^2-3k-4=0$

$(k+1)(k-4)=0$

$\therefore$ $k=-1$ 또는 $k=4$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-1+4=3$

015 답 ②

$x^2+4x+k^2=2kx+8$에서

$x^2-2(k-2)x+k^2-8=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D\geq 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-1\times(k^2-8)$

$=-4k+12\geq 0$

$\therefore$ $k\leq 3$

따라서 실수 k의 최댓값은 3이다.

016 답 ③

$x^2+2(k-a)x+k^2-4k+b=0$의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(k-a)^2-1\times(k^2-4k+b)=0$

$2(2-a)k+a^2-b=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$2-a=0$, $a^2-b=0$

$\therefore$ $a=2$, $b=4$

$\therefore$ $ab=8$

017 답 ①

$2a=bc+1$에서 $bc=2a-1$

이차방정식 $x^2+2ax+bc=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-bc=a^2-(2a-1)$

$=a^2-2a+1=(a-1)^2\geq 0$

따라서 이차방정식 $x^2+2ax+bc=0$은 실근을 갖는다.

018 답 서로 다른 두 허근

이차방정식 $x^2-2kx+k^2-k+3=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-1\times(k^2-k+3)$

$=k-3$

이때 $k<3$이므로

$k-3<0$

따라서 이차방정식 $x^2-2kx+k^2-k+3=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

019 답 서로 다른 두 실근

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$D_1=a^2-4b>0$

이차방정식 $x^2+2(a+1)x+2(a+2b)=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$\frac{D_2}{4}=(a+1)^2-1\times 2(a+2b)$

$=a^2-4b+1$

이때 $a^2-4b>0$이므로

$a^2-4b+1>1$

따라서 이차방정식 $x^2+2(a+1)x+2(a+2b)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

020 답 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

이차방정식 $x^2+2cx+a^2-b^2=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=c^2-1\times(a^2-b^2)$

$=b^2+c^2-a^2=0$

$\therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

021 답 ③

이차방정식 $x^2+2(a+b)x+2ab+c^2=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(a+b)^2-1\times(2ab+c^2)$

$=a^2+b^2-c^2<0$

$\therefore a^2+b^2<c^2$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 가장 긴 변의 길이가 c인 둔각삼각형이다.

022 답 ②

이차방정식 $(a+c)x^2+2bx+a-c=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=b^2-(a+c)(a-c)$

$=b^2-a^2+c^2>0$

$\therefore b^2+c^2>a^2$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 예각삼각형이다.

023 답 ①

$x^2-2kx+k^2-3k+1$이 완전제곱식이 되려면 이차방정식

$x^2-2kx+k^2-3k+1=0$이 중근을 가져야 한다.

따라서 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-k)^2-1\times(k^2-3k+1)$

$=3k-1=0$

$\therefore k=\frac{1}{3}$

024 답 ⑤

$x^2-2(a+2k)x+4k^2+k+b$가 완전제곱식이 되려면 이차방정식

$x^2-2(a+2k)x+4k^2+k+b=0$이 중근을 가져야 한다.

따라서 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(a+2k)^2-1\times(4k^2+k+b)=0$

$(4a-1)k+a^2-b=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$4a-1=0$, $a^2-b=0$

$\therefore a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{16}$

$\therefore a+b=\frac{5}{16}$

025 답 ②

$kx^2+(3k+1)x+a(k+1)$이 완전제곱식이 되려면 이차방정식

$kx^2+(3k+1)x+a(k+1)=0$이 중근을 가져야 한다.

따라서 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이어야 하므로

$D=(3k+1)^2-4\times k\times a(k+1)=0$

$(9-4a)k^2+2(3-2a)k+1=0$ …… ㉠

(i) $9-4a\neq 0$일 때

k의 값이 오직 한 개뿐이려면 ㉠의 판별식을 D_1이라고 할 때, $D_1=0$이어야 하므로

$\frac{D_1}{4}=(3-2a)^2-(9-4a)\times 1$

$=4a^2-8a=0$

$4a(a-2)=0$ $\therefore a=0$ 또는 $a=2$

그런데 a는 자연수이므로 $a=2$

(ii) $9-4a=0$일 때

$9-4a=0$에서 $a=\frac{9}{4}$

그런데 a는 자연수이므로 이를 만족하는 a의 값은 없다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 자연수 a의 값은 2이다.

핵심 유형 68~69쪽

유형08 답 20

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$

$\therefore \dfrac{\beta^2}{\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{\beta}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{4^3-3\times2\times4}{2}=20$

유형09 답 ②

주어진 이차방정식의 두 근을 α, $3\alpha\ (\alpha\neq0)$라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+3\alpha=-4k \quad \therefore \alpha=-k$ ...... ㉠

$\alpha\times3\alpha=-2k+1 \quad \therefore 3\alpha^2+2k-1=0$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$3k^2+2k-1=0$, $(k+1)(3k-1)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=\dfrac{1}{3}$

그런데 k는 정수이므로 $k=-1$

유형10 답 4

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k$, $\alpha\beta=4k-1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(2k)^2-2(4k-1)$

$=4k^2-8k+2$

이때 $\alpha^2+\beta^2=34$이므로

$4k^2-8k+2=34$, $k^2-2k-8=0$

$(k+2)(k-4)=0 \quad \therefore k=-2$ 또는 $k=4$

그런데 $k>0$이므로 $k=4$

유형11 답 17

$x^2-5x+a=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=a$ ...... ㉠

$x^2+bx+30=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-b$, $(\alpha+\beta)\times\alpha\beta=30$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$5+a=-b$, $5a=30 \quad \therefore a=6$, $b=-11$

$\therefore a-b=17$

유형12 답 $x^2-x-4=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-2$

구하는 이차방정식의 두 근이 $\alpha+2$, $\beta+2$이므로

$(\alpha+2)+(\beta+2)=(\alpha+\beta)+4=-3+4=1$

$(\alpha+2)(\beta+2)=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4$

$=-2+2\times(-3)+4=-4$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-x-4=0$

유형13 답 ③

원래의 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$이라고 하자.

상윤이는 x^2의 계수와 b는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$-2\times4=b \quad \therefore b=-8$

상효는 x^2의 계수와 a는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$(-2-2i)+(-2+2i)=-a \quad \therefore a=4$

따라서 원래의 이차방정식은

$x^2+4x-8=0$

유형14 답 $(x-2-i)(x-2+i)$

이차방정식 $x^2-4x+5=0$의 근이 $x=2\pm i$이므로

$x^2-4x+5=\{x-(2+i)\}\{x-(2-i)\}$

$=(x-2-i)(x-2+i)$

유형15 답 5

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라고 하면

$\alpha+\beta=4$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(2x-3)=0$이려면

$2x-3=\alpha$ 또는 $2x-3=\beta$

$\therefore x=\dfrac{\alpha+3}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+3}{2}$

따라서 이차방정식 $f(2x-3)=0$의 두 근의 합은

$\dfrac{\alpha+3}{2}+\dfrac{\beta+3}{2}=\dfrac{(\alpha+\beta)+6}{2}$

$=\dfrac{4+6}{2}=5$

유형16 답 ①

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $2-i$가 근이면 $2+i$도 근이다.

두 근의 합은

$(2-i)+(2+i)=-a \quad \therefore a=-4$

두 근의 곱은

$(2-i)(2+i)=b \quad \therefore b=5$

$\therefore a+b=1$

핵심 유형 완성하기 70~74쪽

026 답 22

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=5$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-2)^3-3\times5\times(-2)$

$=22$

027 답 ①

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-1$

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha-3}+\frac{\alpha}{\beta-3}=\frac{\beta(\beta-3)+\alpha(\alpha-3)}{(\alpha-3)(\beta-3)}$$
$$=\frac{\alpha^2+\beta^2-3(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-3(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9}$$
$$=\frac{4^2-2\times(-1)-3\times4}{-1-3\times4+9}=-\frac{3}{2}$$

028 답 ④

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=\frac{3}{2}$

$$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=3^2-4\times\frac{3}{2}=3$$

그런데 $\alpha>\beta$이므로 $\alpha-\beta=\sqrt{3}$

$$\therefore \alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$$
$$=3\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$$

029 답 9

β가 주어진 방정식의 근이므로

$\beta^2-2\beta-5=0$ $\therefore \beta^2=2\beta+5$

$x^2-2x-5=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$

$$\therefore 2\alpha+\beta^2=2\alpha+(2\beta+5)$$
$$=2(\alpha+\beta)+5$$
$$=2\times2+5=9$$

030 답 ④

α, β가 주어진 방정식의 근이므로

$\alpha^2-3\alpha+4=0$, $\beta^2-3\beta+4=0$

$\therefore \alpha^2-\alpha+1=2\alpha-3$, $\beta^2-\beta+1=2\beta-3$

$x^2-3x+4=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=4$

$$\therefore (\alpha^2-\alpha+1)(\beta^2-\beta+1)=(2\alpha-3)(2\beta-3)$$
$$=4\alpha\beta-6(\alpha+\beta)+9$$
$$=4\times4-6\times3+9=7$$

031 답 ②

α, β가 주어진 방정식의 근이므로

$\alpha^2+2\alpha+3=0$, $\beta^2+2\beta+3=0$

$\therefore \alpha^2+\alpha+3=-\alpha$, $\beta^2+\beta+3=-\beta$

$x^2+2x+3=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha^2+\alpha+3}+\frac{\alpha}{\beta^2+\beta+3}=\frac{\beta}{-\alpha}+\frac{\alpha}{-\beta}=-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$$
$$=-\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$
$$=-\frac{(-2)^2-2\times3}{3}=\frac{2}{3}$$

032 답 $\frac{1}{2}$

주어진 이차방정식의 두 근을 2α, $3\alpha\,(\alpha\neq0)$라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+3\alpha=5k$ $\therefore \alpha=k$ ...... ㉠

$2\alpha\times3\alpha=-k+2$ $\therefore 6\alpha^2+k-2=0$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$6k^2+k-2=0$, $(3k+2)(2k-1)=0$

$\therefore k=-\frac{2}{3}$ 또는 $k=\frac{1}{2}$

그런데 $k>0$이므로 $k=\frac{1}{2}$

033 답 ①

주어진 이차방정식의 두 근을 α, $2\alpha\,(\alpha\neq0)$라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha=6k$ $\therefore \alpha=2k$ ...... ㉠

$\alpha\times2\alpha=7k+1$ $\therefore 2\alpha^2-7k-1=0$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$8k^2-7k-1=0$, $(8k+1)(k-1)=0$

$\therefore k=-\frac{1}{8}$ 또는 $k=1$

그런데 k는 정수이므로 $k=1$

034 답 -3

주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+3$이라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+3)=2k+5$ $\therefore \alpha=k+1$ ...... ㉠

$\alpha(\alpha+3)=-k-5$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(k+1)(k+4)=-k-5$, $k^2+6k+9=0$

$(k+3)^2=0$ $\therefore k=-3$

035 답 ③

주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+1$이라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+1)=2k+1$ $\therefore \alpha=k$ ...... ㉠

$\alpha(\alpha+1)=3k$ $\therefore \alpha^2+\alpha-3k=0$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$k^2+k-3k=0$, $k^2-2k=0$

$k(k-2)=0$ $\therefore k=0$ 또는 $k=2$

그런데 $k>0$이므로 $k=2$

036 답 -3

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3k,\ \alpha\beta=k^2-3k$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(3k)^2-4(k^2-3k)$

$=5k^2+12k$

이때 $(\alpha-\beta)^2=9$이므로

$5k^2+12k=9,\ 5k^2+12k-9=0$

$(k+3)(5k-3)=0 \qquad \therefore k=-3$ 또는 $k=\frac{3}{5}$

그런데 k는 정수이므로 $k=-3$

037 답 ⑤

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-k+1,\ \alpha\beta=k-3$

$\therefore \alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta$

$=(-k+1)^2-3(k-3)$

$=k^2-5k+10$

이때 $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=4$이므로

$k^2-5k+10=4,\ k^2-5k+6=0$

$(k-2)(k-3)=0 \qquad \therefore k=2$ 또는 $k=3$

따라서 모든 상수 k의 값의 곱은 $2\times3=6$

038 답 ④

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=b$

$\alpha+\beta-2\alpha\beta-7=0$에서

$a-2b-7=0 \qquad \therefore a-2b=7$ ...... ㉠

$(\alpha+2)(\beta+2)=8$에서

$\alpha\beta+2(\alpha+\beta)=4 \qquad \therefore 2a+b=4$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=-2$

$\therefore a+b=1$

039 답 10

$x^2+ax+b=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$ ...... ㉠

$x^2+bx+a=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha-1)+(\beta-1)=-b,\ (\alpha-1)(\beta-1)=a$

$\therefore (\alpha+\beta)-2=-b,\ \alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=a$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-a-2=-b,\ b+a+1=a \qquad \therefore a=-3,\ b=-1$

$\therefore a^2+b^2=(-3)^2+(-1)^2=10$

040 답 ②

$x^2-ax+b=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+2=a,\ -1\times2=b \qquad \therefore a=1,\ b=-2$

따라서 이차방정식 $2ax^2+(a+b)x+b=0$의 두 근의 곱은

$\frac{b}{2a}=\frac{-2}{2\times1}=-1$

041 답 ④

$x^2-x+a=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=a$ ...... ㉠

$x^2+bx+4=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha^2+\beta^2=-b,\ \alpha^2\beta^2=4$

$\therefore (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-b,\ (\alpha\beta)^2=4$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$1-2a=-b,\ a^2=4$

이때 $a<0$이므로 $a=-2,\ b=-5$

$\therefore ab=10$

042 답 ③

$x^2-ax+b=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=b$ ...... ㉠

$2x^2+ax+a+b=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{a}{2},\ \frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{a+b}{2}$

$\therefore \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{a}{2},\ \frac{1}{\alpha\beta}=\frac{a+b}{2}$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{a}{b}=-\frac{a}{2},\ \frac{1}{b}=\frac{a+b}{2} \qquad \therefore a=1,\ b=-2$

$\therefore a-b=3$

043 답 $x^2+x+4=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=4$

구하는 이차방정식의 근이 $\alpha-1,\ \beta-1$이므로

$(\alpha-1)+(\beta-1)=(\alpha+\beta)-2$

$=1-2=-1$

$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$

$=4-1+1=4$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2+x+4=0$

044 답 1

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-i)+(2+i)=-a,\ (2-i)(2+i)=b$

$\therefore a=-4,\ b=5$

$\therefore a+b=1$

045 답 ⑤

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-5,\ \alpha\beta=1$

구하는 이차방정식의 근이 $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}$이므로

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-5}{1}=-5$

$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{1}=1$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2+5x+1=0$

046 답 $5x^2-7x+1=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-5$

구하는 이차방정식의 근이 $1+\frac{1}{\alpha}$, $1+\frac{1}{\beta}$이므로

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)+\left(1+\frac{1}{\beta}\right)=2+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=2+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$$
$$=2+\frac{3}{-5}=\frac{7}{5}$$
$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right)=\frac{\alpha+1}{\alpha}\times\frac{\beta+1}{\beta}=\frac{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{-5+3+1}{-5}=\frac{1}{5}$$

따라서 구하는 이차방정식은

$5\left(x^2-\frac{7}{5}x+\frac{1}{5}\right)=0$ $\quad\therefore 5x^2-7x+1=0$

047 답 ③

원래의 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$이라고 하자.

가민이는 x^2의 계수와 b는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$3\times4=b$ $\quad\therefore b=12$

예지는 x^2의 계수와 a는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$(1-\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})=-a$ $\quad\therefore a=-2$

따라서 원래의 이차방정식은 $x^2-2x+12=0$

048 답 -2

준희는 x^2의 계수와 b는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$\frac{b}{2}=-\frac{3}{2}$ $\quad\therefore b=-3$

서진이는 x^2의 계수와 a는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-\frac{a}{2}=-\frac{1}{2}$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore a+b=-2$

049 답 ④

이차방정식 $x^2+2x+5=0$의 근이 $x=-1\pm2i$이므로

$$x^2+2x+5=\{x-(-1+2i)\}\{x-(-1-2i)\}$$
$$=(x+1-2i)(x+1+2i)$$

050 답 ②

이차방정식 $4x^2-4x+3=0$의 근이 $x=\frac{1\pm\sqrt{2}i}{2}$이므로

$$4x^2-4x+3=4\left(x-\frac{1+\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{2}i}{2}\right)$$
$$=(2x-1-\sqrt{2}i)(2x-1+\sqrt{2}i)$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ②이다.

051 답 ②

$f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$

$f(3x-5)=0$이려면

$3x-5=\alpha$ 또는 $3x-5=\beta$ $\quad\therefore x=\frac{\alpha+5}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta+5}{3}$

따라서 이차방정식 $f(3x-5)=0$의 두 근의 합은

$$\frac{\alpha+5}{3}+\frac{\beta+5}{3}=\frac{(\alpha+\beta)+10}{3}=\frac{-1+10}{3}=3$$

052 답 ②

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라고 하면

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=4$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(2x+1)=0$이려면

$2x+1=\alpha$ 또는 $2x+1=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha-1}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta-1}{2}$

따라서 이차방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{\alpha-1}{2}\times\frac{\beta-1}{2}=\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{4}$$
$$=\frac{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}{4}$$
$$=\frac{4+1+1}{4}=\frac{3}{2}$$

053 답 ①

$f(3-4x)=0$의 두 근을 α, β라고 하면

$\alpha+\beta=-\frac{1}{4}$, $\alpha\beta=-2$

$f(3-4\alpha)=0$, $f(3-4\beta)=0$이므로 $f(2x)=0$이려면

$2x=3-4\alpha$ 또는 $2x=3-4\beta$

$\therefore x=\frac{3-4\alpha}{2}$ 또는 $x=\frac{3-4\beta}{2}$

따라서 이차방정식 $f(2x)=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{3-4\alpha}{2}\times\frac{3-4\beta}{2}=\frac{(3-4\alpha)(3-4\beta)}{4}$$
$$=\frac{9-12(\alpha+\beta)+16\alpha\beta}{4}$$
$$=\frac{9-12\times\left(-\frac{1}{4}\right)+16\times(-2)}{4}$$
$$=-5$$

054 답 ⑤

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $-2+\sqrt{3}i$가 근이면 $-2-\sqrt{3}i$도 근이다.

두 근의 합은

$(-2+\sqrt{3}i)+(-2-\sqrt{3}i)=-a$ $\quad\therefore a=4$

두 근의 곱은

$(-2+\sqrt{3}i)(-2-\sqrt{3}i)=b$ $\quad\therefore b=7$

$\therefore a+b=11$

055 답 ②

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $a-2i$가 근이면 $a+2i$도 근이다.

두 근의 합은

$(a-2i)+(a+2i)=-2$, $2a=-2$ $\quad\therefore a=-1$

두 근의 곱은

$(a-2i)(a+2i)=b$, $a^2+4=b$ $\quad\therefore b=5$

$\therefore ab=-5$

056 답 ⑤

주어진 이차방정식의 계수가 유리수이므로 $2-\sqrt{3}$이 근이면 $2+\sqrt{3}$도 근이다.

두 근의 합은

$(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=-2ab \qquad \therefore ab=-2$

두 근의 곱은

$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=a+b \qquad \therefore a+b=1$

$\therefore (a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

$=1^2-4\times(-2)=9$

핵심 유형 **최종 점검하기** • 75~77쪽

1 답 ④

유형 01 이차방정식의 풀이

$x^2+5x+8=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times8}}{2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{7}i}{2}$

따라서 $a=-5$, $b=7$이므로

$a+b=2$

2 답 ①

유형 02 한 근이 주어진 이차방정식

주어진 방정식의 한 근이 -1이므로 $x=-1$을 대입하면

$1-3k+2=0 \qquad \therefore k=1$

즉, 주어진 방정식은 $x^2+3x+2=0$이므로

$(x+2)(x+1)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=-1$

따라서 다른 한 근은 -2이다.

3 답 ③

유형 03 절댓값 기호를 포함한 방정식

(i) $x<1$일 때

$x^2+3(x-1)-1=0$, $x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-4$ 또는 $x=1$

그런데 $x<1$이므로 $x=-4$

(ii) $x\geq1$일 때

$x^2-3(x-1)-1=0$, $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에 의하여 $x=-4$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 방정식의 모든 근의 합은 $-4+1+2=-1$

4 답 ③

유형 04 이차방정식의 근의 판별

이차방정식 $kx^2+2(k+2)x+k+3=0$의 판별식을 D라고 하면 $D<0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=(k+2)^2-k(k+3)=k+4<0 \qquad \therefore k<-4$

따라서 정수 k의 최댓값은 -5이다.

5 답 ⑤

유형 04 이차방정식의 근의 판별

이차방정식 $x^2+2(k+a)x+k^2+6k-3b=0$의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=(k+a)^2-1\times(k^2+6k-3b)=0$

$2(a-3)k+a^2+3b=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$a-3=0$, $a^2+3b=0 \qquad \therefore a=3$, $b=-3$

$\therefore a+b=0$

6 답 **서로 다른 두 실근**

유형 05 계수가 문자인 이차방정식의 근의 판별

이차방정식 $x^2+2(k+3)x+k^2+3=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=(k+3)^2-1\times(k^2+3)=6k+6$

이때 $k>-1$이므로 $6k+6>0$

따라서 이차방정식 $x^2+2(k+3)x+k^2+3=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

7 답 ③

유형 06 이차방정식의 판별식과 삼각형의 모양

이차방정식 $x^2+2ax+b^2+c^2=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-(b^2+c^2)=a^2-b^2-c^2>0 \qquad \therefore a^2>b^2+c^2$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 가장 긴 변의 길이가 a인 둔각삼각형이다.

8 답 **1**

유형 07 이차식이 완전제곱식이 되는 조건

이차방정식 $x^2+2ax-b(a-2b)=0$, 즉 $x^2+2ax-ab+2b^2=0$의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=a^2-1\times(-ab+2b^2)=a^2+ab-2b^2=0$

$(a+2b)(a-b)=0 \qquad \therefore a=-2b$ 또는 $a=b$

그런데 $a>0$, $b>0$이므로 $a=b$

$\therefore \dfrac{b}{a}=1$

9 답 **2**

유형 08 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값 구하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\dfrac{6}{3}=2$, $\alpha\beta=\dfrac{2}{3}$

$\therefore \alpha^3+\beta^3-3\alpha\beta=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)-3\alpha\beta$

$=2^3-3\times\dfrac{2}{3}\times2-3\times\dfrac{2}{3}=2$

10 답 ①

유형 08 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값 구하기

α, β가 주어진 방정식의 근이므로

$\alpha^2+\alpha+2=0$, $\beta^2+\beta+2=0$

$\therefore \alpha^2+2\alpha+2=\alpha$, $\beta^2+2\beta+2=\beta$

$x^2+x+2=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=2$

$\therefore \dfrac{1}{\alpha^2+2\alpha+2}+\dfrac{1}{\beta^2+2\beta+2}=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\dfrac{1}{2}$

11 답 ③

유형 09 두 근의 조건이 주어진 이차방정식

주어진 방정식의 두 근을 α, $\alpha+2$라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+2)=-2(k-1) \quad \therefore \alpha=-k \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\alpha(\alpha+2)=-k+6 \quad \therefore \alpha^2+2\alpha+k-6=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$k^2-k-6=0$, $(k+2)(k-3)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=3$

그런데 $k>0$이므로 $k=3$

12 답 ③

유형 10 두 근의 관계식이 주어진 이차방정식

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k+2$, $\alpha\beta=4k+3$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\\&=(2k+2)^2-(4k+3)\\&=4k^2+4k+1\end{aligned}$$

이때 $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=9$이므로

$4k^2+4k+1=9$, $k^2+k-2=0$

$(k+2)(k-1)=0 \quad \therefore k=-2$ 또는 $k=1$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 $-2+1=-1$

13 답 ④

유형 11 두 이차방정식이 주어질 때 미정계수 구하기

$x^2+ax+3=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$x^2+2x+b=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+1)+(\beta+1)=-2$, $(\alpha+1)(\beta+1)=b$

$\therefore \alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=b \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-a=-4$, $3-a+1=b \quad \therefore a=4$, $b=0$

$\therefore a-b=4$

14 답 ②

유형 12 두 수를 근으로 하는 이차방정식

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-1$

구하는 이차방정식의 두 근이 $\dfrac{1}{\alpha+1}$, $\dfrac{1}{\beta+1}$이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}&=\frac{(\beta+1)+(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}=\frac{(\alpha+\beta)+2}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}\\&=\frac{3+2}{-1+3+1}=\frac{5}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha+1}\times\frac{1}{\beta+1}&=\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}=\frac{1}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}\\&=\frac{1}{-1+3+1}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{1}{3}=0$에서

$3x^2-5x+1=0$

15 답 $x^2-x+3=0$

유형 13 잘못 보고 푼 이차방정식

원래의 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$이라고 하자.

x^2의 계수와 b를 바르게 보고 풀었을 때의 해가 $x=1\pm\sqrt{2}i$이므로 두 근의 곱은

$(1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)=b \quad \therefore b=3$

x^2의 계수와 a를 바르게 보고 풀었을 때의 해가 $x=-1$ 또는 $x=2$이므로 두 근의 합은

$-1+2=-a \quad \therefore a=-1$

따라서 원래의 이차방정식은 $x^2-x+3=0$

16 답 ④

유형 14 이차식의 인수분해

이차방정식 $5x^2-4x+4=0$의 근이 $x=\dfrac{2\pm4i}{5}$이므로

$$\begin{aligned}5x^2-4x+4&=5\left(x-\frac{2+4i}{5}\right)\left(x-\frac{2-4i}{5}\right)\\&=\frac{1}{5}(5x-2-4i)(5x-2+4i)\end{aligned}$$

따라서 $a=-2$, $b=4$이므로 $a+b=2$

17 답 ③

유형 15 이차방정식 $f(x)=0$의 근을 알 때, $f(ax+b)=0$의 근 구하기

$f(2x+1)=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(2\alpha+1)=0$, $f(2\beta+1)=0$

$f(x-2)=0$이려면

$x-2=2\alpha+1$ 또는 $x-2=2\beta+1$

$\therefore x=2\alpha+3$ 또는 $x=2\beta+3$

따라서 이차방정식 $f(x-2)=0$의 두 근의 곱은

$$\begin{aligned}(2\alpha+3)(2\beta+3)&=4\alpha\beta+6(\alpha+\beta)+9\\&=4\times(-5)+6\times4+9=13\end{aligned}$$

18 답 $6x^2+x-1=0$

유형 16 이차방정식의 켤레근

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $1+\sqrt{2}i$가 근이면 $1-\sqrt{2}i$도 근이다.

두 근의 합은 $(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)=-a \quad \therefore a=-2$

두 근의 곱은 $(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=b \quad \therefore b=3$

이때 구하는 이차방정식의 두 근이 $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{b}$이므로

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{a}\times\dfrac{1}{b}=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{6}$

따라서 구하는 이차방정식은

$6\left(x^2+\dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{6}\right)=0 \quad \therefore 6x^2+x-1=0$

05 이차방정식과 이차함수

핵심 유형

	유형01 ①	유형02 ④	유형03 0
유형04 ③	유형05 ①	유형06 ①	유형07 ②
유형08 ①	유형09 −12	유형10 ⑤	유형11 4

핵심 유형 완성하기

001 ③	002 16	003 ②	004 1	005 ④
006 4	007 $k\geq-5$		008 ②	009 2
010 ②	011 ②	012 ⑤	013 ④	
014 $k>5$	015 ④	016 ①	017 ⑤	018 ②
019 ①	020 ②	021 ②	022 ③	023 ⑤
024 ⑤	025 ②	026 3	027 ②	028 3
029 ③	030 ⑤	031 ⑤	032 ④	033 5
034 ③	035 ⑤	036 ④	037 ⑤	038 ①
039 ②	040 ⑤	041 ④	042 ②	
043 21 m	044 ③	045 ⑤	046 225	

핵심 유형 최종 점검하기

1 ④	2 ㄱ, ㄷ	3 −21	4 1	5 ①
6 2	7 ②	8 ③	9 ⑤	10 2
11 ③	12 ①	13 ⑤	14 ③	

핵심 유형 80~82쪽

유형01 답 ①

이차함수 $y=x^2-ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -3, 1이므로 -3, 1은 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-3+1=a$, $-3\times1=b$ $\quad\therefore a=-2,\ b=-3$
$\therefore a+b=-5$

유형02 답 ④

이차방정식 $x^2-2kx+k^2+3k-1=0$의 판별식을 D라고 하면 $D<0$이어야 하므로
$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-1\times(k^2+3k-1)=-3k+1<0$ $\quad\therefore k>\dfrac{1}{3}$
따라서 정수 k의 최솟값은 1이다.

유형03 답 0

이차함수 $y=x^2+ax-1$의 그래프와 직선 $y=2x+b$의 교점의 x좌표가 -2, 4이므로 -2, 4는 이차방정식 $x^2+ax-1=2x+b$, 즉 $x^2+(a-2)x-b-1=0$의 두 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-2+4=-(a-2)$, $-2\times4=-b-1$
$\therefore a=0,\ b=7$ $\quad\therefore ab=0$

유형04 답 ③

$x^2+4x+3k=-x+k$에서 $x^2+5x+2k=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D>0$이어야 하므로
$D=5^2-4\times1\times2k=25-8k>0$ $\quad\therefore k<\dfrac{25}{8}$
따라서 자연수 k는 1, 2, 3의 3개이다.

유형05 답 ①

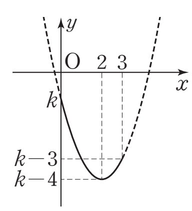
기울기가 2인 직선의 방정식을 $y=2x+b$라고 하면
$x^2+3x-1=2x+b$에서 $x^2+x-b-1=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이어야 하므로
$D=1^2-4\times1\times(-b-1)=4b+5=0$ $\quad\therefore b=-\dfrac{5}{4}$
따라서 직선의 방정식은 $y=2x-\dfrac{5}{4}$이므로 y절편은 $-\dfrac{5}{4}$이다.

유형06 답 ①

$y=2x^2+8kx-3=2(x+2k)^2-8k^2-3$
이 이차함수는 $x=-2k$일 때 최솟값이 $-8k^2-3$이므로
$-8k^2-3=-11$ $\quad\therefore k^2=1$ $\quad\therefore k=\pm1$
그런데 $k>0$이므로 $k=1$

유형07 답 ②

$f(x)=x^2-4x+k=(x-2)^2+k-4$
이므로 $0\leq x\leq3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x=2$일 때 최솟값은 $k-4$이므로
$k-4=-5$ $\quad\therefore k=-1$
따라서 $x=0$일 때 $f(x)$의 최댓값은 $k=-1$

유형08 답 ①

$x^2-2x=t$로 놓으면 $t=(x-1)^2-1$
$0\leq x\leq3$에서 $x=3$일 때 최댓값은 3, $x=1$일 때 최솟값은 -1이므로 $-1\leq t\leq3$
이때 주어진 함수는
$y=-2t^2+4t-5=-2(t-1)^2-3$
따라서 $-1\leq t\leq3$에서 $t=1$일 때 최댓값은 -3이고, $t=-1$ 또는 $t=3$일 때 최솟값은 -11이므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은
$-3+(-11)=-14$

유형09 답 −12

$$\begin{aligned}x^2+y^2-4x+6y+1&=(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)-12\\&=(x-2)^2+(y+3)^2-12\end{aligned}$$
이때 x, y가 실수이므로 $(x-2)^2\geq0$, $(y+3)^2\geq0$
$\therefore x^2+y^2-4x+6y+1\geq-12$
따라서 구하는 최솟값은 -12이다.

유형10 답 ⑤

$x+y=1$에서 $y=1-x$이므로 이를 $4x^2+y^2$에 대입하면

$$4x^2+y^2=4x^2+(1-x)^2=5x^2-2x+1$$
$$=5\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{5}$$

따라서 $x=\frac{1}{5}$일 때 최솟값은 $\frac{4}{5}$이다.

유형11 답 4

점 P의 좌표를 $(a,\ -a+4)$라고 하면

$\overline{OQ}=a,\ \overline{PQ}=-a+4$

사각형 ROQP의 넓이를 S라고 하면

$S=a(-a+4)=-a^2+4a=-(a-2)^2+4$

이때 $0<a<4$이므로 $a=2$일 때 사각형 ROQP의 넓이의 최댓값은 4이다.

핵심 유형 완성하기 83~89쪽

001 답 ③

이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -1, 4이므로 -1, 4는 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+4=-\frac{a}{2},\ -1\times4=\frac{b}{2}\qquad\therefore a=-6,\ b=-8$

$\therefore ab=48$

002 답 16

이차함수 $y=x^2-ax+a+5$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 2, b이므로 2, b는 이차방정식 $x^2-ax+a+5=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+b=a,\ 2\times b=a+5$

$\therefore a-b=2,\ a-2b=-5$

두 식을 연립하여 풀면 $a=9,\ b=7$

$\therefore a+b=16$

003 답 ②

이차방정식 $x^2-(k+1)x-2k=0$의 두 근을 α, β라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k+1,\ \alpha\beta=-2k$

이때 주어진 이차함수의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 5이므로 $|\alpha-\beta|=5$

양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=25$

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2$에서 $(k+1)^2+8k=25$

$k^2+10k-24=0,\ (k+12)(k-2)=0$

$\therefore k=-12$ 또는 $k=2$

그런데 $k>0$이므로 $k=2$

004 답 1

$y=ax^2+bx+c$의 그래프가 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$c=-2\qquad\therefore y=ax^2+bx-2$

이때 이차방정식 $ax^2+bx-2=0$의 계수가 유리수이고 한 근이 $-1+\sqrt{3}$이므로 $-1-\sqrt{3}$도 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1+\sqrt{3})+(-1-\sqrt{3})=-\frac{b}{a}$

$(-1+\sqrt{3})\times(-1-\sqrt{3})=-\frac{2}{a}$

$\therefore a=1,\ b=2\qquad\therefore a+b+c=1$

005 답 ④

이차방정식 $x^2+2(k+1)x+k^2+k+4=0$의 판별식을 D라고 하면 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(k+1)^2-1\times(k^2+k+4)=k-3>0\qquad\therefore k>3$

따라서 정수 k의 최솟값은 4이다.

006 답 4

이차방정식 $x^2+kx+k=0$의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이어야 하므로

$D=k^2-4\times1\times k=k^2-4k=0$

$k(k-4)=0\qquad\therefore k=0$ 또는 $k=4$

그런데 $k>0$이므로 $k=4$

007 답 $k\geq-5$

이차방정식 $x^2-2(k+2)x+k^2+3k-1=0$의 판별식을 D라고 하면 $D\geq0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(k+2)^2-1\times(k^2+3k-1)=k+5\geq0\qquad\therefore k\geq-5$

008 답 ②

이차방정식 $x^2+4x-3k+5=0$의 판별식을 D_1이라고 하면 $D_1<0$이어야 하므로

$\frac{D_1}{4}=2^2-1\times(-3k+5)=3k-1<0$

$\therefore k<\frac{1}{3}\qquad\cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $kx^2+8x-2=0$의 판별식을 D_2라고 하면 $D_2=0$이어야 하므로

$\frac{D_2}{4}=4^2-k\times(-2)=2k+16=0$

$\therefore k=-8\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $k=-8$

009 답 2

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D_1이라고 하면 $D_1<0$이어야 하므로

$D_1=b^2-4ac<0\qquad\cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $bx^2+2(a+c)x+b=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$\frac{D_2}{4}=(a+c)^2-b\times b=a^2+c^2+2ac-b^2$

㉠에서 $-b^2>-4ac$이므로

$\frac{D_2}{4}=a^2+c^2+2ac-b^2>a^2+c^2+2ac-4ac=(a-c)^2\geq0$

따라서 구하는 교점의 개수는 2이다.

010 답 ②

이차함수 $y=x^2+3x+a$의 그래프와 직선 $y=bx-1$의 두 교점의 x좌표가 -3, 1이므로 -3, 1은 이차방정식 $x^2+3x+a=bx-1$, 즉 $x^2-(b-3)x+a+1=0$의 두 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-3+1=b-3$, $-3\times1=a+1$
$\therefore a=-4,\ b=1$
$\therefore a+b=-3$

011 답 ②

이차방정식 $-x^2+ax+3=-2x+b$, 즉 $x^2-(a+2)x+b-3=0$의 계수가 유리수이고 한 근이 $2+\sqrt{5}$이므로 $2-\sqrt{5}$도 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=a+2$, $(2+\sqrt{5})\times(2-\sqrt{5})=b-3$
$\therefore a=2,\ b=2 \qquad \therefore ab=4$

012 답 ⑤

이차함수 $y=x^2+ax-1$의 그래프와 직선 $y=2x-5$의 두 교점의 x좌표를 α, β라고 하면 α, β는 이차방정식 $x^2+ax-1=2x-5$, 즉 $x^2+(a-2)x+4=0$의 두 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-(a-2)$, $\alpha\beta=4$
이때 이차함수의 그래프와 직선의 두 교점의 x좌표의 차가 3이므로 $|\alpha-\beta|=3$
양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=9$
$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2$에서
$(a-2)^2-16=9$, $a^2-4a-21=0$
$(a+3)(a-7)=0 \qquad \therefore a=-3$ 또는 $a=7$
따라서 모든 상수 a의 값의 합은 $-3+7=4$

013 답 ④

$-x^2+kx-k^2=-kx+k-3$에서 $x^2-2kx+k^2+k-3=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D>0$이어야 하므로
$\frac{D}{4}=(-k)^2-1\times(k^2+k-3)=-k+3>0 \qquad \therefore k<3$
따라서 정수 k의 최댓값은 2이다.

014 답 $k>5$

$x^2+2kx+k^2-1=4x+3k$에서 $x^2+2(k-2)x+k^2-3k-1=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D<0$이어야 하므로
$\frac{D}{4}=(k-2)^2-1\times(k^2-3k-1)=-k+5<0 \qquad \therefore k>5$

015 답 ④

$-x^2-(k-3)x+k+1=k(x+k)$에서
$x^2+(2k-3)x+k^2-k-1=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D\geq0$이어야 하므로
$D=(2k-3)^2-4\times1\times(k^2-k-1)=-8k+13\geq0$
$\therefore k\leq\frac{13}{8}$
따라서 정수 k의 최댓값은 1이다.

016 답 ①

기울기가 4이고 y절편이 1 이상인 직선의 방정식을 $y=4x+b\,(b\geq1)$라고 하면 $-x^2+2kx-k^2=4x+b$에서
$x^2-2(k-2)x+k^2+b=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이어야 하므로
$\frac{D}{4}=(k-2)^2-1\times(k^2+b)=-4k+4-b=0$
$\therefore b=-4k+4$
그런데 $b\geq1$이므로 $-4k+4\geq1 \qquad \therefore k\leq\frac{3}{4}$

017 답 ⑤

$x^2+2kx+a=2bx-k^2+4k$에서 $x^2+2(k-b)x+k^2-4k+a=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이어야 하므로
$\frac{D}{4}=(k-b)^2-1\times(k^2-4k+a)=0$
$-2(b-2)k+b^2-a=0$
이 등식이 k에 대한 항등식이므로 $b-2=0$, $b^2-a=0$
두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=2$
$\therefore a+b=6$

018 답 ②

직선 $y=-x+7$에 평행한 직선의 기울기는 -1이다.
기울기가 -1인 직선의 방정식을 $y=-x+b$라고 하면
$x^2-5x-3=-x+b$에서 $x^2-4x-b-3=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이어야 하므로
$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times(-b-3)=b+7=0 \qquad \therefore b=-7$
따라서 직선의 방정식은 $y=-x-7$이므로 y절편은 -7이다.

019 답 ①

점 $(-3,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식을 $y=m(x+3)+1$이라고 하면
$-x^2+2x+3=m(x+3)+1$에서 $x^2+(m-2)x+3m-2=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이어야 하므로
$D=(m-2)^2-4\times1\times(3m-2)=m^2-16m+12=0$
따라서 이차방정식 $m^2-16m+12=0$의 근이 직선의 기울기이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 두 직선의 기울기의 합은 16이다.

020 답 ②

기울기가 2인 직선의 방정식을 $y=2x+b$라고 하면
$x^2=2x+b$에서 $x^2-2x-b=0$
이 이차방정식의 판별식을 D_1이라고 하면 $D_1=0$이어야 하므로
$\frac{D_1}{4}=(-1)^2-1\times(-b)=b+1=0 \qquad \therefore b=-1$
$\therefore y=2x-1$
$-2x^2+kx+k-3=2x-1$에서 $2x^2-(k-2)x-k+2=0$
이 이차방정식의 판별식을 D_2라고 하면 $D_2=0$이어야 하므로
$D_2=(k-2)^2-4\times2\times(-k+2)=k^2+4k-12=0$
$(k+6)(k-2)=0 \qquad \therefore k=-6$ 또는 $k=2$
그런데 $k>0$이므로 $k=2$

021 답 ②

$y=-x^2+2kx+k=-(x-k)^2+k^2+k$

이 이차함수는 $x=k$일 때 최댓값이 k^2+k이므로

$k^2+k=6$, $k^2+k-6=0$

$(k+3)(k-2)=0$ $\quad\therefore k=-3$ 또는 $k=2$

그런데 $k>0$이므로 $k=2$

022 답 ③

$y=-2x^2+8x+5=-2(x-2)^2+13$

이므로 $x=2$일 때 최댓값은 13이다.

$y=x^2-2x=(x-1)^2-1$

이므로 $x=1$일 때 최솟값은 -1이다.

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$13+(-1)=12$

023 답 ⑤

$x=-1$에서 최솟값 -5를 가지므로 $f(x)=a(x+1)^2-5$

$f(1)=7$에서 $4a-5=7$ $\quad\therefore a=3$

$\therefore f(x)=3(x+1)^2-5=3x^2+6x-2$

따라서 $a=3$, $b=6$, $c=-2$이므로 $a+b-c=11$

024 답 ⑤

$y=2x^2+kx-k=2\left(x+\frac{k}{4}\right)^2-\frac{k^2}{8}-k$

이 이차함수는 $x=-\frac{k}{4}$일 때 최솟값이 $-\frac{k^2}{8}-k$이므로

$f(k)=-\frac{k^2}{8}-k=-\frac{1}{8}(k+4)^2+2$

따라서 $k=-4$일 때 $f(k)$의 최댓값은 2이다.

025 답 ②

$f(x)=-x^2+4x+k=-(x-2)^2+k+4$

이 이차함수는 $x=2$일 때 최댓값이 $k+4$이므로 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le2$를 만족하려면

$k+4\le2$ $\quad\therefore k\le-2$

따라서 실수 k의 최댓값은 -2이다.

026 답 3

㈎에서 $f(0)=f(2)=0$이므로

$f(x)=ax(x-2)\ (a\ne0)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㈐에서 $g(x)$는 $x=2$에서 최댓값을 가지므로

$g(x)=b(x-2)^2+c\ (b<0)$

이때 ㈏에서 $g(0)=0$이므로 $4b+c=0$ $\quad\therefore c=-4b$

$\therefore g(x)=b(x-2)^2-4b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㈑에서 $f(3)=1$, $g(3)=1$이므로 ㉠, ㉡에서

$3a=1$, $-3b=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$

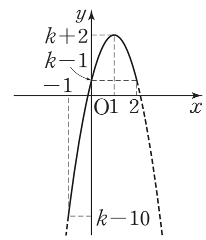
$$\begin{aligned}\therefore f(x)+2g(x)&=\frac{1}{3}x(x-2)+2\left\{-\frac{1}{3}(x-2)^2+\frac{4}{3}\right\}\\&=-\frac{1}{3}x^2+2x=-\frac{1}{3}(x-3)^2+3\end{aligned}$$

따라서 $x=3$일 때 $f(x)+2g(x)$의 최댓값은 3이다.

027 답 ②

$$\begin{aligned}f(x)&=-3x^2+6x+k-1\\&=-3(x-1)^2+k+2\end{aligned}$$

이므로 $-1\le x\le2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x=1$일 때 최댓값은 $k+2$이므로

$k+2=4$ $\quad\therefore k=2$

따라서 $x=-1$일 때 $f(x)$의 최솟값은

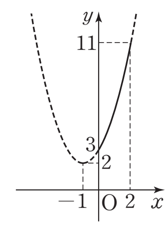
$k-10=-8$

028 답 3

$f(x)=x^2+2x+3$이라고 하면

$f(x)=(x+1)^2+2$

이므로 $0\le x\le2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

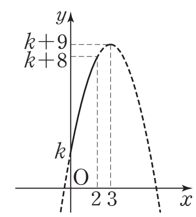


따라서 $x=2$일 때 최댓값은 11이고, $x=0$일 때 최솟값은 3이다.

$g(x)=-x^2+6x+k$라고 하면

$g(x)=-(x-3)^2+k+9$

이므로 $0\le x\le2$에서 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=2$일 때 최댓값은 $k+8$이고,

$x=0$일 때 최솟값은 k이다.

이때 $f(x)$와 $g(x)$의 최댓값과 최솟값이 각각 같으므로

$k+8=11$, $k=3$ $\quad\therefore k=3$

029 답 ③

$f(x)=-x^2+4x+k=-(x-2)^2+k+4$

이 이차함수는 $x=-1$일 때 최솟값이 $k-5$이므로 함수 $f(x)$가 $-1\le x\le3$에서 $f(x)>2$를 만족하려면

$k-5>2$ $\quad\therefore k>7$

따라서 정수 k의 최솟값은 8이다.

030 답 ⑤

$y=x^2-2kx-4=(x-k)^2-k^2-4$

(ⅰ) $k<0$일 때

$x=0$일 때 최솟값은 -4이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

(ⅱ) $0\le k<5$일 때

$x=k$일 때 최솟값이 $-k^2-4$이므로

$-k^2-4=-8$, $k^2=4$ $\quad\therefore k=-2$ 또는 $k=2$

그런데 $0\le k<5$이므로 $k=2$

(ⅲ) $k\ge5$일 때

$x=5$일 때 최솟값은 $-10k+21$이므로

$-10k+21=-8$ $\quad\therefore k=\frac{29}{10}$

그런데 $k\ge5$이므로 만족하는 k의 값은 없다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $k=2$

031 답 ⑤

$x^2+4x=t$로 놓으면 $t=(x+2)^2-4$

$-3\le x\le 0$에서 $x=0$일 때 최댓값은 0이고, $x=-2$일 때 최솟값은 -4이므로 $-4\le t\le 0$

이때 주어진 함수는

$y=t^2+2(t+2)-3=(t+1)^2$

따라서 $-4\le t\le 0$에서 $t=-4$일 때 최댓값은 9이고, $t=-1$일 때 최솟값은 0이므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 $9+0=9$

032 답 ④

$x^2+2x+3=t$로 놓으면 $t=(x+1)^2+2 \qquad \therefore t\ge 2$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t+5=(t-1)^2+4$

따라서 $t\ge 2$에서 $t=2$일 때 최솟값은 5이다.

033 답 5

$x^2+4x+1=t$로 놓으면 $t=(x+2)^2-3 \qquad \therefore t\ge -3$

이때 주어진 함수는

$y=t^2+4(t-1)+k=(t+2)^2+k-8$

따라서 $t\ge -3$에서 $t=-2$일 때 최솟값은 $k-8$이므로

$k-8=-3 \qquad \therefore k=5$

034 답 ③

$x^2-4x=t$로 놓으면 $t=(x-2)^2-4$

$-2\le x\le 1$에서 $x=-2$일 때 최댓값은 12이고, $x=1$일 때 최솟값은 -3이므로 $-3\le t\le 12$

이때 주어진 함수는

$y=\frac{1}{2}t^2+t+k=\frac{1}{2}(t+1)^2+k-\frac{1}{2}$

따라서 $-3\le t\le 12$에서 $t=-1$일 때 최솟값은 $k-\frac{1}{2}$이므로

$k-\frac{1}{2}=\frac{5}{2} \qquad \therefore k=3$

035 답 ⑤

$$\begin{aligned}-x^2-y^2+2x-8y+3&=-(x^2-2x+1)-(y^2+8y+16)+20\\&=-(x-1)^2-(y+4)^2+20\end{aligned}$$

이때 x, y가 실수이므로

$-(x-1)^2\le 0$, $-(y+4)^2\le 0$

$\therefore -x^2-y^2+2x-8y+3\le 20$

따라서 구하는 최댓값은 20이다.

036 답 ④

$x^2+5y^2+z^2+4xy-4y+2z+9$

$=(x^2+4xy+4y^2)+(y^2-4y+4)+(z^2+2z+1)+4$

$=(x+2y)^2+(y-2)^2+(z+1)^2+4$

이때 x, y, z가 실수이므로

$(x+2y)^2\ge 0$, $(y-2)^2\ge 0$, $(z+1)^2\ge 0$

$\therefore x^2+5y^2+z^2+4xy-4y+2z+9\ge 4$

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

037 답 ⑤

$x^2+2x=t$로 놓으면

$(x^2+2x)^2-(x^2+2x)y+y^2-6y+k$

$=t^2-ty+y^2-6y+k$

$=\left(t^2-ty+\frac{1}{4}y^2\right)+\frac{3}{4}(y^2-8y+16)+k-12$

$=\left(t-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}(y-4)^2+k-12$

이때 t, y가 실수이므로

$\left(t-\frac{1}{2}y\right)^2\ge 0$, $(y-4)^2\ge 0$

$\therefore (x^2+2x)^2-(x^2+2x)y+y^2-6y+k\ge k-12$

따라서 $k-12=10$이므로 $k=22$

038 답 ①

$x-y=3$에서 $x=y+3$이므로 이를 x^2+y^2+2y에 대입하면

$$\begin{aligned}x^2+y^2+2y&=(y+3)^2+y^2+2y\\&=2y^2+8y+9=2(y+2)^2+1\end{aligned}$$

따라서 $y=-2$일 때 최솟값은 1이다.

039 답 ②

$2x+y=8$에서 $y=-2x+8$이므로 이를 xy에 대입하면

$xy=x(-2x+8)=-2x^2+8x=-2(x-2)^2+8$

따라서 $1\le x\le 4$에서 $x=2$일 때 최댓값은 8이고, $x=4$일 때 최솟값은 0이므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$8+0=8$

040 답 ⑤

점 $(a,\ b)$가 직선 $y=x-3$ 위에 있으므로 $b=a-3$

이를 a^2+b^2에 대입하면

$$\begin{aligned}a^2+b^2&=a^2+(a-3)^2=2a^2-6a+9\\&=2\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}\end{aligned}$$

따라서 $a=\frac{3}{2}$일 때 최솟값은 $\frac{9}{2}$이다.

041 답 ④

$x+y^2=1$에서 $y^2=1-x$

이때 $y^2\ge 0$이므로 $1-x\ge 0 \qquad \therefore x\le 1$

$y^2=1-x$를 x^2+4y^2에 대입하면

$x^2+4y^2=x^2+4(1-x)=x^2-4x+4=(x-2)^2$

따라서 $x\le 1$에서 $x=1$일 때 최솟값은 1이다.

042 답 ②

점 A의 좌표를 $(a,\ a^2-6a)(0<a<3)$라고 하면

$\overline{AD}=-a^2+6a$, $\overline{CD}=6-2a$

직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 l이라고 하면

$$\begin{aligned}l&=2\{(-a^2+6a)+(6-2a)\}\\&=-2a^2+8a+12\\&=-2(a-2)^2+20\end{aligned}$$

따라서 $0<a<3$에서 $a=2$일 때 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 20이다.

043 답 21 m

$h=-5t^2+20t+1=-5(t-2)^2+21$

이므로 $t=2$일 때 최댓값은 21이다.

따라서 공이 가장 높은 곳에 도달했을 때의 지면으로부터의 높이는 21 m이다.

044 답 ③

핫도그 한 개의 가격을 $100x$원 인상할 때, 핫도그 한 개의 가격은 $(1000+100x)$원이고, 하루 판매량은 $(200-10x)$개이므로 하루 판매액을 y원이라고 하면

$y=(1000+100x)(200-10x)=-1000(x-5)^2+225000$

따라서 $x=5$일 때 하루 판매액이 최대가 되므로 그때의 핫도그 한 개의 가격은

$1000+100\times5=1500$(원)

045 답 ⑤

꽃밭의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m라고 하면

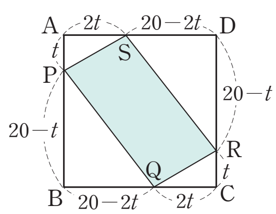
$x+2y=16 \qquad \therefore x=16-2y$

이때 꽃밭의 넓이는

$xy=(16-2y)\times y=-2y^2+16y=-2(y-4)^2+32$

이때 $0<y<8$이므로 $y=4$일 때 꽃밭의 넓이의 최댓값은 32 m^2이다.

046 답 225



t초 후 $\overline{AP}=\overline{CR}=t$, $\overline{AS}=\overline{CQ}=2t$

이므로

$\overline{BP}=\overline{DR}=20-t$

$\overline{BQ}=\overline{DS}=20-2t$

이때 직각삼각형 APS, CRQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times t\times 2t=t^2$

또 직각삼각형 BPQ, DRS의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(20-t)\times(20-2t)=t^2-30t+200$

이때 사각형 PQRS의 넓이를 S라고 하면

$S=20^2-2\{t^2+(t^2-30t+200)\}$

$\quad=-4t^2+60t=-4\left(t-\frac{15}{2}\right)^2+225$

이때 $0<t\le10$이므로 $t=\frac{15}{2}$일 때 사각형 PQRS의 넓이의 최댓값은 225이다.

핵심 유형 **최종 점검**하기 • 90~91쪽

1 답 ④

유형 01 이차함수의 그래프와 x축의 교점

이차함수 $y=-2x^2+ax+3$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 1, b이므로 1, b는 이차방정식 $-2x^2+ax+3=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+b=\frac{a}{2}$, $1\times b=-\frac{3}{2} \qquad \therefore a=-1,\ b=-\frac{3}{2} \qquad \therefore ab=\frac{3}{2}$

2 답 ㄱ, ㄷ

유형 02 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계

ㄱ. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=b^2-4ac>0$ (참)

ㄴ. -3, 1은 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+1=-\frac{b}{a}$, $-3\times1=\frac{c}{a} \qquad \therefore b=2a,\ c=-3a$

$\therefore \frac{bc}{a^2}=\frac{2a\times(-3a)}{a^2}=-6$ (거짓)

ㄷ. 이차방정식 $bx^2+cx+a=0$의 판별식을 D라고 하면 ㄴ에서 $b=2a$, $c=-3a$이므로

$D=c^2-4ab=(-3a)^2-4a\times(2a)=a^2>0$

즉, 이차함수 $y=bx^2+cx+a$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다. (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

3 답 -21

유형 03 이차함수의 그래프와 직선의 교점

이차방정식 $2x^2+(2k+1)x+k=-x+k^2$, 즉

$2x^2+2(k+1)x-k^2+k=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

의 두 근의 합이 5이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{2(k+1)}{2}=5 \qquad \therefore k=-6$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면 $x^2-5x-21=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 -21이다.

4 답 1

유형 04 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

$x^2-2kx+k+3=2x-k^2$에서 $x^2-2(k+1)x+k^2+k+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(k+1)^2-1\times(k^2+k+3)=k-2<0$

$\therefore k<2$

따라서 자연수 k는 1의 1개이다.

5 답 ①

유형 05 이차함수의 그래프에 접하는 직선

점 $(1,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식을 $y=m(x-1)$이라고 하면

$-x^2+4x-3=m(x-1)$에서 $x^2+(m-4)x-m+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라고 하면 $D_1=0$이어야 하므로

$D_1=(m-4)^2-4\times1\times(-m+3)=(m-2)^2=0 \qquad \therefore m=2$

$\therefore y=2x-2$

$x^2+ax+b=2x-2$에서 $x^2+(a-2)x+b+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라고 하면 $D_2=0$이어야 하므로

$D_2=(a-2)^2-4\times1\times(b+2)=a^2-4a-4b-4=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

한편 점 $(1,\ 0)$은 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프 위에 있으므로

$0=1+a+b \qquad \therefore b=-a-1$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면 $a^2=0$

따라서 $a=0$, $b=-1$이므로 $a^2+b^2=1$

6 답 2

유형 06 이차함수의 최대, 최소

$y=x^2+2kx+2k^2-k$

$\;=(x+k)^2+k^2-k$

이 이차함수는 $x=-k$일 때 최솟값이 k^2-k이므로

$k^2-k=2,\ k^2-k-2=0$

$(k+1)(k-2)=0$

$\therefore\ k=-1$ 또는 $k=2$

그런데 $k>0$이므로 $k=2$

7 답 ②

유형 06 이차함수의 최대, 최소

$y=-x^2+2kx+k$

$\;=-(x-k)^2+k^2+k$

이 이차함수는 $x=k$일 때 최댓값이 k^2+k이므로

$f(k)=k^2+k=\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

따라서 $k=-\frac{1}{2}$일 때 $f(k)$의 최솟값은 $-\frac{1}{4}$이다.

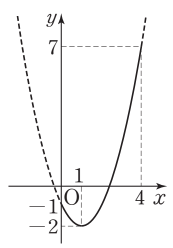
8 답 ③

유형 07 제한된 범위에서 이차함수의 최대, 최소

$f(x)=x^2-2x-1$이라고 하면

$f(x)=(x-1)^2-2$

이므로 $0\le x\le 4$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=4$일 때 최댓값은 7이고, $x=1$일 때 최솟값은 -2이므로

$M=7,\ m=-2$

$\therefore\ M+m=5$

9 답 ⑤

유형 07 제한된 범위에서 이차함수의 최대, 최소

$y=-x^2+3x+1$

$\;=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$

$a\ge\frac{3}{2}$이면 이 이차함수는 $-2\le x\le a$에서 $x=\frac{3}{2}$일 때 최댓값은 $\frac{13}{4}$이다.

따라서 $-2\le x\le a$에서 최댓값이 3이려면 $-2<a<\frac{3}{2}$이어야 한다.

이때 $x=a$에서 최댓값 3을 가지므로

$-a^2+3a+1=3,\ a^2-3a+2=0$

$(a-1)(a-2)=0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=2$

그런데 $-2<a<\frac{3}{2}$이므로 $a=1$

한편 $x=-2$일 때 최솟값은

$b=-4-6+1=-9$

$\therefore\ a-b=1+9=10$

10 답 2

유형 08 공통부분이 있는 함수의 최대, 최소

$x^2+2x=t$로 놓으면

$t=(x+1)^2-1\qquad \therefore\ t\ge -1$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2(t-1)-k$

$\;=(t-1)^2-k+1$

따라서 $t\ge-1$에서 $t=1$일 때 최솟값은 $-k+1$이므로

$-k+1=-1\qquad \therefore\ k=2$

11 답 ③

유형 09 완전제곱식을 이용한 이차식의 최대, 최소

$x^2+6y^2-4xy-8y+10$

$=(x^2-4xy+4y^2)+2(y^2-4y+4)+2$

$=(x-2y)^2+2(y-2)^2+2$

이때 x, y가 실수이므로

$(x-2y)^2\ge0,\ (y-2)^2\ge0$

$\therefore\ x^2+6y^2-4xy-8y+10\ge2$

따라서 $x=4,\ y=2$일 때 최솟값은 2이므로

$p=4,\ q=2,\ m=2$

$\therefore\ p+q+m=8$

12 답 ①

유형 10 조건을 만족하는 이차식의 최대, 최소

$x+2y=3$에서 $x=3-2y$이므로 이를 $2x^2+y^2$에 대입하면

$2x^2+y^2=2(3-2y)^2+y^2$

$\qquad=9y^2-24y+18$

$\qquad=9\left(y-\frac{4}{3}\right)^2+2$

따라서 $y=\frac{4}{3}$일 때 최솟값은 2이다.

13 답 ⑤

유형 10 조건을 만족하는 이차식의 최대, 최소

$x+y=4$에서 $y=4-x$

$y\ge0$이므로 $4-x\ge0,\ x\le4\qquad \therefore\ 0\le x\le4$

$y=4-x$를 $2x^2-y^2$에 대입하면

$2x^2-y^2=2x^2-(4-x)^2$

$\qquad=x^2+8x-16$

$\qquad=(x+4)^2-32$

따라서 $0\le x\le4$에서 $x=4$일 때 최댓값은 32이다.

14 답 ③

유형 11 이차함수의 최대, 최소의 활용

t초 후 밑면의 넓이는 $(t+4)\pi$이고 높이는 $8-t$이므로 원뿔의 부피를 V라고 하면

$V=\frac{1}{3}\times(t+4)\pi\times(8-t)$

$\;=-\frac{\pi}{3}(t-2)^2+12\pi$

이때 $0<t<8$이므로 $t=2$일 때 원뿔의 부피의 최댓값은 12π이다.

06 여러 가지 방정식

핵심 유형

	유형01 ②		
유형02 $x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$			
유형03 6	유형04 ①	유형05 -1	유형06 ③
유형07 ②	유형08 $x^3-8x^2-12x+16=0$		유형09 ④
유형10 ②	유형11 3 cm	유형12 ②	유형13 ④
유형14 ④	유형15 5	유형16 18	
유형17 $(-2, 2)$, $(2, -2)$, $(4, 8)$, $(8, 4)$			유형18 ②

핵심 유형 완성하기

001 ①	002 -4	003 3	004 ②	005 ②
006 ⑤	007 ③	008 ①	009 ②	010 ③
011 ①	012 ②	013 ②	014 ④	015 1
016 ①	017 ④	018 ③	019 ①	020 ①
021 ⑤	022 ②	023 ①	024 2	025 ②
026 ③	027 ③	028 ①		
029 $x^3-2x^2+x-1=0$		030 ④	031 ①	032 ④
033 ①	034 ③	035 -21	036 ②	037 ①
038 1	039 ②	040 ②	041 64	042 ③
043 ②	044 ②	045 3	046 $2\sqrt{2}$	047 ④
048 -8	049 ③	050 ③		
051 $(-2, 2)$, $(2, -2)$			052 11	053 3
054 1	055 ③	056 ④	057 ③	058 ②
059 ④	060 ②	061 ④	062 ①	063 ③

핵심 유형 최종 점검하기

1 ①	2 $-2+3\sqrt{2}$		3 ①	4 ②
5 ③	6 ④	7 ④	8 ②	9 ③
10 4	11 ④	12 4	13 ③	14 ④
15 ②	16 ⑤	17 ④	18 ⑤	19 ①

핵심 유형 94~96쪽

유형01 답 ②

$f(x)=x^3-4x^2+8$이라고 할 때, $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -4 & 0 & 8 \\ & & 2 & -4 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2-2x-4)$

즉, 주어진 방정식은

$(x-2)(x^2-2x-4)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{5}$

따라서 $\alpha=1+\sqrt{5}$, $\beta=1-\sqrt{5}$이므로

$\alpha-\beta=1+\sqrt{5}-(1-\sqrt{5})=2\sqrt{5}$

유형02 답 $x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

$x^2+x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$(t-1)(t-7)+5=0$, $t^2-8t+12=0$

$(t-2)(t-6)=0$ $\quad\therefore t=2$ 또는 $t=6$

(i) $t=2$일 때

$x^2+x=2$에서 $x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

(ii) $t=6$일 때

$x^2+x=6$에서 $x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는

$x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

유형03 답 6

$x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-13t+36=0$, $(t-4)(t-9)=0$

$\therefore t=4$ 또는 $t=9$

즉, $x^2=4$ 또는 $x^2=9$이므로

$x=\pm2$ 또는 $x=\pm3$

따라서 방정식의 모든 양의 근의 곱은

$2\times3=6$

유형04 답 ①

$x\neq0$이므로 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+4x-3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-3=0$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-5=0$

$x+\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면

$t^2+4t-5=0$, $(t+5)(t-1)=0$

$\therefore t=-5$ 또는 $t=1$

(i) $t=-5$일 때

$x+\dfrac{1}{x}=-5$에서 $x^2+5x+1=0$

$\therefore x=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

(ii) $t=1$일 때

$x+\dfrac{1}{x}=1$에서 $x^2-x+1=0$

$\therefore x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에 의하여 방정식의 모든 실근의 합은

$\dfrac{-5-\sqrt{21}}{2}+\dfrac{-5+\sqrt{21}}{2}=-5$

유형05 답 -1

주어진 방정식의 한 근이 2이므로 $x=2$를 대입하면

$8+4k+2(k-2)+2=0 \qquad \therefore k=-1$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$x^3-x^2-3x+2=0$

$f(x)=x^3-x^2-3x+2$라고 할 때, $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ & & 2 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2+x-1)$

즉, 주어진 방정식은

$(x-2)(x^2+x-1)=0$

이때 2가 아닌 나머지 두 근은 이차방정식 $x^2+x-1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 -1이다.

유형06 답 ③

$f(x)=x^3+3x^2+(k+2)x+k$라 고 할 때, $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & 3 & k+2 & k \\ & & -1 & -2 & -k \\ \hline & 1 & 2 & k & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2+2x+k)$

즉, 주어진 방정식은

$(x+1)(x^2+2x+k)=0$

이 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+2x+k=0$이 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=1^2-1\times k=1-k<0$

$\therefore k>1$

유형07 답 ②

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\ \alpha\beta\gamma=1$

$$\begin{aligned}\therefore (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma) &=1+(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\alpha\beta\gamma \\ &=1+3+2+1 \\ &=7\end{aligned}$$

유형08 답 $x^3-8x^2-12x+16=0$

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=4,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3,\ \alpha\beta\gamma=-2$

구하는 삼차방정식의 세 근이 $2\alpha,\ 2\beta,\ 2\gamma$이므로

$2\alpha+2\beta+2\gamma=2(\alpha+\beta+\gamma)=2\times4=8$

$$\begin{aligned}2\alpha\times2\beta+2\beta\times2\gamma+2\gamma\times2\alpha &=4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \\ &=4\times(-3)=-12\end{aligned}$$

$2\alpha\times2\beta\times2\gamma=8\alpha\beta\gamma=8\times(-2)=-16$

따라서 구하는 방정식은

$x^3-8x^2-12x+16=0$

유형09 답 ④

주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 한 근이 $\sqrt{2}$이면 $-\sqrt{2}$도 근이다. 나머지 한 근을 α라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sqrt{2}+(-\sqrt{2})+\alpha=-2$

$\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})+(-\sqrt{2})\times\alpha+\alpha\times\sqrt{2}=a$

$\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})\times\alpha=-b$

세 식을 연립하여 풀면 $\alpha=-2,\ a=-2,\ b=-4$

$\therefore ab=8$

유형10 답 ②

$x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

이때 ω는 방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$

$$\begin{aligned}\therefore \omega^{1010}+\frac{1}{\omega^{1010}} &=(\omega^3)^{336}\times\omega^2+\frac{1}{(\omega^3)^{336}\times\omega^2} \\ &=\omega^2+\frac{1}{\omega^2}=\frac{\omega^4+1}{\omega^2} \\ &=\frac{\omega+1}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1\end{aligned}$$

유형11 답 3 cm

처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라고 하면

$(x-1)(x-2)(x+3)=12,\ x^3-7x-6=0$

$f(x)=x^3-7x-6$이라고 할 때, $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & 0 & -7 & -6 \\ & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+1)(x^2-x-6) \\ &=(x+1)(x+2)(x-3)\end{aligned}$$

즉, 주어진 방정식은 $(x+2)(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$

그런데 $x>2$이므로 $x=3$

따라서 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는 3 cm이다.

핵심 유형 완성하기 97~103쪽

001 답 ①

$f(x)=x^4+x^3-x^2-7x-6$이라고 할 때, $f(-1)=0,\ f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc} -1 & 1 & 1 & -1 & -7 & -6 \\ & & -1 & 0 & 1 & 6 \\ \hline 2 & 1 & 0 & -1 & -6 & \boxed{0} \\ & & 2 & 4 & 6 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+2x+3)$

즉, 주어진 방정식은 $(x+1)(x-2)(x^2+2x+3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{2}i$

따라서 방정식의 모든 실근의 합은

$-1+2=1$

002 답 -4

$f(x)=x^3-2x^2-2x+1$이라고 할 때, $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	-2	-2	1
		-1	3	-1
	1	-3	1	0

$f(x)=(x+1)(x^2-3x+1)$

즉, 주어진 방정식은

$(x+1)(x^2-3x+1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\gamma=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$이므로

$\alpha-\beta-\gamma=-1-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}=-4$

003 답 3

$f(x)=x^4+x^3-15x^2+7x+6$이라고 할 때, $f(1)=0$, $f(3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	1	-15	7	6
		1	2	-13	-6
3	1	2	-13	-6	0
		3	15	6	
	1	5	2	0	

$f(x)=(x-1)(x-3)(x^2+5x+2)$

즉, 주어진 방정식은

$(x-1)(x-3)(x^2+5x+2)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$

따라서 방정식의 모든 양의 근의 곱은

$1\times3=3$

004 답 ②

$f(x)=x^3-3x^2+2x+6$이라고 할 때, $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	-3	2	6
		-1	4	-6
	1	-4	6	0

$f(x)=(x+1)(x^2-4x+6)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x^2-4x+6)=0$

이때 방정식의 두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2-4x+6=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=6$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4^2-2\times6=4$

005 답 ②

$x^2+2x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-3t=0$, $t(t-3)=0$ $\quad\therefore\ t=0$ 또는 $t=3$

(i) $t=0$일 때

$x^2+2x=0$에서 $x(x+2)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=0$

(ii) $t=3$일 때

$x^2+2x=3$에서 $x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$ $\quad\therefore\ x=-3$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에 의하여 $\alpha=1$, $\beta=-3$이므로

$\alpha+\beta=-2$

006 답 ⑤

$(x^2-2x)^2=2x^2-4x+8$에서

$(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-8=0$

$x^2-2x=t$로 놓으면

$t^2-2t-8=0$, $(t+2)(t-4)=0$

$\therefore\ t=-2$ 또는 $t=4$

(i) $t=-2$일 때

$x^2-2x=-2$에서 $x^2-2x+2=0$

$\therefore\ x=1\pm i$

(ii) $t=4$일 때

$x^2-2x=4$에서 $x^2-2x-4=0$

$\therefore\ x=1\pm\sqrt{5}$

(i), (ii)에 의하여 방정식의 모든 실근의 합은

$(1-\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})=2$

007 답 ③

$(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)-14=0$에서

$\{(x-1)(x+3)\}\{(x-2)(x+4)\}-14=0$

$(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)-14=0$

$x^2+2x=t$로 놓으면

$(t-3)(t-8)-14=0$, $t^2-11t+10=0$

$(t-1)(t-10)=0$ $\quad\therefore\ t=1$ 또는 $t=10$

(i) $t=1$일 때

$x^2+2x=1$에서 $x^2+2x-1=0$

이차방정식 $x^2+2x-1=0$의 두 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 -1이다.

(ii) $t=10$일 때

$x^2+2x=10$에서 $x^2+2x-10=0$

이차방정식 $x^2+2x-10=0$의 두 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 -10이다.

(i), (ii)에 의하여 방정식의 모든 근의 곱은

$-1\times(-10)=10$

008 답 ①

$x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2+3t-18=0$, $(t+6)(t-3)=0$

$\therefore\ t=-6$ 또는 $t=3$

즉, $x^2=-6$ 또는 $x^2=3$이므로

$x=\pm\sqrt{6}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

따라서 방정식의 모든 실근의 곱은

$-\sqrt{3}\times\sqrt{3}=-3$

009 답 ②

$x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-10t+9=0$, $(t-1)(t-9)=0$

$\therefore$ $t=1$ 또는 $t=9$

즉, $x^2=1$ 또는 $x^2=9$이므로

$x=\pm1$ 또는 $x=\pm3$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=-1$, $\gamma=1$, $\delta=3$이므로

$\alpha\beta+\gamma\delta=-3\times(-1)+1\times3=6$

010 답 ③

$x^4-3x^2+1=0$에서 $(x^4-2x^2+1)-x^2=0$

$(x^2-1)^2-x^2=0$, $(x^2+x-1)(x^2-x-1)=0$

$\therefore$ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

따라서 방정식의 모든 양의 근의 합은

$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$

011 답 ①

$x^4+2x^2+9=0$에서 $(x^4+6x^2+9)-4x^2=0$

$(x^2+3)^2-(2x)^2=0$, $(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)=0$

이때 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 근을 α, β, 이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 두 근을 γ, δ라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$, $\gamma+\delta=2$, $\gamma\delta=3$

$$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}=\frac{-2}{3}+\frac{2}{3}=0$$

012 답 ②

$x\neq0$이므로 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+5x+6+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+6=0$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+4=0$

$x+\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 $t^2+5t+4=0$

$(t+4)(t+1)=0$ $\quad\therefore$ $t=-4$ 또는 $t=-1$

(i) $t=-4$일 때

$x+\dfrac{1}{x}=-4$에서 $x^2+4x+1=0$

$\therefore$ $x=-2\pm\sqrt{3}$

(ii) $t=-1$일 때

$x+\dfrac{1}{x}=-1$에서 $x^2+x+1=0$

$\therefore$ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에 의하여 방정식의 모든 실근의 합은

$(-2-\sqrt{3})+(-2+\sqrt{3})=-4$

013 답 ②

$x\neq0$이므로 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-3x-2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2=0$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-4=0$

$x+\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면

$t^2-3t-4=0$, $(t+1)(t-4)=0$

$\therefore$ $t=-1$ 또는 $t=4$

(i) $t=-1$일 때

$x+\dfrac{1}{x}=-1$에서 $x^2+x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라고 하면

$D_1=1^2-4\times1\times1=-3<0$

즉, 방정식 $x^2+x+1=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $t=4$일 때

$x+\dfrac{1}{x}=4$에서 $x^2-4x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라고 하면

$\dfrac{D_2}{4}=(-2)^2-1\times1=3>0$

즉, 방정식 $x^2-4x+1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에 의하여 α는 방정식 $x^2-4x+1=0$의 근이므로

$\alpha^2-4\alpha+1=0$

$\alpha\neq0$이므로 양변을 α로 나누면

$\alpha-4+\dfrac{1}{\alpha}=0$ $\quad\therefore$ $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=4$

014 답 ④

주어진 방정식의 한 근이 1이므로 $x=1$을 대입하면

$1+k+3+1=0$ $\quad\therefore$ $k=-5$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$x^3-5x^2+3x+1=0$

$f(x)=x^3-5x^2+3x+1$이라고 할 때, $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -5 & 3 & 1 \\ & & 1 & -4 & -1 \\ \hline & 1 & -4 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-4x-1)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2-4x-1)=0$

이때 1이 아닌 나머지 두 근은 이차방정식 $x^2-4x-1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 4이다.

015 답 1

주어진 방정식의 두 근이 -2, 3이므로 $x=-2$, $x=3$을 각각 대입하면

$-8+4a-2(2a-b)+6b=0$, $27+9a+3(2a-b)+6b=0$

$\therefore$ $b=1$, $5a+b=-9$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=1$

이를 주어진 방정식에 대입하면 $x^3-2x^2-5x+6=0$

$f(x)=x^3-2x^2-5x+6$이라고 할 때, $f(-2)=0$, $f(3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & -2 & 8 & -6 \\ \hline 3 & 1 & -4 & 3 & \boxed{0} \\ & & 3 & -3 & \\ \hline & 1 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x+2)(x-3)(x-1)$
즉, 주어진 방정식은
$(x+2)(x-3)(x-1)=0$
따라서 방정식의 나머지 한 근은 1이다.

016 답 ①

주어진 방정식의 두 근이 -1, 2이므로 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면
$2+a+b-3+a+4=0$, $32-8a+4b+6+a+4=0$
$\therefore 2a+b=-3$, $7a-4b=42$
두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-7$
이를 주어진 방정식에 대입하면
$2x^4-2x^3-7x^2+3x+6=0$
$f(x)=2x^4-2x^3-7x^2+3x+6$이라고 할 때, $f(-1)=0$, $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 2 & -2 & -7 & 3 & 6 \\ & & -2 & 4 & 3 & -6 \\ \hline 2 & 2 & -4 & -3 & 6 & \boxed{0} \\ & & 4 & 0 & -6 & \\ \hline & 2 & 0 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x-2)(2x^2-3)$
즉, 주어진 방정식은 $(x+1)(x-2)(2x^2-3)=0$
따라서 주어진 방정식의 나머지 두 근은 방정식 $2x^2-3=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 $-\frac{3}{2}$이다.

017 답 ④

-1, 1이 주어진 방정식의 근이므로 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면
$1-a-7-1+b=0$, $1+a-7+1+b=0$
$\therefore a-b=-7$, $a+b=5$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=6$
이를 주어진 방정식에 대입하면
$x^4-x^3-7x^2+x+6=0$
$f(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$이라고 할 때, $f(1)=0$, $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\ & & 1 & 0 & -7 & -6 \\ \hline -1 & 1 & 0 & -7 & -6 & \boxed{0} \\ & & -1 & 1 & 6 & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x+1)(x^2-x-6)$
$\quad=(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)$
즉, 주어진 방정식은
$(x+1)(x-1)(x+2)(x-3)=0$
이때 -1, 1이 아닌 나머지 두 근은 -2, 3이므로 $\alpha\beta=-6$
$\therefore \frac{\alpha\beta}{ab}=\frac{-6}{-1\times6}=1$

018 답 ③

1이 주어진 방정식의 근이므로 $x=1$을 대입하면
$1+k+2+k^2-4-5=0$
$k^2+k-6=0$, $(k+3)(k-2)=0$
$\therefore k=-3$ 또는 $k=2$
(i) $k=-3$일 때
주어진 방정식에 대입하면 $x^3-x^2+5x-5=0$
$f(x)=x^3-x^2+5x-5$라고 할 때, $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & 5 & -5 \\ & & 1 & 0 & 5 \\ \hline & 1 & 0 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+5)$
즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2+5)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=\pm\sqrt{5}i$
따라서 실근 1개와 허근 2개를 가지므로 조건을 만족하지 않는다.
(ii) $k=2$일 때
주어진 방정식에 대입하면 $x^3+4x^2-5=0$
$g(x)=x^3+4x^2-5$라고 할 때, $g(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $g(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 4 & 0 & -5 \\ & & 1 & 5 & 5 \\ \hline & 1 & 5 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

$g(x)=(x-1)(x^2+5x+5)$
즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2+5x+5)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$
따라서 세 실근을 갖는다.
(i), (ii)에 의하여
$k=2$, $\alpha+\beta=\frac{-5-\sqrt{5}}{2}+\frac{-5+\sqrt{5}}{2}=-5$
$\therefore 2k+\alpha+\beta=4+(-5)=-1$

019 답 ①

$f(x)=x^3-x^2-(k+2)x+2k$라고 할 때, $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -1 & -k-2 & 2k \\ & & 2 & 2 & -2k \\ \hline & 1 & 1 & -k & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2+x-k)$
즉, 주어진 방정식은 $(x-2)(x^2+x-k)=0$
이 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+x-k=0$이 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$D=1^2-4\times1\times(-k)=1+4k<0$
$\therefore k<-\frac{1}{4}$

020 답 ①

$f(x)=x^3+(k+1)x^2+2kx+k^2$ 이라고 할 때, $f(-k)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -k & 1 & k+1 & 2k & k^2 \\ & & -k & -k & -k^2 \\ \hline & 1 & 1 & k & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+k)(x^2+x+k)$

즉, 주어진 방정식은 $(x+k)(x^2+x+k)=0$

이 방정식이 중근을 가지려면 이차방정식 $x^2+x+k=0$이 중근을 갖거나 $x=-k$를 근으로 가져야 한다.

(i) 방정식 $x^2+x+k=0$이 중근을 가질 때

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=1^2-4\times1\times k=1-4k=0 \qquad \therefore k=\frac{1}{4}$

(ii) 방정식 $x^2+x+k=0$이 $x=-k$를 근으로 가질 때

$k^2-k+k=0,\ k^2=0 \qquad \therefore k=0$

(i), (ii)에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은

$\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$

021 답 ⑤

$f(x)=x^3-4x^2+(4-k)x+2k$라 고 할 때, $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & 4-k & 2k \\ & & 2 & -4 & -2k \\ \hline & 1 & -2 & -k & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2-2x-k)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-2)(x^2-2x-k)=0$

이 방정식의 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식 $x^2-2x-k=0$이 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times(-k)=1+k\geq0 \qquad \therefore k\geq-1$

따라서 실수 k의 최솟값은 -1이다.

022 답 ②

$f(x)=x^3-(k+1)x+k$라고 할 때, $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -k-1 & k \\ & & 1 & 1 & -k \\ \hline & 1 & 1 & -k & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+x-k)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2+x-k)=0$

이 방정식의 서로 다른 실근이 한 개가 되려면 이차방정식 $x^2+x-k=0$이 허근을 갖거나 $x=1$을 중근으로 가져야 한다.

(i) 방정식 $x^2+x-k=0$이 허근을 가질 때

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=1^2-4\times1\times(-k)=1+4k<0 \qquad \therefore k<-\frac{1}{4}$

(ii) 방정식 $x^2+x-k=0$이 $x=1$을 중근으로 가질 때

$1+1-k=0 \qquad \therefore k=2$

즉, $x^2+x-2=0$이므로

$(x+2)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 중근으로 갖는다는 조건을 만족하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $k<-\frac{1}{4}$

따라서 정수 k의 최댓값은 -1이다.

023 답 ①

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3,\ \alpha\beta\gamma=-4$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=(-2)^2-2\times3=-2$

024 답 2

-3이 주어진 방정식의 근이므로 $x=-3$을 대입하면

$-27+3a+6=0 \qquad \therefore a=7$

따라서 $x^3-7x+6=0$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-3\times\alpha\times\beta=-6 \qquad \therefore \alpha\beta=2$

025 답 ②

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-6,\ \alpha\beta\gamma=-3$

$$\therefore \frac{\beta+\gamma}{\alpha^2}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta^2}+\frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}=\frac{-\alpha}{\alpha^2}+\frac{-\beta}{\beta^2}+\frac{-\gamma}{\gamma^2}$$

$$=-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}$$

$$=-\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$$

$$=-\frac{-6}{-3}=-2$$

026 답 ③

이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 두 근을 α, β라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=a$ ...... ㉠

이때 α, β가 삼차방정식 $x^3-3x^2+bx+2=0$의 근이므로 나머지 한 근을 γ라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b,\ \alpha\beta\gamma=-2$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$\alpha+\beta+\gamma=2+\gamma=3 \qquad \therefore \gamma=1$

$\alpha\beta\gamma=a\gamma=-2 \qquad \therefore a=-2$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\alpha\beta+\gamma(\alpha+\beta)=a+2=b \qquad \therefore b=0$

$\therefore a-b=-2$

027 답 ③

주어진 삼차방정식의 세 근을 $\alpha-1$, α, $\alpha+1$이라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha-1)+\alpha+(\alpha+1)=6 \qquad \therefore \alpha=2$

따라서 세 근이 1, 2, 3이므로

$1\times2+2\times3+3\times1=a,\ 1\times2\times3=-b$

$\therefore a=11,\ b=-6$

$\therefore a+b=5$

028 답 ①

주어진 삼차방정식의 세 근을 α, 2α, $3\alpha\,(\alpha\neq0)$라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha+3\alpha=3 \qquad \therefore\ \alpha=\frac{1}{2}$

따라서 세 근이 $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times1+1\times\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=a$, $\frac{1}{2}\times1\times\frac{3}{2}=-b$

$\therefore\ a=\frac{11}{4}$, $b=-\frac{3}{4}$

$\therefore\ a+b=2$

029 답 $x^3-2x^2+x-1=0$

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=1$

구하는 삼차방정식의 세 근이 $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$이므로

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$

$$\begin{aligned}\alpha\beta\times\beta\gamma+\beta\gamma\times\gamma\alpha+\gamma\alpha\times\alpha\beta&=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\\&=1\times1=1\end{aligned}$$

$\alpha\beta\times\beta\gamma\times\gamma\alpha=(\alpha\beta\gamma)^2=1^2=1$

따라서 구하는 방정식은

$x^3-2x^2+x-1=0$

030 답 ④

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-4$, $\alpha\beta\gamma=2$

$$\begin{aligned}\therefore\ \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2&=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2(\alpha\beta^2\gamma+\beta\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2\beta)\\&=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\\&=(-4)^2-2\times2\times3=4\end{aligned}$$

따라서 구하는 일차항의 계수는 4이다.

031 답 ①

삼차방정식 $x^3-7x+3=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-7$, $\alpha\beta\gamma=-3$

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+9=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=-\frac{b}{a}$ ...... ㉠

$(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)=\frac{c}{a}$ ...... ㉡

$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=-\frac{9}{a}$ ...... ㉢

㉢에서 $\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1=-\frac{9}{a}$

$-3+(-7)+1=-\frac{9}{a} \qquad \therefore\ a=1$

㉠에서 $(\alpha+\beta+\gamma)+3=-\frac{b}{a}$

$3=-b \qquad \therefore\ b=-3$

㉡에서 $(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2(\alpha+\beta+\gamma)+3=\frac{c}{a}$

$-7+3=c \qquad \therefore\ c=-4$

$\therefore\ a+b+c=-6$

032 답 ④

주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 $1-\sqrt{2}$도 근이다. 나머지 한 근을 α라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})+\alpha=a+2$

$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\alpha+\alpha(1+\sqrt{2})=b$

$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})\alpha=-4$

세 식을 연립하여 풀면 $\alpha=4$, $a=4$, $b=7$

$\therefore\ a+b=11$

033 답 ①

주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 한 근이 $1+2i$이면 $1-2i$도 근이다. 나머지 한 근을 α라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+2i)(1-2i)\alpha=-10 \qquad \therefore\ \alpha=-2$

따라서 구하는 실근은 -2이다.

034 답 ③

주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 한 근이 $3+\sqrt{3}$이면 $3-\sqrt{3}$도 근이다.

따라서 세 근이 1, $3+\sqrt{3}$, $3-\sqrt{3}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+(3+\sqrt{3})+(3-\sqrt{3})=-a$

$1\times(3+\sqrt{3})+(3+\sqrt{3})\times(3-\sqrt{3})+(3-\sqrt{3})\times1=b$

$1\times(3+\sqrt{3})\times(3-\sqrt{3})=-c$

$\therefore\ a=-7$, $b=12$, $c=-6$

$\therefore\ \frac{ab}{c}=\frac{-7\times12}{-6}=14$

035 답 -21

주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 한 근이 $-1+\sqrt{3}i$이면 $-1-\sqrt{3}i$도 근이다. 나머지 한 근이 c이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1+\sqrt{3}i)+(-1-\sqrt{3}i)+c=3$

$(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)+(-1-\sqrt{3}i)c+c(-1+\sqrt{3}i)=a$

$(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)c=-b$

세 식을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=-20$, $c=5$

$\therefore\ a+b+c=-21$

036 답 ②

$x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$

이때 ω는 방정식 $x^2-x+1=0$의 근이므로

$\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

$$\begin{aligned}\therefore\ \omega^{1000}+\frac{1}{\omega^{1000}}&=(\omega^3)^{333}\times\omega+\frac{1}{(\omega^3)^{333}\times\omega}\\&=-\omega-\frac{1}{\omega}=-\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)\\&=-\frac{\omega^2+1}{\omega}=-\frac{\omega}{\omega}=-1\end{aligned}$$

037 답 ①

$x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

이때 ω는 방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$

따라서 $\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$이므로

$\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^4+\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^3+\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^2+\omega+\frac{1}{\omega}$

$=(-1)^4+(-1)^3+(-1)^2+(-1)=0$

038 답 1

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+1=0$

양변에 $\omega-1$을 곱하면

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0,\ \omega^3-1=0\qquad \therefore\ \omega^3=1$

$\therefore\ 1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{120}$

$=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\cdots+\omega^{117}(1+\omega+\omega^2)+\omega^{120}$

$=0+0+\cdots+(\omega^3)^{40}$

$=1$

039 답 ②

$x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$

이때 ω는 방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로 $\overline{\omega}$도 이 방정식의 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$\therefore\ \frac{1}{\omega-1}+\frac{1}{\overline{\omega}-1}=\frac{\overline{\omega}-1+\omega-1}{(\omega-1)(\overline{\omega}-1)}=\frac{(\omega+\overline{\omega})-2}{\omega\overline{\omega}-(\omega+\overline{\omega})+1}$

$=\frac{1-2}{1-1+1}=-1$

040 답 ②

$x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

이때 ω는 방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$

또 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\overline{\omega}$도 이 방정식의 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$

ㄱ. $\omega\overline{\omega}=1$ (참)

ㄴ. $\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega^2=-\omega-1$

$\omega+\overline{\omega}=-1$에서 $\overline{\omega}=-\omega-1$

$\therefore\ \omega^2=\overline{\omega}$ (참)

ㄷ. $\frac{1}{\omega+1}+\frac{1}{\omega^2+1}+\frac{1}{\omega^3+1}=\frac{1}{-\omega^2}+\frac{1}{-\omega}+\frac{1}{1+1}$

$=-\frac{1+\omega}{\omega^2}+\frac{1}{2}=-\frac{-\omega^2}{\omega^2}+\frac{1}{2}$

$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ (거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

041 답 64

처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x라고 하면

$(x-1)(x+2)^2=108$

$x^3+3x^2-112=0$

$f(x)=x^3+3x^2-112$라고 할 때, $f(4)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

4	1	3	0	-112
		4	28	112
	1	7	28	0

$f(x)=(x-4)(x^2+7x+28)$

즉, 주어진 방정식은

$(x-4)(x^2+7x+28)=0$

$\therefore\ x=4$ 또는 $x=\frac{-7\pm3\sqrt{7}i}{2}$

그런데 $x>1$이므로 $x=4$

따라서 처음 정육면체의 부피는

$4^3=64$

042 답 ③

직육면체의 세 모서리의 길이를 각각 a cm, b cm, c cm라고 하면

$4(a+b+c)=32\qquad \therefore\ a+b+c=8$

$2(ab+bc+ca)=34\qquad \therefore\ ab+bc+ca=17$

$abc=10$

이때 $a,\ b,\ c$를 세 근으로 하는 x에 대한 삼차방정식은

$x^3-8x^2+17x-10=0$

$f(x)=x^3-8x^2+17x-10$이라고 할 때, $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	-8	17	-10
		1	-7	10
	1	-7	10	0

$f(x)=(x-1)(x^2-7x+10)$

$=(x-1)(x-2)(x-5)$

즉, $(x-1)(x-2)(x-5)=0$이므로

$x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=5$

따라서 세 모서리의 길이는 1 cm, 2 cm, 5 cm이므로 가장 긴 모서리의 길이와 가장 짧은 모서리의 길이의 차는

$5-1=4$ (cm)

043 답 ②

원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x라고 하면 원기둥의 높이는 $4-x$이므로

$\frac{2}{3}\pi x^3+\pi x^2(4-x)=\frac{40\pi}{3}$

$x^3-12x^2+40=0$

$f(x)=x^3-12x^2+40$이라고 할 때, $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

2	1	-12	0	40
		2	-20	-40
	1	-10	-20	0

$f(x)=(x-2)(x^2-10x-20)$

즉, $(x-2)(x^2-10x-20)=0$이므로

$\therefore\ x=2$ 또는 $x=5\pm3\sqrt{5}$

그런데 $0<x<4$이므로 $x=2$

따라서 구하는 반지름의 길이는 2이다.

핵심 유형 104~105쪽

유형 12 답 ②

$x-y=1$에서 $y=x-1$ ⋯⋯ ㉠

이를 $x^2+y^2=25$에 대입하면

$x^2+(x-1)^2=25$, $x^2-x-12=0$

$(x+3)(x-4)=0$ ∴ $x=-3$ 또는 $x=4$

이를 각각 ㉠에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=-3$, $y=-4$ 또는 $x=4$, $y=3$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=-4$ 또는 $\alpha=4$, $\beta=3$이므로

$\alpha\beta=12$

유형 13 답 ④

$2x^2-3xy+y^2=0$에서

$(x-y)(2x-y)=0$ ∴ $y=x$ 또는 $y=2x$

(i) $y=x$를 $5x^2-y^2=9$에 대입하면

$5x^2-x^2=9$, $4x^2=9$

∴ $x=\pm\frac{3}{2}$

∴ $x=-\frac{3}{2}$일 때 $y=-\frac{3}{2}$, $x=\frac{3}{2}$일 때 $y=\frac{3}{2}$

(ii) $y=2x$를 $5x^2-y^2=9$에 대입하면

$5x^2-4x^2=9$, $x^2=9$

∴ $x=\pm3$

∴ $x=-3$일 때 $y=-6$, $x=3$일 때 $y=6$

(i), (ii)에 의하여 자연수 x, y는 $x=3$, $y=6$이므로

$x+y=9$

유형 14 답 ④

주어진 연립방정식을 변형하면

$$\begin{cases}(x+y)^2-2xy=10\\ xy=3\end{cases}$$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

$$\begin{cases}u^2-2v=10 & \cdots\cdots \text{㉠}\\ v=3 & \cdots\cdots \text{㉡}\end{cases}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$u^2-6=10$, $u^2=16$ ∴ $u=\pm4$

(i) $u=-4$, $v=3$, 즉 $x+y=-4$, $xy=3$일 때

x, y를 두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식은

$t^2+4t+3=0$, $(t+3)(t+1)=0$

∴ $t=-3$ 또는 $t=-1$

∴ $x=-3$, $y=-1$ 또는 $x=-1$, $y=-3$

(ii) $u=4$, $v=3$, 즉 $x+y=4$, $xy=3$일 때

x, y를 두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식은

$t^2-4t+3=0$, $(t-1)(t-3)=0$

∴ $t=1$ 또는 $t=3$

∴ $x=1$, $y=3$ 또는 $x=3$, $y=1$

(i), (ii)에 의하여 $2x+y$의 최댓값은

$2\times3+1=7$

유형 15 답 5

$2x-y=a$에서 $y=2x-a$이므로 이를 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$x^2+(2x-a)^2=5$, $5x^2-4ax+a^2-5=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2a)^2-5\times(a^2-5)=-a^2+25=0$

$a^2=25$ ∴ $a=\pm5$

그런데 $a>0$이므로 $a=5$

유형 16 답 18

처음 땅의 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y라고 하면

$$\begin{cases}x^2+y^2=(3\sqrt{5})^2 & \cdots\cdots \text{㉠}\\ (x-1)(y+1)=xy+2 & \cdots\cdots \text{㉡}\end{cases}$$

㉡에서 $xy+x-y-1=xy+2$

∴ $y=x-3$

이를 ㉠에 대입하면

$x^2+(x-3)^2=45$, $x^2-3x-18=0$

$(x+3)(x-6)=0$ ∴ $x=-3$ 또는 $x=6$

그런데 $1<x<3\sqrt{5}$이므로 $x=6$, $y=3$

따라서 처음 땅의 넓이는 $6\times3=18$

유형 17 답 $(-2, 2)$, $(2, -2)$, $(4, 8)$, $(8, 4)$

$xy-3x-3y+4=0$에서

$x(y-3)-3(y-3)-5=0$

∴ $(x-3)(y-3)=5$

(i) $x-3=-5$, $y-3=-1$일 때, $x=-2$, $y=2$

(ii) $x-3=-1$, $y-3=-5$일 때, $x=2$, $y=-2$

(iii) $x-3=1$, $y-3=5$일 때, $x=4$, $y=8$

(iv) $x-3=5$, $y-3=1$일 때, $x=8$, $y=4$

따라서 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(-2, 2)$, $(2, -2)$, $(4, 8)$, $(8, 4)$이다.

유형 18 답 ②

[방법 1] $x^2+y^2-4x-2y+5=0$에서

$(x^2-4x+4)+(y^2-2y+1)=0$

$(x-2)^2+(y-1)^2=0$

x, y가 실수이므로

$x-2=0$, $y-1=0$ ∴ $x=2$, $y=1$

∴ $xy=2$

[방법 2] 방정식의 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-4x+y^2-2y+5=0$ ⋯⋯ ㉠

x가 실수이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times(y^2-2y+5)=-y^2+2y-1\geq0$

∴ $(y-1)^2\leq0$

이때 y도 실수이므로 $y-1=0$ ∴ $y=1$

이를 ㉠에 대입하면

$x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$ ∴ $x=2$

∴ $xy=2$

044 답 ②

$2x+y=1$에서 $y=-2x+1$ ...... ㉠

이를 $x^2+y^2=13$에 대입하면

$x^2+(-2x+1)^2=13$, $5x^2-4x-12=0$

$(5x+6)(x-2)=0$ $\therefore$ $x=-\frac{6}{5}$ 또는 $x=2$

이를 각각 ㉠에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=-\frac{6}{5}$, $y=\frac{17}{5}$ 또는 $x=2$, $y=-3$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=-3$이므로 $\alpha+\beta=-1$

045 답 3

$x+2y=5$에서 $x=-2y+5$ ...... ㉠

이를 $2x^2+y^2=19$에 대입하면

$2(-2y+5)^2+y^2=19$, $9y^2-40y+31=0$

$(y-1)(9y-31)=0$ $\therefore$ $y=1$ 또는 $y=\frac{31}{9}$

이를 각각 ㉠에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=3$, $y=1$ 또는 $x=-\frac{17}{9}$, $y=\frac{31}{9}$

그런데 $\alpha\beta>0$이므로 $\alpha=3$, $\beta=1$

$\therefore$ $\alpha\beta=3$

046 답 $2\sqrt{2}$

$x-y=2$에서 $y=x-2$ ...... ㉠

이를 $x^2+4xy+y^2=10$에 대입하면

$x^2+4x(x-2)+(x-2)^2=10$

$x^2-2x-1=0$ $\therefore$ $x=1\pm\sqrt{2}$

이를 각각 ㉠에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=1-\sqrt{2}$, $y=-1-\sqrt{2}$ 또는 $x=1+\sqrt{2}$, $y=-1+\sqrt{2}$

$\therefore$ $|x+y|=2\sqrt{2}$

047 답 ④

두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x^2-y^2=-45 \end{cases}$의 해와 같다.

$2x+y=3$에서 $y=-2x+3$ ...... ㉠

이를 $x^2-y^2=-45$에 대입하면

$x^2-(-2x+3)^2=-45$, $x^2-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0$ $\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=6$

이를 각각 ㉠에 대입하면 위의 연립방정식의 해는

$x=-2$, $y=7$ 또는 $x=6$, $y=-9$

(i) $x=-2$, $y=7$을 $ax^2-y^2=-1$, $x+y=b$에 각각 대입하면

$4a-49=-1$, $-2+7=b$ $\therefore$ $a=12$, $b=5$

(ii) $x=6$, $y=-9$를 $ax^2-y^2=-1$, $x+y=b$에 각각 대입하면

$36a-81=-1$, $6-9=b$ $\therefore$ $a=\frac{20}{9}$, $b=-3$

(i), (ii)에 의하여 $a=12$, $b=5$이므로 $a+b=17$

048 답 -8

$x^2+xy-2y^2=0$에서

$(x+2y)(x-y)=0$ $\therefore$ $x=-2y$ 또는 $x=y$

(i) $x=-2y$를 $x^2+y^2=20$에 대입하면

$4y^2+y^2=20$, $y^2=4$ $\therefore$ $y=\pm2$

$\therefore$ $y=-2$일 때 $x=4$, $y=2$일 때 $x=-4$

(ii) $x=y$를 $x^2+y^2=20$에 대입하면

$y^2+y^2=20$, $y^2=10$ $\therefore$ $y=\pm\sqrt{10}$

$\therefore$ $y=-\sqrt{10}$일 때 $x=-\sqrt{10}$, $y=\sqrt{10}$일 때 $x=\sqrt{10}$

(i), (ii)에 의하여 정수 x, y는 $x=4$, $y=-2$ 또는 $x=-4$, $y=2$이므로

$xy=-8$

049 답 ③

$x^2-y^2=0$에서

$(x+y)(x-y)=0$ $\therefore$ $y=-x$ 또는 $y=x$

(i) $y=-x$를 $x^2-xy+y^2=12$에 대입하면

$x^2+x^2+x^2=12$, $x^2=4$ $\therefore$ $x=\pm2$

$\therefore$ $x=-2$일 때 $y=2$, $x=2$일 때 $y=-2$

(ii) $y=x$를 $x^2-xy+y^2=12$에 대입하면

$x^2-x^2+x^2=12$, $x^2=12$ $\therefore$ $x=\pm2\sqrt{3}$

$\therefore$ $x=-2\sqrt{3}$일 때 $y=-2\sqrt{3}$, $x=2\sqrt{3}$일 때 $y=2\sqrt{3}$

(i), (ii)에 의하여 α의 최댓값은 $2\sqrt{3}$이므로 그때의 β의 값은 $2\sqrt{3}$이다.

050 답 ③

$x^2-xy-2y^2=0$에서

$(x+y)(x-2y)=0$ $\therefore$ $x=-y$ 또는 $x=2y$

이때 x, y가 모두 양수이려면 $x=2y$

이를 $x^2+2xy-y^2=28$에 대입하면

$4y^2+4y^2-y^2=28$, $y^2=4$ $\therefore$ $y=\pm2$

그런데 x, y는 양수이므로 $x=4$, $y=2$

$\therefore$ $x+y=6$

051 답 $(-2, 2)$, $(2, -2)$

주어진 연립방정식을 변형하면

$\begin{cases} (x+y)^2-2xy=8 \\ xy=-4 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

$\begin{cases} u^2-2v=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ v=-4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면 $u^2+8=8$, $u^2=0$ $\therefore$ $u=0$

즉, $x+y=0$, $xy=-4$이므로 x, y를 두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식은

$t^2-4=0$, $t^2=4$ $\therefore$ $t=\pm2$

$\therefore$ $x=-2$, $y=2$ 또는 $x=2$, $y=-2$

따라서 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(-2, 2)$, $(2, -2)$이다.

052 답 11

주어진 연립방정식은 $\begin{cases} xy+(x+y)=11 \\ xy(x+y)=30 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

$\begin{cases} u+v=11 & \cdots\cdots ㉠ \\ uv=30 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $v=-u+11$을 ㉡에 대입하면

$u(-u+11)=30$, $u^2-11u+30=0$

$(u-5)(u-6)=0$ $\therefore u=5$ 또는 $u=6$

이를 각각 ㉠에 대입하면 $u=5$, $v=6$ 또는 $u=6$, $v=5$

(i) $u=5$, $v=6$, 즉 $x+y=5$, $xy=6$일 때

x, y를 두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식은

$t^2-5t+6=0$, $(t-2)(t-3)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=3$

$\therefore x=2$, $y=3$ 또는 $x=3$, $y=2$

(ii) $u=6$, $v=5$, 즉 $x+y=6$, $xy=5$일 때

x, y를 두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식은

$t^2-6t+5=0$, $(t-1)(t-5)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=5$

$\therefore x=1$, $y=5$ 또는 $x=5$, $y=1$

(i), (ii)에 의하여 $x+2y$의 최댓값은 $1+2\times5=11$

053 답 3

$x+y=a$에서 $y=-x+a$이므로 이를 $x^2-2xy=-3$에 대입하면

$x^2-2x(-x+a)=-3$, $3x^2-2ax+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-3\times3=a^2-9=0$

$a^2=9$ $\therefore a=\pm3$

그런데 $a>0$이므로 $a=3$

054 답 1

$x-y=2a$에서 $y=x-2a$이므로 이를 $2x^2-xy=-a^2-a+1$에 대입하면

$2x^2-x(x-2a)=-a^2-a+1$

$x^2+2ax+a^2+a-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-1\times(a^2+a-1)=-a+1\geq0$ $\therefore a\leq1$

따라서 자연수 a의 값은 1이다.

055 답 ③

주어진 연립방정식에서 $x+y=3$, $xy=a-3$이므로 x, y를 두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식은

$t^2-3t+a-3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(-3)^2-4\times1\times(a-3)=-4a+21\geq0$ $\therefore a\leq\frac{21}{4}$

따라서 정수 a의 최댓값은 5이다.

056 답 ④

연립방정식을 세우면

$\begin{cases} 2a^2+b^2=102 \\ 8a+4b=64 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} 2a^2+b^2=102 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2a+b=16 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $b=-2a+16$을 ㉠에 대입하면

$2a^2+(-2a+16)^2=102$, $3a^2-32a+77=0$

$(3a-11)(a-7)=0$ $\therefore a=\frac{11}{3}$ 또는 $a=7$

이를 각각 ㉡에 대입하여 풀면 연립방정식의 해는

$a=\frac{11}{3}$, $b=\frac{26}{3}$ 또는 $a=7$, $b=2$

그런데 $a>b$이므로 $a=7$, $b=2$

$\therefore a+b=9$

057 답 ③

두 원의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라고 하면

$\begin{cases} 2\pi r_1+2\pi r_2=12\pi \\ \pi r_1^2+\pi r_2^2=26\pi \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} r_1+r_2=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ r_1^2+r_2^2=26 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $r_2=-r_1+6$을 ㉡에 대입하면

$r_1^2+(-r_1+6)^2=26$, $r_1^2-6r_1+5=0$

$(r_1-1)(r_1-5)=0$ $\therefore r_1=1$ 또는 $r_1=5$

이를 각각 ㉠에 대입하여 풀면 연립방정식의 해는

$r_1=1$, $r_2=5$ 또는 $r_1=5$, $r_2=1$

따라서 두 원 중 큰 원의 반지름의 길이는 5이다.

058 답 ②

직각삼각형의 빗변이 아닌 두 변의 길이를 각각 x cm, y cm라고 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=10^2 \\ \frac{1}{2}xy=24 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ xy=48 \end{cases}$

이 연립방정식을 변형하면 $\begin{cases} (x+y)^2-2xy=100 \\ xy=48 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

$\begin{cases} u^2-2v=100 & \cdots\cdots ㉠ \\ v=48 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면

$u^2-96=100$, $u^2=196$ $\therefore u=\pm14$

이때 $x+y>0$이므로 $u=14$

따라서 빗변이 아닌 두 변의 길이의 합은 14 cm이다.

059 답 ④

$xy-x-y-1=0$에서

$x(y-1)-(y-1)-2=0$ $\therefore (x-1)(y-1)=2$

(i) $x-1=-2$, $y-1=-1$일 때, $x=-1$, $y=0$

(ii) $x-1=-1$, $y-1=-2$일 때, $x=0$, $y=-1$

(iii) $x-1=1$, $y-1=2$일 때, $x=2$, $y=3$

(iv) $x-1=2$, $y-1=1$일 때, $x=3$, $y=2$

따라서 xy의 최댓값은 $2\times3=6$

060 답 ②

$x^2-xy+y+3=0$에서 $xy-y-x^2-3=0$

$y(x-1)-(x-1)(x+1)=4$ $\quad\therefore (x-1)(y-x-1)=4$

x, y가 자연수이므로 $x-1\geq 0$

(i) $x-1=1$, $y-x-1=4$일 때, $x=2$, $y=7$

(ii) $x-1=2$, $y-x-1=2$일 때, $x=3$, $y=6$

(iii) $x-1=4$, $y-x-1=1$일 때, $x=5$, $y=7$

따라서 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(2, 7)$, $(3, 6)$, $(5, 7)$의 3개이다.

061 답 ④

이차방정식 $x^2-2mx+2m+4=0$의 두 근을 α, $\beta(\alpha\geq\beta)$라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2m$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠, $\quad\alpha\beta=2m+4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\alpha\beta=\alpha+\beta+4$, $\alpha\beta-\alpha-\beta-4=0$

$\alpha(\beta-1)-(\beta-1)-5=0$ $\quad\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=5$

(i) $\alpha-1=-1$, $\beta-1=-5$일 때, $\alpha=0$, $\beta=-4$

$\quad\therefore m=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=-2$

(ii) $\alpha-1=5$, $\beta-1=1$일 때, $\alpha=6$, $\beta=2$

$\quad\therefore m=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=4$

(i), (ii)에 의하여 자연수 m의 값은 4이다.

062 답 ①

[방법 1] $x^2+y^2+2x+6y+10=0$에서

$(x^2+2x+1)+(y^2+6y+9)=0$, $(x+1)^2+(y+3)^2=0$

x, y가 실수이므로

$x+1=0$, $y+3=0$ $\quad\therefore x=-1$, $y=-3$

$\therefore x+y=-4$

[방법 2] 방정식의 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+2x+y^2+6y+10=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

x가 실수이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=1^2-1\times(y^2+6y+10)=-y^2-6y-9\geq 0$

$\therefore (y+3)^2\leq 0$

이때 y도 실수이므로 $y+3=0$ $\quad\therefore y=-3$

이를 ㉠에 대입하면

$x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$ $\quad\therefore x=-1$

$\therefore x+y=-4$

063 답 ③

$5x^2-4xy+y^2-2x+1=0$에서

$(4x^2-4xy+y^2)+(x^2-2x+1)=0$, $(2x-y)^2+(x-1)^2=0$

x, y가 실수이므로

$2x-y=0$, $x-1=0$ $\quad\therefore x=1$, $y=2$

$\therefore x^2+y^2=1+4=5$

1 답 ①

유형 01 삼차방정식과 사차방정식의 풀이

$f(x)=x^3-x^2-4x+4$라고 할 때, $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -1 & -4 & 4 \\ & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-4)$

$\quad=(x-1)(x+2)(x-2)$

즉, 주어진 방정식은

$(x+2)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 모든 양의 근의 합은 $1+2=3$

2 답 $-2+3\sqrt{2}$

유형 02 공통부분이 있는 사차방정식의 풀이

$(x-3)(x-1)(x+5)(x+7)+63=0$에서

$\{(x-3)(x+7)\}\{(x-1)(x+5)\}+63=0$

$(x^2+4x-21)(x^2+4x-5)+63=0$

$x^2+4x=t$로 놓으면

$(t-21)(t-5)+63=0$, $t^2-26t+168=0$

$(t-12)(t-14)=0$ $\quad\therefore t=12$ 또는 $t=14$

(i) $t=12$일 때

$\quad x^2+4x=12$에서 $x^2+4x-12=0$

$\quad(x+6)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-6$ 또는 $x=2$

(ii) $t=14$일 때

$\quad x^2+4x=14$에서 $x^2+4x-14=0$ $\quad\therefore x=-2\pm3\sqrt{2}$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 가장 큰 근은 $-2+3\sqrt{2}$이다.

3 답 ①

유형 03 $x^4+ax^2+b=0$ 꼴의 방정식의 풀이

$x^4-6x^2+1=0$에서 $(x^4-2x^2+1)-4x^2=0$

$(x^2-1)^2-(2x)^2=0$, $(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

4 답 ②

유형 04 $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ 꼴의 방정식의 풀이

$x\neq 0$이므로 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+5x-4+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-4=0$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-6=0$

$x+\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 $t^2+5t-6=0$

$(t+6)(t-1)=0$ $\quad\therefore t=-6$ 또는 $t=1$

(i) $t=-6$일 때

$\quad x+\dfrac{1}{x}=-6$에서 $x^2+6x+1=0$ $\quad\therefore x=-3\pm2\sqrt{2}$

(ii) $t=1$일 때

$x+\dfrac{1}{x}=1$에서 $x^2-x+1=0$ $\quad\therefore\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에 의하여 방정식의 모든 실근의 합은

$(-3-2\sqrt{2})+(-3+2\sqrt{2})=-6$

5 답 ③

유형 05 근이 주어진 방정식

주어진 방정식의 한 근이 1이므로 $x=1$을 대입하면

$1+k+k-2+1=0$ $\quad\therefore\ k=0$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$x^3-2x+1=0$

$f(x)=x^3-2x+1$이라고 할 때,

$f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여

$f(x)$를 인수분해하면

1	1	0	-2	1
		1	1	-1
	1	1	-1	0

$f(x)=(x-1)(x^2+x-1)$

즉, 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2+x-1)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

따라서 나머지 두 근은 $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$이다.

6 답 ④

유형 06 근에 대한 조건이 주어진 삼차방정식

$f(x)=x^3-2kx^2+(k^2+2)x-2k$

라고 할 때, $f(k)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

k	1	$-2k$	k^2+2	$-2k$
		k	$-k^2$	$2k$
	1	$-k$	2	0

$f(x)=(x-k)(x^2-kx+2)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-k)(x^2-kx+2)=0$

이 방정식이 중근을 가지려면 이차방정식 $x^2-kx+2=0$이 중근을 갖거나 $x=k$를 근으로 가져야 한다.

(i) 방정식 $x^2-kx+2=0$이 중근을 가질 때

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(-k)^2-4\times1\times2=k^2-8=0$

$k^2=8$ $\quad\therefore\ k=\pm2\sqrt{2}$

(ii) 방정식 $x^2-kx+2=0$이 $x=k$를 근으로 가질 때

$k^2-k^2+2\neq0$이므로 조건을 만족하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 양수 k의 값은 $2\sqrt{2}$이다.

7 답 ④

유형 07 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3,\ \alpha\beta\gamma=-1$

$\therefore\ (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(-2-\gamma)(-2-\alpha)(-2-\beta)$

$=(-2)^3-(\alpha+\beta+\gamma)\times(-2)^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\times(-2)-\alpha\beta\gamma$

$=-8-(-2)\times4+(-3)\times(-2)-(-1)$

$=7$

8 답 ②

유형 08 세 수를 근으로 하는 삼차방정식

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3,\ \alpha\beta\gamma=1$

구하는 삼차방정식의 세 근이 $\dfrac{1}{\alpha},\ \dfrac{1}{\beta},\ \dfrac{1}{\gamma}$이므로

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{3}{1}=3$

$\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\gamma\alpha}=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{2}{1}=2$

$\dfrac{1}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{1}{1}=1$

따라서 구하는 방정식은

$x^3-3x^2+2x-1=0$

9 답 ③

유형 09 삼차방정식의 켤레근

주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 한 근이 $1+\sqrt{3}$이면 $1-\sqrt{3}$도 근이다. 나머지 한 근을 α라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})+\alpha=-\dfrac{a}{3}$

$(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})\alpha+\alpha(1+\sqrt{3})=\dfrac{b}{3}$

$(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})\alpha=-4$

세 식을 연립하여 풀면 $\alpha=2,\ a=-12,\ b=6$

$\therefore\ a+b=-6$

10 답 4

유형 09 삼차방정식의 켤레근

(가)에서 $f(2)=0$이므로 $x=2$는 삼차방정식 $f(x)=0$의 근이다.

삼차방정식 $f(x)=0$의 계수가 실수이고 (나)에서 한 근이 $-4i$이므로 $4i$도 근이다.

즉, $f(x)=(x-2)(x+4i)(x-4i)$이므로 $f(2x)=0$에서

$(2x-2)(2x+4i)(2x-4i)=0$

$8(x-1)(x+2i)(x-2i)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-2i$ 또는 $x=2i$

따라서 구하는 세 근의 곱은

$1\times(-2i)\times2i=4$

11 답 ④

유형 10 방정식 $x^3=1$, $x^3=-1$의 허근의 성질

$x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

이때 ω는 방정식 $x^2+x+1=0$의 근이고 $\overline{\omega}$도 근이므로

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0,\ \overline{\omega}^3=1,\ \overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$

또 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$$\therefore\ \frac{\overline{\omega}^2}{1+\omega}+\frac{\omega^2}{1+\overline{\omega}}=\frac{\overline{\omega}^2}{-\omega^2}+\frac{\omega^2}{-\overline{\omega}^2}$$

$$=-\frac{\overline{\omega}^4+\omega^4}{\omega^2\overline{\omega}^2}=-\frac{\overline{\omega}+\omega}{(\omega\overline{\omega})^2}$$

$$=-\frac{-1}{1}=1$$

12 답 4

유형 11 삼차방정식과 사차방정식의 활용

상자 밑면의 가로의 길이가 $(20-2x)$ cm, 세로의 길이가 $(10-2x)$ cm이므로

$(20-2x)(10-2x)x=96$, $x^3-15x^2+50x-24=0$

$f(x)=x^3-15x^2+50x-24$라고 할 때, $f(4)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & -15 & 50 & -24 \\ & & 4 & -44 & 24 \\ \hline & 1 & -11 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-4)(x^2-11x+6)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-4)(x^2-11x+6)=0$

$\therefore$ $x=4$ 또는 $x=\dfrac{11\pm\sqrt{97}}{2}$

그런데 x는 자연수이므로 $x=4$

13 답 ③

유형 12 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식의 풀이

$3x-y=10$에서 $y=3x-10$ $\cdots\cdots$ ㉠

이를 $x^2-2y=12$에 대입하면

$x^2-2(3x-10)=12$, $x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0$ $\quad\therefore$ $x=2$ 또는 $x=4$

이를 각각 ㉠에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=2$, $y=-4$ 또는 $x=4$, $y=2$

따라서 $\alpha=4$, $\beta=2$이므로 $\alpha+\beta=6$

14 답 ④

유형 13 두 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식의 풀이

$2x^2+xy-y^2=0$에서

$(x+y)(2x-y)=0$ $\quad\therefore$ $y=-x$ 또는 $y=2x$

이때 x, y가 모두 음의 정수이려면 $y=2x$

이를 $x^2-2xy+2y^2=5$에 대입하면

$x^2-4x^2+8x^2=5$, $x^2=1$ $\quad\therefore$ $x=\pm1$

x, y는 음의 정수이므로 $x=-1$, $y=-2$

$\therefore$ $x+y=-3$

15 답 ②

유형 14 대칭형의 연립이차방정식의 풀이

주어진 연립방정식을 변형하면 $\begin{cases} (x+y)^2+(x+y)-2xy=2 \\ (x+y)^2-xy=1 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

$\begin{cases} u^2+u-2v=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-v=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $v=u^2-1$을 ㉠에 대입하면

$u^2+u-2(u^2-1)=2$, $u^2-u=0$

$u(u-1)=0$ $\quad\therefore$ $u=0$ 또는 $u=1$

이를 각각 ㉠에 대입하면 위의 연립방정식의 해는

$u=0$, $v=-1$ 또는 $u=1$, $v=0$

(i) $u=0$, $v=-1$, 즉 $x+y=0$, $xy=-1$일 때

x, y를 두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식은

$t^2-1=0$ $\quad\therefore$ $t=\pm1$

$\therefore$ $x=-1$, $y=1$ 또는 $x=1$, $y=-1$

(ii) $u=1$, $v=0$, 즉 $x+y=1$, $xy=0$일 때

x, y를 두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식은

$t^2-t=0$, $t(t-1)=0$ $\quad\therefore$ $t=0$ 또는 $t=1$

$\therefore$ $x=0$, $y=1$ 또는 $x=1$, $y=0$

(i), (ii)에 의하여 $x+2y$의 최댓값은 $0+2\times1=2$

16 답 ⑤

유형 15 해에 대한 조건이 주어진 연립이차방정식

$2x+y=a$에서 $y=-2x+a$이므로 이를 $x^2+y^2=4$에 대입하면

$x^2+(-2x+a)^2=4$, $5x^2-4ax+a^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2a)^2-5\times(a^2-4)=-a^2+20=0$

$a^2=20$ $\quad\therefore$ $a=\pm2\sqrt{5}$

그런데 $a>0$이므로 $a=2\sqrt{5}$

17 답 ④

유형 16 연립이차방정식의 활용

직사각형의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라고 하면

$\begin{cases} 2x+2y=34 \\ x^2+y^2=13^2 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x+y=17 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=169 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+17$을 ㉡에 대입하면

$x^2+(-x+17)^2=169$, $x^2-17x+60=0$

$(x-5)(x-12)=0$ $\quad\therefore$ $x=5$ 또는 $x=12$

이를 각각 ㉠에 대입하여 풀면 연립방정식의 해는

$x=5$, $y=12$ 또는 $x=12$, $y=5$

따라서 직사각형의 넓이는 $5\times12=60$ (cm^2)

18 답 ⑤

유형 17 정수 조건의 부정방정식

$x^2-xy-2x+2y-3=0$에서

$x(x-y)-2(x-y)-3=0$ $\quad\therefore$ $(x-2)(x-y)=3$

(i) $x-2=-3$, $x-y=-1$일 때, $x=-1$, $y=0$

(ii) $x-2=-1$, $x-y=-3$일 때, $x=1$, $y=4$

(iii) $x-2=1$, $x-y=3$일 때, $x=3$, $y=0$

(iv) $x-2=3$, $x-y=1$일 때, $x=5$, $y=4$

따라서 xy의 최댓값은 $5\times4=20$

19 답 ①

유형 18 실수 조건의 부정방정식

방정식의 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-2(y-1)x+2y^2+2=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

x가 실수이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=(y-1)^2-1\times(2y^2+2)=-y^2-2y-1\geq0$

$\therefore$ $(y+1)^2\leq0$

이때 y도 실수이므로 $y+1=0$ $\quad\therefore$ $y=-1$

이를 ㉠에 대입하면

$x^2+4x+4=0$, $(x+2)^2=0$ $\quad\therefore$ $x=-2$

$\therefore$ $x+y=-3$

07 일차부등식

핵심 유형

	유형01 ㄱ, ㄴ	유형02 $x<\frac{4}{3}$	
유형03 $x\le-\frac{3}{2}$		유형04 ④	유형05 12
유형06 ⑤	유형07 $a>1$	유형08 $-4<a\le-1$	
유형09 ③	유형10 ④	유형11 1	유형12 ①

핵심 유형 완성하기

001 ④	002 ②	003 ④	004 $x>3$	005 ①
006 ①	007 ⑤	008 ①	009 ⑤	010 -3
011 ③	012 해는 없다.		013 $x=3$	
014 $2<x\le10$		015 ②	016 ①	017 3
018 ①	019 4	020 0	021 $a\le\frac{15}{2}$	
022 ⑤	023 ②	024 $6<a\le\frac{25}{3}$		
025 $4\le a<5$		026 -9	027 17	028 14
029 $1\le x\le7$		030 50 g	031 125	032 ①
033 ⑤	034 ③	035 ①	036 ③	037 ③
038 ②	039 ③	040 ④		

핵심 유형 최종 점검하기

1 ②	2 ①	3 ①	4 $x=-6$	5 ㄱ, ㄹ
6 해는 없다.		7 ④	8 ①	9 ④
10 $-4\le x<2$		11 ②	12 ⑤	13 ②
14 ③	15 ①	16 ③	17 ⑤	18 ③
19 ③				

핵심 유형 114~116쪽

유형01 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $a>b$, $c>d$에서 $a-b>0$, $c-d>0$이므로

$(a-d)-(b-c)=(a-b)+(c-d)>0$

$\therefore a-d>b-c$

ㄴ. $c>d$이고 $a>0$이므로 $ac>ad$ ...... ㉠

$a>b$이고 $d>0$이므로 $ad>bd$ ...... ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $ac>bd$

ㄷ. $0<d<c$이므로 $\frac{1}{c}<\frac{1}{d}$

$b>0$이므로 $\frac{b}{c}<\frac{b}{d}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

유형02 답 $x<\frac{4}{3}$

부등식 $ax+b<0$, 즉 $ax<-b$의 해가 $x>2$이므로 $a<0$

즉, 부등식 $ax+b<0$의 해는 $x>-\frac{b}{a}$이므로 $-\frac{b}{a}=2$ $\therefore b=-2a$

이때 부등식 $(a-b)x+(2a+3b)>0$에서 $b=-2a$이므로

$3ax-4a>0$, $3ax>4a$

그런데 $a<0$이므로 주어진 부등식의 해는 $x<\frac{4}{3}$

유형03 답 $x\le-\frac{3}{2}$

$3x+2\le x-1$에서

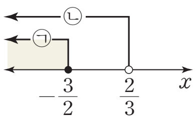
$x\le-\frac{3}{2}$ ...... ㉠

$x+1>2(2x-1)+1$에서 $x+1>4x-1$

$\therefore x<\frac{2}{3}$ ...... ㉡

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x\le-\frac{3}{2}$



유형04 답 ④

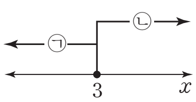
① $4x-7\le5$에서 $4x\le12$

$\therefore x\le3$ ...... ㉠

$x\ge3$ ...... ㉡

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x=3$



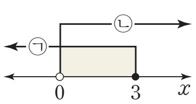
② $15x-24\le5x+6$에서 $10x\le30$

$\therefore x\le3$ ...... ㉠

$x>0$ ...... ㉡

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$0<x\le3$



③ $3x>-x+12$에서 $4x>12$

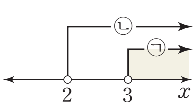
$\therefore x>3$ ...... ㉠

$5x-4>6$에서 $5x>10$

$\therefore x>2$ ...... ㉡

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x>3$



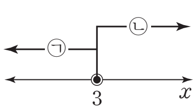
④ $2(x-1)\le4$에서 $2x\le6$

$\therefore x\le3$ ...... ㉠

$x+1>4$에서

$x>3$ ...... ㉡

따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.



⑤ $3x-1\le x+3$에서 $2x\le4$

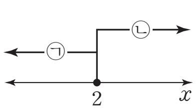
$\therefore x\le2$ ...... ㉠

$2x+3\le3x+1$에서 $-x\le-2$

$\therefore x\ge2$ ...... ㉡

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x=2$



따라서 해가 없는 것은 ④이다.

유형05 답 12

$2x-30<5x-3$에서 $-3x<27$ $\quad\therefore x>-9$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

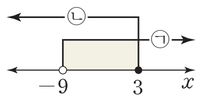
$5x-3\le6(5-x)$에서 $5x-3\le30-6x$

$11x\le33$ $\quad\therefore x\le3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

즉, 주어진 부등식의 해는 $-9<x\le3$

따라서 정수 x는

$-8, -7, -6, \cdots, 3$의 12개이다.



유형06 답 ⑤

$2x+5\le3(x+1)$에서 $2x+5\le3x+3$ $\quad\therefore x\ge2$

$4x\le2x+a+1$에서 $2x\le a+1$ $\quad\therefore x\le\dfrac{a+1}{2}$

이때 연립부등식의 해는 $2\le x\le4$이므로 $\dfrac{a+1}{2}=4$

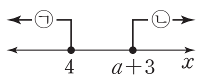
$\therefore a=7$

유형07 답 $a>1$

$3x-7\le5$에서 $3x\le12$ $\quad\therefore x\le4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x-3\ge a$에서 $x\ge a+3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

이때 연립부등식의 해가 없으므로 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$4<a+3$ $\quad\therefore a>1$

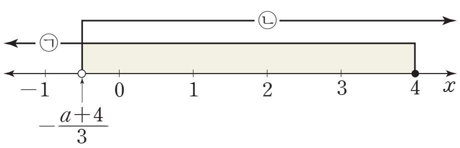
유형08 답 $-4<a\le-1$

$1-x\ge-3$에서 $-x\ge-4$ $\quad\therefore x\le4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$5x+a>2(x-2)$에서 $5x+a>2x-4$

$3x>-a-4$ $\quad\therefore x>-\dfrac{a+4}{3}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

이때 연립부등식을 만족하는 정수 x가 5개이므로 다음 그림에서



$-1\le-\dfrac{a+4}{3}<0$, $-3\le-a-4<0$

$-1\le-a<4$ $\quad\therefore -4<a\le-1$

유형09 답 ③

의자의 개수를 x라고 하면 학생 수는 $(3x+15)$이므로

$5(x-2)+1\le3x+15\le5(x-2)+5$에서

$5x-9\le3x+15\le5x-5$

$5x-9\le3x+15$에서 $2x\le24$ $\quad\therefore x\le12$

$3x+15\le5x-5$에서 $-2x\le-20$ $\quad\therefore x\ge10$

따라서 부등식의 해는 $10\le x\le12$이므로 의자의 최대 개수는 12이다.

유형10 답 ④

$|2x-3|<7$에서 $-7<2x-3<7$, $-4<2x<10$ $\quad\therefore -2<x<5$

따라서 $a=-2$, $b=5$이므로 $a+b=3$

유형11 답 1

$x-1=0$, 즉 $x=1$을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x<1$일 때

$2x-\dfrac{1}{2}>-(x-1)$, $2x-\dfrac{1}{2}>-x+1$ $\quad\therefore x>\dfrac{1}{2}$

그런데 $x<1$이므로 $\dfrac{1}{2}<x<1$

(ii) $x\ge1$일 때

$2x-\dfrac{1}{2}>x-1$ $\quad\therefore x>-\dfrac{1}{2}$

그런데 $x\ge1$이므로 $x\ge1$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $x>\dfrac{1}{2}$

따라서 구하는 자연수 x의 최솟값은 1이다.

유형12 답 ①

$x+2=0$, $x-2=0$, 즉 $x=-2$, $x=2$를 기준으로 구간을 나누면

(i) $x<-2$일 때

$-(x-2)-(x+2)<6$, $-2x<6$ $\quad\therefore x>-3$

그런데 $x<-2$이므로 $-3<x<-2$

(ii) $-2\le x<2$일 때

$-(x-2)+(x+2)<6$에서 $0\cdot x<2$이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $-2\le x<2$이므로 $-2\le x<2$

(iii) $x\ge2$일 때

$(x-2)+(x+2)<6$, $2x<6$ $\quad\therefore x<3$

그런데 $x\ge2$이므로 $2\le x<3$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $-3<x<3$

따라서 $a=-3$, $b=3$이므로 $ab=-9$

핵심 유형 완성하기 117~122쪽

001 답 ④

ㄱ. $a<b$, $c<d$에서 $a-b<0$, $c-d<0$이므로

$(a-d)-(b-c)=(a-b)+(c-d)<0$

$\therefore a-d<b-c$

ㄴ. $a<b$이고 $c>0$이므로 $ac<bc$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$c<d$이고 $b>0$이므로 $bc<bd$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $ac<bd$

ㄷ. $0<b<d$이므로 $\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{d}$

$a<0$이므로 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a}{d}$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

002 답 ②

② $a>b$이므로 양변에 -1을 곱하면

$-a<-b$ $\quad\therefore 3-a<3-b$

003 답 ④

① $b>a$이므로 $b-a>0$

② $a<0$이므로 $b>a$의 양변을 a로 나누면 $\dfrac{b}{a}<1$

③ $b<0$이므로 $a<b$의 양변을 b로 나누면 $\frac{a}{b}>1$

양변에 -1을 곱하면 $-\frac{a}{b}<-1$

④ $a<b<0$이므로 $|a|>|b|$ $\quad\therefore a^2>b^2$

⑤ $\frac{b}{a}<1$, $\frac{a}{b}>1$이므로 $\frac{a}{b}>\frac{b}{a}$

따라서 항상 성립하는 것은 ④이다.

004 답 $x>3$

부등식 $ax+b>0$, 즉 $ax>-b$의 해가 $x<1$이므로 $a<0$

즉, 부등식 $ax+b>0$의 해는 $x<-\frac{b}{a}$이므로 $-\frac{b}{a}=1$ $\quad\therefore b=-a$

한편 부등식 $ax+b-2a<0$에서 $b=-a$이므로

$ax-3a<0$, $ax<3a$ $\quad\therefore x>3$ $(\because a<0)$

005 답 ①

$a<7$, 즉 $a-7<0$이므로 $(a-7)x>a-7$의 양변을 $a-7$로 나누면

$x<1$

006 답 ①

$(a^2-2a)x-a>-x$, $(a^2-2a+1)x>a$, $(a-1)^2x>a$

이 부등식의 해가 없으므로 $a-1=0$, $a\geq0$ $\quad\therefore a=1$

007 답 ⑤

$3(x-1)<2x+3$에서 $3x-3<2x+3$ $\quad\therefore x<6$ ⋯⋯ ㉠

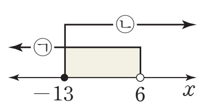
$2+2(x-2)\leq3x+11$에서

$2x-2\leq3x+11$ $\quad\therefore x\geq-13$ ⋯⋯ ㉡

즉, 주어진 연립부등식의 해는 $-13\leq x<6$

따라서 $a=-13$, $b=6$이므로

$b-a=19$



008 답 ①

$4x-(3x-5)<2x$에서 $x+5<2x$

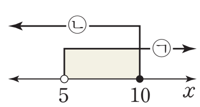
$\therefore x>5$ ⋯⋯ ㉠

$3.8-0.1x\geq0.2(x+4)$에서 $38-x\geq2(x+4)$

$-3x\geq-30$

$\therefore x\leq10$ ⋯⋯ ㉡

즉, 주어진 연립부등식의 해는 $5<x\leq10$



009 답 ⑤

$5(x+1)\geq2(x-4)$에서 $3x\geq-13$ $\quad\therefore x\geq-\frac{13}{3}$ ⋯⋯ ㉠

$\frac{x+1}{2}<\frac{3-x}{3}$에서 $3(x+1)<2(3-x)$

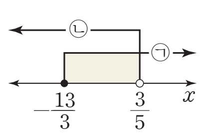
$5x<3$ $\quad\therefore x<\frac{3}{5}$ ⋯⋯ ㉡

즉, 주어진 연립부등식의 해는

$-\frac{13}{3}\leq x<\frac{3}{5}$

따라서 정수 x의 값은

-4, -3, -2, -1, 0이므로 합은 -10이다.



010 답 -3

$3+2x<-2x-5$에서 $4x<-8$

$\therefore x<-2$ ⋯⋯ ㉠

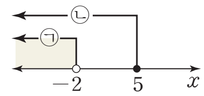
$\frac{x+3}{4}\geq x+\frac{1-2x}{3}$에서 $3(x+3)\geq12x+4(1-2x)$

$3x+9\geq4x+4$, $-x\geq-5$

$\therefore x\leq5$ ⋯⋯ ㉡

따라서 주어진 연립부등식의 해는 $x<-2$

이므로 정수 x의 최댓값은 -3이다.



011 답 ③

① $3x-1\geq2(x-1)$에서 $3x-1\geq2x-2$

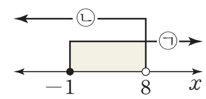
$\therefore x\geq-1$ ⋯⋯ ㉠

$0.2x+0.5>0.3x-0.3$에서 $2x+5>3x-3$

$\therefore x<8$ ⋯⋯ ㉡

즉, 연립부등식의 해는

$-1\leq x<8$



② $2-\frac{2-x}{2}\leq\frac{3x-1}{3}$에서 $12-3(2-x)\leq2(3x-1)$

$3x+6\leq6x-2$, $-3x\leq-8$

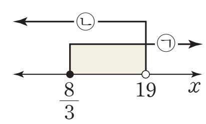
$\therefore x\geq\frac{8}{3}$ ⋯⋯ ㉠

$\frac{x-4}{3}<\frac{6+x}{5}$에서 $5(x-4)<3(6+x)$

$5x-20<18+3x$, $2x<38$

$\therefore x<19$ ⋯⋯ ㉡

즉, 연립부등식의 해는 $\frac{8}{3}\leq x<19$



③ $\frac{x+1}{4}-1\geq\frac{x+2}{3}$에서 $3(x+1)-12\geq4(x+2)$

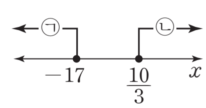
$3x-9\geq4x+8$, $-x\geq17$

$\therefore x\leq-17$ ⋯⋯ ㉠

$x-2\geq0.1x+1$에서 $10x-20\geq x+10$

$9x\geq30$ $\quad\therefore x\geq\frac{10}{3}$ ⋯⋯ ㉡

즉, 연립부등식의 해는 없다.



④ $4x+10\leq-2(x+1)$에서 $4x+10\leq-2x-2$

$6x\leq-12$

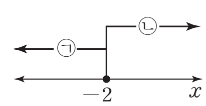
$\therefore x\leq-2$ ⋯⋯ ㉠

$0.5x-0.6\geq0.4x-0.8$에서

$5x-6\geq4x-8$

$\therefore x\geq-2$ ⋯⋯ ㉡

즉, 연립부등식의 해는 $x=-2$



⑤ $\frac{2x+5}{4}+\frac{x-3}{2}>-1$에서 $2x+5+2(x-3)>-4$

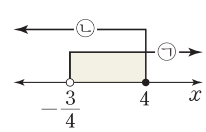
$4x-1>-4$, $4x>-3$

$\therefore x>-\frac{3}{4}$ ⋯⋯ ㉠

$2x-2\leq10-x$에서 $3x\leq12$

$\therefore x\leq4$ ⋯⋯ ㉡

즉, 연립부등식의 해는 $-\frac{3}{4}<x\leq4$



따라서 해가 없는 것은 ③이다.

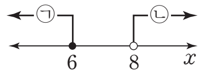
012 답 해는 없다.

$0.2(x-1)\le 1$에서 $2(x-1)\le 10$

$2x\le 12 \qquad \therefore\ x\le 6 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$2x-12>x-4$에서 $x>8 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.



013 답 $x=3$

$\dfrac{x+1}{4}-\dfrac{x+2}{5}\ge 0$에서 $5(x+1)-4(x+2)\ge 0$

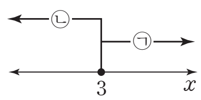
$x-3\ge 0 \qquad \therefore\ x\ge 3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\dfrac{-3x+5}{2}+x\ge 1$에서 $-3x+5+2x\ge 2$

$-x\ge -3 \qquad \therefore\ x\le 3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x=3$



014 답 $2<x\le 10$

$2(x+1)<4x-2$에서

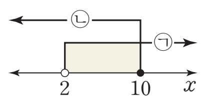
$2x+2<4x-2 \qquad \therefore\ x>2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$4x-2\le 3(x+2)+2$에서

$4x-2\le 3x+8 \qquad \therefore\ x\le 10 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

따라서 주어진 부등식의 해는

$2<x\le 10$



015 답 ②

$0.4x-0.6<-\dfrac{1}{2}x+0.3$에서 $4x-6<-5x+3$

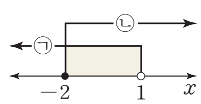
$9x<9 \qquad \therefore\ x<1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$-\dfrac{1}{2}x+0.3\le \dfrac{3}{10}x+1.9$에서 $-5x+3\le 3x+19$

$-8x\le 16 \qquad \therefore\ x\ge -2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

즉, 주어진 부등식의 해는 $-2\le x<1$

따라서 $a=-2$, $b=1$이므로 $ab=-2$



016 답 ①

$\dfrac{1+2x}{3}<\dfrac{3x+5}{4}$에서 $4(1+2x)<3(3x+5)$

$8x+4<9x+15$, $-x<11 \qquad \therefore\ x>-11 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

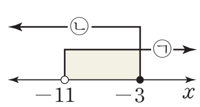
$\dfrac{3x+5}{4}\le \dfrac{x+1}{2}$에서 $3x+5\le 2(x+1)$

$3x+5\le 2x+2 \qquad \therefore\ x\le -3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

즉, 주어진 부등식의 해는

$-11<x\le -3$

따라서 구하는 최댓값은 -3이다.



017 답 3

$2x-1\le 5$에서 $2x\le 6 \qquad \therefore\ x\le 3$

$3x+2a+2>5$에서 $3x>-2a+3 \qquad \therefore\ x>\dfrac{-2a+3}{3}$

이때 연립부등식의 해가 $-1<x\le 3$이므로

$\dfrac{-2a+3}{3}=-1$, $-2a=-6 \qquad \therefore\ a=3$

018 답 ①

$5x-a\le 4x$에서 $x\le a$

$x+1<2x+2$에서 $x>-1$

이때 연립부등식의 해는 $b<x\le 2$이므로

$a=2$, $b=-1 \qquad \therefore\ ab=-2$

019 답 4

$2x+b\ge x-1+a$에서 $x\ge a-b-1$

$3x-a\le 5+b$에서 $x\le \dfrac{a+b+5}{3}$

이때 연립부등식의 해가 $x=-4$이므로

$a-b-1=-4$, $\dfrac{a+b+5}{3}=-4$에서 $a-b=-3$, $a+b=-17$

따라서 $a=-10$, $b=-7$이므로 $a-2b=4$

020 답 0

$3x-a\le 2x$에서 $x\le a$

$2x<4x-b$에서 $2x>b \qquad \therefore\ x>\dfrac{b}{2}$

이때 부등식의 해는 $-1<x\le 2$이므로 $a=2$

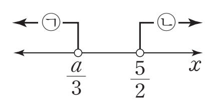
$\dfrac{b}{2}=-1$에서 $b=-2 \qquad \therefore\ a+b=0$

021 답 $a\le \dfrac{15}{2}$

$3x-2a<-a$에서 $3x<a \qquad \therefore\ x<\dfrac{a}{3} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$-2x+5<0$에서 $-2x<-5 \qquad \therefore\ x>\dfrac{5}{2} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

이때 연립부등식의 해가 없으므로 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$\dfrac{a}{3}\le \dfrac{5}{2} \qquad \therefore\ a\le \dfrac{15}{2}$

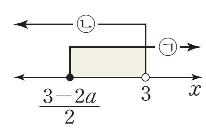
022 답 ⑤

$\dfrac{3-2x}{2}-a\le 0$에서 $3-2x\le 2a$

$-2x\le 2a-3 \qquad \therefore\ x\ge \dfrac{3-2a}{2} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$3x-4>5x-10$에서 $-2x>-6 \qquad \therefore\ x<3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

이때 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\dfrac{3-2a}{2}<3$, $3-2a<6 \qquad \therefore\ a>-\dfrac{3}{2}$

따라서 정수 a의 최솟값은 -1이다.

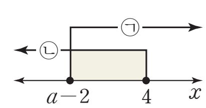
023 답 ②

$2x+a-6\le 3x-4$에서

$-x\le -a+2 \qquad \therefore\ x\ge a-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$3x-4\le 12-x$에서 $4x\le 16 \qquad \therefore\ x\le 4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

이때 부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$a-2\le 4 \qquad \therefore\ a\le 6$

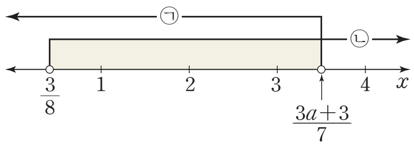
따라서 상수 a의 최댓값은 6이다.

024 답 $6<a\le\frac{25}{3}$

$2x-a<\frac{3-x}{3}$에서 $6x-3a<3-x$ $\quad\therefore x<\frac{3a+3}{7}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\frac{3-x}{3}<\frac{2x+1}{2}$에서 $6-2x<6x+3$ $\quad\therefore x>\frac{3}{8}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

이때 부등식을 만족하는 정수 x가 3개이므로 다음 그림에서



$3<\frac{3a+3}{7}\le4$, $21<3a+3\le28$

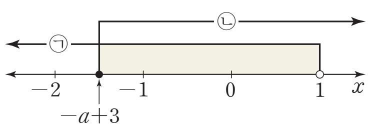
$\therefore 6<a\le\frac{25}{3}$

025 답 $4\le a<5$

$3x+1<2(3-x)$에서 $3x+1<6-2x$ $\quad\therefore x<1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x-a\le2x-3$에서 $-x\le a-3$ $\quad\therefore x\ge-a+3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

이때 연립부등식을 만족하는 정수 x가 -1과 0이므로 다음 그림에서



$-2<-a+3\le-1$, $-5<-a\le-4$

$\therefore 4\le a<5$

026 답 -9

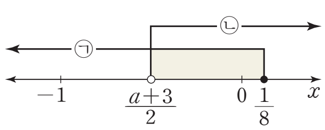
$\frac{3(2x+5)}{10}\ge\frac{7(x+1)}{5}$에서 $6x+15\ge14x+14$

$-8x\ge-1$ $\quad\therefore x\le\frac{1}{8}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$2x-5>a-2$에서 $2x>a+3$

$\therefore x>\frac{a+3}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

이때 연립부등식을 만족하는 정수 x가 1개뿐이므로 다음 그림에서



$-1\le\frac{a+3}{2}<0$, $-2\le a+3<0$

$\therefore -5\le a<-3$

따라서 정수 a의 값은 -5, -4이므로 합은 -9이다.

027 답 17

텐트의 개수를 x라고 하면 학생 수는 $(3x+5)$이므로

$4(x-4)+1\le3x+5\le4(x-4)+4$

$4(x-4)+1\le3x+5$에서 $x\le20$

$3x+5\le4(x-4)+4$에서 $x\ge17$

따라서 부등식의 해는 $17\le x\le20$이므로 텐트의 최소 개수는 17이다.

028 답 14

회원 수를 x라고 하면 셔틀콕의 개수는 $(6x+2)$이므로

$80\le6x+2\le90$, $78\le6x\le88$ $\quad\therefore 13\le x\le\frac{44}{3}$

따라서 최대 회원 수는 14이다.

029 답 $1\le x\le7$

색연필을 x자루 사면 연필은 $(13-x)$자루 살 수 있으므로 전체 금액은

$500x+300(13-x)=200x+3900$ (원)

전체 금액이 4100원 이상 5300원 이하가 되어야 하므로

$4100\le200x+3900\le5300$, $200\le200x\le1400$

$\therefore 1\le x\le7$

030 답 50 g

두 과자 A, B의 섭취량이 각각 1 g일 때 얻을 수 있는 열량과 단백질의 양은 오른쪽 표와 같다.

과자	열량 (kcal)	단백질 (g)
A	1.2	0.07
B	3	0.05

과자 A의 섭취량을 x g이라고 하면 과자 B의 섭취량은 $(200-x)$ g이므로

$$\begin{cases}1.2x+3(200-x)\ge350 & \cdots\cdots ㉠\\ 0.07x+0.05(200-x)\ge11 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서

$12x+6000-30x\ge3500$, $18x\le2500$ $\quad\therefore x\le\frac{1250}{9}$

㉡에서

$7x+1000-5x\ge1100$, $2x\ge100$ $\quad\therefore x\ge50$

즉, 부등식의 해는 $50\le x\le\frac{1250}{9}$

따라서 과자 A의 최소 섭취량은 50 g이다.

031 답 125

5 %의 소금물 200 g에 들어 있는 소금의 양은

$200\times\frac{5}{100}=10$ (g)

넣어야 하는 소금의 양을 x g이라고 하면

$\frac{20}{100}\times(200+x)\le10+x\le\frac{24}{100}\times(200+x)$

$\frac{20}{100}\times(200+x)\le10+x$에서

$200+x\le50+5x$, $4x\ge150$ $\quad\therefore x\ge\frac{75}{2}$

$10+x\le\frac{24}{100}\times(200+x)$에서

$1000+100x\le4800+24x$, $76x\le3800$ $\quad\therefore x\le50$

즉, 부등식의 해는 $\frac{75}{2}\le x\le50$

따라서 넣어야 하는 소금의 양은 $\frac{75}{2}$ g 이상 50 g 이하이므로

$a=\frac{75}{2}$, $b=50$이다.

$\therefore 2a+b=125$

032 답 ①

$\frac{1}{2}|2x+3|\ge 1$에서 $|2x+3|\ge 2$

$2x+3\le -2$ 또는 $2x+3\ge 2$

$\therefore\ x\le -\frac{5}{2}$ 또는 $x\ge -\frac{1}{2}$

따라서 $a=-\frac{5}{2},\ b=-\frac{1}{2}$이므로 $a+b=-3$

033 답 ⑤

$|x-5|\le 9$에서 $-9\le x-5\le 9$ $\qquad\therefore\ -4\le x\le 14$

따라서 구하는 정수 x는 $-4,\ -3,\ -2,\ \cdots,\ 14$의 19개이다.

034 답 ③

$\left|x-\frac{1}{2}a\right|<b$에서 $-b<x-\frac{1}{2}a<b$

$\therefore\ \frac{1}{2}a-b<x<\frac{1}{2}a+b$

이때 부등식의 해가 $-4<x<6$이므로

$\frac{1}{2}a-b=-4,\ \frac{1}{2}a+b=6$

$\therefore\ a-2b=-8,\ a+2b=12$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=5$

$\therefore\ b-a=3$

035 답 ①

$x-1=0$, 즉 $x=1$을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x<1$일 때

$-(x-1)<4x-1,\ -x+1<4x-1$

$-5x<-2$ $\qquad\therefore\ x>\frac{2}{5}$

그런데 $x<1$이므로 $\frac{2}{5}<x<1$

(ii) $x\ge 1$일 때

$x-1<4x-1,\ -3x<0$ $\qquad\therefore\ x>0$

그런데 $x\ge 1$이므로 $x\ge 1$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $x>\frac{2}{5}$

따라서 a의 값은 $\frac{2}{5}$이다.

036 답 ③

$3-x=0$, 즉 $x=3$을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x<3$일 때

$3-x\le 10-x$에서 $0\cdot x\le 7$이므로 부등식의 해는 모든 실수이다.

그런데 $x<3$이므로 $x<3$

(ii) $x\ge 3$일 때

$-(3-x)\le 10-x,\ x-3\le 10-x$

$2x\le 13$ $\qquad\therefore\ x\le\frac{13}{2}$

그런데 $x\ge 3$이므로 $3\le x\le\frac{13}{2}$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $x\le\frac{13}{2}$

따라서 구하는 자연수 x는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다.

037 답 ③

$x-2=0$, 즉 $x=2$를 기준으로 구간을 나누면

(i) $x<2$일 때

$-2(x-2)+2x\ge 7$에서 $0\cdot x\ge 3$이므로 해는 없다.

(ii) $x\ge 2$일 때

$2(x-2)+2x\ge 7,\ 4x\ge 11$ $\qquad\therefore\ x\ge\frac{11}{4}$

그런데 $x\ge 2$이므로 $x\ge\frac{11}{4}$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$x\ge\frac{11}{4}$

따라서 구하는 정수 x의 최솟값은 3이다.

038 답 ②

$x+1=0,\ x-1=0$, 즉 $x=-1,\ x=1$을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x<-1$일 때

$-(x+1)\ge -2(x-1),\ -x-1\ge -2x+2$ $\qquad\therefore\ x\ge 3$

그런데 $x<-1$이므로 해는 없다.

(ii) $-1\le x<1$일 때

$x+1\ge -2(x-1),\ x+1\ge -2x+2$

$3x\ge 1$ $\qquad\therefore\ x\ge\frac{1}{3}$

그런데 $-1\le x<1$이므로 $\frac{1}{3}\le x<1$

(iii) $x\ge 1$일 때

$x+1\ge 2(x-1),\ x+1\ge 2x-2$ $\qquad\therefore\ x\le 3$

그런데 $x\ge 1$이므로 $1\le x\le 3$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$\frac{1}{3}\le x\le 3$

따라서 a의 값은 $\frac{1}{3}$이다.

039 답 ③

$x+1=0,\ x-3=0$, 즉 $x=-1,\ x=3$을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x<-1$일 때

$-(x-3)-2(x+1)\ge 5,\ -x+3-2x-2\ge 5$

$-3x\ge 4$ $\qquad\therefore\ x\le -\frac{4}{3}$

그런데 $x<-1$이므로 $x\le -\frac{4}{3}$

(ii) $-1\le x<3$일 때

$-(x-3)+2(x+1)\ge 5,\ -x+3+2x+2\ge 5$ $\qquad\therefore\ x\ge 0$

그런데 $-1\le x<3$이므로 $0\le x<3$

(iii) $x\ge 3$일 때

$x-3+2(x+1)\ge 5,\ x-3+2x+2\ge 5$

$3x\ge 6$ $\qquad\therefore\ x\ge 2$

그런데 $x\ge 3$이므로 $x\ge 3$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$x\le -\frac{4}{3}$ 또는 $x\ge 0$

040 답 ④

$\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$이므로 주어진 부등식은

$|x-2|+|x-1|<4$

$x-1=0$, $x-2=0$, 즉 $x=1$, $x=2$를 기준으로 구간을 나누면

(i) $x<1$일 때

$-(x-2)-(x-1)<4$, $-x+2-x+1<4$ $\quad\therefore x>-\frac{1}{2}$

그런데 $x<1$이므로 $-\frac{1}{2}<x<1$

(ii) $1\le x<2$일 때

$-(x-2)+(x-1)<4$에서 $0\cdot x<3$이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $1\le x<2$이므로 $1\le x<2$

(iii) $x\ge 2$일 때

$(x-2)+(x-1)<4$, $2x<7$ $\quad\therefore x<\frac{7}{2}$

그런데 $x\ge 2$이므로 $2\le x<\frac{7}{2}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $-\frac{1}{2}<x<\frac{7}{2}$

따라서 정수 x는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

핵심 유형 **최종 점검하기** 123~125쪽

1 답 ②

유형 01 부등식의 기본 성질

① $a<b$이므로 $a+6<b+6$

② $a<b$이므로 $-a>-b$ $\quad\therefore 5-a>5-b$

③ $a>0$이면 $a^2<ab$, $a<0$이면 $a^2>ab$

④ $a<b$이므로 $2a-1<2b-1$

⑤ $a<b$이므로 $\frac{a}{-3}>\frac{b}{-3}$ $\quad\therefore -\frac{a}{3}-1>-\frac{b}{3}-1$

따라서 항상 성립하는 것은 ②이다.

2 답 ①

유형 02 부등식 $ax>b$의 풀이

$a(ax+1)\le 4x+1$, $(a^2-4)x\le 1-a$

이 부등식의 해가 모든 실수이므로 $a^2-4=0$, $1-a\ge 0$

$a^2-4=0$, $a^2=4$ $\quad\therefore a=-2$ 또는 $a=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$1-a\ge 0$에서 $a\le 1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 a의 값은 -2이다.

3 답 ①

유형 03 연립일차부등식의 풀이

$3x-6\le 4-x$에서 $4x\le 10$ $\quad\therefore x\le\frac{5}{2}$

$3x+1>2x-3$에서 $x>-4$

즉, 주어진 연립부등식의 해는 $-4<x\le\frac{5}{2}$

따라서 $a=-4$, $b=\frac{5}{2}$이므로 $a+b=-\frac{3}{2}$

4 답 $x=-6$

유형 04 해가 특수한 연립일차부등식

$\frac{x-2}{3}\le\frac{x}{4}-\frac{7}{6}$에서 $4(x-2)\le 3x-14$

$4x-8\le 3x-14$ $\quad\therefore x\le -6$

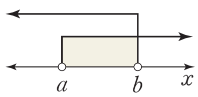
$0.5x-0.2\ge 0.4x-0.8$에서 $5x-2\ge 4x-8$ $\quad\therefore x\ge -6$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 $x=-6$이다.

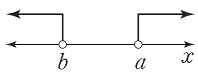
5 답 ㄱ, ㄹ

유형 04 해가 특수한 연립일차부등식

ㄱ, ㄷ. $a<b$이면 연립부등식의 해는 $a<x<b$이다.



ㄴ, ㄹ. $a>b$이면 연립부등식의 해는 없다.



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

6 답 해는 없다.

유형 05 $A<B<C$ 꼴의 부등식

$x+3<5x-1$에서 $-4x<-4$ $\quad\therefore x>1$

$5x-1<4x-3$에서 $x<-2$

따라서 주어진 부등식의 해는 없다.

7 답 ④

유형 05 $A<B<C$ 꼴의 부등식

$0.2x-1<0.4x+\frac{3}{5}$에서 $2x-10<4x+6$ $\quad\therefore x>-8$

$0.4x+\frac{3}{5}<2+0.2x$에서 $4x+6<20+2x$ $\quad\therefore x<7$

즉, 주어진 부등식의 해는 $-8<x<7$

따라서 정수 x의 최댓값은 6이다.

8 답 ①

유형 06 해가 주어진 연립일차부등식

$-3x-7<2$에서 $-3x<9$ $\quad\therefore x>-3$

$4x+2(x-3)<a$에서 $6x<a+6$ $\quad\therefore x<\frac{a+6}{6}$

이때 연립부등식의 해는 $b<x<2$이므로 $b=-3$

$\frac{a+6}{6}=2$에서 $a=6$ $\quad\therefore ab=-18$

9 답 ④

유형 06 해가 주어진 연립일차부등식

$3-5x\le x+a$에서 $-6x\le a-3$ $\quad\therefore x\ge\frac{-a+3}{6}$

$3x+1\ge 4x+3$에서 $x\le -2$

이때 연립부등식의 해가 $x=b$이므로 $b=-2$

$\frac{-a+3}{6}=-2$에서 $a=15$ $\quad\therefore a+b=13$

10 답 $-4\le x<2$

유형 06 해가 주어진 연립일차부등식

$2x-a<x+a$에서 $x<2a$

$2x-a\le 3x-b$에서 $x\ge b-a$

이때 연립부등식의 해가 $-10\le x<2$이므로

$b-a=-10$, $2a=2$ $\quad\therefore a=1$, $b=-9$

즉, 처음 부등식은 $2x-1<x+1\leq 3x+9$이므로

$2x-1<x+1$에서 $x<2$

$x+1\leq 3x+9$에서 $-2x\leq 8$ $\quad\therefore x\geq -4$

따라서 처음 부등식의 해는 $-4\leq x<2$이다.

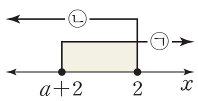
11 답 ②

유형 07 해를 갖거나 갖지 않는 연립일차부등식

$x+2\leq 2x-a$에서 $-x\leq -a-2$ $\quad\therefore x\geq a+2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$3x-2\leq 12-4x$에서 $7x\leq 14$ $\quad\therefore x\leq 2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

이때 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$a+2\leq 2$ $\quad\therefore a\leq 0$

따라서 상수 a의 최댓값은 0이다.

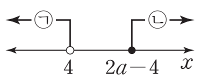
12 답 ⑤

유형 07 해를 갖거나 갖지 않는 연립일차부등식

$0.5x-2<0.1x-\frac{2}{5}$에서 $5x-20<x-4$ $\quad\therefore x<4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$3x+4\geq 2x+2a$에서 $x\geq 2a-4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

이때 연립부등식의 해가 없으므로 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$2a-4\geq 4$ $\quad\therefore a\geq 4$

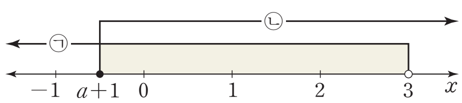
13 답 ②

유형 08 정수인 해의 개수가 주어진 연립일차부등식

$3x-2<x+4$에서 $2x<6$ $\quad\therefore x<3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$2x-1\geq x+a$에서 $x\geq a+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

이때 연립부등식을 만족하는 정수 x가 3개이므로 다음 그림에서



$-1<a+1\leq 0$ $\quad\therefore -2<a\leq -1$

따라서 정수 a의 값은 -1이다.

14 답 ③

유형 09 연립일차부등식의 활용

연속하는 세 홀수를 $x-2$, x, $x+2$라고 하면

$93<(x-2)+x+(x+2)<102$, $93<3x<102$ $\quad\therefore 31<x<34$

이때 x는 홀수이므로 $x=33$

따라서 연속하는 세 홀수는 31, 33, 35이므로 가장 큰 수는 35이다.

15 답 ①

유형 09 연립일차부등식의 활용

상자의 개수를 x라고 하면 사과의 개수는 $(12x+5)$이므로

$15(x-3)+1\leq 12x+5\leq 15(x-3)+15$

$15(x-3)+1\leq 12x+5$에서 $3x\leq 49$ $\quad\therefore x\leq\frac{49}{3}$

$12x+5\leq 15(x-3)+15$에서 $-3x\leq -35$ $\quad\therefore x\geq\frac{35}{3}$

$\therefore \frac{35}{3}\leq x\leq\frac{49}{3}$

따라서 상자의 개수가 될 수 있는 것은 12, 13, 14, 15, 16이다.

16 답 ③

유형 10 부등식 $|ax+b|<c$의 풀이

$|x-a|\geq 2$에서 $x-a\leq -2$ 또는 $x-a\geq 2$

$\therefore x\leq a-2$ 또는 $x\geq a+2$

이때 부등식의 해가 $x\leq b$ 또는 $x\geq 3$이므로

$a-2=b$, $a+2=3$ $\quad\therefore a=1$, $b=-1$

$\therefore ab=-1$

17 답 ⑤

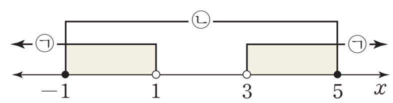
유형 10 부등식 $|ax+b|<c$의 풀이

$1<|x-2|$에서 $x-2<-1$ 또는 $x-2>1$

$\therefore x<1$ 또는 $x>3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$|x-2|\leq 3$에서 $-3\leq x-2\leq 3$

$\therefore -1\leq x\leq 5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡



즉, 주어진 부등식의 해는 $-1\leq x<1$ 또는 $3<x\leq 5$

따라서 구하는 정수 x는 -1, 0, 4, 5이므로 합은 8이다.

18 답 ③

유형 11 부등식 $|ax+b|<cx+d$의 풀이

$5-x=0$, 즉 $x=5$를 기준으로 구간을 나누면

(i) $x<5$일 때

$5-x\leq 9-x$에서 $0\cdot x\leq 4$이므로 부등식의 해는 모든 실수이다.

그런데 $x<5$이므로 $x<5$

(ii) $x\geq 5$일 때

$-(5-x)\leq 9-x$, $2x\leq 14$ $\quad\therefore x\leq 7$

그런데 $x\geq 5$이므로 $5\leq x\leq 7$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $x\leq 7$

따라서 정수 x의 최댓값은 7이다.

19 답 ③

유형 12 절댓값 기호가 두 개인 부등식의 풀이

$x+4=0$, $x=0$, 즉 $x=-4$, $x=0$을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x<-4$일 때

$-x-(x+4)<5$, $-2x<9$ $\quad\therefore x>-\frac{9}{2}$

그런데 $x<-4$이므로 $-\frac{9}{2}<x<-4$

(ii) $-4\leq x<0$일 때

$-x+(x+4)<5$에서 $0\cdot x<1$이므로 부등식의 해는 모든 실수이다.

그런데 $-4\leq x<0$이므로 $-4\leq x<0$

(iii) $x\geq 0$일 때

$x+(x+4)<5$, $2x<1$ $\quad\therefore x<\frac{1}{2}$

그런데 $x\geq 0$이므로 $0\leq x<\frac{1}{2}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $-\frac{9}{2}<x<\frac{1}{2}$

따라서 정수 x의 최솟값은 -4이다.

08 이차부등식

핵심 유형

	유형01 $\frac{4}{5}<x<\frac{5}{2}$	유형02 ①
유형03 -8	유형04 $-1\le x\le 0$	유형05 3
유형06 2	유형07 ②	유형08 ①
유형09 $-6<k<-2$		유형10 $a<-2$ 또는 $a>1$
유형11 7	유형12 $0<a<8$	유형13 4
유형14 4	유형15 ④	유형16 5
유형17 $4<a\le 5$		유형18 5, 6, 7
유형19 5	유형20 ③	유형21 ①

핵심 유형 완성하기

001 $x\le\frac{3}{2}$ 또는 $x\ge\frac{7}{2}$　002 ②
003 $-3<x<-2$ 또는 $1<x<2$　004 ①　005 ③
006 ④　007 $x\ne-4$인 모든 실수
008 $-1\le x\le 5$　009 ①　010 ③
011 -14　012 ④　013 $-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{3}$
014 $x\le 1$ 또는 $x\ge 2$　015 ③　016 2　017 ④
018 6　019 ①　020 ⑤　021 ①　022 ②
023 ②　024 ③　025 ⑤　026 ②　027 ③
028 ④　029 ④　030 ①　031 ②
032 $k\le -2$　033 ④　034 ②　035 ②
036 ④　037 ⑤　038 ③　039 ①　040 ①
041 ②　042 ①　043 ①　044 ④
045 $\frac{2}{5}\le t\le 1$　046 4　047 ①　048 4
049 ①　050 $-3<x<4$　051 ④
052 $-4\le p\le 3$　053 ③　054 1
055 $3\le a<4$　056 ①　057 ⑤　058 ⑤
059 $1\le x\le 2$　060 $3\le x\le 4$ 또는 $6\le x\le 7$
061 $a\le -5$ 또는 $a\ge 5$　062 2　063 ③
064 1, 2, 3, 4　065 $k<-1$ 또는 $0<k<1$
066 ②　067 ①　068 $2<k<\frac{11}{5}$

핵심 유형 최종 점검하기

1 ③　2 ㄷ, ㄹ　3 $x<-3$ 또는 $x>5$　4 ②
5 $x<-2$ 또는 $x>0$　6 ③　7 2　8 ⑤
9 $-3<k<-1$　10 ⑤　11 ⑤　12 -5
13 ②　14 ②　15 ③　16 ①　17 ⑤
18 ⑤　19 $\frac{1}{2}\le x\le\frac{5}{2}$　20 ②　21 6
22 ①

핵심 유형　128~130쪽

유형01 답 $\frac{4}{5}<x<\frac{5}{2}$

부등식 $f(x)<g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프에서 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$\frac{4}{5}<x<\frac{5}{2}$

유형02 답 ①

$x^2-3x-3\ge 1$에서 $x^2-3x-4\ge 0$

$(x+1)(x-4)\ge 0$　　$\therefore x\le -1$ 또는 $x\ge 4$

따라서 $a=-1$, $b=4$이므로

$a-b=-5$

유형03 답 -8

$ax^2-2x+b>0$의 해가 $x<-2$ 또는 $x>4$이므로

$a>0$

이때 해가 $x<-2$ 또는 $x>4$이고 x^2의 계수가 a인 이차부등식은

$a(x+2)(x-4)>0$, $a(x^2-2x-8)>0$

$\therefore ax^2-2ax-8a>0$

이 부등식이 $ax^2-2x+b>0$이므로

$-2a=-2$, $-8a=b$　　$\therefore a=1$, $b=-8$

$\therefore ab=-8$

유형04 답 $-1\le x\le 0$

이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $1<x<3$이므로

$f(x)=a(x-1)(x-3)$ $(a<0)$이라고 하면

$f(2x+3)=a(2x+3-1)(2x+3-3)=4ax(x+1)$

$f(2x+3)\ge 0$에서 $4ax(x+1)\ge 0$ $(a<0)$이므로

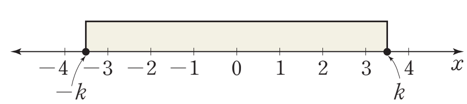
$x(x+1)\le 0$　　$\therefore -1\le x\le 0$

유형05 답 3

$x^2-k^2\le 0$에서 $(x+k)(x-k)\le 0$

$\therefore -k\le x\le k$

주어진 이차부등식을 만족하는 정수 x가 7개이므로 다음 그림에서



$3\le k<4$

따라서 자연수 k의 값은 3이다.

유형06 답 2

이차방정식 $2x^2+4x+a=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=2^2-2a=0$, $-2a+4=0$

$\therefore a=2$

유형07 답 ②

이차부등식 $ax^2+2ax-4>0$에서

(i) $a>0$일 때

주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a<0$일 때

이차방정식 $ax^2+2ax-4=0$의 판별식을 D라고 하면 $D>0$이어야 하므로 $\frac{D}{4}=a^2-a\times(-4)>0$

$a(a+4)>0$ $\quad\therefore a<-4$ 또는 $a>0$

그런데 $a<0$이므로 $a<-4$

(i), (ii)에 의하여 실수 a의 값의 범위는 $a<-4$ 또는 $a>0$

따라서 실수 a의 값이 아닌 것은 ② -4이다.

유형08 답 ①

이차부등식 $ax^2+6x+a-8<0$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하려면 $a<0$이어야 한다. 또 이차방정식 $ax^2+6x+a-8=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D<0$이어야 하므로 $\frac{D}{4}=3^2-a(a-8)<0$

$a^2-8a-9>0$, $(a+1)(a-9)>0$ $\quad\therefore a<-1$ 또는 $a>9$

그런데 $a<0$이므로 $a<-1$

따라서 정수 a의 최댓값은 -2이다.

유형09 답 $-6<k<-2$

이차부등식 $x^2-2(k+2)x-4(k+2)\le0$이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2(k+2)x-4(k+2)>0$이 성립해야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2-2(k+2)x-4(k+2)=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D<0$이어야 하므로 $\frac{D}{4}=(k+2)^2+4(k+2)\le0$

$k^2+8k+12<0$, $(k+6)(k+2)<0$ $\quad\therefore -6<k<-2$

참고 이차부등식이 해를 갖지 않을 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라고 할 때

(1) $ax^2+bx+c>0$이 해를 갖지 않을 조건 ➡ $a<0$, $D\le0$

(2) $ax^2+bx+c\ge0$이 해를 갖지 않을 조건 ➡ $a<0$, $D<0$

(3) $ax^2+bx+c<0$이 해를 갖지 않을 조건 ➡ $a>0$, $D\le0$

(4) $ax^2+bx+c\le0$이 해를 갖지 않을 조건 ➡ $a>0$, $D<0$

유형10 답 $a<-2$ 또는 $a>1$

$f(x)=x^2-4x+a^2+a+2$라고 하면 $f(x)=(x-2)^2+a^2+a-2$

$0\le x\le4$에서 $f(x)$는 $x=2$일 때 최소이므로 $f(x)>0$이려면 $f(2)>0$이어야 한다.

$a^2+a-2>0$, $(a+2)(a-1)>0$ $\quad\therefore a<-2$ 또는 $a>1$

유형11 답 7

$x^2-ax+7>2x-2$에서 $x^2-(a+2)x+9>0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 해가 $x<3$ 또는 $x>b$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-3)(x-b)>0$ $\quad\therefore x^2-(3+b)x+3b>0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a+2=3+b$, $9=3b$ $\quad\therefore a=4$, $b=3$

$\therefore a+b=7$

유형12 답 $0<a<8$

이차함수 $y=2x^2+4x-1$의 그래프가 직선 $y=ax-3$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $2x^2+4x-1>ax-3$, 즉 $2x^2+(4-a)x+2>0$이 성립해야 한다.

즉, 이차방정식 $2x^2+(4-a)x+2=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D<0$이어야 하므로

$D=(4-a)^2-4\times2\times2<0$

$a^2-8a<0$, $a(a-8)<0$ $\quad\therefore 0<a<8$

유형13 답 4

주어진 식 $x^2+2x+y^2-15=0$을 x에 대한 이차방정식으로 생각하면 이 이차방정식을 만족하는 실수 x가 존재해야 한다.

즉, 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D\ge0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=1-(y^2-15)\ge0$

$y^2-16\le0$, $(y+4)(y-4)\le0$ $\quad\therefore -4\le y\le4$

따라서 y의 최댓값은 4이다.

유형14 답 4

가로의 길이를 x라고 하면 세로의 길이는 $(10-x)$이므로 직사각형의 넓이는

$x(10-x)=-x^2+10x$

즉, $-x^2+10x\ge24$에서 $x^2-10x+24\le0$

$(x-4)(x-6)\le0$ $\quad\therefore 4\le x\le6$

그런데 $0<x<10$이므로 가로의 길이의 최솟값은 4이다.

핵심 유형 완성하기 131~137쪽

001 답 $x\le\frac{3}{2}$ 또는 $x\ge\frac{7}{2}$

부등식 $f(x)\ge g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프에서 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x\le\frac{3}{2}$ 또는 $x\ge\frac{7}{2}$

002 답 ②

이차부등식 $ax^2+(b-m)x+c-n>0$에서 $ax^2+bx+c>mx+n$

즉, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$-\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$

003 답 $-3<x<-2$ 또는 $1<x<2$

$f(x)g(x)>0$에서

$f(x)>0$, $g(x)>0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)<0$

(i) $f(x)>0$, $g(x)>0$일 때, $-3<x<-2$

(ii) $f(x)<0$, $g(x)<0$일 때, $1<x<2$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$-3<x<-2$ 또는 $1<x<2$

004 답 ①

$x^2+3x-13>x+2$에서 $x^2+2x-15>0$

$(x+5)(x-3)>0 \quad \therefore x<-5$ 또는 $x>3$

따라서 $a=-5$, $b=3$이므로 $a-b=-8$

005 답 ③

$x^2+2x-2\le1$에서 $x^2+2x-3\le0$

$(x+3)(x-1)\le0 \quad \therefore -3\le x\le1$

따라서 구하는 정수 x는 -3, -2, -1, 0, 1이므로 합은 -5이다.

006 답 ④

① $-x^2+10x-25\ge0$에서 $x^2-10x+25\le0$

$(x-5)^2\le0 \quad \therefore x=5$

② $-x^2+x+12<0$에서 $x^2-x-12>0$

$(x+3)(x-4)>0 \quad \therefore x<-3$ 또는 $x>4$

③ $x^2-4x+2\le0$에서 $(x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2})\le0$

$\therefore 2-\sqrt{2}\le x\le2+\sqrt{2}$

④ 이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times3=-2<0$이므로 해는 없다.

⑤ 이차방정식 $2x^2-3x+2=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-3)^2-4\times2\times2=-7<0$이므로 해는 모든 실수이다.

따라서 해가 없는 것은 ④이다.

007 답 $x\neq-4$인 모든 실수

$3(x^2+4)>2x^2-8x-4$에서 $x^2+8x+16>0$, $(x+4)^2>0$

따라서 주어진 부등식의 해는 $x\neq-4$인 모든 실수이다.

008 답 $-1\le x\le5$

$x+1=0$, 즉 $x=-1$을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x<-1$일 때

$x^2-3x-4\le-(x+1)$, $x^2-2x-3\le0$

$(x+1)(x-3)\le0 \quad \therefore -1\le x\le3$

그런데 $x<-1$이므로 해는 없다.

(ii) $x\ge-1$일 때

$x^2-3x-4\le x+1$, $x^2-4x-5\le0$

$(x+1)(x-5)\le0 \quad \therefore -1\le x\le5$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $-1\le x\le5$

009 답 ①

$|x^2+x-1|<5$에서 $-5<x^2+x-1<5$

$-5<x^2+x-1$에서 $x^2+x+4>0$

이차방정식 $x^2+x+4=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=1^2-4\times1\times4=-15<0$이므로 부등식의 해는 모든 실수이다.

또 $x^2+x-1<5$에서 $x^2+x-6<0$

$(x+3)(x-2)<0 \quad \therefore -3<x<2$

즉, 주어진 부등식의 해는 $-3<x<2$

따라서 $a=-3$, $b=2$이므로 $ab=-6$이다.

010 답 ③

이차부등식 $ax^2+3x+b>0$의 해가 $-\frac{1}{2}<x<2$이므로 $a<0$

이때 해가 $-\frac{1}{2}<x<2$이고 x^2의 계수가 a인 이차부등식은

$a\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)>0$, $a\left(x^2-\frac{3}{2}x-1\right)>0$

$\therefore ax^2-\frac{3}{2}ax-a>0$

이 부등식이 $ax^2+3x+b>0$이므로

$-\frac{3}{2}a=3$, $-a=b \quad \therefore a=-2$, $b=2$

$\therefore a+b=0$

011 답 -14

해가 $-8<x<b$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+8)(x-b)<0 \quad \therefore x^2+(8-b)x-8b<0$

이 부등식이 $x^2+6x+a<0$이므로

$8-b=6$, $a=-8b \quad \therefore a=-16$, $b=2$

$\therefore a+b=-14$

012 답 ④

해가 $x=-2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)^2\le0 \quad \therefore x^2+4x+4\le0$

이 부등식이 $x^2+ax+b\le0$이므로

$a=4$, $b=4$

즉, 이차부등식 $4x^2-4x-24<0$에서

$x^2-x-6<0$, $(x+2)(x-3)<0$

$\therefore -2<x<3$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2의 4개이다.

013 답 $-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{3}$

이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해가 $x<-3$ 또는 $x>4$이므로

$a<0$

이때 해가 $x<-3$ 또는 $x>4$이고 x^2의 계수가 a인 이차부등식은

$a(x+3)(x-4)<0$, $a(x^2-x-12)<0$

$\therefore ax^2-ax-12a<0$

이 부등식이 $ax^2+bx+c<0$이므로

$b=-a$, $c=-12a$

즉, 부등식 $-12ax^2+ax+a<0$에서

$-a(12x^2-x-1)<0$, $12x^2-x-1<0$ ($\because a<0$)

$(4x+1)(3x-1)<0 \quad \therefore -\frac{1}{4}<x<\frac{1}{3}$

014 답 $x\le1$ 또는 $x\ge2$

이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $1<x<3$이므로

$f(x)=a(x-1)(x-3)$ $(a<0)$이라고 하면

$f(2x-1)=a(2x-1-1)(2x-1-3)$

$=4a(x-1)(x-2)$

$f(2x-1)\le0$에서 $4a(x-1)(x-2)\le0$ $(a<0)$이므로

$(x-1)(x-2)\ge0 \quad \therefore x\le1$ 또는 $x\ge2$

015 답 ③

이차부등식 $f(x)\le 0$의 해가 $-5\le x\le -3$이므로

$f(x)=a(x+3)(x+5)$ $(a>0)$라고 하면

$f(10-2x)=a(10-2x+3)(10-2x+5)$

$\qquad\qquad=a(2x-13)(2x-15)$

$f(10-2x)>0$에서 $a(2x-13)(2x-15)>0$ $(a>0)$이므로

$(2x-13)(2x-15)>0 \qquad \therefore\ x<\frac{13}{2}$ 또는 $x>\frac{15}{2}$

따라서 해가 아닌 것은 ③ 7이다.

016 답 2

이차부등식 $f(x)<0$의 해가 $x<-2$ 또는 $x>3$이므로

$f(x)=a(x+2)(x-3)$ $(a<0)$이라고 하면

$f(-x)=a(-x+2)(-x-3)=a(x-2)(x+3)$

$f(-x)\ge 0$에서 $a(x-2)(x+3)\ge 0$ $(a<0)$이므로

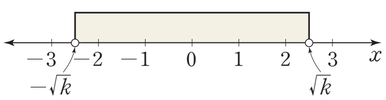
$(x-2)(x+3)\le 0 \qquad \therefore\ -3\le x\le 2$

따라서 자연수 x는 1, 2의 2개이다.

017 답 ④

$x^2-k<0$에서 $(x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k})<0 \qquad \therefore\ -\sqrt{k}<x<\sqrt{k}$

주어진 이차부등식을 만족하는 정수 x가 5개이므로



$2<\sqrt{k}\le 3 \qquad \therefore\ 4<k\le 9$

따라서 정수 k의 최댓값은 9, 최솟값은 5이므로

$M=9$, $m=5 \qquad \therefore\ M+m=14$

018 답 6

$x^2-(k+1)x+k\le 0$에서 $(x-1)(x-k)\le 0$

(i) $k=1$일 때

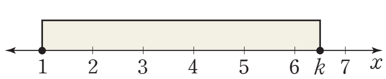
$(x-1)^2\le 0$

주어진 이차부등식을 만족하는 정수 x는 1의 한 개뿐이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

(ii) $k>1$일 때

$1\le x\le k$

주어진 이차부등식을 만족하는 정수 x가 6개이므로



$6\le k<7$

(i), (ii)에 의하여 자연수 k의 값은 6이다.

019 답 ①

$x^2+(k+1)x-k-2\le 0$에서 $(x-1)(x+k+2)\le 0$

(i) $-k-2=1$, 즉 $k=-3$일 때

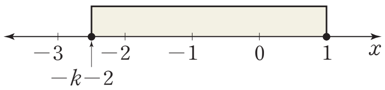
$(x-1)^2\le 0$

주어진 이차부등식을 만족하는 정수 x는 1뿐이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

(ii) $-k-2<1$, 즉 $k>-3$일 때

$-k-2\le x\le 1$

주어진 이차부등식을 만족하는 정수 x가 4개이므로



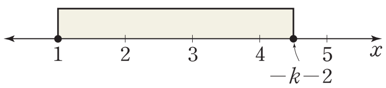
$-3<-k-2\le -2$, $-1<-k\le 0$

$\therefore\ 0\le k<1$

(iii) $-k-2>1$, 즉 $k<-3$일 때

$1\le x\le -k-2$

주어진 이차부등식을 만족하는 정수 x가 4개이므로



$4\le -k-2<5$, $6\le -k<7$

$\therefore\ -7<k\le -6$

(i), (ii), (iii)에 의하여 정수 k의 값은 0, -6이므로 합은 -6이다.

020 답 ⑤

이차방정식 $2x^2-(k+3)x+2k=0$의 판별식을 D라고 할 때

$D=0$이어야 하므로

$D=(k+3)^2-4\times 2\times 2k=0$

$k^2-10k+9=0$, $(k-1)(k-9)=0$

$\therefore\ k=1$ 또는 $k=9$

따라서 k의 값의 합은 10이다.

021 답 ①

이차부등식 $(k+1)x^2+2(k+1)x+2\le 0$의 해가 1개이므로

$k+1>0 \qquad \therefore\ k>-1$

또 이차방정식 $(k+1)x^2+2(k+1)x+2=0\,(k\ne -1)$의 판별식을 D라고 할 때 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(k+1)^2-2(k+1)=0$

$k^2-1=0$, $k^2=1 \qquad \therefore\ k=\pm 1$

그런데 $k>-1$이므로 $k=1$이다.

022 답 ②

이차부등식 $(2-a)x^2+2(a-2)x+3>0$을 만족하지 않는 x의 값이 오직 한 개이면 $(2-a)x^2+2(a-2)x+3\le 0$의 해가 1개이므로

$2-a>0 \qquad \therefore\ a<2$

또 이차방정식 $(2-a)x^2+2(a-2)x+3=0\,(a\ne 2)$의 판별식을 D라고 할 때 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-3(2-a)=0$

$a^2-a-2=0$, $(a+1)(a-2)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=2$

그런데 $a<2$이므로 $a=-1$이다.

023 답 ②

이차부등식 $ax^2-2ax-6>0$에서

(i) $a>0$일 때

주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a<0$일 때

이차방정식 $ax^2-2ax-6=0$의 판별식을 D라고 하면 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2-a\times(-6)>0$, $a^2+6a>0$

$a(a+6)>0$ $\therefore$ $a<-6$ 또는 $a>0$

그런데 $a<0$이므로 $a<-6$

(i), (ii)에 의하여 a의 값의 범위는 $a<-6$ 또는 $a>0$

따라서 실수 a의 값이 아닌 것은 ② -4이다.

024 답 ③

이차부등식 $3x^2-2x-a<0$이 해를 가지려면 이차방정식 $3x^2-2x-a=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=1-3\times(-a)>0$, $3a+1>0$ $\therefore$ $a>-\frac{1}{3}$

따라서 정수 a의 최솟값은 0이다.

025 답 ⑤

이차부등식 $ax^2-4x+a>0$에서

(i) $a>0$일 때

주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a<0$일 때

이차방정식 $ax^2-4x+a=0$의 판별식을 D라고 하면 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-2)^2-a^2>0$, $(a+2)(a-2)<0$ $\therefore$ $-2<a<2$

그런데 $a<0$이므로 $-2<a<0$

(i), (ii)에 의하여 a의 값의 범위는 $-2<a<0$ 또는 $a>0$

따라서 음의 정수 a의 값은 -1이다.

026 답 ②

이차부등식 $ax^2-4x+a-3\le0$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하려면 $a<0$이어야 한다.

또 이차방정식 $ax^2-4x+a-3=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D\le0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-2)^2-a(a-3)\le0$, $a^2-3a-4\ge0$

$(a+1)(a-4)\ge0$ $\therefore$ $a\le-1$ 또는 $a\ge4$

그런데 $a<0$이므로 $a\le-1$

따라서 실수 a의 최댓값은 -1이다.

027 답 ③

이차방정식 $x^2-3ax+9=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D\le0$이어야 하므로 $D=(-3a)^2-4\times9\le0$

$(a+2)(a-2)\le0$ $\therefore$ $-2\le a\le2$

028 답 ④

부등식 $(a-1)x^2+2(a-1)x+4a+2>0$에서

(i) $a=1$일 때

x의 값에 관계없이 부등식이 항상 성립한다.

(ii) $a\ne1$일 때

$a-1>0$에서 $a>1$

또 이차방정식 $(a-1)x^2+2(a-1)x+4a+2=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-(a-1)(4a+2)<0$, $-3a^2+3<0$

$(a+1)(a-1)>0$ $\therefore$ $a<-1$ 또는 $a>1$

그런데 $a>1$이므로 $a>1$

(i), (ii)에 의하여 a의 값의 범위는 $a\ge1$

따라서 실수 a의 최솟값은 1이다.

029 답 ④

$ax^2-2x>-ax+2$에서 $ax^2+(a-2)x-2>0$

이 이차부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+(a-2)x-2\le0$이 성립해야 하므로 $a<0$이어야 한다.

또 이차방정식 $ax^2+(a-2)x-2=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D\le0$이어야 하므로 $D=(a-2)^2-4\times a\times(-2)\le0$

$a^2+4a+4\le0$, $(a+2)^2\le0$ $\therefore$ $a=-2$

그런데 $a<0$이므로 구하는 실수 a의 값은 -2이다.

030 답 ①

이차부등식 $x^2-4(a+2)x-a-2<0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-4(a+2)x-a-2\ge0$이 성립해야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2-4(a+2)x-a-2=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D\le0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=4(a+2)^2+(a+2)\le0$, $4a^2+17a+18\le0$

$(4a+9)(a+2)\le0$ $\therefore$ $-\frac{9}{4}\le a\le-2$

따라서 정수 a의 값은 -2이다.

031 답 ②

이차부등식 $x^2-2(a+2)x-a-2\le0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2(a+2)x-a-2>0$이 성립해야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2-2(a+2)x-(a+2)=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D<0$이어야 하므로 $\frac{D}{4}=(a+2)^2+(a+2)<0$

$a^2+5a+6<0$, $(a+3)(a+2)<0$ $\therefore$ $-3<a<-2$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=-2$이므로 $\alpha-\beta=-1$

032 답 $k\le-2$

$f(x)=x^2-6x+5-2k$라고 하면 $f(x)=(x-3)^2-2k-4$

$1\le x\le3$에서 $f(x)$는 $x=3$일 때 최소이므로 $f(x)\ge0$이려면 $f(3)\ge0$이어야 한다.

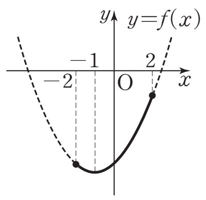
$-2k-4\ge0$, $2k\le-4$ $\therefore$ $k\le-2$

033 답 ④

$f(x)=2x^2+4x+a^2+3a-20$이라고 하면

$f(x)=2(x+1)^2+a^2+3a-22$

$-2\le x\le 2$에서 $f(x)$는 $x=2$일 때 최대이므로 $f(x)<0$이려면 $f(2)<0$이어야 한다.



$18+a^2+3a-22<0,\ a^2+3a-4<0$

$(a+4)(a-1)<0 \qquad \therefore -4<a<1$

따라서 정수 a의 최댓값은 0이다.

034 답 ②

$x^2+ax-3>x-11$에서 $x^2+(a-1)x+8>0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 해가 $x<2$ 또는 $x>b$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-2)(x-b)>0 \qquad \therefore x^2-(b+2)x+2b>0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$a-1=-b-2,\ 8=2b \qquad \therefore a=-5,\ b=4$

$\therefore b-a=9$

035 답 ②

$x^2-x+4<2x+14$에서 $x^2-3x-10<0$

$(x+2)(x-5)<0 \qquad \therefore -2<x<5$

따라서 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$의 6개이다.

036 답 ④

$x^2-ax-2<b$에서 $x^2-ax-b-2<0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 해가 $1<x<4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)(x-4)<0 \qquad \therefore x^2-5x+4<0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$-a=-5,\ -b-2=4 \qquad \therefore a=5,\ b=-6$

$\therefore a-b=11$

037 답 ⑤

$2x^2-3x+a>x^2+bx-1$에서 $x^2-(b+3)x+a+1>0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 해가 $x<-1$ 또는 $x>2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-2)>0 \qquad \therefore x^2-x-2>0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$-b-3=-1,\ a+1=-2 \qquad \therefore a=-3,\ b=-2$

$\therefore ab=6$

038 답 ③

이차함수 $y=x^2+(k+2)x+2$의 그래프가 직선 $y=x+1$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여

$x^2+(k+2)x+2>x+1$, 즉 $x^2+(k+1)x+1>0$이 성립해야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2+(k+1)x+1=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D<0$이어야 하므로

$D=(k+1)^2-4<0,\ k^2+2k-3<0$

$(k+3)(k-1)<0 \qquad \therefore -3<k<1$

따라서 정수 k는 $-2,\ -1,\ 0$의 3개이다.

039 답 ①

이차함수 $y=x^2+kx-k$의 그래프와 x축이 만나지 않으려면 이차함수의 그래프가 x축보다 항상 위쪽에 있어야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $x^2+kx-k>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+kx-k=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D<0$이어야 한다.

$D=k^2-4\times(-k)<0,\ k^2+4k<0$

$k(k+4)<0 \qquad \therefore -4<k<0$

따라서 $a=-4,\ b=0$이므로

$a-b=-4$

040 답 ①

이차함수 $y=-x^2+(k+1)x-5$의 그래프가 직선 $y=x-1$보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여

$-x^2+(k+1)x-5<x-1$, 즉 $x^2-kx+4>0$이 성립해야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2-kx+4=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D<0$이어야 하므로

$D=k^2-16<0,\ (k+4)(k-4)<0$

$\therefore -4<k<4$

041 답 ②

함수 $y=ax^2-6x+6$의 그래프가 이차함수 $y=-3x^2+2ax-2$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여

$ax^2-6x+6>-3x^2+2ax-2$, 즉 $(a+3)x^2-2(a+3)x+8>0$

이 성립해야 한다.

(i) $a=-3$일 때

부등식은 항상 성립한다.

(ii) $a>-3$일 때

이차방정식 $(a+3)x^2-2(a+3)x+8=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(a+3)^2-8(a+3)<0,\ a^2-2a-15<0$

$(a+3)(a-5)<0 \qquad \therefore -3<a<5$

(i), (ii)에 의하여 a의 값의 범위는

$-3\le a<5$

따라서 실수 a의 최솟값은 -3이다.

042 답 ①

주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$-y^2+4xy-x^2+2x-1=0,\ y^2-4xy+x^2-2x+1=0$

이 식을 y에 대한 이차방정식으로 생각하면 이 이차방정식을 만족하는 실수 y가 존재해야 한다.

즉, 이 이차방정식의 판별식을 D라고 할 때 $D\ge 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=4x^2-(x^2-2x+1)\ge 0,\ 3x^2+2x-1\ge 0$

$(x+1)(3x-1)\ge 0$

$\therefore x\le -1$ 또는 $x\ge \frac{1}{3}$

따라서 자연수 x의 최솟값은 1이다.

043 답 ①

$x+y=k$라고 하면 $y=-x+k$

이것을 $2x^2+y^2=1$에 대입하면

$2x^2+(-x+k)^2=1$ $\quad\therefore 3x^2-2kx+k^2-1=0$

이 식을 x에 대한 이차방정식으로 생각하면 이 이차방정식을 만족하는 실수 x가 존재해야 한다.

즉, 이 이차방정식의 판별식을 D라고 할 때 $D\geq 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=k^2-3(k^2-1)\geq 0$, $\left(k+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(k-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\leq 0$

$\therefore -\frac{\sqrt{6}}{2}\leq k\leq \frac{\sqrt{6}}{2}$

따라서 $x+y$의 최댓값은 $\frac{\sqrt{6}}{2}$이다.

044 답 ④

$\overline{AB}=x$라고 하면 $\overline{AD}=22-x$

직사각형 ABCD의 넓이는 $x(22-x)=-x^2+22x$

즉, $-x^2+22x\geq 96$에서 $x^2-22x+96\leq 0$

$(x-6)(x-16)\leq 0$ $\quad\therefore 6\leq x\leq 16$

그런데 $0<x<22$이므로 변 AB의 길이의 최댓값은 16이다.

045 답 $\frac{2}{5}\leq t\leq 1$

공의 높이가 지면으로부터 3 m 이상이려면

$-5t^2+7t+1\geq 3$에서 $5t^2-7t+2\leq 0$

$(t-1)(5t-2)\leq 0$ $\quad\therefore \frac{2}{5}\leq t\leq 1$

046 답 4

가격을 x천 원 인상한다고 하면 양말 1켤레의 가격은 $(3+x)$천 원, 하루 판매량은 $(50-5x)$켤레가 된다.

이때 하루 판매액이 21만 원 이상이려면

$(3+x)(50-5x)\geq 210$, $-5x^2+35x-60\geq 0$

$x^2-7x+12\leq 0$ $\quad\therefore 3\leq x\leq 4$

따라서 x의 최댓값은 4이다.

핵심 유형 138~139쪽

유형15 답 ④

$3x^2-8x-16<0$에서 $(3x+4)(x-4)<0$

$\therefore -\frac{4}{3}<x<4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x^2-x-12\leq 0$에서 $(x+3)(x-4)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-\frac{4}{3}<x<4$

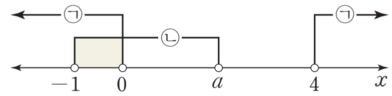
따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

유형16 답 5

$x^2-4x>0$에서 $x(x-4)>0$ $\quad\therefore x<0$ 또는 $x>4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x^2+(1-a)x-a<0$에서 $(x-a)(x+1)<0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 $-1<x<0$이 되려면 다음 그림과 같아야 한다.



$\therefore 0\leq a\leq 4$

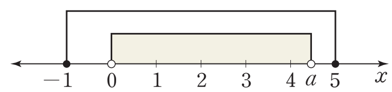
따라서 정수 a는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

유형17 답 $4<a\leq 5$

$x^2-4x-5\leq 0$에서 $(x+1)(x-5)\leq 0$ $\quad\therefore -1\leq x\leq 5$

$x^2-ax<0$에서 $x(x-a)<0$

이때 주어진 연립부등식을 만족하는 정수 x가 4개이려면 다음 그림과 같아야 한다.



$\therefore 4<a\leq 5$

유형18 답 5, 6, 7

세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $x+2$이므로

$x+2<x+(x-2)$ $\quad\therefore x>4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 삼각형이 둔각삼각형이 되려면

$(x+2)^2>x^2+(x-2)^2$, $x^2+4x+4>x^2+x^2-4x+4$

$x^2-8x<0$, $x(x-8)<0$ $\quad\therefore 0<x<8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $4<x<8$이므로 자연수 x의 값은 5, 6, 7이다.

유형19 답 5

이차방정식 $x^2+ax+\left(a+\frac{5}{4}\right)=0$의 판별식을 D라고 하면 $D<0$이어야 하므로 $D=a^2-4\left(a+\frac{5}{4}\right)<0$, $a^2-4a-5<0$

$(a+1)(a-5)<0$ $\quad\therefore -1<a<5$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

유형20 답 ③

이차방정식 $x^2-2kx+2k^2-1=0$의 판별식을 D, 두 실근을 α, β라고 하면 두 근이 모두 양수이므로

(i) $\frac{D}{4}=k^2-(2k^2-1)\geq 0$, $(k+1)(k-1)\leq 0$ $\quad\therefore -1\leq k\leq 1$

(ii) $\alpha+\beta=2k>0$에서 $k>0$

(iii) $\alpha\beta=2k^2-1>0$에서 $\left(k+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(k-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)>0$

$\quad\therefore k<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $k>\frac{\sqrt{2}}{2}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 실수 k의 값의 범위는 $\frac{\sqrt{2}}{2}<k\leq 1$

유형21 답 ①

$f(x)=x^2-2kx+9$라고 하면

(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라고 할 때 $\frac{D}{4}=k^2-9\geq 0$

$\quad(k+3)(k-3)\geq 0$ $\quad\therefore k\leq -3$ 또는 $k\geq 3$

(ii) $f(2)>0$이므로 $4-4k+9>0$, $4k<13$ $\quad\therefore k<\frac{13}{4}$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k$이므로 $k<2$

(i), (ii), (iii)에 의하여 k의 값의 범위는 $k\leq -3$

따라서 실수 k의 최댓값은 -3이다.

047 답 ①

$x^2+6x-7\le 0$에서 $(x+7)(x-1)\le 0$

$\therefore\ -7\le x\le 1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x^2+3x-10>0$에서 $(x+5)(x-2)>0$

$\therefore\ x<-5$ 또는 $x>2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-7\le x<-5$

따라서 $a=-7$, $b=-5$이므로 $a-b=-2$

048 답 4

$3(x-2)\le 5x-2$에서 $3x-6\le 5x-2$

$\therefore\ x\ge -2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$4x^2-7x-15<0$에서 $(4x+5)(x-3)<0$

$\therefore\ -\frac{5}{4}<x<3$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-\frac{5}{4}<x<3$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2의 4개이다.

049 답 ①

$5x\le 2x^2+2$에서 $2x^2-5x+2\ge 0$

$(2x-1)(x-2)\ge 0$ $\therefore\ x\le\frac{1}{2}$ 또는 $x\ge 2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$2x^2+2<2x+6$에서 $x^2-x-2<0$

$(x+1)(x-2)<0$ $\therefore\ -1<x<2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-1<x\le\frac{1}{2}$

따라서 x의 값이 아닌 것은 ① -1이다.

050 답 $-3<x<4$

$x^2-2x-15<0$에서

$(x+3)(x-5)<0$ $\therefore\ -3<x<5$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x^2-3|x|-4<0$에서

(i) $x<0$일 때

$x^2+3x-4<0$, $(x+4)(x-1)<0$ $\therefore\ -4<x<1$

그런데 $x<0$이므로 $-4<x<0$

(ii) $x\ge 0$일 때

$x^2-3x-4<0$, $(x+1)(x-4)<0$ $\therefore\ -1<x<4$

그런데 $x\ge 0$이므로 $0\le x<4$

(i), (ii)에 의하여 $x^2-3|x|-4<0$의 해는

$-4<x<4$ $\cdots\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-3<x<4$

다른 풀이 $x^2-3|x|-4<0$에서

$x^2=|x|^2$이므로 $|x|^2-3|x|-4<0$

$(|x|+1)(|x|-4)<0$ $\therefore\ -1<|x|<4$

그런데 $|x|\ge 0$이므로 $0\le|x|<4$

즉, $|x|<4$에서 $-4<x<4$

051 답 ④

$x^2-7x+12\le 0$의 해를 구하면

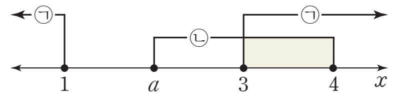
$(x-3)(x-4)\le 0$ $\therefore\ 3\le x\le 4$

$x^2-4x+3\ge 0$에서 $(x-1)(x-3)\ge 0$

$\therefore\ x\le 1$ 또는 $x\ge 3$ $\cdots\cdots$ ㉠

주어진 연립부등식에서 $(x-4)(x-a)\le 0$ $\cdots\cdots$ ㉡

이때 ㉠, ㉡의 공통부분이 $3\le x\le 4$이려면 다음 그림과 같아야 한다.



$\therefore\ 1<a\le 3$

따라서 상수 a의 최댓값은 3이다.

052 답 $-4\le p\le 3$

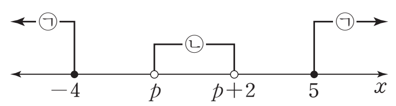
$x^2-x-20\ge 0$에서 $(x+4)(x-5)\ge 0$

$\therefore\ x\le -4$ 또는 $x\ge 5$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x^2-2(p+1)x+p^2+2p<0$에서 $(x-p)(x-p-2)<0$

$\therefore\ p<x<p+2$ $\cdots\cdots$ ㉡

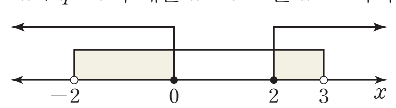
이때 ㉠, ㉡의 공통부분이 없으려면 다음 그림과 같아야 한다.



$p\ge -4$이고 $p+2\le 5$ $\therefore\ -4\le p\le 3$

053 답 ③

연립부등식의 해가 $-2<x\le 0$ 또는 $2\le x<3$이려면 다음 그림과 같이 부등식 $x^2-x-p<0$의 해는 $-2<x<3$이고, 부등식 $x^2-2x+q\ge 0$의 해는 $x\le 0$ 또는 $x\ge 2$이어야 한다.



즉, $(x+2)(x-3)<0$에서 $x^2-x-6<0$이므로 $p=6$

또 $x(x-2)\ge 0$에서 $x^2-2x\ge 0$이므로 $q=0$

$\therefore\ p-q=6$

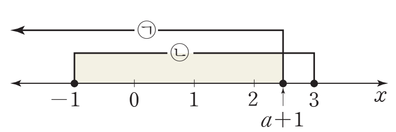
054 답 1

$x-a\le 1$에서 $x\le a+1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x^2-2x\le 3$에서 $x^2-2x-3\le 0$

$(x+1)(x-3)\le 0$ $\therefore\ -1\le x\le 3$ $\cdots\cdots$ ㉡

이때 ㉠, ㉡의 공통부분에 포함되는 모든 정수 x의 값의 합이 2가 되려면 다음 그림과 같아야 한다.



$2\le a+1<3$ $\therefore\ 1\le a<2$

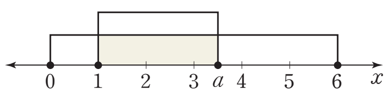
따라서 정수 a의 값은 1이다.

055 답 $3\le a<4$

$x^2-6x\le 0$에서 $x(x-6)\le 0$ $\quad\therefore 0\le x\le 6$

$x^2-(a+1)x+a\le 0$에서 $(x-a)(x-1)\le 0$

이때 주어진 연립부등식을 만족하는 정수 x가 3개이려면 다음 그림과 같아야 한다.



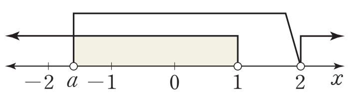
$\therefore 3\le a<4$

056 답 ①

$x^2-3x+2>0$에서 $(x-1)(x-2)>0$ $\quad\therefore x<1$ 또는 $x>2$

$x^2-(a+2)x+2a<0$에서 $(x-a)(x-2)<0$

이때 주어진 연립부등식을 만족하는 정수 x의 값이 -1과 0뿐이려면 다음 그림과 같아야 한다.



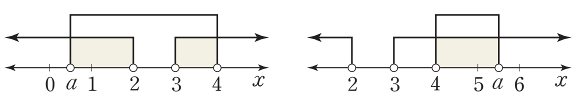
$\therefore -2\le a<-1$

057 답 ⑤

$x^2-5x+6>0$에서 $(x-2)(x-3)>0$ $\quad\therefore x<2$ 또는 $x>3$

$x^2-(a+4)x+4a<0$에서 $(x-a)(x-4)<0$

이때 주어진 연립부등식을 만족하는 정수 x가 오직 한 개뿐이려면 다음 그림과 같은 2가지 경우이어야 한다.



$\therefore 0\le a<1$ 또는 $5<a\le 6$

따라서 상수 a의 최댓값은 6이다.

058 답 ⑤

세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $x+3$이므로

$x+3<x+(x-3)$ $\quad\therefore x>6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 삼각형이 예각삼각형이 되려면

$(x+3)^2<x^2+(x-3)^2$, $x^2+6x+9<x^2+x^2-6x+9$

$x^2-12x>0$, $x(x-12)>0$ $\quad\therefore x<0$ 또는 $x>12$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $x>12$

따라서 자연수 x의 최솟값은 13이다.

059 답 $1\le x\le 2$

보행자 통로의 넓이는

$(2x+30)(2x+20)-30\times 20=4x^2+100x\ (\mathrm{m}^2)$

이 통로의 넓이가 104 m^2 이상 216 m^2 이하이므로

$104\le 4x^2+100x\le 216$ $\quad\therefore 26\le x^2+25x\le 54$

$26\le x^2+25x$에서 $x^2+25x-26\ge 0$

$(x+26)(x-1)\ge 0$ $\quad\therefore x\le -26$ 또는 $x\ge 1$

그런데 $x>0$이므로 $x\ge 1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x^2+25x\le 54$에서 $x^2+25x-54\le 0$

$(x+27)(x-2)\le 0$ $\quad\therefore -27\le x\le 2$

그런데 $x>0$이므로 $0<x\le 2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 구하는 x의 값의 범위는 $1\le x\le 2$

060 답 $3\le x\le 4$ 또는 $6\le x\le 7$

직사각형의 가로의 길이가 x이므로 세로의 길이는 $(10-x)$이다.

이때 이 직사각형의 넓이가 21 이상 24 이하이므로

$21\le x(10-x)\le 24$ $\quad\therefore 21\le -x^2+10x\le 24$

$21\le -x^2+10x$에서 $x^2-10x+21\le 0$

$(x-3)(x-7)\le 0$ $\quad\therefore 3\le x\le 7$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$-x^2+10x\le 24$에서 $x^2-10x+24\ge 0$

$(x-4)(x-6)\ge 0$ $\quad\therefore x\le 4$ 또는 $x\ge 6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 x의 값의 범위는

$3\le x\le 4$ 또는 $6\le x\le 7$

061 답 $a\le -5$ 또는 $a\ge 5$

이차방정식 $x^2+4ax+3a^2+25=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(2a)^2-(3a^2+25)\ge 0$, $(a+5)(a-5)\ge 0$

$\therefore a\le -5$ 또는 $a\ge 5$

062 답 2

이차방정식 $x^2-(a-2)x-a+\frac{5}{4}=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$D_1=(a-2)^2-4\left(-a+\frac{5}{4}\right)>0$

$(a+1)(a-1)>0$ $\quad\therefore a<-1$ 또는 $a>1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $x^2+(a+2)x+2a+1=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$D_2=(a+2)^2-4(2a+1)<0$

$a^2-4a<0$, $a(a-4)<0$ $\quad\therefore 0<a<4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $1<a<4$이므로 정수 a는 2, 3의 2개이다.

063 답 ③

이차방정식 $x^2-ax+a=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$D_1=(-a)^2-4a\ge 0$

$a^2-4a\ge 0$, $a(a-4)\ge 0$ $\quad\therefore a\le 0$ 또는 $a\ge 4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $x^2-2x-a^2+5=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-(-a^2+5)\ge 0$

$(a+2)(a-2)\ge 0$ $\quad\therefore a\le -2$ 또는 $a\ge 2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 두 이차방정식 중 적어도 하나가 실근을 가지려면

$a\le 0$ 또는 $a\ge 2$

따라서 정수 a의 값이 아닌 것은 ③ 1이다.

064 답 1, 2, 3, 4

이차방정식 $x^2+2(k+1)x-k+5=0$의 판별식을 D, 두 실근을 α, β라고 하면 두 근이 모두 음수이므로

(i) $\frac{D}{4}=(k+1)^2-(-k+5)\ge 0$, $k^2+3k-4\ge 0$

$(k+4)(k-1)\ge 0$ $\quad\therefore k\le -4$ 또는 $k\ge 1$

(ii) $\alpha+\beta=-2(k+1)<0$ $\quad\therefore k>-1$

(iii) $\alpha\beta=-k+5>0$ $\quad\therefore k<5$

(i), (ii), (iii)에 의하여 k의 값의 범위는 $1\le k<5$

따라서 자연수 k의 값은 1, 2, 3, 4이다.

065 답 $k<-1$ 또는 $0<k<1$

이차방정식 $x^2-k(k+1)x+k-1=0$의 두 실근을 α, β라고 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=k-1<0$ $\quad\therefore k<1$ ...... ㉠

또 음의 근의 절댓값이 양의 근보다 작으므로

$\alpha+\beta=k(k+1)>0$ $\quad\therefore k<-1$ 또는 $k>0$ ...... ㉡

㉠, ㉡에 의하여 실수 k의 값의 범위는

$k<-1$ 또는 $0<k<1$

066 답 ②

$f(x)=x^2-2kx+4$라고 하면

(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라고 할 때

$\frac{D}{4}=k^2-4\geq0$

$(k+2)(k-2)\geq0$ $\quad\therefore k\leq-2$ 또는 $k\geq2$

(ii) $f(1)>0$이므로 $1-2k+4>0$

$2k<5$ $\quad\therefore k<\frac{5}{2}$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k$이므로

$k>1$

(i), (ii), (iii)에 의하여 k의 값의 범위는

$2\leq k<\frac{5}{2}$

따라서 실수 k의 최솟값은 2이다.

067 답 ①

$f(x)=x^2-5x+2k^2$이라고 하면 $f(1)<0$이어야 하므로

$f(1)=1-5+2k^2<0$

$(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})<0$ $\quad\therefore -\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

따라서 $\alpha=-\sqrt{2}$, $\beta=\sqrt{2}$이므로

$\alpha\beta=-2$

068 답 $2<k<\frac{11}{5}$

$f(x)=x^2-2kx+k+2$라고 하면

(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라고 할 때 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로

$\frac{D}{4}=k^2-(k+2)>0$

$k^2-k-2>0$, $(k+1)(k-2)>0$

$\therefore k<-1$ 또는 $k>2$

(ii) $f(0)>0$이므로 $k+2>0$ $\quad\therefore k>-2$

(iii) $f(3)>0$이므로

$9-6k+k+2>0$, $5k<11$ $\quad\therefore k<\frac{11}{5}$

(iv) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k$이므로

$0<k<3$

(i)~(iv)에 의하여 실수 k의 값의 범위는

$2<k<\frac{11}{5}$

1 답 ③

유형 01 그래프를 이용한 부등식의 풀이

부등식 $f(x)\leq0$의 해는 $-3\leq x\leq2$

부등식 $g(x)\geq0$의 해는 $-2\leq x\leq4$

따라서 부등식 $f(x)\leq0\leq g(x)$의 해는 $-2\leq x\leq2$이다.

2 답 ㄷ, ㄹ

유형 02 이차부등식의 풀이

ㄱ. $3x^2-x+1\geq0$에서 이차방정식 $3x^2-x+1=0$의 판별식을 D라고 하면 $D=-11<0$이므로 부등식의 해는 모든 실수이다.

ㄴ. $x^2-8x+16\leq0$에서 $(x-4)^2\leq0$ $\quad\therefore x=4$

ㄷ. 이차방정식 $2x^2-5x+6=0$의 판별식을 D라고 하면 $D=-23<0$이므로 부등식의 해는 없다.

ㄹ. $4x^2-12x+9<0$에서 이차방정식 $4x^2-12x+9=0$의 판별식을 D라고 하면 $\frac{D}{4}=0$이므로 부등식의 해는 없다.

따라서 부등식의 해가 없는 것은 ㄷ, ㄹ이다.

3 답 $x<-3$ 또는 $x>5$

유형 02 이차부등식의 풀이

$x-1=0$, 즉 $x=1$을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x<1$일 때

$x^2-2x-3>-3(x-1)$, $x^2+x-6>0$

$(x+3)(x-2)>0$ $\quad\therefore x<-3$ 또는 $x>2$

그런데 $x<1$이므로 $x<-3$

(ii) $x\geq1$일 때

$x^2-2x-3>3(x-1)$, $x^2-5x>0$

$x(x-5)>0$ $\quad\therefore x<0$ 또는 $x>5$

그런데 $x\geq1$이므로 $x>5$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $x<-3$ 또는 $x>5$

4 답 ②

유형 03 해가 주어진 이차부등식

해가 $x\leq-1$ 또는 $x\geq3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-3)\geq0$에서 $x^2-2x-3\geq0$

이 부등식이 $x^2+2ax-b\geq0$이므로

$2a=-2$, $-b=-3$ $\quad\therefore a=-1$, $b=3$

$\therefore a+b=2$

5 답 $x<-2$ 또는 $x>0$

유형 04 부등식 $f(x)<0$과 부등식 $f(ax+b)<0$ 사이의 관계

이차부등식 $f(x)<0$의 해가 $x<-3$ 또는 $x>1$이므로

$f(x)=a(x+3)(x-1)$ $(a<0)$이라고 하면

$f(2x+1)=a(2x+1+3)(2x+1-1)=4ax(x+2)$

$f(2x+1)<f(1)$에서 $f(1)=0$이므로

$4ax(x+2)<0$, $x(x+2)>0$ $(\because a<0)$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>0$

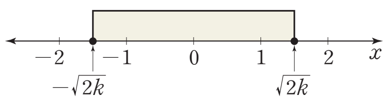
6 답 ③

유형 05 정수인 해의 조건이 주어진 이차부등식

$x^2 \le 2k$에서 $x^2-2k \le 0$, $(x+\sqrt{2k})(x-\sqrt{2k}) \le 0$

$\therefore\ -\sqrt{2k} \le x \le \sqrt{2k}$

주어진 이차부등식을 만족하는 정수 x가 3개이므로



$1 \le \sqrt{2k} < 2$, $1 \le 2k < 4$ $\quad \therefore\ \frac{1}{2} \le k < 2$

따라서 정수 k의 값은 1이다.

7 답 2

유형 06 이차부등식의 해가 한 개일 조건

이차부등식 $(k-1)x^2+2(k-1)x+1 \le 0$의 해가 1개이므로

$k-1>0 \quad \therefore\ k>1$

또 이차방정식 $(k-1)x^2+2(k-1)x+1=0\ (k \ne 1)$의 판별식을 D라고 할 때 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k-1)=0$, $k^2-3k+2=0 \quad \therefore\ k=1$ 또는 $k=2$

그런데 $k>1$이므로 k의 값은 2이다.

8 답 ⑤

유형 07 이차부등식이 해를 가질 조건

이차부등식 $kx^2-6x+k-8>0$에서

(i) $k>0$일 때

주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $k<0$일 때

이차방정식 $kx^2-6x+k-8=0$의 판별식을 D라고 하면 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-3)^2-k(k-8)>0$, $k^2-8k-9<0 \quad \therefore\ -1<k<9$

그런데 $k<0$이므로 $-1<k<0$

(i), (ii)에 의하여 실수 k의 값의 범위는 $-1<k<0$ 또는 $k>0$

9 답 $-3<k<-1$

유형 08 이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $x^2-2(k+1)x-2k-2=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(k+1)^2+2k+2<0$, $k^2+4k+3<0$

$(k+3)(k+1)<0 \quad \therefore\ -3<k<-1$

10 답 ⑤

유형 09 이차부등식이 해를 갖지 않을 조건

이차부등식 $f(x)<0$의 해가 없으려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이 성립해야 한다. 즉, 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D \le 0$이어야 하므로 $\frac{D}{4}=a^2-9a \le 0$

$a(a-9) \le 0 \quad \therefore\ 0 \le a \le 9$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, ⋯, 9의 10개이다.

11 답 ⑤

유형 10 제한된 범위에서 이차부등식이 항상 성립할 조건

$x^2-4x<2x^2+a^2-3a$에서

$x^2+4x+a^2-3a>0$

$f(x)=x^2+4x+a^2-3a$라고 하면

$f(x)=(x+2)^2+a^2-3a-4$

$-4 \le x \le 1$에서 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최소이므로 $f(x)>0$이려면 $f(-2)>0$이어야 한다.

$a^2-3a-4>0$, $(a+1)(a-4)>0$

$\therefore\ a<-1$ 또는 $a>4$

따라서 자연수 a의 최솟값은 5이다.

12 답 -5

유형 11 만나는 두 그래프의 위치 관계와 이차부등식

$x^2-4x-5<a$에서

$x^2-4x-a-5<0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이때 해가 $b<x<4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-b)(x-4)<0$

$\therefore\ x^2-(b+4)x+4b<0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$-4=-b-4$, $-a-5=4b \quad \therefore\ a=-5,\ b=0$

$\therefore\ a+b=-5$

13 답 ②

유형 12 만나지 않는 두 그래프의 위치 관계와 이차부등식

두 이차함수의 그래프가 서로 만나지 않으려면 이차함수 $y=x^2-6x+4$의 그래프가 이차함수 $y=-x^2+2kx+2$의 그래프보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2-6x+4>-x^2+2kx+2$, 즉 $x^2-(k+3)x+1>0$이 성립해야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2-(k+3)x+1=0$의 판별식을 D라고 할 때 $D<0$이어야 하므로

$D=(k+3)^2-4<0$, $k^2+6k+5<0$

$(k+5)(k+1)<0 \quad \therefore\ -5<k<-1$

따라서 정수 k의 최솟값은 -4이다.

14 답 ②

유형 13 이차식을 만족하는 실수의 최댓값과 최솟값

$2x-y=k$라고 하면 $y=2x-k$

이것을 $4x^2+y^2=4$에 대입하면

$4x^2+(2x-k)^2=4 \quad \therefore\ 8x^2-4kx+k^2-4=0$

이 식을 x에 대한 이차방정식으로 생각하면 이 이차방정식을 만족하는 실수 x가 존재해야 한다.

즉, 이 이차방정식의 판별식을 D라고 할 때 $D \ge 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=4k^2-8(k^2-4) \ge 0$, $(k+2\sqrt{2})(k-2\sqrt{2}) \le 0$

$\therefore\ -2\sqrt{2} \le k \le 2\sqrt{2}$

따라서 $2x-y$의 최솟값은 $-2\sqrt{2}$이다.

15 답 ③

유형 14 이차부등식의 활용

이 물체의 높이가 지면으로부터 15 m 이상이려면

$50-5t^2\geq 15$, $5t^2\leq 35$

$(t+\sqrt{7})(t-\sqrt{7})\leq 0$ $\quad\therefore\ -\sqrt{7}\leq t\leq\sqrt{7}$

그런데 $t\geq 0$이므로 $0\leq t\leq\sqrt{7}$

따라서 $\sqrt{7}$초 동안 지면으로부터 15 m 이상의 높이에 있다.

16 답 ①

유형 15 연립이차부등식의 풀이

$x^2+3x+1\leq 2x^2-2x-5$에서

$x^2-5x-6\geq 0$, $(x+1)(x-6)\geq 0$

$\therefore\ x\leq -1$ 또는 $x\geq 6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$2x^2-2x-5\leq 3x-2$에서

$2x^2-5x-3\leq 0$, $(2x+1)(x-3)\leq 0$

$\therefore\ -\dfrac{1}{2}\leq x\leq 3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 주어진 부등식의 해는 없다.

17 답 ⑤

유형 16 해가 주어진 연립이차부등식

$x^2+3x-4<0$에서 $(x+4)(x-1)<0$

$\therefore\ -4<x<1$

$x^2-a>0$에서 $(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})>0$

$\therefore\ x<-\sqrt{a}$ 또는 $x>\sqrt{a}$

연립부등식 $\begin{cases} x^2+3x-4<0 \\ x^2-a>0 \end{cases}$의 해가 $-4<x<-2$이려면 $x=-2$는 이차방정식 $x^2-a=0$의 해이어야 하므로

$4-a=0$ $\quad\therefore\ a=4$

또 $x^2-10x+21\leq 0$에서 $(x-3)(x-7)\leq 0$

$\therefore\ 3\leq x\leq 7$

연립부등식 $\begin{cases} x^2-8x+b\leq 0 \\ x^2-10x+21\leq 0 \end{cases}$의 해가 $3\leq x\leq 6$이려면 $x=6$은 이차방정식 $x^2-8x+b=0$의 해이어야 하므로

$36-48+b=0$ $\quad\therefore\ b=12$

$\therefore\ a+b=16$

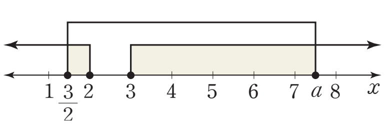
18 답 ⑤

유형 17 정수인 해의 조건이 주어진 연립이차부등식

$(x-2)(x-3)\geq 0$에서 $x\leq 2$ 또는 $x\geq 3$

$(2x-3)(x-a)\leq 0$에서 $\dfrac{3}{2}\leq x\leq a$

이때 주어진 연립부등식을 만족하는 정수 x가 6개이려면 다음 그림과 같아야 한다.



$\therefore\ 7\leq a<8$

19 답 $\dfrac{1}{2}\leq x\leq\dfrac{5}{2}$

유형 18 연립이차부등식의 활용

길의 넓이는 $(2x+20)(2x+15)-20\times 15=4x^2+70x\,(\mathrm{m}^2)$

길의 넓이가 $36\ \mathrm{m}^2$ 이상 $200\ \mathrm{m}^2$ 이하이므로

$36\leq 4x^2+70x\leq 200$ $\quad\therefore\ 18\leq 2x^2+35x\leq 100$

$18\leq 2x^2+35x$에서 $2x^2+35x-18\geq 0$

$(x+18)(2x-1)\geq 0$ $\quad\therefore\ x\leq -18$ 또는 $x\geq\dfrac{1}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $x\geq\dfrac{1}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$2x^2+35x\leq 100$에서 $2x^2+35x-100\leq 0$

$(x+20)(2x-5)\leq 0$ $\quad\therefore\ -20\leq x\leq\dfrac{5}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $0<x\leq\dfrac{5}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 구하는 x의 값의 범위는

$\dfrac{1}{2}\leq x\leq\dfrac{5}{2}$

20 답 ②

유형 19 이차방정식의 근의 판별

이차방정식 $x^2+2ax+a+6=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$\dfrac{D_1}{4}=a^2-a-6<0$

$(a+2)(a-3)<0$ $\quad\therefore\ -2<a<3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $x^2-2ax+4=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$\dfrac{D_2}{4}=a^2-4<0$, $(a+2)(a-2)<0$ $\quad\therefore\ -2<a<2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 두 이차방정식 중 적어도 하나가 허근을 가지려면

$-2<a<3$

따라서 정수 a의 최댓값은 2이다.

21 답 6

유형 20 이차방정식의 근의 부호

주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라고 하면

$\alpha\beta=k^2-3k-4<0$, $(k+1)(k-4)<0$

$\therefore\ -1<k<4$

따라서 정수 k의 값은 0, 1, 2, 3이므로 합은 6이다.

22 답 ①

유형 21 이차방정식의 근의 분리

$f(x)=x^2-6ax+9$라고 하면

(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라고 할 때

$\dfrac{D}{4}=9a^2-9\geq 0$, $(a+1)(a-1)\geq 0$ $\quad\therefore\ a\leq -1$ 또는 $a\geq 1$

(ii) $f(-2)>0$이므로 $4+12a+9>0$ $\quad\therefore\ a>-\dfrac{13}{12}$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=3a$이므로

$-2<3a$ $\quad\therefore\ a>-\dfrac{2}{3}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 a의 값의 범위는 $a\geq 1$

따라서 실수 a의 최솟값은 1이다.

09 평면좌표

핵심 유형

	유형01 3	유형02 ③	유형03 ②
유형04 13	유형05 ④	유형06 풀이 참고	
유형07 $(-11, 10)$		유형08 2	유형09 4
유형10 ⑤	유형11 ②	유형12 $y=-2x+\frac{3}{2}$	

핵심 유형 완성하기

001 ④	002 ⑤	003 ④	004 $10\sqrt{2}$	
005 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$		006 4	007 4	008 ③
009 ④	010 9	011 $5\sqrt{2}$	012 ③	013 ③
014 P$(2, 6)$			015 20	
016 (가) a (나) b (다) $y-b$ (라) y				
017 (가) D (나) $-2c$ (다) $a^2+b^2+2c^2$				018 ⑤
019 ⑤	020 ⑤	021 ④	022 ⑤	023 ②
024 ①	025 $\frac{2}{7}<a<\frac{5}{6}$		026 ③	027 ⑤
028 ③	029 ③	030 C$(-4, 6)$, D$(-2, -1)$		
031 ④	032 ②	033 D$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$		034 ④
035 ①	036 ⑤	037 ①	038 $y=x+1$	

핵심 유형 최종 점검하기

1 ③	2 ②	3 ③	4 ②	5 ⑤
6 ②	7 ③	8 (가) $2a$ (나) $2\sqrt{3}a$ (다) 정삼각형		
9 ③	10 ④	11 ①	12 3	13 $\sqrt{53}$
14 ②	15 ④	16 ③	17 ⑤	18 ①

핵심 유형 148~150쪽

유형01 답 3

$\overline{AB}=6$이므로

$\sqrt{(a-3)^2+(-1-a-2)^2}=6$

$\sqrt{2a^2+18}=6$

양변을 제곱하면

$2a^2+18=36$, $a^2=9$

$\therefore a=\pm 3$

따라서 양수 a의 값은 3이다.

유형02 답 ③

P$(p, 0)$이라고 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(p-1)^2+(0-2)^2=(p-5)^2+(0-6)^2$, $8p=56$ $\quad\therefore p=7$

$\therefore$ P$(7, 0)$

Q$(0, q)$라고 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$(0-1)^2+(q-2)^2=(0-5)^2+(q-6)^2$, $8q=56$ $\quad\therefore q=7$

$\therefore$ Q$(0, 7)$

따라서 선분 PQ의 길이는

$\sqrt{(-7)^2+7^2}=7\sqrt{2}$

유형03 답 ②

$\overline{AB}=\sqrt{(-1-3)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{5}$

$\overline{BC}=\sqrt{(5+1)^2+(6-4)^2}=2\sqrt{10}$

$\overline{CA}=\sqrt{(3-5)^2+(2-6)^2}=2\sqrt{5}$

에서 $\overline{AB}=\overline{CA}$이고 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$

따라서 삼각형 ABC는 $\angle A=90°$인 직각이등변삼각형이다.

유형04 답 13

A$(1, -1)$, B$(6, 11)$, P(a, b)라고 하면

$\sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2}+\sqrt{(a-6)^2+(b-11)^2}$

$=\overline{AP}+\overline{BP}$

$\geq \overline{AB}=\sqrt{(6-1)^2+(11+1)^2}=13$

따라서 구하는 최솟값은 13이다.

유형05 답 ④

P$(a, 0)$이라고 하면

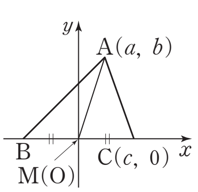
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(a+2)^2+(-5)^2+(a-4)^2+(-1)^2$

$=2a^2-4a+46$

$=2(a-1)^2+44$

따라서 $a=1$일 때 최솟값은 44이다.

유형06 답 풀이 참고



오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축, 선분 BC의 수직이등분선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 M은 원점이다.

A(a, b), C$(c, 0)$이라고 하면

B$(-c, 0)$이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=(-c-a)^2+(-b)^2+(c-a)^2+(-b)^2$

$=2a^2+2b^2+2c^2$

$2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)=2(a^2+b^2+c^2)=2a^2+2b^2+2c^2$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

유형07 답 $(-11, 10)$

P$\left(\frac{3\times(-3)+2\times 7}{3+2}, \frac{3\times 6+2\times 1}{3+2}\right)$ $\quad\therefore$ P$(1, 4)$

Q$\left(\frac{3\times(-3)-2\times 7}{3-2}, \frac{3\times 6-2\times 1}{3-2}\right)$ $\quad\therefore$ Q$(-23, 16)$

따라서 구하는 선분 PQ의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+(-23)}{2}, \frac{4+16}{2}\right)$ $\quad\therefore (-11, 10)$

유형08 답 2

$\overline{AB}$를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{6m-3n}{m+n}, \frac{-m+5n}{m+n}\right)$

이 점이 y축 위에 있으므로

$\frac{6m-3n}{m+n}=0$, $n=2m$ $\quad\therefore \frac{n}{m}=2$

유형09 답 4

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-2+a-2b+4}{3}, \frac{3+b+a-1}{3}\right)$

$\therefore \left(\frac{a-2b+2}{3}, \frac{a+b+2}{3}\right)$

이 점이 점 $(-2, 2)$이므로

$\frac{a-2b+2}{3}=-2$, $\frac{a+b+2}{3}=2$

$a-2b=-8$, $a+b=4$ $\quad\therefore a=0$, $b=4$

$\therefore b-a=4$

유형10 답 ⑤

대각선 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{7+4}{2}, \frac{8-1}{2}\right)$ $\quad\therefore \left(\frac{11}{2}, \frac{7}{2}\right)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$D(a, b)$라고 하면 대각선 BD의 중점의 좌표는

$\left(\frac{a}{2}, \frac{5+b}{2}\right)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$\frac{11}{2}=\frac{a}{2}$, $\frac{7}{2}=\frac{5+b}{2}$ $\quad\therefore a=11$, $b=2$

$\therefore D(11, 2)$

유형11 답 ②

$\overline{AB}=\sqrt{(-7-5)^2+(-4-1)^2}=13$

$\overline{AC}=\sqrt{(2-5)^2+(5-1)^2}=5$

이때 $\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

즉, 점 D는 $\overline{BC}$를 $13:5$로 내분하는 점이다.

$D\left(\frac{13\times2+5\times(-7)}{13+5}, \frac{13\times5+5\times(-4)}{13+5}\right)$ $\quad\therefore D\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{5}{2}$이므로 $a+b=2$

유형12 답 $y=-2x+\frac{3}{2}$

$P(a, b)$라고 하면 점 P가 직선 $y=-2x+1$ 위의 점이므로

$b=-2a+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 점 Q는 $\overline{AP}$의 중점이므로

$Q\left(\frac{a}{2}, \frac{b+2}{2}\right)$

$Q(x, y)$라고 하면 $x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{b+2}{2}$이므로

$a=2x$, $b=2y-2$

이것을 ㉠에 대입하면

$2y-2=-2\times2x+1$ $\quad\therefore y=-2x+\frac{3}{2}$

핵심 유형 완성하기 151~156쪽

001 답 ④

$\overline{AB}=\sqrt{26}$이므로 $\sqrt{(3-a)^2+(2-a-a+1)^2}=\sqrt{26}$

$\sqrt{5a^2-18a+18}=\sqrt{26}$

양변을 제곱하면

$5a^2-18a+8=26$, $5a^2-18a-8=0$

$(5a+2)(a-4)=0$ $\quad\therefore a=-\frac{2}{5}$ 또는 $a=4$

따라서 양수 a의 값은 4이다.

002 답 ⑤

$\overline{AB}=\sqrt{(1-a)^2+(a+1)^2}=\sqrt{2a^2+2}$

$\overline{CD}=\sqrt{2^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2}$

$\overline{AB}=2\overline{CD}$이므로 $\sqrt{2a^2+2}=4\sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $2a^2+2=32$, $a^2=15$ $\quad\therefore a=\pm\sqrt{15}$

따라서 양수 a의 값은 $\sqrt{15}$이다.

003 답 ④

$\overline{AB}=4$이므로 $\sqrt{(b+2-a)^2+(b-a-2)^2}=4$

$\sqrt{2(a-b)^2+8}=4$

양변을 제곱하면 $2(a-b)^2+8=16$, $(a-b)^2=4$

따라서 두 점 (a, b)와 (b, a) 사이의 거리는

$\sqrt{(b-a)^2+(a-b)^2}=\sqrt{2(a-b)^2}=2\sqrt{2}$

004 답 $10\sqrt{2}$

$P(p, 0)$이라고 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(p-2)^2+(-4)^2=(p-6)^2+(-8)^2$, $8p=80$ $\quad\therefore p=10$

$\therefore P(10, 0)$

$Q(0, q)$라고 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$(-2)^2+(q-4)^2=(-6)^2+(q-8)^2$, $8q=80$ $\quad\therefore q=10$

$\therefore Q(0, 10)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(-10)^2+10^2}=10\sqrt{2}$

005 답 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$P(a, a+1)$이라고 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a+2)^2+(a+1-2)^2=(a-3)^2+(a+1-1)^2$

$8a=4$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$이다.

006 답 4

점 P가 삼각형 ABC의 외심이므로 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-1)^2+(b-2)^2=a^2+(b+1)^2$ $\quad\therefore a+3b=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\overline{BP}=\overline{CP}$에서 $\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$a^2+(b+1)^2=(a-4)^2+(b-3)^2$ $\quad\therefore a+b=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{7}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$

$\therefore a-b=4$

007 답 4

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-1)^2+(b-1)^2=(a-3)^2+(b-7)^2 \qquad \therefore\ a+3b=14$

이때 $a+3b=14$를 만족하는 자연수 a, b의 순서쌍은

$(2,\ 4)$, $(5,\ 3)$, $(8,\ 2)$, $(11,\ 1)$

따라서 구하는 점 P의 개수는 4이다.

008 답 ③

$\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$

$\overline{BC}=\sqrt{(-1-3)^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$

$\overline{CA}=\sqrt{(1+1)^2+(2+2)^2}=2\sqrt{5}$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{BC}=\overline{CA}$인 이등변삼각형이다.

009 답 ④

삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

$\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(1+1)^2+(-1-1)^2=(a-1)^2+(b+1)^2$

$\therefore\ a^2+b^2-2a+2b-6=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 $\overline{BC}=\overline{CA}$에서 $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이므로

$(a-1)^2+(b+1)^2=(-1-a)^2+(1-b)^2 \qquad \therefore\ a=b \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\sqrt{3}$, $b=-\sqrt{3}$ 또는 $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{3} \qquad \therefore\ ab=3$

010 답 9

삼각형 ABP가 $\overline{AB}$가 빗변인 직각삼각형이 되려면

$\overline{AB}^2=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$이어야 하므로

$(7-2)^2+(1-5)^2=(p-2)^2+(-5)^2+(p-7)^2+(-1)^2$

$\therefore\ p^2-9p+19=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 p의 값의 합은 9이다.

011 답 $5\sqrt{2}$

$A(-1,\ -3)$, $B(4,\ 2)$, $P(a,\ b)$라고 하면

$\sqrt{(a+1)^2+(b+3)^2}+\sqrt{(a-4)^2+(b-2)^2}$

$=\overline{AP}+\overline{BP}$

$\geq\overline{AB}=\sqrt{(4+1)^2+(2+3)^2}=5\sqrt{2}$

따라서 구하는 최솟값은 $5\sqrt{2}$이다.

012 답 ③

$O(0,\ 0)$, $A(-3,\ 4)$, $P(x,\ y)$라고 하면

$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}=\overline{OP}+\overline{AP}$

$\geq\overline{OA}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

따라서 구하는 최솟값은 5이다.

013 답 ③

$Q(0,\ a)$라고 하면

$\overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2=1^2+(a-2)^2+(-3)^2+(a+1)^2$

$=2a^2-2a+15=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{29}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $\frac{29}{2}$이다.

014 답 P(2, 6)

$P(a,\ a+4)$라고 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=(a-3)^2+(a-2)^2+(a-2)^2+(a-1)^2$

$=4a^2-16a+18$

$=4(a-2)^2+2$

따라서 $a=2$일 때 최솟값은 2이므로 $P(2,\ 6)$이다.

015 답 20

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$

$=(a-1)^2+(b-2)^2+(a-2)^2+(b-5)^2+(a-3)^2+(b+1)^2$

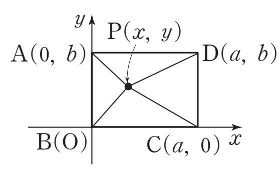
$=3a^2-12a+3b^2-12b+44$

$=3(a-2)^2+3(b-2)^2+20$

따라서 $a=2$, $b=2$일 때 최솟값은 20이다.

016 답 (가) a (나) b (다) $y-b$ (라) y

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이다.



$A(0,\ b)$, $C(a,\ 0)$, $D(a,\ b)$, $P(x,\ y)$라고 하면

$\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\{x^2+(y-b)^2\}+\{(x-a)^2+y^2\}$

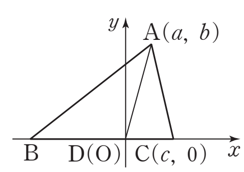
$\overline{BP}^2+\overline{DP}^2=(x^2+y^2)+\{(x-a)^2+(y-b)^2\}$

$=\{x^2+(y-b)^2\}+\{(x-a)^2+y^2\}$

$\therefore\ \overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{BP}^2+\overline{DP}^2$

017 답 (가) D (나) $-2c$ (다) $a^2+b^2+2c^2$

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 D는 원점이다.



$A(a,\ b)$, $C(c,\ 0)$이라고 하면

$B(-2c,\ 0)$이므로

$\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=\{(-2c-a)^2+(-b)^2\}+2\{(c-a)^2+(-b)^2\}$

$=3a^2+3b^2+6c^2$

$=3(a^2+b^2+2c^2)$

$\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2=\{(-a)^2+(-b)^2\}+2(-c)^2$

$=a^2+b^2+2c^2$

$\therefore\ \overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=3(\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2)$

018 답 ⑤

$P\left(\frac{2\times(-5)+3\times5}{2+3},\ \frac{2\times3+3\times(-2)}{2+3}\right) \qquad \therefore\ P(1,\ 0)$

$Q\left(\frac{2\times(-5)-3\times5}{2-3},\ \frac{2\times3-3\times(-2)}{2-3}\right) \qquad \therefore\ Q(25,\ -12)$

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+25}{2},\ \frac{0+(-12)}{2}\right) \qquad \therefore\ (13,\ -6)$

019 답 ⑤

$\frac{2\times(-2)-1\times a}{2-1}=-8$, $\frac{2\times b-1\times(-1)}{2-1}=11$이므로

$-4-a=-8$, $2b+1=11$ $\quad \therefore a=4, b=5$

$\therefore a+b=9$

020 답 ⑤

점 $C(a, b)$는 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$C\left(\frac{1\times3+2\times2}{1+2}, \frac{1\times6+2\times(-3)}{1+2}\right)$ $\quad \therefore C\left(\frac{7}{3}, 0\right)$

점 $D(c, d)$는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$D\left(\frac{2\times3+1\times2}{2+1}, \frac{2\times6+1\times(-3)}{2+1}\right)$ $\quad \therefore D\left(\frac{8}{3}, 3\right)$

따라서 $a=\frac{7}{3}$, $b=0$, $c=\frac{8}{3}$, $d=3$이므로

$ab+cd=8$

021 답 ④

$S_1:S_2=9:4$, 즉 $\overline{AP}^2:\overline{BP}^2=9:4$이므로 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$

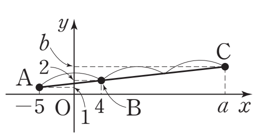
따라서 점 P는 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점이므로

$P\left(\frac{3\times6+2\times1}{3+2}, \frac{3\times8+2\times(-2)}{3+2}\right)$ $\quad \therefore P(4, 4)$

022 답 ⑤

$2\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$

이때 $a>0$이므로 오른쪽 그림과 같이 점 C는 $\overline{AB}$를 $3:2$로 외분하는 점이다.



$C\left(\frac{3\times4-2\times(-5)}{3-2}, \frac{3\times2-2\times1}{3-2}\right)$

$\therefore C(22, 4)$

따라서 $a=22$, $b=4$이므로 $a+b=26$

다른 풀이 점 B는 $\overline{AC}$를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$\frac{1\times a+2\times(-5)}{1+2}=4$, $\frac{1\times b+2\times1}{1+2}=2$ $\quad \therefore a=22, b=4$

023 답 ②

선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3m+n}{m+n}, \frac{-m+2n}{m+n}\right)$

이 점이 점 $(a, 0)$이므로

$\frac{-m+2n}{m+n}=0$ $\quad \therefore m=2n$

$\therefore a=\frac{3m+n}{m+n}=\frac{3\times2n+n}{2n+n}=\frac{7}{3}$

024 답 ①

선분 AB를 $1:a$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{4-3a}{1+a}, \frac{-2-3a}{1+a}\right)$

이 점이 직선 $x-y-2=0$ 위에 있으므로

$\frac{4-3a}{1+a}-\frac{-2-3a}{1+a}-2=0$, $6-2(1+a)=0$

$2a=4$ $\quad \therefore a=2$

025 답 $\frac{2}{7}<a<\frac{5}{6}$

선분 AB를 $a:(1-a)$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{a\times5+(1-a)\times(-2)}{a+(1-a)}, \frac{a\times(-1)+(1-a)\times5}{a+(1-a)}\right)$

$\therefore (7a-2, 5-6a)$

이 점이 제1사분면 위의 점이므로

$7a-2>0$에서 $a>\frac{2}{7}$, $5-6a>0$에서 $a<\frac{5}{6}$

$\therefore \frac{2}{7}<a<\frac{5}{6}$

026 답 ③

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-3+a-1-2b}{3}, \frac{4+b+1+a}{3}\right)$

$\therefore \left(\frac{a-2b-4}{3}, \frac{a+b+5}{3}\right)$

이 점이 점 $(-3, 3)$이므로

$\frac{a-2b-4}{3}=-3$, $\frac{a+b+5}{3}=3$

$a-2b=-5$, $a+b=4$ $\quad \therefore a=1, b=3$

$\therefore ab=3$

027 답 ⑤

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{2+3+b}{3}, \frac{4+a+c}{3}\right)$ $\quad \therefore \left(\frac{b+5}{3}, \frac{a+c+4}{3}\right)$

이 점이 원점이므로

$\frac{b+5}{3}=0$, $\frac{a+c+4}{3}=0$ $\quad \therefore a+c=-4, b=-5$

$\therefore a+b+c=-4-5=-9$

028 답 ③

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{1+3-1}{3}, \frac{2+4+3}{3}\right)$ $\quad \therefore (1, 3)$ $\quad$ …… ㉠

삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{a+3+5}{3}, \frac{-1+2+b}{3}\right)$ $\quad \therefore \left(\frac{a+8}{3}, \frac{b+1}{3}\right)$ $\quad$ …… ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$\frac{a+8}{3}=1$, $\frac{b+1}{3}=3$ $\quad \therefore a=-5, b=8$

$\therefore a+b=3$

029 답 ③

대각선 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3+3}{2}, \frac{6-3}{2}\right)$ $\quad \therefore \left(3, \frac{3}{2}\right)$ $\quad$ …… ㉠

$D(a, b)$라고 하면 대각선 BD의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{3+b}{2}\right)$ $\quad$ …… ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$3=\frac{-1+a}{2}$, $\frac{3}{2}=\frac{3+b}{2}$ $\quad \therefore a=7, b=0$

$\therefore D(7, 0)$

030 답 C(−4, 6), D(−2, −1)

C(a, b)라고 하면 대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{4+a}{2},\ \frac{b}{2}\right)$

이 점이 점 (0, 3)이므로

$\frac{4+a}{2}=0,\ \frac{b}{2}=3 \qquad \therefore a=-4,\ b=6$

D(c, d)라고 하면 대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{c+2}{2},\ \frac{d+7}{2}\right)$

이 점이 점 (0, 3)이므로

$\frac{c+2}{2}=0,\ \frac{d+7}{2}=3 \qquad \therefore c=-2,\ d=-1$

$\therefore$ C(−4, 6), D(−2, −1)

031 답 ④

대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{3+5}{2},\ \frac{-2+b}{2}\right)$, 즉 $\left(4,\ \frac{-2+b}{2}\right)$

대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{7+1}{2},\ \frac{a+2}{2}\right)$, 즉 $\left(4,\ \frac{a+2}{2}\right)$

이 두 점이 일치하므로 $\frac{-2+b}{2}=\frac{a+2}{2} \qquad \therefore b=a+4$

사각형 ABCD가 마름모이므로 $\overline{AB}=\overline{AD}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{AD}^2$이다.

$(7-3)^2+(a+2)^2=(1-3)^2+(2+2)^2$

$a^2+4a=0,\ a(a+4)=0 \qquad \therefore a=-4$ 또는 $a=0$

따라서 $a=-4,\ b=0$ 또는 $a=0,\ b=4$이므로 $|a+b|=4$

032 답 ②

주어진 평행사변형의 네 꼭짓점을 A, B, C, D라고 하면

(i) A(a, b), C(−3, −1)일 때

대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a-3}{2},\ \frac{b-1}{2}\right)$

대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1-1}{2},\ \frac{3+5}{2}\right) \qquad \therefore (0,\ 4)$

이 두 점이 일치하므로 $a=3,\ b=9 \qquad \therefore ab=27$

(ii) A(a, b), C(−1, 5)일 때

대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a-1}{2},\ \frac{b+5}{2}\right)$

대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1-3}{2},\ \frac{3-1}{2}\right) \qquad \therefore (-1,\ 1)$

이 두 점이 일치하므로 $a=-1,\ b=-3 \qquad \therefore ab=3$

(iii) A(a, b), C(1, 3)일 때

대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+1}{2},\ \frac{b+3}{2}\right)$

대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-1-3}{2},\ \frac{5-1}{2}\right) \qquad \therefore (-2,\ 2)$

이 두 점이 일치하므로 $a=-5,\ b=1 \qquad \therefore ab=-5$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 모든 ab의 값의 합은 $27+3-5=25$

033 답 D$\left(-1,\ \frac{1}{3}\right)$

$\overline{AB}=\sqrt{(2+1)^2+(-1+5)^2}=5,\ \overline{AC}=\sqrt{(-7+1)^2+(3+5)^2}=10$

이때 $\overline{AD}$는 ∠A의 이등분선이므로

$\overline{AB} : \overline{AC}=\overline{BD} : \overline{CD}$

즉, 점 D는 $\overline{BC}$를 1 : 2로 내분하는 점이다.

$D\left(\frac{1\times(-7)+2\times2}{1+2},\ \frac{1\times3+2\times(-1)}{1+2}\right) \qquad \therefore D\left(-1,\ \frac{1}{3}\right)$

034 답 ④

$\overline{AB}=\sqrt{(14-2)^2+(8-3)^2}=13$

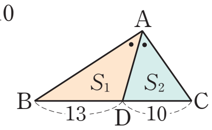
$\overline{AC}=\sqrt{(-4-2)^2+(-5-3)^2}=10$

이때 $\overline{AD}$는 ∠A의 이등분선이므로

$\overline{AB} : \overline{AC}=\overline{BD} : \overline{CD}$, 즉 $\overline{BD} : \overline{CD}=13 : 10$

따라서 $S_1 : S_2=\overline{BD} : \overline{CD}$에서

$S_1 : S_2=13 : 10$이므로 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{13}{10}$



035 답 ①

$\overline{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+(1-5)^2}=5$

$\overline{AC}=t\ (t>0)$라고 하면 $\overline{AD}$는 ∠A의 이등분선이므로

$\overline{AB} : \overline{AC}=\overline{BD} : \overline{CD}$

즉, 점 D는 $\overline{BC}$를 $5 : t$로 내분하는 점이다.

$D\left(\frac{5\times7+t\times(-2)}{5+t},\ \frac{5\times a+t\times1}{5+t}\right) \qquad \therefore D\left(\frac{35-2t}{5+t},\ \frac{5a+t}{5+t}\right)$

이때 D(1, b)이므로 $\frac{35-2t}{5+t}=1,\ \frac{5a+t}{5+t}=b$

$\frac{35-2t}{5+t}=1$에서 $35-2t=5+t \qquad \therefore t=10$

즉, $\overline{AC}=t=10$이므로 $\sqrt{(7-1)^2+(a-5)^2}=10$

양변을 제곱하여 정리하면 $a^2-10a-39=0$

$(a+3)(a-13)=0 \qquad \therefore a=-3$ 또는 $a=13$

그런데 $a<0$이므로 $a=-3$

이때 $\frac{5a+t}{5+t}=b$에서 $a=-3,\ t=10$이므로

$\frac{5\times(-3)+10}{5+10}=b \qquad \therefore b=-\frac{1}{3}$

$\therefore ab=-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)=1$

036 답 ⑤

$\overline{AB}=\sqrt{(-3-3)^2+(-8)^2}=10,\ \overline{AC}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

이때 $\overline{AD}$는 ∠A의 외각의 이등분선이므로

$\overline{AB} : \overline{AC}=\overline{BD} : \overline{CD}$

즉, 점 D는 $\overline{BC}$를 2 : 1로 외분하는 점이다.

$D\left(\frac{2\times0-1\times(-3)}{2-1},\ \frac{2\times4-1\times(-8)}{2-1}\right) \qquad \therefore D(3,\ 16)$

따라서 $a=3,\ b=16$이므로 $a+b=19$

037 답 ①

P(a, b)라고 하면 점 P가 직선 $y=-4x+2$ 위의 점이므로

$b=-4a+2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 점 Q는 $\overline{OP}$를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$Q\left(\frac{1\times a+2\times0}{1+2},\ \frac{1\times b+2\times0}{1+2}\right) \qquad \therefore Q\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3}\right)$

Q(x, y)라고 하면 $x=\frac{a}{3},\ y=\frac{b}{3}$이므로 $a=3x,\ b=3y$

이것을 ㉠에 대입하면

$3y=-4\times3x+2,\ y=-4x+\frac{2}{3}$

따라서 $m=-4,\ n=\frac{2}{3}$이므로 $m+n=-\frac{10}{3}$

038 답 $y=x+1$

두 점 A, B로부터 같은 거리에 있는 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라고 하면

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$(x-1)^2+(y-4)^2=(x-3)^2+(y-2)^2$

$x^2-2x+y^2-8y+17=x^2-6x+y^2-4y+13$

$\therefore y=x+1$

핵심 유형 **최종 점검하기** 157~159쪽

1 답 ③

유형 01 두 점 사이의 거리

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$, 즉 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$이므로

$(a-1-1)^2+(1-3)^2=(3-a+1)^2+(-3-1)^2$

$a^2-4a+8=a^2-8a+32 \qquad \therefore a=6$

2 답 ②

유형 02 같은 거리에 있는 점

$\mathrm{P}(p, 0)$이라고 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$p^2+2^2=(p+4)^2+(-2)^2$, $8p=-16 \qquad \therefore p=-2$

$\therefore \mathrm{P}(-2, 0)$

$\mathrm{Q}(0, q)$라고 하면 $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{BQ}}$에서 $\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{BQ}}^2$이므로

$(q+2)^2=4^2+(q-2)^2$, $8q=16 \qquad \therefore q=2$

$\therefore \mathrm{Q}(0, 2)$

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는 $(-1, 1)$이다.

3 답 ③

유형 02 같은 거리에 있는 점

$\mathrm{P}(a, a-2)$라고 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$(a+4)^2+(a-2)^2=(a-6)^2+(a-2+2)^2$

$2a^2+4a+20=2a^2-12a+36$, $16a=16 \qquad \therefore a=1$

따라서 점 P의 좌표는 $(1, -1)$이다.

4 답 ②

유형 03 삼각형의 모양

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(4-2)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(-4)^2+(-3+1)^2}=2\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{2^2+(1+3)^2}=2\sqrt{5}$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CA}}$인 이등변삼각형이다.

5 답 ⑤

유형 03 삼각형의 모양

삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CA}}$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2$이므로

$(3+1)^2+(-2-2)^2=(a+1)^2+(b-2)^2$

$\therefore (a+1)^2+(b-2)^2=32 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CA}}$에서 $\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{CA}}^2$이므로

$(a-3)^2+(b+2)^2=(-1-a)^2+(2-b)^2$

$\therefore b=a-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$a^2-2a-11=0 \qquad \therefore a=1\pm2\sqrt{3}$

이때 점 C는 제1사분면 위의 점이므로 $a>0$, $b>0$

따라서 $a=1+2\sqrt{3}$, $b=2\sqrt{3}$이므로

$a+b=1+4\sqrt{3}$

6 답 ②

유형 04 두 점 사이의 거리를 이용하여 식의 최솟값 구하기

$\mathrm{A}(1, -2)$, $\mathrm{B}(5, 2)$, $\mathrm{P}(a, b)$라고 하면

$\sqrt{(a-1)^2+(b+2)^2}+\sqrt{(a-5)^2+(b-2)^2}$

$=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$

$\geq\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(5-1)^2+(2+2)^2}=4\sqrt{2}$

따라서 구하는 최솟값은 $4\sqrt{2}$이다.

7 답 ③

유형 05 선분의 길이의 제곱의 합의 최솟값

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$

$=a^2+(b-1)^2+(a-1)^2+(b-2)^2+(a-2)^2+b^2$

$=3a^2-6a+3b^2-6b+10$

$=3(a-1)^2+3(b-1)^2+4$

따라서 $a=1$, $b=1$일 때 최솟값은 4이다.

8 답 (가) $2a$ (나) $2\sqrt{3}a$ (다) 정삼각형

유형 06 좌표를 이용한 도형의 성질

점 $\mathrm{B}(6a, 0)$이라고 하면 $\mathrm{C}(2a, 0)$, $\mathrm{D}(4a, 0)$이고 점 E의 y좌표는 정삼각형 ADE의 높이이므로

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times4a=2\sqrt{3}a \qquad \therefore \mathrm{E}(2a, 2\sqrt{3}a)$

또 점 F의 y좌표는 정삼각형 DBF의 높이이므로

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times2a=\sqrt{3}a \qquad \therefore \mathrm{F}(5a, \sqrt{3}a)$

이때 $\overline{\mathrm{EC}}$, $\overline{\mathrm{CF}}$, $\overline{\mathrm{FE}}$의 길이를 각각 구하면

$\overline{\mathrm{EC}}=2\sqrt{3}a$

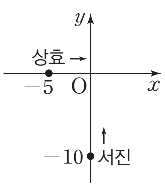
$\overline{\mathrm{CF}}=\sqrt{(5a-2a)^2+(\sqrt{3}a)^2}=2\sqrt{3}a$

$\overline{\mathrm{FE}}=\sqrt{(2a-5a)^2+(2\sqrt{3}a-\sqrt{3}a)^2}=2\sqrt{3}a$

따라서 삼각형 ECF는 정삼각형이다.

9 답 ③

유형 06 좌표를 이용한 도형의 성질



오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 두 도로를 각각 x축, y축으로, 지점 O를 원점으로 잡으면 t시간 후 상효의 위치는 $(-5+4t, 0)$, 서진이의 위치는 $(0, -10+3t)$이다.

즉, 두 사람 사이의 거리는

$\sqrt{(5-4t)^2+(-10+3t)^2}=\sqrt{25t^2-100t+125}$

$=\sqrt{25(t-2)^2+25}\,(\mathrm{km})$

두 사람 사이의 거리가 가장 가까워지는 것은 $t=2$일 때, 즉 2시간 후이고 그때의 거리는 5 km이다.

따라서 $a=2$, $d=5$이므로 $a+d=7$

10 답 ④

유형 07 선분의 내분점과 외분점

$\mathrm{P}\left(\frac{2\times(-1)+1\times5}{2+1}, \frac{2\times4+1\times1}{2+1}\right)$ $\quad\therefore \mathrm{P}(1, 3)$

$\mathrm{Q}\left(\frac{2\times(-1)-1\times5}{2-1}, \frac{2\times4-1\times1}{2-1}\right)$ $\quad\therefore \mathrm{Q}(-7, 7)$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(-7-1)^2+(7-3)^2}=4\sqrt{5}$

11 답 ①

유형 08 선분의 내분점과 외분점의 활용

선분 AB를 $3:b$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\times(-12)+b\times4}{3+b}, \frac{3\times a+b\times(-8)}{3+b}\right)$

$\therefore \left(\frac{-36+4b}{3+b}, \frac{3a-8b}{3+b}\right)$

이 점이 점 $(-2, 1)$이므로

$\frac{-36+4b}{3+b}=-2, \frac{3a-8b}{3+b}=1$ $\quad\therefore a=16, b=5$

$\therefore a+b=21$

12 답 3

유형 08 선분의 내분점과 외분점의 활용

선분 AB를 $a:(a+1)$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{a\times(-1)-(a+1)\times2}{a-(a+1)}, \frac{a\times4-(a+1)\times3}{a-(a+1)}\right)$

$\therefore (3a+2, -a+3)$

이 점이 x축 위의 점이므로

$-a+3=0$ $\quad\therefore a=3$

13 답 $\sqrt{53}$

유형 08 선분의 내분점과 외분점의 활용

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$가 최소일 때 점 P는 $\overline{\mathrm{AB}}$ 위의 점이다.

이때 점 $\mathrm{Q}\left(\frac{3a+1}{4}, \frac{3b+1}{4}\right)$는 선분 AP를 $3:1$로 내분하는 점이므로 점 P가 점 B의 위치에 있을 때 선분 OQ의 길이는 최대가 된다.

즉, $\mathrm{P}(9, -3)$일 때 $a=9$, $b=-3$이고 $\mathrm{Q}(7, -2)$이므로

$\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{7^2+(-2)^2}=\sqrt{53}$

14 답 ②

유형 09 삼각형의 무게중심

삼각형 OAB의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{0+a+1}{3}, \frac{0+b+3}{3}\right)$

$\therefore \left(\frac{a+1}{3}, \frac{b+3}{3}\right)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

삼각형 OCD의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{0+(-3)+6}{3}, \frac{0+(-1)+4}{3}\right)$

$\therefore (1, 1)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$\frac{a+1}{3}=1, \frac{b+3}{3}=1$ $\quad\therefore a=2, b=0$

$\therefore a+b=2$

15 답 ④

유형 10 평행사변형의 성질의 활용

대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{-1+5}{2}\right)$ $\quad\therefore (2, 2)$

대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2+a}{2}, \frac{-3+b}{2}\right)$

이 두 점이 일치하므로

$2=\frac{2+a}{2}, 2=\frac{-3+b}{2}$ $\quad\therefore a=2, b=7$

$\therefore ab=14$

16 답 ③

유형 10 평행사변형의 성질의 활용

대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{4+a}{2}, \frac{2+2}{2}\right)$ $\quad\therefore \left(\frac{a+4}{2}, 2\right)$

대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+b}{2}, \frac{5-1}{2}\right)$ $\quad\therefore \left(\frac{b+1}{2}, 2\right)$

이 두 점이 일치하므로

$\frac{a+4}{2}=\frac{1+b}{2}$ $\quad\therefore b=a+3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 사각형 ABCD가 마름모이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$이다.

$(1-4)^2+(5-2)^2=(a-1)^2+(2-5)^2$

$a^2-2a-8=0, (a+2)(a-4)=0$ $\quad\therefore a=-2$ 또는 $a=4$

그런데 $a=4$이면 점 A와 점 C가 일치하므로 $a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore a+2b=0$

17 답 ⑤

유형 11 삼각형의 내각의 이등분선의 성질

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(0-3)^2+(-3-1)^2}=5$

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(-3-3)^2+(-7-1)^2}=10$

이때 $\overline{\mathrm{AD}}$는 $\angle\mathrm{A}$의 이등분선이므로

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}$

즉, 점 D는 $\overline{\mathrm{BC}}$를 $1:2$로 내분하는 점이다.

$\mathrm{D}\left(\frac{1\times(-3)+2\times0}{1+2}, \frac{1\times(-7)+2\times(-3)}{1+2}\right)$

$\therefore \mathrm{D}\left(-1, -\frac{13}{3}\right)$

따라서 $a=-1$, $b=-\frac{13}{3}$이므로 $a+b=-\frac{16}{3}$

18 답 ①

유형 12 점이 나타내는 도형의 방정식

$\mathrm{P}(a, b)$라고 하면 점 P가 직선 $y=-2x+3$ 위의 점이므로

$b=-2a+3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 점 Q는 $\overline{\mathrm{AP}}$를 $3:2$로 외분하는 점이므로

$\left(\frac{3\times a-2\times(-1)}{3-2}, \frac{3\times b-2\times0}{3-2}\right)$ $\quad\therefore (3a+2, 3b)$

$\mathrm{Q}(x, y)$라고 하면 $x=3a+2$, $y=3b$이므로

$a=\frac{x-2}{3}, b=\frac{y}{3}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{y}{3}=-2\times\frac{x-2}{3}+3$ $\quad\therefore y=-2x+13$

따라서 $m=-2$, $n=13$이므로 $m+n=11$

10 직선의 방정식

핵심 유형

	유형01 ③	유형02 ①	유형03 ①
유형04 ④	유형05 ③	유형06 ③	유형07 ④
유형08 ②	유형09 ①	유형10 ④	유형11 ⑤
유형12 3	유형13 $\frac{7}{2}$	유형14 4	유형15 ②
유형16 ④	유형17 $x+3y-2=0$ 또는 $3x-y+4=0$		

핵심 유형 완성하기

001 ⑤	002 ④	003 ⑤	004 ①	005 ②
006 $y=2x-8$		007 2	008 -12	009 ⑤
010 $\frac{x}{2}+y=1$		011 8	012 ③	013 ⑤
014 ②	015 ③	016 ④	017 ③	018 -3
019 ④	020 ②	021 ④	022 ⑤	023 ⑤
024 ②	025 ⑤	026 $\frac{1}{4}<m<2$		027 ④
028 4	029 $-3<m<-\frac{1}{2}$		030 ②	031 ①
032 ④	033 ⑤	034 ④	035 ⑤	036 ⑤
037 ④	038 ③	039 ⑤	040 ④	041 ①
042 ①	043 ①	044 ②	045 ③	046 3
047 ②	048 2	049 ②	050 ①	051 ④
052 ②	053 ①	054 ①	055 ④	056 ③
057 ④	058 ③	059 ③	060 6	061 7
062 ①	063 ③	064 $5x+y-9=0$		

핵심 유형 최종 점검하기

1 ①	2 ①	3 ②	4 ⑤	
5 $y=3x+5$		6 6	7 $y=2x-1$	
8 ③	9 ③	10 ②	11 $x-5y+9=0$	
12 ②	13 $x+4y-5=0$		14 ①	15 0
16 ②	17 ⑤	18 2	19 ①	20 ①
21 ⑤				

핵심 유형 162~164쪽

유형01 답 ③

두 점 $(-1,\ 3)$, $(5,\ -1)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+5}{2},\ \frac{3-1}{2}\right)$ $\therefore (2,\ 1)$

따라서 점 $(2,\ 1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-1=-(x-2)$ $\therefore y=-x+3$

유형02 답 ①

두 점 $(3,\ -2)$, $(1,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+2=\frac{-1+2}{1-3}(x-3)$ $\therefore y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

직선 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$이 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$a=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1$

또 직선 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$이 점 $\left(b,\ \frac{1}{2}\right)$을 지나므로

$\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}$ $\therefore b=-2$

$\therefore a+b=-3$

유형03 답 ①

x절편이 3이고 y절편이 -6인 직선의 방정식은

$\frac{x}{3}+\frac{y}{-6}=1$ $\therefore \frac{x}{3}-\frac{y}{6}=1$

이 직선이 점 $(a,\ -4)$를 지나므로

$\frac{a}{3}-\frac{-4}{6}=1$, $\frac{a}{3}+\frac{2}{3}=1$

$\therefore a=1$

유형04 답 ④

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

(직선 AB의 기울기)=(직선 AC의 기울기)이어야 하므로

$\frac{-k+1}{2-1}=\frac{-9+1}{(k-2)-1}$, $-k+1=\frac{-8}{k-3}$

$k^2-4k-5=0$, $(k+1)(k-5)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=5$

따라서 모든 k의 값의 합은 $-1+5=4$

유형05 답 ③

점 A를 지나는 직선이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 지나야 하므로 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점의 좌표를 구하면

$\left(\frac{4+2}{2},\ \frac{-2-4}{2}\right)$ $\therefore (3,\ -3)$

따라서 점 $\mathrm{A}(2,\ 2)$와 점 $(3,\ -3)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-3-2}{3-2}=-5$

유형06 답 ③

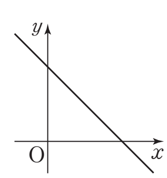
$ab>0$에서 $b\neq0$이므로 주어진 식을 변형하면

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ …… ㉠

$ab>0$에서 $-\frac{a}{b}<0$이므로 직선 ㉠의 기울기는 음수이다.

또 $bc<0$에서 $-\frac{c}{b}>0$이므로 직선 ㉠의 y절편은 양수이다.

따라서 직선 $ax+by+c=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



유형07 답 ④

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(3x+y+6)+k(x+y-2)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 항등식의 성질에 의하여

$3x+y+6=0$, $x+y-2=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-4$, $y=6$

따라서 항상 점 $(-4, 6)$을 지나므로

$a=-4$, $b=6$

$\therefore a^2+b^2=16+36=52$

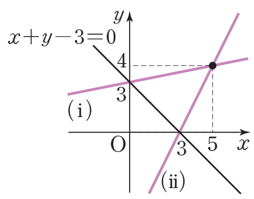
유형08 답 ②

$mx-y-5m+4=0$을 m에 대하여 정리하면

$m(x-5)-(y-4)=0$ ······ ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(5, 4)$를 지난다.

이때 오른쪽 그림과 같이 두 직선이 제1사분면에서 만나도록 직선 ㉠을 움직여 보면



(i) 직선 ㉠이 점 $(0, 3)$을 지날 때

$-5m+1=0$ $\therefore m=\frac{1}{5}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(3, 0)$을 지날 때

$-2m+4=0$ $\therefore m=2$

(i), (ii)에 의하여 구하는 m의 값의 범위는

$\frac{1}{5}<m<2$

따라서 $\alpha=\frac{1}{5}$, $\beta=2$이므로 $\alpha\beta=\frac{2}{5}$

유형09 답 ①

두 직선 $x+2y+4=0$, $2x-3y-5=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x+2y+4+k(2x-3y-5)=0$ (단, k는 실수) ······ ㉠

직선 ㉠이 점 $(2, 1)$을 지나므로

$8-4k=0$ $\therefore k=2$

$k=2$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$5x-4y-6=0$

따라서 $a=5$, $b=-4$이므로 $a+b=1$

핵심 유형 **완성**하기 165~169쪽

001 답 ⑤

선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\times(-3)+1\times1}{3+1}, \frac{3\times7+1\times3}{3+1}\right)$ $\therefore (-2, 6)$

점 $(-2, 6)$을 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y-6=-2(x+2)$ $\therefore y=-2x+2$

따라서 이 직선의 y절편은 2이다.

002 답 ④

구하는 직선의 기울기는 $\tan 60°=\sqrt{3}$

따라서 기울기가 $\sqrt{3}$이고 점 $(2, -\sqrt{3})$을 지나는 직선의 방정식은

$y+\sqrt{3}=\sqrt{3}(x-2)$ $\therefore y=\sqrt{3}x-3\sqrt{3}$

003 답 ⑤

$2x-3y+5=0$에서 $y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$

즉, 기울기가 $\frac{2}{3}$이고 점 $(-3, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{2}{3}(x+3)$ $\therefore 2x-3y+12=0$

따라서 $a=2$, $b=-3$이므로 $a-b=5$

004 답 ①

두 점 $(-3, 5)$, $(1, -3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-5=\frac{-3-5}{1+3}(x+3)$ $\therefore y=-2x-1$

직선 $y=-2x-1$이 점 $(a, 1)$을 지나므로

$1=-2a-1$ $\therefore a=-1$

또 직선 $y=-2x-1$이 점 $(-2, b)$를 지나므로

$b=4-1=3$

$\therefore ab=-3$

005 답 ②

두 점 $(1, -3)$, $(2, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+3=\frac{1+3}{2-1}(x-1)$ $\therefore y=4x-7$

따라서 $a=4$, $b=-7$이므로 $a-b=11$

006 답 $y=2x-8$

선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\times3-2\times(-1)}{3-2}, \frac{3\times6-2\times2}{3-2}\right)$ $\therefore (11, 14)$

따라서 두 점 $(11, 14)$, $(1, -6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-14=\frac{-6-14}{1-11}(x-11)$ $\therefore y=2x-8$

007 답 2

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-3+2+4}{3}, \frac{-2+4+7}{3}\right)$ $\therefore (1, 3)$

두 점 $(1, 3)$, $(-2, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{-3}{-2-1}(x-1)$ $\therefore y=x+2$

따라서 이 직선의 y절편은 2이다.

008 답 -12

x절편이 -2이고 y절편이 -4인 직선의 방정식은

$-\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1$

이 직선이 점 $(4, a)$를 지나므로

$-\frac{4}{2}-\frac{a}{4}=1$ $\therefore a=-12$

009 답 ⑤

직선 $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$의 x절편이 3이므로 A$(3,\ 0)$

직선 $-\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$의 y절편이 4이므로 B$(0,\ 4)$

따라서 직선 AB의 방정식은 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$

010 답 $\frac{x}{2}+y=1$

y절편을 a라고 하면 x절편은 $2a$이므로 직선의 방정식은

$\frac{x}{2a}+\frac{y}{a}=1$

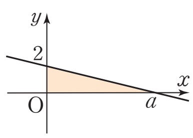
이 직선이 점 $(4,\ -1)$을 지나므로

$\frac{4}{2a}+\frac{-1}{a}=1 \qquad \therefore a=1$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $\frac{x}{2}+y=1$

011 답 8

직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{2}=1$의 x절편은 a이고 y절편은 2이다. 이때 이 직선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 8이므로



$\frac{1}{2}\times a\times 2=8 \qquad \therefore a=8$

012 답 ③

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

(직선 AC의 기울기)=(직선 BC의 기울기)이어야 하므로

$\frac{1+k}{2-1}=\frac{1-3}{2-(2k+1)},\ k+1=\frac{2}{2k-1}$

$2k^2+k-3=0,\ (2k+3)(k-1)=0 \qquad \therefore k=-\frac{3}{2}$ 또는 $k=1$

따라서 모든 k의 값의 합은 $-\frac{3}{2}+1=-\frac{1}{2}$

013 답 ⑤

세 점 A$(1,\ 1)$, B$(2,\ 4)$, C$(k+1,\ 2k-1)$이 한 직선 위에 있으므로

(직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)

$\frac{4-1}{2-1}=\frac{(2k-1)-4}{(k+1)-2},\ 3=\frac{2k-5}{k-1} \qquad \therefore k=-2$

따라서 C$(-1,\ -5)$이므로 두 점 A, C 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(-2)^2+(-6)^2}=2\sqrt{10}$

014 답 ②

세 점이 삼각형을 이루지 않으려면 세 점은 한 직선 위에 있어야 하므로

(직선 AC의 기울기)=(직선 BC의 기울기)

$\frac{-2+6}{3-(k-4)}=\frac{-2+k}{3-2},\ \frac{4}{-k+7}=k-2$

$k^2-9k+18=0,\ (k-3)(k-6)=0$

$\therefore k=3$ 또는 $k=6$

그런데 $k=6$이면 두 점 A, B가 일치하므로 $k=3$

015 답 ③

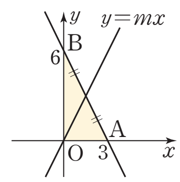
구하는 직선은 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 지나야 하므로 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점의 좌표를 구하면 $\left(\frac{-1+5}{2},\ \frac{-5-3}{2}\right) \qquad \therefore (2,\ -4)$

따라서 점 A$(3,\ 3)$과 점 $(2,\ -4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{-4-3}{2-3}(x-3) \qquad \therefore y=7x-18$

016 답 ④

직선 $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$의 x절편은 3이고 y절편은 6이다. 오른쪽 그림과 같이 A$(3,\ 0)$, B$(0,\ 6)$이라고 하면 직선 $y=mx$는 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점 $\left(\frac{3}{2},\ 3\right)$을 지나므로



$3=m\times\frac{3}{2} \qquad \therefore m=2$

017 답 ③

주어진 마름모의 넓이를 이등분하는 직선은 마름모의 두 대각선의 교점 $(3,\ 2)$를 지난다.

두 점 $(0,\ -2)$, $(3,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+2=\frac{2+2}{3}x \qquad \therefore y=\frac{4}{3}x-2$

이때 $y=0$을 대입하면 $x=\frac{3}{2}$

따라서 구하는 x절편은 $\frac{3}{2}$이다.

018 답 -3

두 사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 사각형의 두 대각선의 교점을 모두 지나야 한다.

직사각형 OCBA의 두 대각선의 교점은 두 점 O$(0,\ 0)$, B$(-2,\ 6)$을 이은 선분의 중점이므로 $\left(\frac{-2}{2},\ \frac{6}{2}\right) \qquad \therefore (-1,\ 3)$

또 정사각형 OFED의 두 대각선의 교점은 두 점 O$(0,\ 0)$, E$(4,\ 4)$를 이은 선분의 중점이므로 $\left(\frac{4}{2},\ \frac{4}{2}\right) \qquad \therefore (2,\ 2)$

따라서 두 점 $(-1,\ 3)$, $(2,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{2-3}{2+1}(x+1) \qquad \therefore y=-\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$

따라서 $m=-\frac{1}{3}$, $n=\frac{8}{3}$이므로 $m-n=-3$

019 답 ④

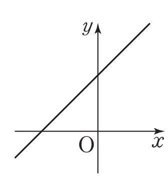
$\frac{b}{a}<0$에서 $b\neq0$이므로 주어진 식을 변형하면

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{b}{a}<0$에서 $-\frac{a}{b}>0$이므로 직선 ㉠의 기울기는 양수이다.

또 $\frac{c}{b}<0$에서 $-\frac{c}{b}>0$이므로 직선 ㉠의 y절편은 양수이다.

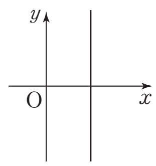
따라서 직선 $ax+by+c=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.



020 답 ②

$ab=0$, $ac<0$에서 $b=0$이므로 주어진 식을 변형하면

$x=-\dfrac{c}{a}$



$ac<0$에서 $-\dfrac{c}{a}>0$이므로 이 직선은 오른쪽 그림과 같이 y축에 평행한 직선이고, 제1, 4사분면을 지난다.

021 답 ④

$ab>0$에서 $b\neq0$이므로 주어진 식을 변형하면

$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$ ...... ㉠

$ab>0$에서 $-\dfrac{a}{b}<0$이므로 직선 ㉠의 기울기는 음수이다.

또 $bc>0$에서 $-\dfrac{c}{b}<0$이므로 직선 ㉠의 y절편은 음수이다.

따라서 직선 $ax+by+c=0$의 개형은 ④이다.

022 답 ⑤

주어진 그림에서 $a\neq0$, $b\neq0$, $c\neq0$이므로 $ax+by+c=0$에서

$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$

주어진 직선의 기울기가 음수이고 y절편이 양수이므로

$-\dfrac{a}{b}<0$, $-\dfrac{c}{b}>0$

$\therefore ab>0$, $bc<0$

즉, $a>0$, $b>0$, $c<0$ 또는 $a<0$, $b<0$, $c>0$이므로 $ac<0$

한편 $cx+ay+b=0$에서

$y=-\dfrac{c}{a}x-\dfrac{b}{a}$ ...... ㉠

$ac<0$에서 $-\dfrac{c}{a}>0$이므로 직선 ㉠의 기울기는 양수이다.

또 $ab>0$에서 $-\dfrac{b}{a}<0$이므로 직선 ㉠의 y절편은 음수이다.

따라서 직선 $cx+ay+b=0$의 개형은 ⑤이다.

023 답 ⑤

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(3x-y-5)+k(x+2y-11)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 항등식의 성질에 의하여

$3x-y-5=0$, $x+2y-11=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=4$

따라서 항상 점 $(3, 4)$를 지나므로 $a=3$, $b=4$

$\therefore a+b=7$

024 답 ②

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x-y+a)+k(x+2y+3)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 항등식의 성질에 의하여

$x-y+a=0$, $x+2y+3=0$

이때 점 $(3, b)$는 이 두 직선의 교점이므로

$3-b+a=0$, $3+2b+3=0$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-6$, $b=-3$

$\therefore a+b=-9$

025 답 ⑤

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x-y+4)+k(x+3y-4)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 항등식의 성질에 의하여

$x-y+4=0$, $x+3y-4=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=2$

$\therefore$ P$(-2, 2)$

따라서 점 P$(-2, 2)$와 점 $(0, 8)$을 지나는 직선의 방정식은

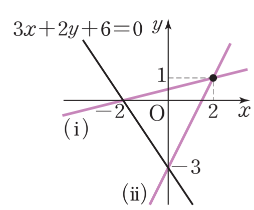
$y-2=\dfrac{8-2}{2}(x+2)$ $\quad\therefore y=3x+8$

026 답 $\dfrac{1}{4}<m<2$

$mx-y-2m+1=0$을 m에 대하여 정리하면

$m(x-2)-(y-1)=0$ ...... ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(2, 1)$을 지난다.



이때 오른쪽 그림과 같이 두 직선이 제3사분면에서 만나도록 직선 ㉠을 움직여 보면

(i) 직선 ㉠이 점 $(-2, 0)$을 지날 때

$-4m+1=0$ $\quad\therefore m=\dfrac{1}{4}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0, -3)$을 지날 때

$-2m+4=0$ $\quad\therefore m=2$

(i), (ii)에 의하여 구하는 m의 값의 범위는

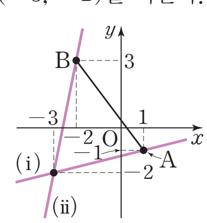
$\dfrac{1}{4}<m<2$

027 답 ④

$kx-y+3k-2=0$을 k에 대하여 정리하면

$k(x+3)-(y+2)=0$ ...... ㉠

이므로 직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-3, -2)$를 지난다.



이때 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 선분 AB와 한 점에서 만나도록 움직여 보면

(i) 직선 ㉠이 점 A$(1, -1)$을 지날 때

$4k-1=0$ $\quad\therefore k=\dfrac{1}{4}$

(ii) 직선 ㉠이 점 B$(-2, 3)$을 지날 때

$k-5=0$ $\quad\therefore k=5$

(i), (ii)에 의하여 k의 값의 범위는

$\dfrac{1}{4}\leq k\leq5$

따라서 정수 k는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

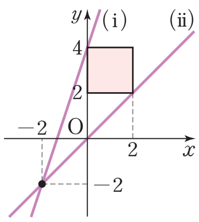
028 답 4

$y=kx+2k-2$를 k에 대하여 정리하면

$y=k(x+2)-2$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

이므로 직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ -2)$를 지난다.

이때 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 주어진 정사각형과 만나도록 움직여 보면



(i) 직선 ㉠이 점 $(0,\ 4)$를 지날 때

$4=2k-2 \qquad \therefore k=3$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(2,\ 2)$를 지날 때

$2=4k-2 \qquad \therefore k=1$

(i), (ii)에 의하여 k의 값의 범위는 $1\le k\le 3$

따라서 $M=3,\ m=1$이므로

$M+m=4$

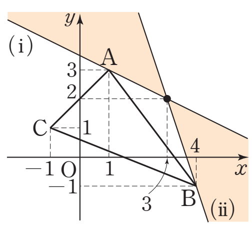
029 답 $-3<m<-\frac{1}{2}$

$mx-y-3m+2=0$을 m에 대하여 정리하면

$m(x-3)-(y-2)=0$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(3,\ 2)$를 지난다.

이때 직선 ㉠이 삼각형 ABC와 만나지 않으려면 직선 ㉠은 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 있어야 하므로



(i) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{A}(1,\ 3)$을 지날 때

$-2m-1=0 \qquad \therefore m=-\frac{1}{2}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{B}(4,\ -1)$을 지날 때

$m+3=0 \qquad \therefore m=-3$

(i), (ii)에 의하여 구하는 m의 값의 범위는

$-3<m<-\frac{1}{2}$

030 답 ②

두 직선 $3x-2y-2=0,\ x-y+1=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$3x-2y-2+k(x-y+1)=0$ (단, k는 실수) $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 점 $(1,\ -1)$을 지나므로

$3+3k=0 \qquad \therefore k=-1$

$k=-1$을 ㉠에 대입하여 정리하면 $2x-y-3=0$

이때 $x=0$을 대입하면 $y=-3$

따라서 구하는 y절편은 -3이다.

031 답 ①

두 직선 $2x-y+4=0,\ x+4y-3=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$2x-y+4+k(x+4y-3)=0$ (단, k는 실수) $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 점 $(3,\ 2)$를 지나므로

$8+8k=0 \qquad \therefore k=-1$

$k=-1$을 ㉠에 대입하여 정리하면 $x-5y+7=0$

따라서 이 직선 위의 점은 ① $(-2,\ 1)$이다.

032 답 ④

직선 $3x-y+3=0$의 x절편은 -1이므로 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$

직선 $x+y-7=0$의 x절편은 7이므로 $\mathrm{B}(7,\ 0)$

두 점 A, B에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+7}{2},\ \frac{0}{2}\right) \qquad \therefore (3,\ 0)$

이때 점 C를 지나는 직선의 방정식은

$3x-y+3+k(x+y-7)=0$ (단, k는 실수) $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점 $(3,\ 0)$을 지날 때, 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하므로 $12-4k=0 \qquad \therefore k=3$

$k=3$을 ㉠에 대입하여 정리하면 $3x+y-9=0$

따라서 $a=3,\ b=1$이므로 $a^2+b^2=9+1=10$

핵심 유형 170~171쪽

유형10 답 ④

두 직선이 평행하려면

$\frac{k-1}{k}=\frac{2}{-1}\ne\frac{1}{3},\ -k+1=2k$

$\therefore k=\frac{1}{3} \qquad \therefore p=\frac{1}{3}$

또 두 직선이 수직이 되려면

$k(k-1)+2\times(-1)=0,\ k^2-k-2=0$

$(k+1)(k-2)=0 \qquad \therefore k=-1$ 또는 $k=2$

그런데 $q>0$이므로 $q=2$

$\therefore p+q=\frac{7}{3}$

유형11 답 ⑤

두 점 $(-1,\ 3),\ (3,\ 6)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{6-3}{3+1}=\frac{3}{4}$

이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{4}{3}$이다.

즉, 기울기가 $-\frac{4}{3}$이고 점 $(3,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=-\frac{4}{3}(x-3) \qquad \therefore y=-\frac{4}{3}x+6$

따라서 이 직선 위의 점은 ⑤ $(6,\ -2)$이다.

유형12 답 3

두 점 $\mathrm{A}(2,\ 1),\ \mathrm{B}(4,\ -3)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-3-1}{4-2}=-2$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}$를 수직이등분하는 직선의 기울기는

$\frac{1}{2}$이다.

또 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{1-3}{2}\right) \qquad \therefore (3,\ -1)$

즉, 기울기가 $\frac{1}{2}$이고 점 $(3,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+1=\frac{1}{2}(x-3) \qquad \therefore x-2y-5=0$

따라서 $a=-2,\ b=-5$이므로 $a-b=-2+5=3$

유형13 답 $\frac{7}{2}$

주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 직선 $x+y=0$, $ax+y+2=0$이 평행할 때

$\frac{1}{a}=\frac{1}{1}\neq\frac{0}{2}$ $\quad\therefore a=1$

(ii) 두 직선 $x-2y+3=0$, $ax+y+2=0$이 평행할 때

$\frac{1}{a}=\frac{-2}{1}\neq\frac{3}{2}$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2}$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때

$x+y=0$, $x-2y+3=0$을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=1$

직선 $ax+y+2=0$이 점 $(-1, 1)$을 지나야 하므로

$-a+1+2=0$ $\quad\therefore a=3$

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 상수 a의 값의 합은

$1+\left(-\frac{1}{2}\right)+3=\frac{7}{2}$

유형14 답 4

점 $(3, 2)$와 직선 $4x-3y+k=0$ 사이의 거리가 2이므로

$\frac{|4\times3-3\times2+k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$, $\frac{|k+6|}{5}=2$

$|k+6|=10$, $k+6=\pm10$

$\therefore k=-16$ 또는 $k=4$

그런데 $k>0$이므로 $k=4$

유형15 답 ②

두 직선 $x+2y+3=0$, $x+2y-7=0$이 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $x+2y+3=0$ 위의 한 점 $(-3, 0)$과 직선 $x+2y-7=0$ 사이의 거리와 같다.

$\therefore \frac{|-3-7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$

유형16 답 ④

$\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

직선 AB의 방정식은

$y=\frac{2}{3-1}(x-1)$ $\quad\therefore x-y-1=0$

점 $C(2, 5)$와 직선 AB 사이의 거리 d는

$d=\frac{|2-5-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times d=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=4$

유형17 답 $x+3y-2=0$ 또는 $3x-y+4=0$

두 직선 $x-2y+3=0$, $2x+y+1=0$이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$라고 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{|x-2y+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|2x+y+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}$

$|x-2y+3|=|2x+y+1|$, $x-2y+3=\pm(2x+y+1)$

$\therefore x+3y-2=0$ 또는 $3x-y+4=0$

핵심 유형 **완성**하기 172~176쪽

033 답 ⑤

두 직선이 평행하려면

$\frac{3}{2}=\frac{k+3}{k-4}\neq\frac{-5}{1}$, $3k-12=2k+6$

$\therefore k=18$ $\quad\therefore \alpha=18$

또 두 직선이 수직이 되려면

$3\times2+(k+3)(k-4)=0$

$k^2-k-6=0$, $(k+2)(k-3)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=3$

그런데 $\beta>0$이므로 $\beta=3$

$\therefore \frac{\alpha}{\beta}=\frac{18}{3}=6$

034 답 ④

직선 $y=ax+4$가 직선 $y=\frac{1}{3}x-2$와 수직이므로

$a\times\frac{1}{3}=-1$ $\quad\therefore a=-3$

또 직선 $y=ax+4$가 직선 $y=(4-b)x-2$와 평행하므로

$a=4-b$, $-3=4-b$ $\quad\therefore b=7$

$\therefore a+b=4$

035 답 ⑤

두 직선의 교점이 존재하지 않으려면 두 직선이 평행해야 하므로

$\frac{k}{3}=\frac{2}{k-1}\neq\frac{-3}{1}$, $k(k-1)=6$, $k\neq-9$, $k\neq\frac{1}{3}$

$k(k-1)=6$에서 $k^2-k-6=0$, $(k+2)(k-3)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=3$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 $-2+3=1$

036 답 ⑤

직선 $ax-2y+1=0$이 직선 $bx-3y+2=0$과 수직이므로

$ab+(-2)\times(-3)=0$ $\quad\therefore ab=-6$

또 직선 $ax-2y+1=0$이 직선 $(b+2)x+2y+4=0$과 평행하므로

$\frac{a}{b+2}=\frac{-2}{2}\neq\frac{1}{4}$

$a=-b-2$ $\quad\therefore a+b=-2$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4+12=16$

037 답 ④

두 직선이 수직이므로

$a+a(a+1)=0$, $a^2+2a=0$

$a(a+2)=0$ $\quad\therefore a=-2$ 또는 $a=0$

그런데 $a\neq0$이므로 $a=-2$

따라서 두 직선은 $x-y+2=0$, $-2x-2y+b=0$이고, 두 직선의 교점의 좌표가 $(1, c)$이므로

$1-c+2=0$, $-2-2c+b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $b=8$, $c=3$

$\therefore a+b+c=9$

038 답 ③

두 점 A(1, 2), B(4, 8)을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{8-2}{4-1}=2$

이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}$를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\times4+1\times1}{2+1}, \frac{2\times8+1\times2}{2+1}\right)$ $\quad\therefore (3, 6)$

즉, 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 점 (3, 6)을 지나는 직선의 방정식은

$y-6=-\frac{1}{2}(x-3)$ $\quad\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}$

이때 $y=0$을 대입하면 $x=15$

따라서 구하는 x절편은 15이다.

039 답 ⑤

두 점 (−2, −3), (2, 1)을 지나는 직선의 방정식은

$y+3=\frac{1+3}{2+2}(x+2)$ $\quad\therefore y=x-1$

이 직선에 평행한 직선의 기울기는 1이므로 기울기가 1이고 점 (−3, 0)을 지나는 직선의 방정식은 $y=x+3$

이 직선이 점 (2, k)를 지나므로

$k=2+3=5$

040 답 ④

두 직선 $2x+3y+1=0$, $x+5y-7=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$2x+3y+1+k(x+5y-7)=0$ (단, k는 실수)

$\therefore (k+2)x+(5k+3)y-7k+1=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠과 직선 $2x-y+3=0$이 수직이므로

$2\times(k+2)+(-1)\times(5k+3)=0$

$-3k+1=0$ $\quad\therefore k=\frac{1}{3}$

$k=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{7}{3}x+\frac{14}{3}y-\frac{4}{3}=0$ $\quad\therefore 7x+14y-4=0$

041 답 ①

원점에서 직선 $y=2x+4$에 내린 수선의 발은 원점을 지나고 직선 $y=2x+4$에 수직인 직선과 직선 $y=2x+4$의 교점과 같다.

직선 $y=2x+4$의 기울기는 2이므로 이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

즉, 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 원점을 지나는 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x$

직선 $y=-\frac{1}{2}x$와 직선 $y=2x+4$의 교점의 좌표를 구하면

$-\frac{1}{2}x=2x+4$, $\frac{5}{2}x=-4$ $\quad\therefore x=-\frac{8}{5}$, $y=\frac{4}{5}$

따라서 수선의 발의 좌표는 $\left(-\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$이므로

$a=-\frac{8}{5}$, $b=\frac{4}{5}$ $\quad\therefore a+b=-\frac{4}{5}$

042 답 ①

두 점 A(−1, 2), B(5, 4)를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{4-2}{5+1}=\frac{1}{3}$

이므로 $\overline{\mathrm{AB}}$를 수직이등분하는 직선의 기울기는 −3이다.

또 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{2+4}{2}\right)$ $\quad\therefore (2, 3)$

즉, 기울기가 −3이고 점 (2, 3)을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=-3(x-2)$ $\quad\therefore y=-3x+9$

따라서 이 직선이 점 (a, 6)을 지나므로

$6=-3a+9$ $\quad\therefore a=1$

043 답 ①

$2x+y-4=0$에서 $y=-2x+4$이므로 구하는 수직이등분선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

또 직선 $2x+y-4=0$이 x축, y축과 만나는 점은 각각 A(2, 0), B(0, 4)이므로 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2}{2}, \frac{4}{2}\right)$ $\quad\therefore (1, 2)$

따라서 기울기가 $\frac{1}{2}$이고 점 (1, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{1}{2}(x-1)$ $\quad\therefore x-2y+3=0$

044 답 ②

직선 AB와 직선 $y=-2x+b$가 수직이므로

$\frac{a-3}{5-1}\times(-2)=-1$, $a-3=2$ $\quad\therefore a=5$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$ $\quad\therefore (3, 4)$

따라서 직선 $y=-2x+b$는 점 (3, 4)를 지나므로

$4=-6+b$ $\quad\therefore b=10$

$\therefore a+b=15$

045 답 ③

주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 직선 $2x-y=0$, $ax-y+4=0$이 평행할 때

$\frac{2}{a}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{0}{4}$ $\quad\therefore a=2$

(ii) 두 직선 $x+y-2=0$, $ax-y+4=0$이 평행할 때

$\frac{1}{a}=\frac{1}{-1}\neq\frac{-2}{4}$ $\quad\therefore a=-1$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때

$2x-y=0$, $x+y-2=0$을 연립하여 풀면 $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{4}{3}$

직선 $ax-y+4=0$이 점 $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$를 지나야 하므로

$\frac{2}{3}a-\frac{4}{3}+4=0$ $\quad\therefore a=-4$

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 상수 a의 값의 합은

$2+(-1)+(-4)=-3$

046 답 3

$2x+y+5=0$, $x-y+4=0$을 연립하여 풀면

$x=-3$, $y=1$

따라서 직선 $kx+2y+7=0$이 두 직선 $2x+y+5=0$,

$x-y+4=0$의 교점 $(-3,\ 1)$을 지나야 하므로

$-3k+2+7=0 \qquad \therefore k=3$

047 답 ②

주어진 세 직선에 의하여 생기는 교점이 2개가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 직선 $3x+y-6=0$, $ax+2y+1=0$이 평행할 때

$\frac{3}{a}=\frac{1}{2}\neq\frac{-6}{1} \qquad \therefore a=6$

(ii) 두 직선 $2x-y-3=0$, $ax+2y+1=0$이 평행할 때

$\frac{2}{a}=\frac{-1}{2}\neq\frac{-3}{1} \qquad \therefore a=-4$

(i), (ii)에 의하여 모든 상수 a의 값의 합은

$6+(-4)=2$

048 답 2

$3x+2y=0$에서 $y=-\frac{3}{2}x$ …… ㉠

$x+2y-4=0$에서 $y=-\frac{1}{2}x+2$ …… ㉡

$ax-y+2=0$에서 $y=ax+2$ …… ㉢

세 직선으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형이 되려면 세 직선 중 어느 두 직선이 수직이어야 한다.

이때 직선 ㉠, ㉡, ㉢의 기울기가 각각 $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, a이므로 두 직선 ㉠, ㉡은 수직이 아니다.

(i) 두 직선 ㉠, ㉢이 수직일 때

$-\frac{3}{2}\times a=-1 \qquad \therefore a=\frac{2}{3}$

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 수직일 때

$-\frac{1}{2}\times a=-1 \qquad \therefore a=2$

(i), (ii)에 의하여 정수 a의 값은 2이다.

049 답 ②

점 $(-2,\ 3)$과 직선 $8x+6y-k=0$ 사이의 거리가 1이므로

$\frac{|-16+18-k|}{\sqrt{8^2+6^2}}=1$, $\frac{|2-k|}{10}=1$

$|k-2|=10$, $k-2=\pm10$

$\therefore k=-8$ 또는 $k=12$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 $-8+12=4$

050 답 ①

두 점 $(1,\ -1)$, $(3,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+1=\frac{5+1}{3-1}(x-1) \qquad \therefore 3x-y-4=0$

따라서 점 $(2,\ 3)$과 직선 $3x-y-4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|6-3-4|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

051 답 ④

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x-2y+3)+k(x+2y)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$2x-2y+3=0$, $x+2y=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=\frac{1}{2} \qquad \therefore \mathrm{P}\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$

따라서 점 $\mathrm{P}\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$과 직선 $3x+4y-9=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-3+2-9|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

052 답 ②

$\mathrm{P}(a,\ 0)$이라고 하면 점 P에서 두 직선

$2x-y+3=0$, $x-2y-6=0$에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{|2a+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|a-6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$

$|2a+3|=|a-6|$, $2a+3=\pm(a-6)$

$\therefore a=-9$ 또는 $a=1$

따라서 점 P의 좌표는 $(-9,\ 0)$ 또는 $(1,\ 0)$이다.

053 답 ①

$4x-2y+7=0$에서 $y=2x+\frac{7}{2}$

이 직선에 평행한 직선의 방정식을

$y=2x+k\left(k\neq\frac{7}{2}\right)$

라고 하면 원점과 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $\frac{|k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

$|k|=5 \qquad \therefore k=\pm5$

즉, 구하는 직선의 방정식은

$2x-y+5=0$ 또는 $2x-y-5=0$

따라서 $a=-1$, $b=-5$이므로 $a+b=-6$

054 답 ①

$f(k)=\frac{|2k+6-2k-4|}{\sqrt{k^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{k^2+4}}$

따라서 $\sqrt{k^2+4}$가 최소일 때, $f(k)$의 값이 최대이므로 구하는 최댓값은 $f(0)=1$

055 답 ④

두 직선이 평행하므로

$\frac{k}{2}=\frac{1}{1}\neq\frac{-2}{3} \qquad \therefore k=2$

즉, 두 직선의 방정식은

$2x+y-2=0$, $2x+y+3=0$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x+y-2=0$ 위의 한 점 $(1,\ 0)$과 직선 $2x+y+3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|2+3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

056 답 ③

두 직선 $7x+y=0$, $7x+y+a=0$이 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $7x+y=0$ 위의 한 점 $(0,\ 0)$과 직선 $7x+y+a=0$ 사이의 거리와 같고, 이 거리가 $3\sqrt{2}$이므로

$\frac{|a|}{\sqrt{7^2+1^2}}=3\sqrt{2}$, $\frac{|a|}{5\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

$|a|=30$ $\quad\therefore a=-30$ 또는 $a=30$

그런데 $a>0$이므로 $a=30$

057 답 ④

두 직선이 평행하므로

$\frac{1}{k}=\frac{1}{1}\neq\frac{4}{-2}$ $\quad\therefore k=1$

즉, 두 직선의 방정식은

$x+y+4=0$, $x+y-2=0$

이때 정사각형의 한 변의 길이는 두 직선 사이의 거리와 같고, 이는 직선 $x+y-2=0$ 위의 한 점 $(2,\ 0)$과 직선 $x+y+4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|2+4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

따라서 정사각형 ABCD의 넓이는

$(3\sqrt{2})^2=18$

058 답 ③

직선 $x+2y-4=0$의 x절편은 4이고, y절편은 2이므로

$\mathrm{A}(4,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 2)$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-4)^2+2^2}=2\sqrt{5}$

점 $\mathrm{C}(3,\ 4)$와 직선 $x+2y-4=0$ 사이의 거리 d는

$d=\frac{|3+8-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{7}{\sqrt{5}}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times d=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{7}{\sqrt{5}}=7$

059 답 ③

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

직선 AB의 방정식은

$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$ $\quad\therefore x+y-2=0$

점 $\mathrm{C}(3,\ a)$와 직선 AB 사이의 거리 d는

$d=\frac{|3+a-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|a+1|}{\sqrt{2}}$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 6이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times d=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{|a+1|}{\sqrt{2}}$

$=|a+1|=6$

$a+1=\pm6$

$\therefore a=-7$ 또는 $a=5$

그런데 $a>0$이므로 $a=5$

060 답 6

직선 OA와 직선 $2x-3y+12=0$은 기울기가 $\frac{2}{3}$로 평행하므로 삼각형 OAP에서 $\overline{\mathrm{OA}}$를 밑변으로 하면 원점과 직선 $2x-3y+12=0$ 사이의 거리가 높이가 된다.

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

원점과 직선 $2x-3y+12=0$ 사이의 거리 d는

$d=\frac{|12|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{12}{\sqrt{13}}$

따라서 삼각형 OAP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times d=\frac{1}{2}\times\sqrt{13}\times\frac{12}{\sqrt{13}}=6$

061 답 7

세 직선의 기울기가 모두 다르고 한 점에서 만나지 않으므로 세 직선으로 둘러싸인 도형은 삼각형이다.

두 직선 $x-2y=0$, $2x+3y-21=0$의 교점을 A라고 하고 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$x=6$, $y=3$ $\quad\therefore \mathrm{A}(6,\ 3)$

두 직선 $2x+3y-21=0$, $4x-y-7=0$의 교점을 B라고 하고 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$x=3$, $y=5$ $\quad\therefore \mathrm{B}(3,\ 5)$

두 직선 $x-2y=0$, $4x-y-7=0$의 교점을 C라고 하고 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=1$ $\quad\therefore \mathrm{C}(2,\ 1)$

즉, 삼각형의 세 꼭짓점의 좌표는 $\mathrm{A}(6,\ 3)$, $\mathrm{B}(3,\ 5)$, $\mathrm{C}(2,\ 1)$

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$

점 $\mathrm{B}(3,\ 5)$와 직선 $x-2y=0$ 사이의 거리 d는

$d=\frac{|3-10|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{7}{\sqrt{5}}$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times d=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{7}{\sqrt{5}}=7$

062 답 ①

두 직선 $x+3y+2=0$, $3x+y-2=0$이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{|x+3y+2|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|3x+y-2|}{\sqrt{3^2+1^2}}$

$|x+3y+2|=|3x+y-2|$, $x+3y+2=\pm(3x+y-2)$

$\therefore x-y-2=0$ 또는 $x+y=0$

따라서 y절편이 음수인 직선의 방정식은 $x-y-2=0$

063 답 ③

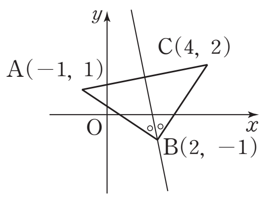
$\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 점 P에서 두 직선 $3x+2y+1=0$, $2x-3y-5=0$에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{|3x+2y+1|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{|2x-3y-5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}$

$|3x+2y+1|=|2x-3y-5|$, $3x+2y+1=\pm(2x-3y-5)$

$\therefore x+5y+6=0$ 또는 $5x-y-4=0$

064 답 $5x+y-9=0$



삼각형의 내심은 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점이므로 점 B와 삼각형 ABC의 내심을 지나는 직선은 오른쪽 그림과 같이 $\angle$B의 이등분선과 같다.

직선 AB의 방정식을 구하면

$y-1=\dfrac{-1-1}{2+1}(x+1)$

$\therefore 2x+3y-1=0$ …… ㉠

직선 BC의 방정식을 구하면

$y+1=\dfrac{2+1}{4-2}(x-2)$

$\therefore 3x-2y-8=0$ …… ㉡

따라서 두 직선 ㉠, ㉡이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 P(x, y)라고 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$\dfrac{|2x+3y-1|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\dfrac{|3x-2y-8|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}$

$|2x+3y-1|=|3x-2y-8|$

$2x+3y-1=\pm(3x-2y-8)$

$\therefore x-5y-7=0$ 또는 $5x+y-9=0$

그런데 $\angle$B의 이등분선의 y절편은 양수이어야 하므로 구하는 직선의 방정식은

$5x+y-9=0$

핵심 유형 **최종 점검**하기 • 177~179쪽

1 답 ①

유형 01 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식

구하는 직선의 방정식은

$y-4=3(x-2)$ $\therefore y=3x-2$

따라서 $m=3$, $n=-2$이므로

$m+n=1$

2 답 ①

유형 01 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식

두 점 $(3, -k)$, $(k-3, 0)$을 지나는 직선의 기울기가 2이므로

$\dfrac{k}{(k-3)-3}=2$, $k=2k-12$

$\therefore k=12$

기울기가 2이고 점 $(3, -12)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+12=2(x-3)$ $\therefore y=2x-18$

따라서 이 직선의 y절편은 -18이다.

다른 풀이 $k=12$이므로 두 점 $(3, -12)$, $(9, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+12=\dfrac{12}{9-3}(x-3)$ $\therefore y=2x-18$

3 답 ②

유형 02 두 점을 지나는 직선의 방정식

$\triangle$PAB : $\triangle$PBC$=3:2$이므로

$\overline{PA}:\overline{PC}=3:2$

즉, 점 P는 $\overline{AC}$를 $3:2$로 내분하는 점이므로

$P\left(\dfrac{3\times6+2\times1}{3+2}, \dfrac{3\times8+2\times3}{3+2}\right)$

$\therefore$ P$(4, 6)$

두 점 B, P를 지나는 직선의 방정식은

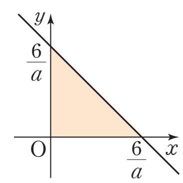
$y-4=\dfrac{6-4}{4-5}(x-5)$

$\therefore y=-2x+14$

따라서 이 직선의 x절편은 7이다.

4 답 ⑤

유형 03 x절편과 y절편이 주어진 직선의 방정식



직선 $\dfrac{ax}{6}+\dfrac{ay}{6}=1$의 x절편은 $\dfrac{6}{a}$, y절편은 $\dfrac{6}{a}$이고, 이 직선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 3이므로

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{6}{a}\times\dfrac{6}{a}=3$

$a^2=6$ $\therefore a=\pm\sqrt{6}$

그런데 $a>0$이므로 $a=\sqrt{6}$

5 답 $y=3x+5$

유형 04 세 점이 한 직선 위에 있을 조건

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

(직선 AB의 기울기)=(직선 AC의 기울기)이어야 하므로

$\dfrac{8+1}{k+2}=\dfrac{(5k+6)+1}{2+2}$, $\dfrac{9}{k+2}=\dfrac{5k+7}{4}$

$5k^2+17k-22=0$, $(5k+22)(k-1)=0$

$\therefore k=-\dfrac{22}{5}$ 또는 $k=1$

그런데 $k>0$이므로 $k=1$

따라서 직선 l은 기울기가 $\dfrac{9}{k+2}=3$이고 점 $(-2, -1)$을 지나므로

$y+1=3(x+2)$

$\therefore y=3x+5$

6 답 6

유형 05 도형의 넓이를 이등분하는 직선

직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지난다.

두 점 $(2, 3)$, $(6, 5)$를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{2+6}{2}, \dfrac{3+5}{2}\right)$ $\therefore (4, 4)$

두 점 $(1, -2)$, $(4, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+2=\dfrac{4+2}{4-1}(x-1)$

$\therefore y=2x-4$

따라서 $a=2$, $b=-4$이므로

$a-b=6$

7 답 $y=2x-1$

유형 05 도형의 넓이를 이등분하는 직선

$\overline{BC}$의 중점을 M이라고 하면

$M\left(\frac{3+5}{2}, \frac{-2+6}{2}\right)$ $\qquad \therefore M(4, 2)$

두 점 A(2, 3), M(4, 2)를 지나는 직선 l의 기울기는

$\frac{2-3}{4-2}=-\frac{1}{2}$

이때 구하는 직선은 직선 l에 수직이므로 기울기가 2이고 점 A(2, 3)을 지난다.

$y-3=2(x-2)$ $\qquad \therefore y=2x-1$

8 답 ③

유형 06 직선의 개형

주어진 그림에서 $a\neq0$, $b\neq0$, $c\neq0$이므로 $ax+by+c=0$에서

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

주어진 직선의 기울기는 양수이고 y절편은 음수이므로

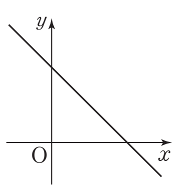
$-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}<0$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉠

한편 $cx+by+a=0$에서

$y=-\frac{c}{b}x-\frac{a}{b}$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠에 의하여 직선 ㉡의 기울기는 음수이고 y절편은 양수이다.

따라서 직선 $cx+by+a=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



9 답 ③

유형 07 정점을 지나는 직선

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x-2y-5)+k(4x+y-2)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$x-2y-5=0$, $4x+y-2=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=-2$

따라서 P(1, −2)이므로 $\overline{OP}=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

10 답 ②

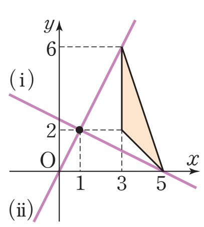
유형 08 정점을 지나는 직선의 활용

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$y=k(x-1)+2$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉠

이므로 직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 점 (1, 2)를 지난다.

이때 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 주어진 삼각형과 만나도록 움직여 보면



(i) 직선 ㉠이 점 (5, 0)을 지날 때

$0=4k+2$ $\qquad \therefore k=-\frac{1}{2}$

(ii) 직선 ㉠이 점 (3, 6)을 지날 때

$6=2k+2$ $\qquad \therefore k=2$

(i), (ii)에 의하여 k의 값의 범위는 $-\frac{1}{2}\le k\le 2$

따라서 $M=2$, $m=-\frac{1}{2}$이므로 $Mm=-1$

11 답 $x-5y+9=0$

유형 09 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식

두 직선 $3x-4y+1=0$, $2x+y-8=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$3x-4y+1+k(2x+y-8)=0$ (단, k는 실수) $\qquad \cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 점 (1, 2)를 지나므로

$-4-4k=0$ $\qquad \therefore k=-1$

$k=-1$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x-5y+9=0$

12 답 ②

유형 10 두 직선의 위치 관계

두 직선이 평행하려면

$\frac{k+3}{k}=\frac{2}{-2}\neq\frac{-4}{3}$, $k+3=-k$

$\therefore k=-\frac{3}{2}$ $\qquad \therefore \alpha=-\frac{3}{2}$

또 두 직선이 수직이 되려면

$k(k+3)+2\times(-2)=0$

$k^2+3k-4=0$

$(k+4)(k-1)=0$

$\therefore k=-4$ 또는 $k=1$

그런데 $\beta>0$이므로 $\beta=1$

$\therefore \alpha+\beta=-\frac{1}{2}$

13 답 $x+4y-5=0$

유형 11 평행 또는 수직 조건이 주어진 직선의 방정식

두 직선 $x-3y+4=0$, $2x+y-1=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x-3y+4+k(2x+y-1)=0$ (단, k는 실수)

$\therefore (2k+1)x+(k-3)y-k+4=0$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠과 직선 $x+4y+7=0$이 평행하므로

$\frac{2k+1}{1}=\frac{k-3}{4}\neq\frac{-k+4}{7}$

$4(2k+1)=k-3$ $\qquad \therefore k=-1$

$k=-1$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x+4y-5=0$

14 답 ①

유형 12 선분의 수직이등분선의 방정식

직선 $2x+y-1=0$, 즉 $y=-2x+1$이 직선 AB와 수직이므로

$(-2)\times\frac{b-4}{a-1}=-1$

$\therefore a-2b=-7$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 직선 $2x+y-1=0$은 $\overline{AB}$의 중점 $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+4}{2}\right)$를 지나므로

$2\times\frac{a+1}{2}+\frac{b+4}{2}-1=0$

$\therefore 2a+b=-4$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=2$

$\therefore a-b=-5$

15 답 0

유형 13 세 직선의 위치 관계

서로 다른 세 직선이 좌표평면을 네 개의 영역으로 나누려면 세 직선이 모두 평행해야 한다.

(i) 두 직선 $ax-y-3=0$, $2x+y+5=0$이 평행할 때

$\dfrac{a}{2}=\dfrac{-1}{1}\neq\dfrac{-3}{5}$ $\quad\therefore a=-2$

(ii) 두 직선 $4x+by-5=0$, $2x+y+5=0$이 평행할 때

$\dfrac{4}{2}=\dfrac{b}{1}\neq\dfrac{-5}{5}$ $\quad\therefore b=2$

(i), (ii)에 의하여 $a=-2$, $b=2$ $\quad\therefore a+b=0$

16 답 ②

유형 14 점과 직선 사이의 거리

$x-y+2=0$, $2x+y-8=0$을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=4$

즉, 점 $(2, 4)$와 직선 $x+3y+k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$\dfrac{|2+12+k|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}$, $|k+14|=10$

$k+14=\pm10$ $\quad\therefore k=-24$ 또는 $k=-4$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 $-24+(-4)=-28$

17 답 ⑤

유형 14 점과 직선 사이의 거리

점 $(1, 3)$을 지나는 직선의 방정식을

$y-3=m(x-1)$, 즉 $mx-y-m+3=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이라고 하면 원점과 직선 ㉠ 사이의 거리가 3이므로

$\dfrac{|-m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3$, $|-m+3|=3\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 $m^2-6m+9=9m^2+9$

$4m^2+3m=0$, $m(4m+3)=0$ $\quad\therefore m=0$ 또는 $m=-\dfrac{3}{4}$

그런데 직선이 좌표축과 평행하지 않으므로 $m=-\dfrac{3}{4}$

$m=-\dfrac{3}{4}$을 ㉠에 대입하여 정리하면 $3x+4y-15=0$

이때 $y=0$을 대입하면 $x=5$

따라서 구하는 x절편은 5이다.

18 답 2

유형 14 점과 직선 사이의 거리

두 점 $A(0, 2)$, $B(1, 0)$에 대하여 직선 AB의 기울기는

$\dfrac{-2}{1}=-2$

이때 직선 AB와 직선 CD는 평행하므로 직선 CD의 기울기는 -2이다.

한편 $\overline{AB}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이므로 $\overline{BC}=\overline{AB}=\sqrt{5}$

직선 CD의 방정식을

$y=-2x+\beta$, 즉 $2x+y-\beta=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이라고 하면 점 $B(1, 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는 $\sqrt{5}$이므로

$\dfrac{|2-\beta|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$, $|\beta-2|=5$

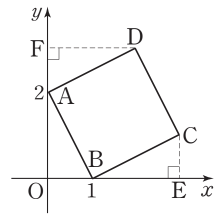
$\beta-2=\pm5$ $\quad\therefore \beta=-3$ 또는 $\beta=7$

그런데 $\beta>0$이므로 $\beta=7$

따라서 $2x+y-7=0$에 $y=0$을 대입하면 $x=\dfrac{7}{2}$이므로 $\alpha=\dfrac{7}{2}$

$\therefore \dfrac{\beta}{\alpha}=2$

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 E, 점 D에서 y축에 내린 수선의 발을 F라고 하면



$\triangle AOB\equiv\triangle BEC$ (RHA 합동)이므로

$\overline{BE}=\overline{AO}=2$, $\overline{CE}=\overline{BO}=1$ $\quad\therefore C(3, 1)$

또 $\triangle AOB\equiv\triangle DFA$ (RHA 합동)이므로

$\overline{DF}=\overline{AO}=2$, $\overline{AF}=\overline{BO}=1$ $\quad\therefore D(2, 3)$

즉, 직선 CD의 방정식은

$y-1=\dfrac{3-1}{2-3}(x-3)$ $\quad\therefore 2x+y-7=0$

19 답 ①

유형 15 평행한 두 직선 사이의 거리

두 직선 $3x+4y+4=0$, $3x+4y-6=0$이 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x+4y+4=0$ 위의 한 점 $(0, -1)$과 직선 $3x+4y-6=0$ 사이의 거리와 같다.

$\therefore \dfrac{|-4-6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

20 답 ①

유형 16 삼각형의 넓이

직선 $2x+y-12=0$과 직선 $y=x$의 교점의 좌표를 구하면

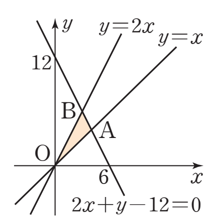
$2x+x-12=0$ $\quad\therefore x=4$, 즉 $A(4, 4)$

직선 $2x+y-12=0$과 직선 $y=2x$의 교점의 좌표를 구하면

$2x+2x-12=0$ $\quad\therefore x=3$, 즉 $B(3, 6)$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$

원점 O와 직선 $2x+y-12=0$ 사이의 거리 d는



$d=\dfrac{|-12|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{12}{\sqrt{5}}$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times d=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\dfrac{12}{\sqrt{5}}=6$

21 답 ⑤

유형 17 두 직선이 이루는 각의 이등분선의 방정식

두 직선 $x+2y+1=0$, $2x+y+3=0$이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$라고 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$\dfrac{|x+2y+1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|2x+y+3|}{\sqrt{2^2+1^2}}$

$|x+2y+1|=|2x+y+3|$, $x+2y+1=\pm(2x+y+3)$

$\therefore x-y+2=0$ 또는 $3x+3y+4=0$

이 두 직선이 점 $(3, a)$를 지나므로

$3-a+2=0$ 또는 $9+3a+4=0$ $\quad\therefore a=5$ 또는 $a=-\dfrac{13}{3}$

그런데 a는 정수이므로 $a=5$

11 원의 방정식

핵심 유형

	유형01 ⑤	유형02 ①	유형03 ③
유형04 ①	유형05 ④	유형06 ⑤	유형07 ①
유형08 1	유형09 ⑤	유형10 ①	유형11 ④
유형12 ③	유형13 $4\sqrt{2}$	유형14 $2-\sqrt{2}$	유형15 ⑤
유형16 ①	유형17 ②		

핵심 유형 완성하기

001 $(x+1)^2+y^2=18$		002 ①	003 ④	
004 $x^2+(y-1)^2=2$		005 ④	006 ②	007 ③
008 ⑤	009 ②	010 ③	011 ③	012 ②
013 $(x+3)^2+(y+5)^2=25$			014 π	
015 $4\sqrt{2}$	016 ③	017 ③	018 8π	
019 6π	020 ⑤	021 $k<-1$ 또는 $k>2$		
022 ①	023 ⑤	024 ②	025 ②	026 ③
027 $x^2+y^2-x+5y-6=0$			028 ③	029 ⑤
030 ②	031 ④	032 ④	033 ③	
034 $x^2+y^2-y-6=0$		035 ③	036 ②	037 ③
038 ①	039 ⑤	040 8	041 $2\sqrt{21}$	042 ⑤
043 ④	044 ②	045 $\sqrt{2}$	046 ⑤	047 ⑤
048 ④	049 ③	050 ④	051 49	052 ⑤
053 ②	054 ③	055 ④	056 ①	057 ①
058 ③	059 ④	060 16	061 ②	062 ①
063 ①	064 ⑤			

핵심 유형 최종 점검하기

1 $(x-2)^2+y^2=20$		2 $(x+3)^2+(y-1)^2=2$		
3 ⑤	4 ③	5 $12\sqrt{2}$	6 ③	7 ④
8 ①	9 ⑤	10 ④	11 ⑤	
12 $k<-\frac{\sqrt{21}}{2}$ 또는 $k>\frac{\sqrt{21}}{2}$			13 $\frac{1}{6}$	14 ③
15 ⑤	16 ③	17 ⑤	18 10	
19 $y=3x-9$ 또는 $y=3x+11$			20 ⑤	21 ①
22 ④				

핵심 유형 182~184쪽

유형01 답 ⑤

$\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times1+2\times4}{1+2}, \frac{1\times(-4)+2\times5}{1+2}\right)$ $\quad\therefore (3, 2)$

이때 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-2)^2=r^2$

이 원이 점 $B(1, -4)$를 지나므로

$(1-3)^2+(-4-2)^2=r^2$ $\quad\therefore r^2=40$

$\therefore (x-3)^2+(y-2)^2=40$

따라서 $a=3$, $b=2$, $c=40$이므로 $a+b+c=45$

유형02 답 ①

원의 중심을 C라고 하면 점 C는 $\overline{OA}$의 중점이므로

$C\left(\frac{2}{2}, \frac{-4}{2}\right)$ $\quad\therefore C(1, -2)$

이때 원의 반지름의 길이는

$\overline{OC}=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

즉, 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y+2)^2=5$

이 원이 점 $(3, k)$를 지나므로

$(3-1)^2+(k+2)^2=5$, $k^2+4k+3=0$

$(k+3)(k+1)=0$ $\quad\therefore k=-3$ 또는 $k=-1$

따라서 모든 k의 값의 합은 $-3+(-1)=-4$

유형03 답 ③

원의 중심의 좌표를 $(0, a)$, 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은

$x^2+(y-a)^2=r^2$ ...... ㉠

원 ㉠이 점 $(4, 0)$을 지나므로

$4^2+(0-a)^2=r^2$, $a^2+16=r^2$ ...... ㉡

원 ㉠이 점 $(3, 7)$을 지나므로

$3^2+(7-a)^2=r^2$, $a^2-14a+58=r^2$ ...... ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=3$, $r^2=25$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+(y-3)^2=25$

유형04 답 ①

원의 중심의 좌표를 $(a, a+3)$이라고 하면 x축에 접하는 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a-3)^2=(a+3)^2$

이 원이 점 $(1, 2)$를 지나므로

$(1-a)^2+(2-a-3)^2=(a+3)^2$

$a^2-6a-7=0$, $(a+1)(a-7)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=7$

따라서 두 원의 반지름의 길이는 각각 2, 10이므로 두 원의 넓이의 합은

$\pi\times2^2+\pi\times10^2=104\pi$

유형05 답 ④

원의 중심이 제1사분면 위에 있어야 하므로 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은

$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

이 원이 점 $(2, 1)$을 지나므로

$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$, $r^2-6r+5=0$

$(r-1)(r-5)=0$ $\therefore r=1$ 또는 $r=5$

따라서 두 원의 둘레의 길이의 합은

$2\pi\times1+2\pi\times5=12\pi$

유형06 답 ⑤

$x^2+y^2-4x+2y=0$에서 $(x-2)^2+(y+1)^2=5$

따라서 이 방정식이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(2, -1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{5})^2=5\pi$

유형07 답 ①

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓으면 이 원이 원점 $(0, 0)$을 지나므로 $C=0$

$\therefore x^2+y^2+Ax+By=0$ …… ㉠

원 ㉠이 점 $(0, 4)$를 지나므로

$16+4B=0$ $\therefore B=-4$ …… ㉡

원 ㉠이 점 $(3, -3)$을 지나므로

$9+9+3A-3B=0$, $A-B=-6$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하여 정리하면 $A=-10$

따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2+y^2-10x-4y=0$

유형08 답 1

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-2+k(x^2+y^2-2x+4y+2)=0$ (단, $k\neq-1$) …… ㉠

원 ㉠이 원점 $(0, 0)$을 지나므로

$-2+2k=0$ $\therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+y^2-x+2y=0$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로 $a+b=1$

유형09 답 ⑤

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+x-5y+1-(x^2+y^2-2x-4y-4)=0$

$\therefore y=3x+5$

따라서 구하는 직선의 기울기는 3이다.

유형10 답 ①

$\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$이므로

$3\overline{BP}=2\overline{AP}$ $\therefore 9\overline{BP}^2=4\overline{AP}^2$

따라서 $P(x, y)$라고 하면 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$9\{(x-2)^2+y^2\}=4\{(x+3)^2+y^2\}$

$\therefore x^2+y^2-12x=0$

핵심 유형 **완성하기** 185~189쪽

001 답 $(x+1)^2+y^2=18$

$\overline{AB}$를 $3:2$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\times1-2\times2}{3-2}, \frac{3\times(-2)-2\times(-3)}{3-2}\right)$ $\therefore (-1, 0)$

이때 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은

$(x+1)^2+y^2=r^2$

이 원이 점 $A(2, -3)$을 지나므로

$(2+1)^2+(-3)^2=r^2$ $\therefore r^2=18$

$\therefore (x+1)^2+y^2=18$

002 답 ①

중심의 좌표가 $(-1, 2)$이고 반지름의 길이가 3이므로 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-2)^2=9$

이 원이 점 $(a, 5)$를 지나므로

$(a+1)^2+(5-2)^2=9$

$a^2+2a+1=0$, $(a+1)^2=0$

$\therefore a=-1$

003 답 ④

중심의 좌표가 $(-2, 3)$이므로 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-3)^2=r^2$

이 원이 점 $(0, 1)$을 지나므로

$2^2+(1-3)^2=r^2$, $r^2=8$

$\therefore r=-2\sqrt{2}$ 또는 $r=2\sqrt{2}$

그런데 $r>0$이므로 $r=2\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 둘레의 길이는

$2\pi\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}\pi$

004 답 $x^2+(y-1)^2=2$

삼각형 ABC의 무게중심 G는

$G\left(\frac{1+3-4}{3}, \frac{2+6-5}{3}\right)$ $\therefore G(0, 1)$

$\therefore \overline{AG}=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

따라서 중심의 좌표가 $(0, 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원의 방정식은 $x^2+(y-1)^2=2$

005 답 ④

원의 중심을 C라고 하면 점 C는 $\overline{AB}$의 중점이므로

$C\left(\frac{5+3}{2}, \frac{-3+1}{2}\right)$ $\therefore C(4, -1)$

이때 원의 반지름의 길이는

$\overline{AC}=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$

즉, 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y+1)^2=5$

따라서 $a=4$, $b=-1$, $c=5$이므로

$a+b+c=8$

006 답 ②

$\overline{BC}$의 중점을 M이라고 하면

$M\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3-5}{2}\right)$ $\quad \therefore M(1, -1)$

구하는 원의 중심을 D라고 하면 점 D는 $\overline{AM}$의 중점이므로

$D\left(\frac{1+1}{2}, \frac{3-1}{2}\right)$ $\quad \therefore D(1, 1)$

이때 원의 반지름의 길이는

$\overline{AD}=\sqrt{0^2+(-2)^2}=2$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-1)^2=4$

007 답 ③

원점에서 출발한 지 t초 후의 점 P, Q의 좌표는 각각

$P(3t, 0)$, $Q(0, 4t)$

이때 두 점 P, Q를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{1}{2}\times\sqrt{(3t)^2+(4t)^2}=\frac{5}{2}t$

이 원의 반지름의 길이가 10이므로

$\frac{5}{2}t=10$ $\quad \therefore t=4$

008 답 ⑤

원의 중심의 좌표를 $(a, 0)$, 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+y^2=r^2$ …… ㉠

원 ㉠이 점 (3, 1)을 지나므로

$(3-a)^2+1=r^2$, $a^2-6a+10=r^2$ …… ㉡

원 ㉠이 점 $(-1, 5)$를 지나므로

$(-1-a)^2+25=r^2$, $a^2+2a+26=r^2$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-2$, $r^2=26$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+2)^2+y^2=26$

009 답 ②

원의 중심의 좌표를 (k, k)라고 하면 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원의 방정식은

$(x-k)^2+(y-k)^2=2$

이 원이 원점 (0, 0)을 지나므로

$k^2+k^2=2$, $k^2=1$ $\quad \therefore k=\pm1$

(i) $k=1$일 때, $(x-1)^2+(y-1)^2=2$

(ii) $k=-1$일 때, $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

(i), (ii)에 의하여 $a=1$, $b=1$, $c=2$ 또는 $a=-1$, $b=-1$, $c=2$

$\therefore abc=2$

010 답 ③

원의 중심의 좌표를 $(k, 2k-1)$, 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은

$(x-k)^2+(y-2k+1)^2=r^2$ …… ㉠

원 ㉠이 점 (3, 2)를 지나므로

$(3-k)^2+(2-2k+1)^2=r^2$

$5k^2-18k+18=r^2$ …… ㉡

원 ㉠이 점 $(5, -2)$를 지나므로

$(5-k)^2+(-2-2k+1)^2=r^2$

$5k^2-6k+26=r^2$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $5k^2-18k+18=5k^2-6k+26$

$-12k=8$ $\quad \therefore k=-\frac{2}{3}$

따라서 원의 중심의 좌표는 $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}\right)$이므로

$a=-\frac{2}{3}$, $b=-\frac{7}{3}$ $\quad \therefore a+b=-3$

011 답 ③

원의 중심의 좌표를 $(a, -a-1)$이라고 하면 y축에 접하는 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y+a+1)^2=a^2$

이 원이 점 $(-2, 3)$을 지나므로

$(-2-a)^2+(3+a+1)^2=a^2$

$a^2+12a+20=0$, $(a+10)(a+2)=0$

$\therefore a=-10$ 또는 $a=-2$

따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은

$|-10|+|-2|=10+2=12$

012 답 ②

원이 x축에 접하므로 $\sqrt{a^2+b+2}=|a|$

양변을 제곱하면

$a^2+b+2=a^2$ $\quad \therefore b=-2$

이때 원 $(x-2)^2+(y-a)^2=a^2$이 점 (2, 6)을 지나므로

$(2-2)^2+(6-a)^2=a^2$, $-12a+36=0$ $\quad \therefore a=3$

$\therefore ab=-6$

013 답 $(x+3)^2+(y+5)^2=25$

원의 넓이가 25π이므로 구하는 원의 반지름의 길이는 5이다.

또 이 원이 점 $(-3, 0)$에서 x축에 접하고, 원의 중심이 제3사분면 위에 있으므로 원의 중심의 좌표는 $(-3, -5)$이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+3)^2+(y+5)^2=25$

014 답 π

원의 중심의 좌표를 (a, b)라고 하면 y축에 접하는 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$ …… ㉠

원 ㉠이 점 (0, 2)를 지나므로

$a^2+(2-b)^2=a^2$ $\quad \therefore b=2$ …… ㉡

원 ㉠이 점 (1, 3)을 지나므로

$(1-a)^2+(3-b)^2=a^2$, $b^2-6b-2a+10=0$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하여 풀면 $a=1$

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\times1^2=\pi$

015 답 $4\sqrt{2}$

원의 중심이 제2사분면 위에 있어야 하므로 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은

$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

이 원이 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$(-1+r)^2+(2-r)^2=r^2$

$r^2-6r+5=0,\ (r-1)(r-5)=0$

$\therefore\ r=1$ 또는 $r=5$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(-1,\ 1)$ 또는 $(-5,\ 5)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(-4)^2+4^2}=4\sqrt{2}$

016 답 ③

중심의 좌표가 $(3,\ -3)$이고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+3)^2=9$

이 원이 점 $(k,\ -2)$를 지나므로

$(k-3)^2+(-2+3)^2=9$

$k^2-6k+1=0 \qquad \therefore\ k=3\pm2\sqrt{2}$

따라서 모든 k의 값의 합은

$(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=6$

017 답 ③

원의 중심이 제4사분면 위에 있으므로 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 중심의 좌표는 $(r,\ -r)$이다.

이때 원의 중심이 직선 $3x+y-4=0$ 위에 있으므로

$3r-r-4=0 \qquad \therefore\ r=2$

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\times2^2=4\pi$

018 답 8π

x축과 y축에 동시에 접하는 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다.

(i) 원의 중심이 두 직선 $y=2x-3,\ y=x$의 교점인 경우

$2x-3=x$에서 $x=3$

$\therefore\ y=3$

즉, 원의 중심의 좌표는 $(3,\ 3)$이고, 원의 반지름의 길이는 3이므로 원의 둘레의 길이는

$2\pi\times3=6\pi$

(ii) 원의 중심이 두 직선 $y=2x-3,\ y=-x$의 교점인 경우

$2x-3=-x$에서 $x=1$

$\therefore\ y=-1$

즉, 원의 중심의 좌표는 $(1,\ -1)$이고, 원의 반지름의 길이는 1이므로 원의 둘레의 길이는

$2\pi\times1=2\pi$

(i), (ii)에 의하여 구하는 두 원의 둘레의 길이의 합은

$6\pi+2\pi=8\pi$

019 답 6π

$x^2+y^2-4x+6y+4=0$에서 $(x-2)^2+(y+3)^2=9$

따라서 이 방정식이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(2,\ -3)$이고 반지름의 길이가 3인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는

$2\pi\times3=6\pi$

020 답 ⑤

주어진 식을 변형하면

① $(x+1)^2+y^2=1$

② $x^2+(y-3)^2=2$

③ $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

④ $(x+2)^2+(y+1)^2=4$

⑤ $(x+2)^2+(y+2)^2=0$

따라서 원의 방정식이 아닌 것은 ⑤이다.

021 답 $k<-1$ 또는 $k>2$

$x^2+y^2+4kx-2y+4k+9=0$에서

$(x+2k)^2+(y-1)^2=4k^2-4k-8$

이 방정식이 원을 나타내려면

$4k^2-4k-8>0,\ k^2-k-2>0$

$(k+1)(k-2)>0 \qquad \therefore\ k<-1$ 또는 $k>2$

022 답 ①

$x^2+y^2-6kx+2ky+9k^2+k+2=0$에서

$(x-3k)^2+(y+k)^2=k^2-k-2$

이 방정식이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(3k,\ -k)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{k^2-k-2}$인 원이다.

이때 이 원의 넓이가 4π이므로

$k^2-k-2=4,\ k^2-k-6=0$

$(k+2)(k-3)=0 \qquad \therefore\ k=-2$ 또는 $k=3$

그런데 $k>0$이므로 $k=3$

023 답 ⑤

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓으면 이 원이 원점 $(0,\ 0)$을 지나므로 $C=0$

$\therefore\ x^2+y^2+Ax+By=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

원 ㉠이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$1+4+A+2B=0,\ A+2B=-5 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

원 ㉠이 점 $(-1,\ 3)$을 지나므로

$1+9-A+3B=0,\ A-3B=10 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $A=1,\ B=-3$

즉, 구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2+x-3y=0$

$\therefore\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$

따라서 이 원의 넓이는

$\pi\times\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2=\frac{5}{2}\pi$

024 답 ②

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓으면 점 $(0,\ 0)$을 지나므로 $C=0$

$\therefore\ x^2+y^2+Ax+By=0$ …… ㉠

원 ㉠이 점 $(-2,\ 4)$를 지나므로

$4+16-2A+4B=0,\ A-2B=10$ …… ㉡

원 ㉠이 점 $(2,\ 6)$을 지나므로

$4+36+2A+6B=0,\ A+3B=-20$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $A=-2,\ B=-6$

$\therefore\ x^2+y^2-2x-6y=0$

이 원이 점 $(p,\ 2)$를 지나므로

$p^2+4-2p-12=0,\ p^2-2p-8=0$

$(p+2)(p-4)=0\quad \therefore\ p=-2$ 또는 $p=4$

그런데 $p>0$이므로 $p=4$

025 답 ②

$x+3y=0$ …… ㉠, $2x+y=0$ …… ㉡, $x-2y+5=0$ …… ㉢

㉠, ㉡의 교점의 좌표는 $(0,\ 0)$, ㉠, ㉢의 교점의 좌표는 $(-3,\ 1)$, ㉡, ㉢의 교점의 좌표는 $(-1,\ 2)$이다.

구하는 외접원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓으면 점 $(0,\ 0)$을 지나므로 $C=0$

$\therefore\ x^2+y^2+Ax+By=0$ …… ㉣

원 ㉣이 점 $(-3,\ 1)$을 지나므로

$9+1-3A+B=0,\ 3A-B=10$ …… ㉤

원 ㉣이 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$1+4-A+2B=0,\ A-2B=5$ …… ㉥

㉤, ㉥을 연립하여 풀면 $A=3,\ B=-1$

따라서 구하는 외접원의 방정식은 $x^2+y^2+3x-y=0$

026 답 ③

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-4x+2y-3+k(x^2+y^2-2y-5)=0$ (단, $k\neq-1$) …… ㉠

원 ㉠이 점 $(-1,\ -1)$을 지나므로 $1-k=0\quad \therefore\ k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+y^2-2x-4=0\quad \therefore\ (x-1)^2+y^2=5$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\pi\times(\sqrt{5})^2=5\pi$

027 답 $x^2+y^2-x+5y-6=0$

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-2ax-5+k(x^2+y^2-6x+10y-7)=0$ (단, $k\neq-1$) …… ㉠

원 ㉠이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$-4+4k=0\quad \therefore\ k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+y^2-(a+3)x+5y-6=0$ …… ㉡

원 ㉡이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로 $-a-2=0\quad \therefore\ a=-2$

$a=-2$를 ㉡에 대입하여 정리하면 $x^2+y^2-x+5y-6=0$

028 답 ③

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-2x+6y+7)=0\quad \therefore\ 2x-6y-11=0$

따라서 $a=-6,\ b=-11$이므로 $a-b=5$

029 답 ⑤

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+6x-y+4-(x^2+y^2+ax-2y+1)=0$

$(6-a)x+y+3=0\quad \therefore\ y=(a-6)x-3$

이 직선의 기울기가 -2이므로 $a-6=-2\quad \therefore\ a=4$

030 답 ②

$(x-2)^2+(y+1)^2=13$에서 $x^2+y^2-4x+2y-8=0$

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-16-(x^2+y^2-4x+2y-8)=0\quad \therefore\ y=2x-4$

이 직선의 x절편은 2, y절편은 -4이므로 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -4)$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\times4=4$

031 답 ④

두 원 C_1, C_2의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+6x-4y+9-(x^2+y^2+4x-6y+a)=0$

$\therefore\ 2x+2y+9-a=0$ …… ㉠

원 C_1을 변형하면 $(x+3)^2+(y-2)^2=4$

이때 직선 ㉠이 원 C_1의 넓이를 이등분하려면 원 C_1의 중심 $(-3,\ 2)$를 지나야 하므로

$-6+4+9-a=0\quad \therefore\ a=7$

032 답 ④

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=2:1$이므로 $2\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}\quad \therefore\ 4\overline{\mathrm{BP}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2$

$\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 $4\{(x-2)^2+y^2\}=(x+1)^2+y^2$

$x^2+y^2-6x+5=0\quad \therefore\ (x-3)^2+y^2=4$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(3,\ 0)$이고 반지름의 길이가 2인 원이므로 구하는 넓이는 $\pi\times2^2=4\pi$

033 답 ③

$\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 $(x+1)^2+y^2+(x-3)^2+y^2=26$

$x^2+y^2-2x-8=0\quad \therefore\ (x-1)^2+y^2=9$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(1,\ 0)$이고 반지름의 길이가 3인 원이므로 구하는 둘레의 길이는 $2\pi\times3=6\pi$

034 답 $x^2+y^2-y-6=0$

$\mathrm{P}(a,\ b)$라고 하면 $a^2+b^2+4a-6b-12=0$ …… ㉠

이때 $\overline{\mathrm{AP}}$의 중점을 $\mathrm{Q}(x,\ y)$라고 하면

$x=\frac{a+2}{2},\ y=\frac{b-2}{2}\quad \therefore\ a=2x-2,\ b=2y+2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 점 Q가 나타내는 도형의 방정식은

$(2x-2)^2+(2y+2)^2+4(2x-2)-6(2y+2)-12=0$

$\therefore\ x^2+y^2-y-6=0$

핵심 유형　190~191쪽

유형11 답 ④

원의 중심 $(2,\ 0)$과 직선 $y=x+n$, 즉 $x-y+n=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2+n|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|n+2|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|n+2|}{\sqrt{2}}>3\sqrt{2},\ |n+2|>6$$

$n+2<-6$ 또는 $n+2>6$

$\therefore\ n<-8$ 또는 $n>4$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 5이다.

다른 풀이　$y=x+n$을 $(x-2)^2+y^2=18$에 대입하면

$(x-2)^2+(x+n)^2=18$

$\therefore\ 2x^2+2(n-2)x+n^2-14=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 원과 직선이 만나지 않으므로

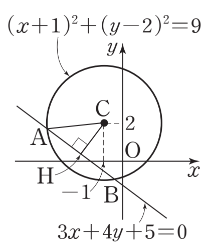
$$\frac{D}{4}=(n-2)^2-2(n^2-14)<0$$

$n^2+4n-32>0,\ (n+8)(n-4)>0$

$\therefore\ n<-8$ 또는 $n>4$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 5이다.

유형12 답 ③



$x^2+y^2+2x-4y-4=0$에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=9$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $\mathrm{C}(-1,\ 2)$라 하고, 점 C에서 직선 $3x+4y+5=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

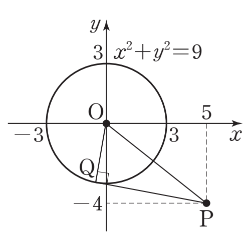
$$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{|-3+8+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$

직각삼각형 CAH에서 $\overline{\mathrm{CA}}$의 길이는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CA}}^2-\overline{\mathrm{CH}}^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=2\sqrt{5}$

유형13 답 $4\sqrt{2}$



점 $\mathrm{P}(5,\ -4)$와 원 $x^2+y^2=9$의 중심 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{5^2+(-4)^2}=\sqrt{41}$$

직각삼각형 OPQ에서

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{OQ}}^2}=\sqrt{(\sqrt{41})^2-3^2}=4\sqrt{2}$$

유형14 답 $2-\sqrt{2}$

원의 중심 $(3,\ -1)$과 직선 $4x+3y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|12-3+1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이므로 구하는 최솟값은 $2-\sqrt{2}$

유형15 답 ⑤

직선 $2x-y+3=0$, 즉 $y=2x+3$에 평행한 직선의 기울기는 2이고 원 $x^2+y^2=9$의 반지름의 길이는 3이므로 접선의 방정식은

$y=2x\pm3\sqrt{2^2+1}$　　$\therefore\ y=2x\pm3\sqrt{5}$

따라서 $m=2,\ n=\pm3\sqrt{5}$이므로

$m^2+n^2=4+45=49$

유형16 답 ①

원 $x^2+y^2=17$ 위의 점 $(4,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$4x+y=17$　　$\therefore\ y=-4x+17$

따라서 구하는 접선의 기울기는 -4이다.

유형17 답 ②

접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=5$

이 직선이 점 $(3,\ -1)$을 지나므로

$3x_1-y_1=5$

$\therefore\ y_1=3x_1-5$　　…… ㉠

한편 접점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=5$ 위에 있으므로

$x_1^2+y_1^2=5$　　…… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$x_1^2+(3x_1-5)^2=5,\ x_1^2-3x_1+2=0$

$(x_1-1)(x_1-2)=0$

$\therefore\ x_1=1$ 또는 $x_1=2$

이를 ㉠에 대입하면

$x_1=1,\ y_1=-2$ 또는 $x_1=2,\ y_1=1$

즉, 접선의 방정식은

$x-2y=5$ 또는 $2x+y=5$

$\therefore\ y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ 또는 $y=-2x+5$

따라서 두 접선의 기울기의 합은

$$\frac{1}{2}+(-2)=-\frac{3}{2}$$

다른 풀이　점 $(3,\ -1)$을 지나는 접선의 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은

$y+1=m(x-3)$

$\therefore\ mx-y-3m-1=0$　　…… ㉠

원의 중심의 좌표가 $(0,\ 0)$이므로 원과 직선 ㉠이 접하려면

$$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

$|3m+1|=\sqrt{5}\times\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$(3m+1)^2=5(m^2+1)$

$2m^2+3m-2=0$

$(m+2)(2m-1)=0$

$\therefore\ m=-2$ 또는 $m=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 두 접선의 기울기의 합은

$$-2+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$

핵심 유형 **완성하기** 192~196쪽

035 답 ③

원의 중심 (1, 2)와 직선 $x-2y+n=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|1-4+n|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|n-3|}{\sqrt{5}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\dfrac{|n-3|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$, $|n-3|<5$

$-5<n-3<5$ $\quad\therefore -2<n<8$

따라서 구하는 정수 n은 $-1, 0, 1, \cdots, 7$의 9개이다.

036 답 ②

원의 중심의 좌표는 (0, 0)이고 반지름의 길이는 2이므로

① 점 (0, 0)과 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=0<2$

이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

② 점 (0, 0)과 직선 $y=2x-5$, 즉 $2x-y-5=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}>2$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

③ 점 (0, 0)과 직선 $y=2x+1$, 즉 $2x-y+1=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}<2$

이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

④ 점 (0, 0)과 직선 $y=3x+5$, 즉 $3x-y+5=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}<2$

이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

⑤ 점 (0, 0)과 직선 $y=4x-1$, 즉 $4x-y-1=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-1|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{17}}=\dfrac{\sqrt{17}}{17}<2$

이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

037 답 ③

$y=mx+2$를 $x^2+y^2=2$에 대입하면

$x^2+(mx+2)^2=2$ $\quad\therefore (m^2+1)x^2+4mx+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 원과 직선이 만나므로

$\dfrac{D}{4}=(2m)^2-2(m^2+1)\geq 0$

$2m^2-2\geq 0$, $m^2\geq 1$

$\therefore m\leq -1$ 또는 $m\geq 1$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=1$이므로 $\alpha+\beta=0$

038 답 ①

원의 중심 (2, −1)과 직선 $x+ky-5=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|2-k-5|}{\sqrt{1^2+k^2}}=\dfrac{|k+3|}{\sqrt{k^2+1}}$

원의 넓이가 5π이므로 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이고 원과 직선이 접하므로 $\dfrac{|k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{5}$, $|k+3|=\sqrt{5}\sqrt{k^2+1}$

양변을 제곱하면 $(k+3)^2=5(k^2+1)$

$2k^2-3k-2=0$, $(2k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $k=2$

따라서 모든 상수 k의 값의 곱은 $-\dfrac{1}{2}\times 2=-1$

039 답 ⑤

원 $(x-1)^2+(y-3)^2=8$의 중심의 좌표는 (1, 3)이고 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로 직선 $x-y+n=0$과 만나지 않으려면

$\dfrac{|1-3+n|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}>2\sqrt{2}$, $|n-2|>4$

$n-2<-4$ 또는 $n-2>4$

$\therefore n<-2$ 또는 $n>6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

원 $x^2+y^2-8x-6y+7=0$, 즉 $(x-4)^2+(y-3)^2=18$의 중심의 좌표는 (4, 3)이고 반지름의 길이는 $3\sqrt{2}$이므로 직선 $x-y+n=0$과 서로 다른 두 점에서 만나려면

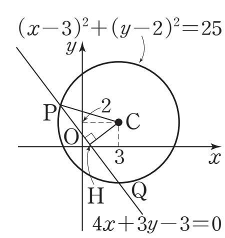
$\dfrac{|4-3+n|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}<3\sqrt{2}$, $|n+1|<6$

$-6<n+1<6$ $\quad\therefore -7<n<5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 구하는 n의 값의 범위는 $-7<n<-2$

따라서 정수 n의 최솟값은 -6이다.

040 답 8



오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C(3, 2)라 하고, 점 C에서 직선 $4x+3y-3=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

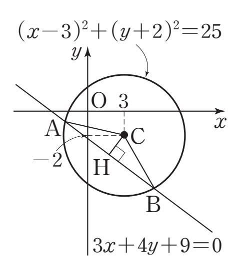
$\overline{\text{CH}}=\dfrac{|12+6-3|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3$

직각삼각형 CPH에서

$\overline{\text{PH}}=\sqrt{\overline{\text{CP}}^2-\overline{\text{CH}}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

$\therefore \overline{\text{PQ}}=2\overline{\text{PH}}=8$

041 답 $2\sqrt{21}$



$x^2+y^2-6x+4y-12=0$에서

$(x-3)^2+(y+2)^2=25$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 C(3, −2)에서 직선 $3x+4y+9=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{\text{CH}}=\dfrac{|9-8+9|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

직각삼각형 CAH에서

$\overline{\text{AH}}=\sqrt{\overline{\text{CA}}^2-\overline{\text{CH}}^2}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$

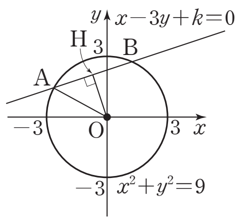
$\therefore \overline{\text{AB}}=2\overline{\text{AH}}=2\sqrt{21}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{AB}}\times\overline{\text{CH}}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{21}\times 2=2\sqrt{21}$

042 답 ⑤

오른쪽 그림과 같이 원과 직선이 만나는 두 점을 A, B라 하고 원의 중심 O(0, 0)에서 직선 $x-3y+k=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 주어진 원과 직선이 만나서 생기는 현의 길이가 4이므로



$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times4=2$

직각삼각형 OAH에서

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}$
$=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

즉, 점 O(0, 0)과 직선 $x-3y+k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\sqrt{5}$, $|k|=5\sqrt{2}$

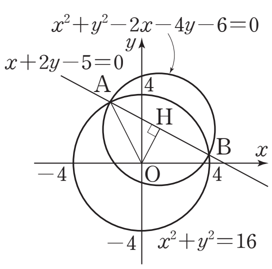
$\therefore k=\pm5\sqrt{2}$

그런데 $k>0$이므로 $k=5\sqrt{2}$

043 답 ④

오른쪽 그림과 같이 두 원의 두 교점을 A, B라고 하면 두 원의 공통인 현은 $\overline{AB}$이다.

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은



x^2+y^2-16
$-(x^2+y^2-2x-4y-6)=0$

$\therefore x+2y-5=0$

이때 원 $x^2+y^2=16$의 중심 O에서 직선 $x+2y-5=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{OH}=\frac{|-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$

직각삼각형 OAH에서

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}$
$=\sqrt{4^2-(\sqrt{5})^2}$
$=\sqrt{11}$

따라서 두 원의 공통인 현의 길이는

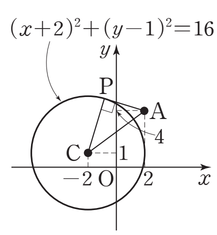
$\overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{11}$

044 답 ②

$x^2+y^2+4x-2y=11$에서

$(x+2)^2+(y-1)^2=16$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C$(-2, 1)$이라고 하면



$\overline{AC}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$

직각삼각형 CAP에서

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CP}^2}$
$=\sqrt{5^2-4^2}=3$

045 답 $\sqrt{2}$

직각삼각형 OPQ에서

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OQ}^2}$
$=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

따라서 삼각형 OPQ의 넓이는

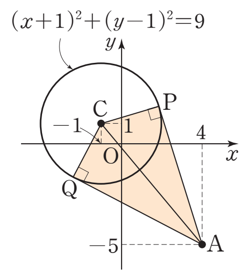
$\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{OQ}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times1=\sqrt{2}$

046 답 ⑤

C$(-1, 1)$이므로

$\overline{AC}=\sqrt{(-5)^2+6^2}=\sqrt{61}$

오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 APC에서



$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CP}^2}$
$=\sqrt{(\sqrt{61})^2-3^2}$
$=2\sqrt{13}$

따라서 사각형 APCQ의 넓이는

$2\triangle APC=2\times\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{CP}$
$=2\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{13}\times3$
$=6\sqrt{13}$

047 답 ⑤

원의 중심 $(1, -3)$과 직선 $2x+y+11=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2-3+11|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2\sqrt{5}$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 구하는 최댓값은

$2\sqrt{5}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

048 답 ④

원의 중심 $(0, 0)$과 점 A$(3, -4)$ 사이의 거리는

$\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{6}$이므로

$M=5+\sqrt{6}$, $m=5-\sqrt{6}$

$\therefore Mm=25-6=19$

049 답 ③

$x^2+y^2-10y=0$에서 $x^2+(y-5)^2=25$

원의 중심 $(0, 5)$와 직선 $3x-4y-15=0$ 사이의 거리는

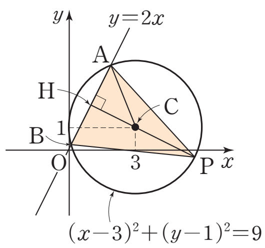
$\frac{|-20-15|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=7$

원의 반지름의 길이는 5이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은 $7+5=12$, 최솟값은 $7-5=2$이다.

이때 원 위의 점과 직선 사이의 거리 중 자연수인 것은 2, 3, 4, …, 12의 11개이고 거리가 2, 12일 때만 점이 1개이고 나머지 거리일 때는 점이 2개씩 있으므로 구하는 점의 개수는

$11\times2-2=20$

050 답 ④



오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C(3, 1)이라고 하고, 점 C에서 직선 $y=2x$, 즉 $2x-y=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{\text{CH}}=\dfrac{|6-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

직각삼각형 CAH에서

$\overline{\text{AH}}=\sqrt{\overline{\text{CA}}^2-\overline{\text{CH}}^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2$

$\therefore\ \overline{\text{AB}}=2\overline{\text{AH}}=4$

삼각형 PAB의 넓이가 최대가 되려면 $\overline{\text{PH}}$의 길이가 최대이어야 하고, 이때 $\overline{\text{PH}}$는 점 C를 지나므로 $\overline{\text{PH}}=\overline{\text{PC}}+\overline{\text{CH}}=3+\sqrt{5}$

삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{AB}}\times\overline{\text{PH}}=\dfrac{1}{2}\times4\times(3+\sqrt{5})=6+2\sqrt{5}$

따라서 $a=6$, $b=2$이므로 $a+b=8$

051 답 49

직선 $y=\dfrac{1}{3}x-1$에 수직인 직선의 기울기는 -3이고 원 $x^2+y^2=4$의 반지름의 길이는 2이므로 접선의 방정식은

$y=-3x\pm2\sqrt{(-3)^2+1}\qquad\therefore\ y=-3x\pm2\sqrt{10}$

따라서 $m=-3$, $n=\pm2\sqrt{10}$이므로 $m^2+n^2=9+40=49$

052 답 ⑤

주어진 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{5}$이므로 접선의 방정식은

$y=2x\pm2\sqrt{5}\times\sqrt{2^2+1}\qquad\therefore\ y=2x\pm10$

$y=2x+10$일 때, A$(-5, 0)$, B$(0, 10)$

$y=2x-10$일 때, A$(5, 0)$, B$(0, -10)$

$\therefore\ \overline{\text{OA}}=5$, $\overline{\text{OB}}=10$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{OA}}\times\overline{\text{OB}}=\dfrac{1}{2}\times5\times10=25$

053 답 ②

직선의 기울기를 m이라고 하면 원 $x^2+y^2=2$의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이므로 접선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{2}\times\sqrt{m^2+1}\qquad\therefore\ y=mx\pm\sqrt{2(m^2+1)}$

그런데 이 직선의 y절편이 4이므로 $y=mx+\sqrt{2(m^2+1)}$이고

$\sqrt{2(m^2+1)}=4$

양변을 제곱하면 $2(m^2+1)=16$, $m^2=7\qquad\therefore\ m=\pm\sqrt{7}$

그런데 $m>0$이므로 $m=\sqrt{7}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=\sqrt{7}x+\sqrt{2(7+1)}\qquad\therefore\ y=\sqrt{7}x+4$

054 답 ③

기울기가 1인 접선의 방정식을

$y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ …… ㉠

으로 놓으면 이 직선과 원이 접하므로 원의 중심 $(1, -2)$와 직선 ㉠ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$와 같아야 한다.

$\dfrac{|1+2+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$, $|k+3|=4$

$k+3=\pm4\qquad\therefore\ k=-7$ 또는 $k=1$

즉, 두 직선 $y=x-7$, $y=x+1$이므로 x절편은 각각 7, -1이다.

따라서 구하는 x절편의 차는 $7-(-1)=8$

055 답 ④

직선 $x+2y+3=0$, 즉 $y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$에 수직인 직선의 기울기는 2이다. 기울기가 2인 접선의 방정식을

$y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ …… ㉠

으로 놓으면 이 직선과 원이 접하므로 원 $x^2+y^2-2x=0$, 즉 $(x-1)^2+y^2=1$의 중심 $(1, 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 1과 같아야 한다.

$\dfrac{|2+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=1$, $|k+2|=\sqrt{5}$

$k+2=\pm\sqrt{5}\qquad\therefore\ k=-2\pm\sqrt{5}$

따라서 A$(0, -2-\sqrt{5})$, B$(0, -2+\sqrt{5})$ 또는 A$(0, -2+\sqrt{5})$, B$(0, -2-\sqrt{5})$이므로

$\overline{\text{AB}}=|-2+\sqrt{5}-(-2-\sqrt{5})|=2\sqrt{5}$

056 답 ①

원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(2, -4)$에서의 접선의 방정식은

$2x-4y=20\qquad\therefore\ x-2y=10$

이때 $y=0$을 대입하면 $x=10$

따라서 구하는 직선의 x절편은 10이다.

057 답 ①

원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은

$ax+by=10\qquad\therefore\ y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{10}{b}$

이 직선의 기울기가 3이므로

$-\dfrac{a}{b}=3\qquad\therefore\ a=-3b$ …… ㉠

한편 점 (a, b)는 원 $x^2+y^2=10$ 위에 있으므로

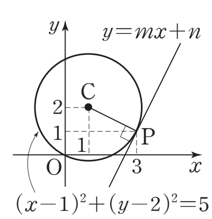
$a^2+b^2=10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=1$ 또는 $a=3$, $b=-1$

$\therefore\ ab=-3$

058 답 ③



오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C(1, 2)라고 하면 직선 CP와 직선 $y=mx+n$이 수직이므로

$\dfrac{1-2}{3-1}\times m=-1\qquad\therefore\ m=2$

$\therefore\ y=2x+n$

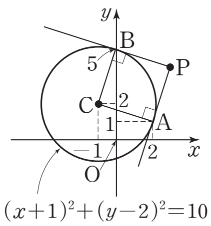
이 직선이 점 $(3, 1)$을 지나므로

$1=6+n\qquad\therefore\ n=-5$

$\therefore\ m+n=-3$

059 답 ④

원의 중심을 $C(-1, 2)$라고 하면 직선 AC의 기울기는



$\frac{2-1}{-1-2}=-\frac{1}{3}$

따라서 점 A에서의 접선은 기울기가 3이고 점 A를 지나므로 접선의 방정식은

$y-1=3(x-2)$

$\therefore y=3x-5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 직선 BC의 기울기는 $\frac{2-5}{-1}=3$

따라서 점 B에서의 접선은 기울기가 $-\frac{1}{3}$이고 점 B를 지나므로

접선의 방정식은 $y=-\frac{1}{3}x+5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=4$

즉, $P(3, 4)$이므로 $a=3$, $b=4$ $\quad\therefore a+b=7$

060 답 16

$P(x_1, y_1)$이라고 하면 점 P는 원 $x^2+y^2=16$ 위에 있으므로

$x_1^2+y_1^2=16 \quad \therefore y_1^2=16-x_1^2$

한편 점 P에서의 원의 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=16$, $y=\frac{-x_1x+16}{y_1} \quad \therefore f(x)=\frac{-x_1x+16}{y_1}$

$$\therefore f(-4)f(4)=\frac{4x_1+16}{y_1}\times\frac{-4x_1+16}{y_1}=\frac{(16+4x_1)(16-4x_1)}{y_1^2}$$

$$=\frac{16^2-16x_1^2}{y_1^2}=\frac{16(16-x_1^2)}{16-x_1^2}=16$$

061 답 ②

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라고 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=4$

이 직선이 점 $(4, -2)$를 지나므로

$4x_1-2y_1=4 \quad \therefore y_1=2x_1-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편 접점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=4$ 위에 있으므로

$x_1^2+y_1^2=4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$x_1^2+(2x_1-2)^2=4$, $5x_1^2-8x_1=0$

$x_1(5x_1-8)=0 \quad \therefore x_1=0$ 또는 $x_1=\frac{8}{5}$

이를 ㉠에 대입하면

$x_1=0$, $y_1=-2$ 또는 $x_1=\frac{8}{5}$, $y_1=\frac{6}{5}$

즉, 접선의 방정식은 $-2y=4$ 또는 $\frac{8}{5}x+\frac{6}{5}y=4$

$\therefore y+2=0$ 또는 $4x+3y-10=0$

$\therefore a=0$, $b=-5$ 또는 $a=4$, $b=3$

그런데 $a\neq0$이므로 $a=4$, $b=3$ $\quad\therefore a+b=7$

062 답 ①

점 $(-2, 1)$을 지나는 접선의 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은 $y-1=m(x+2)$

$\therefore mx-y+2m+1=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

원의 중심의 좌표가 $(2, -1)$이므로 원과 직선 ㉠이 접하려면

$\frac{|2m+1+2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

$|4m+2|=\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$(4m+2)^2=2(m^2+1)$

$7m^2+8m+1=0$, $(m+1)(7m+1)=0$

$\therefore m=-1$ 또는 $m=-\frac{1}{7}$

이를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$x+y+1=0$ 또는 $x+7y-5=0$

따라서 $a=1$, $b=1$, $c=7$, $d=-5$ 또는 $a=7$, $b=-5$, $c=1$, $d=1$이므로 $abcd=-35$

063 답 ①

원점을 지나는 접선의 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은

$y=mx \quad \therefore mx-y=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x^2+y^2-2x-6y+8=0$에서

$(x-1)^2+(y-3)^2=2$

원의 중심의 좌표가 $(1, 3)$이므로 원과 직선 ㉠이 접하려면

$\frac{|m-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

$|m-3|=\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 $(m-3)^2=2(m^2+1)$

$m^2+6m-7=0$, $(m+7)(m-1)=0$

$\therefore m=-7$ 또는 $m=1$

따라서 구하는 두 접선의 기울기의 곱은

$-7\times1=-7$

064 답 ⑤

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라고 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=6$

이 직선이 점 $P(0, 6)$을 지나므로

$6y_1=6 \quad \therefore y_1=1$

한편 접점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=6$ 위에 있으므로

$x_1^2+y_1^2=6$, $x_1^2+1^2=6$

$x_1^2=5 \quad \therefore x_1=\pm\sqrt{5}$

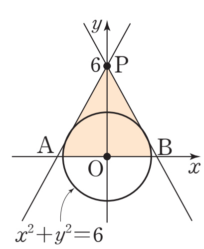
즉, 점 P에서 원에 그은 접선의 방정식은

$\sqrt{5}x+y=6$ 또는 $\sqrt{5}x-y=-6$

따라서 $A\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, 0\right)$, $B\left(-\frac{6\sqrt{5}}{5}, 0\right)$ 또는 $A\left(-\frac{6\sqrt{5}}{5}, 0\right)$, $B\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, 0\right)$이므로

$\overline{AB}=\left|\frac{6\sqrt{5}}{5}-\left(-\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)\right|=\frac{12\sqrt{5}}{5}$

따라서 $O(0, 0)$이라고 하면 삼각형 PAB의 넓이는



$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OP}=\frac{1}{2}\times\frac{12\sqrt{5}}{5}\times6$

$=\frac{36\sqrt{5}}{5}$

1 답 $(x-2)^2+y^2=20$

유형 01 원의 방정식 구하기

직선 $y=-2x+4$가 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각
$(2, 0)$, $(0, 4)$
중심의 좌표가 $(2, 0)$이므로 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은
$(x-2)^2+y^2=r^2$
이 원이 점 $(0, 4)$를 지나므로
$(-2)^2+4^2=r^2 \qquad \therefore r^2=20$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-2)^2+y^2=20$

2 답 $(x+3)^2+(y-1)^2=2$

유형 02 두 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식

$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 M이라고 하면
$\mathrm{M}\left(\frac{2-10}{2}, \frac{-4+8}{2}\right) \qquad \therefore \mathrm{M}(-4, 2)$
$\overline{\mathrm{AB}}$를 $1:2$로 내분하는 점을 N이라고 하면
$\mathrm{N}\left(\frac{1\times(-10)+2\times2}{1+2}, \frac{1\times8+2\times(-4)}{1+2}\right) \qquad \therefore \mathrm{N}(-2, 0)$
이때 원의 중심을 C라고 하면 점 C는 $\overline{\mathrm{MN}}$의 중점이므로
$\mathrm{C}\left(\frac{-4-2}{2}, \frac{2}{2}\right) \qquad \therefore \mathrm{C}(-3, 1)$
즉, 원의 반지름의 길이는
$\overline{\mathrm{NC}}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+3)^2+(y-1)^2=2$

3 답 ⑤

유형 03 중심이 직선 위에 있는 원의 방정식

원의 중심의 좌표를 $(a, a-2)$, 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-a+2)^2=r^2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
원 ㉠이 점 $(1, 2)$를 지나므로
$(1-a)^2+(2-a+2)^2=r^2$
$2a^2-10a+17=r^2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡
원 ㉠이 점 $(3, -2)$를 지나므로
$(3-a)^2+(-2-a+2)^2=r^2$
$2a^2-6a+9=r^2 \qquad \cdots\cdots$ ㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $r^2=5$
따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-2)^2+y^2=5$이고 이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 원의 넓이는
$\pi\times(\sqrt{5})^2=5\pi$

4 답 ③

유형 04 x축 또는 y축에 접하는 원의 방정식

$x^2+y^2-8x+ky+9=0$에서
$(x-4)^2+\left(y+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{4}+7$
이 원의 중심 $\left(4, -\frac{k}{2}\right)$가 제4사분면 위에 있으므로
$-\frac{k}{2}<0 \qquad \therefore k>0$
또 이 원이 y축에 접하므로
$\sqrt{\frac{k^2}{4}+7}=4$
양변을 제곱하면
$\frac{k^2}{4}+7=16$, $k^2=36$
$\therefore k=\pm6$
그런데 $k>0$이므로 $k=6$

5 답 $12\sqrt{2}$

유형 04 x축 또는 y축에 접하는 원의 방정식

원의 중심의 좌표를 $(a, a+1)$이라고 하면 x축에 접하는 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-a-1)^2=(a+1)^2$
이 원이 점 $(5, 3)$을 지나므로
$(5-a)^2+(3-a-1)^2=(a+1)^2$
$a^2-16a+28=0$
$(a-2)(a-14)=0$
$\therefore a=2$ 또는 $a=14$
따라서 두 원의 중심의 좌표는 $(2, 3)$, $(14, 15)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는
$\sqrt{12^2+12^2}=12\sqrt{2}$

6 답 ③

유형 06 이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 나타내는 도형

$x^2+y^2-4x+4ky+5k^2-5k+4=0$에서
$(x-2)^2+(y+2k)^2=-k^2+5k$
이 방정식이 원을 나타내려면
$-k^2+5k>0$, $k^2-5k<0$
$k(k-5)<0 \qquad \therefore 0<k<5$
따라서 구하는 정수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

7 답 ④

유형 07 원점과 두 점을 지나는 원의 방정식

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓으면 이 원이 원점 $(0, 0)$을 지나므로 $C=0$
$\therefore x^2+y^2+Ax+By=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
원 ㉠이 점 $(0, 4)$를 지나므로
$16+4B=0 \qquad \therefore B=-4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡
원 ㉠이 점 $(2, 2)$를 지나므로
$4+4+2A+2B=0$, $A+B=-4 \qquad \cdots\cdots$ ㉢
㉡을 ㉢에 대입하여 정리하면 $A=0$
즉, 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2-4y=0 \qquad \therefore x^2+(y-2)^2=4$
따라서 구하는 원의 둘레의 길이는 $2\pi\times2=4\pi$

8 답 ①

유형 08 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식

원 $x^2+y^2+4x-2y-5=0$과 x축, 즉 직선 $y=0$의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2+4x-2y-5+ky=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

원 ㉠이 점 $(3,\ 4)$를 지나므로

$9+16+12-8-5+4k=0 \qquad \therefore k=-6$

$k=-6$을 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2+4x-2y-5-6y=0$

$x^2+y^2+4x-8y-5=0$

$\therefore (x+2)^2+(y-4)^2=25$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(-2,\ 4)$이다.

9 답 ⑤

유형 09 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식

원 C의 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-3)^2=r^2$

$\therefore x^2+y^2-2x-6y+10-r^2=0$

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-2x-6y+10-r^2-(x^2+y^2-10)=0$

$\therefore 2x+6y+r^2-20=0$

이 직선이 원점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$r^2=20 \qquad \therefore r=\pm 2\sqrt{5}$

그런데 $r>0$이므로 $r=2\sqrt{5}$

10 답 ④

유형 10 조건을 만족하는 점이 나타내는 도형의 방정식

$\overline{AP} : \overline{BP}=2 : 1$이므로

$2\overline{BP}=\overline{AP} \qquad \therefore 4\overline{BP}^2=\overline{AP}^2$

$P(x,\ y)$라고 하면

$4\{(x-6)^2+(y+1)^2\}=(x-3)^2+(y-2)^2$

$x^2+y^2-14x+4y+45=0$

$\therefore (x-7)^2+(y+2)^2=8$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(7,\ -2)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$2\pi\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}\pi$

11 답 ⑤

유형 11 원과 직선의 위치 관계

원의 중심 $(1,\ 3)$과 직선 $y=-3x+k$, 즉 $3x+y-k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|3+3-k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{|k-6|}{\sqrt{10}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\dfrac{|k-6|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10},\ |k-6|=10$

$k-6=\pm 10 \qquad \therefore k=-4$ 또는 $k=16$

따라서 구하는 모든 상수 k의 값의 합은 $-4+16=12$

12 답 $k<-\dfrac{\sqrt{21}}{2}$ 또는 $k>\dfrac{\sqrt{21}}{2}$

유형 11 원과 직선의 위치 관계

$x^2+y^2+2y-3=0$에서 $x^2+(y+1)^2=4$

원의 중심 $(0,\ -1)$과 직선 $kx-y+4=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|1+4|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{k^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\dfrac{5}{\sqrt{k^2+1}}<2,\ \sqrt{k^2+1}>\dfrac{5}{2}$

양변을 제곱하면

$k^2+1>\dfrac{25}{4},\ k^2>\dfrac{21}{4}$

$\therefore k<-\dfrac{\sqrt{21}}{2}$ 또는 $k>\dfrac{\sqrt{21}}{2}$

13 답 $\dfrac{1}{6}$

유형 11 원과 직선의 위치 관계

원의 중심이 제1사분면 위에 있고 x축과 y축에 동시에 접하므로 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 중심의 좌표는 $(r,\ r)$이다.

이때 원과 직선 $3x-4y+1=0$이 접하므로

$\dfrac{|3r-4r+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=r$

$|r-1|=5r,\ r-1=\pm 5r$

$\therefore r=-\dfrac{1}{4}$ 또는 $r=\dfrac{1}{6}$

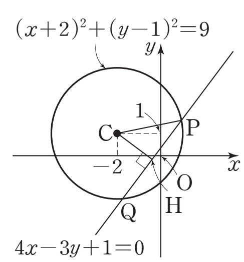
그런데 $r>0$이므로 $r=\dfrac{1}{6}$

14 답 ③

유형 12 현의 길이

$x^2+y^2+4x-2y-4=0$에서

$(x+2)^2+(y-1)^2=9$



오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $C(-2,\ 1)$이라고 하고, 점 C에서 직선 $4x-3y+1=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{CH}=\dfrac{|-8-3+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$

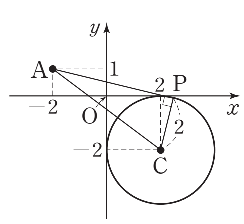
직각삼각형 CPH에서

$\overline{PH}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

$\therefore \overline{PQ}=2\overline{PH}=2\sqrt{5}$

15 답 ⑤

유형 13 접선의 길이



오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $C(2,\ -2)$라고 하면

$\overline{AC}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

직각삼각형 CAP에서

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CP}^2}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$

16 답 ③

유형 14 원 위의 점과 직선 사이의 거리

점 A(3, 4)를 지나는 직선 중 원점 O와 거리가 최대인 직선은 직선 OA와 수직인 직선이므로 직선 l의 방정식은

$y-4=-\frac{3}{4}(x-3)$

$\therefore 3x+4y-25=0$

원의 중심 (5, 7)과 이 직선 사이의 거리는

$\frac{|15+28-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{18}{5}$

원의 반지름의 길이는 1이므로 구하는 최솟값은

$\frac{18}{5}-1=\frac{13}{5}$

17 답 ⑤

유형 14 원 위의 점과 직선 사이의 거리

$x^2+y^2-2x-4y-11=0$에서

$(x-1)^2+(y-2)^2=16$

원의 중심 (1, 2)와 점 A(4, -2) 사이의 거리는

$\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

원의 반지름의 길이는 4이므로 $\overline{AP}$의 최댓값은 $5+4=9$, $\overline{AP}$의 최솟값은 $5-4=1$이다.

따라서 $1\le l\le 9$이므로 l의 값이 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, $\cdots$, 9의 9개이다.

18 답 10

유형 15 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식

직선 $y=2x-7$에 평행한 직선의 기울기는 2이고 원 $x^2+y^2=5$의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 접선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{5}\times\sqrt{2^2+1}$

$\therefore y=2x\pm5$

따라서 P(0, -5), Q(0, 5) 또는 P(0, 5), Q(0, -5)이므로

$\overline{PQ}=|5-(-5)|=10$

19 답 $y=3x-9$ 또는 $y=3x+11$

유형 15 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식

기울기가 3인 접선의 방정식을

$y=3x+k$, 즉 $3x-y+k=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

으로 놓으면 이 직선과 원이 접하므로 원 $x^2+y^2-2x-8y+7=0$, 즉 $(x-1)^2+(y-4)^2=10$의 중심 (1, 4)와 직선 ㉠ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{10}$과 같아야 한다.

$\frac{|3-4+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$

$|k-1|=10$

$k-1=\pm10$

$\therefore k=-9$ 또는 $k=11$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=3x-9$ 또는 $y=3x+11$

20 답 ⑤

유형 16 원 위의 점에서의 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $(\sqrt{3}, 1)$에서의 접선의 방정식은

$\sqrt{3}x+y=4$

$\therefore \sqrt{3}x+y-4=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 원 $x^2+(y-a)^2=9$와 접하므로 원의 중심 $(0, a)$와 직선 ㉠ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 3과 같아야 한다.

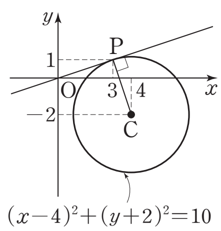
$\frac{|a-4|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=3$, $|a-4|=6$

$a-4=\pm6$ $\quad\therefore a=-2$ 또는 $a=10$

그런데 $a>0$이므로 $a=10$

21 답 ①

유형 16 원 위의 점에서의 접선의 방정식



$x^2+y^2-8x+4y+10=0$에서

$(x-4)^2+(y+2)^2=10$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C(4, -2)라고 하면 직선 CP의 기울기는

$\frac{1+2}{3-4}=-3$

이때 원의 접선은 직선 CP와 수직이므로 기울기가 $\frac{1}{3}$이다.

따라서 기울기가 $\frac{1}{3}$이고 점 P(3, 1)을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{3}(x-3)$

$\therefore y=\frac{1}{3}x$

이 직선이 점 $(a, 2)$를 지나므로

$2=\frac{1}{3}a$ $\quad\therefore a=6$

22 답 ④

유형 17 원 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라고 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=9$

이 직선이 점 (6, 0)을 지나므로

$6x_1=9$ $\quad\therefore x_1=\frac{3}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

한편 접점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=9$ 위에 있으므로

${x_1}^2+{y_1}^2=9$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{9}{4}+{y_1}^2=9$, ${y_1}^2=\frac{27}{4}$

$\therefore y_1=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$

즉, 구하는 직선의 방정식은

$x+\sqrt{3}y=6$ 또는 $x-\sqrt{3}y=6$

$\therefore y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}$ 또는 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2\sqrt{3}$

따라서 $m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $n=2\sqrt{3}$ 또는 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $n=-2\sqrt{3}$이므로

$mn=-2$

12 도형의 이동

핵심 유형

	유형01 1	유형02 ④	유형03 ①
유형04 ②	유형05 ③	유형06 −5	유형07 0
유형08 ①	유형09 $3\sqrt{5}$	유형10 ④	

핵심 유형 완성하기

001 ⑤	002 ③	003 P(4, −3)		
004 (5, −7)		005 ④	006 ②	007 ③
008 ④	009 ②	010 ②	011 ⑤	012 ⑤
013 0	014 −6	015 $\sqrt{26}$	016 17	017 ⑤
018 ②	019 ①	020 ④	021 제3사분면	
022 8	023 ④	024 ②	025 ④	026 ②
027 ⑤	028 ①	029 −2	030 ①	031 7
032 ⑤	033 ③	034 ④	035 ④	036 ⑤
037 ④	038 ④	039 ①	040 ⑤	041 ①
042 ③	043 ②	044 ④	045 ⑤	
046 $2\sqrt{10}$	047 8	048 ⑤	049 ④	050 ③
051 ③				

핵심 유형 최종 점검하기

1 ⑤	2 1	3 ③	4 (3, −5)	
5 (0, 8)	6 $y=-x-4$		7 ③	8 ㄱ, ㄹ
9 14	10 ③	11 ①	12 ①	13 $4\sqrt{2}$
14 ⑤				

핵심 유형 202~204쪽

유형01 답 1

점 $(a,\ 3)$이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨진 점의 좌표는

$(a+2,\ 3-1)$ $\therefore (a+2,\ 2)$

이 점이 직선 $y=2x-4$ 위에 있으므로

$2=2(a+2)-4,\ 2a=2$ $\therefore a=1$

유형02 답 ④

직선 $y=3x+n-1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-3=3(x+1)+n-1$ $\therefore y=3x+n+5$

이 직선이 직선 $y=3x+9$와 일치하므로

$n+5=9$ $\therefore n=4$

유형03 답 ①

원 $(x-3)^2+(y-1)^2=9$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a-3)^2+(y-b-1)^2=9$ …… ㉠

한편 $x^2+y^2-4y+c=0$에서

$x^2+(y-2)^2=4-c$ …… ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$-a-3=0,\ -b-1=-2,\ 9=4-c$

$\therefore a=-3,\ b=1,\ c=-5$

$\therefore a+b+c=-7$

유형04 답 ②

$\mathrm{A}(1,\ -2),\ \mathrm{B}(-1,\ 2)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

유형05 답 ③

직선 $y=ax+1$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=-ax+1$ $\therefore y=ax-1$

이 직선이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2=a-1$ $\therefore a=3$

유형06 답 −5

원 $x^2+y^2-2ax+6y+a^2=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$y^2+x^2-2ay+6x+a^2=0$

$\therefore (x+3)^2+(y-a)^2=9$

이 원의 중심 $(-3,\ a)$가 직선 $2x-y+1=0$ 위에 있으므로

$-6-a+1=0$ $\therefore a=-5$

유형07 답 0

두 점 $(a,\ 2),\ (4,\ b)$를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(1,\ 2)$이므로

$\dfrac{a+4}{2}=1,\ \dfrac{2+b}{2}=2$ $\therefore a=-2,\ b=2$

$\therefore a+b=0$

유형08 답 ①

두 점 $(0,\ 4),\ (a,\ b)$를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{b+4}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=-2x-1$ 위에 있으므로

$\dfrac{b+4}{2}=-2\times\dfrac{a}{2}-1$

$\therefore 2a+b=-6$ …… ㉠

두 점 $(0,\ 4),\ (a,\ b)$를 지나는 직선과 직선 $y=-2x-1$이 수직이므로

$\dfrac{b-4}{a}\times(-2)=-1$

$\therefore a-2b=-8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4,\ b=2$

$\therefore ab=-8$

유형09 답 $3\sqrt{5}$

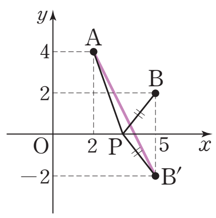
점 B$(5, 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라고 하면

B′$(5, -2)$

$\therefore \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}$

$\geq \overline{\mathrm{AB'}}$

$=\sqrt{3^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$



따라서 구하는 최솟값은 $3\sqrt{5}$이다.

유형10 답 ④

방정식 $f(-x, -y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 구하는 도형은 ④이다.

핵심 유형 완성하기 205~212쪽

001 답 ⑤

점 $(2, k)$가 주어진 평행이동에 의하여 옮겨진 점의 좌표는

$(2-4, k+3) \qquad \therefore (-2, k+3)$

이 점이 직선 $y=-x+6$ 위에 있으므로

$k+3=2+6 \qquad \therefore k=5$

002 답 ③

점 $(3, 1)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(3+a, 1+4) \qquad \therefore (a+3, 5)$

이 점이 점 $(6, b)$와 일치하므로

$a+3=6, 5=b \qquad \therefore a=3, b=5 \qquad \therefore ab=15$

003 답 P$(4, -3)$

점 P의 좌표를 (a, b)라고 하면 점 P를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a-3, b+2)$

이 점이 점 $(1, -1)$과 일치하므로

$a-3=1, b+2=-1 \qquad \therefore a=4, b=-3$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $(4, -3)$이다.

004 답 $(5, -7)$

점 $(-1, 2)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(3, -4)$라고 하면

$-1+m=3, 2+n=-4 \qquad \therefore m=4, n=-6$

따라서 점 $(1, -1)$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(1+4, -1-6) \qquad \therefore (5, -7)$

005 답 ④

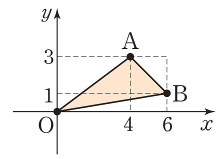
점 A$(4, 3)$이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨진 점의 좌표는

B$(4+2, 3-2) \qquad \therefore$ B$(6, 1)$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$6\times3-\left(\frac{1}{2}\times4\times3+\frac{1}{2}\times6\times1+\frac{1}{2}\times2\times2\right)$

$=7$



006 답 ②

직선 $y=-2x+k$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+3=-2(x-2)+k \qquad \therefore y=-2x+k+1$

이 직선이 직선 $y=-2x$와 일치하므로

$k+1=0 \qquad \therefore k=-1$

007 답 ③

직선 $y=2x+1$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-1=2(x+2)+1 \qquad \therefore y=2x+6$

따라서 이 직선의 y절편은 6이다.

008 답 ④

주어진 평행이동은 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 $-p$만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 직선 $y=4x+2$가 옮겨진 직선의 방정식은

$y+p=4(x-p)+2 \qquad \therefore y=4x-5p+2$

이 직선이 직선 $y=4x-8$과 일치하므로

$-5p+2=-8 \qquad \therefore p=2$

009 답 ②

직선 $2x+y-1=0$이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨진 직선의 방정식은

$2(x+1)+(y-4)-1=0 \qquad \therefore 2x+y-3=0$

따라서 $a=1$, $b=-3$이므로 $ab=-3$

010 답 ②

직선 $y=2x+3$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+2=2(x-1)+3 \qquad \therefore y=2x-1$

이 직선이 주어진 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(m, -3)$을 지나야 하므로 $-3=2m-1 \qquad \therefore m=-1$

011 답 ⑤

원 $(x-1)^2+(y+b)^2=4$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a-1)^2+(y-2+b)^2=4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

한편 $x^2+y^2+2x+c-1=0$에서

$(x+1)^2+y^2=2-c \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$-a-1=1, -2+b=0, 4=2-c$

$\therefore a=-2, b=2, c=-2 \qquad \therefore abc=8$

012 답 ⑤

포물선 $y=x^2+1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-2=(x+1)^2+1$ $\quad\therefore y=x^2+2x+4$

이 포물선이 점 $(3, p)$를 지나므로

$p=9+6+4=19$

013 답 0

$x^2+y^2-4x-2y-4=0$에서 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$

이 원을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a-2)^2+(y-b-1)^2=9$

이 원의 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r이므로

$-a-2=0,\ -b-1=0,\ 9=r^2$

$\therefore a=-2,\ b=-1,\ r=3\ (\because r>0)$

$\therefore a+b+r=0$

다른 풀이 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$의 중심의 좌표는 $(2, 1)$이므로 이 점이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨진 점의 좌표는

$(2+a,\ 1+b)$

이 점이 원점이므로

$2+a=0,\ 1+b=0$

$\therefore a=-2,\ b=-1$

한편 원의 반지름의 길이는 평행이동하여도 변하지 않으므로

$r=3$

$\therefore a+b+r=0$

014 답 −6

점 $(1, 3)$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(1+m,\ 3+n)$

이 점이 점 $(-1, 2)$와 일치하므로

$1+m=-1,\ 3+n=2$

$\therefore m=-2,\ n=-1$

즉, 포물선 $y=x^2+2x-1$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y+1=(x+2)^2+2(x+2)-1$

$y=x^2+6x+6$ $\quad\therefore y=(x+3)^2-3$

따라서 이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-3, -3)$이므로

$a=-3,\ b=-3$

$\therefore a+b=-6$

다른 풀이 포물선 $y=x^2+2x-1$, 즉 $y=(x+1)^2-2$의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, -2)$

이 점을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(-1-2,\ -2-1)$ $\quad\therefore (-3, -3)$

따라서 $a=-3$, $b=-3$이므로

$a+b=-6$

015 답 $\sqrt{26}$

$x^2+y^2-2x+6y+3=0$에서

$(x-1)^2+(y+3)^2=7$

이 원을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-m-1)^2+(y-n+3)^2=7$

이 원과 원 $x^2+y^2=7$이 일치하므로

$-m-1=0,\ -n+3=0$

$\therefore m=-1,\ n=3$

원 $x^2+y^2-4y-9=0$, 즉 $x^2+(y-2)^2=13$의 중심의 좌표는 $(0, 2)$이므로 이 점을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(0-1,\ 2+3)$ $\quad\therefore (-1, 5)$

따라서 $C(-1, 5)$이므로

$\overline{OC}=\sqrt{(-1)^2+5^2}=\sqrt{26}$

016 답 17

원 $(x-1)^2+y^2=10$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-1-1)^2+(y-n)^2=10$

$\therefore (x-2)^2+(y-n)^2=10$

이 원이 직선 $y=3x+1$에 접하려면 원의 중심 $(2, n)$과 직선 $3x-y+1=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{10}$과 같아야 하므로

$\dfrac{|6-n+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10},\ |n-7|=10$

$n-7=\pm10$ $\quad\therefore n=-3$ 또는 $n=17$

그런데 $n>0$이므로 $n=17$

017 답 ⑤

$P(3, -4)$, $Q(4, 3)$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{(-1)^2+7^2}=5\sqrt{2}$

018 답 ②

점 $(-2, 5)$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-5, 2)$

따라서 점 $(-5, 2)$와 직선 $3x-4y+3=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-15-8+3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=4$

019 답 ①

점 $(a+3, 4)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a-3,\ 4)$

이 점을 다시 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a+3,\ -4)$

이 점과 점 $(4, b)$가 일치하므로

$a+3=4,\ -4=b$ $\quad\therefore a=1,\ b=-4$

$\therefore ab=-4$

020 답 ④

점 $(a-2,\ -a)$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a-2-1,\ -a+2)$　　$\therefore\ (a-3,\ -a+2)$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a+3,\ a-2)$

이 점이 직선 $2x-y+4=0$ 위에 있으므로

$2(-a+3)-(a-2)+4=0$　　$\therefore\ a=4$

021 답 제3사분면

점 $(a,\ b)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a,\ -b)$

이 점이 제3사분면 위에 있으므로

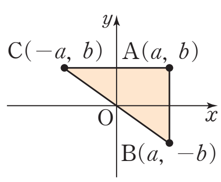
$a<0,\ -b<0$　　$\therefore\ a<0,\ b>0$

점 $(a-b,\ ab)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(ab,\ a-b)$

이때 $ab<0,\ a-b<0$이므로 이 점은 제3사분면 위에 있다.

022 답 8



$\mathrm{B}(a,\ -b)$, $\mathrm{C}(-a,\ b)$이고 삼각형 ABC의 넓이가 6이므로

$\frac{1}{2}\times2|a|\times2|b|=6$

$2|ab|=6$　　$\therefore\ |ab|=3$

따라서 점 A가 될 수 있는 점의 좌표는

$(1,\ 3)$, $(-1,\ 3)$, $(1,\ -3)$, $(-1,\ -3)$, $(3,\ 1)$, $(-3,\ 1)$, $(3,\ -1)$, $(-3,\ -1)$의 8개이다.

023 답 ④

직선 $ax+(2a-1)y+7=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-ax-(2a-1)y+7=0$

$\therefore\ ax+(2a-1)y-7=0$

이 직선이 점 $(-1,\ 3)$을 지나므로

$-a+3(2a-1)-7=0$

$-a+6a-3-7=0$　　$\therefore\ a=2$

024 답 ⑤

직선 $2x-y+5=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$2x+y+5=0$

이 직선과 점 $(3,\ 4)$ 사이의 거리는

$\frac{|6+4+5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{15}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$

025 답 ④

직선 $x+3y-5=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-x+3y-5=0$

이 직선을 다시 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y-3x-5=0$　　$\therefore\ 3x-y+5=0$

026 답 ②

직선 $y=2x+1$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=2x+1$　　$\therefore\ y=-2x-1$

이 직선을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-a=-2(x-3)-1$

$\therefore\ y=-2x+a+5$

이 직선을 다시 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=2x+a+5$

이 직선과 직선 $y=2x+1$이 일치하므로

$a+5=1$　　$\therefore\ a=-4$

027 답 ⑤

직선 $3x-2y+p=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$3y-2x+p=0$　　$\therefore\ 2x-3y-p=0$

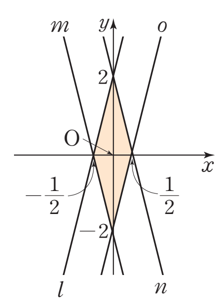
이 직선이 원 $(x-1)^2+(y+3)^2=13$에 접하므로 원의 중심 $(1,\ -3)$과 직선 $2x-3y-p=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{13}$과 같아야 한다.

$\frac{|2+9-p|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\sqrt{13}$, $|p-11|=13$

$p-11=\pm13$　　$\therefore\ p=-2$ 또는 $p=24$

그런데 $p>0$이므로 $p=24$

028 답 ①



직선 l: $y=4x+2$를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 각각

m: $y=-4x-2$

n: $y=-4x+2$

o: $y=4x-2$

따라서 오른쪽 그림과 같이 네 직선 l, m, n, o로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times1\times4=2$

029 답 -2

원 $x^2+y^2-2x+2ay-6=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$y^2+x^2-2y+2ax-6=0$

$\therefore\ (x+a)^2+(y-1)^2=a^2+7$

이 원의 중심의 좌표는

$(-a,\ 1)$　　…… ㉠

한편 $y=x^2-4x+5$에서

$y=(x-2)^2+1$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는

$(2,\ 1)$　　…… ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$-a=2$　　$\therefore\ a=-2$

030 답 ①

포물선 $y=x^2+3x-2$를 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=x^2-3x-2$

이 포물선이 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$a=1-3-2=-4$

031 답 7

원 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$를 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-2)^2+(-y+1)^2=9$

$\therefore\ (x-2)^2+(y-1)^2=9$

이 원을 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+4-2)^2+(y-3-1)^2=9$

$\therefore\ x^2+y^2+4x-8y+11=0$

따라서 $a=4$, $b=-8$, $c=11$이므로

$a+b+c=7$

032 답 ⑤

포물선 $y=x^2-2x-6$을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=x^2+2x-6$

$\therefore\ y=-x^2-2x+6$

이 포물선을 다시 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=-x^2+2x+6$

$\therefore\ y=-(x-1)^2+7$

따라서 이 포물선의 꼭짓점 $(1,\ 7)$이 직선 $y=4x+a$ 위에 있으므로

$7=4+a \qquad \therefore\ a=3$

033 답 ③

원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$y^2+x^2+2y-4x-4=0$

$\therefore\ (x-2)^2+(y+1)^2=9$

따라서 직선 $y=-3x+k$가 이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(2,\ -1)$을 지나야 하므로

$-1=-6+k$

$\therefore\ k=5$

034 답 ④

두 점 $(2a-1,\ -4)$, $(3,\ b+1)$을 이은 선분의 중점의 좌표가 $(4,\ -5)$이므로

$\dfrac{2a-1+3}{2}=4,\ \dfrac{-4+b+1}{2}=-5$

$\therefore\ a=3,\ b=-7$

$\therefore\ a+b=-4$

035 답 ④

$x^2+y^2-4x-6y+4=0$에서 $(x-2)^2+(y-3)^2=9$

이 원의 중심의 좌표는 $(2,\ 3)$

$x^2+y^2+8x+14y+56=0$에서 $(x+4)^2+(y+7)^2=9$

이 원의 중심의 좌표는 $(-4,\ -7)$

따라서 점 $(a,\ b)$는 두 점 $(2,\ 3)$, $(-4,\ -7)$을 이은 선분의 중점이므로

$a=\dfrac{2-4}{2}=-1,\ b=\dfrac{3-7}{2}=-2 \qquad \therefore\ a-b=1$

036 답 ⑤

원 $x^2+(y-2)^2=1$의 중심 $(0,\ 2)$를 점 $(3,\ 1)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(p,\ q)$라고 하면 두 점 $(0,\ 2)$, $(p,\ q)$를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(3,\ 1)$이므로

$\dfrac{p}{2}=3,\ \dfrac{2+q}{2}=1$

$\therefore\ p=6,\ q=0$

중심의 좌표가 $(6,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원의 방정식은

$(x-6)^2+y^2=1$

$\therefore\ x^2+y^2-12x+35=0$

따라서 $a=-12$, $b=0$, $c=35$이므로

$a+b+c=23$

037 답 ④

직선 $y=2x+3$ 위의 점 $(x,\ y)$를 점 $(-2,\ 4)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(x',\ y')$이라고 하면 두 점 $(x,\ y)$, $(x',\ y')$을 이은 선분의 중점의 좌표가 $(-2,\ 4)$이므로

$\dfrac{x+x'}{2}=-2,\ \dfrac{y+y'}{2}=4$

$\therefore\ x=-x'-4,\ y=-y'+8$

이를 $y=2x+3$에 대입하면

$-y'+8=2(-x'-4)+3$

$\therefore\ y'=2x'+13$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=2x+13$

038 답 ④

포물선 $y=x^2-2x+3$ 위의 점 $(x,\ y)$를 점 $(1,\ 6)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(x',\ y')$이라고 하면 두 점 $(x,\ y)$, $(x',\ y')$을 이은 선분의 중점의 좌표가 $(1,\ 6)$이므로

$\dfrac{x+x'}{2}=1,\ \dfrac{y+y'}{2}=6$

$\therefore\ x=-x'+2,\ y=-y'+12$

이를 $y=x^2-2x+3$에 대입하면

$-y'+12=(-x'+2)^2-2(-x'+2)+3$

$\therefore\ y'=-(x')^2+2x'+9$

즉, 구하는 직선의 방정식은

$y=-x^2+2x+9$

따라서 이 포물선이 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ 9)$이다.

039 답 ①

두 점 $(-3,\ 1)$, $(a,\ b)$를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{a-3}{2},\ \dfrac{b+1}{2}\right)$

이 점이 직선 $x-y-2=0$ 위에 있으므로

$\dfrac{a-3}{2}-\dfrac{b+1}{2}-2=0 \qquad \therefore a-b=8 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

두 점 $(-3,\ 1)$, $(a,\ b)$를 지나는 직선과 직선 $x-y-2=0$, 즉 $y=x-2$가 수직이므로

$\dfrac{b-1}{a+3}\times 1=-1 \qquad \therefore a+b=-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-5$

$\therefore ab=-15$

040 답 ⑤

두 점 $(-4,\ 2)$, $(b,\ 4)$를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{b-4}{2},\ \dfrac{2+4}{2}\right) \qquad \therefore \left(\dfrac{b-4}{2},\ 3\right)$

이 점이 직선 $y=-3x+a$ 위에 있으므로

$3=-3\times\dfrac{b-4}{2}+a \qquad \therefore 2a-3b=-6 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

두 점 $(-4,\ 2)$, $(b,\ 4)$를 지나는 직선과 직선 $y=-3x+a$가 수직이므로

$\dfrac{2}{b+4}\times(-3)=-1 \qquad \therefore b=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면 $a=0$

$\therefore a+b=2$

041 답 ①

원 $x^2+y^2=4$의 중심 $(0,\ 0)$과 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=c$의 중심 $(a,\ b)$를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=2x+5$ 위에 있으므로

$\dfrac{b}{2}=2\times\dfrac{a}{2}+5 \qquad \therefore 2a-b=-10 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

두 점 $(0,\ 0)$, $(a,\ b)$를 지나는 직선과 직선 $y=2x+5$가 수직이므로

$\dfrac{b}{a}\times 2=-1 \qquad \therefore a=-2b \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=2$

한편 원의 반지름의 길이는 대칭이동하여도 변하지 않으므로

$c=4$

$\therefore a+b+c=2$

042 답 ③

$x^2+y^2-2x+6y+9=0$에서

$(x-1)^2+(y+3)^2=1$

이 원의 중심의 좌표는 $(1,\ -3)$

$x^2+y^2-8x+15=0$에서

$(x-4)^2+y^2=1$

이 원의 중심의 좌표는 $(4,\ 0)$

두 점 $(1,\ -3)$, $(4,\ 0)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{1+4}{2},\ \dfrac{-3}{2}\right) \qquad \therefore \left(\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=mx+n$ 위에 있으므로

$-\dfrac{3}{2}=m\times\dfrac{5}{2}+n \qquad \therefore 5m+2n=-3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

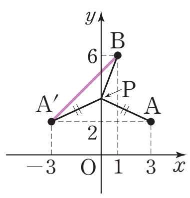
두 점 $(1,\ -3)$, $(4,\ 0)$을 지나는 직선과 직선 $y=mx+n$이 수직이므로

$\dfrac{3}{4-1}\times m=-1 \qquad \therefore m=-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면 $n=1$

$\therefore m+n=0$

043 답 ②



점 $\mathrm{A}(3,\ 2)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라고 하면 $\mathrm{A}'(-3,\ 2)$

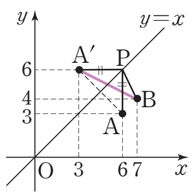
$\therefore \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}$

$\geq \overline{\mathrm{A'B}}$

$=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

따라서 구하는 최솟값은 $4\sqrt{2}$이다.

044 답 ④



점 $\mathrm{A}(6,\ 3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라고 하면 $\mathrm{A}'(3,\ 6)$

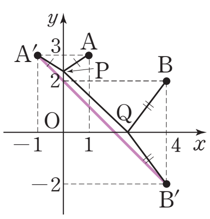
$\therefore \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}$

$\geq \overline{\mathrm{A'B}}$

$=\sqrt{4^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{5}$이다.

045 답 ⑤



점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라고 하면 $\mathrm{A}'(-1,\ 3)$

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라고 하면 $\mathrm{B}'(4,\ -2)$

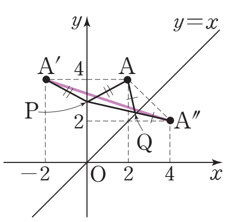
$\therefore \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB'}}$

$\geq \overline{\mathrm{A'B'}}$

$=\sqrt{5^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$

따라서 구하는 최솟값은 $5\sqrt{2}$이다.

046 답 $2\sqrt{10}$



점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라고 하면 $\mathrm{A}'(-2,\ 4)$

점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A''이라고 하면 $\mathrm{A}''(4,\ 2)$

삼각형 APQ의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA''}}$

$\geq \overline{\mathrm{A'A''}}$

$=\sqrt{6^2+(-2)^2}=2\sqrt{10}$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{10}$이다.

047 답 8

점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라고 하면

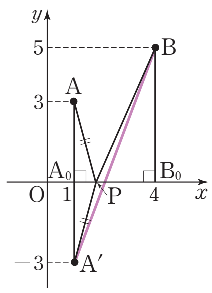
$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}\geq\overline{A'B}$

즉, $\overline{AP}+\overline{BP}$가 최소가 될 때, 점 P는 $\overline{A'B}$ 위에 있으므로

$\triangle A'PA_0 \backsim \triangle BPB_0$

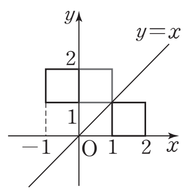
$\overline{A_0P}:\overline{B_0P}=\overline{A'A_0}:\overline{BB_0}=3:5$

따라서 $m=3$, $n=5$이므로 $m+n=8$



048 답 ⑤

방정식 $f(y,\ -x)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 구하는 도형은 ⑤이다.

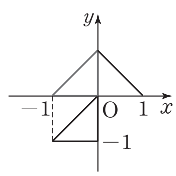


049 답 ④

방정식 $f(x+2,\ y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 구하는 도형은 ④이다.

050 답 ③

방정식 $f(-x,\ y+1)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 구하는 도형은 ③이다.



051 답 ③

ㄱ. 방정식 $f(x-1,\ y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 [그림 2]와 같다.

ㄴ. 방정식 $f(-x+1,\ -y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 [그림 2]와 같다.

ㄷ. 방정식 $f(y+1,\ x)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 [그림 2]와 같지 않다.

따라서 [그림 2]와 같은 도형을 나타내는 방정식은 ㄱ, ㄴ이다.

핵심 유형 최종 점검하기 · 213~214쪽

1 답 ⑤

유형 01 점의 평행이동

점 $(3,\ -2)$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(3-1,\ -2+a)$ $\quad\therefore (2,\ a-2)$

이 점이 점 $(b,\ 2)$와 일치하므로

$2=b,\ a-2=2$ $\quad\therefore a=4,\ b=2$ $\quad\therefore a+b=6$

2 답 1

유형 01 점의 평행이동

점 $(a,\ b)$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a+4,\ b+3)$ …… ㉠

점 $(c,\ d)$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(c-1,\ d-3)$ …… ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$a+4=c-1,\ b+3=d-3$ $\quad\therefore a-c=-5,\ b-d=-6$

$\therefore a-b-c+d=(a-c)-(b-d)=-5-(-6)=1$

3 답 ③

유형 02 직선의 평행이동

직선 $2x-y+1=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$2(x-m)-(y-1)+1=0$ $\quad\therefore 2x-y-2m+2=0$

이 직선이 원 $x^2+(y+1)^2=5$에 접하려면 원의 중심 $(0,\ -1)$과 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같아야 하므로

$\dfrac{|1-2m+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5},\ |2m-3|=5$

$2m-3=\pm5$ $\quad\therefore m=-1$ 또는 $m=4$

그런데 $m>0$이므로 $m=4$

4 답 $(3,\ -5)$

유형 03 원과 포물선의 평행이동

$x^2+y^2-2x+4y+4=0$에서 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$

이때 원점을 점 $(2,\ -3)$으로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하는 것이므로 평행이동한 원의 방정식은

$(x-2-1)^2+(y+3+2)^2=1$ $\quad\therefore (x-3)^2+(y+5)^2=1$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(3,\ -5)$이다.

다른 풀이 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$의 중심의 좌표는 $(1,\ -2)$

이 점이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨진 점의 좌표가 구하는 원의 중심의 좌표이므로

$(1+2,\ -2-3)$ $\quad\therefore (3,\ -5)$

5 답 $(0,\ 8)$

유형 03 원과 포물선의 평행이동

$y=x^2+2x+6a$에서 $y=(x+1)^2+6a-1$

이 포물선을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-3=(x-a+1)^2+6a-1$ $\quad\therefore y=(x-a+1)^2+6a+2$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(a-1,\ 6a+2)$이고 이 점이 y축 위에 있으므로 $a-1=0$ $\quad\therefore a=1$

따라서 구하는 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 8)$이다.

다른 풀이 포물선 $y=(x+1)^2+6a-1$의 꼭짓점의 좌표는
$(-1,\ 6a-1)$
이 점을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(-1+a,\ 6a-1+3)$ $\quad\therefore (a-1,\ 6a+2)$
이 점이 y축 위에 있으므로 $a-1=0$ $\quad\therefore a=1$
따라서 구하는 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 8)$이다.

6 답 $y=-x-4$

유형 04 점의 대칭이동

$\mathrm{P}(-1,\ -3)$, $\mathrm{Q}(-3,\ -1)$이므로 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$y+3=\dfrac{-1+3}{-3+1}(x+1)$ $\quad\therefore y=-x-4$

7 답 ③

유형 05 직선의 대칭이동

직선 $x+3y-1=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$x-3y-1=0$
이 직선을 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$y-3x-1=0$ $\quad\therefore y=3x+1$
이 직선이 점 $(2,\ p)$를 지나므로 $p=6+1=7$

8 답 ㄱ, ㄹ

유형 06 원과 포물선의 대칭이동

ㄱ. 직선 $y=-x$를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$-y=x$ $\quad\therefore y=-x$
ㄴ. 포물선 $y=x^2+1$을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
$-y=x^2+1$ $\quad\therefore y=-x^2-1$
ㄷ. 원 $x^2+y^2+4x=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$x^2+y^2-4x=0$
ㄹ. 도형 $|x+y|=4$를 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은
$|-x-y|=4$ $\quad\therefore |x+y|=4$
따라서 처음의 식과 일치하는 도형의 방정식은 ㄱ, ㄹ이다.

9 답 14

유형 06 원과 포물선의 대칭이동

포물선 $y=x^2-4x+2$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -9만큼 평행이동한 포물선의 방정식은
$y+9=(x-1)^2-4(x-1)+2$ $\quad\therefore y=x^2-6x-2$
이 포물선을 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
$y=x^2+6x-2$
이 포물선이 점 $(2,\ a)$을 지나므로 $a=4+12-2=14$

10 답 ③

유형 07 점에 대한 대칭이동

$\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점의 좌표가 $(3,\ -2)$이므로
$\dfrac{2+b}{2}=3,\ \dfrac{a-3}{2}=-2$ $\quad\therefore a=-1,\ b=4$
따라서 $\mathrm{P}(2,\ -1)$, $\mathrm{Q}(4,\ -3)$이므로
$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$

11 답 ①

유형 07 점에 대한 대칭이동

원 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$의 중심 $(1,\ 2)$를 점 $(-1,\ 5)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면 두 점 $(1,\ 2)$, $(a,\ b)$를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(-1,\ 5)$이므로
$\dfrac{1+a}{2}=-1,\ \dfrac{2+b}{2}=5$
$\therefore a=-3,\ b=8$
원의 중심의 좌표가 $(-3,\ 8)$이고 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은
$(x+3)^2+(y-8)^2=4$
따라서 이 원 위에 있는 점은 ① $(-3,\ 6)$이다.

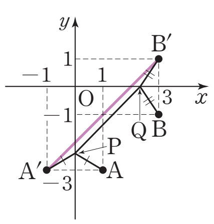
12 답 ①

유형 08 직선에 대한 대칭이동

두 점 $(-4,\ 2)$, $(12,\ -2)$를 이은 선분의 중점의 좌표는
$\left(\dfrac{-4+12}{2},\ \dfrac{2-2}{2}\right)$ $\quad\therefore (4,\ 0)$
이 점이 직선 $y=mx+n$ 위에 있으므로
$0=4m+n$ $\quad\therefore n=-4m$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
두 점 $(-4,\ 2)$, $(12,\ -2)$를 지나는 직선과 직선 $y=mx+n$이 수직이므로
$\dfrac{-2-2}{12+4}\times m=-1$ $\quad\therefore m=4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $n=-16$
$\therefore m+n=-12$

13 답 $4\sqrt{2}$

유형 09 대칭이동을 이용한 거리의 최솟값



점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라고 하면 $\mathrm{A'}(-1,\ -3)$
점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라고 하면 $\mathrm{B'}(3,\ 1)$
$\therefore \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB'}}$
$\geq \overline{\mathrm{A'B'}}$
$=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$
따라서 구하는 최솟값은 $4\sqrt{2}$이다.

14 답 ⑤

유형 10 그래프로 주어진 도형의 평행이동과 대칭이동

방정식 $f(y,\ x-1)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 구하는 도형은 ⑤이다.